Ανακεφαλαίωση

- Στη προηγούμενη διάλεξη κάναμε μια εισαγωγή για το τι καλύπτει το μάθημα αυτό
- Σύντομη επανάληψη της Newtonian Μηχανικής
  - Συνηθισμένη σηματολογία και χρησιμοποίησή της
  - Τους ορισμούς ορμής, νόμους διατήρησης, κινητική και δυναμική ενέργεια
- Ιδιαίτερα στην κίνηση ενός και μόνο υλικού σημείου

Στόχοι για σήμερα

- Θα μιλήσουμε για σύστημα πολλών σημείων
    - Δυνάμεις μεταξύ των σωματιδίων
        - Νόμους δράσης και αντίδρασης (3^{ος} νόμος του Newton)

Σύστημα πολλών υλικών σημείων

- Περισσότερο από ένα σημεία → Βάζουμε περισσότερους δείκτες στις εξισώσεις μας !!

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i \qquad \mathbf{N}_i = \dot{\mathbf{L}}_i$$

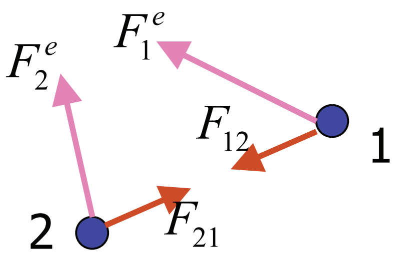
- Υπάρχει ένα μη ξεκάθαρο σημείο:
- Η F μπορεί να υπάρχει επίσης λόγω της αλληλεπίδρασης μεταξύ των σημείων του συστήματος:
  - Ξεχωρίζουμε μεταξύ εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων

$$\mathbf{F}_i = \sum_j \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(e)}$$

Δύναμη δρούσα στο σημείο i

Δύναμη από το σημείο j

Εξωτερική δύναμη



Αθροίζοντας ως προς όλα τα σημεία

- Η ολική δύναμη που ασκείται στο σύστημα βρίσκεται αν αθροίσουμε τη προηγούμενη δύναμη ως προς όλα τα σημεία

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ji} + \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} = \sum_{i<j} \boxed{\left(\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij}\right)} + \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)}$$

- Αυτός ο όρος μηδενίζεται όταν

  Ασθενής νόμος δράσης-αντίδρασης $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{j,i} \Rightarrow \boxed{\sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)}}$

  - Δυνάμεις που 2 σημεία αναπτύσσουν το ένα στο άλλο είναι ίσες και αντίθετες

Ο ισχυρός νόμος της δράσης – αντίδρασης:
Δυνάμεις πού 2 σημεία αναπτύσσουν το ένα στο άλλο είναι **ίσες, αντίθετες και κατά μήκος της ευθείας που τα ενώνει**

Αθροίζοντας ως προς όλα τα σημεία

- Ας δούμε πως γράφονται οι εξισώσεις κίνησης

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i \mathbf{r}_i$$

- Ορίζουμε σαν κέντρο μάζας $\mathbf{R} \equiv \dfrac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \dfrac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M\ddot{\mathbf{R}} = \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} \equiv \mathbf{F}^{(e)}}$$

Το κέντρο μάζας κινείται σαν ένα σημείο με μάζα M υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης $F^{(e)}$

Ολική γραμμική ορμή

- Το άθροισμα των γραμμικών ορμών είναι

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = M\dot{\mathbf{R}}$$

- Παίρνοντας την παράγωγο ως προς το χρόνο καταλήγουμε

$$\dot{\mathbf{P}} = M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}^{(e)}$$

Η εξίσωση κίνησης του Newton για το κέντρο μάζας (CM)

- Διατήρηση της ολικής γραμμικής ορμής
  - Αν η ολική εξωτερική δύναμη $\mathbf{F}^{(e)}$ είναι μηδέν τότε η ολική γραμμική ορμή **P** διατηρείται

Υποθέσαμε ασθενή νόμο δράσης - αντίδρασης

Ολική στροφορμή

- Το άθροισμα των στροφορμών είναι $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$

- Παίρνοντας την παράγωγο ως προς τον χρόνο και από τη σχέση

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i = \sum_j \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_i^{(e)}$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \boxed{\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}} + \boxed{\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)}}$$

Ολική εξωτερική ροπή

Αυτός ο όρος μηδενίζεται **αν και μόνο αν η δύναμη $\mathbf{F}_{ij}$ ικανοποιεί τον ισχυρό νόμο δράσης αντίδρασης**

Ολική στροφορμή

- Υποθέτοντας ισχυρό νόμο δράσης – αντίδρασης

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(e)} = \sum_i \mathbf{N}_i^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)}$$

⇒ **Διατήρηση της ολικής στροφορμής**

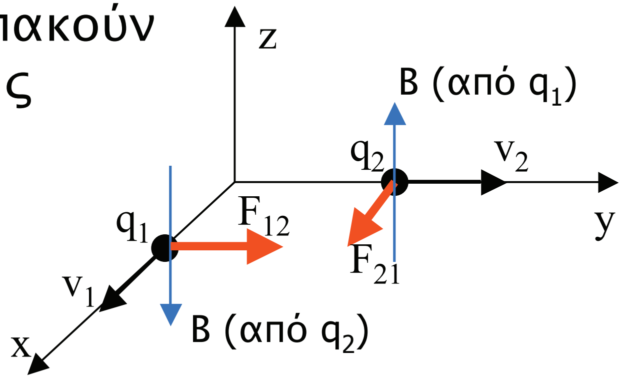
Αν η ολική εξωτερική ροπή $\mathbf{N}^{(e)}$ είναι μηδέν,
η ολική στροφορμή διατηρείται

⇓

Ένα σύστημα πολλών σημείων (= εκτενές σώμα) μπορεί να θεωρηθεί σαν υλικό σημείο **αν** οι εσωτερικές δυνάμεις υπακούν στον ισχυρό νόμο της δράσης – αντίδρασης

Νόμοι δράσης - αντίδρασης

- Οι περισσότερες δυνάμεις που ξέρουμε υπακούν στον ισχυρό νόμο της δράσης-αντίδρασης
  - Βαρύτητα
  - ηλεκτροστατική δύναμη



- Υπάρχουν σπάνιες εξαιρέσεις
  - π.χ. Η δύναμη Lorentz που εμφανίζεται σε κινούμενα φορτία

    Η γραμμική ορμή και στροφορμή δεν διατηρούνται

    Για ταχύτητες $v<<c$ η μαγνητική δύναμη μεταξύ q_1 και q_2 είναι πολύ μικρή σε σχέση με τη δύναμη Coulomb.

➢ Αν όμως πάρουμε υπ' όψη το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο
  - Τα σωματίδια ανταλλάσουν δυνάμεις με το πεδίο
  - Το πεδίο από μόνο του έχει γραμμική ορμή και στροφορμή

⇒ **Οι νόμοι διατήρησης επανήλθαν**

Νόμοι διατήρησης

Ασθενής νόμος δράσης – αντίδρασης ⇔ Διατήρηση της **P**

Ισχυρός νόμος δράσης – αντίδρασης ⇔ Διατήρηση της **L**

Θα δούμε αργότερα ότι P και L πρέπει να διατηρούνται
αν οι νόμοι της φυσικής είναι ισοτροπικοί στο χώρο

- Όχι ιδιαίτερη αρχή
- Όχι ιδιαίτερη κατεύθυνση ή προσανατολισμός

Αν δεχθούμε αυτές τις συμμετρίες σα θεμελιώδεις αρχές
τότε όλες οι δυνάμεις πρέπει να ικανοποιούν το νόμο της
δράσης-αντίδρασης ⇒ Απόδειξη του 3ου νόμου του Newton

Ολική στροφορμή

- Ορίζουμε την θέση ενός σημείου I από το κέντρο μάζας

$$\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$$

Ορίζουμε επίσης τις ταχύτητες $\mathbf{v}_i' = \dot{\mathbf{r}}_i'$ $\quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}$

Υπολογίζουμε την ολική στροφορμή

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i \left(\mathbf{r}_i' + \mathbf{R}\right) \times m_i \left(\mathbf{v}_i' + \mathbf{v}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\mathbf{v} + \sum_i \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i'$$

Η στροφορμή της κίνησης συγκεντρωμένη στο CM

Στροφορμή της κίνησης γύρω από το CM