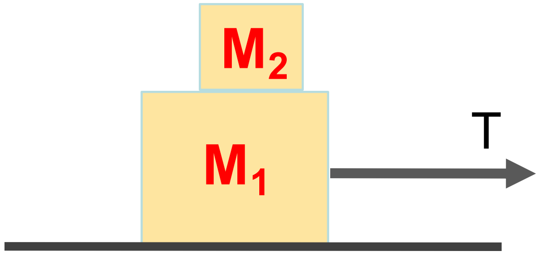
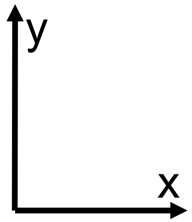
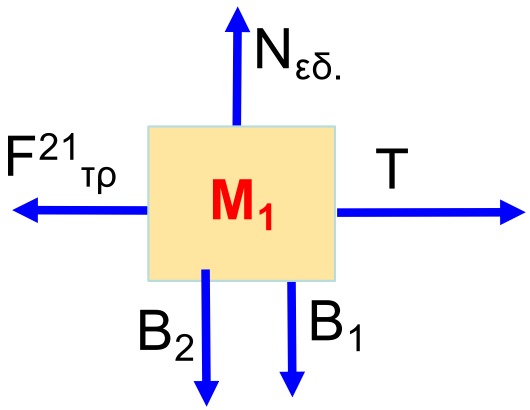
Παράδειγμα

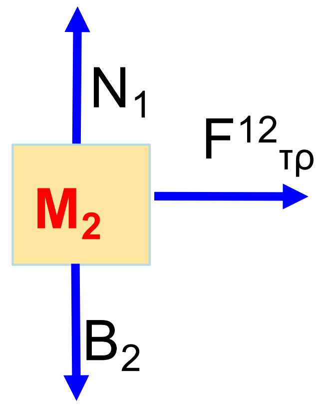
Μια δύναμη T εφαρμόζεται σε σχοινί που είναι εξαρτημένο σε σώμα 1 προκαλώντας επιτάχυνση α=3m/s^2. Η τριβή κρατά το σώμα 2 πάνω στο σώμα 1 χωρίς να γλυστρά.

- Να βρεθεί η δύναμη T









x-διεύθυνση: Μάζα 2

$$\sum F_x = m_2 a \Rightarrow F_{12}^{\tau\rho} = m_2 a$$

x-διεύθυνση: Μάζα 1

$$\sum F_x = m_1 a \Rightarrow T - F_{21}^{\tau\rho} = m_1 a$$

3^{ος} Νόμος:

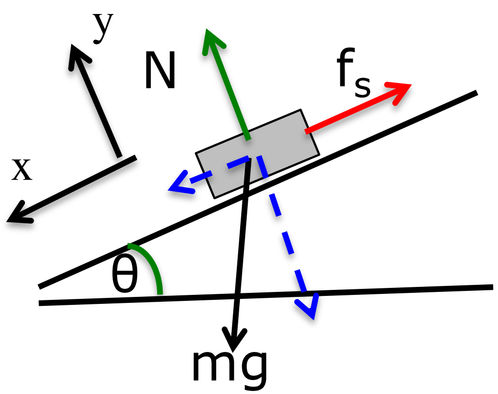
$$\left|F_{21}^{\tau\rho}\right| = \left|F_{12}^{\tau\rho}\right|$$

$$\Rightarrow T = m_1 a + m_2 a \Rightarrow T = (m_1 + m_2) a$$

Ίδιο αποτέλεσμα σα να είχαμε ένα και μόνο σώμα με μάζα $M = M_1 + M_2$

Σώμα σε κεκλιμένο επίπεδο και τριβή

Σώμα βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Ποιός ο συντελεστής στατικής τριβής



Το σώμα ισορροπεί εξαιτίας της ύπαρξης της δύναμης της στατικής τριβής f_s που αντιτίθεται στη κίνηση του προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

Εφόσον το σώμα δεν κινείται $f_s \leq f_s^{\max} = \mu_s N$

Αυξάνοντας τη γωνία του κεκλιμένου επιπέδου, θ, η συνιστώσα της βαρυτικής δύναμης στη x-διεύθυνση αυξάνει και επομένως η τριβή μέχρι $f_s^{\max}$

Τη στιγμή που συμβαίνει αυτό το σώμα είναι έτοιμο να γλυστρήσει πάνω στην επιφάνεια και όταν αρχίσει να κινείται έχουμε κινητική τριβή

Στην οριακή αυτή περίπτωση, $f_s = f_s^{\max} = \mu_s N$

Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Newton θα έχουμε:

x-διεύθυνση: $mg\sin\theta - f_s = 0 \Rightarrow mg\sin\theta - \mu_s N = 0 \Rightarrow \mu_s N = mg\sin\theta$

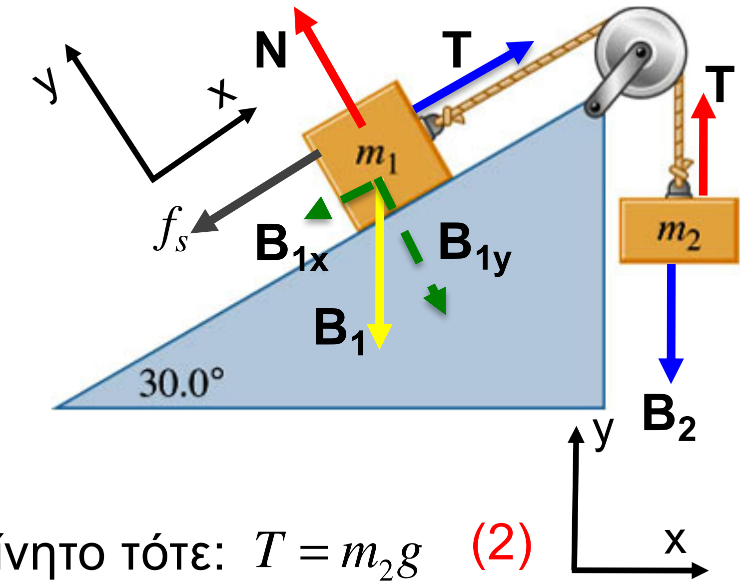
y-διεύθυνση: $N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$

$$\mu_s mg\cos\theta = mg\sin\theta \Rightarrow \mu_s = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \mu_s = \tan\theta$$

Ανεξάρτητος της μάζας και διαστάσεων του σώματος!!

Παράδειγμα – Παρουσία τριβής

Τούβλο μάζας m_1=1.0kg βρίσκεται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο όπως στο σχήμα. Συνδέεται με άλλο τούβλο μάζας m_2=2.0kg με ένα σχοινί μέσω αβαρούς τροχαλίας. Οι συντελεστές στατικής και κινητικής τριβής μεταξύ m_1 και επιπέδου είναι μ_s=0.5 και μ_κ=0.4. Ποια η επιτάχυνση του συστήματος



Τρεις πιθανές περιπτώσεις (ανεξάρτητες):

(1) Το σώμα θα παραμείνει ακίνητο

(2) Το σώμα θα επιταχυνθεί προς τα πάνω

(3) Το σώμα θα επιταχυνθεί προς τα κάτω

Δεν ξέρουμε που θέλει να κινηθεί το σώμα και η κίνηση εξαρτάται από τη τριβή

Ξέρουμε όμως τη μέγιστη τιμή της στατικής τριβής: $f_s^{\max} = \mu_s N = \mu_s m_1 g\cos\theta$ (1)

Ξέρουμε ακόμα πως αν το σύστημα είναι ακίνητο τότε: $T = m_2 g$ (2)

(Α) Υποθέτουμε ότι m_1 είναι σχεδόν έτοιμη να κινηθεί προς τα πάνω:

Η f_s θα έχει φορά προς τα κάτω με μέτρο: $f_s = \mu_s m_1 g\cos\theta$

Από το 2º νόμο του Newton στη x-διεύθυνση θα έχουμε:

$$T - B_{1x} - f_s^{\max} = 0 \Rightarrow T - m_1 g\sin\theta - f_s^{\max} = 0$$ (η m_1 είναι ακόμα ακίνητη!)

$$\Rightarrow T = m_1 g\sin\theta + f_s^{\max} \Rightarrow m_2 g = m_1 g\sin\theta + f_s^{\max}$$

Αν η m_2 γίνει ελάχιστα μεγαλύτερη τότε το σύστημα θα επιταχυνθεί προς τα πάνω

Επομένως η ικανή συνθήκη για να συμβεί είναι: $\boxed{m_2 g \ge m_1 g\sin\theta + f_s^{\max}}$

Παράδειγμα – Παρουσία τριβής

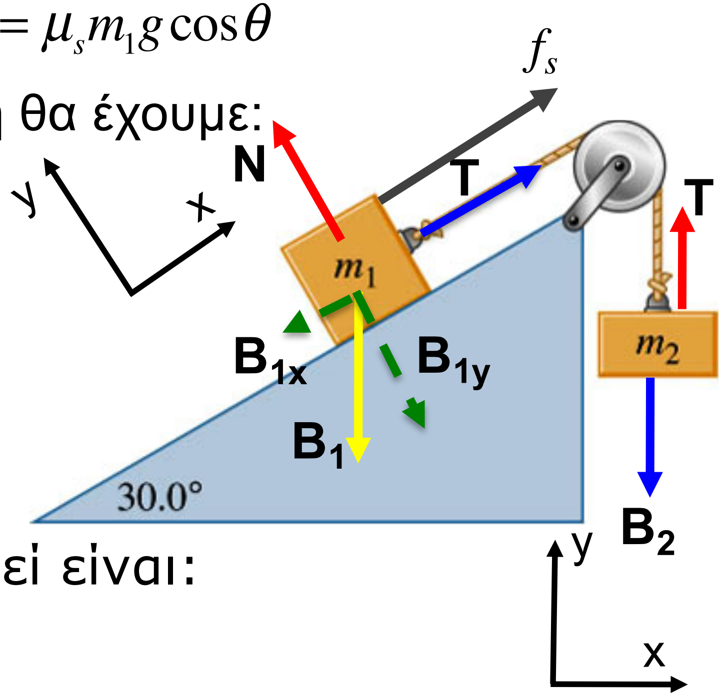
(Β) Υποθέτουμε ότι m_1 είναι σχεδόν έτοιμη να κινηθεί προς τα κάτω:

Η f_s θα έχει φορά προς τα πάνω με μέτρο: $f_s = \mu_s m_1 g \cos\theta$

Από το 2º νόμο του Newton στη x-διεύθυνση θα έχουμε:

$$T - B_{1x} + f_s^{\max} = 0 \Rightarrow T - m_1 g \sin\theta + f_s^{\max} = 0$$

$$\Rightarrow T = m_1 g \sin\theta - f_s^{\max} \Rightarrow m_2 g = m_1 g \sin\theta - f_s^{\max}$$



Αν η m_2 γίνει ελάχιστα μικρότερη τότε το σύστημα θα επιταχυνθεί προς τα κάτω

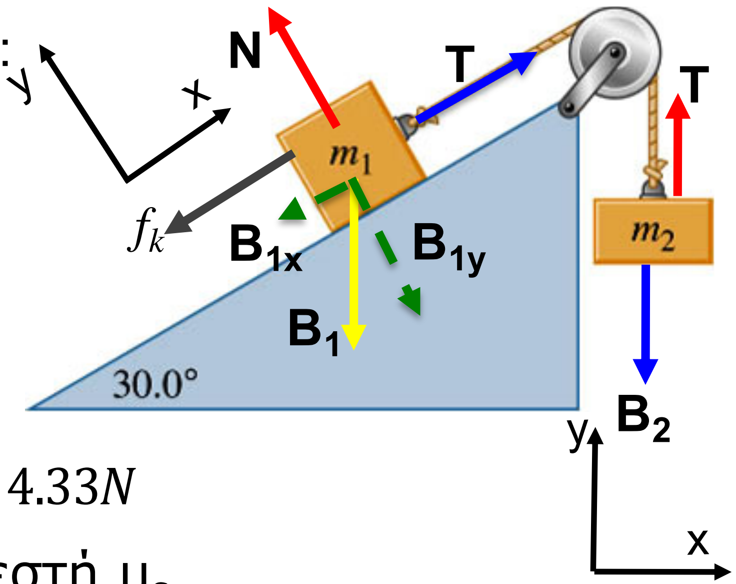
Επομένως η ικανή συνθήκη για να συμβεί είναι:

$$\boxed{m_2 g \le m_1 g \sin\theta - f_s^{\max}}$$

(Γ) Αν οι συνθήκες (Α) και (Β) δεν ικανοποιηθούν και οι δυο τότε:

το σύστημα θα παραμείνει ακίνητο

Παράδειγμα – Παρουσία τριβής



Αντικατάσταση στα δεδομένα του προβλήματος:

m_2=2Kg, m_1=1kg, θ=30^0 και μ_s=0.5

Επομένως θα έχουμε:

$$m_1 g\sin\theta = 1kg\times 10\frac{m}{s^2}\times\frac{1}{2} = 5N$$

$$m_2 g = 2kg\times 10\frac{m}{s^2} = 20N$$

$$f_s^{\max} = \mu_s N = \mu_s m_1 g\cos\theta = 0.5\times 1kg\times 10\frac{m}{s^2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 4.33N$$

Προσοχή ότι χρησιμοποιήσαμε το συντελεστή μ_s

Εξετάζουμε τις 3 συνθήκες για να βρούμε πως θα κινηθεί το σύστημα:

$$\boxed{(\mathrm{A})\ \ m_2 g \geq m_1 g\sin\theta + f_s^{\max}}$$

Αντικατάσταση: $20N \geq 5N + 4.33N$ Ισχύει

Επομένως το σύστημα (m_1) θα κινηθεί προς τα πάνω

➡ Ποια είναι η επιτάχυνση και ποια η τάση του νήματος;

Από τη στιγμή που το σύστημα αρχίζει να κινείται η τριβή γίνεται κινητική τριβή, έχει φορά προς τα κάτω και μέτρο $f_k=\mu_k m_1 g\cos\theta$

Από το 2^o νόμο του Newton στη x-διεύθυνση θα έχουμε:

$$T - f_k - m_1 g\sin\theta = m_1 a \Rightarrow T - \mu_k m_1 g\cos\theta - m_1 g\sin\theta = m_1 a$$

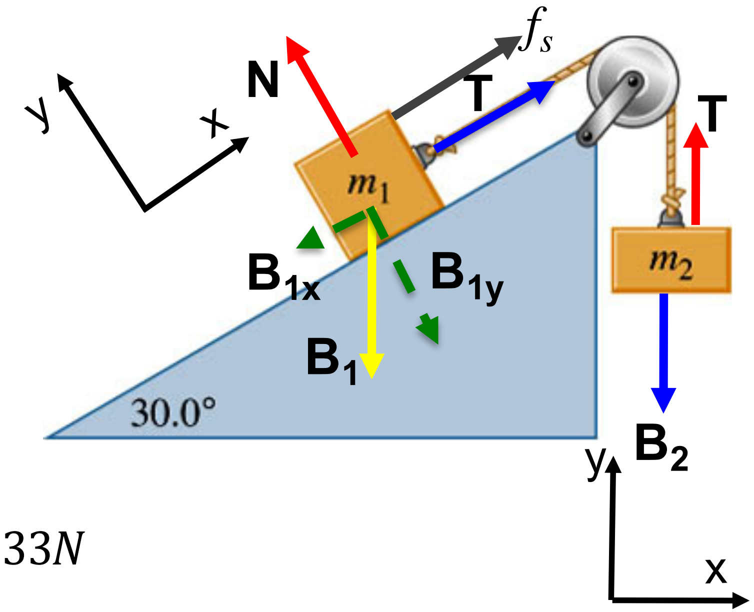
$$\Rightarrow T - m_1 g\left(\mu_k\cos\theta - \sin\theta\right) = m_1 a$$ Μια εξίσωση με 2 αγνώστους (Τ και α)

Αλλά το m_2 επιταχύνεται με α: $T - m_2 g = -m_2 a \Rightarrow T = m_2\left(g - a\right)$ Η $T<m_2 g$=20N

Παράδειγμα – Παρουσία τριβής – Διαφορετικά δεδομένα

Έστω τα δεδομένα του προβλήματος είναι:

m_2=0.4Kg, m_1=1kg, $\theta=30^0$ και μ_s=0.5



Επομένως θα έχουμε:

$$m_1 g \sin\theta = 1kg \times 10\frac{m}{s^2} \times \frac{1}{2} = 5N$$

$$m_2 g = 0.4kg \times 10\frac{m}{s^2} = 4N$$

$$f_s^{\max} = \mu_s N = \mu_s m_1 g \cos\theta = 0.5 \times 1kg \times 10\frac{m}{s^2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4.33N$$

Εξετάζουμε τις 3 συνθήκες για να βρούμε πως θα κινηθεί το σύστημα:

$\boxed{(\mathrm{A})\ \ m_2 g \geq m_1 g \sin\theta + f_s^{\max}}$ Αντικατάσταση: $4N \geq 5N + 4.33N$ Δεν Ισχύει

$\boxed{(\mathrm{B})\ \ m_2 g \leq m_1 g \sin\theta - f_s^{\max}}$ Αντικατάσταση: $4N \leq 5N - 4.33N$ Δεν Ισχύει

➡ Οι συνθήκες (A) και (B) δεν ικανοποιούνται και επομένως το σύστημα θα παραμείνει ακίνητο

Από το 2ο νόμο του Newton θα έχουμε τώρα:

$$T - m_1 g \sin\theta + f_s = 0 \Rightarrow -f_s = T - m_1 g \sin\theta = 4N - 5N \Rightarrow -f_s = -1N \Rightarrow f_s = 1N$$

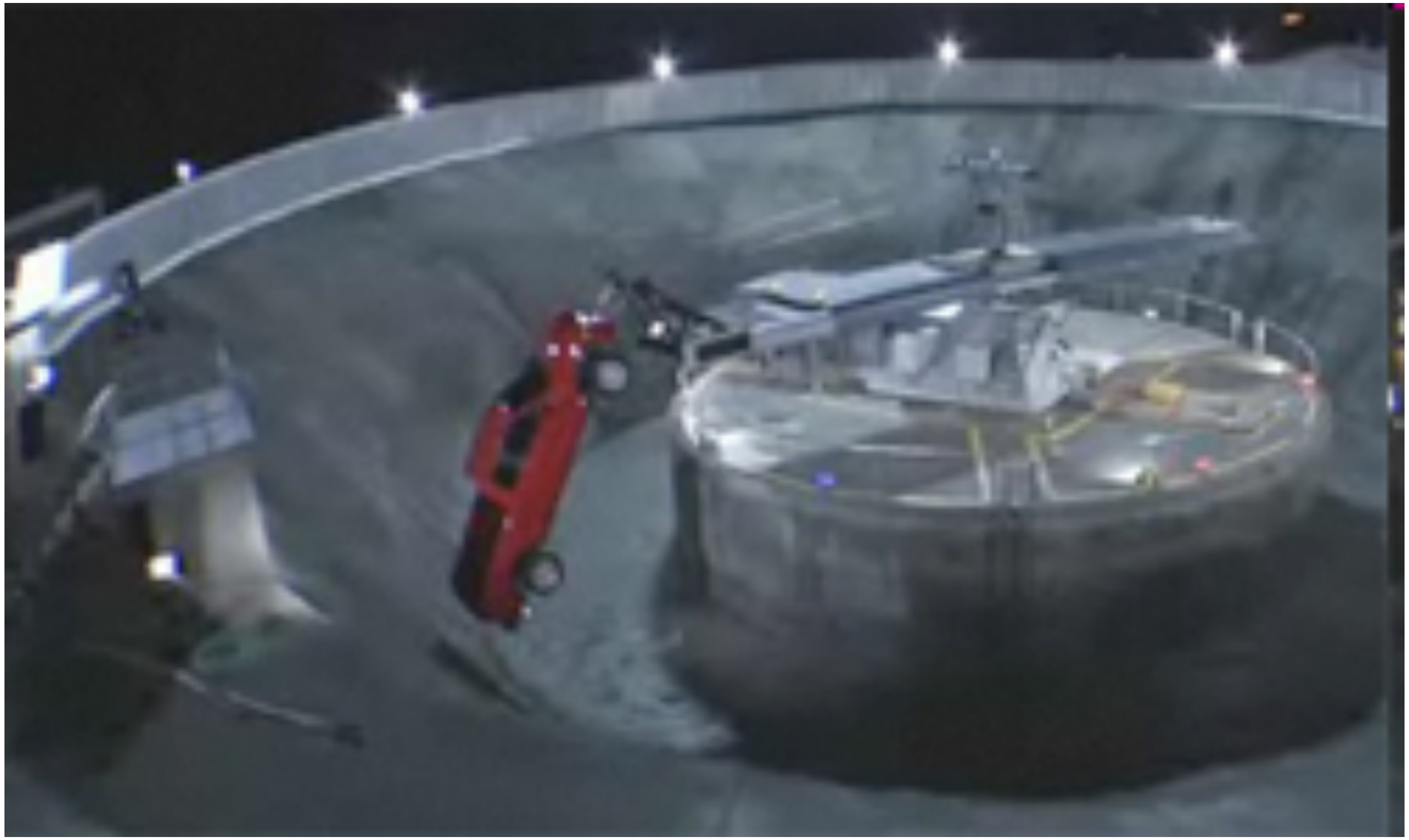
Δηλαδή η στατική τριβή έχει φορά προς τα πάνω και μέτρο 1N < f_s^{max}

8ο Quiz

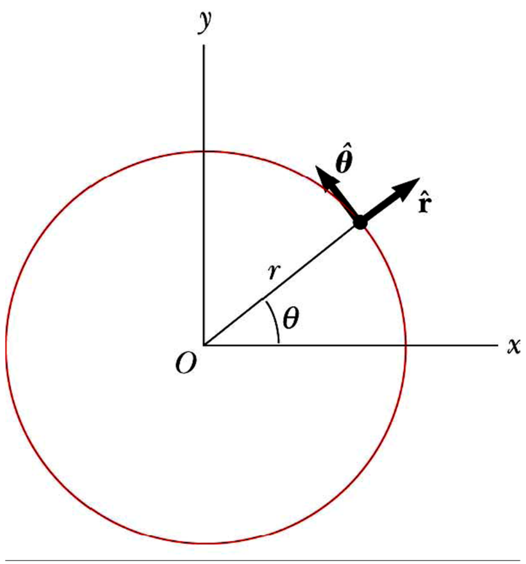
- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας
- Θα στείλετε τη φωτογραφία της απάντησής σας στο fotis@ucy.ac.cy

Έτοιμοι

Κινηματική και δυναμική κυκλικής κίνησης



Κυκλική κίνηση



Ορίζουμε τα ακόλουθα 2 μοναδιαία διανύσματα:

$\hat{r}$ βρίσκεται κατά μήκος του διανύσματος της ακτίνας

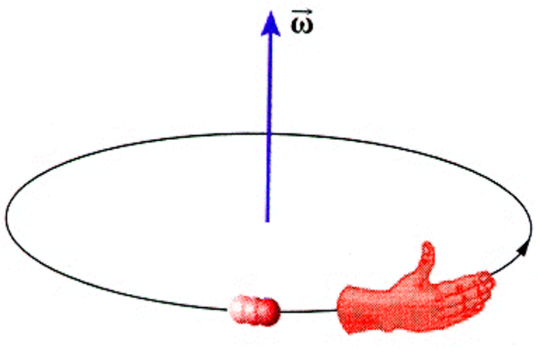
$\hat{\theta}$ είναι εφαπτόμενο του κύκλου

Μετρούμε την γωνιακή θέση σε ακτίνια (rad): 2π (rad) = 360^0

Χρησιμοποιώντας rad, το μήκος τόξου είναι: θR

Ορίζουμε σα γωνιακή ταχύτητα ω, ένα διάνυσμα το μέτρο του οποίου είναι ίσο με το ρυθμό μεταβολής της γωνιακής συντεταγμένης του σώματος.

$$\left|\vec{\omega}(t)\right| = \frac{d\theta(t)}{dt}$$



Η φορά του διανύσματος ω ορίζεται σύμφωνα με το κανόνα δεξιόχειρης κυκλικής κίνησης:

Ο αντίχειρας δείχνει τη διεύθυνση του διανύσματος ω. Είναι κάθετο στο επίπεδο της κίνησης και κατά μήκος του άξονα που περνά από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.

$$\vec{\omega} = \omega_z \hat{k} \Rightarrow \omega_z = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Κυκλική κίνηση - ταχύτητα

Μπορούμε να γράψουμε το διάνυσμα της θέσης

$$\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} = \left[R\cos\theta(t)\right]\hat{i} + \left[R\sin\theta(t)\right]\hat{j}$$

Προσοχή:
η θ μεταβάλλεται με χρόνο

Άρα η ταχύτητα του σώματος θα είναι:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[R\cos\theta(t)\hat{i} + R\sin\theta(t)\hat{j}\right]$$

Από παραγώγους: $\frac{d}{dt}\cos(\theta(t)) = \frac{d\cos(\theta)}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$

$$\Rightarrow \vec{v} = R\left[-\sin\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\hat{i} + \cos\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\hat{j}\right]$$

Το μέτρο της ταχύτητας δίνεται από τη σχέση:

$$|\vec{v}|^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = v_x^2 + v_y^2 = R^2\left[\sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \cos^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = R^2\left|\frac{d\theta(t)}{dt}\right|^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$$

$$\Rightarrow v^2 = R^2\left|\frac{d\theta(t)}{dt}\right|^2 \Rightarrow |\vec{v}| = R\left|\frac{d\theta(t)}{dt}\right| \quad \boxed{\Rightarrow |\vec{v}| = R|\vec{\omega}(t)|}$$

Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας, ω, είναι κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς και επομένως στην ακτίνα R

Το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας, v, είναι κάθετο στην ακτίνα R

$$\boxed{\Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega}(t)\times\vec{R}}$$

Κυκλική κίνηση - επιτάχυνση

Μπορούμε να βρούμε την επιτάχυνση από τη σχέση: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \right) = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \qquad (1)$$

Ορίζουμε σα γωνιακή επιτάχυνση, $\vec{\alpha}$ το διάνυσμα που δίνει το ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας ω.

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$ Η διεύθυνση του είναι παράλληλη με αυτή του $\vec{\omega}$

Η (1) γράφεται $$\vec{a} = \boxed{\vec{\alpha} \times \vec{r}} + \boxed{\vec{\omega} \times \vec{v}}$$

Εφαπτομενική επιτάχυνση Κεντρομόλος επιτάχυνση

Για ομαλή κυκλική κίνηση ω=σταθ. και $\vec{\alpha} = \vec{0}$

$$\left.\begin{aligned} &\vec{\alpha} = \vec{\omega} \times \vec{v} \\ &\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \\ &\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha} = -\omega^2 \vec{r}$$ κεντρομόλος επιτάχυνση