

Nombre: Alberto Juliana Quirós

Fecha de entrega: 5 de marzo

---

EJERCICIO 1. Sea  $x \in (0, 1)$  una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = 30x^4(1-x)$$

Utilizando cálculo matemático:

1. Demuestre que el valor esperado de  $X$  es  $5/7$ .
2. Obtenga la moda de la distribución.
3. La función de distribución,  $F(x)$ .

Si tomásemos una muestra aleatoria simple de tamaño  $n = 25$  y sabiendo que  $\sigma^2 = 5/196$  :

4. Obtenga el valor esperado y la varianza de  $\bar{X}$ .
5. ¿Cuál sería la puntuación típica asociada a la puntuación directa  $\bar{X} = 0,7$ .

Utilizando R:

6. Obtenga el valor esperado y varianza de  $X$ .
7. La probabilidad de que  $X$  esté entre 0,2 y 0,8.
8. Represente gráficamente  $f(x)$  y  $F(x)$ .
9. Obtenga la moda de  $f(x)$  mediante optimización numérica.
10. Calcule la probabilidad de encontrar un valor de  $\bar{X}$  superior a 0,7 si  $n = 25$ .

Resolución

1.

Obtenemos la suma ponderada de cada valor de  $x$ :

$$f(x) = 30x^4(1 - x)$$

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot 30x^4(1 - x)dx =$$

$$\int_0^1 x \cdot 30x^4(1 - x)dx =$$

$$\int_0^1 (30x^5 - 30x^6) dx =$$

$$30 \int_0^1 x^5 dx - 30 \int_0^1 x^6 dx =$$

$$30 \frac{x^6}{6} - 30 \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 =$$

$$5x^6 - 30 \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 =$$

$$\frac{5}{7}$$

2.

La moda será el valor máximo absoluto de  $f(x)$ :

$$f(x) = 30x^4 - 30x^5$$

$$f'(x) = 120x^3 - 150x^4$$

$$120x^3 - 150x^4 = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{4}{5}$$

$$f''(x) = 360x^2 - 600x^3$$

$$f''(0) = 0$$

$$f''\left(\frac{4}{5}\right) = -76,8$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función de densidad, localizamos

un máximo en  $x = \frac{4}{5}$ , que es la moda de la distribución.

3.

Empleamos la función integral, que toma límite superior variable

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x 30x^4(1-x)dx = \\ &= \int_0^x (30x^4 - 30x^5) dx = \\ &= 30 \int_0^x x^4 dx - 30 \int_0^x x^5 dx = \\ &= 30 \frac{x^5}{5} - 30 \frac{x^6}{6} = \\ &= 6x^5 - 5x^6 \Big|_0^x = \\ &= 6x^5 - 5x^6 \end{aligned}$$

4.

Dado que  $n = 25$ , aplicamos el teorema central del límite:

$$E(X) = E(\bar{X}) = \frac{5}{7}$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\frac{5}{196}}{25} = \frac{1}{980}$$

5.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \\ &= \frac{0,7 - \frac{5}{7}}{\sqrt{(\frac{5}{196})}/\sqrt{25}} = \\ &= -0,447 \end{aligned}$$

6.

```
## E(X)
xfx <- function(x) {x * 30*x^4*(1-x)}
Ex <- integrate(xfx, lower = 0, upper = 1)
print(Ex)

## 0.7142857 with absolute error < 7.9e-15

## Momento de orden 2
x2fx <- function(x) {x^2 * 30*x^4*(1-x)}
Ex2 <- integrate(x2fx, lower = 0, upper = 1)
print(Ex2)

## 0.5357143 with absolute error < 5.9e-15

## Var(X)
Varx <- Ex2$value-Ex$value^2
print(Varx)

## [1] 0.0255102
```

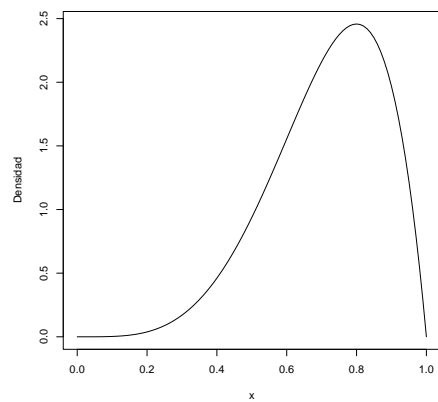
7.

```
fx <- function(x) {30*x^4*(1-x)}
res <- integrate(fx, lower = 0.2, upper = 0.8)
print(res)

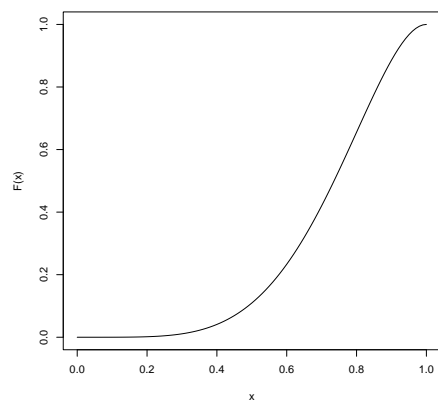
## 0.65376 with absolute error < 7.3e-15
```

8.

```
## f(x)
plot(fx, ylab = "Densidad")
```



```
## F(x)
acum <- function(x) {6*x^5 - 5*x^6}
plot(acum,ylab = "F(x)")
```



9.

```
fit <- optimize(fx, c(0, 1), maximum=TRUE)
print(fit$maximum)

## [1] 0.7999805
```

10.

```
## Empleando TCL:  
mean_xbar <- 5/7  
sd_xbar <- sqrt((5/196)/25)  
pnorm(0.7,mean_xbar,sd_xbar,lower.tail = FALSE )  
  
## [1] 0.6726396
```