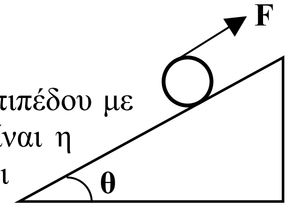
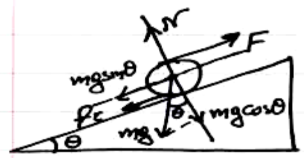
ΦΥΣ. 131
ΕΡΓΑΣΙΑ # 8

1. Ένας κύλινδρος κυλά προς το πάνω μέρος ενός κεκλιμένου επιπέδου με την βοήθεια μιας ταινίας όπως φαίνεται στο σχήμα. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της δύναμης F που απαιτείται αν η γωνία είναι θ=30°; Το βάρος του κυλίνδρου είναι 2N.





Από το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος και το 2° νόμο του Newton έχουμε:

$$\Sigma F_x = ma_x = F - mg\sin\theta - f_{\tau\rho}$$

$$\Sigma F_y = ma_y = 0 = N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow F - mg\sin\theta - \mu N = ma_x \Rightarrow ma_x = F - mg\sin\theta - \mu mg\sin\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ma_x = F - mg(\sin\theta - \mu\cos\theta) \quad (1)$$

Ωστόσο η άσκηση δεν μας δίνει το συντελεστή τριβής μεταξύ του κυλίνδρου και του κεκλιμένου επιπέδου. Επομένως χρειαζόμαστε μια εξίσωση ακόμα. Αυτή έρχεται θεωρώντας τη ροπή των δυνάμεων ως προς το CM του κυλίνδρου.
Δυνάμεις που προκαλούν ροπή είναι η τριβή f_τ, και η F
Το βάρος δεν προκαλεί ροπή γιατί η διεύθυνσή του περνά από το σημείο ως προς το οποίο θεωρούμε την περιστροφή.
Οι ροπές των 2 αυτών δυνάμεων είναι ομόρροπες, (έχουν την ίδια διεύθυνση και φορά) την οποία και θεωρούμε θετική. Οπότε:

$$\Sigma\tau = F\cdot R + f_{\tau\rho}\cdot R = F\cdot R + \mu mg\cos\theta R$$

Αλλά $\Sigma\tau = I\alpha$ (I: ροπή αδράνειας, α: γωνιακή επιτάχυνση)

$$\Rightarrow F\cdot R + \mu mg\cos\theta R = I\alpha$$

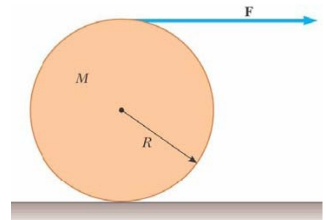
Επειδή έχουμε περιστροφή χωρίς ολίσθηση $\alpha = \frac{a_{\varepsilon\varphi}}{R} = \frac{a_x}{R}$

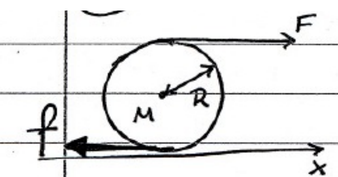
$$\Rightarrow F\cdot R + \mu mg\cos\theta R = I\frac{a_x}{R} \Rightarrow \mu mg\cos\theta = F - \frac{I}{R^2}a_x \quad (2)$$

Από (1) ∧ (2) $\Rightarrow ma_x = F - mg\sin\theta + F - \frac{I}{R^2}a_x \Rightarrow \left(m + \frac{I}{R^2}\right)a_x = 2F - mg\sin\theta$

$\Rightarrow \boxed{a_x = \frac{2F - mg\sin\theta}{m + \frac{I}{R^2}}}$ Η ελάχιστη δύναμη δε θα επιταχύνει τον κύλινδρο αλλά θα τον κινήσει με σταθερή ταχύτητα $\boxed{a_x = 0 \Rightarrow F = \frac{mg}{2}\sin\theta}$

2. Ένα πηνίο σύρματος μάζας M και ακτίνας R ξετυλίγεται εξαιτίας μιας σταθερής δύναμης F όπως στο σχήμα. Υποθέτοντας ότι το πηνίο είναι ένας ομογενής στερεός κύλινδρος που δεν ολισθαίνει, δείξτε ότι (α) η επιτάχυνση του κέντρου μάζας είναι $4\vec{F}/3M$ και (β) ότι η ροπή της δύναμης της τριβής έχει διεύθυνση προς τα δεξιά και μέτρο ίσο με F/3. (γ) Αν το πηνίο ξεκινά από την ηρεμία και κυλά χωρίς να ολισθαίνει ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του αφού έχει κυλήσει μια απόσταση d; Υποθέστε ότι η δύναμη παραμένει σταθερή.





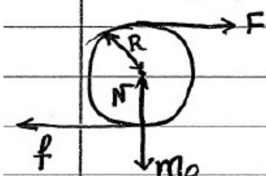
Το πηνίο είναι κύλινδρος οπότε η ροπή αδράνειάς του θα είναι: $\boxed{I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2}$ (1)

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος

Αν η δύναμη της τριβής έχει φορά προς τα δεξιά θα πάρουμε αρνητικό πρόσημο για την f_S

Από το 2ο νόμο του Newton έχουμε: $\Sigma F_x = Ma_x = F - f_s \Rightarrow \boxed{Ma_x = F - f_s}$ (2)

Σχεδιάζουμε τις ροπές που ενεργούν στο καρούλι:



Το βάρος και η αντίδραση της επιφάνειας στο καρούλι N δεν παράγουν ροπές γιατί περνάν από τον άξονα περιστροφής του που είναι στο Κ.Μ. του.

Η δύναμη F και η δύναμη της τριβής f είναι αυτές που παράγουν ροπές. Οι ροπές των 2 δυνάμεων έχουν την ίδια φορά, σύμφωνα με τη φορά δεικτών του ρολογιού. Επομένως η συνισταμένη ροπή θα είναι:

$$\Sigma\vec{\tau} = \vec{\tau}_F + \vec{\tau}_f = I_{cm}\alpha \Rightarrow FR + fR = I_{CM}\alpha \overset{(1)}{\Rightarrow} F\cancel{R} + f\cancel{R} = \frac{1}{2}MR^{\cancel{2}}\alpha \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow F + f = \frac{1}{2}MR\alpha \\ \text{Αφού δεν έχουμε ολίσθηση } a_x = R\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{F + f = \frac{1}{2}Ma_x} \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις (2) και (3) έχουμε: $\frac{3}{2}Ma_x = 2F \Rightarrow \boxed{a_x = \frac{4}{3}\frac{F}{M}}$

(β) Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα στην (3) οπότε έχουμε:

$$F + f = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{M}\frac{\cancel{4}^{2}}{3}\frac{F}{\cancel{M}} \Rightarrow 3F + 3f = 2F \Rightarrow 3f = -F \Rightarrow \boxed{f = -\frac{F}{3}}$$

Η απάντηση είναι αρνητική οπότε η δύναμη f έχει αντίθετη φορά από αυτή που σχεδιάστηκε

(γ) Αφού το ΚΜ έχει καλύψει μια απόσταση d, ξεκινώντας από ηρεμία, θα έχουμε:

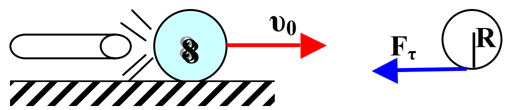
$$\left.\begin{aligned} d = \frac{1}{2}a_x t^2 &\Rightarrow t^2 = \frac{2d}{a_x} \\ \text{Αλλά}\quad v = at &\Rightarrow v^2 = a_x^2 t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v^2 = a_x^{\cancel{2}} \frac{2d}{\cancel{a_x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = 2a_x d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2a_x d}$$ αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα από (α)

έχουμε: $$v = \sqrt{2\frac{4}{3}\frac{F}{M}d} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{Fd}{M}}}$$

3. Μια μπάλα του μπιλιάρδου κτυπιέται με τη στέκα όπως στο σχήμα. Η διεύθυνση της ώθησης της δύναμης είναι οριζόντια και περνά από το κέντρο της μπάλας. Η αρχική ταχύτητα υ_0 της μπάλας μετά την ώθηση, η ακτίνα της μπάλας R, η μάζα της M και ο συντελεστής τριβής με την τσόχα του τραπεζιού μ, θεωρούνται γνωστές ποσότητες.



Να βρεθούν (α) Πόσο μακριά θα κινηθεί η μπάλα πριν σταματήσει να γλιστρά στο τραπέζι και ξεκινά να κυλά. (β) Ποια θα είναι η γωνιακή της ταχύτητα στο σημείο αυτό;

(α) Από τη στιγμή που η μπάλα χτυπήθηκε από τη στέκα μέχρι τη χρονική στιγμή που ξεκινά να κυλά χωρίς να γλιστρά, η δύναμη της τριβής μεταξύ της μπάλας και του τραπεζιού την επιβραδύνει γραμμικά, αλλά ταυτόχρονα αναπτύσσει μια ροπή ως προς το κέντρο της μπάλας. (CM). Αυτή η ροπή αναγκάζει τη μπάλα να αποκτήσει μια γωνιακή επιτάχυνση.

Η μπάλα αρχίζει να κυλά χωρίς να ολισθαίνει όταν η γραμμική της ταχύτητα και η γωνιακή της ταχύτητα έχουν ελαττωθεί και αυξηθεί αντίστοιχα ώστε να ισχύει η σχέση:

$$v = \omega R$$

Αυτή η σχέση είναι ουσιαστικά ο ορισμός της γραμμικής ταχύτητας ως προς τη γωνιακή ταχύτητα για καθαρή κύλιση.

Η δύναμη της τριβής στη μπάλα είναι:

$$f_{\tau\rho} = \mu N = \mu m g$$

Η δύναμη έχει φορά αντίθετη με τη φορά κίνησης της μπάλας.

Η γραμμική επιτάχυνση της μπάλας είναι: $a = \frac{f_{\tau\rho}}{m} = -\mu g$

Επομένως η γραμμική της ταχύτητα μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή

$$v = v_0 + a t \Rightarrow \boxed{v = v_0 - \mu g t} \quad (1)$$

Η ροπή στη μπάλα είναι: $\tau = f_{\tau\rho} \cdot R = \mu m g R$

αλλά συναρτήσει της γωνιακής επιτάχυνσης: $\tau = I\alpha = \underbrace{\frac{2}{5} m R^2}_{I_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma}} \alpha$ $\Rightarrow$

Ξέρουμε ακόμα ότι: $a_{\varepsilon\varphi} = a_x = \alpha R$

$$\Rightarrow \mu \cancel{m} g \cancel{R} = \frac{2}{5} \cancel{m} R^{\cancel{2}} \frac{a_x}{\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{a_x = \frac{5}{2}\mu g}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση της μπάλας θα είναι $\alpha = a_x / R \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{5\mu g}{2R}}$

Η γωνιακή της ταχύτητα:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \boxed{\omega(t) = \frac{5\mu g}{2R} t} \quad (2)$$

Για να υπολογίσουμε την απόσταση που θα κινηθεί η μπάλα πριν αρχίσει να κυλά χωρίς ολίσθηση, πρέπει πρώτα να βρούμε το χρονικό διάστημα που απαιτείται ώστε να συμβεί αυτό.

Κύλιση ξεκινά όταν: $v(t) = \omega(t)R \overset{(1)\wedge(2)}{\Rightarrow}$

$$v_0 - \mu g t = \frac{5\mu g}{2\cancel{R}} t \cancel{R} \Rightarrow 2v_0 - 2\mu g t = 5\mu g t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2v_0 = 7\mu g t \Rightarrow \boxed{t = \frac{2v_0}{7\mu g}}$$

Η απόσταση που καλύπτει η μπάλα στο χρονικό αυτό διάστημα είναι: (η επιτάχυνση είναι σταθερή)

$$S = \cancelto{0}{S_0} + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow S = v_0 \frac{2v_0}{7\mu g} - \frac{1}{2}\mu g t^2 \Rightarrow$$

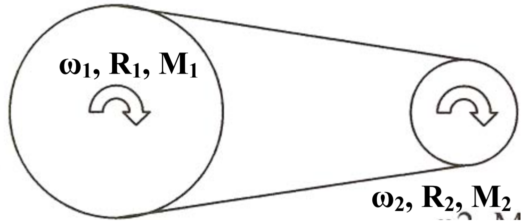
$$\Rightarrow S = \frac{2v_0^2}{7\mu g} - \frac{1}{\cancel{2}}\mu g \frac{\cancel{4}2 v_0^2}{49\mu g^{\cancel{2}}} \Rightarrow S = \frac{2v_0^2}{7\mu g} - \frac{2v_0^2}{49\mu g}$$

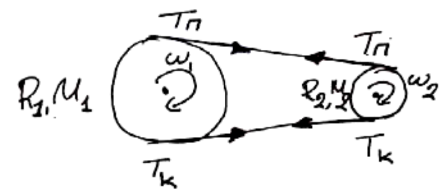
$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{12}{49}\frac{v_0^2}{\mu g}}$$

(β) Η γωνιακή της ταχύτητα θα είναι:

$$\omega(t) = \cancelto{0}{\omega_0} + \alpha t = \alpha t = \frac{5}{\cancel{2}} \frac{\cancel{\mu g}}{R} \frac{\cancel{2} v_0}{7\cancel{\mu g}} \Rightarrow \boxed{\omega(t) = \frac{5v_0}{7R}}$$

4. Σφόνδυλος που περιστρέφεται ελεύθερα πάνω σε στρόφαλο συζεύγνυται με μιας μέσω ενός ι μάντα με δεύτερο σφόνδυλο προσαρμοσμένο σε παράλληλο στρόφαλο. Οι αρχικές γωνιακές ταχύτητες είναι ω_1 και ω_2. Οι σφόνδυλοι είναι δίσκοι μαζών M_1 και M_2 και ακτινών R_1 και R_2 αντίστοιχα. Ο ιμάντας είναι αβαρής και οι στρόφαλοι δεν έχουν τριβές. Ποια είναι η τελική γωνιακή ταχύτητα του κάθε σφόνδυλου; Πόση κινητική ενέργεια χάθηκε;





Θεωρώ ότι T_π είναι η τάση του ιμάντα στο πάνω τμήμα ενώ T_κ είναι η τάση του ιμάντα στο κάτω τμήμα του.

Από τη στιγμή που ο ιμάντας δεν γλυστρά, οι δύο στρόμφαλοι θα έχουν τις ίδιες ταχύτητες στα σημεία επαφής με τον ιμάντα και κατ' επέκταση όλα τα σημεία τους.

Δηλαδή κύλιση χωρίς ολίσθηση: $v_1 = v_2 \Rightarrow \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$ (A)

Οι στρόμφαλοι περιστρέφονται κάτω από την επίδραση των ροπών που προσφέρουν οι δύο τάσεις που αναπτύσσονται από τον ιμάντα:

Επομένως:
$$\tau_1 = T_\pi \cdot R_1 - T_\kappa R_1 = (T_\pi - T_\kappa) R_1$$
$$\tau_2 = -T_\pi R_2 + T_\kappa R_2 = (T_\kappa - T_\pi) R_2$$

Θεωρώντας θετική τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Ξέρουμε όμως ότι η ροπή ισούται με τη μεταβολή της στροφορμής του σώματος πάνω στο οποίο ασκείται η ροπή αυτή:

$$\tau = \frac{dL}{dt} \Rightarrow \tau dt = dL \Rightarrow \int_{t_{\alpha\rho\chi}}^{t_{\tau\varepsilon\lambda}} \tau dt = L^{\tau\varepsilon\lambda} - L^{\alpha\rho\chi}$$

Αλλά η στροφορμή κάθε στρομφάλου είναι $L = I\omega \Rightarrow \begin{cases} L^{\alpha\rho\chi} = I \cdot \omega^{\alpha\rho\chi} \\ L^{\tau\varepsilon\lambda} = I\,\omega^{\tau\varepsilon\lambda} \end{cases}$

Επομένως:
$$\int (T_\pi - T_\kappa) R_1\, dt = I_1 \left(\omega_1^{\tau\varepsilon\lambda} - \omega_1^{\alpha\rho\chi}\right) \Rightarrow R_1 \int (T_\pi - T_\kappa)\, dt = I_1 \left(\omega_1^{\tau\varepsilon\lambda} - \omega_1^{\alpha\rho\chi}\right)$$
$$\int (T_\kappa - T_\pi) R_2\, dt = I_2 \left(\omega_2^{\tau\varepsilon\lambda} - \omega_2^{\alpha\rho\chi}\right) \Rightarrow R_2 \int (T_\kappa - T_\pi)\, dt = I_2 \left(\omega_2^{\tau\varepsilon\lambda} - \omega_1^{\alpha\rho\chi}\right)$$

Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{R_1}{R_2}=\dfrac{I_1\left(\omega_1^{\tau\varepsilon\lambda}-\omega_1^{\alpha\rho\chi}\right)}{I_2\left(\omega_2^{\tau\varepsilon\lambda}-\omega_2^{\alpha\rho\chi}\right)} \\ \text{Αλλά από την (A) έχουμε } \dfrac{\omega_1}{\omega_2}=\dfrac{R_2}{R_1} \quad (B) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$-\frac{R_1}{R_2}=\frac{I_1\left(\omega_2^{\tau}\frac{R_2}{R_1}-\omega_1^{\alpha\rho\chi}\right)}{I_2\left(\omega_2^{\tau\varepsilon\lambda}-\omega_2^{\alpha\rho\chi}\right)} \Rightarrow -R_1 I_2\omega_2^{\tau\varepsilon\lambda}+R_1 I_2\omega_2^{\alpha\rho\chi}=$$

$$=R_2 I_1\frac{R_2}{R_1}\omega_2^{\tau\varepsilon\lambda}-R_2 I_1\omega_1^{\alpha\rho\chi}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_1\left(R_1 I_2\omega_2^{\alpha\rho\chi}+R_2 I_1\omega_1^{\alpha\rho\chi}\right)=\omega_2^{\tau\varepsilon\lambda}\left(R_1^2 I_2+R_2^2 I_1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_2^{\tau\varepsilon\lambda}=\frac{\left(R_1 I_2\omega_2^{\alpha\rho\chi}+I_1 R_2\omega_1^{\alpha\rho\chi}\right)R_1}{R_1^2 I_2+R_2^2 I_1}}$$

Αντικαθιστώντας στη (B) βρίσκουμε την $\omega_1^{\tau\varepsilon\lambda}$:

$$\boxed{\omega_1^{\tau\varepsilon\lambda}=\frac{\left(R_1 I_2\omega_2^{\alpha\rho\chi}+I_1 R_2\omega_1^{\alpha\rho\chi}\right)R_2}{R_1^2 I_2+R_2^2 I_1}}$$

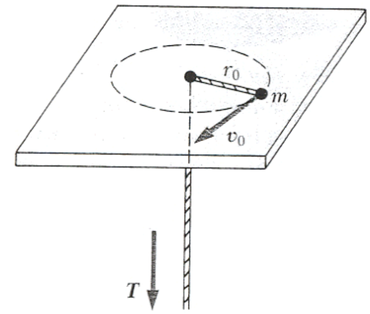
Εφόσον οι ροπές αδράνειας των στροφάλων είναι: $I=\frac{1}{2}MR^2$ αντικαθιστούμε στις 2 παραπάνω εξισώσεις και βρίσκουμε τα $\omega_1^{\tau\varepsilon\lambda}$ και $\omega_2^{\tau\varepsilon\lambda}$.

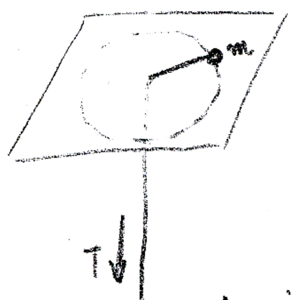
Η μεταβολή στην κινητική ενέργεια θα μας δώσει την ενέργεια που χάθηκε:

$$\Delta K=\left(\frac{1}{2}I_1\omega_1^{\tau 2}+\frac{1}{2}I_2\omega_2^{\tau 2}\right)-\left(\frac{1}{2}I_2\omega_2^{\alpha\rho\chi\, 2}+\frac{1}{2}I_1\omega_1^{\alpha\rho\chi\, 2}\right)$$

Αντικαθιστώντας έχουμε: $$\Delta K=\frac{I_1 I_2\left(R_1\omega_1^{\alpha\rho\chi}-R_2\omega_2^{\alpha\rho}\right)^2}{2\left(R_1^2 I_2+R_2^2 I_1\right)}$$

5. Μια μάζα m είναι δεμένη σε ένα σπάγγο που περνά μέσα από μια τρύπα και βρίσκεται πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια, όπως στο σχήμα. Η μάζα αρχικά περιστρέφεται σε ένα κύκλο ακτίνας r_0 με ταχύτητα υ_0. Ο σπάγγος αρχίζει να τραβιέται αργά από κάτω ελαττώνοντας την ακτίνα του κύκλου σε r. (α) Ποια είναι η ταχύτητα της μάζας όταν η ακτίνα είναι r; (β) Βρείτε την τάση του σπάγγου συναρτήσει του r. (γ) Πόσο έργο έχει παραχθεί κατά την κίνηση της μάζας m από την ακτίνα r_0 στην r; (<u>*Σημειώστε*</u>: η τάση εξαρτάται από το r). (δ) Βρείτε αριθμητικές τιμές για τα υ, T και W όταν r=0.1m, αν m=50g, $r_0 = 0.3$m και $\upsilon_0 = 1.5$m/s.





<u>Διατήρηση της στροφορμής</u>

$$I_0\omega_0 = I\omega$$

$$m r_0^2 \omega_0 = m r^2 \omega$$

$$\cancel{m} r_0 v_0 = \cancel{m} r v$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{r_0}{r} v_0}$$

$$T = F_c = \frac{m v^2}{r} = \frac{m}{r}\frac{r_0^2}{r^2} v_0^2 = \frac{m r_0^2 v_0^2}{r^3}$$

$$\left.\begin{aligned} E_{in} &= \tfrac{1}{2} I_0 \omega_0^2 \\ E_{fin} &= \tfrac{1}{2} I \omega^2 \end{aligned}\right\} \Delta E = \frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2$$

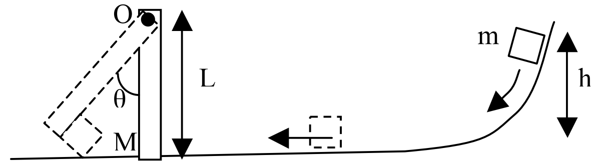
$$= \frac{1}{2}\left[m r^2 \omega^2 - m r_0^2 \omega_0^2\right]$$

$$= \frac{1}{2} m \left[v^2 - v_0^2\right]$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\frac{r_0^2}{r^2} v_0^2 - v_0^2\right]$$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 \left[\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right]$$

6. Ένα τούβλο μάζας m, βρίσκεται αρχικά σε ύψος h και σε κατάσταση ηρεμίας. Αρχίζει κατόπιν να γλιστρά προς τα κάτω κινούμενο σε μια λεία επιφάνεια όπως στο σχήμα. Κινούμενο στην οριζόντια επιφάνεια (η οποία είναι επίσης λεία) έρχεται σε σύγκρουση με μια ομοιόμορφη ράβδο μάζας M και μήκους L. Το τούβλο κολλά στη ράβδο μετά τη κρούση. Η ράβδος είναι εξαρτημένη από ένα σταθερό σημείο O και το σύστημα ράβδος-τούβλο περιστρέφεται γύρω από το σημείο αυτό μετά τη κρούση. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα (δώστε τις απαντήσεις σας συναρτήσει των m, M, L και h): (α) Ποια είναι η στροφορμή του τούβλου ως προς το σημείο O ακριβώς πριν συγκρουστεί με τη ράβδο; (β) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδος-τούβλο μετά τη σύγκρουση; (γ) Μετά τη σύγκρουση το σύστημα ράβδος-τούβλο αιωρείται γύρω από το σημείο O πριν έρθει στιγμιαία σε ισορροπία σε μια γωνία θ ως προς την κατακόρυφο. Βρείτε μια σχέση για cosθ. (Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το ΚΜ δίνεται από τη σχέση $I=1/12\ ML^2$, όπου M η μάζα της ράβδου και L το μήκος της).



(α) Η στροφορμή του τούβλου γύρω από το σημείο O είναι απλά

$l = mvL$, όπου v η ταχύτητα του τούβλου.

Την ταχύτητα μπορούμε να την βρούμε βάσει της αρχής διατήρησης της ενέργειας:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v=\sqrt{2gh} \Rightarrow \boxed{l = mL\sqrt{2gh}} \quad (1)$$

(β) Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής για κλειστά συστήματα θα έχουμε:

$$L_i = L_f \overset{(1)}{\Rightarrow} mL\sqrt{2gh} = I_{\text{τούβλο/ράβδος ως προς O}} \times \omega \quad (2)$$

Για να βρούμε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το σημείο O χρησιμοποιούμε τη ροπή αδράνειας ως προς το CM και το θεώρημα των παράλληλων αξόνων:

$$I_{\text{ράβδου},O} = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

Η ροπή αδράνειας του τούβλου ως προς το σημείο O είναι $I_{\text{τούβλου}} = mL^2$ $\Rightarrow$

Η ολική ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου/τούβλου είναι $\boxed{I=\frac{1}{3}ML^2+mL^2}$ (3)

$$\text{Από } (2) \wedge (3) \Rightarrow m\cancel{L}\sqrt{2gh} = \left(\frac{1}{3}ML^{\cancel{2}}+mL^{\cancel{2}}\right)\omega \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{m\sqrt{2gh}}{\left(m+\frac{M}{3}\right)L}} \quad (4)$$

(γ) Χρησιμοποιούμε διατήρηση της ενέργειας.
Όταν το ταύβλο/ράβδος έχουν κινηθεί κατά γωνία Θ, το ύψος του ταύβλου πάνω από το έδαφος είναι $L(1-\cos\Theta)$ ενώ το ύψος του κέντρου μάζας της ράβδου είναι $\frac{L}{2}(1-\cos\Theta)$ πάνω από το έδαφος.

Από διατήρηση ενέργειας έχουμε: $\frac{1}{2} I_{o_2}\,\omega^2 = mgL(1-\cos\Theta) + Mg\frac{L}{2}(1-\cos\Theta) \Rightarrow$

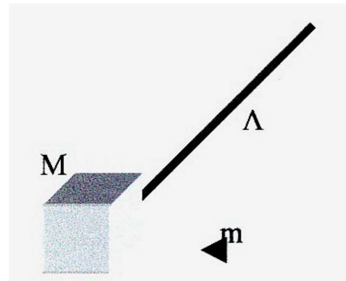
$$\Rightarrow 1-\cos\Theta = \frac{\frac{1}{2} I\omega^2}{mgL + Mg\frac{L}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2+mL^2\right)\left(\frac{m^2 2gh}{L^2(m+M/3)^2}\right)}{mgL + Mg\frac{L}{2}} \Rightarrow \boxed{\cos\Theta = 1 - \frac{6m^2 h}{(3m+M)(2m+M)L}}$$

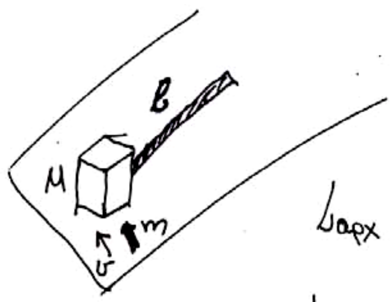
Χρησιμοποιούμε διατήρηση της στροφορμής. Η ολική στροφορμή του συστήματος (κατά μήκος του άξονα $-\hat{z}$) πριν ξεκινήσει το τρένο, είναι μηδέν, και επομένως η ολική στροφορμή του συστήματος σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα μετά από το ξεκίνημα του τρένου θα είναι επίσης μηδέν.
Από τη στιγμή που η ταχύτητα του τρένου ως προς τη ρόδα είναι v, η γωνιακή του ταχύτητα ως προς τη ρόδα θα είναι vR.
Από τη στιγμή που η ρόδα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_{ρόδα}$ με φορά αντίθετη αυτής του τρένου, αυτό σημαίνει ότι το τρένο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_{τρένο} = Rv - \omega_{ρόδα}$.
Διατήρηση της στροφορμής επιβάλει:

$$I_{ρόδα}\,\omega_{ρόδα} = I_{τρένου}\,\omega_{τρένου} \Rightarrow MR^2\omega_{ρόδα} = mR^2(Rv - \omega_{ρόδα}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{ρόδα} = \left(\frac{m}{M+m}\right)Rv.}$$

7. Ένας ξύλινος κύβος μάζας M ηρεμεί σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια και είναι αναρτημένος σε μια στερεά ράβδο μήκους Λ και αμελητέας μάζας. Το άλλο άκρο της ράβδου είναι στερεωμένο. Μια σφαίρα μάζας m ταξιδεύει με ταχύτητα υ παράλληλα με την επιφάνεια και κάθετα ως προς τη ράβδο, οπότε χτυπά τον κύνο και καρφώνεται μέσα σ΄αυτόν. Ποια είναι η στροφορμή του συστήματος σφαίρας-κύβου; Ποιος ο λόγος των απωλειών ως προς την αρχική κινητική ενέργεια.





Από διατήρηση της στροφορμής έχουμε:

$$L_{αρχ} = \emptyset + \vec{r}\times\vec{p} = |\vec{r}||\vec{p}|\sin\theta = \ell m\upsilon \underbrace{\sin\theta}_{1} = \ell m\upsilon \qquad \theta=9^\circ$$

$$L_{τελ} = I\omega = \underbrace{(m+M)\ell^2}_{I}\omega$$

Επομένως: $L_{αρχ} = L_{τελ} \Rightarrow \cancel{\ell} m\upsilon = (m+M)\ell^{\cancel{2}}\omega \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{m\upsilon}{\ell(M+m)}}$

Για τις ενέργειες θα έχουμε:

$$E^{αρχ}_{ΜΗΧ} = E^{τελ}_{ΜΗΧ} + |\Delta W| \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + |\Delta W| = \frac{\ell^2}{2}(m+M)\omega^2 + |\Delta W| \Rightarrow$$

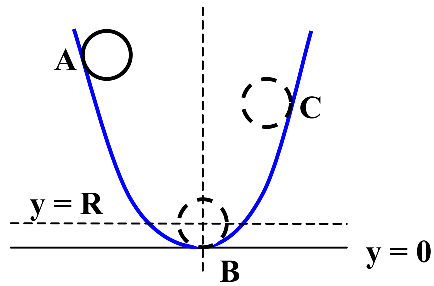
$$\Rightarrow |\Delta W| = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{\ell^2}{2}(m+M)\omega^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{\cancel{\ell^2}}{2}\frac{\cancel{(m+M)}}{\cancel{\ell^2}}\frac{m^2\upsilon^2}{(M+m)^{\cancel{2}}} \Rightarrow$$

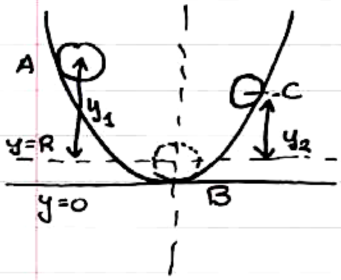
$$\Rightarrow \boxed{|\Delta W| = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon^2\left(\frac{m}{M+m}\right)} = E^{αρχ}_{κιν} - E^{αρχ}_{κιν}\left(\frac{m}{M+m}\right)$$

Ο λόγος των απωλειών ως προς την αρχική κινητική ενέργεια είναι:

$$\frac{\Delta W}{E^{αρχ}_{κιν}} = 1 - \frac{m}{M+m} \Rightarrow \frac{\Delta W}{E^{αρχ}_{κιν}} = \frac{M+\cancel{m}-\cancel{m}}{M+m} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta W}{E^{αρχ}_{κιν}} = \frac{M}{M+m}}$$

8. Ένας ομοιόμορφος κύλινδρος, ακτίνας R, κυλά από την κατάσταση ηρεμίας προς το κατώτερο σημείο ενός παραβολικού σωλήνα η εξίσωση επιφάνειας του οποίου δίνεται από $y=Kx^2$. Ο κύλινδρος δεν ολισθαίνει από το σημείο A στο B αλλά η επιφάνεια του σωλήνα μεταξύ των σημείων B και C είναι λεία (δείτε το σχήμα). Σε ποιο ύψος προς την διεύθυνση του C θα ανέβει ο κύλινδρος; Κάτω από τις ίδιες συνθήκες, ποιο θα είναι το ύψος που θα καλύψει μια ομοιόμορφη σφαίρα της ίδιας ακτίνας με αυτή του κυλίνδρου; Λιγότερο ή περισσότερο από αυτό του κυλίνδρου; Θεωρήστε γνωστές τις ροπές αδράνειας του κυλίνδρου και της σφαίρας.





Από τη στιγμή που δε ξέρουμε το συντελεστή τριβής και επομένως τη δύναμη τριβής που ενεργεί στο κύλινδρο, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μεθόδους δυναμικής για να βρούμε την τελική θέση του κυλίνδρου. Ωστόσο μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας και να συσχετίσουμε την ενέργεια του κυλίνδρου στο σημείο A με αυτή στο σημείο C.

Η τριβή ενεργεί μόνο κατά μήκος της διαδρομής AB και όχι κατά μήκος της BC. Επομένως εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας σε 2 βήματα. Πρώτα στα σημεία A κ B και κατόπιν στα σημεία B και C.

Ο κύλινδρος ξεκινά από την ηρεμία (σημείο A) και άρα έχει μόνο δυναμική ενέργεια. Θεωρούμε σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το σημείο B (κορυφή της παραβολής όπου y=R).

Επομένως $\boxed{E_A = mg y_1}$

Πηγαίνοντας από το A στο B υπάρχει τριβή, η οποία όμως παράγει μηδενικό έργο αφού δεν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της, μια και ο κύλινδρος δεν ολισθαίνει. Επίσης θα έχουμε ακόμα: $v_{cm}=\omega R$

Άρα η ενέργεια του κυλίνδρου στο σημείο B είναι: $\boxed{E_B=\frac{1}{2}mv_{cm}^2+\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2}$

όπου I_{cm} η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου.

Πηγαίνοντας από το B στο C, δεν υπάρχει τριβή. Σαν αποτέλεσμα ο κύλινδρος δεν μπορεί να κυλίσει και επομένως ανεβαίνει στο σημείο C περιστρεφόμενος ("σπινάρει") γύρω από το κέντρο μάζας του. Στο σημείο C η γραμμική ταχύτητα του CM γίνεται μηδέν αλλά εξακολουθεί να περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω.

Δηλαδή κατά τη διαδρομή BC η κινητική ενέργεια περιστροφής παραμένει σταθερή, και επομένως στο σημείο C η ενέργεια του κυλίνδρου είναι:

$$E_C = mgy_2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

Εφαρμόζουμε διατήρηση ενέργειας:

$$\left.\begin{aligned} E_A &= E_B \\ E_B &= E_C \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} mgy_1 &= \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \\ \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 &= mgy_2 + \frac{I}{2}\omega^2 \end{aligned}$$

Αλλά $\omega = v_{cm}/R$ οπότε αντικαθιστώντας έχουμε:

$$mgy_1 = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \frac{v_{cm}^2}{R^2} \Rightarrow v_{cm}^2 = \frac{2mgy_1}{\left(m + \frac{I}{R^2}\right)}$$

Ενώ $\frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \cancel{\frac{1}{2} I\omega^2} = mgy_2 + \cancel{\frac{1}{2} I\omega^2} \Rightarrow v_{cm}^2 = 2gy_2$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{2}m\cancel{g}y_1}{m + \frac{I}{R^2}} = \cancel{2}\cancel{g}y_2 \Rightarrow \boxed{y_2 = \frac{my_1}{m + \frac{I}{R^2}}}$$

Αλλά $I_{κυλ} = \frac{1}{2} mR^2$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{\cancel{m}y_1}{\cancel{m} + \frac{\cancel{m}R^2}{2R^2}} \Rightarrow \boxed{y_2 = \frac{2}{3} y_1}$$

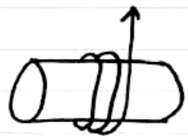
Για την περίπτωση της σφαίρας $I_{σφ} = \frac{2}{5} mR^2$ επομένως:

$$y_2 = \frac{\cancel{m} y_2}{\cancel{m} + \frac{2}{5}\frac{\cancel{m}\cancel{R^2}}{\cancel{R^2}}} \Rightarrow \boxed{y_2 = \frac{5}{7} y_1}$$

Η σφαίρα δηλαδή θα κινηθεί μεγαλύτερη διαδρομή.

9. Ένα σχοινί είναι τυλιγμένο γύρω από ένα κύλινδρο μάζας Μ και ακτίνας R. Το σχοινί τραβιέται προς τα πάνω για να αποτρέψει το κέντρο μάζας του κυλίνδρου να πέσει καθώς το σχοινί ξετυλίγεται. (α) Ποια είναι η τάση του σχοινιού; (β) Πόσο έργο έχει καταναλωθεί στον κύλινδρο την στιγμή που έχει μια γωνιακή ταχύτητα ω; (γ) Πόσο μήκος σχοινιού έχει ξετυλιχθεί μέχρι τη χρονική αυτή στιγμή; ($I_{CM}^{κυλίνδρου} = \frac{1}{2}MR^2$).

(α)



Η τάση T στο σχοινί πρέπει να εξισορροπεί το βάρος του κυλίνδρου ώστε να μην πέσει ο κύλινδρος προς τα κάτω.
Άρα $T = Mg$.

(β) Το έργο που δαπανάται στον κύλινδρο πηγαίνει σε κινητική ενέργεια περιστροφής. Από τη στιγμή που η αρχική γωνιακή του ταχύτητα θεωρείται μηδέν:

$$W = E_{κιν}^{περ} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{4}MR^2\omega^2$$

(γ) Για να υπολογίσουμε το μήκος του σχοινιού που ξετυλίχθηκε διαλέγουμε ένα σύστημα αναφοράς που το σχοινί είναι ακίνητο. Στο σύστημα αυτό ο κύλινδρος κυλά με εφαπτομενική επιτάχυνση:

$\boxed{a = \alpha R}$ (όπου α η γωνιακή επιτάχυνση)

αφήνοντας πίσω του το σχοινί.

Για την γωνιακή επιτάχυνση έχουμε: $\tau = I\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\tau}{I}}$

όπου τ προκαλείται από το βάρος του κυλίνδρου ως προς το σημείο επαφής σχοινιού – κυλίνδρου, ή από την τάση του σχοινιού ως πρός το CM του κυλίνδρου ($T = B = Mg$). Άρα $\boxed{\tau = MgR}$

Το μήκος του σχοινιού που ξετυλίχθηκε είναι ίσο με τη διαδρομή που κινήθηκε ο κύλινδρος στο σύστημα αναφοράς που διαλέξαμε

$S = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow$ (όπου $v_0 = 0$ η αρχική ταχύτητα του κυλίνδρου)

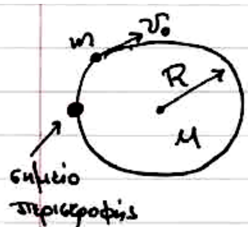
$\Rightarrow S = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow S = \frac{1}{2}R\alpha t^2 \Rightarrow S = \frac{1}{2}R\frac{\tau}{I}t^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{R}\frac{\cancel{M}g\cancel{R}}{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{M}R^2}t^2 \Rightarrow \boxed{S = gt^2} \overset{(Β)}{\Rightarrow} \boxed{S = \frac{\omega^2R^2}{4g}}$

Στο χρόνο t η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου είναι: $\omega = \cancel{\omega_0}^{\,0} + \alpha t \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega = \alpha t \Rightarrow t = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{\omega}{\frac{\tau}{I}} = \frac{\omega\,\frac{1}{2}MR^2}{MgR} \Rightarrow \boxed{t = \frac{\omega R}{2g}}$ (Β)

10. Ένα δαχτυλίδι μάζας M και ακτίνας R βρίσκεται οριζόντιο πάνω σε μια λεία επιφάνεια. Μπορεί να περιστραφεί πάνω στη επιφάνεια ως προς ένα σημείο της περιφέρειάς του. Ένα έντομο μάζας m περπατά γύρω από το δαχτυλίδι πάνω στην περιφέρειά του με ταχύτητα υ, ξεκινώντας από το σημείο περιστροφής. Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα του δαχτυλιδιού όταν το έντομο βρίσκεται (α) στο μέσο της περιφέρειας και (β) πίσω στο σημείο περιστροφής;



(α) Η στροφορμή ως προς το σημείο περιστροφής πρέπει να είναι πάντοτε μηδέν γιατί δεν υπάρχει ροπή που να ενεργεί στο σύστημα δακτυλιδιού - εντόμου.

$$L^{\tau\varepsilon\lambda}_{o\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} = L_{\delta\alpha\chi} + L_{\varepsilon\nu\tau} = L^{\alpha\rho\chi}_{o\lambda\iota\kappa} = 0$$

απόσταση από σημείο περιστροφής όταν είναι στη μέση

$$L_{\delta\alpha\chi\tau} + L_{\varepsilon\nu\tau} = 0 \Rightarrow I_\delta \omega_\delta + m\upsilon(2R) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{I_\delta \omega_\delta = -m\upsilon(2R)}$$ έχουν ίσα μέτρα κ αντίθετη φορά

Η ροπή αδράνειας του δαχτυλιδιού ως προς το σημείο περιστροφής βρίσκεται από το θεώρημα παράλληλων αξόνων:

$$I_\delta = I^\delta_{CM} + MR^2 = MR^2 + MR^2 \Rightarrow I_\delta = 2MR^2$$

Άρα θα έχουμε:
$$\omega_\delta = \frac{2m\upsilon R}{I_\delta} = \frac{\cancel{2}m\upsilon \cancel{R}}{\cancel{2}MR^{\cancel{2}}} \Rightarrow \boxed{\omega_\delta = \frac{m\upsilon}{MR}}$$

Αλλά υ είναι η ταχύτητα του εντόμου ως προς το περιστρεφόμενο δαχτυλίδι. Επομένως:

$$\upsilon = \upsilon_0 - 2\omega_\delta R$$ όπου $2\omega R = \upsilon_{\delta\alpha\chi}$ η γραμμική ταχύτητα του δαχτυλιδιού.

Επομένως: $$\omega_\delta = \frac{m}{MR}(\upsilon_0 - 2\omega_\delta R) \Rightarrow \omega_\delta\left(\frac{(M+2m)R}{\cancel{MR}}\right) = \frac{m\upsilon_0}{\cancel{MR}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_\delta = \frac{m\upsilon_0}{(M+2m)R}}$$

για $M = m \Rightarrow \omega_\delta = \frac{\upsilon}{3R}$

για $m \to 0 \Rightarrow \omega_\delta = 0$

(β) Από διατήρηση και πάλι της στροφορμής θα έχουμε:

$$L^{\alpha\rho\chi} = L^{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow 0 = L^f_{\delta\alpha\chi} + L^f_{\varepsilon\nu\tau} = L^f_{\delta\alpha\chi} + \cancel{0}$$ ← το έντομο έχει $L^f_{\varepsilon}=0$ επειδή υ περνά από το σημείο περιστροφής

$$\Rightarrow L^f_{\delta\alpha\chi} = 0 \Rightarrow I\omega = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = 0}$$

11. Θεωρήστε ένα σχοινί το οποίο είναι τυλιγμένο γύρω από ένα στερεό κυκλικό σώμα ακτίνας R και μάζας m όπως στο σχήμα. Το ένα άκρο του σχοινιού είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο ενώ το σώμα είναι αρχικά σε ηρεμία. Αφήστε το σώμα να κινηθεί. Προσδιορίστε το μέτρο της κατακόρυφης επιτάχυνσης προς τα κάτω που α ισθάνεται η μάζα. Θεωρήστε ότι I_{CM} είναι η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα συμμετρίας που περνά από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στην κυκλική επιφάνεια του σώματος.

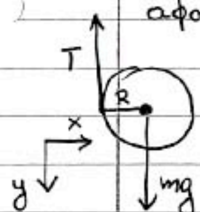
Θεωρούμε ότι το σύστημά μας είναι το στερεό σώμα. Το σύστημα πέφτει κάτω από τη επίδραση 2 δυνάμεων:

(α) Το βάρος του mg

(β) Την τάση T του νήματος στο σύστημα.

Πρώτη μέθοδος

Χρησιμοποιούμε το KM του στερεού σώματος σαν την αρχή του συστήματος συντεταγμένων ή σα το σημείο ως προς το οποίο θα υπολογίσουμε τις ροπές των δυνάμεων. Με την επιλογή αυτή, το βάρος δεν προκαλεί ροπή αφού περνά από το σημείο περιστροφής.



Η ροπή της τάσης του σχοινιού έχει μέτρο TR αφού ο μοχλοβραχίονας είναι η ακτίνα του στερεού σώματος και η δύναμη είναι εφαπτόμενη του κύκλου άρα κάθετη στην ακτίνα.

Επομένως η ολική ροπή του συστήματος ως προς το σημείο που κέντρο του είναι: $\boxed{\tau = TR}$ (1)

Αλλά η ροπή ξέρουμε ότι είναι: $\boxed{\tau = I\alpha}$ (2) όπου α η γωνιακή επιτάχυνση

Η ροπή αδράνειας που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η ροπή αδράνειας του KM αφού το σημείο ως προς το οποίο υπολογίζουμε τη ροπή της δύναμης είναι το KM.

Αφού το στερεό σώμα ξετυλίγεται (κύληση) χωρίς το σχοινί να γλιστρά, τότε θα έχουμε:

$\boxed{a = \alpha R}$ (3) (η γραμμική επιτάχυνση = γωνιακή επιτάχυνση · R)

Ωστόσο η τάση T του νήματος δεν είναι γνωστή, αλλά εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το 2ο νόμο του Newton:

$$\Sigma F_y = mg - T = ma \Rightarrow T = m(g-a) \overset{(3)}{=} m(g-\alpha R)$$

Από (1) ∧ (2) θα έχουμε: $m(g-\alpha R)R = I_{cm}\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{mg}{I_{cm}+mR^2} \Rightarrow$

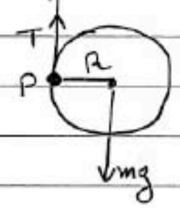
$\Rightarrow a = \alpha \cdot R \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{mR^2}{I_{cm}+mR^2}g}$ όσο πιο μεγάλη η I_{cm} τόσο μικρότερη η επιτάχυνση a

Δεύτερη Μέθοδος

Διαλέγουμε ένα σημείο στην περιφέρεια του κυλινδρικού στερεού. Το σημείο στο οποίο το σχοινί είναι σε επαφή με το στερεό, το χρησιμοποιούμε για σημείο υπολογισμού των ροπών.

Με την επιλογή αυτή η ροπή της τάσης του νήματος είναι μηδέν ενώ το βάρος είναι αυτό που προκαλεί τη ροπή και περιστροφή του σώματος

Επομένως η ολική ροπή που δρα στο σύστημα είναι



$$\tau = mgR$$

αλλά $\tau = I\alpha$

αυτή τη φορά η ροπή αδράνειας πρέπει να υπολογισθεί ως προς το σημείο P της περιφέρειας:

$$I_P = I_{cm} + mR^2$$

Αφού το σώμα κυλά πάνω στο σχοινί χωρίς ολίσθηση θα έχουμε $a = \alpha R$ όπου a είναι η γραμμική επιτάχυνση του σώματος

Θα έχουμε $mgR = (I_{cm}+mR^2)\dfrac{a}{R} \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{mgR^2}{I_{cm}+mR^2}}$

12. Μια μπάλα του bowling ρίχνεται προς τον διάδρομο με αρχική ταχύτητα υ_0. Αρχικά ολισθαίνει χωρίς να κυλίεται αλλά εξαιτίας των τριβών αρχίζει να κυλά. Να δειχθεί ότι η ταχύτητά της όταν κυλά χωρίς να ολισθαίνει είναι $\frac{5}{7}\upsilon_0$

Οι δυνάμεις που δρουν πάνω στη μπάλα του bowling είναι η δύναμη της βαρύτητας mg, η αντίδραση του εδάφους N και η κινητική τριβή (ενώ γλιστρά στο έδαφος)

Από το 2ο νόμο του Newton έχουμε: $\Sigma F_x = -f_k = ma \Rightarrow a = -\frac{f_k}{m}$ (1)

Επομένως η ταχύτητα του ΚΜ της μπάλας συναρτήσει του χρόνου είναι:

$$\boxed{\upsilon(t) = \upsilon_0 - \frac{f_k}{m}t} \quad (2)$$

Εξετάζοντας τις ροπές των δυνάμεων ως προς το ΚΜ της μπάλας έχουμε ότι το βάρος και η αντίδραση δεν προκαλούν ροπή αφού η διεύθυνσή τους περνά από το ΚΜ. Η δύναμη που προκαλεί ροπή είναι η δύναμη της τριβής και επομένως θα έχουμε:

$$\Sigma\tau = f_k \cdot R = I_{cm}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{f_k R}{I_{cm}} = \frac{f_k R}{\frac{2}{5}mR^2} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{2}\frac{f_k}{mR} \quad (3)$$

Η γωνιακή ταχύτητα της μπάλας συναρτήσει του χρόνου θα είναι:

$$\omega(t) = \cancel{\omega_0}^{\,0} + \alpha t \Rightarrow \boxed{\omega(t) = \frac{5}{2}\frac{f_k}{mR}t} \quad (4)$$

αρχικά η μπάλα δεν κυλά

Τη στιγμή που η μπάλα αρχίζει να κυλά χωρίς ολίσθηση $\upsilon = \omega R$

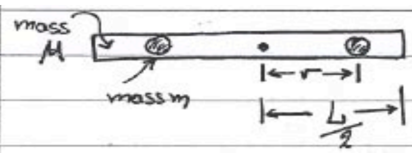
από (2) και (4) $\Rightarrow \upsilon_0 - \frac{f_k}{m}t = \frac{5}{2}\frac{f_k}{m\cancel{R}}t\cancel{R} \Rightarrow \upsilon_0 = \left(\frac{5}{2}+1\right)\frac{f_k}{m}t \Rightarrow$

$$\Rightarrow t_k = \frac{2}{7}\frac{m}{f_k}\upsilon_0 \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας την (5) στην (2) έχουμε:

$$\upsilon(t_k) = \upsilon_0 - \frac{\cancel{f_k}}{\cancel{m}}\frac{2}{7}\frac{\cancel{m}}{\cancel{f_k}}\upsilon_0 \Rightarrow \boxed{\upsilon(t_{κυλ}) = \frac{5}{7}\upsilon_0}$$

13. Μια ο μοιόμορφη ράβδος μάζας 100g και μήκους 50.0cm περιστρέφεται σε ένα οριζόντιο επίπεδο γύρω από ένα σταθερό κατακόρυφο και λείο καρφί που περνά από το κέντρο της. Δυο μικρές χάντρες, κάθε μια μάζας 30gr τοποθετούνται στη ράβδο έτσι ώστε να μπορούν να γλιστρούν κατά μήκους της ράβδου χωρίς τριβές. Αρχικά οι χάντρες κρατούνται ακίνητες με κάποια ειδικά φρένα και σε απόσταση 10.0cm εκατέρωθεν του κέντρου της ράβδου, ενώ το σύστημα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα 20 rad/sec. Ξαφνικά, τα φρένα που κρατούσαν τις χάντρες ελευθερώνονται και οι χάντρες γλιστρούν προς τις εξωτερικές άκρες της ράβδου. (α) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος τη στιγμή που οι χάντρες φθάνουν στα άκρα της ράβδου; (β) Τι θα συμβεί αν οι χάντρες φύγουν από τη ράβδο; Πόση θα είναι η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αφού οι χάντρες έχουν ξεφύγει από πάνω της;



Τα δεδομένα του προβλήματος είναι:

$L=0.5m,\quad M=0.1kg \quad m=0.03kg$

Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς το καρφί, που βρίσκεται στο ΚΜ της ράβδου, θα είναι:

$$I = I_{cm} + mr^2 + mr^2 \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{12}ML^2 + 2mr^2} \quad (1)$$

(α) Δεν υπάρχουν ροπές εξωτερικών δυνάμεων οπότε η ολική στροφορμή του συστήματος διατηρείται:

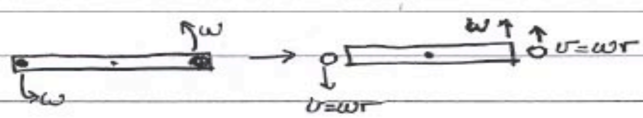
$$L_i = L_f \Rightarrow I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow \boxed{\omega_f = \frac{I_i\omega_i}{I_f}} \quad (2)$$

Η ροπή αδράνειας του συστήματος μεταβάλλεται αφού οι χάντρες απομακρύνονται από τον άξονα περιστροφής. Το τελικό r_f των χαντρών θα είναι ίσο με το $L/2$. Επομένως από (1) ∧ (2) ⇒

$$\omega_f = \frac{\frac{1}{12}ML^2+2mr^2}{\frac{1}{12}ML^2+2m\frac{L^2}{4}}\,\omega_i \Rightarrow \omega_f = \frac{\frac{1}{12}0.1\cdot 0.5^2+2\cdot 0.03\cdot 0.1^2}{\frac{1}{12}ML^2+2m\,0.25^2}\,20 \Rightarrow$$

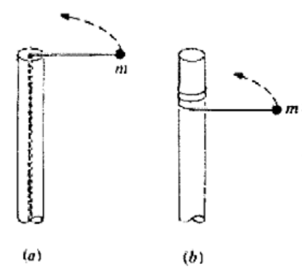
$$\Rightarrow \boxed{\omega_f = 9.2\ rad/s}$$

(β)

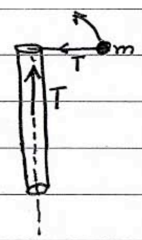


Η γωνιακή ταχύτητα είναι η ίδια αφού $\vec{L}_{συστήματος}$ διατηρείται και δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές.

14. Μια μάζα m είναι εξαρτημένη με ένα νήμα από ένα στύλο ακτίνας R. Αρχικά η απόστασή της από το κέντρο του στύλου είναι r και κινείται με εφαπτομενική ταχύτητα υ_0. Στην περίπτωση (α) το νήμα περνά από μια τρύπα στο μέσο του στύλου και στο υψηλότερο σημείο του στύλου. Το νήμα σταδιακά ελαττώνεται τραβώντας το προς το κέντρο του στύλου μέσω της τρύπας. Στην περίπτωση (β) το νήμα τυλίγεται γύρω από την εξωτερική επιφάνεια του στύλου. Ποιες ποσότητες διατηρούνται σε κάθε περίπτωση; Βρείτε την τελική ταχύτητα της μάζας καθώς χτυπά πάνω στο στύλο για κάθε περίπτωση.



(α)

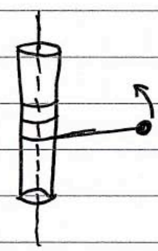


Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει ροπή στη μάζα ως προς το κέντρο του κυλίνδρου αφού η τάση του νήματος είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{r}$. Επομένως η στροφορμή διατηρείται:

$$\left.\begin{array}{ll} L_i = L_f \Rightarrow I_i \omega_i = I_f \omega_f & \\ I_i = m r^2 & \omega_i = \frac{\upsilon_0}{r} \\ I_f = m R^2 & \omega_f = \frac{\upsilon_f}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m r^{\cancel{2}} \frac{\upsilon_0}{\cancel{r}} = m R^{\cancel{2}} \frac{\upsilon_f}{\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{\upsilon_f = \frac{r}{R}\upsilon_0}$$

(β)



Στην περίπτωση αυτή υπάρχει ροπή στη μάζα ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο της ράβδου και είναι παράλληλος προς τη ράβδο. Η τάση του νήματος δεν είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{r}$ και επομένως η στροφορμή δεν διατηρείται.

Ωστόσο, η τάση του νήματος είναι πάντοτε κάθετη στη διεύθυνση κίνησης της μάζας και επομένως η δύναμη αυτή δεν παράγει έργο. Επομένως η ενέργεια διατηρείται:

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2} m \upsilon_0^2 = \frac{1}{2} m \upsilon_f^2 \Rightarrow \boxed{\upsilon_f = \upsilon_0}$$