Теорвер 1

Упр. 1

1. Пространство элемент. исходов — множество Ω, содержащее все возможные взаимоисключающие результаты данного случайного эксперимента. Элемент. множества Ω — элементарные исходы.

2. Нет, одновременно не могут (т.к. взаимоисключающие)

3. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

4. $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

5. Вероятность не может принимать знач < 0 и > 1.

6. Да, условная вероятность может равняться нулю

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 0 : \text{при } P(A) = 0 \Rightarrow$$

$$P(AB) = 0 \Rightarrow P(A|B) = 0$$

Пример: Игральную кость подбрас. один раз. Какова вероятность того, что выпадет нечетное число, при условии, что выпало > 3 очков?

Да, условная вероятность может ~~равняться~~ равняться единице

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 1 \quad : \quad \text{при}$$

$$P(AB) = P(B) \neq 0 \quad ; \quad P(A) = 1 \Rightarrow P(AB) = P(B)$$

Пример: Игр. кость подбрас. один раз. Какова вероятность того, что выпадет целое число при условии, что выпало > 3 очков?

7. Разбиение — конечный счетный набор $H_1, H_2 \ldots$, попарно непересек. (несовместных) событий, объединение которых есть все множ. эл. исходов Ω

$$\sum P(H_i) = P(\Omega) = 1$$

8. Формула Байеса пересчитывает вероятность гипотезы при условии, что событие произошло т.е. позволяет переоценить априорную вероятность после того, как получено знание о рез-те экспер.

9. Математич. ожидание (физич. смысл) — это координата „центра тяжести" прямой на которой распределили единичную массу (поместив в точки a_i массу p_i).
Это точка равновесия системы.

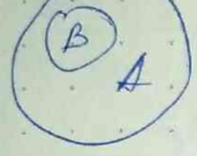
Упр. 2. Р - решка, Г - герб

$$\Omega = \{Г, РГ, РРГ, РРРГ, \dots\}$$

Ω - бесконечное счетное множество.

Упр. 3

1. Док-ть: если $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$



$$P(B) = P(A) - P(A \setminus B), \quad P(A \setminus B) \geq 0$$

$$\Rightarrow P(B) \le P(A)$$

2. Док-ть: $P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$

Ранее доказали, что $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\geq 0} \Rightarrow$

$$P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$$

Упр. 4

I	II
70%	30%
брак: 4%	брак: 1%

Найти условную вероятность того, что $\overbrace{\text{изделие хорошее}}^{X}$, если оно было $\underbrace{\text{признано дефектным}}_{ПД}$.

$$P(X \mid ПД) = 0.7 \cdot 0.04 + 0.3 \cdot 0.01 =$$

$$= 0.028 + 0.03 = 0.0338$$

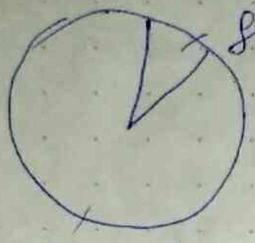
Ответ: 3.38%

Упр 5 Вероятность обнар. дефект в дефектном изделии = 0.8

Вероятность принять хорошее за дефектное = 0,05

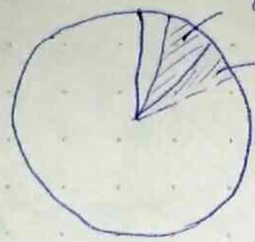
Доля дефектных = 0,05

Найти: условную вер-ть того, что изделие хорошее, если оно было признано дефектным.



деф. 0.05

хорошее 0.95



опред. деф. в деф.

опред. деф. в хорош.

$$0.05 \cdot 0.95 = \frac{5}{100} \cdot \frac{95}{100} = \frac{475}{10000} = 0.0475$$

Ответ: 0.0475

Упр. 6 Брос. игр. кость, затем монет в кол-ве, равном номеру на кости.

Какова вероятность получить 6 орлов?

1	2	3	4	5	6
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	$\boxed{1/6}$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{1}{6 \cdot 2^6} = \frac{1}{384}$

Какова вероятность получить 1 орел?

Всего один орел: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

Хотя бы один орел:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{32}\right) + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{64}\right) = \frac{1}{6}\left(5 - \frac{1}{64}\right) = \frac{319}{384}$$

P(хотя бы один орел) = 1 − P(все решки одновр).

Упр 7

X	0	2	4	8
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\mathbb{E}X = 0\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8}\cdot 8\cdot\frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

Упр 8

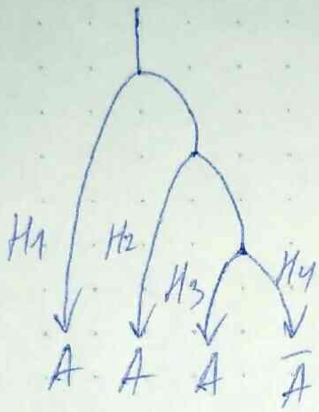
$P(\text{опозд. 1 комп.}) = \frac{4}{10}$

$P(\text{опозд 2 комп}) = \frac{2}{10}$

$P(\text{опозд 3 комп}) = 1/10$

A – груз опоздал $= 1$

$\overline{A}$ – груз успел $= 0$



H_1: опоздала 1-я комп.

H_2: первая не опозд., но опоздала 2-я

H_3: первая и вторая не опозд., но опозд. 3-я

H_4: все пришли вовремя

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum P(H_i)P(A|H_i)}, \quad k = 1 \ (H_k = H_1)$$

$P(A|H_i)$: $P(A|H_1) = P(A|H_2) = P(A|H_3) = 1$

$P(A|H_4) = 0.$

$P(H_1) = \frac{4}{10}$, $P(H_2) = \frac{6}{10}\cdot\frac{2}{10}$, $P(H_3) = \frac{6}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{1}{10}$,

$P(H_4) = \frac{6}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{9}{10}$

$$P(H_1|A) = \frac{4/10\cdot 1}{\left(\frac{4}{10}\cdot 1 + \left(\frac{6}{10}\cdot\frac{2}{10}\right)\cdot 1 + \left(\frac{6}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{1}{10}\right)\cdot 1 + 0\cdot\left(\frac{6}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{9}{10}\right)\right)} =$$

$$= \frac{\frac{400}{1000}}{\frac{400}{1000} + \frac{120}{1000} + \frac{48}{1000}} = \frac{400}{568}$$