ΦΥΣ 140 – Εισαγωγή στην Επιστημονική Χρήση Υπολογιστών

6η Εργασία **Επιστροφή: 25/11/2023**

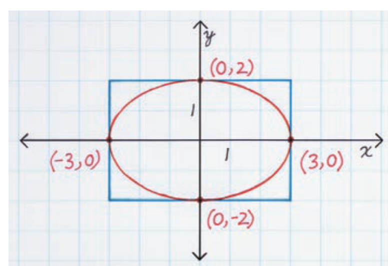
<u>Υπενθύμιση:</u> Οι εργασίες πρέπει να επιστρέφονται με e-mail στο fotis@ucy.ac.cy που θα στέλνετε από το πανεπιστημιακό σας λογαριασμό το αργότερο μέχρι την ημερομηνία που αναγράφεται.

Ως subject του e-mail θα πρέπει να αναγράφεται την εργασία (username_phy140_hmX όπου X ο αριθμός της εργασίας)

Κάθε αρχείο που επισυνάπτετε (attach) στο e-mail σας θα πρέπει να έχει το όνομα στη μορφή username_hmX.tgz όπου username είναι το username του e-mail σας και X ο αριθμός της εργασίας. Επίσης σαν πρώτο σχόλιο μέσα σε κάθε file που περιέχει το πρόγραμμά σας θα πρέπει να αναφέρεται το ονοματεπώνυμό σας. Οι εργασίες είναι ατομικές και πανομοιότυπες εργασίες δε θα βαθμολογούνται. Για να κάνετε ένα tgz file (ουσιαστικά tar zipped file) θα πρέπει να δώσετε στο terminal την εντολή tar -czvf username_hmX.tgz *.py όπου py είναι όλα τα py files των προγραμμάτων σας.

1. (**α**) Χρησιμοποιήστε ένα πρόγραμμα σε *Python* για να δείξετε ότι αν επιλέξετε τυχαίους αριθμούς ομοιόμορφα κατανεμημένους στο διάστημα $[0,1)$ έως ότου το άθροισμά τους γίνει μεγαλύτερο από 1, τότε η αναμενόμενη τιμή (μέσος όρος) του πλήθους των τυχαίων αριθμών που χρησιμοποιήθηκαν είναι ίση με $e = 2.7182818285$.
(**β**) Να κάνετε το ιστόγραμμα της κατανομής των τυχαίων αριθμών που ικανοποιούν την συνθήκη του αθροίσματος του (α) υπο-ερωτήματος για 1 000 000 προσπάθειες.

2. Μια έλλειψη ορίζεται από την εξίσωση $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, όπου α και b ο μεγάλος και μικρός άξονάς της. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Monte Carlo να βρεθεί το εμβαδό της έλλειψης του διπλανού σχήματος που έχει α = 3 και b = 2. Χρησιμοποιείστε 10, 100, 1000, 10000, 100000 και 1000000 προσπάθειες και τυπώστε τα αποτελέσματα κάθε διαφορετικής περίπτωσης σε ένα αρχείο το οποίο ονομάστε *area.dat* με τη μορφή 3 στηλών <Αριθμός προσπαθειών> <Εμβαδό> <Αναλυτική – Αριθμητική> όπου η αναλυτική τιμή είναι το εμβαδό της έλλειψης υπολογιζόμενο θεωρητικά και που είναι ίσο με $A_{ελ.} = \pi \cdot a \cdot b$



3. (α) Να γράψετε μια συνάρτηση που προσομοιώνει τη ρίψη *n* ζαριών. Ως όρισμα της συνάρτησής σας θα πρέπει να είναι ο αριθμός των ζαριών που ρίχνονται κάθε φορά. Η συνάρτηση θα πρέπει να επιστρέφει το άθροισμα των *n* ζαριών.
(β) Ρίξτε 2 ζάρια 10000 φορές κρατώντας το άθροισμα των ζαριών σε κάποιον array για κάθε ρίψη. Χρησιμοποιήστε το πρόγραμμά σας για να κατασκευάσετε ένα histogram που δείχνει το αποτέλεσμα των 10000 ρίψεων των ζαριών. Θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε την συνάρτηση *hist* της *matplotlib* βιβλιοθήκης και να θέσετε τον αριθμό των υποδιαστημάτων να ισούται με τον αριθμό των δυνατών αποτελεσμάτων της ρίψης των δύο ζαριών το οποίο είναι οτιδήποτε μεταξύ 2 και 12.
(γ) Θα πρέπει να επαναλάβετε τα προηγούμενα για τη ρίψη 3 ζαριών. Τα histograms θα πρέπει να τα αποθηκεύσετε σε κατάλληλα pdf αρχεία τα οποία θα πρέπει να επιστρέψετε.

4. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μέσης τιμής της Monte Carlo ολοκλήρωσης να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi sinxdx$ (στο διάστημα $x \in [0.\pi]$). Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να υπολογίζει την τιμή του ολοκληρώματος για αρχικά δύο σημεία τα οποία διαδοχικά αυξάνουν γεωμετρικά (2, 4, 8, ...) μέχρι μέγιστη τιμή 2^{17}. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει για κάθε περίπτωση σημείων την τιμή του ολοκληρώματος καθώς και το σφάλμα του υπολογισμού. Το σφάλμα θα το υπολογίσετε από τη ακόλουθη σχέση:

$$err = (b-a)\sqrt{\frac{\langle f(x)^2\rangle - \langle f(x)\rangle^2}{N}}$$

όπου *N* είναι ο αριθμός των σημείων, b και α τα όρια ολοκλήρωσης και $\langle f(x)\rangle$ δηλώνει τη μέση τιμή της συνάρτησης ολοκλήρωσης ως προς τον αριθμό των σημείων ολοκλήρωσης. Τα αποτελέσματα του προγράμματός σας θα πρέπει να τα αποθηκεύσετε σε ένα αρχείο με όνομα *integral.dat* και στο οποίο θα πρέπει να υπάρχουν 3 στήλες, αριθμό προσπαθειών, τιμή ολοκληρώματος και αντίστοιχο σφάλμα.

5. Σε πολλές κλιματολογικές μελέτες όπου χρειάζεται να υπολογιστεί το γενικό κλίμα του πλανήτη, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της προσομοίωσης Monte Carlo. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο αυτή για να προσδιορίσουμε την γενική μέση θερμοκρασία του πλανήτη και τη ποσότητα ηλιακού φωτός το οποίο πέφτει σε ζώνες που περικλείονται μεταξύ δυο διαδοχικών γραμμών γεωγραφικού πλάτους (το γεωγραφικό πλάτος είναι η γωνιακή απόσταση ενός τόπου από τον ισημερινό. Ο ισημερινός έχει γεωγραφικό πλάτος 0^o και ο βόρειος πόλος 90^o. Κάθε γραμμή γεωγραφικού πλάτους είναι ένας κύκλος παράλληλος προς τον κύκλο που περνά από τον ισημερινό).

Για να υπολογίσουμε τη παγκόσμια μέση τιμή της θερμοκρασίας, θα χρειαστεί να βρούμε τη μέση της θερμοκρασίας ως προς κάθε ζώνη γεωγραφικού πλάτους. Ωστόσο αυτό θα ήταν λάθος αφού το εμβαδό γης που περικλείεται σε κάθε γεωγραφική ζώνη δεν είναι σταθερό και ελαττώνεται καθώς κινούμαστε σε ζώνες πιο κοντά στους δυο πόλους της γης. Για να βρούμε την παγκόσμια μέση τιμή της θερμοκρασίας θα πρέπει να σταθμίσουμε (ζυγίσουμε) τη μέση θερμοκρασία κάθε γεωγραφικής ζώνης με το εμβαδό της γης που περικλείεται στη ζώνη αυτή. Αυτό μπορεί να γίνει ολοκληρώνοντας αναλυτικά, αλλά μπορεί να γίνει και με τη χρήση μεθόδων ολοκλήρωσης Monte Carlo.

Για απλούστευση του προβλήματος, θεωρήστε τη γη σε μορφή σφαίρας με ακτίνα $R = 6400km$. (*Υπενθύμιση:* η εξίσωση της σφαίρας δίνεται από τη σχέση $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$). Θεωρήστε ακόμα ότι υπάρχουν 9 ζώνες γεωγραφικού πλάτους 10^o η κάθε μια. Η $1^η$ ζώνη των 10 μοιρών ορίζεται από τον Ισημερινό και τη πρώτη γεωγραφική γραμμή (γεωγραφικό πλάτος 10^o), ενώ η $9^η$ ζώνη ορίζεται μεταξύ του βόρειου πόλου και της γραμμής γεωγραφικού πλάτους 80^o.

(**α**) Θα πρέπει να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει με τη μέθοδο ολοκλήρωσης Monte Carlo, το ποσοστό εμβαδού της επιφάνειας της γης που περικλείεται σε κάθε μια από τις 9 γεωγραφικές ζώνες. Τα σημεία που χρησιμοποιούνται θα πρέπει να βρίσκονται στην επιφάνεια της σφαίρας με ακρίβεια 1%. Θα πρέπει το πρόγραμμά σας να υπολογίζει (χρησιμοποιώντας απλή τριγωνομετρία) σε ποια γεωγραφική ζώνη αντιστοιχεί το κάθε τυχαίο σημείο που εξετάζετε. Για τον υπολογισμό σας θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε 10^6 συνολικά προσπάθειες.

(**β**) Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει στο τέλος των υπολογισμών τα αποτελέσματά σας σε μορφή πίνακα (χρησιμοποιώντας κατάλληλο format) ως ακολούθως:

Total generated Points: xxxxx

bbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbb *Summary for Zones*

Low angle bbbbb *Upper angle* bbbbb *Sim. Fractional Area* bbbbb *Sfalma* bbbbb *Theor. Fraction*

xxxx *xxxxx* *xxxxx* *xxxx* *xxxxxx*

όπου xxxx αντιπροσωπεύει κάποια τιμή, και bbbbb αντιπροσωπεύουν τον αριθμό των κενών θέσεων μεταξύ των δεδομένων που γράφετε. Η θεωρητικά αναμενόμενη τιμή του ποσοστού εμβαδού κάθε ζώνης δίνεται από τη σχέση: $\sin(\theta_{i+1} \times \pi/180) - \sin(\theta_i \times \pi/180)$ όπου θ_{i+1} και θ_i τα γεωγραφικά πλάτη των γραμμών που ορίζουν κάθε ζώνη. Το σφάλμα υπολογίζεται από τη σχέση: $\sqrt{\frac{fractional\ Area}{N_{tot}}}$ όπου *fractional Area* είναι το ποσοστό εμβαδού που υπολογίζετε για κάθε ζώνη και N_{tot} ο συνολικός αριθμός σημείων που χρησιμοποιήσατε.

(γ) Αν οι μέσες θερμοκρασίες κάθε ζώνης είναι 30°C, 28°C, 23°C, 25°C, 20°C, 16°C, 11°C, 5°C και -5°C (από την 1η έως την 9η) να βρεθεί η μέση θερμοκρασία της γης.

6. Ένα κουτί περιέχει 100 μπάλες αριθμημένες από 1 έως 100. Τυχαία επιλέγετε M από τις μπάλες αυτές ($1 < M < 100$) και αθροίζετε τα νούμερα που αντιστοιχούν στις M αυτές μπάλες. Να βρεθεί η πιθανότητα το άθροισμα τους να είναι μεγαλύτερο από 500. Θα πρέπει να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο δέχεται σαν παράμετρο εισόδου τον αριθμό των μπαλών M που θα επιλέξετε, και τον αριθμό των πειραμάτων που θα προσομοιώσετε. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει σαν αποτέλεσμα την πιθανότητα το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο από το επιθυμητό αποτέλεσμα. Το πρόγραμμα θα πρέπει να τυπώνει ένα μήνυμα στην περίπτωση που κάποια εισαγωγή στοιχείων δεν είναι σωστή.

Προσέξτε ότι σε κάθε πείραμα επιλέγετε *M* μπάλες ταυτόχρονα. Το αποτέλεσμα θα ήταν διαφορετικό αν επιλέγατε τις μπάλες μια προς μια και μετά τις τοποθετούσατε και πάλι στο κουτί. Επομένως κάθε νούμερο επιλέγεται μια και μόνο φορά.