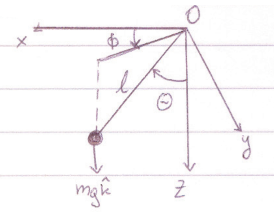
ΦΥΣ 133 – Παραδείγματα – Διάλεξη 10

1. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης του σφαιρικού εκκρεμούς. Το σφαιρικό εκκρεμές αποτελείται από μια μάζα m στερεωμένη σε ένα σταθερό σημείο O μέσω μιας αβαρούς στερεάς ράβδου μήκους *l*.



Το σφαιρικό εκκρεμές αποτελείται από μιά μάζα m στερεωμένη στο άκρο μιάς αβαρούς ράβδου μήκους l η οποία είναι στερεωμένη σε ακίνητο σημείο στο άλλο άκρο της. Συνήθως παίρνουμε το ακίνητο σημείο σαν την αρχή του συστήματος συντεταγμένων.

Θεωρούμε τις σφαιρικές συντεταγμένες για σύστημα γενικευμένων συντεταγμένων
Η σχέση μετασχηματισμού μεταξύ καρτεσιανών κ σφαιρικών συντεταγμένων είναι:

$$\vec{r} = r\cos\phi\sin\theta\,\hat{i} + r\sin\phi\sin\theta\,\hat{j} + r\cos\theta\,\hat{k}$$

Γενικότητες: Οι διανυσματικές μονάδες $\hat{\varepsilon}_r$, $\hat{\varepsilon}_\phi$ και $\hat{\varepsilon}_\theta$ θα είναι:

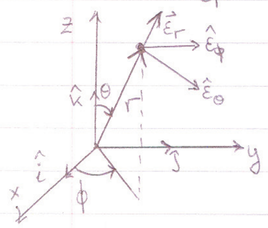
$$\hat{\varepsilon}_r = \frac{\partial\vec{r}/\partial r}{|\partial\vec{r}/\partial r|} = \frac{\cos\phi\sin\theta\,\hat{i} + \sin\phi\sin\theta\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k}}{1}$$

$$\hat{\varepsilon}_\phi = \frac{\partial\vec{r}/\partial\phi}{|\partial\vec{r}/\partial\phi|} = \frac{-r\sin\phi\sin\theta\,\hat{i} + r\cos\phi\sin\theta\,\hat{j}}{r\sin\theta} = -\sin\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j}$$

$$\hat{\varepsilon}_\theta = \frac{\partial\vec{r}/\partial\theta}{|\partial\vec{r}/\partial\theta|} = \frac{r\cos\phi\cos\theta\,\hat{i} + r\sin\phi\cos\theta\,\hat{j} - r\sin\theta\,\hat{k}}{r} = \cos\phi\cos\theta\,\hat{i} + \sin\phi\cos\theta\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{k}$$

Το διάνυσμα θέσης ενός σημείου σε σφαιρικές συντεταγμένες θα γράφεται

$$\vec{r} = r\hat{\varepsilon}_r \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\varepsilon}_r + r\frac{d\hat{\varepsilon}_r}{dt} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\,\hat{\varepsilon}_r + r\left(\frac{\partial\hat{\varepsilon}_r}{\partial\phi}\dot{\phi} + \frac{\partial\hat{\varepsilon}_r}{\partial\theta}\dot{\theta}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\,\hat{\varepsilon}_r + r\Big[\underbrace{\left(-\sin\phi\sin\theta\,\hat{i} + \cos\phi\sin\theta\,\hat{j}\right)}_{=\hat{\varepsilon}_\phi\cdot\sin\theta}\dot{\phi} + \underbrace{\left(\cos\phi\cos\theta\,\hat{i} + \sin\phi\sin\theta\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{k}\right)}_{=\hat{\varepsilon}_\theta}\dot{\theta}\Big] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\hat{\varepsilon}_r + r\sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{\varepsilon}_\phi + r\dot{\theta}\,\hat{\varepsilon}_\theta}$$

Επομένως σε σφαιρικές συντεταγμένες το μέτρο της ταχύτητας θα είναι:

$$v = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} \Rightarrow v^2 = \left(\dot{r}\,\hat{\varepsilon}_r + r\sin\theta\dot{\phi}\,\hat{\varepsilon}_\phi + r\dot{\theta}\,\hat{\varepsilon}_\theta\right)\left(\dot{r}\,\hat{\varepsilon}_r + r\sin\theta\dot{\phi}\,\hat{\varepsilon}_\phi + r\dot{\theta}\,\hat{\varepsilon}_\theta\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v^2 = \dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\theta}^2} \quad \text{επειδή } \hat{\varepsilon}_r\cdot\hat{\varepsilon}_\phi = \hat{\varepsilon}_r\cdot\hat{\varepsilon}_\theta = \hat{\varepsilon}_\phi\cdot\hat{\varepsilon}_\theta = \emptyset$$

Στην περίπτωση του σφαιρικού εκκρεμούς το σύστημα υπόκειται στον δεσμό

$$x^2+y^2+z^2-l^2=\emptyset$$

Δηλαδή το $r=l=$ σταθερό $\Rightarrow \dot{r}=\emptyset$

Η εξίσωση της ταχύτητας που βρήκαμε παραπάνω θα γραφτεί:

$$v^2 = l^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2 + l^2\dot{\theta}^2.$$

Επομένως η κινητική ενέργεια του σημείου μάζας m θα είναι:

$$\boxed{T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}ml^2\left(\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2+\dot{\theta}^2\right)} \quad (1)$$

Η δυναμική ενέργεια (από την οποία έχουμε το βάρος του σώματος $mg\hat{k}$) θα βρεθεί από:

$$B=-\nabla V \Rightarrow V=-\int \vec{B}\cdot d\vec{r} = -\int mg\,\hat{k}\cdot l\,d(\cos\theta) \Leftrightarrow$$

$$V=-mgl\int(-\sin\theta)\,d\theta \Rightarrow V=-mgl\cos\theta + C$$

Η δυναμική ενέργεια παίρνει την χαμηλότερη τιμή της, $V=0$, στο σημείο $\theta=\emptyset$ έτσι ώστε $\boxed{C=+mgl}$

Επομένως η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας γράφεται:

$$\boxed{V=mgl(1-\cos\theta)} \quad (2)$$

Επομένως η Lagrangian του συστήματος είναι:

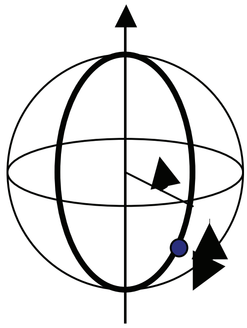
$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}ml^2\left(\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2+\dot{\theta}^2\right)-mgl(1-\cos\theta).$$

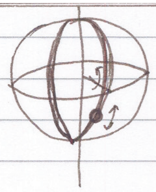
Οι εξισώσεις κίνησης θα γράφονται:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=\emptyset \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}ml^2\cancel{2}\sin^2\theta\,\dot{\phi}\right)=\emptyset \Rightarrow \boxed{ml^2\sin^2\theta\,\ddot{\phi}=\emptyset}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}=\emptyset \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}ml^2\cancel{2}\dot{\theta}\right)+\cancel{\tfrac{1}{2}}ml^2\cancel{2}\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2-mgl\sin\theta=\emptyset \Rightarrow \boxed{ml^2\ddot{\theta}+\frac{ml^2}{2}\sin 2\theta\,\dot{\phi}+ -mgl\sin\theta=\emptyset.}$$

2. Μια σφαίρα αμελητέων διαστάσεων και μάζας m είναι περιορισμένη να κινείται σε ένα αβαρές στεφάνι ακτίνας R στερεωμένο σε ένα κατακόρυφο επίπεδο το οποίο περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας του με μια σταθερή γωνιακή ταχύτητα **ω**. Να βρεθεί η εξίσωση Lagrange της κίνησης της σφαίρας υποθέτοντας ότι οι μόνες εξωτερικές δυνάμεις που ενεργούν προέρχονται από την βαρύτητα. Δείξτε ότι αν η γωνιακή ταχύτητα ω είναι μεγαλύτερη από μια οριακή τιμή ω_0, μπορεί να υπάρξει μιά λύση της εξίσωσης για την οποία η σφαίρα παραμένει σταθερή σε ένα σημείο διαφορετικό από το χαμηλότερο σημείο του στεφανιού, διαφορετικά δείξτε ότι για $\omega<\omega_0$ το μόνο σταθερό σημείο για τη σφαίρα είναι αυτό στο χαμηλότερο σημείο του στεφανιού. Ποια είναι η τιμή της οριακής αυτής γωνιακής ταχύτητας ω_0;





Ορίζουμε τις εξισώσεις μετασχηματισμού από τις καρτεσιανές στίς σφαιρικές συντεταγμένες:

$x = r\sin\Theta\cos\phi$

$y = r\sin\Theta\sin\phi$

$z = r\cos\Theta.$

Ξέρουμε ωστόσο ότι η ακτίνα είναι σταθερή $r=R$ από την ακτίνα του στεφανιού. Επίσης ξέρουμε ότι το στεφάνι περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω και επομένως η γωνία φ είναι εξαναγκασμένη να κινείται με την γωνιακή ταχύτητα ω. Οι εξισώσεις μετασχηματισμού γράφονται:

$x = R\sin\Theta\cos\omega t$

$y = R\sin\Theta\sin\omega t$

$z = R\cos\Theta$

Πέρνοντας τις παραγώγους ως πρός χρόνο:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= R\dot{\Theta}\cos\Theta\cos\omega t - R\sin\Theta\,\omega\sin\omega t \\ \dot{y} &= R\dot{\Theta}\cos\Theta\sin\omega t + R\omega\sin\Theta\cos\omega t \\ \dot{z} &= -R\dot{\Theta}\sin\Theta \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Η κινητική ενέργεια θα είναι: $T = \frac{1}{2}m\upsilon^2$

όπου $\upsilon^2 = (\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) \overset{(1)}{=} \big(R^2\dot{\Theta}^2\cos^2\Theta\cos^2\omega t + R^2\sin^2\Theta\,\omega^2\sin^2\omega t - \cancel{2R^2\dot{\Theta}\omega\cos\Theta\sin\Theta\cos\omega t\sin\omega t}$

$+ R^2\dot{\Theta}^2\cos^2\Theta\sin^2\omega t + R^2\omega^2\sin^2\Theta\cos^2\omega t + \cancel{2R^2\dot{\Theta}\omega\cos\Theta\sin\Theta\cos\omega t\sin\omega t} +$

$+ R^2\dot{\Theta}^2\sin^2\Theta\big) =$

$= R^2\dot{\Theta}^2\cos^2\Theta + R^2\omega^2\sin^2\Theta + R^2\dot{\Theta}^2\sin^2\Theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon^2 = R^2\dot{\Theta}^2 + R^2\omega^2\sin^2\Theta.$

Επομένως η κινητική ενέργεια είναι $T = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\Theta}^2 + \omega^2\sin^2\Theta)$

Η δυναμική ενέργεια από την οποία απορρέει το βάρος του σώματος θα είναι:

$V = mgz \overset{(1)}{\Rightarrow} V = mgR\cos\Theta$

Η lagrangian επομένως: $L = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\Theta}^2 + \omega^2\sin^2\Theta) - mgR\cos\Theta.$

Η εξίσωση κίνησης γράφεται :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=\frac{d}{dt}\left(mR^2\dot{\theta}\right)-mR^2\omega^2\cos\theta\sin\theta-mgR\sin\theta=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{mR^2\ddot{\theta}-mR^2\omega^2\cos\theta\sin\theta-mgR\sin\theta=0\,.} \quad (2)$$

Λύσεις της εξίσωσης που αντιστοιχούν σε σταθερές θέσεις του συστήματος πρέπει να δίνουν $\ddot{\theta}=0$ και αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε:

$$mR^2\omega^2\cos\theta\sin\theta+mgR\sin\theta=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mR\sin\theta\left(R\omega^2\cos\theta+g\right)=0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει προφανή λύση την $\theta=0$ και $\theta=\pi$ όπου $\sin\theta=0$. Για άλλες θέσεις θα πρέπει ο δεύτερος όρος να'ναι 0 δηλαδή: $R\omega^2\cos\theta+g=0 \Rightarrow \cos\theta=-\frac{g}{R\omega^2}$ ή διαφορετικά η γωνιακή ταχύτητα θα πρέπει να'ναι $\omega^2 \geq \frac{g}{R} \Rightarrow \boxed{\omega > \omega_0=\sqrt{\frac{g}{R}}}$