Уравнение первого порядка, разрешённое относительно производной: решения, неявное и параметрическое задания

Андрей

8 декабря 2025 г.

1 Основные понятия и определения

1.1 Уравнение первого порядка, разрешённое относительно производной

Уравнение первого порядка имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

Будем рассматривать уравнение, разрешенное относительно производной, т.е. уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2}$$

Так же будем рассматривать перевернутое уравнение:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}, \tag{3}$$

используя его в окрестностях тех точек, где $f(x, y)$ обращается в бесконечность.

Во многих случаях целесообразно рассматривать вместо уравнений (2) и (3) одно равносильное им уравнение:

$$dy - f(x, y)\, dx = 0. \tag{4}$$

x, y в этом уравнении равноправны, то есть можно принять за независимую переменную как x, так и y. Умножая уравнение (4) на некоторую функцию $N(x, y)$, получаем симметричное уравнение:

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{5}$$

где $M(x, y) = -N(x, y)f(x, y)$. Работает и обратное: всякое уравнение вида (5) можно привести к виду (2) или (3), разрешая его соответственно относительно $\dfrac{dy}{dx}$ или $\dfrac{dx}{dy}$. То есть уравнение (5) равносильно следующим двум уравнениям:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}. \tag{6}$$

Иногда уравнение записывают в так называемой симметрической форме:

$$\frac{dx}{X(x,y)} = \frac{dy}{Y(x,y)}, \tag{7}$$

1.2 Решение уравнения

Предположим, что правая часть уравнения (2),

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

определена на некотором подмножестве A вещественной плоскости (x,y). Функцию $y = y(x)$, определенную на этом интервале, будем называть **решением уравнения** (2) **на** A, если:

1. Существует производная $y'(x)$ для всех x из интервала (a,b).

2. Функция $y = y(x)$ обращает уравнение (2) в тождество:

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

   справедливое для всех $x \in (a,b)$. Это значит, что $\forall x \in (a,b)$ точка $(x, y(x))$ принадлежит множеству A и значение производной $y'(x)$ равно значению функции $f(x,y)$ в этой точке.

Так как мы рассматриваем и перевернутое уравнение (3), то и решения $y = y(x)$ этого перевернутого уравнения будем присоединять к решениям уравнения (2).

1.3 Неявное и параметрическое задания решения

Решение дифференциального уравнения не всегда может быть выражено в виде явной функции $y = y(x)$. В таких случаях решение может быть задано в **неявной форме**:

$$\Phi(x,y) = 0. \tag{8}$$

Будем говорить, что это уравнение в **неявной форме** определяет решение уравнения (2), если оно определяет y как неявную функцию от x, $y = y(x)$, которая является решением уравнения (2).

В этом случае, дифференцируя уравнение (**??**) по x и заменяя dy/dx на $f(x,y)$, получаем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} f(x,y) = 0. \tag{9}$$

Ещё одним способом задания решения уравнения (2) является **параметрическое задание:**

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \tag{10}$$

Будем говорить, что это задание определяет решение уравнения (2) в параметрической форме на интервале (t_0, t_1), если на этом интервале верно тождество:

$$\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t), \psi(t)). \tag{11}$$