ΦΥΣ. 133
Τελική Εξέταση 9-Μάη-2006

Πριν ξεκινήσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, αριθμό ταυτότητας) στο πάνω μέρος της σελίδας αυτής.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το τυπολόγιο που σας δίνεται και μια σελίδα δικιά σας με τύπους και μόνο. Στο τέλος της εξέτασης θα πρέπει να επιστρέψετε τόσο το τυπολόγιο όσο και τη σελίδα που χρησιμοποιήσατε.
Για τις λύσεις των ασκήσεων θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε μόνο τις σελίδες που σας δίνονται.

Προσπαθήστε να δείξετε τη σκέψη σας και να γράψετε καθαρές εξισώσεις. Για πλήρη ή μερική βαθμολόγηση θα πρέπει να φαίνεται καθαρά το τι προσπαθείτε να δείξετε. Αν δεν μπορώ να διαβάσω τι γράφετε θα θεωρηθεί λάθος οπότε προσπαθήστε να γράψετε ευανάγνωστα.

Διαβάστε πρώτα όλες τις ασκήσεις και προσπαθήστε να σκεφτείτε τι περίπου χρειάζεται να κάνετε. Η σειρά των προβλημάτων ή το σύνολο των μονάδων τους δεν αντικατοπτρίζει τη δυσκολία τους.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι απεριόριστη αλλά πιστεύω ότι 4 ώρες είναι περισσότερο από ικανοποιητικές.

Σας δίνονται 8 προβλήματα και πρέπει να απαντήσετε σε όλα. Σύνολο μονάδων 130.

Καλή επιτυχία.

Τυπολόγιο

Διανύσματα:

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}, \qquad \vec{A}\times\vec{A} = 0, \qquad \vec{A}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = 0,$$

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}, \qquad \vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right) - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$$

Ανάπτυγμα Taylor συνάρτησης ως προς σημείο α:

$$f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(z-a)^2 f''(a) + \frac{1}{3!}(z-a)^3 f'''(a) + \cdots$$

Σειρά διωνύμου:

$$(1+z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2!}z^2 + \cdots \quad \text{για } |z|<1$$

Στροφορμή:

$$\vec{L} = \sum_i^n \vec{L}_i = \sum_i^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = I\vec{\omega}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{\omega\varsigma,CM} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i^n \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\varepsilon\xi}\right]$$

Κέντρο μάζας:

$$R_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1} m_i\vec{r}_i, \; M = \sum_{i=1} m_i \text{ ή } R_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

Γραμμική ορμή συστήματος σωμάτων:

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\varepsilon\xi}$$

Συνθήκες για μια δύναμη να είναι συντηρητική:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r) \text{ και } \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0 \quad \text{όπου} \quad \vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Euler-Lagrange εξισώσεις:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f\left[y(x), y'(x), x\right]dx \text{ είναι στάσιμο κατά μήκος της } y = y(x) \text{ αν } \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

Lagrangian:

$$\mathcal{L} = T - V$$

Αρχή Hamilton:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,dt$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) - U(\rho\phi z)$$

Σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) - U(r\theta\phi)$$

Εξισώσεις Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Εξισώσεις Lagrange με πολλαπλασιαστές:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{m}\lambda_k(t)\frac{\partial f_k}{\partial q_i} \quad (i = 1,2,3,\ldots s)$$

Γενικευμένη ορμή:

$$p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$$

Αγνοήσιμη ή κυκλική συντεταγμένη:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Hamiltonian:

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i\dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}$$

Εξισώσεις Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i} \quad [i = 1,\cdots,n]$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i} \quad [i = 1,\cdots,n]$$

Ανηγμένη μάζα:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Ενεργό δυναμικό:

$$U_{eff}(r) = U(r) + U_{cf}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

Μετασχηματισμένη ακτινική Δ.Ε. τροχιάς:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u + \frac{\mu}{l^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) = 0, \text{ όπου } u = \frac{1}{r}$$

Ενέργεια τροχιάς:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)$$

Τροχιές Kepler:

$F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2} = \dfrac{\gamma}{r^2}$ λύση ακτινικής εξίσωσης είναι: $r(\phi) = \dfrac{c}{1 + e\cos\phi}$, με $c = \dfrac{l^2}{\gamma\mu}$

Εκκεντρότητα (*e*): $E = \dfrac{\gamma^2\mu}{2l^2}\left(e^2 - 1\right)$ όπου E = Ενέργεια

Εκκεντρότητα	Ενέργεια	Είδος Τροχιάς
$e = 0$	E < 0	κυκλική
$0 < e < 1$	E < 0	ελλειπτική
$e = 1$	E = 0	παραβολική
$e > 1$	E > 0	υπερβολική

Περιήλιο: $r_{\min} = \dfrac{c}{1+e}$

Αφήλιο: $r_{\max} = \dfrac{c}{1-e}$

Μεγάλος ημιάξονας: $a = \dfrac{c}{1-e^2}$

Μικρός ημιάξονας: $b = \dfrac{c}{\sqrt{1-e^2}}$

Νόμοι Kepler:

1ος νόμος: τροχιές πλανητών είναι ελλείψεις με τον ήλιο σε μια από τις εστίες της έλλειψης

2ος νόμος: $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{l}{2\mu}$

3ος νόμος: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM_H}a^3$

Συζευγμένοι ταλαντωτές:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} M_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \qquad M_{jk} = \sum_a m_a \sum \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_j}\frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_k}$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j,k} V_{jk} q_j q_k \qquad V_{jk} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}$$

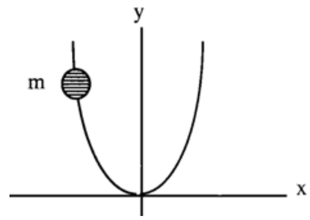
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{V}\mathbf{q} \qquad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

ιδιοσυχνότητες: $\det(\mathbf{V} - \omega^2\mathbf{M}) = 0$ ιδιοδιανύσματα: $\sum_j \left(V_{jk} - \omega_r^2 M_{jk}\right)a_{jr} = 0$

$q_j(t) = \sum_r a_{jr}\eta_r(t)$ Κανονικές συντεταγμένες: $\eta_r(t) = \beta_r e^{i\omega_r t}$

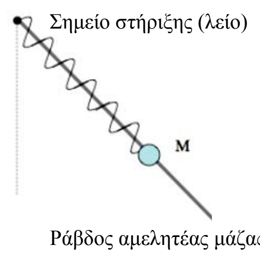
Ορθοκανονικότητα: $\sum_{j,k} M_{jk}a_{jr}a_{ks} = \delta_{rs} = \begin{cases} 0 & r \neq s \\ 1 & r = s \end{cases}$

1. (**10π συνολικά**)
Θεωρείστε μια χάντρα μάζας m η οποία περιορίζεται να κινείται κατά μήκος ενός σταθερού σύρματος έτσι ώστε η κατακόρυφη απομάκρυνσή της σχετίζεται με την οριζόντια απομάκρυνσή της με την σχέση $y = \frac{1}{2}ax^2$.



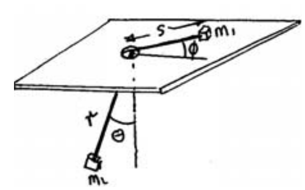
(α) Γράψτε τη Lagrangian για τη χάντρα [**3π**]
(β) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης. [**3π**]
(γ) Για μικρές απομακρύνσεις γύρω από τη θέση x=0 η χάντρα εκτελεί ταλάντωση. Να βρεθεί η συχνότητα των ταλαντώσεων. [**4π**]

2. (**15π συνολικά**)
Ένα επίπεδο εκκρεμές αποτελείται από ένα ελατήριο του οποίου οι σπείρες είναι τυλιγμένες γύρω από μια ευθύγραμμη και αβαρή ράβδο απεριόριστου μήκους. Το ελατήριο έχει φυσικό μήκος L_0 και σταθερά k. Το ένα άκρο του ελατηρίου και η ράβδος εξαρτώνται από ένα σημείο το οποίο δεν παρουσιάζει τριβές. Μια χάντρα μάζας M είναι τρυπημένη ώστε να διαπερνά τη ράβδο και εξαρτάται από το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου και όταν η μάζα είναι σε ηρεμία ισχύει $Mg = k(L - L_0)$. Δεν υπάρχουν δυνάμεις τριβών στο πρόβλημα.



(α) Να βρεθεί η Lagrangian του συστήματος. Έστω r η απόσταση της μάζας M από το σημείο στήριξης και θ η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την κατακόρυφο. Θεωρήστε σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που περνά από το σημείο στήριξης. [**7π**]
(β) Βρείτε προσεγγιστικές λύσεις στις εξισώσεις Lagrange στο όριο ταλαντώσεων μικρού πλάτους, για τις οποίες το σύστημα παραμένει κοντά στην κατάσταση ισορροπίας. Δώστε ακριβείς εξηγήσεις για τις προσεγγίσεις που κάνετε. [<u>*Υπόδειξη:*</u> μπορεί να σας φανεί χρήσιμο να ορίσετε την μικρή ποσότητα $\varepsilon = r - L$]. [**8π**]

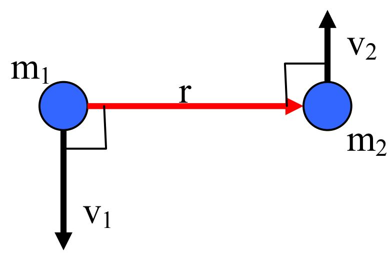
3. (**15π συνολικά**)
Θεωρήστε την περίπτωση δύο μαζών m_1 και m_2 οι οποίες συνδέονται με ένα μη ελαστικό σχοινί αμελητέας μάζας και μήκους $r + s = l$. Η μάζα m_1 κινείται στο οριζόντιο επίπεδο ενός λείου τραπεζιού ενώ η μάζα m_2 κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο. Χρησιμοποιήστε τις συντεταγμένες του σχήματος.



(α) Αναφέρετε τους δεσμούς του συστήματος και προσδιορίστε τη Lagrangian και Hamiltonian του συστήματος. [**8π**]
(β) Προσδιορίστε τις εξισώσεις κίνησης. [**4π**]
(γ) Δείξτε ποιες μεταβλητές είναι κυκλικές. [**3π**]

4. (**20π συνολικά**)

Θεωρήστε δύο σώματα με μάζες m_1=5kg και m_2=10kg αντίστοιχα και αρχικές ταχύτητες υ_1 και υ_2. Τα δύο σώματα έχουν αρχική απομάκρυνση μεταξύ τους $\vec{r}$ όπως στο παρακάτω σχήμα. Το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$ έχει κατεύθυνση προς τα κάτω και μέτρο υ_1=4m/s ενώ το διάνυσμα της ταχύτητας υ_2 έχει μέτρο υ_2=1m/s και διεύθυνση προς τα πάνω. Τα δύο σώματα



αλληλεπιδρούν μέσω ενός ελκτικού δυναμικού $U = -\frac{k}{r}$ όπου k=50Jm.

(α) Πόσο μακριά από τη μάζα m_1 βρίσκεται το κέντρο μάζας των δύο σωμάτων; Δώστε την απάντησή σας συναρτήσει της $\vec{r}$. [**1π**]
(β) Ποια είναι η τιμή της ανηγμένης μάζας των δύο σωμάτων; [**1π**]
(γ) Ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας; Θα πρέπει να προσδιορίσετε το μέτρο και τη διεύθυνσή της. [**2π**]
(δ) Υποθέστε ότι η $\vec{r}$ στο παραπάνω σχήμα έχει μέτρο 2m. Καθώς τα σώματα κινούνται κάτω από την επίδραση της ελκτικής αλληλεπίδρασής τους, η απόστασή τους $\vec{r}(t)$ παραμένει φραγμένη ή όχι; Πρέπει να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. [**6π**]
(ε) Για ποια τιμή του $\vec{r}$ στο παραπάνω σχήμα η απόσταση $|\vec{r}|$ μεταξύ των δύο σωμάτων θα παραμείνει σταθερή με το χρόνο [*Υπόδειξη:* το διάνυσμα της απόστασης $\vec{r}$ είναι σε σταθερή κυκλική τροχιά]; [**5π**]
(στ) Υποθέστε ότι η $\vec{r}$ στο παραπάνω σχήμα έχει μέτρο 1m. Καθώς τα σώματα κινούνται με την πάροδο του χρόνου, το διάνυσμα της απόστασής τους $\vec{r}(t)$ θα παραμείνει φραγμένη. Ποια θα είναι η ελάχιστη και μέγιστη τιμή της απόστασής τους; [**5π**]

5. (**20π συνολικά**)

Σωματίδια μάζας m_1 και m_2 αλληλεπιδρούν μέσω ενός δυναμικού $U = kr^4$, όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων. Δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις που ενεργούν στο σύστημα και το κέντρο μάζας βρίσκεται σε ηρεμία. Το μέγεθος της στροφορμής του συστήματος είναι l

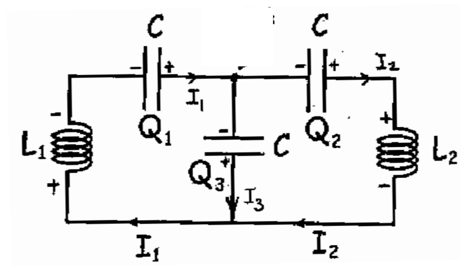
(α) Σχεδιάστε το ενεργό δυναμικό U_{eff} συναρτήσει της απόστασης r. Λύστε ως προς r_{eq} μεταξύ των σωματιδίων η οποία αντιστοιχεί σε κυκλική τροχιά. Η έκφρασή σας θα πρέπει να συνδέει την r_{eq} με τη στροφορμή l. Προσδιορίστε την r_{eq} στο διάγραμμά σας. [**5π**]
(β) Υποθέτοντας ότι η στροφορμή $\vec{L}$ είναι στη z-διεύθυνση και θεωρώντας την αρχή του συστήματος συντεταγμένων να συμπίπτει με το κέντρο μάζας, να βρεθούν τα διανύσματα θέσης $\vec{r}_1(t)$ και $\vec{r}_2(t)$ και να σχεδιαστούν οι τροχιές των m_1 και m_2 (σχεδιάστε τις τροχιές στο ίδιο διάγραμμα και θυμηθείτε ότι $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$). [**4π**]

(γ) Κάντε ένα άλλο διάγραμμα της U_{eff} συναρτήσει της r. Υποθέτοντας μια ενέργεια E μεγαλύτερη από αυτή που αντιστοιχεί στην κυκλική τροχιά, προσδιορίστε στο διάγραμμά σας την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση r_{min} και r_{max}. [**4π**]

(δ) Αποδείξτε τη σχέση μεταξύ της δεύτερης παραγώγου του U_{eff} και της συχνότητας, ω, ταλαντώσεων μικρού πλάτους γύρω από την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς r_{eq}. Χρησιμοποιείστε το αποτέλεσμά σας για να βρείτε το ω για το πρόβλημα αυτό. [**7π**]

6. (**15π συνολικά**)

Θεωρήστε το κύκλωμα του παρακάτω σχήματος το οποίο αποτελείται από τρείς όμοιους πυκνωτές και δύο διαφορετικά πηνία.



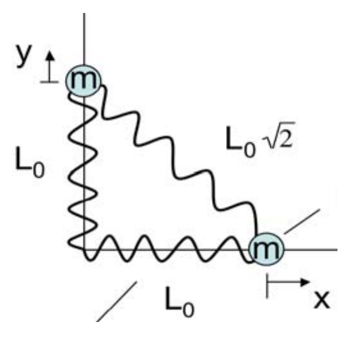
(α) Για φορτία Q_i στους πυκνωτές και ρεύματα I_i διαμέσου των στοιχείων του κυκλώματος γράψτε τους νόμους του Kirchhoff για την συνολική αλλαγή της τάσης για κάθε βρόγχο του κυκλώματος. [**1π**]

(β) Να βρεθούν οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης. [**6π**]

(γ) Για L_1=L_2=L να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης και να περιγραφεί η φυσική τους σημασία σχετικά με την κίνηση των ρευμάτων στο κύκλωμα. [**8π**]

7. (**20π συνολικά**)

Το παρακάτω σχήμα δείχνει τρία ελατήρια στην θέση ισορροπίας τους. Και τα 3 ελατήρια έχουν σταθερά k ενώ η μάζα τους θεωρείται αμελητέα (Μπορείτε να αγνοήσετε τη βαρύτητα για το πρόβλημα αυτό). Τα ελατήρια 1 και 2 είναι τυλιγμένα γύρω από λείες ράβδους, έτσι ώστε το ελατήριο 1 μπορεί να κινείται στη x-διεύθυνση μόνο, ενώ το ελατήριο 2 μόνο στη y-διεύθυνση. Δύο μπάλες μάζας m είναι εξαρτημένες στα άκρα των ελατηρίων 1 και 2. Το τρίτο ελατήριο συνδέει τις δύο μάζες. Τα μήκη ισορροπίας των ελατηρίων είναι L_0, L_0 και $\sqrt{2}L_0$ για τα ελατήρια 1, 2 και 3 αντίστοιχα.



(α) Να βρεθεί η δυναμική ενέργεια όταν το ελατήριο 1 επιμηκύνεται κατά μια ποσότητα x και το ελατήριο 2 επιμηκύνεται κατά μια ποσότητα y, όπου x και y είναι και τα δύο πολύ μικρότερα από το L_0. [**8π**].

(β) Να βρεθούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος αυτού, υποθέτοντας ότι $x \ll L_0$ και $y \ll L_0$. [**8π**]

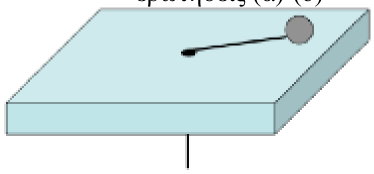
(γ) Περιγράψτε ένα τρόπο για θέσετε το σύστημα σε κίνηση έτσι ώστε να ταλαντώνεται στη χαμηλότερη συχνότητα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. [**4π**]

8. (**15π συνολικά**)

Οι ερωτήσεις (α)-(δ) αναφέρονται στη μάζα Μ του σχήματος Α ενώ οι ερωτήσεις (ε)-(η) στη μάζα Μ του σχήματος Β. Οι απαντήσεις μπορούν να δοθούν με γνώσεις εισαγωγικής φυσικής.

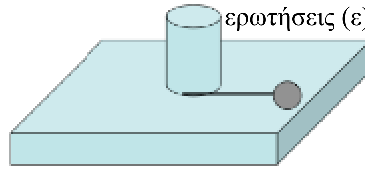
Σχήμα Α

ερωτήσεις (α)-(δ)



Σχήμα Β

ερωτήσεις (ε)-(η)



Για τις ερωτήσεις (α)-(δ): Υπάρχει μια μικρή τρύπα σε μια παγωμένη και γλιστερή λίμνη. Το ένα άκρο ενός λεπτού νήματος αμελητέας μάζας είναι στερεωμένο στη μάζα Μ. Η μάζα Μ έχει αμελητέες διαστάσεις και γλιστρά πάνω στο πάγο χωρίς τριβές. Το άλλο άκρο του νήματος περνά μέσα από την τρύπα στο πάγο. Αρχικά η μάζα Μ είναι σε απόσταση R από την τρύπα και κινείται εφαπτομενικά με ταχύτητα υ_0. Τη χρονική στιγμή $t=0$, ένα ψάρι κάτω από το πάγο αρχίζει να τραβά το άκρο του νήματος προς τα κάτω με σταθερό ρυθμό.

(α) Διατηρείται η γραμμική ορμή; Εξηγήστε γιατί ναι ή γιατί όχι και αν όχι ποια δύναμη είναι υπεύθυνη για τη μη διατήρησή της. [**1.5π**]

(β) Διατηρείται η στροφορμή ως προς ένα οποιοδήποτε σταθερό σημείο; Εξηγήστε γιατί ναι ή γιατί όχι και αν όχι προσδιορίστε τη ροπή υπεύθυνη για τη μη διατήρηση. [**1.5π**]

(γ) Διατηρείται η μηχανική ενέργεια; Εξηγήστε γιατί ναι ή γιατί όχι και αν όχι προσδιορίστε τι καταναλώνει έργο. [**1.5π**]

(δ) Βρείτε την ταχύτητα με την οποία κινείται η μάζα Μ όταν φθάνει σε απόσταση d από την τρύπα. [**3π**]

Για τις ερωτήσεις (ε)-(η): Το ένα άκρο του νήματος είναι στερεωμένο στη μάζα Μ. Το άλλο άκρο του νήματος είναι κολλημένο στο χαμηλότερο σημείο ενός κυλίνδρου ακτίνας d. Ο κύλινδρος είναι στερεωμένος μέσα στο πάγο. Η μάζα Μ γλιστρά πάνω στο πάγο χωρίς τριβές. Το νήμα τυλίγεται γύρω από το κύλινδρο καθώς η μάζα Μ περιστρέφεται γύρω από το κύλινδρο. Αρχικά η μάζα Μ βρίσκεται σε απόσταση R από την τρύπα και κινείται εφαπτομενικά με ταχύτητα υ_0.

(ε) Διατηρείται η γραμμική ορμή; Εξηγήστε γιατί ναι ή γιατί όχι και αν όχι ποια δύναμη είναι υπεύθυνη για τη μη διατήρησή της. [**1.5π**]

(στ) Διατηρείται η στροφορμή ως προς ένα σταθερό σημείο; Εξηγήστε γιατί ναι ή γιατί όχι και αν όχι προσδιορίστε τη ροπή που είναι υπεύθυνη για τη μη διατήρησή της. [**1.5π**]

(ζ) Διατηρείται η μηχανική ενέργεια; Εξηγήστε γιατί ναι ή γιατί όχι και αν όχι προσδιορίστε τι καταναλώνει έργο. [**1.5π**]

(η) Βρείτε την ταχύτητα με την οποία κινείται η μάζα Μ όταν φθάνει στον κύλινδρο που όπως αναφέραμε έχει ακτίνα d. [**3π**]