Τί είδαμε και τι θα δούμε σήμερα

- Κίνηση 2 σωμάτων σε κεντρικό δυναμικό
  - Το πρόβλημα ανάγεται σε κίνηση με 1 DoF: $\mu\ddot{r} = \dfrac{l^2}{\mu r^3} + F(r)$
- Είδαμε ποιοτική συμπεριφορά
  - Μη φραγμένες, φραγμένες και κυκλικές τροχιές
  - Συνθήκες για κυκλικές τροχιές

$$V_{eff}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

- Εξάγαμε την εξίσωση τροχιάς για την περίπτωση δυναμικού Kepler
  - Τροχιές κωνικής τομής εξαρτώνται από Ε

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}\cos(\theta - \theta')\right)$$

Τι θα δούμε σήμερα

- Θεώρημα Virial ή θεώρημα ισχυρότητας
- Το πρόβλημα της σκέδασης
  - Τι συμβαίνει όταν ένα σώμα «σκεδάζεται»
- Ορισμός ενεργού διατομής σκέδασης
  - Πόσο συχνά ένα σωματίδιο σκεδάζεται σε μια διεύθυνση
  - Υπολογισμός από το δυναμικό
- Εφαρμογές
  - Δύναμη $1/r^2$ – Σκέδαση Rutherford
  - Σκέδαση ουράνιου τόξου

Θεώρημα Virial

- Έστω ένα κλειστό σύστημα N σωμάτων με διανύσματα θέσης $\vec{r}_a$ και ορμής $\vec{p}_a$ η κίνηση του οποίου είναι φραγμένη
- Ορίζουμε την ποσότητα: $S \equiv \sum_{a=1}^{N} \vec{r}_a \cdot \vec{p}_a$
- Η χρονική παράγωγος είναι: $\dfrac{dS}{dt} = \sum_{a=1}^{N}\left(\dot{\vec{r}}_a \cdot \vec{p}_a + \vec{r}_a \cdot \dot{\vec{p}}_a\right) \Rightarrow \dfrac{dS}{dt} = \sum_{a=1}^{N} \dot{\vec{r}}_a \cdot \vec{p}_a + \sum_{a=1}^{N} \vec{r}_a \cdot \dot{\vec{p}}_a$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{a=1}^{N} \dot{\vec{r}}_a \cdot \vec{p}_a = \sum_{a=1}^{N} m_a \dot{\vec{r}}_a \cdot \dot{\vec{r}}_a \Rightarrow \sum_{a=1}^{N} \dot{\vec{r}}_a \cdot \vec{p}_a = \sum_{a=1}^{N} m_a \upsilon_a^2 \Rightarrow \sum_{a=1}^{N} \dot{\vec{r}}_a \cdot \vec{p}_a = 2T \\ \sum_{a=1}^{N} \vec{r}_a \cdot \dot{\vec{p}}_a = \sum_{a=1}^{N} \vec{r}_a \cdot \vec{F}_a \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 2T + \sum_{a=1}^{N} \vec{r}_a \cdot \vec{F}_a$$

- Η μέση τιμή της ποσότητας αυτής ως προς ένα χρονικό διάστημα τ:

$$\left\langle \frac{dS}{dt} \right\rangle \equiv \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \frac{dS}{dt} dt = \frac{S(\tau) - S(0)}{\tau} \Rightarrow \left\langle \frac{dS}{dt} \right\rangle = \langle 2T \rangle + \left\langle \sum_{a}^{N} \vec{r}_a \cdot \vec{F}_a \right\rangle$$

- Για περιοδικό σύστημα με περίοδο T και αν $\tau = T$ $\quad \Rightarrow \left\langle \dfrac{dS}{dt} \right\rangle = 0$
- Εν γένει αφού $\vec{r}_a$ και $\vec{p}_a$ πεπερασμένα ➡ S πεπερασμένη ➡ $\left\langle \dfrac{dS}{dt} \right\rangle \underset{\tau \to \infty}{=} 0$

Θεώρημα Virial

Θεωρώντας την μέση τιμή ως προς μεγάλο χρονικό διάστημα τ, έχουμε:

$$\Rightarrow \langle 2T \rangle + \left\langle \sum_{a=1}^{N} \vec{r}_a \cdot \vec{F}_a \right\rangle = 0 \Rightarrow \langle 2T \rangle = -\left\langle \sum_{a=1}^{N} \vec{r}_a \cdot \vec{F}_a \right\rangle \boxed{\Rightarrow \langle T \rangle = -\frac{1}{2}\left\langle \sum_{a=1}^{N} \vec{r}_a \cdot \vec{F}_a \right\rangle}$$

Θεώρημα Virial

Θεώρημα Virial του Clausius: Η μέση κινητική ενέργεια ενός συστήματος ισούται με την ισχυρότητά του (viria: ο όρος στο δεξί μέλος της εξίσωσης)

Αν οι δυνάμεις προέρχονται από δυναμικό: $\vec{F} = -\vec{\nabla} V \;\; \Rightarrow \langle T \rangle = \frac{1}{2}\left\langle \sum_{a=1}^{N} \vec{\nabla} V \cdot \vec{r}_a \right\rangle$

Για ένα σώμα σε κεντρικό δυναμικό: $\langle T \rangle = \frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial V}{\partial r} r \right\rangle$

Για κεντρικό δυναμικό της μορφής: $V = ar^{n+1}$

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2}\left\langle (n+1) a r^n r \right\rangle$$

$$\Rightarrow \langle T \rangle = \frac{(n+1)}{2}\langle V \rangle$$

- Στην ειδική περίπτωση: $n = -2 \Rightarrow \langle T \rangle = -\frac{\langle V \rangle}{2}$

- Η ενέργεια του συστήματος: $E = \langle T \rangle + \langle V \rangle$

για κεντρικό δυναμικό $E = \frac{2}{(n+1)}\langle T \rangle + \langle T \rangle \Rightarrow E = \frac{(n+3)}{(n+1)}\langle T \rangle = \frac{(n+3)}{2}\langle V \rangle$

Θεώρημα Virial

Θα μπορούσαμε θεωρώντας την δράση να καταλήξουμε στο θεώρημα Virial

$$S=\int_0^\tau L\,dt \Rightarrow S=\int_0^\tau\left[\sum_{a=1}^N\left(\frac{m_a}{2}\left(\frac{d\vec r_a}{dt}\right)^2-V(\vec r_a)\right)\right]dt$$

Έστω τροχιές της μορφής: $k\vec r_a$

$$S'=\int_0^\tau\left[\sum_{a=1}^N\left(\frac{m_a}{2}k^2\left(\frac{d\vec r_a}{dt}\right)^2-V(k\vec r_a)\right)\right]dt$$

Αλλά $\dfrac{\partial S'}{\partial k}=0$ όταν $k=1$

$$\left.\frac{\partial S'}{\partial k}\right|_{k=1}=0=\int_0^\tau\left[\sum_{a=1}^N m_a k\left(\frac{d\vec r_a}{dt}\right)^2-\sum_{a=1}^N\frac{\partial V}{\partial(k\vec r_a)}\cdot\frac{\partial(k\vec r_a)}{\partial k}\right]dt=0$$

$$\Rightarrow\int_0^\tau\left[\sum_{a=1}^N m_a\left(\frac{d\vec r_a}{dt}\right)^2-\sum_{a=1}^N\frac{\partial V}{\partial(\vec r_a)}\cdot\vec r_a\right]_{k=1}dt=0\ \Rightarrow\int_0^\tau\left[\sum_{a=1}^N 2T_a-\sum_{a=1}^N\frac{\partial V}{\partial(\vec r_a)}\cdot\vec r_a\right]dt=0$$

$$\Rightarrow\int_0^\tau 2T\,dt=\int_0^\tau\sum_{a=1}^N\vec r_a\cdot\frac{\partial V}{\partial\vec r_a}dt$$

Αλλά $\langle T\rangle=\int_0^\tau T\,dt$

$$2\langle T\rangle=\left\langle\sum_{a=1}^N\vec r_a\cdot\frac{\partial V}{\partial\vec r_a}\right\rangle$$

Θεώρημα Virial και ο νόμος των ιδανικών αερίων

Έστω κάποιο αέριο αποτελούμενο από N άτομα περιορισμένα σε όγκο V και έστω ότι το αέριο βρίσκεται σε θερμοκρασία T.

Η μέση κινητική ενέργεια κάθε ατόμου ισούται με: $\frac{3}{2}kT$ k=σταθ. Boltzmann

Επομένως η κινητική ενέργεια όλων των ατόμων θα είναι: $\langle T \rangle = \frac{3}{2}NkT$ (1)

- Ιδανικό αέριο είναι αυτό που οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης $F^{(\alpha)}$ συνεισφέρουν ελάχιστα στην ισχυρότητα
- Οι δυνάμεις στα άτομα του αερίου: $F^{(\delta)} + F^{(a)}$
  - $F^{(\delta)}$ δυνάμεις σύγκρουσης ατόμων–τοιχωμάτων ⇒ πίεση P

$$\left\langle \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(\delta)} \right) \cdot \vec{r}_i \right\rangle \Rightarrow \left\langle \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(\delta)} \cdot \vec{r}_i \right\rangle \Rightarrow \left\langle \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle = \left\langle -\sum_{i=1}^{N} P dA \hat{n} \cdot \vec{r}_i \right\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle = -P \int \hat{n} \cdot \vec{r}\, dA$$

- Από το θεώρημα virial έχουμε: $\langle T \rangle = -\left\langle \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle = \frac{P}{2} \int \hat{n} \cdot \vec{r}\, dA$
- Από το θεώρημα Gauss έχουμε: $\int \hat{n} \cdot \vec{r}\, dA = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{r}\, dV = 3V$

$$\langle T \rangle = -\frac{3PV}{2}$$

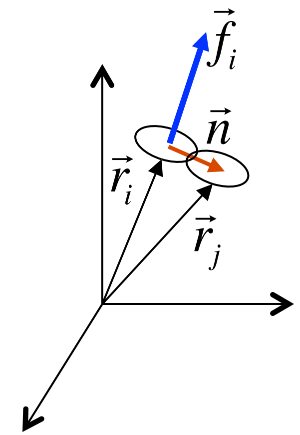
- Χρησιμοποιώντας την (1): $\frac{3}{2}NkT = \frac{3PV}{2}$ $\boxed{\Rightarrow NkT = PV}$

Νόμος ιδανικών αερίων του Boyle

Θεώρημα virial – σύστημα με δυνάμεις τριβής

Έστω σύστημα το οποίο οι δρώσες δυνάμεις στα διάφορα σωματίδια που το αποτελούν απαρτίζονται από συντηρητικές δυνάμεις F_i' και δυνάμεις τριβής $f_i \propto \upsilon$. Στην περίπτωση αυτή το θεώρημα virial ισχύει με την μορφή $\langle T \rangle = -\frac{1}{2}\left\langle \sum_i \vec{F}_i' \cdot \vec{r}_i \right\rangle$ με την προϋπόθεση ότι η κίνηση φθάνει σε μια σταθερή κατάσταση και δεν αφήνεται να σταματήσει εξαιτίας των δυνάμεων τριβής

- Έχουμε: $\vec{F} = \vec{F}' + \vec{f}$
- Το θεώρημα virial γίνεται: $\langle T \rangle = -\frac{1}{2}\left\langle \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \sum_i \vec{f}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle$
- Ο 2ος όρος μπορεί να γραφεί: $\frac{1}{2}\left\langle \sum_i \vec{f}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \sum_i \mu \vec{n}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle$
- $\vec{n}$ το διάνυσμα που ενώνει τα CM 2 σωματιδίων με αλληλεπίδραση τριβής



- Για κάθε σωματίδιο i και $\vec{n}_i$ θα υπάρχει ένα $-\vec{n}_i = \vec{n}_j$ για το σωματίδιο j
- Άρα: $\left\langle \sum_i \mu \vec{n}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle = 0$ και το θεώρημα virial γίνεται: $\langle T \rangle = -\frac{1}{2}\left\langle \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle$

Μονοδιάστατα συστήματα

- Όλα τα μονοδιάστατα συστήματα είναι επιλύσιμα:
- Θεωρήστε ένα μονοδιάστατο σύστημα που περιγράφεται $L = L(q,\dot{q})$
  - Η lagrangian είναι ανεξάρτητη του χρόνου
  - Η ενέργεια $E = H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L$ σταθερή
  - Η εξίσωση κίνησης $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \dot{E} = 0$
  - Αυτό γιατί $L = T - V$ και $E = T + V$ ενώ $\frac{dL}{dt} = 0$
  - Βοηθά να βρούμε την λύση του προβλήματος
- Θεωρήστε σύστημα που περιγράφεται από την $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$
- Η ενέργεια επομένως θα είναι: $E = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + V(q) \Rightarrow \dot{q} = \pm\sqrt{2(E - V(q))}$
  - Η εξίσωση αυτή προσδιορίζει πλήρως την λύση

$$\frac{dq}{dt} = \pm\sqrt{2(E-V)} \Rightarrow dt = \pm\frac{dq}{\sqrt{2(E-V)}} \Rightarrow t = \pm\int\frac{dq}{\sqrt{2(E-V)}}$$

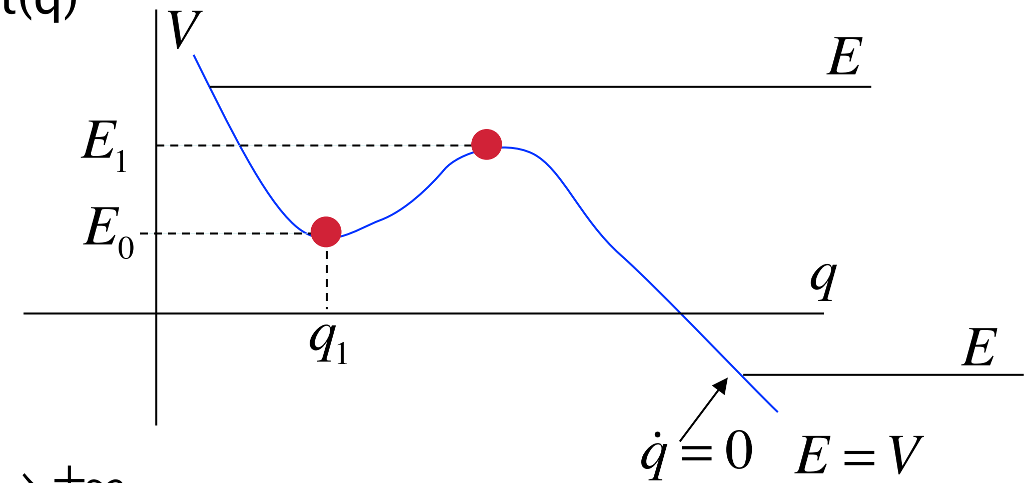
Μονοδιάστατα συστήματα

$$t = \pm\int_{q_0}^{q_1} \frac{dq}{\sqrt{2\left(E - V(q)\right)}}$$

Όχι πάντοτε επιλύσιμο

Μερικές φορές δεν μπορούμε να βρουμε την q(t) απο την t(q)

- Μπορούμε να μαντέψουμε την δυναμική του συστηματος από
  $$\dot{q} = \pm\sqrt{2\left(E - V(q)\right)}$$



$E < E_0$ $\quad q \to \infty$ όταν $t \to \pm\infty$

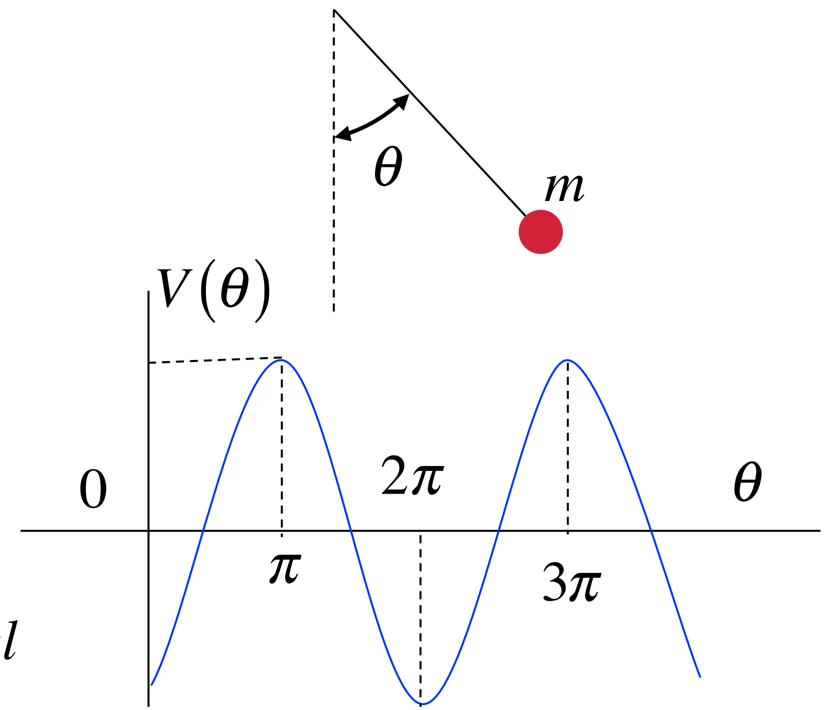
$E_1 > E > E_0$ $\quad$ είτε $q \to \infty$ όταν $t \to \pm\infty$

ή ταλαντώνεται ως προς το q_1

Το πλάτος της ταλάντωσης εξαρτάται από την ενέργεια E_1

$E > E_1$ $\quad q \to \infty \quad t \to \pm\infty$

Μονοδιάστατα συστήματα



- Ας θεωρήσουμε το εκκρεμές

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

- Ευσταθή σημεία ισορροπίας

$$\theta = 2n\pi$$

- Ασταθή σημεία ισορροπίας

$$\theta = (2n+1)\pi$$

- Αν η ενέργεια έχει τιμές $mgl > E > -mgl$
  - Ταλάντωση ως προς ευσταθές σημείο
- Αν η ενέργεια έχει τιμές $E > mgl$
  - Θ θα είναι μονότονη: θα αυξάνει ή θα ελαττώνεται

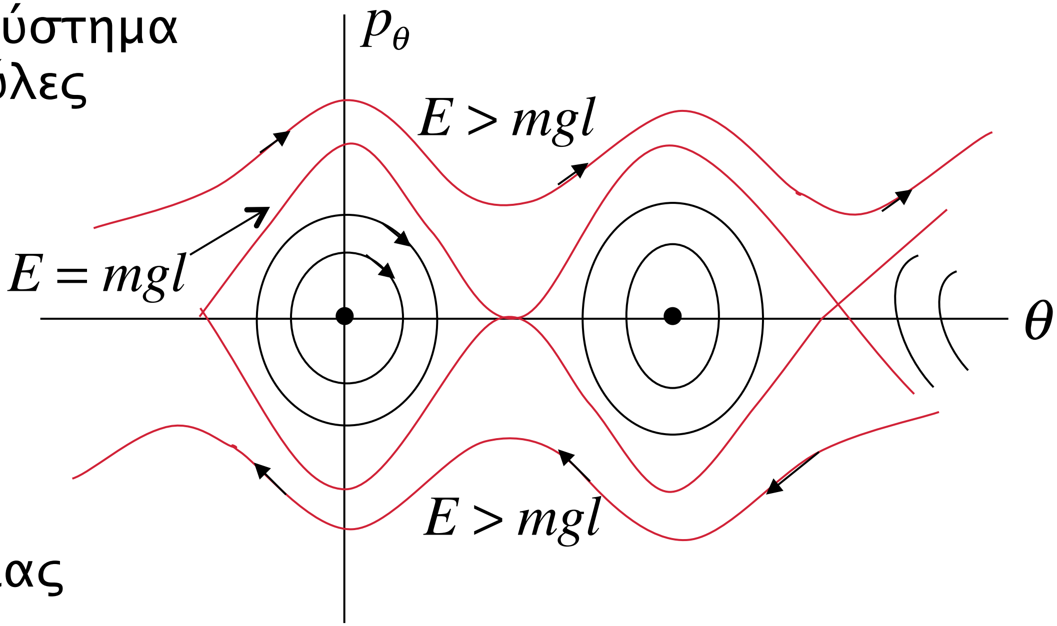
    το εκκρεμές θα περιστρέφεται πάντοτε

Φασικός χώρος – phase space

- Χρήσιμο να περιγράψουμε την δυναμική στο φασικό χώρο
- Για το εκκρεμές αυτό θα είναι ένα επίπεδο θ, p_θ
- Η ενέργεια είναι σταθερή, το σύστημα θα κινείται σε σταθερές καμπύλες
- Για το εκκρεμές:

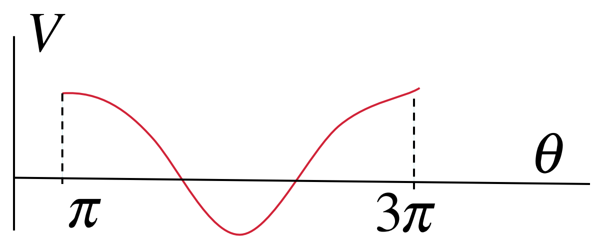
$$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$$

$$\Rightarrow E = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta$$



- Φασικός χώρος (θ,p_θ):
  - καμπύλες σταθερής ενέργειας
  - Όταν $-mgl < E < mgl$ κλειστές καμπύλες −π<θ<π
  - Όταν $E = -mgl$ σημείο p_θ=0,θ=0 δεν υπάρχει ταλάντωση
  - Όταν $E > mgl$ ανοικτές καμπύλες
    p_θ>0 περιστροφή δεξιόστροφα
    p_θ<0 περιστροφή αριστερόστροφα
  - Για $E = mgl$ μια καμπύλη διαχωριστική

Φασικός χώρος



- Στην διαχωριστική καμπύλη

  Το εκκρεμές είναι ανάποδα

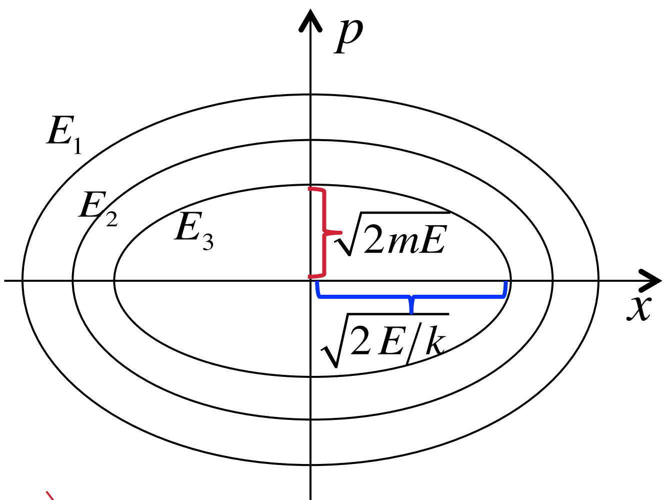
  θα κυλήσει προς τα κάτω και θα πάρει άπειρο χρόνο για να ανέβει

  Μπορείτε από το ολοκλήρωμα του χρόνου να δείτε ότι απειρίζεται για να βρεθεί και πάλι στην θέση ανάποδα

- Κοντά σε σημείο ευσταθούς ισορροπίας
  - Αρμονικός ταλαντωτής: $\mathcal{H} = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{k}{2}x^2$

$\mathcal{H} = E$ οπότε: $E = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{x^2}{2/k} \Rightarrow 1 = \dfrac{p^2}{2mE} + \dfrac{x^2}{2E/k}$

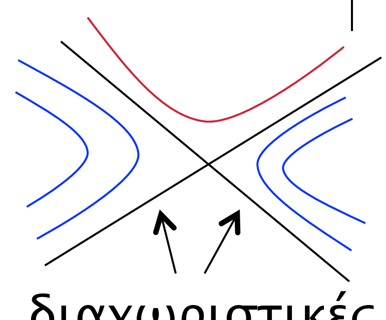
έλειψη:



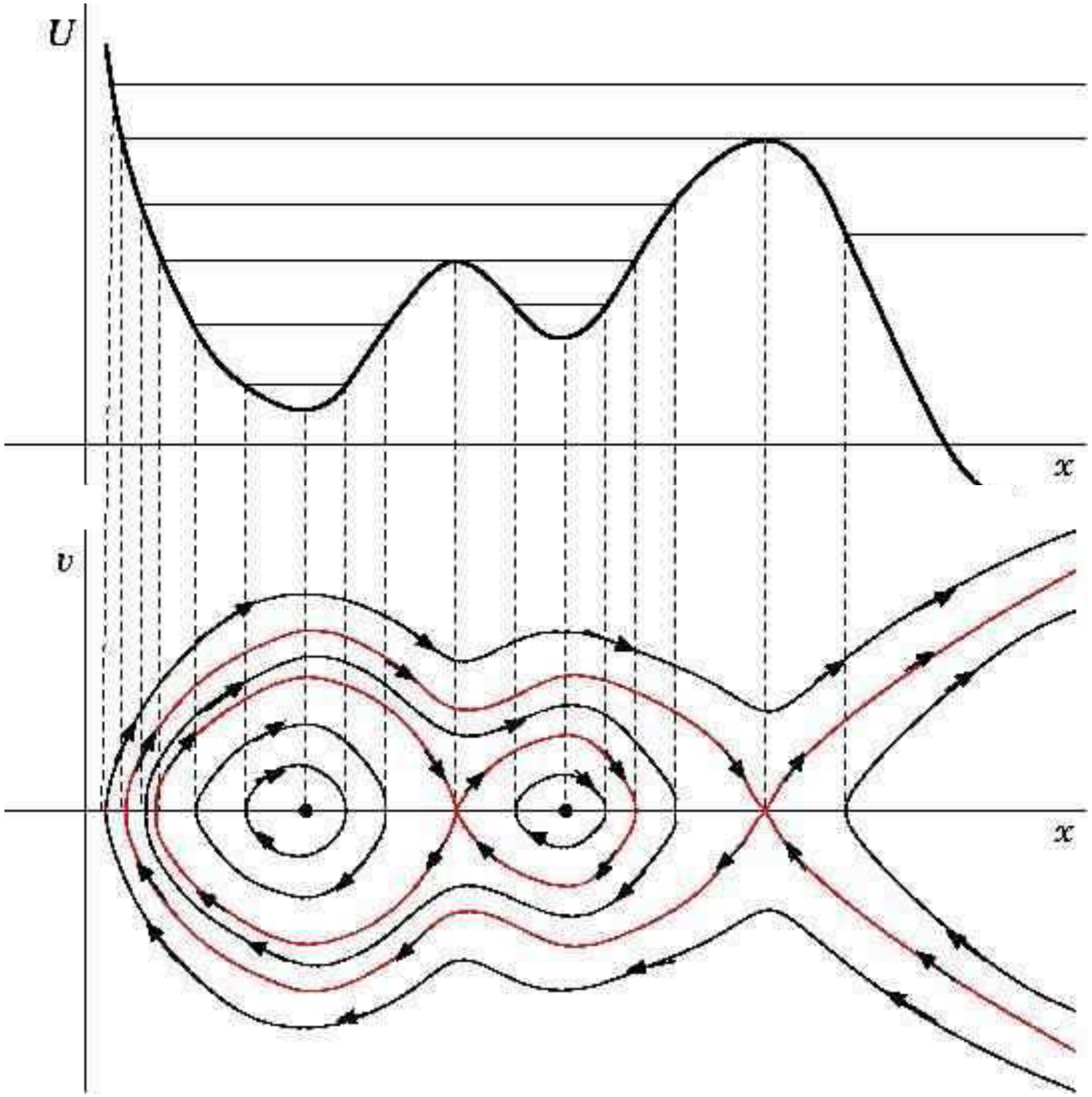
Μεγάλος ημιάξονας: $\sqrt{2E/k}$

Μικρός ημιάξονας: $\sqrt{2mE}$

- Κοντά σε σημεία ασταθούς ισορροπίας
  - Υπερβολές



Κατασκευή φασικών γραμμών - παράδειγμα



Φασικός χώρος - Παράδειγμα

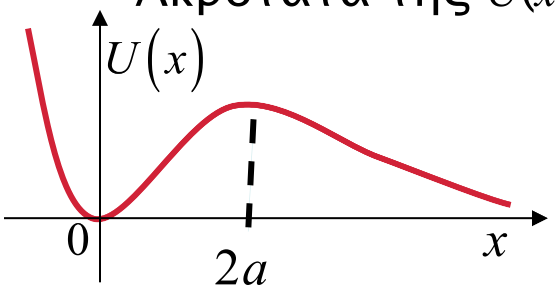
Σωματίδιο κινείται σε δυναμικό της μορφής: $U(x) = U_0 \dfrac{x^2}{a^2} e^{-x/a}$

(α) Να κατασκευαστεί το γράφημα του δυναμικού

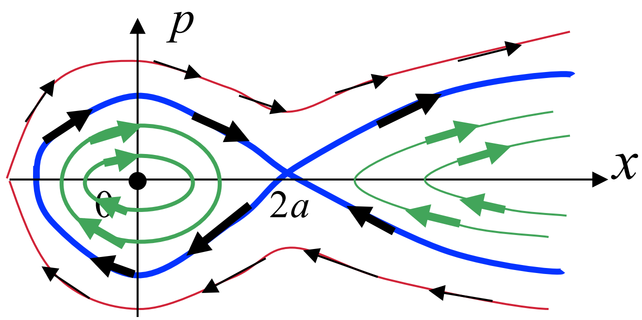
(β) Να κατασκευαστεί το γράφημα των αντιπροσωπευτικών καμπυλών στο φασικό χώρο. Να βρεθούν τα πιθανά σταθερά σημεία και η ενέργεια των διαχωριστικών καμπυλών

(α) Για $x \to +\infty$ $U(x) \to 0$ ενώ για $x \to -\infty$ $U(x) \to \infty$

Ακρότατα της $U(x)$ για $\dfrac{dU(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \dfrac{U_0}{a^2}\left(2x - \dfrac{x^2}{a}\right)e^{-x/a} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{ελάχιστο} \\ x = 2a & \text{μέγιστο} \end{cases}$



(β) Τα τοπικά ακρότατα δημιουργούν κέντρα στο επίπεδο (x,p).



Σταθερό σημείο στο $x = 0$ και ασταθές στο $x = 2\alpha$

Ενέργεια διαχωριστικής καμπύλης $E = U(x = 2a)$

Λύση του ολοκληρώματος

- Μπορούμε να βρούμε τον χρόνο για να πάει από ένα σημείο σε άλλο

$$t(q_0, q_1) = \pm \int_{q_0}^{q_1} \frac{dq}{\sqrt{2(E - V)}}$$

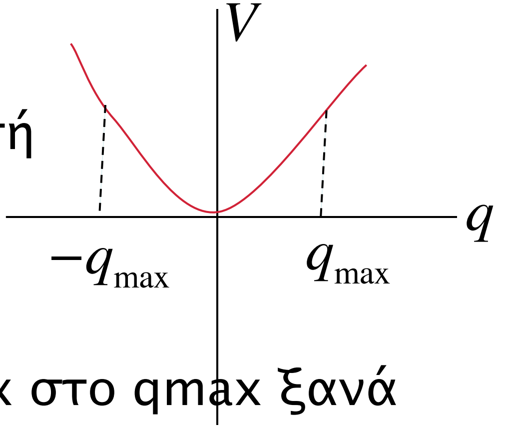
- Για απλό αρμονικό ταλαντωτή ο χρόνος για μια ταλάντωση ο χρόνος είναι ανεξάρτητος του πλάτους

- Για το εκκρεμές η περίοδος εξαρτάται από το πλάτος
  - Πολύ κοντά στο σημείο ευσταθούς ισορροπίας μοιάζει με αρμονικό ταλαντωτή

Λύση του ολοκληρώματος $t(q_0,q_1)=\pm\int_{q_0}^{q_1}\frac{dq}{\sqrt{2(E-V)}}$

- Θεωρούμε την Lagrangian $L=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta$
- Αναπτύσουμε το cosθ $\cos\theta=1-\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{24}\theta^4+\cdots$
- Οι 3 αυτοί όροι ορίζουν τον αναρμονικό ταλαντωτή

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2-V(q)\qquad V(q)=\frac{1}{2}q^2+\frac{\varepsilon}{4}q^4$$



- Ο χρόνος που απαιτείται για να πάει από το qmax στο qmax ξανά

$$T=4\int_0^{q_{\max}}\frac{dq}{\sqrt{2\left(E-\frac{1}{2}q^2-\frac{\varepsilon}{4}q^4\right)}}\qquad \text{όπου}\quad E=\frac{1}{2}q_{\max}^2+\frac{\varepsilon}{4}q_{\max}^4$$

Η περίοδος εξαρτάται από το q_{max}

- Το ολοκλήρωμα: $x=\frac{q}{q_{\max}}$ $\Rightarrow T=4\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{\left((1-x^2)+\frac{\varepsilon q_{\max}^2}{2}(1-x^4)\right)}}$

Αναρμονικός ταλαντωτής

- Για μικρά ε αναπτύσουμε κατά Taylor:

$$T = 4\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)}}\left(1-\frac{\varepsilon'}{2}\left(1+x^2\right)+\cdots\right) \quad \text{όπου} \quad \varepsilon' = \varepsilon\frac{q^2_{\max}}{2}$$

- Θέτουμε $x = \sin u$

$$T = 4\int_0^{\pi/2} du\left(1-\frac{\varepsilon'}{2}\left(1+\sin u^2\right)+\cdots\right)$$

$$\Rightarrow T = 2\pi - 2\varepsilon'\left(\frac{3}{2}\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi\left(1-\frac{3}{4}\varepsilon'+\cdots\right)$$

- Αν ε>0 η περίοδος γίνεται μικρότερη του απλού αρμονικου ταλαντωτή
- Αν ε<0 η περίοδος γίνεται μεγαλύτερη
- Για το εκκρεμές $\varepsilon = -1/6$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\left(1+\frac{\theta^2_{\max}}{16}+\cdots\right)$$

Φασικός χώρος – phase space

- Αν σωματίδιο βρίσκεται σε κάποιο σημείο (q_0,p_0) σε μια χρονική στιγμή, η κίνησή του προσδιορίζεται σε όλες τις χρονικές στιγμές
  - Οι Hamiltonian εξισώσεις προσδιορίζουν τα $\dot{q}$ και $\dot{p}$
  - και αυτά προσδιορίζουν τα q και p την επόμενη χρονική στιγμή κλπ
- Χρονοεξελίσουμε έτσι το σύστημα λαμβάνοντας έτσι (q_0,p_0) και $(\dot{q},\dot{p})$
- Οι αρχικές συνθήκες με τις εξισώσεις Hamilton προσδιορίζουν πλήρως την διαδρομή του συστήματος στο φασικό χώρο

- Οι εξισώσεις του Hamilton μας λένε την διεύθυνση κίνησης του συστήματος στον φασικό χώρο
  - Έστω σωματίδιο κινείται στο φασικό χώρο και η Hamiltonian διατηρείται – ανεξάρτητη του χρόνου (επομένως οι επιφάνειες είναι σταθερές)
  - Έστω $\hat{q}$ και $\hat{p}$ τα μοναδιαία διανύσματα στις διευθύνσεις q και p

$$\vec{\nabla}_{qp}\mathcal{H} = \hat{q}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q} + \hat{p}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}$$

Η εξέλιξη της θέσης του συστήματος στο φασικό χώρο: $\hat{q}\dot{q} + \hat{p}\dot{p} = \hat{q}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} - \hat{p}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}$

Από τις 2 σχέσεις: $\vec{\nabla}_{qp}\mathcal{H}\cdot\left(\hat{q}\dot{q} + \hat{p}\dot{p}\right) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}_{qp}\mathcal{H} \perp \left(\hat{q}\dot{q} + \hat{p}\dot{p}\right)$

Φασικός χώρος – phase space

- Ένας 2-Ν διαστατικός χώρος με άξονες $\{q_k\}$ και $\{p_k\}$.
  - Χρήσιμος στην Hamiltonian δυναμική:
    - ✓ $\{q_k\}$ και $\{p_k\}$ είναι οι βαθμοί ελευθερίας
    - ✓ Οι εξισώσεις Hamilton συνδέουν χρονικές παραγώγους των συντεταγμένων με μερικές παραγώγους της Hamiltonian στον φασικό χώρο
- Η Hamiltonian είναι ένα σύνολο επιφανειών στο φασικό χώρο
  - Για κάθε επιφάνεια αντιστοιχεί διαφορετική αλλά σταθερή τιμή της Hamiltonian
- Οι εξισώσεις του Hamilton μας λένε την διεύθυνση κίνησης του συστήματος στον φασικό χώρο
  - Έστω σωματίδιο κινείται στο φασικό χώρο και η Hamiltonian διατηρείται – ανεξάρτητη του χρόνου (επομένως οι επιφάνειες είναι σταθερές)
  - Έστω $\hat{q}$ και $\hat{p}$ τα μοναδιαία διανύσματα στις διευθύνσεις q και p

$$\vec{\nabla}_{qp}\mathcal{H} = \hat{q}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} + \hat{p}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}$$

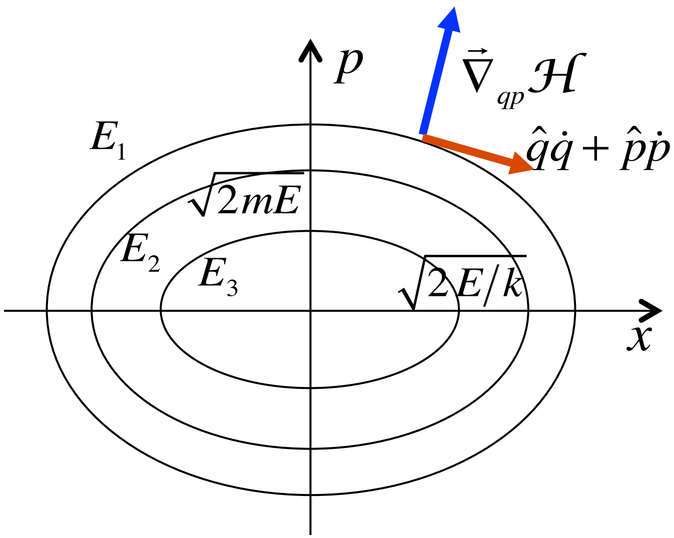
Η εξέλιξη της θέσης του συστήματος στο φασικό χώρο: $\hat{q}\dot{q} + \hat{p}\dot{p} = \hat{q}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} - \hat{p}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}$

Από τις 2 σχέσεις: $\vec{\nabla}_{qp}\mathcal{H}\cdot\left(\hat{q}\dot{q} + \hat{p}\dot{p}\right) = 0 \;\Rightarrow \vec{\nabla}_{qp}\mathcal{H} \perp \left(\hat{q}\dot{q} + \hat{p}\dot{p}\right)$

Φασικός χώρος – phase space

- Έστω απλός αρμονικός ταλαντωτής: $\mathcal{H} = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{k}{2}x^2 = E$

  Γράφημα στο φασικό χώρο: $\dfrac{p^2}{2mE} + \dfrac{x^2}{2E/k} = 1$ ← έλειψη:



Μεγάλος ημιάξονας: $\sqrt{2E/k}$

Μικρός ημιάξονας: $\sqrt{2mE}$

- Για περισσότερες από 2-Δ:

$$\vec{\nabla}_{qp}\mathcal{H} = \sum_k \left[\hat{q}_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} + \hat{p}_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \right]$$

$$\sum_k \left[\hat{q}_k \dot{q}_k + \hat{p}_k \dot{p}_k \right] = \sum_k \left[\hat{q}_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} - \hat{p}_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \right]$$

$$\vec{\nabla}_{qp}\mathcal{H} \cdot \sum_k \left[\hat{q}_k \dot{q}_k + \hat{p}_k \dot{p}_k \right] = 0$$

προβολή σε κάποιο q_k-p_k επίπεδο

προβολή σε κάποιο q_k-p_k επίπεδο

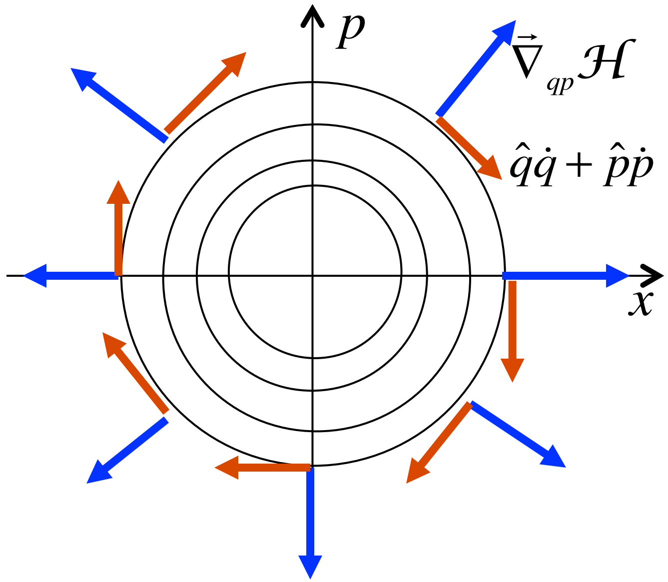
κάθετες μεταξύ τους

- Ένα σύστημα σωμάτων κινείται σαν ένα «υγρό» ή «αέριο» στο χώρο φάσεων

Φασικός χώρος – phase space

- Έστω ο αρμονικός ταλαντωτής έχει συχότητα 1 : $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2} = E \Rightarrow$

Γράφημα στο φασικό χώρο: $\frac{p^2}{2E} + \frac{x^2}{2E} = 1$ ← κύκλος ακτίνας $\sqrt{2E}$



$$(\dot{q},\dot{p}) = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\right) = (p, -q)$$

Η ροή της κλίσης της Hamiltonian ή ροή της Hamiltonian

Η δυναμική είναι «ροή»

Φασικός χώρος – Θεώρημα Liouville

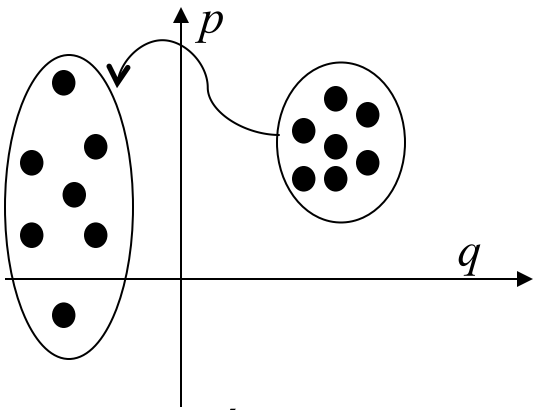
- Όχι μόνο το σύστημα σωμάτων μοιάζει σαν «υγρό» αλλά και η ροή του είναι ασυμπίεστη.
- Η πυκνότητα του φασικού χώρου είναι σταθερή κατά μήκος των τροχιών των σωματιδίων

$$\frac{d\rho}{dt}\left(\{q_k\},\{p_k\},t\right)=0$$

- Λέει ότι οποιεσδήποτε είναι οι δυναμικές συντεταγμένες (q,p) δεν δεν μπορούμε να συμπιέσουμε μια κατανομή του φασικού χώρου σε μικρότερη περιοχή του φασικού χώρου
  - Για δυνάμεις τριβής το θεώρημα παραβιάζεται
- Το εμβαδό μιας περιοχής του φασικού χώρου ΔΑ=ΔqΔp, διατηρείται καθώς το σύστημα χρονοεξελίσεται

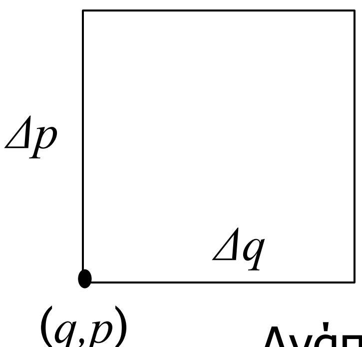
Φασικός χώρος – Θεώρημα Liouville

- Έστω ένα σύνολο από αρχικές καταστάσεις. Θέλουμε να ξέρουμε πως θα εξελιχθεί χρονικά .



Liouville: το εμβαδό της N–διαστατικής επιφάνειας σε χώρο των φάσεων παραμένει σταθερό

- Θεωρήστε 2–Δ και η επιφάνεια είναι ένα τετράγωνο
  - Χρονική εξέλιξη των πλευρών του τετραγώνου:



$$(q,p)\to\left(q+\mathcal{H}_p dt,\, p-\mathcal{H}_q dt\right)$$ όπου $\mathcal{H}_p=\dot{q}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}$ και $\mathcal{H}_q=\dot{p}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}$

$$(q+\Delta q,p)\to\left(q+\Delta q+dt\left(\boxed{\mathcal{H}_p+\mathcal{H}_{pq}\Delta q}\right),\, p-\left(\mathcal{H}_q+\mathcal{H}_{qq}\Delta q\right)dt\right)$$

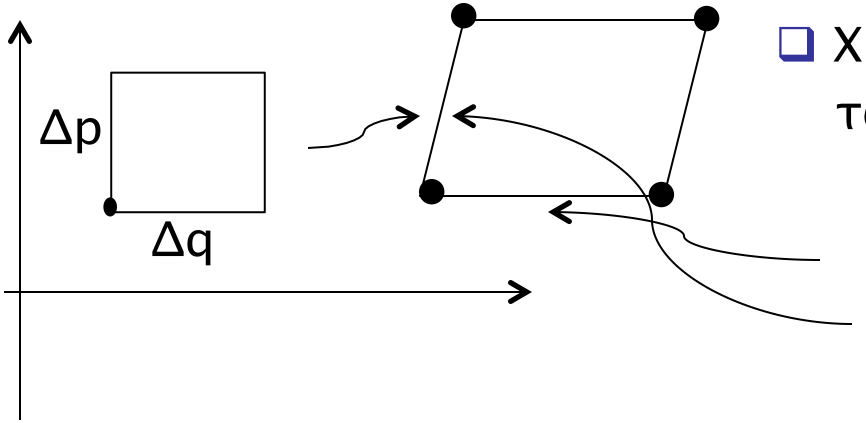
Ανάπτυγμα Taylor του $\mathcal{H}_p\big|_{q=q+\Delta q}=\mathcal{H}_p\big|_{q=q}+\left.\frac{\partial\mathcal{H}_p}{\partial q}\right|_{q=q}\Delta q=\mathcal{H}_p\big|_{q=q}+\mathcal{H}_{pq}\big|_{q=q}\Delta q$

$$(q,p+\Delta p)\to\left(q+dt\left(\mathcal{H}_p+\mathcal{H}_{pp}\Delta p\right),\, p+\Delta p-\left(\mathcal{H}_q+\mathcal{H}_{qp}\Delta p\right)dt\right)$$

$$(q+\Delta q,p+\Delta p)\to\left(q+\Delta q+dt\left(\mathcal{H}_p+\mathcal{H}_{pp}\Delta p+\mathcal{H}_{pq}\Delta q\right),\, p+\Delta p-\left(\mathcal{H}_q+\mathcal{H}_{qp}\Delta p+\mathcal{H}_{qq}\Delta q\right)dt\right)$$

Φασικός χώρος – Θεώρημα Liouville

- Ουσιαστικά αυτό που κάναμε ήταν.



- Χρειάζεται να υπολογίσουμε το μήκος των πλευρών του νέου σχήματος:

$$\left(\Delta q + dt\mathcal{H}_{pq}\Delta q, \Delta q\mathcal{H}_{qq}dt\right)$$

$$\left(dt\mathcal{H}_{pp}\Delta p, \Delta p - \Delta p\mathcal{H}_{pq}dt\right)$$

- Το αρχικό εμβαδό ήταν: $A = \Delta p\Delta q$

- Μετά από χρόνο dt: $A' = \Delta p\Delta q \det\begin{pmatrix} 1 + dtH_{pq} & dtH_{qq} \\ dtH_{pp} & 1 - dtH_{pq} \end{pmatrix}$

$$A' = \Delta p\Delta q \det\left(\left(1 - dt^2 H_{pq}^2\right) - dt^2 H_{pp} H_{qq}\right)$$

$$A' = \Delta p\Delta q + 0\left(dt^2\right)$$

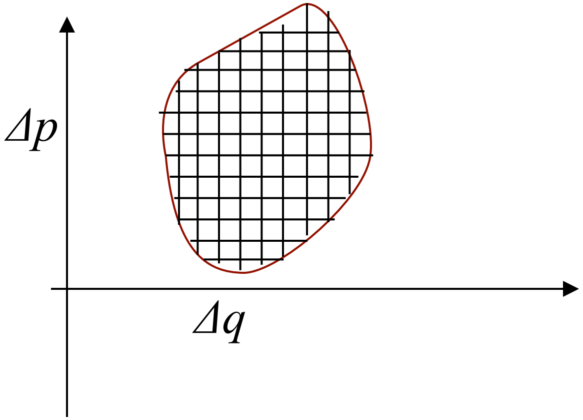
- Επομένως το εμβαδόν δεν αλλάζει για 0(dt) $\dfrac{dA}{dt} = 0$

- Ολοκληρώνοντας έχουμε: Α=σταθ.

➢ Το εμβαδό δεν αλλάζει αλλά το σχήμα αλλάζει

Φασικός χώρος – Θεώρημα Liouville

- Τα προηγούμενα ισχύουν για οποιαδήποτε σχήμα:



  - Μπορούμε να χωρίσουμε το σχήμα σε πολλά μικρότερα τετράγωνα τα οποία δεν αλλάζουν εμβαδό
  - Αθροίζουμε τα τετράγωνα

- Για N-διάστατο χώρο η απόδειξη είναι ίδια
  - N-διάστατος όγκος παραμένει αμετάβλητος με το χρόνο
  - Το σχήμα ωστόσο αλλάζει