Σχετικιστική Πυκνότητα Καταστάσεων Πολλών Σωμάτων

Επισκόπηση

Ο χρυσός κανόνας του Fermi $\Gamma = \frac{dP}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|V_{kS}\right|^2 \rho\left(E_S\right)$

όπου $V_{kS} = \left\langle \psi_k \middle| V \middle| \psi_S \right\rangle$ και $\rho\left(E_S\right) = dN/dE_S$

Για ένα μη σχετικιστικό σωματίδιο: $\rho = \frac{mk}{2\pi^2\hbar^2} = \frac{mp}{2\pi^2\hbar^3}$

Ο παράγοντας ροής για ένα μη σχετικιστικό σωματίδιο: $\Phi = \upsilon = \frac{p}{m} = \frac{\hbar k}{m}$

Η διαφορική ενεργός διατομή σκέδασης: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\Gamma}{\Phi}$

Πυκνότητα καταστάσεων και η συνάρτηση δ-Dirac

Ένας διαφορετικός τρόπος υπολογισμού των ενεργειακών καταστάσεων είναι ο ακόλουθος.

Ο αριθμός των καταστάσεων στο χώρο των ορμών, p, με ενέργεια < E είναι:

$$N_{<E} = \frac{w_p}{v_p} = \frac{1}{v_p}\int \theta\left(E - \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}\right) dp_x dp_y dp_z$$

όπου θ είναι η συνάρτηση βήματος και $v_p = \left(2\pi\hbar/L\right)^3$ είναι ο όγκος μιας κατάστασης στον χώρο των ορμών.

Η πυκνότητα καταστάσεων είναι η παράγωγος αυτού ως προς E.

Η παράγωγος της συνάρτησης βήματος όμως είναι η συνάρτηση δ του Dirac.

Επομένως η πυκνότητα των ενεργειακών καταστάσεων γράφεται ως:

$$\rho\left(E\right) = \frac{dN_{<E}}{dE} = \frac{L^3}{\left(2\pi\hbar\right)^3}\int \delta\left(E - \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}\right) dp_x dp_y dp_z$$

Η πυκνότητα καταστάσεων στη σχετικότητα

Ο υπολογισμός της πυκνότητας των καταστάσεων εξαρτάται από την σχέση μεταξύ ενέργειας και ορμής, η οποία είναι διαφορετική στην περίπτωση της σχετικιστικής κίνησης:

Στην σχετικότητα έχουμε: $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 = (\hbar kc)^2 + (mc^2)^2$

Αντί να λύσουμε για k συναρτήσει της E και να παραγωγίσουμε, είναι απλούστερο να κάνουμε μια έμεση παραγώγιση:

$$2EdE = (\hbar c)^2 2kdk + 0 \quad \rightarrow \frac{dk}{dE} = \frac{E}{(\hbar c)^2 k}$$

Το υπόλοιπο του υπολογισμού είναι ίδιο με αυτόν της μη-σχετικιστικής περίπτωσης

Ο όγκος στον k-χώρο για σωματίδιο με κυματάριθμο k, είναι $w = (4/3)\pi k^3$

και ο όγκος ανά κατάσταση είναι: $v = (2\pi/L)^3$

και επομένως ο αριθμός των καταστάσεων με μικρότερο κυματάριθμο είναι: $N = \dfrac{w}{v} = \dfrac{2k^3 L^3}{3(2\pi)^2}$

Η πυκνότητα καταστάσεων είναι η παράγωγος ως προς ενέργεια της προηγούμενης σχέσης:

Παίρνουμε την παράγωγο ως προς k και χρησιμοποιούμε τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{dN}{dk}\frac{dk}{dE} = \frac{2}{3(2\pi)^2} 3k^2 \frac{E}{(\hbar c)^2 k} = \frac{2kE}{(2\pi\hbar c)^2} \Rightarrow \rho(E) = \frac{2kE}{(2\pi\hbar c)^2}$$

Αντικατάσταση στην $E=mc^2$ δίνει το μη σχετικιστικό αποτέλεσμα: $\rho(E) = \dfrac{km}{2(\pi\hbar)^2}$

Η πυκνότητα καταστάσεων στη σχετικότητα

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο τρικ με την συνάρτηση βήματος και την δ-συνάρτηση:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \rightarrow (E/c)^2 - p^2 - (mc)^2 = 0 \rightarrow \underset{\rightarrow}{p}^2 - (mc)^2 = 0$$

Ολοκλήρωση ως προς τις συνιστώσες της ορμής με μια θ-συνάρτηση και ολοκλήρωση ως προς μια ενέργεια Ε′ προσθέτοντας μια δ-συνάρτηση θα δώσει:

$$N_{<E} = \frac{1}{v_p}\int \theta\left(\underset{\rightarrow}{p}^2 - (mc)^2\right) dp_x dp_y dp_z \delta(E' - E)\, dE'$$

Παίρνουμε την παράγωγο χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\rho(E) = \frac{d\left(E^2/c^2\right)}{dE}\frac{dN}{d\left(E^2/c^2\right)} = \frac{2E}{c^2}\frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3}\int \delta\left(\underset{\rightarrow}{p}^2 - (mc)^2\right)\delta(E' - E)\, d^4\underset{\rightarrow}{p}$$

Τελική κατάσταση 2 σωματιδίων

Για σκέδαση ενός σωματιδίου από σταθερό δυναμικό, διατήρηση της ενέργειας εγγυάται ότι το μέτρο της τελικής ορμής είναι φιξαρισμένο και μόνο η διεύθυνση μπορεί να μεταβάλλεται.

Για ένα σωματίδιο το οποίο διασπάται σε δυο σωματίδια, στο σύστημα αναφοράς του διασπώμενου σωματιδίου, οι δυο ορμές πρέπει να είναι ίσες και αντίθετες και η διατήρηση της ενέργειας φιξάρει τα μέτρα τους. Επομένως η διεύθυνση ενός σωματιδίου μπορεί να διαφοροποιείται αλλά η διεύθυνση του άλλου σωματιδίου είναι πλήρως σχετιζόμενη και τα μέτρα είναι πλήρως καθορισμένα.

Για μια σκέδαση 2 σωματιδίων που παράγει δυο σωματίδια στο κέντρο μάζας η περίπτωση δεν διαφέρει από αυτή της διάσπασης ενός σωματιδίου σε δυο σωματίδια. Ξέρουμε την αρχική ενέργεια, η αρχική ορμή είναι μηδέν, μια διεύθυνση είναι ελεύθερη παράμετρος

Τελική κατάσταση περισσότερο από 2 σωματιδίων

Η περίπτωση είναι αρκετά πιο περίπλοκη όταν υπάρχουν περισσότερο από 2 σωματίδια στην τελική κατάσταση.

Αν ξέρουμε 2 από τα διανύματα της ορμής, μπορούμε πάντοτε να βρούμε το τρίτο εφαρμόζοντας διατήρηση της ορμής (υποθέτοντας πάντοτε ότι ξέρουμε την αρχική ορμή). Έτσι στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχουν 3 ανεξάρτητα διανύσματα ορμών αλλά μόνο δυο

Αλλά αν διαλέξουμε τυχαία δυο διανύσματα ορμής και υπολογίσουμε το τρίτο διάνυσμα εφαρμόζοντας διατήρηση ορμής, το άθροισμα των τριων ενεργειών δεν εγγυάται ότι θα είναι ίσο με την αρχική ενέργεια του συστήματος. (αυτό ισχύει ανεξάρτητα από σχετικιστική ή μή κίνηση)

Για N σωματίδια υπάρχουν 3N συνιστώσες ορμών και οι 3 συνιστώσες ορμής μαζί με την ενέργεια δίνουν 4 περιορισμούς. Επομένως, θα έχουμε 3N-4 ανεξάρτητες μεταβλητές

Για τελική κατάσταση 2 σωματιδίων, έχουμε 3x2 – 4 = 2 μεταβλητές, τις οποίες λαμβάνουμε να είναι οι γωνίες θ και φ για ένα σωματίδιο με γνωστό μέτρο ορμής p. Το άλλο σωματίδιο είναι πλήρως προσδιορισμένο από το πρώτο

Για τελική κατάσταση 3 σωματιδίων, έχουμε 3x3 – 4 = 5 μεταβλητές. Όλα τα μέτρα των ορμών και ενεργειών έχουν συνεχεί εύρη τιμών (περιοριζόμενα βέβαια από κινηματική)

Τελική κατάσταση περισσότερο από 2 σωματιδίων

Πρέπει να πάρουμε τις μεταβλητές της τελικής κατάστασης υπόψην τόσο στον υπολογισμό του πλάτους όσο και της πυκνότητας καταστάσεων στην εξίσωση του χρυσού κανόνα του Fermi

Εφόσον οι περιορισμοί από την διατήρηση της ενέργειας και ορμής εκφραστούν στον χώρο των ορμών, μετασχηματίζουμε το «δυναμικό» (την αλληλεπίδραση δηλαδή ανάμεσα στα σωματίδια) στον χώρο των ορμών.

Ο μετασχηματισμός Fourier του δυναμικού, υπολογίζεται με απλούς κανόνες από το διάγραμμα Feynman, οι οποίοι δίνουν μια συνάρτηση όλων των συνιστωσών των ορμών όλων των σωματιδίων. Βασικά, ο Feynman έχει υπολογίσει μερικά από τα δύσκολα ολοκληρώματα για μας

Ολοκληρώνουμε την συνάρτηση των ορμών όλων των σωματιδίων, δεδομένου του διαγράμματος Feynman, πολλαπλασιαζόμενα με την πυκνότητα καταστάσεων, ως προς όλες τις τελικές ορμές και ενέργειες των σωματιδίων, γράφοντας την πυκνότητα των καταστάσεων χρησιμοποιώντας το τρικ με την σχετικιστική συνάρτηση δ του Dirac.

Αυτό μας δίνει το ρυθμό Γ.

Αν θέλουμε το χρόνο ζωής, σημαίνει ότι έχουμε τελειώσει τον υπολογισμό μας.

Αν χρειαζόμαστε την ολική ενεργό διατομή, διαιρούμε με την ολική ροή Φ. Αν θέλουμε την διαφορική ενεργό διατομή, δεν χρειάζεται να εκτελέσουμε το τμήμα της στερεάς γωνίας του ολοκληρώματος

Χρυσός κανόνας για διασπάσεις σωματιδίων

Για σωματίδιο 1 το οποίο διασπάται σε 2, 3, ...,n σωματίδια , ο ρυθμός δίνεται από

$$\Gamma = \frac{1}{S}\frac{1}{2\hbar m_1}\int |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4\left(\underset{\rightarrow}{p}_1 - \underset{\rightarrow}{p}_2 - \underset{\rightarrow}{p}_3 - \cdots - \underset{\rightarrow}{p}_n\right) \times \prod_{j=2}^{n} 2\pi\delta\left(\underset{\rightarrow}{p}_j^2 - m_j^2 c^2\right)\theta\left(E_j\right)\frac{d^4 \underset{\rightarrow}{p}_j\left(E^2/c^2\right)}{(2\pi)^4}$$

Ο όρος M είναι ισοδύναμος του όρου $\langle \psi_k | V | \psi_S \rangle$ στον χρυσό κανόνα του Fermi.

Ολοκληρώνουμε ως προς όλες τις τιμές όλων των τελικών καταστάσεων ενέργειας και συνιστωσών ορμής. Η πρώτη συνάρτηση δ^4 επιβάλει γενική διατήρηση ορμής και ενέργειας.

Οι παράγοντες των συναρτήσεων $\delta\left(\underset{\rightarrow}{p}_j^2 - m_j^2 c^2\right)$ επιβάλουν ότι ενέργεια και ορμή αντιστοιχίζουν για κάθε σωματίδιο της τελικής κατάστασης.

Η συνάρτηση βήματος $\theta(E_j)$ επιτρέπει στο ολοκλήρωμα να περιέχει αρνητική ενέργεια

Ο όρος S μπροστά είναι ένας παράγοντας S! για κάθε S πανομοιότυπα σωματίδια

Υπάρχουν μερικοί απλοί κανόνες σχετικά με τους παράγοντες 2π.

Μετακινήστε τον παράγοντα 2π του χρυσού κανόνα στον φασικό χώρο $\Gamma = \frac{1}{\hbar}|V_{fi}|^2 \left[2\pi\rho(E)\right]$

Κατόπιν κάθε δ-συνάρτηση δίνει ένα παράγοντα 2π, και κάθε d είναι διαίρεση με 2π

$$2\pi\rho(E) = \frac{2E}{c^2}\frac{L^3}{\hbar^3}\int 2\pi\delta\left(\underset{\rightarrow}{p}^2 - (mc)^2\right) 2\pi\delta\left(E' - E\right)\frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$$ για ένα σωματίδιο

Χρυσός κανόνας για διασπάσεις σωματιδίων

Κάθε δ-συνάρτηση έχει ένα παράγοντα 2π ο οποίος προέρχεται από: $\int e^{i(k-k')x}\,dx = 2\pi\delta(k-k')$

Κάθε dp έχει ένα παράγοντα 1/2π που προέρχεται από την πυκνότητα καταστάσεων.

Οι παράγοντες L^3 απαλλοίφονται.

Μερικοί παράγοντες E και c απορροφούνται στα πινακοστοιχεία M, με τέτοιο τρόπο ώστε τόσο το M όσο και η πυκνότητα καταστάσεων να είναι αναλοίωτα κάτω από Lorentz μετασχηματισμούς

Οι δ-συναρτήσεις ολοκληρώνονται αρκετά εύκολα αλλά για την περίπτωση της p^0 (ενέργειας) χρειαζόμαστε:

$$\int g(x)\delta(f(x)) = \frac{g(y)}{df/dx\big|_y} \qquad \text{όπου} \quad f(x)=0 \quad \text{για} \quad x=y$$

Αφού γίνουν τα ολοκληρώματα ως προς p^0 ο ρυθμός μετάβασης για σωματίδιο 1 να διασπαστεί σε 1,2,3...,n σωματίδια είναι:

$$\Gamma = \frac{1}{S}\frac{1}{2\hbar m_1}\int |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4\left(\underset{\rightarrow}{p}_1 - \underset{\rightarrow}{p}_2 - \underset{\rightarrow}{p}_3 - \cdots - \underset{\rightarrow}{p}_n\right) \times \prod_{j=2}^{n} \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}_j^{\,2} + m_j^2 c^2}} \frac{d^3\vec{p}_j}{(2\pi)^3}$$

Διάσπαση σε 2 σώματα στο σύστημα κέντρου μάζας

$$\Gamma = \frac{1}{S}\frac{1}{2\hbar m_1}\frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^6}\int |M|^2 \frac{\delta^4\left(\underline{p}_1 - \underline{p}_2 - \underline{p}_3\right)}{2\sqrt{\vec{p}_2^{\,2} + m_2^2c^2}\,2\sqrt{\vec{p}_3^{\,2} + m_3^2c^2}} d^3\vec{p}_2 d^3\vec{p}_3$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{1}{S}\frac{1}{32\pi^2\hbar m_1}\int |M|^2 \frac{\delta^4\left(\underline{p}_1 - \underline{p}_2 - \underline{p}_3\right)}{\sqrt{\vec{p}_2^{\,2} + m_2^2c^2}\sqrt{\vec{p}_3^{\,2} + m_3^2c^2}} d^3\vec{p}_2 d^3\vec{p}_3$$

$$\delta^4\left(\underline{p}_1 - \underline{p}_2 - \underline{p}_3\right) = \delta\left(p_1^0 - p_2^0 - p_3^0\right)\delta^3\left(\vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3\right)$$

$$\delta^4\left(\underline{p}_1 - \underline{p}_2 - \underline{p}_3\right) = \delta\left(m_1c - \sqrt{\vec{p}_2^{\,2} + m_2^2c^2} - \sqrt{\vec{p}_3^{\,2} + m_3^2c^2}\right)\delta^3\left(\vec{p}_2 + \vec{p}_3\right)$$

Επομένως: $$\Gamma = \frac{1}{S}\frac{1}{32\pi^2\hbar m_1}\int |M|^2 \frac{\delta\left(m_1c - \sqrt{\vec{p}_2^{\,2} + m_2^2c^2} - \sqrt{\vec{p}_3^{\,2} + m_3^2c^2}\right)}{\sqrt{\vec{p}_2^{\,2} + m_2^2c^2}\sqrt{\vec{p}_3^{\,2} + m_3^2c^2}}\delta^3\left(\vec{p}_2 + \vec{p}_3\right) d^3\vec{p}_2 d^3\vec{p}_3$$

Κάνουμε τώρα το $d^3\vec{p}_3$ που είναι εύκολο γιατί η συνάρτηση $\delta^3\left(\vec{p}_2 + \vec{p}_3\right)$ αντικαθιστά απλά $\vec{p}_3 = -\vec{p}_2$ και είναι πάντοτε στο τετράγωνο οπότε το πρόσημο δεν παίζει σημασία

$$\Gamma = \frac{1}{S}\frac{1}{32\pi^2\hbar m_1}\int |M|^2 \frac{\delta\left(m_1c - \sqrt{\vec{p}_2^{\,2} + m_2^2c^2} - \sqrt{\vec{p}_2^{\,2} + m_3^2c^2}\right)}{\sqrt{\vec{p}_2^{\,2} + m_2^2c^2}\sqrt{\vec{p}_2^{\,2} + m_3^2c^2}} d^3\vec{p}_2$$

Διάσπαση σε 2 σώματα στο σύστημα κέντρου μάζας

Υπάρχει μόνο μια ορμή για να ολοκληρώσουμε οπότε αγνοούμε τον δείκτη και αλλάζουμε σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\Gamma = \frac{1}{S}\frac{1}{32\pi^2\hbar m_1}\int |M|^2 \frac{\delta\left(m_1 c - \sqrt{\vec{p}^2 + m_2^2c^2} - \sqrt{\vec{p}^2 + m_3^2c^2}\right)}{\sqrt{\vec{p}^2 + m_2^2c^2}\sqrt{\vec{p}^2 + m_3^2c^2}} p^2 dp \sin\theta d\theta d\varphi$$

Το πινακοστοιχείο είναι εν γένει συνάρτηση των ορμών $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ αλλά $\vec{p}_1$ δεν είναι μεταβλητή ολοκλήρωσης ενώ $\vec{p}_2 = -\vec{p}_3$ και επομένως το M είναι απλά συνάρτηση του $\vec{p}_2$ $M\left(\vec{p}_2\right)$

Δεν εξαρτάται από την διεύθυνση της p_2 (εκτός και αν το σωματίδιο που διασπάται έχει σπιν και η διεύθυνση του σπιν δεν είναι τυχαία), οπότε τα γωνιακά ολοκληρώματα δίνουν 4π

Ορίζουμε $u = \sqrt{p^2 + m_2^2c^2} + \sqrt{p^2 + m_3^2c^2}$ και προσέχουμε ότι

$$\frac{du}{dp} = \frac{2p}{2\sqrt{p^2 + m_2^2c^2}} + \frac{2p}{2\sqrt{p^2 + m_3^2c^2}} = p\frac{\sqrt{p^2 + m_3^2c^2} + \sqrt{p^2 + m_2^2c^2}}{\sqrt{p^2 + m_2^2c^2}\sqrt{p^2 + m_3^2c^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dp} = p\frac{u}{\sqrt{p^2 + m_2^2c^2}\sqrt{p^2 + m_3^2c^2}} \quad \Rightarrow \frac{1}{up}\frac{du}{dp} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + m_2^2c^2}\sqrt{p^2 + m_3^2c^2}}$$

Διάσπαση σε 2 σώματα στο σύστημα κέντρου μάζας

Επομένως έχουμε: $\Gamma = \frac{1}{S}\frac{1}{8\pi\hbar m_1}\int \left|M(p)\right|^2 \delta(m_1 c - u)\frac{1}{up}\frac{du}{dp}p^2 dp$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{1}{S}\frac{1}{8\pi\hbar m_1}\int \left|M(p)\right|^2 \delta(m_1 c - u)\frac{p}{u}du \Rightarrow \Gamma = \frac{1}{S}\frac{1}{8\pi\hbar m_1}\frac{p_F}{u}\left|M(p_F)\right|^2$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{1}{S}\frac{1}{8\pi\hbar m_1^2 c}p_F\left|M(p_F)\right|^2$$

Η δ-συνάρτηση θέτει $u = m_1 c = \sqrt{p^2 + m_2^2 c^2} + \sqrt{p^2 + m_3^2 c^2}$

Λύνουμε για $p_F = c\sqrt{\left(\frac{m_1^2 - m_2^2 - m_3^2}{2m_1}\right)^2 - m_2^2}$ (κινηματική 4-διανυσμάτων)

Από συμμετρία: $= c\frac{\sqrt{m_1^4 + m_2^4 + m_3^4 - 2m_1^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_3^2 - 2m_2^2 m_3^2}}{2m_1}$

Αυτή είναι η τιμή της p_F που πρέπει να αντικαταστήσουμε στην παραπάνω εξίσωση του ρυθμού

Διάσπαση σε περισσότερα από 2 σώματα

$$\Gamma = \frac{1}{S}\frac{1}{2\hbar m_1}\int \left|M\right|^2 (2\pi)^4 \delta^4\left(\underset{\rightarrow}{p}_1 - \underset{\rightarrow}{p}_2 - \underset{\rightarrow}{p}_3 - \cdots - \underset{\rightarrow}{p}_n\right) \times \prod_{j=2}^{\nu} \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}_j^{\,2} + m_j^2 c^2}} \frac{d^3\vec{p}_j}{(2\pi)^3}$$

Η σχέση εξακολουθεί να ισχύει και μπορούμε να ολοκληρώσουμε ως προς μια 3-ορμή και να απαλοίψουμε τις δ-συναρτήσεις των 3-ορμών.

Μπορούμε να κάνουμε επίσης την ορμή $\vec{p}_n = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \cdots - \vec{p}_{n-1}$ από τις άλλες ορμές

Θα εξακολουθήσουμε να έχουμε την δ-συνάρτηση σχετικά με την γενική διατήρηση ενέργειας μέσα σε ένα ολοκλήρωμα ως προς τις άλλες 3-ορμές ενώ το M τυπικά εξαρτάται από τις ορμές (τα μέτρα και τις μεταξύ τους γωνίες)

Τα μέτρα των 3-ορμών θα έχουν πεπερασμένες τιμές και το εύρος τιμών για τα όρια ολοκλήρωσης αναμένεται ότι θα είναι αρκετά περίπλοκα.

Δεν μπορούμε να προχωρήσουμε στην εκτέλεση του ολοκληρώματος αν δεν ξέρουμε την συναρτησιακή εξάρτηση του πινακοστοιχείου $M\left(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4\right)$ και ακόμη και στην περίπτωση αυτή είναι πολύπλοκο.

Για σημαντικές αλλά απλές καταστάσεις όπως $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ και $\mu \rightarrow e + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ τα ολοκληρώματα έχουν υπολογισθεί για την τυπική ασθενή διάσπαση και γενικεύσεις της.

Τα ολοκληρώματα αυτά είναι καλές υποψήφιες περιπτώσεις εφαρμογής σε MonteCarlo αριθμητικές προσομοιώσεις. Σύμφωνα με αυτές, δημιουργούμε πολλά 3-διανύσματα διατήρησης ενέργειας και ορμής τα οποία έχουν τυχαίους προσανατολισμούς στο χώρο των φάσεων, και κατόπιν βρίσκουμε την μέση τιμή της ποσότητας $\left|M\right|^2 \Big/ \prod_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\sqrt{\vec{p}_j^{\,2} + m_j^2 c^2}}$ ως προς τα σημεία αυτά

Χρυσός κανόνας για σκεδάσεις σωματιδίων

Για σωματίδια 1 και 2 που παράγουν σωματίδια 3,4,...,n η ενεργός διατομή δίνεται από:

$$\sigma = \frac{1}{S}\frac{\hbar^2}{4\sqrt{\left(\underset{\rightarrow}{p}_1\cdot\underset{\rightarrow}{p}_2\right)^2-\left(m_1m_2c^2\right)^2}}\int\left|M\right|^2(2\pi)^4\delta^4\left(\underset{\rightarrow}{p}_1+\underset{\rightarrow}{p}_2-\underset{\rightarrow}{p}_3-\cdots-\underset{\rightarrow}{p}_n\right)$$

$$\times\prod_{j=3}^{n}2\pi\delta\left(\underset{\rightarrow}{p}_j^2-m_j^2c^2\right)\theta\left(E_j\right)\frac{d^4p_j}{(2\pi)^4}$$

Ο παράγοντας S είναι ο ίδιος στατιστικός παράγοντας, το πινακοστοιχείο M,είναι ο ίδιος παράγοντας πινακοστοιχείου, και οι δ-συναρτήσεις οι ίδιες όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις.

Η τετραγωνική ρίζα στον παρονομαστή περιγράφει τις σχετικές ταχύτητες των αρχικών σωματιδίων, όπως συνέβαινε με τη μάζα του διασπώμενου σωματιδίου, με ένα Lorentz αναλλοίωτο τρόπο.

Όπως και στην περίπτωση της διάσπασης, μπορούμε να κάνουμε τα ολοκληρώματα και έχουμε:

$$\sigma = \frac{1}{S}\frac{\hbar^2}{4\sqrt{\left(\underset{\rightarrow}{p}_1\cdot\underset{\rightarrow}{p}_2\right)^2-\left(m_1m_2c^2\right)^2}}\int\left|M\right|^2(2\pi)^4\delta^4\left(\underset{\rightarrow}{p}_1+\underset{\rightarrow}{p}_2-\underset{\rightarrow}{p}_3-\cdots-\underset{\rightarrow}{p}_n\right)\times\prod_{j=3}^{n}\frac{1}{2\sqrt{\vec{p}_j^{\,2}+m_j^2c^2}}\frac{d^3\vec{p}_j}{(2\pi)^3}$$

Χρυσός κανόνας – σκέδαση 2 σωμάτων

Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας, $\sqrt{\left(\underset{\to}{p}_1 \cdot \underset{\to}{p}_2\right)^2 - \left(m_1 m_2 c^2\right)^2} = \frac{E_1 + E_2}{c} p_I$

όπου το p_I είναι η (κοινή) εισερχόμενη ορμή στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας.

Ο χρυσός κανόνας γίνεται: $\sigma = \frac{1}{S} \frac{\hbar^2 c}{64\pi^2 \left(E_1 + E_2\right) p_I} \int |M|^2 \frac{\delta^4\left(\underset{\to}{p}_1 + \underset{\to}{p}_2 - \underset{\to}{p}_3 - \underset{\to}{p}_4\right)}{\sqrt{\vec{p}_3^{\,2} + m_3^2 c^2}\sqrt{\vec{p}_4^{\,2} + m_4^2 c^2}} d^3\vec{p}_3 d^3\vec{p}_4$

Μοιράζουμε την δ-συνάρτηση όπως πριν:

$$\delta^4\left(\underset{\to}{p}_1 + \underset{\to}{p}_2 - \underset{\to}{p}_3 - \underset{\to}{p}_4\right) = \delta\left(\frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c} - p_3^0 - p_4^0\right)\delta^3\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4\right)$$

$$\Rightarrow \delta^4\left(\underset{\to}{p}_1 + \underset{\to}{p}_2 - \underset{\to}{p}_3 - \underset{\to}{p}_4\right) = \delta\left(\frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c} - \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_3^2 c^2} - \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_4^2 c^2}\right)\delta^3\left(\vec{p}_3 + \vec{p}_4\right)$$

Μπορούμε να κάνουμε ένα 3-ορμή ολοκλήρωμα όπως στην περίπτωση της διάσπασης των σωματιδίων αντικαθιστώντας $\vec{p}_3 = -\vec{p}_4$ και απαλοίφοντας τους δείκτες στις ορμές.

Συνήθως θέλουμε την διαφορική ενεργό διατομή, οπότε μετακινούμε το γωνιακό τμήμα του άλλου 3-ορμή ολοκλήρωμα στην άλλη πλευρά, ώστε να μας μείνει μόνο το ολοκλήρωμα ως προς το μέτρο της ορμής να κάνουμε

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\theta \sin\theta d\varphi} = \frac{1}{S} \frac{\hbar^2 c}{64\pi^2 \left(E_1 + E_2\right) p_{CM}} \int |M|^2 \frac{\delta\left(\frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c} - \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_3^2 c^2} - \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_4^2 c^2}\right)}{\sqrt{\vec{p}_3^{\,2} + m_3^2 c^2}\sqrt{\vec{p}_4^{\,2} + m_4^2 c^2}} p^2\, dp$$

Χρυσός κανόνας – σκέδαση 2 σωμάτων

Ορίζουμε μια ποσότητα u όπως στην περίπτωση της διάσπασης σωματιδίου και κάνουμε ακριβώς τα ίδια βήματα. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο μόνο που έχουμε τις εξής τροποποιήσεις:

$$m_1 \to \frac{E_1 + E_2}{c} \quad \text{και} \quad m_2 \to m_4$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{S} \frac{\hbar^2 c^2}{64\pi^2 \left(E_1 + E_2\right)^2} \frac{p_F}{p_I} \left|M\right|^2 = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{\left|M\left(\vec{p}_F\right)\right|^2}{S\left(E_1 + E_2\right)^2} \frac{p_F}{p_I}$$

Η τιμή της p_I καθορίζεται από τις συνθήκες της δέσμης.

Η τιμή της p_F είναι η ίδια αν οι μάζες των τελικών σωματιδίων είναι ίδιες με αυτές των αρχικών σωματιδίων, αλλά διαφορετική αν οι μάζες των τελικών προϊόντων είναι διαφορετικές από αυτές των αρχικών προϊόντων.

Η εξάρτηση από την γωνία είναι κρυμμένη μέσα στον υπολογισμό του πινακοστοιχείου $M\left(\vec{p}_F\right)$

Χρυσοί κανόνες

Αρχικός Fermi: $\Gamma = \frac{dP}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|V_{kS}\right|^2 \rho\left(E_S\right)$

Διάσπαση σωματιδίου: $\Gamma = \frac{1}{S}\frac{1}{2\hbar m_1} \times I$

Σκέδαση: $\sigma = \frac{\Gamma}{\Phi} = \frac{1}{S}\frac{\hbar^2}{4\sqrt{\left(\underset{\rightarrow}{p}_1 \cdot \underset{\rightarrow}{p}_2\right)^2 - \left(m_1 m_2 c^2\right)^2}} \times I$

Ολοκλήρωμα:

$$I = \int \left|M\right|^2 \left(2\pi\right)^4 \delta^4\left(\underset{\rightarrow}{p}_{initial} - \underset{\rightarrow}{p}_{final}\right) \times \prod_{final} 2\pi\delta\left(\underset{\rightarrow}{p}_j^2 - m_j^2 c^2\right)\theta\left(E_j\right)\frac{d^4 p_j}{\left(2\pi\right)^4}$$

$$I = \int \left|M\right|^2 \left(2\pi\right)^4 \delta^4\left(\underset{\rightarrow}{p}_{initial} - \underset{\rightarrow}{p}_{final}\right) \times \prod_{final} \frac{1}{\sqrt{\vec{p}_j^2 + m_j^2 c^2}} \frac{d^3 \vec{p}_j}{\left(2\pi\right)^3}$$