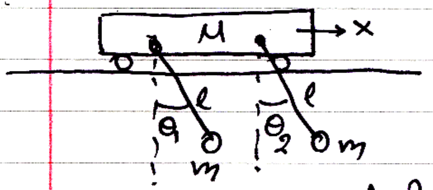
Δύο όμοια εκκρεμή το καθένα αποτελούμενο από μιά μάζα m εξαρτώμενη από μια ράβδο αμελητέας μάζας μήκους l, κρέμονται από ένα βαγονάκι μάζας M. Το βαγονάκι βρίσκεται πάνω σε οριζόντια σιδηροτροχιά και μπορεί να κινηθεί χωρίς τριβές. (α) Να γράψετε τη Lagrangian του συστήματος (β) Να βρεθούν οι ιδιοσυχνότητες. (γ) Να βρεθούν οι φυσικοί τρόποι ταλάντωσης.



Η ταχύτητα της 1ης μάζας m είναι:

$x_2 = x + l\sin\theta_1 \qquad y_2 = -l\cos\theta$

$v_1^x = \dot{x} + l\dot{\theta}_1\cos\theta_1 \qquad v_1^y = +l\dot{\theta}_1\sin\theta_1$

Ανάλογα: $v_2^x = \dot{x} + l\dot{\theta}_2\cos\theta_2 \qquad v_2^y = +l\dot{\theta}_2\sin\theta_2$

Επομένως η κινητική ενέργεια θα είναι: $T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(v_1^{x2} + v_1^{y2}\right) + \frac{1}{2}m\left(v_2^{x2} + v_2^{y2}\right)$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}_1^2\cos^2\theta_1 + 2\dot{x}l\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l^2\dot{\theta}_1^2\sin^2\theta_1 + \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}_2^2\cos^2\theta_2 + 2l\dot{\theta}_2\dot{x}\cos\theta_2 + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta_2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[2\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}_1^2 + l^2\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{x}l\left(\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2\cos\theta_2\right)\right]$$

Για μικρές γωνίες θ_1 και θ_2 έχουμε $\cos\theta_i \simeq 1 - \frac{\theta_i^2}{2}$

Ο τελευταίος όρος στην κινητική ενέργεια περιέχει ήδη γινόμενο ταχυτήτων, $\dot{x}\dot{\theta}_i$ και επομένως αναπτύσσοντας $\cos\theta_i$ χρειάζεται να κρατήσουμε μόνο το 1ο όρο και όχι $\theta_i^2/2$ αφού τότε το αποτέλεσμα θα είναι $\dot{x}\dot{\theta}_i\frac{\theta_i^2}{2}$ πολύ μικρό.

Επομένως η κινητική ενέργεια γράφεται:

$$T = \frac{1}{2}(M+2m)\dot{x}^2 + \frac{l^2}{2}m\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\frac{1}{l}\left(\dot{x}\dot{\theta}_1 + \dot{x}\dot{\theta}_2\right)\right)$$

Η δυναμική ενέργεια προέρχεται μόνο από τη δυναμική ενέργεια βαρύτητας για τα 2 εκκρεμή και επομένως:

$$V = mgl\left(1 - \cos\theta_1\right) + mgl\left(1 - \cos\theta_2\right) = 2mgl - mgl\left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right)$$

Αναπτύσσοντας έχουμε: $V = 2mgl - mgl\left[1 - \frac{\theta_1^2}{2} + 1 - \frac{\theta_2^2}{2}\right] \Rightarrow V = mgl\left(\frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2}\right)$

Επομένως η Lagrangian για μικρές αποκλίσεις από τη θέση ισορροπίας είναι :

$$L = \frac{1}{2}(M+2m)\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(l^2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2) + 2l\dot{x}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\right) - \frac{mgl}{2}(\theta_1^2+\theta_2^2)$$

(β) Για να βρούμε τις ιδιοσυχνότητες ψάχνουμε τις λύσεις της εξίσωσης:

$$\det\left\{[K] - [M]\omega^2\right\} = 0.$$

Αλλά

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial x} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2 \partial x} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mgl & 0 & 0 \\ 0 & mgl & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ενώ

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}_1^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}_1 \partial \dot{\theta}_2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}_1 \partial \dot{x}} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}_2 \partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}_2^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}_2 \partial \dot{x}} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x} \partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x} \partial \dot{\theta}_2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ml^2 & 0 & ml \\ 0 & ml^2 & ml \\ ml & ml & M+2m \end{bmatrix}$$

Επομένως η εξίσωση θα γραφεί με τη μορφή:

$$\det\begin{bmatrix} mgl - ml^2\omega^2 & 0 & -ml\omega^2 \\ 0 & mgl - ml^2\omega^2 & -ml\omega^2 \\ -ml\omega^2 & -ml\omega^2 & -(M+2m)\omega^2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2(M+2m)(\omega^2 ml^2 - mgl)^2 - 2(\omega^2 ml)^2(\omega^2 ml^2 - mgl) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2(\omega^2 l - g)\left\{M\omega^2 l - (M+2m)g\right\} m^2 l^2 = 0.$$

Οι 3 ιδιοσυχνότητες επομένως θα είναι: $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ και $\omega_3 = \sqrt{\frac{M+2m}{Ml}g}$

(γ) Από την εξίσωση των ιδιοδιανυσμάτων μπορούμε να βρούμε τη σχέση που συνδέει τα $a_1 : a_2 : a_3$ αντικαθιστώντας κάθε τιμή των ιδιοσυχνοτήτων που βρήκαμε:

$$\left\{[K]-\omega_i^2[M]\right\}\begin{pmatrix}a_{1i}\\ a_{2i}\\ a_{3i}\end{pmatrix}=0 \qquad \text{όπου} \quad \begin{pmatrix}a_{1i}\\ a_{2i}\\ a_{3i}\end{pmatrix} \text{ τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στη συχνότητα } \omega_i$$

Έχουμε επομένως:

(1) $\omega^2=\omega_1^2=0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} mgl-\cancelto{0}{ml^2\omega^2} & 0 & \cancelto{0}{-ml\omega^2} \\ 0 & mgl-\cancelto{0}{ml^2\omega^2} & \cancelto{0}{-ml\omega^2} \\ \cancelto{0}{-ml\omega^2} & \cancelto{0}{-ml\omega^2} & \cancelto{0}{-(M+2m)\omega^2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} mgl & 0 & 0 \\ 0 & mgl & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ a_{31}\end{pmatrix}$$

Επομένως $a_{11}=0$, $a_{21}=0$ ενώ a_{31} παίρνει όποια τιμή.
Άρα μπορούμε να γράψουμε το τρόπο ταλάντωσης σαν $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ που σημαίνει ότι τα σώματα (εκκρεμή) είναι ακίνητα ενώ το βαγονάκι εκτελεί μεταφορική κίνηση.

(2) $\omega^2=\omega_2^2=\dfrac{g}{l} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \cancelto{0}{mgl-ml^2\frac{g}{l}} & 0 & -ml\frac{g}{l} \\ 0 & \cancelto{0}{mgl-ml^2 g/l} & -ml\, g/l \\ -ml\frac{g}{l} & -ml\, g/l & -(2m+M)\frac{g}{l} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ a_{32}\end{pmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -mg \\ 0 & 0 & -mg \\ -mg & -mg & -(2m+M)\frac{g}{l} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ a_{32}\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_{32}=0 \\ a_{22}=-a_{12} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$$

Τα 2 εκκρεμή κινούνται σε αντίθετη φάση ενώ το βαγονάκι είναι ακίνητο.

(3) $\omega^2=\omega_3^2=\dfrac{M+2m}{Ml}g$

$$\begin{pmatrix} mgl-ml^2\frac{(M+2m)}{Ml}g & 0 & -ml\frac{(M+2m)}{Ml}g \\ 0 & mgl-ml^2\frac{(M+2m)}{Ml}g & -ml\frac{(M+2m)}{Ml}g \\ -m\frac{M+2m}{M}g & -m\frac{M+2m}{M}g & -(2m+M)\frac{(M+2m)}{Ml}g \end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{13}\\ a_{23}\\ a_{33}\end{pmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\left(mgl - ml\frac{(M+2m)}{M}g\right)a_{13} - \frac{m}{M}(M+2m)g\,a_{33} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{33} = \frac{M}{\cancel{m}(M+2m)\cancel{g}}\left(\cancel{m}\cancel{g}l - \cancel{m}l\frac{(M+2m)}{M}\cancel{g}\right)a_{13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{33} = \frac{\cancel{M}l}{(M+2m)}\left(\frac{\cancel{M}-\cancel{M}-2m}{\cancel{M}}\right)a_{13} \Rightarrow a_{33} = \frac{-2ml}{M+2m}a_{13}$$

$$-m\frac{M+2m}{M}\cancel{g}\,a_{13} - m\frac{M+2m}{M}\cancel{g}\,a_{23} - (2m+M)\frac{(M+2m)}{Ml}\cancel{g}\,a_{33} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{m}{M}a_{13} - \frac{m}{M}a_{23} - \frac{2m+M}{M\cancel{l}}\frac{(-2m\cancel{l})}{\cancel{M+2m}}a_{13} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\cancel{m}}{\cancel{M}}a_{13} - \frac{\cancel{m}}{\cancel{M}}a_{23} + \frac{2\cancel{m}}{\cancel{M}}a_{13} = 0 \Rightarrow -a_{13}-a_{23}+2a_{13}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{23} = a_{13}$$

Επομένως θα έχουμε : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{2ml}{M+2m} \end{pmatrix}$ και τα 2 εκκρεμή ταλαντώνονται σε φάση ενώ το βαγονάκι με αντίθετη φάση. Το αποτέλεσμα είναι ότι το κέντρο μάζας του συστήματος παραμένει ακίνητο.