Μεταβαλόμενες Δυνάμεις

Διαφορετικό είδος F=ma προβλήματος

Υπάρχουν 2 βασικά είδη προβλημάτων με δυνάμεις:

- Σας δίνονται η φυσική κατάσταση και χρειάζεται να σχεδιάσετε τις δυνάμεις (συνήθως σταθερές) και μετά χρησιμοποιείτε F=ma
- Σας δίνεται μια (συνήθως μη σταθερή) δύναμη αναλυτικά και χρειάζεται να ολοκληρώσετε για να βρείτε το x(t).

Θα δούμε ένα τέτοιο παράδειγμα τώρα:

- Μια μικρή επανάληψη:

Όταν α = σταθ. $\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + at$ $\quad \mathrm{x} = \mathrm{x}_0 + \mathrm{v}_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν από:

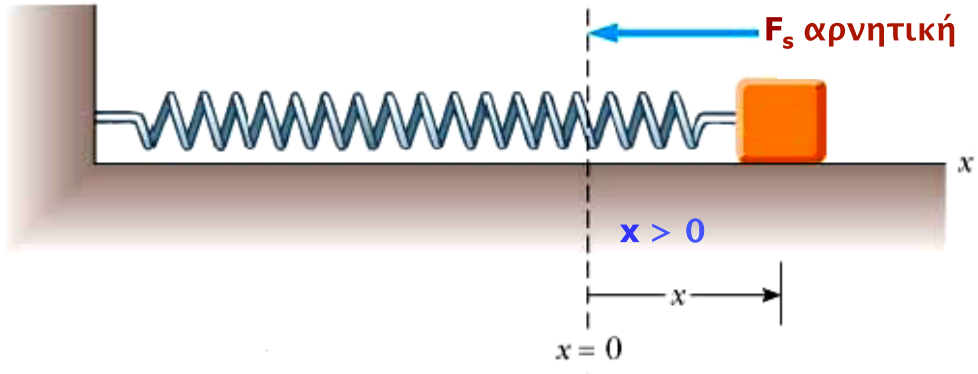
$$a = \frac{d\mathrm{v}}{dt} \Rightarrow adt = d\mathrm{v} \Rightarrow a\int_0^t dt = \int_{\mathrm{v}_0}^{\mathrm{v}} d\mathrm{v} \Rightarrow at = \mathrm{v} - \mathrm{v}_0 \Rightarrow \mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + at$$

Μετά μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathrm{v} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \mathrm{v}_0 + at = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^t (\mathrm{v}_0 + at)dt = \int_{x_0}^{x} dx \Rightarrow \mathrm{v}_0 t + \frac{1}{2}at^2 = x - x_0$$

$$x = x_0 + \mathrm{v}_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Ελατήρια και ο νόμος του Hooke



Η δύναμη που αναπτύσσεται από το ελατήριο

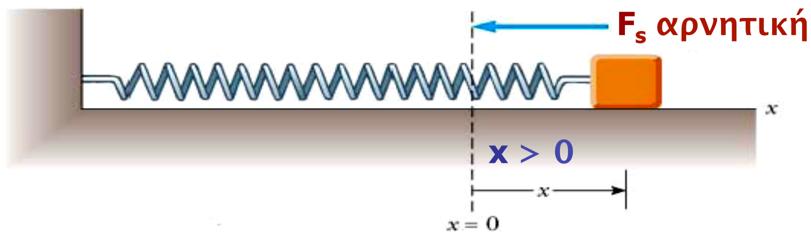
Δύναμη επαναφοράς $F_s = -kx$ Νόμος του Hooke

x είναι η θέση του σώματος ως προς το σημείο ισορροπίας (x=0)

k σταθερά χαρακτηριστική του ελατηρίου

Μετρά τη σκληρότητα του ελατηρίου

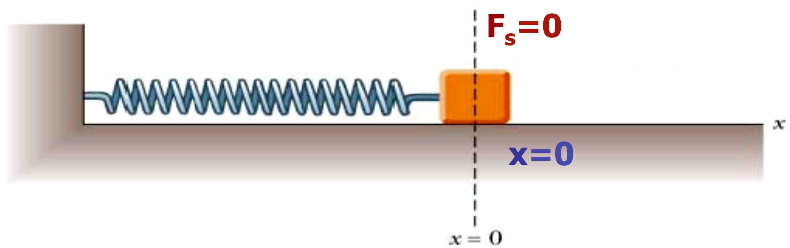
Νόμος του Hooke (συνέχεια)



x > 0

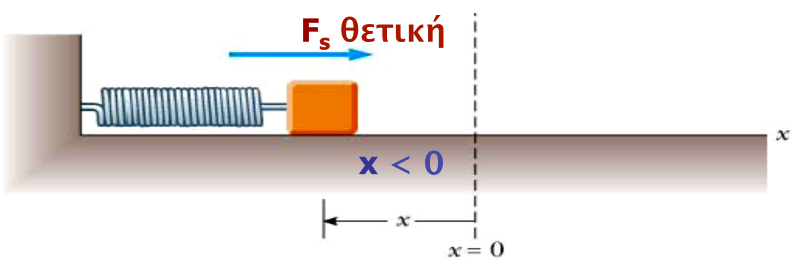
το ελατήριο επιμηκύνεται

δύναμη είναι αρνητική



x = 0 σημείο ισορροπίας

δύναμη είναι μηδέν



x < 0

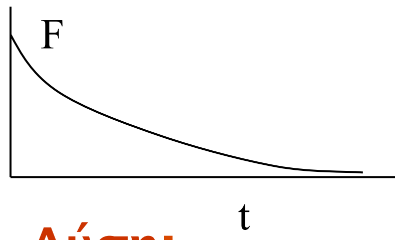
το ελατήριο συσπειρώνεται

δύναμη είναι θετική

- Η δύναμη επαναφοράς έχει φορά πάντοτε αντίθετη προς τη φορά απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας

Ένα πιο πολύπλοκο πρόβλημα

Ας υποθέσουμε ότι η δύναμη δίνεται από τη σχέση $F = F(t) = mae^{-\beta t}$
Δηλαδή είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου



Από τη στιγμή που ξέρουμε τη δύναμη σε κάθε χρονική στιγμή μπορούμε να υπολογίσουμε το x(t).

Ζητούμενο: Να βρούμε x(t) και v(t) υποθέτοντας ότι η μάζα m ξεκινά από την ηρεμία

Λύση:

$$F = m\gamma \Rightarrow mae^{-\beta t} = m\frac{d\mathrm{v}}{dt} \Rightarrow \int_0^t ae^{-\beta t}dt = \int_0^{\mathrm{v}} d\mathrm{v} \Rightarrow \left.\frac{-a}{\beta}e^{-\beta t}\right|_0^t = \mathrm{v} - 0 \Rightarrow \mathrm{v}(t) = \frac{a}{\beta}(1-e^{-\beta t})$$

Τώρα μπορούμε να βρούμε το x(t)

$$\mathrm{v} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^t \frac{a}{\beta}(1-e^{-\beta t})dt = \int_0^x dx \Rightarrow \left.\frac{a}{\beta}\left(t+\frac{e^{-\beta t}}{\beta}\right)\right|_0^t = x \Rightarrow x(t) = \frac{a}{\beta}\left(t+\frac{e^{-\beta t}}{\beta}-\frac{1}{\beta}\right)$$

Ας εξετάσουμε την v(t) στο όριο μικρού t

$$\mathrm{v}(t) = \frac{a}{\beta}(1-e^{-\beta t}) \approx \frac{a}{\beta}\Big(1-\underbrace{\Big(1-\beta t+\frac{(\beta t)^2}{2}\Big)}_{\text{Ανάπτυγμα Taylor}}\Big) = \frac{a}{\beta}\left(\beta t-\frac{\beta^2 t^2}{2}\right) = at - \frac{a\beta t^2}{2} \approx at$$ γραμμική

Λογικό: για $t \to 0$
$F \sim ma =$ σταθ.

Ένα ακόμα παράδειγμα

Δίνεται η δύναμη $F(\upsilon) = -m\alpha\upsilon$. (Συνάρτηση της ταχύτητας μόνο)

Ποια είναι $x(t)$, $v(t)$. (Υποθέτουμε ότι η μάζα m ξεκινά σε $t=0$, με v_0)

Λύση

$$F = ma \Rightarrow -ma\mathrm{v} = m\frac{d\mathrm{v}}{dt} \Rightarrow -\int_0^t a\,dt = \int_0^{\mathrm{v}} \frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} \Rightarrow -at = \ln \mathrm{v}\Big|_{\mathrm{v}_0}^{\mathrm{v}} = \ln\left(\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{v}_0}\right)$$

$$\Rightarrow e^{-at} = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{v}_0} \Rightarrow \mathrm{v}(t) = \mathrm{v}_0 e^{-at}$$

Εύρεση του x(t)

$$\mathrm{v} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^t \mathrm{v}\,dt = \int_0^x dx \Rightarrow \int_0^t \mathrm{v}_0 e^{-at} dt = \int_0^x dx \Rightarrow \frac{-\mathrm{v}_0}{a} e^{-at}\Big|_0^t = x \Rightarrow x(t) = \frac{\mathrm{v}_0}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$$

Για μικρούς χρόνους

$$x(t) = \frac{\mathrm{v}_0}{a}\left(1-\left(1-at+\cdots\right)\right) \approx \mathrm{v}_0 t$$

Η δύναμη δεν έχει αρκετό χρόνο για να ενεργήσει στο σώμα και αυτό κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Νόμοι Newton: Μερικές ακόμα εφαρμογές

Κινήσεις σώματος μέσα σε υγρά ή αέρα

Σώμα κινούμενο μέσα σε κάποιο υγρό ή τον αέρα ασκεί μια δύναμη στο μέσο στο οποίο κινείται.

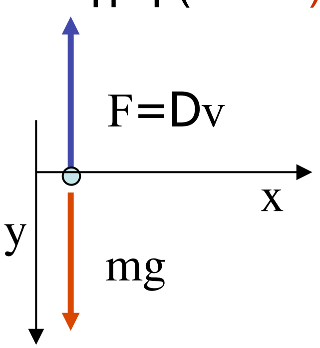
Το μέσο αντιδρά και ασκεί δύναμη στο σώμα (3ος Νόμος)

- Η δύναμη είναι πάντα αντίθετη στην φορά της ταχύτητας της κίνησης.
  - Συνήθως αυξάνει με την ταχύτητα (F=Dv)
  - Στον αέρα η δύναμη είναι $F=Dv^2$.

Εξαιτίας της δύναμης αυτής, η επιτάχυνση του σώματος ≠ σταθερή

Παράδειγμα

Αφήνουμε μια πέτρα να πέσει από την επιφάνεια μιας βαθιάς λίμνης. Ποια είναι η επιτάχυνση, ταχύτητα και θέση της πέτρας κάθε χρονική στιγμή (F=Dv)



$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = ma = mg + (-D\text{v})$$

Την στιγμή t=0, v=0 και επομένως α = g.

v αυξάνει ➔ F αυξάνει και κάποια στιγμή t mg=Dv

Όταν $\sum F_y = 0$ $\boxed{\Rightarrow \text{v} = \dfrac{mg}{D}}$

Οριακή ταχύτητα

Κίνηση σε υγρά-αέρα

- Πως αλλάζουν επιτάχυνση, ταχύτητα και θέση?

$$\sum F_y = ma = mg + (-D\text{v}) = m\frac{d\text{v}}{dt} \Rightarrow D\left(\frac{mg}{D} - \text{v}\right) = m\frac{d\text{v}}{dt} \Rightarrow D\left(\text{v}_{o\rho} - \text{v}\right) = m\frac{d\text{v}}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\text{v}}{(\text{v}_{o\rho} - \text{v})} = \frac{D}{m}dt \Rightarrow \int_{\text{v}=0}^{\text{v}} \frac{d\text{v}}{(\text{v}_{o\rho} - \text{v})} = \frac{D}{m}\int_0^t dt \Rightarrow -\ln(\text{v}_{o\rho} - \text{v})\Big|_0^{\text{v}} = \frac{D}{m}t\Big|_0^t \Rightarrow \ln\left(\frac{\text{v}_{o\rho} - \text{v}}{\text{v}_{o\rho}}\right) = -\frac{D}{m}t$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{\text{v}}{\text{v}_{o\rho}}\right) = e^{-\frac{D}{m}t} \quad \boxed{\Rightarrow \text{v} = \text{v}_{o\rho}\left[1 - e^{-\frac{D}{m}t}\right]}$$

$\text{v}=\text{v}_{o\rho}$ για $t \to \infty$

D/m =χρόνος για να φθάσει 63% $\upsilon_{o\rho}$

- Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\begin{cases} a(t) = ge^{-(D/m)t} & \text{παραγώγιση της v} \\ x(t) = \text{v}_{o\rho}\left[t - \frac{m}{k}\left(1 - e^{-(D/m)t}\right)\right] & \text{ολοκλήρωση της v} \end{cases}$$

Κίνηση σε αέρα $F = D\text{v}^2$

Ακολουθώντας την ίδια μέθοδο αποδεικνύεται ότι:

$$\boxed{\text{v}_{o\rho} = \sqrt{\frac{mg}{D}}}$$

Βαριά σώματα πέφτουν πιο γρήγορα

Σώματα ίδιας μάζας και διαφορετικής επιφάνειας έχουν άλλο D

Sky-diving κάποιος με μάζα m=80Kg, D=0.25kg/m ⇒ $\upsilon_{o\rho}$=200Km/h