Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «»

КАФЕДРА «»

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

НА ТЕМУ:
«Моделирование построения поверхностных и объемных геометрий с помощью операции движения»

2024 г.

ВВЕДЕНИЕ

Для моделирование построения поверхностных и объемных геометрий необходимо использовать методы геометрического моделирования.

Поэтому, прежде, чем мы приступим к описанию построения геометрий с помощью операции движения, рассмотрим основные методы построения поверхностей и кривых, а именно кривые и поверхности Безье, рациональные кривые и поверхности Безье и NURBS.

1 Кривые и поверхности

1.1 Способы описания кривых и поверхностей

Существует три основных подхода к описанию кривых и поверхностей.

1.1.1 Явный вид

Для кривой:

$$y = f(x), z = g(x)$$

Для поверхности:

$$z = f(x, y)$$

Этот метод имеет несколько недостатков:

- Нельзя однозначно описать замкнутые кривые, например, окружности.
- Полученное описание не обладает инвариантностью относительно поворотов.
- При попытке задать кривые с очень большими углами наклона возникают большие вычислительные сложности.

1.1.2 Неявные вид

$$f(x, y, z) = 0$$

Недостатки:

- Кривая в трёхмерном пространстве задаётся как пересечение двух поверхностей, т.е. требуется решать систему алгебраических уравнений.
- Сложности в процессе объединения неявно заданных фрагментов кривых

1.1.3 Параметрический вид

Параметрическое задание кривой и поверхности преодолевает недостатки явного и неявного способов описания. С его помощью можно задавать многозначные кривые, т.е. такие зависимости, которые могут принимать несколько значений при одном значении аргумента.

Для кривой:

$$\begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \\ a \le u \le b \end{cases} \tag{1.1}$$

и, также, будем пользоваться обозначением

$$\mathbf{C}(u) = (x(u), y(u)),\ a \le u \le b \tag{1.2}$$

Для поверхности:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \\ a \le u \le b \\ c \le v \le d \end{cases} \tag{1.3}$$

и, также, будем пользоваться обозначением

$$\mathbf{S}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),\ a \le u \le b,\ c \le v \le d \tag{1.4}$$

1.2 Кривые и поверхности Безье

1.2.1 Кривые Безье

Пусть заданы $n + 1$ точек $\mathbf{P}_i = (x_i,\ y_i,\ z_i)$, называемых контрольными точками. Они определяют форму и пространственное положение кривой.

Тогда кривую Безье n-ой степени можно задать с помощью уравнения:

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u)\mathbf{P}_i, \quad 0 \le u \le 1 \tag{1.5}$$

где $B_{i,n}$ - полиномы Бернштейна.

$$B_{i,n}(u) = C_n^i u^i (1 - u)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n - i)!} u^i (1 - u)^{n-i} \tag{1.6}$$

Для вычисления точек кривой Безье удобно использовать алгоритм де Кастельжо:

Листинг 1.1 – Псевдокод алгоритма де Кастельжо

```
deCasteljau(P, n, u, C)
{
    /*Вычисление точки на кривой Безье*/
    /*[in]: P, n, u*/
    /*[out]: C (точка)*/
    for(i=0; i<=n; i++) /* Используем локальный массив, */
        Q[i] = P[i]     /* чтобы не изменить исходный массив
           контрольных точек */
    for(k=1; k<=n; k++)
        for(i=0; i<=n-k; i++)
            Q[i] = (1.0-u)*Q[i] + u*Q[i+1]
    C = Q[0]
}
```

Например, на рисунке 1.1 показана кривая Безье для контрольных точек $P_1 = (0,\ 0)$, $P_2 = (0,\ 1)$, $P_3 = (1,\ 2)$, $P_4 = (3,\ 0)$.

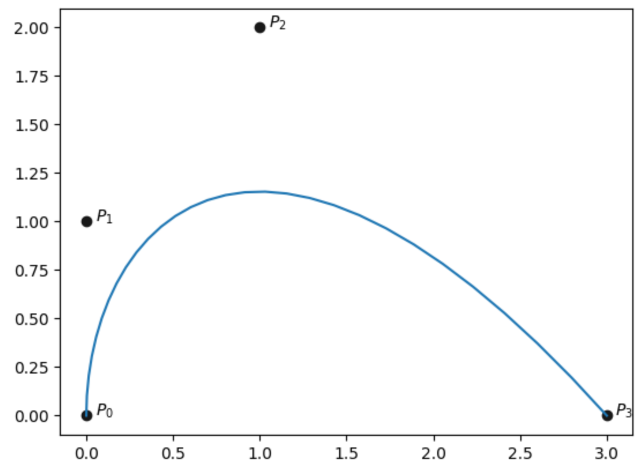

Рисунок 1.1 – Пример кривой Безье

1.2.2 Поверхности Безье

Пусть заданы контрольные точки $\mathbf{P}_{i,j}$, где $0 \leq i \leq n$ и $0 \leq j \leq m$. Тогда поверхность Безье можно задать с помощью следующего уравнения:

$$\mathbf{S}(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) P_{i,j}, \quad 0 \leq u, v \leq 1 \tag{1.7}$$

Аналогично кривым Безье, точки поверхности Безье можно находить с помощью алгоритма де Кастельжо из листинга 1.1.

Листинг 1.2 – Псевдокод алгоритма де Кастельжо для поверхности

```
deCasteljauForSurface(P, n, m, u0, v0, S)
{
    /*Вычисление точки на повехности Безье*/
    /*[in]: P, n, m, u0, v0*/
    /*[out]: S (точка)*/
    if (n <= m)
    {
        for(j=0; j<=m; j++) /* P[j][] - j-ая строка */
            deCasteljau(P[j][], n, u0, Q[j]);
        deCasteljau(Q, m, v0, S);
    }
    else
    {
        for(i=0; i<=n; i++)
            deCasteljau(P[][i], m, v0, Q[i]);
        deCasteljau(Q, n, u0, S);
    }
}
```

На рисунке 1.2 показан пример поверхности Безье для 15 контрольных точек.

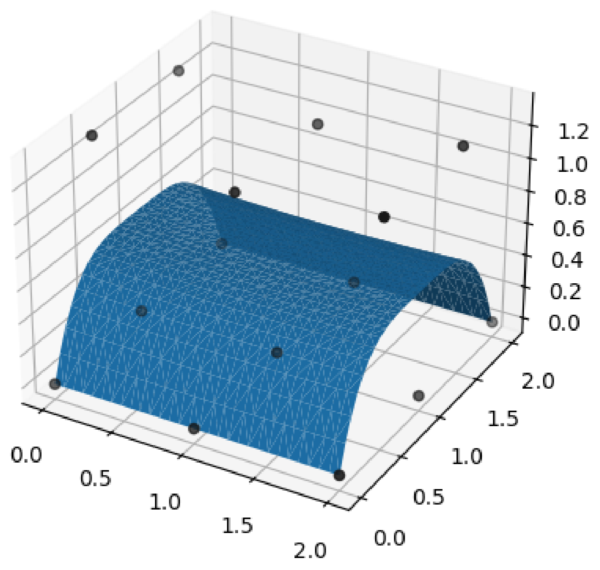

Рисунок 1.2 – Пример поверхности Безье