# Tema 6. T. de la Eleccin

## Modelos de Procesos Cognitivos

**Alberto Juliana Quirós**

(1) En una aplicación de la Teoría de Thurstone, se ha asumido que la distribución de $X_1$ es N$(2,1)$ y la de $X_2$ es N$(4,1)$; además, $X_1$ y $X_2$ son linealmente independientes. Se presenta a una persona el par $(X_1, X_2)$ ¿Cuál es la probabilidad de que elija la opción $X_1$ ?

$X_1 \sim N(2,1)$
$X_2 \sim N(4,1)$
Obtenemos la distribución diferencia:
$D_{x_1x_2} \sim (-2, \sqrt{2})$
Obtenemos el punto para el cual $P\left(D_{x_1x_2} > 0\right)$.
Lo necesitamos en una escala conocida, es decir, la que establece la distribución normal;
tipificamos pues y aplicamos simetría para extraer la probabilidad a la derecha del punto posteriormente.
$Z_{x_1x_2} = \dfrac{-2}{\sqrt{2}}$
Por lo tanto:
$P\left(x_1 > x_2\right) = P\left(D_{x_1x_2} > 0\right) = \phi\left(\dfrac{-2}{\sqrt{2}}\right)$
$P\left(x_1 > x_2\right) = 0,0793$

(2) En una aplicando la Teoría de Thurstone, se ha observado que la probabilidad de elegir la opción $A$ frente a la $B$ es 0,20 . Sabiendo que la varianza de la fuerza atractiva de $A$ y de $B$ es 1 ¿Cuanto vale $\mu_A - \mu_B$ ?

$$
\begin{aligned}
& P(A > B) = 0,2 \\
& A \sim N\left(\mu_A, 1\right) \\
& B \sim N\left(\mu_B, 1\right) \\
& \phi^{-1}(P(A > B)) = Z_{AB} \\
& \phi^{-1}(0,2) = -0,84 \\
& D_{AB} \sim N\left(\mu_A - \mu_B, 1\right) \\
& Z_{AB} = \frac{\mu_A - \mu_B}{\sqrt{2} \cdot 1} \\
& \mu_A - \mu_B = -0,84 \cdot \sqrt{2} \\
& \mu_A - \mu_B = -1,19
\end{aligned}
$$

(3) Decidir, justificadamente, si la regla de la suma, en la Teoría de Thurstone, ha de cumplirse para el caso de cuatro opciones $X_i, X_j, X_k$ y $X_l$.

*Para mayor claridad, identificaré cada elemento únicamente por su subíndice.
Partiendo de distribuciones linealmente independientes N$(\mu_a, \sigma)$:

$$Z_{ij} + Z_{jk} + Z_{kl} =$$
$$\frac{(\mu_i - \mu_j) + (\mu_j - \mu_k) + (\mu_k - \mu_l)}{\sigma\sqrt{2}} =$$
$$\frac{\mu_i - \mu_l}{\sigma\sqrt{2}} = Z_{il}$$

(4) Completar la tabla siguiente que contiene las probabilidades de elegir la alternativa $X_i$ cuando se presenta la bina $(X_i, X_j)\,(i \neq j)$, justificando la respuesta, si se cumple: a) la Teoría de Thurstone; y b) la Teoría de Luce.

| | *A* | *B* | *C* |
|---|---|---|---|
| *A* | ----------------- | 0,64 | |
| *B* | | ----------------- | 0,85 |
| *C* | | | ----------------- |

a) Dado que $\Phi\left(\Phi^{-1}\left(P\left(A > B\right)\right) + \Phi^{-1}\left(P\left(B > C\right)\right)\right) = P\left(A > C\right)$, buscamos en primer lugar las Zs respectivas

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | - | 0,36 | $Z_{AC}$ |
| B | | - | 1,04 |
| C | | | - |

$P\left(A > C\right) = \Phi(0,36 + 1,04) = \Phi(1,4) = 0,9207$

b) Partiendo del cumplimiento del primer axioma, y por lo tanto, empleando la regla de la razón constante:

$$\frac{P_T(A)}{P_T(B)} = \frac{0,64}{1 - 0,64} = 1,78$$
$$\frac{P_T(B)}{P_T(C)} = \frac{0,85}{1 - 0,85} = 5,7$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$P_T(A) = 1,78 P_T(B)$

$1,78 P_T(B) + P_T(B) + P_T(C) = 1$

$P_T(B) = 5,7 P_T(C)$

$1,78 \cdot 5,7 P_T(C) + 5,7 P_T(C) + P(C) = 1$

$10,146 P_T(C) + 5,7 P_T(C) + P_r(C) = 1$

$16,85 P_T(C) = 1$

$P_T(C) = 0,06$

$P_T(B) = 5,7 \cdot 0,06 = 0,34$

$P_T(A) = 1,78 \cdot 0,34 = 0,61$

Si $\dfrac{P_T(A)}{P_T(C)} = \dfrac{P(A,C)}{1 - P(A,C)}$, entonces:

$$\frac{0,61}{0,06} = \frac{P(A,C)}{1 - P(A,C)}$$

$$10,17 - 10,17P(A,C) = P(A,C)$$
$$P(A,C) = 0,91$$

(5) Las probabilidades de elección de cuatro opciones son $P_T\,(X_A) = 0,1, P_T\,(X_B) = 0,2, P_T\,(X_C) = 0,3$ y $P_T\,(X_D) = 0,4$. Asumiendo que se cumple la regla de Luce, obtener la probabilidad de elegir la opción $X_A$ : a) si se ha de elegir entre las tres primeras opciones; y b) si se ha de elegir entre las dos primeras opciones.

a)

$$T = \{X_A, X_B, X_C, X_D\}$$
$$R = \{X_A, X_B, X_C\}$$
$$P_T(X_A) = P_T(R) \cdot P_R(X_A)$$
$$P_R(X_A) = \frac{P_T(X_A)}{P_T(R)}$$
$$P_R(X_A) = \frac{0,1}{0,1 + 0,2 + 0,3}$$
$$P_R(X_A) = 0,17$$

b)

$$T = \{X_A, X_B, X_C, X_D\}$$
$$R = \{X_A, X_B\}$$
$$P_T(X_A) = P_T(R) \cdot P_R(X_A)$$
$$P_R(X_A) = \frac{P_T(X_A)}{P_T(R)}$$
$$P_R(X_A) = \frac{0,1}{0,1 + 0,2}$$
$$P_R(X_A) = 0,33$$

(6) Se tienen las opciones $A, B, C, yD$. Las probabilidades de elección cuando se presentan las cuatro opciones son: $P_T(A) = 0,1, P_T(B) = 0,2, P_T(C) = 0,3$ y $P_T(D) = 0{,}4$. Asumiendo la Teoría de Luce, obtener: a) las fuerzas atractivas en la escala $v$ fijando $v(B) = 1$; b) los valores escalares en la escala $u$ de las cuatro opciones, siendo $u(X) = \mathrm{Ln}[v(X)]$ (donde $X$ toma los valores: $A, B, C, D$ ).

a)

$$v(B) = 1$$

Dado que:

$$v(B) = \frac{P_T(B)}{P_T\,(X_a)}$$

Entonces:

$$1 = \frac{0,2}{P_T\left(X_a\right)}$$
$$P_T\left(X_a\right) = 0,2$$
$$v(A) = \frac{P_T(A)}{P_T\left(X_a\right)} = 0,5$$
$$v(C) = 1,5$$
$$v(D) = 2$$

b)

$$u(A) = \ln(0,5) = -0,69$$
$$u(B) = \ln(1) = 0$$
$$u(C) = \ln(1,5) = 0,4$$
$$u(D) = \ln(2) = 0,69$$

(7) La expresión más extendida de la Teoría de Luce establece que la relación entre las fuerzas atractivas y la probabilidad es:

$$\frac{V\left(X_A\right)}{\sum V(X)} = P_T\left(X_A\right)$$

Aplicar esta expresión a los resultados del ejercicio 6 sólo del apartado a) y comprobar que son correctos.

$$\frac{0,5}{0,5+1+1,5+2} = 0,1 = P_T(A)$$
$$\frac{1}{5} = 0,2 = P_T(B)$$
$$\frac{1,5}{5} = 0,3 = P_T(C)$$
$$\frac{2}{5} = 0,4 = P_T(D)$$

(8) En el modelo de respuesta nominal, en un ítem de opción múltiple de cuatro alternativas, la probabilidad de elegir la alternativa $j$ (donde $j$ toma los valores: 1, 2, 3, 4), si la persona tiene un nivel de conocimientos $\theta$, viene dada por la expresión:

$$P(j \mid \theta) = \frac{e^{a_j \cdot \theta + c_j}}{\sum_{h=1}^{4} e^{a_h \cdot \theta + c_h}}$$

En la expresión anterior, $a_h y c_h$ son parámetros que describen cada alternativa del ítem. En el modelo nominal, ¿cuánto vale el valor escalar (fuerza atractiva) de cada alternativa del ítem?

$$T = \{1, 2, 3, 4\}$$

Podemos interpretar $P_R(j) = P(j \mid \theta)$, dado que se trata de la probabilidad de elegir una alternativa frente a las demás, dado el espacio de alternativas del que dispone el sujeto
Siguiendo esta lógica, $P_T(R) = \theta$, que es todo el espacio planteable del que dispone el sujeto (conocimiento).
Bajo el marco del primer axioma del modelo de Luce:

$$P_T(j) = P_T(R) \cdot P_R(j)$$

Entonces:

$$P_T(j) = \theta \cdot \frac{e^{a_j \cdot \theta + c_j}}{\sum_{h=1}^{4} e^{a_h \cdot \theta + c_h}}$$

Por la regla de razón constante:

$$v(j) = \theta \cdot \frac{\frac{e^{a_j \cdot \theta + c_j}}{\sum_{h=1}^{4} e^{a_h \cdot \theta + c_h}}}{P_T(X_{arbt})}$$