Resolución

1.

Obtenemos la función de verosimilitud:

$$L(\alpha) = \alpha^n \cdot \prod_1^n (1+x_i)^{1-\alpha}$$

Empleo la función de log-verosimilitud:

$$l(\alpha) = ln[\alpha^n \cdot \prod_1^n (1+x_i)^{1-\alpha}] =$$

$$n\ln(\alpha) + (1-\alpha)\sum_1^n [\ln(1+x_i)]$$

Localizamos el máximo de dicha función (máxima verosimilitud)

$$l'(\alpha) = \frac{n}{\alpha} - 1 \cdot \sum_1^n [\ln(1+x_i)] =$$

sustituyendo por nuestra muestra:

$$= \frac{10}{\alpha} - 3,6$$

$$\frac{10}{\alpha} - 3,6 = 0$$

$$\alpha = 2,78$$

$$l''(\alpha) = -\frac{10}{\alpha^2}; \quad \text{signo -}$$

Encontramos un máximo en $\alpha = 2,78$, por lo que $\hat{\alpha} = 2,78$

2.

Extraemos la cantidad de información que proporciona la muestra:

$$I(\alpha) = -(l''(\alpha)) = \frac{10}{\alpha^2}$$

Calculamos la Varianza:

$$Var(\alpha) = \frac{1}{I(\alpha)} = \frac{\alpha^2}{10} = \frac{2,78^2}{10} = 0,77$$

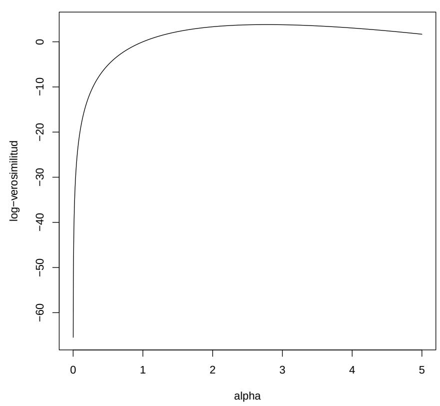
por lo tanto:

$$\sigma_{\hat{\alpha}} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{10}} = \frac{\alpha}{\sqrt{10}} =$$

$$\frac{2,78}{\sqrt{10}} = 0,88$$

3.

```
x <- c(0.36, 0.11, 0.02, 0.05, 0.24, 0.32, 0.08, 2.72, 0.84,
    0.88)
n <- length(x)
alpha <- seq(0, 5, by = 0.001)
log_l <- function(alpha) (n * log(alpha) + (1 - alpha) * sum(log(1 +
    x)))
plot(main = "", alpha, log_l(alpha), xlim = c(0, 5), xlab = "alpha",
    ylab = "log-verosimilitud", type = "l")
```



4.

```
lMax <- optimize(log_l, c(0, 5), maximum=TRUE)
print(lMax, digits=3)

## $maximum
```

```
## [1] 2.77
##
## $objective
## [1] 3.81
```

5.

```
fit <- optim(1, f=log_l, method="Brent", lower=0, upper=10, control=list(fnscale=-1),
                                                  hessian=TRUE)
var_alpha <- -1/fit$hessian
print(var_alpha)

##           [,1]
## [1,] 0.7695074
```

6.

```
alpha <- fit$par
Se <- sqrt(var_alpha)

Z <- abs(qnorm(0.025))

Ls <- alpha + Z*Se
Li <- alpha - Z*Se
cat(sprintf(
"El estimador es alpha =%5.3f con Se =%5.3f\nIntervalo de confianza: (%5.3f,%5.3f)\n",
alpha, Se, Li, Ls))

## El estimador es alpha =2.774 con Se =0.877
## Intervalo de confianza: (1.055,4.493)
```

7.

Con un 95 % de confianza, no tenemos suficiente evidencia estadística para rechazar la H0, dado que $\alpha = 2$ se encuentra en el intervalo de confianza del parámetro.