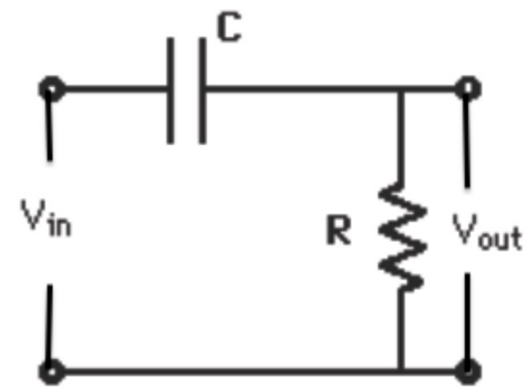
Φίλτρα Συχνοτήτων
σε εναλλασσόμενα κυκλώματα

Φίλτρα Συχνοτήτων – Φίλτρο χαμηλών συχνοτήτων

Η μέθοδος των μιγαδικών μεγεθών επιτρέπει την ανάλυση κυκλωμάτων φίλτρων συχνοτήτων. Στα κυκλώματα αυτά, υπάρχει μια έξοδος που επιτρέπει τη διέλευση εναλλασσόμενων τάσεων μιας περιοχής συχνοτήτων ενώ αποκόπτει τάσεις σε άλλες περιοχές συχνοτήτων.

Θεωρούμε το *RC* κύκλωμα του διπλανού σχήματος



Η συνολική μιγαδική αντίσταση του κλειστού βρόχου είναι:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_R + \mathbb{Z}_C \Rightarrow \mathbb{Z} = R - \frac{i}{\omega C}$$

Η συνολική εμπέδιση είναι: $Z = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$

Το πλάτος της τάσης εισόδου είναι: $V_{in,0} = I_0 Z = I_0 \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$

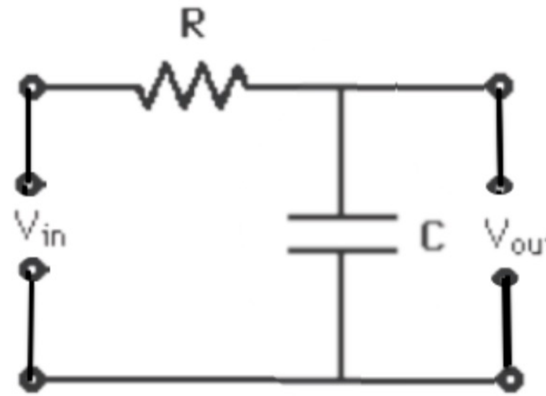
Το πλάτος της τάσης εξόδου είναι: $V_{out,0} = I_0 R$

$$\frac{V_{out,0}}{V_{in,0}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

Από την τελευταία εξίσωση παρατηρούμε ότι: $\begin{cases} \frac{V_{out,0}}{V_{in,0}} \to 0 \text{ για } \omega \to 0 \\ \frac{V_{out,0}}{V_{in,0}} \to 1 \text{ για } \omega \to \infty \end{cases}$

Άρα το κύκλωμα επιτρέπει τη διέλευση υψηλών και αποκόπτει τις χαμηλές συχνότητες

Φίλτρα Συχνοτήτων – Φίλτρο υψηλών συχνοτήτων



Θεωρούμε το *RC* κύκλωμα του διπλανού σχήματος

Η συνολική μιγαδική αντίσταση του κλειστού βρόχου είναι:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_R + \mathbb{Z}_C \Rightarrow \ \mathbb{Z} = R - \frac{i}{\omega C}$$

Η συνολική εμπέδιση είναι: $Z = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$

Το πλάτος της τάσης εισόδου είναι: $V_{in,0} = I_0 Z = I_0 \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$

Το πλάτος της τάσης εξόδου είναι: $V_{out,0} = I_0 Z_C = I_0 \frac{1}{\omega C}$

$$\frac{V_{out,0}}{V_{in,0}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

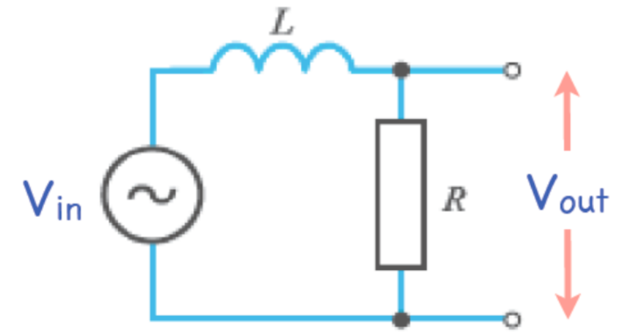
Από την τελευταία εξίσωση παρατηρούμε ότι:

$$\begin{cases} \frac{V_{out,0}}{V_{in,0}} \to 0 \ \text{ για } \omega \to \infty \\ \frac{V_{out,0}}{V_{in,0}} \to 1 \ \text{ για } \omega \to 0 \end{cases}$$

Άρα το κύκλωμα επιτρέπει τη διέλευση χαμηλών και αποκόπτει τις υψηλές συχνότητες

Φίλτρα Συχνοτήτων – Φίλτρο υψηλών συχνοτήτων

Θεωρούμε το *RL* κύκλωμα του διπλανού σχήματος



Η συνολική μιγαδική αντίσταση του κλειστού βρόχου είναι:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_R + \mathbb{Z}_L \Rightarrow \mathbb{Z} = R + iL\omega$$

Η συνολική εμπέδιση είναι: $Z = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$

Το πλάτος της τάσης εισόδου είναι: $V_{in,0} = I_0 Z = I_0\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$

Το πλάτος της τάσης εξόδου είναι: $V_{out,0} = I_0 Z_R = I_0 R$

$$\frac{V_{out,0}}{V_{in,0}} = \frac{R}{\sqrt{(L\omega)^2 + R^2}}$$

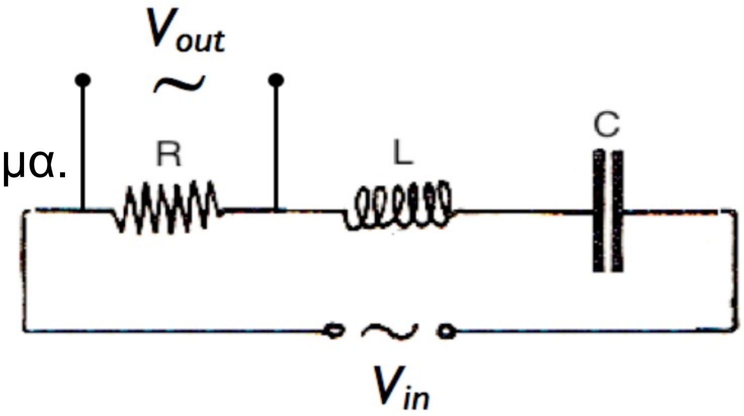
Από την τελευταία εξίσωση παρατηρούμε ότι:

$$\begin{cases} \dfrac{V_{out,0}}{V_{in,0}} \to 0 \ \text{για } \omega \to \infty \\ \dfrac{V_{out,0}}{V_{in,0}} \to 1 \ \text{για } \omega \to 0 \end{cases}$$

Άρα το κύκλωμα επιτρέπει τη διέλευση χαμηλών και αποκόπτει τις υψηλές συχνότητες

Φίλτρα Συχνοτήτων – Εφαρμογή

Θεωρούμε το *RLC* κύκλωμα του διπλανού σχήματος. Παίρνουμε την έξοδο από την αντίσταση. Θα βρούμε το εύρος συχνοτήτων που επιτρέπονται από το κύκλωμα.



Η συνολική μιγαδική αντίσταση του κλειστού βρόχου είναι:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_R + \mathbb{Z}_L + \mathbb{Z}_C \Rightarrow \quad \mathbb{Z} = R + i(L\omega - 1/C\omega)$$

Η συνολική εμπέδιση είναι: $Z = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} = \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}$

Το πλάτος της τάσης εισόδου είναι: $V_{in,0} = I_0 Z = I_0\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2} \Rightarrow$

$$V_{in,0} = I_0 R\sqrt{1 + \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\right)^2} \Rightarrow V_{in,0} = I_0 R\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}{\omega RC}\right)^2} \Rightarrow V_{in,0} = I_0 R\sqrt{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{x\omega_0 RC}\right)^2}$$

όπου: $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ και: $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$

Το πλάτος της τάσης εξόδου είναι: $V_{out,0} = I_0 Z_R = I_0 R$

Φίλτρα Συχνοτήτων – Εφαρμογή

Βρήκαμε ότι τα πλάτη εισόδου και εξόδου είναι:

$$\left.\begin{aligned} V_{in,0} &= I_0 R \sqrt{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{x\omega_0 RC}\right)^2} \\ V_{out,0} &= I_0 Z_R = I_0 R \end{aligned}\right\} \quad \frac{V_{out,0}}{V_{in,0}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{x\omega_0 RC}\right)^2}}$$

Παρατηρούμε ότι:

- Στη συχνότητα συντονισμού, $\omega = \omega_0$, το $x \to 1$ και $\frac{V_{out,0}}{V_{in,0}} \to 1$
- Εκτός συντονισμού, $\omega \to 0$ ή $\omega \to \infty$, το $x \to 0$ ή $x \to \infty$ και $\frac{V_{out,0}}{V_{in,0}} \to 0$

Επομένως το κύκλωμα επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων σε μια περιοχή συχνοτήτων κοντά στη συχνότητα συντονισμού και αποκόπτει τη διέλευση τόσο των χαμηλών όσο και των υψηλών συχνοτήτων.

Εξισώσεις Maxwell – Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

Ρεύμα Μετατόπισης

Είχαμε δει το νόμο του Ampere και ότι αν ο αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα στο οποίο υπάρχει συμμετρία, τότε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το ρεύμα αυτό δίνεται από

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$ νόμος του Ampere

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του μαγνητικού πεδίου κατά μήκος μιας τυχαίας κλειστής διαδρομής ισούται με το ρεύμα το οποίο περικλείεται από την επιφάνεια που ορίζεται από την κλειστή διαδρομή.

Είδαμε ακόμα ότι σύμφωνα με τον νόμο του Faraday, ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

κάποιος μπορεί να αναρωτηθεί αν το αντίστροφο ισχύει.

Για να δούμε αν ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο δημιουργεί μαγνητικό πεδίο, θεωρούμε έναν πυκνωτή που φορτίζεται.

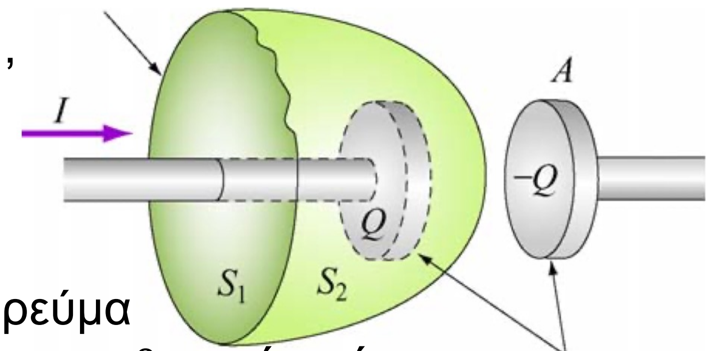
Κατά την φόρτιση, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου αυξάνει καθώς περισσότερο φορτίο συσσωρεύεται στους οπλισμούς του πυκνωτή.

Το ρεύμα αγωγιμότητας που φορτίζει τον πυκνωτή δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο

Μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο από τον νόμο του Ampere

Ρεύμα Μετατόπισης

Για να εφαρμόσουμε τον νόμο του Ampere θεωρούμε την καμπύλη *C* του σχήματος, να αποτελεί την καμπύλη Ampere.



Αν η καμπύλη C οριοθετεί την επίπεδη επιφάνεια S_1, το ρεύμα που περικλείεται είναι $I = I_{encl.}$ που είναι το ρεύμα αγωγιμότητας που μεταφέρει το φορτίο στους οπλισμούς του πυκνωτή.

Αν η καμπύλη C οριοθετεί την επιφάνεια S_2, τότε το ρεύμα που περικλείεται από την επιφάνεια αυτή είναι $I = I_{encl.} = 0$, γιατί από τη στιγμή που περιλαμβάνεται περιοχή ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή, το κύκλωμα είναι ανοικτό και δεν διαρρέεται από ρεύμα.

Επομένως υπάρχει μια αβεβαιότητα ως προς την επιφάνεια που οριοθετείται από την καμπύλη *C.*

Ο Maxwell έδειξε ότι η αβεβαιότητα που υπάρχει εξαιτίας της επιλογής της επιφάνειας μπορεί να διορθωθεί αν προστεθεί ένας επιπλέον όρος στο δεξί μέλος της εξίσωσης του νόμου του Ampere:

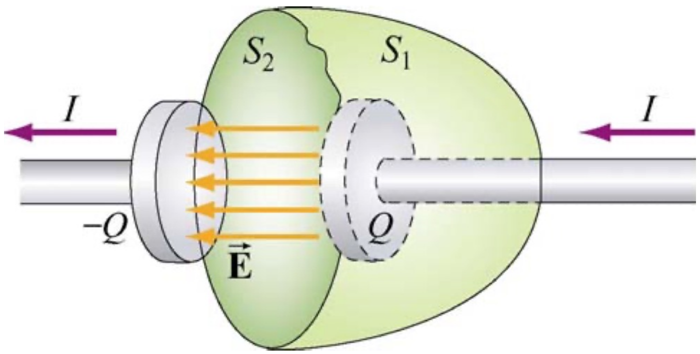
$$\boxed{I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}}$$ **ρεύμα μετατόπισης**

Ο όρος εμπεριέχει αλλαγή στην ηλεκτρική ροή

Ρεύμα Μετατόπισης

Ο γενικευμένος νόμος του Ampere λέει:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0(I + I_d)$$



Η προέλευση του ρεύματος μετατόπισης μπορεί να ερμηνευτεί ως ακολούθως:

Το διπλανό σχήμα δείχνει την ηλεκτρική ροή που διαπερνά την επιφάνεια S_2:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = EA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

όπου Q το φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια A και A το εμβαδό της επιφάνειας ενός οπλισμού του πυκντωτή:

Από τον ορισμό του ρεύματος μετατόπισης, βλέπουμε ότι είναι ανάλογο του ρυθμού αύξησης του φορτίου στον πυκνωτή ή διαφορετικά:

$$I_d = \varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0\frac{dQ}{dt}$$

Το δεξί μέρος της παραπάνω εξίσωσης, dQ/dt, είναι το ρεύμα αγωγιμότητας I.

Επομένως το ρεύμα αγωγιμότητας που περνά μέσω της επιφάνειας S_1 είναι ίδιο με το ρεύμα μετατόπισης που περνά από την επιφάνεια S_2, δηλαδή $I = I_d$.

Με τον νόμο Ampere-Maxwell λύνεται η αβεβαιότητα σχετικά με την επιλογή της επιφάνειας που οριοθετείται από την καμπύλη Ampere.

Νόμος Ampere-Maxwell

Έχουμε επομένως την τροποποίηση του νόμου του Ampere: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0(I + I_d)$

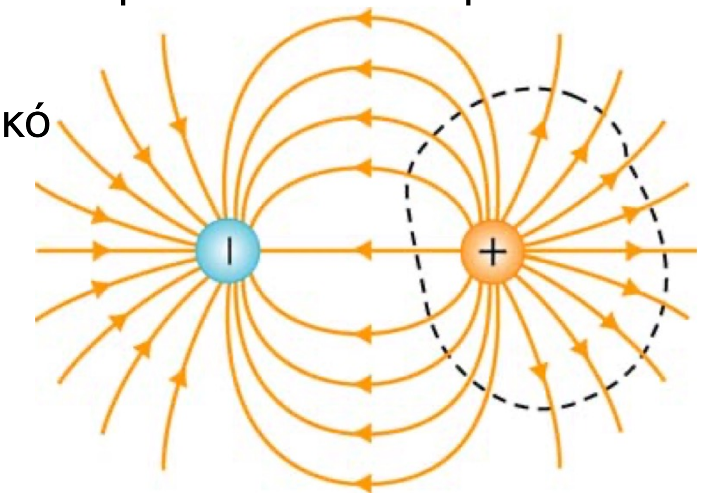
όπου $I_d = \frac{\varepsilon_0 d\Phi_e}{dt}$ και $\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

Αυτός ο τροποποιημένος νόμος, ονομάζεται νόμος Ampere-Maxwell

Εκφράζει το γεγονός ότι μαγνητικά πεδία παράγονται από ρεύματα αγωγιμότητας και ρεύματα μετατόπισης. Δηλαδή και από ρεύματα που διαρρέουν αγωγούς αλλά και από χρονικά μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά πεδία

Νόμος του Gauss για τον μαγνητισμό

Όπως έχουμε δει, ο νόμος του Gauss στον ηλεκτρισμό ορίζει ότι η ηλεκτρική ροή μέσω μιας κλειστής επιφάνειας ισούται με το φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια όπως φαίνεται στο σχήμα.



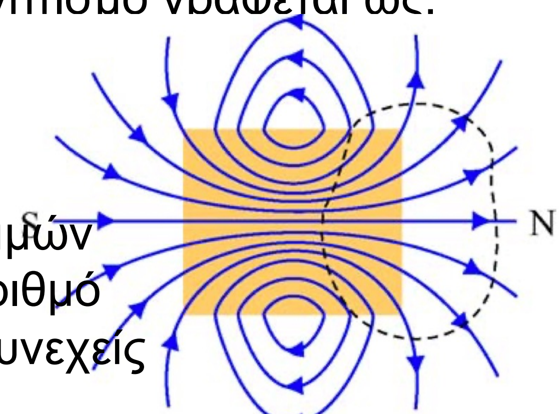
Οι ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές ξεκινούν από το θετικό φορτίο (πηγή) και καταλήγουν στο αρνητικό φορτίο (καταβόθρα)

Κάποιος θα μπορούσε να προσπαθήσει να κάνει κάτι ανάλογο για το μαγνητικό ισοδύναμο.

$$\Phi_B = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA = \frac{Q_m}{\mu_0}$$

όπου Q_m είναι το μαγνητικό πεδίο (το μονόπολο) που περικλείεται από την επιφάνεια Gauss. Ωστόσο όλες οι προσπάθειες για τον εντοπισμό ενός πόλου ήταν άκαρπες και ως αποτέλεσμα $Q_m = 0$ οπότε ο νόμος του Gaus για τον μαγνητισμό γράφεται ως:

$$\Phi_m = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$



Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός των μαγνητικών δυναμικών γραμμών που εισέρχονται σε μια κλειστή επιφάνεια είναι ίδιος με τον αριθμό που εξέρχονται της επιφάνειας. Οι δυναμικές γραμμές είναι συνεχείς χωρίς αρχή και τέλος.

Οι εξισώσεις Maxwell

Με βάση τα προηγούμενα, καταλήγουμε σε 4 εξισώσεις που αποτελούν τη βάση για τη μελέτη ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων

Νόμος	Εξίσωση	Φυσική Ερμηνεία
Νόμος του Gauss για $\vec{E}$	$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$	Η ηλεκτρική ροή που περνά από μια κλειστή επιφάνεια είναι ανάλογη του περικλειόμενου φορτίου
Νόμος του Faraday	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$	Η μεταβολή της μαγνητικής ροής προκαλεί ηλεκτρικό πεδίο
Νόμος του Gauss για $\vec{B}$	$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	Η συνολική μαγνητική ροή που περνά μια κλειστή επιφάνεια είναι μηδέν
Νόμος Ampere-Maxwell	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$	Ηλεκτρικό ρεύμα και μεταβαλλόμενη ηλεκτρική ροή προκαλούν μαγνητικό πεδίο

Οι εξισώσεις Maxwell

Μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις Maxwell σε διαφορική μορφή ως:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ νόμος Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ νόμος Faraday

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$ νόμος Gauss για το μαγνητικό πεδίο

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$ νόμος Ampere-Maxwell

όπου ρ και $\vec{J}$ είναι η πυκνότητα φορτίου και πυκνότητα αγώγιμου ρεύματος

Απουσία πηγών όπου $\rho = 0$ και $\vec{J} = 0$ οι παραπάνω εξισώσεις καταλήγουν:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \qquad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$