Ανακεφαλαίωση

Τι είδαμε μέχρι τώρα:

- Συζητήσαμε συστήματα πολλών σωμάτων
  - Εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις
  - Νόμους δράσης-αντίδρασης
  - Ορμές, νόμους διατήρησης (γραμμική ορμή, στροφορμή, κινητική και δυναμική ενέργεια)
- Εισήγαμε την έννοια των δεσμών
  - Ολόνομους και μή ολόνομους δεσμούς

    $\longrightarrow \quad f(r_1, r_2, r_3, \ldots, t) = 0$
  - Γενικευμένες συντεταγμένες $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, t)$
  - Συζητήσαμε την φυσική έννοια των δεσμών και πως μεταβάλουν τους βαθμούς ελευθερίας ενός συστήματος

Τι θα δούμε σήμερα...?

- Πώς μπορούμε να μετασχηματίσουμε την εξίσωση κίνησης χρησιμοποιώντας γενικευμένες συντεταγμένες
- Εξαγωγή των εξισώσεων Lagrange
- Θα αποδείξουμε ότι οι εξισώσεις Lagrange είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις του Newton
  - Θα εισάγουμε την αρχή του D' Alembert
  - Θα στηριχθούμε σε μερικές υποθέσεις αλλά θα τις ξεκαθαρίσουμε στο δρόμο

Δυνατή μετατόπιση (virtual displacements)

- Υποθέστε ένα σύστημα με δεσμούς
  - Συνήθεις συντεταγμένες r_i (i=1,…N)
  - Γενικευμένες συντεταγμένες q_j (j=1,…n)

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_2(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ \vec{r}_N = \vec{r}_N(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{cases}$$

$$d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt$$

- Φανταστείτε ότι μετακινείτε όλα τα σημεία κατά μια στιγμιαία απειροστή μετατόπιση

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \delta\vec{r}_i \qquad q_i \rightarrow q_i + \delta q_i$$

δυνατή μετατόπιση

- Προσοχή ότι η μετατόπιση $\delta\mathbf{r}_i$ πρέπει να ικανοποιεί τους δεσμούς

$$\delta\vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

3N συντεταγμένες μή ανεξάρτητες

n συντεταγμένες ανεξάρτητες

Η αρχή του D' Alembert

- Από την εξίσωση κίνησης του Newton: $\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i \Longrightarrow \mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0$

- Τμήμα της δύναμης F_i πρέπει να οφείλεται σε δεσμούς

- Η δύναμη λόγω δεσμών f_i (συνήθως) **δεν** παράγει έργο

$$\mathbf{F}_i = \underbrace{\mathbf{F}_i^{(a)}}_{\text{δεδομένη δύναμη}} + \underbrace{\mathbf{f}_i}_{\text{αντίδραση δεσμού}}$$

  - Η δεδομένη δύναμη είναι «γνωστή» $\mathbf{F}_i^{(a)} = \mathbf{F}_i^{(a)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_i, \ldots, \mathbf{r}_N, t)$

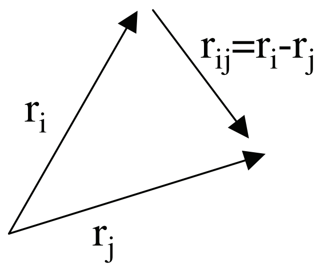
  - Η μετατόπιση είναι κάθετη στην δύναμη: $f_i \cdot \delta r_i = 0$

  - Εξαίρεση: Τριβή

- Πολλαπλασιάστε $\mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{f}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0$ με $\delta\mathbf{r}_i$ και αθροίστε ως προς i

Το δυνατό έργο των δυνάμεων δεσμών είναι μηδέν

- Αυτό δεν ισχύει πάντοτε, (π.χ. τριβή) αλλά περιοριζόμαστε σε συστήματα που το έργο των δυνάμεων των δεσμών κατά μια δυνατή μετατόπιση είναι μηδέν.
- Θέλουμε να απαλείψουμε ουσιαστικά τις δυνάμεις των δεσμών που είναι εν γένει άγνωστες ή πολύπλοκες στον υπολογισμό
- Για στερεό σώμα αυτό μπορεί να δειχθεί. Έστω μια μικρή μετακίνηση:



$$r_i' = r_i + \delta r_i, \quad r_j' = r_j + \delta r_j \qquad r_{ij}' = r_{ij} + \delta r_{ij}$$

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{r_{ij}'^2 = r_{ij}^2}_{\text{Ίσα λόγω στερεού σώματος}} + 2r_{ij}\cdot\delta r_{ij} + O((\delta r)^2) \end{array}\right\} \Rightarrow r_{ij}\cdot\delta r_{ij} = 0$$

Αλλά:

$$F_{ij}\cdot\delta r_{ij} = \underbrace{F_{ij}\cdot\delta r_i}_{\text{W στο i από j}} - \underbrace{F_{ij}\cdot\delta r_j}_{\text{W στο j από i}} = F_{ij}\cdot\delta r_i + F_{ji}\cdot\delta r_j$$

Για κεντρικές δυνάμεις επομένως $F_{ij}\cdot\delta r_{ij} = 0$

δηλαδή οι εσωτερικές δυνάμεις δεν παράγουν έργο $r_{ij} \perp \delta r_{ij}$

Η αρχή του D' Alembert

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i)\delta\mathbf{r}_i = 0$$

Η δύναμη δεσμού δεν επηρεάζει και μηδενίζεται

- Η δύναμη λόγω των δεσμών μηδενίζεται επειδή $f_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$
- Καλείται ως αρχή του D' Alembert (1743)
- Τώρα αλλάζουμε από $\mathbf{r}_i$ σε q_i

1ος όρος = $\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j$

$Q_j \equiv \sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$ Γενικευμένη Δύναμη

- Η μονάδα του Q_j δεν υπάρχει πάντα [Δύναμη]
- $Q_j q_j$ είναι πάντα [έργο]

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

Η αρχή του D' Alembert

2ος όρος $= \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{i,j} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$

- Μετά από κάποιες πράξεις μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right) - \dot{\mathbf{r}}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right) \longrightarrow \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\mathrm{v}_i^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\mathrm{v}_i^2}{2}\right)$$

Αλλά $\quad \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \quad \Rightarrow \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$

Για τη 2η παρένθεση ξέρουμε ότι: $\quad \frac{d}{dt} f\left(q_j, t\right) = \sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial t}$

Άρα $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}$ Ισοδύναμο με $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}$

$$= \sum_j \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\}\delta q_j \qquad\qquad T \equiv \sum_i \frac{m\mathrm{v}_i^2}{2}$$

- Η αρχή του D' Alembert γίνεται

$$\sum_j \left\{ \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right\}\delta q_j = 0$$

Εξισώσεις Lagrange

$$\sum_j \left\{ \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

Αυτά είναι ελεύθερα

- Οι γενικευμένες συντεταγμένες q_j είναι ανεξάρτητες

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

σχεδόν τελειώσαμε

- Υποθέτοντας ότι οι δυνάμεις είναι συντηρητικές: $\mathbf{F}_i = -\nabla_i V$

$$Q_j \equiv \sum_i \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i V \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Αντικατάσταση

Οι εξισώσεις Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

- Υποθέτοντας ότι *V* δεν εξαρτάται από τα $\dot{q}_j$ ⇨ $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$

Τελικά ⇨ $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$ $$L = T(q_j, \dot{q}_j, t) - V(q_j, t)$$

Τελειώσαμε!!!

Υποθέσεις που κάναμε

- Οι δεσμοί είναι ολόνομοι
  - Αυτό το υποθέτουμε πάντα

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, t)$$

- Οι δυνάμεις δεσμών δεν παράγουν έργο
  - Αγνοούμε τριβές

$$\mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

- Οι ενεργούσες δυνάμεις είναι συντηρητικές
  - Η εξίσωση Lagrange είναι ok αν V εξαρτάται από το χρόνο t

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V$$

- Το δυναμικό V ανεξάρτητο από τις γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}_j$
  - Το τελευταίο θα το επανεξετάσουμε αργότερα

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

Παράδειγμα: Χρονικά εξαρτημένο σύστημα

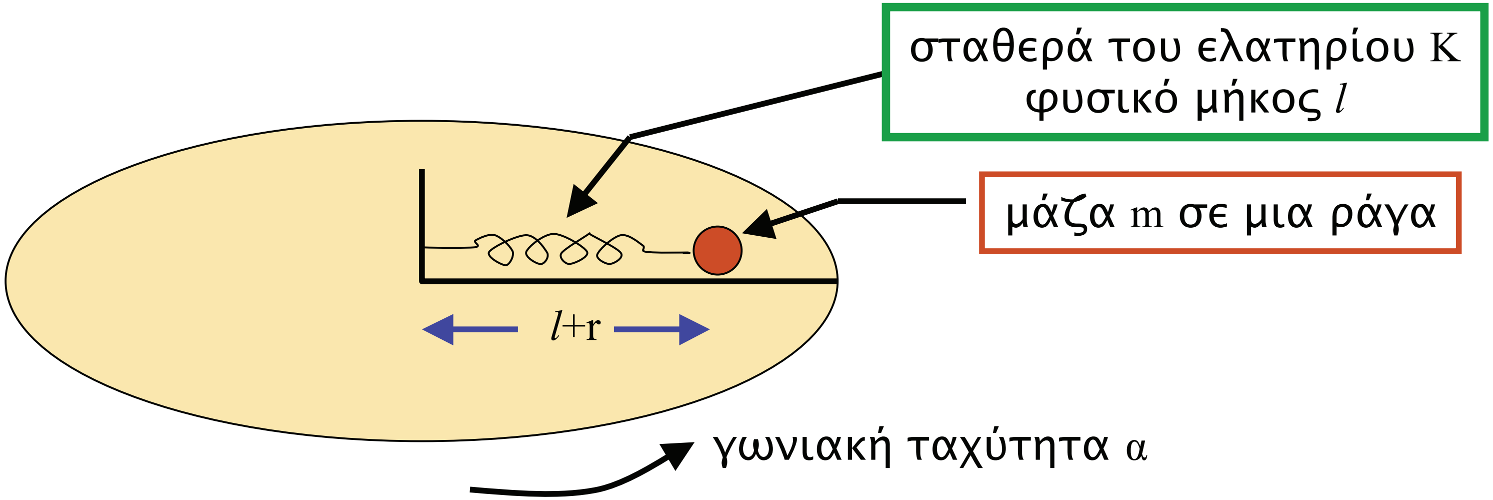
- Οι συναρτήσεις μετασχηματισμού μπορεί να εξαρτώνται από το χρόνο t

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j, t)$$

  - Το γενικευμένο σύστημα συντεταγμένων μπορεί να κινείται

    π.χ. Σύστημα συντεταγμένων πάνω στη γη

- Ένα παράδειγμα



Παράδειγμα: Χρονικά εξαρτημένο σύστημα

- Οι συναρτήσεις μετασχηματισμού: $\begin{cases} x = (l+r)\cos(at) \\ y = (l+r)\sin(at) \end{cases}$

- Κινητική ενέργεια $T = \dfrac{m}{2}\left\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right\} = \dfrac{m}{2}\left\{\dot{r}^2 + (l+r)^2 a^2\right\}$

- Δυναμική ενέργεια $V = \dfrac{K}{2} r^2$

- Η εξίσωση του Lagrange $\Rightarrow$ $L = \dfrac{m}{2}\left\{\dot{r}^2 + (l+r)^2 a^2\right\} - \dfrac{K}{2} r^2$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right] - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - ma^2(l+r) + Kr = 0$$

Παράδειγμα: Χρονικά εξαρτημένο σύστημα

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right]-\frac{\partial L}{\partial r}=m\ddot{r}-ma^2(l+r)+Kr=0$$

$$m\ddot{r}+(K-ma^2)\left(r-\boxed{\frac{ma^2 l}{K-ma^2}}\right)=0$$

- Αν $K>m\alpha^2$, ένας αρμονικός ταλαντωτής με $\omega=\sqrt{\frac{K-ma^2}{m}}$
  - Το κέντρο ταλάντωσης έχει μετατοπιστεί κατά $\sqrt{\frac{ma^2 l}{K-ma^2}}$
- Αν $K<m\alpha^2$, απομακρύνεται εκθετικά
- Αν $K= m\alpha^2$, η ταχύτητα είναι σταθερή
  - Η κεντρομόλος δύναμη ισορροπεί με την δύναμη ελατηρίου

- Η Lagrangian δεν είναι μοναδική για ένα δεδομένο σύστημα
  - Αν η Lagrangian L περιγράφει ένα σύστημα
  - Μπορεί να αποδειχθεί ότι $L' = L + \frac{dF(q,t)}{dt}$

    δουλεύει εξ' ίσου καλά για οποιαδήποτε συνάρτηση F

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{dF}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{dF}{dt}\right) = 0$$

χρησιμοποιώντας

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial t}$$