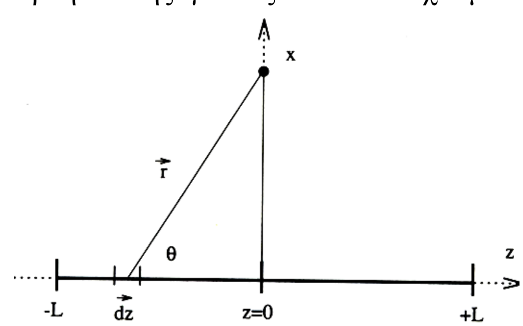
ΦΥΣ 145 –Υπολογιστικές Μέθοδοι στη Φυσική

7η Εργασία **Επιστροφή: 05/04/21 πριν τις 14:30**

Υπενθύμιση: Οι εργασίες πρέπει να επιστρέφονται με e-mail στο fotis@ucy.ac.cy που θα στέλνετε από το πανεπιστημιακό σας λογαριασμό το αργότερο μέχρι την ημερομηνία που αναγράφεται και πριν το εργαστήριο της συγκεκριμένης ημέρας.
Ως subject του e-mail θα πρέπει να αναγράφεται την εργασία (username_phy145_hmX όπου X ο αριθμός της εργασίας)
Κάθε αρχείο που επισυνάπτετε (attach) στο e-mail σας θα πρέπει να έχει το όνομα στη μορφή username_hmX.tgz όπου username είναι το username του e-mail σας και X ο αριθμός της εργασίας. Επίσης σαν πρώτο σχόλιο μέσα σε κάθε file που περιέχει το πρόγραμμά σας θα πρέπει να αναφέρεται το ονοματεπώνυμό σας. Οι εργασίες είναι ατομικές και πανομοιότυπες εργασίες δε θα βαθμολογούνται. Για να κάνετε ένα tgz file (ουσιαστικά tar zipped file) θα πρέπει να δώσετε στο terminal την εντολή tar -czvf username_hmX.tgz *.py όπου py είναι όλα τα py files των προγραμμάτων σας

1. Να υπολογισθεί η τιμή του ολοκληρώματος $\int_5^8 6x^3dx$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του RK2 και βήμα dx = 0.15. Συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με αυτό που λαμβάνετε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Simpson και το ίδιο βήμα dx.

2. Θεωρήστε ένα ευθύγραμμο αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα I. Σύμφωνα με το νόμο του Biot-Savart το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από ρεύμα I που διαρρέει ένα τμήμα $d\vec{z}$ του αγωγού δίνεται από τη σχέση: $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{z}\times\vec{r}}{r^3}$, όπου r είναι το διάνυσμα από το τμήμα, $d\vec{z}$, του αγωγού στο σημείο που θέλουμε να εξετάσουμε το πεδίο (δείτε το σχήμα). Για τη συγκεκριμένη γεωμετρία το εξωτερικό γινόμενο $d\vec{z}\times\vec{r}$ μπορεί να γραφεί συναρτήσει της γωνίας θ οπότε έχουμε: $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dz\, sin\theta}{r^2}$, όπου αγνοούμε το σύμβολο του διανύσματος, μια και το πεδίο από κάθε τμήμα Δz του ευθύγραμμου αγωγού έχει διεύθυνση κάθετη προς το επίπεδο της σελίδας. Το ολικό πεδίο δίνεται από το ολοκλήρωμα του dB ως προς το συνολικό μήκος του αγωγού. Για να το υπολογίσουμε αυτό το ολοκλήρωμα μετατρέπουμε ως συνήθως τα διαφορικά σε μικρές διαφορές, δηλαδή το dz γίνεται Δz και το ολοκλήρωμα γίνεται άθροισμα από το ένα άκρο του αγωγού στο άλλο: $B \approx \sum \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{x\Delta z}{(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, , όπου εκφράσαμε τα r και $sin\theta$ συναρτήσει των x και z. Το άθροισμα αυτό δίνει μια προσεγγιστική τιμή για το πεδίο B, ενώ το αριθμητικό σφάλμα ελαττώνεται κάνοντας το Δz πολύ μικρό. Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ένα ευθύγραμμο σύρμα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Simpson και συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά που βρίσκετε χρησιμοποιώντας την προσεγγιστική εξίσωση για το B από την παραπάνω συζήτηση του προβλήματος και για την ίδια τιμή του Δz. Θεωρείστε ότι $\mu_0 I$ = 1 και ότι το μήκος του αγωγού είναι 1m. Για διαφορετικές τιμές του βήματος Δz, χρησιμοποιήστε την προηγούμενη σχέση για να συγκρίνεται τα αποτελέσματά σας με αυτά που παίρνετε από τον νόμο του Ampere. Κάντε τη



γραφική παράσταση του πεδίου *B* που βρίσκεται συναρτήσει του *x* για δύο αγωγούς με μήκος *l* = 1 και *l* = 10 και για Δ*z* = 0.1.

3. Έστω σώμα κινείται σε μια διάσταση και η θέση και ταχύτητά του υπολογίζονται σε κάθε χρονική στιγμή σύμφωνα με τις εξισώσεις:$t_{i+1} = t_i + dt$, $x_{i+1} = x_i + \upsilon_i dt + \frac{1}{2} a_i (dt)^2$ και $\upsilon_{i+1} = \upsilon_i + a_i dt$, όπου η επιτάχυνση, $a_i = f(x_i, \upsilon_i, t_i)$ υπολογίζεται στην αρχή κάθε βήματος. Θεωρήστε ότι στην προκειμένη περίπτωση του προβλήματος η επιτάχυνση δίνεται από την εξίσωση $a_i = f(x_i, \upsilon_i, t_i) = -kx^3$όπου *k*=4.0.

(**α**) Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο χρησιμοποιεί τις παραπάνω εξισώσεις για να κάνετε την αριθμητική ολοκλήρωση της τροχιάς του σώματος. Θεωρήστε ότι για *t* =0 το σώμα βρίσκεται στην θέση x_0 = 0.0*m* και η ταχύτητά του είναι υ_0 =1.0*m/s* και θεωρείστε σαν χρονικό βήμα, *dt* = 0.05 *sec*. Κάντε το γράφημα της τροχιάς για *x*(*t*) ως προς *t* για $0 \le t \le 4\pi$. Κάντε επίσης το γράφημα της θέσης, *x*(*t*) ως προς την ταχύτητα του σώματος *υ*(*t*).

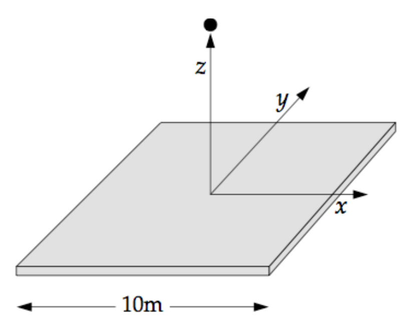
(**β**) Το πλάτος της κίνησης είναι σταθερό μεταξύ δυο διαδοχικών ελαχίστων ή μεγίστων και αν όχι κατά πόσο μεταβάλλεται; Τροποποιήστε το πρόγραμμά σας ώστε να μεταβάλλεται το χρονικό βήμα *dt*, έως ότου το πλάτος να παραμένει σταθερό με μεταβολή λιγότερη από 1% μεταξύ δυο διαδοχικών ακροτάτων. (*Υπόδειξη:* μετατρέψτε το πρόγραμμά σας ώστε να κοιτάτε τις περιπτώσεις που η ταχύτητα γίνεται μηδέν, *υ* = 0.0. Έτσι μπορείτε να προσδιορίσετε τα σημεία αυτά με μεγαλύτερη ακρίβεια). Ποια η τιμή του χρονικού βήματος την οποία βρίσκετε με το τρόπο αυτό;

(**γ**) Γράψτε την εξίσωση της στιγμιαίας ολικής (κινητικής και δυναμικής) μηχανικής ενέργειας, *E*, του συστήματος. Αυτό πρέπει να αποτελεί μια σταθερά της κίνησης. Κάντε τη γραφική παράσταση του σφάλματος της ενέργειας *E*(*t*) – *E*(*t*=0) συναρτήσει του χρόνου για το χρονικό διάστημα $0 \le t \le 4\pi$ και για το χρονικό βήμα *dt* που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Θεωρήστε ότι η μάζα του σώματος είναι *m* = 1.0*kg*.

(**δ**) Χρησιμοποιώντας την τιμή του χρονικού βήματος *dt* που προσδιορίσατε στο ερώτημα (β), υπολογίστε την περίοδο της κίνησης. Αυτό θα το υπολογίσετε βρίσκοντας το χρόνο που χρειάζεται το σώμα να περάσει και πάλι από τη θέση *x* = 0.0 με θετική φορά ταχύτητας. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής για καλύτερα αποτελέσματα.

(**ε**) Επαναλάβετε το (δ) ερώτημα για υ_0 = 0.25, 0.5, 1.0, 2.0, 4.0 και 8.0 και κάντε τη γραφική παράσταση της αριθμητικά υπολογιζόμενης περιόδου συναρτήσει της μηχανικής ενέργειας *E*(*t*=0).

4. Μια ομογενής τετραγωνική μεταλλική επιφάνεια (αμελητέου πάχους), πλευράς 10*m* και μάζας 10,000*kg* αιωρείται ακίνητη στο χώρο. Θεωρήστε ένα σφαιρικό σωματίδιο μάζας 1.0*kg* το οποίο βρίσκεται σε απόσταση *z* από το κέντρο της μεταλλικής επιφάνειας και σε διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια, όπως στο σχήμα. Η βαρυτική δύναμη που δέχεται το σωματίδιο εξαιτίας της έλξης που ασκεί μια στοιχειώδης μάζα στην επιφάνεια *dxdy* είναι:



$$dF_z = G\rho \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdy,$$

όπου $G = 6.674 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-1}$ η σταθερά της παγκόσμιας έλξης και ρ η επιφανειακή πυκνότητα της μεταλλικής επιφάνειας.

(α) Επαναλάβετε τον υπολογισμό της βαρυτικής δύναμης που ασκεί η μεταλλική επιφάνεια στο σφαιρικό σώμα για $z = 0.0m$ μέχρι $z = 1.0m$ με βήμα $dz = 0.1m$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ολοκλήρωσης *Simpson* για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος. Θεωρήστε ότι έχετε 100 διαστήματα σε κάθε άξονα ολοκλήρωσης.

(γ) Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα του ερωτήματος (α) για να κάνετε το γράφημα της υπολογιζόμενης δύναμης συναρτήσει της απόστασης *z*. Θα πρέπει να αποθηκεύσετε το γράφημα στο αρχείο *gravitationalforce.pdf*

Υπόδειξη για το (α) ερώτημα: Όπως έχουμε δει στις διαλέξεις η μέθοδος *Simpson* για απλά ολοκληρώματα σε μια διάσταση γράφεται με την μορφή:

$$S_x = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h_x}{3}\Big(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+2f\left(x_{N_x-2}\right)+4f\left(x_{N_x-1}\right)+f\left(x_{N_x}\right)\Big) \quad \mathbf{(1)}$$

όπου το διάστημα $[a,b]$ έχει χωριστεί σε N_x ίσα υποδιαστήματα μεγέθους $h_x = (b-a)/N_x$ και οι συντελεστές 4 και 2 εναλλάσσονται σε όλο το ενδιάμεσο διάστημα εκτός των δυο ακραίων τιμών του x ($x_o=a$ και $x_N=b$). Η εξίσωση (1) μπορεί να γραφεί σε πιο απλή μορφή όπως την έχουμε χρησιμοποιήσει:

$$S_x = \frac{h_x}{3}\left[f(x_0)+f\left(x_{N_x}\right)+4\sum_{j=1}^{\frac{N_x}{2}} f\left(x_{2j-1}\right)+2\sum_{j=1}^{\frac{N_x-2}{2}} f\left(x_{2j}\right)\right] \quad \mathbf{(2)}$$

Ένα τυπικό διπλό ολοκλήρωμα έχει την μορφή: $S = \iint f(x,y)\,dx\,dy$ και η μέθοδος *Simpson* εφαρμόζεται στην περίπτωση αυτή σε δυο στάδια. Στο πρώτο στάδιο εφαρμόζεται ως προς την μια μεταβλητή (έστω *x*) και καταλήγουμε στην ανάλογη μορφή της εξίσωσης (2):

$$S_x(y_i) = f(x_0,y_i)+f\left(x_{N_x},y_i\right)+4\sum_{j=1}^{\frac{N_x}{2}} f\left(x_{2j-1},y_i\right)+2\sum_{j=1}^{\frac{N_x-2}{2}} f\left(x_{2j},y_i\right)$$

Στο δεύτερο στάδιο εφαρμόζουμε και πάλι τη μέθοδο αλλά στο εξωτερικό ολοκλήρωμα και κάνοντας τις πράξεις καταλήγουμε στην:

$$S = \frac{h_x h_y}{9}\times\left[S_x(y_0)+S_x\left(y_{N_y}\right)+4S_x(y_1)+2S_x(y_2)+\cdots+4S_x\left(y_{N_y-2}\right)+2S_x\left(y_{N_y-1}\right)\right]$$

και συλλέγοντας τα αθροίσματα μπορεί να γραφεί με την μορφή:

$$S = \frac{h_x h_y}{9}\times\left[S_x(y_0)+S_x\left(y_{N_y}\right)+4\sum_{i=1}^{\frac{N_y}{2}} S_x\left(y_{2i-1}\right)+2\sum_{i=1}^{\frac{N_y-2}{2}} S_x\left(y_{2i}\right)\right]$$

Η τελευταία εξίσωση δείχνει ουσιαστικά ότι η μέθοδος *Simpson* για διπλό (ή μεγαλύτερης τάξης) ολοκλήρωμα αποτελείται από μια ολοκλήρωση κατά μήκος του ενός άξονα για κάθε υποδιάστημα στο ορθογώνιο άξονα, ακολουθούμενη από εφαρμογή της μεθόδου *Simpson* στα αποτελέσματα που λαμβάνονται στον ορθογώνιο άξονα.