Resolución

1.

$$F(x) = \int_0^x \lambda t^{\lambda-1} dt =$$
$$\lambda \int_0^x t^{\lambda-1} dt =$$
$$\lambda[\frac{t^\lambda}{\lambda}]_0^x =$$
$$\lambda\frac{x^\lambda}{\lambda} =$$
$$x^\lambda$$

2.

La mediana será el punto que acumule el 50% de probabilidad. Por lo tanto:
$x^\lambda = 0,5$
$x = \sqrt[\lambda]{0,5}$

3.

$$E(X) = \int_0^1 x\lambda x^{\lambda-1} dx =$$
$$\lambda \int_0^1 x^\lambda dx =$$
$$\lambda[\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}]_0^1 =$$
$$\lambda\frac{1^{\lambda+1}}{\lambda+1}$$
$$\frac{\lambda}{\lambda+1}$$

4.

Igualamos el momento poblacional al muestral:

$$\frac{\lambda}{\lambda+1} = \bar{X}$$
$$\lambda = \bar{X}(\lambda+1)$$
$$\lambda = \bar{X}\lambda + \bar{X}$$
$$\lambda - \bar{X}\lambda = \bar{X}$$
$$\lambda(1-\bar{X}) = \bar{X}$$
$$\lambda = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$$

Por lo tanto:

$$\hat{\lambda} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$$

5.

A partir de nuestra muestra obtenemos la función de verosimilitud:

$$L(\lambda) = \lambda^n \cdot (\prod_1^n x_i)^{\lambda-1}$$

Empleo la función de log-verosimilitud:

$$l(\lambda) = \ln[\lambda^n \cdot (\prod_1^n x_i)^{\lambda-1}] =$$

$$n\ln(\lambda) + (\lambda-1)\sum_1^n \ln(x_i)$$

Localizamos el máximo de dicha función (máxima verosimilitud)

$$l'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} + \sum_1^n \ln x_i$$

$$\frac{n}{\lambda} + \sum_1^n \ln x_i = 0$$
$$\frac{n}{\lambda} = -\sum_1^n \ln(x_i)$$
$$\lambda = -\frac{n}{\sum_1^n \ln(x_i)}$$

$l''(\lambda) = -\frac{n}{\lambda^2}$; signo -

Encontramos un máximo en $\lambda = -\dfrac{n}{\sum_1^n \ln(x_i)}$, por lo que $\hat{\lambda} = -\dfrac{n}{\sum_1^n \ln(x_i)}$