# ΦΥΣ. 133
## ΕΡΓΑΣΙΑ # 1

**1.** Αποδείξτε ότι το μέτρο R του διανύσματος θέσης του κέντρου μάζας ως προς τυχαία αρχή συστήματος αναφοράς δίνεται από την εξίσωση:

$$M^2R^2 = M\sum_i m_i r_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_i m_j r_{ij}^2$$

Ξέρουμε ότι το διάνυσμα θέσης του ΚΜ δίνεται από την εξίσωση:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \qquad \text{όπου} \quad M = \sum_i m_i$$

Μπορούμε να γράψουμε επομένως το μέτρο του $\vec{R}$ ως:

$$R^2 = \vec{R}\cdot\vec{R} = \frac{1}{M^2}\left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right)\cdot\left(\sum_j m_j \vec{r}_j\right) = \frac{1}{M^2}\sum_{ij} m_i m_j (\vec{r}_i\cdot\vec{r}_j) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M^2R^2 = \sum_{ij} m_i m_j (\vec{r}_i\cdot\vec{r}_j)} \qquad (1)$$

Η άσκηση μας ζητά να δείξουμε ότι $M^2R^2 = M\sum_i m_i r_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{ij} m_i m_j r_{ij}^2$ (2)

Από (1) κ (2) επομένως βλέπουμε ότι πρέπει να δείξουμε ότι το δεξί μέλος της (1) είναι ίσο με το δεξί μέλος της (2) για να αποδείξουμε το ζητούμενο.

Το διάνυσμα $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j \Rightarrow r_{ij}^2 = (\vec{r}_i-\vec{r}_j)\cdot(\vec{r}_i-\vec{r}_j) \Rightarrow \boxed{r_{ij}^2 = r_i^2 + r_j^2 - 2\vec{r}_i\cdot\vec{r}_j}$

Αντικαθιστώντας στη (2) έχουμε: $M^2R^2 = M\sum_i m_i r_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{ij} m_i m_j r_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{ij} m_i m_j r_j^2 + \sum_{ij} m_i m_j (\vec{r}_i\cdot\vec{r}_j)$

$$\Rightarrow M^2R^2 = M\sum_i m_i r_i^2 - \frac{1}{2}\sum_j m_j \sum_i m_i r_i^2 - \frac{1}{2}\sum_i m_i \sum_j m_j r_j^2 + \sum_{ij} m_i m_j (\vec{r}_i\cdot\vec{r}_j) =$$

$$= \underbrace{\sum_j m_j}_{} \sum_i m_i r_i^2 - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_j m_j \sum_i}_{} m_i r_i^2 - \frac{1}{2}\sum_i m_i \sum_j m_j r_j^2 + \sum_{ij} m_i m_j (\vec{r}_i\cdot\vec{r}_j) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_j m_j \sum_i m_i r_i^2 - \frac{1}{2}\sum_i m_i \sum_j m_j r_j^2 + \sum_{ij} m_i m_j (\vec{r}_i\cdot\vec{r}_j) =$$

Οι 2 πρώτοι όροι όμως είναι ίδιοι αφού αντιπροσωπεύουν τα ίδια αθροίσματα

Επομένως: $M^2R^2 = \sum_{ij} m_i m_j (\vec{r}_i\cdot\vec{r}_j)$ που είναι η (1)

**2.** Θεωρήστε 2 ομόκεντρους κυλίνδρους, το ύψος των οποίων συμπίπτει με τον κατακόρυφο άξονα z και ακτίνες $R \pm \varepsilon$, όπου ε είναι πολύ μικρό. Ένα πολύ μικρό πούλι πάχους 2ε εισέρχεται ανάμεσα στους δύο κυλίνδρους και μπορεί να θεωρηθεί σαν υλικό σημείο το οποίο μπορεί να κινείται ελεύθερα σε σταθερή απόσταση από τον άξονα z. Αν χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ,$\phi$,z) για την θέση του, τότε το ρ είναι σταθερό, ρ=R, ενώ $\phi$ και z μεταβάλλονται ελεύθερα. Να γραφούν και να λυθούν η εξίσωση του 2$^{ου}$ νόμου του Newton για την γενική κίνηση του πουλιού, συμπεριλαμβανομένης και της επίδρασης της βαρύτητας. Περιγράψτε την κίνηση του πουλιού.

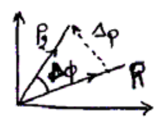
Σε κυλινδρικές συντεταγμένες, το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ δίνεται από:

$$\boxed{\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}} \quad (1)$$

Η ταχύτητα θα γραφεί: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho\hat{\rho} + z\hat{z}\right) = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\frac{d\hat{\rho}}{dt} + \dot{z}\hat{z} + z\frac{d\hat{z}}{dt}$

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{z}$ δεν αλλάζει διεύθυνση με το χρόνο και άρα $\frac{d\hat{z}}{dt} = 0$.

Αλλά $\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \dot{\phi}\hat{\phi}$ αφού




$\Delta\hat{\rho} \simeq \Delta\phi\,\hat{\phi} \Rightarrow \Delta\hat{\rho} = \dot{\phi}\Delta t\hat{\phi} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\Delta\hat{\rho}}{\Delta t} = \dot{\phi}\hat{\phi} \Rightarrow \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \dot{\phi}\hat{\phi}$

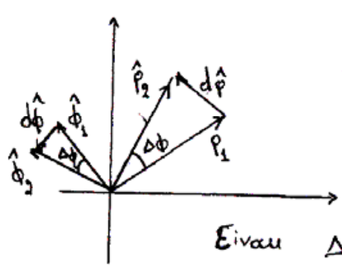
Επομένως $$\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}} \quad (2)$$

Η επιτάχυνση $\vec{a}$ θα δίνεται από: $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{z}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\frac{d\hat{\rho}}{dt} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\ddot{\phi}\hat{\phi} + \rho\dot{\phi}\frac{d\hat{\phi}}{dt} + \ddot{z}\hat{z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\ddot{\phi}\hat{\phi} + \rho\dot{\phi}\left(-\dot{\phi}\hat{\rho}\right) + \ddot{z}\hat{z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}} \quad (3)$$




* $\frac{d\hat{\phi}}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\rho}$

Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η μεταβολή της διεύθυνσης του διανύσματος $\hat{\phi}$ σε 2 χρονικές στιγμές $t_1$ και $t_2$ $(\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2)$

Είναι $\Delta\hat{\phi} = \Delta\phi(-\hat{\rho}) = -\dot{\phi}\Delta t\hat{\rho} \Rightarrow \frac{d\hat{\phi}}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\rho}$.

Το αρνητικό πρόσημο προκύπτει από το γεγονός ότι $d\hat{\phi} \,//\, -\hat{\rho}$ αφού τα διανύσματα $\hat{\phi}_1$ και $\hat{\phi}_2$ είναι κάθετα στα $\hat{\rho}_1$ και $\hat{\rho}_2$ και για μικρή μετατόπιση του συστήματος $d\hat{\phi} \perp \hat{\phi}_1$ όπως και $d\hat{\rho} \perp \hat{\rho}_1$

Έχουμε επομένως τα διανύσματα $\vec{r}$, $\vec{v}$ και $\vec{a}$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Η δύναμη που δρα στο πουλί είναι η δύναμη της βαρύτητας $\vec{F}_g = -mg\hat{z}$ και η κάθετη δύναμη που ασκείται από το εξωτερικό τοίχωμα του κυλίνδρου $\vec{F}_N = -N\hat{\rho}$ με $N$ το μέγεθος της δύναμης.

Το πουλί ωστόσο βρίσκεται σε ορισμένο $\rho$ αφού η διάμετρός του ισούται με την απόσταση των 2 κυλίνδρων $\boxed{\rho = R \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = \emptyset.}$ (4)

Από το 2° νόμο του Newton έχουμε: $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{lll} \vec{F}_\rho = m\vec{a}_\rho, & \vec{F}_\phi = m\vec{a}_\phi & \vec{F}_z = m\vec{a}_z \\ \vec{F}_\rho = \vec{F}_N & \vec{F}_\phi = 0 & \vec{F}_z = \vec{F}_g \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

$$-N\hat{\rho} = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} \overset{(4)}{\Rightarrow} -N = -m\rho\dot{\phi}^2 \Rightarrow N = m\rho\dot{\phi}^2 \quad (5)$$

$$(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi} = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} \rho\ddot{\phi} = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = \sigma\tau\alpha\theta = \dot{\phi}_0 \quad (6)$$

$$-mg\hat{z} = m\ddot{z}\hat{z} \Rightarrow -g = \ddot{z} \overset{\int}{\Rightarrow} \dot{z} = -gt + \dot{z}_0 \overset{\int}{\Rightarrow} z = z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (7)$$

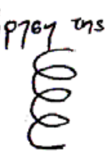
Η εξίσωση (5) δε δίνει καμία πληροφορία. Το μόνο που δείχνει είναι

ότι η δύναμη $N$ = σταθ αφού λόγω της (6) η $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0$ = σταθ.

Επομένως η κίνηση του πουλιού είναι:

$$\rho = R, \quad \phi = \phi_0 + \dot{\phi}_0 t \quad \text{και} \quad z = z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Το πουλί κάνει ελεύθερη πτώση καθώς περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\dot{\phi}_0$. Έπρεπε να είναι σταθερή η $\dot{\phi}_0$ για διατήρηση της στροφορμής. Η τροχιά του είναι μια επιμηκυνόμενη σπείρα



**3.** Αν L είναι η Lagrangian για ένα σύστημα με n βαθμούς ελευθερίας που ικανοποιούν τις εξισώσεις Lagrange, δείξτε με απ' ευθείας αντικατάσταση ότι:

$$L' = L + \frac{dF(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)}{dt}$$

Ικανοποιεί τις εξισώσεις Lagrange όπου F τυχαία, αλλά παραγωγίσιμη, συνάρτηση των μεταβλητών της.

Η εξίσωση Lagrange είναι: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ (1)

Η νέα συνάρτηση Lagrange $L'$ είναι:

$$L' = L + \frac{dF(q_1, q_2, \ldots q_n, t)}{dt} \Rightarrow L' = L + \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2)$$

Για αποφυγή του αθροίσματος, μπορούμε να θεωρήσουμε την (2) ως προς μια τυχαία συντεταγμένη $q_i$. Επομένως: $L' = L + \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t}$ (3)

Αντικαθιστούμε την (3) στην (1) οπότε έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(L + \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(L + \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}}_{\text{αρχική εξίσωση Lagrange}} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \underbrace{\cancel{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial F}{\partial t}}}_{0}\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\partial F}{\partial t} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{dF}{dt}\right)$$

Εναλλάσσοντας τη σειρά της παραγώγισης στο προηγούμενο αποτέλεσμα:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\right) = 0$$

Επομένως η νέα Lagrangian $L'$ ικανοποιεί την εξίσωση Lagrange.

**4.** Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε μια διάσταση έτσι ώστε να του αντιστοιχεί η συνάρτηση Lagrange

$$L = \frac{m^2\dot{x}^4}{12} + m\dot{x}^2V(x) - V^2(x),$$

όπου V είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του x. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης για x(t) και να περιγραφή η φύση του συστήματος βάση της εξίσωσης αυτής.

Μας δίνεται η Lagrangian $\mathcal{L} = \frac{m^2\dot{x}^4}{12} + m\dot{x}^2V(x) - V^2(x)$

Για να βρούμε τις εξισώσεις κίνησης πρέπει να λύσουμε την εξίσωση Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m^2\dot{x}^3}{3} + 2m\dot{x}V(x)\right) - m\dot{x}^2\frac{dV(x)}{dx} + 2V(x)\frac{dV(x)}{dx} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = m^2\dot{x}^2\ddot{x} + \underbrace{\left[2m\ddot{x}V(x) + 2m\dot{x}\frac{dV}{dx}\overset{\dot{x}}{\cancel{\frac{dx}{dt}}}\right]}_{\frac{d}{dt}\left(2m\dot{x}V(x)\right)} - m\dot{x}^2\frac{dV}{dx} + 2V\frac{dV}{dx} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = m^2\dot{x}^2\ddot{x} + m\dot{x}^2\frac{dV}{dx} + 2m\ddot{x}V + 2V\frac{dV}{dx} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \left(m\ddot{x} + \frac{dV}{dx}\right)\left(m\dot{x}^2 + 2V\right) = \emptyset.$$

Επομένως κάθε όρος ή και οι δύο όροι μπορεί να είναι λύσεις της εξίσωσης Lagrange. Δηλαδή:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow m\ddot{x} = \dot{p} = -\frac{dV}{dx} \quad (1) \\ m\dot{x}^2 = -2V \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot{x}^2\right) = -2\frac{dV}{dt} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{2}m\dot{x}\ddot{x} = -\cancel{2}\frac{dV}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\cancel{\dot{x}}\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}\overset{\dot{x}}{\cancel{\frac{dx}{dt}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow \dot{p} = -\frac{dV}{dx} \quad (2)$$

Δηλαδή και οι 2 όροι περιγράφουν ένα μονοδιάστατο δυναμικό πεδίο αφού δίνουν σαν αποτέλεσμα το 2ο νόμο του Newton.

**5.** Έστω $q_1,\ldots,q_n$ αποτελούν ένα σύνολο ανεξάρτητων γενικευμένων συντεταγμένων για ένα σύστημα με n βαθμούς ελευθερίας, με Lagrangian L $(q,\dot{q},t)$. Ας υποθέσουμε ότι μετασχηματίζουμε σε ένα άλλο σύνολο ανεξάρτητων συντεταγμένων $s_1,\ldots,s_n$ μέσω των εξισώσεων μετασχηματισμού:

$$q_i = q_i(s_1,\ldots,s_n,t), \qquad i=1,\ldots,n$$

(τέτοιος μετασχηματισμός ονομάζεται σημειακός μετασχηματισμός, point transformation). Δείξτε ότι αν η συνάρτηση Lagrange εκφραστεί συναρτήσει των $s_j$, $\dot{s}_j$ και t μέσω των εξισώσεων του μετασχηματισμού, τότε η L ικανοποιεί τις εξισώσεις Lagrange ως προς τις s συντεταγμένες:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial s_j} = 0$$

Για να δείξουμε ότι $L(s_j,\dot{s}_j,t)$ ικανοποιεί την εξίσωση Lagrange, χρησιμοποιούμε τον κανόνα των σύνθετων συναρτήσεων, δείχνοντας την εξάρτηση των $s_j, \dot{s}_j$ από $q_i, \dot{q}_i$

$$\frac{\partial L}{\partial s_j} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial s_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s_j} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \dot{s}_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{s}_j} \qquad (2)$$

Εφόσον $q_i = q_i(s_j,t) \Rightarrow \frac{d}{dt}q_i(s_j,t) = \frac{\partial q_i}{\partial s_j}\frac{\partial s_j}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial t} = \dot{q}_i$ (3)

Από την (3) έχουμε: $\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{s}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{s}_j}\frac{\partial q_i}{\partial s_j}\dot{s}_j + \frac{\partial}{\partial \dot{s}_j}\frac{\partial q_i}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{s}_j} = \frac{\partial q_i}{\partial s_j}}$ (4)

και $\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s_j} = \frac{\partial^2 q_i}{\partial s_j \partial s_k}\frac{\partial s_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_k}\left(\frac{\partial q_i}{\partial t}\right) \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s_j} = \frac{\partial}{\partial s_j}\left(\frac{\partial q_i}{\partial s_k}\right)\frac{\partial s_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q_i}{\partial s_k}\right)$ (5)

Το 2° μέλος της εξίσωσης (5) είναι: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial s_k}\right)$

και επομένως: $\boxed{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial s_k}\right)}$ (6)

Τέλος αφού $q_i = q_i(s_j,t)$ συνάρτηση δηλαδή μόνο των $s_j$ και $t$ θα έχουμε:

$$\boxed{\frac{\partial q_i}{\partial \dot{s}_j} = \emptyset} \qquad (7)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (1), (2), (4), (6) και (7) η εξίσωση Lagrange είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial s_j} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\cancelto{0^{(7)}}{\frac{\partial q_i}{\partial \dot{s}_j}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\cancelto{(4)}{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{s}_j}}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial s_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s_j} =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial s_j}\right) + \frac{\partial q_i}{\partial s_j}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial s_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s_j}$$

Από την (6) ο 1ος και 4ος όρος αναλοίφονται οπότε: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial s_j} = \frac{\partial q_i}{\partial s_j}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right] = 0$