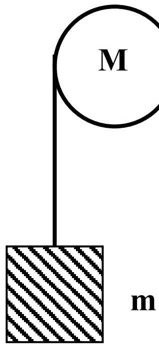
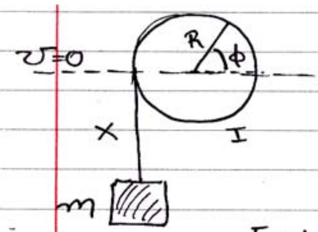
ΦΥΣ 133 – 2η Πρόοδος

12-3-2007

1η Ομάδα	

1. Ένα αβαρές σχοινί είναι τυλιγμένο γύρω από τροχαλία ακτίνας R και μάζας M, η οποία μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδο της τροχαλίας. Στο άλλο άκρο του σχοινιού είναι αναρτημένο ένα σώμα μάζας m. Το σύστημα είναι αρχικά ακίνητο και κατόπιν αφήνουμε το σώμα να κινηθεί κάτω από την επίδραση της βαρύτητας. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης και οι δυνάμεις των δεσμών χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange. (Η ροπή αδράνειας τροχαλίας ως προς το κέντρο μάζας της είναι $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$).





Η εξίσωση του δεσμού στο πρόβλημα είναι: $x = R\phi \Rightarrow f(x,\phi) = x - R\phi = 0$.

Χρησιμοποιούμε σα συντεταγμένες τη x και φ

Επομένως η Lagrangian του συστήματος θα είναι:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + mgx$$

όπου θεωρούμε $U=0$ το επίπεδο που περνά από την τροχαλία.

Από τις τροποποιημένες εξισώσεις Lagrange έχουμε:

$$\boxed{x:}\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} - mg = \lambda \qquad (1)$$

$$\boxed{\phi:}\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \lambda\frac{\partial f}{\partial \phi} \Rightarrow I\ddot{\phi} = -\lambda R \qquad (2)$$

Από την εξίσωση του δεσμού: $x - R\phi = 0 \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\phi} \Rightarrow \ddot{x} = R\ddot{\phi}$ (3)

Από (2) ∧ (3) έχουμε: $I\frac{\ddot{x}}{R} = -\lambda R \Rightarrow \ddot{x}\frac{I}{R^2} = -\lambda$

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε: $m\ddot{x} - mg = -\ddot{x}\frac{I}{R^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ddot{x}\left(m + \frac{I}{R^2}\right) = mg \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = \frac{mg}{m + I/R^2}}$$

Ενώ η (3) δίνει $\boxed{\ddot{\phi} = \frac{\ddot{x}}{R}}$

Έχουμε ότι $\lambda \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda = m \frac{mg}{m + I/R^2} - mg \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\cancel{m^2 g} - \cancel{m^2 g} - \frac{mI}{R^2} g}{m + I/R^2} \Rightarrow \lambda = - \frac{mg}{\frac{mR^2}{I} + 1} = - \text{Τάση.}$$

$\lambda \frac{\partial f}{\partial \phi} = -\lambda R =$ ροπή της Τάσης στην τροχαλία οπότε:

$$\tau = \frac{mgR}{\frac{mR^2}{I} + 1}$$

Θεωρώντας $I = \frac{1}{2} M R^2$ έχουμε:

$$\lambda = - \frac{mg}{\frac{m\cancel{R^2}}{\frac{1}{2} M \cancel{R^2}} + 1} \Rightarrow \lambda = - \frac{mg \cdot M}{2m + M} = -T$$

$$\tau = \frac{mgR}{\frac{mR^2}{\frac{1}{2} M R^2} + 1} \Rightarrow \tau = \frac{mgRM}{2m + M}$$

2. Να βρεθεί και να περιγραφεί η διαδρομή y = y(x) για την οποία το ολοκλήρωμα $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx$ όπου $y' = \dfrac{dy}{dx}$ είναι στάσιμο.

Για να βρεθεί η διαδρομή για στάσιμο ολοκλήρωμα θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις E-L : $\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{σταθ.} \Rightarrow \sqrt{x}\,\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \sqrt{x}\,\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C$$

$$\Rightarrow \frac{y'^2}{\left(\sqrt{1+y'^2}\right)^2} = \frac{C^2}{x} \Rightarrow \frac{y'^2}{1+y'^2} = \frac{c^2}{x} \Rightarrow y'^2 = \frac{c^2}{x} + \frac{c^2}{x}y'^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'^2\left(1-\frac{c^2}{x}\right) = \frac{c^2}{x} \Rightarrow y'^2 = \frac{c^2/x}{(1-c^2/x)} \Rightarrow y'^2 = \frac{c^2}{x-c^2} \Rightarrow$$

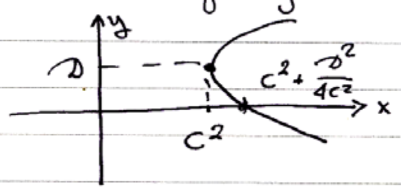
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{c^2}\,\frac{1}{\sqrt{x-c^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C\,\frac{1}{\sqrt{x-c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{x-c^2}} \Rightarrow \boxed{y = 2C\sqrt{x-c^2} + D}$$

Λύνοντας ως προς x έχουμε: $(y-D)^2 = 4C^2(x-c^2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{x = c^2 + \frac{(y-D)^2}{4c^2}}$$

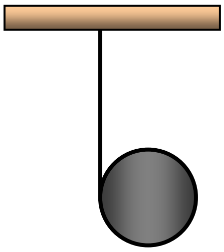
Αυτή είναι εξίσωση παραβολής που για $y=D$ δίνει $x=C^2$

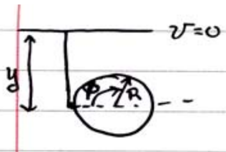


ΦΥΣ 133 – 2η Πρόοδος **12-3-2007**

2η Ομάδα	

1. Ένα αβαρές νήμα είναι τυλιγμένο γύρω από μια τροχαλία ακτίνας R και μάζας M. Το άλλο άκρο του νήματος κρατείται σταθερό και η τροχαλία αφήνεται να πέσει υπό την επίδραση της βαρύτητας καθώς το νήμα ξετυλίγεται. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης της τροχαλίας και οι δυνάμεις των δεσμών χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange. (Η ροπή αδράνειας τροχαλίας ως προς το κέντρο μάζας της είναι $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$).





Η κινητική ενέργεια της τροχαλίας καθώς πέφτει είναι:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\phi}^2$$ (όπου m η μάζα της τροχαλίας, R η ακτίνα της)

Η τροχαλία πέφτει κάτω από την επίδραση της βαρύτητας οπότε:

$V = -mgy$ (Θεωρώντας $V=0$ το επίπεδο που περνά από το ακίνητο άκρο του νήματος)

Επομένως η Lagrangian του συστήματος είναι:

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\phi}^2 + mgy.}$$

Η εξίσωση του δεσμού είναι: $f(y,\phi) = y - R\phi = 0$

Για να βρούμε τις δυνάμεις των περιορισμών θα πρέπει να κρατήσουμε τα y και φ σαν ανεξάρτητες μεταβλητές (παρ'όλο που συνδέονται μέσω του δεσμού) και να χρησιμοποιήσουμε τους πολ/στές Lagrange:

$\boxed{y:}$ $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = \lambda\frac{\partial f(y,\phi)}{\partial y} \Rightarrow \boxed{m\ddot{y} - mg = \lambda} \quad (1)$$

$\boxed{\phi:}$ $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \lambda\frac{\partial f(y,\phi)}{\partial \phi} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right] = -R\lambda \Rightarrow \frac{1}{2}mR^2\ddot{\phi} = -R\lambda$$

$$\Rightarrow \boxed{mR\ddot{\phi} = -2\lambda} \quad (2)$$

Εξίσωση δεσμού: $y - R\phi = 0 \Rightarrow \ddot{y} = R\ddot{\phi} \Rightarrow \boxed{\ddot{\phi} = \frac{\ddot{y}}{R}} \quad (3)$

Από την (3) και (2) έχουμε:

$$m\cancel{R}\frac{\ddot{y}}{\cancel{R}} = -2\lambda \Rightarrow \boxed{m\ddot{y} = -2\lambda} \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$m\ddot{y} - mg = \lambda \Rightarrow -2\lambda - mg = \lambda \Rightarrow 3\lambda = -mg \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{-1}{3}mg}$$

Αντικατάσταση στη (4) δίνει: $\cancel{m}\ddot{y} = +\frac{2}{3}\cancel{m}g \Rightarrow \boxed{\ddot{y} = \frac{2}{3}g}$

Ενώ από την (3) έχουμε: $\ddot{\phi} = \frac{\ddot{y}}{R} \Rightarrow \boxed{\ddot{\phi} = \frac{2g}{3R}}$

Από την εξίσωση (1) έχουμε ότι $Q_y = \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda = -\frac{1}{3}mg$

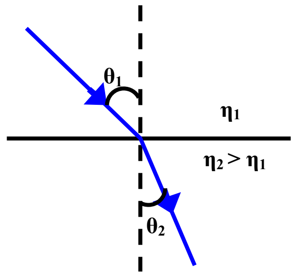
Αυτή η δύναμη είναι δύναμη της τάσης του σχοινιού. Βρίσκεται κατά μήκος του νήματος και είναι αυτή που ουσιαστικά αναγκάζει το σώμα (τροχαλία) να πέφτει με επιτάχυνση $\frac{2}{3}g$ (λιγότερη από την g που θα αντιστοιχούσε σε ελεύθερη πτώση).

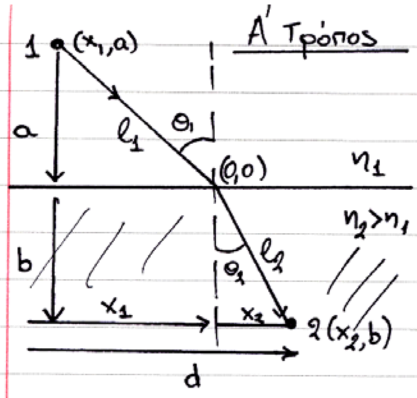
Η δύναμη που σχετίζεται με τη συντεταγμένη ϕ είναι:

$$Q_\phi = \lambda\frac{\partial f}{\partial \phi} = -\lambda R = +\frac{1}{3}mgR$$

Αυτή είναι η ροπή στη τροχαλία που την αναγκάζει να περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας της και προκαλείται από την τάση του νήματος.

2. Θεωρήστε την περίπτωση που μια δέσμη φωτός περνά από ένα μέσο με δείκτη διάθλασης n_1 σε κάποιο άλλο μέσο με δείκτη διάθλασης n_2 (όπως στο σχήμα). Χρησιμοποιείστε την αρχή του Fermat για να ελαχιστοποιήσετε το χρόνο και αποδείξτε το νόμο της διάθλασης: $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$.





Α΄ Τρόπος

Έστω ότι το φως διανύει τις αποστάσεις l_1, l_2 στα δύο μέσα ($n_2 > n_1$).
Η διαδρομή που ακολουθεί είναι ευθεία με τέτοιο τρόπο ώστε η διαδρομή να δίνει τον ελάχιστο χρόνο:

Έστω ότι $t_{o\lambda} = t_1 + t_2 = \int \frac{dS_1}{v_1} + \int_0^2 \frac{dS_2}{v_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow t_{o\lambda} = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2}$ (η ταχύτητα είναι σταθερή σε κάθε μέσο: $v = \frac{c}{n}$)

$\Rightarrow t_{o\lambda} = \frac{n_1\sqrt{a^2+x_1^2}}{c} + \frac{n_2\sqrt{b^2+x_2^2}}{c}$ Έστω $x_1 = x \Rightarrow x_2 = (d - x_1)$

Επομένως $t_{o\lambda} = \frac{n_1\sqrt{a^2+x_1^2}}{c} + \frac{n_2\sqrt{b^2+(d-x_1)^2}}{c}$

Αυτός ο χρόνος πρέπει να'ναι ελάχιστος, οπότε $\frac{dt_{o\lambda}}{dx_1} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = \frac{n_1}{c}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{a^2+x^2}\right) + \frac{n_2}{c}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{b^2+(d-x)^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{n_1}{c}\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{n_2}{c}\frac{\cancel{2}(d-x)(-1)}{\cancel{2}\sqrt{b^2+(d-x)^2}} \Rightarrow \frac{n_1}{\cancel{c}}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{n_2}{\cancel{c}}\frac{(d-x)}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{n_1 x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{n_2(d-x)}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}}$$

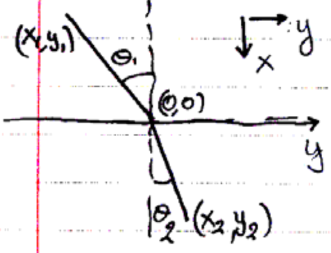
Αλλά $\sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ και $\sin\theta_2 = \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2}$$

B' Τρόπος

Χρειαζόμαστε τη διαδρομή που ελαχιστοποιεί το χρόνο για να πάμε από το σημείο 1 στο 2.

Ο δείκτης διάθλασης αλλάζει συναρτήσει του x ως εξής



$$n(x) = \begin{cases} n_1 & x<0 \\ n_2 & x>0 \end{cases}$$

Έτσι ορίζουμε το σύστημα συντεταγμένων

Επομένως ξέροντας την ταχύτητα του φωτός

$v(x) = \frac{c}{n(x)}$, ο χρόνος που χρειάζεται το φως για να πάει από το σημείο 1 στο 2 είναι:

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{v(x)} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{n(x)}{c}\, dx \sqrt{1+y'(x)^2}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Euler-Lagrange και αναγνωρίζοντας

$$f(y,y',x) = \frac{n(x)}{c}\sqrt{1+y'(x)^2} \quad \text{έχουμε:}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{αλλά} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{οπότε:} \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{σταθ} = C$$

Παίρνοντας την παράγωγο έχουμε: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{n(x)}{c}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C}$

Η σχέση αυτή ισχύει για <u>ΟΛΑ ΤΑ x</u>

$x<0$ $\quad \frac{n_1 y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C$ αλλά η λύση είναι ευθεία $y' = \tan\theta$

$$= \frac{n_1 \tan\theta_1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_1}} = \frac{n_1 \sin\theta_1}{\sqrt{\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1}} = n_1 \sin\theta_1$$

$x>0$ $\quad \frac{n_2 y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C$ (ίδια σταθερά) $= n_2 \sin\theta_2$

ίσα