ΦΥΣ. 133
ΕΡΓΑΣΙΑ # 1

1. Αποδείξτε ότι το μέτρο R του διανύσματος θέσης του κέντρου μάζας ως προς τυχαία αρχή συστήματος αναφοράς δίνεται από την εξίσωση:

$$M^2R^2 = M\sum_i m_i r_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_i m_j r_{ij}^2$$

2. Θεωρήστε 2 ομόκεντρους κυλίνδρους, το ύψος των οποίων συμπίπτει με τον κατακόρυφο άξονα z και ακτίνες $R \pm \varepsilon$, όπου ε είναι πολύ μικρό. Ένα πολύ μικρό πούλι πάχους 2ε εισέρχεται ανάμεσα στους δύο κυλίνδρους και μπορεί να θεωρηθεί σαν υλικό σημείο το οποίο μπορεί να κινείται ελεύθερα σε σταθερή απόσταση από τον άξονα z. Αν χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ,ϕ,z) για την θέση του, τότε το ρ είναι σταθερό, ρ=R, ενώ ϕ και z μεταβάλλονται ελεύθερα. Να γραφούν και να λυθούν η εξίσωση του $2^{ου}$ νόμου του Newton για την γενική κίνηση του πουλιού, συμπεριλαμβανομένης και της επίδρασης της βαρύτητας. Περιγράψτε την κίνηση του πουλιού.

3. Αν L είναι η Lagrangian για ένα σύστημα με n βαθμούς ελευθερίας που ικανοποιούν τις εξισώσεις Lagrange, δείξτε με απ' ευθείας αντικατάσταση ότι:

$$L' = L + \frac{dF(q_1, q_2, ..., q_n, t)}{dt}$$

Ικανοποιεί τις εξισώσεις Lagrange όπου F τυχαία, αλλά παραγωγίσιμη, συνάρτηση των μεταβλητών της.

4. Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε μια διάσταση έτσι ώστε να του αντιστοιχεί η συνάρτηση Lagrange

$$L = \frac{m^2\dot{x}^4}{12} + m\dot{x}^2V(x) - V^2(x),$$

όπου V είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του x. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης για x(t) και να περιγραφή η φύση του συστήματος βάση της εξίσωσης αυτής.

5. Έστω $q_1,\ldots,q_n$ αποτελούν ένα σύνολο ανεξάρτητων γενικευμένων συντεταγμένων για ένα σύστημα με n βαθμούς ελευθερίας, με Lagrangian L (q,$\dot{q}$,t). Ας υποθέσουμε ότι μετασχηματίζουμε σε ένα άλλο σύνολο ανεξάρτητων συντεταγμένων $s_1,\ldots,s_n$ μέσω των εξισώσεων μετασχηματισμού:

$$q_i = q_i(s_1,\ldots,s_n,t), \qquad i=1,...,n$$

(τέτοιος μετασχηματισμός ονομάζεται σημειακός μετασχηματισμός, point transformation). Δείξτε ότι αν η συνάρτηση Lagrange εκφραστεί συναρτήσει των s_j, $\dot{s}_j$ και t μέσω των εξισώσεων του μετασχηματισμού, τότε η L ικανοποιεί τις εξισώσεις Lagrange ως προς τις s συντεταγμένες:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial s_j} = 0$$