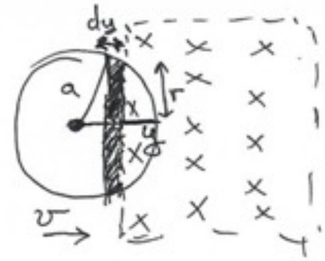
# ΦΥΣ. 112

**6ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ** **Επιστροφή 20.11.2023**

**1.** Ένας κυκλικός αγώγιμος βρόχος ακτίνας *a* και αντίστασης *R* τραβιέται με σταθερή ταχύτητα *υ* σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο. Η επιφάνεια του βρόχου είναι κάθετη στο μαγνητικό πεδίο και αρχίζει να εισέρχεται στο πεδίο τη χρονική στιγμή $t = 0$. Βρείτε τη σχέση που δίνει το επαγόμενο ρεύμα συναρτήσει του χρόνου από τη στιγμή $t = 0$ ως την χρονική στιγμή που ολόκληρος ο βρόχος έχει εισέλθει στο μαγνητικό πεδίο. (Αυτή ήταν η άσκηση 9 του προηγούμενου homework).




Τη στιγμή που ο βρόχος αρχίζει να κινείται και να εισέρχεται στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου το εμβαδόν της επιφάνειας αρχίζει να μεταβάλλεται.

Η αλλαγή δίνεται από το γραμμοσκιασμένο τμήμα της επιφάνειας του διπλανού σχήματος: Αυτή η στοιχειώδης επιφάνεια είναι: $dA = 2r \cdot dy = 2\sqrt{a^2-(a-y)^2}\,dy \Rightarrow$

$$\Rightarrow dA = 2\sqrt{\cancel{a^2}-\cancel{a^2}-y^2+2ay}\,dy \Rightarrow dA = 2\sqrt{2ay-y^2}\,dy$$

Η μεταβολή θα είναι: $\frac{dA}{dt} = 2\sqrt{2ay-y^2}\,\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\upsilon\sqrt{2ay-y^2}$

Επομένως $I(t) = \frac{\mathcal{E}_m}{R} = -\frac{d\Phi_m/dt}{R} = -\frac{B}{R}2\upsilon\sqrt{2ay-y^2} \Rightarrow y = \upsilon t$

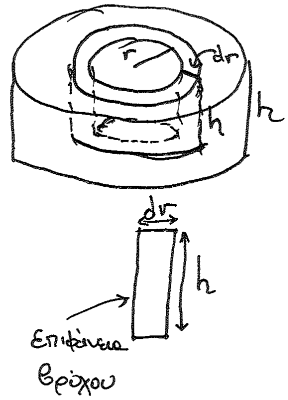
$$\Rightarrow I(t) = -\frac{B}{R}2\upsilon\sqrt{2a\upsilon t-\upsilon^2t^2} = -\frac{B}{R}2\upsilon\sqrt{\upsilon t(2a-\upsilon t)}$$

Το πρόσημο δηλώνει τη φορά αντίθετα με της επιφάνειας y πεδίο.

Το ρεύμα μηδενίζεται όταν ο βρόχος έχει εισέλθει πλήρως στο μαγνητικό πεδίο

Τότε $2a-\upsilon t = 0 \Rightarrow t = \frac{2a}{\upsilon}$

**2.** Ένας αγώγιμος δίσκος ακτίνας $a$, πάχους $h$ και ειδικής αντίστασης $\rho$ βρίσκεται στο εσωτερικό ενός σωληνοειδούς κυκλικής διατομής, και ο άξονας του δίσκου συμπίπτει με τον άξονα του σωληνοειδούς. Το μαγνητικό πεδίο στο σωληνοειδές μεταβάλλεται με τον χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση $B = bt$, όπου $b$ σταθερά. Βρείτε (α) την πυκνότητα ρεύματος του δίσκου συναρτήσει της απόστασης $r$ από το κέντρο του δίσκου και (β) την ισχύ που καταναλώνεται στον δίσκο. <u>*Υπόδειξη:*</u> Θεωρήστε ότι ο δίσκος αποτελείται από πολλούς απειροστούς αγώγιμους βρόχους.




Προσεγγίζουμε τον δίσκο σαν ένα άθροισμα πολλών απειροστών βρόχων ακτίνας r, εύρους dr, πάχους h και ειδικής αντίστασης ρ. Η αντίσταση του κάθε βρόχου θα είναι:

$$R = \rho \frac{L}{A} = \rho \frac{2\pi r}{h\,dr} \quad (1)$$

Η μαγνητική ροή που διαπερνά έναν βρόχο θα είναι:

$\Phi_m = \vec{B}\cdot\vec{N} = bt\pi r^2$ και η τάση που επάγεται σε κάθε βρόχο θα είναι: $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = -b\pi r^2$ (2)

(α) Η πυκνότητα ρεύματος θα είναι επομένως: $J = \frac{I}{A} = \frac{\mathcal{E}/R}{A} \Rightarrow$

$$\Rightarrow J = \frac{-b\pi r^2 / \rho \frac{2\pi r}{h\,dr}}{h\,dr} = -\frac{b\cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \cancel{h\,dr}}{2\cancel{\pi}\cancel{r}\rho\,\cancel{h\,dr}} \Rightarrow \boxed{J = -\frac{br}{2\rho}}$$

η πυκνότητα ρεύματος δεν εξαρτάται από το πάχος του υλικού και εξαρτάται γραμμικά από το r

(β) Η ισχύς θα είναι το άθροισμα της ισχύος σε κάθε απειροστό βρόχο.

Επομένως: $P = \int_0^a dP = \int_0^a \mathcal{E}\,dI$

Αλλά $dI = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{-b\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}}{\rho \frac{2\cancel{\pi}\cancel{r}}{h\,dr}} \Rightarrow dI = -\frac{br\,h\,dr}{2\rho}$

$$\Rightarrow P = \int_0^a (-b\pi r^2)\left(-\frac{br\,h\,dr}{2\rho}\right)$$

$$\Rightarrow P = \frac{b^2\pi h}{2\rho}\int_0^a r^3\,dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{b^2\pi h}{2\rho}\frac{a^4}{4} \Rightarrow \boxed{P = \frac{b^2\pi h a^4}{8\rho}}$$

η ισχύς εξαρτάται από το πάχος του υλικού.

**3.** Ένα καλώδιο ακτίνας $R$ διαρρέεται από ρεύμα $I$ το οποίο κατανέμεται ομοιόμορφα στην κυκλική του επιφάνεια. Βρείτε μια μαθηματική σχέση που δίνει την ολική μαγνητική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο εσωτερικό του καλωδίου ανά μονάδα μήκους.

Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του σύρματος βρίσκεται από εφαρμογή του νόμου του Ampere

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\pi\epsilon\rho} \Rightarrow B\cdot 2\pi \cancel{r} = \mu_0 \cdot I \frac{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}}{\cancel{\pi} R^2} \Rightarrow$$


$$\Rightarrow B = \mu_0 I \frac{r}{2\pi R^2}$$

Η πυκνότητα ενέργειας ανά μονάδα μήκους δίνεται από: $u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow u_B = \frac{\mu_0^{\cancel{2}} I^2 r^2}{4\pi^2 R^4 2 \cancel{\mu_0}} \Rightarrow u_B = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R^4}$$

Ολοκληρώνουμε ως προς τον όγκο: $dV = 2\pi r L dr$ και η ενέργεια ανά μονάδα μήκους θα είναι:

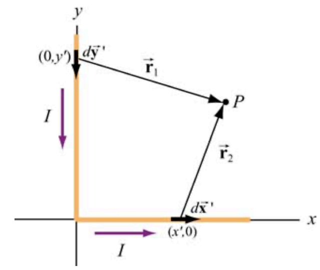
$$\frac{U}{L} = \int \frac{u_B dV}{L} = \int \frac{B^2 dV}{2\mu_0 L} = \int_0^R \frac{\mu_0 I^2 r^2}{\cancel{8}\pi^{\cancel{2}} R^4 \cancel{L}} \cancel{2\pi} r \cancel{L} dr = \int_0^R \frac{\mu_0 I^2 r^3}{4\pi R^4} dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{U}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi R^4} \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^R \Rightarrow \frac{U}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi \cancel{R^4}} \frac{\cancel{R^4}}{4} \Rightarrow \boxed{\frac{U}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}}$$

Η πυκνότητα ενέργειας, όπως και η ενέργεια, είναι ανάλογη του τετραγώνου του ρεύματος

**4.** Ένας ευθύγραμμος αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα $I$, έχει διεύθυνση προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων κατά μήκος του $y$-άξονα και κατόπιν κατά μήκος του $+x$-άξονα, προς το άπειρο. Δείξτε ότι το μαγνητικό πεδίο στο τεταρτημόριο με $x$, $y > 0$ του $xy$-επιπέδου δίνεται από την εξίσωση:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$




Έστω $P(x,y)$ ένα σημείο στο πρώτο τεταρτημόριο σε απόσταση $r_1$ από ένα σημείο $(0,y')$ στον $y$-άξονα και απόσταση $r_2$ από $(x',0)$ στον $x$-άξονα.

Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Biot-Savart, το μαγνητικό πεδίο στο P

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{y\text{-αγωγός}} \frac{d\vec{s}_1\times\hat{r}_1}{r_1^2} + \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{x\text{-αγωγ.}} \frac{d\vec{s}_2\times\hat{r}_2}{r_2^2}$$

Κοιτάζουμε κάθε τμήμα του αγωγού ξεχωριστά:

(a) Θεωρούμε στοιχειώδες τμήμα $d\vec{s} = -dy'\hat{j}$ το οποίο βρίσκεται σε απόσταση $\vec{r}_1 = x\hat{i} + (y-y')\hat{j}$ από το P. Θα έχουμε:

$$d\vec{s}_1\times\vec{r}_1 = (-dy'\hat{j})\times\left[x\hat{i} + (y-y')\hat{j}\right] = x\,dy'\,\hat{k}$$

(b) Ανάλογα, κατά μήκος του $x$-άξονα, έχουμε $d\vec{s}_2 = dx'\hat{i}$ κ. $\vec{r}_2 = (x-x')\hat{i} + y\hat{j}$

Επομένως $d\vec{s}_2\times\vec{r}_2 = y\,dx'\,\hat{k}$

Επομένως το μαγνητικό πεδίο στο σημείο P θα έχει κατεύθυνση στη $+z$-διεύθυνση

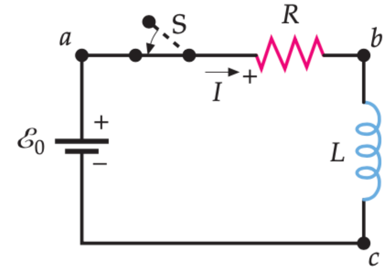
Από τα παραπάνω αποτελέσματα και $r_1 = \left[x^2 + (y-y')^2\right]^{1/2}$ και $r_2 = \left[(x-x')^2 + y^2\right]^{1/2}$

Άρα το μαγνητικό πεδίο θα είναι: $B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^\infty \frac{x\,dy'}{\left[x^2+(y-y')^2\right]^{3/2}} + \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^\infty \frac{y\,dx'}{\left[y^2+(x-x')^2\right]^{3/2}}$

Χρησιμοποιώντας ότι: $\int_0^\infty \frac{b\,ds}{\left[b^2+(a-s)^2\right]^{3/2}} = \frac{1}{b} + \frac{a}{b\sqrt{a^2+b^2}}$ τα προηγούμενα ολοκληρώματα:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{1}{x} + \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} + \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\right]\hat{k}.$$

**5.** Στο κύκλωμα του σχήματος, έστω ότι $\mathcal{E}_0 = 12.V$, $R$=3.0Ω και $L$=0.600$H$. Ο διακόπτης κλείνει την χρονική στιγμή $t$ = 0. Κατά το χρονικό διάστημα από $t$ = 0 σε $t$=$L/R$ βρείτε (α) την ποσότητα ενέργειας που προσφέρεται από την μπαταρία. (β) το ποσό της ενέργειας που χάνεται πάνω στην αντίσταση και (γ) το ποσό της ενέργειας το οποίο προσφέρεται στο πηνίο. <u>*Υπόδειξη:*</u> θα πρέπει να βρείτε τους ρυθμούς μεταφοράς ενέργγειας συναρτήσει του χρόνου και να τις ολοκληρώσετε.




(α) Ο ρυθμός με τον οποίο έχουμε ενέργεια στο σύστημα είναι:

$$\frac{dE}{dt} = \mathcal{E}_0 I$$

Το ρεύμα στο κύκλωμα συναρτήσει του χρόνου είναι: $I = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right) \Rightarrow dE = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\int_0^{\tau}\left(1-e^{-t/\tau}\right)dt = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\left[\tau - \left(-\tau e^{-1}+\tau\right)\right] = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\frac{\tau}{e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\mathcal{E}_0^2 L}{R^2 e}} \quad \text{όπου } \tau = L/R$$

Αντικατάσταση αριθμητικών δεδομένων: $E = \frac{(12V)^2(0.6H)}{(3\Omega)^2 e} \Rightarrow E = 3.53J$

(β) Ο ρυθμός με τον οποίο ενέργεια χάνεται στην αντίσταση θα είναι:

$$\frac{dE_1}{dt} = I^2 R = \left[\frac{\mathcal{E}_0}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)\right]^2 R = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\left(1-2e^{-t/\tau}+e^{-2t/\tau}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\int_0^{L/R}\left(1-2e^{-t/\tau}+e^{-2t/\tau}\right)dt = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\left(\frac{2\frac{L}{R}}{e} - \frac{\frac{L}{R}}{2} - \frac{L/R}{2e^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E_1 = \frac{\mathcal{E}_0^2 L}{R^2}\left(\frac{2}{e} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2}\right)}$$

Αριθμητικά δεδομένα δίνουν: $\boxed{E_1 = 1.61J}$

(γ) Η ενέργεια που αποθηκεύεται στο πηνίο, θα είναι: $U_L\left(\frac{L}{R}\right) = \frac{1}{2}L\left(I\left(\frac{L}{R}\right)\right)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow U_L(L/R) = \frac{1}{2}L\left(\frac{\mathcal{E}_0}{R}\left(1-e^{-1}\right)\right)^2 \Rightarrow \boxed{U_L\left(\frac{L}{R}\right) = \frac{L\mathcal{E}_0^2}{2R^2}\left(1-e^{-1}\right)^2} \text{ για } t = L/R = \tau$$

Αριθμητική αντικατάσταση δίνει: $U_L\left(\frac{L}{R}\right) = 1.92J.$

**6.** Θεωρήστε το κύκλωμα του διπλανού σχήματος. Προσδιορίστε το ρεύμα που διαρρέει κάθε αντίσταση για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

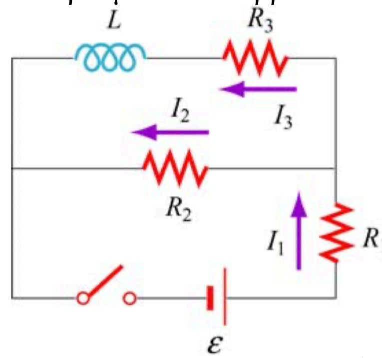
(α) Αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη

(β) Μεγάλο χρονικό διάστημα μετά το κλείσιμο του διακόπτη

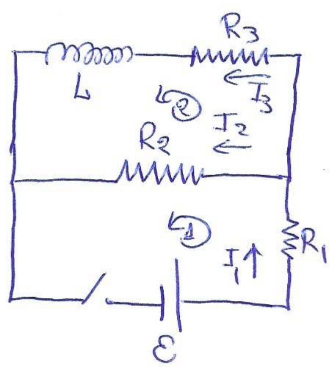
Υποθέστε ότι ο διακόπτης ανοίγει μεγάλο χρονικό διάστημα αφότου είχε κλείσει. Ποιο είναι το κάθε ρεύμα στις αντιστάσεις:

(γ) Αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη.

(δ) Μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα αφότου άνοιξε ο διακόπτης.




(α) Μετά το κλείσιμο του διακόπτη, το ρεύμα που διατρέχει το πηνίο είναι μηδέν γιατί η αυτεπαγωγή δεν επιτρέπει το ρεύμα να αυξηθεί απότομα. Επομένως $I_3=0$. Εδώ τον $I_1=I_2+I_3 \Rightarrow I_1=I_2$




Εφαρμόζουμε τους κανόνες του kirchhoff στον πρώτο βρόχο του διπλανού σχήματος:

$$I_1=I_2=\frac{\mathcal{E}}{R_1+R_2}$$

(β) Όταν ο διακόπτης είναι κλειστός για μεγάλο χρονικό διάστημα, δεν υπάρχει επαγόμενη ΗΕΔ στο πηνίο και τα ρεύματα θα είναι σταθερά.

Οι κανόνες του kirchhoff για τον 1ο βρόχο, δίνουν:

$$\mathcal{E}-I_1R_1-I_2R_2=0$$

και για τον 2ο βρόχο $I_2R_2-I_3R_3=0$

Χρησιμοποιούμε και τον κανόνα των κόμβων: $I_1=I_2+I_3$

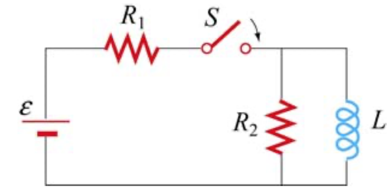
$$\Rightarrow I_1=\frac{(R_2+R_3)\,\mathcal{E}}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3},\quad I_2=\frac{R_3\,\mathcal{E}}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3},\quad I_3=\frac{R_2\,\mathcal{E}}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}$$

(γ) Αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη, το ρεύμα διαμέσου της $R_1$ είναι μηδέν δηλαδή $I_1=0$. Αυτό σημαίνει ότι $I_2+I_3=0$. Ο βρόχος 2 αποτελεί ένα αποφορτιζόμενο RL κύκλωμα και το $I_3$ αρχίζει να ελαττώνεται.

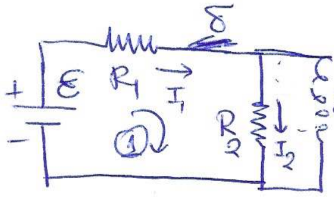
Επομένως $I_3=-I_2=\dfrac{\mathcal{E}\,R_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$

(δ) Μεγάλο διάστημα μετά το άνοιγμα του διακόπτη, τα ρεύματα θα είναι $0=I_1=I_2=I_3$

**7.** Στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος, θεωρήστε ότι αρχικά ο διακόπτης είναι ανοικτός. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο διακόπτης κλείνει. Ποιο είναι το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο σε κάποια μετέπειτα χρονική στιγμή $t$;




Έστω τα ρεύματα που περνούν από τις αντιστάσεις $R_1$, $R_2$, και $L$ ότι είναι $I_1, I_2, I$. Από τους κανόνες του kirchhoff:




$$I_1 = I_2 + I \qquad (1)$$

Για τον 1° βρόχο: $\mathcal{E} - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{E} - (I + I_2) R_1 - I_2 R_2 = 0 \qquad (2)$$

Θεωρώντας τον εξωτερικό βρόχο: $\mathcal{E} - (I + I_2) R_1 = L \dfrac{dI}{dt} \qquad (3)$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_2 R_2 = L \frac{dI}{dt} \Rightarrow I_2 = \frac{L}{R_2} \frac{dI}{dt} \qquad (4)$$

Αντικαθιστούμε στην (2) οπότε έχουμε: $\mathcal{E} - I R_1 - I_2 (R_1 + R_2) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{E} - I R_1 - \frac{L}{R_2} (R_1 + R_2) \frac{dI}{dt} = 0$$

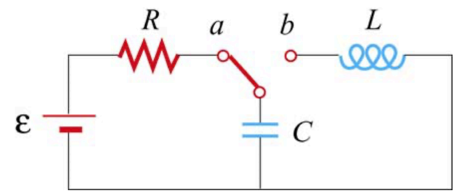
Διαιρούμε με $\dfrac{L}{R_2}(R_1+R_2)$ οπότε έχουμε $\Big\} \Rightarrow \underbrace{\mathcal{E} \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}}_{\mathcal{E}'} - I \underbrace{\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}_{R'} - L \dfrac{dI}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \mathcal{E}' - I R' - L \frac{dI}{dt} = 0$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι: $I(t) = \dfrac{\mathcal{E}'}{R'} \left(1 - e^{-R't/L}\right)$

Αλλά $\dfrac{\mathcal{E}'}{R'} = \dfrac{\mathcal{E}}{R_1}$ και άρα $\boxed{I(t) = \dfrac{\mathcal{E}}{R_1}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$ όπου $\tau = L/R'$

**8.** Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος. Υποθέστε ότι ο διακόπτης που είναι συνδεδεμένος με τον ακροδέκτη α για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα μετακινείται και συνδέεται τώρα με τον ακροδέκτη *b* τη χρονική στιγμή $t = 0$. Υπολογίστε τις παρακάτω ποσότητες:




(α) Τη συχνότητα ταλαντώσεων του *LC* κυκλώματος.

(β) Το μέγιστο φορτίο που εμφανίζεται στον πυκνωτή.

(γ) Το μέγιστο ρεύμα στο πηνίο.

(δ) Την ολική ενέργεια που έχει το σύστημα την χρονική στιγμή *t*.

(α) Η γωνιακή συχνότητα ταλαντώσεων του LC κυκλώματος δίνεται από $\omega = 2\pi f = 1/\sqrt{LC}$ και επομένως η συχνότητα είναι:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

(β) Το μέγιστο φορτίο που αποθηκεύτηκε στον πυκνωτή πριν ο διακόπτης μετακινηθεί στο b, είναι $Q = C\mathcal{E}$

(γ) Η ενέργεια που αποθηκεύτηκε στον πυκνωτή πριν μετακινηθεί ο διακόπτης, είναι $U_C = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$

Η μαγνητική ενέργεια που αποθηκεύτηκε στο πηνίο είναι: $U_m = \frac{1}{2}LI^2$

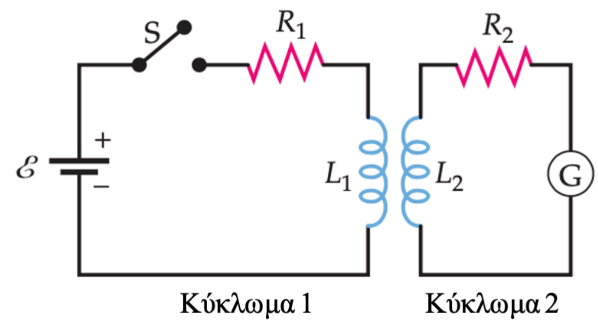
Επομένως όταν το ρεύμα είναι μέγιστο, όλη η ενέργεια που είχε αποθηκευθεί αρχικά στον πυκνωτή είναι τώρα στο πηνίο

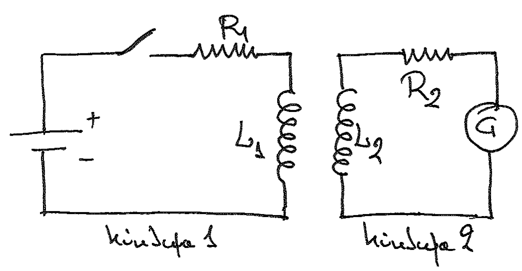
$$\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 = \frac{1}{2}LI_0^2 \Rightarrow I_0 = \mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

(δ) Σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, η ολική ενέργεια στο κύκλωμα είναι ίση με την αρχική ενέργεια που είχε αποθηκεύσει ο πυκνωτής

$$U = U_m + U_C = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2.$$

**9.** Στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος υπάρχουν δύο συζευγμένα κυκλώματα. Το κύκλωμα 2 έχει ολική αντίσταση 300Ω. Όταν κλείσει ο διακόπτης $S$, το ρεύμα στο κύκλωμα 1 αυξάνει και αποκτά μέγιστη τιμή 5A μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα. Φορτίο $200\mu C$ περνά μέσα από το γαλβανόμετρο κατά το χρονικό διάστημα που το ρεύμα στο κύκλωμα 1 αυξάνει. Βρείτε την αμοιβαία επαγωγή των δύο πηνίων.




Εφαρμόζουμε τον 2ο κανόνα του kirchhoff στο κύκλωμα 2. Θα έχουμε ότι:

$$M\frac{dI_1}{dt} + L_2\frac{dI_2}{dt} - R_2 I_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M\,dI_1 + L_2\,dI_2 - R_2 I_2\,dt = 0$$

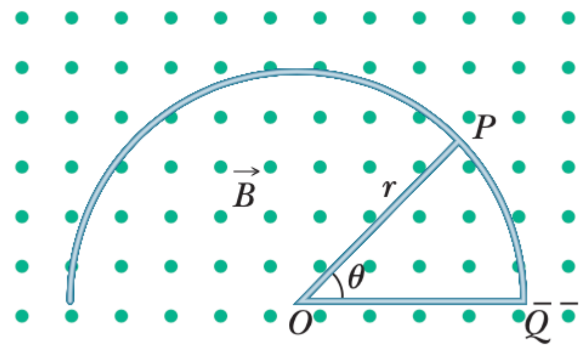
Ολοκληρώνουμε κάθε όρο από 0 έως ∞ οπότε θα έχουμε:

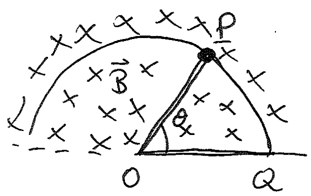
$$\int_0^\infty M\,dI_1 + \int_0^\infty L_2\,dI_2 - \int_0^\infty R\,dt = 0 \Rightarrow M I_{1\infty} + L_2 I_{2\infty} - R_2 Q = 0$$

Αλλά μετά από πολύ χρόνο $I_{2\infty} = 0$ και η προηγούμενη εξίσωση δίνει:

$$M I_{1\infty} - R_2 Q = 0 \Rightarrow \boxed{M = \frac{R_2 Q}{I_{1\infty}}} \Rightarrow M = \frac{(300\Omega)(2\times10^{-4}C)}{5.00A} \Rightarrow \underline{\underline{M = 12\,mH}}$$

**10.** Το διπλανό σχήμα δείχνει ένα σύρμα το οποίο είναι λυγισμένο σε μορφή τόξου κύκλου ακτίνας $r = 24.0cm$, με κέντρο στο σημείο O. Ένας ευθύγραμμος αγωγός OP μπορεί να περιστρέφεται ως προς το σημείο O ενώ διατηρεί επαφή με το σύρμα του τόξου στο σημείο $P$. Ένας άλλος ευθύγραμμος αγωγός OQ συμπληρώνει τον αγώγιμο βρόχο. Οι τρεις αγωγοί έχουν εμβαδό διατομής $1.20mm^2$ και ειδική αντίσταση $\rho = 1.70 \times 10^{-8}\Omega m$. Όλη η διάταξη βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 0.150T$ το ο ποίο έχει κατεύθυνση προς το εξωτερικό της σελίδας. Ο αγωγός OP αρχίζει να περιστρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση $\alpha = 12rad/s^2$ ξεκινώντας από την κατάσταση της ηρεμίας από την θέση $\theta = 0$. Βρείτε συναρτήσει της γωνίας $\theta$ (σε ακτίνια) (α) την αντίσταση του βρόχου, (β) Την μαγνητική ροή που περνά το βρόχο, (γ) τη γωνία $\theta$ για την οποία το επαγόμενο ρεύμα είναι μέγιστο και (δ) τη τιμή του μέγιστου ρεύματος.




(α) Ο βρόχος POQ έχει συνολικό μήκος (r: ακτίνα).

$$\ell = OP + PQ + OQ = 2r + r\theta = r(\theta+2)$$

Η ολική αντίσταση θα είναι επομένως:

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{\rho r(\theta+2)}{A} = \frac{(1.7\cdot10^{-8}\Omega m)(0.24m)(\theta+2)}{1.2\cdot10^{-6}m^2} = (3.4\cdot10^{-3})(\theta+2)\Omega$$

(β) Το εμβαδό του βρόχου είναι: $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ και επομένως η μαγνητική ροή που περνά από τον βρόχο θα είναι: $\Phi_m = BA = \frac{1}{2}Br^2\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{1}{2}(0.150T)(0.240m^2)\theta \Rightarrow \Phi_m = (4.32\cdot10^{-3}\theta) \text{ Webber}$$

(γ) Το επαγόμενο ρεύμα, βρίσκεται από την επαγόμενη τάση $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$ διαιρώντας με την αντίσταση R. Άρα θα έχουμε:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Br^2\theta\right) = -\frac{B}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2}Br^2\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{Br^2\omega}{2\cdot R} = \frac{Br^2\omega}{2(3.4\cdot10^{-3})(\theta+2)\Omega} = \frac{Br^2(\alpha t)}{(2\cdot3.4\cdot10^{-3})(2+\alpha t^2/2)}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{Br^2\alpha(4-\alpha t^2)}{(3.4\cdot 10^{-3})(4+\alpha t^2)^2}$$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι το επαγόμενο ρεύμα παρουσιάζει μέγιστο όταν

$$\frac{dI}{dt}=0 \Rightarrow 4-\alpha t^2 = 0 \Rightarrow t=\sqrt{4/\alpha}$$

Την χρονική στιγμή αυτή η ράβδος έχει γωνιακή μετατόπιση: $\Theta = \frac{1}{2}\alpha t_i^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Theta \simeq \frac{1}{2}\alpha\, 4/\alpha \Rightarrow \Theta = 2\ \mathrm{rad}$$

(δ) Το ρεύμα την χρονική στιγμή $\sqrt{4/\alpha}$ έχει μέγιστη τιμή ίση με $I = \frac{Br^2(\alpha\sqrt{4/\alpha})}{(2\cdot 3.4\cdot 10^{-3}\cdot)(2+2\ldots}$

$$I_{max} = \frac{Br^2\sqrt{4\alpha}}{8\cdot 3.4\cdot 10^{-3}} \Rightarrow I_{max} = \frac{(0.15\,T)(0.24\,m)^2\sqrt{4\cdot(12\,r/s^2)}}{8\cdot 3.4\cdot 10^{-3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{max} = 2.2\,A$$