Лин. алг. 3

Зад. 1.

а) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ $\det(A - \lambda E) = 0$ $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 6 & 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Характеристический многочлен:

$(5-\lambda)(5-\lambda)(-4-\lambda) - 48 - 48 - 18(5-\lambda) + 16(5-\lambda) + 8(4+\lambda) = 0$

$-(25 - \lambda 10 + \lambda^2)(4+\lambda) - 96 + 90 - 18\lambda + 80 - 16\lambda + 32 + 8\lambda = 0$

$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$

$(\lambda - 1)(-\lambda^2 + 5\lambda - 6) = 0$

Собственные числа: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$

$\lambda_1 = 1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 4 & -4 & 0 \\ 6 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \operatorname{rk} A_1 = 2$

$x_1 - \frac{x_3}{2} = 0$

$x_2 - \frac{x_3}{2} = 0$

$x_3 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор

$\lambda_2 = 2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & -4 & 0 \\ 6 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$x_1 - x_3 = 0$

$x_2 = 0$

$x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор

$\lambda_3 = 3$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \\ 6 & 4 & -7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

$x_1 - x_3/2 = 0$

$x_2 - x_3 = 0$

$x_3 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собств. вектор

$$T=\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/2 & 1 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right) - T^{-1}$$

$$A = T\cdot B\cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{2018} = T\cdot B^{2018}\, T^{-1}, \quad B^{2018} = \begin{pmatrix} 1^{2018} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2018} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2018} \end{pmatrix}$$

$$T\cdot B^{2018} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2018} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2018} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 2^{2018} & \frac{1}{2}\cdot 3^{2018} \\ 1/2 & 0 & 3^{2018} \\ 1 & 2^{2018} & 3^{2018} \end{pmatrix}$$

$$A^{2018} = \begin{pmatrix} 1/2 & 2^{2018} & \frac{1}{2}\cdot 3^{2018} \\ 1/2 & 0 & 3^{2018} \\ 1 & 2^{2018} & 3^{2018} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2+2\cdot 2^{2018}+3^{2018} & -1+3^{2018} & 2-2^{2018}-3^{2018} \\ -2+2\cdot 3^{2018} & -1+2\cdot 3^{2018} & 2-2\cdot 3^{2018} \\ -4+2\cdot 2^{2018}+2\cdot 3^{2018} & -2+2\cdot 3^{2018} & 4-2^{2018}-2\cdot 3^{2018} \end{pmatrix}$$