Και τώρα?

- Ξέρουμε τις εξισώσεις της κίνησης για το r_i

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_j \mathbf{F}_{ji}$$

- Ξέρουμε (οκ θα μάθουμε) πως να συμπεριλαμβάνουμε δεσμούς πηγαίνοντας σε γενικευμένες συντεταγμένες

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, t)$$

- Πως μπορούμε να μετασχηματίσουμε την εξίσωση κίνησης στις γενικευμένες συντεταγμένες;

→ **Εξισώσεις Lagrange**

Γιατί όμως δεσμοί ?

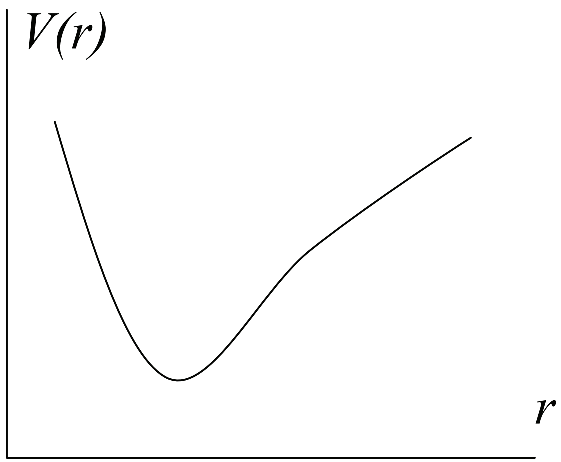
- Οι δεσμοί είναι μια ιδεατή κλασική σύλληψη
  - Στην Q.M. τίποτα δεν είναι τέλεια περιορισμένο: ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

- Πόσο χρήσιμο είναι να αλλάξουμε μεταβλητές ή να κινηθούμε από το ένα set στο άλλο?

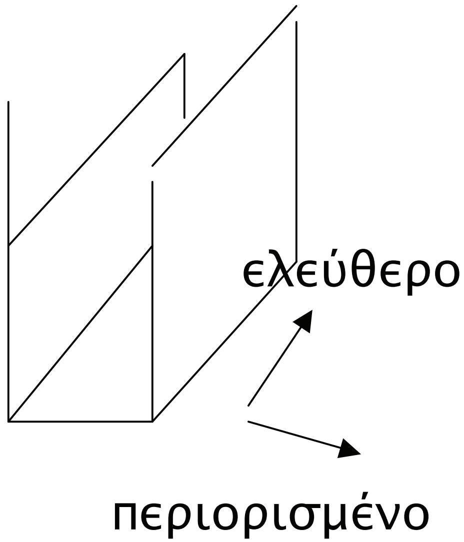
Πολύ χρησιμότερο απ' ότι φαίνεται

Δεσμοί και Δύναμη

- Ένας ολόνομος δεσμός είναι μια απείρως ισχυρή δύναμη
  - Ή όπως λέμε στη Q.M. ένα απείρως υψηλό πηγάδι δυναμικού
- Στην πραγματικότητα βέβαια δεν είναι ακριβώς έτσι
  - Π.χ. Το ηλεκτρόνιο στο άτομο του υδρογόνου



Το ηλεκτρόνιο αισθάνεται ισχυρή ακτινική δύναμη ενώ μπορεί να κινηθεί ελεύθερα γύρω από το πυρήνα



Η δύναμη συνοχής κάνει την διεύθυνση r ξεχωριστή

Δύναμη και συμμετρία

- Χωρίς δυνάμεις, όλα τα συστήματα συντεταγμένων είναι ισοδύναμα
  - x-y-z το πιο εύκολο
- Οι δυνάμεις σπάνε την συμμετρία
  - κάποια συστήματα συντεταγμένων δουλεύουν καλύτερα απ' άλλα
- Οι γενικευμένες συντεταγμένες προσφέρουν ένα φυσικό τρόπο να καταλάβουμε και να λύσουμε ένα σύστημα με τέτοιες δυνάμεις
- Οι δεσμοί είναι extreme περιπτώσεις

Εξισώσεις Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$$

Συνταγή

Κινητική ενέργεια

$$L\left(q,\dot{q},t\right)\equiv T-V$$

Δυναμική ενέργεια

Lagrangian

✓ Εκφράζουμε $L = T - V$ ως προς τις γενικευμένες συντεταγμένες $\{q_j\}$, τις παραγώγους τους ως προς το χρόνο $\{\dot{q}_j\}$ και χρόνο t
- Το δυναμικό $V = V(q,t)$ πρέπει να υπάρχει
- π.χ. Όλες οι δυνάμεις πρέπει να 'ναι συντηρητικές

Ένα γρήγορο παράδειγμα

Σημείο σε ευθεία

- Το υλικό σημείο κινείται στον x-άξονα $x = x(t), \quad y = 0, \quad z = 0$
- Κινητική και δυναμική ενέργεια

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \qquad V = V(x) \qquad \Rightarrow \qquad L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)\right)}{\partial \dot{x}}\right] = \dfrac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} \\ \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = \dfrac{\partial\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)\right)}{\partial x} = -\dfrac{\partial V(x)}{\partial x} \end{array} \right\} \; m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Ισοδύναμη με την εξίσωση του Newton δεδομένου ότι $F_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x}$