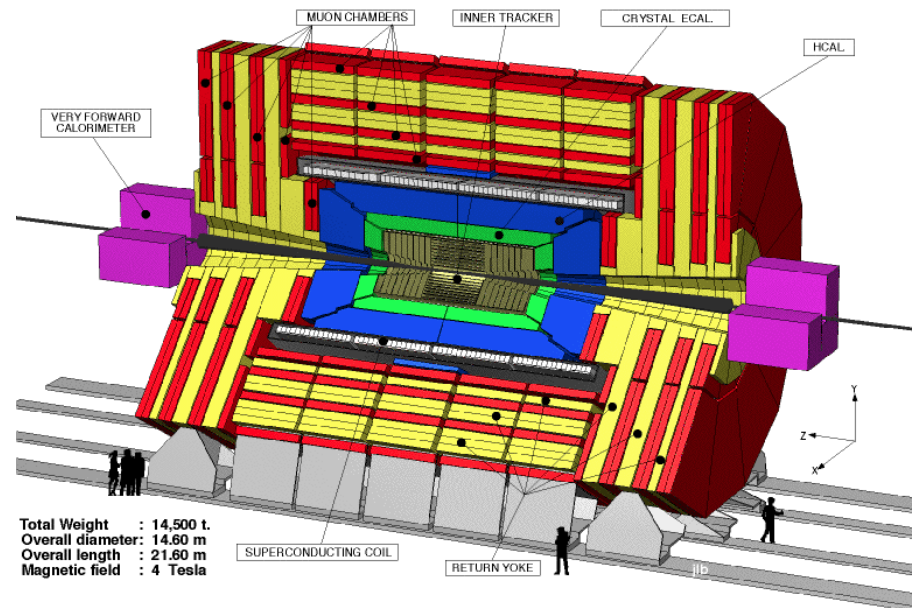
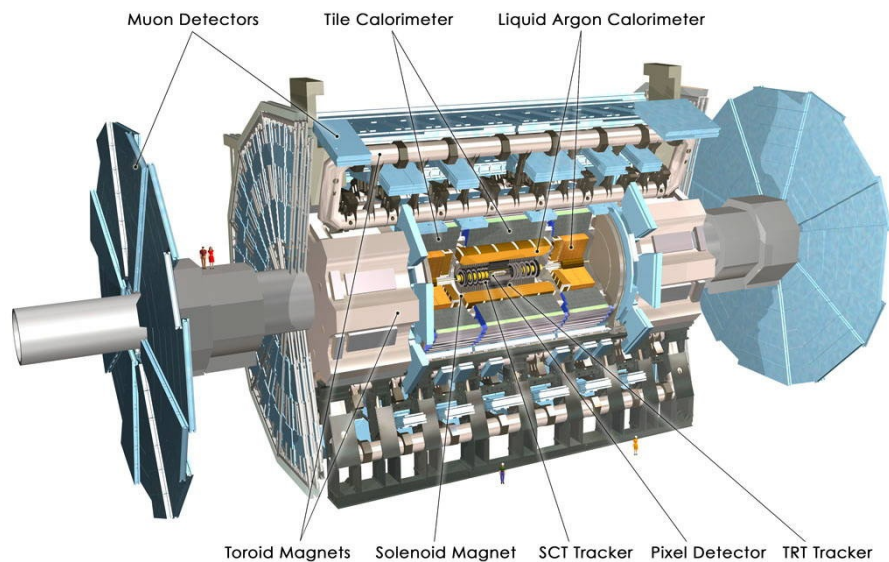


Αλληλεπιδράσεις σωματιδίων με την ύλη και Ανιχνευτές σωματιδίων



Κατανόηση της συμπεριφοράς Bethe-Bloch

$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = Kz^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right]$$

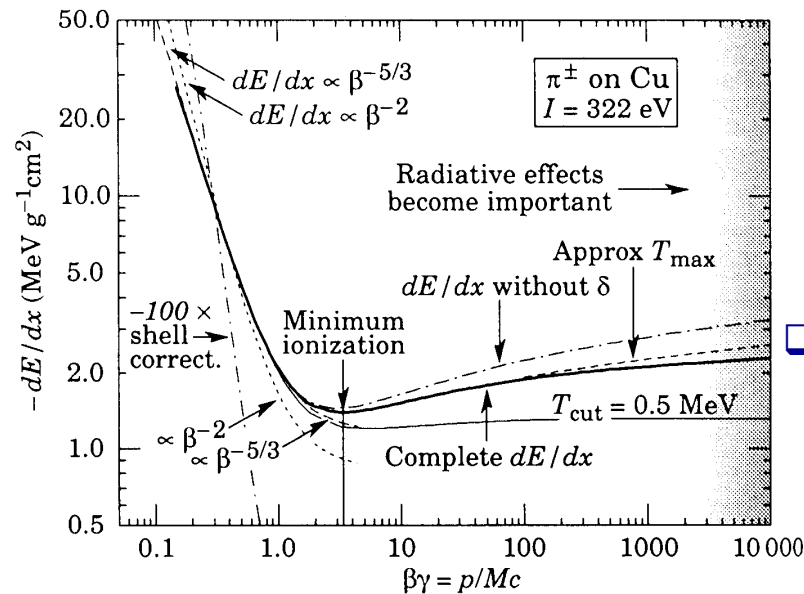
□ Εξάρτηση από $1/\beta^2$

➤ Αργά κινούμενα σωματίδια αισθάνονται το ηλεκτρικό πεδίο των ηλεκτρονίων των ατόμων για μεγαλύτερο διάστημα

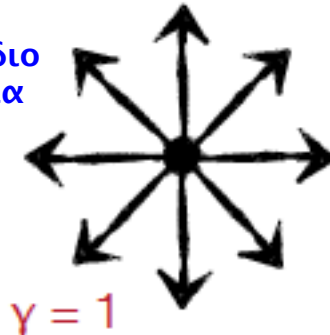
$$\Delta p_{\perp} = \frac{e}{V} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\perp} dx = \int F_{\perp} dt = \int F_{\perp} \frac{dx}{V}$$

□ Σχετικιστική αύξηση για $\beta\gamma > 4$

➤ Για σωματίδια μεγάλης ενέργειας, το εγκάρσιο πεδίο αυξάνει λόγω μετασχηματισμού Lorentz $E_y \rightarrow \gamma E_y$ με αποτέλεσμα την αύξηση της ενεργού διατομής



σωματίδιο
σε ηρεμία



γρήγορα
κινούμενο
σωματίδιο



γ - αυξάνει

Κατανόηση της συμπεριφοράς Bethe-Bloch

$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = Kz^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right]$$

□ Διόρθωση πυκνότητας – όρος δ

✧ φαινόμενα πόλωσης (εξάρτηση από πυκνότητα)

✧ Θωράκιση του ηλεκτρικού πεδίου μακριά από την διαδρομή του σωματιδίου με αποτέλεσμα την μείωση των συνεισφορών από απομακρυσμένα άτομα.

✧ Σημαντικότερη η συνεισφορά για μεγάλα γ όπου αυξάνει η εμβέλεια επιρροής του ηλεκτρικού πεδίου και αυξάνει ο όρος b_{\max}

➤ Σε υψηλές ενέργειες: $\delta/2 \rightarrow \ln(\hbar\omega/I) + \ln\beta\gamma - 1/2$

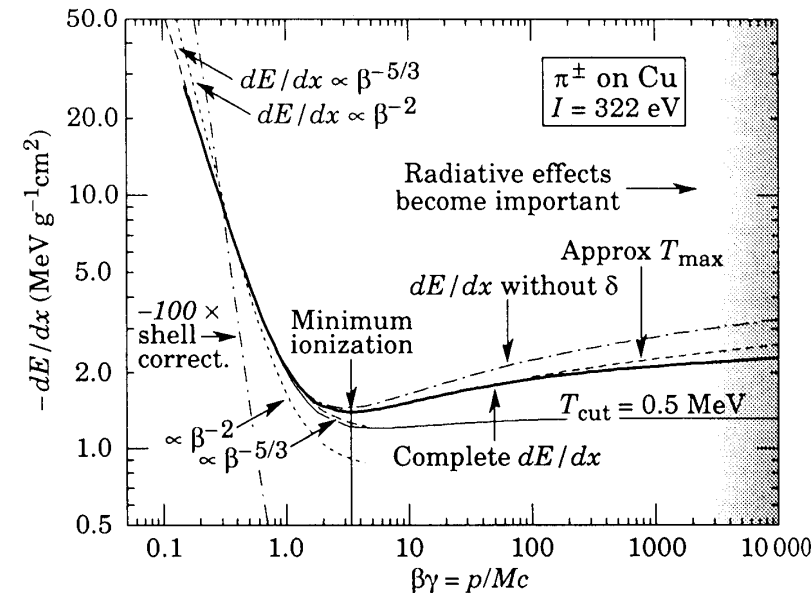
➤ Οι διορθώσεις μεγάλες σε υψηλές ενέργειες και οδηγούν στην σταθερή τιμή της dE/dx

□ Διόρθωση στοιβάδας

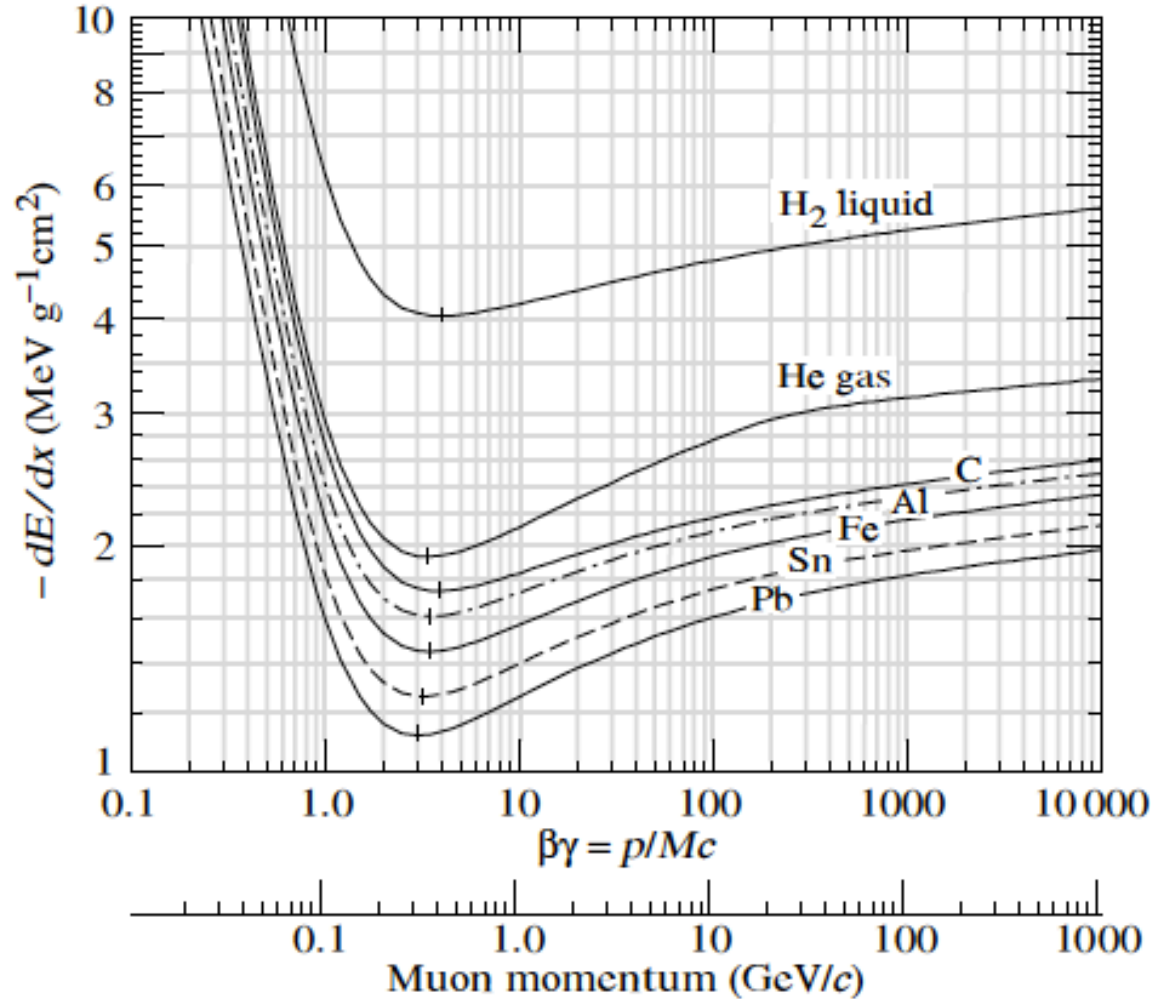
✧ εμφανίζεται όταν η ταχύτητα των προσπίπτοντων σωματιδίων είναι κοντά στην τροχιακή ταχύτητα των ηλεκτρονίων του ατόμου του μέσου: $\beta c \sim v_e$

✧ η υπόθεση ότι το ηλεκτρόνιο είναι σε ηρεμία παύει να ισχύει και ένα σωματίδιο μπορεί να δεσμευτεί

➤ Οι διορθώσεις αυτές είναι εν γένει μικρές



Απώλεια ενέργειας φορτισμένων σωματιδίων



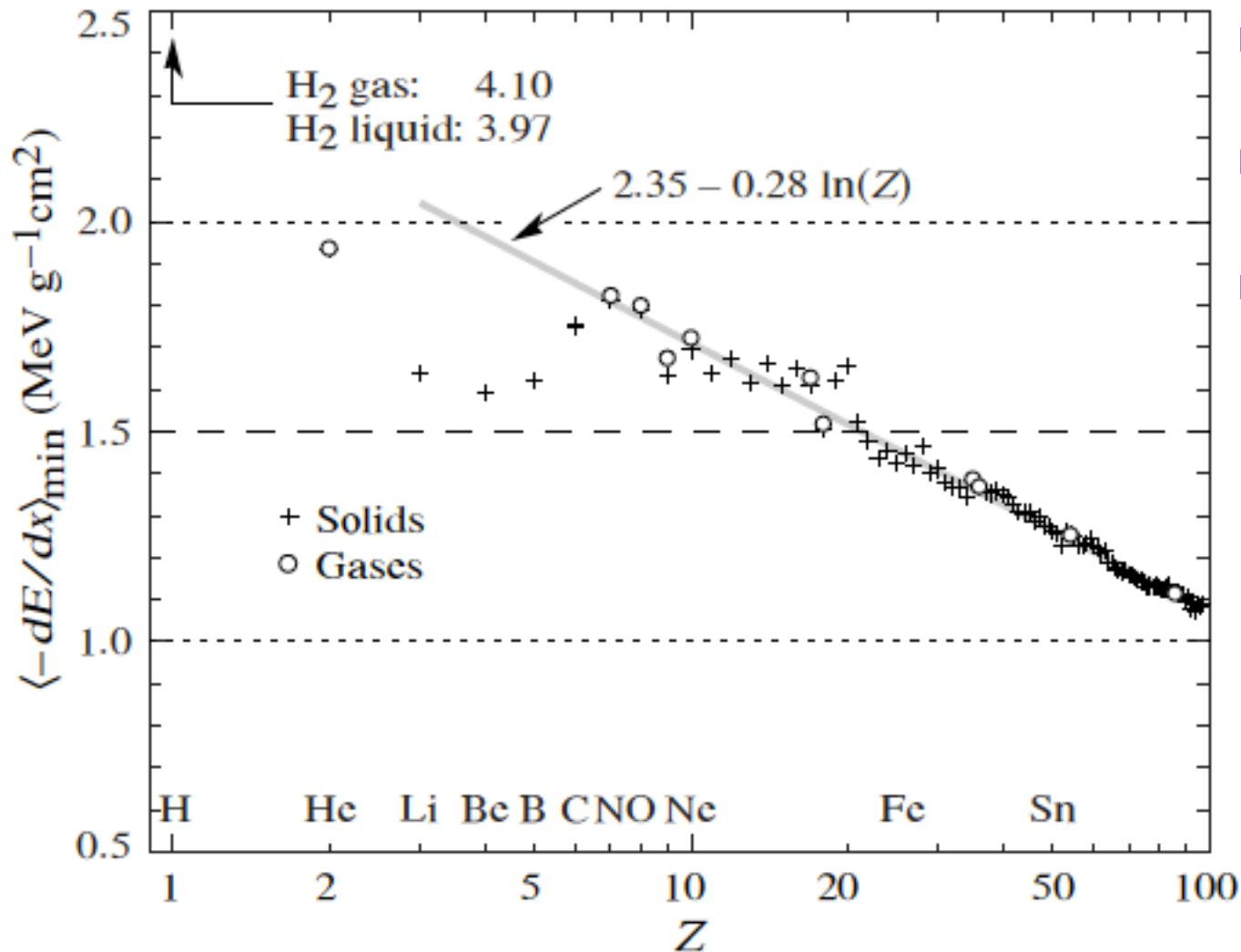
□ Εξάρτηση από:
Φορτίο Z
Μάζα M
 του υλικού μέσου

□ Περιοχή ελάχιστης ιονιστικής
 ικανότητας:

$1-2 \text{ MeV g}^{-1} \text{cm}^2$
 ανεξάρτητου υλικού

□ H_2 : 4 MeV/g cm^2

Περιοχή ελάχιστης ιονιστικής ικανότητας



- Εξάρτηση από το Z του υλικού μέσου
- Ευθεία προσαρμογής για $Z > 6$
- Η απλή αυτή μορφή δεν είναι αναμενομένη λόγω εξάρτησης από άλλους παράγοντες

Χρήση dE/dx για ταυτοποίηση σωματιδίων

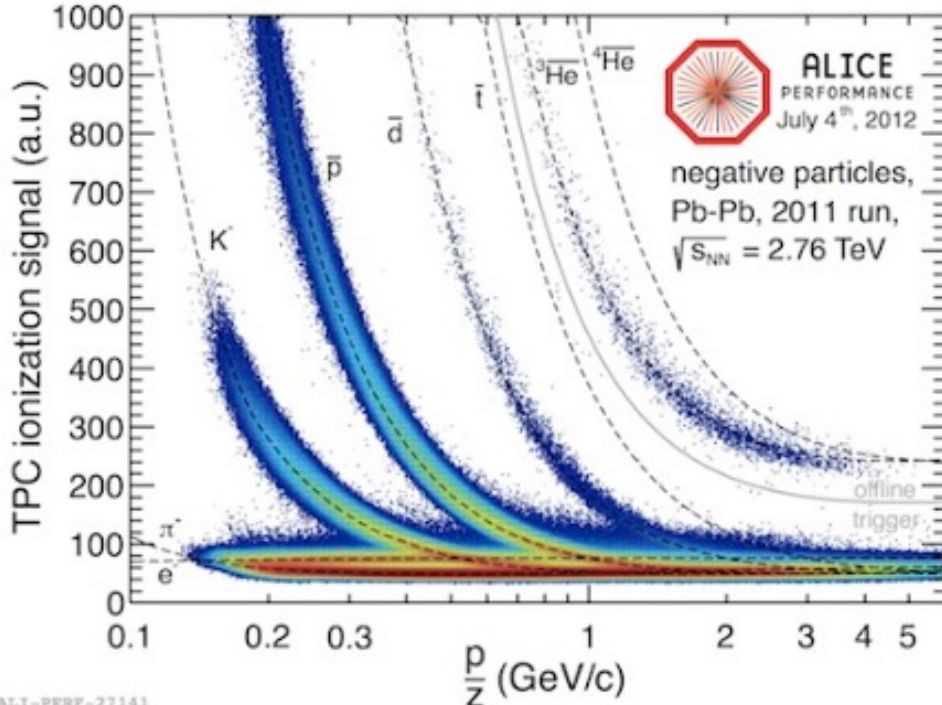
Ανιχνευτής TPC του πειράματος ALICE

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = K Z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right]$$

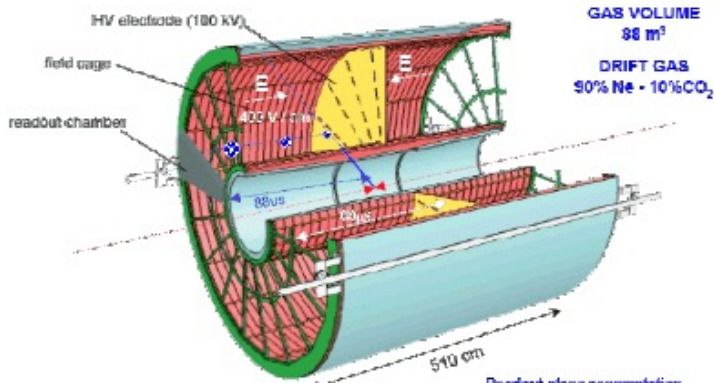
Οι καμπύλες προέρχονται από προσαρμογές της εξίσωσης Bethe-Bloch

Εξάρτηση από β^2

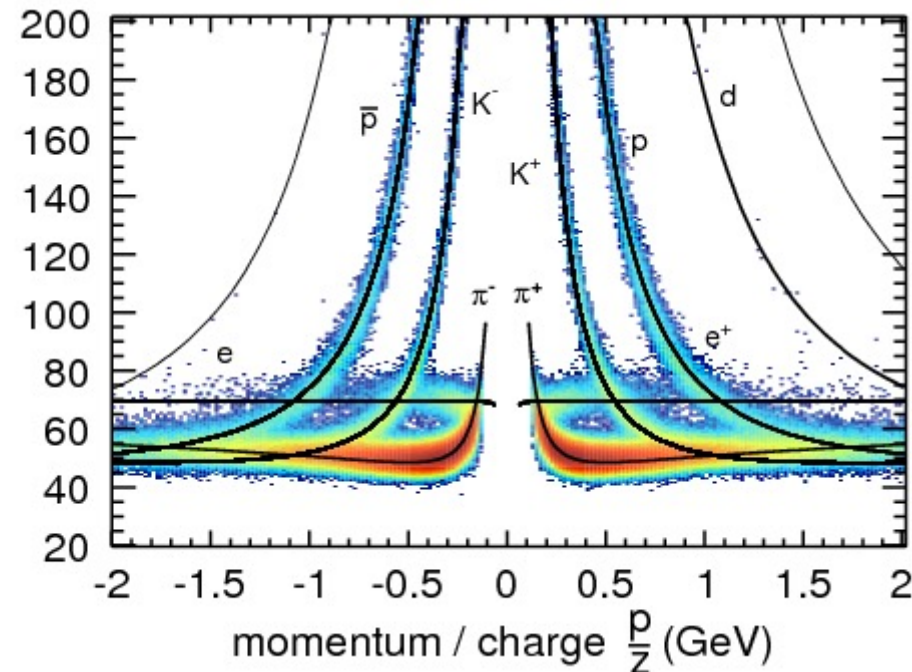
➤ Γράφημα του dE/dx με ορμή θα έχει εξάρτηση από τη μάζα του σωματιδίου



ALICE TPC LAYOUT



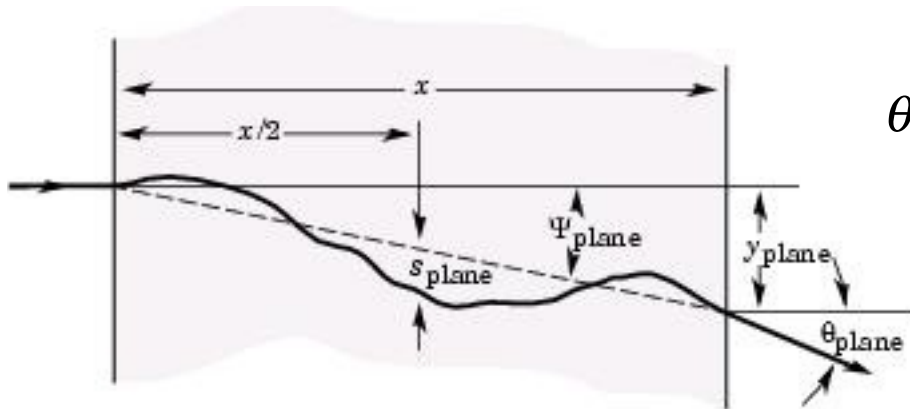
dE/dx in



Πολλαπλή σκέδαση Coulomb

Σωματίδια που περνούν μέσα από πυκνό περιβάλλον κάποιου μέσου αισθάνονται το ηλεκτρικό πεδίο του πυρήνα με αποτέλεσμα να χάνει μικρές ποσότητες ενέργειας και να αλλάζει γωνία κίνησης σε κάθε σκέδαση

Η διεργασία μπορεί να περιγραφεί σαν ένας τυχαίος περίπατος μέσω του υλικού με χαρακτηριστικό βήμα γωνίας



$$\theta_0 = \frac{13.6 \text{ MeV}}{\beta c p} z \sqrt{\frac{x}{X_0}} \left[1 + 0.038 \ln \left(\frac{x}{X_0} \right) \right]$$

Η πολλαπλή σκέδαση είναι σημαντική για ανιχνευτές ακρίβειας όπως οι ανιχνευτές τροχιών και κυριαρχεί την διακριτική ικανότητα ορμής και γωνίας σε χαμηλές ενέργειες κυρίως.

Η αναμενόμενη τιμή της γωνίας πολλαπλής σκέδασης, $\theta, \langle \theta \rangle = 0$

αλλά η αναμενόμενη τιμή της $\langle \theta^2 \rangle \neq 0$ οπότε $\theta_0 \sim \theta_{rms} = \sqrt{\langle \theta^2 \rangle}$

Μέση εμβέλεια σωματιδίων

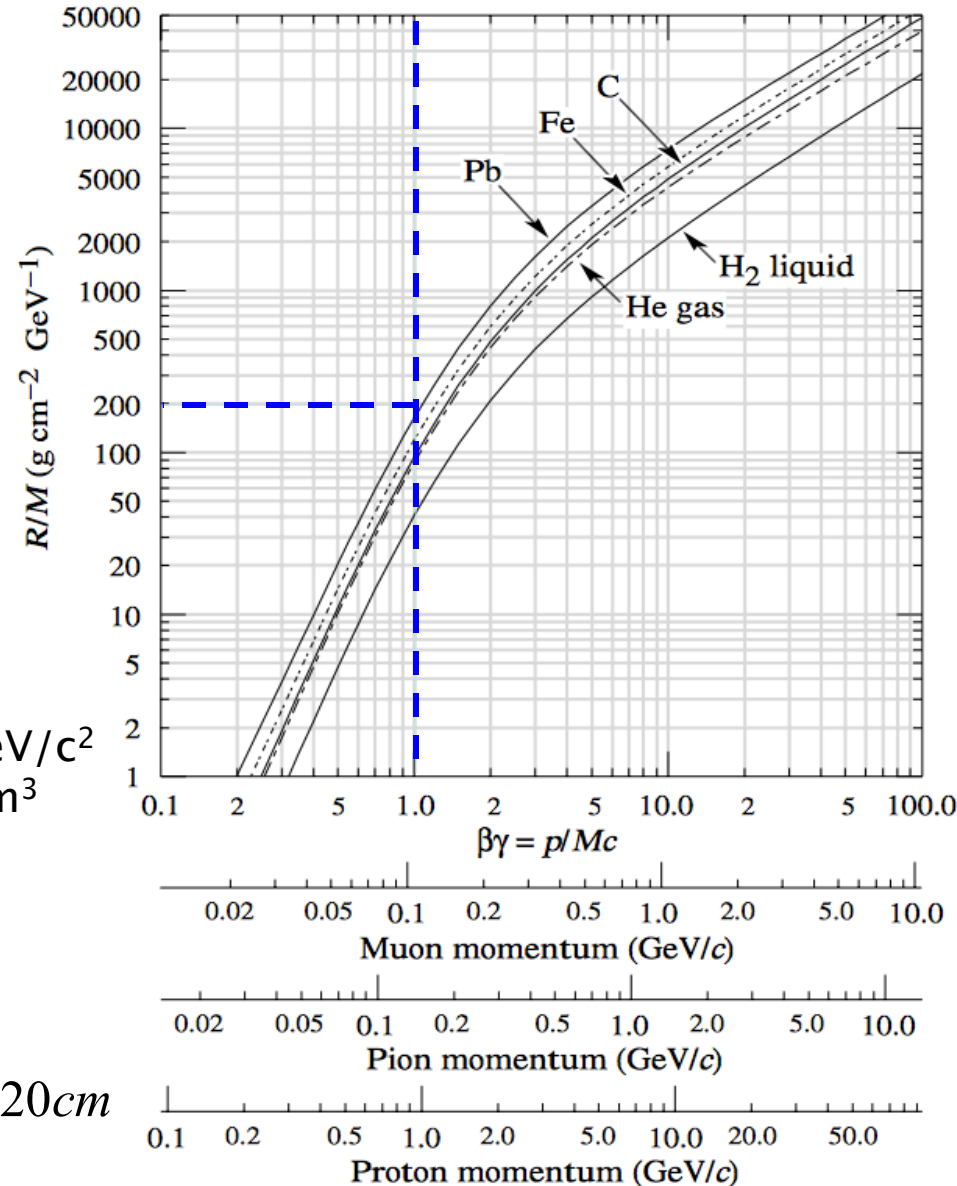
- Αν ολοκληρώσουμε την απώλεια ενέργειας ενός σωματιδίου από E έως ότου χάσει όλη την ενέργειά του θα έχουμε:

$$R(E) = \int_E^0 \frac{1}{-\langle dE/dx \rangle} dE \quad \text{μέση εμβέλεια}$$

- Η μέση εμβέλεια αντιπροσωπεύει το βάθος στο οποίο έχουν χαθεί τα μισά από τα προσπίπτοντα σωματίδια
- ✧ Για πρωτόνια $p=1\text{GeV}/c$ μάζας $M \sim 1\text{GeV}/c^2$ σε στόχο Pb πυκνότητας $\rho=11.35\text{gr}/\text{cm}^3$ διαβάζουμε από το γράφημα:

$$\frac{R(E)}{M} \approx 200 \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{GeV}^{-1}$$

$$R(E) \approx \frac{200}{\rho_{Pb}} M_p \Rightarrow R(E) \approx 200/11.34 \approx 20 \text{ cm}$$



Μέση εμβέλεια σωματιδίων

- Αν ολοκληρώσουμε την απώλεια ενέργειας ενός σωματιδίου από E έως ότου χάσει όλη την ενέργειά του θα έχουμε:

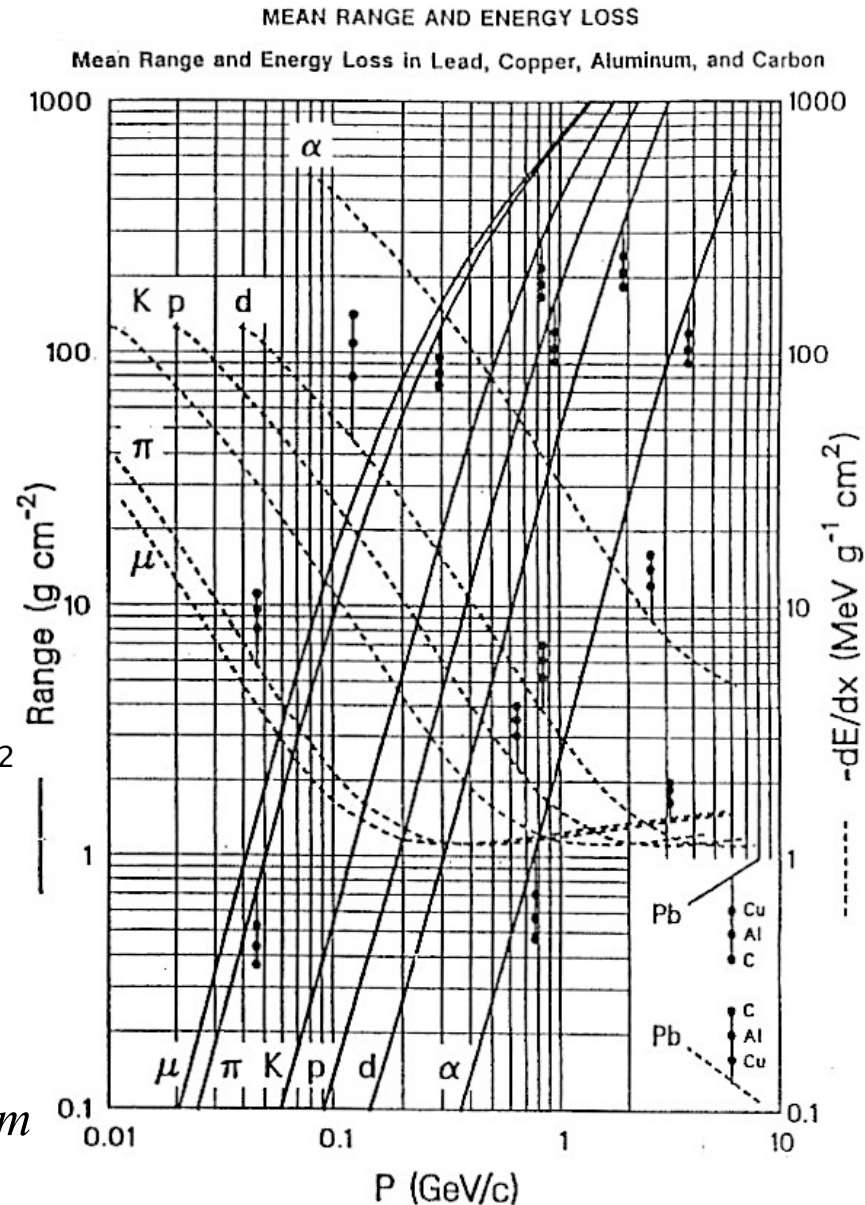
$$R(E) = \int_E^0 \frac{1}{-\langle dE/dx \rangle} dE \quad \text{μέση εμβέλεια}$$

- Η μέση εμβέλεια αντιπροσωπεύει το βάθος στο οποίο έχουν χαθεί τα μισά από τα προσπίπτοντα σωματίδια

- ✧ Για πρωτόνια $p=1\text{GeV}/c$ μάζας $M \sim 1\text{GeV}/c^2$ σε στόχο Pb πυκνότητας $\rho=11.35\text{gr}/\text{cm}^3$ διαβάζουμε από το γράφημα:

$$\frac{R(E)}{M} \approx 200 \text{gr} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{GeV}^{-1}$$

$$R(E) \approx \frac{200}{\rho_{\text{Pb}}} M_p \Rightarrow R(E) \approx 200/11.34 \approx 20 \text{cm}$$



Εναπόθεση ενέργειας σωματιδίου

- Για σωματίδια με $\beta\gamma > 3.5$

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \approx \left. \frac{dE}{dx} \right|_{\min}$$

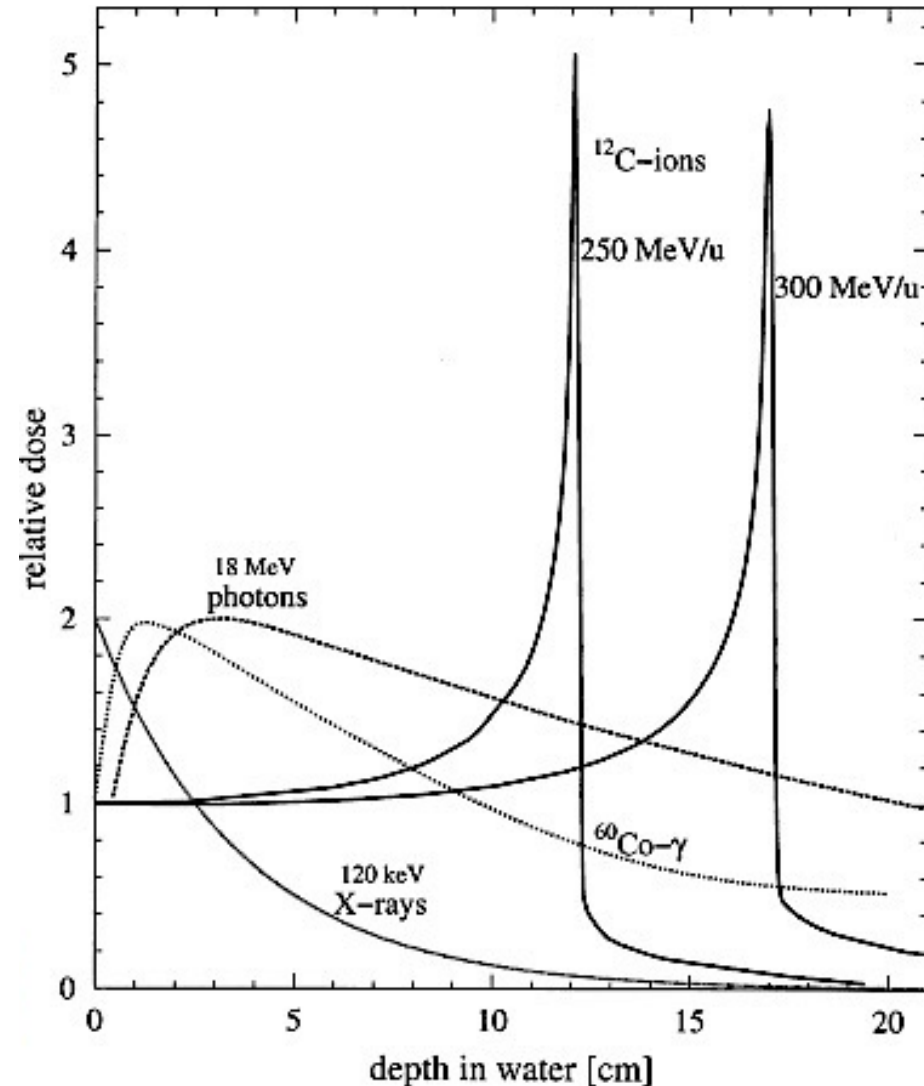
- Για σωματίδια με $\beta\gamma < 3.5$

$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \gg \left. \frac{dE}{dx} \right|_{\min}$$

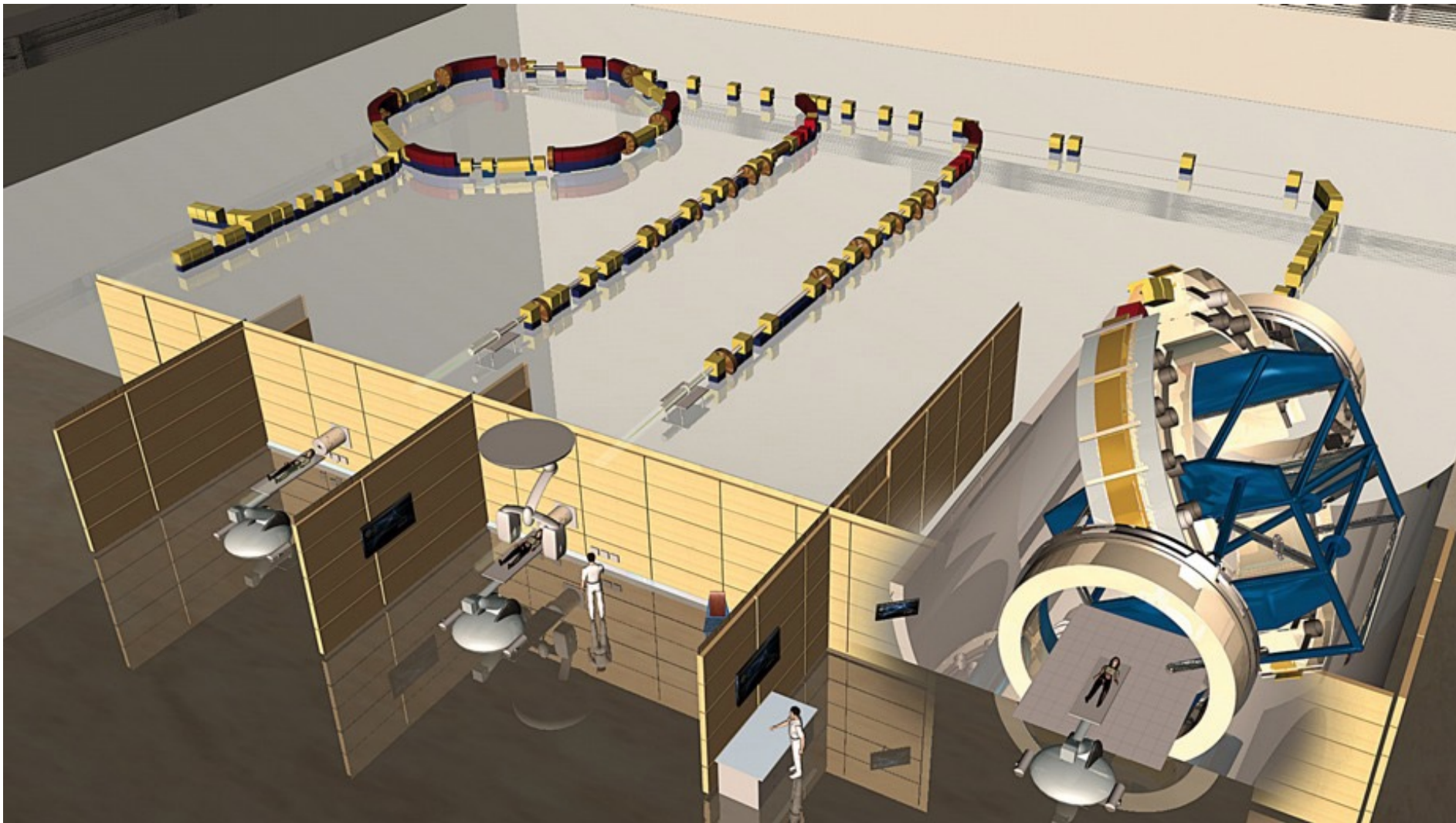
- Πολύ σημαντική εφαρμογή:

➤ Θεραπεία όγκων με χρήση επιταχυντή αδρονίων:

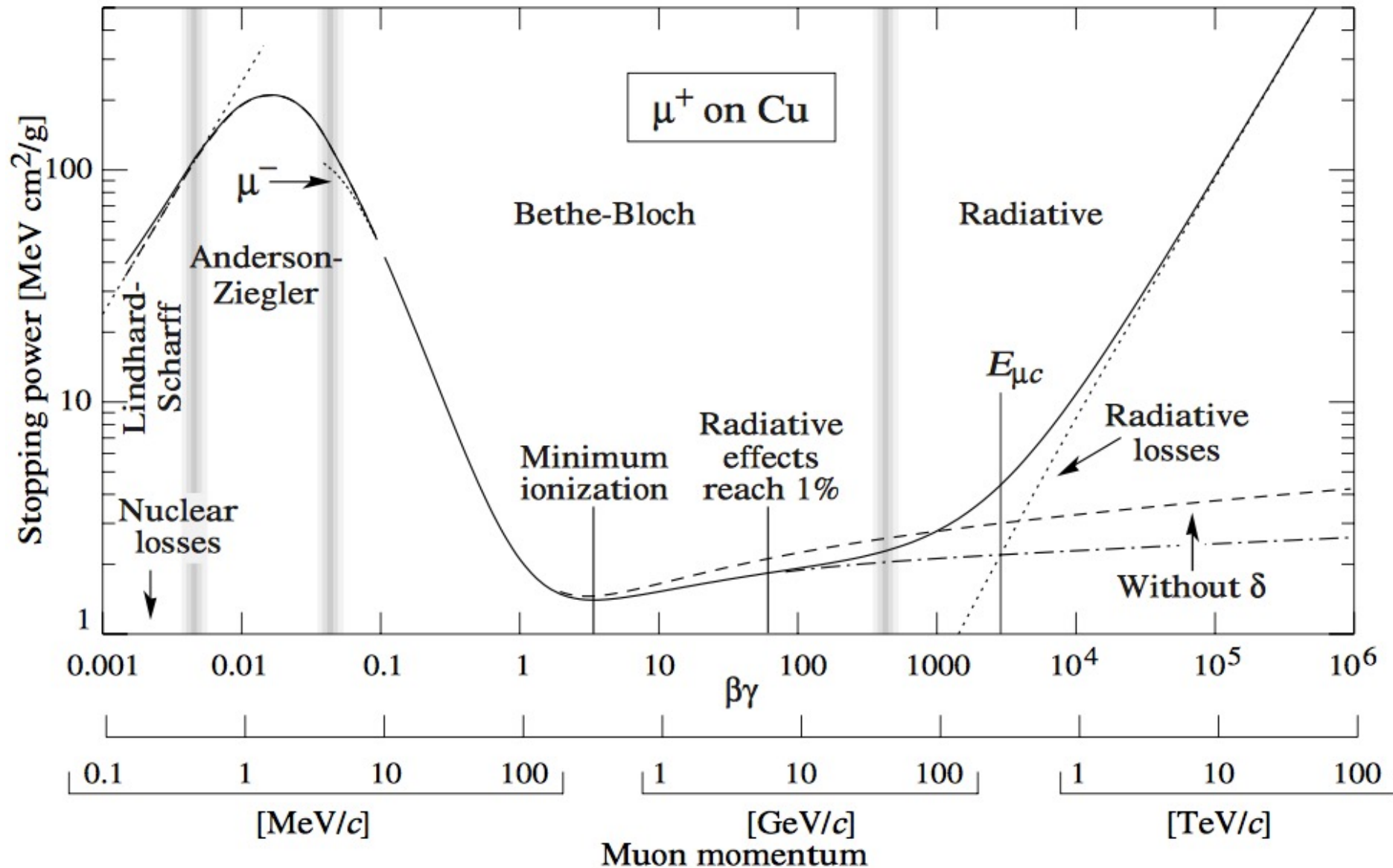
Δυνατότητα για ακριβή εναπόθεση δόσης ακτινοβολίας (ενέργειας) σε προκαθορισμένο βάθος με ρύθμιση της ενέργειας της δέσμης



Θεραπευτικό Κέντρο Δέσμης Ιόντων - Heidelberg



Απώλεια ενέργειας μιονίου – Επισκόπηση



Απώλειες ενέργειες ηλεκτρονίων

- ❑ Αρκετές διαφοροποιήσεις της dE/dx ως προ τα βαρύτερα φορτισμένα σωματίδια
 - Η υπόθεση ότι δεν αλλάζουν πορεία καθώς περνούν μέσα από το υλικό, παύει να ισχύει (σκέδαση **Coulomb σε μεγάλες γωνίες**)
 - Η υπόθεση ότι η απώλεια ενέργειας σε κάθε σκέδαση είναι μικρή δεν ισχύει (**μεγάλες απώλειες ενέργειας πιθανές από σκέδαση ηλεκτρονίου-ηλεκτρονίου**)
 - Προσπίπτουν σωματίδιο και στόχος (ατομικό ηλεκτρόνιο) έχουν την ίδια μάζα οπότε έχουμε σκέδαση πανομοιότυπων σωματιδίων
 - Τα ηλεκτρόνια είναι σχετικιστικά στις πυρηνικές ενέργειες
- ❑ Τα ηλεκτρόνια εκπέμπουν ακτινοβολία καθώς χάνουν ενέργεια, που συνεισφέρει στην απώλεια ενέργειας
 - **Ακτινοβολία πέδησης – bremsstrahlung**
 - **Ακτινοβολία Cherenkov**
 - ✧ Σε Pb: $\Delta E_{\text{ακτινοβολίας}} > \Delta E_{\text{ιονισμού}}$ για $E_e > 10\text{MeV}$

Απώλειες ενέργειας λόγω ιονισμού

□ Τροποποίηση της εξίσωσης Bethe-Bloch για ηλεκτρόνια:

$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = \frac{1}{2} K \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \frac{m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 \left\{ m_e c^2 (\gamma - 1)/2 \right\}}{I^2} + F_{e^-}(\gamma) \right]$$

όπου: $F_{e^-}(\gamma) = (1 - \beta^2) - \frac{2\gamma - 1}{\gamma^2} \ln 2 + \frac{1}{8} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^2 - \delta$

Ηλεκτρόνια

➤ Να σημειωθεί ότι η μέγιστη ενέργεια μεταφοράς σε μια σύγκρουση ηλεκτρονίου-ηλεκτρονίου, T_{\max} θα ήταν η πλήρης μεταφορά της κινητικής ενέργειας $T_{\max} = (\gamma - 1)mc^2$. Λόγω πανομοιότυπων σωματιδίων, $T_{\max} = (\gamma - 1)mc^2/2$

□ Τροποποίηση της εξίσωσης Bethe-Bloch για ποζιτρόνια:

$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = \frac{1}{2} K \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \frac{m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 \left\{ m_e c^2 (\gamma - 1) \right\}}{2I^2} + F_{e^+}(\gamma) \right]$$

όπου: $F_{e^+}(\gamma) = 2 \ln 2 - \frac{\beta^2}{12} \left(23 + \frac{14}{\gamma + 1} + \frac{10}{(\gamma + 1)^2} + \frac{4}{(\gamma + 1)^3} \right) - \delta$

Ποζιτρόνια

Ακτινοβολία Bremsstrahlung – πέδησης

Ακτινοβολία πέδησης εμφανίζεται όταν σωματίδια επιταχύνονται μέσα στο πεδίο Coulomb ενός πυρήνα

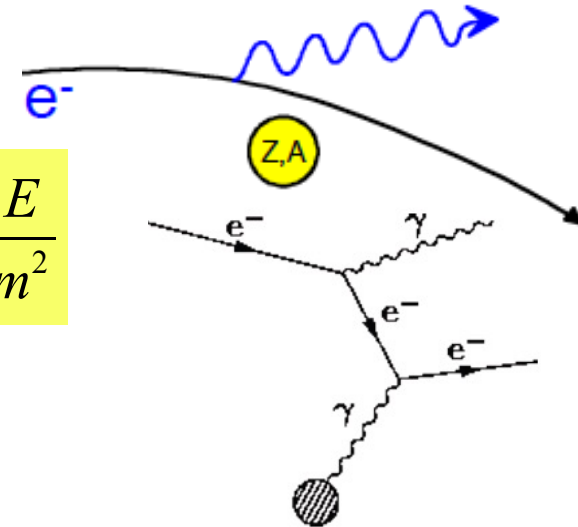
$$\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = 4\alpha N_A \frac{Z^2}{A} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mc^2} \right] E \ln \frac{183}{Z^{1/3}} \Rightarrow \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \propto \frac{E}{m^2}$$

Απώλεια ενέργειας ανάλογη του $1/m^2$ επομένως σημαντική για ηλεκτρόνια

Θεωρώντας ηλεκτρόνια:

$$\frac{dE}{dx} = 4\alpha N_A \frac{Z^2}{A} r_e^2 E \ln \frac{183}{Z^{1/3}}$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{E}{X_0} \quad \text{όπου} \quad X_0 = \frac{A}{4\alpha N_A Z^2 r_e^2 \ln(183/Z^{1/3})}$$



$$E = E_0 e^{-x/X_0}$$

Μετά από X_0 έχει χάσει όλη εκτός απο $1/e$ της ενέργειάς του

Ακτινοβολία πέδησης – Κριτική ενέργεια

- Τα ηλεκτρόνια χάνουν ενέργεια λόγω bremsstrahlung με ρυθμό που είναι ανάλογος της ενέργειάς του ενώ η απώλεια ενέργειας λόγω ιονισμού είναι ανάλογη μόνο του λογαρίθμου της ενέργειας του
- Ορίζουμε σαν **κριτική ενέργεια E_c** , την ενέργεια όπου οι δυο μορφές απώλειας ενέργειας (ιονισμό/bremsstrahlung) είναι ίσες

➤ Διαφοροποίηση ορισμού: Η ενέργεια όπου η ενέργεια ιονισμού/μήκος ακτινοβολίας είναι ίση με την ενέργεια του ηλεκτρονίου (Rossi)

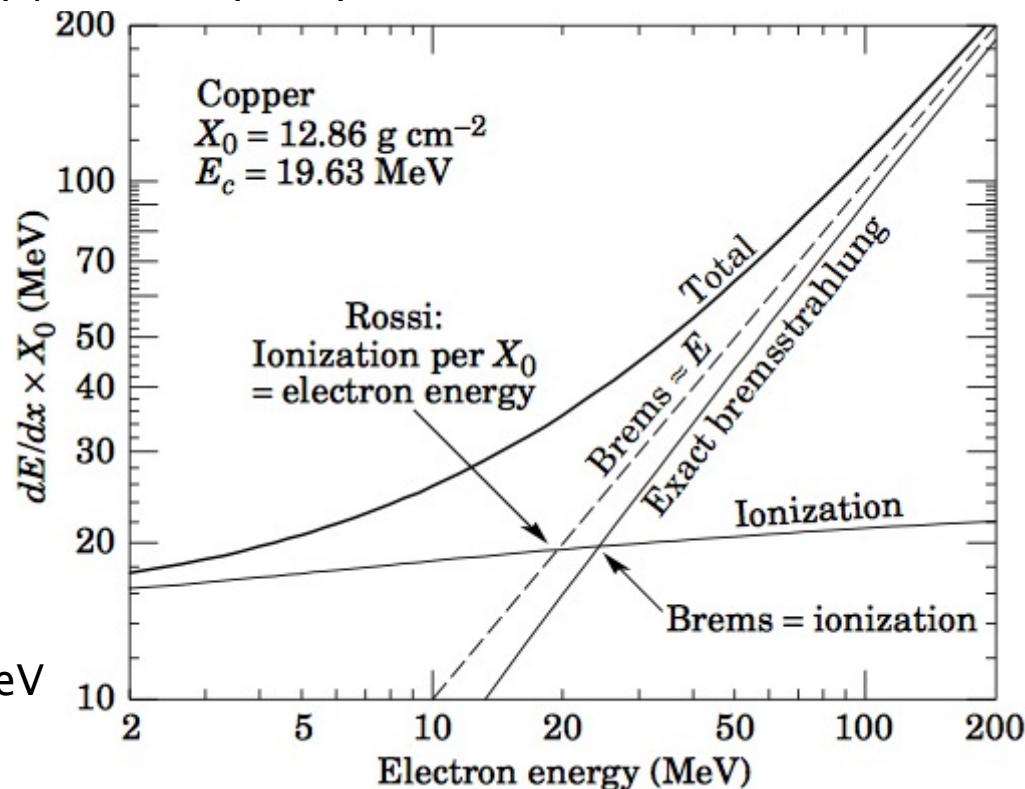
➤ Ισοδύναμη της πρώτης με την προσέγγιση $\left| dE/dx \right|_{Brem} \approx E/X_0$

- Για την κριτική ενέργεια υπάρχει η προσέγγιση:

$$E_c^{αερια} = \frac{710 \text{ MeV}}{Z + 0.92}$$

$$E_c^{στερεα/υγρα} = \frac{610 \text{ MeV}}{Z + 1.24}$$

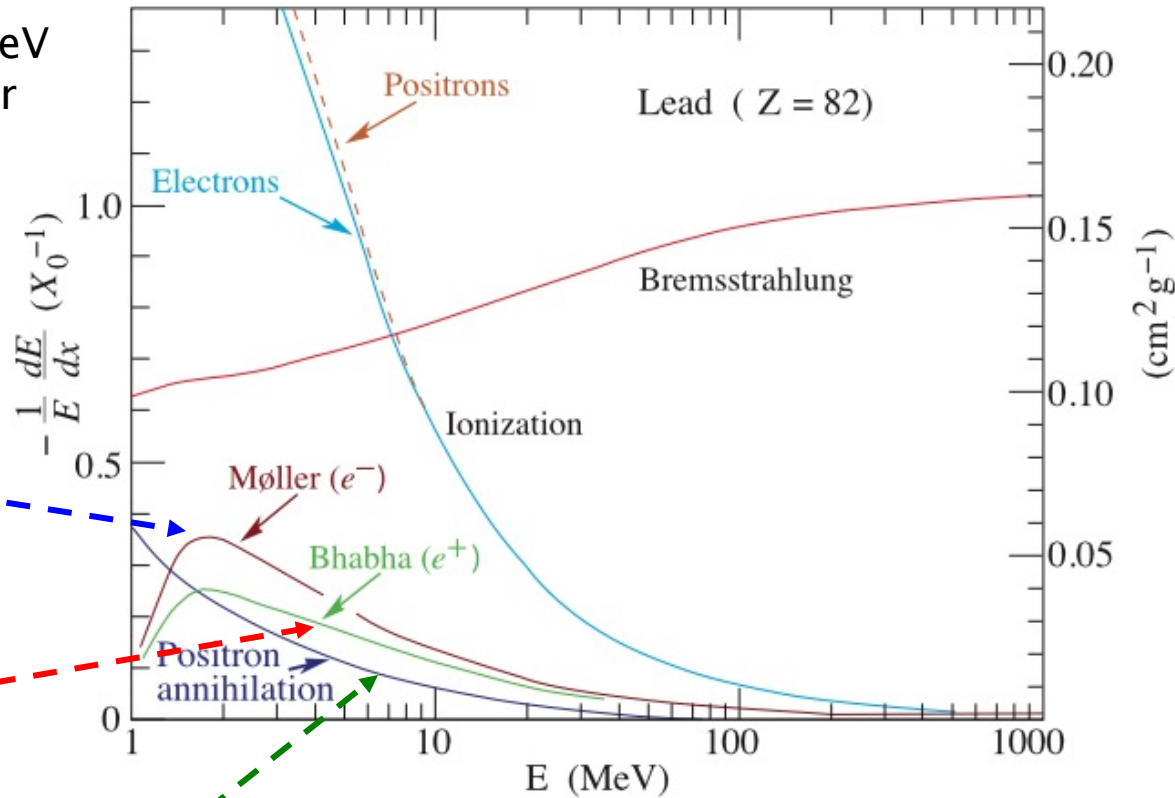
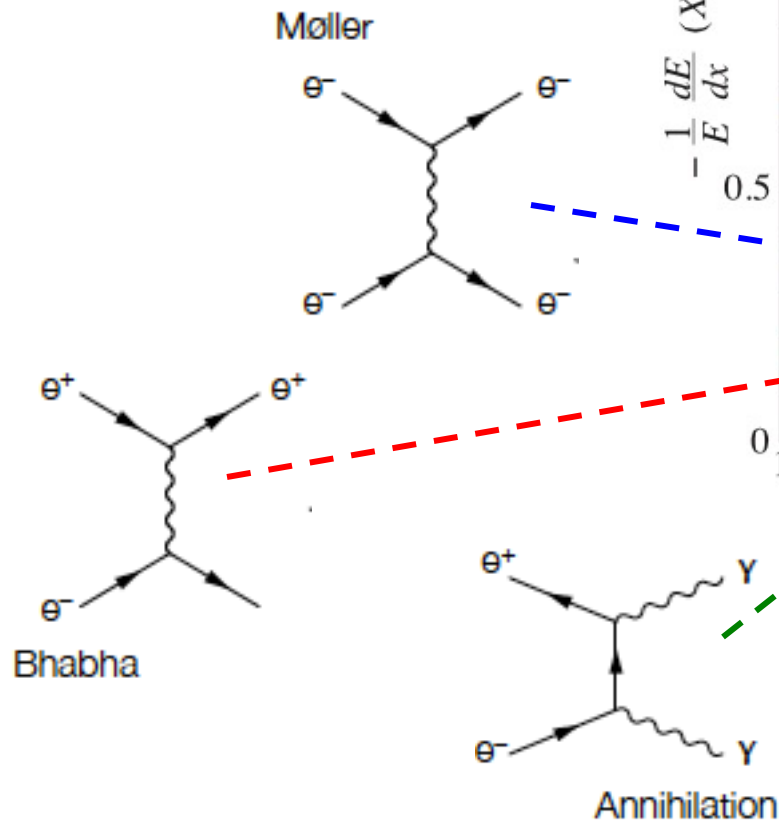
- Στο χαλκό είναι: $E_c \sim 610/30 \sim 20 \text{ MeV}$
Για μ στο χαλκό: $E_c \sim 800 \text{ GeV}$



Ολική Απώλεια Ενέργειας για e^-/e^+

- Όταν η απώλεια ενέργειας ανά σύγκρουση είναι $< 255\text{KeV}$ θεωρείται ιονισμός και Moller (Bhabha για e^+) όταν είναι μεγαλύτερη

ποσοστιαία απώλεια ενέργειας ανα μήκος ακτινοβολίας σε Pb για e^+/e^-



Ακτινοβολία Cherenkov

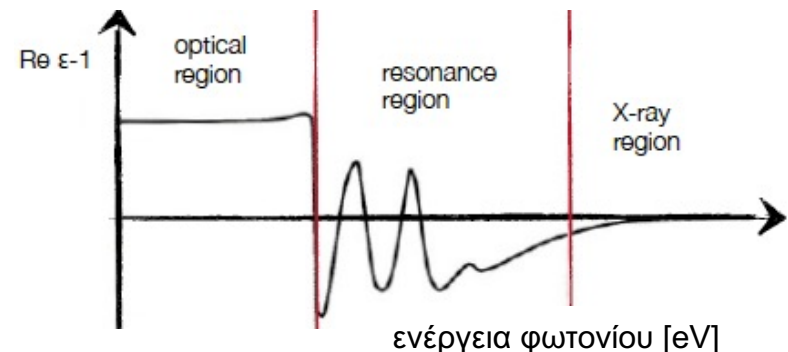
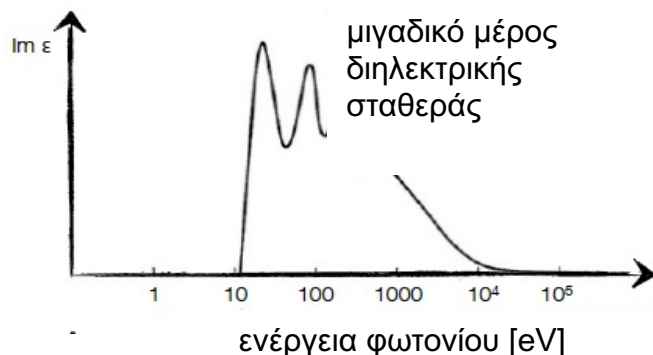
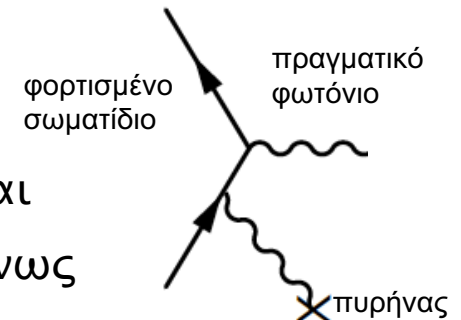
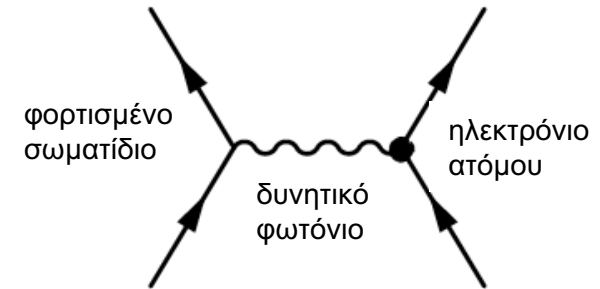
□ Είδαμε ότι φορτισμένα σωματίδια που αλληλεπιδρούν με την ύλη προκαλούν:

- Ιονισμό
- Ακτινοβολία Cherenkov
- Ακτινοβολία Μετάβασης (transition radiation)

□ Θεωρήστε φορτισμένο σωματίδιο με ταχύτητα: βc

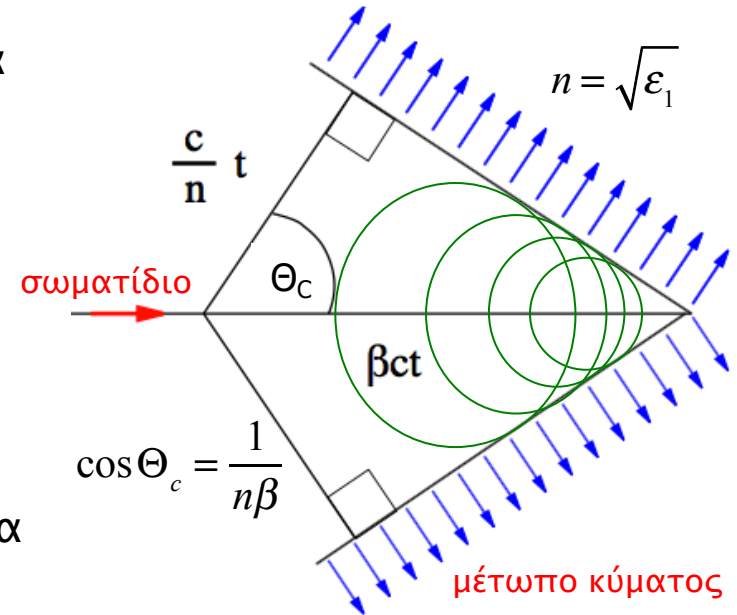
□ Θεωρήστε υλικό με διηλεκτρική σταθερά: $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$

- Η σταθερά αντιπροσωπεύει την αλληλεπίδραση δυνητικών φωτονίων με τα άτομα του υλικού
- Το μιγαδικό μέρος εκφράζει φωτόνια που απορροφούνται
- Το πραγματικό μέρος εκφράζει διάθλαση, αλλαγή επομένως της φασικής ταχύτητας $u(\omega) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}$



Ακτινοβολία Cherenkov

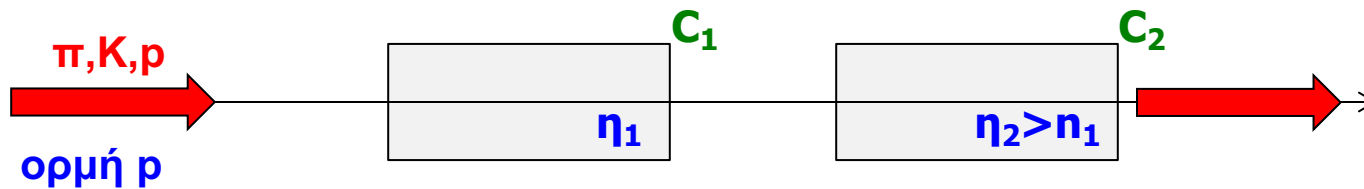
- ❑ Φως στο υλικό κινείται με μικρότερη ταχύτητα από αυτή στο κενό
- ❑ Κάποιο σωματίδιο μπορεί να κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα από αυτή του φωτός στο υλικό
- ❑ Δημιουργία αυτού του οπτικού boom είναι η ακτινοβολία Cherenkov
- ❑ Η ακτινοβολία Cherenkov εξαρτάται από το δείκτη διάθλασης του υλικού και την ταχύτητα του σωματιδίου



Ακτινοβολία Cherenkov – Εφαρμογές

□ Ανίχνευση ενέργειας κατωφλίου

➤ Ακτινοβολία Cherenkov υπάρχει αν $\beta > \beta_{\text{κατωφλίου}}$



➤ Επιλογή των η_1 και η_2 με τρόπο ώστε:

η_2 : β_π και $\beta_K > 1/\eta_2$ ενώ $\beta_p < 1/\eta_2$

η_1 : $\beta_\pi > 1/\eta_1$ ενώ β_p και $\beta_K < 1/\eta_1$

✧ Ακτινοβολία Cherenkov στα C_1 και C_2 : ταυτοποίηση πιονίου

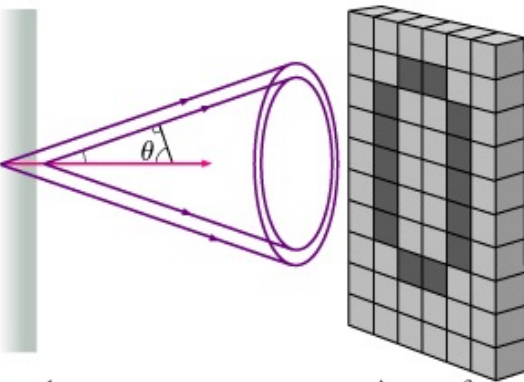
✧ Ακτινοβολία Cherenkov στο C_2 και όχι στο C_1 : ταυτοποίηση καονίου

✧ Μη ανίχνευση ακτινοβολίας Cherenkov στα C_1 και C_2 : ταυτοποίηση πρωτονίου

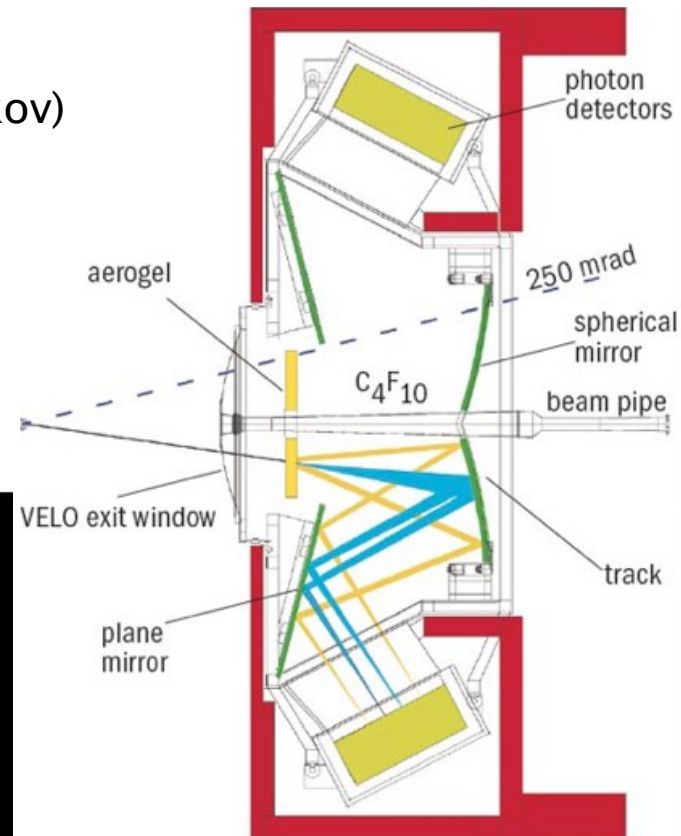
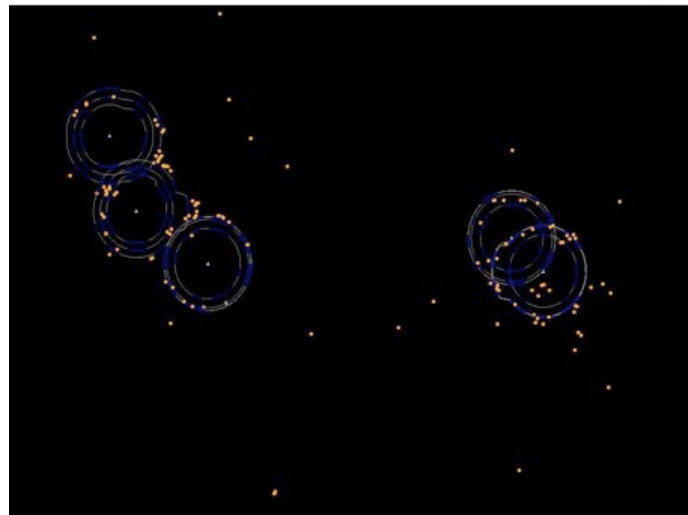
Ακτινοβολία Cherenkov – Εφαρμογές

□ Μέτρηση της γωνίας Cherenkov

- Χρησιμοποίηση υλικού με γνωστό δείκτη διάθλασης $n \rightarrow \beta$
- Η τεχνική χρησιμοποιείται σε απεικόνιση δακτυλίων Cherenkov
 - ✧ **RICH** (ring imaging Cherenkov)
 - ✧ **DIRC** (detection of internally reflected Cherenkov)
 - ✧ **DISC** (ειδικό DIRC)

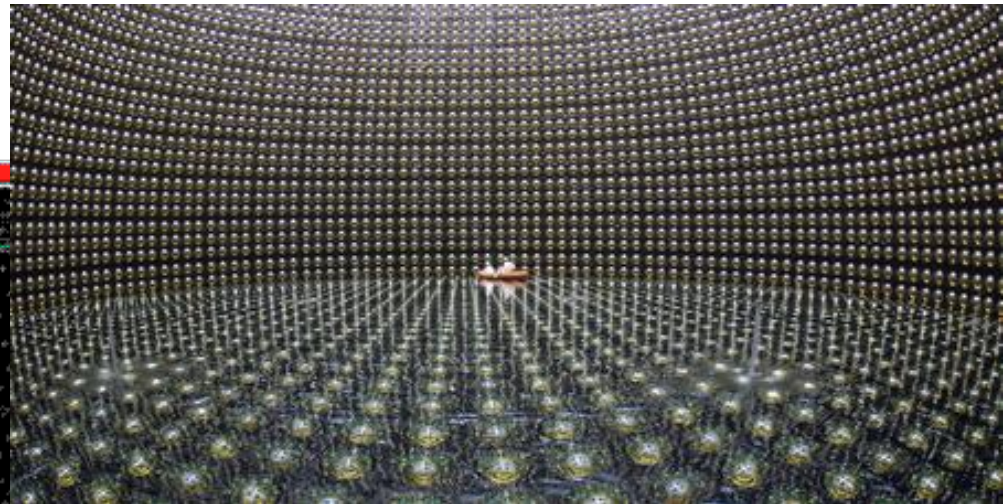
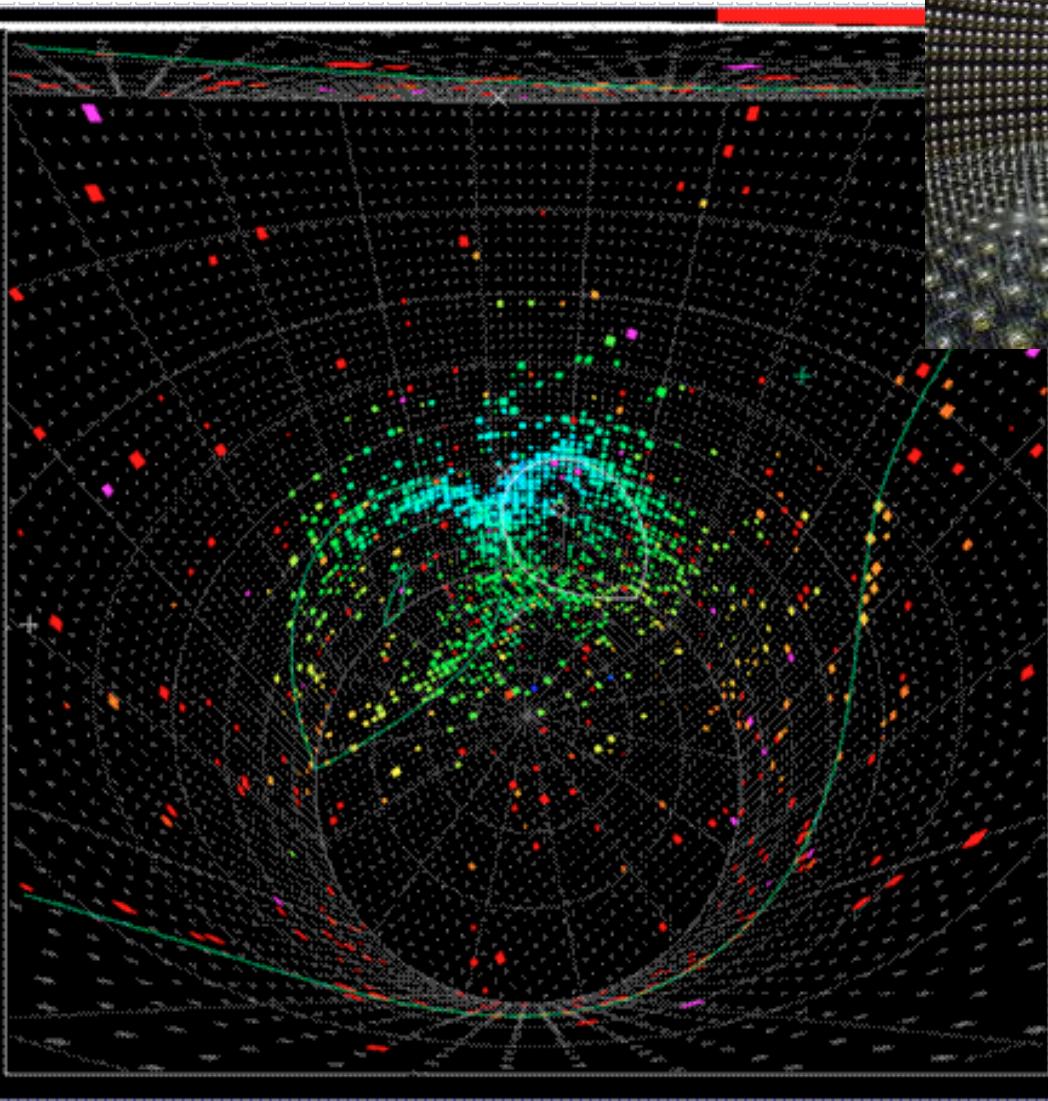


LHCb RICH



Ακτινοβολία Cherenkov – Εφαρμογές

❑ SuperKamiokande



Παράδειγμα χρήσης ανιχνευτών Cherenkov

Ο ανιχνευτής Kamiookande χρησιμοποιεί νερό σαν μέσο για παραγωγή Cherenkov ακτινοβολίας όταν κάποιο ηλεκτρόνιο ή μιονίο περάσει δια μέσου του. Προσδιορισμός

- (α) της ενέργειας κατωφλίου για e και μ . (2) γωνίας ακτινοβολίας για e 300 MeV
(γ) Παράγεται Cherenkov φως όταν ένα K^+ ορμής 550MeV περάσει από τον ανιχνευτή;

(α) Ενέργεια κατωφλίου για e :
$$E = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1 - (1/n)^2}} = \frac{0.511 \text{ MeV}}{\sqrt{1 - (1/1.33)^2}} = 0.775 \text{ MeV}$$

Ενέργεια κατωφλίου για μ :
$$E = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1 - (1/n)^2}} = \frac{106 \text{ MeV}}{\sqrt{1 - (1/1.33)^2}} = 213 \text{ MeV}$$

- (β) Για $E_e = 300 \text{ MeV}$, το e είναι πάνω από το κατώφλι και η γωνία εκπομπής θα είναι:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\beta n}\right) = \cos^{-1}(1/1.33) = 41.2^\circ$$

- (γ) Για $E_K = 550 \text{ MeV}$, η ενέργεια κατωφλίου θα είναι:

άρα το K^+ δεν ακτινοβολεί

$$E = \frac{m}{\sqrt{1 - (1/n)^2}} = \frac{497.6 \text{ MeV}}{\sqrt{1 - (1/1.33)^2}} = 755 \text{ MeV}$$

που αντιστοιχεί σε ορμή $p = \sqrt{E^2 - m_k^2} = \sqrt{755^2 - 497.6^2} = 567 \text{ MeV} > 550 \text{ MeV}$

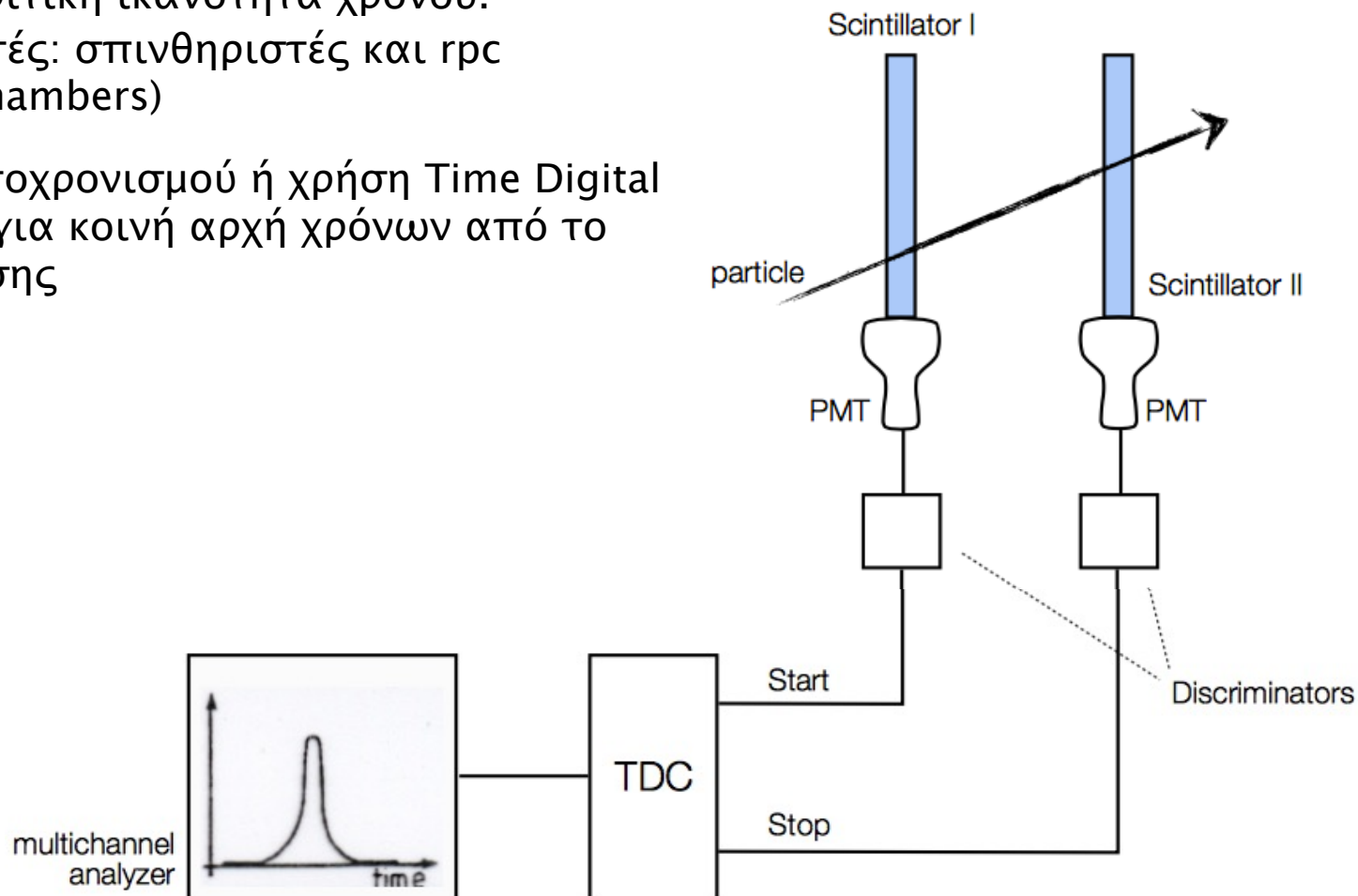
Μέθοδος του χρόνου πτήσης (time of flight)

Ιδέα λειτουργίας:

Μέτρηση της διαφοράς χρόνου του σήματος ανάμεσα σε δυο ανιχνευτές με πολύ καλή διακριτική ικανότητα χρόνου.

Τυπικοί ανιχνευτές: σπινθηριστές και rpc (resistive plate chambers)

Δημιουργία ταυτοχρονισμού ή χρήση Time Digital Converter (TDC) για κοινή αρχή χρόνων από το σημείο σύγκρουσης



TOF ανιχνευτής

Ανίχνευση σωματιδίων με διαφορετικό χρόνο πτήσης παρόμοιες ορμές:

Σωματίδιο 1: ταχύτητα v_1 , β_1 και μάζα m_1 ενέργεια E_1

Σωματίδιο 2: ταχύτητα v_2 , β_2 και μάζα m_2 ενέργεια E_2

Απόσταση μεταξύ των ανιχνευτών L

$$\Delta t = L \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right) = \frac{L}{c} \left(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2} \right) \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{pc^2} (E_1 - E_2) = \frac{L}{pc^2} \left(\sqrt{p^2 c^2 + m_1^2 c^4} - \sqrt{p^2 c^2 + m_2^2 c^4} \right)$$

Σχετικιστικά σωματίδια $E \approx pc \gg m_i c^2$

$$\Delta t \approx \frac{L}{pc^2} \left[\left(pc + \frac{m_1^2 c^4}{2pc} \right) - \left(pc + \frac{m_2^2 c^4}{2pc} \right) \right] \Rightarrow \Delta t \approx \frac{Lc}{2p^2} (m_1^2 - m_2^2)$$

Για παράδειγμα: Διαχωρισμός π/K

$m_K \sim 500 \text{ MeV}$ και $m_\pi \sim 140 \text{ MeV}$

Υποθέτουμε ότι $p = 1 \text{ GeV}$ και $L = 2 \text{ m}$

$$\text{οπότε: } \Delta t \approx \frac{2mc}{2(1000)^2} (500^2 - 140^2) \Rightarrow \Delta t \approx 800 \text{ ps}$$

Συνήθως ζητούμε η διαφορά χρόνου πτήσης να είναι 4xστ διαχωρισμού.
στ διακριτική ικανότητα διαχωρισμού

ΤΟF μέθοδος

Η διακριτική ικανότητα μάζας

$p = \beta\gamma m$ επίσης θα χρησιμοποιήσουμε τις: $\beta = L/\tau$ και $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$

$$m^2 = p^2 \left(\frac{1}{\beta^2} - 1 \right) = p^2 \left(\frac{\tau^2}{L^2} - 1 \right) \text{ -----> έχουμε ότι: } \frac{p^2 \tau^2}{L^2} = p^2 + m^2 = E^2$$

$$\delta(m^2) = 2p\delta p \left(\frac{\tau^2}{L^2} - 1 \right) + 2\tau\delta\tau \frac{p^2}{L^2} - 2\frac{\delta L}{L^3} p^2 \tau^2$$

$$\delta(m^2) = 2p\delta p \frac{m^2}{p^2} + 2E^2 \frac{\delta\tau}{\tau} - 2E^2 \frac{\delta L}{L} = 2m^2 \frac{\delta p}{p} + 2E^2 \frac{\delta\tau}{\tau} - 2E^2 \frac{\delta L}{L}$$

$$\sigma(m^2) = 2 \left[m^4 \left(\frac{\sigma_p}{p} \right)^2 + E^4 \left(\frac{\sigma_\tau}{\tau} \right)^2 + E^4 \left(\frac{\sigma_L}{L} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\text{Συνήθως: } \frac{\delta L}{L} \ll \frac{\delta p}{p} \ll \frac{\delta\tau}{\tau} \quad \text{οπότε: } \sigma(m^2) = 2E^2 \left(\frac{\sigma_\tau}{\tau} \right)$$

η αβεβαιότητα στην μέτρηση του χρόνου κυριαρχεί την διακριτική ικανότητα μάζας