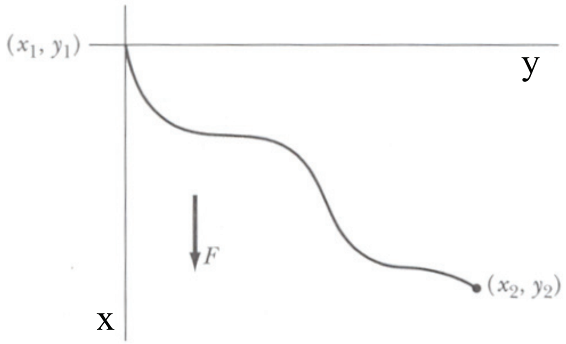
Βραχυστόχρονο – κλασσικό πρόβλημα φυσικής

Θεωρήστε ένα σωματίδιο που ξεκινά από ηρεμία από ένα σημείο (x_1,y_1) και πηγαίνει σε ένα σημείο (x_2,y_2). Να βρεθεί η διαδρομή που επιτρέπει το σώμα να εκτελέσει τη διαδρομή στο μικρότερο χρονικό διάστημα



Θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων ώστε το αρχικό σημείο συμπίπτει με την αρχή των αξόνων

Θεωρούμε ότι η δύναμη του πεδίου δρα στη x-διεύθυνση και είναι σταθερή και δεν υπάρχει τριβή - συντηρητικό

Η ολική μηχανική ενέργεια διατηρείται: $E = T + V = const.$

Επειδή το σώμα ξεκινά από ηρεμία: $E = T + V = 0$ (θεωρώντας ότι V=0 για y=0)

Σε κάθε σημείο της τροχιάς: $T = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2$ και $V = -Fx \Rightarrow V = -mgx$

Αφού $E = T + V = 0 \Rightarrow \mathrm{v}^2 = 2gx \Rightarrow \mathrm{v} = \sqrt{2gx}$

Ο χρόνος που απαιτείται για το σωματίδιο να εκτελέσει τη διαδρομή είναι:

$$t = \int_1^2 \frac{ds}{\mathrm{v}} = \int \frac{\left(dx^2 + dy^2\right)^{1/2}}{(2gx)^{1/2}} \Rightarrow t = \int_{x_1=0}^{x_2} \left(\frac{1 + y'^2}{2gx}\right)^{1/2} dx$$

Θέλουμε ο χρόνος αυτός να είναι ελάχιστος

Βραχυστόχρονο

Από τη σχέση: $t=\int_{x_1=0}^{x_2}\left(\frac{1+y'^2}{2gx}\right)^{1/2}dx$ αναγνωρίζουμε τη συνάρτηση: $f=\left(\frac{1+y'^2}{2gx}\right)^{1/2}$

Από την εξίσωση E-L έχουμε:

$$\delta t=0\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0\Rightarrow 0-\frac{d}{dx}\left(\frac{2y'}{\left[x\left(1+y'^2\right)\right]^{1/2}}\right)=0\Rightarrow$$

$$\frac{y'}{\left[x\left(1+y'^2\right)\right]^{1/2}}\equiv\frac{1}{\sqrt{2a}}\Rightarrow\frac{y'^2}{\left[x\left(1+y'^2\right)\right]}=\frac{1}{2a}\Rightarrow y=\int\frac{xdx}{\left(2ax-x^2\right)^{1/2}}$$

Πραγματοποιούμε την ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητών:

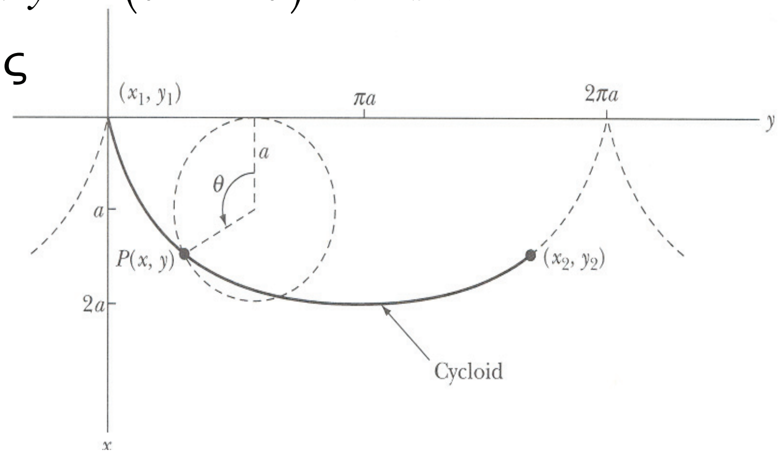
$$x=a\left(1-\cos\theta\right)\qquad dx=a\sin\theta d\theta$$

Το ολοκλήρωμα γίνεται: $y=\int a\left(1-\cos\theta\right)d\theta\Rightarrow y=a\left(\theta-\sin\theta\right)+const.$

Οι παραμετρικές εξισώσεις ενός κυκλοειδούς που περνά από την αρχή των αξόνων είναι:

$$x=a\left(1-\cos\theta\right)$$

$$y=a\left(\theta-\sin\theta\right)$$



Η σταθερά α πρέπει να ρυθμιστεί ώστε το σώμα να περνά από το σημείο (x_2,y_2)

Πολλαπλασιαστές Lagrange – Δυνάμεις δεσμών

- Το μεγάλο πλεονέκτημα του Lagrangian φορμαλισμού είναι ότι μπορεί να προσπεράσει όλες τις δυνάμεις δεσμών.
- Υπάρχουν περιπτώσεις που χρειαζόμαστε τις δυνάμεις των δεσμών
- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις Lagrange αλλά
  - με λίγο διαφορετική συνταγή

Η συνταγή:

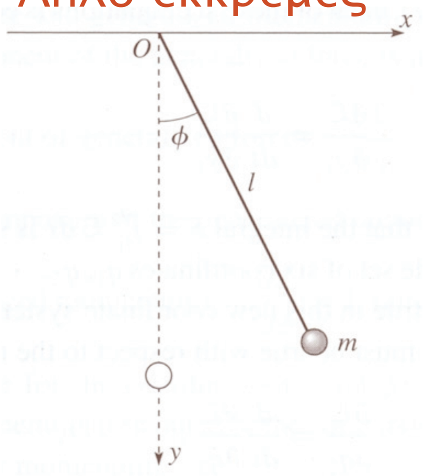
Αντί να χρησιμοποιήσουμε γενικευμένες συντεταγμένες από τις οποίες όλες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους

[Αυτό που κάναμε μέχρι τώρα ήταν να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση του δεσμού για να βρούμε κάποια σχέση μεταξύ των συντεταγμένων και να εκφράσουμε κάποια συντεταγμένη συναρτήσει των άλλων]

Χρησιμοποιούμε μεγαλύτερο αριθμό συντεταγμένων και για να συμπεριλάβουμε τους δεσμούς χρησιμοποιούμε τους πολλαπλασιαστές Lagrange

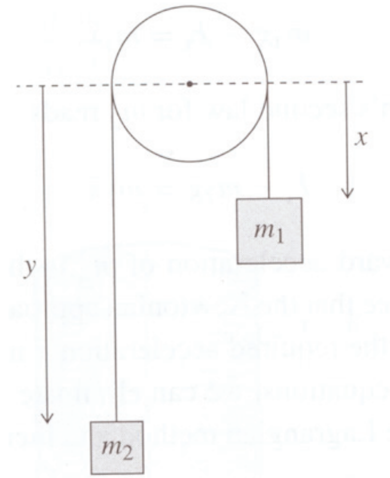
Τι σημαίνουν όλα αυτά

Απλό εκκρεμές



- Αν χρησιμοποιήσουμε τη συντεταγμένη φ τότε περιγράφουμε πλήρως την κίνηση
- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε x και y αλλά $\sqrt{x^2+y^2}=l$ και τα x και y δεν είναι ανεξάρτητα
- Θα δούμε με την μέθοδο των πολ/στων Lagrange πώς να βρούμε τη χρονική εξάρτηση των x και y και να βρούμε την τάση του σχοινιού

Μηχανή Atwood



- Χρησιμοποιήσαμε μόνο τη x (θέση) της m_1.
- Θα μπορούσαμε να κάνουμε χρήση και της συντεταγμένης y της m_2 αρκεί να θυμόμασταν ότι το μήκος του σχοινιού επιβάλει το δεσμό:

$$x + y = l$$

- Η μέθοδος των πολ/στων Lagrange οδηγεί στην εύρεση της χρονικής εξάρτησης των x και y και επίσης της τάσης του σχοινιού

Τι είναι οι πολλαπλασιαστές Lagrange

Το σύστημα περιγράφεται από μια Lagrangian $L = L(x, \dot{x}, y, \dot{y}, t)$

Η εξάρτηση δεν είναι απαραίτητη

Χρησιμοποιώντας την αρχή του Hamilton, έχουμε: $S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, y, \dot{y}) dt$

και το S πρέπει να είναι στάσιμο για τη διαδρομή που ακολουθήθηκε

Έστω x(t) και y(t) η "σωστή" διαδρομή, τότε μια μικρή απόκλιση σε μια γειτονική "λάθος" διαδρομή θα είναι:

$$x(t) \rightarrow x(t) + \delta x(t)$$

$$y(t) \rightarrow y(t) + \delta y(t)$$

Αν οι εξισώσεις αυτές ικανοποιούν την εξίσωση του δεσμού τότε το ολοκλήρωμα δράσης S είναι στάσιμο. Δηλαδή:

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} \right) dt$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη το 2ο και 4ο όρο έχουμε:

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x dt + \int \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) \delta y dt$$

Για τυχαίες μετατοπίσεις δx και δy

Οι πολλαπλασιαστές Lagrange

Αν το ολοκλήρωμα: $\delta S = \int\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x dt + \int\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)\delta y dt = 0$

για κάθε δυνατή μετατόπιση δx και δy $\Rightarrow$2 εξισώσεις Lagrange
το οποίο είναι το συμπέρασμα αν δεν είχαμε δεσμό

Αφού υπάρχουν δεσμοί, το ολοκλήρωμα είναι μηδέν μόνο
για δx και δy που ικανοποιούν την εξίσωση του δεσμού

Όλα τα σημεία που ενδιαφέρουν ικανοποιούν την εξίσωση δεσμού: $f(x,y) = const$
και άρα η μικρή απόκλιση $x \to x + \delta x$ και $y \to y + \delta y$ θα αφήνει ίδια την $f(x,y)$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y = 0$$

για $\delta x, \delta y$ που ικανοποιούν το δεσμό

Πολ/ζω με μια τυχαία συνάρτηση **λ(t)** Πολλαπλαστιαστής Lagrange

και το αποτέλεσμα το προσθέτω στο ολοκλήρωμα δράσης δS:

$$\delta S = \int\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta x dt + \int\left(\frac{\partial L}{\partial y} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)\delta y dt = 0$$

Και λοιπόν?

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)\delta x dt + \int \left(\frac{\partial L}{\partial y} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right)\delta y dt = 0$$

Έστω ότι διαλέγουμε μια συνάρτηση $\lambda(t)$ ώστε ο συντελεστής του δx στο 1ο ολοκλήρωμα είναι μηδέν. Δηλαδή:

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}}$$

Αφού $\delta S = 0$ και το 1ο ολοκλήρωμα = 0 τότε και το 2ο ολοκλήρωμα = 0 και μάλιστα για οποιοδήποτε δy !!

[Θυμηθείτε ότι η εξίσωση του δεσμού περιορίζει τη μια από τις δύο μεταβλητές, π.χ. διαλέγοντας τη δy περιορίζει τη δx]

$$\frac{\partial L}{\partial y} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial y} + \lambda(t)\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}}$$

Έχουμε 2 τροποποιημένες εξισώσεις Lagrange για τις άγνωστες συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ αλλά 1 επιπλέον άγνωστο την $\lambda(t)$.

Η 3η εξίσωση έρχεται από το δεσμό: $\boxed{f(x,y) = const.}$

DONE

Μαθηματικό τέχνασμα ?

Έστω ότι η Lagrangian περιγράφει τη κίνηση της μάζας του εκκρεμούς:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - U(x,y)$$

Αντικαθιστώντας στη 1η τροποποιημένη εξίσωση Lagrange έχουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = m\ddot{x} \qquad \text{(A)}$$

Εξετάζοντας κάθε όρο της εξίσωσης:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = \sum F_x^{\varepsilon\xi}$$ Όλες οι δυνάμεις εκτός δεσμών

$$m\ddot{x} = F_x = \sum\left(F_x^{\varepsilon\xi} + F_x^{\delta\varepsilon\sigma\mu.}\right)$$ ολική δύναμη

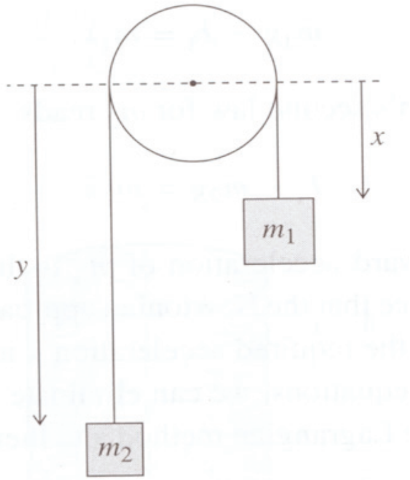
Επομένως η (A) δίνει:

$$\boxed{\lambda\frac{\partial f}{\partial x} = \sum F_x^{\delta\varepsilon\sigma\mu.}}$$ Δυνάμεις δεσμών

Ο πολ/στής Lagrange πολλαπλασιάζοντας την μερική παράγωγο της εξίσωσης του δεσμού δίνει την αντίστοιχη συνιστώσα της δύναμης του δεσμού

Παράδειγμα

Μηχανή Atwood



m_1 με συντεταγμένη x

m_2 με συντεταγμένη y

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 + m_1 g x + m_2 g y$$

Η εξίσωση του δεσμού: $f(x,y) = x + y = l$ (1)

Από την τροποποιημένη εξίσωση Lagrange έχουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Rightarrow m_1 g + \lambda = m_1\ddot{x} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \Rightarrow m_2 g + \lambda = m_2\ddot{y} \qquad (3)$$

Έχουμε 3 εξισώσεις και 3 αγνώστους, οπότε λύνουμε το σύστημα για x(t), y(t), λ(t)

Η (1) δίνει: $x + y = l \Rightarrow \ddot{x} = -\ddot{y}$

Οπότε παίρνουμε: $\ddot{x} = (m_1 - m_2)g/(m_1 + m_2)$

Συγκρίνοντας τις (2) και (3) με τις εξισώσεις του Newton: $m_1 g - T = m_1\ddot{x}$

οπότε: $\lambda = -T$ επειδή στην περίπτωση αυτή $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1$