Mục lục

§1. Tính chia hết đối với đa thức

I. Tìm dư của phép chia mà không thực hiện phép chia

1. Đa thức chia có dạng $x - a$ (a là hằng)

Ví dụ 1. Chứng minh rằng số dư khi chia đa thức $f(x)$ cho nhị thức $x - a$ bằng giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x = a$.
Định lí Bê-du (*Bézout*, 1730-1783, nhà toán học Pháp).

Lời giải.
Do đa thức chia $x - a$ có bậc nhất nên số dư khi chia $f(x)$ cho $x - a$ là hằng số r.
Ta có

$$f(x) = (x - a) \cdot Q(x) + r.$$

Đẳng thức trên đúng với mọi x nên với $x = a$, ta có

$$f(a) = 0 \cdot Q(x) + r \text{ hay } f(a) = r.$$

⚠ *Từ định lí Bê-du ta suy ra*
Đa thức $f(x)$ chia hết cho $x - a$ khi và chỉ khi $f(a) = 0$ (tức là khi a là nghiệm của đa thức).

□

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu đa thức $f(x)$ có tổng các hệ số bằng 0 thì đa thức ấy chia hết cho $x - 1$.

Lời giải.
Gọi $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$.
Theo giả thuyết, $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 0$. (1)
Theo định lý Bê-du, số dư khi chia $f(x)$ cho $x - 1$ là

$$r = f(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n. \tag{2}$$

Từ (1) và (2), suy ra $r = 0$.
Vậy $f(x)$ chia hết cho $x - 1$. □

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu đa thức $f(x)$ có tổng các hệ số của các hạng tử bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các hạng tử bậc lẻ thì đa thức ấy chia hết cho $x+1$.

Lời giải.
Gọi $f(x) = a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \ldots + a_{2n-2}x^2 + a_{2n-1}x + a_{2n}$, trong đó, a_0 có thể bằng 0.
Theo giả thuyết, $a_0 + a_2 + .. + a_{2n} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}$ nên

$$(a_0 + a_2 + \ldots + a_{2n}) - (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}) = 0. \qquad (1)$$

Theo định lí Bê-du, số dư khi chia $f(x)$ cho $x+1$ bằng

$$\begin{aligned} r = f(-1) &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{2n-2} - a_{2n-a} + a_{2n} \\ &= (a_0 + a_2 + \ldots + a_{2n}) - (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}) \qquad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2), suy ra $r = 0$.
Vậy $f(x)$ chia hết cho $x+1$. □

2. Đa thức có bậc tử từ bậc hai trở lên

Ví dụ 4. Tìm dư khi chia

$$x^7 + x^5 + x^3 + 1 \text{ cho } x^2 - 1.$$

Lời giải.
Để tìm dư trong trường hợp này, ta thường dùng các cách sau:
Cách 1. (Tách ra ở đa thức bị chia những đa thức chia hết cho đa thức chia).
Ta biết rằng $x^n - 1$ chia hết cho $x - 1$ với mọi số tự nhiên n nên $x^{2n} - 1$ chia hết cho $x^2 - 1$.
Do đó $x^4 - 1$, $x^6 - 1$,...chia hết cho $x^2 - 1$.
Ta có

$$\begin{aligned} x^7 + x^5 + x^3 + 1 &= x^7 - x + x^5 - x + x^3 - x + 3x + 1 \\ &= x(x^6 - 1) + x(x^4 - 1) + x(x^2 - 1) + (3x + 1). \end{aligned}$$

Dư khi chia $x^7 + x^5 + x^3 + 1$ cho $x^2 - 1$ là $3x + 1$.
Cách 2. (Xét giá trị riêng).
Gọi thương là $Q(x)$, dư là $ax + b$. Ta có

$$x^7 + x^5 + x^3 + 1 = (x+1)(x-1) \cdot Q(x) + ax + b, \forall x.$$

Đẳng thức đúng với mọi x nên với $x = 1$, ta được $4 = a + b$. (1)
Với $x = -1$ ta được $-2 = -a + b$. (2)
Từ (1) và (2), suy ra $a = 3$, $b = 1$.
Dư phải tìm là $3x + 1$.
⚠ *Để tách ra các đa thức chia hết cho $x^2 - 1$ hoặc $x^2 + 1$, cần nhớ lại các hằng đẳng thức 8 và 9:*

$a^n - b^n$ *chia hết cho* $a - b$ $(a \neq b)$;
$a^n + b^n$ *(n lẻ) chia hết cho* $a + b$ $(a \neq -b)$.

□

II. Sơ đồ Hoóc-ne

1. Ví dụ

Ví dụ 5. Chia các đa thức

a) $(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) : (x - 2)$;

b) $(x^3 - 9x^2 + 6x + 10) : (x + 1)$;

c) $(x^3 - 7x + 6) : (x + 3)$.

Lời giải.
Đặt tính chia đa thức, ta được kết quả

a) Thương là $x^2 - 3x + 2$.

b) Thương là $x^2 - 10x + 16$, dư là -6.

c) Thương là $x^2 - 3x + 2$.

□

2. Sơ đồ Hoóc-ne

Ta có thể tìm được kết quả khi chia đa thức $f(x)$ cho nhị thức $x - a$ (a là hằng số) bằng một cách khác.
Trở lại câu a) ở ví dụ trên $(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) : (x - 2)$. Các hệ số của đa thức bị chia thứ tự là $1, -5, 8, -4$; hằng số a trong ví dụ này bằng 2.

a) Đặt các hệ số của đa thức bị chia theo thứ tự vào các cột của dòng trên.

	1	-5	8	-4
$a = 2$				

b) Trong 4 cột để trống ở dòng dưới, ba cột đầu cho ta các hệ số của đa thức thương, cột cuối cùng cho ta số dư.
- Số ở cột thứ nhất của dòng dưới bằng số tương ứng ở dòng trên.

	1	-5	8	-4
$a = 2$	1			

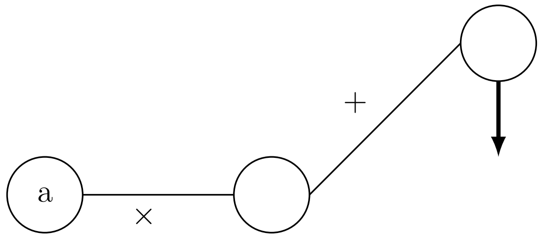
- Kể từ dòng thứ hai, mỗi số ở dòng dưới được xác định bằng cách lấy a nhân với số cùng dòng liền trước , rồi cộng với số cùng cột ở dòng trên.

	1	-5	8	-4
$a = 2$	1	$2 \cdot 1 + (-5) = -3$		

	1	-5	8	-4
$a = 2$	1	$2 \cdot 1 + (-5) = -3$	$2 \cdot (-3) + 8 = 2$	

	1	-5	8	-4
$a = 2$	1	$2 \cdot 1 + (-5) = -3$	$2 \cdot (-3) + 8 = 2$	$2 \cdot 2 + (-4) = 0$

Sơ đồ



Ta có thương bằng $x^2 - 3x + 2$, số dư bằng 0.

Sơ đồ của thuật toán trên được gọi là sơ đồ Hoóc-ne.
Bạn đọc hãy dùng sơ đồ trên để kiểm tra lại kết quả của các câu b) và c).
Như vậy nếu đa thức bị chia là $a_o x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$, đa thức chia là $x - a$, ta được thương $b_0 x^2 + b_1 x + b_2$, dư r. Theo sơ đồ Hoóc-ne, ta có

	a_0	a_1	a_2	a_3
a	$b_0 = a_0$	$b_1 = ab_0 + a_1$	$b_2 = ab_1 + a_2$	$r = ab_2 + a_3$

3. Sơ đồ Hoóc-ne

Tổng quát với đa thức bị chia là $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$, đa thức chia là $x - a$, thương là $b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2} x + b_{n-1}$, dư r. Ta cần chứng minh rằng

$$\begin{aligned}
b_0 &= a_0 \\
b_1 &= ab_0 + a_1 \\
b_2 &= ab_1 + a_2 \\
\ldots & \\
b_{n-1} &= ab_{n-2} + a_{n-1} \\
r &= ab_{n-1} + a_n.
\end{aligned}$$

Thật vậy, thực hiện phép tính

$$(x-1)(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2} x + b_{n-1}) + r$$

rồi rút gọn, ta được

$$b_0 x^n + (b_1 - ab_0) x^{n-1} + \ldots + (b_{n-1} - ab_{n-2}) x - ab_{n-1} + r.$$

Đồng nhất đa thức này với đa thức bị chia, ta được

$$\begin{aligned}
b_0 &= a_0 \\
b_1 - ab_0 &= a_1 \\
b_2 - ab_1 &= a_2 \\
\ldots & \\
b_{n-1} - ab_{n-2} &= a_{n-1} \\
r - ab_{n-1} &= a_n.
\end{aligned}$$

Từ đó, suy ra điều phải chứng minh.

4. Áp dụng sơ đồ Hoóc-ne để tính giá trị của đa thức $f(x)$ tại $4x = a$

Sơ đồ Ho óc-ne cho ta thương và dư khi chia đa thức $f(x)$ cho nhị thức $x - a$. Chú ý rằng theo định lí Bê-du, số dư khi chia $f(x)$ cho $x - a$ bằng $f(a)$. Do đó, dùng sơ đồ Hoóc-ne ta cũng tính được giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x = a$.

Ví dụ 6. Tính giá trị của đa thức $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ tại $x = 37$.

Lời giải.
Theo định lý Bê-du, $f(37)$ là số dư khi chia $f(x)$ cho $x - 37$. Ta lập sơ đồ Hoóc-ne

	1	3	0	-4
$a = 37$	1	$37 \cdot 1 + 3 = 40$	$37 \cdot 40 + 0 = 1480$	$37 \cdot 1480 - 4 = 54756$

Vậy $f(37) = 54756$. □

III. Chứng minh một đa thức chia hết cho một đa thức khác

Ta chỉ xét các đa thức một biến, thường có các cách sau:

1. Cách 1.

Phân tích đa thức bị chia thành nhân tử, trong đó có một nhân tử là đa thức chia.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng $x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$, với mọi số tự nhiên n.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} x^{8n} + x^{4n} + 1 &= x^{8n} + 2x^{4n} + 1 - x^{4n} = (x^{4n} + 1)^2 - \left(x^{2n}\right)^2 \\ &= (x^{4n} + x^{2n} + 1)(x^{4n} - x^{2n} + 1). \end{aligned}$$

Tiếp tục phân tích

$$\begin{aligned} x^{4n} + x^{2n} + 1 &= x^{4n} + 2x^{2n} + 1 - x^{2n} = (x^{2n} + 1)^2 - (x^n)^2 \\ &= (x^{2n} + x^n + 1)(x^{2n} - x^n + 1). \end{aligned}$$

Vậy $x^{8n} + x^{4n} + 1$ chia hết cho $x^{2n} + x^n + 1$, với mọi số tự nhiên n. □

2. Cách 2.

Biến đổi đa thức bị chia thành một tổng các đa thức chia.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ với mọi số tự nhiên m, n.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1 &= x^{3m+1} - x + x^{3n+2} - x^2 + x^2 + x + 1 \\ &= x(x^{3m} - 1) + x^2(x^{3n} - 1) + (x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

Ta thấy $x^{3m} - 1$ và $x^{3n} - 1$ chia hết cho $x^3 - 1$, do đó chia hết cho $x^2 + x + 1$.
Vậy $x^{3m+1} + x^{3n+2} + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ với mọi số tự nhiên m, n. □

Ví dụ 9. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên m, n thì

$$x^{6m+4} + x^{6n+2} + 1 \text{ chia hết cho } x^2 - x + 1.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} x^{6m+4} + x^{6n+2} + 1 &= x^{6m+4} - x^4 + x^{6n+2} - x^2 + x^4 + x^2 + 1 \\ &= x^4(x^{6m} - 1) + x^2(x^{6n} - 1) + (x^4 + x^2 + 1). \end{aligned}$$

Do $x^{6m} - 1 \,\vdots\, x^6 - 1$, $x^{6n} - 1 \,\vdots\, x^6 - 1$ và

$$x^6 - 1 = (x^3 + 1)(x^3 - 1) \,\vdots\, x^2 - x + 1;$$
$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 \,\vdots\, x^2 - x + 1.$$

Nên suy ra điều cần chứng minh. □

3. Cách 3.

Sử dụng các biến đổi tương đương, chẳng hạn để chứng minh $f(x) \,\vdots\, g(x)$, có thể chứng minh $f(x) + g(x) \,\vdots\, g(x)$ hoặc $f(x) - g(x) \,\vdots\, g(x)$.
Xem bài tập 268.

4. Cách 4.

Chứng tỏ rằng mọi nghiệm của đa thức chia đều là nghiệm của đa thức bị chia (ta công nhận rằng điều này dẫn đến đa thức bị chia chia hết cho đa thức chia).

Ví dụ 10. Cho $f(x) = (x^2 + x - 1)^{10} + (x^2 - x + 1)^{10} - 2$. Chứng minh rằng $f(x)$ chia hết cho $x^2 - x$.

Lời giải.
Đa thức chia có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$. Ta sẽ chứng tỏ rằng $x = 0$ và $x = 1$ cũng là nghiệm của đa thức bị chia.
Ta có $f(0) = 1 + 1 - 2 = 0$ nên $f(x)$ chia hết cho x. Ta lại có $f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$ nên $f(x)$ chia hết cho $x - 1$. Các nhân tử x và $x - 1$ không chứa nhân tử chung.
Do đó $f(x)$ chia hết cho $x(x - 1)$. □

IV. Bài tập

Bài 1. Không đặt tính chia đa thức, hãy xét xem đa thức $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$ có hay không chia hết cho

a) $x + 1$;

b) $x - 3$.

Lời giải.

a) Có;

b) Không.

□

Bài 2. Tìm dư khi chia các đa thức sau

a) $x^{41} : (x^2+1)$;

b) $x^{43} : (x^2+1)$.

Lời giải.

a) $x^{41} = x^{41} - x + x = x(x^{40}-1) + x$. Ta thấy $x^{40} - 1 = (x^4)^{10} - 1$ nên chia hết cho $x^4 - 1$, do đó chia hết cho x^2+1.

b) Dư $-x$.

□

Bài 3. Tìm dư khi chia $x + x^3 + x^9 + x^{27}$ cho

a) $x - 1$;

b) $x^2 + 1$.

Lời giải.

a) Dư 4;

b) Dư $4x$.

□

Bài 4. Tìm dư khi chia $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7$ cho

a) $x + 1$;

b) $x^2 + 1$.

Lời giải.

a) $r = f(-1) = -1 - 1 - 1 + 7 = 3$. Dư 3.

b) $x^{99} + x^{55} + x^{11} + x + 7 = x(x^{98}+1) + x(x^{54}+1) + x(x^{10}+1) - 2x + 7$.
Chú ý rằng $(x^2)^{49} + 1$, $(x^2)^{27} + 1$, $(x^2)^{25} + 1$ chia hết cho $x^2 + 1$ (theo hằng đẳng thức 9). Như vậy dư cần tìm là $-2x + 7$.

□

Bài 5. Tìm dư khi chia đa thức $f(x) = x^{50} + x^{49} + \ldots + x^2 + x + 1$ cho $x^2 - 1$.
Lời giải.
Gọi thương khi chia $f(x)$ cho $x^2 - 1$ là $Q(x)$, dư là $ax + b$. Ta có

$$f(x) = (x^2-1) \cdot Q(x) + ax + b.$$

Đẳng thức trên đúng với mọi x. Lần lượt cho $x = 1$ và $x = -1$.
Đáp: Dư khi chia $f(x)$ cho $x^2 - 1$ là $25x + 26$. □

Bài 6. Tìm đa thức $f(x)$, biết rằng $f(x)$ chia cho $x - 3$ thì dư 7, $f(x)$ chia cho $x - 2$ thì dư 5, $f(x)$ chia cho $(x-2)(x-3)$ thì được thương là $3x$ và còn dư.
Lời giải.
Trước hết ta tìm dư khi chia $f(x)$ cho $(x-2)(x-3)$. Xét

$$f(x) = (x-3) \cdot A(x) + 7, \quad (1)$$
$$f(x) = (x-2) \cdot B(x) + 5. \quad (2)$$

Cách 1. Xét

$$f(x) = 3x(x-2)(x-3) + ax + b. \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) bằng cách cho $x = 2$, $x = 3$ ta tìm được $a = 2$, $b = 1$. Dư của phép chia$f(x)$ cho $(x-2)(x-3)$ là $2x+1$.
Do đó $f(x) = 3x(x-2)(x-3) + 2x + 1 = 3x^3 - 15x^2 + 20x + 1$.
Cách 2. Từ (1) suy ra

$$(x-2)f(x) = (x-2)(x-3)\cdot A(x) + 7(x-2).. \tag{4}$$

Từ (2) suy ra

$$(x-3)f(x) = (x-2)(x-3)\cdot B(x) + 5(x-3). \tag{5}$$

Lấy (4) trừ (5) được $f(x) = (x-2)(x-3)\left[A(x) - B(x)\right] + 2x + 1$.
Dư khi chia $f(x)$ cho $(x-2)(x-3)$ là $2x+1$. Giải tiếp như cách 1. □

Bài 7. Tìm đa thức $f(x)$, biết rằng $f(x)$ chia cho $x-3$ thì dư 2, $f(x)$ chia cho $x+4$ thì dư 9, còn $f(x)$ chia cho x^2+x-12 thì được thương là x^2+3 và còn dư.
Lời giải.
Đáp số: $x^4 + x^3 - 9x^2 + 2x - 31$. □

Bài 8. Khi chia đơn thức x^8 cho $x + \dfrac{1}{2}$ thì được thương là $B(x)$ và dư là số r_1. Khi chia $B(x)$ cho $x + \dfrac{1}{2}$, ta được thương là $C(x)$ và dư là số r_2. Tính r_2.
Lời giải.
Đặt $-\dfrac{1}{2} = a$, ta có $x^8 = (x-a)\cdot B(x) + r_1$.
Cho $x = a$ thì $r_1 = a^8$, do đó

$$x^8 - a^8 = (x-a)\cdot B(x)$$

nên

$$B(x) = \frac{x^8 - a^8}{x-a} = (x^4+a^4)(x^2+a^2)(x+a).$$

Ta có

$$(x^4+a^4)(x^2+a^2)(x+a) = (x-a)\cdot C(x) + r_2.$$

Cho $x = a$, ta được $2a^4 \cdot 2a^2 \cdot 2a = r_2$ nên $r_2 = 8a^7$.
Thay $a = -\dfrac{1}{2}$, ta được $r_2 = -\dfrac{1}{16}$. □

Bài 9. Chứng minh rằng

a) $x^{50} + x^{10} + 1$ chia hết cho $x^{20} + x^{10} + 1$;

b) $x^2 - x^9 - x^{1945}$ chia hết cho $x^2 - x + 1$;

c) $x^{10} - 10x + 9$ chia hết cho $(x-1)^2$;

d) $8x^9 - 9x^8 + 1$ chia hết cho $(x-1)^2$.

Lời giải.

a) Thêm bớt x^{20} vào đa thức bị chia.

b) Biến đổi $x^2 - x^9 - x^{1945} = (x^2 - x + 1) - (x^9 + 1) - (x^{1945} - x)$.

c) $x^{10} - 10x + 9 = (x^{10} - 1) - 10(x-1) = (x-1)(x^9 + x^8 + x^7 + \ldots + x + 1 - 10)$.
Biểu thức trong dấu ngoặc thứ hai bằng $(x^9 - 1) + (x^8 - 1) + \ldots + (x-1)$, chia hết cho $x - 1$.

d) Ta có

$$\begin{aligned} 8x^9 - 9x^8 + 1 &= 8(x^9 - 1) - 9(x^8 - 1) \\ &= (x-1)\left[8(x^8 + x^7 + \ldots + x + 1) - 9(x^7 + x^6 + \ldots + x + 1)\right]. \end{aligned}$$

Biểu thức trong dấu ngoặc vuông bằng

$$8x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1,$$

chia hết cho $x - 1$ vì tổng các hệ số bằng 0.

□

Bài 10. Chứng minh rằng $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ với

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{99} + x^{88} + x^{77} + \ldots + x^{11} + 1; \\ g(x) &= x^9 + x^8 + x^7 + \ldots + x + 1. \end{aligned}$$

Lời giải.
Trước hết chứng minh rằng $f(x) - g(x)$ chia hết cho $g(x)$. Ta có

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^{99} - x^9 + x^{88} - x^8 + \ldots + x^{11} - x \\ &= x^9(x^{90} - 1) + x^8(x^{80} - 1) + \ldots + x(x^{10} - 1). \end{aligned}$$

Các biểu thức trong dấu ngoặc đều chia hết cho $x^{10} - 1$ mà $x^{10} - 1$ chia hết cho $g(x)$. □

Bài 11. Chứng minh rằng đa thức $(x+y)^6 + (x-y)^6$ chia hết cho đa thức $x^2 + y^2$.
Lời giải.
$(x+y)^6 + (x-y)^6 = [(x+y)^2]^3 + [(x-y)^2]^3$ chia hết cho $(x+y)^2 + (x-y)^2$, tức là chia hết cho $2(x^2 + y^2)$, do đó chia hết cho $x^2 + y^2$. □

Bài 12. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n

a) $(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ chia hết cho $x(x+1)(2x+1)$;

b) $x^{4n+2} + 2x^{2n+1} + 1$ chia hết cho $(x+1)^2$;

c) $(x+1)^{4n+2} + (x-1)^{4n+2}$ chia hết cho $x^2 + 1$.

Lời giải.

a) Chứng minh rằng mọi nghiệm của đa thức chia đều là nghiệm của đa thức bị chia.

b) Đa thức chia bằng $(x^{2n+1} + 1)^2$, chia hết cho $(x+1)^2$.

c) $(x+1)^{4n+2} + (x-1)^{4n+2} = [(x+1)^2]^{2n+1} + [(x-1)^2]^{2n+1}$ chia hết cho $(x+1)^2 + (x-1)^2$, tức là chia hết cho $2(x^2 + 1)$.

□

Bài 13. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $(x^n - 1)(x^{n+1} - 1)$ chia hết cho $(x+1)(x-1)^2$.
Lời giải.
Vì n và $n+1$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên có một số chẵn và một số lẻ. Đa thức bị chia có dạng

$$\begin{aligned} (x^{2k} - 1)(x^{2k+1} - 1) &= (x^2 - 1) \cdot A(x) \cdot (x - 1) \cdot B(x) \\ &= (x+1)(x-1)^2 \cdot A(x) \cdot B(x). \end{aligned}$$

□

Bài 14. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên m, n thì $x^{6m+4}+x^{6n+2}+1$ chia hết cho x^4+x^2+1.
Lời giải.
Trước hết, ta chứng minh $x^{6m+4}+x^{6n+2}+1$ chia hết cho x^2+x+1. Giải tương tự như ví dụ 58. Đa thức $x^{6m+4}+x^{6n+2}+1$ chia hết cho x^2+x+1 và chia hết cho x^2+x+1, hai đa thức này không có nhân tử chung bậc nhất. Do đó $x^{6m+4}+x^{6n+2}+1$ chia hết cho tích $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$, tức là chia hết cho x^4+x^2+1. □

Bài 15. Tìm số tự nhiên n sao cho $x^{2n}+x^n+1$ chia hết cho x^2+x+1.
Lời giải.
Xét $n=3k$, $n=3k+1$ và $n=3k+2$. Trong trường hợp đầu, số dư phép chia bằng 3. Trong hai trường hợp sau, số dư phép chia bằng 0. Vậy số cần tìm n không chia hết cho 3. □

Bài 16. Xác định số k để đa thức $A=x^3+y^3+x^3+kxyz$ chia hết cho đa thức $x+y+z$.
Lời giải.
Gọi thương khi chia đa thức A cho $x+y+z$ là Q, ta có

$$x^3+y^3+z^3+kxyz=(x+y+z)\cdot Q.$$

Đẳng thức trên đúng với mọi x, y, z nên với $x=1$, $y=1$, $z=-2$ ta có

$$1+1+(-2)^3+k(-2)=(1+1-2)\cdot Q \Rightarrow -6-2k=0 \Rightarrow k=-3.$$

Với $k=-3$, ta có $x^3+y^3+z^3-3xyz$ chia hết cho $x+y+z$ (thương bằng $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$). Vậy $k=-3$. □

Bài 17. Cho đa thức $f(x)$ có các hệ số nguyên. Biết rằng $f(0)$, $f(1)$ là các số lẻ. Chứng minh rằng đa thức $f(x)$ không có nghiệm nguyên.
Lời giải.
Giả sử a là nghiệm nguyên của $f(x)$. Với mọi x, ta có $f(x)=(x-a)\cdot Q(x)$, trong đó $Q(x)$ là đa thức có hệ số nguyên, do đó

$$f(0)=-a\cdot Q(0);\ f(1)=(1-a)\cdot Q(1).$$

Do $f(0)$ là số lẻ nên a là số lẻ, do $f(1)$ là số lẻ nên $1-a$ là số lẻ, mâu thuẫn với nhau. □