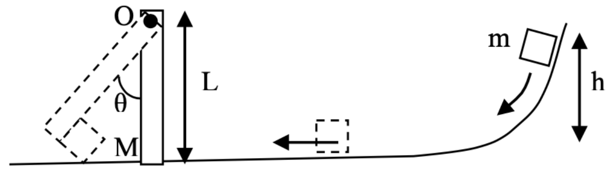
ΦΥΣ. 111

12ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή 17.12.2020**

1. Ένα τούβλο μάζας *m*, βρίσκεται αρχικά σε ύψος h και σε κατάσταση ηρεμίας. Αρχίζει κατόπιν να γλιστρά προς τα κάτω κινούμενο σε μια λεία επιφάνεια όπως στο σχήμα. Κινούμενο στην οριζόντια επιφάνεια (η οποία είναι επίσης λεία) έρχεται σε σύγκρουση με μια ομοιόμορφη ράβδο μάζας Μ και μήκους L. Το τούβλο κολλά στη ράβδο μετά την κρούση. Η ράβδος είναι εξαρτημένη από ένα σταθερό σημείο Ο και το σύστημα ράβδος -τούβλο περιστρέφεται γύρω από το σημείο αυτό μετά τη κρούση. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα (δώστε τις απαντήσεις σας συναρτήσει των m, M, L και h): (α) Ποια είναι η στροφορμή του τούβλου ως προς το σημείο Ο ακριβώς πριν συγκρουστεί με τη ράβδο; (β) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδος - τούβλο μετά τη σύγκρουση; (γ) Μετά τη σύγκρουση το σύστημα ράβδος - τούβλο αιωρείται γύρω από το σημείο Ο πριν έρθει στιγμιαία σε ισορροπία σε μια γωνιά θ ως προς την κατακόρυφο. Βρείτε μια σχέση για cosθ. (Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το ΚΜ δίνεται από τη σχέση $I = 1/12\ ML^2$, όπου Μ η μάζα της ράβδου και L το μήκος της).



(α) Η στροφορμή του τούβλου γύρω από το σημείο Ο είναι απλά

$l = mvL$, όπου v η ταχύτητα του τούβλου.

Την ταχύτητα μπορούμε να την βρούμε βάσει της αρχής διατήρησης της ενέργειας:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \Rightarrow \boxed{l = mL\sqrt{2gh}} \quad (1)$$

(β) Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής για κλειστά συστήματα θα έχουμε:

$$L_i = L_f \overset{(1)}{\Rightarrow} mL\sqrt{2gh} = I_{\text{τούβλο/ράβδος ως προς } O} \times \omega \quad (2)$$

Για να βρούμε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το σημείο Ο χρησιμοποιούμε τη ροπή αδράνειας ως προς το CM και το θεώρημα των παράλληλων αξόνων:

$$I_{\text{ράβδου},O} = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

Η ροπή αδράνειας του τούβλου ως προς το σημείο Ο είναι $I_{\text{τούβλου}} = mL^2$

Η ολική ροπή αδράνειας του συστήματος: ράβδος/τούβλο είναι $\boxed{I = \frac{1}{3}ML^2 + mL^2}$ (3)

Από (2) ∧ (3) $\Rightarrow m\cancel{L}\sqrt{2gh} = \left(\frac{1}{3}ML^{\cancel{2}} + mL^{\cancel{2}}\right)\omega \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{m\sqrt{2gh}}{\left(m+\frac{M}{3}\right)L}}$ (4)

(γ) Χρησιμοποιούμε διατήρηση της ενέργειας.
Όταν το τούβλο/ράβδος έχουν κινηθεί κατά γωνία Θ, το ύψος του τούβλου πάνω από το έδαφος είναι $L(1-\cos\Theta)$ ενώ το ύψος του κέντρου μάζας της ράβδου είναι $\frac{L}{2}(1-\cos\Theta)$ πάνω από το έδαφος.

Από διατήρηση ενέργειας έχουμε: $\frac{1}{2}I_{o_2}\omega^2 = mgL(1-\cos\Theta) + Mg\frac{L}{2}(1-\cos\Theta) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1-\cos\Theta = \frac{\frac{1}{2}I\omega^2}{mgL + Mg\frac{L}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2+mL^2\right)\left(\frac{m^2 2gh}{L^2(m+M/3)^2}\right)}{mg\cancel{L}+Mg\frac{L}{2}} \Rightarrow \boxed{\cos\Theta = 1 - \frac{6m^2h}{(3m+M)(2m+M)L}}$$

Χρησιμοποιούμε διατήρηση της στροφορμής. Η ολική στροφορμή του συστήματος (κατά μήκος του άξονα-$\hat{z}$) πριν ξεκινήσει το τρένο, είναι μηδέν, και επομένως η ολική στροφορμή του συστήματος σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα μετά από το ξεκίνημα του τρένου θα είναι επίσης μηδέν.
Από τη στιγμή που η ταχύτητα του τρένου ως προς τη ρόδα είναι v, η γωνιακή του ταχύτητα ως προς τη ρόδα θα είναι vR.
Από τη στιγμή που η ρόδα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_{ρόδα}$ με φορά αντίθετη αυτής του τρένου, αυτό σημαίνει ότι το τρένο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_{τρένο} = Rv - \omega_{ρόδα}$.
Διατήρηση της στροφορμής επιβάλει:

$$I_{ρόδα}\,\omega_{ρόδα} = I_{τρένου}\,\omega_{τρένου} \Rightarrow MR^2\omega_{ρόδα} = mR^2(Rv-\omega_{ρόδα}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{ρόδα} = \left(\frac{m}{M+m}\right)Rv.}$$

2. Ένας διαστημικός σταθμός είναι φτιαγμένος να μοιάζει σαν μιά τεράστια ρόδα ακτίνας 100*m* και ροπής αδράνειας 5.00×108$Kg\cdot m^2$. Το πλήρωμα αποτελούμενο από 150 άτομα ζεί στο στεφάνι αυτής της τεράστιας ρόδας. Η περιστροφή του σταθμού δημιουργεί μια επιτάχυνση ίση με *g*. Όταν 100 άτομα μετακινούνται στο κέντρο του διαστημικού σταθμού για κάποια γιορτή, η γωνιακή ταχύτητα αλλάζει. Ποιά είναι η επιτάχυνση που αισθάνονται τά μέλη του πληρώματος που παραμένουν στο στεφάνι του σταθμού. Υποθέστε ότι η μέση μάζα κάθε μέλους του πληρώματος είναι 60*kg*;

Για ένα άτομο του πληρώματος θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_r = m a_r \,,\ N = \dfrac{m v^2}{R} = m\omega_i^2 R \\ \text{Ζητάμε ότι}\quad N = mg \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{m}\omega_i^2 R = \cancel{m}g \Rightarrow \omega_i = \sqrt{\frac{g}{R}} \quad (1)$$

Η στροφορμή του διαστημικού σταθμού διατηρείται αφού δεν υπάρχουν δυνάμεις εξωτερικές που προκαλούν ροπές.

Επομένως η στροφορμή του συστήματος θα είναι η ίδια όταν 100 μέλη του πληρώματος μετακινηθούν στο κέντρο της ρόδας. Αυτό που αλλάζει είναι η ροπή αδράνειας και ταυτόχρονα η γωνιακή ταχύτητα.

Δηλαδή η στροφορμή $L_i = L_f \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_i\omega_i = I_f\omega_f \quad (2) \Rightarrow \omega_f = \frac{I_i}{I_f}\omega_i \overset{(1)}{\Rightarrow} \omega_f = \frac{I_i}{I_f}\sqrt{\frac{g}{R}}$$

Η ροπή αδράνειας η αρχική είναι: $I_i = I_{σταθ} + N_{ατομα}\cdot m_{ατόμου}\cdot R^2 \quad (3)$

Η ροπή αδράνειας η τελική (100 άτομα πήγαν στο κέντρο) είναι: $I_f = I_{σταθ} + N'_{ατομ}\cdot m_{ατομ}\cdot R^2 \quad (4)$

όπου $N'_{ατομα} = 50$ τα μέλη του πληρώματος που παραμένουν στην περιφέρεια του σταθμού. Τα 100 άτομα που μετακινήθηκαν στο κέντρο του σταθμού δεν συνεισφέρουν στη ροπή αδράνειας αφού η απόστασή τους από τον άξονα περιστροφής είναι μηδέν.

Αντικαθιστούμε τις (3) κ (4) στην (2) ⇒

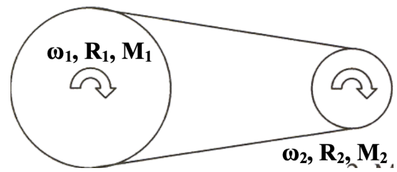
$$\omega_f = \frac{I_{σταθμού} + 150\cdot 60\cdot R^2}{I_{σταθμού} + 50\cdot 60\cdot R^2}\sqrt{\frac{g}{100}} = \frac{5\cdot 10^8 + 9\cdot 10^3\cdot (10^2)^2}{5\cdot 10^8 + 3\cdot 10^2\cdot (10^2)^2}\sqrt{\frac{g}{100}} = \frac{5\cdot 10^8 + 9\cdot 10^7}{5\cdot 10^8 + 3\cdot 10^6}\sqrt{\frac{g}{100}} \Rightarrow$$

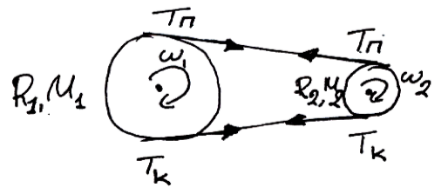
$$\Rightarrow \omega_f = \frac{5.9\cdot 10^{\cancel{8}\,-1}}{5.03\cdot \cancel{10^8}}\,\frac{1}{\cancel{10}}\sqrt{g} \Rightarrow \omega_f = \frac{5.9}{5.03}\cdot 10^{-1}\sqrt{g} \Rightarrow \omega_f = \frac{0.59}{5.03}\sqrt{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_f = 0.117\sqrt{g} \quad (5)$$

Επομένως $a_r = \omega^2 R \overset{(5)}{\Rightarrow} a_r = (0.117)^2 g R \Rightarrow \boxed{a_r = 1.37g}$

3. Σφόνδυλος που περιστρέφεται ελεύθερα πάνω σε στρόφαλο συζεύγνυται μέσω ενός ιμάντα με δεύτερο σφόνδυλο προσαρμοσμένο σε παράλληλο στρόφαλο. Οι αρχικές γωνιακές ταχύτητες είναι ω_1 και ω_2. Οι σφόνδυλοι είναι δίσκοι μαζών M_1 και M_2 και ακτίνων R_1 και R_2 αντίστοιχα. Ο ιμάντας είναι αβαρής και οι στρόφαλοι δεν έχουν τριβές. Ποια είναι η τελική γωνιακή ταχύτητα του κάθε σφονδύλου; Πόση κινητική ενέργεια χάθηκε;





Θεωρώ ότι T_π είναι η τάση του ιμάντα στο πάνω τμήμα ενώ T_κ είναι η τάση του ιμάντα στο κάτω τμήμα του.

Από τη στιγμή που ο ιμάντας δεν γλιστρά, οι δύο στρόφαλοι θα έχουν τις ίδιες ταχύτητες στα σημεία επαφής με τον ιμάντα και κατ' επέκταση όλα τα σημεία τους.

Δηλαδή κύλιση χωρίς ολίσθηση: $v_1 = v_2 \Rightarrow \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$ (A)

Οι στρόφαλοι περιστρέφονται κάτω από την επίδραση των ροπών που προσφέρουν οι δύο τάσεις που αναπτύσσονται από τον ιμάντα:

Επομένως:
$$\tau_1 = T_\pi \cdot R_1 - T_\kappa R_1 = (T_\pi - T_\kappa) R_1$$
$$\tau_2 = -T_\pi R_2 + T_\kappa R_2 = (T_\kappa - T_\pi) R_2$$

Θεωρώντας θετική τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Ξέρουμε όμως ότι η ροπή ισούται με τη μεταβολή της στροφορμής του σώματος πάνω στο οποίο ασκείται η ροπή αυτή:

$$\tau = \frac{dL}{dt} \Rightarrow \tau dt = dL \Rightarrow \int_{t_{\alpha\rho\chi}}^{t_{\tau\varepsilon\lambda}} \tau dt = L^{\tau\varepsilon\lambda} - L^{\alpha\rho\chi}$$

Αλλά η στροφορμή κάθε στροφάλου είναι $L = I\omega \Rightarrow \begin{cases} L^{\alpha\rho\chi} = I \cdot \omega^{\alpha\rho\chi} \\ L^{\tau\varepsilon\lambda} = I\, \omega^{\tau\varepsilon\lambda} \end{cases}$

Επομένως:
$$\int (T_\pi - T_\kappa) R_1 dt = I_1 (\omega_1^{\tau\varepsilon\lambda} - \omega_1^{\alpha\rho\chi}) \Rightarrow R_1 \int (T_\pi - T_\kappa) dt = I_1 (\omega_1^{\tau\varepsilon\lambda} - \omega_1^{\alpha\rho\chi})$$
$$\int (T_\kappa - T_\pi) R_2 dt = I_2 (\omega_2^{\tau\varepsilon\lambda} - \omega_2^{\alpha\rho\chi}) \Rightarrow R_2 \int (T_\kappa - T_\pi) dt = I_2 (\omega_2^{\tau\varepsilon\lambda} - \omega_1^{\alpha\rho\chi})$$

Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$-\frac{R_1}{R_2} = \frac{I_1\left(\omega_1^{\text{τελ}} - \omega_1^{\text{αρχ}}\right)}{I_2\left(\omega_2^{\text{τελ}} - \omega_2^{\text{αρχ}}\right)} \Rightarrow$$

Αλλά από την (A) έχουμε $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$ (B)

$$-\frac{R_1}{R_2} = \frac{I_1\left(\omega_2^{\text{τ}}\frac{R_2}{R_1} - \omega_1^{\text{αρχ}}\right)}{I_2\left(\omega_2^{\text{τελ}} - \omega_2^{\text{αρχ}}\right)} \Rightarrow -R_1 I_2 \omega_2^{\text{τελ}} + R_1 I_2 \omega_2^{\text{αρχ}} =$$

$$= R_2 I_1 \frac{R_2}{R_1}\omega_2^{\text{τελ}} - R_2 I_1 \omega_1^{\text{αρχ}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_1\left(R_1 I_2 \omega_2^{\text{αρχ}} + R_2 I_1 \omega_1^{\text{αρχ}}\right) = \omega_2^{\text{τελ}}\left(R_1^2 I_2 + R_2^2 I_1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_2^{\text{τελ}} = \frac{\left(R_1 I_2 \omega_2^{\text{αρχ}} + I_1 R_2 \omega_1^{\text{αρχ}}\right) R_1}{R_1^2 I_2 + R_2^2 I_1}}$$

Αντικαθιστώντας στη (B) βρίσκουμε την ω_1:

$$\boxed{\omega_1^{\text{τελ}} = \frac{\left(R_1 I_2 \omega_2^{\text{αρχ}} + I_1 R_2 \omega_1^{\text{αρχ}}\right) R_2}{R_1^2 I_2 + R_2^2 I_1}}$$

Εφόσον οι ροπές αδράνειας των στροφείων είναι: $I = \frac{1}{2}MR^2$ αντικαθιστούμε στις 2 παραπάνω εξισώσεις και βρίσκουμε τα $\omega_1^{\text{τελ}}$ και $\omega_2^{\text{τελ}}$.

Η μεταβολή στην κινητική ενέργεια θα μας δώσει την ενέργεια που χάθηκε:

$$\Delta K = \left(\frac{1}{2} I_1 {\omega_1^{\text{τ}}}^2 + \frac{1}{2} I_2 {\omega_2^{\text{τ}}}^2\right) - \left(\frac{1}{2} I_2 {\omega_2^{\text{αρχ}}}^2 + \frac{1}{2} I_1 {\omega_1^{\text{αρχ}}}^2\right)$$

Αντικαθιστώντας έχουμε: $$\Delta K = \frac{I_1 I_2 \left(R_1 \omega_1^{\text{αρχ}} - R_2 \omega_2^{\text{αρ}}\right)^2}{2\left(R_1^2 I_2 + R_2^2 I_1\right)}$$

4. Ένα δαχτυλίδι μάζας M και ακτίνας R βρίσκεται οριζόντιο πάνω σε μια λεία επιφάνεια. Μπορεί να στραφεί πάνω στη επιφάνεια ως προς ένα σημείο της περιφέρειάς του. Ένα έντομο μάζας m περπατά γύρω από το δαχτυλίδι πάνω στην περιφέρειά του με ταχύτητα υ, ξεκινώντας από το σημείο περιστροφής. Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα του δαχτυλιδιού όταν το έντομο βρίσκεται (α) στο μέσο της περιφέρειας και (β) πίσω στο σημείο περιστροφής;

(α) Η στροφορμή ως προς το σημείο περιστροφής πρέπει να είναι πάντοτε μηδέν γιατί δεν υπάρχει ροπή που να ενεργεί στο σύστημα δακτυλιδιού - εντόμου.

$$L^{τελ}_{ολικής} = L_{δαχ} + L_{εντ} = L^{αρχ}_{ολική} = 0$$

απόσταση από σημείο περιστροφής όταν είναι στη μέση

$$L_{δαχτ} + L_{εντ} = 0 \Rightarrow I_δ ω_δ + mυ(2R) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{I_δ ω_δ = -mυ(2R)}$$ έχουν ίσα μέτρα κ αντίθετη φορά

Η ροπή αδράνειας του δαχτυλιδιού ως προς το σημείο περιστροφής βρίσκεται από το θεώρημα παράλληλων αξόνων:

$$I_δ = I^δ_{cm} + MR^2 = MR^2 + MR^2 \Rightarrow I_δ = 2MR^2$$

Άρα θα έχουμε:
$$ω_δ = \frac{2mυR}{I_δ} = \frac{\cancel{2}mυ\cancel{R}}{\cancel{2}MR^{\cancel{2}}} \Rightarrow \boxed{ω_δ = \frac{mυ}{MR}}$$

Αλλά υ είναι η ταχύτητα του εντόμου ως προς το περιστρεφόμενο δαχτυλίδι. Επομένως:

$$υ = υ_0 - 2ω_δ R$$ όπου $2ωR = υ_{δαχ.}$ η γραμμική ταχύτητα του δαχτυλιδιού.

Επομένως:
$$ω_δ = \frac{m}{MR}\left(υ_0 - 2ω_δ R\right) \Rightarrow ω_δ\left(\frac{(M+2m)R}{\cancel{MR}}\right) = \frac{mυ_0}{\cancel{MR}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{ω_δ = \frac{mυ_0}{(M+2m)R}}$$

για $M = m \Rightarrow ω_δ = \frac{υ}{3R}$

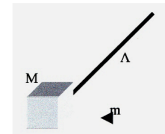
για $m \to 0 \Rightarrow ω_δ = 0$

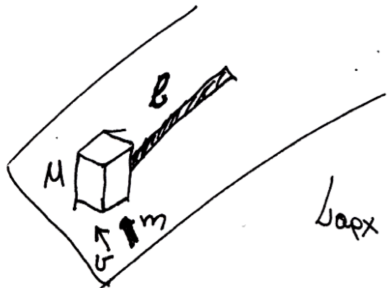
(β) Από διατήρηση και πάλι της στροφορμής θα έχουμε:

$$L^{αρχ} = L^{τελ} \Rightarrow 0 = L^f_{δαχ} + L^f_{εντ} = L^f_{δαχ} + \emptyset$$ ← Το έντομο έχει $L^f_{εν} = 0$ επειδή υ περνά από το σημείο περιστροφής

$$\Rightarrow L^f_{δαχ} = 0 \Rightarrow Iω = 0 \Rightarrow \boxed{ω = 0}$$

5. Ένας ξύλινος κύβος μάζας *M* ηρεμεί σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια και είναι αναρτημένος σε μια στερεά ράβδο μήκους Λ και αμελητέας μάζας. Το άλλο άκρο της ράβδου είναι στερεωμένο. Μια σφαίρα μάζας *m* ταξιδεύει με ταχύτητα *υ* παράλληλα με την επιφάνεια και κάθετα ως προς τη ράβδο, οπότε χτυπά τον κύβο και καρφώνεται μέσα σε αυτόν. Ποια είναι η στροφορμή του συστήματος σφαίρας - κύβου; Ποιος ο λόγος των απωλειών ως προς την αρχική κινητική ενέργεια;





Από διατήρηση της στροφορμής έχουμε:

$$L_{αρχ} = \emptyset + \vec{r}\times\vec{p} = |\vec{r}||\vec{p}|\sin\theta = \ell m\upsilon \underbrace{\sin\theta}_{1} = \ell m\upsilon \qquad \theta=9^\circ$$

$$L_{τελ} = I\omega = \underbrace{(m+M)\ell^2}_{I}\omega$$

Επομένως: $L_{αρχ} = L_{τελ} \Rightarrow \cancel{\ell} m\upsilon = (m+M)\ell^{\cancel{2}}\omega \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{m\upsilon}{\ell(M+m)}}$

Για τις ενέργειες θα έχουμε:

$$E^{αρχ}_{μηχ} = E^{τελ}_{μηχ} + |\Delta W| \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + |\Delta W| = \frac{\ell^2}{2}(m+M)\omega^2 + |\Delta W| \Rightarrow$$

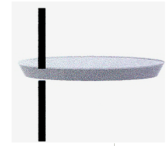
$$\Rightarrow |\Delta W| = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{\ell^2}{2}(m+M)\omega^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{\cancel{\ell^2}}{2}\frac{\cancel{(m+M)}}{\cancel{\ell^2}}\frac{m^2\upsilon^2}{(M+m)^{\cancel{2}}} \Rightarrow$$

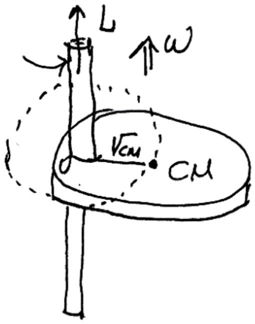
$$\Rightarrow \boxed{|\Delta W| = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon^2\left(\frac{m}{M+m}\right)} = E^{αρχ}_{κιν} - E^{αρχ}_{κιν}\left(\frac{m}{M+m}\right)$$

Ο λόγος των απωλειών ως προς την αρχική κινητική ενέργεια είναι:

$$\frac{\Delta W}{E^{αρχ}_{κιν}} = 1 - \frac{m}{M+m} \Rightarrow \frac{\Delta W}{E^{αρχ}_{κιν}} = \frac{M+\cancel{m}-\cancel{m}}{M+m} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta W}{E^{αρχ}_{κιν}} = \frac{M}{M+m}}$$

6. Ένας ομοιογενής στερεός δίσκος μάζας M περιστρέφεται γύρω από άξονα παράλληλο στον άξονα συμμετρίας του κέντρου μάζας. Δείξτε ότι η στροφορμή του δίσκου δίνεται από την εξίσωση: $\vec{L} = I_{CM}\vec{\omega} + \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM}$.





Έχουμε το δίσκο μάζας Μ ο οποίος περιστρέφεται ως προς κάποιο άξονα. Έστω I_{CM} η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που περνά από το ΚΜ.

Σύμφωνα με το θεώρημα παράλληλων αξόνων:

$$I = I_{CM} + MD^2 \quad \text{όπου } D = r_{CM}$$

Επομένως $I = I_{CM} + M r_{CM}^2$

Η στροφορμή είναι: $L = I\omega \Rightarrow L = (I_{CM} + M r_{CM}^2)\omega \Rightarrow$

$$\Rightarrow L = I_{CM}\omega + M r_{CM}^2 \omega = I_{CM}\omega + M r_{CM} r_{CM} \omega \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow L = I_{CM}\omega + M r_{CM} v_{CM} \\ &L = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times M\vec{v} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{L} = \underbrace{I_{CM}\vec{\omega}}_{\text{ιδιοστροφορμή ή διαφορετικά "spin"}} + \underbrace{\vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM}}_{\text{τροχιακή στροφορμή}}$$

7. Μια ομοιόμορφη κυκλική πετρά μάζας M και ακτίνας R περιστρέφεται γύρω από ένα κατακόρυφο άξονα, που περνά από το κέντρο της, με μια γωνιακή ταχύτητα ω_o την χρονική στιγμή 0. Η πέτρα έχει μια βαθιά αυλακιά κατά μήκος της περιφέρειάς της. Άμμος χύνεται μέσα στην αυλακιά με ένα σταθερό ρυθμό q (όπου q μετριέται σε kg/s). Η άμμος δεν φεύγει έξω από την αυλακιά ή γλιστρά σχετικά με την πέτρα από την στιγμή που έπεσε μέσα στην αυλακιά. (α) Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει εξωτερική ροπή, δώστε την γωνιακή ταχύτητα της πέτρας σαν συνάρτηση του χρόνου t. (β) Πόση εξωτερική ροπή χρειάζεται να εφαρμοστεί ώστε να κρατηθεί η πέτρα σε σταθερή γωνιακή ταχύτητα

(α) Από τη στιγμή που δεν υπάρχει εξωτερική ροπή, η στροφορμή του συστήματος διατηρείται.

Η στροφορμή τη στιγμή $t=0$ είναι: $L = I\omega = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega_0$

Η άμμος που πέφτει στη πέτρινη ρόδα έχει σαν αποτέλεσμα, να αυξάνει τη ροπή αδράνειας της περιστρεφόμενης ρόδας με το χρόνο. Αλλά η στροφορμή πάντοτε διατηρείται και επομένως το γινόμενο της ροπής αδράνειας $I(t)$ επί τη γωνιακή ταχύτητα $\omega(t)$ είναι σταθερό.

Μπορούμε να γράφουμε επομένως:

$$\omega(t) = \frac{L}{I(t)} = \frac{\frac{1}{2}M\omega_0 R^2}{I(t)} \qquad (A)$$

Χρειάζεται τώρα να υπολογίσουμε το $I(t)$. Στο χρονικό διάστημα t η ποσότητα της άμμου που έχει πέσει στη ρόδα είναι $qt = m_{άμμου}$. Από τη στιγμή που η άμμος πέφτει κατά μήκος της περιφέρειας της ρόδας, η ροπή αδράνειας της ρόδας αυξάνει κατά την ποσότητα:

$m_{άμμου} R^2 = qtR^2$. Επομένως τη στιγμή t η ροπή αδράνειας της ρόδας είναι: $I(t) = \frac{1}{2}MR^2 + qtR^2 = \left(\frac{1}{2}M + qt\right)R^2$

Αντικαθιστώντας στην (A) έχουμε: $\omega(t) = \dfrac{\frac{1}{2}M\omega_0 R^2}{\left(\frac{1}{2}M+qt\right)R^2} \Rightarrow \boxed{\omega(t) = \dfrac{\omega_0}{1+\frac{2q}{M}t}}$

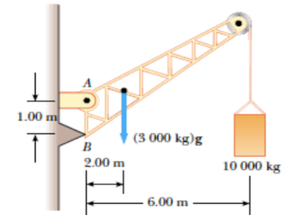
__ΠΡΟΣΟΧΗ:__ Είναι εύκολο να γράψει κάποιος ότι η ροπή αδράνειας είναι $I(t) = \frac{1}{2}(M+qt)R^2$. Να προσθέσει δηλαδή στη μάζα της πέτρινης ρόδας, τη μάζα της άμμου. Αυτό είναι λάθος γιατί υποθέτει ότι η άμμος κατανέμεται ομοιόμορφα σ' όλη την επιφάνειας της ρόδας. Αλλά το πρόβλημα μας λέει ότι κατανέμεται μόνο στην αυλακιά που είναι στην περιφέρεια της ρόδας και άρα σε απόσταση R από τον άξονα περιστροφής.

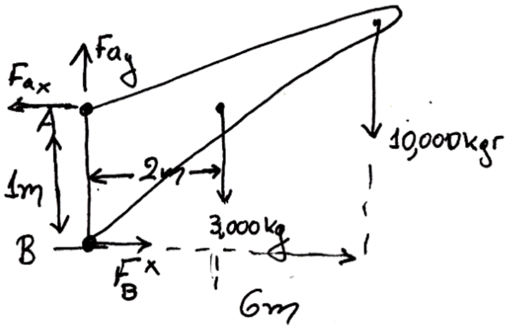
(β) Στην περίπτωση αυτή η στροφορμή δεν διατηρείται αφού η γωνιακή ταχύτητα, ω, είναι σταθερή και η ροπή αδράνειας αυξάνει με το χρόνο t.
Η στροφορμή σα συνάρτηση του χρόνου γράφεται: $L(t) = I(t)\omega_0 = \left(\frac{1}{2}M + qt\right)R^2\omega_0$

Η συνισταμένη ροπή ξέρουμε όμως ότι γράφεται σαν:

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}M + qt\right)R^2\omega_0}{dt} \Rightarrow \boxed{\tau = qR^2\omega_0}$$

8. Ένας γερανός μάζας 3000*kg* σηκώνει ένα βάρος 10000*kg* όπως στο σχήμα. Ο βραχίονας του γερανού περιστρέφεται γύρω από λείο άξονα στο σημείο Α και στηρίζεται σε λείο υποστήριγμα στο Β. Να βρεθούν οι δυνάμεις αντίδρασης στο Α και Β.





Από τη στιγμή που το στήριγμα στο σημείο Β είναι λείο δεν υπάρχει τριβή με το κατακόρυφο τοίχωμα και επομένως υπάρχει μόνο οριζόντια δύναμη.

Στο σημείο Α, (ο άξονας περιστροφής) υπάρχει μια δύναμη οριζόντια και μια κατακόρυφος οι οποίες και συνιστούν την αντίδραση στον άξονα από το βραχίονα του γερανού.

Από το 2ο νόμο του Newton:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{Bx} - F_{Ax} = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{Ay} - W_{\gamma\varepsilon\rho} - W_{\beta\alpha\rho.} = 0 \quad (2)$$

Η δεύτερη συνθήκη ισορροπίας μας λέει ότι $\Sigma \vec{\tau} = 0$.

Θεωρούμε σα σημείο για τις ροπές το σημείο Α, οπότε μηδενίζουμε τις ροπές από F_{Ax} & F_{Ay}. Επομένως έχουμε:

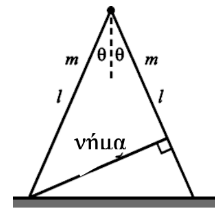
$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow F_{Bx} \cdot (AB) - W_\gamma \cdot 2m - W_\beta \cdot 6m = 0 \Rightarrow F_{Bx} = \frac{(2 \cdot 3000 + 6 \cdot 10{,}000)g}{1}$$

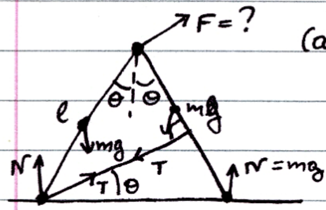
$$\Rightarrow \boxed{F_{Bx} = 72{,}000 \cdot g}$$

Από την (1) $\Rightarrow \boxed{F_{Ax} = F_B = 72{,}000 g}$

και η (2) $\Rightarrow F_{Ay} = (3{,}000 + 10{,}000)g \Rightarrow \boxed{F_{Ay} = 13{,}000 g}$

9. Δυο ράβδοι κάθε μια μήκους l και μάζας m συνδέονται με ένα λείο μεντεσέ. Και οι δυο σχηματίζουν γωνία θ με την κατακόρυφη διεύθυνση. Ένα αβαρές νήμα συνδέει το κάτω άκρο της αριστερής ράβδου με την δεξιά ράβδο ακριβώς κάθετα, όπως δείχνει το σχήμα. Όλο το σύστημα στέκεται σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια. (α) Ποια η τάση στο νήμα. (β) Τι δύναμη εξασκεί η αριστερή ράβδος στην δεξιά ράβδο στο σημείο επαφής τους;





(α) Εξετάζοντας τις ροπές όλου του συστήματος ως προς το μεντεσέ, βλέπουμε ότι οι κάθετες δυνάμεις στα κάτω άκρα κάθε ράβδου είναι ίσες.

Από $\Sigma F_y = 0$ για όλο το σύστημα σημαίνει ότι οι κάθετες αντιδράσεις είναι mg

Οι ροπές στη δεξιά μόνο ράβδο ως προς το μεντεσέ:

$$mg\frac{l}{2}\sin\theta + Tl\cos 2\theta = mgl\sin\theta \Rightarrow \boxed{T = \frac{mg\sin\theta}{2\cos 2\theta}}$$

(β) Εξετάζουμε τις δυνάμεις στη δεξιά ράβδο:

Η κάθετη δύναμη N εξισορροπεί τη δύναμη της βαρύτητας

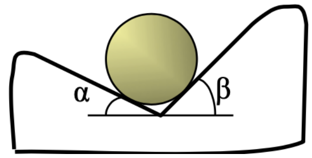
Επομένως η δύναμη F πρέπει να εξισορροπεί τη τάση από το νήμα, μια και αυτές είναι οι υπόλοιπες 2 δυνάμεις που ασκούνται στη δεξιά ράβδο,

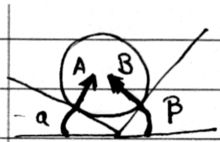
Επομένως $F = T$ (ίσες και αντίθετες)

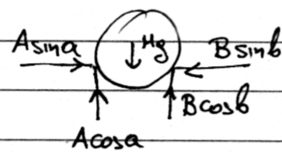
Από το (α) υποερώτημα $\Rightarrow$ $F = \frac{mg\sin\theta}{2\cos 2\theta}$ και έχει

διεύθυνση προς τα πάνω και σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση.

10. Μια συμπαγής σφαίρα ακτίνας R και μάζας M είναι τοποθετημένη σε ένα αυλάκι όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Οι εσωτερικές επιφάνειες του αυλακιού δεν παρουσιάζουν τριβές. Προσδιορίστε τις δυνάμεις που ασκεί το αυλάκι στη σφαίρα στα δυο σημεία επαφής.







Ονομάζουμε τις κάθετες δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα από το αυλάκι σαν A και B. Σχηματίζουν γωνίες a και b με την κατακόρυφο.

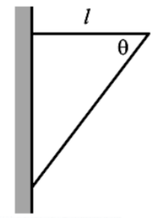
$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A\sin a - B\sin b = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A\cos a + B\cos b - Mg = 0\end{array}\right\} \Rightarrow B = A\frac{\sin a}{\sin b} \quad (1)$$

$$A\left(\cos a + \frac{\sin a}{\sin b}\cos b\right) = Mg \Rightarrow$$

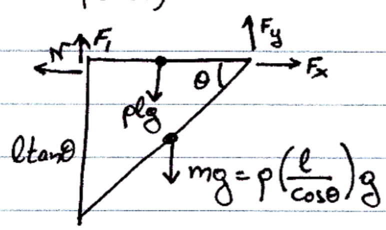
$$\Rightarrow A(\cos a \sin b + \sin a \cos b) = Mg \sin b \Rightarrow \boxed{A = Mg\frac{\sin b}{\sin(a+b)}}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) $\Rightarrow$ $\boxed{B = Mg\frac{\sin a}{\sin(a+b)}}$

11. Δυο ράβδοι συνδέονται μεταξύ τους με μεντεσέδες και με ένα τοίχο όπως φαίνεται στο σχήμα. Η γωνία μεταξύ των ραβδιών είναι θ και κάθε ράβδος έχει την ίδια γραμμική πυκνότητα ρ, ενώ η οριζόντια ράβδος έχει μήκος l. Να βρεθεί η δύναμη (να δοθούν η οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της) που ασκεί η χαμηλότερη ράβδος στην οριζόντια ράβδο.



Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται (διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος):



Όπως φαίνεται στο σχήμα, χρησιμοποιώ τη γενική περίπτωση όπου δεν ξέρουμε αν η δύναμη που ζητούμε είναι στη διεύθυνση της χαμηλότερης ράβδου. Σχεδιάζω επομένως τις 2 συνιστώσες της.

Οι συνθήκες ισορροπίας: (οριζόντια ράβδος)

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_1 + F_y = mg \Rightarrow F_1 + F_y = \rho l g \\ &\Sigma \tau = 0 \Rightarrow F_1\left(\frac{l}{2}\right) - F_y\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \Rightarrow F_1 \frac{l}{2} = F_y \frac{l}{2} \Rightarrow F_1 = F_y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{F_y = \frac{\rho l g}{2}}$$

(ως προς το κέντρο της ράβδου)

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{N = F_x} \quad (A)$$

$\Sigma \tau$ για όλο το σύστημα. Θεωρώ το σημείο επαφής της χαμηλότερης ράβδου με τον τοίχο.

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow N(\cancel{l}\tan\theta) = \rho \cancel{l} g\left(\frac{l}{2}\right) + \frac{\rho l g}{\cos\theta}\left(\frac{l}{2}\right) \Rightarrow$$

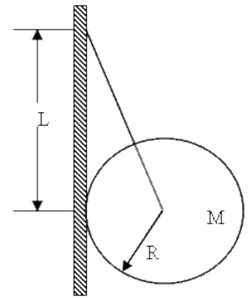
$$\Rightarrow N = \frac{\rho l g}{2}\left[1 + \frac{1}{\cos\theta}\right]\frac{1}{\tan\theta} \Rightarrow \boxed{N = \frac{\rho l g}{2}\left[\frac{1}{\tan\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\right]}$$

Αλλά από (A) $N = F_x \Rightarrow$ $\boxed{F_x = \frac{\rho l g}{2}\left[\frac{1}{\tan\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\right]}$

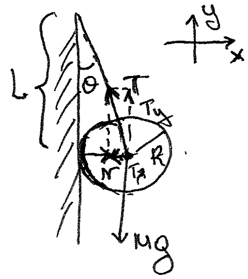
για $\theta \to 0 \Rightarrow F_x = \infty$

$\theta \to 90^\circ \Rightarrow F_x = \frac{\rho l g}{2}$

12. Ένα αβαρές σχοινί συγκρατεί ένα συμπαγή δίσκο μάζας M και ακτίνας R. Το σχοινί είναι στερεωμένο στο κέντρο του δίσκου και το άλλο άκρο του είναι στερεωμένο σε λείο κατακόρυφο τοίχο όπως στο σχήμα. Το κέντρο του δίσκου βρίσκεται σε απόσταση L από το σημείο στήριξης του σχοινιού με το τοίχο. (α) Ποια είναι η δύναμη που εξασκεί ο τοίχος στο δίσκο. (β) Αν ο δίσκος αντικατασταθεί με μια συμπαγή σφαίρα της ίδιας μάζας M και ακτίνας R, πως συγκρίνεται η τάση στο σχοινί που συγκρατεί το δίσκο (T_δ) με τη τάση στο σχοινί (T_Σ) που συγκρατεί τη σφαίρα;



(α) κάνουμε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος:



Επειδή ο τοίχος είναι λείος, η μόνη δύναμη που δρα στη σφαίρα είναι η κάθετη δύναμη N από τον τοίχο στη σφαίρα.

Εφόσον η σφαίρα ισορροπεί $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$. Αναλύουμε σε 2 άξονες συντεταγμένων όπως στο σχήμα:

$$\Sigma F_x = N - T_x = 0 \Rightarrow T_x = N \Rightarrow T\sin\theta = N$$
$$\Sigma F_y = T_y - Mg = 0 \Rightarrow T_y = Mg \Rightarrow T\cos\theta = Mg$$
$$\overset{\div}{\Rightarrow} \tan\theta = \frac{N}{Mg}$$

Από τα γεωμετρικά δεδομένα του προβλήματος: $\tan\theta = \frac{R}{L}$

$$\Rightarrow \boxed{N = MgR/L}$$

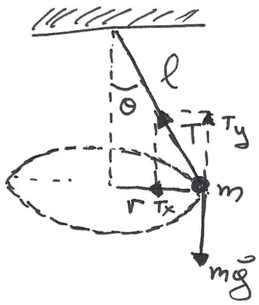
(β) Αν αλλάζαμε το σώμα από σφαίρα σε δίσκο (ή ανάποδα) δεν θα άλλαζε τίποτε σε σχέση με την $T_\Sigma = T_\delta$ η τάση θα ήταν ίδια.

Η ροπή των δυνάμεων ως προς το σημείο επαφής με τον τοίχο θα είναι:

$$T\cdot R\cdot \sin(90+\theta) = MgR \Rightarrow T\cdot \cancel{R}\cos\theta = Mg\cancel{R} \Rightarrow T_y = Mg \Rightarrow T = \frac{Mg}{\cos\theta}$$

Επομένως ανεξάρτητη από το σώμα, δίσκος ή σφαίρα.

13. Ένα κωνικό εκκρεμές αποτελείται από μία σφαίρα μάζας m που μπορεί να περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά σε οριζόντιο επίπεδο. Κατά τη διάρκεια της κίνησης, το σύρμα μήκους l που κρατά τη σφαίρα, διατηρεί σταθερή γωνία θ με την κατακόρυφη διεύθυνση. Δείξτε ότι το μέτρο της στροφορμής της σφαίρας ως προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς δίνεται από τη σχέση: $L = \sqrt{\dfrac{m^2 g l^3 \sin^4\theta}{\cos\theta}}$



Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι $\boxed{r = l\sin\theta}$ (1)

Από τον 2º νόμο του Newton:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_x = ma_x &\Rightarrow T\sin\theta = m\frac{v^2}{r} \\ \Sigma F_y = ma_y &\Rightarrow T\cos\theta = mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

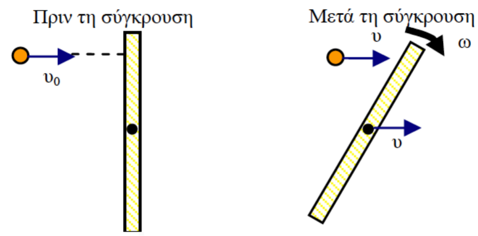
$$\Rightarrow \cancel{m}g\tan\theta = \frac{\cancel{m}v^2}{r} \Rightarrow g\tan\theta = \frac{v^2}{r} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{gr\tan\theta}} \quad (2)$$

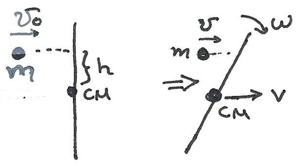
Από τον ορισμό της στροφορμής: $L = mvr\sin 90^\circ \overset{(2)}{\Rightarrow} L = mr\sqrt{gr\tan\theta}$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} L = l\sin\theta\, m\sqrt{gl\sin\theta\tan\theta} = ml\sqrt{gl\sin^3\theta\tan\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{L = ml\sqrt{gl\frac{\sin^4\theta}{\cos\theta}}}$$

14. Μία μπάλα μάζας m κινείται με ταχύτητα υ_0 η διεύθυνση της οποίας είναι κάθετη σε ένα ξύλινο ραβδί μάζας m και μήκους L που αρχικά ηρεμεί. Σε ποιο σημείο του ραβδιού πρέπει να χτυπήσει η μπάλα έτσι ώστε η μπάλα και το κέντρο μάζας του ραβδιού να έχουν ίσες ταχύτητες μετά την ελαστική σύγκρουση των δύο σωμάτων; (Η ροπή της βέργας ως προς το άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στο ραβδί δίνεται από τη σχέση $I_{CM} = 1/\left(12\,ML^2\right)$).





Από διατήρηση της ορμής έχουμε: $\cancel{m}\upsilon_0 = \cancel{m}\upsilon + \cancel{m}\upsilon \Rightarrow \boxed{\upsilon = \frac{\upsilon_0}{2}}$ (1)

Από διατήρηση της ενέργειας έχουμε: $\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \left[\frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right]$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \cancel{\tfrac{1}{2}}m\upsilon_0^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}m\frac{\upsilon_0^2}{4} + \cancel{\tfrac{1}{2}}m\frac{\upsilon_0^2}{4} + \cancel{\tfrac{1}{2}}I\omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\upsilon_0^2 - m\frac{\upsilon_0^2}{2} = I\omega^2 \Rightarrow \cancel{m}\frac{\upsilon_0^2}{\cancel{2}} = \frac{1}{\cancel{12}\,6}\cancel{m}L^2\omega^2 \Rightarrow \upsilon_0^2 = \frac{L^2}{6}\omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{6}{L^2}\upsilon_0^2 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{6}\,\frac{\upsilon_0}{L}} \quad (2)$$

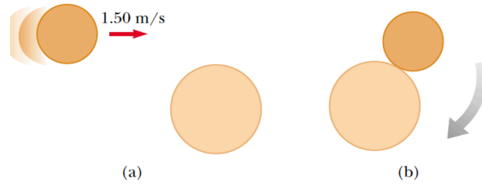
Από διατήρηση της στροφορμής έχουμε: (ως προς το αρχικό κέντρο μάζας της βέργας)

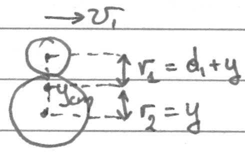
$$m\upsilon_0 h = m\left(\frac{\upsilon_0}{2}\right)h + \left[I\omega + 0\right]$$

το CM της βέργας δεν έχει στροφορμή σχετικά με την αρχική θέση του κέντρου μάζας της βέργας αφού περνά από το σημείο περιστροφής

$$\Rightarrow \frac{\cancel{m}\upsilon_0 h}{\cancel{2}} = \frac{1}{\cancel{12}\,6}\cancel{m}L^2\omega \overset{(2)}{\Rightarrow} \cancel{\upsilon_0}h = \frac{1}{6}L^{\cancel{2}}\sqrt{6}\,\frac{\cancel{\upsilon_0}}{\cancel{L}} \Rightarrow \boxed{h = \frac{L}{\sqrt{6}}}$$

15. Ένας δίσκος μάζας 80*gr* και ακτίνας 4*cm* γλιστρά πάνω σε ένα λείο τραπέζι με ταχύτητα 1.5*m/s*. Έρχεται σε σύγκρουση με έναν δεύτερο δίσκο ακτίνας 6*cm* και μάζας 120*gr* που είναι αρχικά σε ηρεμία. Ο δίσκοι μόλις συγκρουστούν προσκολλιούνται και κινούνται σαν ένα σώμα. Ποια η στροφορμή του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας; (β) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα γύρω από το κέντρο μάζας;





Οταν ακουμπούν το CM είναι σε απόσταση y_{cm} από το κέντρο του μεγαλύτερου πουλιού κατά

$$y_{cm} = \frac{0 + 80\cdot(4+6)}{120 + 80_{gr}} = 4cm.$$

(α) Ακριβώς πρίν από τη σύγκρουση $v_1 = 1.5\,m/s$ και $v_2 = \emptyset$.

Η στροφορμή του συστήματος γύρω από το κέντρο μάζας είναι:

$$L = r_1 m_1 v_1 + r_2 m_2 v_2 = (6\cdot10^{-2})(80\cdot10^{-3})(1.5) + 0 \Rightarrow \boxed{L = 7.2\cdot10^{-3}\,kg\,m^2/s}$$

Αν πάμε στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας, θα πάρουμε και πάλι την ίδια τιμή για το L, αφού $m_1 r_1 = m_2 r_2$

(β) Η ροπή αδράνειας γύρω από το κέντρο μάζας, δίνεται από τη θεώρημα των παράλληλων αξόνων:

$$I = I_1 + I_2 = \left(\frac{1}{2}m_1 d_1^2 + m_1 r_1^2\right) + \left(\frac{1}{2}m_2 d_2^2 + m_2 r_2^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(80\cdot10^{-3})(4\cdot10^{-2})^2 + 80\cdot10^{-3}\cdot(6\cdot10^{-2})^2 + \left(\frac{1}{2}120\cdot10^{-3}\right)(6\cdot10^{-2})^2 +$$

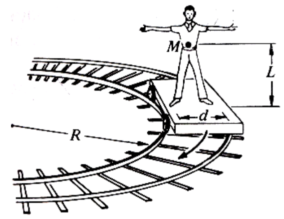
$$+ (120\,10^{-3})(4\cdot10^{-2})^2 \Rightarrow$$

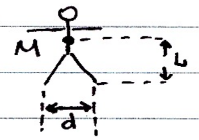
$$\Rightarrow I = 7.6\,10^{-4}\,kg\,m^2$$

Η στροφορμή του συστήματος των 2 πουλιών διατηρείται και επομένως: $L = I\omega \Rightarrow \omega = \frac{L}{I}$ Αντικαθιστώντας τα α βρήκαμε μέχρι τώρα έχαμε:

$$\omega = \frac{7.2\cdot10^{-3}}{7.6\cdot10^{-4}} \Rightarrow \boxed{\omega = 9.47\,rad/s}$$

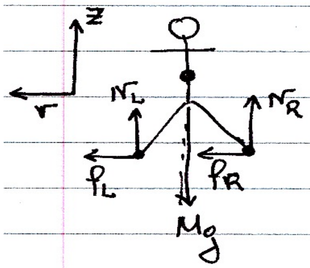
16. Ένας άντρας μάζας M στέκεται σε ένα βαγόνι τρένου το οποίο κινείται σε μια οριζόντια κυκλική τροχιά ακτίνας R με ταχύτητα υ. Το κέντρο μάζας του ατόμου βρίσκεται σε ύψος L από το δάπεδο του βαγονιού ενώ κρατά τα πόδια του ανοικτά και σε απόσταση d μεταξύ τους (όπως στο σχήμα). Ο άντρας έχει προσανατολισμό ώστε να βλέπει προς τη φορά της κίνησης. Πόσο βάρος βρίσκεται σε κάθε πόδι του;





Ο άντρας στέκεται στο βαγόνι το οποίο κινείται με ταχύτητα υ σε μια στροφή ακτίνας R

Το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος θα είναι:



Από τη στιγμή που κινείται σε κυκλική τροχιά, η συνισταμένη δύναμη που εφαρμόζεται στην ακτινική διεύθυνση θα είναι η κεντρομόλος, δηλαδή:

$$\sum_r F_r = Ma_r = Ma_\kappa = M\frac{\upsilon^2}{R} \quad (1)$$

αλλά $\displaystyle\sum_r F_r = f_L + f_R \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{f_L + f_R = M\frac{\upsilon^2}{R}} \quad (2)$

Στη z-διεύθυνση δεν έχει επιτάχυνση και επομένως: $\sum F_z = 0 \Rightarrow \boxed{Mg = N_L + N_R}$ (A)

Επίσης δεν περιστρέφεται και επομένως η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών ως προς το ΚΜ του θα είναι μηδέν:

$$\sum \tau = I\alpha = 0 \Rightarrow \frac{d}{2}N_R - \frac{d}{2}N_L - L(f_R + f_L) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_R - N_L = 2\frac{L}{d}(f_L + f_R) \quad (3)$$

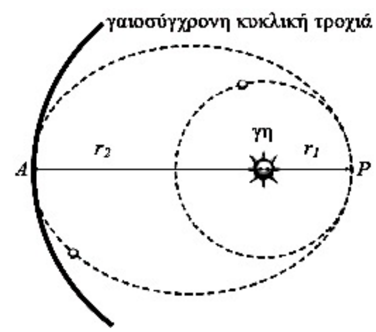
από την (2) $\Rightarrow N_R - N_L = 2\frac{L}{d}M\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow$

από την (A) $\Rightarrow N_R - (Mg - N_R) = 2\frac{L}{d}M\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2N_R = Mg + 2\frac{L}{d}M\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{N_R = \frac{Mg}{2} + \frac{L}{d}M\frac{\upsilon^2}{R}} \quad \text{και} \quad \boxed{N_L = \frac{Mg}{2} - \frac{L}{d}M\frac{\upsilon^2}{R}}$$

17. Γαιο-σύγχρονη τροχιά ονομάζουμε την τροχιά στην οποία ένας δορυφόρος περιστρέφεται γύρω από την γη με περίοδο 24*h*, έτσι ώστε η θέση του να παραμένει πάντοτε πάνω από το ίδιο γεωγραφικό σημείο του ισημερινού της γης. Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρείστε τα ακόλουθα μεγέθη: $R_Γ$ = 6x10^6m, $M_Γ$ = 6x10^{24}kg, G =6.67x10^{-11}$kg^{-1}s^{-2}m^3$. (**α**) Για μια κυκλική γαιο-σύγχρονη τροχιά, ποια είναι η απόσταση από το κέντρο της γης; (**β**) Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας του δορυφόρου που εκτελεί γαιοσύγχρονη τροχιά; (γ) Ένας δορυφόρος εκτοξεύεται αρχικά σε κυκλική τροχιά σε απόσταση r_1 =160km πάνω από την επιφάνεια της γης. Ποια είναι η ταχύτητά του ενώ βρίσκεται σε αυτή την τροχιά; (**δ**) Θεωρείστε ότι δίνεται στον δορυφόρο του ερωτήματος (γ) αρκετή ώθηση στην διεύθυνση εφαπτομενικά της τροχιάς του, αλλάζοντας την ταχύτητά του. Σαν αποτέλεσμα, ο δορυφόρος εκτελεί πλέον ελλειπτική τροχιά, το περίγειο, P, της οποίας συμπίπτει με την ακτίνα της αρχικής κυκλικής τροχιάς του. Ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα του δορυφόρου ώστε στην πιο απομακρυσμένη θέση, A, από την γη (απόγειο, r_2) στην νέα αυτή ελλειπτική τροχιά, να βρίσκεται στην απαιτούμενη απόσταση που αντιστοιχεί σε γαιο-σύγχρονη κυκλική τροχιά; (**ε**) Θα πρέπει το μέτρο της ταχύτητας του δορυφόρου να αυξηθεί ή να ελαττωθεί έτσι ώστε να αρχίσει να εκτελεί κυκλική γαιο-σύγχρονη τροχιά ακτίνας ίση με την απόσταση του πιο απομακρυσμένου σημείου της ελλειπτικής τροχιάς που περιεγράφηκε στο ερώτημα (δ);



(α) Από τον 3^o νόμο του Kepler έχουμε:

$$r^3 = G\frac{M}{4\pi^2}T^2 \quad (1)$$

Ο δορυφόρος σε γαιοσύγχρονη κυκλική τροχιά θα έχει περίοδο T όση και η περίοδος της γης. Επομένως $T = 24h = 24\times60\times60 \Rightarrow$

$$\Rightarrow T = 86400 \text{ sec}$$

Αντικατάσταση στην (1) $\Rightarrow r = \sqrt[3]{G\frac{M}{4\pi^2}T^2} = \sqrt[3]{\frac{6.67\cdot10^{-11}\cdot 6\cdot10^{24}}{4\pi^2}(86400)^2}$

$$\Rightarrow \boxed{r_{\text{γαιοσύγχρονου}} = 4.23\times10^7 m} \quad (2)$$

(β) Από την στιγμή που η τροχιά είναι κυκλική: $\upsilon = \omega r = \frac{2\pi}{T}r \Rightarrow$

$$\Rightarrow \upsilon_{\text{γαιοσγ.}} = \frac{2\pi}{86400}\cdot 4.23\times10^7 \Rightarrow \boxed{\upsilon_{\text{γαιοσ.}} = 3.08\times10^3 m/s} \quad (3)$$

(γ) Για δορυφόρο σε κυκλική τροχιά, η δύναμη της παγκόσμιας έλξης αποτελεί την κεντρομόλο δύναμη που κρατά το δορυφόρο στην κυκλική τροχιά:

$$F_g = m_\delta \upsilon_\kappa^2/(r_1+R_\Gamma) \Rightarrow G\frac{M\cancel{m_\delta}}{(R_\Gamma+r_1)^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m_\delta}\upsilon_\kappa^2}{\cancel{(R_\Gamma+r_1)}} \Rightarrow \upsilon_\kappa = \sqrt{\frac{GM}{R_\Gamma+r_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_\kappa = \sqrt{\frac{6.67\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}}{160\cdot1000+6\cdot10^6}} \Rightarrow \boxed{\upsilon_\kappa = 8.06\times10^3 m/s} \quad (4)$$

(δ) Η δύναμη της βαρύτητας είναι ακτινική (προς την διεύθυνση της γης) και επομένως η ροπή της είναι μηδέν. Μετά την αλλαγή της ταχύτητας, η στροφορμή του δορυφόρου στο απόγειο και περίγειο θα είναι ίδια. Επίσης η μηχανική ενέργεια διατηρείται:

Διατήρηση στροφορμής: $\cancel{m_\delta}\upsilon_p r_p = \cancel{m_\delta}\upsilon_A r_A \Rightarrow \upsilon_p r_p = \upsilon_A r_A \quad (5)$

Διατήρηση μηχανικής ενέργειας: $\frac{1}{2}\cancel{m_\delta}\upsilon_p^2 - \frac{GM\cancel{m_\delta}}{r_p} = \frac{1}{2}\cancel{m_\delta}\upsilon_A^2 - \frac{GM\cancel{m_\delta}}{r_A} \quad (6)$

Ξέρουμε ότι η απόσταση του απόγειου, αντιστοιχεί στην ακτίνα της γαιοσύγχρονης κυκλικής τροχιάς που βρήκαμε στο ερώτημα (α), δηλαδή $\boxed{r_A = r_2 + R_\Gamma = r_{γαιοσυγχ}}$ (7)

Ξέρουμε ακόμα ότι η απόσταση του περιγείου είναι ίδια με αυτή της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς του ερωτήματος (γ)

Δηλαδή $\boxed{r_P = R_\Gamma + r_1}$ (8)

Λύνουμε την (5) ως προς $υ_A$ οπότε: $\boxed{υ_A = \frac{r_P υ_P}{r_A}}$ (9)

Αντικαθιστούμε στην (6) οπότε:

$$\frac{1}{2}υ_P^2 - \frac{GM}{r_P} = \frac{1}{2}\left(υ_P \frac{r_P}{r_A}\right)^2 - \frac{GM}{r_A} \Rightarrow \frac{1}{2}υ_P^2\left(1 - \frac{r_P^2}{r_A^2}\right) = GM\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}\right)$$

$$\overset{(7)\wedge(8)}{\Rightarrow} \frac{1}{2}υ_P^2\left(1 - \frac{(6.16\cdot 10^6)^2}{r_{γαιος}^2}\right) = GM\left(\frac{1}{6.16\cdot 10^6} - \frac{1}{r_{γαιος}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow υ_P = \sqrt{2(6\cdot 10^{24})(6.67\cdot 10^{-11})\left(\frac{1}{6.16\,10^6} - \frac{1}{4.23\cdot 10^7}\right)\left(1 - \frac{6.16^2}{42.3^2}\right)^{-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{υ_P = 1.07\times 10^4 (m/s)} \quad (10)$$

(ε) Η ταχύτητα του δορυφόρου στο απόγειο θα είναι σύμφωνα με την (9), (10), (8) και (7):

$$υ_A = 1.07\cdot 10^{\cancel{4}\,3} \frac{6.16\,\cancel{10^6}}{4.23\,\cancel{10^7}} = 1.07\cdot 10^3 \frac{6.16}{4.23} \Rightarrow \boxed{υ_A = 1.56\times 10^3 \frac{m}{s}}$$

Η ταχύτητα που βρήκαμε στο ερώτημα (β) για να βρίσκεται ο δορυφόρος σε γαιοσύγχρονη κυκλική τροχιά ήταν: $υ_{γαιος} = 3.08\times 10^3 m/s$

Επομένως θα πρέπει να αυξήσει την ταχύτητά του για να εκτελεί γαιοσύγχρονη κυκλική τροχιά.

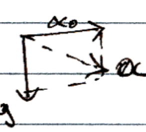
18. Ένα απλό εκκρεμές έχει μήκος 5.0m. (α) Ποια είναι η περίοδος μικρών ταλαντώσεων αυτού του εκκρεμούς αν βρίσκεται μέσα σε ανελκυστήρα ο οποίος επιταχύνεται προς τα επάνω με επιτάχυνση 5.0m/sec^2. (β) Ποια η περίοδος αν ο ανελκυστήρας κατεβαίνει με επιτάχυνση προς τα κάτω 5.0m/sec^2. (γ) Ποια η περίοδος αν τοποθετηθεί μέσα σε ένα φορτηγό το οποίο επιταχύνεται οριζόντια με επιτάχυνση 5.0m/sec^2;

(α) Η τάση του νήματος πρέπει να κρατά το βάρος του σώματος του εκκρεμούς, και να το επιταχύνει προς τα πάνω. Πρέπει να δημιουργεί επίσης την δύναμη επαναφοράς, ακριβώς σαν να ήταν ο θάλαμος του ανελκυστήρα σε ηρεμία σε ένα βαρυτικό πεδίο με επιτάχυνση $g+5m/sec^2$.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{5}{14.8}} \Rightarrow \boxed{T=3.65\,s}$$

(β) $$T=2\pi\sqrt{\frac{5}{(9.8-5)}} = \boxed{6.41\,sec}$$

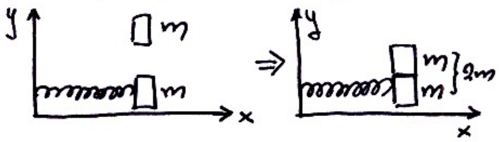
(γ) Στην περίπτωση αυτή η ενεργός επιτάχυνση είναι



$$a_{op}=\sqrt{g^2+\alpha_{op}^2} \Rightarrow a=\sqrt{9.8^2+5^2} \Rightarrow a=11.0\,m/sec^2$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{5}{11.0}} \Rightarrow \boxed{T=4.24\,m}$$

19. Μια μάζα *m*, η οποία είναι εξαρτημένη από ένα ελατήριο σταθεράς ελατηρίου *k*, ταλαντώνεται πάνω σε ένα οριζόντιο τραπέζι, με πλάτος ταλάντωσης *A*. Τη χρονική στιγμή που το ελατήριο έχει επιμήκυνση *A/*2, μια δεύτερη μάζα επίσης m πέφτει κατακόρυφα πάνω στην πρώτη μάζα και αμέσως κολλά πάνω της. Ποιο θα είναι το πλάτος της κίνησης των δύο μαζών;



Για τη μάζα που είναι εξαρτημένη στο ελατήριο εφαρμόζουμε διατήρηση ενέργειας στις θέσεις του μέγιστου πλάτους (A) και της θέσης $\frac{A}{2}$ για να βρούμε τη ταχύτητά της πριν ακριβώς τη κρούση: $\cancel{\frac{1}{2}}kA^2 = \cancel{\frac{1}{2}}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \cancel{\frac{1}{2}}mv_0^2 \Rightarrow \boxed{v_0^2 = \frac{3k}{4m}A^2}$ (1)

Η κρούση είναι πλαστική, και το σύστημα κινείται στη x-διεύθυνση. Διατήρηση της ορμής ⇒

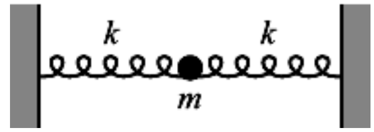
$\Rightarrow P_x^i = P_x^f \Rightarrow \cancel{m}v_0 + 0 = 2\cancel{m}v' \Rightarrow \boxed{v' = \frac{v_0}{2}}$ (2)

Εφαρμόζουμε και πάλι διατήρηση της ενέργειας μεταξύ της θέσης ακριβώς μετά τη κρούση και της θέσης του νέου πλάτους ταλάντωσης (B) οπότε:

$$\cancel{\frac{1}{2}}kB^2 = \cancel{\frac{1}{2}}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \cancel{\frac{1}{2}}(2m)v'^2 \overset{(2)}{\Rightarrow} kB^2 = \frac{kA^2}{4} + \cancel{2}m\frac{v_0^2}{\cancel{4}2} \overset{(1)}{\Rightarrow} \cancel{k}B^2 = \frac{\cancel{k}A^2}{4} + \cancel{m}\frac{3\cancel{k}}{8\cancel{m}}A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{3A^2}{8} \Rightarrow B^2 = \frac{5}{8}A^2 \Rightarrow \boxed{B = A\sqrt{\frac{5}{8}}}$$

20. Τα ελατήρια του παρακάτω σχήματος βρίσκονται στα φυσικά τους μήκη (μήκος ηρεμίας). Η μάζα ταλαντώνεται κατά μήκος των ελατηρίων (δηλαδή παράλληλα προς τη διεύθυνση των ελατηρίων) με πλάτος ταλάντωσης *d*. Κάποια στιγμή (ας υποθέσουμε ότι η στιγμή αυτή είναι η $t = 0$) η μάζα βρίσκεται στη θέση $x = d/2$ κινούμενη προς τα δεξιά, αφαιρούμε το δεξί ελατήριο. (α) Ποια είναι η εξίσωση της θέσης $x(t)$ για την κίνηση της μάζας; Θα πρέπει να βρείτε όλους τους όρους που καθορίζουν την εξίσωση με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, και να μην γράψετε απλά μία εξίσωση. (β) Ποιο είναι το πλάτος της νέας ταλάντωσης;



(α) Το πρόβλημα είναι η εύρεση των αρχικών συνθηκών που θα βοηθήσουν στον προσδιορισμό των συντελεστών της λύσης της αρμονικής ταλάντωσης:

$$x(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t \qquad (A)$$

Αλλά οι συνθήκες μας δίνονται. Τη στιγμή $t=0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $\boxed{x=\frac{d}{2}}$. Χρειαζόμαστε ακόμα μια. Αυτή είναι η ταχύτητα. Το σώμα στη θέση $x=\frac{d}{2}$ έχει και κινητική ενέργεια και ισχύει ότι η ολική ενέργεια στη θέση $x=\frac{d}{2}$ ισούται με την ολική ενέργεια στη θέση του μέγιστου πλάτους d.

Δηλαδή: $\frac{1}{2}k_1 d^2 = \frac{1}{2}k_1\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 2kd^2 = 2k\frac{d^2}{4} + mv^2 \Rightarrow mv^2 = \frac{3}{2}kd^2 \Rightarrow$

$k_1 = 2k$ λόγω 2 ελατηρίων

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{k}{m}}\,d}$$

Στη νέα κίνηση, εξίσωση (A), $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ αφού έχουμε ένα μόνο ελατήριο.

Από την (A) $\Rightarrow$ $\boxed{v(t) = -C\omega\sin\omega t + D\omega\cos\omega t}$ (B)

Αλλά $x(t=0) = x_0 \Rightarrow C\cos(0) + D\sin(0) = \frac{d}{2} \Rightarrow \boxed{C = \frac{d}{2}}$

και $v(t=0) = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{k}{m}}\,d \Rightarrow -C\omega\sin(0) + D\omega\cos(0) = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{k}{m}}\,d \Rightarrow D\omega = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\omega d \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{D = \sqrt{\frac{3}{2}}\,d}$$

Άρα η εξίσωση κίνησης είναι: $\boxed{x(t) = \frac{d}{2}\cos\omega t + \sqrt{\frac{3}{2}}\,d\sin\omega t}$

(β) Το πλάτος ταλάντωσης είναι: $A = \sqrt{C^2 + D^2} = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{3}{2}d^2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{7}{4}d^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{\sqrt{7}}{2}d}$$

21. Μια ξύλινη ράβδος μάζας m και μήκους L μπορεί να επιστραφεί γύρω από ένα σημείο το οποίο βρίσκεται απόσταση d από το κέντρο της και είναι ελεύθερη να κινηθεί μόνο στο κατακόρυφο επίπεδο. Για ποια τιμή της απόστασης d η περίοδος των ταλαντώσεων που αντιστοιχούν σε πολύ μικρή γωνία απόκλισης από τη θέση ισορροπίας (μικρές ταλαντώσεις) είναι μέγιστη;

Η ροπή αδράνειας ως προς το σημείο στήριξης είναι:

(Θεώρημα παράλληλων αξόνων) $I = \frac{1}{12}mL^2 + md^2$

Η ροπή ως προς το σημείο στήριξης είναι: $\tau = mgd\sin\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \tau = I\alpha \Rightarrow -mgd\sin\theta = I\alpha$ (το πρόσημο είναι − γιατί η βαρύτητα "προσπαθεί" να μειώσει το θ όταν $\theta > 0$)

$\Rightarrow -mgd\sin\theta = \left(\frac{1}{12}mL^2 + md^2\right)\ddot{\theta}$ $\left(\ddot{\theta} = \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$

Για μικρά θ έχουμε ότι $\sin\theta \simeq \theta$ οπότε:

$$-\cancel{m}gd\theta = \left(\frac{1}{12}\cancel{m}L^2 + \cancel{m}d^2\right)\ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\left(\frac{gd}{\frac{L^2}{12} + d^2}\right)\theta}$$

Αυτή είναι εξίσωση απλού αρμονικού ταλαντωτή με περίοδο:

$$\omega = \sqrt{\frac{gd}{\frac{L^2}{12} + d^2}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{L^2}{12} + d^2}{gd}}$$

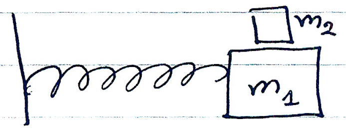
Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τη σχέση αυτή οπότε παίρνουμε τη παράγωγο

της ποσότητας $\frac{\frac{L^2}{12} + d^2}{gd} \Rightarrow$ $2d(gd) - \left(\frac{L^2}{12} + d^2\right)g = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2gd^2 - gd^2 = \frac{L^2 g}{12} \Rightarrow \cancel{g}d^2 = \frac{L^2\cancel{g}}{12} \Rightarrow d = \frac{L}{\sqrt{12}} \Rightarrow \boxed{d \simeq \frac{L}{3.5}}$$

Επομένως $\boxed{\omega_{max} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}g}{L}}}$

22. Ένα σώμα μάζας m_1 κινείται πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια ενώ είναι εξαρτημένο από οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k και ταλαντώνεται με πλάτος A. Όταν το ελατήριο έχει τη μέγιστη επιμήκυνσή του και η μάζα m_1 είναι στιγμιαία ακίνητη, ένα δεύτερο σώμα μάζας m_2 τοποθετείται πάνω στο ταλαντευόμενο σώμα. Ποια είναι η μικρότερη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής μ_s τέτοια ώστε το δεύτερο σώμα να μην γλιστρήσει πάνω στο πρώτο;



Από το 2° νόμο του Newton για το 2° σώμα:

$$\Sigma F_x = m_2 a_x = f_s = m_2 g \mu_s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_x = g\mu_s \Rightarrow \mu_s = \frac{a_x}{g} \quad (1)$$

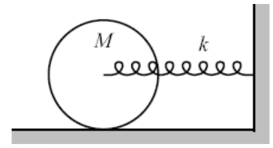
Αυτή είναι η μέγιστη επιτάχυνση του ταλαντωτή:

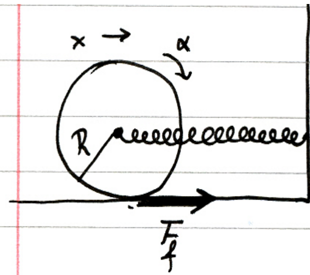
$$a_x = A\omega^2 = A\frac{k}{m_1+m_2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε: $\mu_s = \dfrac{A\frac{k}{m_1+m_2}}{g} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_s = \frac{Ak}{g(m_1+m_2)}}$$

23. Ο άξονας ενός κυλίνδρου μάζας *M* και ακτίνας *R* συνδέεται σε ένα ελατήριο σταθεράς *k*, όπως στο παρακάτω σχήμα. Αν ο κύλινδρος κυλά χωρίς ολίσθηση ποια είναι η συχνότητα των ταλαντώσεων.





Έστω ότι θετικά x είναι προς τα δεξιά ενώ θετική γωνιακή επιτάχυνση είναι αυτή της φοράς των δεικτών του ρολογιού:

$$F = ma \Rightarrow F_f - kx = m\ddot{x} \quad (1)$$

$$\tau = I\alpha \Rightarrow -F_f R = I\alpha = \left(\frac{1}{2} mR^2\right)\left(\frac{\ddot{x}}{R}\right) \qquad \alpha = \frac{a}{R} \text{ για}$$

κύλιση χωρίς ολίσθηση

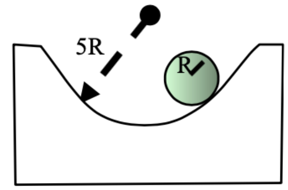
$$\Rightarrow F_f = -\frac{1}{2} m\ddot{x} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) έχουμε: $-\frac{1}{2}m\ddot{x} - kx = m\ddot{x} \Rightarrow$

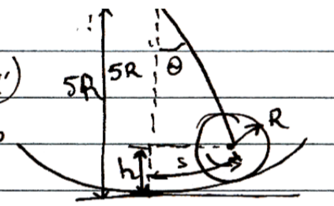
$$\Rightarrow -kx = \frac{3}{2} m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{2}{3}\frac{k}{m} x \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{m}}}$$

Επομένως ο κύλινδρος συμπεριφέρεται σα μια μάζα $\frac{3}{2}m$ που γλιστρά στο έδαφος. Ο κύλινδρος φαίνεται μεγαλύτερος απ' ότι είναι, γιατί υπάρχει ενέργεια που εμπεριέχεται στην περιστροφική του κίνηση, και επομένως χρειάζεται περισσότερη προσπάθεια για να τεθεί σε κίνηση σε συγκεκριμένη ταχύτητα.

24. Μια συμπαγής σφαίρα (ακτίνας R) κυλά χωρίς να γλιστρά σε ένα κυλινδρικό αυλάκι (ακτίνας $5R$) όπως φαίνεται στο σχήμα. Δείξτε ότι για μικρές μετατοπίσεις από το σημείο ισορροπίας και κάθετα στο μήκος του αυλακιού, η σφαίρα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{28R/5g}$.



Η κινητική ενέργεια της μπάλας είναι $K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$



όπου ω είναι ο ρυθμός περιστροφής της μπάλας ("σφαίρας") γύρω από το κέντρο μάζας του. Από τη στιγμή που το κέντρο της σφαίρας κινείται κατά μήκος του κύκλου ακτίνας $4R$ ($5R - 1R$ σφαίρας) η μετατόπισή του από το σημείο ισορροπίας είναι: $v = \frac{ds}{dt} = 4R\frac{d\theta}{dt}$.

Η σφαίρα κυλά χωρίς ολίσθηση και επομένως: $v = \frac{ds}{dt} = \quad R$

$\Rightarrow \omega = \frac{v}{R} = 4\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$

Η κινητική ενέργεια είναι: $K = \frac{1}{2}m\left(4R\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\left(4\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{112mR^2}{10}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

Όταν η σφαίρα έχει μετατόπιση Θ, το κέντρο της βρίσκεται σε ύψος $h = 4R(1-\cos\Theta)$ ψηλότερα από τη θέση του σημείου ισορροπίας.
Επομένως η δυναμική ενέργεια είναι $U_g = mgh = 4mgR(1-\cos\Theta)$

Για μικρές γωνίες το ανάπτυγμα Taylor $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots$

Δείτε παράρτημα του βιβλίου

Επομένως: $(1-\cos\theta) = \frac{\theta^2}{2}$.

Το δυναμικό γράφεται: $U_g \cong 2mgR\theta^2$.

Η ολική ενέργεια επομένως:

$$E = K + U_g = \frac{112mR^2}{10}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2mgR\theta^2$$

Αφού η ολική ενέργεια διατηρείται $\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{112mR^2}{10}\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2} + 4mgR\theta\frac{d\theta}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{28\cancel{R}\cancel{m}R}{5}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \cancel{m}gR\theta = 0 \Rightarrow \frac{28}{5}R\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{5g\theta}{28R}}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση δηλαδή είναι ίση με μιά αρνητική σταθερά επί την γωνιακή θέση.

Η εξίσωση αυτή είναι στη μορφή που ορίζεται μια απλή αρμονική εξίσωση κίνησης με $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{5g}{28R}}}$

Η περίοδος της αρμονικής ταλάντωσης είναι $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{28R}{5g}}}$