

Лин. алг. 2

Заг. 1. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Ранг матрицы -
кол-во независ. строк /
кол-во независ. столбцов

$$\begin{pmatrix} 20 & 12 & 32 \\ 20 & 15 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Кол-во лин. независ. строк -
кол-во независ. строк в
уменьш. системе выше

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 27 \\ 12 & 9 & 3 \\ 12 & 8 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 27 \\ 0 & 1 & -9 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 21 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rk } A = 2$$

Заг. 2. Найти обратную матрицу

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & -1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/6 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/6 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 \\ 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} B^T = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}; \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/7 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/7 \end{array} \right); \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}$$

Заг. 3 Вспомогательные определители

$$a) \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 7$$

$$b) \begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 36 - 8 - 90 = 48 - 90 = -50$$

$$c) A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} & \frac{1}{720} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} & \frac{1}{720} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{40} & \frac{1}{180} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} & \frac{1}{720} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{40} & \frac{1}{180} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{60} & \frac{1}{120} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} & \frac{1}{720} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{40} & \frac{1}{180} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{60} & \frac{1}{120} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{60} & -\frac{1}{120} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} & \frac{1}{720} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{40} & \frac{1}{180} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{60} & \frac{1}{120} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{60} & -\frac{1}{120} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 0$$

Заг. 4.

$$G: V \rightarrow W, \dim V = 2, \dim W = 3$$

$$(e_1, e_2) \quad (f_1, f_2, f_3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a) \quad G(e_1) = 2f_1 + 4f_2 - 2f_3$$

$$G(e_2) = f_1 + 2f_2 - f_3$$

$$G(e_1 + e_2) = G(e_1) + G(e_2) = 3f_1 + 6f_2 - 3f_3$$

$$b) \quad v = G(2e_1 - 3e_2) = 2(2f_1 + 4f_2 - 2f_3) - 3(f_1 + 2f_2 - f_3) = f_1 + 2f_2 - f_3$$

$$v: (1, 2, -3)$$

Заг. 5 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Найти образы векторов:

$$v_0 = (0, 0), v_1 = (1, 0), v_2 = (1, 3)$$

$$f(v_0) = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 35 \end{pmatrix}$$

$$f(v_2) = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 - 18 \\ 35 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 29 \end{pmatrix}$$

б) Найти собственные числа λ :

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 17 - \lambda & -6 \\ 35 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(17 - \lambda)(-2 - \lambda) + 6 \cdot 35 = 0$$

$$-34 - 17\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 210 = 0$$

$$\lambda^2 - 15\lambda + 176 = 0$$

$$\lambda = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 176}}{2}$$

нет действительных корней

\Rightarrow не имеет вещественных собственных значений оператора