ΦΥΣ. 133
Τελική Εξέταση 9-Μάη-2006

Πριν ξεκινήσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, αριθμό ταυτότητας) στο πάνω μέρος της σελίδας αυτής.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το τυπολόγιο που σας δίνεται και μια σελίδα δικιά σας με τύπους και μόνο. Στο τέλος της εξέτασης θα πρέπει να επιστρέψετε τόσο το τυπολόγιο όσο και τη σελίδα που χρησιμοποιήσατε.
Για τις λύσεις των ασκήσεων θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε μόνο τις σελίδες που σας δίνονται.

Προσπαθήστε να δείξετε τη σκέψη σας και να γράψετε καθαρές εξισώσεις. Για πλήρη ή μερική βαθμολόγηση θα πρέπει να φαίνεται καθαρά το τι προσπαθείτε να δείξετε. Αν δεν μπορώ να διαβάσω τι γράφετε θα θεωρηθεί λάθος οπότε προσπαθήστε να γράψετε ευανάγνωστα.

Διαβάστε πρώτα όλες τις ασκήσεις και προσπαθήστε να σκεφτείτε τι περίπου χρειάζεται να κάνετε. Η σειρά των προβλημάτων ή το σύνολο των μονάδων τους δεν αντικατοπτρίζει τη δυσκολία τους.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι απεριόριστη αλλά πιστεύω ότι 4 ώρες είναι περισσότερο από ικανοποιητικές.

Σας δίνονται 8 προβλήματα και πρέπει να απαντήσετε σε όλα. Σύνολο μονάδων 130.

Καλή επιτυχία.

Τυπολόγιο

Διανύσματα:

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}, \qquad \vec{A}\times\vec{A} = 0, \qquad \vec{A}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = 0,$$

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot \vec{C}, \qquad \vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right) - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$$

Ανάπτυγμα Taylor συνάρτησης ως προς σημείο α:

$$f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(z-a)^2 f''(a) + \frac{1}{3!}(z-a)^3 f'''(a) + \cdots$$

Σειρά διωνύμου:

$$(1+z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2!}z^2 + \cdots \quad \text{για } |z|<1$$

Στροφορμή:

$$\vec{L} = \sum_i^n \vec{L}_i = \sum_i^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = I\vec{\omega}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{\omega\varsigma,CM} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i^n \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\varepsilon\xi}\right]$$

Κέντρο μάζας:

$$R_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1} m_i \vec{r}_i, \; M = \sum_{i=1} m_i \;\; \text{ή} \;\; R_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

Γραμμική ορμή συστήματος σωμάτων:

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\varepsilon\xi}$$

Συνθήκες για μια δύναμη να είναι συντηρητική:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r) \;\text{ και }\; \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0 \quad \text{όπου} \quad \vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Euler-Lagrange εξισώσεις:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f\left[y(x), y'(x), x\right]dx \;\text{ είναι στάσιμο κατά μήκος της }\; y = y(x) \;\text{ αν }\; \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \mathrm{T} - V$$

Αρχή Hamilton:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,dt$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) - U(\rho\phi z)$$

Σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) - U(r\theta\phi)$$

Εξισώσεις Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Εξισώσεις Lagrange με πολλαπλασιαστές:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{m}\lambda_k(t)\frac{\partial f_k}{\partial q_i} \quad \left(i = 1,2,3,\ldots s\right)$$

Γενικευμένη ορμή:

$$p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$$

Αγνοήσιμη ή κυκλική συντεταγμένη:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Hamiltonian:

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i\dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}$$

Εξισώσεις Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i} \qquad [i = 1,\cdots,n]$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i} \qquad [i = 1,\cdots,n]$$

Ανηγμένη μάζα:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Ενεργό δυναμικό:

$$U_{eff}(r) = U(r) + U_{cf}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

Μετασχηματισμένη ακτινική Δ.Ε. τροχιάς:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u + \frac{\mu}{l^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) = 0, \text{ όπου } u = \frac{1}{r}$$

Ενέργεια τροχιάς:

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)$$

Τροχιές Kepler:

$F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2} = \dfrac{\gamma}{r^2}$ λύση ακτινικής εξίσωσης είναι: $r(\phi) = \dfrac{c}{1 + e\cos\phi}$, με $c = \dfrac{l^2}{\gamma\mu}$

Εκκεντρότητα (*e*): $E = \dfrac{\gamma^2\mu}{2l^2}\left(e^2 - 1\right)$ όπου Ε = Ενέργεια

Εκκεντρότητα	Ενέργεια	Είδος Τροχιάς
$e = 0$	$E < 0$	κυκλική
$0 < e < 1$	$E < 0$	ελλειπτική
$e = 1$	$E = 0$	παραβολική
$e > 1$	$E > 0$	υπερβολική

Περιήλιο: $r_{\min} = \dfrac{c}{1 + e}$ Αφήλιο: $r_{\max} = \dfrac{c}{1 - e}$

Μεγάλος ημιάξονας: $a = \dfrac{c}{1 - e^2}$ Μικρός ημιάξονας: $b = \dfrac{c}{\sqrt{1 - e^2}}$

Νόμοι Kepler:

1ος νόμος: τροχιές πλανητών είναι ελλείψεις με τον ήλιο σε μια από τις εστίες της έλλειψης

2ος νόμος: $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{l}{2\mu}$ 3ος νόμος: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM_H}a^3$

Συζευγμένοι ταλαντωτές:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} M_{jk}\dot{q}_j \dot{q}_k \qquad M_{jk} = \sum_a m_a \sum \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_j}\frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_k}$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j,k} V_{jk} q_j q_k \qquad V_{jk} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}$$

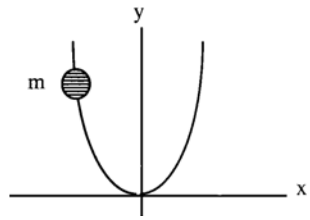
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{V}\mathbf{q} \qquad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

ιδιοσυχνότητες: $\det(\mathbf{V} - \omega^2\mathbf{M}) = 0$ ιδιοδιανύσματα: $\sum_j \left(V_{jk} - \omega_r^2 M_{jk}\right)a_{jr} = 0$

$q_j(t) = \sum_r a_{jr}\eta_r(t)$ Κανονικές συντεταγμένες: $\eta_r(t) = \beta_r e^{i\omega_r t}$

Ορθοκανονικότητα: $\sum_{j,k} M_{jk} a_{jr} a_{ks} = \delta_{rs} = \begin{cases} 0 & r \neq s \\ 1 & r = s \end{cases}$

1. (**10π συνολικά**)
Θεωρείστε μια χάντρα μάζας m η οποία περιορίζεται να κινείται κατά μήκος ενός σταθερού σύρματος έτσι ώστε η κατακόρυφη απομάκρυνσή της σχετίζεται με την οριζόντια απομάκρυνσή της με την σχέση $y = \frac{1}{2}ax^2$.



(α) Γράψτε τη Lagrangian για τη χάντρα [**3π**]
(β) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης. [**3π**]
(γ) Για μικρές απομακρύνσεις γύρω από τη θέση x=0 η χάντρα εκτελεί ταλάντωση. Να βρεθεί η συχνότητα των ταλαντώσεων. [**4π**]

(α) $T = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$, $y = \frac{1}{2}ax^2 \Rightarrow \dot{y} = ax\dot{x}$ $\Rightarrow T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+a^2x^2\dot{x}^2) = \frac{1}{2}m(1+a^2x^2)\dot{x}^2$

Η δυναμική ενέργεια είναι: $U = mgy = \frac{1}{2}mgax^2$

Επομένως $\boxed{L = T-U = \frac{1}{2}m(1+a^2x^2)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}mgax^2}$

(β) Οι εξισώσεις κίνησης λαμβάνονται από τις εξισώσεις Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(1+a^2x^2)\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m(1+a^2x^2)\ddot{x} + 2ma^2x\dot{x}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = ma^2x\dot{x}^2 - mgax$$

Επομένως $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m(1+a^2x^2)\ddot{x} + 2ma^2x\dot{x}^2 - ma^2x\dot{x}^2 + mgax = 0$

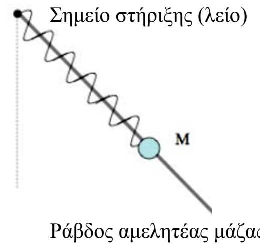
$$\Rightarrow \boxed{(1+a^2x^2)\ddot{x} + a^2x\dot{x}^2 + gax = 0}$$

(γ) Για μικρές ταλαντώσεις, αγνοούμε όλους τους μη γραμμικούς όρους:

$$\ddot{x} + agx = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{ag}}$$

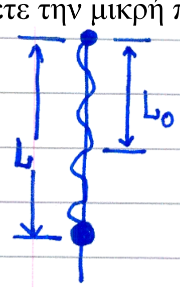
2. (**15π συνολικά**)

Ένα επίπεδο εκκρεμές αποτελείται από ένα ελατήριο του οποίου οι σπείρες είναι τυλιγμένες γύρω από μια ευθύγραμμη και αβαρή ράβδο απεριόριστου μήκους. Το ελατήριο έχει φυσικό μήκος L_0 και σταθερά k. Το ένα άκρο του ελατηρίου και η ράβδος εξαρτώνται από ένα σημείο το οποίο δεν παρουσιάζει τριβές. Μια χάντρα μάζας M είναι τρυπημένη ώστε να διαπερνά τη ράβδο και εξαρτάται από το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου και όταν η μάζα είναι σε ηρεμία ισχύει $Mg = k(L - L_0)$. Δεν υπάρχουν δυνάμεις τριβών στο πρόβλημα.



(α) Να βρεθεί η Lagrangian του συστήματος. Έστω r η απόσταση της μάζας M από το σημείο στήριξης και θ η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την κατακόρυφο. Θεωρήστε σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που περνά από το σημείο στήριξης. [**7π**]

(β) Βρείτε προσεγγιστικές λύσεις στις εξισώσεις Lagrange στο όριο ταλαντώσεων μικρού πλάτους, για τις οποίες το σύστημα παραμένει κοντά στην κατάσταση ισορροπίας. Δώστε ακριβείς εξηγήσεις για τις προσεγγίσεις που κάνετε. [<u>*Υπόδειξη:*</u> μπορεί να σας φανεί χρήσιμο να ορίσετε την μικρή ποσότητα $\varepsilon = r - L$]. [**8π**]



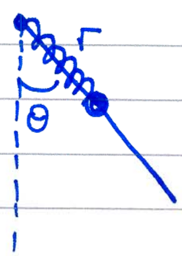
Σε ισορροπία: $Mg = k(L - L_0)$

όπου L είναι το μήκος του εκκρεμούς σε ισορροπία

L_0 είναι το φυσικό μήκος του ελατηρίου

Το ελατήριο και η ράβδος έχουν αμελητέα μάζα

(a)



r: η απόσταση από το σημείο στήριξης

$U_g = 0$ στο επίπεδο που περνά από το σημείο στήριξης

Επομένως $U_g = -mgr\cos\theta$

Η κινητική ενέργεια είναι $T = \frac{1}{2}mv^2$ όπου $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

Επομένως $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$ σε πολικές συντεταγμένες

$U_{Tot} = U_g + U_{ελ} = -mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k(r - L_0)^2$

Η Lagrangian είναι: $\mathcal{L} = T - U_{Tot} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta - \frac{1}{2}k(r - L_0)^2$

(B) Οι εξισώσεις κίνησης:

$$r:\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0 \Rightarrow mr\dot\theta^2+mg\cos\theta-k(r-L_0)=m\ddot r \qquad (1)$$

$$\theta:\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot\theta\right)=-mgr\sin\theta \qquad (2)$$

Λύνουμε τις (1) και (2) κοντά στη θέση ισορροπίας που αντιστοιχεί σε $\theta=0$ και $r=L$

Γύρω από τη θέση ισορροπίας, η θ έχει μικρό πλάτος A. Αφού $\dot\theta \propto A$ και $\ddot\theta \propto A$ τα $\dot\theta$ και $\ddot\theta$ είναι επίσης μικρά

Ορίζουμε $\varepsilon = r-L$ η ακτινική απομάκρυνση από την ισορροπία, και επίσης μικρή

Εξετάζουμε τις διαφορικές εξισώσεις:

<u>συμπεριφορά του r</u>: $\underbrace{mr\dot\theta^2}_{\substack{2^{ης}\text{ τάξης σε } A \\ \text{και επομένως} \\ \text{την αγνοούμε}}}+mg\underbrace{\cos\theta}_{\substack{\simeq 1 \\ \text{αφού } \theta \text{ μικρό}}}-k(\varepsilon+L-L_0)=m\ddot\varepsilon \;\Bigg\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow mg-k\varepsilon-k(L-L_0)\simeq m\ddot\varepsilon$$

από συνθήκη ισορροπίας $mg=k(L-L_0)$ $\Bigg\}\Rightarrow -k\varepsilon \cong m\ddot\varepsilon \Rightarrow \boxed{\ddot\varepsilon=-\frac{k}{m}\varepsilon}$

Δηλαδή το r ταλαντώνεται γύρω από τη θέση $r_{eq}=L$ με συχνότητα: $\omega_1 \cong \sqrt{\frac{k}{m}}$

<u>συμπεριφορά του θ</u>: $-mg\underbrace{r}_{\sim L}\underbrace{\sin\theta}_{\sim\theta}=\underbrace{2mr\dot r\dot\theta}_{\substack{2^{ης}\text{ τάξης} \\ \text{επομένως} \\ \text{την αγνοούμε}}}+m\underbrace{r^2}_{\sim L^2}\ddot\theta$

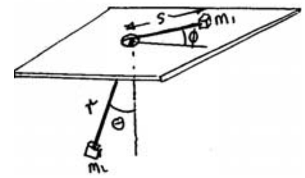
Επομένως η εξίσωση γράφεται:

$$\cancel{m}\ddot\theta L^{\cancel{2}} \cong -\cancel{m}g\cancel{L}\theta \Rightarrow \boxed{\ddot\theta=-\frac{g}{L}\theta}$$

Δηλαδή η συντεταγμένη θ ταλαντώνεται γύρω από $\theta=0$ με συχνότητα $\omega_2 \cong \sqrt{g/L}$

3. (**15π συνολικά**)

Θεωρήστε την περίπτωση δύο μαζών m$_1$ και m$_2$ οι οποίες συνδέονται με ένα μη ελαστικό σχοινί αμελητέας μάζας και μήκους $r+s=l$. Η μάζα m$_1$ κινείται στο οριζόντιο επίπεδο ενός λείου τραπεζιού ενώ η μάζα m$_2$ κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο. Χρησιμοποιήστε τις συντεταγμένες του σχήματος.



(α) Αναφέρετε τους δεσμούς του συστήματος και προσδιορίστε τη Lagrangian και Hamiltonian του συστήματος. [**8π**]

(β) Προσδιορίστε τις εξισώσεις κίνησης. [**4π**]

(γ) Δείξτε ποιες μεταβλητές είναι κυκλικές. [**3π**]

Οι μάζες m_1 και m_2 συνδέονται με ένα σχοινί μήκους l. Η m_1 είναι σε οριζόντιο επίπεδο που δεν παρουσιάζει τριβές, ενώ η μάζα m_2 κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο.

(α) Οι δεσμοί του συστήματος είναι:

1. m_1 κινείται σε οριζόντιο επίπεδο
2. m_2 κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο
3. $r+s=l$ (μήκος του σχοινιού) $\Rightarrow \dot{r}=-\dot{s}$

Υπάρχουν $6-3=3$ βαθμοί ελευθερίας αφού πάρουμε υπ' όψην τους δεσμούς. Διαλέγουμε σα γενικευμένες συντεταγμένες τις r, θ και ϕ. Συναρτήσει των 3 αυτών συντεταγμένων θα έχουμε:

$$T=T_1+T_2=\frac{1}{2}m_1\left(\dot{s}^2+s^2\dot{\phi}^2\right)+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T=\frac{1}{2}m_1\left(\dot{r}^2+(l-r)^2\dot{\phi}^2\right)+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)}$$

όπου και στις 2 περιπτώσεις χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες, και επίσης κάναμε χρήση του δεσμού του μήκους του σχοινιού.

Η δυναμική ενέργεια συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων και σχετικά ως προς το οριζόντιο επίπεδο, είναι:

$$U=U_1+U_2=0-m_2 g r\cos\theta \Rightarrow \boxed{U=-m_2 g r\cos\theta}$$

Επομένως η Lagrangian είναι:

$$\boxed{\mathcal{L}=\frac{1}{2}m_1\left(\dot{r}^2+(\ell-r)^2\dot{\phi}^2\right)+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+mgr\cos\theta.}$$

Το σύστημα είναι κεντρικό και συναρτητικό και επομένως η Hamiltonian μπορεί να γραφεί:

$$\boxed{H=\frac{P_r^2}{2(m_1+m_2)}+\frac{P_\phi^2}{2m_1(\ell-r)^2}+\frac{P_\theta^2}{2m_2r^2}-m_2gr\cos\theta=E}$$

(β) Τα διαφορικά για τις εξισώσεις κίνησης:

r: $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial r}=-m_1(\ell-r)\dot{\phi}^2+m_2r\dot{\theta}^2+m_2g\cos\theta$

$P_r=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}=(m_1+m_2)\dot{r}$

θ: $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}=-m_2gr\sin\theta$

$P_\theta=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}=m_2r^2\dot{\theta}$

ϕ: $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=0$

$P_\phi=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}=m_1(\ell-r)^2\dot{\phi}$

Επομένως οι τρεις εξισώσεις Lagrange είναι:

r: $(m_1+m_2)\ddot{r}+m_1(\ell-r)\dot{\phi}^2-m_2r\dot{\theta}^2-m_2g\cos\theta=\phi$

θ: $\dfrac{d}{dt}\left[m_2r^2\dot{\theta}\right]+m_2gr\sin\theta=0\Rightarrow 2m_2r\dot{r}\dot{\theta}+r^2m_2\ddot{\theta}+m_2gr\sin\theta=0$

ϕ: $\dfrac{d}{dt}\left[m_1(\ell-r)^2\dot{\phi}\right]=0$

Αυτή η τελευταία εξίσωση εκφράζει διατήρηση της στροφορμής. Οι τρείς αυτές διαφορικές εξισώσεις μπορούν να λυθούν για δεδομένες αρχικές συνθήκες

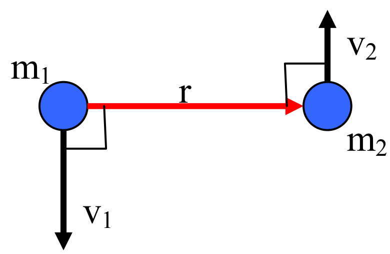
(γ) Κυκλικές συντεταγμένες είναι αυτές για τις οποίες: $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_k}=0$

και επομένως η αντίστοιχη γενικευμένη ορμή είναι σταθερά της κίνησης.

Όπως αναφέραμε $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=0$ και επομένως η στροφορμή P_ϕ διατηρείται

4. (**20π συνολικά**)

Θεωρήστε δύο σώματα με μάζες m_1=5kg και m_2=10kg αντίστοιχα και αρχικές ταχύτητες υ_1 και υ_2. Τα δύο σώματα έχουν αρχική απομάκρυνση μεταξύ τους $\vec{r}$ όπως στο παρακάτω σχήμα. Το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$ έχει κατεύθυνση προς τα κάτω και μέτρο υ_1=4m/s ενώ το διάνυσμα της ταχύτητας υ_2 έχει μέτρο υ_2=1m/s και διεύθυνση προς τα πάνω. Τα δύο σώματα



αλληλεπιδρούν μέσω ενός ελκτικού δυναμικού $U = -\frac{k}{r}$ όπου k=50Jm.

(α) Πόσο μακριά από τη μάζα m_1 βρίσκεται το κέντρο μάζας των δύο σωμάτων; Δώστε την απάντησή σας συναρτήσει της $\vec{r}$. [**1π**]

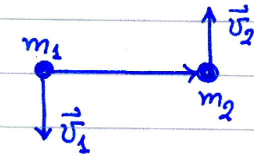
(β) Ποια είναι η τιμή της ανηγμένης μάζας των δύο σωμάτων; [**1π**]

(γ) Ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας; Θα πρέπει να προσδιορίσετε το μέτρο και τη διεύθυνσή της. [**2π**]

(δ) Υποθέστε ότι η $\vec{r}$ στο παραπάνω σχήμα έχει μέτρο 2m. Καθώς τα σώματα κινούνται κάτω από την επίδραση της ελκτικής αλληλεπίδρασής τους, η απόστασή τους $\vec{r}(t)$ παραμένει φραγμένη ή όχι; Πρέπει να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. [**6π**]

(ε) Για ποια τιμή του $\vec{r}$ στο παραπάνω σχήμα η απόσταση $|\vec{r}|$ μεταξύ των δύο σωμάτων θα παραμείνει σταθερή με το χρόνο [*Υπόδειξη:* το διάνυσμα της απόστασης $\vec{r}$ είναι σε σταθερή κυκλική τροχιά]; [**5π**]

(στ) Υποθέστε ότι η $\vec{r}$ στο παραπάνω σχήμα έχει μέτρο 1m. Καθώς τα σώματα κινούνται με την πάροδο του χρόνου, το διάνυσμα της απόστασής τους $\vec{r}(t)$ θα παραμείνει φραγμένη. Ποια θα είναι η ελάχιστη και μέγιστη τιμή της απόστασής τους; [**5π**]



$$M = m_1 + m_2$$

(α) Θεωρούμε την αρχή του συστήματος συντεταγμένων στην m_1.
Το κέντρο μάζας θα είναι επομένως στη θέση:

$$\vec{R} = \frac{m_1}{M}(0) + \frac{m_2}{M}\vec{r} = \frac{10}{15}\vec{r} \Rightarrow \boxed{\vec{R} = \frac{2}{3}\vec{r}}$$

(β) Η ανηγμένη μάζα του συστήματος: $\mu = \frac{m_1 m_2}{M} = \frac{5 \cdot 10}{15} \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{10}{3} kgr}$

(γ) Η ολική ορμή του συστήματος είναι $\vec{P} = M\vec{V}$ όπου $\vec{V}$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας.

$$\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i \Rightarrow M\vec{V} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{V} = \frac{m_1}{M}\vec{v}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{v}_2$$

Διαλέγουμε τη θετική διεύθυνση του y-άξονα αυτή προς τα πάνω οπότε: $\vec{v}_2 = v_2\hat{y}$ και $\vec{v}_1 = -v_1\hat{y}$

Άρα $\vec{V} = \frac{5}{15}\left(-4\, m/s\, \hat{y}\right) + \frac{10}{15}\left(1\, m/s\, \hat{y}\right) = \left(-\frac{20}{15} + \frac{10}{15}\right) m/s\, \hat{y} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{V} = -\frac{10}{15}\hat{y}\, m/s \Rightarrow \boxed{\vec{V} = -\frac{2}{3}\, m/s\, \hat{y}}$$

(δ) Η ενέργεια της κίνησης γύρω από το κέντρο μάζας είναι:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^{\,2} + U(\vec{r})$$

Η απόσταση r θα είναι φραγμένη αν $E<0$ και μη φραγμένη αν $E>0$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \Rightarrow E = \frac{1}{2}\mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 - \frac{k}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\mu(4+1)^2 - \frac{50}{2} = \frac{1}{2}\frac{10}{3}25 - \frac{50}{2} = \frac{125}{3} - \frac{75}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{50}{3} J > 0 \text{ και επομένως } \vec{r} \text{ είναι μη φραγμένη}}$$

(ε) $U_{eff} = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}$ ενεργό δυναμικό για συντεταγμένη ακτινικής απόστασης.

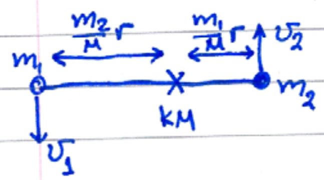
Η απόσταση $\vec{r}$ θα είναι σε κυκλική τροχιά η οποία είναι σταθερή και επομένως η δύναμη F θα έχει σταθερό μέτρο, στη τιμή της r που ελαχιστοποιεί $U_{eff}(r)$

Δηλαδή $\frac{\partial U_{eff}}{\partial r} = 0 \Rightarrow -\frac{\ell^2}{\mu r^3} + \frac{k}{r^2} = 0 \Rightarrow \boxed{r = \frac{\ell^2}{\mu k}}$ (A)

Εδώ η ℓ είναι η στροφορμή ως προς το κέντρο μάζας, και απο τη στιγμή που είναι σταθερά της κίνησης την υπολογίζουμε στην αρχική κατάσταση που δείχνεται στο σχήμα:

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη στροφορμή με 2 τρόπους:

1. Απ'ευθείας υπολογισμό της ℓ ως προς το κέντρο μάζας:



Η στροφορμή κάθε σωματιδίου είναι: $\vec{r} \times \vec{v}$ όπου το $\vec{r}$ μετριέται από το Κ.Μ. Επομένως:

$$\ell = \left(\frac{m_2}{M} r\right)(m_1 v_1) + \left(\frac{m_1}{M} r\right)(m_2 v_2)$$ και δείχνει έξω από τη σελίδα

$$\ell = \frac{m_1 m_2}{M} r (v_1 + v_2) \Rightarrow \boxed{\ell = \mu r (v_1 + v_2)}$$

2. Υπολογισμός της στροφορμής χρησιμοποιώντας το 1-D ισοδύναμο και το ανηγμένο διάνυσμα της απόστασης $\vec{r}$.

$\vec{\ell} = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}$, αλλά $\dot{\vec{r}} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (v_2 + v_1)\hat{y}$ οπότε:

$\boxed{\ell = \mu r (v_2 + v_1)}$ και δείχνει έξω από τη σελίδα

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (A) βρίσκουμε την απόσταση για σταθερή κυκλική τροχιά: $r = \frac{\ell^2}{\mu k} = \frac{\mu^{\cancel{2}} r^2 (v_1 + v_2)^2}{\cancel{\mu} k} \Rightarrow \boxed{r = \frac{k}{\mu (v_1 + v_2)^2} = \frac{3}{5} m}$

Θα μπορούσαμε να λύσουμε το ερώτημα αυτό με διαφορετική μέθοδο.
Η απόσταση $\vec{r}$ θα έκανε κυκλική τροχιά όταν η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι ίση με τη δύναμη/μάζα.

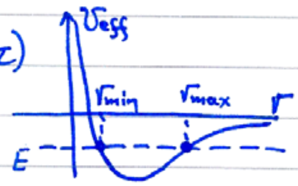
Από το ισοδύναμο πρόβλημα του 1-σώματος θα είχαμε:

$$\mu a_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho} = \frac{k}{r^2} \Rightarrow \mu\frac{v^2}{\cancel{r}} = \frac{k}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow r = \frac{k}{\mu v^2} = \frac{k}{\mu(v_1+v_2)^2}$$

αφού $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (v_2 + v_1)\hat{y}$.

Παίρνουμε την ίδια απάντηση με προηγουμένως αλλά πολύ πιο εύκολα.

(6ζ)



Η ελάχιστη και μέγιστη απόσταση r_{min} και r_{max} θα υπολογιστούν από τα σημεία όπου

$$E = V_{eff} = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} \Rightarrow Er^2 + kr - \frac{\ell^2}{2\mu} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 + 2\left(\frac{k}{2E}\right)r - \frac{\ell^2}{2E\mu} = 0 \Rightarrow \boxed{r = -\left(\frac{k}{2E}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2E}\right)^2 + \frac{\ell^2}{2E\mu}}}$$

Το (+)-πρόσημο αντιστοιχεί σε r_{max} και το (−) στο r_{min}.

Από τη στιγμή που τα E και ℓ είναι σταθερές της κίνησης μπορούμε να τα υπολογίσουμε από την αρχική κατάσταση που δείχνεται στο διάγραμμα

$E = \frac{1}{2}\mu(v_1+v_2)^2 - \frac{k}{r_0}$ όπου $r_0 = 1m$ αρχική απόσταση στην περίπτωση αυτή

οπότε $E = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}\right)(4+1)^2 - \frac{50}{1} = \frac{125}{3} - \frac{150}{3} \Rightarrow E = -\frac{25}{3}\,J$

$\ell = \mu r_0 (v_2 + v_1) = \frac{10}{3}(1)(4+1) = \frac{50}{3}\,kg\,m^2/s^2$

Επομένως $-\frac{k}{2E} = \frac{50}{2\left(\frac{25}{3}\right)} \Rightarrow -\frac{k}{2E} = 3m$

$$-\frac{\ell^2}{2E\mu} = \left(\frac{50}{3}\right)^2 \frac{1}{2\left(\frac{25}{3}\right)\left(\frac{10}{3}\right)} \Rightarrow -\frac{\ell^2}{2E\mu} = 5m^2$$

Οπότε $r = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2 \Rightarrow \left\{ \boxed{r_{min} = 1m} \text{ και } \boxed{r_2 = 5m} \right.$

5. (**20π συνολικά**)

Σωματίδια μάζας m_1 και m_2 αλληλεπιδρούν μέσω ενός δυναμικού $U = kr^4$, όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων. Δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις που ενεργούν στο σύστημα και το κέντρο μάζας βρίσκεται σε ηρεμία. Το μέγεθος της στροφορμής του συστήματος είναι l

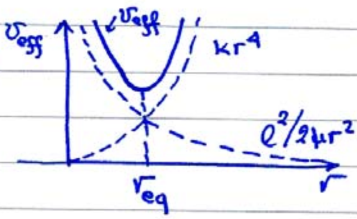
(α) Σχεδιάστε το ενεργό δυναμικό U_{eff} συναρτήσει της απόστασης r. Λύστε ως προς r_{eq} μεταξύ των σωματιδίων η οποία αντιστοιχεί σε κυκλική τροχιά. Η έκφρασή σας θα πρέπει να συνδέει την r_{eq} με τη στροφορμή l. Προσδιορίστε την r_{eq} στο διάγραμμά σας. [**5π**]

(β) Υποθέτοντας ότι η στροφορμή $\vec{L}$ είναι στη z-διεύθυνση και θεωρώντας την αρχή του συστήματος συντεταγμένων να συμπίπτει με το κέντρο μάζας, να βρεθούν τα διανύσματα θέσης $\vec{r}_1(t)$ και $\vec{r}_2(t)$ και να σχεδιαστούν οι τροχιές των m_1 και m_2 (σχεδιάστε τις τροχιές στο ίδιο διάγραμμα και θυμηθείτε ότι $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$). [**4π**]

(γ) Κάντε ένα άλλο διάγραμμα της U_{eff} συναρτήσει της r. Υποθέτοντας μια ενέργεια E μεγαλύτερη από αυτή που αντιστοιχεί στην κυκλική τροχιά, προσδιορίστε στο διάγραμμά σας την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση r_{min} και r_{max}. [**4π**]

(δ) Αποδείξτε τη σχέση μεταξύ της δεύτερης παραγώγου του U_{eff} και της συχνότητας, ω, ταλαντώσεων μικρού πλάτους γύρω από την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς r_{eq}. Χρησιμοποιείστε το αποτέλεσμά σας για να βρείτε το ω για το πρόβλημα αυτό. [**7π**]

(α)



$$\mu \ddot{r} = -\frac{d}{dr} U_{eff} \quad \text{όπου} \quad U_{eff} = kr^4 + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

Για να βρούμε την απόσταση ισορροπίας

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = 0 \Rightarrow U'_{eff} = 4kr^3 - \frac{l^2}{\mu r^3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{eq}^6 = \frac{l^2}{4\mu k}}$$

(β) $\vec{R}_{CM} = 0 \Rightarrow m_1\vec{r}_1 = -m_2\vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{r}_1$

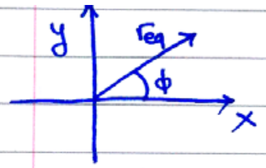
$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_1\left(\frac{M}{m_2}\right) \Rightarrow \vec{r}_1 = m_2\frac{\vec{r}}{M} \quad \text{και} \quad \vec{r}_2 = -m_1\frac{\vec{r}}{M}$$

Η Lagrangian είναι: $\mathcal{L}_{rel} = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r)$

επομένως $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}\underbrace{(\mu r^2\dot{\phi})}_{l}$

Στην περίπτωση αυτή $r = r_{eq}$ και επομένως $\dot{\phi} = \frac{l}{\mu r_{eq}^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \phi = \frac{l}{\mu r_{eq}^2} t \Rightarrow \boxed{\phi = \omega t} \quad \text{όπου} \quad \boxed{\omega = \frac{l}{\mu r_{eq}^2}}$$

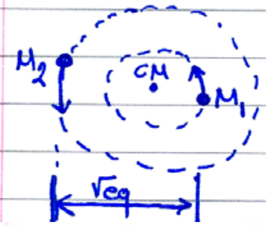


$x = r_{eq}\cos\phi$

$y = r_{eq}\sin\phi$

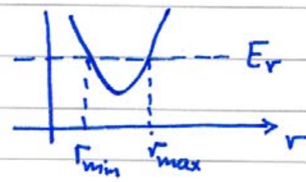
οπότε $\begin{cases} \vec{r}_1 = \frac{m_2}{M} r_{eq}(\cos\omega t, \sin\omega t) \\ \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{M} r_{eq}(\cos\omega t, \sin\omega t) \end{cases}$

Οι μάζες m_1 και m_2 είναι πάντοτε σε αντιδιαμετρικές θέσεις:



υποθέτοντας ότι $M_1 < M_2$

(γ)



(δ) Έστω $r = r_{eq} + \delta r \Rightarrow \ddot{r} = \delta\ddot{r}$ και $\frac{d}{dr} = \frac{d}{d(\delta r)}$

Επομένως $\mu\ddot{r} = -\frac{dU_{eff}}{dr} \rightsquigarrow \mu\delta\ddot{r} = -\frac{d}{d(\delta r)} U_{eff}(r_{eq}+\delta r) \quad (1)$

$$U_{eff}(r_{eq}+\delta r) = U_{eff}(r_{eq}) + \delta r \underbrace{\cancel{\frac{dU_{eff}}{dr}\Big|_{r_{eq}}}}_{0} + \frac{\delta r^2}{2}\frac{d^2U_{eff}}{dr}\Big|_{r_{eq}} + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{eff}(r_{eq}+\delta r) \cong U_{eff}(r_{eq}) + \frac{1}{2}\delta r^2 U''_{eff}$$

Επομένως η (1) γίνεται:

$$\mu\delta\ddot{r} = -\frac{d}{d(\delta r)}U_{eff} \Rightarrow \delta\ddot{r} = -\frac{U''_{eff}}{\mu}\delta r \Rightarrow \delta\ddot{r} = -\omega^2\delta r$$

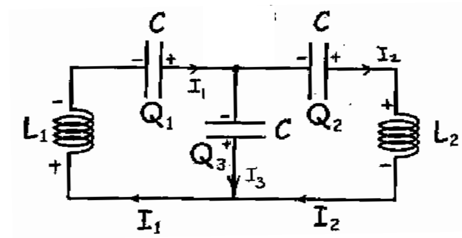
όπου $\omega^2 = \frac{U''_{eff}}{\mu}$

Αλλά $U''_{eff} = 12kr^2 + \frac{3\ell^2}{\mu r^4}$

οπότε $\boxed{\omega^2 = \frac{12kr_{eq}^2 + 3\ell^2/\mu r_{eq}^4}{\mu}}$

6. (**15π συνολικά**)

Θεωρήστε το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος το οποίο αποτελείται από τρείς όμοιους πυκνωτές και δύο διαφορετικά πηνία.



(α) Για φορτία Q_i στους πυκνωτές και ρεύματα I_i διαμέσου των στοιχείων του κυκλώματος γράψτε τους νόμους του Kirchhoff για την συνολική αλλαγή της τάσης για κάθε βρόγχο του κυκλώματος. [**1π**]

(β) Να βρεθούν οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης. [**6π**]

(γ) Για $L_1=L_2=L$ να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης και να περιγραφεί η φυσική τους σημασία σχετικά με την κίνηση των ρευμάτων στο κύκλωμα. [**8π**]

Θυμηθείτε ότι το δυναμικό στα πηνία αντιτίθεται στην αλλαγή των ρευμάτων, ενώ το δυναμικό στους πυκνωτές αυξάνει τα ρεύματα I_1, I_2, I_3. Επομένως τα πρόσημα των δυναμικών είναι όπως δίνονται στο σχήμα

Χρησιμοποιώντας τους νόμους του kirchhoff :

(α) Το άθροισμα των μεταβολών των δυναμικών σε ένα βρόγχο είναι μηδέν

(β) Το άθροισμα των ρευμάτων σε ένα κόμβο είναι μηδέν (διατήρηση του φορτίου).

$$|V_{\text{πηνίου}}| = \left| L \frac{dI}{dt} \right| \qquad V_{\text{πυκν}} = \frac{Q}{C}$$

Επομένως κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού στους βρόγχους 1 και 2 θα έχουμε:

$$-L\frac{dI_1}{dt} + \frac{Q_1}{C} + \frac{Q_3}{C} = 0 \qquad (1)$$

$$-L\frac{dI_2}{dt} + \frac{Q_2}{C} - \frac{Q_3}{C} = 0 \qquad (2)$$

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad (3)$$

Από την (3) έχουμε $Q_3 = Q_1 - Q_2$ και αντικαθιστώντας στις (1) και (2) και χρησιμοποιώντας $I_i = -\frac{dQ_i}{dt}$

οι πυκνωτές εκφορτίζονται

$$L_1\frac{d^2Q_1}{dt^2} + \frac{1}{C}(2Q_1 - Q_2) = 0$$

$$L_2\frac{d^2Q_2}{dt^2} + \frac{1}{C}(2Q_2 - Q_1) = 0$$

Θέτοντας $\vec{\eta} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$ μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις σε μορφή

$$\begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{Q}_1 \\ \ddot{Q}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{C} & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{C} & \frac{2}{C} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = 0$$

Ορίζοντας: $\{M\} = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}$ και $\{V\} = \begin{pmatrix} \frac{2}{C} & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{C} & \frac{2}{C} \end{pmatrix}$

οι "εξισώσεις κίνησης" γίνονται: $\{M\}\{\ddot{\eta}\} + \{V\}\{\eta\} = 0$

Οι ιδιοσυχνότητες λαμβάνονται λύνοντας την χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\det\left(\{V\} - \omega^2\{M\}\right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{C} - \omega^2 L_1\right)\left(\frac{2}{C} - \omega^2 L_2\right) - \frac{1}{C^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_1 L_2 \omega^4 - \frac{2}{C}(L_1 + L_2)\omega^2 + \frac{3}{C^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C} \pm \frac{1}{L_1 L_2 C}\sqrt{(L_1+L_2)^2 - 3L_1L_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \frac{1}{CL_1L_2}\left\{L_1 + L_2 \pm \sqrt{L_1^2 + L_2^2 - L_1L_2}\right\}.$$

Για $L_1 = L_2 = L \Rightarrow \qquad \omega_1^2 = \frac{1}{LC}$ και $\omega_2^2 = \frac{3}{LC}$

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι:

$$\left(\{V\} - \omega_1^2\{M\}\right)\{a_1\} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{C} & \frac{1}{C} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{11} = a_{21} \Rightarrow \vec{a}_1 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

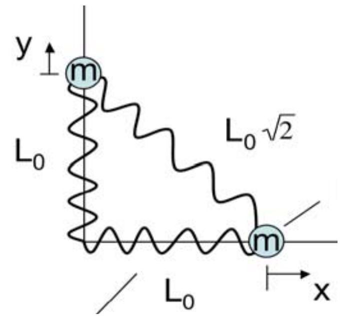
$$\left(\{V\} - \omega_2^2\{M\}\right)\{a_2\} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{12} = -a_{22} \Rightarrow \vec{a}_2 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Στο πρώτο κανονικό τρόπο ταλάντωσης $\left(\omega_1^2 = \frac{1}{LC}\right)$, $Q_1 = Q_2$, και τα I_1, I_2 ρέουν στην ίδια διεύθυνση. Στο δεύτερο τρόπο ταλάντωσης $\left(\omega_2^2 = \frac{3}{LC}\right)$ $Q_1 = -Q_2$ και τα I_1, I_2 ρέουν σε αντίθετες κατευθύνσεις.

7. (**20π συνολικά**)

Το παρακάτω σχήμα δείχνει τρία ελατήρια στην θέση ισορροπίας τους. Και τα 3 ελατήρια έχουν σταθερά k ενώ η μάζα τους θεωρείται αμελητέα (Μπορείτε να αγνοήσετε τη βαρύτητα για το πρόβλημα αυτό). Τα ελατήρια 1 και 2 είναι τυλιγμένα γύρω από λείες ράβδους, έτσι ώστε το ελατήριο 1 μπορεί να κινείται στη x-διεύθυνση μόνο, ενώ το ελατήριο 2 μόνο στη y-διεύθυνση. Δύο μπάλες μάζας m είναι εξαρτημένες στα άκρα των ελατηρίων 1 και 2. Το τρίτο ελατήριο συνδέει τις δύο μάζες. Τα μήκη ισορροπίας των ελατηρίων είναι L_0, L_0 και $\sqrt{2}L_0$ για τα ελατήρια 1, 2 και 3 αντίστοιχα.

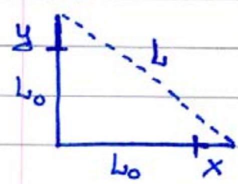


(α) Να βρεθεί η δυναμική ενέργεια όταν το ελατήριο 1 επιμηκύνεται κατά μια ποσότητα x και το ελατήριο 2 επιμηκύνεται κατά μια ποσότητα y, όπου x και y είναι και τα δύο πολύ μικρότερα από το L_0. [**8π**].

(β) Να βρεθούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος αυτού, υποθέτοντας ότι $x \ll L_0$ και $y \ll L_0$. [**8π**]

(γ) Περιγράψτε ένα τρόπο για θέσετε το σύστημα σε κίνηση έτσι ώστε να ταλαντώνεται στη χαμηλότερη συχνότητα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. [**4π**]

(α)



$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

$$V = \underbrace{\frac{1}{2}kx^2}_{\text{ελατήριο 1}} + \underbrace{\frac{1}{2}ky^2}_{\text{ελατήριο 2}} + \underbrace{\frac{1}{2}kz^2}_{\text{επιμήκυνση ελατηρίου 3}}$$

$$L^2 = (L_0+x)^2 + (L_0+y)^2 = 2L_0^2 + 2L_0x + 2L_0y + x^2 + y^2$$

$$z = L_0\sqrt{2} - L$$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$L = L_0\sqrt{2}\left(1 + \frac{x}{L_0} + \frac{y}{L_0} + \frac{x^2}{2L_0^2} + \frac{y^2}{2L_0^2}\right)^{1/2}$$

Οι δύο τελευταίοι όροι είναι αμελητέοι αφού $x, y \ll L_0$. Έτσι έχουμε:

$$L \cong L_0\sqrt{2}\left(1 + \frac{x}{L_0} + \frac{y}{L_0}\right)^{1/2} \Rightarrow L \cong L_0\sqrt{2}\left[1 + \frac{x+y}{L_0}\right]^{1/2}$$

Από ανάπτυγμα Διωνύμου: $(1+\varepsilon)^{1/2} \cong 1 + \varepsilon/2$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow L \cong L_0\sqrt{2}\left[1 + \frac{x+y}{2L_0}\right] \Rightarrow L_0\sqrt{2} - L \cong -\frac{x+y}{\sqrt{2}} \Rightarrow z = -\frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

Επομένως $\frac{1}{2}kz^2 \cong \frac{1}{2}k\frac{(x+y)^2}{2}$

Η δυναμική ενέργεια γίνεται: $V = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{4}k(x+y)^2 = \frac{3}{4}k(x^2+y^2) + \frac{1}{2}kxy$

(β) $\{V\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial^2 y} \end{pmatrix} \Rightarrow \{V\} = \begin{pmatrix} 3/2\, k & k/2 \\ k/2 & 3/2\, k \end{pmatrix}$

Από τη χαρακτηριστική εξίσωση: $\left| \{V\} - \omega^2 \{M\} \right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{3}{2}k - \omega^2 M & k/2 \\ k/2 & \frac{3}{2}k - \omega^2 M \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}k - m\omega^2\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{3k}{2} - m\omega^2 = \pm \frac{k}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\omega_1^2 = \frac{k}{m}}, \quad \boxed{\omega_2^2 = \frac{2k}{m}}$

(γ) Για τη συχνότητα $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$ αντικαταστούμε στη χαρακτηριστική εξίσωση για να βρούμε το ιδιοδιάνυσμα:

$\{V\} - \omega_1^2 \{M\} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} k/2 & k/2 \\ k/2 & k/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

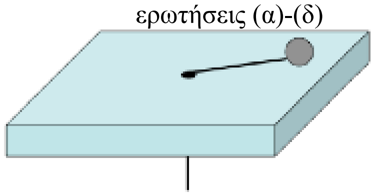
$\Rightarrow a_{11} = -a_{21}$

Επομένως αν επιμηκύνουμε το ένα ελατήριο κατά μιά ποσότητα α και συσπειρώσουμε το άλλο ελατήριο κατά την ίδια ποσότητα και τα αφήσουμε να κινηθούν, το σύστημα θα ταλαντώνεται με συχνότητα ω_1.

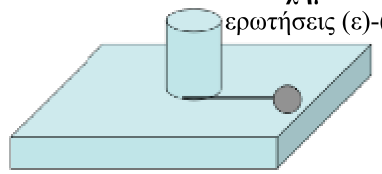
8. (**15π συνολικά**)

Οι ερωτήσεις (α)-(δ) αναφέρονται στη μάζα Μ του σχήματος Α ενώ οι ερωτήσεις (ε)-(η) στη μάζα Μ του σχήματος Β. Οι απαντήσεις μπορούν να δοθούν με γνώσεις εισαγωγικής φυσικής.

Σχήμα Α
ερωτήσεις (α)-(δ)



Σχήμα Β
ερωτήσεις (ε)-(η)



<u>*Για τις ερωτήσεις (α)-(δ):*</u> Υπάρχει μια μικρή τρύπα σε μια παγωμένη και γλιστερή λίμνη. Το ένα άκρο ενός λεπτού νήματος αμελητέας μάζας είναι στερεωμένο στη μάζα Μ. Η μάζα Μ έχει αμελητέες διαστάσεις και γλιστρά πάνω στο πάγο χωρίς τριβές. Το άλλο άκρο του νήματος περνά μέσα από την τρύπα στο πάγο. Αρχικά η μάζα Μ είναι σε απόσταση R από την τρύπα και κινείται εφαπτομενικά με ταχύτητα $υ_0$. Τη χρονική στιγμή t=0, ένα ψάρι κάτω από το πάγο αρχίζει να τραβά το άκρο του νήματος προς τα κάτω με σταθερό ρυθμό.

(α) Διατηρείται η γραμμική ορμή; Εξηγήστε γιατί ναι ή γιατί όχι και αν όχι ποια δύναμη είναι υπεύθυνη για τη μη διατήρησή της. [**1.5π**]

(β) Διατηρείται η στροφορμή ως προς ένα οποιοδήποτε σταθερό σημείο; Εξηγήστε γιατί ναι ή γιατί όχι και αν όχι προσδιορίστε τη ροπή υπεύθυνη για τη μη διατήρηση. [**1.5π**]

(γ) Διατηρείται η μηχανική ενέργεια; Εξηγήστε γιατί ναι ή γιατί όχι και αν όχι προσδιορίστε τι καταναλώνει έργο. [**1.5π**]

(δ) Βρείτε την ταχύτητα με την οποία κινείται η μάζα Μ όταν φθάνει σε απόσταση d από την τρύπα. [**3π**]

<u>*Για τις ερωτήσεις (ε)-(η):*</u> Το ένα άκρο του νήματος είναι στερεωμένο στη μάζα Μ. Το άλλο άκρο του νήματος είναι κολλημένο στο χαμηλότερο σημείο ενός κυλίνδρου ακτίνας d. Ο κύλινδρος είναι στερεωμένος μέσα στο πάγο. Η μάζα Μ γλιστρά πάνω στο πάγο χωρίς τριβές. Το νήμα τυλίγεται γύρω από το κύλινδρο καθώς η μάζα Μ περιστρέφεται γύρω από το κύλινδρο. Αρχικά η μάζα Μ βρίσκεται σε απόσταση R από την τρύπα και κινείται εφαπτομενικά με ταχύτητα $υ_0$.

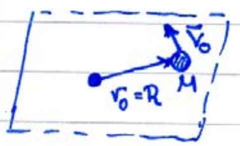
(ε) Διατηρείται η γραμμική ορμή; Εξηγήστε γιατί ναι ή γιατί όχι και αν όχι ποια δύναμη είναι υπεύθυνη για τη μη διατήρησή της. [**1.5π**]

(στ) Διατηρείται η στροφορμή ως προς ένα σταθερό σημείο; Εξηγήστε γιατί ναι ή γιατί όχι και αν όχι προσδιορίστε τη ροπή που είναι υπεύθυνη για τη μη διατήρησή της. [**1.5π**]

(ζ) Διατηρείται η μηχανική ενέργεια; Εξηγήστε γιατί ναι ή γιατί όχι και αν όχι προσδιορίστε τι καταναλώνει έργο. [**1.5π**]

(η) Βρείτε την ταχύτητα με την οποία κινείται η μάζα Μ όταν φθάνει στον κύλινδρο που όπως αναφέραμε έχει ακτίνα d. [**3π**]

Ερωτήματα (α)-(δ). Μελετάμε τη κίνηση της Μ. Το σχήμα Α σε κάτοψη είναι:

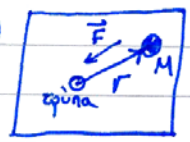


Η αρχική ταχύτητα $\vec{V}$ είναι εφαπτομενική

(α) Η γραμμική ορμή της Μ ΔΕΝ διατηρείται: Η διεύθυνσή της αλλάζει συνεχώς καθώς η μάζα Μ περιστρέφεται γύρω από τη τρύπα και την πλησιάζει.

Η δύναμη υπεύθυνη για τη μη διατήρηση είναι η τάση του νήματος.

(β)

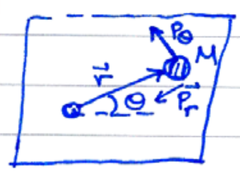


Η ροπή ως προς την τρύπα είναι μηδέν $\vec{\tau}=0$ επειδή $\vec{r}$ και $\vec{F}$ είναι παράλληλες και με αντίθετη κατεύθυνση.

Επομένως η στροφορμή $\vec{L}$ διατηρείται ως προς την τρύπα

(γ) Το σχοινί καταναλώνει έργο στη μάζα Μ καθώς περιστρέφεται προς την τρύπα. Επομένως $E=T+V$ <u>δεν</u> διατηρείται.

(δ) Χρησιμοποιούμε διατήρηση της στροφορμής $\vec{L}$ ως προς τη τρύπα



$$\left.\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r}\times\vec{p} \\ \vec{r} &= R\hat{r} \\ \vec{p}_{\alpha\rho\chi} &= mV_0\hat{\theta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{L} = \hat{z}\, mV_0 R$$

Η τελική $\left.\begin{aligned} \vec{p} &= mV_\theta\hat{\theta} + mV_r\hat{r} \\ \vec{r} &= d\,\hat{r} \end{aligned}\right\} \vec{L} = mV_\theta d\,\hat{z}$ $\Rightarrow$

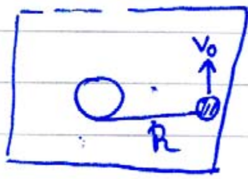
$$\Rightarrow mV_\theta d\,\hat{z} = mV_0 R\,\hat{z} \Rightarrow \boxed{V_\theta = \frac{V_0 R}{d}}$$

εφαπτομενική συνιστώσα της $\vec{V}$ όταν Μ είναι σε απόσταση $r=d$.

Η ταχύτητα είναι: $V^2 = V_\theta^2 + V_r^2 = \dfrac{V_0^2 R^2}{d^2} + V_r^2$

$\hookrightarrow$ σταθερά αφού το ψάρι τραβά με σταθερό ρυθμό.

Κάτοψη του σχήματος για τα ερωτήματα (ε)-(η)



(ε) Η γραμμική ορμή ~~δεν~~ διατηρείται εξαιτίας της δύναμης του σχοινιού

(στ) Δεν έχουμε διατήρηση της στροφορμής στο σημείο που το νήμα αγγίζει το κύλινδρο, όπου $\vec{p}=0$. Το σημείο αυτό κινείται γύρω από το κύλινδρο καθώς η μάζα τυλίγεται γύρω από το κύλινδρο.

(ζ) Η ενέργεια διατηρείται $\frac{dE}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$ και $\vec{v}\perp\vec{F} \Rightarrow E=\sigma\tau\alpha\theta.$

(η) Από διατήρηση της ενέργειας έχουμε:

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}MV_0^2 = \frac{1}{2}MV_F^2 \Rightarrow V_F = V_0$$