

# Ηλεκτρικό Δυναμικό

# Αναδρομή στην Μηχανική

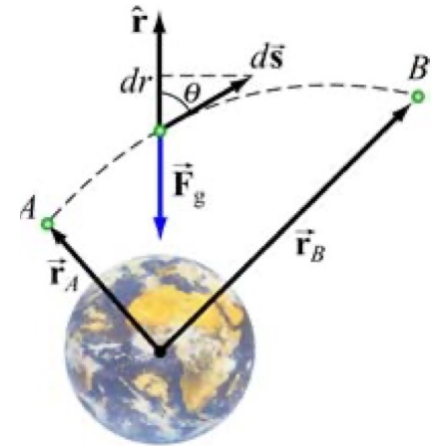
Ένα σώμα μάζας  $m$  το οποίο βρίσκεται σε απόσταση  $r$  από το κέντρο της Γης δέχεται μια δύναμη:

$$\vec{F}_g = -G \frac{M_\Gamma m}{r^2} \hat{r} \quad \text{βαρυτική δύναμη} \quad G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$$

Υποθέτουμε ότι η Γη είναι ομοιόμορφη σφαίρα μάζας  $M_\Gamma$

Το βαρυτικό πεδίο είναι:  $\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m} = -G \frac{M_\Gamma}{r^2} \hat{r}$

- Το βαρυτικό πεδίο εξαρτάται από την μάζα που δημιουργεί το πεδίο (στην προκειμένη περίπτωση  $M_\Gamma$  και την απόσταση  $r$  από την  $M$ )



Θεωρούμε ότι μετακινούμε ένα σώμα μάζας  $m$  από το A στο B υπό την επίδραση της δύναμης της βαρύτητας.

Το έργο που παράγει η δύναμη της βαρύτητας κατά την μετακίνηση αυτή δίνεται από:

$$W_g = \int \vec{F}_g \cdot d\vec{s} = \int_{r_A}^{r_B} \left( -G \frac{Mm}{r^2} \right) dr = \frac{GMm}{r} \Big|_{r_A}^{r_B} \Rightarrow W_g = GMm \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Το έργο είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση.

# Αναδρομή στην Μηχανική

Το έργο της δύναμης της βαρύτητας,  $W_g$ , είναι διαφορετικό από το έργο,  $W_{εξ.}$ , που παράγει μια εξωτερική δύναμη:

$$W_g = -W_{εξ.}$$

Κοντά στην επιφάνεια της γης το βαρυτικό πεδίο είναι περίπου σταθερό με μέτρο ίσο με:

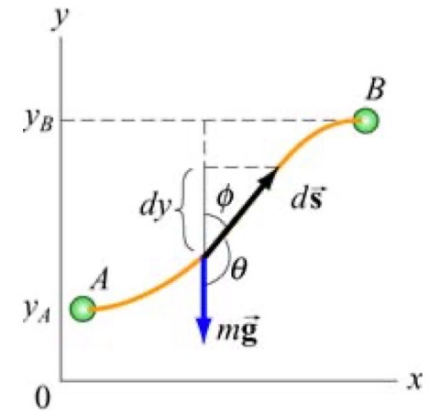
$$g = G \frac{M}{r^2} = 9.81 m/s^2$$

Το έργο που παράγει η δύναμη της βαρύτητας για να μεταφέρει ένα σώμα από το σημείο A στο σημείο B είναι:

$$W_g = \int \vec{F}_g \cdot d\vec{s} = \int_A^B mg \cos \theta ds = - \int_A^B mg \cos \phi ds \Rightarrow$$

$$W_g = - \int_{y_A}^{y_B} mg dy \Rightarrow \boxed{W_g = -mg(y_B - y_A)}$$

Το έργο είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και εξαρτάται μόνο από τη μεταβολή του ύψους:  $y_B - y_A$



Κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής, το έργο της βαρυτικής δύναμης είναι μηδέν. Η δύναμη της βαρύτητας είναι συντηρητική δύναμη.

Εν γένει, μία **δύναμη είναι συντηρητική** εάν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής είναι μηδέν

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

# Αναδρομή στην Μηχανική

Όπως έχουμε δει, για συντηρητικές δυνάμεις μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της δυναμικής ενέργειας  $U$ .

Η αλλαγή στη δυναμική ενέργεια που σχετίζεται με κάποια συντηρητική δύναμη  $\vec{F}$  που δρα σε κάποιο σώμα το οποίο κινείται από τη θέση A στη θέση B είναι: .

$$\Delta U = U_B - U_A = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -W_F$$

όπου  $W_F$  το έργο της συντηρητικής δύναμης  $\vec{F}$  που ασκείται στο σώμα.

Για την βαρυτική δύναμη μπορούμε επομένως να γράψουμε:  $U_g = -G \frac{Mm}{r} + U_0$

με  $U_0$  μια σταθερά η τιμή της οποίας εξαρτάται από το σημείο αναφοράς που επιλέγεται ώστε  $U_0 = 0$ . Για την βαρυτική δύναμη θεωρούμε  $U(r = \infty) = 0$

Εφόσον η δυναμική ενέργεια εξαρτάται από το σημείο αναφοράς που επιλέγεται αυθαίρετα, μόνο η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας έχει φυσική σημασία.

Μια έννοια που σχετίζεται με την δυναμική ενέργεια είναι το **δυναμικό**. Αν  $\Delta U$  είναι η βαρυτική δυναμική ενέργεια τότε το δυναμικό είναι :

$$\Delta V_g = \frac{\Delta U_g}{m} = - \int_A^B \left( \frac{\vec{F}_g}{m} \right) \cdot d\vec{s} = - \int_A^B \vec{g} \cdot d\vec{s}$$

το αρνητικό του έργου της  $F_g$  ανά μονάδα μάζας για να μετακινηθεί ένα σώμα από την θέση A στη θέση B

## Σύνδεση με τον Ηλεκτρισμό

Η ηλεκτροστατική δύναμη Coulomb είναι ίδιας μορφής με αυτή της βαρυτικής δύναμης. Είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης και είναι μια συντηρητική δύναμη.

Στην παρουσία ενός ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{E}$ , σε αναλογία με το βαρυτικό πεδίο,  $\vec{g}$ , μπορούμε να ορίσουμε τη **διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού**

$$\Delta V_e = \frac{\Delta U_e}{q} = - \int_A^B \left( \frac{\vec{F}_e}{q_0} \right) \cdot d\vec{s} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{όπου } q_0 \text{ θετικό δοκιμαστικό φορτίο}$$

Η διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού  $\Delta V$  είναι το έργο ανά μονάδα φορτίου, για να μετακινηθεί ένα δοκιμαστικό φορτίο  $q_0$  από το A στο B χωρίς να υπάρχει αλλαγή στην κινητική ενέργεια του φορτίου

Η διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού  $\Delta V$  είναι διαφορετική ποσότητα από την μεταβολή τη δυναμικής ενέργειας. Ωστόσο οι δύο ποσότητες σχετίζονται από τη σχέση:

$$\Delta U_e = q_0 \Delta V_e$$

Στο SI μονάδες μέτρησης του ηλεκτροστατικού δυναμικού είναι το  $\text{Volt} = 1 \text{Joule/C}$

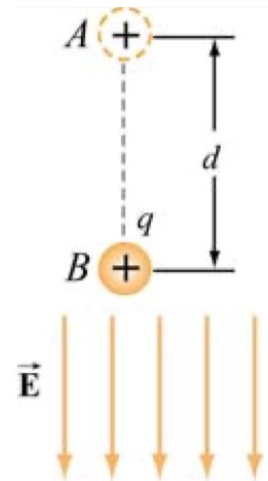
Μια χρήσιμη μονάδα μέτρησης του δυναμικού:  $1eV = 1.6 \times 10^{-19} C \cdot 1V = 1.6 \times 10^{-19} J$

# Ηλεκτρικό δυναμικό ομοιόμορφου πεδίου

Θεωρούμε φορτίο  $+q$  το οποίο κινείται στη διεύθυνση ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{E} = -E_0\hat{j}$ .

Η διαδρομή που ακολουθεί είναι παράλληλη του πεδίου  $\vec{E}$ , η διαφορά δυναμικού  $V$  ανάμεσα σε δύο σημεία A και B θα είναι:

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E_0 \int_A^B ds \Rightarrow \Delta V = -E_0 d < 0$$



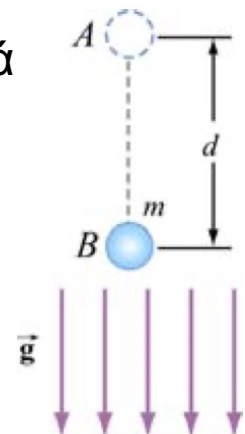
που δηλώνει ότι το σημείο B είναι σε μικρότερο δυναμικό από το σημείο A.

Αυτό είναι αναμενόμενο γιατί οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου πάντοτε δείχνουν από σημεία υψηλότερου δυναμικού σε σημεία χαμηλότερου δυναμικού.

Η αλλαγή στην ηλεκτρική δυναμική ενέργεια είναι:  $\Delta U = q\Delta V \Rightarrow \Delta U = -qE_0 d < 0$

Η δυναμική ενέργεια ενός θετικού φορτίου ελαττώνεται όταν κινείται κατά την διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου.

Η αναλογία με το βαρυτικό πεδίο είναι ότι μια μάζα  $m$  χάνει δυναμική ενέργεια ( $\Delta U = -mgd$ ) καθώς κινείται κατά τη διεύθυνση του βαρυτικού πεδίου  $-\vec{g}$ .



# Ηλεκτρικό δυναμικό ομοιόμορφου πεδίου

Εξετάζουμε την περίπτωση που το φορτίο  $+q$  κινείται υπό γωνία  $\theta$  ως προς τη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{E} = -E_0\hat{j}$ .

Στην περίπτωση αυτή η διαφορά δυναμικού γράφεται ως:

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\vec{E} \cdot \vec{s} \Rightarrow \Delta V = -E_0 s \cos\theta \Rightarrow \Delta V = -E_0 y$$

Παρατηρείστε ότι και πάλι κινούμενοι κατά τη διεύθυνση του πεδίου το δυναμικό ελαττώνεται.

Θα μπορούσαμε να μελετήσουμε την κίνηση από το A στο B μέσω του σημείου C.

Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν δύο συνεισφορές, κίνηση από το A στο C και από το C στο B.  $\Delta V = V_{CA} + V_{BC}$

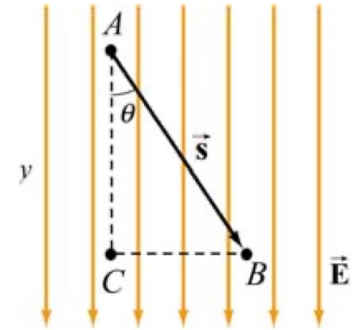
Από το A στο C η διαφορά δυναμικού θα είναι:  $V_{CA} = V_C - V_A = -E_0 y$

Από το C στο B η διαφορά δυναμικού θα είναι:  $V_{BC} = V_B - V_C = 0$

εφόσον η διαδρομή κάθετη στο πεδίο.

Επομένως λαμβάνουμε την ίδια διαφορά δυναμικού όπως θα αναμέναμε δεδομένου ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι συντηρητικό.

Τα σημεία B και C έχουν το ίδιο δυναμικό:  $V_B = V_C$  Όλα τα σημεία στη γραμμή CB έχουν το ίδιο δυναμικό – Βρίσκονται στην ίδια **ισοδυναμική γραμμή**



# Ηλεκτρικό δυναμικό σημειακών φορτίων

Θεωρούμε ένα ηλεκτρικό φορτίο  $+Q$  και θέλουμε να υπολογίσουμε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων A και B στο πεδίο του φορτίου αυτού.

Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από το φορτίο Q είναι:  $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$ .

Το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{r}$  έχει διεύθυνση προς το σημείο του πεδίου.

$$\text{Αλλά } \hat{r} \cdot d\vec{s} = dscos\theta = dr$$

Θα πάρουμε επομένως:

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s} = - \int_A^B \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

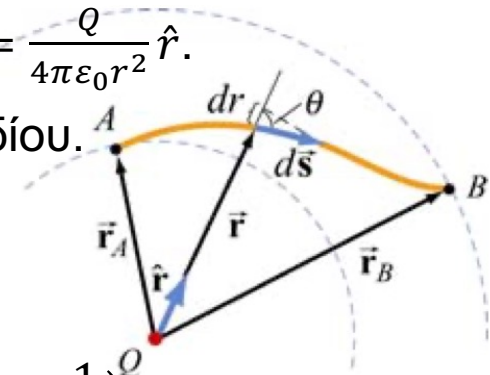
Η διαφορά δυναμικού  $\Delta V$  εξαρτάται και πάλι από τα ακραία σημεία και όχι τη διαδρομή που ακολουθεί το σώμα.

Όπως και στο βαρυτικό δυναμικό, από τη στιγμή που μόνο διαφορές δυναμικού έχουν φυσική σημασία, μπορούμε να διαλέξουμε το σημείο αναφοράς μηδενικού δυναμικού να είναι στο  $r = \infty$ .

Σαν αποτέλεσμα το δυναμικό μπορεί να γραφεί ως  $V_P = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{s}$  όταν  $V(\infty) = 0$

Το ηλεκτρικό δυναμικό σε απόσταση  $r$  από το σημείο θα είναι:  $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$

Για πολλαπλά φορτία:  $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$





## Δυναμική ενέργεια σε σύστημα φορτίων

Για ένα σύστημα φορτίων που έγινε μέσω της εφαρμογής μιας εξωτερικής δύναμης,

$\Delta U = -W = +W_{\text{εξ}}$ . Η μεταβολή στην δυναμική ενέργεια του συστήματος ισούται με το έργο που πρέπει να δαπανηθεί από μία εξωτερική δύναμη για να κατασκευαστεί το σύστημα των φορτίων.

Στην περίπτωση του βαρυτικού πεδίου, για να σηκώσουμε μία μάζα  $m$  κατά ύψος  $y$  θα πρέπει να καταναλώσουμε έργο  $mgh$  ενώ το βαρυτικό πεδίο παράγει έργο  $-mgh$ .

Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο φορτία τα οποία μεταφέρθηκαν από το άπειρο χωρίς επιτάχυνση και είναι σε ηρεμία.

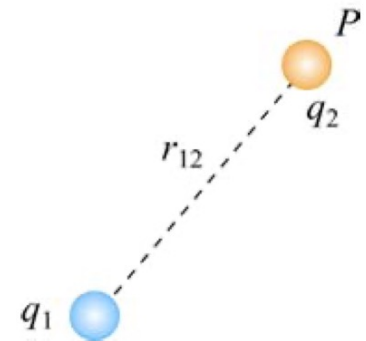
Ξεκινάμε με δύο φορτία  $q_1$  και  $q_2$ . Θεωρούμε αρχικά το πεδίο του  $q_1$  και έστω ότι το δυναμικό στο σημείο  $P$  του χώρου είναι  $V_1$ .

Το έργο που δαπανά μια εξωτερική δύναμη για να φέρει το φορτίο στην θέση  $P$  από το άπειρο, θα είναι:  $W_2 = V_1 q_2$

Δεν χρειάζεται να δαπανηθεί έργο για να μεταφερθεί το  $q_1$ , οπότε  $W_1=0$ .

Αλλά το δυναμικό  $V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$  όπου  $r_{12}$  η απόσταση του  $P$  από το  $q_1$ .

Επομένως η δυναμική ενέργεια θα είναι:  $U_{12} = W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$



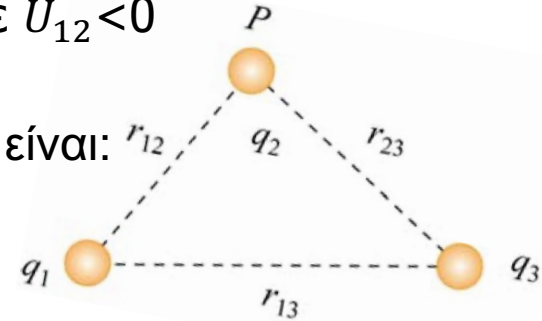
# Δυναμική ενέργεια σε σύστημα φορτίων

Επομένως η δυναμική ενέργεια θα είναι:  $U_{12} = W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$

Αν  $q_1 q_2 > 0$  τότε χρειάζεται θετικό έργο για να καλυφθεί η απωστική δύναμη μεταξύ των φορτίων ενώ όταν τα φορτία είναι αντίθετα, τότε  $U_{12} < 0$  εξαιτίας της ελκτικής δύναμης.

Για να προσθέσουμε ένα 3<sup>ο</sup> φορτίο  $q_3$  το έργο που απαιτείται είναι:

$$W_3 = q_3(V_{31} + V_{32}) = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right)$$



Η δυναμική ενέργεια αυτής της κατάστασης των φορτίων είναι:

$$U = W_2 + W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$

Επομένως η δυναμική ενέργεια είναι το άθροισμα των συνεισφορών ξεχωριστών ζευγών. Γενικεύοντας για σύστημα  $N$  φορτίων θα πάρουμε:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad \text{Θέτουμε } j > i \text{ για αποφυγή διπλού μετρήματος}$$

Δυναμικό στη θέση του κάθε φορτίου  $i$  από τα άλλα φορτία

Κάποιος θα μπορούσε να διπλομετρήσει και να διαιρέσει με το 2:

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_j}{r_{ij}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(r_i)$$

## Δυναμικό συνεχούς κατανομής φορτίου

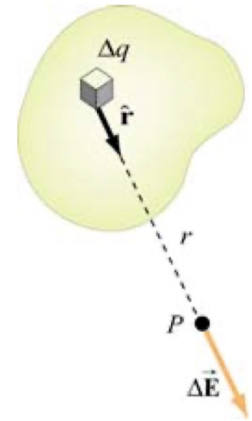
Αν η κατανομή φορτίου είναι συνεχής, το δυναμικό σε ένα σημείο  $P$  μπορεί να βρεθεί αθροίζοντας τις συνεισφορές κάθε διαφορικού στοιχειώδους φορτίου  $dq$ .

Θεωρούμε το άπειρο ως το σημείο αναφοράς για μηδενική τιμή του δυναμικού.

Το ηλεκτρικό δυναμικό στο  $P$  εξαιτίας του στοιχειώδους φορτίου  $dq$  θα είναι:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$$

Άθροισμα όλων των συνεισφορών οδηγεί:  $V = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$



## 2<sup>ο</sup> Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

Έτοιμοι