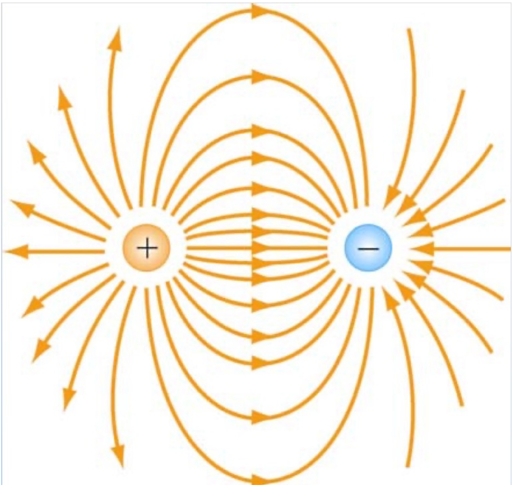
Ηλεκτρισμός

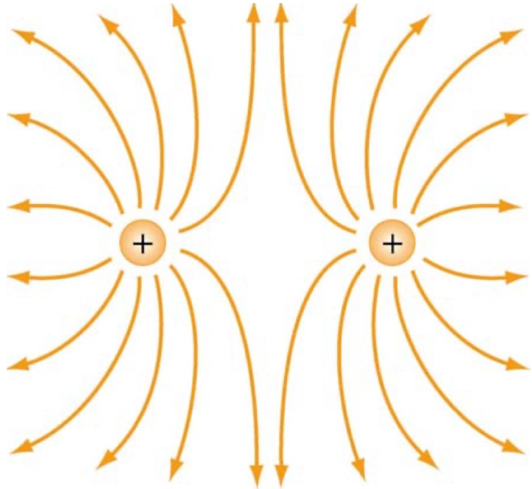
Επανάληψη

Θέματα που καλύφθηκαν

- Ηλεκτρικό Πεδίο και Δυναμικό
  - Διακριτά σημειακά φορτία
  - Συνεχείς κατανομές φορτίων
  - Συμμετρικές κατανομές – Νόμος του Gauss
- Αγωγούς
- Χωρητικότητα
  - Υπολογισμός για διάφορες γεωμετρικά σχήματα
  - Φαινόμενα που εμφανίζονται με διηλεκτρικά υλικά
  - Αποθήκευση ενέργειας
- Ρεύματα
  - Νόμος του Ohm
  - Κανόνες Kirchhoff
  - Ενέργεια σε κυκλώματα

Ηλεκτρικά Πεδία





Ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές

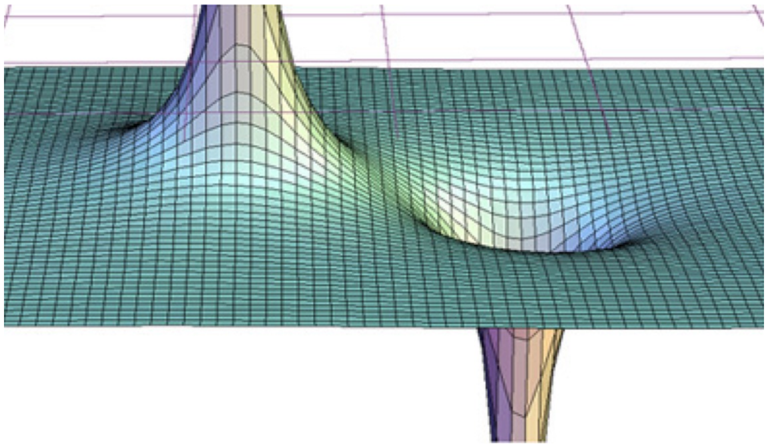
- Νόμος Coulomb:

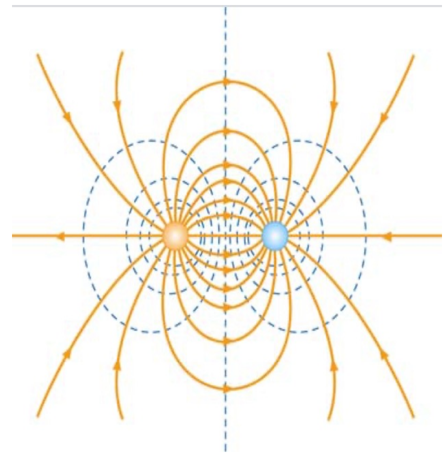
$$\vec{F} = k_e \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r}$$

$$k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

- Η πυκνότητα των γραμμών δίνουν πληροφορία για την ένταση του πεδίου
- Οι γραμμές εμφανίζουν τάσεις (θέλουν να είναι ευθείες)
- Οι γραμμές είναι απωστικές (θέλουν να είναι μακριά από άλλες γραμμές)
- Οι γραμμές ξεκινούν και καταλήγουν σε πηγές (φορτία) ή στο ∞

Ένταση Ηλεκτρικού Πεδίου και Δυναμικό





- Ένα σημειακό ηλεκτρικό φορτίο Q δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο και δυναμικό:

$$\vec{E} = k_e \frac{Q}{r^2}\hat{r} \qquad V = k_e \frac{Q}{r}$$

Για συστήματα φορτίων χρησιμοποίηση της αρχής της επαλληλίας

- Πεδίο $\vec{E}$ και δυναμικό V σχετίζονται μέσω της σχέσης:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \qquad \Delta V_{AB} \equiv V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

- Δυναμικό σε τυχαίο σημείο P : $\Delta V_{\infty\to P} \equiv V_P - \cancelto{0}{V_\infty} = -\int_\infty^P \vec{E}\cdot d\vec{s}$

Ένταση Ηλεκτρικού Πεδίου και Δυναμικό

- Για συστήματα *N* σημειακών φορτίων:

$$\vec{E} = k_e \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \qquad V = \sum_{i=1}^{N} k_e \frac{Q_i}{r_i}$$

Άθροισμα της συνεισφοράς από κάθε φορτίο της διάταξης

- Για συνεχείς κατανομές φορτίων:

$$d\vec{E} = k_e \frac{dq}{r^2} \hat{r} \qquad dV = k_e \frac{dQ}{r}$$

Χωρισμός της κατανομής φορτίου σε πολλά μικρά σημειακά φορτία *dq*, και ολοκλήρωση της συνεισφοράς τους

Συνεχείς κατανομές: Πυκνότητα φορτίου

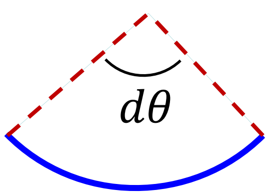
- Πυκνότητες φορτίων ανάλογα με την κατανομή:

$$\lambda = \frac{Q}{L} \qquad \sigma = \frac{Q}{A} \qquad \rho = \frac{Q}{V}$$

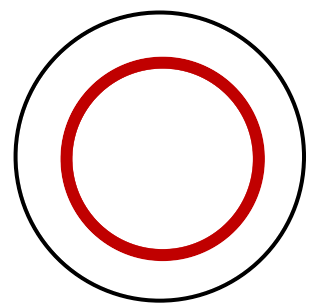
$$dQ = \lambda dL \qquad dQ = \sigma dA \qquad dQ = \rho dV$$

- Μην ξεχνάτε την γεωμετρία του προβλήματος:

$$dL = dx$$



$$dL = R d\theta$$



$$dA = 2\pi r dr$$

$$dV_{\kappa\upsilon\lambda.} = 2\pi r l dr$$

$$dV_{\sigma\varphi.} = 4\pi r^2 dr$$

Ένταση Ηλεκτρικού Πεδίου και Δυναμικό

- Για συστήματα *N* σημειακών φορτίων:

$$\vec{E} = k_e \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \qquad V = \sum_{i=1}^{N} k_e \frac{Q_i}{r_i}$$

Άθροισμα της συνεισφοράς από κάθε φορτίο της διάταξης

- Για συνεχείς κατανομές φορτίων:

$$d\vec{E} = k_e \frac{dq}{r^2} \hat{r} \qquad dV = k_e \frac{dQ}{r}$$

Χωρισμός της κατανομής φορτίου σε πολλά μικρά σημειακά φορτία *dq*, και ολοκλήρωση της συνεισφοράς τους

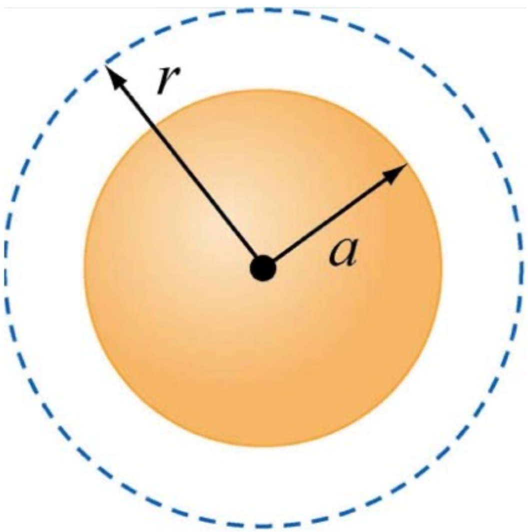
- Φορτισμένα αντικείμενα που παρουσιάζουν συμμετρίες:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\pi\varepsilon\rho.}}{\varepsilon_0} \qquad \Delta V \equiv -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

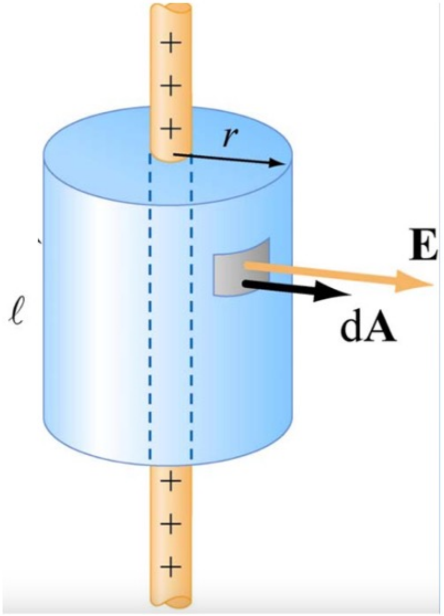
Χρήση του νόμου του Gauss για εύρεση του πεδίου $\vec{E}$ παντού στο χώρο.

Ολοκλήρωση μετά για την εύρεση του δυναμικού.

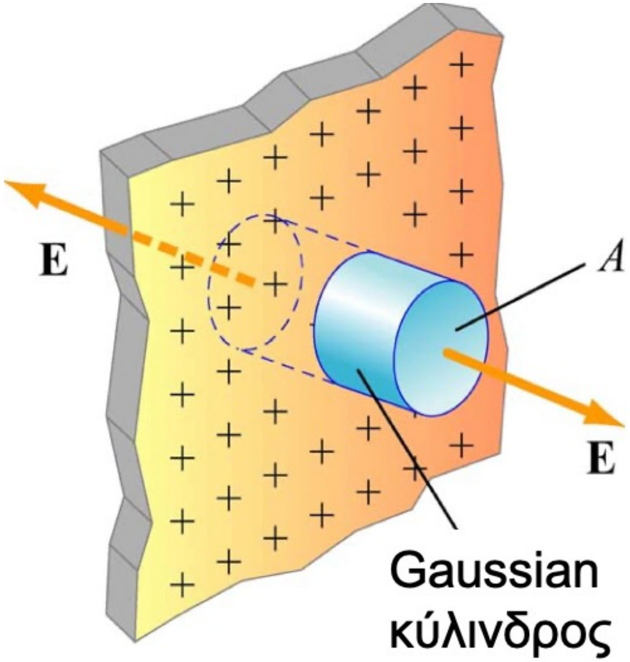
Νόμος του Gauss: $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{περ.}}{\varepsilon_0}$



Σφαιρική συμμετρία



Κυλινδρική συμμετρία



Επίπεδη συμμετρία

Ένταση Πεδίου και Δυναμικό: Φαινόμενα

- Αν εισαγάγουμε ένα φορτισμένο σωματίδιο, q, σε ηλεκτρικό πεδίο τότε:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

- Για να μετακινήσουμε ένα φορτισμένο σωματίδιο, q, σε ηλεκτρικό πεδίο:

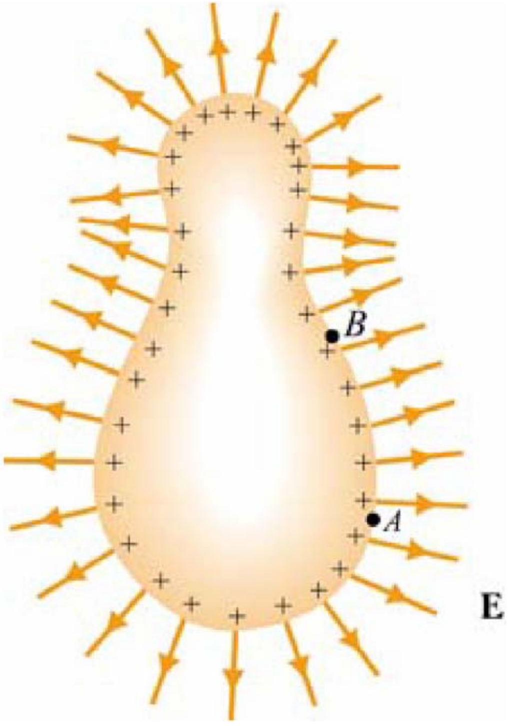
$$W = \Delta U = q\Delta V$$

Αγωγοί σε ηλεκτροστατική ισορροπία

- Οι αγωγοί είναι ισοδυναμικά αντικείμενα:
  - $\vec{E} = \vec{0}$ στο εσωτερικό τους
  - $Q_{tot} = 0$ στο εσωτερικό τους
  - $\vec{E}$ κάθετη στην επιφάνειά τους
  - Φορτίο στην επιφάνεια τους δημιουργεί πεδίο:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

  - Θωράκιση: τι συμβαίνει στο εσωτερικό δεν επικοινωνείται στο εξωτερικό



Πυκνωτές

- Χωρητικότητα: $C = \dfrac{Q}{V}$

- Για τον υπολογισμό:

  (1) Πρόσθεση τυχαίου φορτίου Q

  (2) Υπολογισμός πεδίου E

  (3) Υπολογισμός ΔV

- Συνδεσμολογία:

  - Σε σειρά

$$\frac{1}{C_{\iota\sigma o\delta.,\sigma\varepsilon\iota\rho\acute{\alpha}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots \frac{1}{C_N}$$

  - Παράλληλα

$$C_{\iota\sigma o\delta.,\pi\alpha\rho\alpha\lambda.} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N$$

- Ενέργεια:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}Q|\Delta V| = \frac{1}{2}C|\Delta V|^2 = \iiint u_E d^3r = \iiint \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d^3r$$

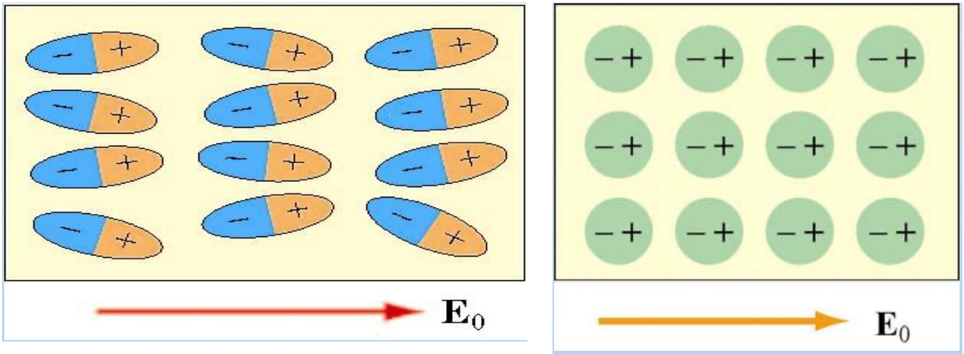
  - Πυκνότητα ενέργειας: $u_E = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

Διηλεκτρικά

- Τα διηλεκτρικά προκαλούν τοπική ελάττωση του ηλεκτρικού πεδίου

$$E = \frac{E_0}{\kappa}$$

όπου: $\kappa = (1 + \chi_e) \geq 1$



- Εισαγωγή διηλεκτρικού σε πυκνωτή: $C = \kappa C_0$

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|}$$

Αν ο πυκνωτής είναι συνδεδεμένος σε μπαταρία:

Q αυξάνεται

Αν ο πυκνωτής δεν είναι συνδεδεμένος σε μπαταρία:

V ελαττώνεται

Ρεύμα – Αντίσταση – Νόμος του

- Ρυθμός μεταβολής φορτίου που περνά από εγκάρσια επιφάνεια: $I = \frac{dq}{dt}$

  - Σύνδεση με την ταχύτητα κίνησης (ταχύτητα ολίσθησης) φορέων σε αγωγό:

    $I = nqAv_d$ όπου: *A* διατομή αγωγού και *n* αριθμός φορέων/όγκο

  - Πυκνότητα ρεύματος: $\vec{J} = nqv_d = \frac{ne^2}{m_e}\tau\vec{E} = \sigma\vec{E}$ όπου: σ ειδική αγωγιμότητα

- Νόμος του Ohm: $\Delta V = RI$ όπου: $R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{A} = \rho\frac{l}{A}$ αντίσταση

- Ρυθμός απώλειας ενέργειας: $P = I^2R = \frac{\Delta V^2}{R} = (\Delta V)I$

Κυκλώματα

- Συνδεσμολογία αντιστάσεων:
  - Σε σειρά

$$R_{\iota\sigma o\delta.,\sigma\epsilon\iota\rho\acute{\alpha}.} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N$$

Ρεύμα ίδιο

  - Παράλληλα

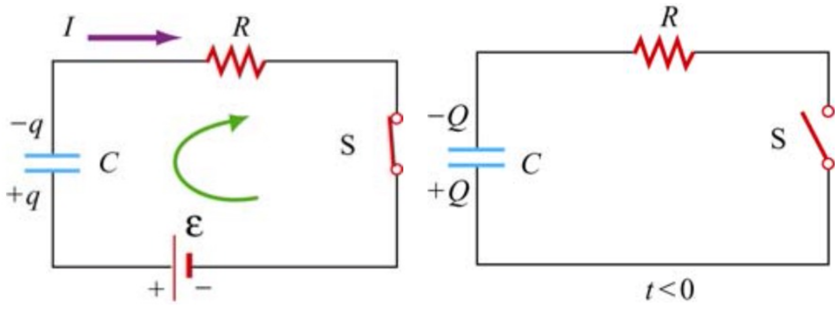
$$\frac{1}{R_{\iota\sigma o\delta.,\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\lambda.}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots \frac{1}{R_N}$$

Διαφορά δυναμικού ίδια:

- Κανόνες του Kirchhoff:

(1ος) Σε κάθε κόμβο: $\sum I_i = 0$

(2ος) Σε κάθε βρόχο: $\sum V_i = 0$



- Κυκλώματα *RC*:
  - Φόρτιση $Q(t) = Q_{max}\left[1 - e^{-t/RC}\right];$ $V(t) = V_{max}\left[1 - e^{-t/RC}\right]$

$$I(t) = I_0 e^{-t/RC}$$

  - Εκφόρτιση $Q(t) = Q_{max} e^{-t/RC};$ $V(t) = V_{max} e^{-t/RC}$

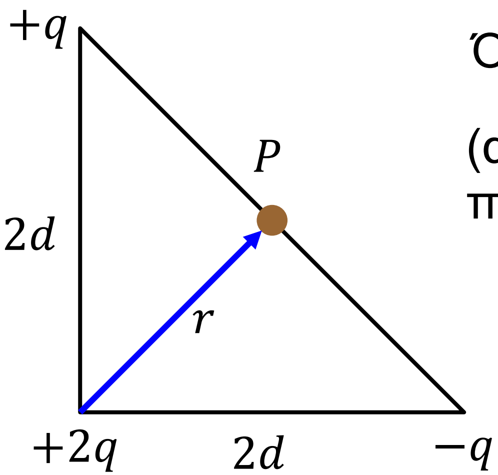
Ερώτηση: Σημειακά φορτία

Ένα ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο πλευράς 2*d* έχει φορτία *q*, 2*q* και -*q* στις κορυφές του.

(α) Ποιο το ηλεκτρικό φορτίο στο σημείο *P* στην ευθεία που συνδέει το *q* με το -*q*

(β) Ποιο το δυναμικό στο σημείο *P* υποθέτοντας ότι *V*(∞) = 0

(γ) Πόσο έργο απαιτείται για να μεταφερθεί φορτίο -5*Q* από το ∞ στο *P*;



Όλα τα φορτία βρίσκονται σε απόσταση: $r = d\sqrt{2}$ από το *P*

(α) Υπολογισμός του πεδίου από την επαλληλία όλων των πεδίων από κάθε φορτίο στο σημείο *P*

$$\vec{E} = k_e \sum_{i=1}^{3} \frac{Q_i}{r_i^2}\hat{r}_i = k_e \sum_{i=1}^{3} \frac{Q_i}{r_i^3}\vec{r}_i \Rightarrow \begin{cases} E_x = k_e \sum_{i=1}^{3} \frac{Q_i}{r_i^3} x_i \\ E_y = k_e \sum_{i=1}^{3} \frac{Q_i}{r_i^3} y_i \end{cases}$$

$$E_x = \frac{k_e}{r^3}\sum_{i=1}^{3} Q_i x_i = \frac{k_e}{r^3}[qd + 2qd + (-q)(-d)] \Rightarrow E_x = \frac{k_e}{d^3 2^{3/2}} 4qd \Rightarrow E_x = \frac{k_e q}{\sqrt{2}d^2}$$

$$E_y = \frac{k_e}{r^3}\sum_{i=1}^{3} Q_i y_i = \frac{k_e}{r^3}[+q(-d) + 2qd + (-q)d] \Rightarrow E_y = \frac{k_e}{d^3 2^{3/2}} 0 \Rightarrow E_y = 0$$

Ερώτηση: Σημειακά φορτία

(β) Υπολογισμός του δυναμικού στο σημείο *P*

$$V = k_e \sum_{i=1}^{3} \frac{Q_i}{r_i} = k_e \left[\frac{q}{r} + \frac{2q}{r} - \frac{q}{r}\right] \Rightarrow V = \frac{2k_e q}{r}$$

(γ) Υπολογισμός του έργου:

$$W = \Delta U = (-5Q)\Delta V \Rightarrow W = (-5Q)\frac{2k_e q}{r} \Rightarrow W = -10\frac{k_e Q q}{r}$$

Ερώτηση: Κατανομή φορτίων σε κυκλικό δακτύλιο

Μια λεπτή μη αγώγιμη ράβδος έχει ομοιόμορφη κατανομή φορτίου πυκνότητας λ και είναι λυγισμένη σε σχήμα κυκλικού δακτυλίου ακτίνας *R*

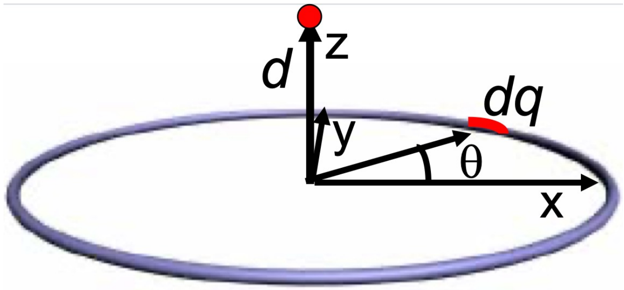
(α) Επιλέξτε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων

(β) Επιλέξτε ένα στοιχειώδες φορτίο *dq*. Βρείτε μια σχέση μεταξύ *dq*, *λ* και μήκους στο οποίο αντιστοιχεί το *d*q.

(γ) Βρείτε τις συνιστώσες του πεδίο από το φορτίο *dq* σε ένα σημείο σε απόσταση *d* από τον δακτύλιο και στον άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο του δακτυλίου και περνά από το κέντρο του.

(δ) Ποιο το μέτρο και η διεύθυνση του πεδίου στο σημείο αυτό

(ε) Ποιο το δυναμικό στο σημείο αυτό αν *V*(∞) = 0;



(α) Σύστημα συντεταγμένων όπως στο σχήμα

(β) $dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$

(γ) $d\vec{E} = \dfrac{k dq \vec{r}}{r^3}$ αλλά $\vec{r} = -R\cos\theta\hat{\imath} - R\sin\theta\hat{\jmath} + d\hat{k}$

$$|\vec{r}| = \sqrt{R^2 + d^2}$$

Ερώτηση: Κατανομή φορτίων σε κυκλικό δακτύλιο

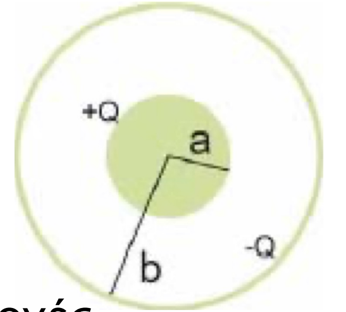
(δ) Οι οριζόντιες συνιστώσες (E_x και E_y) μηδενίζονται λόγω συμμετρίας οπότε χρειάζεται να υπολογιστεί μόνο η E_z

$$E_z = \int dE_z = k_e \int \frac{dq}{r^3} d = \frac{k_e d}{r^3} \int_0^{2\pi} \lambda R d\theta \Rightarrow E_z = \frac{k_e d}{r^3} \lambda R 2\pi$$

(ε) Το δυναμικό βρίσκεται με τον ίδιο τρόπο:

$$V = \int dV = k_e \int \frac{dq}{r} = \frac{k_e}{r} \int_0^{2\pi} \lambda R d\theta \Rightarrow V = \frac{2\pi\lambda R k_e}{r}$$

Σφαιρικός πυκνωτής



Μια συμπαγής αγώγιμη σφαίρα ακτίνας *a* έχει φορτίο +*Q* και περιβάλλεται από λεπτό αγώγιμο σφαιρικό φλοιό εσωτερικής ακτίνα *b* και φορτίου –*Q* .

(α) Ποιο το μέτρο και η κατεύθυνση της έντασης του πεδίου στις περιοχές

$r<a$ $\quad a<r<b$ $\quad r>b$

(β) Ποιο το δυναμικό V(r) στις 3 προηγούμενες περιοχές. Θεωρήστε ότι $V(\infty) = 0$

(γ) Ποια η διαφορά δυναμικού $\Delta V=V(b) – V(a)$ μεταξύ του εξωτερικού φλοιού και της εσωτερικής σφαίρας.

(δ) Ποια η χωρητικότητα του σφαιρικού πυκνωτή;

(ε) Αν ένα θετικό φορτίο +2Q τοποθετηθεί οπουδήποτε στην εσωτερική σφαίρα ακτίνας a, τι φορτίο θα εμφανιστεί στην εξωτερική επιφάνεια του λεπτού σφαιρικού φλοιού που έχει εσωτερική ακτίνα b;

Σφαιρικός πυκνωτής

(α) Από συμμετρία, το πεδίο $\vec{E}$ είναι καθαρά ακτινικό.

Επιλέγουμε σφαιρική επιφάνεια Gauss

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\pi\varepsilon\rho.}}{\varepsilon_0} \Rightarrow EA = E4\pi r^2 = \frac{q_{\pi\varepsilon\rho.}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \begin{cases} r < a: \quad q_{\pi\varepsilon\rho.} = 0 \Rightarrow E = 0 \\ r > b: \quad q_{\pi\varepsilon\rho.} = 0 \Rightarrow E = 0 \\ a < r < b: \quad q_{\pi\varepsilon\rho.} = +Q \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{k_e Q}{r^2}\hat{r} \end{cases}$$

(β) Για το δυναμικό ξεκινάμε από όπου το ξέρουμε, V(∞) = 0.

$$r > b: \quad E = 0 \quad V = \text{σταθ.} = 0$$

$$a < r < b: \quad \vec{E} = \frac{k_e Q}{r^2}\hat{r} \quad V(r) = -\int_b^r \vec{E} \cdot d\vec{s} = k_e Q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)$$

$$r < a: \quad E = 0 \quad V = \text{σταθ.} = V(a) = k_e Q \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

(γ) Για τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο αγώγιμων επιφανειών:

$$V(r) = V(b) - V(a) = k_e Q \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

Σφαιρικός πυκνωτής

(δ) Η χωρητικότητα είναι: $C = Q/V \Rightarrow C = \dfrac{1}{k_e}\dfrac{ab}{b-a}$

(ε) Αν τοποθετήσουμε επιπλέον φορτίο +2Q στην εσωτερική σφαίρα, τότε θα επαχθεί επιπλέον φορτίο -2Q στην εσωτερική επιφάνεια του εξωτερικού σφαιρικού φλοιού και επομένως φορτίο +2Q στην εξωτερική επιφάνειά του