Συστήματα με N βαθμούς ελευθερίας

- Συστήματα με N βαθμούς ελευθερίας που βρίσκονται κοντά σε μια θέση ισσορροπίας τους συμπεριφέρονται σαν N ανεξάρτητοι αρμονικοί ταλαντωτές

  Γιατί αυτό?

- Έστω σύστημα με N βαθμούς ελευθερίας q_i
- Η Lagrangian του συστήματος εν γένει θα έχει την μορφή:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{ij} T_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j \; - U(q)$$

- Υποθέτω ότι η κινητική ενέργεια είναι ένας συμμετρικός πίνακας $T_{ij} = T_{ji}$

  Κάθε πίνακας μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντι-συμμετρικού πίνακα

- Υποθέτω ότι ο πίνακας T_{ij} είναι αντιστρέψιμος

  διαφορετικά υπάρχει μια τουλάχιστον διεύθυνση στον χώρο των καταστάσεων που είναι ανεξάρτητη της $\dot{q}_i$

  Δηλαδή δεν θα υπάρχει όρος ταχύτητας στην Lagrangian στην διεύθυνση αυτή και επομένως δεν υπάρχει δυναμική

Συστήματα με N βαθμούς ελευθερίας

- Οι εξισώσεις κίνησης επομένως θα είναι: $L = \frac{1}{2}\sum_{ij} T_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - U(q)$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{\partial T}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\partial U}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\sum_i T_{ik}\dot{q}_i\right) = 0$$

κανόνας της αλυσίδας

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{\partial T}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\partial U}{\partial q_k} - \sum_i T_{ik}\ddot{q}_i - \sum_{ij}\frac{\partial T_{ik}}{\partial q_j}\dot{q}_j\dot{q}_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i T_{ik}\ddot{q}_i + \sum_{ij}\left(\frac{\partial T_{ik}}{\partial q_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial T_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_i + \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0 \qquad (1)$$

- Ορίζω τον αντίστροφο πίνακα $\left(T^{-1}\right)^{kl}$ για τον οποίο: $\sum_k \left(T^{-1}\right)^{lk} T_{ki} = \delta_{li} = \begin{cases} 0 & l \neq i \\ 1 & l = i \end{cases}$
- Πολ/ζω την (1) με $\left(T^{-1}\right)^{kl}$

$$\Rightarrow \ddot{q}_l = -\sum_{ijk}\left(T^{-1}\right)^{kl}\left(\frac{\partial T_{ik}}{\partial q_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial T_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_i - \sum_k \left(T^{-1}\right)^{kl}\frac{\partial U}{\partial q_k} \qquad (2)$$

- Θα επικεντρωθούμε σε κατάσταση ισορροπίας:

Αλλά στην κατάσταση αυτή: $q_i = \sigma\tau\alpha\theta. = q_i^0$ και $\dot{q}_i = \ddot{q}_i = 0$

Συστήματα με N βαθμούς ελευθερίας

- Στην κατάσταση ισορροπίας, η (2) γίνεται: $\sum_k \left(T^{-1}\right)^{kl} \dfrac{\partial U}{\partial q_k} = 0$
- Δηλαδή: $\left.\dfrac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{q_i^0} = 0$ για όλα τα $i = 1, \cdots, N$
- Για μικρές διαταραχές από την θέση ισορροπίας q_i^0 θα έχουμε: $q_i = q_i^0 + \eta_i$
- Αναπτύσουμε τις εξισώσεις κίνησης κρατώντας μόνο τους γραμμικούς όρους $O(\eta_l)$:

$$\ddot{q}_l = -\sum_{ijk} \left(T^{-1}\right)^{kl} \left(\frac{\partial T_{ik}}{\partial q_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial T_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_i - \sum_k \left(T^{-1}\right)^{kl} \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

$\ddot{\eta}_i$

$\mathrm{O}\left(\dot{\eta}_i^2\right)$

Ανάπτυγμα Taylor ως προς q_l^0

Το ανάπτυγμα Taylor ως προς $O(\eta)$ θα δώσει $$\frac{\partial U}{\partial q_k} = \cancelto{0}{\left.\frac{\partial U}{\partial q_k}\right|_{q_0}} + \sum_j \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_j}\right|_{q_0} \eta_j$$

- Η εξίσωση κίνησης θα γίνει: $\ddot{\eta}_l = -\sum_{kj} \left(T^{-1}\right)_{kl} \left.\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_j}\right|_{q_0} \eta_j$
- Η εξίσωση κίνησης γράφεται όπως έχουμε δει σε μορφή εξίσωσης πινάκων:

Συστήματα με N βαθμούς ελευθερίας

- Η εξίσωση κίνησης γράφεται όπως έχουμε δει σε μορφή εξίσωσης πινάκων:

$$\ddot{\eta}_l = -\sum_{kj} \left(T^{-1}\right)_{kl} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_j}\right|_{q_0} \eta_j$$

Πίνακας Hess ή hessian πίνακας

- Θεωρώντας: $U'' = N \times N$ πίνακας με στοιχεία: $\dfrac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_j}$ με $i, j = 1, \cdots, N$
- Αλλά T_{ij} και $(T_{ij})^{-1}$ είναι επίσης $N \times N$ πίνακες
- Η εξίσωση κίνησης θα γίνει επομένως: $\ddot{\vec{\eta}} = -\left(T^{-1}\right) \cdot U'' \cdot \vec{\eta} \;\Rightarrow \ddot{\vec{\eta}} = F \cdot \vec{\eta}$

  όπου $F = -\left(T^{-1}\right) \cdot U''$ γινόμενο πινάκων T και U''

- Η διαταραχή γύρω από την θέση ισορροπίας δίνεται από μια διαφορική εξίσωση πινάκων:

- Πώς βρίσκουμε την λύση αυτής της εξίσωσης όπου η είναι διάνυσμα και F πίνακας?
  - Εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα F
  - Αφού έχουμε $N \times N$ πίνακα θα υπάρχουν N ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές
  - Έστω τα ιδιοδιανύσματα περιγράφονται από $\vec{\mu}_a$ όπου $a = 1, \cdots, N$
  - Επομένως η διαφορική εξίσωση του πίνακα γράφεται: $F \cdot \vec{\mu}_a = -\omega_a^2 \vec{\mu}_a$

ιδιοτιμή

Συστήματα με Ν βαθμούς ελευθερίας

- Οι ιδιοτιμές ορίζονται ω^2 για να μοιάζουν τις συχνότητες ενός αρμονικού ταλαντωτή
- Επειδή $F = -\left(T^{-1}\right)\cdot U''$ πολ/ζω την $F\cdot\vec{\mu}_a = -\omega_a^2\vec{\mu}_a$ (A) με T

$$T\cdot T^{-1}\cdot U''\vec{\mu}_a = T\omega_a^2\vec{\mu}_a \Rightarrow U''\vec{\mu}_a = \omega_a^2 T\vec{\mu}_a \qquad \text{(B)}$$

- Η εξίσωση: $F\cdot\vec{\mu}_a + \omega_a^2\vec{\mu}_a = 0 \Rightarrow \left(F + \omega_a^2 I\right)\cdot\vec{\mu}_a = 0$ έχει μη τετριμένες λύσεις όταν

$\det\left(F + \omega_a^2\mathbf{I}\right) = 0$ χαρακτηριστική εξίσωση ιδιοτιμών του πίνακα F

ή ισοδύναμα από την (B): $\det\left(U'' - \omega_a^2 T\right) = 0$

- Βρίσκοντας τις ιδιοτιμές μπορούμε να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα αντικαθιστώντας για κάθε ιδιοτιμή στην εξίσωση (A) ή (B)

- Ενώ οι πίνακες U και T είναι συμμετρικοί (π.χ. T_{ij}=T_{ji} ή διαφορετικά $T = \tilde{T}$), ο πίνακας F δεν είναι απαραίτητα συμμετρικός
  - Οι ιδιοτιμές ενός συμμετρικού πίνακα είναι πραγματικές
  - Δεν είναι επομένως προφανές ότι οι ιδιοτιμές, ω_α, του F είναι πραγματικές.
  - Αλλά είναι

Παρένθεση – στοιχεία από γραμμική άλγεβρα

- Σημειώστε ότι για ένα πίνακα Π: $a \cdot \Pi \cdot c = c \cdot \tilde{\Pi} \cdot a$

  αν ο Π είναι συμμετρικός τότε $a \cdot \Pi \cdot c = c \cdot \Pi \cdot a$
- Αν ένας πίνακας είναι συμμετρικός, οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί αριθμοί
  - Ας το αποδείξουμε αυτό:

  Έστω ω είναι μια μιγαδική ιδιοτιμή ενός συμμετρικού πίνακα Π με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα α οι συνιστώσες του οποίου μπορεί να είναι μιγαδικές.

  Τα α και ω ικανοποιούν την εξίσωση: $\Pi \cdot \vec{a} = \omega \vec{a}$ ⇐ πολ/ζω με $\vec{a}^{\dagger}$

  Παίρνουμε τον συζυγή μιγαδικό έχουμε: $\Pi \cdot \vec{a}^{\dagger} = \omega^{*} \vec{a}^{\dagger}$ ⇐ πολ/ζω με $\vec{a}$

  Θα έχουμε: $\vec{a}^{\dagger} \cdot \Pi \cdot \vec{a} = \omega \vec{a}^{\dagger} \cdot \vec{a}$ και $\vec{a} \cdot \Pi \cdot \vec{a}^{\dagger} = \omega^{*} \vec{a} \cdot \vec{a}^{\dagger}$

  Επειδή ο Π συμμετρικός, τα αριστερά μέλη είναι ίσα οπότε $\omega \vec{a}^{\dagger} \cdot \vec{a} = \omega^{*} \vec{a} \cdot \vec{a}^{\dagger}$

  Αλλά $\vec{a}^{\dagger} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{a}^{\dagger} = |a_x|^2 + |a_y|^2 + |a_z|^2$ και επομένως: $\omega = \omega^{\dagger} \Rightarrow \omega \in \mathbb{R}$

Πραγματικές ιδιοτιμές του πίνακα F

- Θυμηθείτε ότι: $U'' \cdot \vec{\mu}_a = \omega_a^2 T \cdot \vec{\mu}_a \Rightarrow \omega_a^2 = \dfrac{\vec{\mu}_a^\dagger \cdot U'' \cdot \vec{\mu}_a}{\vec{\mu}_a^\dagger \cdot T \cdot \vec{\mu}_a}$ με $\vec{\mu}_a^\dagger$ τον συζυγή του $\vec{\mu}_a$
- Αλλά U'' και T είναι συμμετρικοί και πραγματικοί πίνακες και υπάρχει T^{-1}, οπότε:

  $\vec{\mu}_a^\dagger \cdot U'' \cdot \vec{\mu}_a \in \mathbb{R}$ και $\vec{\mu}_a^\dagger \cdot T \cdot \vec{\mu}_a \in \mathbb{R}$ οπότε: $\omega_a^2 \in \mathbb{R}$
- Θα υποθέσουμε από το σημείο αυτό ότι οι ιδιοτιμές ω_a^2 είναι ξεχωριστές
- Γράφουμε το διάνυσμα της διαταραχής η συναρτήσει των $\vec{\mu}_a$ $\vec{\eta} = \sum_a \eta_a \vec{\mu}_a$
- Οι εξισώσεις κίνησης γίνονται: $0 = \ddot{\vec{\eta}} - F \cdot \vec{\eta} \Rightarrow 0 = \sum_a \left(\ddot{\eta}_a + \omega_a^2 \eta_a\right) \vec{\mu}_a$
- Αλλά τα ιδιοδιανύσματα $\vec{\mu}_a$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε: $\Rightarrow 0 = \ddot{\eta}_a + \omega_a^2 \eta_a$

- Το σύστημα κοντά σε μια κατάσταση ισορροπίας είναι Ν αρμονικοί ταλαντωτές
- Δυο διαφορετικές περιπτώσεις:

(1) Αν όλα τα $\omega_a^2 > 0$ τότε έχουμε Ν ευσταθείς αρμονικούς ταλαντωτές

Οι λύσεις θα είναι: $\eta_a = C_a e^{i\omega_a t}$ έχουμε Ν ω_a συχνότητες ταλάντωσης

(2) Αν υπάρχει κάποιο $\omega_a^2 < 0$ τότε έχουμε 1 ασταθής ταλαντωτής το πλάτος του οποίου αυξάνει εκθετικά με τον χρόνο $\eta_a \sim e^{\pm|\omega_a| t}$

Απεικόνιση Lagrange

- Θυμηθείτε ότι γράψαμε την Lagrangian με την μορφή:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(T_{ij}(q_0)\dot{\eta}_i\dot{\eta}_j - \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q_0} \eta_i\eta_j \right) \Rightarrow L = \frac{1}{2}\dot{\vec{\eta}}^{\mathrm{T}} T \dot{\vec{\eta}} - \frac{1}{2}\vec{\eta}^{\mathrm{T}} U'' \vec{\eta} \qquad (1)$$

- Το διάνυσμα της διαταραχής η συναρτήσει των ιδιοδιανυσμάτων: $\vec{\eta} = \sum_a \eta_a \vec{\mu}_a$
- όπου $\vec{\mu}_a$ τα ιδιοδιανύσματα του $U'' \cdot \vec{\mu}_a = \omega_a^2 T \cdot \vec{\mu}_a$
- Επομένως η (1) γράφεται: $L = \frac{1}{2}\sum_{ab}\left(\vec{\mu}_a^T T \vec{\mu}_b \dot{\vec{\eta}}_a^T \dot{\vec{\eta}}_b - \vec{\mu}_a^T U'' \vec{\mu}_b \vec{\eta}_a^T \vec{\eta}_b \right)$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\sum_{ab}\left(\vec{\mu}_a^T T \vec{\mu}_b \dot{\vec{\eta}}_a^T \dot{\vec{\eta}}_b - \vec{\mu}_a^T \omega_b^2 T \vec{\mu}_b \vec{\eta}_a^T \vec{\eta}_b \right) \Rightarrow L = \frac{1}{2}\sum_{ab}\left(\vec{\mu}_a^T T \vec{\mu}_b \left(\dot{\vec{\eta}}_a^T \dot{\vec{\eta}}_b - \omega_b^2 \vec{\eta}_a^T \vec{\eta}_b \right)\right)$$

- Αυτό που ισχύει είναι: $\vec{\mu}_a^T T \vec{\mu}_b = 0$ εκτός και αν a=b

$\omega_b^2 T \vec{\mu}_b = U'' \vec{\mu}_b$ ανάστροφη της εξίσωσης αυτής είναι: $\Rightarrow \omega_a^2 \vec{\mu}_a^\dagger T = \vec{\mu}_a^\dagger U''$

$\times \vec{\mu}_a^\dagger \Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow \times \vec{\mu}_b$

$$\omega_b^2 \vec{\mu}_a^\dagger T \vec{\mu}_b = \vec{\mu}_a^\dagger U'' \vec{\mu}_b \longrightarrow \left(\omega_b^2 - \omega_a^2\right)\vec{\mu}_a^\dagger T \vec{\mu}_b = 0 \longleftarrow \omega_a^2 \vec{\mu}_a^\dagger T \vec{\mu}_b = \vec{\mu}_a^\dagger U'' \vec{\mu}_b$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\sum_a \left(\vec{\mu}_a^\dagger T \vec{\mu}_a \right)\left(\dot{\vec{\eta}}_a^2 - \omega_a^2 \vec{\eta}_a^2 \right)$$

Πραγματικά ιδιοδιανύσματα

- Είδαμε ότι οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές. Μπορούμε να δείξουμε ότι και τα ιδιοδιανύσματα είναι πραγματικά:
- Έστω οτι $\vec{\mu}_a = \vec{\alpha} + i\vec{\beta}$
- Τότε μπορούμε να γράψουμε: $U'' \cdot \vec{\mu}_a = \omega_a^2 T \cdot \vec{\mu}_a$

$$\Rightarrow U'' \cdot \left(\vec{a} + i\vec{\beta}\right) = \omega_a^2 T \cdot \vec{a} + i\omega_a^2 T \cdot \vec{b}$$

όπου a και b ικανοποιούν την ίδια εξίσωση ιδιοτιμών

- Εφόσον οι ιδιοτιμές δεν είναι εκφυλισμένες: $\Rightarrow \omega_k \neq \omega_j \qquad \forall k \neq j$
- Κάθε ιδιοτιμή αντιστοιχεί σε διαφορετικό ιδιοδιάνυσμα
- Τα a και b είναι ανάλογα οπότε μπορούμε να γράψουμε: $\vec{\mu}_a = \vec{a} + i\vec{\beta} = \gamma\vec{a}$
- Όπου γ μιγαδικός που μπορεί να απορροφηθεί στο πλάτος του: $\vec{\eta} = C\vec{\mu}_a = C' a_i e^{-i\omega t}$

Μετασχηματισμός κύριου άξονα

- Υπάρχουν *N* ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές. Έστω a_j τα ιδιοδιανύσματα:

$$U'' \cdot \vec{a}_j = \omega_j^2 T \cdot \vec{a}_j \qquad j = 1, \cdots, N$$

- Παίρνοντας την ανάστροφη εξίσωση θα έχουμε: $\vec{a}_k^T \cdot U'' = \omega_k^2 \vec{a}_k^T \cdot T$
- Πολ/ζοντας την 1η εξίσωση από αριστερά με a^T και την 2η από δεξιά με a:

$$\vec{a}_k^T \cdot U'' \cdot \vec{a}_j = \omega_j^2 \vec{a}_k^T \cdot T \cdot \vec{a}_j \quad \text{και} \quad \vec{a}_k^T \cdot U'' \cdot \vec{a}_j = \omega_k^2 \vec{a}_k^T \cdot T \cdot \vec{a}_j$$

Οπότε $\left(\omega_j^2 - \omega_k^2\right)\vec{a}_k^T \cdot T \cdot \vec{a}_j = 0$ $\boxed{\Rightarrow \vec{a}_k^T \cdot T \cdot \vec{a}_j = \delta_{jk}}$ και: $\boxed{\vec{a}_k^T \cdot U'' \cdot \vec{a}_j = \omega_j^2 \delta_{jk}}$

- Κατασκευάζουμε τον πίνακα **A** με στήλες τα στοιχεία των ιδιοδιανυσμάτων:

$$\mathbf{A} = \left[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_N\right] \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$$

"modular" πίνακας

- Οπότε οι 2 προηγούμενες εξισώσεις ορθοκανονικότητας γίνονται:

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1} \quad \text{και} \quad \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \cdot U'' \cdot \mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_N^2 \end{pmatrix}$$

Οι πίνακες T και U″ διαγωνοποιήθηκαν με το μετασχηματισμό του κύριου άξονα

Κανονικές συντεταγμένες

- Η Lagrangian είχε γραφεί με την μορφή: $L = \frac{1}{2}\dot{\vec{\eta}}^{\mathrm{T}} T \dot{\vec{\eta}} - \frac{1}{2}\vec{\eta}^{\mathrm{T}} U'' \vec{\eta}$
- Από την στιγμή που έχουμε κατασκευάσει τον πίνακα **A**, μπορούμε να κάνουμε αλλαγή συντεταγμένων:

$\boldsymbol{\zeta} \equiv \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\eta}$ όπου ο πίνακας $\mathbf{A}^{-1}$ υπάρχει εφόσον $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\mathbf{A} = \mathbf{1}$:

- Αντικαθιστώντας στην Lagrangian θα έχουμε: $\left(\boldsymbol{\eta} \equiv \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\zeta} \quad \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}} \equiv \boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)$

$$L = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\zeta}}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\cdot T\cdot\mathbf{A}\cdot\dot{\boldsymbol{\zeta}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\cdot U''\cdot\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\zeta} \Rightarrow L = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\zeta}}^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\boldsymbol{\zeta}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\omega}^2\cdot\boldsymbol{\zeta}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\left(\sum_k \dot{\zeta}_k\dot{\zeta}_k - \omega_k^2\zeta_k\zeta_k\right)$$ δεν υπάρχουν μη διαγώνιοι όροι

- Οι λύσεις είναι της μορφής: $\ddot{\zeta}_k = -\omega_k^2\zeta_k \quad \Rightarrow \zeta_k = C_k e^{-i\omega_k t}$ ανεξάρτητοι αρμονικοί ταλαντωτές

Λύσεις $\zeta_k = C_k e^{-i\omega_k t}$

- Οι σταθερές C_k καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος:
- Έστω για t=0: $\boldsymbol{\eta}(t=0)=\boldsymbol{\eta}$ και $\dot{\boldsymbol{\eta}}(t=0)=\dot{\boldsymbol{\eta}}$
- Τότε: $\boldsymbol{\eta}(0)=\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\zeta}(0) \Rightarrow \eta_j(0)=a_{jk}\mathbb{R}(C_k)$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(0)=\mathbf{A}\cdot\dot{\boldsymbol{\zeta}}(0) \Rightarrow \dot{\eta}_j(0)=a_{jk}\mathbb{R}(-i\omega_k C_k)=a_{jk}\omega_k \operatorname{Im}(C_k)$$

- Χρησιμοποιώντας την συνθήκη ορθοκανονικόττας: **A**^{T}**TA = 1**

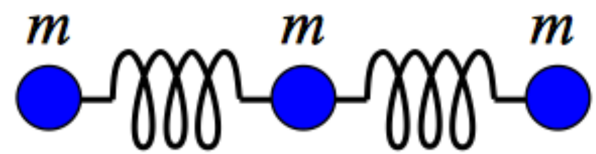
$\eta_j(0)=a_{jk}\mathbb{R}(C_k)$ το οποίο σε μορφή πίνακα γράφεται: $\boldsymbol{\eta}(0)=\mathbf{A}\mathbb{R}(\mathbf{C})$

Πολ/ζουμε την τελευταία από αριστερά με **A**^{T}**T**: $\Rightarrow \mathbf{A}\cdot\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\eta}(0)=\mathbb{R}(\mathbf{C})$

Παίρνοντας την l-συνιστώσα της τελευταίας εξίσωσης: $\boxed{\mathbb{R}(C_k)=a_{lk}T_{lj}\eta_j(0)}$

Ανάλογα για την ταχύτητα: $\boxed{\operatorname{Im}(C_k)=\frac{1}{\omega_k}a_{lk}T_{lj}\dot{\eta}_j(0)}$ (όπου δεν υπάρχει άθροισμα ως προς k):

Τριατομικό μόριο



- Θεωρήστε ένα μόριο όπως CO_2:
- Η κινητική ενέργεια είναι: $T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right)$
- Η δυναμική ενέργεια είναι: $U = \frac{k}{2}\left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{k}{2}\left(x_2 - x_3\right)^2$
- Ο πίνακας των μαζών είναι: $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$
- Ο πίνακας του δυναμικού είναι: $\mathbf{U}'' = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$
- Λύνουμε την εξίσωση των ιδιοτιμών: $\left(\mathbf{U}'' - \omega^2\mathbf{T}\right)\boldsymbol{a} = 0 \Rightarrow \det\left(\mathbf{U}'' - \omega^2\mathbf{T}\right) = 0$

$$\Rightarrow \det\begin{vmatrix} k-\omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k-\omega^2 m & -k \\ 0 & -k & k-\omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega^2\left(k-\omega^2 m\right)\left(3k-\omega^2 m\right) = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 0 \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Τριατομικό μόριο

- Αντικαθιστώντας κάθε μια ιδιοτιμή στην εξίσωση των ιδιοτιμών βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα:

$$\begin{pmatrix} k-\omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k-\omega^2 m & -k \\ 0 & -k & k-\omega^2 m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow ka_{11} - ka_{21} = 0 \quad \Rightarrow a_{11} = a_{21}$$

$$\Rightarrow ka_{31} - ka_{21} = 0 \quad \Rightarrow a_{21} = a_{21}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k-\frac{k}{m}m & -k & 0 \\ -k & 2k-\frac{k}{m}m & -k \\ 0 & -k & k-\frac{k}{m}m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & k & -k \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -ka_{22} = 0 \Rightarrow a_{22} = 0$$

$$\Rightarrow -ka_{12} - ka_{22} - ka_{32} = 0 \Rightarrow a_{12} = -a_{32}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Τριατομικό μόριο

$$\begin{pmatrix} k-\frac{3k}{m}m & -k & 0 \\ -k & 2k-\frac{3k}{m}m & -k \\ 0 & -k & k-\frac{3k}{m}m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2k & -k & 0 \\ -k & -k & -k \\ 0 & -k & -2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}=0$$

$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow -2ka_{13}-ka_{23}=0 \Rightarrow a_{23}=-2a_{13} \\ \Rightarrow -ka_{23}-2ka_{33}=0 \Rightarrow a_{23}=-2a_{33} \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_{13}=a_{33}=-a_{23}/2 \Rightarrow \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Αλλά η συνθήκη ορθοκανονικότητας δίνει: $\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{T} \boldsymbol{a} = 1$

$$\omega_1=0 \Rightarrow a_{11}^2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=1 \Rightarrow a_{11}^2\begin{pmatrix} m & m & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=1$$

$$\Rightarrow a_{11}^2 3m=1 \Rightarrow a_{11}=\sqrt{1/3m}$$

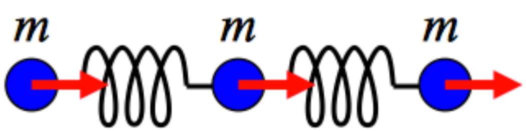
$$\omega_2=\frac{k}{m} \Rightarrow a_{12}^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=1 \Rightarrow a_{12}^2 2m=1 \Rightarrow a_{12}=\sqrt{1/2m}$$

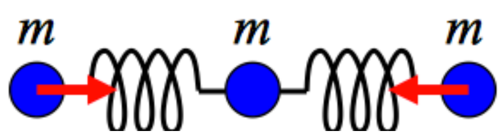
Τριατομικό μόριο

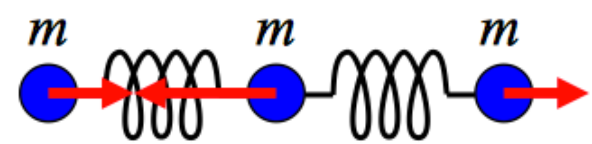
$$\omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \Rightarrow a_{13}^2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow a_{13}^2 6m = 1 \Rightarrow a_{13} = \sqrt{1/6m}$$

- Επομένως τα ιδιοδιανύσματα γράφονται:

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{3m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{6m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$







- Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης προκύπτουν από τον “modal” πίνακα **A**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \overbrace{a_{11}}^{\boldsymbol{a}_1} & \overbrace{a_{12}}^{\boldsymbol{a}_2} & \overbrace{a_{13}}^{\boldsymbol{a}_3} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6m}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Τριατομικό μόριο

- Ο αντίστροφος του πίνακα **A** θα είναι: $\mathbf{A}^{-1} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

- Οι κανονικές συντεταγμένες θα είναι επομένως: $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\eta}$

$$\zeta = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \zeta_1 &= \sqrt{\frac{m}{3}}\left(x_1 + x_2 + x_3\right) \\ \zeta_2 &= \sqrt{\frac{m}{2}}\left(x_1 - x_3\right) \\ \zeta_3 &= \sqrt{\frac{m}{6}}\left(x_1 - 2x_2 + x_3\right) \end{aligned} \right.$$

- H Lagrangian του συστήματος με βάση τις κανονικές συντεταγμένες είναι:

$$L = \frac{1}{2}\dot{\zeta}^{\mathrm{T}}\dot{\zeta} - \frac{1}{2}\zeta^{\mathrm{T}}\omega^2\zeta \Rightarrow L = \frac{1}{2}\left(\dot{\zeta}_1^2 + \dot{\zeta}_2^2 + \dot{\zeta}_3^2\right) - \frac{k}{2m}\left(\zeta_2^2 + 3\zeta_3^2\right)$$

Εκφυλισμένες ιδιοτιμές

- Υποθέσαμε ότι : $\omega_k \neq \omega_j \quad j \neq k$
- Τι ακριβώς συμβαίνει όταν έχουμε εκφυλισμών των ιδιοτιμών?
- Στην περίπτωση αυτή πολλαπλές ιδιοτιμές αντιστοιχούν σε πολλαπλά ιδιοδιανύσματα
- Η χαρακτηριστική εξίσωση των ιδιοτιμών γράφεται στην περίπτωση αυτή:

$$\det\left|\mathbf{U}'' - \omega^2 \mathbf{T}\right| = \left(\omega^2 - \kappa^2\right)^m f\left(\omega^2\right) = 0$$ όπου: $\omega = \kappa$ με m-εκφυλισμό

- Η εξίσωση ιδιοδιανυσμάτων : $\left(\mathbf{U}'' - \kappa^2 \mathbf{T}\right)\boldsymbol{a}_j = 0$ όπου j=1,...,m ιδιοδιανύσματα
- Αλλά ο γραμμικός συνδυασμός ιδιοδιανυσμάτων είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα: $c_j \boldsymbol{a}_j$
- Είναι επίσης δυνατόν να βρεθεί μια ομάδα από m ορθογώνιων διανυσμάτων

Εκφυλισμένες ιδιοτιμές – Η συνταγή

- Για μια m-εκφυλισμένως ιδιοτιμή με m-ιδιοδιανύσματα
- Αρχικά κανονικοποιούμε ένα ιδιοδιάνυσμα χρησιμοποιώντας: $\boldsymbol{a}_1^T \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{a}_1$
- Κατόπιν χρησιμοποιούμε το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{a}_2$ και το μετασχηματίζουμε ως:

$$\boldsymbol{a}_2' = \boldsymbol{a}_2 - \left(\boldsymbol{a}_1^T \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{a}_2\right) \cdot \boldsymbol{a}_1$$

  - Έτσι ικανοποιείται η συνθήκη ορθοκανονικότητας: $\boldsymbol{a}_1^T \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{a}_2' = 0$
- Κανονικοποιούμε το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{a}'_2$: $\boldsymbol{a}_2'^T \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{a}_2'$
- Κατόπιν χρησιμοποιούμε το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{a}_3$ και το μετασχηματίζουμε ως:

$$\boldsymbol{a}_3' = \boldsymbol{a}_3 - \left(\boldsymbol{a}_1^T \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{a}_3\right) \cdot \boldsymbol{a}_1 - \left(\boldsymbol{a}_2'^T \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{a}_3\right) \cdot \boldsymbol{a}_2'$$

  - Ο μετασχηματισμός ικανοποιεί τις συνθήκες: $\boldsymbol{a}_2'^T \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{a}_3' = 0$ και $\boldsymbol{a}_1^T \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{a}_3' = 0$
- Συνεχίζουμε την διαδικασία για τα υπόλοιπα ιδιοδιανύσματα
- Η διαδικασία αυτή οδηγεί σίγουρα στον σχηματισμό του πίνακα **A**: $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}$