ΦΥΣ. 211
1$^{\eta}$ ΠΡΟΟΔΟΣ 8-Μάρτη-2014

Πριν ξεκινήσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, αριθμό ταυτότητας) στο πάνω μέρος της σελίδας αυτής.

Για τις λύσεις των ασκήσεων θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε μόνο τις σελίδες που σας δίνονται. Μην κόψετε καμιά από τις σελίδες που σας δίνονται.

Προσπαθήστε να δείξετε τη σκέψη σας και να γράψετε καθαρές εξισώσεις. Για πλήρη ή μερική βαθμολόγηση θα πρέπει να φαίνεται καθαρά το τι προσπαθείτε να δείξετε.

Σας δίνονται 5 ισοδύναμες ασκήσεις και πρέπει να απαντήσετε σε όλες. Σύνολο μονάδων 100.

Διαβάστε πρώτα όλες τις ασκήσεις και προσπαθήστε να σκεφτείτε τι περίπου χρειάζεται να κάνετε. Η σειρά των προβλημάτων δεν αντικατοπτρίζει τη δυσκολία τους.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 150 λεπτά.

Καλή επιτυχία.

Ενεργό δυναμικό

$$U_{eff}(r) = U(r) + U_{cf}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

Μετασχηματισμένη ακτινική Δ.Ε. τροχιάς:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u + \frac{\mu}{l^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) = 0, \text{ όπου } u = \frac{1}{r}$$

Ενέργεια τροχιάς:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)$$

Τροχιές Kepler:

$F = G\dfrac{m_1m_2}{r^2} = \dfrac{\gamma}{r^2}$ λύση ακτινικής εξίσωσης είναι: $r(\theta) = \dfrac{c}{1+e\cos\theta}$, με $c = \dfrac{l^2}{\gamma\mu}$

Εκκεντρότητα (*e*): $E = \dfrac{\gamma^2\mu}{2l^2}\left(e^2-1\right)$ όπου E = Ενέργεια

Εκκεντρότητα	Ενέργεια	Είδος Τροχιάς
$0 < e < 1$	$E < 0$	ελλειπτική
$e = 1$	$E = 0$	παραβολική
$e > 1$	$E > 0$	υπερβολική

Περιήλιο: $r_{\min} = \dfrac{c}{1+e}$ Αφήλιο: $r_{\max} = \dfrac{c}{1-e}$

Μεγάλος ημιάξονας: $a = \dfrac{c}{1-e^2}$ Μικρός ημιάξονας: $b = \dfrac{c}{\sqrt{1-e^2}}$

Νόμοι Kepler:

1^{ος} νόμος: τροχιές πλανητών είναι ελλείψεις με τον ήλιο σε μια από τις εστίες της έλλειψης

2^{ος} νόμος: $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{l}{2\mu}$ 3^{ος} νόμος: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM_H}a^3$

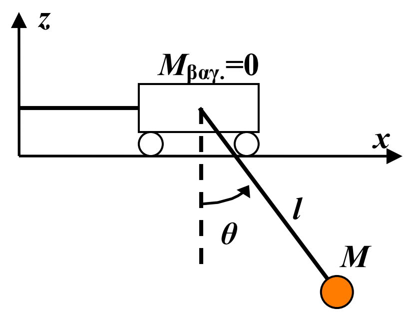
Ενεργός διαφορική διατομή σκέδασης:

$$\sigma(\Theta) = \left.\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega}\right|_{\text{KM}} = \frac{b(\Theta)}{\sin\Theta}\left|\frac{db}{d\Theta}\right|$$

Ενεργός διαφορική διατομή σκέδασης Rutherford:

$$\sigma(\Theta) = \frac{1}{4}\left(\frac{ZZ'e^2}{2E}\right)^2\frac{1}{\sin^4\left(\frac{\Theta}{2}\right)}$$

1. Ένα εκκρεμές μάζας M και μήκος l, είναι εξαρτημένο από ένα αβαρές βαγονάκι το οποίο με την σειρά του εξαρτάται μέσω ενός εμβόλου από ακλόνητο σημείο. Το βαγονάκι μπορεί να κινηθεί στην οριζόντια διεύθυνση και καθώς κινείται δέχεται την επίδραση της δύναμης $\vec{F} = -kx\hat{i}$ εξαιτίας του εμβόλου. Όταν το σύστημα είναι ακίνητο το έμβολο έχει φυσικό μήκος l_0. Η μάζα του εκκρεμούς μπορεί να κινείται μόνο στο κατακόρυφο επίπεδο x-z.



(α) Να βρεθεί η Lagrangian του συστήματος (**8π**)

(β) Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης. (**5π**)

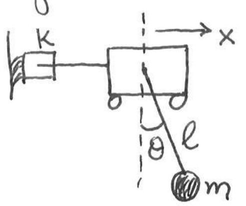
(γ) Να βρεθεί η συχνότητα ταλάντωσης του εκκρεμούς για την περίπτωση μικρών αποκλίσεων (μικρές τιμές θ) από την θέση ισορροπίας και να εξεταστεί η τιμή της συχνότητας για την περίπτωση που το βαγονάκι είναι ακίνητο. [**7π**]

[<u>*Υπόδειξη για το ερώτημα (γ)*:</u> για μικρές αποκλίσεις από την θέση ισορροπίας $\cos\theta \approx 1$ και $\sin\theta \approx \theta$ ενώ όροι δεύτερης ή μεγαλύτερης τάξης σε θ θεωρούνται αμελητέοι. Θα σας φανεί χρήσιμο να βγάλετε μια σχέση μεταξύ των γενικευμένων συντεταγμένων χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης στις οποίες καταλήξατε.]

(α) Το έμβολο ουσιαστικά λειτουργεί σαν ελατήριο και η δύναμη που δίνει είναι της μορφής του νόμου του Hooke. Επομένως η δυναμική ενέργεια λόγω της δύναμης αυτής θα είναι:

$$\vec{\nabla} V = -\vec{F} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = -F \Rightarrow V = -\int F\,dx = -\int(-kx)\,dx \Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{2}kx^2}$$

Διαλέγουμε σαν γενικευμένες συντεταγμένες τις x και θ όπως στο σχήμα. Θεωρούμε ότι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων συμπίπτει με το Κ.Μ. του βαγονιού όταν το σύστημα είναι σε ηρεμία.



Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι αυτή της μάζας του εκκρεμούς m. Άρα $T = \frac{1}{2}m v^2$

Οι συντεταγμένες της μάζας του εκκρεμούς είναι: $\left.\begin{array}{l} x' = l\sin\theta \\ y' = -l\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} = l\dot{\theta}\sin\theta \end{array}\right\}$$ αυτές είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας της μάζας m ως προς το βαγονάκι

Η ταχύτητα της μάζας m ως προς το σύστημα αναφοράς μας (αδρανειακό με αρχή την θέση του Κ.Μ. του βαγονιού όταν είναι σε ηρεμία) θα είναι:

$$\left.\begin{array}{l} v_x = \dot{x} + \dot{x}' \\ v_y = \underbrace{\dot{y}}_{0} + \dot{y}' \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_x = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta \\ v_y = l\dot{\theta}\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} v_x^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2\dot{x}\dot{\theta}l\cos\theta \\ v_y^2 = l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta \end{array}$$

Επομένως $\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$

Η κινητική ενέργεια γίνεται: $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right)$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος, θα είναι η δυναμική ενέργεια λόγω του εμβόλου και αυτή λόγω του βαρυτικού πεδίου.

Θεωρούμε την δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας ίση με μηδέν, στο επίπεδο που κινείται το βαγονάκι. Επομένως καταλήγουμε:

$$\left.\begin{aligned} V_{\beta\alpha\rho.} &= -mgl\cos\theta \\ V_{\varepsilon\mu\beta.} &= \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_{o\lambda} = V_{\beta\alpha\rho} + V_{\varepsilon\mu\beta.} = -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}kx^2$$

Επομένως η Lagrangian είναι: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) + mgl\cos\theta - \frac{kx^2}{2}$

(β) Οι εξισώσεις κίνησης προκύπτουν από τις εξισώσεις Euler-Lagrange για τις γενικευμένες συντεταγμένες x και θ:

$\boxed{x:}$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx$

Η εξίσωση κίνησης για x θα είναι: $\boxed{m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta + kx = 0}$

$\boxed{\theta:}$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\left(l^2\dot{\theta} + l\dot{x}\cos\theta\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\left(l\ddot{\theta} + l\ddot{x}\cos\theta - l\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right)$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta - ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta$

Η εξίσωση κίνησης για θ θα είναι: $\cancel{ml}^2\ddot{\theta} + \cancel{ml}\ddot{x}\cos\theta \cancel{- ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta} + \cancel{ml}g\sin\theta + \cancel{+ ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\cancel{m}l\ddot{\theta} + \cancel{m}\ddot{x}\cos\theta + \cancel{m}g\sin\theta = 0}$ για θ (1)

$\boxed{m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta + kx = 0}$ για x (2) (γ) Χρειάζεται να λύσουμε τις προηγούμενες δύο διαφορικές εξισώσεις, χρησιμοποιώντας την υπόθεση $\cos\Theta \simeq 1$ και $\sin\Theta \simeq \Theta$. Θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) \Rightarrow \; ml\ddot{\Theta} + m\ddot{x} + mg\Theta = 0 & (3) \\ (2) \Rightarrow \; ml\ddot{\Theta} + m\ddot{x} - ml\dot{\Theta}^2\Theta + kx = 0 & (4)\end{array}\right\} \Rightarrow$$ αφαιρούμε την (3) από (4)

$$\Rightarrow -ml\Theta\dot{\Theta}^2 + kx - mg\Theta = 0 \Rightarrow \underbrace{ml\dot{\Theta}^2\Theta} + mg\Theta - kx = 0$$

Επειδή το Θ είναι μικρό αυτός ο όρος είναι μεγαλύτερης τάξης και επομένως ακόμη πιο μικρός και μπορούμε να τον αγνοήσουμε $\Rightarrow$

$$\Rightarrow mg\Theta - kx = 0 \Rightarrow x = \frac{mg}{k}\Theta$$

Αντικαθιστούμε στην (3) οπότε: $m\ddot{x} + ml\ddot{\Theta} + mg\Theta = 0 \Rightarrow \frac{m^2 g}{k}\ddot{\Theta} + ml\ddot{\Theta} + mg\Theta = 0$

$$\Rightarrow \ddot{\Theta}\left(1 + \frac{mg}{kl}\right) + \frac{g}{l}\Theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\Theta} = -\frac{g/l}{(1+mg/kl)}\Theta}$$ Εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή

Η συχνότητα της ταλάντωσης θα είναι: $\omega = \sqrt{\frac{g/l}{1+mg/kl}} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l+mg/k}}}$

Αν το βαγονάκι είναι ακίνητο, αυτό αντιστοιχεί σε μια δύναμη εμβόλου με πολύ μεγάλο k, οπότε $mg/k \to 0$ και καταλήγουμε $\omega = \sqrt{g/l}$ του εκκρεμούς

2. (α) Ξεκινώντας από τις ακόλουθες συναρτήσεις Hamilton να βρεθούν οι αντίστοιχες συναρτήσεις Lagrange $\mathcal{L}$:

(i) $H = \dfrac{p^2}{2m} + \lambda qp + \dfrac{1}{2}kq^2$, όπου λ και k είναι σταθερές. (**4β**)

(ii) $H = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$, όπου c είναι σταθερά. (**6β**)

(iii) $H = \dfrac{p_1^2}{2m} + \lambda p_1 p_2 + a x_2^4$, όπου m, λ και α είναι σταθερές. (**4β**)

(β) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης του Hamilton και για τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις. (**6β**)

(α) Σε όλες τις περιπτώσεις θα πρέπει να λύσουμε ως προς p ξεκινώντας από την $\dot{q}$ την οποία μπορούμε να πάρουμε χρησιμοποιώντας την εξίσωση κίνησης του Hamilton

Χρησιμοποιώντας τον γενικό ορισμό της συνάρτησης Hamilton: $H = \Sigma p\dot{q} - \mathcal{L}$ έχουμε $\mathcal{L} = -H + \sum_i p_i \dot{q}_i$ οπότε θα έχουμε:

(i) $H = \dfrac{p^2}{2m} + \lambda pq + \dfrac{1}{2}kq^2$ οπότε $\dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m} + \lambda q \Rightarrow p = m\dot{q} - \lambda q m \Rightarrow$

$\Rightarrow p = m(\dot{q} - \lambda q)$

Η Lagrangian θα είναι:

$$\mathcal{L} = p\dot{q} - H = p\left(\frac{p}{m} + \lambda q\right) - \left[\frac{p^2}{2m} + \lambda pq + \frac{1}{2}kq^2\right] = \frac{p^2}{m} + \cancel{\lambda pq} - \frac{p^2}{2m} - \cancel{\lambda pq} - \frac{1}{2}kq^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}kq^2 \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2\cancel{m}} m^{\cancel{2}}(\dot{q} - \lambda q)^2 - \frac{1}{2}kq^2 \Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{q} - \lambda q)^2 - \frac{k}{2}q^2}$$

(ii) $H = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$ οπότε $\dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{pc^2}{\left[(pc)^2 + (mc^2)^2\right]^{1/2}}$

Λύνοντας ως προς p θα πάρουμε: $\dot{q}^2 = \dfrac{(pc^2)^2}{(pc)^2 + (mc^2)^2} \Rightarrow \dot{q}^2(pc)^2 + \dot{q}^2(mc^2)^2 = (pc^2)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dot{q}^2(pc)^2 - (pc^2)^2 = -\dot{q}^2(mc^2)^2 \Rightarrow \dot{q}^2 m^2 c^{\cancel{4}\,2} = -\dot{q}^2 p^2 \cancel{c^2} + p^2 c^{\cancel{4}\,2} \Rightarrow \dot{q}^2 m^2 c^2 = p^2(-\dot{q}^2 + c^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{\dot{q}^2 m^2 \cancel{c^2}}{\cancel{c^2}\left[1 - \frac{\dot{q}^2}{c^2}\right]} \Rightarrow p = \frac{\dot{q}m}{\left[1 - \left(\frac{\dot{q}}{c}\right)^2\right]^{1/2}}$$

Επομένως η Lagrangian θα είναι:

$$\mathcal{L} = p\dot{q} - H = p\dot{q} - \sqrt{(pc)^2+(mc^2)^2} = \frac{(pc)^2}{[(pc)^2+(mc^2)^2]^{1/2}} - \sqrt{(pc)^2+(mc^2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{(pc)^2}{[(pc)^2+(mc^2)^2]^{1/2}} - \frac{(pc)^2+(mc^2)^2}{[(pc)^2+(mc^2)^2]^{1/2}} = -\frac{(mc^2)^2}{[(pc)^2+(mc^2)^2]^{1/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{-(mc^2)^2}{\left[\frac{\dot{q}^2m^2c^2}{1-\left(\frac{\dot{q}}{c}\right)^2}+(mc^2)^2\right]^{1/2}} = -\frac{(mc^2)^2\left(1-\left(\frac{\dot{q}}{c}\right)^2\right)^{1/2}}{\left[c^2\dot{q}^2m^2+(mc^2)^2-m^2c^{\cancel{4}\,2}\frac{\dot{q}^2}{\cancel{c^2}}\right]^{1/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = -\frac{(mc^2)^2\left[1-\left(\frac{\dot{q}}{c}\right)^2\right]^{1/2}}{\left[\cancel{\dot{q}^2m^2c^2}+(mc^2)^2-\cancel{\dot{q}^2m^2c^2}\right]} = \frac{(mc^2)^{\cancel{2}}\left[1-\left(\frac{\dot{q}}{c}\right)^2\right]^{1/2}}{\cancel{mc^2}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{q}^2}{c^2}}}$$

(iii) $$H = \frac{p_1^2}{2m} + \lambda p_1 p_2 + a x_2^4$$

Εδώ έχουμε 2 ορμές p_1 και p_2 οπότε χρειαζόμαστε 2 εξισώσεις Hamilton:

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m} + \lambda p_2 \quad \text{και} \quad \dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \lambda p_1$$

Λύνουμε προς p_1 και p_2 οπότε έχουμε $p_1 = \frac{\dot{x}_2}{\lambda}$

$$p_2 = \frac{1}{\lambda}\left[\dot{x}_1 - \frac{\dot{x}_2}{\lambda m}\right] \Rightarrow p_2 = \frac{\dot{x}_1}{\lambda} - \frac{\dot{x}_2}{\lambda^2 m}$$

Η Lagrangian θα είναι:

$$\mathcal{L} = p_1\dot{x}_1 + p_2\dot{x}_2 - H = p_1\left(\frac{p_1}{m}+\lambda p_2\right) + p_2(\lambda p_1) - \left[\frac{p_1^2}{2m}+\lambda p_1 p_2 + a x_2^4\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{p_1^2}{2m} + \lambda p_1 p_2 - a x_2^4 \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{\dot{x}_2^2}{\lambda^2 2m} + \lambda\left[\frac{\dot{x}_2}{\lambda}\frac{\dot{x}_1}{\lambda} - \frac{\dot{x}_2^2}{\lambda^3 m}\right] - a x_2^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{\dot{x}_2^2}{2\lambda^2 m} + \frac{\dot{x}_1\dot{x}_2}{\lambda} - \frac{\dot{x}_2^2}{\lambda^2 m} - a x_2^4 \Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = -\frac{\dot{x}_2^2}{2m\lambda^2} + \frac{\dot{x}_1\dot{x}_2}{\lambda} - a x_2^4}$$

(β) Οι εξισώσεις κίνησης του Hamilton ανά περίπτωση είναι:

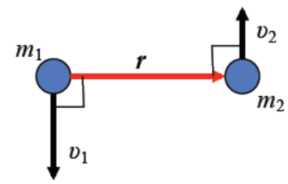
(i) $\dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m} + \lambda q \qquad \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -(\lambda p + kq)$

(ii) $\dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{pc^2}{[(pc)^2 + (mc^2)^2]^{1/2}} \qquad \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = 0$

(iii) $\dot{x}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1} = \dfrac{p_1}{m} + \lambda p_1 \qquad p_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0$

$\dot{x}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_2} = \lambda p_1 \qquad p_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -4ax_2^3$

3. Θεωρήστε δυο σώματα με μάζες $m_1 = 5\text{kg}$ και $m_2 = 10\text{kg}$ αντίστοιχα και αρχικές ταχύτητες υ_1 και υ_2. Η αρχική απομάκρυνση μεταξύ των σωμάτων είναι $\vec{r}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_1$ έχει κατεύθυνση προς τα κάτω και μέτρο $\upsilon_1 = 4m/s$ ενώ το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_2$ έχει μέτρο $\upsilon_2 = 1m/s$ και διεύθυνση προς τα πάνω. Τα δυο σώματα αλληλεπιδρούν μέσω ενός ελκτικού δυναμικού $U = -\dfrac{k}{r}$ όπου $k = 50Jm$.



(**α**) Πόσο μακριά από τη μάζα m_1 βρίσκεται το κέντρο μάζας των δυο σωμάτων; Δώστε την απάντησή σας συναρτήσει της $\vec{r}$. [**1π**]

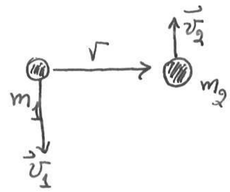
(**β**) Ποια είναι η τιμή της ανηγμένης μάζας των δύο σωμάτων; [**1π**]

(**γ**) Ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας; Θα πρέπει να προσδιορίσετε το μέτρο και την διεύθυνσή της. [**2π**]

(**δ**) Υποθέστε ότι η $\vec{r}$ στο παραπάνω σχήμα έχει μέτρο $2m$. Καθώς τα σώματα κινούνται κάτω από την επίδραση της ελκτικής αλληλεπίδρασής τους, η απόστασή τους, $\vec{r}(t)$, παραμένει φραγμένη ή όχι; Θα πρέπει να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. [**6π**]

(**ε**) Για ποια τιμή του $\vec{r}$ στο παραπάνω σχήμα, η απόσταση $|\vec{r}|$ μεταξύ των δυο σωμάτων θα παραμείνει σταθερή με το χρόνο; [**5π**]

(στ) Υποθέστε ότι η $\vec{r}$ στο παραπάνω σχήμα έχει μέτρο $1m$. Καθώς τα σώματα κινούνται με την πάροδο του χρόνου, το διάνυσμα της απόστασής τους, $\vec{r}(t)$, θα παραμείνει φραγμένο. Ποια θα είναι η ελάχιστη και μέγιστη τιμή της απόστασής τους; [**5π**]



$M = m_1 + m_2$

(α) Θεωρούμε την αρχή του συστήματος συντεταγμένων στην θέση της μάζας m_1. Το κέντρο μάζας θα είναι επομένως στη θέση: $\vec{R} = \dfrac{m_1(0) + m_2\vec{r}}{M} = \dfrac{10}{15}\vec{r} \Rightarrow \boxed{\vec{R} = \dfrac{2}{3}\vec{r}}$

(β) Η ανηγμένη μάζα του συστήματος : $\mu = \dfrac{m_1 \cdot m_2}{M} = \dfrac{5 \cdot 10}{15} \Rightarrow \boxed{\mu = \dfrac{10}{3}\,\text{kgr}}$

(γ) Η ολική ορμή του συστήματος είναι: $\vec{P} = M\vec{V}$ όπου $\vec{V}$ η ταχύτητα του ΚΜ

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i \Rightarrow M\vec{V} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{V} = \frac{m_1}{M}\vec{v}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{v}_2$$

Επιλέγουμε την θετική διεύθυνση του y-άξονα αυτή προς τα πάνω οπότε

$$\vec{v}_2 = v_2\,\hat{y} \quad \text{και} \quad \vec{v}_1 = -v_1\,\hat{y}$$

Επομένως $\vec{V} = \dfrac{5}{15}(-4\,m/s)\,\hat{y} + \dfrac{10}{15}(1\,m/s)\,\hat{y} = \left(-\dfrac{20}{15} + \dfrac{10}{15}\right) m/s\,\hat{y} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{V} = -\frac{10}{15}\,\hat{y}\,m/s \Rightarrow \boxed{\vec{V} = -\frac{2}{3}\,m/s\,\hat{y}}$$

(δ) Η ενέργεια της κίνησης γύρω από το κέντρο μάζας είναι: $E = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + U(\vec{r})$

Η απόσταση r θα είναι φραγμένη αν $E<0$ και μη φραγμένη αν $E>0$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \Rightarrow E = \frac{1}{2}\mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 - \frac{k}{r} \Rightarrow E = \frac{1}{2}\mu\,(4+1)^2 - \frac{50}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}\,\frac{10}{3}\,25 - \frac{50}{2} \Rightarrow E = \frac{125-75}{3} \Rightarrow \boxed{E = \frac{50}{3}\,J > 0 \text{ άρα μη φραγμένη}}$$

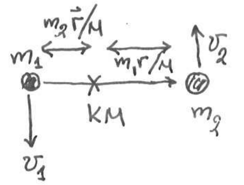
(ε) $U_{eff} = \dfrac{\ell^2}{2\mu r^2} - \dfrac{k}{r}$ ενεργό δυναμικό για συντεταγμένη ακτινικής απόστασης

- Η απόσταση $\vec{r}$ θα είναι σε κυκλική τροχιά η οποία είναι σταθερή και επομένως η δύναμη F θα έχει σταθερό μέτρο, στην τιμή της r που ελαχιστοποιεί $U_{eff}(r)$

Δηλαδή $\dfrac{\partial U_{eff}}{\partial r} = 0 \Rightarrow -\dfrac{\ell^2}{\mu r^3} + \dfrac{k}{r^2} = 0 \Rightarrow \boxed{r = \dfrac{\ell^2}{\mu k}}$ (Α)

Η στροφορμή l είναι ως προς το κέντρο μάζας, και από την στιγμή που είναι σταθερά της κίνησης μπορούμε να την υπολογίσουμε στην αρχική κατάσταση όπως δείχνει το σχήμα. Η στροφορμή μπορεί να υπολογιστεί με 2 τρόπους:

1. Απ' ευθείας υπολογισμός της $\vec{l}$ ως προς το κέντρο μάζας



Η στροφορμή κάθε σώματος είναι: $\vec{r} \times \vec{v} m$ όπου το $\vec{r}$ μετριέται από το κέντρο μάζας. Επομένως:

$$l = \left(\frac{m_2}{M} r\right)(m_1 v_1) + \left(\frac{m_1}{M} r\right)(m_2 v_2)$$ με φορά έξω από την σελίδα

$$l = \frac{m_1 m_2}{M} r (v_1 + v_2) \Rightarrow \boxed{l = \mu r (v_1 + v_2)}$$

2. Υπολογισμός της στροφορμής χρησιμοποιώντας το 1-D ισοδύναμο και το ανηγμένο διάνυσμα της απόστασης $\vec{r}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{l} = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{r}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (v_2 + v_1)\hat{y} \end{array}\right\} \Rightarrow l = \mu r (v_2 + v_1)$$ και δείχνει έξω από την σελίδα

Αντικαθιστώντας την τιμή της στροφορμής στην εξίσωση (A) βρίσκουμε την απόσταση για σταθερή κυκλική τροχιά: $r = \frac{l^2}{\mu k} = \frac{\mu^{2} r^2 (v_1 + v_2)^2}{\cancel{\mu} k} \Rightarrow \boxed{r = \frac{k}{\mu (v_1 + v_2)^2} = \frac{3}{5} m}$

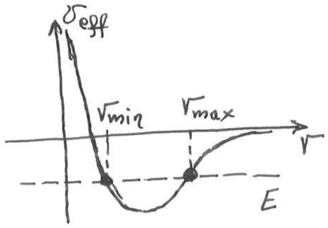
Θα μπορούσαμε να λύσουμε το ερώτημα αυτό με διαφορετική μέθοδο: Η απόσταση $\vec{r}$ θα έκανε κυκλική τροχιά όταν η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι ίση με την δύναμη/μάζα. Από το ισοδύναμο πρόβλημα του 1-σώματος θα είχαμε: $\mu a_{κεντρ} = \frac{k}{r^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu \frac{v^2}{\cancel{r}} = \frac{k}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow r = \frac{k}{\mu v^2} \Rightarrow r = \frac{k}{\mu (v_1 + v_2)^2}$ αφού $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (v_2 + v_1)\hat{y}$

Προφανώς η απάντηση είναι η ίδια αλλά πολύ πιο εύκολα να βρεθεί

(στ) Η ελάχιστη, r_{min}, και μέγιστη απόσταση, r_{max}, θα βρεθούν μελετώντας τα σημεία στα οποία $E = V_{eff} = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} \Rightarrow E r^2 + kr - \frac{l^2}{2\mu} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow r^2 + 2\left(\frac{k}{2E}\right) r - \frac{\ell^2}{2E\mu} = 0 \Rightarrow \boxed{r = -\left(\frac{k}{2E} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2E}\right)^2 + \frac{\ell^2}{2E\mu}}\right.} \quad (B)$$



Το (+) πρόσημο αντιστοιχεί σε r_{max} και το (-) στο r_{min}

Από την στιγμή που τα E και ℓ είναι σταθερές της κίνησης μπορούμε να τα υπολογίσουμε από την αρχική κατάσταση που φαίνεται στο σχήμα.

$E = \frac{1}{2}\mu\left(v_1 + v_2\right)^2 - \frac{k}{r_0}$ όπου $r_0 = 1m$ η αρχική απόσταση στην περίπτωση αυτή

Αντικαθιστώντας αριθμητικά δεδομένα: $E = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}\right)(4+1)^2 - \frac{50}{1} = \frac{125}{3} - \frac{150}{3} \Rightarrow E = -\frac{25}{3} J$

$\ell = \mu r_0 (v_2 + v_1) = \frac{10}{3}(1)(4+1) = \frac{50}{3}\ kg\,m^2/s^2$

Επομένως $-\frac{k}{2E} = -\frac{50}{2\left(-\frac{25}{3}\right)} \Rightarrow -\frac{k}{2E} = 3m$

$$\frac{\ell^2}{2E\mu} = \left(\frac{50}{3}\right)^2 \frac{1}{2\left(\frac{25}{3}\right)\left(\frac{10}{3}\right)} \Rightarrow \frac{\ell^2}{2E\mu} = 5m^2$$

Αντικατάσταση στην (B) δίνει: $r = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{r_{min} = 1m} \\ \boxed{r_{max} = 5m} \end{cases}$

4. Σωματίδια μάζας m_1 και m_2 αλληλεπιδρούν μέσω ενός δυναμικού $U = kr^4$, όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων. Δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις που ενεργούν στο σύστημα και το κέντρο μάζας βρίσκεται σε ηρεμία. Το μέγεθος της στροφορμής του συστήματος είναι l.

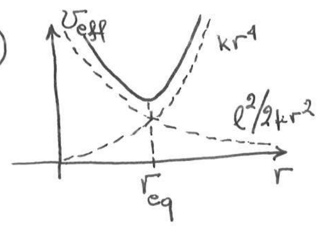
(α) Σχεδιάστε το ενεργό δυναμικό U_{eff} συναρτήσει της απόστασης r. Λύστε ως προς r_{eq} μεταξύ των σωματιδίων η οποία αντιστοιχεί σε κυκλική τροχιά. Η έκφρασή σας θα πρέπει να συνδέει την r_{eq} με τη στροφορμή l. Προσδιορίστε την r_{eq} στο διάγραμμά σας. [**5π**]

(β) Υποθέτοντας ότι η στροφορμή, $\vec{L}$, είναι στη z-διεύθυνση και θεωρώντας την αρχή του συστήματος συντεταγμένων να συμπίπτει με το κέντρο μάζας, να βρεθούν τα διανύσματα θέσης $\vec{r}_1(t)$ και $\vec{r}_2(t)$ και να σχεδιαστούν οι τροχιές των m_1 και m_2 (σχεδιάστε τις τροχιές στο ίδιο διάγραμμα και θυμηθείτε ότι $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$). [**4π**]

(γ) Κάντε ένα άλλο διάγραμμα της U_{eff} συναρτήσει της r. Υποθέτοντας μια ενέργεια, E, μεγαλύτερη από αυτή που αντιστοιχεί στην κυκλική τροχιά, προσδιορίστε στο διάγραμμά σας την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση r_{min} και r_{max}. [**4π**]

(δ) Αποδείξτε τη σχέση μεταξύ της δεύτερης παραγώγου του U_{eff} και της συχνότητας, ω, ταλαντώσεων μικρού πλάτους γύρω από την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς r_{eq}. Χρησιμοποιείστε το αποτέλεσμά σας για να βρείτε το ω για το πρόβλημα αυτό. [**7π**]

(a)



$\mu \ddot{r} = -\frac{d}{dr} U_{eff}$ όπου $U_{eff} = kr^4 + \frac{l^2}{2\mu r^2}$

Για να βρούμε την απόσταση ισορροπίας :

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = 0 \Rightarrow U'_{eff} = 4kr^3 - \frac{l^2}{\mu r^3} = 0 \Rightarrow \boxed{r_{eq}^6 = \frac{l^2}{4\mu k}}$$

(b) $\vec{R}_{CM} = 0 \Rightarrow m_1 \vec{r}_1 = -m_2 \vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{r}_1$

$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_1 + \frac{m_1}{m_2}\vec{r}_1 = \frac{m_1+m_2}{m_2}\vec{r}_1 \Rightarrow \vec{r} = \frac{M}{m_2}\vec{r}_1$

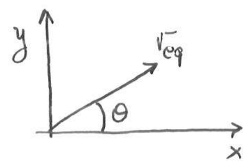
$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_1 = m_2 \frac{\vec{r}}{M} \\ \vec{r}_2 = -m_1 \frac{\vec{r}}{M} \end{cases}$$

Η Lagrangian είναι : $\mathcal{L} = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - U(r)$

Επομένως $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}\big(\underbrace{\mu r^2 \dot{\theta}}_{l}\big)$

Στην περίπτωση αυτή $r = r_{eq}$ και επομένως $\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r_{eq}^2} \xRightarrow{\text{ολοκλήρωση}} \theta = \frac{l}{\mu r_{eq}^2} t \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\theta = \omega t}$ όπου $\boxed{\omega = \frac{l}{\mu r_{eq}^2}}$

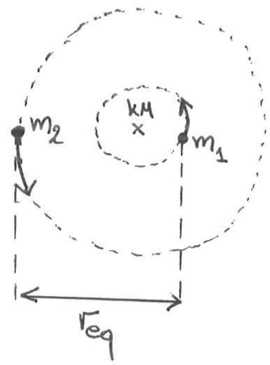


$x = r_{eq}\cos\theta$

$y = r_{eq}\sin\theta$

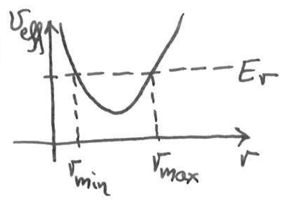
οπότε

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \frac{m_2}{M} r_{eq}(\cos\omega t, \sin\omega t) \\ \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{M} r_{eq}(\cos\omega t, \sin\omega t) \end{cases}$$



Οι μάζες m_1 και m_2 είναι πάντοτε σε αντιδιαμετρικές θέσεις υποθέτοντας ότι $m_2 > m_1$, θα έχουμε το διπλανό σχήμα που περιγράφει την κίνηση των δυό σωμάτων.

(γ)



(δ) Έστω $r = r_{eq} + \delta r \Rightarrow \ddot{r} = \delta\ddot{r}$ και $\frac{d}{dr} \simeq \frac{d}{d(\delta r)}$

Επομένως $\mu\ddot{r} = -\frac{dV_{eff}}{dr} \rightsquigarrow \mu\delta\ddot{r} = -\frac{d}{d(\delta r)} V_{eff}(r_{eq} + \delta r)$ (1)

$$V_{eff}(r_{eq} + \delta r) = V_{eff}(r_{eq}) + \delta r \cancelto{0}{\frac{dV_{eff}}{dr}}\Big|_{r=r_{eq}} + \frac{\delta r^2}{2} \frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\Big|_{r=r_{eq}} + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{eff}(r_{eq} + \delta r) \simeq V_{eff} + \frac{1}{2}\delta r^2 V''_{eff}$$

Επομένως η (1) θα γραφεί ως: $\mu\delta\ddot{r} = -\frac{dV_{eff}}{d(\delta r)} \Rightarrow \delta\ddot{r} = -\frac{V''_{eff}}{\mu}\delta r \Rightarrow$

$$\Rightarrow \delta\ddot{r} = -\omega^2\delta r \quad \text{όπου } \omega^2 = \frac{V''_{eff}}{\mu}$$

Αλλά $V''_{eff} = 12kr^2 + \frac{3\ell^2}{\mu r^4}$ οπότε $\boxed{\omega^2 = \frac{12kr_{eq}^2 + 3\ell^2/\mu r_{eq}^4}{\mu}}$

5. Θεωρήστε ότι έχετε ένα ρολό χαρτί το οποίο θέλετε να αφήσετε να ξετυλιχθεί από την κορυφή ενός κτιρίου ύψους 20*m* κρατώντας την μια άκρη του χαρτιού. Ωστόσο θέλετε να είστε σίγουροι ότι το χαρτί του ρολό που θα χρησιμοποιήσετε είναι αρκετά ανθεκτικό και δεν θα σχιστεί καθώς το ρολό πέφτει προς το έδαφος και πως η ταχύτητα που θα αποκτήσει το ρολό όταν έχει πέσει *20m* δεν είναι αρκετά μεγάλη ώστε να τραυματίσει κάποιον περαστικό. Θεωρήστε ότι το ρολό έχει ακτίνα R και μάζα M. Θεωρήστε ακόμα ότι η μάζα του χαρτιού και το πάχος του δεν διαφοροποιούν την μάζα και διαστάσεις του ρολό, δηλαδή τα R και M είναι σταθερά κατά την πτώση του ρολό. Θεωρήστε ακόμα ότι η ροπή αδράνειας του ρολό είναι $I = MR^2/2$.

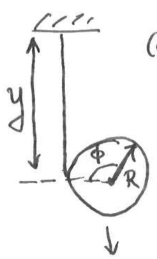
(α) Να βρεθεί η Lagrangian του ρολό που πέφτει από την κορυφή του κτιρίου κρατώντας το ελεύθερο άκρο του χαρτιού σταθερό. [**5π**]

(β) Χρησιμοποιήστε πολλαπλασιαστές Lagrange για να προσδιορίσετε τις εξισώσεις κίνησης. [**8π**]

(γ) Υπολογίστε την τάση στο χαρτί. [**4π**]

(δ) Υπολογίστε την κατακόρυφο επιτάχυνση και τελική ταχύτητα του ρολό αφού έχει διανύσει 20*m*. Θεωρήστε ότι η αρχική του ταχύτητα είναι μηδενική. [**3π**]

Το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο με αυτό του δίσκου στην περιφέρεια του οποίου είναι τυλιγμένο σχοινί και κρατώντας το ελεύθερο άκρο του σχοινιού αφήνουμε το δίσκο να πέσει. Δηλαδή το πρόβλημα του yo-yo από τις διαλέξεις



(α) Η κινητική ενέργεια του δίσκου είναι:

$$T=\frac{1}{2}m\dot{y}^2+\frac{1}{2}I\dot{\phi}^2=\frac{1}{2}m\dot{y}^2+\frac{1}{4}mR^2\dot{\phi}^2$$

Η δυναμική ενέργεια του δίσκου είναι: $V=-mgy$

Επομένως η Lagrangian είναι: $\mathcal{L}=\frac{1}{2}m\dot{y}^2+\frac{1}{4}mR^2\dot{\phi}^2+mgy$

(β) Η εξίσωση του δεσμού είναι εξαιτίας της κύλισης χωρίς ολίσθηση, οπότε:

$$f(y,\phi)=y-R\phi=0$$

Οι δυο εξισώσεις Euler-Lagrange τροποποιημένες με τον πολ/στή Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}-\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0 \Rightarrow m\ddot{y}-mg-\lambda=0 \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}-\lambda\frac{\partial f}{\partial \phi}=0 \Rightarrow \frac{1}{2}mR^2\ddot{\phi}+\lambda R=0 \qquad (2)$$

Από την εξίσωση του δεσμού έχουμε $\ddot{y}=R\ddot{\phi}$ (3)

Αντικατάσταση της (3) στην (2) δίνει $\frac{1}{2}mR\ddot{y}+\lambda R=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ m\ddot{y}=-2\lambda \quad (4)$

Αντικατάσταση της (4) στην (1) δίνει: $-2\lambda-mg-\lambda=0 \Rightarrow 3\lambda=-mg \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda=-\frac{1}{3}mg} \quad (A)$$

Αντικατάσταση στις εξισώσεις κίνησης δίνει:

$(1) \Rightarrow \quad m\ddot{y}=mg+\lambda=mg-\frac{1}{3}mg \Rightarrow \cancel{m}\ddot{y}=\frac{2}{3}\cancel{m}g \Rightarrow \boxed{\ddot{y}=\frac{2}{3}g}$

$(2) \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mR^{\cancel{2}}\ddot{\phi}=-\lambda\cancel{R} \Rightarrow \frac{R}{2}\cancel{m}\ddot{\phi}=\frac{1}{3}\cancel{m}g \Rightarrow \boxed{\ddot{\phi}=\frac{2}{3}\frac{g}{R}}$

(γ) Η γενικευμένη δύναμη του δεσμού είναι η τάση του χαρτιού

$$F_y=\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{3}mg$$

και η ροπή του δεσμού είναι $N_\phi=\lambda\frac{\partial f}{\partial \phi}=\frac{1}{3}mgR$

(δ) Επομένως το χαρτί ελαττώνει την επιτάχυνση του ρολό στο βαρυτικό πεδίο κατά 1/3 $\Rightarrow \ddot{y}=\frac{2}{3}g$.

Αφού η επιτάχυνση είναι σταθερή και η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν η τελική ταχύτητα του ρολό θα είναι: $v^2=2\ddot{y}d \Rightarrow \boxed{v^2=\frac{4}{3}gd}$

Αντικατάσταση αριθμητικών δεδομένων δίνει $v=\sqrt{\frac{4}{3}\cdot 9.81\cdot 20} \Rightarrow \underline{v=16.2\,m/s}$