Σειρά	Θέση

ΦΥΣ. 131
1^{η} Πρόοδος: 21-Οκτωβρίου-2012

Πριν αρχίσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητας).

Ονοματεπώνυμο	Αριθμός Ταυτότητας

Απενεργοποιήστε τα κινητά σας.

Η εξέταση αποτελείται από 7 προβλήματα. **Γράψτε καθαρά τον τρόπο με τον οποίο δουλεύετε τις απαντήσεις σας.**

Η συνολική βαθμολογία της εξέτασης είναι 100 μονάδες.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μόνο το τυπολόγιο που σας δίνεται και απαγορεύται η χρήση οποιοδήποτε σημειώσεων, βιβλίων, κινητών.

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΣΤΕ ΜΟΝΟ ΤΙΣ ΣΕΛΙΔΕΣ ΠΟΥ ΣΑΣ ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΜΗΝ ΚΟΨΕΤΕ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΣΕΛΙΔΑ

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 120 λεπτά. Καλή Επιτυχία !

Άσκηση	Βαθμός
1^{η} (10μ)	
2^{η} (10μ)	
3^{η} (10μ)	
4^{η} (15μ)	
5^{η} (15μ)	
6^{η} (20μ)	
7^{η} (20μ)	
Σύνολο	

Τύποι που μπορούν να φανούν χρήσιμοι

Γραμμική κίνηση:

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 + \int_{t_i}^{t_f} a(t)\,dt$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_i}^{t_f} \upsilon(t)\,dt$$

$\upsilon^2 = \upsilon_o^2 + 2a(x - x_o)$ για α=σταθ.

$x = x_o + \frac{1}{2}(\upsilon + \upsilon_o)t$ για α = σταθ.

$x_{\max} = \frac{\upsilon_o^2 \sin 2\theta}{g}$ βεληνεκές

g = 9.8m/s^2

Κυκλική κίνηση

$\theta = \frac{s}{R}$ s=μήκος τόξου κύκλου ακτίνας R

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

$$a_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} = \frac{\upsilon_{\varepsilon\varphi.}^2}{R} \qquad \vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho,} = \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi.}$$

$$\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi.} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \upsilon_{\varepsilon\varphi.} = \omega R$$

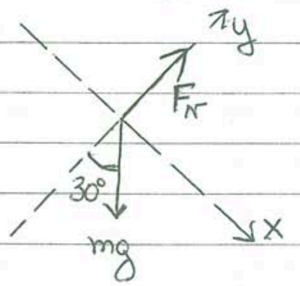
$$\vec{\mathrm{a}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad \vec{a}_{\varepsilon\varphi.} = \vec{\mathrm{a}} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{\varepsilon\varphi.} + \vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau.} = \vec{\mathrm{a}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}$$

Άσκηση 1 [10μ]

Ένα παιδί μάζας m=65.0kgr κάνει skateboard κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου κλίσης 30^o με την οριζόντια διεύθυνση. Το παιδί στέκεται πάνω σε μια ζυγαριά η οποία βρίσκεται στο skateboard όπως στο διπλανό σχήμα. Υποθέστε ότι δεν υπάρχουν τριβές μεταξύ του skateboard και της επιφάνειας του κεκλιμένου επιπέδου. Ποια η ένδειξη της ζυγαριάς;

Η ένδειξη της ζυγαριάς είναι η δύναμη που η ζυγαριά ασκεί στο παιδί. Κατασκευάζουμε το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος για το παιδί και διαλέγουμε άξονες συντεταγμένων παρ/λο και κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο



Από το 2° νόμο του Newton στη y-διεύθυνση:

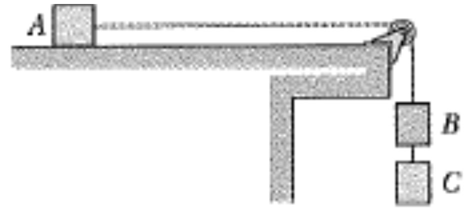
$$\Sigma F_y = m a_y \Rightarrow F_N - mg\cos 30^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_N = mg\cos 30^\circ = 65 \cdot 9.81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F_N = 552.2N}$$

Άσκηση 2 [10μ]

Τρια κιβώτια συνδέονται με σχοινιά όπως στο διπλανό σχήμα. Τα σχοινιά έχουν αμελητέα μάζα και η τροχαλία από την οποία περνά το σχοινί που συνδέει τα κιβώτια A και B είναι λεία και αβαρής. Τα κιβώτια έχουν μάζες



m_A=30.0kgr, m_B=40.0kgr και m_C=10.0kgr αντίστοιχα. Η επιφάνεια πάνω στην οποία βρίσκεται το κιβώτιο A είναι επίσης λεία. Το σύστημα αφήνεται να κινηθεί από την κατάσταση της ηρεμίας. (**α**) Να βρεθεί η τάση στο σχοινί που συνδέει τα κιβώτια B και C. [**7μ**]. (**β**) Ποια η μετατόπιση του κιβωτίου A στα πρώτα 0.250sec της κίνησης; [**3μ**]

(α) · Το σύστημα έχει συνολική μάζα $M = M_A + M_B + M_C = 80\,kgr$ και κινείται κάτω από την επίδραση της βαρυτικής δύναμης στα κιβώτια B και C. Θεωρούμε θετική φορά προς τα κάτω. Από τον 2° νόμο του Newton για όλο το σύστημα έχουμε:

$$\Sigma F = M\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\Sigma F}{M} = \frac{(m_B+m_C)g}{m_A+m_B+m_C} = \frac{50\,g}{80} \Rightarrow \alpha = 6.125\,m/s^2$$

· Εφόσον ξέρουμε την επιτάχυνση του συστήματος, όλα τα σώματα θα έχουν την ίδια επιτάχυνση.
Εφαρμόζουμε τον 2° νόμο του Newton στο κιβώτιο C.

$$\Sigma F_y = m_C a \Rightarrow m_C g - T_{BC} = m_C a \Rightarrow T_{BC} = m_C(g-a) \Rightarrow$$

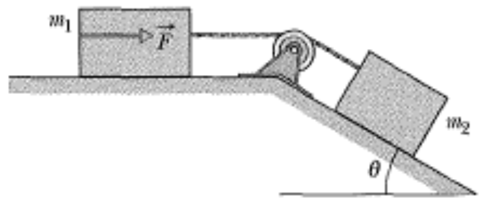
$$\Rightarrow T_{BC} = 10(9.81 - 6.125) \Rightarrow \boxed{T_{BC} = 36.85N}$$

(β) Από την εξίσωση της θέσης για την κινηματική του σώματος A θα έχουμε (θετική η φορά κίνησης προς την τροχαλία)

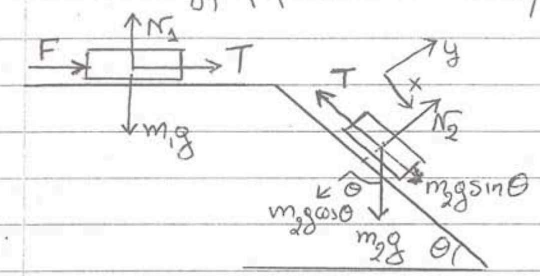
$$x = \cancel{x_0}^{0} + \cancel{v_{0A}}^{0} t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}6.125 \cdot 0.25^2 \Rightarrow \boxed{x = 0.191m}$$

Άσκηση 3 [10μ]

Ένα σώμα μάζας m_2=1.0kgr βρίσκεται πάνω σε μια κεκλιμένη επιφάνεια κλίσης $\theta=30^o$ με την οριζόντια διεύθυνση. Το σώμα συνδέεται μέσω ενός νήματος αμελητέας μάζας και μιας λείας και αβαρούς τροχαλίας με ένα άλλο σώμα μάζας m_1=3.0kgr το οποίο βρίσκεται σε λεία οριζόντια επιφάνεια, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Μια δύναμη F ασκείται στο σώμα μάζας m_1. (**α**) Αν η δύναμη F = 2.3N ποια η τάση στο νήμα που συνδέει τα δυο σώματα; [**7μ**] (**β**) Ποια η μέγιστη δύναμη F που μπορεί να ασκηθεί στο σώμα μάζας m_1 πριν χαλαρώσει το νήμα που συνδέει τα δυο σώματα (δηλαδή να μην είναι τεντωμένο); [**3μ**]



(α) Θεωρούμε θετική φορά κίνησης για το σώμα μάζας m_1 προς τα δεξιά και για το σώμα μάζας 2 προς τα κάτω.
Τα διαγράμματα απελευθερωμένου σώματος θα είναι:



Εφαρμόζουμε το νόμο του Newton στον x-άξονα για κάθε κιβώτιο

$m_1: \ \Sigma F_x = m_1 a \Rightarrow F + T = m_1 a$

$m_2: \ \Sigma F_x = m_2 a \Rightarrow m_2 g \sin\theta - T = m_2 a$

$$\Rightarrow F + m_2 g \sin\theta = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = \frac{F + m_2 g \sin\theta}{m_1 + m_2}$$

Όταν η δύναμη $F = 2.3N$, $\theta = 30^\circ$ έχουμε: $a = \frac{2.3 + 1\cdot 9.81 \cdot \frac{1}{2}}{3+1} \Rightarrow a = 1.8 m/s^2$

Αντικατάσταση σε μια από τις εξισώσεις του 2ου νόμου του Newton θα δώσει:

$$F + T = m_1 a \Rightarrow T = m_1 a - F = 3\cdot 1.8 - 2.3 \Rightarrow \boxed{T = 3.1N}$$

(β) Την στιγμή που το νήμα που συνδέει τα δυό σώματα χαλαρώνει η τάση γίνεται ίση με μηδέν, $T=0$.
Από την εξίσωση του 2ου νόμου του Newton για το σώμα m_2 έχουμε

$$m_2 g \sin\theta - \cancelto{0}{T} = m_2 a \Rightarrow a = g \sin\theta = 9.81 \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4.9 m/s^2$$

Επομένως αντικατάσταση στην αντίστοιχη εξίσωση για το σώμα m_1

$$F + \cancelto{0}{T} = m_1 a \Rightarrow F = m_1 g \sin\theta \Rightarrow F = 3\cdot 4.9 \Rightarrow \boxed{F = 14.7N}$$

Άσκηση 4 [15μ]

Ένας ανελκυστήρας χωρίς οροφή ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα $υ_α$=10.0m/s. Ένα παιδί μέσα στον ανεκλυστήρα το οποίο βρίσκεται σε ύψος 2.0m, εκτοξεύει προς τα πάνω μια μπάλα με ταχύτητα 20m/s ως προς τον ανελκυστήρα. Την στιγμή που εκτοξεύει την μπάλα ο ανεκλυστήρας βρίσκεται σε ύψος 28.0m από το έδαφος. (**α**) Ποιο το μέγιστος ύψος ως προς το έδαφος στο οποίο φθάνει η μπάλα; [**5μ**] (**β**) Πόσος χρόνος από την στιγμή της εκτόξευσής της χρειάζεται ώστε η μπάλα να πέσει στο δάπεδο του ανελκυστήρα; [**5μ**]. (**γ**) Σε ποιο ύψος ως προς το έδαφος βρίσκεται ο ανελκυστήρας όταν η μπάλα πέφτει στο δάπεδο του ανελκυστήρα. [**5μ**] (*Σημείωση*: Θεωρήστε αμελητέα την αντίσταση του αέρα).

(α). Θεωρούμε θετική φορά κίνησης την φορά προς τα πάνω.
Έστω V_0 η αρχική ταχύτητα της μπάλας ως προς το έδαφος
Θα έχουμε επομένως:

$$V_{0/εδ} = V_{αν/εδ} + V_{μπ/αν} \Rightarrow V_0 = 10\,m/s + 20\,m/s \Rightarrow V_0 = 30\,m/s$$

Ξέρουμε ότι στο μέγιστο ύψος η ταχύτητα της μπάλας θα είναι 0 m/s
Επομένως εφαρμόζοντας την εξίσωση $υ_f^2 - υ_i^2 = 2a\Delta S$, όπου $a = -g$ και $\Delta S = h_{max}$ ως προς την θέση του ανελκυστήρα την στιγμή της εκτόξευσης, θα έχουμε:

$$0 - υ_0^2 = -2g\,h_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{υ_0^2}{2g} = \frac{30^2}{2\cdot 9.81} \Rightarrow h_{max} = 45.9\,m$$

Το μέγιστο ύψος της μπάλας ως προς το έδαφος θα είναι:

$$H_{max} = h_{max} + h_{παιδιού} + h_{ανελκ} = 45.9 + 28 + 2 \Rightarrow \boxed{H_{max} = 75.9\,m}$$

(Β) Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό:

1ος Τρόπος

Δουλεύουμε στο σύστημα αναφοράς του ανελκυστήρα το οποίο είναι αδρανειακό μια και κινείται με σταθερή ταχύτητα.
Για το σύστημα αυτό η θέση της μπάλας για μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή θα είναι:

$$y = y_0 + V_{μπ/αν}\cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$ όπου $V_{μπ/αν}$ η ταχύτητα της μπάλας ως προς τον ανελκυστήρα

Όταν η μπάλα επιστρέφει στο δάπεδο του ανελκυστήρα $y_{μπ} = 0\,m$
Επομένως η εξίσωση γίνεται:

$$0 = 2m + 20\,t_{πτ} - \frac{1}{2}g t_{πτ}^2 \Rightarrow t_{πτ} = \frac{20 \pm \sqrt{20^2 + 2\cdot 9.8\cdot 9}}{9.81} \Rightarrow$$

$$t_{πτ} = \begin{cases} 4.18\,s \\ -0.10\,s \end{cases} \Rightarrow \text{Θετική λύση} \quad \boxed{t_π = 4.18\,s}$$

2^{os} Τρόπος

Χρησιμοποιούμε σαν σύστημα αναφοράς την γη. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση θέσης του ανελκυστήρα και την εξίσωση θέσης της μπάλας και θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα για το οποίο τα 2 σώματα βρίσκονται στην ίδια θέση την ίδια χρονική στιγμή:

$$\left.\begin{aligned} y_{αν} &= y_{0αν} + υ_{αν}\cdot t \\ y_{μπ} &= y_{0μπ} + υ_{0μπ}\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_{0αν} + υ_{αν}\cdot t = y_{0μπ} + υ_{0μπ}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Στην περίπτωση αυτή $y_{0αν} - y_{0μπ} = -2m$ και $υ_{0μπ} = 30m/s$ όπως στο ερώτημα (α).

Επομένως θα έχουμε: $y_{0μπ} - y_{0αν} + (υ_{0μπ} - υ_{αν})t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2m + (30-10)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow 2m + 20t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

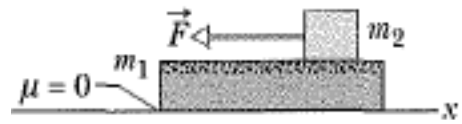
η οποία είναι ίδια με την εξίσωση που είχαμε στον 1^{o} τρόπο.

(γ) Ο ανελκυστήρας κινείται τον ίδιο χρόνο που κινείται η μπάλα. Επομένως

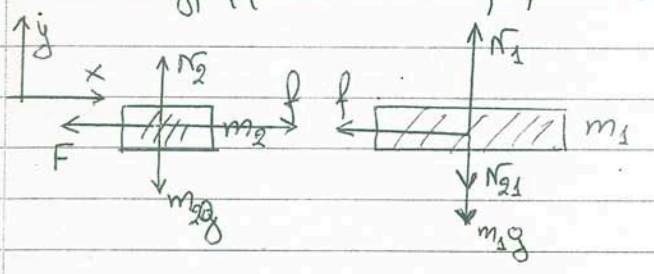
$$y_{αν}^{f} = y_{0αν} + υ_{0αν}\cdot t_{πτ} = 28 + 10\cdot 4.18 \Rightarrow \boxed{y_{αν}^{f} = 69.8m}$$

Άσκηση 5 [15μ]

Δυο κιβώτια 1 και 2 μάζας m_1=40.0kgr και m_2=10.0kgr αντίστοιχα βρίσκονται πάνω σε μια λεία επιφάνεια. Το κιβώτιο 2 βρίσκεται πάνω στο κιβώτιο 1 και ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των επιφανειών των κιβωτίων είναι $\mu_ς$=0.60. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ των επιφανειών των κιβωτίων είναι $\mu_κ$=0.40. Μια οριζόντια δύναμη F μέτρου 100.0N αρχίζει να τραβά το κιβώτιο 2 όπως δείχνει το σχήμα. Να βρεθούν: (**α**) Αν το σύστημα των δυο κιβωτίων κινείται σαν ένα σώμα ή τα κιβώτια γλυστρούν το ένα πάνω στο άλλο. [**8μ**] (**β**) Η επιτάχυνση του κιβωτίου μάζας m_2. [**4μ**] (**γ**) Η επιτάχυνση του κιβωτίου μάζας m_1. [**3μ**]



Τα διαγράμματα απελευθερωμένου σώματος για τα δυό κιβώτια



F είναι η δύναμη που ασκείται στο σώμα m_2, N_2 είναι η κάθετη δύναμη από το m_1 στο m_2, N_1 η κάθετη δύναμη από το έδαφος στο m_1 και N_{21} η κάθετη δύναμη από το m_2 στο m_1. Η δύναμη της τριβής μεταξύ των σωμάτων m_1 και m_2 συμβολίζεται με f

Εφαρμόζουμε το 2° νόμο του Newton και για τα 2 σώματα στην x και y-διεύθυνση:

m_1 = $\Sigma F_x = m_1 a_1 \Rightarrow -f = m_1 a_1$ (1)

$\Sigma F_y = N_1 - N_{21} - m_1 g = 0$ (2)

m_2 = $\Sigma F_x = m_2 a_2 \Rightarrow -F + f = m_2 a_2$ (3)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 - m_2 g = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 g$ (4)

Ξέρουμε ότι η δύναμη της στατικής τριβής λαμβάνει την μεγαλύτερη τιμή της όταν $f_{s\,max} = \mu_s N_2 \overset{(4)}{\Rightarrow} f_{s\,max} = \mu_s m_2 g \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_{s\,max} = 0.60 \cdot 10 \cdot 9.81 \Rightarrow \boxed{f_{s\,max} = 58.9N}$$

(α) Θα πρέπει να εξετάσουμε αν το σώμα μάζας m_2 γλυστρά στο m_1
Αν το σύστημα κινείται σαν ένα σώμα τότε έχουν την ίδια επιτάχυνση a
$a = a_1 = a_2$ και η δύναμη της τριβής που κινεί το σώμα μάζας m_1 θα πρέπει να έχει τιμή $f_s \leq f_{smax}$

Από την εξίσωση (3) έχουμε: $-F + f = m_2 a$
Από την εξίσωση (1) έχουμε: $-f = m_1 a \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} -F + f = m_2 a \\ -f = m_1 a \end{array}\right\} \Rightarrow -F + f = m_2\left(\frac{-f}{m_1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -Fm_1 + fm_1 = -fm_2 \Rightarrow f = \frac{Fm_1}{m_1 + m_2} = \frac{40 \cdot 100}{40 + 10} \Rightarrow \boxed{f = 80N}$$

$f > f_{smax}$ οπότε το m_2 γλυστρά στο m_1

(β) Εφόσον τα κιβώτια γλυστρούν το ένα ως προς το άλλο θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το συντελεστή κινητικής τριβής για να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες συνισταμένες δυνάμεις.
Η εξίσωση (3) θα γίνει:

$$-F + \mu_k N_2 = m_2 a_2 \Rightarrow -F + \mu_k m_2 g = m_2 a_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{-F + \mu_k m_2 g}{m_2} \Rightarrow a_2 = \frac{0.4 \cdot 10 \cdot 9.8 - 100}{10} \Rightarrow \boxed{a_2 = -6.1 m/s^2}$$

Το κιβώτιο μάζας m_2 επιταχύνεται προς τα αριστερά (αρνητικό x-άξονα)

(γ) Από την εξίσωση (1) έχουμε:

$$-f = m_1 a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{-f}{m_1} = \frac{-\mu_k m_2 g}{m_1} \Rightarrow a_1 = \frac{-0.4 \cdot \cancel{10} \cdot 9.8}{\cancel{40}\ 10} \Rightarrow$$

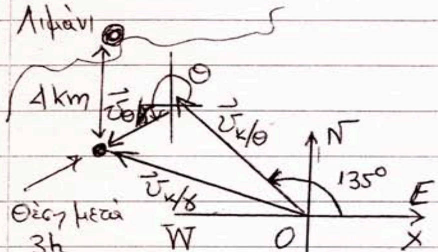
$$\Rightarrow \boxed{a_1 = -0.98 m/s^2}$$

Επομένως και το κιβώτιο μάζας m_1 επιταχύνεται προς τον αρνητικό x-άξονα

Άσκηση 6 [20μ]

Ένα μικρό καράβι κινείται προς ένα λιμάνι το οποίο είναι 32.0km βορειοδυτικά της θέσης στην οποία βρίσκεται όταν ξαφνικά συναντά βαριά ομίχλη. Ο καπετάνιος χρησιμοποιεί μια πυξίδα για να διατηρήσει την πορεία βορειοδυτικά (γωνία 135^o με την διεύθυνση Δυτικά – Ανατολικά) και διατηρεί σταθερή ταχύτητα 10.0km/h ως προς το νερό της θάλασσας. Τρεις ώρες αργότερα, η ομίχλη διαλύεται και ο καπετάνιος διαπιστώνει ότι η θέση του καραβιού είναι ακριβώς 4.0km νότια του λιμανιού. (**α**) Ποια ήταν η μέση ταχύτητα των νερών της θάλασσας κατά την διάρκεια των τριων αυτών ωρών. [**10μ**] (**β**) Ποια θα έπρεπε να είναι η κατεύθυνση πλεύσης του καραβιού ώστε να φθάσει στον προορισμό του κινούμενο σε ευθεία πορεία; [**6μ**] (γ) Σε πόσο χρόνο θα έφθανε στον προορισμό του αν ακολουθούσε την κατεύθυνση που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα; [**4μ**]

Έστω η αρχή του συστήματος συντεταγμένων να είναι η θέση του καραβιού την στιγμή που έπεσε η ομίχλη. Θεωρούμε σαν θετική x-διεύθυνση αυτή ανατολικά και θετική y-διεύθυνση αυτή προς το βορρά.



Έστω $\vec{v}_{κ/θ}$ η ταχύτητα του καραβιού ως προς τα νερά της θάλασσας, $\vec{v}_{κ/γ}$ η ταχύτητα του καραβιού ως προς την στεριά και $\vec{v}_{θ/γ}$ η ταχύτητα των νερών ως προς την στεριά.

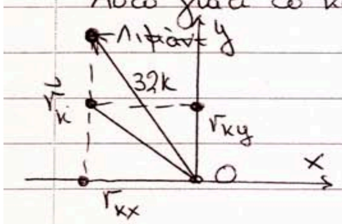
Επομένως $\vec{v}_{κ/γ} = \vec{v}_{κ/θ} + \vec{v}_{θ/γ}$ (1)

Θ είναι η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα των νερών ως προς την θετική x-διεύθυνση.

Μετά από t=3h το διάνυσμα θέσης του καραβιού θα είναι:

$$\vec{r}_κ = [(32\,km)\cdot(\cos 135^o)]\hat{i} + [(32km)(\sin 135^o)]\hat{j} - (4\,km)\hat{j} \quad (2)$$

Αυτό γιατί το καράβι βρίσκεται ακριβώς νότια του λιμανιού



(3)

Από την (2) έχουμε: $\vec{r}_κ = [(-22.6\,km)]\hat{i} + [22.6-4]\hat{j}$

Οι συντεταγμένες όμως του καραβιού θα είναι:

$$\left.\begin{array}{l} r_{κx} = (v^x_{κ/θ} + v^x_{θ/γ})t = (v_{κ/θ}\cdot\cos 135^o + v_{θ/γ}\cdot\cos Θ)t \\ r_{κy} = (v^y_{κ/θ} + v^y_{θ/γ})t = (v_{κ/θ}\cdot\sin 135^o + v_{θ/γ}\sin Θ)t \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t\, v_{\Theta/\gamma} \cos\Theta = r_{kx} - v_{k/\Theta} \cos 135^\circ t \\ t\, v_{\Theta/\gamma} \sin\Theta = r_{ky} - v_{k/\Theta} \sin 135^\circ t \end{cases} \overset{(3)}{\Rightarrow} \begin{array}{l} t\, v_{\Theta/\gamma} \cos\Theta = -22.6 - v_{k/\Theta} \cos 135^\circ t \\ t\, v_{\Theta/\gamma} \sin\Theta = 22.6 - 4 - v_{k/\Theta} \sin 135^\circ t \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\, v_{\Theta/\gamma} \cos\Theta = -22.6 + 10 \cdot 0.707 \cdot 3 \\ 3\, v_{\Theta/\gamma} \sin\Theta = 22.6 - 4 - 10 \cdot 0.707 \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} 3\, v_{\Theta/\gamma} \cos\Theta = -1.39 \text{ km} & (4) \\ 3\, v_{\Theta/\gamma} \sin\Theta = -2.61 \text{ km} & (5) \end{array}$$

Επομένως από τις 2 τελευταίες σχέσεις διαιρώντας έχουμε:

$$\tan\Theta = \frac{2.61}{1.39} \Rightarrow \Theta = \arctan\frac{2.61}{1.39} \Rightarrow \Theta = \begin{cases} 61.96^\circ \\ 61.96^\circ + 180^\circ = 241.96^\circ \end{cases}$$

Το καράβι όμως βρέθηκε νότια του λιμανιού και επομένως η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα των νερών της Θάλασσας με την οριζόντια διεύθυνση (Δυτικά-Ανατολικά) θα είναι 241.96°

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4) ή (5) θα έχουμε:

$$v_{\Theta/\gamma} = \frac{-1.39}{3 \cdot \cos 241.96^\circ} \Rightarrow \boxed{v_{\Theta/\gamma} = 0.986 \text{ km} \text{ με } \Theta = 241.96^\circ}$$

(β) Έστω ότι η σωστή κατεύθυνση του καραβιού σχηματίζει γωνία ϕ με την θετική x-διεύθυνση.

Στην περίπτωση αυτή η διανυσματική εξίσωση της ταχύτητας του καραβιού ως προς την στεριά (γη) θα πάρει την μορφή:

$$v_{k/\gamma}^{x} = v_{k/\Theta}^{x} + v_{\Theta/\gamma}^{x} = 10 \cdot \cos\phi + 0.986 \cdot \cos(241.96) \quad (6)$$

$$v_{k/\gamma}^{y} = v_{k/\Theta}^{y} + v_{\Theta/\gamma}^{y} = 10 \sin\phi + 0.986 \cdot \sin(241.96) \quad (7)$$

Αλλά για να κινηθεί το καράβι με γωνία 135° θα πρέπει $v_{k/\gamma}^{x} = -v_{k/\gamma}^{y}$ (8)
αφού $135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$

Αντικατάσταση των (6) και (7) στην (8) θα δώσει:

$$10\cos\phi + 0.986\cos(241.96) = -10\sin\phi - 0.986\sin(241.96) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10(\cos\phi + \sin\phi) = -0.986(\cos 241.6 + \sin 241.96) \Rightarrow$$

$$\cos\phi + \sin\phi = 0.133 \Rightarrow \cos^2\phi + \sin^2\phi + 2\cos\phi\sin\phi = 0.0178 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 2\phi = -0.9822 \Rightarrow 2\phi = \begin{cases} 280.8^\circ \\ 259.2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \phi = \begin{cases} 140.4^\circ \\ 129.6^\circ \end{cases}$ Επειδή η θάλασσα το σπρώχνει νότια το καράβι θα πρέπει να κινηθεί πιο βόρεια από τις $135^\circ \Rightarrow \phi = 129.4^\circ$

(γ) Χρησιμοποιώντας την γωνία $\phi = 129.6^\circ$ από το προηγούμενο ερώτημα και την εξίσωση (6) θα έχουμε:

$$\upsilon^x_{\kappa/\gamma} = 10\cos(129.6^\circ) + 0.986\cos(241.96^\circ) \Rightarrow \upsilon^x_{\kappa/\gamma} = -6.8377\,\frac{km}{h}$$

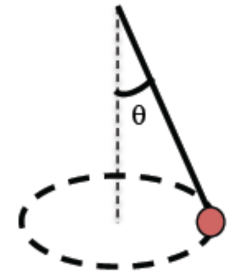
Επομένως $\upsilon_{\kappa/\gamma} = \upsilon^x_{\kappa/\gamma}/\cos 135 = \dfrac{-6.8377}{-0.707} \Rightarrow \upsilon_{\kappa/\gamma} = 9.67\,\dfrac{km}{h}$

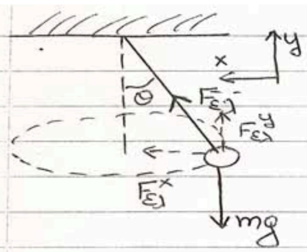
Με την ταχύτητα αυτή το καράβι θα καλύψει τα 32km απόσταση σε

$$t = \frac{d}{\upsilon_{\kappa/\gamma}} = \frac{32}{9.67} \Rightarrow \boxed{t = 3.31\,h}$$

Άσκηση 7 [20μ]

Υποθέστε ότι έχετε ένα ελαστικό νήμα μήκους l = 30cm στο ένα άκρο του οποίου είναι δεμένη μια μικρή σφαίρα. Το άλλο άκρο του νήματος είναι στερεωμένο σε κάποιο μηχανισ μό ο οποίος μπορεί να το περιστρέφει. Αρχικά το σύστημα νήμα-σφαίρα είναι κατακόρυφο και δεν περιστρέφεται. Στη θέση αυτή το νήμα επιμηκύνεται κατά 2.0cm ως προς το φυσικό του μήκος. Ο μηχανισμός τίθεται σε λειτουργία και η σφαίρα αρχίζει να κινείται σε σταθερό οριζόντιο κύκλο ενώ το νήμα σχηματίζει γωνία 60^o με την κατακόρυφο διεύθυνση. Η διάταξη αυτή συμπεριφέρεται σαν κωνικό εκκρεμές. (**α**) Να βρεθεί η περίοδος περιστροφής της σφαίρας. [**10μ**] (**β**) Υποθέστε τώρα ότι η περίοδος περιστροφής γίνεται μισή αυτής που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, ποια η γωνία που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο στην περίπτωση αυτή; [**3μ**] (**γ**) Ποια είναι η ελάχιστη και ποια η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα με την οποία μπορεί να κινηθεί η σφαίρα ώστε το σύστημα να συνεχίσει να συμπεριφέρεται σαν κωνικό εκκρεμές. [**5μ**] (**δ**) Σχολιάστε πως αλλάζουν τα χαρακτηριστικά της κίνησης καθώς η γωνιακή ταχύτητα τείνει στην μέγιστη τιμή της. [**2μ**]





Από την στιγμή το νήμα είναι ελαστικό υπακούει στο νόμο του Hooke $F_{ελ} = -k\Delta l$ όπου Δl η επιμήκυνση του νήματος καθώς αυτό περιστρέφεται.

Στην γωνία περιστροφής $\Theta = 60^\circ$ το μήκος του νήματος θα είναι l (το φυσικό του μήκος) και μια επιπλέον επιμήκυνση Δl_2.

Η δύναμη επομένως που ασκεί το νήμα στο σώμα θα είναι:

$$F_{ελ} = k\Delta l_2 \qquad (1)$$ (Θεωρούμε την επιμήκυνση αρνητική οπότε $F_{ελ}$ θετική)

Από το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος θα έχουμε εφαρμόζοντας και τον 2° νόμο του Newton στην x κ y -διεύθυνση:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{ελ}^y = mg \Rightarrow F_{ελ}\cdot\cos\Theta = mg \qquad (2)$$

$$\Sigma F_x = ma_\kappa \Rightarrow F_{ελ}^x = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow F_{ελ}\sin\Theta = m\omega^2 R \qquad (3)$$

Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς θα είναι όμως $R = (l+\Delta l_2)\cdot\sin\Theta$ (4)

Από την (3) κ (4) θα έχουμε:

$$F_{ελ}\cancel{\sin\Theta} = m\omega^2(l+\Delta l_2)\cancel{\sin\Theta} \Rightarrow F_{ελ} = m\omega^2(l+\Delta l_2) \qquad (5)$$

Αντικατάσταση της (5) στην (2) θα δώσει:

$$\cancel{m}\omega^2(l+\Delta l_2) = \frac{\cancel{m}g}{\cos\Theta} \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l\cos\Theta + \Delta l_2\cos\Theta} \qquad (6)$$

Από (1) & (2) όμως έχουμε:

$$k \cdot \Delta l_2 = \frac{mg}{\cos\theta} \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{mg}{k\cos\theta} \quad (7)$$

Αντικαθιστούμε την (7) στην (6) οπότε θα πάρουμε:

$$\omega^2 = \frac{g}{l\cos\theta + \frac{mg}{k\cancel{\cos\theta}}\cancel{\cos\theta}} \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{g}{l\cos\theta + \frac{mg}{k}}} \quad (8)$$

Από την συνθήκη ισορροπίας στην κατακόρυφο θέση, όταν το σώμα δεν ~~περιστρέφεται~~ περιστρέφεται, ξέρουμε ότι το νήμα επιμηκύνεται κατά μια απόσταση $\Delta l_1 = 2cm$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$k\Delta l_1 = mg \Rightarrow \boxed{\Delta l_1 = \frac{mg}{k}} \quad (9)$$

Από (8) & (9) θα πάρουμε επομένως ότι:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{g}{l\cos\theta + \Delta l_1}} \quad (10)$$

(α) $\omega = \frac{2\pi}{T}$ και αντικατάσταση στην (10) θα δώσει:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l\cos\theta + \Delta l_1} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2(l\cos\theta + \Delta l_1)}{g} \quad (11)$$

Αριθμητική αντικατάσταση δίνει: $T^2 = \frac{4\pi^2(0.3\cos(60^\circ) + 0.02)}{9.81} = \frac{4\pi^2 \cdot 0.17}{9.81} \Rightarrow$

$$T^2 = 0.6841 \Rightarrow \boxed{T = 0.827 s}$$

(β) Αν η περίοδος γίνει μισή της προηγούμενης $T_2 = \frac{T_1}{2}$ τότε από (11)

$$\left.\begin{aligned} \frac{T_1^2}{4} &= \frac{4\pi^2(l\cos\theta_2 + \Delta l_1)}{g} \\ T_1^2 &= \frac{4\pi^2(l\cos\theta_1 + \Delta l_1)}{g} \end{aligned}\right\} \stackrel{\div}{\Rightarrow} 4 = \frac{l\cos\theta_1 + \Delta l_1}{l\cos\theta_2 + \Delta l_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4\ell\cos\Theta_2 + 4\Delta\ell_1 = \ell\cos\Theta_1 + \Delta\ell_1 \Rightarrow \cos\Theta_2 = \frac{\ell\cos\Theta_1 - 3\Delta\ell_1}{4\ell} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\Theta_2 = \frac{0.3\cdot\cos(60^\circ) - 3\cdot 0.02}{4\cdot 0.3} \Rightarrow \cos\Theta_2 = 0.075 \Rightarrow \boxed{\Theta_2 = 85.7^\circ}$$

(γ) Εξετάζουμε και πάλι την εξίσωση (10) όπου είχαμε:

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell\cos\Theta + \Delta\ell_1}$$

Η ελάχιστη τιμή της γωνιακής ταχύτητας επιτυγχάνεται όταν ο παρονομαστής γίνεται μέγιστος που συμβαίνει για $\Theta = 0^\circ$, $\cos\Theta = 1$.

Η μέγιστη τιμή επιτυγχάνεται όταν ο παρονομαστής γίνει ελάχιστος που συμβαίνει για $\Theta = 90^\circ$ όπου $\cos\Theta = 0$.

Οι δυό τιμές της γωνιακής ταχύτητας θα είναι:

$$\omega^2_{min} = \frac{g}{\ell + \Delta\ell_1} \overset{(9)}{=} \frac{g}{\ell + \frac{mg}{k}} \quad \text{για } \Theta = 0^\circ$$

$$\omega^2_{max} = \frac{g}{\Delta\ell_1} \overset{(9)}{=} \frac{\cancel{g}}{\frac{m\cancel{g}}{k}} \Rightarrow \omega^2_{max} = \frac{k}{m} \quad \text{για } \Theta = 90^\circ$$

(δ) Παρατηρούμε από την εξίσωση (7) ότι καθώς το σώμα τείνει προς την μέγιστη γωνιακή ταχύτητά του, το σώμα περιστρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο, $\Theta = 90^\circ$, ενώ το νήμα τείνει να αποκτήσει άπειρη επιμήκυνση μια και $\Delta\ell_2 = \frac{mg}{k\cos\Theta} \to \infty$

Στην περίπτωση αυτή η γωνιακή ταχύτητα συμπίπτει με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος k/m και έχουμε συντονισμό