Κίνηση σε μία διάσταση

- **Ανακεφαλαιώνοντας**

θέσης τροχιάς **x**

μετατόπισης $\Delta x = x_f - x_i$,

χρονικού διαστήματος $\Delta t = t_f - t_i$,

παράγωγος

μέση ταχύτητα

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

στιγμιαία ταχύτητα

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

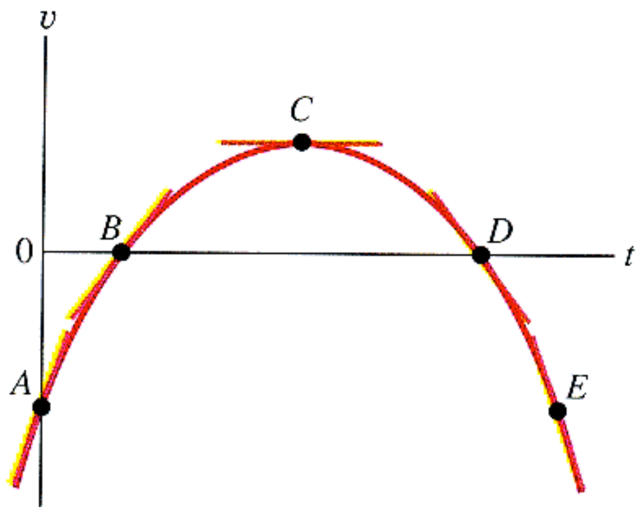
μέση επιτάχυνση

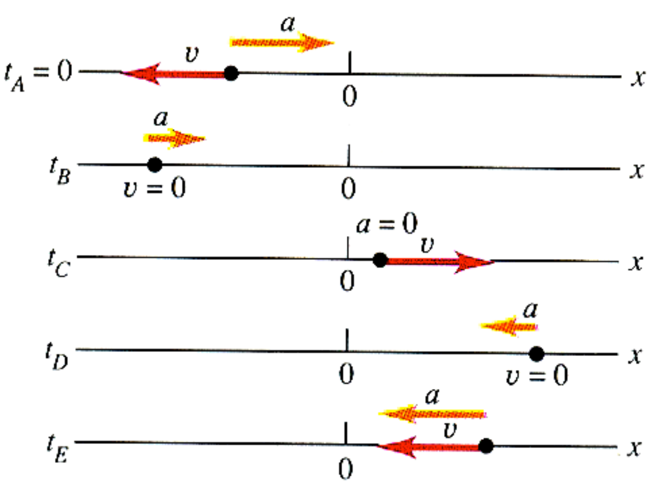
$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

στιγμιαία επιτάχυνση

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

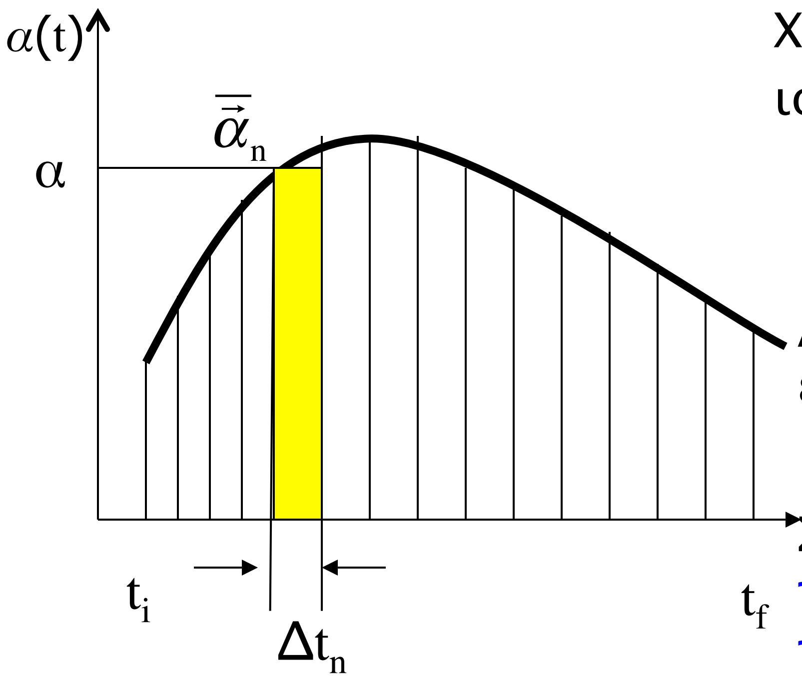
Εύρεση της επιτάχυνσης σε ένα v-t γράφημα





- Από το A στο B, $v < 0$ αλλά αυξάνει και η κλίση άρα και επιτάχυνση είναι θετικές
- Το σωματίδιο "φρενάρει" μέχρι το B οπότε $v = 0$ (σταματά στιγμιαία) αλλά εξακολουθεί να επιταχύνεται αφου η κλίση είναι μη μηδενική
- Από το B στο C, $v > 0$ και αυξάνει, η κλίση και επιτάχυνση είναι θετικές
- Στο C, $v = \max$ αλλά η επιτάχυνση είναι 0
- Από το C στο D, $v > 0$ αλλά ελαττώνεται και η επιτάχυνση είναι αρνητική. Το σώμα επιβραδύνει
- Στο D, $v = 0$ και σταματά αλλά δέχεται επιτάχυνση
- Από το D στο E, $v < 0$ και συνεχίζει να ελαττώνεται και η επιτάχυνση είναι αρνητική. Το σώμα επιταχύνεται

- Αν ξέρουμε την επιτάχυνση $\boldsymbol{\alpha}$, μπορούμε να βρούμε από τις προηγούμενες εξισώσεις την $\mathbf{v}$ και την $\mathbf{x}$ τη στιγμή t
- Πώς?
  - Χρησιμοποιώντας την έννοια του ολοκληρώματος
  - Γραφικά πρώτα



Χωρίζουμε το χρονικό διάστημα σε πολλά ισόχρονα διαστήματα Δt_n. Ξέρουμε ότι

$$\bar{\vec{\alpha}}_n = \Delta v_n / \Delta t \Rightarrow \Delta v_n = \bar{\vec{\alpha}}_n \Delta t_n \Leftarrow$$ Εμβαδό!!

Αθροίζοντας όλα τα εμβαδά απο $t_i \rightarrow t_f$ έχουμε:

$$\Delta v = \sum_n \bar{\vec{\alpha}}_n \Delta t_n$$

Στο όριο $n \rightarrow \infty$, δηλαδή $\Delta t_n \rightarrow 0$ η μεταβολή της ταχύτητας δίνεται από το εμβαδό της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη επιτάχυνσης - χρόνου

$$\Delta v = \lim_{n \to \infty} \sum_n \vec{\alpha}_n \Delta t_n$$

Στιγμιαία και όχι μέση τιμή α

- Αν είναι γνωστή η καμπύλη επιτάχυνσης – χρόνου, η μεταβολή της ταχύτητας βρίσκεται από το εμβαδό της επιφάνειας.

Το παραπάνω ορισμένο ολοκλήρωμα γράφεται

$$\lim_{n\to\infty}\sum_n a_n\,\Delta t_n = \int_{t_i}^{t_f} a(t)\,dt$$

- Γνωρίζοντας τη συνάρτηση $a(t)$ μπορούμε υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα για τυχαία χρονική στιγμή t.

$$a(t)=\frac{d\mathrm{v}(t)}{dt}\Rightarrow \quad a(t)dt = d\mathrm{v}(t)\Rightarrow \int_{t_i}^{t} a(t)dt = \int_{\mathrm{v}_i}^{\mathrm{v}_t} d\mathrm{v} = \mathrm{v}_t - \mathrm{v}_i = \mathrm{v}(t)-\mathrm{v}(t_i)$$

Επομένως σε μια χρονική στιγμή $\mathbf{t}$ η ταχύτητα είναι

$$\mathrm{v}(t)=\int_{t_i}^{t} a(t)dt + \mathrm{v}(t_i)$$

Αν $t_i = 0$ συνήθως γράφουμε $\mathrm{v}(t_i) = \mathbf{v_0}$ ➡

$$\mathrm{v}(t)=\int_0^t a(t)dt + \mathrm{v}_0$$

- Κατά τον ίδιο τρόπο γνωρίζοντας την ταχύτητα μπορούμε να βρούμε την μετατόπιση

$$\mathrm{v}(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^t \mathrm{v}(t)\,dt = \int_{x_i}^{\mathrm{x}} dx = x - x_i = x(t) - x(t_i) = x(t) - x_0$$

$$\boxed{\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_0^t \mathrm{v}(t)\,dt}$$

Δύο εξισώσεις κίνησης ανάλογα με το πρόβλημα που δίνεται

$$\mathrm{v}(t) = \int_0^t a(t)\,dt + \mathrm{v}_0 \quad \text{(A)} \qquad\qquad x(t) = x_0 + \int_0^t \mathrm{v}(t)\,dt \quad \text{(B)}$$

Αν v(t) είναι σταθερή π.χ. $\mathrm{v} = \mathrm{v}_0$ $\xrightarrow{\text{(B)}}$ $x(t) = x_0 + \mathrm{v}_0 t$

Κίνηση σε μία διάσταση - Ανακεφαλαίωση

Διάνυσμα θέσης τροχιάς: $\vec{r} = x\hat{i}$ (για >1–διαστάσεις: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$)

Μετατόπιση: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = (x_f - x_i)\hat{i}$

διαδρομή

Χρονικό διάστημα $\Delta t = t_f - t_i$

Μέση ταχύτητα $\boxed{\bar{\vec{\mathrm{v}}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i}}$

Προσοχή $\langle \mathrm{v} \rangle = \frac{|d|}{at}$ Βαθμωτό μέγεθος

Στιγμιαία ταχύτητα $\boxed{\vec{\mathrm{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i}}$

παράγωγος

Μέση επιτάχυνση $\boxed{\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{\mathrm{v}}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{\mathrm{v}}(t+\Delta t) - \vec{\mathrm{v}}(t)}{\Delta t}}$

Στιγμιαία επιτάχυνση $\boxed{\vec{a}(\mathrm{t}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\mathrm{v}}(t+\Delta t) - \vec{\mathrm{v}}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}(t)}{dt}}$

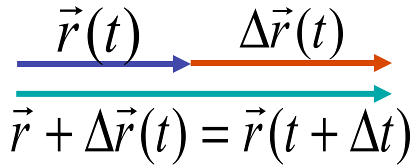
Δύο εξισώσεις κίνησης ανάλογα με το πρόβλημα που δίνεται

$\mathrm{v(t)} = \int_0^t a(t)dt + \mathrm{v}_0$ (A) $x = x_0 + \int_0^t \mathrm{v}(t)dt$ (B)

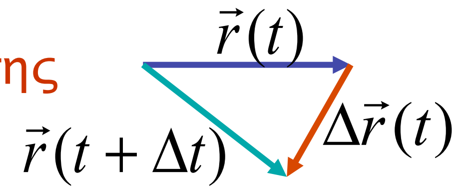
Σημαντικά σημεία

- Από τον ορισμό της στιγμιαίας ταχύτητας $\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}$

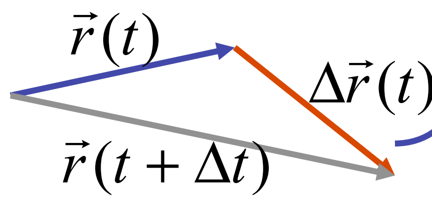
Αλλαγή μέτρου

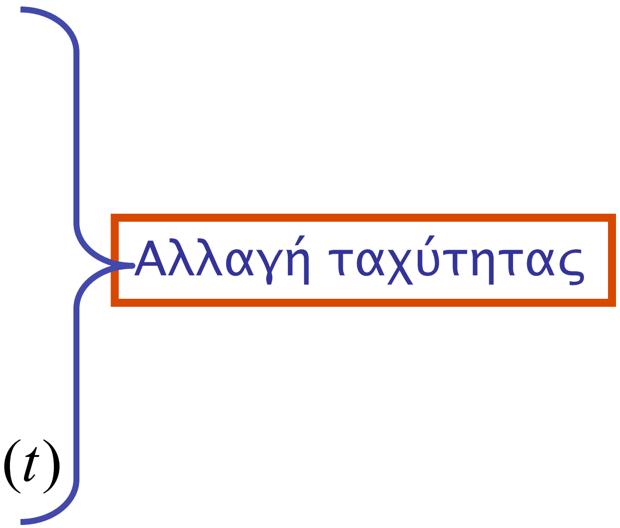


Αλλαγή κατεύθυνσης



Αλλαγή και μέτρου και κατεύθυνσης





- Από τον ορισμό της στιγμιαίας επιτάχυνσης $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}$

Αλλαγή στο μέτρο ή διεύθυνση ή και στα δυό μαζί της ταχύτητας ενός σώματος έχει σαν αποτέλεσμα την επιτάχυνση του σώματος

Αν $\Delta\vec{\mathrm{v}} > 0$ τότε το σώμα επιταχύνεται $\vec{a} = a_x\hat{i}$

Αν $\Delta\vec{\mathrm{v}} < 0$ τότε το σώμα επιβραδύνεται $\vec{a} = -a_x\hat{i}$

Κίνηση με σταθερή επιτάχυνση, α(t) =σταθ.

Από την εξίσωση κίνησης $\mathrm{v} = \int_{t_0}^{t} a(t)dt + \mathrm{v}_0 \Rightarrow \mathrm{v} = at + \mathrm{v}_0$ (1)

Αντικαθιστώντας στην $x = x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{v}(t)dt$

$$x = x_0 + \int_0^t (at + \mathrm{v}_0)dt = x_0 + \int_0^t (at)dt + \int_0^t \mathrm{v}_0 dt$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}at^2 + \mathrm{v}_0 t \qquad (2)$$

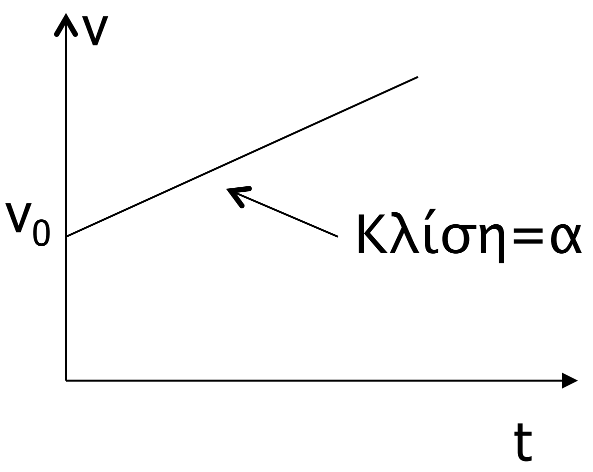
Λύνοντας ως προς t στην εξίσωση (1) και αντικαθιστώντας στην (2):

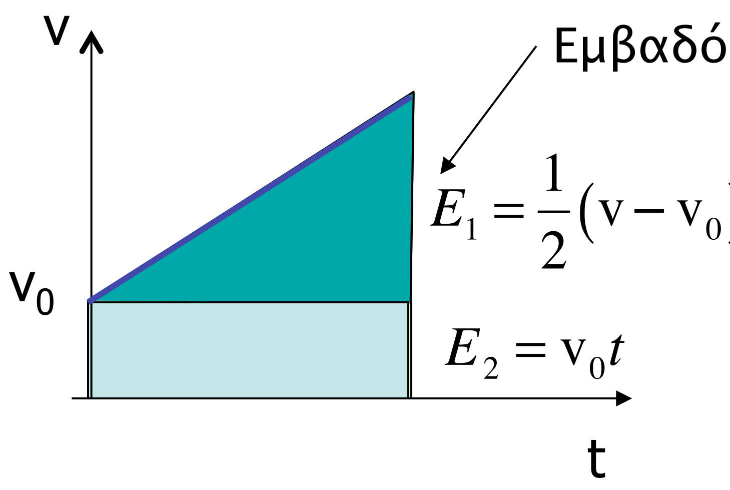
$$2a(x - x_0) = \mathrm{v}^2 - \mathrm{v}_0^2 \qquad (3)$$

Λύνοντας ως προς α (επιτάχυνση) στην (1) και αντικαθιστώντας στην (2)

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(\mathrm{v} + \mathrm{v}_0)t \qquad (4)$$

Γεωμετρική ερμηνεία





$$E_1 = \frac{1}{2}(\mathrm{v} - \mathrm{v}_0)t = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$E_2 = \mathrm{v}_0 t$$

Ολική επιφάνεια κάτω από την καμπύλη

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2}at^2 + \mathrm{v}_0 t$$

Πιο εύκολα...

$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{x\text{-}x_0}{t\text{-}t_0} = \frac{x - x_0}{t} \Rightarrow x = x_0 + \bar{\mathrm{v}}t \qquad (1)$$

$$\bar{a} = a = \frac{\mathrm{v}\text{-}\mathrm{v}_0}{t} \Rightarrow \mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + at \qquad (2)$$

$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{v} + \mathrm{v}_0}{2} \qquad \text{αφού η v γραμμική} \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας την (3) στην (1) έχουμε

$$x = x_0 + \bar{\mathrm{v}}t = x_0 + \left(\frac{\mathrm{v} + \mathrm{v}_0}{2}\right)t = x_0 + \left(\frac{\mathrm{v}_0 + \mathrm{v}_0 + at}{2}\right)t \Rightarrow x = x_0 + \mathrm{v}_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Θέση συναρτήσει χρόνου - Παράδειγμα

- Ποια η θέση του σώματος για t = 3s?

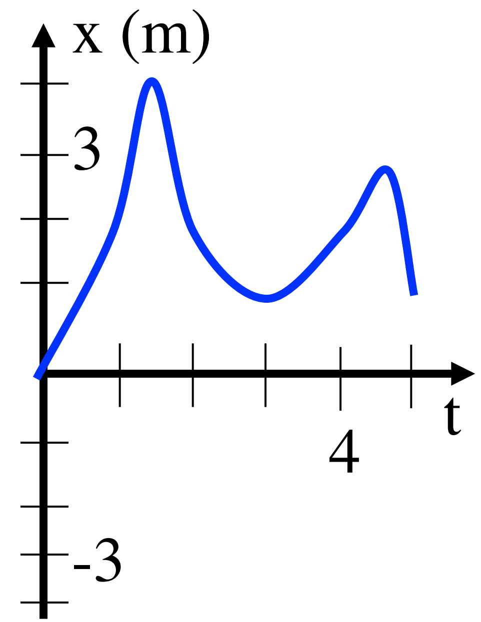
  x(t=3) = 1m

- Ποια η μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα μεταξύ t = 5 και t = 1s?

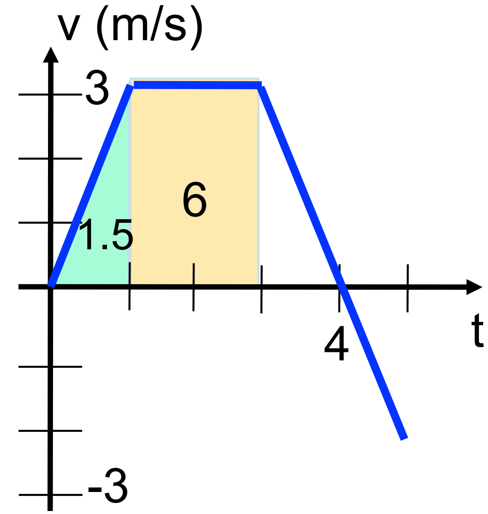
  $$\left.\begin{array}{l} x(t=5) = 1m \\ x(t=1) = 2m \end{array}\right\} \text{Μετατόπιση} = \Delta x = 1 - 2 = -1m$$

- Ποια η μέση ταχύτητα του σώματος στο χρονικό διάστημα t = 5 και t = 1s?

  $$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-1}{4} = -0.25 m/s$$



Ταχύτητα συναρτήσει χρόνου - Παράδειγμα



- Ποια η ταχύτητα του σώματος για t = 2s?

  $\upsilon(t=2) = 3m/s$

- Ποια η μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα μεταξύ t = 3 και t = 0s?

  Εύρεση εμβαδού: $\begin{cases} t=0 \rightarrow 1: \; E_1 = 0.5x(1s)x(3m/s) = 1.5m \\ t=1 \rightarrow 3: \; E_2 = (2s)x(3m/s) = 6.0m \end{cases}$

  Μετατόπιση: $E_{o\lambda} = E_1 + E_2 = 1.5 + 6 \rightarrow \Delta x = 7.5m$

- Ποια η μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα μεταξύ t=0 και 3s?

  $$\bar{\upsilon} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{7.5}{3} = 2.5m/s$$

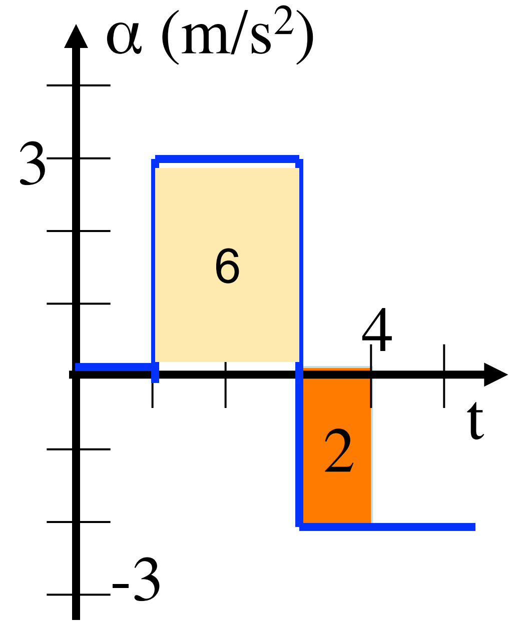
- Ποια η μεταβολή της ταχύτητας στο χρονικό διάστημα μεταξύ t=3 και 5s?

  $$\Delta\upsilon = \upsilon(t=5) - \upsilon(t=3) = -2 - 3 = -5m/s$$

- Ποια η μέση επιτάχυνση στο χρονικό διάστημα μεταξύ t=3 και 5s?

  $$a = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{-5m/s}{2} \Rightarrow a = -2.5m/s^2$$

Επιτάχυνση συναρτήσει χρόνου - Παράδειγμα



- Ποια η επιτάχυνση του σώματος για t = 4s?

  $x(t=4) = -2m/s^2$

- Ποια η μεταβολή της ταχύτητας του σώματος στο χρονικό διάστημα μεταξύ t = 4 και t = 1s?

Μεταβολή ταχύτητας = Εμβαδό κάτω από τη καμπύλη:

Εύρεση εμβαδού: $\begin{cases} t=1 \rightarrow 3: \; E_1=(2s)x(3m/s^2)=6.0m/s \\ t=3 \rightarrow 4: \; E_2=(1s)x(-2m/s^2)=-2.0m/s \end{cases}$

$E_{ολ} = E_1 + E_2 = 6.0 – 2.0 \rightarrow Δυ = 4.0m/s$

Ερώτηση:

- Είναι δυνατό ένα σώμα να έχει θετική ταχύτητα και την ίδια χρονική στιγμή να έχει αρνητική επιτάχυνση ?

NAI

Ναι γιατί μπορεί να έχει θετική ταχύτητα καθώς επιβραδύνεται

OXI

- Αν η ταχύτητα του σώματος δεν είναι μηδέν μπορεί η επιτάχυνσή του να είναι κάποτε μηδέν

NAI

Μηδενική επιτάχυνση σημαίνει σταθερή ταχύτητα

OXI

- Αν η μέση ταχύτητα ενός σώματος που εκτελεί μονοδιάστατη κίνηση είναι θετική μπορεί η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος για κάποιο χρονικό διάστημα να είναι αρνητική ?

NAI

Φανταστείτε ότι κινήστε 5Km προς τη θετική διεύθυνση, κατόπιν σταματάτε και κινείστε 3Km προς το μηδέν (αρνητική διεύθυνση)
Η μέση ταχύτητα είναι θετική

OXI

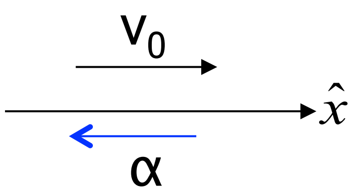
Παράδειγμα

Ένα σώμα κινείται σε 1-διάσταση

Αρχικές συνθήκες:

για $t=0$, $x_0 = 10m$, $v_0=15m/s$, $\alpha=-5m/sec^2$, ως προς $\hat{x}$

➡ Ποια η ταχύτητα **v** και διάνυσμα θέσης **x** του σώματος μετά από 8 sec



Το σώμα με $v_0 > 0$ ελαττώνει ταχύτητα αφού $\alpha < 0$

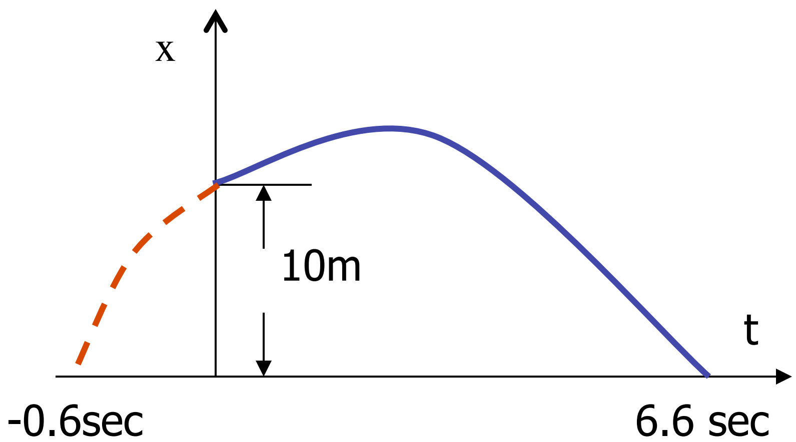
$$v(t) = v_0 + at \Rightarrow v(t=8) = 15 + (-5)\times 8 = -25m/s$$

Η ταχύτητα του σώματος ελαττώνεται μέχρι να μηδενιστεί και κατόπιν αλλάζει φορά κίνησης (προς τη -x διεύθυνση)

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow x(t=8s) = 10 + \frac{1}{2}(-5)\times 8^2 + 15\times 8 = -30m$$

Παράδειγμα (συνέχεια) – Μερικές ερωτήσεις

Πότε το σώμα περνά από x = 0?



$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

$$x(t) = 10 - \frac{5}{2}t^2 + 15t = 0$$

Δευτεροβάθμια εξίσωση με λύσεις

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\gamma}}{2a}$$

$$t_{1,2} = 3 \pm \sqrt{13} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 6.6s \\ t_2 = -0.6s \end{cases}$$

Ποια από τις 2 απαντήσεις είναι φυσική?

Εξαρτάται από το πρόβλημα. Τι συνέβη τη χρονική στιγμή -0.6 sec;
Πιθανόν να ρίξαμε το σώμα προς τα πάνω.
Επομένως t_2=-0.6s είναι ο χρόνος που χρειάστηκε για να αποκτήσει την αρχική ταχύτητα u_0= 15m/s και να βρεθεί στην αρχική θέση x_0=10m.

Κίνηση με μεταβαλλόμενη επιτάχυνση, α = *f*(t)

Στην περίπτωση αυτή πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ολοκληρώματα:

- Έστω α(t) = Kt και ότι v_0 = 0.0 m/s τη χρονική στιγμή t=0

$$\mathrm{v(t)} = \int_0^t a(t)\,dt + \mathrm{v}_0 \;=\int_0^t Kt\,dt \;\Rightarrow \mathrm{v}(t) = \frac{1}{2}Kt^2$$

- Τι συμβαίνει με το x(t) ?

Έστω x_0 = 0.0 m τότε

$$x = x_0 + \int_0^t \mathrm{v}(t)\,dt = \int_0^t \mathrm{v(t)}\,dt \;=\int_0^t \frac{1}{2}Kt^2\,dt \;\Rightarrow x = \frac{1}{6}Kt^3$$

2o Mini Exam

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

Έτοιμοι;