MỤC LỤC

CHUYÊN ĐỀ 1. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Định nghĩa đạo hàm, vi phân

— Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm x_0 thuộc khoảng đó, đặt $\Delta x = x - x_0$ là số gia của biến số và $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ là số gia của hàm số. Đạo hàm của f tại x_0 là $f'(x_0) = y'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (hữu hạn).

— Vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 ứng với số gia Δx được ký hiệu $\mathrm{d}f(x_0)$ là $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ hay $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x = y'\mathrm{d}x$.

— Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì liên tục tại x_0.

Công thức và quy tắc

— $y = c \Rightarrow y' = 0$, $y = x \Rightarrow y' = 1$.

— $y = x^n \Rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$.

— $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$.

— $y = \sqrt[n]{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{n\sqrt{x^n}}$.

— $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$.

— $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$.

— $y = \tan x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

— $y = \cot x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$.

— $y = \arcsin x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

— $y = \arccos x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

— $y = \arctan x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

— $y = \operatorname{arccot} x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$.

— $(u + v)' = u' + v'$.

— $(u - v)' = u' - v'$.

— $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

— $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

— Hàm hợp $[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x)$.

— Hàm ngược $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

Đạo hàm cấp n

— Định nghĩa: $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$.

— Ta có $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$.

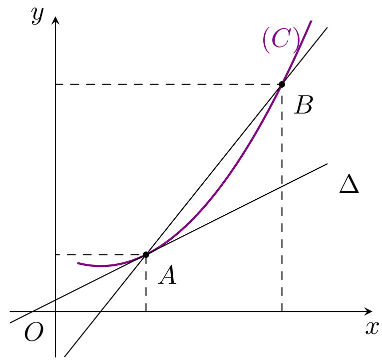
— Ý nghĩa cơ học: Chuyển động $s = s(t)$ có vận tốc tại điểm t_0 là $v(t_0) = s'(t_0)$, gia tốc tại điểm t_0 là $a(t_0) = v'(t_0) = s''(t_0)$.

Tiếp tuyến và tiếp xúc

—

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc k của tiếp tuyến của đồ thị tại điểm x_0 hay $k = f'(x_0)$.
Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$



— Tiếp tuyến đi qua điểm $K(a; b)$: Lập phương trình tiếp tuyến tại x_0 rồi cho tiếp tuyến đi qua điểm $K(a; b)$ thì tìm ra x_0.

— Điều kiện tiếp xúc của hai đồ thị $f(x)$ và $g(x)$ là hệ $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm. Nghiệm chung x_0 là hoành độ tiếp điểm.

Tính gần đúng

Ta có $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

Quy tắc L'Hospital

— Giả sử hai hàm số f và g liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa x_0, có đạo hàm trên $(a; b) \setminus \{x_0\}$ và có $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Khi đó $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

— Đặc biệt rằng $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

B. CÁC BÀI TOÁN

Bài 1. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của mỗi hàm số tại x_0 sau.

① $y = \dfrac{3x + 1}{x - 2}$, $x_0 = 3$. ② $y = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = \dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

① Cho $x_0 = 3$ số gia Δx thì $\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) = \dfrac{3(3 + \Delta x) + 1}{(3 + \Delta x) - 2} - \dfrac{10}{1} = \dfrac{-7\Delta x}{1 + \Delta x}$.

Ta có $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-7}{1 + \Delta x} = -7$. Vậy $f'(3) = -7$.

② Cho $x_0 = \dfrac{1}{8}$ số gia Δx thì ta có

$$\Delta y = f\left(\frac{1}{8} + \Delta x\right) - f\left(\frac{1}{8}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{8} + \Delta x} - \frac{1}{2} = \frac{\Delta x}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8} + \Delta x\right)^2} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{8} + \Delta x} + \frac{1}{4}}.$$

Ta có $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8} + \Delta x\right)^2} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{8} + \Delta x} + \frac{1}{4}} = \dfrac{1}{3 \cdot \frac{1}{4}} = \dfrac{4}{3}$. Vậy $f'\left(\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{4}{3}$.

□

Bài 2. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của mỗi hàm số sau.

① $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

② $y = x^n$ với n nguyên dương.

Lời giải.

① Với mọi x thuộc khoảng $(-\infty; 1)$, ta có

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1+x+\Delta x}{\sqrt{1-x-\Delta x}} - \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}\\ &= \frac{(1+x+\Delta x)\sqrt{1-x} - (1+x)\sqrt{1-x-\Delta x}}{\sqrt{1-x-\Delta x}\cdot\sqrt{1-x}}\\ &= \frac{(1+x)(\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x-\Delta x}) + \Delta x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x-\Delta x}\cdot\sqrt{1-x}}\\ &= \frac{(1+x)\dfrac{\Delta x}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x-\Delta x}} + \Delta x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x-\Delta x}\cdot\sqrt{1-x}}.\end{aligned}$$

Ta có $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1+x+\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x-\Delta x})}{\sqrt{1-x-\Delta x}\cdot\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x-\Delta x})} = \dfrac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$.

Vậy $y' = \dfrac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$, với $x < 1$.

② Với mọi $x \in \mathbb{R}$, cho số gia Δx, ta có

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n = \mathrm{C}_n^1 x^{n-1}\Delta x + \mathrm{C}_n^2 x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} x\Delta x^{n-1} + \Delta x^n.$$

Ta có $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\mathrm{C}_n^1 x^{n-1} + \mathrm{C}_n^2 x^{n-2}\Delta x + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} x\Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1}\right) = \mathrm{C}_n^1 x^{n-1} = nx^{n-1}$.

Vậy $y' = nx^{n-1}$.

□

Bài 3. Chứng minh các hàm số sau liên tục tại $x = 0$ nhưng không có đạo hàm tại đó.

① $y = f(x) = \sqrt{|x|}$.

② $y = f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$.

Lời giải.

① Ta có $f(0) = 0$, $\lim x \to 0\sqrt{|x|} = 0 = f(0)$ nên f liên tục tại $x = 0$.

Cho $x = 0$ số gia Δx, ta có $f(0+\Delta x) - f(0) = \sqrt{|\Delta x|}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{|\Delta x|}} = +\infty$.

Vậy không tồn tại đạo hàm tại $x = 0$.

② Ta có $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x+1} = 0 = f(0)$ nên f liên tục tại $x = 0$.

Cho $x = 0$ số gia Δx thì $\Delta y = \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x+1} - 0 = \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x+1}$.

Ta có $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{-1}{\Delta x+1} = -1$ và $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{1}{\Delta x+1} = 1 \neq \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Vậy f không có đạo hàm tại $x = 0$.

□

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Chứng minh f liên tục và có đạo hàm tại $x = 0$.

Lời giải.

$f(x) - f(0) = \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2-x-2\sqrt{1-x}}{2x} = \dfrac{(2-x)^2-4(1-x)}{2x(2-x+2\sqrt{1-x})} = \dfrac{x}{2x(2-x+2\sqrt{1-x})}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2x(2-x+2\sqrt{1-x})} = \dfrac{1}{8}$.

Vậy tồn tại $f'(0) = \dfrac{1}{8}$ nên f liên tục và có đạo hàm tại $x = 0$ □

Bài 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Chứng minh f liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ và $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x} = 0$ vì $\begin{cases} \left|x^2 \sin \dfrac{1}{x}\right| \leq x^2 \\ \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0. \end{cases}$

Nên $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$, do đó f liên tục tại $x = 0$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Khi $x \neq 0$ thì $f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos x$. Ta tính f' tại $x = 0$. Ta có

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2 \sin \dfrac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

Từ đó $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ vì $\left|\Delta x \sin \dfrac{1}{\Delta x}\right| \leq \Delta x \to 0$ nên $f'(0) = 0$.

Vậy $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. □

Bài 6. Tìm a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & \text{khi } x \leq 0 \\ x^2 + ax + b & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 0$. Khi đó tính $f'(0)$.

Lời giải.

Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$ thì liên tục tại $x = 0$ nên

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} (x^2 + ax + b) = -2 \Rightarrow b = -2.$$

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+ax}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} (x+a) = a \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0. \end{cases}$

Suy ra điều kiện tồn tại đạo hàm tại $x = 0$ là $a = 0$ và $b' = 2$, khi đó $f'(0) = 0$. □

Bài 7. Tính đạo hàm của các hàm số sau.

① $y = \dfrac{x^5}{a} - \dfrac{3x^2}{a} + abx$ $(a,\, b \in \mathbb{R})$. ② $y = (x-1)(x+2)(x-3)$.

Lời giải.

① Ta có $y = \dfrac{1}{a} \cdot x^5 - \dfrac{3}{a} \cdot x^2 + abx$, tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{a} \cdot 5x^4 - \dfrac{3}{a} \cdot 2x + ab = \dfrac{5}{a}x^4 - \dfrac{6}{a}x + ab$.

② Ta có

$$\begin{aligned} y' &= (x-1)'(x+2)(x-3) + (x-1)(x+2)'(x-3) + (x-1)(x+2)(x-3)' \\ &= (x+2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x+2) = 3x^2 - 4x - 5. \end{aligned}$$

□

Bài 8. Tính đạo hàm các hàm số sau.

① $y = \dfrac{5x-3}{x^2+x+1}$. ② $y = \dfrac{1}{(x^2-x+1)^5}$.

Lời giải.

① Ta có $y' = \dfrac{5(x^2+x+1) - (5x-3)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{-5x^2+6x+8}{(x^2+x+1)^2}$.

② Đặt $u = x^2 - x + 1$ thì $y = \dfrac{1}{u^5}$. Ta có $y' = \dfrac{-(u^5)'}{(u^5)^2} = \dfrac{-5u^4 \cdot u'}{u^{10}} = \dfrac{-5u'}{u^6} = \dfrac{-5(2x-1)}{(x^2-x+1)^6}$.

□

Bài 9. Với a, b, c, d, a', b', c' là các hằng số thực, tính đạo hàm của các hàm số sau.

① $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. ② $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$.

Lời giải.

① $y' = \dfrac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

② Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2ax+b)(a'x^2+b'x+c') - (ax^2+bx+c)(2a'x+b')}{(a'x^2+b'x+c')^2} \\ &= \frac{(ab'-a'b)x^2 + 2(ac'-a'c)x + bc' - b'c}{(a'x^2+b'x+c')^2}. \end{aligned}$$

□

Bài 10. Tính đạo hàm các hàm số

① $y = (x-x^2)^{32}$. ② $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

Lời giải.

① $y' = 32(x-x^2)^{31} \cdot (x-x^2)' = 32(x-x^2)^{31} \cdot (1-2x)$.

② Ta có

$$\begin{aligned} y' &= 1\cdot(x+2)^2(x+3)^3+(x+1)\cdot 2(x+2)(x+3)^2+(x+1)(x+2)^2\cdot 3(x+3)^2\\ &= (x+2)(x+3)^2[(x+2)(x+3)+2(x+1)(x+1)+3(x+1)(x+2)]\\ &= (x+2)(x+3)^2[x^2+5x+6+2(x^2+2x+1)+3(x^2+3x+2)]\\ &= (x+2)(x+3)^2(6x^2+22x+18)=2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9). \end{aligned}$$

□

Bài 11. Tính đạo hàm của mỗi hàm số.

① $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$.

② $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, a là hằng số.

Lời giải.

① Ta có $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}=\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}$, nên

$$y'=\frac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)'}{2\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}}=\frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}}=\frac{x^2-1}{2\sqrt{x^3(x^2+1)}}.$$

② $y'=\dfrac{1\cdot\sqrt{a^2-x^2}-x\dfrac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2}=\dfrac{(a^2-x^2)+x^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}=\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$.

□

Bài 12. Tính đạo hàm các hàm số sau.

① $y=\sqrt{1+\sqrt{x}}$.

② $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

Lời giải.

① $y'=\dfrac{(1+\sqrt{x})'}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}=\dfrac{1}{4\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

② Ta có $y^3=\dfrac{1-x}{1+x}$, nên lấy đạo hàm hai vế ta được $3y^2\cdot y'=\dfrac{-2}{(1+x)^2}$.

Do đó $y'=\dfrac{-2}{3y^2(1+x)^2}=\dfrac{-2}{3\sqrt[3]{\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}(1+x)^2}=\dfrac{-2}{3\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)^4}}$.

□

Bài 13. Tính đạo hàm của các hàm số sau.

① $y=\cos\sqrt{2x+1}-\cot^3 x$.

② $y=2\sin 3x\cdot\cos 5x$.

Lời giải.

① Ta có $y'=-\sin(\sqrt{2x+1})\cdot(\sqrt{2x+1})'-3\cot^2 x(\cot x)'=\dfrac{-\sin(\sqrt{2x+1})}{\sqrt{2x+1}}+3\dfrac{\cot^2 x}{\sin^2 x}$.

② Ta có $y=\sin 8x-\sin 2x$ nên $y'=8\cos 8x-2\cos 2x$.

□

Bài 14. Tính đạo hàm các hàm số

① $y = \dfrac{1}{|\sin x|}$. ② $y = \sqrt{1 + \tan\left(x + \dfrac{1}{x}\right)}$.

Lời giải.

① Ta có $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^2 x}}$ nên $y' = \dfrac{-\left(\sqrt{\sin x}\right)'}{\sin^2 x} = \dfrac{-2\sin x\cos x}{\sin^2 x\sqrt{\sin^2 x}} = \dfrac{-\cot x}{|\sin x|}$.

② Ta có $y' = \dfrac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{2\cos^2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\sqrt{1 + \tan\left(x + \dfrac{1}{x}\right)}} = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2\cos^2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\sqrt{1 + \tan\left(x + \dfrac{1}{x}\right)}}$.

□

Bài 15. Tính đạo hàm của các hàm số sau.

① $y = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$. ② $y = \sin^n x \cdot \cos nx$, $n \geq 2$.

Lời giải.

① Ta có

$$\begin{aligned}
y' &= \cos(\cos^2 x) \cdot (\cos^2 x)' \cdot \cos(\sin^2 x) + \sin(\cos^2 x) \cdot (-\sin(\sin^2 x)) \cdot (\sin^2 x)' \\
&= -2\sin x\cos x \cdot \cos(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x) - 2\sin x\cos x \cdot \sin(\cos^2 x) \cdot \sin(\sin^2 x) \\
&= -\sin 2x[\cos(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x) + \sin(\cos^2 x) \cdot \sin(\sin^2 x)] \\
&= -\sin 2x \cdot \cos(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\sin 2x \cdot \cos(\cos 2x).
\end{aligned}$$

② Ta có

$$\begin{aligned}
y' &= n\sin^{n-1} x \cdot \cos x \cdot \cos nx + \sin^n x \cdot (-\sin nx) \cdot n \\
&= n\sin^{n-1} x(\cos x \cdot \cos nx - \sin x \cdot \sin nx) \\
&= n\sin^{n-1} x \cdot \cos[(n+1)x].
\end{aligned}$$

□

Bài 16. Tính đạo hàm của các hàm số sau.

① $y = \arcsin(4x^2 - 7)$. ② $y = \operatorname{arccot}\sqrt{1 - 3x}$.

Lời giải.

① $y = \arcsin(4x^2 - 7) \Rightarrow y' = \dfrac{(4x^2 - 7)'}{\sqrt{1 - (4x^2 - 7)^2}} = \dfrac{8x}{\sqrt{56x^2 - 16x^4 - 48}}$.

② $y = \operatorname{arccot}\sqrt{1 - 3x} \Rightarrow y' = \dfrac{-(\sqrt{1 - 3x})'}{1 + (1 - 3x)^2} = \dfrac{3}{2(2 - 6x + 9x^2)\sqrt{1 - 3x}}$.

□

Bài 17. Tính vi phân của các hàm số sau.

① $y = x + \sqrt{2 - x^2}$.

② $y = \dfrac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$.

Lời giải.

① $y' = 1 - \dfrac{2x}{2\sqrt{2 - x^2}} = \dfrac{\sqrt{2 - x^2} - x}{\sqrt{2 - x^2}} \Rightarrow \mathrm{d}y = \dfrac{\sqrt{2 - x^2} - x}{\sqrt{2 - x^2}}\mathrm{d}x$.

② Ta có

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(-4x - 2)(x^2 + x + 1)^2 - (-2x^2 - 2x + 1)2(x^2 + x + 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^4} \\ &= \frac{-2(2x + 1)(x^2 + x + 1) - 2(-2x^2 - 2x + 1)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^3} = \frac{2(2x + 1)(x^2 + x - 2)}{(x^2 + x + 1)^3} \end{aligned}$$

Suy ra $\mathrm{d}y = \dfrac{2(2x + 1)(x^2 + x - 2)}{(x^2 + x + 1)^3}\mathrm{d}x$.

□

Bài 18. Tính vi phân của các hàm số sau.

① $y = \cos(\cos x)$.

② $y = \dfrac{1}{(1 + \tan x)^2}$.

Lời giải.

① Ta có $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = -\sin(\cos x) \cdot (\cos x)'\mathrm{d}x = \sin x \cdot \sin(\cos x)\mathrm{d}x$.

② Ta có $\mathrm{d}y = \dfrac{-2(1 + \tan x) \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}}{(1 + \tan x)^4}\mathrm{d}x = \dfrac{-2}{\cos^2 x(1 + \tan x)^3}\mathrm{d}x$.

□

Bài 19. Cho hai hàm f và g có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Tính đạo hàm của hàm số hợp.

① $y = f(x^3) - g(x^2)$.

② $y = \sqrt{f^2(x) + g^3(x^2)}$.

Lời giải.

① $y' = f'(x^3) \cdot (x^3)' - g'(x^2) \cdot (x^2)' = 3x^2 \cdot f'(x^3) - 2x \cdot g'(x^2)$.

② $y' = \dfrac{(f^2(x) + g^3(x^2))'}{2\sqrt{f^2(x) + g^3(x^2)}} = \dfrac{2f(x) \cdot f'(x) + 6x \cdot g^2(x^2) \cdot g'(x^2)}{2\sqrt{f^2(x) + g^3(x^2)}}$.

□

Bài 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Chứng minh

① Nếu f chẵn thì f' lẻ.

② Nếu f lẻ thì f' chẵn.

Lời giải.

1. Nếu f chẵn trên $\mathbb{R}$ thì với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$. Lấy đạo hàm hai vế, ta được

$$f'(-x) \cdot (-x)' = f'(x) \Leftrightarrow -f'(-x) = f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = -f'(x).$$

Vậy f' lẻ.

2. Nếu f lẻ trên $\mathbb{R}$ thì với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$. Lấy đạo hàm hai vế, ta được

$$f'(-x) \cdot (-x)' = -f'(x) \Leftrightarrow -f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = f'(x).$$

Vậy f' chẵn.

□

Bài 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm với mọi x và thỏa mãn

1. $f^2(1+2x) = x - f^3(1-x)$. Tính $f'(1)$.
2. $2f(x) = 1 + x \cdot f^3(x)$. Tính đạo hàm tại điểm $M(1;1)$.

Lời giải.

1. Lấy đạo hàm hai vế, ta có $4f(1+2x) \cdot f'(1+2x) = 1 + 3f^2(1-x) \cdot f'(1-x)$.
Thay $x = 0$ vào, ta được $4f(1) \cdot f'(1) = 1 + 3f^2(1) \cdot f'(1)$.
Thay $x = 0$ vào $f^2(1+2x) = x - f^3(1-x)$, thì ta được

$$f^2(1) = -f^3(1) \Leftrightarrow f^2(1)\left[1 + f(1)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(1) = -1. \end{array}\right.$$

— Với $f(1) = 0$ thì từ $4f(1) \cdot f'(1) = 1 + 3f^2(1) \cdot f'(1)$ thì $0 = 1$ (loại).

— Với $f(1) = -1$ thì từ $4f(1) \cdot f'(1) = 1 + 3f^2(1) \cdot f'(1) \Leftrightarrow -4f'(1) = 1 + 3f'(1) \Rightarrow f'(1) = \dfrac{-1}{7}$.

2. Lấy đạo hàm hai vế, ta có $2f'(x) = f^3(x) + 3xf^2(x) \cdot f'(x)$.
Thế $x = 1$ và ta có $f(1) = 1$ nên $2f'(1) = 1 + 3f'(1) \Rightarrow f'(1) = -1$.

□

Bài 22. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm với mọi $x \in \mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2x) = 4\cos x \cdot f(x) - 2x$. Tính $f'(0)$.

Lời giải.
Đạo hàm hai vế, ta có $2f'(2x) = -4\sin x \cdot f(x) + 4\cos x \cdot f'(x) - 2$.
Thay $x = 0$, ta có $2f'(0) = 4f'(0) - 2 \Leftrightarrow f'(0) = 1$. Vậy $f'(0) = 1$. □

Bài 23. Chứng minh các hàm số sau có đạo hàm $y' = 0$.

1. $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$.
2. $y = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x$.

Lời giải.

1. Ta có

$$y' = 6\sin^5 x \cos x - 6\cos^5 x \sin x + 6\sin x \cos^3 x - 6\cos x \sin^3 x$$

$$
\begin{aligned}
&= 6\sin x\cos x\left[(\sin^4 x-\cos^4 x)+(\cos^2 x-\sin^2 x)\right]\\
&= 3\sin 2x\left[(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)+(\cos^2 x-\sin^2 x)\right]=0.
\end{aligned}
$$

Ngoài ra có thể biến đổi $y=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3=1$, từ đó $y'=0$.

② Ta có

$$
\begin{aligned}
y' &= 2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\\
&\quad +2\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)-2\cos\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)-4\sin x\cos x\\
&= \left[\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)\right]+\left[\sin\left(\frac{4\pi}{3}-2x\right)-\sin\left(\frac{4\pi}{3}+2x\right)\right]-2\sin 2x\\
&= 2\cos\frac{2\pi}{3}\sin(-2x)+2\cos\frac{4\pi}{3}\sin(-2x)-2\sin 2x\\
&= -2\frac{-1}{2}\cdot\sin 2x-2\cdot\frac{-1}{2}\sin 2x-2\sin 2x=0.
\end{aligned}
$$

□

Bài 24. Giải phương trình $y'=0$ với hàm số

① $y=\dfrac{x^2-3x+4}{x^2-x+1}$. ② $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{2x+1}$.

Lời giải.

① Ta có $x^2-x+1>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Ta có

$$y'=\frac{(2x-3)(x^2-x+1)-(x^2-3x+4)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}=\frac{2x^2-6x+1}{(x^2-x+1)^2}.$$

Khi $y'=0\Leftrightarrow 2x^2-6x+1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{7}}{2}$.

② Vì $x^2-2x+3>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên điều kiện xác định của y là $x\neq\dfrac{-1}{2}$. Ta có

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+3}}(2x+1)-2\sqrt{x^2-2x+3}}{(2x+1)^2}=\frac{(x-1)(2x+1)-2(x^2-2x+3)}{(2x+1)^2\sqrt{x^2-2x+3}}\\
&= \frac{3x-7}{(2x+1)^2\sqrt{x^2-2x+3}}.
\end{aligned}
$$

Do đó $y'=0\Leftrightarrow 3x-7=0\Leftrightarrow x=\dfrac{7}{3}$ (nhận).

□

Bài 25. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$. Giải bất phương trình

① $f'(x)<0$. ② $f'(x)\le f(x)$.

Lời giải.

Hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$ có tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{(x^2-2x)'}{2\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$, $\forall x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

Điều kiện của các bất phương trình là $x<0$ hoặc $x>2$.

① $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1<0 \\ x^2-2x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0.$

② Bất phương trình $f'(x) \leq f(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \leq \sqrt{x^2-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>2 \end{array}\right. \\ x-1 \leq x^2-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \leq \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x \geq \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x \geq \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

□

Bài 26. Giải phương trình $y' = 0$ với hàm số

① $y = \cos^2 x + \sin x$.

② $y = 2x - \cos x - \sqrt{3}\sin x$.

Lời giải.

① Với $y = \cos^2 x + \sin x \Rightarrow y' = -2\cos x \sin x + \cos x = \cos x(1-2\sin x)$.

Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow \cos x(1-2\sin x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x = 0 & (1) \\ \sin x = \dfrac{1}{2}. & (2) \end{array}\right.$

— (1) $\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

— (2) $\Leftrightarrow \sin x = \sin\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

② Với $y = 2x - \cos x - \sqrt{3}\sin x \Rightarrow y' = 2 + \sin x - \sqrt{3}\cos x = 2 + 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

□

Bài 27. Tìm m để phương trình $y' = 0$ có nghiệm x với hàm số

① $y = (m-1)\sin x - (2m+3)x$.

② $y = (m+1)\sin x + m\cos x - (m+2)x + 1$.

Lời giải.

① Hàm số $y = (m-1)\sin x - (2m+3)x$ có $y' = (m-1)\cos x - (2m+3)$ nên

$$y' = 0 \Leftrightarrow (m-1)\cos x - (2m+3) = 0 \Leftrightarrow (m-1)\cos x = 2m+3.$$

- Với $m = 1$ ta có phương trình $0 \cdot \cos x = 5$, phương trình vô nghiệm (không thỏa mãn).
- Với $m \neq 1$, phương trình tương đương $\cos x = \dfrac{2m+3}{m-1}$.

Phương trình có nghiệm x khi và chỉ khi

$$\left|\frac{2m+3}{m-1}\right| \leq 1 \Leftrightarrow |2m+3| \leq |m-1| \Leftrightarrow (2m+3)^2 \leq (m-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 3m^2 - 14m + 8 \le 0 \Leftrightarrow -4 \le m \le -\frac{2}{3} \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy với $m \in \left[-4; -\frac{2}{3}\right]$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

② Hàm số $y = (m+1)\sin x + m\cos x - (m+2)x + 1$ có $y' = (m+1)\cos x - m\sin x - (m+2)$ nên

$$y' = 0 \Leftrightarrow (m+1)\cos x - m\sin x = m + 2.$$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$(m+1)^2 + (-m)^2 \ge (m+2)^2 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge 3. \end{array}\right.$$

□

Bài 28. Cho hàm số $f(x) = \frac{m-1}{4}x^4 + \frac{m-2}{3}x^3 - mx^2 + 3x - 1$. Giải và biện luận phương trình $f'(x) = 0$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = (m-1)x^3 + (m-2)x^2 - 2mx + 3 = (x-1)\left[(m-1)x^2 + (2m-3)x - 3\right]$. (1)

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ (m-1)x^2 + (2m-3)x - 3 = 0. \quad (2) \end{array}\right.$$

• Nếu $m = 1$, phương trình (2) trở thành $-x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x = 1$; $x = -3$.

• Nếu $m \ne 1$, phương trình (2) có $\Delta = (2m-3)^2 + 12(m-1) = 4m^2 - 3$.

Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} < m < \frac{\sqrt{3}}{2}$, phương trình (2) vô nghiệm. Khi đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, phương trình (2) có nghiệm kép. Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm kép.

Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ m > \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$, phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt.

— Nếu $m = \frac{7}{3}$ thì phương trình (2) có nghiệm $x = 1$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt và $x = 1$ là nghiệm kép.

— Nếu $m \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right) \setminus \left\{\frac{7}{3}\right\}$ thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1 nên phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

□

Bài 29. Cho hàm số $f(x) = -\frac{1}{2}\sin 2x - (2m-5)\cos x + 2(2-m)x + 1$. Giải và biện luận phương trình $f'(x) = 0$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -\cos 2x + (2m-5)\sin x + 2(2-m) = 2\sin^2 x + (2m-5)\sin x + 3 - 2m$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + (2m-5)\sin x + 3 - 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 1\\ \sin x = \dfrac{3-2m}{2}\end{array}\right..$$

— Nếu $\left[\begin{array}{l}\dfrac{3-2m}{2} < -1\\ \dfrac{3-2m}{2} > 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m > \dfrac{5}{2}\\ m < \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$ thì phương trình $\sin x = \dfrac{3-2m}{2}$ vô nghiệm. Do đó phương trình đã cho có các nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

— Nếu $\dfrac{3-2m}{2} = 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$ thì phương trình đã cho có các nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

— Nếu $-1 \le \dfrac{3-2m}{2} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < m \le \dfrac{5}{2}$ thì đặt $\dfrac{3-2m}{2} = \sin\alpha$. Khi đó phương trình đã cho có các nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = \alpha + k2\pi$, $x = \pi - \alpha + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

□

Bài 30. Tính giá trị đạo hàm tại điểm.

① Cho $y = (5x+1)^8$. Tính $y'''(0)$.

② Cho $y = \dfrac{3x-1}{x+2}$. Tính $y''(1)$.

Lời giải.

① Hàm số $y = (5x+1)^8$ có

$$\begin{aligned}y' &= 8(5x+1)^7 \cdot (5x+1)' = 40(5x+1)^7.\\ y'' &= 280(5x+1)^6 \cdot (5x+1)' = 1400(5x+1)^6.\\ y''' &= 8400(5x+1)^5 \cdot (5x+1)' = 42000(5x+1)^5.\end{aligned}$$

Vậy $y'''(0) = 42000(1)^5 = 42000$.

② Hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x+2}$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và

$$\begin{aligned}y' &= \frac{3(x+2)-(3x-1)}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}.\\ y'' &= -\frac{7\left((x+2)^2\right)'}{(x+2)^4} = -\frac{14(x+2)}{(x+2)^4} = -\frac{14}{(x+2)^3}.\end{aligned}$$

Vậy $y''(1) = -\dfrac{14}{(1+2)^3} = -\dfrac{14}{27}$.

□

Bài 31. Tính đạo hàm cấp cao

① Cho $y = \sin 5x \cdot \sin 3x$. Tính $y^{(4)}$.

② Cho $y = \sin^4 x$. Tính y'''.

Lời giải.

① Với $y = \sin 5x \cdot \sin 3x = -\dfrac{1}{2}(\cos 8x - \cos 3x) = \dfrac{1}{2}\cos 3x - \dfrac{1}{2}\cos 8x$, ta có

— $y' = -\sin 2x + 4\sin 8x$.

— $y'' = -2\cos 2x + 32\cos 8x$.

— $y''' = 4\sin 2x - 252\sin 8x$.

— $y^{(4)} = 8\cos 2x - 2048\cos 8x$.

② Với $y = \sin^4 x$, ta có

— $y' = 4\sin^3 x \cdot \cos x = 2\sin^2 x \cdot \sin 2x = (1 - \cos 2x) \cdot \sin 2x = \sin 2x - \dfrac{1}{2}\sin 4x$.

— $y'' = 2\cos 2x - 2\cos 4x$.

— $y''' = -4\sin 2x + 8\sin 4x$.

□

Bài 32. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^3\cos 2a + \dfrac{3x^2}{2}\sin 2a \cdot \sin 6a + x\sqrt{2a - 1 - a^2} + a^3$ (tham số a). Chứng minh rằng $f''\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0$.

Lời giải.
Điều kiện $2a - 1 - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a = 1$. Khi đó ta có hàm số

$$f(x) = x^4 - 2x^3\cos 2 + \frac{3x^2}{2}\sin 2 \cdot \sin 6 + 1.$$

Ta có

$$\begin{aligned} & f'(x) = 4x^3 - 6x^2\cos 2 + 3x\sin 2 \cdot \sin 6. \\ & f''(x) = 12x^2 - 12x\cos 2 + 3\sin 2 \cdot \sin 6 \\ \Rightarrow\ & f''\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - 6\cos 2 + 3\sin 2 \cdot \sin 6. \end{aligned}$$

Vì $\dfrac{\pi}{2} < 2 < \pi$ nên $\cos 2 < 0$, $\sin 2 \sin 6 \geq -1$ nên $f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > 0$. □

Bài 33. ① Chứng minh quy nạp $\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n \cdot n! \cdot a^n}{(ax+b)^{n+1}} (a \neq 0)$ $(*)$.

② Suy ra đạo hàm cấp n của hàm số $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = \dfrac{10x - 4}{x^3 - 4x}$.

Lời giải.

① Khi $n = 1$ thì $\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)' = \dfrac{-a}{(ax+b)^2} = \dfrac{(-1)^1 \cdot 1! \cdot a^1}{(ax+b)^{1+1}}$ đúng.
Giả sử công thức $(*)$ đúng với $n = k$, $k \geq 1$, tức là:

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k \cdot k! \cdot a^k}{(ax+b)^{k+1}}.$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(k+1)} = (-1)^k \cdot k! \cdot a^k \frac{-(k+1)(ax+b)^k \cdot a}{(ax+b)^{2k+2}} = \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k+1)! \cdot a^{k+1}}{(ax+b)^{k+1+1}}.$$

Nên công thức $(*)$ đúng với $n = k + 1$. Vậy công thức $(*)$ đúng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

② Xét hàm số $g(x) = -\dfrac{1}{x}$ có $g'(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Do đó

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \left(-\frac{1}{x}\right)^{(n+1)} = -\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+2}(n+1)!}{x^{n+2}}.$$

Ta có $\dfrac{10x-4}{x^3-4x} = \dfrac{10x-4}{x\left(x^2-4\right)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x+2}$, suy ra

$$\begin{aligned}10x-4 &= A(x^2-4) + B(x^2+2x) + C(x^2-2x)\\ &= (A+B+C)x^2 + 2(B-C)x - 4A.\end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số hai vế ta được $\begin{cases}A+B+C=0\\ 2(B-C)=10\\ -4A=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=1\\ B=2\\ C=-3.\end{cases}$

Do đó $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{3}{x+2}$.

Vậy $y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \left[\dfrac{1}{x^{n+1}} + \dfrac{2}{(x-2)^{n+1}} - \dfrac{3}{(x+2)^{n+1}}\right]$.

□

Bài 34. ① Chứng minh công thức $(\sin(ax+b))^{(n)} = a^n \cdot \sin\left(ax+b+n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

② Suy ra đạo hàm cấp n của hàm số

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x;\ y = \cos 3x \cdot \cos x.$$

Lời giải.

① Ta chứng minh $(\sin(ax+b))^{(n)} = a^n \cdot \sin\left(ax+b+n\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(*)$ bằng quy nạp.

Với $n=1$ ta có $(\sin(ax+b))' = a\cdot\cos(ax+b) = a\sin\left(ax+b+\dfrac{\pi}{2}\right)$ đúng.

Giả sử $(\sin(ax+b))^{(k)} = a^k \cdot \sin\left(ax+b+k\dfrac{\pi}{2}\right)$ với $k \geq 1$, lấy đạo hàm hai vế ta được

$$(\sin(ax+b))^{(k+1)} = a^k \cdot a \cdot \cos\left(ax+b+k\frac{\pi}{2}\right) = a^{k+1}\cdot\sin\left(ax+b+(k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Suy ra công thức $(*)$ đúng với $n = k+1$. Vậy $(*)$ đúng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

② Ta có

$$\begin{aligned}y &= \sin^4 x + \cos^4 x = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x\\ &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1-\cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x.\end{aligned}$$

Vậy $y^{(n)} = -(\sin 4x)^{(n-1)} = -4^{n-1}\sin\left(4x+(n-1)\dfrac{\pi}{2}\right)$. Ta có $y = \cos 3x\cdot\cos x = \dfrac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)$, suy ra

$$\begin{aligned}y^{(n)} &= -(2\sin 4x + \sin 2x)^{(n-1)}\\ &= -\left(2\cdot 4^{n-1}\sin\left(4x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right) + 2^{n-1}\sin\left(2x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[4^n\cos\left(4x+n\frac{\pi}{2}\right) + 2^n\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

□

Bài 35. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau đây

① $f(x) = (3x-2)^4$. ② $g(x) = \sqrt{x}$.

Lời giải.

① Hàm số $f(x) = (3x-2)^4$ có

— $f'(x) = 4(3x-2)^3 \cdot (3x-2)' = 12(3x-2)^3$.

— $f''(x) = 108(3x-2)^2$.

— $f'''(x) = 648(3x-2)$.

— $f^{(4)}(x) = 1944$.

— $f^{(n)}(x) = 0$, $\forall n \geq 5$.

② Ta có $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$; $g''(x) = -\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$; $g'''(x) = \dfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$; $g^{(4)} = -\dfrac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$.
Ta chứng minh quy nạp

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (2n-3)!!}{2^n} x^{\frac{2n-1}{2}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Trong đó $(2n-3)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)$, $\forall n \geq 2$ và $(-1)!! = 1$.

□

Bài 36. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x+9}{x^2+3}$. Hãy tính $f^{(1997)}(0)$.

Lời giải.
Ta có $f(x) = \dfrac{2x+9}{x^2+3} \Leftrightarrow (x^2+3)f(x) = 2x+9$, do đó

$$\begin{aligned}
&f'(x)\left(x^2+3\right) + 2xf(x) = 2\\
&f''(x)\left(x^2+3\right) + 4xf'(x) + 2f(x) = 0\\
&f'''(x)\left(x^2+3\right) + 6xf''(x) + 6f'(x) = 0.
\end{aligned}$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được công thức

$$f^{(n)}(x)\left(x^2+3\right) + 2nxf^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0, \forall n \geq 2.$$

Suy ra $f^{(n)}(0) = \dfrac{n(n-1)}{3} f^{(n-2)}(0)$, $f'(0) = \dfrac{2}{3}$.
Vậy $f^{(1997)}(0) = \dfrac{1997!}{3^{998}} f'(0) = \dfrac{2 \cdot 1997!}{3^{999}}$. □

Bài 37. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số có đạo hàm đến cấp n. Chứng minh công thức

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}. \quad (1)$$

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh (1) bằng quy nạp theo n.

Khi $n = 1$ ta có $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' = \sum\limits_{k=0}^{1} \mathrm{C}_1^k f^{(k)} \cdot g^{(1-k)}$ đúng.

Giả sử (1) đúng với n, $n \geq 1$, nghĩa là $(f \cdot g)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$, suy ra

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(n+1)} &= \left((f \cdot g)^{(n)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(f^{(k+1) \cdot g^{(n-k)}} + f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{C}_n^{k-1} f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)} \\
&= f^{(n+1)} \cdot g + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^{k-1} f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)} + f \cdot g^{(n+1)} \\
&= f^{(n+1)} \cdot g + \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{C}_n^{k-1} + \mathrm{C}_n^k\right) f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)} + f \cdot g^{(n+1)} \\
&= \mathrm{C}_{n+1}^{n+1} f^{(n+1)} \cdot g + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{n+1}^k f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)} + \mathrm{C}_{n+1}^0 f \cdot g^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k f^{(k)} \cdot g^{(n+1-k)}.
\end{aligned}$$

Vậy ta được điều phải chứng minh. □

Bài 38. Cho hàm số $f(x) = (x^2 - 2x + 2)\sin(x - 1)$. Chứng tỏ hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} f^{(2020)}(x) + f^{(2020)}(y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

Lời giải.

Đặt $a = x - 1$, $b = y - 1$, $f(x) = (x^2 - 2x + 2)\sin(x - 1) = (a^2 + 1)\sin a = g(a)$, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} g^{(2020)}(a) + g^{(2020)}(b) = 0 & (1) \\ (a + 1)^2 + (b + 1)^2 = 10. & (2) \end{cases}$$

Do $g(x)$ là hàm số lẻ nên $g'(x)$ là hàm số chẵn, $g''(x)$ là hàm số lẻ, ...
Tổng quát ta có $g^{(2020)}$ là hàm số lẻ nên với $b = -a$ thì (1) thỏa mãn.
Thay $b = -a$ vào (2) ta có $(a + 1)^2 + (a - 1)^2 = 10 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$.

Vậy hệ đã cho có các nghiệm $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3. \end{cases}$ □

Bài 39. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

1. $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ biết hoành độ tiếp điểm là $x_0 = 0$.

2. $y = -\dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ có hệ số góc lớn nhất.

Lời giải.

1. Ta có với $x_0 = 0 \Rightarrow y(x_0) = y(0) = -1$, $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(x_0) = y'(0) = 2$.
Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là
$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0) = 2x - 1.$$
2. Ta có $y' = -x^2 - 4x - 3 = -(x+2)^2 + 1 \leq 1$.
Do đó hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến là $y' = 1$ tại $x_0 = -2$ nên $y(x_0) = y(-2) = \dfrac{5}{3}$.
Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 1(x+2) + \dfrac{5}{3} = x + \dfrac{11}{3}$.

□

Bài 40. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

1. $y = x^3 - 3x + 2$, biết tiếp tuyến song song với trục hoành.
2. $y = 2x^2 - 3x + 9$, biết tiếp tuyến hợp với trục hoành một góc $45°$.

Lời giải.

1. Ta có $y' = 3x^2 - 3$.
Tiếp tuyến cần tìm song song với trục hoành nên có hệ số góc bằng 0. Do đó
$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$
Với $x = 1$ thì $y(1) = 0$, phương trình tiếp tuyến $y = 0$ (loại).
Với $x = -1$ thì $y(-1) = 4$, tiếp tuyến cần tìm là $y = 4$ (thỏa mãn).
2. Ta có $y' = 4x - 3$.
Tiếp tuyến cần tìm hợp với trục hoành một góc $45°$ nên có hệ số góc
$$k = \pm \tan 45° = \pm 1.$$
Xét $y' = 1 \Leftrightarrow 4x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$, ta có $y(1) = 8$ nên phương trình tiếp tuyến là
$$y = 1(x-1) + 8 \Leftrightarrow y = x + 7.$$
Xét $y' = -1 \Leftrightarrow 4x - 3 = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$, ta có $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 8$ nên phương trình tiếp tuyến là
$$y = -\left(x - \frac{1}{2}\right) + 8 = -x + \frac{17}{2}.$$

□

Bài 41. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(P)\colon y = -x^2 + 17x - 66$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $B(2;0)$.

Lời giải.
Ta có $y' = -2x + 17$. Phương trình tiếp tuyến của (P) tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ là
$$y = (-2x_0 + 17)(x - x_0) + \left(-x_0^2 + 17x_0 - 66\right) = (-2x_0 + 17)x + x_0^2 - 66. \quad (1)$$
Do tiếp tuyến đi qua điểm $B(2;0)$ nên ta có
$$2(-2x_0 + 17) + x_0^2 - 66 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 - 32 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -4 \\ x_0 = 8. \end{array}\right.$$
Với $x_0 = -4$, thay vào (1) ta được phương trình tiếp tuyến $y = 25x - 50$.
Với $x_0 = 8$, thay vào (1) ta được phương trình tiếp tuyến $y = x - 2$. □

Bài 42. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị $(C)\colon y = x^3 - 3x^2 + 3$ đi qua điểm $E\left(\dfrac{23}{9}; -1\right)$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng d qua điểm $E\left(\dfrac{23}{9}; -1\right)$ và có hệ số góc k là

$$y = k\left(x - \frac{23}{9}\right) - 1 = kx - \frac{23k}{9} - 1.$$

Điều kiện để d tiếp xúc với (C) là

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3 = k\left(x - \dfrac{23}{9}\right) - 1 & (1) \\ 3x^2 - 6x = k. & (2) \end{cases}$$

Thế k từ (2) vào (1) ta được

$$\begin{aligned} & x^3 - 3x^2 + 3 = \left(3x^2 - 6x\right)\left(x - \frac{23}{9}\right) - 1 \\ \Leftrightarrow\ & 3x^3 - 16x^2 + 23x - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{aligned} & x = 2 \\ & x = 3 \\ & x = \frac{1}{3}. \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

Với $x_0 = 2$ thì $k = 0$ ta được phương trình tiếp tuyến $y = -1$.
Với $x_0 = 3$ thì $k = 9$ ta được phương trình tiếp tuyến $y = 9x - 24$.
Với $x_0 = \dfrac{1}{3}$ thì $k = -\dfrac{5}{3}$ ta được phương trình tiếp tuyến $y = -\dfrac{5}{3}x + \dfrac{88}{27}$.
Vậy có ba tiếp tuyến với (C) mà các tiếp tuyến đó đi qua điểm $E\left(\dfrac{23}{9}; -1\right)$. □

Bài 43. Tìm m để đường thẳng

1. $d\colon y = mx - 1$ tiếp xúc với đồ thị $(C)\colon y = x^3 - x^2 + 4x$.
2. $d\colon y = 7 - x$ tiếp xúc với đồ thị $(C)\colon y = \dfrac{x^2 + m}{x - 1}$.

Lời giải.

1. Đường thẳng d tiếp xúc với đồ thị (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 + 4x = mx - 1 & (1) \\ 3x^2 - 2x + 4 = m. & (2) \end{cases}$$

Thế m từ (2) vào (1) ta được

$$\begin{aligned} & x^3 - x^2 + 4x = \left(3x^2 - 2x + 4\right)x - 1 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^3 - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)\left(2x^2 + x + 1\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 1 \left(\text{vì } 2x^2 + x + 1 > 0, \forall x\right). \end{aligned}$$

Với $x = 1$ ta có $m = 5$. Vậy hai đồ thị tiếp xúc với nhau khi $m = 5$.

(2) Đường thẳng d tiếp xúc với đồ thị (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+m}{x-1} = 7 - x \\ \dfrac{x^2-2x-m}{(x-1)^2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + m + 7 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 1 - m = 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Khử m ta được phương trình

$$4x^2 - 12x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 2 \text{ (thỏa mãn).} \end{array}\right.$$

Với $x = 2$ ta có $m = 1$. Vậy hai đồ thị tiếp xúc với nhau khi $m = 1$.

□

Bài 44. Cho $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$. Hãy biểu diễn các tổng sau đây theo $f(x)$ và $f'(x)$

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i},\ B = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x - x_i},\ C = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3 - x_i}.$$

Lời giải.
Ta có $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$ nên

$$\begin{aligned} f'(x) = &(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n) + (x - x_1)(x - x_3) \cdots (x - x_n) + \cdots \\ &+ (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Do đó

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i} = \frac{(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_n) + (x - x_1)(x - x_3) \cdots (x - x_n) + \cdots}{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

$$B = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x - x_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x}{x - x_i} - 1 \right) = x \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i} - n = x \frac{f'(x)}{f(x)} - n.$$

$$C = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3 - x_i} = -n + 3 \frac{f'(3)}{f(3)}.$$

□

Bài 45. Cho phương trình $x^5 - \dfrac{1}{2}x^4 - 5x^3 + x^2 + 4x - 1 = 0$.

(1) Chứng tỏ rằng phương trình có đúng 5 nghiệm $x_i\ (i = \overline{1, 5})$.

(2) Tính tổng $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} \frac{x_i + 1}{2x_i^5 - x_i^4 - 2}$.

Lời giải.

(1) Xét hàm số $f(x) = x^5 - \dfrac{1}{2}x^4 - 5x^3 + x^2 + 4x - 1$, $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f(-2) = -5 < 0$, $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 2 > 0$, $f(0) = -1 < 0$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{8} > 0$, $f(1) = -\dfrac{1}{2} < 0$,

$f(3) = \dfrac{175}{2} > 0$.
Do đó phương trình $f(x) = 0$ có các nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 thỏa mãn

$$-2 < x_1 < -\frac{3}{2} < x_2 < 0 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4 < 1 < x_5 < 3.$$

Hơn nữa phương trình $f(x) = 0$ là phương trình bậc 5 nên có không quá 5 nghiệm thực.
Vậy phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm.

2 Ta có x_i là các nghiệm của phương trình trên nên

$$x_i^5 - \frac{1}{2}x_i^4 - 5x_i^3 + x_i^2 + 4x_i - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x_i^5 - x_i^4 - 2 = 2\left(5x_i^3 - x_i^2 - 4x_i\right).$$

Do đó $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} \frac{x_i + 1}{2x_i^5 - x_i^4 - 2} = \sum_{i=1}^{5} \frac{x_i + 1}{2\left(5x_i^3 - x_i^2 - 4x_i\right)}$.
Xét $g(x) = \dfrac{x+1}{5x^3 - x^2 - 4x} = \dfrac{x+1}{x(x-1)(5x+4)}$.
Ta có $\dfrac{x+1}{x(x-1)(5x+4)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{5x+4}$. Đồng nhất thức ta được

$$\frac{x+1}{x(x-1)(5x+4)} = -\frac{1}{4x} + \frac{2}{9(x-1)} + \frac{5}{36(5x+4)}.$$

Do đó $S = -\dfrac{1}{8}\displaystyle\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i} + \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i - 1} + \frac{1}{72}\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i + \frac{4}{5}}$.
Mà $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$, $f'(x) = 5x^4 - 2x^3 - 15x^2 + 2x + 4$.
Với $x \neq x_i\,(i = \overline{1,5})$ ta được $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x - x_i} = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Do đó ta có

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{1 - x_i} = \frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{-6}{-\frac{1}{2}} = 12 \Rightarrow \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i - 1} = -12.$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{-x_i} = \frac{f'(0)}{f(0)} = -4 \Rightarrow \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i} = 4.$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{-\frac{4}{5} - x_i} = \frac{f'\left(-\frac{4}{5}\right)}{f\left(-\frac{4}{5}\right)} = \frac{12900}{4789} \Rightarrow \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i + \frac{4}{5}} = -\frac{12900}{4789}.$

Vậy $S = -\dfrac{1}{8} \cdot 4 + \dfrac{1}{9} \cdot (-12) + \dfrac{1}{72} \cdot \left(\dfrac{-12900}{4789}\right) = -\dfrac{8959}{4789}$.

□

Bài 46. Tính tổng

$$\begin{aligned} T &= \mathrm{C}_n^1(\cos x - \sin x) + 0\mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^3 \cdot 3\sin x \cos x(\sin x - \cos x) \\ &+ \cdots + \mathrm{C}_n^n \cdot n \sin x \cos x\left(\sin^{n-2} x - \cos^{n-2} x\right). \end{aligned}$$

Lời giải.

Xét hàm số $y=(1+\cos x)^n+(1+\sin x)^n$, ta có

$$\begin{aligned} y &= \left(\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1\cos x+\mathrm{C}_n^2\cos^2 x+\cdots+\mathrm{C}_n^n\cos^n x\right)\\ &+ \left(\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1\sin x+\mathrm{C}_n^2\sin^2 x+\cdots+\mathrm{C}_n^n\sin^n x\right)\\ &= 2\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1(\sin x+\cos x)+\mathrm{C}_n^2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)+\cdots+\mathrm{C}_n^n\left(\sin^n x+\cos^n x\right).\\ \Rightarrow y' &= \mathrm{C}_n^1(\cos x-\sin x)+0\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^3\cdot 3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)\\ &+ \cdots+\mathrm{C}_n^n\cdot n\sin x\cos x\left(\sin^{n-2}x-\cos^{n-2}x\right).\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} T &= y'=[(1+\cos x)^n+(1+\sin x)^n]'=n(1+\cos x)^{n-1}(-\sin x)+n(1+\sin x)^{n-1}\cos x\\ &= n\left[\cos x(1+\sin x)^{n-1}-\sin x(1+\cos x)^{n-1}\right].\end{aligned}$$

□

Bài 47. Tính tổng

① $P=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$. ② $Q=1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$.

Lời giải.

1 Khi $x=1$ thì $P=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Khi $x\neq 1$, ta có $1+x+x^2+\cdots+x^n=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\frac{(n+1)x^n(x-1)-x^{n+1}+1}{(x-1)^2}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

Từ đó có $P=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$. $(*)$

2 Khi $x=1$ thì $Q=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Khi $x\neq 1$, nhân hai vế của $(*)$ với x, ta được

$$P\cdot x=1x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n=\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}.$$

Đạo hàm hai vế ta được

$$\begin{aligned} &1+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}\\ =&\ \frac{\left(n(n+2)x^{n+1}-(n+1)^2x^n+1\right)(x-1)^2-2(x-1)\left[nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x\right]}{(x-1)^4}\\ =&\ \frac{\left(n(n+2)x^{n+1}-(n+1)^2x^n+1\right)(x-1)-2\left[nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x\right]}{(x-1)^3}\\ =&\ \frac{n^2x^{n+2}-\left(2n^2+2n-1\right)x^{n+1}+(n+1)^2x^n-x-1}{(x-1)^3}.\end{aligned}$$

Do đó $Q=\dfrac{n^2x^{n+2}-\left(2n^2+2n-1\right)x^{n+1}+(n+1)^2x^n-x-1}{(x-1)^3}$.

□

Bài 48. Cho số nguyên dương n. Tính tổng:

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots n^k,\ \text{với } k = 1, 2, 3.$$

Lời giải.
Xét đa thức $F(x) = (x-1)\left(x^2 + x^3 + \cdots + x^n\right) = x^{n+1} - x^2$.
Lấy đạo hàm cấp hai $F''(x)$ ta có:

$$2\left(2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}\right) + (x-1)\left[2\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot x + \cdots + n(n-1)x^{n-2}\right] = (n+1)nx^{n-1} - 2.$$

Cho $x = 1$, ta có $2(2 + 3 + \cdots + n) = (n-1)(n+2) = 2\left(S_1(n) - 1\right)$.
Vậy: $S_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Lấy đạo hàm cấp ba $F'''(x)$, ta có:

$$\begin{aligned}&3\left[2\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot x + \cdots + n(n-1)x^{n-2}\right] + \\ &\ (x-1)\left(3\cdot 2\cdot 1 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot x + \cdots + n(n-1)(n-2)x^{n-3}\right) = (n+1)n(n-1)\cdot x^{n-2}.\end{aligned}$$

Cho $x = 1$, ta có:

$$3\left[2\cdot 1 + 3\cdot 2 + \cdots + n(n-1)\right] = (n+1)n(n-1).$$

Từ đó: $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} m(m-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} = S_2(n) - S_1(n)$.
Vậy: $S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Tương tự, lấy đạo hàm cấp bốn, ta có:

$$\begin{aligned}&4\left[3\cdot 2\cdot 1 + 4\cdot 3\cdot 2 + \cdots + n(n-1)(n-2)x^{n-3}\right] \\ &\ + (x-1)\left[4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 + \cdots + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}\right] = (n+1)n(n-1)(n-2)x^{n-3}.\end{aligned}$$

Cho $x = 1$, ta có:

$$4\left[3\cdot 2\cdot 1 + 4\cdot 3\cdot 2 + \cdots + n(n-1)(n-2)\right] = (n+1)n(n-1)(n-2).$$

nên $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} m(m-1)(m-2) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} = S_3(n) - 3S_2(n) + 2S_1(n)$.
Vậy: $S_3(n) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
Cách khác: Ta có thể dùng sai phân $\Delta x_2 = (x+1)^2 - x^2$ để tính S_1, $\Delta x_3 = (x+1)^3 - x^3$ để tính S_2, $\Delta x_4 = (x+1)^4 - x^4$ để tính S_3. □

Bài 49. Chứng minh:

1. $1\cdot \mathrm{C}_n^1 + 2\cdot \mathrm{C}_n^2\cdot 9 + \cdots + k\cdot \mathrm{C}_n^k\cdot 9^{k-1} + \cdots + n\cdot \mathrm{C}_n^n 9^{n-1} = n\cdot 10^{n-1}$.
2. $1\cdot \mathrm{C}_n^1 + 3\cdot \mathrm{C}_n^3 + 5\mathrm{C}_n^5 + 7\cdot \mathrm{C}_n^7 + \cdots = n\cdot 2^{n-2}$.

Lời giải.
Đặt $f(x) = (1+x)^n$ thì $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ với mọi x.
Mặt khác, khai triển nhị thức:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\cdot x^k \Rightarrow f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k\cdot k\cdot x^{k-1}.$$

Do đó: $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot k \cdot x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$, với mọi x.

① Lấy $x = 9$, ta có: $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot k \cdot 9^{k-1} = n(1+9)^{n-1} = n \cdot 10^{n-1}$, được đpcm.

② Lấy $x = 1$, ta có: $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot k \cdot 1^{k-1} = n(1+1)^{n-1} \Rightarrow 1 \cdot \mathrm{C}_n^1 + 2 \cdot \mathrm{C}_n^2 + 3 \cdot \mathrm{C}_n^3 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n = n \cdot 2^{n-1}$.

Lấy $x = -1$, ta có: $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot k \cdot (-1)^{k-1} = n(1-1)^{n-1} \Rightarrow 1 \cdot \mathrm{C}_n^1 - 2 \cdot \mathrm{C}_n^2 + 3 \cdot \mathrm{C}_n^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot n\mathrm{C}_n^n = 0$.

Cộng lại và chia 2, ta được đpcm.

□

Bài 50. Tính các tổng

① $T = 1^2 \cdot \mathrm{C}_n^1 + 2^2 \cdot \mathrm{C}_n^2 + \cdots + n^2 \cdot \mathrm{C}_n^n$.

② $S = 1^3 \cdot \mathrm{C}_n^1 + 2^3 \cdot \mathrm{C}_n^2 + \cdots + n^3 \cdot \mathrm{C}_n^n$.

Lời giải.

Ta có $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot x^k$, lấy đạo hàm 2 vế, ta có

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot k \cdot x^{k-1} \Rightarrow nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot k \cdot x^k.$$

Tiếp tục, lấy đạo hàm 2 vế, ta được

$$n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot k^2 \cdot x^{k-1} \quad (1).$$

① Chọn $x = 1$, thì có $T = n(n+1)2^{n-2}$.

② Từ (1), tiếp tục nhân x vào 2 vế, ta được

$$nx(1+x)^{n-1} + n(n-1)x^2(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot k^2 \cdot x^k.$$

Lấy đạo hàm 2 vế, ta được

$$n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2} + 2n(n-1)x(1+x)^{n-2} + n(n-1)(n-2)x^2(1+x)^{n-3} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot k^3 \cdot x^{k-1}.$$

Chọn $x = 1$, thì có $S = n^2(n+3)2^{n-3}$.

□

Bài 51. Dùng vi phân, tính gần đúng:

① $\sqrt[3]{26{,}7}$.

② $\dfrac{1}{\sqrt{20{,}3}}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức gần đúng $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$.

① Xét $f(x)=\sqrt[3]{x}$ thì $f'(x)=\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$ với $x_0=27, \Delta x=-0{,}3$.
Suy ra: $\sqrt[3]{27{,}3}\approx\sqrt[3]{27}+\dfrac{1}{27}(-0{,}3)\approx 2{,}999$.

② Xét số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ thì $f'(x)=\dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}$ với $x_0=20{,}25; \Delta x=0{,}05$.
Suy ra: $\dfrac{1}{20{,}3}\approx\dfrac{1}{4{,}5}+\dfrac{-1}{40{,}5\sqrt{20{,}25}}\cdot(0,05)\approx 0{,}222$.

□

Bài 52. Dùng vi phân để tính gần đúng:

① $\cos 45^\circ 30'$. ② $\tan 29^\circ 30'$.

Lời giải.
Áp dụng công thức gần đúng: $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$.

① Ta có $45^\circ 30'=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{360}$.
Xét $f(x)=\cos x, f'(x)=-\sin x$ với $x_0=\dfrac{\pi}{4}, \Delta x=\dfrac{\pi}{360}$.
Suy ra: $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{360}\right)\approx\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\dfrac{\pi}{360}$,
hay $\cos 45^\circ 30'\approx\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\pi}{360}\approx 0{,}7009$.

② Ta có $29^\circ 30'=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{360}$.
Xét $f(x)=\tan x, f'(x)=1+\tan^2 x$ với $x_0=\dfrac{\pi}{6}, \Delta x=-\dfrac{\pi}{360}$.
Suy ra: $\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{360}\right)\approx\tan\dfrac{\pi}{6}+\left(1+\tan\dfrac{2\pi}{6}\right)\cdot\dfrac{-\pi}{360}$,
hay $\tan 29^\circ 30'\approx\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{4}{3}\left(-\dfrac{\pi}{360}\right)\approx 0{,}566$.

□

Bài 53. Tính các giới hạn:

① $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^8-x^7-128}{x^2+2x-8}$. ② $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$.

Lời giải.
Áp dụng quy tắc L'Hospotal:

① Xét $f(x)=x^8-x^7-128$ thì $f(2)=0$ và $f'(x)=8x^7-7x^6$.
Xét $g(x)=x^2+2x-8$ thì $g(2)=0$ và $g'(x)=2x+2$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^8-x^7-128}{x^2+2x-8}=\frac{f'(2)}{g'(2)}=\frac{576}{6}=96.$$

② Xét $f(x)=\sqrt{x}-3$ thì $f(9)=0$ và $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{f(x)-f(9)}{x-9}=f'(9)=\frac{1}{6}.$$

□

Bài 54. Tính các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}+2\sqrt[3]{1+3x}+3x^2-3}{\sin x}$.

② $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+x}-1}{\sqrt[n]{1+x}-1}$.

Lời giải.

① Xét $f(x)=\sqrt{1+2x}+2\sqrt[3]{1+3x}+3x^2-3$.
Thì $f(0)=0$ và $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{(1+3x)^2}}+6x$.
Xét $g(x)=\sin x$ thì $g(0)=0$ và $g'(x)=\cos x$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}+2\sqrt[3]{1+3x}+3x^2-3}{\sin x}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{2}{\sqrt[3]{1}}+0=3.$$

② $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1}{\sqrt[n]{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[m]{1+x}-1\right)'}{\left(\sqrt[n]{1+x}-1\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{m(1+x)^{\frac{m-1}{m}}}}{\dfrac{1}{n(1+x)^{\frac{n-1}{n}}}}=\frac{n}{m}.$$

□

Bài 55. Tính các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x^m-1}$.

② $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+ax)^{10}-(1+bx)^{10}}{(1+ax)^9-(1+bx)^9}$.

Lời giải.

① Xét $f(x)=x^n$ thì $f(1)=1, f'(x)=nx^{n-1}$,
$g(x)=x^m$ thì $g(1)=1, g'(x)=mx^{m-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^n-1}{x-1}:\frac{x^m-1}{x-1}\right)=\frac{f'(1)}{g'(1)}=\frac{n}{m}.$$

② Xét $f(x)=(1+ax)^{10}-(1+bx)^{10}$ thì $f(0)=0$,
$f'(x)=10a(1+ax)^9-10b(1+bx)^9$
và $g(x)=(1+ax)^9-(1+bx)^9$ thì $g(0)=0$, $g'(x)=9a(1+ax)^8-9b(1+bx)^8$, nên

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax)^{10}-(1+bx)^{10}}{(1+ax)^9-(1+bx)^9}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=\frac{10a-10b}{9a-9b}=\frac{10}{9}, (\text{với } a\neq b).$$

□

Bài 56. Tính các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

② $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$.

Lời giải.

①

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x-\sin x)'}{(x^3)'}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x+1-\cos x}{3x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan^2 x+1-\cos x)'}{(3x^2)'}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x(\tan^2 x+1)+\sin x}{6x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(2\tan x(\tan^2 x+1)+\sin x)'}{(6x)'}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{6\tan^2 x(\tan^2 x+1)+2(\tan^2 x+1)+\cos x}{6}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x\sin x)'}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x+x\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(\sin x+x\cos x)'}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

Bài 57. Chứng minh:

① Nếu $y=\sqrt{2x-x^2}$ thì $y^3\cdot y''+1=0$.

② Nếu $y=A\sin(at+b)+B\cos(at+b)$ thì $y''+a^2\cdot y=0$.

Lời giải.

① $y'=\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

$$y''=\frac{-\sqrt{2x-x^2}-(1-x)\cdot\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}}{2x-x^2}=\frac{-(2x-x^2)-(1-x)^2}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}=\frac{-1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}=\frac{-1}{y^3}.$$

Suy ra: $y^3\cdot y''=-1\Rightarrow$đpcm.

② $y'=aA\cos(at+b)-aB\sin(at+b)$.

$y''=-a^2A\sin(at+b)-a^2B\cos(at+b)=-a^2\left(A\sin(at+b)+B\cos(at+b)\right)=-a^2\cdot y$.

Do đó: $y''+a^2\cdot y=0$.

□

Bài 58. Cho $2n$ số $a_i,b_i,i=1,2\ldots,n$ và hàm số: $f(x)=a_1\sin b_1x+a_2\sin b_2x+\cdots+a_n\sin b_nx$ thoả mãn

$$|f(x)|\leq|\sin x|\,,\forall x\in[-1;1].$$

Chứng minh: $|a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n| \leq 1$.

Lời giải.

Ta có: $f(0) = 0$ và $f'(x) = a_1b_1 \cos b_1x + a_2b_2 \cos b_2x + \cdots + a_nb_n \cos b_nx$ nên $f'(0) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$.
Theo định nghĩa:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}.$$

Với mọi $x \in [-1; 1], x \neq 0$: $\left|\frac{f(x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}\right| \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right|$ mà $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ nên $|f'(0)| \leq 1$, suy ra đpcm. □

Bài 59. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thoả mãn:

$$|f(-1)| \leq 1, |f(0)| \leq 1, |f(1)| \leq 1$$

Chứng minh: $|f'(x)| \leq 4, \forall x \in [-1; 1]$.

Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 2ax + b$ và $\begin{cases} f(-1) = a - b + c \\ f(0) = c \\ f(1) = a + b + c \end{cases}$, giải tìm a, b, c ta được:

$$\begin{cases} c = f(0) \\ b = \dfrac{1}{2}[f(1) - f(-1)] \\ a = \dfrac{1}{2}[f(1) + f(-1) - 2f(0)] \end{cases}$$

Với mọi $x \in [-1; 1]$ thì $|f'(x)| \leq \max\{|f'(1)|, |f'(-1)|\}$, ta có:

$$\begin{aligned} |f'(1)| &= \left|f(1) + f(-1) - 2f(0) + \frac{1}{2}(f(1) - f(-1))\right| \\ &= \left|\frac{3}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(-1) - 2f(0)\right| \\ &\leq \frac{3}{2}|f(1)| + \frac{1}{2}|f(-1)| + 2|f(0)| \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2 = 4. \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} |f'(-1)| &= \left|-f(1) - f(-1) + 2f(0) + \frac{1}{2}(f(1) - f(-1))\right| \\ &= \left|-\frac{3}{2}f(-1) - \frac{1}{2}f(1) + 2f(0)\right| \\ &\leq \frac{3}{2}|f(-1)| + \frac{1}{2}|f(1)| + 2|f(0)| \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2 = 4. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

BÀI LUYỆN TẬP

Bài 60. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số:

① $y = x^4 - 5x, x_0 = -1$.   ② $y = \sqrt{3x + 1}, x_0 = 4$.

Lời giải.

① Dùng định nghĩa: $f'(x_0) = y'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Kết quả $f'(-1) = -9$.

② Kết quả $f'(4) = \dfrac{3}{2\sqrt{13}}$.

□

Bài 61. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số:

① $y = \dfrac{1}{2x-1}$ với $x \neq \dfrac{1}{2}$. ② $y = \sqrt{3-x}$ với $x < 3$.

Lời giải.

① Dùng định nghĩa: $f'(x_0) = y'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Kết quả $y' = \dfrac{-2}{(2x-1)^2}$ với $x \neq \dfrac{1}{2}$.

② Kết quả $y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{3-x}}$ với $x < 3$.

□

Bài 62. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

① $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$. ② $y = x^3 \cdot \cos^2 x$.

Lời giải.

① Dùng quy tắc đạo hàm của một thương. Kết quả $y' = \dfrac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$.

② Kết quả $y' = x^2(3\cos^2 x - x \sin 2x)$.

□

Bài 63. Tính vi phân của các hàm số sau:

① $y = x^8 - x\sqrt{x} + 2$. ② $y = \sqrt{\cos^2 2x + 1}$.

Lời giải.

① Kết quả $\mathrm{d}y = \left(8x^7 - \dfrac{3}{2}\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

② Dùng công thức đạo hàm của căn bậc 2.

kết quả $\mathrm{d}y = -\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{\cos^2 2x + 1}}\mathrm{d}x$.

□

Bài 64. Dùng vi phân, tính gần đúng:

① $\dfrac{1}{0{,}9995}$. ② $\sqrt[3]{2015}$.

Lời giải.

Dùng công thức $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

① Xét hàm số $y=\dfrac{1}{x}$ và chọn $x_0=1$, $\Delta x=-0{,}0005$.
Kết quả $\dfrac{1}{0{,}9995}=1{,}0005$.

② Xét hàm số $y=\sqrt[3]{x}$ và chọn $x_0=13^3$, $\Delta x=-182$.
kết quả $\sqrt[3]{2015}\approx 12{,}6$.

□

Bài 65. Giải phương trình $y'=0$ với hàm số:

① $y=\sqrt{x^3-2x^2+3}$. ② $\dfrac{1}{2}\sin 2x+\sin x-3$.

Lời giải.

① Kết quả $x=0$ hoặc $x=\dfrac{4}{3}$.

② Kết quả $x=\pi+k2\pi$ hoặc $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

□

Bài 66. Cho hypebol $(H):y=\dfrac{1}{x-2}$. Tiếp tuyến (T) của (H) tại điểm M có hoành độ $x=a\neq 2$, cắt trục hoành Ox tại A và cắt đường thẳng $d:x=2$ tại B. Chứng minh M là trung điểm của AB và diện tích tam giác giới hạn bởi tiếp tuyến, Ox và d không đổi.

Lời giải.
Ta có: $(H):y=\dfrac{1}{x-2}\Rightarrow y'=\dfrac{-1}{(x-2)^2}$.

Gọi $M\left(a,\dfrac{1}{a-2}\right)$, phương trình tiếp tuyến của (H) tại M là:

$$(T):y=\frac{-1}{(a-2)^2}(x-a)+\frac{1}{a-2}\Rightarrow y=\frac{-1}{(a-2)^2}x+\frac{2a-2}{(a-2)^2}.$$

Suy ra: $A(2a-2,0)$ và $B\left(2,\dfrac{2}{a-2}\right)$.

Suy ra toạ độ trung điểm của AB là: $\left(a,\dfrac{1}{a-2}\right)\equiv M$. Suy ra M là trung điểm AB.

Gọi $I(2,0)$ là giao điểm của (d) và trục hoành.
Khi đó: $IA=|2a-4|$ và $IB=\left|\dfrac{2}{a-2}\right|$.
Suy ra: $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}\cdot IA\cdot IB=\dfrac{1}{2}|2a-4|\cdot\left|\dfrac{2}{a-2}\right|=2$.
Do đó, diện tích tam giác giới hạn bởi tiếp tuyến, Ox và d không đổi. □

Bài 67. Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị:

$$(P_1):y=x^2-5x+6 \text{ và } (P_2):y=-x^2+5x-11.$$

Lời giải.
Gọi (Δ) là tiếp tuyến chung của hai đồ thị (P_1) và (P_2).
Gọi (x_1,y_1), (x_2,y_2) lần lượt là tiếp điểm của (Δ) với (P_1) và (P_2).

Khi đó, ta có:
Phương trình tiếp tuyến của (P_1) tại (x_1, y_1) là:

$$y = (2x_1 - 5)(x - x_1) + x_1^2 - 5x_1 + 6 = (2x_1 - 5)x - x_1^2 + 6.$$

Phương trình tiếp tuyến của (P_1) tại (x_1, y_1) là:

$$y = (-2x_2 + 5)(x - x_2) - x_2^2 + 5x_1 - 11 = (-2x_2 + 5)x + x_2^2 - 11.$$

Đồng nhất hệ số, ta có:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5 = -2x_2 + 5 \\ -x_1^2 + 6 = x_2^2 - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1^2 + x_2^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases} \end{array} \right. .$$

Do đó, ta có phương trình tiếp tuyến chung của hai đồ thị (P_1) và (P_2) là: $y = 3x - 10$ và $y = -3x + 5$. $\square$

Bài 68. Tính các tổng:

1. $S = 1 \cdot \mathrm{C}_{2000}^0 + 2 \cdot \mathrm{C}_{2000}^1 + \cdots + 2001 \cdot \mathrm{C}_{2000}^{2000}$.
2. $P = 1 \cdot 2^{n-1} \cdot \mathrm{C}_n^1 + 2 \cdot 2^{n-2} \cdot \mathrm{C}_n^2 + \cdots + n \cdot 2^0 \cdot \mathrm{C}_n^n$.

Lời giải.

1. Ta có:

$$(1+x)^{2000} = \sum_{k=0}^{2000} \mathrm{C}_{2000}^k \cdot x^k \Rightarrow x \cdot (1+x)^{2000} = \sum_{k=0}^{2000} \mathrm{C}_{2000}^k \cdot x^{k+1}.$$

Lấy đạo hàm hai vế, ta được:

$$(1+x)^{2000} + 2000 \cdot x \cdot (1+x)^{1999} = \sum_{k=0}^{2000} \mathrm{C}_{2000}^k \cdot (k+1) \cdot x^k.$$

Thay $x = 1$, ta được:

$$2^{2000} + 2000 \cdot 2 \cdot 2^{1999} = \sum_{k=0}^{2000} \mathrm{C}_{2000}^k \cdot (k+1) = S.$$

Suy ra, $S = 2001 \cdot 2^{2000}$.

2. Ta có:

$$(2+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot 2^{n-k} \cdot x^k.$$

Lấy đạo hàm hai vế, ta được:

$$n \cdot (2+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot 2^{n-k} \cdot k \cdot x^{k-1}.$$

Thay $x = 1$, ta được:

$$n \cdot 3^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \cdot 2^{n-k} \cdot k = P.$$

Suy ra: $P = n \cdot 3^{n-1}$.

$\square$

Bài 69. Tính các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1}{x^2-4x+3}$.

② $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}+2\sqrt[3]{1+3x}+3x^2-3}{5x}$.

Lời giải.

Quy tắc L'Hospital cho hai hàm số f và g liên tục trên khoảng (a,b) chứa x_0, có đạo hàm trên $(a,b)\setminus x_0$ và có $f(x_0)=g(x_0)=0$. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$.

① Đặt: $f(x)=\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1$ và $g(x)=x^2-4x+3$.
Ta có:

- $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}+2x-1 \Rightarrow f'(1)=\dfrac{4}{3}$.
- $g'(x)=2x-4 \Rightarrow g'(1)=-2$.

Vì $f(1)=0$ và $g(1)=0$, nên áp dụng quy tắc L'Hospital, ta được:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(1)}{g'(1)}=\frac{-2}{3}.$$

② Đặt: $f(x)=\sqrt{1+2x}+2\sqrt[3]{1+3x}+3x^2-3$ và $g(x)=5x$.
Ta có:

- $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{1+3x}}+6x \Rightarrow f'(0)=3$.
- $g'(x)=5 \Rightarrow g'(0)=5$.

Vì $f(0)=0$ và $g(0)=0$, nên áp dụng quy tắc L'Hospital, ta được:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=\frac{3}{5}.$$

□

Bài 70. Lập công thức đạo hàm cấp n của hàm số:

① $y=\dfrac{13x+1}{6x^2-x-1}$.

② $y=\sin^2 x-2014x+3$.

Lời giải.

① Ta có

$$\begin{aligned}
y &= \frac{2}{3x+1}+\frac{3}{2x-1}.\\
y' &= \frac{2\cdot(-1)\cdot 3}{(3x+1)^2}+\frac{3\cdot(-1)\cdot 2}{(2x-1)^2}.\\
y'' &= \frac{2\cdot(-1)\cdot 3\cdot(-1)\cdot 3\cdot 2}{(3x+1)^3}+\frac{3\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-1)\cdot 2\cdot 2}{(2x-1)^3}\\
&= \frac{2\cdot(-1)^2\cdot 3^2\cdot 2}{(3x+1)^3}+\frac{3\cdot(-1)^2\cdot 2^2\cdot 2}{(2x-1)^3}.\\
y''' &= \frac{2\cdot(-1)^2\cdot 3^2\cdot 2\cdot(-1)\cdot 3\cdot 3}{(3x+1)^4}+\frac{3\cdot(-1)^2\cdot 2^2\cdot 2\cdot(-1)\cdot 2\cdot 3}{(2x-1)^4}\\
&= \frac{2\cdot(-1)^3\cdot 3^3\cdot 3!}{(3x+1)^4}+\frac{3\cdot(-1)^3\cdot 2^3\cdot 3!}{(2x-1)^4}.
\end{aligned}$$

Do đó, ta dễ dàng chứng minh quy nạp:

$$y^{(n)} = \frac{2 \cdot (-1)^n \cdot 3^n \cdot n!}{(3x+1)^{n+1}} + \frac{3 \cdot (-1)^n \cdot 2^n \cdot n!}{(2x-1)^{n+1}}.$$

2 $y' = \sin 2x - 2014$
Tương tự, ta chứng minh quy nạp, thu được:

$$y^{(n)} = 2^{n-1} \cdot \sin\left[2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right].$$

$\square$