Теор. вер 3.

Зад. 1

1) $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$; $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Как из X сделать Y?

$$Y = \frac{X - a}{\sigma}$$

2) Как из Y сделать X?

$$X = \sigma Y + a$$

3) Функция распределения случайной величины X:

$$F : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

$F(x) = P(X \le x)$, т.е. это вероятность того, что случ. велич. X примет значение $\le x$, где x — любое действит. число ("кумулят." φ^*).
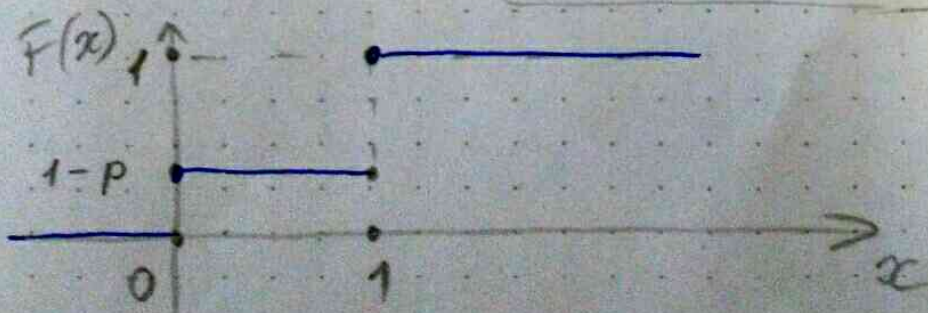
4) $F'(x) = f(x)$

5) $P(a < x \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)$

Зад. 4 $X \sim Bp$, $p \in (0, 1)$

Ф $f(x) = \begin{cases} 1, & p, \\ 0, & 1-p. \end{cases}$ $\boxed{F(x) = \sum_{a_i \le x} P_i} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1-p, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$

Зад.3

$$X \sim N(a, \sigma^2); \quad Y = (5 + X \cdot \ln 2)/2$$

$$\mathbb{E}Y = ? \quad, \quad \text{Var } Y = ?$$

$$\mathbb{E}Y = \frac{5}{2} + \mathbb{E}\left(\frac{X \ln 2}{2}\right) = \frac{5}{2} + \frac{\ln 2}{2} \mathbb{E}(X) = \frac{5 + a \cdot \ln 2}{2}$$

$$\text{Var } Y = \text{Var}((5 + X \ln 2)/2) = \text{Var}\left(\frac{5}{2} + X \frac{\ln 2}{2}\right) =$$

$$= \text{Var}\left(X \frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{\ln^2 2}{4} \text{Var}(X) = \frac{\sigma^2 \ln^2 2}{4}$$

Зад 2

$$X \sim N(0,1)$$

$$-X \sim ?$$

Плотность для X: $\quad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$

Плотность для $-X$: $\quad \varphi(-u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-u)^2}{2}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

$$\mathbb{E}(-X) = -\mathbb{E}(X) = 0$$

$$\text{Var}(-X) = (-1)^2 \text{Var} X = 1$$

$$-X \sim N(0,1)$$

Зад. 7

$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{30} e^{-\frac{u}{30}}, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0. \end{cases}$$

Среднее время работы лампочки:

$$\mathbb{E}T = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1/30} = 30 \text{ дней}$$

$$\mathbb{P}(T \leq 3) = \int\limits_{-\infty}^{3} \lambda e^{-\lambda u} \, du = 1 - e^{-\lambda \cdot 3} = 1 - e^{-\frac{1}{10}} \approx$$

$$\approx 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$

$$\mathbb{P}(T > 10) = \int\limits_{10}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} \, du = \left(-e^{-\lambda u} \right) \Big|_{10}^{+\infty} =$$

$$= e^{-\lambda \cdot 10} = e^{-1/3} \approx 0{,}72$$

$$\mathbb{P}(T > 30) = \int\limits_{30}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u} \, du = e^{-1} \approx 0{,}37$$