Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

Μονοδιάστατη εξίσωση κύματος

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι οποιαδήποτε συνάρτηση της μορφής $\psi(x,t)$ ικανοποιεί την 1-D εξίσωση κύματος

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(x,t)=0}$$

Έστω $x'=x\pm\upsilon t$ επομένως: $\frac{\partial}{\partial x}(x')=1$ και $\frac{\partial}{\partial t}(\pm\upsilon t)=\pm\upsilon$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, οι πρώτες δύο μερικές παράγωγοι ως προς *x* δίνουν:

$$\frac{\partial\psi(x')}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial x'}\Rightarrow\frac{\partial^2\psi(x')}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x'}\right)=\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x'}\right)\frac{\partial x'}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial^2\psi(x')}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}$$

Παρόμοια, οι μερικοί παράγωγοι ως προς χρόνο θα δώσουν:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}=\pm\upsilon\frac{\partial\psi}{\partial x'}\Rightarrow\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=\pm\upsilon\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x'}=\pm\upsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial t}\Rightarrow\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\upsilon^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις έχουμε: $\frac{\partial^2\psi(x')}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$

που αποδεικνύει ότι η $\psi(x\pm\upsilon t)$ ικανοποιεί την 1-Δ εξίσωση κύματος.

Η 1-D εξίσωση κύματος είναι ένα παράδειγμα γραμμικής διαφορικής εξίσωσης που σημαίνει ότι αν $\psi_1(x,t)$ και $\psi_2(x,t)$ είναι λύσεις τότε και ο γραμμικός τους συνδυασμός θα είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης. Σαν αποτέλεσμα, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ακολουθούν την εξίσωση της υπέρθεσης

Μονοδιάστατη εξίσωση κύματος

Μια δυνατή λύση της εξίσωσης κύματος μπορεί να είναι:

$$\vec{E} = E_y(x,t)\hat{\jmath} = E_0\cos[k(x-\upsilon t)]\hat{\jmath} = E_0\cos(kx-\omega t)\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{B} = B_z(x,t)\hat{k} = B_0\cos[k(x-\upsilon t)]\hat{k} = B_0\cos(kx-\omega t)\,\hat{k}$$

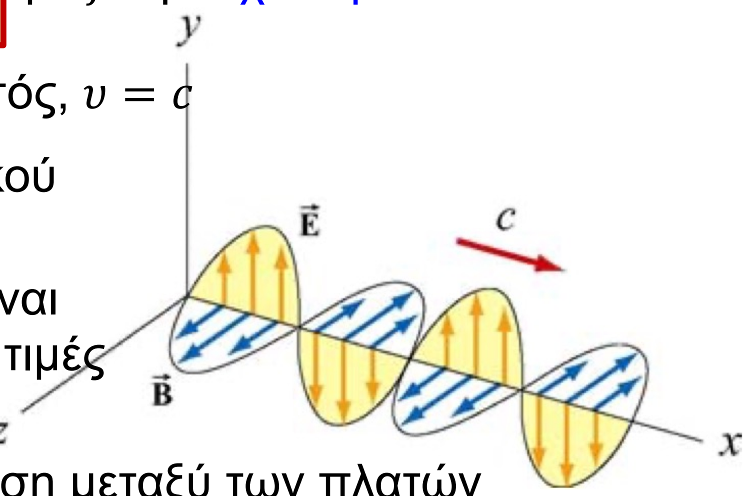
όπου τα πεδία είναι ημιτονοειδή με πλάτη E_0 και B_0.

Ο γωνιακός κυματάριθμος k σχετίζεται με το μήκος κύματος λ: $\boxed{k = 2\pi/\lambda}$

Η γωνιακή συχνότητα ω είναι $\boxed{\omega = k\upsilon = \dfrac{2\pi\upsilon}{\lambda} = 2\pi f}$ με f τη συχνότητα

Στο κενό, το κύμα διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός, $\upsilon = c$

Η συμπεριφορά ενός ημιτονοειδούς ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι όπως στο σχήμα.



Παρατηρούμε ότι το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο είναι πάντοτε σε φάση (λαμβάνουν μέγιστες και ελάχιστες τιμές ταυτόχρονα)

Από την συνθήκη: $\dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\left(\dfrac{\partial B_z}{\partial t}\right)$ βρίσκουμε τη σχέση μεταξύ των πλατών

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}E_0\cos(kx-\omega t) &= -E_0 k\sin(kx-\omega t)\\ \frac{\partial}{\partial t}B_0\cos(kx-\omega t) &= B_0\omega\sin(kx-\omega t)\end{aligned}\right\} \Rightarrow E_0 k = \omega B_0 \Rightarrow \boxed{\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = c}$$

που ισχύει για τυχαία t, $E/B = c$

Μονοδιάστατη εξίσωση κύματος

Τα σημαντικά χαρακτηριστικά των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι τα ακόλουθα:

- Το κύμα είναι εγκάρσιο εφόσον τόσο το $\vec{E}$ όσο και το $\vec{B}$ είναι κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος, που δείχνει στη διεύθυνση του εξωτερικού γινομένου $\vec{E}\times\vec{B}$
- Τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους και επομένως $\vec{E}\cdot\vec{B}=0$
- Ο λόγος των πλατών και των μέτρων των πεδίων είναι: $\dfrac{E_0}{B_0}=\dfrac{E}{B}=c$
- Η ταχύτητα διάδοσης στο κενό ισούται με την ταχύτητα του φωτός: $c=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$
- Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα υπακούν την αρχή της υπέρθεσης

Στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου δύο ημιτονοειδή κύματα, ένα διαδιδόμενο στη +x-διεύθυνση, με:

$$E_{1y}(x,t) = E_{10}\cos(k_1 x - \omega_1 t) \quad \text{και} \quad B_{1z}(x,t) = B_{10}\cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

και το άλλο να κινείται στη –*x*-διεύθυνση με:

$$E_{2y}(x,t) = -E_{20}\cos(k_2 x + \omega_2 t) \quad \text{και} \quad B_{2z}(x,t) = B_{20}\cos(k_2 x + \omega_2 t)$$

Για απλούστευση, υποθέτουμε ότι τα δύο αυτά ηλεκτρομαγνητικά κύματα έχουν το ίδιο πλάτος ($E_{10} = E_{20} = E_0$, και $B_{10} = B_{20} = B_0$) και κυματάριθμους ($k_1 = k_2 = k$ και $\omega_1 = \omega_2 = \omega$).

Χρησιμοποιώντας την αρχή της υπέρθεσης, το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο γράφονται:

$$E_y(x,t) = E_{1y}(x,t) + E_{2y}(x,t) = E_0[cos(kx - \omega t) - cos(kx + \omega t)]$$

$$B_z(x,t) = B_{1z}(x,t) + B_{2z}(x,t) = B_0[cos(kx - \omega t) + cos(kx + \omega t)]$$

Από τις τριγωνομετρικές ταυτότητες: $[cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)\,]$

$$E_y(x,t) = E_0[cos(kx)\cos(\omega t) + \sin(kx)\sin(\omega t) - cos(kx)\cos(\omega t) + \sin(kx)\sin(\omega t)]$$

$$\Rightarrow E_y\ (x,t) = 2E_0[\sin(kx)\sin(\omega t)]$$

$$B_z(x,t) = B_0[cos(kx)\cos(\omega t) + \sin(kx)\sin(\omega t) + cos(kx)\cos(\omega t) - \sin(kx)\sin(\omega t)]$$

$$\Rightarrow B_z\ (x,t) = 2B_0[\cos(kx)\cos(\omega t)]$$

Στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Μπορούμε να δείξουμε ότι τα πεδία υπέρθεσης $E_y(x,t)$ και $B_z(x,t)$ ικανοποιούν την κυματική εξίσωση παρόλο που δεν είναι της μορφής $kx \pm \omega t$

Τα κύματα που περιγράφονται από τις εξισώσεις: $E_y(x,t) = 2E_0[\sin(kx)\sin(\omega t)]$

και $B_z(x,t) = 2B_0[\cos(kx)\cos(\omega t)]$ είναι στάσιμα κύματα,

τα οποία δεν διαδίδονται αλλά απλά ταλαντώνονται στο χώρο και χρόνο

Εξετάζουμε αρχικά την χωρική εξάρτηση των πεδίων.

Από την εξίσωση: $E_y(x,t) = 2E_0[\sin(kx)\sin(\omega t)]$ βλέπουμε ότι $E_y(x,t) = 0$ για όλες τις περιπτώσεις που $\sin(kx) = 0$ ή εάν: $kx = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{2\pi/\lambda} \Rightarrow x = \frac{n\lambda}{2}, n = 0,1,2,\ldots$

Τα επίπεδα που περιέχουν αυτά τα σημεία ονομάζονται επίπεδα δεσμών του ηλεκτρικού πεδίου.

Αν το $\sin(kx) = \pm 1$ τότε: $x = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2\pi/\lambda} = \left(\frac{n}{\mathbf{2}}+\frac{1}{4}\right)\lambda$, με $n = 0,1,2,\ldots$.

Το πλάτος του πεδίου είναι στο μέγιστο $2E_0$. Τα επίπεδα που περιέχουν αυτά τα σημεία ονομάζονται επίπεδα αντι-δεσμών. Πρέπει να σημειωθεί ότι μεταξύ δύο επιπέδων δεσμών υπάρχει ένα επίπεδο αντιδεσμού και το ανάποδο.

Στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Για το μαγνητικό πεδίο, τα επίπεδα των δεσμών περιέχουν σημεία που ικανοποιούν τη συνθήκη $coskx = 0$. Αυτή η απαίτηση οδηγεί:

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k} = \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\lambda \quad \text{όπου } n = 0,1,2 \ldots \text{ (επίπεδα δεσμών)}$$

Με παρόμοιο τρόπο, τα επίπεδα των αντι-δεσμών περιέχουν σημεία που ικανοποιούν τη συνθήκη $coskx = \pm 1$. Αυτή η απαίτηση οδηγεί:

$$x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{n\pi}{\lambda} \text{ όπου } n = 0,1,2 \ldots \text{ (επίπεδα αντι-δεσμών του } \vec{B}\text{)}$$

Παρατηρούμε ότι ένα επίπεδο δεσμού για το $\vec{E}$ αντιστοιχεί σε επίπεδο αντι-δεσμού για το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ και το αντίστροφο.

Για την χρονική εξάρτηση, η εξίσωση: $E_y(x,t) = 2E_0[\sin(kx)\sin(\omega t)]$ γίνεται 0 παντού, όταν sin(ωt) = 0 ή διαφορετικά:

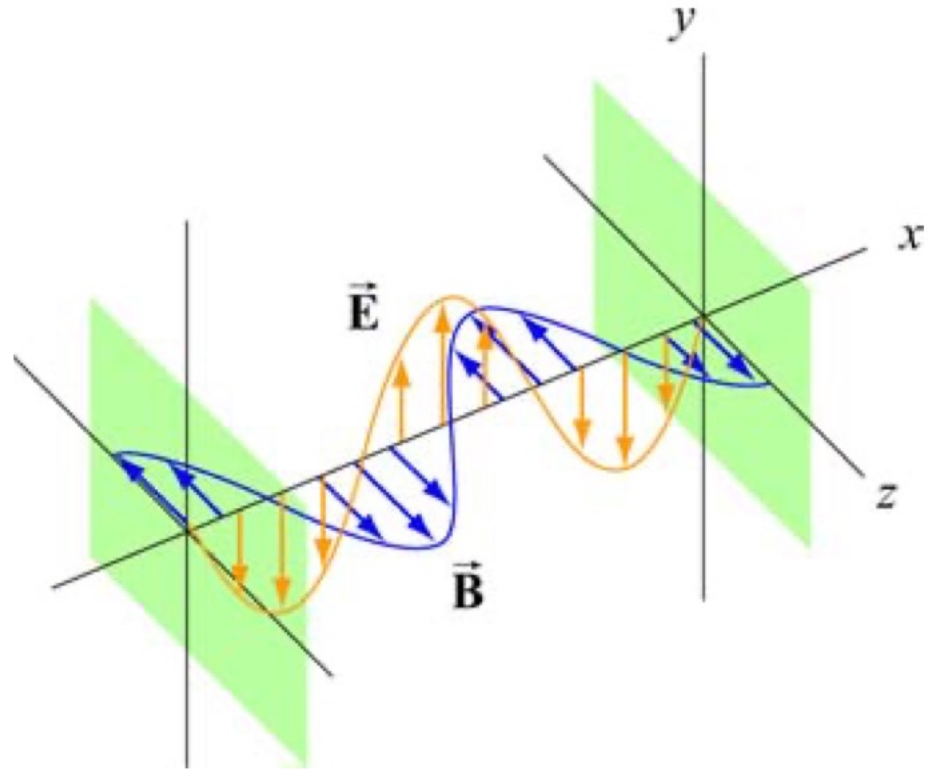
$$t = \frac{n\pi}{\omega} = \frac{n\pi}{2\pi/\mathrm{T}} = \frac{nT}{2},\ n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{όπου } T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \text{ η περίοδος}$$

Ωστόσο αυτή είναι η μέγιστη συνθήκη για το μαγνητικό πεδίο.

Αντίθετα με το διαδιδόμενο ηλεκτρομαγνητικό κύμα που το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο βρίσκονται πάντοτε σε φάση, στην περίπτωση του στάσιμου κύματος τα μαγνητικό πεδίο είναι 90° εκτός φάσης από το ηλεκτρικό πεδίο.

Στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μπορούν να δημιουργηθούν περιορίζοντας τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μεταξύ δύο τέλεια ανακλώντες αγωγούς, όπως στο σχήμα:



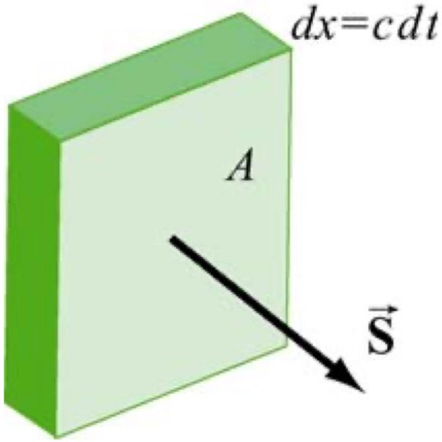
Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

Διάνυσμα Poynting

Έχουμε υπολογίσει την ενέργεια που αποθηκεύεται στο ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο.

Εφόσον το ηλεκτρομαγνητικό κύμα αποτελείται και από τα δύο πεδία, μπορεί να μεταφέρει ενέργεια.

Έστω ότι έχουμε ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα το οποίο περνά από ένα αντικείμενο μικρού όγκου, επιφάνειας A και πάχους *dx,* όπως στο σχήμα.



Η ολική ενέργεια στον στοιχειώδη όγκο θα είναι:

$$dU = uAdx = (u_E + u_B)Adx = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)Adx$$

όπου $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ και $u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$ είναι οι πυκνότητες ενέργειας σχετιζόμενες με το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο

Εφόσον το ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός, ο χρόνος που απαιτείται για να διαπεράσει τον στοιχειώδη όγκο θα είναι: $dt = dx/c$.

Μπορούμε επομένως να υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας ανά μονάδα εμβαδού, που συμβολίζεται με το σύμβολο *S* ως:

$$S = \frac{dU}{Adt} = \frac{c}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)$$ με μονάδες μέτρησης στο SI να είναι W/m^2

Διάνυσμα Poynting

Από τη σχέση μεταξύ των μέτρων του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου του κύματος:

$E = cB$ και $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ θα έχουμε:

$$S = \frac{dU}{Adt} = \frac{c}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) = \frac{c}{2}\left(\varepsilon_0 c^2 B^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) = \frac{c}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 B^2}{\mu_0 \varepsilon_0} + \frac{B^2}{\mu_0}\right) \Rightarrow S = \frac{cB^2}{\mu_0} = c\varepsilon_0 E^2 = \frac{EB}{\mu_0}$$

Γενικά, ο ρυθμός της ροής ενέργειας ανά μονάδα επιφάνειας μπορεί να περιγραφεί από το διάνυσμα Poynting $\vec{S}$ (προς τιμή του Βρετανού φυσικού John Poynting):

διάνυσμα Poynting: $\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}}$

Το διάνυσμα $\vec{S}$ έχει την κατεύθυνση της διάδοσης του κύματος.
Εφόσον τα δύο πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, το μέτρο του διανύσματος $\vec{S}$:

$$\boxed{\left|\vec{S}\right| = \frac{\left|\vec{E}\times\vec{B}\right|}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0} = S}$$

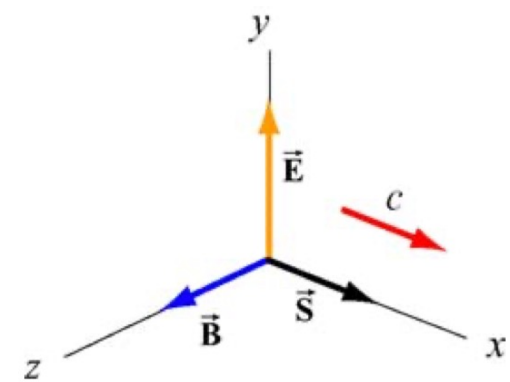
Για παράδειγμα, έστω ότι η ηλεκτρική συνιστώσα ενός επίπεδου κύματος είναι:

$\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{\jmath}$ και η αντίστοιχη μαγνητική συνιστώσα: $\vec{B} = B_0 \cos(kx - \omega t)\hat{k}$
και η κατεύθυνση διάδοσης είναι στον +x-άξονα. Το διάνυσμα Poynting θα είναι:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{\jmath}\times B_0 \cos(kx - \omega t)\hat{k} = E_0 B_0 \cos^2(kx - \omega t)\hat{\imath}$$

Διάνυσμα Poynting

Όπως ήταν αναμενόμενο, το διάνυσμα Poynting είναι στην κατεύθυνση διάδοσης του κύματος.



Η ένταση του κύματος, *I*, ορίζεται ως η μέση τιμή του *S* ως προς τον χρόνο και δίνεται από τη σχέση:

$$I = \langle S \rangle = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} = \frac{cB_0^2}{2\mu_0}$$

$$\langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

Για να συσχετίσουμε την ένταση με την πυκνότητα ενέργειας χρησιμοποιούμε την σχέση μεταξύ της πυκνότητας ηλεκτρικής και μαγνητικής ενέργειας:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(E/c)^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2c^2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = u_E$$

Με βάση τα προηγούμενα, η μέση ολική πυκνότητα ενέργειας γράφεται ως:

$$\langle u \rangle = \langle u_E + u_B \rangle = \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 = \frac{1}{\mu_0} \langle B^2 \rangle = \frac{1}{2\mu_0} B_0^2$$

Επομένως η ένταση σχετίζεται με την μέση πυκνότητα ενέργειας με τη σχέση:

$$I = \langle S \rangle = c \langle u \rangle$$

Διάνυσμα Poynting - παράδειγμα

Στα πάνω στρώματα της ατμόσφαιρας της γης, η μέση τιμή του διανύσματος Poynting ως προς τον χρόνο είναι: $\langle S\rangle = 1.35\times10^3 W/m^2$και είναι γνωστή ως ηλιακή σταθερά

(α) Υποθέτοντας ότι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία από τον ήλιο είναι ένα επίπεδο ημιτονοειδές κύμα, ποια θα είναι τα μέτρα του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου;

(β) Ποια είναι η ολική μέση ισχύς που ακτινοβολείται από τον ήλιο ως προς τον χρόνο; Η μέση απόσταση ήλιου-γης είναι R=1.50x10^{11}*m.*

(**α**) Η μέση τιμή ως προς τον χρόνο του διανύσματος Poynting είναι:$\langle S\rangle = c\langle u\rangle = \frac{c}{2}\varepsilon_0 E_0^2$

Επομένως, το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου θα είναι:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2\langle S\rangle}{c\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{2\times1.35\times10^3 W/m^2}{(3\times10^8 m/s)(8.85\times10^{-12} C^2/N\cdot m^2)}} \Rightarrow E_0 = 1.01\times10^3 V/m$$

Η αντίστοιχη τιμή του πλάτους του μαγνητικού πεδίου θα είναι:

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{1.01\times10^3 V/m}{3\times10^8 m/s} \Rightarrow B_0 = 3.4\times10^{-6} T$$

Το πλάτος του μαγνητικού πεδίου είναι λιγότερο από 10% του μαγνητικού πεδίου της γης

Διάνυσμα Poynting - παράδειγμα

(**β**) Η ολική μέση ισχύς ως προς τον χρόνο, που ακτινοβολείται από τον ήλιο σε απόσταση *R* είναι:

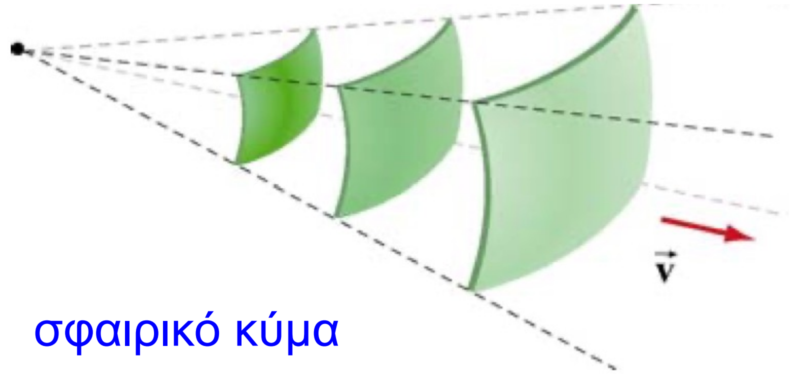
$$\langle P \rangle = \langle S \rangle A = \langle S \rangle 4\pi R^2 = (1.35\times 10^3 W/m^2) 4\pi (1.5\times 10^{11} m)^2 = 3.8\times 10^{26} W$$

Ο τύπος κύματος που συζητείται στο παράδειγμα αυτό είναι ενός σφαιρικού κύματος που προέρχεται από μια σημειακή πηγή. Η ένταση σε απόσταση *r* από την πηγή είναι:

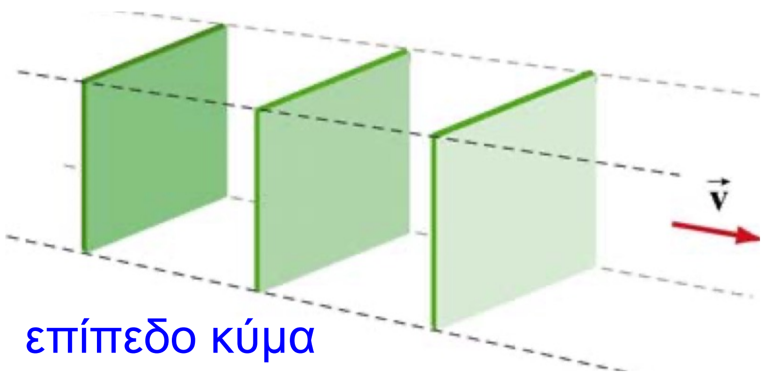
$$\boxed{I = \langle S \rangle = \frac{\langle P \rangle}{4\pi r^2}}$$

Η ένταση ελαττώνεται αντιστρόφως ανάλογα του τετραγώνου της απόστασης από την πηγή

Ωστόσο για ένα επίπεδο κύμα, η ένταση παραμένει σταθερή και δεν υπάρχει διασπορά στην ενέργειά του. Αυτά φαίνονται στο παρακάτω σχήματα όπου παρουσιάζονται τα σφαιρικά και επίπεδα ηλεκτρομαγνητικά κύματα.



σφαιρικό κύμα



επίπεδο κύμα

Διάνυσμα Poynting - Παράδειγμα

Θα υπολογίσουμε την ένταση ενός στάσιμου ηλεκτρομαγνητικού κύματος που δίνεται από την εξίσωση: $E_y(x,t) = 2E_0\cos(kx)\cos(\omega t)$ και $B_z(x,t) = 2B_0\sin(kx)sin(\omega t)$

Το διάνυσμα Poynting για ένα στάσιμο κύμα είναι:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}[2E_0\cos(kx)\cos(\omega t)\,\hat{\jmath}]\times\left[2B_0\sin(kx)\sin(\omega t)\hat{k}\right]$$

$$\vec{S} = \frac{4E_0B_0}{\mu_0}[\cos(kx)\cos(\omega t)\sin(kx)\sin(\omega t)]\hat{\imath} \Rightarrow \vec{S} = \frac{E_0B_0}{\mu_0}[sin(2kx)\sin(2\omega t)]\hat{\imath}$$

Η μέση τιμή ως προς τον χρόνο του διανύσματος Poynting θα είναι:

$$\langle S\rangle = \frac{E_0B_0}{\mu_0}sin(2kx)\langle\sin(2\omega t)\rangle = 0$$

Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο από τη στιγμή που το στάσιμο κύμα δεν διαδίδεται.

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η ενέργεια που μεταφέρεται από τα δύο αντίθετα διαδιδόμενα κύματα που σχηματίζουν το στάσιμο κύμα αναιρεί η μία την άλλη και δεν υπάρχει καθαρή μεταφορά ενέργειας.

Μεταφορά ενέργειας

Το διάνυσμα Poynting εκφράζει τον ρυθμό ροής της ενέργειας ανά μονάδα επιφάνειας.

Θα μπορούσαμε να εκφράσουμε τον ρυθμό της μεταβολής της ενέργειας σε ένα σύστημα

$$\boxed{\frac{dU}{dt} = -\oiint \vec{S} \cdot d\vec{A}}$$

όπου $d\vec{A} = dA\hat{n}$ και $\hat{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια και με κατεύθυνση προς τα έξω

Η πιο πάνω εξίσωση μας επιτρέπει να ερμηνεύσουμε το διάνυσμα Poynting ως την πυκνότητα της ροής της ενέργειας, σε αναλογία με την πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}$:

$$\boxed{I = \frac{dQ}{dt} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{A}}$$

Αν ενέργεια εκρέει από το σύστημα, τότε $\vec{S} = S\hat{n}$ και $dU/dt < 0$ υποδηλώνοντας ότι ενέργεια μεταφέρεται εκτός του συστήματος και η ενέργεια του συστήματος ελαττώνεται.

Αν ενέργεια εισρέει στο σύστημα, τότε $\vec{S} = S(-\hat{n})$ και $dU/dt > 0$ υποδηλώνοντας ότι ενέργεια μεταφέρεται στο σύστημα και η ενέργειά του αυξάνει.

Μεταφορά ενέργειας

Σαν παράδειγμα για την κατανόηση της φυσικής σημασίας της παραπάνω εξίσωσης, θεωρούμε ένα πηνίο μεγάλου μήκους *l*, ακτίνας *r* και n-σπείρες ανά μονάδα μήκους. Υποθέτουμε τώρα ότι κάποια χρονική στιγμή το ρεύμα αλλάζει με ρυθμό $dI/dt > 0$.

Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Ampere, το μαγνητικό πεδίο στο πηνίο θα είναι:

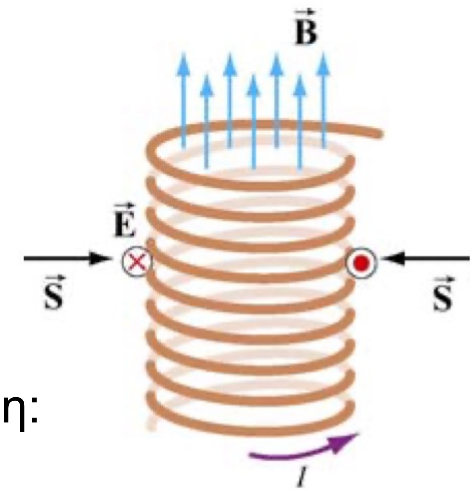
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = Bl = \mu_0(NI) \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 n I \hat{k}$$

Ο ρυθμός αύξησης του μαγνητικού πεδίου θα είναι: $\dfrac{dB}{dt} = \mu_0 n \dfrac{dI}{dt}$

Σύμφωνα με τον νόμο του Faraday: $\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\dfrac{d\Phi_m}{dt}$

Μεταβάλλοντας τη μαγνητική ροή επάγεται ΗΕΔ που δίνεται από:

$$E(2\pi r) = -\mu_0 n \left(\frac{dI}{dt}\right) \pi r^2 \Rightarrow \vec{E} = -\mu_0 n \left(\frac{dI}{dt}\right) \hat{\varphi}$$



Η διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου είναι σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, ίδια με του επαγόμενου ρεύματος

Το αντίστοιχο Poynting διάνυσμα, μπορεί να εξαχθεί από τη σχέση:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\left[-\frac{\mu_0 n r}{2}\left(\frac{dI}{dt}\right)\hat{\varphi}\right] \times \left(\mu_0 n I \hat{k}\right) \Rightarrow \vec{S} = -\frac{\mu_0 n^2 r I}{2}\left(\frac{dI}{dt}\right)\hat{r}$$

ακτινική διεύθυνση προς το εσωτερικό

Μεταφορά ενέργειας

Η μαγνητική ενέργεια που αποθηκεύεται στο πηνίο είναι:

$$U_B = \left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)(\pi r^2 l) = \frac{1}{2}\mu_0 \pi n^2 I^2 r^2 l$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας θα είναι: $P = \dfrac{dU_B}{dt} = \mu_0 \pi n^2 I \left(\dfrac{dI}{dt}\right) r^2 l = I|\mathcal{E}|$

όπου: $\mathcal{E} = -N\dfrac{d\Phi_m}{dt} = -(nl)\left(\dfrac{dB}{dt}\right)\pi r^2 = -\mu_0 \pi n^2 \left(\dfrac{dI}{dt}\right) r^2 l$ η επαγόμενη ΗΕΔ

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι:

$$\frac{dU}{dt} = -\oiint \vec{S}\cdot d\vec{A} = \frac{\mu_0 n^2 r I}{2}\left(\frac{dI}{dt}\right)(2\pi r l) = \pi \mu_0 n^2 r^2 l I \left(\frac{dI}{dt}\right)$$

Επομένως καταλήγουμε: $\dfrac{dU}{dt} = -\oiint \vec{S}\cdot d\vec{A} > 0$

Η ενέργεια του συστήματος αυξήθηκε, όπως ήταν αναμενόμενο, γιατί $dI/dt > 0$.

Εάν ωστόσο $dI/dt < 0$ τότε η ενέργεια θα ελαττωθεί και $dU/dt < 0$.

Πίεση ορμής και ακτινοβολίας

Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα μεταφέρει ενέργεια αλλά και ορμή, και άρα θα μπορούσε να ασκεί μια πίεση ακτινοβολίας πάνω σε μια επιφάνεια εξαιτίας της απορρόφησης και ανάκλασης της ορμής αυτής.

Ο Maxwell έδειξε ότι αν ένα επίπεδο κύμα απορροφηθεί πλήρως από μία επιφάνεια, η ορμή που μεταφέρεται σχετίζεται με την ενέργεια που απορροφάται σύμφωνα με:

$$\boxed{\Delta p = \frac{\Delta U}{c}}$$ πλήρης απορρόφηση

Αν το ηλεκτρομαγνητικό κύμα ανακλαστεί πλήρως από μια επιφάνεια όπως συμβαίνει στην επιφάνεια ενός καθρέπτη, τότε θα έχουμε:

$$\boxed{\Delta p = \frac{2\Delta U}{c}}$$ πλήρης ανάκλαση

Για την περίπτωση της πλήρους απορρόφησης, η μέση πίεση ακτινοβολίας (δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας) δίνεται από

$$\boxed{P = \frac{\langle F \rangle}{A} = \frac{1}{A}\left\langle \frac{dp}{dt} \right\rangle = \frac{1}{cA}\left\langle \frac{dU}{dt} \right\rangle}$$

Αλλά ο ρυθμός της ενέργειας που προσδίδεται στην επιφάνεια είναι

$$\left\langle \frac{dU}{dt} \right\rangle = \langle S \rangle A = IA$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση της πίεσης δίνει:

$$\boxed{P = \frac{I}{c}}$$ πλήρης απορρόφηση

και ανάλογα για πλήρη ανάκλαση:

$$\boxed{P = \frac{2I}{c}}$$ πλήρης ανάκλαση

21ο Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

Έτοιμοι