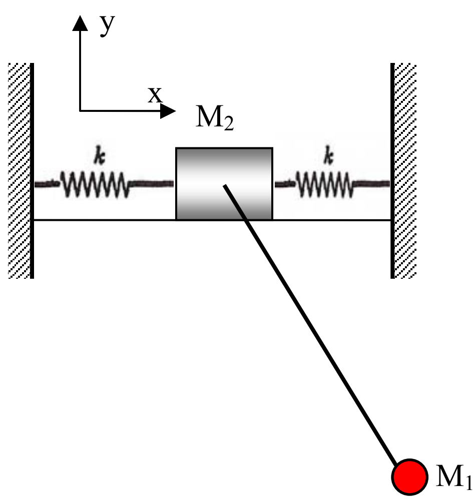
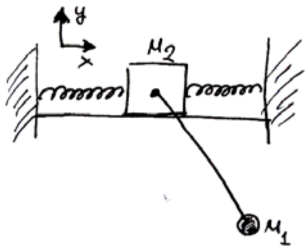
ΦΥΣ. 133
1η ΠΡΟΟΔΟΣ 13-Μάρτη-2006

1. Υπάρχει ένα εκκρεμές με μάζα M_1 στο πιο απομακρυσμένο άκρο μια αβαρούς ράβδου το άλλο άκρο της οποίας εξαρτάται από μια άλλη μάζα M_2 η οποία βρίσκεται στην επιφάνεια ενός τραπεζιού. Η μάζα M_2 συνδέεται με 2 όμοια ελατήρια σταθερής ελατηρίου Κ. Τα ελατήρια βρίσκονται εκατέρωθεν της μάζας M_2 όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.
Υποθέστε ότι τα ελατήρια βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος όταν η μάζα M_2 είναι στο μέσο.



(α) Να γραφεί η Lagrangian συναρτήσει των x_1, y_1, x_2 και y_2, συντεταγμένων των δύο μαζών M_1 και M_2 αντίστοιχα. (**5 β**)
(β) Πόσοι δεσμοί υπάρχουν μεταξύ των τεσσάρων αυτών συντεταγμένων; Να γραφούν οι εξισώσεις του (των) δεσμών. (**3 β**)
(γ) Τι είδους είναι οι δεσμοί αυτοί; (**1 β**)
(δ) Αν θέλαμε να βρούμε πόσο ισχυρή πρέπει να κατασκευάσουμε τη ράβδο του εκκρεμούς έτσι ώστε να μη σπάει τι μέθοδο θα χρησιμοποιούσαμε για να βρούμε την απάντηση; (Δεν χρειάζεται να εφαρμόσετε τη μέθοδο για την απάντηση στο ερώτημα αυτό). (**1 β**)



(α) Η Lagrangian συναρτήσει των x_1, x_2, y_1, y_2 γράφεται: $\mathcal{L} = T - V$

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$V = m_1 g y_1 + C + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} k x_2^2$$

Επομένως: $$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_1 g y_1 - C - k x_2^2$$

Η σταθερά C είναι τυχαία και μπορεί να τεθεί ίση με μηδέν.

Θέτουμε $x_2 = \phi$ στο σημείο που τα ελατήρια είναι στο φυσικό τους μήκος

Η $y_2 = 0$ για τη μάζα M_2 αφού δεν κινείται πάνω στο τραπέζι στην y-διεύθυνση

Άρα $$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - m_1 g y_1 - k x_2^2}$$

(β) Πόσοι δεσμοί υπάρχουν?

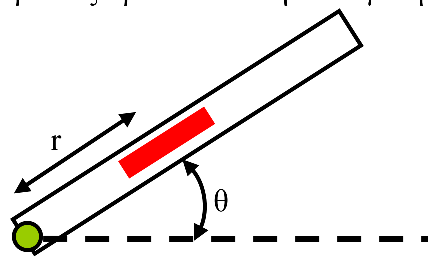
$\boxed{\text{Δύο}}$ Οι εξισώσεις τους είναι $\boxed{y_2 = \phi}$

$$\boxed{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \ell}$$ όπου ℓ το μήκος της ράβδου

(γ) Και οι 2 δεσμοί είναι <u>ολόνομοι</u>

(δ) Πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange έτσι ώστε η δύναμη του δεσμού να εμφανιστεί στην εξίσωση.

2. Ένας ευθύγραμμος σωλήνας αμελητέας μάζας μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το ένα άκρο του σε ένα ορισμένο επίπεδο. Μέσα στο σωλήνα υπάρχει μια ομοιόμορφη ράβδο μάζας m και μήκους L και η οποία μπορεί να γλιστρά ελεύθερα μέσα στο σωλήνα. Θεωρήστε τη ράβδο εξαιρετικά λεπτή και αγνοήστε την βαρύτητα.

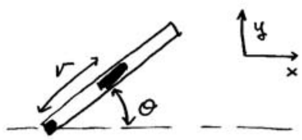


(α) Να βρεθεί η Lagrangian του συστήματος. (**5 β**)

(β) Δείξτε ότι αν (r) είναι η απόσταση του κέντρου της ράβδου από το άκρο περιστροφής του σωλήνα, τότε r(t) ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση:

$$\ddot{r} = \frac{l^2 r}{m^2\left(r^2 + L^2/12\right)^2}$$

όπου l είναι σταθερά. Σημειωτέων ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο της είναι $I = mL^2/12$. (**10 β**)



(α) Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Ο α' όρος παριστά την κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς του ΚΜ και ο β' όρος λόγω περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας

Σε πολικές συντεταγμένες θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{x}^2 = \dot{r}^2\cos^2\theta + (r\dot{\theta})^2\sin^2\theta - 2\dot{r}r\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta \\ \dot{y}^2 = \dot{r}^2\sin^2\theta + (r\dot{\theta})^2\cos^2\theta + 2\dot{r}r\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta \end{array}\right\} \xRightarrow{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$$

Επομένως: $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$

(Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε μεταφορά κατά μήκος του r και περιστροφή ως προς το άκρο της ράβδου, οπότε θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα των παράλληλων αξόνων για να βρούμε τη ροπή αδράνειας)

Η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν σύμφωνα με την άσκηση: $V = \emptyset$.

Άρα $\boxed{\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + \left(r^2 + \frac{L^2}{12}\right)\dot{\theta}^2\right]}$

Θα μπορούσαμε να λύσουμε την άσκηση παίρνοντας την κινητική ενέργεια της ράβδου σαν κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής γύρω από το σημείο στήριξης του σωλήνα και την μεταφορική κινητική ενέργεια του ΚΜ κατά μήκος του σωλήνα

δηλαδή: $$T = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}\left(I_{cm} + mr^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\dot{r}^2$$

καταλήγοντας και πάλι στο ίδιο αποτέλεσμα όπως και πριν: $T = \frac{1}{2} I_{cm}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$

(β) Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot{r}\right) - mr\dot{\theta}^2 = 0 \Rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0} \quad (1)$$

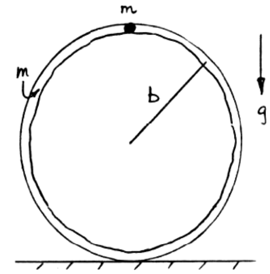
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\left(r^2 + \frac{L^2}{12}\right)\dot{\theta}\right) = 0 \Rightarrow m\left(r^2 + \frac{L^2}{12}\right)\dot{\theta} = \text{σταθ} = \ell \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{\ell}{m\left(r^2 + \frac{L^2}{12}\right)}} \quad (2)$$

Αντικαθιστούμε στην (1) και έχουμε:

$$\ddot{r} - r\left[\frac{\ell^2}{m\left(r^2 + \frac{L^2}{12}\right)}\right]^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{r} = \frac{r\ell^2}{m^2\left(r^2 + \frac{L^2}{12}\right)^2}}$$

3. Μια χάντρα μάζας m κινείται μέσα σε ένα λεπτό σωλήνα που έχει τη μορφή ενός στεφανιού ακτίνας b και μάζας επίσης m. Ο σωλήνας είναι στο εσωτερικό του λείος ώστε η χάντρα να μπορεί να κινείται ελεύθερα στην περιφέρεια του στεφανιού. Θα μελετήσουμε την κίνηση του συστήματος για 2 περιπτώσεις ως προς τη σχέση του στεφανιού και του εδάφους:

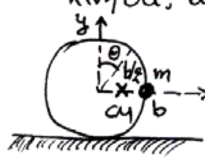


(α) Μη παρουσία τριβής μεταξύ σωλήνα και εδάφους. (**10 β**)
(β) Ένα συντελεστή τριβής μεταξύ σωλήνα και εδάφους αρκετά μεγάλο ώστε ο σωλήνας κυλά στο έδαφος χωρίς ολίσθηση.(**10 β**)
Η χάντρα αφήνεται από την κατάσταση ηρεμίας και το υψηλότερο σημείο της περιφέρειας του σωλήνα να κυλήσει προς τη μια πλευρά του σωλήνα. Όταν η χάντρα έχει πέσει κατά τη μισή απόσταση προς το έδαφος πόσο έχει κινηθεί το στεφάνι οριζόντια πάνω στο έδαφος για τις δύο περιπτώσεις που προαναφέρθηκαν; [*__Υπόδειξη:__* Μπορείτε να βρείτε την απάντηση βασιζόμενη σε απλή φυσική χωρίς να βρείτε τις εξισώσεις κίνησης. Αλλά μπορείτε να το κάνετε και με τις εξισώσεις κίνησης]

(α) Κίνηση όταν δεν υπάρχει τριβή μεταξύ σωλήνα και εδάφους

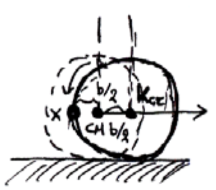
__Α) Μέθοδος – Απλή Μηχανική__

Στην οριζόντια διεύθυνση δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη. Θεωρώντας το σωλήνα και τη χάντρα σαν ένα σύστημα, το CM του συστήματος αυτού δεν μπορεί να κινηθεί, αφού αρχικά το σύστημα είναι ακίνητο.



Αν θεωρήσουμε την κατάσταση του διπλανού σχήματος.

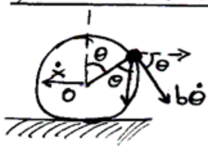
Αν υποθέσουμε ότι η χάντρα έχει φθάσει στην οριζόντια θέση, τότε $x_{χάντρας} = b$. Το CM θα βρισκόταν στη θέση:



$$x_{CM} = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{\cancel{\left[\sum_{i=1}^{N} m_i x_i\right]^{σωλ}}^{\to 0} + m_x \cdot b}{m_{σωλ} + m_x} = \frac{\cancel{m_x} b}{2\cancel{m_x}} = \frac{b}{2}$$

Δηλαδή το CM μετατοπίστηκε κατά $\frac{b}{2}$ ενώ το στεφάνι ήταν ακίνητο.
Ωστόσο θέλουμε το ΚΜ να παραμείνει στην ίδια θέση $(x_{cm} = 0)$
Τότε το κατώτερο μέρος του σωλήνα θα πρέπει να κινηθεί κατά $-\frac{b}{2}$

B) Μέθοδος - Εξισώσεις κινήσεως



Θεωρώ την οριζόντια μετατόπιση του στεφανιού σαν x

Επομένως $v_{στεφ} = \dot{x} \Rightarrow \boxed{T_{στ} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2}$

Οι συντεταγμένες της χάντρας θα είναι : $\left.\begin{array}{l} x_{χα} = x_{στ} + b\sin\theta \\ y_{χα} = b\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{x}_{χα} = \dot{x} + b\cos\theta \\ \dot{y}_{χα} = -b\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{T_{χα} = \frac{1}{2} m \left[b^2\sin^2\theta + (\dot{x} + b\cos\theta)^2\right]}$$

Επειδή η αντίδραση από τη χάντρα είναι ακτινική δεν παράγει ροπή η οποία μπορεί να περιστρέψει το στεφάνι και επομένως δεν υπάρχει περιστροφική κινητική ενέργεια για το σωλήνα.

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι μόνο λόγω της χάντρας: $\boxed{U = mgb\cos\theta}$

Η Lagrangian του συστήματος είναι :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + m\dot{x}b\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta - mbg\cos\theta \Rightarrow$$

$$L = m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2 + m\dot{x}\dot{\theta}b\cos\theta - mgb\cos\theta$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} + m\dot{\theta}b\cos\theta \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = σταθ \Rightarrow 2m\dot{x} + m\dot{\theta}b\cos\theta = σταθ$$

Αν πάρουμε $\theta = \emptyset$ (αρχικά) $\Rightarrow$ $σταθ = \emptyset$.

Επομένως $\quad 2\cancel{m}\dot{x} + \cancel{m}\dot{\theta}b\cos\theta = 0 \Rightarrow 2\dot{x} + \dot{\theta}b\cos\theta = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\dot{x} = -\dot{\theta}b\cos\theta \Rightarrow \frac{\dot{x}}{\dot{\theta}} = -\frac{b\cos\theta}{2} \Rightarrow \frac{\frac{dx}{\cancel{dt}}}{\frac{d\theta}{\cancel{dt}}} = -\frac{b\cos\theta}{2} \Rightarrow \int dx = -\int_0^{\pi/2} \frac{b\cos\theta}{2} d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2}\sin\theta\Big|_0^{\pi/2} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{b}{2}}$$

(b) Κίνηση όταν υπάρχει τριβή μεταξύ σωλήνα και εδάφους - χωρίς ολίσθηση

Η ολική κινητική ενέργεια του σωλήνα είναι μεταφορική + περιστροφική του CM

Αν το CM του σωλήνα μετακινηθεί κατά $\dot{x}$ τότε $\omega = \frac{\dot{x}}{b}$ αφού δεν υπάρχει ολίσθηση.

$$T_{σωλ} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\frac{\dot{x}^2}{b^2} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\cancel{b^2}\frac{\dot{x}^2}{\cancel{b^2}} \Rightarrow T_{σωλ} = m\dot{x}^2$$

$$T_{χάντρας} = \frac{1}{2}m(\dot{x} + b\dot{\theta}\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}m b^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2 + mb\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta.$$

Επομένως η Lagrangian του συστήματος είναι :

$$L = T_{σωλ} + T_{χαν} - U = \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2 + mb\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta - mgb\cos\theta$$

Οι εξισώσεις κίνησης θα είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 3m\dot{x} + mb\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow 3m\dot{x} + mb\dot{\theta}\cos\theta = \sigma\tau\alpha\theta$$

Για $\Theta = 0 \Rightarrow 3m\dot{x} + mb\dot{\theta} = \sigma\tau\alpha\theta$ αλλά $\dot{x} = 0$ (αρχικά σε ηρεμία)

Επομένως $\sigma\tau\alpha\theta = \emptyset$

Έχουμε επομένως: $3\cancel{m}\dot{x} + \cancel{m}b\dot{\theta}\cos\theta = 0 \Rightarrow \dfrac{\dot{x}}{\dot{\theta}} = -\dfrac{b}{3}\cos\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = -\int_0^{\pi/2} \frac{b}{3}\cos\theta \, d\theta \Rightarrow \boxed{x = -\frac{b}{3}}$$

Δηλαδή η μετατόπιση είναι μικρότερη από αυτή που βρήκαμε στο (α)
Αυτό γιατί η τριβή επιβραδύνει το στεφάνι. Ή διαφορετικά, η τριβή κάνει το στεφάνι να περιστρέφεται και επομένως ένα μέρος της ενέργειας πηγαίνει σε περιστροφή και λιγότερο σε μεταφορά άρα λιγότερη μετατόπιση.