Mục lục

Phần I

ĐẠI SỐ

Chương 1

SỐ HỮU TỈ - SỐ THỰC

§1. Số hữu tỉ

I. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Đúng điền **Đ**, sai điền **S**.

a) $\boxed{\text{S}}$ $-0,7 \in \mathbb{Z}$;

b) $\boxed{\text{Đ}}$ $-0,7 \in \mathbb{Q}$;

c) $\boxed{\text{Đ}}$ $-\dfrac{2}{7} \notin \mathbb{Z}$;

d) $\boxed{\text{Đ}}$ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$;

e) $\boxed{\text{S}}$ $\mathbb{Z} \in \mathbb{Q}$

Câu 2. Điền số thích hợp vào chỗ chấm (...):

a) $\dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$;

b) $-\dfrac{2}{-3} = \dfrac{2}{3}$;

c) $-\dfrac{5}{7} = -\dfrac{-5}{-7}$;

d) $\dfrac{-7}{11} = -\dfrac{7}{11}$;

e) $\dfrac{3}{5} = \dfrac{-3}{-5}$;

f) $-11 = \dfrac{-11}{1}$.

Câu 3. Kết luận đúng là

a) $\boxed{\text{S}}$ $\dfrac{-10}{15} > \dfrac{7}{-14}$;

b) $\boxed{\text{S}}$ $\dfrac{9}{-27} < \dfrac{-11}{33}$;

c) $\boxed{\text{S}}$ $\dfrac{-34}{51} > -\dfrac{19}{57}$;

d) $\boxed{\text{Đ}}$ $\dfrac{-46}{69} < \dfrac{-27}{54}$.

II. Học giải toán

Ví dụ 1. So sánh hai số hữu tỉ sau $x = -0,8$ và $y = \dfrac{8}{-9}$.

Lời giải.

Cách 1.

Bước 1. Viết các số hữu tỉ thành phân số có mẫu dương. $x = -0,8 = \dfrac{-4}{5}$ và $y = \dfrac{9}{-9} = \dfrac{-8}{9}$.

Bước 2. Quy đồng mẫu số các phân số.

$$x = \frac{-4}{5} = \frac{-36}{45} \text{ và } y = \frac{-8}{9} = \frac{-40}{45}.$$

Bước 3. So sánh các tử số.

$$-36 > -40 \text{ nên } \frac{-36}{45} > \frac{-40}{45} \text{ suy ra } x > y.$$

Cách 2.

$x = -0,8 = \dfrac{-4}{5} \Rightarrow x + 1 = \dfrac{-4}{5} + 1 = \dfrac{1}{5}$; $y = \dfrac{8}{-9} = \dfrac{-8}{9} \Rightarrow y + 1 = \dfrac{-8}{9} + 1 = \dfrac{1}{9}$.

Vì $\dfrac{1}{5} > \dfrac{1}{9}$, nên $x + 1 > y + 1 \Rightarrow x > y$. □

Ví dụ 2. Lời giải đúng hay sai?

Bạn BEE so sanh hai số $x = \dfrac{-13}{15}$ và $y = \dfrac{11}{-13}$ như sau:

Bước 1. $x = \dfrac{-13}{15}$ và $y = \dfrac{11}{-13} = \dfrac{-11}{13}$.

Bước 2. $\dfrac{-13}{15} < \dfrac{-11}{15} < \dfrac{-11}{13}$ (vì $-13 < -11$ và $15 > 13$).

Suy ra: $\dfrac{-13}{15} < \dfrac{11}{-13}$.

Lời giải.

Lời giải đã cho sai.

Có $\dfrac{11}{15} < \dfrac{11}{13}$, nên $\dfrac{-11}{15} > \dfrac{-11}{13}$.

Do đó không kết luận được $x < y$.

Sửa lại. Có $x + 1 = \dfrac{-13}{15} + 1 = \dfrac{2}{15}$ và $y + 1 = \dfrac{11}{-13} + 1 = \dfrac{-11}{13} + 1 = \dfrac{2}{13}$.

Mà $\dfrac{2}{15} < \dfrac{2}{13} \Rightarrow x + 1 < y + 1 \Rightarrow x < y \Rightarrow \dfrac{-13}{15} < \dfrac{11}{-13}$. □

Ví dụ 3. Hãy chỉ ra một số hữu tỉ nằm giữa hai số $\dfrac{1}{3}$ và $0,5$.

Lời giải.

Có $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2,5} < \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{\frac{5}{2}} < \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{3} < \dfrac{2}{5} < \dfrac{1}{2}$.

Suy ra số hữu tỉ phải tìm là $\dfrac{2}{5}$. □

⚠ *Có vô số số hữu tỉ nằm giữa hai số* $\dfrac{1}{3}$ *và* $\dfrac{1}{2}$. *Vì* $2 < 2,5 < 3$ *nên* $\dfrac{2}{5}$ *là một số cần tìm. Nhưng giữa* 2 *và* 3 *còn vô vàn số hữu tỉ nữa, chẳng hạn với số* $2,4$, *ta có:*

$2 < 2,4 < 3 \Rightarrow \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2,4} < \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{\frac{12}{5}} < \dfrac{1}{2}$, *do đó* $\dfrac{5}{12}$ *cũng là một số hữu tỉ cần tìm.*

⚠ $0 < a < b \Rightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

Ví dụ 4. Tỉ số giữa số đo chiều cao và số đo vòng eo của một người đàn ông (cùng một đơn vị đo) cho biết sức khỏe của người đó. Nếu người đàn ông có tỉ số đó nhỏ hơn 2 là sức khỏe có vấn đề.
Ông A cao $1,72$ m, vòng eo 88 cm; ông B cao $1,56$ m, vòng eo 72 cm. Theo bạn thì sức khỏe của ai kém hơn?
⚠ *Với nam giới trưởng thành, vòng eo càng lớn thì sức khỏe càng kém.*

Lời giải.
Đặt $\phi(C)$ là tỉ số giữa số đo chiều cao và số đo vòng eo của ông C.
Ta có $\phi(A) = \dfrac{172}{88} = 1\dfrac{21}{22} < 2$; $\phi(B) = \dfrac{156}{72} = 2\dfrac{1}{6} > 2$.
Vậy sức khỏe ông A kém hơn. □

Ví dụ 5. Hình vuông có kích thước 3x3 (có 9 ô) được gọi là HÌNH VUÔNG ĐƯỢC SẮP khi các ô được điền các số hữu tỉ tăng dần theo hàng từ trái sang phải, tăng dần theo cột từ trên xuống dưới. Hình sau cho ta một ví dụ về ***hình vuông được sắp***.

1	3	4
2	6	7
5	8	9

Cho $B = \left\{-\dfrac{1}{3}; \dfrac{3}{4}; -\dfrac{1}{4}; \dfrac{4}{5}; -1; -\dfrac{1}{6}; -\dfrac{5}{7}\right\}$. Điền các số hữu tỉ thuộc tập B vào các ô vuông còn khuyết của hình vuông B để được **hình vuông được sắp**:

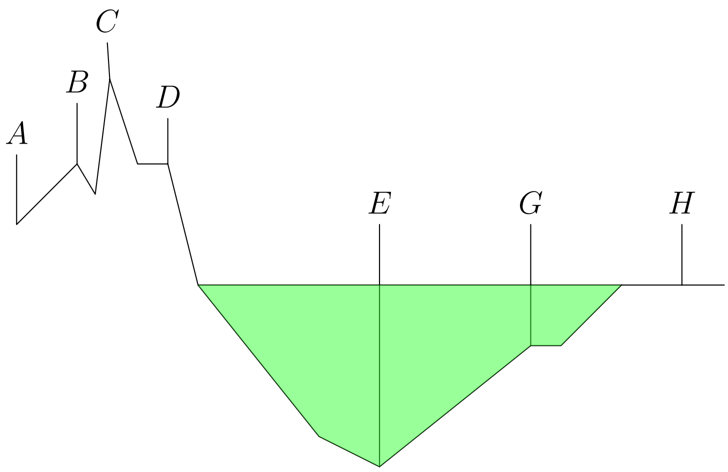
		0
$-0,3$		

Lời giải.
Sắp xếp:
$B: -1 < -\dfrac{5}{7} < -\dfrac{1}{3} < -\dfrac{1}{4} < -\dfrac{1}{6} < \dfrac{3}{4} < \dfrac{4}{5}$.

-1	$-\dfrac{1}{3}$	0
$-\dfrac{5}{7}$	$-\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{4}$
$-0,3$	$-\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{4}{5}$

□

Ví dụ 6. Sơ đồ sau biểu diễn độ cao của các vị trí so với mực nước biển. Hãy điền các số đo là các số hữu tỉ (đơn vị là ki-lô-mét) vào các điểm tương ứng: $\frac{82}{91}$; $\frac{226}{-339}$; $\frac{124}{23}$; $\frac{-145}{174}$; 0; $\frac{132}{21}$.



Lời giải.

So sánh các số hữu tỉ âm: $\frac{-145}{174} = -\frac{5}{6} < \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} = \frac{-226}{339} = \frac{226}{-339} \Rightarrow \frac{-145}{174} < \frac{226}{-339} < 0$.

So sánh các số hữu tỉ dương: $\frac{82}{91} < 1 < \frac{28}{19} < \frac{124}{23} < \frac{132}{21}$.

Vậy:

H → 0 (km)			
A	$\frac{82}{91}$ km	D	$\frac{124}{23}$ km
B	$\frac{28}{19}$ km	E	$\frac{-145}{174}$ km
C	$\frac{132}{21}$ km	G	$\frac{226}{-339}$ km

□

Ví dụ 7. So sánh các số hữu tỉ sau:

a) $\frac{12}{17}$ và $\frac{13}{18}$;

b) $\frac{84}{-83}$ và $\frac{-337}{331}$.

Lời giải.

a) Có $\frac{12}{17} < 1$, nên $\frac{12}{17} < \frac{12+1}{17+1} = \frac{13}{18}$.

b) Có $\frac{-337}{331} < 1$, nên $\frac{-337}{331} < \frac{-331+1}{331+1} = \frac{-336}{332} = \frac{-84}{83}$ hay $\frac{84}{-83} > \frac{-337}{331}$.

□

⚠ *Trường hợp: $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b > 0$*

Nếu $a < b$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$ và nếu $a > b$ thì $\frac{a}{b} > \frac{a+1}{b+1}$.

Trường hợp: $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $b, d > 0$

Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

III. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Đúng điền Đ, sai điền S:

Khẳng định	Đ/S	Khẳng định	Đ/S
a) $-0,25 \in \mathbb{Q}$	Đ	d) $226 \in \mathbb{N}$	Đ
b) $-0,25 \subset \mathbb{Q}$	S	e) $226 \notin \mathbb{Z}$	S
c) $\{-0,25\} \subset \mathbb{Q}$	Đ	f) $226 \notin \mathbb{Q}$	S

Bài 2. Khẳng định nào sau đây **sai**?

a) $\boxed{\text{Đ}}$ $\dfrac{-22}{9} > \dfrac{33}{-7}$;

b) $\boxed{\text{S}}$ $\dfrac{36}{-48} < \dfrac{-28}{35}$;

c) $\boxed{\text{S}}$ $\dfrac{-8}{24} < \dfrac{-4}{28} < \dfrac{6}{-30}$;

d) $\boxed{\text{S}}$ $\dfrac{-20}{35} < \dfrac{-36}{63}$.

Bài 3. Mẹ mua bánh nướng nhân dịp Tết Trung thu. Bố cắt một chiếc làm 4 phần bằng nhau, và ăn 3 phần. Mẹ cắt một chiếc bánh làm 8 phần bằng nhau và ăn 7 phần. Hỏi nếu con cắt một chiếc làm 6 phần bằng nhau thì con cần ăn mấy phần để phần còn lại của con trong khoảng hai phần còn lại của bố và mẹ?

Lời giải.

Số phần bánh còn lại của bố là $\dfrac{3}{4}$, số phần bánh còn lại của mẹ là $\dfrac{7}{8}$.

Gọi x là số phần con cần phải ăn để phần còn lại của con trong khoảng hai phần còn lại của bố và mẹ.

Ta có $\dfrac{1}{8} < \dfrac{6-x}{6} < \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$, suy ra $x = 5$. □

Bài 4. Điền các số hữu tỉ thích hợp vào chỗ chấm (...):

$$-\frac{1}{5} < -\frac{1}{6} < -\frac{2}{13} < -\frac{1}{7} < -\frac{2}{15} < -\frac{1}{8}.$$

Bài 5. Tìm số nguyên tố a, biết $\dfrac{8}{17} < \dfrac{10}{a} < \dfrac{8}{11}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{8}{17} < \dfrac{10}{a} < \dfrac{8}{11} \Rightarrow \dfrac{80}{170} < \dfrac{80}{8a} < \dfrac{80}{100} \Rightarrow 110 < 8a < 170 \Rightarrow a \in \{17; 19\}$, vì a là số nguyên tố. □

Bài 6. Người ta viết các số hữu tỉ: $-\dfrac{1}{12}; -\dfrac{1}{11}; -\dfrac{1}{10}; \cdots; -\dfrac{1}{1}$ trên một vòng tròn theo chiều kim đồng hồ. Sau đó theo chiều kim đồng hồ, đầu tiên xóa số (-1), rồi bỏ qua một số xóa số tiếp theo. Cứ làm lần lượt như thế đến khi chỉ còn lại một số. Hỏi số còn lại là số nào?

Lời giải.
Số còn lại là số $-\dfrac{1}{12}$ □

Bài 7. Tìm số hữu tỉ có dạng $\dfrac{7}{a}$ biết giá trị của nó nhỏ hơn $-\dfrac{8}{11}$ và nhỏ hơn $-\dfrac{8}{13}$.

Lời giải.
Có $a \in \{-11; -10\}$ và các số hữu tỉ dạng $\dfrac{7}{a}$ là $\dfrac{7}{-11} = \dfrac{-7}{11}$ và $\dfrac{7}{-10} = \dfrac{7}{-10}$.
Ta có $-\dfrac{8}{11} = \dfrac{-8}{11} < \dfrac{-7}{10} < \dfrac{-7}{11} < \dfrac{-8}{13} = -\dfrac{8}{13}$. □

Bài 8. Có bao nhiêu số hữu tỉ viết dưới dạng một phân số có tử số bằng 9 mà giá trị của số hữu tỉ đó lớn hơn $\dfrac{-3}{5}$ và nhỏ hơn $\dfrac{-4}{9}$?

Lời giải.
Có 5 số hữu tỉ: $\dfrac{-3}{5} < \dfrac{9}{-16} < \dfrac{9}{-17} < \dfrac{9}{-18} < \dfrac{9}{-19} < \dfrac{9}{-20} < \dfrac{-4}{9}$. □

Bài 9. Tìm số nguyên a, sao cho:

a) $\dfrac{3}{2a-5}$ là số nguyên.

b) $\dfrac{3}{7-3a}$ là số tự nhiên.

Lời giải.

a) $\dfrac{3}{2a-5}$ là số nguyên khi và chỉ khi $2a-5 \in \{-3; -1; 1; 3\} \Leftrightarrow a \in \{1; 2; 3; 4\}$.

b) $\dfrac{3}{7-3a}$ là số tự nhiên $\Leftrightarrow \begin{cases} 7-3a \in \{-3; -1; 1; 3\} \\ a \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow a = 2$.

□

§2. Các phép tính về số hữu tỉ

I. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Đúng điền Đ, sai điền S.

Khẳng định	Đ/S
a) $x < 0 \Rightarrow \|x\| < x$	S
b) $x > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x} < x$	S
c) $-x$ là số âm	S
d) $x < 0 \Rightarrow \|x\| = -x$	Đ

II. Học giải toán

Ví dụ 1. Điền số thích hợp vào ô trống:

$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$-0,5$	-1	$-1,5$	$-2,5$	-4	$-6,5$

- Chìa khóa: Từ ô thứ ba, số cần điền là tổng của các số thuộc hai ô liền trước.
- Ví dụ: Số ở ô thứ ba là tổng của hai số ở ô thứ nhất và ô thứ hai $\frac{1}{2}+\frac{-1}{2}=0$.

Lời giải.

Số ở ô thứ ba: $\frac{1}{2}+\frac{-1}{2}=0$.

Số ở ô thứ tư: $\frac{-1}{2}+0=-\frac{1}{2}=-0,5$. Cứ tiếp tục như vậy ta có:

$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$-0,5$	-1	$-1,5$	$-2,5$	-4	$-6,5$

$\square$

Ví dụ 2. Thực hiện phép tính:

a) $A=\frac{-90}{189}+\frac{45}{84}-\frac{75}{126}$;

b) $B=11\frac{7}{21}+8\frac{16}{24}-10\frac{21}{35}$;

c) $C=\frac{37}{43}\cdot\frac{17}{29}-\frac{21}{41}\cdot\frac{1}{2}+\frac{9}{58}:1\frac{6}{37}-\frac{6}{29}:1\frac{20}{21}$.

Lời giải.

a) $A=\frac{-10}{21}+\frac{15}{28}-\frac{25}{42}=\frac{-40+45-50}{84}=-\frac{45}{84}=-\frac{15}{28}$

b) $B=11\frac{7}{21}+8\frac{16}{24}-10\frac{21}{35}=(11+8-10)+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)=9+\left(1-\frac{3}{5}\right)=9\frac{2}{5}$;

c)

$$\begin{aligned}
C &= \frac{37}{43}\cdot\frac{17}{29}-\frac{21}{41}\cdot\frac{1}{2}+\frac{9}{58}:1\frac{6}{37}-\frac{6}{29}:1\frac{20}{21}\\
&=\left(\frac{37}{43}\cdot\frac{17}{29}+\frac{9}{58}\cdot\frac{37}{43}\right)+\left(-\frac{21}{41}\cdot\frac{1}{2}-\frac{6}{29}\cdot\frac{21}{41}\right)\\
&+\frac{37}{43}\cdot\left(\frac{17}{29}+\frac{9}{58}\right)-\frac{21}{41}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{6}{29}\right)\\
&=\frac{37}{43}\cdot\frac{43}{58}-\frac{21}{41}\cdot\frac{41}{48}=\frac{37}{58}-\frac{21}{58}=\frac{16}{28}=\frac{8}{29}.
\end{aligned}$$

$\square$

Ví dụ 3. Điền tiếp vào các ô còn trông của hai hình KIM TỰ THÁP, biết chìa khóa ở hàng cuối

$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

100			
10			
$-0,1$			
$0,01$			

$x+y$	
x	y

$x \cdot y$	
x	y

Lời giải.

$-\frac{1}{3}$			
$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$		
0	$-\frac{1}{6}$	0	
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

100			
10	-10		
$-0,1$	-100	$-0,1$	
$0,01$	-10	10	$-0,01$

□

Ví dụ 4. Cho $A = |x| + x$.

a) Rút gọn A;

b) Tính giá trị của A biết $x \in \left\{\frac{-1}{2}; \frac{-1}{3}; 0; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A;

d) Tìm x biết giá trị của A bằng $-0,4; 0; \frac{1}{3}$.

Lời giải.

a) Ta xét hai trường hợp:
Trường hợp 1: $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow A = x + x = 2x$.
Trường hợp 2: $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow A = -x + x = 0$.
Vậy $A = 2x$, nếu $x \geq 0$ và $A = 0$, nếu $x < 0$.

b) Cách 1: Lập bảng

x	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\|x\|$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$A = \|x\| + x$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	1

Cách 2: (Dựa vào kết quả câu a).
• $x \in \left\{\frac{-1}{3}; \frac{-1}{2}; 0\right\} \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow A = 0$.
• $x \in \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow x > 0 \Rightarrow A = 2x$.
Vậy $A = \frac{2}{3}$ và nếu $x = \frac{1}{2}$ thì $A = 1$.

c) Theo câu a) Nếu $x \leq 0$ thì $A = 2x \geq 0$ và nếu $x < 0$ thì $A = 0 \Rightarrow \text{Min}A = 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

d) • Trường hợp $A = -0,4$. Theo câu c) thì $\text{Min}A = 0 \Rightarrow$ giá trị $A = -0,4$ không tồn tại.
• Trường hợp $A = 0$. Theo câu c) thì $x \leq 0$.
• Trường hợp $A = \frac{1}{3}$ thì $2x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{6}$.

□

Ví dụ 5. Tìm giá trị lớn nhất của $B = 0,5 - |x - 4,5|$.

Lời giải.
Vì $|x - 4,5| \geq 0$ nên $0,5 - |x - 4,5| \leq 0,5$.
Ta có: $B \leq 0,5$ và $B = 0,5 \Leftrightarrow x = 4,5$.
Vậy $\text{Max}B = 0,5$ tại $x = 4,5$. □

III. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Điền số thích hợp vào ô trống

$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	1	$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{2}$	17	$-27\frac{1}{2}$

• Chìa khóa: Từ ô thứ ba, mỗi số là hiệu của hai số thuộc hai ô liền trước.
• Ví dụ: Số ở ô thứ ba là hiệu của hai số ở ô thứ nhất và ô thứ hai $\frac{1}{2} - \frac{-1}{2} = 1$.

Lời giải.
Ta có kết quả

$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	1	$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{2}$	17	$-27\frac{1}{2}$

□

Bài 2. Tính

a) $A = \left(1 + \frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) - \left(1 + \frac{5}{4}\right) + \left(\frac{2}{5} - 2\right)$;

b) $B = \left(5 - \frac{3}{2} - \frac{1}{8}\right) : \left(2 - \frac{5}{2} - \frac{3}{4}\right)$;

c) $C = 3 - \dfrac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}$.

Lời giải.

a) $A = \left(1 + \frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) - \left(1 + \frac{5}{4}\right) + \left(\frac{2}{5} - 2\right)$;

Ta có

$$\begin{aligned} A &= (1 - 1 - 2) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\right) \\ &= -1 + \frac{2 \cdot 5 + 2 \cdot 3}{15} + \frac{2}{4} \\ &= -\frac{15}{15} + \frac{16}{15} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{15} + \frac{1}{2} = -\frac{13}{15} \end{aligned}$$

b) $B = \left(5 - \frac{3}{2} - \frac{1}{8}\right) : \left(2 - \frac{5}{2} - \frac{3}{4}\right)$;

Ta có

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{40}{8} - \frac{12}{8} - \frac{1}{8}\right) : \left(\frac{8}{4} - \frac{10}{4} - \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{40 - 12 - 1}{8} : \frac{8 - 10 - 3}{4} \\ &= \frac{27}{8} : \frac{-5}{4} \\ &= \frac{27}{8} \cdot \frac{4}{-5} \\ &= \frac{-27}{10} \end{aligned}$$

c) $C = 3 - \dfrac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \dfrac{\frac{2+1}{2}}{\frac{2-1}{2}} = 3 - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} = 3 - 3 = 0.$

□

Bài 3. Tính giá trị

a) $A = |x + y + z|$ với $x = -1$, $y = 2$ và $z = 4$;

b) $B = |x| + |x-1| + |2-x|$ với $x = -\dfrac{1}{3}$;

c) $C = 4x^2 - 3x - 2$ với $|x| = 1$.

Lời giải.

a) $A = |-1+2+4| = 5$;

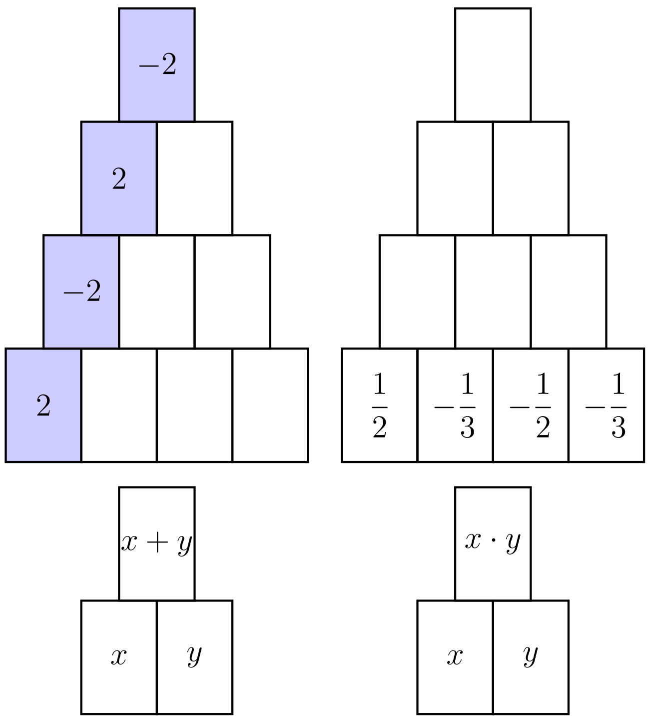
b) $B = \left|-\dfrac{1}{3}\right| + \left|-\dfrac{1}{3} - 1\right| + \left|2 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)\right| = \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{3} + \dfrac{7}{3} = 4$;

c) Do $|x| = 1$ nên $x = -1$ hoặc $x = 1$.
Trường hợp 1: Với $x = -1$, nên $A = 4(-1)^2 - 3(-1) - 2 = 5$;
Trường hợp 2: Với $x = 1$, nên $A = 4(1)^2 - 3(1) - 2 = -1$.

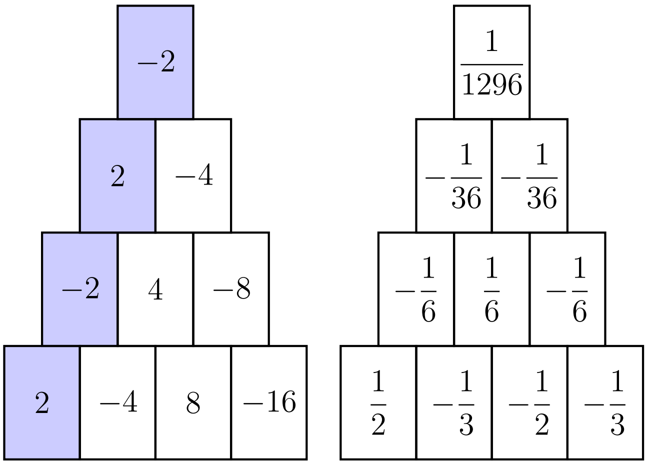
□

2. Nâng cao

Bài 4. Các công trình có hình kim tự tháp được xây dựng ở nhiều nền văn minh khác nhau. Các kim tự tháp nổi tiếng nhất là các **kim tự tháp Ai Cập** - chung được xây dựng bằng gạch hay đá. Ngành khảo cổ học cho rằng chúng được xây dựng lên để làm lăng mộ cho các pharaon (tiếng Ả Rập chỉ tước hiệu của các nhà vua Ai Cập cổ đại). Điền số thích hợp vào ô trống của hai kim tự tháp, biết chìa khóa ở dưới.



Lời giải.



$\square$

Bài 5. Thực hiện các phép tính sau:

a) $A = \left(\dfrac{\dfrac{3}{5}}{\dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{5}} - \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{8} - 1} \right) \cdot \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{16} - 2};$

b) $B = \dfrac{1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{3}}}{1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3}}};$

c) $C = 1 - \dfrac{2}{3 - \dfrac{4}{5 - \dfrac{6}{7}}};$

d) $D = \dfrac{\dfrac{5}{7} - \dfrac{5}{17} + \dfrac{5}{37}}{\dfrac{3}{7} - \dfrac{3}{17} + \dfrac{3}{37}} : \dfrac{\dfrac{7}{5} - \dfrac{7}{4} + \dfrac{7}{3} - \dfrac{7}{2}}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5}};$

e) $E = \dfrac{15}{11 \cdot 14} + \dfrac{15}{14 \cdot 17} + \dfrac{15}{17 \cdot 20} + \cdots + \dfrac{15}{68 \cdot 71}.$

Lời giải.

a) $A=\left(\dfrac{\dfrac{3}{5}}{\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{5}}-\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{8}-1}\right)\cdot\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{16}-2}$. Ta có

$$\begin{aligned}A&=\left(\dfrac{\dfrac{3}{5}}{\dfrac{10-12}{15}}-\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1-8}{8}}\right)\cdot\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1-32}{16}}\\&=\left(\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{15}{-2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8}{-7}\right)\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{16}{-31}\\&=\left(\dfrac{9}{-2}+\dfrac{4}{7}\right)\cdot\dfrac{8}{-31}\\&=-\dfrac{55}{14}\cdot\dfrac{8}{-31}=\dfrac{220}{217}=1\dfrac{3}{217}.\end{aligned}$$

b) $B=\dfrac{1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}$. Ta có $B=\dfrac{\dfrac{2}{3}-\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{2}{3}}}{\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{\dfrac{4}{3}}}=\dfrac{\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{2}}{\dfrac{4}{3}+\dfrac{3}{4}}=\dfrac{-\dfrac{5}{6}}{\dfrac{25}{12}}=-\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{12}{25}=-\dfrac{2}{5}$.

c) $C=1-\dfrac{2}{3-\dfrac{4}{5-\dfrac{6}{7}}}=1-\dfrac{2}{3-\dfrac{4}{\dfrac{29}{7}}}=1-\dfrac{2}{3-\dfrac{28}{29}}=1-\dfrac{2}{3-\dfrac{59}{29}}$;

d)

$$\begin{aligned}D&=\dfrac{\dfrac{5}{7}-\dfrac{5}{17}+\dfrac{5}{37}}{\dfrac{3}{7}-\dfrac{3}{17}+\dfrac{3}{37}}:\dfrac{\dfrac{7}{5}-\dfrac{7}{4}+\dfrac{7}{3}-\dfrac{7}{2}}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}}\\&=\dfrac{5\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{17}+\dfrac{1}{37}\right)}{3\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{17}+\dfrac{1}{37}\right)}:\dfrac{-7\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}\right)}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}}\\&=\dfrac{5}{3}:(-7)=\dfrac{-5}{21};\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}E&=\dfrac{15}{11\cdot14}+\dfrac{15}{14\cdot17}+\dfrac{15}{17\cdot20}+\cdots+\dfrac{15}{68\cdot71}\\&=\dfrac{5\cdot3}{11\cdot14}+\dfrac{5\cdot3}{14\cdot17}+\dfrac{5\cdot3}{17\cdot20}+\cdots+\dfrac{5\cdot3}{68\cdot71}\\&=5\cdot\left[\left(\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{14}\right)+\left(\dfrac{1}{14}-\dfrac{1}{17}\right)+\left(\dfrac{1}{17}-\dfrac{1}{20}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{68}-\dfrac{1}{71}\right)\right]\\&=5\cdot\left(\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{71}\right)=5\cdot\dfrac{71-11}{781}=\dfrac{300}{781}.\end{aligned}$$

□

Bài 6. Bạn **BEE** loay hoay với bài toán, mà không làm được. Bạn hãy giúp bạn **BEE** nhé. "Nếu cho biết $3x + 2 = 2014\frac{1}{2}$. Hỏi có tính được $6x + 5$ không?"

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} 3x + 2 &= 2014\frac{1}{2} \\ 3x + 2 &= \frac{4029}{2} \\ 6x + 4 &= 4029 \\ 6x + 5 &= 4030. \end{aligned}$$

□

Bài 7. Cho $x, y \in \mathbb{Q}$. Chứng minh $\max(x, y) = \dfrac{x + y + |x - y|}{2}$ và $\min(x, y) = \dfrac{x + y - |x - y|}{2}$.

Lời giải.
Giả sử $x \geq y \Rightarrow \max(x, y) = x$ và $\min(x, y) = y$. □

Bài 8. Cho dãy số viết theo quy luật: $-1;\ -2;\ -\frac{1}{2};\ -3;\ -1;\ -\frac{1}{3};\ -4;\ -1\frac{1}{2};\ -\frac{2}{3};\ -\frac{1}{4};\ -5;\ \cdots$

a) Tìm quy luật của dãy số;

b) Số hạng thứ 124 của dãy số là số nào?

Lời giải.

a) Mọi số của dãy số là số âm, ta bỏ dấu "$-$", rồi đổi tất cả các hỗn số ra phân số và được dãy số (có quy luật) như sau:

$$\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{1}{2}; \frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3}; \frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{5}{1}; \ldots$$

Ghép nhóm của dãy số trên:

$$\left(\frac{1}{1}\right); \left(\frac{2}{1}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3}\right); \left(\frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}\right); \cdots$$

Nhóm thứ nhất có 1 số, mà tổng của tử số và mẫu số $T(1) = 2$.
Tương tự có $T(2) = 3, T(3) = 4; T(4) = 5; \cdots; T(n) = n + 1$.
Số số hạng từ nhóm thứ nhất đến nhóm thứ n là $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{(n+1) \cdot n}{2}$.

b) Chọn $S = 120 \Rightarrow n = 15$. Từ đó suy ra số hạng thứ 124 là số hạng thứ tư của nhóm thứ 16 và bằng $-3\frac{1}{4}$.

□

Bài 9. Tìm kho báu của Kim tự tháp. Mật mã mở cửa hầm được giấu trong ô có dấu **X**.

$-\dfrac{1}{6}$

$-\dfrac{1}{4}$

X $\quad -\dfrac{1}{2} \quad \quad -\dfrac{1}{3}$

$x \cdot y$

$x \quad y$

Lời giải.
Ta có:

$-\dfrac{1}{6}$

$-4 \quad \dfrac{1}{24}$

$16 \quad -\dfrac{1}{4} \quad -\dfrac{1}{6}$

$-32 \quad -\dfrac{1}{2} \quad \dfrac{1}{2} \quad -\dfrac{1}{3}$

Vậy kho báu là **X**$= -32$. □

§3. Lũy thừa của một số hữu tỉ

I. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Đúng điền **Đ**, sai điền **S**.

a) $\boxed{\text{Đ}}$ $x \cdot (-x) < 0$.

b) $\boxed{\text{S}}$ một nửa của 2^{98} là 1^{49}.

c) $\boxed{\text{S}}$ $4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 = 4^8$.

d) $\boxed{\text{S}}$ $(-1)^{2n-1} > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Câu 2. Ghép mỗi phép tính ở dòng 1 với một số hữu tỉ ở dòng 2 để được một khẳng định đúng.

Dòng 1	I) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3$	II) -2^3	III) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$		
Dòng 2	A) $\dfrac{1}{8}$	B) $-\dfrac{1}{8}$	C) 2^{-3}	D) $-0{,}125$.	E) $(-2)^3$

Lời giải.
Khẳng định đúng là

- I nối với B hoặc D.

- II nối với E.
- III nối với A hoặc C.

□

II. Học giải toán

Ví dụ 1. Cho $x \in \left\{-2; -0{,}5; -\dfrac{1}{3}; 0; 1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}\right\}$. Tính x^{-3}; x^{-1}; x^0; x^2; x^3.

Lời giải.

x	-2	$-0{,}5$	$-\dfrac{1}{3}$	0	1	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$
x^{-3}	$-\dfrac{1}{8}$	-8	-27	$\Vert$	1	2	3
x^{-1}	$-\dfrac{1}{2}$	-2	-3	$\Vert$	1	2	3
x^0	$-\dfrac{1}{2}$	-2	-3	$\Vert$	1	2	3
x^2	4	$0{,}25$	$\dfrac{1}{9}$	0	1	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{9}$
x^3	-8	$-0{,}125$	$-\dfrac{1}{27}$	0	1	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{27}$

⚠ *Chú ý*

- $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ $(x \neq 0)$ *và* $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$.
- *Lũy thừa bậc lẻ của một số âm là một số âm.*
- *Lũy thừa bậc chẵn của một số âm là một số dương.*

□

Ví dụ 2. Tính

a) $A = \dfrac{2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^7}{2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^5}$.

b) $B = \dfrac{2^3 \cdot (-5)^3 \cdot (-7)^2}{(-14)^2 \cdot 10^2}$.

Lời giải.

a) $A = \dfrac{2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^7}{2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^5} = \dfrac{5^2}{2^2 \cdot 3^2} = \dfrac{25}{36}$.

b) $$B = \dfrac{2^3 \cdot (-5)^3 \cdot (-7)^2}{(-14)^2 \cdot 10^2} = \dfrac{-2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 7^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2} = -\dfrac{5}{2}.$$

□

Ví dụ 3. Tìm x, biết

a) $(0{,}2 - x)^2 = 0$.

b) $(1 - 2x)^3 = -125$.

c) $(0{,}7)^3 x = 0{,}49^2$.

d) $x : (-0{,}3)^3 = 0{,}3^2$.

Lời giải.

a) $(0{,}2 - x)^2 = 0$
$0{,}2 - x = 0$
$x = 0{,}2$.

b) $(1 - 2x)^3 = -125$
$(1 - 2x)^3 = (-5)^3$
$1 - 2x = -5$
$2x = 6$
$x = 3$.

c) $(0{,}7)^3 x = 0{,}49^2$
$x = 0{,}7^4 : (0{,}7)^3$
$x = 0{,}7$.

d) $x : (-0{,}3)^3 = 0{,}3^2$
$x = -0{,}3^2 \cdot 0{,}3^3$
$x = -0{,}3^5$.

⚠ *Chú ý*

- *Đưa các lũy thừa về cùng cơ số hoặc số mũ.*
- $a^n = 0 \Rightarrow a = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

□

Ví dụ 4. Số nào lớn hơn

a) 2^8 và 4^4.

b) 3^20 và 2^30.

c) 81^3 và 64^4.

d) $(-77)^{77}$ và $(-88)^{66}$.

Lời giải.

a) Ta có $4^4 = (2^2)^4 = 2^8$.

b) Ta có $3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10}$.
Và $2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10} < 9^{10}$.
Vậy $3^{20} > 2^{30}$.

c) Ta có $81^3 = 3^{12}$ và $64^4 = 4^{12}$.
Vì $3^{12} < 4^{12}$ nên $81^3 < 64^4$.

d) Ta có $(-77)^{77} < 0 < (-88)^{66}$.
Vậy $(-77)^{77} < (-88)^{66}$.

□

Ví dụ 5. Tìm số tự nhiên n biết $a^{3n} = a^9$.

Lời giải.

Ta xét các trường hợp

- Nếu $a = 0$ thì $0^{3n} = 0$ do đó $n \in \mathbb{N}^*$.
- Nếu $a = 1$ thì $1^{3n} = 1$ do đó $n \in \mathbb{N}$.
- Nếu $a = -1$ thì $(-1)^n = -1$ do đó n là số tự nhiên lẻ.
- Nếu $a \notin \{-1; 0; 1\}$ thì $3n = 9$ do đó $n = 3$.

□

III. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Sử dụng các phép tính của lũy thừa để tìm x.

a) $\left(\dfrac{1}{3}-x\right)^2=0$;

b) $(1-3x)^3=-8$;

c) $x^5 : 9=27$;

d) $4\cdot x^8=1024$;

e) $x\cdot(0{,}9)^3=(0{,}81)^2$;

f) $(0{,}03)^3 : x=-(0{,}03)^2$.

Lời giải.

a) Xét $\left(\dfrac{1}{3}-x\right)^2=0$ suy ra $\dfrac{1}{3}-x=0$. Theo quy tắc chuyển vế $x=\dfrac{1}{3}$.
Thử lại, khi $x=\dfrac{1}{3}$ suy ra $\left(\dfrac{1}{3}-x\right)^2=\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\right)^2=0^2=0$.
Vậy $x=\dfrac{1}{3}$ thỏa mãn.

b) Ta có

$$\begin{aligned}(1-3x)^3=-8 &\Rightarrow (1-3x)^3=(-2)^3\\ &\Rightarrow 1-3x=-2\Rightarrow 3x=3\\ &\Rightarrow x=1.\end{aligned}$$

Thử lại, khi $x=1$ suy ra $(1-3x)^3=(1-3)^3=(-2)^3=-8$.
Vậy $x=1$ thỏa mãn.

c) Ta có $x^5 : 9=27\Rightarrow x^5=27\cdot 9\Rightarrow x^5=3^5\Rightarrow x=3$.
Thử lại, khi $x=3$ suy ra $x^5 : 9=3^5 : 9=3^5 : 3^2=3^3=27$.
Vậy $x=3$ thỏa mãn.

d) Ta có $4\cdot x^8=1024\Rightarrow x^8=2^{10} : 2^2\Rightarrow x^8=2^8\Rightarrow x=2$.
Thử lại, khi $x=2$ suy ra $4\cdot x^8=4\cdot 2^8=2^{10}=1024$.
Vậy $x=2$ thỏa mãn.

e) Ta có $x\cdot(0{,}9)^3=(0{,}81)^2\Rightarrow x\cdot(0{,}9)^3=\left[(0{,}9)^2\right]^2\Rightarrow x=(0{,}9)^4 : (0{,}9)^3\Rightarrow x=0{,}9$.
Thử lại, khi $x=0{,}9$ suy ra $x\cdot(0{,}9)^3=(0{,}9)\cdot(0{,}9)^3=(0{,}9)^4=\left[(0{,}9)^2\right]^2=(0{,}81)^2$.
Vậy $x=0{,}9$ thỏa mãn.

f) Ta có

$$\begin{aligned}(0{,}03)^3 : x=-(0{,}03)^2 &\Rightarrow (0{,}03)^3=\left[-(0{,}03)^2\right]\cdot x\\ &\Rightarrow x=-(0{,}03)^3 : (0{,}03)^2\\ &\Rightarrow x=-0{,}03.\end{aligned}$$

Thử lại, khi $x = -0{,}03$ suy ra $(0{,}03)^3 : x = (0{,}03)^3 : (-0{,}03) = -(0{,}03)^2$.
Vậy $x = -0{,}03$ thỏa mãn. □

Bài 2. Số nào lớn hơn trong các cặp số sau

a) 243^3 và 125^5;

b) $(-3)^2$ và $(-2)^3$;

c) $(-2)^1$ và $(-1)^2$;

d) $\left[(-0{,}1)^2\right]^3$ và $\left[(-0{,}1)^3\right]^2$

Lời giải.

a) Ta có $243^3 = (3^4)^3 = 3^{12}$ và $125^5 = (5^3)^5 = 5^{15}$;
Do $3^{12} < 3^{15}$ và $3 < 5$ nên $3^{15} < 5^{15}$ suy ra $3^{12} < 5^{15}$. Khi đó $243^3 < 125^5$.

b) Ta có $(-3)^2 = 9$ và $(-2)^3 = -8$ nên $(-3)^2 > (-2)^3$.

c) Ta có $(-2)^1 = -2$ và $(-1)^2 = 1$ nên $(-2)^1 < (-1)^2$.

d) Ta có $\left[(-0{,}1)^2\right]^3 = (-0{,}1)^6$ và $\left[(-0{,}1)^3\right]^2 = (-0{,}1)^6$ nên $\left[(-0{,}1)^2\right]^3 = \left[(-0{,}1)^3\right]^2$.

□

2. Nâng cao

Bài 3. Rút gọn các phép tính sau và đưa về một lũy thừa của 10:

a) $(0{,}01)^3$;

b) $\left(\dfrac{1}{0{,}0001}\right)^2$;

c) $\left(\dfrac{1}{0{,}1}\right)^4 : \left(\dfrac{1}{100}\right)^2$;

Lời giải.

a) Ta có $(0{,}01)^3 = \left(\dfrac{1}{100}\right)^3 = \left(\dfrac{1}{10^2}\right)^3 = (10^{-2})^3 = 10^{-6}$.

b) Ta có $\left(\dfrac{1}{0{,}0001}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{10000}}\right)^2 = (10000)^2 = (10^4)^2 = 10^8$.

c) Ta có $\left(\dfrac{1}{0{,}1}\right)^4 : \left(\dfrac{1}{100}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{10}}\right)^4 : \left(\dfrac{1}{10^2}\right)^2 = 10^4 : (10^{-2})^2 = 10^4 : 10^{-4} = 10^0$

□

Bài 4. Số nào khác loại?
$\dfrac{1}{10^n}$; 10^{-n}; $\left(\dfrac{1}{10^{-1}}\right)^n$; $\dfrac{1^n}{10^n}$; $(10^n)^{-1}$; $(10^{-1})^n$.

Lời giải.
Ta có $\dfrac{1}{10^n} = 10^{-n}$; $\dfrac{1^n}{10^n} = \dfrac{1}{10^n} = 10^{-n}$; $(10^n)^{-1} = 10^{-n}$ và $(10^{-1})^n = 10^{-n}$.
Mặt khác $\left(\dfrac{1}{10^{-1}}\right)^n = 10^n$.
Do đó $\left(\dfrac{1}{10^{-1}}\right)^n$ là khác loại. □

Bài 5. Tìm số nguyên dương x, biết $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdots 2^x = 1024$.

Lời giải.
Ta có $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdots 2^x = 1024 \Rightarrow 2^{1+2+3+\cdots+x} = 2^{10} \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \cdots + x = 10$.
- Nếu $x > 4$ suy ra $1 + 2 + 3 + \cdots + x > 10$ nên $x > 4$ không thỏa mãn.
- Nếu $x < 4$ suy ra $1 + 2 + 3 + \cdots + x \leq 1 + 2 + 3 < 10$ nên $x < 4$ không thỏa mãn.
- Nếu $x = 4$ thì $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdots 2^x = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 = 2^{1+2+3+4} = 2^{10} = 1024$.
Vậy $x = 4$ thỏa mãn bài toán. □

Bài 6. Tìm x, biết

a) $x\colon (0{,}03)^3 = -(0{,}03)^2$;

b) $(0{,}000027)^5 : x = (-0{,}03)^{12}$;

Lời giải.

a) Ta xét $x\colon (0{,}03)^3 = -(0{,}03)^2 \Rightarrow x = \left[-(0{,}03)^2\right] \cdot (0{,}03)^3 \Rightarrow x = -(0{,}03)^5$.
Thử lại, khi $x = -(0{,}03)^5$ suy ra
$x\colon (0{,}03)^3 = \left[-(0{,}03)^5\right] : (0{,}03)^3 = -(0{,}03)^{5-3} = -(0{,}03)^2$.
Vậy $x = -(0{,}03)^5$ thỏa mãn.

b) Ta xét

$$\begin{aligned}(0{,}000027)^5 : x = (-0{,}03)^{12} &\Rightarrow \left[(0{,}03)^3\right]^5 : x = (0{,}03)^{12}\\ &\Rightarrow (0{,}03)^{15} : x = (0{,}03)^{12}\\ &\Rightarrow x = (0{,}03)^{15} : (0{,}03)^{12}\\ &\Rightarrow x = (0{,}03)^{15-12}\\ &\Rightarrow x = (0{,}03)^3 .\end{aligned}$$

Thử lại, khi $x = (0{,}03)^3$ suy ra
$(0{,}000027)^5 : x = \left[(0{,}03)^3\right]^5 : x = (0{,}03)^3 = (0{,}03)^{15} : (0{,}03)^2 = (0{,}03)^{12} = (-0{,}03)^{12}$.
Vậy $x = (0{,}03)^3$ thỏa mãn. □

Bài 7. Hai bạn EGG và CHICKEN loay hoay tìm các điền các lũy thừa cơ số 2 vào các ô trống của hình vuông bên. Để được một "hình vuông lũy thừa", nhưng mãi không điền được. Bạn có giúp được các bạn đó không?

	2^0	
2^{12}		2^4

Lời giải.
Do định nghĩa của "hình vuông lũy thừa" ta giả sử

	2^0	
2^{12}	2^m	2^4
	2^n	

Do giả thiết suy ra $4 + m + 12 = 0 + m + n$. Dựa trên hình vuông lũy thừa đã biết suy ra $m = 8$ nên $n = 16$. Khi đó tổng lũy thừa mỗi hàng là 24, do dữ liệu của bài toán ta chọn được bảng sau

2^{10}	2^0	2^{14}
2^{12}	2^8	2^4
2^2	2^{16}	2^6

□

§4. Tỉ lệ thức - Dãy tỉ số bằng nhau

I. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Đúng điền **Đ** sai điền **S**.

a) $\boxed{\text{S}}$ $\dfrac{0{,}3}{1{,}5} = \dfrac{1}{5}$ là một đẳng thức giữa hai phân số.

b) $\boxed{\text{Đ}}$ $0,3 : 1{,}5 = 1 : 5$ là một tỉ lệ thức.

c) $\boxed{\text{S}}$ $\dfrac{5}{0{,}3} = \dfrac{1}{1{,}5}$ là một tỉ lệ thức.

d) $\boxed{\text{Đ}}$ $\dfrac{0{,}3}{1{,}5} = \dfrac{1}{5} = \dfrac{1\frac{1}{2}}{7\frac{1}{2}}$ là một dãy tỉ số bằng nhau.

Câu 2. Điền số thích hợp vào chổ chấm (...)

a) $\dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{5}{15}$.

b) $\dfrac{0{,}1}{2} = \dfrac{0{,}7}{14} = \dfrac{0{,}3}{6}$.

Câu 3. Số nào trong các phương án sau không thể thêm vào tập hợp $M = \{3; 6; 9\}$ để tạo ra một tỉ lệ thức.

A. 2. **B.** 4,5. **C.** 12. **D.** 18.

Lời giải.

Chọn đáp án C □

II. Học giải toán

Ví dụ 1. Thay tỉ số 2,25 và $2\frac{5}{8}$ bằng tỉ số giữa các số nguyên.

Lời giải.

Ta có $2{,}25 : 2\frac{5}{8} = \dfrac{225}{100} : \dfrac{21}{8} = \dfrac{9}{4} \cdot \dfrac{8}{21} = \dfrac{6}{7} = 6 : 7$. □

Ví dụ 2. Bốn số $-0{,}2; 0{,}1; 0{,}2; -0{,}1$ có tạo thành một tỉ lệ thức không?

Lời giải.

Ta có $(-0{,}2) \cdot (-0{,}1) = 0{,}2 \cdot 0,1 = 0{,}02$ do đó bốn số trên tạo thành một tỉ lệ thức.

⚠ *Để khẳng định bốn số $a; b; c; d$ không tạo thành một tỉ lệ thức ta phải chỉ ra hết tất cả ba trường hợp: $ab \neq cd; ac \neq bd; ad \neq bc$.*

□

Ví dụ 3. Tìm x, biết

a) $7{,}5 : x = 2{,}25 : 4\frac{1}{6}$.

b) $(49x) : 10{,}5 = 3\frac{3}{4} : 3\frac{1}{8}$.

c) $0{,}06 : x = x : 24$.

Lời giải.

a) $x = \dfrac{7{,}5 \cdot 4\frac{1}{6}}{2{,}25} = \dfrac{125}{9}$.

b) $49x = \dfrac{10{,}5 \cdot 3\frac{3}{4}}{3\frac{1}{8}} = \dfrac{63}{5}$
$\Rightarrow x = \dfrac{63}{5} : 49 = \dfrac{9}{35}$.

c) $x^2 = 0{,}06 \cdot 24 = 1{,}44 = 1{,}2^2$
Vậy $x = 1{,}2$ hoặc $x = -1{,}2$.

⚠ *Tích của trung tỉ và ngoại tỉ bằng nhau.*

□

Ví dụ 4. Tìm $x,\ y$ biết

a) $x : y = 20 : 9$ và $x - y = -22$.

b) $3x = 4y$ và $x + 2y = 35$.

c) $x : 2 = 2y : 3$ và $xy = 27$.

Lời giải.

a) $\dfrac{x}{20} = \dfrac{y}{9} = \dfrac{x-y}{20-9} = \dfrac{-22}{11} = -2$.
Vậy $x = -2 \cdot 20 = -40$ và $y = -2 \cdot 9 = -18$.

b) $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{x+2y}{4+2\cdot 3} = \dfrac{35}{10} = \dfrac{7}{2}$.
Vậy $x = \dfrac{7 \cdot 4}{2} = 14$ và $y = \dfrac{7 \cdot 3}{2} = \dfrac{21}{2}$.

c) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{2y}{3} \Rightarrow \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{2y}{3}\right)^2 = \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{2y}{3} = \dfrac{xy}{3} = \dfrac{27}{3} = 9$. Khi đó ta có
$\dfrac{x^2}{4} = 9 \Rightarrow x^2 = 6^2 \Rightarrow x \in \{-6; 6\}$ và $\dfrac{4y^2}{9} = 9 \Rightarrow y^2 = \left(\dfrac{9}{2}\right)^2 \Rightarrow y \in \left\{-\dfrac{9}{2}; \dfrac{9}{2}\right\}$.
Mặt khác x và y cùng dấu nên $x = 6; y = \dfrac{9}{2}$ hoặc $x = -6; y = -\dfrac{9}{2}$.

⚠ *Dãy tỉ số bằng nhau không có tính chất nhân, nghĩa là* $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} \neq \dfrac{ab}{xy}$.

□

Ví dụ 5. Tìm số hạng thứ tư để lập thành một tỉ lệ thức với bộ ba số sau

a) $4; 8; 16$.

b) $-3; -6; 9$.

c) $2^2; 2^4; 2^6$.

Lời giải.
Gọi x là số cần tìm.

a) x là một trong các số sau
- $x = \dfrac{4 \cdot 8}{16} = 2$.
- $x = \dfrac{4 \cdot 16}{8} = 8$.
- $x = \dfrac{8 \cdot 16}{4} = 32$.

Vậy $x \in 2; 8; 32$.

b) Tương tự $x \in \left\{2; \dfrac{9}{2}; 18\right\}$.

c) Tương tự $x \in \{2^0; 2^4; 2^8\}$.

□

Ví dụ 6. Cho tỉ lệ thức $a : b = c : d$. Giả sử rằng các biểu thức đều có nghĩa, chứng minh $a : (a - b) = c : (c - d)$.

Lời giải.
Ta có $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = \dfrac{a-b}{c-d} \Rightarrow \dfrac{a}{a-b} = \dfrac{c}{c-d}$.Vậy $a : (a - b) = c : (c - d)$. □

Ví dụ 7. Thêm một số hữu tỉ vào cả tử và mẫu của phân số $\dfrac{13}{29}$ để được phân số mới bằng $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.
Gọi x là số hữu tỉ cần tìm. Ta có

$$\frac{13+x}{29+x}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{13+x}{1}=\frac{29+x}{3}=\frac{29+x-(13+x)}{3-1}=8.$$

Suy ra $13+x=8$ hay $x=-5$ (thỏa). Vậy số hữu tỉ cần thêm là -5. □

III. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Tìm a, b và c trong mỗi trường hợp sau:

a) $5a-3b-3c=-536$ và $\frac{a}{4}=\frac{b}{6},\frac{b}{5}=\frac{c}{8}$.

b) $3a-5b+7c=86$ và $\frac{a+3}{5}=\frac{b-2}{3}=\frac{c-1}{7}$.

c) $5a=8b=3c$ và $a-2b+c=34$.

d) $3a=7b$ và $a^2-b^2=160$.

e) $15a=10b=6c$ và $abc=-1920$.

f) $a^2+3b^2-2c^2=-16$ và $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}$.

g) $a^3+b^3+c^3=792$ và $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}$.

Lời giải.

a) Ta có $\frac{a}{4}=\frac{b}{6},\frac{b}{5}=\frac{c}{8}$ nên $b=\frac{3a}{2}$ và $c=\frac{8b}{5}$ hay $b=\frac{3a}{2}$ (1) và $c=\frac{12a}{5}$ (2).
Thay (1), (2) vào $5a-3b-3c=-536\Rightarrow 5a-3\cdot\frac{3a}{2}-3\cdot\frac{12a}{5}=-536\Rightarrow a=80,\ b=120$ và $c=192$.

b) Ta có $\frac{a+3}{5}=\frac{b-2}{3}=\frac{c-1}{7}\Rightarrow\frac{a+b+c}{15}=\frac{a+3}{5}$ và $\frac{a+3-b+2+c-1}{9}=\frac{b-2}{3}$ hay $2a-b-c=-9$ (1) và $a-4b+c=-10$ (2).
Từ $3a-5b+7c=86$, kết hợp với (1), (2) suy ra $a=7,\ b=8,\ c=15$.

c) Ta có $5a=8b=3c$ nên $5a-8b=0$ (1) và $8b-3c=0$ (2).
Kết hợp (1), (2) và $a-2b+c=34$ suy ra $a=24,\ b=15,\ c=40$.

d) Ta có $3a=7b\Rightarrow a=\frac{7b}{3}$ (1). Thay (1) vào $a^2-b^2=160$, ta được:

$$\left(\frac{7b}{3}\right)^2-b^2=160\Rightarrow\frac{40}{9}b^2=160\Rightarrow b^2=36\Rightarrow b=\pm6.$$

Vậy $b=\pm6$ và $a=\pm14$.

e) Ta có $15a = 10b = 6c \Rightarrow a = \dfrac{2}{3}b$ (1) và $c = \dfrac{5}{3}b$ (2). Thay (1) và (2) vào $abc = -1920$, ta được:
$$\frac{2}{3}b \cdot \frac{5}{3}b \cdot b = -1920 \Rightarrow b^3 = -1728 \Rightarrow b = -12 \Rightarrow a = -8, c = -20.$$

f) Ta có $\dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{3} = \dfrac{c}{4} \Rightarrow a = \dfrac{2}{3}b$ (1) và $c = \dfrac{4}{3}b$ (2). Thay (1), (2) vào $a^2 + 3b^2 - 2c^2 = -16$, ta được:
$$\left(\frac{2}{3}b\right)^2 + 3b^2 - 2\left(\frac{4}{3}b\right)^2 = -16 \Rightarrow \frac{-1}{9}b^2 = -16 \Rightarrow b^2 = 144 \Rightarrow b = \pm 12.$$

Vậy $b = \pm 12, a = \pm 8, c = \pm 16$.

□

2. Nâng cao

Bài 2. Có hai người nghề nghiệp khác nhau và được mã số theo dữ kiện dưới đây.
Người thứ nhất được mã số bằng số a và số x. Người thứ hai được mã số bằng số b và số y.
Bạn BEE đố các bạn đoán được nghề nghiệp của họ qua các số a và b chỉ ngày và các số x và y chỉ tháng (đó là ngày kỉ niệm của những người làm nghề gì?)

Người thứ nhất:

- Bớt số x ở tử số và thêm số x ở mẫu số của phân số $\dfrac{23}{41}$ được phân số bằng $\dfrac{3}{13}$.
- Thêm số a ở tử số và bớt số a ở mẫu số của phân số $\dfrac{23}{41}$ được phân số bằng $\dfrac{43}{21}$.

Người thứ hai:

- Cùng thêm số b vào cả tử số và mẫu số của phân số $\dfrac{43}{61}$ được phân số bằng $\dfrac{35}{44}$.
- Cùng bớt số y ở cả tử số và mẫu số của phân số $\dfrac{43}{61}$ được phân số bằng $\dfrac{41}{59}$.

Lời giải.
Ta có $\dfrac{23-x}{41+x} = \dfrac{3}{13}$ và $\dfrac{23+a}{41-a} = \dfrac{43}{21}$ nên $13\cdot(23-x) = 3\cdot(41+x)$ và $21\cdot(23+a) = 43\cdot(41-a)$.
Suy ra $x = 11$ và $a = 20$. Vậy người thứ nhất làm nghề sư phạm.
Ta có $\dfrac{43+b}{61+b} = \dfrac{35}{44}$ và $\dfrac{43-y}{61-y} = \dfrac{41}{59}$ nên $44\cdot(43+b) = 35\cdot(61+b)$ và $59\cdot(43-y) = 41\cdot(61-y)$.
Suy ra $b = 27$ và $y = 2$. Vậy người thứ hai làm nghề y. □

Bài 3. Cho tỉ lệ thức $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \dfrac{a}{c}$, chứng minh $\dfrac{\overline{a\underbrace{bbb\ldots b}_{n-1}}}{\overline{\underbrace{bbb\ldots b}_{n-1}c}} = \dfrac{a}{c}$ (1) với $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.
Với $n = 1$ (hiển nhiên).

Giả sử (1) đúng với $n = k$, nghĩa là $\dfrac{\overline{a\underbrace{bbb\ldots b}_{k-1}}}{\overline{\underbrace{bbb\ldots b}_{k-1}c}} = \dfrac{a}{c}$, ta chứng minh (1) cũng đúng với $n = k+1$.

Với $n = k + 1$, (1) tương đương với

$$\frac{\overline{a\underbrace{bbb\ldots b}_{k}}}{\overline{\underbrace{bbb\ldots b}_{k}c}} = \frac{10\cdot\left(\overline{a\underbrace{bbb\ldots b}_{k-1}}\right)+b}{10^k\cdot b+\overline{\underbrace{bbb\ldots b}_{k-1}c}} = \frac{9\cdot\left(\overline{a\underbrace{bbb\ldots b}_{k-1}}\right)+b}{10^k\cdot b} = \frac{\overline{a\underbrace{bbb\ldots b}_{k-1}}}{\overline{\underbrace{bbb\ldots b}_{k-1}c}} = \frac{a}{c}$$

□

Bài 4. Cho $abcd \neq 0$, $b^2 = ca$ và $c^2 = bd$. Chứng minh tỉ lệ thức $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3} = \dfrac{a}{d}$.

Lời giải.
Ta có $b^2 = ca$ và $c^2 = bd \Rightarrow b^3 = abc$ và $c^3 = bcd$.

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3} = \frac{a^3}{b^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{abc}{bcd} = \frac{a}{d}.$$

□

Bài 5. Cho $\dfrac{2x+1}{5} = \dfrac{3y-2}{7} = \dfrac{2x+3y-1}{6x}$. Tìm x và y.

Lời giải.
$\dfrac{2x+1}{5} = \dfrac{3y-2}{7} = \dfrac{2x+3y-1}{6x} \Rightarrow \dfrac{2x+1+3y-2}{12} = \dfrac{2x+3y-1}{6x}$
$\Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3.$ □

Bài 6. Chứng minh rằng bốn số a, b, c, d lập thành một tỉ lệ thức, nếu có:

$$(a+b+c+d)(a-b-c+d) = (a-b+c-d)(a+b-c-d).$$

Lời giải.

$(a+b+c+d)(a-b-c+d) = (a-b+c-d)(a+b-c-d) \Rightarrow \dfrac{a+b+c+d}{a-b+c-d} = \dfrac{a+b-c-d}{a-b-c+d}$

$\Rightarrow \dfrac{(a+b)+(c+d)}{(a-b)+(c-d)} = \dfrac{(a+b)-(c+d)}{(a-b)-(c-d)} \Rightarrow \dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d} = \dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d} \Rightarrow \dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{a-b}{c-d}$

Vậy $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$. □

§5. Số vô tỉ. Số thực

I. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Điền vào chỗ chấm (...)

a) $-\dfrac{1}{40}$ là số thập phân hữu hạn.

b) $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

c) $\dfrac{72}{75} = 0{,}96$.

d) 0,222 là số thập phân vô hạn tuần hoàn.

e) $\dfrac{2}{9} = 0{,}(2)$.

f) $0{,}(142857) = \dfrac{1}{7}$.

Câu 2. Đúng điền Đ, **sai** điền S.

a) $\boxed{\text{S}}$ Một số không âm có đúng hai căn bậc hai.

b) $\boxed{\text{Đ}}$ $-\sqrt{a} \le 0$ với $a \ge 0$.

c) $\boxed{\text{Đ}}$ Các điểm biểu diễn số hữu tỉ không lấp đầy trục số thực.

d) $\boxed{\text{S}}$ Số 7 không có "căn bậc hai âm".

e) $\boxed{\text{S}}$ Nếu a là số thực thì a là số vô tỉ.

II. Học giải toán

Ví dụ 1. Viết các phân số dưới dạng một số thập phân hữu hạn hoặc một số thập phân vô hạn tuần hoàn và giải thích vì sao chúng được viết như vậy.

$$-\frac{19}{40};\ \frac{5}{11};\ \frac{28}{175};\ \frac{11}{24}.$$

Lời giải.
Ta có bảng kết quả

Giả thiết	Kết luận	Giải thích
$-\dfrac{9}{40} = -0{,}225$	Số thập phân hữu hạn.	Phân số $-\dfrac{9}{40}$ là phân số tối giản, mẫu số $40 = 2^3 \cdot 5$ chỉ chứa thừa số nguyên tố 2 và 5.
$\dfrac{5}{11} = 0{,}(45)$	Số thập phân vô hạn tuần hoàn.	Phân số $\dfrac{5}{11}$ là phân số tối giản, mẫu số 11 là số nguyên tố khác 2 và 5.
$\dfrac{28}{175} = 0{,}16$	Số thập phân hữu hạn.	Phân số $\dfrac{28}{175}$ rút gọn thành $\dfrac{4}{25}$ là phân số tối giản, mẫu số $25 = 5^2$ chỉ chứa thừa số nguyên tố 5.
$\dfrac{11}{24} = 0{,}458(3)$	Số thập phân vô hạn tuần hoàn.	Phân số $\dfrac{11}{25}$ là phân số tối giản, mẫu số $24 = 2^4 \cdot 3$ chứa thừa số nguyên tố 3 khác 2 và 5.

□

Ví dụ 2. Tính diện tích của các hình chữ nhật có số đo hai cạnh lần lượt là a và b (đơn vị cm), biết a là tử số và b là mẫu số của một phân số tối giản viết từ các số thập phân sau

$$0{,}26;\ 0{,}454545\ldots;\ 0{,}1377.$$

Lời giải.

Viết số thập phân ra phân số	Diện tích hình chữ nhật $ABCD$
$0{,}26 = \frac{26}{100} = \frac{13}{50}$	$S_{ABCD} = 13 \cdot 50 = 650(\text{cm}^2)$
$0{,}454545\ldots = 0{,}(45) = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$	$S_{ABCD} = 5 \cdot 11 = 55$
$0{,}13777\ldots = 0{,}13(7) = \frac{137-13}{900} = \frac{124}{900} = \frac{31}{225}$	$S_{ABCD} = 31 \cdot 225 = 6975$

□

Ví dụ 3. Làm tròn các số sau đến hang đơn vị, đế chữ số thập phân thứ nhất, thứ hai và thứ ba sau dấu phẩy.

$$12{,}064;\ 9{,}272727\ldots;\ 3{,}14159\ldots\ .$$

Lời giải.

	Làm tròn đến hàng đơn vị	Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất	Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai	Làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba
12,064	≈ 12	$\approx 12{,}1$	$\approx 12{,}06$	$\approx 12{,}064$
9,272727...	≈ 9	$\approx 9{,}3$	$\approx 9{,}27$	$\approx 9{,}273$
3,14159	≈ 3	$\approx 3{,}1$	$\approx 3{,},14$	$\approx 3{,}142$

□

Ví dụ 4. Tại SEA Games 27 (Myanmar – 2013), vận động viên Nguyễn Thị Ánh Viên đã về Nhất nội dung 200 m bơi ngửa với thời gian 2 phút 14 giây 80, giành Huy chương Vàng và trở thành vận động viên đầu tiên phá kỉ lục của SEA Games 27. Về thứ Nhì là Yosaputra Venesia (Indonesia) với thời gian 2 phút 20 giây 35 và thứ Ba là Lim Shen Meagan (Singapore) với thời gian 2 phút 21 giây 19. Hỏi thời gian gần đúng đến hàng đơn vị giây của mỗi vận động viên là bao nhiêu?

Lời giải.

Vận động viên	Đổi đơn vị	Làm tròn hàng đơn vị giây
Nguyễn Thị Ánh Viên (Việt Nam)	2 phút 14 giây 80 $=$ 134,8 giây	$\approx$ 135 giây
Yosaputra Venesia (Indonesia)	2 phút 20 giây 35 $=$ 140,35 giây	$\approx$ 140 giây
Yosaputra Venesia (Indonesia)	2 phút 20 giây 35 $=$ 140,35 giây	$\approx$ 140 giây

$\square$

Ví dụ 5. Cho các phân số $\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}; \frac{4}{7}; \frac{5}{7}; \frac{6}{7}$.

a) Các phân số trên đều đổi được ra số thập phân vô hạn tuần hoàn. Tìm chu kì và nhận xét các chữ số trong chu kì của các số thập phân vô hạn tuần hoàn trên.

b) Làm tròn các số thập phân trên đến chữ số thứ hai, thứ tư, thứ 6 dấu phẩy.

c) Tìm các chữ số thứ 100 sau dấu phẩy của số thập phân viết từ phân số $\frac{5}{7}$.

d) Biết tổng các chữ só 5 đầu trong sách viết số thập phân vô hạn tuần hoàn từ $\frac{3}{7}$ là 2015. Hỏi chữ số 5 cuối cùng trong cách viết trên là chữ số thứ bao nhiêu của số thập phân đó?

Lời giải.

a) Ta có

- $\frac{1}{7} = 0,(142857)$.
- $\frac{3}{7} = 0,(428571)$.
- $\frac{5}{7} = 0,(714285)$.
- $\frac{2}{7} = 0,(285714)$.
- $\frac{4}{7} = 0,(571428)$.
- $\frac{6}{7} = 0,(857142)$.

Nhận xét.
Chu kì của tất cả 6 số thập phân vô hạn tuần hoàn trên đều có 6 chữ số và là các chữ số khác nhau: $1; 2; 4; 5; 7$ và 8 không có các chữ số $3; 6; 9$ và 0. Thứ tự các chữ số trong chu kì của các số thập phân vô hạn tuần hoàn đó đều khác nhau.

b) Ta có bảng sau

	Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai	Làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư	Làm tròn đến chữ số thập phân thứ sáu
$\frac{1}{7} = 0{,}(142857)$	$\approx 0{,}14$	$\approx 0{,}1429$	$\approx 0{,}142857$
$\frac{2}{7} = 0{,}(285714)$	$\approx 0{,}29$	$\approx 0{,}2857$	$\approx 0{,}285714$
$\frac{3}{7} = 0{,}(428571)$	$\approx 0{,}43$	$\approx 0{,}4286$	$\approx 0{,}428571$
$\frac{4}{7} = 0{,}(571428)$	$\approx 0{,}57$	$\approx 0{,}5714$	$\approx 0{,}571429$
$\frac{5}{7} = 0{,}(714285)$	$\approx 0{,}71$	$\approx 0{,}7143$	$\approx 0{,}714286$
$\frac{6}{7} = 0{,}(857142)$	$\approx 0{,}86$	$\approx 0{,}8571$	$\approx 0{,}857143$

Khi làm tròn các chữ số thập phân thứ sáu phải chú đến số thập phân thứ 7 (chữ số đầu tiên của chu kì!).

c) Ta có $\frac{5}{7} = 0{,}714285714285714285\ldots$ chu kì tuần hoàn là 6 mà $100 : 6$ được 16 dư 4, suy ra chữ số thứ 100 sau dấu phẩy của số thập phân vô hạn tuần hoàn trên là chữ số 2.

d) Ta có $\frac{3}{7} = 0{,}428571428571428571\ldots$.
Số chữ số 5 đầu tiên trong các viết số thập phân vô hạn tuần hoàn trên là $2015 : 5 = 403$
Chu kì 6, nên từ chữ số 5 thứ nhất đến chứ số thứ 403 có $6 \times (403 - 1) : 1 + 1 = 2418$ (chữ số).
Vậy chứ số 5 cuối cùng trong các viết trên là chữ số 2418.

□

Ví dụ 6. Hãy giúp bạn BEE so sánh các số sau

a) $x = 7\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$ và $y = 3\sqrt{7} + 5\sqrt{2}$.

b) $x = \dfrac{-1}{\sqrt{29+5}}$ và $y = \dfrac{-1}{\sqrt{29} + \sqrt{5}}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$x = 7\sqrt{3} + 2\sqrt{5} = \sqrt{147} + \sqrt{20} > \sqrt{144} + \sqrt{16} = 12 + 4 = 16 \Rightarrow x > 16.$$

Tương tự

$$y = 3\sqrt{7} + 5\sqrt{2} = \sqrt{63} + \sqrt{50} < \sqrt{64} + \sqrt{64} = 8 + 8 = 16 \Rightarrow y < 16.$$

Suy ra $x > y$ hay $7\sqrt{3} + 2\sqrt{5} > 3\sqrt{7} + 5\sqrt{2}$.

b) Xét $|x| = \dfrac{1}{\sqrt{29+5}}$ và $|y| = \dfrac{1}{\sqrt{29} + \sqrt{5}}$.
Ta có $\sqrt{29+5} = \sqrt{34} < \sqrt{36} = 6$ và $\sqrt{29} + \sqrt{5} > \sqrt{25} + \sqrt{4} = 5 + 2 = 7$.
Suy ra $0 < \sqrt{29+5} < \sqrt{29} + \sqrt{5} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{29+5}} > \dfrac{1}{\sqrt{29} + \sqrt{5}} > 0$.
Vậy $\dfrac{-1}{\sqrt{29+5}} < \dfrac{-1}{\sqrt{29} + \sqrt{5}}$.

□

III. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Viết các phân số sau dưới dạng một số thập phân hữu hạn hoặc một số thập phân vô hạn tuần hoàn và giải thích vì sao chúng viết được như vậy.

$$-\frac{11}{35}; \frac{9}{80}; \frac{44}{121}; \frac{-48}{150}; \frac{55}{75}; \frac{73}{81}$$

Lời giải.

Số thập phân hữu hạn	$\frac{9}{80} = 0{,}1125$	Mẫu số chứa thừa số nguyên tố 2 và 5	$\frac{-48}{150} = \frac{-8}{25} = -0{,}32$	Mẫu chứa thừa số nguyên tố 5
Số thập phân vô hạn tuần hoàn	$-\frac{11}{35} = -0{,}3(142857)$	Mẫu số chứa thừa số nguyên tố 7	$\frac{44}{121} = \frac{4}{11} = 0{,}(36)$	Mẫu chứa thừa số nguyên tố 11
	$\frac{55}{75} = \frac{11}{15} = -0{,}7(3)$	Mẫu số chứa thừa số nguyên tố 3	$\frac{73}{81} = 0{,}(901234567)$	Mẫu chứa thừa số nguyên tố 3

□

Bài 2. Lấy số $\pi \approx \frac{22}{7}$, tính diện tích hình tròn biết số đo bán kính (đơn vị cm).

a) $0{,}(45)$.

b) $\frac{21}{22}$.

c) $\sqrt{\frac{7}{11}}$.

Lời giải.

Diện tích hình tròn $S = \pi \cdot R^2 = \frac{22}{7} \cdot R^2$.

a) $R = 0{,}(45) = \frac{5}{11} \Rightarrow S = \frac{22}{7} \cdot \left(\frac{5}{11}\right)^2 = \frac{50}{77}$ (cm^2).

b) $R = \frac{21}{22} \Rightarrow S = \frac{22}{7} \cdot \left(\frac{21}{22}\right)^2 = \frac{63}{22} = 2\frac{19}{22}$ (cm^2).

c) $R = \sqrt{\frac{7}{11}} \Rightarrow S = \frac{22}{7} . \left(\sqrt{\frac{7}{11}}\right)^2 = 2$ (cm^2).

□

Bài 3. Tính diện tích hình tròn và chu vi đường tròn. Lấy số $\pi \approx \frac{22}{7}$.

a) Một hình vuông nằm bên trong một hình tròn (hình bên). Biết đường chéo hình vuông bằng $\sqrt{18}$ cm. Tính diện tích phần hình tròn không bị hình vuông phủ (chính xác tới chữ số thập phân thứ hai).

b) Một vệ tinh bay trên quỹ đạo vòng tròn quanh Trái Đất. Biết quỹ đạo của vệ tinh có độ dài là 66000 km. Hỏi độ dài quỹ đạo của về tinh giảm bao nhiêu ki-lô-mét nếu bán kính của quỹ đạo giảm 70 km?

Lời giải.

a) $S_{(\text{hình tròn})} = \pi.R^2 = \dfrac{22}{7}.\left(\dfrac{\sqrt{18}}{2}\right)^2 = \dfrac{99}{7} = 14\dfrac{1}{7}$ (cm^2).
$S_{(\text{hình vuông})} = 3 \cdot 3 = 9$ (cm^2).
$S_{(\text{phần hình tròn không bị hình vuông phủ})} = 14\dfrac{1}{7} - 9 = 5\dfrac{1}{7} \approx 5{,}14$ (cm^2).

b) Bán kính quỹ đạo lúc đầu $R = 66000 : (2\pi) = 10500$ (km).
Bán kính quỹ đạo lúc sau $R' = 10500 - 70 = 10430$ (km).
Quỹ đạo vệ tinh lúc sau $C' = 2\pi R' = 2 \cdot \dfrac{22}{7} \cdot 10430 = 65560$ (km).
Quỹ đạo giảm so với quỹ đạo ban đầu $C - C' = 66000 - 65560 = 440$ (km).

□

Bài 4. So sánh A và B.

a) $A = \dfrac{2014}{\sqrt{2015}}$ và $B = \dfrac{2015}{\sqrt{2014}}$.

b) $A = \dfrac{\sqrt{121}}{\sqrt{12321}}$ và $B = \dfrac{\sqrt{12321}}{\sqrt{1234321}}$.

Lời giải.

a) $A = \dfrac{2014}{\sqrt{2015}} < \dfrac{2014}{\sqrt{2014}} < \dfrac{2015}{\sqrt{2014}} = B$.

b) $A = \dfrac{\sqrt{121}}{\sqrt{12321}} = \dfrac{11}{111} = 1 - \dfrac{100}{111} = 1 - \dfrac{1000}{1110}$;
$B = \dfrac{\sqrt{12321}}{\sqrt{1234321}} = \dfrac{111}{1111}$.
Vì $1 - \dfrac{1000}{1111} > 1 - \dfrac{1000}{1110}$ suy ra $A < B$.

□

Bài 5. Số nào trong các số sau đây là số vô tỉ?

$$\sqrt{\frac{(-5)^2}{36}};\ \frac{\sqrt{25}+\sqrt{7225}}{\sqrt{81}+\sqrt{23409}};\ \frac{\sqrt{25}-\sqrt{(-85)^2}}{\sqrt{(-11)^2}+\sqrt{165^2}};\ \sqrt{\frac{5-145}{8-168}}.$$

Lời giải.
Số vô tỉ là số $\sqrt{\dfrac{5-145}{8-168}} = \sqrt{\dfrac{140}{160}} = \sqrt{\dfrac{7}{8}}$. □

Bài 6. Tìm x, biết $(2x + 3\sqrt{x})(3x - 2\sqrt{x})(\sqrt{x}+1) = 0$.
Lời giải.
Kết quả $x \in \left\{0; \dfrac{4}{9}\right\}$. □

2. Nâng cao

Bài 7. Tính giá trị gần đúng (đến chữ số thập phân thứ nhất) chiều dài của một sân bóng đá (theo tiêu chuẩn FIFA) sau 5 lần đo là 121,27 m; 119,25 m; 120,28 m; 121,15 m; 119,26 m.
Lời giải.
Giá trị gần đúng (đến chữ số thập phân thứ nhất) chiều dài của một sân bóng đá (theo tiêu chuẩn FIFA) là
$$(121{,}27 + 119{,}25 + 120{,}28 + 121{,}15 + 119{,}26) : 5 \approx 120{,}2 \text{ (m)}.$$
□

Bài 8. Sắp xếp các số sau từ nhỏ đến lớn: $-\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}; -\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}; -\dfrac{1}{1+\sqrt{5}}; -\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.
Ta có
$$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{1+\sqrt{2}} < -\frac{1}{1+\sqrt{3}} < -\frac{1}{3} < -\frac{1}{1+\sqrt{5}}.$$
□

Bài 9. Viết mỗi phân số sau dưới dạng số thập phân ta được một số thập phân vô hạn tuần hoàn (n là số tự nhiên khác 0).

a) $\dfrac{121n + 11n^2}{55n}$.

b) $\dfrac{79! + 79}{5609n}$.

Lời giải.

a) Có $\dfrac{121n + 11n^2}{55n} = \dfrac{11+n}{5}$, mẫu số chỉ chứa thừa số nguyên tố 5 nên phân số đã cho viết được dưới dạng số thập phân hữu hạn.

b) Có $\dfrac{79! + 79}{5609n} = \dfrac{78! + 1}{71}$, dễ thấy $78! + 1$ không chia hết cho 71, mà mẫu số chứa thừa số nguyên tố 71 nên phân số đã cho viết thành một số thập phân vô hạn tuần hoàn.

□

Bài 10. Tìm các số thập phân $\overline{0{,}abc}$; $\overline{0,(abc)}$ biết

a) $\dfrac{1}{\overline{0{,}abc}} = n$.

b) $\dfrac{1}{\overline{0{,}(abc)}} = n$.

trong đó a, b, c là các chữ số khác nhau và n là số tự nhiên khác 0.
Lời giải.

a) Do $\dfrac{1}{\overline{0,abc}} = n$ suy ra a có thể bằng 0.
$\Rightarrow \overline{0,abc} \in \{0,025; 0,125; 0,250\}$
$\Rightarrow n \in \{40; 8; 4\}$.

b) Do $\dfrac{1}{\overline{0,(abc)}} = n \Rightarrow a$ có thể bằng 0
$\Rightarrow \overline{0{,}abc} \in \{0{,}(027); 0{,}(037); 0{,}(999)\}$
$\Rightarrow n \in \{37; 27; 1\}$.

□

IV. Em có biết

Bài 11. Từ số thập phân vô hạn tuần hoàn đến phân số
Bạn EGG đố
Số nào lớn hơn trong hai số 0,(36) và 0,3(63)?
Lời giải.
Lời giải nhanh của CHICKEN.
$0{,}(36) = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$.
Ta có $0{,}3(63) = \frac{363-3}{990} = \frac{360}{990} = \frac{4}{11}$
Suy ra: $= 0{,}(36) = 0{,}3(63)$
Suy ngẫm.
Các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau có bằng nhau không?

$$\overline{0,(a_1a_2)};\ \overline{0,(a_1a_2a_1a_2)};\ \overline{0{,}a_1\,(a_2a_1)}.$$

Giải thích.
Ta đã biết $\overline{0,(a_1a_2)} = \frac{\overline{a_1a_2}}{99}$; $\overline{0{,}a_1\,(a_2a_1)} = \frac{\overline{a_1a_2a_1} - a_1}{990} = \frac{\overline{a_1a_20}}{990} = \frac{\overline{a_1a_2}}{99}$
$\overline{0,(a_1a_2a_1a_2)} = \frac{\overline{a_1a_2a_1a_2}}{9999} = \frac{101\cdot\overline{a_1a_2}}{101\cdot 99} = \frac{\overline{a_1a_2}}{99}$
Suy ra: $\overline{0,(a_1a_2)} = \overline{0,(a_1a_2a_1a_2)} = \overline{0,a_1\,(a_2a_1)} = \ldots$.
Như vậy từ phân số $\frac{\overline{a_1a_2}}{99}$ ta có thể viết được dưới dạng nhiều số thập phân vô hạn tuần hoàn khác nhau $\overline{0,(a_1a_2)}; \overline{0,(a_1a_2a_1a_2)}; \overline{0,a_1\,(a_2a_1)}, \ldots$ nhưng cách viết $\overline{0,(a_1a_2)}$ thuận tiện hơn, do đó người ta chọn cách viết này.
□

Bài 12. Chứng minh một số là số vô tỉ.
Bạn CHICKEN hỏi: "$\sqrt{2}$ là số vô tỉ hay số hữu tỉ?"
Lời giải.
Bạn EGG chứng minh.
Giả sử $\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ, thì $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ (và $(m,n) = 1$).
Suy ra $m = \sqrt{2}\cdot n \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \vdots 2 \Rightarrow m \vdots 2$ (2 là số nguyên tố).
Từ $m \vdots 2 \Rightarrow m = 2k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ suy ra $n^2 = m^2 : 2 = 2k^2 \Rightarrow n^2 \vdots 2 \Rightarrow n \vdots 2$ (vì 2 là số nguyên tố).
Do đó m và n đều chia hết cho 2, trái với điều kiện $(m,n) = 1$.
Vậy điều giả sử là sai, hay $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ.
Suy ngẫm.
Các số $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{10}$; ... là các số vô tỉ.
Các số $\sqrt{1}$; $\sqrt{4}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{16}$; $\sqrt{25}$; ... là các số hữu tỉ.
Như vậy, với số nguyên dương a nếu a là số chính phương thì $\sqrt{a}$ là số hữu tỉ, còn nếu a không là số chính phương thì $\sqrt{a}$ là số vô tỉ.
Giải thích.
Thật vậy, giả sử a không là số chính phương nhưng $\sqrt{a}$ là một số hữu tỉ.
Ta có $\sqrt{a} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ và $(m,n) = 1 \Rightarrow m^2 = a\cdot n^2$.
Gọi p là một ước nguyên tố của n $(p \neq 1)$ thì $n \vdots p \Rightarrow m^2 \vdots p \Rightarrow m \vdots p$ (vì p là số nguyên tố) $\Rightarrow (m,n) = p \neq 1$, trái với điều giả sử.
Vậy $\sqrt{a}$ là số vô tỉ.
Bài toán.
Bạn hãy tìm hai số hữu tỉ a và b, biết $a + b\cdot\sqrt{p} = 0$, trong đó p là số nguyên tố. □

V. Đọc thêm

Số PI
Công thức tính chu vi hình tròn $C = 2\pi R$ (với R là bán kính đường tròn).
Số π (PI) được định nghĩa là tỉ lệ giữa chu vi và đường kính của một hình tròn.
Số π được biểu diễn với 48 chữ số thập phân như sau

$$3{,}141592653589723846264338327950288419716939937510.$$

VI. Đố vui

Với ba chiếc đũa bằng nhau và không bẻ gãy đũa, bạn có thể xếp được một số lớn hơn 3 và nhỏ hơn 4 không?

Chương 2

HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

§1. Đại lượng tỉ lệ thuận

I. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Điền vào chỗ chấm (...)

a) Chu vi một hình vuông tỉ lệ thuận với cạnh hình vuông, hệ số tỉ lệ là 4.

b) Số hàng mua được tỉ lệ thuận với số tiền nếu giá hàng không thay đổi.

c) Chu vi một hình tròn tỉ lệ thuận với đường kính với hệ số tỉ lệ là π.

d) Diện tích một tam giác có đáy là a (hằng số khác 0) tỉ lệ thuận với đường cao theo hệ số tỉ lệ là $\frac{a}{2}$.

Câu 2. Mệnh đề nào **sai** trong các mệnh đề sau?

A. Quãng đường tỉ lệ thuận với vận tốc nếu thời gian không đổi.
B. Nếu vận tốc không đổi thì quãng đường và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ thuận.
C. Trên cùng quãng đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ thuận.
D. Trên cùng quãng đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng không tỉ lệ thuận.

Câu 3. **Đúng** điền Đ, **sai** điền S.

a) $\boxed{\text{Đ}}$ Một số hữu tỉ khác 0 và số đối của nó là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

b) $\boxed{\text{S}}$ Hai đại lượng x và $\sqrt{x}$ là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

c) $\boxed{\text{Đ}}$ Số vòng quay của kim giờ và kim phút trong cùng một thời gian là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

d) $\boxed{\text{S}}$ Nếu ta cùng thêm một số vào tất cả các giá trị của hai đại lượng tỉ lệ thuận.

II. Học giải toán

Ví dụ 1. Cho các giá trị tương ứng của x và y trong bảng dưới.

Bảng I	x	0,65	2,75	0,6	1,34	37
	y	5,2	22	4,8	10,72	296

Bảng II	x	-2^5	-2^3	-2^1	2^2	2^4
	y	128	32	4	-16	-64

a) Trong mỗi bảng, các đại lượng x và y có tỉ lệ thuận với nhau không?

b) Nếu các đại lượng x và y tỉ lệ thuận với nhau, hãy chỉ ra hệ số tỉ lệ và viết công thức biểu thức biểu thị sự tương quan đó.

Lời giải.
Bảng I.

a) Ta có
$$\frac{5{,}2}{0{,}65} = \frac{22}{2{,}75} = \frac{4{,}8}{0{,}6} = \frac{10{,}72}{1{,}34} = \frac{296}{37} = 8.$$
Vậy các đại lượng y và x tỉ lệ thuận với nhau.

b) ta có $\frac{y}{x} = \frac{5{,}2}{0{,}65} = 8 \Rightarrow y = 8x$ và hệ số tỉ lệ là 8.

⚠ *Nếu tất cả các tỉ số giá trị tương ứng của x và y đều bằng nhau thì hai đại lượng x và y tỉ lệ thuận với nhau.*

Bảng II.
Ta có $\frac{4}{-2^1} \neq \frac{128}{-2^5}$ $(-2 \neq -4)$ và $\frac{128}{-2^5} = \frac{32}{-2^3} = \frac{-16}{2^2} = \frac{-64}{2^4} = -4.$
Vậy các đại lượng y và x không tỉ lệ thuận với nhau. □

Ví dụ 2. Biết x và y trong bảng sau là hai đại lượng tỉ lệ thuận, điền số thích hợp vào ô trống

x	1	2			5
y	$\frac{-2}{3}$		-2	$-2\frac{2}{3}$	

Tìm giá trị tương ứng của y với x, có thể dung 1 trong 2 tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Lời giải.
Tìm giá trị của y tương ứng với $x = 2$.

- **Cách 1.** $\dfrac{-\frac{2}{3}}{1} = \dfrac{y}{2} \Rightarrow y = 2 \cdot \dfrac{-2}{3} = \dfrac{-4}{3}$.
- **Cách 2.** $\dfrac{-\frac{2}{3}}{y} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 2 \cdot \dfrac{-2}{3} = \dfrac{-4}{3}$.

Tương tự với các ô trống còn lại, ta có bảng sau

x	1	2	3	4	5
y	$\frac{-2}{3}$	$-1\frac{1}{3}$	-2	$-2\frac{2}{3}$	$-3\frac{1}{3}$

□

Ví dụ 3. Cho x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Kí hiệu x_1 và x_2 là hai giá trị của đại lượng x mà $x_1 = -1$ và $x_2 = -3$. Gọi y_1 và y_2 là hai giá trị tương ứng của đại lượng y mà $y_1 - y_2 = -2$.

a) Tìm các giá trị y_1 và y_2.

b) Đại lượng x và y liên hệ với nhau theo công thức nào?

Lời giải.

a) Biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận, suy ra $y = kx$ $(k \neq 0)$.
Theo tính chất của hai đại lượng tỉ lệ thuận,ta có

$$\frac{y_1}{-1} = \frac{y_2}{-3} = \frac{y_1 - y_2}{(-1) - (-3)} = \frac{-2}{2} = -1$$

Suy ra $y_1 = (-1) \cdot (-1) = 1$ và $y_2 = (-1) \cdot (-3) = 3$.

b) Vậy hai đại lượng x và y liên hệ với nhau theo công thức $y = (-1) \cdot x = -x$.

⚠ *Với hai đại lượng tỉ lệ thuận*

- *Tỉ số hai giá trị tương ứng của chúng không đổi.*
- *Tỉ số hai giá trị của đại lượng này bằng tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia.*

Mở rộng.
Việt Nam có nền kinh tế nông nghiệp từ hàng nghìn năm nay. Nền nông nghiệp của nước ta không chỉ sản xuất ra đủ một lượng lớn lương thực đáp ứng nhu cầu trong nước mà còn xuất khẩu sang nhiều nước trên thế giới. Ngành trồng lúa ở nước ta là một trong những ngành sản xuất lương thực vô cùng quan trọng và đạt được những thành tựu đáng kể đưa Việt Nam trở thành nước xuất khẩu gạo lớn nhất trên thế giới. □

Ví dụ 4. Cứ 100 kg thóc cho 65 kg gạo. Chất bột chứa trong gạo là 80%.

a) Hỏi trong 30 kg thóc có bao nhiêu ki lô gam chất bột?

b) Từ 1 kg gạo người ta làm ra được 2,2 kg bún tươi. Hỏi để làm ra 14,3 kg bún tươi cần bao nhiêu ki-lô-gam thóc?

Lời giải.

a) Vì 100 kg thóc được 65 kg gạo, suy ra tương quan giữa hai đại lượng thóc và gạo là tỉ lệ thuận.
Ta có

	Tiêu chuẩn (kg)	Hiện thực (kg)
Khối lượng thóc	100	30
Khối lượng gạo	65	x

Theo tính chất đại lượng tỉ lệ thuận, ta có $\dfrac{30}{x} = \dfrac{100}{65} \Rightarrow x = \dfrac{65 \cdot 30}{100} = 19,5$(kg gạo).
Chất bột chứa trong gạo là 80%, suy ra tương quan giữa hai đại lượng gạo và chất bột là tương quan tỉ lệ thuận.
Ta có

	Tiêu chuẩn (kg)	Hiện thực (kg)
Khối lượng thóc	100	19,5
Khối lượng gạo	80	y

Theo tính chất đại lượng tỉ lệ thuận, ta có

$$\frac{19,5}{y} = \frac{100}{80} \Rightarrow y = \frac{19{,}5 \cdot 80}{100} = 15{,}6 \text{ (kg chất bột)}.$$

Vậy trong 30 kg thóc có 15,6 kg chất bột.

b) Từ 1 kg gạo làm được 2,2 kg bún tươi, suy ra tương quan giữa gạo và bún tươi tỉ lệ thuận.
Gọi khối lượng gạo cần là x, ta có $\dfrac{x}{14{,}3} = \dfrac{1}{2{,}2} \Rightarrow x = \dfrac{1{,}4 \cdot 3{,}1}{2{,}2} = 6{,}5$ (kg gạo).
Gọi khối lượng thóc phải có là y, ta có $\dfrac{y}{6{,}5} = \dfrac{100}{65} \Rightarrow y = \dfrac{100 \cdot 6{,}5}{65} = 10$ (kg thóc).
Vậy để sản xuất ra 14,3 kg bún tươi cần có 10 kg thóc.

Cách khác.
Cứ 100 kg thóc có 65 kg gạo suy ra trong thóc có 65% gạo.
Chất bột trong gạo là 80%, ta có 80% $\left(=\dfrac{4}{5}\right)$ của 65% bằng $\dfrac{4}{5} \cdot 65\% = 52\%$.
Suy ra, trong thóc có 52% chất bột.
Từ 30 kg thóc có 52% của 30 bằng $30 \cdot 52\% = 15{,}6$ (kg chất bột). □

Ví dụ 5. Một xe đạp và một xa máy cùng đi một lúc từ thành phố A đến thành phố B. Vì vận tốc của xe đạp nhỏ hơn vận tốc của xe máy là 18 km/h, nên khi xe máy tới B thì xe đạp mới tới C, cách B một quãng đường bằn 0,6 quãng đường AB. Tìm vận tốc mỗi xe.

Lời giải.
Kí hiệu các quãng đường AC là S_1, và AB là S_2 ta có $\dfrac{CB}{AB} = 0,6 = \dfrac{3}{5}$, do đó $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2}{5}$.
Gọi vận tốc và thời gian người xe đạp từ A đến C là v_1 và t_1.
Gọi vận tốc và thời gian người xe máy từ A đến B là v_2 và t_2.
Theo đề bài ta có $v_2 - v_1 = 18$ (km/h).
Hai xe đi cùng một lúc từ A, một xe tới C và một xe tới B, vì cùng thời gian nên quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ thuận.
Ta có $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2}{5}$, suy ra $\dfrac{v_1}{2} = \dfrac{v_2}{5} = \dfrac{v_2 - v_1}{5-2} = \dfrac{18}{3} = 6$.
Vậy vận tốc xe đạp là $v_1 = 6 \cdot 3 = 12$ (km/h) và vận tốc xe máy là $v_2 = 6 \cdot 5 = 30$ (km/h).

⚠ ***Chú ý.***

- *Cùng thời gian thì QUÃNG ĐƯỜNG và VẬN TỐC là hai đại lượng tỉ lệ thuận.*
- *Đã có hiệu (hoặc tổng) của hai đại lượng nào đó hãy đi tìm tỉ số của chúng.*
- *Ngược lại đã có tỉ số của hai đại lượng nào đó hãy đi tìm tổng (hoặc hiệu) của chúng.*

□

Ví dụ 6. Chia số 38 thành ba số sao cho số thứ nhất và số thứ hai tỉ lệ theo 0,8 : 0,375, còn số thứ hai và số thứ ba tỉ lệ theo 0,25 và 1,75.

Lời giải.
Gọi số thứ nhất, thứ hai và thứ ba theo thứ tự là x, y, z.
Theo đề bài ta có $x + y + z = 38$.
Biết

$$x : y = 0{,}8 : 0{,}375 = 32 : 15. \tag{1}$$

và

$$y : z = 0{,}25 : 1{,}75 = 1 : 7 = 15 : 105. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{x}{32} = \frac{y}{15} = \frac{z}{105} = \frac{x+y+z}{32+15+105} = \frac{38}{152} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Vậy số thứ nhất bằng 8, số thứ hai bằng 3,75 và số thứ ba bằng 26,25. □

Ví dụ 7. Một cửa hàng có ba súc vải cùng khổ và có tổng độ dài là 86,1 m. Khi bán 28% súc vải thứ nhất, 40% súc vài thứ hai và 64% súc vải thứ ba thì chiều dài bs súc vải còn lại đều bằng nhau. Hỏi chiều dài mỗi súc vải khi chưa bán?

Lời giải.
Gọi chiều dài của ba súc vải khi chưa bán là x, y, z(m), với $x, y, z > 0$. ta có $x + y + z = 86{,}1$.
Sau khi bán, chiều dài các súc vải còn lại bằng nhau: $72\% \cdot x = 60\% \cdot y = 36\% \cdot z$.
Suy ra

$$x : y : z = \frac{1}{72\%} : \frac{1}{60\%} : \frac{1}{36\%} = 5 : 6 : 10.$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{10} = \frac{x+y+z}{5+6+10} = \frac{86{,}1}{21} = 4{,}1.$$

Chiều dài ba súc vải lần lượt là 20,5 m; 24,6 m; 41 m.
Mở rộng.
Vải được cuộn lại thành từng súc để gọn và dễ chuyên chở. Các súc vải có chiều rộng gọi là khổ vải (các khổ có quy định kích thước, như khổ 1 m; 1,2 m). □

Ví dụ 8. Một nông trường trồng rừng phòng hộ vào ba lô đất. Biết diện tích lô thứ nhất bằng 40% diện tích cả ba lô. Còn diện thích lô thứ hai và thứ ba tỉ lệ theo 1,5 và 1,(3). Nếu diện tích lô thứ nhất lớn hơn diện tích lô thứ ba lg 1,2 ha, thì diện tích của cả ba lô là bao nhiêu hecta?

Lời giải.
Gọi diện tích ba lô đất lần lượt là x, y và z (ha). Điều kiện $x, y, z > 0$.
Theo đề bài ta có $x = 40\% \, (x + y - z)$; $y : z = 1{,}5 : 1{,}(3) = 9 : 8$ và $x - z = 12$ (ha).
Suy ra

$$x = \frac{2}{5}.(x+y+z) \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{x+y+z}{5} = \frac{y+z}{3}. \qquad (1)$$

$$\frac{y}{9} = \frac{z}{8} = \frac{y+z}{17}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{x}{34} = \frac{y+x}{51} = \frac{y}{27} = \frac{z}{24}.$$

Ta có

$$\frac{x}{34} = \frac{y}{27} = \frac{z}{24} = \frac{x+y+z}{85} = \frac{x-z}{10} = \frac{12}{10} = 1{,}2.$$

Vậy diện tích của cả ba lô đất bằng $x + y + z = 1{,}2 \cdot 85 = 102$ (ha).
⚠ ***Nhận xét.***
Cần biến đổi và kết nối để có được một dãy tỉ số bằng nhau trên cơ sở các tỉ lệ đã cho.

□

Ví dụ 9. Anh hơn em 3 tuổi. Tìm tuổi anh và tuổi em, biết tuổi anh hiện nay bằng 2 lần tuổi em khi tuổi anh bằng tuổi em hiện nay.

Lời giải.
Gọi tuổi anh và em hiện nay là x và y.
Điều kiện và $x > y$, $x, y \in \mathbb{N}^*$.
Anh hơn em 3 tuổi, nên ta có $x = y + 3$.
Khi tuổi anh bằng tuổi em hiện nay, thì tuổi anh là y và tuổi em là $y - 3$.
Ta có bảng so sánh

	Hiện nay	Khi tuổi anh bằng tuổi em hiện nay
Tuổi anh	x	y
Tuổi em	y	$y-3$

Biết tuổi anh hiện nay bằng 2 lần tuổi em khi tuổi anh bằng tuổi em hiện nay, ta có tỉ lệ

$$\frac{x}{2} = \frac{y-3}{1}.$$

Mà

$$x = y + 3 \Rightarrow \frac{y+3}{2} = \frac{y-3}{1}.$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau

$$\frac{y+3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{6}{1} = 6 \Rightarrow y = 9, x = 12.$$

Vậy tuổi anh bằng 12 và tuổi em bằng 9. □

III. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Mỗi con ruồi có 6 cái chân. Điền số thích hợp vào ô trống

Số con ruồi	1	4		17	42	
Số chân ruồi			42			48

Lời giải.

Số con ruồi	1	4	7	17	42	8
Số chân ruồi	6	24	42	102	252	48

□

Bài 2. Một cửa hàng áo thời trang đã tăng giá các loại áo thêm 7%. Điền số thích hợp vào ô trống của bảng sau

Giá gốc (đồng)	234000		42700	
Tăng thêm (đồng)		28000		61600
Giá sau khi tăng (đồng)				

Lời giải.

Giá gốc (đồng)	23400	40000	42700	880000
Tăng thêm (đồng)	1638	28000	2989	61600
Giá sau khi tăng (đồng)	25038	42800	45689	941600

□

Bài 3. Biết thời gian di chuyển là 20 phút. Điền số thích hợp vào ô trống của bảng dưới đây

Vận tốc (km/h)	60	30	24	15	12	6
Quãng đường (km)						

Lời giải.

Vận tốc (km/h)	60	30	24	15	12	6
Quãng đường (km)	20	10	8	5	4	2

□

Bài 4. Trong rừng Amazon, một con thú ăn kiến ăn được 1000 con kiến trong 40 phút. Hỏi con thú đó ăn được bao nhiêu con kiến trong: 30 phút, 1 giờ 30 phút, 2 giờ 10 phút, 3 giờ 50 phút? (Giả sử đủ kiến và con thú ăn với tốc độ không đổi).
Lời giải.
Số kiến mà con thú ăn kiến đó ăn được trong 1 phút là $1000 : 40 = 25$ (con kiến).
Ta có bảng sau

Thời gian (phút)	30	90	130	230
Số kiến ăn được (con)	750	2250	3250	5750

□

Bài 5. Biết rằng từ 12 kg lúa mì cho ra 11 kg bột mì, còn từ 10 kg bột mì sẽ làm ra 13 kg bành mì.

a) Từ 1440 kg lúa mì sẽ làm ra bao nhiêu ki-lô-gam bánh mì?

b) Cần bao nhiêu ki-lô-gam bột mì để làm ra 260 kg bành mì?

Lời giải.

a) Từ 1440 kg lúa mì sẽ làm ra 1716 kg bánh mì.

b) Cần 200 kg bột mì để làm ra 260 kg bành mì.

□

Bài 6. Một quả trừng đà điểu làm món trừng tráng tương đương 24 quả trứng gà. Với 6 quả trứng gà đủ làm món trứng tráng cho 5 người ăn. Hỏi cần bao nhiêu quả trứng đà điểu làm món trứng tráng cho 100 người ăn?
Trứng đà điểu có trọng lượng từ $1,2$ đến $1,5$ kg/quả, có thể dùng một quả trứng để chế biến nhiều món ăn. Trứng có vỏ dày và cứng, phải dùng khoan để phá vỏ.
Lời giải.
Cần 5 quả trứng đà điểu để làm món trứng tráng cho 100 người ăn. □

Bài 7. Để làm ra 10 bát chè nhãn lồng hạt sen, nguyên liệu chính cần có 80 quả nhãn lồng và 300 gam đường. Một cửa hàng chè ngày Thứ Hai bán được 240 bát chè, ngày Thứ Ba bán được 150 bát và ngày Thứ Tư bán được 180 bát.

a) Tính số đường cần dùng cho các ngày Thứ Hai, Thứ Ba và Thứ Tư.

b) Nếu cửa hàng đã mua sẵn 21 kg đường, thì với số đường còn lại sẽ làm được bao nhiêu bát chè và cần sử dụng bao nhiêu quả nhãn lồng?

Lời giải.

a) 10 bát chè cần 300 (gam đường) = 0,3 (kg đường).

b) Mua sẵn 21 kg đường, thì sau 3 ngày còn 3,9 kg đường.
Với số đường đó làm được 130 bát chè và cần đến 1040 quả nhãn lồng.

□

Bài 8. Nem rán là một món đặc sản mang đậm hương vị dân tộc. Trong mâm cỗ dịp lễ, tết cổ truyền của người Việt Nam không thể thiếu được món nem. Để chuẩn bị món nem rán cho 6 mâm cỗ, bên cạnh các loại rau và gia vị, thì nguyên liệu chính là 2 kg thịt nạc vai và 6 quả trứng gà.

a) Hỏi cần bao nhiêu ki-lo-gam thịt nạc vai và trứng gà để chuẩn bị cho 102 mâm cỗ?

b) Nếu mua ở siêu thị 12 hộp trứng gà (10 quả/hộp) thì phải mua bao nhiêu ki-lô-gam nạc vai và sẽ làm được bao nhiêu mâm cỗ khi sử dụng hết số trứng gà đó để làm món nem rán?

Lời giải.

a) Để chuẩn bị cho 102 mâm cỗ cần 34 kg thịt nạc vai và 51 quả trứng gà.

b) Nếu mua ở siêu thị 12 hộp trứng gà (10 quả/hộp) thì sẽ làm được 240 mâm cỗ và cần đến 80 kg thịt nạc vai.

□

Bài 9. Một chiếc cân lò xo, một đầu gắn vào một thanh ngang cố định, còn đầu kia có móc để móc đồ vật và cho kết quả như sau

Khối lượng cân (g)	0	250	500	1000
Chiều dài lò xo (mm)	33	43	53	73

Ta thấy khối lượng tăng lên thì chiều dài lò xo cũng tăng lên. Vậy hai đại lượng khối lượng đồ vật và chiều dài lò xo là đại lượng tỉ lệ thuận. Điều đó đúng hay sai?
Lời giải.
Khối lượng đồ vật và chiều dài lò xo không phải là hai đại lượng tỉ lệ thuận.
Tuy nhiên người ta vẫn làm được vạch chỉ chính xác khối lượng của vật định cân. □

Bài 10. Bầu trời đêm dông lóe sáng một tia chớp. Bạn Bee nghe thấy tiếng sấm sau đó 21 giây. Hỏi khoảng cách từ chỗ tia chớp đến chỗ bạn Bee đứng là bao nhiêu ki-lô-mét, biết vận tốc của âm thanh là 340 km/s?
Lời giải.
Khoảng cách từ chỗ tia chớp đến chỗ bạn Bee đứng là 7,14 km. □

2. Nâng cao

Bài 11. Giáp Tết cổ truyền, một cửa hàng, mua 128 kg gồm các nguyên liệu: gạo, thịt và đỗ tỉ lệ theo 5 : 2 và 1 để làm bánh chưng. Biết với 5 kg gạo, 2 kg thịt, 1 kg đỗ làm ra 10 chiếc bánh chưng loại to. Hỏi với 128 kg các nguyên liệu trên sẽ làm được bao nhiêu chiếc bánh chưng loại to?
Lời giải.
Làm được 160 chiếc bánh chưng loại to. □

Bài 12. Lãi suất ngân hàng năm 2014 là 6% năm. Tính số tiền lãi rút ra hàng tháng nếu số tiền gửi là 200 triệu đồng Việt Nam?
Lời giải.
Mỗi tháng lĩnh được 1 triệu đồng tiền lãi. □

Bài 13. Cho x và y là hai đại lượng tỉ lệ thuận. Biết tổng hai giá trị nào đó của x bằng tổng hai giá trị tương ứng của y bằng -2. Viết công thức liên hệ giữa y và x.
Lời giải.
$y = -2x$ □

Bài 14. Hai người cùng làm xong một công việc trong 3 giờ. Nếu người A làm sớm hơn 1 giờ và người B làm chậm đi nửa giờ, thì họ hoàn thành công việc đó sớm hơm được 18 phút. Ngược lại, nếu người B làm sớm hơn 1 giờ và người A làm chậm đi nửa giờ, thì người A nhận tiền công ít hơn so với thức tế là 56000 đồng. Hỏi thực tế, người A nhận được bao nhiêu tiền công?
Lời giải.
Thực tế người A lĩnh được 450000 đồng. □

IV. Em có biết

Câu chuyện giảm giá

Bài 15. Một chiếc áo sơ mi giá 252000 đồng được bán với giá 201600 đồng. Hỏi chiếc áo sơ mi đó giảm giá bao nhiêu?
Lời giải.
Lời giải của CHICKEN.
Tỉ lệ giữa giá mới và giá ban đầu 201600 : 252000 = 0,8 = 80%.
Chiếc áo sơ mi được giảm giá 100% − 80% = 20%.
Lời giải của EGG.
Chênh lệch giữa giá ban đầu và giá mới 252000 − 201600 = 50400 (đồng).
Chiếc áo sơ mi đươc giảm giá 50400 : 252000 = 0,2 = 20%.
Tại sao hai cách giải lại cho cùng một kết quả?
Suy ngẫm.

- Cả hai cách giải bài toán như nhau
  - Một cách là so sánh trực tiếp tỉ số giữa giá giảm và giá gốc.
  - Một cách là so sánh sự chệnh lệch với giá gốc.
- Số tiền sau khi gảm và số tiền ban đầu là hai đại lượng tỉ lệ thuận

Số tiền ban đầu	252000 đồng
Số tiền sau khi giảm	201600 đồng

Hệ số tỉ lệ là $\dfrac{20600}{252000} = 0,8 = 80\%$ Phần trăm giảm giá 20%.

□

Bài 16. Tại quầy để các loại nước giải khát ở siêu thị α, khách hàng thấy nhãn một bloc cacao ghi như hình bên. Họ không hiểu. Nếu em hiểu, hãy cho biết

Nước cacao		Siêu thị α
(150 ml) 1 lít	3500	
Bloc 2 hộp	12500	10000

a) Giá bloc trước và sau khi hạ giá, và được hạ bao nhiêu phần trăm?

b) Kiểm tra với giá gốc và cho nhận xét.

Lời giải.
Lời giải của bạn EGG và CHICKEN

a) Sau khi suy nghĩ bạn EGG cho biết

- Giá ban đầu là 12500 đồng,
- Giá sau khi hạ giá là 10000 đồng.

Bạn CHICKEN tính toán

- Số tiền sau khi hạ giá giảm $12500 - 10000 = 2500$ (đồng).
- Hệ số tỉ lệ giữa số tiền sau khi hạ giá với số tiền ban đầu $\dfrac{10000}{12500} = 0{,}8 = 80\%$.
- Hàng đã được bán với giá hạ so với giá ban đầu: $100\% - 80\% = 20\%$.

b) Nhận xét dung tích hộp và giá tiền là hai đại lượng tỉ lệ thuận

	Dung tích	Giá bán
Lúc ban đầu	1 lít	35000 đồng
Sau khi hạ giá	150 ml = 0,15 lít	x đồng

Áp dụng tính chất hai đại lượng tỉ lệ thuận
$\dfrac{0{,}15}{x} = \dfrac{1}{35000} \Rightarrow x = (0{,}15 \cdot 35000) : 1 = 52500$ (đồng). Biết một bloc gồm 2 hộp.
Giá một bloc là $5250 \cdot 2 = 10500$ (đồng).
Của hàng bán hạ giá là 10000 đồng vẫn lãi 500 đồng.

□

Bài 17. Hai bạn, một cao và một thấp, cùng nhau đi từ một nhà đến trường. Bước chân của bạn cao bằng 120% bước chân của bạn thấp nhưng trong cùng một thời gian, bạn thấp bước nhiều hơn bạn cao 20% số bước. Hỏi ai sẽ đến trường trước?
Lời giải.
Gọi độ dài mỗi bước chân của bạn thấp là x (m) thì độ dài bước chân của bạn cao sẽ là $120\% \times x = 1{,}2x$ (m).
Gọi số bước chân bạn cao bước đi được trong một giờ là y (bước) thì số bước chân bạn thấp bước đi được trong một giờ là $(100\% + 20\%) \times y = 120\% \times y = 1{,}2y$ (bước).
Trong một giờ quãng đường bạn thấp đi được là $x \times 1{,}2y = 1{,}2xy$ (m).
Trong một giờ quãng đường bạn cao đi được là $1{,}2x \times y = 1{,}2xy$ (m).
Vậy quãng đường đi được trong một giờ của hai bạn là như nhau hay vận tốc của hai bạn giống nhau, suy ra hai bạn đến trường cùng lúc. □

Bài 18. Biết rằng 7 con mèo ăn hết 14 con chuột trong thời gian là 21 phút. Hỏi cần bao nhiêu con mèo để ăn hết 100 con chuột trong một thời gian là 150 phút?
Lời giải.
Nhận xét. Với cùng một số mèo, thời gian và số chuột mà mèo ăn hết là hai đại lượng tỉ lệ thuận.
Mà $\dfrac{14}{21} = \dfrac{100}{150}\left(= \dfrac{2}{3}\right)$.
Do đó để ăn hết 100 con chuột trong một thời gian là 150 phút cần 7 con mèo. □

§2. Đại lượng tỉ lệ nghịch

I. Kiến thức cần nhớ

- *y tỉ lệ nghịch với x theo hệ số (tỉ lệ)* $a \neq 0$ *suy ra* $x \cdot y = a$ *(*$y = \dfrac{a}{x}$ *hoặc* $x = \dfrac{a}{y}$*)*
- *Tích hai giá trị tương ứng của chúng luôn không đổi.*
- *Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo của tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia.*
- x, y, z *tỉ lệ nghịch với* a, b, c *suy ra*
  - $a \cdot x = b \cdot y = c \cdot z$ *khi và chỉ khi* $x : y : z = \dfrac{1}{a} : \dfrac{1}{b} : \dfrac{1}{c}$.
  - $a \cdot x = b \cdot y = c \cdot z$ *khi và chỉ khi* $\dfrac{x}{\frac{1}{a}} : \dfrac{y}{\frac{1}{b}} : \dfrac{z}{\frac{1}{c}}$.
  - $x : y : z = \dfrac{1}{a} : \dfrac{1}{b} : \dfrac{1}{c}$ *khi và chỉ khi* $\dfrac{x}{\frac{1}{a}} : \dfrac{y}{\frac{1}{b}} : \dfrac{z}{\frac{1}{c}}$.

II. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Điền vào chỗ chấm (...) cho thích hợp

a) Trên cùng một quãng đường vận tốc và thời gian là hai đại lượng ...

b) Với một số tiền cho trước thì số hàng mua được và ... là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

c) Một số hữu tỉ x ($x \neq 0$) và số nghịch đảo của x là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, có hệ số tỉ lệ là ...

d) Trong các tam giác có cùng diện tích, số đo cạnh đáy và số đo ... là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

Lời giải.

a) Trên cùng một quãng đường vận tốc và thời gian là hai đại lượng "tỉ lệ nghịch ".

b) Với một số tiền cho trước thì số hàng mua được và "giá tiền"là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

c) Một số hữu tỉ x ($x \neq 0$) và số nghịch đảo của x là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, có hệ số tỉ lệ là 1

d) Trong các tam giác có cùng diện tích, số đo cạnh đáy và số đo "chiều cao"là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

□

Câu 2. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

a) Nếu vận tốc không đổi thì quãng đường và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

b) Nếu thời gian không đổi thì quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

c) Nếu quãng đường không đổi thì thời gian và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.

d) Trên cùng quãng đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Lời giải.

Do quãng đường $S = v \cdot t$, ở đó v là vận tốc, t là thời gian.

a) Nếu vận tốc không đổi thì quãng đường và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch $\boxed{\text{S}}$.

b) Nếu thời gian không đổi thì quãng đường và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch $\boxed{\text{Đ}}$.

c) Nếu quãng đường không đổi thì thời gian và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch $\boxed{\text{Đ}}$.

d) Trên cùng quãng đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ thuận $\boxed{\text{S}}$.

□

Câu 3. Đúng điền Đ và sai điền S

a) Chu vi hình vuông và cạnh là hai đại lượng tỉ lệ nghịch với hệ số tỉ lệ là 4 □.

b) Hai đại lượng x và $\sqrt{x}$ là hai đại lượng tỉ lệ nghịch □.

c) Chu vi một đường tròn tỉ lệ nghịch với bán kính đường tròn theo hệ số tỉ lệ 2π □.

d) Nếu ta cùng nhân một số khác 0 vào tất cả các giá trị của hai đại lượng tỉ lệ nghịch ta sẽ được các số mới cũng là các giá trị của hai đại lượng tỉ lệ nghịch □.

Lời giải.

a) Chu vi hình vuông và cạnh là hai đại lượng tỉ lệ nghịch với hệ số tỉ lệ là 4 $\boxed{\text{S}}$.
Vì chu vi Cv của hình vuông có cạnh bằng a là $Cv = 4 \cdot a$.

b) Hai đại lượng x và $\sqrt{x}$ là hai đại lượng tỉ lệ nghịch $\boxed{\text{S}}$.
Vì $x \cdot \sqrt{x} \neq a$ ở đó a là một hằng số nào đó.

c) Chu vi một đường tròn tỉ lệ nghịch với bán kính đường tròn theo hệ số tỉ lệ 2π $\boxed{\text{S}}$.
Vì Cv của đường tròn có bán kính R là $Cv = 2\pi \cdot R$.

d) Nếu ta cùng nhân một số khác 0 vào tất cả các giá trị của hai đại lượng tỉ lệ nghịch ta sẽ được các số mới cũng là các giá trị của hai đại lượng tỉ lệ nghịch $\boxed{\text{Đ}}$.
Giả sử x, y, z tỉ lệ nghịch với a, b, c suy ra

$$a \cdot x = b \cdot y = c \cdot z \Leftrightarrow x \colon y \colon z = \frac{1}{a} \colon \frac{1}{b} \colon \frac{1}{c}$$

Với $m \neq 0$ ta có

$$ma \cdot mx = mb \cdot my = mc \cdot mz \Leftrightarrow mx \colon my \colon mz = \frac{1}{ma} \colon \frac{1}{mb} \colon \frac{1}{mc}$$

hay mx, my, mz tỉ lệ nghịch với ma, mb, mc.

□

III. Học giải toán

Ví dụ 1. Cho biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Điền số thích hợp vào ô trống của bảng sau:

x	1	$-0,25$		-4	
y		8	2,5		-12

Lời giải.

- **Cách 1.** Vì $(-0,25)$ và (-4) là hai giá trị bất kì của đại lượng x, 8 và y là hai giá trị tương ứng của đại lượng y nên áp dụng tích chất đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có
$$\frac{-0,25}{-4} = \frac{y}{8} \Rightarrow y = \frac{-0,25 \cdot 8}{-4} \Rightarrow y = 0,5.$$
Làm tương tự ta được bảng sau

x	1	$-0,25$	0,8	-4	$\frac{1}{6}$
y	-2	8	2,5	0,5	-12

- **Cách 2.** Biết x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Vì $(-0,25)$ và (-4) là hai giá trị tương ứng của đại lượng x, 8 và y là hai giá trị tương ứng của đại lượng y nên áp dụng tích chất đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có
$$(-0,25) \cdot 8 = (-4) \cdot y \Rightarrow y = (0,25) \cdot 2 \Rightarrow y = 0,5$$
Tương tự ta được bảng sau

x	1	$-0,25$	0,8	-4	$\frac{1}{6}$
y	-2	8	2,5	0,5	-12

□

⚠ *Nếu hai đại lượng tỉ lệ nghịch với nhau*

- *Tích hai giá trị tương ứng luôn không đổi.*
- *Tỉ số hai giá trị bất kì của đại lượng này bằng nghịch đảo tỉ số hai giá trị tương ứng của đại lượng kia.*

Ví dụ 2. Chia số 330 thành ba số tỉ lệ nghịch với 0,4; 0,6 và 1,2.

Lời giải.

Gọi ba số phải lần lượt là x, y và z. Do giả thiết ta có $x + y + z = 330 \quad (*)$.

Để thỏa mãn bài toán suy ra $x : y : z = \frac{1}{0,4} : \frac{1}{0,6} : \frac{1}{1,2} \Rightarrow x : y : z = 3 : 2 : 1$.

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} = \frac{x+y+z}{3+2+1}$.

Từ $(*)$ suy ra $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} = \frac{330}{6} = 55$.

- Khi $\dfrac{x}{3} = 55 \Rightarrow x = 165$.
- Khi $\dfrac{y}{2} = 55 \Rightarrow y = 110$.
- Khi $\dfrac{z}{1} = 55 \Rightarrow z = 55$.

Vậy $x = 165$, $y = 110$ và $z = 55$. □

Ví dụ 3. Cho x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch với hệ số tỉ lệ là a $(a \neq 0)$. Biết y và z cũng là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, nhưng hệ số tỉ lệ là b $(b \neq 0)$. Hỏi giữa hai đại lượng x và z có tương quan tỉ lệ thuận hay tỉ lệ nghịch không? Theo em thì bạn BEE giải như sau đúng hay sai?
Lời giải của bạn BEE

- x và y tỉ lệ nghịch với hệ số tỉ lệ a $(a \neq 0)$ suy ra $x = \dfrac{y}{a} = y : a$.
- y và z tỉ lệ nghịch với hệ số tỉ lệ b $(b \neq 0)$ suy ra $y = \dfrac{z}{b}$.
  Suy ra $x = \dfrac{z}{b} : a = \dfrac{z}{ab}$ (vì $a \neq 0$, $b \neq 0$ nên $ab \neq 0$).
  Vậy x và z tỉ lệ nghịch với nhau theo hệ số tỉ lệ ab.

Lời giải.

- Chỗ sai: Viết công thức sai.
  Nếu x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch với hệ số tỉ lệ là a thì $x \cdot y = a$ chứ không phải "$x = \dfrac{y}{a}$".
- Sửa lại: Viết đúng công thức.
  x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch với hệ số tỉ lệ là a thì $x = \dfrac{a}{y}$.
  y và x là hai đại lượng tỉ lệ nghịch với hệ số tỉ lệ là b thì $y = \dfrac{b}{z}$.
  Suy ra $x = \dfrac{a}{y} = \dfrac{a}{\frac{b}{z}} = \dfrac{a \cdot z}{b} \Rightarrow \dfrac{x}{z} = \dfrac{a}{b}$, mà $\dfrac{a}{b}$ là hằng số khác 0, nên x và z là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Kết luận: Bạn BEE giải sai vì viết nhầm công thức. □

Ví dụ 4. Chia số 4500 thành ba số mà 80% số thứ nhất bằng $53\frac{1}{3}\%$ số thứ hai và bằng 40% số thứ ba. Tìm hệ thức liên hệ giữa ba số.

Lời giải.
Ta có $53\frac{1}{3}\% = \dfrac{160}{3}\%$.
Gọi ba số phải tìm lần lượt là x, y, z, do giả thiết ta có $x + y + z = 4500$.
Mà $80\% \cdot x = \dfrac{160}{3}\% \cdot y = 40\% \cdot z$ suy ra

$$x : y : z = \frac{1}{80\%} : \frac{1}{\frac{160}{3}\%} : \frac{1}{40\%} = 2 : 3 : 4$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4} = \dfrac{x+y+z}{2+3+4} = \dfrac{4500}{9} = 500$.

- Khi $\dfrac{x}{2} = 500 \Rightarrow x = 1000$.
- Khi $\dfrac{y}{3} = 500 \Rightarrow y = 1500$.
- Khi $\dfrac{z}{4} = 500 \Rightarrow z = 2000$.

Vậy các số là 1000, 1500 và 2000. □

Ví dụ 5. Một người và siêu thị hoa quả và nhẩm tính thấy với số tiền mình mang đi có thể mua được: hoặc 3 kg nho, hoặc 5 kg mận, hoặc 4 kg táo. Hỏi giá tiền của mỗi loại hoa quả, biết số tiền mua 3 kg táo nhiều hơn mua 2 kg mận là 210000 đồng.

Lời giải.
Gọi giá tiền nho, táo, mận lần lượt là x, y, z (đồng/kg) (điều kiện $x, y, z > 0$).
Theo giả thiết ta có $3y - 2z = 210000$.
Vì cùng một số tiền mua 3 kg nho, hoặc 5 kg mận, hoặc 4 kg táo nên giá tiền và khối lượng hoa quả là tỉ lệ nghịch, ta có $3 \cdot x = 4 \cdot y = 5 \cdot z$.
Suy ra

$$x : y : z = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} = 20 : 15 : 12$$

Do đó $\dfrac{x}{20} = \dfrac{y}{15} = \dfrac{z}{12} = \dfrac{3y-2z}{45-24} = \dfrac{210000}{21} = 10000$.

- Khi $\dfrac{x}{20} = 10000 \Rightarrow x = 200000$.
- Khi $\dfrac{y}{15} = 10000 \Rightarrow y = 150000$.
- Khi $\dfrac{z}{12} = 10000 \Rightarrow z = 120000$.

Vậy giá nho, táo và mận lần lượt là 1000 (đồng/kg), 1500 (đồng/kg) và 2000 (đồng/kg). □

Ví dụ 6. Cho x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch với hệ số tỉ lệ là số dương. Biết x có hai giá trị mà tích bằng 2 và hiệu bình phương của hai giá trị đó bằng 3, còn hiệu bình phương hai giá trị tương ứng của y là -12. Viết công thức liên quan giữa x, y.

Lời giải.
Biết x, y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có $x \cdot y = a$, với $a > 0$.
Gọi hai giá trị của x là x_1, x_2 và hai giá trị tương ứng của y là y_1, y_2. Theo đề bài ta có $x_1 \cdot x_2 = 2$; $x_1^2 - x_2^2 = 3$ và $y_1^2 - y_2^2 - 12$.
Đặt $b = \dfrac{y_1}{x_2} = \dfrac{y_2}{x_1}$ suy ra

$$b^2 = \frac{y_1^2}{x_2^2} = \frac{y_2^2}{x_1^2} = \frac{y_1^2 - y_2^2}{x_2^2 - x_1^2}\frac{y_2^2}{x_1^2} = \frac{y_1^2 - y_2^2}{-(x_1^2 - x_2^2)} = \frac{-12}{-3} = 4$$

Khi $b^2 = 4$ suy ra $b = 2$ hoặc $b = -2$.

- Khi $b = 2$ thì $y_1 = 2x_2$ và $y_2 = 2x_1$.
  Mà $x_2 \cdot x_1 = 2 \Rightarrow a = y_1 \cdot x_1 = (2x_2) \cdot x_1 = 2 \cdot (x_2 \cdot x_1) = 4$. Dễ thấy thỏa mãn bài toán nên $y = \dfrac{4}{x}$.

- Khi $b = -2$ thì $y_1 = -2x_2$ và $y_2 = -2x_1$.
  Mà $x_2 \cdot x_1 = 2 \Rightarrow a = y_1 \cdot x_1 = (-2x_2) \cdot x_1 = -2 \cdot (x_2 \cdot x_1) = -4$. Dễ thấy không thỏa mãn bài toán .

Vậy công thức liên hệ giữa x và y là $y = \dfrac{4}{x}$ (hay có thể viết là $x \cdot y = 4$). □

Ví dụ 7. Cho x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Khi x nhận các giá trị $x_1 = -3$ và $x_2 = 2$ thì các giá trị tương ứng y_1 và y_2 bằng 13. Viết công thức liên hệ giữa x và y.

Lời giải.
Gọi x và y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên ta có $x \cdot y = a$, với $a \neq 0$.
Với hai giá trị của x là $x_1 = -3$ và $x_2 = 2$, có hai giá trị tương ứng của y là y_1 và y_2 thì $y_1 - y_2 = 13$.
Theo tích chất của đại lượng tỉ lệ nghịch ta có

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{2}{-3} \Rightarrow \frac{y_1}{2} = \frac{y_2}{-3} = \frac{y_1 - y_2}{2 - (-3)} = \frac{13}{5}$$

- Khi $\dfrac{y_1}{2} = 2{,}6 \Rightarrow y_1 = 5{,}2$ nên $x_1 \cdot y_1 = (-3) \cdot 5{,}2 = -15{,}6$.

Vậy ta có công thức $y = \dfrac{-15{,}6}{x}$ (hoặc $x \cdot y = -15{,}6$). □

Ví dụ 8. Cho $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ và c là các đại lượng nào đó. Ta có hai tập hợp $P = \{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n |\ n \in \mathbb{N}^*\}$ và $Q = \{c\}$ Biết tương quan giữa đại lượng c của tập hợp Q với lần lượt các phần tử của tập hợp P là tương quan tỉ lệ nghịch. Khi đó tương quan đôi một giữa các phần tử của tập hợp P với nhau là

A. Không có tương quan nào cả.
B. Một số là tương quan tỉ lệ thuận và số còn lại là tương quan tỉ lệ nghịch.
C. Tương quan tỉ lệ thuận.
D. Tương quan tỉ lệ nghịch.

Hãy chọn phương án đúng.

Lời giải.
Biết tương quan giữa c và c_1 là tương quan tỉ lệ nghịch suy ra $c_1 \cdot c = m$, với $m \neq 0$.
Tương tự,tương quan giữa c và c_2 là tương quan tỉ lệ nghịch suy ra $c_2 \cdot c = n$, với $n \neq 0$.
Khi đó

$$\frac{c_1 \cdot c}{c_2 \cdot c} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{c_1}{c_2} = \frac{m}{n}$$

hay tương quan giữa c_1 và c_2 là tương quan tỉ lệ thuận.
Chứng minh tương tự, ta có tương quan đôi một giữa các phần tử của tập hợp P với nhau và tương quan tỉ lệ thuận.
Chọn đáp án C □

IV. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Với số tiền trước đây mua được 32,9 kg bột mì thì nay mua được 40 kg bột mì. Hỏi bột mì hạ giá bao nhiêu %?

Lời giải.

Gọi x là giá bột mì trước đây và y là giá bột mì hiện nay (điều kiện $x, y > 0$).
Vì giá bột mì và số lượng bột mì mua được là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên

$$32{,}9 \cdot x = 40 \cdot y \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{32{,}9}{40}.$$

Số % bột mì hạ giá là $100 - \dfrac{32{,}9}{40} \cdot 100 = 17{,}55\%$.

□

Bài 2. Biết 78 người hoàn thành một công việc trong 65 ngày.

a) Nếu năng suất lao động mỗi người là như nhau, thì cần thêm bao nhiêu người nữa để hoàn thành công việc chung trong 39 ngày?

b) Khi cải tiến công cụ lao động thì năng suất tăng thêm 20%. Hỏi cần giảm đi bao nhiêu người mà vẫn hoàn thành công việc đó trong 65 ngày?

Lời giải.

a) Gọi x là số người để hoàn thành công việc trong 39 ngày (điều kiện $x > 0$, $x \in \mathbb{N}$).
Vì số người và số ngày tỉ lệ thuận nên $\dfrac{78}{x} = \dfrac{39}{65} \Rightarrow x = \dfrac{78 \cdot 65}{39} = 130$ (người).
Suy ra số người cần bổ sung là $130 - 78 = 52$ (người).

b) Gọi y là năng suất ban đầu của một người khi chưa cải tiến công cụ (điều kiện $x > 0$).
Suy ra năng suất sau khi cải tiến công cụ là $y + y \cdot 20\% = 1{,}2 \cdot y$.
Gọi z là số lượng người lao động cần để hoàn thành công việc trong 65 ngày sau khi cải tiến công cụ (điều kiện $z > 0$, $z \in \mathbb{N}$).
Do năng suất và số lượng người tỉ lệ nghịch nên

$$\frac{78}{z} = \frac{1{,}2y}{y} \Rightarrow \frac{78}{z} = 1{,}2 \Rightarrow z = \frac{78}{1{,}2} = 65 \text{ (người)}$$

Do đó số lượng người cần giảm là $78 - 65 = 13$ (người).

□

2. Nâng cao

Bài 3. Cho x, y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Gọi x_1 và x_2 là hai giá trị nào đó của x còn y_1 và y_2 là hai giá trị tương ứng của y. Biết $x_1 = -3$; $y_2 = 5$ và $5x_2 - 3y_1 = -60$.

a) Tìm x_2 và y_1.

b) Viết công thức liên hệ giữa x và y.

Lời giải.

a) Do x, y là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên

$$x \cdot y = y_1 \cdot x_1 = y_2 \cdot x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$$

Do giả thiết

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \Rightarrow \frac{-3}{x_2} = \frac{5}{y_1} = \frac{5 \cdot (-3) - 5 \cdot 3}{5x_2 - 3y_1} = \frac{-30}{-60} = \frac{1}{2}$$

- Khi $\frac{-3}{x_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = -6$.
- Khi $\frac{5}{y_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow y_1 = 10$.

b) Khi đó

$$x \cdot y = y_1 \cdot x_1 = y_2 \cdot x_2 \Rightarrow x \cdot y = 10 \cdot (-3) = 5 \cdot (-6) \Rightarrow x \cdot y = 30 \Rightarrow y = \frac{30}{x}$$

□

Bài 4. Gọi x, y, z theo thứ tự là số vòng quay của kim giờ, kim phút và kim giây trong cùng một đơn vị thời gian.

a) Điền các số thích hợp vào ô trống của bảng dưới đây.

x	1				
y		1			
z			1	0,5	5

b) Viết công biểu diễn z theo x.

Lời giải.

a) Vì 12 giờ = 1 vòng của kim giờ.
Mà 1 giờ = 60 phút = 1 vòng quay của kim phút.
Tương tự 1 phút = 60 giây = 1 vòng quay của kim giây.
Gọi x, y, z theo thứ tự là số vòng quay của kim giờ, kim phút và kim giây trong cùng một đơn vị thời gian ta có $y = 12 \cdot x$; $z = 60 \cdot y$ suy ra $z = 60 \cdot y = 720 \cdot x$.
Do x, y, z là các đại lượng tỉ lệ thuận nên

x	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{720}$	$\frac{1}{1440}$	$\frac{1}{144}$
y	12	1	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{12}$
z	720	60	1	0,5	5

b) Dựa vào kết quả trên suy ra $z = 720 \cdot x$.

□

Bài 5. Để thanh lí cửa hàng, ông chủ cửa hàng ôtô quyết định giảm giá mỗi chiếc xe xuống 10%. Nhưng sau đó, ông ta nhận thấy mình sẽ lỗ nếu bán với giá này, nên ông ta quyết định tăng giá đã giảm lên 5%. Vậy mức giảm giá thực của ông chủ của cửa hàng là bao nhiêu phần trăm?

Lời giải.

Gọi x(đồng/chiếc) là giá ô tô khi chưa thanh lý (điều kiện $x > 0$).

Khi đó giá xe thanh lý là $x - 10\% \cdot x = \dfrac{9}{10} \cdot x$ (đồng/chiếc).

Giá xe thực bán của ông chủ là $\dfrac{9}{10} \cdot x + 5\% \cdot \dfrac{9}{10} \cdot x = \left(1 + \dfrac{1}{20}\right) \cdot \dfrac{9}{10} \cdot x = \dfrac{189}{200} \cdot x$ (đồng/chiếc).

Suy ra giá giảm là $x - \dfrac{189}{200} \cdot x = \dfrac{11}{200} \cdot x$ (đồng/chiếc).

Suy ra mức giảm giá thực của ông chủ cửa hàng là $\dfrac{11}{200} \cdot 100\% = 5{,}5\%$.

□

Bài 6. Để truyền một chuyển động người ta có thể dùng xây xích nối hai bánh xe có răng, hoặc các bánh xe có răng khớp với nhau, hoặc các bánh xe có răng khớp với nhau, hoặc dùng dây cu-roa (hình dưới). Ta xét một bộ máy chuyển động có hai bánh xe khớp răng với nhau:

a) Nếu bánh xe thứ nhất có 65 bánh răng và quay 36 vòng/phút thì bánh xe thứ hai có 45 bánh răng sẽ quay được bao nhiêu vòng/phút?

b) Để bánh xe thứ hai quay được 78 vòng/phút thì thiết kế bánh xe thứ hai có bao nhiêu răng?

Lời giải.

a) Gọi x (vòng/phút) là số vòng quay của bánh xe thứ hai (điều kiện $x > 0$).
Vì số răng và số vòng quay của bánh xe là hai đại lượng tỉ lệ nghịch nên
$$\frac{65}{45} = \frac{x}{36} \Rightarrow x = \frac{65 \cdot 36}{45} = 52 \text{ (vòng/phút)}$$

b) Gọi y (răng) là số răng của bánh xe thứ hai (điều kiện $y > 0$, $y \in \mathbb{N}$).
Tương tự như trên suy ra
$$\frac{65}{y} = \frac{78}{36} \Rightarrow y = \frac{65 \cdot 36}{78} = 30 \text{ (răng)}$$

□

Bài 7. Khoảng cách giữa hai ga tàu A và B bằng 28 km. Cùng một lúc có hai đoàn tàu, một khởi hành từ ga A, một đi từ ga B. Nếu chuyển động cùng chiều thì sau một thời gian tàu thứ nhất đi từ A sẽ đuổi kịp tàu thứ hai đi từ B. Nếu chuyển động ngược chiều, thì thời gian hai tàu gặp nhau chỉ bằng $\dfrac{2}{7}$ thời gian tàu thứ nhất đuổi kịp tàu thứ hai. Hỏi hai đoàn tàu gặp nhau tại vị trí nào giữa hai ga A và B?

Lời giải.

Gọi v_1 (km/h), v_2 (km/h) lần lượt là vận tốc của đoàn tàu thứ nhất, thứ hai (điều kiện $v_1 > v_2 > 0$).

Gọi t (h) là thời gian của hai đoàn tàu thứ nhất, thứ hai gặp nhau khi chạy cùng chiều.

Khi đó $v_1 \cdot t = 28 + v_2 \cdot t$ suy ra số thời gian để tàu thứ nhất đuổi kịp tàu thứ hai là $t = \dfrac{28}{v_1 - v_2}$.

Tương tự gọi t' (h) là thời gian hai tàu chạy ngược chiều nhau gặp nhau là $t' = \dfrac{28}{v_1 + v_2}$.

Do giả thiết suy ra
$$\frac{28}{v_1 + v_2} = \frac{2}{7} \cdot \frac{28}{v_1 - v_2} \Rightarrow 2 \cdot (v_1 + v_2) = 7 \cdot (v_1 - v_2) \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{9}{5} \Rightarrow v_1 = \frac{9}{5} \cdot v_2$$

Khi đó thời gian $t' = \dfrac{28}{\dfrac{9}{5}\cdot v_2 + v_2} = \dfrac{28\cdot 5}{14\cdot v_2} = \dfrac{10}{v_2}$.

Do đó quãng đường tàu xuất phát từ B đi được quãng đường là $v_2 \cdot t' = v_2 \cdot \dfrac{10}{v_2} = 10$ (km).

Vậy điểm gặp nhau của hai tàu cách ga A là $28 - 10 = 18$ (km). □

V. Em có biết

1. Toán chuyển động

Bài 8. Bạn EGG đố bạn CHICKEN
Để đi từ A đến B, một xe máy cần 1 giờ 30 phút. Nếu vận tốc xe máy tăng thêm 5 km/h thì thời gian rút ngắn được 15 phút. Tìm quãng đường AB.
Lời giải.
Ta coi như có hai xe máy cùng đi từ A đến B. Gọi vận tốc và thời gian của xe thứ nhất và xe thứ hai lần lượt là v_1 và t_1; v_2 và t_2 (điều kiện $v_2 > v_1 > 0$).
Theo đề bài ta có $v_2 - v_1 = 5$ (km/h).
Mà $t_1 = 1\text{h}30' = 90'$ và $t_2 = t_1 - 15' = 75'$.
Trên cùng quãng đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, nên

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{v_1}{5} = \frac{v_2}{6}.$$

Suy ra $\dfrac{v_1}{5} = \dfrac{v_2}{6} = \dfrac{v_2 - v_1}{6-5} = \dfrac{5}{1} = 5$.
Khi $\dfrac{v_1}{5} = 5 \Rightarrow v_1 = 5\cdot 5 = 25$ (km/h).
Mà $t_1 = 1\text{h}30' = 1{,}5\text{h}$.
Do đó quãng đường AB có độ dài là $S = v_1 \cdot t_1 = 25 \cdot 1{,}5 = 37{,}5$ (km). □

Bài 9. Bạn CHICKEN đố lại bạn EGG
Đúng lúc 12 giờ, một chiếc thuyền đi từ A đến B với vận tốc 6 km/h. Sau khi đỗ ở B 1 giờ, thuyền quay về A với vận tốc 9 km/h và tới A lúc 20 giờ 30 phút cùng ngày. Tìm quãng đường AB.
Lời giải.
Ta coi như có hai chiếc thuyền, chiếc thứ nhất đi từ A đến B và chiếc thứ hai đi từ B về A. Gọi vận tốc và thời gian của chiếc thứ nhất và chiếc thứ hai lần lượt là v_1 và t_1; v_2 và t_2 ($v_2 > v_1$).
Theo đề bài ta có $v_1 = 6$ (km/h) và $v_2 = 9$ (km/h).
Số thời gian từ 12 giờ đến 20 giờ 30 phút là $20\text{h}30 - 12\text{h} = 8\text{h}30' = 8{,}5$ (h).
Do giả thiết ta suy ra $t_1 + t_2 = 8{,}5 - 1 = 7{,}5$ (h).
Trên cùng quãng đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, nên

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{t_2}{2} = \frac{t_1}{3}.$$

Suy ra $\dfrac{t_2}{2} = \dfrac{t_1}{3} = \dfrac{t_2 + t_1}{2+3} = \dfrac{7{,}5}{5} = 1{,}5$.
Khi $\dfrac{t_2}{2} = 1{,}5 \Rightarrow t_2 = 2\cdot 1{,}5 = 3$ (giờ).
Do đó quãng đường AB có độ dài là $S = v_2 \cdot t_2 = 9 \cdot 3 = 27$ (km). □

Bài 10. Hai bạn CHICKEN và EGG cùng trao đổi bài toán sau
Lúc 8 giờ, một người đi từ nhà đến sân bay. Nếu đi với vận tốc 40 km/h thì đến chậm 30 phút để làm thủ tục bay, nhưng nếu đi với vận tốc 50 km/h thì lại đến sớm 2 giờ để làm thủ tục bay. Tìm khoảng cách từ nhà đến sân bay và thời gian làm thủ tục bay là lúc mấy giờ.

Lời giải.
Gọi vận tốc và thời gian người đó đi từ nhà đến sân bay, nếu đi với vận tốc 40 km/h là v_1, t_1 và đi với vận tốc 50 km/h là v_2, t_2. Gọi t là thời gian người đó đi từ nhà đến sân bay đúng giờ làm thủ tục bay. Khi đó $v_1 = 40$ (km/h) và $v_2 = 50$ (km/h).
Theo giả thiết $t_1 = t + 0{,}5$ (h) và $t_2 = t + 2$ (h).
Trên cùng quãng đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch, nên

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{50}{40} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{t_1}{5} = \frac{t_2}{4}.$$

Suy ra $\dfrac{t_1}{5} = \dfrac{t_2}{4} = \dfrac{t_1 - t_2}{5 - 4} = \dfrac{2{,}5}{1} = 2{,}5$.
Khi $\dfrac{t_2}{4} = 2{,}5 \Rightarrow t_2 = 4 \cdot 2{,}5 = 10$ (giờ).
Do đó quãng đường từ nhà đến sân bay là $S = v_2 \cdot t_2 = 50 \cdot 10 = 500$ (km).
Thời gian để làm thủ tục bay là $8 + t = 8 + (t_2 + 2) = 20$ (giờ) hay lúc 8 giờ tối. ☐

⚠ *Với bài toán chuyển động nhớ câu "thần chú ":*

- *Trên cùng một quãng đường, vận tốc và thời gian là hai đại lượng tỉ lệ nghịch.*

Từ tỉ số giữa các vận tốc hoặc giữa các thời gian đi tìm tổng hoặc hiệu các vận tốc hoặc thời gian đó. Sau đó áp dụng tính chất của đại hai đại lượng tỉ lệ nghịch để giải bài toán.

2. Toán lỗ lãi

Bài 11. Hai bạn CHICKEN và EGG mang một số tiền vừa đủ để mua 20 quyển vở. Nhân dịp năm học mới cửa hàng hạ giá 20%. Bạn EGG cho là sẽ mua được 24 quyển vở. Bạn CHICKEN lại nói sẽ mua được 25 quyển vở. Theo bạn ai đúng ai sai?
Lời giải.
Số tiền không đổi, suy ra tương quan giữa số hàng và giá hàng là tỉ lệ nghịch.
Ta lập bảng sau:

	Giá hàng	Số hàng
Chưa hạ giá	100%	100%
Sau hạ giá	80%	x

Theo tính chất đại lượng tỉ lệ nghịch, ta có

$$\frac{100\%}{x} = \frac{80\%}{100\%} \Rightarrow \frac{100\%}{x} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{100\% \cdot 5}{4} = 125\%$$

Vậy, sau khi hạ giá 20% số vở mua được bằng 125% số quyển vở mua được khi chưa hạ giá.
Suy ra số vở mua được là $20 \cdot \dfrac{125}{100} = 25$ (quyển vở).
Như vậy bạn EGG nói sai, còn bạn CHICKEN nói đúng. ☐

Bài 12. Hãy cùng nhau giải bài toán sau để xem thắc mắc của bạn EGG có đúng không?
Nhân dịp Noel, một cửa hàng sách giảm giá 10% giá bìa. Tuy vậy, cửa hàng vẫn có lãi 12,5% so với giá mua. Hỏi ngày thường cửa hàng đó lãi bao nhiêu % so với giá mua?
Lời giải.
Giá bán sau khi đã giảm 10% là 90%. Giá sau khi giảm vẫn lãi so với giá mua là 12,5%. Biết giá mua ban đầu không đổi, thì giá bán và số tiền lãi là hai đại lượng tỉ lệ thuận.
Ta lập bảng

	Giá hàng(%)	Giá bán so với giá mua(%)
Chưa hạ giá	100%	x
Sau hạ giá	90%	112,5%

Theo tính chất đại lượng tỉ lệ thuận, ta có

$$\frac{x}{112{,}5\%} = \frac{100\%}{90\%} \Rightarrow \frac{x}{112{,}5\%} = \frac{10}{9} \Rightarrow x = \frac{112{,}5\% \cdot 10}{9} = 125\%$$

Vậy, bình thường cửa hàng đã lãi 25% so với giá mua. □

⚠ *Các bài toán lỗ lãi thường đưa về dạng toán tỉ lệ thuận hoặc tỉ lệ nghịch. Khi một cửa hàng quyết định hạ giá, thì có thể xảy ra một trong các tình huống sau:*

- *Cửa hàng vẫn có lãi sau khi hạ giá.*
- *Số hàng bán trước đã đủ số tiền lãi rồi.*
- *Cửa hàng bán chấp nhận lỗ để thu hồi vốn.*

3. Đố vui

Hai bạn CHICKEN và EGG cùng đi từ A và B đến gặp nhau. Cùng lúc đó chú chó KEY nhà bạn CHICKEN cũng xuất phát cùng chủ nó, chạy với tốc độ 12 km/h. Khi gặp EGG, chó KEY tinh khôn quay trở lại ngay về với chủ. Gặp chủ ngay lập tức quay lại tìm EGG. Cứ như vậy cho tới khi CHIKEN và EGG gặp nhau. Hỏi chó KEY đã chạy được một quãng đường là bao nhiêu, biết vận tốc của hai bạn bằng 3 km/h và khoảng cách AB bằng 2,7 km?

§3. Hàm số. Đồ thị của hàm số

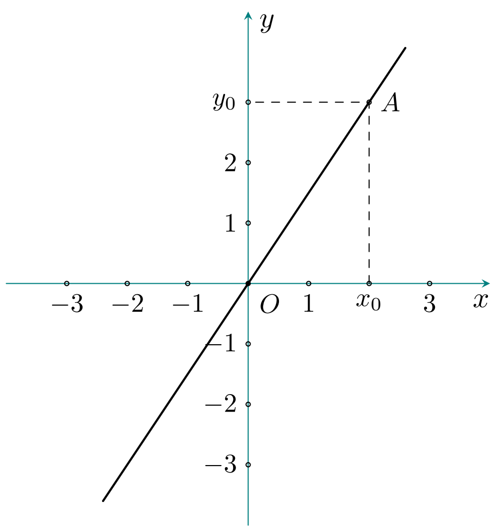
I. Kiến thức cần nhớ

Định nghĩa 1. Hàm số $y = f(x)$ là một quy tắc với mỗi giá trị của x luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y.

Định nghĩa 2. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn cặp giá trị $(x; y)$ tương ứng trên mặt phẳng tọa độ.

⚠ *Cách vẽ*

- *Xác định một điểm $A(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị (khác điểm O).*
- *Vẽ đường thẳng đi qua O và A.*



II. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Dòng I là tọa độ các điểm, dòng II là các hàm số. Hãy ghép một ô của dòng I với một ô của dòng II để chỉ ra tọa độ của điểm thuộc đồ thị hàm số:

	A	B	C	D	E
Dòng I	$A\,(5;1)$	$B\,(-2;1)$	$C\,(1;5)$	$D\,(5;-10)$	$E\,(-0{,}1;-0{,}2)$
Dòng II	$y=2x$	$y=-2x$	$y=0{,}2x$	$y=\dfrac{1}{0{,}2}x$	$y=-\dfrac{1}{2}x$
	1	2	3	4	5

Lời giải.
Quan sát giá trị đại lượng x và y ta có

- Khi $A\,(5;1)$ suy ra $1=\dfrac{1}{5}\cdot 5=0{,}2\cdot 5$ nên A thuộc $y=0{,}2x$. Nên ghép A với 3.
- Khi $B\,(-2;1)$ suy ra $1=-\dfrac{1}{2}\cdot(-2)$ nên B thuộc $y=-\dfrac{1}{2}x$. Nên ghép B với 5.
- Khi $C\,(1;5)$ suy ra $5=5\cdot 1=\dfrac{1}{0{,}2}\cdot 1$ nên C thuộc $y=\dfrac{1}{0{,}2}x$. Nên ghép C với 4.
- Khi $D\,(5;-10)$ suy ra $-10=-2\cdot 5$ nên D thuộc $y=-2x$. Nên ghép D với 2.
- Khi $E\,(-0{,}1;-0{,}2)$ suy ra $-0{,}2=2\cdot 0{,}1$ nên E thuộc $y=2x$. Nên ghép E với 1.

□

Câu 2. Điền vào chỗ chấm (...) cho thích hợp

a) Khi nói đến hàm số, là ta nói đến sự tương quan giữa hai đại lượng biến thiên mà nhận giá trị bằng ...

b) Mỗi giá trị của đại lượng x không thể có ... một giá trị tương ứng đại lượng y.

c) Mỗi giá trị tương ứng của đại lượng y có thể nhận ... giá trị tương ứng của đại lượng x.

Lời giải.

a) Khi nói đến hàm số, là ta nói đến sự tương quan giữa hai đại lượng biến thiên mà nhận giá trị bằng “x ”, “y ”.

b) Mỗi giá trị của đại lượng x không thể có “nhiều hơn ”một giá trị tương ứng đại lượng y.

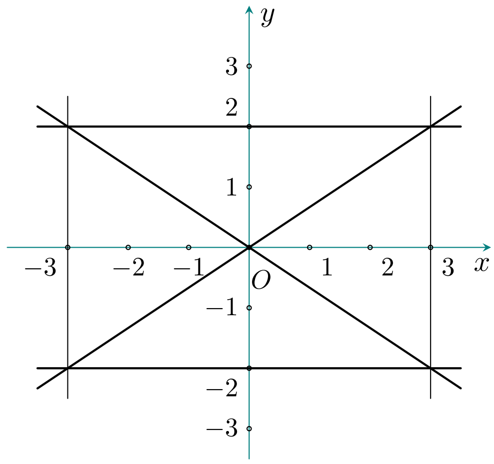
c) Mỗi giá trị tương ứng của đại lượng y có thể nhận “nhiều ”giá trị tương ứng của đại lượng x.

□

Câu 3.

Cho 6 đường thẳng chứa các cạnh và đường chéo của một hình chữ nhật có tâm trùng với gốc tọa độ như hình vẽ bên. Số đường thẳng là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 6. **B**. 4. **C**. 2. **D**. 0.



Lời giải.

Dựa vào đường thẳng của đồ thị là $y = 2$; $y = -2$, $y = \dfrac{2}{3}x$ và $y = -\dfrac{2}{3}x$. Suy ra số đường là 4. □

III. Học giải toán

Ví dụ 1. Bạn BEE có một chiếc vé xem phim. Bạn BEE khoe với các bạn là mình có thể rủ thêm một người bạn nữa di xem cùng, mình ngồi hàng A cột 9, còn bàn mình ngồi hàng 9 cột A. Các bạn thấy thế nào?

Lời giải.

Có thể hình dung:

Chỗ ngồi trong rạp phim như là các điểm (ghế ngồi) trong một mặt phẳng tọa độ (rạp phim).

Kí hiệu $A9$ là dãy A (chỉ hàng) và số ghế 9 (chỉ cột) là tọa độ của một điểm (chỗ ngồi). Với chiếc vé này bạn BEE có một ví trí chỗ ngồi cố định.

Bạn BEE không thể mời thêm một người bạn cùng đi.

Bạn BEE ngồi hàng A cột 9, chứ không thể ngồi hàng 9 cột A. □

- *Mỗi cặp số xác định duy nhất một điểm trên mặt phẳng tọa độ. Hoành độ viết trước tung độ.*
- *Khi xem phim, xem ca nhạc hay xem đá bóng … phải ngồi đúng chỗ.*

Ví dụ 2. Cho các cặp số $(-2; 1)$, $(-1; 0{,}5)$, $(1; -0{,}5)$, $(2; -1)$, $(2{,}5; -1{,}25)$.

a) Chứng tỏ các cặp số trên xác định một hàm số.

b) Lập bảng giá trị của hàm số nói trên.

c) Biểu diễn hàm số đó trên một mặt phẳng tọa độ Oxy.

d) Hàm số trên được cho bởi công thức nào?

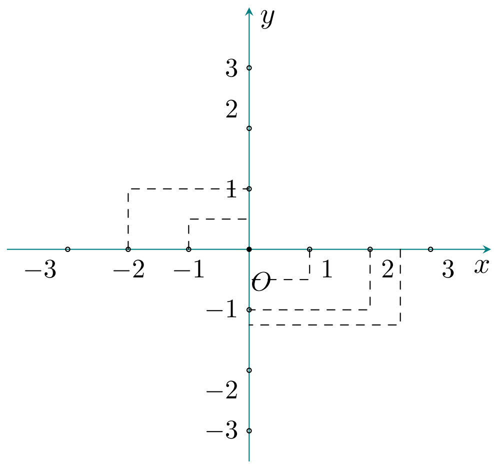
Lời giải.

a) Các cặp số $(-2; 1)$, $(-1; 0{,}5)$, $(1; -0{,}5)$, $(2; -1)$, $(2{,}5; -1{,}25)$ xác định một hàm số. Vì mỗi giá trị của x xác định được một và chỉ một giá trị của y.

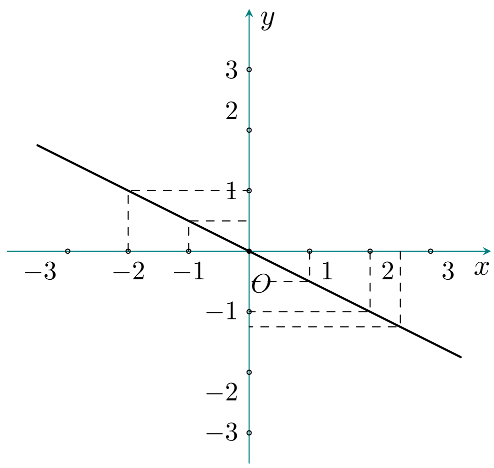
b) Ta có bảng giá trị

x	-2	-1	1	2	2,5
y	1	0,5	$-0,5$	-1	$-1,25$

c) Hàm số được xác định bởi 5 cặp số, nên đồ thị của hàm số chỉ có 5 điểm.



d) Hàm số trên được cho bởi công thức $y = -0,5x$. Dễ thấy đồ thị hàm số $y = -0,5x$ là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ (và đi qua 5 điểm trên).



□

Ví dụ 3. Bạn BEE cho rằng trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy tồn tại một đường thẳng mà các điểm của nó có một trong các tính chất sau:

a) Hoành độ và tung độ bằng nhau.

b) Hoành độ và tung độ là hai số đối nhau.

c) Hoành độ và tung độ là hai số nghịch đảo của nhau.

Bạn BEE nói có đúng không?

Lời giải.

a) Các điểm thuộc đồ thị hàm số $y = x$ có hoành độ và tung độ bằng nhau.

b) Các điểm thuộc đồ thị hàm số $y = -x$ có hoành độ và tung độ là hai số đối nhau.

c) Khi hoành độ và tung độ là hai số nghịch đảo của nhau thì ta có $x \cdot y = 1$ suy ra $y = \dfrac{1}{x}$ và hàm số đó có đồ thị không là đường thẳng.

Vậy bạn BEE đã nói đúng câu a) và b) vì đồ thị của hàm số $y = x$ và $y = -x$ đều là đường thẳng.
□

Ví dụ 4. Hàm số $y = f(x)$ được xác định như sau:
Với mỗi số tự nhiên x có ba chữ số thì hàm số $y = f(x)$ tương ứng với tổng các chữ số của x.

a) Tính $f(124)$, $f(279)$, $f(304)$.

b) Có bao nhiêu số nguyên tố $x = \overline{abc}$, biết $f(x) = 4$.

Lời giải.

a) Ta có $\overline{abc} = 124 \Rightarrow f(124) = 1 + 2 + 4 = 7$.
Tương tự $\overline{abc} = 279 \Rightarrow f(279) = 2 + 7 + 9 = 18$
và $\overline{abc} = 304 \Rightarrow f(304) = 3 + 0 + 4 = 7$

b) Ta có $x = \overline{abc} \Rightarrow f(x) = a + b + c = 4$ và $a \neq 0$.
Ta có các trường hợp sau:

- Nếu $a = 1$ suy ra $b + c = 3$ thì

b	0	1	2	3
c	3	2	1	0

- Nếu $a = 2$ suy ra $b + c = 2$ thì

b	0	1	2
c	2	1	0

- Nếu $a = 3$ suy ra $b + c = 1$ thì

b	0	1
c	1	0

- Nếu $a = 4$ suy ra $b + c = 0$ nên $b = 0$, $c = 0$.

Khi đó ta có bảng giá trị

a	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4
b	0	1	2	3	0	1	2	0	1	0
c	3	2	1	0	2	1	0	1	0	0
$x = \overline{abc}$	103	112	121	130	202	211	220	301	310	310

Do x là số nguyên tố suy ra $x\{103; 211\}$. □

- *Số nguyên tố chỉ có hai ước số là 1 và chính nó.*

Ví dụ 5. Cho ba điểm $B(-2; 3)$, $C(3; 3)$ và $D(3; -2)$

a) Xác định tọa độ điểm A, biết bốn điểm A, B, C, D tạo thành một hình vuông.

b) Tính chu vi và diện tích của hình vuông $ABCD$.

c) Bạn BEE cho rằng ba điểm O, A và C không thẳng hàng và tam giác tạo bởi ba điểm A, E, F là một tam giác đều (với BC cắt trục tung tại E, CD cắt trục hoành tại F). Các bạn thấy thế nào?

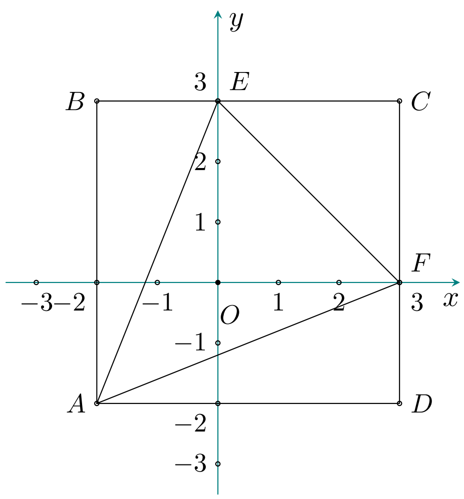
Lời giải.

a)

Vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông và BC vuông góc với trục trung và CD vuông góc với trục hoành, nên

- Hoành độ điểm A bằng hoành độ điểm B.
- Tung điểm A bằng tung độ điểm D

Vậy tọa độ điểm $A(-2; -2)$.



b) Ta có cạnh hình vuông $BC = 5$ (đơn vị độ dài).
Khi đó chu vi hình vuông $ABCD$ là
$4 \cdot 5 = 20$ (đơn vị độ dài).
Diện tích hình vuông $ABCD$ là
$5 \cdot 5 = 25$ (đơn vị diện tích).

c) Ta có điểm $C(3; 3)$ thuộc đường phân giác của góc phần tư (I) và (III), điểm $A(-2; 2)$ thuộc đường phân giác của góc phần tư (I) và (III). Suy ra các điểm O, A, C thẳng hàng. Bạn BEE nói sai.
Ta có tọa độ điểm $E(0; 3)$ và $F(3; 0)$ suy ra $OE = OF = 3$ (đơn vị độ dài).
Suy ra $EF^2 = OE^2 + OF^2 = 3^2 + 3^2 = 18$.
Tương tự ta có $AE^2 = 5^2 + 2^2 = 29$.
Dễ thấy $18 \neq 29$ suy ra $AE^2 \neq EF^2 \Rightarrow AE \neq EF$ (độ dài các đoạn thẳng là số dương). Vậy tam giác AEF không là tam giác đều. Bạn BEE lại nói sai.

□

- *Với tam giác vuông ABC tại A ta có hệ thức $BC^2 = AB^2 + AC^2$.*
- *Tam giác đều có ba cạnh bằng nhau.*

IV. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Các cặp số sau có xác định một hàm số không? Nếu có hãy lập giá trị của hàm số và biểu diễn các cặp số đó trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

a) $\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$, $(4; 2)$, $(2; 6)$, $\left(1; \dfrac{1}{3}\right)$, $(7; 9)$ và $(3; 4)$.

b) $(3;1)$, $(2;1)$, $(4;1)$ và $(5;1)$.

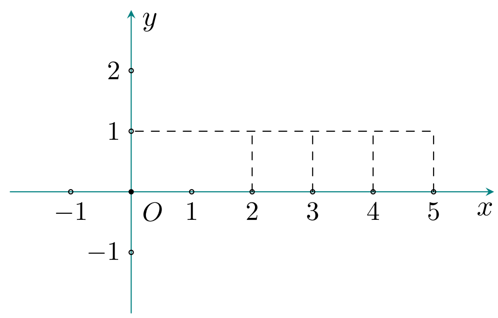
c) $(1;1)$, $(4;2)$, $(2;4)$ và $(5;4)$.

d) $(1;3)$, $(1;2)$, $(1;4)$ và $(1;5)$.

Lời giải.

a) Tọa độ các cặp số $\left(1;\frac{1}{2}\right)$, $(4;2)$, $(2;6)$, $\left(1;\frac{1}{3}\right)$, $(7;9)$ và $(3;4)$ không xác định một hàm số.
Vì $\left(1;\frac{1}{2}\right)$ và $\left(1;\frac{1}{3}\right)$ cùng một giá trị $x=1$ đã xác định hai giá trị khác nhau $y=\frac{1}{2}$ và $y=\frac{1}{3}$.

b) Dễ thấy các điểm đều có giá trị $y=1$ nên xác định một hàm số.
Tọa độ các điểm được biểu diễn hình bên:



c) Các cặp điểm $(1;1)$, $(4;2)$, $(2;4)$ và $(5;4)$ không xác định một hàm số.

d) Dễ thấy các điểm đều có giá trị $x=1$ nên không xác định một hàm số dạng $y=f(x)$.

□

Bài 2. Hàm số $y=f(x)$ được cho bởi công thức $f(x)=\frac{12}{x}$.

a) Điền các giá trị còn thiếu vào ô trống

x	-6	-3	-1	2	4	12
$f(x)$						

b) Tính $f(-12)$, $f(-4)$, $f(3)$ và $f(6)$.

Lời giải.

a) Do $f(x)=\frac{12}{x}$ suy ra

x	-6	-3	-1	2	4	12
$f(x)$	-2	-4	-12	6	3	1

b) Ta có

- $f(-12) = \dfrac{12}{-12} \Rightarrow f(-12) = -1$.
- $f(-4) = \dfrac{12}{-4} \Rightarrow f(-4) = -3$.
- $f(3) = \dfrac{12}{3} \Rightarrow f(3) = 4$.
- $f(6) = \dfrac{12}{6} \Rightarrow f(6) = 2$.

□

Bài 3. Cho hàm số $y = -7x$.

a) Tìm các giá trị của x biết $y \in \{21; 12; -1; -2\}$

b) Tìm các giá trị của x sao cho y chỉ nhận giá trị dương.

Lời giải.

a)
- Khi $y = 21$ suy ra $21 = -7x \Rightarrow x = -3$.
- Khi $y = 12$ suy ra $12 = -7x \Rightarrow x = -\dfrac{12}{7}$.
- Khi $y = -1$ suy ra $-1 = -7x \Rightarrow x = \dfrac{1}{7}$.
- Khi $y = -2$ suy ra $-2 = -7x \Rightarrow x = \dfrac{2}{7}$.

b) Để thỏa mãn bài toán $-7x > 0 \Rightarrow x < 0$.

□

Bài 4. Đồ thị (F) của hàm số $y = ax$ đi qua điểm $A(-3; -1)$.

a) (F) là đồ thị của một hàm số có công thức thế nào?

b) Các điểm $B\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{9}\right)$ và điểm $C\left(6; \dfrac{1}{2}\right)$ có thuộc đồ thị (F) không?

c) Nếu điểm D thuộc đồ thị (F) và có hoành độ bằng $-\dfrac{1}{3}$ thì tung độ bằng bao nhiêu?

d) Nếu điểm E thuộc đồ thị (F) và có tung độ bằng $-\dfrac{1}{3}$ thì hoành độ bằng bao nhiêu?

Lời giải.

a) Do đồ thị (F) đi qua điểm $A(-3; -1)$ nên $(-1) = a \cdot (-3) \Rightarrow a = \dfrac{1}{3}$.

Suy ra (F) là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{1}{3}x$.

b) Do giả thiết ta có

- Điểm $B\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{9}\right)$ suy ra $x = \dfrac{1}{3}$, khi đó $y = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \Rightarrow y = \dfrac{1}{9}$. Do đó B thuộc đồ thị (F).
- Điểm $C\left(6; \dfrac{1}{2}\right)$ suy ra $x = 6$, khi đó $y = \dfrac{1}{3} \cdot 6 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}$. Do đó C thuộc đồ thị (F)

c) Do điểm D thuộc đồ thị (F) và có hoành độ bằng $-\frac{1}{3}$. Khi đó $y = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{9}$.
Vậy tung độ của điểm D bằng $-\frac{1}{9}$.

d) Do điểm E thuộc đồ thị (F) và có tung độ bằng $-\frac{1}{3}$. Khi đó $-\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot x \Rightarrow x = -1$.
Vậy hoành độ của điểm E bằng -1.

□

Bài 5. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho 4 điểm A, B, C và D có tọa độ như sau

	Điểm A và B	Điểm B và C	Điểm C và D	Điểm D và A
Hoành độ	là hai số đối nhau	là hai số bằng nhau	là hai số đối nhau	là hai số bằng nhau
Tung độ	là hai số bằng nhau	là hai số đối nhau	là hai số bằng nhau	là hai số đối nhau

a) Bạn EGG đố bạn CHICKEN bốn điểm A, B, C, D là đỉnh của một hình chữ nhật hay hình vuông.

b) Bạn CHICKEN đố bạn EGG so sánh được hoành độ và tung độ của các điểm A và C, cũng như của các điểm B và D.

Lời giải.

a) Giả sử điểm $A(x_0; y_0)$ suy ra điểm $B(-x_0; y_0)$. Do giả thiết suy ra $C(-x_0; -y_0)$ và $D(x_0; -y_0)$ thỏa mãn bài toán. Khi đó A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình chữ nhật.

b) Hoành độ của hai điểm A và C đối nhau; tung độ của hai điểm A và C đối nhau;
Tương tự, hoành độ của hai điểm B và D đối nhau; tung độ của hai điểm B và D đối nhau;

□

Bài 6. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2 - 5$

a) Tính $f(-0{,}5)$, $f(-0{,}4)$, $f(1)$, $f(4)$.

b) Tìm x sao cho $f(x) = -3$, $f(x) = 3$.

c) Chứng tỏ rằng mợi mọi số thực x ta có $f(x) = f(-x)$

Lời giải.

a) Do giả thiết ta có

- $f(-0{,}5) = 2 \cdot (-0{,}5)^2 - 5 \Rightarrow f(-0{,}5) = -4{,}5$.
- $f(-0{,}4) = 2 \cdot (-0{,}4)^2 - 5 \Rightarrow f(-0{,}4) = -4{,}68$.
- $f(1) = 2 \cdot (1)^2 - 5 \Rightarrow f(1) = -3$.
- $f(4) = 2 \cdot (4)^2 - 5 \Rightarrow f(4) = 27$.

b)
- Khi $f(x) = -3 \Rightarrow 2x^2 - 5 = -3 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1$ suy ra $x = 1$ hoặc $x = -1$.
Vậy các giá trị của x thỏa mãn là $x = 1$; $x = -1$.

- Khi $f(x) = 3 \Rightarrow 2x^2 - 5 = 3 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4$ suy ra $x = 2$ hoặc $x = -2$.
  Vậy các giá trị của x thỏa mãn là $x = 2$; $x = -2$.

c) Ta có $f(-x) = 2 \cdot (-x)^2 - 5 = 2 \cdot x^2 - 5$ suy ra $f(-x) = f(x)$.

□

⚠ • *Với mọi $x \in \mathbb{R}$ mà $f(x) = f(-x)$ thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số chẵn.*

Bài 7. Cho hệ trục tọa độ Oxy.

a) Vẽ đường thẳng (d_1) song song với trục tung và cắt trục hoành tại điểm $A(2; 0)$.

b) Vẽ đường thẳng (d_2) vuông góc với trục tung và cắt trục tung tại điểm $B(0; 3)$.

c) Tìm tọa độ của điểm C là giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

d) Tính diện tích của hình tứ giác $OACB$ theo đơn vị độ dài của hệ trục tọa độ đã cho.

e) Xác định vị trí điểm $D(5; 3)$. Nối điểm D với các điểm A và O. So sánh diện tích tam giác OAD với tứ giác $OACB$.

Lời giải.

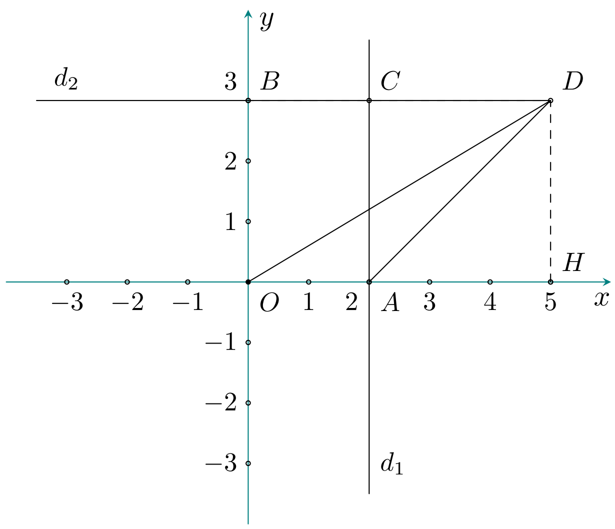
a) Đường thẳng (d_1) song song với trục tung và cắt trục hoành tại điểm $A(2; 0)$.

b) Đường thẳng (d_2) vuông góc với trục tung và cắt trục tung tại điểm $B(0; 3)$.

c) Do C là giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) suy ra $C(2; 3)$.

d) Dễ thấy $OACB$ là hình chữ nhật nên diện tích S là $S = OA \cdot OB = 2 \cdot 3 = 6$ (đvdt).

e) Diện tích S' của tam giác OAD bằng $S' = \dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot DH = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$ (đvdt). Do đó diện tích tam giác OAD bằng một nửa diện tích tứ giác $OACB$.



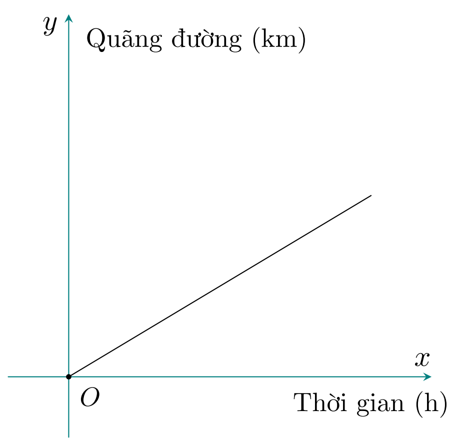
□

V. Em có biết

Bài 8. Đồ thị trình bày tương quan giữa quãng đường và thời gian một chiếc xe đã đi được. Dựa vào đồ thị hai bạn EGG và CHICKEN đã nhận xét:

- Bạn EGG cho là chiếc xe đang leo dốc.
- Bạn CHICKEN cho là chiếc xe đang đi tăng tốc

Ai đúng và ai sai?



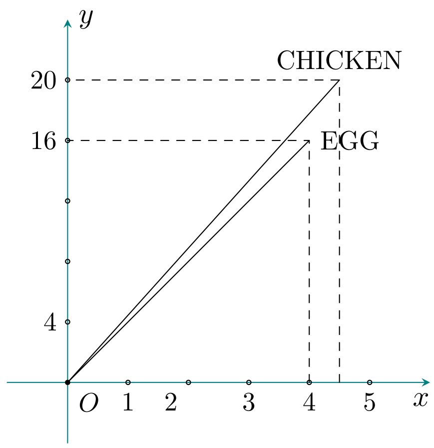
Lời giải.
Đồ thị trên là đồ thị của hàm số $y = ax$ (a là hằng số khác 0) vì đó là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ.
Theo chỉ dẫn trên đồ thị ta có y là quãng đường xe đi, x là thời gian chuyển động của xe nên a sẽ là vận tốc của xe. Vì a là hằng số khác 0, nên vận tốc không đổi. Vậy chiếc xe đang đi với vận tốc không đổi (chiếc xe chuyển động đều). □

Bài 9. Hai bạn EGG và CHICKEN thi chạy (chạy cho đến hết sức thì dừng). Đồ thị bên mô tả diễn biến cuộc chạy. Bạn cho biết:

a) Quãng đường ai chạy được xa hơn?

b) Ai chạy ít thời gian hơn?

c) Cả hai bạn EGG và CHICKEN đều cho là vận tốc của mình cao hơn bạn. Ai đúng và ai sai?



Lời giải.
Dựa vào đồ thị ta thấy

a) Bạn CHICKEN chạy được 20 km và bạn EGG chạy được 16 km. CHICKEN chạy xa hơn.

b) Bạn CHICKEN chạy hết 4 giờ 30 phút, còn bạn EGG chạy hết 4 giờ. Thời gian của bạn EGG ít hơn của bạn CHICKEN.

c) Sau 4 giờ 30 phút bạn CHICKEN chạy được 20 km, vận tốc của bạn CHICKEN là
$$20: 4{,}5 = 4{,}4 \text{ (km/h)}$$
Bạn EGG chạy được 16 km sau 4 giờ, vận tốc của bạn EGG là
$$16: 4 = 4 \text{ (km/h)}$$
Vậy tốc của bạn CHICKEN lớn hơn vận tốc của bạn EGG.
Vậy bạn EGG sai, bạn CHICKEN đúng.

□

Bài 10. Đồ thị dưới cho biết tương quan giữa quãng đường và thời gian mà hai bạn EGG và CHICKEN đã đi được trong cùng một thời.
Bạn EGG có ý kiến là " Vận tốc trung bình của mình lớn hơn vận tốc trung bình của CHICKEN".
Theo bạn, ý kiến của bạn EGG đúng hay sai?
Lời giải.
Vận tốc của bạn EGG là:
$$20: 5 = 4 \text{ (km/h)}$$
Vận của bạn CHICKEN từng chặng là:

- Chặng OB vận tốc của CHICKEN là 12 (km/h).
- Chặng BC từ 1 giờ đến 4 giờ bạn CHICKEN nghỉ không đi tiếp.
- Chặng CA vận tốc của CHICKEN là 8 (km/h).

Suy ra vận tốc trung bình của bạn CHICKEN là

$$(12+8): (1+1) = 10 \text{ (km/h)}$$

Vậy, vận tốc trung bình của bạn CHICKEN lớn hơn vận tốc trung bình của bạn EGG.
Ý kiến của EGG sai. □

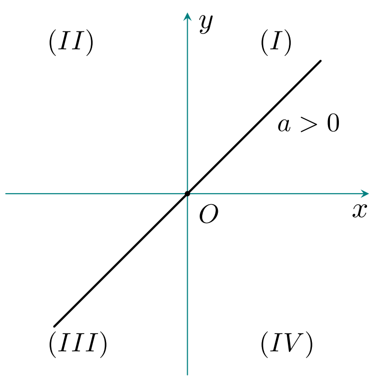
- *Vận tốc trung bình V_{TB} được xác định*

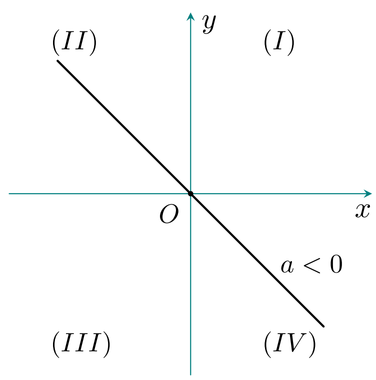
$$V_{TB} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n}{t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n}$$

ở đó $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ là độ dài từng chặng đường,
$t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ là thời gian tương ứng của từng chặng đường.

VI. Suy ngẫm

- Trong bài toán chuyển động, hai đồ thị nằm trong cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy (đều thuộc góc phần tư thứ I), góc tọa bởi đồ thị và trục hoành, góc nào lớn hơn thì vận tốc của chuyển động đó lớn hơn.
- Với đồ thị của hàm số $y = ax$, khi $a > 0$ thì đồ thị sẽ thuộc góc phần tư thứ I và III, ngược lại nếu $a < 0$ thì đồ thị thuộc góc phần tư thứ II và IV.





VII. Đố vui

Anh đi từ nhà đến trường hết 1 giờ, em đi hết 1 giờ 30 phút. Nếu em đi trước anh thì anh sẽ đuổi kịp em tại đâu trên quãng đường từ nhà đến trường.

Chương 3

THỐNG KÊ

§1. Số liệu thống kê. Tần số

I. Hỏi đáp nhanh

Số trận bão đổ bộ vào Việt Nam trong thập niên thứ nhất của thế kỉ XXI được ghi lại ở bảng A dưới đây

Năm	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Số trận bão	3	2	3	2	7	3	8	14	13	7

Bảng A

Câu 1. Điền chữ thích hợp vào chỗ chấm (...)

a) Dấu hiệu ở bảng A là số trận bão đổ bộ vào Việt Nam trong thập niên thứ nhất của thế kỉ XXI.

b) Số đơn vị được điều tra là 10.

c) Số giá trị (khác nhau) của bảng A là 6.

⚠

- *Các **vấn đề xã hội** được quan tâm, các **hiện tượng tự nhiên** được nghiên cứu gọi là DẤU HIỆU.*
- *Mỗi số liệu thống kê là một giá trị của dấu hiệu.*

Câu 2. Đúng điền Đ, sai điền S.

a) $\boxed{\text{S}}$ Bảng "tần số" của giá trị ở bảng A

Giá trị (x)	2	3	2	1	1	1	
Tần số (n)	2	3	7	8	13	14	$N = 47$

b) $\boxed{\text{Đ}}$ Trong 10 giá trị của dấu hiệu có 6 giá trị khác nhau.

c) $\boxed{\text{S}}$ Bảng tần suất của giá trị ở bảng A

Giá trị (x)	2	3	7	8	13	14	
Tần số (n)	2	3	2	1	1	1	$N = 10$
Tần suất (f)	100%	100%	$\frac{200}{7}\%$	$0,125\%$	$\frac{1}{13}\%$	$\frac{1}{14}\%$	

d) $\boxed{\text{Đ}}$ Bảng "tần số" và tần suất của giá trị ở bảng A

Giá trị (x)	2	3	7	8	13	14	
Tần số (n)	2	3	2	1	1	1	$N = 10$
Tần suất (f)	20%	30%	20%	10%	10%	10%	100%

Câu 3. Khoanh vào chữ cái trước khẳng định **đúng**.

A. Các số liệu thống kê phải được thể hiện bằng các chữ cái (như a, b, c, ...).

B. Số lần xuất hiện một giá trị trong bảng thống kê gọi là tần số của giá trị đó.

C. Tích giữa tần số của một giá trị và tất cả các giá trị được thống kê cho ta kết quả là tần suất của giá trị đó.

D. Không thể chuyển bảng "tần số" dạng *ngang* sang bảng *dọc*.

⚠ *Bảng "tần số" là rút gọn của bảng số liệu thống kê, còn được gọi là bảng phân phối thực nghiệm của dấu hiệu.*

Câu 4. Từ bảng "tần số" và tần suất đúng của bảng A, viết lại thành bảng "dọc".

Giá trị (x)	Tần số (n)	Tần suất (f)
2	2	20%
3	3	30%
7	2	20%
8	1	10%
13	1	10%
14	1	10%
	$N = 10$	100%

⚠ *Bảng "tần số" giúp dễ có nhận xét về sự phân phối các giá trị của dấu hiệu như số các giá trị, số các giá trị khác nhau, giá trị lớn/nhỏ nhất, giá trị có tần số lớn nhất, ...*

II. Học giải toán

Ví dụ 1. Số đại biểu Quốc hội khóa XIII của một số thành phố và tỉnh lớn ở Việt Nam được ghi ở bảng sau

TT	Tên địa phương	Đại biểu	Đại biểu nữ
1	TP Hà Nội	30	8
2	TP Hồ Chí Minh	30	8
3	TP Hải Phòng	9	1
4	TP Đà Nẵng	6	1
5	TP Cần Thơ	7	2
6	Tỉnh An Giang	10	2
7	Tỉnh Đồng Nai	11	2
8	Tỉnh Nghệ An	13	3
9	Tỉnh Thanh Hóa	16	3
10	Tỉnh Thừa Thiên Huế	7	0

a) Dấu hiệu của bảng là gì? Số tất cả các giá trị là bao nhiêu?

b) Lập bảng "tần số" và tần suất ứng với số đại biểu nói chung.

c) Lập bảng "tần số" và tần suất ứng với số đại biểu nữ.

Lời giải.

a) Dấu hiệu X là số đại biểu Quốc hội khóa XIII của một số thành phố và tỉnh lớn ở Việt Nam. Có tất cả 10 giá trị.

b) Bảng "tần số" và tần suất ứng với số đại biểu

Giá trị (x)	Tần số (n)	Tần suất (f)
6	1	$\frac{1}{10} = 10\%$
7	2	$\frac{2}{10} = 20\%$
9	1	$\frac{1}{10} = 10\%$
10	1	$\frac{1}{10} = 10\%$
11	1	$\frac{1}{10} = 10\%$
13	1	$\frac{1}{10} = 10\%$
16	1	$\frac{1}{10} = 10\%$
30	2	$\frac{2}{10} = 20\%$
	$N = 10$	100%

c) Bảng "tần số" và tần suất ứng với số đại biểu nữ

Giá trị (x)	0	1	2	3	8	
Tần số (n)	1	2	3	2	2	$N = 10$
Tần suất (f)	$\frac{1}{10} = 10\%$	$\frac{2}{10} = 20\%$	$\frac{3}{10} = 30\%$	$\frac{2}{10} = 20\%$	$\frac{2}{10} = 20\%$	100%

□

Ví dụ 2. Việt Nam có hai vùng trồng lúa chính là đồng bằng sông Hồng ở phía bắc và đồng bằng sông Cửu Long ở phía nam. Hằng năm sản lượng của cả nước đạt 33 đến 34 triệu tấn thóc. Những năm gần đây xuất khẩu khoảng 6 đến gần 8 triệu tấn, còn lại là tiêu thụ trong nước và bổ sung dự trữ quốc gia.
Số lượng gạo xuất khẩu của Việt Nam trong những năm từ 2009 đến 2013 được ghi ở bảng sau

Năm	2009	2010	2011	2012	2013
Sản lượng gạo (triệu tấn)	6,05	6,75	7,10	7,70	6,61

a) Dấu hiệu ở bảng là gì? Số tất cả các giá trị là bao nhiêu?

b) Lập bảng "tần số" và tần suất của xuất khẩu gạo hằng năm phân theo khoảng như sau

Sản lượng gạo (triệu tấn)	Dưới $6,5$	Từ $6,5$ đến $7,0$	Trên $7,0$

Lời giải.

a) Dấu hiệu X là số lượng gạo xuất khẩu của Việt Nam trong những năm từ 2009 đến 2013. Có tất cả 5 giá trị.

b) Bảng "tần số" và tần suất (phân theo khoảng) như sau

Sản lượng gạo (triệu tấn)	Tần số	Tần suất
Dưới $6,5$	1	$\frac{1}{5} = 20\%$
Từ $6,5$ đến $7,0$	2	$\frac{2}{5} = 40\%$
Trên $7,0$	2	$\frac{2}{5} = 40\%$
	$N = 5$	100%

□

Ví dụ 3. Năm 2008 là năm có số trận bão kỉ lục trong thập niên đầu tiên của thế kỉ XXI đổ bộ vào Việt Nam, với cấp độ bão được ghi trong bảng B.

Cơn bão số	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Cấp độ bão	7	6	7	7	8	9	6	6	8	10	7	13	6	6

Bảng B

a) Dấu hiệu X cần điều tra ở bảng thống kê B là gì?

b) Số đơn vị điều tra là bao nhiêu?

c) Lập bảng "tần số" và tần suất của các giá trị (lấy chính xác tới hai chữ số thập phân sau dấu phẩy trước khi đổi ra số phần trăm)

Lời giải.

a) Dấu hiệu X là cấp độ bão đổ bộ vào Việt Nam năm 2008.

b) Số đơn vị được điều tra (số trận bão) là 14.

c) Bảng "tần số" và tần suất như sau

Cấp độ bão	6	7	8	9	10	13	
Tần số	5	4	2	1	1	1	$N = 14$
Tần suất	$\frac{5}{14} \approx 36\%$	$\frac{4}{14} \approx 29\%$	$\frac{2}{14} \approx 14\%$	$\frac{1}{14} \approx 7\%$	$\frac{1}{14} \approx 7\%$	$\frac{1}{14} \approx 7\%$	100%

□

Ví dụ 4. Các nước có đội bóng tham gia 2014 FIFA World Cup Brasil được viết ở bảng dưới

TT	Tên nước	
1	Algeria	
2	Argentina	
3	Australia	Úc
4	Belgium	Bỉ
5	Bosnia and Herzegovina	
6	Brasil	
7	Cameroon	
8	Chile	
9	Colombia	
10	Costa Rica	
11	Côte d'Ivoire	Bờ Biển Ngà
12	Croatia	
13	Ecuador	
14	England	Anh
15	France	Pháp
16	Germany	Đức
17	Ghana	
18	Greece	Hy Lạp
19	Honduras	
20	Iran	
21	Italy	Ý
22	Japan	Nhật
23	Korea Republic	Hàn Quốc
24	Mexico	

Lời giải.

a) Bảng thống kê các đội bóng theo châu lục (châu Á và châu Đại Dương được xếp vào một nhóm)

TT	Châu lục	Số đội bóng	Tên quốc gia có đội bóng tham gia
1	Châu Á và châu Đại Dương	4	Úc, Iran, Hàn Quốc và Nhật Bản.
2	Châu Âu	13	Herzegovina, Croatia, Đức, Hà Lan, Hy Lạp, Nga, Pháp, Tây Ban Nha, Thụy Sĩ và Ý.
3	Châu Mỹ	10	Costa Rica, Ecuador, Honduras, Mexico, Uruguay và Mỹ.
4	Châu Phi	5	Algeria, Cameroon, Bờ Biển Ngà, Ghana và Nigeria.

b) Dấu hiệu X là số đội bóng của mỗi châu lục tham gia 2014 FIFA World Cup Brasil. Có tất cả 4 giá trị.

c) Bảng "tần số" và tần suất của mỗi giá trị.

TT	Châu lục	Tần số	Tần suất
1	Châu Á và châu Đại Dương	4	$\frac{4}{32} = 12,5\%$
2	Châu Âu	13	$\frac{13}{32} = 40,625\%$
3	Châu Mỹ	10	$\frac{10}{32} = 31,25\%$
4	Châu Phi	5	$\frac{5}{32} = 15,625\%$
		$N = 32$	100%

□

Ví dụ 5. Trong một cuộc điều tra lại một khối lớp 7 có 100 học sinh, trong đó có 60 học sinh thích chương trình "Đừng để tiền rơi", 75 học sinh thích chương trình "Ai là triệu phú".

a) Nếu trong khối lớp đó có 5 học sinh không thích xem cả hai chương trình trên, thì có bao nhiêu học sinh thích xem cả hai chương trình trên?

b) Có nhiều nhất bao nhiêu học sinh thích xem cả hai chương trình?

c) Có ít nhất bao nhiêu học sinh thích cả hai chương trình?

Lời giải.

a) Số học sinh thích xem ít nhất một chương trình là $100 - 5 = 95$ học sinh.
Số học sinh thích xem cả hai chương trình là $(60 + 75) - 95 = 40$ học sinh.

b) Có $60 < 75$, nên có nhiều nhất 60 học sinh thích xem cả hai chương trình.

c) Gọi số học sinh thích xem cả hai chương trình là x thì

$$(60 + 75) - x \leq 100 \Leftrightarrow x \geq 35.$$

Vậy có ít nhất 35 học sinh thích xem cả hai chương trình.

□

III. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Lập danh sách các bạn ở lớp em theo tháng sinh (không tính ngày, năm) và cho biết

a) Dấu hiệu ở đây là gì?

b) Có bao nhiêu giá trị của dấu hiệu?

c) Lập bảng "tần số" của các giá trị trên.

Lời giải.
Tùy theo lớp học của từng bạn. Sau đây là lời giải gợi ý.
Danh sách các bạn ở lớp em theo tháng sinh (không tính ngày, năm)

Tháng sinh	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số bạn	6	5	2	7	4	4	3	0	2	3	1	3

a) Dấu hiệu ở đây là danh sách các bạn ở lớp em theo tháng sinh.

b) Có 12 giá trị của dấu hiệu.

c) Bảng "tần số" của các giá trị trên.

Giá trị (x)	0	1	2	3	4	5	6	7	
Tần số (n)	1	1	2	3	2	1	1	1	$N = 12$

□

Bài 2. Bạn có biết bức tranh thiên nhiên kì vĩ giữa đại ngàn vùng Tây Bắc (Việt Nam)?
Ngỡ như thiên nhiên - tạo hóa hình thành nên, sắp đặt những tầng nấc chân ruộng, thế nhưng không phải vậy. Do ở các vùng cao, miền núi hiếm đất bằng để canh tác, nhất là trồng lúa nước, người ta khắc phục bằng cách chọn các sườn đồi, núi có đất màu bạt tam cấp để tạo thành những vạt đất bằng. Sau đó tùy vào ý định canh tác mà có thể để khô hoặc dẫn nước từ những đỉnh núi cao hơn về. Đồng bào dân tộc đã sáng tạo ra ruộng bậc thang - kiệt tác hiếm có trong nền văn minh lúa nước Việt Nam. Ruộng bậc thanh có nhiều ở các tỉnh vùng Tây Bắc. Đặc biệt, ít ai ngờ rằng chính những tài năng lao động ấy lại tạo nên một bức tranh thiên nhiên kì vĩ giữa đại ngàn Tây Bắc.
Số thư viện năm 2012 do địa phương quản lí phân theo địa phương của vùng Tây Bắc được ghi ở bảng sau

TT	Tên địa phương	Số thư viện
1	Tỉnh Điện Biên	10
2	Tỉnh Hòa Bình	36
3	Tỉnh Lai Châu	10
4	Tỉnh Lào Cai	10
5	Tỉnh Sơn La	11
6	Tỉnh Yên Bái	16

a) Dấu hiệu của bảng là gì? Số tất cả các giá trị là bao nhiêu?

b) Lập bảng "tần số" và tần suất của các giá trị trên.

Lời giải.

a) Dấu hiệu của bảng là số thư viện năm 2012 do địa phương quản lí phân theo địa phương của vùng Tây Bắc. Có tất cả 6 giá trị.

b) Bảng "tần số" và tần suất của các giá trị.

Số thư viện (x)	10	11	16	36	
Tần số (n)	3	1	1	1	$N = 6$
Tần suất (f)	$\frac{3}{6} = 50\%$	$\frac{1}{6} \approx 16,67\%$	$\frac{1}{6} \approx 16,67\%$	$\frac{1}{6} \approx 16,67\%$	100%

□

Bài 3. Bạn có biết nhà rông - biểu tượng văn hóa cộng đồng các dân tộc Tây Nguyên (Việt Nam)?
Tây Nguyên là vùng cao nguyên, phía bắc giáp tỉnh Quảng Nam, phía đông giáp các tỉnh Quảng Ngãi, Bình Định, Phú Yên, Khánh Hòa, Ninh Thuận, Bình Thuận, phía nam giáp các tỉnh Đồng Nai, Bình Phước, phía tây giáp với các tỉnh Attapeu (Lào) và Ratanakiri và Mondulkiri (Campuchia). Trong khi Kon Tum có biên giới phía tây giáp với cả Lào và Campuchia, thì Gia Lai, Đắk Lắk và Đắk Nông chỉ có chung đường biên giới với Campuchia. Còn Lâm Đồng không có đường biên giới quốc tế. Vùng Tây Nguyên rộng 5464 km^2.
Số tòa soạn báo, tạp chí năm 2011 phân theo địa phương của vùng Tây Nguyên được ghi ở bảng sau

TT	Tên địa phương	Số tòa soạn
1	Tỉnh Đắk Lắk	4
2	Tỉnh Đắk Nông	2
3	Tỉnh Gia Lai	3
4	Tỉnh Kon Tum	2
5	Tỉnh Lâm Đồng	3

a) Dấu hiệu của bảng là gì? Số tất cả các giá trị là bao nhiêu?

b) Lập bảng "tần số" và tần suất của các giá trị trên.

Lời giải.

a) Dấu hiệu của bảng là số tòa soạn báo, tạp chí năm 2011 phân theo địa phương của vùng Tây Nguyên. Có tất cả 5 giá trị.

b) Bảng "tần số" và tần suất của các giá trị.

Số tòa soạn (x)	2	3	4	
Tần số (n)	2	2	1	$N = 5$
Tần suất (f)	$\frac{2}{5} = 40\%$	$\frac{2}{5} = 40\%$	$\frac{1}{5} = 20\%$	100%

□

Bài 4. Các cao nguyên của vùng Tây Nguyên.
Tây Nguyên không phải là một cao nguyên duy nhất mà là một loạt cao nguyên liền kề. Đó là các cao nguyên Kon Tum cao khoảng 500 m; cao nguyên Kon Plông, cao nguyên Kon Hà Nừng, Pleiku cao khoảng 800 m; cao nguyên M'Drắk cao khoảng 500 m, cao nguyên Buôn Ma Thuột cao khoảng 500 m, cao nguyên Mơ Nông cao khoảng 900 m, cao nguyên Lâm Viên cao khoảng 1500 m và cao nguyên Di Linh cao khoảng 900 m.
Tên và độ cao các cao nguyên của vùng Tây Nguyên được ghi ở bảng sau

TT	Tên cao nguyên	Độ cao (mét)
1	Buôn Ma Thuột	500
2	Di Linh	900
3	Kon Plông	800
4	Kon Hà Nừng	800
5	Kon Tum	500
6	Lâm Viên	1500
7	M'Đrăk	500
8	Mơ Nông	900
9	Pleiku	800

a) Dấu hiệu của bảng là gì? Số tất cả các giá trị là bao nhiêu?

b) Lập bảng "tần số" và tần suất.

Lời giải.

a) Dấu hiệu của bảng là độ cao các cao nguyên của vùng Tây Nguyên. Có tất cả 9 giá trị.

b) Bảng "tần số" và tần suất của các giá trị.

Độ cao (x)	500	800	900	1500	
Tần số (n)	3	3	2	1	$N=9$
Tần suất (f)	$\frac{3}{9} \approx 33,33\%$	$\frac{3}{9} \approx 33,33\%$	$\frac{2}{9} \approx 22,22\%$	$\frac{1}{9} \approx 11,11\%$	100%

□

2. Nâng cao

Bài 5. Sản lượng và năng suất cà phê của Việt Nam trong một vài năm gần đây được ghi ở bảng sau

Năm	2011	2012	2013
Sản lượng (nghìn tấn)	1200	1560	1497
Năng suất (tấn/ha)	2,18	2,44	2,32

Lập thành hai bảng: bảng sản lượng và bảng năng suất. Lập bảng "tần số" và tần suất ở từng bảng đó.

Lời giải.

Bảng sản lượng

Sản lượng (x)	1200	1560	1497	
Tần số (n)	1	1	1	$N = 3$
Tần suất (f)	$\frac{1}{3} \approx 33,33\%$	$\frac{1}{3} \approx 33,33\%$	$\frac{1}{3} \approx 33,33\%$	100%

Bảng năng suất

Năng suất (x)	$2,18$	$2,44$	$2,32$	
Tần số (n)	1	1	1	$N = 3$
Tần suất (f)	$\frac{1}{3} \approx 33,33\%$	$\frac{1}{3} \approx 33,33\%$	$\frac{1}{3} \approx 33,33\%$	100%

□

Bài 6. Bạn có biết 15 nước có dự trữ dầu mỏ lớn nhất thế giới?
Dầu mỏ hay **dầu thô** là một chất lỏng sánh đặc màu nâu hoặc ngả lục, tồn tại trong các lớp đất đá tại một số nơi trong vỏ Trái Đất. Hiện nay dầu mỏ chủ yếu dùng để sản xuất dầu hỏa, diezen và xăng nhiên liệu. Ngoài ra, dầu thô cũng là nguồn nhiên liệu chủ yếu để sản xuất ra các sản phẩm của ngành hóa dầu như dung môi, phân bón hóa học, nhựa, thuốc trừ sâu, nhựa đường, ... Khoảng 88% dầu thô dùng để sản xuất nhiên liệu, 12% còn lại dùng cho hóa dầu. Do dầu thô là nguồn năng lượng không tái tạo nên nhiều người lo ngại về khả năng cạn kiệt dầu trong một tương lai không xa.
Tên nước và dự trữ dầu thô theo đơn vị tỉ thùng được ghi ở bảng C.

TT	Tên nước	Dự trữ (tỉ thùng)
1	Saudi Arabia	$262,6$
2	Venezuela	$211,2$
3	Canada	$175,2$
4	Iran	$137,0$
5	Iraq	$115,0$
6	Kuwait	$104,0$
7	Các tiểu vương quốc Ả rập thống nhất (UAE)	$97,8$
8	Nga	60
9	Libya	$44,3$
10	Nigeria	$37,2$
11	Kazakhstan	30
12	Qatar	$25,38$
13	Mỹ	$20,68$
14	Trung Quốc	$14,8$
15	Brasil	$12,86$

Bảng C

a) Dấu hiệu ở bảng C là gì? Số tất cả các giá trị là bao nhiêu?

b) Đặt dự trữ dầu thô là x (tỉ thùng), hãy lập bảng "tần số" và tần suất theo giá trị của x như sau: $10 < x \leq 100$, $100 < x \leq 150$ và $150 < x \leq 300$.

Lời giải.

a) Dấu hiệu ở bảng C là dự trữ dầu thô theo đơn vị tỉ thùng ở các nước. Có tất cả 15 giá trị.

b) Bảng "tần số" và tần suất

Dự trữ (x)	Tần số (n)	Tần suất (f)
$10 < x \leq 100$	9	$\dfrac{9}{15} = 60\%$
$100 < x \leq 150$	3	$\dfrac{3}{15} = 20\%$
$150 < x \leq 300$	3	$\dfrac{3}{15} = 20\%$
	$N = 15$	100%

□

§2. Biểu Đồ - Số Trung Bình Cộng

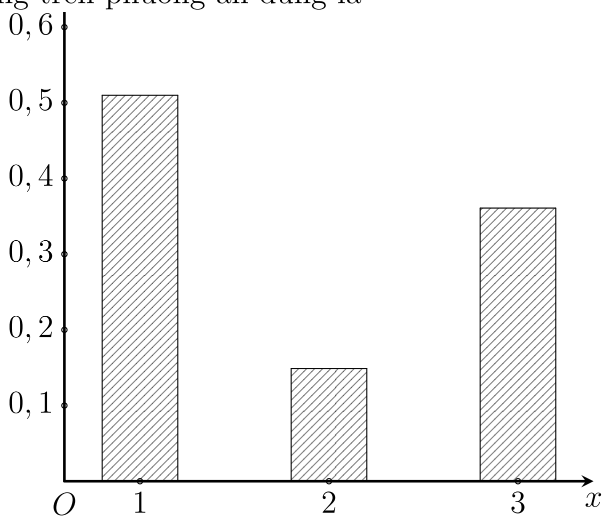
I. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Đúng điền Đ, sai điền S.
Muốn tính mật độ dân số trung bình ở một vùng lãnh thổ nào đó, ta thực hiện:
S Lấy diện tích của lãnh thổ đó cộng với số dân.
Đ Lấy diện tích của lãnh thổ đó chia cho số dân.
S Lấy diện tích của lãnh thổ đó nhân với số dân.
S Lấy số dân chia cho diện tích của lãnh thổ đó.

Câu 2. Cho bảng thống kê sau về trái đất

Diện tích trái đất	$510000000 = 0{,}51 \cdot 10^9$ km^2
Diện tích đất nổi	$149000000 = 0{,}149 \cdot 10^9$ km^2
Diện tích đại dương	$361000000 = 0{,}361 \cdot 10^9$ km^2
Khối lượng trái đất	$5{,}98 \cdot 10^{21}$ tấn
Thể tích trái đất	$1{,}08 \cdot 10^{12}$ km^3

Từ bảng trên phương án đúng là

A. 

.

B. Trung bình cộng diện tích Trái Đất: $\dfrac{0,51+0,149+0,361}{3}\cdot 10^9 = 0,34$ (km^2)..

C. Trung bình cộng thể tích và khối lượng Trái Đất được tính như sau $\dfrac{5{,}98\cdot 10^{21}+1,08\cdot 10^{12}}{2}$.

D. Diện tích đất nổi so với diện tích Trái Đất: $\dfrac{0{,}149\cdot 10^9}{0{,}51\cdot 10^9}\cdot 100\% \approx 30\%$

Diện tích Đại dương so với diện tích Trái Đất: $\dfrac{0{,}361\cdot 10^9}{0{,}51\cdot 10^9}\cdot 100\% \approx 70\%$.

Câu 3. Điều tra diên tích và dạn số một số thành phố lớn của Việt Nam năm 2012 (theo Tổng cục thống kê), ta có bảng:

Thành phố	Diện tích (km^2)	Dân số (người)
TP.Hà Nội	3323,6	6844100
T,P Hồ Chí Minh	2095,6	7681700
T.P.Hải Phòng	1523,9	1904100
T.P Đà Nẵng	1258,4	987380

Điền chữ thích hợp vào chỗ chấm (...)

a) Mật độ dân số của thành phố Hà Nội là .... người/km^2.

b) Mật độ dân số của thành phố Hải Phòng là .... người/km^2.

c) Mật độ dân số của thành phố Đà Nẵng là .... người/km^2.

Lời giải.

a) ≈ 2059 người/km^2.

b) ≈ 1249 người/km^2.

c) ≈ 785 người/km^2.

□

Câu 4. Nối mỗi trên thành phố ở dòng trên với một giá trị x (người/km^2) chỉ mật độ dân số ở dòng dưới để được kết luận đúng

T.P.Hà Nội (A)	T.P. Hồ Chí Minh (B)	T.P.Hải Phòng (C)	T.P.Đà Nẵng (D)
$x = 750$ (1)	$750 < x \leq 1000$ (2)	$1000 < x \leq 2000$ (3)	$x > 2000$ (4)

Lời giải.
A-(4); B-(4); C-(3); D-(2) □

II. Học giải toán

Ví dụ 1. Châu lục hay châu là tổ hợp lớn về đất đai trên đó có nhiều quốc gia với các phần diện tích thuộc lục địa lẫn các đảo xung quanh. Trên Trái Đất có 6 châu lục: châu Á, châu Âu, châu Mĩ, châu Phi, châu Đại Dương và châu Nam Cực. Điều tra diện tích và dân số các châu lục (năm 2012) ta được bảng thống kê sau:

Châu lục	Diện tích (km^2)	Dân số (người)
Châu Á	43810000	3800000
Châu Âu	10400000	710000000
Châu Mĩ	42330000	886000000
Châu Phi	30370000	890000000
Châu Đại Dương	9010000	35800000
Châu Nam Cực	13720000	1000

1
a) Tính diện tích các châu lục theo đơn vị là triệu km^2 (lấy đến chữ số thập phân thứ hai). Lập bảng thống kê 1, biểu diễn diện tích các châu lục.
b) Tính tỉ số phần trăm diện tích từng châu lục so với diện tích toàn thế giới.
c) Vẽ sơ đồ cột theo các dữ liệu ở bảng 1, với trục x là tên các châu lục và trục y là tỉ số phần trăm diện tích các châu lục so với diện tích toàn thế giới.

2
a) Lập bảng thống kê 2 theo số dân các châu lục (đơn vị là triệu người, không tính châu Nam Cực).
b) Vẽ sơ đồ hình quạt biểu diễn tỉ số phần trăm số dân từng châu lục so với dân số thế giới.
c) Tính chung cả thế giới có mật dđộng trung bình là bao nhiêu người trên 1 km^2?
d) Châu lục nào là châu lục có mật độ dân số cao nhất, châu lục nào có mật độ dân số thấp nhất? những mật độ đó là bao nhiêu?

Lời giải.

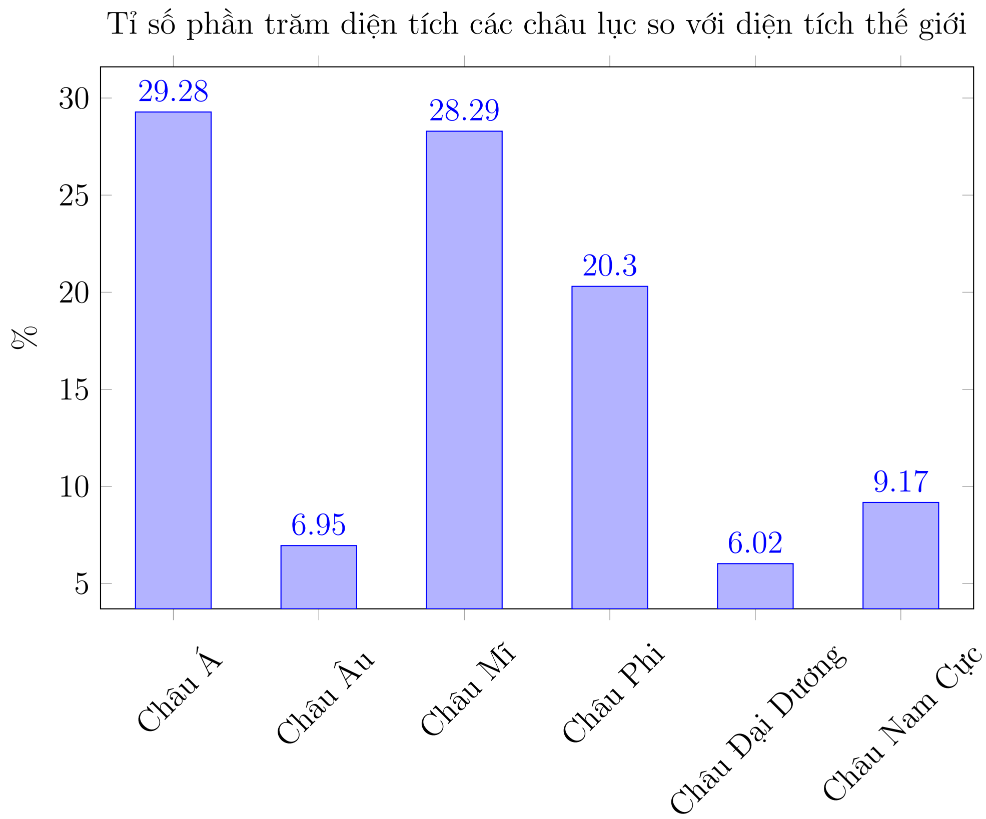
1 a) Bảng thống kê 1

Châu lục	Diện tích (triệu km^2)
Châu Á	$43,81$
Châu Âu	$10,4$
Châu Mĩ	$42,33$
Châu Phi	$30,37$
Châu Đại Dương	$9,01$
Châu Nam Cực	$13,72$

b) Tỉ số phần trăm diện tích từng châu lục so với diện tích toàn thế giới ($149,64$ triệu km^2)

Châu lục	Tỉ số phần trăm diện tích
Châu Á	$\frac{43,81}{149,64} \cdot 100\% \approx 29,28\%$
Châu Âu	$\frac{10,4}{149,64} \cdot 100\% \approx 6,95\%$
Châu Mĩ	$\frac{42,33}{149,64} \cdot 100\% \approx 28,28\%$
Châu Phi	$\frac{30,37}{149,64} \cdot 100\% \approx 20,3\%$
Châu Đại Dương	$\frac{9,01}{149,64} \cdot 100\% \approx 6,02\%$
Châu Nam Cực	$\frac{13,72}{149,64} \cdot 100\% \approx 9,17\%$

c) Biểu đồ hình chữ nhật biểu diễn tỉ số phần trăm diện tích các châu lục.



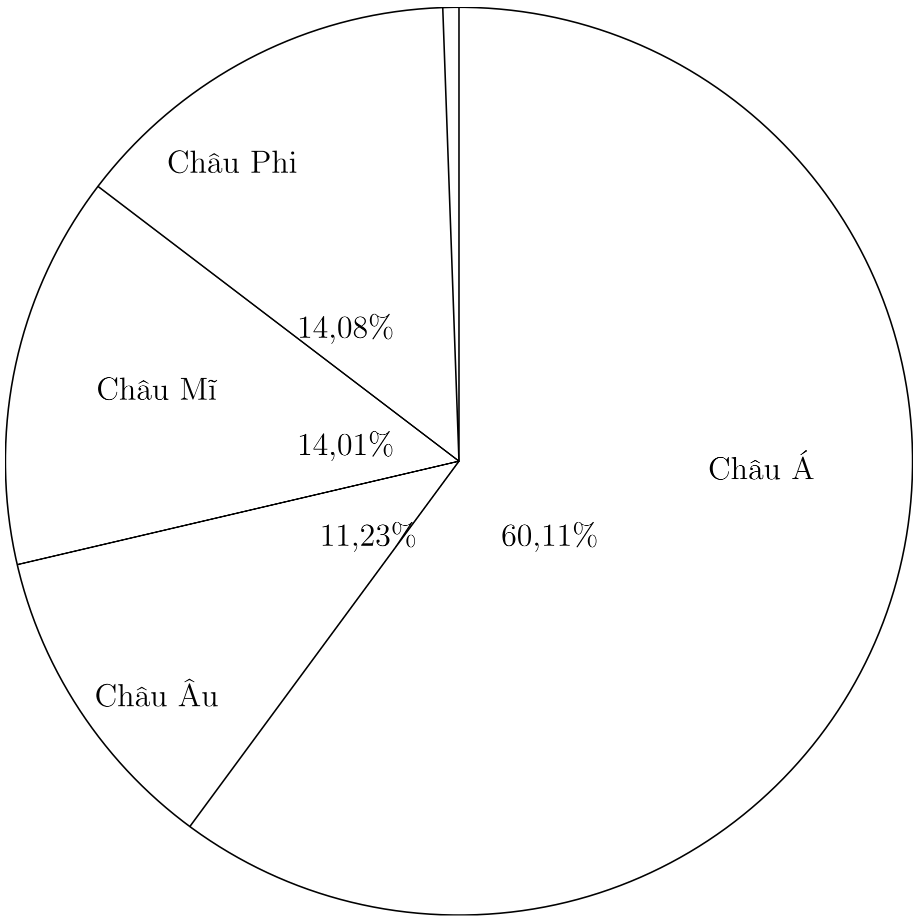
2 a) Bảng thống kê 2

Châu lục	Số dân (triệu người)
Châu Á	3800
Châu Âu	710
Châu Mĩ	886
Châu Phi	890
Châu Đại Dương	35,8

Tỉ số phần trăm số dân từng châu lục so với số dân toàn thế giới (6321,8 triệu người)

Châu lục	Tỉ lệ
Châu Á	$\dfrac{3800}{6321{,}8} \cdot 100\% = 60{,}11\%$
Châu Âu	$\dfrac{710}{6321{,}8} \cdot 100\% = 11{,}23\%$
Châu Mĩ	$\dfrac{886}{6321{,}8} \cdot 100\% = 14{,}01\%$
Châu Phi	$\dfrac{890}{6321{,}8} \cdot 100\% = 14{,}08\%$
Châu Đại Dương	$\dfrac{35{,}8}{6321{,}8} \cdot 100\% = 0{,}57\%$

b) Biểu đồ hình quạt biểu diễn tỉ số phần trăm số dân các châu lục.



c) Bảng thống kê 3

Châu lục	Số dân (triệu người)	Diện tích (nghìn km^2)	Mât độ dân số (ngườ/km^2)
Châu Á	3800	43810	87
Châu Âu	710	10400	68
Châu Mĩ	886	42330	21
Châu Phi	890	30370	29
Châu Đại Dương	35,8	9010	4
THẾ GIỚI (không tích châu Nam Cực)	6321,8	135920	47

Mật độ dân số của thế giới là 47 người/km^2.

d) Châu Á có mật độ dân số cao nhất (87 người/km^2).
Chây Đại Dương có mật độ dân số thấp nhất (4 người/km^2).

□

Ví dụ 2. Với số liện điều tra diện tích và dân số các thành phố lớn của Việt Nam năm 2012 ở câu hỏi 3 mục Hỏi đáp nhanh:

a) Tính mật độ dân số của các thành phố.

b) Thành phố nào có mật độ dân cao nhất, mật độ dận số thấp nhất (chính xác đến hàng đơn vị)?

c) Vẽ sơ đồ hình chữ nhật biểu diễn diện tích các thành phố.

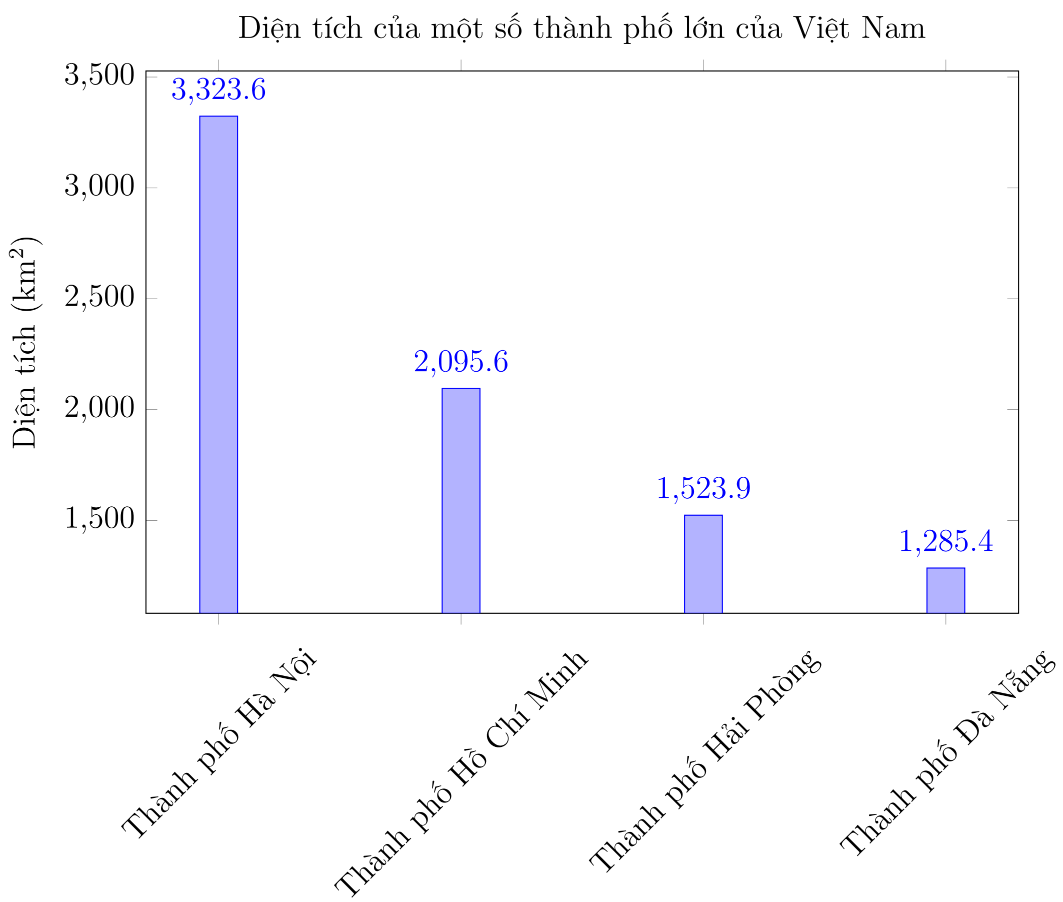
Lời giải.

a.

Thành phố	Diện tích (km^2)	Dân số (người)	Mật độ dân số (người/km^2)
Thành phố Hà Nội	3323,6	6844100	2059
Thành phố Hồ Chí Minh	2095,6	7681700	3666
Thành phố Hải Phòng	1523,9	1904100	1249
Thành phố Đà Nẵng	1285,4	973800	758

b. Thành phố Hồ Chí Minh có mật độ dân số cao nhất (3666 người/km^2).
Thành phố Đà Nẵng có mật độ dân số thấp nhất (758 người/km^2).

c. Biểu đồ hình chữ nhật biểu diễn diện tích các thành phố.



□

Ví dụ 3. Cần bỏ một số nào trong tập hợp $A = \{-1; -2; \ldots; -11\}$ để giá trị trung bình của các số còn lại

a) Không thay đổi?

b) Bằng $-6{,}1$?

Lời giải.

a) Tổng của 11 số thuộc tập A bằng $S = (-1)+(-2)+(-3)+\cdots+(-11) = \dfrac{((-1)+(-11))\cdot 11}{2} = -66$.
Giá trị trung bình của các số là $(-66) : 11 = -6$. Vậy phải bỏ số (-6) để giá trị trung bình của các số còn lại không thay đổi.

b) Tổng của 10 số thuộc tập A sau khi bỏ số x là $S' = (-6{,}1 \cdot 10 = -61)$.
Vậy số phải bỏ là $x = S - S' = (-66) - (-61) = -5$ (số $-5 \in A$).

□

Ví dụ 4. Biết trung bình cộng của 16 số bằng -4. Cần thêm số nào để trung bình cộng của chúng bằng -5?

Lời giải.
Biết trung bình cộng của 16 số bằng -4 nên tổng của 16 số đó là $(-4)\cdot 16 = -64$.
Gọi số cần thêm vào là x. Khi đó trung bình cộng của 17 số bằng -5, tức là $\dfrac{-64+x}{17} = -5 \Rightarrow x = (-5)\cdot 17 - (-64) = -21$.
Vậy số cần thêm vào là số -21 để trung bình cộng của 17 số bằng -5. □

III. Bài tập

1. Bài tập cơ bản

Bài 1. Trung bình mỗi người một ngày cần 100 đến 120 lít nước dùng cho sinh hoạt, chưa kể lượng nước hao phí là 10%

a) Để đủ nước sinh hoạt cho một ngày, thì tổng công suất các nhà máy nước mỗi thành phố phải đạt bao nhiêu m^3/ngày, biết số dân của các thành phố trong ví dụ 2 mục học giải toán?

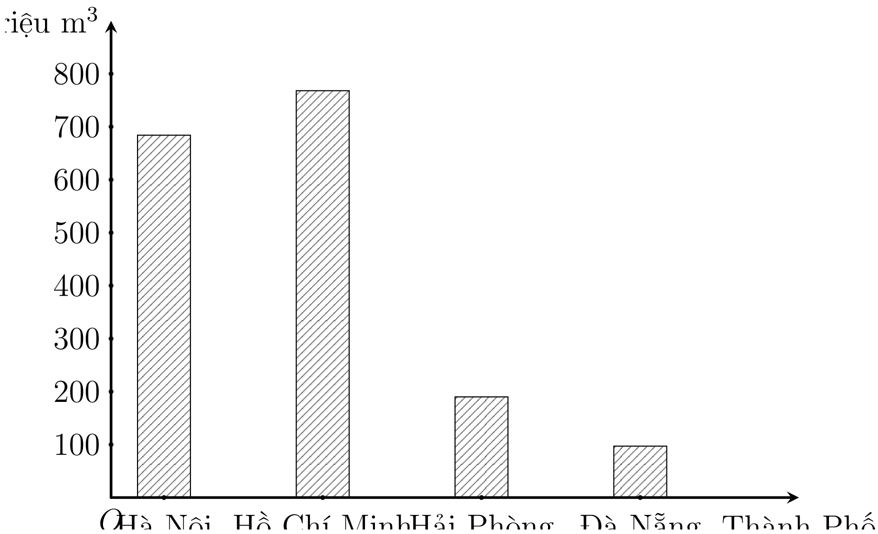
b) Vẽ biểu đồ hình chữ nhật minh họa tổng công suất các nhà máy này của mỗi thành phố trong một ngày.

Lời giải.

a) * Thành phố Hà Nội, dân số 6 844 100.
Công suất nhà máy nước của thành phố Hà Nội cần đạt là $6\,844\,100 \cdot 100 = 684\,410\,000$ m^3.
* Thành phố Hồ Chí Minh, dân số 7 681 700.
Công suất nhà máy nước của thành phố Hồ Chí Minh cần đạt là $7\,681\,700 \cdot 100 = 768\,170\,000$ m^3.
* Thành phố Hải Phòng, dân số 1 904 100.
Công suất nhà máy nước của thành phố Hải Phòng cần đạt là $1\,904\,100 \cdot 100 = 190\,410\,000$ m^3.

* Thành phố Đà Nẵng, dân số 973 800.
Công suất nhà máy nước của thành phố Hải Phòng cần đạt là $973\ 800 \cdot 100 = 97\ 380\ 000$ m^3.

b) Biểu đồ hình chữ nhật minh họa tổng công suất các nhà máy.



□

Bài 2. Trong năm học 2013 – 2014 Việt Nam có số người trong các bậc học ở bảng sau

BẬC HỌC	SỐ NGƯỜI
Mầm non	4 701 000
Tiểu học	7 430 000
Trung học cơ sở	4 950 000
Trung học phổ thông	2 720 000
Trung học chuyên nghiệp	520 000
Cao đẳng - Đại học	2 185 000

a) Tính số người của các bậc học trong cả nước (theo đơn vị triệu người). Làm tròn số các số đến chữ số thứ nhất sau dấu phẩy.

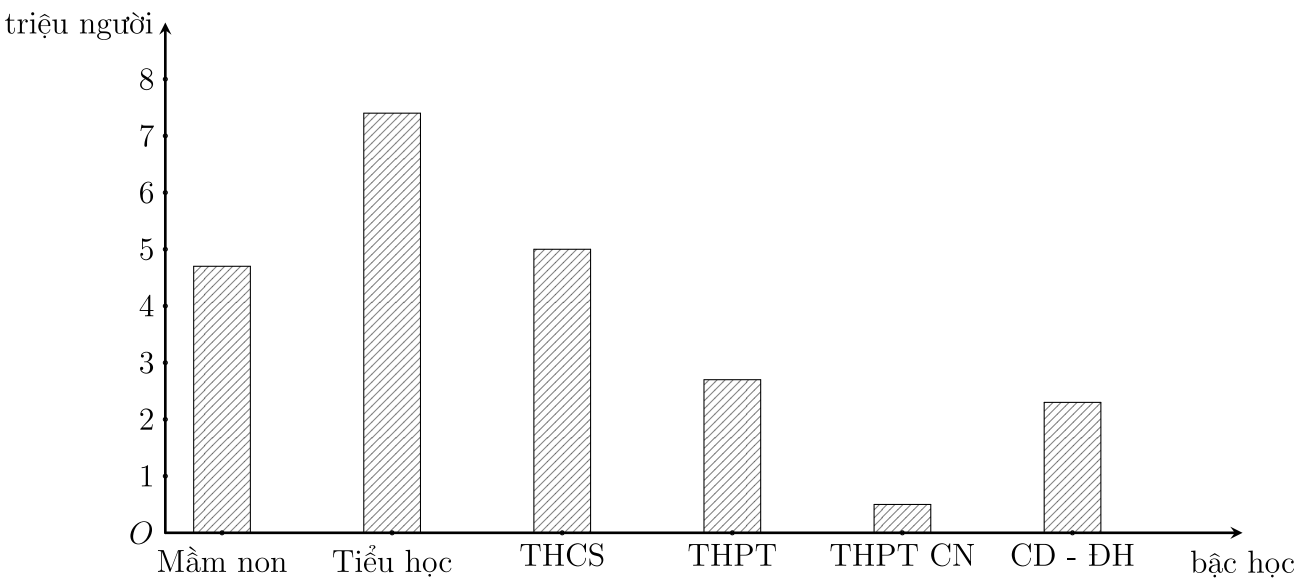
b) Vẽ biểu đồ hình chữ nhật với trục x là các bậc học, trục y là số người (theo phần b).

Lời giải.

a) Ta có bảng sau

BẬC HỌC	SỐ NGƯỜI (người)	SỐ NGƯỜI (triệu người)
Mầm non	4 701 000	4,7
Tiểu học	7 430 000	7,4
Trung học cơ sở	4 950 000	5
Trung học phổ thông	2 720 000	2,7
Trung học chuyên nghiệp	520 000	0,5
Cao đẳng - Đại học	2 185 000	2,2

b) Biểu đồ hình chữ nhật với trục x là các bậc học, trục y là số người



□

Bài 3. Một bảng thống kê dân số một tỉnh cho thấy tỉ số giữa nam và nữ trong tỉnh bằng $\frac{11}{10}$. Nếu tuổi trung bình của nam là 32 và của nữ là 34 thì tuổi trung bình của người dân trong tỉnh là bao nhiêu?

Lời giải.

Tuổi trung bình của người dân trong tỉnh là $\dfrac{11 \cdot 32 + 10 \cdot 34}{21} \approx 33$ tuổi. □

Bài 4. Bạn BEE đã có một bài kiểm tra môn Toán. Phấn đấu đạt điểm trung bình là 9 thì bài kiểm tra tới phải được điểm 10. Nhưng do sơ suất nên bài kiểm tra đó bạn BEE chỉ được 7,5 điểm và do đó điểm trung bình chỉ được 8,5. Hỏi bạn BEE trước đó đã có bao nhiêu bài kiểm tra?

Lời giải.

Gọi n là số bài kiểm tra đã làm, tổng điểm các bài kiểm tra của BEE.

Nếu bài kiểm tra tới được 10 điểm thì BEE được trung bình là 9, nên tổng điểm các bài kiểm tra của BEE là

$$9(n+1) - 10 = 9n - 1$$

Ta có điểm trung bình của BEE là 8,5, suy ra

$$\frac{9n-1+7,5}{n+1}=8{,}5$$

$$9n+6{,}5=8,5n+8{,}5$$

$$n=4$$

Vậy trước đó BEE có 4 bài kiểm tra. □

Bài 5. Điểm trung bình môn Toán của một nhóm chưa giỏi toán trong một bài kiểm tra là 5,2. Có một bạn được điểm 7 và được chuyển sang nhóm khác nên điểm trung bình của các bạn còn lại bằng 5. Vậy trong nhóm chưa giỏi toán còn bao nhiêu bạn?

Lời giải.

Gọi a là số thành viên của nhóm chưa giỏi toán lúc đầu ($a \in \mathbb{N}^*$).
Tổng số điểm của nhóm lúc đầu 5,2a (điểm).
Số điểm của nhóm sau khi bạn 7 điểm chuyển đi 5,2$a-7$ (điểm).
Điểm trung bình của nhóm lúc sau $\dfrac{5{,}2a-7}{a-1}=5 \Leftrightarrow 5{,}2a-7=5a-5 \Leftrightarrow a=10$.
Vậy lúc đầu nhóm chưa giỏi toán có 10 thành viên. □

Bài 6. Đất nước Việt Nam có 2600 km đường sắt, 42 000 km đường thủy và 256 000 km đường bộ. Hỏi trung bình số ki-lô-mét đường sắt, đường thủy và đường bộ trên 1 km^2 diện tích là bao nhiêu (biết diện tích Việt Nam khoảng 329 560 km^2)?

Lời giải.

Tỉ số ki-lô-mét đường sắt so với diện tích là 2600 : 329 560 = 0,0079.
Tỉ số ki-lô-mét đường thủy so với diện tích là 42 000 : 329 560 = 0,127.
Tỉ số ki-lô-mét đường bộ so với diện tích là 256 000 : 329 560 = 0,777. □

2. Bài tập nâng cao

Bài 7. Thế giới hiện nay có gần 7 tỉ người, phân bố theo các châu lục ở bảng dưới (tính theo năm 2012). Ngoài nước sinh hoạt, con người còn dùng nhiều nước cho các hoạt động khác. Bình quân đầu người mỗi ngày thải 300 lít nước thải ra môi trường.

CHÂU LỤC	SỐ DÂN (triệu người)
Châu Á	3800
Châu Âu	710
Châu Mĩ	886
Châu Phi	890
Châu Đại Dương	35,8

a) Tính mỗi ngày mỗi châu lục thải ra bao nhiêu tấn nước thải, biết 1000 lít nước thải có khối lượng 1 tấn. Tính theo đơn vị triệu tấn và làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.

b) Vẽ biểu đồ hình quạt.

Lời giải.

a) 300 lít = 0.0000003 triệu tấn

Số lít nước thải Châu Á thải ra là: 3 800 000 000 . $0,0000003 = 1140$ triệu tấn.

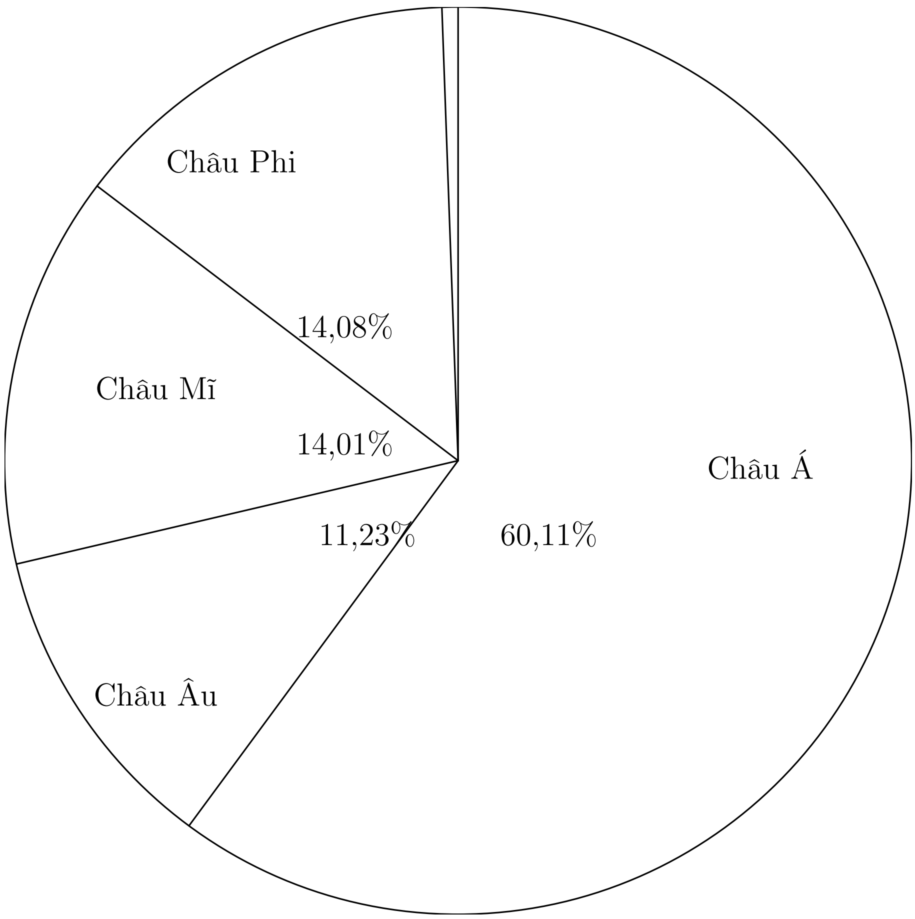
Số lít nước thải Châu Âu thải ra là: 710 000 000 . $0,0000003 = 213$ triệu tấn.

Số lít nước thải Châu Mĩ thải ra là: 886 000 000 . $0,0000003 = 256,8$ triệu tấn.

Số lít nước thải Châu Phi thải ra là: 890 000 000 . $0,0000003 = 267$ triệu tấn.

Số lít nước thải Châu Đại Dương thải ra là: 35 800 000 . $0,0000003 = 10,74$ triệu tấn.

b) Đồ thị:



□

Bài 8. Dân số thế giới: Số dân trên thế giới tăng với tốc độ chóng mặt (bảng dưới).

NĂM	SỐ DÂN (tỉ người)
1895	1
1925	2
1955	3
1975	4
1987	5
2000	6
2012	7

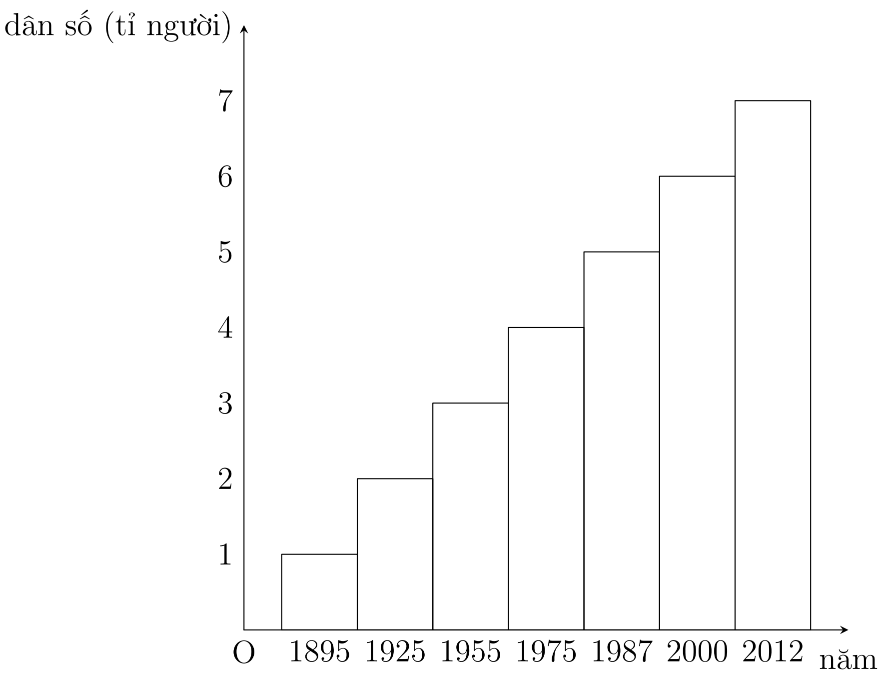
a) Vẽ biểu đồ hình chữ nhật minh họa dân số thế giới theo các năm, trục x chỉ các năm và trục y chỉ dân số.

b) Nhìn biểu đồ bạn có nhận xét gì?

c) Nếu tốc độ tăng dân số hằng năm là $1,2\%$, thì đến năm nào dân số thế giới sẽ đạt mốc 8 tỉ người?

Lời giải.

a) Đồ thị:



b) Nhận xét:

Năm 2012 dân số là 7 tỉ người.

Năm 1895 dân số là 1 tỉ người.

Dân số tăng qua các năm.

Trong 60 năm đầu kể từ năm 1895, cứ mỗi 30 năm dân số tăng 1 tỉ người.

Từ năm 1975 đến năm 2012 dân số tăng nhanh.

□

Bài 9. Cả nước có 421 trường đại học và cao đẳng, với 2,2 triệu sinh viên (số liệu năm 2013). Tính xem cứ 100 000 dân thì có bao nhiêu sinh viên, biết dân số Việt nam là 90 triệu người.

Lời giải.
Cứ 100 000 dân thì số sinh viên là:
$100\ 000.2\ 200\ 000 : 90\ 000\ 000 \approx 2444$ (sinh viên).

□

Bài 10. Cho 7 số xếp theo thứ tự giảm dần. Biết trung bình cộng của 4 số đầu bằng 50, trung bình cộng của 4 số sau bằng 31, còn trung bình cộng của cả 7 số bằng 40. Hỏi số đứng giữa bằng bao nhiêu?

Lời giải.
Tổng 4 số đầu là: $4.50 = 200$.
Tổng 4 số cuối là: $4.31 = 124$.
Tổng 7 số là: $40.7 = 280$.
Số thứ 4 là: $200 + 124 - 280 = 44$. □

Bài 11. Bạn BEE đã có một số bài kiểm tra toán. Nếu thêm 3 điểm 9 và 3 điểm 10 nữa thì điểm trung bình của bạn BEE là 8, còn nếu chỉ được thêm 1 điểm 9 và 2 điểm 10 thì điểm trung bình là 7,5. Hỏi hiện tại điểm trung bình các bài kiểm tra toán của bạn BEE là bao nhiêu?

Lời giải.
Gọi x (bài) là số bài kiểm tra hiện tại của BEE ($x \in \mathbb{N}$);
Gọi y (điểm) là tổng điểm kiểm tra của x bài hiện tại của BEE ($y > 0$);
Nếu thêm 3 điểm 9 và 3 điểm 10 nữa thì điểm trung bình của bạn BEE là 8 nên

$$y + 27 + 30 = 8(x + 6) \Rightarrow y = 8x - 9 \quad (1)$$

Nếu chỉ được thêm 1 điểm 9 và 2 điểm 10 thì điểm trung bình là 7,5 nên

$$y + 9 + 20 = 7,5(x + 3) \Rightarrow y = 7,5x - 6,5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $8x - 9 = 7,5x - 6,5 \Rightarrow 0,5x = 2,5 \Rightarrow x = 5$
Mà $y = 8x - 9 \Rightarrow y = 31$.
Vậy điểm trung bình hiện tại của BEE là: 6,2 điểm.

□

Chương 4

BIỂU THỨC ĐẠI SỐ

§1. Biểu thức đại số. Giá trị của một biểu thức đại số

I. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Điền chữ, biểu thức thích hợp vào chỗ chấm $(\cdots)$

a) Tích của tổng hai số a và b với hiệu của chúng biểu diễn bằng ...

b) Công thức tính diện tích hình tròn với bán kính R và số π là ...

c) Biểu thức x^2 được gọi là ... của số x.

d) Vận tốc của một chuyển động được tính theo công thức $v = \ldots$, trong đó S là quãng đường mà vật tham gia chuyển động đã đi được trong thời gian t.

Lời giải.

a) Tích của tổng hai số a và b với hiệu của chúng biểu diễn bằng $(a + b)(a - b)$.

b) Công thức tính diện tích hình tròn với bán kính R và số π là πR^2.

c) Biểu thức x^2 được gọi là bình phương của số x.

d) Vận tốc của một chuyển động được tính theo công thức $v = \dfrac{S}{t}$, trong đó S là quãng đường mà vật tham gia chuyển động đã đi được trong thời gian t.

□

Câu 2. Nối mỗi công thức ở dòng trên với một ô ở dòng dưới cho thích hợp.

A	B	C	D
a^2 (a là cạnh một hình vuông)	$\frac{1}{2}ah$ (h là chiều cao ứng với cạnh đáy a của một hình tam giác)	$(a-b)^2$	ab (a và b là các cạnh của một hình chữ nhật)
Diên tích hình tam giác	Bình phương hiệu hai số	Diện tích hình chữ nhật	Diện tích hình vuông
1	2	3	4

Lời giải.
$A-4, B-1, C-2, D-3.$ □

Câu 3. Đúng điền Đ, sai điền S

a) Biểu thức $\dfrac{xy}{(1-x)^2}$ có nghĩa với mọi x khác 1.

b) Biểu thức $\dfrac{1+ab^2}{(a-2)(a^2+4)}$ có nghĩa với mọi a khác ± 2.

c) Biểu $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-xy}$ có nghĩa với mọi x khác y.

d) Biểu thức $\dfrac{1+a}{|1+a|}$ có nghĩa với mọi a.

Lời giải.

a) Biểu thức $\dfrac{xy}{(1-x)^2}$ có nghĩa với mọi x khác 1. Đ

b) Biểu thức $\dfrac{1+ab^2}{(a-2)(a^2+4)}$ có nghĩa với mọi a khác ± 2. S

c) Biểu $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-xy}$ có nghĩa với mọi x khác y. S

d) Biểu thức $\dfrac{1+a}{|1+a|}$ có nghĩa với mọi a. S

□

Câu 4. Giá trị của biểu thức $\dfrac{1+x}{3-2x}$ tại $x=0$ là

A. -1. **B.** $\dfrac{-1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** 1.

Lời giải.
Thay $x=0$ vào biểu thức được giá trị biểu thức là $\dfrac{1}{3}$.
Chọn đáp án C □

II. Học giải toán

Ví dụ 1. Cho biểu thức $A = 4a^2 - 4a + 1$. Tính giá trị của biểu thức A với $a \in \left\{-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; 2\right\}$.

Lời giải.

a	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
A	$\frac{9}{4}$	4	1	0	1	9

□

Ví dụ 2. Cho $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$. Tính $f(0); f(0{,}25); f(0{,}5); f(1); f(2)$.

Lời giải.

x	0	0.25	0.5	1	2
$f(x)$	1	$\frac{7}{4}$	$\frac{13}{4}$	10	49

□

Ví dụ 3. Cho biểu thức $B = 4x^3 + 3x^2y - 2xy^2 + y^3$.

a) Tính B, biết $x = -2$ và $y = -1$.

b) Tính B, biết $|x| = 1$ và $y = 1$.

c) Tính B, biết $|x| = 1$ và $|y| = 1$.

Lời giải.

a) $B = -41$.

b) Với $|x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Xét hai trường hợp

Trường hợp 1	$x = 1$	$y = 1$
Trường hợp 2	$x = -$	$y = 1$

c) Với $|x| = 1$ và $|x| = 2 \Rightarrow x = \pm 1$ và $y = \pm 2$. Xét bốn trường hợp

Trường hợp 1	$x = 1$	$y = 2$	$B = 10$
Trường hợp 2	$x = 1$	$y = -2$	$B = -18$
Trường hợp 3	$x = -1$	$y = 2$	$B = 18$
Trường hợp 4	$x = -1$	$y = -2$	$B = -10$

□

Ví dụ 4. Tính giá trị của biểu thức $C = 4 - (x-1)^2 - |x-1|$, biết $x \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Lời giải.

x	-1	0	1	2
C	-2	2	4	2

□

Ví dụ 5. Viết biểu thức đại số diễn đạt

a) Số chính phương đứng liền trước số chính phương a.

b) Tích của hiệu hai số với tổng bình phương hai số đó.

c) Diện tích S của một hình tròn, biết chu vi của nó là p.

Lời giải.

a) Đặt hai số chính phương liên tiếp là a, b và $a > b$ thì
Nếu $a = n^2 \Rightarrow b = (n-1)^2$.
Nếu $a = (\sqrt{a})^2 \Rightarrow b = (\sqrt{a} - 1)^2$.

b) Đặt hai số đã cho là a và b. Tích của hiệu hai số với tổng bình phương của hai số đó là

$$(a-b)\left(a^2+b^2\right).$$

c) Chu vi của hình tròn $p = 2R\pi \Rightarrow R = \dfrac{p}{2\pi}$.
Suy ra diện tích $S = \pi R^2 = \pi\left(\dfrac{p}{2\pi}\right)^2 = \dfrac{p^2}{4\pi}$.

□

⚠ *a) Số chính phương là bình phương của một số tự nhiên, dãy số chính phương* $0, 1, 4, 9, 16, 25 \cdots$.
Số 4 *là số chính phương liền trước số* 9*. Số* 16 *là số chính phương liền sau số* 9*;*

b) Tổng bình phương hai số khác với bình phương tổng hai số.
Tổng bình phương hai số, có nghĩa là có bình phương của từng số rồi lập tổng. Bình phương của tổng hai số, có nghĩa là có tổng hai số rồi mới lấy tổng đó bình phương.

Ví dụ 6. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 3(x+2)^2 + (1-y)^2 + 2014$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $B = \dfrac{-589}{(x-1)^2 + 2015}$.

Lời giải.

a) Ta có $3(x+2)^2 \geq 0$, dấu " = " xảy ra khi $x = -2$.
Tương tự ta có $(1-y)^2 \geq 0$, dấu " = " xảy ra khi $y = 1$.
Vậy $A = 3(x+2)^2 + (1-y)^2 + 2014 \geq 2014$, dấu " = " xảy ra khi $x = -2$ và $y = 1$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2014 tại $x = -2, y = 1$.

b) Ta có $(x-1)^2+2015 \geq 2015 > 0$, dấu " = " xảy ra khi $x=1$.
Lại có có (-589) là hằng số âm nên $B \geq \dfrac{-589}{2015} = \dfrac{-19}{65}$.
Vậy dấu " = " xảy ra khi $x=1$.

⚠ *a) Bình phương của một số là số không âm.*

b) Nếu $f(x) \geq m$ (hằng số) và $f(x) = m$ tại $x = x_0$ thì giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là m tại $x = x_0$.

c) Nếu $f(x) \leq M$ (hằng số) và $f(x) = M$ tại $x = x_0$ thì giá trị lớn nhất của $f(x)$ là M tại $x = x_0$.

□

III. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Tính giá trị các biểu thức sau

a) $A = a^4 - a^3 + a^2 - a + 1$, biết $a \in \left\{-2; \dfrac{-1}{2}; \dfrac{1}{3}; 1\right\}$.

b) $B = 9a^2 - 6a + 1$, biết $a \in \left\{\dfrac{-1}{2}; \dfrac{-1}{3}; 0; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right\}$.

c) $C = 2x^2 - 3xy + 4y^2$, biết

Trường hợp 1: $x = 2$ và $y = 3$.

Trường hợp 2: $|x| = 1$ và $y = 2$.

Trường hợp 3: $|x| = 2$ và $|y| = 3$.

Lời giải.

a) $A(-2) = (-2)^4 - (-2)^3 + (-2)^2 - (-2) + 1 = 31$.
$A\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^4 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1 = \dfrac{31}{16}$.
$A\left(\dfrac{1}{3}\right) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^4 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{3}\right) + 1 = \dfrac{61}{81}$.
$A(1) = 1^4 - 1^3 + 1^2 - 1 + 1 = 1$.

b) $B\left(\dfrac{-1}{2}\right) = 9 \cdot \left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 - 6 \cdot \left(\dfrac{-1}{2}\right) + 1 = \dfrac{25}{4}$.
$B\left(\dfrac{-1}{3}\right) = 9 \cdot \left(\dfrac{-1}{3}\right)^2 - 6 \cdot \left(\dfrac{-1}{3}\right) + 1 = \dfrac{49}{6}$.
$B(0) = 9 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 1 = 1$.
$B\left(\dfrac{1}{4}\right) = 9 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 - 6 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right) + 1 = \dfrac{1}{16}$.
$B\left(\dfrac{1}{2}\right) = 9 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 6 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right) + 1 = \dfrac{1}{4}$.

c) Trường hợp 1: $C = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 = 26$.

Trường hợp 2: $|x| = 1$, suy ra $x = -1$ hoặc $x = 1$.
Với $x = 1$ ta có $C = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 2^2 = 12$.
Với $x = -1$ ta có $C = 2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 2^2 = 24$.

Trường hợp 3: $|x| = 2$, suy ra $x = -2$ hoặc $x = 2$; $|y| = 3$, suy ra $y = 3$ hoặc $y = -3$.
Với $x = 2, y = 3$ ta có $C = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 = 26$.
Với $x = 2; y = -3$ ta có $C = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 \cdot (-3) + 4 \cdot (-3)^2 = 62$.
Hai trường hợp $x = -2, y = 3$ và $x = -2, y = -3$ đều cho 2 giá trị như trên.

□

Bài 2. Cho $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$. Tính $f(0); f(1); f(2); f(3)$.

Lời giải.

- $f(0) = 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 27 \cdot 0 - 27 = -27$.
- $f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 27 \cdot 1 - 27 = -8$.
- $f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 27 \cdot 2 - 27 = -1$.
- $f(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 27 \cdot 3 - 27 = 0$.

□

Bài 3. Tính giá trị của biểu thức $P = 4 - (1 - x)^2 + |x - 2|$, biết $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Lời giải.

- $P(-2) = 4 - (1 - (-2))^2 + |-2 - 2| = -1$.
- $P(-1) = 4 - (1 - (-1))^2 + |-1 - 2| = 3$.
- $P(0) = 4 - (1 - 0)^2 + |0 - 2| = 5$.
- $P(2) = 4 - (1 - 2)^2 + |2 - 2| = 7$.

□

Bài 4. Tính

a) $A = \dfrac{3a - 2b}{2a - 3b}$, biết $\dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{6}$.

b) $B = \dfrac{3a - b}{2a + 13} - \dfrac{3b - a}{2b - 13}$, với $a - b = 13$ và $a \neq -6,5, b \neq 6,5$.

Lời giải.

a) Vì $\dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{6}$ nên $b = \dfrac{6}{5}a$. Thay vào A ta được

$$A = \dfrac{3a - 2 \cdot \dfrac{6}{5}a}{2a - 3 \cdot \dfrac{6}{5}a} = \dfrac{\dfrac{3}{5}a}{-\dfrac{8}{5}a} = \dfrac{-3}{8}.$$

b) Vì $a - b = 13$ nên $a = b + 13$. Thay vào B ta được

$$B = \dfrac{3(b + 13) - b}{2(b + 13) + 13} - \dfrac{3b - (b + 13)}{2b - 13} = \dfrac{2b + 39}{2b + 39} - \dfrac{2b - 13}{2b - 13 = 1 - 1} = 0.$$

□

Bài 5. Tìm giá trị của biến làm các biểu thức sau không có nghĩa

a) $\dfrac{x^2+2xy+3y^2}{(1-x)^3}$.

b) $\dfrac{1+xy^3}{(1-x^2)(y+1)}$.

c) $\dfrac{(x^2+y^2)(x^2+2y)}{(1-2x)^2-25}$.

d) $\dfrac{x^2+y}{x^2-xy}$.

Lời giải.

a) Biểu thức không có nghĩa $\Leftrightarrow (1-x)^3=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$.
Vậy biểu thức không có nghĩa khi $x=1$.

b) Biểu thức không có nghĩa $\Leftrightarrow (1-x^2)(y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&1-x^2=0\\&y+1=0\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=1\\&x=-1\\&y=-1\end{aligned}\right.$
Vậy biểu thức không có nghĩa khi $x=1$ hoặc $x=-1$ hoặc $y=-1$.

c) Biểu thức không có nghĩa
$\Leftrightarrow (1-2x)^2-25=0 \Leftrightarrow (1-2x)^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&1-2x=5\\&1-2x=-5\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=-2\\&x=3.\end{aligned}\right.$
Vậy biểu thức không có nghĩa khi $x=-2$ hoặc $x=3$.

d) Biểu thức không có nghĩa $\Leftrightarrow x^2-xy=0 \Leftrightarrow x(x-y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=0\\&x-y=0\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x=0\\&x=y.\end{aligned}\right.$
Vậy biểu thức không có nghĩa khi $x=0$ hoặc $x=y$.

□

Bài 6. So sánh giá trị của các biểu thức sau biết $a=-5$ và $b=-3$
$A=a^2-ab+b^2$; $B=(a+b)^2-3ab$; $C=(a^3+b^3):(a+b)$.
Lời giải.
Ta có
$B=(a+b)^2-3ab=a^2-ab+b^2$.
Với $a\neq -b$, ta có $C=\dfrac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2$.
Vậy $A=B=C$ □

Bài 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

a) x^2+2015.

b) $(1-2x)^2-12$.

c) $(x+2)^2+\mid x+2\mid+22$.

d) $(x-1)^2+\sqrt{2015}$.

Lời giải.

a) Ta có $x^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2+2015\geq 2015$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức đã cho là 2015 khi $x=0$.

b) Ta có $(1-2x)^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow (1-2x)^2-12\geq -12$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức đã cho là -12 khi $1-2x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

c) Ta có $(x+2)^2\geq 0$ và $\mid x+2\mid\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow (x+2)^2+\mid x+2\mid+22\geq 22$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức đã cho là 22 khi $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$.

d) Ta có $(x-1)^2\geq 0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow (x-1)^2+\sqrt{2015}\geq\sqrt{2015}$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức đã cho là $\sqrt{2015}$ khi $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

□

Bài 8. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau

a) $2015 - x^2$.

b) $\dfrac{1}{(1-2x)^2+25}$.

c) $\sqrt{2015} - (x-1)^2$.

d) $\dfrac{2015}{|\, x+2015 \,| + 19}$.

Lời giải.

a) Ta có $-x^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2015 - x^2 \leq 2015$.
Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là 2015 khi $x = 0$.

b) Ta có $(1-2x)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (1-2x)^2 + 25 \geq 25 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(1-2x)^2+25} \leq \dfrac{1}{25}$.
Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $\dfrac{1}{25}$ khi $1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

c) Ta có $-(x-1)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sqrt{2015} - (x-1)^2 \leq \sqrt{2015}$.
Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $\sqrt{2015}$ khi $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

d) Ta có $|\, x+2015 \,| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |\, x+2015 \,| + 19 \geq 19 \Leftrightarrow \dfrac{2015}{|\, x+2015 \,|+19} \leq \dfrac{2015}{19}$.
Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức là $\dfrac{2015}{19}$ khi $x + 2015 = 0 \Leftrightarrow x = -2015$.

□

2. Nâng cao

Bài 9. Tính giá trị của các biểu thức sau

a) $A = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$, biết $|\, a \,| = 2$ và $b = -3$.

b) $B = \dfrac{3ab}{a^2+b^2} - \dfrac{a-b}{a+b}$ biết $|\, a \,| = 1$ và $|\, b \,| = 2$.

c) $C = \dfrac{1+ab}{2ab-3}$ với $|\, ab - 1 \,| = 3$.

d) $D = x^3 - 12x^2y + 48xy^2 - 64y^3$, biết $x - y = 1$ và $3x = 2y$.

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}
A &= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\
&= a^4 - a^3b + b^4 - ab^3 - 3ab(a^2 - 2ab + b^2) \\
&= a^3(a-b) - b^3(a-b) - 3ab(a-b)^2 \\
&= (a-b)(a^3 - b^3) - 3ab(a-b)^2 \\
&= (a-b)^2(a^2 + ab + b^2 - 3ab) \\
&= (a-b)^2(a^2 - 2ab + b^2) \\
&= (a-b)^4.
\end{aligned}$$

Trường hợp 1: $a = 2, b = -3$, ta có $A = 5^4 = 625$.
Trường hợp 2: $a = -2, b = -3$, ta có $A = 1^4 = 1$.

b)

$$\begin{aligned} B &= \frac{3ab}{a^2+b^2} - \frac{a-b}{a+b} \\ &= \frac{3ab}{a^2+b^2} - \frac{a^2-b^2}{(a+b)^2} \\ &= \frac{3ab}{a^2+b^2} - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2+2ab}. \end{aligned}$$

Trường hợp 1: $ab = 2$, ta có

$$B = \frac{3 \cdot 2}{1^2+2^2} - \frac{1^2-2^2}{1^2+2^2+2 \cdot 2} = \frac{23}{15}.$$

Trường hợp 2: $ab = -2$, ta có

$$B = \frac{3 \cdot (-2)}{1^2+2^2} - \frac{1^2-2^2}{1^2+2^2+2 \cdot (-2)} = \frac{9}{5}.$$

c)

$$C = \frac{1+ab}{2ab-3} = \frac{(ab-1)+2}{2(ab-1)-1}.$$

Trường hợp 1: $ab-1 = 3$, ta có $C = \dfrac{3+2}{2 \cdot 3 - 1} = 1$.

Trường hợp 2: $ab-1 = -3$, ta có $C = \dfrac{-3+2}{2 \cdot (-3) - 1} = \dfrac{1}{7}$.

d)

$$D = x^3 - 12x^2y + 48xy^2 - 64y^3 = (x-4y)^3.$$

Theo đề bài, ta có $3x = 2y \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{2}x$.

Thay vào $x - y = 1$, ta có $x - \dfrac{3}{2}x = 1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x = 1 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = -3$.

Vậy $D = (-2 - 4 \cdot (-3))^3 = 1000$.

□

Bài 10. Tính giá trị các biểu thức sau một cách hợp lí

a) $A = \dfrac{2a-3b}{3a-2b}$ biết $6a = 5b$.

b) $B = \dfrac{2a+b}{a+124} - \dfrac{a+2b}{b+124}$ với $a+b = 124$ và $a, b \neq -124$.

c) $C = \dfrac{\sqrt{1^3+2^3+\cdots+10^3}(x^2+y^2)(x^3+y^3)(x^4+y^4)}{1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2}$ với $x = -0,7$ và $y = \dfrac{7}{10}$.

Lời giải.

a) $A = \dfrac{2a-3b}{3a-2b} = \dfrac{6(2a-3b)}{6(3a-2b)} = \dfrac{2 \cdot 6a - 18b}{3 \cdot 6a - 12b} = \dfrac{2 \cdot 5b - 18b}{3 \cdot 5b - 12b} = \dfrac{-8b}{3b} = -\dfrac{8}{3}$.

b) $B = \dfrac{2a+b}{a+124} - \dfrac{a+2b}{b+124} = \dfrac{a+b+a}{a+124} - \dfrac{a+b+b}{b+124} = \dfrac{a+124}{a+124} - \dfrac{b+124}{b+124} = 1 - 1 = 0$.

c) $C = \dfrac{\sqrt{1^3+2^3+\cdots+10^3}(x^2+y^2)(x^3+y^3)(x^4+y^4)}{1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2}$.

Ta có $x=-0{,}7$ và $y=\dfrac{7}{10}=0{,}7$ nên $x=-y \Rightarrow x^3=-y^3 \Leftrightarrow x^3+y^3=0$.

Vậy $C=0$.

□

Bài 11. Tìm số nguyên x sao cho

a) Biểu thức $A=\dfrac{13}{17-x}$ đạt giá trị lớn nhất.

b) Biểu thức $B=\dfrac{3}{x-7}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Biểu thức $C=\dfrac{40-3x}{13-x}$ đạt giá trị lớn nhất.

d) Biểu thức $D=\dfrac{20-x}{x-12}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Ta có $17-x\ge 17-16=1 \Rightarrow \dfrac{13}{17-x}\le\dfrac{13}{1}=13$.

Vậy $\max A=13$ tại $x=16$.

b) Để $B=\dfrac{3}{x-7}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x-7<0$.

Ta có $x-7\le 6-7=-1 \Rightarrow \dfrac{3}{x-7}\ge -3$.

Vậy $\min B=-3$ đạt khi $x=6$.

c) $C=\dfrac{40-3x}{13-x}=\dfrac{39-3x+1}{13-x}=3+\dfrac{1}{13-x}$.

Ta có $13-x\ge 13-12=1 \Rightarrow \dfrac{1}{13-x}\le\dfrac{1}{1}=1 \Rightarrow 3+\dfrac{1}{13-x}\le 4$.

Vậy $\max C=4$ đạt khi $x=12$.

d) $D=\dfrac{20-x}{x-12}=\dfrac{12-x+8}{x-12}=-1+\dfrac{8}{x-12}$.

Để D đạt giá trị nhỏ nhất thì $\dfrac{8}{x-12}<0 \Rightarrow x-12<0$.

Ta có $x-12\le 11-12=1 \Rightarrow \dfrac{8}{x-12}\le\dfrac{8}{-1}=-8 \Rightarrow -1+\dfrac{8}{x-12}\ge -1-8=-9$.

Vậy $\min D=-9$ đạt khi $x=11$.

□

§2. Đơn thức, đơn thức đồng dạng

I. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Khoanh vào chữ cái trước biểu thức là đơn thức

A. $(12-x)x^3$. **B.** $-\dfrac{1}{3x}$. **C.** $\sqrt{3}x^2$. **D.** $0{,}124x^{-3}$.

Lời giải.
$\sqrt{3}x^2$ là đơn thức.
Chọn đáp án C □

Câu 2. Nối đơn thức ở dòng trên với một đơn thức đồng dạng với nó ở dòng dưới :

A	B	C	D
$-\frac{2}{3}x^6y^5$	$-\frac{2}{3}x^3y^2$	$-\frac{2}{3}x^5y^4z^2$	$-\frac{2}{3}x^2y^2\cdot(x^3yz)(yz)$
$2014\cdot x^2(xy^2)$	$2014\cdot(xy)^3(x^3y^2)$	$2014\cdot x^5y^4z^2$	$2014\cdot x(x^2y^2z)^2$
1	2	3	4

Lời giải.

A	B	C	D
$-\frac{2}{3}x^6y^5$	$-\frac{2}{3}x^3y^2$	$-\frac{2}{3}x^5y^4z^3$	$-\frac{2}{3}x^5y^4z^2$
$2014\cdot x^3y^2$	$2014\cdot x^6y^5$	$2014\cdot x^5y^4z^3$	$2014\cdot x^5y^4z^2$
1	2	3	4

Vậy $A\to 2$; $B\to 1$; $C\to 3$; $D\to 4$. □

Câu 3. Đúng điền Đ, sai điền S :

a) Bậc của đơn thức $15xy^5z^15$ là 21.

b) Hệ số của biểu thức $xyz\cdot(-2)^{-2}\cdot(xyz)^2$ là 4.

c) Bậc của đơn thức 2014 là 2014.

d) Để nhân các đơn thức người ta chỉ cần nhân các phần biến với nhau.

Lời giải.

a) Bậc của đơn thức $15xy^5z^15$ là $1+5+15=21$. $\boxed{\text{Đ}}$

b) Hệ số của biểu thức $xyz\cdot(-2)^{-2}\cdot(xyz)^2$ là $(-2)^{-2}=-\frac{1}{4}$. $\boxed{\text{S}}$

c) Bậc của đơn thức 2014 là 0. $\boxed{\text{S}}$

d) Để nhân các đơn thức người cần nhân các phần biến với nhau và nhân các hệ số với nhau. $\boxed{\text{S}}$

□

Câu 4. Điền số/biểu thức thích hợp vào ô trống của bảng dưới đây :

	Đơn thức chưa thu gọn	Rút gọn	Bậc của biến x	Bậc của đơn thức	Hệ số của đơn thức
a	$3^2xyz(3xy)$				
b	$4x^2y^2(-0{,}5x^2yz^2)^3$				
c	$-\frac{2}{3}a^2x\cdot(-3y)^2\cdot\frac{2}{5}$				

Lời giải.

	Đơn thức chưa thu gọn	Rút gọn	Bậc của biến x	Bậc của đơn thức	Hệ số của đơn thức
a	$3^2xyz(3xy)$	$27x^2y^2z$	2	5	27
b	$4x^2y^2(-0{,}5x^2yz^2)^3$	$-\frac{1}{2}x^8y^5z^6$	8	19	$-\frac{1}{2}$
c	$-\frac{2}{3}a^2x\cdot(-3y)^2\cdot\frac{2}{5}$	$-\frac{12}{5}a^2xy^2$	1	5	$-\frac{12}{5}$

□

II. Học giải toán

Ví dụ 1. Cho các biểu thức sau

$$A = 2xy^2 - 3xy^2 + 4xy^2 \quad (1) \qquad B = \left(\frac{1}{3}xy\right)\left(\frac{1}{2}x^2z\right)y \quad (2)$$

$$C = 0{,}1xy^2 - 0{,}01(xy)y \quad (3) \qquad D = \left(\frac{1}{2}x^2y\right)\left(\frac{1}{5}xz\right)y \quad (4)$$

a) Trong các biểu thức trên, biểu thức nào là đơn thức?

b) Rút gọn các biểu thức trên để được các đơn thức rút gọn. Kí hiệu các đơn thức thu gọn từ các biểu thức trên lần lượt là A, B, C và D. Tìm bậc của các đơn thức.

c) Chỉ ra các đơn thức đồng dạng với nhau.

d) Tìm giá trị của các đơn thức A, B, C và D tại $x = -6, y = -1$ và $z = -1$.

Lời giải.

a) Biểu thức (2) và (4) là các đơn thức.

b) Rút gọn các biểu thức trên ta được các đơn thức thu gọn như sau
$A = 2xy^2 - 3xy^2 + 4xy^2 = 3xy^2$ và là đơn thức bậc 3.
$B = \left(\frac{1}{3}xy\right)\left(\frac{1}{2}x^2z\right)y = \frac{1}{6}x^3y^2z$ và là đơn thức bậc 6.
$C = 0{,}1xy^2 - 0{,}01(xy)y = 0{,}09xy^2$ và là đơn thức bậc 3.
$D = \left(\frac{1}{2}x^2y\right)\left(\frac{1}{5}xz\right)y = \frac{1}{10}x^3y^2z$ và là đơn thức bậc 6.

c) Các đơn thức A và C đồng dạng. Các đơn thức B và D đồng dạng.

d) Thay $x = -6, y = -1, z = -1$ vào các biểu thức ta được $A = -18; B = 36; C = -0{,}54; D = 21{,}6$.

□

Ví dụ 2. Nhìn đoàn tàu cổ gồm 7 toa mang mã số lần lượt là

$$2x^2y, 3xyz, 4x^2y, 5xyz^2, 6x^2y, 7xyz, 8x^2yz.$$

bạn BEE nói là có thể dồn các toa để đoàn tàu chỉ còn 4 toa thôi, mà vẫn mang đầy đủ phần biến của các mã số ban đầu. Bạn có biết vì sao không?

Lời giải.
Rất đơn giản, chỉ việc ghép các toa mang mã số là các đơn thức đồng dạng lại với nhau
$2x^2y + 4x^2y + 6x^2y = 12x^2y$.
$3xyz + 7xyz = 10xyz$.
Vậy đoàn tàu chỉ còn 4 toa

$$12x^2y, 10xyz, 5xyz^2, 8x^2yz.$$

□

Ví dụ 3. Tính giá trị của các đơn thức sau

a) $A = 0{,}005x^4y^5$, biết $x = -5, y = 2$.

b) $B = 0{,}0625x^5y^3$, biết $x = -4, y = 0{,}25$.

Lời giải.

a) Có thể thấy $(-5) \cdot 2 = -10$.
Vậy biến đổi đơn thức A như sau
$A = 0{,}005x^4y^5 = 0{,}005(xy)^4y = 0{,}005 \cdot [(-5) \cdot 2]^4 \cdot 2 = 0{,}005 \cdot 10000 \cdot 2 = 100$.

b) Tương tự
$B = 0{,}0625x^5y^3 = (0{,}25)^2 \cdot x^2 \cdot (xy)^3 = [0{,}25 \cdot (-4)]^2 \cdot [(-4) \cdot 0{,}25]^3 = 1 \cdot (-1) = -1$.

□

Ví dụ 4. Một đơn thức thu gọn có hệ số là 5 và cũng là đơn thức có bậc là 5. Biết đơn thức có đúng 3 biến số là x, y, z. Hỏi có bao nhiêu đơn thức như vậy ?

Lời giải.
Ta có $5 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2$ và đơn thức đã cho là đơn thức $A = x^\alpha y^\beta z^\varphi$.
Các giá trị α, β, φ là các hoán vị vòng quanh của các số $(1; 1; 3)$ và $(1; 1; 2)$.
Vậy ta có 6 đơn thức là
$5xyz^3, 5xy^3z, 5x^3z, 5xy^2z^2, 5x^2yz^2, 5x^2y^2z$.

□

Ví dụ 5. Trong một cuộc vui tại liên hoan thiếu nhi thế giới, 5 bạn ở 5 châu lục khác nhau mỗi người sở hữu một mật mã là một đơn thức (đã thu gọn) đồng dạng với nhau. Họ trao đổi với nhau về đơn thức của mình như sau:
Bạn châu Á nói - Đơn thức của mình chỉ chứa 2 biến số x và y.
Bạn châu Âu nói - Bậc của đơn thức của mình là bậc 5.
Bạn châu Mĩ nói - Số mũ của biến số y trong đơn thức của mình là số nguyên tố nhỏ nhất.
Bạn châu Phi nói - Các hệ số của 5 đơn thức theo thứ tự là các số chính phương xếp từ nhỏ đến lớn.
Bạn châu Đại Dương nói - Đơn thức của mình có hệ số lớn nhất và là số 25.
Bạn BEE nghe và chẳng hiểu gì cả. Các bạn có giúp BEE biết mật mã của 5 bạn không ?

Lời giải.

Tất cả 5 đơn thức đều là các đơn thức (đã thu gọn) đồng dạng với nhau, mà theo bạn châu Á "Đơn thức của mình chỉ chứa 2 biến số là x và y".
Vậy 5 đơn thức đã cho có dạng: $nx^{\alpha}y^{\beta}, n \neq 0; \alpha$ và $\beta \in \mathbb{N}^*$.
Bạn châu Âu nói - Bậc của đơn thức của mình là bậc 5 nên $\alpha + \beta = 5$.
Bạn châu Mĩ nói - Số mũ của biến số y trong đơn thức của mình là số nguyên tố nhỏ nhất. Mà số nguyên tố nhỏ nhất là số 2 nên suy ra $\beta = 2$ và $\alpha = 3$.
Bạn châu Đại Dương nói - Đơn thức của mình có hệ số lớn nhất và là số 25. Vậy bạn châu Đại Dương sở hữu đơn thức có dạng $25x^3y^2$.
Bạn châu Phi nói - Các hệ số của 5 đơn thức theo thứ tự là các số chính phương xếp từ nhỏ đến lớn. Ta có số chính phương lớn nhất là 25.
Các bạn lần lượt sở hữu mật mã như sau:

$$x^3y^2, 4x^3y^2, 9x^3y^2, 16x^3y^2, 25x^3y^2.$$

□

Ví dụ 6. Bạn BEE trèo từng bậc cầu thang của nhà. Khi tới các bậc thứ 6, thứ 9 và thứ 12 bạn viết ở mỗi bậc lần lượt các đơn thức $2xy^2z^3, 3x^2y^3z^4, 5x^3y^4z^5$. Biết đơn thức viết tiếp có hệ số là 7 và bạn viết hai lần nữa thì tới bậc thang cuối cùng.
Các bạn có biết cầu thang có bao nhiêu bậc và bạn BEE viết đơn thức nào ở bậc thang cuối cùng ?

Lời giải.

Từ đề bài ta lập được bảng số liệu trong bảng sau.
Nhận xét bậc của các đơn thức ứng với số bậc của cầu thang và ta có quy luật như bảng sau Vậy,

	Bậc cầu thang	Đơn thức viết			
		Hệ số	Số mũ biến x	Số mũ biến y	Số mũ biến z
Bậc thứ 6 viết đơn thức $2xy^2z^3$	6	2	1	2	3
Bậc thứ 9 viết đơn thức $3x^2y^3z^4$	9	3	2	3	4
Bậc thứ 12 viết đơn thức $5x^3y^4z^5$	12	5	3	4	5
Bậc viết tiếp theo lần 1	15	7	4	5	6
Bậc viết tiếp theo lần 2	18	11	5	6	7

cầu thang có 18 bậc. Hai đơn thức bạn BEE viết tiếp lần lượt là $7x^4y^5z^6; 11x^5y^6z^7$. □

Ví dụ 7. a) Xác định dấu của a, biết rằng $x = -2abc^3$ trái dấu với $y = 3a^2b^3c^5$.

b) Xác định dấu của a, biết rằng hai đơn thức $x = -1\dfrac{1}{8}a^3b$ và $y = \dfrac{4}{15}a^2b^3$ cùng dấu.

c) Hai đơn thức $x = -5a^{2n}b$ và $y = 3a^{4n}b^5$ có thể có cùng giá trị âm được không ?

Lời giải.

Ta có

a) Vì x và y trái dấu nên $xy < 0$. Có $xy = (-2abc^3) \cdot (3a^2b^3c^5) = -6a^3b^4c^8 < 0$. Lại có $b^4c^8 > 0$ (do b, c khác 0) nên $-6a^3 < 0$ hay $a^3 > 0$, nghĩa là $a > 0$.

b) Vì x và y cùng dấu nên $xy > 0$ và a, b khác 0. Mặt khác $xy = (-1\frac{1}{8}a^3b) \cdot (\frac{4}{15}a^2b^3) = -0,3 \cdot a^5b^4 > 0$. Hơn nữa $b^4 > 0$ (do b khác 0) nên $-0,3a^5 > 0$ hay $a^5 < 0$ nghĩa là $a < 0$.

c) Xét tích của hai đơn thức

$$xy = (-5a^{2n}b) \cdot (3a^{4n}b^5) = -15a^{6n}b^6 = -15(a^nb)^6.$$

Do $(a^nb)^6 \geq 0$ nên $xy = -15(a^nb)^6 \leq 0$.
Vì vậy x và y không thể cùng âm được.

□

Ví dụ 8. a) Cho $a^{2k} = 5$. Tính $6a^{6k} - 4$.

b) Tìm x, y và z nếu

$$(5x^2y^4)^3 + (-7y^3z^5)^2 = 0$$

Lời giải.
Ta có

a) Có $6a^{6k} - 4 = 6(a^{2k})^3 - 4 = 6 \cdot 5^3 - 4 = 750 - 4 = 746$.

b) Do $5x^2y^4 \geq 0$ nên $(5x^2y^4)^3 \geq 0; (-7y^3z^5)^2 \geq 0$.
Do đó từ giả thiết suy ra

$$(5x^2y^4)^3 = 0 \text{ và } (-7y^3z^5)^2 = 0.$$

Suy ra $y = 0$ và mọi x, z, hoặc $x = z = 0$ và mọi y.

□

III. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Cho các biểu thức sau

$$a^2b - 2a^2b + 3a(ab) \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{2}ab\right) \cdot \left(\frac{1}{5}ac\right) bc \quad (2)$$

$$12a(ab) - 123(ab)a \quad (3)$$

$$(0,01ab) \cdot (0,1abc^2) \quad (4)$$

a) Trong các biểu thức trên, biểu thức nào là đơn thức ?

b) Rút gọn các biểu thức thừ (1) đến (4) để được các đơn thức thu gọn. Tìm bậc các đơn thức đó.

c) Kí hiệu lần lượt các đơn thức thu gọn đó là A, B, C và D. Chỉ ra các đơn thức đồng dạng với nhau.

d) Tìm giá trị các đơn thức A, B, C, D tại $a = -1; b = 2$ và $c = 4$.

Lời giải.

a) Đơn thức là biểu thức chỉ gồm một số hoặc một biến hoặc một tích giữa các số và các biến. Dựa vào đó ta có được biểu thức (2) và (4) là các đơn thức.

b) $A = a^2b - 2a^2b + 3a(ab) = a^2b - 2a^2b + 3a^2b = 2a^2b$, bậc 3.
$B = \left(\frac{1}{2}ab\right) \cdot \left(\frac{1}{5}ac\right) bc = \frac{1}{10}a^2b^2c^2$, bậc 6.
$C = 12a(ab) - 123(ab)a = 12a^2b - 123a^2b = -111a^2b$, bậc 3.
$D = (0,01ab) \cdot (0,1abc^2) = 0,001a^2b^2c^2$, bậc 6.

c) Dựa vào các đơn thức sau khi đã rút gọn, ta nhận thấy đơn thức A và C đồng dạng với nhau, đơn thức B và D đồng dạng với nhau.

d) $A = 2a^2b = 2 \cdot (-1)^2 \cdot 2 = 4$.
$B = 0,1a^2b^2c^2 = 0,1 \cdot (-1)^2 \cdot 2^2 \cdot 4^2 = 6,4$.
$C = -111a^2b = -111 \cdot (-1)^2 \cdot 2 = -222$.
$D = 0,001 \cdot a^2b^2c^2 = 0,001 \cdot (-1)^2 2^2 4^2 = 0,064$.

□

Bài 2. Cho biểu thức $36ab^2c^4$. Bạn CHICKEN đố bạn EEG phân tích biểu thức trên thành tích của hai đơn thức, trong đó có một đơn thức là

a) $18abc$. b) $9bc^2$. c) $-6ab^2c^2$.

Lời giải.

a) $36ab^2c^3 = (18abc) \cdot (2bc^3)$.

b) $36ab^2c^3 36ab^2c^3 = (9bc^2) \cdot (4abc^2)$.

c) $36ab^2c^3 = (-6ab^2c^2) \cdot (-6c^2)$.

□

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau, rồi tính giá trị của biểu thức thu gọn tại $x = -1$ và $y = -1$.

a) $xy - 9xy + 5xy + xy$. b) $x^{2014}y^4 + 2x^{14}y^4x^{2000} - 4^{1024}y^4x^{990}$.

c) $x^ny^{2n} - 2x^ny^n(y^n) - 6(xy)^ny^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

a) $A = xy - 9xy + 5xy + xy = -2xy$.
Với $x = -1, y = -2$ thì $A = -2$.

b) $B = x^{2014}y^4 + 2x^{14}y^4x^{2000} - 4^{1024}y^4x^{990} = x^{2014}y^4 + 2x^{2014}y^4 - 4x^{2014}y^4 = -x^{2014}y^4$.
Với $x = -1$ và $y = -1$ thì $B = -1$.

c) $C = x^ny^{2n} - 2x^ny^n(y^n) - 6(xy)^ny^n = x^ny^{2n} - 2x^ny^{2n} - 6x^ny^{2n} = -7x^ny^{2n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.
Với $x = -1$ và $y = -1$ thì $C = -7 \cdot (-1)^n$.

□

2. Nâng cao

Bài 4. Cho ba đơn thức sau $A = 2xy^2; B = -2x^2a^2z^4; C = 2z^2x$.

a) Cả ba đơn thức trên có thể cùng dương được không?

b) Trong ba đơn thức trên, có tồn tại chỉ có hai đơn thức cùng có giá trị âm được không?

Lời giải.

a) $ABC = -8a^2x^4y^2z^6 \leqslant 0$ nên cả ba đơn thức trên không cùng dương được.

b) Khi cho $a = 0$, $x < 0$ và $y, z \neq 0$ thì $A < 0, B = 0, C < 0$.

□

Bài 5. Các bạn đố nhau

a) Biết $a^{2k} = 5$. Bạn CHICKEN đố bạn EEG tính được $P = 2a^{6k} - 4$.

b) Bạn EEG đố lại bạn CHICKEN tính $Q = 2a^{6k} - 4$, nếu $a^{3k} = -5$.

Lời giải.

a) Ta có
$$P = 2a^{6k} - 4 = 2\left(a^{2k}\right)^3 - 4 = 2 \cdot 5^3 - 4 = 250 - 4 = 246.$$

b) Ta có
$$Q = 2a^{6k} - 4 = 2\left(a^{3k}\right)^2 - 4 = 2 \cdot (-5)^2 - 4 = 50 - 4 = 46.$$

□

Bài 6. Tìm x, y và z biết $(2x^2z^2)^3 + (-3xy^3)^2 = 0$.
Lời giải.
Trường hợp 1: $x = 0$ và y, z bất kì, ta có
$$\left(2 \cdot 0 \cdot z^2\right)^3 + \left(-3 \cdot 0 \cdot y^3\right)^2 = 0.$$
Trường hợp 2: $y = z = 0$ và x bất kì, ta có
$$\left(2 \cdot x^2 \cdot 0^2\right)^3 + \left(-3 \cdot x \cdot 0^3\right)^2 = 0.$$

□

Bài 7. Cho chín số $a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3$ khác 0. Hỏi tất cả sáu số sau
$$x_1 = a_1b_2c_3; x_2 = a_2b_3c_1; x_= a_3b_1c_2 \text{ và } y_1 = -a_1b_3c_2; y_2 = -a_2b_1c_3; y_3 = -a_3b_2c_1$$
có thể cùng âm hoặc cùng dương được không?
Lời giải.
Ta có
$$x_1x_2x_3y_1y_2y_3 = -a_1^2a_2^2a_3^2b_1^2b_2^2b_3^2c_1^2c_2^2c_3^2 \leqslant 0.$$
Do đó $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ không thể cùng âm hay cùng dương. □

§3. ĐA THỨC. CỘNG TRỪ ĐA THỨC

I. Kiến thức cần nhớ

II. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Biểu thức nào sau đây là đa thức?

A. $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

B. $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{5}$.

C. $\dfrac{1}{x-2}$.

D. $(124 - x) \cdot \dfrac{1}{x}$.

Lời giải.

Đa thức phải có dạng $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Như vậy chỉ có $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{5}$ là đa thức.

Chọn đáp án B □

Câu 2. Đúng điền Đ, sai điền S.

a) S Bậc của đa thức là tổng bậc của tất cả các hạng tử trong dạng thu gọn của đa thức đó.

b) S Số 0 là đa thức có bậc 0.

c) S Trong đa thức một biến, các hệ số của các hạng tử gọi là hệ số tự do.

d) Đ Số mũ lớn nhất của các biến trong đa thức một biến (dạng rút gọn và không là đa thức không) là bậc của đa thức đó.

Câu 3.

Điền số/chữ thích hợp vào chỗ chấm (...). Cho đa thức
$A = a - 2ab + 3abc + 4abcd$, $B = 2a - 4ab - 3abc$, $C = -3a + 6ab - 4abcd$.

	Đa thức	Bậc của đa thức
a	P=A+B-C	$6a - 12ab + abc + 8abcd$
b	Q=A-B+C	$-4a + 8ab + 6abc$
c	R=A+B+C	0

Câu 4. Nối mỗi đa thức với bậc của nó:

Đa thức	Bậc của đa thức
$2x^2y^3 - 2xy^3 + 6(x^2y^2)y + 6xy^2$	a) 2
$0{,}2xy^3 - 0{,}02x^3y^4 + 0{,}002xy^3 + 0{,}0002x^3y^4$	b) 3
$0{,}1xy - 0{,}01xy^2 + 0{,}01xy + 10^{-2}xy^2$	c) 5
$x^3 - 2x^2 + 5x - 1 - x^2 - 2x$	d) 7

Lời giải.

Đa thức	Bậc của đa thức
$2x^2y^3 - 2xy^3 + 6(x^2y^2)y + 6xy^2$	a) 2
$0{,}2xy^3 - 0{,}02x^3y^4 + 0{,}002xy^3 + 0{,}0002x^3y^4$	b) 3
$0{,}1xy - 0{,}01xy^2 + 0{,}01xy + 10^{-2}xy^2$	c) 5
$x^3 - 2x^2 + 5x - 1 - x^2 - 2x$	d) 7

□

III. Học giải toán

Ví dụ 1. Cho đa thức $f(x) = x + 7x^2 - 6x^3 + 3x^4 + 2x^2 + 6x - 2x^4 + 1$.

a) Thu gọn, rồi sắp xếp các số hạng của đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến x.

b) Xác định bậc của đa thức, hệ số tự do, hệ số cao nhất.

c) Tính $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ và $f(-a)$.

Lời giải.

a) Có đa thức $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 7x + 1$.

b) Đa thức $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 7x + 1$ có bậc 4. Hệ số tự là là 1 và hệ số cao nhất là 1.

c) Ta có:
$f(-1) = (-1)^4 - 6\cdot(-1)^3 + 9\cdot(-1)^2 + 7\cdot(-1) + 1 = 1 + 6 + 9 - 7 + 1 = 10.$
$f(0) = 0^4 - 6\cdot 0^3 + 9\cdot 0^2 + 7\cdot 0 + 1 = 0 + 0 + 0 - 0 + 1 = 1.$
$f(1) = 1^4 - 6\cdot 1^3 + 9\cdot 1^2 + 7\cdot 1 + 1 = 1 - 6 + 9 + 7 + 1 = 12.$
$f(a) = (-a)^4 - 6(-a)^3 + 9(-a)^2 + 7(-a) + 1 = a^4 + 6a^3 + 9a^2 - 7a + 1.$

□

Ví dụ 2. Cho các đa thức: $A = 5x^2 - 3xy + 7y^2$ và $B = 6x^2 - 8xy + 9y^2$.

a) Tính $P = A + B$ và $Q = A - B$.

b) Tính giá trị của đa thức $M = P - Q$ tại $x = -1$ và $y = -2$.

c) Cho đa thức $N = 3x^2 - 16xy + 14y^2$. Chứng minh đa thức $M - N$ luôn nhận giá trị không âm với mọi giá trị của x và y.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}
P = A + B &= (5x^2 - 3xy + 7y^2) + (6x^2 - 8xy + 9y^2)\\
&= 5x^2 - 3xy + 7y^2 + 6x^2 - 8xy + 9y^2\\
&= 11x^2 - 11xy + 16y^2.\\
Q = A - B &= (5x^2 - 3xy + 7y^2) - (6x^2 - 8xy + 9y^2)\\
&= 5x^2 - 3xy + 7y^2 - 6x^2 + 8xy - 9y^2\\
&= -x^2 + 5xy - 2y^2.
\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} M = P - Q &= (11x^2 - 11xy + 16y^2) - (-x^2 + 5xy - 2y^2) \\ &= 11x^2 - 11xy + 16y^2 + x^2 - 5xy + 2y^2 \\ &= 12x^2 - 16xy + 18y^2. \end{aligned}$$

Giá trị của M tại $x = -1$ và $y = -2$ là

$$M = 12 \cdot (-1)^2 - 16 \cdot (-1) \cdot (-2) + 18 \cdot (-2)^2 = 12 - 32 + 72 = 52.$$

Có thể tính M theo cách khác

$$M = P - Q = (A + B) - (A - B) = A + B - A + B = 2B = 2(6x^2 - 8xy + 9y^2).$$

c) Ta có $T = M - N = (12x^2 - 16xy + 18y^2) - (3x^2 - 16xy + 14y^2) = 9x^2 + 4y^2$.
Suy ra $T = 9x^2 + 4y^2 \geq 0$ với mọi x, y và $T = 0$ tại $x = y = 0$.
Vậy T luôn nhận giá trị dương hoặc bằng 0, hay nói cách khác là T luôn nhận giá trị không âm với mọi giá trị của x và y.

□

Ví dụ 3. Cho đa thức $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2013} + x^{2014}$. Tính $f(-1)$, $f(0)$ và $f(1)$.

Lời giải.
Có $f(0) = 1 + 0 + 0^2 + \cdots + 0^{2013} + 0^{2014} = 1$.
Có $f(1) = 1 + (1 + 1^2 + \cdots + 1^{2013} + 1^{2014}) = 1 + 2014 = 2015$.
Có $f(-1) = 1 + [(-1) + (-1)^2 + \cdots + (-1)^{2013} + (-1)^{2014}] = 1 + [-1 + 1 - 1 + 1 - \cdots - 1 + 1]$

(trong ngoặc vuông có 2014 số hạng)

$= 1 + [(-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots + (-1 + 1)] = 1 + (0 + 0 + \cdots + 0) = 1$. □

Ví dụ 4. Cho các đa thức $f(x) = x^{2014} - x^{2013} + x^{2012} - x^{2011} + \cdots + x^2 - x + 1$ và $h(x) = -1 + x - x^2 + x^3 - \cdots - x^{2012} + x^{2013} - x^{2014}$.
Biết $\varphi(x) = [f(x) - g(x)][f(x) + h(x)]$. Hỏi sau khi khai triển thì đa thức $\varphi(x)$ là đa thức bậc mấy?

Lời giải.
Có

$$\begin{aligned} f(x) + h(x) &= [x^{2014} - x^{2013} + x^{2012} - x^{2011} + \cdots + x^2 - x + 1] \\ &+ [-1 + x - x^2 + x^3 - \cdots - x^{2012} + x^{2013} - x^{2014}] = 0. \end{aligned}$$

Vậy đa thức $\varphi(x)$ là đa thức 0 và là đa thức không có bậc. □

Ví dụ 5. Cho một dải băng số gồm 10 ô như sau:

$$u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6 \quad u_7 \quad u_8 \quad u_9 \quad u_{10}$$

Biết chìa khóa tìm giá trị các số trong 10 ô như sau: $u_n = u_{n-2} - u_{n-1}$ trong đó $3 \leq n \leq 10$ và $n \in \mathbb{N}$.

a) Cho $u_1 = a$ và $u_2 = b$. Tính u_{10}.

b) Cho $u_1 = a$ và $u_{10} = 13a$. Tính các số còn lại.

c) Nếu biết u_5 là trung bình cộng của các số $u_1 = a$ và u_{10}. Tính các số còn lại theo a. Tính u_5 nếu $u_1 = -5$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}
&u_3 = u_1 - u_2 = a - b.\\
&u_4 = u_2 - u_3 = b - (a - b) = 2b - a.\\
&u_5 = u_3 - u_4 = (a - b) - (2b - a) = 2a - 3b.\\
&u_6 = u_4 - u_5 = (2b - a) - (2a - 3b) = 5b - 3a.\\
&u_7 = u_5 - u_6 = (2a - 3b) - (5b - 3a) = 5a - 8b.\\
&u_8 = u_6 - u_7 = (5b - 3a) - (5a - 8b) = 13b - 8a.\\
&u_9 = u_7 - u_8 = (5a - 8b) - (13b - 8a) = 13a - 21b.\\
&u_{10} = u_8 - u_9 = (13b - 8a) - (13a - 21b) = 34b - 21a.
\end{aligned}$$

b) Đặt $u_2 = x$, theo câu a) ta có $u_{10} = 34x - 21a = 13a$ (do $u_{10} = 13a$)$\Rightarrow x = a$. Vậy điền các số vào giải băng.

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
a	a	0	a	$-a$	$2a$	$-3a$	$5a$	$-8a$	$13a$

c) Đặt $u_2 = x$, theo câu a) ta có $u_{10} = 34x - 21a$ và $u_5 = 2a - 3x$. Ta có u_5 là trung bình cộng của các số u_1 và u_{10}, suy ra

$$2a - 3x = 0{,}5[a + (34x - 21a)] \Rightarrow 2a - 3x = 17x - 10a \Rightarrow x = \frac{3}{5}a.$$

Vậy điền các số vào dải băng ta có

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
a	$\frac{3}{5}a$	$\frac{2}{5}a$	$\frac{1}{5}a$	$\frac{1}{5}a$	0	$\frac{1}{5}a$	$-\frac{1}{5}a$	$\frac{2}{5}a$	$-\frac{3}{5}a$

Suy ra nếu $u_1 = -5$ thì $u_5 = \frac{1}{5} \cdot (-5) = -1$.

□

Ví dụ 6. Bạn BEE không biết tính bài toán sau như thế nào, vì tích lũy thừa 5 của $-0{,}3$ rất khó. Bạn giúp BEE được không?
Tính $f(-0{,}3)$, biết đa thức $f(x) = x^5 + 0{,}027x^2 - 2014$.

Lời giải.
Thay 0,3 bằng x và biến đổi đa thức ta có

$$\begin{aligned} f(-0{,}3) &= x^5 - (-0{,}027)x^2 - 2014 = x^5 - (-0{,}3)^3x^2 - 2014 \\ &= x^5 - x^3x^2 - 2014 = x^5 - x^5 - 2014 = -2014. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 7. Bạn BEE khoe minh có thể áp dụng phương pháp thay số bằng biến như ví dụ 6 để giải bài toán sau:
Chứng minh rằng với mọi giá trị của x và y mà $x - 2y = 2$ thì giá trị của đa thức $P = x^2 - 2xy - 2x + xy^2 - 2y^2 - 2y^3 - 2014$ luôn là một hằng số. Bạn BEE giải bài toán trên bằng cách thay tất cả số 2 bằng $x - 2y$:

$$\begin{aligned} P &= x^2 - (x-2y)xy - (x-2y)x + xy^2 - (x-2y)y^2 - (x-2y)y^3 - 2014 \\ &= x^2 - x^2y + 2xy^2 - x^2 + 2xy + xy^2 - xy^2 + 2y^3 - xy^3 + 2y^4 - 2014 \\ &= -x^2y + 2xy^2 + 2xy + 2y^4 - xy^3 + 2y^4 - 2014. \end{aligned}$$

Đến đây BEE không biết làm tiếp thế nào nữa. Các bạn có thể giúp BEE không?

Lời giải.
Không nên thay một cách máy móc, mà cần linh hoạt.

- Thay biến bằng số.

$$\begin{aligned} P &= (x^2 - 2xy) - 2x + (xy^2 - 2y^3) - 2y^2 - 2014 \\ &= x(x-2y) - 2x + y^2(x-2y) - 2y^2 - 2014 \\ &= 2x - 2x + 2y^2 - 2y^2 - 2014 = -2014. \end{aligned}$$

- Thay số bằng biến.

$$\begin{aligned} P &= x^2 - 2xy - (x-2y)x + xy^2 - (x-2y)y^2 - 2y^3 - 2014 \\ &= x^2 - 2xy - x^2 + 2xy + xy^2 - xy^2 + 2y^3 - 2y^3 - 2014 = -2014. \end{aligned}$$

Như vậy ta luôn có $P = -2014$, hay với mọi giá trị của x và y mà $x - 2y = 2$ thì giá trị của đa thức $P = x^2 - 2xy - 2x + xy^2 - 2y^2 - 2y^3 - 2014$ luôn là một hằng số. □

Ví dụ 8. Cho các đa thức $A(x) = (x-4)^2 + 2014$ và $B(x) = 4|x-4| + 4$.

a) Tính $A(-4)$, $A(4)$, $B(-4)$ và $B(4)$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức $f(x) = A(x) + B(x) - 10$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức $\varphi(x) = A(x) - B(x) - 14$.

Lời giải.

a) Ta lập bảng

x	-4	4
$A(x) = (x-4)^2 + 2014$	2078	2014
$B(x) = 4\|x-4\| - 4$	28	-4

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= A(x) + B(x) - 10 \\ &= \left[(x-4)^2 + 2014\right] + [4|x-4| - 4] - 10 \\ &= (x-4)^2 + 4|x-4| + 2000 \end{aligned}$$

Nhận xét: $(x-4)^2 \geq 0$ và $(x-4)^2 = 0$ khi $x = 4$.
$4|x-4| \geq 0$ và $4|x-4| = 0$ tại $x = 4$.
Suy ra $f(x) \geq 2000$ và $f(x) = 2000$ khi $x = 4$.
Vậy $\text{Min} f(x) = 2000$ tại $x = 4$.

c)

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= A(x) - B(x) - 14 \\ &= \left[(x-4)^2 + 2014\right] - [4|x-4| - 4] - 14 \\ &= (x-4)^2 - 4|x-4| + 2004. \end{aligned}$$

Đặt $a = |x-4| \Rightarrow (x-4)^2 = (|x-4|)^2 = a^2$.

$$\begin{aligned} \text{Có } \varphi(x) &= A(x) - B(x) - 14 = a^2 - 4a + 2014 \\ &= a^2 - 4a + 4 + 2000 = (a^2 - 2a) - (2a - 4) + 2000 \\ &= a(a-2) - 2(a-2) + 2000 = (a-2)(a-2) + 2000 = (a-2)^2 + 2000. \end{aligned}$$

Vì $(a-2)^2 \geq 0$ và $(a-2)^2 = 0$ khi $a = 2 \Leftrightarrow |x-4| = 2 \Rightarrow x \in \{2; 6\}$.
Suy ra $\varphi(x) \geq 2000$ và $\varphi(x) = 2000$ khi $x \in \{2; 6\}$.
Vậy $\text{Min}\varphi(x) = 2000$ tại $x \in \{2; 6\}$.

⚠ *Nếu $f(x) \geq m$ (m là một hằng số) và $f(x) = m$ tại $x = x_0$ thì $\text{Min} f(x) = m$ tại $x = x_0$. Trong phần c) nếu biến đổi $\varphi(x) = (x-4)^2 - 4|x-4| + 2014$, dù có $(x-4)^2 \geq 0$ và $4|x-4| \geq 0$ thì ta vẫn không thể kết luận $\varphi(x) \geq 0$, do giữa hai biểu thức $(x-4)^2$ và $4|x-4|$ là dấu trừ. Do đó ta phải đặt $a = |x-4|$, rồi sau đó tách $4a = 2a + 2a$, ghép cặp và đưa về bình phương của một biểu thức.*

□

IV. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Cho các đa thức sau: $A = 3x^2 - 4xy + 5y^2$, $B = 2x^2 + 5xy - 4y^2$, $C = 4x^2 - xy + 3y^2$.

a) $P = A + B + C$, $Q = A + B - C$, $R = A - B + C$ và $S = -A + B + C$.

b) Tính giá trị của đa thức $M = (P + Q) - (Q + S)$ tại $x = -1$ và $y = -1$.

c) Cho đa thức $N = -x^2 + 4xy + y^2$. Chứng minh rằng đa thức $T = N - M$ luôn không dương với mọi giá trị của x và y.

Lời giải.

a) • Tính P:

$$\begin{aligned} P = A + B + C &= 3x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x^2 + 5xy - 4y^2 + 4x^2 - xy + 3y^2 \\ &= (3+2+4)x^2 + (-4+5-1)xy + (5-4+3)y^2 = 9x^2 + 4y^2. \end{aligned}$$

• Tính Q:

$$\begin{aligned} Q = A + B - C &= (3x^2 - 4xy + 5y^2) + (2x^2 + 5xy - 4y^2) - (4x^2 - xy + 3y^2) \\ &= 3x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x^2 + 5xy - 4y^2 - 4x^2 + xy + 3y^2 \\ &= (3+2-4)x^2 + (-4+5+1)xy + (5-4+3)y^2 = x^2 + 2xy + 4y^2. \end{aligned}$$

• Tính R:

$$\begin{aligned} R = A - B + C &= (3x^2 - 4xy + 5y^2) - (2x^2 + 5xy - 4y^2) + (4x^2 - xy + 3y^2) \\ &= 3x^2 - 4xy + 5y^2 - 2x^2 - 5xy + 4y^2 + 4x^2 - xy + 3y^2 \\ &= (3-2+4)x^2 + (-4-5-1)xy + (5+4+3)y^2 = 5x^2 - 10xy + 12y^2. \end{aligned}$$

• Tính S:

$$\begin{aligned} S = -A + B + C &= -(3x^2 - 4xy + 5y^2) + (2x^2 + 5xy - 4y^2) + (4x^2 - xy + 3y^2) \\ &= -3x^2 + 4xy - 5y^2 + 2x^2 + 5xy - 4y^2 + 4x^2 - xy + 3y^2 \\ &= (-3+2+4)x^2 + (4+5-1)xy + (-5-4+3)y^2 = 3x^2 + 8xy - 6y^2. \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} M &= (P+Q) - (Q+S) = P + Q - Q - S = P - S = (9x^2 + 4y^2) - (3x^2 + 8xy - 6y^2) \\ &= 9x^2 + 4y^2 - 3x^2 - 8xy + 6y^2 = (9-3)x^2 - 8xy + (4+6)y^2 = 6x^2 - 8xy + 10y^2. \end{aligned}$$

Khi $x = -1$ và $y = -1$ thì $M = 6 \cdot (-1)^2 - 8(-1)(-1) + 10(-1)^2 = 6 - 8 + 10 = 8$.

c)

$$\begin{aligned} T &= N - M = -x^2 + 4xy + y^2 - (6x^2 - 8xy + 10y^2) \\ &= -x^2 + 4xy + y^2 - 6x^2 + 8xy - 10y^2 \\ &= (-1-6)x^2 + (4+8)xy + (1-10)y^2 \\ &= -7x^2 + 12xy - 9y^2 = -3x^2 - (4x^2 - 12xy + 9y^2) \\ &= -3x^2 - (2x - 3y)^2 \leq 0 (\text{ với mọi } x,\ y) \end{aligned}$$

Vậy đa thức $T = N - M$ luôn không dương với mọi giá trị của x và y.

□

Bài 2. Cho đa thức $f(x) = -x - 7x^2 + 6x^3 - 3x^4 - 2x^2 - 6x + 2x^4 - 1$.

a) Thu gọn, rồi sắp xếp các số hạng của đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến x.

b) Xác định bậc của đa thức, hệ số tự do, hệ số cao nhất.

c) Tính $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ và $f(-a)$.

Lời giải.

a) Ta có $T = (-3+2)x^4 + 6x^3 + (-7-2)x^2 + (-1-6)x - 1 = -x^4 + 6x^3 - 9x^2 - 7x - 1$.

b) Bậc của đa thức là 4, hệ số tự do là -1 và hệ số cao nhất là -1.

c)
- $f(-1) = -(-1)^4 + 6\cdot(-1)^3 - 9\cdot(-1)^2 - 7\cdot(-1) - 1 = -1 - 6 - 9 + 7 - 1 = -10$.
- $f(0) = -0^4 + 6\cdot 0^4 - 9\cdot 0^2 - 7\cdot 0 - 1 = -0 + 0 - 0 - 0 - 1 = -1$.
- $f(1) = -1^4 + 6\cdot 1^3 - 9\cdot 1^2 - 7\cdot 1 - 1 = -1 + 6 - 9 - 7 - 1 = -12$.
- $f(-a) = -(-a)^4 + 6\cdot(-a)^3 - 9\cdot(-a)^2 - 7\cdot(-a) - 1 = -a^4 - 6a^3 - 9a^2 + 7a - 1$.

□

Bài 3. Cho đa thức $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2014} + x^{2015}$. Tính $f(-1)$, $f(0)$ và $f(1)$.
Lời giải.

- Tính $f(-1)$:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 1 + (-1) + (-1)^2 + \cdots + (-1)^{2014} + (-1)^{-2015} \\ &= 1 + [(-1) + 1 + (-1) + 1 \cdots + 1 + (-1)] \\ &= 1 + [(-1+1) + (-1+1) + \cdots + (-1+1) + (-1)] \end{aligned}$$

  Vì trong dấu ngoặc vuông có 2015 số hạng nên có 1007 cặp có tổng bằng 0 và còn dư 1 số -1. Nên $f(-1) = 1 + (-1) = 0$.

- $f(0) = 1 + 0 + 0^2 + \cdots + 0^{2014} + 0^{2015} = 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 + 0 = 1$.

- $f(1) = 1 + 1 + 1^2 + \cdots + 1^{2014} + 1^{2015} = 1 + [1 + 1 + \cdots + 1 + 1] = 1 + 2015 = 2016$.

□

Bài 4. Thu gọn các biểu thức sau:

a) $M = a - \{2b + [c - (d-a)]\} + d - [(a-b) - c]$.

b) $N = 1 - [(m-1) - (m+2)] - 3m + \{5m - [2m - (3m-4)]\}$.

Lời giải.

a) Rút gọn M:

$$\begin{aligned} M &= a - [2b + (c - d + a)] + d - (a - b - c) = a - (2b + c - d + a) + d - a + b + c \\ &= a - 2b - c + d - a + d - a + b + c = -a - b + 2d. \end{aligned}$$

b) Rút gọn N:

$$\begin{aligned} N &= 1 - (m - 1 - m - 2) - 3m + [5m - (2m - 3m + 4)] = 1 - (-3) - 3m + [5m - (-m + 4)] \\ &= 1 + 3 - 3m + (5m + m - 4) = 4 - 3m + 5m + m - 4 = 3m. \end{aligned}$$

□

Bài 5. Tìm đa thức T, biết

a) $T + (4a^2 - 3ab) = b^2 - 9ab + 6a^2$.

b) $(4b^2 - 4ab) - T = 4a^2 - 12ab + 5b^2$.

c) $T - (2a^2 - 3b^2 + c^2) + (a^2 - b^2 + c^2) = 5a^2 - 2b^2 - 3c^2$.

Lời giải.

a) $T = b^2 - 9ab + 6a^2 - (4a^2 - 3ab) = b^2 - 9ab + 6a^2 - 4a^2 + 3ab = 2a^2 - 6ab + b^2$.

b) $T = (4b^2 - 4ab) - (4a^2 - 12ab + 5b^2) = 4b^2 - 4ab - 4a^2 + 12ab - 5b^2 = -4a^2 + 8ab - b^2$.

c) Ta có

$$\begin{aligned} T &= 5a^2 - 2b^2 - 3c^2 + (2a^2 - 3b^2 + c^2) - (a^2 - b^2 + c^2) \\ &= 5a^2 - 2b^2 - 3c^2 + 2a^2 - 3b^2 + c^2 - a^2 + b^2 - c^2 \\ &= (5 + 2 - 1)a^2 + (-2 - 3 + 1)b^2 + (-3 + 1 - 1)c^2 = 6a^2 - 4b^2 - 3c^2. \end{aligned}$$

□

Bài 6. Tìm đa thức $A(x)$ và $B(x)$ biết $A(x)+B(x) = 3x^2-5x+7$ và $B(x)-A(x) = 7x^2-5x+3$.
Lời giải.

- Tính $A(x)$.

$$\begin{aligned} & [A(x) + B(x)] - [B(x) - A(x)] = 3x^2 - 5x + 7 - (7x^2 - 5x + 3) \\ \Leftrightarrow\ & A(x) + B(x) - B(x) + A(x) = 3x^2 - 5x + 7 - 7x^2 + 5x - 3 \\ \Leftrightarrow\ & 2A(x) = -4x^2 + 4 \Leftrightarrow A(x) = -2x^2 + 2. \end{aligned}$$

- $B(x) = 7x^2 - 5x + 3 + A(x) = 7x^2 - 5x + 3 - 2x^2 + 2 = 5x^2 - 5x + 5$.

□

2. Nâng cao

Bài 7. Tính $f(-0{,}4)$, biết đa thức $f(x) = x^6 + 0,064x^3 - 2015$.
Lời giải.
Thay $-0{,}4$ bằng x và biến đổi đa thức ta có $f(-0{,}4) = x^6-(-0{,}064)x^3-2015 = x^6-x^3\cdot x^3-2015 = x^6 - x^6 - 2015 = -2015$. □

Bài 8. Cho các đa thức $A(x) = (x - 5)^2 + 2015$ và $B(x) = 5 - 5|x - 5|$.

a) Tính $A(-5)$, $A(5)$, $B(-5)$ và $B(5)$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức $\varphi(x) = A(x) - B(x) + 5$.

Lời giải.

a) Lập bảng

x	-5	5
$A(x) = (x - 5)^2 + 2015$	2115	2015
$B(x) = 5 - 5\lvert x - 5\rvert$	-45	5

b) Ta có $A(x) - B(x) + 5 = (x - 5)^2 + 2015 - 5 + 5|x - 5| = (x - 5)^2 + 5|x - 5| + 2010 \geq 2010$.
và $\varphi(x) = 2010$ khi $x = 5$.
Vậy Min $\varphi(x) = 2010$ khi $x = 5$.

□

Bài 9. Xác định các tham số a, b và c để hai đa thức sau là hai đa thức đồng nhất:

$$A = ax^2 - 9x + 6x^2 - (4x^2 - 3x) \text{ và } B = 2x^2 - 3bx + c - 1.$$

Lời giải.
$A(x) = (a + 6 - 4)x^2 + (-9 + 3)x = (a + 2)x^2 - 6x.$
Hai đa thức đồng nhất khi $\begin{cases} a + 2 = 2 \\ -6 = -3b \\ 0 = c - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ c = 1. \end{cases}$ □

Bài 10. Cho $u_1 = -a$, $u_2 = b$. Biết $u_n = u_{n-1} - u_{n-2}$, với mọi $n \geq 3$ và $n \in \mathbb{N}$. Tính u_{124}.
Lời giải.
Ta có:

$$\begin{aligned}
&u_3 = u_2 - u_1 = b + a \\
&u_4 = u_3 - u_2 = (b + a) - b = b + a - b = a \\
&u_5 = u_4 - u_3 = a - (a + b) = a - a - b = -b \\
&u_6 = u_5 - u_4 = -b - (a) = -a - b \\
&u_7 = u_6 - u_5 = (-a - b) - (-b) = -a - b + b = -a = u_1 \\
&u_8 = u_7 - u_6 = -a - (-a - b) = -a + a + b = b = u_2 \\
&u_9 = u_8 - u_7 = b - (-a) = b + a = u_3.
\end{aligned}$$

Ta thấy $u_1 = u_7$, $u_2 = u_8$, $u_3 = u_9, \ldots$, cứ tiếp tục như vậy thì $u_n = u_m \Leftrightarrow n - m \vdots 6$. Mà $124 = 20 \cdot 6 + 4 \Rightarrow u_{124} = u_4 = a.$ □

Bài 11. Khai triển biểu thức $P(x) = (3x^3 - 2x^2 + 3x - 4)^{2014}$ được đa thức $f(x)$ sắp xếp theo lũy thừa giảm dần của biến x. Tính tổng các hệ số của đa thức $f(x)$.
Lời giải.
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$
Tổng các hệ số của khai triển là $f(1) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = (3 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 4)^{2014} = 0^{2014} = 0.$
□

§4. NGHIỆM CỦA ĐA THỨC MỘT BIẾN

I. Kiến thức cần nhớ

Đa thức $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (với $a_n \neq 0$).
Nếu $f(a) = 0$ thì a là nghiệm ($f(x) = 0$ tại $x = a$).
Tìm nghiệm là tìm các giá trị của x để $f(x) = 0$.
Một đa thức (khác đa thức không) có thể có một nghiệm, hai nghiệm,... hoặc vô nghiệm (số nghiệm không vượt quá số bậc)

II. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a - b + c = 0$. Khi đó nghiệm của đa thức $f(x)$ là

A. $x = 1$. **B**. $x = \pm 1$. **C**. $x = -1$. **D**. $x = 0$.

Lời giải.
Đa thức $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ mà có $a_1 + a_3 + \cdots = a_0 + a_2 + \cdots$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x = -1$.
Chọn đáp án C □

Câu 2. Đúng điền Đ, sai điền S.

a) $\boxed{\text{S}}$ Các đa thức $f(x) = x^2$ và $h(x) = (x-1)^2$ đều có nghiệm. Vậy đa thức $\varphi(x) = f(x)+h(x)$ cũng có nghiệm.

b) $\boxed{\text{Đ}}$ Các đa thức $f(x) = x^2 - 1$ và $h(x) = (x - 1)^2$ đều có nghiệm. Vậy đa thức $\varphi(x) = f(x) + h(x)$ cũng có nghiệm.

c) $\boxed{\text{S}}$ Đa thức $f(x) = x^3 + 125$ là đa thức bậc 3, nên đa thức đó phải có 3 nghiệm.

d) $\boxed{\text{S}}$ Có thể tìm được 5 nghiệm từ đa thức $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2014$.

Câu 3. Điền số hoặc biểu thích hợp vào chỗ chấm (...)
Cho các đa thức $f(x) = 2x + 3$ và $h(x) = 3x + 2$.

a) Đa thức $f(x)$ có nghiệm là $-\dfrac{3}{2}$.

b) Nếu x_0 là nghiệm của đa thức $f(x)$ thì $\dfrac{1}{x_0}$ là nghiệm của đa thức $h(x)$.

c) Đa thức $\varphi(x) = f(x) + h(x)$ có nghiệm là $x = -1$.

d) Đa thức $\varphi(x) = f(x) - h(x)$ có nghiệm là $x = 1$.

Câu 4. Nối mỗi đa thức ở dòng 2 với nghiệm của nó ở dòng 3.

A	B	C	D
$x^2 - 5x + 4$	$x^3 - 2x^2 + 3x - 2$	$\lvert x - 1\rvert - 1$	$\sqrt{3}x + \sqrt{3}$
1	-1	-3	0
a	b	c	d

Lời giải.
$A-a$, $B-a$, $C-d$, $D-b$. □

III. Học giải toán

Ví dụ 1. Cho đa thức $f(x) = -x^4 + x + 7x^2 - 6x^3 + 3x^4 - 6x^2 + 6x^3 - 2x^4 - 6$.

a) Thu gon, rồi sắp xếp các số hạng của đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến x.

b) Chứng minh rằng các giá trị -2, 1 và 3 không là nghiệm của đa thức $f(x)$.

c) Tìm nghiệm của đa thức.

Lời giải.

a) Có đa thức $f(x) = x^2 + x - 6$.

b) Xét $x \in \{-2; 1; 3\}$ ta có

x	-2	1	3
x^2	4	1	9
x	-2	1	3
-6	-6	-6	-6
$f(x) = x^2 + x - 6$	-4	-4	6

Vậy -2, 1, 3 không là nghiệm của đa thức $f(x)$.

c) Đặt $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 2x - 6 = x(x+3) - 2(x+3) = (x+3)(x-2) = 0$.
Trường hợp thứ nhất $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$.
Trường hợp thứ hai $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.
Vậy đa thức $f(x) = 0$ có tập hợp nghiệm $S = \{-3; 2\}$.

⚠ *Ta cũng có thể phân tích như sau* $x^2 - 2x + 3x - 6 = x(x-2) + 3(x-2) = (x-2)(x+3) = 0$.

- *Để biết một giá trị có là nghiệm của một đa thức hay không, ta thay biến bằng giá trị đó, rồi thực hiện phép tính. Nếu kết quả nhận được khác 0 thì giá trị đó không là nghiệm. Ngược lại, giá trị đó là nghiệm của đa thức.*
- *Tập hợp nghiệm của đa thức thường được kí hiệu bằng chữ cái* S *và được viết là* $S = \{x_0; x_1; \ldots\}$

□

Ví dụ 2. Tìm nghiệm của các đa thức sau:

a) $A = x^3 - 3x$.

b) $B = x^2 - 5x + 6$.

c) $C = x^3 + x^2 + x + 1$.

d) $D = x^2 + \sqrt{2015}$.

Lời giải.

a) Ta có $x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.
Vậy tập hợp nghiệm của đa thức $A = x^3 - 3x$ là $S = \left\{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\right\}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 3x - 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x(x-3) - 2(x-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp nghiệm của đa thức $B = x^2 - 5x + 6$ là $S = \{2; 3\}$.

c) Ta có $x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+1) + (x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+1) = 0$.
Suy ra $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Vậy tập hợp nghiệm của đa thức $C = x^3 + x^2 + x + 1$ là $S = \{-1\}$ hay đa thức $C = x^3 + x^2 + x + 1$ tuy là một đa thức bậc ba nhưng lại có duy nhất một nghiệm.

d) Nhận xét: $x^2 \geq 0$ và $\sqrt{2015} > 0$. Suy ra $D = x^2 + \sqrt{2015} > 0$ hay $D = x^2 + \sqrt{2015} \neq 0\ \forall x$, tức là đa thức $D = x^2 + \sqrt{2015}$ không có nghiệm (vô nghiệm).

⚠

- *Để tìm nghiệm của một đa thức ta đặt đa thức đó bằng* 0. *Biến đổi đa thức thành tích của các nhân tử (các thừa số). Tích bằng* 0 *khi một trong các thừa số bằng* 0.
- $x^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow x^2 + 1 \neq 0\ \forall x$, *hay đa thức* $f(x) = x^2 + 1$ *không có nghiệm.*

□

Ví dụ 3. Xác định m để đa thức $f(x) = mx^2 - 2x + 8$ có nghiệm là -1.

Lời giải.

- *Cách 1*: Đa thức $f(x) = mx^2 - 2x + 8$ có nghiệm là -1 suy ra

$$f(-1) = m(-1)^2 - 2(-1) + 8 = 0 \Rightarrow m + 2 + 8 = 0 \Rightarrow m = -10.$$

  Vậy khi $m = -10$ thì đa thức $f(x) = mx^2 - 2x + 8$ có nghiệm là -1.

- *Cách 2*: Đa thức $f(x) = mx^2 - 2x + 8 = 0$ có nghiệm là -1, suy ra $m + 8 = -2 \Rightarrow m = -10$.
  Vậy khi $m = -10$ thì đa thức $f(x) = mx^2 - 2x + 8$ có nghiệm là -1.

⚠

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ *có nghiệm là* $+1 \Rightarrow a + b + c = 0$.
- $f(x) = ax^2 + bx + c$ *có nghiệm là* $-1 \Rightarrow a - b + c = 0$.

□

Ví dụ 4. Trong tập hợp số $\{2; 0; 1; 4\}$ thì số nào là nghiệm, số nào không là nghiệm của đa thức sau: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$?

Lời giải.
Ta lập bảng

x	2	0	1	4
x^3	8	0	1	64
$-5x^2$	-20	0	-5	-80
$2x$	4	0	2	8
8	8	8	8	8
x^3-5x^2+2x+8	0	8	6	0

Như vậy các số 2 và 4 là nghiệm của đa thức $f(x)=x^3-5x^2+2x+8$. Các số 0 và 1 không là nghiệm của đa thức $f(x)=x^3-5x^2+2x+8$. □

Ví dụ 5. Cho các đa thức $A=3a^2-4a+5$, $B=2a^2+5a-4$ và $C=4a^2-a+3$.

a) Tính $P=A+B+C$, $Q=A+B-C$, $R=A-B+C$, $S=-A+B+C$.

b) Tính giá trị của đa thức $M=P-Q+R-S$ tại $a\in\{-2;-3\}$.

c) Chứng minh đa thức M không có nghiệm.

Lời giải.

a) Phương pháp cộng ngang

$$P=A+B+C=(3a^2-4a+5)+(2a^2+5a-4)+(4a^2-a+3)=9a^2+4$$

Phương pháp cộng dọc:

	$P=A+B+C$	$Q=A+B-C$	$R=A-B+C$	$S=-A+B+C$
$A=3a^2-4a+5$	$3a^2-4a+5$	$3a^2-4a+5$	$3a^2-4a+5$	$-3a^2+4a-5$
$B=2a^2+5a-4$	$2a^2+5a-4$	$2a^2+5a-4$	$-2a^2-5a+4$	$2a^2+5a-4$
$C=4a^2-a+3$	$4a^2-a+3$	$-4a^2+a-3$	$4a^2-a+3$	$4a^2-a+3$
	$9a^2+4$	a^2+2a-2	$5a^2-10a+12$	$3a^2+8a-6$

b) Ta có

$$\begin{aligned} M &= P-Q+R-S=(A+B+C)-(A+B-C)+(A-B+C)-(-A+B+C)\\ &= 2A-2B+2C=2(A-B+C)=2r=10a^2-20a+24. \end{aligned}$$

Vậy $M(-2)=10\cdot(-2)^2-20\cdot(-2)+24=104$.
$M(-3)=10\cdot(-3)^2-20\cdot(-2)+24=174$.

c) Có

$$\begin{aligned} M &= 10a^2 - 20a + 24 = 10a^2 - 20a + 10 + 14 = 10(a^2 - 2a + 1) + 14 \\ &= 10(a^2 - a - a + 1) + 14 = 10\left[a(a-1) - (a-1)\right] + 14 = 10(a-1)^2 + 14 \geq 14. \end{aligned}$$

Do $M \geq 14 \Rightarrow M \neq 0, \forall a \Rightarrow$ đa thức M không có nghiệm.

□

Ví dụ 6. Cho đa thức $\varphi(x) = ax^3 - bx^2 + cx - d$ $(a \neq 0)$.

a) Tìm sự liên hệ giữa các hệ số a và c, b và d sao cho $\varphi(x)$ có hai nghiệm là -1 và 1.

b) Biết đa thức $\varphi(x)$ có hai nghiệm là ± 2, tìm nghiệm thứ ba còn lại.
Bạn BEE không biết giải bài toán trên. Các bạn có giúp BEE được không?

Lời giải.

a) Vì ± 1 là nghiệm của đa thức $\varphi(x)$ nên ta có $\varphi(1) = a - b + c - d = 0$ (1)
$\varphi(-1) = -a - b - c - d = 0$ hay $a + b + c + d = 0$ (2)
Lấy (1) + (2) $\Rightarrow a + c = 0 \Rightarrow c = -a$.
Tương tự, lấy (2) − (1) $\Rightarrow b + d = 0 \Rightarrow d = -b$.
Vậy, khi $c = -a$ và $d = -b$ thì đa thức $\varphi(x)$ có hai nghiệm là ± 1.

b) Vì ± 2 là nghiệm của đa thức $\varphi(x)$, nên ta có $\varphi(2) = 8a - 4b + 2c - d = 0$ (3)
$\varphi(-2) = -8a - 4b - 2c - d = 0$ hay $8a + 4b + 2c + d = 0$ (4)
Lấy (3) + (4) $\Rightarrow 16a + 4c = 0 \Rightarrow c = -4a$.
Tương tự, lấy (4) − (3) $\Rightarrow 8b + 2d = 0 \Rightarrow d = -4b$.
Do đó, khi $c = -4a$ và $d = -4b$ thì đa thức $\varphi(x)$ có hai nghiệm là ± 2.
Thay $c = -4a$ và $d = -4b$, ta có:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= ax^3 - bx^2 - 4ax + 4b = (ax^3 - bx^2) - (4ax - 4b) \\ &= x^2(ax - b) - 4(ax - b) = (ax - b)(x^2 - 4). \end{aligned}$$

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow (ax - b)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x^2 = 4 \\ &ax - b = 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = \pm 2 \\ &x = \frac{b}{a} \end{aligned}\right. \text{(do } a \neq 0).$$

Vậy ngoài hai nghiệm là ± 2, đa thức $\varphi(x)$ có nghiệm thứ ba là $\dfrac{b}{a}$ (nghiệm này có thể trùng nghiệm đa cho).

□

Ví dụ 7. Bạn BEE cho rằng đa thức $f(x) = x^3 - 1$ là một đa thức bậc ba, nên ngoài nghiệm là 1 thì đa thức $f(x)$ còn có hai nghiệm nữa. Các bạn thấy thế nào?

Lời giải.
Gọi S là tập hợp nghiệm của đa thức $f(x) = x^3 - 1$.
Giả sử $a \neq 1$ là một nghiệm nào đó của đa thức $f(x) = x^3 - 1$.
Xét các khoảng giá trị của a ta thấy.

- Nếu $a \leq 0$ thì $a^3 \leq 0$, do đó $f(a) = a^3 - 1 = a^3 + (-1) < 0$ nên $f(a) \neq 0$ với $\forall a \leq 0$, tức là $a \notin S$.

- Nếu $0 < a < 1$ thì $0 < a^3 < 1$, do đó $f(a) = a^3 - 1 < 0$, nên $f(a) \neq 0$, tức là $a \notin S$.
- Nếu $a > 1$ thì $a^3 > 1$, do đó $f(a) = a^3 - 1 > 1$ nên $f(a) \neq 0$, $\forall a > 1$, tức là $a \notin S$.

Như vậy, ngoài $a = 1$ thì không còn giá trị nào của a nữa để $f(a) = 0$, hay đa thức $f(x) = x^3 - 1$ chỉ có một nghiệm duy nhất là 1, mặc dù đa thức đó là đa thức bậc ba.

⚠ *Đa thức bậc n có số nghiệm không vượt quá n. Đa thức bậc n có thể có 1 nghiệm, 2 nghiệm, 3 nghiệm,..., n nghiệm hoặc vô nghiệm.*

□

IV. Bài tập

Cơ bản

Bài 1. Tìm nghiệm của các đa thức sau:

a) $f(x) = 2014x - 1$.

b) $h(x) = (x - 2014) \cdot (2015 - x)$.

c) $g(x) = x^2 - 81$.

d) $\varphi(x) = 125x - x^4$.

Lời giải.

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2014x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2014x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2014}$.

b) $h(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2014) \cdot (2015 - x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2014 = 0 \\ 2015 - x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2014 \\ x = 2015. \end{array}\right.$

c)

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 9x - 81 = 0 \Leftrightarrow x(x-9) + 9(x-9) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-9)(x+9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 9 = 0 \\ x + 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = -9. \end{array}\right. \end{aligned}$$

d) $125x - x^4 = 0 \Leftrightarrow x(125 - x^3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 125 - x^3 = 0. \end{array}\right.$

Ta có

$$\begin{aligned} & 125 - x^3 = 0 \Leftrightarrow 125 - 25x + 25x - 5x^2 + 5x^2 - x^3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 25 \cdot (5 - x) + 5x \cdot (5 - x) + x^2 \cdot (5 - x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 5x + 25)(5 - x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} 5 - x = 0 \\ x^2 - 5x + 25 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 5. \end{aligned}$$

$x^2+5x+25 = x^2+\dfrac{5x}{2}+\dfrac{5x}{2}+\dfrac{25}{4}+\dfrac{75}{4} = x\left(x+\dfrac{5}{2}\right)+\dfrac{5}{2}\left(x+\dfrac{5}{2}\right)+\dfrac{75}{2} \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{75}{4} > 0$.

Nên phương trình $x^2 + 5x + 25 = 0$ vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; 5\}$.

□

Bài 2. Trong tập hợp số $\{-3; -2; -1; 0\}$ thì số nào là nghiệm của đa thức $f(x) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$?

Lời giải.

Ta lập bảng như sau:

x	-3	-2	-1	0
x^4	81	16	1	0
$10x^3$	-270	-80	-10	0
$35x^2$	315	140	35	0
$50x$	-150	-100	-50	0
24	24	24	24	24
$x^4+10x^3+35x^3+50x+24$	0	0	0	24

Trong các số $\{-3;-2;-1;0\}$ thì -3, -2, -1 là các nghiệm của phương trình $f(x)=0$. □

Bài 3. Chứng minh rằng các đa thức sau vô nghiệm (không có nghiệm):

a) $f(x)=x^2+2015$.

b) $h(x)=x^2+6x+10$.

Lời giải.

a) Vì $x^2\geq 0, \forall x \Rightarrow x^2+2015\geq 2015>0 \Rightarrow x^2+2015\neq 0$ $(\forall x)$ hay phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm.

b) $h(x)=x^2+6x+10=x^2+3x+3x+9+1=x(x+3)+3(x+3)+1=(x+3)\cdot(x+3)+1=(x+3)^2+1$.
Vì $(x+3)^2\geq 0$ $(\forall x)$ nên $(x+3)^2+1\geq 1>0$ hay $h(x)\neq 0$ $(\forall x)$ hay phương trình $h(x)=0$ vô nghiệm.

□

Bài 4. Tìm giá trị của m để:

a) Đa thức $f(x)=mx^3+x^2+x+1$ có nghiệm là 1.

b) Đa thức $g(x)=x^4+m^2x^3+mx^2+mx-1$ có nghiệm là 1.

c) Đa thức $h(x)=x^3-2x^2+m$ có nghiệm là -3.

Lời giải.

a) Đa thức $f(x)=mx^3+x^2+x+1$ có nghiệm là 1 thì $m\cdot 1^3+1^2+1+1=0 \Leftrightarrow m+3=0 \Leftrightarrow m=-3$.

b) Đa thức $g(x)=x^4+m^2x^3+mx^2+mx-1$ có nghiệm là 1 thì
$(1)^4+m^2\cdot(1)^3+m\cdot(1)^2+m\cdot(1)-1=0 \Leftrightarrow 1+m^2+m+m-1=0 \Leftrightarrow m^2+2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2. \end{array}\right.$

c) Đa thức $h(x)=x^3-2x^2+m$ có nghiệm là -3 khi
$(-3)^3-2\cdot(-3)^2+m=0 \Leftrightarrow -27-18+m=0 \Leftrightarrow m=45$.

□

Nâng cao

Bài 5. Cho các đa thức: $A(x) = 3x^2 - 4x + 5$, $B(x) = 4x^2 - 5x + 6$, $C(x) = 5x^2 + 6x - 7$.

a) Tính $P = A + B + C$, $Q = A + B - C$, $R = A - B + C$, $S = -A + B + C$.

b) Tính giá trị của đa thức $M = P + Q + R - S$ với $x \in \{0; 0{,}5; 1\}$.

Lời giải.

a) Ta lập bảng như sau:

	$P = A + B + C$	$Q = A + B - C$	$R = A - B + C$	$S = -A + B + C$
$A = 3x^2 - 4x + 5$	$3x^2 - 4x + 5$	$3x^2 - 4x + 5$	$3x^2 - 4x + 5$	$-3x^2 + 4x - 5$
$B = 4x^2 - 5x + 6$	$4x^2 - 5x + 6$	$-4x^2 + 5x - 6$	$4x^2 - 5x + 6$	$2a^2 + 5a - 4$
$C = 5x^2 + 6x - 7$	$-5x^2 - 6x + 7$	$5x^2 + 6x - 7$	$5x^2 + 6x - 7$	$4a^2 - a + 3$
	$12x^2 - 3x + 4$	$2x^2 - 15x + 18$	$4x^2 + 7x - 8$	$6x^2 + 5x - 6$

b) $M = P + Q - R - S = (A + B + C) + (A + B - C) + (A - B + C) - (-A + B + C) = 4A = 12x^2 - 16x + 20$.
Với $x = 0 \Rightarrow M = 12 \cdot 0^2 - 16 \cdot 0 + 20 = 0 - 0 + 20 = 20$.
Với $x = 0{,}5 \Rightarrow M = 12 \cdot (0{,}5)^2 - 16 \cdot 0{,}5 + 20 = 3 - 8 + 20 = 15$.
Với $x = 1 \Rightarrow M = 12 \cdot 1^2 - 16 \cdot 1 + 20 = 12 - 16 + 20 = 16$.

□

Bài 6. Cho đa thức $f(x) = ax^3 - bx^2 + cx - d$ $(a \neq 0)$. Biết đa thức $f(x)$ có hai nghiệm là ± 3. Tìm nghiệm còn lại.

Lời giải.

Vì ± 3 là nghiệm của đa thức $\varphi(x)$, nên ta có $\varphi(3) = 27a - 9b + 3c - d = 0$ (1)
$\varphi(-3) = -27a - 9b - 3c - d = 0$ hay $27a + 9b + 3c + d = 0$ (2)
Lấy $(1) + (2) \Rightarrow 54a + 6c = 0 \Rightarrow c = -9a$.
Tương tự, lấy $(2) - (1) \Rightarrow 18b + 2d = 0 \Rightarrow d = -9b$.
Do đó, khi $c = -9a$ và $d = -9b$ thì đa thức $\varphi(x)$ có hai nghiệm là ± 3.
Thay $c = -9a$ và $d = -9b$, ta có:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= ax^3 - bx^2 - 4ax + 4b = (ax^3 - bx^2) - (9ax - 9b) \\ &= x^2(ax - b) - 9(ax - b) = (ax - b)(x^2 - 9). \end{aligned}$$

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow (ax - b)(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 9 \\ ax - b = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3 \\ x = \dfrac{b}{a} \end{array}\right. \text{ (do } a \neq 0\text{)}.$$

Vậy ngoài hai nghiệm là ± 3, đa thức $\varphi(x)$ có nghiệm thứ ba là $\dfrac{b}{a}$ (nghiệm này có thể trùng nghiệm đã cho). □

Bài 7. Chứng minh rằng đa thức $f(x) = x^3 + 1$ chỉ có một nghiệm duy nhất là -1.

Lời giải.

Gọi S là tập hợp nghiệm của đa thức $f(x) = x^3 + 1$.
Giả sử $a \neq 1$ là một nghiệm nào đó của đa thức $f(x) = x^3 + 1$.
Xét các khoảng giá trị của a ta thấy.

- Nếu $a < -1$ thì $a^3 < -1$, do đó $f(a) = a^3 + 1 < 0$ nên $f(a) \neq 0$ với $\forall a \leq 0$, tức là $a \notin S$.
- Nếu $-1 < a < 0$ thì $-1 < a^3 < 0$, do đó $f(a) = a^3 + 1 > 0$, nên $f(a) \neq 0$, tức là $a \notin S$.
- Nếu $a \geq 0$ thì $a^3 \geq 0$, do đó $f(a) = a^3 + 1 \geq 1 > 0$ nên $f(a) \neq 0$, $\forall a \geq 0$, tức là $a \notin S$.

Như vậy, ngoài $a = -1$ thì không còn giá trị nào của a nữa để $f(a) = 0$, hay đa thức $f(x) = x^3 - 1$ chỉ có một nghiệm duy nhất là 1, mặc dù đa thức đó là đa thức bậc ba. □

Bài 8. Cho các đa thức $f(x) = ax + b$ và $g(x) = bx + a$ ($a, b \neq 0$). Giả sử đa thức $f(x)$ có nghiệm là x_0, tìm nghiệm của đa thức $g(x)$.

Lời giải.

x_0 là nghiệm của đa thức $f(x) = 0$ nên $ax_0 + b = 0 \Rightarrow x_0 = \dfrac{-b}{a}$.

Gọi x_1 là nghiệm của $g(x) = 0 \Rightarrow bx_1 + a = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{1}{-\dfrac{b}{a}} = \dfrac{1}{x_0}$.

Vậy nghiệm của đa thức $g(x) = 0$ là $\dfrac{1}{x_0}$. □

Bài 9. Tìm các hệ số a, b, c, d của đa thức $ax^3 + bx^2 + cx + d$. Biết $f(0) = -5$, $f(1) = 4$, $f(2) = 31$, $f(3) = 88$.

Lời giải.

Vì $f(0) = -5$, $f(-1) = 4$, $f(2) = 31$, $f(3) = 88$ nên

$$\begin{cases} d = -5 \\ a + b + c + d = 4 \\ 8a + 4b + 2c + d = 31 \\ 27a + 9b + 3c + d = 88 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -5 \\ b = 9 - a - c \\ 8a + 4(9 - a - c) + 2c - 5 = 31 \\ 27a + 9(9 - a - c) + 3c - 5 = 88 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -5 \\ b = 9 - a - c \\ 4a - 2c = 0 \\ 18a - 6c - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = -5 \\ b = 9 - a - c \\ c = 2a \\ 3a - c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -5 \\ b = 9 - 3a \\ c = 2a \\ 3a - 2a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \\ c = 2 \\ d = -5. \end{cases}$$

Vậy $a = 1$, $b = 6$, $c = 2$, $d = -5$. □

Phần II

HÌNH HỌC

Chương 1

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC - SONG SONG

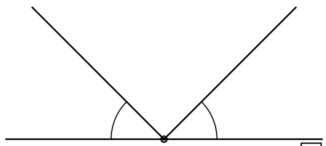
§1. Hai góc đối đỉnh. Hai đường thẳng vuông góc

I. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Cho hai góc bằng nhau, có chung đỉnh và một cặp cạnh là hai tia đối nhau. Hỏi cặp cạnh còn lại có là hai tia đối nhau không? Vẽ hình minh họa.

Lời giải.

Cặp cạnh còn lại chưa chắc đã là hai tia đối nhau.
Ví dụ minh họa như hình vẽ bên.



□

Câu 2. Một đoạn thẳng có mấy đường trung trực?

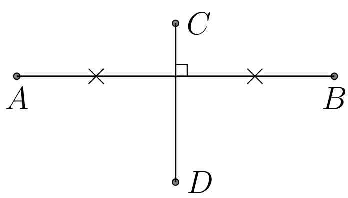
Lời giải.

Một đoạn thẳng có duy nhất một đường trung trực. □

Câu 3. Cho đoạn thẳng CD nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB, C và D nằm ở hai phía của đường thẳng AB. Hỏi đường thẳng AB có là đường trung trực của đoạn thẳng CD không?

Lời giải.

Đường thẳng AB chưa chắc là đường thẳng trung trực của đoạn CD.
Vì không có giả thiết AB đi qua trung điểm của CD.
Ví dụ minh họa như hình bên.



□

II. Học giải toán

Ví dụ 1. Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O.

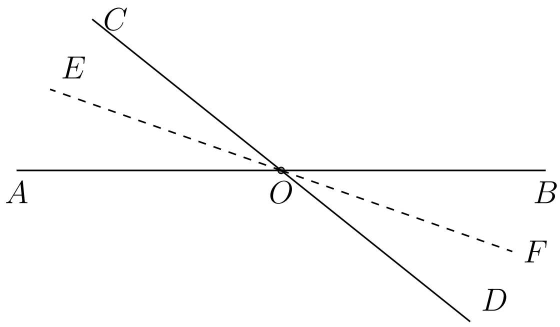
a) Kể tên các cặp góc đối đỉnh (không kể góc bẹt).

b) Biết số đo $\widehat{AOC} = 40^\circ$. Tính các góc còn lại.

c) Kẻ OE là tia phân giác của $\widehat{AOC}$ và kẻ OF là tia đối của tia OE. Hãy chứng tỏ OF là tia phân giác của góc BOD.

d) Trong hình vẽ có mấy cặp góc đối đỉnh, là những góc nào? (không kể góc bẹt). Tính số đo của các góc đó.

Lời giải.



a) Các cặp góc đối đỉnh là: $\widehat{AOC}$ đối đỉnh với $\widehat{BOD}$, $\widehat{COB}$ đối đỉnh với $\widehat{AOD}$.

b) Vì $\widehat{AOC}$ và $\widehat{BOC}$ là hai góc kề bù nhau nên $\widehat{AOC} + \widehat{COB} = 180^\circ$.
Mà $\widehat{AOC} = 40^\circ$, vậy ta có:

- $\widehat{COB} = \widehat{AOD} = 140^\circ$.
- $\widehat{DOB} = \widehat{AOC}$ (hai góc đối đỉnh).

$\Rightarrow \widehat{DOB} = 40^\circ$.

c) Ta có OE và OF là hai tia đối nhau (theo giả thiết), OA và OB là hai tia đối nhau (AB là đường thẳng).
Vậy $\widehat{AOE}$ và $\widehat{BOF}$ là hai góc đối đỉnh (theo định nghĩa).
Suy ra $\widehat{AOE} = \widehat{BOF} = \dfrac{40^\circ}{2} = 20^\circ$.
$\widehat{BOF} = 20^\circ$ mà OF nằm giữa hai tia OB và OD nên $\widehat{BOF} = 20^\circ = \dfrac{1}{2}\widehat{BOD}$.
Vậy OF là tia phân giác của góc BOD.

d) Có sáu cặp góc đối đỉnh

- $\widehat{AOC} = \widehat{BOD} = 40^\circ$ (câu b).
- $\widehat{COB} = \widehat{AOD} = 140^\circ$ (câu b).
- $\widehat{COE} = \widehat{FOD} = 20^\circ$ (câu c).
- $\widehat{AOE} = \widehat{BOF} = 20^\circ$ (câu c).

- $\widehat{EOB} = \widehat{AOF} = 20^\circ + 140^\circ = 160^\circ$.
- $\widehat{EOD} = \widehat{COF} = 160^\circ$.

□

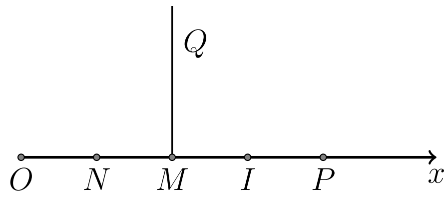
Ví dụ 2. Trên tia Ox đặt các điểm M, N, I và P sao cho $OP = 2OM$, $ON = \dfrac{1}{4}OP$, $OI = 3ON$. Biết $OP = 10$ cm.

a) Tìm độ dài các đoạn OI, OM, ON.

b) Xác định vị trí các điểm M, N, I, P trên tia Ox.

c) Lấy Q thuộc nửa mặt phẳng bờ có chứa tia Ox sao cho $QM \perp Ox$. QM là đường trung trực của các đoạn thẳng nào? Tại sao?

Lời giải.



a) $OP = 10$ cm, $OP = 2OM$. Suy ra $OM = 5$ cm, lại có $ON = \dfrac{1}{4}OP$.
Vậy $ON = 2.5$ cm, $OI = 3ON$ nên $OI = 7,5$ cm.

b) Các tia ON, OM, OI và OP có chung gốc O mà $ON < OM < OI < OP$ (2.5 cm $<$ 5 cm $<$ 7.5 cm $<$ 10 cm).
Vậy các điểm nằm trên tia Ox theo thứ tự N, M, I và P.

c) Vì $OM < OP$ (5 cm $<$ 10 cm) nên điểm M nằm giữa hai điểm O và P.
Ta có $OM + MP = OP$ hay $5 + MP = 10 \Rightarrow MP = 5$. Vậy $OM = MP = 5$ cm.
M là trung điểm của OP và $MQ \perp OP$. Vậy MQ là đường trung trực của đoạn thẳng OP.
Tương tự, MQ là đường trung trực của đoạn thẳng NI.

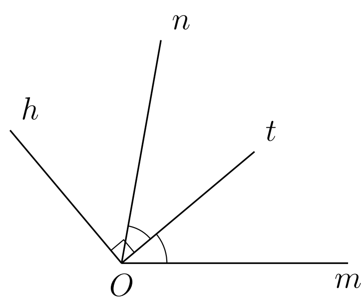
□

Ví dụ 3. Cho $\widehat{mOn} = 80^\circ$, Ot là tia phân giác của góc mOn. Vẽ tia Oh sao cho $Oh \perp Ot$. Tính số đo góc mOh.

Lời giải.
Xảy ra hai trường hợp:

a) Tia Oh nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ot có chứa Om.

Ta có $Ot \perp Oh \Rightarrow \widehat{tOh} = 90^\circ$.
Theo đề bài, tia Ot là tia phân giác của góc mOn nên $\widehat{tOm} = \dfrac{1}{2}\widehat{mOn} = \dfrac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ$.
Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ot có chứa tia Om, do $\widehat{tOm} < \widehat{tOh}$ nên tia Om nằm giữa hai tia Ot, Oh.
Ta có $\widehat{tOm} + \widehat{mOh} = \widehat{tOh} \Rightarrow 40^\circ + \widehat{mOh} = 90^\circ$.
Do đó $\widehat{mOh} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.



b) Tia Oh nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ot không chứa tia Om.

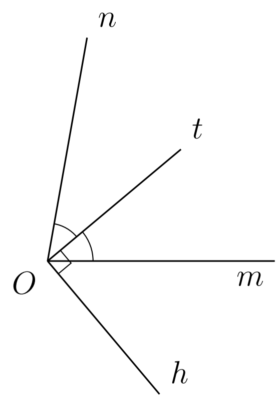
Ta có $Ot \perp Oh \Rightarrow \widehat{tOh} = 90^\circ$.
Mà Ot là tia phân giác của góc mOn nên

$$\widehat{tOm} = \frac{1}{2}\widehat{mOn} = \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ.$$

Tia Ot nằm giữa hai tia Om và Oh nên

$$\widehat{mOh} = \widehat{tOh} + \widehat{tOm}.$$

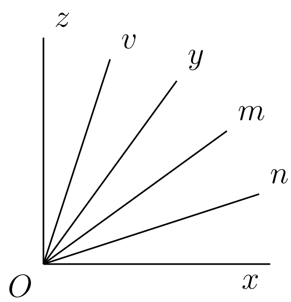
Vậy $\widehat{mOh} = 90^\circ + 40^\circ = 130^\circ$.



□

Ví dụ 4. Trên tờ giấy có vẽ góc xOy bằng 54°. Hãy dùng thước kẻ và kéo để cắt góc xOy thành ba góc bằng nhau có chung đỉnh O.

Lời giải.
Từ O dựng tia Oz sao cho góc xOz vuông, ta được góc yOz bằng 36°. Gấp tờ giấy sao cho tia Oy trùng với tia Oz, vết gấp Ov chính là tia phân giác của góc yOz, do đó ta có $\widehat{zOv} = 18^\circ$. Bây giờ ta dùng kéo cắt rời góc zOv ra rồi đặt vào trong góc xOy sao cho một cạnh của chúng trùng nhau, cạnh kia là tia Om. Làm tương tự ta được tia On. Dùng kéo cắt theo các tia Om, On ta được ba góc xOn, nOm, mOy bằng nhau (mỗi góc bằng 18°).



□

III. Bài tập

1. Cơ bản

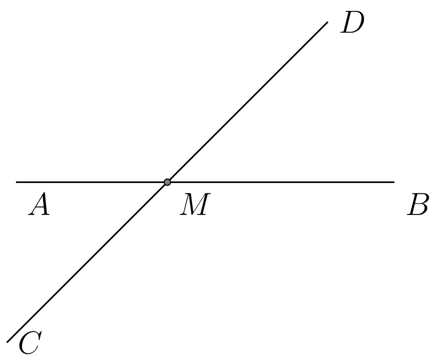
Bài 1. Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M. Biết rằng $\widehat{BMC} = 3\widehat{CMA}$. Tính số đo của 4 góc $\widehat{AMC}$, $\widehat{BMC}$, $\widehat{BMD}$ và $\widehat{DMA}$ (tính bằng hai cách).

Lời giải.
Cách 1: Vì $\widehat{BMC} + \widehat{CMA} = 180^\circ$ và $\widehat{BMC} = 3\widehat{CMA}$
nên $\widehat{AMC} = 45^\circ$ và $\widehat{BMC} = 135^\circ$.
Lại có $\widehat{AMC}$ và $\widehat{BMD}$ là hai góc đối đỉnh nên

$$\widehat{AMC} = \widehat{BMD} = 45^\circ$$

. Ta có $\widehat{AMD}$ và $\widehat{BMC}$ là hai góc đối đỉnh nên

$$\widehat{AMD} = \widehat{BMC} = 135^\circ$$

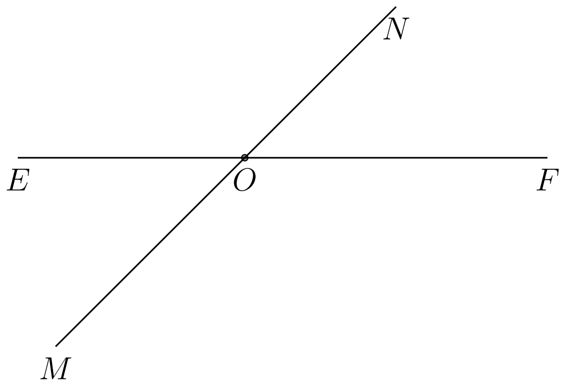


. **Cách 2:** Đặt $\widehat{AMC} = \alpha$.
Suy ra $\widehat{BMC} = 3\alpha$.

Ta có $\begin{cases} \widehat{AMC} = \widehat{BMD} \text{ (vì là hai góc đối đỉnh)} \\ \widehat{AMD} = \widehat{BMC} \text{ (vì là hai góc đối đỉnh)} \end{cases}$

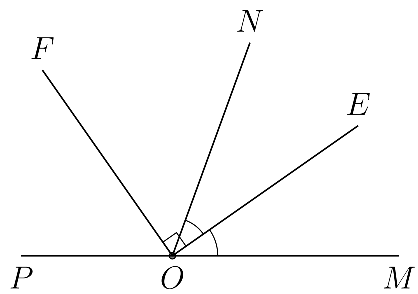
nên $\widehat{AMC}+\widehat{BMD}+\widehat{AMD}+\widehat{BMC}=\alpha+3\alpha+\alpha+3\alpha=8\alpha$.
Mặt khác $\widehat{AMC}+\widehat{BMD}+\widehat{AMD}+\widehat{BMC}=360^\circ$ nên $8\alpha=360^\circ$. Suy ra $\alpha=45^\circ$.
Do vậy $\widehat{AMC}=\widehat{BMD}=45^\circ$; $\widehat{AMD}=\widehat{BMC}=3\alpha=135^\circ$. □

Bài 2. Cho hai đường thẳng EF và MN cắt nhau tại O tạo thành 4 góc (không kể góc bẹt). Biết tổng 3 góc trong 4 góc đó bằng $250^\circ46'$. Tính số đo của 4 góc đã cho (bằng hai cách).
Lời giải.



Giả sử góc $\widehat{EOM}+\widehat{MOF}+\widehat{FON}=250^\circ46'$.
Cách 1:
Ta có $\widehat{EOM}+\widehat{MOF}+\widehat{FON}+\widehat{NOE}=360^\circ$.
Vì $\widehat{EOM}+\widehat{MOF}+\widehat{FON}=250^\circ46'$
nên $\widehat{NOE}=360^\circ-250^\circ46'=109^\circ14'$.
Mặt khác $\widehat{NOE}=\widehat{MOF}$ (hai góc ở vị trí đối đỉnh).
Nên $\widehat{MOF}=109^\circ14'$.
Ta có $\widehat{EOM}+\widehat{MOF}+\widehat{FON}=250^\circ46'$.
Mà $\widehat{EOM}=\widehat{NOF}$; $\widehat{MOF}=109^\circ14'$
nên $2\widehat{EOM}+109^\circ14'=250^\circ46'$.
Do đó $\widehat{EOM}=70^\circ46'$.
Suy ra $\widehat{FON}=70^\circ46'$.
Cách 2:
Ta có $\widehat{EOM}+\widehat{MOF}+\widehat{FON}=250^\circ46'$.
Mà $\widehat{EOM}+\widehat{MOF}=\widehat{EOF}=180^\circ$ nên $\widehat{FON}=250^\circ46'-180^\circ=70^\circ46'$.
Vì $\widehat{EOM}=\widehat{FON}$ (hai góc ở vị trí đối đỉnh) nên $\widehat{EOM}=70^\circ46'$.
Ta có $\widehat{EOM}+\widehat{MOF}=180^\circ \Leftrightarrow \widehat{MOF}=180^\circ-\widehat{EOM}=180^\circ-70^\circ46'=109^\circ14'$.
Mặt khác $\widehat{NOE}=\widehat{MOF}$ (hai góc ở vị trí đối đỉnh) nên $\widehat{NOE}=109^\circ14'$. □

Bài 3. Cho hai góc $\widehat{MON}$ và $\widehat{NOP}$ là hai góc kề bù nhau. OE là tia phân giác của góc $\widehat{MON}$. Kẻ tia $OF\perp OE$ (OF nằm trong góc $\widehat{NOP}$). Chứng tỏ OF là tia phân giác của góc NOP.
Lời giải.



OE là tia phân giác của $\widehat{MON}$ nên

$$\widehat{MOE}=\widehat{EON}=\alpha\ (\alpha<90^\circ).$$

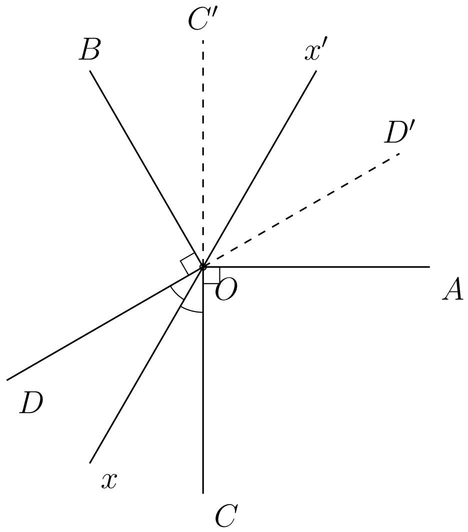
Vậy $\widehat{NOF}=\widehat{EOF}-\widehat{EON}=90^\circ-\alpha \quad (1)$
và

$$\begin{aligned}\widehat{FOP}&=180^\circ-\widehat{MOE}-\widehat{EOF}\\&=180^\circ-\alpha-90^\circ=90^\circ-\alpha \quad (2).\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{NOF}=\widehat{FOP}$. Vậy OF là tia phân giác của góc $\widehat{NOP}$. □

Bài 4. Cho $\widehat{AOB}$ tù. Về phía ngoài góc kẻ các tia OC và OD theo thứ tự vuông góc với các tia OA và OB. Kẻ tia Ox là tia phân giác của góc $\widehat{COD}$. Tia Ox' là tia đối của tia Ox. Hãy chứng tỏ tia Ox' là tia phân giác của góc $\widehat{AOB}$.
Lời giải.

Ta có $OA \perp OC$; $OB \perp OD$ suy ra $\widehat{BOD} = \widehat{COA} = 90^\circ$.
Mà $\widehat{AOB} + \widehat{BOD} + \widehat{DOC} + \widehat{COA} = 360^\circ$
nên $\widehat{AOB} + \widehat{COD} = 180^\circ$ (1).
Ta có Ox là tia phân giác của $\widehat{COD}$ nên $\widehat{xOC} = \dfrac{1}{2}\widehat{COD}$ (2).
Ta lại có $\widehat{x'OA} + \widehat{AOC} + \widehat{COx} = \widehat{xOx'} = 180^\circ$.
Mà $\widehat{AOC} = 90^\circ$ nên $\widehat{x'OA} + \widehat{xOC} = 90^\circ$.
Suy ra $2\left(\widehat{x'OA} + \widehat{xOC}\right) = 180^\circ$ (3).
Từ $(2), (3)$ ta có $\widehat{COD} + 2\widehat{x'OA} = 180^\circ$ (4).
Từ $(1), (4)$ ta có $\widehat{AOB} = 2\widehat{AOx'}$.
Gọi C', D' lần lượt là điểm đối xứng với C, D qua O.
Do $\widehat{AOB}$ tù nên C', D' nằm trong $\widehat{AOB}$.
Ta có $\widehat{COD}$ và $\widehat{C'OD'}$ là hai góc đối đỉnh.



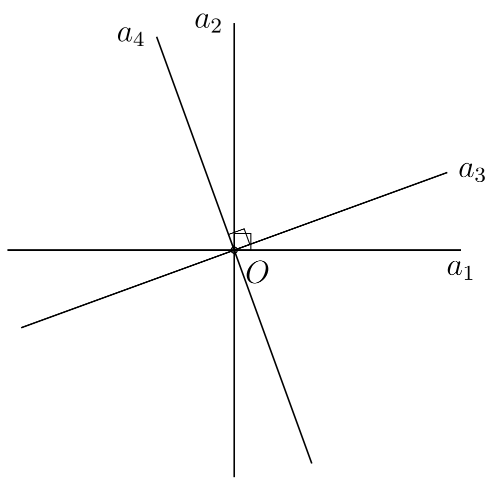
Mà Ox là tia phân giác của $\widehat{COD}$; Ox' là tia đối của tia Ox nên Ox là tia phân giác của $\widehat{C'OD'}$.
Do vậy tia Ox' nằm trong $\widehat{AOB}$.
Mặt khác $\widehat{AOB} = 2\widehat{AOx'}$ (cmt) nên Ox' là tia phân giác của $\widehat{AOB}$. □

Bài 5. Qua điểm O cho trước kẻ 4 đường thẳng phân biệt a_1, a_2, a_3 và a_4 sao cho $a_1 \perp a_2$, $a_3 \perp a_4$.

a) Trong hình vẽ có bao nhiêu góc được tạo thành?

b) Trong tổng số các góc đó có bao nhiêu góc vuông? Bao nhiêu góc nhọn? Bao nhiêu góc tù? Bao nhiêu góc bẹt?

Lời giải.



a) Bốn đường thẳng cắt nhau tại O. Chúng bị điểm O chia thành 8 tia chung gốc O. Xét một tia (chẳng hạn tia OM) sẽ hợp với 8 tia còn lại được 7 góc khác nhau. Vậy có 8 tia tạo thành $8 \cdot 7$ (góc).
Nhưng mỗi góc được tính 2 lần. Vậy tổng số các góc tạo thành là $\dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28$ (góc).

b) Mỗi tia hợp với 7 tia còn lại tạo thành 2 góc vuông, 1 góc bẹt, 2 góc tù, 2 góc nhọn.
Vậy tất cả góc vuông trong hình vẽ là $\dfrac{2 \cdot 8}{2} = 8$ (góc).
Số góc bẹt trong hình vẽ là $\dfrac{1 \cdot 8}{2} = 4$ (góc).
Tương tự ta có 8 góc tù và 8 góc nhọn.

□

Bài 6. Cho $\widehat{xOy} = 90°$ và tia Oz nằm trong góc xOy. Trên nửa mặt phẳng bờ chứa tia Ox (không chứa tia Oz) vẽ góc $\widehat{mOx} = \widehat{zOy}$ và trên nửa mặt phẳng bờ chứa tia Oy (không chứa tia Oz) vẽ góc $\widehat{yOn} = \widehat{xOz}$. Trên tia Om đặt điểm M, trên tia On đặt điểm N sao cho $OM = ON$.

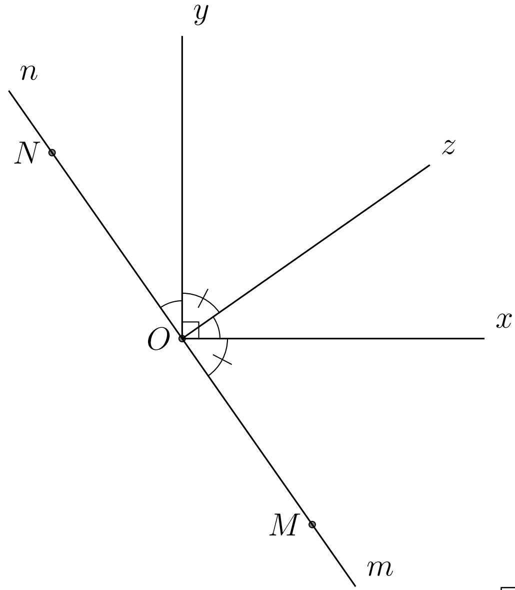
a) Chứng tỏ hai tia Om và On là hai tia đối nhau.

b) Chứng tỏ Oz là đường trung trực của đoạn MN.

Lời giải.

a) Vì $\widehat{mOx} = \widehat{zOy}$ và $\widehat{nOy} = \widehat{xOz}$
nên $\widehat{mOx} + \widehat{nOy} = \widehat{xOy}$.
Mà $\widehat{xOz} + \widehat{yOz} = 90°$ (gt).
Vậy $\widehat{mOn} + \widehat{nOy} = 90°$.
Ta có $\widehat{mOx} + \widehat{xOz} + \widehat{zOy} + \widehat{yOn} = 90° + 90° = 180°$.
Suy ra hai tia Om và On nằm trên một đường thẳng có chung gốc O. Vậy Om và On là hai tia đối nhau.

b) $Oz \perp MN$ mà $OM = ON$. Vậy Oz là đường trung trực của MN.



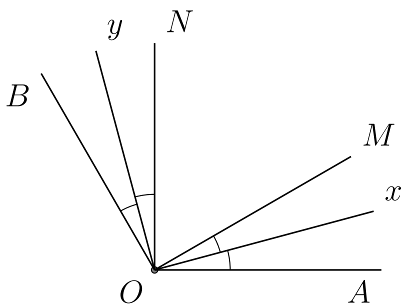
□

Bài 7. Cho góc $\widehat{AOB} = \alpha°$ $(90° < \alpha° < 180°)$. Trong góc đó vẽ tia $OM \perp OB$ và $ON \perp OA$.

a) Chứng tỏ $\widehat{AOM} = \widehat{BON}$.

b) Tia Ox và Oy theo thứ tự là tia phân giác của góc $\widehat{AOM}$ và $\widehat{BON}$. Hãy chứng tỏ $Ox \perp Oy$.

Lời giải.



a) $\widehat{AOB} = \alpha > 90°$ nên tia OM và ON nằm trong góc AOB.

$$ON \perp OA \Rightarrow \widehat{AOM} + \widehat{MON} = 90° \quad (1)$$

$$OM \perp OB \Rightarrow \widehat{NOB} + \widehat{NOM} = 90° \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có $\widehat{AOM} = \widehat{NOB} = \alpha - 90°$.

b) Ox là tia phân giác của $\widehat{AOM}$ nên

$$\widehat{xOM} = \frac{\widehat{AOM}}{2} = \frac{\alpha - 90^\circ}{2} \quad (3)$$

Oy là tia phân giác của $\widehat{NOB}$ nên

$$\widehat{yON} = \frac{\widehat{NOB}}{2} = \frac{\alpha - 90^\circ}{2} \quad (4)$$

Mà $\widehat{xOy} = \widehat{xOM} + \widehat{MON} + \widehat{NOy}$.
Thay vào ta có

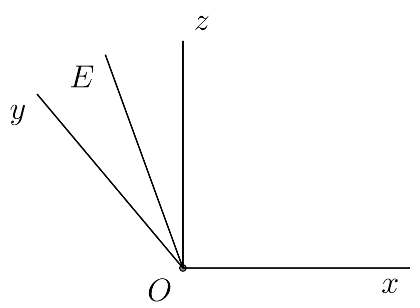
$$\widehat{xOy} = \frac{\alpha - 90^\circ}{2} + 180^\circ - \alpha + \frac{\alpha - 90^\circ}{2} = 90^\circ.$$

□

Bài 8. Cho góc $\widehat{xOy} = \alpha^\circ$ $(90^\circ < \alpha^\circ < 180^\circ)$. Trong nửa mặt phẳng bờ Oy có chứa tia Ox kẻ $Oz \perp Ox$. Gọi OE là tia phân giác của $\widehat{zOy}$. Biết $\widehat{zOE} = 20^\circ$, tính $\widehat{xOy}$.

Lời giải.

Vì $\widehat{zOE} = 20^\circ$ và OE là tia phân giác của $\widehat{zOy}$ nên $\widehat{zOy} = 40^\circ$.
Vậy $\widehat{xOy} = 40^\circ + 90^\circ = 130^\circ$.



□

2. Bài tập nâng cao

Bài 9. Qua điểm O vẽ 20 đường thẳng đôi một phân biệt. Hỏi có bao nhiêu cặp góc đối đỉnh nhỏ hơn góc bẹt?

Lời giải.

Qua O vẽ 20 đường thẳng phân biệt nên có $2 \cdot 20 = 40$ (tia).
Có 40 tia gốc O, mỗi tia tạo với một tia trong 39 tia còn lại thành 39 góc nên có $39 \cdot 40 = 1560$ (góc).
Tuy nhiên mỗi góc đã được tính 2 lần.
Do đó, số góc thực sự có là $1560 : 2 = 780$ (góc).
Có 20 đường thẳng nên trên hình có 20 góc bẹt.
Số các góc nhỏ hơn góc bẹt trong hình có là $780 - 20 = 760$ (góc).
Mỗi góc trong 760 góc này đều có 1 góc đối đỉnh với nó, tạo thành một cặp góc đối đỉnh.
Vậy số cặp góc đối đỉnh nhỏ hơn góc bẹt có là $760 : 2 = 380$ (cặp góc đối đỉnh). □

Bài 10. Qua điểm M vẽ n đường thẳng đôi một phân biệt $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$.

a) Hãy cho biết trên hình vẽ có bao nhiêu cặp góc đối đỉnh nhỏ hơn góc bẹt.

b) Cho biết trên hình vẽ có 930 cặp góc đối đỉnh nhỏ hơn góc bẹt. Tính n.

Lời giải.

a) Qua điểm M vẽ n đường thẳng đôi một phân biệt nên có $2 \cdot n = 2n$ (tia).
Có $2n$ tia gốc M, mỗi tia tạo với $2n-1$ tia còn lại thành $2n-1$ góc nên có $2n(2n-1)$ góc. Tuy nhiên mỗi góc đã được tính hai lần.
Số góc thực sự có là $2n(2n-1) : 2 = n(2n-1)$ (góc).
Các góc nhỏ hơn góc bẹt có trong hình là $n(2n-1) - n = 2n(n-1)$ (góc).
Mỗi góc trong $2n(n-1)$ góc này đều có một góc đối đỉnh với nó, tạo thành một cặp góc đối đỉnh.
Vậy số cặp góc đối đỉnh nhỏ hơn góc bẹt có là $2n(n-1) : 2 = n(n-1)$ (cặp góc đối đỉnh).

b) Từ câu a) ta có $n(n-1) = 930 \Rightarrow n = 31$.

□

Bài 11. Qua điểm O vẽ 10 đường thẳng đôi một phân biệt. Xét các góc không có điểm trong chung. Chứng tỏ rằng tồn tại hai góc lớn hơn hoặc bằng 18°, tồn tại hai góc nhỏ hơn hằng bằng 18°.

Lời giải.

Có 10 đường thẳng đôi một phân biệt đi qua O nên có 20 góc không có điểm trong chung, tổng của 20 góc này bằng 360°.
Nếu mọi góc đều nhỏ hơn 18° thì tổng của chúng nhỏ hơn 360°, vô lí.
Do vậy tồn tại một góc lớn hơn hoặc bằng 18° mỗi góc này có một góc đối đỉnh với nó, mà hai góc đối đỉnh thì bằng nhau. Vậy tồn tại hai góc lớn hơn hoặc bằng 18°.
Lập luận tương tự suy ra cũng tồn tại hai góc nhỏ hơn hoặc bằng 18°. □

Bài 12. Ở phía ngoài góc tù xOy vẽ các tia Oz, Ot sao cho $Oz \perp Ox$, $Ot \perp Oy$. Gọi Om, On lần lượt là các tia phân giác của các góc xOy, zOt. Chứng tỏ rằng Om, On là hai tia đối nhau.

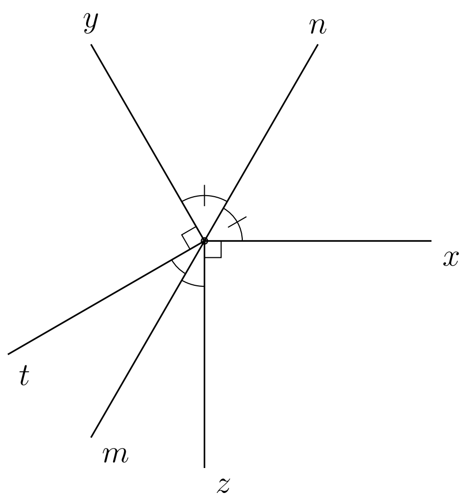
Lời giải.

Ta có On là tia phân giác của $\widehat{zOt}$ nên $\widehat{nOz} = \dfrac{1}{2}\widehat{tOz}$.

Ta có Om là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$ nên $\widehat{mOx} = \dfrac{1}{2}\widehat{xOy}$.

Do vậy $\widehat{mOx} + \widehat{nOz} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{xOy} + \widehat{tOz}\right) \quad (1)$.

Ta có $\widehat{xOy} + \widehat{yOt} + \widehat{tOz} + \widehat{zOx} = 360^\circ$.
Mà $\widehat{yOt} = \widehat{xOz} = 90^\circ$ (vì $Oz \perp Ox$, $On \perp Oy$)
nên $\widehat{xOy} + \widehat{tOz} = 180^\circ \quad (2)$.
Từ $(1), (2)$ ta có $\widehat{mOx} + \widehat{nOz} = \dfrac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$.
Suy ra $\widehat{mOx} + \widehat{xOz} + \widehat{zOn} = 180^\circ$.
Do đó $\widehat{mOn} = 180^\circ$. Vì vậy Om, On là hai tia đối nhau.

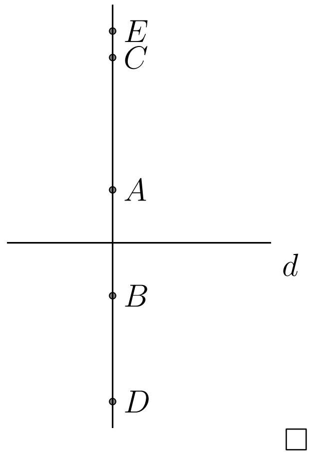


□

Bài 13. Cho đường thẳng d và các điểm A, B, C, D, E. Biết rằng $AB \perp d$, $BC \perp d$, $CD \perp d$, $DE \perp d$. Chứng tỏ rằng A, B, C, D, E thẳng hàng.

Lời giải.

$AB \perp d, BC \perp d \Rightarrow$ hai đường thẳng AB, BC trùng nhau.
Suy ra A, B, C thẳng hàng.
Mặt khác $CD \perp d$.
Mà $BC \perp d \Rightarrow B$, C, D thẳng hàng.
Suy ra A, B, C, D cùng thuộc đường thẳng AD.
Mà $DE \perp d$ nên E cũng thuộc đường thẳng AD.



□

§2. Hai đường thẳng song song

I. Tóm tắt lí thuyết

Định nghĩa 1. Hai đường thẳng a và b gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung. Kí hiệu $a \parallel b$.

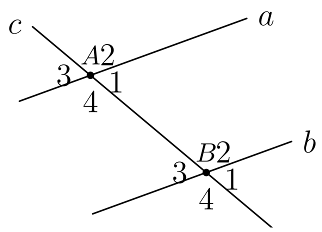
Tính chất 1. Hai đường thẳng song song thì

a) các góc đồng vị bằng nhau;

b) các góc so le trong bằng nhau;

c) các góc so le ngoài bằng nhau;

d) các góc trong cùng phía bù nhau.



Dấu hiệu nhận biết:

a) Nếu có một cặp góc so le trong (hoặc đồng vị) bằng nhau hoặc trong cùng phía bù nhau thì hai đường thẳng tương ứng song song;

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

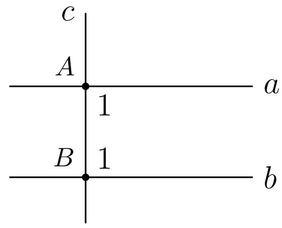
Định nghĩa 2. Hai góc có cạnh tương ứng song song là hai góc có đường thẳng chứa mỗi cạnh của góc này tương ứng song song với đường thẳng chứa một cạnh của góc kia.

II. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Cho đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b. Nếu có một cặp góc so le trong bằng nhau thì ta có kết luận được các cặp góc so le còn lại bằng nhau và các cặp góc đồng vị cũng bằng nhau hay không? Vì sao?
Lời giải.
Nếu có một cặp góc so le trong bằng nhau thì $a \parallel b$, do đó các cặp góc so le còn lại bằng nhau và các cặp góc đồng vị cũng bằng nhau. □

Câu 2. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau, đường thẳng c cắt a, b tương ứng tại A, B. Biết rằng hai góc trong cùng phía bằng nhau, hỏi có tính được các góc còn lại với đỉnh A và B hay không?
Lời giải.

Vì hai góc trong cùng phía bằng nhau nên $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$.
Lại có $a \parallel b$ nên

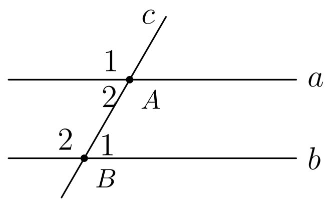


$$\begin{aligned} \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 &= 180^\circ \\ 2\widehat{A}_1 &= 180^\circ \\ \widehat{A}_1 &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Vậy các góc còn lại của đỉnh A và B đều bằng 90°.

□

Câu 3.
Cho đường thẳng c cắt hai đường thẳng a và b. Biết rằng hai góc trong cùng phía bằng nhau, hỏi a và b có song song với nhau hay không? Để a và b song song với nhau thì hai góc trong cùng phía phải cùng bằng bao nhiêu độ?



Lời giải.
Nếu hai góc trong cùng phía bằng nhau thì hai đường thẳng a, b không song song với nhau nếu tổng của hai góc đó nhỏ hơn 180°.
Để $a \parallel b$ thì

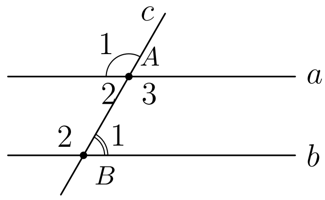
$$\begin{aligned} \widehat{A}_2 + \widehat{B}_2 &= 180^\circ \\ 2\widehat{A}_2 &= 180^\circ \\ \widehat{A}_2 &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Vậy để $a \parallel b$ thì $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_2 = 90^\circ$.

□

III. Học giải toán

Ví dụ 1.
Cho hình vẽ bên, biết $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 180^\circ$. Chứng minh rằng $a \parallel b$.



Lời giải.

Cách 1. Ta có $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 180^\circ$ (hai góc kề bù). Mà $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 180^\circ$ (giả thiết) nên $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_1$.
Vì $\widehat{A}_2$ và $\widehat{B}_1$ là hai góc so le trong nên $a \parallel b$.

Cách 2. Ta có $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ$ (hai góc kề bù). Mà $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 180^\circ$ (giả thiết) nên $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_2$.
Vì $\widehat{A}_1$ và $\widehat{B}_2$ là hai góc đồng vị nên $a \parallel b$.

Cách 3. Ta có $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_3$ (hai góc đối đỉnh). Mà $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = 180^\circ$ (giả thiết) nên $\widehat{A}_3 + \widehat{B}_1 = 180^\circ$.
Vì $\widehat{A}_3$ và $\widehat{B}_1$ là hai góc trong cùng phía nên $a \parallel b$.

□

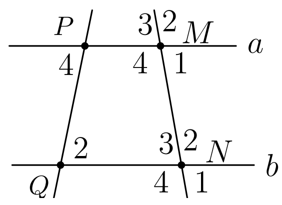
⚠ *Muốn chứng minh hai đường thẳng song song, ta có thể chứng minh một trong các khẳng định sau:*

a) Hai góc đồng vị bằng nhau;

b) Hai góc so le trong bằng nhau;

c) Hai góc trong cùng phía bù nhau.

Ví dụ 2.
Cho hình vẽ bên, biết $\widehat{P_4} = \widehat{Q_2}$ và $\widehat{M_4} = 100°$. Tính các góc còn lại đỉnh M và N.



Lời giải.
Ta có $\widehat{P_4} = \widehat{Q_2}$ (giả thiết) nên $a \parallel b$ (do hai góc này ở vị trí so le trong).
Ta tính các góc tại đỉnh M và N:

TH1. Tại M, ta có $\widehat{M_2} = \widehat{M_4} = 100°$ (hai góc đối đỉnh). Mà $\widehat{M_2} + \widehat{M_3} = 180°$ (hai góc kề bù) nên

$$\begin{aligned}\widehat{M_3} &= 180° - \widehat{M_2}\\ \widehat{M_3} &= 80°.\end{aligned}$$

Vì $\widehat{M_1}$ và $\widehat{M_3}$ là hai góc đối đỉnh nên $\widehat{M_1} = \widehat{M_3} = 80°$.

TH2. Tại N, ta có $\widehat{N_2} = \widehat{M_4} = 100°$ (hai góc so le trong), do đó $\widehat{N_4} = \widehat{N_2} = 100°$ (hai góc đối đỉnh). Vì $\widehat{N_2}$ và $\widehat{3}$ là hai góc kề bù nên

$$\begin{aligned}\widehat{N_2} + \widehat{N_3} &= 180°\\ \widehat{N_3} &= 180° - \widehat{N_2}\\ \widehat{N_3} &= 80°.\end{aligned}$$

Vì $\widehat{N_1}$ và $\widehat{N_3}$ là hai góc đối đỉnh nên $\widehat{N_1} = \widehat{N_3} = 80°$.

□

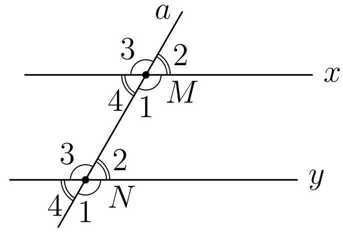
IV. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1.
Cho hình vẽ bên, khẳng định nào đúng? Biết đường thẳng a cắt hai đường thẳng $x \parallel y$ tại M và N, ta có

a) $\widehat{M_4} = \widehat{N_1}$; b) $\widehat{M_2} = \widehat{N_2}$;

c) $\widehat{M_3} = \widehat{N_2}$; d) $\widehat{M_1} = \widehat{N_3}$.



Lời giải.

a) $\boxed{\text{S}}$ vì $x \parallel y$ nên $\widehat{M_1} = \widehat{N_1}$ (hai góc đồng vị).

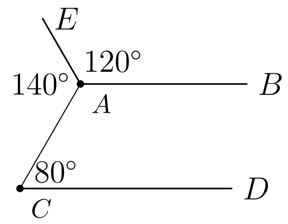
b) $\boxed{\text{Đ}}$ vì $x \parallel y$ nên $\widehat{M_2} = \widehat{N_2}$ (hai góc đồng vị).

c) $\boxed{\text{S}}$ vì $x \parallel y$ nên $\widehat{M_3} = \widehat{N_3}$ (hai góc đồng vị).

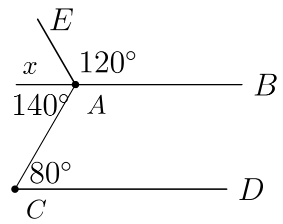
d) $\boxed{\text{Đ}}$ vì $x \parallel y$ nên $\widehat{M_1} = \widehat{N_3}$ (hai góc so le trong).

□

Bài 2.
Cho hình vẽ bên, chứng minh rằng $AB \parallel CD$.



Lời giải.
Kẻ tia Ax là tia đối của tia AB. Ta có



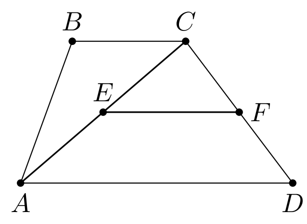
$$\begin{aligned} \widehat{BAE} + \widehat{EAx} &= 180^\circ \\ 120^\circ + \widehat{EAx} &= 180^\circ \\ \widehat{EAx} &= 180^\circ - 120^\circ \\ \widehat{EAx} &= 60^\circ. \end{aligned}$$

Vì tia Ax nằm giữa tia AE và tia AC nên

$$\begin{aligned} \widehat{EAx} + \widehat{xAC} &= 140^\circ \\ \widehat{xAC} &= 140^\circ - 60^\circ \\ \widehat{xAC} &= 80^\circ. \end{aligned}$$

Do đó $\widehat{xAC} = \widehat{ACD} = 80^\circ$ và hai góc này ở vị trí so le trong nên $AB \parallel CD$. □

Bài 3.
Cho hình vẽ bên, có $AD \parallel BC$, $EF \parallel AD$. Hãy cho biết



a) $\widehat{CAD}$ so le trong với góc nào?

b) $\widehat{ADC}$ đồng vị với góc nào?

c) Tìm góc trong cùng phía với $\widehat{ABC}$, $\widehat{EFD}$.

Lời giải.

a) $\widehat{CAD}$ so le trong với góc $\widehat{ACB}$.

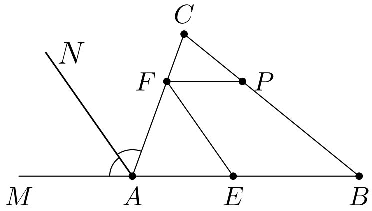
b) $\widehat{ADC}$ đồng vị với góc $\widehat{EFC}$.

c) Góc trong cùng phía với $\widehat{ABC}$ là góc $\widehat{BAD}$ và góc trong cùng phía với $\widehat{EFD}$ là góc $\widehat{ADC}$.

□

Bài 4. Cho tam giác ABC có tia AM là tia đối của tia AB. Tia AN là tia phân giác của góc $\widehat{MAC}$. Trên cạnh AC lấy điểm F tùy ý. Từ F kẻ FP song song AB (P thuộc cạnh BC) và kẻ FE song song với AN (E thuộc cạnh AB). Hãy chứng tỏ FE là tia phân giác góc $\widehat{AFP}$.

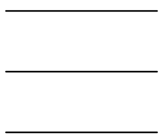
Lời giải.

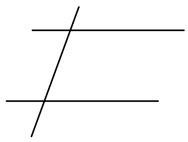


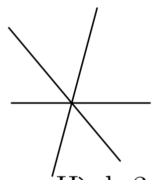
Vì AN là tia phân giác góc $\widehat{MAC}$ nên $\widehat{MAN} = \widehat{NAC} = \dfrac{1}{2}\widehat{MAC}$.
Vì $FP \parallel AB$ nên $\widehat{PFA} = \widehat{MAC}$ (hai góc so le trong).
Vì $FE \parallel AN$ nên $\widehat{EFA} = \widehat{NAC}$ (hai góc so le trong).
Suy ra $\widehat{EFA} = \widehat{NAC} = \dfrac{1}{2}\widehat{MAC} = \dfrac{1}{2}\widehat{PFA}$.
Lại có tia FE nằm giữa hai tia FP và FA nên FE là tia phân giác của góc $\widehat{AFP}$. □

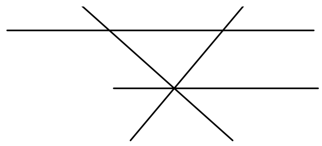
2. Nâng cao

Bài 5. Ba đường thẳng phân biệt trên mặt phẳng có thể chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?
Lời giải.


Hình 1


Hình 2


Hình 3


Hình 4

Ta xét các trường hợp sau:

TH1. Ba đường thẳng song song: mặt phẳng được chia thành 4 miền (Hình 1).

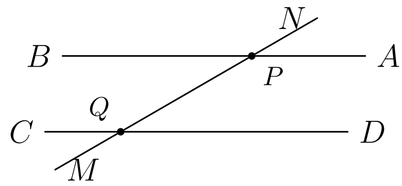
TH2. Hai đường thẳng song song bị cắt bởi đường thẳng thứ 3: mặt phẳng được chia thành 6 miền (Hình 2).

TH3. Ba đường thẳng cắt nhau tại một điểm: mặt phẳng được chia thành 6 miền (Hình 3).

TH4. Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một tại các điểm khác nhau: mặt phẳng được chia thành 7 miền (Hình 4).

□

Bài 6. Cho hai đường thẳng AB và CD. Đường thẳng MN cắt AB, CD lần lượt tại P, Q. Biết rằng $\widehat{APM} + \widehat{MPB} + \widehat{PQD} = 210^\circ$ và $\widehat{APM} = 5\widehat{MPB}$. Hãy chứng minh $AB \parallel CD$.
Lời giải.
Vì hai góc $\widehat{APM}$, $\widehat{MPB}$ kề bù và $\widehat{APM} = 5\widehat{MPB}$ nên



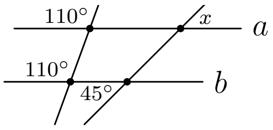
$$\begin{aligned} \widehat{APM} + \widehat{MPB} &= 180^\circ \\ 6\widehat{MPB} &= 180^\circ \\ \widehat{MPB} &= 30^\circ. \end{aligned}$$

Do $\widehat{APM} + \widehat{MPB} + \widehat{PQD} = 210^\circ$ nên

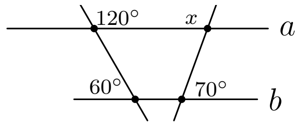
$$\begin{aligned} 180^\circ + \widehat{PQD} &= 210^\circ \\ \widehat{PQD} &= 30^\circ. \end{aligned}$$

Ta thấy $\widehat{MPB} = \widehat{PQD} = 30^\circ$ và hai góc này ở vị trí so le trong nên $AB \parallel CD$. □

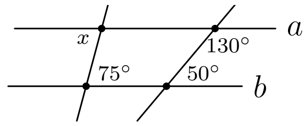
Bài 7. Tìm góc x trong các hình a, b, c.



Hình a

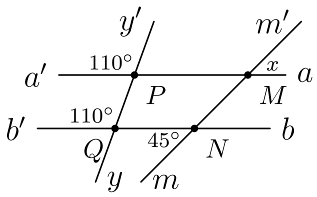


Hình b

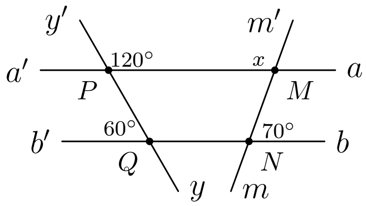


Hình c

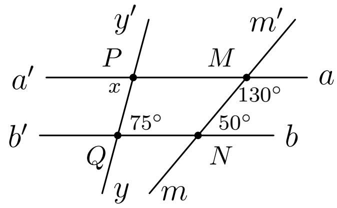
Lời giải.



Hình a



Hình b



Hình c

a) Ta có $\widehat{y'Pa'} = \widehat{y'Qb'} = 110^\circ$ và hai góc này ở vị trí đồng vị nên $a \parallel b$. Do đó
$$x = \widehat{PMN} = 45^\circ.$$

b) Ta có $\widehat{aPQ} = 180^\circ - \widehat{y'Pa} = 60^\circ = \widehat{PQb'}$ và hai góc này ở vị trí đồng vị nên $a \parallel b$. Do đó
$$x = \widehat{aMN} = \widehat{bNm} = 70^\circ.$$

c) Ta có $\widehat{aMN} + \widehat{bNM} = 180^\circ$ và hai góc này ở vị trí trong cùng phía nên $a \parallel b$. Do đó
$$x = \widehat{PQN} = 75^\circ.$$

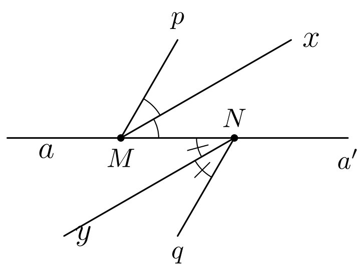
□

Bài 8. Trên đường thẳng aa' lấy hai điểm M và N (N thuộc tia Ma'). Trên nửa mặt phẳng đối nhau có bờ là aa', ta dựng hai tia Mp và Nq sao cho $\widehat{aMp} = 120^\circ$ và $\widehat{aNq} = 60^\circ$. Chứng minh rằng

a) Mp song song với Nq.

b) Các đường thẳng chứa tia phân giác của các góc $\widehat{pMa'}$ và $\widehat{aNq}$ song song với nhau.

Lời giải.



a) Vì $\widehat{aMp}$ và $\widehat{pMa'}$ là hai góc kề bù nên $\widehat{aMp} + \widehat{pMa'} = 180^\circ$, do đó
$$\begin{aligned} 120^\circ + \widehat{pMa'} &= 180^\circ \\ \widehat{pMa'} &= 60^\circ. \end{aligned}$$
Suy ra $\widehat{pMa'} = \widehat{aNq} = 60^\circ$. Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $Mp \parallel Nq$.

b) Gọi $Mx,\ Ny$ lần lượt là tia phân giác các góc $\widehat{a'Mp},\ \widehat{aNq}$. Khi đó
$$\begin{aligned} \widehat{a'Mx} &= \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ \\ \widehat{aNy} &= \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ. \end{aligned}$$

Suy ra $\widehat{a'Mx} = \widehat{aNy} = 30°$. Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $Mx \parallel Ny$. □

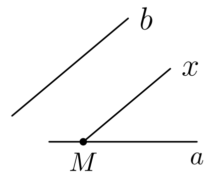
1) Một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì các tia phân giác của một cặp góc so le trong cũng song song với nhau.

2) Tương tự: các tia phân giác của một cặp góc so le ngoài và các tia phân giác của một cặp góc đồng vị cũng song song với nhau.

Bài 9. Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại O ở ngoài phạm vi tờ giấy. Hãy nêu cách đo góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng a, b đã cho.

Lời giải.

Lấy điểm M tùy ý trên đường thẳng a, kẻ $Mx \parallel b$. Khi đó góc giữa a và b bằng góc giữa Mx và a, do vậy ta chỉ cần đo góc giữa Mx và a thì sẽ suy ra góc giữa a và b.



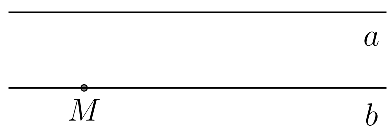
□

§3. Tiên đề Ơ-clít về hai đường thẳng song song. Từ vuông góc đến song song

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Tiên đề Ơ-clít về hai đường thẳng song song

Qua một điểm ở ngoài đường thẳng chỉ có một đường thẳng song song với đường thẳng đó.



Tính chất 1. Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì:

a) Hai góc so le trong bằng nhau;

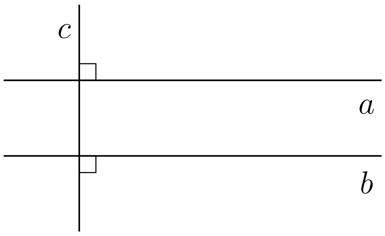
b) Hai góc đồng vị bằng nhau;

c) Hai góc trong cùng phía bù nhau.

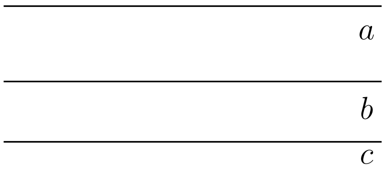
2. Liên hệ giữa vuông góc và song song

Tính chất 2. - Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

- Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia.



Tính chất 3. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chung song song với nhau.



3. Cách chứng minh hai đường thẳng song song, vuông góc

Cho hai đường thẳng phân biệt a và b. Để chứng minh $a \parallel b$.

- Ta chứng minh a và b cùng vuông góc với c.

$$\begin{cases} a \parallel c \\ b \parallel c \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$$

- Ta chứng minh a và b cùng song song với c.

$$\begin{cases} a \parallel c \\ a \parallel c \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$$

- Ta chứng minh hai góc so le trong bằng nhau hoặc hai góc đồng vị bằng nhau, hoặc hai góc trong cùng phía bù nhau.

Để chứng minh $b \perp c$.

- Ta chứng minh c vuông góc với a, mà a song song với b.

$$\begin{cases} a \parallel b \\ c \perp a \end{cases} \Rightarrow c \perp b.$$

II. Hỏi đáp nhanh

Câu 1 (7H1B5). Các phát biểu sau có diễn đạt đúng nội dung của tiên đề Ơ-clít hay không?

a) Qua một điểm M tùy ý có duy nhất một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.

b) Có duy nhất một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước.

Lời giải.

a) Có nếu M không nằm trên đường thẳng.

b) Sai.

□

Câu 2 (7H1B6). Cho hai đường thẳng song song với nhau a và b. Nếu đường thẳng d cắt một trong hai đường thẳng đã cho thì d có cắt đường thẳng còn lại hay không? Vì sao?

Lời giải.

Có. Vì một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó cũng vuông góc với đường thẳng kia. □

Câu 3 (7H1K6). Cho hai đường thẳng song song với nhau a và b, điểm M nằm ngoài hai đường thẳng ấy. Qua M vẽ đường thẳng x vuông góc với a, vẽ đường thẳng y vuông góc với b. Hỏi vị trí giữa hai đường thẳng x và y như thế nào?

Lời giải.

$x \equiv y$. □

Câu 4 (7H1B6). Quan sát chiếc bàn học, cánh cửa sổ, tivi, khung ảnh,... Có nhận xét gì về hai cạnh (mép) đối diện của các đồ dùng trên? Nhận xét gì về vị trí của mỗi cạnh và hai cạnh kề với nó?

Lời giải.

Song song. □

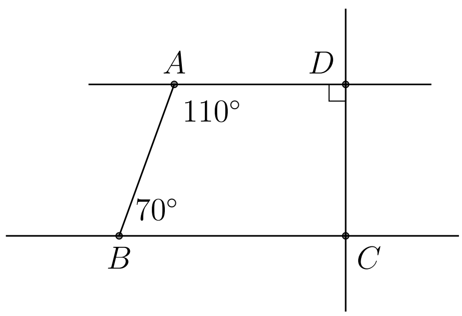
III. Học giải toán

Ví dụ 1 (7H1B5). Qua điểm A nằm ngoài đường thẳng d vẽ 2014 đường thẳng đôi một phân biệt. Chứng minh rằng có ít nhất 2013 đường thẳng cắt đường thẳng d.

Lời giải.

Giả sử trong 2014 đường thẳng đi qua A, có ít hơn 2013 đường thẳng cắt d. Khi đó còn ít nhất hai đường thẳng không cắt d. Nghĩa là có hai đường thẳng phân biệt cùng đi qua A và song song với d. Điều này trái với tiên đề Ơ-clít. Như vậy điều giả sử trên là sai.
Và ta có ít nhất 2013 đường thẳng cắt đường thẳng d. □

Ví dụ 2 (7H1B6). Cho hình sau. Chứng tỏ rằng $DC \perp BC$.



Lời giải.

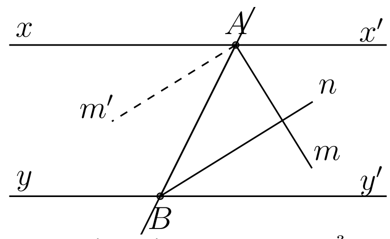
Ta có $\widehat{BAD} + \widehat{DBC} = 110° + 70° = 180°$. Mà $\widehat{A}$ và $\widehat{B}$ là hai góc trong cùng phía, do đó $AD \parallel BC$.
Ta có $DA \parallel BC$, $DC \perp AD$ suy ra $DC \perp BC$. □

Ví dụ 3 (7H1K6). Cho hai đường thẳng song song xx' và yy', một cát tuyến cắt xx' và yy' thứ tự tại A và B. Chứng minh rằng các tia phân giác của hai góc trong cùng phía vuông góc với nhau.

Lời giải.

Gọi Am là tia phân giác của góc $x'AB$, Bn là tia phân giác của góc ABy'. Kẻ tia phân giác Am' của góc xAB. Vì xAB và $x'AB$ là hai góc kề bù nên

$$Am' \parallel Am. \qquad (1)$$



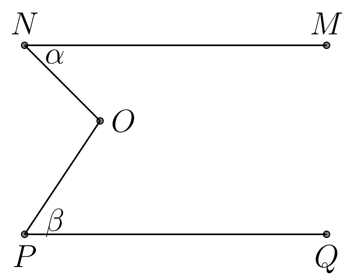
xAB và ABy' là hai góc so le tạo bởi hai đường thẳng song song xx', yy' và đường thẳng AB nên ta có

$$Am' \perp Bn. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) và căn cứ vào định lý về hai đường thẳng song song, ta có $AM \perp Bn$. □

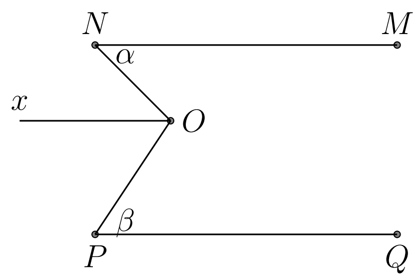
Ví dụ 4 (7H1B6).

Trong hình sau, biết $\widehat{MNO} = \alpha$, $\widehat{OPQ} = \beta$ và $\widehat{NOP} = \alpha + \beta$ trong đó $0° < \alpha, \beta < 90°$. Hãy chứng tỏ $MN \parallel PQ$.



Lời giải.

Qua O kẻ tia Ox nằm trong góc NOP và song song với MN, ta có $\widehat{NOx} = \widehat{MNO} = \alpha$ (so le trong).
Suy ra $\widehat{POx} = \beta = \widehat{OPQ}$, do đó $Ox \parallel PQ$.
Như vậy MN và PQ cùng song song với Ox nên $MN \parallel PQ$.



□

Ví dụ 5 (7H1K6). Cho góc $\widehat{xOy}$. Trên tia Oy lấy điểm M. Từ M kẻ $MN \perp Ox$ (N thuộc Ox). Từ N kẻ $NP \perp Oy$ (P thuộc Oy). Từ P kẻ $PQ \perp Ox$ (Q thuộc Ox). Từ Q kẻ $QE \perp Oy$ (E thuộc Oy).

a) Trong hình vẽ có những cặp đường thẳng nào song song? Tại sao?

b) Biết số đo của $\widehat{OQE} = 40°$. Tính số đo các góc nhọn trong hình vẽ.

Lời giải.

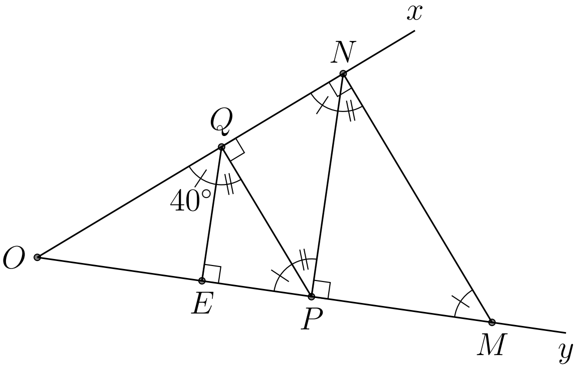
a) Theo đầu bài $MN \perp Ox$, $PQ \perp Ox$, vậy $MN \parallel PQ$ (cùng vuông góc với Ox).
Tương tự, $QE \perp Oy$, $NP \perp Oy$ vậy $QE \parallel NP$ (cùng vuông góc với Oy).

b)

$PQ \perp Ox$ (gt) nên ta có $\widehat{OQE}+\widehat{EQP} = 90^\circ$ mà $\widehat{OQE} = 40^\circ$ nên suy ra

$$\widehat{EQP} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ.$$

Ta có $\widehat{QPN} = \widehat{EQP} = 50^\circ$ (so le trong).
$\widehat{PNM} = \widehat{QPN} = 50^\circ$ (so le trong).
$NP \perp Oy$ nên ta có $\widehat{NPQ} + \widehat{QPE} = 90^\circ$, mà $\widehat{QPN} = 50^\circ$ (câu a) nên $\widehat{QPE} = 40^\circ$.
Từ đó $\widehat{ONP} = \widehat{OQE} = 40^\circ$ (hai góc đồng vị).
$\widehat{OMN} = \widehat{EPQ} = 40^\circ$ (hai góc đồng vị).



□

IV. Bài tập

1. Cơ bản

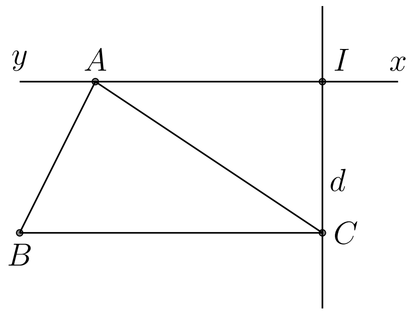
Bài 1 (7H1B6). Cho tam giác ABC. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B vẽ tia Ax sao cho $\widehat{xAC} = \widehat{ACB}$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C vẽ tia Ay sao cho $\widehat{yAB} = \widehat{ABC}$.

a) Hãy chứng tỏ hai tia Ax, Ay thuộc cùng một đường thẳng.

b) Qua C kẻ đường thẳng $d \perp BC$. Đường thẳng d có vuông góc với xy không? Vì sao?

Lời giải.

a) Ta có $\widehat{xAC} = \widehat{ACB} \Rightarrow Ax \parallel BC$.
Hai góc $\widehat{yAB}$ và $\widehat{ABC}$ là hai góc so le trong,
mà $\widehat{yAB} = \widehat{ABC} \Rightarrow Ay \parallel BC$.
Qua điểm A ở ngoài đường thẳng BC kẻ được $Ax \parallel BC$ và $Ay \parallel BC$. Vậy Ax và Ay phải thuộc cùng một đường thẳng (theo tiên đề Ơ-clít, qua A chỉ có thể kẻ được một đường thẳng song song với BC).



b) Gọi I là giao điểm của đường thẳng d với xy.
Vì $xy \parallel BC$ (câu a) nên $\widehat{xIC} = \widehat{ICB}$ (hai góc so le trong). Mà $\widehat{ICB} = 90^\circ$ ($d \perp BC$) nên $\widehat{xIC} = 90^\circ$.
Chứng tỏ $d \perp xy$.

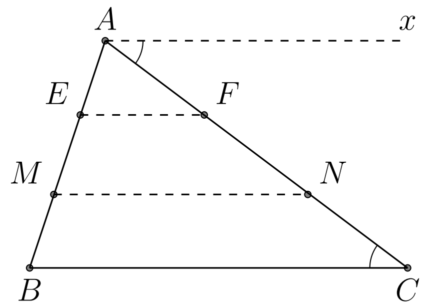
□

Bài 2 (7H1B6). Trên cạnh AB của tam giác ABC lấy điểm E và M. Từ E kẻ $EF \parallel BC$ (F thuộc AC), từ M kẻ $MN \perp BC$ (N thuộc AC).

a) Hãy chứng tỏ $EF \parallel MN$

b) Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B dựng góc $\widehat{CAx} = \widehat{ACB}$. Hãy chứng tỏ $Ax \parallel MN$.

Lời giải.



a) $EF \parallel MN$ (cùng song song với BC).

b) $\widehat{CAx} = \widehat{ACB}$ (gt). Vậy $Ax \parallel BC$ (hai góc so le trong bằng nhau).
Mà $MN \parallel BC$ (gt). Vậy $Ax \parallel MN$ (cùng song song với BC).

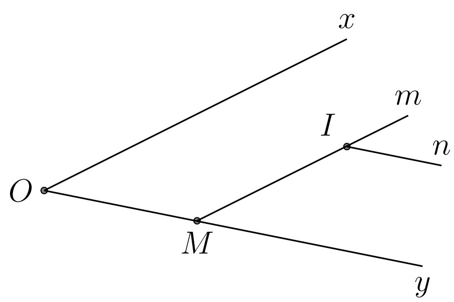
□

Bài 3 (7H1B6). Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$. Từ điểm I trong góc đó kẻ các tia $Im \parallel Ox$ và $In \parallel Oy$.

a) Hãy chứng tỏ $\widehat{xOy} = \widehat{mIn}$.

b) Có nhận xét gì về mối quan hệ giữa các cạnh của hai góc ấy?

Lời giải.



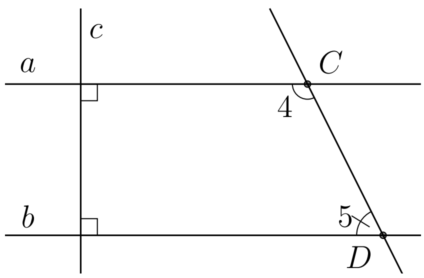
a) Vẽ tia Im' là tia đối của tia Im, cắt Oy tại M. Sử dụng tính chất của các góc đồng vị.

b) Các góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{mIn}$ có các cạnh tương ứng song song.

⚠ *Lưu ý rằng kết quả vẫn đúng khi xOy là góc tù. Từ đó, ta có kết quả: Hai góc có cạnh tương ứng song song thì bằng nhau (nếu chúng cùng nhọn hoặc cùng tù) hoặc bù nhau (nếu góc này nhọn còn góc kia tù).*

□

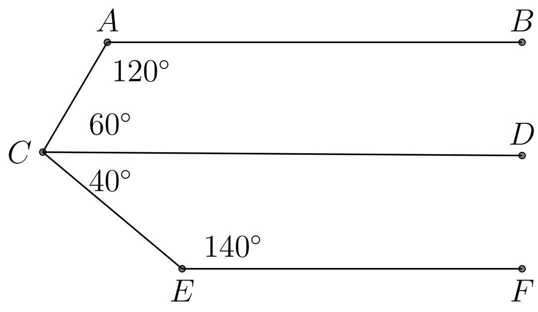
Bài 4 (7H1B6).
Cho hình sau, biết $a \perp c$ và $b \perp c$ và $2\widehat{C_4} = 3\widehat{D_5}$. Tìm số đo của bốn góc có đỉnh là C và bốn góc có đỉnh là D trong hình vẽ.



Lời giải.
Từ giả thuyết suy ra $\widehat{D_5} = 72^\circ$, $\widehat{C_4} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$. Các góc còn lại dựa vào góc đối đỉnh và kề bù để tính các góc còn lại. □

2. Nâng cao

Bài 5 (7H1K6). Cho hình vẽ sau. Chứng tỏ rằng $AB \parallel EF$.



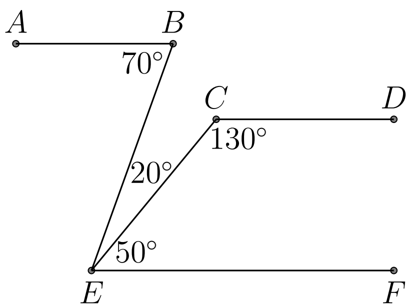
Lời giải.

Ta có $\widehat{BAC} + \widehat{ACD} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, $\widehat{BAC}$ và $\widehat{ACD}$ là hai góc trong cùng phía, suy ra $AB \parallel CD$. (1)

Mặt khác, có $\widehat{DCE} + \widehat{CEF} = 40^\circ + 140^\circ = 180^\circ$, $\widehat{DCE}$ và $\widehat{CEF}$ là hai góc trong cùng phía, suy ra $CD \parallel EF$. (2)

Từ (1) và (2) có $AB \parallel EF$. □

Bài 6 (7H1K6). Cho hình vẽ sau. Chứng tỏ rằng $AB \parallel CD$.



Lời giải.

Ta có $\widehat{ABE} = \widehat{BEF}$ $(= 70^\circ)$, $\widehat{ABE}$ và $\widehat{BEF}$ so le trong, suy ra $AB \parallel EF$. (1)

Mặt khác $\widehat{DCE} + \widehat{CEF} = 130^\circ + 50^\circ = 180^\circ$, $\widehat{DCE}$ và $\widehat{CEF}$ là hai góc trong cùng phía, suy ra $CD \parallel EF$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB \parallel CD$.

□

Bài 7 (7H1K6). Cho hai góc $\widehat{xOy}$ và $\widehat{yOz}$ là hai góc kề bù nhau. OF là tia phân giác của góc $\widehat{yOz}$. Trên tia lấy điểm H. Tại H kẻ đường thẳng vuông góc với OF, đường thẳng này cắt Oy tại M và Oz tại N. Chứng tỏ rằng

$$\widehat{OMN} = \widehat{MNO}.$$

Lời giải.

Kẻ OE là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$ thì $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$.

OF là tia phân giác của $\widehat{yOz}$ nên $\widehat{O_4} = \widehat{O_3}$.

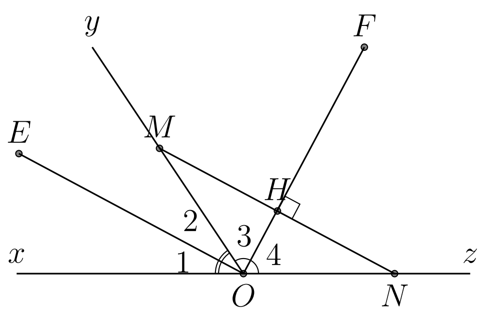
Vậy $\widehat{O_1} + \widehat{O_4} = \widehat{O_2} + \widehat{O_3}$.

Mà $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} + \widehat{O_4} = 180^\circ$.

Vậy $\widehat{O_2} + \widehat{O_3} = 90^\circ \Rightarrow OF \perp OE$.

Vì $OF \perp MN$ (đầu bài), nên $OE \parallel MN$ (cùng vuông góc với OF). Suy ra $\widehat{O_2} = \widehat{OMN}$ (so le trong) và $\widehat{O_1} = \widehat{ONM}$ (đồng vị). Mà $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (OE là phân giác).

Vậy $\widehat{OMN} = \widehat{ONM}$.

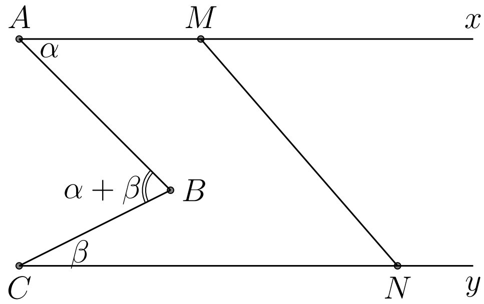


□

Bài 8 (7H1G6). Cho hình vẽ, biết $\widehat{BAx} = \alpha$, $\widehat{BCy} = \beta$; $\widehat{ABC} = \alpha + \beta$. Vẽ $MN \parallel AB$. Chứng tỏ rằng

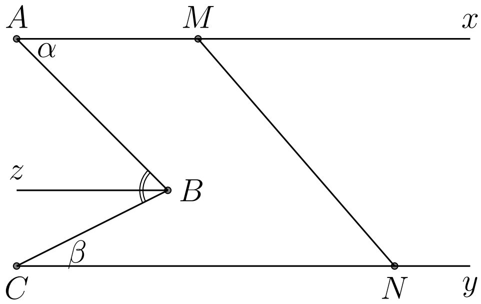
a) $Ax \parallel Cy$;

b) $\widehat{MNC} = \alpha$.



Lời giải.

a) Vẽ tia Bz sao cho $\widehat{ABz} = \alpha$. Ta có $\widehat{BAx} = \widehat{ABz}$ $(= \alpha)$.
$\widehat{BAx}$ và $\widehat{ABz}$ so le trong, suy ra $Ax \parallel Bz$. (1)
Ta có $\widehat{ABz} + \widehat{zBC} = \alpha + \beta$ nên $\widehat{zBC} = \beta$, suy ra $\widehat{zBC} = \widehat{BCy}$ $(= \beta)$, $\widehat{zBC}$ và $\widehat{BCy}$ so le trong $\Rightarrow Bz \parallel Cy$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $Ax \parallel Cy$.

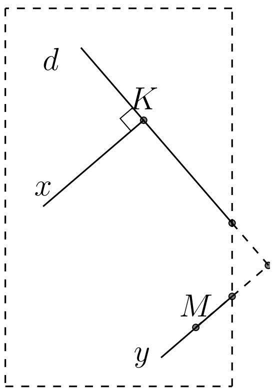


b) $\widehat{A} = \widehat{xMN}$ (hai góc đồng vị);
$\widehat{xMN} = \widehat{MNC}$ (hai góc so le trong).
Suy ra $\widehat{MNC} = \widehat{A} = \alpha$.

□

Bài 9 (7H1K6). Cho đường thẳng d và điểm M, chân đường vuông góc hạ từ M xuống d nằm ngoài phạm vi tờ giấy. Em hãy tìm cách kẻ đường thẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng d.

Lời giải.
Lấy điểm K thuộc d (phần nằm trong tờ giấy). Qua K kẻ đường thẳng Kx vuông góc với d, qua M kẻ đường thẳng $My \parallel Kx$, ta có My vuông góc với d.



□

§4. Định lý

I. Kiến thức cần nhớ

Định nghĩa 1. Một tính chất, một khẳng định được suy ra từ những khẳng định đúng bằng suy luận gọi là định lý.

⚠
- *Định lý luôn là khẳng định đúng.*
- *Định lý được phát biểu dưới dạng "Nếu (A) ... thì (B)..."*
- *Định lý gồm giả thiết (A) và kết luận (B).*

⚠ *Chứng minh một định lý là dùng lập luận và những kết quả đã biết để từ giả thiết suy ra kết luận. Cụ thể theo các bước sau*

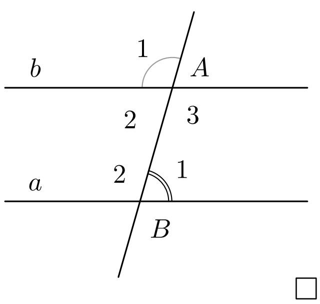
- *Bước 1. Giả thiết (điều đã biết).*
- *Bước 2. Suy luận có căn cứ hợp lôgic.*
- *Bước 3. Kết luận điều được (phải) suy ra.*

II. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Khẳng định "Nếu hai góc bằng nhau thì chúng đối đỉnh" có phải một định lí không?

Lời giải.

Không phải là một định lý vì khẳng định trên là một khẳng định sai.
Ví dụ cho a, b là hai đường thẳng song song như hình vẽ bên.
Ta có $\widehat{A_2} = \widehat{B_1}$ nhưng hai góc không ở vị trí đối đỉnh.



□

Câu 2. Một định lí. Nếu ta thay thế nội dung của giả thiết và kết luận cho nhau thì có được một định lí không? Lấy ví dụ minh họa cho hai khả năng xảy ra.

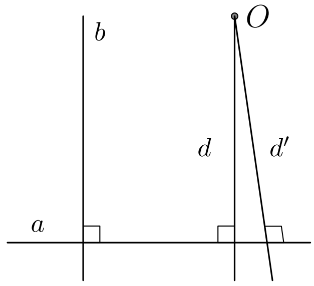
Lời giải.

- Các định lý phát biểu "Nếu ... thì ..." khi thay đổi giả thiết và kết luận cho nhau sẽ không được một định lý.
  Ví dụ "Nếu hai góc đối đỉnh thì bằng nhau" đúng.
  "Nếu hai góc bằng nhau thì đối đỉnh" sai.
- Các định lý phát biểu "... khi và chỉ khi ..." khi thay đổi giả thiết và kết luận cho nhau sẽ được một định lý.
  Ví dụ Định lý Pitagol "Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $AB^2 + AC^2 = BC^2$".

□

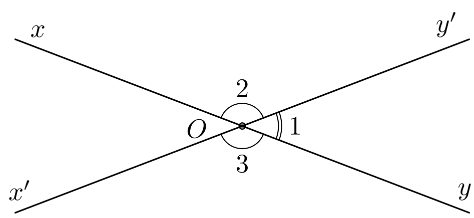
III. Học giải toán

Ví dụ 1.
Dựa vào tiên đề Ơ-clít về đường thẳng song song để chứng minh tính chất “Cho trước một đường thẳng a và điểm O. Có một và chỉ một đường thẳng d đi qua điểm O và vuông góc với đường thẳng a”



Lời giải.
Trong hình vẽ trên. Vẽ một đường thẳng b vuông góc với đường thẳng a và không đi qua O. Giả sử có hai đường thẳng phân biệt d và d' đi qua O và cùng vuông góc với a. Khi đó $d \parallel b$, $d' \parallel b$ vì cùng vuông góc với a. Như vậy qua O có hai đường thẳng song song với b, trái với tiên đề Ơ-clít. Vậy có duy nhất một đường thẳng d đi qua O và vuông góc với a. □

Ví dụ 2.
Viết giả thiết, kết luận rồi chứng minh định lí “Hai góc đối đỉnh thì bằng nhau”



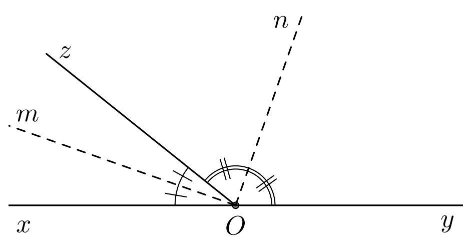
Lời giải.

- Giả thiết: Góc $\widehat{O_2}$ là góc đối đỉnh với góc $\widehat{O_3}$.
- Kết luận: $\widehat{O_2} = \widehat{O_3}$.
- Chứng minh.
  Theo giả thiết $\widehat{O_2}$ và $\widehat{O_3}$ đối đỉnh. Theo định nghĩa hai góc đối đỉnh thì Ox và Oy cùng thuộc đường thẳng nên $\widehat{O_2} + \widehat{O_1} = 180^\circ$ (1).
  Tương tự Ox' và Oy' cùng thuộc đường thẳng nên $\widehat{O_3} + \widehat{O_1} = 180^\circ$ (2).
  Từ (1) và (2) ta suy ra $\widehat{O_2} + \widehat{O_1} = \widehat{O_3} + \widehat{O_1} \Leftrightarrow \widehat{O_2} = \widehat{O_3}$.

□

⚠ *Dùng quy tắc bắc cầu.*

Ví dụ 3.
Chứng minh định lí “Góc tạo bởi hai tia phân giác của hai góc kề bù nhau là một góc vuông”.



Lời giải.

- Giả thiết: - Góc $\widehat{xOz}$ và $\widehat{zOy}$ là kề bù.
  - Om là phân giác góc $\widehat{xOz}$.
  - On là phân giác góc $\widehat{zOy}$.
- Kết luận: Góc $\widehat{mOn} = 90°$.
- Chứng minh.
  Do Om là phân giác góc $\widehat{xOz}$ nên $\widehat{zOm} = \dfrac{1}{2}\widehat{zOx}$ (1).
  Tương tự vì On là phân giác góc $\widehat{zOy}$ nên $\widehat{zOm} = \dfrac{1}{2}\widehat{zOy}$ (2).
  Từ (1) và (2) ta suy ra $\widehat{zOm} + \widehat{zOn} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{zOx} + \widehat{zOy}\right)$ (3).
  Vì hai góc $\widehat{xOz}$ và $\widehat{zOy}$ là hai góc kề bù nhau nên tia Oz nằm giữa hai tia Ox và Oy và có $\widehat{xOz} + \widehat{zOy} = 180°$.
  Suy ra $\dfrac{1}{2}\left(\widehat{zOx} + \widehat{zOy}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot 180° = 90°$ (4).
  Do Oz nằm giữa hai tia Om và On nên $\widehat{mOz} + \widehat{zOn} = \widehat{mOn}$ (5).
  Từ (3), (4) và (5) ta suy ra $\widehat{mOn} = 90°$.

□

⚠ *Một nửa góc bẹt là góc vuông.*

IV. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. a) Phát biểu và chứng minh tính chất của hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh.

b) Phát biểu tính chất hai tia phân giác của hai góc kề bù.

c) Phát biểu định lý về dấu hiệu nhận biết hai đường thẳng song song.

d) Phát biểu tính chất hai đường thẳng song song và một cát tuyến.

Lời giải.

a) Hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh là hai tia đối nhau (xem chứng minh ví dụ 5).

b) Hai tia phân giác của hai góc kề bù là hai tia vuông góc với nhau (xem chứng minh ví dụ 3).

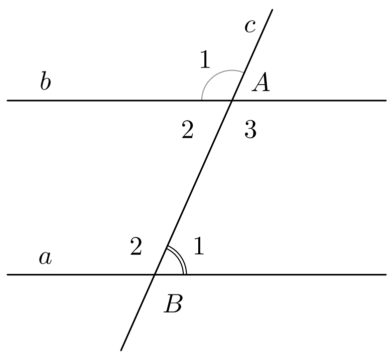
c) Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau (hoặc cặp góc đồng vị bằng nhau) thì a, b song song với nhau.

d) Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì

   (a) Hai góc so le trong bằng nhau.

   (b) Hai góc đồng vị bằng nhau.

   (c) Hai góc trong cùng phía bù nhau.



□

Bài 2. Cho hai mệnh đề sau

a) Nếu đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau (hoặc cặp góc đồng vị bằng nhau) thì a, b song song với nhau.

b) Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì

1. Hai góc so le trong bằng nhau.
2. Hai góc đồng vị bằng nhau.
3. Hai góc trong cùng phía bù nhau.

Ghi giả thiết và kết luận của hai mệnh đề trên. Cho biết mối quan hệ giữa giả thiết và kết luận của hai mệnh đề đó.

Lời giải.

a)
- Giả thiết: c cắt hai đường thẳng a, b và trong các góc tạo thành có một cặp góc so le trong bằng nhau (hoặc cặp góc đồng vị bằng nhau).
- Kết luận: a, b song song với nhau.

b) Nếu một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song thì

1.
   - Giả thiết: một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song
   - Kết luận: Hai góc so le trong bằng nhau.
2.
   - Giả thiết: một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song
   - Kết luận: Hai góc đồng vị bằng nhau.
3.
   - Giả thiết: một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song
   - Kết luận: Hai góc trong cùng phía bù nhau.

□

Bài 3. Chứng minh tính chất của hai góc có cạnh tương ứng song song "Nếu hai góc có cạnh tương ứng song song thì

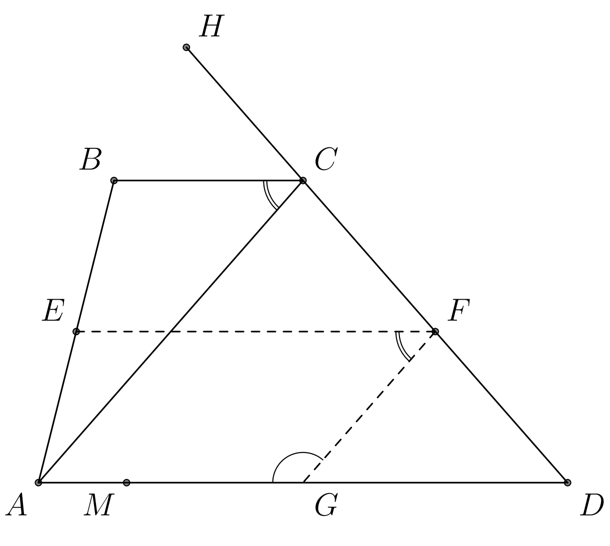
a) Chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù.

b) Chúng bù nhau nếu góc này nhọn góc kia tù."

Lời giải.

a) Giả sử hai góc có cặp cạnh tương ứng song song như hình vẽ bên.

- Xét trường hợp hai góc nhọn $\widehat{ACB}$ và $\widehat{GFE}$ là hai góc có cạnh tương ứng song song. Gọi d là đường thẳng đi qua C, F như hình vẽ.
Vì $BC \parallel EF$ nên $\widehat{BCH} = \widehat{EFC}$ (1) (hai góc đồng vị).
Tương tự, do $AC \parallel GF$ nên $\widehat{ACF} = \widehat{GFD}$ (2) (hai góc đồng vị).
Mặt khác ta có
$\widehat{BCH} + \widehat{BCA} + \widehat{ACF} = 180^\circ$ (3)
và
$\widehat{EFC} + \widehat{EFG} + \widehat{GFD} = 180^\circ$ (4)



Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra $\widehat{BCH}+\widehat{BCA}+\widehat{ACF}=\widehat{EFC}+\widehat{EFG}+\widehat{GFD} \Leftrightarrow \widehat{BCA}=\widehat{EFG}$.
-Trường hợp hai góc tù chứng minh tương tự.

b) Giả sử hai góc $\widehat{ACB}$ và $\widehat{FGM}$ là hai góc có cạnh tương ứng song song, ở đó có một góc nhọn và một góc tù.
Gọi d là đường thẳng đi qua C, F như hình vẽ.
Từ F dựng EF sao cho $EF \parallel BC$ nên $\widehat{BCA}=\widehat{EFG}$ (hai góc có cạnh tương ứng song song).
Do $MG \parallel BC$ suy ra $MG \parallel EF$ nên $\widehat{EFG}+\widehat{MGF}=180^\circ$ (hai góc trong cùng phía bù nhau).
Do đó $\widehat{BCA}+\widehat{MGF}=180^\circ$.

□

2. Nâng cao

Bài 4. Cho hai góc $\widehat{AOB}$ và $\widehat{CID}$ là hai góc có cạnh tương ứng song song, có OM là tia phân giác của $\widehat{AOB}$; IN là tia phân giác của $\widehat{CID}$. Chứng minh

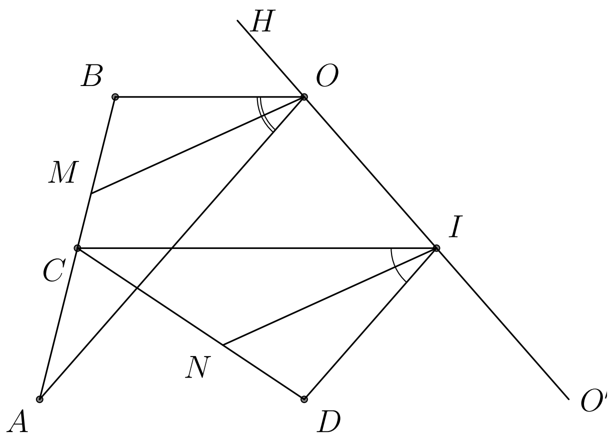
a) Nếu hai góc đó cùng nhọn hoặc cùng tù thì $OM \parallel IN$.

b) Nếu một góc là nhọn, góc kia là tù thì $OM \perp IN$.

Lời giải.

a) Giả sử hai góc $\widehat{AOB}$ và $\widehat{CID}$ có vị trí như hình vẽ bên, $BO \parallel IC$, $OA \parallel ID$.

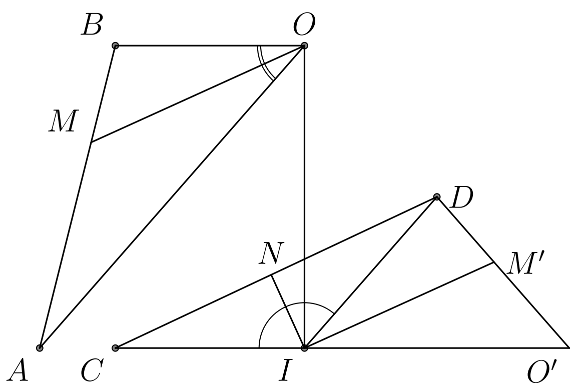
Trường hợp hai góc nhọn. Giả sử đường thẳng $O'H$ đi qua O, I.
Ta có $\widehat{AOB}=\widehat{CID}$ (1) (góc có cạnh tương ứng song song).
Vì OM là tia phân giác góc $\widehat{AOB}$ nên
$\widehat{MOB}=\widehat{MOA}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}$ (2).
Tương tự, vì IN là tia phân giác góc $\widehat{CID}$ nên
$\widehat{CIN}=\widehat{NID}=\frac{1}{2}\widehat{CID}$ (3).



Từ (1), (2) và (3) ta suy ra $\widehat{MOA}=\widehat{NID}$.
Mặt khác $AO \parallel DI$ nên $\widehat{AOI}=\widehat{DIO'}$ (hai góc đồng vị).
Do đó $\widehat{MOA}+\widehat{AOI}=\widehat{NID}+\widehat{DIO'} \Leftrightarrow \widehat{NIO'}=\widehat{MOI}$ ta suy ra $OM \parallel NI$.
- Trường hợp hai góc tù, ta chứng minh tương tự suy ra $OM \parallel NI$.

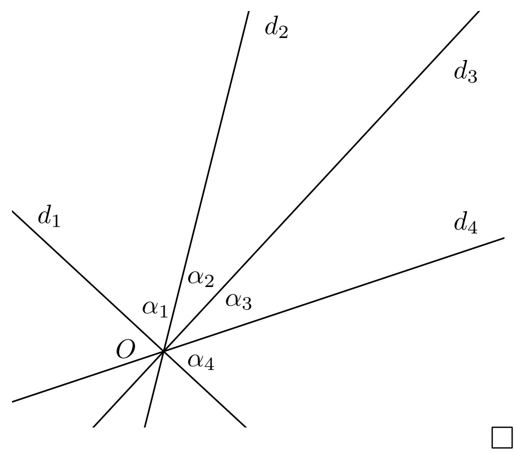
b) Nếu một góc là nhọn, góc kia là tù.
Không mất tính tổng quát, giả sử $\widehat{AOB}$ là góc nhọn và $\widehat{CID}$ là góc tù.

Giả sử $OB \parallel IC$ và $OA \parallel ID$. Qua I dựng tia IO' song song với OB.
Dễ thấy $\widehat{DIO'} + \widehat{CID} = 180^\circ$ và $\widehat{DIO'}$ là góc nhọn.
Theo chứng minh trên $\widehat{AOB} = \widehat{DIO'}$.
Gọi IM' là phân giác của góc $\widehat{DIO'}$. Ta dễ chứng minh được $IN \perp IM'$ $(*)$ và $\widehat{MOA} = \widehat{DIM'}$.
Nối O, I, vì $OA \parallel ID$ nên $\widehat{AOI} = \widehat{OID}$.
Khi đó
$\widehat{AOI} + \widehat{MOA} = \widehat{DIM'} + \widehat{OID} \Leftrightarrow \widehat{MOI} = \widehat{OIM'}$.
Suy ra $OM \parallel IM'$ $(**)$.
Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $OM \perp IN$.



□

Bài 5. Trên mặt phẳng cho 4 đường thẳng trong đó không có hai đường thẳng nào song song. Chứng minh rằng ta có thể tìm được 2 đường thẳng (trong 4 đường thẳng đã cho) tạo với nhau một góc không quá 45°.
Lời giải.
Không mất tính tổng quát giả sử các 4 đường thẳng là d'_1, d'_2, d'_3 và d'_4 không có hai đường thẳng nào song song.
Gọi O là một điểm bất kỳ, qua O lần lượt dựng các đường thẳng d_1, d_2, d_3 và d_4 sao cho $d'_1 \parallel d_1$, $d'_2 \parallel d_2$, $d'_3 \parallel d_3$ và $d'_4 \parallel d_4$.
Khi đó ta có 8 góc và số đo của tổng 8 góc là 360°. Dễ thấy 8 góc tạo thành 4 cặp góc đối đỉnh bằng nhau.
Không mất tính tổng quát giả sử các góc đó là α_1, α_2, α_3, α_4 và $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3 \le \alpha_4$.
Ta có $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 180^\circ$
suy ra $4\alpha_1 \le 180^\circ \Leftrightarrow \alpha_1 \le 45^\circ$.



□

Bài 6. Cho định lý về hai góc có cạnh tương ứng vuông góc "Nếu hai góc có cạnh tương ứng vuông góc thì

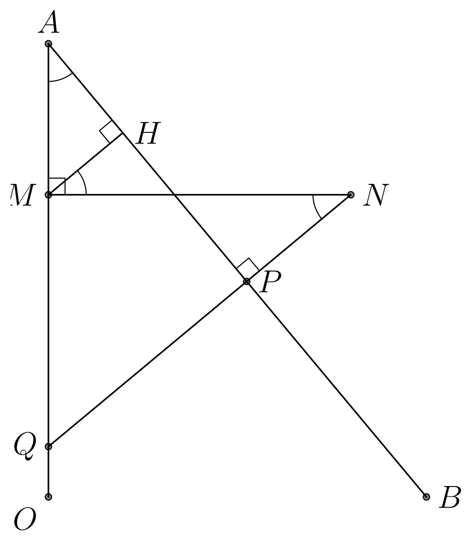
a) Chúng bằng nhau nếu hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù.

b) Chúng bù nhau nếu góc này nhọn, góc kia là tù".

Vẽ hình, ghi giả thiết, kết luận của định lý đó.
Lời giải.

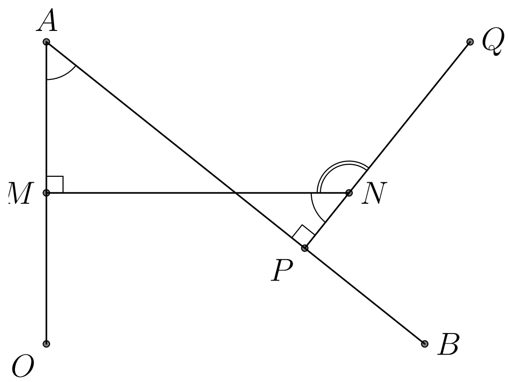
a) Giả sử có hai góc $\widehat{OAB}$ và $\widehat{MNQ}$ có cạnh tương ứng vuông góc.
Giả sử $OA \perp MN$ và $AB \perp NQ$.

- Trường hợp 1. Hai góc $\widehat{OAB}$ và $\widehat{MNQ}$ là hai góc nhọn. Như hình vẽ bên.
Qua M dựng $MH \parallel NQ$ (H thuộc AB).
Ta có $\widehat{HMN} = \widehat{MNP}$ (so le trong).
Do tam giác MAH vuông tại H nên $\widehat{MAH} + \widehat{AMH} = 90^\circ$ (1).
Do giả thiết ta có $\widehat{MAH} + \widehat{HMN} = 90^\circ$ (2).
Từ (1), (2) suy ra
$\widehat{MAH} + \widehat{AMH} = \widehat{MAH} + \widehat{HMN} \Leftrightarrow \widehat{MAH} = \widehat{HMN}$.
Do đó $\widehat{MAH} = \widehat{MNP}$.
- Trường hợp 2. Hai góc Hai góc $\widehat{OAB}$ và $\widehat{MNQ}$ là hai góc tù. Chứng minh tương tự.



b) Giả sử có hai góc $\widehat{OAB}$ là góc nhọn và $\widehat{MNQ}$ là góc tù và có cạnh tương ứng vuông góc. Giả sử $OA \perp MN$ và $AB \perp NQ$.

Giả sử góc như hình vẽ bên, giả sử QN cắt AB tại P.
Theo chứng minh trên $\widehat{OAB} = \widehat{MNP}$.
Do $\widehat{MNQ} + \widehat{MNP} = 180^\circ$
nên $\widehat{MNQ} + \widehat{OAB} = 180^\circ$.

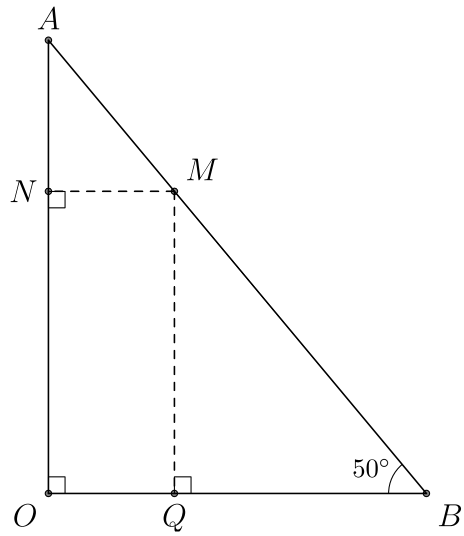


□

Bài 7.
Cho hình vẽ bên, biết $\widehat{N} = \widehat{O} = \widehat{Q} = 90^\circ$; $\widehat{B} = 50^\circ$.

a) Hãy chứng tỏ rằng $\widehat{NMQ} = 90^\circ$.

b) Tính số đo các góc $\widehat{NAM}$ và $\widehat{QMB}$.



Lời giải.

a) Do giả thiết suy ra $\begin{cases} MQ \perp OB \\ NO \perp OB \end{cases} \Rightarrow NO \parallel MQ$ (1).
Mặt khác $ON \perp NM$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra $MQ \perp MN$ hay $\widehat{NMQ} = 90^\circ$.

b) Theo giả thiết $\begin{cases} MN \perp OA \\ BO \perp OA \end{cases} \Rightarrow MN \parallel OB.$

Suy ra $\widehat{NMA} = \widehat{OBA}$ (hai góc đồng vị).

Do giả thiết $\widehat{OBA} = 50^\circ$ suy ra $\widehat{NMA} = 50^\circ$.

Xét $\triangle MNA$ ta có $\widehat{ANM} + \widehat{NMA} + \widehat{NAM} = 180^\circ$.

Theo chứng minh trên ta có $90^\circ + 50^\circ + \widehat{NAM} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{NAM} = 40^\circ$.

Do $MQ \parallel AO$ nên $\widehat{NAM} = \widehat{QMB}$ (hai góc đồng vị). Nên $\widehat{QMB} = 40^\circ$.

□

Bài 8. Cho tam giác ABC có điểm M trên cạnh BC. Vẽ ME song song với AB sao cho E thuộc AC, MF song song với AC sao cho F thuộc AB. Xác định vị trí của điểm M để MA là tia phân giác của góc EMF.

Lời giải.

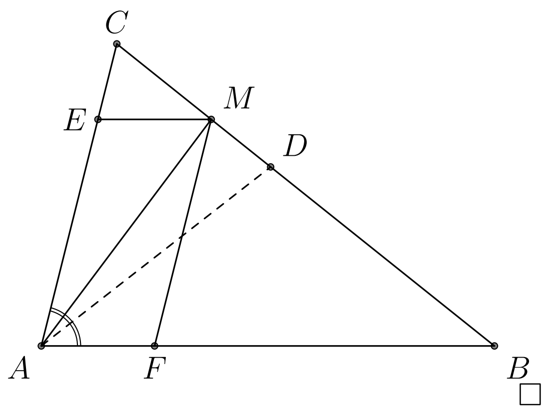
Giả sử AD là phân giác góc $\widehat{CAB}$ (D thuộc BC).

Để MA là tia phân giác của góc $\widehat{EMF}$ khi $\widehat{EMA} = \widehat{AMF}$.

Do $EM \parallel AB$ suy ra $\widehat{EMA} = \widehat{MAB}$ (1) (so le trong).

Tương tự, do $MF \parallel AC$ suy ra $\widehat{AMF} = \widehat{MAE}$ (2) (so le trong).

Từ (1) và (2) suy ra để MA là phân giác của góc $\widehat{EMF}$ khi điểm M là chân đường phân giác của góc A. Do đó M trùng với D.



□

V. Em có biết

1. Tiên đề và định lý

Một tiên đề trong toán học là một đề xuất hay một khẳng định được coi như luôn đúng mà không thể và không cần chứng minh.

Một hệ thống tiên đề hay gọn hơn, một hệ tiên đề thỏa mãn điều kiện là các suy diễn lôgic trên hệ thống tiên đề này không thể xảy ra mâu thuẫn.

Tiên đề là điều kiện cần thiết để xây dương bất cứ một lý thuyết nào. Bất cứ một khẳng định (hay đề xuất) nào đưa ra đều cần được giải thích hay xác minh bằng chính nó thì khẳng định đó sẽ không có giá trị, như vậy sẽ phải có một số vô hạn các khẳng định để giải thích bất kỳ một khẳng định nào. Vì thế cần phải có một (hay một số) khẳng định được công nhận là đúng để làm chỗ bắt đầu và đưa quá trình suy diễn vô hạn về hữu hạn. Những khẳng định được công nhận đúng đó chính là các tiên đề.

Ơ-clít đã nêu ra 10 tiên đề, áp dụng chung cho toán học. Riêng đối với môn Hình học, sau nhiều thế kỷ tranh luận, sửa đổi, người ta lấy 5 tiên đề, được giới thiệu trong sách giáo khoa hình học sau:

1. Qua hai điểm có thể xác định được một đường thẳng và chỉ một mà thôi.

2. Qua ba điểm không thẳng hàng có thể xác định được một mặt phẳng và chỉ một mà thôi.

3. Nếu đường thẳng có hai điểm nằm trong một mặt phẳng thì đường thẳng đó nằm hoàn toàn trong mặt phẳng đó.

4. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng sẽ có thêm một điểm chung thứ hai nữa.

5. Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Ngoài ra ta có thể phát biểu tiên đề 5 dưới các dạng sau

- Nếu qua điểm M nằm ngoài đường thẳng a có hai đường thẳng song song với a thì chúng trùng nhau.
- Cho điểm M ở ngoài đường thẳng a. Đường thẳng đi qua M và song song với a là duy nhất.

Định lý thường được dùng trong toán. Một định lý toán học là một mệnh đề toán học đã được, hoặc cần được chứng minh dựa trên một số hữu hạn các tiên đề và quá trình suy luận. Chứng minh các hoạt động chủ yếu trong ngành toán học.

2. Định lý thuận, định lý đảo

Trong một định lý, nếu đổi kết luận thành giả thiết và giả thiết kết luận thì ta được một mệnh đề mới, gọi là mệnh đề đảo của định lý đó. Trong trường hợp mà mệnh đề đảo này đúng thì mệnh đề đảo được gọi là định lý đảo của định lý đã cho và định lý đã cho gọi là định lý thuận.
Nói chung, mệnh đề đảo của một định lý không phải luôn đúng. Khi mệnh đề đảo cũng đúng, ta nói hai mệnh đề là tương đương. Hai mệnh đề là tương đương ký hiệu bởi $\Leftrightarrow$, đọc là khi và chỉ khi.

VI. Đi xa hơn

1. Phương pháp chứng minh phản chứng

Phương pháp chứng minh phản chứng thuộc loại chứng minh gián tiếp. Để chứng tỏ kết luận của bài toán là đúng, ta tìm cách chứng tỏ phủ định của kết luận là sai.
Cần tiến hành qua ba bước:

- Bước 1. (Phủ định của kết luận) Giả sử có điều trái với kết luận của bài toán.
- Bước 2. (Rút ra điều vô lí) Từ điều giả sử trên, lập luận dẫn đến điều vô lý (điều vô lý có thể là trái với giả thiết hoặc trái với các kiến thức đúng đã biết).
- (Khẳng định kết luận) Vậy điều giả sử là sai, điều cần chứng minh là đúng.

Thường dùng ba hình thức chứng minh phản chứng sau đây

1. Phủ định kết luận rồi suy ra điều trái với giả thiết.
2. Phủ định kết luận rồi suy ra điều trái với một điều đúng nào đó.
3. Phủ định điều kết luận rồi suy ra hai điều mâu thuẫn.

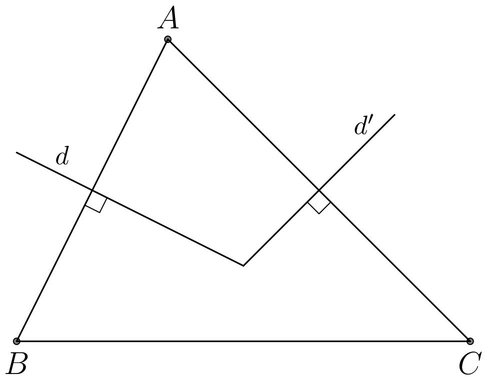
Trong các mục trên ta sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng để giải quyết một số bài toán (các ví dụ và bài tập). Sau đây ta xét thêm một số bài toán mà phoung pháp chứng minh phản chứng thể hiện rõ tính ưu việt của nó.

2. Một số ví dụ

Ví dụ 4. Chứng tỏ rằng hai đường trung trực của một tam giác luôn cắt nhau.

Lời giải.

Giả sử tam giác ABC có hai đường trung trực cạnh AB, AC lần lượt là d, d'.
Giả sử d và d' không cắt nhau. Khi đó có các trường hợp sau:
Trường hợp 1. Hai đường thẳng d, d' trùng nhau.
Ta suy ra $AB \perp d$ và $AC \perp d$ mâu thuẫn.
Trường hợp 2. Hai đường thẳng d và d' song song.
Do giả thiết $AB \perp d$, $AC \perp d'$ và $d \parallel d'$
suy ra $\begin{cases} AB \perp d \\ AC \perp d \end{cases}$ mâu thuẫn.
Vậy d và d' luôn cắt nhau tại một điểm.

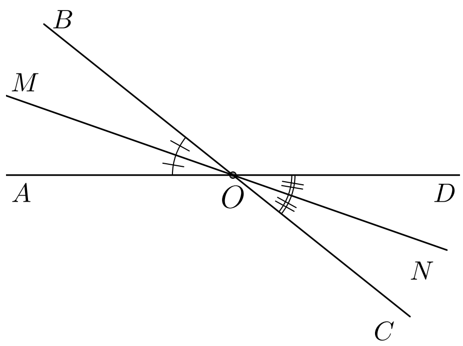


□

Ví dụ 5. Chứng tỏ rằng hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh là hai tia đối nhau

Lời giải.

Xét hai góc đối đỉnh $\widehat{AOB}$, $\widehat{COD}$ và OM, ON lần lượt là hai tia phân giác của hai góc $\widehat{AOB}$, $\widehat{COD}$.
Giả sử hai tia OM và ON không đối nhau suy ra $\widehat{MON} \neq 180^\circ$.
Do đó $\widehat{MOC} + \widehat{NOC} \neq 180^\circ \quad (1)$.
Mà $\widehat{MOC} + \widehat{BOM} = 180^\circ \quad (2)$ (góc kề bù).
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{NOC} \neq \widehat{MOB} \quad (*)$.
Mặt khác $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ (góc đối đỉnh).
ON là tia phân giác góc $\widehat{COD}$ nên $\widehat{NOC} = \frac{1}{2}\widehat{COD}$.



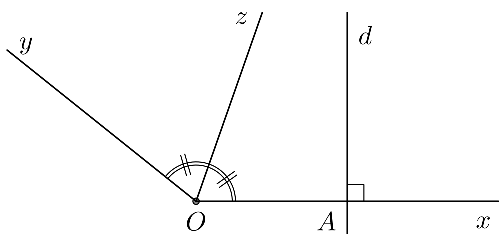
Tương tự OM là tia phân giác góc $\widehat{AOB}$ nên $\widehat{MOB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.

Từ giả thiết ta suy ra $\widehat{NOC} = \widehat{MOB} \quad (**)$.
Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra mâu thuẫn với giả thiết, vậy điều giả sử là sai.
Do đó OM và ON là hai tia đối nhau. □

Ví dụ 6. Cho góc xOy khác góc bẹt, vẽ Oz là tia phân giác của góc xOy. Gọi A là điểm trên tia Ox (A khác O). Qua A vẽ đường thẳng d vuông góc với tia Ox. Chứng minh rằng hai đường thẳng Oz và d cắt nhau.

Lời giải.

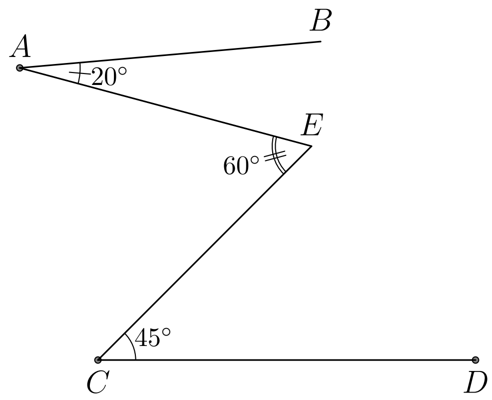
Giả sử Oz và d không cắt nhau, suy ra $Oz \parallel d$.
Do giả thiết ta có $d \perp Ox$ vì $Oz \parallel d$ suy ra $Oz \perp Ox$, hay $\widehat{xOz} = 90^\circ$.
Do vậy $\widehat{xOy} = 180^\circ$ mâu thuẫn với giả thiết là $\widehat{xOy}$ khác góc bẹt. Vậy điều giả sử là sai. Do đó Oz và d cắt nhau.



□

Ví dụ 7.

Cho hình vẽ như hình bên, biết $\widehat{BAE} = 20°$, $\widehat{AEC} = 60°$, $\widehat{ECD} = 45°$. Chứng minh rằng hai đường thẳng AB và CD cắt nhau.



Lời giải.

Giả sử $AB \parallel CD$. Kẻ $EF \parallel AB$.

Ta có $\widehat{BAE} = \widehat{AEF}$ (so le trong). Nên $\widehat{BAE} = \widehat{AEF} = 20°$.

Vì $EF \parallel AB$, $AB \parallel CD$ suy ra $EF \parallel CD$.

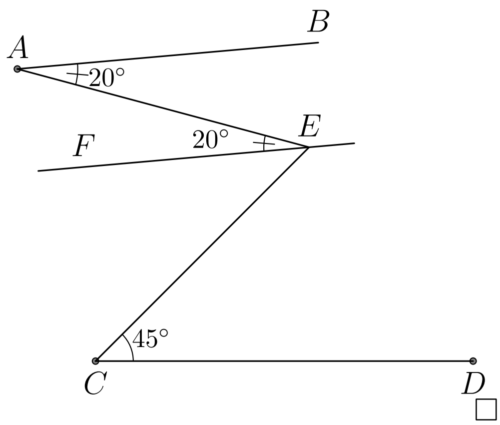
Suy ra $\widehat{CEF} = \widehat{ECD}$ (so le trong).

Do đó $\widehat{CEF} = 45°$.

Khi đó $\widehat{AEC} = \widehat{AEF} + \widehat{CEF} = 20° + 45° = 65°$, trái với giả thiết.

Vậy điều giả sử là sai.

Do đó hai đường thẳng AB, CD cắt nhau.



□

⚠ *Giả sử $AB \parallel CD$. Hãy tìm mối quan hệ giữa góc $\widehat{AEC}$ và hai góc $\widehat{BAE}$ và $\widehat{ECD}$.*

Chương 2

TAM GIÁC

§1. Tổng ba góc của tam giac

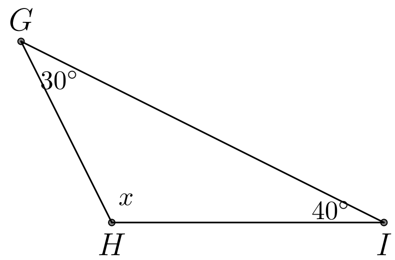
I. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Có tồn tại tam giác có hai góc vuông không? Tại sao?

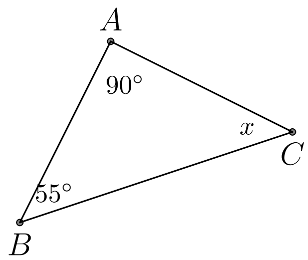
Lời giải.

Không tồn tại tam giác có hai góc vuông vì tổng ba góc trong tam giác là 180°. □

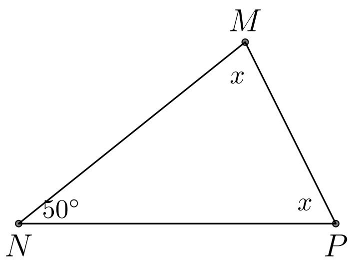
Câu 2. Tính số đo góc x trong hình dưới đây?



Hình $a)$



Hình $b)$



Hình $c)$

Lời giải.

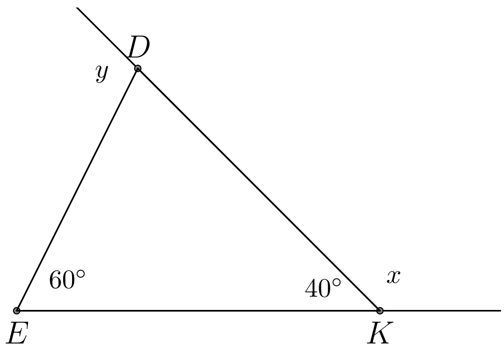
a) Ta có
$$x + 30^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow x = 180^\circ - 30^\circ - 40^\circ \Leftrightarrow x = 110^\circ.$$

b) Ta có
$$x + 90^\circ + 55^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow x = 180^\circ - 90^\circ - 55^\circ \Leftrightarrow x = 35^\circ.$$

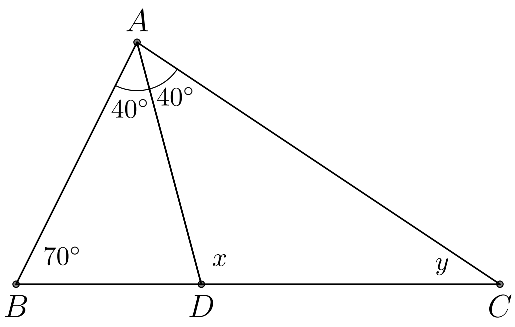
c) Ta có
$$x + x + 50^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 2x = 180^\circ - 50^\circ \Leftrightarrow 2x = 130^\circ \Leftrightarrow x = 65^\circ.$$

□

Câu 3. Tính số đo các góc x, y trong hình bên?



Hình $a)$



Hình $b)$

Lời giải.

a) Xét $\triangle DEK$ ta có $\widehat{D} + \widehat{E} + \widehat{K} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{D} = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$.
Ta có x là góc ngoài của $\triangle DEK$ nên $x = 80^\circ + 60^\circ = 140^\circ$.
Ta có y là góc ngoài của $\triangle DEK$ nên $y = 40^\circ + 60^\circ = 100^\circ$.

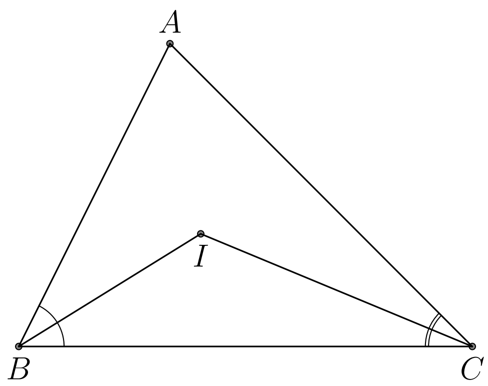
b) Ta có x là góc ngoài của $\triangle ABD$ nên $x = 40^\circ + 70^\circ = 110^\circ$.
Xét $\triangle ACD$ ta có $x + y + \widehat{CAD} = 180^\circ \Leftrightarrow y = 180^\circ - 40^\circ - 110^\circ = 30^\circ$.

□

Câu 4. Các tia phân giác của góc B và C cắt nhau tại I. Hỏi $\widehat{BIC}$ có thể là góc vuông được không? Có thể là góc nhọn được không?

Lời giải.

Ta có $\widehat{BIC} + \dfrac{1}{2} \cdot \widehat{B} + \dfrac{1}{2} \cdot \widehat{C} = 180^\circ$
$\Leftrightarrow 2 \cdot \widehat{BIC} + \widehat{B} + \widehat{C} = 360^\circ$
$\Leftrightarrow 2 \cdot \widehat{BIC} = 360^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) \quad (1)$
Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$
$\Leftrightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} \quad (2)$
Từ (1) và (2) suy ra
$2\widehat{BIC} = 360^\circ - (180^\circ - \widehat{A}) = 180^\circ + \widehat{A}$
$\Leftrightarrow \widehat{BIC} = 90^\circ + \dfrac{\widehat{A}}{2}$.
Vậy $\widehat{BIC}$ không có thể là góc vuông hay là góc nhọn được mà là một góc tù.



□

II. Học giải toán

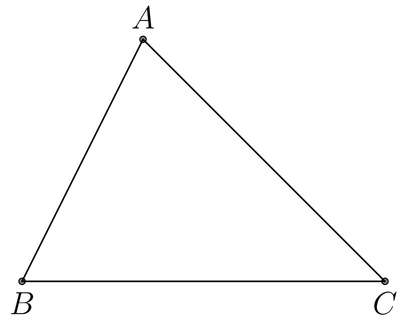
Ví dụ 1. Tính các góc của $\triangle ABC$ biết $\widehat{A} - \widehat{B} = 22^\circ$ và $\widehat{B} - \widehat{C} = 22^\circ$.

Lời giải.

Từ giả thiết $\widehat{A}-\widehat{B}=22^\circ$ và $\widehat{B}-\widehat{C}=22^\circ$ suy ra $\widehat{A}=22^\circ+\widehat{B}$ và $\widehat{C}=\widehat{B}-22^\circ$.
Do đó

$$\begin{aligned}\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} &= \left(22^\circ+\widehat{B}\right)+\left(\widehat{B}+\widehat{B}-22^\circ\right)\\ &= 180^\circ\end{aligned}$$

$\Rightarrow 3\widehat{B}=180^\circ \Rightarrow \widehat{B}=60^\circ; \widehat{A}=82^\circ; \widehat{C}=38^\circ.$



□

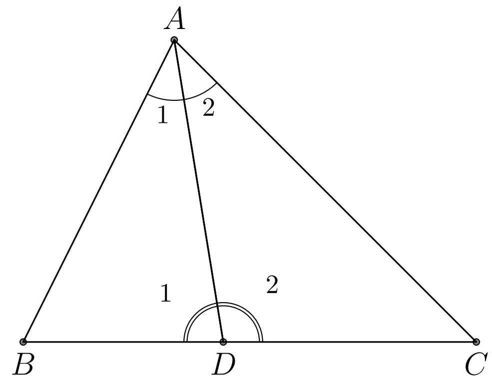
Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B}-\widehat{C}=20^\circ$. Đường phân giác của góc $\widehat{A}$ cắt BC tại D. Tính số đo của các góc $\widehat{ADB}$, $\widehat{ADC}$.

Lời giải.
Xét $\triangle ABD$ có góc $\widehat{D_2}$ là góc ngoài tại đỉnh D của tam giác nên

$$\widehat{D_2}=\widehat{A_1}+\widehat{B} \text{ (tính chất).} \qquad (1)$$

Tương tự với $\triangle ACD$ có góc $\widehat{D_1}$ là góc ngoài nên

$$\widehat{D_1}=\widehat{A_2}+\widehat{C} \text{ (tính chất).} \qquad (2)$$



Từ (1) và (2) ta có

$$\begin{aligned}\widehat{D_2}-\widehat{D_1} &= \widehat{A_1}-\widehat{A_2}+\widehat{B}-\widehat{C}\\ &= \left(\widehat{A_1}-\widehat{A_2}\right)+\left(\widehat{B}-\widehat{C}\right).\end{aligned}$$

Vì AD là tia phân giác của góc A nên $\widehat{A_1}=\widehat{A_2} \Rightarrow \widehat{A_1}-\widehat{A_2}=0$ và $\widehat{B}-\widehat{C}=20^\circ$ (giả thiết).
Vậy

$$\widehat{D_2}-\widehat{D_1}=20^\circ. \qquad (3)$$

Mặt khác vì $\widehat{D_2}$ và $\widehat{D_1}$ là hai góc kề bù nên

$$\widehat{D_2}+\widehat{D_1}=180^\circ. \qquad (4)$$

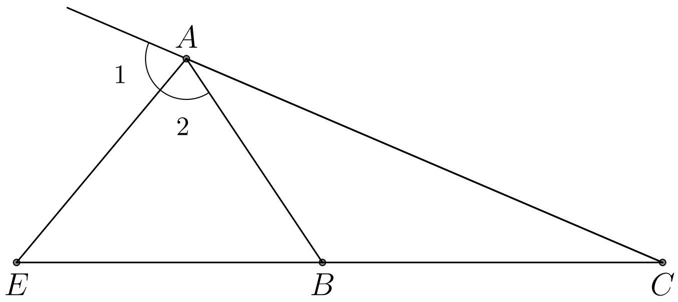
Cộng từng vế (3) với (4) ta có $2\widehat{D_2}=200^\circ \Rightarrow \widehat{D_2}=100^\circ$ và $\widehat{D_1}=80^\circ$. □

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B}>\widehat{C}$. Đường phân giác của góc ngoài đỉnh A cắt đường thẳng BC ở E.

a) Chứng minh rằng $\widehat{AEB}=\dfrac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}$.

b) Tính số đo của góc B và góc C, biết rằng $\widehat{A}=60^\circ$ và $\widehat{AEB}=15^\circ$.

Lời giải.



a) Một mặt, ta có $\widehat{ABC} = \widehat{E} + \widehat{A_2}$ nên $\widehat{E} = \widehat{ABC} - \widehat{A_2}$ ($\widehat{ABC}$ là góc ngoài ở đỉnh B của $\triangle AEB$). (1)
Mặt khác ta lại có
$\widehat{E} = \widehat{A_1} - \widehat{C}$ ($\widehat{A_1}$ là góc ngoài ở đỉnh A của $\triangle AEC$). (2)
Cộng từng vế (1) và (2) với chú ý rằng $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$, ta suy ra

$$\widehat{AEB} = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}.$$

b) Từ giả thiết và từ a) suy ra $\widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ$, kết hợp với $\widehat{B} + \widehat{C} = 120^\circ$ (do $\widehat{A} = 60^\circ$).
Tìm được $\widehat{B} = 75^\circ, \widehat{C} = 45^\circ$.

□

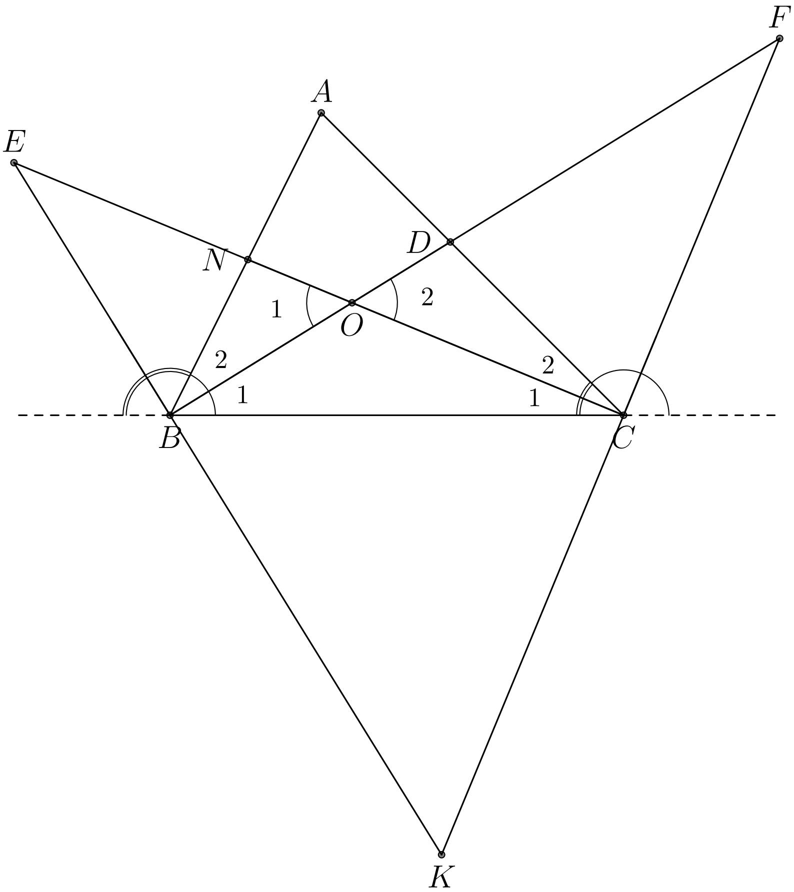
Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ có góc $\widehat{A} = \alpha\,(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$, các đường phân giác BD, CN cắt nhau tại O. Tia phân giác góc ngoài tại đỉnh B cắt tia CN tại E. Tia phân giác góc ngoài tại đỉnh C cắt BD tại F.

a) Tính số đo góc $\widehat{BOC}$.

b) Chứng minh: $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = \dfrac{\alpha}{2}$

c) Tia EB và FC cắt nhau tại K. Chứng minh $\widehat{BOC}$ và $\widehat{K}$ là hai góc kề bù.

Lời giải.



a) Xét $\triangle ABC$ có BD và CN là tia phân giác của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ nên $\widehat{B_1} = \dfrac{\widehat{B}}{2}$ và $\widehat{C_1} = \dfrac{\widehat{C}}{2}$ (tính chất).
Vậy
$$\widehat{B_1} + \widehat{C_1} = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{1}{2}\left(\widehat{B} + \widehat{C}\right) \tag{1}$$
mà $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ (tổng các góc trong tam giác).
$$\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} = 180^\circ - \alpha \tag{2}$$
Xét $\triangle BOC$ có: $\widehat{BOC} + \widehat{B_1} + \widehat{C_1} = 180^\circ$ (tính chất)
$$\Rightarrow \widehat{BOC} = 180^\circ - \left(\widehat{B_1} + \widehat{C_1}\right) \tag{3}$$
mà $\widehat{B_1} + \widehat{C_1} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{B} + \widehat{C}\right) = \dfrac{1}{2}(180^\circ - \alpha)$
Thay vào (3) ta có
$$\Rightarrow \widehat{BOC} = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha)$$
Vậy
$$\Rightarrow \widehat{BOC} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

b) Xét $\triangle BOE$ có $EB \perp BO$ (chứng minh trên).
Xét $\triangle FCO$ có $FC \perp CO$ (tính chất hai tia phân giác của hai góc bù).
Vậy $\triangle BOE$ và $\triangle FCO$ là hai tam giác vuông tại B và C.
Vì trong tam giác vuông hai góc nhọn phụ nhau nên $\widehat{E} + \widehat{O_1} = \widehat{F} + \widehat{O_2} = 90^\circ \quad (4)$.
Vì $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (đối đỉnh) nên $\widehat{E} = \widehat{F}$.

Mà $\widehat{BOC} = \widehat{E} + \widehat{EBO}$ (góc ngoài của $\triangle BEO$).
Trong đó: $\widehat{BOC} = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$; $\widehat{EBO} = 90^\circ$ (chứng minh trên).
suy ra $90^\circ + \dfrac{\alpha}{2} = \widehat{E} + 90^\circ \Rightarrow \widehat{E} = \dfrac{\alpha}{2} = \widehat{F}$.

c) Xét $\triangle BKF$ có $\widehat{FBK} = 90^\circ$ (vì BE, BF là các tia phân giác). Vậy $\triangle BKF$ vuông tại B.
$\Rightarrow \widehat{K} + \widehat{F} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{K} = 90^\circ - \widehat{F}$.
Từ đó $\widehat{BOC} + \widehat{K} = \left(90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right) + \left(90^\circ - \widehat{F}\right) = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2} + 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2} = 180^\circ$.
Vậy $\widehat{BOC}$ và $\widehat{K}$ là hai góc bù nhau.

□

III. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Tia phân giác của góc $\widehat{BAH}$ cắt BH ở D. Chứng minh rằng:

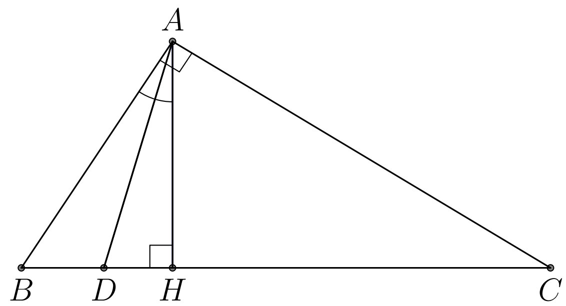
a) $\widehat{ABH} = \widehat{HAC}$.

b) $\widehat{ADC} = \widehat{DAC}$.

Lời giải.

a) $\triangle HAB$ vuông tại H
$\Rightarrow \widehat{BAH} + \widehat{ABH} = 90^\circ$.
Mặt khác $\widehat{BAH} + \widehat{HAC} = 90^\circ$.
Do đó, $\widehat{ABH} = \widehat{HAC}$.

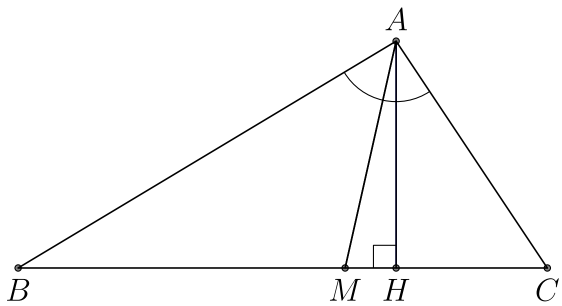
b) $\triangle HAD$ vuông tại H
$\Rightarrow \widehat{ADC} + \widehat{DAH} = 90^\circ$.
Mà $\widehat{DAC} + \widehat{BAD} = 90^\circ \left(= \widehat{BAC}\right)$.
$\widehat{BAD} = \widehat{DAH}$ (AD là tia phân giác của $\widehat{BAH}$).
Suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{DAC}$.



□

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ có $AB > AC, \widehat{A} = 90^\circ$. Từ A vẽ $AH \perp BC$. Kẻ tia AM là tia phân giác của $\widehat{BAC}$. Biết $\widehat{HAM} = 15^\circ$. Tìm số đo của các góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$.
Lời giải.
Xét $\triangle AHM$ có $\widehat{HAM} + \widehat{AMH} = 90^\circ$
$\Rightarrow \widehat{AMH} = 90^\circ - \widehat{HAM} = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$.
Xét $\triangle AMC$ có $\widehat{AMC} + \widehat{MCA} + \widehat{CAM} = 180^\circ$
$\Leftrightarrow \widehat{MCA} = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ$.
Xét $\triangle ABC$ có

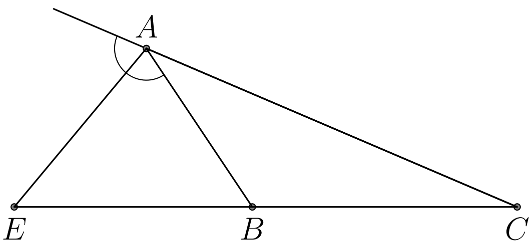
$$\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} + 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 30^\circ.$$



□

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 110^\circ$ và $\widehat{C} = 30^\circ$. Tia phân giác góc ngoài tại đỉnh A cắt đường thẳng BC tại E. Tính số đo $\widehat{AEB}$. Nhận xét gì về $\triangle AEB$?

Lời giải.

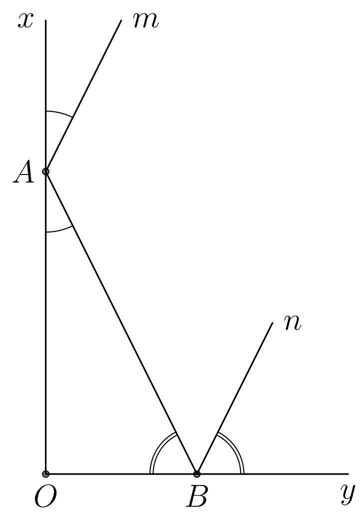


Xét tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 180^\circ - \widehat{ACB} - \widehat{CBA}$
$\Leftrightarrow \widehat{BAC} = 180^\circ - 30^\circ - 110^\circ \Leftrightarrow \widehat{BAC} = 40^\circ$.
Tổng $2\widehat{EAB} + \widehat{BAC} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{EAB} = 180^\circ - \widehat{BAC}$
$\Leftrightarrow 2\widehat{EAB} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ \Rightarrow \widehat{EAB} = 70^\circ$.
Xét $\triangle AEB$ có $\widehat{EAB} = 70^\circ$
và $\widehat{ABE} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.
Vậy $\triangle AEB$ cân tại E.

□

Bài 4. Cho $\widehat{xOy} = 90^\circ$. Từ A trên Ox và B trên Oy vẽ các tia Am và Bn về phía trong góc vuông sao cho $\widehat{xAm} = \widehat{OAB}$ và $\widehat{yBn} = \widehat{OBA}$. Chứng minh rằng $Am \parallel Bn$.

Lời giải.



Ta có:

$$\begin{aligned}
\widehat{mAB} + \widehat{nBA} &= 180^\circ - 2\widehat{OAB} + 180^\circ - 2\widehat{OBA} \\
&= 360^\circ - 2\left(\widehat{OAB} + \widehat{OBA}\right) \\
&= 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ \\
&= 180^\circ.
\end{aligned}$$

suy ra $Am \parallel Bn$ (hai góc trong cùng phía bù nhau).

□

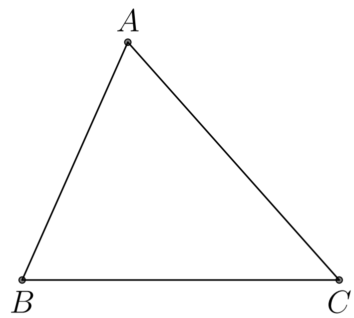
Bài 5. Tính các góc của một tam giác trong các trường hợp sau:

a) Tam giác có ba góc bằng nhau.

b) Tam giác có hai góc bằng nhau, góc kia bằng 40°.

c) Ba góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ có số đo tỉ lệ với $1; 3; 4$.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$
mà $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$ nên $3\widehat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$.

b) Giả sử $\widehat{A} = 40^\circ$; $\widehat{B} = \widehat{C}$.
Ta có $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} \Leftrightarrow 2 \cdot \widehat{B} = 180^\circ - 40^\circ \Leftrightarrow \widehat{B} = 70^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 70^\circ$.

c) Thành lập dãy tỉ số $\dfrac{\widehat{A}}{1} = \dfrac{\widehat{B}}{3} = \dfrac{\widehat{C}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{B} = 3\widehat{A} \\ \widehat{C} = 4\widehat{A} \end{cases}$.
mà $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow 8 \cdot \widehat{A} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 22^\circ 30'$
suy ra $\widehat{B} = 67^\circ 30'$, $\widehat{C} = 90^\circ$.

□

Bài 6. Cho $\triangle ABC$. Các tia phân giác của góc B và C cắt nhau tại I.

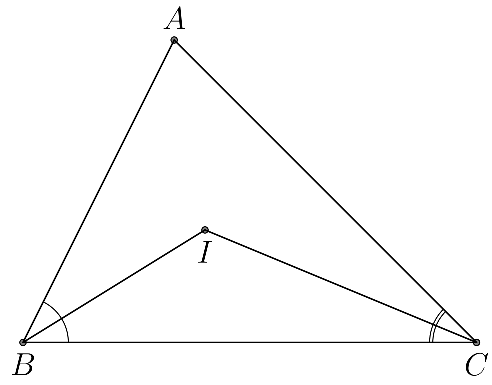
a) Chứng minh rằng góc $\widehat{BIC}$ là góc tù.

b) Chứng minh rằng nếu góc $\widehat{BIC} = 135°$ thì tam giác đó là tam giác vuông.

Lời giải.

a)

Ta có $\widehat{BIC} + \dfrac{1}{2} \cdot \widehat{B} + \dfrac{1}{2} \cdot \widehat{C} = 180°$
$\Leftrightarrow 2 \cdot \widehat{BIC} + \widehat{B} + \widehat{C} = 360°$
$\Leftrightarrow 2 \cdot \widehat{BIC} = 360° - (\widehat{B} + \widehat{C})$ (1)
Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$
$\Leftrightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 180° - \widehat{A}$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra
$2\widehat{BIC} = 360° - (180° - \widehat{A}) = 180° + \widehat{A}$
$\Leftrightarrow \widehat{BIC} = 90° + \dfrac{\widehat{A}}{2}$.
Vậy $\widehat{BIC}$ là một góc tù.



b) Ta có $\widehat{BIC} = 90° + \dfrac{\widehat{A}}{2} \Leftrightarrow \widehat{A} = 2 \cdot \widehat{BIC} - 180° = 2 \cdot 135° - 180° = 90°$.
Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A.

□

Bài 7. a) Chứng minh rằng tổng ba góc ngoài ở ba đỉnh của một tam giác bằng 360°.

b) Các đường phân giác của các góc ngoài ở đỉnh B và C của tam giác ABC cắt nhau ở O. Chứng minh rằng góc $\widehat{BOC}$ bằng nữa góc ngoài ở đỉnh A.

Lời giải.

a) Gọi $\alpha; \beta; \gamma$ lần lượt là số đo các góc ngoài tại đỉnh $A; B; C$.
Ta có $\alpha + \widehat{A} = 180°$; $\beta + \widehat{B} = 180°$; $\gamma + \widehat{C} = 180°$. suy ra $\alpha = 180° - \widehat{A}$; $\beta = 180° - \widehat{B}$; $\gamma = 180° - \widehat{C}$. Vậy $\alpha + \beta + \gamma = 3 \cdot 180° - \left(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}\right) = 540° - 180° = 360°$.

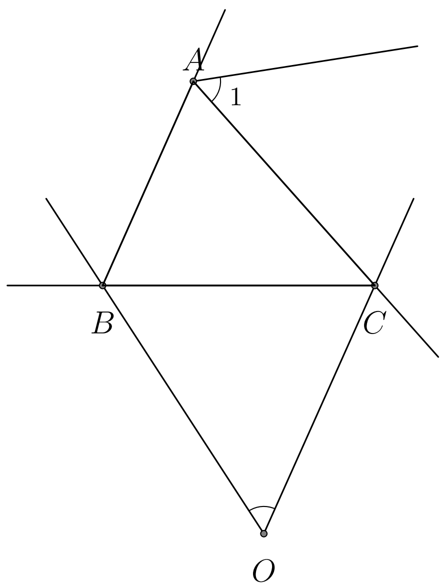
b) Theo a), ta suy ra:

$$\widehat{A_1} + \widehat{OBC} + \widehat{OCB} = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°.$$

Trong tam giác BOC ta có

$$\widehat{BOC} + \widehat{OBC} + \widehat{OCB} = 180°.$$

Do đó $\widehat{BOC} = \widehat{A_1}$, tức là $\widehat{BOC}$ bằng nửa góc ngoài ở đỉnh A.

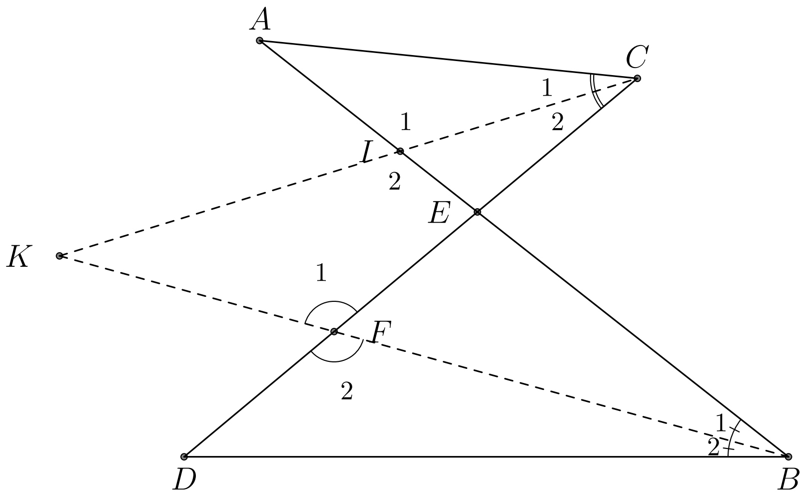


□

2. Nâng cao

Bài 8. Hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại E. Các tia phân giác của các góc $\widehat{ACD}$ và $\widehat{ABD}$ cắt nhau tại K. Chứng minh rằng $\widehat{BKC} = \dfrac{1}{2}\left(\widehat{CAE} + \widehat{BDE}\right)$.

Lời giải.



CK cắt AB tại I. BK cắt CD tại F.
Xét $\triangle AIC$ và $\triangle KIB$ có $\widehat{I_1} = \widehat{I_2}$ (đối đỉnh).

Vậy $\widehat{A} + \widehat{C_1} = \widehat{K} + \widehat{B_1} \Rightarrow \widehat{K} = \widehat{A} + \widehat{C_1} - \widehat{B_1} = \widehat{A} + \dfrac{\widehat{C}}{2} - \dfrac{\widehat{B}}{2}$ (1).

Tương tự xét $\triangle BFD$ và $\triangle KFC$ có: $\widehat{F_1} = \widehat{F_2}$ (đối đỉnh).

Vậy $\widehat{D} + \widehat{B_2} = \widehat{K} + \widehat{C_2} \Rightarrow \widehat{K} = \widehat{D} + \widehat{B_2} - \widehat{C_2} = \widehat{D} + \dfrac{\widehat{B}}{2} - \dfrac{\widehat{C}}{2}$ (2).

Cộng (1) và (2) có: $2\widehat{K} = \widehat{A} + \widehat{D} \Rightarrow \widehat{K} = \dfrac{\widehat{A} + \widehat{D}}{2}$. □

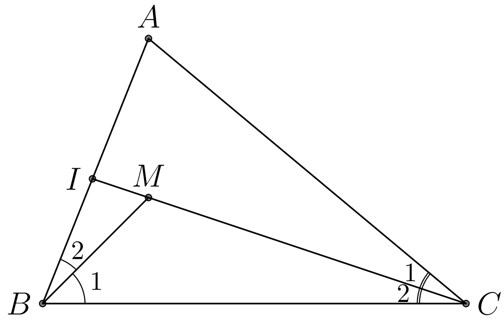
Bài 9. Cho $\triangle ABC$ và điểm M nằm trong tam giác.

a) Chứng minh rằng: $\widehat{BMC} = \widehat{A} + \widehat{ABM} + \widehat{ACM}$.

b) Biết rằng: $\widehat{ABM} + \widehat{ACM} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{A}}{2}$ và tia BM là phân giác của góc $\widehat{B}$. Chứng minh tia CM là tia phân giác của góc $\widehat{C}$.

Lời giải.

a) Tia CM cắt AB tại I.
Xét $\triangle BIM$ có: $\widehat{BMC} = \widehat{B_2} + \widehat{BIM}$ (1).
Xét $\triangle AIC$ có: $\widehat{BIM} = \widehat{A} + \widehat{C_1}$ (2).
Thay (2) vào (1) có: $\widehat{BMC} = \widehat{B_1} + \widehat{A} + \widehat{C_2}$.
Vậy $\widehat{BMC} = \widehat{A} + \widehat{ABM} + \widehat{ACM}$ (3).



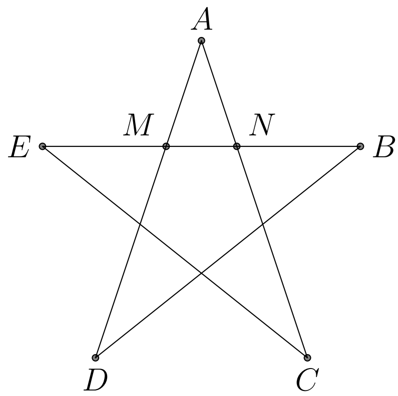
b) Ta có $\begin{cases} \widehat{BMC} = \widehat{A} + \widehat{ABM} + \widehat{ACM} \quad (3) \\ \widehat{ABM} + \widehat{ACM} = 90^\circ - \dfrac{\widehat{A}}{2} \end{cases}$.
$\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{A} + 90^\circ - \dfrac{\widehat{A}}{2} = 90^\circ + \dfrac{\widehat{A}}{2}$.
$\Rightarrow 180^\circ - \dfrac{\widehat{B}}{2} - \widehat{C_2} = 90^\circ + \dfrac{\widehat{A}}{2}$.
$\Rightarrow \widehat{C_2} = 90^\circ - \left(\dfrac{\widehat{B}}{2} + \dfrac{\widehat{A}}{2}\right) = \dfrac{\widehat{C}}{2}$.
Vậy tia CM là tia phân giác của góc $\widehat{C}$.

□

Bài 10. Tính tổng số đo các góc ở đỉnh A, B, C, D, E của hình sao năm cánh.

Lời giải.

Áp dụng tính chất góc ngoài của tam giác ta có



- $\widehat{AMN} = \widehat{MBD} + \widehat{MDB}$ ($\widehat{AMN}$ là góc ngoài của tam giác MBD).
- $\widehat{ANM} = \widehat{NEC} + \widehat{NCE}$ ($\widehat{ANM}$ là góc ngoài của tam giác NEC).

Do đó $\widehat{A} + (\widehat{B} + \widehat{D}) + (\widehat{C} + \widehat{E}) = \widehat{A} + \widehat{AMN} + \widehat{ANM} = 180^\circ$.

□

Bài 11. Đố vui: Ai là người thắng cuộc?

- Hai người chơi trò chơi bằng cách: vẽ một tam giác rồi lấy bên trong 10 điểm, sao cho trong 13 điểm (3 điểm là 3 đỉnh của tam giác và 10 điểm bên trong tam giác) không có ba điểm nào thẳng hàng.
- Cách chơi: lần lượt người nọ đến người kia, mỗi người nối hai điểm để được một đoạn thẳng (đoạn thẳng vẽ sau không được cắt đoạn thẳng vẽ trước). Ai vẽ được một tam giác thì được vẽ tiếp. Cuối cùng ai vẽ được nhiều hình tam giác là người chiến thắng.
- Cuối cuộc chơi người thứ nhất vẽ được 12 tam giác. Hỏi người thứ nhất có thắng cuộc không?

Lời giải.

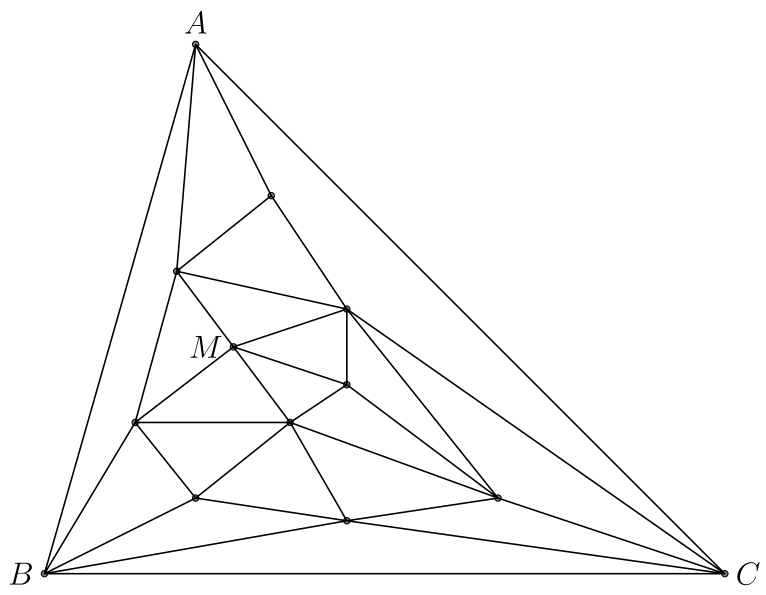
Gọi tam giác đã cho là ABC và trong tam giác lấy 10 điểm. Vậy tất cả có 13 điểm, không có 3 điểm nào thẳng hàng.
Khi trò chơi kết thúc thì các tam giác xếp kề sát nhau và phủ kín $\triangle ABC$. Vì không có đoạn thẳng nào cắt nhau nên các tam giác nhỏ không chồng lên nhau.

Ta xét một điểm (trong số 10 điểm) chẳn hạn điểm M. Từ M nối với các điểm khác. M là đỉnh của nhiều tam giác xếp kề nhau (không chồng lên nhau). Không cần biết bao nhiêu góc nhỏ tại M nhưng tổng các góc đó bằng $360°$. Vậy tại 10 điểm trong $\triangle ABC$ có tổng các góc nhỏ là $360° \cdot 10$, thêm tổng 3 góc của $\triangle ABC$ là $180°$ suy ra tổng các góc của tất cả các tam giác là $360° \cdot 10 + 180°$.

Mà mỗi tam giác có tổng các góc trong là $180°$.

Vậy số tam giác vẽ được là $\dfrac{360° \cdot 10 + 180°}{180°} = 21$ (tam giác).

Tổng số tam giác cả hai người vẽ được là 21. Mà người thứ nhất vẽ được 12 tam giác. Vậy người thứ nhất thắng.



□

Chương 3

Tam giác

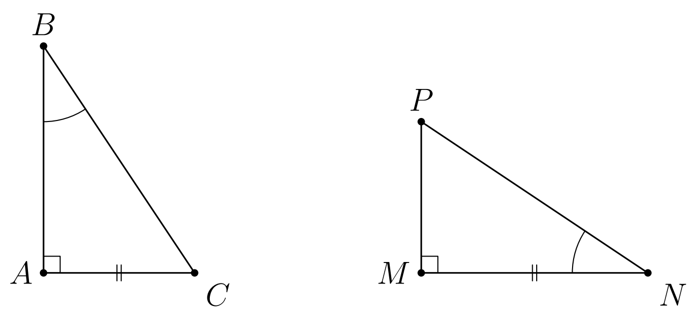
§1. CÁC TRƯỜNG HỢP BẰNG NHAU CỦA TAM GIÁC

I. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Tam giác ABC không bằng tam giác ACB.

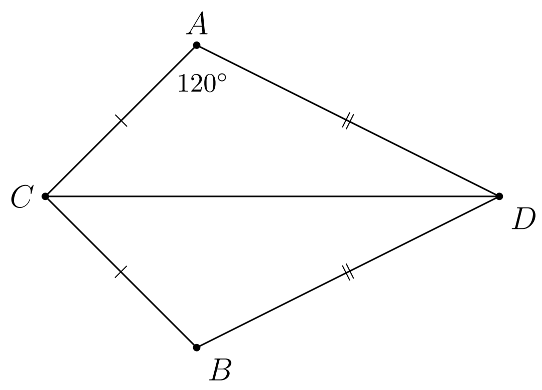
Câu 2. Cho $\triangle ABC = \triangle EGH$. Hãy viết các cạnh và các góc tương ứng bằng nhau (điền vào chỗ chấm):
$\triangle ACB = \triangle EHG$, $AC = EH$, $GH = BC$, $\widehat{B} = \widehat{G}$, $\widehat{H} = \widehat{C}$.

Câu 3.
Hai tam giác vuông ABC và MNP có một cạnh góc vuông bằng nhau và một góc nhọn bằng nhau. Hai tam giác này không bằng nhau.

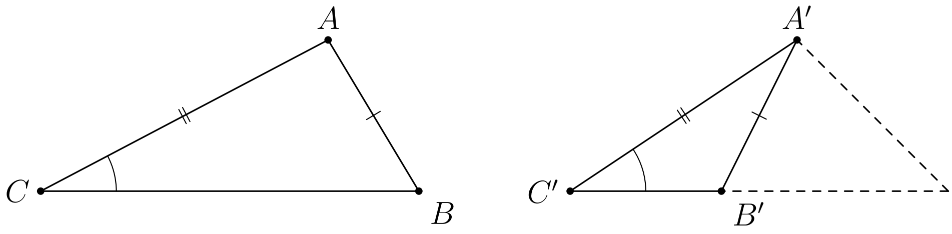


⚠ *Phải là một cạnh và **hai góc kề cạnh đó** bằng nhau.*

Câu 4.
Trong hình bên, CD là tia phân giác của góc ACB.
Số đo của góc B là $120°$.



Câu 5. Trong hình bên, hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có hai cạnh và một góc bằng nhau ($AB = A'B', AC = A'C', \widehat{C} = \widehat{C'}$). Hai tam giác này không bằng nhau. Vì góc bằng nhau không phải là góc xen giữa 2 cạnh bằng nhau.

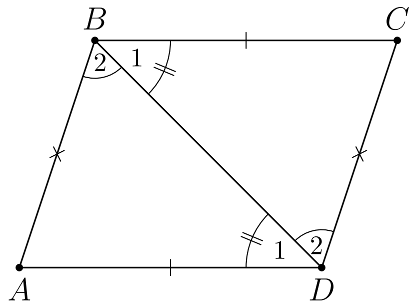


⚠ *Phải là hai cạnh và **góc xen giữa** bằng nhau.*

II. Học giải toán

Ví dụ 1. Trong hình 46, biết $AD = BC$; $AB = CD$. Chứng minh $AD \parallel BC$ và $AB \parallel CD$.

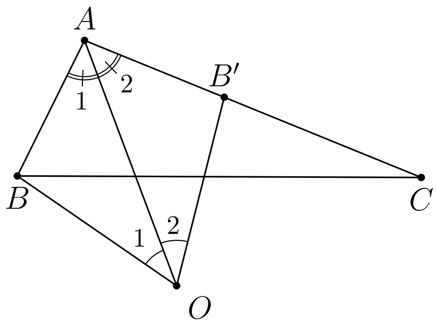
Lời giải.
Nối B với D. Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CDB$ có $AD = BC$; $AB = CD$ và cạnh BD chung.
Vậy $\triangle ABD = \triangle CDB$ (c.c.c).
Suy ra các góc tương ứng bằng nhau: $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1$; $\widehat{B}_2 = \widehat{D}_2$
$\Rightarrow AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$ (hai góc so le trong bằng nhau).



□

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ $(AB < AC)$. Một học sinh vẽ tia phân giác của góc $\widehat{A}$ theo thứ tự các bước sau:
Bước 1: Lấy A làm tâm quay một cung bán kính AB. Cung này cắt cạnh AC tại B'.
Bước 2: Lấy B và B' làm tâm quay hai cung tròn $(B; r)$ và $(B'; r)$. Chúng cắt nhau tại O
Bước 3: Nối AO. Em đó kết luận "AO là tia phân giác của góc $\widehat{A}$", đúng hay sai? Tại sao?

Lời giải.
Muốn kết luận AO là tia phân giác của góc $\widehat{A}$ ta phải chứng minh $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.
Thật vậy, xét $\triangle ABO$ và $\triangle AB'O$ có cạnh AO chung, $AB = AB'$ (theo cách vẽ bước 1), $BO = B'O = r$ (theo cách vẽ bước 2).
Vậy $\triangle ABO = \triangle AB'O$ (c.c.c). Suy ra các góc tương ứng bằng nhau $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.
Vậy tia AO là tia phân giác của góc A.



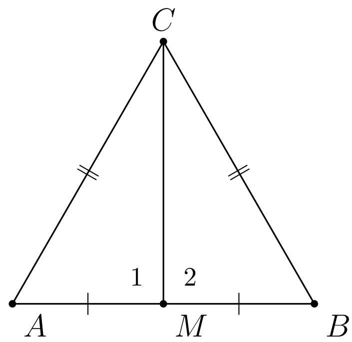
□

⚠ *Đây cũng là cách vẽ tia phân giác của một góc bằng thước kẻ và compa.*

Ví dụ 3. Cho đoạn thẳng AB. Vẽ hai cung tròn tâm A và tâm B có cùng bán kính sao cho chúng cắt nhau tại điểm C nằm ngoài đoạn thẳng AB. Chứng minh rằng $CM \perp AB$.

Lời giải.

Theo cách vẽ ta có $AC = BC$, $MA = MB$ (giả thiết), MC chung, suy ra $\triangle AMC = \triangle BMC$ (c.c.c), suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$.
Nhưng $\widehat{M_1} + \widehat{M_2} = 180^\circ$ nên $\widehat{M_1} = \widehat{M_2} = 90^\circ$.
Do đó $CM \perp AB$.



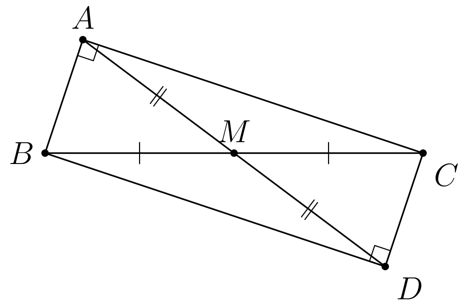
□

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm cạnh BC. Chứng minh rằng $AM = \dfrac{1}{2}BC$.

⚠ *1. Để chứng minh $AM = \dfrac{1}{2}BC$ hay $BC = 2AM$, ta tạo ra đoạn thẳng bằng hai lần đoạn thẳng AM rồi chứng minh đoạn thẳng đó bằng BC.*

2. Đây là kết quả quan trọng được sử dụng để chứng minh nhiều bài toán sau này: "Trong tam giác vuông, trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền".

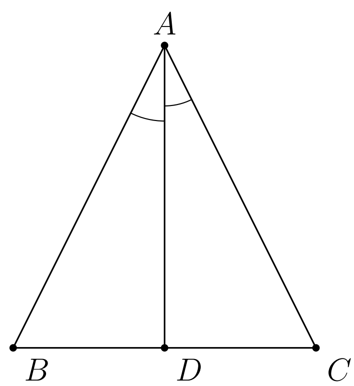
Lời giải.
Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.
Xét $\triangle MAB$ và $\triangle MDC$ có $MA = MD$, $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$ (đối đỉnh), $MB = MC$ (giả thiết), do đó $\triangle MAB = \triangle MDC$ (c.g.c).
Suy ra $AB = CD$, $\widehat{MAB} = \widehat{MDC}$.
Ta có $\widehat{MAB} = \widehat{MDC}$, $\widehat{MAB}$ và $\widehat{MDC}$ là hai góc so le trong, do đó $AB \parallel CD$.
Ta có $AB \parallel CD$, $AB \perp AC \Rightarrow CD \perp AC \Rightarrow \widehat{ACD} = 90^\circ$.
Xét $\triangle ABC$ và $\triangle CDA$ có $AB = CD$ (chứng minh trên), AC là cạnh chung, $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ $(= 90^\circ)$. Do đó $\triangle ABC = \triangle CDA$ (c.g.c) $\Rightarrow BC = AD$ (cặp cạnh tương ứng).
Mà $AM = \dfrac{1}{2}AD$ (vì $AM = MD$), vậy $AM = \dfrac{1}{2}BC$.



□

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Tia phân giác của góc BAC cắt BC ở D. Chứng minhg rằng AD là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

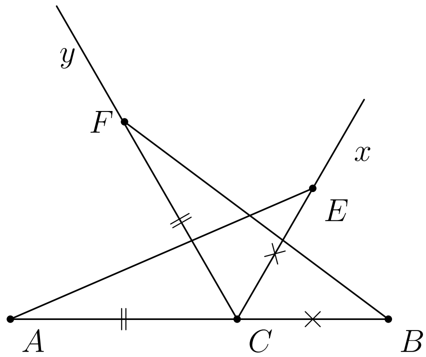
Lời giải.
Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACD$ có $AB = AC$ (giả thiết), AD là cạnh chung, $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ (AD là tia phân giác của góc BAC).
Do đó $\triangle ABD = \triangle ACD$ (c.g.c).
Suy ra $BD = DC$, $\widehat{ADB} = \widehat{ADC}$. Mà $\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ (kề bù) nên $\widehat{ADB} = 90^\circ$.
Ta có $AD \perp BC$ ($\widehat{ADB} = 90^\circ$) và $BD = DC$.
Vậy AD là đường trung trực của đoạn thẳng BC.



□

Ví dụ 6. Cho điểm C nằm giữa hai điểm A và B. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ có chứa đoạn AB, vẽ các tia Cx và Cy so cho các góc $\widehat{BCx} = 60^\circ$ và $\widehat{BCy} = 120^\circ$. Lấy E trên Cx và F trên Cy sao cho $CE = CB$; $CF = CA$. Chứng minh $AE = BF$.

Lời giải.



Xét $\triangle ACE$ và $\triangle FCB$ có C nằm giữa hai điểm A và B (giả thiết).
Vậy $\widehat{ACE} + \widehat{ECB} = 180^\circ$, mà $\widehat{ECB} = 60^\circ$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{ACE} = 120^\circ$.
Do đó $\widehat{ACE} = \widehat{BCF} = 120^\circ$ và $CB = CE$ (giả thiết), $CF = CA$ (giả thiết).
Suy ra $\triangle ACE = \triangle FCB$ (c.g.c).
Vậy $AE = BF$.

□

Ví dụ 7. Cho $\triangle ABC$, các điểm E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. Trên tia đối của tia FB lấy điểm N sao cho $FN = FB$. Trên tia đối của tia EC lấy điểm M sao cho $EM = EC$. Chứng minh:

a) $AB \parallel NC$; $AC \parallel MB$.

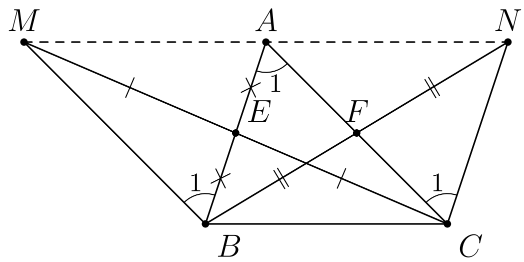
b) $\triangle AEM = \triangle BEC$; $\triangle AFN = \triangle CFB$.

c) Ba điểm M, A, N thẳng hàng.

d) $AM = AN$.

⚠ *Hãy lưu ý các góc đối đỉnh.*

Lời giải.



a) Xét $\triangle AFB$ và $\triangle CFN$ có:
$AF = FC$ (giả thiết);
$\widehat{AFB} = \widehat{CFN}$ (đối đỉnh);
$FB = FB$ (giả thiết).

Vậy $\triangle AFB = \triangle CFN$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 \Rightarrow AB \parallel CN$ (góc so le trong bằng nhau).
Tương tự ta có $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 \Rightarrow AC \parallel BM$ (góc so le trong bằng nhau).

b) Chứng minh tương tự câu a, suy ra $\triangle AEM = \triangle BEC$, $\triangle AFN = \triangle CFB$.

c) Từ b) ta có $AM \parallel BC$, $AN \parallel BC$.
Suy ra M, A, N thẳng hàng (vì qua A chỉ kẻ được một đường thẳng song song với BC).

d) Ta có $AM = BC$ ($\triangle AEM = \triangle BEC$) và $AN = BC$ ($\triangle AFN = \triangle CFB$) nên $AM = AN$.

□

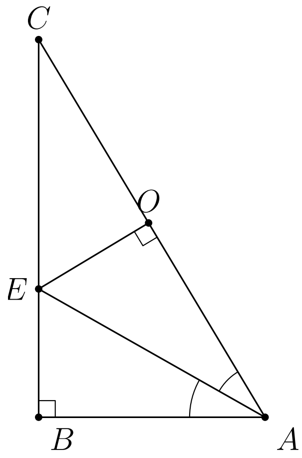
Ví dụ 8. Cho tam giác vuông ABC tại B; $AC = 2AB$. Kẻ phân giác AE (E thuộc BC).

a) Chứng minh $AE = CE$.

b) Tính các góc A, C của tam giác ABC.

⚠ *Chia đôi cạnh AC để tạo ra các đoạn bằng AB.*

Lời giải.



a) Từ E kẻ đường thẳng vuông góc với AC, cắt AC ở O.
Xét $\triangle AEB$ và $\triangle AEO$ có:
AE là cạnh chung, $\widehat{EAB} = \widehat{EAO}$ (giả thiết)
$\widehat{EAB} = \widehat{EOA} = 90^\circ$ (theo cách vẽ)
$\Rightarrow \triangle AEB = \triangle AEO$ (g.c.g)
Suy ra $AB = AO$.
Vì $AC = 2AB$ nên $OC = AB = OA$, suy ra hai tam giác vuông EOA và EOC bằng nhau (c.g.c), do đó $AE = CE$.

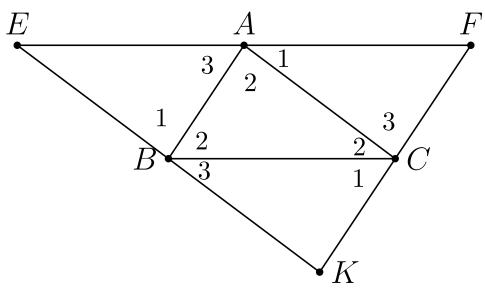
b) Theo trên ta có $\widehat{ECA} = \widehat{EAC} = \widehat{EAB}$.
Mà $\widehat{ACB} + \widehat{CAB} = 90^\circ$ nên $3\widehat{ACB} = 90^\circ$ suy ra $\widehat{ACB} = 30^\circ$, từ đó $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

⚠ *Trong một tam giác vuông, nếu một cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền thì góc đối diện với cạnh góc vuông đó bằng 30° (Mệnh đề đảo cũng đúng, xem ví dụ 4 chủ đề 7).*

□

Ví dụ 9. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 2cm$; $AC = 2,5cm$; $BC = 3cm$. Từ A kẻ $EF \parallel CB$. Từ B kẻ $EK \parallel AC$. Từ C kẻ $KF \parallel AB$. Tính chu vi của $\triangle EFK$.

Lời giải.



Xét $\triangle ABC$ và $\triangle CFA$ có
AC chung
$\widehat{A}_2 = \widehat{C}_3$ (so le, $AB \parallel FC$)
$\widehat{C}_2 = \widehat{A}_1$ (so le, $AF \parallel BC$).
Vậy $\triangle ABC = \triangle CFA$ (g.c.g).
Suy ra $AF = BC$ (1) , $AB = FC$ (2).
Tương tự có $\triangle ABC = \triangle BAE$ (g.c.g)
Suy ra $AE = BC$ (3) và $BE = AC$ (4).
Ta cũng có $\triangle ABC = \triangle KBC$ (g.c.g).
Suy ra $BK = AC$ (5) và $AB = CK$ (6).
Cộng vế với vế (1), (2), (3), (4), (5), (6), ta có

$$BE + AE + AF + CF + CK + BK = BC + AB + BC + AC + AC + AB$$
$$\Leftrightarrow (AE + AF) + (BE + BK) + (CK + CF) = 2(AB + BC + AC)$$
$$\Leftrightarrow EF + KF + KE = 2(2 + 2,5 + 3) = 15(cm).$$

Vậy chu vi $\triangle EFK$ bằng 15 cm.

⚠ *- Vậy chu vi $\triangle EFK$ bằng hai lần chu vi $\triangle ABC$.*
- Với cách vẽ đó ta được $\triangle EFK$, trong đó $\triangle EFK$ được chia thành 4 tam giác bằng nhau và bằng $\triangle ABC$.

□

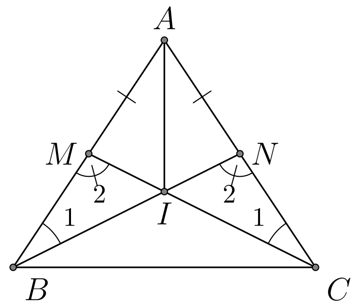
Ví dụ 10. Cho $\triangle ABC$ $(AB = AC)$. Trên AB lấy điểm M; trên AC lấy điểm N sao cho $AM = AN$. Nối BN và CM, chúng cắt nhau tại I. Chứng minh rằng:

a) $BN = CM$.

b) $\triangle BMC = \triangle CNB$ và $\triangle BIM = \triangle CIN$.

c) AI là tia phân giác của góc $\widehat{A}$.

Lời giải.



a) Xét $\triangle ABN$ và $\triangle ACM$ có:
$AB = AC$ (giả thiết); góc $\widehat{A}$ chung; $AM = AN$ (giả thiết).
Vậy $\triangle ABN = \triangle ACM$ (c.g.c) $\Rightarrow BN = CM$.

b) Xét $\triangle BMC$ và $\triangle CNB$ có:
Cạnh BC chung; $BN = CM$ (chứng minh a) và $BM = CN$ (do $AB = AC$ (giả thiết)), $AM = AN$ (giả thiết)
$\Rightarrow AB - AM = AC - AN$.
Vậy $\triangle BMC = \triangle CNB$ (c.c.c).
Xét $\triangle BIM$ và $\triangle CIN$ có:
$BN = CM$ (chứng minh a),
$\triangle ABN = \triangle ACM$ (chứng minh a), suy ra $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$,
$\triangle BMC = \triangle CNB$ (chứng minh b), suy ra $\widehat{M_2} = \widehat{N_2}$.
Vậy $\triangle BIM = \triangle CIN$ (g.c.g).

c) Xét $\triangle ABI$ và $\triangle ACI$ có:
AI chung, $AB = AC$ (giả thiết); $BI = IC$ $(\triangle BIM = \triangle CIN)$.
Vậy $\triangle ABI = \triangle ACI$ (c.c.c).
Suy ra hai góc tương ứng bằng nhau $\widehat{BAI} = \widehat{IAC}$.
Vậy AI là tia phân giác của góc $\widehat{A}$.

□

III. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Cho $\triangle ABC = \triangle MNP$. Biết số đo của các cạnh $AB = 3$cm; $BC = 4$cm; $MP = 5$cm. Tính chu vi của $\triangle MNP$.

Lời giải.

$\triangle ABC = \triangle MNP$ nên $MN = AB = 3$cm; $NP = BC = 4$cm; $MP = 5$cm.
Vậy chu vi $\triangle MNP$ là $3 + 4 + 5 = 12$(cm). □

Bài 2. Cho hai tam giác bằng nhau: tam giác ABC độ dài ba cạnh khác nhau, bằng tam giác có đỉnh là K, E, F. Biết $AB = EF$ và $\widehat{B} = \widehat{F}$. Từ $\triangle ABC$ đã biết hãy viết tam giác có 3 đỉnh là K, E, F sao cho các cạnh tương ứng, góc tương ứng cùng vị trí.

Lời giải.

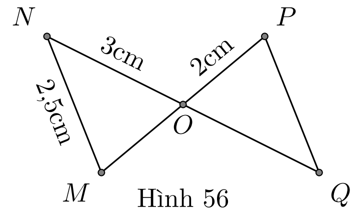
$\triangle ABC$ có $AB = EF$ và $\widehat{B} = \widehat{F}$. Vậy tam giác tương ứng là $\triangle EFK$. □

Bài 3. Trên hình 56: Cho $\triangle NOM = \triangle QOP$ và các cạnh có số đo ghi trên hình vẽ. Tính các cạnh còn lại của hai tam giác. Chứng minh $MN \parallel PQ$.

Lời giải.

$\triangle NOM = \triangle QOP$ nên

- $OM = OP = 2$cm; $OQ = ON = 3$cm; $PQ = MN = 2{,}5$cm.
- $\widehat{MNO} = \widehat{PQO}$ (hai góc tương ứng). Suy ra $MN \parallel PQ$ (có hai góc sole trong bằng nhau).



Hình 56

□

Bài 4. Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$. Trên Ox và Oy lấy hai điểm A và B sao cho $OA = OB$. Vẽ hai đường tròn tâm A và tâm B có cùng bán kính (bán kính nhỏ hơn OA), chúng cắt nhau tại E và F. Chứng minh rằng

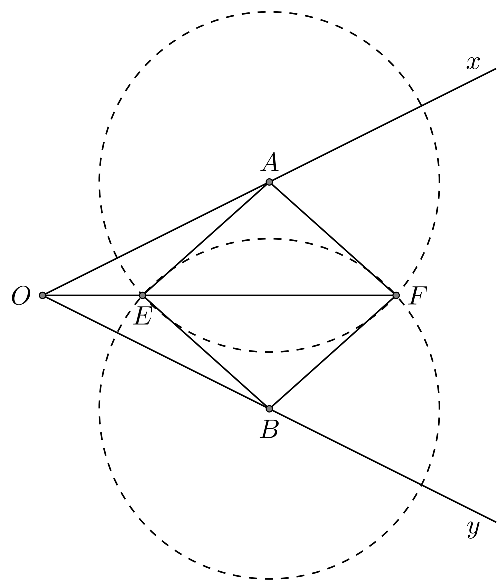
a) $\triangle OEA = \triangle OEB$; $\triangle OFA = \triangle OFB$.

b) Ba điểm O, E, F thẳng hàng.

c) E, O thuộc tia phân giác của góc AFB.

Lời giải.

Độ dài bán kính của hai đường tròn nhỏ hơn OA nên giao điểm của chúng nằm trong góc $\widehat{xOy}$.



a) Xét $\triangle OEA$ và $\triangle OEB$ có OE chung, $OA = OB$ (gt), $EA = EB$ (cùng bán kính).
Vậy $\triangle OEA = \triangle OEB$ (c.c.c).
Tương tự ta có $\triangle OFA = \triangle OFB$ (c.c.c).

b) $\triangle OEA = \triangle OEB$ nên $\widehat{AOE} = \widehat{BOE} \Rightarrow E$ thuộc tia phân giác của $\widehat{xOy}$.
$\triangle OFA = \triangle OFB$ nên $\widehat{AOF} = \widehat{BOF} \Rightarrow F$ thuộc tia phân giác của $\widehat{xOy}$.
Vậy ba điểm O, E, F thẳng hàng.

c) $\triangle OFA = \triangle OFB$ nên $\widehat{AFO} = \widehat{BFO} \Rightarrow F$ thuộc tia phân giác của $\widehat{AFB}$.
$\triangle AEF = \triangle BEF$ (c.c.c) nên $\widehat{AFE} = \widehat{BFE} \Rightarrow E$ thuộc tia phân giác của $\widehat{AFB}$.

□

Bài 5. Cho $\triangle ABC$. Vẽ đường tròn $(B; AC)$. Vẽ đường tròn $(C; AB)$. Hai đường tròn này cắt nhau tại hai điểm E và F thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là BC (E và A thuộc cùng một nửa mặt phẳng). Chứng minh rằng

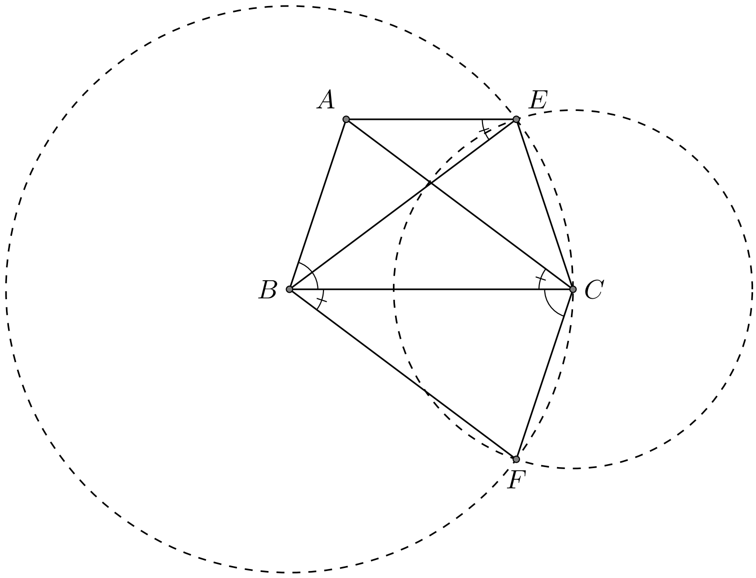
a) $\triangle ABC = \triangle ECB = \triangle FCB$.

b) $AB \parallel CF$; $AC \parallel BF$.

c) $\triangle ABE = \triangle ECA$.

d) $AE \parallel BC$.

Lời giải.



a) $\triangle ABC$ và $\triangle ECB$ có BC chung, $AC = BE$, $AB = CE$ (cùng bán kính).
Vậy $\triangle ABC = \triangle ECB$ (c.c.c). (1)
$\triangle ECB$ và $\triangle FCB$ có CB chung, $CE = CF$, $EB = FB$ (cùng bán kính).
Vậy $\triangle ECB = \triangle FCB$ (c.c.c) (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ABC = \triangle ECB = \triangle FCB$.

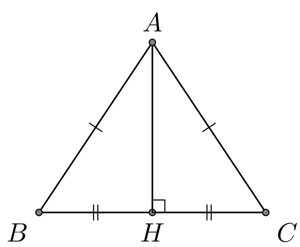
b) $\triangle ABC = \triangle FCB$ nên $\widehat{ABC} = \widehat{FCB}$ (hai góc tương ứng).
$\Rightarrow AB \parallel CF$ (có hai góc sole trong bằng nhau).
$\triangle ABC = \triangle FCB$ nên $\widehat{ACB} = \widehat{FBC}$ (hai góc tương ứng).
$\Rightarrow AC \parallel BF$ (có hai góc sole trong bằng nhau).

c) $\triangle ABC = \triangle ECB$ nên $AB = EC$, $AC = EB$ (hai cạnh tương ứng).
$\triangle ABE$ và $\triangle ECA$ có $AB = EC$, $AC = EB$, AE là cạnh chung.
Vậy $\triangle ABE = \triangle ECA$ (c.c.c).

d) $\triangle ABC = \triangle ECB$ nên $\widehat{ACB} = \widehat{EBC}$. (3)
$\triangle ABE = \triangle ECA$ nên $\widehat{AEB} = \widehat{EAC}$. (4)
Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{EAC} = \widehat{ACB}$
$\Rightarrow AE \parallel BC$ (có hai góc sole trong bằng nhau).

□

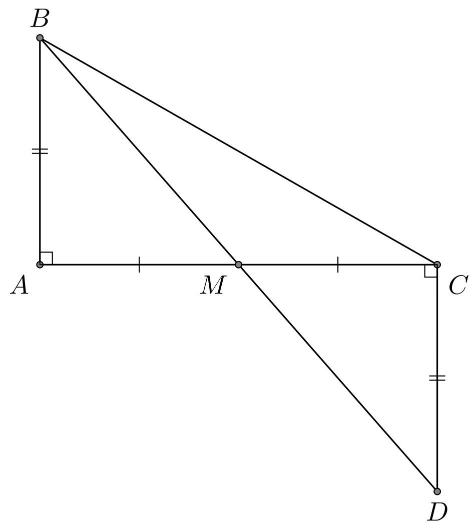
Bài 6. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$ và H là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh $AH \perp BC$.
Lời giải.
$\triangle AHB$ và $\triangle AHC$ có $AB = AC$, $HA = HB$, AH là cạnh chung.
$\Rightarrow \triangle AHB = \triangle AHC$ (c.c.c) nên $\widehat{AHB} = \widehat{AHC}$.
Mà $\widehat{AHB} + \widehat{AHC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù).
Suy ra $\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ$ hay $AH \perp BC$.



□

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là trung điểm AC, D là điểm trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B sao cho $\widehat{MCD} = 90^\circ$ và $CD = AB$. Chứng minh rằng M là trung điểm của đoạn thẳng BD.
Lời giải.

$\triangle ABM$ và $\triangle CDM$ có $AM = CM$ (M là trung điểm của AC), $AB = CD$ (gt), $\widehat{BAM} = \widehat{DCM}$ $(= 90^\circ)$.
Do đó $\triangle ABM = \triangle CDM$ (c.g.c).
$\Rightarrow MB = MD$ (hai cạnh tương ứng) (1)
và $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$ (hai góc tương ứng).
Ta có $\widehat{BMC} + \widehat{CMD} = \widehat{BMC} + \widehat{AMB} = 180^\circ$.
Do đó ba điểm B, M, D thẳng hàng. (2)
Từ (1) và (2) ta có M là trung điểm của đoạn thẳng BD.



□

⚠ *Sai lầm thường mắc phải khi giải bài tập này là không chứng minh ba điểm B, M, D thẳng hàng.*

Bài 8. Chứng minh rằng nếu đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại O sao cho O là trung điểm của AB và CD thì ta có

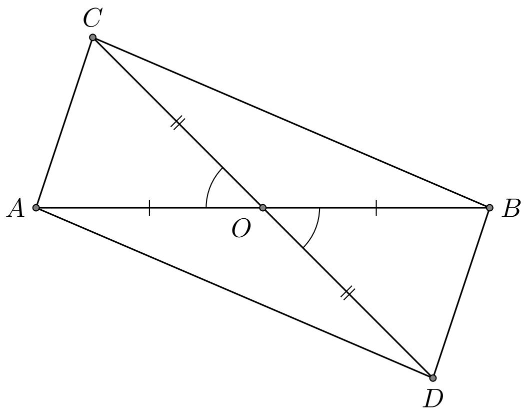
a) $AC \parallel BD$ và $AC = BD$.

b) $CB \parallel AD$ và $CB = AD$.

Lời giải.

a) $\triangle AOC$ và $\triangle BOD$ có $OA = OB$ (gt), $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ (đối đỉnh), $OC = OD$ (gt).
$\Rightarrow \triangle AOC = \triangle BOD$ (c.g.c) nên $AC = BD$ (hai cạnh tương ứng) và $\widehat{CAO} = \widehat{DBO}$ (hai góc tương ứng).
$\Rightarrow AC \parallel BD$ (có hai góc sole trong bằng nhau).

b) Tương tự, ta có $\triangle AOD = \triangle BOC$ (c.g.c) nên $CB \parallel AD$ và $CB = AD$.

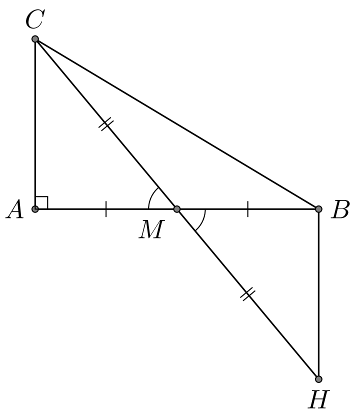


□

Bài 9. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$. M là trung điểm của cạnh AB. Nối CM và trên tia đối của tia MC lấy điểm H sao cho $MH = MC$. Chứng minh $HB \perp AB$.

Lời giải.

$\triangle AMC$ và $\triangle BMH$ có $MA = MB$ (gt), $\widehat{AMC} = \widehat{BMH}$ (đối đỉnh), $MC = MH$ (gt).
$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle BMH$ (c.g.c) nên $\widehat{MAC} = \widehat{MBH}$ (hai góc tương ứng).
$\Rightarrow \widehat{MBH} = 90^\circ$ hay $HB \perp AB$.



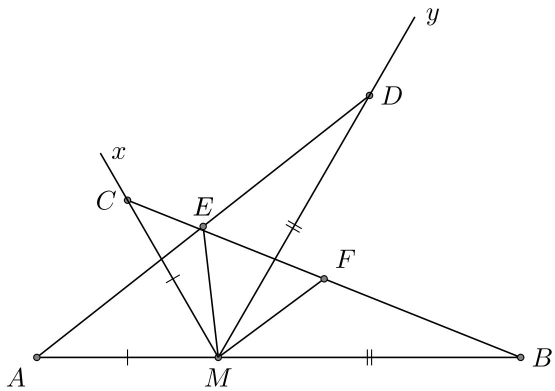
□

Bài 10. Cho điểm M trên đoạn thẳng AB. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ có chứa đoạn AB kẻ tia Mx sao cho $\widehat{AMx} = 60^\circ$ và tia My sao cho $\widehat{BMy} = 60^\circ$. Trên tia Mx lấy điểm C sao cho $MC = MA$. Trên tia My lấy điểm D sao cho $MD = MB$.

a) Chứng minh $AD = CB$.

b) Lấy E là trung điểm của AD; F là trung điểm của CB. Chứng minh $\widehat{EMF} = 60^\circ$.

Lời giải.



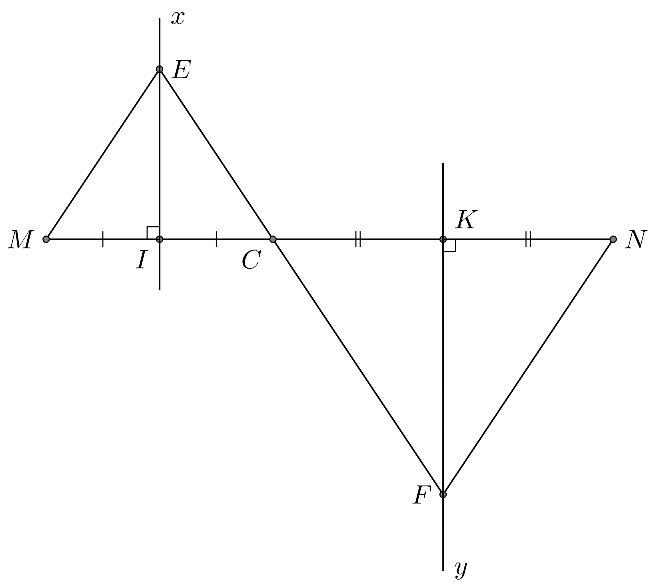
a) $\triangle AMD$ và $\triangle CMB$ có $MA = MC$ (gt), $\widehat{AMD} = \widehat{CMB} = 120^\circ$, $MD = MB$.
$\Rightarrow \triangle AMD = \triangle CMB$ (c.g.c) nên $AD = CB$ (hai cạnh tương ứng).

b) Ta có $\begin{cases} E, F \text{ lần lượt là trung điểm của } AD, CB \\ AD = CB \end{cases}$
$\Rightarrow ED = FB$.
$\triangle AMD = \triangle CMB$ nên $\widehat{EDM} = \widehat{FBM}$.
$\Rightarrow \triangle MED = \triangle MFB$ (c.g.c) nên $\widehat{EMD} = \widehat{FMB}$ (hai cạnh tương ứng).
Do đó $\widehat{EMF} = \widehat{EMD} + \widehat{DMF} = \widehat{FMB} + \widehat{DMF} = \widehat{DMB} = 60^\circ$.

□

Bài 11. Cho điểm C nằm trên đoạn thẳng MN; Ix là đường trung trực của đoạn MC ($I \in MC$); Ky là đường trung trực của đoạn CN ($K \in CN$). Kẻ đường thẳng d qua C cắt Ix tại E và cắt Ky tại F. Chứng minh $ME \parallel NF$.

Lời giải.



$\triangle IME = \triangle ICE$ (c.g.c)
$\Rightarrow \widehat{EMI} = \widehat{ECI}$. (1)
$\triangle KCF = \triangle KNF$ (c.g.c)
$\Rightarrow \widehat{KCF} = \widehat{KNF}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EMI} = \widehat{KNF}$.
$\Rightarrow ME \parallel NF$ (có hai góc sole trong bằng nhau).

□

Bài 12. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm của cạnh AB; N là trung điểm của cạnh AC. Trên tia đối của tia NM lấy điểm P sao cho $NP = MN$. Chứng minh rằng

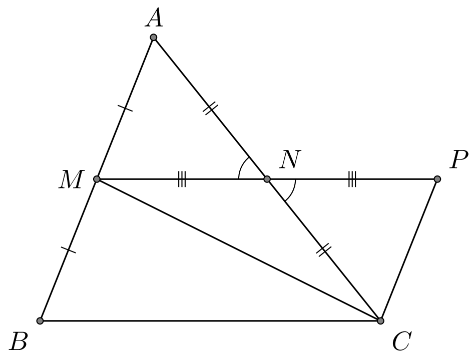
a) $\triangle AMN = \triangle CPN$.

b) $CP = BM$; $CP \parallel BM$.

c) $MN \parallel BC$.

d) Có nhận xét gì về MN so với BC?

Lời giải.



a) $\triangle AMN$ và $\triangle CPN$ có $NA = NC$ (gt), $\widehat{ANM} = \widehat{CNP}$ (đối đỉnh), $NM = NP$ (gt).
Vậy $\triangle AMN = \triangle CPN$ (c.g.c)

b) $\triangle AMN = \triangle CPN$ nên $AM = CP$ (hai cạnh tương ứng).
Mà $AM = BM$ (gt) nên $CP = BM$.
$\triangle AMN = \triangle CPN$ nên $\widehat{NAM} = \widehat{NCP}$ (hai góc tương ứng).
$\Rightarrow CP \parallel AM$ (có hai góc sole trong bằng nhau) hay $CP \parallel BM$.

c) $\triangle BMC$ và $\triangle PCM$ có $BM = CP$ (cmt), $\widehat{BMC} = \widehat{PCM}$ (hai góc sole trong), MC là cạnh chung.
$\Rightarrow \triangle BMC = \triangle PCM$ (c.g.c) nên $\widehat{BCN} = \widehat{PMC}$ (hai góc tương ứng).
$\Rightarrow MN \parallel BC$ (có hai góc sole trong bằng nhau).

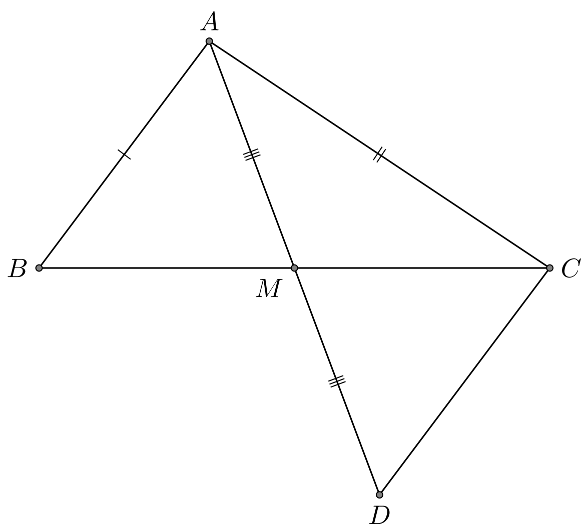
d) Nhận xét $MN \parallel BC$ và $MN = \dfrac{1}{2}BC$.

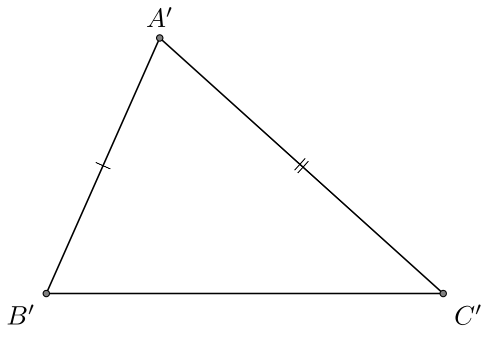
⚠ *Từ bài toán này ta có kết quả: Cho M là trung điểm của AB, $N \in AC$ sao cho $MN \parallel BC$. Khi đó N là trung điểm của AC.*

□

Bài 13. Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có $\widehat{BAC} + \widehat{B'A'C'} = 180^\circ$, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$; M là trung điểm cạnh BC. Chứng minh rằng $AM = \dfrac{1}{2}B'C'$.

Lời giải.



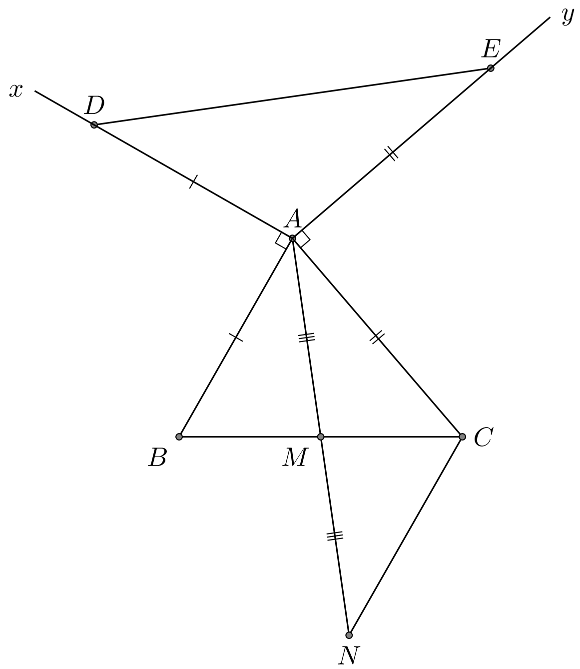


Trên tia đối của tia MA, lấy điểm D sao cho $MD = MA$.
$\triangle MAB$ và $\triangle MDC$ có $MA = MD$ (cách dựng), $\widehat{AMB} = \widehat{DMC}$ (đối đỉnh), $MB = MC$ (gt).
Do đó $\triangle MAB = \triangle MDC$ (c.g.c)
Suy ra $AB = DC$, $\widehat{ABM} = \widehat{DCM}$.
Ta có $\widehat{ABM} = \widehat{DCM}$, $\widehat{ABM}$ và $\widehat{DCM}$ sole trong, suy ra $AB \parallel CD$.
Mà $\widehat{BAC}$ và $\widehat{ACD}$ là hai góc trong cùng phía nên $\widehat{BAC} + \widehat{ACD} = 180^\circ$.

Mặt khác, $\widehat{BAC} + \widehat{B'A'C'} = 180^\circ$ (gt).
Suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{B'A'C'}$.
$\triangle A'B'C'$ và $\triangle CDA$ có $A'B' = DC$ $(= AB)$, $\widehat{ACD} = \widehat{B'A'C'}$, $A'C' = AC$ (gt).
Do đó $\triangle A'B'C' = \triangle CDA$ (c.g.c).
Suy ra $B'C' = AD$.
Mà $AM = \dfrac{1}{2}AD$, suy ra $AM = \dfrac{1}{2}B'C'$. □

Bài 14. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} < 90^\circ$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C vẽ tia Ax vuông góc với AB, trên tia Ax lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B vẽ tia Ay vuông góc với AC, trên tia Ay lấy điểm E sao cho $AE = AC$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Chứng minh rằng $AM = \dfrac{1}{2}DE$.

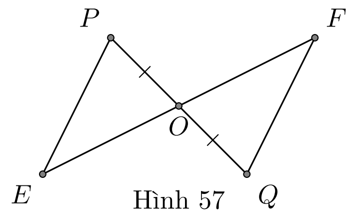
Lời giải.
Trên tia đối của tia MA, lấy điểm N sao cho $MA = MN$.
Ta có $\triangle MAB = \triangle MNC$ (c.g.c)
Suy ra $\widehat{BAM} = \widehat{MNC}$ và $AB = CN$.
Tiếp tục chứng minh được $\triangle CAN = \triangle AED$ (c.g.c), suy ra $AN = DE$.
Mà $AM = \dfrac{1}{2}AN$, suy ra $AM = \dfrac{1}{2}DE$.



□

Bài 15. Trong hình 57 biết $PO = OQ$ và $PE \parallel FQ$ (P, O, Q thẳng hàng; E, O, F thẳng hàng). Hãy chứng minh $\triangle EOP = \triangle FOQ$.

Lời giải.
Ta có $PE \parallel FQ \Rightarrow \widehat{OPE} = \widehat{OQF}$ (hai góc sole trong).
$\triangle EOP$ và $\triangle FOQ$ có $\widehat{OPE} = \widehat{OQF}$ (cmt), $OP = OQ$ (gt), $\widehat{POE} = \widehat{QOF}$ (đối đỉnh).
Vậy $\triangle EOP = \triangle FOQ$ (g.c.g).



Hình 57

□

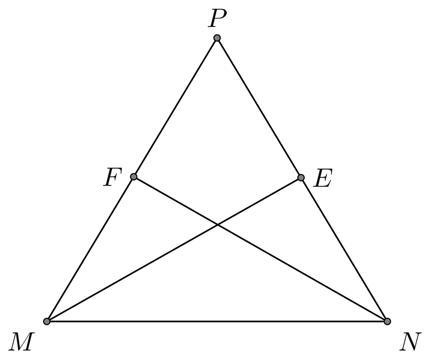
Bài 16. Cho $\triangle MNP$ có góc $\widehat{M} = \widehat{N}$, kẻ ME là tia phân giác của $\widehat{M}$ $(E \in NP)$, kẻ tia NF là tia phân giác của $\widehat{N}$ $(F \in MP)$. Chứng minh $ME = NF$.

Lời giải.

$\triangle MEN$ và $\triangle NFM$ có $\widehat{M} = \widehat{N}$ (gt); MN là cạnh chung; $\widehat{EMN} = \widehat{FNM}$ $\left(\text{cùng bằng } \frac{1}{2}\widehat{M} = \frac{1}{2}\widehat{N}\right)$.

Do đó $\triangle MEN = \triangle NFM$ (g.c.g).

Suy ra $ME = NF$.



□

Bài 17. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = \widehat{C}$ (góc A nhọn). Từ B hạ $BH \perp AC$. Từ C hạ $CK \perp AB$. Chứng minh rằng $BH = CK$.

Lời giải.

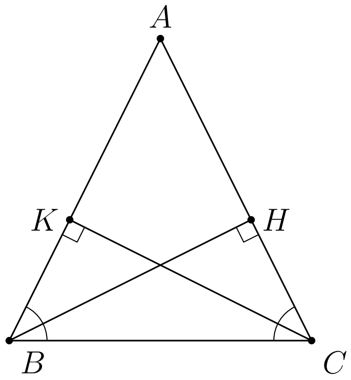
Ta có $\widehat{KCB} = 90^\circ - \widehat{B}$, $\widehat{HBC} = 90^\circ - \widehat{C}$, mà $\widehat{B} = \widehat{C}$ (giả thiết), suy ra $\widehat{KCB} = \widehat{BHC}$. Xét $\triangle BKC$ và $\triangle BHC$ có:

BC chung (Giả thiết)

$\widehat{KCB} = \widehat{BHC}$(chứng minh trên)

$\widehat{B} = \widehat{C}$ (giả thiết)

Vậy $\triangle BKC = \triangle CHB$ (g.c.g).



□

Bài 18. Cho $\triangle ABC$, đường phân giác của góc A cắt đường phân giác của góc B tại O. Từ O hạ $OE \perp AB$ (E thuộc AB), $OF \perp AC$ (F thuộc AC), $OI \perp BC$ (I thuộc BC). Chứng minh $OE = OF = OI$.

Lời giải.

Ta có: $\widehat{FOA} = 90^\circ - \widehat{A}_2$, $\widehat{AOE} = 90^\circ - \widehat{A}_1$, mà $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (do AO là tia phân giác), suy ra $\widehat{FOA} = \widehat{AOE}$.

Chứng minh tương tự, ta có $\widehat{IOB} = \widehat{EOB}$.

Xét $\triangle OFA$ và $\triangle OAE$ có:

OA chung

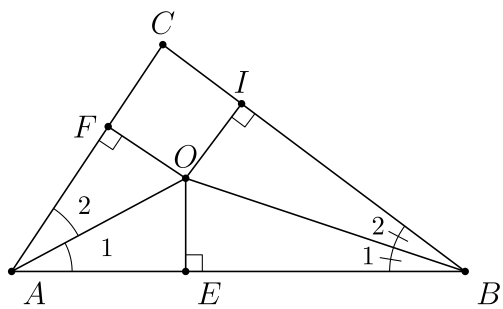
$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (do AO là tia phân giác)

$\widehat{FOA} = \widehat{AOE}$ (chứng minh trên)

Nên $\triangle OFA = \triangle OEA$ (g.c.g), suy ra $OE = OF$.

Chứng minh tương tự, ta có: $\triangle IOB = \triangle EOB$ (g.c.g), suy ra $OI = OE$.

Từ đó ta có $OE = OF = OI$.



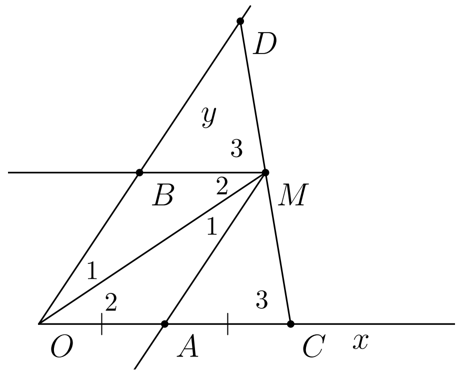
□

Bài 19. Cho góc $\widehat{xOy}$ và điểm M nằm trong góc đó. Qua M kẻ đường thẳng song song với Ox, đường thẳng này cắt Oy tại B. Qua M kẻ đường thẳng song song với Oy, đường thẳng này cắt Ox tại A.

a) Chứng minh $MA = OB$; $MB = OA$.

b) Trên tia đối của tia AO lấy điểm C sao cho $AC = AO$. Đường thẳng CM cắt Oy tại D. Chứng minh $CM = MD$.

Lời giải.



a) Xét $\triangle OBM$ và $\triangle OMA$ có:
OM chung
$\widehat{O}_1 = \widehat{M}_1$ (so le trong)
$\widehat{O}_2 = \widehat{M}_2$ (so le trong)
Vậy $\triangle OBM = \triangle MAO$ (g.c.g) $\Rightarrow MA = OB$, $MB = OA$.

b) Do $AO = AC$ (giả thiết) mà $OA = BM$ (chứng minh a) nên $AC = BM$.
Ta có $\widehat{DBM} = \widehat{DOC}$ (đồng vị), mà $\widehat{MAC} = \widehat{DOC}$ (đồng vị) nên $\widehat{DBM} = \widehat{MAC}$.
Xét $\triangle DBM$ và $\triangle MCA$ có
$BM = AC$ (chứng minh trên)
$\widehat{M}_3 = \widehat{C}_3$ (đồng vị)
$\widehat{DBM} = \widehat{MAC}$ (chứng minh trên)
Nên $\triangle DBM = \triangle MAC$ (g.c.g), suy ra $CM = MD$.

□

2. Nâng cao

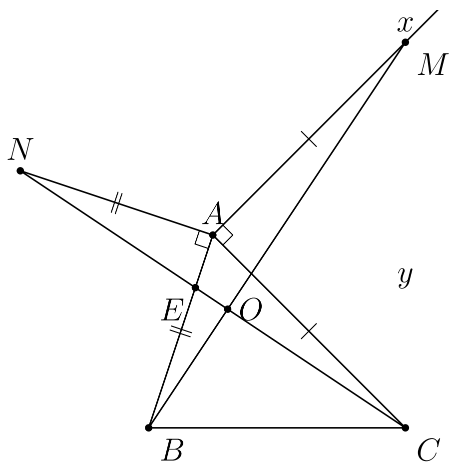
Bài 20. Cho $\triangle ABC$ ($\widehat{A} < 90^\circ$). Tại A kẻ $Ax \perp AC$. Trên Ax lấy điểm M sao cho $MA = AC$ (M và B thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AC). Tại A kẻ $Ay \perp AB$. Trên Ay lấy điểm N sao cho $NA = AB$ (N và C thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB). Chứng minh rằng:

a) $\triangle ABM = \triangle ANC$;

b) $BM = CN$;

c) $BM \perp CN$.

Lời giải.



a) Ta có: $\widehat{MAB} = \widehat{MAC} + \widehat{BAC}$, $\widehat{NAC} = \widehat{NAB} + \widehat{BAC}$, mà $\widehat{NAB} = \widehat{MAC} = 90^\circ$ nên $\widehat{NAC} = \widehat{MAB}$.
Xét $\triangle CAN$ và $\triangle MAB$ có:
$AN = AB$ (giả thiết)
$AM = AC$ (giả thiết)
$\widehat{NAC} = \widehat{MAB}$ (chứng minh trên)
Vậy $\triangle CAN = \triangle MAB$ (c.g.c).

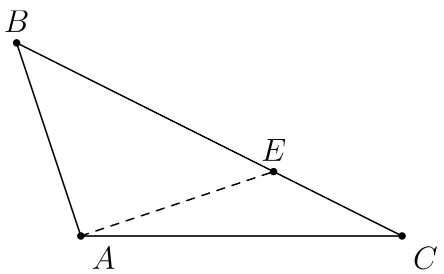
b) $\triangle CAN = \triangle MAB$ (chứng minh a), suy ra $BM = CN$.

c) $\triangle CAN = \triangle MAB$ (chứng minh a) nên $\widehat{CNA} = \widehat{ABM}$.
Gọi O là giao điểm của BM và CN; E là giao điểm của CN và AB.
Ta có $\widehat{EOB} = \widehat{BEO} + \widehat{EBO}$, mà $\widehat{BEO} = \widehat{AEN}$ (đối đỉnh) và $\widehat{EBO} = \widehat{ENA}$ (chứng minh trên). Nên $\widehat{EOB} = \widehat{ENA} + \widehat{AEN} = 90^\circ$, suy ra $BM \perp CN$.

□

Bài 21. Đố vui: Góc tù bằng góc nhọn?
Cho $\triangle ABC$ có góc A tù ($AB < AC$). Lấy A làm tâm vẽ đường tròn bán kính AB cắt BC ở E (khác B).
Một học sinh lập luận: Xét $\triangle ABC$ và $\triangle AEC$ có $AB = AE$ (cùng bán kính); góc C chung và cạnh AC chung. Vậy $\triangle ABC = \triangle AEC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{EAC}$. Mà $\widehat{BAC}$ là góc tù; $\widehat{EAC}$ là góc nhọn. Vậy là góc tù bằng góc nhọn (?). Em hãy chỉ ra chỗ sai trong lập luận trên.

Lời giải.
Góc C chung không phải là góc nằm giữa 2 cặp cạnh bằng nhau, nên lập luận trên của bạn học sinh là sai.

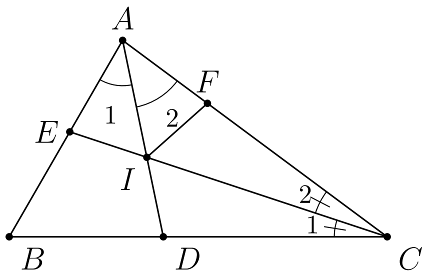


□

Bài 22. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 60°$. Hai tia phân giác AD và CE của các góc $\widehat{BAC}$ và $\widehat{ACB}$ ($D \in BC$, $E \in AB$) cắt nhau ở I. Chứng minh rằng $ID = IE$.

(Đề thi HSG Toán lớp 7, Quận 1, TP. Hồ Chí Minh, 2004 - 2005)

Lời giải.
Ta có $\widehat{BAC} + \widehat{BCA} = 180° - \widehat{ABC} = 180° - 60° = 120°$, mà $\widehat{IAC} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ (do AD là tia phân giác), $\widehat{ICA} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$ (do CE là tia phân giác) nên suy ra $\widehat{ICA} + \widehat{IAC} = 60°$ hay $\widehat{AIC} = 120°$.
Mặt khác, $\widehat{AIE} = \widehat{DIC}$ (đối đỉnh), mà $\widehat{AIE} = 180° - \widehat{AIC} = 180° - 120° = 60°$ (2 góc kề bù), nên ta có $\widehat{AIE} = \widehat{DIC} = 60°$.



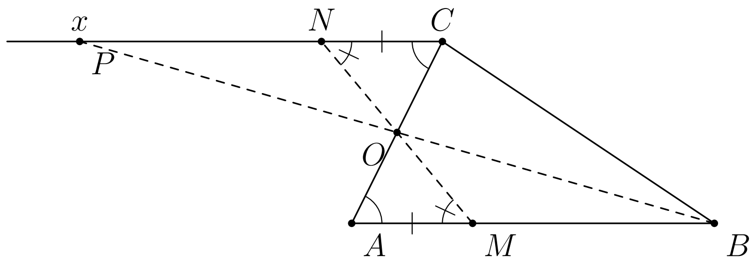
Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $AE = AF$.
Xét $\triangle AIE$ và $\triangle AFI$ có:
$AE = AF$ (giả thiết)
AI chung
$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (AD là tia phân giác)
Nên $\triangle AEI = \triangle AFI$ (c.g.c), suy ra $\widehat{AIE} = \widehat{AIF} = 60°$ và $IE = IF$.
Ta có: $\widehat{FIC} = \widehat{AIC} - \widehat{AIF} = 120° - 60° = 60°$.
Xét $\triangle IFC$ và $\triangle IDC$ có:
IC chung
$\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ (CE là tia phân giác)
$\widehat{DIC} = \widehat{FCI} = 60°$
Vậy $\triangle FIC = \triangle DIC$ (g.c.g), suy ra $ID = IF$.
Từ đó ta có: $IF = IE = ID$. □

Bài 23. Cho $\triangle ABC$. Từ C kẻ $Cx \parallel AB$ (A và tia Cx nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ BC). Trên BA lấy điểm M. Trên tia Cx lấy điểm N sao cho $AM = CN$. Nối MN cắt AC tại O.

a) Chứng minh $OA = OC$; $OM = ON$.

b) Nối BO, tia BO cắt Cx tại P. Chứng minh $AB = CP$.

Lời giải.



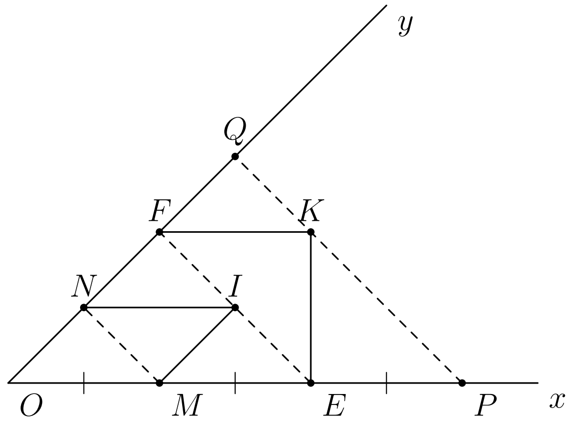
a) Xét $\triangle CON$ và $\triangle MOA$ có:
$AM = CN$ (giả thiết)
$\widehat{NCO} = \widehat{OAM}$ (so le trong)
$\widehat{CNO} = \widehat{OMA}$ (so le trong)
Vậy $\triangle CON = \triangle AOM$ (g.c.g),
suy ra $OC = OA$ và $OM = ON$.

b) Xét $\triangle COP$ và $\triangle AOB$ có:
$OA = OC$ (chứng minh a)
$\widehat{PCO} = \widehat{BAO}$ (so le trong)
$\widehat{COP} = \widehat{AOB}$ (so le trong)
Vậy $\triangle COP = \triangle AOB$ (g.c.g),
suy ra $PC = AB$.

□

Bài 24. Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$. Trên tia Ox lấy các điểm M, E, P sao cho $OM = ME = EP$. Trên tia Oy lấy điểm N tùy ý. Từ E và P kẻ các đường thẳng song song với MN. Chúng cắt Oy theo thứ tự tại F và Q. Từ N kẻ $NI \parallel Ox$ ($I \in EF$). Từ F kẻ $FK \parallel Ox$ ($K \in PQ$). Chứng minh rằng $ON = NF = FQ$.

Lời giải.



Nối MI. Xét $\triangle NIM$ và $\triangle IME$ có:
MI chung (giả thiết)
$\widehat{NIM} = \widehat{IME}$ (so le trong)
$\widehat{NMI} = \widehat{MIE}$ (so le trong)
Vậy $\triangle NIM = \triangle EMI$ (g.c.g), suy ra $NI = ME$.
Tương tự nối EK. Chứng minh tương tự, ta có $\triangle EPK = \triangle KFE$ (g.c.g), suy ra $EP = FK$.
Mà $OM = ME = EP \Rightarrow OM = NI = FK$.
Xét $\triangle ONM$, $\triangle NFI$ và $\triangle FQK$ có:
$OM = NI = FK$ (chứng minh trên)
$\widehat{ONM} = \widehat{NFI} = \widehat{FQK}$ (đồng vị)
$\widehat{NOM} = \widehat{FNI} = \widehat{QFK}$ (đồng vị)
Vậy $\triangle ONM = \triangle NFI = \triangle FQK$ (g.c.g),
suy ra $ON = NF = FQ$.

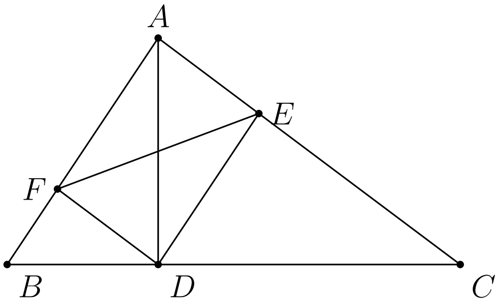
□

Bài 25. Cho tam giác ABC, D là một điểm trên cạnh BC. Từ D kẻ các tia song song với AB cắt AC ở E, song song với AC cắt AB ở F.

a) Chứng minh rằng các tam giác AED và DFA bằng nhau, các tam giác AEF và DEF bằng nhau.

b) Hãy xác định điểm D trên cạnh BC để $AE = AF$.

Lời giải.



a) Xét $\triangle AFD$ và $\triangle AED$ có:
AD chung
$\widehat{FDA} = \widehat{EAD}$ (so le trong)
$\widehat{FAD} = \widehat{EDA}$ (so le trong)
Vậy $\triangle AFD = \triangle DEA$ (g.c.g), suy ra $AE = DF$.
Xét $\triangle AEF$ và $\triangle DEF$ có:
EF chung
$\widehat{DEF} = \widehat{AFE}$ (so le trong)
$\widehat{AEF} = \widehat{DFE}$ (so le trong)
Vậy $\triangle AFE = \triangle DEF$ (g.c.g), suy ra $AF = DE$.

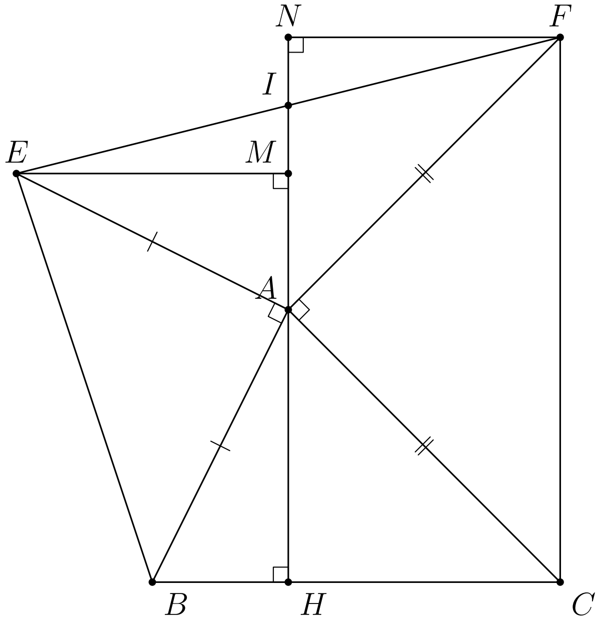
b) Từ đó câu a và giả thiết câu b ta có $DE = DF$.
Ta có $\widehat{BFD} = 180° - \widehat{FBD} - \widehat{FDB}$ (tổng 3 góc trong tam giác), $\widehat{DEC} = 180° - \widehat{EDC} - \widehat{ECD}$ (tổng 3 góc trong tam giác); mà $\widehat{FBD} = \widehat{EDC}$ (đồng vị) và $\widehat{FDB} = \widehat{FDB}$ (đồng vị) nên $\widehat{BFD} = \widehat{DEC}$.
Xét $\triangle BDF$ và $\triangle DEC$ có:
$DE = DF$ (chứng minh trên)
$\widehat{ECD} = \widehat{FDB}$ (đồng vị)
$\widehat{BFD} = \widehat{DEC}$ (chứng minh trên)
Vậy $\triangle BDF = \triangle DCE$ (g.c.g), suy ra $BD = DC$ hay D là trung điểm của BC.

□

Bài 26. Cho tam giác nhọn ABC. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Vẽ $AE \perp AB$ và $AE = AB$ (E và C khác phía đối với AB). Vẽ $AF \perp AC$ và $AF = AC$ (F và B khác phía đối với AC). Kẻ EM và FN cùng vuông góc với đường thẳng AH ($M, N \in AH$). EF cắt AH ở I. Chứng minh rằng:

a) $EM + BH = HM$, $FN + CH = HN$.

b) I là trung điểm của EF.



Lời giải.

a) $\widehat{MEA}+\widehat{EBC}=180^\circ$ (2 góc trong cùng phía), nên $\widehat{MEA}+\widehat{AEB}+\widehat{EBA}+\widehat{ABH}=180^\circ$, mà $\widehat{AEB}+\widehat{EBA}=90^\circ$ nên $\widehat{MEA}+\widehat{ABH}=90^\circ$.
Mặt khác $\widehat{MEA}+\widehat{MAE}=90^\circ$, $\widehat{ABH}+\widehat{BAH}=90^\circ$ nên từ đó ta có $\widehat{MAE}=\widehat{ABH}$ và $\widehat{BAH}=\widehat{MEA}$.
Xét $\triangle MAE$ và $\triangle ABH$ có:
$AE=AB$ (giả thiết)
$\widehat{ABH}=\widehat{MAE}$ (chứng minh trên)
$\widehat{BAH}=\widehat{MEA}$ (chứng minh trên)
Vậy $\triangle ABH=\triangle EAM$ (g.c.g), suy ra $AM=BH$ và $EM=AH$.
Ta có $BH+EM=AM+AH=HM$.
Chứng minh tương tự ta cũng có $\triangle AFN=\triangle CAH$, suy ra $FN=HA$ và $NA=HC$.
Ta có : $FN+CH=HA+HC=HC$.

b) Vì $FN\perp AH$, $AH\perp EM$ nên $FN\parallel EM$.
Xét $\triangle IEM$ và $\triangle NIF$ có:
$EM=AH=FN$ (chứng minh a)
$\widehat{IEM}=\widehat{IFN}$ (so le trong)
$\widehat{IME}=\widehat{INF}=90^\circ$
Vậy $\triangle IME=\triangle INF$ (g.c.g), suy ra $IE=IF$ hay I là trung điểm của EF.

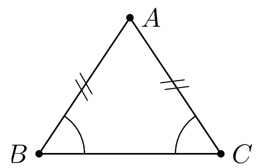
□

§2. Tam giác cân. Tam giác đều

I. Kiến thức cần nhớ

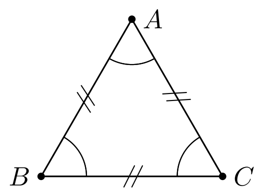
1. Tam giác cân

Cách chứng minh $\left[\begin{array}{l}AB=AC.\\ \widehat{B}=\widehat{C}.\end{array}\right.$



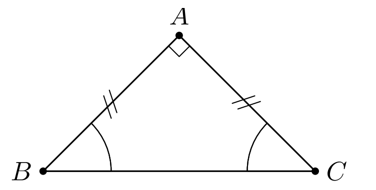
2. Tam giác đều

Cách chứng minh $\left[\begin{array}{l}AB=AC=BC.\\ \widehat{A}=\widehat{B}=\widehat{C}.\\ AB=AC \text{ and } \widehat{A}=60^\circ.\end{array}\right.$



3. Tam giác vuông cân

Cách chứng minh $\left[\begin{array}{l}\widehat{A}=90^\circ \text{ and } AB=AC.\\ \widehat{A}=90^\circ \text{ and } \widehat{B}=45^\circ \text{ (or)} \widehat{C}=45^\circ.\end{array}\right.$



II. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Đ Trong tam giác cân, mỗi góc ở đáy đều là góc nhọn.

Câu 2. S Tam giác cân có góc ở đỉnh bằng 100° thì mỗi góc ở đáy là 50°.

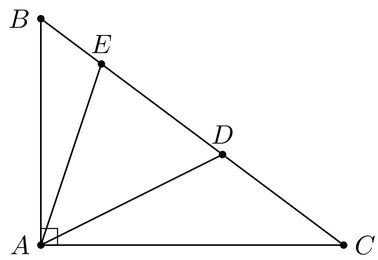
Câu 3. Đ Các góc nhọn của tam giác vuông cân có số đo bằng 45∘.

III. Học giải toán

Ví dụ 1. Trên cạnh huyền BC của tam giác vuông ABC, lấy các điểm D và E sao cho $BD=BA$, $CE=CA$. Tính góc $\widehat{DAE}$.

Lời giải.

$\triangle BAD$ cân tại B, $\triangle CAE$ cân tại C. Ta có



$$\widehat{BAD}=\frac{1}{2}\left(180^\circ-\widehat{B}\right);\ \widehat{CAE}=\frac{1}{2}\left(180^\circ-\widehat{C}\right).$$

mà $\widehat{BAD}+\widehat{CAE}=\widehat{EAD}+90^\circ$.

nên

$$\begin{aligned}\widehat{DAE} &= \widehat{BAD}+\widehat{CAE}-90^\circ\\ &= \frac{1}{2}\left(180^\circ-\widehat{B}\right)+\frac{1}{2}\left(180^\circ-\widehat{C}\right)-90^\circ\\ &= 90^\circ-\frac{1}{2}\left(\widehat{B}+\widehat{C}\right)\\ &= 90^\circ-45^\circ=45^\circ.\end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Các tia phân giác của góc $\widehat{B}$ và góc $\widehat{C}$ cắt nhau tại O. Qua O kẻ đường thẳng song song với BC. Đường thẳng này cắt cạnh AB tại E và cắt cạnh AC tại F.

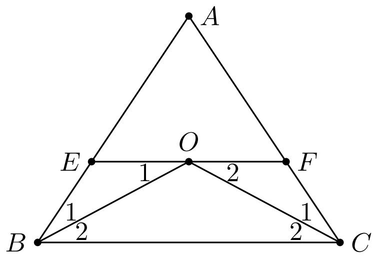
a) Trong hình vẽ có những tam giác nào là tam giác cân?

b) Trong đó có những tam giác cân nào bằng nhau?

Lời giải.

a)

Xét $\triangle ABC$ cân (gt) nên $\widehat{B} = \widehat{C}$ (t/c).
Suy ra $\frac{1}{2}\widehat{B} = \frac{1}{2}\widehat{C}$ hay $\widehat{B_2} = \widehat{C_2}$.
Vậy $\triangle BOC$ cân tại O.
Xét $\triangle AEF$, do $EF \parallel BC$ nên $\widehat{AEF} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{AFE}$.
Vậy $\triangle AEF$ cân tại A.
Xét $\triangle BEO$ có $\widehat{B_2} = \widehat{O_1}$ (so le, $EF \parallel BC$).
Mà $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (gt) nên $\widehat{O_1} = \widehat{B_1}$ (cùng bằng $\widehat{B_2}$).
Vậy $\triangle BEO$ cân tại E.
Tương tự, $\triangle CFO$ cân tại F.

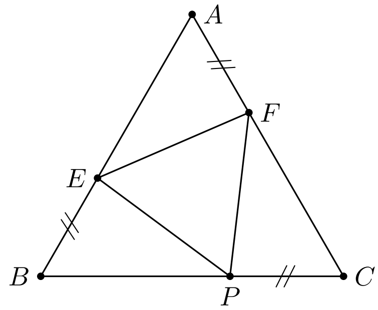


b) Xét hai tam giác cân $\triangle BEO$ và $\triangle CFO$ có $BO = CO$ ($\triangle BOC$ cân).
$\widehat{B_1} = \frac{1}{2}\widehat{B}$; $\widehat{C_1} = \frac{1}{2}\widehat{C}$, mà $\widehat{B} = \widehat{C}$ (t/c) nên $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$. Vậy $\triangle BEO = \triangle CFO$ (g.c.g).

□

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ đều. Trên cạnh AB lấy điểm E, trên cạnh AC lấy điểm F, trên cạnh BC lấy điểm P sao cho $BE = AF = CP$. Chứng minh $\triangle EFP$ là tam giác đều.

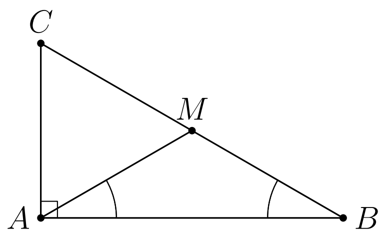
Lời giải.
Ta có $AB = AC = BC$ ($\triangle ABC$ đều) và $BE = AF = CP$ (giả thiết).
Vậy $AB - BE = AC - AF = BC - CP$ hay $AE = CF = BP$.
Xét ba tam giác $\triangle AEF$; $\triangle BPE$ và $\triangle CFP$ có
$AE = CF = BP$ (cmt)
$AF = BE = CP$ (giả thiết).
$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60^\circ$ (tc tam giác đều).
Vậy $\triangle AEF = \triangle BPE = \triangle CFP$ (c.g.c).
Suy ra $EF = PE = FP$.
Do đó $\triangle EFP$ là tam giác đều (3 cạnh bằng nhau).



□

Ví dụ 4. Chứng minh định lí "Nếu một tam giác vuông có một góc nhọn bằng 30° thì cạnh đối diện với góc đó bằng nửa cạnh huyền."

Lời giải.
Xét tam giác $\triangle ABC$ vuông tại A có góc $\widehat{B} = 30^\circ$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAM} = 30^\circ$.
Xét tam giác $\triangle AMB$ có góc $\widehat{BAM} = \widehat{B} = 30^\circ$ nên là tam giác cân, suy ra $MA = MB$. (1)
Xét tam giác $\triangle AMC$ có góc $\widehat{MAC} = \widehat{C} = 60^\circ$ nên là tam giác đều, suy ra $AM = AC = MC = \frac{1}{2}BC$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $AC = \frac{1}{2}BC$.



□

Ví dụ 5. Tam giác $\triangle ABC$ có góc $\widehat{B} = 45^\circ$, $\widehat{C} = 120^\circ$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$.

a) Kẻ $DE \perp AC$ ($E \in AC$). Chứng minh rằng $ED = EB = EA$.

b) Tính góc $\widehat{ADB}$.

Lời giải.

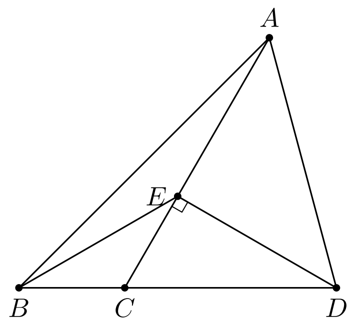
a) Vì $\widehat{ECB} = 120^\circ$ nên $\widehat{ECD} = 60^\circ$.
Mặt khác tam giác $\triangle DEC$ vuông tại E nên $\widehat{EDC} + \widehat{ECD} = 90^\circ$
Suy ra $\widehat{EDC} = 30^\circ$. Lại có EC là cạnh đối diện với $\widehat{EDC}$ nên

$$EC = \frac{1}{2}CD \Rightarrow EC = CB.$$

Vậy tam giác $\triangle ECB$ cân tại C.
Mặt khác, $\widehat{ECB} = 120^\circ$ nên $\widehat{EBC} = 30^\circ$.
Do đó $\triangle EBD$ cân tại E suy ra $EB = ED$. Lại có

$$\widehat{ABE} + \widehat{EBC} = \widehat{ABC} = 45^\circ$$

Suy ra $\widehat{ABE} = 15^\circ$.
Áp dụng định lí tổng 3 góc trong tam giác ABC ta có $\widehat{EAB} = 15^\circ$
Suy ra $\triangle EAB$ cân tại E. Suy ra $EA = EB \Rightarrow EA = ED$.



b) Ta có $EA = ED$ và $EA \perp ED$ suy ra $\triangle AED$ vuông cân tại E.
Suy ra $\widehat{ADE} = 45^\circ$.
Khi đó $\widehat{ADB} = \widehat{ADE} + \widehat{EDC} = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$.
Vậy $\widehat{ADB} = 75^\circ$.

□

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 100^\circ$, $BC = a$, $AC = b$. Về phía ngoài tam giác ABC vẽ tam giác ABD cân tại D có $\widehat{ADB} = 140^\circ$. Tính chu vi tam giác ABD theo a và b.

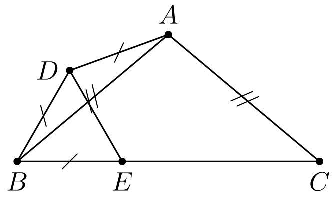
Lời giải.

Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BD$ và ta có

$$\widehat{DBA} = 20^\circ, \widehat{ABE} = 40^\circ.$$

Xét $\triangle BDE$ cân tại B, có $\widehat{DBE} = 60^\circ$ nên $\triangle BDE$ đều, do đó $BD = BE = DE = DA$.
Từ đó ta có $\widehat{EDA} = \widehat{BDA} - \widehat{BDE} = 80^\circ$ và $\triangle DAE$ cân tại D nên

$$\widehat{DEA} = \widehat{DAE} = 50^\circ.$$



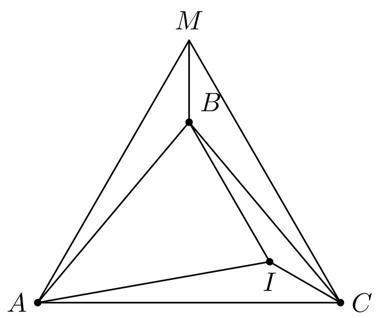
Ta có $\widehat{EAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} - \widehat{DAE} = 20^\circ + 100^\circ - 50^\circ = 70^\circ$ (1)
Lại có $\widehat{AEC} = 180^\circ - \widehat{DEA} - \widehat{DEB} = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\triangle CAE$ cân tại C suy ra $CA = CE$.
Do đó $AD = BD = BE = BC - EC = BC - AC = a - b$ và $AB = AC = b$.
Vậy chu vi $\triangle ABD$ là $AD + DB + BA = a - b + a - b + b = 2a - b$.

□

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC cân tại B, $\widehat{ABC} = 80^\circ$. Lấy I là điểm trong tam giác sao cho $\widehat{IAC} = 10^\circ$, $\widehat{ICA} = 30^\circ$. Hãy tính góc ABI.

Lời giải.
Vẽ tam giác ACM đều, M nằm trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa điểm B. Ta có

$$\triangle AMB = \triangle CMB \quad \text{(c.c.c)}$$



Suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = 30^\circ$.
Lại có $AM = AC$, $\widehat{BMA} = \widehat{ICA} = 30^\circ$ và $\widehat{MAB} = \widehat{IAC} = 10^\circ$ nên

$$\triangle BAM = \triangle IAC$$

Suy ra $BA = IA$ hay $\triangle BAI$ cân tại A.
Từ đó suy ra $\widehat{BAI} = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ$.
Do đó $\widehat{ABI} = \dfrac{180^\circ - \widehat{BAI}}{2} = 70^\circ$.

□

IV. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Cho tam giác ABC cân, biết $\widehat{B} = 50^\circ$. Tính số đo các góc còn lại của tam giác ABC (lưu ý xét đủ các trường hợp).
Lời giải.

a) Trường hợp $\triangle ABC$ cân tại A. Ta có $\widehat{B} = \widehat{C} = 50^\circ$, $\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{C} = 80^\circ$.

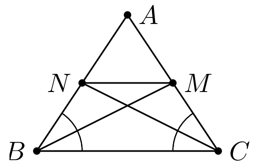
b) Trường hợp $\triangle ABC$ cân tại B. Ta có $\widehat{B} = 50^\circ, \widehat{A} = \widehat{C} = \dfrac{180^\circ - \widehat{B}}{2} = 65^\circ$.

c) Trường hợp $\triangle ABC$ cân tại C. Ta có $\widehat{A} = \widehat{B} = 50°$, $\widehat{C} = 180° - \widehat{A} - \widehat{B} = 80°$.

□

Bài 2. Chứng minh rằng trong tam giác cân, độ dài các đường trung tuyến, đường cao, phân giác xuất phát từ đỉnh thuộc đáy thì bằng nhau.

Lời giải.



a) Xét tam giác ABC cân tại A có BM và CN là hai đường trung tuyến.
Ta có $\triangle ABM = \triangle ACN$ (c.g.c) suy ra $BM = CN$ (tương ứng).
Hay BM và CN là 2 trung tuyến bằng nhau.

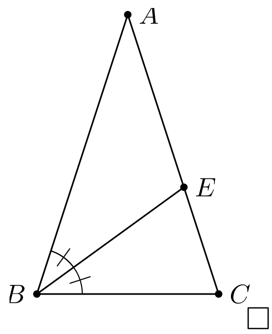
b) Xét tam giác cân ABC có BH, CK là hai đường cao.
Xét $\triangle BHC$ và $\triangle CKB$ có BC cạnh chung và $\widehat{B} = \widehat{C}$.
Suy ra $\triangle BHC = \triangle CKB$ (ch-gn), suy ra $BH = CK$ (tương ứng).
Hay BH và CK là hai đường cao bằng nhau.

c) Xét tam giác cân ABC có BR, CS là hai đường phân giác.
Xét $\triangle BRC$ và $\triangle CSB$ có $\widehat{B} = \widehat{C}$, BC cạnh chung và $\widehat{CBR} = \widehat{BCS}$ (do $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$).
Suy ra $BR = CS$ (tương ứng).
Hay BR và CS là hai đường phân giác bằng nhau.

□

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ cân tại A, có $\widehat{A} = 36°$. Tia phân giác của góc $\widehat{B}$ cắt AC tại E. So sánh BE với AE và BC?

Lời giải.



$\triangle ABC$ có góc ở đỉnh $36°$.

Vậy $\widehat{B} = \widehat{C} = \dfrac{180° - 36°}{2} = 72°$.

BE là tia phân giác nên $\widehat{ABE} = \dfrac{1}{2}\widehat{B} = 36°$.

Vậy $\widehat{A} = \widehat{ABE} = 36°$, suy ra $\triangle AEB$ cân tại E hay $EA = EB$.

Ngoài ra, $\widehat{BEC} = 180° - \widehat{C} - \widehat{CBE} = 180° - 36° - 72° = 72°$ nên $\triangle BCE$ cân tại B suy ra $BE = BC$. Vậy $AE = BC$.

□

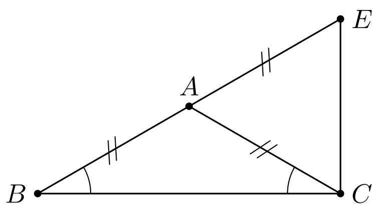
Bài 4. Cho tam giác ABC cân tại A, góc $\widehat{B} = 30°$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E sao cho $AE = AB$.

a) $\triangle ACE$ là tam giác gì?

b) $\triangle BCE$ là tam giác gì?

Lời giải.

a)



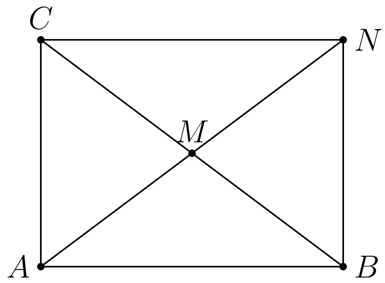
$\triangle ABC$ cân tại A (gt) suy ra $\widehat{B} = \widehat{ACB} = 30°$.
$\widehat{CAE} = 60°$ (góc ngoài của $\triangle ABC$).
$\triangle ACE$ có $AE = AB$ (giả thiết), $AC = AB$ (giả thiết).
Vậy $AE = AC$ (cùng bằng AB).
Suy ra $\triangle ACE$ cân, lại có $\widehat{CAE}$ bằng $60°$.
Vậy $\triangle ACE$ đều.

b) Xét $\triangle BCE$ có $\widehat{B} = 30°$, $\widehat{E} = 60°$ (do $\triangle ACE$ đều).
Suy ra $\widehat{BCE} = 180° - (30° + 60°) = 90°$.
Vậy $\triangle BCE$ vuông tại C.

□

Bài 5. Chứng minh rằng "Nếu một tam giác có trung tuyến thuộc một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông."

Lời giải.

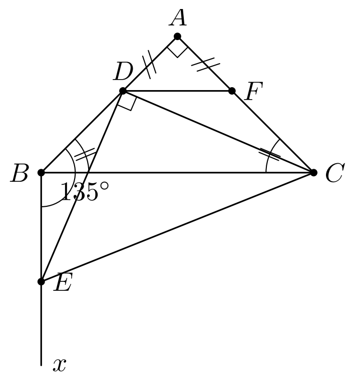


Xét tam giác ABC có M là trung điểm BC.
Trên tia đối của tia MA lấy điểm N sao cho $MN = MA$.
Ta có $\widehat{AMB} = \widehat{NMC}$ và $BM = CM$ (giả thiết) và $MA = MN$ (dựng hình).
Suy ra $\triangle MAB = \triangle MNC$ (c.g.c).
Suy ra $NC = AB$ và $\widehat{MBA} = \widehat{MCN}$
Suy ra $AB \parallel CN$.
Ta có $MA = \dfrac{1}{2}AN$ và $MA = \dfrac{1}{2}BC$ nên $AN = BC$.
Suy ra $\triangle ABC = \triangle CNA$ (c.c.c), suy ra $\widehat{BAC} = \widehat{ACN}$.
Mà $\widehat{BAC} + \widehat{ACN} = 180°$ (vì $AB \parallel NC$) nên $\widehat{BAC} = 90°$. (đpcm)

□

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, D là điểm bất kì trên cạnh AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C vẽ tia Bx sao cho $\widehat{ABx} = 135°$. Đường thẳng vuông góc với DC tại D cắt Bx tại E. Chứng minh tam giác DEC vuông cân.

Lời giải.



Lấy F thuộc AC sao cho $AD = AF$.
Khi đó tam giác ADF vuông cân ở A, suy ra $\widehat{DFA} = 45°$ và $\widehat{DFC} = 135°$.
Ta có $\widehat{BDE} = 180° - \widehat{EDC} - \widehat{ADC}$
$= 180° - 90° - \widehat{ADC} = 90° - \widehat{ADC}$ (1)
$\widehat{ACD} = 90° - \widehat{ADC}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{BDE}$. Mặt khác

$$BD = AB - AD,\ CF = AC - AF,\ AB = AC,\ AD = AF$$

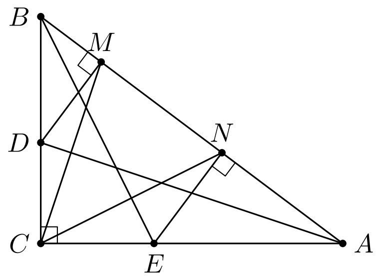
nên $BD = CF$.
Xét tam giác BDE và tam giác FCD có
$BD = FC$, $\widehat{BDE} = \widehat{FCD}$, $\widehat{EBD} = \widehat{DFC}$ (cùng bằng 135°).
Suy ra $\triangle BDE = \triangle FCD$ (g.c.g) suy ra $DE = DC$.
Mà tam giác EDC vuông ở D.
Vậy tam giác EDC vuông cân ở D.

□

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ vuông ($\widehat{ACB} = 90°$). Từ A và B kẻ hai tia phân giác góc A, B cắt AC ở E, cắt BC ở D. Từ D, E hạ các đường vuông góc xuống AB cắt AB ở M và N. Tính góc $\widehat{MCN}$.

Lời giải.

$\triangle BCE = \triangle BNE$ (ch-gn) suy ra $BC = BN$
Tương tự $\triangle ACD = \triangle AMD$ (ch-gn) suy ra $AC = AM$.
$\triangle CBN$ cân tại B, $\triangle CAM$ cân tại A. Ta có



$$\widehat{BCN} = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{B}\right);\ \widehat{ACM} = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{A}\right).$$

mà $\widehat{BCN} + \widehat{ACM} = \widehat{MCN} + 90^\circ$.
nên

$$\begin{aligned}\widehat{MCN} &= \widehat{BCN} + \widehat{ACM} - 90^\circ\\ &= \frac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{B}\right) + \frac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{A}\right) - 90^\circ\\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}\left(\widehat{B} + \widehat{A}\right)\\ &= 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.\end{aligned}$$

□

2. Nâng cao

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Tia phân giác của góc $\widehat{HAC}$ cắt cạnh BC tại D. Tia phân giác của góc $\widehat{HSB}$ cắt cạnh BC tại E. Chứng minh rằng

a) $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ là các tam giác cân. b) $AC + AB = BC + DE$.

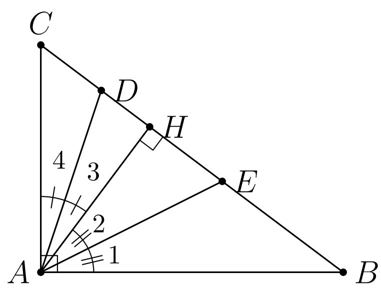
Lời giải.

a) Xét $\triangle AHD$ vuông tại H có
$\widehat{ADB} = 90^\circ - \widehat{A}_3$.
Lại có $\widehat{DAB} = 90^\circ - \widehat{A}_4$.
Do đó $\widehat{ADB} = \widehat{DAB}$ nên $\triangle ABD$ cân tại B.
Chứng ming tương tự ta cũng có $\triangle ACE$ cân tại C.

b)

$\triangle ABD$ cân tại B.
Suy ra $AB = BD = BE + DE$. (1)
$\triangle ACE$ cân tại C.
Suy ra $AC = CE$. (2)
Cộng (1) với (2) ta được

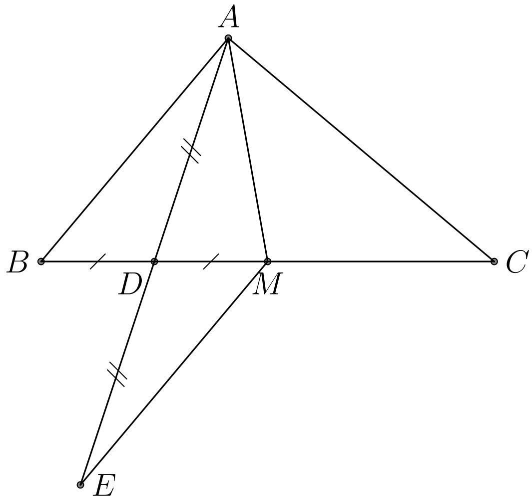
$$AB + AC = BE + ED + CE = (BE + EC) + ED = BC + ED.$$



□

Bài 9. Cho tam giác ABC có $BC = 2AB$, M là trung điểm của cạnh BC, D là trung điểm của cạnh BM. Chứng minh rằng $AC = 2AD$.
Lời giải.

Vẽ tia đối của tia DA, trên tia này lấy điểm E sao cho $DE = DA$.
Nhận thấy $\triangle DAB = \triangle DEM$ (c.g.c).
Suy ra $AB = ME$ và $\widehat{BAD} = \widehat{MED}$.
Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{MED}$ (so le trong).
Suy ra $AB \parallel ME \Rightarrow \widehat{BAM} + \widehat{AME} = 180^\circ$.
Mặt khác $AB = MB$ (cùng bằng $\frac{1}{2}BC$).
Suy ra $\triangle BAM$ cân tại B suy ra $\widehat{BAM} = \widehat{BMA}$.
Mà $\widehat{BMA} + \widehat{AMC} = 180^\circ$ (hai góc kề bù), suy ra $\widehat{AME} = \widehat{AMC}$.
Ta có $MC = ME$ (cùng bằng $\frac{1}{2}BC = AB$).
Xét $\triangle AME$ và $\triangle AMC$ có AM cạnh chung, $\widehat{AME} = \widehat{AMC}$ (cmt), $ME = MC$ (cmt).
Do đó $\triangle AME = \triangle AMC$ (c.g.c) suy ra $AE = AC$.
Mà $AE = 2AD$, do đó $AC = 2AD$.

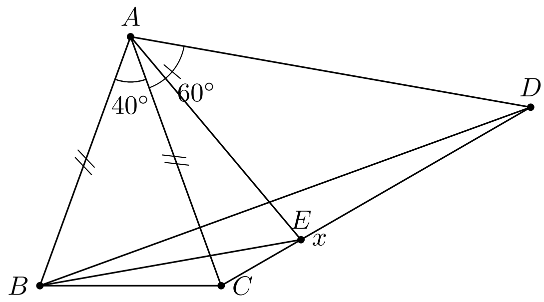


□

Bài 10. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 40^\circ$. Lấy điểm D khác phía B so với AC thỏa mãn $\widehat{CAD} = 60^\circ$, $\widehat{ACD} = 80^\circ$. Chứng minh rằng BD vuông góc với AC.

Lời giải.

Vẽ tia Ax (nằm trong $\widehat{CAD}$) sao cho $\widehat{CAx} = 20^\circ$.
Gọi E là giao điểm của tia Ax và CD.
Ta có $\triangle ACE$ cân tại A suy ra $AC = AE$.
Do đó $\triangle ABE$ đều suy ra $EB = EA$.
Ta có $\widehat{EDA} = \widehat{AEC} - \widehat{EAD} = 40^\circ$ suy ra $\triangle EAD$ cân tại E.
Suy ra $EA = ED$.
Ta có $\triangle BED$ cân có $\widehat{BED} = 160^\circ$ nên $\widehat{EDB} = 10^\circ$.
Do đó $\widehat{ACD} + \widehat{EDB} = 90^\circ$, suy ra $BD \perp AC$.



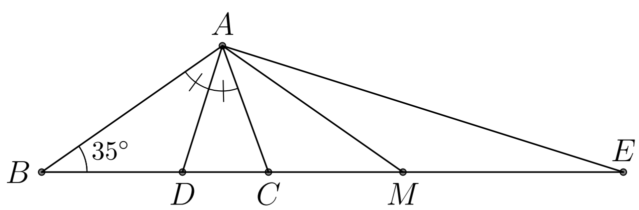
□

Bài 11. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 75^\circ$, $\widehat{B} = 35^\circ$. Phân giác góc $\widehat{A}$ cắt cạnh BC tại D. Đường thẳng qua A và vuông góc với AD cắt tia BC tại E. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng

a) $\triangle ACM$ là tam giác cân.

b) Chu vi tam giác ABC bằng độ dài đoạn thẳng BE.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{BAD} = \widehat{DAC} = \dfrac{75^\circ}{2} = 37^\circ 30'$, suy ra $\widehat{ADM} = 72^\circ 30'$ (góc ngoài của $\triangle ABD$).
Lại có $\triangle DAE$ vuông có AM là trung tuyến nên $\triangle MAD$ cân.

Do đó $\widehat{AMD} = 180^\circ - 2\widehat{ADM} = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$. (1)
Ta lại có trong $\triangle ABC$ góc $\widehat{A} = 75^\circ$, $\widehat{B} = 35^\circ$ suy ra $\widehat{C} = 70^\circ$.
Suy ra $\widehat{ACM} = 110^\circ$ suy ra $\widehat{CAM} = 180^\circ - 110^\circ - 35^\circ = 35^\circ$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ACM$ cân tại C.

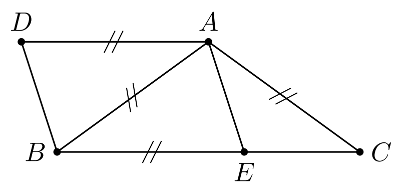
b) Ta có $AC = CM$ (do $\triangle ACM$ cân), $MA = ME$ (do $\triangle AME$ cân) và $MA = AB$ ($\triangle ABM$ cân vì $\widehat{ABM} = \widehat{AMB} = 35^\circ$).
Do đó $BE = BC + CA + AB$.

□

Bài 12. Cho tam giác ABC cân tại A có góc $\widehat{A} = 108^\circ$, $BC = a$, $AC = b$. Về phía ngoài tam giác ABC vẽ tam giác ABD cân tại A có góc $\widehat{BAD} = 36^\circ$. Tính chu vi tam giác ABD theo a và b.

Lời giải.

Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = AD$.
Từ giả thiết ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 36^\circ$.
Lại có $\triangle ABD = \triangle BAE$ (c.g.c) suy ra $BD = AE$.
Do đó $\widehat{ADB} = \widehat{BEA}$, $\widehat{BEA} = 72^\circ$ và $\widehat{ACE} = 36^\circ$ nên $\widehat{EAC} = 36^\circ$.
$\triangle EAC$ cân tại E suy ra $AE = EC$.
Ta có $BD = AE = EC = BC - BE = BC - AB = a - b$.
Vậy chu vi $\triangle ABD$ bằng



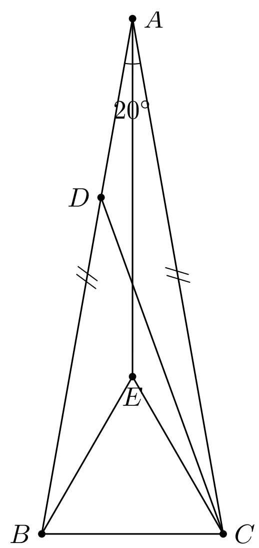
$$AB + AD + BD = b + b + a - b = a + b.$$

□

Bài 13. Cho tam giác ABC cân tại A có góc $\widehat{A} = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Tính góc $\widehat{ACD}$.

Lời giải.

Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A vẽ tam giác đều BCE.
Từ đó $\triangle ABE = \triangle ACE$ (c.c.c) suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{CAE} = 10^\circ$.
Ta có $\widehat{ACE} = \widehat{ACB} - \widehat{BCE} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$.
Lại có $AD = BC = CE$, $\widehat{CEA} = \widehat{DAC} = 20^\circ$ và AC cạnh chung.
suy ra $\triangle EAC = \triangle DCA$ (c.g.c) suy ra $\widehat{ACD} = \widehat{EAC}$.
Vậy $\widehat{ACD} = 10^\circ$.

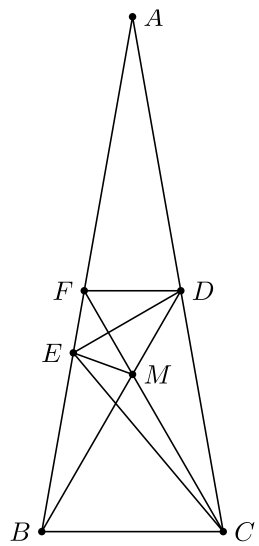


□

Bài 14. Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{B} = \widehat{C} = 80^\circ$. Từ B và C vẽ các đường thẳng cắt các cạnh đối diện tương ứng ở D và E sao cho $\widehat{CBD} = 60^\circ$ và $\widehat{BCE} = 50^\circ$. Tính góc $\widehat{BDE}$.

Lời giải.

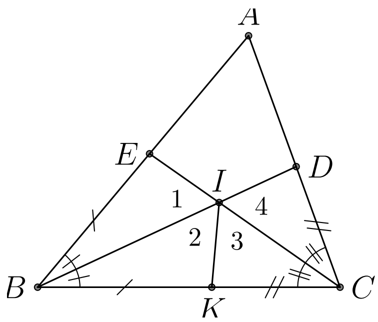
Từ giả thiết suy ra $\widehat{B} = \widehat{C} = 80^\circ$ và $\widehat{DBE} = 20^\circ$.
Qua D vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB ở F.
Gọi M là giao điểm của BD và CF.
Ta có các tam giác MBC, MDF đều và tam giác BCE cân tại B, do đó $BC = BM = BE$.
Suy ra $\triangle BEM$ cân tại B.
Ta tính được $\widehat{BFC} = 180^\circ - \widehat{BCF} = 40^\circ$, $\widehat{BME} = \dfrac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$ và $\widehat{EMF} = 180^\circ - \widehat{BME} - \widehat{DMF} = 40^\circ$.
Lại có $\triangle EMF$ cân tại E (hai góc đáy bằng nhau), suy ra $EM = EF$.
Mặt khác $\triangle EDM = \triangle EDF$ (c.c.c) suy ra $\widehat{EDM} = \widehat{EDF}$.
Suy ra $\widehat{BDE} = \dfrac{1}{2}\widehat{MDF} = 30^\circ$.
Vậy $\widehat{BDE} = 30^\circ$.



□

Bài 15. Cho tam giác ABC, các đường phân giác BD và CE. Tính số đo của góc $\widehat{A}$ biết rằng $BE + CD = BC$.

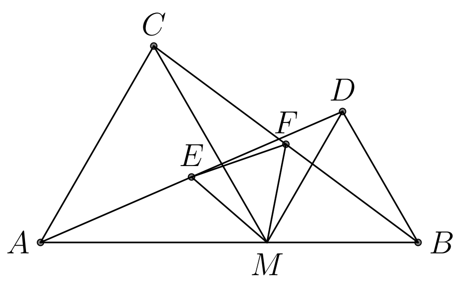
Lời giải.
Trên cạnh BC lấy điểm K sao cho $BK = BE$ thì $CK = CD$.
Gọi I là giao điểm của BD và CE.
Ta có $\triangle EBI = \triangle KBI$ (c.g.c) suy ra $\widehat{I_1} = \widehat{I_2}$.
Tương tự $\triangle DCI = \triangle KCI$ (c.g.c) suy ra $\widehat{I_3} = \widehat{I_4}$.
Ta lại có $\widehat{I_1} = \widehat{I_4}$ nên $\widehat{I_1} = \widehat{I_2} = \widehat{I_3} = \widehat{I_4}$.
Từ đó tính được $\widehat{I_1} = \widehat{I_2} = \widehat{I_3} = \widehat{I_4} = 60^\circ$.
Do đó tính được $\widehat{A} = 60^\circ$.



□

Bài 16. Cho điểm M thuộc đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ các tam giác đều AMC, BMD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và CB. Chứng minh rằng tam giác MEF đều.

Lời giải.
Ta có $\triangle MAD = \triangle MCB$ (c.g.c) suy ra $\widehat{MAD} = \widehat{MCB}$ và $AD = BC$ nên $AE = CF$.
Lại có $\triangle MAE = \triangle MCF$ (c.g.c) suy ra $ME = MF$ và $\widehat{AME} = \widehat{CMF}$.
Từ đó ta có $\widehat{EMF} = \widehat{EMC} + \widehat{CMF} = \widehat{EMC} + \widehat{AME} = \widehat{AMC} = 60^\circ$.
Mặt khác $ME = MF$ suy ra $\triangle MEF$ cân tại M và $\widehat{EMF} = 60^\circ$.
Do vậy $\triangle MEF$ đều.



□

§3. Định lý Py-Ta-Go

I. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Bạn An khẳng định: "Một tam giác có bình phương một cạnh không bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó không phải là tam giác vuông".

Chẳng hạn, xét tam giác có độ dài ba cạnh là 5, 12, 13. Ta có

$$12^2 = 144 \quad ; 5^2 + 13^2 = 194 \quad ; 144 \neq 194$$

nên tam giác không vuông? Khẳng định của bạn An là $\boxed{\text{S}}$

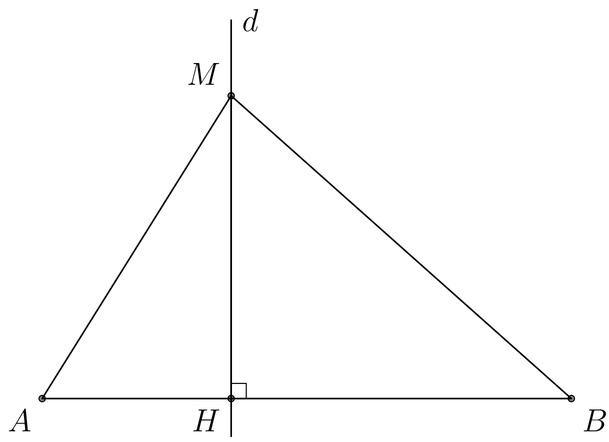
Câu 2. Tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng 2 thì cạnh huyền bằng $2\sqrt{2}$

Câu 3. Một tam giác vuông có góc nhọn bằng $30°$, cạnh đối diện với góc này có độ dài bằng 1. Hỏi cạnh góc vuông kia là $\sqrt{3}$

II. Học giải toán

Ví dụ 1. Cho đoạn thẳng AB, đường thẳng d vuông góc với AB, điểm M di động trên d. Chứng minh rằng đại lượng $MA^2 - MB^2$ luôn không đổi.

Lời giải.
Giả sử d cắt AB tại H.



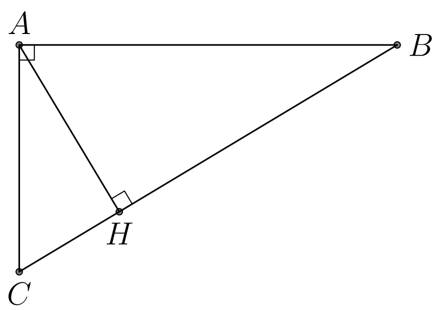
- Với $M \equiv H$
  Vì A, B, H là các điểm cố định nên $HA^2 - HB^2$ không đổi, do đó $MA^2 - MB^2$ luôn không đổi.
- Với $M \not\equiv H$
  Áp dụng định lý Py-ta-go trong các tam giác vuông MAH và MBH ta có
  $$MA^2 = MH^2 + HA^2$$
  $$MB^2 = MH^2 + HB^2.$$
  Trừ theo vế hai đẳng thức trên ta được

$$MA^2 - MB^2 = HA^2 - HB^2.$$

Vì A, B, H là các điểm cố định nên $HA^2 - HB^2$ không đổi, do đó $MA^2 - MB^2$ luôn không đổi.
Vậy $MA^2 - MB^2$ luôn không đổi. □

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ ($\widehat{B}$, $\widehat{C}$ nhọn). Đường vuông góc hạ từ A xuống BC là AH. Biết $AH = 6$ cm; $BH = 4{,}5$ cm và $HC = 8$ cm. Hỏi $\triangle ABC$ là tam giác gì?

Lời giải.
Xét $\triangle AHC$ là tam giác vuông tại H. Theo định lý Py-ta-go ta có



$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 6^2 + 8^2 = 100.$$

Xét $\triangle AHB$ có

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 = 6^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{225}{4}.$$

Suy ra

$$AB^2 + AC^2 = \frac{225}{4} + 100 = \frac{625}{4}. \tag{3.1}$$

Mà

$$BC = HB + HC = 4{,}5 + 8 = \frac{9}{2} + 8 = \frac{25}{2}.$$

Suy ra

$$BC^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 = \frac{625}{4}. \tag{3.2}$$

Từ (3.1) và (3.2) ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A. □

Ví dụ 3. Một tam giác có độ dài ba đường cao là 4,8 cm, 6 cm và 8 cm có phải là tam giác vuông không?

Lời giải.

Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác ứng với các đường cao theo thứ tự đã cho, S là diện tích tam giác ABC. Ta có

$$4{,}8a = 6b = 8c = 2S,$$

do đó

$$a = \frac{2S}{4{,}8} = \frac{5}{12}S \quad ; \quad b = \frac{2S}{6} = \frac{1}{3}S \quad ; \quad c = \frac{2S}{8} = \frac{1}{4}S.$$

Ta có

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= \frac{1}{9}S^2 + \frac{1}{16}S^2 = \frac{25}{144}S^2 \\ a^2 &= \frac{25}{144}S^2. \end{aligned}$$

Rõ ràng $a^2 = b^2 + c^2$ nên tam giác đã cho là tam giác vuông, đỉnh góc vuông ứng với đường cao có độ dài 4,8 cm. □

III. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Cho tam giác nhọn ABC có $AB = 13$ cm, $AC = 15$ cm. Kẻ $AD \perp BC$ ($D \in BC$). Biết rằng $BD = 5$ cm. Hãy tính CD.

Lời giải.

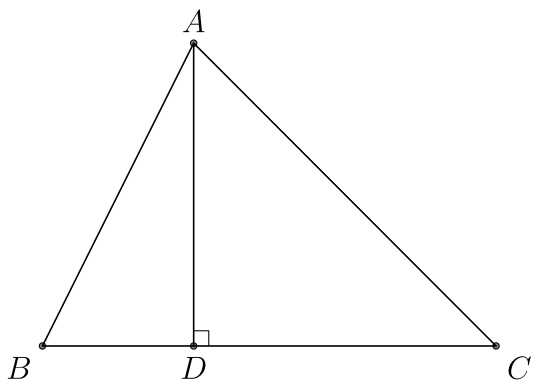
Theo định lý Py-ta-go, trong tam giác vuông ADB ta có:

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 13^2 - 5^2 = 144.$$

Trong tam giác vuông ADC

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 15^2 - 144 = 81.$$

Vậy $CD = 9$ (cm).



□

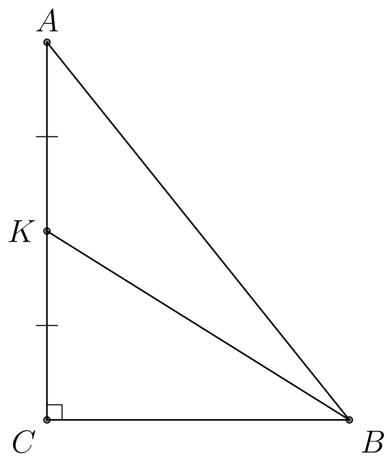
Bài 2. Cho tam giác vuông ABC có cạnh huyền $AB = \sqrt{88}$ cm, cạnh $BC = 6$ cm. Gọi K là trung điểm của AC. Tính độ dài BK.

Lời giải.

Trong tam giác vuông ABC

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = \left(\sqrt{88}\right)^2 - 6^2 = 88 - 36 = 52$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{52}\ (\text{cm}) \ \Rightarrow KC = \frac{\sqrt{52}}{2}\ (\text{cm})\ .$$



Trong tam giác vuông KCB

$$BK^2 = CK^2 + BC^2 = \left(\frac{\sqrt{52}}{2}\right)^2 + 6^2 = \frac{52}{4} + 36 = 49$$

$$\Rightarrow BK = 7\ (\text{cm})\ .$$

□

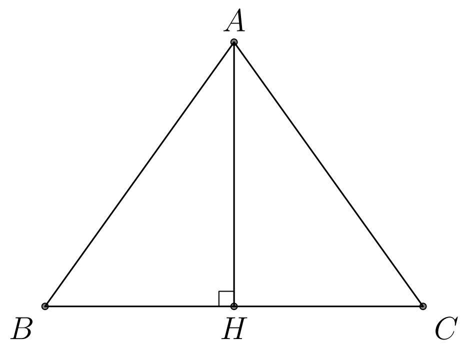
Bài 3. Cho $\triangle ABC$ nhọn. Kẻ $AH \perp BC$. Biết độ dài các cạnh $AC = 15$ cm, $AH = 12$ cm, $BH = 9$ cm. Hỏi tam giác ABC là tam giác gì?

Lời giải.

Xét tam giác AHB vuông tại H, theo định lý Py-ta-go ta có

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 12^2 + 9^2 = 225 \Rightarrow AB = 15\ (\text{cm}).$$

Vậy $\triangle ABC$ có $AB = AC = 15$ cm, nên $\triangle ABC$ cân tại A.



□

Bài 4. Một tam giác vuông có độ dài hai cạnh góc vuông tỉ lệ với 3; 4. Biết cạnh huyền dài 55 cm. Tính độ dài hai cạnh góc vuông ấy.

Lời giải.

Gọi độ dài các cạnh góc vuông là b và c. Ta có

$$\frac{b}{3} = \frac{c}{4} \text{ và } b^2 + c^2 = 55^2.$$

Do đó

$$\left(\frac{b}{3}\right)^2 = \left(\frac{c}{4}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{25} = \frac{55^2}{25} = 11^2.$$

Suy ra $b = 11 \cdot 3 = 33$ (cm), $c = 11 \cdot 4 = 44$ (cm). □

Bài 5. Chứng minh rằng độ dài cạnh huyền của một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông là số nguyên, luôn là một số vô tỷ.

Lời giải.

$\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = AC = x$ (x nguyên). Theo định lý Py-ta-go ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow BC = x\sqrt{2}.$$

$\sqrt{2}$ là số vô tỉ. Vậy $x\sqrt{2}$ là số vô tỉ. □

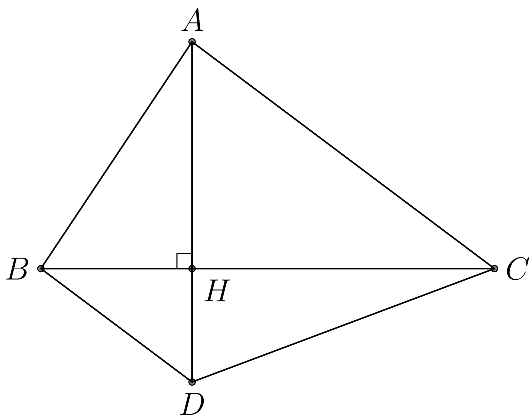
Bài 6. Cho $\triangle ABC$ nhọn, kẻ $AH \perp BC$.

a) Chứng minh rằng: $AB^2 + HC^2 = AC^2 + HB^2$.

b) Trên tia đối của tia HA lấy điểm D tùy ý. Nối BD và DC. Chứng minh rằng:

$$AB^2 + DC^2 = AC^2 + BD^2.$$

Lời giải.



a) Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác vuông ABH, ta có

$$\begin{aligned} &AB^2 = AH^2 + BH^2 \\ &\Rightarrow AB^2 + HC^2 = AH^2 + BH^2 + CH^2. \end{aligned}$$

Lại có, trong tam giác vuông AHC

$$\begin{aligned} &AC^2 = AH^2 + HC^2 \\ &\Rightarrow AB^2 + HC^2 = BH^2 + AC^2. \end{aligned}$$

b) Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác vuông ABH và DHC, ta có

$$\begin{cases} AB^2 = AH^2 + BH^2 \\ CD^2 = DH^2 + CH^2 \end{cases} \Rightarrow AB^2 + CD^2 = AH^2 + BH^2 + CH^2 + DH^2.$$

Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác vuông ACH và DHB, ta có

$$\begin{cases} AC^2 = AH^2 + CH^2 \\ BD^2 = DH^2 + BH^2 \end{cases} \Rightarrow AC^2 + BD^2 = AH^2 + BH^2 + CH^2 + DH^2.$$

Do đó, suy ra $AB^2 + DC^2 = AC^2 + BD^2$.

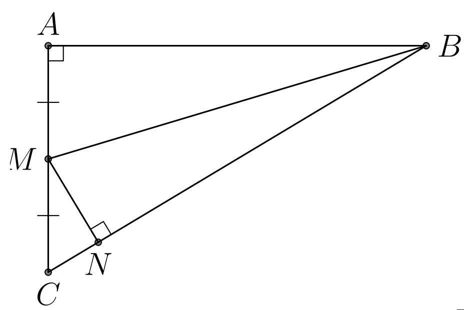
□

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Từ trung điểm M của cạnh AC hạ $MN \perp BC$ ($N \in BC$). Chứng minh rằng nếu $AB > AC$ thì ta có: $NB^2 - NC^2 = AB^2$.

Lời giải.

Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có

$$\begin{aligned} NB^2 - NC^2 &= (MB^2 - MN^2) - (MC^2 - MN^2) \\ &= MB^2 - MC^2 \\ &= MB^2 - MA^2 \\ &= AB^2 \end{aligned}$$



□

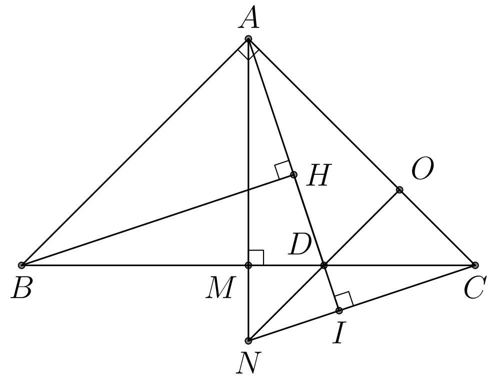
Bài 8. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. M là trung điểm BC. Lấy điểm D bất kỳ trên BC. H và I thứ tự là hình chiếu của B và C xuống AD. Đường thẳng AM cắt CI tại N. Chứng minh rằng

a) $BH = AI$.

b) $BH^2 + IC^2$ có giá trị không đổi khi D di chuyển trên BC.

c) DN vuông góc với AC.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{MAD} = \widehat{HBD}$ (cùng phụ với $\widehat{ADB}$)
Mà

$$\begin{cases} \widehat{ABH} = 45^\circ - \widehat{HBD} \\ \widehat{CAD} = 45^\circ - \widehat{MAD} \end{cases} \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{CAD}.$$

Lại có

$$\begin{cases} \widehat{BAH} = 90^\circ - \widehat{ABH} \\ \widehat{ACI} = 90^\circ - \widehat{CAD} \end{cases} \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{ACI}.$$

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CAI$ có

$$\begin{cases} \widehat{ABH} = \widehat{CAD} \\ AB = AC \\ \widehat{BAH} = \widehat{ACI} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABH = \triangle CAI \text{ (c.g.c)} \Rightarrow BH = AI.$$

b) Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác vuông ACI

$$AI^2 + IC^2 = AC^2.$$

Mà

$$BH = AI \Rightarrow BH^2 + IC^2 = AC^2.$$

Do đó, $BH^2 + IC^2$ có giá trị không đổi khi D di chuyển trên BC.

c) Gọi O là giao điểm của AC và ND. Xét tam giác vuông BDH và ANI có

$$\begin{cases} BH = AI \\ \widehat{HBD} = \widehat{NAI} \end{cases} \Rightarrow \triangle BDH = \triangle ANI \Rightarrow AN = BD \Rightarrow MN = MD \Rightarrow \widehat{ANO} = 45^\circ.$$

Mà $\widehat{NAO} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AON} = 90^\circ$. Hay $DN \perp AC$.

□

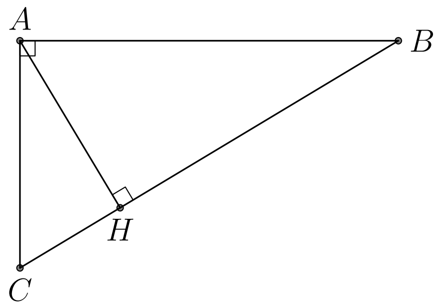
2. Nâng cao

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A. Hạ $AH \perp BC$ ($H \in BC$).

a) Chứng minh: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$.

b) Biết $BC = 10$ cm; $AC = 8$ cm. Tính độ dài của AH.

Lời giải.



a) Theo công thức tính diện tích $\triangle ABC$, ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}AH \cdot BC.$$

Suy ra

$$AB \cdot AC = AH \cdot BC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{BC^2}{AB^2 \cdot AC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2 \cdot AC^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}.$$

b) Thay $BC = 10$ (cm); $AC = 8$ (cm) vào đẳng thức $BC^2 = AB^2 + AC^2$, ta tính được $AB = 6$ (cm).
Từ đó tính được $AH = 4{,}8$ cm.

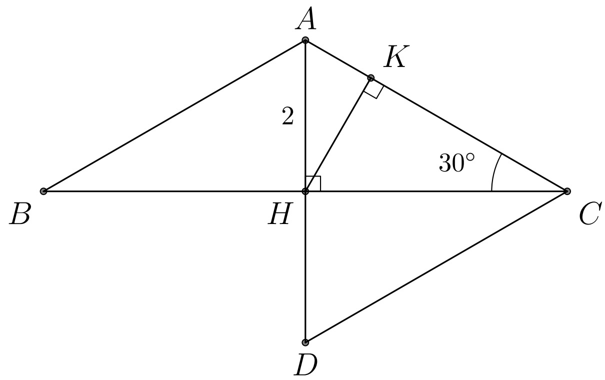
□

Bài 10. Để làm một vì kèo sắt lợp mái tôn sao cho độ dốc vừa phải, người thợ thiết kế vì kèo hình tam giác cân ABC ($AB = AC$). Thanh AH hàn vuông góc với thanh BC. Thanh HK hàn vuông góc với thanh AC. Biết góc $\widehat{ACH} = 30°$ và $AH = 2$ m. Tính độ dài của các thanh AB, BC, HK.

Lời giải.

Trên tia đối của tia HA lấy điểm D sao cho H là trung điểm AD.
Xét $\triangle ACD$ có CH vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên $\triangle ACD$ cân.
Lại có $\widehat{ACD} = 2\widehat{ACH} = 60°$, suy ra $\triangle ACD$ đều.
Suy ra,

$$AC = AB = AD = 2AH = 4 \text{ (cm)}.$$



Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác vuông ACH

$$HC^2 = AC^2 - AH^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow HC = 2\sqrt{3} \Rightarrow BC = 2HC = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Mặt khác, ta luôn có

$$S_{AHC} = \frac{1}{2}AH \cdot HC = \frac{1}{2}AC \cdot HK \Rightarrow HK = \frac{AH \cdot HC}{AC} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

□

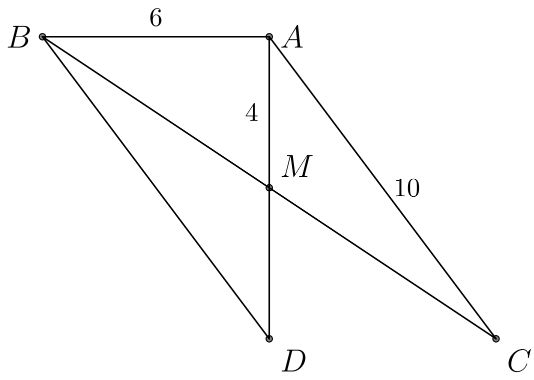
Bài 11. Cho tam giác ABC, M là trung điểm BC. Biết rằng $AB = 6$ cm, $AC = 10$ cm, $AM = 4$ cm. Chứng minh rằng $\widehat{MAB} = 90°$.

Lời giải.

Kéo dài AM lấy điểm D sao cho $MD = MA$.
$\triangle MAC = \triangle MDB$ (c.g.c), suy ra $AC = BD = 10$ cm và $AD = 2AM = 8$ cm.
Ta có

$$AB^2 + AD^2 = 6^2 + 8^2 = 100 = BD^2.$$

Như vậy, $\triangle ABD$ có $AB^2 + AD^2 = BD^2$.
Theo định lý Py-ta-go đảo, ta có tam giác ABD vuông tại A. Vậy $\widehat{MAB} = 90°$.



□

Bài 12. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ $AH \perp BC$ tại H. Trên đoạn thẳng AH lấy điểm D. Trên tia đối của tia HA lấy E sao cho $HE = AD$. Đường thẳng vuông góc với AH tại D cắt AC tại F. Chứng minh $\widehat{BEF} = 90°$.

Lời giải.

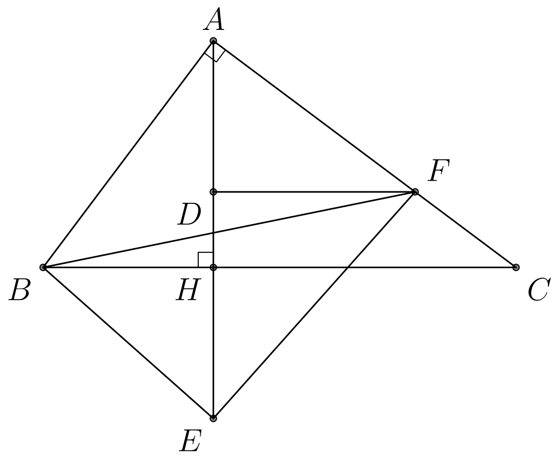
Ta có $AD = HE$

$$\Rightarrow AD + DH = HE + DH \Rightarrow AH = DE.$$

Áp dụng định lý Py-ta-go trong các tam giác vuông HBE, DEF, HAB, DAF, ABF, ta có

$$\begin{aligned} BE^2 + EF^2 &= BH^2 + EH^2 + DE^2 + DF^2 \\ &= BH^2 + DE^2 + EH^2 + DF^2 \\ &= BH^2 + AH^2 + AD^2 + DF^2 \\ &= AB^2 + AF^2 = BF^2. \end{aligned}$$

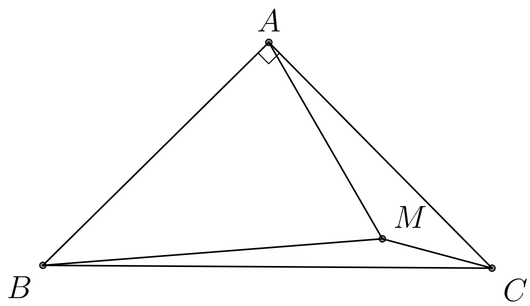
$\triangle BEF$ có $BE^2 + EF^2 = BF^2 \Rightarrow \triangle BEF$ vuông tại E. (định lý Py-ta-go đảo). Vậy $\widehat{BEF} = 90°$.



□

Bài 13.

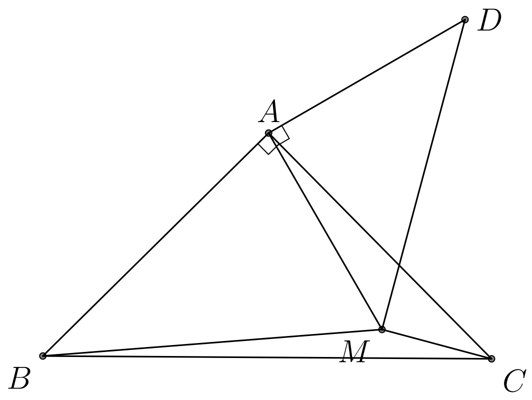
Trên hình như hình sau, cho biết tam giác ABC vuông cân tại A, $MA = 2$ cm, $MB = 3$ cm; $\widehat{AMC} = 135°$. Tính độ dài đoạn thẳng MC.



Lời giải.

Trong nửa mặt phẳng bờ AM không chứa điểm B, vẽ tam giác ADM vuông cân tại A. Ta có $AD = MA = 2$ cm. Suy ra

$$\widehat{AMD} = 45^\circ; \widehat{DMC} = \widehat{AMC} - \widehat{AMD} = 90^\circ.$$



Xét $\triangle ADC$ và $\triangle AMB$ có

$$\begin{cases} AD = AM \\ \widehat{DAC} = \widehat{MAB} \text{ (cùng phụ với góc } \widehat{CAM}) \\ AB = AC \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle ADC = \triangle AMB \Rightarrow DC = MB = 3$ (cm).
Xét $\triangle AMD$ vuông tại A nên

$$MD^2 = MA^2 + AD^2 = 8.$$

Xét $\triangle MDC$ vuông tại M nên

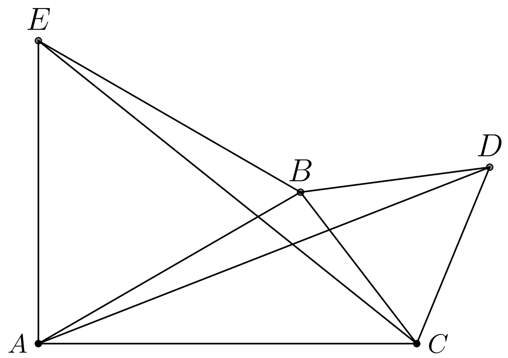
$$DC^2 = MD^2 + MC^2 \Rightarrow MC^2 = 1.$$

Vậy $MC = 1$ cm. □

Bài 14. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 30^\circ$. Dựng bên ngoài tam giác ABC tam giác đều BCD. Chứng minh rằng

$$AD^2 = AB^2 + AC^2.$$

Lời giải.
Về phía ngoài tam giác ABC vẽ tam giác đều ABE, ta có
$\triangle BEC = \triangle BAD$ (c.g.c) $\Rightarrow EC = AD$.
Vì $\triangle AEC$ vuông tại $A \Rightarrow AE^2 + AC^2 = EC^2$.
Vậy $AD^2 = AB^2 + AC^2$.



□

Bài 15. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn và O là điểm bất kì trong tam giác. Từ O hạ $OM \perp AC$ ($M \in AC$); $OI \perp AB$ ($I \in AB$); $OH \perp HC$ ($H \in BC$). Chứng minh rằng

$$AI^2 + BH^2 + CM^2 = AM^2 + CH^2 + BI^2.$$

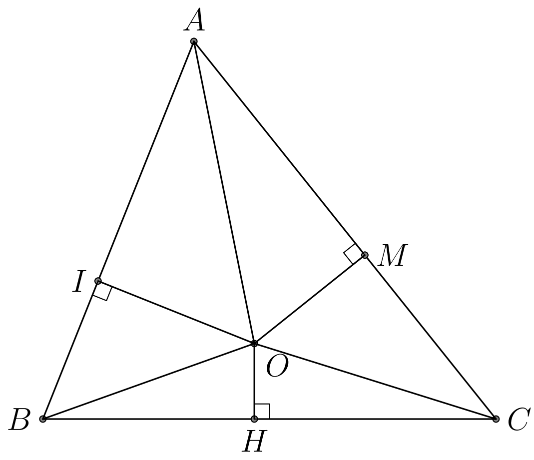
Lời giải.

Ta có

$$AI^2 = AO^2 - OI^2$$
$$BH^2 = OB^2 - OH^2$$
$$CM^2 = OC^2 - OM^2.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&AI^2 + BH^2 + CM^2\\ &= (OA^2 - OI^2) + (OB^2 - OH^2) + (OC^2 - OM^2)\\ &= (OA^2 - OM^2) + (OC^2 - OH^2) + (OB^2 - OI^2)\\ &= AM^2 + HC^2 + BI^2.\end{aligned}$$



□

§4. Các trường hợp bằng nhau của tam giác vuông

I. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ vuông ở A và A'. Biết thêm $AB = A'C'$, $\widehat{B} = \widehat{C'}$. Khi đó hai tam giác này bằng nhau, và ta viết $\triangle ABC = \triangle A'C'B'$.

Câu 2. Đúng điền Đ, sai điền S.

a) Đ Hai tam giác vuông có một góc nhọn bằng nhau và một cạnh góc vuông bằng nhau thì bằng nhau.

b) Đ Hai tam giác vuông có một góc nhọn bằng nhau và đường cao ứng với cạnh huyền bằng nhau thì bằng nhau.

c) S Hai tam giác vuông có các góc nhọn tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

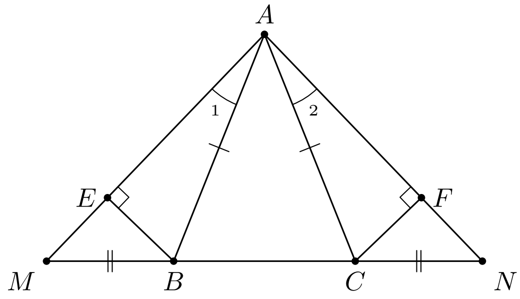
d) Đ Hai tam giác vuông có một góc nhọn bằng nhau và cạnh huyền bằng nhau thì bằng nhau.

II. Học giải toán

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Trên tia đối của tia BC lấy điểm M; trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $MB = CN$. Từ B hạ $BE \perp AM$ ($E \in AM$). Từ C hạ $CF \perp AN$ ($F \in AN$). Chứng minh rằng

a) $\triangle AMN$ cân. b) $BE = CF$. c) $\triangle BME = \triangle CNF$.

Lời giải.



a) Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$ có:
$AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A);
$\widehat{ABM} = \widehat{ACN}$ (do $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$);
$BM = CN$ (giả thiết).
Vậy $\triangle ABM = \triangle ACN$ (c.g.c)
$\Rightarrow AM = AN$
Do đó $\triangle AMN$ cân tại A.

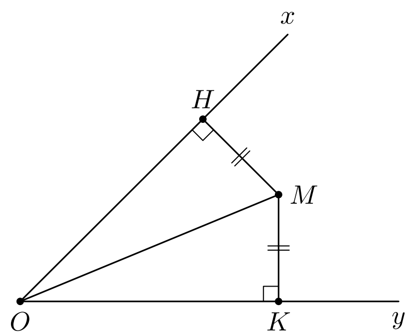
b) Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ACF$ vuông tại E và F có $AB = AC$ (do $\triangle ABC$ cân tại A); $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ ($\triangle ABM = \triangle ACN$).
Vậy $\triangle ABE = \triangle ACF$ (cạnh huyền - góc nhọn).
Suy ra $BE = CF$ (cạnh tương ứng).

c) Xét $\triangle MBE$ và $\triangle NCF$ vuông tại E và F có $BE = CF$ (chứng minh trên), $MB = NC$ (giả thiết). Do đó $\triangle MBE = \triangle NCF$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông).

□

Ví dụ 2. Cho góc nhọn xOy và điểm M nằm trong góc đó. Chứng minh rằng nếu M cách đều hai cạnh của góc xOy thì M nằm trên tia phân giác của góc này.

Lời giải.

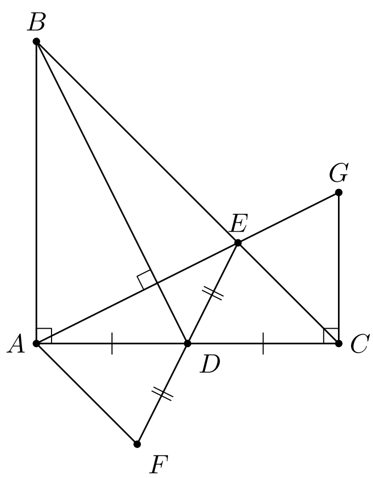


Từ M hạ các đường vuông góc MH, MK xuống các cạnh Ox, Oy. Theo giả thiết ta có $MH = MK$.
Xét $\triangle MOH$ và $\triangle MOK$ có:
MO chung;
$MH = MK$.
Do đó $\triangle MOH = \triangle MOK$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông). Suy ra $\widehat{MOH} = \widehat{MOK}$ hay OM là tia phân giác của $\widehat{xOy}$. Vậy M nằm trên tia phân giác của góc này.

□

Ví dụ 3. Cho tam $\triangle ABC$ vuông cân tại A, D là trung điểm của AC. Từ A kẻ đường vuông góc với BD, cắt BC tại E. Chứng minh $AE = 2DE$.

Lời giải.



Từ C dựng đường thẳng vuông góc với AC cắt AE tại G. Trên tia ED lấy điểm F sao cho $DF = DE$.
Ta có $\widehat{ABD} = \widehat{CAG}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ADB}$), $AB = AC$ (giả thiết) nên $\triangle BAD = \triangle ACG$ (cạnh góc vuông - góc nhọn), suy ra $AD = CG$ hay $CD = CG$.
Xét $\triangle CDE$ và $\triangle CGE$ có:
$CD = CG$ (chứng minh trên);
CE cạnh chung;
$\widehat{DCE} = \widehat{GCE} = 45°$.
Do đó $\triangle CDE = \triangle CGE$ (c.g.c), suy ra $\widehat{CED} = \widehat{CEG}$. (1)
Dễ thấy $\triangle ADF = \triangle CDE$ (c.g.c) nên $\widehat{AFE} = \widehat{CEF}$. (2)
$\Rightarrow AF \parallel CE \Rightarrow \widehat{CEG} = \widehat{FAE}$ (đồng vị) (3)
Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{EAF} = \widehat{EFA}$, tam giác EFA cân tại E nên $EA = EF$ hay $AE = 2DE$.

□

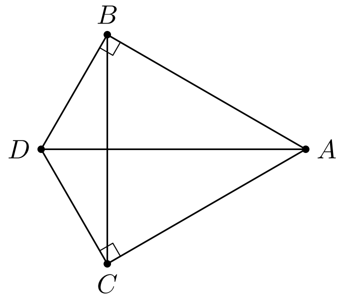
III. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A. Đường thẳng vuông góc với AB tại B cắt đường thẳng vuông góc với AC tại C ở D. Chứng minh rằng AD là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Lời giải.

Xét $\triangle BAD$ và $\triangle CAD$ vuông tại B và A, có:
AD là cạnh chung;
$AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A).
Do đó $\triangle BAD = \triangle CAD$ (cạnh huyền - góc góc vuông)
$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ (cặp góc tương ứng).
Vậy AD là tia phân giác của $\widehat{BAC}$.

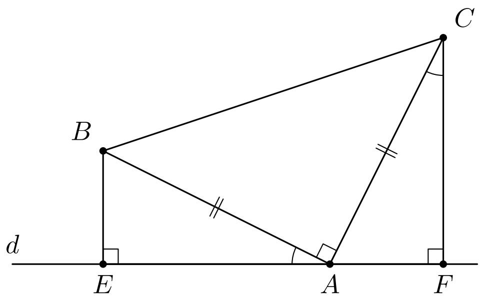


□

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Qua A kẻ đường thẳng d (d không cắt đoạn thẳng BC). Từ B hạ $BE \perp d$ ($E \in d$). Từ C hạ $CF \perp d$ ($F \in d$). So sánh tổng độ dài hai đoạn thẳng BE và CF với độ dài đoạn thẳng EF.

Lời giải.

Ta có $\widehat{EAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAF} = 180^\circ$
$\Rightarrow \widehat{EAB} = 180^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{CAF} = 90^\circ - \widehat{CAF}$.
Lại có $\widehat{FCA} = 90^\circ - \widehat{CAF}$ (do $\triangle FAC$ vuông tại F).
Nên $\widehat{EAB} = \widehat{FCA}$.
Xét $\triangle EAB$ và $\triangle FCA$ vuông tại E và B, có:
$AB = AC$ ($\triangle ABC$ vuông cân tại A);
$\widehat{EAB} = \widehat{FCA}$ (chứng minh trên).
Do đó $\triangle EAB = \triangle FCA$ (cạnh huyền - góc nhọn).
Suy ra $AE = CF \quad (1)$ và $AF = BE \quad (2)$.



Cộng (1) và (2) theo vế ta có $AE + AF = CF + BE \Rightarrow EF = CF + BE$. □

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Từ H kẻ $HM \perp AC$ và trên tia HM lấy điểm E sao cho $HM = EM$. Kẻ $HN \perp AB$ và trên tia HN lấy điểm D sao cho $NH = ND$. Chứng minh rằng

a) Ba điểm D, A, E thẳng hàng.

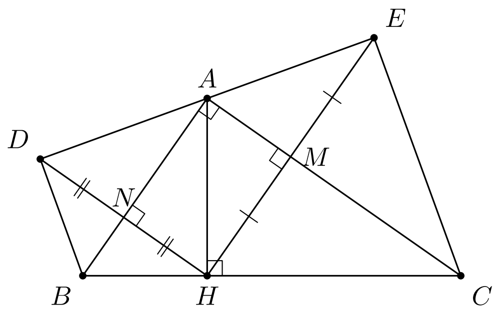
b) $BD \parallel CE$.

c) $BC = BD + CE$.

Lời giải.

a) Xét $\triangle AND$ và $\triangle ANH$ vuông tại N có:

AN chung; $ND = NH$ (theo giả thiết).
Do đó $\triangle AND = \triangle ANH$ (hai cạnh góc vuông).
Suy ra $\widehat{DAB} = \widehat{HAB}$ (hai góc tương ứng).
Tương tự $\widehat{HAC} = \widehat{EAC}$.
Từ đây ta có
$\widehat{DAB} + \widehat{EAC} = \widehat{HAB} + \widehat{HAC} = 90°$
$\Rightarrow \widehat{DAB} + \widehat{HAB} + \widehat{HAC} + \widehat{EAC} = 180°$.
Vậy D, A, E thẳng hàng.



b) $\triangle DAB$ và $\triangle HAB$ có:
$AD = AH$ ($\triangle AND = \triangle ANH$); $\widehat{DAB} = \widehat{HAB}$ ($\triangle AND = \triangle ANH$); AB cạnh chung.
Do đó $\triangle DAB = \triangle HAB$ (c.g.c). Suy ra $\widehat{ADB} = \widehat{AHB} = 90°$ (1).
Tương tự $\widehat{CEA} = 90°$ (2)
Từ (1), (2) kết hợp với D, A, E thẳng hàng ta được $BD \parallel CE$.

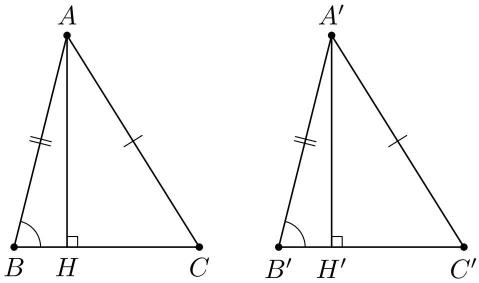
c) Ta có $\triangle DAB = \triangle HAB \Rightarrow BD = BH$. Tương tự $CE = CH$. Do đó $BC = BH + CH = BD + CE$.

□

Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC và $A'B'C'$ có $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$. Chứng minh rằng $BC = B'C'$.

Lời giải.

Vẽ $AH \perp BC$ tại H, $A'H' \perp B'C'$ tại H' thì theo giả thiết, H thuộc đoạn BC, H' thuộc đoạn $B'C'$.
TA có $\triangle HBA = \triangle H'B'A'$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow AH = A'H'$, $BH = B'H'$.
Suy ra $\triangle HAC = \triangle H'A'C'$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) $\Rightarrow HC = H'C'$.
Do đó $BH + HC = B'H' + H'C'$. Vậy $BC = B'C'$.

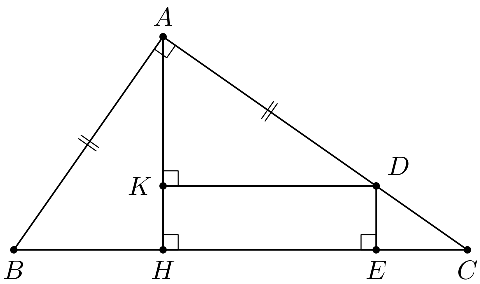


□

Bài 5. Cho tam hai giác ABC vuông tại A có $AB < AC$. Vẽ AH vuông góc với BC tại H; D là điểm trên cạnh AC sao cho $AD = AB$. Vẽ $DE \perp BC$ tại E. Chứng minh rằng $HA = HE$.

Lời giải.

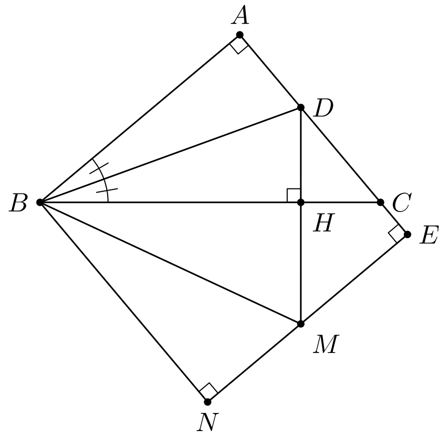
Vẽ $DK \perp AH$ tại K. Khi đó $DK \parallel BC$ (cùng vuông góc với AH) $\Rightarrow \widehat{ADK} = \widehat{ACB}$ (đồng vị).
Lại có $\widehat{ACB} = \widehat{BAH}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$).
Nên $\widehat{ADK} = \widehat{BAH}$.
Xét $\triangle BAH$ và $\triangle ADK$ vuông tại H và K, có:
$AB = AD$ (giả thiết);
$\widehat{BAH} = \widehat{ADK}$ (chứng minh trên).



Do đó $\triangle BAH = \triangle ADK$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow HA = KD$.
Mặt khác $KD = HE$ ($DKHE$ là hình chữ nhật) nên $HA = HE$. □

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$). Tia phân giác $\widehat{ABC}$ cắt AC ở D. Vẽ $DH \perp BC$ tại H. Trên tia AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Đường thẳng vuông góc với AE tại E cắt DH tại M. Tính số đo $\widehat{DBM}$.

Lời giải.



Vẽ $BN \perp EM$ tại N.
Dễ dàng chứng minh được $AB = BH = BN$, $\widehat{ABN} = 90^\circ$.
Từ giả thiết ta có $\widehat{DBH} = \dfrac{1}{2}\widehat{ABC}$.
$\triangle HBM = \triangle NBM$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)
$\Rightarrow \widehat{HBM} = \widehat{NBM} \Rightarrow \widehat{HBM} = \dfrac{1}{2}\widehat{CBN}$.
Do đó $\widehat{DBM} = \widehat{DBH} + \widehat{HBM}$

$$= \frac{1}{2}\left(\widehat{ABC} + \widehat{CBN}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\widehat{ABN} = 45^\circ.$$

Vậy $\widehat{DBM} = 45^\circ$.

□

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm của cạnh BC. Từ A hạ $AH \perp BC$, AH và AM chia $\widehat{A}$ thành ba phần bằng nhau. Chứng minh rằng

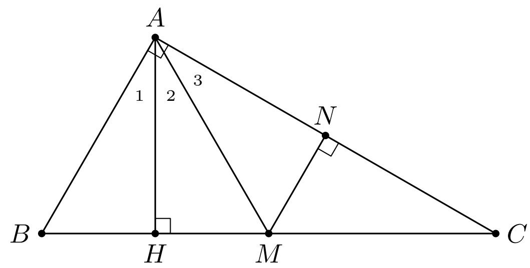
a) $\triangle ABC$ vuông tại A.

b) $\triangle AMC$ là tam giác cân.

c) $\triangle ABM$ là tam giác đều.

Lời giải.

a) Xét $\triangle AHM$ và $\triangle ANM$ vuông tại H và N, có AM chung và $\widehat{A_2} = \widehat{A_3}$ (giả thiết). Do đó $\triangle AHM = \triangle ANM$ (cạnh huyền - góc nhọn).
Xét $\triangle AHM$ và $\triangle AHB$ vuông tại H có AH chung và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$. Do đó $\triangle AHM = \triangle AHB$ (cạnh góc vuông - góc nhọn).



Vậy $\triangle AHM = \triangle ANM = \triangle AHB$
$\Rightarrow MN = MH = BH$.
Mà $MH + BH = BM$.
Vậy $MN = \dfrac{1}{2}BM = \dfrac{1}{2}MC$ ($BM = MC$). Suy ra $\widehat{C} = 30^\circ$.
Xét $\triangle HAC$ vuông tại H và $\widehat{C} = 30^\circ$
$\Rightarrow \widehat{HAC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle BAC$ vuông tại A.

b) $\widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{A_3} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 30^\circ \Rightarrow \triangle AMC$ cân tại M.

c) $AB = AM$ ($\triangle ABM = \triangle AMH$). Vậy $\triangle ABM$ cân. Mà $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 60^\circ$. Vậy $\triangle ABM$ đều.

□

Bài 8. Cho tam giác ABC có $\widehat{C} = 90^\circ$, $\widehat{A} = 30^\circ$, $AC = 10$ cm. Kẻ $CD \perp AB$ ($D \in AB$), $DE \perp AC$ ($E \in AC$). Tính độ dài AE.
Lời giải.
Chú ý. Ta thừa nhận tính chất sau: "*Trong tam giác vuông cạnh đối diện với góc 30° có độ dài bằng nửa cạnh huyền*".

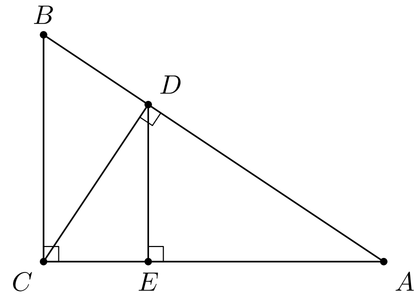
$\triangle ADC$ vuông tại D có $\widehat{A} = 30^\circ$ nên $CD = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ cm.

Tương tự $\triangle CDE$ vuông tại E có

$$\widehat{CDE} = 90^\circ - \widehat{ACD} = \widehat{CAB} = 30^\circ.$$

Do đó $EC = \dfrac{1}{2}CD = 2{,}5$ cm.

Vậy $AE = AC - EC = 10 - 2{,}5 = 7{,}5$ cm.



□

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Kẻ $AM \perp BC$ ($M \in BC$). Gọi E là một điểm nằm giữa M và C. Kẻ BH, CK vuông góc với AE (H, K thuộc đường thẳng AE). Chứng minh rằng $MH = MK$.

Lời giải.

Xét $\triangle AIH$ và $\triangle BIH$ vuông tại H và M, ta có

$$\widehat{HAI} = 90^\circ - \widehat{HIA} = 90^\circ - \widehat{MIB} = \widehat{MBI}.$$

Mặt khác $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Do đó $\widehat{ABH} = \widehat{KAC}$.

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle CAK$ vuông tại H và K, có:

$AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A);

$\widehat{HBA} = \widehat{KAC}$ (chứng minh trên).

Do đó $\triangle HBA = \triangle KAC$ (cạnh huyền - góc nhọn)

Xét $\triangle MBH$ và $\triangle MAK$ có:

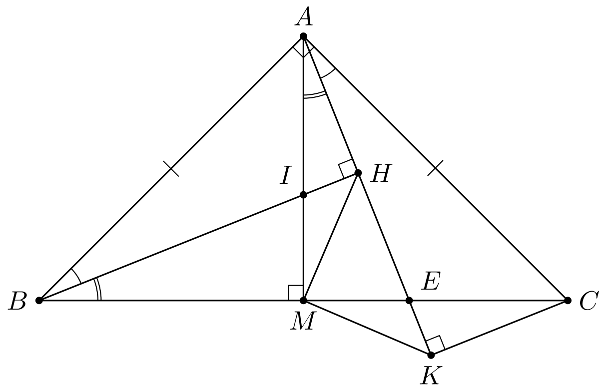
$BH = AK$ ($\triangle HBA = \triangle KAC$);

$\widehat{MBH} = \widehat{MAK}$;

$BM = AM$ ($\triangle MAB$ vuông cân tại M);

Do đó $\triangle MBH = \triangle MAK$ (c.g.c)

$\Rightarrow MH = MK$.



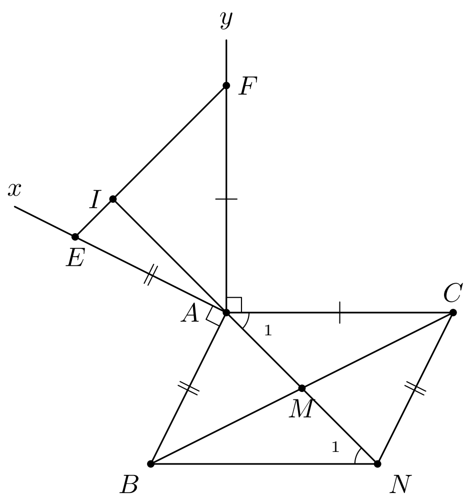
□

Bài 10. Cho tam giác ABC. Về phía ngài tam giác, tại đỉnh A kẻ $Ax \perp AB$ và lấy điểm E trên Ax sao cho $AE = AB$ (E, C ở hai phía đối với AB). Kẻ $Ay \perp AC$ và lấy điểm F trên Ay sao cho $AF = AC$ (B, F ở hai phía đối với AC). Lấy M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng

a) $AM = \dfrac{1}{2}EF$.

b) Đường thẳng AM vuông góc với EF.

Lời giải.



a) Trên tia đối của tia MA lấy điểm N sao cho $MN = MA$. Khi đó $\triangle AMC = \triangle NMB$ (c.g.c) $\Rightarrow AC = BN$.
Xét $\triangle ABN$ và $\triangle AEF$ có:
$AB = AE$ (giả thiết);
$BN = AF$ (cùng bằng AC);
$\widehat{ABN} = \widehat{EAF}$ (cùng bù với $\widehat{BAC}$).
Vậy $\triangle ABN = \triangle AEF$ (c.g.c) $\Rightarrow AN = EF$.
Mà $AM = \dfrac{1}{2}AN$ nên $AM = \dfrac{1}{2}EF$.

b) Kéo dài AM cắt EF tại I. Do I, A, M thẳng hàng nên $\widehat{A_1} + \widehat{IAF} = 90^\circ$.
Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{N_1}$ (so le do $AC \parallel BN$).
Mặt khác $\widehat{IFA} = \widehat{N_1}$ nên $\widehat{A_1} = \widehat{IFA}$.
Vậy $\triangle IAF$ có $\widehat{IFA} + \widehat{IAF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AIF} = 90^\circ$. Do đó $AM \perp EF$.

□

2. Nâng cao

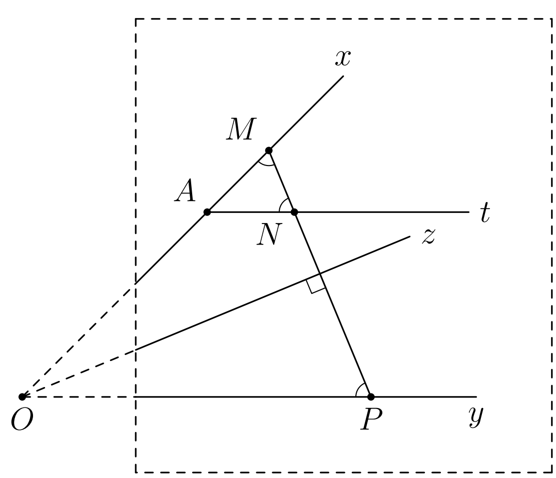
Ví dụ 4. Dựng đường phân giác của một góc có đỉnh nằm bên ngoài tờ giấy.

Lời giải.

a) **Phân tích.**
Giả sử đã dựng được đường phân giác Oz của $\widehat{xOy}$ có đỉnh O nằm ngoài tờ giấy. Từ điểm A bất kì trên phần tia Ox nằm trong tờ giấy, ta kẻ tia At song song với cạnh Oy và nằm trong $\widehat{xOy}$. Trên Ax và At ta lấy hai điểm M và N sao cho $AM = AN$. Thế thì $\triangle AMN$ cân ở A và có $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$. Đường thẳng MN cắt Oy ở P. Ta có $\widehat{ANM} = \widehat{OPM}$ (góc đồng vị), do đó $\widehat{AMN} = \widehat{OPM}$ nên $\triangle MOP$ cân ở O. Do $OM = OP$ nên O thuộc trung trực của đoạn MP, suy ra đường thẳng Oz chính là đường trung trực của đoạn MP. Từ đó ta có cách dựng sau:

b) **Cách dựng.**

- Lấy điểm A bất kì trên phần tia Ox nằm trong tờ giấy.
- Trong $\widehat{xOy}$ vẽ tia At song song với Oy.
- Đặt trên Ax và At hai đoạn bằng nhau AM và AN.
- Kẻ đường thẳng MN cắt Oy ở P.
- Dựng đường trung trực của MP, đó là đường phân giác của $\widehat{xOy}$ mà ta phải dựng.



c) **Chứng minh**.

Theo cách dựng, $AM = AN$ nên $\triangle MAN$ cân ở A do đó $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$. Ta lại có $\widehat{ANM} = \widehat{OPM}$ (đồng vị do $At \parallel Oy$) suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{OPM}$. Tam giác MOP cân tại O nên đường trung trực của MP chứa tia phân giác của $\widehat{xOy}$

d) **Biện luận.**

Bài toán bao giờ cũng dựng được vì các phép dựng nêu trong phần cách dựng luôn thực hiện được. Bài toán luôn có một nghiệm hình.

□

Ví dụ 5. Cho n là số nguyên dương không chia hết cho 3 và 5. Chứng minh rằng ta có thể chia góc n° cho trước thành n phần bằng nhau (bằng thước kẻ và compa).

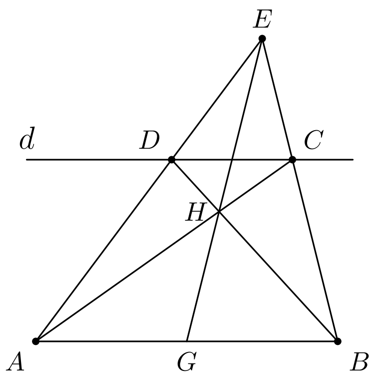
Lời giải.

Bằng cách dựng tam giác đều ta dễ dàng dựng được góc 15°.
Xét phép chia n cho 15, ta luôn có $n = 15k \pm r$, $k \in \mathbb{Z}$, $r \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.
Vì n không chia hết cho 3 và 5 nên chỉ xảy ra $r \in \{1; 2; 4; 7\}$.
Vì góc $(15k)^\circ$ là dựng được nên trong mọi trường hợp ta luôn dựng được góc 1°, tức là chia được góc n° thành n phần bằng nhau. □

Ví dụ 6. Cho trước đoạn thẳng AB. Hãy dùng thước kẻ có hai cạnh song song để chia đôi đoạn thẳng AB.

Lời giải.

Dùng thước kẻ có hai cạnh song song ta có thể vẽ được đường thẳng $d \parallel AB$.
Lấy điểm E nằm ở nửa mặt phẳng bờ d không chứa AB. Nối EA, ED cắt d lần lượt tại D, C.
Dựng giao điểm H của AC và BD.
Dựng giao điểm G của EH và AB. Ta có G là trung điểm của AB hay $GA = GB$.
(Ta công nhận kết quả này. Chứng minh liên quan đến định lí Ta-lét, sẽ học ở lớp 8).



□

Chương 4

QUAN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC - CÁC ĐƯỜNG ĐỒNG QUY TRONG TAM GIÁC

§1. Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác

I. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Tại sao trong một tam giác, góc đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc nhọn?

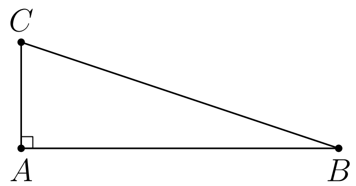
Lời giải.

Vì góc đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc nhỏ nhất nên nếu góc đó không nhọn (tức lớn hơn hoặc bằng 90°) thì tổng số đo 3 góc của tam giác giác lớn hơn hoặc bằng 270°, vô lí. Vậy góc đối diện với cạnh nhỏ nhất là góc nhọn. □

Câu 2. Trong một tam giác, góc đối diện với cạnh lớn nhất có phải là góc tù không? Lấy ví dụ minh họa.

Lời giải.

Không. Ví dụ trong một tam giác vuông, cạnh lớn nhất là cạnh huyền và góc đối diện với cạnh huyền là góc vuông, không phải góc tù.



□

Câu 3. Trong một tam giác cân, biết cạnh đáy lớn hơn cạnh bên. Hãy so sánh góc ở đỉnh với 60°.

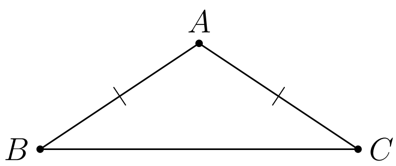
Lời giải.

Xét tam giác ABC cân tại A có $AB = AC < BC$.

Khi đó ta có $\widehat{B} = \widehat{C} < \widehat{A}$.

Suy ra

$$180^\circ = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 3\widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} > 60^\circ.$$

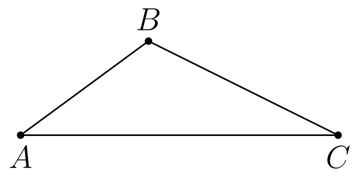


□

Câu 4. Cho tam giác ABC có $AB = 3$ cm; $BC = 4$ cm; $AC = 6$ cm. Hỏi $\triangle ABC$ có góc nào lớn nhất? Góc nào nhỏ nhất?

Lời giải.

Vì AC là cạnh lớn nhất nên $\widehat{B}$ (góc đối diện với cạnh AC) là góc lớn nhất và AB là cạnh nhỏ nhất nên $\widehat{C}$ (góc đối diện với cạnh AB) là góc nhỏ nhất.



□

II. Học giải toán

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có $AB > AC$. Kẻ BN là tia phân giác của $\widehat{ABC}$ ($N \in AC$). Kẻ CM là tia phân giác của $\widehat{ACB}$ ($M \in AB$), BN và CM cắt nhau tại I.

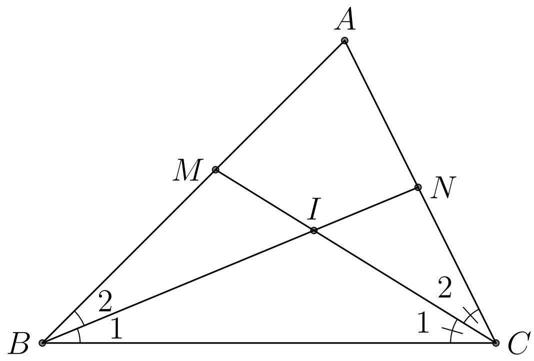
a) So sánh IC và IB.

b) Một học sinh nhận xét $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ (giả thiết). Vậy $AM = MB$ vì là hai cạnh đối diện với hai góc bằng nhau. Đúng hay sai? Tại sao?

Lời giải.

a) Xét $\triangle ABC$ có $AB > AC$ (giả thiết). Suy ra $\widehat{C} > \widehat{B}$ (định lí). Mà $\widehat{C_1} = \dfrac{1}{2}\widehat{C}$ và $\widehat{B_1} = \dfrac{1}{2}\widehat{B}$ nên $\widehat{C_1} > \widehat{B_1}$.
Trong $\triangle CIB$ có $\widehat{C_1} > \widehat{B_1}$ nên $IB > IC$ (định lí).

b) Từ $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ suy ra $AM = MB$ là sai vì $\widehat{C_1}$ là góc của $\triangle BCM$; $\widehat{C_2}$ là góc của $\triangle CMA$. Các cạnh AM và MB cũng là cạnh của hai tam giác khác nhau. Định lí ở trên chỉ xét trong một tam giác.



□

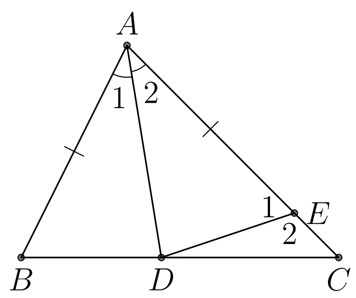
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $AB < AC$, AD là tia phân giác của góc BAC ($D \in BC$). Chứng minh rằng:

a) $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$.

b) $CD > DB$.

Lời giải.

a) Xét $\triangle ABC$ có $AB < AC$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{C} < \widehat{B}$ (định lí).
Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACD$ có
$\widehat{A_1} + \widehat{B} + \widehat{ADB} = \widehat{A_2} + \widehat{C} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ (định lí tổng ba góc trong tam giác).
Mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (giả thiết) và $\widehat{C} < \widehat{B}$ (chứng minh trên) nên $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$.



b) Vì $AC > AB$ (giả thiết) nên trên cạnh AC ta lấy được một điểm E sao cho $AE = AB$.
Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AED$ có:

- $AB = AE$ (theo cách dựng).
- $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (giả thiết).
- AD là cạnh chung.

Do vậy $\triangle ABD = \triangle AED$ (c.g.c).
$\Rightarrow BD = ED$ (hai cạnh tương ứng) và $\widehat{B} = \widehat{E_1}$ (hai góc tương ứng).
Ta lại có $\widehat{E_2} = 180^\circ - \widehat{E_1}$ (hai góc kề bù).
Suy ra $\widehat{E_2} = 180^\circ - \widehat{B} = \widehat{BAC} + \widehat{C} \Rightarrow \widehat{E_2} > \widehat{C}$.
Xét $\triangle ECD$ có $\widehat{E_2} > \widehat{C}$ (chứng minh trên) $\Rightarrow CD > ED$ (định lí).
Mà $ED = BD$ (chứng minh trên) nên suy ra $CD > BD$.

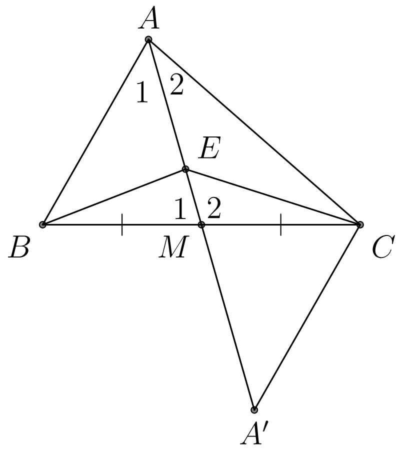
□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có $AB < AC$, M là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh rằng $\widehat{AMB} < \widehat{AMC}$.

b) Trên đoạn AM lấy một điểm E tùy ý. Chứng minh $EB < EC$.

Lời giải.



a) Trên tia đối của tia MA lấy điểm A' sao cho M là trung điểm của $ABOVE'$.
Khi đó, ta có $\triangle ABM = \triangle A'CM$ (c.g.c)
$\Rightarrow A'C = AB$ (hai cạnh tương ứng) và $\widehat{A_1} = \widehat{A'}$ (hai góc tương ứng). (1)
Vì $AB < AC$ (giả thiết) nên $A'C < AC$.
Xét $\triangle ACA'$, có $A'C < AC$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{A_2} < \widehat{A'}$ (quan hệ góc - cạnh đối diện). (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{A_1} > \widehat{A_2}$. Lại có $\widehat{B} > \widehat{C}$ (do $AC > AB$). Vậy $\widehat{AMB} < \widehat{AMC}$.

b) Giả sử $EB = EC$ thì $\triangle EMB = \triangle EMC$ (c.c.c). Suy ra $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$, trái với a).
Giả sử $EB > EC$. Lập luận tương tự câu a) suy ra $\widehat{M_1} > \widehat{M_2}$, vô lí. Vậy $EB < EC$.

⚠ *Các tam giác AMB và AMC có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau, cặp cạnh thứ ba không bằng nhau. Góc M_2 đối diện với cạnh AC lớn hơn nên nó lớn hơn góc M_1. Ta có kết quả tổng quát sau.*
Nếu hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau nhưng cặp cạnh thứ ba không bằng nhau thì góc đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn. Ngược lại, nếu hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau nhưng hai góc xem giữa không bằng nhau thì cạnh đối diện với góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.
Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có $AB = A'B'$; $AC = A'C'$, thì $BC < B'C' \Leftrightarrow \widehat{A} < \widehat{A'}$.

□

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 75^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$. Điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{MBC} = \widehat{MCB} = 30^\circ$. Chứng minh rằng AM vuông góc với BM.

Lời giải.

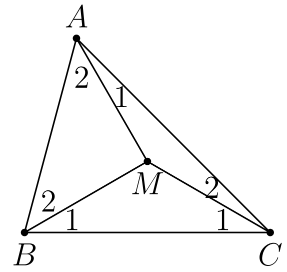
Ta có

$\widehat{BAC} = 180^\circ - \left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right) = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$. (1)

$\widehat{B_2} = \widehat{ABC} - \widehat{B_1} = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$.

$\widehat{C_2} = \widehat{ACB} - \widehat{C_1} = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.

Giả sử MA không vuông góc với MB, tức là $\widehat{AMB} \neq 90^\circ$, ta xét hai trường hợp sau:



Trường hợp 1: $\widehat{AMB} < 90^\circ$.

Xét $\triangle AMB$ có $\widehat{A_2} = 180^\circ - \left(\widehat{AMB} + 45^\circ\right) > 45^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{A_2} > \widehat{B_2} \Rightarrow MB > MA$ (định lí).

Vì $\triangle MBC$ cân tại M nên $MB = MC \Rightarrow MC > MA \Rightarrow \widehat{A_1} > \widehat{C_2}$ (định lí).

Từ đó suy ra $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} > \widehat{B_2} + \widehat{C_2}$ hay $\widehat{BAC} > 60^\circ$, trái với (1).

Trường hợp 2: $\widehat{AMB} > 90^\circ$.

Lập luận tương tự, ta có $\widehat{BAC} < 60^\circ$, trái với (1).

Vậy $\widehat{AMB} = 90^\circ$ hay $MA \perp MB$. □

III. Bài tập

1. Cơ bản

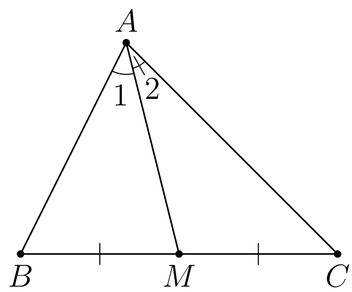
Bài 1. Cho $\triangle ABC$, lấy M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng:

a) Nếu $AM > \dfrac{1}{2}BC$ thì $\widehat{BAC}$ là góc nhọn.

b) Nếu $AM = \dfrac{1}{2}BC$ thì $\widehat{BAC}$ là góc vuông.

c) Nếu $AM < \dfrac{1}{2}BC$ thì $\widehat{BAC}$ là góc tù.

Lời giải.



a) Trong $\triangle ABM$ có $AM > BM \Rightarrow \widehat{B} > \widehat{A_1}$. (1)

Trong $\triangle AMC$ có $AM > MC$ nên $\widehat{C} > \widehat{A_2}$. (2)

Cộng từng vế (1) và (2) có

$$\widehat{B} + \widehat{C} > \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{A}.$$

Mà $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ nên $\widehat{A} < 90^\circ$. Vậy $\widehat{A}$ nhọn.

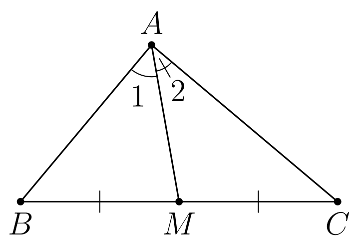
b) Trong $\triangle ABM$ có $AM = BM \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{A_1}$. (3)

Trong $\triangle AMC$ có $AM = MC$ nên $\widehat{C} = \widehat{A_2}$. (4)

Cộng từng vế (3) và (4) có

$$\widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{A}.$$

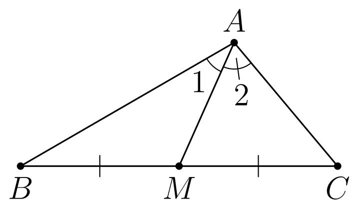
Mà $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ nên $\widehat{A} = 90^\circ$. Vậy $\widehat{A}$ vuông.



c) Trong $\triangle ABM$ có $AM < BM \Rightarrow \widehat{B} < \widehat{A_1}$. (5)
Trong $\triangle AMC$ có $AM < MC$ nên $\widehat{C} < \widehat{A_2}$. (6)
Cộng từng vế (5) và (6) có

$$\widehat{B} + \widehat{C} < \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{A}.$$

Mà $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ nên $\widehat{A} > 90^\circ$. Vậy $\widehat{A}$ tù.



Dựa vào quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác, ta cũng chứng minh được kết quả quen thuộc: Trong tam giác vuông, trung tuyến ứng với cạnh huyền dài bằng nửa cạnh huyền.

□

Bài 2. Cho tam giác ABC, hai tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau ở I.

a) Tìm cạnh lớn nhất của tam giác BIC.

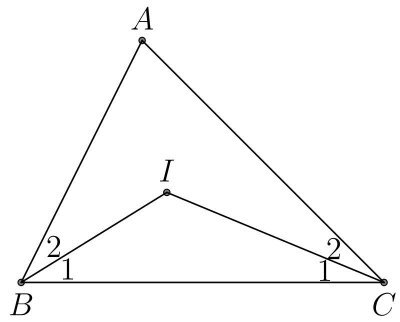
b) Giả sử $IB < IC$, hãy so sánh AB và AC.

Lời giải.

a) Xét $\triangle BIC$, có

$$\begin{aligned}\widehat{BIC} &= 180^\circ - \left(\widehat{B_1} + \widehat{C_1}\right) &= 180^\circ - \left(\frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2}\right)\\ &= 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} &= 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2} > 90^\circ.\end{aligned}$$

$\Rightarrow BC$ là cạnh lớn nhất của $\triangle BIC$.



b) Xét $\triangle BIC$ có $IB < IC \Rightarrow \widehat{B_1} > \widehat{C_1}$ (quan hệ góc - cạnh đối diện).
$\Rightarrow \widehat{ABC} > \widehat{ACB} \Rightarrow AC > AB$ (quan hệ góc - cạnh đối diện).

□

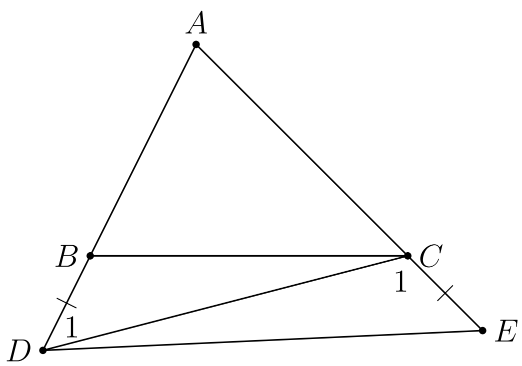
Bài 3. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D và trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Chứng minh rằng $BC < DE$.

Lời giải.

Vì $\widehat{C_1}$ là góc ngoài của $\triangle ACD$ tại đỉnh C nên
$\widehat{C_1} = \widehat{D_1} + \widehat{A} > \widehat{D_1}$.
Xét $\triangle ECD$ và $\triangle DBC$, ta có

- CD là cạnh chung
- $\widehat{C_1} > \widehat{D_1}$ (chứng minh trên)
- $CE = BD$ (giả thiết)

Do đó $DE > BC$ (theo nhận xét ở ví dụ 3).



□

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$; M là trung điểm của cạnh AC. Trên tia đối của tia MB lấy điểm E sao cho $ME = MB$. Chứng minh rằng:

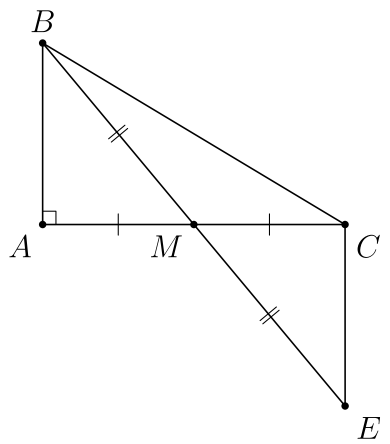
a) $CE \perp AC$ và $BC > CE$.

b) $\widehat{ABM} > \widehat{MBC}$.

Lời giải.

a) Ta có $\triangle ABM = \triangle CEM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{ECM}$ (hai góc tương ứng) và $AB = CE$ (hai cạnh tương ứng).
Mà $\widehat{BAM} = 90^\circ$ nên $\widehat{ECM} = 90^\circ$.
$\Rightarrow CE \perp AC$.
Xét $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$, BC là cạnh huyền nên ta có $BC > AB$.
Mà $AB = CE$ (chứng minh trên) nên $BC > CE$.

b) Ta có $\widehat{ABM} = \widehat{CEM}$ (do $\triangle ABM = \triangle CEM$).
Mà $\widehat{CEM} > \widehat{MBC}$ (do $BC > CE$) nên $\widehat{ABM} > \widehat{MBC}$.

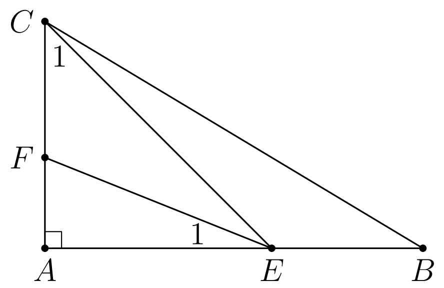


□

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$. Trên cạnh AB và AC lần lượt là các điểm E và F (không trùng với các đỉnh của tam giác). Chứng minh $BC > EF$.

Lời giải.

Xét $\triangle AEF$ có $\widehat{EFC} = \widehat{A} + \widehat{E_1}$ (tính chất góc ngoài).
Mà $\widehat{A} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EFC} > 90^\circ$.
Trong $\triangle EFC$ có $\widehat{EFC}$ tù nên cạnh CE là cạnh lớn nhất $\Rightarrow CE > EF$. (1)
Xét $\triangle AEC$ có $\widehat{BEC} = \widehat{A} + \widehat{C_1}$ (tính chất góc ngoài).
Mà $\widehat{A} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BEC} > 90^\circ$.
Trong $\triangle BEC$ có $\widehat{BEC}$ là góc tù nên cạnh BC là cạnh lớn nhất $\Rightarrow BC > CE$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $BC > EF$.



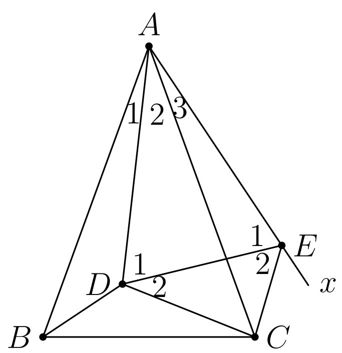
□

2. Nâng cao

Bài 6. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D là điểm bất kì thuộc miền trong của tam giác sao cho $\widehat{ADB} > \widehat{ADC}$. Chứng minh rằng $DC > DB$.

Lời giải.

Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B, vẽ tia Ax sao cho $\widehat{CAx} = \widehat{BAD}$.
Trên tia Ax lấy điểm E sao cho $AE = AD$.
Khi đó $\triangle ADB = \triangle AEC$ (c.g.c) $\Rightarrow DB = EC$ (hai cạnh tương ứng) và $\widehat{ADB} = \widehat{AEC}$ (hai góc tương ứng).
Vì $\widehat{ADB} > \widehat{ADC}$ (giả thiết) nên $\widehat{AEC} > \widehat{ADC}$.
$\Rightarrow \widehat{E_1} + \widehat{E_2} > \widehat{D_1} + \widehat{D_2}$.
Mặt khác, ta có $\widehat{D_1} = \widehat{E_1}$ (do $\triangle AED$ cân tại A). Suy ra $\widehat{E_2} > \widehat{D_2}$.
Xét $\triangle CDE$ có $\widehat{E_2} > \widehat{D_2}$ nên $DC > EC$.
Mà $DB = EC$ (chứng minh trên), suy ra $DC > DB$.

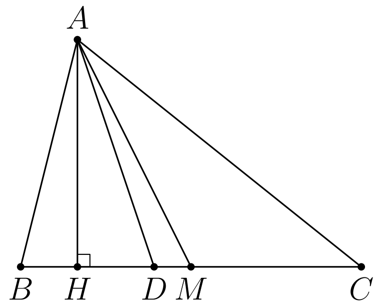


□

Bài 7. Cho tam giác ABC có $AB < AC$ và AD là tia phân giác của góc A (D thuộc BC). Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC) và gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng tia AD nằm giữa hai tia AH và AM.

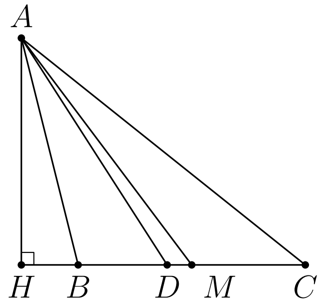
Lời giải.

Nhận thấy hai điểm M và D luôn nằm trên tia CB.
Xét $\triangle ABC$ có $AB < AC$ (giả thiết) nên $\widehat{C} < \widehat{B}$.
$\Rightarrow H$ thuộc tia CB.
Do đó các tia AM, AD, AH cùng thuộc nửa mặt phẳng chứa điểm B có bờ là đường thẳng AC. $(*)$
Ta sẽ chứng minh $\widehat{CAM} < \widehat{CAD} < \widehat{CAH}$.
Xét $\triangle ABC$ có $AB < AC$ (giả thiết) và M là trung điểm của BC nên theo ví dụ 3, ta có



$\widehat{CAM} < \widehat{BAM} \Rightarrow 2\widehat{CAM} < \widehat{BAM} + \widehat{CAM} = \widehat{BAC}$
$\Rightarrow \widehat{CAM} < \dfrac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{CAD}$. (1)
Xét $\triangle HAC$ vuông ở H có

$$\begin{aligned}\widehat{CAH} &= 90^\circ - \widehat{C} = \frac{\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}}{2} - \widehat{C}\\ &= \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2} > \frac{\widehat{A}}{2} = \widehat{CAD}\end{aligned} \quad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{CAM} < \widehat{CAD} < \widehat{CAH}$.
Kết hợp với $(*)$ ta suy ra tia AD nằm giữa hai tia AH và AM.

□

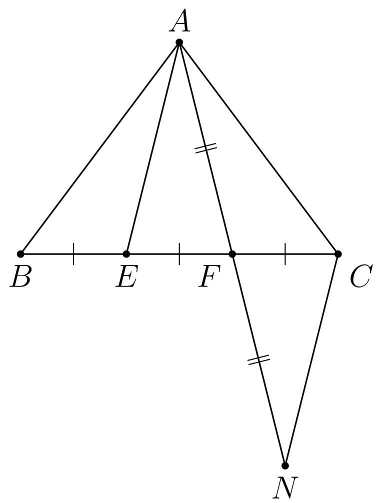
Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên đáy BC lấy các điểm E và F sao cho $BE = EF = FC$.

a) So sánh độ lớn của các góc $\widehat{BAE}$; $\widehat{EAF}$; $\widehat{FAC}$.

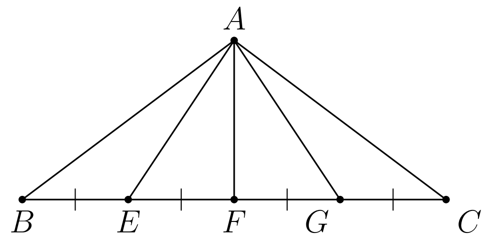
b) Nếu đoạn thẳng BC được chia thành 4 đoạn nhỏ bằng nhau thì 4 góc đối diện với 4 đoạn nhỏ đó có số đo như thế nào?

Lời giải.

a) Vì tam giác ABC cân tại A nên ta có $\triangle AEB = \triangle AFC$ (c.g.c).
Suy ra $\widehat{BAE} = \widehat{FAC}$ (hai góc tương ứng).
Trên tia AF lấy điểm N sao cho F là trung điểm của AN.
Khi đó $\triangle AEF = \triangle NCF$ (c.g.c) nên $\widehat{EAF} = \widehat{FNC}$ và $AE = CN$.
Ta có $\widehat{AEC}$ là góc ngoài của $\triangle ABE$ nên $\widehat{AEC} > \widehat{B} = \widehat{ACE}$.
Xét $\triangle AEC$ có $\widehat{AEC} > \widehat{ACE}$ nên $AC > AE = CN$.
Xét $\triangle ACN$ có $AC > CN$ nên $\widehat{ANC} > \widehat{NAC}$.
Mà $\widehat{ANC} = \widehat{EAF}$, suy ra $\widehat{EAF} > \widehat{FAC} = \widehat{BAE}$.



b) Chứng minh tương tự ta có nếu BC chia thành 4 đoạn nhỏ bằng nhau thì góc A được chia thành 4 góc nhỏ trong đó hai góc giữa bằng nhau, hai góc ngoài bằng nhau, hai góc nằm giữa lớn hơn hai góc nằm ngoài.



□

Bài 9. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 75°$, $\widehat{C} = 60°$. Điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho tam giác MBC vuông cân tại M. Chứng minh rằng $MA = MB$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$\widehat{BAC} = 180° - \left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right) = 180° - (75° + 60°) = 45°$.

$\widehat{B_2} = \widehat{ABC} - \widehat{B_1} = 75° - 45° = 30°$.

$\widehat{C_2} = \widehat{ACB} - \widehat{C_1} = 60° - 45° = 15°$.

Giả sử $MA \neq MB$, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $MA < MB$.

Xét $\triangle MAB$ có $MA < MB$ nên $\widehat{B_2} < \widehat{A_2}$.

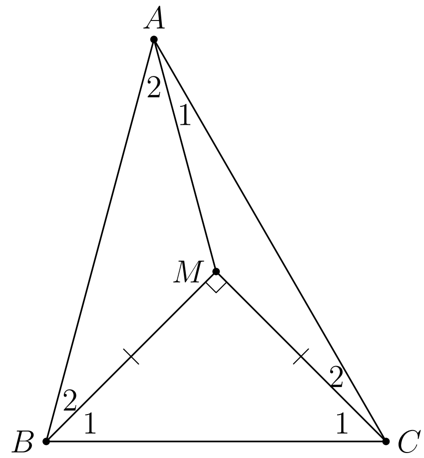
Vì $MC = MB$ nên $MA < MC$, do đó $\widehat{C_2} < \widehat{A_1}$.

Suy ra $\widehat{B_2} + \widehat{C_2} < \widehat{A_1} + \widehat{A_2}$ hay $30° + 15° = 45° < \widehat{BAC}$, trái với (1).

Trường hợp 2: $MA > MB$.

Xét tương tự dẫn đến $45° > \widehat{BAC}$, trái với (1).

Vậy $MA = MB$.



□

Bài 10. Cho tam giác ABE có $AB = a$, $\widehat{EAB} = \widehat{EBA} = 15°$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa E, vẽ các tia Ax, By vuông góc với AB. Lấy D trên tia Ax, lấy E trên tia By sao cho $AD = BC = a$. Chứng minh rằng tam giác ECD là tam giác đều.

Lời giải.

Vì $\triangle AED = \triangle BEC$ (c.g.c) nên $ED = EC = b$.

Ta có $\widehat{A_2} = 75°$, $\widehat{AEB} = 150°$.

Ta sẽ chứng minh $\widehat{AED} = \widehat{BEC} = 75°$.

Giả sử $\widehat{AED} \neq 75°$, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $\widehat{AED} > 75°$.

Xét $\triangle AED$ có $\widehat{E_1} > 75° = \widehat{A_2} \Rightarrow AD > ED$, tức là $a > b$. (1)

Mặt khác, vì $\widehat{AED} > 75°$ nên $\widehat{E_2} < 60°$.

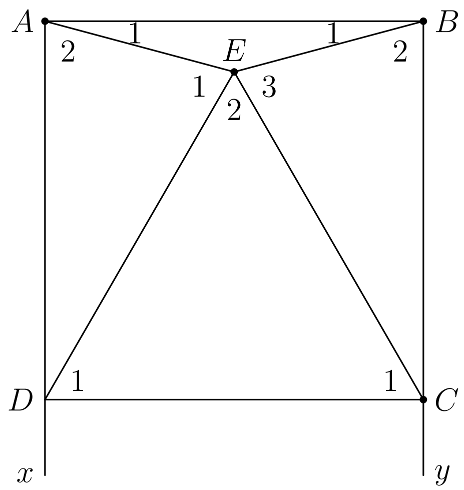
Tam giác CED cân tại E mà $\widehat{E_2} < 60° \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{D_1} > 60°$.

$\Rightarrow \widehat{C_1} > \widehat{E_2} \Rightarrow ED > CD$, tức là $b > a$, mâu thuẫn với (1).

Trường hợp 2: $\widehat{AED} < 75°$.

Chứng minh tương tự cũng dẫn đến mâu thuẫn.

Vậy $\widehat{AED} = 75°$. Từ đó suy ra tam giác CDE đều.



□

§2. Quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên. Đường xiên và hình chiếu

I. Hỏi đáp nhanh

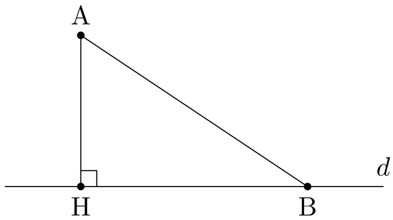
Câu 1.

Giải thích kết luận Đường vuông góc ngắn hơn đường xiên dựa vào quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác như thế nào?

Lời giải.

Xét $\triangle ABH$ ta luôn có $AH < AB$. Mặt khác AH và AB là lần lượt là đường vuông góc và đường xiên kẻ từ A đến đường thẳng d.

Vậy đường vuông góc ngắn hơn đường xiên.



□

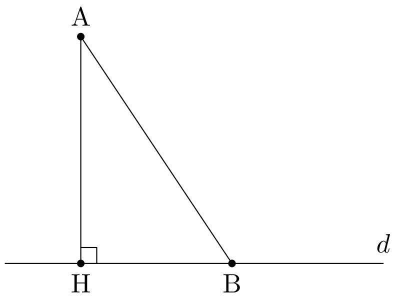
Câu 2.

So sánh đường xiên và hình chiếu của nó trên một đường thẳng. Khi nào đường xiên dài gấp đôi hình chiếu của nó?

Lời giải.

Xét $\triangle ABH$ có $BH = \dfrac{1}{2}AB \Rightarrow \widehat{HAB} = 30^\circ$.

Vậy đường xiên dài gấp đôi hình chiếu khi đường xiên tạo với đường vuông góc một góc 30°.



□

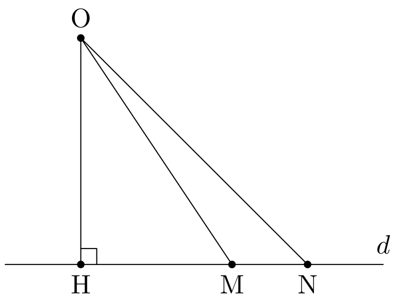
Câu 3.

Hãy so sánh hai đường xiên thông qua hai hình chiếu dựa vào quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong một tam giác (chứng tỏ $ON > OM$ trong hình).

Lời giải.

Áp dụng tính chất góc ngoài của $\triangle OHM$ ta có $\widehat{OMN} > \widehat{OHM} = 90^\circ$. Suy ra $\widehat{OMN}$ là góc tù.

Xét $\triangle OMN$ có $\widehat{OMN} > \widehat{ONM} \Rightarrow ON > OM$.



□

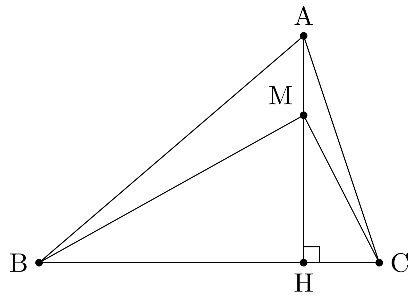
II. Học giải toán

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có $AB > AC$. Từ A hạ $AH \perp BC$. Trên đoạn thẳng AH lấy điểm M (M không trùng A, H). Chứng minh rằng

a) $MB > MC$.

b) $BA > BM$.

Lời giải.



a) Từ $AB > AC$ (giả thiết), suy ra $BH > CH$ (đường xiên lớn hơn thì hình chiếu lớn hơn).
Xét hai đường xiên MB và MC có $BH > CH$ suy ra $MB > MC$ (hình chiếu lớn hơn thì đường xiên lớn hơn).

b) Ta xét BH là đường vuông góc với đường thẳng AH thì AH và MH là hình chiếu của BA và BM trên đường thẳng AH.
Theo giả thiết M nằm giữa A và H nên $HM < HA$ suy ra $BM < BA$ (hình chiếu lớn hơn thì đường xiên xiên lớn hơn).
Vậy $BA > BM$.

□

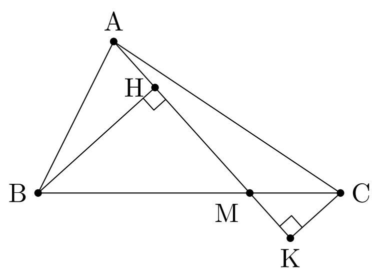
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có hai góc B và C nhọn. Điểm M nằm giữa B và C. Gọi d là tổng khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AM.

a) Chứng minh rằng: $d \leq BC$.

b) Xác định vị trí của điểm M sao cho d có giá trị lớn nhất.

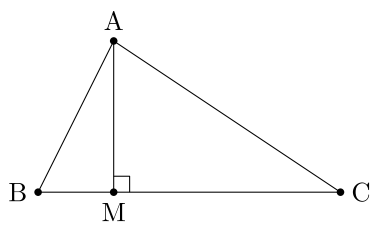
Lời giải.

a)



Kẻ $BH \perp AM$ và $CK \perp AM$ $(H, K \in AM)$. Theo đề ra ta có $d = BH + CK$.
Ta có: $BH \leq BM$ (Quan hệ đường vuông góc - đường xiên) và $CK \leq CM$ (quan hệ đường vuông góc - đường xiên).
Suy ra $BH + CK \leq BM + CM = BC$ hay $d \leq B$.

b)

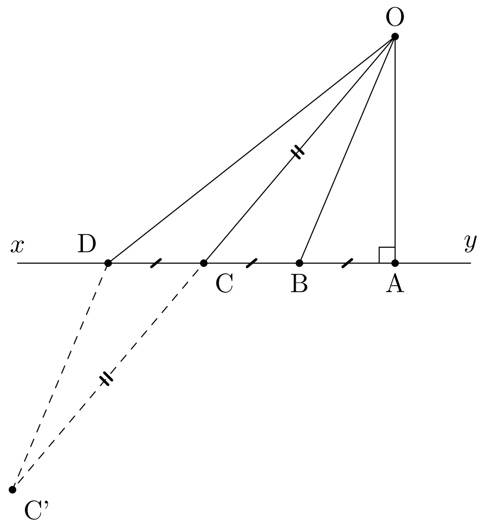


Ta luôn có $d \leq BC$, $d = BC$ khi và chỉ khi $BM = BH$, $CM = CK$ hay đồng thời $H \equiv M$ và $K \equiv M$, tức là $AM \perp BC$.
Vì hai góc B và C nhọn nên khi đó M nằm giữa B và C, thỏa mãn điều kiện. Vậy d có giá trị lớn nhất khi M là hình chiếu của A trên BC.

□

Ví dụ 3. Cho một điểm O ở ngoài đường thẳng xy, A là hình chiếu của O trên xy. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ OA, ta kẻ các đường xiên OB, OC, OD sao cho $AB = BC = CD$. Hãy sắp xếp thứ tự các góc AOB, BOC, COD theo số đo của chúng.

Lời giải.



Ta chứng minh cho một trường hợp, các trường hợp khác được chứng minh tương tự.
Chẳng hạn, ta chứng minh $\widehat{DOC} < \widehat{COB}$.
Trên tia OC lấy điểm C' sao cho C là trung điểm của OC', nối $C'D$.
Xét $\triangle DCC'$ và $\triangle BCO'$ có

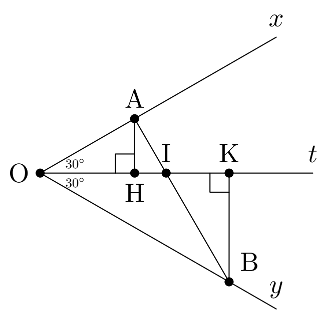
$$\begin{cases} DC = BC \\ \widehat{DCC'} = \widehat{BCO} \Rightarrow \triangle DCC' = \triangle BCO' \text{ (c.g.c)} \\ CC' = CO \end{cases}$$

$\Rightarrow DC' = OB$ và $\widehat{DC'C} = \widehat{COB}$. (1)
Ta có $OB < OD$ (vì $AB < AD$ theo định lí về quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu của nó), nên $DC' < OD$.
Trong tam giác ODC', theo định lí về quan hệ giữa cạnh và góc đối diện ta có $\widehat{DOC} < \widehat{DC'C}$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{DOC} < \widehat{COB}$.
Vậy $\widehat{AOB} > \widehat{BOC} > \widehat{COD}$.

□

Ví dụ 4. Cho góc $xOy = 60°$, A là điểm trên tia Ox, B là điểm trên tia Oy (A, B không trùng với O). Chứng minh rằng $OA + OB \leq 2AB$.

Lời giải.



Kẻ tia phân giác Ot của góc xOy.
Gọi I là giao điểm của AB và Ot; H, K lần lượt là hình chiếu của A, B trên Ot.
Xét tam giác OAH có $\widehat{AOH} = 30°$ nên $OA = 2AH$.
Vì AH, AI lần lượt là đường vuông góc, đường xiên kẻ từ A đến đường thẳng Ot nên $AH \leq AI$. Do vậy $OA \leq 2AI$. (1)
Chứng minh tương tự ta có $OB = 2BK \leq 2BI$. (2)
Từ (1) và (2) ta có $OA + OB \leq 2AI + 2BI = 2AB$.
Đẳng thức xảy ra khi $H \equiv I \equiv K$ hay $AB \perp Ot \Leftrightarrow OA = OB$.

□

III. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A. Kẻ AH vuông góc với BC ($H \in BC$). Trên tia đối của tia HA lấy điểm F sao cho $HF = HA$. Trên tia đối của tia CB lấy diểm E tùy ý. Chứng minh rằng

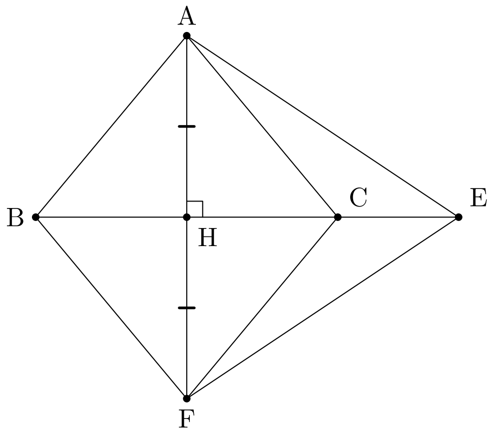
a) $AB = AC = FB = FC$.

b) Tam giác AEF cân.

Lời giải.

a) $AB = AC$ (giả thiết) suy ra $HB = HC$ (đường xiên bằng nhau nên hình chiếu bằng nhau). $AH = HF$ (giả thiết) suy ra $CA = CF$ và $BA = BF$ (hình chiếu bằng nhau nên đường xiên bằng nhau). Từ đó suy ra $AB = AC = CF = BF$.

b) $AH = HF$ (giả thiết) suy ra $AE = FE$ (hình chiếu bằng nhau). Vậy $\triangle AEF$ cân tại E.



□

Bài 2. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Qua I kẻ đường thẳng d. Biết IH và IK là hình chiếu của đoạn IA và IB trên dường thẳng d.

a) Chứng minh $IH = IK$.

b) Nếu I không phải là trung điểm của AB mà $IA > IB$. Chứng minh hình chiếu của IA trên đường thẳng d cũng lớn hơn hình chiếu của IB trên đường thẳng d.

Lời giải.

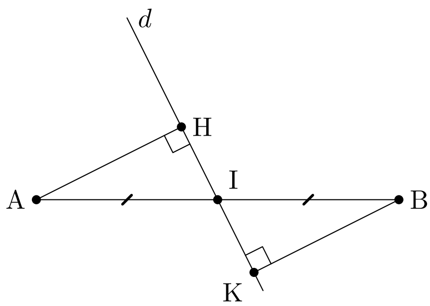
a)

Xét $\triangle AIH$ và$\triangle BIK$ có

$$\begin{cases} \widehat{AHI} = \widehat{BKI} = 90^\circ \\ IA = IB \text{ (gt)} \\ \widehat{AIH} = \widehat{BIK} \text{ (đối đỉnh)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle AIH = \triangle BIK$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow IH = IK$.



b)

Trên cạnh IA lấy điểm M sao cho I là trung điểm của MB. Khi đó $IM < IA$ do $IB < IA$.

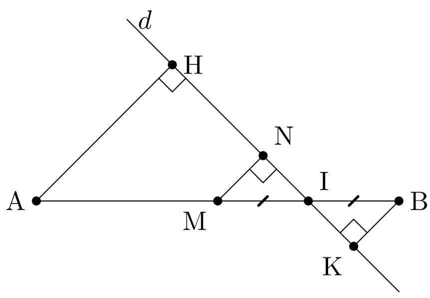
Gọi N là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng d.

Do $IM < IA$ nên suy ra $IN < IH$.

Dễ chứng minh được

$\triangle BIK = \triangle MIN$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow IK = IN$

. Mặt khác $IN < IH$ suy ra $IK < IH$ (đpcm).



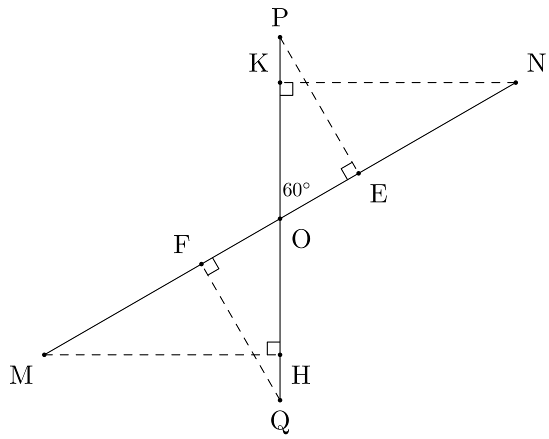
□

Bài 3. Hai đoạn thẳng $MN = 12$cm, $PQ = 8$cm cắt nhau tại O là trung điểm của mỗi đoạn và góc tạo thành giữa hai đoạn thẳng đó là 60° (hay $\widehat{MOQ} = 60^\circ$).

a) Nêu cách tìm hình chiếu của đoạn MN trên đường thẳng PQ và cách tìm hình chiếu của đoạn PQ trên đường thẳng MN.

b) Tính độ dài của hai hình chiếu đó.

Lời giải.



a) Muốn tìm hình chiếu của đoạn MN trên PQ ta tìm hình chiếu của hai điển M, N trên PQ. Từ M hạ $MN \perp PQ$ và từ N hạ $NK \perp PQ$, ta có HK là hình chiếu của MN trên đường thẳng PQ.
Tương tự đối với hình chiếu của PQ trên đường thẳng MN.

b) Dễ chứng minh được $\triangle ONK = \triangle OMH$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra $OK = OH$.
$\triangle OPE = \triangle OQF$ (cạnh huyền - góc nhọn) suy ra $OE = OF$.
$\triangle ONK$ vuông tại K có $\widehat{KNO} = 30^\circ$ nên $OK = \dfrac{1}{2}ON = 3$ cm, mà $OK = OH$ nên $HK = 6$cm.

$\triangle OPE$ vuông tại E có $\widehat{OPE} = 30^\circ$ nên $OE = \dfrac{1}{2}OP = 2$ cm, mà $OE = OF$ nên $EF = 4$cm.

□

Bài 4. Cho tam giác ABC.

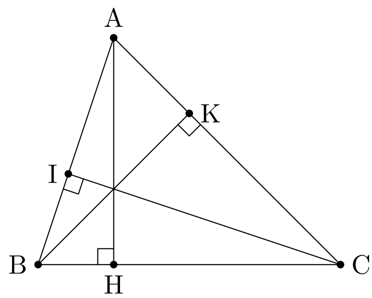
a) Từ A hạ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Chứng minh $AH < \dfrac{AB + AC}{2}$.

b) Từ B hạ BK vuông góc AC ($K \in AC$), từ C hạ $CI \perp AB$ ($I \in AB$). Chứng minh rằng $AH + BK + CI$ nhỏ hơn chu vi của $\triangle ABC$.

Lời giải.

a)

Ta có $AH \leq AC$ (đẳng thức xảy ra khi $\widehat{C} = 90^\circ$).
$AH \perp AB$ (đẳng thức xảy ra khi $\widehat{B} = 90^\circ$).
Do hai đẳng thức không xảy ra đồng thời nên
$$2AH < AC + AB \Rightarrow AH < \frac{AB + AC}{2}. \qquad (1)$$



b) Tương tự ta cũng chứng minh được

$$BK < \frac{AB + BC}{2}. \qquad (2)$$

$$CI < \frac{AC + BC}{2}. \qquad (3)$$

Cộng theo vế (1) ; (2); (3) có
$AH + BK + CI < \dfrac{AB + AC}{2} + \dfrac{AB + BC}{2} + \dfrac{AC + BC}{2}$.
Hay $AH + BK + CI < AB + BC + AC$ bằng chu vi tam giác ABC.

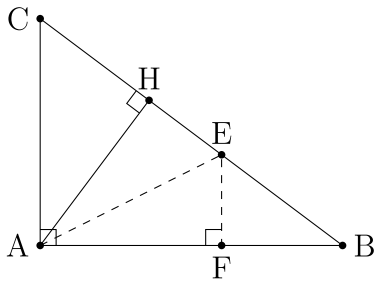
□

2. Nâng cao

Bài 5. Chứng minh rằng trong một tam giác vuông, tổng cạnh huyền và đường cao tương ứng luôn nhỏ hơn tổng hai cạnh góc vuông.

Lời giải.

Kẻ đường vuông góc AH xuống BC suy ra H thuộc cạnh BC.
Trên tia CB lấy điểm E sao cho $CE = CA$.
Trên tia AB lấy điểm F sao cho $AF = AH$.
Ta có $CH < CA$ nên $CH < CE$.
Từ đó, ta có $CH < CE < CB \Rightarrow E$ nằm giữa H và B.
Vì $AH < AB$ nên $AF < AB \Rightarrow F$ nằm giữa A và B.
Lại có $CE = CA \Rightarrow \triangle AFE$ cân tại $C \Rightarrow \widehat{CAE} = \widehat{CEA}$.
Mà $\widehat{CAE} + \widehat{BAE} = 90°$; $\widehat{CEA} + \widehat{HAE} = 90° \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{HAE}$.



Do đó $\triangle AHE = \triangle AFE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{AFE}$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow EF \perp AB$.
Ta có $AH + BC = AF + CE + BE$; $AB + AC = AF + BF + CE$.
Mà $BE > BF$ suy ra $AH + BC > AB + AC$. □

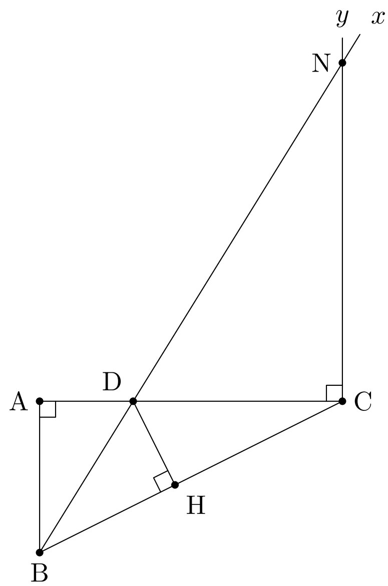
Bài 6. Cho ABC vuông tại A; Bx là tia phân giác của góc B cắt AC tại D. Tại C kẻ $Cy \perp AC$ (AB và Cy thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ AC). Cy cắt Bx tại N. So sánh chu vi tam giác ABD và chu vi tam giác CDN.

Lời giải.

$AB \perp AC$ (giả thiết), $Cy \perp AC$ (giả thiết) suy ra $AB \parallel Cy$.
Xét $\triangle BCN$ có $\widehat{N} = \widehat{ABD}$ (so le trong), $\widehat{ABD} = \widehat{CBD}$ (giả thiết).
Vậy $\widehat{N} = \widehat{CBD} \Rightarrow \triangle BCN$ cân tại C suy ra $BC = CN$.
Tam giác ABC vuông tại A nên $AB < BC$. Vậy $AB < CN$. (1)
Kẻ $DH \perp BC$ ta có $\triangle ABD = \triangle HBD$ (cạnh huyền - góc nhọn).
Suy ra $DA = DH$, mà $DC > DH$.
Vậy $DC > DA$ hay $DA < DC$. (2)
Xét $\triangle BCD$ và $\triangle NCD$ có

$$\begin{cases} CN = BC \\ CD \text{ chung} \\ \widehat{DCN} = 90° > \widehat{BCD} \end{cases} \Rightarrow BD < DN. \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) theo từng vế ta có
$AB + AD + BD < CN + DC + DN$.
Vậy chu vi tam giác ABD nhỏ hơn chu vi tam giác CDN.



□

§3. Quan hệ giữa ba cạnh của tam giác

I. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Bạn Minh lập luận: Ba đoạn thẳng $a = 10$cm, $b = 4$cm, $c = 5$cm thỏa mãn $a + b > c$ nên chúng có thể lập thành một tam giác. Lập luận đó đúng hay sai?

Lời giải.

Lập luận của bạn Minh là sai. Ta thấy $b + c < a$. □

Câu 2. Chu vi một tam giác cân là 20cm, một cạnh của tam giác dài 5cm. Hỏi cạnh đó là cạnh bên hay cạnh đáy?

Lời giải.
Nếu cạnh đó là cạnh bên thì tổng hai cạnh bên là $5+5=10$cm. Trong đó cạnh đáy còn lại là $20-10=10$cm, vi phạm bất đẳng thức tam giác. Vậy cạnh 5cm phải là cạnh đáy. □

Câu 3. Ba điểm A, B, C phân biệt thỏa mãn $AB - AC = BC$ thì vị trí ba điểm A, B, C như thế nào?

Lời giải.
Từ giả thiết ta có $AB = AC + BC$. Vậy A, B, C là ba điểm thẳng hàng và C nằm giữa A, B. □

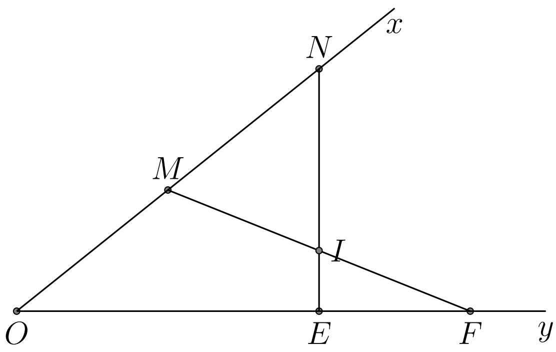
II. Học giải toán

Ví dụ 1. Cho góc $\widehat{xOy}$ nhọn, trên Ox lấy hai điểm M và N (điểm M nằm giữa hai điểm O và N). Trên Oy lấy hai điểm E và F (điểm E nằm giữa hai điểm O và F). Chứng minh $MN + EF < MF + NE$.

Lời giải.
Gọi I là giao điểm của MF và NE. Xét $\triangle MIN$ có $MN < MI + IN$ (tổng hai cạnh lớn hơn một cạnh). (1)
Xét $\triangle EIF$ có $EF < IF + IE$ (tổng hai cạnh lớn hơn một cạnh). (2)
Từ (1) và (2) có

$$MN + EF < MI + NI + IF + IE$$

hay $MN + EF < MF + NE$.



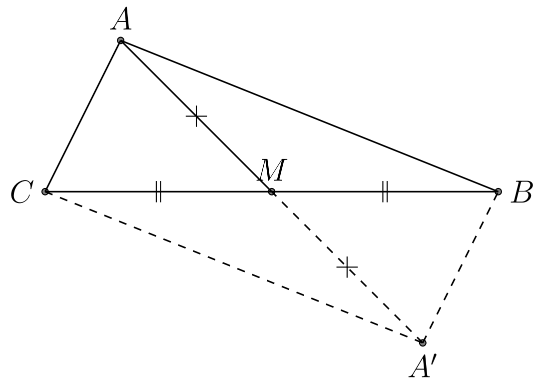
□

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có $AB > AC$. Điểm M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng

$$\frac{AB - AC}{2} < AM < \frac{AB + AC}{2}$$

Lời giải.

Trên tia đối của tia MA ta lấy điểm A' sao cho $MA' = MA$.



- Xét hai tam giác ABM và $A'MC$ có

$$\begin{aligned} AM &= MA' \quad \text{(Theo cách vẽ)} \\ BM &= MC \quad \text{(Theo giả thiết)} \\ \widehat{AMB} &= \widehat{CMA'} \quad \text{(Góc đối đỉnh).} \end{aligned}$$

  Vậy $\triangle ABM = \triangle A'MC$ (c.g.c).

  Suy ra $AB = A'C$.

- Xét $\triangle ACA'$ có $A'C - AC < AA' < AC + A'C$, do $AB = A'C$ và $AA' = 2AM$ nên ta có

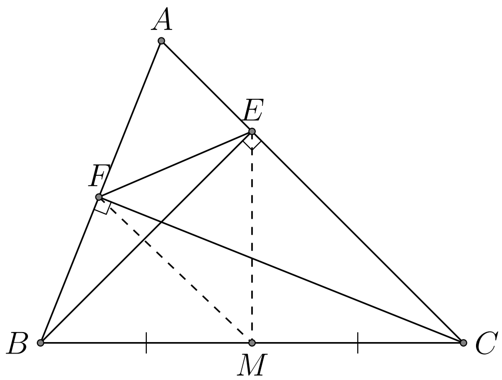
$$AB - AC < 2AM < AC + AB$$

Vậy $\dfrac{AB - AC}{2} < AM < \dfrac{AB + AC}{2}$.

$\square$

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ có hai đường cao BE, CF. Chứng minh rằng $EF < BC$.

Lời giải.

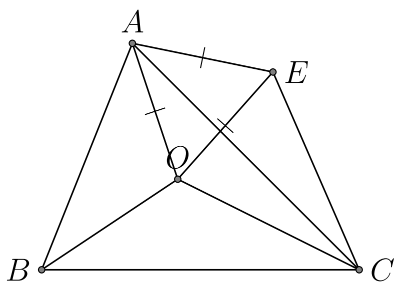


Gọi M là trung điểm của BC. Xét $\triangle BCE$ vuông tại E có trung tuyến EM nên $ME = \dfrac{1}{2}BC$.
Xét $\triangle BCF$ vuông tại F có trung tuyến FM nên $MF = \dfrac{1}{2}BC$.
Do đó $ME + MF = BC$. Ba điểm M, E, F nằm trên ba cạnh của tam giác ABC và không thể thẳng hàng nên nó tạo thành một tam giác, do đó $ME + MF > EF$.
Vậy $EF < BC$.

$\square$

Ví dụ 4. Cho tam giác đều ABC, O là điểm nằm trong tam giác. Chứng minh rằng ba đoạn thẳng OA, OB, OC luôn lập được thành một tam giác.

Lời giải.



Dựng tam giác đều OAE (E và O ở khác phía so với AC). Xét hai tam giác BAO và CAE.
Ta có $\widehat{BAO} = \widehat{CAE} = 60^\circ - \widehat{OAC}$, $BA = CA, OA = EA$, do đó hai tam giác này bằng nhau (c.g.c). Suy ra $OB = CE$. Lại có $OA = OE$ (cách dựng). Vì O nằm trong $\triangle ABC$, $\widehat{OAE} = 60^\circ$ nên ba đỉnh O, C, E luôn là ba đỉnh của một tam giác. Như vậy OA, OB, OC tương ứng bằng ba cạnh của tam giác OCE, tức chúng luôn lập được thành một tam giác.

$\square$

III. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Tính chu vi của $\triangle ABC$ cân, biết

a) $AB = 7\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$.

b) $AB = 9\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$.

Lời giải.

a) Nếu AB là cạnh bên thì ba cạnh là 7cm, 7cm và 4cm thỏa mãn bất đẳng thức tam giác. Vậy chu vi tam giác là 18cm.

Nếu AB là cạnh đáy thì ba cạnh là 7cm, 4cm, 4cm cũng thỏa mãn bất đẳng thức tam giác. Vậy chu vi tam giác trong trường hợp này là 15cm.

b) Nếu AB là cạnh đáy thì ba cạnh là 9cm, 4cm và 4cm không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác vì $4 + 4 < 9$ nên không có trường hợp này.

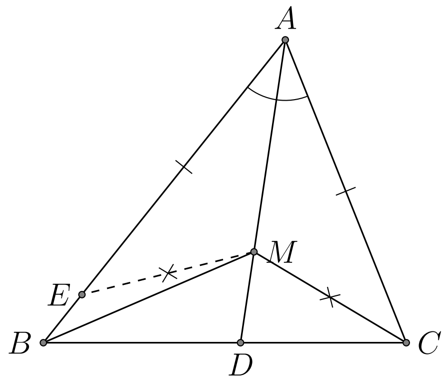
Nếu AB là cạnh bên thì ba cạnh là 9cm, 9cm và 4cm thỏa mãn bất đẳng thức tam giác. Vậy chu vi tam giác là 22cm.

□

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ có $AB > AC$. Kẻ tia phân giác AD của góc A ($D \in BC$). Lấy M trên đoạn thẳng AD (M không trùng A). Chứng minh rằng $AB - AC > MB - MC$.

Lời giải.

Trên tia AB lấy điểm E sao cho $AE = AC$. Vì $AB > AC$ nên E nằm giữa A và B.
Xét hai $\triangle AEM$ và $\triangle ACM$ có: $AE = AC$ (cách dựng); $\widehat{EAM} = \widehat{CAM}$ (giả thiết) và AM là cạnh chung.
Vậy $\triangle AEM = \triangle ACM$ (c.g.c). Suy ra $EM = MC$. (1).
Trong $\triangle BEM$, theo bất đẳng thức tam giác ta có $BE > MB - ME$. Theo cách dựng điểm E ta có $BE = AB - AE = AB - AC$; theo (1) ta có $MB - ME = MB - MC$.
Vậy $AB - AC > MB - MC$.



□

Bài 3. Chứng minh rằng trong một tam giác, độ dài cạnh lớn nhất sẽ lớn hơn hoặc bằng $\dfrac{1}{3}$ chu vi của tam giác nhưng nhỏ hơn nửa chu vi của tam giác ấy.

Lời giải.

Giả sử độ dài ba cạnh là a, b, c. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c > 0$.

Ta có $a < b + c \Rightarrow a + a < a + b + c \Rightarrow a < \dfrac{a+b+c}{2}$.

Từ $a \geq b, a \geq c$ ta có $3a \geq a + b + c \Rightarrow a \geq \dfrac{a+b+c}{3}$.

Vậy $\dfrac{a+b+c}{3} \leq a < \dfrac{a+b+c}{2}$. □

2. Nâng cao

Bài 4. Chu vi của một tam giác cân là 15cm, độ dài các cạnh có số đo là các số nguyên dương. Tính số đo cạnh đáy.

Lời giải.

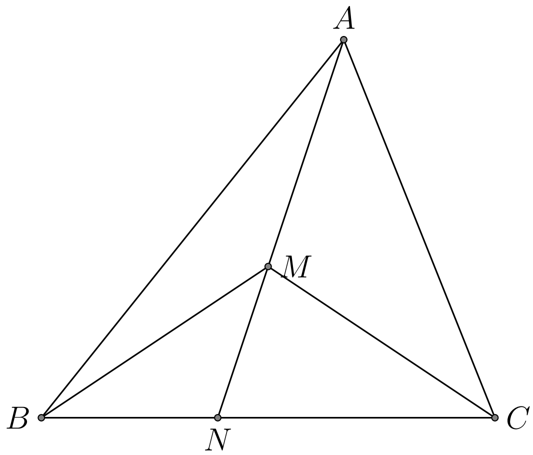
Gọi độ dài cạnh đáy là $a$cm thì độ dài mỗi cạnh bên là $\dfrac{15-a}{2}$cm. Suy ra a là số tự nhiên lẻ.

Mặt khác $\dfrac{15-a}{2}+\dfrac{15-a}{2}>a$ nên $15-a>a$ hay $a<7{,}5$.

Vậy cạnh đáy a có thể nhận các giá trị $1, 3, 5, 7$cm. □

Bài 5. Chứng minh rằng nếu điểm M nằm trong tam giác ABC thì tổng các khoảng cách từ M đến ba đỉnh của tam giác ấy nhỏ hơn chu vi nhưng lớn hơn nửa chu vi của tam giác ABC.

Lời giải.



Trong $\triangle AMB$ có $AM+MB>c$ (bất đẳng thức trong tam giác).

Trong $\triangle AMC$ có $AM+MC>b$.

Trong $\triangle BMC$ có $BM+MC>a$.

Suy ra $2(AM+MB+MC)>a+b+c$, hay $AM+MB+MC>\dfrac{a+b+c}{2}$.

Gọi N là giao điểm của AM và BC. Trong tam giác ANC ta có $AN=AM+MC<AC+CN$, trong tam giác BMN ta có $BM<MN+NB$. Suy ra $AM+MC+BM<AC+CN+MN+NB$, hay $MA+MB<CA+CB$. Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được $MB+MC<AB+AC$, $MA+MC<MA+BC$. Cộng từng vế ba bất đẳng thức cuối ta được $MA+MB+MC<a+b+c$.

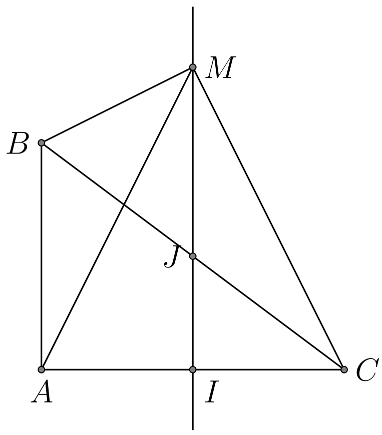
Vậy $\dfrac{a+b+c}{2}<MA+MB+MC<a+b+c$. □

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=3$; $AC=4$. Gọi I là trung điểm của AC, d là đường trung trực của đoạn AC và M là điểm tùy ý trên d.

a) Chứng minh rằng $MA+MB\geq 5$.

b) Xác định vị trí của M để tổng $MA+MB$ nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải.



a) Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, có $BC^2=AB^2+AC^2=3^2+4^2=25=5^2$ (định lý Py ta go) $\Rightarrow BC=5$.

Xét hai tam giác MIA và MIC có $IA=IC$, $\widehat{MIA}=\widehat{MIC}=90^\circ$, cạnh MI chung. Vậy $\triangle MIA=\triangle MIC$ (c.g.c). Suy ra $MA=MC$ (hai cạnh tương ứng).

Do vậy, ta có: $MA+MB=MC+MB\geq BC=5$.

b) Vì $MA+MB\geq 5$ (chứng minh trên) nên $MA+MB$ nhỏ nhất bằng 5 khi và chỉ khi $MB+MC=BC$.

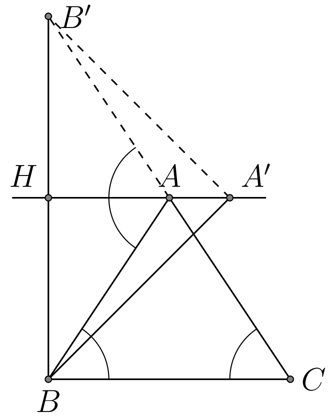
$\Leftrightarrow M$ nằm trên đoạn BC.

$\Leftrightarrow M\equiv J$ với J là giao điểm của d và BC. □

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Đường thẳng d qua A và song song với BC. Lấy A' là điểm bất kỳ trên đường thẳng d ($A'\neq A$). Chứng minh rằng chu vi $\triangle ABC$ nhỏ hơn chu vi $\triangle A'BC$.

Lời giải.

Lấy điểm B' sao cho d là đường trung trực của BB'. Dễ thấy B', A, C thẳng hàng. Suy ra $CA + AB' = CB'$.
Vì d là đường trung trực của BB', $A, A' \in d$ nên ta có $AB' = AB$; $A'B' = A'B$.
Ta có $AB + AC + BC = AB + AB' + BC = BC + B'C$. (1).
Trong tam giác $A'B'C$ ta có $A'B' + A'C > B'C$. Suy ra $A'B + AC > B'C$ hay $A'B + AC + BC > B'C + BC$ (2).
Từ (1) và (2) ta có $A'B + AC + BC > AB + AC + BC$.



□

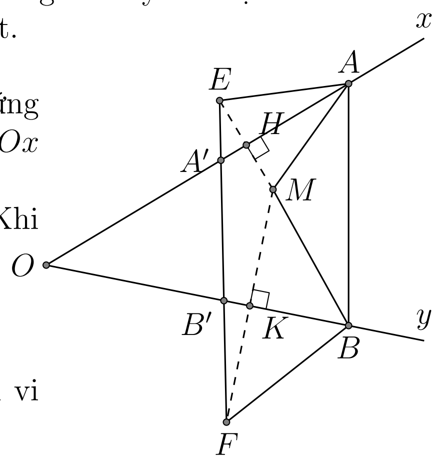
Bài 8. Cho góc $\widehat{xOy}$ nhọn. M là điểm thuộc miền trong của góc. Hãy xác định điểm A trên Ox, điểm B trên Oy sao cho chu vi tam giác MAB là nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi E là điểm đối xứng với M qua Ox, F là điểm đối xứng với M qua Oy, A', B' lần lượt là giao điểm của EF với Ox và Oy.
Dễ thấy $AM = AE, BM = BF$ do tính chất đối xứng. Khi đó chu vi $\triangle MAB$ là

$$MA + AB + MB = EA + AB + BF \geq EF.$$

Dấu " = " xảy ra khi E, F, A, B thẳng hàng. Vậy chu vi $\triangle MAB$ nhỏ nhất khi A trùng với A', B trùng với B'.



□

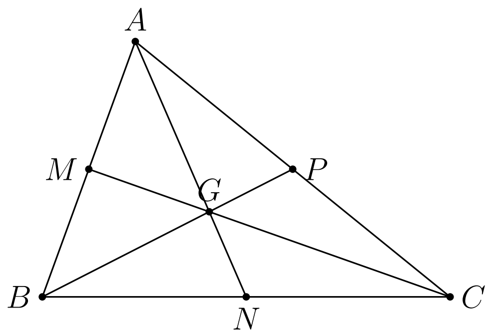
§4. Tính chất ba đường trung tuyến của tam giác

I. Kiến thức cần nhớ

Định nghĩa 1. Ba đường trung tuyến của một tam giác cùng đi qua một điểm, điểm này được gọi là *trọng tâm* của tam giác.

Định lí 1. *Trọng tâm của tam giác cách mỗi đỉnh một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ độ dài đường trung tuyến đi qua đỉnh ấy.*

$$AG = \frac{2}{3}AN,\ BG = \frac{2}{3}BP,\ CG = \frac{2}{3}CM.$$



⚠ *Phương pháp tìm trọng tâm G của $\triangle ABC$ hoặc chứng minh một điểm là trọng tâm của tam giác:*

Cách 1: *Kẻ hai đường trung tuyến, lấy giao điểm G.*

Cách 2: *Kẻ một đường trung tuyến AM. Lấy điểm G trên AM sao cho $AG = 2AM$.*

II. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Hãy so sánh độ dài hai trung tuyến ứng với cạnh bên trong một tam giác cân.

Lời giải.
Vì tam giác cân có hai cạnh bên bằng nhau và hai góc ở đáy bằng nhau nên suy ra hai trung tuyến ứng với hai cạnh bên bằng nhau. □

Câu 2. So sánh độ dài ba trung tuyến trong một tam giác đều.
Lời giải.
Vì tam giác đều có ba cạnh bằng nhau và ba góc bằng nhau nên ba đường trung tuyến trong một tam giác đều bằng nhau. □

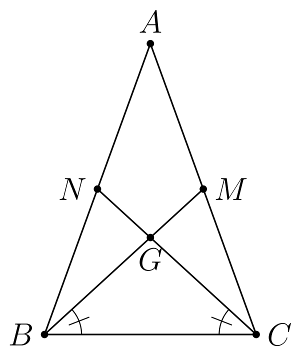
Câu 3. Trong tam giác vuông, hãy so sánh trung tuyến ứng với cạnh huyền và cạnh huyền.
Lời giải.
Trong một tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền. □

Câu 4. Trọng tâm của tam giác có thể nằm ngoài tam giác được không?
Lời giải.
Vì ba đường trung tuyến của tam giác đều nằm trong tam giác đó nên giao điểm của chúng, tức là trọng tâm của tam giác phải nằm trong tam giác đó. □

III. Học giải toán

Ví dụ 1. Chứng minh rằng nếu một tam giác có hai đường trung tuyến bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

Lời giải.
Giả sử $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BM và CN bằng nhau.
Gọi G là giao điểm của BM và CN, theo tính chất trọng tâm tam giác ta có $BG = \dfrac{2}{3}BM$, $CG = \dfrac{2}{3}CN$, do đó $BG = CG$ (vì $BM = CN$).
$\triangle GBC$ cân tại G nên $\widehat{GBC} = \widehat{GCB}$. Suy ra $\triangle MBC = \triangle NCB$ (c.g.c), từ đó $\widehat{B} = \widehat{C}$ hay $\triangle ABC$ cân.



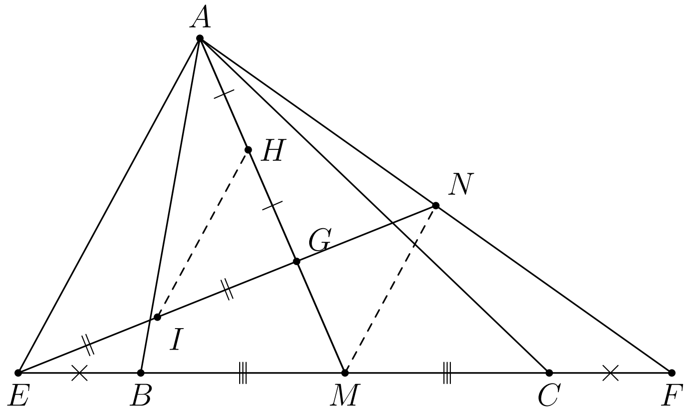
□

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$. Trên tia đối của tia BC lấy điểm E, trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho $BE = CF$.

a) Chứng minh hai tam giác ABC và AEF có cùng trọng tâm G.

b) AG cắt BC tại M. Lấy H là trung điểm của AG. Nối EG cắt AF tại N. Lấy I là trung điểm của EG. Chứng minh $IH \parallel MN$ và $IH = MN$.

Lời giải.



a) Kẻ trung tuyến AM của $\triangle ABC$ và trên AM đặt $AG = \dfrac{2}{3}AM$. Khi đó G là trọng tâm của $\triangle ABC$.
Ta có

$$MB = MC \text{ (vì } AM \text{ là trung tuyến);} \tag{1}$$
$$BE = CF \text{ (giả thiết).} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có $MB + BE = MC + CF \Rightarrow ME = MF$.
Vậy AM là trung tuyến thuộc cạnh EF của $\triangle AEF$. Vì $AG = \dfrac{2}{3}AM$ nên G cũng là trọng tâm của $\triangle AEF$.

b) Xét $\triangle GHI$ và $\triangle GMN$ có $HG = \dfrac{1}{2}AG$, mà $AG = \dfrac{2}{3}AM$ nên $HG = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{1}{3}AM$; $GM = \dfrac{1}{3}AM$. Vậy $HG = GM$.
Tương tự ta có $GI = GN = \dfrac{1}{3}EN$, $\widehat{HGI} = \widehat{NGM}$ (đối đỉnh).
Vậy $\triangle GHI = \triangle GMN$ (c.g.c). Suy ra $HI = NM$ (cạnh tương ứng) và $\widehat{IHG} = \widehat{NMG}$ (góc tương ứng) $\Rightarrow HI \parallel MN$ (hai góc so le trong bằng nhau).

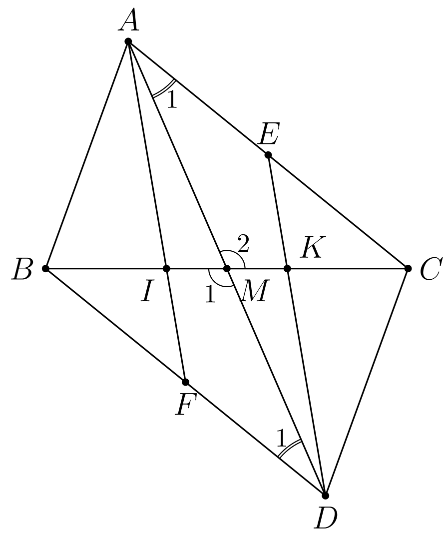
□

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$, trung tuyến AM. Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $MD = MA$.

a) Chứng minh $AB \parallel CD$ và $AB = CD$; $AC \parallel BD$ và $AC = BD$.

b) Gọi E và F là trung điểm của AC và BD; AF cắt BC tại I, DE cắt BC tại K. Chứng minh $BI = IK = KC$.

Lời giải.



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle DMB$ có

$$AM = MD \text{ (giả thiết)};$$
$$MC = MB \text{ (giả thiết)};$$
$$\widehat{M_1} = \widehat{M_2} \text{ (đối đỉnh)}.$$

Vậy $\triangle AMC = \triangle DMB$ (c.g.c).
Suy ra $AC = BD$ và $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ (góc tương ứng)
$\Rightarrow AC \parallel BD$ (hai góc so le trong bằng nhau).
Tương tự ta có $AB = CD$ và $AB \parallel CD$.

b) Xét $\triangle ABD$ và có BM là trung tuyến ứng với cạnh AD ($AM = MD$ do giả thiết) và AF là trung tuyến ứng với cạnh BD.
Vậy I là trọng tâm của $\triangle ABD$.
Suy ra $IM = \dfrac{1}{3}BM$. (1)

Tương tự, K là trọng tâm của $\triangle ACD$. Suy ra

$$KM = \frac{1}{3}MC, \tag{2}$$

mà $BM = MC$. (3)

Vậy từ (1), (2) và (3) có $BI = IK = KC = \dfrac{1}{3}BC$.

□

IV. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Chứng minh rằng không tồn tại tam giác có hai đường trung tuyến cùng nhỏ hơn nửa cạnh đối diện.

Lời giải.

Nếu trung tuyến nhỏ hơn nửa cạnh tương ứng thì góc đối diện với cạnh này là góc tù. Do đó nếu một tam giác có hai đường trung tuyến cùng nhỏ hơn nửa cạnh đối diện thì tam giác đó có hai góc tù. Khi đó tổng ba góc trong tam giác này lớn hơn 180° (vô lý). □

Bài 2. Cho $\triangle ABC$, trung tuyến BN cắt trung tuyến AI tại O. Trên tia đối của tia IA lấy điểm E sao cho $IE = IO$. Chứng minh rằng

a) Độ dài các cạnh của $\triangle BOE$ bằng $\dfrac{2}{3}$ độ dài các đường trung tuyến của $\triangle ABC$.

b) Ta có thể vẽ được một tam giác có độ dài ba cạnh bằng độ dài ba đường trung tuyến của $\triangle ABC$.

Lời giải.

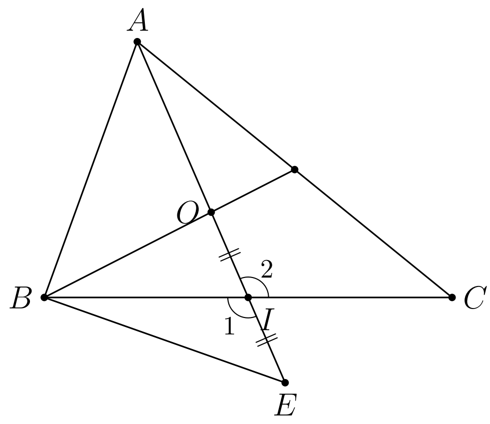
a) Ta chứng minh $\triangle BOE$ có các cạnh bằng $\dfrac{2}{3}$ độ dài ba trung tuyến của $\triangle ABC$. Thật vậy ta có

$$BO = \frac{2}{3}BN. \quad (1)$$

Cạnh OE có $OI = IE = \dfrac{1}{3}AI \Rightarrow OE = \dfrac{2}{3}AI. \quad (2)$

$$BE = OC = \frac{2}{3}CK. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra điều phải chứng minh.



b) $\triangle BOE$ tồn tại nên thỏa mãn bất đẳng thức tam giác

$$\begin{aligned} & BE - OE < OB < BE + OE \\ \text{hay} \quad & \frac{2}{3}CK - \frac{2}{3}AI < \frac{2}{3}BN < \frac{2}{3}CK + \frac{2}{3}AI \\ \Rightarrow \quad & CK - AI < BN < CK + AI. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

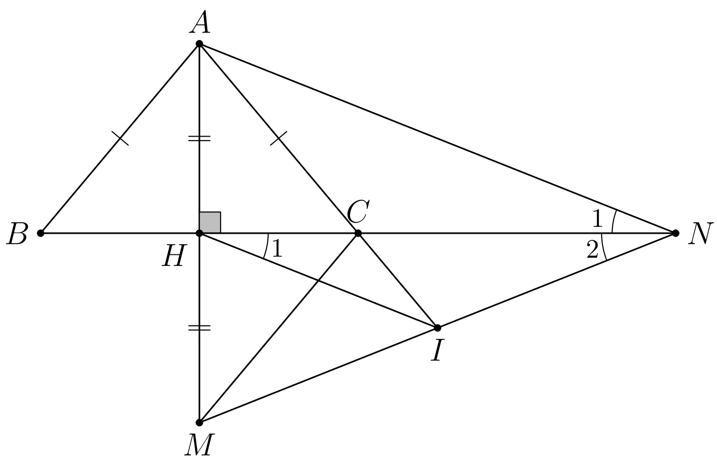
□

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Từ A hạ $AH \perp BC$. Trên tia đối của tia HA lấy điểm M sao cho $HM = AH$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $CN = BC$.

a) Chứng minh C là trọng tâm của $\triangle AMN$.

b) AC cắt MN tại I. Chứng minh $HI \parallel AN$.

Lời giải.



a) Ta có NH là trung tuyến của $\triangle NAM$ (do $AH = HM$).
Lại có $CN = \dfrac{2}{3}HN$. Do đó C là trọng tâm của $\triangle ANM$.

b) Ta có $\widehat{H_1} = \widehat{N_2}$, mà $\widehat{N_2} = \widehat{N_1}$. Do đó $\widehat{H_1} = \widehat{N_1}$, từ đó suy ra $HI \parallel AN$.

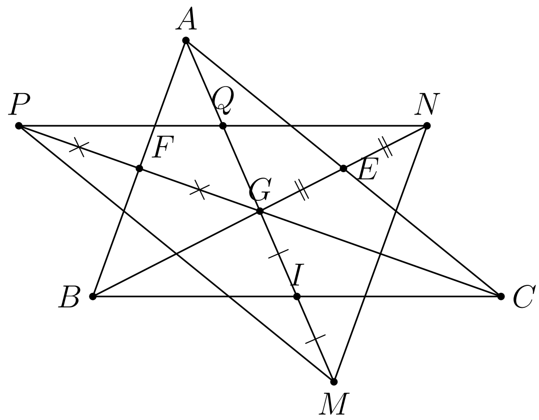
□

Bài 4. Cho $\triangle ABC$, kẻ ba đường trung tuyến AI, BE, CF cắt nhau tại G. Trên tia đối của tia IA lấy điểm M sao cho $IM = IG$. Trên tia đối của tia EB lấy điểm N sao cho $EN = EG$. Trên tia đối của tia FC lấy điểm P sao cho $FP = FG$.

a) Chứng minh $\triangle MNP = \triangle ABC$.

b) Chứng minh G cũng là trọng tâm của $\triangle MNP$.

Lời giải.



a) Ta có

$$\triangle PGN = \triangle CGB \Rightarrow PN = BC.$$
$$\triangle PGM = \triangle CGA \Rightarrow PM = CA.$$
$$\triangle MGN = \triangle AGB \Rightarrow MN = AB.$$

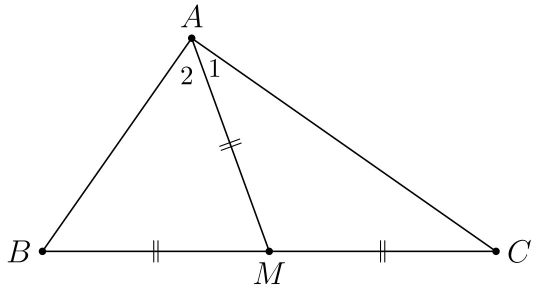
Vậy $\triangle ABC = \triangle MNP$ (c.c.c).

b) PN cắt AM tại Q. Ta có $PQ = QN$,
$QG = GI = IM$ hay $QG = \frac{1}{3}QM$.
Vậy G là trọng tâm của $\triangle MNP$.

□

2. Nâng cao

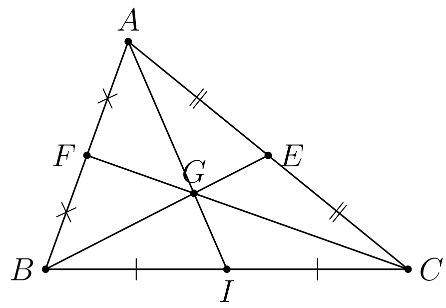
Bài 5. Chứng minh rằng một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.
Lời giải.



Giả sử $\triangle ABC$ có AM là trung tuyến và $AM = \frac{1}{2}BC$ (hình vẽ). Khi đó ta có $AM = MB = MC$.
Vậy $\triangle AMB$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{B}$, $\triangle AMC$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C}$.
$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{B} + \widehat{C}$.
Mà $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$
$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_2} = \widehat{B} + \widehat{C} = 90°$.

□

Bài 6. Chứng minh rằng trong tam giác, tổng độ dài ba đường trung tuyến nhỏ hơn chu vi nhưng lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi tam giác đó.
Lời giải.



Xét $\triangle ABC$ có ba đường trung tuyến AI, BE, CF cắt nhau tại G.
Xét $\triangle BGC$ có $BG + GC > BC$ (bất đẳng thức tam giác) hay

$$\frac{2}{3}BE + \frac{2}{3}CF > BC \Rightarrow BE + CF > \frac{3}{2}BC. \qquad (1)$$

Tương tự ta có

$$BE + AI > \frac{3}{2}AB, \qquad (2)$$

$$AI + CF > \frac{3}{2}AC. \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có

$$2BE + 2CF + 2AI > \frac{3}{2}(AB + AC + BC)$$

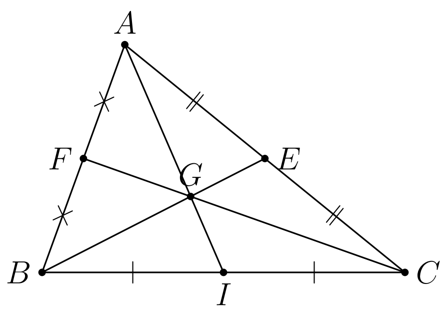
$$\Rightarrow \quad BE + CF + AI > \frac{3}{4}(AB + AC + BC).$$

Vậy $\frac{3}{4}$ chu vi $\triangle ABC < AI + BE + CF$.
Tương tự ta chứng minh được $AI + BE + CF <$ chu vi $\triangle ABC$. □

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$, hai trung tuyến BE, CF và trọng tâm G. Chứng minh rằng

a) $BE < CF$;   b) $\widehat{GBC} > \widehat{GCB}$.

Lời giải.



a) Vẽ trung tuyến AD đi qua trọng tâm G. Xét $\triangle ADB$ và $\triangle ADC$ có

AD là cạnh chung;
$AB < AC$ (giả thiết);
$DB = DC$.

Do đó $\widehat{ADB} < \widehat{ADC}$.
Xét $\triangle GDB$ và $\triangle GDC$ có

GD là cạnh chung;
$\widehat{GDB} < \widehat{GDC}$ (chứng minh trên);
$DB = DC$ (giả thiết).

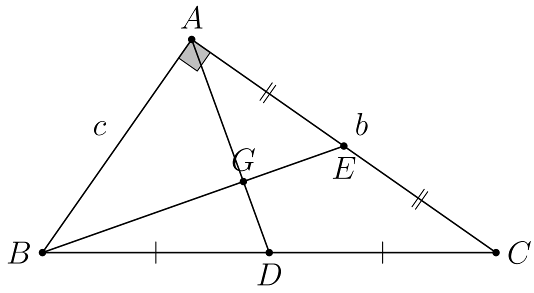
Do đó $GB < GC$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b) Trong $\triangle GBC$ ta có $GB < GC \Rightarrow \widehat{GCB} < \widehat{GBC}$.

□

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A và có $AC = b, AB = c$. Hai trung tuyến AD, BE cắt nhau tại G. Tìm hệ thức giữa b và c để $AD \perp BE$.

Lời giải.



Đặt $a = BC$. Áp dụng định lý Py-ta-go cho $\triangle ABC$ vuông tại A ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A, trung tuyến AD ứng với cạnh huyền $BC \Rightarrow AD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$.

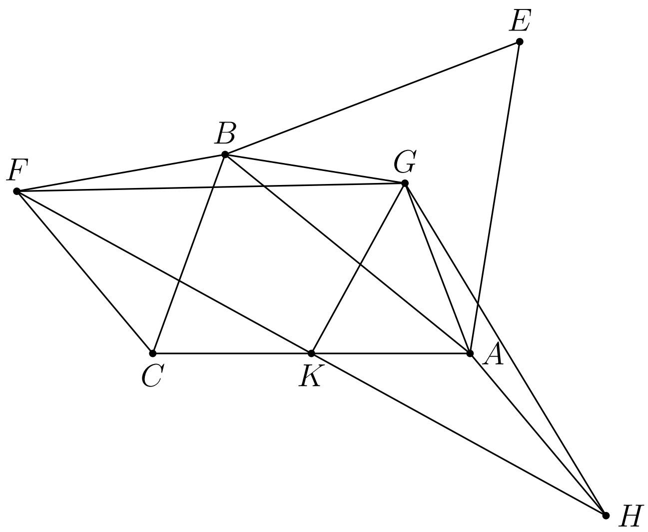
Vì G là trong tâm $\triangle ABC$ nên ta có

$$AG = \frac{2}{3}AD = \frac{1}{3}a \text{ và } BG = \frac{2}{3}BE.$$

Giả sử $BE \perp AD$. Tiếp tục áp dụng định lý Py-ta-go cho các tam giác vuông GAB và ABE, ta tìm được hệ thức $b^2 = 2c^2 \Leftrightarrow b^2 = \left(\sqrt{2} \cdot c\right) \Leftrightarrow b = \sqrt{2} \cdot c$. □

Bài 9. Về phía ngoài của tam giác nhọn ABC ta dựng các tam giác đều ABE và BCF. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABE$ và K là trung điểm của AC. Tính các góc của $\triangle GKF$.

Lời giải.



Dựng điểm H sao cho K là trung điểm của HF thì hai tam giác AKH và CKF bằng nhau, suy ra $AH = CF = BF$. (1)

Vì G là trọng tâm của tam giác đều ABE nên $AG = BG$. (2)

Lại có

$$\begin{aligned}\widehat{GAH} &= 360^\circ - \widehat{GAB} - \widehat{BAC} - \widehat{KAH}\\ &= 270^\circ - \left(\widehat{BAC} + \widehat{ACB}\right)\\ &= 90^\circ + \widehat{ABC} = \widehat{GBF} \qquad (3)\end{aligned}$$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \triangle AGH = \triangle BGF$ (c.g.c) $\Rightarrow GH = GF \Rightarrow \widehat{GKH} = \widehat{GKF} = 90^\circ$.

Ta lại có $\widehat{HGF} = \widehat{AGB} = 120^\circ$ nên $\widehat{GFK} = 30^\circ$, suy ra $\widehat{KGF} = 60^\circ$. □

§5. Tính chất ba đường phân giác trong tam giác

I. Hỏi đáp nhanh

Câu 1. Muốn tìm điểm nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh, ta làm thế nào?

Lời giải.

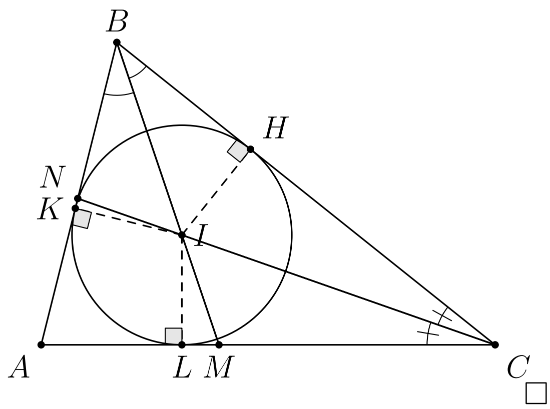
Kẻ tia phân giác của hai góc trong bất kỳ của tam giác và tìm giao điểm của chung.

Xét $\triangle ABC$ như hình bên.

Ta có BM là tia phân giác góc $\widehat{ABC}$ nên tất cả các điểm nằm trên BM cách đều hai cạnh BA và BC.

Ta có CN là tia phân giác góc $\widehat{ACB}$ nên tất cả các điểm nằm trên CN cách đều hai cạnh CA và CB.

Vậy giao điểm I của BN và CM sẽ là điểm thỏa mãn cách đều ba cạnh AB, AC và BC.



□

Câu 2. Tại sao trong tam giác cân, đỉnh, trọng tâm và giao điểm ba đường phân giác thẳng hàng?

Lời giải.

Trong tam giác cân ABC cân tại A. Ta có đường trung tuyến xuất phát tại A cũng chính là đường phân giác. Nghĩa là nếu AM là đường trung tuyến trong tam giác cân tại A, trọng tâm cũng sẽ nằm trên đường này và giao điểm ba đường phân giác cũng nằm trên đường này. □

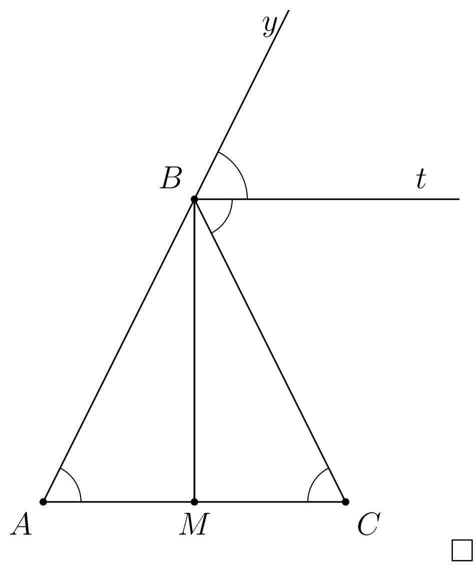
Câu 3. Tại sao trong tam giác cân đường phân giác của góc ngoài ở đỉnh song song với cạnh đáy?

Lời giải.

Cho $\triangle ABC$ cân tại B. Ta chứng minh phân giác của góc ngoài tại đỉnh B (tia Bt) sẽ song song với cạnh đáy AC.

Ta có $\widehat{CBy} = \widehat{BAC} + \widehat{BCA}$, mà tam giác $\triangle BAC$ cân tại A nên ta có $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$ (tính chất tam giác cân). Vậy $\widehat{CBy} = 2\widehat{BCA}$.

Đồng thời Bt là tia phân giác góc $\widehat{yBC}$ nên ta có $\widehat{CBt} = \dfrac{1}{2}\widehat{yBC} = \widehat{BCA}$. Mà hai góc này nằm ở vị trí sole-trong nên $BC \parallel Bt$.



□

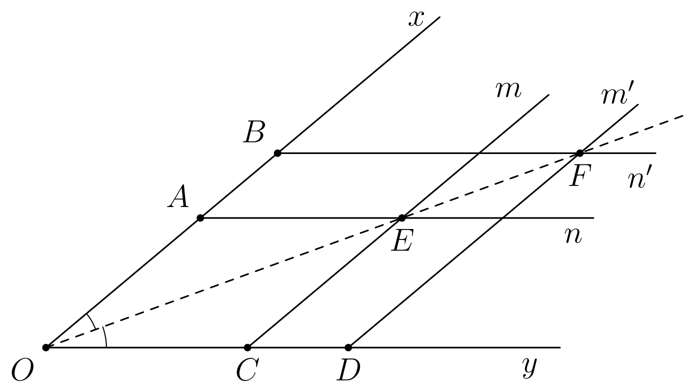
⚠ *Lưu ý tính chất góc ngoài tam giác.*

II. Học giải toán

Ví dụ 1. Cho góc $\widehat{xOy}$, trên Ox lấy hai điểm A và B. Trên tia Oy lấy hai điểm C và D sao cho $OA = OC$; $OB = OD$. Kẻ Cm và Dm' song song với Ox. Kẻ An và Bn' song song với Oy. Biết An và Cm cắt nhau tại E; Bn' cắt Dm tại F. Chứng minh O, E, F thẳng hàng.

Lời giải.

Nối OE, xét $\triangle OAE$ và $\triangle OCE$ có OE chung; $\widehat{AOE} = \widehat{CEO}$ (sole-trong) và $\widehat{COE} = \widehat{AEO}$ (sole-trong). Vậy $\triangle OAE = \triangle OCE$ (góc-cạnh-góc).
Vậy $AE = OC$ (hai cạnh tương ứng). Mà $OA = OC$ nên $OA = AE$ (cùng bằng OC).
Vậy $\triangle OAE$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{AEO}$ mà $\widehat{COE} = \widehat{AEO}$ nên $\widehat{AOE} = \widehat{COE}$. Suy ra OE là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.
Tương tự OF là tia phân giác của $\widehat{xOy}$.
Vậy OE và OF cùng là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$ nên tia OE trùng tia OF hay ba điểm O, E, F thẳng hàng.



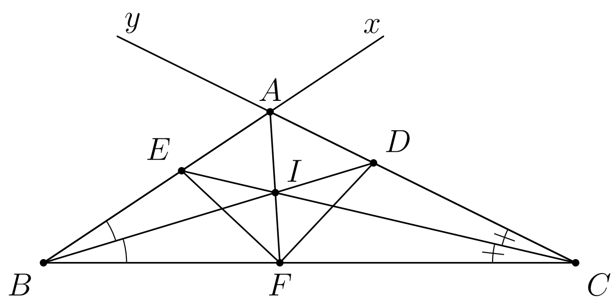
□

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 120°$. Hai đường phân giác BD và CE cắt nhau tại I.

a) Tính số đo góc $\widehat{BIC}$.

b) Nối AI kéo dài cắt BC tại F. Chứng minh $DF \perp FE$.

Lời giải.



a) Ta có

$$\begin{aligned}
\widehat{BIC} &= 180° - \left(\widehat{IBC} + \widehat{ICB}\right)\\
&= 180° - \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2}\\
&= 180° - \frac{180° - \widehat{BAC}}{2}\\
&= 90° + \frac{\widehat{BAC}}{2}.
\end{aligned}$$

Vậy $\widehat{BIC} = 90° + 60° = 150°$.

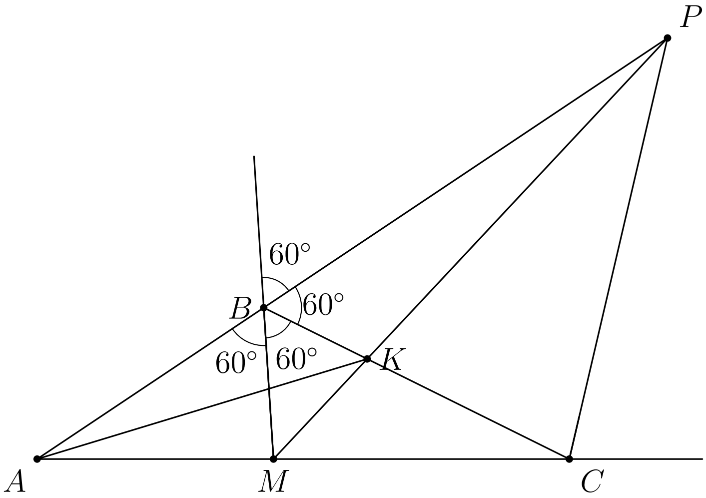
b) Xét $\triangle ABC$ có BI và CI là hai đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ nên AI cũng là phân giác góc $\widehat{BAC}$. Vậy $\widehat{BAI} = \widehat{IAC} = 60°$. (1)
Mà $\widehat{xAC} = 180° - 120° = 60°$ (hai góc bù nhau). (2)
Từ (1), (2) suy ra AC là tia phân giác của góc $\widehat{FAx}$.
Xét $\triangle ABF$ có BD là tia phân giác của góc $\widehat{ABC}$ (giả thiết), AC là tia phân giác góc $\widehat{FAx}$ (góc ngoài tại A) vậy FD phải là đường phân giác của góc AFC (góc ngoài tại F).
Chứng minh tương tự, ta có FE là đường phân giác của góc $\widehat{AFB}$.
Ta có FE và FD là hai tia phân giác của hai góc kề bù. Vậy $FE \perp FD$.

□

Ví dụ 3. Cho tam giác $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 120°$. Kẻ đường phân giác BM. Đường phân giác của góc ngoài ở đỉnh C cắt đường thẳng AB ở P. Đoạn thẳng MP cắt cạnh BC ở K. Tính số đo góc $\widehat{AKM}$.

Lời giải.
Theo giả thiết ta có CP và BP là các tia phân giác của các góc ngoài ở đỉnh C và B của tam giác $\triangle MBC$, suy ra MP là tia phân giác của góc $\widehat{BMC}$.
Ta cũng có BK và MK là các tia phân giác của các góc ngoài ở đỉnh B và M của tam giác $\triangle AMB$, suy ra AK là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.
Như vậy

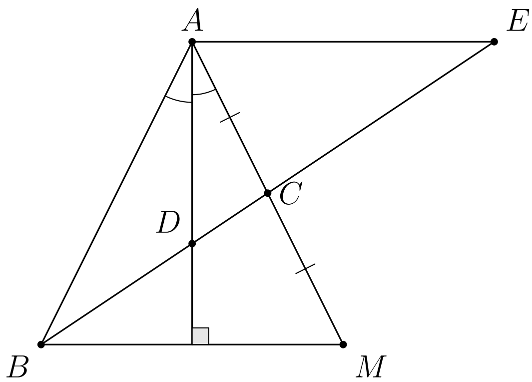
$$\begin{aligned}\widehat{AKM} &= \widehat{KMC} - \widehat{KAM}\\ &= \frac{1}{2}\left(\widehat{BMC} - \widehat{BAM}\right)\\ &= \frac{1}{2}\widehat{ABM} = \frac{1}{2}60° = 30°.\end{aligned}$$



□

Ví dụ 4. Cho tam giác $\triangle ABC$ có phân giác AD thỏa mãn $BD = 2DC$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BC = CE$. Chứng minh tam giác $\triangle ADE$ là tam giác vuông.

Lời giải.
Kéo dài AC lấy điểm M sao cho $CM = CA$, ta có $\triangle ACE = \triangle MCB$ (cạnh-góc-cạnh).
Trong tam giác $\triangle ABM$ có BC là trung tuyến, $BD = 2DC$ nên D là trọng tâm của $\triangle ABM$.
Đường thẳng AD chứa trung tuyến, đồng thời là phân giác nên $\triangle ABM$ cân, do đó $AD \perp BM$.
Ta lại có $\widehat{AEC} = \widehat{MBC}$ (hai góc tương ứng). $\Rightarrow AE \parallel BM \Rightarrow AD \perp AE$.
Vậy tam giác ADE vuông.



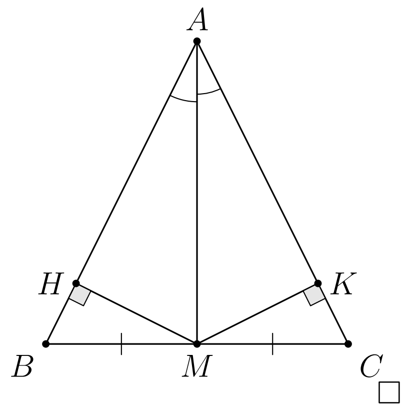
□

III. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ có đường trung tuyến AM đồng thời là phân giác của góc $\widehat{A}$. Chứng minh $\triangle ABC$ cân tại A.
Lời giải.

Từ M kẻ $MH \perp AB$ ($H \in AB$) và $MK \perp ABC$ ($K \in AC$).
Vì AM là tia phân giác góc $\widehat{BAC}$ và $M \in AM$ nên $MH = MK$ (điểm nằm trên đường trung tuyến cách đều hai cạnh của góc).
Xét $\triangle BMH$ vuông tại H và $\triangle CMK$ vuông tại K, ta có $HM = KM$ (cmt) và $BM = CM$ (AM cũng là trung tuyến). Vậy $\triangle BMH = \triangle CMK$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông).
Vậy $\widehat{HBM} = \widehat{KCM}$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$. Vậy $\triangle ABC$ là tam giác cân tại A.

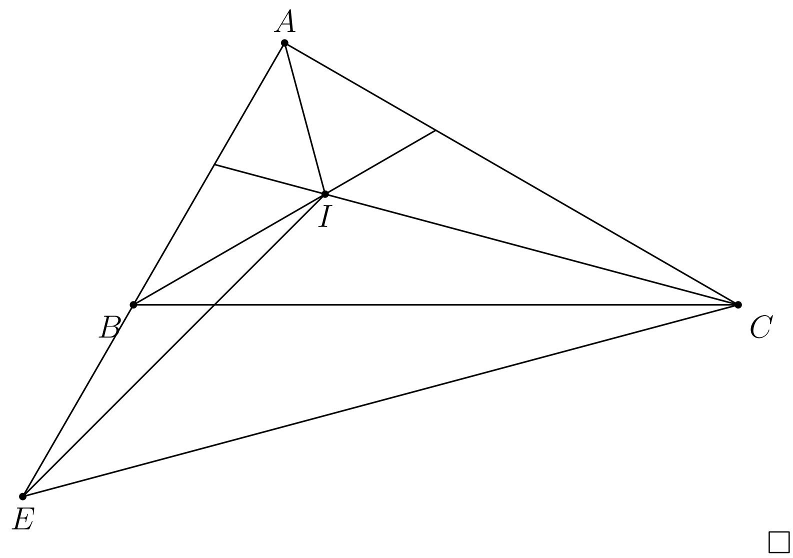


□

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 2\widehat{C}$, các đường phân giác của góc $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại I. Chứng minh rằng $AC = AB + IB$.

Lời giải.

Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BI = BE$. Ta đi chứng minh $\triangle IAC = \triangle IAE$,



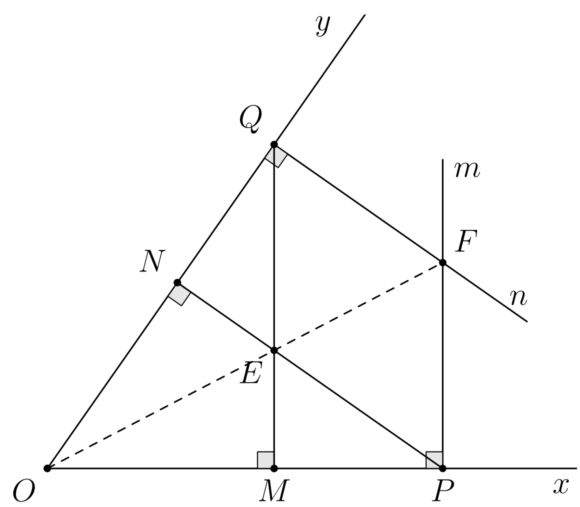
□

Bài 3. Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$. Lấy điểm M trên Ox, điểm N trên Oy sao cho $OM = ON$. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với Ox, đường thẳng này cắt Oy tại Q. Qua Q kẻ $Qn \perp Oy$. Qua N kẻ đường thẳng vuông góc với Oy, đường thẳng này vuông góc với Ox tại P. Từ P kẻ $Pm \perp Ox$. Hai đường thẳng On và Pm cắt nhau tại F; NP và QM cắt nhau tại E Chứng minh Q, E, F thẳng hàng.

Lời giải.

- Xét $\triangle ONE$ vuông tại N và $\triangle OME$ vuông tại M có OE là cạnh chung và $OM = ON$ (giả thiết). Vậy $\triangle ONE = \triangle OME$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông). $\Rightarrow \widehat{EON} = \widehat{EOM}$ (hai góc tương ứng). Mà tia OE nằm giữa tia OM và ON nên OE là tia phân giác góc $\widehat{xOy}$. (1)

- Xét $\triangle OMQ$ vuông tại M và $\triangle ONP$ vuông tại N có góc $\widehat{O}$ chung và $OM = ON$ (giả thiết). Vậy $\triangle OMQ = \triangle ONP$ (cạnh góc vuông - góc nhọn). Vậy $OP = OQ$ (hai cạnh tương ứng).



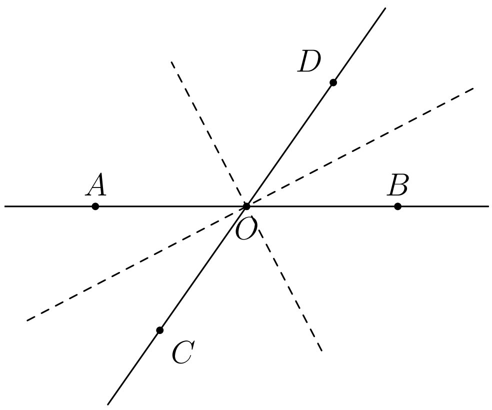
- Xét $\triangle OQF$ vuông tại Q và $\triangle OPF$ vuông tại P có OF (cạnh chung) và $OP = OQ$ (chứng minh trên). Vậy $\triangle OPF = \triangle OQF$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông). Vậy $\widehat{QOF} = \widehat{POF}$ (hai góc tương ứng). Mà tia OF nằm giữa hai tia OP và OQ nên OF là tia phân giác góc $\widehat{xOy}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có OE và OF đồng thời là phân giác của $\widehat{xOy}$ nên E, O, F thẳng hàng. □

Bài 4. Cho hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại O. Tìm tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng AB và CD.

Lời giải.

Ta có tia phân giác của $\widehat{COA}$, $\widehat{AOD}$, $\widehat{DOB}$ và $\widehat{BOC}$ sẽ cách đều các cạnh tạo nên góc. Vậy nên tập hợp điểm cần tìm là hai đường thẳng phân giác của các góc trên.



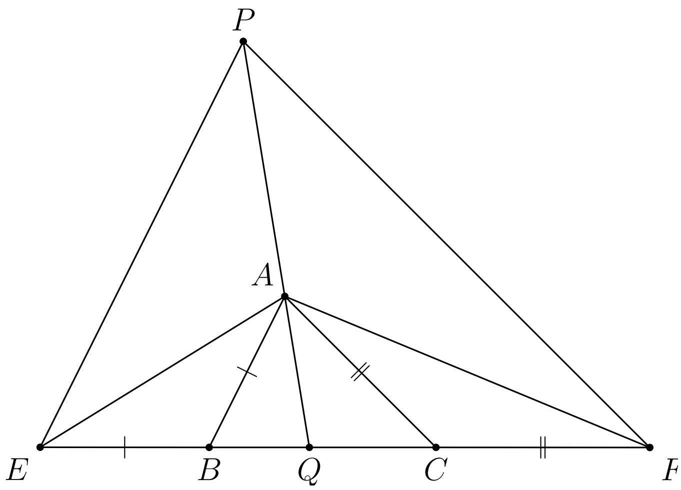
□

Bài 5. Cho $\triangle ABC$. Trên tia đối của tia BC lấy điểm E sao cho $EB = BA$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho $FC = CA$. Qua E kẻ đường thẳng song song với AB, qua F kẻ đường thẳng song song với AC, hai đường thẳng này cắt nhau tại P.

a) Chứng minh EA là tia phân giác của góc $\widehat{FEB}$, FA là tia phân giác của góc $\widehat{PFC}$.

b) PA kéo dài cắt BC tại Q. Chứng minh AQ là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$.

Lời giải.



a) Xét $\triangle BEA$ có $BA = BE$ (giả thiết) $\Rightarrow \triangle BEA$ cân tại B. Vậy $\widehat{BAE} = \widehat{BEA}$ (tính chất tam giác cân). Mà $\widehat{BAE} = \widehat{AEP}$ (sole-trong), nên $\widehat{BEA} = \widehat{PEA}$ (cùng bằng $\widehat{BAE}$). Đồng thời tia EA nằm giữa hai tia EB và EP nên EA là tia phân giác góc $\widehat{BEP}$.
Xét $\triangle CAF$ có $CA = CF$ (giả thiết) $\Rightarrow \triangle CAF$ cân tại C. Vậy $\widehat{CAF} = \widehat{CFA}$ (tính chất tam giác cân). Mà $\widehat{CAF} = \widehat{AFP}$ (sole-trong), nên $\widehat{CFA} = \widehat{AFP}$ (cùng bằng $\widehat{CAF}$). Đồng thời tia FA nằm giữa hai tia FC và FP nên FA là tia phân giác góc $\widehat{CFP}$.

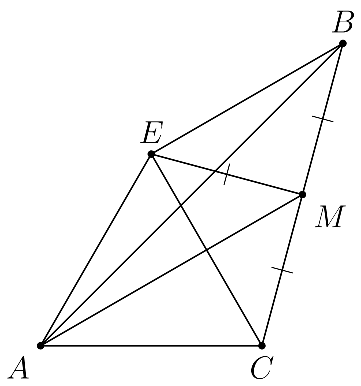
b) Xét $\triangle PEF$ có EA và FA là tia phân giác và cắt nhau tại A. Vậy PA cũng là một tia phân giác (ba đường phân giác đồng quy). Vậy $\widehat{EPA} = \widehat{FPA}$.
Ta có $\widehat{EPA} = \widehat{BAQ}$ (đồng vị) và $\widehat{CAQ} = \widehat{FPA}$ (đồng vị). Vậy $\widehat{BAQ} = \widehat{CAQ}$. Mà AQ là tia nằm giữa hai tia AB và AC nên AQ là tia phân giác góc $\widehat{BAC}$.

□

2. Nâng cao

Bài 6. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 45°$, M là trung điểm của BC sao cho $\widehat{MAC} = 2\widehat{MAB}$. Tính số đo các góc của tam giác ABC.

Lời giải.

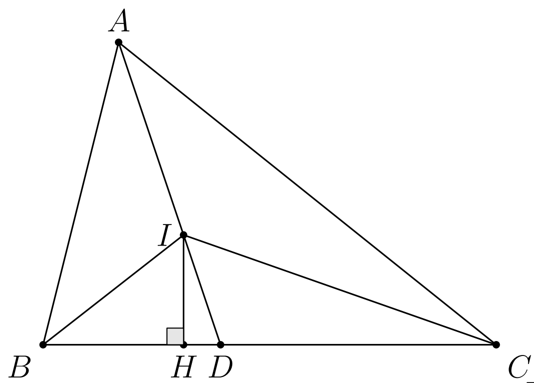


Dựng tam giác đều $\triangle ACE$ (E và B cùng phía đối với AC), ta có AM là phân giác của góc $\widehat{CAE}$.
Xét $\triangle AEM$ và $\triangle ACM$ có $\widehat{EAM} = \widehat{CAM} = 30°$; $EA = AC$ (cạnh của tam giác đều) và AM là cạnh chung. Vậy $\triangle EAM = \triangle CAM$ (cạnh-góc-cạnh). $\Rightarrow EM = MC$ (hai cạnh tương ứng). Vậy $EM = MC = BM$.
Do $EM = MC = BM$ nên $\triangle BEC$ vuông tại E. $\triangle\widehat{BEC} = 90° \Rightarrow \widehat{BEA} = 150°$. Xét $\triangle AEB$ có $\widehat{BEA} = 150°$ và $\widehat{EAB} = 15°$. Vậy $\widehat{EBA} = 15°$. Vậy $\triangle EBA$ cân tại E. Ta có $EB = EA$. Suy ra $EB = EC$ (cùng bằng EA) nên tam giác $\triangle EBC$ vuông cân.
Vậy ta có $\widehat{ABC} = 30°$ và $\widehat{ACB} = 105°$.

□

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ $(AB > AC)$, tia phân giác góc A là AD và I là giao điểm của ba đường phân giác trong $\triangle ABC$. Từ I hạ $IH \perp BC$ $(H \in BC)$. Chứng minh $\widehat{BIH} = \widehat{CID}$.

Lời giải.



Xét $\triangle BIH$ vuông tại H. Ta có $\widehat{BIH} = 90° - \widehat{HBI} = 90° - \dfrac{\widehat{ABC}}{2}$. (1)

Xét $\triangle AIC$ có $\widehat{DIC}$ là góc ngoài ta có

$$DIC = \widehat{IAC} + \widehat{ICA} = \frac{\widehat{BAC}}{2} + \frac{\widehat{ACB}}{2} = \frac{180° - \widehat{ABC}}{2} = 90° - \frac{\widehat{ABC}}{2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{BIH} = \widehat{CID}$.

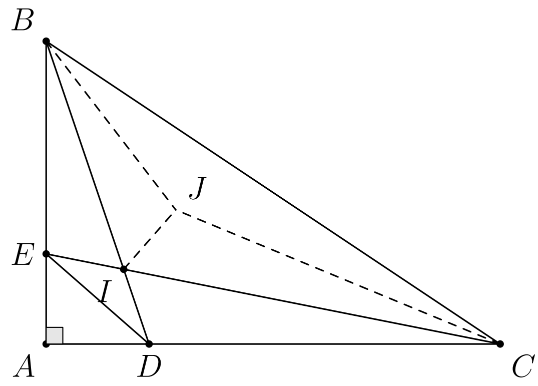
□

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Gọi D và E lần lượt là hai điểm nằm trên AC và AB sao cho $\widehat{ABD} = \dfrac{1}{3}\widehat{ABC}$; $\widehat{ACE} = \dfrac{1}{3}\widehat{ACB}$. Gọi I là giao điểm của BD và CE. Chứng minh rằng IDE là tam giác cân.

Lời giải.

Kẻ các tia phân giác của $\triangle IBC$ cắt nhau tại J.
Xét $\triangle IBC$ có

$$\begin{aligned}\widehat{BIC} &= 180^\circ - \widehat{IBC} - \widehat{ICB}\\ &= 180^\circ - \frac{2}{3}\widehat{ABC} - \frac{2}{3}\widehat{ACB}\\ &= 180^\circ - \frac{2}{3}\left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right)\\ &= 180^\circ - \frac{2}{3}\left(180^\circ - \widehat{BAC}\right)\\ &= 120^\circ.\end{aligned}$$



Vậy $\widehat{EIB} = \widehat{BIJ} = \widehat{JIC} = \widehat{CID} = 60^\circ$.
Vậy ta chứng minh được $\triangle DIC = \triangle JIC$ (góc - cạnh - góc) $\Rightarrow ID = IJ$ (hai cạnh tương ứng).
Và $\triangle EIB = \triangle JIB$ (góc - cạnh - góc) $\Rightarrow IE = IJ$ (hai cạnh tương ứng).
Vậy $\triangle IED$ cân tại I.

□

Bài 9. Cho $\triangle ABC$ có góc $\widehat{A} = 120^\circ$. Các tia phân giác AD và CE của các góc $\widehat{A}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại O. Đường phân giác góc ngoài của tam giác tại đỉnh B cắt đường thẳng AC tại F. Chứng minh

a) $BO \perp BF$.

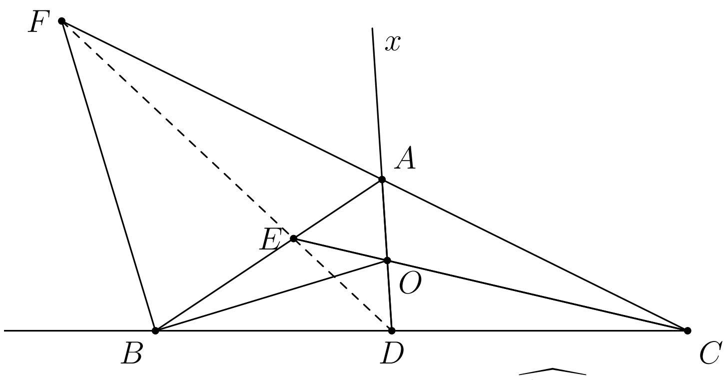
b) $\widehat{BDF} = \widehat{ADF}$.

c) Các điểm D, E, F thẳng hàng.

Lời giải.

a) Xét $\triangle ABC$ có hai tia phân giác CE và AD cắt nhau tại O. Ta có BO là phân giác trong của góc $\triangle ABC$ và BF là phân giác ngoài. Vậy $BO \perp BF$.

b) Với góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$ ta có $\widehat{BAF} = 60^\circ$ (hai góc kề bù). Từ đó ta có $\widehat{xAF} = \widehat{FAB}$. Vậy AF là tia phân giác góc $\widehat{xAB}$.



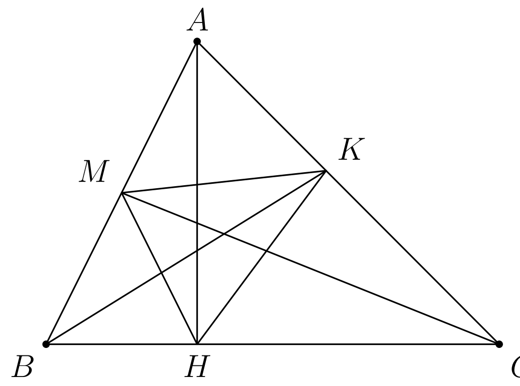
Xét $\triangle ABD$ có AF và BF là các phân giác ngoài. Vậy DF là phân giác góc $\widehat{ADB}$.

c) Xét $\triangle ADC$ có CE là tia phân giác góc $\widehat{ACD}$ và AE là tia phân giác góc ngoài tại đỉnh A. Vậy DE cũng phải là tia phân giác góc ngoài tại đỉnh D. Từ đó ta có D, E, F thẳng hàng.

□

Bài 10. Cho tam giác ABC nhọn và đường trung tuyến CM, đường phân giác BK, đường cao AH. Chứng minh rằng nếu MHK là tam giác đều thì ABC cũng là tam giác đều.
Lời giải.

Xét $\triangle ABH$ vuông tại H nên $HM = \frac{1}{2}AB$. Vì $\triangle MHK$ đều nên $KM = \frac{1}{2}AB \Rightarrow BK \perp AC$. Nghĩa là BK vừa đóng vai trò là phân giác vừa đóng vai trò là đường cao. Vậy $\triangle ABC$ cân tại B.
Lại có $HK = \frac{1}{2}AC \Rightarrow KM = \frac{1}{2}AC \Rightarrow AC = AB$. Vậy $\triangle ABC$ đều.



□

§6. Đường trung trực của một đoạn thẳng. Tính chất ba đường trung trực của tam giác

I. Hỏi đáp nhanh

Câu 1.

a) Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Khi nào thì các đường trung trực của các đoạn thẳng AB, AC cắt nhau? Song song?

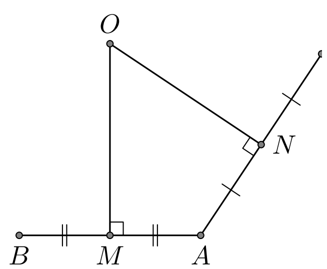
b) Tại sao trong tam giác, giao điểm ba đường trung trực của ba cạnh cách đều ba đỉnh của tam giác đó?

c) Trong tam giác vuông thì giao điểm ba đường trung trực là điểm nào?

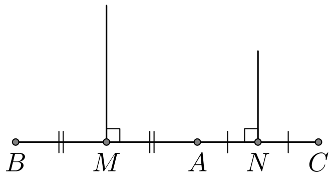
d) Trong tam giác đều, giao điểm của ba đường trung trực trùng với giao điểm của ba đường phân giác. Tại sao? Trong tam giác bất kì, tính chất ấy còn đúng không? Lấy ví dụ minh họa.

Lời giải.

a) Khi A, B, C không thẳng hàng thì các đường trung trực của các đoạn thẳng AB, AC cắt nhau.

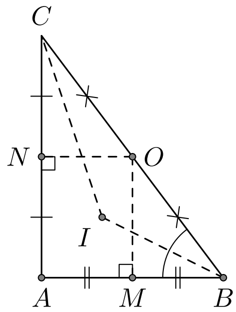


Khi A, B, C không thẳng hàng thì các đường trung trực của các đoạn thẳng AB, AC song song.

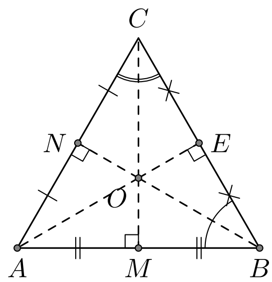


b) Do tính chất của đường trung trực.

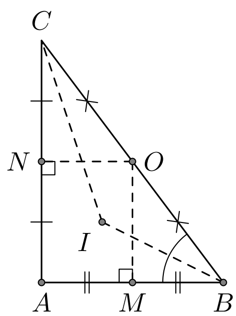
c) Trong tam giác vuông thì giao điểm ba đường trung trực là trung điểm của cạnh huyền.



d) Trong tam giác đều, giao điểm của ba đường trung trực trùng với giao điểm của ba đường phân giác do tính chất của tam giác đều.



Trong tam giác bất kì, tính chất ấy không còn đúng. Ví dụ tam giác vuông có giao của ba đường trung trực nằm trên cạnh huyền còn giao điểm của ba đường phân giác nằm bên trong tam giác.



□

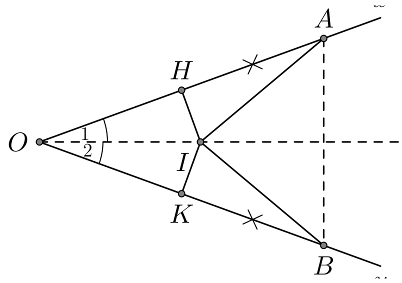
II. Học giải toán

Ví dụ 1. Cho góc $\widehat{xOy}$ nhọn, trên Ox lấy điểm A; trên Oy lấy điểm B sao cho $OA = OB$. Đường trung trực của OA và đường trung trực của OB cắt nhau tại I. Chứng minh:

a) OI là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

b) OI là đường trung trực của đoạn AB.

Lời giải.



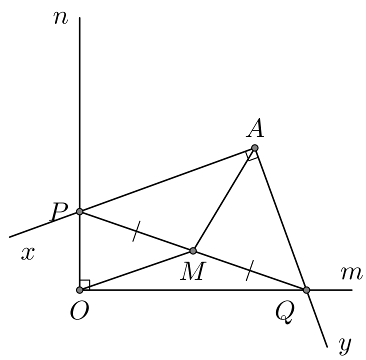
a) HI là trung trực của OA nên $IO = IA$ (tính chất).
KI là trung trực của OB nên $IO = IB$ (tính chất).
Vậy $IO = IA = IB$ và $OA = OB$ (giả thiết).
Suy ra $\triangle OIA = \triangle OIB$ (c.c.c).
Vậy $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (góc tương ứng).
Do đó OI là tia phân giác của góc $\widehat{xOy}$.

b) Theo giả thiết $OA = OB \Rightarrow O$ cách đều hai mút A và B.
Theo chứng minh trên: $IA = IB \Rightarrow I$ cách đều hai mút A và B.
Vậy OI là đường trung trực của đoạn AB (có hai điểm cách đều hai mút A và B).

□

Ví dụ 2. Cho góc vuông mOn và điểm A nằm trong góc đó. Một góc vuông xAy quay quanh A, các cạnh của nó cắt Om, On tại P và Q. Chứng minh rằng trung điểm M của PQ nằm trên một đường thẳng cố định.

Lời giải.



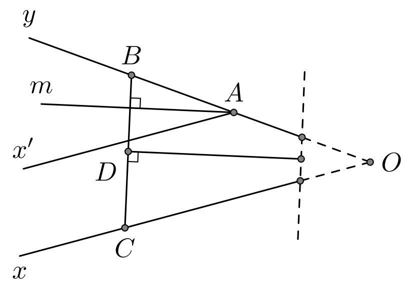
Ta có AM là trung tuyến của tam giác vuông APQ nên $AM = \frac{1}{2}PQ$, tương tự $OM = \frac{1}{2}PQ$, suy ra $MO = MA$. Điểm M luôn cách đều O và A, vậy nó nằm trên đường trung trực của OA, đó là một đường cố định.

□

Ví dụ 3. Cho góc xOy có đỉnh nằm ngoài tờ giấy. Hãy dựng đường phân giác của góc xOy.

Lời giải.

Từ điểm A trên Oy kẻ $Ax' \parallel Ox$ (tia này nằm trong tờ giấy). Dựng tia phân giác Am của góc $x'Ay$. Từ điểm B trên Ay dựng đường vuông góc với Am, cắt Ox tại C. Dựng đường trung trực của BC, đường trung trực này chính là đường phân giác của góc xOy.
Thật vậy, theo cách dựng ta có tam giác OBC là tam giác cân tại O, do đó đường trung trực của BC cũng là đường phân giác tại đỉnh O, hay là đường phân giác của góc xOy.



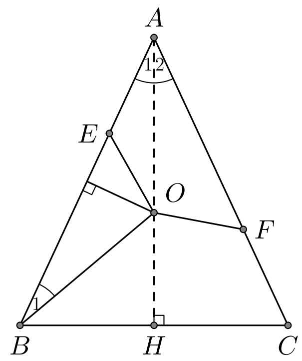
□

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ cân tại A. Đường phân giác AH và đường trung trực của cạnh AB cắt nhau tại O. Trên cạnh AB và AC lấy điểm E và F sao cho $AE = CF$.

a) Chứng minh: $OE = OF$.

b) Chứng minh khi E và F di động trên hai cạnh AB và AC nhưng $AE = CF$ thì đường trung trực của EF đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



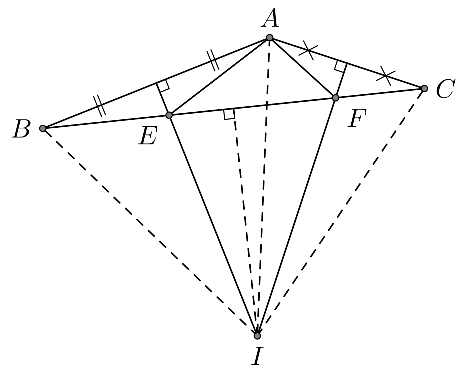
a) $AE + AF = AC = AB$ (giả thiết) mà $AE + BE = AB$.
Vậy: $AF = BE$. Xét $\triangle BOE$ và $\triangle AOF$ có:
$AF = BE$ (chứng minh trên)
$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (giả thiết) mà $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ (O nằm trên đường trung trực của AB) nên $\widehat{A_2} = \widehat{B_1}$ (cùng bằng $\widehat{A_1}$);
$OB = OA$ (vì O nằm trên trung trực của AB).
Vậy $\triangle BOE = \triangle AOF$ (c.g.c) $\Rightarrow OE = OF$ (cạnh tương ứng).

b) Vì $OE = OF$ nên O nằm trên đường trung trực của EF.
$\triangle ABC$ cố định nên O cũng cố định. vậy đường trung trực của EF luôn đi qua điểm O cố định.

□

Ví dụ 5. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 140^\circ$. Các đường trung trực của các cạnh AB và AC cắt nhau tại I. Tính số đo của góc BIC.

Lời giải.
Gọi E, F là giao điểm của BC lần lượt với các đường trung trực của AB, AC.
Ta có $\triangle ABE$ cân tại E, $\triangle AFC$ cân tại F.
Vì I là giao điểm của hai đường trung trực của tam giác ABC nên $IA = IB = IC$.
Tổng các góc trong của hai tam giác ABI và AIC là 360°, tức là:
$\widehat{IBA} + \widehat{BAI} + \widehat{IAC} + \widehat{ACI} + \widehat{BIC} = 360^\circ$.
$\Rightarrow \left(\widehat{IBA} + \widehat{ICA}\right) + \left(\widehat{BAI} + \widehat{IAC}\right) + \widehat{BIC} = 360^\circ$.
Ta có: $\widehat{IBA} = \widehat{BAI}$ và $\widehat{ICA} = \widehat{IAC}$ (các góc ở đáy của tam giác cân).
Vậy $\widehat{IBA} + \widehat{ICA} = \widehat{BAI} + \widehat{IAC} = \widehat{BAC} = 140^\circ$ (giả thiết).
Thay vào tổng trên có: $140^\circ + 140^\circ + \widehat{BIC} = 360^\circ$
$\Rightarrow \widehat{BIC} = 80^\circ$.



□

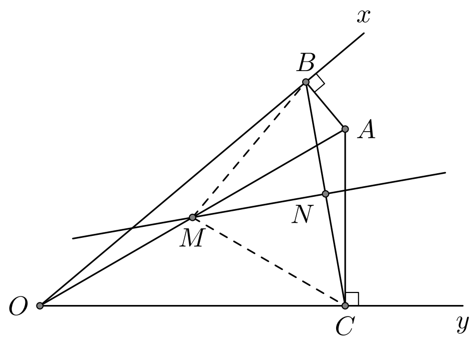
III. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Cho điểm A nằm trong góc nhọn xOy. Từ A kẻ các đoạn thẳng AB và AC vuông góc với các tia Ox và Oy. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua các trung điểm của OA và BC thì vuông góc với BC.

Lời giải.

Gọi M và N thứ tự là trung điểm của OA và BC.
Trong tam giác vuông OBA, BM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $BM = \dfrac{1}{2}OA$. (1)
Tương tự, ta cũng có $CM = \dfrac{1}{2}OA$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $BM = CM$, tức là điểm M cách đều hai đầu của đoạn thẳng BC, N lại là trung điểm của BC nên MN là đường trung trực của BC, vậy $MN \perp BC$.

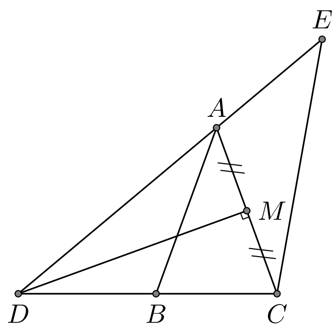


□

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A. Đường trung trực của cạnh AC cắt tia CB tại D nằm ngoài đoạn BC. Trên tia đối của tia AD lấy điểm E sao cho $AE = BD$. Chứng minh rằng $AD = CE$.

Lời giải.

Vì D nằm trên đường trung trực của cạnh AC nên $DA = DC$
$\Rightarrow \triangle DAC$ cân tại D
$\Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{DCA} = \widehat{ABC}$.
$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{CAE}$. (cùng kề bù với hai góc bằng nhau)
Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CAE$ có:
$AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A)
$\widehat{ABD} = \widehat{CAE}$
$AE = BD$
Suy ra $\triangle ABD = \triangle CAE \Rightarrow AD = CE$.



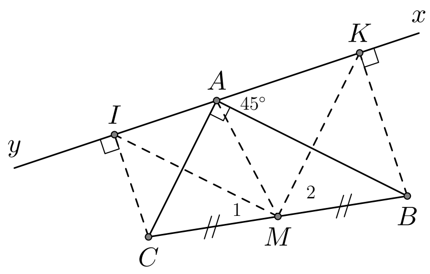
□

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Qua A kẻ đường thẳng xy sao cho xy hợp với AB nột góc $\widehat{BAx} = 45°$ (góc $\widehat{BAx}$ nằm ngoài $\triangle ABC$). Từ B và C hạ $BK \perp xy$, $CI \perp xy$, M là trung điểm của cạnh huyền BC. Chứng minh:

a) MI và MK thứ tự là đường trung trực của đoạn thẳng AC và AB;

b) $\widehat{IMK} = 90°$.

Lời giải.



a) Do $MA = MB$ nên M nằm trên đường trung trực của AB.
$\triangle AKB$ vuông tại K và $\widehat{A} = 45°$.
Vậy $\triangle AKB$ vuông cân $\Rightarrow KA = KB \Rightarrow K$ nằm trên đường trung trực của AB.
Vậy KM có hai điểm nằm trên đường trung trực của AB nên KM chính là đường trung trực của AB.
Tương tự IM là đường trung trực của AC.

b) $AB \parallel MI$ (cùng vuông góc với AC) $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{M_1}$.
$AC \parallel MK$ (cùng vuông góc với AC) $\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{M_2}$.
mà $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$.
Vậy $\widehat{M_1} + \widehat{M_2} = 90° \Rightarrow \widehat{IMK} = 90°$.

□

2. Nâng cao

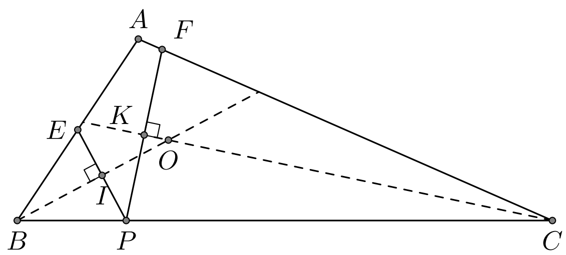
Bài 4. Cho $\triangle ABC$ có góc A tù. Tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau tại O. Lấy điểm E trên cạnh AB. Từ E hạ $EP \perp BO$ ($P \in BC$). Từ P hạ $PF \perp OC$ ($F \in AC$). Chứng minh rằng:

a) OB và OC theo thứ tự là đường trung trực của đoạn thẳng EP và PF.

b) $BE + CF = BC$.

c) Khi E di chuyển trên cạnh AB thì đường trung trực của EF luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



a) $\triangle BEF$ có BO là tia phân giác của góc B và $BO \perp EP$ nên là tam giác cân.
Vậy BO là trung trực của EP.
Tương tự, CO là trung trực của PF.

b) Vì $BE = BP$, $CF = PC$ nên $BE + CF = BC$.

c) Theo chứng minh ở ý a): O nằm trên trung trực của EP nên: $OE = OP$, O nằm trên trung trực của FP nên: $OP = OF$.
Suy ra $OE = OF$, do đó O nằm trên đường trung trực của EF. Vì $\triangle ABC$ cố định nên O cố định.
Vậy đường trung trực của EF luôn đi qua O cố định.

□

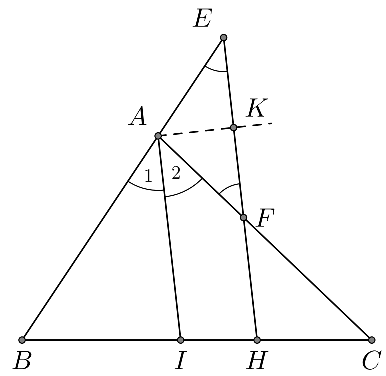
Bài 5. Cho $\triangle ABC$, đường phân giác AI ($I \in BC$). Trên đoạn thẳng IC lấy điểm H. Từ H kẻ đường thẳng song song với AI cắt AB kéo dài tại E và cắt AC tại F. Chứng minh:

a) Đường trung trực của đoạn thẳng EF qua đỉnh A của $\triangle ABC$.

b) Đường trung trực của đoạn thẳng EF vuông góc với AI.

c) Khi H di chuyển trên tia IC của $\triangle ABC$ cố định thì đường trung trực của EF cố định.

Lời giải.



a) Ta có: $\widehat{AEF} = \widehat{A_1}$ (đồng vị)
$\widehat{AFE} = \widehat{A_2}$ (so le trong)
do $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ nên $\widehat{AEF} = \widehat{AFE}$ Suy ra tam giác AEF cân $\Rightarrow A$ nằm trên đường trung trực của EF.

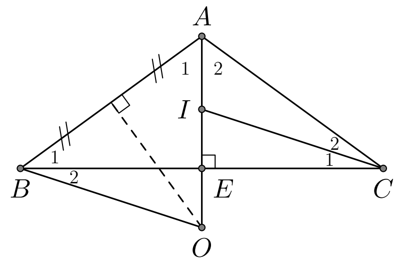
b) $\triangle AEF$ cân nên AK vừa là trung trực của EF vừa là phân giác của $\widehat{EAF}$ mà $\widehat{EAF}$ và $\widehat{BAC}$ kề bù nên $AI \perp AK$.

c) $\triangle ABC$ cố định nên AI cố định $\Rightarrow AK \perp AI$ cố định. Vậy khi H chuyển động trên IC thì đường trung trực của EF là AK luôn cố định.

□

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ cân tại A, có $\widehat{B} = 36°$. Gọi O là giao điểm ba đường trung trực và I là giao điểm ba đường phân giác của tam giác ABC. Chứng minh rằng BC là đường trung trực của đoạn thẳng OI.

Lời giải.

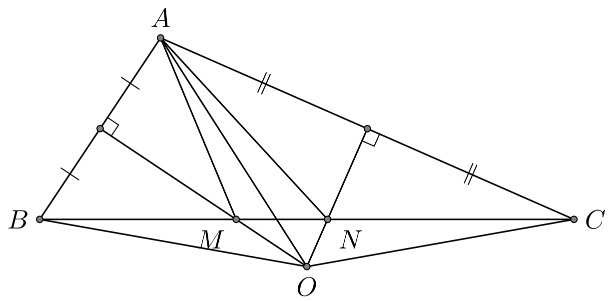


Gọi E là trung điểm của $BC \Rightarrow AE \perp BC$ và $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$.
Vì $\widehat{B_1} = 36°$ nên $\widehat{A_1} = 54°$.
Vì $\triangle AOB$ cân tại O nên: $\widehat{B_1} + \widehat{B_2} = \widehat{A_1} \Rightarrow \widehat{B_2} = 18°$.
Mặt khác: $\widehat{C_1} = \widehat{C_2} = \dfrac{36°}{2} = 18° \Rightarrow \widehat{B_2} = \widehat{C_1}$.
Do vậy $\triangle BEO = \triangle CEI$ (g.c.g) $\Rightarrow EO = EI$ (hai cạnh tương ứng).
Vậy BC là đường trung trực của đoạn OI.

□

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ có góc A tù. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O và cắt BC theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng AO là tia phân giác của góc MAN.

Lời giải.



Vì M, O thuộc đường trung trực của AB nên $MA = MB$, $OA = OB$.
Do vậy $\triangle AMO = \triangle BMO$ (c.c.c)
$\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO}$ (hai góc tương ứng) . (1)
Tương tự $\widehat{NAO} = \widehat{NCO}$. (2)
Vì $OB = OC$ (O là giao ba đường trung trực của $\triangle ABC$) nên $\triangle BOC$ cân tại O.
$\Rightarrow \widehat{MBO} = \widehat{NCO}$. (3)
Từ (1), (2) và (3) suy ra: $\widehat{MAO} = \widehat{NAO}$ hay AO là tia phân giác của góc MAN.

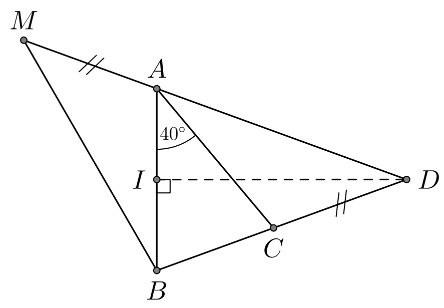
□

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{A} = 40°$. Đường trung trực của AB cắt BC ở D.

a) Tính $\widehat{CAD}$.

b) Trên tia đối của tia AD lấy điểm M sao cho $AM = CD$. Chứng minh $\triangle BMD$ là tam giác cân.

Lời giải.



a) $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{A} = 40°$.
Vậy $\widehat{B} = \widehat{C} = \dfrac{180° - 40°}{2} = 70°$.
D nằm trên đường trung trực của AB nên $DA = DB$
$\Rightarrow \triangle ADB$ cân tại D
$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{BAD} = 70°$.
Vậy $\widehat{CAD} = 70° - 40° = 30°$.

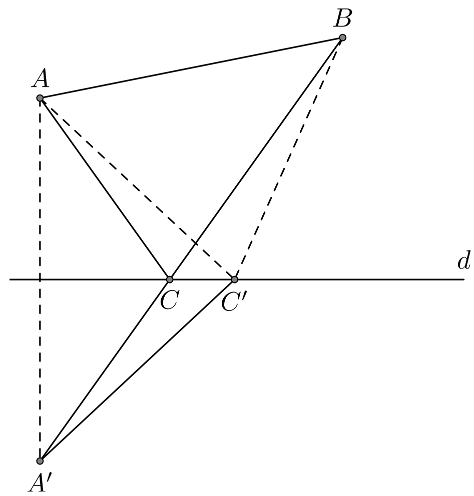
b) Xét $\triangle AMB$ và $\triangle CDA$ có:
$AM = CD$ (giả thiết)
$\widehat{MAB} = \widehat{ACD}$ (cùng bù với góc $70°$)
$AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân)
Vậy $\triangle AMB = \triangle CDA$ (c.g.c) suy ra $BM = AD$,
mà $AD = BD$ (ý a),
suy ra $BM = BD$
$\Rightarrow \triangle BMD$ cân tại B.

□

Bài 9. Cho hai điểm A, B phân biệt, cố định nằm cùng phía đối với đường thẳng d. Hãy tìm trên đường thẳng d điểm C để tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

Lời giải.

Lấy điểm A' sao cho d là đường trung trực của đoạn AA'. Gọi C là giao điểm của đường thẳng d và đoạn $A'B$. Ta có C là điểm cần tìm.
Thật vậy, giả sử trên đường thẳng d lấy một điểm C' tùy ý khác điểm C.
Chu vi tam giác ABC' là: $AB + AC' + C'B > AB + A'B$. (quan hệ giữa ba cạnh của tam giác)
Lại có: $A'B = A'C + CB = AC + CB$
suy ra: $AB + AC' + C'B > AB + AC + CB$ Vậy chu vi tam giác ABC' lớn hơn chu vi tam giác ABC.

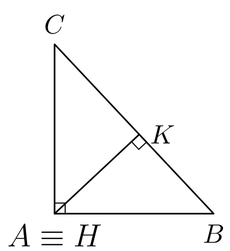


□

§7. Tính chất ba đường cao của tam giác

I. Hỏi đáp nhanh

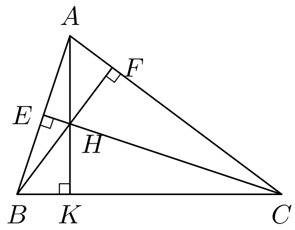
Câu 1. Nếu tam giác ABC vuông tại A thì trực tâm tam giác là điểm nào?



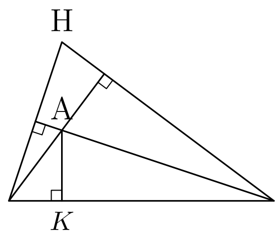
Câu 2. Tại sao trong tam giác cân, trọng tâm, trực tâm, đỉnh của tam giác cùng nằm trên một đường thẳng?

Câu 3. Trong tam giác đều, tại sao trực tâm trùng với trọng tâm? Nó còn trùng với các điểm nào nữa?

Câu 4. Trực tâm tam giác HBC là điểm nào? Điểm B là trực tâm của tam giác nào?



Câu 5. Đường thẳng AK có đi qua điểm H không? Tại sao?



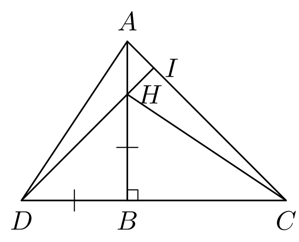
II. Học giải toán

Ví dụ 1. Cho tam giác $\triangle ABC$ vuông cân tại B. Trên cạnh AB lấy điểm H. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BH = BD$. Chứng minh rằng

a) $DH \perp AC$;

b) $CH \perp AD$.

Lời giải.



a) $\triangle ABC$ vuông cân tại B, vậy $\widehat{ACB} = 45°$.
$\triangle HBD$ có $\widehat{B} = 90°$ (giả thiết); $BH = BD$ (giả thiết).
Vậy $\triangle DBH$ vuông cân tại B, suy ra $\widehat{HDB} = 45°$.
Xét $\triangle DIC$ có $\widehat{IDC} = 45°$; $\widehat{ICD} = 45°$ (chứng minh trên),
vậy $\widehat{ICD} + \widehat{IDC} = 90° \Rightarrow \widehat{DIC} = 90°$.
Vậy $DH \perp AC$.

b) $\triangle ADC$ có $AB \perp DC$ (giả thiết); $DI \perp AC$ (chứng minh a).
Vậy H là trực tâm của $\triangle ADC$, suy ra CH là đường cao thứ ba của $\triangle ADC$, vậy $CH \perp AD$.

$\square$

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Đường cao AH. Lấy I là trung điểm của AC.

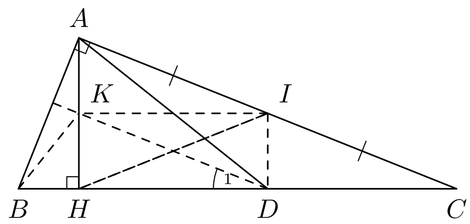
a) Chứng minh I là giao điểm của ba đường trung trực của $\triangle AHC$.

b) Gọi K và D thứ tự là trung điểm của AH và HC. Chứng minh $KD \parallel AC$.

c) Chứng minh $BK \perp AD$.

d) Trong hình vẽ thì A là trực tâm của những tam giác nào?

Lời giải.



a) Do $AI = IC = \dfrac{1}{2}AC$ (giả thiết) nên I nằm trên đường trung trực của AC.
Mà tam giác AHI vuông tại H, có HI là đường trung tuyến nên $HI = \dfrac{1}{2}AC \Rightarrow HI = IA$ và $HI = IC$. Do đó I nằm trên đường trung trực của AH và HC.
Vậy I là giao điểm của ba đường trung trực của $\triangle AHC$.

b) Xét $\triangle KHD$ và $\triangle DIK$

- KD là cạnh chung.
- ID là đường trung bình của tam giác $AHD \Rightarrow AH \parallel DI \Rightarrow \widehat{HKD} = \widehat{KDI}$ (so le trong).
- IK là đường trung bình của tam giác $AHD \Rightarrow KI \parallel BC \Rightarrow \widehat{HDK} = \widehat{IKD}$ (so le trong).

Vậy $\triangle KHD = \triangle DIK$ (g.c.g) $\Rightarrow HK = ID$; $HD = KI$.
Xét hai tam giác vuông KHD và IDC có

- $HK = ID$ (chứng minh trên).
- $HD = DC$ (DI là trung trực)

Vậy $\triangle KHD = \triangle IDC$ (hai cạnh góc vuông).
$\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{C}$ (góc tương ứng) $\Rightarrow DK \parallel AC$ (hai góc đồng vị bằng nhau).

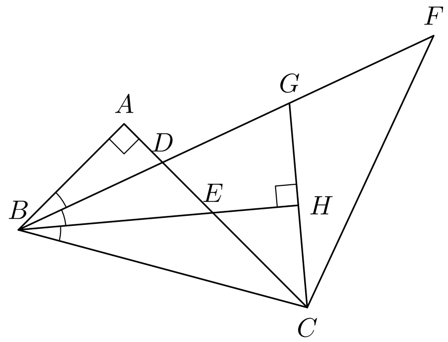
c) $KD \parallel AC$ (chứng minh câu b), $AB \perp AC$ (giả thiết) $\Rightarrow KD \perp AB$.
Trong $\triangle ABD$ có $AH \perp BD$ (giả thiết), $KD \perp AB$, vậy K là trực tâm của $\triangle ABD$, suy ra $BK \perp AD$.

d) Do tam giác ABC vuông tại A nên A là trực tâm của tam giác ABC.
Xét $\triangle BKD$ có A thuộc đường cao KH; A thuộc đường cao qua đỉnh B.
Vậy A là trực tâm của $\triangle BKD$.

□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AC lấy các điểm D, E sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{DBE} = \widehat{EBC}$. Trên tia đối của tia DB lấy điểm F sao cho $DF = BC$. Chứng minh $\triangle CDF$ cân.

Lời giải.



Trên BF đặt đoạn $BD = BC$ thì G nằm giữa D và F và $BD = GF$.
Tam giác BCG cân tại B có BE là tia phân giác nên cũng là đường cao, BE vuông góc với CG tại H.
Ta có: $\widehat{CDG} = \widehat{CGD}\left(= 90^\circ - \dfrac{1}{3}\widehat{B}\right)$, suy ra $CD = CG$.
Hai tam giác CBD và CGF có $CD = CG$, $BD = GF$, $\widehat{CDB} = \widehat{CGF}\left(= 90^\circ + \dfrac{1}{3}\widehat{B}\right)$, nên hai tam giác này bằng nhau (c.g.c).
Suy ra $CB = CF$ và do đó $CF = DF$.
Vậy tam giác CDF cân.

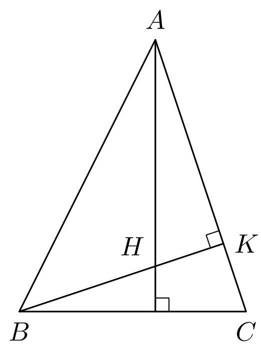
□

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Biết rằng $AH = BC$, hãy tính số đo của góc BAC.

Lời giải.

Ta thấy $\widehat{BAC} \neq 90^\circ$, vì trái lại thì H trùng với $A \Rightarrow AH = 0$: vô lí.

TH 1. $\widehat{BAC} < 90^\circ$

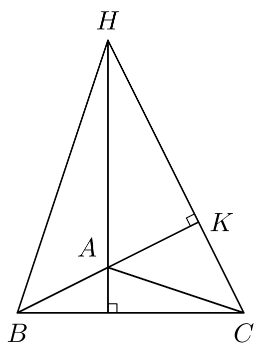


Xét hai tam giác vuông AKH và BKC, có

- $AH = BC$ (giả thiết)
- $\widehat{HAK} = \widehat{KBC}\left(= 90^\circ - \widehat{C}\right)$.

Do vậy $\triangle AKH = \triangle BKC$ (cạnh huyền - góc nhọn) $\Rightarrow AK = BK$ (hai cạnh tương ứng)
$\Rightarrow \triangle AKB$ vuông cân tại K.
Vậy $\widehat{BAC} = 45^\circ$.

TH 2. $\widehat{BAC} > 90^\circ$



Chứng minh tương tự trường hợp 1 ta được $KH = BK$ và từ đó suy ra $\widehat{BHK} = 45^\circ$.
Vì A là trực tâm $\triangle BHC$ nên $CA \perp HB \Rightarrow$ hai góc $\widehat{BAC}$ và $\widehat{BHC}$ có cạnh tương ứng vuông góc.
Lại vì $\widehat{BAC} > 90^\circ$ nên $\widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^\circ$.
Từ đó suy ra $\widehat{BAC} = 135^\circ$.

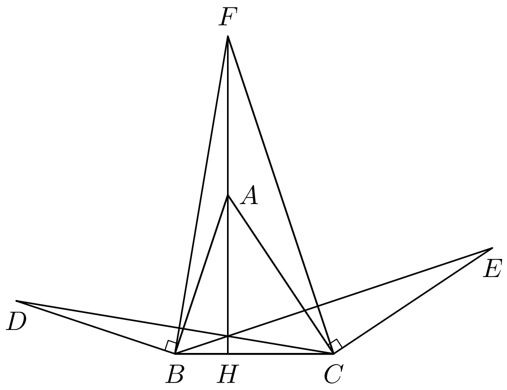
□

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C lấy điểm D sao cho $BD = BA$ và $BD \perp BA$. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B lấy điểm E sao cho $CE = CA$ và $CE \perp CA$. Chứng minh rằng các đường thẳng AH, BE, CD đồng qui.

Lời giải.

Trên tia đối của tia AH lấy điểm F sao cho $AF = BC$.
Xét $\triangle DBC$ và $\triangle BAF$

- $BD = BA$ (giả thiết).
- $BC = AF$.
- $\widehat{DBC} = 90^\circ + \widehat{ABC}$, $\widehat{BAF} = 90^\circ + \widehat{ABC}$.
  Suy ra $\widehat{DBC} = \widehat{BAF}$.



Vậy $\triangle DBC = \triangle BAF$(c.g.c).
Tương tự ta chứng minh được $\triangle BCE = \triangle FAC$ (c.g.c).
Suy ra $BF \perp CD$ và $CF \perp BE$.
Ta có AH, BE, CD là ba đường cao của $\triangle FBC$ vì vậy chúng đồng qui.

□

III. Bài tập

1. Cơ bản

Bài 1. Cho tam giác ABC có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Gọi I là trung điểm đoạn AH và K là trung điểm cạnh BC.

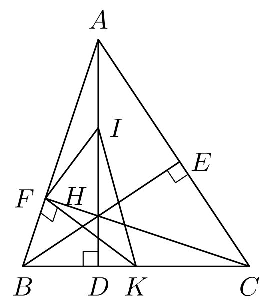
a) Chứng minh rằng $FK \perp FI$.

b) Biết $AH = 6$ cm, $BC = 8$ cm. Tính IK.

Lời giải.

a)

Xét $\triangle AFH$ vuông ở F, có FI là trung tuyến nên $FI = \dfrac{1}{2}AH = IA$.
Do đó $\triangle FAI$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IFA} = \widehat{IAF}$. (1)
Xét $\triangle BFC$ vuông ở F, có trung tuyến FK
$\Rightarrow FK = \dfrac{1}{2} \cdot BC = BK$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{IFA} + \widehat{KFB} = \widehat{IAF} + \widehat{KBF} = 90^\circ$ (vì $\triangle ADB$ vuông tại D).
Từ đó suy ra $\widehat{IFK} = 90^\circ$.
Vậy $FI \perp FK$.



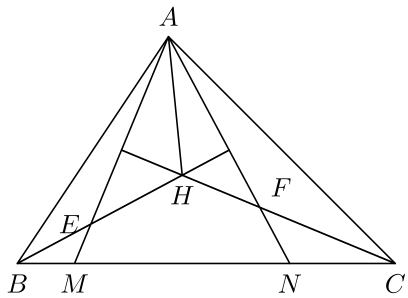
b) Từ chứng minh trên ta có $\triangle IFK$ vuông tại F và $FI = \dfrac{1}{2}AH = 3$ cm; $FK = \dfrac{1}{2}BC = 4$ cm.

Áp dụng định lí Pitago cho $\triangle IFK$ vuông tại F, ta có
$IK^2 = FI^2 + FK^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow IK = 5$ cm.

□

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ có góc A tù. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $CM = CA$ và lấy điểm N sao cho $BN = BA$. Đường phân giác của góc B cắt AM tại E. Đường phân giác của góc C cắt AN tại F. Chứng minh rằng đường phân giác của góc A vuông góc với EF.

Lời giải.

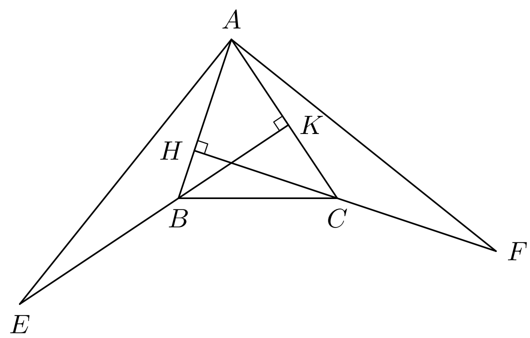


Góc A tù nên $BC > AB$ và $BC > AC$. Vậy M và N nằm giữa B và C.
Mà $BN = AB$ nên $\triangle ABN$ cân tại B; BE là phân giác nên BE cũng là đường cao. Vậy $BE \perp AN$.
Tương tự $CF \perp AM$.
Xét $\triangle ABF$ có $BE \perp AN$, $CF \perp AM$. Gọi H là giao của BE và CF thì H là trực tâm của $\triangle AEF$, nên $AH \perp EF$.
AH cũng chính là phân giác của góc A của tam giác ABC vì BE, CF là các tia phân giác của tam giác ABC.

□

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ có góc A nhọn. Kẻ đường cao BK và CH. Trên tia đối của tia BK lấy điểm E sao cho $BE = AC$. Trên tia đối của tia CH lấy điểm F sao cho $CF = AB$. Chứng minh tam giác AEF vuông cân tại A.

Lời giải.



Xét $\triangle ABE$ và $\triangle FCA$ có

- $AB = CF$ (giả thiết).
- $BE = AC$ (giả thiết).
- $\widehat{ABE} + \widehat{ABK} = 180^\circ$,
  $\widehat{ACF} + \widehat{ACH} = 180^\circ$.
  Mà $\widehat{ABK} = \widehat{ACH}$ (cùng phụ góc $\widehat{A}$) nên $\widehat{ABE} = \widehat{ACF}$.

Vậy $\triangle ABE = \triangle FCA$ (c.g.c)

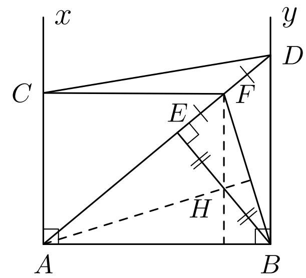
Suy ra $AE = AF$ và $\widehat{AEK} = \widehat{CAF}$. (1)
Ta có $\widehat{AEK} + \widehat{EAK} = 90^\circ$ ($\widehat{K} = 90^\circ$).
Thay (1) vào ta có: $\widehat{EAK} + \widehat{CAF} = 90^\circ$ hay $\widehat{EAK} = 90^\circ$.
Vậy $\triangle AEF$ vuông cân. □

2. Nâng cao

Bài 4. Cho đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB, vẽ hai tia Ax, By cùng vuông góc với AB. Trên hai tia Ax, By lần lượt lấy các điểm C, D sao cho $AC = \dfrac{1}{2}BD$. Vẽ BE vuông góc với AD (E thuộc AD) và gọi F là trung điểm của ED. Chứng minh rằng $CF \perp BF$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của $BE \Rightarrow HF \parallel BD$ và $HF = \dfrac{1}{2}BD$.
Mà $BD \perp AB$ (giải thiết) nên suy ra: $HF \perp AB$.
Từ đó ta có H là trực tâm của $\triangle ABF \Rightarrow AH \perp BF$ (tính chất ba đường cao của tam giác). (1)
Từ $HF = \dfrac{1}{2}BD$ (chứng minh trên) và $AC = \dfrac{1}{2}BD$ (giả thiết) suy ra $HF = AC$.
Lại vì $HF \parallel BD$ (chứng minh trên) và $AC \parallel BD$ (cùng vuông góc với AB)
$\Rightarrow HF \parallel AC \Rightarrow \widehat{CAF} = \widehat{HFA}$ (hai góc so le trong).



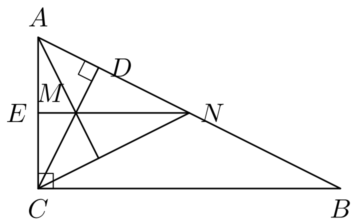
Do đó $\triangle ACF = \triangle FHA$ (c.g.c) $\triangle \widehat{CFA} = \widehat{HAF}$ (hai góc tương ứng).
Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên suy ra $CF \parallel AH$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $BF \perp CF$.

□

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông ở C, đường cao CD. Từ một điểm M nằm giữa C và D, ta kẻ một tia song song với CB, cắt DB tại N. Chứng minh rằng $AM \perp CN$.

Lời giải.

Ta có $MN \parallel CB$ mà $CB \perp AC$ (giả thiết) nên $MN \perp AC$.
Gọi giao điểm MN và AC là E.
Tam giác ACN có CD và NE là hai đường cao cắt nhau tại M nên M là trực tâm của tam giác ACN.
Suy ra $AM \perp CN$.



□

Bài 6. Cho tam giác ABC. Qua A kẻ đường thẳng $d_1 \parallel BC$. Qua B kẻ đường thẳng $d_2 \parallel AC$. Qua C kẻ đường thẳng $d_3 \parallel AB$. Ba đường thẳng này cắt nhau tại ba điểm E, F và P.

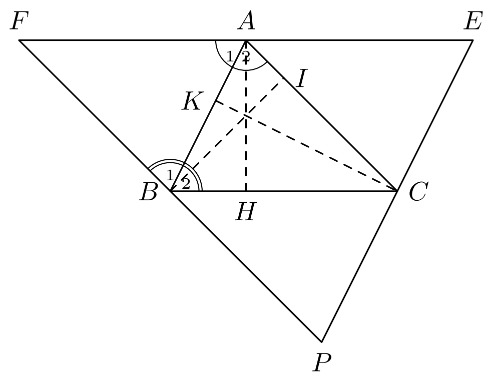
a) Chứng minh các cạnh AB, AC, BC chia $\triangle EFP$ thành 4 tam giác bằng nhau.

b) Các đường cao của tam giác $\triangle ABC$ là các đường trung trực của $\triangle EFP$.

Lời giải.

a) Xét $\triangle ABF$ và $\triangle BAC$ có:
   - AB chung
   - $\widehat{A_1} = \widehat{B_2}$ (so le trong)
   - $\widehat{A_2} = \widehat{B_1}$ (so le trong)

   Vậy $\triangle ABF = \triangle BAC$ (g.c.g)$\Rightarrow AF = BC$; $BF = AC$. (1)
   Tương tự ta chứng minh được:
   $AE = BC$; $CE = AB$; (2)
   $CP = AB$; $BP = AC$; (3)
   Vậy $\triangle ABF$, $\triangle CEA$ và $\triangle PCB$ cùng bằng $\triangle BC$
   $\Rightarrow$ bốn tam giác đó bằng nhau.



b) Từ (1) và (2) suy ra $AF = AE$ (cùng bằng BC), lại có $BC \parallel EF$ (giả thiết) nên nếu $AH \perp BC$ thì $AH \perp EF$.
   Suy ra đường cao AH của $\triangle ABC$ là tung trực của FE (theo định nghĩa).

Tương tự: đường cao BI của $\triangle ABC$ là trung trực của FP, đường cao CK của $\triangle ABC$ là trung trực của EP.
Vậy ba đường cao AH; BI và CK của $\triangle ABC$ là ba đường trung trực của $\triangle FEP$.

□

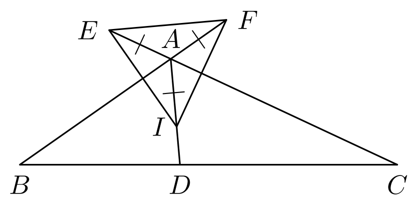
Bài 7. Cho tam giác ABC có $\widehat{B}+\widehat{C}=60^\circ$. Trên đường phân giác AD của góc A lấy điểm I. Trên tia đối của tia AB lấy điểm F sao cho $AF=AI$. Trên tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AE=AI$. Chứng minh

a) AB và AC lần lượt là các đường trung trực của đoạn thẳng IE và IF.

b) $\triangle IEF$ là tam giác đều.

c) $IA \perp EF$.

Lời giải.



a) Do $\widehat{B}+\widehat{C}=60^\circ$ (giải thiết) nên $\widehat{BAC}=120^\circ$.
Mà AI là phân giác nên $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}=60^\circ$
$\Rightarrow \widehat{EAB}=60^\circ=\widehat{A_1}$.
$\triangle EAI$ cân ($AE=AI$) mà AB là phân giác nên AB là trung trực của EI.
Tương tự, AC là trung trực của IF.

b) E nằm trên trung trực của IF nên $EI=EF$.
F nằm trên trung trực của EI nên $EF=FI$.
Vậy $EI=EF=FI \Rightarrow \triangle EIF$ đều.

c) Trong $\triangle EIF$ có $FB \perp EI$, $EC \perp IF$, vậy A là trực tâm nên $IA \perp EF$.

□

Bài 8. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=90^\circ$, BD là tia phân giác của góc B ($D \in AC$). Từ D hạ $DH \perp BC$ ($H \in BC$). Tia BA và tia HD cắt nhau tại M.

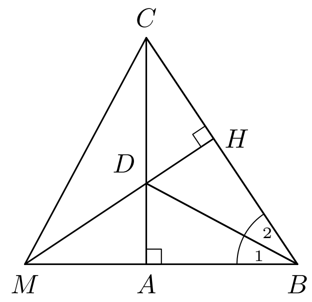
a) So sánh độ dài hai đoạn AD và DC.

b) Chứng minh $BD \perp MC$.

c) $\triangle BMC$ là tam giác gì?

d) Chứng minh $AH \parallel MC$.

Lời giải.



a) $DA = DH$. Trong $\triangle DHC$ có: $DC > DH$ (cạnh huyền lớn hơn cạnh góc vuông). Vậy $DC > AD$.

b) Xét $\triangle BMC$ có $MH \perp BC$ (giả thiết); $CA \perp BM$ (giả thiết). Vậy D là trực tâm của $\triangle BMC$ nên $BD \perp MC$.

c) $\triangle BMC$ có BD là phân giác của góc B (giả thiết), BD lại là đường cao(chứng minh b).
Vậy $\triangle BMC$ là tam giác cân tại B.

d) Dễ thấy $\triangle BDA = \triangle DBH$ (cạnh huyền - góc nhọn)
$\Rightarrow BA = BH$.
Vậy $\triangle ABH$ cân tại B, có BD là phân giác nên BD cũng là đường cao. Vậy $BD \perp AH$. Mà $BD \perp CM$.
Vậy $AH \parallel CM$ (cùng vuông góc BD).

□

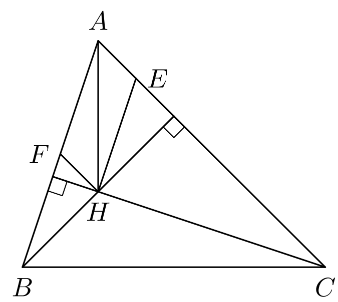
Bài 9. Cho tam giác ABC nhọn, trực tâm H. Chứng minh rằng

a) $AB + AC > HA + HB + HC$.

b) $AB + BC + CA > \dfrac{3}{2}(HA + HB + HC)$.

Lời giải.

a)



Qua H kẻ đường thẳng song song với AC cắt AB ở F.
Kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC ở E. Dễ dàng chứng minh được $AF = EH$, $AE = FH$.
Vì $BH \perp AC$ và $FH \parallel AC$ nên $BH \perp FH \Rightarrow BF > BH$ (quan hệ đường xiên - đường vuông góc).
Tương tự, ta có $CE > CH$.
Xét $\triangle AEH$, có $AE + EH > HA$ (bất đẳng thức tam giác).
Từ đó $AB + AC = AE + AF + FB + EC > HA + HB + HC$.

b) Chứng minh tương tự câu a) ta được

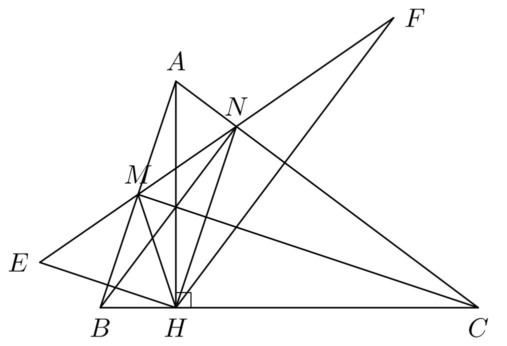
- $AB + BC > HA + HB + HC$.
- $BC + AC > HA + HB + HC$.

Khi đó ta được
$AB + AC + AB + BC + BC + AC > HA + HB + HC$
$\Leftrightarrow AB + BC + CA > \dfrac{3}{2}(HA + HB + HC)$.

□

Bài 10. Cho tam giác ABC, vẽ đường cao AH. Lấy các điểm E và F sao cho AB là đường trung trực của HE, AC là đường trung trực của HF. Nối EF cắt AB tại M và AC tại N. Chứng minh rằng CM, BN và AH đồng qui.

Lời giải.



TH 1. Nếu $\widehat{A} = 90°$: hiển nhiên vì M, N trùng với A.

TH 2. Nếu $\widehat{A} < 90°$. Tam giác NHF cân nên $\widehat{N_1} = \widehat{N_2}$.
Vì vậy AC là tia phân giác ngoài của $\triangle HMN$.
Tương tự ta có AB là phân giác ngoài của $\triangle HMN$.
Suy ra AH là phân giác trong của $\triangle HMN$ (AH đi qua giao điểm hai phân giác ngoài của $\triangle HMN$).
Suy ra BC là phân giác ngoài của $\triangle HMN$ vì $BC \perp AH$.
Ta có các phân giác ngoài của $\triangle HMN$ là BC và AC cắt nhau ở C. Do đó MC là phân giác trong của $\triangle HMN$. Vì phân giác trong của một góc vuông với phân giác ngoài của của góc đó nên $MC \perp AB$.
Tương tự ta có $BN \perp AC$.
Vậy CM, BN, AH đồng quy (vì là ba đường cao của tam giác ABC).

TH 3. Nếu $\widehat{A} > 90°$, chứng minh tương tự phần trên.

□