Μικρές ταλαντώσεις – Συζευγμένες ταλαντώσεις

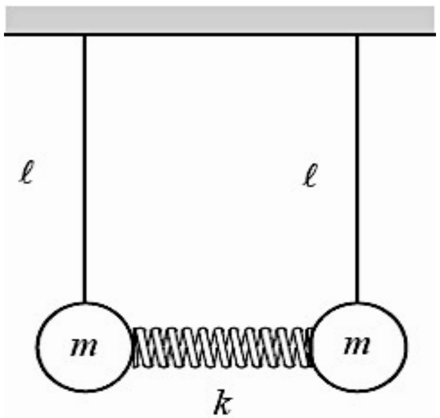
- Ταλαντώσεις εμφανίζονται παντού
  - Μικρές ταλαντώσεις γύρω από θέση ισορροπίας
  - Εμφανίζονται σε πολλά προβλήματα κβαντομηχανικής
  - Έχουμε ήδη συναντήσει σε διάφορα στάδια:
  - Γενική εξίσωση κίνησης αρκετά απλή:

    $\ddot{x} = -\omega^2 x$ με λύση της μορφής: $x = A\mathrm{e}^{-i\omega t}$

- Πολλά σημαντικά συστήματα στη φυσική περιέχουν ταλαντωτές
  - Συνδέονται μεταξύ τους ⇨ Μεταφορά ενέργειας
  - Η κίνηση μπορεί να είναι αρκετά περίπλοκη Ισως όχι περιοδική
  - Προσδιορισμός ενός συστήματος συντεταγμένων ώστε κάθε ταλαντωτής ταλαντώνεται με μια καλά προσδιορισμένη συχνότητα
    - Στερεό αποτελεί παράδειγμα τέτοιου συστήματος

Συζευγμένες ταλαντώσεις

- Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δυνάμεις της μορφής των ελατηρίων
  - Υπακούν στο νόμο του Hooke
- Υποθέστε ότι έχετε δυο εκκρεμή



Οι μάζες συνδέονται με ένα ελατήριο σταθεράς k και αρχικά είναι σε ηρεμία και σε κατακόρυφη θέση

Ελατήρια είναι στο φυσικό τους μήκος

- Άν είχαμε ένα μόνο εκκρεμές τότε:

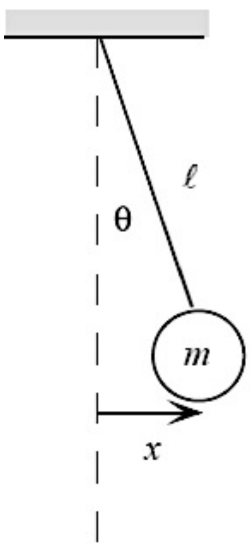
Η εξίσωση κίνησης για μετατόπιση θ είναι:

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta} \quad \text{όπου} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

Πολ/ζοντας με l την προηγούμενη εξίσωση:

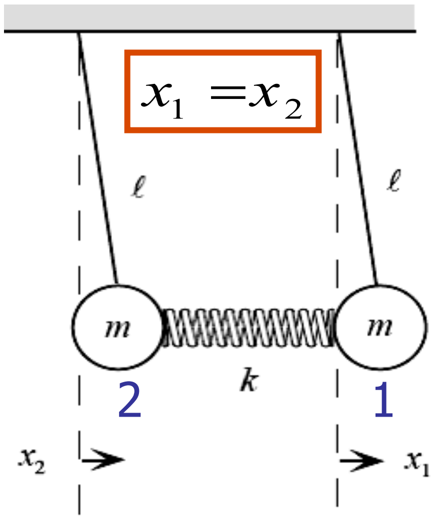
$$\boxed{\ddot{x} = -\omega_0^2 x}$$

(υποθέτουμε ότι θ μικρό οπότε $\boxed{x = l\theta}$)



Συζευγμένα εκκρεμή – Συμμετρική ταλάντωση

- Έστω ότι μετακινούμε και τα δυο εκκρεμή
  - κατά το ίδιο διάστημα x **και**
  - προς την ίδια διεύθυνση



- Το ελατήριο παραμένει στο φυσικό του μήκος
  - ✓ Δεν υπάρχει ούτε επιμήκυνση ούτε συμπίεση
- Συμπεριφορά συστήματος:
  - σαν να μην υπάρχει ελατήριο ανάμεσα στα εκκρεμή.

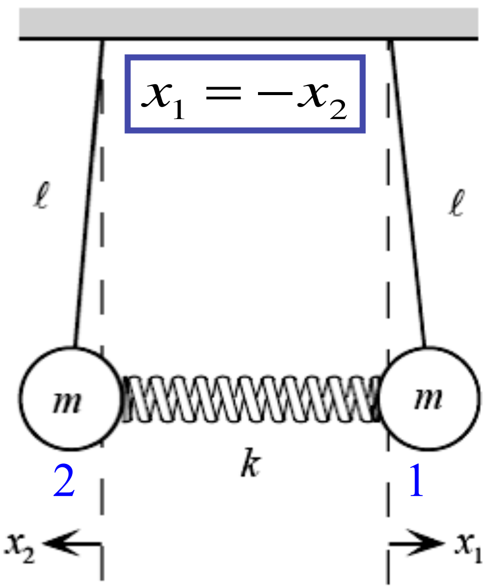
Τα 2 εκκρεμή ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα

$$\boxed{\omega_s = \omega_0}$$

Συμμετρικός τρόπος ταλάντωσης

Συζευγμένα εκκρεμή – Ασύμμετρη ταλάντωση

- Έστω ότι μετακινούμε και τα δυο εκκρεμή :
  - κατά το ίδιο διάστημα x **και**
  - προς αντίθετη κατεύθυνση



- Το ελατήριο συμπιέζεται και επιμηκύνεται ανάλογα με την ταλάντωση των εκκρεμών.
- Οι δυνάμεις που ασκούνται στο εκκρεμές 1 είναι:

  Δύναμη επαναφοράς λόγω βαρύτητας: $-m\omega_0^2 x_1$

  Δύναμη επαναφοράς λόγω ελατηρίου $-2kx_1$

- Γιατί ο παράγοντας 2 στη δύναμη ελατηρίου?

  Αν το εκκρεμές 1 μετατοπίζεται κατά x τότε και το εκκρεμές 2 μετατοπίζεται κατά x αλλά στην αντίθετη διεύθυνση.

  Το ελατήριο επιμηκύνεται κατά 2 x

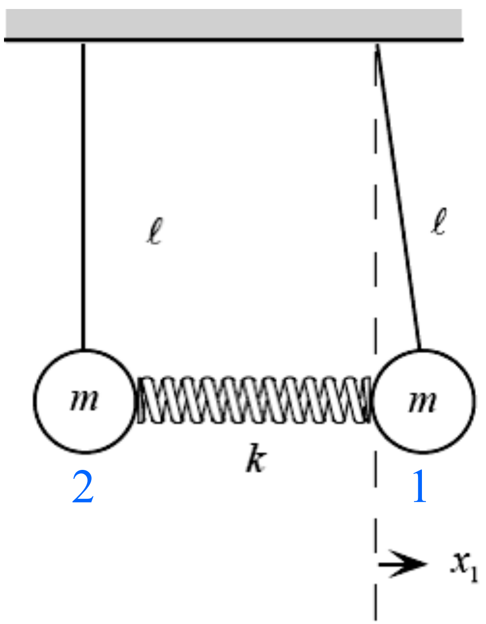
- Η δύναμη στο ελατήριο 1 είναι:

$$m\ddot{x}_1 = -m\omega_0^2 x_1 - 2kx_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1 - 2\frac{k}{m}x_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\left(\omega_0^2 + 2\omega_C^2\right)x_1$$

- Τα 2 εκκρεμή ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα: $\boxed{\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_C^2}}$

Συζευγμένα εκκρεμή – Άλλοι τρόποι ταλάντωσης

- Συμμετρικός και ασύμμετρος τρόπος ταλάντωσης είναι ειδικοί τρόποι ταλάντωσης
  - Απαιτούν συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες
  - Κάθε τρόπος έχει τη δική του χαρακτηριστική συχνότητα



- Έστω ότι το εκκρεμές 1 μετατοπίζεται κατά x_1
  - το εκκρεμές 2 κρατείται ακίνητο
- Αφήνουμε τα εκκρεμή ελεύθερα από ηρεμία
  - Οι δυνάμεις που δρουν είναι:

εκκρεμές 1: $$m\ddot{x}_1 = -m\omega_0^2 x_1 - k\left(x_1 - x_2\right) \quad (1)$$

εκκρεμές 2: $$m\ddot{x}_2 = -m\omega_0^2 x_2 - k\left(x_2 - x_1\right) \quad (2)$$

  - Προσθέτουμε (1) και (2) διαιρώντας με m:

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\omega_0^2\left(x_1 + x_2\right) \quad (3)$$

  - Αφαιρούμε (1) και (2) διαιρώντας με m:

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\omega_0^2\left(x_1 - x_2\right) - 2\omega_C^2\left(x_1 - x_2\right) \quad (4)$$

Συζευγμένα εκκρεμή – Άλλοι τρόποι ταλάντωσης

- Εισάγουμε τις μεταβλητές: $$q_1 = x_1 + x_2 \qquad q_2 = x_1 - x_2 \qquad (5)$$
- Γράφουμε τις εξισώσεις (3) και (4) συναρτήσει των q_1 και q_2:

$$\ddot{q}_1 = -\omega_s^2 q_1 \qquad (6)$$

$$\ddot{q}_2 = -\omega_0^2 q_2 - 2\omega_C^2 q_2 = -\left(\omega_0^2 + 2\omega_C^2\right) q_2 \Rightarrow \ddot{q}_2 = -\omega_A^2 q_2 \qquad (7)$$

- Στο σύστημα συντεταγμένων x_1 και x_2 – συζευγμένες εξισώσεις κίνησης
  - Στο σύστημα συντεταγμένων q_1 και q_2 - ασύζευκτες
- Οι λύσεις των εξισώσεων (6) και (7) είναι: $$\boxed{\begin{aligned} q_1 &= A\cos\omega_s t \\ q_2 &= B\cos\omega_A t \end{aligned}} \qquad (8)$$

  όπου A και B σταθερές

  - Λύνουμε την (5) ως προς x_1 και x_2 και αντικαθιστούμε από την (8):

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \\ x_2 &= \frac{1}{2}(q_1 - q_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\left(A\cos\omega_s t + B\cos\omega_A t\right) \\ x_2 &= \frac{1}{2}\left(A\cos\omega_s t - B\cos\omega_A t\right) \end{aligned}$$

Συζευγμένα εκκρεμή – Άλλοι τρόποι ταλάντωσης

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(A\cos\omega_s t + B\cos\omega_A t\right) \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(A\cos\omega_s t - B\cos\omega_A t\right)$$

- Οι αρχικές συνθήκες για το συγκεκριμένη κίνηση ήταν:

$$x_1(t=0) = C \qquad \dot{x}_1(t=0) = 0$$

$$x_2(t=0) = 0 \quad \text{και} \quad \dot{x}_2(t=0) = 0$$

$$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 2\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)$$

$$\cos\theta_1 - \cos\theta_2 = 2\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)$$

- Για $x_2(t=0) = 0$ στη 2η εξίσωση έχουμε: $\mathrm{A} = \mathrm{B}$

➢ Αντικατάσταση στην 1η εξίσωση και θέτοντας $x_1(t=0) = C$ δίνει:

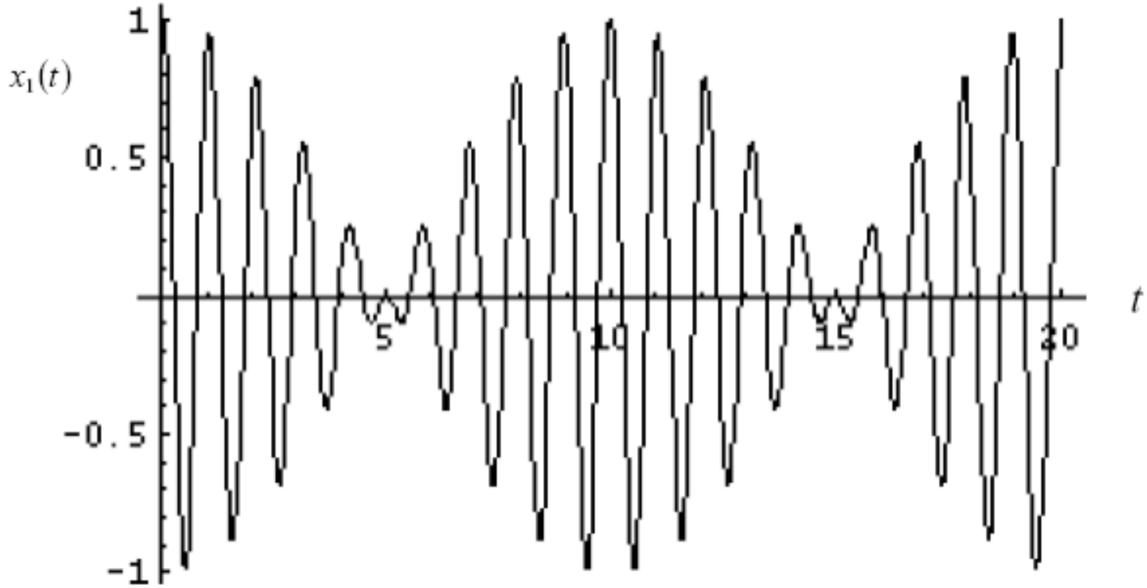
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{C}{2}\left(\cos\omega_s t + \cos\omega_A t\right) \\ x_2 &= \frac{C}{2}\left(\cos\omega_s t - \cos\omega_A t\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1(t) &= C\cos\left(\frac{\omega_s-\omega_A}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_s+\omega_A}{2}t\right) \\ x_2(t) &= C\sin\left(\frac{\omega_s-\omega_A}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_s+\omega_A}{2}t\right) \end{aligned}$$

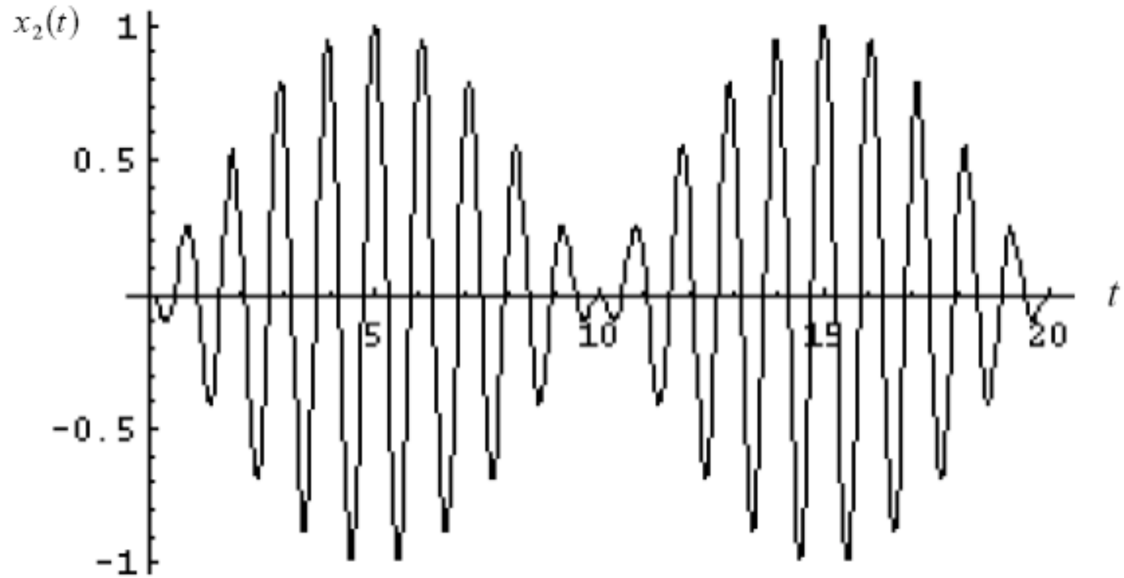
➢ Και τα δυο εκκρεμή ταλαντώνονται με συχνότητα: $\boxed{\dfrac{\omega_s+\omega_A}{2}}$

➢ Το πλάτος του εκκρεμούς 1 ➔0 εξαιτίας του παράγοντα $\cos\dfrac{\omega_s-\omega_A}{2}t$

αλλά τότε το πλάτος ταλάντωση του εκκρεμούς 2 είναι μέγιστο

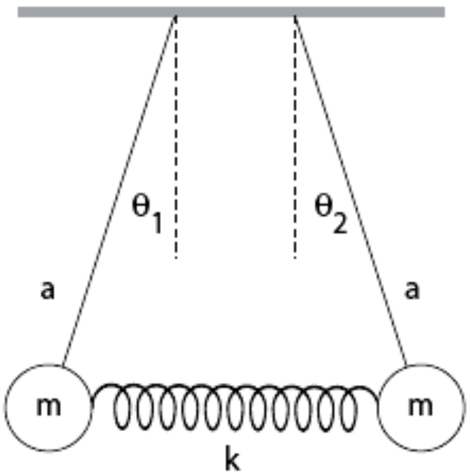
Συζευγμένα εκκρεμή – Άλλοι τρόποι ταλάντωσης





Συζευγμένα εκκρεμή – Τεχνική με πίνακες

Έστω δύο εκκρεμή με μάζα m και μήκος a συζευγμένα με ένα ελατήριο αμελητέας μάζας και σταθεράς k.



- Η ενέργεια του συστήματος είναι:

Κινητική ενέργεια: $$T = \frac{ma^2}{2}\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) \qquad (1)$$

Δυναμική ενέργεια βαρύτητας:

$$U_g^i = mga\left(1-\cos\theta_i\right) \Rightarrow U_g^i \sim mga\left(1-1+\frac{\theta_i^2}{2!}\right) \sim mga\frac{\theta_i^2}{2}$$

οπότε: $$U_g = \frac{mga}{2}\left(\theta_1^2 + \theta_2^2\right) \qquad (2)$$

Δυναμική ελατηρίου: $$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k\left(x_2 - x_1\right)^2 \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda} = \frac{ka^2}{2}\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right)^2$$

$$\Rightarrow U_{\varepsilon\lambda} \sim \frac{ka^2}{2}\left(\theta_2 - \theta_1\right)^2$$ οπότε: $$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{ka^2}{2}\left(\theta_2 - \theta_1\right)^2 \qquad (3)$$

- Η Lagrangian του συστήματος από (1), (2) και (3) είναι:

$$\mathcal{L} = T - U_g - U_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{ma^2}{2}\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) - \frac{mga}{2}\left(\theta_1^2 + \theta_2^2\right) - \frac{ka^2}{2}\left(\theta_2 - \theta_1\right)^2$$

  - Οι εξισώσεις Euler-Lagrange δίνουν τις εξισώσεις κίνησης:

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{g}{a}\theta_1 + \frac{k}{m}\left(\theta_1 - \theta_2\right) = 0 \qquad \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{a}\theta_2 + \frac{k}{m}\left(\theta_2 - \theta_1\right) = 0$$

Συζευγμένα εκκρεμή – Τεχνική με πίνακες

Ορίζουμε: $\boxed{\eta \equiv \frac{ka}{mg}}$ και $\boxed{\omega_0^2 \equiv \frac{g}{a}}$

Οι εξισώσεις κίνησης γράφονται στη μορφή πίνακα:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} 1+\eta & -\eta \\ -\eta & 1+\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Αν δοκιμάσουμε μια λύση της μορφής: $\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$

και ορίζοντας $\boxed{\lambda \equiv \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ παίρνουμε:

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} 1+\eta & -\eta \\ -\eta & 1+\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \Rightarrow \lambda \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\eta & -\eta \\ -\eta & 1+\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix}$$

Το οποίο είναι της μορφής: $\boxed{\mathbf{A}\boldsymbol{\Theta} = \lambda\boldsymbol{\Theta}}$

δηλαδή λύση εξίσωσης ιδιοτιμών / ιδιοδυανυσμάτων

$\Rightarrow \boxed{(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1})\boldsymbol{\Theta} = 0}$

Συζευγμένα εκκρεμή – ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

- Για να υπάρχουν μη τετριμένα ιδιοδιανύσματα, η ορίζουσα του πίνακα που πολ/ζει το $\mathbf{\Theta}$ πρέπει να είναι μηδέν.
- Οι ιδιοτιμές βρίσκονται λύνοντας τη χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} 1+\eta-\lambda & -\eta \\ -\eta & 1+\eta-\lambda \end{vmatrix} = (1+\eta-\lambda)^2 - \eta^2 = 0$$

- Οι λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι: $\boxed{\lambda_1 = 1}$ και $\boxed{\lambda_2 = 1+2\eta}$
  - Η 1η λύση αντιστοιχεί σε $\boxed{\omega_1 = \omega_0}$ συμμετρική
  - Η 2η λύση αντιστοιχεί σε $\boxed{\omega_2 = \omega_0\sqrt{1+2\eta}}$ ασύμμετρη
- Τα ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{A}$ βρίσκονται από την εξίσωση: $\boxed{\mathbf{A\Theta} = \lambda\mathbf{\Theta}}$

  χρησιμοποιώντας μια φορά την μια ιδιοτιμή και μια την άλλη
  - Σε κάθε περίπτωση αυτό που βρίσκουμε είναι ο λόγος: $\boxed{\Theta_1/\Theta_2}$
  - Η συνολική κανονικοποίηση βρίσκεται ζητώντας το μέτρο του ιδιοδιανύσματος να είναι 1

Συζευγμένα εκκρεμή – ιδιοδιανύσματα

- Τα ιδιοδιανύσματα που παίρνουμε είναι: $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$ και $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}$

  που αναλογούν στις ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 1+2\eta$ αντίστοιχα

- Το εσωτερικό γινόμενο των 2 ιδιοδιανυσμάτων είναι 0 - Ορθοκανονικά

- Κατασκευάζουμε πίνακα με στήλες τα ιδιοδιανύσματα
  - Ο πίνακας που προκύπτει μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε ένα μετασχηματισμό ομοιότητας για να διαγωνοποιηθεί ο πίνακας A
  - Οι ιδιοτιμές είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα που προκύπτει

Ένας τέτοιος πίνακας είναι: $S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$

και σύμφωνα με το μετασχηματισμό ομοιότητας θα έχουμε:

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\eta & -\eta\\-\eta & 1+\eta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1+2\eta\end{pmatrix}$$

Συζευγμένα εκκρεμή

Τα ιδιοδιανύσματα αντιστοιχούν στα:

$\boxed{\dfrac{(\Theta_1 + \Theta_2)}{\sqrt{2}}}$ για $\lambda_1 = 1$ συμμετρικός τρόπος

$\boxed{\dfrac{(-\Theta_1 + \Theta_2)}{\sqrt{2}}}$ για $\lambda_2 = 1 + 2\eta$ αντισυμμετρικός τρόπος

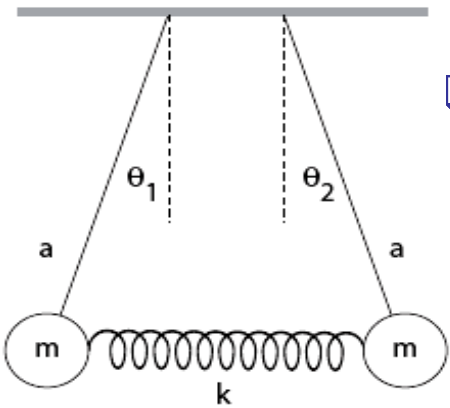
Οι δυο αυτοί συνδυασμοί αποσυζεύγουν τις εξισώσεις κίνησης

- Για τον συμμετρικό τρόπο ταλάντωσης:
  - τα εκκρεμή έχουν το ίδιο πλάτος ταλάντωσης και είναι σε φάση
  - Το ελατήριο σύζευξης δεν κάνει απολύτως τίποτα
  - Τα εκκρεμή ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα με $\lambda = 1 \Rightarrow \omega_s = \omega_0$
- Για τον αντισυμμετρικό τρόπο ταλάντωσης:
  - Τα εκκρεμή ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα με $\lambda = 1 + 2\eta$
  - Η αντισυμμετρική συχνότητα: $\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 + 2\dfrac{k}{m}}$

Μικρές ταλαντώσεις – Συζευγμένα εκκρεμή

- Το σύστημα μπορεί να κινείται με μια από δυο χαρακτηριστικές συχνότητες (ιδιοσυχνότητες) οι οποίες βρίσκονται λύνοντας την:

$$\boxed{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{1})\boldsymbol{\Theta}=0}$$ όπου $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1+\eta & -\eta\\ -\eta & 1+\eta\end{pmatrix}$ με $\eta\equiv\frac{ka}{mg}$ και $\lambda\equiv\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ $\quad\omega_0^2\equiv\frac{g}{a}$



- Οι δύο ιδιοσυχνότητες προκύπτουν ζητώντας η ορίζουσα

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{1}|=\begin{vmatrix}1+\eta-\lambda & -\eta\\ -\eta & 1+\eta-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(1+\eta-\lambda)^2-\eta^2=0$$

δίνοντας: $\lambda_1=1 \Rightarrow \boxed{\omega_1=\omega_0}$ και $\lambda_2=1+2\eta \Rightarrow \boxed{\omega_2=\omega_0\sqrt{1+2\eta}}$

- Με κατάλληλες αρχικές συνθήκες το σύστημα μπορεί να κινείται με μια από τις δύο χαρακτηριστικές συχνότητες.
  - Η αντίστοιχη κίνηση δίνεται από τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα:

$$\theta_1(t)=C\cos\omega_1 t \qquad \theta_2(t)=C\cos\omega_1 t \quad \text{για } \lambda_1\text{: } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\theta_1(t)=-C\cos\omega_2 t \qquad \theta_2(t)=C\cos\omega_2 t \quad \text{για } \lambda_2\text{: } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

Φυσικοί τρόποι ταλάντωσης

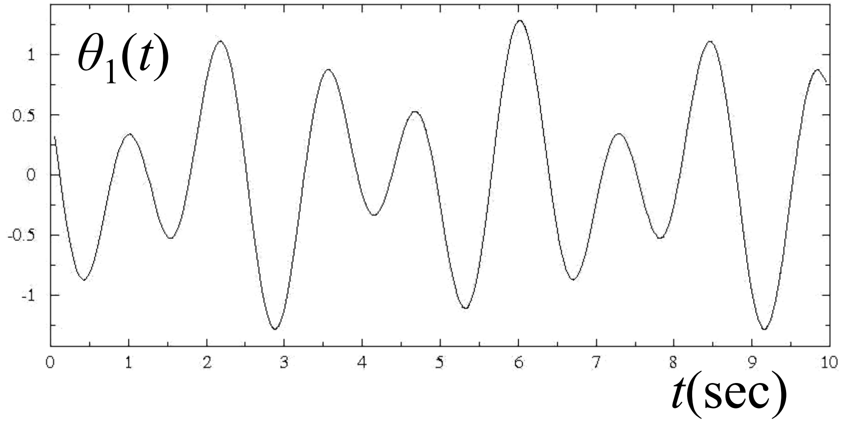
(normal modes)

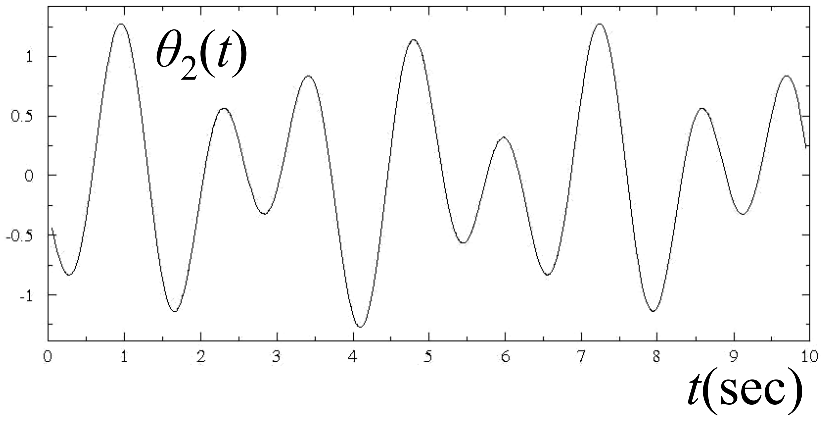
Μικρές ταλαντώσεις – Συζευγμένα εκκρεμή

- Η γενική κίνηση του συστήματος περιγράφεται σαν ένας γραμμικός συνδυασμός των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

$$\theta(t)=\begin{bmatrix}\theta_1(t)\\ \theta_2(t)\end{bmatrix}=A_1\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\cos(\omega_1 t-\delta_1)+A_2\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\cos(\omega_2 t-\delta_2)$$

- Έχουμε δυο Δ.Ε. 2ης τάξης για τις μεταβλητές $\theta_1(t)$ και $\theta_2(t)$
  - Περιμένουμε 4 σταθερές ολοκλήρωσης (A_1,A_2,δ_1,δ_2)
- Η γενική λύση εν γένει είναι δύσκολο να περιγραφεί:





αφού αποτελείται από ένα μείγμα δύο συχνοτήτων ω_1 και ω_2

Συζευγμένα εκκρεμή

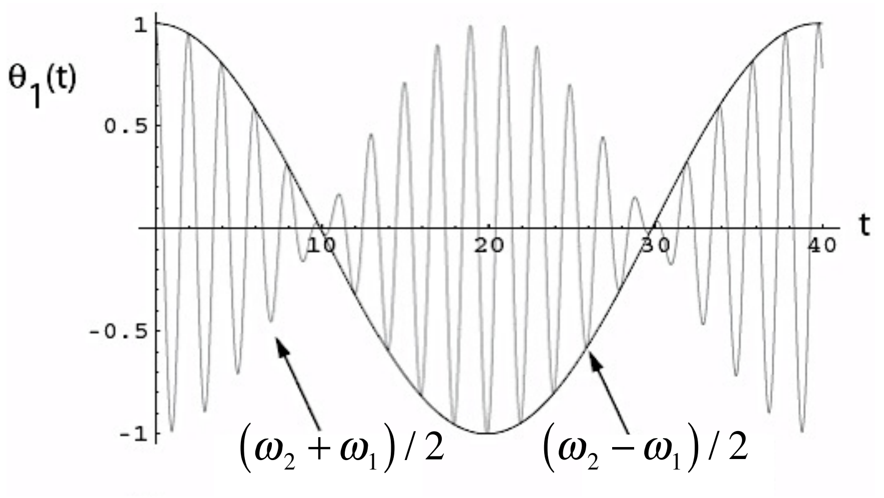
Αν υποθέσουμε ότι η σύζευξη των δύο εκκρεμών είναι ασθενής (k μικρό)

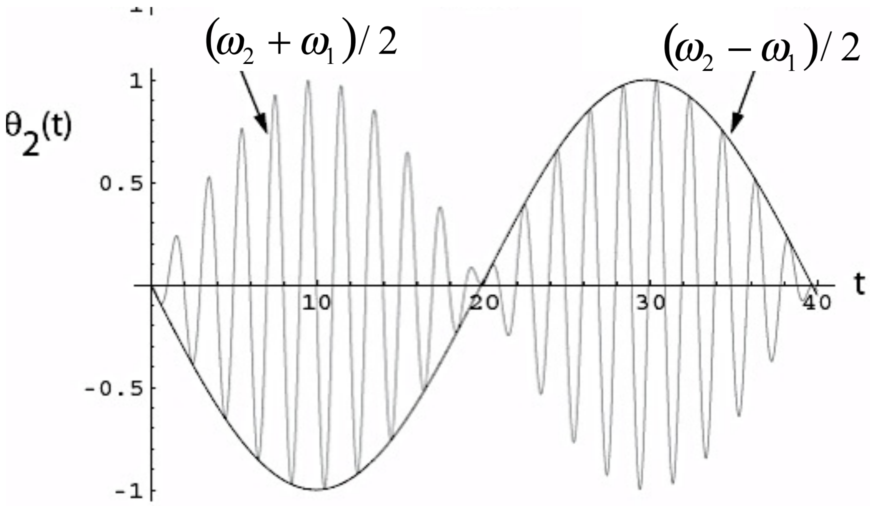
ώστε: $\omega_2 = \omega_0\sqrt{1+2\frac{ka}{mg}} \approx \omega_0 = \omega_1$

και ότι οι αρχικές συνθήκες είναι τέτοιες ώστε A_1=A_2=$C/2$ και $\delta_1 = \delta_2 = 0$ τότε:

$$\theta_1(t) = \frac{C}{2}\left[\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t\right] = C\sin\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right) = C\sin\omega_\delta t\sin\omega_\mu t$$

$$\theta_2(t) = \frac{C}{2}\left[\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right] = C\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right) = C\cos\omega_\delta t\cos\omega_\mu t$$





Αφού $\omega_\delta = \omega_2 - \omega_1$ είναι μικρό έχουμε το σχηματισμό διακροτήματος