Ejemplos en Geometría de Poisson Computacional

Pablo Suárez Serrato,
Instituto de Matemáticas UNAM

.

Sistemas Hamiltonianos: Aplicaciones y Teoría

Diciembre 9, 2021

Siméon Denis Poisson

266 ANALYSE.

MÉMOIRE

Sur la Variation des Constantes arbitraires dans les questions de Mécanique,

Lu à l'Institut le 16 Octobre 1809;

Par M. POISSON.

ANALYSE. 281

constante a ni la constante b; dans d'autres cas elle ne contiendra aucune constante arbitraire, et se réduira à une constante déterminée; mais, afin de rappeler l'origine de cette quantité, qui représente une certaine combinaison des différences partielles des valeurs de a et b, nous ferons usage de cette notation (b, a), pour la désigner; de manière que nous aurons généralement

$$\frac{db}{ds}\cdot\frac{da}{d\varphi}-\frac{da}{ds}\cdot\frac{db}{d\varphi}+\frac{db}{du}\cdot\frac{da}{d\psi}-\frac{da}{du}\cdot\frac{db}{d\psi}+\frac{db}{dv}\cdot\frac{da}{d\theta}-\frac{da}{dv}\cdot\frac{db}{d\theta}=(b, a).$$

Sist. Hamiltonianos en $\mathbb{R}^{2n} = \{(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)\}$

Dado $H \in C^\infty_{\mathbb{R}^{2n}}$:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

- Defínase $\{,\} : C^\infty_{\mathbb{R}^{2n}} \times C^\infty_{\mathbb{R}^{2n}} \to C^\infty_{\mathbb{R}^{2n}}$ por

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}$$

- Entonces,

$$\dot{q}_i = \{H, q_i\}, \qquad \dot{p}_i = \{H, p_i\}$$

Corchete de Poisson $\{,\} : C^\infty_M \times C^\infty_M \longrightarrow C^\infty_M$

- $\mathbb{R}$-linealidad.
- Antisimetría: $\{f, g\} = -\{g, h\}$
- Identidad de Jacobi:

$$\{f, \{g, h\}\} \;=\; \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}$$

- Regla de Leibniz:

$$\{f, gh\} = g\,\{f, h\} + h\,\{f, g\}$$

Ejemplo

En $\mathbb{R}^3_x$, dada

$$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \psi(x) = \big(\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x)\big)^\top$$

- Se define

$$\{f, g\}_\psi = \langle \psi, \nabla f \times \nabla g \rangle$$

- *Identidad de Jacobi:*

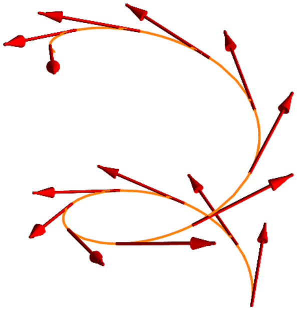
$$\langle \psi, \operatorname{rot} \psi \rangle = 0$$

Nota: $\{f, g\}_\psi = \nabla f^\top \Pi_\psi, \nabla g$, donde

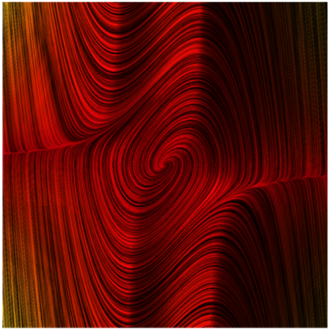
$$\Pi_\psi = \begin{pmatrix} 0 & \psi_3 & -\psi_2 \\ -\psi_3 & 0 & \psi_1 \\ \psi_2 & -\psi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Foliaciones Inducidas por Campos Vectoriales

- **Existencia y Unicidad**

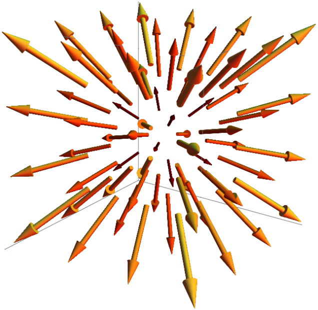


- **Foliación por Curvas Integrales**

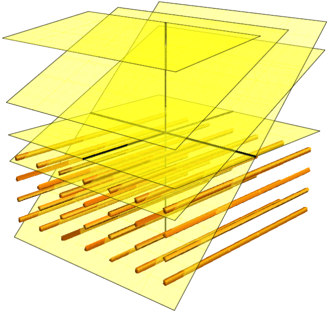


Campos Vectoriales vs Distribuciones

- **Campo Vectorial**

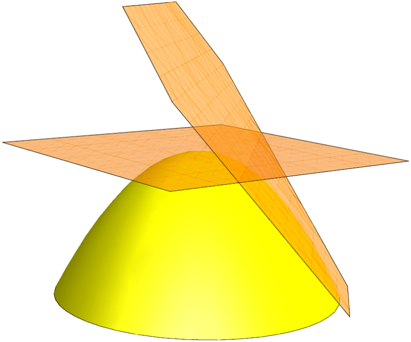


- **Distribución**

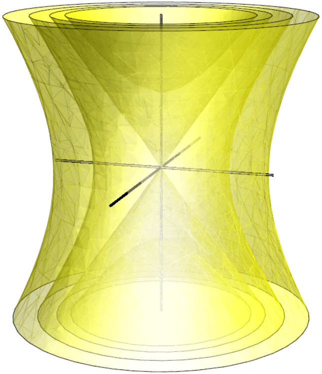


Foliaciones por Distribuciones Singulares

- **Stefan-Sussman**



- **Foliación por Variedades Integrales**



Estructura de Poisson $\leftrightarrow$ Foliación Simpléctica

Sea Π tensor de Poisson:

$$D^{\Pi} := \{\, X_f \,\big|\, f \in C^{\infty}_M \,\},$$

con $X_f(g) = \{f, g\}$.

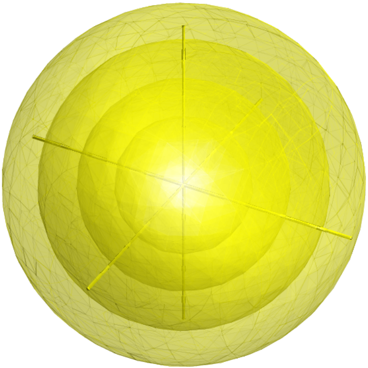
Afirmación:

$$D^{\Pi} \text{ es integrable.}$$

$$\downarrow$$

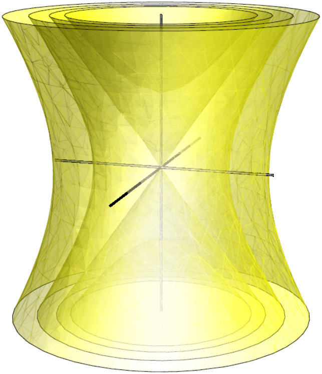
Foliación simpléctica.

Ejemplo : $\mathfrak{so}(3)$



- $\psi_1 = x_1, \quad \psi_2 = x_2, \quad \psi_3 = x_3$
- $\Pi_\psi = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}, \{f, g\}_\psi = \langle \psi, \nabla f \times \nabla g \rangle$

Ejemplo : $\mathfrak{sl}(2)$



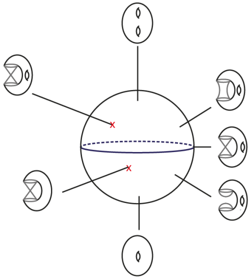
- $\psi_1 = x_1, \quad \psi_2 = x_2, \quad \psi_3 = -x_3$
- $\Pi_\psi = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & -x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}, \{f, g\}_\psi = \langle \psi, \nabla f \times \nabla g \rangle$

Ejemplos, 2D, 3D

- 2D: Toda superficie cerrada y orientable es simpléctica, por tanto de Poisson.
- 3D: Toda 3-variedad cerrada y orientable admite una foliación por superficies (Likorish, Novikov, Zieschang), una estructura de Poisson regular (Ibort-Torres) y una estructura de Poisson con singularidades Bott-Morse, conjunto singular círculos y puntos (Evangelista-TorresOrozco-S.-Vera).

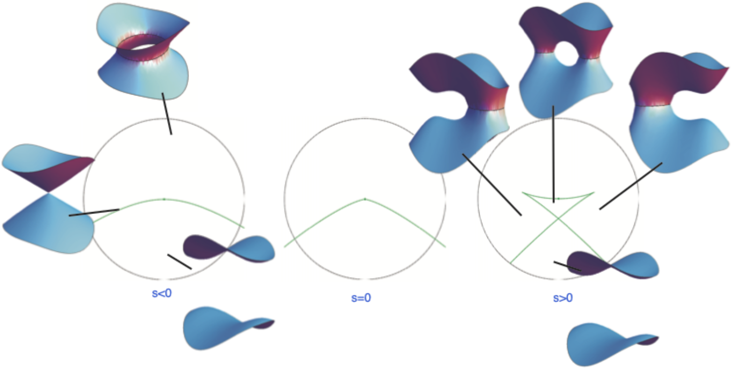
Ejemplos, 4D

- 4D: Toda 4-variedad lisa cerrada y orientable admite una una estructura de Poisson de rango genérico 2 con singularidades de Lefschetz quebradas (GarcíaNaranjo-S.-Vera)



Ejemplos, 4D

- 4D: Toda 4-variedad lisa cerrada y orientable admite una estructura de Poisson de rango genérico 2 con singularidades de corrugadas (S.-TorresOrozco).



Estructuras de Poisson

- Sistema Hamiltoniano:

$$\dot{x} = \{H, x\}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

- Campo Hamiltoniano:

$$X_h = \mathbf{i}_{\mathrm{d}h}\Pi$$

- Campo de Poisson:

$$\mathcal{L}_Z \Pi = 0.$$

Campo Modular

- (M, Π, Ω) variedad de Poisson Orientable:

$$\mathcal{L}_X \Omega = \operatorname{div}_\Omega X \cdot \Omega$$

- Campo Modular:

$$Z := h \longmapsto \operatorname{div}_\Omega X_h$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{L}_Z \Pi = 0 \qquad \text{y} \qquad Z^{f\,\Omega} = Z^{\Omega} - X_{\ln|f|}$$

Definición

Una variedad de Poisson orientable (M, Π) se dice unimodular si admite una forma de volumen invariante bajo el flujo de todo campo Hamiltoniano.

Bibliografía

- *Poisson structures on smooth 4-manifolds*, García-Naranjo, **S.**, Vera, Lett. Math. Physics, 105, No.11, (2015) 1533–550.
- *Poisson structures on wrinkled fibrations*, Torres Orozco, **S.**, Bull. Mexican Math. Soc., 22, No.1 (2016), 263–280.
- *On Bott-Morse Foliations and their Poisson Structures in Dimension 3*, Evangelista- Alvarado, **S.**, Torres Orozco, Vera, Jour. of Singularities, 19 (2019), 19–33.
- *On Computational Poisson Geometry I: Symbolic Foundations*, Evangelista-Alvarado, Ruíz-Pantaleón, **S.**, Jour. Geometric Mechanics 13(4), (2021) 607–628.
- *On Computational Poisson Geometry II: Numerical Methods*, Evangelista-Alvarado, Ruíz-Pantaleón, **S.**, Jour. Computational Dynamics 8(3) (2021) 273–307.