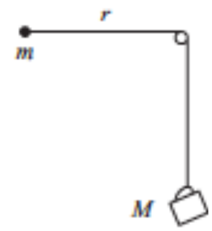
ΦΥΣ. 211
ΕΡΓΑΣΙΑ # 3
Επιστροφή την Δευτέρα 15/2/2016 στο τέλος της διάλεξης

1. Θεωρείστε ένα φλιτζάνι καφέ μάζας M, το οποίο συνδέεται με ένα άλλο σώμα μάζας m, μέσω ενός νήματος. Το φλιτζάνι κρέμεται μέσω μιας λείας και πολύ μικρής τροχαλίας, ενώ η μάζα m, είναι αρχικά ακίνητη σε οριζόντια θέση, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η μάζα m, αφήνεται κατόπιν ελεύθερη. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης ως προς r, (το μήκος του νήματος μεταξύ της μάζας m και της τροχαλίας) και ως προς θ, την γωνία που σχηματίζει το τμήμα του νήματος μεταξύ της μάζας m και της τροχιαλίας με την οριζόντια διεύθυνση. Υποθέστε ότι η διάταξη είναι τέτοια ώστε η μάζα m, δεν χτυπά στο κατακόρυφο τμήμα του νήματος μεταξύ της τροχαλίας και του φλιτζανιού.



2. Είδαμε στις διαλέξεις ότι η αρχή του Hamilton μας λέει ότι αν μια συνάρτηση $x_0(t)$ κάνει το ολοκλήρωμα της δράσης να είναι στάσιμο, τότε αυτό συμβαίνει όταν ισχύει η εξίσωση Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_0}=0$. Για να το αποδείξουμε, θεωρήσαμε ότι η συνάρτηση Lagrange είχε εξάρτηση μόνο από τα $x, \dot{x}$ και t, δηλαδή $L=L(x,\dot{x},t)$. Θεωρήστε ότι η Lagrangian είναι επιπλέον συνάρτηση της $\ddot{x}$. Στην περίπτωση αυτή θα υπάρχει ένας επιπλέον όρος $\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_a}\ddot{\beta}$ στην εξίσωση $\frac{\partial}{\partial a}S\left[x_a(t)\right]=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x_a}\beta+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}\dot{\beta}\right)dt$ όπου $\beta=\frac{\partial x_a}{\partial a}$ και $\dot{\beta}=\frac{\partial \dot{x}_a}{\partial a}$. Μπορεί κάποιος να εφαρμόσει ολοκλήρωση κατά παράγοντες δυο φορές στον όρο αυτό και να οδηγηθεί σε μια τροποποιημένη μορφή της εξίσωσης: $\frac{\partial L}{\partial x_0}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_0}\right)=0$. Εξηγήστε αν το αποτέλεσμα αυτό είναι σωστό και αν όχι ποιο το λάθος του συλλογισμού που οδηγεί στο αποτέλεσμα αυτό.

3. Υποθέστε ότι ένα σωματίδιο κινείται στο χώρο κάτω από την επίδραση ενός συντηρητικού δυναμικού $V(r)$, αλλά είναι περιορισμένο να κινείται πάντοτε πάνω σε μια επιφάνεια, η εξίσωση της οποίας είναι $\sigma(r,t)=0$, όπου θα πρέπει να προσέξετε την ακριβή εξάρτηση από τον χρόνο. Η στιγμιαία δύναμη του δεσμού είναι κάθετη στην επιφάνεια. Δείξτε αναλυτικά ότι η ενέργεια του σωματιδίου δεν διατηρείται αν η επιφάνεια κινείται με το χρόνο.

4. Θεωρείστε δυο σωματίδια μάζας m_1 και m_2 αντίστοιχα. Έστω το σωματίδιο μάζας m_1 είναι περιορισμένο να κινείται σε κύκλο ακτίνας a στο επίπεδο $z = 0$, ως προς το σημείο $x = y = 0$. Έστω το σώμα μάζας m_2 είναι περιορισμένο να κινείται σε κύκλο ακτίνας b στο επίπεδο $z=c$ ως προς το σημείο $x = y = 0$. Ένα ελατήριο αμελητέας μάζας και σταθεράς ελατηρίου k, συνδέει τα δυο σώματα. (α) Να βρεθεί η Lagrangian του συστήματος. (β) Λύστε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές Lagrange και δώστε την φυσική ερμηνεία του κάθε πολλαπλασιαστή που χρησιμοποιείτε.

5. Ένα σωματίδια μάζας m, κρέμεται από ένα αβαρές νήμα μήκους L. Αρχικά το σώμα κρέμεται ακίνητο σε ένα βαρυτητικό πεδίο έντασης g. Το σώμα ξαφνικά δέχεται την επίδραση μιας δύναμης η οποία ασκείται πολύ μικρό χρονικό διάστημα με αποτέλεσμα να αποκτήσει μια γωνιακή ταχύτητα ω. Αν η γωνιακή ταχύτητα ω, είναι μικρή, το σωματίδιο θα αρχίσει να ταλαντώνεται ως προς την αρχική θέση ισορροπίας. Αν η γωνιακή ταχύτητα ω, έχει μεγάλη τιμή το σώμα θα αρχίσει να περιστρέφεται ως προς το σημείο στήριξης. Ποια είναι η κριτική τιμή της γωνιακής ταχύτητας ω_c για την οποία το νήμα χαλαρώνει σε κάποιο σημείο της κίνησης του σώματος;

6. Έστω το οριζόντιο επίπεδο x-y. Μια χάντρα μάζας m, γλυστρά με ταχύτητα υ, κατά μήκος μιας καμπύλης που περιγράφεται από την συνάρτηση $y = f(x)$. Αγνοώντας την βαρυτητική δύναμη, ποια δύναμη εξασκεί η καμπύλη στην χάντρα;