Piotr Świerzy

05.03.2025

Laboratoria 01

Analiza błędów

Zadanie 1

Analiza błędów dla różnicy progresywnej

Opis kodu

Poniższy kod wykonuje analizę błędów dla obliczania pochodnej funkcji tangensu za pomocą metody różnicy progresywnej. Celem jest zrozumienie, jak zmieniają się błędy (w tym błąd obliczeniowy, błąd metody i błąd całkowity) w zależności od rozmiaru kroku *h*. Poniżej znajduje się szczegółowy opis poszczególnych elementów kodu.

Importowanie bibliotek i definicja wartości początkowych

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math

x = 1.0
tg_x = math.tan(x)
tg_x_prime = 1 + (tg_x)**2                              # f'(x)
tg_x_prime_2 = 2 * tg_x * (1 + tg_x**2)                 # f''(x)
tg_x_prime_3 = 2 * (1 + tg_x**2) * (1 + 3 * tg_x**2)    # f'''(x)

eps = np.finfo(float).eps                               # machine epsilon
h = np.array([10**(-k) for k in range(17)])
```

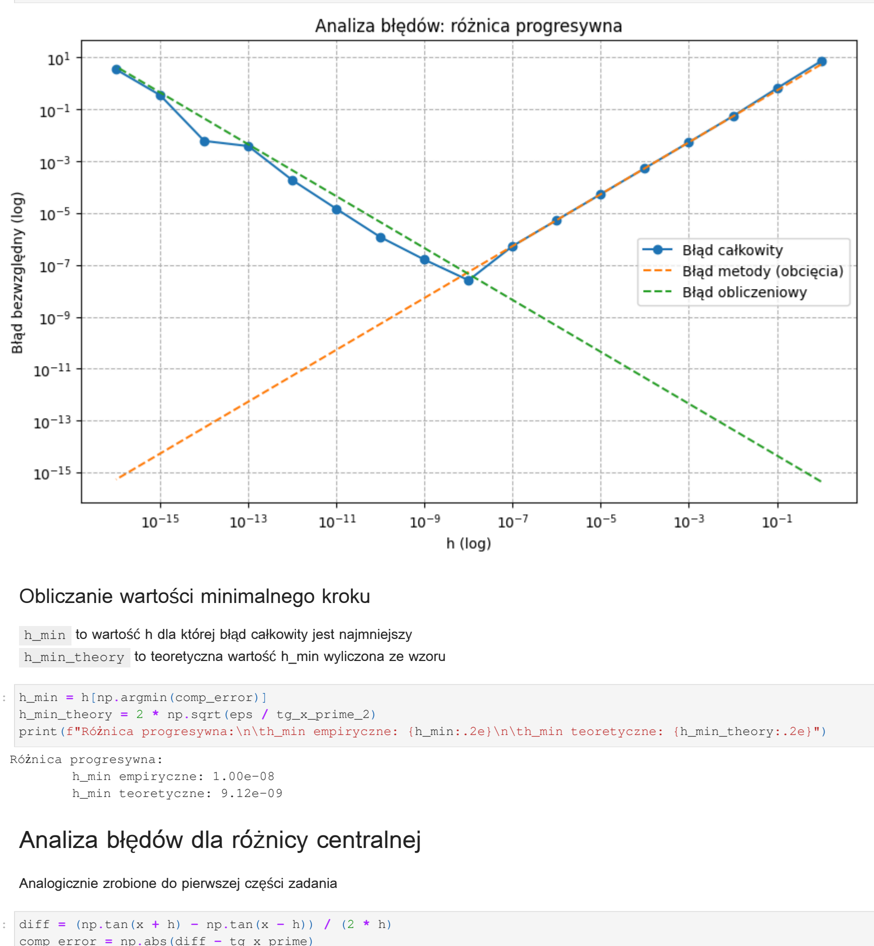
Obliczanie błędów

`diff` oblicza pochodną za pomocą metody różnicy progresywnej
`comp_error` to błąd całkowity, który jest różnicą między obliczoną wartością a dokładną wartością pochodnej
`trun_error` to błąd obcięcia, obliczany na podstawie drugiej pochodnej funkcji i kroku `h`
`num_error` to błąd numeryczny, który wynika z ograniczonej precyzji obliczeń numerycznych i zależy od epsilonu maszyny (eps) oraz kroku h.

```
diff = (np.tan(x + h) - np.tan(x)) / h
comp_error = np.abs(diff - tg_x_prime)
trun_error = h * tg_x_prime_2 / 2
num_error = 2 * eps / h
```

Tworzenie wykresu błędów

```
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.loglog(h, comp_error, 'o-', label='Błąd całkowity')
plt.loglog(h, trun_error, '--', label='Błąd metody (obcięcia)')
plt.loglog(h, num_error, '--', label='Błąd obliczeniowy')
plt.xlabel('h (log)')
plt.ylabel('Błąd bezwzględny (log)')
plt.title('Analiza błędów: różnica progresywna')
plt.legend()
plt.grid(True, which='both', linestyle='--')
plt.show()
```



Obliczanie wartości minimalnego kroku

`h_min` to wartość h dla której błąd całkowity jest najmniejszy
`h_min_theory` to teoretyczna wartość h_min wyliczona ze wzoru

```
h_min = h[np.argmin(comp_error)]
h_min_theory = 2 * np.sqrt(eps / tg_x_prime_2)
print(f"Różnica progresywna:\n\th_min empiryczne: {h_min:.2e}\n\th_min teoretyczne: {h_min_theory:.2e}")
```

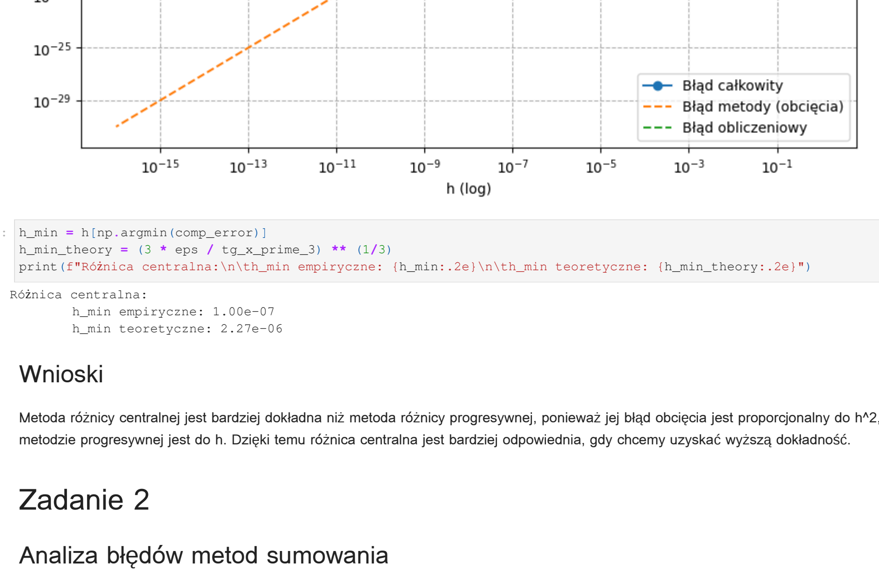
```
Różnica progresywna:
        h_min empiryczne: 1.00e-08
        h_min teoretyczne: 9.12e-09
```

Analiza błędów dla różnicy centralnej

Analogicznie zrobione do pierwszej części zadania

```
diff = (np.tan(x + h) - np.tan(x - h)) / (2 * h)
comp_error = np.abs(diff - tg_x_prime)
trun_error = tg_x_prime_3 * h ** 2 / 6
num_error = eps / h

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.loglog(h, comp_error, 'o-', label='Błąd całkowity')
plt.loglog(h, trun_error, '--', label='Błąd metody (obcięcia)')
plt.loglog(h, num_error, '--', label='Błąd obliczeniowy')
plt.xlabel('h (log)')
plt.ylabel('Błąd bezwzględny (log)')
plt.title('Analiza błędów: różnica centralna')
plt.legend()
plt.grid(True, which='both', linestyle='--')
plt.show()
```




```
h_min = h[np.argmin(comp_error)]
h_min_theory = (3 * eps / tg_x_prime_3) ** (1/3)
print(f"Różnica centralna:\n\th_min empiryczne: {h_min:.2e}\n\th_min teoretyczne: {h_min_theory:.2e}")
```

```
Różnica centralna:
        h_min empiryczne: 1.00e-07
        h_min teoretyczne: 2.27e-06
```

Wnioski

Metoda różnicy centralnej jest bardziej dokładna niż metoda różnicy progresywnej, ponieważ jej błąd obcięcia jest proporcjonalny do h^2, podczas gdy w metodzie progresywnej jest do h. Dzięki temu różnica centralna jest bardziej odpowiednia, gdy chcemy uzyskać wyższą dokładność.

Zadanie 2

Analiza błędów metod sumowania

Funkcje pomocnicze

```
def generate_numbers(n):
    return np.random.uniform(0, 1, n).astype(np.float32)

def true_sum_value(numbers):
    return math.fsum(numbers)
```

Suma z podwójną precyzją (a)

Funkcja sumująca liczby przy użyciu podwójnej precyzji (`float64`).

```
def sum_double_precision(numbers):
    acc = np.float64(0.0)
    for num in numbers:
        acc += np.float64(num)
    return acc
```

Suma z pojedyńczą precyzją (b)

Funkcja sumująca liczby przy użyciu pojedynczej precyzji (`float32`).

```
def sum_single_precision(numbers):
    acc = np.float32(0.0)
    for num in numbers:
        acc += np.float32(num)
    return acc
```

Algorytm Kahana (c)

Implementacja algorytmu Kahana, który redukuje błędy zaokrągleń w sumowaniu przez dodawanie korekty do każdego kroku obliczeniowego.

```
def sum_kahan_alg(numbers):
    acc = np.float32(0.0)
    err = np.float32(0.0)
    for num in numbers:
        y = num - err
        temp = acc + y
        err = (temp - acc) - y
        acc = temp
    return acc
```

Sumowanie rosnąco (d)

Funkcja sumująca liczby po ich posortowaniu w porządku rosnącym.

```
def sum_rising(numbers):
    return sum_single_precision(np.sort(numbers))
```

Sumowanie malejąco (e)

Funkcja sumująca liczby po ich posortowaniu w porządku malejącym.

```
def sum_falling(numbers):
    return sum_single_precision(np.flip(np.sort(numbers)))
```

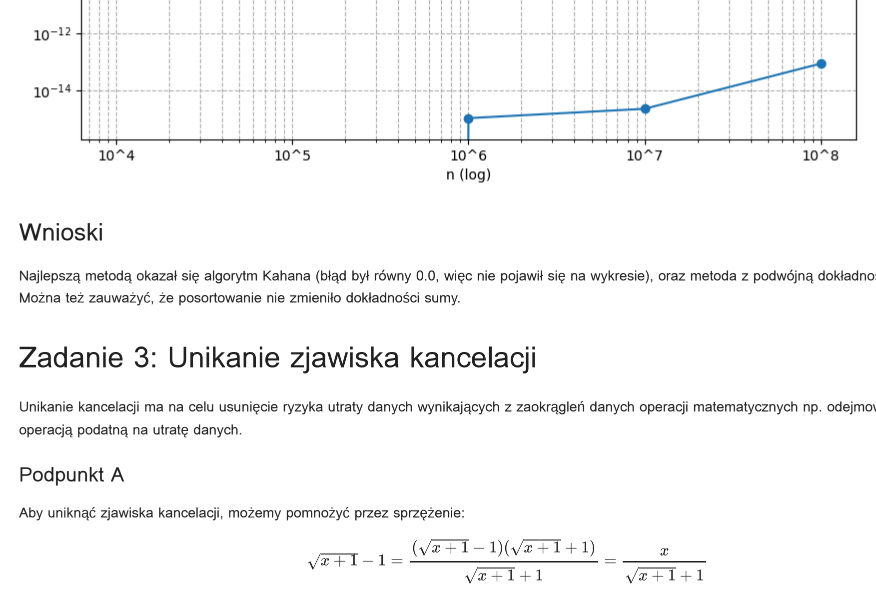
Reszta kodu i wizualizacja na wykresie

```
n_array = np.array([10 ** k for k in range(4,9)])
methods = ['a', 'b', 'c', 'd', 'e']
errors = {method: [] for method in methods}

for n in n_array:
    numbers = generate_numbers(n)
    true_sum = true_sum_value(numbers)

    errors['a'].append(abs(sum_double_precision(numbers) - true_sum) / true_sum)
    errors['b'].append(abs(sum_single_precision(numbers) - true_sum) / true_sum)
    errors['c'].append(abs(sum_kahan_alg(numbers) - true_sum) / true_sum)
    errors['d'].append(abs(sum_rising(numbers) - true_sum) / true_sum)
    errors['e'].append(abs(sum_falling(numbers) - true_sum) / true_sum)

plt.figure(figsize = (10, 6))
for method in methods:
    plt.loglog(n_array, errors[method], 'o-', label = f'Metoda {method}')
plt.xlabel('n (log)')
plt.ylabel('Błąd względny (log)')
plt.title('Porównanie błędów względnych metod sumowania')
plt.legend()
plt.grid(True, which='both', linestyle='--')
plt.xticks(n_array, [f'10^{k}' for k in range(4,9)])
plt.show()
```



Wnioski

Najlepszą metodą okazał się algorytm Kahana (błąd był równy 0.0, więc nie pojawił się na wykresie), oraz metoda z podwójną dokładnością (`float64`). Można też zauważyć, że posortowanie nie zmieniło dokładności sumy.

Zadanie 3: Unikanie zjawiska kancelacji

Unikanie kancelacji ma na celu usunięcie ryzyka utraty danych wynikających z zaokrągleń danych operacji matematycznych np. odejmowania które jest operacją podatną na utratę danych.

Podpunkt A

Aby uniknąć zjawiska kancelacji, możemy pomnożyć przez sprzężenie:

$$\sqrt{x+1}-1=\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}$$

W ten sposób otrzymujemy równanie, które zamiast korzystania z operacji odejmowania używa dzielenia, które jest stabliniejsze.

Podpunkt B

Rozkładamy na iloczyn:

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$$

Zamiast odejmowania dużych liczb, operujemy na ich różnicy. W ten sposób dla bardzo bliskich sobie liczb x ~ y wykorzystujemy iloczyn z pojedyńczą operacją odejmowania.

Podpunkt C

Mnożymy przez sprzężenie:

$$1-\cos x=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}=\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$$

Dzięki temu unikamy bezpośredniego odejmowania wartości bliskich sobie, co mogłoby prowadzić do utraty precyzji.

Podpunkt D

Korzystamy z tożsamości trygonometrycznej:

$$\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$$

Użycie pojedyńczej funkcji trygonometrycznej jest dokładniejsze niż korzystając z różnicy cos^2(x) - sin^2(x).

Podpunkt E

Przekształcamy:

$$\ln x-1=\ln\frac{x}{e}$$

Dla podpunktu E, możemy przybliżyć wartość lx(x) - 1 zamieniając 1 w ln(e) i sprowadzając do pojedyńczego logarytmu. W ten sposób unikamy odejmowania które jest dużo mniej stabline niż dzielenie.

Podpunkt F

Rozwijamy w szereg Taylora:

$$e^x-e^{-x}=2x+\frac{2x^3}{3!}+\mathcal{O}(x^5)$$

Dla małych (x) najlepszym przybliżeniem jest:

$$e^x-e^{-x}\approx 2x$$

To rozwinięcie pozwala uniknąć odejmowania niemal równych liczb i , co mogłoby prowadzić do znacznej utraty precyzji w pobliżu zera.

Zadanie 4: Analiza niepewności sprawności kolektorów

Efektywność η kolektora słonecznego dana jest wzorem:

$$\eta=K\frac{QT_d}{I}$$

Zmienna K jest stałą, więc jej błąd nie wpływa na niepewność względną η. Błąd względny η obliczamy jako:

$$\Delta\eta=\sqrt{(\Delta Q)^2+(\Delta T_d)^2+(\Delta I)^2}$$

Obliczenia dla kolektora S1:

$$\Delta\eta_{S1}=\sqrt{(1.5\%)^2+(1.0\%)^2+(3.6\%)^2}=\sqrt{0.000225+0.0001+0.001296}=\sqrt{0.001621}\approx 3.6\%$$

$$\eta_{S1}=0.76\pm 0.027$$

Zakres możliwych wartości: (0.76 - 0.027 = 0.733) do (0.76 + 0.027 = 0.787).

Obliczenia dla kolektora S2:

$$\Delta\eta_{S2}=\sqrt{(0.5\%)^2+(1.0\%)^2+(2.0\%)^2}=\sqrt{0.0025+0.0001+0.0004}=\sqrt{0.003}\approx 5.48\%$$

$$\eta_{S2}=0.70\pm 0.038$$

Zakres możliwych wartości: (0.70 - 0.038 = 0.662) do (0.70 + 0.038 = 0.738).

Czy S1 ma większą sprawność niż S2?

Ponieważ zakresy wartości η się nakładają

```
zakres S1 = (0.733 - 0.787)
zakres S2 = (0.662 - 0.738)
```

nie możemy stwierdzić z pewnością, że S1 jest bardziej efektywny niż S2.