ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΦΥΣ 114

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ Ι

<u>ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ Ι</u>

Το εργαστήριο ΦΥΣΙΚΗΣ Ι αποτελεί το πρώτο μέρος μίας ενότητας από τρία μαθήματα που αποβλέπει να καλύψει εργαστηριακές ασκήσεις στη Γενική Φυσική.

Η ύλη που καλύπτεται μέσα από τις πειραματικές ασκήσεις αποσκοπεί αφ' ενός στο να εμπεδώσει και να συμπληρώσει τις διαλέξεις του μαθήματος της Γενικής Φυσικής, και αφ' ετέρου στο να αποδώσει την αναγκαία πειραματική και πρακτική γνώση που επιβάλλεται σε οποιοδήποτε μάθημα Φυσικής.

Οι οδηγίες που δίνονται στους φοιτητές για τη διεξαγωγή των ασκήσεων είναι σκόπιμα περιορισμένες. Αναμένεται έτσι να αναπτύξουν δική τους πρωτοβουλία, κάτι το οποίο θα τους εφοδιάσει με γερά θεμέλια για μία ανεξάρτητη και αυτοδύναμη ερευνητική παρουσία στο μέλλον.

<u>Σκοπός του Εργαστηρίου</u>

► Η Φυσική είναι κατ' εξοχή πειραματική επιστήμη.

Οποιαδήποτε θεωρία,

όσο λογικά και αν φαίνονται τα αξιώματα πάνω στο οποία θεμελιώνεται

όσο πειστικές και αν είναι οι υποθέσεις της,

όσο κομψές και συνεπείς και αν είναι οι αποδείξεις των θεωρημάτων της,

δεν παύει από το να είναι θεωρία, η οποία μπορεί να μη βρίσκει καμία απολύτως εφαρμογή στην περιγραφή των φυσικών φαινομένων.

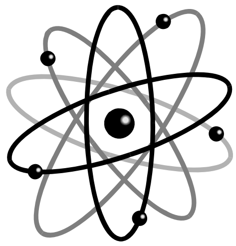
Η επιτυχία μιας φυσικής θεωρίας στηρίζεται αποκλειστικά στη δυνατότητα της να εξηγήσει κάποια φαινόμενα και να προβλέψει κάποια άλλα που βρίσκονται υπό μελέτη.

Σκοπός των Εργαστηρίων Φυσικής είναι να διδάξουν τη χρήση των πειραματικών οργάνων και διατάξεων καθώς και των μεθόδων και τεχνικών που χρησιμοποιούνται για τη διερεύνηση ενός φυσικού φαινομένου και την ανάλυση των νόμων που το διέπουν.

Στο εργαστήριο δημιουργούνται οι προϋποθέσεις που επιτρέπουν την εξέταση βασικών εννοιών και νόμων της Φυσικής κάτω από ελεγχόμενες συνθήκες.

<u>ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ</u>

<u>1.0 ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ   ΚΑΙ   ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ</u>



<u>1.1 Εισαγωγή</u>

Η φυσική είναι μια κατ' εξοχήν πειραματική επιστήμη.

► *Ο φυσικός χρησιμοποιεί μαθηματικά μοντέλα, τα οποία δεν είναι απλώς αφηρημένες έννοιες αλλά πρέπει να περιγράφουν τον πραγματικό (φυσικό) κόσμο. Ο τελευταίος γίνεται κατανοητός (προσιτός στον ανθρώπινο νου)μέσα από πειραματικές παρατηρήσεις των διαφόρων φυσικών φαινομένων που λαμβάνουν χώρα μέσα σ' αυτόν.*

<u>**Όλες οι φυσικές θεωρίες**</u> όχι μόνο εμπνέονται από **πειραματικές παρατηρήσεις** στη φύση, αλλά για να επιζήσουν πρέπει να συμφωνούν τελικά με τις παρατηρήσεις αυτές. Η αλληλεπίδραση μεταξύ θεωρίας και πειράματος αποτελεί την ουσία της σύγχρονης φυσικής επιστήμης.

► Η παρατήρηση ενός φυσικού φαινομένου πραγματοποιείται με επιστημονικά όργανα με τα οποία ο ερευνητής μετρά και προσδιορίζει τις τιμές των μεγεθών ή παραμέτρων που καθορίζουν το φαινόμενο.

Η μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους μπορεί να γίνει κατ' ευθείαν (άμεση μέτρηση) ή δευτερογενώς, σαν αποτέλεσμα υπολογισμού από άλλες μετρήσεις (έμμεση μέτρηση).

► Επειδή τα όργανα και η μεθοδολογία που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της τιμής ενός φυσικού μεγέθους, καθώς επίσης και ο παρατηρητής, <u>**δεν μπορεί ποτέ να είναι τέλεια**</u> (perfect), το αποτέλεσμα κάθε μέτρησης συνοδεύεται πάντοτε από μια <u>**αβεβαιότητα**</u> (uncertainty) που ονομάζεται <u>***πειραματικό σφάλμα***</u> (experimental error)της μέτρησης.

► Με καλύτερα πειραματικά όργανα και μεγαλύτερη επιμέλεια κατά τη διεξαγωγή των πειραμάτων τα σφάλματα των μετρήσεων μπορούν να περιοριστούν σε μεγάλο βαθμό, αλλά σε καμία περίπτωση δεν μπορούν να εξαλειφθούν τελείως.

Όμως, πάντα μπορεί κανείς να εκτιμήσει (estimate) τόσο το μέγεθος των σφαλμάτων όσο και τον βαθμό αξιοπιστίας των μετρήσεων.

Η <u>*μέθοδος και οι κανόνες ταξινόμησης*</u> και επεξεργασίας των σφαλμάτων τα οποία εισάγονται στις μετρήσεις ενός πειράματος περιέχονται στη Θεωρία Σφαλμάτων.

1.2 Θεωρία Σφαλμάτων

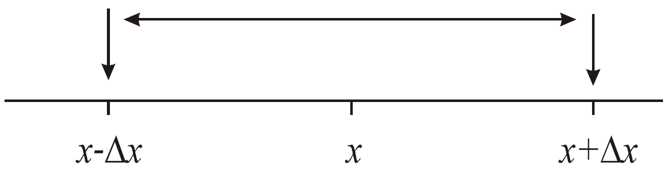
Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι το αποτέλεσμα μίας μέτρησης x ενός φυσικού μεγέθους συνοδεύεται πάντα από ένα πειραματικό σφάλμα Δx .

Συνήθως το αποτέλεσμα γράφεται:

$$x \pm \Delta x$$

και μπορεί να του δοθεί η ερμηνεία ότι η πραγματική τιμή του μεγέθους κυμαίνεται μεταξύ $x - \Delta x$ και $x + \Delta x$.

Όμως θα δούμε πιο κάτω, στην πραγματικότητα μπορεί να δοθεί μόνο η πιθανότητα με την οποία η πραγματική τιμή του x ευρίσκεται μέσα στο διάστημα $x - \Delta x$ και $x + \Delta x$.



► Πέρα από το πειραματικό σφάλμα, το αποτέλεσμα μιας μέτρησης πρέπει να συνοδεύεται από την ***κατάλληλη φυσική μονάδα μέτρησης*** , π.χ. kg, m, s και στις περιπτώσεις που πρόκειται για ανυσματικό μέγεθος (π.χ. ταχύτητα, ηλεκτρικό πεδίο) θα πρέπει να καθορίζεται και η φορά.

Για παράδειγμα, έστω ότι η μέτρηση του μήκους μιας ράβδου έδωσε το αποτέλεσμα 10 cm, με συνολικό πειραματικό σφάλμα μέτρησης 0.2 cm. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να γραφεί συνοπτικά ως εξής:

$$L = (10.0 \pm 0.2)\ \text{cm}$$

1.3 Είδη Σφαλμάτων

Τα σφάλματα χωρίζονται συνήθως στις παρακάτω τρεις κατηγορίες:

1. **Ακούσια ή Απαράδεκτα Σφάλματα** *(illegitimate errors)*
2. **Συστηματικά Σφάλματα** *(systematic errors)*
3. **Τυχαία ή Στατιστικά Σφάλματα** *(random or statistical errors)*

1.3.1 Ακούσια ή Απαράδεκτα Σφάλματα

Τα σφάλματα αυτά οφείλονται σε:

1. *έλλειψη* προσοχής εκ μέρους του παρατηρητή,
2. λανθασμένη ανάγνωση ή και καταγραφή των μετρήσεων
3. λάθη κατά τη διεξαγωγή αριθμητικών πράξεων
4. καθώς επίσης και σε ανώμαλες συνθήκες του περιβάλλοντος (π.χ. απότομη πτώση στο δίκτυο παροχής ηλεκτρισμού).

Ευτυχώς τέτοια σφάλματα οδηγούν συνήθως σε αποτελέσματα που απέχουν πολύ από την αναμενόμενη τιμή του μεγέθους που μετράται και η παρουσία τους μπορεί εύκολα να εντοπισθεί. Σ' αυτή την περίπτωση συνιστάται η ***προσεκτική επανάληψη της συγκεκριμένης μέτρησης***.
Στην περίπτωση που αυτό δεν είναι δυνατό, θα μπορούσε κανείς εκ των υστέρων να διορθώσει το λάθος της μέτρησης εάν ανακάλυπτε την αιτία που το δημιούργησε (π.χ. λάθος υπολογισμός σε μια αριθμητική πράξη).

► Εάν τίποτε απ' αυτά δεν είναι δυνατό τότε θα πρέπει το συγκεκριμένο σημείο (τιμή) της ***μέτρησης να απορριφθεί*** από το σύνολο των μετρήσεων που έγιναν.

1.3.2 Συστηματικά Σφάλματα

Κύριο χαρακτηριστικό των συστηματικών σφαλμάτων είναι το γεγονός ότι "αλλοιώνουν" το αποτέλεσμα της μέτρησης της ίδιας ποσότητας κατά την ίδια φορά (προς τα πάνω ή προς τα κάτω), όσες φορές και αν επαναληφθεί η μέτρηση κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

Τα συστηματικά σφάλματα μπορούν να υποδιαιρεθούν στις παρακάτω υποκατηγορίες ανάλογα με την προέλευσή τους.

1.3.2.1 Σφάλματα των οργάνων μετρήσεως

► Περιλαμβάνουν όλο το φάσμα σφαλμάτων που οφείλονται στις ατέλειες των οργάνων παρατήρησης,
► στην κακή λειτουργία ή
► λανθασμένη βαθμονόμησή τους (calibration).

Κλασικό παράδειγμα αποτελεί η μετάθεση του μηδενικού σημείου σ' ένα όργανο μετρήσεως ή η περίπτωση ενός ζυγού με ελαττωματικά (φθαρμένα) σταθμά.

1.3.2.2 Σφάλματα λόγω περιβάλλοντος

Οι εξωτερικές συνθήκες (περιβάλλον) επιδρούν ποικιλόμορφα στην εκτέλεση ενός πειράματος και έχουν την τάση να "παρασύρουν" προς μία φορά το αποτέλεσμα της μέτρησης.

Το αποτέλεσμα είναι να έχουμε είτε υπερεκτίμηση (overestimation) είτε υποεκτίμηση (underestimation) της πραγματικής τιμής του μετρούμενου μεγέθους.

► Το μαγνητικό πεδίο της γης, η θερμοκρασία, η υγρασία και η βαρομετρική πίεση είναι μερικά μόνο παραδείγματα εξωτερικών παραγόντων που μπορούν να επιδράσουν (αλλοιώσουν) την μετρούμενη τιμή ενός φυσικού μεγέθους.

Ένα προφανές παράδειγμα της κατηγορίας αυτής αποτελεί η μέτρηση μήκους σε θερμοκρασία περιβάλλοντος π.χ. 40 ^{0}C μ` ένα μεταλλικό χάρακα ο οποίος έχει βαθμονομηθεί σε θερμοκρασία 25 ^{0}C.

1.3.2.3 Σφάλματα παρατήρησης

Η κατηγορία αυτή περιλαμβάνει όλο το φάσμα πειραματικών σφαλμάτων που οφείλονται στον ανθρώπινο παράγοντα. Επειδή η εκτέλεση και η ανάλυση ενός πειράματος είναι πάντα συνδεδεμένη με την άμεση ή έμμεση συμμετοχή του πειραματιστή, η ***ικανότητα*** και κυρίως η ***εμπειρία*** του τελευταίου αντανακλώνται στο μέγεθος (μικρό ή μεγάλο) των συστηματικών σφαλμάτων που πάντα υπεισέρχονται σε μια μέτρηση.

► Σαν προφανές παράδειγμα αναφέρουμε την ανάγνωση της ένδειξης ενός αναλογικού οργάνου (π.χ. ενός υδραργυρικού θερμομέτρου, ενός αναλογικού πολύμετρου κλπ.).

► Προφανώς, ορισμένα είδη μετρήσεων είναι περισσότερο ευαίσθητα στον ανθρώπινο παράγοντα από άλλα. Η έκταση (μέγεθος) των συστηματικών αυτών σφαλμάτων μπορεί να εκτιμηθεί αν διάφοροι παρατηρητές επαναλάβουν ανεξάρτητα την όλη διαδικασία της μέτρησης και συγκριθούν τα αποτελέσματα.

<u>1.3.2.4 Σφάλματα Θεωρητικής φύσεως</u>

Τα σφάλματα αυτά οφείλονται στη χρήση προσεγγιστικών (approximate) σχέσεων για διάφορους υπολογισμούς. Τυπικό παράδειγμα αυτής της περίπτωσης είναι ο υπολογισμός της περιόδου του εκκρεμούς από την προσεγγιστική σχέση:

$$T = 2\pi \sqrt{\left(\frac{L}{g}\right)}$$

αντί της ακριβούς σχέσης,

$$T = 2\pi \sqrt{\left(\frac{L}{g}\right)} \; [1 + \frac{1}{4}\sin^2(\theta/2) + \frac{9}{64}\sin^4(\theta/2) + ...]$$

Γενικά, τα συστηματικά σφάλματα δεν είναι πάντα εύκολο να αναγνωριστούν στα αποτελέσματα μιας μέτρησης και η εκτίμησή τους απαιτεί εργαστηριακή πείρα. Η στατιστική ανάλυση, λόγω της φύσης τους, πολύ λίγο βοηθά στην αποκατάστασή τους.

Κύριο χαρακτηριστικό της γενικής αυτής κατηγορίας σφαλμάτων είναι ότι το αποτέλεσμα της μέτρησης μετατοπίζεται συνήθως <u>συστηματικά</u> προς υψηλότερες ή χαμηλότερες τιμές. Στις περιπτώσεις όπου η πηγή του σφάλματος είναι γνωστή, το σφάλμα μπορεί να αποκατασταθεί με κατάλληλη διόρθωση του αποτελέσματος. Σε άλλες περιπτώσεις, το συστηματικό σφάλμα μιας μέτρησης μπορεί να εκτιμηθεί και να συμπεριληφθεί με κατάλληλη αύξηση του όλου πειραματικού σφάλματος της μέτρησης.

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι η καθολική εξάλειψη των <u>συστηματικών σφαλμάτων που εμφανίζονται σε μια μέτρηση</u> είναι

► **<u>αδύνατη</u>**

και ότι η <u>ελαχιστοποίησή τους εξαρτάται</u> από

- ► την ικανότητα και εμπειρία του πειραματιστή,
- ► τη δυνατότητα αντικατάστασης των οργάνων ή της μεθόδου με άλλα πιο σύγχρονα μέσα και
- ► κυρίως από την τεχνολογική πρόοδο.

Τελικά τα <u>συστηματικά σφάλματα</u> επηρεάζουν την **<u>πιστότητα</u>** (accuracy) ενός πειράματος, η οποία είναι μέτρο του πόσο κοντά στην πραγματική (αληθινή) τιμή (true value) ευρίσκεται το αποτέλεσμα μιας μέτρησης.

1.3.3 Τυχαία η Στατιστικά Σφάλματα

► Τυχαία ή Στατιστικά Σφάλματα είναι εκείνα που παραμένουν ακόμη και όταν όλα τα άλλα σφάλματα (απαράδεκτα και συστηματικά) έχουν αποφευχθεί ή έχουν ληφθεί υπόψη.

Η ύπαρξη αυτών των σφαλμάτων οφείλεται σε συνδυασμό διαφόρων αιτιών (π.χ. ίδιων με εκείνων που αναφέραμε πιο πάνω), αλλά ο τρόπος με τον οποίο επιδρούν στο αποτέλεσμα μιας μέτρησης είναι άγνωστος (τυχαίος).

► Αν τα πολυάριθμα αίτια που επηρεάζουν τη μέτρηση δρουν κατά τρόπο ανεξάρτητο το ένα από το άλλο, κάθε επί μέρους σφάλμα αλλοιώνει ομοιόμορφα (κατά μία θετική ή αρνητική τιμή) το αποτέλεσμα της μέτρησης.

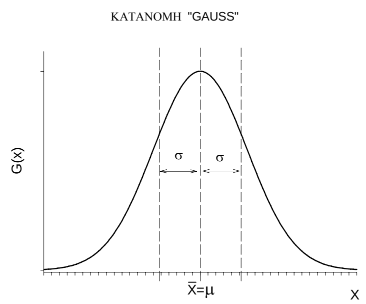
Στις περισσότερες επομένως περιπτώσεις προβλέπεται μια *αλληλοεξουδετέρωση των επιμέρους σφαλμάτων ούτως ώστε το ολικό τυχαίο σφάλμα να είναι μικρό*.

► Η πειραματική εμπειρία δείχνει ότι τέτοια σφάλματα **υπάρχουν σε κάθε μέτρηση**, με αποτέλεσμα τόσο η αληθινή τιμή όσο και το ακριβές σφάλμα μιας μέτρησης να μην μπορούν να προσδιοριστούν.

Πιο συγκεκριμένα, οι τιμές που προκύπτουν από έναν αριθμό όμοιων μετρήσεων δεν ταυτίζονται αλλά συσσωρεύονται γύρω από μια κεντρική τιμή με μια χαρακτηριστική κατανομή που έχει την μορφή "καμπάνας" (bell shaped) και ονομάζεται **κανονική κατανομή** (normal distribution) ή **κατανομή Gauss** (Gauss distribution).

Η κατανομή αυτή αντανακλά την τυχαία (στατιστική) προέλευση των σφαλμάτων που περιγράψαμε και παρέχει τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε την τιμή εκτίμησης του μεγέθους x που μετράμε και το σφάλμα Δx.

Η ερμηνεία της κατανομής Gauss (Σχήμα 1) είναι ότι από ένα σύνολο μετρήσεων του ιδίου μεγέθους x, η **πιο πιθανή τιμή** είναι η μέση τιμή (mean value) $x = \mu$ ενώ παραπλήσιες τιμές έχουν, κάπως μικρότερη μεν, αλλά σημαντική πιθανότητα.



Σχήμα 1: Κατανομή Gauss.

Τελικά, παραμένει πάντα μια έστω και μικρή πιθανότητα η σωστή τιμή να ευρίσκεται πολύ μακριά από την πιο πιθανή τιμή μ.

►Το εύρος ή "άνοιγμα" της κατανομής ονομάζεται ***τυπική απόκλιση*** (standard deviation) σ και χαρακτηρίζει το ***μέτρο διασποράς*** (dispersion) των τιμών του x.

►Αποδεικνύεται ότι το εμβαδόν της καμπύλης μεταξύ $x-\sigma$ και $x+\sigma$ ισούται με το 68.3% του ολικού εμβαδού της επιφάνειας (άπο $x=-\infty$ εώς $x=+\infty$).

Συνήθως το στατιστικό σφάλμα ενός μεγέθους x λαμβάνεται ίσο με την τυπική απόκλιση

$$\Delta x = \sigma\,,$$

και συνεπώς ο συμβολισμός $x \pm \Delta x$ ($x \pm \sigma$) υποδηλώνει ότι αληθινή τιμή του μεγέθους x ευρίσκεται με πιθανότητα 68.3% μεταξύ του διαστήματος $x-\sigma$ και $x+\sigma$. Σε ορισμένες περιπτώσεις το στατιστικό σφάλμα μπορεί να αυξηθεί (συνήθως κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του σ), αυξάνοντας σημαντικά την ανωτέρω πιθανότητα, π.χ.

► εάν θέσουμε $\Delta x = 2\sigma$ τότε,
η πραγματική τιμή του x ευρίσκεται μεταξύ $x - 2\sigma$ και $x + 2\sigma$ με πιθανότητα 95.4%,

► ενώ για $\Delta x = 3\sigma$ η αντίστοιχη πιθανότητα είναι 99.7%.

Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι τόσο οι πιο πάνω συλλογισμοί όσο και οι κανόνες υπολογισμού σφαλμάτων που ακολουθούν αναφέρονται αποκλειστικά σε σφάλματα η φύση των οποίων είναι τυχαία (στατιστική).

Τα στατιστικά σφάλματα επηρεάζουν την **ακρίβεια** (precision) ενός πειράματος, δηλ. το μέτρο που υποδηλώνει κατά πόσο οι διαδοχικές μετρήσεις του ίδιου μεγέθους "συμπίπτουν" μεταξύ τους - επαναληπτικότητα (reproducibility).

Με άλλα λόγια η ακρίβεια αναφέρεται στη **διακριτική ικανότητα** (resolution) της μέτρησης, δηλαδή στο πόσο στενά είναι τα όρια μέσα στα οποία μπορεί να προσδιοριστεί η τιμή του μεγέθους που μετράται.
► Αξίζει να τονίσουμε ότι μία μέτρηση μπορεί να είναι ακριβής αλλά η τιμή που προσδιορίζει να βρίσκεται μακριά από την πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους (μέτρηση μικρής ή χαμηλής πιστότητας).

Αντίθετα, μία μέτρηση μπορεί να δίνει αποτέλεσμα κοντά στην πραγματική τιμή, αλλά με πενιχρή ακρίβεια (low precision). Τέλος , ο όρος διακριτική ικανότητα χρησιμοποιείται κύρια για την αξιολόγηση οργάνων μετρήσεως, και δείχνει τη μεγίστη ακρίβεια με την οποία μπορεί να πραγματοποιηθεί η μέτρηση.

1.3.3.1 Μέση Τιμή και Τυπική Απόκλιση
(Mean value and standard deviation)

► Η στατιστική ανάλυση μας παρέχει τη δυνατότητα υπολογισμού της πιο πιθανής (καλύτερης) τιμής (best value) και του αντίστοιχου (στατιστικού) σφάλματος ενός μετρούμενου μεγέθους x από ένα σύνολο επαναληπτικών μετρήσεων (repeated measurements) x_i (i=1, 2, ...N). Η πιο πιθανή τιμή του μεγέθους x δίνεται από την αριθμητική μέση τιμή $\bar{x}$ των μετρήσεων.

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad (1)$$

Η τυπική απόκλιση, δηλ. το στατιστικό σφάλμα κάθε μέτρησης x_i δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{x} - x_i\right)^2} \qquad (2)$$

Η σχέση αυτή χρησιμοποιείται για σχετικά μικρές τιμές του N (συνήθως για N ≤ 30).

► Για μεγαλύτερες τιμές (N > 30) ο όρος N-1 στη σχέση (2) πρέπει να αντικατασταθεί με το N.

Το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής (standard error of the mean) ορίζεται ως εξής:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}-x_i)^2} \tag{3}$$

Συνοψίζοντας, κάθε μία από τις μετρήσεις x_i έχει σφάλμα $\pm\Delta x = \pm\sigma$ που δίνεται από τη σχέση (2) το σύνολο δε των μετρήσεων x_i δίνουν ως τελικό αποτέλεσμα το:

$$\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}} \tag{4}$$

όπου το x δίνεται από την σχέση (1) και το $\sigma_{\bar{x}}$ από την σχέση (3).

1.3.3.2 Παράδειγμα

Η μέτρηση του μήκους μιας ράβδου έδωσε τις εξής τιμές: 5.5, 3.6, 2.5, και 5.2 cm. Να προσδιοριστεί το τελικό αποτέλεσμα της μέτρησης.

Απάντηση:
Η καλύτερη τιμή των μετρήσεων δίνεται από τη σχέση (1)

$$\bar{x} = \frac{5.5+3.6+2.5+5.2}{4}\,\text{cm} = 4.2\,\text{cm}$$

Το σφάλμα (τυπική απόκλιση) κάθε μέτρησης είναι:

$$\sigma^2 = \frac{(5.5-4.2)^2+(3.6-4.2)^2+(2.5-4.2)^2+(5.2-4.2)^2}{4-1}$$

$$= \frac{(1.3)^2+(-0.6)^2+(-1.7)^2+(1)^2}{3} = 1.98 \Rightarrow \sigma \approx 1.4cm$$

Το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής υπολογίζεται από την σχέση (3) $\Rightarrow \quad \sigma_{\bar{x}} \approx 0.7$ cm

Συνεπώς το τελικό αποτέλεσμα του μήκους της ράβδου είναι: $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}} = 4.2 \pm 0.7\,\text{cm}$.

1.3.3.3 Απόλυτο Και Σχετικό Σφάλμα
(*Absolute and relative error)*

Το τυπικό σφάλμα μιας μέτρησης ονομάζεται και απόλυτο σφάλμα. Εκφράζεται στις ίδιες μονάδες μετρήσεως που χρησιμοποιούνται για το μετρούμενο μέγεθος. Ο λόγος $\sigma_{\sigma\chi} = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}} \times 100\%$, ονομάζεται σχετικό σφάλμα, είναι καθαρός (αδιάστατος) αριθμός και εκφράζεται (συνήθως) επί τοις εκατό. Στο πιο πάνω παράδειγμα το απόλυτο σφάλμα είναι $\sigma_{\bar{x}} = 0.7\,\text{cm}$ και το αντίστοιχο σχετικό σφάλμα $\sigma_{\sigma\chi} = \frac{0.7}{4.2} \times 100 = 16.5\%$.

1.4 Σημαντικά Ψηφία
(Significant Figures)

► Γενικά, σε αριθμούς που προκύπτουν από μετρήσεις, όλα τα γνωστά (βέβαια) ψηφία και ένα ακόμα ψηφίο που είναι αβέβαιο (κατ' εκτίμηση) καθορίζουν τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων του αριθμού.
Στον **υπολογισμό των σημαντικών ψηφίων**
►παίρνουμε τη *σειρά όλων των ψηφίων του αριθμού χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη την υποδιαστολή*.

Σε κλασματικούς αριθμούς ► *δεν υπολογίζουμε το μηδέν πριν υποδιαστολή*.

Για παράδειγμα,
οι αριθμοί: 15, 0.12, 0.0067, 2.5X10^4 έχουν όλοι δύο σημαντικά ψηφία,
οι αριθμοί: 11.2, 0.767, 0.00340 , 4.20X10^4 έχουν τρία σημαντικά ψηφία.
οι αριθμοί: 42.21, 0.7670, 0.001401 , 4.200X10^4 έχουν τέσσερα σημαντικά ψηφία.

Ο αριθμός των ψηφίων ενός αριθμού είναι συνήθως ενδεικτικός της ►αβεβαιότητος της τιμής του μετρούμενου μεγέθους.

Για παράδειγμα, δύο ανεξάρτητες μετρήσεις του μήκους μιας ράβδου έδωσαν τις εξής τιμές $L_1 = 32\ \text{mm}$ και $L_2 = 32.1\ \text{mm}$. Η πρώτη μέτρηση (δύο σημαντικά ψηφία) μας φανερώνει ότι η ακρίβεια του αποτελέσματος είναι της τάξης του 1 mm, ενώ η δεύτερη (τρία σημαντικά ψηφία) μας δίνει το αποτέλεσμα με ακρίβεια 0.1 mm.

Αν υποθέσουμε αντίθετα ότι και οι δύο μετρήσεις έγιναν με το ίδιο όργανο διακριτικής ικανότητας $\Delta L = \pm 0.1\ \text{mm}$ το κάθε αποτέλεσμα θεωρείται σωστό αν γραφτεί ως:

$$L_1 = (32.0 \pm 0.1)\ \text{mm} \ \text{ και } \ L_2 = (32.1 \pm 0.1)\text{mm}$$

Ο αριθμός $32.1\,\text{mm}$ έχει τρία σημαντικά ψηφία (όπως και ο 32.0). Το προς τα δεξιά τελευταίο ψηφίο είναι το πιο αβέβαιο και η εμπιστοσύνη μας σε καθένα από τα ψηφία αυξάνει καθώς πάμε σταδιακά προς τ' αριστερά. Αν θέλουμε να δώσουμε το αποτέλεσμα σε άλλες μονάδες μήκους, θα γράψουμε:

► $L = 3.21\ \text{cm}$,ή $L = 0.0321\ \text{m}$, ή $L = 32.1 \times 10^{+3}\ \mu\text{m}$

Είναι **λάθος** να γράφουμε ένα πειραματικό αποτέλεσμα με αριθμό σημαντικών ψηφίων μεγαλύτερο απ' ότι επιτρέπει η **ακρίβεια της μέτρησης**.

Τα πειραματικά αποτελέσματα: $L_1 = (32.10 \pm 0.1)\text{mm}$ και $L_2 = (32.24 \pm 0.1)\text{mm}$ είναι ασυμβίβαστα (inconsistent) γραμμένα, και πρέπει, για να είναι σωστά, να στρογγυλευτούν (rounded) ως εξής:

► $L_1 = (32.1 \pm 0.1)\text{mm}$ και $L_2 = (32.2 \pm 0.1)\text{mm}$

Γενικά όταν κάνουμε αριθμητικές πράξεις με αριθμούς που προέρχονται από μετρήσεις ισχύουν τα εξής:

1.4.1 Πρόσθεση ή αφαίρεση

Όταν προσθέτουμε ή αφαιρούμε αριθμούς έχει σημασία η θέση της υποδιαστολής.
π.χ 114.43 + 0.3579 = 114.7879
Προφανώς το τρίτο και τέταρτο δεκαδικό του αποτελέσματος δεν είναι σημαντικά. Το αποτέλεσμα, ως εκ τούτου, πρέπει να στρογγυλευτεί ως 114.79 για να είναι σωστό.

1.4.2 Πολλαπλασιασμό ή διαίρεση

Τα σημαντικά ψηφία του αποτελέσματος δεν είναι περισσότερα από εκείνα που έχει ο παράγοντας με τον μικρότερο αριθμό σημαντικών ψηφίων (*το τελικό αποτέλεσμα έχει τόσα σημαντικά ψηφία όσα έχει ο λιγότερο ακριβής αριθμός).*

1.4.3 Παραδείγματα

α) 79.9 x 22 = 1757.8 = 1.8 x10^3

β) 7.63 x 9.15 x 4.58 = 319.9599 = 320

γ) 26.1 / 9.9 = 2.63636 = 2.6

Όταν στρογγυλεύουμε αριθμούς πρέπει να γνωρίζουμε τα εξής:
1. Αυξάνουμε κατά μια μονάδα το τελευταίο ψηφίο που κρατάμε, αν το επόμενο ψηφίο είναι μεγαλύτερο του 5.
2. Αφήνουμε το τελευταίο ψηφίο αμετάβλητο, αν το επόμενο είναι μικρότερο του 5.
3. Εάν το ψηφίο το οποίο αρχίζουμε να παραλείπουμε είναι ακριβώς 5 τότε μπορεί να παραμείνει.

1.4.4 Παραδείγματα
Να γίνουν οι πράξεις και να στρογγυλευτεί το αποτέλεσμα:

α) 21.1 x 0.029 x 83.2 = 50.91008 = 51

β) 99 x 999 = 98901 = 9.9 x 10^4

γ) (291 x 272) / 0.086 = 920372 = 9.2 x 10^5

δ) 42.3 + 0.35 = 42.65, 23.15 - 10.7 = 12.45

1.5 Μεταδοση Σφαλμάτων
(Propagation of Errors)

Συνήθως ο πειραματιστής έχει να προσδιορίσει μία ποσότητα η οποία είναι συνάρτηση μίας ή περισσοτέρων τυχαίων μεταβλητών (random variables). Σε τέτοιες περιπτώσεις είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε τον τρόπο υπολογισμού της σύνθετης ποσότητας και του αντίστοιχου σφάλματος της σε σχέση με τα σφάλματα της κάθε τυχαίας μεταβλητής.

► Η διαδικασία αυτή είναι γενικά γνωστή σαν μετάδοση πειραματικών σφαλμάτων, και εδώ περιγράφεται συνοπτικά στην πιο γενική μορφή της, χωρίς να αναφερθούμε στις λεπτομέρειες απόδειξης των προτάσεων.

Ας θεωρήσουμε ότι μια φυσική ποσότητα f είναι συνάρτηση των ανεξαρτήτων και τυχαίων μεταβλητών $x_1, x_2, \cdots, x_N$

► οι οποίες έχουν τυπικά σφάλματα $\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_N$

Ζητείται να υπολογιστεί η τιμή f και το τυπικό σφάλμα Δf της ποσότητας αυτής. Η τιμή της ποσότητας f δίνεται προφανώς από την συνάρτηση $f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ όταν οι μεταβλητές $x_1, x_2, \cdots, x_N$ αντικατασταθούν με τις συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές τους:

$$f = f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$$

Το αντίστοιχο τυπικό σφάλμα υπολογίζεται από την σχέση:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \Delta x_i^2}$$

Το τελικό αποτέλεσμα γράφεται πάντα ως $f \pm \Delta f$

1.5.1 Μερικές Παράγωγοι Συνάρτησης

Η ιδέα της μερικής παραγώγου είναι πολύ απλή. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f(x,y) = 2x^3 y^2 + 3x^5 \cos\left(y^2\right)$$

Η μερική παράγωγος της συνάρτησης f ως προς x είναι η συνάρτηση που συμβολίζουμε με $\frac{\partial f}{\partial x}$ και παίρνεται παραγωγίζοντας την f ως προς x διατηρώντας την y σαν μια σταθερή

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6x^2 y^2 + 15x^4 \cos\left(y^2\right)$$

Η μερική παράγωγος της f ως προς y είναι η συνάρτηση $\frac{\partial f}{\partial y}$ και υπολογίζεται παραγωγίζοντας την f ως προς y διατηρώντας την x σταθερή

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4x^3 y - 6x^5 y \sin\left(y^2\right)$$

Η περιγραφή των μερικών παραγώγων με την βοήθεια των ορίων

$$f = f\left(x_1, x_2, \cdots . x_N\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = \lim_{\Delta x_n \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \cdots, x_n + \Delta x_n, \cdots, x_N) - f(x_1, x_2, x_n \cdots, x_N)}{\Delta x_n}$$

1.5.2 Παραδείγματα και Εφαρμογές

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση για το Δf σε μία σειρά εφαρμογών για συναρτήσεις που έχουν πολύ μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον.

1.5.2.1 Παράδειγμα

$f\left(x_1, x_2\right) = \alpha_1 x_1 \pm \alpha_2 x_2$, όπου α_1, α_2 είναι σταθερές

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \Delta x_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \Delta x_2^2}$$

$$= \sqrt{\alpha_1^2 \Delta x_1^2 + \alpha_2^2 \Delta x_2^2}$$

Για $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, έχουμε την ειδική περίπτωση αθροίσματος και διαφοράς δύο μεταβλητών που δίνουν το γνωστό τυπικό σφάλμα $\Delta f^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2$,δηλαδή τα **σφάλματα αθροίζονται τετραγωνικά**.

1.5.2.2 Παράδειγμα

$f(x_1, x_2) = \alpha x_1 x_2$, όπου a είναι μια σταθερά

$$\Delta f = a\sqrt{x_2^2 \Delta x_1^2 + x_1^2 \Delta x_2^2}$$

1.5.2.3 Παράδειγμα

$f(x_1, x_2) = a\, x_1 / x_2$, όπου a είναι μια σταθερά

$$\Delta f = a\sqrt{\frac{1}{x_2^2}\Delta x_1^2 + \frac{x_1^2}{x_2^4}\Delta x_2^2}$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι το σχετικό σφάλμα $\Delta f / f$ στα παραδείγματα 2 και 3 δίνεται από την κοινή σχέση: $\frac{\Delta f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2}$,

δηλαδή, το σχετικό σφάλμα του γινομένου ax_1x_2 και του πηλίκου $a\, x_1/x_2$ ισούται με την τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των σχετικών σφαλμάτων των μεταβλητών x_1 και x_2.

1.5.2.4 Παράδειγμα

$f(x_1) = cx_1^m$, όπου c και m είναι σταθερές

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 = mcx_1^{m-1}\Delta x_1$$

1.5.2.5 Παράδειγμα

$f(x_1) = c\exp(mx_1)$, όπου c και m είναι σταθερές

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 = mc\exp(mx_1)\Delta x_1$$

$$\frac{\Delta f}{f} = m\Delta x_1$$

1.5.2.6 Παράδειγμα

$f(x_1) = c\ln(mx_1)$, όπου το c είναι σταθερά

$$\Delta f = c(\Delta x_1 / x_1)$$

Εδώ πρέπει να τονισθεί ότι τα πιο πάνω ισχύουν μόνο στην περίπτωση όπου οι μεταβλητές x_i είναι αυστηρά ανεξάρτητες, μη συσχετιζόμενες(uncorrelated) μεταξύ τους. Επίσης στην περίπτωση όπου οι μεταβλητές x_i έχουν προσδιοριστεί πειραματικά, από ένα σύνολο μετρήσεων, τότε θα πρέπει να αντικαταστήσουμε τις τιμές τους, x_i με τις αντίστοιχες μέσες τιμές τους, x_i και τα σφάλματα θα αντικατασταθούν από τα σφάλματα των μέσων τιμών $\Delta\bar{x}_i$ (βλ. σχέση 3), δηλ. θα έχουμε:

$$\bar{f} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_N)$$

και

$$\Delta\bar{f} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}_i}\right)^2 \Delta\bar{x}_1^2}$$

1.5.3 Μέγιστο Σφάλμα

Έστω η συνάρτηση $F = F(x_1, x_2, \cdots, x_N)$

$$\Delta F_{\max} = \left|\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F}{\partial x_i}\Delta x_i\right| \le \sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial F}{\partial x_i}\Delta x_i\right|$$

Η ποσότητα ονομάζεται μέγιστο δυνατό σφάλμα της συνάρτησης F. Στην πράξη χρησιμοποιούμε κυρίως το στατιστικό ή τυχαίο σφάλμα μιας μέτρησης F_{st} που ονομάζεται και πιθανό σφάλμα. Στη πιο γενική περίπτωση ένα μετρούμενο μέγεθος x συνοδεύεται πάντα από το στατιστικό σφάλμα Δx_{st} και από το συστηματικό σφάλμα Δx_{sys}. Έτσι μπορούμε να γράψουμε:

Μέγιστο συνολικό σφάλμα της μέτρησης: $\Delta x = \pm(\Delta x_{st} + \Delta x_{sys})$

Πιθανό συνολικό σφάλμα της μέτρησης: $\Delta x = \pm\left[(\Delta x_{st})^2 + (\Delta x_{sys})^2\right]^{1/2}$

1.5.4 Σφάλμα γενική περίπτωση

Έστω η συνάρτηση

$$F = Kg_1^{a_1} g_2^{a_2} \cdots g_N^{a_N}$$

όπου $K, a_1, a_2, \cdots, a_N$ είναι σταθερές και $g_1, g_2, \cdots, g_N$ συναρτήσεις μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών. Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις:

$$\frac{\Delta F}{F} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(a_i \frac{\Delta g_i}{g_i}\right)^2}$$

και

$$\frac{\Delta F_{\max}}{F} = \sum_{i=1}^{N} \left| a_i \frac{\Delta g_i}{g_i} \right|$$

Έστω η συνάρτηση $F = b_1 g_1 + b_2 g_2 + \cdots + b_N g_N$ όπου $b_1, b_2, \cdots, b_N$ είναι σταθερές και $g_1, g_2, \cdots, g_N$ συναρτήσεις μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών. Έχουμε τις πιο κάτω σχέσεις:

$$\Delta F = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (b_i \Delta g_i)^2}$$

$$\Delta F_{\max} = \sum_{i=1}^{N} |b_i \Delta g_i|$$

<u>1.5.4.1 Παράδειγμα</u>

Δίνεται η συνάρτηση: $F = cx^3 v^{-1} z^{1/2}$ όπου c είναι μια σταθερά

$$\frac{\Delta F}{F} = \sqrt{\left(3\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(-1\frac{\Delta v}{v}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{\Delta z}{z}\right)^2}$$

$$= \sqrt{9\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{v}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2}$$

$$\frac{\Delta F_{\max}}{F} = \left|3\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta v}{v}\right| + \left|\frac{1}{2}\frac{\Delta z}{z}\right| = 3\left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta v}{v}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{\Delta z}{z}\right|$$

<u>1.5.4.2 Παράδειγμα</u>

Δίδεται η συνάρτηση: $F = \exp(x)\ln(y)\tan(3z)$, $g_1 = \exp(x)$, $g_2 = \ln(y)$, $g_3 = \tan(3z)$

$$\frac{\Delta F}{F} = \sqrt{\left[\frac{\Delta \exp(x)}{\exp(x)}\right]^2 + \left[\frac{\Delta \ln(y)}{\ln(y)}\right]^2 + \left[\frac{\Delta \tan(3z)}{\tan(3z)}\right]^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + \left[\frac{1}{y}\frac{\Delta y}{\ln(y)}\right]^2 + \left[3\sec^2(3z)\frac{\Delta z}{\tan(3z)}\right]^2}$$

Ανάλογα βρίσκουμε:

$$\frac{\Delta F_{\max}}{F} = |\Delta x| + \left|\frac{1}{y}\frac{\Delta y}{\ln(y)}\right| + 3\sec^2(3z)\left|\frac{\Delta z}{\tan(3z)}\right|$$

1.5.4.3 Παράδειγμα

Δίδεται η συνάρτηση: $F = \ln(x)\left(\tan(y) + \sqrt{\cos(z)}\right)$ Έχουμε: $F = g_1 g_2$ όπου $g_1 = \ln(x)$ και $g_2 = \tan(y) + [\cos(z)]^{1/2}$.

Άρα ,

$$\frac{\Delta F}{F} = \sqrt{\left(\frac{\Delta g_1}{g_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g_2}{g_2}\right)^2}$$

$$\Delta g_1 = \frac{\Delta x}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta g_1}{g_1} = \frac{\Delta x}{x\ln(x)}$$

$\Delta g_2 = \sqrt{(\Delta v_1)^2 + (\Delta v_2)^2}$, $v_1 = \tan(y)$, $v_2 = \sqrt{\cos(z)}$

$\Delta v_1 = \sec^2(y)\Delta y$, $\Delta v_2 = -\frac{1}{2\sqrt{\cos(z)}}\sin(z)\Delta z$

$$\frac{\Delta g_2}{g_2} = \frac{\sqrt{\sec^4(y)\Delta y^2 + \frac{\sin^2(z)}{4\cos(z)}\Delta z^2}}{\tan(y) + \sqrt{\cos(z)}}$$

$$\frac{\Delta F}{F} = \sqrt{\frac{\Delta x^2}{[x\ln(x)]^2} + \frac{\sec^4(y)\Delta y^2 + \frac{\sin^2(z)}{4\cos(z)}\Delta z^2}{\left[\tan(y) + \sqrt{\cos(z)}\right]^2}}$$

Τέλος έστω ότι $F = (g_1 + g_2 + \cdots + g_N)(h_1 + h_2 + \cdots + h_N)$

τότε λαμβάνουμε,

$$\frac{\Delta F}{F} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\Delta g_i)^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} g_i\right)^2} + \frac{\sum_{i=1}^{N}(\Delta h_i)^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} h_i\right)^2}}$$

1.6 Σταθμισμένες μέσες τιμές

Πιο κάτω εξετάζεται η περίπτωση όπου ένα μέγεθος x έχει μετρηθεί από πολλούς παρατηρητές, ή ο ίδιος παρατηρητής κάνει μια σειρά επαναλειμμένων μετρήσεων, (προφανώς κάθε μέτρηση γίνεται μετά από ένα σύνολο παρατηρήσεων) και έχουν βρεθεί οι μέσες τιμές $\bar{x}_i$ και οι αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις $\sigma_{\bar{x}_i}$. Σ' αυτή την περίπτωση από το σύνολο αυτών των μετρήσεων μπορούμε να βρούμε την καλύτερη τιμή του μεγέθους.

Ορίζεται σαν συνάρτηση βάρους W το αντίστροφο του τετραγώνου του σφάλματος $\sigma_{\bar{x}_i}$ κάθε μέτρησης, το οποίο δίνει τη βαρύτητα της μέτρησης αυτής στο τελικό αποτέλεσμα.

$$W = \frac{1}{\sigma_{\bar{\chi}}^{2}}$$

Το καλύτερο τελικό x_b αποτέλεσμα δίδεται από τη σχέση:

$$x_b = \frac{\sum W_i . \bar{x}_i}{\sum W_i} = \frac{\sum \frac{\bar{x}_i}{\sigma_{\bar{x}_i}^{2}}}{\sum \frac{1}{\sigma_{\bar{x}_i}^{2}}} \quad \text{και}$$

$$\sigma_{x_b} = \sqrt{\frac{\sum\left(\frac{\bar{x}_i - x_b}{\sigma_{\bar{x}_i}}\right)^2}{(N-1)\sum W_i}} = \sqrt{\frac{\sum\left(\frac{\bar{x}_i - x_b}{\sigma_{\bar{x}_i}}\right)^2}{(N-1)\sum \frac{1}{\sigma_{\bar{x}_i}^{2}}}}$$

όπου x_b, σ_{x_b} ,η καλύτερη τιμή του x και το αντίστοιχα σφάλμα της,

$\bar{x}_i, \sigma_{\bar{\chi}_i}$,διάφορες μετρήσεις με τα αντίστοιχα σφάλματα τους,

W_i η συνάρτηση βάρους για κάθε $\bar{x}_i$.

N, ο συνολικός αριθμός των $\bar{x}_i$

1.7 Κατανομές (distributions)

Μια κατανομή **n(x)** περιγράφει πόσο συχνά μια τιμή της μεταβλητής x συμβαίνει σ΄ ένα καθορισμένο δείγμα μετρήσεων.

1.7.1 Κατανομή Gauss

(Gauss distribution)

Η πιο χρήσιμη κατανομή για τη στατιστική ανάλυση δεδομένων, με πάρα πολλές εφαρμογές στη φυσική γενικότερα, είναι η κατανομή Gauss ή κανονική κατανομή. Η κατανομή αυτή περιγράφεται από τη σχέση

$$G(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

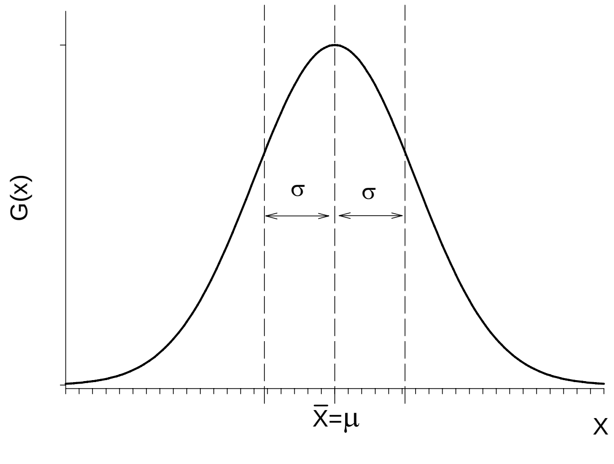
όπου $G(x)dx$ δίνει την πιθανότητα ώστε η τιμή του x να βρίσκεται μεταξύ x και $x+dx$, μ είναι η μέση τιμή και σ η τυπική απόκλιση της κατανομής. Πρόκειται για μία συνεχή κατανομή στο διάστημα $-\infty \le x \le +\infty$ η οποία είναι συμμετρική γύρω από το μ. Για $x=\mu$ η κατανομή λαμβάνει τη μέγιστη τιμή $1/\sqrt{2\pi}\sigma$. Ο σταθερός αυτός παράγοντας εξασφαλίζει τη σωστή κανονικοποίηση της κατανομής μια και εύκολα μπορεί να δείξει κανείς ότι ισχύει η σχέση:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)dx = 1$$

Γενικά, η πιθανότητα το x να βρίσκεται μεταξύ των ορίων x_1 και x_2, $P_G(x_1 \le x \le x_2)$, δίνεται από τη σχέση:

$$+P_G(x_1 \le x \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} G(x)dx$$

Αν και η τυπική απόκλιση **σ** ορίζει πλήρως την έκταση της κατανομής, συνήθως χρησιμοποιείται μια εναλλακτική παράμετρος η οποία έχει μεγάλη σπουδαιότητα στις μετρήσεις ενεργειακών φασμάτων διαφόρων σωματιδίων. Η παράμετρος αυτή ορίζεται σαν το **πλήρες εύρος στο μέσο του μεγίστου (Full Width at Half Maximum, FWHM)** και συνήθως συμβολίζεται με **Γ**. Μεταξύ Γ και σ υπάρχει η σχέση Γ=2√2ln2σ≈2.35σ που βγαίνει εύκολα από τον ορισμό του Γ, δηλ. G(μ ± Γ/2)=1/2 G(μ)



1.7.2 Κατανομή Poisson

Στην περίπτωση όπου παρατηρούμε γεγονότα των οποίων η φύση είναι στατιστική (τυχαία), όπως στο πιο πάνω παράδειγμα με το ενεργειακό φάσμα διαφόρων σωματιδίων, τότε η πιθανότητα εμφάνισης των γεγονότων υπακούει στην κατανομή Poisson.

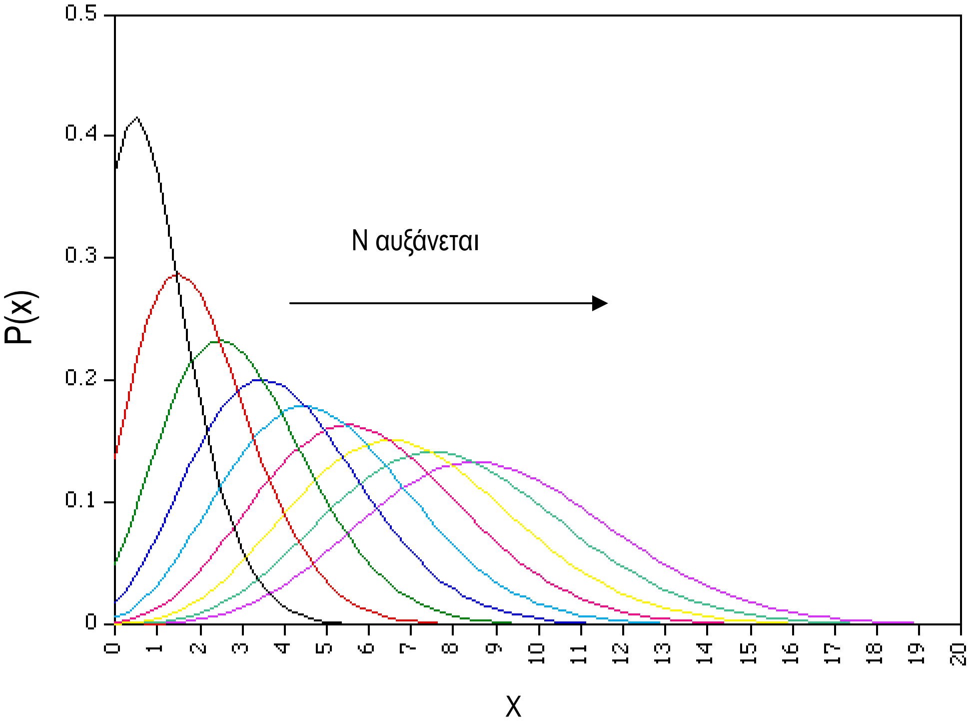
Η κατανομή Poisson δίνεται από τη σχέση:

$$P(x) = \frac{N^x}{x!} e^{-N}, \qquad x \geq 0, \quad N > 0$$

όπου P(x) η πιθανότητα εμφάνισης x γεγονότων από ένα στατιστικό δείγμα όταν ο αναμενόμενος αριθμός των γεγονότων είναι N. Η κατανομή Poisson λαμβάνει τη μέγιστη τιμή κοντά στο N και δεν είναι συμμετρική γύρω απ' αυτό. Η συμμετρία αυξάνει καθώς αυξάνει η τιμή του μέσου N.

Για την κατανομή Poisson αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις:

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(x) = 1 \ , \ \sigma = \sqrt{N} \ , \quad \text{και μέση τιμή} \quad \mu = \mathrm{N}$$



2.0 ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΝΩΝ

Η επεξεργασία πειραματικών δεδομένων δεν έχει πάντοτε σαν αντικειμενικό σκοπό την εύρεση της αριθμητικής τιμής ενός μετρούμενου μεγέθους με απλή ή σύνθετη μέτρηση. Τις περισσότερες φορές ο σκοπός ενός πειράματος είναι η εύρεση ή η επαλήθευση μίας μαθηματικής σχέσης που συνδέει τα μετρούμενα μεγέθη.

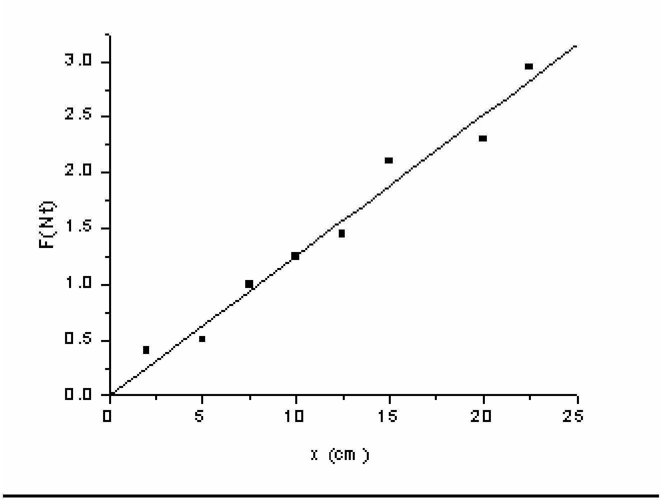
Π.χ. μετά από μια σειρά παρατηρήσεων της πίεσης P και του όγκου V ενός τέλειου αερίου ορισμένης μάζας M και σταθερής θερμοκρασίας T αναζητάμε τη σχέση που συνδέει τα P και V. Η γραφική μέθοδος είναι ίσως η καλύτερη που γνωρίζουμε για τον προσδιορισμό μίας σχέσης. Επομένως για να βρούμε τη ζητούμενη σχέση σχεδιάζουμε την καμπύλη των μεταβλητών P και V.
Η μαθηματική σχέση που περιγράφει την καμπύλη είναι ουσιαστικά η μαθηματική σχέση που συνδέει τα φυσικά μεγέθη P και V. Στις μετρήσεις των P και V οπωσδήποτε υπεισέρχονται σφάλματα. Το πρόβλημα λοιπόν δεν είναι να χαράξουμε απλός την καμπύλη των μεταβλητών, αλλά την 'καλύτερη καμπύλη'. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των 'ελάχιστων τετραγώνων'. Πριν όμως περιγράψουμε τη μέθοδο αυτή είναι σκόπιμο να πούμε δύο λόγια για τον τρόπο χάραξης μίας καμπύλης δύο ανεξάρτητων μεταβλητών .

2.1 Χάραξη καμπύλης

Ένας πειραματιστής κρεμάει διάφορα βάρη από ένα κατακόρυφο ελατήριο και μετράει κάθε φορά τις αντίστοιχες επιμηκύνσεις, με σκοπό την πειραματική απόδειξη του νόμου του Hooke (F=-kx). Τα αποτελέσματα των μετρήσεων φαίνονται στον Πίνακα 1.

X (*cm*)	F(*Nt*)
2.0	0.40
5.0	0.50
7.5	1.00
10.0	1.25
12.5	1.45
15.0	2.10
20.0	2.30
22.5	2.95

Πίνακας 1.



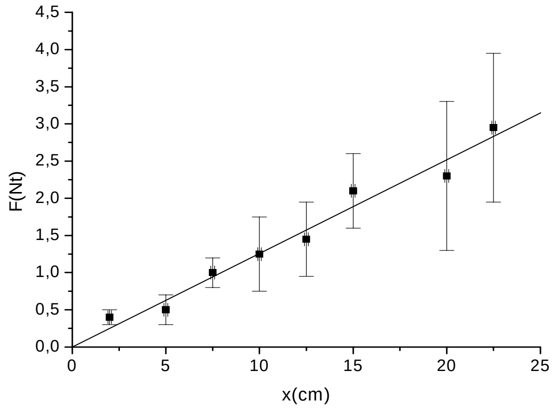
Σχήμα 1: Γραφική παράσταση των μεγεθών F και x που οι τιμές τους αναφέρονται στον Πίνακα 1.

Αφού γίνουν οι μετρήσεις και συμπληρωθεί ο πίνακας τιμών κάνουμε τη γραφική παράσταση αυτών σε σύστημα ορθογώνιων αξόνων x-y. Για ευκολία χρησιμοποιούμε συνήθως χιλιοστομετρικό χαρτί. Τα δύο μεγέθη ή μεταβλητές απεικονίζονται αντίστοιχα στους άξονες x και y τους οποίους χωρίζουμε σε ίσα τμήματα. Στην γραφική παράσταση τοποθετούμε τα ζεύγη των τιμών με σημεία (•,…) και τελικά φέρουμε μεταξύ των σημείων την καλύτερη γραμμή (καμπύλη). Σαν καλύτερη γραμμή χαρακτηρίζουμε την απλούστερη γεωμετρική γραμμή που διέρχεται κοντά από τα σημεία και όχι τη γραμμή που διέρχεται από όλα τα σημεία. Η τελευταία αυτή γραμμή, εξαιτίας των σφαλμάτων των επί μέρους μετρήσεων, είναι δυνατό να οδηγήσει σε ανώμαλη τεθλασμένη γραμμή. Βασικά η καλύτερη γραμμή είναι ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων που μας δίνει τη γεωμετρική παράσταση του φαινόμενου (Σχήμα 1).

Στο προηγούμενο παράδειγμα δεν αναφέρονται τα τυχαία σφάλματα των παρατηρήσεων των F και *x*, και γι’ αυτό το λόγο δεν σημειώνονται στο διάγραμμα του Σχήματος 1. Εάν όμως σε κάθε παρατήρηση αναφέρονται και τα αντίστοιχα σφάλματα τότε κάθε πειραματικό σημείο θα σημειώνεται όπως στο Σχήμα 2. Οι οριζόντιες και κατακόρυφες ευθείες που συνοδεύουν κάθε σημείο παριστάνουν τα σφάλματα των παρατηρήσεων των μεγεθών x και y αντίστοιχα.

Πίνακας 2.

x (*cm*)	±Δx	F(*Nt*)	±ΔF
2.0	0.10	0.40	0.10
5.0	0.10	0.50	0.20
7.5	0.10	1.00	0.20
10.0	0.10	1.25	0.50
12.5	0.10	1.45	0.50
15.0	0.10	2.10	0.50
20.0	0.10	2.30	1.00
22.5	0.10	2.95	1.00



Σχήμα 2: Γραφική παράσταση των μεγεθών και σφαλμάτων F±ΔF και x±Δx που οι τιμές τους αναφέρονται στον Πίνακα 2.

Τελικά εάν έχουμε ένα διάγραμμα με την κατανομή των πειραματικών σημείων που δείχνει το Σχήμα 3 δεν μπορούμε να προδικάσουμε ποια είναι η καλύτερη γεωμετρική γραμμή. Με άλλα λόγια δεν μπορούμε να βρούμε την αναλυτική σχέση μεταξύ των μεγεθών x και y. Μία πιθανή καμπύλη που να παριστάνει τα πειραματικά σημεία του σχήματος 3 είναι η ευθεία

$$y = a + bx \tag{2.1}$$

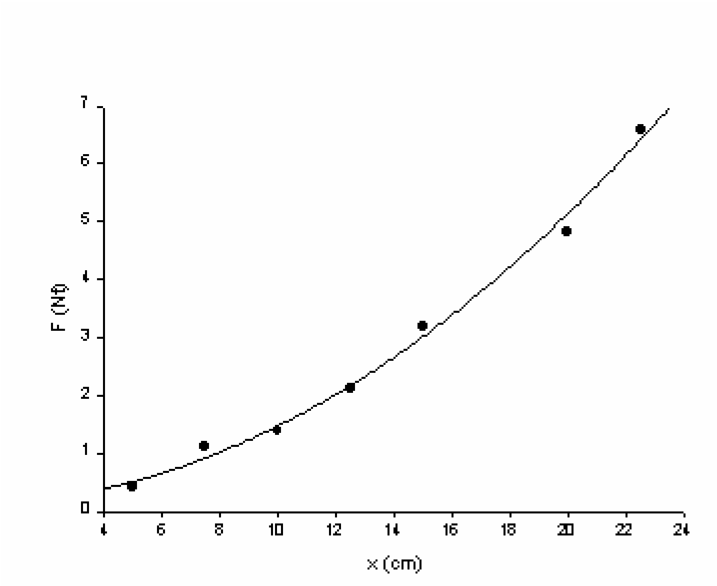
αλλά μπορεί να είναι και η καμπύλη δεύτερου βαθμού

$$y = a + bx + cx^2 \tag{2.2}$$

Η μορφή της καμπύλης χαρακτηρίζεται κυρίως από τις σταθερές (a,b και c). Από το σύνολο των τιμών x και y προσδιορίζουμε τις a,b και c των σχέσεων (2.1) και (2.2) αντίστοιχα. Συγκεκριμένα βρίσκουμε σύνολο τιμών των σταθερών αυτών. Αν η διασπορά των τιμών α, b και c που αντιστοιχούν στη σχέση (2.1) είναι μικρότερη αυτής που αντιστοιχούν στην (2.2) τότε η καλύτερη καμπύλη είναι η (2.1). Η διεργασία αυτή είναι πολύπλοκη και αποφεύγεται. Το συμπέρασμα όμως είναι ότι για να βρούμε τη συνάρτηση

$$y = f(a_1, a_2, \cdots, a_m, x) \tag{2.3}$$

επιβάλλεται ο υπολογισμός των σταθερών $a_1, a_2, \ldots, a_m$ οι οποίες πρέπει, σε ένα σύνολο παρατηρήσεων των x και y, να δείχνουν ελάχιστη διασπορά. Μία κατάλληλη μέθοδος για το σκοπό αυτό είναι η εφαρμογή της μεθόδου των **ελάχιστων τετραγώνων**.



Σχήμα 3.

2.2 Η Μέθοδος Ελάχιστων Τετραγώνων

Για την εύρεση της καλύτερης ευθείας θα χρησιμοποιήσουμε μία μέθοδο που στηρίζεται στην αρχή των ελάχιστων τετραγώνων. Σύμφωνα με την αρχή αυτή, η καλύτερη τιμή x ενός μεγέθους είναι εκείνη για την οποία το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων των μετρήσεων x_i (i=1,..m) από την τιμή x είναι ελάχιστο, δηλαδή $$\sum_{i=1}^{m}(x-x_i)^2 \to 0$$

(2.4)

Έστω ότι κατά την εκτέλεση ενός πειράματος μετρούνται τα μεγέθη x και y και παίρνονται m ζεύγη τιμών x_I, y_I (I=1,…m). Έστω επίσης ότι η σχέση που συνδέει το x και y είναι η εξίσωση της ευθείας

$$y = a + bx \tag{2.1}$$

Ζητάμε τις σταθερές b (κλίση) και a (τεταγμένη στην αρχή) που ορίζουν την ευθεία. Υποθέτουμε ότι οι τιμές x_I (I=1,..m) μετρήθηκαν με ακρίβεια, δηλαδή Δx_I=0 και ότι μόνο στην εύρεση των τιμών y_I (I=1,..m) έγιναν σφάλματα παρατηρήσεων. Για ορισμένη τιμή του x_I η καλύτερη τιμή του y δίνεται από την (2.1). Η απόκλιση μίας μετρούμενης τιμής y_I δίνεται με τη σχέση

$$\Delta y_i = bx_i + a - y_i \tag{2.5}$$

Εάν τα σφάλματα Δy_i είναι ίσα τότε η συνθήκη

$$\sum_{i=1}^{m}(\Delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^{m}(bx_i + a - y_i)^2 = \varepsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o \tag{2.6}$$

είναι η αρχή των ελάχιστων τετραγώνων. Για ευκολία ορίζουμε τη συνάρτηση *F(b,a)* ως εξής

$$F(b,a)=\sum_{i=1}^{m}\left(bx_i+a-y_i\right)^2 \tag{2.7}$$

Όπως είναι γνωστό οι συνθήκες για να έχει ακρότατο η συνάρτηση *F(b,a)* είναι

$$\frac{\partial F(b,a)}{\partial b}=0 \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \frac{\partial F(b,a)}{\partial a}=0 \tag{2.8}$$

οι συνθήκες (2.8) εγγυώνται την ύπαρξη του ακρότατου της *F(b.a)* όχι όμως οπωσδήποτε του ελάχιστου, όπως απαιτεί η (2.6). Η ύπαρξη του ελάχιστου (και όχι του μέγιστου) είναι φανερή από το σκεπτικό του προβλήματος. Οι συνθήκες (2.8) δίνουν τις σταθερές *a και b*. Από τις σχέσεις (2.7) και (2.8) έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial b}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(bx_i+a-y_i\right)^2\right]=2\sum_{i=1}^{m}\left(bx_i+a-y_i\right)x_i=0 \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(bx_i+a-y_i\right)^2\right]=2\sum_{i=1}^{m}\left(bx_i+a-y_i\right)=0 \tag{2.10}$$

Από τα δεύτερα μέρη των (2.9) και (2.10) προκύπτει το πιο κάτω σύστημα

$$\begin{aligned} b\sum_{i=1}^{m}x_i^{\,2}+a\sum_{i=1}^{m}x_i&=\sum_{i=1}^{m}x_iy_i \\ b\sum_{i=1}^{m}x_i+ma&=\sum_{i=1}^{m}y_i \end{aligned} \tag{2.11}$$

Η λύση του συστήματος (2.11) ως προς *b* και *a* δίνει τις ζητούμενες τιμές

$$b=\frac{m\sum_{i=1}^{m}x_iy_i-\sum_{i=1}^{m}x_i\sum_{i=1}^{m}y_i}{m\sum_{i=1}^{m}x_i^{\,2}-\left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)^2} \tag{2.12}$$

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{m}x_i^{\,2}\sum_{i=1}^{m}y_i-\sum_{i=1}^{m}x_i\sum_{i=1}^{m}x_iy_i}{m\sum_{i=1}^{m}x_i^{\,2}-\left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)^2} \tag{2.13}$$

Με βάση τις τιμές των *b* και *a*, όπως δίνονται από τις (2.12) και (2.13), βρίσκουμε τη καλύτερη ευθεία που αντιστοιχεί στην εξίσωση (2.1). Η ευθεία αυτή ονομάζεται και ευθεία ελάχιστων τετραγώνων. Το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων των πραγματικών τιμών από τις τιμές που αντιστοιχούν σε ένα σημείο της ευθείας είναι ελάχιστο.

Συνήθως οι δείκτες παραλείπονται και οι τύποι (2.12) και (2.13) γράφονται με απλούστερη μορφή

$$b = \frac{m\sum xy - \sum x \sum y}{m\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \tag{2.14}$$

$$a = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{m\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \tag{2.15}$$

Τα σφάλματα των α και β δίδονται από τις σχέσεις:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{m\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}\sigma_y^2} \quad \text{και} \quad \sigma_b = \sqrt{\frac{m}{m\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}\sigma_y^2}$$

όπου, $\sigma_y^2 = \frac{1}{m-2}\sum (y - a - bx)^2$

2.3 Μη Γραμμικές Σχέσεις

Η προηγούμενη μέθοδος των ελάχιστων τετραγώνων δεν περιορίζεται βέβαια μόνο για την εύρεση των ευθειών. Εάν, π.χ. η σχέση μεταξύ των σημείων (x_1,y_1), $(x_2,y_2)\ldots(x_m,y_m)$ εκφράζεται με μία εξίσωση 2ου βαθμού.

$$y = a + bx + cx^2 \tag{2.16}$$

και θέλουμε να βρούμε την καλύτερη καμπύλη που αντιστοιχεί στην εξίσωση αυτή, τότε προσδιορίζουμε τις σταθερές *a, b*, και *c* από συνθήκες ανάλογες προς την (2.8). Τώρα όμως η συνάρτηση *F* θα είναι της μορφής

$$F(a,b,c) = \sum_{i=1}^{m} \left(a + bx_i + cx_i^{\ 2} - y_i\right)^2 \tag{2.17}$$

Οι συνθήκες για να έχει ακρότατο η συνάρτηση $F(a,b,c)$ είναι

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial b} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial c} = 0 \tag{2.18}$$

Από τις (2.17) και (2.18) προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} \sum y &= am + b\sum x + c\sum x^2 \\ \sum xy &= a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3 \\ \sum x^2 y &= a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Οι σταθερές *a, b*, και *c* προσδιορίζονται όταν λύσουμε το σύστημα αυτό.

2.4 Σχέσεις με Περισσότερες των δύο Μεταβλητών

Η εφαρμογή της μεθόδου των ελάχιστων τετραγώνων προεκτείνεται και σε προβλήματα με περισσότερες από δύο μεταβλητές. Στην περίπτωση αυτή αναφερόμαστε στην εύρεση μίας επιφάνειας της μορφής

$$z = f(x,y) \tag{2.20}$$

Η εύρεση αυτή γίνεται με τρόπο ακριβώς ανάλογο με αυτό που περιγράψαμε προηγούμενα. Εδώ όμως, για το προσδιορισμό της απόκλισης μίας μετρούμενης τιμής Δz_I, υποθέτουμε ότι οι τιμές x_I (I=1,..m) και y_I (I=1,..m) μετρήθηκαν με ακρίβεια και μόνο στην εύρεση της z_I (I=1,…m) έγιναν σφάλματα παρατηρήσεων.

Έστω ότι η σχέση μεταξύ των μεταβλητών x, y και z εκφράζεται με τη γραμμική εξίσωση

$$z = a + bx + cy\,. \tag{2.21}$$

Η εξίσωση αυτή σε ένα τρισδιάστατο σύστημα ορθογωνίων συντεταγμένων παριστάνει ένα επίπεδο. Τα σημεία των μετρήσεων $(x_1,y_1,z_1),\ldots.(x_m,y_m,z_m)$ πρέπει να βρίσκονται κοντά στο επίπεδο αυτό. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων, όπως προηγούμενα καταλήγουμε στο σύστημα

$$\begin{aligned}
\sum z &= am + b\sum x + c\sum y \\
\sum xz &= a\sum x + b\sum x^2 + c\sum xz \\
\sum yz &= a\sum y + b\sum xy + c\sum y^2
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Οι σταθερές a, b, και c προσδιορίζονται με τη λύση αυτού του συστήματος.

2.4.1 Παράδειγμα

Σε μία σειρά παρατηρήσεων των μεγεθών x και y βρέθηκαν οι αντίστοιχες τιμές:

Πίνακας 3.

x	y
10	12.3
20	12.9
30	13.6
40	13.8
50	14.5
60	15.1
70	15.2
80	15.9

Να βρεθεί η καλύτερη εξίσωση της ευθείας που τα παριστάνει.

Λύση:
Η εξίσωση της ευθείας έχει τη μορφή $y = a + bx$. Ζητάμε τα a και b που δίνονται από τις σχέσεις

$$a = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{m\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}, \qquad b = \frac{m\sum xy - \sum x \sum y}{m\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}\,.$$

Για διευκόλυνση των πράξεων σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

Πίνακας 4

X	y	x^2	xy
10	12.3	100	123
20	12.9	400	258
30	13.6	900	408
40	13.8	1600	552
50	14.5	2500	725
60	15.1	3600	906
70	15.2	4900	1064
80	15.9	6400	1272
Σx=360	Σ y=113.3	Σx^2=20400	Σxy=5308

Οπότε

$$a = \frac{20400 \times 113.3 - 360 \times 5308}{8 \times 20400 - 129600} = \frac{400440}{33600} = 11.92$$

$$b = \frac{8 \times 5300 - 113.3 \times 360}{33600} = \frac{1676}{33600} = 0.05$$

και η ζητούμενη ευθεία είναι η

$$\boxed{y = 11.92 + 0.05x}$$

<u>2.4.2 Παράδειγμα</u>

Στο πείραμα των στροφικών ταλαντώσεων για να προσδιοριστεί η εξάρτηση της περιόδου T των ταλαντώσεων από τη διάμετρο του σύρματος από το οποίο εξαρτάται ο δίσκος, έγιναν οι παρακάτω μετρήσεις

Πίνακας 5.

T (sec)	d (mm)
4.84	0.80
3.02	0.99
1.36	1.48
1.04	1.72
0.62	2.31
0.52	2.46

Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τα μεγέθη T και d.

<u>Λύση:</u>

Αρχικά τοποθετούμε τα σημεία των τιμών σε χιλιοστομετρικό χαρτί. Δεν είναι ευθεία. Τοποθετούμε μετά τα σημεία σε λογαριθμικό χαρτί. Η καμπύλη τώρα είναι ευθεία. Άρα η σχέση μεταξύ των T και d είναι της μορφής

$$\log(T) = \log(c) + n\log(d)$$

Η εξίσωση αυτή είναι ευθεία της μορφής:

$$y = A + Bx$$

όπου y=log(T), A=log(c), B=n *και* x=log(d).

Πίνακας 6.

x (x10^{-3})	Y	x^2	xy
-96.90	0.68	9.39×10^{-3}	-0.066
-4.36	0.48	1.90×10^{-5}	-2.09×10^{-3}
170.30	0.31	0.029	0.023
235.50	0.02	0.055	0.004
344.40	-0.21	0.119	-0.072
330.90	-0.28	0.153	-0.111
Σx=1.04	Σy=0.82	Σx^2=0.365	Σxy=-0.224

Οπότε

$$B = n = \frac{6 \times (-0.224) - (1.04 \times 0.82)}{6 \times 0.365 - 1.081} = -1.988 \approx -2$$

$$A = \log(c) = 0.482 \qquad \Rightarrow \qquad c = 3.03 \approx 3$$

άρα η εξίσωση είναι

$$T = cd^{n} = 3d^{-2} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{3}{d^2}$$

2.4.3 Παράδειγμα

Σε μία σειρά παρατηρήσεων των μεγεθών x και y βρέθηκαν οι αντίστοιχες τιμές

Πίνακας 7.

x	y
0.50	0.03
1.00	0.10
2.00	0.30
5.00	1.20
8.00	2.00
9.00	2.50
20.00	10.00
30.00	15.00
40.00	25.00
50.00	30.00
60.00	45.00
70.00	60.00
80.00	70.00

1) Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τα μεγέθη **y** και **x**

Αρχικά τοποθετείστε τα σημεία των τιμών σε χιλιοστομετρικό χαρτί. Εάν δεν είναι ευθεία τοποθετείστε μετά τα σημεία σε λογαριθμικό χαρτί και υποθέστε ότι η σχέση είναι της μορφής

$$y = cx^n$$

οπότε πρέπει να προσδιορίσετε το c και το n

2) Να λογαριθμίσετε το **y** και **x**, και να τοποθετήσετε τα σημεία των τιμών σε χιλιοστομετρικό χαρτί. Τι παρατηρείτε;