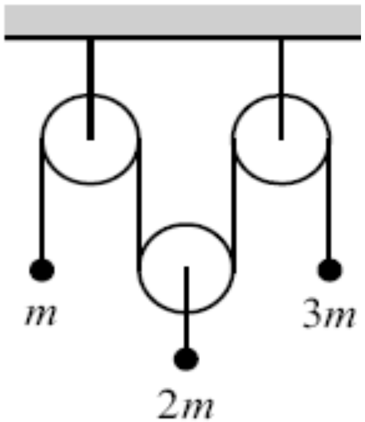
Μηχανή Atwood με κινούμενη τροχαλία

Θεωρείστε τη μηχανή Atwood του σχήματος.

(α) Να γραφούν οι τρεις εξισώσεις F=ma.
Θεωρείστε θετική τη φορά προς τα πάνω.

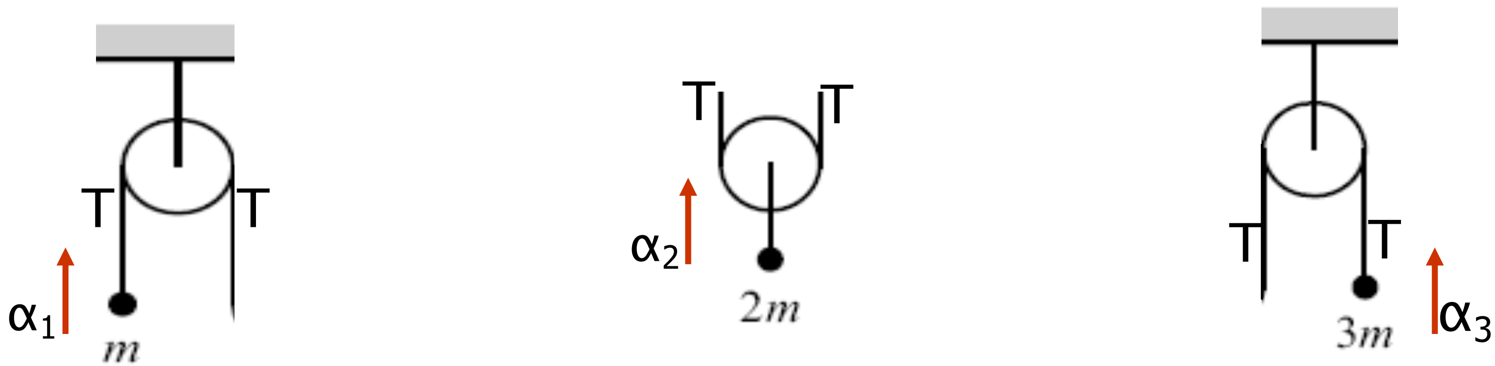
(β) Να βρεθεί η επιτάχυνση της μεσαίας μάζας (2m) συναρτήσει των επιταχύνσεων των δύο άλλων μαζών.

(γ) Να βρεθούν και οι τρεις επιταχύνσεις



Μηχανή Atwood με κινούμενη τροχαλία

(α) Να γραφούν οι τρεις εξισώσεις F=mα.



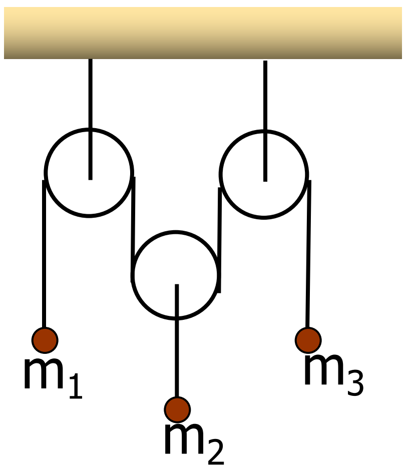
$$\sum F = m_1 a_1 = T - m_1 g \qquad \sum F = m_2 a_2 = T + T - m_2 g \qquad \sum F = m_3 a_3 = T - m_3 g$$

$$\Rightarrow \boxed{m_1 a_1 = T - m_1 g} \qquad \Rightarrow \boxed{m_2 a_2 = 2T - m_2 g} \qquad \Rightarrow \boxed{m_3 a_3 = T - m_3 g}$$

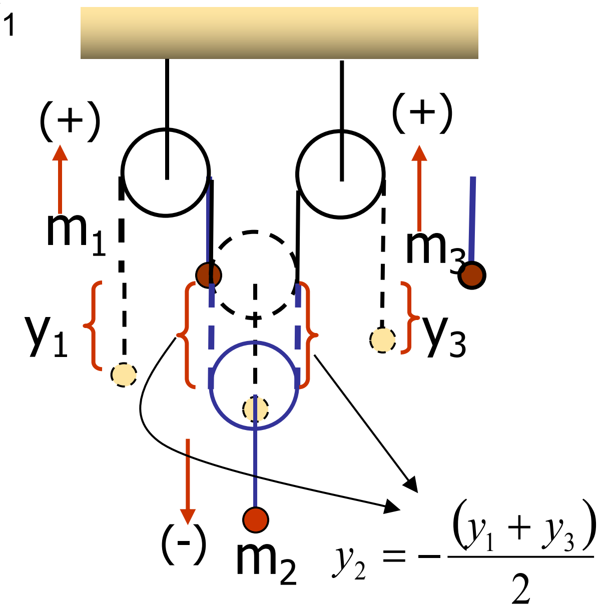
Τρεις εξισώσεις αλλά
με 4 αγνώστους: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, T$
1 ακόμα εξίσωση

Μηχανή Atwood με κινούμενη τροχαλία

(β) "Αρχή διατήρησης του νήματος" και η επιτάχυνση της μάζας m_2



- ✓ Έστω η μάζα m_1 κινείται κατά y_1 προς τα πάνω και η μάζα m_3 κινείται κατά y_3 προς τα πάνω.
- ➢ Το νήμα όμως δεν "χάνεται", άρα μήκος νήματος ίσο με y_1+y_3 πρέπει να εμφανιστεί στη μεσαία περιοχή.
- ✓ Αφού υπάρχουν 2 τμήματα νήματος, το καθένα θα πρέπει να επιμηκυνθεί κατά $(y_1+y_3)/2$.



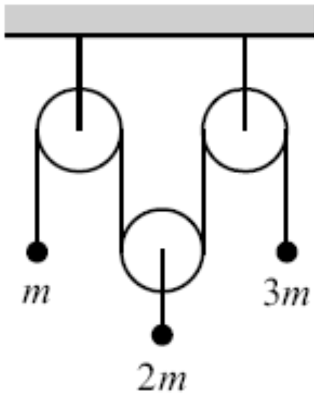
Η μάζα m_2 πηγαίνει προς τα κάτω κατά το ίδιο διάστημα y_2. Επομένως μπορούμε να βρούμε την επιτάχυνσή της.

$$a_2 = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy_2}{dt}\right) \Rightarrow a_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{d[-(y_1+y_3)/2]}{dt}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{dy_1}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{dy_3}{dt}\right)\right)$$

$$\boxed{a_2 = -\frac{(a_1 + a_3)}{2}}$$

Μηχανή Atwood με κινούμενη τροχαλία

(γ) Οι επιταχύνσεις των τριών μαζών και η τάση Τ του νήματος



Τώρα έχουμε 4 εξισώσεις με 4 αγνώστους:

$$a_1 = \frac{T - mg}{m} \quad (1)$$

$$a_2 = \frac{2T - 2mg}{2m} = \frac{T - mg}{m} \quad (2)$$

(1), (2) ⇒ $a_2 = a_1$ (5)

$$a_3 = \frac{T - 3mg}{3m} \quad (3)$$

$$a_2 = -\frac{a_1 + a_3}{2} \quad (4)$$

(5), (4) ⇒ $a_3 = -3a_1$ (6)

Από τις (6) και (3) έχουμε: $T = 3m(-3a_1) + 3mg \Rightarrow T = -m(9a_1 - 3g)$ (7)

Από τις (1) και (7) έχουμε: $a_1 = \frac{-m(9a_1 - 3g) - mg}{m} \Rightarrow 10ma_1 = 2mg \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{g}{5}}$

Αντικαθιστώντας στις (5),(6) και (7) $a_2 = \frac{g}{5}$ $\quad a_3 = -\frac{3g}{5}$ $\quad T = +\frac{6}{5}mg$

Δυνάμεις τριβής

Οι δυνάμεις αυτές είναι πολύ σημαντικές

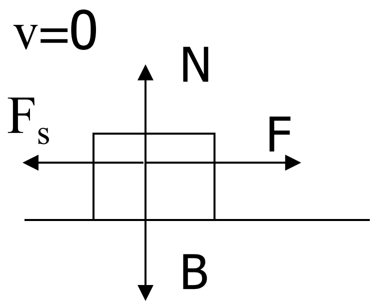
Σκεφθείτε πόσο δύσκολο είναι να περπατήσετε πάνω σε πάγο.

Η τριβή αναπτύσσεται μεταξύ 2 επιφανειών που έρχονται σε επαφή και η μία αρχίζει να κινείται σε σχέση με τη άλλη.

Η διεύθυνσή τους είναι αντίθετη της φοράς κίνησης

Δεν ξέρουμε τι ακριβώς συμβαίνει αλλά υπάρχουν μερικοί εμπειρικοί κανόνες

- **Στατική τριβή** $F_s \leq \eta_s N$



Η δύναμη της τριβής είναι ανάλογη της κάθετης δύναμης (αντίδρασης της επιφάνειας) και ανεξάρτητη της ταχύτητας ή του εμβαδού επαφής

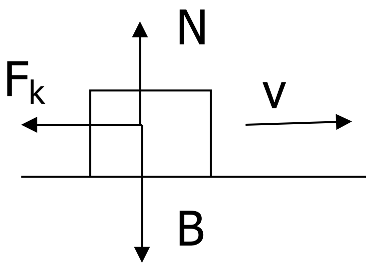
Η σταθερά η_s δίνει μια μέγιστη τιμή.

Προσοχή: η δύναμη της στατικής τριβής έχει οποιαδήποτε τιμή με μέγιστη τιμή: $n_s N$ που λαμβάνεται τι στιγμή που θα κινηθεί το σώμα

Η δύναμη F_s δεν θα 'ναι ίση με $\eta_s N$ αν τραβήξουμε με μια μικρή F

Δυνάμεις τριβής

- **Κινητική τριβή** $F_k = \eta_k N$



Η δύναμη της τριβής είναι ανάλογη της κάθετης δύναμης (αντίδρασης επιφάνειας) και ανεξάρτητη της ταχύτητας ή του εμβαδού επαφής (προσέγγιση)

Η σταθερά η_κ εξαρτάται από το είδος και των 2 επιφανειών σε επαφή

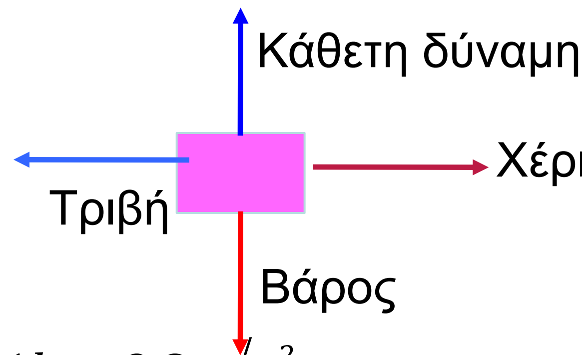
Οι προηγούμενοι εμπειρικοί νόμοι καλοί για τους σκοπούς μας.
Γενικά $\eta_\varsigma > \eta_\kappa$

Μπορούμε να κρατήσουμε κάτι που κινείται με μικρότερη δύναμη από αυτή που χρειάστηκε για να το θέσουμε σε κίνηση

Τριβή

- Ποιά δύναμη απαιτείται ώστε το σώμα να κινείται με <u>σταθερή ταχύτητα</u>. Η μάζα του βιβλίου είναι 1kg, ο συντελεστής στατικής τριβής η_s=0.84 και ο συντελεστής της κινητικής τριβής η_κ=0.75.

Σταθερή ταχύτητα ➡ $\sum \vec{F} = 0$



x-διεύθυνση

$$F_{\chi\varepsilon\rho.} - F_{\tau\rho.} = 0$$

$$F_{\chi\varepsilon\rho.} = F_{\tau\rho.}$$

$$F_{\chi\varepsilon\rho.} = \eta_\kappa F_{\kappa\alpha\theta.}$$

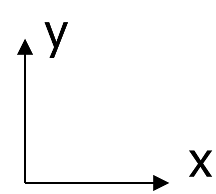
y-διεύθυνση

$$F_{\kappa\alpha\theta.} - F_{\beta\alpha\rho.} = 0$$

$$F_{\kappa\alpha\theta.} = F_{\beta\alpha\rho.} = mg$$

$$F_{\chi\varepsilon\rho.} = \eta_\kappa mg = 0.75 \times 1kg \times 9.8 m/s^2$$

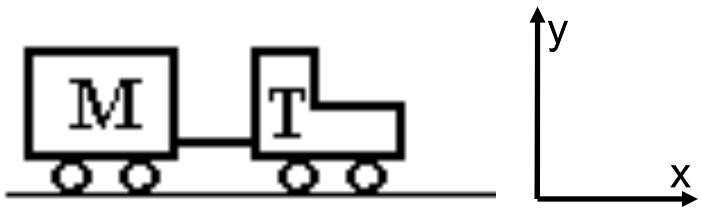
$$\Rightarrow F_{\chi\varepsilon\rho.} = 7.3N$$

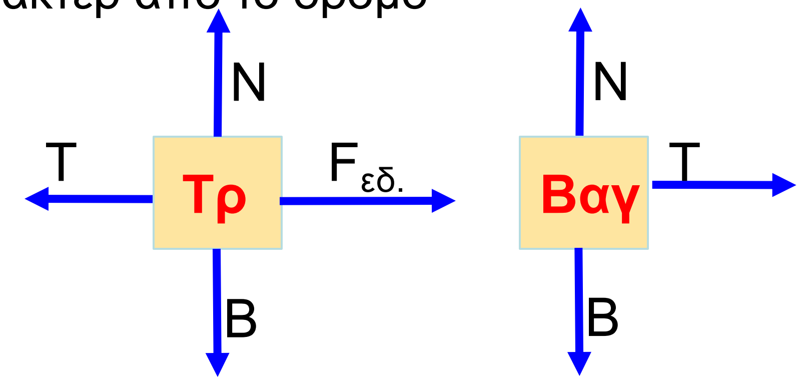


Παράδειγμα επιταχυνόμενης κίνησης

Ένα τρακτέρ Τ μάζας m_T=300Kg τραβά ένα βαγονάκι μάζας m_B=400kg με σταθερή δύναμη σε οριζόντιο δρόμο. Το σύστημα κινείται με σταθερή επιτάχυνση 1.5m/s^2.

- Να βρεθεί η οριζόντια δύναμη στο τρακτέρ από το δρόμο





x-διεύθυνση: Τρακτέρ

$$\sum F_x = m_T a \Rightarrow F_{\varepsilon\delta} - T = m_T a$$

$$\Rightarrow F_{\varepsilon\delta} = T + m_T a$$

x-διεύθυνση: Βαγονάκι

$$\sum F_x = m_B a \Rightarrow T = m_B a$$

$$\Rightarrow F_{\varepsilon\delta} = m_B a + m_T a \Rightarrow F_{\varepsilon\delta} = \left(m_B + m_T\right) a$$

- Να βρεθεί η καθαρή δύναμη που ασκείται στο τρακτέρ και στο βαγονάκι

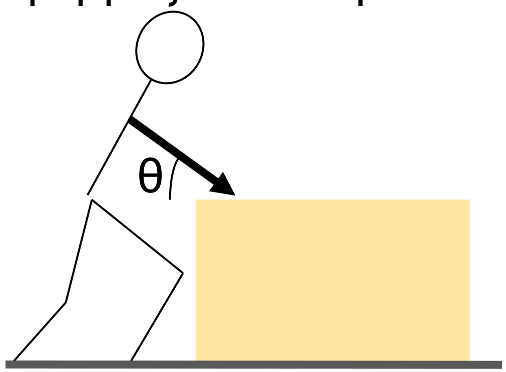
$$F_{\tau\rho.} = m_T a \Rightarrow F_{\tau\rho} = 300kg \times 1.5 m/s^2 = 450\text{N}$$

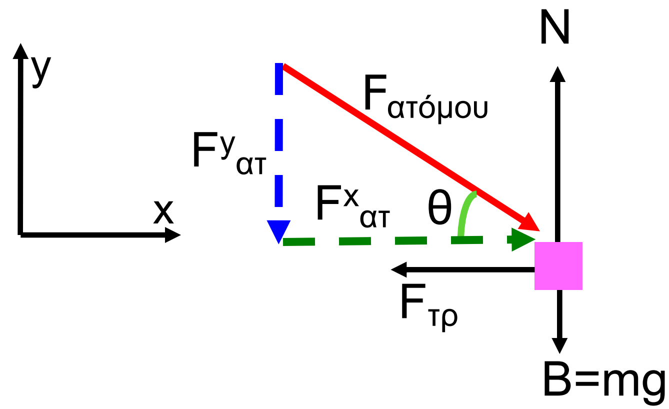
$$F_{\beta\alpha\gamma.} = m_B a \Rightarrow F_{\beta\alpha\gamma.} = 400kg \times 1.5 m/s^2 = 600\text{N}$$

Παράδειγμα δύναμης με γωνία

Ένα άτομο σπρώχνει ένα κιβώτιο μάζας 15kg με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος ενός δαπέδου. Ο συντελεστής κινητικής τριβής δαπέδου-κιβωτίου είναι $\eta_\kappa=0.4$. Το άτομο σπρώχνει το κιβώτιο με γωνία 25^o.

- Να βρεθεί η δύναμη που εφαρμόζει το άτομο





x-διεύθυνση:

$$\sum F_x = ma_x = 0 \quad \text{(υ=σταθ.)}$$

$$\Rightarrow F_{\alpha\tau}^x - F_{\tau\rho} = 0$$

$$F_{\alpha\tau}^x = F_{\alpha\tau}\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow F_{\alpha\tau}\cos(\theta) = F_{\tau\rho}$$

$$F_{\tau\rho.} = \eta_\kappa N$$

y-διεύθυνση:

$$\sum F_y = ma_y = 0$$

$$\Rightarrow N - B - F_{\alpha\tau}^y = 0$$

$$\Rightarrow N = B + F_{\alpha\tau}\sin(\theta)$$

$$\Rightarrow F_{\tau\rho.} = \eta_\kappa\left(B + F_{\alpha\tau}\sin(\theta)\right)$$

$$\Rightarrow F_{\alpha\tau}\left[\cos(\theta) - \eta_\kappa\sin(\theta)\right] = \eta_\kappa mg$$

$$\Rightarrow F_{\alpha\tau} = \frac{\eta_\kappa mg}{\left[\cos(\theta) - \eta_\kappa\sin(\theta)\right]}$$

Η κάθετη δύναμη είναι μεγαλύτερη από το βάρος