

Resolución

1.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \lambda t^{\lambda-1} dt = \\ \lambda \int_0^x t^{\lambda-1} dt &= \\ \lambda \left[\frac{t^\lambda}{\lambda} \right]_0^x &= \\ \lambda \frac{x^\lambda}{\lambda} &= \\ x^\lambda \end{aligned}$$

2.

La mediana será el punto que acumule el 50% de probabilidad. Por lo tanto:

$$x^\lambda = 0,5$$

$$x = \sqrt[\lambda]{0,5}$$

3.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x \lambda x^{\lambda-1} dx = \\ \lambda \int_0^1 x^\lambda dx &= \\ \lambda \left[\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} \right]_0^1 &= \\ \lambda \frac{1^{\lambda+1}}{\lambda+1} &= \\ \frac{\lambda}{\lambda+1} \end{aligned}$$

4.

Igualamos el momento poblacional al muestral:

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{\lambda + 1} &= \bar{X} \\
\lambda &= \bar{X}(\lambda + 1) \\
\lambda &= \bar{X}\lambda + \bar{X} \\
\lambda - \bar{X}\lambda &= \bar{X} \\
\lambda(1 - \bar{X}) &= \bar{X} \\
\lambda &= \frac{\bar{X}}{1 - \bar{X}} \\
\text{Por lo tanto:} \\
\hat{\lambda} &= \frac{\bar{X}}{1 - \bar{X}}
\end{aligned}$$

5.

A partir de nuestra muestra obtenemos la función de verosimilitud:

$$L(\lambda) = \lambda^n \cdot \left(\prod_1^n x_i \right)^{\lambda-1}$$

Empleo la función de log-verosimilitud:

$$\begin{aligned}
l(\lambda) &= \ln[\lambda^n \cdot \left(\prod_1^n x_i \right)^{\lambda-1}] = \\
&= n \ln(\lambda) + (\lambda - 1) \sum_1^n \ln(x_i)
\end{aligned}$$

Localizamos el máximo de dicha función (máxima verosimilitud)

$$l'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} + \sum_1^n \ln x_i$$

$$\frac{n}{\lambda} + \sum_1^n \ln x_i = 0$$

$$\frac{n}{\lambda} = - \sum_1^n \ln(x_i)$$

$$\lambda = - \frac{n}{\sum_1^n \ln(x_i)}$$

$$l''(\lambda) = -\frac{n}{\lambda^2}; \quad \text{signo -}$$

Encontramos un máximo en $\lambda = -\frac{n}{\sum_1^n \ln(x_i)}$, por lo que $\hat{\lambda} = -\frac{n}{\sum_1^n \ln(x_i)}$

6.

Extraemos la cantidad de información que proporciona la muestra:

$$I(\lambda) = -(l''(\lambda)) = \frac{n}{\lambda^2}$$

Calculamos la Varianza

$$Var(\lambda) = \frac{1}{I(\lambda)} = \frac{\lambda^2}{n}$$