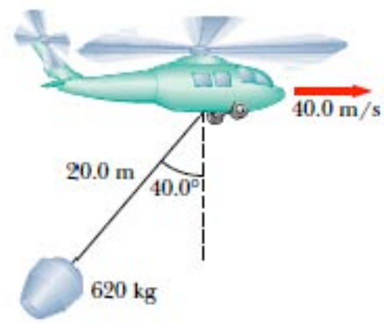
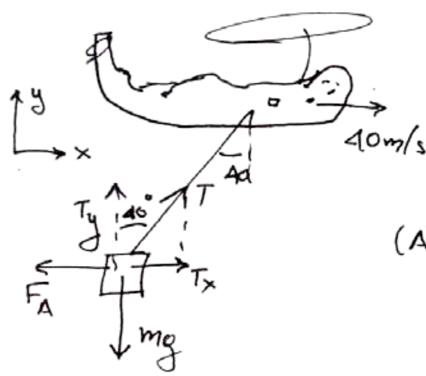
# ΦΥΣ. 131
## ΕΡΓΑΣΙΑ # 4

**1.** Ένα πυροσβεστικό ελικτόπτερο μεταφέρει ένα μεγάλο δοχείο με νερό μάζας 620kg το οποίο είναι εξαρτημένο από το ελικόπτερο με σχοινί μήκους 20m, όπως στο σχήμα. Καθώς το ελικόπτερο πετά προς μια εστία φωτιάς με σταθερή ταχύτητα 40m/s, το σχοινί σχηματίζει γωνία $40^o$ με τη κατακόρυφο διεύθυνση. Το δοχείο έχει ενεργό επιφάνεια διατομής $3.80m^2$ ως προς κατακόρυφο επίπεδο. Να προσδιοριστεί ο συντελεστής αντίστασης του αέρα υποθέτοντας ότι η δύναμη αντίστασης είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας του δοχείου.




Από το $2^o$ νόμο του Newton θα έχουμε:

(A) $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_x - F_A = 0 \quad (v = σταθ)$

$\Rightarrow F_A = T_x \Rightarrow \boxed{F_A = T\sin 40^o} \quad (1)$

Η δύναμη της αντίστασης του αέρα είναι: $|\vec{F_A}| = |Dv^2|$

Σύμφωνα με το βιβλίο σας: $D = \frac{1}{2}kA\rho$ όπου:

ρ: η πυκνότητα του αέρα: $1.2 kg/m^3$

A: η ενεργός διατομή του κουβά:

k: ο συντελεστής αντίστασης

$\Rightarrow v^2 \frac{1}{2}kA\rho = F_A$

Από την (1) $\frac{v^2}{2}kA\rho = T\sin 40 \Rightarrow k = \frac{2T\sin 40}{v^2 A\rho}$

Εφαρμόζουμε το (2) νόμο του Newton στη y διεύθυνση:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y - mg = 0 \Rightarrow T\cos 40 = mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos 40}$

$\Rightarrow k = \frac{2\frac{mg}{\cos 40}\sin 40}{A\rho v^2} = \frac{2mg\tan 40}{A\rho v^2} = \frac{2\cdot 620\cdot 9.8\cdot 0.84}{3.8\cdot 1.2\cdot 40^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{k = 1.4}$

**2.** Μια βάρκα ταχύτητας σταματά τις μηχανές της όταν η ταχύτητά της είναι 10m/s και σταδιακά έρχεται σε ηρεμία. Η εξίσωση που περιγράφει τη κίνηση της βάρκας κατά τη περίοδο αυτή που σταματά δίνεται από τη σχέση $\upsilon = \upsilon_0 e^{-ct}$, όπου υ είναι η ταχύτητα της σε μια χρονική στιγμή t, $\upsilon_0$ η αρχική ταχύτητα όταν σταμάτησε τις μηχανές και c μια σταθερά. Τη χρονική στιγμή t=20sec, η ταχύτητα της βάρκας είναι υ=5m/s. (α) Να βρεθεί η σταθερά c. (β) Να βρεθεί η ταχύτητά της τη στιγμή t=40sec. (γ) Παραγωγίστε την εξίσωση της ταχύτητας και δείξτε ότι η επιτάχυνση της βάρκας είναι ανάλογη της ταχύτητας.

(α) $\upsilon(t) = \upsilon_i e^{-ct} \Rightarrow \upsilon(t=20) = 5\,m/s = \upsilon_i e^{-c\cdot 20} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 = 10 e^{-20c} \Rightarrow \log 5 = \log 10 - 20c \Rightarrow$

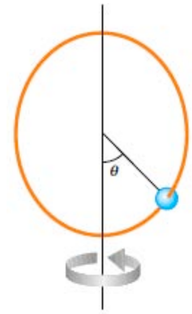
$\Rightarrow c = \frac{\log 10 - \log 5}{20} \Rightarrow c = \frac{\log\left(\frac{10}{5}\right)}{20} = \frac{\log 2}{20} \Rightarrow$

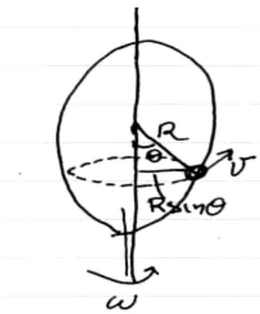
$\Rightarrow \boxed{c = 0.035\,s^{-1}}$

(β) Για $t = 40s$ $\upsilon = (10\,m/s)\, e^{-0.035\cdot 40} = 10 e^{-1.4} \Rightarrow \boxed{\upsilon = 2.47\,m/s}$

(γ) $\upsilon = \upsilon_i e^{-ct} \Rightarrow s = \frac{d\upsilon}{dt} = -c\upsilon_i e^{-ct} \Rightarrow \boxed{s = -c\upsilon}$

**3.** Μια χάντρα μπορεί να κινείται με αμελητέες τριβές πάνω σε σύρμα το οποίο έχει κυκλικό σχήμα ακτίνας 15.0cm και είναι κατακόρυφο (όπως στο σχήμα). Το σύρμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ως προς τη κατακόρυφο διάμετρό του με (α) περίοδο 0.450s. Η θέση της χάντρας περιγράφεται με βάση τη γωνία θ που σχηματίζει η ακτίνα που παρακολουθεί τη χάντρα ως προς την κατακόρυφο διεύθυνση. Σε ποια γωνία ως προς τη βάση του κυκλικού σύρματος θα μπορούσε η χάντρα να ισορροπεί ως προς το περιστρεφόμενο σύρμα; Επαναλάβατε το πρόβλημα θεωρώντας τώρα ότι η περίοδος περιστροφής του σύρματος είναι 0.850sec.




Καθώς το στεφάνι περιστρέφεται η χάντρα εκτελεί κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $R\cdot\sin\Theta$

Η ταχύτητα της χάντρας στην κυκλική αυτή τροχιά θα είναι:

$$\boxed{v = \frac{2\pi}{T} R\sin\Theta} \quad (1)$$

όπου T η περίοδος περιστροφής του στεφανιού.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο στεφάνι θα είναι:


όπου N η αντίδραση του στεφανιού στη χάντρα. Η συνιστώσα $N_x$ είναι στην ακτινική διεύθυνση και επομένως αποτελεί τη κεντρομόλο δύναμη που αναγκάζει το σώμα να κινηθεί σε κυκλική τροχιά.

$$\Sigma F_x = \frac{mv^2}{R\sin\Theta} \Rightarrow N_x = \frac{mv^2}{R\sin\Theta} \Rightarrow N\sin\Theta = \frac{mv^2}{R\sin\Theta} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow N\cancel{\sin\Theta} = \frac{m4\pi^2R^2\cancel{\sin^2\Theta}}{T^2\cancel{R\sin\Theta}} \Rightarrow \boxed{N = \frac{4\pi^2Rm}{T^2}} \quad (2)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_y - mg = 0 \Rightarrow N\cos\Theta = mg \Rightarrow \boxed{N = \frac{mg}{\cos\Theta}} \quad (3)$$

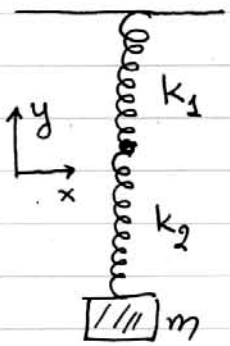
$$\Rightarrow \frac{mg}{\cos\Theta} = \frac{4\pi^2Rm}{T^2} \quad \cos\Theta = \frac{\cancel{m}gT^2}{4\pi^2R\cancel{m}} = \frac{gT^2}{4\pi^2R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Theta = \cos^{-1}\left(\frac{gT^2}{4\pi^2R}\right) \Rightarrow \boxed{\Theta = 70.1^\circ}$$

** Ας σημειωθεί ότι εξάγοντας την εξίσωση (2) έχουμε απαλείψει μια λύση όταν $\sin\Theta = 0$. $\Rightarrow \Theta = 0^\circ$. Δηλαδή στο χαμηλότερο σημείο του στεφανιού

Αν η περίοδος περιστροφής γίνει μικρότερη τότε $\cos\Theta = \frac{gT^2}{4\pi^2R} = 1.2$ που είναι αδύνατη περίπτωση. Επομένως η μόνη θέση που η χάντρα μπορεί να ισορροπεί είναι για $\Theta = 0^\circ$

**4.** Ένα ελαφρύ ελατήριο με σταθερά ελατηρίου 1200N/m κρέμεται από ένα ακλόνητο σημείο. Από το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου κρέμεται ένα δεύτερο ελατήριο σταθεράς 1800N/m. Ένα σώμα μάζας m=1.50kg είναι εξαρτημένο από το ελεύθερο άκρο του δεύτερου ελατηρίου. (α) Να βρεθεί η ολική επιμήκυνση του ζεύγους των ελατηρίων. (β) Να βρεθεί η σταθερά ελατηρίου του συστήματος υποθέτοντας ότι τα δυο ελατήρια αποτελούν ένα σύστημα ελατηρίων. (Στη περίπτωση αυτή περιγράφουμε τα ελατήρια ότι βρίσκονται σε σειρά).




Τα δυο ελατήρια επιμηκύνονται εξαιτίας της εφαρμογής της δύναμης της βαρύτητας στο σώμα μάζας m:

Καθώς κρεμάμε την μάζα, αυτή κινείται προς τα κάτω κατά μια απόσταση x, η οποία είναι το άθροισμα των επιμηκύνσεων $x_1$ και $x_2$ των δύο ελατηρίων:

$F_1 = k x_1 = mg$

$F_2 = k x_2 = mg$

$$x = x_1 + x_2 = \frac{mg}{k_1} + \frac{mg}{k_2} = mg\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \Rightarrow x = mg\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \quad (1)$$

Τη συνολική επιμήκυνση μπορούμε να τη φανταστούμε σαν αυτή ενός ελατηρίου με σταθερά k πάνω στο οποίο ασκείται το βάρος:

$$F_{ολ} = +k_{ολ} x - mg = 0 \Rightarrow k_{ολ} x = mg \Rightarrow x = \frac{mg}{k} \quad (2)$$

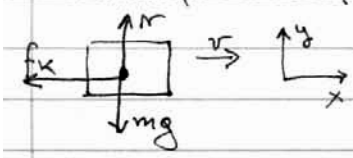
Από την (1) κ (2) $\Rightarrow \frac{\cancel{mg}}{k} = \cancel{mg}\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$

Δηλαδή 2 ελατήρια σε σειρά έχουν το ίδιο αποτέλεσμα με ένα ελατήριο του οποίου η σταθερά δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{k_{ολ}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow \boxed{k_{ολ} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$$

**5.** Μια φοιτήτρια στέκεται σε ένα ασανσέρ το οποίο επιταχύνει συνεχώς προς τα πάνω με επιτάχυνση α. Η τσάντα της είναι στο δάπεδο του ασανσέρ δίπλα στο τοίχωμα. Το πλάτος της καμπίνας του ασανσέρ είναι L. Την χρονική στιγμή t=0 η φοιτήτρια δίνει μιά κλωτσιά στην τσάντα της που της προσδίδει μια ταχύτητα υ και την κάνει να κινηθεί κατά πλάτος της καμπίνας του ασανσέρ. Την χρονική στιγμή t η τσάντα χτυπά το απέναντι τοίχωμα. Να βρεθεί ο συντελεστής της τριβής κίνησης $\mu_\kappa$ μεταξύ της τσάντας και του δαπέδου του ασανσέρ.

Μελετούμε τις δυνάμεις στην τσάντα ως πρός το σύστημα αναφοράς της γής.




$\Sigma F_y = ma_y$, $a_y = a$ : επιτάχυνση ασανσέρ.

$N - mg = ma \Rightarrow N = m(g+a)$

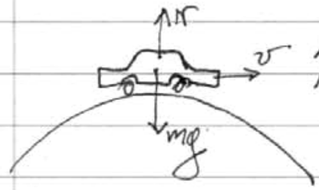
$\Sigma F_x = ma_x$, $f = ma_x \Rightarrow -\mu_k N = ma_x \Rightarrow$

$\Rightarrow -\mu_k(\cancel{m}(g+a)) = \cancel{m}a_x \Rightarrow a_x = -\mu_k(g+a)$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης μπορούμε να βρούμε

$x = vt + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow L = vt - \frac{1}{2}\mu_k(g+a)t^2 \Rightarrow \boxed{\mu_k = \frac{2(L-vt)}{(g+a)t^2}}$

**6.** Ένα αυτοκίνητο μάζας m περνά πάνω από ένα speed-bump σε ένα δρόμο που ακολουθεί το τόξο κύκλου ακτίνας R. (α) Τί δύναμη εξασκεί ο δρόμος στο αυτοκίνητο όταν το αυτοκίνητο περνά απο το υψηλότερο σημείο του speed-bump και όταν το αυτοκίνητο κινείτε με ταχύτητα v. (β) Ποιά είναι η μέγιστη ταχύτητα ένα αυτοκίνητο μπορεί να έχει όταν περνά το υψηλότερο σημείο της speed-bump ώστε να μην χάσει επαφή με το έδαφος.




(α) $\Sigma F_y = ma_y = -m\dfrac{v^2}{R}$

$$N - mg = -m\frac{v^2}{R} \Rightarrow \boxed{N = mg - m\frac{v^2}{R}}$$

(β) Η μέγιστη ταχύτητα είναι όταν $N = 0$ οπότε:

$$mg = m\frac{v_{max}^2}{R} \Rightarrow \boxed{v_{max} = \sqrt{gR}}$$

**7.** Καθώς οι προωθητικές ρουκέτες ενός διαστημικού λεωφορείου αποχωρίζονται οι αστροναύτες νιώθουν μια επιτάχυνση που φθάνει τα 3g, όπου $g=9.8 m/s^2$. Κατά την εκπαίδευσή τους, οι αστροναύτες χρησιμοποιούν μια συσκευή στην οποία και αισθάνονται τέτοιες επιταχύνσεις με την μορφή κεντρομόλου επιτάχυνσης. Πιο ειδικά, ο αστροναύτης είναι ασφαλής δεμένος στο ένα άκρο ενός μηχανικού βραχίονα ο οποίος και περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα σε έναν οριζόντιο κύκλο. Προσδιορίστε το ρυθμό περιστροφής, σε μονάδες περιστροφές το δευτερόλεπτο, απαραίτητο ώστε να δώσει στον αστροναύτη μια κεντρομόλο επιτάχυνση ίση με 3g όταν ο βραχίονας που τον περιστρέφει έχει μήκος 9.45m.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση της κεντρομόλου επιτάχυνσης

$a = \frac{\upsilon^2}{R}$ για σώμα κινούμενο με ταχύτητα $\upsilon$ γύρω από κυκλική περιφέρεια ακτίνας R.

Επομένως $\upsilon = \sqrt{aR}$.

Για να μετατρέψουμε την ταχύτητα σε περιστροφές/sec διαιρούμε με $2\pi R$ μιά και η ταχύτητα είναι $\frac{m}{sec} = \frac{2\pi R \cdot n}{sec}$ όπου n είναι ο αριθμός των περιστροφών κύκλου ακτίνας R.

Επομένως ο ρυθμός περιστροφής θα είναι:

$$\nu = \frac{\upsilon}{2\pi R} = \frac{\sqrt{Ra}}{2\pi R} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{R}}$$

Αντικαθιστώντας για $a=3g$ έχουμε: $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{R}} \simeq 0.28$ περιστροφές/sec

**8.** Μια μπάλα αφήνεται να πέσει από ύψος 4h. Αφού έχει διανύσει μια απόσταση d, μια δεύτερη μπάλα αφήνεται να πέσει από ύψος h. Ποιά πρέπει να'ναι η απόσταση d (εκφρασμένη σε h) έτσι ώστε οι μπάλες να φθάσουν στο έδαφος την ίδια ώρα;

Ο συνολικός χρόνος που πέρνει την μπάλα να πέσει ένα ύψος 4h δίνεται από τη σχέση $d=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t=\sqrt{\frac{2d}{g}}=\sqrt{\frac{2(4h)}{g}}$

Αυτός ο χρόνος μπορεί να διαιρεθεί στο χρόνο t που χρειάζεται να πέσει μιά απόσταση d ο οποίος είναι $\sqrt{\frac{2d}{g}}$ και τον υπόλοιπο χρόνο για να χτυπήσει το έδαφος, ο οποίος μας είπανε στο πρόβλημα ότι είναι ο ίδιος χρόνος που χρειάζεται μιά δεύτερη μπάλα να φθάσει σε ύψος h και ο οποίος είναι : $\sqrt{2h/g}$

Δηλαδή $\sqrt{\frac{\cancel{2}(4h)}{\cancel{g}}}=\sqrt{\frac{\cancel{2}d}{\cancel{g}}}+\sqrt{\frac{\cancel{2}h}{\cancel{g}}} \Rightarrow \sqrt{4h}=\sqrt{d}+\sqrt{h} \Rightarrow 2\sqrt{h}=\sqrt{d}+\sqrt{h} \Rightarrow \boxed{d=h}$

<u>Δεύτερος τρόπος</u>

Όταν η πρώτη μπάλα έχει πέσει ένα ύψος d, η ταχύτητά της είναι

$$V_0=gt=g\sqrt{\frac{2d}{g}}=\sqrt{2dg}$$

Για το υπόλοιπο της απόστασης, 4h-d, η κίνησή της θα δίνεται από (υποθέτω ότι η διεύθυνση πρός τα κάτω είναι η θετική)

$$4h-d=\underbrace{V_0}_{\text{η ταχύτητα στο ύψος d}}t+\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 4h-d=\sqrt{2dg}\,t+\frac{1}{2}gt^2 \Bigg\} \Rightarrow$$

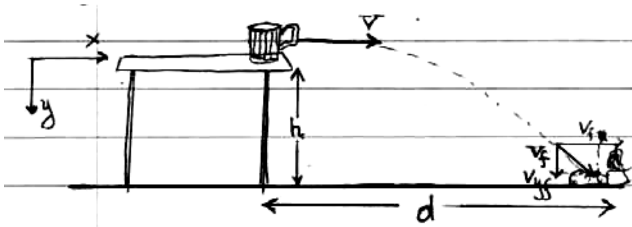
Αλλά μας είπανε ότι χρειάζεται ο ίδιος χρόνος όπως και η δεύτερη μπάλα : $\Rightarrow t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$

$$\Rightarrow 4h-d=\sqrt{2d\cancel{g}}\sqrt{\frac{2h}{\cancel{g}}}+\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{g}\frac{\cancel{2}h}{\cancel{g}} \Rightarrow 4h-d=2\sqrt{dh}+h \Rightarrow 3h-d=2\sqrt{dh} \Rightarrow$$

$\Rightarrow d+2\sqrt{dh}-3h=0 \Rightarrow$ Δευτεροβάθμια εξίσωση $\Rightarrow \sqrt{d_{1,2}}=\frac{-2\sqrt{h}\pm\sqrt{4d+12h}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{d_{1,2}}=\frac{-\cancel{2}\sqrt{h}\pm\cancel{4}^{2}\sqrt{h}}{\cancel{2}} \Rightarrow \sqrt{d_{1,2}}=\begin{cases}-3\sqrt{h}\\ \sqrt{h}\end{cases} \Rightarrow \boxed{d=h}$$

**9.** Σε ένα μπαρ, ένας πελάτης γλυστρά ένα άδειο ποτήρι μπύρας κατά μήκος του τραπεζιού. Ο μπάρμαν δεν βλέπει το ποτήρι να γλυστρά και αυτό γλυστρά τελικά από το τραπέζι και πέφτει στο πάτωμα σε μια απόσταση d απο την βάση του τραπεζιού. Το ύψος του τραπεζιού είναι h. (α) Με τι ταχύτητα φεύγει το ποτήρι από το τραπέζι; (β) Ποια ήταν η διεύθυνση της ταχύτητας του ποτηριού όταν αυτό χτύπησε στο έδαφος;




(α) Θέλουμε την ταχύτητα του ποτηριού τη στιγμή που φεύγει από το τραπέζι.

συνθήκες προβλήματος $\left\{ \begin{array}{lll} y=h & a_y = g & a_x = \emptyset \\ x=\emptyset & V_{x_i} = \dfrac{d}{t} & V_{y_i} = \emptyset \end{array} \right\}$

Για να βρούμε το χρόνο "πτήσης" (πτώσης στην κυριολεξία) χρησιμοποιούμε την εξίσωση της ελεύθερης πτώσης:

$$y = \underbrace{V_{y_i}}_{0\ \text{(αρχικές συνθήκες)}} t + \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \text{(+g αφού διαλέγω τον άξονα y προς τα κάτω)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}}} \quad (1)$$

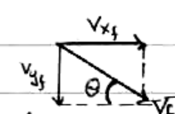
Η μόνη ταχύτητα που έχει είναι στην διεύθυνση -x άρα: $V_{x_i} = \frac{d}{t} \Rightarrow \boxed{V_{x_i} = \frac{d}{\sqrt{2h/g}}}$ (2)

(β) Θέλουμε την κατεύθυνση της ταχύτητας του ποτηριού τη στιγμή που προσκρούει στο έδαφος.

Στην y-διεύθυνση $V_{y_f} = \cancel{V_{y_i}}^{\,0\ \text{(αρχικές συνθήκες)}} + gt \Rightarrow V_{y_f} = gt \overset{(1)}{\Longrightarrow} V_{y_f} = g\sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{V_{y_f} = \sqrt{2hg}} \quad (3)$$

Η γωνία πρόσκρουσης Θ, θα δίνεται από




$$\tan^{-1}\Theta = \frac{V_{y_f}}{V_{x_f}} \Rightarrow \Theta = \arctan\left(\frac{V_{y_f}}{V_{x_f}}\right) \overset{(2)\wedge(3)}{=} \arctan\left(\frac{\sqrt{2hg}}{\frac{d}{\sqrt{2h/g}}}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\Theta = \arctan\left(\frac{2h}{d}\right)} \quad \text{διεύθυνση πρόσκρουσης}$$

**10.** Ενας παίκτης εκτελεί ένα πλάγιο-out σημαδεύοντας το κεφάλι ενός συμπαίκτη του στην αντίπαλη περιοχή. Ο επιθετικός βρισκόμενος 40 μέτρα μακριά πιάνει την κεφαλιά ακριβώς 3 δευτερόλεπτα αφού εκτελέσθηκε το πλάγιο. (α) Ποιά ήταν η ταχύτητα της μπάλας την στιγμή που έφυγε από τα χέρια του παίκτη που εκτέλεσε το out. (β) Πόσο ψηλά πήγε η μπάλα;

(α) Στην x-διεύθυνση: $x = v_{x_0} t_{tot} \Rightarrow 40 = v_{x_0} \cdot 3 \Rightarrow v_{x_0} = \frac{40}{3}\,m/sec$

αλλά $x$ = βεληνεκές και επομένως $t_{tot} = 2t^{hmax}$ (A)

Στην y-διεύθυνση: $v_y(t) = v_{y_0} - gt \Rightarrow$ Στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς $v_y(t) = \emptyset$ άρα

$$v_{y_0} = g t^{hmax} \overset{(A)}{\Rightarrow} v_{y_0} = g \frac{t_{tot}}{2} \Rightarrow v_{y_0} = 9.8 \cdot 1.5 = \quad v_{y_0} = 14.7\,m/sec$$

Επομένως $V_0 = \sqrt{v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2} = \sqrt{(13.33)^2 + (14.7)^2} \Rightarrow \boxed{V = 19.846\,m/sec}$

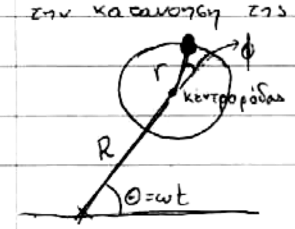
(β) Το ύψος της μπάλας αντιστοιχεί στο χρόνο που έκανε για να μηδενίσει την y-συνιστώσα της ταχύτητας, δηλαδή στο χρόνο $t = \frac{t_{tot}}{2} = 1.5\,sec$

Άρα $y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = 14.7 \cdot 1.5 - \frac{1}{2} 9.8 \cdot (1.5)^2 \Rightarrow \boxed{y_{max} = 11.025\,m}$

**11.** Αν βάψετε μια πολύχρωμη κουκίδα στο στεφάνι μιας κυλιόμενης ρόδας αυτοκινήτου, οι συντεταγμένες της κουκίδας μπορούν να γραφούν με τη μορφή: (x,y)=(Rθ + Rsinθ, R+Rcosθ). Η τροχιά της κουκίδας ονομάζεται κυκλοειδής. Υποθέστε ότι η ρόδα κινείται με σταθερή ταχύτητα που ουσιαστικά σημαίνει ότι θ=ω t. (α) Να βρεθεί το διάνυσμα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης της κουκίδας. (β) Τη στιγμή που η κουκίδα είναι στο υψηλότερο σημείο της ρόδας, μπορεί να θεωρηθεί ότι κινείται κατά μήκος του τόξου ενός κύκλου. Ποιά είναι η ακτίνα του κύκλου αυτού σα συνάρτηση της ποσότητας R; Βοήθεια: Χρησιμοποιήστε το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητα και επιτάχυνσης που βρήκατε στο (α).

---

Αυτή ίσως είναι η δυσκολότερη άσκηση όχι για την λύση της αλλά για την κατανόηση της κίνησης.




Η ρόδα αφού κυλίεται σημαίνει ότι κινείται με μιά κυκλική τροχιά ακτίνας R. Η ρόδα κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\theta=\omega t$.

Το κέντρο της ρόδας δηλαδή κινείται σε ένα κύκλο ακτίνας R ως πρός ένα σημείο.

Κάθε σημείο πάνω στη περιφέρεια της ρόδας θα κινείται με ταχύτητα φ ως πρός το κέντρο της ρόδας.

Το σημείο δηλαδή θα κάνει δύο κινήσεις. Μιά εξαιτίας της περιστροφής της ρόδας ως πρός το σημείο που βρίσκεται σε απόσταση R και μιά εξαιτίας της περιστροφής του γύρω από το κέντρο της ρόδας.

Οι εξισώσεις της θέσης του σημείου (κουκίδας) μας δίνονται με τη μορφή συντεταγμένων. Επομένως σ'αυτές τις συντεταγμένες αντιστοιχεί το διάνυσμα θέσης:

(α) $$\vec{r}=\left(R\omega t+R\sin\omega t,\ R+R\cos\omega t\right)$$

(A)

Επομένως η ταχύτητα μπορεί να βρεθεί εύκολα από $\boxed{\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\left(R\omega+R\omega\cos\omega t,\ -R\omega\sin\omega t\right)}$

Περισσότερο ακαδημαϊκά:

Δηλαδή μπορούμε να γράψουμε: $\vec{v}=(R\omega+R\omega\cos\omega t,\ 0-R\omega\sin\omega t)$. Από τη σχέση αυτή βλέπουμε πως υπάρχουν δύο ταχύτητες $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2=(R\omega,0)+(R\omega\cos\omega t,\ -R\omega\sin\omega t)$.

Η $\vec{v}_1$ αντιστοιχεί στην ταχύτητα του κέντρου της ρόδας και $\vec{v}_2$ αντιστοιχεί στην ταχύτητα σε σχέση με το κέντρο της ρόδας. Αυτά όμως ακαδημαϊκά. Η απάντηση είναι στο (A)

Η επιτάχυνση θα δίνεται από: $\boxed{\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}\overset{(A)}{=}\left(-R\omega^2\sin\omega t,\ -R\omega^2\cos\omega t\right)}$ (B)

Η επιτάχυνση δηλαδή είναι ως πρός το κέντρο της ρόδας γιατί η ρόδα κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

(B) Απο την έκφραση του διανύσματος θέσης, βλέπουμε ότι η κουκίδα βρίσκεται στο ψηλότερο σημείο της ρόδας όταν $\omega t = \emptyset$ (ή $2\pi, 4\pi, \ldots$) γιατί τότε: $\vec{r} = (0, 2R)$ Γ

Βάζοντας $t = \emptyset$ τότε η εξίσωση Α μας δίνει $\vec{v} = (2R\omega, 0) \Rightarrow \boxed{|\vec{v}| \equiv v = 2R\omega}$

Ενώ η εξίσωση B μας δίνει: $\boxed{a \equiv |\vec{a}| = (0, -R\omega^2) = R\omega^2}$ Δ

Αλλά από τη στιγμή που βρισκόμαστε πάνω σε τόξο ενός στιγμιαίου κύκλου υπάρχει κεντρομόλος επιτάχυνση $a = \frac{v^2}{r}$ Ε όπου $r$ η ακτίνα του στιγμιαίου κύκλου

Άρα από Γ $\wedge$ Δ $\wedge$ Ε $\Rightarrow \frac{v^2}{r} = R\omega^2 \Rightarrow \frac{4R^{\cancel{2}}\cancel{\omega^2}}{r} = \cancel{R}\cancel{\omega^2} \Rightarrow \boxed{r = 4R}$

**12.** Ένα αντικείμενο κινείται πάνω σε μια κυκλική τροχιά ακτίνας R. Τη χρονική στιγμή t = 0, έχει ταχύτητα $V_0$. Από εκείνη τη στιγμή και μετά οι τιμές του μέτρου της κεντρομόλου και εφαπτομενικής επιτάχυνσης είναι ίσες.

(α) Να βρεθεί η ταχύτητα και η απόσταση που διανύει συναρτήσει του χρόνου.
(β) Αν βρήκατε την απάντηση στο ερώτημα (α) θα παρατηρήσετε ότι υπάρχει ένας χαρακτηριστικός χρόνος t στο πρόβλημα αυτό. Ποιος είναι αυτός και γιατί κατά τη γνώμη σας είναι χαρακτηριστικός;

$a_K = \frac{v^2}{R}$ και $a_\varepsilon = \frac{dv}{dt}$. Η άσκηση μας λέει όμως πως μετά το χρόνο $t = 0$ $|a_K| = |a_\varepsilon| \Rightarrow a_\varepsilon = \frac{v^2}{R} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v^2} = \frac{1}{R}dt \Rightarrow \int_{V_0}^{V} \frac{dv}{v^2} = \frac{1}{R}\int_{t=0}^{t} dt \Rightarrow \left(-\frac{1}{v}\right)\Big|_{V_0}^{V} = \frac{1}{R}t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{V_0} - \frac{1}{V} = \frac{t}{R} \Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{\frac{1}{V_0} - \frac{t}{R}}}$$

Για να βρούμε το x: $dx = V\,dt$

$$\int_0^x dx = \int_0^t \frac{dt}{\left(\frac{1}{V_0} - \frac{t}{R}\right)} \Rightarrow x - 0 = -R\ln\left(\frac{1}{V_0} - \frac{t}{R}\right)\Big|_0^t \Rightarrow x = -R\left[\ln\left(\frac{1}{V_0} - \frac{t}{R}\right) - \ln\left(\frac{1}{V_0}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -R\ln\left(\frac{\frac{1}{V_0} - \frac{t}{R}}{\frac{1}{V_0}}\right) \Rightarrow \boxed{x = -R\ln\left(1 - \frac{V_0 t}{R}\right)}$$

(β) Η ειδική τιμή για το χρόνο t είναι $\boxed{T = \frac{R}{V_0}}$ όπου ο όρος του λογαρίθμου γίνεται 0.

Στην τιμή αυτή και το x και το V απειρίζονται και η περιγραφόμενη κίνηση γίνεται αδύνατη.