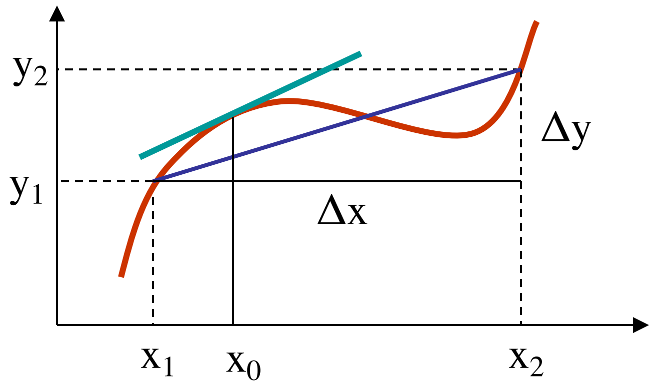
Διαφορικός λογισμός

Έστω y = f(x) μια συναρτησιακή σχέση της μεταβλητής y ως προς την μεταβλητή x: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Η παράγωγος του y ως προς το x ορίζεται ως το όριο των κλίσεων των χορδών που φέρονται μεταξύ 2 σημείων στην γραφική παράσταση του y ως προς το x καθώς το x τείνει στο μηδέν



$$\frac{dy}{dx} = \lim_{dx\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{dx\to 0}\frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

Διαφορικός λογισμός – ιδιότητες παραγώγων

- Η παράγωγος του αθροίσματος 2 συναρτήσεων είναι

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\left[g(x)+h(x)\right]=\frac{d}{dx}g(x)+\frac{d}{dx}h(x)$$

- Η παράγωγος του γινομένου 2 συναρτήσεων είναι

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\left[g(x)h(x)\right]=h\frac{dg}{dx}+g\frac{dh}{dx}$$

- Πηλίκο δύο συναρτήσεων? $\displaystyle \frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)=\frac{h\frac{dg}{dx}-g\frac{dh}{dx}}{h^2}$

- Αν y = f(z(x)) σύνθετη συνάρτηση

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz}$$

Έστω: $y=\left(x^2+1\right)^{17}$ ορίζουμε: $z=\left(x^2+1\right)$ οπότε: $y=z^{17}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz}=17z^{16}\times 2x=17\left(x^2+1\right)^{16}\times 2x$$

- Η δεύτερη παράγωγος της y ως προς x ορίζεται $\displaystyle \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

Διαφορικός λογισμός - τυπολόγιο

$$\frac{d}{dx}ax^n = nax^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin ax) = a\cos ax$$

$$\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a\sin ax$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{ax}\right) = ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx}\ln(ax) = \frac{1}{x}$$

Κίνηση σε μία διάσταση

- **Ανακεφαλαιώνοντας**

θέσης τροχιάς $\vec{r} = \vec{x} = x\hat{i} = \mathbf{x}$

μετατόπιση $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = x_f\hat{i} - x_i\hat{i} \Rightarrow \Delta\vec{r} = \Delta\vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i$

χρονικό διαστήμα $\Delta t = t_f - t_i$

παράγωγος

μέση ταχύτητα

$$\vec{\bar{\mathrm{v}}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

στιγμιαία ταχύτητα

$$\vec{\mathrm{v}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

μέση επιτάχυνση

$$\vec{\bar{a}} = \frac{\Delta\vec{\mathrm{v}}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{\mathrm{v}}(t+\Delta t) - \vec{\mathrm{v}}(t)}{\Delta t}$$

στιγμιαία επιτάχυνση

$$\vec{a}(\mathrm{t}) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\mathrm{v}}(t+\Delta t) - \vec{\mathrm{v}}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}(t)}{dt}$$

Ταχύτητα και Επιτάχυνση διαφορικός λογισμός

Η θέση ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου δίνεται από την εξίσωση $x = C\,t^3$ όπου C μια σταθερά με διαστάσεις m/sec^3. Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος συναρτήσει του χρόνου

Η ταχύτητα του σώματος βρίσκεται εφαρμόζοντας τον ορισμό της στιγμιαίας ταχύτητας:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Ct^3\right) \Rightarrow \upsilon = 3Ct^2$$

Η επιτάχυνση του σώματος βρίσκεται από:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow a = \frac{d}{dt}\left(3Ct^2\right) = 6Ct$$

Διαστασιακά οι 2 εξισώσεις είναι σωστές εφόσον:

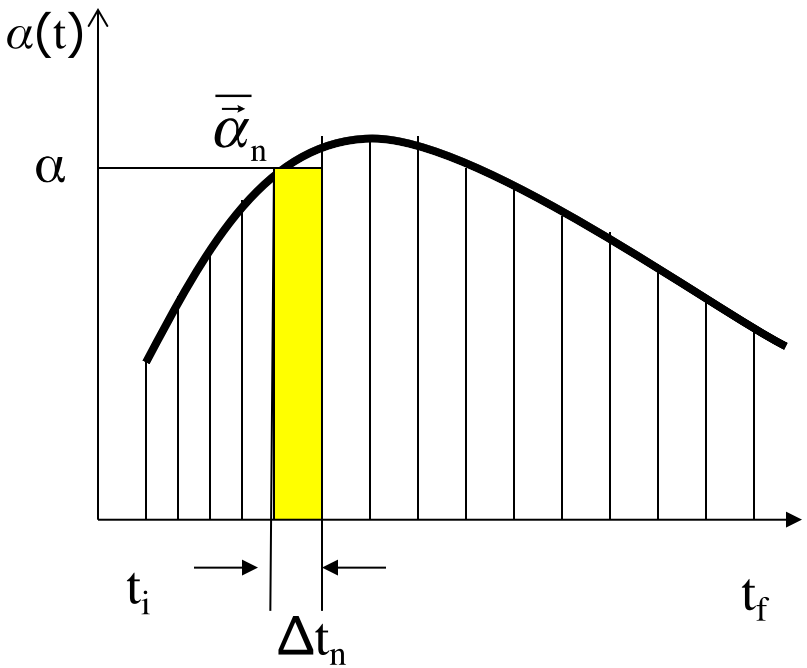
$$[\upsilon] = [C][t]^2 = \frac{m}{\sec^3}\sec^2 = \frac{m}{\sec}$$

$$[a] = [C][t] = \frac{m}{\sec^3}\sec = \frac{m}{\sec^2}$$

- Αν ξέρουμε την επιτάχυνση ***α***, μπορούμε να βρούμε από τις προηγούμενες εξισώσεις την **v** και την **x** τη στιγμή t

➢ Πώς?

- ❑ Χρησιμοποιώντας την έννοια του ολοκληρώματος
- ❑ Γραφικά πρώτα



Χωρίζουμε το χρονικό διάστημα σε πολλά ισόχρονα διαστήματα Δt_n. Ξέρουμε ότι

$$\bar{\vec{\alpha}}_n = \Delta v_n / \Delta t \Rightarrow \Delta v_n = \bar{\vec{\alpha}}_n \Delta t_n$$ ⇐ Εμβαδό!!

Αθροίζοντας όλα τα εμβαδά απο $t_i \rightarrow t_f$ έχουμε:

$$\Delta v = \sum_n \bar{\vec{\alpha}}_n \Delta t_n$$

Στο όριο $n \rightarrow \infty$, δηλαδή $\Delta t_n \rightarrow 0$ η μεταβολή της ταχύτητας δίνεται από το εμβαδό της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη επιτάχυνσης - χρόνου

$$\Delta v = \lim_{n \to \infty} \sum_n \vec{\alpha}_n \Delta t_n$$

Στιγμιαία και όχι μέση τιμή α

Ολοκληρωτικός λογισμός

- Θεωρούμε την ολοκλήρωση ως το αντίστροφο της διαφόρισης:

$$f(x)=\frac{dy}{dx}\rightarrow dy=f(x)dx$$

Μπορούμε να βρούμε την y(x) αθροίζοντας για όλες τις τιμές του x.

Αυτή η αντίστροφη πράξη γράφεται $$y(x)=\int f(x)dx$$

π.χ. για μιά συνάρτηση $f(x) = 3ax^2 + b$ η παραπάνω ολοκλήρωση δίνει

$$y(x)=\int(3ax^2+b)dx=ax^3+bx+c$$

Το ολοκλήρωμα ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα επειδή η τιμή του εξαρτάται από τη τιμή της σταθεράς c.

Το αόριστο ολοκλήρωμα ορίζεται ως $I(x)=\int f(x)dx$

Η συνάρτηση f(x) ονομάζεται ολοκληρωτέα συνάρτηση: $f(x)=\frac{dI(x)}{dx}$

Για μια συνεχή συνάρτηση το ολοκλήρωμα μπορεί να περιγραφεί ως το εμβαδό που ορίζεται από την καμπύλη της f(x) και του άξονα x, μεταξύ 2 ορισμένων τιμών x_1 και x_2 ➡ Οριμένο ολοκλήρωμα

Ολοκληρωτικός λογισμός

- Ένα από τα πιο χρήσιμα ολοκληρώματα που συναντιούνται είναι:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Διαφόριση του δεξιού μέλους δίνει f(x) = x^n. Αν τα όρια της ολοκλήρωσης είναι γνωστά τότε το ολοκλήρωμα δίνει:

$$\int x^n\,dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_{x_q}^{x_2} = \frac{x_2^{n+1} - x_1^{n+1}}{n+1}$$

- Μερικοί τρόποι ολοκληρώσεως
  - Ολοκλήρωση κατά παράγοντες: $\int udv = uv - \int vdu$

Για παράδειγμα: $I(x) = \int x^2 e^x dx = \int \underbrace{x^2}_{u} d\big(\underbrace{e^x}_{v}\big) = x^2 e^x - 2\int e^x x\,dx + c_1$

Επαναλαμβάνοντας στο δεύτερο όρο έχουμε

$$-2\int e^x x\,dx = -2e^x x + 2\int e^x\,dx = -2e^x x + 2e^x + c_2$$

Ολοκληρωτικός λογισμός

- Τέλειο διαφορικό: προσπαθούμε με αλλαγή της μεταβλητής ολοκλήρωσης το διαφορικό της συνάρτησης να είναι διαφορικό της ανεξάρτητης μεταβλητής που εμφανίζεται στην ολοκληρωτέα συνάρτηση

π.χ

$$I(x)=\int \cos^2 x \sin x dx$$

$$d(\cos x)=-\sin x dx$$

$$\Rightarrow \quad I(x)=-\int \cos^2 x d(\cos x)$$

Μερικά χρήσιμα ολοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{x}=\int x^{-1} dx=\ln x \qquad \int \frac{dx}{a+bx}=\frac{1}{b}\ln(a+bx) \qquad \int \frac{dx}{(a+bx)^2}=-\frac{1}{b(a+bx)}$$

$$\int \sin(ax)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax) \qquad \int \cos(ax)dx=\frac{1}{a}\sin(ax)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\sqrt{a^2-x^2} \qquad \int xe^{ax} dx=\frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$$

Αναπτύγματα σε σειρές

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots$$ Για x<<1 $$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$ Για x<<1 $$e^x \approx 1 + x$$

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$ Για x<<1 $$\ln(1 \pm x) \approx \pm x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

x σε ακτίνια

- Αν είναι γνωστή η καμπύλη επιτάχυνσης – χρόνου, η μεταβολή της ταχύτητας βρίσκεται από το εμβαδό της επιφάνειας.

Το παραπάνω ορισμένο ολοκλήρωμα γράφεται

$$\lim_{n\to\infty}\sum_n a_n\,\Delta t_n = \int_{t_i}^{t_f} a(t)\,dt$$

- Γνωρίζοντας τη συνάρτηση $a(t)$ μπορούμε υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα για τυχαία χρονική στιγμή t.

$$a(t)=\frac{d\mathrm{v}(t)}{dt}\Rightarrow a(t)dt=d\mathrm{v}(t)\ \Rightarrow\int_{t_i}^{t} a(t)dt=\int_{\mathrm{v}_i}^{\mathrm{v}_t} d\mathrm{v}=\mathrm{v}_t-\mathrm{v}_i=\mathrm{v}(t)-\mathrm{v}(t_i)$$

Επομένως σε μια χρονική στιγμή **t** η ταχύτητα είναι

$$\mathrm{v}(t)=\int_{t_i}^{t} a(t)dt+\mathrm{v}(t_i)$$

Αν $t_i = 0$ συνήθως γράφουμε $\mathrm{v}(t_i) = \mathbf{v_0}$ ⇒

$$\mathrm{v}(t)=\int_{0}^{t} a(t)dt+\mathrm{v}_0$$

- Κατά τον ίδιο τρόπο γνωρίζοντας την ταχύτητα μπορούμε να βρούμε την μετατόπιση

$$\mathrm{v}(t)=\frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^t \mathrm{v}(t)dt=\int_{x_i}^{\mathrm{x}} dx = x - x_i \;\; = x(t)-x(t_i) \;\; = x(t)-x_0$$

$$\boxed{\Rightarrow x(t)=x_0+\int_0^t \mathrm{v}(t)dt}$$

Δύο εξισώσεις κίνησης ανάλογα με το πρόβλημα που δίνεται

$$\mathrm{v}(t)=\int_0^t a(t)dt+\mathrm{v}_0 \qquad \text{(A)}$$

$$x(t)=x_0+\int_0^t \mathrm{v}(t)dt \qquad \text{(B)}$$

Αν v(t) είναι σταθερή π.χ. $v = v_0$ $\xrightarrow{\text{(B)}}$ $x(t)=x_0+\mathrm{v}_0 t$

Κίνηση σε μία διάσταση - Ανακεφαλαίωση

Διάνυσμα θέσης τροχιάς: $\vec{r} = x\hat{i}$ (για >1–διαστάσεις: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$)

Μετατόπιση: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = \left(x_f - x_i\right)\hat{i}$

Χρονικό διάστημα $\Delta t = t_f - t_i$

Μέση ταχύτητα $\boxed{\bar{\vec{v}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i}}$

Προσοχή $\langle v \rangle = \dfrac{|d|}{at}$ Βαθμωτό μέγεθος

διαδρομή

Στιγμιαία ταχύτητα $\boxed{\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\hat{i}}$

παράγωγος

Μέση επιτάχυνση $\boxed{\bar{\vec{a}} = \dfrac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}}$

Στιγμιαία επιτάχυνση $\boxed{\vec{a}\left(t\right) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{v}\left(t+\Delta t\right) - \vec{v}\left(t\right)}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}\left(t\right)}{dt}}$

Δύο εξισώσεις κίνησης ανάλογα με το πρόβλημα που δίνεται

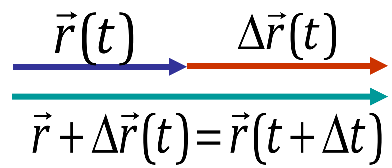
$$v\left(t\right) = \int_0^t a\left(t\right)dt + v_0 \quad \text{(A)}$$

$$x = x_0 + \int_0^t v(t)dt \quad \text{(B)}$$

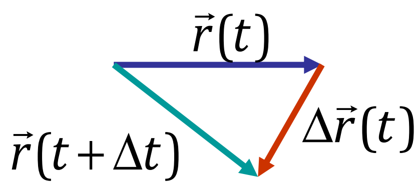
Σημαντικά σημεία

- Από τον ορισμό της στιγμιαίας ταχύτητας $\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

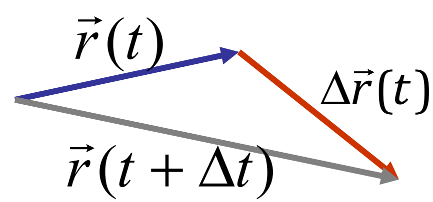
Αλλαγή μέτρου



Αλλαγή κατεύθυνσης



Αλλαγή και μέτρου και κατεύθυνσης



Αλλαγή ταχύτητας

- Από τον ορισμό της στιγμιαίας επιτάχυνσης $\vec{a} = \dfrac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}$

Αλλαγή στο μέτρο ή διεύθυνση ή και στα δυό μαζί της ταχύτητας ενός σώματος έχει σαν αποτέλεσμα την επιτάχυνση του σώματος

Αν $\Delta\vec{\mathrm{v}} > 0$ τότε το σώμα επιταχύνεται $\vec{a} = a_x\hat{i}$

Αν $\Delta\vec{\mathrm{v}} < 0$ τότε το σώμα επιβραδύνεται $\vec{a} = -a_x\hat{i}$