Основные понятия и определения. Основная задача теории интегрирования и общей теории ДУ.

December 7, 2025

1 Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ)

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) — это уравнение вида:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \ (1)$$

где:

- F — известная функция своих аргументов, заданная в некоторой области,
- x — независимая переменная,
- y — функция от x,
- $y', y'', \dots, y^{(n)}$ — производные функции y.
- при этом n действительно входит в соотношение.

2 Уравнение с частными производными n-го порядка

Пусть дана функция u, которая зависит от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда уравнение вида:

$$\Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \ (2)$$

где:

- Φ — известная функция своих аргументов, заданная в некоторой области,
- U — искомая функция от переменных,
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые переменные,
- $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ — частные производные функции u

называется уравнением с частными производными n-го порядка.

3 Решение ДУ

Решением дифференциального уравнения называют такую функцию (или набор функций), которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество, справедливое для всех точек упомянутой области.

В частности $y = y(x)$ будет решением ОДУ (1) в интервале (a, b) если:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \equiv 0 \ (3)$$

для всех $x \in (a, b)$.

3.1 Семейство решений

Семейством решений дифференциального уравнения называют совокупность всех его решений, содержащую произвольные постоянные параметры.

Уравнение первого порядка при соблюдении некоторых условий вообще имеет семейство решений, завсясящее от одной произвольной постоянной, а уравнение n-го порядка — от n произвольных постоянных и т.д.

3.2 Процесс нахождения решений

Процесс нахождения решений дифференциальных уравнений называют интегрированием дифференциальных уравнений.

4 Пример

Пусть нам дано дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dy} = f(t) \ (8)$$

Пусть $f(t)$ — непрерывная функция на интервале (a, b). Тогда уравнение (8) имеет общее решение вида:

$$x = \int f(t)dt + C \ (9)$$

$t \in (a, b)$, C — произвольная постоянная.

Формула (9) содержит целое семейство решений, обладающих одним и тем же свойством, выраженным в уравнении (8). Это свойство состоит в том, что производная функции (скорость) x, определяемой формулой (9), равна $f(t)$ для всех $t \in (a, b)$.

Выделим из семейства решений (9) то решение, при котором движущая точка занимает положение x_0 в момент времени t_0, то есть найдем решение $x = x(t)$, удовлетворяющее условию:

$$x(t_0) = x_0$$

- x_0 - начальное значение искомой функции (положение точки в момент времени t_0),
- t_0 - начальное значение аргумента (начальный момент времени),

вместе они называются начальными данными.

5 Пример

Материальная точка движется по горизонтальной прямой под действием силы тяжести, причем известны её **положение и скорость** в некоторый момент времени t_0. Найти закон движения точки.

Примем нашу прямую за ось Oy; начало координат выберем внизу, на уровне поверхности Земли, а направление оси Oy — вверх. Обозначим положение точки и скорость в момент времени t_0 через y_0 и v_0 соответственно.

Принимая во внимание механический смысл второй производной, мы приходим к следующему дифференциальному второго порядка:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \ (12)$$

где g — ускорение свободного падения. Наша задача сводится к нахождению того решения $y = y(t)$ уравнения (12), которое удовлетворяет условиям:

$$y(t_0) = y_0, \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \quad \text{при} \quad t = t_0 \ (13)$$

. Числа t_0, y_0, v_0 — начальные данные задачи, а условия (13) — начальные условия.

Интегрируя последовательно два раза уравнение (12), получаем общее решение:

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1 \ (14)$$

;

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2 \ (15)$$

. Формула (15), где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, содержит все решения уравнения (12). Выделим из этого семейства решение, удовлетворяющее начальным условиям (13). Подставляя в (14) и (15) вместо величин $t, y, \frac{dy}{dt}$ их начальные значения $0, y_0, v_0$, находим: $C_1 = v_0$ и $C_2 = y_0$. Таким образом, **значения произвольных постоянных** $_1$ и $_2$ определяются из начальных условий (13) и представляют собой **начальные значения искомой функции и её производной**. Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в (15), получаем решение задачи:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0t + y_0 \ (16)$$

. Это и есть закон движения материальной точки.

6 Основная задача интегрирования дифференциальных уравнений

Основная задача интегрирования дифференциальных уравнений - нахождение всех решений заданного дифференциального уравнения и изучение свойств этих решений.

Исключительное значение как для самой теории дифференциальных уравнений, так и для ее приложений имеет задача нахождения решения, удовлетворяющего заданным условиям.

Понимание основной задачи интегрирования дифференциальных уравнений:

1. Выражение искомых функций через элементареные

2. Нахождение решений в квадратурах:

$$y = \int \frac{\sin x}{x} dx + C$$

   - уравнение в квадратурах (интегралы от элементарных функций)

3. Поиск правила вычисления значения искомой функции по заданному значению аргумента (например, поиск значения в виде равномерно сходящегося ряда)

7 Общая задача теории дифференциальных уравнений

Общая задача теории дифференциальных уравнений заключается в изучении общих свойств функций, определяемых дифференциальными уравнениями, непосредственно по виду любого заданного дифференциального уравнения, независимо от интегрируемости этого уравнения в элементарных функциях или в квадратурах.