Υπολογισμοί με σύμβολα

Symbolic Computing

Symbolic computations

Όπως αναφέρει η λέξη, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διεργασίες μεταξύ συμβόλων (ουσιαστικά αναλυτικές ή ακριβείς διεργασίες). Στις περιπτώσεις αυτές οι υπολογισμοί γίνονται μεταξύ συμβόλων αντί των αριθμητικών σταθερών που αντιπροσωπεύουν

```
x = 2
y = 3
z = x * y
print(z)
```

Αριθμητικοί υπολογισμοί

output
6

```
from sympy import *
x,y = symbols('x y')
z = x * y
print(z)
```

Υπολογισμός με σύμβολα

output
x*y

Υπολογισμοί με σύμβολα γίνονται με τη χρήση του **sympy** module της Python

*** Αν δεν υπάρχει στο centos περιβάλλον του virtual box μπορείτε να το κάνετε εύκολα install δίνοντας την εντολή: *pip3 install sympy* (θα δώσετε το root password)

Κάθε σύμβολο αναπαρίσταται με κάποια μεταβλητή, αλλά το όνομα του συμβόλου θα πρέπει να δηλωθεί με **Symbol ('name') (κεφαλαίο S)** για την περίπτωση ενός συμβόλου ή **symbols('name1 name2 … nameN') (μικρό s) για N symbols**

Symbolic computations

Μερικές από τις βασικές πράξεις μεταξύ συμβόλων δίνονται στο παρακάτω παράδειγμα:

```
from sympy import *
x = Symbol('x')
y = Symbol('y')
print(2*x - 3*x – y)                    #  Αλγεβρικοί υπολογισμοί
-x - y
print(diff(x**2,x))                     #  Παραγώγιση ως προς x
2*x
print(integrate(cos(x),x))              #  Ολοκλήρωση ως προς x
sin(x)
print(simplify((x**2 + x**3)/x**2)) #  Παραγοντοποίηση
x+1
print(limit(sin(x)/x, x, 0))           #  Εύρεση ορίου
1
print(solve(5*x – 15, x))               #  Λύση εξίσωσης
[3]
```

Μπορούμε να έχουμε υπολογισμούς όπως ανάπτυγμα Taylor, γραμμική άλγεβρα (πράξεις με πίνακες ή διανύσματα) αλλά και μερικές περιπτώσεις επίλυσης διαφορικών εξισώσεων

Αριθμητικές λύσεις εξισώσεων

Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων

Με την PYTHON θα μπορούσαμε να λύσουμε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων

Γραμμική εξίσωση είναι μια αλγεβρική εξίσωση στην οποία κάθε όρος είναι είτε σταθερή ποσότητα ή σταθερή ποσότητα πολλαπλασιασμένη με την πρώτη δύναμη μιας μεταβλητής.

Σύστημα γραμμικών εξισώσεων είναι μια συλλογή από τουλάχιστον δύο γραμμικές εξισώσεις που θα πρέπει να θεωρηθούν συλλογικά και όχι μεμονωμένα

Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να έχουμε το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 0.5x_2 - 1.5x_3 = -1 \end{cases}$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων ως: $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}$

όπου: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & +4 \\ -1 & 0.5 & -1.5 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ και: $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Το σύστημα αυτό λύνεται αλγεβρικά με κάποια μέθοδο όπως η μέθοδος Cramer, η μέθοδος της απαλοιφής μεταβλητών, αντικατάστασης κλπ.

Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων

Με την PYTHON θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε μία μέθοδο από την βιβλιοθήκη numpy:

x=numpy.linalg.solve(A,B) Όπου **A** είναι ο πίνακας των όρων που πολ/ζουν τις μεταβλητές και **B** ο πίνακας των σταθερών συντελεστών των εξισώσεων.

Η μέθοδος θα υπολογίσει την ακριβή λύση αρκεί η ορίζουσα του A να μην είναι 0

```
#!/usr/bin/python3
import numpy as np
A = np. array([ [3.0, -2.0. -1.0], [2.0, -2.0, 4.0] , [-1.0, 0.5, -1.5] ] )
b = np.array( [2.0, 0.0, -1.0] )
x = np.linalg.solve(A,B)
print(”x = “,x)
bb= np.dot(A,x)
print (“bb = ”, bb)
```

Δημιουργία πίνακα από πίνακες

Επαλήθευση του αποτελέσματος

Η συνάρτηση dot() υπολογίζει το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού γραμμής x στήλης για πράξεις μεταξύ πινάκων (Ένας πίνακας A (n x m) πολ/ζεται με πίνακα B(m x 1) και το αποτέλεσμα είναι ένας πίνακας C (n x 1)

Να σημειωθεί ότι το αποτέλεσμα της επαλήθευσης μπορεί να μη δώσει ακριβώς τους ίδιους τους σταθερούς όρους, λόγω στρογγυλοποίησης.

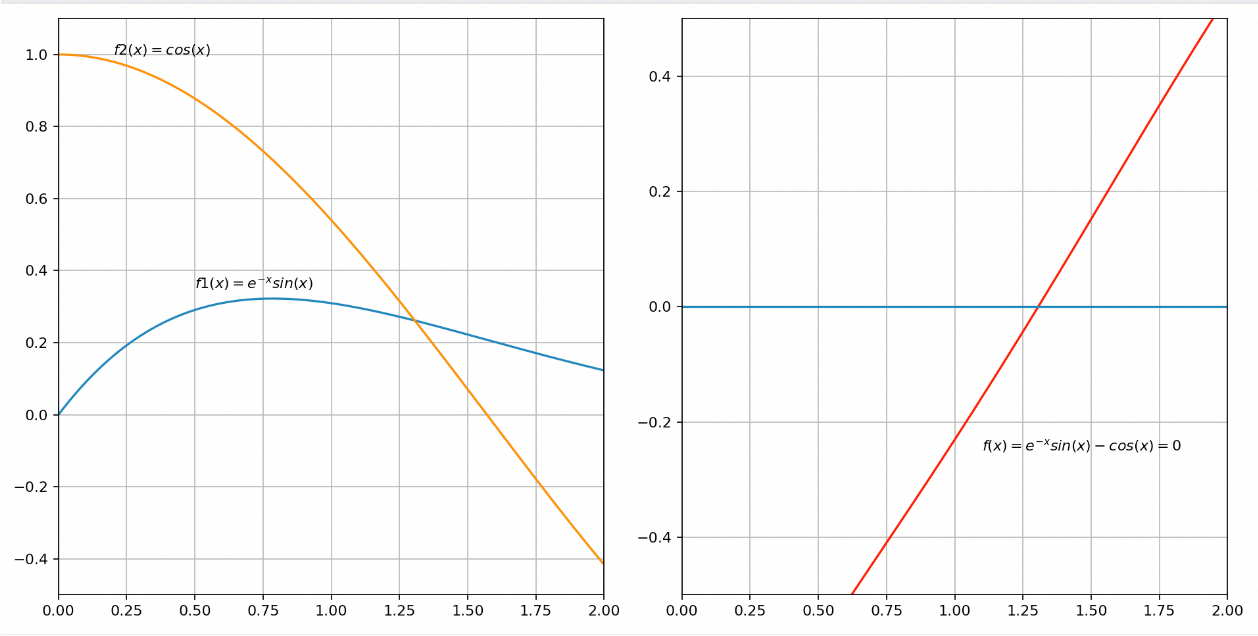
Επίλυση μή γραμμικών εξισώσεων

Στα περισσότερα προβλήματα το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήγουμε δεν είναι κάποια δευτεροβάθμια ή τριτοβάθμια εξίσωση την οποία μπορούμε να λύσουμε εύκολα αναλυτικά

Στις περιπτώσεις αυτές αν αλλάξουμε την παραδοσιακή προσέγγιση εύρεσης ακριβούς λύσης με αυτή μιας προσεγγιστικής λύσης, τότε ανοίγονται ποικιλία δυνατοτήτων για εύρεση λύσης εξισωσης

Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε την εξίσωση της μορφής: $\cos(x) = e^{-x}\sin(x)$

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στην δεξιά πλευρά και έχουμε: $f(x) = e^{-x}\sin(x) - \cos(x)$



Πότε χρειάζεται εύρεση μιας τέτοιας λύσης: όταν χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι για λύση μιας διαφορικής εξίσωσης και όταν προσπαθούμε να βελτιστοποιήσουμε μια μέθοδο, π.χ. όταν προσπαθούμε να βρούμε μέγιστο ή ελάχιστο μιας συνάρτησης *f*, οπότε $f' = 0$

Προσεγγιστικές μέθοδοι εύρεσης ριζών μιας εξίσωσης

Μέθοδος πολλαπλών προσπαθειών – Brute force

Η αναπαράσταση μιας μαθηματικής συνάρτησης σε έναν υπολογιστή παίρνει δύο μορφές. Η μία αποτελεί μια Python συνάρτηση η οποία επιστρέφει τιμές της συνάρτησης δεδομένης κάποιας τιμής του ορίσματος και η δεύτερη είναι μια συλλογή σημείων $(x, f(x))$ κατά μήκος της καμπύλης της συνάρτησης.

Η δεύτερη μορφή είναι αυτή που χρησιμοποιούμε για να κάνουμε το γράφημα της συνάρτησης υποθέτοντας γραμμική μεταβολή μεταξύ των σημείων που χρησιμοποιούνται

Η μορφή αυτή είναι επίσης κατάλληλη για επίλυση εξίσωσης αλλά και για βελτιστοποίηση:

- ακολουθούμε την καμπύλη της συνάρτησης και σε κάποιο σημείο θα περάσει τον x-άξονα
- ή για βελτιστοποίηση, χρειάζεται να βρούμε τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο.

Η μέθοδος είναι εξαιρετικά απλή αλλά χρειάζεται να εξετάσουμε ένα πολύ μεγάλο αριθμό σημείων

Θέλουμε να λύσουμε την $f(x) = 0$, να βρούμε δηλαδή τα σημεία *x* στα οποία η f περνά από τον *x*-άξονα. Η μέθοδος πολλαπλών προσπαθειών έγγυται στον έλεγχο πολλών σημείων και την εύρεση των διαδοχικών σημείων για τα οποία η τιμή της συνάρτησης είναι πάνω και κάτω από τον *x*-άξονα ή αντίστροφα. Αν ισχύει η συνθήκη αυτή τότε ξέρουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ μηδενίζεται ανάμεσα στα δύο σημεία

Μέθοδος πολλαπλών προσπαθειών – Brute force

Έχουμε ένα σύνολο από *n*+1 σημεία (x_i, y_i), όπου $y_i = f(x_i), i = 0,1,2,\cdots,n$ και $x_0 < \cdots < x_n$

Ελέγχουμε αν $y_i < 0$ και $y_{i+1} > 0$ ή το αντίστροφο ($y_i > 0$ και $y_{i+1} < 0$)

Ο περισσότερο ενδεδειγμένος έλεγχος ωστόσο είναι: $y_i * y_{i+1} < 0$

Αν ισχύει, τότε η ρίζα της $f(x) = 0$ βρίσκεται στο διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$

Θεωρώντας γραμμική μεταβολή της $f(x)$ στο διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, μπορούμε να θεωρήσουμε την προσέγγιση: $f(x) \approx \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + f(x_i) = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + y_i$

Θέτοντας $f(x) = 0$ έχουμε από την προηγούμενη εξίσωση τη λύση: $x = x_i - \dfrac{x_{i+1} - x_i}{y_{i+1} - y_i} y_i$

```
import numpy as np
x=np.linspace(0,4.,1001)
y=f(x)               # tyxaia synartisi
root = None
for i in range(len(x)-1):
    if y[i]*y[i+1]< 0 :
        root = x[i]-(x[i+1]-x[i])/(y[i+1]-y[i])*y[i]
        break      # eksw apo to loop
if root is None:
   print('No root is found in [%g,%g]'%(x[0],x[-1]))
else:
   print('The first root is x =%g'%root)
```

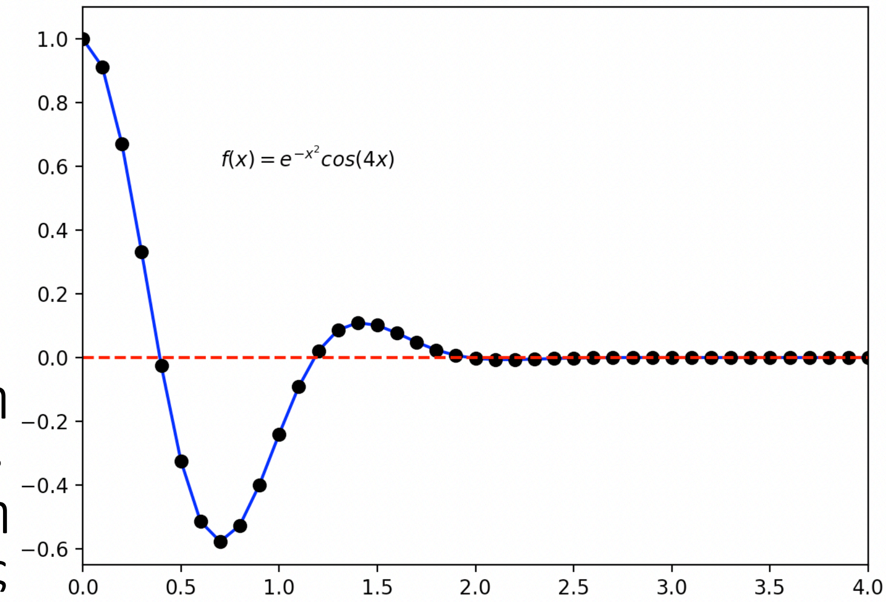
Εφαρμογή της μεθόδου

Μέθοδος πολλαπλών προσπαθειών – Brute force

Εφαρμογή: $f(x) = e^{-x^2}\cos(4x)$

Η ρίζα της εξίσωσης αυτής είναι $x = \frac{\pi}{8}$.

Το προηγούμενο πρόγραμμα επιστρέφει ως ρίζα την τιμή x =0.392701 που αντιστοιχεί σε σφάλμα 1.84×10^{-6}.



Μετατροπή του αλγόριθμου σε Python συνάρτηση για τη χρήση της σε μεγάλο αριθμό προβλημάτων. Η συνάρτηση θα πρέπει να δέχεται την συνάρτηση *f* και το διάστημα [a,b] σαν παραμέτρους εισδοχής καθώς επίσης τον αριθμό των υποδιαστημάτων *n*.

Η συνάρτηση επιστρέφει μια λίστα με τις ρίζες της εξίσωσης στο διάστημα [a,b].

```
def brute_force_root_finder(f, a, b, n):
   from numpy import linspace
   x = linspace(a, b, n)
   y = f(x)
   roots = []
   for i in range(n-1):
      if y[i]*y[i+1] < 0:
         root = x[i] - (x[i+1] - x[i])/(y[i+1] - y[i])*y[i]
         roots.append(root)
   return roots
```

Μέθοδος πολλαπλών προσπαθειών – Brute force

Εφαρμογή: $f(x) = e^{-x^2}\cos(4x)$

```
def demo():
     from numpy import exp, cos
     roots = brute_force_root_finder( lambda x: exp(-x**2)*cos(4*x), 0, 4, 1001)
     if roots:
         print(roots)
     else:
         print('Could not find any roots’)
```

Βελτιστοποίηση – Brute force method

Η χρήση της brute force μεθόδου για την εύρεση ακρότατου μιας συνάρτησης, σημαίνει ότι βρίσκουμε μέγιστο ή ελάχιστο από ένα σύνολο σημείων κατά μήκος της καμπύλης της συνάρτησης.

Ένα σημείο x_i θα αντιστοιχεί σε μέγιστο της συνάρτησης αν $y_{i-1} < y_i > y_{i+1}$.

Παρόμοια, ένα σημείο x_i θα αντιστοιχεί σε ελάχιστο της συνάρτησης αν $y_{i-1} > y_i < y_{i+1}$.

Εφαρμόζουμε τον έλεγχο αυτό για όλα τα εσωτερικά σημεία $i = 1,2,\cdots,n-1$ για την εύρεση τοπικού ελάχιστου ή τοπικού μέγιστου. Χρειαζόμαστε ένα ακραίο σημείο, $i = 0$ ή $i = n$ για να ελέγξουμε αν το x_i είναι ολικό μέγιστο ή ελάχιστο

Βελτιστοποίηση – Brute force method

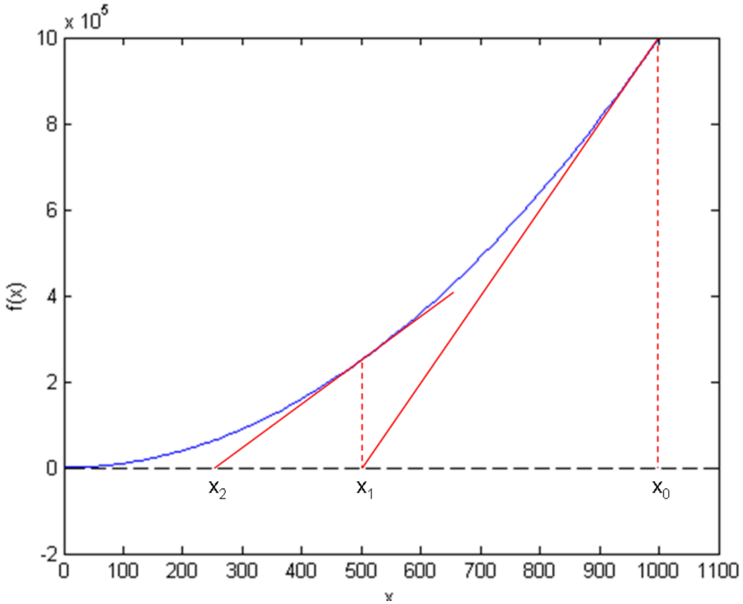
```
def brute_force_optimizer(f, a, b, n):
   from numpy import linspace
   x = linspace(a, b, n)
   y = f(x)
   minima = []
   maxima = []
   for i in range(n-1):
      if y[i-1] < y[i] > y[i+1]:
         maxima.append(i)
      if y[i-1] > y[i] < y[i+1]:
         minima.append(i)
  # What about the end points?
   y_max_inner = max([y[i] for i in maxima])
   y_min_inner = min([y[i] for i in minima])
   if y[0] > y_max_inner:
       maxima.append(0)
   if y[len(x)-1] > y_max_inner:
       maxima.append(len(x)-1)
   if y[0] < y_min_inner:
       minima.append(0)
   if y[len(x)-1] < y_min_inner:
       minima.append(len(x)-1)
   # Return x and y values
      return [(x[i], y[i]) for i in minima], \
             [(x[i], y[i]) for i in maxima]
```

Εύρεση ριζών – Newton’s Method (Newton-Raphson)

Αποτελεί την ταχύτερη μέθοδο εύρεσης λύσης μη γραμμικής εξίσωσης, ωστόσο δεν εγγυάται πάντοτε η εύρεση λύσης

Συγκλίνει πολύ γρήγορα αν η αρχική προσεγγιστική τιμή για την ρίζα είναι κοντά στην πραγματική τιμή.

Η ιδέα των προσεγγιστικών μεθόδων εύρεσης της λύσης μιας μη γραμμικής εξίσωσης στηρίζεται στη δημιουργία μιας σειράς γραμμικών εξισώσεων (τις οποίες ξέρουμε να λύσουμε) ελπίζοντας ότι οι λύσεις των ενδιάμεσων αυτών γραμμικών εξισώσεων θα μας φέρει πιο κοντά στην τελική λύση.



Έστω ότι έχουμε την εξίσωση $f(x) = x^2 - 9$, την οποία προσπαθούμε να λύσουμε στο διάστημα [0,1000] βρίσκοντας επαναληπτικά το σημείο τομής της εφαπτόμενης της καμπύλης με τον x-άξονα. Από το σημείο τομής βρίσκουμε την τιμή της συνάρτησης και την εφαπτόμενη της καμπύλης της συνάρτησης και κατόπιν και πάλι το σημείο τομής με τον x-άξονα. Η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου στο σημείο τομής x_i, $f(x_i) = 0$.

Η παραπάνω διαδικασία προϋποθέτει ότι δίνουμε μια αρχική τιμή x_0, για να μπορέσει να ξεκινήσει η ακολουθία

Η βασική ιδέα είναι να προσεγγίσουμε την αρχική συνάρτηση σαν μια ευθεία. Υπάρχουν άπειρες επιλογές για το πως να προσεγγίσουμε την $f(x)$ με μια ευθεία

Εύρεση ριζών – Newton's Method (Newton-Raphson)

Ωστόσο πως βρίσκουμε την εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης στο σημείο x_0;

Η εφαπτόμενη είναι γραμμική και έχει δύο χαρακτηριστικά:

- Η κλίση της είναι ίση με την παράγωγο της συνάρτησης, $f'(x_0)$, στο σημείο x_0
- Η εφαπτόμενη εφάπτεται της καμπύλης της συνάρτησης στο σημείο $(x_0, f(x_0))$

Η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι επομένως: $f_{\varepsilon\varphi}(x) = ax + b$

αλλά με βάση τα 2 παραπάνω χαρακτηριστικά: $\alpha = f'(x_0)$ και $f_{\varepsilon\varphi}(x_0) = f(x_0)$

Επομένως θα έχουμε:
$$f_{\varepsilon\varphi}(x) = f'(x_0)x + b$$
$$f_{\varepsilon\varphi}(x_0) = f(x_0) \Rightarrow f'(x_0)x_0 + b = f(x_0) \Rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

Για να καταλήξουμε ότι: $f_{\varepsilon\varphi}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Το σημείο κλειδί της μεθίδου Newton είναι να βρεθεί σε ποιο σημείο η εφαπτομένη τέμνει τον x-άξονα. Στο σημείο όμως αυτό, έστω x_1 θα έχουμε $f_{\varepsilon\varphi}(x_1) = 0$.

Επομένως: $0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Αν ξεκινήσουμε την εξίσωση $f(x) = x^2 - 9$ με $x_0 = 1000$, βρίσκουμε ότι $x_1 \approx 500$

Συνεχίζοντας τη διαδικασία, βρίσκουμε ότι: $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 250$

Εύρεση ριζών – Newton's Method (Newton-Raphson)

Το γενικό σχήμα της μεθόδου είναι ότι : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ όπου *n*-= 0,1, 2, …,

Η διαδικασία επαναλαμβάνετα έως ότου $f(x_n)$ είναι αρκετά κοντά στο 0.

Στην πραγματικότητα ελέγχουμε αν $|f(x_n)|$< ε όπου ε ένας πολύ μικρός αριθμός που καθορίζει την ακρίβεια της ρίζας που θα βρούμε.

Στο προηγούμενο παράδειγμα βρήκαμε ότι με δύο βήματα προσεγγίσαμε τη λύση από 1000 σε 250. Είναι επομένως ενδιαφέρον να δούμε πόσο γρήγορα θα βρούμε τη λύση x=3

Αρχικά γράφουμε ένα απλό πρόγραμμα που εφαρμόζει την μέθοδο Newton-Raphson

```
def naive_Newton(f, dfdx, x, eps):
     while abs(f(x)) > eps:
          x = x - f(x)/dfdx(x)
     return x
```

```
def f(x):
    return x*x - 9
def dfdx(x):
    return 2*x
print(naive_Newton(f,dfdx, 1000, 0.001))
```

`f, dfdx` είναι η συνάρτηση και η παράγωγος της συνάρτησης

Το όρισμα `x` είναι η αρχική τιμή x_0 που αναφέραμε προηγουμένως

`eps` είναι το ε για τερματισμό της διαδικασίας

Εύρεση ριζών – Newton's Method (Newton-Raphson)

Μειονέκτημα --> Πρέπει να υπολογισθεί η παράγωγος $f'(x)$ της μη γραμμικής συνάρτησης

Η μέθοδος στηρίζεται στην χρησιμοποίηση των παραγώγων $f'(x)$ της συνάρτησης $f(x)$ για ταχύτερη σύγκλιση στην εύρεση των ριζών της $f(x) = 0$

Η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί αν έχουμε μια συνεχή παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$, που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο, και μπορεί να αναπτυχθεί κατά Taylor ως προς ένα σημείο x_n που είναι κοντά στη ρίζα.

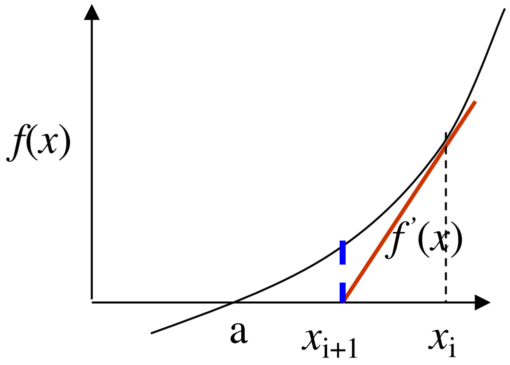
Έστω ότι η πραγματική ρίζα αυτή είναι x_{n+1}:

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) + (x_{n+1} - x_n)^2 \frac{f''(x_n)}{2!} + (x_{n+1} - x_n)^3 \frac{f'''(x_n)}{3!} + \cdots$$

Εφόσον $x = x_{n+1}$ είναι ρίζα της $f(x)$, τότε $f(x_{n+1}) = 0$, οπότε κρατώντας τους 2 πρώτους όρους του αναπτύγματος θα έχουμε (προσέγγιση της συνάρτησης γραμμικά):

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) \quad \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Σφάλμα της μεθόδου Newton-Raphson



Αν α είναι η πραγματική ρίζα τότε το σφάλμα της μεθόδου είναι:

$$x_{k+1} - \alpha = x_k - \alpha - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad \textbf{(A)}$$

Χρησιμοποιώντας τους 3 πρώτους όρους από Taylor:

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n) + (x_{n+1} - x_n)^2 \frac{f''(x_n)}{2!}$$

$$0 = f(a) = f(x_k) + (a - x_k)f'(x_k) + (a - x_k)^2 \frac{f''(x_k)}{2!}$$

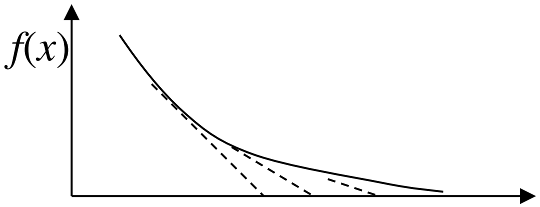
$$\Rightarrow f(x_k) = -(a - x_k)f'(x_k) - (a - x_k)^2 \frac{f''(x_k)}{2!} \Rightarrow f(x_k) = -\varepsilon_k f'(x_k) - \varepsilon_\kappa^2 \frac{f''(x_k)}{2!}$$

Αντικαθιστούμε την τελευταία στην (A):

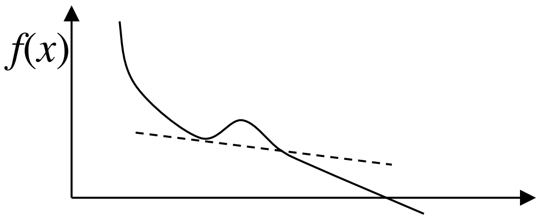
Ρυθμός σύγκλισης

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + \frac{\varepsilon_k f'(x_k) - \varepsilon_\kappa^2 \frac{f''(x_k)}{2!}}{f'(x_k)} \Rightarrow \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - \varepsilon_k - \varepsilon_\kappa^2 \frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)} \Rightarrow \varepsilon_{k+1} = -\varepsilon_\kappa^2 \frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)}$$

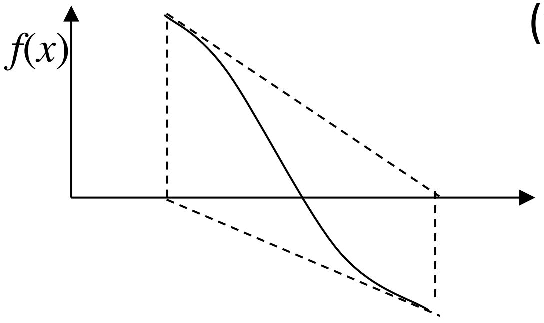
Προβλήματα της μεθόδου Newton-Rapshon



(α) Αργή σύγκλιση προς τη ρίζα όταν $f'(x) \sim 0$ κοντά στη ρίζα



(β) Τοπικό ακρότατο στέλνει μακριά την τιμή x_{k+1} που χρησιμοποιείται στην επόμενη επανάληψη



(γ) έλλειψη σύγκλισης για ασύμμετρες συναρτήσεις

$$f(x+a) = -f(x-a)$$

Βελτιστοποίηση της μεθόδου Newton

Θα πρέπει να βελτιώσουμε το πρόγραμμα εύρεσης της λύσης εξίσωσης με την μέθοδο Newton ώστε να αποφύγουμε:

- Διαίρεση με 0 στον υπολογισμό της παραγώγου της συνάρτησης
- Καθορισμό όριου στον αριθμό των επαναλήψεων για αποφυγή μη σύγκλισης
- Αποφυγή αχρείαστων υπολογισμών της συνάρτησης

```
def Newton(f, dfdx, x, eps):
   f_value = f(x)
   iteration_counter = 0
   while abs(f_value) > eps and iteration_counter < 100:
      try:
         x = x - f_value/dfdx(x)
      except:
         print("Error! - derivative zero for x = ", x)
         exit(1)       # Abort with error
      f_value = f(x)
      iteration_counter += 1
   #Here, either a solution is found, or too many iterations
   if abs(f_value) > eps:
      iteration_counter = -1
   return x, iteration_counter
```

Ολοκλήρωση του προγράμματος για τη μέθοδο Newton

```
def f(x):
   return x**2 - 9
def dfdx(x):
   return 2*x

solution, no_iterations = Newton(f, dfdx, x=1000, eps=1.0e-6)
if no_iterations > 0: # Solution found
   print("Number of function calls: %d" % (1 + 2*no_iterations))
   print("A solution is: %f" % (solution))
else:
   print "Solution not found!"
```

Μέθοδος Newton - Raphson

Όπως έχουμε δει, η μέθοδος Newton απαιτεί τον υπολογισμό της παραγώγου της συνάρτησης, κάτι που δεν είναι πάντοτε εύκολο.

Θα μπορούσαμε όμως να συνδυάσουμε τη μέθοδο Newton με το πακέτο συμβολικών υπολογισμών, sumpy, το οποίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε την συνάρτηση *dfdx* που χρησιμοποιείται στην μέθοδο Newton-Raphson.

```
from sympy import *
x = Symbol('x')            # orismos toy x ws mathematikou symbol
f_expr = x**2 - 9           # symbolic ekfrasi gia f(x)
dfdx_expr = diff(f_expr, x) # ypologismos tis f'(x) symbolically
# Metatropi f_expr kai dfdx_expr se Python functions
f = lambdify(x, f_expr)     # x einai to orisma stin f
# symbolic ekfrasi gia ypologismo
dfdx = lambdify(x, dfdx_expr)
print(dfdx(5)) # will print 10
```

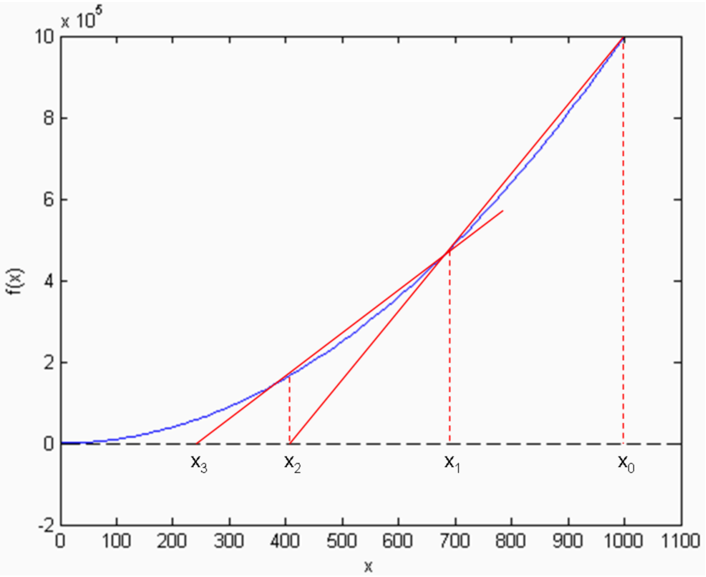
Η δομή lambdify χρησιμοποιείται για την μετατροπή μιας έκφρασης με σύμβολα, όπως είναι η dfdx_expr, σε κανονική συνάρτηση της Python με x ως όρισμα.

Για περισσότερα από 1 όρισμα στην symbolic έκφραση, θα πρέπει να τα περάσουμε ως λίστα [x,y,z]. Το ίδιο θα μπορούσαμε να κάνουμε και για 1 μόνο όρισμα και να το περάσουμε ως [x] και στην παραπάνω περίπτωση θα είχαμε: f=lambdify([x],f_expr)

Μέθοδος της Χορδής – Secant method

Όταν η εύρεση της παραγώγου της συνάρτησης είναι προβληματική ή ο υπολογισμός της συνάρτησης απαιτεί αρκετά βήματα και είναι χρονοβόρος, χρησιμοποιούμε μια παραλλαγή της μεθόδου του Newton – **την μέθοδο Secant**.

Αντί να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης χρησιμοποιούμε εξισώσεις χορδών, ευθυγράμμων τμημάτων που ενώνουν δύο σημεία της καμπύλης της συνάρτησης.



Η ιδέα είναι ίδια με αυτή της μεθόδου Newton, αλλά στην προκειμένη περίπτωση προσεγγίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης σαν πεπερασμένη διαφορά μεταξύ δύο σημείων, ουσιαστικά μια χορδή.

Επομένως προσεγγίζουμε την παράγωγο με την κλίση της ευθείας που περνά από τα δύο πιο πρόσφατα σημεία της προσέγγισης της λύσης x_n και x_{n-1}.

Η κλίση θα είναι: $$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Εισάγουμε στη θέση της παραγώγου στη μέθοδο Newton, την παραπάνω προσέγγιση:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Η μέθοδος χρειάζεται δύο αρχικά σημεία x_0 και x_1

Η μέθοδος Secant

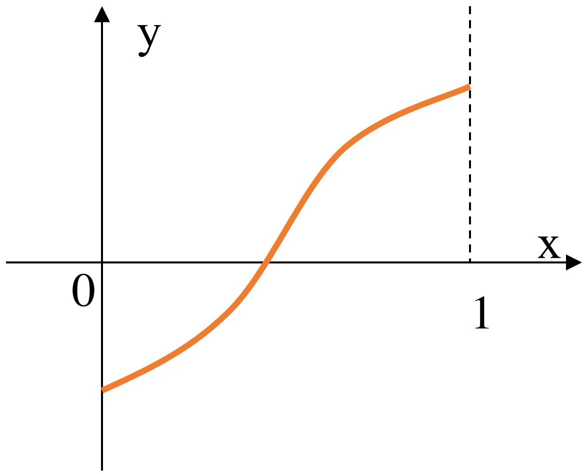
```
def secant(f, x0, x1, eps):
    f_x0 = f(x0)
    f_x1 = f(x1)
    iteration_counter = 0
    while abs(f_x1) > eps and iteration_counter < 100:
        try:
            denominator =(f_x1 - f_x0)/(x1 - x0)
            x = x1 - (f_x1)/denominator
        except:
            print("Error! - denominator zero for x = ", x)
            exit(1) # Abort with error
        x0 = x1
        x1 = x
        f_x0 = f_x1
        f_x1 = f(x1)
        iteration_counter += 1
    # Here, either a solution is found, or too many iterations
    if abs(f_x1) > eps:
        iteration_counter = -1
    return x, iteration_counter
def f(x):
    return x**2 - 9
x0 = 1000; x1 = x0 - 1
solution, no_iterations = secant(f, x0, x1, eps=1.0e-6)
if no_iterations > 0: # Solution found
    print("Number of function calls: %d" % (2 + no_iterations))
    print("A solution is: %f" % (solution))
else:
    print("Solution not found!”)
```

Εύρεση ριζών – Bisection Method

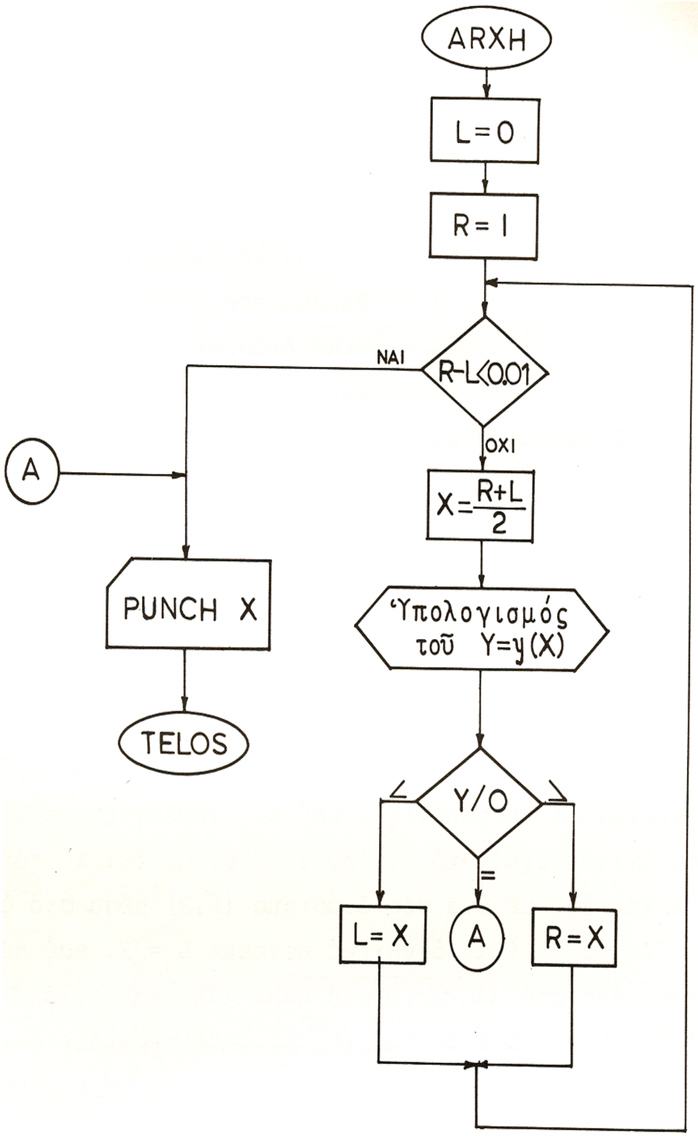
Η γραφική παράσταση του παρακάτω σχήματος μιας μονότονης συναρτήσεως f(x) κόβει τον άξονα των x σε ένα σημείο μεταξύ x=0 και x=1.
Η αναλυτική εξάρτηση του y από το x δεν είναι γνωστή.

Για κάθε x όμως στο διάστημα $0 \leq x \leq 1$ μπορούμε να βρούμε με τον Η/Υ το αντίστοιχο y με ένα δεδομένο πρόγραμμα.

Θέλουμε το πρόγραμμα που να βρίσκει τη ρίζα x_0 της εξίσωσης f(x) = 0 με ακρίβεια 0.01.



Εύρεση ριζών – Bisection Method



Στην αρχή ορίζουμε 2 αριθμούς L=0 και R=1 (όρια)
Οι L και R θα αλλάξουν πολλές τιμές αλλά πάντα

$$L \leq x_0 \leq R$$

Ρωτάμε αν η διαφορά R-L ≤ 0.01 (προσέγγιση)
Την πρώτη φορά η διαφορά είναι 1.

Προχωρούμε προς τα κάτω και ορίζουμε σα x το μέσο του διαστήματος μεταξύ των σημείων με τετμημένες L και R.

Υπολογίζουμε το y (με το Η/Υ) που αντιστοιχεί στο x.

Αν το y > 0, θέτουμε R=x και έχουμε ένα νέο διάστημα (L,R) μέσα στο οποίο είναι το x_0.

Αν το y < 0 θέτουμε L=x. Πάλι x_0 είναι στο διάστημα (L,R). Ρωτάμε R-L < 0.01?

Έτσι υποδιπλασιάζουμε το διάστημα (L,R) συνεχώς έως R-L<0.01 οπότε και κρατάμε την τελευταία τιμή του x για τον οποίο y=0.

Bisection program

```
def bisection(f, x_L, x_R, eps, return_x_list=False):
    f_L = f(x_L)
    if f_L*f(x_R) > 0:
       print("Error! Function does not have opposite \
              signs at interval endpoints!")
       exit(1)
    x_M =(x_L + x_R)/2.0
    f_M = f(x_M)
    iteration_counter = 1
    if return_x_list:
      x_list = []
    while abs(f_M) > eps:
      if f_L*f_M > 0: # i.e. same sign
         x_L = x_M
         f_L = f_M
      else:
         x_R = x_M
      x_M = (x_L + x_R)/2
      f_M = f(x_M)
      iteration_counter += 1
      if return_x_list:
        x_list.append(x_M)
    if return_x_list:
      return x_list, iteration_counter
    else:
      return x_M, iteration_counter
def f(x):
   return x**2 - 9
a = 0; b = 1000
solution, no_iterations = bisection(f, a, b, eps=1.0e-6)
print("Number of function calls: %d" % (2 + no_iterations))
print("A solution is: %f" % (solution))
```

Bisection Method – Σύγκλιση της μεθόδου

Αν το αρχικό διάστημα είναι ε_i το σφάλμα θα είναι $\varepsilon_i/2$.
Μετά από κάθε επανάληψη το αρχικό σφάλμα διαιρείται με 2 οπότε
μετά από N επαναλήψεις το σφάλμα είναι $\varepsilon_f = \varepsilon_i/2^N$ όπου ε_f η επιθυμητή ακρίβεια
Επομένως ο αριθμός των βημάτων για την επίτευξη της επιθυμητής ακρίβειας είναι

$$N = \log\left(\varepsilon_i / \varepsilon_f\right) / \log(2)$$