

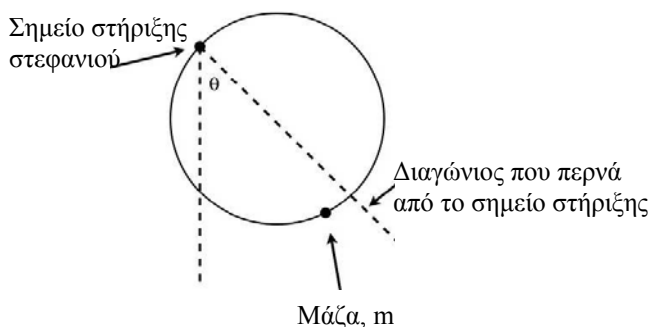
ΦΥΣ. 133

ΕΡΓΑΣΙΑ # 8

Επιστροφή 3-5-2006

Η τελευταία εργασία: πρέπει να επιστραφεί στις 3-Μαου. Καθυστερημένες αλλά και όμοιες εργασίες δεν θα βαθμολογηθούν.

1. Ένα λεπτό στεφάνι ακτίνας R και μάζας M είναι εξαρτημένο από ένα σημείο και ταλαντώνεται στο κατακόρυφο επίπεδο. Πάνω στο στεφάνι βρίσκεται μια μικρή μπάλα μάζας M επίσης η οποία περιορίζεται να κινείται χωρίς τριβές κατά μήκος της περιφέρειας του στεφανιού όπως στο σχήμα. Η ροπή αδράνειας του στεφανιού ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του είναι $I = MR^2$. Θεωρείστε μικρές μόνο ταλαντώσεις και υπολογίστε τα ακόλουθα:



- (α) Τους δύο πίνακες \mathbf{M} και \mathbf{V} . [10β]
 - (β) Τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος. [4β]
 - (γ) Τα ιδιοδιανύσματα. [4β]
 - (δ) Βρείτε τα 2 σετ των αρχικών συνθηκών που οδηγούν σε ταλάντωση με τον ένα ή τον άλλο κανονικό τρόπο ταλάντωσης (normal mode). Περιγράψτε ποιοτικά σε τι αντιστοιχούν οι δύο φυσικοί τρόποι ταλάντωσης. [2β]
2. Μια χάντρα μάζας M περιορίζεται στο να κινείται στην επιφάνεια μιας λείας σφαίρας μάζας ακτίνας R_0 . Η δυναμική ενέργεια της χάντρας ανάλογα με τη θέση της, δίνεται από την σχέση:

$$U(\vec{r}) = MA_0[l_1x + l_2y + l_3z]$$
 - (α) Να βρεθεί η Lagrangian του συστήματος και να εκφραστεί συναρτήσει δύο γωνιών και των χρονικών παραγώγων τους. [2β]
 - (β) Να βρεθεί η εξίσωση κίνησης του συστήματος μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrange. [2β]
 - (γ) Να βρεθεί η Hamiltonian του συστήματος. [2β]
 - (δ) Θεωρείστε τώρα δύο σώματα μάζας M_1 και M_2 αντίστοιχα με συντεταγμένες (x_1, y_1, z_1) και (x_2, y_2, z_2) τα οποία κινούνται στην επιφάνεια της σφαίρας. Το σύστημα αυτό έχει δυναμική ενέργεια που δίνεται από τη σχέση:

$$U_{tot} = U(\vec{r}_1) + U(\vec{r}_2) + \frac{1}{2}k_A R_0^2(6\theta_1 - 5\theta_2)^2 + \frac{1}{2}k_B R_0^2(\theta_1)^2 + \frac{1}{2}k_C R_0^2(\theta_2)^2$$

Να βρεθεί η μορφή της εξίσωσης του 2^{ου} νόμου του Newton [3β].

(ε) Για την περίπτωση των δύο σωμάτων, λύστε την εξίσωση του 2^{ου} νόμου του Newton και περιγράψτε πλήρως την κίνηση. Η απάντησή σας θα πρέπει να περιέχει συζήτηση σχετικά με τους φυσικούς τρόπους ταλάντωσης, ιδιοσυχνότητες και ιδιοδιανύσματα. [11β]

3. Η Lagrangian ενός συγκεκριμένου συστήματος μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{a}x^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \frac{K}{2} (ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

Όπου α,β,γ είναι αυθαίρετες σταθερές αλλά υπόκεινται στη συνθήκη $b^2 - ac \neq 0$. Ποιες είναι οι εξισώσεις κίνησης; Εξετάστε τις δύο περιπτώσεις $a = 0 = c$ και $b = 0$, $c = -a$. Ποιο είναι το φυσικό σύστημα που περιγράφεται από την παραπάνω Lagrangian; [10β]

4. Να βρεθούν οι διαστάσεις ενός παραλληλεπίπεδου μέγιστου όγκου το οποίο περιέχεται μέσα σε σφαίρα ακτίνας R. [10β]
5. Ένα σώμα περιορίζεται να κινείται σε ένα στεφάνι αμελητέας μάζας και ακτίνας R_0 το οποίο βρίσκεται στο κατακόρυφο επίπεδο και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από την κατακόρυφο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 . Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης του Lagrange υποθέτοντας ότι οι μόνες εξωτερικές δυνάμεις που δρούν προέρχονται από την βαρύτητα. Ποιες είναι σταθερές της κίνησης; Δείξτε ότι αν ω είναι μεγαλύτερη από μια τιμή ω_0 , υπάρχει μια λύση για την οποία το σώμα παραμένει ακίνητο στο στεφάνι σε ένα σημείο το οποίο δεν βρίσκεται στο κατώτερο σημείο του στεφανιού, αλλά αν $\omega < \omega_0$, το μόνο σημείο στο οποίο το σώμα μπορεί να είναι ακίνητο είναι το κατώτερο σημείο του στεφανιού. Ποια είναι η τιμή της ω_0 ; [20β]
6. Ένα σώμα μάζας m γλιστρά προς το κατώτερο μέρος μιας λείας σφαιρικής επιφάνειας μάζας M που βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο όπως στο σχήμα.
 (α) Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης για το m και M . [10β]
 (β) Να βρεθεί η αντίδραση της σφαιρικής επιφάνειας. [10β]

