

## Занятие 2: 12 Сентября

Преподаватель: Антон Савостьянов

Ассистент: Даяна Мухаметшина

**Контакты:** Антон Савостьянов, почта: a.s.savostyanov@gmail.com, telegram: @mryodo  
Даяна Мухаметшина, почта: dayanamuha@gmail.com, telegram: @anniesss1

**Правила игры:** Домашние задания следует присылать в читаемом виде не позднее чем через две недели (после проведения занятия) на почту ассистента. В выполнении домашнего задания ценен любой прогресс

## 2.1 О-большое и о-малое

Зачастую в практических задачах бывает полезно не столько оценить поведение функции в точке (например, рассмотреть ее предел), сколько оценить ее поведение относительно некой другой функции. Более того, в задачах, связанных с алгоритмической обработкой данных, функция сложности или времени работы алгоритма плотно привязана к получаемым на вход неизвестным данным; поэтому вместо указания точного времени выполнения той или иной процедуры указывается только ее поведение относительно набора известных функций.

**Определение 2.1.** Пусть даны функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , определенные в окрестности точки  $a$  ( $a$  вполне может быть и бесконечным). Говорят, что функция  $f$  является *О-большим* от функции  $g$  в окрестности точки  $a$ , если найдется такая константа  $C > 0$ , что для любого  $x$  из данной окрестности точки  $a$ :

$$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)|$$

Другими словами, в окрестности точки  $a$  отношение  $|f|/|g|$  ограничено (если, конечно, задано: для этого требуется, чтобы функция  $g$  не принимала 0 в какой-нибудь окрестности точки  $a$ . Ясно, что такого требования нет в первой формулировке определения, поэтому данным отношением пользоваться следует аккуратно).

Обозначение:  $f(x) = O(g(x))$ ,  $x \rightarrow a$ .

**Определение 2.2.** Пусть даны функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , определенные в окрестности точки  $a$  ( $a$  вполне может быть и бесконечным). Говорят, что функция  $f$  является *о-малым* от функции  $g$  в окрестности точки  $a$ , если для любой константы  $C > 0$  найдется такая окрестность точки  $a$ , что для любого  $x$  из нее:

$$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)|$$

Перепишем формулировку при помощи кванторов:

$$\forall C > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq C|g(x)| \Leftrightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C$$

Несложно увидеть, что написанное здесь дословно совпадает с определением предела функции:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Говорят также, что функция  $f$  обладает более высоким порядком малости по сравнению с функцией  $g$ .

Обозначение:  $f(x) = \bar{o}(g(x)), \quad x \rightarrow a$ .

**Упражнение 1.** Качественно опишите, что значат для функции  $f(x)$  следующие равенства:

$$\text{a) } f(x) = \underline{O}(x), \quad x \rightarrow a \quad \text{b) } f(x) = \bar{o}(x), \quad x \rightarrow a$$

**Упражнение 2.** Как вы думаете, что означают следующие равенства:

$$\text{a) } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \bar{o}(x^2), \quad x \rightarrow 0 \quad \text{b) } n! = \underline{O}\left(\left(\frac{n}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right), \quad n \rightarrow +\infty$$

**Определение 2.3.** Пусть даны функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , определенные в окрестности точки  $a$  ( $a$  вполне может быть и бесконечным). Говорят, что функция  $f$  эквивалентна функции  $g$  в окрестности точки  $a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Обозначение:  $f(x) \sim g(x), \quad x \rightarrow a$ .

**Упражнение 3.** Проверьте, верны ли следующие равенства (если да, докажите их, если нет, опровергните):

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin^2 x &= \bar{o}(x), \quad x \rightarrow 0 & \text{b) } \sin x &= \bar{o}(x), \quad x \rightarrow 0 & \text{c) } \sin x &= \bar{o}(x), \quad x \rightarrow \pm\infty \\ \text{d) } e^{20} x^n &= \bar{o}(x^{n+1}), \quad x \rightarrow +\infty & \text{e) } e^{20} x^n &\neq \bar{o}(x^{n-1}), \quad x \rightarrow 0 \\ \text{f) } (x-1)^2 \left(5 + \sin \frac{1}{x-1}\right) &= \underline{O}((x-1)^2 + (x-1)^3), \quad x \rightarrow 1 \end{aligned}$$

**Упражнение 4.** Считая знаки равенства знаками принадлежности к классу (то есть  $f(x) = \bar{o}(x)$  должно читать как «функция  $f$  принадлежит классу функций, которые бесконечно малы по сравнению с  $x$ »), докажите следующие равенства:

$$\begin{aligned} \text{a) } \bar{o}(x^n) + \bar{o}(x^m) &= \bar{o}(x^n), \quad x \rightarrow 0, \quad n < m & \text{b) } \underline{O}(x^n) + \underline{O}(x^m) &= \underline{O}(x^m), \quad x \rightarrow +\infty, \quad n < m \\ \text{c) } \bar{o}(x^m) + \underline{O}(x^n) &= \underline{O}(x^n), \quad x \rightarrow 0, \quad n < m & \text{d) } x^k \cdot \bar{o}(x^n) &= \bar{o}(x^{n+k}), \quad x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

## 2.2 Непрерывность и дифференцируемость

**Определение 2.4.** Функция  $f(x)$  называется *непрерывной в точке  $a$* , если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

то есть предел функции в точке равен ее значению. Функция называется *непрерывной на множестве* (например, на отрезке), если она непрерывна в каждой точке данного множества.

**Упражнение 5.** Докажите, что если функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x = a$ , то выполняется:

$$f(x) = f(a) + o(x - a), \quad x \rightarrow a$$

**Теорема 2.5** (о промежуточном значении, Вейерштрасса-2). *Если непрерывная на отрезке  $f(x)$  функция принимает значения  $A$  и  $B$ , то она принимает все значения между ними.*

**Замечание 2.6.** Одним из применений данной теоремы является широко известный метод поиска корней серединным делением, а также алгоритмы бинарного поиска в программировании.

**Определение 2.7.** Пусть дана функция  $f(x)$ , выбрана точка  $x_0 = a$ . Приращением аргумента  $\Delta x$  будем называть разность между выбранной точкой  $a$  и произвольной точкой  $x$ :  $\Delta x = x - a$ ; соответствующим приращением функции будем называть разность между значениями функции в выбранной и произвольной точках:  $\Delta f = f(x) - f(a)$ ; несложно сообразить, что отношение  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  есть тангенс угла наклона прямой, проходящей через точки  $(a, f(a))$  и  $(x, f(x))$  (такую прямую называют секущей). Предельное значение такого отношения носит название производной  $\frac{df}{dx} = f'(a)$  в данной точке:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Часто рассматривают производную не в исключительной точке, а в каждой, то есть смотрят на  $f'(x)$  — функцию, которая для каждого  $x$  возвращает значение производной в данной точке. Такую функцию тоже называют производной.

**Определение 2.8.** Функцию, называют *дифференцируемой*, если ее приращение в точке  $x_0 = a$  хорошо аппроксимируется линейной функцией:

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

где  $\Delta x$  — есть приращение аргумента в данной точке, а  $A$  — некое вещественное число. Несложно показать, что  $A = f'(a)$ .

Величина  $df = A \cdot \Delta x = f'(a) \cdot \Delta x = f'(a)dx$  есть линейная составляющая приращения функции и называется *дифференциалом функции*.

**Теорема 2.9** (критерий дифференцируемости). Для функций одной переменной и только для них наличие производной в точке эквивалентно дифференцируемости в ней; более того, наилучшее линейное приближение функции реализуется на касательной в данной точке.

С геометрической точки зрения дифференцируемость означает две вещи:

- отсутствие «углов»: возможность проведения касательной в данной точке;
- хорошую приближаемость прямой в данной точке.

**Упражнение 6.** Пользуясь определением, посчитайте производные следующих функций в произвольной точке  $a$ :

$$a) f(x) = 2018 \quad b) f(x) = x^2 \quad c) f(x) = x^n \quad d) f(x) = \sin x$$

**Замечание 2.10.** Для взятия производной существует набор правил (в том числе и арифметических):

1. если  $f(x) \equiv c$ , то  $f' = 0$
2.  $(x^a)' = ax^{a-1}$
3.  $(e^x)' = e^x$
4.  $(f \pm g)' = f' \pm g'$
5. (правило Лейбница)  $(fg)' = f'g + g'f$
6.  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
7. (производная сложной функции)  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

**Упражнение 7.** Вычислите производные данных функций по правилам:

$$a) x^4 + 5x - 6 \quad b) f(x) = \sqrt{2x} + 3e^{-x} \quad c) f(x) = \frac{x^2}{1 + 2x} \quad d) f(x) = \ln x$$

$$e) f(x) = \sin \cos x \quad f) f(x) = x^x$$

**Определение 2.11.** Касательной к графику функции  $f(x)$  в точке  $a$  называется прямая, наиболее похожая на  $f(x)$  в окрестности данной точки, проходящая через точку  $(a, f(a))$ . Она же есть предельное положение секущих, описанных нами выше. Ее уравнение может быть записано как:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

**Упражнение 8.** Найдите уравнение касательной к графику функции  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  в точке  $x = 1$ .

## 2.3 Построение графиков функций

Существует общая процедура исследования функции для построения графика. Следует понимать, что получающаяся картинка не является точным графиком функции; на самом деле, она просто отображает некоторые найденные качественные характеристики функции, которые достаточно точно определяют нашу кривую.

Процедура исследования может быть описана следующим образом:

1. *Найти область определения функции и нули (такие  $x_0$ , что  $f(x_0) = 0$ ).*  
Часто это бывает сделать сложно и/или невозможно, поэтому ценно хотя представление о количестве нулей.
2. *Вычислить производную данной функции  $f'(x)$ .*
3. *Установить промежутки монотонности нашей функции: интервалы возрастания и убывания.*

**Определение 2.12.** Отрезок или интервал (говорят, сегмент)  $I$  из области определения функции  $f(x)$  называется промежутком возрастания (убывания), если для любых двух  $a$  и  $b \in I$  выполняется  $f(a) < f(b)$  ( $f(a) > f(b)$ ), если  $a < b$ . Аналогично можно определить нестрогую монотонность.

**Замечание 2.13.** Правило для определения промежутков возрастания по производной:

- (a) если  $f'(x) > 0$  на данном интервале, то функция  $f(x)$  монотонно возрастает;
  - (b) если  $f'(x) < 0$  на данном интервале, то функция  $f(x)$  монотонно убывает.
4. *Определить локальные экстремумы (точки минимума и максимума).*

**Определение 2.14.** Точкой глобального максимума (минимума) называется такая точка  $a$ , что для любого  $x$  из области определения  $f(x) < f(a)$  ( $f(x) > f(a)$ ), а само значение  $f(a)$  называется глобальным максимумом (минимумом).

**Определение 2.15.** Точкой локального максимума (минимума) называется такая точка  $a$ , что для любого  $x$  из некоторой (довольно узкой) окрестности точки  $a$  верно, что  $f(x) < f(a)$  ( $f(x) > f(a)$ ), а само значение  $f(a)$  называется локальным максимумом (минимумом). Локальный минимум и максимум называются также локальными экстремумами.

**Определение 2.16.** Точка  $a$  называется стационарной для функции  $f(x)$ , если  $f'(a) = 0$ .

**Замечание 2.17** (необходимое условие экстремума). Если функция  $f(x)$  имеет экстремум в точке  $a$  и дифференцируема в ней, то  $a$  является стационарной точкой функции  $f$ .

Обратное неверно!

**Упражнение 9.** Придумайте функцию, у которой:

- (а) достигается экстремум в точке, в которой она не дифференцируема;
- (б) стационарная точка не является экстремумом.

**Замечание 2.18** (достаточное условие экстремума). Если точка  $a$  стационарная для функции  $f(x)$  (то есть  $f'(a) = 0$ ) и в точке  $a$  меняет свой характер монотонности, то точка  $a$  — локальный экстремум, причем:

- (а) если  $f'(x)$  при переходе через точку  $a$  меняет знак с "минуса" на "плюс" то  $a$  — локальный минимум;
- (б) если  $f'(x)$  при переходе через точку  $a$  меняет знак с "плюса" на "минус" то  $a$  — локальный максимум.

**Упражнение 10.** Проверьте примеры из предыдущего упражнения с помощью данного условия. Все ли верно?

**Замечание 2.19** (Достаточное условие экстремума в терминах старшей производной). Если точка  $a$  стационарная для функции  $f(x)$  (то есть  $f'(a) = 0$ ) и дважды дифференцируема в ней (то есть можно взять производную от производной), причем  $f''(a) \neq 0$ , то:

- (а) если  $f''(a) > 0$ , то  $a$  — локальный минимум;
- (б) если  $f''(a) < 0$ , то  $a$  — локальный максимум.

5. Установить выпуклость функции и точки перегиба.

**Определение 2.20.** Хордой называется отрезок, соединяющий две точки на графике функции.

**Определение 2.21.** Функция называется *выпуклой вверх* на отрезке  $[a; b]$ , если лежит выше любой хорды на данном отрезке. Аналогично определяется выпуклость вниз (вогнутость).

**Замечание 2.22.** Если у функции существует вторая производная на области исследования, то:

- (а) если  $f''(x) > 0$  на данном интервале, то функция  $f(x)$  выпукла вниз (вогнута);
- (б) если  $f''(x) < 0$  на данном интервале, то функция  $f(x)$  выпукла вверх (выпукла).

**Определение 2.23.** Точкой перегиба называется такая точка  $a$ , что при переходе через нее меняется характер выпуклости.

**Замечание 2.24** (необходимое условие точки перегиба). Если функция  $f(x)$  имеет перегиб в точке  $a$  и дважды дифференцируема в ней, то  $f''(a) = 0$ .

Обратное неверно!

**Замечание 2.25** (достаточное условие точки перегиба). Если первая производная  $f'(x)$  непрерывна в окрестности точки  $a$ , вторая производная  $f''(a) = 0$  или не существует и вторая производная  $f''(x)$  меняет знак при переходе через точку  $a$ , то точка  $a$  является точкой перегиба.

#### 6. Найти асимптоты графика функции.

**Определение 2.26.** Асимптотой называется прямая, к которой стремится функция при приближении одной из координат графика к бесконечности. Выделяют два вида асимптот: вертикальные и наклонные.

**Определение 2.27.** Вертикальной асимптотой называется прямая  $x = a < \infty$ , если выполняется хотя бы одно из следующих равенств:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty$$

**Замечание 2.28.** Если функция непрерывна на всем множестве действительных чисел  $\mathbb{R}$ , то она не может иметь вертикальных асимптот!

**Определение 2.29.** Наклонной асимптотой называется прямая вида  $y = kx + b$ , к которой стремится функция при приближении  $x$  к бесконечности. Числа  $k$  и  $b$  могут быть вычислены следующим образом:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - k \cdot x$$

Нужно отметить, что асимптоты на разных бесконечностях совпадать не обязаны, равно как и присутствовать вообще.

**Упражнение 11.** Пользуясь описанной выше процедурой, постройте насколько возможно графики следующих функций, указав:

1. промежутки монотонности
2. локальные экстремумы
3. точки перегиба
4. асимптоты

$$\text{a) } f(x) = xe^{2x} \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1} \quad \text{c) } f(x) = \frac{x^3 + 1}{x} \quad \text{d) } f(x) = \ln \sin x$$

## 2.4 Числовые ряды

**Определение 2.30.** Числовым рядом называется формальное выражение вида

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots,$$

где все  $a_i$  — некие действительные числа.

Сумму первых  $n$  чисел называют *частичной суммой ряда*:

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Суммой ряда называют предел последовательности частичных сумм:

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sum_{i=1}^n a_i \right]$$

В зависимости от того существует ли этот предел или нет, ряд называют *сходящимся* и *расходящимся* соответственно.

**Упражнение 12.** Вычислите частичные суммы рядов:

- |   |   |
|---|---|
| (a) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$   | (c) $\frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \dots$ |
| (b) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$ | (d) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$   |

Часто оказывается так, что вычислить сумму ряда гораздо сложнее, чем установить его сходимости. Поэтому используют набор признаков для качественного анализа ряда на предмет наличия суммы.

**Замечание 2.31** (Необходимое свойство сходимости). Если ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится, то  $a_n \rightarrow 0$ .

**Замечание 2.32** (Признак сравнения). Пусть есть два ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ , состоящие только из положительных членов, причем, начиная с некоторого  $n$ ,  $a_n < b_n$ . Тогда:

- |   |   |
|---|---|
| (a) если $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \rightarrow$ , то и $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \rightarrow$ ; | (b) если $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \nrightarrow$ , то и $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \nrightarrow$ ; |
|---|---|

**Упражнение 13.** Используя ряд  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$ , покажите сходимости такого ряда:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Как Вы думаете, к чему сходится такой ряд?