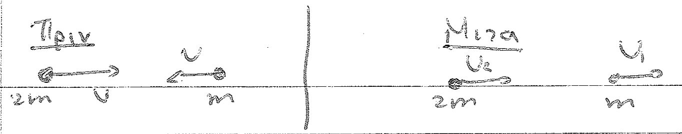
ΦΥΣ 111: ΓΕΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ 1

18/11/20 8ο Φροντιστήριο

Προβλήματα:

1. Θεωρήστε την ακόλουθη κρούση σε μία διάσταση. Μια μάζα $2m$ κινείται δεξιά και μία μάζα m κινείται στα αριστερά και οι δύο με ταχύτητα u. Συγκρούονται ελαστικά. Βρείτε τη τελική τους ταχύτητα ως προς το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Λύστε το πρόβλημα αυτό δουλεύοντας (α) στο σύστημα του εργαστηρίου και (β) στο σύστημα του κέντρου μάζας.

1)



α) Διατήρηση ορμής: $2mu - mu = 2mu_2 + mu_1 \Rightarrow u = 2u_2 + u_1$ (1)

Διατήρηση ενέργειας: $\frac{1}{2}2mu^2 + \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}2mu_2^2 + \frac{1}{2}mu_1^2 \Rightarrow 2u^2 + u^2 = 2u_2^2 + u_1^2$

$\Rightarrow 3u^2 = 2u_2^2 + u_1^2$ (2)

Από τις διαλέξεις: $u_1 + u_2 = u_1' + u_2'$

Εφαρμόζοντας στο παράδειγμα: $(-u) - u = u_2 - u_1 \Rightarrow 2u = u_1 - u_2$ (3)

Από (1),(3): $\left.\begin{array}{l} u = 2u_2 + u_1 \\ 2u = u_1 - u_2 \end{array}\right\} \Rightarrow u = -3u_2 \Rightarrow \boxed{u_2 = -\frac{u}{3}}$, $\boxed{u_1 = \frac{5}{3}u}$

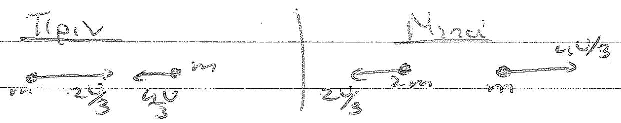
β) Στο σύστημα κέντρου μάζας:

Ταχύτητα κέντρου μάζας: $u_{KM} = \frac{2mu + m(-u)}{3m} = \frac{u}{3}$

Στο σύστημα KM η $u_{KM} = 0$ επομένως πρέπει να αφαιρέσουμε από όλες τις ταχύτητες του προβλήματος $u/3$

Για την μάζα $2m$: $u - u_{KM} = \frac{2u}{3}$

" " m: $-u - u_{KM} = -u - \frac{u}{3} = -\frac{4u}{3}$



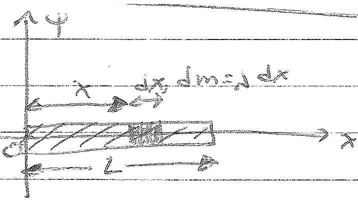
Στο σύστημα KM μετά την κρούση ~~στα~~ τα 2 σώματα αντιστρέφεται η φορά της ταχύτητας τους.

Για να πάμε ξανά στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου πρέπει να αφαιρέσουμε την ταχύτητα που προσθέσαμε πριν $(-\frac{u}{3})$ από όλα τα σώματα του προβλήματος.

$\left.\begin{array}{l} u_2 = -\frac{2u}{3} + u_{KM} = -\frac{2u}{3} + \frac{u}{3} = -\frac{u}{3} \\ u_1 = \frac{4u}{3} + u_{KM} = \frac{5u}{3} \end{array}\right\}$ Συμφωνούν με το (α) ερώτημα

2. Μια ράβδος μήκους 30cm έχει γραμμική πυκνότητα (μάζα ανά μήκος) ως εξής: λ = 50.0 + 20.0x όπου x είναι η απόσταση από το ένα άκρο. Η απόσταση x μετριέται σε μέτρα ενώ η λ σε γραμμάρια ανά μέτρο. (α) Βρείτε τη μάζα της ράβδου, (β) πόσο μακριά από την αρχή της ράβδου (x = 0) βρίσκεται το κέντρο μάζας;

2) $L = 30cm = 0,3m$, $\lambda = (50 + 20x)\ g/m$



α) $M = \int dm = \int_0^L \lambda dx = \int_0^L (50 + 20x) dx = \left[50x + \frac{20}{2}x^2\right]_0^L$

$= 10L^2 - 50L = 15,9g$

β) $x_{KM} = \frac{1}{M}\int x dm = \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda dx = \frac{1}{M}\int_0^L (50x + 20x^2) dx = \frac{1}{M}\left(\frac{50}{2}x^2 + \frac{20x^3}{3}\right)_0^L$

$= 0,158m > 0,15m$ όπως αναμέναμε

3. Μια χιονοσανίδα μάζας $8kg$ έχει φύγει από τα πόδια του αναβάτη της και κατευθύνεται προς το μέρος σας με ταχύτητα 12m/s ενώ ένα έλκηθρο μάζας $4kg$ κινείται προς το μέρος σας από την αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα $3m/s$. Και τα δύο σώματα κινούνται πάνω σε μια παγωμένη λίμνη. (α) Ποια είναι η ολική κινητική ενέργεια των δύο σωμάτων; (β) Ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας τους προς εσάς; (γ) Ποια είναι η ταχύτητα κάθε μάζας ως προς το κέντρο μάζας; (δ) Ποια είναι η κινητική ενέργεια των δύο μαζών στο σύστημα του κέντρου μάζας; (ε) Δείξτε ότι η ολική κινητική ενέργεια που βρέθηκε στην ερώτηση (α) είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας του κέντρου μάζας των δύο σωμάτων και της κινητικής ενέργειας των δύο σωμάτων ως προς το κέντρο μάζας.

3) α) Ολική κινητική ενέργεια: $E_{κιν}^{ολ} = E_{κιν}^{1} + E_{κιν}^{2} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3^2 = 594 J$

β) $\vec{r}_{KM} = \dfrac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$

$\vec{v}_{KM} = \dfrac{d\vec{r}_{KM}}{dt} = \dfrac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 \dfrac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \dfrac{d\vec{r}_2}{dt}\right) = \dfrac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = 7\hat{i}\, m/s$

γ) Όμοια με την άσκηση 2 βρίσκουμε τις ταχύτητες $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ ως προς το ΚΜ:

$\vec{v}_1^{\,CM} = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} = 12\hat{i} - 7\hat{i} = 5\hat{i}\ m/s$

$\vec{v}_2^{\,CM} = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM} = -3\hat{i} - 7\hat{i} = -10\hat{i}\ m/s$

δ) Η κινητική ενέργεια των m_1, m_2 στο ΚΜ:

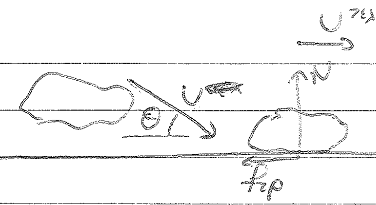
$E_{κιν}^{CM} = E_{κιν}^{1,CM} + E_{κιν}^{2,CM} = \frac{1}{2} m_1 (v_1^{cm})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2^{cm})^2 = 300 J$

ε) Κινητική ενέργεια ΚΜ: $E_{κιν}^{KM} = \frac{1}{2} M_{CM} v_{CM}^2 = 294 J$

$E_{κιν}^{CM} + E_{κιν}^{1,CM} + E_{κιν}^{2,CM} = 594 J$ όπως βρήκαμε στο ερώτημα (α).

4. Μια σακούλα με άμμο ρίχνεται με ταχύτητα υ υπό γωνία θ σε ένα οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής μ. Αν η διάρκεια της κρούσης μεταξύ σακούλας-επιπέδου διαρκεί Δt και η δύναμη που ασκείται από το δάπεδο στην σακούλα είναι σταθερή να βρείτε την τελική ταχύτητα της σακούλας αμέσως μετά την κρούση. Ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν οι μ και θ έτσι ώστε στο όριο όπου ο χρόνος Δt τείνει στο μηδέν η σακούλα δεν διανύει οριζόντια απόσταση πάνω στο δάπεδο; (Θεωρήστε την επίδραση του βάρους αμελητέα σε σχέση με τις δυνάμεις που ασκούνται κατά την διάρκεια της κρούσης.) Τι γίνεται στην περίπτωση που η δύναμη κατά την διάρκεια της κρούσης δεν είναι σταθερή;

4) $U^{τελ}$ είναι στην x διεύθυνση ⇒



$\Delta P_y^{τελ} = 0$

$F = \frac{dP}{dt}$, Για σταθερές F: $\Delta P = F\Delta t$

$\Delta P_y = P_y^{τελ} - P_y^{αρχ} = +U\sin\theta m$

$\Delta P_y = F_y \Delta t = N\Delta t$ $\Big\} \Rightarrow N = \frac{U\sin\theta m}{\Delta t}$ $\quad \vec{P}^{αρχ} = m\vec{U} \Rightarrow$

$\Delta P_x = -f_{τρ}\Delta t = -\mu N\Delta t = \frac{-mU\sin\theta\mu\Delta t}{\Delta t} = -mU\sin\theta\mu$

$\Delta P_x = P_x^{τελ} - P_x^{αρχ} \Rightarrow P_x^{τελ} = P_x^{αρχ} - \Delta P_x = mU\cos\theta - mU\sin\theta\mu = mU(\cos\theta - \sin\theta\mu)$

Η μετατόπιση στον οριζόντιο άξονα:

$\Delta W = \Delta E_{κιν}$, $\Delta W = \vec{F}_{ολ}\cdot d\vec{r} = F_y\Delta y + F_x\Delta x = N\Delta y + f_{τρ}\Delta x$
$= N\Delta y + \mu N\Delta x = (\Delta y + \mu\Delta x)\frac{mU\sin\theta}{\Delta t}$

Αφού $\Delta W = \Delta E_{κιν}$ και οι τελική ταχύτητα δεν εξαρτάται από το Δt τότε ούτε το ΔW εξαρτάται από το Δt.

$\Delta y + \mu\Delta x = \frac{\Delta W\,\Delta t}{mU\sin\theta}$

Για $\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0$ αφού ΔW παραμένει σταθερό ως προς Δt. Επομένως η μετατόπιση κατά την διάρκεια της κρούσης είναι ίσο 0 για $\Delta t \to 0$

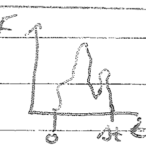
Για να είναι η οριζόντια μετατόπιση 0 πρέπει η $P_x^{τελ} = 0$. Για να γίνει αυτό πρέπει:

$P_x^{τελ} = mU(\cos\theta - \sin\theta\mu) < 0 \Rightarrow \cos\theta < \sin\theta\mu \Rightarrow \frac{\cos\theta}{\sin\theta} < \mu$

$\Delta t \to$ χρόνος κρούσης

Για $F = F(t)$: $F = \frac{dP}{dt} \Rightarrow \Delta P = \int_0^{\Delta t} F(t)\,dt$

π.χ.:



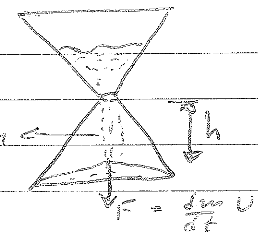
$\Delta P_y = -\int_0^{\Delta t} F(t)\,dt = -\int_0^{\Delta t} N(t)\,dt = -mU\sin\theta$

$\Delta P_x = -\int_0^{\Delta t} f_{τρ}\,dt = -\mu\int_0^{\Delta t} N(t)\,dt = -mU\sin\theta\mu$

Παρατηρούμε ότι τα παραπάνω αποτελέσματα δεν εξαρτώνται από τη λεπτομέρεια των δυνάμεων κατά τη διάρκεια της κρούσης

5. Έστω ότι έχετε μια κλεψύδρα πάνω σε μια ζυγαριά ακριβείας με μάζα άμμου M, συνολικής μάζας M_κ και χρόνο ροής άμμου T. Θεωρώντας ότι η ροή της άμμου είναι σταθερή ποια η ένδειξη της ζυγαριάς όταν η άμμος πέφτει;

5) Η άμμος που πέφτει δεν αντικατοπτρίζει στο βάρος που μετρά η ζυγαριά όμως ασκείται δύναμη από την κινούμενη άμμο στην ζυγαριά.



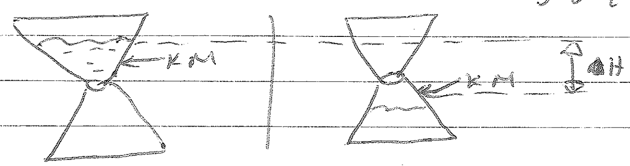
Ρυθμός ροής άμμου: $\lambda = \frac{dm}{dt} = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{M}{T}$

$m = \lambda \Delta t$, $h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$\Rightarrow m = \lambda \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow$ 'Απόντα' βάρος: $mg = \lambda \sqrt{2gh}$

$F = \frac{dm}{dt} v = \lambda v = \lambda g t = \lambda g \sqrt{\frac{2h}{g}} = \lambda \sqrt{2gh}$ ίσο με την απούσα βάρους $\Rightarrow$ Η ένδειξη της ζυγαριάς δεν επηρεάζεται και ισούται με $M_\kappa g$.

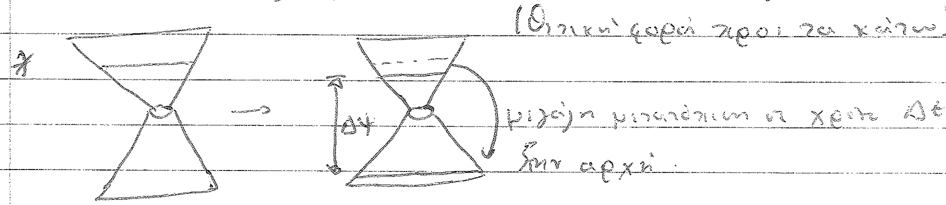
Στην πραγματικότητα το ΚΜ της ζυγαριάς κατεβαίνει:

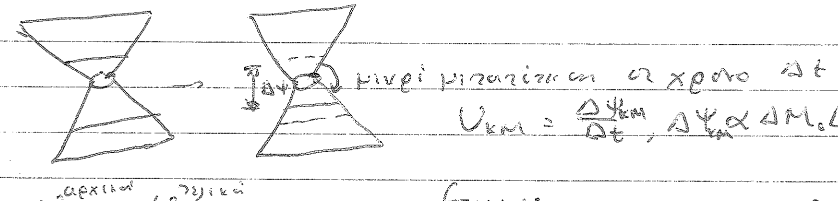


Έστω ότι το ΚΜ κατεβαίνει κατά H σε χρόνο T. Επειδή το h μειώνεται με τον χρόνο (όσο γεμίζει το κάτω μέρος της κλεψύδρας) η ταχύτητα του κέντρου μάζας μειώνεται $\Rightarrow a_{\kappa\mu} < 0$ *

$\Sigma F_{\varepsilon\xi} =$ Βάρος $- N_{\zeta\upsilon\gamma\alpha\rho\iota\acute{\alpha}\varsigma} = m\, a_{\kappa\mu} < 0 \Rightarrow N_{\zeta\upsilon\gamma\alpha\rho\iota\acute{\alpha}\varsigma} <$ Βάρος
(Θετική φορά προς τα κάτω)

*





$U_{KM} = \frac{\Delta \Psi_{KM}}{\Delta t}$, $\Delta \Psi_{KM} \propto \Delta M_\circ \Delta \Psi$

Αφού $U_{KM}^{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}} = U_{KM}^{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} = 0$ τότε $\int \Sigma F(t)\, dt = 0$ ενώ εμείς βρήκαμε $\Sigma F < 0$. Αυτό όμως δεν ισχύει όταν αρχίζει να πέφτει η άμμος όπου από $U_{KM}^{\alpha\rho\chi} = 0$ πάει σε $U_{KM}^{\alpha\rho\chi} > 0$ και έτσι εκεί $a_{KM} > 0$ $\Rightarrow F_{KM} > 0$.

6. Κάποια συστοιχία αστέρων αποτελείται από 4 αστέρες. Τρεις από τους αστέρες, ο καθένας με μάζα m, κινούνται στην ίδια κυκλική τροχιά ακτίνας r γύρω από κάποιο κεντρικό αστέρα μάζας M. Οι τρεις αστέρες έχουν μεταξύ τους ίσες αποστάσεις και έτσι σχηματίζουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Ποιά η περίοδος περιφοράς καθενός από τους τρεις αστέρες;

6) $\cos 30° = \frac{d}{2r} \Rightarrow d = 2r\cos 30° = \sqrt{3}\,r$

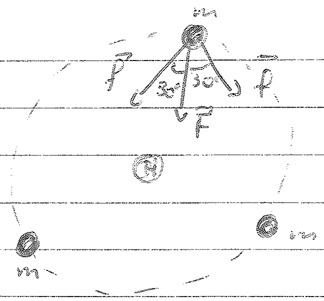
Η συνισταμένη δύναμη σε κάθε άστρο δίνεται από το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων που τα ασκούνται από τα άλλα 3 άστρα:

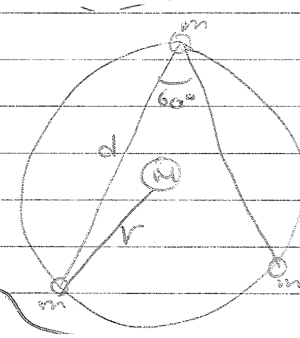
$F + 2f\cos 30° = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \frac{GM\cancel{m}}{r^2} + \frac{2Gm\cancel{m}}{d^2}\cos 30° = \frac{\cancel{m}v^2}{r}$

$\Rightarrow G\left(\frac{M}{r^2} + \frac{\cancel{2}m}{3r^2}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) = \frac{v^2}{r}$

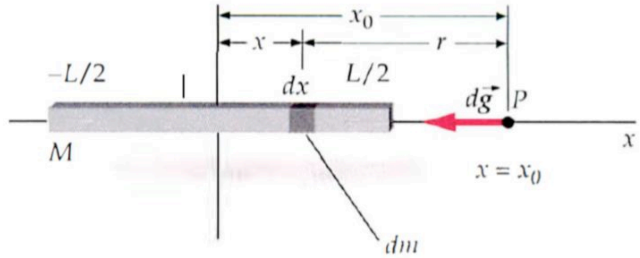
$\Rightarrow v^2 = \left(\frac{M}{r} + \frac{m}{\sqrt{3}r}\right) \Rightarrow \left(\frac{M}{r} + \frac{m}{\sqrt{3}r}\right) = \omega^2 r^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}r^2$

$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G(M + \frac{m}{\sqrt{3}})} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G(M+\frac{m}{\sqrt{3}})}}$

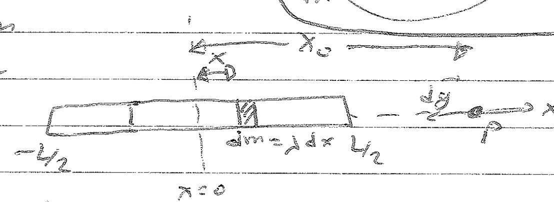




7. Μία ομοιόμορφη ράβδος μάζας M και μήκους L βρίσκεται κατά μήκος του x– άξονα με το κέντρο της στην αρχή των αξόνων. Βρείτε το βαρυτικό πεδίο εξαιτίας της ράβδου σε όλα τα σημεία στον x – άξονα για $x > L/2$.



7) Έστω μια στοιχειώδης μάζα dm μήκους dx που βρίσκεται στην θέση $x\hat{i}$. Κάθε στοιχείο μάζας dm παράγει βαρυτικό πεδίο στο σημείο P. Το βαρυτικό πεδίο έχει φορά προς τα ~~[illegible]~~ αριστερά. Για να υπολογίσουμε το συνολικό πεδίο πρέπει να αθροίσουμε τις συνεισφορές από όλες τις dm στην ράβδο επομένως χρειάζεται να ολοκληρώσουμε.



Κάθε στοιχειώδης μάζα dm παράγει πεδίο $dg = -\frac{G\,dm}{r^2}$.

$dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$ (αφού λ είναι σταθερή)

$r = x_0 - x$ και είναι η απόσταση της dm από το σημείο που θέλουμε να βρούμε το πεδίο

$$dg = -\frac{G\,dm}{r^2} = -\frac{GM\,dx}{L(x_0-x)^2}$$

$$g(x) = \int_{-L/2}^{L/2} dx \left(-\frac{GM}{L}\right)\frac{dx}{(x_0-x)^2} = -\frac{GM}{L}\left(\frac{1}{x_0-x}\right)_{-L/2}^{L/2} = -\frac{GM}{L}\left(\frac{1}{x_0-\frac{L}{2}}-\frac{1}{x_0+\frac{L}{2}}\right)$$

$$= -\frac{GM}{x_0^2-\left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

$\vec{g} = g_x\hat{i}$ $\;\Rightarrow\;$ $\vec{g} = -\frac{GM}{x_0^2-L^2/4}\hat{i}$ Αυτό είναι το πεδίο από την μάζα της ράβδου σε ένα οποιοδήποτε σημείο x_0 ~~[illegible]~~ στον x άξονα δεξιά από την ράβδο.