# Осенний интенсив
# “Математика для анализа данных”
# Занятие МА1
# Анализ функций одной переменной (часть 1)

7 сентября 2018 г.

Правила игры:

- Преподаватель: **Антон Савостьянов**, почта: a.s.savostyanov@gmail.com, telegram: @mryodo
- Ассистенты:
  - **Даяна Мухаметшина**, почта: dayanamuha@gmail.com, telegram: @anniesss1 (*1 группа*)
  - **Алексей Хачиянц**, почта: kha83640@gmail.com, telegram: @knkeer (*2 группа*)
- Слушатели: **вы**
- Домашние задания следует присылать в *читаемом* виде не позднее чем через две недели (после проведения занятия) на почту ассистента. В выполнении домашнего задания ценен любой прогресс

## 1 Функции: введение

**Определение 1.** *Функцией* $f$ называется такое отображение (правило) из множества $X$ в множество $Y$ (пишут $f\colon X \to Y$), что каждому элементу множества $X$ сопоставлен *ровно один* элемент множества $Y$ (обратное совершенно необязательно!). Такие отображения называют *функциональными*; $x$ называется *независимой* переменной или *аргументом*, а $y = f(x)$ — *зависимой* или *значением* функции.

**Определение 2.** Множество пар точек $(x, f(x))$ для данной функции $f(x)$ называется ее *графиком*.

**Упражнение 1.** Является ли окружность $x^2+y^2=1$ графиком какой-либо функции? Укажите почему. Сформулируйте геометрическое определение функциональности.

**Определение 3.** Множество $X$ называется *областью определения* функции $f$ (domain), а множество $Y$ — *множеством ее значений* (range). Часто оказывается, что множество значений функции указать тяжело и пишут избыточное множество $Y$(например, для $f = \sin x$ может встретиться запись $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Также не стоит путать область определения функции (domain) с множеством аргументов, на которых функция принимает ненулевое значение; такое множество называются *носителем* функции и часто бывает полезно (в том числе сколько-нибудь интересно) в реальной жизни.

Мы будем считать, что функциональные отображения заданы между числовыми множествами, хотя в этом нет никакой необходимости. На последующих занятиях по теории вероятностей вы убедитесь, что функциональные отображения могут принимать на вход и события-исходы эксперимента.

Задавать функции можно несколькими способами:

- алгебраически («формулой», используя привычную нотацию арифметических операций, например, $f(x) = (\sin x)^{42e^x+1/\ln x}$);
- графически (то есть изображая график функции в некой системе координат);
- перечисляя значения функции в точках.

Ясно, что чем больше точек мы укажем в последнем способе, тем точнее будет наше представление о функции; в то ж время всегда будут точки, где поведение функции нам полностью неизвестно. Задание функции графически, очевидно, страдает от нехватки точности, непозволяющей объявить конкретное значение функции в выбранной точке без какой-либо погрешности, однако дает комплексное представление о характере поведения функции. Алгебраическое задание в свою очередь грешит излишней сложностью: далее в рамках нашего курса будет обсуждаться инструментарий, необходимый для качественного описания поведения алгебраически заданной функции, которое часто бывает неочевидно.

**Упражнение 2.** Пусть функция $f(x)$ задана алгебраически

$$f(x) = \begin{cases} |x| & x \le -2 \\ 1-x & -2 < x \le 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$$

1. Постройте таблицу значений данной функции в целых точках на отрезке $[-3, 3]$
2. Нарисуйте примерный график функции $f(x)$

3. Укажите область определения функции, область значений и носитель.

Одним из центральных методов математического подхода изучения реальных процессов является аппроксимация реальных процессов набором простых, наиболее распространенных функций: например, зависимость пройденного вами пути от времени $s(t)$ выражается в первом приближении при помощи простой функции $s(t) = v \cdot t$, где $v$ есть ваша средняя скорость.

**Определение 4.** Перечислим виды таких функций (они называются *элементарными*):

- линейная функция: $y = kx + b$, где $k$ и $b$ — заданные числа; графиком такой функции является прямая (более правильный вид $ax + by = c$; подумайте, почему?)

- степенная функция: $y = x^a$. Здесь есть тонкость, связанная с областью определения: как известно из школьной программы, например, квадратный корень из отрицательного числа взять не получится, равно как и возвести $(-1)^{5/2}$ (причины этого мы обсудим чуть ниже). Поэтому договариваются варьировать область определения взависимости от $a$: если $a > 0$ и $a \in \mathbb{N}$, то область определения совпадает с $\mathbb{R}$; если же $a$положительно и дробно, то $x > 0$. Что произойдет с областью определения, если $a < 0$?

- полином: $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Линейная и степенные функции — частный случай полиномов. Ввиду своей простоты, полином был выбран в качестве одной из основных функций для работы в анализе для аппроксимации других функций. Внешний вид полиномиальных функций может сильно различаться!

- тригонометрические функций: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg} x$ и другие (в том числе обратные им!). Вспомните, какова область определения у $y = \mathrm{tg} x$!

- экспоненциальная функция: $y = a^x$, где $a > 0$; особенно важно $a = e$. Сравните графики данной функции при $a > 1$ и $a < 1$.

- логарифмическая функция: $y = \log_a x$, где $a > 0$; особенно важно $a = e$, $y = \ln x$.

Графики более сложных функций, полученных из данных, часто можно получить, преобразуя известные графики элементарных функций. К таким преобразованиям относятся:

1. сдвиги вдоль координатных осей (по $y$ путем добавления ко всей функции того или иного числа; по $x$ путем добавления к каждому вхождению аргумента в функцию того или иного числа)

2. сжатия и растяжения вдоль координатных осей (по $y$ путем умножения всей функции на то или иное числа; по $x$ путем умножения каждого вхождения аргумента в функцию на то или иное числа)

3. отражения относительно координатных осей (эквивалентно сжатиями в $-1$ раз)

4. взятия модулей от функции или аргумента

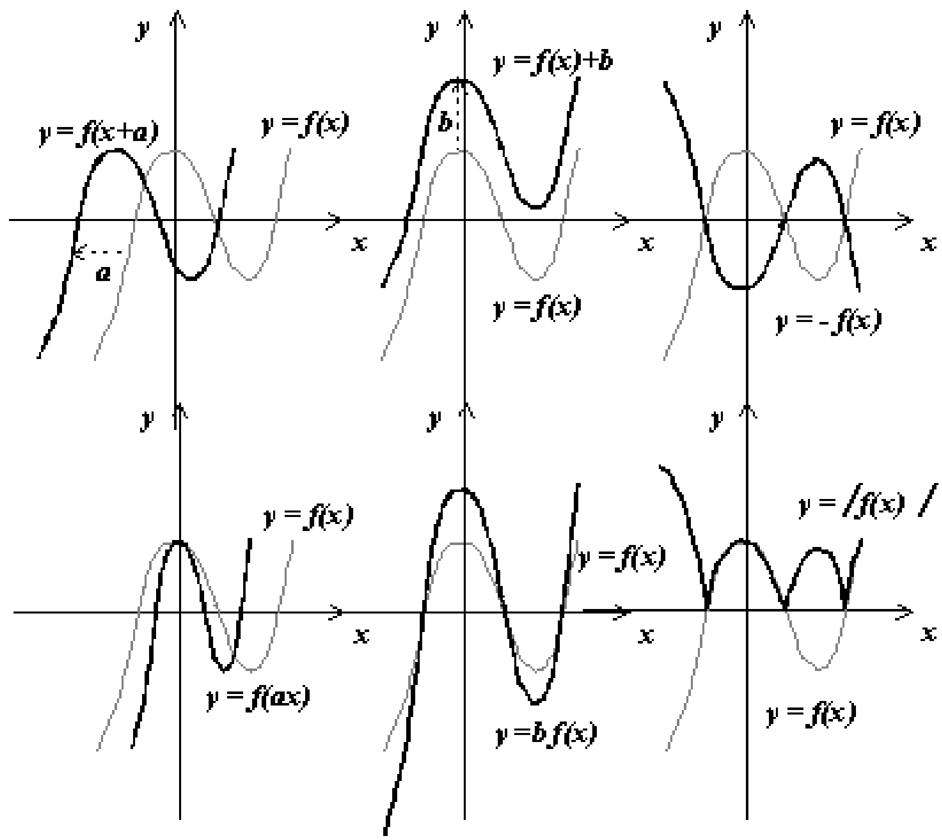


Рис. 1: Преобразования графиков функций

**Упражнение 3.** Постройте график функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ (как выйдет). Для него изобразите:

1) $f(x+2)$ 2) $-f(x)+6$ 3) $f(-2x)$ 4) $\dfrac{1}{3}f(x)$ 5) $\dfrac{f(|x|)}{2}+4$ 6) $\dfrac{1}{f(x)}$

**Определение 5.** *Композицией* двух функций $f \circ g$ называется функция, которая получается в результате последовательного применения функций справа налево (сначала $g$, а потом $f$; такую функцию еще называют сложной):

$$f \circ g = f(g(x))$$

Отметим также, что это означает следующее: если $g\colon X \to Y$, $f\colon V \to Z$, то для существования композиции функции должно выполняться вложение $Y \subseteq V$ (действительно, $g(x)$ есть новый аргумент для функции $f$, поэтому она не должна возвращать значений, которые функция $f$ не способна обработать)

**Упражнение 4.** Пусть даны функции $f(x) = e^{\left(x^2\right)}$ и $g(x) = \sin\frac{x}{2}$. Выпишите:

$$1)\ f \circ f \qquad 2)\ f \circ g \qquad 3)\ g \circ f \qquad 4)\ g \circ g$$

Изучите результаты пунктов 2 и 3; что они означают?

**Упражнение 5.** Есть специальный вид функций, которые удобно задаются таблицей значений: они называются *перестановками*, поскольку отображают натуральные числа с 1 до $n$ в натуральные числа с 1 до $n$, причем каждое значение принимает ровно один раз:

$$\sigma\colon [1, 2, 3 \ldots n] \to [1, 2, 3 \ldots n]$$

Пусть $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.
Вычислите $\sigma_1 \circ \sigma_2$ и $\sigma_2 \circ \sigma_1$.

**Определение 6.** Обратной функцией к функции $f$ называется такая функция $f^{-1}$, что

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = x$$

Обратите внимание, что по нашему определению если $f : X \to Y$, то $f^{-1} : Y \to X$!

**Упражнение 6.** Как получить график обратной функции, пользуясь графиком прямой функции? Пусть есть $f(x) = \begin{cases} e^x + 2 & x \le 1 \\ 2x + e & x > 1 \end{cases}$; постройте $f^{-1}(x)$, $(f(x+4))^{-1}$ и $f^{-1}(x + 4)$.

# 2 Предел функции

**Определение 7.** Говорят, что функция $f(x)$ в точка $a$ стремится к числу $B$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = B$$

если всегда можно «подойти» достаточно близко к точке $a$, что значения функции для $x$, достаточно близких к $a$, будет отличаться от числа $B$ сколь угодно мало.

То есть, если мы выберем допустимое отклонение от числа $B$ (назовем его $\varepsilon$), то всегд найдется такое расстояние $\delta$, что для всех $x$, удаленных от точки $a$ не более чем на $\delta$ ($|x-a|<\delta$), отклонение значения функции от числа $B$ не будет превосходить $\varepsilon$ ($|f(x)-B|<\varepsilon$). Тоже самое можно записать в кванторах:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x:\ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-B|<\varepsilon$$

Очень важно понимать: предел функции по определению *никак не связан* с ее значением в точке (хотя для специальных функций он с ним совпадает)!

Иначе определение предела можно сформулировать так: как бы ни подходили по аргументам к точке $a$, значения функции должны все больше и больше быть неотличимы от $B$.

**Упражнение 7.** Пользуясь определением в кванторах, сформулируйте утверждения:

- числа $B$ не является пределом функции $f(x)$ в точке $a$;
- у функции $f(x)$ в точке $a$ нет предела.

**Определение 8.** Говорят, что функция бесконечно большая в окрестности точки $a$, если для любого наперед заданного числа $M$ всегда можно подойти достаточно близко к точке $a$, чтобы $f(x)\geq M$ для всех $x$, достаточно близких к $a$:

$$\forall M>0:\ \exists\delta>0:\ \forall x:\ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow f(x)\geq M$$

В таком случае пишут

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$$

**Упражнение 8.** Сформулируйте определение

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=B$$

*Замечание* 1. Для пределов имеет место набор арифметических свойств:

1. $\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$
2. $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$
3. $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$, если $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$

Все перечисленное верно только при условии существования пределов $\lim_{x\to a}f(x)$ и $\lim_{x\to a}g(x)$.

**Упражнение 9.** Вычислите

1. $\lim_{x\to 2}\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^2-4} & x\neq 2\\ 3 & x=2\end{cases}$

2. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ (такой случай называется «неопределенностью»)

3. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2-x+6}{x-2}$

4. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

5. $f(x) = \mathrm{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$. Вычислить $\lim_{x \to 1} f(x)$, $\lim_{x \to 1-} f(x)$ и $\lim_{x \to 1+} f(x)$

**Теорема 1.** *(Замечательные пределы) Специальные неопределенности вида* $\dfrac{0}{0}$ *и* $1^\infty$ *разрешаются при помощи известных пределов, называемых замечательными:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

**Упражнение 10.** Пользуясь замечательными пределами, вычислите:

$$1)\ \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg} x}{x} \qquad 2)\ \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} \qquad 3)\ \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{2x} \qquad 4)\ \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

# 3 Непрерывность и дифференцируемость

**Определение 9.** Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

то есть предел функции в точке равен ее значению. Функция называется *непрерывной на множестве* (например, на отрезке), если она непрерывна в каждой точке данного множества.

**Теорема 2.** *(о промежуточном значении, Вейерштрасса-2) Если непрерывная на отрезке функция принимает значения $A$ и $B$, то она принимает все значения между ними.*

*Замечание* 2. Одним из применений данной теоремы является широко известный метод поиска корней серединным делением, а также алгоритмы бинарного поиска в программировании.

**Определение 10.** Пусть дана функция $f(x)$, выбрана точка $x_0 = a$. Приращением аргумента $\Delta x$ будем называть разность между выбранной точкой $a$ и произвольной точкой $x$: $\Delta x = x - a$ ; соответствующим приращением функции будем называть разность между значениями функции в выбранной и произвольной точках:

$\Delta f = f(x) - f(a)$; несложно сообразить, что отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ есть тангенс угла наклона прямой, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(x, f(x))$ (такую прямую называют секущей). Предельное значение такого отношения носит название производной $\dfrac{df}{dx} = f'(a)$ в данной точке:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Часто рассматривают производную не в исключительной точке, а в каждой, то есть смотрят на $f'(x)$ — функцию, которая для каждого $x$ возвращает значение производной в данной точке.

Функцию, у которой есть производная в данной точке $a$, называют *дифференцируемой* в ней. С геометрической точки зрения дифференцируемость означает две вещи:

- отсутствие «углов»: возможность проведения касательной в данной точке;
- хорошую приближаемость прямой в данной точке.

**Упражнение 11.** Пользуясь определением, посчитайте производные следующих функций в произвольной точке $a$:

$a)\ f(x) = 2018 \qquad b)\ f(x) = x^2 \qquad c)\ f(x) = x^n \qquad d)\ f(x) = \sin x$

*Замечание* 3. Для взятия производной существует набор правил (в том числе и арифметических):

1. если $f(x) \equiv c$, то $f' = 0$
2. $(x^a)' = ax^{a-1}$
3. $(e^x) = e^x$
4. $(f \pm g)' = f' \pm g'$
5. (правило Лейбница) $(fg)' = f'g + g'f$
6. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
7. (производная сложной функции) $(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

**Упражнение 12.** Вычислите производные данных функций по правилам:

$a)\ x^4 + 5x - 6 \qquad b)\ f(x) = \sqrt{2x} + 3e^{-x} \qquad c)\ f(x) = \dfrac{x^2}{1 + 2x} \qquad d)\ f(x) = \ln x$

$e)\ f(x) = \sin \cos x \qquad f)\ f(x) = x^x$

**Определение 11.** Касательной к графику функции $f(x)$ в точке $a$ называется прямая, наиболее похожая на $f(x)$ в окрестности данной точки, проходящая через точку $(a, f(a))$. Она же есть предельное положение секущих, описанных нами выше. Ее уравнение может быть записано как:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

**Упражнение 13.** Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ в точке $x = 1$.