

ΦΥΣ. 211

ΕΡΓΑΣΙΑ # 8

Επιστροφή την Τετάρτη 30/3/2016 στο τέλος της διάλεξης

1. Μια μάζα m είναι εξαρτημένη από το άκρο ενός ελατηρίου με φυσική συχνότητα ω . Η μάζα αφήνεται να κινηθεί από την κατάσταση της ηρεμίας και ενώ βρίσκεται στην θέση x_0 . Η διαδικασία επαναλαμβάνεται αλλά αυτή τη φορά το σύστημα είναι βυθισμένο σε κάποιο υγρό που προκαλεί απόσβεση της ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα. Η κίνηση του ταλαντωτή μέσα στο υγρό αντιστοιχεί σε ταλάντωση με μεγάλη απόσβεση με συντελεστή απόσβεσης $\gamma = \omega/2Q$, όπου Q ο συντελεστής ποιότητας. (Συχνά γράφεται και με τη μορφή $\gamma = b/2m$ όπου b σταθερά και m η μάζα του ταλαντωτή). Να βρεθεί ο λόγος των μέγιστων ταχυτήτων του συστήματος στις δυο περιπτώσεις κίνησης (απλός αρμονικός ταλαντωτής/ταλαντωτής με μεγάλη απόσβεση). Ποιος είναι ο λόγος των ταχυτήτων στο όριο της πολύ ισχυρής απόσβεσης ($\gamma \gg \omega$) και ποιος στο όριο της κριτικής απόσβεσης;

2. (α) Ένας αποσβένων ταλαντωτής διεγείρεται από μια δύναμη βήματος της μορφής:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ F_0 & t > 0 \end{cases} . \text{ Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των συναρτήσεων Green, βρείτε την}$$

μορφή της εξίσωσης της θέσης, $x(t)$, του ταλαντωτή. Η απάντησή σας θα πρέπει να είναι της

$$\text{μορφής } x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left(1 - e^{-\beta t} \cos \omega_1 t - \frac{\beta}{\omega_1} e^{-\beta t} \sin \omega_1 t \right) \text{ για } t > 0. \text{ Σχεδιάστε την λύση αυτή για}$$

$\beta=0$ και $\beta=\omega_0/4$. Προσέξτε ότι με βάση τη λύση που βρήκατε, υπάρχει μεγάλη μετατόπιση ως προς την θέση ισορροπίας $\frac{F_0}{m\omega_0^2}$. Να βρεθεί ο χρόνος, t_m , που χρειάζεται για να βρεθεί ο

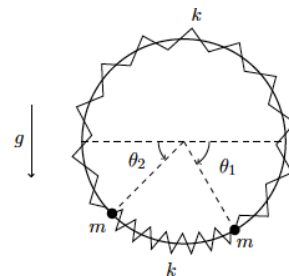
ταλαντωτής τη πρώτη φορά στην μέγιστη απομάκρυνση καθώς και η θέση του, $x(t_m)$, την στιγμή αυτή, t_m . Η απάντηση στο ερώτημα αυτό θα είναι της μορφής $x(t_m) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \left(1 + e^{-\beta t_m/\omega_1} \right)$.

(β) Θεωρήστε τώρα ότι ο ίδιος ταλαντωτής υπόκειται σε μια πεπερασμένη ώθηση της μορφής:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ F_0 & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases} . \text{ Να βρεθεί η λύση της θέσης, } x(t), \text{ για την περίπτωση αυτή.}$$

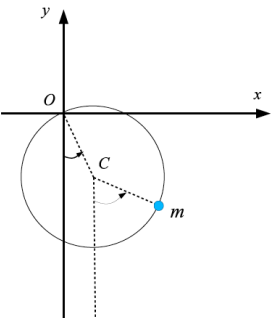
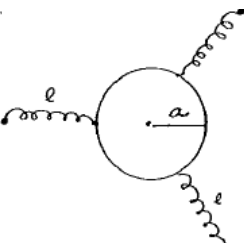
Υποθέστε ότι η απόσβεση είναι αρκετά μεγάλη ώστε οι αρχικές ταλαντώσεις έχουν αποσβεστεί πριν ενεργοποιηθεί η δύναμη (δηλαδή $e^{-\beta t} \sim 0$). Σχεδιάστε την $x(t)$ για την περίπτωση αυτή.

3. Θεωρήστε δυο χάντρες μάζας m η κάθε μία, οι οποίες είναι περιορισμένες να κινούνται σε ένα στεφάνι ακτίνας R . Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, οι μάζες συνδέονται μεταξύ τους με δυο ελατήρια ίδιου φυσικού μήκους και σταθεράς ελατηρίου, k . Υποθέστε αρχικά ότι δεν υπάρχει βαρύτητα (θα εξετάσετε τις επιδράσεις της βαρύτητας σε μετέπειτα ερώτημα της άσκησης).



- (i) Χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες θ_1 και θ_2 , όπως στο διπλανό

σχήμα, γράψτε την Lagrangian του συστήματος.

- (ii) Βρείτε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης και τις κανονικές συχνότητες ταλάντωσης. Θεωρείστε ότι οι δυο συχνότητες είναι ω_α και ω_β όπου θεωρούμε ότι $\omega_\beta < \omega_\alpha$.
 - (iii) Θεωρώντας την ω_β την κανονική συχνότητα ταλάντωσης με την μικρότερη τιμή, εξηγήστε την τιμή της στηριζόμενοι σε έννοιες κυκλικών συντεταγμένων και διατηρούμενων μεγεθών.
 - (iv) Έστω ότι προσθέσουμε ένα νέο όρο 4^{ου} βαθμού στο δυναμικό του ελατηρίου ώστε να αποκτήσει τη μορφή: $V(x) = kx^2/2 + \lambda x^4/4$. Πως θα αλλάξει η συχνότητα ω_β ;
 - (v) Θεωρήστε τώρα ότι υπάρχει βαρύτητα. Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν δυο θέσεις ισορροπίας. Η μια θέση αντιστοιχεί σε σταθερή ισορροπία ενώ η άλλη σε ασταθή ισορροπία. Περιγράψτε τις δυο αυτές θέσεις ισορροπίας (δεν χρειάζεται να τις βρείτε).
 - (vi) Αγνοήστε την ύπαρξη του όρου 4^{ου} βαθμού στο δυναμικό και θεωρήστε απλά το δυναμικό ενός ελατηρίου. Βρείτε τις θέσεις των δυο μαζών στην κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας. Θα πρέπει να καταλήξετε σε μια εξίσωση της μορφής $x = a \cos x$, η οποία δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά και δεν χρειάζεται να τη λύσετε. Θεωρήστε ότι οι γωνίες που αντιστοιχούν στις θέσεις των μαζών στην κατάσταση αυτή είναι γ_1 και γ_2 για τις γωνίες θ_1 και θ_2 αντίστοιχα.
 - (vii) Υποθέστε ότι οι γωνίες γ_1 και γ_2 είναι γνωστές και οι τιμές τους είναι αρκετά μικρές. Βρείτε τις συχνότητες και κανονικούς τρόπους ταλάντωσης κάτω από την προϋπόθεση μικρών ταλαντώσεων από την θέση ισορροπίας. Θα πρέπει να αναγνωρίσετε κάθε συχνότητα με τον αντίστοιχο κανονικό τρόπο ταλάντωσης.
4. Ένα συντηρητικό μηχανικό σύστημα αποτελείται από ένα στεφάνι ακτίνας R και μάζας M και ομοιόμορφης κατανομής μάζας. Στο στεφάνι υπάρχει μια χάντρα μάζας m , που μπορεί να κινείται στην περιφέρεια του στεφανιού χωρίς τριβές. Το σύστημα κρέμεται από ένα καρφί σε κάποιο σημείο O , της περιφέρειας του στεφανιού και μπορεί να κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο (\hat{x}, \hat{y}) . Με το τρόπο αυτό το στεφάνι μπορεί να ταλαντώνεται ως προς το σημείο O ενώ η χάντρα κινείται στην περιφέρειά του. Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε βαρυντικό πεδίο.
- 
- (i) Γράψτε την Lagrangian του συστήματος.
 - (ii) Βρείτε την κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας του συστήματος.
 - (iii) Για την περίπτωση που $M = 2m$ υπολογίστε τις συχνότητες των μικρών ταλαντώσεων ως προς την θέση της ευσταθούς ισορροπίας που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.
5. Ένας ομογενής δίσκος μάζας M και ακτίνας R , βρίσκεται σε ηρεμία σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Συνδέεται με τρία όμοια ελατήρια σταθεράς k και φυσικού μήκους l_0 . Τα τρία ελατήρια συνδέονται με σταθερά σημεία τα οποία βρίσκονται σε τέτοιες θέσεις ώστε τα ελατήρια να σχηματίζουν γωνία 120° μεταξύ τους. Στην θέση ισορροπίας τα ελατήρια έχουν μήκος $l > l_0$. Να βρεθούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης συμπεριλαμβανομένης της περιστροφικής. [Υπόδειξη: Η απάντησή σας θα
- 

πρέπει να είναι της μορφής $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{2m} \frac{2l-l_0}{l}}$ και $\omega_3 = \sqrt{\frac{6k}{m} \frac{(l-l_0)(a+l)}{al}}$.

6. Θεωρήστε ότι έχετε ένα κουβά με νερό τον οποίο περιστρέφεται ως προς την κατακόρυφο άξονα συμμετρίας του με γωνιακή ταχύτητα Ω . Δείξτε ότι από την στιγμή που το νερό έχει βρεθεί σε ισορροπία ως προς τον κουβά, η επιφάνειά του θα έχει το σχήμα της παραβολής. [Υπόδειξη: χρησιμοποιείτε κυλινδρικές συντεταγμένες και το γεγονός ότι η επιφάνεια του νερού είναι μια ισοδυναμική επιφάνεια κάτω από τη συνδυαστική δράση της βαρυτικής και φυγόκεντρικής δύναμης].
7. Ένα σώμα μάζας m , είναι περιορισμένο να κινείται απουσία τριβών, σε ένα κατακόρυφο επίπεδο με τους άξονες x στην οριζόντια διεύθυνση και τον y στην κατακόρυφη διεύθυνση με θετική φορά προς τα πάνω. Το επίπεδο τίθεται σε περιστροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω , ως προς τον κατακόρυφο y -άξονα. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης για x και y , να λυθούν και να περιγράψετε τις πιθανές κινήσεις του σώματος.
8. Θεωρήστε ένα λείο μικρό δίσκο πάνω σε οριζόντια επιφάνεια, η οποία περιστρέφεται με αντίθετα της φοράς των δεικτών του ρολογιού με γωνιακή ταχύτητα Ω .
- (α) Γράψτε τον 2^ο νόμο του Newton για τις συντεταγμένες x και y του δίσκου σύμφωνα με παρατηρητή που στέκεται στη περιστρεφόμενη επιφάνεια. Θα πρέπει να συμπεριλάβετε την φυγόκεντρη δύναμη και την δύναμη Coriolis αλλά μπορείτε να αγνοήσετε την περιστροφή της γης.
- (β) Λύστε τις δυο εξισώσεις γράφοντας $\eta = x + iy$ και μαντεύοντας ότι η λύση είναι της μορφής $\eta = e^{-iat}$ (οι λύσεις μοιάζουν με αυτές του αρμονικού ταλαντωτή με κριτική απόσβεση). Γράψτε την γενική λύση.
- (γ) Την χρονική στιγμή $t = 0$, ωθούμε τον μικρό δίσκο από την θέση με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_0 = (x_0, 0)$ με ταχύτητα $\vec{v}_0 = (v_{x_0}, v_{y_0})$ (όλα μετρούμενα ως προς παρατηρητή που βρίσκεται στην περιστρεφόμενη επιφάνεια). Δείξτε ότι:

$$x(t) = (x_0 + v_{x_0} t) \cos \Omega t + (v_{y_0} + \Omega x_0) t \sin \Omega t$$

$$y(t) = -(x_0 + v_{x_0} t) \sin \Omega t + (v_{y_0} + \Omega x_0) t \cos \Omega t$$

- (δ) Περιγράψτε και σχεδιάστε την συμπεριφορά του δίσκου για μεγάλες τιμές του t . [Υπόδειξη: Για μεγάλες τιμές του t , οι όροι που είναι ανάλογοι του t υπερισχύουν (εκτός και αν οι σταθερές αναλογίας είναι μηδέν). Όταν ο χρόνος t είναι μεγάλος, γράψτε τις δυο εξισώσεις του ερωτήματος (γ) με την μορφή $x(t) = t(B_1 \cos \Omega t + B_2 \sin \Omega t)$ και με μια ανάλογη έκφραση για $y(t)$ και προσπαθήστε να ενώσετε τους όρους ημιτόνου και συνημιτόνου σε μια μόνο τριγωνομετρική συνάρτηση ημιτόνου ή συνημιτόνου για το $y(t)$].