МдАД: Математический анализ **Осень 2018**

Занятие 4: 26 Сентября

Преподаватель: Антон Савостьянов *Асситент: Даяна Мухаметшина*

Контакты: *Антон Савостьянов, почта:* a.s.savostyanov@gmail.com, *telegram:* @mryodo
Даяна Мухаметшина, почта: dayanamuha@gmail.com, *telegram:* @anniesss1

Правила игры: *Домашние задания следует присылать в читаемом виде не позднее чем через две недели (после проведения занятия) на почту ассистента. В выполнении домашнего задания ценен любой прогресс*

4.1 Функции двух переменных

Определение 4.1. Функцией двух переменных называется функциональное отображение из плоскости, то есть $\mathbb{R}^2$, в $\mathbb{R}$. Как и функции одной переменной, у функции двух переменных есть множество допустимых аргументов, то есть множество допустимых пар (x, y), при которых задана функция.

Как и раньше, графиком функции называется множество точек $(x, y, f(x, y))$; если раньше речь шла о кривых, то графиком функции двух переменных будет являться поверхность.

Упражнение 1. Найдите области определения функций:

(a) $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - y^2)$ (b) $f(x, y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$

Упражнение 2. Постройте эскиз графика функции:

(a) $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ (b) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ (c) $f(x, y) = y^2 + 1$

Определение 4.2. Линией уровня (или кривой) называется множество точек (x, y) таких, что $f(x, y) = C$, где C — некоторая константа, тот самый уровень. Альтернативным способом изображения функций двух переменных (не в виде поверхности) как и раз и является график линий уровня для разных C. Линии уровня для разных C не пересекаются.

Упражнение 3. Нарисуйте несколько линий уровня и укажите направление роста для следующих функций:

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ (b) $f(x, y) = (2x - 3y)^6$ (c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$

Определение 4.3. Пусть $f(x, y)$ задана в некоторой окрестности точки (a, b). Предел функции $f(x, y)$ при стремлении (x, y) к (a, b) равен A, если значения функции $f(x, y)$ отличаются от A меньше любого наперед заданного числа в какой-нибудь окрестности точки (a, b). Обозначение: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = A$.

Иными словами: как бы не подходили по плоскости xOy к точке (a, b) — по спирали, по прямой, дискретно — предел значений функции на этом пути все равно должен быть A.

В реальности показать, что функция двух переменных имеет какой-либо предел в точке гораздо сложнее, чем в случае одной переменной: до этого мы говорили исключительно о подходах слева и справа (пределы слева и справа), однако сейчас же мы вынуждены рассматривать всевозможные направления подхода, коих теперь целая площадь.

Для примера рассмотрим предел функции $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$ в точке $(0, 0)$: рассмотрим несколько направлений $(0, t)$, $(0, t)$, (t, t) и $(t, 2t)$. Несложно понять, что в первых двух случаях функция на этих прямых, совпадающих с координатными осями, функция тождественно равна 0; на третьем направлении — 2, а на четвертом — $\frac{5}{2}$. В результате, функция предела в точке, разумеется, не имеет, хотя выглядит довольно приятным образом: как частное полиномов одинаковой степени.

Все это легко позволяет доказывать отсутствие предела, но затрудняет процесс доказательства наличия. Специально для этого приведем следующий фокус:

Замечание 4.4. Пусть требуется найти предел функции $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$; допустим, мы хотим доказать, что предел равен A. Тогда можно выполнить замену $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Если в результате окажется, что можно провести оценку

$$|f(x, y) - A| = |f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - A| \leq G(r) \to 0,$$

то считается доказанным, что предел функции равен A.

Замечание 4.5. Как найти число A — кандидата в пределы? Например, по любому выбранному направлению; хорошим вариантом будет (t, t).

Замечание 4.6. Приведенные методы все еще являются довольно сложными: самым простым вариантом будет разбить функцию двух переменных на композицию функций одной переменной (либо x, либо y) без создания неопределенностей (что, конечно, возможно совсем не всегда).

Определение 4.7. Функция $f(x, y)$ непрерывна в точке (a, b), если $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$

Упражнение 4. Вычислите предел и проверьте на непрерывность:

(a) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} 3x^2 - 2xy^3$

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2y+2yx^2}$

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

4.2 Частные производные и дифференцируемость

Как мы уже выясняли раньше, понятие дифференцируемости для функции одной переменной связано не столько с производной, сколько со способностью быть хорошо приближенной прямой (которая, в свою очередь, уже задается при помощи производной). Только вооружившись таким соображением, его удобно переносить на случай функций двух переменных: функция называется дифференцируемой, если она хорошо приближается касательной плоскостью. Поскольку представление о методах задания плоскостей является слишком большой и отвлеченной частностью для нашего курса, построим определение с обратной стороны:

Определение 4.8. Если дана функция $f(x, y)$, то частной производной по x $f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ в точке (a, b) (частной производной по y $f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ в точке (a, b)) называется величина:

$$f'_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

$$f'_y(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

То есть по сути своей частной производной называется производная функции по одной из переменных, в рамках взятия которой все оставшиеся переменных считают константами и в расчет принимаются исключительно как таковые.

Геометрически, частные производные есть углы наклона касательных к кривых, получающимся в результате сечения поверхности $f(x, y)$ плоскостями $y = b$ и $x = a$ соответственно. На эти касательные как раз и разумно положить приближающую нашу кривую касательную плоскость.

Упражнение 5. Вычислите частные производные функции $f(x, y) = \sin(x^2 + 3y^2)$. Посчитайте также вторые частные производные f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx} и f''_{yy}, где в нижнем индексе указан порядок дифференцирования. Как вы думаете, всегда ли некоторые из них будут совпадать?

Определение 4.9. Касательной плоскостью для функции $f(x, y)$ в точке (a, b) называется плоскость, удовлетворяющая следующему уравнению:

$$z - f(a, b) = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$$

Величина, стоящая в правой части, $f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$ называется дифференциалом df функции $f(x, y)$ и является линейной (только теперь плоскостной) составляющей приращения функции.

Упражнение 6. Найдите касательные плоскости к функциям в точке:

(a) $f(x,y) = y\cos(x-y)$ в точке $(2,2)$ (b) $x^5 - x^3 + y^2 + z^2 = 0$ в точке $(2,2,2)$

Определение 4.10. Функция $f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке, если она похожа на свою касательную плоскость:

$$f(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) + \overline{o}\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)$$

Величина $\rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ есть расстояние между точкой касания и рядом стоящей точкой (x,y). Часто определение дифференцируемости записывают в более короткой форме:

$$\Delta f = df + \overline{o}(\rho)$$

Замечание 4.11. В случае функции двух переменных (в отличии от функции одной переменной) наличия частных производных недостаточно для дифференцируемости (но необходимо)!

Упражнение 7. Проверьте функцию $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ на дифференцируемость в точке $(0,0)$.

Замечание 4.12. Для того, чтобы функция была дифференцируемой в данной точке, достаточно непрерывности ее первых частных производных как функций двух переменных в данной точке. Данное условие позволяет не проверять сложное определение дифференцируемости для широкого класса элементарных функций, например, для полиномов.

Если функция дифференцируема, то она хорошо приближаема линейной плоскостью. Это знание можно использовать для вычисления примерных значений функции (говорят, «с помощью линейной аппроксимации»):

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$

Упражнение 8. С помощью линейной аппроксимации вычислите

(a) значение функции $2x^2 + y^2$ в точке $(1.1, 0.95)$

(b) значение выражения $\sqrt{(3.02)^2 + (1.97)^2 + (5.99)^2}$

4.3 Производная по направлению и градиент

Несложно заметить, что частные производные — это производные функций одной переменной, полученные в результате сечения графика поверхности двумя специальными плоскостями, проходящими через данную точку. Возможно ли посчитать производные в других сечениях? Оказывается, что да; для начала договоримся, что задавать такие сечения, которые всегда будут происходить при помощи вертикальной плоскости, мы будем только направляющим вектором в плоскости xOy (например, для плоскости $y = b$ направляющим будет вектор $(1,0)$).

Определение 4.13. Производной функции $f(x, y)$ по направлению единичного вектора $u = (\alpha, \beta)$ в точке (a, b) называется величина:

$$f'_u(a, b) = \frac{\partial f}{\partial u}(a, b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\alpha, b + t\beta) - f(a, b)}{t}$$

Определение 4.14. Градиентом функции $f(x, y)$ в данной точке (a, b) называется вектор первых производных в точке:

$$\text{grad} f(a, b) = \nabla f(a, b) = \big(f'_x(a, b), f'_y(a, b)\big)$$

Теорема 4.15. *Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (a, b) и вектор $u = (\alpha, \beta)$ — единичный вектор направления, то*

$$f'_u(a, b) = \frac{\partial f}{\partial u}(a, b) = \langle \nabla f(a, b), u \rangle = f'_x(a, b)\alpha + f'_y(a, b)\beta$$

Символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает обычное школьное скалярное произведение («сумма поэлементных произведений координат»); напомним, что у него есть альтернативная запись $(x, y) = |x| \cdot |y| \cos\langle x, y \rangle$. Положим, точка и функция, а следовательно и градиент фиксированы; более того, длина вектора направления u фиксирована (и равна 1). Значит, из всех возможных направлений, по которым можно посчитать производную функции многих переменных, наибольшим окажется направление, для которого $\cos\langle x, y \rangle = 0$, то есть совпадающее с градиентом. Иными словами:

Замечание 4.16. Градиент — направление наибольшего роста функции.

Упражнение 9. Вычислите производную функции $f(x, y) = x^3 y - 4x$ в точке $(2, -1)$ по направлению $u = (3, 4)$.

Упражнение 10. Найдите направление наибольшего роста функции $f = ye^x$. Вычислите производную по данному направлению (то есть скорость наибольшего роста функции).

Упражнение 11. Изобразите линии уровня функции $f(x, y) = x^2 - y^2$ и несколько векторов градиентов в данных точках. Как соотносятся построенные кривые друг с другом?

4.4 Ряд Тейлора

Для начала обсудим дифференциалы высших порядков. Рассмотрим дифференциал первого порядка

$$df = f'_x(x - a) + f'_y(y - b).$$

Что же такое операция взятия дифференциала от произвольной функция? Это взятие суммы производных с домножением на приращение производных:

$$d(\cdot) = (\cdot)' x(x - a) + (\cdot)'_y(y - b)$$

Теперь мы можем определить второй дифференциал:

$$d^2f = d(df) = d(f'_x(x-a) + f'_y(y-b)) = \\ = (f'_x(x-a) + f'_y(y-b))'_x(x-a) + (f'_x(x-a) + f'_y(y-b))'_y(y-b) = \\ = f''_{xx}(x-a)^2 + 2f''_{xy}(x-a)(y-b) + f''_{yy}(y-b)^2$$

Продолжая рассуждения аналогичным образом, можем получить $d^n f$.

Определение 4.17. Рядом Тейлора для функции $f(x,y)$ в точке (a,b) называется выражение:

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{df(a,b)}{1!} + \frac{d^2f(a,b)}{2!} + \ldots + \frac{d^nf(a,b)}{n!} + R_n(x,y)$$

В частности для $n=2$:

$$f(x,y) = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) + \\ + \frac{f''_{xx}(x-a)^2 + 2f''_{xy}(x-a)(y-b) + f''_{yy}(y-b)^2}{2!} + R_2(x,y)$$

Как и для функции одной переменной, приведем два вида остаточного члена: $R_2(x,y) = \overline{o}((x-a)^2 + (y-b)^2))$ (Пеано) и $R_2(x,y) = \frac{d^3f(\alpha,\beta)}{3!}$ (Лагранж), $\alpha \in (a,x)$, $\beta \in (b,y)$.

Упражнение 12. Найдите многочлен $P(x,y)$ второй степени такой, что $P(2,1) = 1$, $P'_x(2,1) = -1$, $P'_y(2,1) = 0$, $P'_{xx}(2,1) = P'_{yy}(2,1) = 4$, $P'_{xy}(2,1) = -1$.

4.5 Безусловные экстремумы

Как и раньше, будем говорить, что функция имеет локальный экстремум в данной точке, если для некоторой ее окрестности функция реализует строгое (или нестрогое) максимальное или минимальное значение. Рассмотрим только случай, когда функция дифференцируема в точке хотя бы дважды:

Теорема 4.18 (Необходимое условие экстремума)**.** *Пусть функция $f(x,y)$ дважды дифференцируема в окрестности точки (a,b). Тогда если она имеет локальный минимум или максимум в точке (a,b), то*

$$f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$$

Такие точки, как и раньше, называют стационарными или критическими.

Теорема 4.19 (Достаточное условие экстремума)**.** *Пусть функция $f(x,y)$ дважды дифференцируема в окрестности своей стационарной точки (a,b). Вычислим величину D:*

$$D = f''_{xx}(a,b)f''_{yy}(a,b) - (f''_{xy}(a,b))^2$$

- *Если* $f''_{xx}(a, b) > 0$ *и* $D > 0$, *то точка* (a, b) *является локальным минимумом;*
- *Если* $f''_{xx}(a, b) < 0$ *и* $D > 0$, *то точка* (a, b) *является локальным максимумом;*
- *Если* $D < 0$, *то* (a, b) *не является экстремумом (она седловая)*
- *Если* $D = 0$, *то требуется дальнейшее исследование. Фактически такая ситуация означает, что даже если в данной точке и будет экстремум, то он будет нестрогий.*

Замечание 4.20. Сравните написанное с разложением в ряд Тейлора до второго слагаемого выше. Описанная процедура позволяет определить знак d^2f для всех (x, y). Подумайте, почему в данном случае для экстремума важен знак только второго дифференциала?

Упражнение 13. Исследуйте на экстремумы следующие функции двух переменных:

(a) $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

(b) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

(c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$

4.6 Условные экстремумы

Часто бывает, что требуется не просто максимизировать функцию $f(x, y)$, найти максимум при выполнении некоторого числа условий (их обычно называют ограничениями) вида $g_1(x, y) = 0$, $g_2(x, y) = 0$) и так далее.

Например, если мы решим минимизировать функцию $f(x, y) = x^2 + y^2$ без каких-либо условий, то мы легко обнаружим один единственный минимум в точке $(0, 0)$. Однако если мы добавим условие $x + y - 5 = 0$, то несложно увидеть (приведите иллюстрацию), что минимум будет достигаться в точке $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$, которая ни в коем случае не экстремум и даже не стационар изначальной функции.

Для решения задач по поиску условного экстремума используют специальный метод, получивший название «метод множителей Лагранжа». Идея его заключается в построении новой целевой функции, которую исследуют на экстремумы.

Определение 4.21. Пусть дана функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и k функций ограничений: $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, …, $g_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Тогда функцией Лагранжа называется следующая функция:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots \lambda_k g_k$$

Теорема 4.22 (Необходимые условия условного экстремума). *Если точка* $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ *является условным экстремумом, то в ней:*

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = 0$$

Этой теоремы, конечно, недостаточно, чтобы указать наличие условного экстремума, однако достаточное условие гораздо сложнее. Приведем только лишь его частный случай:

Теорема 4.23. *Пусть дана $f(x,y)$ с ограничением $g(x,y)=0$. Пусть в точке (a,b) выполняется необходимое условие выше. Тогда рассмотрим величину:*

$$D = 2g'_x(a,b)g'_y(a,b)L''_{xy}(a,b) - (g'_x(a,b))^2L''_{yy}(a,b) - (g'_y(a,b))^2L''_{xx}(a,b)$$

Если $D>0$, то (a,b) — максимум; если $D<0$, то (a,b) — минимум; если $D=0$, то это не экстремум.

Упражнение 14. Исследуйте на условные экстремумы функцию $f(x,y)=x-2y$ при условии $g(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2=2$.

Упражнение 15. Исследуйте на условные экстремумы функцию $f(x,y)=y$ при условии $g(x,y)=x^2+y^3=0$.

4.7 Интегралы

Аналогично геометрическому смыслу одномерных определенных интегралов, интеграл от функции двух переменных — это объем под графиком функции. Естественным образом, если раньше мы ограничивали отрезок на прямой Ox для подсчета плоскости, то теперь придется ограничивать замкнутую фигуру на плоскости xOy.

Для начала научимся интегрировать по прямоугольникам $\Pi=[a,b]\times[c,d]$ на плоскости. На самом деле, идея такого интегрирования проста: давайте интегрировать по очереди: сначала по x, считая y константой, а потом получившийся результат по y (это и есть теорема Фубини о сведении кратного интеграла к повторному):

$$\iint_\Pi f(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

Если же область A, по которой мы интегрируем, непрямоугольная, то можно следовать такому алгоритму: выберем свободную переменную, x или y, про которую укажем, в каких численных пределах она меняется в данной области: например, $x\in[a,b]$. Для каждого (очень важно, что для каждого) x можно указать, в каких пределах меняется y — получатся две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$; с точки зрения x это две «крышки» снизу и сверху, которые в соединении дают нашу область A. Например, если мы смотрим на окружность $x^2+y^2\leq 1$, то можно выбрать $x\in[-1,1]$, $y_1(x)=-\sqrt{1-x^2}$, $y_2=\sqrt{1-x^2}$. Тогда интеграл можно вычислить в следующем порядке:

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

Иногда оказывается, что область можно свести к прямоугольной при помощи замены координат: $x = h(u,v), y = g(u,v)$. Таким образом мы перешли от (x,y) к (u,v). Например, для той же окружности $x^2 + y^2 \leq 1$ можно сделать замену $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, которая приведет к $r^2 \leq 1$, то есть $r \leq 1$. Поскольку разумно менять в ограничениях $\varphi \in [0; 2\pi]$ (поскольку это угол с осью Ox, $r \geq 0$ (поскольку это расстояние до 0), то область из круглой станет прямоугольной: $[0; 2\pi] \times [0; 1]$. К сожалению, при замене координат требуется сделать поправку на изменение размера единичного квадратика, называемую Якобианом:

$$J(u,v) = x'_u y'_v - y'_u x' v$$

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \iint_\Pi f(h(u,v), g(u,v))J(u,v)dudv$$

Если замена проведена корректно, то Якобиан замены не должен менять знак в области.

Упражнение 16. Вычислите $\iint_\Pi e^{x+3y}dxdy$, где $\Pi = [0,1] \times [0,3]$.

Упражнение 17. Вычислите $\iint_A x + y\, dxdy$, где $A = \{(x,y) \mid x^2 \leq y \leq x\}$.