МдАД: Математический анализ **Осень 2018**

Занятие 3: 22 Сентября

Преподаватель: Антон Савостьянов *Асситент: Даяна Мухаметшина*

Контакты: *Антон Савостьянов, почта:* a.s.savostyanov@gmail.com, *telegram:* @mryodo
Даяна Мухаметшина, почта: dayanamuha@gmail.com, *telegram:* @anniesss1

Правила игры: *Домашние задания следует присылать в читаемом виде не позднее чем через две недели (после проведения занятия) на почту ассистента. В выполнении домашнего задания ценен любой прогресс*

3.1 Числовые ряды

Определение 3.1. *Числовым рядом* называется формальное выражение вида

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots,$$

где все a_i — некие действительные числа.

Сумму первых n чисел называют *частичной суммой ряда*:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Суммой ряда называют предел последовательности частичных сумм:

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i\right]$$

В зависимости от того существует ли этот предел или нет, ряд называют *сходящимся и расходящимся* соответственно.

Упражнение 1. Вычислите частичные суммы рядов:

(a) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$

(b) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots$

(c) $\dfrac{2}{3\cdot 5} + \dfrac{2}{5\cdot 7} + \dfrac{2}{7\cdot 9} + \ldots$

(d) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

Часто оказывается так, что вычислить сумму ряда гораздо сложнее, чем установить его сходимость. Поэтому используют набор признаков для качественного анализа ряда на предмет наличия суммы.

Замечание 3.2 (Необходимое свойство сходимости)**.** Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то $a_n \to 0$.

Замечание 3.3 (Признак сравнения)**.** Пусть есть два ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, состоящие только из положительных членов, причем, начиная с некоторого n, $a_n < b_n$. Тогда:

(a) если $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \to$, то и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \to$;

(b) если $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \nrightarrow$, то и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n \nrightarrow$;

Замечание 3.4 (Признак Даламбера)**.** Данный признак является по сути признаком сравнения с конкретным рядом, однако его удобно формулировать отдельно. Если дан знакопостоянный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = p$:

(a) если $p < 1$, то ряд сходится;

(b) если $p > 1$, то ряд расходится;

(c) если $p = 1$, то признак бесполезен.

Замечание 3.5 (Признак Коши)**.** Данный признак является по сути признаком сравнения с конкретным рядом, однако его удобно формулировать отдельно. Если дан знакопостоянный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = p$:

(a) если $p < 1$, то ряд сходится;

(b) если $p > 1$, то ряд расходится;

(c) если $p = 1$, то признак бесполезен.

Упражнение 2. Используя ряд $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots$, покажите сходимость такого ряда:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

Как Вы думаете, к чему сходится такой ряд?

Вспомните начальную школу: едва ли не первое, чему вас научили, было правило «от перестановки мест слагаемых в сумме сумма не меняется». К несчастью, в начальной школе знали только про конечные суммы, но теперь же мы умеем обращаться с бесконечными (математики говорят «счетными») суммами — рядами. Будет ли верно там это же правило? Для этого введем два дополнительных понятия:

Определение 3.6. Ряд из a_n (необязательно неотрицательных) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из $|a_n|$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \to$$

Теорема 3.7. *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится (т.е. сам, без модулей).*

Определение 3.8. Ряд из a_n (необязательно неотрицательных) называется условно сходящимся, если ряд из $|a_n|$ расходится, а ряд из a_n тем не менее сходится:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \not\to \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \to$$

Замечание 3.9. Самое важное: признаки сравнения для сходимости не работают для знакопеременных рядов! Совсем.

Для таких рядов выделяют другие семейства признаков сходимости, мы упомянем хотя бы один:

Замечание 3.10 (признак Лейбница)**.** Если знакопеременный ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$, причем a_n монотонно убывает и неотрицательны, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то такой ряд сходится.

Упражнение 3. Установите сходимость (абсолютную или условную, где это имеет смысл) или расходимость следующих рядов:

(a) $\dfrac{1^2}{4^1} + \dfrac{2^2}{4^2} + \ldots + \dfrac{n^2}{4^n} + \ldots$

(b) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^1 + \left(\dfrac{2}{7}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^n + \ldots$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \ldots$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}$

Теорема 3.11 (Удивительная теорема)**.** *Оказывается, что только в абсолютно сходящемся ряду от перестановки мест слагаемых сумма не меняется; в условно сходящемся ряду, переставляя слагаемые, можно добиться вообще любой суммы!*

3.2 Степенные ряды и ряды Тейлора

Определение 3.12. Степенным рядом называется функция вида:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots,$$

которая для каждого x возвращает сумму соответствующего числового ряда. Иногда центр ряда бывают сдвинут из нуля в точку a и пишут:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots$$

Несложно понять, что один ряд легко получить из другого заменой $t = x - a$.

На самом деле ряды функциональные сходятся сильно хуже, чем ряды числовые: например, даже если все слагаемые в ряду есть непрерывные функции, то в результате ряд вполне может задавать и разрывную функцию:

Упражнение 4. Пусть задан функциональный ряд $1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x^n - x^{n-1})$ (подумайте, степенной ли он?). Вычислите его предельные суммы, нарисуйте их, проверьте на непрерывности на отрезке $[0, 1]$, вычислите сумму ряда, нарисуйте ее, проверьте на непрерывность.

Важным вопросом для таких рядов является множество таких x, что ряд сходится.

Определение 3.13. Радиусом сходимости ряда с центром в точке a называется такое число R, что степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots$$

сходится для любого x в интервале $(a - R; a + R)$. Число R может вычислено по следующему правилу: $R = 1/p$, где $p = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ или $p = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Замечание 3.14. Речь идет именно про интервал $(a-R; a+R)$, про концы, к сожалению, нужно рассуждать отдельно (и делать это гораздо сложнее, как правило).

Упражнение 5. Найдите сумму ряда и интервал сходимости ряда:

(a) $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$

(b) $3 + 3(x-2) + 3(x-2)^2 + 3(x-2)^3 + \ldots$

Теперь перейдем к самому важному функциональному ряду, который нам потребуется (вернее, к одному из двух самых важных; вторым является ряд Фурье).

Определение 3.15. Производную n-го порядка функции $f(x)$ в точке a будем обозначать $f^{(n)}(a)$. Здесь, конечно же, стоит полагать, что производная n-го порядка вычисляется последовательно как производная от $(n-1)$-ой производной, и все эти производные есть.

Определение 3.16. Многочленом Тейлора для функции $f(x)$ в точке a называется полином $T_n(x)$ вида:

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

На самом деле все дальнейшие мысли можно объединить одной простой: многочлен Тейлора довольно-таки похож на функцию $f(x)$ в окрестности точки a. для этого приведем каноническую запись:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

Причем, как мы уже с вами знаем, каждое следующее слагаемое многочлена Тейлора более высокого порядка малости (то есть «о-малое»), чем предыдущее:

Теорема 3.17 (Остаточный член в форме Пеано). $R_n(x) = \overline{o}((x-a)^n)$

Это утверждение не говорит ничего содержательного, кроме того, приближение достаточно хорошее. Впрочем, из него можно сделать два вывода: чем выше порядок разложения (чем больше n), тем лучше точность; и чем дальше мы отходим от точки a, тем хуже точность.

Теорема 3.18 (Остаточный член в форме Лагранжа). $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, *где* $c \in (a, x)$.

Такая форма уже позволяет сделать оценку сверху ну модуль ошибки $|R_n(x)|$*: для этого дополнительно положим, что* $(n+1)$*-ая прозводная ограничена числом* M *на отрезке от* (a, x)*, тогда:*

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Все это, конечно, верно, если мы достаточно недалеки от центра разложения. Но как это определить? На самом деле, метод написан выше.

Рассмотрим бесконечный ряд Тейлора:

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

Несложно заметить, что это степенной ряд, а значит, у него можно указать радиус сходимости; соответственно все рассуждения о качественности приближений правомерны только в пределах этого радиуса сходимости.

Определение 3.19. В случаях, когда функция разложена в ряд с центров в $a = 0$, ряд называют рядом Маклорена.

Упражнение 6. Вычислите $f^{(n)}(0)$ для функций и постройте ряды Маклорена:

(a) $f(x) = e^x$ (b) $f(x) = \sin x$ (c) $f(x) = (1+x)^\alpha$

Как вы думаете, как получить ряд для $e^x \sin x$?

Упражнение 7. Вычислите:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

(b) e с точностью до $1/1000$

(c) 2.01^7 с точностью до $1/100$

3.3 Интегралы и площади

К сожалению, если вдаваться в подробности интегрального исчисления, то мы неизбежно увязнем в огромном числе формальностей. С точки зрения математики, введение таких формальностей позволило существенно продвинуться вперед в прикладном смысле, однако в нашем случае такие применения не столь важны.

Определение 3.20. Первообразной $F(x)$ для функции $f(x)$ называется функция, для которой: $F'(x) = f(x)$. Несложно заметить, что из одной первообразной легко получить другую, добавлением константы: $(G(x))' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$.

Теорема 3.21. *Если одна из первообразных функции $f(x)$ имеет вид $F(x)$, то все первообразные данной функции имеют вид $F(x) + C$ (то есть нет других первообразных, кроме как полученных вертикальным сдвигом).*

Несложно понять, что речь идет об обратном действии к взятию производной; такое действие называется интегрированием, а множество всех первообразных — неопределенным интегралом. Обозначение: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Упражнение 8. При помощи интегрирования укажите такую функцию $f(x)$, что:

(a) $f'(x) = \sin x$

(b) $f'(x) = \sin x + \cos x$

(c) $f'(x) = x^2$

(d) $f'(x) = f(x)$

(e) $f'(x) = 2f(x)$

(f) $f''(x) = x^2$

(g) $f''(x) = -f(x)$

(h) $f''(x) = -f(x) + 1$

(i) $x^2 f'' + xf' + f = 0$

Теорема 3.22 (Замена переменной)**.** *Пусть дан интеграл $\int f(x)dx$; пусть также нашлась биективная замена $x = g(t)$. Тогда эквивалентный интеграл будет $\int f(x)dx = \int f(g(t))dg(t) = \int f(g(t))g'(t)dt$. Такое рассуждение верно и в обратную сторону.*

Например, рассмотрим интеграл $\int \frac{xdx}{1+x^2}$:

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Теорема 3.23 (Интегрирование по частям)**.** *Пусть дан интеграл $\int u(x)v'(x)dx$. Тогда можно воспользоваться следующим преобразованием: $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$. Такой метод удобно применять, когда под интегралом стоит сложная функция с простой производной.*

Например, рассмотрим интеграл $\int \operatorname{arctg} xdx$:

$$\int \operatorname{arctg} xdx = \int \operatorname{arctg} x \cdot 1dx = \operatorname{arctg} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Теперь обратимся к определенному интегралу. Фактически, определенным интегралом называется площадь под графиком функции на заданном отрезке; при этом площадь ориентирована: если функция отрицательна, то площадь идет с минусом, а если положительна, то с плюсом.

Теорема 3.24 (Формула Ньютона-Лейбница)**.** *Пусть требуется вычислить определенный интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$.*

Упражнение 9. Вычислите следующие определенные интегралы:

(a) $\int_1^4 (x^2+2x+3)dx$

(b) $\int_1^3 \frac{2}{x^4}dx$

(c) $\int_0^1 10^x dx$

(d) $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$

(e) $\int_0^1 xe^{-x^2}dx$

(f) $\int_0^{+\infty} e^x \cos x dx$

(g) $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

(h) $\int_0^1 (x-1)^2 5dx$

(i) $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}dx$

3.4 Вектор-функции

В данном части мы опишем еще один способ задавать графики функций, который является более общим и в то же время более сложным.

Определение 3.25. Вектор-функцией называется отображение из одномерного множества (отрезка, интервала, луча, прямой) в дву- или трехмерное. Де-факто, это вектор функций: $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, где $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ — обычные функции одной переменной.

Часто вектор-функции называют кривыми (по Жордану) на плоскости и в пространстве. Надо отметить, что отнюдь не всегда кривые являются графиками функций, однако все графики функций могут быть представлено в виде вектор-функций: действительно, если $y = f(x)$, то $r(t) = t, f(t)$.

Упражнение 10. Какую кривую на плоскости задает вектор-функция:

(a) $(\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

(b) $(\cos 2t, \sin 2t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

(c) $(3t-5, 2t+1)$

(d) $(\cos t, \sin t, t)$

Определение 3.26. Если $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то ее производная равна $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$. Более того, если надо посчитать вектор касательной к кривой в точке c — это вектор $r'(c) = (x'(c), y'(c), z'(c))$

Упражнение 11. Найдите уравнение касательной для кривой $r(t) = (3t-5, 2t+1)$ в точке $(-2, 3)$.

3.5 Функции двух переменных

Определение 3.27. Функцией двух переменных называется функциональное отображение из плоскости, то есть $\mathbb{R}^2$, в $\mathbb{R}$. Как и функции одной переменной, у функции двух переменных есть множество допустимых аргументов, то есть множество допустимых пар (x, y), при которых задана функция.

Как и раньше, графиком функции называется множество точек $(x, y, f(x, y))$; если раньше речь шла о кривых, то графиком функции двух переменных будет являться поверхность.

Упражнение 12. Найдите области определения функций:

(a) $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - y^2)$ (b) $f(x, y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{1-x^2}$

Упражнение 13. Постройте эскиз графика функции:

(a) $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ (b) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ (c) $f(x, y) = y^2 + 1$

Определение 3.28. Линией уровня (или кривой) называется множество точек (x, y) таких, что $f(x, y) = C$, где C — некоторая константа, тот самый уровень. Альтернативным способом изображения функций двух переменных (не в виде поверхности) как и раз и является график линий уровня для разных C. Линии уровня для разных C не пересекаются.

Упражнение 14. Нарисуйте несколько линий уровня и укажите направление роста для следующих функций:

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ (b) $f(x, y) = (2x - 3y)^6$ (c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$

Определение 3.29. Пусть $f(x, y)$ задана в некоторой окрестности точки (a, b). Предел функции $f(x, y)$ при стремлении (x, y) к (a, b) равен A, если значения функции $f(x, y)$ отличаются от A меньше любого наперед заданного числа в какой-нибудь окрестности точки (a, b). Обозначение: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = A$.

Иными словами: как бы не подходили по плоскости xOy к точке (a, b) — по спирали, по прямой, дискретно — предел значений функции на этом пути все равно должен быть A.

Определение 3.30. $f(x, y)$ называется непрерывной в точке (a, b), если $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$

Упражнение 15. Вычислите предел и проверьте на непрерывность:

(a) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} 3x^2 - 2xy^3$ (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2y+2yx^2}$ (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$