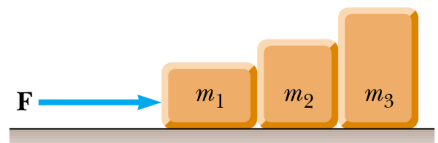
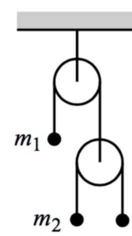
ΦΥΣ 111: ΓΕΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ 1

07/10/20 **4^{ο} Φροντιστήριο**

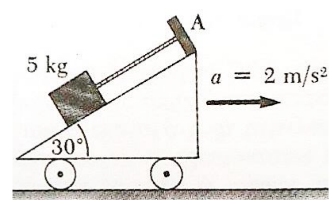


1. Τρία σώματα βρίσκονται σε επαφή μεταξύ τους πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Μια οριζόντια δύναμη F ασκείται στο m1. Αν $m1$ = $2kg$, $m2$ = $3kg$, $m3$ = $4kg$ και F = $18N$, βρείτε: (α) Την επιτάχυνση των σωμάτων. (β) Τη συνισταμένη δύναμη σε κάθε σώμα. (γ) Το μέτρο των δυνάμεων επαφής μεταξύ των σωμάτων. (δ) Επαναλάβετε το πρόβλημα αλλά με συντελεστή τριβής ολισθήσεως μεταξύ των σωμάτων και της επιφάνειας ίσο με 0.1. (ε) Πώς καταλαβαίνεται την σχέση μεταξύ των απαντήσεων σας στο ερώτημα (γ) στις 2 περιπτώσεις; (ζ) Αποδείξτε ότι η απάντηση στο (γ) είναι ανεξάρτητη από τον συντελεστή τριβής για ένα εύρος τιμών για το μ.

2. Ο Χρίστος, η μάζα του οποίου είναι $75kg$, είναι πάνω στη χιονοσανίδα του και αρχίζει να κατεβαίνει μια χιονισμένη πλαγιά ύψους $50m$ και γωνίας κλίσης 10^{o}. Για να αυξήσει τη ταχύτητα του έχει τοποθετημένη πάνω στη χιονοσανίδα ειδική προωθητική συσκευή που του επιδίδει δύναμη $200N$. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ της χιονοσανίδας και του χιονιού είναι $\mu\kappa$. Καθώς ο Χρίστος φθάνει στο χαμηλότερο σημείο της πλαγιάς η ταχύτητά του είναι $40m/s$. Να βρεθεί ο συντελεστής κινητικής τριβής.

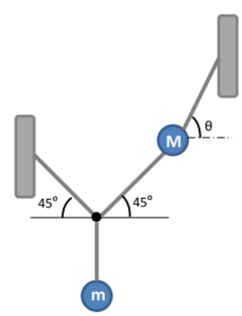


3. Θεωρήστε τη μηχανή Atwood του διπλανού σχήματος. Όλες οι τροχαλίες και τα νήματα είναι λεία και αβαρή. Οι μάζες κρατούνται αρχικά σε ηρεμία και κατόπιν αφήνονται ελεύθερες να κινηθούν. (α) Να βρείτε τη μάζα M που απαιτείται ώστε η μάζα $m1$ να μην κινείται. Να εκφράσετε την απάντησή σας συναρτήσει των μαζών $m1$ και $m2$. (β) Ποια η σχέση που πρέπει να συνδέει τις μάζες $m1$ και $m2$ ώστε να είναι δυνατή η ύπαρξη μίας τέτοιας μάζας M. (γ) Ποια η σχέση μεταξύ των τριών μαζών έτσι ώστε το σύστημα να είναι σε ηρεμία;

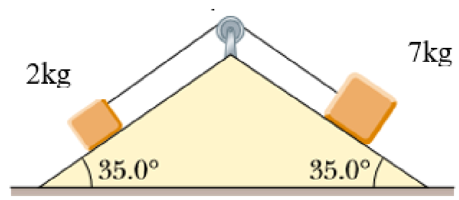


4. Η σφήνα που φαίνεται στο διπλανό σχήμα κινείται πάνω σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια με επιτάχυνση 2m/s^2. Ένα σώμα μάζας 5kg βρίσκεται πάνω στη σφήνα και είναι δεμένο με ένα ελαφρό νήμα στο σημείο A. Τριβή μεταξύ της σφήνας και του σώματος δεν υπάρχει. (α) Ποια είναι η τάση του νήματος; (β) Ποια κάθετη δύναμη ασκεί η σφήνα στο σώμα;

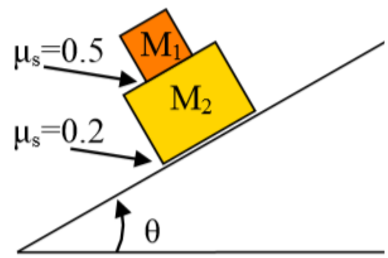
5. Δύο μάζες m και M είναι δεμένες με νήματα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν το σύστημα ισορροπεί, δείξτε ότι $tan\theta$ = 1 + $2M/m$



6. Δύο σώματα, μαζών 2kg και 7kg, συνδέονται με ένα λεπτό νήμα που περνάει γύρω από μια τροχαλία χωρίς τριβή. Τα κεκλιμένα επίπεδα είναι λεία. Βρείτε την επιτάχυνση του κεκλιμένου επιπέδου έτσι ώστε τα σώματα να ισορροπούν ως προς το επίπεδο.



7. Δύο τούβλα με μάζες M_1 και M_2 είναι ακίνητα το ένα πάνω στο άλλο και βρίσκονται πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο, όπως στο διπλανό σχήμα. (α) Σχεδιάστε τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος. (β) Γράψτε τις εξισώσεις του Νεύτωνα για τις μάζες M_1 και M_2. (γ) Αν η γωνιά του κεκλιμένου επιπέδου αυξάνει σταδιακά, ποιο από τα δύο τούβλα θα γλιστρήσει πρώτο και γιατί; (δ) Βρείτε την γωνία θ στην οποία ξεκινά να γλιστρά το πρώτο τούβλο λαμβάνοντας υπόψιν την κίνηση του κεκλιμένου επιπέδου. Θεωρήστε ότι η γωνία μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό ω και ότι τα 2 δύο τούβλα απέχουν από την ακίνητη κορυφή απόσταση R. Θεωρήστε τις διαστάσεις των τούβλων αμελητέες (για να εκτελεί ένα σώμα ομαλή κυκλική κίνηση πρέπει η συνισταμένη δύναμη να είναι η κεντρομόλος δύναμη που δίνεται από την σχέση $F=mu^2/R$. Επίσης $\omega=u/R$).

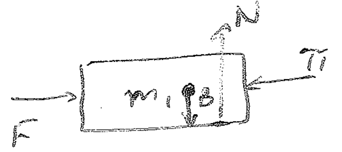


8. Στο μάθημα είδαμε διαφορικές εξισώσεις όπως ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα: $mx''(t)=f(x(t))$ όπου x'' είναι η δεύτερη παράγωγος της θέσης ως προς το όρισμα της (τον χρόνο). Σε αυτή την διαφορική εξίσωση η άγνωστη συνάρτηση είναι η θέση και είναι συνάρτηση του χρόνου. Στην περίπτωση της κβαντική μηχανικής η κυματοσυνάρτηση Ψ(x) που περιγράφει ένα σωματίδιο μάζας m και ενέργειας E σε δυναμικό V(x) είναι η λύση της εξίσωση Schrodinger: $-h^2/(8m\pi^2)\Psi''(x)+V(x)\Psi(x)=E\Psi(x)$ όπου h είναι μια σταθερά. (α) Αν V=0 βρείτε την λύση της εξίσωσης Schrodinger. (β) Αν επιβάλουμε η Ψ(x) να είναι μηδέν όταν το x=0, x=L ποια η συνθήκη για την ενέργεια του σωματιδίου E; (γ) Πώς θα άλλαζαν τα αποτελέσματα στα προηγούμενα ερωτήματα αν $V=V_0$ =σταθερό; (δ) Η $\rho(x)=\Psi^2(x)$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας να μετρηθεί το σώμα στην θέση x. Η πιθανότητα το σώμα να μετρηθεί από μια θέση x_1 μέχρι μια θέση x_2 δίνεται από το ολοκλήρωμα της ρ(x) ως προς x στο εύρος $x_1<x<x_2$. Αν το σωματίδιο είναι αναγκασμένο να βρίσκεται μεταξύ του x=0 και x=L ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί η Ψ(x) για να μπορεί η ποσότητα ρ(x) να εκφράζει κάποια πιθανότητα; (Υπόδειξη: Η συνολική πιθανότητα το σωματίδιο να μετρηθεί οπουδήποτε πρέπει να ισούται με 1.)

<u>Υπόδειξη:</u> Η εξίσωση Schrodinger για V=0 έχει την ίδια μορφή με την περίπτωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης όπου $mx''=-kx$.

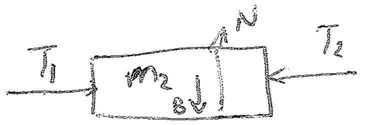
1) α) $a = \frac{F_{ολ}}{m_{ολ}} = \frac{F}{m_1+m_2+m_3} = \frac{18}{2+3+4} = 2\,m/s^2$ Θετική φορά προς τα δεξιά.

β) $a_1 = \frac{\Sigma F_1}{m_1} \Rightarrow \Sigma F_1 = a \cdot m_1 = 2\cdot 2 = 4N$, $\Sigma F_2 = a\, m_2 = 2\cdot 3 = 6N$, $\Sigma F_3 = 8N$

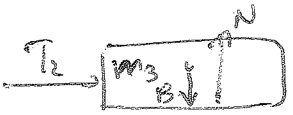
γ) 

$\Sigma F_1 = m_1 a \Rightarrow F - T_1 = m_1 a \Rightarrow T_1 = F - m_1 a = 18 - 2\cdot 2 = 14N$

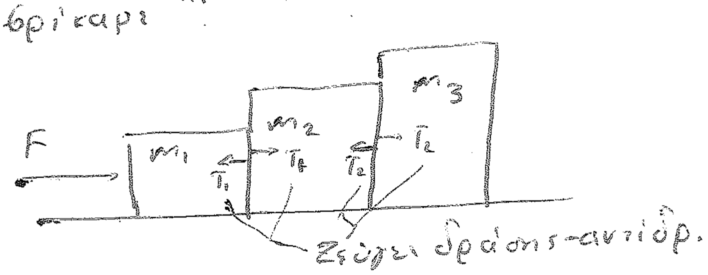
$N = B = m_1 g$



$\Sigma F_2 = T_1 - T_2 = m_2 a \Rightarrow T_2 = T_1 - m_2 a = 14 - 3\cdot 2 = 8N$



$\Sigma F_3 = T_2 = 8N$ όσα βρίκαμε πριν.



i) $N_{ολ} = m_{ολ} g = (2+3+4)\cdot 9{,}80 = 87{,}2N$

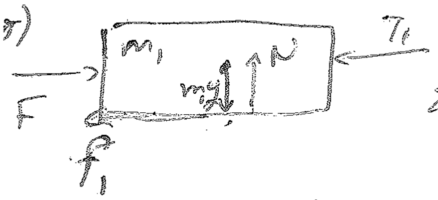
$f_{ολ} = N_{ολ}\cdot \mu = 87{,}2\cdot 0{,}1 = 8{,}7N < F \Rightarrow$ Το σώματα ολισθαίνει με θετική επιτάχυνση.

α) $F_{ολ} = m_{ολ} a \Rightarrow a = \frac{F_{ολ}}{m_{ολ}} = \frac{F - f_{ολ}}{m_1+m_2+m_3}$ (1) $= \frac{18 - 8{,}7}{2+3+4} = 1{,}03\,m/s^2$

β) $\Sigma F_1 = m_1 a = 2\cdot 1{,}03 = 2{,}06N$

$\Sigma F_2 = m_2 a = 3{,}09N$

$\Sigma F_3 = m_3 a = 4{,}12N$

γ) 

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = m_1 g$

$\Sigma F_1 = \Sigma F_{x_1} = F - T_1 - f_1 \Rightarrow T_1 =$ (2) $F - \Sigma F_1 - f_1 = F - \Sigma F_1 - N\mu$

$= F - \Sigma F_1 - m_1 g \mu = 18 - 2{,}06 - 2\cdot 9{,}8\cdot 0{,}1$

$= 14N$

Όμοια με πριν

$\Sigma F_2 = T_1 - T_2 - m_2 g \mu \Rightarrow T_2 = T_1 - \Sigma F_2 - m_2 g \mu = 14 - 3{,}09 - 3\cdot 9{,}8\cdot 0{,}1 = 8N$

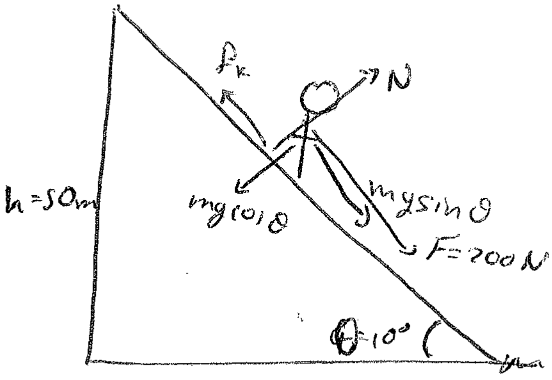
ε) Η δύναμη F 'χωρίζεται' στα 3 σώματα με τρόπο που τα είναι ανάλογος με την μάζα του κάθε σώματος ($\Sigma F_i = \frac{m_i}{m_1+m_2+m_3}$ όπου $i = 1, 2, 3$) επειδή η δύναμη είναι ανάλογη της μάζας ($F = ma$). Στην περίπτωση της τριβής αυτή η αναλογία δεν χάνει αφού $f = N\mu = mg\mu$ που είναι επίσης ανάλογο της μάζας. Επομένως αναμέναμε οι απαντήσεις στο (γ) να είναι ανεξάρτητες της τριβής.

τ) Συνδυάζοντας (1) και (2) βγαίνει $T_1 = F - \frac{m_1 F}{m_{ολ}}$ ανεξάρτητο του μ για $\mu < \frac{F}{m_{ολ} g}$.

2)

2) $\Sigma F_x = F + mg\sin\theta - f_k = ma_x$

$\Sigma F_y = N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$



$\Rightarrow F + mg\sin\theta - ma_x = f_k$

$\Rightarrow \mu_k mg\cos\theta = m(g\sin\theta - a_x) + F$

$\Rightarrow \mu_k = \dfrac{m(g\sin\theta - a_x) + F}{mg\cos\theta}$ (1)

Για να βρούμε την a_x θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση:

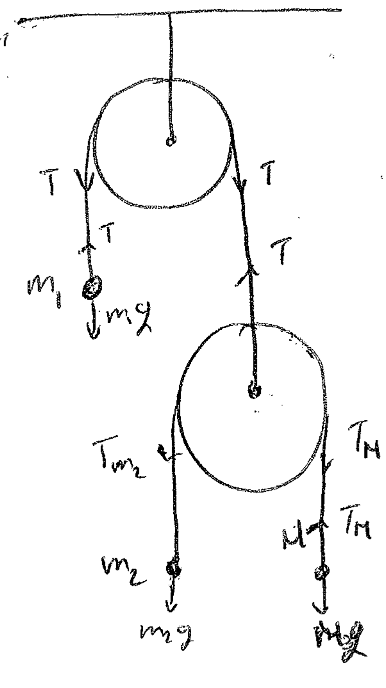
$$\left.\begin{array}{l} v_f^2 - v_i^2 = 2a_x\Delta x \Rightarrow a_x = \dfrac{v_f^2 - v_i^2}{2\Delta x} \\ \sin\theta = \dfrac{h}{\Delta x} \Rightarrow \Delta x = \dfrac{h}{\sin\theta} \end{array}\right\} \Rightarrow a_x = \dfrac{40^2 - 0^2}{2 \cdot 50/\sin\theta} = 16\sin(10°)\ m/s$$ (2)

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1):

$$\mu_k = \dfrac{m(g\sin\theta - 16\sin\theta) + F}{mg\cos\theta} = \dfrac{75 \cdot \sin(10°)(-6,2) + 200}{75 \cdot 9,8 \cdot \cos 10°} = 0,16$$

---

3) Οι τροχαλίες έχουν μηδενική μάζα επομένως η συνισταμένη δύναμη που τους ασκείται πρέπει να είναι 0. Επίσης οι τάσεις στα 2 άκρα του ίδιου νήματος πρέπει να είναι ίσες.



α) $a_{m_1} = 0 \Rightarrow T = m_1 g$

Για την δεύτερη τροχαλία: $T - T_M - T_{m_2} = 0 \Rightarrow T = T_M + T_{m_2}$

Όμως $T_{m_2} = T_M$ αφού είναι το ίδιο σχοινί:

$T = 2T_{m_2} \Rightarrow T_{m_2} = \dfrac{T}{2} = \dfrac{m_1 g}{2}$

Για τις μάζες m_2, M: $\dfrac{T}{2} - m_2 g = \Sigma F_2 = m_2 a \Rightarrow$

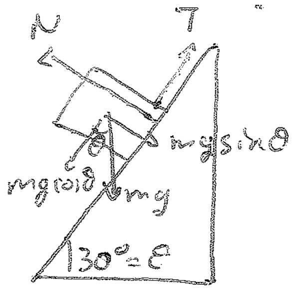
$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{m_1 g}{2} - m_2 g = m_2 a \Rightarrow a = \left(\dfrac{m_1 - 2m_2}{2m_2}\right)g \\ Mg - \dfrac{T}{2} = \Sigma F_M = Ma \Rightarrow Mg - \dfrac{m_1 g}{2} = Ma \Rightarrow a = \left(\dfrac{2M - m_1}{2M}\right)g \end{array}\right\} \Rightarrow 2M(m_1 - 2m_2) = 2m_2(2M - m_1)$$

$\Rightarrow 2M(2m_2 + 2m_2 - m_1) = 2m_2 m_1 \Rightarrow M = \dfrac{m_2 m_1}{4m_2 - m_1}$

β) $M > 0 \Rightarrow 4m_2 - m_1 > 0$ (αλλιώς η M θα ήταν αρνητική) $\Rightarrow m_2 > \dfrac{m_1}{4}$

γ) $$a = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m_1 - 2m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = 2m_2 \\ 2M - m_1 = 0 \Rightarrow m_1 = 2M \end{array}\right\} \Rightarrow m_2 = M$$ όπως αναμέναμε.

1) α) Σώμα 1:



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow mg = N_1\cos\theta + T\sin\theta \Rightarrow N_1 = \dfrac{mg - T\sin\theta}{\cos\theta}$ (1)

$\Sigma F_x = ma \Rightarrow T\cos\theta - N_1\sin\theta = ma$

$\Rightarrow T\cos\theta - mg\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + T\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = ma$

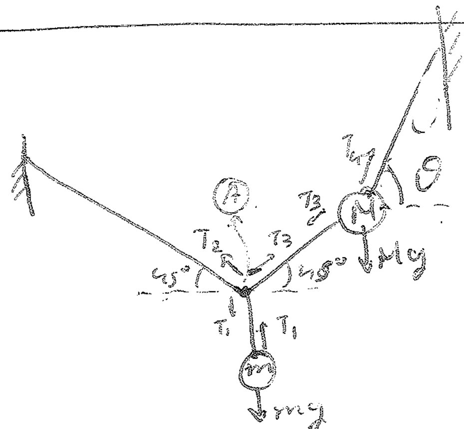
$\Rightarrow \underbrace{T\cos^2\theta - mg\sin\theta + T\sin^2\theta}_{=T} = ma\cos\theta$

$\Rightarrow T = ma\cos\theta + mg\sin\theta = 5\cdot 2\cdot\cos 30° + 5\cdot 9{,}8\cdot\sin 30 = 33{,}2\,N$

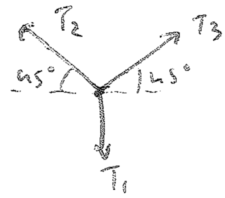
ii) $N_1 = \dfrac{5\cdot 9{,}8 - 33{,}2\cdot\sin 30°}{\cos 30°} = 37{,}4\,N.$

---

2) Εφαρμόζουμε συνθήκες ισορροπίας στις 2 μάζες καθώς και στο σημείο (A).



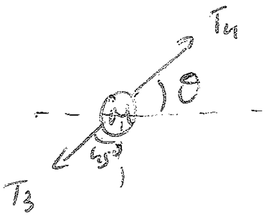
$T_1 = mg$



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_2\cos 45° = T_3\cos 45° \Rightarrow T_2 = T_3 = T$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_2\sin 45° + T_3\sin 45° = T_1$

$\Rightarrow 2T\dfrac{\sqrt2}{2} = mg \Rightarrow T = \dfrac{mg}{\sqrt2}$ (1)



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_3\sin 45° = T_4\cos\theta$

Από την (1): $\dfrac{mg}{\sqrt2} = T_3 \Rightarrow \dfrac{mg}{\sqrt2}\dfrac{\sqrt2}{2} = T_4\cos\theta \Rightarrow T_4 = \dfrac{mg}{2\cos\theta}$

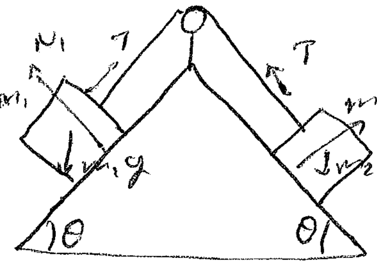
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_3\cos 45° + Mg = T_4\sin\theta \Rightarrow \dfrac{mg}{\sqrt2}\dfrac{\sqrt2}{2} + Mg = \dfrac{mg}{2}\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\Rightarrow \dfrac{mg}{2} + Mg = \dfrac{mg}{2}\tan\theta$

$\Rightarrow \tan\theta = \dfrac{2}{mg}\left(\dfrac{mg}{2} + Mg\right) \Rightarrow \tan\theta = 1 + \dfrac{2M}{m}$

⑥ Σώμα 1: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T\sin\theta + N_1\cos\theta = m_1 g$ ①

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T\cos\theta - N_1\sin\theta = m_1 a$ ②

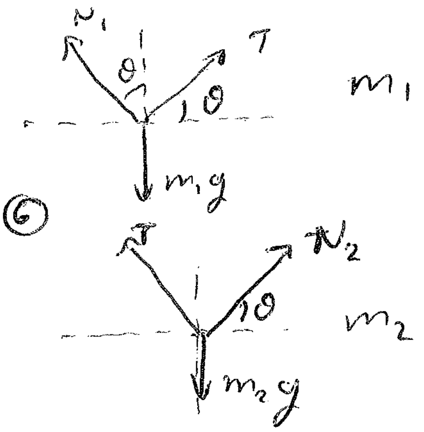


①$\cdot\cos\theta$ − ②$\cdot\sin\theta$: $N_1\cos^2\theta + N_1\sin^2\theta = m_1(g\cos\theta - a\sin\theta)$

$\Rightarrow N_1 = m_1(g\cos\theta - a\sin\theta)$ ③

Σώμα 2: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T\sin\theta + N_2\cos\theta = m_2 g$ ④

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -T\cos\theta + N_2\sin\theta = m_2 a$ ⑤



④$\cdot\cos\theta$ + ⑤$\cdot\sin\theta$: $N_2\cos^2\theta + N_2\sin^2\theta = m_2(g\cos\theta + a\sin\theta)$ ⑥

③m_2 + ⑥m_1 : $N_1 m_2 + N_2 m_1 = 2 m_1 m_2 g \cos\theta$ ⑦

① − ④ : $m_1 g - N_1\cos\theta - m_2 g + N_2\cos\theta = 0$

$\Rightarrow (N_1 - N_2)\cos\theta = g(m_1 - m_2) \Rightarrow N_1 = \dfrac{g(m_1 - m_2)}{\cos\theta} + N_2$ ⑧

⑧ → ⑦ $\dfrac{g m_2(m_1 - m_2)}{\cos\theta} + m_2 N_2 + N_2 m_1 = 2 m_1 m_2 g\cos\theta$

$\Rightarrow N_2(m_1 + m_2) = 2 m_1 m_2 g\cos\theta + \dfrac{g m_2(m_2 - m_1)}{\cos\theta}$

$\Rightarrow N_2 = \dfrac{2 m_1 m_2 g\cos\theta}{m_1 + m_2} + \dfrac{g m_2(m_2 - m_1)}{\cos\theta(m_1 + m_2)}$ ⑨

⑥ $\dfrac{N_2}{m_2} = g\cos\theta + a\sin\theta \Rightarrow a = \dfrac{N_2}{m_2\sin\theta} - \dfrac{g\cos\theta}{\sin\theta}$ ⑩

⑨ → ⑩ : $a = \dfrac{2 m_1 g\cos\theta}{(m_1 + m_2)\sin\theta} + \dfrac{g(m_2 - m_1)}{\sin\theta\cos\theta(m_1 + m_2)} - \dfrac{g\cos\theta}{\sin\theta}$

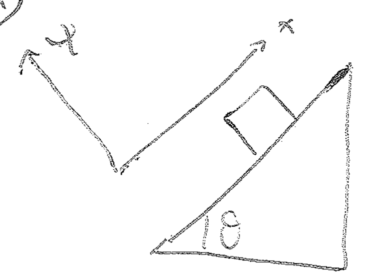
$= \dfrac{g\cos\theta}{\sin\theta(m_1 + m_2)}(\cancel{2}m_1 - \cancel{m_1} - m_2) + \dfrac{g(m_2 - m_1)}{\sin\theta\cos\theta(m_1 + m_2)}$

$= \dfrac{g(m_1 - m_2)}{\sin\theta(m_1 + m_2)}\left(\cos\theta - \dfrac{1}{\cos\theta}\right) = g\tan\theta\,\dfrac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$

$a = 9{,}8\tan 35^\circ \dfrac{(2 - 7)}{2 + 7} = -3{,}8\ m/s^2$

7)

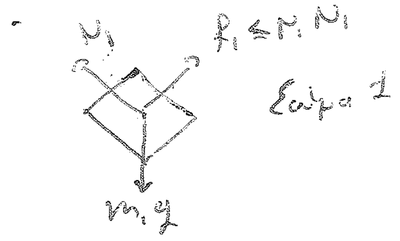
α)



β) Σώμα 1: $\Sigma F_x = f_1 - m_1 g\sin\theta = 0$

$\Sigma F_y = N_1 - m_1 g\cos\theta = 0$

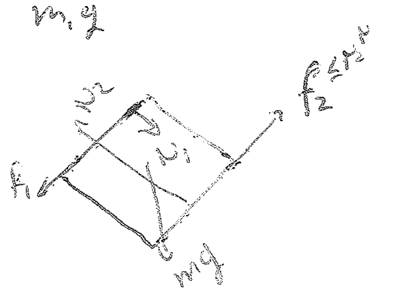
$\Rightarrow f_1 = m_1 g\sin\theta$ (1) $N_1 = m_1 g\cos\theta$ (2)



Σώμα 2: $\Sigma F_x = f_2 - f_1 - m_2 g\sin\theta = 0$

$\Sigma F_y = N_2 - N_1 - m_2 g\cos\theta = 0$

$\Rightarrow f_2 = (m_1+m_2)g\sin\theta$ (3) $N_2 = (m_1+m_2)g\cos\theta$ (4)



γ) $f_1 = \mu_1 N_1 \Rightarrow m_1 g\sin\theta = \mu_1 m_1 g\cos\theta \Rightarrow \mu_1 = \tan\theta$

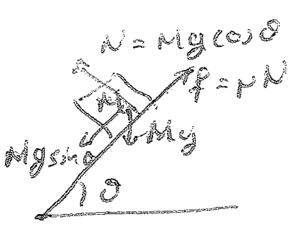
$\theta = \arctan(\mu_1) = \arctan(0,5) = 26,6^\circ$

$f_2 = \mu_2 N \Rightarrow (m_1+m_2)g\sin\theta = \mu_2(m_1+m_2)g\cos\theta$

$\Rightarrow \mu_2 = \tan\theta \Rightarrow \theta = \arctan(\mu_2) \Rightarrow \theta = 11,3^\circ$

Το σώμα 2 θα γλιστρήσει πρώτο αφού $\theta_1 < \theta_2$

δ) Αφού ξεκινά να γλιστρά το σώμα 2 θα μελετήσουμε κατά αυτή την περίπτωση και θα θεωρήσουμε τα 2 σώματα ως 1.



$F_k = Mg\sin\theta - \mu Mg\cos\theta$

$\Rightarrow \frac{\cancel{M}v^2}{R} = \cancel{M}g\sin\theta - \mu\cancel{M}g\cos\theta \Rightarrow \frac{v^2}{gR} = \sin\theta - \cos\theta\,\mu$

$n \equiv \frac{v^2}{gR} \Rightarrow n - \sin\theta = -\mu\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$\Rightarrow n^2 - 2n\sin\theta + \sin^2\theta = \mu^2 - \mu^2\sin^2\theta$

$\Rightarrow \sin^2\theta(1+\mu^2) - 2n\sin\theta + n^2 - \mu^2 = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{\cancel{2}n \pm \sqrt{4n^2 - 4(n^2-\mu^2)(1+\mu^2)}}{\cancel{2}(1+\mu^2)}$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{n \pm \sqrt{n^2 + (1+\mu^2)(\mu^2-n^2)}}{1+\mu^2} = \frac{n \pm \sqrt{\mu^4 + \mu^2(1-n^2)}}{1+\mu^2} = \frac{n \pm \mu\sqrt{\mu^2 - n^2 + 1}}{1+\mu^2}$

Αντικαθιστώντας το $n = \frac{v^2}{gR}$ βρίσκουμε την έκφραση για την γωνία θ

8) Για $V=0$ η λύση της εξίσωσης Shrodinger είναι:

α) $\psi(x) = A\sin(\sqrt{\lambda E'}x) + B\cos(\sqrt{\lambda E'}x)$ όπου $\lambda = \left(\frac{h^2}{8\pi^2 m}\right)^{-1}$

Οι σταθερές A, B μπορούν να έχουν οποιαδήποτε τιμή.

β) $\psi(x=0) = 0 \Rightarrow A\sin(0) + B\cos(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$\Rightarrow \psi(x) = A\sin(\sqrt{\lambda E'}x)$

n = ακέραιος = $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

$\psi(x=L) = 0 \Rightarrow A\sin(\sqrt{\lambda E'}L) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda E'}L = n\pi$ αφού τα ημίτονα γωνίας που είναι ακέραια πολλαπλάσια του π είναι 0.

Το $n=0$ απορρίπτεται γιατί η κυματοσυνάρτηση ψ που περιγράφει το σωματίδιο δεν μπορεί να είναι παντού 0.

Η μόνη ελεύθερη παράμετρος του προβλήματος είναι η ενέργεια E που από την εξίσωση $\sqrt{\lambda E'}L = n\pi$ βρίσκουμε ότι $E = \frac{n^2\pi^2}{L^2\lambda} = \frac{n^2h^2}{8mL^2}$.

Έτσι βλέπουμε ότι η ενέργεια του σωματιδίου δεν μπορεί να πάρει συνεχείς τιμές αφού το n πρέπει να είναι ακέραιος. Η ενέργεια του σωματιδίου έχει κβαντωθεί.

γ) Για $V(x) = V_0$: $-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\psi''(x) = (E - V_0)\psi(x)$

Ορίζοντας $E - V_0 = E'$ έχουμε την ίδια εξίσωση με πριν επομένως:

$$E' = \frac{n^2h^2}{8mL^2} = E - V_0 \Rightarrow E = \frac{n^2h^2}{8mL^2} + V_0$$

Αυτό ισχύει στην περίπτωση όπου $E > V_0$ αφού η λύση της $\psi(x)$ εξαρτάται από την ποσότητα $\sqrt{\lambda E'}$ η οποία υποθέσαμε ότι είναι πραγματική (όχι μιγαδική).

δ) $\int_0^L \psi^2(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^L A^2\sin^2(\sqrt{\lambda E'}x)\,dx = 1 \Rightarrow A^2\int_0^L \frac{1}{2}\left(1 - \overbrace{\cos(2\sqrt{\lambda E'}x)}^{\to 0 \text{ λόγω περιοδικότητας}}\right)dx = 1$

$\Rightarrow \frac{A^2}{2}\left[x\right]_0^L = 1 \Rightarrow \frac{A^2}{2}L = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}}$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$