ΠΕΙΡΑΜΑ 8

Μελέτη Ροπής Αδρανείας Στερεών Σωμάτων

Σκοπός του πειράματος

Σκοπός του πειράματος είναι η μελέτη της ροπής αδρανείας διαφόρων στερεών σωμάτων και των στροφικών ταλαντώσεων που εκτελούν γύρω από άξονες που διέρχονται από το κέντρο βάρους τους.

Αρχή λειτουργίας του πειράματος

Διάφορα σώματα εκτελούν στροφικές ταλαντώσεις γύρω από άξονες που διέρχονται από το κέντρο βάρους τους. Αφού μετρηθεί η περίοδος ταλάντωσής τους προσδιορίζεται η ροπή αδρανείας τους.

Στοιχεία από τη Θεωρία

Η σχέση ανάμεσα στη **στροφορμή L** ενός στερεού σώματος σε ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων όπου η αρχή συμπίπτει με το κέντρο βάρους του σώματος και της **ροπής T** που ασκείται πάνω σ' αυτό είναι:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (1)$$

Η στροφορμή δίνεται από τη **γωνιακή ταχύτητα ω** και τη **ροπή αδρανείας I** του σώματος:

$$L = I\omega \qquad (2)$$

Στην περίπτωση αυτή το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας έχει την διεύθυνση του κύριου άξονα αδρανείας του σώματος (z-άξονας). Έτσι η στροφορμή έχει μόνο μία συνιστώσα $\mathbf{L_z=I_z\ \omega}$ Επομένως:

$$T_z = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \frac{d^2\phi}{dt^2} \qquad (3)$$

όπου **Φ** είναι η γωνία περιστροφής. Σύμφωνα με το νόμο του Hooke η ροπή ενός σπειροειδούς ελατηρίου δίνεται από τον τύπο:

$$T_z = -D\phi \qquad (4)$$

όπου **D** είναι η **κατευθύνουσα ροπή** του ελατηρίου.

Έτσι, από τη γραφική παράσταση της ροπής του ελατηρίου σαν συνάρτηση της γωνίας περιστροφής μπορεί να προσδιοριστεί η κατευθύνουσα ροπή.
Η εξίσωση της κίνησης μπορεί τώρα να γραφεί ως ακολούθως:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2}+\frac{D}{I_Z}\phi=0 \qquad (5)$$

Η περίοδος και συχνότητα της αντίστοιχης ταλάντωσης δίνονται από τους τύπους:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I_z}{D}} \qquad (6) \qquad \text{και} \qquad \nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{I_z}} \qquad (7)$$

από όπου μπορεί να προσδιοριστεί η ροπή αδρανείας.

Θεώρημα του Steiner

Είναι αποδεκτό ότι η τιμή της ροπής αδρανείας εξαρτάται από τη θέση του άξονα περιστροφής. Αποδεικνύεται, ένα γενικό θεώρημα, το **Θεώρημα του Steiner** ή αλλιώς το **Θεώρημα των παράλληλων αξόνων**, το οποίο συσχετίζει τη ροπή αδρανείας I_{CM} γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας με τη ροπή αδρανείας I γύρω από παράλληλο άξονα που διέρχεται από κάποιο άλλο σημείο. Το Θεώρημα ορίζεται ως:

$$\mathbf{I = I_{CM} + Md^2} \qquad (8)$$

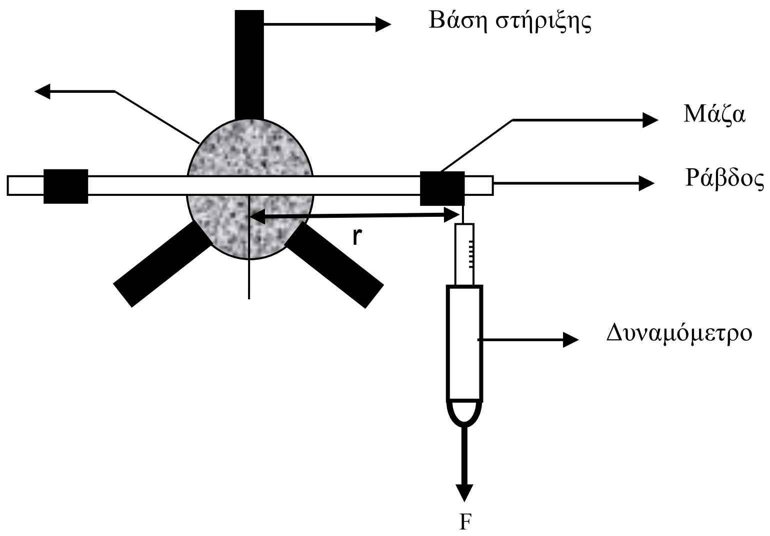
όπου M είναι η ολική μάζα του σώματος και d η απόσταση των δύο αξόνων. Από την Εξ. (8) είναι φανερό ότι η ροπή αδρανείας γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας είναι μικρότερη από τη ροπή αδρανείας γύρω από οποιονδήποτε άλλο παράλληλο άξονα.

Πειραματική διαδικασία - Εκτέλεση

(α) ***Να προσδιοριστεί η γωνιακή ροπή επαναφοράς T_z του ελικοειδούς ελατηρίου σαν συνάρτηση της γωνίας περιστροφής. Να χαράξετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση και από αυτήν να υπολογίσετε την κατευθύνουσα ροπή του ελατηρίου D. Η κάθε μέτρηση να επαναληφθεί 6 φορές.***

Για να προσδιορισθεί η γωνιακή ροπή επαναφοράς, **T= rxF**, ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

- Στερεώνουμε τη ράβδο στον άξονα του περιστρεφόμενου ελατηρίου με τη βίδα που βρίσκεται πάνω στη ράβδο.
- Στερεώνουμε συμμετρικά δύο μάζες πάνω στη ράβδο, σε καθορισμένη απόσταση από τον άξονα περιστροφής.
- Στη συνέχεια, περιστρέφουμε τη ράβδο ανά 180^0 γύρω από τον άξονα και κάθε φορά η δύναμη, F (βλέπε Σχήμα α) μετριέται με το δυναμόμετρο.
- **Προσοχή !!** Για λόγους ασφαλείας και σταθερότητας συνιστάται όπως το ελατήριο μη στρέφεται περισσότερο από $\pm720^0$. Κατά τη διάρκεια της μέτρησης το δυναμόμετρο πρέπει να είναι κάθετο πάνω στη ράβδο.

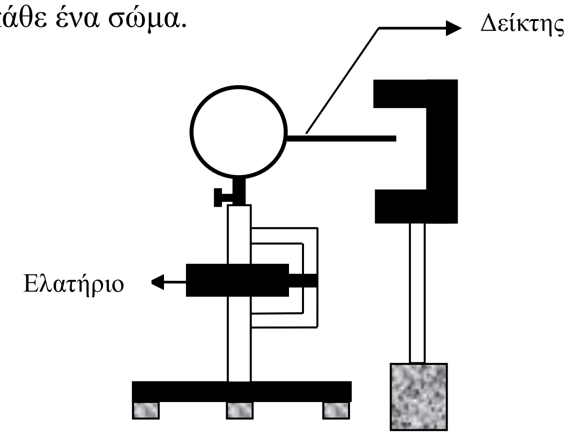


Σχήμα α: Κάτοψη πειραματικής διάταξης.

β) ***Να υπολογιστεί η ροπή αδρανείας ενός δίσκου, ενός κυλινδρικού σώματος, ενός κούφιου κυλινδρικού σώματος, μίας σφαίρας και μίας ράβδου. Πως συγκρίνονται τα αποτελέσματα με τις θεωρητικά αναμενόμενες τιμές; Συνοψίστε τα αποτελέσματα σε ένα κοινό πίνακα.***

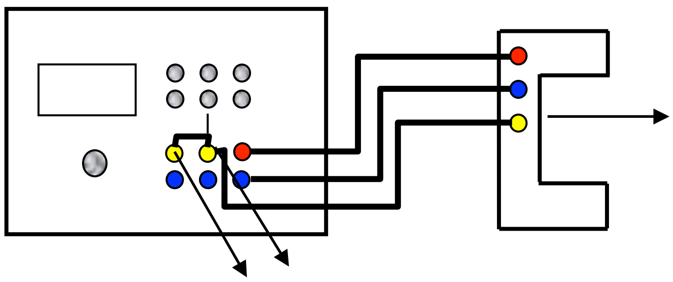
Με βάση τα αποτελέσματά σας σχολιάστε τη ροπή αδρανείας των διαφόρων σωμάτων σε σχέση με τη γεωμετρία τους. Τι θα αναμένατε για ένα σώμα ίδιο με όλες τις παραπάνω περιπτώσεις αλλά μικρότερης (ή μεγαλύτερης) ακτίνας ή μικρότερης (ή μεγαλύτερης) μάζας. Τέλος, τι θα αναμένατε για την περίπτωση ενός ασύμμετρου σώματος.

Για να μετρηθεί η περίοδος της ταλάντωσης των διαφόρων σωμάτων , ένας δείκτης είναι στερεωμένος πάνω στο κάθε ένα σώμα.



Σχήμα β

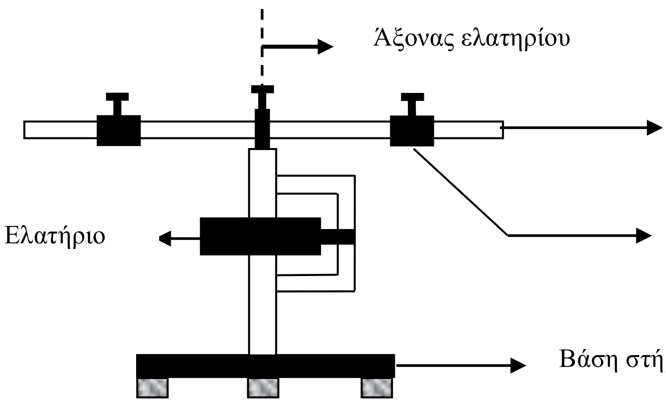
Προτού αρχίσουν οι μετρήσεις, τοποθετούμε το φράγμα φωτός πάνω από τον δείκτη καθώς το σώμα είναι ακίνητο (θα πρέπει να ανάψει η κόκκινη λάμπα στο φράγμα). Πάνω στον τετραψήφιο μετρητή οι υποδοχές start-stop είναι συνδεδεμένες μαζί (κίτρινο-κίτρινο, Σχήμα γ). Έτσι το φράγμα φωτός δίνει σήμα στο μετρητή να αρχίσει την μέτρηση όταν το φως διακοπεί από το δείκτη, και σήμα να σταματήσει όταν το φως διακοπεί ξανά από το δείκτη. Για κάθε περίπτωση που μετράμε προσδιορίζεται ο χρόνος που αντιστοιχεί σε μισό κύκλο ταλάντωσης.



Σχήμα γ

Με βάση την εξίσωση που διέπει την περίοδο ταλάντωσης του σώματος, και έχοντας ήδη προσδιορίσει την κατευθύνουσα ροπή του ελατηρίου, βρίσκουμε την ροπή αδρανείας του κάθε σώματος.

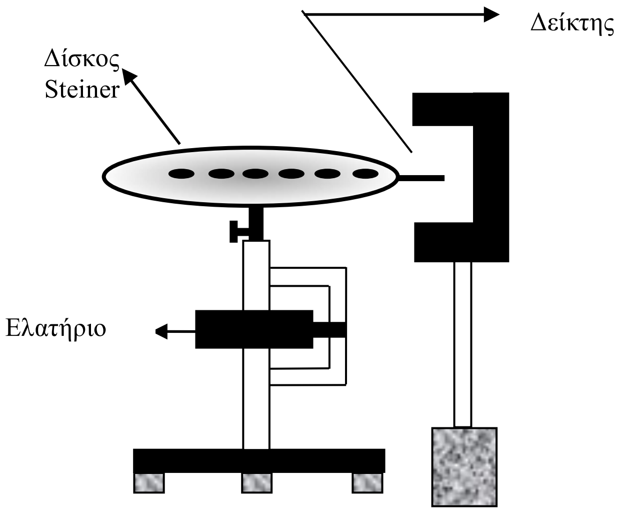
(γ) Να υπολογιστεί η ροπή αδρανείας δύο σημειακών μαζών ως συνάρτηση της απόστασης μεταξύ τους. Το κέντρο βάρους βρίσκεται πάνω στον άξονα περιστροφής. Ας σημειωθεί ότι για μία σημειακή μάζα m σε απόσταση a από τον άξονα περιστροφής, η ροπή αδρανείας είναι $I_z = ma^2$.



Σχήμα δ

Στερεώνουμε πάλι πάνω στο σύστημα τη ράβδο. Μεταβάλλοντας την απόσταση ανάμεσα στις 2 συμμετρικά τοποθετημένες μάζες και μετρώντας σε κάθε περίπτωση την περίοδο περιστροφής, μπορούμε να δούμε πως μεταβάλλεται η ροπή αδρανείας του συστήματος σαν συνάρτηση της απόστασης ανάμεσα στις 2 μάζες. Να επαναλάβετε την κάθε μέτρηση το λιγότερο 5 φορές.

(δ) Να μετρηθεί η ροπή αδρανείας για το δίσκου του Steiner, για τους διάφορους άξονες περιστροφής. Να αποδείξετε τη Εξίσωση του θεωρήματος του Steiner, (Εξίσωση (8)). Επαληθεύουν τα πειραματικά σας δεδομένα το πιο πάνω θεώρημα; Τι συμπεραίνετε για τη ροπή αδρανείας;



Σχήμα ε

<u>Σημείωση:</u> Παρακάτω δίνεται η ροπή αδρανείας για διάφορα γεωμετρικά σώματα μάζας **m** και ακτίνας **r.**

Για μία σφαίρα: $\mathbf{I_z=2/5\ mr^2}$
Για ένα κυκλικό δίσκο: $\mathbf{I_z=1/2\ mr^2}$
Για ένα στερεό κύλινδρο: $\mathbf{I_z=1/2\ mr^2}$
Για ένα κούφιο κύλινδρο με εσωτερική ακτίνα $\mathbf{r_1}$ και εξωτερική ακτίνα $\mathbf{r_2}$ η ροπή αδρανείας είναι $\mathbf{I_z=1/2\ m(r_1^{\,2}+r_2^{\,2})}$.
Για μία λεπτή ράβδο μήκους **l** η ροπή αδρανείας είναι $\mathbf{I_z=1/12\ ml^2}$.

Ο πιο κάτω πίνακας δίνει τα γεωμετρικά στοιχεία και τη μάζα των σωμάτων.

Δίσκος	**Δίσκος Steiner**	**Κύλινδρος**	**Κούφιος κύλινδρος**	**Λεπτή Ράβδος**	**Σφαίρα**	**Μικρά Σώματ α**

r=10.8cm	r=14.9cm	r=4.95cm	r_1=46mm r_2=50mm	l=0.6m	r=7cm	m=214 g το κάθε ένα
m=284 g	m=454 g	m=367 g	m=372 g	m=133g	m=761g	