ΦΥΣ. 211
Τελική Εξέταση 20-Μάη-2016

Πριν ξεκινήσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, αριθμό ταυτότητας) στο πάνω μέρος της σελίδας αυτής.

Για τις λύσεις των ασκήσεων θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε μόνο τις σελίδες που δίνονται και <u>μην κόψετε καμιά από τις σελίδες</u>.

Προσπαθήστε να δείξετε τη σκέψη σας και να γράψετε καθαρές εξισώσεις. Για πλήρη ή μερική βαθμολόγηση θα πρέπει να φαίνεται καθαρά αυτό που προσπαθείτε να δείξετε. Αν δεν μπορώ να διαβάσω τι γράφετε αυτόματα θα υποθέσω ότι είναι λάθος.

Απαντήστε σε 7 από τις 8 ασκήσεις που σας δίνονται με σύνολο 70 μονάδων. Θα μετρήσουν οι 7 ασκήσεις που σας δίνουν τη μεγαλύτερη συνολική βαθμολογία.

Η σειρά των ασκήσεων δεν είναι αντιπροσωπευτική της δυσκολίας τους. Πριν ξεκινήσετε διαβάστε όλες τις ασκήσεις και σκεφτείτε τι χρειάζεται να κάνετε.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 4 ώρες.

Καλή επιτυχία και καλό καλοκαίρι.

Τυπολόγιο

Διανύσματα:

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix},\qquad \vec{A}\times\vec{A}=0,\qquad \vec{A}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=0,$$

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\mathrm{C},\qquad \vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$$

Ανάπτυγμα Taylor συνάρτησης ως προς σημείο α:

$$f(z)=f(a)+(z-a)f'(a)+\frac{1}{2!}(z-a)^2f''(a)+\frac{1}{3!}(z-a)^3f'''(a)+\cdots$$

Σειρά διωνύμου:

$$(1+z)^n=1+nz+\frac{n(n-1)}{2!}z^2+\cdots \text{ για } |z|<1$$

Στροφορμή:

$$\vec{L}=\sum_i^n\vec{L}_i=\sum_i^n\vec{r}_i\times\vec{p}_i=I\vec{\omega}$$

$$\vec{L}=\vec{L}_{CM}+\vec{L}_{\omega\varsigma,CM}\qquad \frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_i^n\left[\vec{r}_i\times\vec{F}_i^{\varepsilon\xi}\right]$$

Κέντρο μάζας:

$$R_{CM}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}m_i\vec{r}_i,\ M=\sum_{i=1}m_i \text{ ή } R_{CM}=\frac{1}{M}\int\vec{r}\,dm$$

Τανυστής αδράνειας

$$I_{ij}=\sum_{a=1}^N m_a\left(\vec{r}_a^{\,2}\delta_{ij}-r_i^a r_j^a\right)\ \text{ ή }\ I_{ij}=\int d^3\vec{r}\rho\left(\vec{r}\right)\left\{\vec{r}^{\,2}\delta_{ij}-\left(\vec{r}\cdot\vec{e}_i\right)\left(\vec{r}\cdot\vec{e}_j\right)\right\}\ \text{ και }\ I_{ij}^{\vec{c}}=I_{ij}^{CM}+M\left(\vec{c}^{\,2}\delta_{ij}-c_ic_j\right)$$

Συνθήκες για μια δύναμη να είναι συντηρητική:

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}U(r)\ \text{ και }\ \vec{\nabla}\times\vec{F}=0\quad \text{όπου}\quad \vec{\nabla}=\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Euler-Lagrange εξισώσεις:

$$S=\int_{x_1}^{x_2}f\left[y(x),y'(x),x\right]dx \text{ είναι στάσιμο κατά μήκος της } y=y(x) \text{ αν } \frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$$

Lagrangian:

$$\mathcal{L}=\mathrm{T}-V$$

Αρχή Hamilton:

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}dt$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\mathcal{L}=\frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2\right)-U(\rho\phi z)$$

Σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\mathcal{L}=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)-U(r\theta\phi)$$

Εξισώσεις Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}=0$$

Εξισώσεις Lagrange με πολλαπλασιαστές:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}=\sum_{k=1}^m\lambda_k(t)\frac{\partial f_k}{\partial q_i}\ \left(i=1,2,3,\ldots s\right)$$

Γενικευμένη ορμή:

$$p_i=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$$

Αγνοήσιμη ή κυκλική συντεταγμένη:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}=0$$

Hamiltonian:

$$\mathcal{H}\left(q_i,p_i,t\right)=\sum_i p_i\dot{q}_i-\mathcal{L}\left(q_i,\dot{q}_i,t\right)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}$$

Εξισώσεις Hamilton:

$$\dot{q}_i=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}\qquad [i=1,\cdots,n]$$

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}\quad [i=1,\cdots,n]$$

Ανηγμένη μάζα:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Ενεργό δυναμικό:

$$U_{eff}(r) = U(r) + U_{cf}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

Μετασχηματισμένη ακτινική Δ.Ε. τροχιάς:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u + \frac{\mu}{l^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) = 0, \text{ όπου } u = \frac{1}{r}$$

Ενέργεια τροχιάς:

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)$$

Τροχιές Kepler:

$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{\gamma}{r^2}$ λύση ακτινικής εξίσωσης είναι: $r(\phi) = \frac{c}{1 + e\cos\phi}$, με $c = \frac{l^2}{\gamma\mu}$

Εκκεντρότητα (*e*): $E = \frac{\gamma^2 \mu}{2l^2}\left(e^2 - 1\right)$ όπου E = Ενέργεια

Εκκεντρότητα	Ενέργεια	Είδος Τροχιάς
$e = 0$	E < 0	κυκλική
$0 < e < 1$	E < 0	ελλειπτική
$e = 1$	E = 0	παραβολική
$e > 1$	E > 0	υπερβολική

Περιήλιο: $r_{\min} = \frac{c}{1+e}$ Αφήλιο: $r_{\max} = \frac{c}{1-e}$ Μεγάλος ημιάξ.: $a = \frac{c}{1-e^2}$ Μικρός ημιάξ.: $b = \frac{c}{\sqrt{1-e^2}}$

Νόμοι Kepler:

1ος νόμος: τροχιές πλανητών είναι ελλείψεις με τον ήλιο σε μια από τις εστίες της έλλειψης

2ος νόμος: $\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu}$ 3ος νόμος: $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_H} a^3$

Συζευγμένοι ταλαντωτές:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} M_{jk}\dot{q}_j \dot{q}_k \quad M_{jk} = \sum_a m_a \sum \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_j}\frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_k} \qquad U = \frac{1}{2}\sum_{j,k} V_{jk} q_j q_k \quad V_{jk} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}$$

$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{V}\mathbf{q}$ $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ ιδιοσυχνότητες: $\det(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$ ιδιοδιανύσματα: $\sum_j \left(V_{jk} - \omega_r^2 M_{jk}\right) a_{jr} = 0$

$q_j(t) = \sum_r a_{jr}\eta_r(t)$ Κανονικές συντεταγμένες: $\eta_r(t) = \beta_r e^{i\omega_r t}$

Ορθοκανονικότητα: $\sum_{j,k} M_{jk} a_{jr} a_{kr} = \delta_{rs} = \begin{cases} 0 & r \neq s \\ 1 & r = s \end{cases}$

Ταλαντώσεις:

$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ με λύσεις: $\omega^2 < 0$ $q(t) = A\cos(\omega t) + B\cos(\omega t)$ ή αν $\omega^2 > 0$ $q(t) = Ae^{+|\omega|t} + Be^{-|\omega|t}$

$\ddot{q} + \frac{\omega}{Q}\dot{q} + \omega^2 q = 0$ με λύσεις: $q(t) = Ae^{-|a_+|t} + Be^{+|a_-|t}$ όπου $a = a_\pm = \frac{i\omega}{2Q} \pm \sqrt{\omega^2\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)}$ και $Q < 1/2$

$q(t) = Ae^{-\frac{\omega t}{2Q}} e^{i\omega\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t}$ με $Q > 1/2$ και $q(t) = Ae^{-\omega t} + Bte^{-\omega t}$ για $Q = 1/2$

$\ddot{q} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{q} + \omega_0^2 q = F\cos\omega t$ $q(t) = Ae^{i\delta t}e^{i\omega t} + q_{ομογ}$ $\tan\delta = -\frac{\omega\omega_0}{Q\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$ $A = \frac{F_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega}{\omega_0^2 Q^2}}}$

Περιστρεφόμενα συστήματα

$\vec{a} = \vec{a}_{σωμ.} + 2\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_{σωμ} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$ $\dot{\vec{r}}_{αδρ.} = d\vec{r}/dt = \sum_i \left(\dot{r}_i^{σωμ} + r_i\vec{\omega}\times\right)\vec{e}_i = \dot{\vec{r}}_{σωμ} + \vec{\omega}\times\vec{r}$

Εξισώσεις Euler:

$$I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3\left(I_3 - I_2\right) = \tau_1$$
$$I_2\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\left(I_1 - I_3\right) = \tau_2$$
$$I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2\left(I_2 - I_1\right) = \tau_3$$

Συμμετρική σβούρα:

Συχνότητα μετάπτωσης (χωρίς εξωτερική δύναμη): $\Omega = \omega_3 \dfrac{I_1 - I_3}{I_1}$

Μετάπτωση χωρίς κλόνηση (βαριά σβούρα): $I_3^2\omega_3^2 > 4MglI_1\cos\theta_0$

Γωνιακή ταχύτητα: $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$

Τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\sec(a) = 1/\cos(a)$$
$$\csc(a) = 1/\sin(a)$$
$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$$
$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Ροπές αδράνειας σωμάτων:

Ράβδου ως προς το CM: $\dfrac{1}{12}ml^2$

Δίσκου ως προς το CM: $\dfrac{1}{2}mR^2$ *και ως προς διάμετρο του δίσκου:* $\dfrac{1}{4}mR^2$

Στεφανιού: mR^2

Μεγέθη σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων:

Καρτεσιανό	*Σφαιρικό*	*Κυλινδρικό*
$d\vec{s} = dx_1\hat{e}_1 + dx_2\hat{e}_2 + dx_3\hat{e}_3$	$d\vec{s} = dr\hat{e}_r + rd\theta\hat{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\hat{e}_\varphi$	$d\vec{s} = dr\hat{e}_r + rd\varphi\hat{e}_\varphi + dz\hat{e}_z$
$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$	$ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$	$ds^2 = dr^2 + r^2d\varphi^2 + dz^2$
$\upsilon^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2$	$\upsilon^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2$	$\upsilon^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$
$\vec{\upsilon} = \dot{x}_1\hat{e}_1 + \dot{x}_2\hat{e}_2 + \dot{x}_3\hat{e}_3$	$\vec{\upsilon} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$	$\vec{\upsilon} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \dot{z}\hat{e}_z$

1. **(10μ συνολικά)**
Θεωρήστε ένα φορτισμένο σωματίδιο σε ένα ηλεκτρικό πεδίο. Η Lagrangian μπορεί να γραφεί με την μορφή: $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + QE_0 x$, όπου Q είναι το φορτίο του σωματιδίου και E_0 η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.

(α) Ποια η Hamiltonian του συστήματος; [**3μ**]

(β) Ποιες οι εξισώσεις Hamilton; [**2μ**]

(γ) Το σώμα ξεκινά από την θέση $x = 0$ τη χρονική στιγμή $t = 0$. Σχεδιάστε τη μετέπειτα διαδρομή του σωματιδίου στο φασικό χώρο. [**5μ**]

(α) Παρατηρούμε ότι $p_x = m\dot{x}$ και επομένως $H = p_x \dot{x} - L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - QE_0 x \Rightarrow$

$$\Rightarrow H = \frac{p^2}{2m} - QE_0 x$$

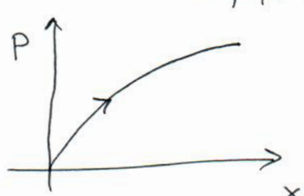
(β) Οι εξισώσεις Hamilton είναι: $\frac{\partial H}{\partial x} = -QE_0 = -\dot{p}$ και $\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} = \dot{x}$

(γ) Έχουμε ότι

$$\left.\begin{aligned} &\dot{p} = QE_0 \Rightarrow dp = QE_0\, dt \Rightarrow p = QE_0 t \\ &\dot{x} = \frac{p}{m} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} \Rightarrow dx = \frac{p}{m} dt \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\frac{QE_0}{m}t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\frac{Q^2E_0^2t^2}{QE_0 m} \Rightarrow x \propto p^2$$

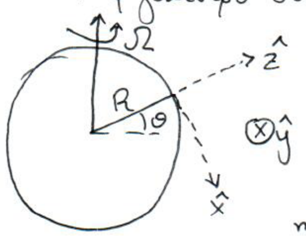
Επομένως η διαδρομή στο φασικό χώρο θα είναι:



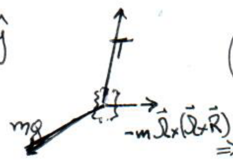
2. (**10μ συνολικά**)

Μια αράχνη κρέμεται μέσω μιας λεπτής κλωστής του ιστού της από το κλαδί ενός δέντρου στην Πανεπιστημιούπολη στην Αγλαντζιά. Βρείτε το προσανατολισμό και τιμή της γωνίας που σχηματίζει η κλωστή με την κατακόρυφο διεύθυνση (π.χ. τη διεύθυνση της βαρύτητας) λαμβάνοντας υπόψη την περιστροφή της Γης. Θεωρήστε ότι το γεωγραφικό πλάτος στο οποίο βρίσκεται η Πανεπιστημιούπολη είναι $\theta \sim 35^o$ και η ακτίνα της Γης είναι $R \sim 6400$km.

Η αράχνη είναι ακίνητη και επομένως η απόκλιση της κλωστής του ιστού της προκαλείται από την φυγόκεντρο δύναμη και όχι τη δύναμη Coriolis.

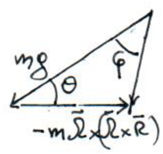


Η δύναμη που ασκεί η κλωστή του ιστού στην αράχνη είναι:



$$\left(\vec T + m\vec g\right) = \vec F_{\alpha\delta\rho} = m\vec\Omega\times\left(\vec\Omega\times\vec R\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec T + m\vec g = m\vec\Omega\times\left(\vec\Omega\times\vec R\right) \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \vec T = -m\vec g + m\vec\Omega\times\left(\vec\Omega\times\vec R\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec T = mg\,\hat z + m\vec\Omega\times\left(\vec\Omega\times\vec R\right)} \quad (1)$$

Η γωνιακή ταχύτητα Ω της γης αναλυόμενη στο σύστημα συντεταγμένων της αράχνης θα είναι: $\vec\Omega = \left(-\Omega\cos\theta, 0, \Omega\sin\theta\right) = \Omega\left(-\hat x\cos\theta + \hat z\sin\theta\right)$

Οπότε $\vec\Omega\times\vec R = \begin{vmatrix} \hat x & \hat y & \hat z \\ -\Omega\cos\theta & 0 & \Omega\sin\theta \\ 0 & 0 & R \end{vmatrix} = R\Omega\cos\theta\,\hat y$

$$\vec\Omega\times\left(\vec\Omega\times\vec R\right) = \begin{vmatrix} \hat x & \hat y & \hat z \\ -\Omega\cos\theta & 0 & \Omega\sin\theta \\ 0 & R\Omega\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \Omega^2 R\cos\theta\left(-\sin\theta\,\hat x - \cos\theta\,\hat z\right)$$

Αντικατάσταση στην (1) δίνει: $\vec T = mg\,\hat z - \Omega^2 mR\cos^2\theta\,\hat z - m\Omega^2 R\cos\theta\sin\theta\,\hat x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec T = m\left(g - \Omega^2 R\cos^2\theta\right)\hat z - m\Omega^2 R\cos\theta\sin\theta\,\hat x$$

Η γωνία επομένως θα είναι: $\tan\varphi = \dfrac{T_x}{T_z} = \dfrac{\cancel{m}\Omega^2 R\cos\theta\sin\theta}{\cancel{m}\left(g - \Omega^2 R\cos^2\theta\right)} = \dfrac{\cancel{\Omega^2 R}\cos\theta\sin\theta}{\cancel{\Omega^2 R}\left(\frac{g}{\Omega^2 R} - \cos^2\theta\right)}$

$\Omega = 2\pi\dfrac{1}{24\times60\times60} = \dfrac{2\pi}{24\cdot3600} \Rightarrow \Omega \simeq 7.3\times10^{-5}$ rad/s

$\theta \simeq 35^o \Rightarrow \cos\theta = 0.8192, \ \sin\theta = 0.5736$

$$\Rightarrow \tan\varphi = \frac{0.4698}{\left(\frac{9.81}{(7.3\cdot10^{-5})^2\,6.4\cdot10^{6}} - 0.671\right)} = 1.6\cdot10^{-3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = 1.6\text{ mrad}}$$

3. (**10π συνολικά**)

Θεωρήστε ένα ορειβάτη ο οποίος θέλει να αναρριχηθεί σε μια πλαγιά κωνικού σχήματος που περιγράφεται από την εξίσωση $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$. Δυστυχώς η μετερεωλογική εταιρεία προβλέπει την ύπαρξη καταιγίδας και θα πρέπει ο ορειβάτης να βρει γρήγορα το καταφύγιο πριν πληγεί από την καταιγίδα. Να βρεθεί η ακριβής εξίσωση της συντομότερης διαδρομής στο καταφύγιο που βρίσκεται στην θέση με συντεταγμένες (-1,0,-1) αν την στιγμή που πήρε την ειδοποίηση για την καταιγίδα βρίσκονταν στην θέση με συντεταγμένες (1,0,-1).

<u>Υπόδειξη</u>: Πιθανόν να σας φανεί χρήσιμο να αντικαταστήσετε την συντεταγμένη, w, ως προς την οποία βρίσκετε την διαφορική εξίσωση, με μια νέα μεταβλητή $u = 1/w$, και να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικές ταυτότητες για να απλουστεύσετε την απάντησή σας.

Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες, οπότε το στοιχειώδες μήκος δίνεται από τη σχέση: $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2}$

Αλλά σύμφωνα με την εξίσωση της πλαγιάς: $z = -\sqrt{x^2+y^2} = -r$ $\Rightarrow ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\phi^2 + dr^2} \Rightarrow ds = \sqrt{2dr^2 + r^2 d\phi^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow ds = d\phi \sqrt{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2} \Rightarrow ds = d\phi\sqrt{r^2 + 2r'^2} \quad \text{όπου } r' = \frac{dr}{d\phi}$$

Θέλουμε να βρούμε την πιο σύντομη διαδρομή, επομένως θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησιακό:

$$I[r(\phi)] = \int \sqrt{2r'^2 + r^2}\, d\phi = \int d\phi\, F(r, r', \phi)$$

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση Euler: $\dfrac{d}{d\phi}\dfrac{\partial F}{\partial r'} = \dfrac{\partial F}{\partial r}$ όπου $F(r,r',\phi) = \sqrt{2r'^2 + r^2}$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\phi}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}\cdot 2r'}{(2r'^2+r^2)^{1/2}}\right) = -\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}r}{(2r'^2+r^2)^{1/2}} \Rightarrow -\frac{2r''}{(2r'^2+r^2)^{1/2}} + \frac{2r'(2r'^2+r^2)'}{2(2r'^2+r^2)^{3/2}} = -\frac{r}{(2r'^2+r^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{2r''}{(2r'^2+r^2)^{1/2}} - \frac{2r'(\cancel{4}^{2}r'r'' + \cancel{2}rr')}{\cancel{2}(2r'^2+r^2)^{3/2}} = \frac{r}{(2r'^2+r^2)^{1/2}} \Rightarrow \frac{2r''}{(2r'^2+r^2)^{1/2}} - \frac{2r'(rr' + 2r'r'')}{(2r'^2+r^2)^{3/2}} = \frac{r}{(2r'^2+r^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow 2r''(2r'^2+r^2) - 2r'(rr' + 2r'r'') - r(2r'^2+r^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4r'^2r'' + 2r^2r'' - 2r'^2r - 4r'^2r'' - 2rr'^2 - r^3 = 0 \Rightarrow 2r^{2}r'' - 4rr'^2 - r^3 = 0$$

$$\Rightarrow 2rr'' - 4r'^2 - r^2 = 0 \Rightarrow \boxed{r^2 + 4r'^2 - 2rr'' = 0}$$

Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή $r=\frac{1}{u} \Rightarrow r' = -\frac{u'}{u^2} \Rightarrow r'' = -\frac{u''}{u^2} + \frac{2u'^2}{u^3}$

Με βάση τα παραπάνω, η διαφορική εξίσωση θα πάρει τη μορφή:

$$r^2 + 4r'^2 - 2rr'' = 0 \Rightarrow \frac{1}{u^2} + \cancel{4\frac{u'^2}{u^4}} + \frac{2u''}{u^3} - \cancel{\frac{4u'^2}{u^4}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{u^2}+\frac{2u''}{u^3}=0 \Rightarrow 2u''=-u \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{u'' = -\frac{1}{2}u}$ Επομένως οι λύσεις θα είναι της μορφής:

$$\boxed{u(\phi) = A\cos\omega_0\phi + B\sin\omega_0\phi} \quad \text{όπου } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt2}$$

Με τη βοήθεια των συνοριακών συνθηκών (αρχική και τελική θέση) μπορούμε να υπολογίσουμε τις σταθερές A και B.

Έχουμε ότι η αρχική θέση είναι $(1,0,-1)$ επομένως σε κυλινδρικές συντεταγμένες θα έχουμε: $(r_0,\phi_0,z_0)=(1,0,-1)$ όπου $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=1$ και $\cos\phi_0 = \frac{x_0}{r_0}=1 \Rightarrow \phi_0=0$

Για τη τελική θέση έχουμε $(-1,0,-1)$ οπότε $(r_f,\phi_f,z_f)=(1,\pi,-1)$ όπου $r_f=\sqrt{x_f^2+y_f^2}=1$ και $\cos\phi_f=\frac{x_f}{r_f}=\frac{-1}{1}=-1\Rightarrow\phi_f=\pi$.

Από την λύση για $r_0(\phi_0)=r_0(\phi_0=0)=A\cancelto{1}{\cos\frac{1}{\sqrt2}\phi} + B\cancelto{0}{\sin\frac{1}{\sqrt2}\phi} \Rightarrow \boxed{A=r_0=1}$

Για την τελική θέση: $r_f(\phi=\phi_f)=\cos\frac{\pi}{\sqrt2}+B\sin\frac{\pi}{\sqrt2}=1\Rightarrow \boxed{B=\frac{1-\cos\pi/\sqrt2}{\sin\frac{\pi}{\sqrt2}}}$

Αντικαθιστούμε τα A και B στην εξίσωση $u(\phi)$ οπότε:

$$u(\phi)=\cos\frac{\phi}{\sqrt2}+\frac{1-\cos\frac{\pi}{\sqrt2}}{\sin\frac{\pi}{\sqrt2}}\sin\frac{\phi}{\sqrt2} = \left[\cos\frac{\phi}{\sqrt2}\sin\frac{\pi}{\sqrt2} - \cos\frac{\pi}{\sqrt2}\sin\frac{\phi}{\sqrt2}+\sin\phi/\sqrt2\right]/\sin\frac{\pi}{\sqrt2}=$$

$$=\left[\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt2}-\frac{\phi}{\sqrt2}\right)+\sin\frac{\phi}{\sqrt2}\right]/\sin\frac{\pi}{\sqrt2} = \left[2\sin\frac{\left(\frac{\pi}{\sqrt2}-\cancel{\frac{\phi}{\sqrt2}}\right)+\cancel{\frac{\phi}{\sqrt2}}}{2}\cos\frac{\left(\frac{\pi}{\sqrt2}-\frac{\phi}{\sqrt2}\right)-\frac{\phi}{\sqrt2}}{2}\right]/\sin\frac{\pi}{\sqrt2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(\phi)=\left[2\sin\frac{\pi}{2\sqrt2}\cdot\cos\frac{\pi-2\phi}{2\sqrt2}\right]/\sin\frac{\pi}{\sqrt2} = \left[\cancel{2}\cancel{\sin\frac{\pi}{2\sqrt2}}\cos\frac{\pi-2\phi}{2\sqrt2}\right]/\left[\cancel{2\sin\frac{\pi}{2\sqrt2}}\cos\frac{\pi}{2\sqrt2}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(\phi)=\cos\left(\frac{\pi-2\phi}{2\sqrt2}\right)/\cos\frac{\pi}{2\sqrt2}\Rightarrow \boxed{r(\phi)=\frac{1}{u(\phi)}=\frac{\cos\frac{\pi}{2\sqrt2}}{\cos\left(\frac{\pi-2\phi}{2\sqrt2}\right)}=\cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt2}\right)\sec\left(\frac{\pi-2\phi}{2\sqrt2}\right)}$$

4. (**10μ συνολικά**)

Τροχιές γύρω από μια μαύρη τρύπα μάζας M μπορούν να περιγραφούν με βάση ένα ενεργό δυναμικό της μορφής: $U_{eff}(r) = -\frac{1}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{l^2}{r^3}$, όπου l είναι η στροφορμή της τροχιάς. Ως προς το κλασικό Keplerian δυναμικό, η μοναδική τροποποίηση είναι ο τελευταίος όρος $1/r^3$ ενώ για χάρη απλότητας υποθέτουμε ότι η ανηγμένη μάζα είναι $\mu = 1$ και η σταθερά του πεδίου είναι $G_N = 1$. Το δυναμικό αυτό μπορεί να ερμηνευτεί και χρησιμοποιηθεί με τον συνήθη τρόπο, ότι δηλαδή, η ακτινική εξίσωση της κίνησης για ένα σωματίδιο που κινείται γύρω από την μαύρη τρύπα προέρχεται από μια Lagrangian της μορφής $L = \frac{1}{2}\dot{r}^2 - U_{eff}(r)$.

(α) Δείξτε ότι για $l^2 < 12$ δεν υπάρχουν κυκλικές τροχιές, ενώ για $l^2 > 12$ υπάρχουν δύο κυκλικές τροχιές. [**2μ**]

(β) Σχεδιάστε το ενεργό δυναμικό, U_{eff}(r), για $l^2 < 12$ και $l^2 > 12$. [**4μ**]

(γ) Περιγράψτε ποιοτικά τις πιθανές τροχιές για $l^2 < 12$ και $l^2 > 12$. [**4μ**]

(α) Οι κυκλικές τροχιές υπάρχουν στα ακρότατα του ενεργού δυναμικού. Οι ακτίνες τους r_0 θα πρέπει να υπακούν στις λύσεις της εξίσωσης:

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial r} = 0 \Rightarrow V'_{eff}(r_0) = \frac{1}{r_0^2} - \frac{l^2}{r_0^3} + 3\frac{l^2}{r_0^4} = 0 \overset{\times r_0^4}{\Longrightarrow}$$

$$r_0^2 - l^2 r_0 + 3l^2 = 0 \Rightarrow \Delta = \sqrt{l^4 - 4\cdot 3l^2} = \sqrt{l^4 - 12l^2} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l^4 - 12l^2 \geq 0 \Rightarrow l^2 \geq 12 \text{ ή } l^2 = 0.$$

Όταν $l^2 > 12$ υπάρχουν πάντοτε 2 λύσεις διαφορετικές μεταξύ τους

Οι λύσεις θα έχουν την μορφή $r_0^{1,2} = \frac{l^2 \pm \sqrt{l^2(l^2-12)}}{2} = \frac{l^2 \pm l\sqrt{l^2-12}}{2}$

(β) Από τα προηγούμενα έχουμε την συμπεριφορά της συνάρτησης στα ακρότατα καθώς και την συμπεριφορά στις ασυμπτωτικές περιπτώσεις:

$V_{eff}(r) \sim -\frac{1}{r}$ όταν το $r \to \infty$ υπερισχύει δηλαδή ο πρώτος όρος

$V_{eff}(r) \sim -\frac{1}{r^3}$ όταν το $r \to 0$ υπερισχύει δηλαδή ο τρίτος όρος

Επομένως θα έχουμε τις περιπτώσεις των 2 παρακάτω σχημάτων:

δεν υπάρχει κυκλική τροχιά αφού $\Delta < 0$

(γ) Για να καταλάβουμε ποιοτικά την συμπεριφορά των τροχιών, θα πρέπει να σχεδιάσουμε τις γραμμές σταθερής μηχανικής ενέργειας, στα γραφήματα του ενεργού δυναμικού. Η κίνηση επιτρέπεται μόνο στις περιοχές που οι γραμμές αυτές είναι πάνω από την καμπύλη του ενεργού δυναμικού.

Εξετάζουμε αρχικά την περίπτωση $\ell^2 < 12$.

1. $E > 0$: Αν το σωματίδιο κινείται αρχικά προς τα θετικά r, τότε το σώμα πηγαίνει στο άπειρο και δεν επιστρέφει ποτέ.
   Για σώμα που κινείται με κατεύθυνση προς τα μικρά r, το σώμα πέφτει μέσα στην μαύρη τρύπα στο $r=0$.

2. $E<0$: Υπάρχει ένα σημείο καμπής, και όλες οι τροχιές πέφτουν στην μαύρη τρύπα και περνούν από το $r=0$.

Εξετάζουμε την περίπτωση $\ell^2 > 12$. Ξεκινάμε με μεγάλες ενέργειες:

1. $E > \max V_{eff}$: είναι η ίδια περίπτωση όπως και για την $\ell^2<12$ περίπτωση 1.

2. $E = \max V_{eff}$: κυκλική τροχιά ακριβώς στην κορυφή του δυναμικού. Αλλά είναι ασταθής, ως προς το γεγονός ότι μπορεί να κινηθεί προς το άπειρο ή να πέσει μέσα στην μαύρη τρύπα, μέχρι το $r=0$.

3. $E < \max V_{eff}$: αριστερά της κορυφής, ίδια περίπτωση με την $E<0$ για $\ell^2<12$

4. $0 < E < \max V_{eff}$: δεξιά της κορυφής, υπάρχει σημείο καμπής. Εισερχόμενα σώματα που έρχονται από το άπειρο, πλησιάζουν μέχρι μια ελάχιστη ακτίνα και πηγαίνουν και πάλι στο άπειρο χωρίς να ξαναεπιστρέψουν.

5. $\min V_{eff} < E < 0$, περιοχή της κορυφής: Υπάρχουν δυο σημεία καμπής. Οι τροχιές είναι δέσμιες, αλλά όχι απαραίτητα κλειστές (περιοδικές)

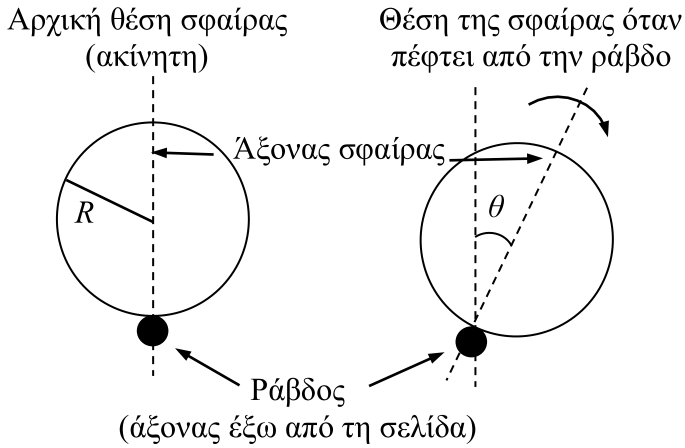
6. $E = \min V_{eff}$, ακριβώς στην κορυφή: Σταθερή κυκλική τροχιά

5. (**10μ συνολικά**)

Μια συμπαγής σφαίρα ακτίνας R και μάζας M βρίσκεται πάνω σε μια λεπτή ράβδο που είναι στερεωμένη και παραμένει ακίνητη. Η σφαίρα ξεκινά από την κατάσταση της ηρεμίας να κυλά πάνω στη ράβδο χωρίς να ολισθαίνει ώσπου τελικά πέφτει από την ράβδο.

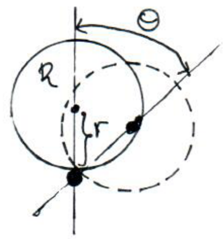
(α) Ποιος δεσμός υπάρχει για το σύστημα; [**2μ**]

(β) Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange, να υπολογίσετε την γωνία, θ, που η σφαίρα χάνει επαφή με τη ράβδο. [**8μ**]



Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ισούται με $I_{CM}^{\sigma\varphi} = 2MR^2/5$.

<u>Υπόδειξη</u>: *Θα μπορούσε να βοηθήσει στην επίλυση της εξίσωσης που θα καταλήξετε η χρήση διατήρησης της ενέργειας.*



Η εξίσωση του δεσμού είναι: $f = r - R = 0$ (1)

Η σφαίρα είναι σε επαφή με τον άξονα περιστροφής και το κέντρο μάζας της απέχει απόσταση r από τον άξονα περιστροφής

Όταν χάσει επαφή τότε $r > R$

Περιγράφουμε την κινητική εξίσωση της σφαίρας: $T = T_{CM}^{\pi\varepsilon\rho} + T_{CM}^{\mu\varepsilon\tau}$ (2)

Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες οπότε η ταχύτητα του CM θα είναι:

$$v_{CM}^2 = \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \Rightarrow T_{CM}^{\mu\varepsilon\tau} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \quad (3)$$

Η περιστροφική κινητική ενέργεια ως προς το CM θα είναι:

$$T_{CM}^{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2}I_{CM}^{\sigma\varphi}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{5}mR^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{5}mR^2\dot{\theta}^2 \quad (4)$$

Από (3) κ (4) η (2) γίνεται $\boxed{T = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\left(\frac{2}{5}R^2 + r^2\right) + \frac{1}{2}m\dot{r}^2}$ (5)

Για τη δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας, θεωρούμε $V=0$ το επίπεδο που περνά από το σημείο περιστροφής της σφαίρας ως προς τη ράβδο, οπότε

$$\boxed{V = mgr\cos\theta} \quad (6)$$

Χρησιμοποιώντας και τον πολλ/στή Lagrange λ, η Lagrangian του προβλήματος γράφεται με τη μορφή: $L = T - V + \lambda f(r,\theta) \Rightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\left(\frac{2}{5}R^2 + r^2\right) + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - mgr\cos\theta + \lambda f(r,\theta)$, Η εξίσωση Euler-Lagrange τροποποιημένη με τον πολ/στή λ, θα είναι:

$$r: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) = \frac{\partial L}{\partial r} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot r\right) = -mg\cos\theta + m\dot\theta^2 r + \lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot r = m\dot\theta^2 r - mg\cos\theta + \lambda \quad \text{αλλά } r=R \Rightarrow \dot r = 0 = \ddot r \Rightarrow \boxed{\lambda = m\dot\theta^2 r + mg\cos\theta}$$

(7)

$$\theta: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot\theta\left(\tfrac{2}{5}R^2 + r^2\right)\right) = mgr\sin\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot\theta\left(\frac{2}{5}R^2 + r^2\right) + 2m\dot\theta\dot r r = mgr\sin\theta \qquad (8)$$

Από την εξίσωση (7) ξέρουμε ότι η σφαίρα χάνει επαφή με τη ράβδο όταν $\lambda = 0$.

έχουμε: $-\cancel{m}\dot\theta^2 r + \cancel{m}g\cos\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\dot\theta^2 = \frac{g}{R}\cos\theta.}$ (9)

Χρησιμοποιούμε διατήρηση ενέργειας για να απαλείψουμε το $\dot\theta$ μια και η εξίσωση (8) δεν βοηθά ιδιαίτερα:

Αρχικά η σφαίρα έχει μόνο δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας: $E_i = V = mgR$

Στο σημείο που αποχωρίζεται από τη ράβδο έχει κινητική και δυναμική ενέργεια.

$$E_f = \frac{1}{2}\cancel{m}\dot\theta^2\left(\frac{2}{5}R^2 + R^2\right) + \cancel{m}gR\cos\theta = E_i = \cancel{m}gR \Rightarrow \frac{7}{10}R^{\cancel{2}}\dot\theta^2 = g\cancel{R}(1-\cos\theta) \Rightarrow$$

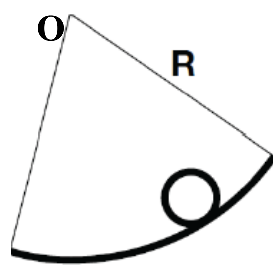
$$\Rightarrow \boxed{\dot\theta^2 = \frac{10}{7}\frac{g}{R}(1-\cos\theta)} \qquad (10)$$

Αντικατάσταση της (10) στην (9) δίνει: $\cancel{\frac{g}{R}}\cos\theta = \frac{10}{7}\cancel{\frac{g}{R}}(1-\cos\theta) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 7\cos\theta = 10 - 10\cos\theta \Rightarrow 17\cos\theta = 10 \Rightarrow \cos\theta = \frac{10}{17} \Rightarrow \boxed{\theta = 54^\circ}$$

6. (**10μ συνολικά**)

Μια κούνια μάζας *m* έχει σχήμα τόξου ακτίνας *R* και κρέμεται από σημείο στήριξης μέσω σχοινιών στα άκρα της (δείτε το διπλανό σχήμα). Ένα στεφάνι ακτίνας *α*, ίδιας μάζας *m* όπως και η κούνια και ροπής αδράνειας $I = m\alpha^2$, κυλά χωρίς να ολισθαίνει στην επιφάνεια της κούνιας. Η κίνηση του στεφανιού και της κούνιας δεν υπόκεινται σε απώλειες λόγω τριβών ενώ συμβαίνουν κάτω από την επίδραση της βαρυτικής δύναμης $\vec{F}_g = -mg\hat{j}$. Βρείτε όλες τις δυνατές συχνότητες ταλαντώσεων του συστήματος για μικρές αποκλίσεις από την ισορροπία θεωρώντας ότι $a/R \ll 1$.



<u>Υπόδειξη</u>: *Η γωνιακή απομάκρυνση, θ, του κέντρου μάζας του στεφανιού και η γωνιακή απομάκρυνση, φ, της κούνιας ως προς το σημείο O δεν είναι ίδιες γιατί τότε το στεφάνι θα ήταν ακίνητο σχετικά με την κούνια. Το στεφάνι επίσης περιστρέφεται ως προς το CM λόγω κύλησης.*

Αναπαραστούμε την κίνηση του συστήματος με τη χρήση δύο γωνιών που εκφράζουν την γωνιακή μετατόπιση της κούνιας και του στεφανιού από την θέση ισορροπίας. Έστω ότι οι γωνίες αυτές είναι Θ και ϕ. για το στεφάνι και κούνια αντίστοιχα.

Η κύλιση του στεφανιού μπορεί να εκφραστεί από μια γωνιακή ταχύτητα, $\omega_{στ}$, που θεωρούμε θετική όταν το στεφάνι κυλίεται αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Η κύλιση του στεφανιού εξαρτάται από την διαφορά των $\dot{\phi}$ και $\dot{\Theta}$ αφού αν το ϕ και Θ αυξάνουν ή ελαττώνονται το ίδιο, τότε το στεφάνι παραμένει στην ίδια θέση ως προς την κούνια. Δηλαδή η συνθήκη της κύλισης χωρίς ολίσθηση είναι: $\boxed{a\omega_{στ} = R(\dot{\phi}-\dot{\Theta})}$ (1)

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι: $T = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\phi}^2 + (R-a)^2\dot{\Theta}^2\right) + \frac{1}{2}I_{στ}\omega^2$

όπου $I_{CM}^{στεφ} = ma^2$.

Από την εξίσωση (1) έχουμε: $a^2\omega_{στ}^2 = R^2(\dot{\phi}-\dot{\Theta})^2$ και εφόσον $\frac{a}{R} << 1 \Rightarrow R-a \to R$

οπότε η κινητική ενέργεια γίνεται: $T = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\phi}^2 + R^2\dot{\Theta}^2\right) + \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\phi}-\dot{\Theta}\right)^2$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\phi}^2 + \dot{\Theta}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\Theta}^2 - 2\dot{\phi}\dot{\Theta}\right) \Rightarrow T = \cancel{\tfrac{2}{2}}mR^2\left(\dot{\Theta}^2 + \dot{\phi}^2 - \dot{\phi}\dot{\Theta}\right)$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος μπορεί να εκφραστεί:

$$U = mgR(1-\cos\phi) + mg(R-a)(1-\cos\Theta)$$ και πάλι θέτοντας $R-a \to R$

θα πάρουμε ότι $U = mgR(2-\cos\phi-\cos\Theta)$

Η Lagrangian του συστήματος είναι:

$$\boxed{L = mR^2(\dot\phi^2 + \dot\Theta^2 - \dot\phi\dot\Theta) - mgR(2-\cos\phi-\cos\Theta)} \quad (A)$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}\right) = \frac{\partial L}{\partial\phi} \Rightarrow \cancel{m}R^{\cancel{2}}(2\ddot\phi - \ddot\Theta) = -\cancel{m}g\cancel{R}\sin\phi \Rightarrow 2\ddot\phi - \ddot\Theta = -\frac{g}{R}\sin\phi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\Theta}\right) = \frac{\partial L}{\partial\Theta} \Rightarrow \cancel{m}R^{\cancel{2}}(2\ddot\Theta - \ddot\phi) = -\cancel{m}g\cancel{R}\sin\Theta \Rightarrow 2\ddot\Theta - \ddot\phi = -\frac{g}{R}\sin\Theta$$

Θεωρώντας μικρές αποκλίσεις από τη θέση ισορροπίας, θα έχουμε $\sin\phi\simeq\phi$, $\sin\Theta\simeq\Theta$

οπότε: οι παραπάνω δύο εξισώσεις γίνονται:

$$2\ddot\phi - \ddot\Theta = -\frac{g}{R}\phi$$
$$2\ddot\Theta - \ddot\phi = -\frac{g}{R}\Theta$$

Θεωρούμε λύσεις της μορφής $\phi = C_1 e^{i\omega t}$, $\Theta = C_2 e^{i\omega t}$

Αντικαθιστώντας θα έχουμε: $-\omega^2(2C_1 - C_2) = -\frac{g}{R}C_1 \Rightarrow 2C_1 - C_2 = \frac{g}{R\omega^2}C_1$

$$-\omega^2(2C_2 - C_1) = -\frac{g}{R}C_2 \Rightarrow 2C_2 - C_1 = \frac{g}{R\omega^2}C_2$$

Θεωρούμε ότι $\gamma = \frac{g}{R\omega^2}$ οπότε θα πάρουμε:

$$\left.\begin{aligned}(2-\gamma)C_1 - C_2 &= 0\\ (2-\gamma)C_2 - C_1 &= 0\end{aligned}\right\}$$ σαν εξίσωση ιδιοτιμών: $\begin{bmatrix}2-\gamma & -1\\ -1 & 2-\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix}2-\gamma & -1\\ -1 & 2-\gamma\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 3 - 4\gamma + \gamma^2 = 0 \Rightarrow \gamma_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_{1,2} = \begin{cases}1\\3\end{cases} \Rightarrow \frac{g}{R\omega_{1,2}^2} = \begin{cases}1\\3\end{cases} \Rightarrow \boxed{\omega_{1,2}^2 = \begin{cases}g/R\\ g/3R\end{cases}}$$

Το πρόβλημα θα μπορούσε να λυθεί θεωρώντας την Lagrangian και για μικρά Θ γράφαμε $\cos\Theta \simeq 1-\frac{\Theta^2}{2}$ και $\cos\phi \simeq 1-\frac{\phi^2}{2}$

Οπότε η (A): $\mathcal{L} = mR^2\left(\dot\phi^2+\dot\Theta^2-\dot\phi\dot\Theta\right) - mgR\left(\cancel{2}-\cancel{1}+\frac{\Theta^2}{2}-\cancel{1}+\frac{\phi^2}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = mR^2\left(\dot\phi^2+\dot\Theta^2-\dot\phi\dot\Theta\right) - \frac{mgR}{2}\left(\Theta^2+\phi^2\right)$$

Επομένως θα έχουμε ότι ο πίνακας της κινητικής ενέργειας θα είναι:

$$[T] = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial\dot\Theta^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial\dot\Theta\partial\dot\phi} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial\dot\phi\partial\dot\Theta} & \frac{\partial^2 T}{\partial\dot\phi^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2mR^2 & -mR^2 \\ -mR^2 & 2mR^2 \end{pmatrix} \qquad (B)$$

Ο πίνακας της δυναμικής ενέργειας θα είναι:

$$[V] = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial\Theta^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial\Theta\partial\phi} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial\phi\partial\Theta} & \frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mgR & 0 \\ 0 & mgR \end{pmatrix} \qquad (C)$$

Επομένως θα έχουμε: $\left[[V]-\omega^2[T]\right][a] = 0 \Rightarrow \det\left([V]-\omega^2[T]\right)=0$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} mgR-2mR^2\omega^2 & -mR^2\omega^2 \\ -mR^2\omega^2 & mgR-2mR^2\omega^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \cancel{m^2}g^2\cancel{R^2} - 4\cancel{m^2}gR^{\cancel{3}\,2}\omega^2 + 4\cancel{m^2}R^{\cancel{4}\,2}\omega^4 - \cancel{m^2}R^{\cancel{4}\,2}\omega^4 = 0 \Rightarrow$$

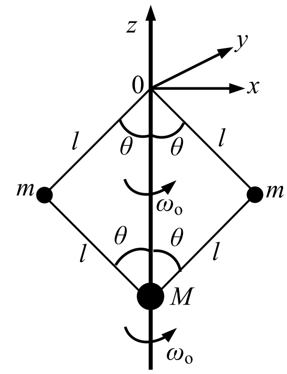
$$\Rightarrow g^2 - 4gR\omega^2 + 3R^2\omega^4 = 0$$

Οι λύσεις της δευτεροβάθμιας είναι: $\omega^2_{1,2} = \frac{4gR \pm\sqrt{16g^2R^2-12g^2R^2}}{6R^2} = \frac{\cancel{4}^{\,2}gR\pm\cancel{2}gR}{3\cancel{6}R^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega^2_{1,2} = \frac{2g\pm g}{3R} \Rightarrow \boxed{\omega^2_{1,2} = \begin{cases} g/R \\ g/3R \end{cases}}$$

7. (**10μ συνολικά**)

Η διπλανή διάταξη αποτελείται από 2 μάζες m που συνδέονται μεταξύ τους με βραχίονες αμελητέας μάζας και μήκους l ο καθένας, και μια μάζα, M, στο κατώτερο μέρος της διάταξης. Η διάταξη είναι περιορισμένη να κινείται ως προς κατακόρυφο άξονα πάνω στον οποίο η μάζα M μπορεί να κινείται κατακόρυφα χωρίς τριβές. Αγνοήστε τριβές και αντιστάσεις του αέρα, καθώς και τις διαστάσεις της μάζας M. Υποθέστε ακόμα ότι ο άξονας περιστροφής περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0.



(α) Εκφράστε τις θέσεις των μαζών συναρτήσει των μηκών, l, των βραχιόνων και της γωνίας θ. [**1μ**]

(β) Βρείτε την εξίσωση κίνησης του συστήματος. [**3μ**]

(γ) Υπολογίστε το ύψος στο οποίο ισορροπεί η μάζα M. Το ύψος αυτό αντιστοιχεί σε κάποια συγκεκριμένη γωνία θ_o, την οποία μπορούμε να θεωρήσουμε σαν γωνία ισορροπίας. [**3μ**]

(δ) Θεωρώντας μικρές γωνιακές αποκλίσεις, θ', από τη γωνία ισορροπίας, θ_o, και κρατώντας μόνο όρους 1ης τάξης ως προς θ' στην εξίσωση κίνησης, υπολογίστε την συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων γύρω από την θέση αυτή ισορροπίας. [**3μ**]

<u>Υπόδειξη</u>: Προσέξτε ότι το σύστημα της διάταξης αποτελεί μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Οι συντεταγμένες των μαζών m, m και M είναι, (Θεωρώντας το σύστημα συντεταγμένων του σχήματος)

$m: \quad (-l\sin\theta,\ 0,\ -l\cos\theta) \qquad (1)$

$m: \quad (l\sin\theta,\ 0,\ -l\cos\theta) \qquad (2)$

$M: \quad (0,\ 0,\ -2l\cos\theta) \qquad (3)$

Οι ταχύτητες των μαζών μπορούν να υπολογιστούν από την εξίσωση: $\dot{\vec r}\Big|_{αδρ} = \dot{\vec r}\Big|_{περ} + \vec\omega\times\vec r$

όπου το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας είναι $\vec\omega = (0, 0, \omega_0)$

Επομένως οι ταχύτητες θα είναι:

$(1) \Rightarrow \quad \dot{\vec r}_1 = (-l\dot\theta\cos\theta,\ 0,\ +l\dot\theta\sin\theta) + (0,0,\omega_0)\times(-l\sin\theta, 0, -l\cos\theta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{\vec r}_1 = (-l\dot\theta\cos\theta,\ 0,\ +l\dot\theta\sin\theta) + (0, +l\omega_0\sin\theta, 0) = (-l\dot\theta\cos\theta, +l\omega_0\sin\theta, l\dot\theta\sin\theta)$

$\Rightarrow |\dot{\vec r}_1|^2 = l^2\dot\theta^2 + l^2\omega_0^2\sin^2\theta$

$(2) \Rightarrow \quad \dot{\vec r}_2 = (l\dot\theta\cos\theta,\ 0,\ +l\dot\theta\sin\theta) + (0,0,\omega_0)\times(l\sin\theta, 0, -l\cos\theta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{\vec r}_2 = (l\dot\theta\cos\theta,\ 0,\ l\dot\theta\sin\theta) + (0, -l\omega_0\sin\theta, 0) = (l\dot\theta\cos\theta, -l\omega_0\sin\theta, l\dot\theta\sin\theta)$

$\Rightarrow |\dot{\vec r}_2|^2 = l^2\dot\theta^2 + l^2\omega_0^2\sin^2\theta$

$(3) \Rightarrow \quad \dot{\vec r}_3 = (0,\ 0,\ 2l\dot\theta\sin\theta) + \cancelto{0}{(0,0,\omega_0)\times(0,0,-2l\cos\theta)} \Rightarrow |\dot{\vec r}_3|^2 = 4l^2\dot\theta^2\sin^2\theta$

Επομένως η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι: $T=ml^2\dot{\Theta}^2+ml^2\omega_0^2\sin^2\Theta+2Ml^2\dot{\Theta}^2\sin^2\Theta$

$$\Rightarrow \boxed{T = ml^2\dot{\Theta}^2 + ml^2\omega_0^2\sin^2\Theta + 2Ml^2\dot{\Theta}^2\sin^2\Theta} \quad (A)$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$U = -mgl\cos\Theta - mgl\cos\Theta - 2Mlg\cos\Theta = -2Mlg\cos\Theta - 2mlg\cos\Theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{U = -2(M+m)lg\cos\Theta.} \quad (B)$$

Επομένως η Λαγκρανζιανή συνάρτηση του συστήματος είναι:

$$L = T - U = \left(ml^2 + 2Ml^2\sin^2\Theta\right)\dot{\Theta}^2 + ml^2\omega_0^2\sin^2\Theta + 2(M+m)lg\cos\Theta$$

Η εξίσωση Euler-Lagrange είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \Theta} \Rightarrow 2\left(ml^2 + 2Ml^2\sin^2\Theta\right)\ddot{\Theta} = 2Ml^2\dot{\Theta}^2(2\sin\Theta\cos\Theta) + 2ml^2\omega_0^2\sin\Theta\cos\Theta$$

$$- 2(M+m)\cancel{l}g\sin\Theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{2\left(m + 2M\sin^2\Theta\right)l\ddot{\Theta} = 2Ml\dot{\Theta}^2\sin2\Theta + ml\omega_0^2\sin2\Theta - 2(M+m)g\sin\Theta} \quad (\Gamma)$$

Στην θέση ισορροπίας $\dot{\Theta} = \ddot{\Theta} = 0$ και η γωνία ισορροπίας $\Theta = \Theta_0$

Αντικατάσταση στην (Γ) δίνει: $\boxed{ml\omega_0^2\sin2\Theta_0 = 2(M+m)g\sin\Theta_0} \Rightarrow$ (Δ)

$$\Rightarrow \cancel{2}ml\omega_0^2\sin\Theta_0\cos\Theta_0 = \cancel{2}(M+m)g\sin\Theta_0 \Rightarrow$$ Υπάρχουν 2 λύσεις:

$$\sin\Theta_0\left(ml\omega_0^2\cos\Theta_0 - (M+m)g\right) = 0 \Rightarrow \quad \sin\Theta_0 = 0 \Rightarrow \Theta_0 = 0.$$

$$\cos\Theta_0 = \frac{(M+m)g}{ml\omega_0^2}$$

Επομένως η απόσταση της μάζας M από το πάνω άκρο της διάταξης θα είναι:

(i) $\Theta_0 = 0 \Rightarrow d = 2l\underbrace{\cos\Theta_0}_{1} \Rightarrow \boxed{d = 2l}$

(ii) $\cos\Theta_0 = \frac{(M+m)}{ml\omega_0^2}g \Rightarrow \boxed{d = 2l\cos\Theta_0 = \frac{2(m+M)}{m\omega_0^2}g}$

(β) Για μικρές ταλαντώσεις ως προς τη θέση ισορροπίας θα έχουμε:

$$\Theta = \Theta_0 + \Theta' \quad \text{όπου} \quad \Theta' \ll \Theta_0 \quad \text{και} \quad \dot{\Theta} = \dot{\Theta}'$$

Επομένως υπολογίζουμε στην εξίσωση κίνησης (Γ) όρους που περιέχουν $\sin\Theta$ και $\sin 2\Theta$ αντικαθιστώντας $\Theta = \Theta_0 + \Theta'$ οπότε έχουμε:

$$\sin\Theta = \sin(\Theta_0 + \Theta') = \sin\Theta_0 \cos\Theta' + \sin\Theta' \cos\Theta_0 \simeq \sin\Theta_0 + \Theta' \cos\Theta_0$$

$$\sin 2\Theta = \sin 2(\Theta_0 + \Theta') = \sin 2\Theta_0 \cos 2\Theta' + \sin 2\Theta' \cos 2\Theta_0 \simeq \sin 2\Theta_0 + 2\Theta' \cos 2\Theta_0$$

Κρατώντας μόνο όρους 1ης τάξης, η εξίσωση κίνησης γίνεται:

$$2(m + 2M\sin^2\Theta)\, l\ddot{\Theta} = 2Ml\dot{\Theta}^2 \sin 2\Theta + ml\omega_0^2 \sin 2\Theta - 2(M+m)g\sin\Theta \Rightarrow$$

$$2(m + 2M\sin^2\Theta_0)\, l\ddot{\Theta}' = \cancel{2Ml\dot{\Theta}'^2 \sin 2\Theta_0} \to 0 + \cancel{4Ml\dot{\Theta}'^2\Theta' \cos 2\Theta_0} \to 0 + ml\omega_0^2 \sin 2\Theta_0 +$$
$$+ 2ml\omega_0^2\, \Theta' \cos 2\Theta_0 - 2(M+m)g\sin\Theta_0 - 2(M+m)g\Theta' \cos\Theta_0$$

$$\Rightarrow 2(m + 2M\sin^2\Theta_0)\, l\ddot{\Theta}' = 2ml\omega_0^2\, \Theta' \cos 2\Theta_0 + \underline{ml\omega_0^2 \sin 2\Theta_0} - \underline{2(M+m)g\sin\Theta_0} - 2(M+m)g\Theta' \cos\Theta_0$$

Από την εξίσωση του σημείου ισορροπίας (Δ) έχουμε ότι ο 2ος και 3ος όρος μηδενίζονται οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\cancel{2}(m + 2M\sin^2\Theta_0)\, l\ddot{\Theta}' = \cancel{2}ml\omega_0^2\, \Theta' \cos 2\Theta_0 - \cancel{2}(M+m)g\Theta' \cos\Theta_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m + 2M\sin^2\Theta_0)\, l\ddot{\Theta}' = \left(ml\omega_0^2 \cos 2\Theta_0 - (M+m)g\cos\Theta_0\right)\Theta' \Rightarrow$$

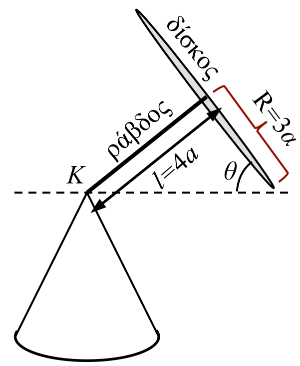
$$\Rightarrow (m + 2M\sin^2\Theta_0)\, l\ddot{\Theta} = -\left((M+m)g\cos\Theta_0 - ml\omega_0^2 \cos 2\Theta_0\right)\Theta'$$

Η εξίσωση αυτή είναι αρμονικού ταλαντωτή με φυσική συχνότητα:

$$\omega_0^2 = \frac{(M+m)g\cos\Theta_0 - ml\omega_0^2 \cos 2\Theta_0}{(m + 2M\sin^2\Theta_0)\, l} \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(M+m)g\cos\Theta_0 - ml\omega_0^2 \cos 2\Theta_0}{(m + 2M\sin^2\Theta_0)\, l}}}$$

8. (**10μ συνολικά**)

Μια συμμετρική «σβούρα» αποτελείται από λεπτό ομοιογενή δίσκο μάζας $4m$ και ακτίνας $R=3\alpha$. Μια λεπτή συμπαγής ράβδος μήκους $l=4\alpha$ και μάζας m είναι στερεωμένη στο κέντρο του δίσκου όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η ράβδος είναι κάθετη στο επίπεδο του δίσκου. Η «σβούρα» στηρίζεται στην κορυφή ενός κωνικού στηρίγματος, όπως φαίνεται στο σχήμα. Επιλέξτε ένα σύστημα συντεταγμένων σώματος τέτοιο ώστε ο άξονας $\hat{x}_3$ να έχει διεύθυνση κατά μήκος της ράβδου.



Ως υπενθύμιση, οι γωνίες Euler ορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο: φ αντιπροσωπεύει περιστροφή ως προς τον $\hat{x}_3$- άξονα, θ αντιπροσωπεύει περιστροφή ως προς τον νέο $\hat{x}_1$- άξονα ($\hat{x}_1'$ - άξονας) που προκύπτει από την περιστροφή ως προς φ, ενώ η γωνία ψ αντιπροσωπεύει περιστροφή ως προς τον $\hat{x}_3$- άξονα ($\hat{x}_e'$ - άξονας) που προκύπτει μετά την περιστροφή κατά θ. Οι εξισώσεις κίνησης για τις συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας σώματος ω_1, ω_2, ω_3 συναρτήσει των γωνιών Euler, θ, φ, και ψ, είναι:

$$\omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \quad \text{και}$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

(α) Βρείτε την θέση του κέντρου μάζας του συστήματος και τις ροπές αδράνειας, I_1, I_2, I_3 κατά μήκος των αξόνων $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ και $\hat{x}_3$ ως προς την κορυφή του στηρίγματος K. [**4μ**]

(β) Η σβούρα μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα (χωρίς τριβές) ως προς το σημείο στήριξης στην κορυφή του κωνικού στηρίγματος, και υπόκειται στη σταθερή βαρυτική επιτάχυνση g. Βρείτε την Lagrangian του συστήματος συναρτήσει των γωνιών Euler φ, θ και ψ. Δεν χρειάζεται να γνωρίζετε ακριβώς τις τιμές των κύριων ροπών αδράνειας I_1, I_2, I_3. [**2μ**]

(γ) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης για τις γωνίες Euler. Προσδιορίστε τυχόν διατηρήσιμες ποσότητες. Όπως και στο ερώτημα (β) δεν χρειάζεται να ξέρετε ακριβώς τις I_1, I_2, I_3. [**2μ**]

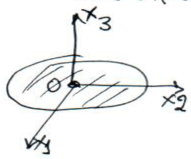
(δ) Προσδιορίστε την ελάχιστη ταχύτητα περιστροφής του δίσκου ως προς την ράβδο (σπιν), τέτοια ώστε η σβούρα να μεταπίπτει σε σταθερή κατάσταση κίνησης (steady state) όπου $\dot{\theta} = 0 = \ddot{\theta} = \ddot{\varphi} = \ddot{\psi}$, $\dot{\varphi} = \Omega$ και το χαμηλότερο σημείο της περιφέρειας του δίσκου να είναι στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με την κορυφή του στηρίγματος, όπως φαίνεται στο σχήμα. [**2μ**]

Όπως έχουμε δει στις διαλέξεις, ο τανυστής αδράνειας ενός ομογενούς δίσκου ως προς το κέντρο του και άξονες x, y να συμπίπτουν με δύο κάθετες διαμέτρους και τον τρίτο άξονα (z) κάθετο στο επίπεδο του δίσκου, στο κέντρο του, είναι διαγώνιος αφού οποιαδήποτε διάμετρος είναι άξονας συμμετρίας, όπως και η κάθετος στο κέντρο του δίσκου.

Ο άξονας $\hat{z}$ επομένως είναι ο $\hat{x}_3$-άξονας και συμπίπτει με την ράβδο του συστήματος.

Οι άξονες $\hat{x}_1$ και $\hat{x}_2$ είναι κάθετοι μεταξύ τους και στον $\hat{x}_3$-άξονα.

Όπως έχουμε δει $I_{xx} = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R dr \int_0^{2\pi} \left[(x^2+y^2) - x^2\right] r\, d\theta = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R dr \int_0^{2\pi} r y^2\, d\theta \Rightarrow$



$$\Rightarrow I_{xx} = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^{2\pi} r\,(r\sin\theta)^2\, d\theta = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R dr \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2\theta\, d\theta \Rightarrow$$

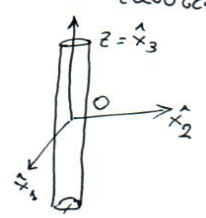
$$\Rightarrow I_{xx} = \frac{M}{\cancel{\pi} R^2}\int_0^R dr\, \cancel{\pi} r^3 \Rightarrow I_{xx} = \frac{M}{\cancel{R^2}}\,\frac{R^{\cancel{4}\,2}}{4} \Rightarrow \boxed{I_{xx} = \frac{MR^2}{4} = I_{yy}}$$

Επίσης: $I_{zz} = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R dr \int (\underbrace{x^2+y^2}_{r^2})\, r\, d\theta = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R dr \int_0^{2\pi} r^3\, d\theta \Rightarrow I_{zz} = \frac{M}{\cancel{\pi} R^2}\, 2\cancel{\pi}\, \frac{R^4}{\cancel{4}\,2} \Rightarrow \boxed{I_{zz} = \frac{MR^2}{2}}$

$\boxed{I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0}$ αφού $I_{xy} = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R dr\int_0^{2\pi}(-xy)\, r\, d\theta = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R dr \int_0^{2\pi} r^3 \cos\theta \sin\theta\, d\theta \to 0$

Επομένως ο τανυστής αδράνειας του δίσκου είναι: $I_\delta^0 = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Ο τανυστής αδράνειας της ράβδου:



$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{M}{\ell}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} (z^2 - \cancel{x^2})\, dz = \frac{M}{\ell}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} z^2\, dz = \frac{M}{\ell}\left.\frac{z^3}{3}\right|_{-\ell/2}^{\ell/2} \Rightarrow$$

$$\boxed{I_{xx} = I_{xy} = \frac{1}{12}M\ell^2}$$

$$I_{zz} = \frac{M}{\ell}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} (\cancel{z^2 - z^2})\, dz = 0 \Rightarrow \boxed{I_{zz} = 0} \qquad \boxed{I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0}$$

Επομένως ο τανυστής αδράνειας της ράβδου ως προς το μέσο της είναι:

$$I_\rho^0 = \frac{M\ell^2}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα περιστρέφεται ως προς σημείο που βρίσκεται στην κορυφή του στηρίγματος, K. Επομένως θα πρέπει να υπολογίσουμε τις ροπές αδράνειας των δύο σωμάτων (δίσκου και ράβδου) ως προς το σημείο αυτό.

δίσκος: $\left.\begin{array}{l} I^K_{\delta\iota\sigma\kappa} = I_\delta^0 + M_\delta\left(\vec{r}_K^{\,2}\delta_{ij} - r_{Ki} r_{Kj}\right) \\ \vec{r}_K = \ell \hat{x}_3 \quad \text{όπου } \ell \text{ το μήκος της ράβδου} \end{array}\right\} \Rightarrow I^K_{\delta\iota\sigma\kappa} = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + M_\delta \begin{pmatrix} \ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \ell^2 \end{pmatrix} -$

$$- M_\delta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$I^K_{\delta\iota\sigma\kappa} = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + M\ell^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{I^K_{\delta\iota\sigma\kappa} = M_\delta \begin{pmatrix} \frac{R^2}{4}+\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4}+\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}} \qquad (1)$$

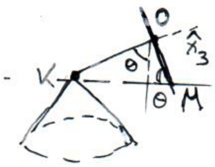
ράβδος: $I^K_\rho = I^0_\rho + M_\rho\left(\vec{r}_K^{\,2}\delta_{ij} - r_{Ki} r_{Kj}\right) = \frac{M_\rho \ell^2}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + M_\rho \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ell^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\ell^2}{4} \end{pmatrix} - M_\rho \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\ell^2}{4} \end{pmatrix}$

$\vec{r}_K = \frac{\ell}{2}\hat{x}_3$ όπου ℓ το μήκος της ράβδου

$$\Rightarrow I^K_\rho = \frac{M_\rho \ell^2}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + M_\rho \frac{\ell^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow I^K_\rho = \frac{M_\rho \ell^2}{12}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{I^K_\rho = \frac{M\ell^2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \qquad (2)$$

Ο τανυστής αδράνειας του συστήματος ως προς την κορυφή, Κ, του στερεώματος είναι το άθροισμα των επιμέρους τανυστών που υπολογίσαμε προηγουμένως:



$$I_T^K = I_\sigma^K + I_\rho^K = M_\sigma \begin{pmatrix} \frac{R^2}{4}+\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4}+\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{pmatrix} + \frac{M_\rho \ell^2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αντικαθιστούμε για αριθμητικά δεδομένα: $M_\sigma = 4m$, $M_\rho = m$, $R = 3a$, $\ell = 4a$

$$I^K = 4m \begin{pmatrix} \frac{9a^2+64a^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9a^2+64a^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9a^2}{2} \end{pmatrix} + \frac{m}{3} \begin{pmatrix} 16a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 16a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I^K = m \begin{pmatrix} \frac{3\cdot 73a^2+16a^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\cdot 73a^2+16a^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 18a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow I^K = \begin{pmatrix} \frac{235ma^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{235ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 18ma^2 \end{pmatrix}$$

Επομένως $\boxed{I_{xx} = I_1 = I_{yy} = I_2 = \frac{235ma^2}{3}}$ και $\boxed{I_{zz} = I_3 = 18ma^2}$

Το κέντρο μάζας του συστήματος βρίσκεται στον άξονα $\hat{x}_3$ στη θέση:

$$r_{cm} = \frac{m\cdot\frac{\ell}{2} + 4m\cdot\ell}{M_{o\lambda}} = \frac{\cancel{m}\cdot 2a + 4\cancel{m}\cdot 4a}{5\cancel{m}} \Rightarrow \boxed{r_{cm} = \frac{18}{5}a}$$

(β) Οι γωνιακές ταχύτητες συναρτήσει των γωνιών Euler είναι:

$$\omega_1 = \dot\theta\cos\psi + \dot\phi\sin\theta\sin\psi$$
$$\omega_2 = -\dot\theta\sin\psi + \dot\phi\sin\theta\cos\psi$$
$$\omega_3 = \dot\phi\cos\theta + \dot\psi$$

Επομένως $\omega_1^2 = \dot\theta^2\cos^2\psi + \dot\phi^2\sin^2\theta\sin^2\psi + 2\dot\theta\dot\phi\sin\theta\sin\psi\cos\psi$

$\omega_2^2 = \dot\theta^2\sin^2\psi + \dot\phi^2\sin^2\theta\cos^2\psi - 2\dot\theta\dot\phi\sin\theta\sin\psi\cos\psi$

Η κινητική ενέργεια θα είναι: $T = \frac{1}{2}I_1^K\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2^K\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3^K\omega_3^2 = \frac{1}{2}I_1^K(\omega_1^2+\omega_2^2) + \frac{1}{2}I_3^K\omega_3^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}I_1^K\left(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_3^K\left(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi\right)^2}$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος θα είναι: $U = 5mg\, r_{cm}\cos\theta \Rightarrow \boxed{U = \cancel{5}mg\frac{18}{\cancel{5}}a\cos\theta}$

Επομένως η Lagrangian είναι: $\boxed{L = \frac{1}{2}I_1^K\left(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_3^K\left(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi\right)^2 - 18mga\cos\theta}$

(γ) Επομένως οι εξισώσεις κίνησης ως προς τις γωνίες Euler θα είναι:

$$\Theta: \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = \dot{\phi}^2 I_1^k \sin\theta\cos\theta - I_3^k \dot{\phi}\sin\theta\left(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\right) + 18mga\sin\theta \Rightarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \sin\theta\left[\dot{\phi}^2 I_1^k\cos\theta - I_3^k\dot{\phi}\overbrace{\left(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)}^{\omega_3} + 18mga\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \boxed{I_1^k\ddot{\theta} = \sin\theta\left[I_1^k\dot{\phi}^2\cos\theta - I_3^k\dot{\phi}\,\omega_3 + 18mga\right]} \quad (A)$$

ϕ: $\dfrac{\partial L}{\partial \phi} = 0$ Επομένως η ϕ είναι κυκλική και $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \sigma\tau\alpha\vartheta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1^k\dot{\phi}\sin^2\theta + I_3^k\overbrace{\left(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)}^{\omega_3}\cos\theta = \sigma\tau\alpha\vartheta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1^k\dot{\phi}\sin^2\theta + I_3^k\omega_3\cos\theta = \sigma\tau\alpha\vartheta} \quad (B)$$

ψ: $\dfrac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \sigma\tau\alpha\vartheta$ η ψ είναι κυκλική όπως και η ϕ.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3^k\left(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3^k\omega_3 = \sigma\tau\alpha\vartheta} \quad (\Gamma) \Rightarrow \boxed{\omega_3 = \sigma\tau\alpha\vartheta}$$

(δ) Το χαμηλότερο σημείο της περιφέρειας του δίσκου βρίσκεται στο ίδιο ύψος με την κορυφή του κώνου του στηρίγματος. Επομένως $\cos\theta = \dfrac{OM}{KM} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+\ell^2}} = \dfrac{3a}{\sqrt{9a^2+16a^2}} = \dfrac{3}{5}$

Σταθερή μετάπτωση σημαίνει ότι: $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\phi} = \Omega = \sigma\tau\alpha\vartheta$ και $\ddot{\phi} = \ddot{\theta} = \ddot{\psi} = 0$.

Από την (A) κ (Γ) έχουμε: $I_1^k\ddot{\theta} = \sin\theta\left[I_1\dot{\phi}^2\cos\theta - I_3\dot{\phi}\,\omega_3 + 18mga\right]$ ⇒

Από την (B) κ (Γ) έχουμε: $\dfrac{d}{dt}\left(I_1^k\dot{\phi}\sin^2\theta + I_3^k\omega_3\cos\theta\right) = 0$

$$\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow I_1^k\dot{\phi}^2\cos\theta - I_3^k\dot{\phi}\,\omega_3 + 18mga = 0 \Rightarrow \Omega^2 - \Omega\frac{I_3^k\omega_3}{I_1^k\cos\theta} + \frac{18mga}{I_1^k\cos\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \Omega^2 - \Omega\frac{18\cancel{m}\cancel{a^2}\omega_3}{\frac{235}{3}\cancel{m}\cancel{a^2}\cos\theta^{3/5}} + \frac{18\cancel{m}g\cancel{a}}{\frac{235}{3}\cancel{m}a^{\cancel{2}}\cos\theta^{3/5}} = 0 \Rightarrow \Omega^2 - \Omega\frac{18}{47}\omega_3 + \frac{18}{47}\frac{g}{a} = 0$$

Από την τελευταία εξίσωση έχουμε: $\Omega_{1,2} = \dfrac{\frac{18}{47} \pm \sqrt{\left(\frac{18}{47}\right)^2 \omega_3^2 - \frac{4 \cdot 18}{47} \frac{g}{a}}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Omega_{1,2} = \frac{9}{47} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{47}\right)^2 \omega_3^2 - \frac{18}{47} \frac{g}{a}}$$

Θα πρέπει η φυσική λύση να είναι πραγματική, οπότε $\left(\frac{9}{47}\right)^2 \omega_3^2 \geq \frac{18}{47} \frac{g}{a} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{9}{47} \omega_3^2 \geq 2 \frac{g}{a} \Rightarrow \omega_3^2 \geq \frac{94}{9} \frac{g}{a} \Rightarrow \boxed{\omega_3 \geq \sqrt{\frac{94}{9} \frac{g}{a}}}$$