Теорвер 4

Зад. 1

1) По плотности совместного распределения найти маргинальные плотности

$$P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(u)\,du, \quad f_1(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,dv$$

$$P(Y \le y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(v)\,dv, \quad f_2(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,du.$$

2) Совместное распределение по маргинальным распределениям в случае <u>независимости</u> компонент можно вычислить:

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \times \dots \times F_n(x_n).$$

3) X, Y – дискретные случайные величины

$$P(X=0, Y=0) = P(X=0) \cdot P(Y=0)$$

Следует ли из этого независимость X и Y?

Нет, не следует. По определению независимости, это равенство должно выполняться для любых действительных чисел, а не только для 0

<u>Контр пример</u>:

$$X \sim B_p \quad Y \sim B_p$$

Если выпала решка на первой монете, тогда бросаем вторую

X\Y	0	1
0	0	0
1	1/2	1/2

X	Y	
0	0	0
0	1	0
1	0	1/2
1	1	1/2

$P(X=0, Y=0) = 0$

$P(X=0) = 0, \quad P(Y=0) = 1/2 \qquad 0 = 0 \cdot 1/2$

4) Среднее арифметическое независимых и одинаково распределенных случ. велич. с конечной дисперсией сходится к <u>математическому ожиданию одного из слагаемых</u> (ЗБЧ).

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$$

5) $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}X| \le t)$, $t>0$, $\mathrm{Var}\,X$ - существ.

Нер-во Чебышёва: $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}X| > t) \le \frac{\mathrm{Var}\,X}{t^2}$, $\forall t>0$

$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}X| \le t) = 1 - \mathbb{P}(|X-\mathbb{E}X| > t)$$

$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}X| \le t) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}\,X}{t^2}$$

- оценка снизу.

6) К какому распределению в условиях ЦПТ приближается распределение величины

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\,S_n}}\ ? \qquad \mathbb{E}S_n = n\mu, \quad \sqrt{\mathrm{Var}\,S_n} = \sqrt{n\sigma^2}$$

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\,S_n}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty.$$

7) $$\mathbb{E}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\,S_n}}\right) = 0$$

$$\mathrm{Var}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{Var}\,S_n}}\right) = 1$$

Зад. 2 Доказать:

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y$$

<u>Д-во:</u> $\operatorname{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}X)\cdot(Y-\mathbb{E}Y)\right]=$

$$=\mathbb{E}(XY-X\cdot\mathbb{E}Y-Y\cdot\mathbb{E}X+\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y)=$$

$$=\mathbb{E}(XY)-\underbrace{\mathbb{E}(X\cdot\mathbb{E}Y)}_{\mathbb{E}Y\cdot\mathbb{E}X}-\underbrace{\mathbb{E}(Y\cdot\mathbb{E}X)}_{\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y}+\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y=$$

$$=\mathbb{E}(XY)-2\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y+\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y.$$

Зад. 3 $X\sim\mathcal{N}(0,1)$. $\operatorname{Cov}(X,X^2)=?$

$$\operatorname{Cov}(X,X^2)=\mathbb{E}(X\cdot X^2)-\underbrace{\mathbb{E}X}_{=0}\cdot\mathbb{E}(X^2)=\mathbb{E}(X^3)$$

$$\mathbb{E}\,\Phi(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(u)\,f(u)\,du$$

$$\mathbb{E}(X^3)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^3\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}=0.$$

$\operatorname{Cov}(X,X^2)=0.$

Из этого сделать вывод о том, что X и X^2 независимы <u>нельзя</u>.