3ο Παράδειγμα: δύο φορτισμένες σφαίρες σε επαφή

Υποθέστε τώρα ότι υπάρχουν δύο φορτισμένες μεταλλικές σφαίρες ακτίνας r_1 και r_2. Οι δύο σφαίρες συνδέονται με λεπτό αγώγιμο σύρμα.

Φορτίο θα συνεχίσει να ρέει από την μία σφαίρα στην άλλη έως ότου επέλθει ηλεκτροστατική ισορροπία και οι δύο σφαίρες να έχουν το ίδιο δυναμικό $V_1 = V_2 = V$

Υποθέτουμε ότι στην κατάσταση ισορροπίας, το φορτίο στις σφαίρες είναι q_1 και q_2 αντίστοιχα.

Αγνοώντας το σύρμα, η συνθήκη ισοδυναμικών επιφανειών στην κατάσταση ισορροπίας οδηγεί (υποθέτοντας ότι η πυκνότητα φορτίου σε κάθε σφαίρα δεν επηρεάζεται από την παρουσία της άλλης σφαίρας)

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = V_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{\sigma_1 \pi r_1^2}{\sigma_2 \pi r_2^2} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να γραφεί ως:

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{\sigma_1 \pi r_1^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} \text{ και } E_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = \frac{\sigma_2\, r_2^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} \text{ οπότε: } \frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

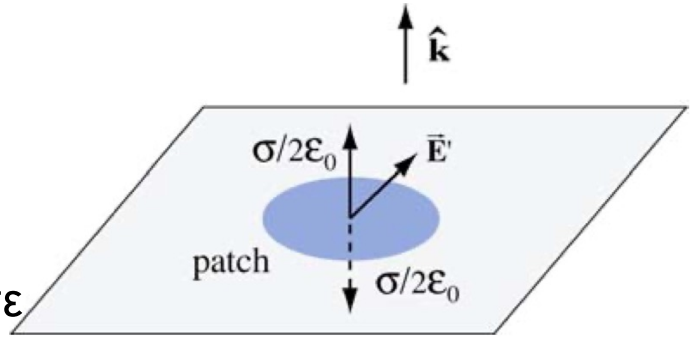
Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας και το ηλεκτρικό πεδίο είναι μεγαλύτερο σε επιφάνειες μικρής καμπυλότητας.

Αιχμηρές επιφάνειες δημιουργούν πολύ μεγάλα ηλεκτρικά πεδία.

Δύναμη που αναπτύσσεται σε αγωγό

Για έναν αγωγό με ομογενή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου, η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνειά του αγωγού πρέπει να είναι μηδέν και επομένως συνεχής ενώ η κάθετη συνιστώσα παρουσιάζει ασυνέχεια ίση με σ/ε_0

Θεωρούμε έναν μικρό τμήμα φορτίου σε μια αγώγιμη επιφάνεια. Θέλουμε να βρούμε πόση είναι η δύναμη που αναπτύσσεται στο τμήμα αυτό του φορτίου;



Για να απαντήσουμε στο ζητούμενο θα πρέπει να υπολογίσουμε το πεδίο που αναπτύσσεται οπουδήποτε έξω από την επιφάνεια.

Έστω ότι το πεδίο αυτό είναι: $\vec{E} = \vec{E}_{\varphi o\rho.} + \overrightarrow{E'}$

$\overrightarrow{E'}$ το πεδίο από όλα τα άλλα φορτία και $\vec{E}_{\varphi o\rho\tau.}$ το πεδίο από το μικρό τμήμα της επιφάνειας.

Εξαιτίας του 3ου νόμου του Newton το φορτίο δεν ασκεί δύναμη στο ίδιο και άρα δέχεται δύναμη μόνο από το $\overrightarrow{E'}$

Υποθέτουμε ότι το τμήμα φορτίου είναι μια επίπεδη επιφάνεια. Από τον νόμο του Gauss, το ηλεκτρικό πεδίο εξαιτίας του φορτίου της μικρής επιφάνειας είναι:

$$\vec{E}_{\varphi o\rho.} = \begin{cases} +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & z > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & z < 0 \end{cases}$$

Δύναμη που αναπτύσσεται σε αγωγό

Από την αρχή της επαλληλίας, το ηλεκτρικό πεδίο πάνω από το τμήμα φορτίου είναι

$$\vec{E}_{πάνω} = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} + \overrightarrow{E'} \qquad z > 0$$

και με παρόμοιο τρόπο για το ηλεκτρικό πεδίο κάτω από τον αγωγό:

$$\vec{E}_{κάτω} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} + \overrightarrow{E'} \qquad z < 0$$

Το ηλεκτρικό πεδίο $\overrightarrow{E'}$ είναι συνεχές διαπερνώντας την επιφάνεια. Αυτό γιατί αν φανταστούμε ότι απομακρύνουμε το τμήμα του φορτίου, τότε το ηλεκτρικό πεδίο στην εναπομένουσα «τρύπα» δεν παρουσιάζει ασυνέχεια.

Προσθέτουμε τις δύο προηγούμενες εξισώσεις και λύνουμε ως προς $\overrightarrow{E'}$:

$$\overrightarrow{E'} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}_{πάνω} + \vec{E}_{κάτω}\right) = \vec{E}_{avg}.$$

Για την περίπτωση αγωγού: $\vec{E}_{πάνω} = +\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{k}$ και $\vec{E}_{κάτω} = 0\hat{k}$ οπότε: $\vec{E}_{avg} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$

Σαν αποτέλεσμα, η δύναμη που ενεργεί πάνω στο τμήμα του φορτίου είναι:

$\vec{F} = q\vec{E}_{avg} = (\sigma A)\,\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{k} = \frac{\sigma^2 A}{2\varepsilon_0}\hat{k}$ όπου *A* το εμβαδό του τμήματος φορτίου

Δύναμη που αναπτύσσεται σε αγωγό

$$\vec{F} = q\vec{E}_{avg} = (\sigma A)\,\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{k} = \frac{\sigma^2 A}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

Αυτή είναι η δύναμη που χρειάζεται για να έρθουν τα φορτία ενός αγωγού σε κατάσταση ισορροπίας όπου το ηλεκτρικό πεδίο στο εξωτερικό του αγωγού παίρνει την τιμή σ/ε_0 και μηδενίζεται στο εσωτερικό του.

Θεωρώντας την δύναμη και την επιφάνεια του τμήματος του φορτίου, μπορούμε να ορίσουμε την ηλεκτροστατική πίεση στο τμήμα του φορτίου ως:

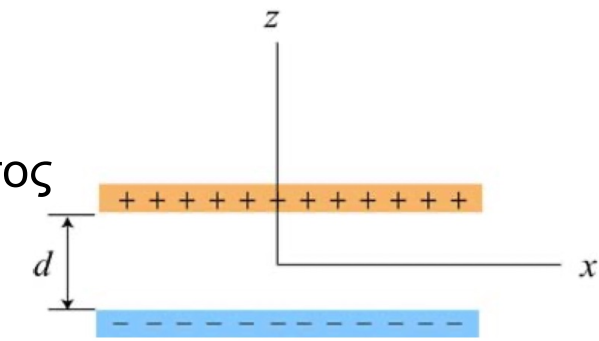
$$P = \frac{F}{A} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2$$

όπου E είναι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου ακριβώς πάνω από το τμήμα φορτίου

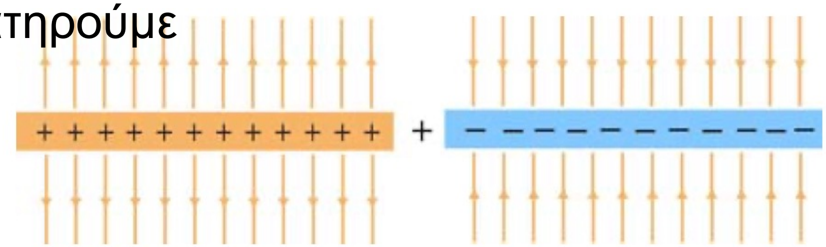
Η πίεση διαδίδεται μέσω του ηλεκτρικού πεδίου.

Άσκηση 1η: Δύο παράλληλες επιφάνειες απείρων διαστάσεων

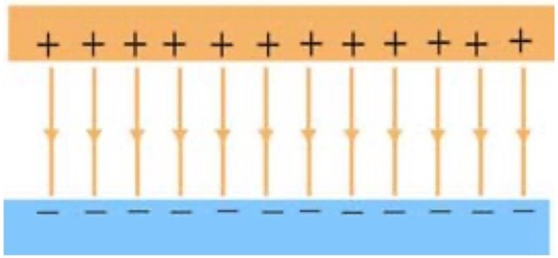
Δύο παράλληλες μη αγώγιμες επιφάνειες απείρων διαστάσεων βρίσκονται στο *x-y* επίπεδο και απέχουν μεταξύ τους απόσταση *d*. Κάθε επίπεδο είναι ομοιόμορφα φορτισμένο με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου ίσου μέτρου αλλά αντίθετου πρόσημου. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο οπουδήποτε στο χώρο.



- Μπορούμε να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας στο αποτέλεσμα του προβλήματος της εύρεσης του ηλεκτρικού πεδίου μιας επιφάνειας απείρων διαστάσεων που συζητήσαμε στη διάλεξη 7.
- Αφού οι δύο επιφάνειες έχουν ίσες αλλά αντίθετες πυκνότητες φορτίου, τα πεδία που δημιουργούνται έχουν ίσα μέτρα αλλά αντίθετη φορά. Το πεδίο από την θετικά φορτισμένη επιφάνεια δείχνει μακριά από την επιφάνεια, ενώ το πεδίο από την αρνητικά φορτισμένη επιφάνεια δείχνει προς την επιφάνεια.
- Το μέτρο των δύο ηλεκτρικών πεδίων θα είναι: $E_+ = E_- = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
- Προσθέτοντας τα δύο πεδία μεταξύ τους, παρατηρούμε ότι μεταξύ των δύο επιφανειών το πεδίο γίνεται διπλάσιο αυτού για κάθε επιφάνεια ξεχωριστά, ενώ εκτός των δύο επιφανειών το πεδίο αυτό μηδενίζεται.



Άσκηση 1η: Δύο παράλληλες επιφάνειες απείρων διαστάσεων



- Το ηλεκτρικό πεδίο της θετικής και αρνητικής επιφάνειας:

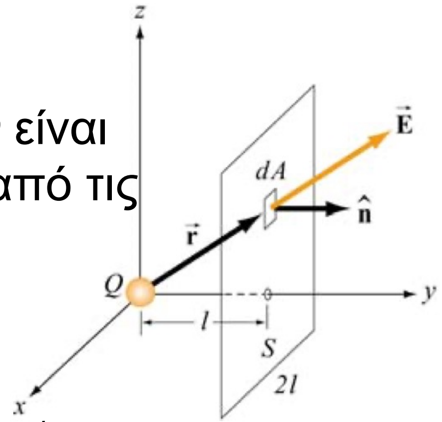
$$\vec{E}_{+} = \begin{cases} +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & z > d/2 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & z < d/2 \end{cases} \quad \text{και} \quad \vec{E}_{-} = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & z > -d/2 \\ +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & z < -d/2 \end{cases}$$

- Προσθέτοντας τα δύο πεδία θα πάρουμε:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0\hat{k} & z > d/2 \\ -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{k} & -d/2 < z < d/2 \\ 0\hat{k} & z < -d/2 \end{cases}$$

Άσκηση 2η: Ηλεκτρική ροή που διαπερνά τετραγωνική επιφάνεια

(**α**) Υπολογισμός της ηλεκτρικής ροής πεδίου που διαπερνά μια τετραγωνική επιφάνεια πλευράς *2l* που βρίσκεται σε απόσταση *l* από το φορτίο +Q που δημιουργεί το πεδίο.



(**β**) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από το (α), αν το φορτίο +Q είναι στο κέντρο κύβου πλευράς 2*l* να βρεθεί η ολική ροή που εξέρχεται από τις 6 πλευρές της κλειστής επιφάνειας

- Το ηλεκτρικό πεδίο εξαιτίας του σημειακού φορτίου +Q είναι:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}}{r}\right)$$ όπου $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

Στην επιφάνεια S, $y = l$ και το στοιχείο επιφάνειας είναι $d\vec{A} = dA\hat{\jmath} = (dxdz)\hat{\jmath}$

Επομένως: $$\vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{ydxdz}{r} \Rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}dxdz$$

Επομένως η ροή μέσω της επιφάνειας θα είναι:

$$\Phi_E = \iint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Ql}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{+l} dx \int_{-l}^{l}\frac{dz}{(x^2 + l^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{Ql}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l} dx \left.\frac{z}{(x^2 + l^2)(x^2 + l^2 + z^2)^{1/2}}\right|_{-l}^{l}$$

Άσκηση 2η: Ηλεκτρική ροή που διαπερνά τετραγωνική επιφάνεια

$$\Rightarrow \Phi_E = \frac{Ql}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l}\frac{l\,dx}{(x^2+l^2)(x^2+2l^2)^{1/2}} \Rightarrow \Phi_E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2l^2}}\right)\Bigg|_{-l}^{l}$$

$$\Rightarrow \Phi_E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \boxed{\Rightarrow \Phi_E = \frac{Q}{6\varepsilon_0}}$$

Όπου κάναμε χρήση των ακόλουθων ολοκληρωμάτων : $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{1/2}}$

και $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^{1/2}} = \frac{1}{a(b^2-a^2)^{1/2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2(x^2+b^2)}}, \quad b^2 > a^2$

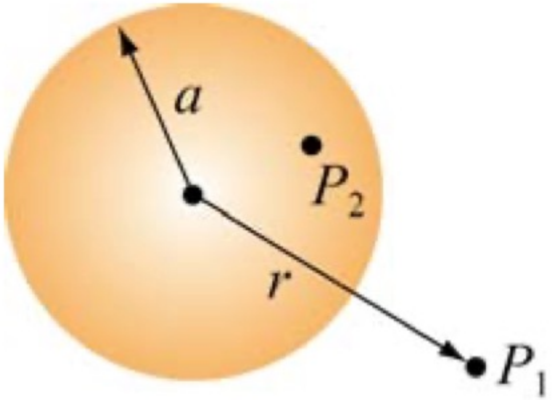
(β) Με βάση την συμμετρία του προβλήματος, η ροή πρέπει να είναι ίδια σε όλες τις πλευρές του: Επομένως η ολική ροή θα είναι 6 φορές τη ροή από τη μία πλευρά:

$$\Rightarrow \Phi_E = 6\left(\frac{Q}{6\varepsilon_0}\right) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Το αποτέλεσμα δείχνει ότι η ροή που περνά από μια κλειστή επιφάνεια, είναι ανάλογη του ολικού φορτίου που περικλείει. Το αποτέλεσμα ενισχύει την άποψη ότι η ροή δεν εξαρτάται από τη μορφή της επιφάνειας.

Άσκηση 3η: Δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας

Μια μονωμένη αγώγιμη σφαίρα ακτίνας α έχει ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου *ρ*. Να βρεθεί το ηλεκτρικό δυναμικό παντού στο χώρο.



Όπως είδαμε, από τον νόμο του Gauss βρίσκουμε το πεδίο από την κατανομή των φορτίων του προβλήματος:

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & z \geq a \\ \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\hat{r} & z \leq a \end{cases}$$

Το δυναμικό στο σημείο P_1 έξω από την σφαίρα, είναι:

$$V(r) - V(\infty) = V(r) = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} dr' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \Rightarrow V(r) = k_e \frac{Q}{r}$$

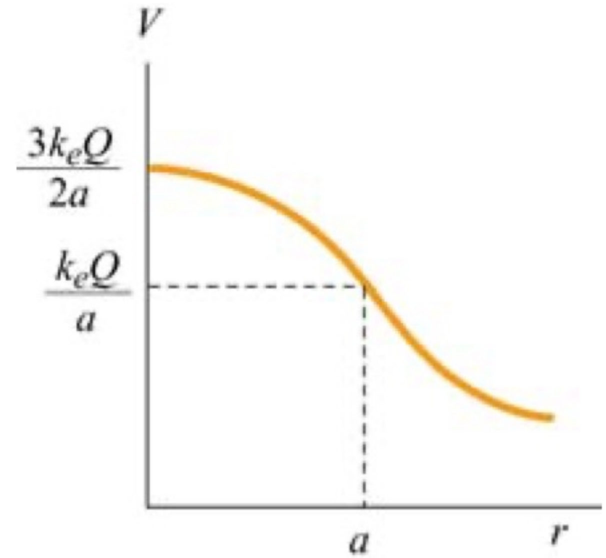
Το δυναμικό στο σημείο P_2 στο εσωτερικό της σφαίρας θα είναι:

$$V(r_2) - V(\infty) = V(r_2) = -\int_{\infty}^{a} d\hat{r}\cdot\vec{E}(r \geq a) - \int_{a}^{r} d\hat{r}\cdot\vec{E}(r \leq a) = -\int_{\infty}^{a} \frac{Qdr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \int_{a}^{r} dr' \frac{Qr'}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

$$\Rightarrow V(r_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\alpha} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a^3}\frac{1}{2}(r^2 - a^2) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}\left[3 - \frac{r^2}{a^2}\right] = k_e \frac{Q}{2a}\left[3 - \frac{r^2}{a^2}\right]$$

Άσκηση 3η: Δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας

Το δυναμικό συναρτήσει της απόστασης *r*, δίνεται στο σχήμα:



5ο Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

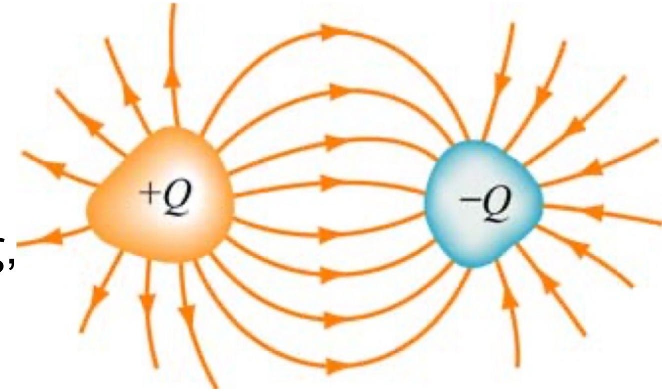
Έτοιμοι

Χωρητικότητα – Πυκνωτές - Διηλεκτρικά

Χωρητικότητα και διηλεκτρικά

Ο πυκνωτής είναι μια διάταξη η οποία αποθηκεύει ηλεκτρικό φορτίο.

Οι πυκνωτές εν γένει έχουν διαφορετικό σχήμα και μέγεθος.



Βασικό χαρακτηριστικό είναι ότι αποτελούνται από δύο αγωγούς με ίσα και αντίθετα φορτία

Χρησιμοποιούνται στα ηλεκτρονικά κυκλώματα για:

- την αποθήκευση ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας,
- την καθυστέρηση μεταβολής του δυναμικού όταν συνδυαστούν με αντιστάσεις,
- το φιλτράρισμα μη επιθυμητών συχνοτήτων κάποιων σημάτων,
- τη δημιουργία κυκλωμάτων συντονισμού,
- ως διαιρέτες τάσης όταν συνδυαστούν με αντιστάσεις.

Στη βασική τους κατάσταση, αφόρτιστη κατάσταση, το φορτίο σε κάθε αγωγό του συστήματος, είναι μηδέν.

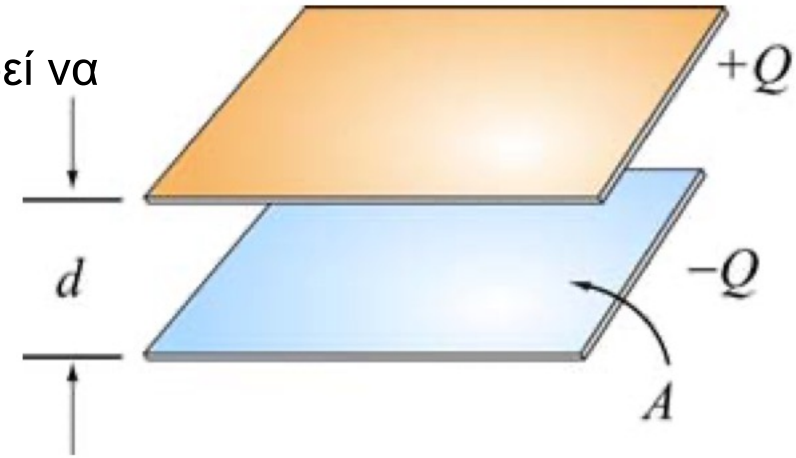
Κατά την φόρτισή τους, φορτίο Q μεταφέρεται από τον έναν αγωγό στον άλλο προσδίδοντας στον έναν αγωγό φορτίο $+Q$ και στον άλλο φορτίο $-Q$.

Σαν αποτέλεσμα, έχουμε την δημιουργία διαφοράς δυναμικού ΔV με τον θετικά φορτισμένο αγωγό σε υψηλότερο δυναμικό από τον αρνητικά φορτισμένο αγωγό.

Το συνολικό φορτίο στον πυκνωτή είναι μηδέν ανεξάρτητα από το αν είναι φορτισμένος ή αφόρτιστος

Χωρητικότητα

Η απλούστερη διάταξη ενός πυκνωτή αποτελείται από δύο παράλληλες αγώγιμες πλάκες εμβαδού *A*, που απέχουν απόσταση *d* μεταξύ τους.



Πειραματικά, γνωρίζουμε ότι το φορτίο που μπορεί να αποθηκευτεί σε έναν πυκνωτή είναι ανάλογο της διαφοράς δυναμικού, Δ*V*.

$$Q = C|\Delta V|$$

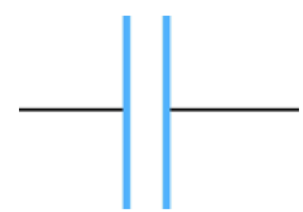
C: θετική σταθερά αναλογίας – **χωρητικότητα**

Αντιπροσωπεύει την ικανότητα της διάταξης να αποθηκεύσει ηλεκτρικό φορτίο για δεδομένη διαφορά δυναμικού Δ*V*

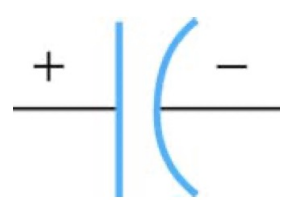
Μονάδα μέτρησης της χωρητικότητας είναι το ***Farad*** (***F***), $\mathbf{1F = \frac{1Coulomb}{volt} = 1\frac{C}{V}}$

Τυπικές τιμές χωρητικότητας είναι το μ*F* (10^{-6}F) ή το p*F* (10^{-12}F)

Ο συμβολισμός της χωρητικότητας που χρησιμοποιείται σε κυκλώματα

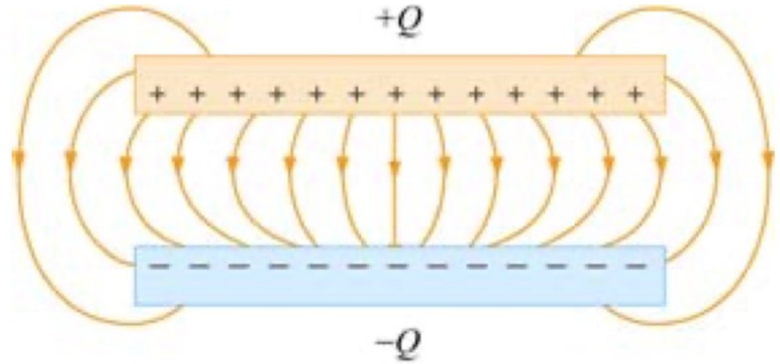


Για πυκνωτές συγκεκριμένης πόλωσης φορτίων χρησιμοποιείται ο συμβολισμός:



Υπολογισμός Χωρητικότητας

Θεωρούμε την περίπτωση δύο παράλληλων επίπεδων μεταλλικών πλακών που απέχουν απόσταση *d*. Η πάνω πλάκα είναι φορτισμένη με +*Q* φορτίο και η κάτω πλάκα με –*Q*.



Η φόρτιση των δύο πλακών μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση σταθεράς διαφοράς δυναμικού

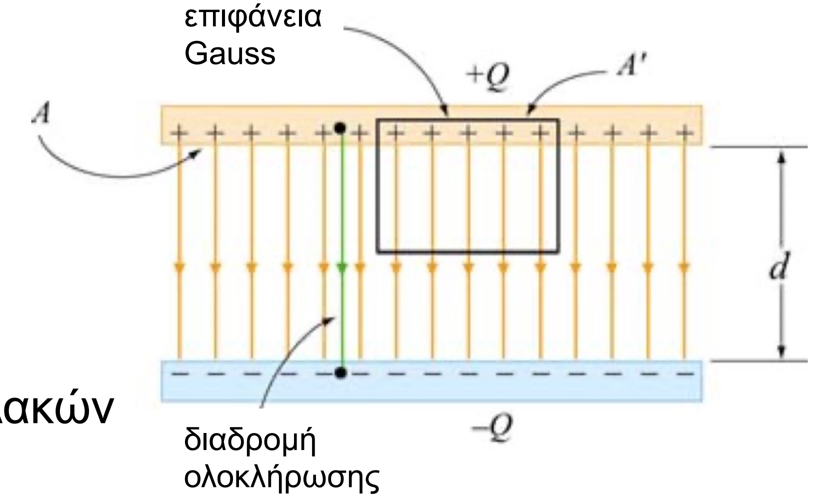
Εύρεση της χωρητικότητας *C*, προϋποθέτει γνώση του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των δύο πλακών.

Λόγω των πεπερασμένων διαστάσεων της διάταξης οι ηλεκτρικές γραμμές στα άκρα των πλακών δεν είναι ευθείες γραμμές αλλά καμπυλώνουν και το ηλεκτρικό πεδίο δεν εμπεριέχεται πλήρως ανάμεσα στις πλάκες. Το ηλεκτρικό πεδίο δεν είναι ομογενές στα άκρα και ονομάζεται *fringing field*

Υπολογισμός Χωρητικότητας

Στο όριο που οι δύο πλάκες είναι πολύ μεγάλων διαστάσεων, το σύστημα έχει επίπεδη συμμετρία και το ηλεκτρικό πεδίο υπολογίζεται σύμφωνα με τον νόμο του *Gauss*

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{\varepsilon\sigma.}}{\varepsilon_0}$$



Χρησιμοποιούμε επιφάνεια Gauss με εμβαδό βάσης *A'* που να περιέχει το φορτίο της θετικά φορτισμένης πλάκας.

Το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή μεταξύ των πλακών

$$EA' = \frac{q_{\varepsilon\sigma.}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A'}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα το βρήκαμε χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας στην αρχή της διάλεξης

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο πλακών είναι: $\Delta V = V_- - V_+ = -\int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{s} = -Ed$

(διαδρομή ολοκλήρωσης, το ευθύγραμμο τμήμα από την θετικά πλάκα στην αρνητική και $V_- < V_+$.) Στην εύρεση της χωρητικότητας το πρόσημο δεν ενδιαφέρει: $|\Delta V| = Ed$

Από τον ορισμό της χωρητικότητας: $C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\sigma A}{Ed} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d} \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ παράλληλες πλάκες