

2. Уравнение 1-го порядка, разрешенного, относительно производной. Решение уравнения. Неявное и параметрическое задания решения.

Андрей

December 8, 2025

## 1 Основные понятия и определения

### 1.1 Понятие об уравнении 1-го порядка, разрешенном относительно производной.

Уравнение первого порядка имеет вид:

$$F'(x, y, y') = 0, \quad (1)$$

Будем рассматривать уравнение, разрешенное относительно производной, т.е. уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (2)$$

Так же будем рассматривать перевернутое уравнение:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}, \quad (3)$$

используя его в окрестностях тех точек, где  $f(x, y)$  обращается в бесконечность.

Во многих случаях целесообразно рассматривать вместо уравнений (2) и (3) одно равносильное им уравнение:

$$dy - f(x, y)dx = 0. \quad (4)$$

$x, y$  в этом уравнении равноправны, то есть можно принять за независимую переменную как  $x$ , так и  $y$ . Умножая (4) на некоторую функцию  $N(x, y)$ , получаем симметричное уравнение:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (5)$$

где  $M(x, y) = -N(x, y)f(x, y)$ . Работает и обратное: всякое уравнение вида (5) можно привести к виду (2) или (3), разрешая его относительно  $\frac{dy}{dx}$  или  $\frac{dx}{dy}$  соответственно. То есть уравнение (5) равносильно следующим двум уравнениям:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}. \quad (6)$$

Иногда уравнение записывают в так называемой симметрической форме:

$$\frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)}, \quad (7)$$

## 1.2 Решение уравнения

Предположим, что правая часть уравнения (2),

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

определенна на некотором подмножестве  $A$  вещественной плоскости  $(x, y)$ . Функцию  $y = y(x)$ , определенную на этом интервале, будем называть **решением уравнения (2) на  $A$** , если:

1. Существует производная  $y'(x)$  для всех  $x$  из интервала  $(a, b)$ .
2. Функция  $y = y(x)$  обращает уравнение (2) в тождество:

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

справедливое для всех  $x \in (a, b)$ . Это значит, что  $\forall x \in (a, b)$  точка  $(x, y(x))$  принадлежит множеству  $A$  и значение производной  $y'(x)$  равно значению функции  $f(x, y)$  в этой точке.

Так как мы рассматриваем и перевернутое уравнение (3), то и решения  $y = y(x)$  этого перевернутого уравнения будем присоединять к решениям уравнения (2).

### 1.3 Неявное и параметрическое задания решения.

Решение дифференциального уравнения не всегда может быть выражено в виде явной функции  $y = y(x)$ . В таких случаях решение может быть задано в **неявной форме**:

$$\Phi(x, y) = 0. \quad (8)$$

Будем говорить, что это уравнение в **неявной форме** определяет решение уравнения (2), если оно определяет  $y$  как неявную функцию от  $x$ ,  $y = y(x)$ , которая является решением уравнения (2).

В этом случае, дифференцируя (8) по  $x$  и заменяя  $dy/dx$  на  $f(x, y)$ , получаем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} f(x, y) = 0. \quad (9)$$

Еще одним способом задания решения уравнения (2) является **параметрическое задание**:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad (10)$$

Будем говорить, что это задание определяет решение уравнения (2) в параметрической форме на интервале  $(t_0, t_1)$ , если на этом интервале верно тождество:

$$\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t), \psi(t)). \quad (11)$$