ΦΥΣ. 131
ΕΡΓΑΣΙΑ # 5

1. Ένα κιβώτιο μάζας 60kg συγκρατείται από ένα ελατήριο σταθεράς $k=4.00\times10^3$ N/m) το οποίο είναι συμπιεσμένο οριζόντια κατά ένα μήκος 1.5m. Το κιβώτιο αφήνεται ελεύθερο τη χρονική στιγμή t=0 και γλυστρά οριζόντια πάνω σε μιά λεία επιφάνεια. Κατά τη διάρκεια της διαδρομής το κιβώτιο συναντά μια τραχιά επιφάνεια μήκους 2m με συντελεστές τριβής ολίσθησης μ_κ=0.20 και στατικής τριβής μ_ς=0.30. Αφού περάσει πάνω απο την τραχία επιφάνεια συναντά μιά άλλη λεία επιφάνεια και ένα ακόμα ελατήριο με σταθερά $k=3.00\times10^3$ N/m. Αυτό το τελευταίο ελατήριο, αντιστρέφει την κίνηση του κιβωτίου. (α) Να βρεθεί η συνολική αρχική μηχανική ενέργεια του κιβωτίου όταν t=0. (β) Πόσο έργο παράγεται από την δύναμη της τριβής ολίσθησης πάνω στο κιβώτιο κατά την διάρκεια κάθε περάσματος πάνω από την τραχειά επιφάνεια. (γ) Πόση είναι η συμπίεση του δεύτερου ελατηρίου την πρώτη φορά που το κιβώτιο το συναντά. (δ) Πόσες φορές το κιβώτιο θα περάσει πλήρως πάνω από την τραχειά επιφάνεια πριν σταματήσει να κινείται.

(α) Αρχική ενέργεια $E=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}(4\cdot10^3)(1.5)=\boxed{4,500\ J}$

(β) $W=\vec{F}\cdot\vec{d}=-(\mu N)d=-\mu m g d=-0.2\cdot60\cdot9.8\cdot2=\boxed{-235.2\ J}$

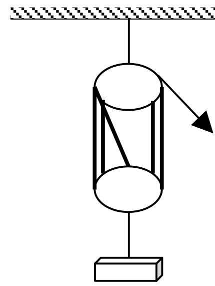
(γ) Αφού το κιβώτιο έχει χάσει 235.2J πάνω στην τραχειά επιφάνεια του έχει απομείνει $4500-235.2\cong4,265$ J.

Σε μέγιστη συμπίεση όλη αυτή η ενέργεια πηγαίνει σε δυναμική ενέργεια ελατηρίου

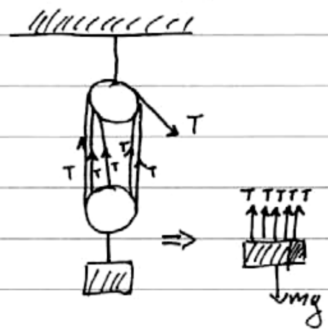
Επομένως $\frac{1}{2}kx^2=4,265\Rightarrow\frac{1}{2}(3\cdot10^3)x^2=4,265\Rightarrow x^2=\sqrt{2.89}\Rightarrow\boxed{x=1.69m}$

(δ) Κάθε φορά που το κιβώτιο περνά πάνω από την τραχειά επιφάνεια χάνει 235 J. Από την στιγμή που $\frac{4500}{235}=19.15$, βλέπουμε ότι το κιβώτιο περνά πάνω από την τραχειά επιφάνεια 19 φορές. Σταματά μεταξύ $19^{ης}$ και $20^{ης}$ φοράς.

2. Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν τριβές και ότι οι τροχαλίες είναι αμελητέας μάζας πόσο



σχοινί θα πρέπει να τραβήξετε ώστε να σηκώσετε το βάρος στο παρακάτω σχήμα κατά 1 μέτρο;



Η τάση είναι σταθερή κατα μήκος όλου του σχοινιού. Επομένως η μάζα mg στηρίζεται από τις 5 τάσεις των σχοινιών της τροχαλίας

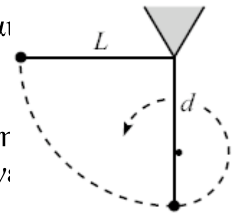
$$mg = 5T \Rightarrow T = \frac{mg}{5}$$

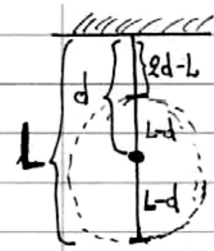
Όταν σηκώνουμε το βάρος, η βαρύτητα παράγει έργο $W = mg \cdot 1m$

Αλλά το ίδιο έργο παράγεται και από τη τάση του σχοινιού

Επομένως $W = L \cdot T$. Όπου L το μήκος του σχοινιού. Άρα $L \cdot \frac{\cancel{mg}}{5} = \cancel{mg} \cdot 1 \Rightarrow \boxed{L = 5m}$

3. Ένα εκκρεμές μήκους L κρατιέται αρχικά σε οριζόντια θέση και κατόπιν αφήνεται ελεύθερο. Το νήμα του εκκρεμούς χτυπά κατά τη διαδρομή του σε ένα καρφί που βρίσκεται σε απόσταση d κάτω από το σημείο στήριξης του εκκρεμούς. Ποια είναι η μικρότερη τιμή της απόστασης d ώστε το νήμα να παραμέν πάντοτε τεντωμένο;





Το ψηλότερο σημείο του κύκλου που προκύπτει είναι σε απόσταση $L-2(L-d) = 2d-L$ κάτω από το σημείο στήριξης. Από την διατήρηση της ενέργειας E, μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα στην κορυφή του κύκλου:

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 = \cancel{m}g(2d-L) \Rightarrow \boxed{v^2 = 2g(2d-L)} \quad (1)$$

Αυτό βγήκε από $\Delta E_{κιν} + \Delta U = \emptyset \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \emptyset - [mg(2d-L) - \emptyset] = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mg(2d-L)$
οπου θεωρώ ότι η δυναμική ενέργεια είναι αρχικά $\emptyset$ και η κινητική ενέργεια $\emptyset$ επειδή το εκκρεμές κρατιέται σε ηρεμία.

Στην κορυφή όμως του κύκλου, η ακτινική δύναμη (πρός τα κάτω) είναι

$$F=ma \Rightarrow T+mg=F \Rightarrow T+mg=\frac{mv^2}{R}$$

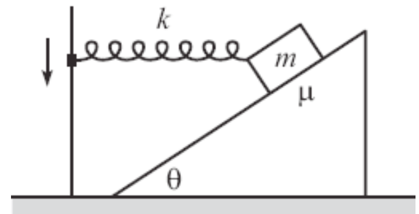
Η μικρότερη τιμή της ταχύτητας βρίσκεται όταν ουσιαστικά η τάση $T=\emptyset$.
και επομένως $g=\frac{v^2}{R} \Rightarrow v^2=gR$.

Δηλαδή η ταχύτητα θα είναι: $v^2 \geq gR \Rightarrow \boxed{v^2 \geq g(L-d)}$ (2)

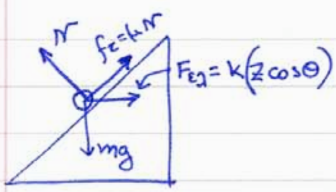
Από (1) και (2) έχουμε: $2\cancel{g}(2d-L) \geq \cancel{g}(L-d) \Rightarrow 4d+d \geq L+2L \Rightarrow$

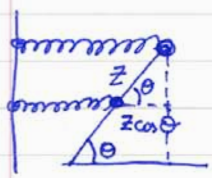
$$\Rightarrow 5d \geq 3L \Rightarrow \boxed{d \geq \frac{3}{5}L}$$

4. Μια μάζα m βρίσκεται πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο το οποίο σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση. Ο συντελεστής τριβής (κινητικής και στατικής τριβής) μεταξύ της μάζας και του κεκλιμένου επιπέδου είναι μ=1.0. Ένα οριζόντιο ελατήριο σταθεράς ελατηρίου k, έχει το δεξί άκρο του εξαρτώμενο από τη μάζα ενώ το αριστερό άκρο του εξαρτάται από ένα δαχτυλίδι το οποίο μπορεί να κινείται πάνω σε ένα κατακόρυφο στύλο. Το ελατήριο είναι αρχικά στο φυσικό του μήκος. Κατόπιν η μάζα αφήνεται ελεύθερη και αρχίζει να γλιστρά προς το κατώτερο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου, ενώ το δαχτυλίδι στο αριστερό άκρο του ελατηρίου παρακολουθεί την κίνηση της μάζας έτσι ώστε το ελατήριο να παραμένει πάντοτε οριζόντιο. Ποια απόσταση καλύπτει η μάζα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο πριν έρθει σε ηρεμία για πρώτη φορά; (Μπορείτε να υποθέσετε ότι η γωνία θ > 45°, το οποίο σημαίνει ότι η μάζα όντως θα γλιστρήσει προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Ίσως κάποιος να θέλει να αποδείξει ότι όντως για να συμβεί κάτι τέτοιο θα πρέπει ο συντελεστής τριβής να είναι μικρότερος από την εφαπτομένη της γωνίας θ).



Έστω z η απόσταση που κινήθηκε το σώμα προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Το ελατήριο τότε συσπειρώνεται κατά μια απόσταση z cosθ.
Το διπλανό σχήμα δείχνει το διάγραμμα ελευθέρου σώματος.
Αναλύοντας σε άξονες παράλληλο κ κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο θα έχουμε:





$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - mg\cos\theta - (kz\cos\theta)\sin\theta = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N = mg\cos\theta + (kz)\cos\theta\sin\theta$$

Η δύναμη της τριβής είναι ίση με N αφού $\mu_s = 1 \Rightarrow f_{\tau\rho} = N$.

Το έργο που καταναλώνει η δύναμη της τριβής είναι: (για την απόσταση z)

$$W_{f_\tau} = \int_0^z f_{\tau\rho}\, dz = \int_0^z -(mg\cos\theta + kz\cos\theta\sin\theta)\, dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{f_\tau} = -mg\cos\theta\, z - \frac{1}{2}kz^2\cos\theta\sin\theta .$$

Η δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια ελατηρίου και θερμότητα.

Η δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια ελατηρίου και θερμότητα.

Οπότε $mgh = U_{ελ} + |W_{f_{τρ}}| \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}k(z\cos\theta)^2 + (mg\cos\theta\, z + \frac{1}{2}kz^2\cos\theta\sin\theta)$

Επομένως $mg(\overbrace{\cancel{z}\sin\theta}^{h}) = \frac{1}{2}k\cancel{z^2}\cos^2\theta + mg\cancel{z}\cos\theta + \frac{1}{2}k\cancel{z^2}\cos\theta\sin\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow mg(\sin\theta - \cos\theta) = \frac{1}{2}kz\cos\theta(\cos\theta + \sin\theta) \Rightarrow$

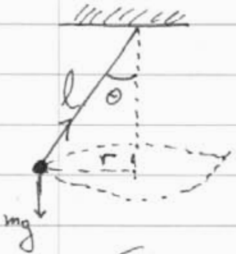
$$\boxed{z = \frac{2mg}{k}\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\cos\theta(\cos\theta + \sin\theta)}}$$

για $\theta = 45^\circ \Rightarrow z = 0$

για $\theta \Rightarrow 90^\circ \Rightarrow z \to \infty$

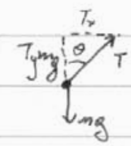
<u>**Διαφορετικά:**</u> $W = \Delta E_{κιν} \Rightarrow W_{f_{τ}} + W_{ελ} + W_{βρ} = \cancel{K_f}^{\,0} - \cancel{K_i}^{\,0} \Rightarrow \left(-mgz\cos\theta - \frac{1}{2}kz^2\cos\theta\sin\theta\right) - \frac{1}{2}kz^2\cos^3\theta + mgz\sin\theta = 0.$

5. Μια μάζα είναι δεμένη στο ένα άκρο ενός νήματος αμελητέας μάζας. Το άλλο άκρο του νήματος είναι δεμένο σε ένα πολύ λεπτό, λείο (χωρίς τριβές) κατακόρυφο στύλο. Το νήμα είναι αρχικά τελείως περιτυλιγμένο γύρω από το στύλο (σε ένα μεγάλο αριθμό μικρών οριζόντιων κύκλων), με την μάζα να ακουμπά στο στύλο. Η μάζα απελευθερώνεται και το νήμα αρχίζει σιγά σιγά να ξετυλίγεται. Τι γωνία κάνει το νήμα με το στύλο τη στιγμή που το νήμα έχει ξετυλιχθεί τελείως;



Από τη στιγμή που ο στύλος είναι πολύ λεπτός, η κίνηση της μάζας μπορεί να προσεγγιστεί με ένα κύκλο (ο οποίος σιγά σιγά κατεβαίνει προς τα κάτω και μεγαλώνει σε ακτίνα όπως το νήμα ξετυλίγεται)

Όταν το νήμα έχει ξετυλιχθεί τελείως έχουμε την κατάσταση που δείχνει το σχήμα.



Από την διατήρηση της ενέργειας E, έχουμε $\boxed{\frac{1}{2}mv^2 = mgl\cos\theta}$

Η κατακόρυφη συνιστώσα της τάσης είναι $T_y = mg$ επομένως η οριζόντια συνιστώσα θα είναι $mg\tan\theta = T_x$

Από τη στιγμή που το σώμα εκτελεί περιστροφική κίνηση η ακτινική δύναμη θα είναι $F = ma = T_x \Rightarrow mg\tan\theta = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{m}g\tan\theta = \frac{\cancel{m}v^2}{l\sin\theta} \Rightarrow \boxed{v^2 = gl\tan\theta\sin\theta}$$

Από τις δύο εξισώσεις θα έχουμε: $\frac{1}{2}mv^2 = mgl\cos\theta \Rightarrow$

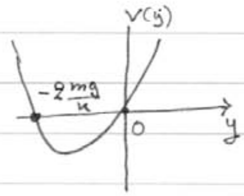
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{mgl}\tan\theta\sin\theta = \cancel{mgl}\cos\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\tan\theta\overset{\tan\theta}{\cancel{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan^2\theta = 2 \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\theta = 54.7^\circ}$$

6. Ελατήριο αμελητέας μάζας και σταθεράς ελατηρίου k κρέμεται κατακόρυφα από μιά οροφή. Αρχικά το ελατήριο είναι στη θέση ισορροπίας του. Μιά μάζα m κρέμεται στο χαμηλότερο άκρο του ελατηρίου και αφήνεται ελεύθερη.
(α) Υπολογήστε την ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος σα συνάρτηση του ύψους y (το οποίο είναι αρνητικό), σχετικά με την αρχική θέση ισορροπίας. Σχεδιάστε το δυναμικό που βρήκατε.
(β) Να βρεθεί η θέση y_0, το σημείο στο οποίο το δυναμικό είναι ελάχιστο
(γ) Ξαναγράψτε τη δυναμική ενέργεια σα συνάρτηση της μεταβλητής $z=y-y_0$. Εξηγήστε γιατί το αποτέλεσμά σας δείχνει ότι ένα κρεμμάμενο ελατήριο μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα ελατήριο σε ένα κόσμο χωρίς βαρύτητα, με την προϋπόθεση ότι το νέο σημείο ισορροπίας (y_0) λαμβάνεται σά το μήκος ηρεμίας του εκκρεμούς.

(α) Ελατήριο: $PE = \frac{1}{2} k y^2$
Βαρύτητα: $PE = mgy$

$$\left.\begin{array}{l} PE = \frac{1}{2}ky^2 \\ PE = mgy \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{2}ky^2 + mgy}$$



Επομένως το δυναμικό είναι μιά παραβολή με μηδέν στα σημεία $y=0$ και $y = -\frac{2mg}{k}$.

(β) Για ελάχιστο δυναμικό θα πρέπει η παράγωγος του δυναμικού ως προς τη θέση να'ναι μηδέν, δηλαδή $\frac{dV}{dy} = 0 \Rightarrow ky + mg = 0 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{mg}{k}}$ μεταξύ των σημείων 0 και $-\frac{2mg}{k}$

(γ) $$V(y) = \frac{1}{2}k\left(y^2 + \frac{2mg}{k}y\right) = \frac{1}{2}k\left(y^2 + \frac{2mg}{k}y + \left(\frac{mg}{k}\right)^2\right) - \frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k} = \frac{1}{2}k\left(y + \frac{mg}{k}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(y) = \frac{1}{2}k\left(y - \left(-\frac{mg}{k}\right)\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k} = \boxed{\frac{1}{2}kz^2 - \frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k} = V(z)}$$

Η επιπλέον σταθερά $-\frac{m^2g^2}{2k}$ δεν παίζει κανένα ρόλο, μιά και μόνο διαφορές δυναμικού είναι σημαντικές. Επομένως μπορούμε να την παραβλέψουμε και έχουμε ότι $\boxed{V(z) = \frac{1}{2}kz^2}$

Αυτή η ποσότητα είναι η δυναμική ενέργεια (P.E) για ένα ελατήριο όλη εξαιτίας του χωρίς να λάβουμε υπόψην βαρύτητα. Η υποφαινόμενη αιτία για αυτή τη συμπεριφορά οφείλεται στο γεγονός ότι η δύναμη του ελατηρίου είναι γραμμική ως πρός y. Επομένως το πρώτο διάστημα mg/k για το οποίο επιμηκύνεται απλά δίνει μιά δύναμη $k(mg/k) = mg$, και η οποία ακυρώνει την βαρύτητα.

7. Μια μπίλια είναι αρχικά σε ηρεμία στο ψηλότερο σημείο ενός λείου στεφανιού ακτίνας R, το οποίο βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο. Δίνεται στην μπίλια μια οριζόντια ώθηση έτσι ώστε να αρχίσει να κυλά προς τα κάτω και γύρω από το στεφάνι. Σε ποιά σημεία του στεφανιού η μπίλια ασκεί μέγιστη οριζόντια δύναμη στο στεφάνι;

Ας υποθέσουμε ότι Θ είναι η γωνία σχετικά με την χαμηλότερη θέση του στεφανιού.

Η ακτινική δύναμη που ενεργεί στην μπίλια είναι:

$$N - mg\cos\Theta = m\frac{v^2}{R}$$

(θεωρούμε ότι η ακτινική δύναμη έχει διεύθυνση πρός τα μέσα και θεωρούμε την διεύθυνση αυτή ως θετική)

Αλλά η v^2 δίνεται από διατήρηση της Ενέργειας $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mg(R + R\cos\Theta) \Rightarrow v^2 = 2gR(1+\cos\Theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N - mg\cos\Theta = m\frac{2gR(1+\cos\Theta)}{R} \Rightarrow N - mg\cos\Theta = 2mg + 2mg\cos\Theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{N = 2mg + 3mg\cos\Theta} \quad (1)$$

Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την οριζόντια συνιστώσα της N (Σύμφωνα με τον 3° νόμο του Newton, N είναι επίσης η δύναμη που ασκεί η μπίλια στο στεφάνι).

Από την (1) έχουμε $N_x = N\sin\Theta = (2mg + 3mg\cos\Theta)\sin\Theta$. Πέρνωντας την παράγωγο $\Rightarrow$

$$\frac{dN_x}{d\Theta} = 0 \Rightarrow 2\cancel{mg}\cos\Theta + 3\cancel{mg}\cos^2\Theta - 3\cancel{mg}\sin^2\Theta = 0 \Rightarrow 2\cos\Theta + 3\cos^2\Theta - 3\sin^2\Theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cos\Theta + 3\cos^2\Theta - 3(1-\cos^2\Theta) = 0 \Rightarrow 2\cos\Theta + 6\cos^2\Theta - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\Theta = \frac{-2 \pm \sqrt{4+72}}{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{6} = \begin{cases} 0.56 \\ -0.89 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Theta = 56^\circ \text{ or } \Theta = 153^\circ}$$

Θέτουμε τις τιμές Θ που βρήκαμε παραπάνω στην εξίσωση (1) και έχουμε:

$$N\sin\Theta = (2mg + 3mg\cos\Theta)\sin\Theta \Rightarrow \begin{cases} \Theta = 56^\circ \Rightarrow N\sin\Theta = 3mg \\ \Theta = 153^\circ \Rightarrow N\sin\Theta = -0.3mg \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Theta = 56^\circ}$$

Η γωνία $\Theta = 153^\circ$ είναι η γωνία στην οποία η μπίλια πιέζει το στεφάνι δυνατότερα πρός τα αριστερά.

Στη γωνία $\Theta = 56^\circ$ η μπίλια πιέζει το στεφάνι πιό δυνατά πρός τα δεξιά.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι και η γωνία $\Theta = -56^\circ$ στην αριστερή πλευρά είναι θέση στην οποία το στεφάνι δέχεται μέγιστη πίεση από την μπίλια

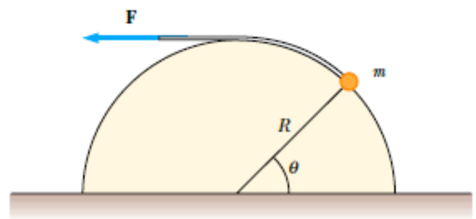
8. Ένα μυρμήγκι κυκλοφορεί σε μια διαδρομή σε μια επίπεδη επιφάνεια από ένα σημείο (0,0,0) σε ένα σημείο (1.0m, 5.0m, 0m). Εξαιτίας ενός μόνιμου αέρα, δέχεται μιά δύναμη F=(0.002N,0.001N,-0.0005N). Πόσο έργο δαπάνησε ο αέρας πάνω στο μυρμήγκι, για την διαδρομή αυτή. Αγνοήστε τριβές.

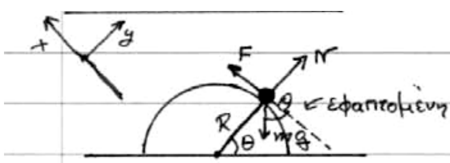
Ο ορισμός του έργου: $W \equiv \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Στην προκειμένη περίπτωση ξέρουμε και τα δύο διανύσματα $\vec{F}$ και $d\vec{r}$
και επομένως επειδή η $F=$σταθ ολ/σουμε $\Rightarrow$

$$W=\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot dx = (0.002\cdot 1 + 0.005 + (0.0005)0) \Rightarrow \boxed{W=0.007\ J}$$

9. Ένα μικρό σώμα μάζας m σύρεται στην επιφάνεια ενός λείου ημισφαιρίου ακτίνας R, με τη βοήθεια ενός νήματος το οποίο περνά από τη κορυφή του ημισφαιρίου (όπως στο σχήμα). (α) Αν το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα. δείξτε ότι F = mgcosθ (Σημειώστε ότι το εφόσον το σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα η συνιστώσα της επιτάχυνσης εφαπτόμενη του ημισφαιρίου πρέπει να είναι μηδέν σε όλες τις χρονικές στιγμές). (β) Ολοκληρώνοντας $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ να βρεθεί το έργο που καταναλώνεται ώστε το σωματίδιο να κινείται με σταθερή ταχύτητα από το χαμηλότερο σημείο του ημισφαιρίου στο υψηλότερο.





(α) Η δύναμη F κατευθύνεται κατά μήκος της εφαπτομένης γραμμής στο σημείο που το σχοινί είναι δεμένο στη μάζα m.

Από τα διάγραμμα ελεύθερου σώματος και επιλέγοντας τους άξονες συντεταγμένων κατά μήκος της εφαπτομένης και κάθετα σ' αυτήν, θα έχουμε:

$$\Sigma F_x = ma_x = 0 \Rightarrow F - mg\cos\Theta = 0 \Rightarrow \boxed{F = mg\cos\Theta} \quad (1)$$

(β) $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$

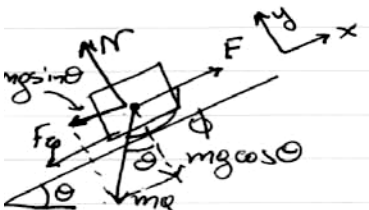
Σε ακτίνα η στοιχειώδης μετατόπιση δίνεται από $dr = R\,d\Theta$.
Στο χαμηλότερο σημείο της κυλινδρικής επιφάνειας $\Theta = 0$
Στο υψηλότερο σημείο $\Theta = \pi/2$
Επομένως τα όρια ολοκλήρωσης θα είναι από $\Theta = 0$ σε $\Theta = \pi/2$.
Το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$W = \int_0^{\pi/2} RF\,d\Theta \overset{(1)}{=} \int_0^{\pi/2} Rmg\cos\Theta\,d\Theta = Rmg\sin\Theta \Big|_0^{\pi/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = mgR(1-0) \Rightarrow \boxed{W = mgR}$$

Δηλαδή βλέπουμε και πάλι ότι το έργο είναι ακριβώς ίσο με την αλλαγή της δυναμικής ενέργειας βαρύτητας, όπως και θα έπρεπε να είναι.

10. Ένα κιβώτιο μάζας 10.0kg σύρεται σε τραχύ κεκλιμένο επίπεδο με αρχική ταχύτητα 1.50m/s. Η δύναμη που σύρει το κιβώτιο έχει μέτρο 100N και είναι παράλληλη προς το κεκλιμένο επίπεδο, το οποίο έχει γωνία κλίσης 20^o ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ του κιβωτίου και του κεκλιμένου επιπέδου είναι μ_κ=0.400 και το κιβώτιο σύρεται 5.00m. (α) Πόσο έργο παράγεται από την δύναμη της βαρύτητας στο κιβώτιο; (β) Προσδιορίστε την αύξηση της εσωτερικής ενέργειας του συστήματος κεκλιμένο επίπεδο-κιβώτιο εξαιτίας της δύναμης της τριβής. (γ) Πόσο έργο παράγει η δύναμη των 100N πάνω στο κιβώτιο; (δ) Ποια η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του κιβωτίου; (ε) Ποια η ταχύτητα του κιβωτίου αφού έχει διανύσει τα 5.0m;



(α) Το έργο της δύναμης της βαρύτητας θα είναι:

$$\left.\begin{array}{l} W_g = l\cdot mg\cdot\cos(\varphi) \\ \varphi = 90+\theta \end{array}\right\} \Rightarrow W_g = lmg\cos(90+\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{W_g = -mg\sin\theta\, l = -168J}$$

(β) Το έργο της δύναμης της τριβής αυξάνει την εσωτερική ενέργεια του συστήματος (εμφάνιση θερμότητας):

$$F_{\tau\rho} = \mu_k \cdot N = \mu_k \cdot mg\cos\theta$$

$$\Sigma F_y = N - mg\cos\theta = 0$$

$$W_{F_{\tau\rho}} = \int_0^5 \vec{F}_{\tau\rho}\cdot d\vec{l} = -\mu_k g m \cos\theta\cdot l \Rightarrow \boxed{W_{F_{\tau\rho}} = -184J}$$

(γ) Το έργο της σταθερής δύναμης F που κινεί το κιβώτιο είναι:

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{l} = Fs. \Rightarrow \boxed{W_F = 500\cdot J}$$

(δ) Από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας:

$$W_{net} = \Delta E_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow W_g + W_F + W_{F_{\tau\rho}} = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 500-168-184 = \frac{1}{2}m(\upsilon_2^2-\upsilon_1^2) \Rightarrow 148 = \frac{1}{2}m(\upsilon_2^2 - 1.5^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\cdot 148}{10} + 1.5^2\right) = \upsilon_2^2 \Rightarrow \boxed{\upsilon_2 = 5.7\ m/se}$$

(ε) $\boxed{W_{net} = 148J}$

11. Ένα έλκυθρο μάζας m δέχεται μια στιγμιαία ώθηση και κινείται πάνω στην επιφάνεια μιας παγωμένης λίμνης. Η ώθηση προσδίδει στο έλκυθρο μια αρχική ταχύτητα 2.00m/s. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ του έλκυθρου και της λίμνης είναι μ_κ=0.100. Χρησιμοποιώντας εξισώσεις ενέργειας να βρεθεί η απόσταση που διανύει το έλκυθρο μέχρι να σταματήσει.

Το έργο της τριβής ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος:

$$W_{F_{\tau\rho}} = \Delta E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Σύμφωνα με τις συνθήκες του προβλήματος: $v_f = 0m/s$ και $v_i = 2m/s$

Επομένως $W_{F_{\tau\rho}} = -\frac{1}{2} m v_i^2 = -F_{\tau\rho} \cdot S \Rightarrow S = \frac{m v_i^2}{2 F_{\tau\rho}}$ $\Rightarrow$

Η δύναμη της τριβής είναι $F_{\tau\rho} = \mu_\kappa N = \mu_\kappa m g$

$$S = \frac{\cancel{m} v_i^2}{\mu_\kappa \cancel{m} g} \Rightarrow \boxed{S = \frac{v_i^2}{\mu_\kappa g}}$$

12. Ένα σώμα μάζας 4.00kg κινείται κατά μήκος του x-άξονα. Η θέση του μεταβάλεται με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση $x = t + 20t^3$, όπου x μετράται σε μέτρα και ο χρόνος t σε δευτερόλεπτα. Να βρεθεί (α) η κινητική του ενέργεια σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, (β) η επιτάχυνση του σώματος και η δύναμη που δρα πάνω του σε μια τυχαία χρονική στιγμή t, (γ) η ισχύς που καταναλώνεται στο σώμα σε μια τυχαία χρονική στιγμή t, και (δ) το έργο που καταναλώνεται πάνω στο σώμα στο χρονικό διάστημα t=0s σε t=20s.

Σύμφωνα με την άσκηση $x(t) = t + 20t^3$.

Επομένως $\upsilon = \dfrac{dx}{dt} = 1 + 60t^2$

(α) Η κινητική ενέργεια επομένως είναι: $\boxed{E_k(t) = \frac{1}{2} m (1+60t^2)^2}$

(β) Η επιτάχυνση του σώματος είναι $a = \dfrac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow a = \dfrac{d}{dt}(1+60t^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a = 120t}$

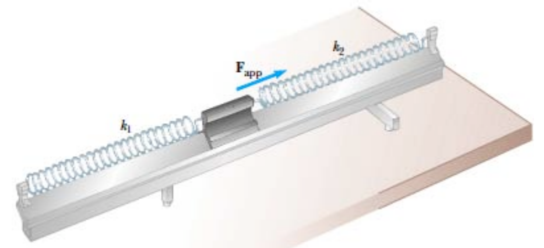
Η δύναμη που δρα στο σώμα θα είναι: $F = ma \Rightarrow \boxed{F(t) = 120mt}$

(γ) Η ισχύς που καταναλώνεται στο σώμα θα είναι: $P = F\upsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow P = (12mt)(1+6t^2)$ Watts

(δ) $W = \int_0^2 P\,dt = \int_0^2 (12mt + 72mt^3)\,dt$

13. Δυο ελατήρια αμελητέας μάζας, ένα με σταθερά ελατηρίου k_1 και το δεύτερο με σταθερά ελατηρίου k_2 είναι εξαρτημένα από τα άκρα μιας αεροτροχιάς όπως στο σχήμα. Ένα σώμα εξαρτάται από τα ελεύθερα άκρα των δυο ελατηρίων και βρίσκεται μεταξύ τους. Όταν το σώμα βρίσκεται σε ισορροπία, το ελατήριο 1 έχει επιμήκυνση x_{i1} προς τα δεξιά του φυσικού του μήκους και το ελατήριο 2 έχει μια συσπείρωση x_{i2} προς τα αριστερά του φυσικού του μήκους. Μια οριζόντια δύναμη F_{app} εξασκείται πάνω στο σώμα και το μετακινεί μια απόσταση x_A προς τα δεξιά της θέσης ισορροπίας του. Δείξτε ότι (α) το έργο που καταναλώνεται στο ελατήριο 1 δίνεται από τη σχέση $\frac{1}{2}k_1\left(x_A^2+2x_Ax_{i1}\right)$, (β) το έργο που καταναλώνεται στο ελατήριο 2 είναι $\frac{1}{2}k_1\left(x_A^2+2x_Ax_{i1}\right)$, (γ) τα x_{i2} και x_{i1} σχετίζονται σύμφωνα με την εξίσωση $x_{i2}=k_1x_{i1}/k_2$ και (δ) το ολικό έργο που παράγει η δύναμη F_{app} είναι $\frac{1}{2}\left(k_1+k_2\right)x_A^2$



(α) Το έργο της δύναμης θα δίνεται σύμφωνα με τον ορισμό :

$$W_1=\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{x}=\int_{x_{i1}}^{x_{i1}+x_A} k_1 x\,dx=\frac{1}{2}k_1x^2\Big|_{x_{i1}}^{x_{i1}+x_A}=\frac{1}{2}k_1\left[(x_{i1}+x_A)^2-x_{i1}^2\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_1=\frac{1}{2}k_1\left(\cancel{x_{i1}^2}+x_A^2+2x_{i1}x_A-\cancel{x_{i1}^2}\right)=\boxed{\frac{1}{2}k_1\left(x_A^2+2x_{i1}x_A\right)}$$

(1)

(Β) Το έργο για το δεύτερο ελατήριο θα είναι ανάλογα :

$$W_2=\int_1^2 \vec{F}\,d\vec{x}=\int_{-x_{i2}}^{-x_{i2}+x_A} k_2 x\,dx=\frac{1}{2}k_2\left((-x_{i2}+x_A)^2-x_{i2}^2\right)=\frac{1}{2}k_2\left(\cancel{x_{i2}^2}+x_A^2-2x_{i2}x_A-\cancel{x_{i2}^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{W_2=\frac{1}{2}k_2\left(x_A^2-2x_{i2}x_A\right)} \quad (2)$$

(γ) Πριν εφαρμοσθεί η εξωτερική δύναμη το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία και επομένως πάνω στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις των 2 ελατηρίων οι οποίες είναι ίσες και αντίθετες :

$$\Sigma F_x=0 \Rightarrow +k_1x_{i1}=k_2x_{i2} \Rightarrow \boxed{x_{i2}=\frac{k_1x_{i1}}{k_2}} \quad (3)$$

(δ) Η δύναμη F_{app} παράγει έργο:

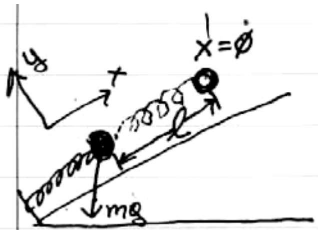
$$W_{F_{App}} = W_1 + W_2 \overset{(1)\wedge(2)}{=} \frac{1}{2} k_1 x_A^2 + k_1 x_{i_A} x_{i_1} + \frac{1}{2} k_2 x_A^2 - k_2 x_{i_A} x_{i_2} \Rightarrow$$

$$W_{F_{app}} = \frac{1}{2} x_A^2 (k_1 + k_2) + x_A \left(\cancel{k_1 x_{i_1} - k_2 x_{i_2}}^{\,0}\right) \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$\boxed{W_{F_{app}} = \frac{1}{2} x_A^2 (k_1 + k_2)} \simeq \frac{1}{2} k_{ol} x_A^2$$

Δυο ελατήρια παράλληλα ισοδυναμούν με ελατήριο του οποίου η σταθερά είναι: $k_{ol} = k_1 + k_2$

14. Ο εκτοξευτής των μπαλών σε ένα μηχάνημα pinball έχει σταθερά ελατηρίου 1.20N/cm (δείτε το σχήμα). Η επιφάνεια στην οποία κινείται η μπάλα έχει κλίση 10^o ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Αν το ελατήριο είναι αρχικά συμπιεσμένο κατά 5.0cm, να βρεθεί η αρχική ταχύτητα εκτόξευσης της μπάλας η οποία έχει μάζα 100gr. Θεωρήστε ότι οι τριβές είναι αμελητέες και αγνοήστε τη μάζα του ελατηρίου.



Στο σώμα ασκούνται η δύναμη του ελατηρίου κ' η βαρύτητα. Επομένως από αρχή διατήρηση μηχανικής ενέργειας ή από το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας θα έχουμε:

$$\boxed{W_g + W_{ελ} = \Delta E_{κιν} = \frac{1}{2}m\upsilon_f^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_i^2} \quad (1) \quad \upsilon_i = \emptyset \, m/s$$

Το έργο της δύναμης του ελατηρίου θα είναι:

$$W_{ελ} = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F}_{ελ}\cdot d\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f}(-kx)\,dx = -\frac{1}{2}kx^2\Big|_{x_i}^{x_f} = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{ελ} = \frac{1}{2}kx_i^2} \; (2) \text{ εφόσον } x_f = \emptyset$$

$$W_g = \int_{x_i}^{x_f} m\vec{g}\cdot d\vec{x} = mg\int_{x_i}^{x_f}\cos(90+\theta)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_g = -mg\sin\theta\,(x_f - x_i) \qquad \text{αλλά } x_i = -x$$

$$\Rightarrow \boxed{W_g = -mg\sin\theta\, x} \quad (3)$$

Από (1), (2) και (3) $\Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 - mg\sin\theta\, x = \frac{1}{2}m\upsilon_f^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \upsilon_f^2 = \frac{kx^2}{m} - 2g\sin\theta\, x \Rightarrow \upsilon_f = \sqrt{\frac{kx^2}{m} - 2g\sin\theta x} = \sqrt{\frac{1.2\cdot 0.05\cdot(5cm)}{0.1} - 2\cdot 9.8\cdot 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon_f = 1.68\, m/s}$$