Д/З: МАТАН 3 : 22 сентября

Зад. 1.

$$\frac{2}{3\cdot5}+\frac{2}{5\cdot7}+\frac{2}{7\cdot9}+\dots\frac{2}{(2n+1)\cdot(2n+3)}+\dots =$$

$$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}$$

$$= \frac{2}{3}-\cancel{\frac{2}{5}}+\cancel{\frac{2}{5}}-\cancel{\frac{2}{7}}+\dots \Rightarrow$$

$$S_n=\frac{2}{3}-\underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{\downarrow n\to\infty \; 0} \; ; \quad \underset{n\to\infty}{S}=\frac{2}{3}$$

Зад. 2

а) $$\frac{1^2}{4^1}+\frac{2^2}{4^2}+\dots+\frac{n^2}{4^n}+\dots$$

Необх. св-во сход-ти: $a_n\to0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4^n}\ \cancel{\to}\ \neq 0$$ (n^2 растёт быстрее, чем 4^n уб…

$\Rightarrow$ ряд расходится

в) $$\left(\frac{1}{4}\right)^1+\left(\frac{2}{7}\right)^2+\dots+\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n+\dots$$

Необх. св-во сходимости: $$a_n=\left(\underbrace{\frac{n}{3n+1}}_{<1}\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Признак Коши:

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\underbrace{\left(\frac{n}{3n+1}\right)}_{>0}{}^n}=\frac{n}{3n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{3n+1}{n}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow 0}}\right)=\frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3}<1 \Rightarrow$ Ряд сходится

Зад. 3

$f(x)$ в т.0

а) $e^{1/4}$ до хилядни

$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

$(e^x)' = e^x$

$x = \frac{1}{4}$

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$; $f^{(n+1)}(x) = e^x$; $f^{(n+1)}(c) = e^c$

$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$, $c \in (0, \frac{1}{4})$

$|R_n(x)| \leq \frac{1}{1000}$; $\frac{e^c}{(n+1)!\,4^{n+1}} \leq \frac{1}{1000}$;

$(n+1)!\,4^{n+1} \geq e^c$; $e < 3$; $e^c < 3^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}32$

$(n+1)!\,4^{n+1} \geq 1400$; $n \geq 3 \Rightarrow n = 4$

Отг: $e^x \approx 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16\cdot 2} + \frac{1}{64\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{256\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{7889}{6144} =$

$= 1{,}2840$

б) $(2{,}01)^7$ с точност до $1/100$

$f(x) = (x+2)^7$ в точка 0

$f(x) = 2^7 + 7\cdot 2^6\cdot x + \dots + R_n(x)$

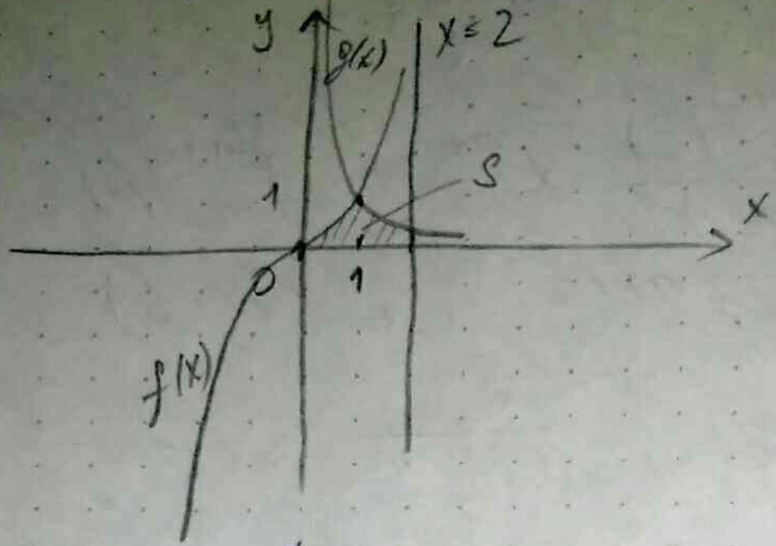
$R_n(x) = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot (2{,}01)^4\cdot (0{,}01)^3}{2\cdot 3} < \frac{1}{100} \Rightarrow n \geq 2$

$(2{,}01)^7 \approx 2^7 + 7\cdot 2^6\cdot 0{,}01 + \frac{7\cdot 6\cdot 2^5\,(0{,}01)^2}{2} =$

$= 128 + 4{,}48 + 0{,}0672 = 132{,}5472$

Зад. 4 Найти площадь, огранич.:

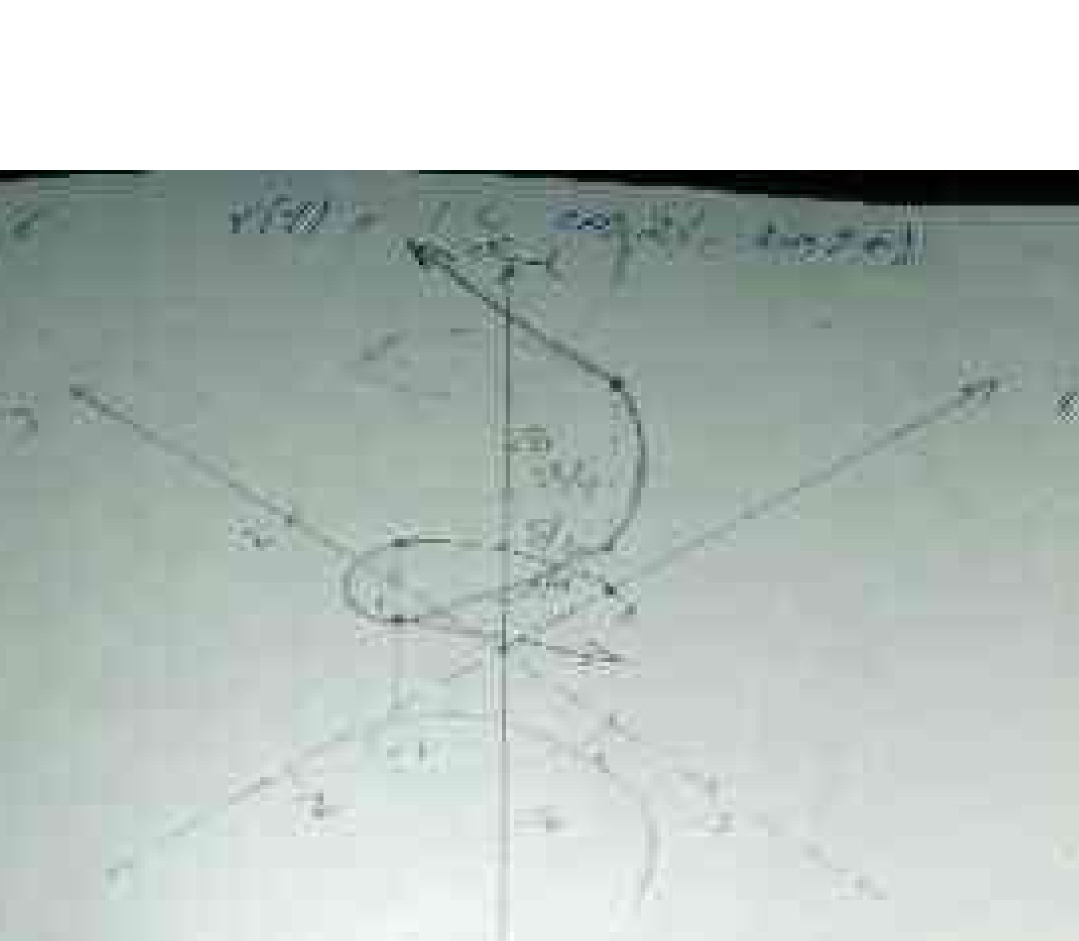
$f(x) = x^3$, $g(x) = \frac{1}{x}$, Ox, $x = 2$



$$S = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \int_0^1 x^3\,dx = \ln x \Big|_1^2 + \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 =$$

$$= \ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{0} + \frac{1}{4} = \ln 2 + \frac{1}{4}$$

[illegible]



t	$\cos 2t$	$\sin 2t$
[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible]

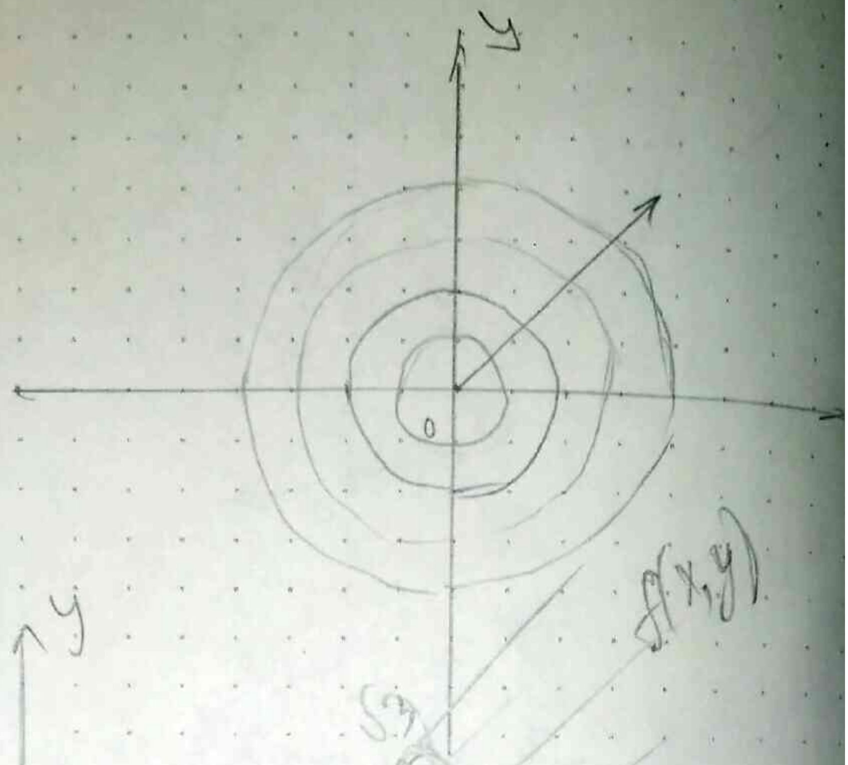
Зад. 6. На плоскости xOy нарис линии уровня $f(x,y) = 4x^2 + 4y^2 + 4$

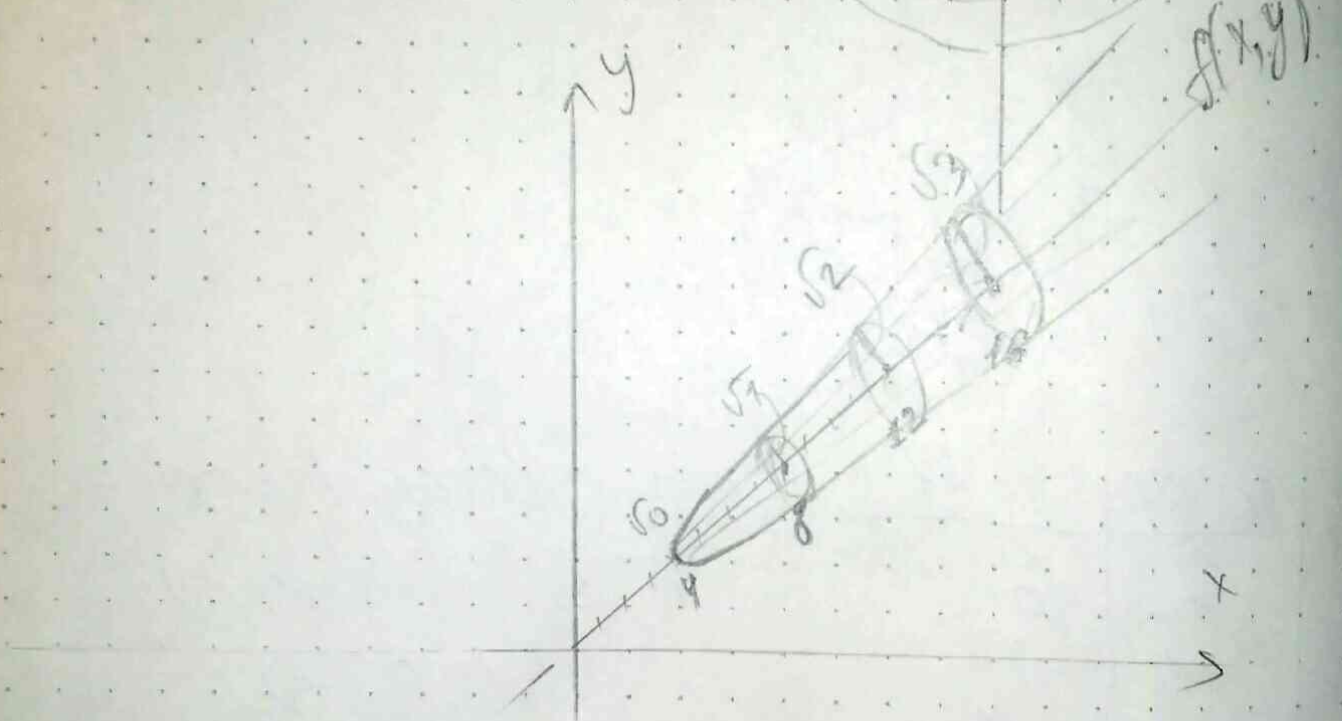
$$4x^2 + 4y^2 + 4 = c$$

$$4(x^2 + y^2 + 1) = c$$

$$x^2 + y^2 + 1 = c$$

$$x^2 + y^2 = c - 1$$





Область определения : $x \in R$, $y \in R$

Область значений : $f(x,y) \geq 4$.