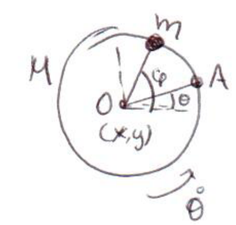
ΦΥΣ. 211
ΕΡΓΑΣΙΑ # 5
Επιστροφή την Τετάρτη 2/3/2016 στο τέλος της διάλεξης

1. Ένα ομοιογενές στεφάνι, ακτίνας *α*, και μάζας *M*, μπορεί να γλυστρά ελεύθερα σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια. Ένα έντομο μάζας *m*, κινείται στην περιφέρεια του στεφανιού. Το σύστημα είναι ακίνητο όταν το έντομο αρχίζει να κινείται. Ποια η γωνία που έχει καλύψει το στεφάνι όταν το έντομο έχει κάνει μια πλήρη περιστροφή του στεφανιού;



Θεωρούμε τις γενικευμένες συντεταγμένες του δισδιάστατου σχήματος X, Y, και Θ, όπου X και Y είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες του κέντρου μάζας του στεφανιού, ενώ Θ είναι η γωνία περιστροφής του στεφανιού ως προς την αρχική του γωνιακή κατάσταση.

Έστω A ένα σταθερό σημείο στην περιφέρεια του στεφανιού, το οποίο στην αρχική κατάσταση του στεφανιού είναι στην ευθεία OA που είναι παράλληλη με τον άξονα x.

Η γωνία φ είναι η γωνιακή μετατόπιση του εντόμου ως προς το στεφάνι. Η συντεταγμένη αυτή, φ, δεν είναι γενικευμένη συντεταγμένη αλλά τη θεωρούμε σαν γνωστή συνάρτηση του χρόνου.

Η κινητική ενέργεια του στεφανιού θα είναι $T_{στ} = \frac{1}{2} M_{cm} V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{στ}^{cm} \omega^2$

Η κινητική ενέργεια του εντόμου θα είναι: $T_{εντ} = \frac{1}{2} m v^2$.

Η γραμμική ταχύτητα του στεφανιού είναι: $V_{cm}^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2$ ενώ $\omega = \dot{\theta}$

Επομένως η κινητική ενέργεια του στεφανιού είναι: $T_{στ} = \frac{1}{2} M(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1}{2} M a^2 \dot{\theta}^2$

Η ταχύτητα του εντόμου θα είναι:

$$\left.\begin{aligned} x_m &= X_{cm} + a\cos(\theta+\varphi) \\ y_m &= Y_{cm} + a\sin(\theta+\varphi) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \dot{x}_m &= \dot{X}_{cm} - a(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\sin(\theta+\varphi) \\ \dot{y}_m &= \dot{Y}_{cm} + a(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\cos(\theta+\varphi) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\dot{x}_m^2 = \dot{X}_{CM}^2 + a^2(\dot\theta+\dot\varphi)^2\sin^2(\theta+\varphi) - 2\dot{X}_{CM}\,a(\dot\theta+\dot\varphi)\sin(\theta+\varphi)$$

$$\dot{y}_m^2 = \dot{Y}_{CM}^2 + a^2(\dot\theta+\dot\varphi)^2\cos^2(\theta+\varphi) + 2\dot{Y}_{CM}\,a(\dot\theta+\dot\varphi)\cos(\theta+\varphi)$$

Επομένως $T_{ενε} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_m^2+\dot{y}_m^2\right) = \frac{1}{2}m\Big[\dot{X}_{CM}^2+\dot{Y}_{CM}^2+a^2(\dot\theta+\dot\varphi)^2 - 2a\dot{X}_{CM}(\dot\theta+\dot\varphi)\sin(\theta+\varphi) + 2a\dot{Y}_{CM}(\dot\theta+\dot\varphi)\cos(\theta+\varphi)\Big]$

Η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν θεωρώντας το τραπέζι σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας.

Από την στιγμή που $\frac{\partial L}{\partial X_{CM}}$ και $\frac{\partial L}{\partial Y_{CM}}=0$ οι συντεταγμένες X_{CM} και Y_{CM} είναι κυκλικές και οι αντίστοιχες ορμές διατηρούνται:

$$P_X = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_{CM}} = M\dot{X}_{CM} + m\left(\dot{X}_{CM} - a(\dot\theta+\dot\varphi)\sin(\theta+\varphi)\right) = σταθ$$

$$P_Y = \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_{CM}} = M\dot{Y}_{CM} + m\left(\dot{X}_{CM} + a(\dot\theta+\dot\varphi)\cos(\theta+\varphi)\right) = σταθ$$

Σύμφωνα με τις αρχικές μας συνθήκες, όλα τα μέρη του συστήματος είναι αρχικά ακίνητα, οπότε $\dot{X}_{CM}=\dot{Y}_{CM}=\dot\theta=\dot\varphi=0$ οπότε οι παραπάνω εξισώσεις των ορμών δίνουν:

$$M\dot{X}_{CM} + m\left(\dot{X}_{CM} - a(\dot\theta+\dot\varphi)\sin(\theta+\varphi)\right) = 0$$
$$M\dot{Y}_{CM} + m\left(\dot{x}_{CM} + a(\dot\theta+\dot\varphi)\cos(\theta+\varphi)\right) = 0$$

Η εξίσωση κίνησης ως προς θ δίνει:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = \frac{\partial T}{\partial\dot\theta} = Ma^2\dot\theta + ma\left(a(\dot\theta+\dot\varphi) + \dot{Y}_{CM}\cos(\theta+\varphi) - \dot{X}_{CM}\sin(\theta+\varphi)\right) =$$
$$= (M+m)a^2\dot\theta + ma^2\dot\varphi - \frac{m^2a^2}{M+m}(\dot\theta+\dot\varphi)$$ αφού απαλείψουμε

τα $\dot{X}_{CM}$ και $\dot{Y}_{CM}$ από τις εξισώσεις διατήρησης.

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = -ma\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)\left(\dot{x}_{cm}\cos(\theta+\varphi)+\dot{y}_{cm}\sin(\theta+\varphi)\right) = 0$$

όπως προκύπτει από τις εξισώσεις διατήρησης πολ/ζοντας την (1) με $\cos(\theta+\varphi)$ και την (2) με $\sin(\theta+\varphi)$ και προσθέτοντας.

Επομένως η εξίσωση κίνησης για θ είναι:

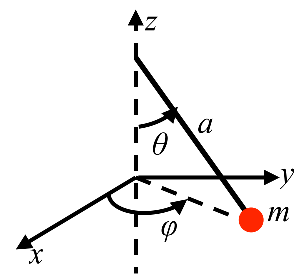
$$\frac{d}{dt}\left((M+m)a^2\dot{\theta}+ma^2\dot{\varphi}-\frac{m^2a^2}{M+m}\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)\right)-0=0 \Rightarrow$$

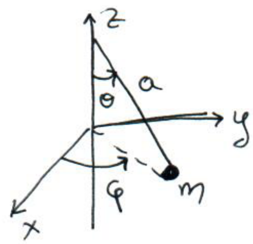
$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{m}{M+2m}\ddot{\varphi} \Rightarrow \boxed{\theta(t) = -\frac{m}{M+2m}\varphi(t)}$$

Το έντομο καλύπτει μια στροφή του στεφανιού όταν $\varphi = 2\pi$

Η γωνία που θα έχει περιστραφεί το στεφάνι την χρονική αυτή στιγμή θα είναι: $\theta = 2\pi\frac{m}{M+2m}$ στην αντίθετη κατεύθυνση από το έντομο

2. Το σφαιρικό εκκρεμές αποτελείται από ένα σώμα μάζας m, δεμένο σε ακλόνητο σημείο μέσω ενός αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους a, και κινείται κάτω από την επίδραση της δύναμης της βαρύτητας. Διαφέρει από το απλό μαθηματικό εκκρεμές στο γεγονός ότι η κίνησή του δεν είναι περιορισμένη σε κατακόρυφο επίπεδο. Δείξτε ότι η Lagrangian του συστήματος είναι: $L = \frac{1}{2} ma^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\varphi}^2 \right) + mga\cos\theta$, όπου θ και φ οι πολικές γωνίες φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Να βρεθεί η Hamiltonian και οι εξισώσεις του Hamilton και να προσδιοριστούν τυχόν κυκλικές συντεταγμένες.





Η κινητική ενέργεια συναρτήσει των γωνιών Θ, και φ των σφαιρικών συντεταγμένων θα είναι:

$$T = \frac{1}{2} m \left[(a\dot{\theta})^2 + (a\sin\theta\,\dot{\phi})^2 \right]$$ ενώ η $V = -mga\cos\theta$ μετρώντας με βάση το σημείο στήριξης, την $V=0$

Η Lagrangian θα είναι: $L = T - V = \frac{1}{2} m \left[(a\dot{\theta})^2 + (a\sin\theta\,\dot{\phi})^2 \right] + mga\cos\theta$

Οι συζυγείς ορμές θα είναι: p_θ & p_ϕ οπότε θα έχουμε:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ma^2\dot{\theta} \quad \text{και} \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ma^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}$$

Το σύστημα είναι συντηρητικό και η Hamiltonian δίνεται από τη σχέση:

$$H = T + V = \frac{1}{2} ma^2 \left(\frac{p_\theta^2}{(ma^2)^2} + \frac{p_\phi^2 \cancel{\sin^2\theta}}{(ma^2)^2 \sin^{\cancel{4}2}\theta} \right) - mga\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{p_\theta^2}{2ma^2} + \frac{p_\phi^2}{2ma^2\sin^2\theta} - mga\cos\theta. \Rightarrow H = \frac{1}{2ma^2}\left[p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} \right] - mga\cos\theta$$

Οι εξισώσεις κίνησης του Hamilton θα είναι:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ma^2} \qquad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2\cos\theta}{ma^2\sin^3\theta} - mga\sin\theta$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{ma^2\sin^2\theta} \qquad \dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0$$

Επομένως η συντεταγμένη φ είναι κυκλική και η αντίστοιχη συζυγής ορμή διατηρείται.

3. Η Lagrangian για ένα σωματίδιο μάζας m και φορτίου e το οποίο κινείται μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο $\{\vec{E}(\vec{r},t),\vec{B}(\vec{r},t)\}$ δίνεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες από την σχέση: $L(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)=\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}-e\varphi(\vec{r},t)+e\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)$, όπου $\vec{r}=(x,y,z)$ και $\{\varphi,\vec{A}\}$ είναι τα ηλεκτροδυναμικά δυναμικά των πεδίων $\{\vec{E},\vec{B}\}$. Δείξτε ότι η αντίστοιχη Hamiltonian δίνεται από την σχέση: $H(\vec{r},\vec{p},t)=\frac{(\vec{p}-e\vec{A})\cdot(\vec{p}-e\vec{A})}{2m}+e\varphi$, όπου $\vec{p}=(p_x,p_y,p_z)$ είναι οι γενικευμένες ορμές συζυγείς των συντεταγμένων (x,y,z). Σημειώστε ότι $\vec{p}$ δεν είναι η κανονική γραμμική ορμή του σωματιδίου. Κάτω από ποιές συνθήκες η Hamiltonian, H, διατηρείται;

Η Lagrangian του συστήματος είναι: $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-e\phi+e\dot{x}A_x+e\dot{y}A_y+e\dot{z}A_z$

Οι συζυγείς ορμές p_x, p_y και p_z είναι:

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m\dot{x}+eA_x \\ p_y &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}} = m\dot{y}+eA_y \\ p_z &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} = m\dot{z}+eA_z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p_x}{m}-\frac{e}{m}A_x \\ \dot{y} &= \frac{p_y}{m}-\frac{e}{m}A_y \\ \dot{z} &= \frac{p_z}{m}-\frac{e}{m}A_z \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό θα έχει Hamiltonian συνάρτηση $H=\dot{x}p_x+\dot{y}p_y+\dot{z}p_z-\mathcal{L}\Rightarrow$

$$\Rightarrow H=\frac{p_x^2}{m}-\frac{e}{m}p_xA_x+\frac{p_y^2}{m}-\frac{e}{m}p_yA_y+\frac{p_z^2}{m}-\frac{e}{m}p_zA_z-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{m}{m^2}\left[(p_x-eA_x)^2+(p_y-eA_y)^2+(p_z-eA_z)^2\right]+e\phi$$

$$-\frac{e}{m}\left[(p_x-eA_x)A_x+(p_y-eA_y)A_y+(p_z-eA_z)A_z\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow H=\frac{1}{m}\left[p_x(p_x-eA_x)+p_y(p_y-eA_y)+p_z(p_z-eA_z)\right]-$$

$$-\frac{e}{m}\left[A_x(p_x-eA_x)+A_y(p_y-eA_y)+A_z(p_z-eA_z)\right]+e\phi$$

$$-\frac{1}{2m}\left[(p_x-eA_x)^2+(p_y-eA_y)^2+(p_z-eA_z)^2\right]\Rightarrow$$

$$H=\frac{1}{m}\left[(p_x-eA_x)(p_x-eA_x)+(p_y-eA_y)(p_y-eA_y)+(p_z-eA_z)\right]+e\phi$$

$$-\frac{1}{2m}\left[(p_x-eA_x)^2+(p_y-eA_y)^2+(p_z-eA_z)^2\right]\Rightarrow$$

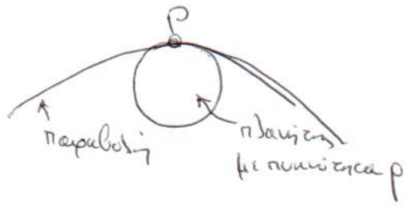
$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left[(p_x - eA_x)^2 + (p_y - eA_y)^2 + (p_z - eA_z)^2 \right] + e\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - e\vec{A}\right) \cdot \left(\vec{p} - e\vec{A}\right) + e\phi}$$

Αυτή είναι η Hamiltonian συνάρτηση. Η συνάρτηση έχει ακριβή εξάρτηση από τον χρόνο εξαιτίας των $\phi(t)$ και $A(t)$ και επομένως $\mathcal{H}$ δεν διατηρείται εν γένει.

Θα διατηρείται αν τα δυναμικά $\{\phi, A\}$ είναι ανεξάρτητα του χρόνου, δηλαδή όταν τα πεδία, είναι στατικά

4. Ένα σώμα κινείται σε παραβολική τροχιά στο βαρυτικό πεδίο ενός πλανήτη, και περνά ακριβώς εφαπτομενικά από την επιφάνεια του πλανήτη στο σημείο της εγγύτερης προσέγγισης. Ο πλανήτης έχει πυκνότητα ρ. Ποια η στροφορμή του σώματος ως προς το κέντρο του πλανήτη, την στιγμή που περνά εφαπτομενικά από την επιφάνεια του πλανήτη;



Ξέρουμε ότι η στροφορμή είναι $l = m\dot{\theta} r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow l = m v r$

Η δυναμική ενέργεια $V = -\frac{k}{r} = -\frac{GMm}{r}$

Το σημείο της εγγύτερης προσέγγισης όμως μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση της τροχιάς: $\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}\left(1 + e\cos(\theta - \theta')\right)$

Στο σημείο εγγύτερης προσέγγισης $\theta = \theta' \Rightarrow \frac{1}{r_{min}} = \frac{mk}{l^2}(1+e)$ $\Big\} \Rightarrow$

Για παραβολή όπως είναι η τροχιά του σώματος έχουμε $e = 1$

$$\frac{1}{r_{min}} = \frac{2mk}{l^2} \Rightarrow r_{min} = \frac{l^2}{2mk} = \frac{\cancel{m}^2 v^2 r_{min}^2}{2\cancel{m} GM\cancel{m}} = \frac{\dot{\theta}^2 r_{min}^2 r_{min}^2}{2GM} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{min}^3 = \frac{2GM}{\dot{\theta}^2} \Rightarrow r_{min} = \sqrt[3]{\frac{2GM}{\dot{\theta}^2}} = \sqrt[3]{\frac{2GM}{\omega^2}}$$

Η πυκνότητα της σφαίρας είναι: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r_{min}^3} = \frac{\cancel{m}}{\frac{4}{3}\pi\frac{2GM}{\omega^2}} \Rightarrow$

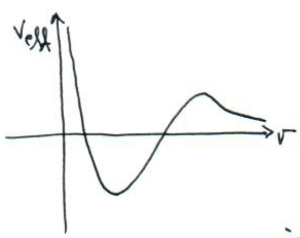
$$\Rightarrow \rho = \frac{3\omega^2}{8\pi G} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}}}$$

5. Ένα σωματίδιο κινείται μέσα σε δυναμικό της μορφής $V = -V_0 e^{-\lambda^2 r^2}$. (α) Δεδομένης της στροφορμής L, να βρεθεί η ακτίνα της σταθερής κυκλικής τροχιάς. (β) Αν η στροφορμή L είναι πολύ μεγάλη, τότε δεν υπάρχει κυκλική τροχιά. Ποια είναι η μέγιστη τιμή της στροφορμής για την οποία υπάρχει κυκλική τροχιά; Έστω r_0 η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς για αυτή την οριακή περίπτωση. Ποιά θα είναι η τιμή του $V_{eff}(r_0)$;

Εξετάζουμε την περίπτωση του δυναμικού $V = -V_0 e^{-\lambda^2 r^2}$

Το ενεργό δυναμικό θα έχει την μορφή: $\boxed{V_{eff}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} - V_0 e^{-\lambda^2 r^2}}$

Η μορφή του δυναμικού είναι όπως στο παρακάτω σχήμα.



Για $r \to 0$ $V_{eff}(r) \to +\infty$ εξαιτίας του όρου $\frac{\ell^2}{2mr^2}$

Για $r \to \infty$ $V_{eff}(r) \to 0$ εξαιτίας του όρου $\frac{\ell^2}{2mr^2}$ που πηγαίνει στο μηδέν πιο αργά από $e^{-\lambda^2 r^2}$

Να σημειωθεί ότι για $r \to \infty$ πηγαίνει στο 0 από θετικές τιμές του ενεργού δυναμικού, παρόλο που ο όρος $-V_0 e^{-\lambda^2 r^2} < 0$. Επομένως η συνάρτηση του δυναμικού θα πρέπει να παρουσιάζει 2 ακρότατα όπως στο σχήμα, και ότι το ενεργό δυναμικό μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές.

Η παράγωγος του δυναμικού θα μας δώσει τα σημεία των κυκλικών τροχιών όταν $V'_{eff}(r) = 0$.

Θα έχουμε επομένως: $\frac{dV_{eff}(r)}{dr} = -\frac{\ell^2}{mr^3} + 2V_0 \lambda^2 r e^{-\lambda^2 r^2} = 0 \Rightarrow \frac{\ell^2}{mr^3} = 2V_0 \lambda^2 r e^{-\lambda^2 r^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\ell^2 = 2V_0 m \lambda r^4 e^{-\lambda^2 r^2}}$

Η εξίσωση αυτή προσδιορίζει το r. Αν το ℓ δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλο, τότε η μορφή του δυναμικού είναι όπως στο παραπάνω σχήμα και έχουμε ήδη δει παραδείγματα προσδιορισμού των ακρότατων και μορφής του δυναμικού ανάλογα με τις τιμές της στροφορμής.

Η λύση με την μικρότερη τιμή του r αντιστοιχεί στην ευσταθή κυκλική τροχιά.

Όπως είδαμε, αν η στροφορμή έχει μεγάλη τιμή, τότε ο όρος $\ell^2/2mr^2$ υπερισχύει παντού και επομένως η συνάρτηση του ενεργού δυναμικού ελαττώνεται μονοτονικά.

(β) Βρήκαμε προηγουμένως ότι η παράγωγος $\frac{dV_{eff}}{dr}=0$ όταν ισχύει: $l^2=(2mV_0\lambda^2)r^4e^{-\lambda^2r^2}$

Αυτή η συνάρτηση στο δεξί μέλος παρουσιάζει μέγιστο αφού όταν $r\to0$ και $r\to\infty$ η συνάρτηση μηδενίζεται. Επομένως μπορούμε να βρούμε το ακρότατο παραγωγίζοντας

$$0=\frac{d(r^4e^{-\lambda^2r^2})}{dr}=e^{-\lambda^2r^2}\left(4r^3+r^4(-2\lambda^2r)\right) \Rightarrow 4r^3+(-2\lambda^2r^5)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cancel{4}\cancel{r^3}=\cancel{2}\lambda^2r^{\cancel{5}\,2}\Rightarrow r^2=\frac{2}{\lambda^2}\Rightarrow \boxed{r=\frac{\sqrt{2}}{\lambda}=r_0}$$

Αντικατάσταση της r_0 στην εξίσωση που δίνει την στροφορμή $l^2=2mV_0\lambda^2r^4e^{-\lambda^2r^2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow l^2_{max}=2mV_0\cancel{\lambda^2}\frac{4}{\lambda^{\cancel{4}2}}e^{-\cancel{\lambda^2}2/\cancel{\lambda^2}}\Rightarrow \boxed{l^2_{max}=\frac{8mV_0}{\lambda^2e^2}}$$

Ξέροντας τις τιμές των l_{max} και r_0 μπορούμε να βρούμε την τιμή του ενεργού δυναμικού για $r=r_0$

Θα έχουμε: $$V_{eff}(r_0)=\frac{l^2_{max}}{2mr_0^2}-V_0e^{-\lambda^2r_0^2}=\frac{8\cancel{m}V_0}{\cancel{\lambda^2}e^2\cancel{2m}\frac{2}{\cancel{\lambda^2}}}-V_0e^{-\cancel{\lambda^2}2/\cancel{\lambda^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{eff}(r_0)=\frac{2V_0}{e^2}-\frac{V_0}{e^2}\Rightarrow \boxed{V_{eff}(r_0)=\frac{V_0}{e^2}}$$ για $l=l_{max}$, $r=r_0$

Παρατηρούμε ότι η τιμή αυτή είναι μεγαλύτερη από μηδέν

Για την τιμή αυτή της στροφορμής έχουμε μόνο ένα ακρότατο και η μορφή του ενεργού δυναμικού θα παρουσιάζει σαγματικό σημείο, η οριακή περίπτωση από το να φθίνει μονοτονικά στο μηδέν και να παρουσιάζει τα δύο ακρότατα. Το σχήμα θα είχε την μορφή:

Να σημειωθεί ότι ένα συνηθισμένο σφάλμα είναι να θεωρήσουμε ότι για κυκλική τροχιά $V_{eff}(r)\leq 0$ όταν V_{eff} είχε ελάχιστο. Δηλαδή η λογική είναι να θεωρήσουμε ένα πηγάδι δυναμικού, όπου το σωματίδιο εγκλωβίζεται και για να συμβεί αυτό χρειαζόμαστε αλλά $V_{eff}(r)<V_{eff}(r\to\infty)$. Ωστόσο αυτό δίνει τη λάθος απάντηση γιατί μπορεί το $V_{eff}(r)$ να παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $V_{eff}(r)>0$ και για $r\to\infty$ $V_{eff}\to 0<V_{τοπικό}$

6. Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε δυναμικό που δίνεται από την σχέση $V(r) = \beta r^k$ και έστω ότι η στροφορμή του είναι L. (α) Βρείτε την ακτίνα, r_0, της κυκλικής τροχιάς. (β) Αν δοθεί στο σωματίδιο μια μικρή ώθηση ώστε η τροχιά να ταλαντώνεται γύρω από την τιμή r_0, βρείτε την συχνότητα ω_r, των μικρών ταλαντώσεων ως προς r. (γ) Ποιος είναι ο λόγος ω_r/ω_θ όπου $\omega_\theta = \dot{\theta}$ είναι η συχνότητα της σχεδόν κυκλικής τροχιάς. Ο λόγος αυτός εξαρτάται από την τιμή της σταθεράς k. Δώστε μερικές περιπτώσεις τιμών k, για τις οποίες ο λόγος ειναι ρητός, δηλαδή η διαδρομή της κυκλικής τροχιάς είναι κλειστή (κλείνει δηλαδή πίσω στο σημείο που ξεκίνησε).

(α) Όπως έχουμε δει, κυκλική τροχιά υπάρχει στη θέση που η παράγωγος του ενεργού δυναμικού μηδενίζεται. Επομένως για το δυναμικό που δίνεται θα έχουμε $V'(r) = \beta k r^{k-1}$ και επομένως η παράγωγος του ενεργού δυναμικού θα είναι: $\frac{dV'_{eff}}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{\ell^2}{mr^3} - \beta k r^{k-1} = 0$

Η τελευταία δίνει $r_0^{k+2} = \frac{\ell^2}{m\beta k} \Rightarrow r_0 = \left(\frac{\ell^2}{m\beta k}\right)^{1/(k+2)}$ (A)

Αν η τιμή της σταθεράς k είναι αρνητική, τότε το β πρέπει να είναι επίσης αρνητικό αν θέλουμε να υπάρχει πραγματική λύση για το r_0.

(β) Για να βρούμε την συχνότητα των διαταραγμένων κυκλικών τροχιών, θέτουμε $r(t) = r_0 + \varepsilon$ όπου $\varepsilon(t)$ μικρή μετατόπιση από την κυκλική τροχιά. Κατόπιν χρειάζεται να αντικαταστήσουμε στην Lagrangian και αφού αναπτύξουμε κατά Taylor να καταλήξουμε στην εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή $\ddot{\varepsilon} = -\omega_r^2 \varepsilon$

Όπως έχουμε δει, μπορούμε να αναπτύξουμε κατά Taylor το V_{eff} ως προς $r = r_0$

$$V_{eff}(r) = V_{eff}(r_0) + V'_{eff}(r)\Big|_{r=r_0}\delta r + \frac{1}{2}V''_{eff}(r)\Big|_{r=r_0}\delta r^2 + \dots$$

Ο πρώτος όρος είναι μια σταθερά και επομένως μπορεί να απαλειφθεί από την περιγραφή της δυναμικής του συστήματος. Ο 2ος όρος $V'_{eff}(r_0) = 0$ αφού αντιστοιχεί στο ακρότατο του δυναμικού. Επομένως: $V_{eff}(r) = \frac{1}{2}V''_{eff}\delta r^2$

Επομένως η Lagrangian μπορεί να γραφεί: $\mathcal{L} = T - V_{eff} = \frac{1}{2}m\delta\dot{r}^2 - \frac{1}{2}V''_{eff}\delta r^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta\dot{r}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta r} \Rightarrow m\delta\ddot{r} = -V''_{eff}\delta r \Rightarrow \delta\ddot{r} = -\frac{V''_{eff}}{m}\delta r = -\omega_r^2 \delta r$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του ενεργού δυναμικού μπορούμε να υπολογίσουμε την $V''_{eff}(r)$

$$V''_{eff}(r) = \frac{d}{dr}V'_{eff}(r) = +\frac{3\ell^2}{mr^4} + \beta k(k-1)r^{k-2} = +\frac{3\ell^2}{mr_0^4} + \beta k(k-1)r_0^{k-2} \Rightarrow$$

$$V''_{eff}(r) = \frac{1}{r_0^4}\left[\frac{3\ell^2}{m} + \beta k(k-1)r_0^{k+2}\right]$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του r_0 που βρήκαμε στην (A) έχουμε:

$$\bar{V}'_{eff}(r) = \frac{1}{r_0^4}\left[\frac{3\ell^2}{m} + \cancel{\beta k}(k-1)\frac{\ell^2}{m\cancel{\beta k}}\right] = \frac{1}{r_0^4}\left[\frac{3\ell^2+k\ell^2-\ell^2}{m}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V'_{eff}(r) = \frac{1}{r_0^4}\,\frac{2\ell^2+k\ell^2}{m} = \frac{1}{r_0^4}\,\frac{\ell^2(2+k)}{m} \Rightarrow \omega_r = \sqrt{\frac{V''_{eff}}{m}} = \frac{\ell\sqrt{k+2}}{m r_0^2}$$

Παρατηρούμε ότι για να έχουμε πραγματική λύση θα πρέπει $k>-2$.

Αν $k<-2$ τότε $V''_{eff}(r)<0$ και το ακρότατο αντιστοιχεί σε ασταθή κυκλική τροχιά.

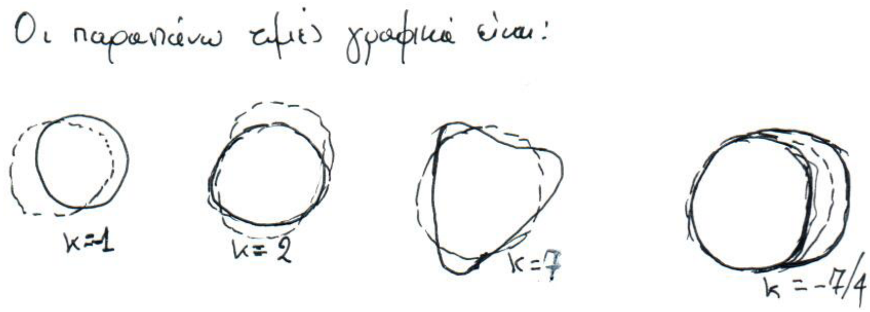
(γ) Αφού $\ell = m r_0^2\dot{\theta}$ για την κυκλική τροχιά, θα έχουμε $\omega_\theta = \dot{\theta} = \frac{\ell}{m r_0^2}$

Επομένως $\frac{\omega_r}{\omega_\theta} = \frac{\ell\sqrt{k+2}/\cancel{m r_0^2}}{\cancel{\ell/m r_0^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\omega_r}{\omega_\theta} = \sqrt{k+2}}$

Δοκιμάζουμε διάφορες τιμές για k που δίνουν ρητές τιμές για τον λόγο

- $k=-1 \Rightarrow \omega_r/\omega_\theta = 1$. Αυτό αντιστοιχεί στο βαρυτικό δυναμικό. Η τιμή της κυκλικής τροχιάς, r, κάνει μια πλήρη ταλάντωση για κάθε περιστροφή της τροχιάς
- $k=2 \Rightarrow \omega_r/\omega_\theta = 2$ Στην περίπτωση αυτή έχουμε το δυναμικό Hooke. Η μεταβλητή, r, κάνει 2 ταλαντώσεις για κάθε πλήρη περιστροφή.
- $k=7 \Rightarrow \omega_r/\omega_\theta = 3$. Έχουμε 3 ταλαντώσεις για κάθε πλήρη περιστροφή
- $k=-7/4 \Rightarrow \omega_r/\omega_\theta = 1/2$. Η μεταβλητή r κάνει μισή ταλάντωση για κάθε πλήρη περιστροφή. Δηλαδή χρειαζόμαστε 2 περιστροφές για να επιστρέψει στην αρχική τιμή του r.

Οι παραπάνω τιμές γραφικά είναι:



7. Ένα σωματίδιο κινείται σε ένα δυναμικό της μορφής $V(r)=\beta r^2$. Δείξτε ότι η τροχιά του σωματιδίου είναι έλλειψη.

Είχαμε δει στις διαλέξεις ότι χρησιμοποιώντας διατήρηση της ενέργειας καταλήγουμε στην διαφορική εξίσωση (διαλ. 14): $\dot{r}^2 = \frac{2E}{m} - \frac{2V(r)}{m} - \frac{\cancel{2}l^2}{\cancel{2}m^2r^2} \Rightarrow \dot{r}^2 = \frac{2E}{m} - \frac{2V(r)}{m} - \frac{l^2}{m^2r^2}$ (1)

Ξέρουμε επίσης ότι η στροφορμή διατηρείται: $l = mr^2\dot{\theta}$ (2)

Υψώνουμε την (2) στο τετράγωνο οπότε έχουμε: $m^2r^4\dot{\theta}^2 = l^2$ (3)

Διαιρούμε την (1) με την (3) και έχουμε:

$$\left(\frac{1}{mr^2}\right)^2\left(\frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}}\right)^2 = \frac{2E}{ml^2} - \frac{2V(r)}{ml^2} - \frac{1}{m^2r^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2E}{ml^2} - \frac{2V(r)}{ml^2} - \frac{1}{m^2r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV(r)}{l^2} - \frac{1}{r^2}} \quad (A)$$

Στην περίπτωση του προβλήματος μας το δυναμικό είναι: $V(r) = br^2$

Αντικαθιστώντας στην (A) θα έχουμε: $\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{l^2} - \frac{2mbr^2}{l^2} - \frac{1}{r^2}$ (4)

Στην περίπτωση του Keplerian δυναμικού κάναμε αλλαγή μεταβλητής $u=\frac{1}{r}$ για να λύσουμε την διαφορική εξίσωση. Στην συγκεκριμένη όμως περίπτωση αν θεωρήσουμε την μεταβλητή $u = 1/r^2$ βοηθά περισσότερο στην επίλυση.

Θα έχουμε για $u=\frac{1}{r^2} \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)/r^3$ (5)

Πολλαπλασιάζουμε την (4) με $1/r^2$ οπότε: $\frac{1}{r^6}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mE}{r^2l^2} - \frac{2mb}{l^2} - \frac{1}{r^4} \overset{(5)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mEu}{l^2} - \frac{2mb}{l^2} - u^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\frac{du}{d\theta}\right)^2 = -\left(u-\frac{mE}{l^2}\right)^2 - \frac{2mb}{l^2} + \left(\frac{mE}{l^2}\right)^2$$

Κάνουμε ακόμα μια αλλαγή μεταβλητής: $z = u - \frac{mE}{l^2} \Rightarrow dz = du$ οπότε:

$$\left(\frac{1}{2}\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = -z^2 + \left(\frac{mE}{l^2}\right)^2\left(1-\frac{2bl^2}{mE^2}\right) \Rightarrow \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = -4z^2 + 4\left(\frac{mE}{l^2}\right)^2\left(1-\frac{2bl^2}{mE^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2 = -4z^2 + 4B^2 \quad \text{όπου} \quad B = \frac{mE}{\ell^2}\sqrt{1-\frac{2b\ell^2}{mE^2}}$$

Με χωρισμό μεταβλητών και ολοκλήρωση, θα πάρουμε: $\frac{dz}{\sqrt{B^2-z^2}} = 2d\theta \Rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{B^2-z^2}} = \int 2d\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{z}{B}\right) = 2(\theta-\theta_0) \Rightarrow z = B\cos 2(\theta-\theta_0)$$

Επιλέγοντας τους άξονες ώστε $\theta_0 = 0$, η λύση γράφεται: $\boxed{z = B\cos 2\theta}$ $\Big\} \Rightarrow$

Αλλά $\quad z = u - \frac{mE}{\ell^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{mE}{\ell^2}$ ενώ $B = \frac{mE}{\ell^2}\sqrt{1-\frac{2b\ell^2}{mE^2}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} - \frac{mE}{\ell^2} = \frac{mE}{\ell^2}\sqrt{1-\frac{2b\ell^2}{mE^2}}\cos 2\theta \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{mE}{\ell^2}\left[1+\sqrt{1-\frac{2b\ell^2}{mE^2}}\cos 2\theta\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{r^2} = \frac{mE}{\ell^2}\left[1+e\cos 2\theta\right]} \; (B) \quad \text{όπου} \quad e = \sqrt{1-\frac{2b\ell^2}{mE^2}}$$

Έστω $k = \frac{\ell^2}{mE}$. Πολλαπλασιάζουμε την (B) με kr^2 οπότε:

$$k = r^2\left[1+e\cos 2\theta\right] = r^2\left[1+e\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\right] = r^2\left[1+e\left(\frac{x^2}{r^2}-\frac{y^2}{r^2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = r^2 + e(x^2-y^2) \Rightarrow k = x^2+y^2+e(x^2-y^2) \Rightarrow k = x^2(1+e)+y^2(1-e) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{x^2}{\frac{k}{(1+e)}} + \frac{y^2}{\frac{k}{1-e}} \Rightarrow 1 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \quad \text{όπου} \quad a = \sqrt{\frac{k}{1+e}} \quad b = \sqrt{\frac{k}{1-e}}$$

Επομένως καταλήγουμε στην εξίσωση μιας έλλειψης με το κέντρο της να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων, σε αντίθεση με την περίπτωση του προβλήματος Kepler που η μια εστία της έλλειψης είναι στην αρχή των αξόνων.

Από τον ορισμό των a, b και της εξίσωσης της έλλειψης παρατηρούμε ότι ο μεγάλος ημιάξονας είναι ο $b = \sqrt{k/(1-e)}$ στην y-διεύθυνση.