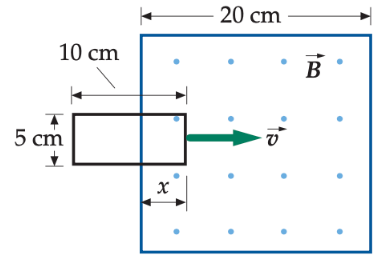
ΦΥΣ. 112

8ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή Παρασκευή 18.11.2022**

1. Ένας ορθογώνιος βρόχος έχει διαστάσεις $10.0cm \times 5.0cm$ και αντίσταση $R = 2.5\Omega$. Ο βρόχος κινείται με σταθερή ταχύτητα $2.4cm/s$ σε μια περιοχή με ομογενές μαγνητικό πεδίο $1.7T$ το οποίο έχει φορά προς το εξωτερικό της σελίδας, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το μπροστινό τμήμα του βρόχου εισέρχεται στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου τη χρονική στιγμή $t = 0$. (α) Κάντε το γράφημα της μαγνητικής ροής που διαπερνά το βρόχο συναρτήσει του χρόνου *t*. (β) Κάντε το γράφημα της επαγόμενης ΗΕΔ καθώς και του ρεύματος που διαρρέει το βρόχο συναρτήσει του χρόνου *t*. Αγνοήστε οποιαδήποτε αυτεπαγωγή του βρόχου και κατασκευάστε το γράφημα ώστε να συμπεριλαμβάνει το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 16s$.



(α) Ο χρόνος που απαιτείται ώστε ο βρόχος να εισέλθει στην περιοχή με το ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι:

$$t = \frac{l_{πλευρά}}{v} = \frac{10cm}{2.4cm/s} \Rightarrow t = 4.17s$$

Υπολογίζουμε τη ροή που διαρρέει την επιφάνεια του βρόχου (μήκος l, πλάτος w)

$$\left.\begin{aligned} \Phi_m &= NBA = NBw \cdot l \\ l &= vt, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Phi_m = NBwvt \Rightarrow \Phi_m = N(1.7T)(0.05m)(0.024)t \Rightarrow \boxed{\Phi_m = (2.04\,mWb/s)t}$$

t ο χρόνος να εισέλθει στο πεδίο

Ο βρόχος αρχίζει να εξέρχεται από το μαγνητικό πεδίο, όταν θα έχει καλύψει μήκος ίσο με την πλευρά του (αφότου έχει εισέλθει ολόκληρο στην περιοχή του πεδίου). Δηλαδή: $t_{εξ} = \frac{l_{πλευρά}}{v} = \frac{10cm}{2.4cm/s} \Rightarrow t_{εξ} = 4.17s$

Επομένως θα αρχίσει να εξέρχεται $8.33s$ $(t_{εισ.} + t_{εξ})$ αφότου έχει αρχίσει να εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο.

Η ροή που διαπερνά τον βρόχο κατά τη διάρκεια των $4.17 < t < 8.33s$ θα είναι: $\boxed{\Phi_m = NBA = NBlw = (1.7T)(0.10m)(0.050m) = 8.5mWb}$

Ο χρόνος που χρειάζεται ώστε η αριστερή πλευρά του βρόχου να εξέλθει από το μαγνητικό πεδίο, είναι $t = l_{πλευρά}/v = \frac{10cm}{2.4cm} \Rightarrow t = 4.17sec$

επομένως $t_{ολ} = 12.51sec$

Η μαγνητική ροή στο διάστημα $8.33 < t < 12.51s$ θα είναι:

Καθώς ο βρόχος εξέρχεται η ροή αρχίζει να ελαττώνεται γραμμικά από την μέγιστη τιμή που είχε όταν βρίσκονταν ολόκληρος ο βρόχος μέσα στο μαγνητικό πεδίο, έως την τιμή ϕ όταν η αριστερή πλευρά εξέλθει από το μαγνητικό πεδίο:

$$\phi_m = mt + b \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 8.33\,s & \phi_m = 8.5\,mW \Rightarrow 8.5 = 8.33 \cdot m + b \quad (1) \\ t = 12.51\,s & \phi_m = 0 \Rightarrow 0 = 12.51 m + b \quad (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow b = -12.51 m$ και αντικαθιστώντας στην (1) $\Rightarrow 8.5 = 8.33m - 12.51m \Rightarrow$

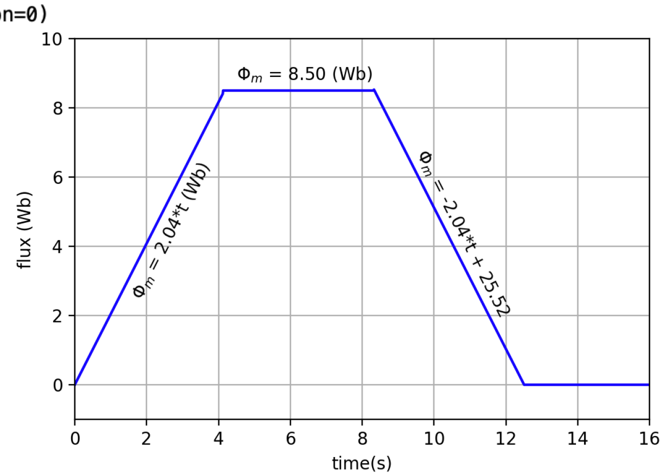
$\Rightarrow -4.18 m = 8.5 \Rightarrow m = \frac{8.5}{-4.18} \Rightarrow \underline{m = -2.04\,mWb/s}$

Επομένως $b = -12.51 * (-2.04\,mW/s) \Rightarrow \underline{b = 25.52\,mWb}$.

- Άρα η ροή δίνεται από την εξίσωση $\boxed{\phi_m = (-2.04\,mWb/s)t + 25.52\,mWb}$

```
#!/usr/bin/python3
import matplotlib.pyplot as plt
t=[0.01*k for k in range(1600)]
fl=[2.04*tim if tim<=4.12 else 8.50 if tim<8.33 else -2.04*tim+25.52 \
    if tim< 12.52 else 0.0 for tim in t]

plt.figure(figsize=(6,4))
plt.plot(t,fl,'b-')
plt.xlabel('time(s)')
plt.ylabel('flux (Wb)')
plt.ylim(-1,10)
plt.xlim(0,16)
plt.text(1.5,2.5,r'$\Phi_m$ = 2.04*t (Wb)',rotation=63)
plt.text(9.4,2,r'$\Phi_m$ = -2.04*t + 25.52',rotation=-63)
plt.text(4.5,8.8,r'$\Phi_m$ = 8.50 (Wb)',rotation=0)
plt.grid(True)
plt.show()
```



(β) Από τον νόμου του Faraday μπορούμε να βρούμε την επαγωγική τάση:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

Για $0 < t < 4.17s$ $\quad \mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\left[(2.04\, mWb/s)t\right] = -2.04\, mV$

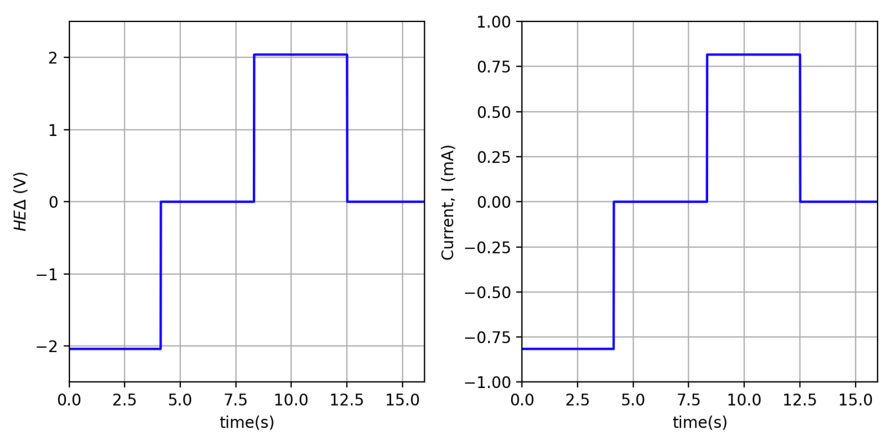
Για $4.17 < t < 8.33s$ $\quad \mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\left(8.50\, mWb\right) = 0.\ V$

Για $8.33 < t < 12.5s$ $\quad \mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\left[(-2.04\, mWb/s)t + 25.5\, mWb\right] = +2.04\, mV$

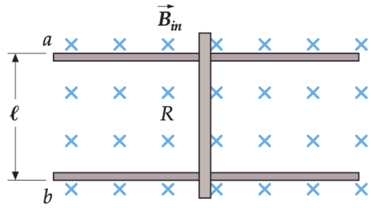
Για $t > 12.5s$ $\quad \mathcal{E} = 0$ αφού το πλαίσιο είναι εκτός του μαγνητικού πεδίου

Το ρεύμα θα είναι: $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ και επομένως θα ακολουθεί ακριβώς την ίδια κατανομή όπως και η ηλεκτρεγερτική δύναμη επαγωγής

```python
#!/usr/bin/python3
import matplotlib.pyplot as plt
t=[0.01*k for k in range(1600)]
HED=[-2.04 if tim<=4.12 else 0 if tim<8.33 else +2.04 if tim< 12.52 \
     else 0.0 for tim in t]
R = 2.5
I=[-2.04/R if tim<=4.12 else 0 if tim<8.33 else +2.04/R if tim< 12.52 \
   else 0.0 for tim in t]
plt.figure(figsize=(8,4))
plt.subplot(1,2,1)
plt.plot(t,HED,'b-')
plt.ylim(0.,2.5)
plt.xlim(0.,16.0)
plt.xlabel('time(s)')
plt.ylabel(r'$HE\Delta$ (V)')
plt.ylim(-2.5,2.5)
plt.xlim(0,16)
plt.grid(True)
plt.subplot(1,2,2)
plt.plot(t,I,'b-')
plt.ylim(-1.,1.)
plt.xlim(0.,16.0)
plt.xlabel('time(s)')
plt.ylabel(r'Current, I (mA)')
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```



2. Το διπλανό σχήμα παρουσιάζει μία ράβδο μάζας *m* και αντίστασης *R* που μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε δύο παράλληλες οριζόντιες ράγες αμελητέας ωμικής αντίστασης. Η απόσταση μεταξύ των ραγών είναι *l.* Μία ιδανική μπαταρία ΗΕΔ $\mathcal{E}$, είναι συνδεδεμένη στα σημεία α, b με τέτοιο τρόπο ώστε το ρεύμα που διαρρέει την ράβδο να έχει φορά προς τα κάτω. Η ράβδος αφήνεται να κινηθεί ελεύθερα από την κατάσταση της ηρεμίας τη χρονική στιγμή $t = 0$. (α) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στη ράβδο συναρτήσει της ταχύτητας της ράβδου. (β) Δείξτε ότι η ταχύτητα της ράβδου πλησιάζει μια οριακή ταχύτητα και βρείτε την ταχύτητα αυτή. (γ) Βρείτε το ρεύμα που διαρρέει τη ράβδο όταν η ράβδος κινείται με την οριακή ταχύτητα.



(α) Η δύναμη που ανασκείσεται στη ράβδο εξαιτίας του ρεύματος που την διαρρέει καθώς κινείται μέσα στο μαγνητικό πεδίο, θα είναι:

$$\left.\begin{aligned} F_m &= I\ell B \\ \text{Αλλά}\quad I &= \frac{\mathcal{E} - Bv\ell}{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_m = \frac{\mathcal{E} - Bv\ell}{R}\ell B = \boxed{\frac{B\ell}{R}\left(\mathcal{E} - Bv\ell\right) = F_m}$$

(β) Θεωρούμε ότι η κίνηση της ράβδου προς τα δεξιά είναι στην +x-διεύθυνση:

Επομένως η δύναμη θα είναι:

$$F_m = ma \Rightarrow \frac{B\ell}{R}\left(\mathcal{E} - Bv\ell\right) = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{B\ell}{mR}\left(\mathcal{E} - Bv\ell\right)$$

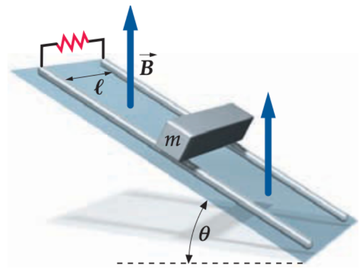
Αλλά, η ταχύτητα αυξάνει καθώς $dv/dt \to 0$ (πλησιάζουμε οριακή ταχύτητα)

όταν $\mathcal{E} - Bv\ell \to 0$. Επομένως: $\frac{B\ell}{mR}\left(\mathcal{E} - Bv\ell\right) = 0 \Rightarrow \mathcal{E} - Bv_{\varphi}\ell = 0 \Rightarrow \boxed{v_{\varphi} = \frac{\mathcal{E}}{B\ell}}$

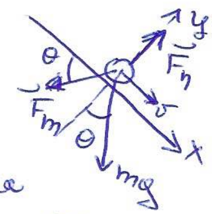
(γ) Αν αντικαταστήσουμε το τελευταίο αποτέλεσμα στην εξίσωση που δίνει το ρεύμα θα έχουμε:

$$I_{\varphi} = \frac{\mathcal{E} - \cancel{B}\frac{\mathcal{E}}{\cancel{B\ell}}\cancel{\ell}}{R} \Rightarrow \boxed{I_{op} = 0}$$

3. Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται μια αγώγιμη ράβδος η οποία έχει μάζα m και αμελητέα ωμική αντίσταση. Η ράβδος μπορεί να γλιστρά χωρίς τριβές κατά μήκους δύο παράλληλων λείων ραγών αμελητέας ωμικής αντίστασης που σχηματίζουν γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση. Υπάρχει μαγνητικό πεδίο με φορά προς τα πάνω όπως φαίνεται στο σχήμα. (α) Δείξτε ότι υπάρχει μία δύναμη που αντιτίθεται στην κίνηση με φορά προς τα πάνω τμήμα του κεκλιμένου επιπέδου και μέτρο ίσο με $F = B^2 l^2 \upsilon \cos^2\theta / R$. (β) Δείξτε ότι η οριακή ταχύτητα της ράβδου δίνεται από την σχέση: $\upsilon_o = mgRsin\theta / (B^2 l^2 \cos^2\theta)$.



Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος είναι:



(α)

Η δύναμη $F_m = BIl$ όπου I το ρεύμα που επάγεται στη ράβδο εξαιτίας της κίνησής της στο μαγνητικό πεδίο.

Το ρεύμα υπολογίζεται από τον νόμο του Ohm και την επαγόμενη τάση σύμφωνα με το νόμο του Faraday: $\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\vec{B}\cdot d\vec{A}}{dt} = B\frac{l\,dx}{dt}\cos\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{E} = Bl\upsilon\cos\theta \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Bl\upsilon\cos\theta}{R}$

Αντικατάσταση στην εξίσωση της δύναμης: $F_m = \frac{B^2 l^2 \upsilon}{R}\cos\theta$.

Η συνιστώσα της δύναμης F_m στην x-διεύθυνση είναι: $F_m\cos\theta$ με φορά προς τα πάνω. Το μέτρο είναι $\boxed{F_m^x = \frac{B^2 l^2 \upsilon\cos^2\theta}{R}}$

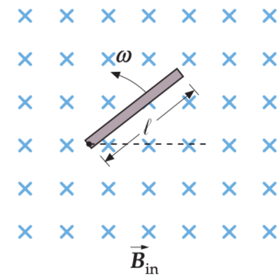
(β) Η συνισταμένη δύναμη κατά μήκος του x-άξονα θα είναι:

$\Sigma F_x = mg\sin\theta - F_m^x = ma_x = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow mg\sin\theta - \frac{B^2 l^2 \upsilon\cos^2\theta}{R} = m\frac{d\upsilon}{dt}$

Για οριακή ταχύτητα $a_x = 0$ ή υ=σταθ. Επομένως θα έχουμε:

$mg\sin\theta = \frac{B^2 l^2 \upsilon\cos^2\theta}{R} \Rightarrow \boxed{\upsilon = mg\sin\theta R / B^2 l^2 \cos^2\theta}$

4. Μία αγώγιμη ράβδος μήκους l περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, ως προς το ένα άκρο της, σε ένα επίπεδο κάθετο σε ομογενές μαγνητικό πεδίο B, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. (α) Δείξτε ότι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των άκρων της ράβδου είναι ίση με $\frac{1}{2}B\omega l^2$. (β) Έστω ότι η γωνία θ που σχηματίζει η ράβδος με την οριζόντια διεύθυνση που φαίνεται με την διακεκομμένη γραμμή περιγράφεται από την εξίσωση $\theta = \omega t$. Δείξτε ότι το εμβαδό της επιφάνειας που σαρώνει η ράβδος το χρονικό διάστημα t είναι $\frac{1}{2}l^2\theta$. (γ) Υπολογίστε τη μαγνητική ροή που διαπερνά την επιφάνεια αυτή και χρησιμοποιήστε τον νόμο του Faraday, $\mathcal{E} = -d\Phi_m/dt$ για να δείξετε ότι η κινητική ΗΕΔ δίνεται από την εξίσωση $\frac{1}{2}B\omega l^2$.



(α) Από την ΗΕΔ λόγω κίνησης της ράβδου, μπορούμε να γράψουμε την ΗΕΔ που επάγεται σε ένα τμήμα της ράβδου dr, το οποίο βρίσκεται σε απόσταση r από το σημείο περιστροφής:

$d\mathcal{E} = B r d\upsilon = B r \omega dr$

Ολοκληρώνουμε ως προς το μήκος της ράβδου $r=0$, έως $r=l$

$\Rightarrow \mathcal{E} = \int_0^l B r \omega dr \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2}B r \omega l^2}$

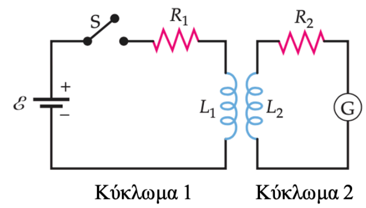
(β) Από τον νόμο του Faraday έχουμε: $|\mathcal{E}| = \frac{d\Phi_m}{dt}$

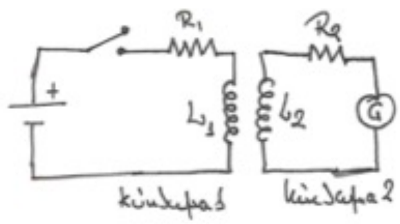
Αλλά $dA = r\Theta dr \Rightarrow A = \Theta\int_0^l r dr = \frac{1}{2}\Theta l^2$

$\Rightarrow |\mathcal{E}| = \frac{d}{dt}(BA) = \frac{d}{dt}\left(B\frac{1}{2}\Theta l^2\right)$

(γ) Από την τελευταία σχέση έχουμε: $|\mathcal{E}| = \frac{1}{2}B l^2 \frac{d\Theta}{dt} \Rightarrow \boxed{|\mathcal{E}| = \frac{1}{2}B l^2 \omega}$

5. Στο διπλανό σχήμα, το κύκλωμα 2 έχει ολική αντίσταση 300Ω. Αφού κλείσει ο διακόπτης S, το ρεύμα στο κύκλωμα 1 φθάνει στη τιμή των 5.00A μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα. Ένα φορτίο 200μC περνά από το γαλβανόμετρο στο κύκλωμα 2 κατά το χρονικό διάστημα που το ρεύμα στο κύκλωμα 1 αυξάνει. Βρείτε την αμοιβαία επαγωγή μεταξύ των δύο πηνίων.





Από το νόμο του kirchhoff για τους βρόχους στο 2ο κύκλωμα μπορούμε να συσχετίσουμε την διαφορά δυναμικού στο πηνίο L_2 με την διαφορά δυναμικού στην R_2

Θα έχουμε: $M\frac{dI_1}{dt} + L_2\frac{dI_2}{dt} - I_2R_2 = 0 \Rightarrow M\,dI_1 + L_2\,dI_2 - R_2 I_2\,dt = 0$

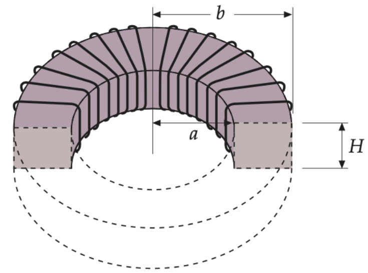
Ολοκληρώνουμε τη σχέση αυτή από $t=0$ έως $t=\infty$ οπότε έχουμε:

$$\int_0^{\infty} M\,dI_1 + \int_0^{\infty} L_2\,dI_2 - R_2\int_0^{\infty} I_2\,dt = 0 \Rightarrow M I_{1\infty} + L_2 I_{2\infty} - R_2 Q = 0$$

Επειδή το ρεύμα I_2 για $t=\infty$ είναι μηδέν, θα έχουμε ότι $M I_{1\infty} = R_2 Q \Rightarrow M = \frac{R_2 Q}{I_{1\infty}}$

Αντικατάσταση θα δώσει: $M = \frac{(300\Omega)(2\times10^{-4}C)}{5.0A} \Rightarrow \boxed{M = 12.0mH}$

6. Δείξτε ότι η αυτεπαγωγή (ή απλά επαγωγή) ενός τοροειδούς μαγνήτη με ορθογώνια διατομή, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, δίνεται από την εξίσωση: $L = \mu_o N^2 \frac{H\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi}$, όπου N είναι το πλήθος των σπειρών του τοροειδούς πηνίου, α και b είναι η εσωτερική και εξωτερική ακτίνα του τοροειδούς ενώ H είναι το ύψος του σωληνοειδούς.



Από το ορισμό της αυτεπαγωγής ενός σωληνοειδούς έχουμε: $\boxed{L = \frac{N\phi_\mu}{I}}$ (1)

Από τον νόμο του Ampere για μια κλειστή καμπύλη ακτίνας r, $a<r<b$

θα πάρουμε: $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\,2\pi r = \mu_o I_C$
Αλλά $I_C = NI$

$$\left.\begin{array}{l}\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\,2\pi r = \mu_o I_C \\ I_C = NI\end{array}\right\} \Rightarrow B\cdot 2\pi r = \mu_o N I \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_o N I}{2\pi r}}$$

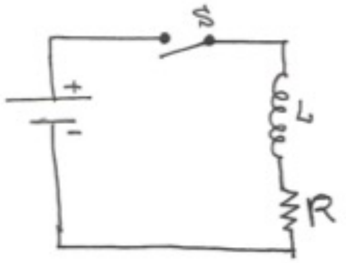
Η μαγνητική ροή σε ένα τμήμα ύψους H και εύρους dr είναι:

$$d\phi_m = B H\,dr \overset{(2)}{\Rightarrow} d\phi_m = \frac{\mu_o N I}{2\pi r} H\,dr \Rightarrow \phi_\mu = \int_a^b d\phi_\mu = \int_a^b \frac{\mu_o N I}{2\pi r} H\,dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi_\mu = \frac{\mu_o N I}{2\pi} H \int_a^b \frac{dr}{r} \Rightarrow \boxed{\phi_\mu = \frac{\mu_o N I}{2\pi} H \ln\frac{b}{a}} \quad (3)$$

Αντικατάσταση στην (1) της (3) θα δώσει: $\boxed{L = \frac{\mu_o I N^2}{2\pi} H \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

7. Ένα κύκλωμα αποτελείται από ένα πηνίο αυτεπαγωγής ίση με 5.00mH, εσωτερική αντίσταση ίση με 15.0Ω, μία ιδανική μπαταρία με ΗΕΔ ίση με 12V. Την χρονική στιγμή $t = 0$, ο διακόπτης κλείνει. Βρείτε την χρονική στιγμή κατά την οποία η ενέργεια χάνεται στο πηνίο ισούται με την μαγνητική ενέργεια που εναποτίθεται στο πηνίο.



Ο ρυθμός με τον οποίο έχουμε αποθήκευση της μαγνητικής ενέργειας στο πηνίο είναι:

$$\frac{dU_L}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}LI^2\right] = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}LI\frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{dU_L}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$$

Ο ρυθμός με τον οποίο, ισχύς καταναλώνεται στην αντίσταση είναι:

$$P = I^2R$$

Εξισώνοντας τις δύο ισχύς: $L\cancel{I}\frac{dI}{dt} = I^{\cancel{2}}R \Rightarrow \frac{1}{I}\frac{dI}{dt} = \frac{R}{L} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{I}\frac{dI}{dt} = \frac{1}{\tau}}$ (A)

Αλλά το ρεύμα είναι: $I = I_f\left(1-e^{-t/\tau}\right) \Rightarrow \frac{dI}{dt} = I_f\frac{d}{dt}\left(1-e^{-t/\tau}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} = -I_f e^{-t/\tau}\left(-\frac{1}{\tau}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{dI}{dt} = \frac{1}{\tau}I_f e^{-t/\tau}} \quad (B)$$

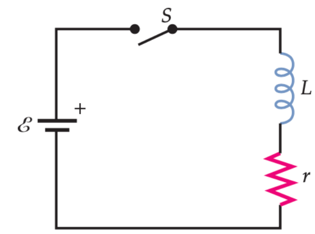
Αντικαθιστούμε την (B) στην (A) $\Rightarrow \frac{1}{I}\left(\frac{1}{\tau}I_f e^{-t/\tau}\right) = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \frac{\cancel{1}}{\cancel{\tau}}\cancel{I_f} e^{-t/\tau} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{\tau}}\cancel{I_f}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$

$$\Rightarrow e^{-t/\tau} = \left(1-e^{-t/\tau}\right) \Rightarrow 2e^{-t/\tau} = 1 \Rightarrow e^{-t/\tau} = \frac{1}{2} \Rightarrow -t/\tau = \ln(1/2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -t = \frac{L}{R}\ln(1/2) \Rightarrow t = -\frac{L}{R}\ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow t = -\frac{5.0mH}{15.0\Omega}\ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{5mH}{15\Omega}(0.693) \Rightarrow t = 0.231ms \Rightarrow \boxed{t = 231\mu s}$$

8. Στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος, έστω $\mathcal{E}_0 = 12.0V$, $R = 300\Omega$ και $L = 0.600H$. Ο διακόπτης κλείνει τη χρονική στιγμή $t = 0$. Κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος από $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = L/R$, βρείτε (α) το μέγεθος της ενέργειας που προσφέρεται από την μπαταρία. (β) το ποσό της ενέργειας που δόθηκε στην αντίσταση και (γ) το ποσό της ενέργειας μεταφέρθηκε στο πηνίο. *<u>Υπόδειξη:</u>* μπορείτε να βρείτε τους ρυθμούς μεταφοράς ενέργειας συναρτήσει του χρόνου και να ολοκληρώστε ως προς *t*.



(α) Ο ρυθμός παροχής ενέργειας από την μπαταρία είναι: $\frac{dE}{dt} = \mathcal{E}_0 I$

Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι: $I = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \mathcal{E}_0^2/R\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \Rightarrow dE = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\int_0^{\tau}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)dt \Rightarrow E = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\left(\tau - \left(-\tau e^{-1} + \tau\right)\right) \Rightarrow E = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\frac{\tau}{e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\frac{L}{Re} \Rightarrow E = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R^2}\frac{L}{e}$$

Αντικατάσταση αριθμητικών δεδομένων δίνει: $E = \frac{(12.0V)^2(0.6H)}{(3.0\Omega)^2 e} \Rightarrow \boxed{E = 3.53J}$

(β) Ο ρυθμός απώλειας ενέργειας στην αντίσταση είναι: $\frac{dE_R}{dt} = I^2 R = \left[\frac{\mathcal{E}_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right]^2 R$

$$\Rightarrow \frac{dE_R}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\left(1 - 2e^{-t/\tau} + e^{-2t/\tau}\right) \Rightarrow dE_R = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\left(1 - 2e^{-t/\tau} + e^{-2t/\tau}\right)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_R = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\int_0^{L/R}\left(1 - 2e^{-t/\tau} + e^{-2t/\tau}\right)dt \Rightarrow E_R = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\left(\frac{2\frac{L}{R}}{e} - \frac{\frac{L}{R}}{2} - \frac{\frac{L}{R}}{2e^2}\right) \Rightarrow$$

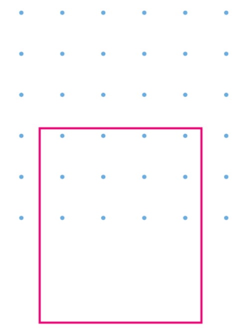
$$\Rightarrow E_R = \frac{\mathcal{E}_0^2 L}{R^2}\left(\frac{2}{e} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2}\right) \Rightarrow E_R = \frac{(12.0V)^2(0.6H)}{(3.0\Omega)^2}\left(\frac{2}{e} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2}\right) \Rightarrow \boxed{E_R = 1.61J}$$

(γ) Η ενέργεια στο πηνίο θα είναι: $U_L\left(t = \frac{L}{R}\right) = \frac{1}{2}L\, I^2\left(t = \frac{L}{R}\right) = \frac{1}{2}L\left[\frac{\mathcal{E}_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right]^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow U_L = \frac{1}{2}\frac{L\mathcal{E}_0^2}{R^2}\left(1 - e^{-1}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{(0.6H)(12.0V)^2}{(3.0\Omega)^2}\left(1 - e^{-1}\right)^2 \Rightarrow \boxed{U_L(t = \tau) = 1.92J}$$

Από (β) κ (γ) έχουμε $E = E_R + U_L = 1.61 + 1.92 = 3.53\,J = E$ ως από το (α)

9. Το ορθογώνιο πλαίσιο που φαίνεται στο διπλανό σχήμα αποτελείται από 80 σπείρες και έχει 25*cm* πλάτος και 30*cm* μήκος, και είναι τοποθετημένο μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης 0.14*T* το οποίο έχει κατεύθυνση προς το εξωτερικό της σελίδας. Το μισό της επιφάνειας του πλαισίου βρίσκεται στο εσωτερικό του μαγνητικού πεδίου. Η ωμική αντίσταση του πλαισίου είναι 24*Ω*. Βρείτε το μέτρο και διεύθυνση του επαγόμενου ρεύματος αν το πλαίσιο κινείται με ταχύτητα 2.0*m/s* (α) προς τα δεξιά και (β)προς το πάνω μέρος της σελίδας, (γ) προς τα αριστερά και (δ) προς το κάτω μέρος της σελίδας.



(α) Το μέτρο του επαγόμενου ρεύματος είναι: $I = \frac{|\mathcal{E}|}{R}$ (A)

Από το νόμο του Faraday έχουμε: $|\mathcal{E}| = \frac{d\Phi_M}{dt}$ (B)

Όταν το πλαίσιο κινείται προς τα δεξιά ή αριστερά δεν υπάρχει επαγόμενη τάση γιατί δεν υπάρχει αλλαγή στη μαγνητική ροή (έως ότου το πλαίσιο απομακρυνθεί από την περιοχή του μαγνητικού πεδίου). Επομένως θα έχουμε:

$$|\mathcal{E}| = \frac{d\Phi_m}{dt} = 0 \Rightarrow I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = 0.$$

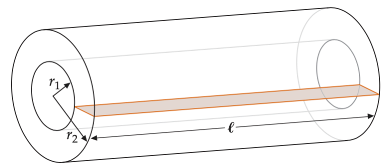
(β) Έστω x το μήκος της πλευράς του πλαισίου που βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο. Η μαγνητική ροή από την επιφάνεια του πλαισίου μέσα στο πεδίο θα είναι $\Phi_M = NBwx \Rightarrow \frac{d\Phi_m}{dt} = NBw\frac{dx}{dt} = 80\cdot 0.14T\cdot 0.25m\cdot 2.0 m/s$

$$\Rightarrow \frac{d\Phi_M}{dt} = 5.60V$$

Αντικατάσταση στην (A) θα δώσει $I = \frac{5.6V}{24\Omega} \Rightarrow I = 0.23A$ δεξιόστροφα

(δ) Όταν το πλαίσιο κινείται προς τα κάτω, η ροή προς τα έξω ελαττώνεται και το επαγόμενο ρεύμα θα είναι προς τη διεύθυνση που θα αυξάνει τη μαγνητική ροή. Το μέτρο της έντασης του ρεύματος θα είναι ίσο με αυτό που βρέθηκε στο ερώτημα (β) και με φορά αντίθετα της φοράς των δεικτών του ρολογιού (αριστερόστροφα), $I = 0.23A$

10. Ένα ομοαξονικό καλώδιο αποτελείται από δύο ομόκεντρους κυλίνδρους με πολύ λεπτά τοιχώματα και ακτίνες r_1 και r_2, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Υπολογίστε τη μαγνητική ροή που διαπερνά μια ορθογώνια επιφάνεια διαστάσεων l με $r_2 - r_1$ μεταξύ των αγωγών όπως φαίνεται στο σχήμα. Χρησιμοποιείστε την εξίσωση της ροής και του ρεύματος ($\Phi_m = LI$) για να δείξετε ότι η αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους του καλωδίου δίνεται από τη σχέση: $\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$.



Η αυτεπαγωγή είναι $L = \frac{\phi_m}{I}$ (1)

Θεωρούμε μια λωρίδα μήκους $l=1$ και εύρους dr σε απόσταση r από τον άξονα του καλωδίου. Η ροή διαμέσω αυτής της επιφάνειας θα είναι:

$d\phi_m = B dA = B l dr$ (2)

Από τον νόμο του Ampere, το μαγνητικό πεδίο σε απόσταση r από τον άξονα:

$2\pi r B = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (3)

Αντικατάσταση στη (2) δίνει: $d\phi_m = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l\, dr$ (4)

Ολοκλήρωση της (4) από $r=r_1$ έως $r=r_2$ δίνει:

$\phi_m = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \Rightarrow \phi_m = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$ (5)

Αντικατάσταση της (5) στην (1) θα δώσει: $L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \cancel{I}/\cancel{I}$

$\Rightarrow L = \frac{\mu_0}{2\pi} l \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$