ΦΥΣ 133 - ΠΡΟΟΔΟΣ 1η - ΛΥΣΕΙΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ # 1

(α) Παραβολικές συντεταγμένες

$$\vec{r} = \xi\eta\,\hat{i} + \frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2)\,\hat{j} + z\hat{k} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (\dot{\xi}\eta+\xi\dot{\eta})\,\hat{i} + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}(\dot{\xi}\xi-\dot{\eta}\eta)\,\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{v}|^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = (\dot{\xi}\eta+\xi\dot{\eta})^2 + (\dot{\xi}\xi-\dot{\eta}\eta)^2 + \dot{z}^2 = \dot{\xi}^2\eta^2 + \xi^2\dot{\eta}^2 + \cancel{2\dot{\xi}\eta\xi\dot{\eta}} + \dot{\xi}^2\xi^2 + \dot{\eta}^2\eta^2 - \cancel{2\dot{\xi}\eta\xi\dot{\eta}} + \dot{z}^2 \Rightarrow$$

$$|\vec{v}|^2 = \dot{\xi}^2(\eta^2+\xi^2) + \dot{\eta}^2(\eta^2+\xi^2) + \dot{z}^2 = (\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)(\eta^2+\xi^2) + \dot{z}^2$$

Επομένως η κινητική ενέργεια είναι $\boxed{T = \frac{1}{2}m\left[(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)(\eta^2+\xi^2)+\dot{z}^2\right]}$

(β) Περιστρεφόμενες συντεταγμένες

$$\vec{r} = (\xi\cos\omega t - \eta\sin\omega t)\,\hat{i} + (\xi\sin\omega t + \eta\cos\omega t)\,\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (\dot{\xi}\cos\omega t - \xi\omega\sin\omega t - \dot{\eta}\sin\omega t - \eta\omega\cos\omega t)\,\hat{i} + (\dot{\xi}\sin\omega t + \xi\omega\cos\omega t + \dot{\eta}\cos\omega t - \eta\omega\sin\omega t)\,\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

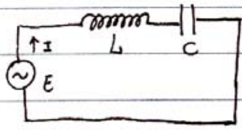
$$\begin{aligned}\Rightarrow v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = {} & (\dot{\xi}^2\cos^2\omega t + \xi^2\omega^2\sin^2\omega t + \dot{\eta}^2\sin^2\omega t + \eta^2\omega^2\cos^2\omega t - 2\dot{\xi}\xi\omega\cos\omega t\sin\omega t - \\ & - 2\dot{\xi}\dot{\eta}\cos\omega t\sin\omega t - 2\dot{\xi}\eta\omega\cos^2\omega t + 2\dot{\eta}\xi\omega\sin^2\omega t + 2\xi\eta\omega^2\sin\omega t\cos\omega t + \\ & + 2\dot{\eta}\eta\omega\sin\omega t\cos\omega t) + \\ & (\dot{\xi}^2\sin^2\omega t + \xi^2\omega^2\cos^2\omega t + \dot{\eta}^2\cos^2\omega t + \eta^2\omega^2\sin^2\omega t + 2\dot{\xi}\xi\omega\sin\omega t\cos\omega t + \\ & 2\dot{\xi}\dot{\eta}\sin\omega t\cos\omega t - 2\dot{\xi}\eta\omega\sin^2\omega t + 2\dot{\eta}\xi\omega\cos^2\omega t - 2\xi\eta\omega^2\cos\omega t\sin\omega t - \\ & - 2\dot{\eta}\eta\omega\cos\omega t\sin\omega t) + \dot{z}^2 = \\ = {} & \dot{\xi}^2 + \xi^2\omega^2 + \dot{\eta}^2 + \eta^2\omega^2 - 2\dot{\xi}\eta\omega + 2\dot{\eta}\xi\omega + \dot{z}^2 = (\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{z}^2) + \omega^2(\xi^2+\eta^2) + \\ & + 2\omega(\dot{\eta}\xi - \dot{\xi}\eta)\end{aligned}$$

Επομένως η κινητική ενέργεια σωματιδίου είναι: $\boxed{T = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{z}^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(\xi^2+\eta^2) + m\omega(\dot{\eta}\xi-\dot{\xi}\eta)}$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{z}^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(\xi^2+\eta^2) + m\omega(\dot{\eta}\xi-\dot{\xi}\eta)$$

ΦΥΣ 133 - ΠΡΟΟΔΟΣ 1η - ΛΥΣΕΙΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ (2)



Η πτώση δυναμικού κατά μήκος της επαγωγικής αντίστασης κ̧ του πυκνωτή είναι :

$$V_L = L\frac{dI}{dt}$$ όπου I το ρεύμα που περνά

$$V_C = \frac{1}{C}\int I dt$$ από το κύκλωμα

Από το 2ο νόμο του kirchhoff έχουμε : $E(t) = V_L + V_C = L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int I dt$ (1)

Αλλά $I = \frac{dQ}{dt}$ όπου Q : το φορτίο του κυκλώματος :

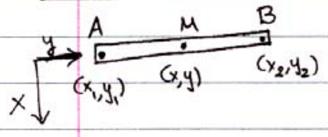
Η (1) γίνεται : $E(t) = L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}\int\frac{dQ}{dt}dt \Rightarrow \boxed{E(t) = L\ddot{Q} + \frac{1}{C}Q}$ (A)

Επομένως η παραπάνω είναι η εξίσωση κίνησης του κυκλώματος όπου $m \to L$ και $\frac{1}{C} \to k$ αν αντιστοιχίσουμε το κύκλωμα με αρμονικό ταλαντωτή της μορφής: $F(t) = m\ddot{x} + kx$ (B)

Αν πάρουμε την (A) κ̧ (B) έχουμε ότι $T = \frac{1}{2}L\dot{Q}^2$ ενώ $V = \left(\frac{1}{2C}\right)Q^2$

Άρα $\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}L\dot{Q}^2 - \frac{1}{2C}Q^2 + QE} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q} = \underbrace{L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} - E = 0}_{\text{πού ναι η (A)}}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ # 3



Εστω (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x,y) οι συντεταγμένες των σημείων A, B και M (μέσου της ράβδου)

Ένας δεσμός υπάρχει επειδή η απόσταση μεταξύ των A και B είναι σταθερή και επομένως $f_1 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-d^2=0$

Ο δεσμός δεν περιέχει γενικευμένες ταχύτητες και άρα είναι ολόνομος

Το γεγονός ότι η ταχύτητα του M είναι κάθετη στη ράβδο μας δίνει ένα ακόμα δεσμό ο οποίος γράφεται: $\vec{v}_M \cdot \vec{AB} = 0$ (A)

Η ταχύτητα $\vec{v}_M$ γράφεται $\vec{v}_M = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j}$ (B) αφού το μέσο της ράβδου έχει συντεταγμένες (x,y). Το διάνυσμα $\vec{AB}$ της ράβδου θα γράφεται:

$\vec{AB} = (x_2-x_1)\hat{i} + (y_2-y_1)\hat{j}$ (C) Αντικαθιστώντας (B) ∧ (C) στην (A) έχουμε:

$$\dot{x}(x_2-x_1) + \dot{y}(y_2-y_1) = 0 \qquad (D)$$

Αλλά αν θ η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με τον άξονα $\hat{x}$ τότε

$$x_1 = x - \frac{d}{2}\cos\theta \qquad y_1 = y - \frac{d}{2}\sin\theta \qquad (E)$$
$$x_2 = x + \frac{d}{2}\cos\theta \qquad y_2 = y + \frac{d}{2}\sin\theta$$

Από (D) ∧ (E) με αντικατάσταση έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}\left(\cancel{x}+\frac{d}{2}\cos\theta-\cancel{x}+\frac{d}{2}\cos\theta\right)+\\&+\dot{y}\left(y+\frac{d}{2}\sin\theta-y+\frac{d}{2}\sin\theta\right)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

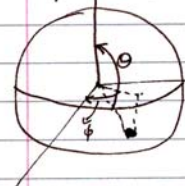
$$\Rightarrow \dot{x}\,d\cos\theta + \dot{y}\,d\sin\theta = 0 \Rightarrow d\,(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta) = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta = 0}$$

Ο δεσμός περιέχει τις ταχύτητες και δεν μπορεί να ολοκληρωθεί για να δώσει τέλειο διαφορικό. Ο δεσμός είναι μή ολόνομος (ανολόνομος)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ # 4

(α) Υποθέτουμε ότι η χάντρα κινείται στο επίπεδο του κυκλικού σύρματος που καταλαμβάνει το επίπεδο π.χ xOz. Η κίνηση της χάντρας επομένως περιγράφεται από τις συντεταγμένες (x, z). Από τη στιγμή που η χάνδρα περιορίζεται να κινείται σε σταθερή κυκλική περιφέρεια, αυτό αποτελεί δεσμό και μάλιστα <u>ολόνομο</u> αφού η εξίσωση του δεσμού είναι $x^2+z^2-a^2=0$. όπου a η ακτίνα της κυκλική περιφέρειας του σύρματος.
Επομένως θα υπάρχουν και 2 βαθμοί ελευθερίας (x, z) − 1 δεσμό ⇒
1 μόνο βαθμός ελευθερίας. Επομένως η καλύτερη γενικευμένη συντεταγμένη είναι η γωνία ϕ που σχηματίζει η ακτίνα με τον άξονα x.

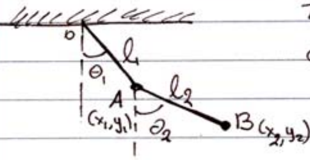
(β) <u>Σωματίδιο που κινείται σε εσωτερική επιφάνεια σφαίρας</u>



Σε καρτεσιανές συντεταγμένες υπάρχουν 3 συντεταγμένες που περιγράφουν την κίνησή του σε κάθε χρονική στιγμή (x, y, z). Αλλά αφού βρίσκεται στο εσωτερικό σφαίρας:

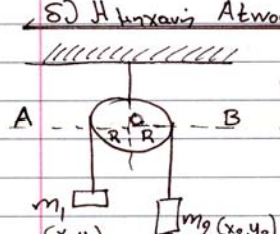
$x^2+y^2+z^2-R^2=0$ άρα υπάρχει ο ολόνομος δέσμος και οι βαθμοί ελευθερίας περιορίζονται από 3 σε 2.
Προφανώς οι καλύτερες συντεταγμένες για την περιγραφή του είναι οι γωνίες θ κ ϕ.

(γ) <u>Το διπλό εκκρεμές.</u>



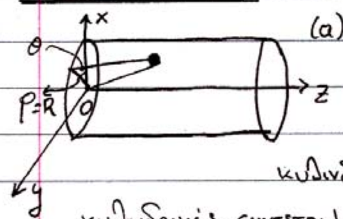
Το διπλό εκκρεμές μπορεί να περιγραφεί από τις συντεταγμένες θέσεις των υλικών σημείων A, B (x_1, y_1), (x_2, y_2). Επομένως 4 συντεταγμένες και άρα 4 βαθμοί ελευθερίας.
Το σύστημα όμως υπόκειται σε 2 δεσμούς πού προέρχονται από τα μήκη των δύο εκκρεμών: $x_1^2+y_1^2-l_1^2=0$ κ $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-l_2^2=0$ που είναι ολόνομοι
Δηλαδή το σύστημα καταλήγει με 2 βαθμούς ελευθερίας.
Οι καταλληλότερες συντεταγμένες είναι οι δύο γωνίας θ_1 και θ_2 που σχηματίζουν με την κατακόρυφη διεύθυνση.

δ) <u>Η μηχανή Atwood</u>



Η κίνηση μπορεί να περιγραφεί από συντεταγμένες των μαζών στο επίπεδο. Οι συντεταγμένες είναι (x_1, y_1) και (x_2, y_2) για τις μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα. ⇒ 4 βαθμοί ελευθερίας
Υπάρχουν όμως 3 δεσμοί:
Η μάζα m_1 κινείται κατακόρυφα μόνο και επομένως $x_1=-R$
Η μάζα m_2 κινείται κατακόρυφα μόνο και επομένως $x_2=R$
Το μήκος του νήματος είναι σταθερό ⇒ $y_1+y_2=l$
Άρα το σύστημα έχει ένα μόνο βαθμό ελευθερίας (4 − 3 ολόνομους δεσμούς)
Η καταλληλότερη συντεταγμένη είναι η απομάκρυνση της m_1 από το επίπεδο AB

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5



(α) Κυλινδρική επιφάνεια :

Όπως πάντα το σημείο μπορεί να περιγραφεί από τις συντεταγμένες (x,y,z). Επειδή υπάρχει κυλινδρική συμμετρία θα περιγράφεται από τις κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, θ, z)

Υπάρχει ένας ολόνομος δεσμός, αυτός της σταθερής ακτίνας του κυλίνδρου επομένως $\rho = R =$ σταθ. Επομένως το σύστημα έχει 2 βαθμούς ελευθερίας με καταλληλότερες συντεταγμένες τις θ, z.

(β) Περιφέρεια κύκλου με σταθερή γωνιακή ταχύτητα

Λόγω σφαιρικής συμμετρίας οι συντεταγμένες , θ και ϕ περιγράφουν πλήρως τη θέση του σώματος.

Οι δεσμοί που υπάρχουν είναι: $r - R = \emptyset$

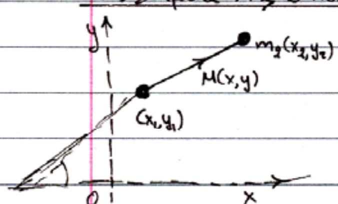
$$\phi - \omega t = \emptyset$$

Επομένως υπάρχει ένας βαθμός ελευθερίας και επομένως η καταλληλότερη συντεταγμένη είναι η πολική γωνία θ.

(γ) Ελεύθερα περιστρεφόμενος κύκλος

Ο ελεύθερα περιστρεφόμενος κύκλος έχει ένα επιπλέον βαθμό ελευθερίας σε σχέση με το υποερώτημα (β). Ο δεσμός $\phi - \omega t = \emptyset$ δεν υπάρχει και επομένως οι καταλληλότερες συντεταγμένες θα είναι οι θ κ ϕ.

(δ) Σημεία Α κ Β που συνδέονται με ράβδο κ η ταχύτητα είναι συγγραμμική.



Οι δύο συντεταγμένες x_1, x_2 στον άξονα x και οι δύο στον άξονα y (y_1, y_2) περιγράφουν τις μάζες. Ωστόσο υπάρχει ο ολόνομος δεσμός:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - d^2 = \emptyset$$ λόγω της ράβδου.

Από την άλλη η ταχύτητα είναι συγγραμμική κ άρα $\vec{\upsilon}_M \times \vec{AB} = \emptyset$. Δηλαδή:

$$\dot{x}_M (y_2 - y_1) - \dot{y}_M (x_2 - x_1) = \emptyset \Rightarrow \frac{(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)}{2}(y_2 - y_1) - \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{2}(x_2 - x_1) = \emptyset \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(y_1 - y_2) - (\dot{y}_1 + \dot{y}_2)(x_1 - x_2) = \emptyset$$

Οι βαθμοί ελευθερίας είναι $4 - 1$ ολόνομος $= 3$ και οι κατάλληλες συντεταγμένες (x, y, θ) με x, y τις συντεταγμένες του μέσου της ράβδου.

ΦΥΣ 133- ΠΡΟΟΔΟΣ 1η - ΛΥΣΕΙΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ # 6

Έστω $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του σώματος μάζας m στο περιστρεφόμενο σύστημα Σ_2.

Η ταχύτητα που βλέπει κάποιος παρατηρητής στο Σ_2 θα είναι:

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{\Sigma_2} = \frac{da_x}{dt}\hat{i} + \frac{da_y}{dt}\hat{j} + \frac{da_z}{dt}\hat{k}$$ όπου υποθέτω ότι ότι $\vec{r} = (a_x, a_y, a_z)$.

και ότι τα δύο συστήματα συμπίπτουν ως προς το σημείο O των αξόνων.

Ο παρατηρητής στο Σ_1 που είναι ακίνητος βλέπει τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ να μεταβάλλονται και φυσικά τα (a_x, a_y, a_z) του διανύσματος $\vec{r}$.

Επομένως για τον αδρανειακό παρατηρητή του Σ_1 η ταχύτητα του σωματιδίου θα είναι:

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{\Sigma_1} = \frac{da_x}{dt}\hat{i} + a_x\frac{d\hat{i}}{dt} + \frac{da_y}{dt}\hat{j} + a_y\frac{d\hat{j}}{dt} + a_z\frac{d\hat{k}}{dt} + \frac{da_z}{dt}\hat{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{\Sigma_1} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{\Sigma_2} + a_x\frac{d\hat{i}}{dt} + a_y\frac{d\hat{j}}{dt} + a_z\frac{d\hat{k}}{dt}} \quad (1)$$

αλλά
$$\hat{i} = \hat{j}\times\hat{k} \Rightarrow \frac{d\hat{i}}{dt} = x_1\hat{j} + x_2\hat{k}$$ δηλαδή $\frac{d\hat{i}}{dt} \perp \hat{i}$ και ανήκει στο $(\hat{j}, \hat{k})$

$$\hat{j} = \hat{k}\times\hat{i} \Rightarrow \frac{d\hat{j}}{dt} = x_3\hat{k} + x_4\hat{i}$$ " $\frac{d\hat{j}}{dt} \perp \hat{j}$ και ανήκει στο $(\hat{k}, \hat{i})$

$$\hat{k} = \hat{i}\times\hat{j} \Rightarrow \frac{d\hat{k}}{dt} = x_5\hat{i} + x_6\hat{j}$$ " $\frac{d\hat{k}}{dt} \perp \hat{k}$ και ανήκει στο $(\hat{i}, \hat{j})$

Αλλά $\hat{i}\cdot\hat{j} = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{i}}{dt}\hat{j} + \hat{i}\frac{d\hat{j}}{dt} = 0 \Rightarrow (x_1\hat{j} + x_2\hat{k})\cdot\hat{j} + \hat{i}\cdot(x_3\hat{k} + x_4\hat{i}) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1 + x_4 = 0 \Rightarrow \boxed{x_4 = -x_1}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο: $\hat{i}\cdot\hat{k} = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{i}}{dt}\cdot\hat{k} + \hat{i}\cdot\frac{d\hat{k}}{dt} = 0 \Rightarrow x_2 + x_5 = 0 \Rightarrow \boxed{x_5 = -x_2}$

και τέλος $\hat{j}\cdot\hat{k} = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{j}}{dt}\cdot\hat{k} + \hat{j}\cdot\frac{d\hat{k}}{dt} = 0 \Rightarrow x_3 + x_6 = 0 \Rightarrow \boxed{x_6 = -x_3}$

Δηλαδή καταλήγουμε ότι: $\boxed{\frac{d\hat{i}}{dt} = x_1\hat{j} + x_2\hat{k}}$ $\boxed{\frac{d\hat{j}}{dt} = x_3\hat{k} - x_1\hat{i}}$ $\boxed{\frac{d\hat{k}}{dt} = -x_2\hat{i} - x_3\hat{j}}$

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{\Sigma_1} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{\Sigma_2} + a_x x_1\hat{j} + a_x x_2\hat{k} + a_y x_3\hat{k} - a_y x_1\hat{i} + a_z(-x_2)\hat{i} + a_z(-x_3)\hat{j} =$$

$$= \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{\Sigma_2} + (-a_y x_1 - a_z x_2)\hat{i} + (a_x x_1 - a_z x_3)\hat{j} + (a_x x_2 + a_y x_3)\hat{k} \Rightarrow$$

$$\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{\Sigma_1} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{\Sigma_2} + \vec{\omega}\times\vec{r}$$ όπου $\vec{\omega} = a_3\hat{i} - a_2\hat{j} + a_1\hat{k} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_1 = \vec{V}_2 + \vec{\omega}\times\vec{r}}$

Δηλαδή οι ταχύτητες συνδέονται με τις σχέσεις

$\vec{V}_1 = \vec{V}_2 + \vec{\omega}\times\vec{R} \Rightarrow \vec{V}_2 = \vec{V}_1 - \vec{\omega}\times\vec{R}$ όπου $\vec{V}_1$: η ταχύτητα του σώματος ως πρός Σ_1

$\vec{V}_2$: η ταχύτητα του σώματος ως πρός Σ_2

$\vec{\omega}\times\vec{R}$: η ταχύτητα του σημείου του σώματος του περιστρεφόμενου συστήματος ως πρός Σ_1

Η Lagrangian θα γραφεί: $L_2 = \frac{1}{2}m(\vec{V}_1 - \vec{\omega}\times\vec{r})^2 - V = \frac{1}{2}m[\vec{V}_1^{\,2} + (\vec{\omega}\times\vec{r})^2 - 2\vec{V}_1\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})] - V$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{V}_2} = \frac{1}{2}m[2\vec{V}_1 - 2(\vec{\omega}\times\vec{r})] \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}_2} = m[\dot{\vec{V}}_1 - \vec{\omega}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial t} - \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}\times\vec{r}] \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}_2} = m\dot{\vec{V}}_1 - m(\vec{\omega}\times\vec{V}_1) - m(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r})} \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{2}m\left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 - \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\vec{V}_1\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})\right] - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \overset{(A)(B)}{=} \frac{1}{2}m\left[\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\omega^2 r^2 - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})^2) - \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\vec{r}\cdot(\vec{V}_1\times\vec{\omega})\right] - \frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow$$

$$(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 = (\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) = (\omega r\sin\theta)^2 = \omega^2 r^2(1-\cos^2\theta) = \omega^2 r^2 - \omega^2 r^2\cos^2\theta = \omega^2 r^2 - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})^2 \quad (A)$$

$$\vec{V}_1\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \vec{r}\cdot(\vec{V}_1\times\vec{\omega}) \quad (B)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \cancel{\frac{1}{2}}m\left[[\cancel{2}\omega^2\vec{r} - \cancel{2}(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{\omega}] - (\vec{V}_1\times\vec{\omega})\right] - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} = m[\omega^2\vec{r} - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{\omega}] + (\vec{\omega}\times\vec{V}_1) - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = m[(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})\vec{r} - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{\omega}] + m(\vec{\omega}\times\vec{V}_1) - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - C(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

για $\vec{A} = \vec{\omega}$, $\vec{B} = \vec{\omega}$ κ $\vec{C} = \vec{r}$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -m(\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}) + m(\vec{\omega}\times\vec{V}_1) - \frac{\partial V}{\partial r}} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}_2} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \overset{?}{=} \emptyset \overset{(1)\wedge(2)}{\Rightarrow} m\dot{\vec{V}} - m(\vec{\omega}\times\vec{V}) - m(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}) + m(\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}) - m(\vec{\omega}\times\vec{V}_1) - \frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}_2} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = m\dot{\vec{V}}_1 - 2m(\vec{\omega}\times\vec{V}_1) - m(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}) + m(\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}) - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$m\dot{\vec{V}}_1$ = Δύναμη που ασκείται στο σώμα

$2m(\vec{\omega}\times\vec{V}_1)$ = Δύναμη Coriolis

$m(\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r})$ = κεντρομόλος δύναμη

$\Rightarrow$ Σύστημα Σ_2 δεν είναι αδρανειακό.

ΦΥΣ 133 - ΠΡΟΟΔΟΣ 1η - ΛΥΣΕΙΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ #7

Το σύστημα δεν έχει δεσμούς και κινείται σε 2 διαστάσεις. Επομένως υπάρχουν 2 βαθμοί ελευθερίας.

Το διάνυσμα θέσης γράφεται: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

Η κινητική ενέργεια θα είναι $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{x}}\,\hat{i} + \dot{\vec{y}}\,\hat{j} \Rightarrow \dot{\vec{r}}^2 = \dot{\vec{x}}^2 + \dot{\vec{y}}^2$

Άρα η κινητική του ενέργεια είναι $T = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{x}}^2 + \dot{\vec{y}}^2)$

Η δυναμική ενέργεια θα είναι:

$$V = -\int \vec{B}\, d\vec{y} = mgy + C \quad \text{για } V=0 \text{ όταν } y=\phi \Rightarrow V = mgy$$

Επομένως η Lagrangian του συστήματος είναι $L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{x}}^2 + \dot{\vec{y}}^2) - mgy$

Αλλά η x όπως φαίνεται δεν μπαίνει στη Lagrangian και είναι αγνοήσιμη ή κυκλική,

Άρα $\frac{\partial L}{\partial x} = \phi$ Οπότε η συζυγής ορμή διατηρείται $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \text{σταθ} \Rightarrow$

$$\Rightarrow m\dot{x} = \text{σταθ} \Rightarrow \dot{x} = C \Rightarrow \boxed{x = c_1 t + c_2}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow m\ddot{y} + mg = \phi \Rightarrow \ddot{y} = -g \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}gt^2 + d_1 t + d_2} \ldots$$

Άρα έχουμε βρει τη γενική μορφή των παραμετρικών εξισώσεων που περιγράφουν το σύστημα. Από τις αρχικές συνθήκες, $x=y=0$, για $t=0$, $\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} = \vec{v}_0$

$$\left.\begin{array}{ll} x = v_{0x}t & v_{0x} = v_0\cos a \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t & v_{0y} = v_0 \sin a \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x(t) = (v_0\cos a)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin a)t \end{array}} \quad (A)$$

(α) Δια απαλειφής του χρόνου από τις (A) παίρνουμε:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2 a}x^2 + (\tan a)x.$$

Από τις εξισώσεις κίνησης θέτοντας $y(t) = \phi$ βρίσκουμε το χρόνο που χρειάζεται για να ακουμπήσει στο έδαφος.

Δύο σημεία $(x=y=0)$ που δεν ενδιαφερόμαστε και το x_B, y_B που ακουμπά τη δεύτερη φορά.

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin a}{g}$$

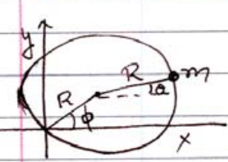
Άρα $x = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$ το οποίο και γίνεται μέγιστο για $\theta = \pi/4$

Το μέγιστο βεληνεκές είναι $x^B_{max} = \frac{v_0^2}{g}$

Το μέγιστο ύψος θα είναι στο μισό του βεληνεκούς. Άρα $x = x^B/2$

$t = t_2/2 = \frac{v_0 \sin a}{g}$ Αντικαθιστώντας στην (A) $y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 a}{2g}.$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ # 8



Το διάνυσμα θέσης της μάζας είναι:

$$\vec{r} = (R\cos\phi + R\cos\theta)\hat{i} + (R\sin\phi + R\sin\theta)\hat{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = -R(\dot{\phi}\sin\phi + \dot{\theta}\sin\theta)\hat{i} + R(\dot{\phi}\cos\phi + \dot{\theta}\cos\theta)\hat{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\dot{\vec{r}}|^2 = R^2\left[\dot{\phi}^2\sin^2\phi + \dot{\theta}^2\sin^2\theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\phi\sin\theta + \dot{\phi}^2\cos^2\phi + \dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\phi\cos\theta\right]$$

$$\Rightarrow |\dot{\vec{r}}|^2 = R^2\left[\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\theta}(\sin\phi\sin\theta + \cos\phi\cos\theta)\right] \Rightarrow$$

$$|\vec{v}|^2 = R^2\left[\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta-\phi)\right]$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι μηδέν αφού έχουμε κίνηση σε επίπεδο $\Rightarrow$ $\mathcal{L} = T = \frac{1}{2}mR^2\left[\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta-\phi)\right]$

Οι εξισώσεις της κίνησης θα είναι:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = mR^2(\dot{\theta} + \dot{\phi}\cos(\theta-\phi)) \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\theta} = -mR^2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin(\theta-\phi)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\theta} = \phi \Rightarrow mR^2\left(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}\cos(\theta-\phi) - \dot{\phi}(\dot{\theta}-\dot{\phi})\sin(\theta-\phi)\right) + mR^2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin(\theta-\phi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mR^2\left[\ddot{\theta} + \ddot{\phi}\cos(\theta-\phi) - \cancel{\dot{\phi}\dot{\theta}\sin(\theta-\phi)} + \dot{\phi}^2\sin(\theta-\phi) + \cancel{\dot{\phi}\dot{\theta}\sin(\theta-\phi)}\right] = \phi \Rightarrow$$

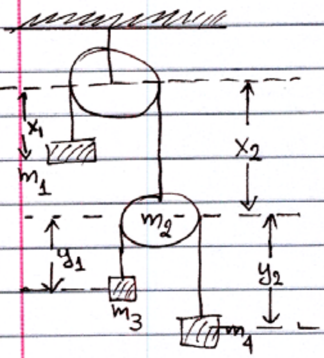
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \ddot{\phi}\cos(\theta-\phi) + \dot{\phi}^2\sin(\theta-\phi) = \phi$$

αλλά $\phi = \omega t \Rightarrow \dot{\phi} = \omega = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow \ddot{\phi} = 0$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2\sin(\theta-\phi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\sin(\theta-\omega t) = 0}$$ εξίσωση κίνησης

ΠΡΟΒΛΗΜΑ # 9



(άσκηση 15)

Το σύστημα έχει 4 βαθμούς ελευθερία – 2 δεσμούς ⇒ 2 βαθμούς ελευθερίας. (κίνηση μόνο σε μιά κατεύθυνση)

Οι δεσμοί είναι από τα μήκη των νημάτων ⇒

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 = a &\Rightarrow x_1 = a - x_2 \Rightarrow \dot{x}_1 = -\dot{x}_2 \\ y_1 + y_2 = b &\Rightarrow y_1 = b - y_2 \Rightarrow \dot{y}_1 = -\dot{y}_2 \end{aligned}} \quad (1)$$

Απο τη σχέση που δεν εξαρτώνται από ταχύτητες είναι ολόνομα

Αφού υπάρχουν 2 βαθμοί ελευθερίας τελικά, διαλέγω την απομάκρυνση της μάζας m_1 και την απομάκρυνση της μάζας m_3 σαν τις γενικευμένες συντεταγμένες του συστήματος. Θα πρέπει να εκφραστούν όλες οι σχέσεις ως προς x_1, y_1 και τις αντίστοιχες γενικευμένες ταχύτητες $\dot{x}_1, \dot{y}_1$.

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{x}_2+\dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2}m_4(\dot{x}_2+\dot{y}_2)^2 \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_3(-\dot{x}_1+\dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2}m_4(-\dot{x}_1-\dot{y}_1)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{x}_1-\dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2}m_4(\dot{x}_1+\dot{y}_1)^2}$$

Θεωρώντας το επίπεδο που περνά από το O σαν σημείο αναφοράς της δυναμικής ενέργειας : έχουμε :

$$V = -m_1 g x_1 - m_2 g x_2 - m_3 g(x_2+y_1) - m_4 g(x_2+y_2) \xRightarrow{\text{από εξισώσεις δεσμών}}$$

$$V = -m_1 g x_1 - m_2 g(a-x_1) - m_3 g(a-x_1+y_1) - m_4 g(a-x_1+y_2) \Rightarrow$$

$$V = -m_1 g x_1 + m_2 g x_1 - m_2 g a - m_3 g a + m_3 g x_1 - m_3 g y_1 - m_4 g a + m_4 g x_1 -$$

$$- m_4 g \beta + m_4 g y_1 \Rightarrow V = +(m_2+m_3+m_4-m_1) g x_1 - (m_2+m_3+m_4) g a$$

$$+ (m_4 - m_3) g y_1 - m_4 g \beta$$

Άρα $L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{x}_1-\dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2}m_4(\dot{x}_1+\dot{y}_1)^2 -$

$$-(m_2+m_3+m_4-m_1) g x_1 + (m_2+m_3+m_4) g a - (m_4-m_3) g y_1 + m_4 g \beta$$

Οι εξισώσεις κίνησης θα είναι:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}-\frac{\partial L}{\partial x_1}=\phi \quad \& \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial y_1}=\phi$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=(m_1+m_2)\dot{x}_1+m_3(\dot{x}_1-\dot{y}_1)+m_4(\dot{x}_1+\dot{y}_1)\\
&\frac{\partial L}{\partial x_1}=-(m_2+m_3+m_4-m_1)g\\
&\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}=-m_3(\dot{x}_1-\dot{y}_1)+m_4(\dot{x}_1+\dot{y}_1)\\
&\frac{\partial L}{\partial y_1}=-(m_4-m_3)g
\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m_1+m_2+m_3+m_4)\ddot{x}_1+(m_4-m_3)\ddot{y}_1=(m_1-m_2-m_3-m_4)g \qquad (A)$$

$$(m_4-m_3)\ddot{x}_1+(m_3+m_4)\ddot{y}_1=(m_3-m_4)g \qquad (B)$$

(β) Εύκολος τρόπος για να λύσουμε ως προς $\ddot{Y}_1$ είναι να πολ/σω την (A) με (m_4+m_3) και να πολ/σω τη (B) με $(m_1+m_2+m_3+m_4)$ και να αφαιρέσω τις σχέσεις οπότε παίρνω:

$$\left[(m_3+m_4)(m_1+m_2+m_3+m_4)-(m_4-m_3)^2\right]\ddot{Y}_1=$$

$$\left[(m_3-m_4)(m_1+m_2+m_3+m_4)-(m_4-m_3)(m_1-m_2-m_3-m_4)\right]g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{Y}_1=\frac{2m_1(m_3-m_4)}{(m_1+m_2)(m_3+m_4)+4m_3m_4}g \qquad (C)$$

Πολλαπλασιάζοντας τη (A) με (m_3+m_4) και τη (B) με (m_4-m_3) & αφαιρώντας:

$$\ddot{x}_1=\frac{(m_1-m_2)(m_3+m_4)-4m_3m_4}{(m_1+m_2)(m_3+m_4)+4m_3m_4}g \qquad (D)$$

Αλλά η επιτάχυνση της μάζας m_4 θα είναι η $\ddot{y}_2+\ddot{x}_2$

Αυτή με τη σειρά της θα'ναι $\ddot{y}_2+\ddot{x}_2=-(\ddot{y}_1+\ddot{x}_1) \xRightarrow{(C)+(D)}$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{y}_2+\ddot{x}_2=-\left[\frac{(m_1-m_2)(m_3+m_4)-4m_3m_4+2m_1(m_3-m_4)}{(m_1+m_2)(m_3+m_4)+4m_3m_4}\right]g}$$