

Билет 2. Существование решений систем уравнений

Рассмотрим систему уравнений:

$$F_j(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \quad j = \overline{1, m} \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор аргументов, $y = (y_1, \dots, y_m)$ — вектор неизвестных. Имеем m уравнений и m неизвестных.

Мы хотим получить условия однозначной разрешимости системы (1), то есть найти функции $y_j = f_j(x_1, \dots, x_n)$, такие что

$$F_j(x_1, \dots, x_n, f_1(x), \dots, f_m(x)) \equiv 0.$$

Для этого необходимо, чтобы матрица Якоби была квадратной, так как определитель существует только для квадратных матриц. Это требует, чтобы число уравнений совпадало с числом неизвестных, то есть $n = m$.

Хотим обобщить для нелинейных систем (путем рассмотрения локально в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$ в окрестности этой точки, заменить систему на линейную систему $A\vec{y} = \vec{b}$ и получить условие разрешимости $\det A \neq 0$).

Рассматриваем систему:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (4)$$

причем $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, и функции f_1, \dots, f_m непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка.

Матрица Якоби

Рассмотрим линейную систему уравнений $A\vec{y} = \vec{b}$. Она имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица A является квадратной и невырожденной, то есть $\det A \neq 0$.

Аналогичный подход применим и к нелинейной системе (1). Для того чтобы можно было локально выразить y через x , нужно, чтобы матрица Якоби по переменным y , $\frac{\partial F}{\partial y}$, была квадратной (что требует $m = n$) и невырожденной ($\det \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \neq 0$).

Так как определитель существует только для квадратных матриц, то именно условие $\det \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \neq 0$ является ключевым.

В случае $n = m$ можно рассмотреть определитель Якобиан:

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| = \frac{D(y_1, \dots, y_m)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$$

Свойства Якобиана

Рассмотрим еще одну систему:

$$\begin{cases} x_i = \varphi_1(t_1, \dots, t_m) \\ \dots \\ x_m = \varphi_n(t_1, \dots, t_m) \end{cases} \quad (5)$$

где $t \in Q \subset \mathbb{R}^m$, и φ_i непрерывны.

Если $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial x}{\partial t}$ матрицы Якоби, то их произведение дает матрицу $\{Z_{ij}\}_{i,j=1}^m$, где

$$Z_{ij} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t_j}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial \tilde{y}_i}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t_j},$$

где $\tilde{y}_i(t) = \varphi_i(x_1(t), \dots, x_m(t))$.

Тогда определитель Якобиана сложной функции равен произведению определителей Якобианов составляющих функций:

$$\frac{D(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m)}{D(t_1, \dots, t_m)} = \frac{D(y_1, \dots, y_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} \cdot \frac{D(x_1, \dots, x_m)}{D(t_1, \dots, t_m)}.$$

Это следует из свойства определителей: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, примененного к матрицам Якоби:

$$\det\left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}\right) = \det\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t}\right) = \det\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \cdot \det\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right).$$

Из этого свойства получим другое свойство.

Рассмотрим систему (4): $\vec{y} = \vec{f}(x)$, где $n = m$, и функция \vec{f} непрерывно дифференцируема. Предположим, что мы смогли обратить эту систему и получили систему (5): $\vec{x} = \vec{g}(y)$. Эти системы являются **взаимнообратными**, потому что если подставить выражение для \vec{x} из системы (5) в систему (4), мы получим тождественное равенство:

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{g}(y)) \equiv y,$$

и наоборот, подставив \vec{y} из (4) в (5):

$$\vec{x} = \vec{g}(\vec{f}(x)) \equiv x.$$

Следовательно, можем написать:

$$\frac{D(y_1, \dots, y_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} \cdot \frac{D(x_1, \dots, x_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} = \frac{D(y_1, \dots, y_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}.$$

В правой части стоит определитель Якобиана от переменных y по тем же переменным y . Это определитель матрицы частных производных $\frac{\partial y_i}{\partial y_j}$, которая является **единичной матрицей** (так как $\frac{\partial y_i}{\partial y_j} = \delta_{ij}$ — символ Кронекера).

Следовательно:

$$\frac{D(y_1, \dots, y_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} = \det(I) = 1.$$

Таким образом, мы получаем:

$$\frac{D(y_1, \dots, y_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} \cdot \frac{D(x_1, \dots, x_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} = 1.$$

Это означает, что оба определителя Якобианов не могут быть равны нулю. Из этого равенства следует, что один Якобиан является обратной величиной к другому:

$$\frac{D(y_1, \dots, y_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} = \frac{1}{\frac{D(x_1, \dots, x_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}}.$$

Мы обобщили эту теорему об обратной функции:

Пусть дана функция $y = f(x)$, и пусть в точке x_0 выполнено условие $f'(x_0) \neq 0$.

Тогда существует обратная функция $x = g(y)$, и ее производная в точке $y_0 = f(x_0)$ вычисляется по формуле:

$$x'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений:

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

где система состоит из m уравнений, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$

Рассмотрим точку $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n+m}$

Рассмотрим открытую окрестность точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ вида:

$$\begin{cases} |x_i - x_i^{(0)}| < \alpha_i, & i = \overline{1, n} \\ |y_j - y_j^{(0)}| < \beta_j, & j = \overline{1, m} \end{cases} \tag{2}$$

где $\alpha_i > 0$, $\beta_j > 0$ — некоторые положительные числа.

Определение однозначной разрешимости

В параллелепипеде (2) система (1) однозначным образом определяет y_j как функцию переменных x_1, \dots, x_n : $y_j = f_j(x_1, \dots, x_n)$, если для любых $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию

$$|\tilde{x}_i - x_i^{(0)}| < \alpha_i, \quad i = \overline{1, n},$$

система $F(\tilde{x}, y) = 0$ имеет единственное решение \tilde{y} , удовлетворяющее условию

$$|\tilde{y}_j - y_j^{(0)}| < \beta_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

(другие решения могут существовать, но в этом (2) одно решение)

Рассмотрим:

$$|x_i - x_i^{(0)}| < c_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

$$|y_j - y_j^{(0)}| < d_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (3)$$

Теорема

Пусть $F(x, y)$ определены в (3) и обладают следующими свойствами:

1. $F_j(x, y)$ — непрерывны в (3).
2. Существуют частные производные $\frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \frac{\partial F_j}{\partial y_k}$ — непрерывные ($i = \overline{1, n}; j, k = \overline{1, m}$).
3. $F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$.
4. $\left| \frac{\partial F}{\partial y}(x^{(0)}, y^{(0)}) \right| = J(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0$.

Тогда существует открытый параллелепипед вида (2), в котором система (1) однозначно определяют y_j как $f_j(x)$, причем $y_j = f_j(x)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные и $y^{(0)} = f(x^{(0)})$.

Доказательство (ММИ)

1) База индукции: $m = 1$.

В этом случае y — скалярная величина, а не вектор. Условие $\frac{\partial F}{\partial y}(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0$ означает, что производная по y не равна нулю. Это соответствует теореме о неявной функции одной переменной, которая гарантирует существование и единственность решения $y = f(x)$ в окрестности точки $x^{(0)}$. Отличие в том, что здесь мы имеем не квадратную матрицу Якоби ($n \times n$), а просто число $\frac{\partial F}{\partial y}$, которое не равно нулю.

2) Индукционне преположение: Предположим, что теорема верна для $m - 1$.

3) Шаг индукции: Докажем ее для m .

Рассмотрим матрицу Якоби:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}.$$

Последнее уравнение системы: $F_m(x, y_1, \dots, y_m) = 0$. По условию 4) определитель Якоби $\left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \neq 0$, значит, в последней строке существует ненулевой элемент. Для определенности, пусть $\frac{\partial F_m}{\partial y_m} \neq 0$.

Запишем последнее уравнение системы в виде:

$$F_m(x, \tilde{y}, y_m) = 0,$$

где $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_{m-1})$.

Тогда по теореме из предыдущего параграфа, используя исходный параллелепипед (3), мы можем построить открытый параллелепипед с центром в точке $(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})$, в котором уравнение $F_m(x, y_1, \dots, y_m) = 0$ разрешимо относительно переменной y_m . В результате получаем функцию $\tilde{y}_m = g(x, \tilde{y})$, которая является непрерывной и имеет непрерывные частные производные первого порядка. При этом выполняется равенство:

$$y_m^{(0)} = g(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)}),$$

где $\tilde{y}^{(0)} = (y_1^{(0)}, \dots, y_{m-1}^{(0)})$ — первые $m - 1$ компоненты вектора $y^{(0)}$.

Подставим это выражение для y_m в первые $m - 1$ уравнений системы:

$$F_j(x, \tilde{y}, g(x, \tilde{y})) = 0, \quad j = \overline{1, m-1}.$$

Обозначим

$$\Phi_j(x, \tilde{y}) = F_j(x, \tilde{y}, g(x, \tilde{y})). \quad (6)$$

Если подставить выражение (6) в систему, то переменная y_m однозначно определяет все остальные компоненты вектора y , то есть задача решена. Остается доказать, что система уравнений (6) однозначно разрешима в окрестности точки $(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n+m-1}$. Для этого применим условие 2) математической индукции, но предварительно необходимо проверить, что для системы (6) выполнены все условия теоремы. Имеем

$$\begin{cases} |x_i - x_i^{(0)}| < \tilde{\alpha}_i, & i = \overline{1, n} \\ |\tilde{y}_j - \tilde{y}_j^{(0)}| < \tilde{\beta}_j, & j = \overline{1, m-1} \end{cases}$$

— это окрестность точки $(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})$, в которой определена система (6).

Докажем, что условия выполнены.

Условие на замкнутость: для этого немного урежем:

$$\begin{cases} |x_i - x_i^{(0)}| \leq \hat{\alpha}_i, & i = \overline{1, n} \\ |\tilde{y}_j - \tilde{y}_j^{(0)}| \leq \hat{\beta}_j, & j = \overline{1, m-1} \end{cases}$$

и будем работать в ней. В этой окрестности функция $g(x, \tilde{y})$ непрерывна, а значит, композиция $\Phi_j(x, \tilde{y}) = F_j(x, \tilde{y}, g(x, \tilde{y}))$ также непрерывна, так как F_j и g непрерывны.

2) Функция $\Phi_j(x, \tilde{y})$ непрерывна, вместе с тем, что $y_m = g(x, \tilde{y})$ — непрерывна, и получаем непрерывную суперпозицию.

3) $\Phi_j(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)}) = 0$. Доказано, так как

$$F_j(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)}, g(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})) = F_j(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)}, y_m^{(0)}) = 0.$$

Кроме того, функция $\Phi_j(x, \tilde{y})$ является дифференцируемой, поскольку F_j имеет непрерывные частные производные, а $g(x, \tilde{y})$ также имеет непрерывные частные производные. Следовательно, $\Phi_j(x, \tilde{y})$ является дифференцируемой функцией.

Помимо этого, по теореме о неявной функции, центр $(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})$ должен удовлетворять системе (6):

$$\Phi_j(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)}) = 0.$$

Это верно, так как Φ_j — это композиция F_j и g , и мы уже показали, что $F_j(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)}, y_m^{(0)}) = 0$.

Осталось проверить условие 4): нужно, чтобы определитель Якобиана системы (6) был отличен от нуля:

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{y}}(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)}) \right| \neq 0.$$

Рассмотрим исходный Якобиан:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}.$$

Предполагали, что последний элемент $\frac{\partial F_m}{\partial y_m} \neq 0$.

По свойствам алгебры, если определитель матрицы не равен нулю, то к любой строке или столбцу можно прибавить линейную комбинацию других строк или столбцов — это не изменит значение определителя.

Теперь применим следующее преобразование: к первому столбцу прибавим последний столбец, умноженный на $\frac{\partial g}{\partial y_1}$:

Тогда элементы первого столбца станут равны:

$$\frac{\partial F_j}{\partial y_1} + \frac{\partial F_j}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial g}{\partial y_1}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Для $j = m$ этот элемент равен нулю (по определению g), а для $j = 1, \dots, m-1$ — это как раз частные производные функции $\Phi_j(x, \tilde{y}) = F_j(x, \tilde{y}, g(x, \tilde{y}))$ по переменной y_1 :

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial y_1} = \frac{\partial F_j}{\partial y_1} + \frac{\partial F_j}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial g}{\partial y_1}.$$

Аналогично, ко второму столбцу прибавим последний столбец, умноженный на $\frac{\partial g}{\partial y_2}$, и так далее до $(m-1)$ -го столбца.

В результате получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_m} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}.$$

Разложим определитель этой матрицы по последней строке:

$$\det \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} \end{pmatrix}.$$

Обозначим последнюю матрицу как $\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{y}}$. Тогда:

$$\det \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \cdot \det \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{y}} \right).$$

Поскольку $\frac{\partial F_m}{\partial y_m} \neq 0$ и $\det \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \neq 0$, то отсюда следует, что

$$\det \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{y}} \right) \neq 0.$$

Это означает, что определитель Якобиана системы (6) отличен от нуля, что и требовалось доказать.
Таким образом, все условия теоремы выполнены для системы (6), и по предположению индукции она однозначно разрешима в окрестности точки $(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})$.

Бля там еще два замечания гг бб.