Tema 3. Derivadas

Modelos de Procesos Cognitivos

Alberto Juliana Quirós

1.- Encontrar la primera derivada, con respecto a la variable x, de las siguientes funciones:

$1.1 - f(x) = \left(\sqrt{k \cdot x}\right)^3$

$1.2 - f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma}}$

$1.3 - f(x) = \frac{2\cdot x-1}{2\cdot x+1}$

$1.4 - f(x) = \mathrm{Ln}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{x^2}\right)$

$1.5 - f(x) = \sum_{i=1}^{K} \left(a_i + b_i \cdot \mathrm{Ln}(x)\right)^2$

1.1−

$$f(x) = (\sqrt{k \cdot x})^3$$
$$f(x) = (k \cdot x)^{\frac{3}{2}}$$
$$\mathrm{Dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} : kx \geqslant 0\}$$
$$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot (k \cdot x)^{\frac{1}{2}} \cdot k$$
$$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{k \cdot x} \cdot k$$
$$\mathrm{Dom}\, f' = \{x \in \mathbb{R} : kx \geqslant 0\}$$

1.2−

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}$$
$$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$$
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{1}{2\cdot\sigma^2}\right) \cdot 2 \cdot (x-\mu)$$
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)$$
$$f'(x) = -\frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}(x-\mu)}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma^3}$$
$$\mathrm{Dom}\, f' = \mathbb{R}$$

1.3−

$$f(x) = \frac{2\cdot x-1}{2\cdot x+1}$$
$$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (2x+1) - (2x-1) \cdot 2}{(2x+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{4}{(2x+1)^2}$$
$$\mathrm{Dom}\, f' = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

1.4–

$$f(x) = \ln \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{x^2} \right)$$

Aplicamos logaritmo del producto y, posteriormente, de la potencia

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\ln a_i^{x^2} \right)$$
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[x^2 \cdot \ln(a_i) \right]$$
$$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$$
$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[2x \cdot \ln(a_i) \right]$$
$$\mathrm{Dom}\, f' = \mathbb{R}$$

1.5–

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} \left(a_i + b_i \cdot \ln(x) \right)^2$$
$$\mathrm{Dom}\, f = \{ x \in \mathbb{R} : x > 0 \}$$
$$f'(x) = \sum_{i=1}^{k} \left[2 \cdot (a_i + b_i \cdot \ln(x)) \cdot b_i \cdot \frac{1}{x} \right]$$
$$f'(x) = \sum_{i=1}^{k} \left[(2a_i + 2b_i \ln(x))\, b_i \frac{1}{x} \right]$$
$$f'(x) = 2b_i \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{a_i + b_i \cdot \ln(x)}{x} \right]$$
$$\mathrm{Dom}\, f' = \{ x \in \mathbb{R} : x > 0 \}$$

2.- Responder razonadamente a las siguientes cuestiones:
2.1 - Calcular máximos y mínimos relativos, si existen, de la función:

$$f(x) = x^3 + 1,5 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 24$$

Calculamos la derivada primera y la igualamos a 0 para localizar los puntos en los que la pendiente de la recta tangente es nula:

$$f(x) = x^3 + 1,5 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 24$$
$$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$$
$$f'(x) = 3x^2 + 3x - 18$$
$$\mathrm{Dom}\, f' = \mathbb{R}$$
$$3x^2 + 3x - 18 = 0$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4[3 \cdot (-18)]}}{6}$$
$$x = \frac{-3 \pm 15}{6} = \begin{cases} x_1 = +2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Calculamos la derivada segunda para detectar crecimiento y decrecimiento a través del signo de esta:

$$f''(x) = 6x + 3$$
$$\mathrm{Dom}\, f'' = \mathbb{R}$$
$$f''(2) = +15$$
$$f''(-3) = -15$$

Encontramos pues un mínimo local en x = 2 y un máximo local en x = -3.

2.2 - Si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{x}^2}$, donde a es una constante mayor que cero, decida razonadamente, sin utilizar derivadas de orden superior a la primera derivada, si f tiene máximos o mínimos relativos.

Calculamos la derivada primera y la igualamos a 0 para localizar los puntos en los que la pendiente de la recta tangente es nula:

$$f(x) = \frac{a}{x^2}$$
$$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{0\}$$
$$f'(x) = \frac{-2 \cdot a}{x^3}$$
$$\mathrm{Dom}\ f' = \mathbb{R} - \{0\}$$
$$-\frac{2a}{x^3} = 0$$

$\nexists x : f'(x) = 0$, por lo que la pendiente de la recta tangente nunca será 0, y por lo tanto, f no tendrá ni máximos ni mínimos.

2.3- Dada la expresión $\sum_{i=1}^{N} \left[\boldsymbol{x_i} - (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{x_i})\right]^2$, obtener razonadamente el valor de β que hace que la expresión anterior tome un valor mínimo.

$\text{Dom}\, f = \mathbb{R}$

Tendremos que encontrar en primer lugar un valor de β para el cual $f'(\beta) = 0$:

$$f(\beta) = \sum_{i=1}^{N} [x_i - (\beta \cdot x_i)]^2$$
$$f'(\beta) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N} [x_i - (\beta \cdot x_i) \cdot (-x_i)]$$
$$f'(\beta) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N} \left[x_i + \beta x_i^2\right)$$
$$\text{Dom}\, f' = \mathbb{R}$$

Si el contenido del sumatorio es 0, el resto de la expresión también lo será:

$$x_i + \beta x_i^2 = 0$$
$$\beta = -\frac{x_i}{x_i^2}$$
$$\beta = -\frac{1}{x_i}$$

Asumiendo que el punto crítico encontrado sea un vértice, analizamos el signo de las rectas tangentes a cada lado de este:

$$f'\left(-\frac{1}{x_i} - 1\right) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N} \left[x_i + \left(-\frac{1}{x_i} - 1\right) \cdot x_i^2\right]$$
$$f'\left(-\frac{1}{x_i} - 1\right) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N} \left[x_i + \left(-x_i - (x_i)^2\right)\right]$$
$$f'\left(-\frac{1}{x_i} - 1\right) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N} \left[-(x_i)^2\right]$$
$$\beta = \left(-\frac{1}{x_i} - 1\right), \forall x_i \neq 0 f \text{ decrece}$$
$$f'\left(-\frac{1}{x_i} + 1\right) = 2 \sum_{i=1}^{N} \left[x_i + \left(-\frac{1}{x_i} + 1\right) \cdot x_i^2\right]$$
$$f'\left(-\frac{1}{x_i} + 1\right) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N} \left[x_i + \left(-x_i + x_i^2\right)\right]$$
$$f'\left(-\frac{1}{x_i} + 1\right) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(x_i^2\right)$$
$$\beta = \left(-\frac{1}{x_i} + 1\right), \forall x_i \neq 0 \quad f \text{ crece}$$

Si a un lado del vértice f decrece, y a otro crece, podemos identificar un mínimo.

3.- La ecuación propuesta por Fechner que relaciona el nivel de sensación, S, con la intensidad del estímulo, E, es:

$$S = k_1 \cdot \text{Ln}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

Donde $k_1 \text{y} E_0$ son constantes mayores que cero. Responder razonadamente a las siguientes cuestiones: a) ¿cuál es la velocidad de cambio de S cuando varía E ?; b) decidir si la función es creciente o decreciente; y c) ¿existen valores máximos o mínimos de sensación?

a)

Nos piden la derivada primera derivada de S con respecto a E, es decir, el cambio instantáneo de la intensidad que produce el cambio instantáneo de sensación del estímulo.

$$f(E) = K_1 \cdot \ln\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}^+$$

$$f(E) = K_1 \cdot (\ln E - \ln E_0)$$

$$f'(E) = K_1 \cdot \ \left(+\frac{1}{E}\right).$$

$$f'(E) = \frac{K_1}{E}$$

$$\text{Dom } f' = \mathbb{R} - \{0\}$$

b)

Para tal decisión, procedemos a analizar el símbolo de la 2º derivada. Realizamos este paso directamente, ya que $\nexists E : f'(E) = 0$, no existiendo un vértice.

$$f'(E) = K_1 \cdot E^{-1}$$

$$f''(E) = K_1 \cdot (-E)^{-2}$$

$$f''(E) = -\frac{k_1}{E^2}$$

Por lo tanto, f es estrictamente creciente.

c)

$\nexists E : f'(E) = 0$, por lo que no podemos identificar máximos ni mínimos.

4- Si la variable aleatoria discreta (vad) X sigue una distribución Binomial con

parámetros N y π, obtener razonadamente el valor de π que hace máxima la varianza de X (asumir que el parámetro N es constante).

$X \sim B(N, \pi)$

La f de probabilidad de X es:

$$f\left(y_i;\pi\right)=\pi^{y_i}\cdot(1-\pi)^{1-y_i}$$

Por lo tanto al ser sucesos independientes, su función probabilidad conjunta es:

$$f(\vec{y},\vec{w})=\prod_{i=1}^{N} f\left(y_i;\vec{w}\right)$$

Dicha función, en términos de localización de parámetros es la función de verosimilitud:

$$L(\pi;\vec{y})=\pi^{\sum_{i=1}^{n} y_i}\cdot(1-\pi)^{\sum_{i=1}^{n}(1-y_i)}$$

Dado que $\widehat{g(\theta)}=g(\hat{\theta})$,

$$\widehat{\sigma_x^2}=\hat{N}\cdot\hat{\pi}\cdot(\hat{1}-\hat{\pi})$$
$$\widehat{\sigma_x^2}=N\cdot\left[\pi^{\sum_{i=1}^{n} y_i}\cdot(1-\pi)^{\sum_{i=1}^{n}(1-y_i)}\right]\left\{1-\left[\pi^{\sum_{i=1}^{n} y_i}\cdot(1-\pi)^{\sum_{i=1}^{n}(1-y_i)}\right]\right\}$$

Por lo tanto, para obtener el estimador de máxima verosimilitud, primero tendremos que anular la primera derivada de tal expresión, y posteriormente, analizar el signo de la segunda en tal punto crítico.

5.- En los estudios sobre la memoria, el modelo del olvido relaciona el tiempo, t, transcurrido desde que se memoriza un material y la probabilidad, P, de recordar éste. Estudios previos muestran que hay dos modelos que mejor se ajustan a los resultados experimentales: el modelo exponencial y el modelo potencial. El modelo exponencial se define como: $\boldsymbol{P(t)=a+(1-a)\cdot b\cdot e^{-\alpha t}}$ donde a,b y α son constantes mayores que cero. El modelo potencial se define como $\boldsymbol{P(t)}=\boldsymbol{a}+(\mathbf{1}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}\cdot(\mathbf{1}+\mathbf{t}))^{-\beta}$, donde a,b y β son constantes mayores que cero.

Sabiendo que en ambos modelos a es igual a 0,19 y b es igual a 0,78 , que en el modelo exponencial α es igual a 0,25 , y en el modelo potencial β es igual a 0,68 , responda razonadamente a las siguientes cuestiones: a) obtener para cada uno de los modelos la velocidad de olvido; y b) estudiar si el modelo exponencial muestra una velocidad de olvido igual, mayor o menor que el modelo potencial. En caso de que sea diferente, determinar en qué intervalo o intervalos.

a) La probabilidad de olvido será 1-P(t), ya que todo lo que no recuerdas es olvido.
La velocidad de olvido será el incremento infinitesimal de probabilidad de olvido por cada incremento infinitesimal de tiempo. Esto es:
Modelo exponencial:

$$P_O(t)=1-\left[a+(1-a)\cdot b\cdot e^{-\alpha t}\right]$$
$$P_O'(t)=-\left[(1-a)\cdot b\cdot e^{-\alpha t}\cdot(-\alpha)\right]$$

$$P'_O(t) = 0,15 \cdot e^{-0,25t}$$

Modelo potencial:

$$P_O(t) = 1 - \left[a + (1-a) \cdot b \cdot (1+t)^{-\beta}\right]$$
$$P'_O(t) = -\left[(1-a) \cdot b \cdot (-\beta) \cdot (1+t)^{-\beta-1}\right]$$
$$P'_O(t) \quad 0,43 \cdot (1+t)^{-1,68}$$

b) Con el fin de obtener más información sobre la forma de P'_0, calculamos la tasa de cambio (pendiente) de la velocidad de olvido. Para ello empleamos la 2º derivada:

Modelo exponencial

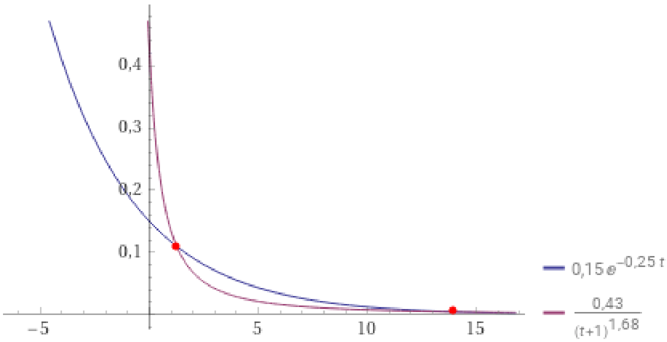
$$P'_O(t) = 0,15 \cdot e^{-0,25t}$$
$$P''_O(t) = 0,15 \cdot e^{-0,25t} \cdot (-0,25)$$
$$P''_O(t) = -0,04 \cdot e^{-0,25t}$$

Modelo potencial

$$P'_O(t) = 0,43 \cdot (1+t)^{-1,68}$$
$$P''_O(t) = 0,43 \cdot (-1,68) \cdot (1+t)^{-2,68}$$
$$P''_O(t) = -0,72 \cdot (1+t)^{-2,68}$$

Sabemos que ninguna de las 2 imágenes de las P'_O incluyen el 0, tratándose de una asíntota. Además, las segundas derivadas son de signo negativo, extrayendo que la recta tangente a la velocidad es negativa. Las imágenes de las siguientes derivadas tampoco incluirán el 0, al ser el numerador siempre $x \neq 0$, por lo que no localizamos máximos ni mínimos en P'_O. Ambas P'_O serán por lo tanto estrictamente decrecientes.

Dada esta información obtenida, y la escala tanto del dominio como de la imagen con la que trabajamos en este contexto de psicología básica, opto por localizar los puntos de corte entre ambas P'_O por medio de resolución gráfica.



$$t_1 \approx 1,26$$
$$t_2 \approx 13,97$$

Por lo tanto, partiendo de que Dom $P'_O \geq 0$, la P'_Oexponencial $> P'_O$potencial $\forall t \in (1,26, 13,97)$