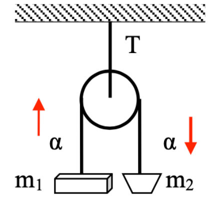
ΦΥΣ. 111

8ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή 09.11.2020**

1. Όταν είδαμε τις μηχανές του Atwood είχαμε δείξει ότι οι επιταχύνσεις των μαζών και η τάση δίνονται από τις εξισώσεις:



$a = g\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}$ και $T = g\frac{4m_1m_2}{m_1+m_2}$

Υποθέτουμε στο πρόβλημα αυτό ότι $m_2 > m_1$ ώστε η επιτάχυνση, α, να είναι θετική.

(α) Αφού κάθε μάζα έχει κινηθεί κατά απόσταση d, να βρεθεί η δυναμική και η κινητική ενέργεια και να δειχθεί ότι η μηχανική ενέργεια διατηρείται.

(β) Μετά από χρόνο t, δείξτε ότι $P_{συνολική} = F_{συνολική}\, t$. Προσέξτε ώστε να λάβετε υπόψη όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα.

(α) Ο χρόνος που χρειάζεται για να κινηθούν μιά απόσταση d δίνεται από τη σχέση $d = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{2d/a}$

Η ταχύτητα την χρονική αυτή στιγμή t είναι: $v = at = \sqrt{2da}$ { ίδια και για τις 2 μάζες

Επομένως η κινητική ενέργεια είναι: $K = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 \Rightarrow$

$$K = \frac{1}{2}(m_1+m_2)(2da) = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{(m_1+m_2)}\cancel{2}d\,\frac{m_2-m_1}{\cancel{m_2+m_1}}\,g \Rightarrow \boxed{K = (m_2-m_1)dg}$$

Η δυναμική ενέργεια σχετικά με τις αρχικές θέσεις θα είναι:

$$U = m_1gy_1 + m_2gy_2 = m_1gd + (-d)m_2g \Rightarrow \boxed{U = (m_1-m_2)dg}$$

Επομένως η ενέργεια όπως βλέπουμε διατηρείται: $K+U = \cancel{m_2dg} - \cancel{m_1dg} + \cancel{m_1dg} - \cancel{m_2dg} = 0$

(β) Μετά από χρόνο t, η ολική ορμή είναι: (φορά πρός τα πάνω θετική)

$$P_{tot} = m_1v_1 + m_2v_2 = m_1at + m_2(-at) = (m_1-m_2)at = (m_1-m_2)\left(g\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}\right)t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{tot} = -gt\,\frac{(m_2-m_1)^2}{(m_2+m_1)}}$$

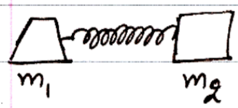
Οι δυνάμεις στο σύστημα της τροχαλίας είναι τα βάρη των 2 μαζών **και** η τάση στο πάνω σχοινί :

$$F_{TOT} = -m_1 g - m_2 g + T = -(m_1+m_2)g + g\frac{4m_1m_2}{m_1+m_2} \Rightarrow$$

$$F_{TOT} = -g\frac{(m_1+m_2)^2 - 4m_1m_2}{m_1+m_2} = -g\frac{m_1^2+m_2^2+2m_1m_2-4m_1m_2}{m_1+m_2} = -g\frac{m_1^2+m_2^2-2m_1m_2}{m_1+m_2}$$

$$\Rightarrow F_{TOT} = -g\frac{(m_2-m_1)^2}{(m_1+m_2)} \Rightarrow \boxed{P_{tot} = F_{tot}\cdot t}$$

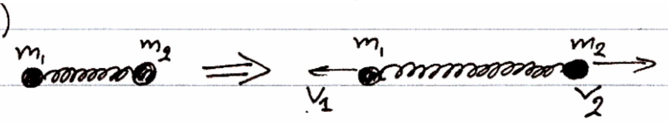
2. Δύο μάζες 2.0*kg* και 3.0*kg* αντίστοιχα χρησιμοποιούνται για να συμπιέσουν τις αντίθετες άκρες ενός ιδανικού ελατηρίου με σταθερά ελατηρίου $k = 1.50 \cdot 10^3\ N/m$ πάνω σε ένα λείο τραπέζι. Το ελατήριο συμπιέζεται κατά 40*cm* από το ιδανικό του μήκος και αφήνεται ελεύθερο με τις δυο μάζες αρχικά σε κατάσταση ισορροπίας. Ορίστε το σύστημά σας να είναι το ελατήριο με τις δυο μάζες. (α) Εξηγήστε γιατί η ορμή του συστήματος διατηρείται. (β) Εξηγήστε γιατί η ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται. (γ) Προσδιορίστε την ταχύτητα των μαζών τη στιγμή που αφήνουν το ελατήριο.



(α) Δεν υπάρχουν εξωτερικές οριζόντιες δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα και επομένως $P_{οριζόντια}$ διατηρείται αφού $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. Επίσης η καθαρή κατακόρυφη δύναμη είναι ϕ επομένως και η $P_{κατακόρυφη}$ διατηρείται αφού είναι πάντα ϕ.

(β) Από τη στιγμή που δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις που παράγουν έργο η ολική μηχανική ενέργεια διατηρείται.

(γ)



$$\left.\begin{array}{l} \text{Διατήρηση της ενέργειας} \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \Rightarrow \\ \text{Διατήρηση της ορμής} \Rightarrow 0 = m_2 v_2 - m_1 v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

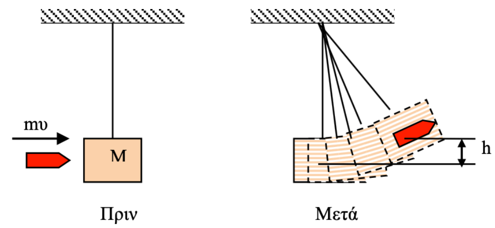
$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}kx^2 = \cancel{\frac{1}{2}}m_1 v_1^2 + \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m_2}\frac{m_1^2}{m_2^{\cancel{2}}} v_1^2 \Rightarrow kx^2 = \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right) v_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v_1 = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}\frac{kx^2}{(m_1+m_2)}}} \quad \text{και} \quad \boxed{v_2 = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}\frac{kx^2}{(m_1+m_2)}}}$$

Αντικαθιστώντας $m_1 = 2kgr$, $m_2 = 3kgr$, $k = 1.5\, 10^3 \frac{N}{m}$ και $x = 0.4m$ έχουμε

$$v_1 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{1.5 \cdot 10^3 \cdot 0.16}{5}} \Rightarrow v_1 = \sqrt{72} \Rightarrow \boxed{v_1 = 8.49 m/s} \quad \text{κ} \quad \boxed{v_2 = 5.66\, m/s}$$

3. Η ταχύτητα μιας σφαίρας μπορεί να μετρηθεί με μια συσκευή που ονομάζεται βαλλιστικό εκκρεμές, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Μια σφαίρα μάζας m κινούμενη με ταχύτητα υ συναντά μια μεγάλη μάζα M η οποία είναι εξαρτημένη από ένα εκκρεμές που βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία. Η μάζα M απορροφά τη σφαίρα. Η κρεμασμένη μάζα (που τώρα είναι M+m) κινείται σε κάποιο ύψος h πάνω από την αρχική θέση του εκκρεμούς όπως δείχνεται στο σχήμα.



(α) Δείξτε ότι η αρχική ταχύτητα υ' του εκκρεμούς (που περιέχει τη σφαίρα) μετά την πρόσκρουση, δίνεται από την εξίσωση: $\upsilon' = \frac{m\upsilon}{M+m}$

(β) Δείξτε ότι η ταχύτητα της σφαίρας δίνεται από τη σχέση: $\upsilon = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gh}$.

(γ) Αν h =10 cm, M = 2.5kg και m = 10gr. Να βρεθεί η ταχύτητα υ.

(α) Διατήρηση της ορμής $\Rightarrow m\upsilon + 0 = (m+M)\upsilon' \Rightarrow \boxed{\upsilon' = \frac{m}{(m+M)}\upsilon}$ (1)

(β) Διατήρηση της ενέργειας $\Rightarrow \frac{1}{2}(m+M)\upsilon'^2 = (m+M)gh \Rightarrow$

(τη στιγμή της κρούσης → στο ψηλότερο σημείο της αιώρησης)

$\Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon'^2 = gh \Rightarrow \upsilon' = \sqrt{2gh} \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\sqrt{2gh} = \frac{m}{(m+M)}\upsilon \Rightarrow \boxed{\upsilon = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}}$ (2)

(γ) Αντικαθιστώντας στην (2) για $h=0.1m$, $M=2.5kgr$, $m=0.01kgr$

$\upsilon = \frac{2.5+0.01}{0.01}\sqrt{2\cdot 9.8\cdot 0.1} \Rightarrow \boxed{\upsilon = 351\, m/sec} \Rightarrow \underline{\upsilon = 1263.6\, km/h}$

4. Μία μάζα m, κινούμενη με ταχύτητα υ, συγκρούεται ελαστικά με μια ακίνητη μάζα $2m$. Υποθέστε ότι ταχύτητες μετά την κρούση είναι $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$, αντίστοιχα. Δείξτε ότι η $\vec{\upsilon}_2$ πρέπει να είναι κάθετη στην $\vec{\upsilon}_2 + 2\vec{\upsilon}_1$

Διατήρηση της ορμής $\Rightarrow \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \Rightarrow m\vec{V} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{m}\vec{V} = \cancel{m}\vec{V}_1 + 2\cancel{m}\vec{V}_2 \Rightarrow \vec{V} = \vec{V}_1 + 2\vec{V}_2 \qquad (1)$$

Διατήρηση της ενέργειας: $\Rightarrow$

$$\frac{1}{\cancel{2}} m\upsilon^2 = \frac{1}{\cancel{2}} m\upsilon_1^2 + \frac{1}{\cancel{2}} 2m\upsilon_2^2 \Rightarrow \upsilon^2 = \upsilon_1^2 + 2\upsilon_2^2 \qquad (2)$$

Από την (1) παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο της ορμής $\vec{P}$ με τον εαυτό της έχουμε: $\vec{V}\cdot\vec{V} = (\vec{V}_1 + 2\vec{V}_2)\cdot(\vec{V}_1 + 2\vec{V}_2) \Rightarrow V^2 = V_1^2 + 4V_2^2 + 4\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow V^2 = V_1^2 + 4V_2^2 + 4\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2$ Αντικαθιστώντας την (2) θα πάρουμε:

$$\Rightarrow \underbrace{V^2 - V_1^2 - 2V_2^2}_{0} = 2V_2^2 + 4\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2 \Rightarrow 0 = 2V_2^2 + 4\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2 \Rightarrow V_2^2 + 2\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{V}_2 + 2\vec{V}_1)\cdot\vec{V}_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{V}_2 \perp \vec{V}_2 + 2\vec{V}_1}$$

5. Ένα καρφί μάζας *M* καρφώνεται σε ένα ξύλινο δοκάρι αντιτιθέμενο σε μια σταθερή δύναμη *F*. Το καρφί καρφώνεται με την χρήση ενός σφυριού μάζας *m* το οποίο σε κάθε κάρφωμα αφήνεται να πέσει ελεύθερα από ένα ύψος *h*. Το σφυρί δεν αναπηδά αφού χτυπήσει το καρφί. Να βρεθεί το μήκος που εισχωρεί το καρφί στο δοκάρι μετά από κάθε χτύπημα του σφυριού. Δείξτε ότι η ολική ενέργεια που δαπανάτε για να σηκωθεί το σφυρί σε ύψος *h* κατά την διαδικασία του πλήρους καρφώματος ενός καρφιού σε βάθος *d* είναι ανεξάρτητη από την τιμή του ύψους *h*, και μπορεί να ελαττωθεί αυξάνοντας τη μάζα του σφυριού.

Το σφυρί πέφτει από ύψος h μετατρέποντας τη μηχανική ενέργεια από δυναμική σε κινητική. Επομένως από αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v^2 = 2gh \quad (1)$$

Με την ταχύτητα αυτή το σφυρί χτυπά στο καρφί και το καρφί εισχωρεί. Η κρούση είναι μη ελαστική και η ορμή διατηρείται.

οπότε: $\quad mu = (M+m)V \quad (2)$

Η κινητική ενέργεια του σφυριού και του καρφιού μαζί θα είναι:

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\cancel{(m+M)}\frac{m^2u^2}{(M+m)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2}\frac{m^2}{M+m}u^2$$

Όταν το σφυρί χτυπά το καρφί υποθέτουμε ότι χάνει όλη την κινητική του ενέργεια. Όλη αυτή η ενέργεια μετατρέπεται στο έργο που καταναλώνει η δύναμη της αντίδρασης F κατά την εισχώρηση του καρφιού κατά απόσταση x μέσα στο ξύλο. Αν το σφυρί καρφώνει το καρφί κατά απόσταση x σε κάθε χτύπημα, τότε από το θεώρημα έργου - ενέργειας θα πάρουμε:

$$W_F = \vec{F}\cdot\vec{x} = -Fx \quad \text{και} \quad \Delta E_{κιν} = 0 - \frac{1}{2}\frac{m^2}{M+m}u^2$$

η δύναμη αντιτίθεται $\qquad$ τελική κινητική ενέργεια

$$\Delta E_{κιν} = W \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{m^2}{M+m}u^2 = Fx \Rightarrow x = \frac{m^2u^2}{2(M+m)F} \overset{(1)}{=} \frac{m^2\cancel{2}gh}{\cancel{2}(M+m)F}$$

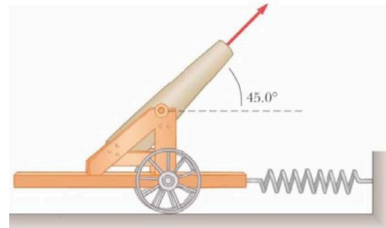
Αν χρειάζονται N χτυπήματα για να καρφωθεί το καρφί μια απόσταση d τότε:

$$\boxed{d = Nx = N\frac{m^2gh}{(M+m)F}} \quad (3)$$

Η ενέργεια που προσφέρεται είναι η ενέργεια που δίνεται στο σφυρί για να σηκωθεί μια απόσταση h, N φορές: $\quad E = Nmgh \overset{(3)}{\Rightarrow} d = \frac{mE}{(M+m)F} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E = \frac{Fd(M+m)}{m} \Rightarrow \boxed{E = Fd + Fd\frac{M}{m}}$$ ανεξάρτητο του ύψους h

6. Ένα κανόνι είναι στερεωμένο πάνω σε βάση με τροχούς, και η οποία μπορεί να κινείται πάνω σε οριζόντιες τροχιές αλλά είναι συνδεδεμένο σε ένα ακλόνητο τοίχο μέσω ενός μεγάλου ελατηρίου σταθερής ελατηρίου $k = 2x10^4$N/m. Το ελατήριο είναι αρχικά στη φυσική θέση ισορροπίας του (δείτε το σχήμα). Το κανόνι ρίχνει μια οβίδα μάζας 200*kg* με ταχύτητα υ = 125*m/s* και με γωνία 45° ως προς τον ορίζοντα. (α) Αν η μάζα του κανονιού και της βάσης του είναι 5000*kg*, να βρεθεί η ταχύτητα ανάκρουσης του κανονιού. (β) υπολογιστεί την μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου. (γ) Βρείτε τη μέγιστη δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο σύστημα κανόνι-βάση. (δ) Θεωρήστε ότι το σύστημα απαρτίζεται από το κανόνι, την βάση και την οβίδα. Ισχύει για το σύστημα αυτό η διατήρηση της ορμής κατά την διάρκεια της εκσφενδόνισης του βλήματος; Γιατί ή γιατί όχι;



(α) Τη στιγμή της ρίψης του βλήματος το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος και επομένως δεν ασκεί καμιά δύναμη στη βάση του κανονιού. Τό σύστημά μας είναι επομένως απομονωμένο αφού καμιά δύναμη δεν δρα πάνω του (~~δεν υπάρχει κίνηση στην y-διεύθυνση~~ ενώ δεν υπάρχουν τριβές). Επομένως η ορμή διατηρείται στην x-διεύθυνση:

$$P_x^i = \emptyset = P_x^f = P_x^{\beta\lambda\, f} + P_x^{\kappa\alpha\nu\, f} = m_\beta \upsilon_{\beta\lambda} \cdot \cos 45° - m_\kappa \upsilon_{\alpha\nu\alpha\kappa} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_{\alpha\nu\alpha\kappa} = \frac{m_\beta \upsilon_{\beta\lambda} \cos 45°}{m_{\kappa\alpha\nu}} \Rightarrow \upsilon_{\alpha\nu\alpha\kappa} = \frac{200 \cdot 125 \frac{\sqrt{2}}{2}}{5000} \Rightarrow \boxed{\upsilon_{\alpha\nu\alpha\kappa} = 3.54\, m/s}$$

(β) Μετά τον κανονιοβολισμό, η ενέργεια του συστήματος κανόνι - ελατήριο διατηρείται και επομένως θα έχουμε:

$$E^i_{\mu\eta\chi} = E^f_{\mu\eta\chi} \Rightarrow E^i_{\kappa\iota\nu} + U^i_{\varepsilon\lambda} = E^f_{\kappa\iota\nu} + U^f_{\varepsilon\lambda} \quad (A)$$

Αρχικά $U^i_{\varepsilon\lambda} = \emptyset$ ενώ καθώς το κανόνι ανακρούει το ελατήριο αρχίζει να επιμηκύνεται και στη μέγιστη επιμήκυνση η ταχύτητα ανάκρουσης γίνεται $\emptyset$

Άρα θα έχουμε από την (A):

$$\cancel{\frac{1}{2}} m \upsilon^2_{\alpha\nu\alpha\kappa} = \cancel{\frac{1}{2}} k x^2_{max} \Rightarrow x_{max} = \sqrt{\frac{m \upsilon^2_{\alpha\nu\alpha\kappa}}{k}} \Rightarrow \boxed{x_{max} = 1.77 m}$$

(γ) Η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου είναι μέγιστη όταν έχουμε τη μέγιστη απομάκρυνση και δίνεται από το νόμο του Hook

$$\boxed{F_{max} = -k x_{max} = -3.54 \cdot 10^4 N}$$

(δ) Η ορμή δεν διατηρείται αφού δεν υπάρχει η κάθετη αντίδραση του εδάφους στο κανόνι και η οποία δε του επιτρέπει να ανακρούει στην κατακόρυφο διεύθυνση. Επομένως η ορμή δεν διατηρείται στην κατακόρυφο διεύθυνση.

7. Μία μπάλα ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Τη στιγμή που φθάνει στο μέγιστο ύψος μια όμοια μπάλα που κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ, συγκρούεται (όχι απαραίτητα μετωπικά) τελείως ελαστικά μαζί της. Ποια είναι η μέγιστη οριζόντια απόσταση που μπορεί να διανύσει η δεύτερη μπάλα μέχρι την χρονική στιγμή που επιστρέφει στο αρχικό ύψος της σύγκρουσης.

Απο διατήρηση της ενέργειας: $\frac{1}{2}m\upsilon^2 + 0 = \frac{1}{2}m\upsilon^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}m\upsilon^2\sin^2\theta = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ ισχύει

Η διατήρηση ορμής στην x-διεύθυνση: $m\upsilon + 0 = m(\upsilon\cos\theta)\cos\theta + m(\upsilon\sin\theta)\sin\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow P_x = m\upsilon = m\upsilon\cos^2\theta + m\upsilon\sin^2\theta = m\upsilon$ ισχύει

Για P_y: $P_y = 0 + 0 = m(\upsilon\cos\theta)\sin\theta - m(\upsilon\sin\theta)\cos\theta = \phi$ ισχύει

Επομένως έχουμε μετά την κρούση, τη μελέτη ενός προβλήματος βολής με αρχική ταχύτητα $\upsilon\cos\theta$. Ξέρουμε ότι για πλάγιες βολές, το βεληνεκές δίνεται από:

$$d = \upsilon_{0x} t = (\upsilon_0\cos\theta)\frac{2\upsilon_0\sin\theta}{g} = \frac{\upsilon_0^2\sin 2\theta}{g} \Rightarrow d = \frac{2\upsilon^2\cos^2\theta\cos\theta\sin\theta}{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d = \frac{2\upsilon^2\cos^3\theta\sin\theta}{g}} \quad (A)$$

Αφού θέλω το μέγιστο, παίρνουμε την παράγωγο ως προς θ να'ναι $\phi \Rightarrow$

$$3\cos^2\theta(-\sin\theta)\sin\theta + \cos^3\theta\cos\theta = 0 \Rightarrow -3\cos^2\theta\sin^2\theta + \cos^4\theta = 0 \Rightarrow$$

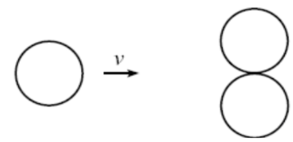
$$\Rightarrow -\cos^2\theta(3\sin^2\theta - \cos^2\theta) = \phi.$$

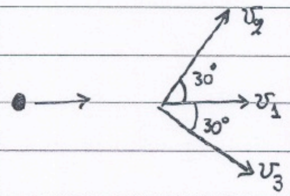
Επομένως $3\sin^2\theta = \cos^2\theta \Rightarrow \tan^2\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = 30^\circ}.$$

Αντικαθιστώντας στην (A): $d = \frac{2\upsilon^2}{g}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{\upsilon^2}{g}$

8. Μία μπάλα με αρχική ταχύτητα υ ρίχνεται με τέτοια διεύθυνση ώστε να χτυπήσει ανάμεσα σε δυο άλλες όμοιες μπάλες, όπως φαίνεται στο σχήμα. Σύμφωνα με το σχήμα, η ελαστική κρούση διώχνει τις δυο μπάλες στα δεξιά με γωνία 30° ως προς την αρχική διεύθυνση της κίνησης. Βρείτε τις ταχύτητες και των 3 μπάλων μετά τη σύγκρουση.





Από διατήρηση της ορμής έχουμε:

$$P_x: \; P^i_{x_1} + P^i_{x_2} + P^i_{x_3} = P^f_{x_1} + P^f_{x_2} + P^f_{x_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\upsilon = m\upsilon_1 + m\upsilon_2\cos30^\circ + m\upsilon_3\cos30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{m}\upsilon = \cancel{m}\upsilon_1 + \cancel{m}\cos30^\circ(\upsilon_2+\upsilon_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon = \upsilon_1 + (\upsilon_2+\upsilon_3)\cos30^\circ} \quad (1)$$

$$P_y: \; P^i_{1y} + P^i_{2y} + P^i_{3y} = P^f_{1y} + P^f_{2y} + P^f_{3y} \Rightarrow 0+0+0 = 0 + m\upsilon_2\sin30 - m\upsilon_3\sin\theta =$$

$$\Rightarrow \cancel{m}\upsilon_2\cancel{\sin30^\circ} = \cancel{m}\upsilon_3\cancel{\sin30^\circ} \Rightarrow \boxed{\upsilon_2 = \upsilon_3} \quad (2)$$

Από (1) ∧ (2) $\Rightarrow \upsilon = \upsilon_1 + 2\upsilon_2\cos30^\circ \Rightarrow \upsilon = \upsilon_1 + \cancel{2}\upsilon_2\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \Rightarrow$

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_1 + \sqrt{3}\,\upsilon_2} \quad (3)$$

Από διατήρηση της ενέργειας έχουμε:

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}\upsilon^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}\upsilon_1^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}\upsilon_2^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}\upsilon_3^2 \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{\upsilon^2 = \upsilon_1^2 + 2\upsilon_2^2} \quad (4)$$

Λύνουμε τη (3) ως προς υ_1 και αντικαθιστούμε στην (4)

$$\upsilon^2 = (\upsilon - \sqrt{3}\upsilon_2)^2 + 2\upsilon_2^2 \Rightarrow \cancel{\upsilon^2} = \cancel{\upsilon^2} + 3\upsilon_2^2 - 2\sqrt{3}\,\upsilon\upsilon_2 + 2\upsilon_2^2 \Rightarrow$$

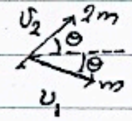
$$\Rightarrow 5\upsilon_2^2 - 2\sqrt{3}\,\upsilon\upsilon_2 = 0 \Rightarrow \upsilon = \frac{5}{2\sqrt{3}}\upsilon_2 \Rightarrow \boxed{\upsilon_2 = \frac{2\sqrt{3}}{5}\upsilon = \upsilon_3}$$

Αντικαθιστώντας στην (3) $\Rightarrow \upsilon_1 = \upsilon - \frac{2\sqrt{3}}{5}\sqrt{3}\,\upsilon \Rightarrow \boxed{\upsilon_1 = -\frac{\upsilon}{5}}$

Δηλαδή η μπάλα 1 κινείται προς τα πίσω.

9. Μία μάζα 2*m* κινούμενη με ταχύτητα υ συγκρούεται ελαστικά με μια ακίνητη μάζα *m*. Αν οι δυο μάζες φεύγουν μετά τη σκέδαση με ίσες γωνίες ως προς την αρχική διεύθυνση πρόσκρουσης, ποιά είναι η γωνία σκέδασης;

$2m \; \upsilon \longrightarrow m$



Απο διατήρηση της ορμής: $P^i_{1x} + P^i_{2x} = P^f_{1x} + P^f_{2x} \Rightarrow 2m\upsilon + 0 = 2m\upsilon_2\cos\Theta + m\upsilon_1\cos\Theta$

$P^i_{1y} + P^i_{1y} = P^f_{1y} + P^f_{2y} \Rightarrow 0 + 0 = 2m\upsilon_2\sin\Theta - m\upsilon_1\sin\Theta$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\cancel{m}\upsilon_2\cos\Theta + \cancel{m}\upsilon_1\cos\Theta = 2\cancel{m}\upsilon \\ 2\cancel{m}\upsilon_2\cancel{\sin\Theta} = \cancel{m}\upsilon_1\cancel{\sin\Theta} \Rightarrow \boxed{\upsilon_2 = \frac{\upsilon_1}{2}} \;(1) \end{array} \right\} \Rightarrow \cancel{2}\upsilon = \cancel{2}\upsilon_1\cos\Theta \Rightarrow \boxed{\upsilon = \upsilon_1\cos\Theta} \;(2)$$

Απο διατήρηση της ενέργειας:

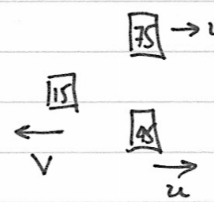
$$\frac{1}{2}2\cancel{m}\upsilon^2 = \frac{1}{2}2\cancel{m}\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon_1^2 \Rightarrow 2\upsilon^2 = 2\upsilon_2^2 + \upsilon_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\upsilon^2 = \left(2\upsilon_2^2 + \upsilon_1^2\right) \xRightarrow{(1)\wedge(2)} 2\cancel{\upsilon_1^2}\cos^2\Theta = \left(2\frac{\cancel{\upsilon_1^2}}{4} + \cancel{\upsilon_1^2}\right)$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\Theta = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos\Theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\Theta = 30^\circ}$$

10. Ο Γιάννης και η Μαρία στέκονται πάνω σε ένα κιβώτιο μάζας 15.0*kg* το οποίο είναι σε ηρεμία πάνω στη λεία οριζόντια επιφάνεια μιας παγωμένης λίμνης. Ο Γιάννης έχει μάζα 75.0*kg* ενώ η Μαρία έχει μάζα 45.0*kg*. Ξαφνικά θυμούνται ότι δεν έχουν νερό μαζί τους και ο καθένας πηδά από το κιβώτιο οριζόντια. Αφού το κάθε άτομο πηδήξει από το κιβώτιο συνεχίζει να κινείται με ταχύτητα 4.00*m/s* ως προς το κιβώτιο. (α) Ποια είναι η τελική ταχύτητα του κιβωτίου αν και τα δυο άτομα πηδήξουν ταυτόχρονα από το κιβώτιο. (β) Ποια είναι η τελική ταχύτητα του κιβωτίου αν πηδήξει πρώτα ο Γιάννης και μετά από λίγα δευτερόλεπτα πηδήξει η Μαρία προς την ιδία κατεύθυνση. (γ) Ποια είναι η τελική ταχύτητα του κιβωτίου αν πηδήξει πρώτα η Μαρία και μετά ο Γιάννης και πάλι προς την ίδια διεύθυνση.

α)



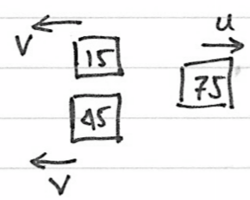
Μας δίνεται ότι: $\boxed{u+V = 4\ m/s}$ (1)

Από διατήρηση της ορμής: $15 \cdot V = (75+45)\,u \Rightarrow$
επειδή η αρχική ορμή είναι μηδέν

$\Rightarrow \boxed{V = 8u}$ (2)

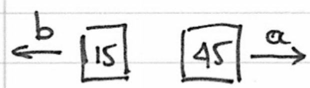
Από (1) και (2) $u + 8u = 4 \Rightarrow \boxed{u = 0.44\ m/s} \Rightarrow \boxed{V = 3.56\ m/s}$

(β) Αν πηδήξει πρώτα ο Γιάννης θα έχουμε:



$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} u+V = 4\ m/s \\ (15+45)V = 75u \end{array}\right\} \overset{\text{όπως πριν}}{\Rightarrow} \boxed{V = 2.22\ m/s}$

Όταν πηδήξει η Μαρία. Δουλεύουμε στο σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα $V = 2.22 m/s$

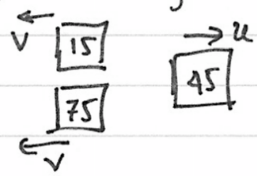


$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b = 4\ m/s \\ \underbrace{15b = 45a}_{\text{Στο σύστημα αυτό η αρχική ορμή είναι μηδέν}} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b = 3\ m/sec}$

Η τελική ταχύτητα του κιβωτίου ως προς το έδαφος θα είναι επομένως

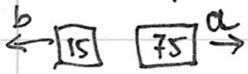
$V + b = 2.22 + 3 \Rightarrow \boxed{V+b = 5.22\ m/s}$

(γ) Αν πηδήξει πρώτα η Μαρία:



$$\left.\begin{aligned} u+V &= 4\,m/sec \\ (15+75)V &= 45u \end{aligned}\right\} \Rightarrow V = 1.33\,m/sec$$

Για το περίπτωση του Γιάννη, δουλεύουμε όπως πριν στο σύστημα Γιάννης-κιβώτιο:



$$\left.\begin{aligned} a+b &= 4 \\ 15b &= 75a \end{aligned}\right\} \Rightarrow b = 3.33\,m/s$$

Οπότε η τελική ταχύτητα είναι: $\boxed{v+b = 4.67\,m/sec}$