Eliminacja Gaussa-Jordana - Teoria Współbieżności

Piotr Świerzy

1) Definiujemy podstawowe zadania obliczeniowe

Aby pokazać na początku przykład to załóżmy, że macierz jest wielkości 3x3 (dla każdej macierzy 3x3 FNF będzie takie samo).

```
n = 3
```

Podstawowe zadania obliczeniowe:

- $A_{i,k}$ - mnożnik dla wiersza i do odejmowania go od wiersza k
- $B_{i,j,k}$ - pomnożenie j-tego elementu wiersza i przez mnożnik - do odejmowania od wiersza k
- $C_{i,j,k}$ - odjęcie j-tego elementu wiersza i od wiersza k

```
def Aiks(n):
    Aiks = []
    for i in range(1, n+1):
        for j in range(1, n+1):
            if i!=j:
                Aiks.append(["A", i, j])
    return Aiks
print(Aiks(n))

def Bijks(n):
    Bijks = []
    for i in range(1, n+1):
        for j in range(1, n+2):
            for k in range(1, n+1):
                if i!=k:
                    Bijks.append(["B", i, j, k])
    return Bijks
print(Bijks(n)[:5], "...")

def Cijks(n):
    Cijks = []
    for i in range(1, n+1):
        for j in range(1, n+2):
            for k in range(1, n+1):
                if i!=k:
                    Cijks.append(["C", i, j, k])
```

```
    return Cijks
print(Cijks(n)[:5], "...")
```

```
[['A', 1, 2], ['A', 1, 3], ['A', 2, 1], ['A', 2, 3], ['A', 3, 1],
['A', 3, 2]]
[['B', 1, 1, 2], ['B', 1, 1, 3], ['B', 1, 2, 2], ['B', 1, 2, 3], ['B',
1, 3, 2]] ...
[['C', 1, 1, 2], ['C', 1, 1, 3], ['C', 1, 2, 2], ['C', 1, 2, 3], ['C',
1, 3, 2]] ...
```

2) Indentyfikacja ciągu zadań obliczeniowych wykonywanych przez algorytm sekwencyjny (znalezienie słowa)

Co do kolejności mamy tylko kilka zasad:

- $B_{i,*,k}$ musi być po $A_{i,k}$
- $C_{i,j,k}$ musi być po $B_{i,j,k}$
- $A_{i,k}$ zrobimy po kolei korzystając ze standardowego algorytmu Gaussa-Jordana:
  - Wybieramy pivot (i) - po kolei od 1 do n
  - Zerujemy nim wszystkie inne wiersze (k) - te na górze i na dole
  - Przechodzimy do kolejnego pivota

```
def A_toString(list):
    return f"{list[0]}_{list[1]}_{list[2]}"
def BC_toString(list):
    return f"{list[0]}_{list[1]}_{list[2]}_{list[3]}"

def create_word(n):
    word = []
    for i in range(1, n+1):
        for k in range(1, n+1):
            if i != k:
                word.append(A_toString(["A", i, k]))

                for j in range(1, n + 2):
                    word.append(BC_toString(["B", i, j, k]))
                    word.append(BC_toString(["C", i, j, k]))
    return word

word = create_word(n)

print(word)
```

```
['A_1_2', 'B_1_1_2', 'C_1_1_2', 'B_1_2_2', 'C_1_2_2', 'B_1_3_2',
'C_1_3_2', 'B_1_4_2', 'C_1_4_2', 'A_1_3', 'B_1_1_3', 'C_1_1_3',
'B_1_2_3', 'C_1_2_3', 'B_1_3_3', 'C_1_3_3', 'B_1_4_3', 'C_1_4_3',
```

```
'A_2_1', 'B_2_1_1', 'C_2_1_1', 'B_2_2_1', 'C_2_2_1', 'B_2_3_1',
'C_2_3_1', 'B_2_4_1', 'C_2_4_1', 'A_2_3', 'B_2_1_3', 'C_2_1_3',
'B_2_2_3', 'C_2_2_3', 'B_2_3_3', 'C_2_3_3', 'B_2_4_3', 'C_2_4_3',
'A_3_1', 'B_3_1_1', 'C_3_1_1', 'B_3_2_1', 'C_3_2_1', 'B_3_3_1',
'C_3_3_1', 'B_3_4_1', 'C_3_4_1', 'A_3_2', 'B_3_1_2', 'C_3_1_2',
'B_3_2_2', 'C_3_2_2', 'B_3_3_2', 'C_3_3_2', 'B_3_4_2', 'C_3_4_2']
```

3. Identyfikacja alfabetu w sensie teorii śladów

Alfabet to zbiór wszystkich $A_{i,k}$, $B_{i,j,k}$ oraz $C_{i,j,k}$

$\Sigma = \{A_{i,k} | (i,k<n+1) \wedge (i \neq k)\} \cup \{B_{i,j,k}, C_{i,j,k} | (i,k<n+1) \wedge (j \leq n+1) \wedge (i \neq k)\}$

```
alphabet = Aiks(n)+Bijks(n)+Cijks(n)
print(alphabet[:5], "...")

[['A', 1, 2], ['A', 1, 3], ['A', 2, 1], ['A', 2, 3], ['A', 3, 1]] ...
```

4. Identyfikacja relacji zależności

Na początku tworzymy mape transakcji:

- $A_{i,k} : m_{k,i} = M_{k,i} / M_{i,i}$
- $B_{i,j,k} : n_{k,i,j} = M_{i,j} * m_{k,i}$
- $C_{i,j,k} : M_{k,j} = M_{k,j} - n_{k,i,j}$

```
def create_transactions(alphabet):
    transactions = {}
    for key in alphabet:
        if key[0] == 'A':
            i = key[1]
            k = key[2]
            transactions[A_toString(key)] = (f"m{k}{i}", set([f"m{k}
{i}", f"M{k}{i}", f"M{i}{i}"]))
        elif key[0] == 'B':
            i = key[1]
            j = key[2]
            k = key[3]
            transactions[BC_toString(key)] = (f"n{k}{i}{j}",
set([f"n{k}{i}{j}", f"M{i}{j}", f"m{k}{i}"]))
        else:
            i = key[1]
            j = key[2]
            k = key[3]
            transactions[BC_toString(key)] = (f"M{k}{j}", set([f"M{k}
{j}", f"n{k}{i}{j}"]))
    return transactions
```

```
transaction = create_transactions(alphabet)
for key, value in list(transaction.items())[:5]:
    print(f"{key}: {value}")
print("...")
```

```
A_1_2: ('m21', {'M11', 'M21', 'm21'})
A_1_3: ('m31', {'M31', 'M11', 'm31'})
A_2_1: ('m12', {'M22', 'm12', 'M12'})
A_2_3: ('m32', {'m32', 'M22', 'M32'})
A_3_1: ('m13', {'M13', 'M33', 'm13'})
...
```

```
def create_I_D(alphabet, transaction):
    I = set()
    D = set()

    for i in range(len(alphabet)):
        a = A_toString(alphabet[i]) if alphabet[i][0]=='A' else
BC_toString(alphabet[i])
        for j in range(i, len(alphabet)):
            b = A_toString(alphabet[j]) if alphabet[j][0]=='A' else
BC_toString(alphabet[j])
            (x, x_set) = transaction[a]
            (y, y_set) = transaction[b]

            if x in y_set or y in x_set:
                D.add((a, b))
                if a!=b: D.add((b, a))
            else:
                I.add((a, b))
                if a!=b: I.add((b, a))

    return I, D

I, D = create_I_D(alphabet, transaction)

print("I =", list(I)[:5], "...")
print("D =", list(D)[:5], "...")
```

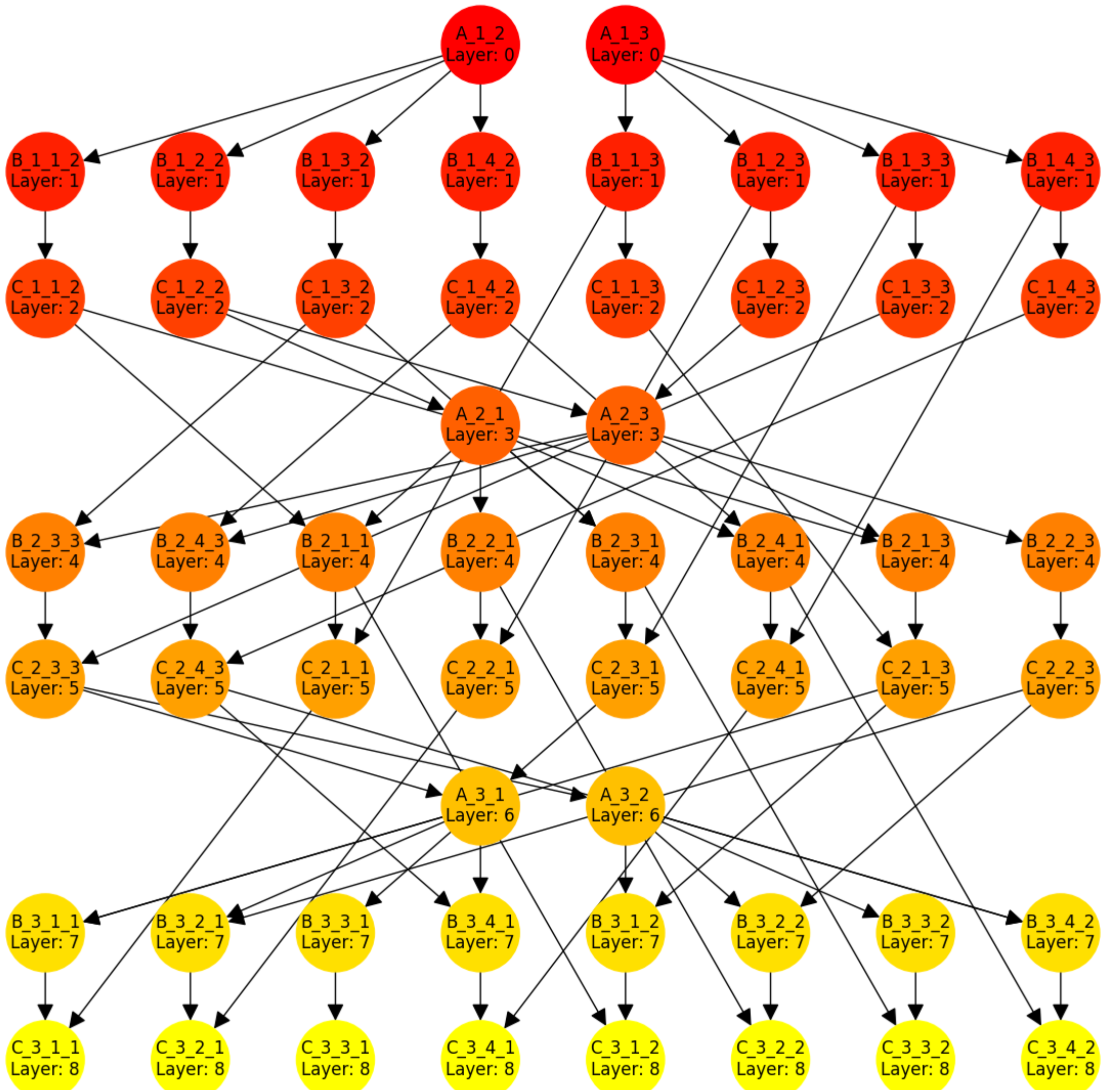
```
I = [('C_3_2_2', 'A_1_2'), ('B_1_2_3', 'B_3_1_2'), ('A_3_2',
'B_1_2_3'), ('B_1_3_2', 'B_3_3_2'), ('B_2_4_3', 'B_2_2_3')] ...
D = [('B_1_2_2', 'C_3_2_1'), ('C_3_3_1', 'B_1_3_3'), ('C_3_3_2',
'C_1_3_2'), ('B_1_3_3', 'A_1_3'), ('C_3_2_1', 'A_2_1')] ...
```

5. Wyznaczenie grafu Diekerta

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

class Node:
```

```
    def __init__(self, no, value):
        self.no = no
        self.value = value
        self.next = set()
        self.layer = 0

    def is_connected(self, no):
        if self.no >= no: return self.no == no

        for node in self.next:
            if node.is_connected(no):
                return True

        return False

    def add_next(self, node):
        self.next.add(node)
        node.update_layer(self.layer + 1)

    def update_layer(self, n):
        if n > self.layer:
            self.layer = n
            for node in self.next:
                node.update_layer(n+1)

def make_graph(word):

    graph = []
    for i in range(len(word)):
        node = Node(i, word[i])
        graph.append(node)

    for d in range(1, len(word)):
        for i in range(len(word)-d):
            fst_node: Node = graph[i]
            snd_node: Node = graph[i+d]

            if (fst_node.value, snd_node.value) in D:
                if not fst_node.is_connected(snd_node.no):
                    fst_node.add_next(snd_node)

    return graph

graph = make_graph(word)

def plot_graph(graph, tactic='layers'):

    G = nx.DiGraph()

    for node in graph:
```

```
        G.add_node(node.no, label=node.value, layer=node.layer)

    for node in graph:
        for nxt in node.next:
            G.add_edge(node.no, nxt.no)

    if tactic=='layers':
        pos = nx.multipartite_layout(G, subset_key="layer")

        for key, coords in pos.items():
            pos[key] = (coords[1], -coords[0])
    else:
        pos = nx.nx_pydot.graphviz_layout(G, prog='dot')

    layers = [nx.get_node_attributes(G, 'layer')[node] for node in
G.nodes()]

    plt.figure(figsize=(12,12))
    nx.draw(G, pos, with_labels=False, node_size=3000,
node_color=layers, cmap=plt.cm.autumn, arrowsize=25)

    labels = {node.no: f"{node.value}\nLayer: {node.layer}" for node
in graph}
    nx.draw_networkx_labels(G, pos, labels)
    plt.show()

plot_graph(graph)
```



Dla większego n graf jest nieczytelny, ale dla $n=3$ widać bardzo ładnie jak wyglądają klasy Foaty.

6. Obliczenie klas Foaty

```
def printFNF(graph, word):
    no_layers = 0
    for node in graph:
        no_layers = max(no_layers, node.layer)

    FNF = [[] for _ in range(no_layers+1)]

    for node in graph:
        FNF[node.layer].append(node.value)
```

```
    print(f"FNF([{word}]) = ", end="")
    for layer in FNF:
        print("(", end=" ")
        for a in layer:
            print(a, end=" ")
        print(")", end=" ")
    print()
    return FNF

FNF = printFNF(graph, word)
```

```
FNF([['A_1_2', 'B_1_1_2', 'C_1_1_2', 'B_1_2_2', 'C_1_2_2', 'B_1_3_2',
'C_1_3_2', 'B_1_4_2', 'C_1_4_2', 'A_1_3', 'B_1_1_3', 'C_1_1_3',
'B_1_2_3', 'C_1_2_3', 'B_1_3_3', 'C_1_3_3', 'B_1_4_3', 'C_1_4_3',
'A_2_1', 'B_2_1_1', 'C_2_1_1', 'B_2_2_1', 'C_2_2_1', 'B_2_3_1',
'C_2_3_1', 'B_2_4_1', 'C_2_4_1', 'A_2_3', 'B_2_1_3', 'C_2_1_3',
'B_2_2_3', 'C_2_2_3', 'B_2_3_3', 'C_2_3_3', 'B_2_4_3', 'C_2_4_3',
'A_3_1', 'B_3_1_1', 'C_3_1_1', 'B_3_2_1', 'C_3_2_1', 'B_3_3_1',
'C_3_3_1', 'B_3_4_1', 'C_3_4_1', 'A_3_2', 'B_3_1_2', 'C_3_1_2',
'B_3_2_2', 'C_3_2_2', 'B_3_3_2', 'C_3_3_2', 'B_3_4_2', 'C_3_4_2']]) =
( A_1_2 A_1_3 ) ( B_1_1_2 B_1_2_2 B_1_3_2 B_1_4_2 B_1_1_3 B_1_2_3
B_1_3_3 B_1_4_3 ) ( C_1_1_2 C_1_2_2 C_1_3_2 C_1_4_2 C_1_1_3 C_1_2_3
C_1_3_3 C_1_4_3 ) ( A_2_1 A_2_3 ) ( B_2_1_1 B_2_2_1 B_2_3_1 B_2_4_1
B_2_1_3 B_2_2_3 B_2_3_3 B_2_4_3 ) ( C_2_1_1 C_2_2_1 C_2_3_1 C_2_4_1
C_2_1_3 C_2_2_3 C_2_3_3 C_2_4_3 ) ( A_3_1 A_3_2 ) ( B_3_1_1 B_3_2_1
B_3_3_1 B_3_4_1 B_3_1_2 B_3_2_2 B_3_3_2 B_3_4_2 ) ( C_3_1_1 C_3_2_1
C_3_3_1 C_3_4_1 C_3_1_2 C_3_2_2 C_3_3_2 C_3_4_2 )
```

7) Konteks algorytmu i obliczenia na macierzy

```
class GaussJordanContext:
    def __init__(self, matrix):
        self.matrix = matrix
        self.N = len(matrix)
        self.m = {}
        self.n = {}

    def print_matrix(self):
        for row in self.matrix:
            print([f"{i}" for i in row])
        print()

    def final_normalization(self):
        for i in range(self.N):
            self.matrix[i][-1] /= self.matrix[i][i]
            self.matrix[i][i] = 1

    def run_task(self, task):
        parts = task.split("_")
```

```
        task_type = parts[0]

        if task_type == 'A':
            # liczenie mnożnika: A_i_k -> m_k_i = M_k_i / M_i_i

            i, k = int(parts[1]), int(parts[2])
            self.m[(k, i)] = self.matrix[k-1][i-1] / self.matrix[i-1]
[i-1]

        elif task_type == 'B':
            # wartość do odjęcia: B_i_j_k -> n_k_i_j = M_i_j * m_k_i

            i, j, k = int(parts[1]), int(parts[2]), int(parts[3])
            self.n[(k, i, j)] = self.matrix[i-1][j-1] * self.m[(k, i)]

        elif task_type == 'C':
            # odjęcie: C_i_j_K -> M_k_j = M_k_j - n_k_i_j

            i, j, k = int(parts[1]), int(parts[2]), int(parts[3])
            self.matrix[k-1][j-1] -= self.n[(k, i, j)]
            del self.n[(i, j, k)]
```

8. Scheduler dla klas Foaty

Scheduler opiera się na strukturze FNF, która dzieli algorytm na warstwy (klasy). Zgodnie z teorią śladów operacje w tej samej klasie są od siebie **niezależne**. Mechanizm działania można opisać w trzech krokach:

- Iteracja po warstwach
- Równoległe zlecenie zadań do puli (ThreadPoolExecutor)
- Bariera synchronizacyjna - czekamy aż wszystkie wątki z warstwy się zakończą przed przejściem do kolejnej

```
import concurrent.futures

def run_foata_scheduler(FNF, context):
    print("START ALGORYTMU RÓWNOLEGŁEGO...\n")

    with concurrent.futures.ThreadPoolExecutor(max_workers=20) as
executor:
        for i, layer in enumerate(FNF):
            print(f"---- WARSTWA {i} ({len(layer)} zadań) ----")
            futures = [executor.submit(context.run_task, task) for
task in layer]

            concurrent.futures.wait(futures)

            context.print_matrix()

    print("KONIEC OBLICZANIA!\n")
```

```
    print("Normalizacja wyników...\n")
    context.final_normalization()


def program(input_matrix):
    ctx = GaussJordanContext(input_matrix)
    print("Macierz wejściowa:")
    ctx.print_matrix()

    run_foata_scheduler(FNF, ctx)

    print("Macierz wynikowa: ")
    ctx.print_matrix()
    return ctx.matrix
```

9) Ładownanie plików z testera

```
import os
def load_matrix(file):

    current_dir = os.getcwd()
    path = os.path.join(current_dir, file)

    if not os.path.exists(path):
        raise FileNotFoundError(f"Nie znaleziono pliku: {path}")

    with open(path, 'r') as f:
        lines = f.readlines()

    lines = [line.strip() for line in lines]

    if not lines:
        raise ValueError("Plik jest pusty!")

    N = int(lines[0])
    matrix = []
    for line in lines[1:-1]:
        row = [float(x) for x in line.split()]
        matrix.append(row)

    last_line = lines[-1].split()
    for i in range(N):
        matrix[i].append(float(last_line[i]))

    return matrix
```

10) Testy

```
import math

def checker():
    in_file = "sprawdzarka/Matrices/unsolved.txt"
    out_file = "sprawdzarka/Matrices/solved.txt"

    matrix = program(load_matrix(in_file))
    check_matrix = load_matrix(out_file)

    print("Wymagana macierz: ")

    for row in check_matrix:
        print([f"{i}" for i in row])
    print()

    epsilon = 0.00001

    all_ok = True
    for i in range(len(matrix)):
        for j in range(len(matrix[i])):
            if not math.isclose(matrix[i][j], check_matrix[i][j],
abs_tol=epsilon):
                print(f"Różnica w wierszu {i}, kolumnie {j}:")
                print(f"   Wynik: {matrix[i][j]}")
                print(f"   Wzorzec: {check_matrix[i][j]}")
                all_ok = False
    assert(all_ok)

checker()
```

```
Macierz wejściowa:
['0.6168551130983446', '0.6771634073788637', '0.6094793631479308',
'0.28401553694472204']
['0.0', '-0.6083157527778055', '-0.3232922391542591',
'0.5356704016080333']
['0.0', '0.0', '-9.146933184267514e-06', '0.3934713827262214']

START ALGORYTMU RÓWNOLEGŁEGO...

---- WARSTWA 0 (2 zadań) ----
['0.6168551130983446', '0.6771634073788637', '0.6094793631479308',
'0.28401553694472204']
['0.0', '-0.6083157527778055', '-0.3232922391542591',
'0.5356704016080333']
['0.0', '0.0', '-9.146933184267514e-06', '0.3934713827262214']

---- WARSTWA 1 (8 zadań) ----
['0.6168551130983446', '0.6771634073788637', '0.6094793631479308',
'0.28401553694472204']
```

```
['0.0', '-0.6083157527778055', '-0.3232922391542591',
'0.5356704016080333']
['0.0', '0.0', '-9.146933184267514e-06', '0.3934713827262214']

---- WARSTWA 2 (8 zadań) ----
['0.6168551130983446', '0.6771634073788637', '0.6094793631479308',
'0.28401553694472204']
['0.0', '-0.6083157527778055', '-0.3232922391542591',
'0.5356704016080333']
['0.0', '0.0', '-9.146933184267514e-06', '0.3934713827262214']

---- WARSTWA 3 (2 zadań) ----
['0.6168551130983446', '0.6771634073788637', '0.6094793631479308',
'0.28401553694472204']
['0.0', '-0.6083157527778055', '-0.3232922391542591',
'0.5356704016080333']
['0.0', '0.0', '-9.146933184267514e-06', '0.3934713827262214']

---- WARSTWA 4 (8 zadań) ----
['0.6168551130983446', '0.6771634073788637', '0.6094793631479308',
'0.28401553694472204']
['0.0', '-0.6083157527778055', '-0.3232922391542591',
'0.5356704016080333']
['0.0', '0.0', '-9.146933184267514e-06', '0.3934713827262214']

---- WARSTWA 5 (8 zadań) ----
['0.6168551130983446', '0.0', '0.2495977173987301',
'0.8803117741019963']
['0.0', '-0.6083157527778055', '-0.3232922391542591',
'0.5356704016080333']
['0.0', '0.0', '-9.146933184267514e-06', '0.3934713827262214']

---- WARSTWA 6 (2 zadań) ----
['0.6168551130983446', '0.0', '0.2495977173987301',
'0.8803117741019963']
['0.0', '-0.6083157527778055', '-0.3232922391542591',
'0.5356704016080333']
['0.0', '0.0', '-9.146933184267514e-06', '0.3934713827262214']

---- WARSTWA 7 (8 zadań) ----
['0.6168551130983446', '0.0', '0.2495977173987301',
'0.8803117741019963']
['0.0', '-0.6083157527778055', '-0.3232922391542591',
'0.5356704016080333']
['0.0', '0.0', '-9.146933184267514e-06', '0.3934713827262214']

---- WARSTWA 8 (8 zadań) ----
['0.6168551130983446', '0.0', '-2.7755575615628914e-17',
'10737.764140673702']
['0.0', '-0.6083157527778055', '0.0', '-13906.447337135169']
```

```
['0.0', '0.0', '-9.146933184267514e-06', '0.3934713827262214']

KONIEC OBLICZANIA!

Normalizacja wyników...

Macierz wynikowa:
['1', '0.0', '-2.7755575615628914e-17', '17407.271031182634']
['0.0', '1', '0.0', '22860.574091058697']
['0.0', '0.0', '1', '-43016.75488380979']

Wymagana macierz:
['1.0', '0.0', '0.0', '17407.27103118263']
['0.0', '1.0', '0.0', '22860.574091058697']
['0.0', '0.0', '1.0', '-43016.75488380979']
```

Są drobne różnice w wynikach liczbowych między algorytmem, a oczekiwanym wynikiem. Wynika to z nieprzemienności operacji na floatch. Prowadzi to do kumulacji błędów zaokrągleń. Wynik jest poprawny matematycznie.

11) Inne testy

Żeby przetestować dla innych danych trzeba:

- utworzyć projekt maven w folderze `Matrices`
- uruchomić plik `Generator.java` z Program arguments: `n unsolved.txt solved.txt`, gdzie n to wielkość losowej macierzy
- uruchomić plik `checker.py`
- plik `checker.py` wymaga zainstalowania bibliotek: `matplotlib networkx`