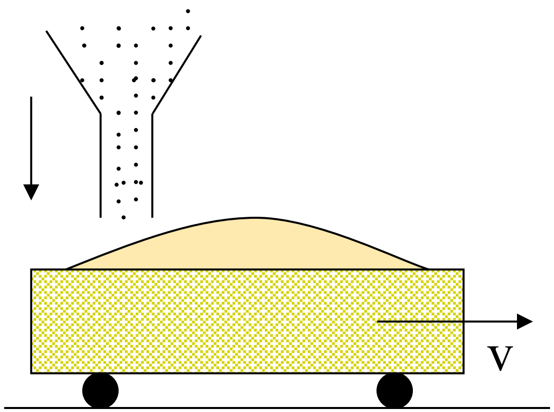
Προβλήματα ορμής/ώθησης με μεταβαλλόμενη μάζα

Τρένο κινείται με σταθερή ταχύτητα, v=1m/sec, κάτω από ένα σιλό το οποίο αποθέτει σιτάρι με ρυθμό 1kgr/sec.

Τι δύναμη χρειάζεται για να συνεχίσει να κινείται το τρένο?

Λύση



Ποιό είναι το σύστημά μας?

Το τρένο και το σιτάρι στο τρένο

$\frac{dm}{dt} = 1kgr/\sec$ ρυθμός αύξησης του σιταριού

Σιτάρι που πέφτει: $p_x = 0$ αλλά υπάρχει p_y.

Χτυπά στο τρένο, οπότε $p'_y = 0$, ενώ αναπτύσσει p'_x

Το τρένο πρέπει να προσφέρει τη δύναμη για την αλλαγή αυτή της ορμής

Το τρένο έχει σαν «εργαλεία» την κάθετη δύναμη και την τριβή

Το σιτάρι ασκεί στο τρένο ίση και αντίθετη δύναμη και το τρένο επιβραδύνεται

Η μηχανή είναι αυτή που πρέπει να δώσει την ώθηση που χρειάζεται

Τρένο (συνέχεια)

Θεωρείστε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt

$$M_f = M_i + \frac{dm}{dt}\Delta t$$ Αλλαγή της μάζας του τρένου

$$p_x^i = M_i \mathrm{v} \quad p_x^f = \left(M_i + \frac{dm}{dt}\Delta t\right)\mathrm{v}$$ αφού θέλουμε $\mathrm{v}_{τρένου}$ =σταθ.

$$I_x = \Delta p_x = F_x \Delta t = p_x^f - p_x^i = \mathrm{v}\frac{dm}{dt}\Delta t \Rightarrow$$

$$F_x = \frac{dm}{dt}\mathrm{v} = 1\frac{m}{\sec}\cdot 1\frac{kgr}{\sec} = 1N$$

Αυτή είναι η δύναμη που πρέπει να αναπτυχθεί από την μηχανή του τρένου ώστε το τρένο να εξακολουθεί να κινείται με σταθερή ταχύτητα

2ο Παράδειγμα - Πύραυλοι, αεροπλάνα κλπ

- Κίνηση πυραύλων – Κλασικό πρόβλημα

  Πύραυλος με αρχική μάζα M_{Π}

  Εκτοξεύει μάζα με ταχύτητα $V_{\varepsilon\kappa\tau}$ (σχετικά με τον πύραυλο).

  Ποια είναι η ταχύτητα όταν η μάζα του είναι m

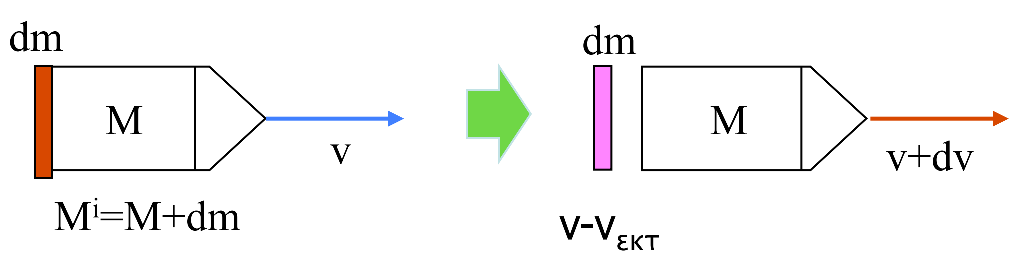
Λύση

Για ένα απομονωμένο σύστημα (πύραυλος-εξάτμιση) ξέρουμε ότι

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow p = \sigma\tau\alpha\vartheta.$$

Ας υποθέσουμε ότι η μάζα του πυραύλου αλλάζει από M+dm σε M

και η ταχύτητά του από v σε v+dv



Πύραυλος

Εφαρμόζοντας διατήρηση της ορμής έχουμε:

$$p_i = p_f \Rightarrow \left(M+\Delta m\right)\mathrm{v} = M\left(\mathrm{v}+\Delta \mathrm{v}\right)+\Delta m\left(\mathrm{v}-\mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}\right)$$

$$\Rightarrow M\mathrm{v}+\mathrm{v}\Delta m = \left(M\mathrm{v}+M\Delta\mathrm{v}+\mathrm{v}\Delta m-\mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}\Delta m\right)$$

$$\Rightarrow M\Delta\mathrm{v} = \mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}\Delta m$$

Έστω τώρα ότι $\Delta t \rightarrow 0$ τότε $\Delta m \rightarrow dm$ και $\Delta M \rightarrow dM$ ενώ $dm = -dM$.

$\Delta t \rightarrow 0$

$$\Rightarrow Md\mathrm{v} = -\mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}dM \Rightarrow d\mathrm{v} = -\mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}\frac{dM}{M}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathrm{v}_i}^{\mathrm{v}_f} d\mathrm{v} = -\mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}\int_{M_i}^{M_f}\frac{dM}{M} \Rightarrow \mathrm{v}_f-\mathrm{v}_i = -\mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}\ln\left(M\right)\Big|_{M_i}^{M_f}$$

$$\Rightarrow \mathrm{v}_f = \mathrm{v}_i-\mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}\left(\ln M_f-\ln M_i\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \mathrm{v}_f = \mathrm{v}_i+\mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}\left(\ln\frac{M_i}{M_f}\right)}$$

Απειρίζεται καθώς το $M_f \rightarrow 0$

Αν η αρχική μάζα του πυραύλου είναι M = 10 x m τότε $v = 2.3v_{\varepsilon\kappa\tau}$

Αν η μάζα είναι M = 100 x m τότε $v = 4.6v_{\varepsilon\kappa\tau}$

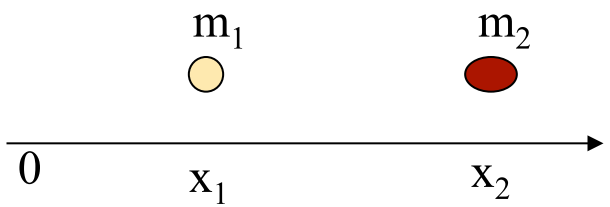
Το κέρδος σε ταχύτητα πολύ μικρό μεγαλώνοντας τη μάζα του πυραύλου

Κέντρο μάζας

Μέχρι τώρα είδαμε την κίνηση υλικών σημείων μεμονωμένα.

Όταν αρχίσουμε να θεωρούμε συστήματα σωμάτων ή στερεά σώματα κάποιων διαστάσεων είναι πιο χρήσιμο και ευκολότερο να ορίσουμε μια νέα ποσότητα που ονομάζεται κέντρο μάζας (KM ή CM) η οποία ακολουθεί τους νόμους του Newton

Για 2 σώματα η θέση του κέντρου μάζας ορίζεται



$$x_{KM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

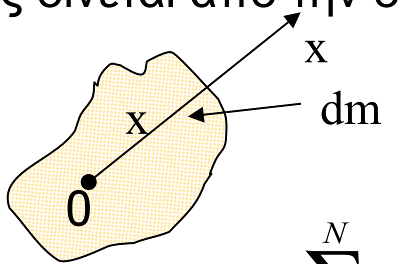
Κέντρο μάζας περισσότερων σωμάτων

Αν είχαμε Ν σώματα τότε το κέντρο μάζας ορίζεται από την σχέση:

$$x_{KM} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i x_i}{M} \qquad \text{όπου} \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Αν το σύστημά μας δεν αποτελείται από διακριτά σημεία αλλά είναι ένα συνεχές σώμα τότε το κέντρο μάζας δίνεται από την σχέση

$$\mathrm{x}_{KM} = \frac{1}{M}\int x\, dm$$



Για Ν διακριτά σώματα σε 3 διαστάσεις η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\vec{r}_{KM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Για συνεχή κατανομή μάζας έχουμε:

$$\vec{r}_{KM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

όπου *dm=ρdV* απειροστή μάζα *dm* σε απειροστό όγκο *dV*

Κέντρο μάζας

Η τελευταία σχέση είναι μια διανυσματική εξίσωση που ουσιαστικά περιέχει 3 βαθμωτές εξισώσεις ως προς τους 3 άξονες συντεταγμένων

$$x_{KM} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i x_i}{M} \qquad y_{KM} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i y_i}{M} \qquad z_{KM} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i z_i}{M}$$

Το κέντρο μάζας αντιστοιχεί σε ένα σημείο στο χώρο.

Δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει στο σημείο αυτό κάποια μάζα.

Διαισθητικά το κέντρο της βαρυτικής μάζας (κέντρο βάρους) ενός σώματος είναι το σημείο στο οποίο η βαρύτητα δεν προκαλεί καμιά κίνηση.

- Πως βρίσκουμε το κέντρο μάζας ενός συστήματος

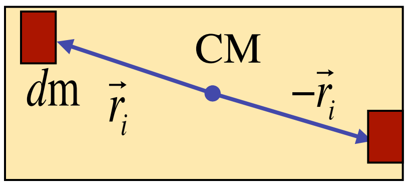
  Ο σωστότερος τρόπος είναι να λύσουμε τα ολοκληρώματα ή να πάρουμε τα αθροίσματα.

  Αλλά μερικές φορές συμμετρίες του συστήματος βοηθάνε να βρούμε πιο εύκολα το κέντρο μάζας

Εύρεση του κέντρου μάζας

- Συμμετρίες:

Ένα ομογενές συνεχές παραλληλόγραμμο έχει το κέντρο μάζας του στο γεωμετρικό του κέντρο. Θεωρώ το κέντρο αυτό σα την αρχή των αξόνων



Για κάθε μάζα dm σε θέση r_i υπάρχει μια στοιχειώδης μάζα dm στη συμμετρική θέση $-r_i$.

Οι δύο όροι $r_i dm + (-r_i)dm = 0$.

Το ίδιο ισχύει για οποιαδήποτε μάζα-θέση του συστήματος

- Άθροισμα επιμέρους τμημάτων:
  - Χωρισμό του σώματος σε επιμέρους συμμετρικά σώματα.
  - Εύρεση της συνολικής μάζας του κάθε επιμέρους τμήματος.
  - Εύρεση του κέντρου μάζας χρησιμοποιώντας κάθε επιμέρους τμήμα σαν υλικό σημείο με μάζα και θέση τη μάζα και θέση του κέντρου μάζας του

- Διαφορά επιμέρους τμημάτων:

Ίδια με την προηγούμενη μέθοδο αλλά στην περίπτωση αυτή αφαιρούμε συγκεκριμένα κανονικά γεωμετρικά σώματα

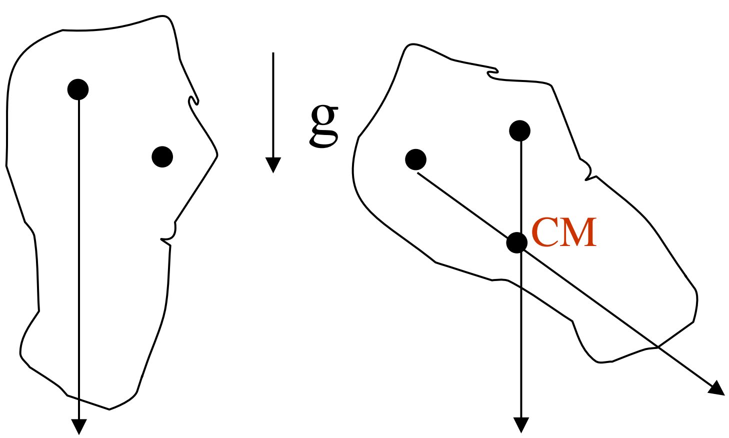
Εύρεση κέντρου μάζας

- Πειραματική μέθοδος

Πολλές φορές το σώμα τελείως ανώμαλο και οι άλλες μέθοδοι δεν δουλεύουν.

Πειραματικά μπορούμε να βρούμε το κέντρο μάζας κρεμώντας το σώμα από 2 τυχαία σημεία.

- Όταν ένα σώμα ισορροπεί ελεύθερα κρεμασμένο από κάποιο σημείο, η μάζα του θα κρέμεται με το κέντρο μάζας στην κατακόρυφο ευθεία από το σημείο στήριξης και κάτω από το σημείο αυτό μια και θα ελαττώνει τη δυναμική ενέργεια.
- Το σημείο στο οποίο τέμνονται οι κατακόρυφοι σε δυο διαδοχικές προσπάθειες στήριξης ορίζουν το CM του σώματος.

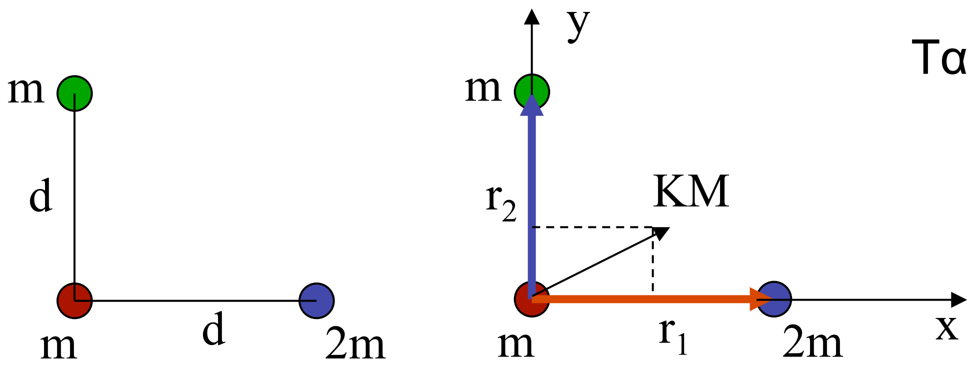


Παραδείγματα – Κέντρο μάζας 3 μαζών

Να βρεθεί η θέση του κέντρου μάζας των 3 μαζών του σχήματος

Λύση

Ορίζουμε ένα σύστημα συντεταγμένων όπως παρακάτω



Τα διανύσματα θέσης των μαζών είναι:

$$\vec{r}_1 = d\hat{x}$$

$$\vec{r}_2 = d\hat{y}$$

$$\vec{r}_3 = 0$$

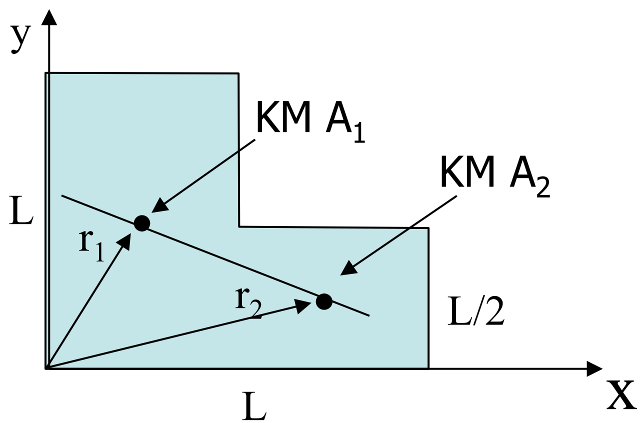
$$\vec{r}_{KM} = \frac{1}{M}\left(\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2 + \vec{r}_3 m_3\right) = \frac{1}{\left(2m + m + m\right)}\left(2md\hat{x} + md\hat{y} + 0\right)$$

$$\vec{r}_{KM} = \frac{1}{4m}\left(2md\hat{x} + md\hat{y}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{r}_{KM} = \frac{d}{4}\left(2\hat{x} + \hat{y}\right)}$$

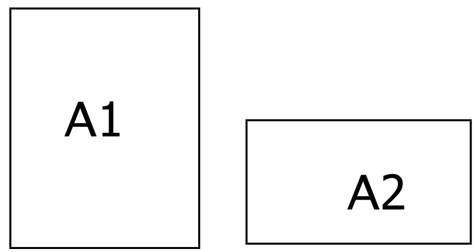
Κέντρο μάζας με διαχωρισμό τμημάτων

Που βρίσκεται το κέντρο μάζας (ΚΜ) ενός τμήματος φύλου μετάλλου όπως στο σχήμα με επιφανειακή μάζα (μάζα/εμβαδό επιφάνειας) σ

Λύση



Το χωρίζουμε σε 2 τμήματα Α1 και Α2



Χρησιμοποιούμε συμμετρία:

Το CM του Α1 είναι στο κέντρο του παρ/μου με πλευρές L και L/2. Ανάλογα και για το Α2.

Τα διανύσματα θέσης των 2 CM είναι

$$\vec{r}_1 = \frac{L}{4}\hat{x} + \frac{L}{2}\hat{y}$$

$$\vec{r}_2 = \frac{3L}{4}\hat{x} + \frac{L}{4}\hat{y}$$

Οι ολικές μάζες των 2 τμημάτων είναι

$$m_{A1} = L\cdot\frac{L}{2}\cdot\sigma = \frac{\sigma L^2}{2}$$

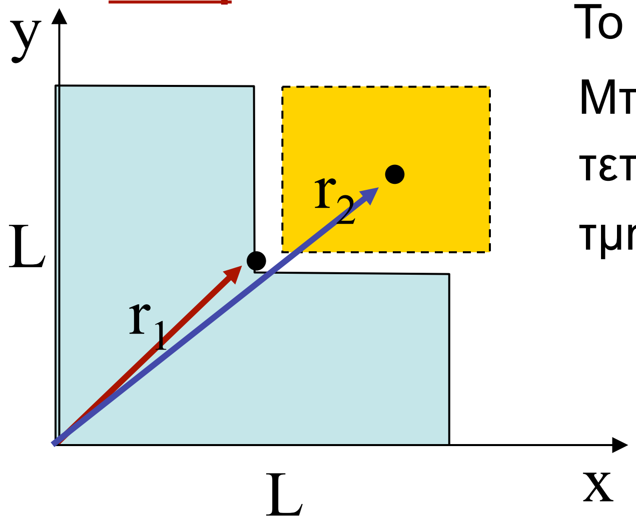
$$m_{A2} = \frac{L}{2}\cdot\frac{L}{2}\cdot\sigma = \frac{\sigma L^2}{4}$$

$$\vec{r}_{KM} = \frac{1}{M}\left(m_{A1}\vec{r}_1 + m_{A2}\vec{r}_2\right) = \frac{1}{\frac{\sigma L^2}{2}+\frac{\sigma L^2}{4}}\left[\frac{\sigma L^2}{2}\left(\frac{L}{4}\hat{x}+\frac{L}{2}\hat{y}\right)+\frac{\sigma L^2}{4}\left(\frac{3L}{4}\hat{x}+\frac{L}{4}\hat{y}\right)\right] \Rightarrow \boxed{\vec{r}_{KM} = \frac{5L}{12}\hat{x}+\frac{5L}{12}\hat{y}}$$

Κέντρο μάζας – αφαιρετική μέθοδος

Να βρεθεί το κέντρο μάζας ενός φύλλου μετάλλου πλευράς L από το οποίο αποκόπηκε ένα τετράγωνο τμήμα πλευράς L/2.

Λύση



Το πρόβλημα είναι το ανάστροφο του προηγούμενου

Μπορούμε να υπολογίσουμε το ΚΜ του αρχικού τετραγώνου και το ΚΜ του αποκομμένου τμήματος και να τα προσθέσουμε.

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \frac{L}{2}\hat{x} + \frac{L}{2}\hat{y} \\ \vec{r}_2 &= \frac{3L}{4}\hat{x} + \frac{3L}{4}\hat{y}\end{aligned}\right\} \text{Διανύσματα θέσης}$$

Μάζες των 2 τμημάτων

$$\begin{cases} m_{A1} = L \cdot L \cdot \sigma = \sigma L^2 \\ m_{A2} = \dfrac{L}{2} \cdot \dfrac{L}{2} \cdot \sigma = \dfrac{\sigma L^2}{4} \Rightarrow m_{A2} = -\dfrac{\sigma L^2}{4} \end{cases}$$

$$\vec{r}_{KM} = \frac{1}{M}\left(m_{A1}\vec{r}_1 + m_{A2}\vec{r}_2\right) = \frac{1}{\sigma L^2 - \frac{\sigma L^2}{4}}\left(\sigma L^2\left[\frac{L}{2}\hat{x} + \frac{L}{2}\hat{y}\right] - \frac{\sigma L^2}{4}\left[\frac{3L}{4}\hat{x} + \frac{3L}{4}\hat{y}\right]\right) \Rightarrow \vec{r}_{KM} = \frac{5L}{12}\hat{x} + \frac{5L}{12}\hat{y}$$

Κέντρο μάζας συνεχούς κατανομής μάζας

Να βρεθεί το κέντρο μάζας μιας ράβδου μήκους L, μάζας M και πυκνότητας λ = M/L

Λύση

Χωρίς να υπολογίσουμε ξέρουμε ότι το κέντρο μάζας είναι σε x_{KM}=L/2 (συμμετρία)

Ας το ελέγξουμε με υπολογισμούς:

$$dm = \lambda dx$$

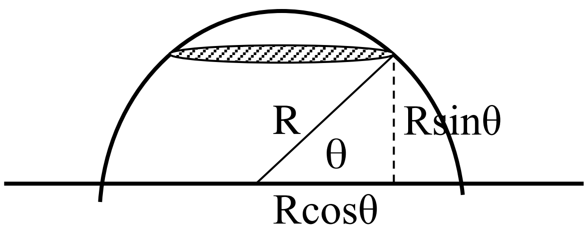
$$x_{KM} = \frac{1}{M}\int_0^M x\,dm \Rightarrow \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda\,dx$$

$$x_{KM} = \left.\frac{\lambda x^2}{2M}\right|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M} = \frac{(\lambda L)L}{2M} = \frac{ML}{2M} \Rightarrow x_{KM} = \frac{L}{2}$$

Εύρεση κέντρου μάζας – Ένα ακόμα παράδειγμα

Να βρεθεί το κέντρο μάζας ενός ημισφαιρικού κελύφους (άδεια σφαίρα) ακτίνας R και πυκνότητας μάζας σ *Kg/m*^{2}

Λύση



Κοιτάμε σε ένα κύκλο σε γωνία θ πάνω από τον ορίζοντα.

Η κυκλική λωρίδα έχει μάζα:

$$dm = \sigma\left(dA\right) = \sigma\left(\mu\eta\kappa o\varsigma\right)\left(\pi\alpha\chi o\varsigma\right) \Rightarrow dm = \sigma\left(2\pi R\cos\theta\right)\left(Rd\theta\right)$$

Όλα τα σημεία στο κύκλο αυτό έχουν y = Rsinθ άρα

$$y_{KM} = \frac{1}{M}\int ydm = \frac{1}{2\pi R^2\sigma}\int_0^{\pi/2}\left(R\sin\theta\right)\left(2\pi R^2\sigma\cos\theta d\theta\right)$$

$$y_{KM} = R\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta = R\left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\pi/2} \Rightarrow \boxed{y_{KM} = \frac{R}{2}}$$

Πόσο είναι το x_{KM}=? 0