Partie 1 : Sujet 4 - Option Lookback :

1). $p(t, S_t, M_t)$ $t \in [0,T]$ et $(S,M) \in \{(S,M) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq S \leq M\}$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} + rS \frac{\partial p}{\partial S} - rp = 0$$

avec $dS_t = \sigma dW_t + r\,dt$

Pour rappel les conditions finales sont telles que

$$p(\cancel{t}, S_T, M_T) = \phi(S, M) \qquad \frac{\partial p}{\partial M}(t, S, S) = 0$$

Si on pose $\phi(S,M) = M\,\hat{\phi}(S/M)$

Alors si on pose ξ comme ~~la comp~~ une composée ~~de~~ l'actif en son prix à la dernière date t connu et en ~~son~~ valeur ~~minimale~~ maximale sur l'intervalle $[0,t]$

On a un nouveau payoff final qu'on écrira $\hat{\phi}(\xi)$ et une ~~nouv~~ prix avec une nouvelle fonction qu'on appelle $w(t, \xi)$ et qui a échéance du floating lookback put vaut $w(T, \xi) = \hat{\phi}(\xi)$

On sait également que la nouvelle condition au bord lorsque le floating strike et le dernier prix connu se valent ~~est égal à 1~~ $(S_t = M_t)$ est tel que ~~la dérivée du prix en fonction de~~ $\frac{\partial w}{\partial \xi}(t, 1)$ vaut le prix de la valeur temps soit $w(t, 1)$.

Au final avec cette nouvelle fonction prix en fonction de cette composée de prix en substituant :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\sigma^2 \xi^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - r\xi \frac{\partial w}{\partial \xi} - rw = 0$$

2) On pose pour rappel $\frac{dS}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$ (1)

Pour rappel la valeur du put est tel que ~~$V = (S_t - K, 0)$~~
$V = (K - S_t, 0)$

alors on a de (1) par Ito :

$$dV(S,t) = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + \frac{\partial V}{\partial S}\sigma S dW_t$$

~~Il faut ??~~ Si on construit $d\Pi$ tel que :

$$d\Pi = dV(S,t) - \frac{\partial V(S,t)}{\partial S} dS$$

alors on a $\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial V^2}{\partial S^2} - rV = 0$

Par difference finis

$\frac{\partial F}{\partial S}$ peut être approximer par

$$\frac{\partial F}{\partial S} = \frac{F_{i,j+1} - F_{i,j}}{\Delta S}$$

$$\frac{\partial F}{\partial S} = \frac{F_{i,j} - F_{i,j-1}}{\Delta S}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial S} = \frac{F_{i,j+1} + F_{i,j-1}}{2\Delta S}$$

On pose $\partial F = \partial V$ et on retrouve notre approximation.

De même $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta t}$

et $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{(V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 2V_{i,j})}{\partial S^2}$

On a alors

$$\frac{V_{i,j+1}-V_{i,j}}{\partial t}+rS\frac{V_{i,j+1}-V_{i,j-1}}{2\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{V_{i,j+1}+V_{i,j-1}-2V_{i,j}}{\partial S^2}=rV_{i,j}$$

Voici l'approximation de la valeur implicite par différence finie de notre Put.

Par symmétrie,

$$\frac{\partial V}{\partial S}=\frac{V_{i+1,j+1}-V_{i+1,j-1}}{2\partial S}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}=\frac{V_{i+1,j+1}+V_{i+1,j-1}-2V_{i,j}}{\partial S^2}$$

$$\frac{V_{i+1,j+1}-V_{i,j}}{\partial t}+rS\frac{V_{i+1,j+1}-V_{i+1,j-1}}{2\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\left(V_{i+1,j+1}+V_{i+1,j-1}-2V_{i+1,j}\right)/2\partial S$$

$$=rV_{i,j}$$

Pour rappel $S=30$ et $K=30$ mais r et σ non fixé.

On va se contenter de rappeler que grâce à ~~la~~ nos deux approches on peut

théoriquement trouver une valeur au prix de ce Put 30 ATM.