Теорвер 2

Зад. 1

1) Да, могут. Например, случайная величина X принимает значения 1 и −1 с вероятности 1/2. Случайная величина $Y = -X$ будет иметь такую же таблицу распределения:

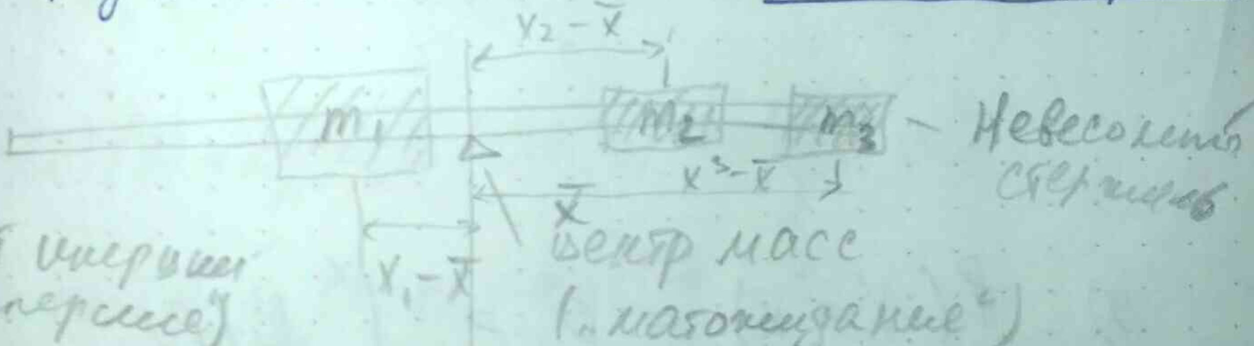
X	1	−1
P	1/2	1/2

$Y = -X$	−1	1
P	1/2	1/2

2) Да, математическое ожидание суммы любых случайных величин равно сумме их математич. ожиданий.

3) Нет, сумма дисперсий равна дисперсии суммы, только если случ. велич. независимы.

4) Дисперсия — центральный момент второго порядка, она характеризует степень разброса случайной величины вокруг мат. ожидания. Её физический смысл — это момент инерции



Момент инерции („дисперсия")

$$I = \sum_i (x_i - \bar{x})^2 m_i$$

5) Плотность распределения случайная велич. – это функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая удовлетв. двум условиям:

1) $f(u) \geq 0, \ \forall u \in \mathbb{R}$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du = 1.$

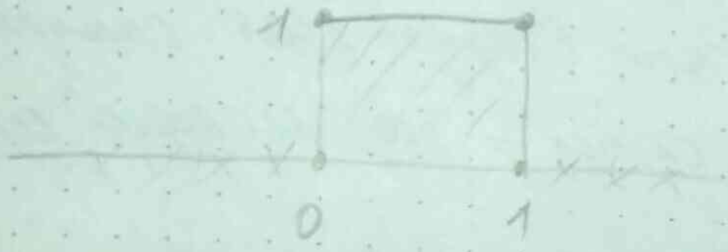
6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du = 1.$

7) Нет, не может.

8) Плотность распред-я не может равняться 0 при всех знач. аргумента (тогда не будет ~~выполнено~~ выполнено условие про то, что интеграл по всей прямой $=1$.

Единице, наверное, может.

Пример:



$f(u)$ определена на отрезке $[0, 1]$ (только)

9) $\mathbb{P}(X = x) = 0 = \int\limits_{x}^{x} f(u)\,du.$

Зад. 4

100 лампочек

Вер-ть, что 1 не загорится : p

Вер-ть что 1 загорится : $1-p$

1 лампочка – Бернуллиевская величина:

$$X_1 = \begin{cases} 1, & p \quad [\text{не загорится}] \\ 0, & 1-p \quad [\text{загорится}] \end{cases}$$

$$\mathbb{E}X_1 = 1 \cdot p + 0(1-p) = p$$

$$\operatorname{Var} X_1 = E[X_1^2] - (EX_1)^2 = p - p^2$$

$X_1, X_2, \dots, X_{100}$ – независимы

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \dots + X_{100}) = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2 + \dots + \mathbb{E}X_{100} =$$
$$= 100 \cdot \mathbb{E}X_1 = 100p.$$

$$\operatorname{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_{100}) = \operatorname{Var} X_1 + \dots + \operatorname{Var} X_{100} =$$
$$= 100 \operatorname{Var} X_1 = 100(p - p^2).$$

Зад. 3 $\quad X \sim B_p$

$$X = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases} \qquad \mathbb{E}\,\phi(X) = \sum_k \phi(a_k)\, p_k$$

$$\mathbb{E}(\cos(X) + 2) = \mathbb{E}(\cos(X)) + \underbrace{\mathbb{E}(2)}_{2} =$$

$$= p \cdot \cos(1) + (1-p) \cdot \cos(0) + 2 =$$

$$= p \cdot \cos(1) - p + 3.$$

Зад. 5 Один из 6 ключей открывает дверь. Пробуем ключи один за другим. Сколько в среднем ключей надо испыт.

=> то есть посчитать мат. ожидание.

Вероятность открыть дверь каждым ключом = 1/6

порядковый номер ключа

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$\mathbb{E}(X) = \sum_k a_k p_k = 3{,}5$$

Зад. 6 Вероятность пропустить дефектную деталь = 2%. После этого - регулировка. Найти среднее кол-во деталей между регулировками.

X	1	2	3	...
$\mathbb{P}$	$0{,}98 \cdot 0{,}02$	$0{,}98^2 \cdot 0{,}02$	$0{,}98^3 \cdot 0{,}02$	...

вероятность пропустить ровно 1 деталь (следующ. браков.)

Посчитаем мат. ожидание, это и будет ответ.

$$\mathbb{E}X = 1 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}02 + 2 \cdot 0{,}98^2 + 0{,}02 + \dots =$$
$$= 0{,}02(1 \cdot 0{,}98 + 2 \cdot 0{,}98^2 + \dots)$$

Докажем, что ряд сходится! 1) $a_n = n \cdot 0{,}98^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

2) Признак Коши: $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n \cdot 0{,}98^n} = 0{,}98 \lim\limits_{n \to +\infty} \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{<1} < 1$

=> Ряд сход.

$$\frac{\mathbb{E}X}{0,02} = \underbrace{0,98 + 0,98^2 + 0,98^3 + \dots}_{A_n}$$
$$+ \underbrace{0,98^2 + 0,98^3 + \dots}_{B_n}$$
$$+ \underbrace{0,98^3 + \dots}_{C_n}$$
$$+ \dots$$

$$\left(\sum(ax + ax^2 + ax^3 + \dots) = \frac{a}{1-x},\ x < 1\right)$$

$$A_n = \frac{1}{1-0,98} - 1 = 49$$

$$B_n = A_n \cdot 0,98$$

$$C_n = A_n \cdot 0,98^2$$

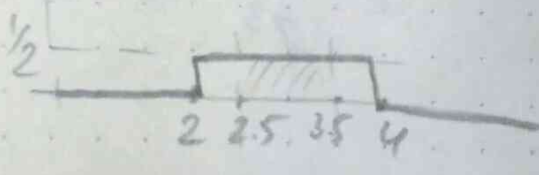
и т.д.

$$\Rightarrow \frac{\mathbb{E}X}{0,02} = A_n + A_n \cdot 0,98 + A_n \cdot 0,98^2 + \dots =$$
$$= 49 + 49 \cdot 0,98 + 49 \cdot 0,98^2 + \dots =$$
$$= \frac{49}{1-0,98} = 2450$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}X = 2450 \cdot 0,02 = 49$$

Зад. 7

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & x \in [2,4], \\ 0, & x \notin [2,4]. \end{cases}$$



$$\mathbb{P}(x \in [2.5, 3.5]) = \int_{2.5}^{3.5} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}x \Big|_{2.5}^{3.5} = \frac{1}{2}.$$

Зад. 8

$$f(u) = \begin{cases} c/u^4, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

а) Найти c.

$$\int_1^{+\infty} \frac{c}{u^4} du = 1 \ ; \quad c \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^4} du = 1 \ ; \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^4} du = \frac{1}{c}$$

$$-\frac{1}{3x^3}\Big|_1^{+\infty} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow c = 3$$

б) $$P(X<3) = \int_1^3 \frac{3}{u^4} du = 3\left(-\frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{3}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{3^3} \approx 0.96$$

в) $$P(X>7) = \int_7^{+\infty} \frac{3}{u^4} du = 3\left(0 + \frac{1}{3 \cdot 7^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{7^3} \approx 0.003$$