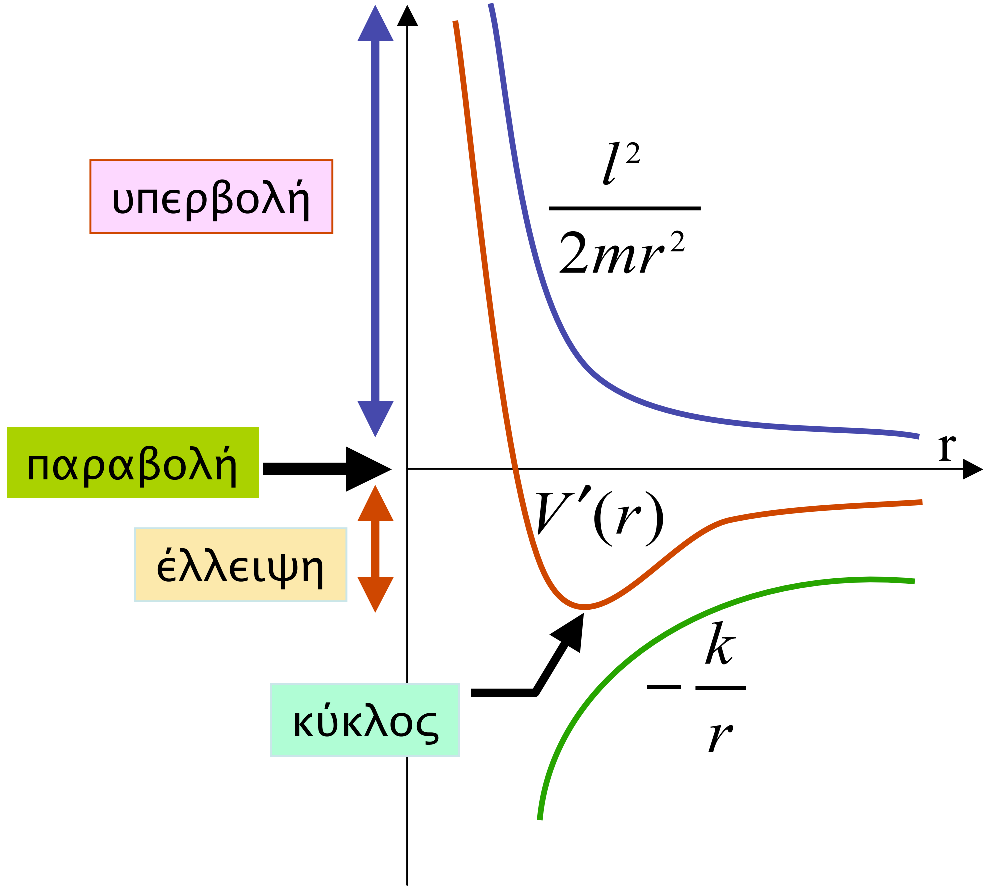
Ενέργεια και εκκεντρότητα

- E=0 ξεχωρίζει φραγμένες και **μή** φραγμένες τροχιές
  - Συνοριακή κατάσταση = Παραβολή
- Κυκλική τροχιά απαιτεί:

$$V'(r_0) = -\frac{k}{r_0} + \frac{l^2}{2mr_0^2} = E$$

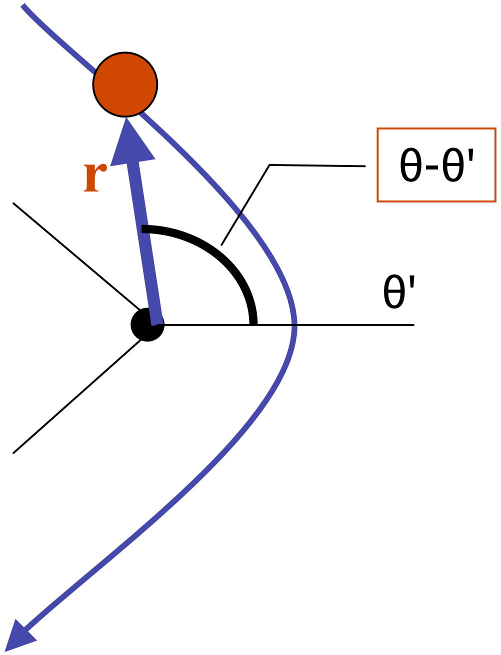
$$\left.\frac{dV'}{dr}\right|_{r_0} = \frac{k}{r_0^2} - \frac{l^2}{mr_0^3} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{E = -\frac{mk^2}{2l^2}}$$

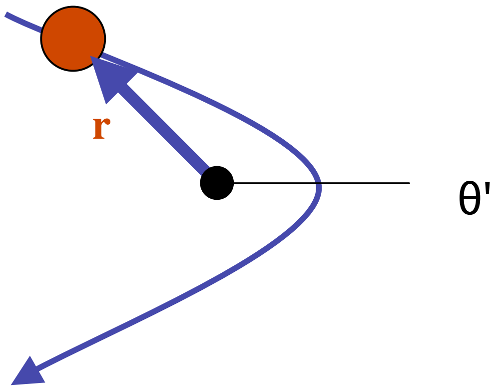


Μη φραγμένες τροχιές

$$\frac{1}{r} = C(1 + e\cos(\theta - \theta'))$$



- e > 1 → υπερβολή
  - θ' είναι το σημείο καμπής (περιήλιο)
  - cos(θ-θ') > -1/e περιορίζει θ
- e = 1 → παραβολή



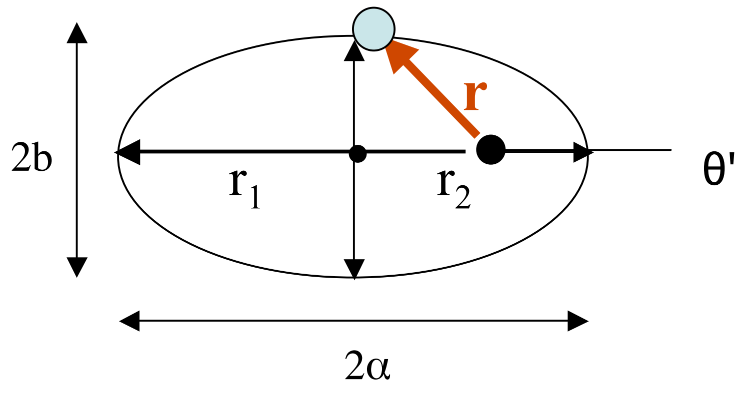
Φραγμένες τροχιές

$$\frac{1}{r} = C\left(1 + e\cos\left(\theta - \theta'\right)\right) \qquad C = \frac{mk}{l^2} \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$$

- Τα άκρα του μέγιστου άξονα είναι $1/r = C(1 \pm e)$
  - Το μήκος του μέγιστου ημιάξονα είναι:

$$a = \frac{1}{2}\left(r_1 + r_2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C(1+e)} + \frac{1}{C(1-e)}\right) = -\frac{k}{2E}$$

- Ο μέγιστος ημιάξονας δίνεται από την ολική ενέργεια E



- Ο μικρός ημιάξονας δίνεται από:

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = \sqrt{-\frac{l^2}{2mE}}$$

Περίοδος στροφής

$$a = -\frac{k}{2E} \qquad b = \sqrt{-\frac{l^2}{2mE}} \quad \Rightarrow \quad A = \pi ab = \pi\sqrt{-\frac{l^2k^2}{8mE^3}}$$

Εμβαδό τροχιάς

- Ξέρουμε ότι η εμβαδική ταχύτητα είναι σταθερή

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{l}{2m} \quad \Rightarrow \quad \tau = \mathrm{A}\Big/\frac{dA}{dt} = \pi\sqrt{-\frac{mk^2}{2E^3}}$$

Περίοδος στροφής

- Εκφράζουμε **τ** σα συνάρτηση του μέγιστου άξονα $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}a^{3/2}$

3ος Νόμος του Kepler
Η περίοδος στροφής είναι ανάλογη
της 3/2 δύναμης του μέγιστου άξονα

Ο τρίτος νόμος του Kepler

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}a^{3/2}$$

- Ο τρίτος νόμος του Kepler δεν είναι πλήρης
  - Ο λόγος: η ανηγμένη μάζα
  - k δίνεται από την βαρύτητα

$$\frac{1}{\mu} = \left(\frac{1}{M_{\mathrm{H}}} + \frac{1}{m_{\pi}}\right)$$

Ήλιος Πλανήτης

$$f = -G\frac{Mm}{r^2} = -\frac{k}{r^2} \Rightarrow k = GMm$$

- Η περίοδος στροφής γίνεται:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}a^{3/2} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\underline{G(\mathrm{M}+m)}}}a^{3/2}$$

- Οι παράμετροι είναι όλοι ίδιοι για όλους του πλανήτες μόνο αν M>>m

Εξάρτηση από χρόνο

- Ασχοληθήκαμε με τη μορφή/σχήμα της τροχιάς $r=r(\theta)$
  - Δεν έχουμε τις πλήρεις λύσεις $r=r(t)$ και $\theta=\theta(t)$

- Για ποιο λόγο δεν το κάνουμε:
  - Φοβερά πολύπλοκο
    - Θα μπορούσαμε να πάρουμε $t=t(\theta)$
    - Αντιστρέφοντας στο $\theta=\theta(t)$ αδύνατο.
    - Οι φυσικοί περνάνε αιώνες υπολογίζοντας προσεγγιστικές λύσεις
  - Πήραμε ήδη ενδιαφέρουσα χαρακτηριστικά για την λύση

- Η πλήρης λύση αφήνεται στους υπολογιστές