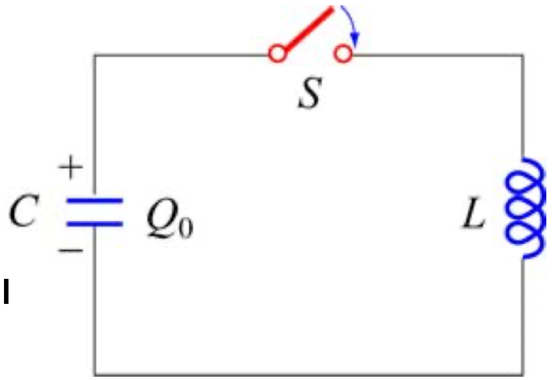
Κύκλωμα LC – Ταλαντώσεις



Έστω το *LC* κύκλωμα του διπλανού σχήματος, όπου ένας πυκνωτής χωρητικότητας *C* συνδέεται με ένα πηνίο με συντελεστή επαγωγής *L.*

Υποθέτουμε ότι αρχικά ο πυκνωτής είναι φορτισμένος σε φορτίο Q_0 και ο διακόπτης S κλείνει οπότε ο πυκνωτής αρχίζει να αποφορτίζεται και η ηλεκτρική ενέργεια ελαττώνεται.

Το ρεύμα που δημιουργείται από την διεργασία της αποφόρτισης δημιουργεί μαγνητική ενέργεια η οποία αποθηκεύεται στο πηνίο. Αν δεν υπάρχει ωμική αντίσταση η ενέργειας μετατρέπεται μεταξύ ηλεκτρικής ενέργειας στον πυκνωτή και μαγνητικής ενέργειας στο πηνίο. Έχουμε επομένως μια **ηλεκτρομαγνητική ταλάντωση**

Η ολική ενέργεια στο κύκλωμα μετά το κλείσιμο του διακόπτη *S* είναι:

$$U = U_C + U_L = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow$$

Η ενέργεια διατηρείται οπότε η παράγωγος ως προς τον χρόνο θα δώσει:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2\right) = 0 \Rightarrow \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} = -LI\frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} = -L\frac{dQ}{dt}\frac{dI}{dt}$$

Από την τελευταία εξίσωση θα πάρουμε: $\dfrac{Q}{C} = -L\dfrac{d^2Q}{dt^2}$ ή ισοδύναμα: $\dfrac{Q}{C} = -L\dfrac{dI}{dt}$

Κύκλωμα LC – Ταλαντώσεις

Η τελευταία εξίσωση στηρίζεται στη σύμβαση του πρόσημου όπου: $I = -\frac{dQ}{dt}$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι το ρεύμα ισούται με τον ρυθμό ελάττωσης του φορτίου στους οπλισμούς του πυκνωτή ακριβώς μετά το κλείσιμο του διακόπτη.

Το ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να βρούμε αν εφαρμόσουμε τον τροποποιημένο 2^{o} νόμο του Kirchhoff κινούμενοι κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού.

Η γενική λύση της εξίσωσης: $\frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0$ είναι: $Q(t) = Q_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$

όπου Q_0 είναι το πλάτος και φ η φάση. ω_0 είναι η γωνιακή συχνότητα, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

Το αντίστοιχο ρεύμα στο πηνίου είναι:

$$I(t) = -\frac{d}{dt}[Q_0\cos(\omega_0 t + \varphi)] \Rightarrow I(t) = Q_0\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow I(t) = I_0\sin(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow$$

Από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος έχουμε: $Q(t=0) = Q_0$ και $I(t=0) = 0$

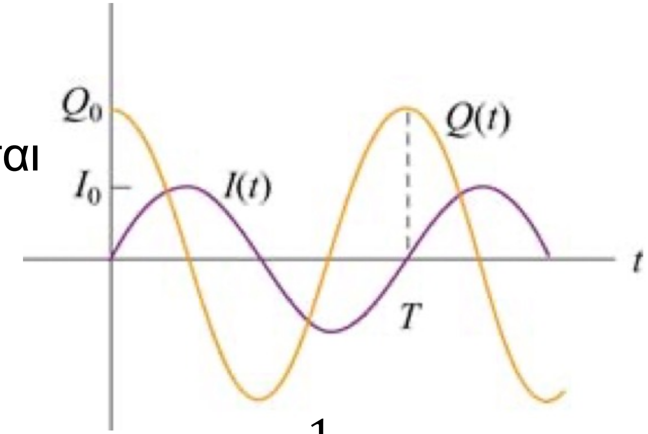
και άρα η φάση είναι: $\varphi = 0$

Επομένως οι λύσεις για το φορτίο και το ρεύμα θα είναι:

$$\boxed{\begin{array}{l} Q(t) = Q_0\cos(\omega_0 t) \\ I(t) = I_0\sin(\omega_0 t) \end{array}}$$

Κύκλωμα LC – Ταλαντώσεις

Η χρονική εξάρτηση του ρεύματος και φορτίου φαίνονται στο διπλανό σχήμα:



Με βάση τις εξισώσεις του ρεύματος και φορτίου, η ηλεκτρική και μαγνητική ενέργεια γράφονται ως:

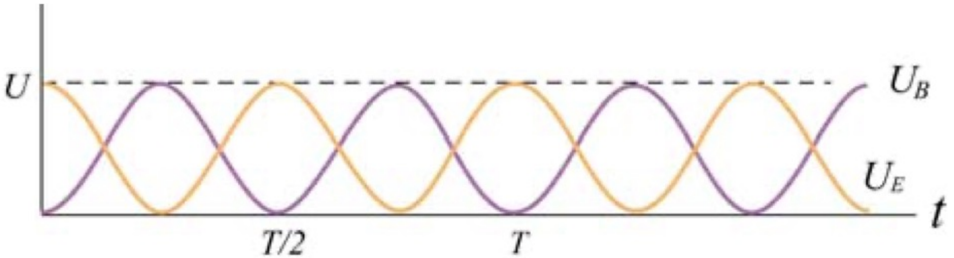
$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}\cos^2(\omega_0 t) \quad \text{και} \quad U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}LI_0^2\sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}LQ_0^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t)$$

Από τις δύο αυτές εξισώσεις προκύπτει αμέσως ότι η ολική ενέργεια είναι σταθερή:

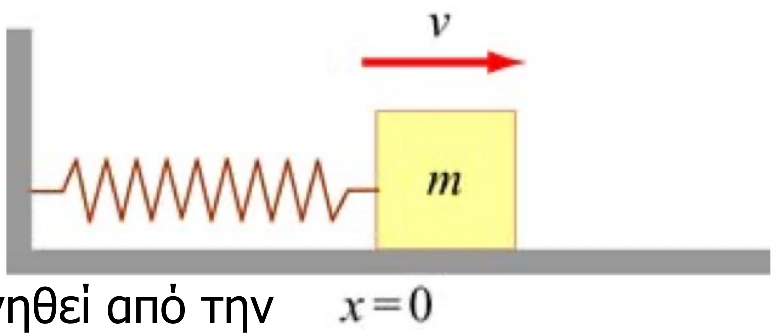
$$U = U_E + U_m = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}LQ_0^2\,\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t) \Rightarrow$$

$$U = \frac{1}{2}Q_0^2\left[\frac{1}{C}\cos^2(\omega_0 t) + L\omega_0^2\sin^2\ \omega_0 t\right] = \frac{1}{2}Q_0^2\left[\frac{1}{C}\cos^2(\omega_0 t) + \frac{L}{LC}\sin^2\ \omega_0 t\right] \Rightarrow U = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$$

Οι ηλεκτρικές και μαγνητικές ταλαντώσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Κύκλωμα LC – Ταλαντώσεις



Το μηχανικό ανάλογο είναι:

Αν η μάζα κινείται με ταχύτητα v και το ελατήριο έχει σταθερά ελατηρίου *k* έχει μετακινηθεί από την θέση ισορροπίας του κατά *x,* τότε η ολική ενέργεια αυτού του μηχανικού συστήματος θα είναι:

$$U = U_{\varepsilon\lambda.} + K = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Απουσία τριβών, η ολική ενέργεια διατηρείται και θα έχουμε:

$$\frac{dU}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dU_{\varepsilon\lambda.}}{dt} + \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2\right] = kx\frac{dx}{dt} + mv\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \; kx + m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

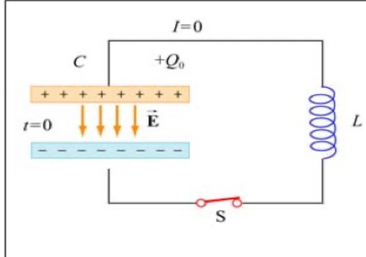
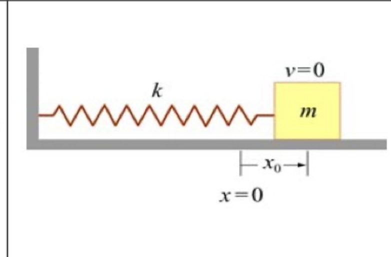
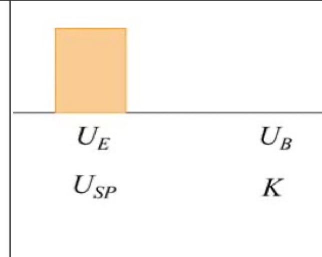
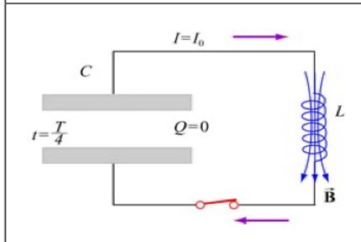
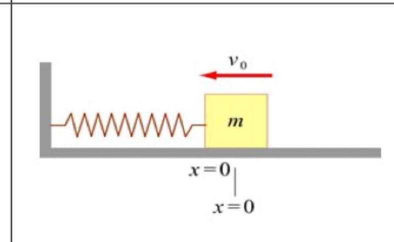
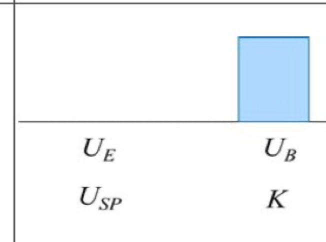
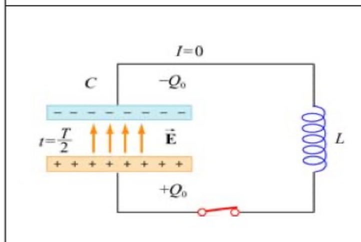
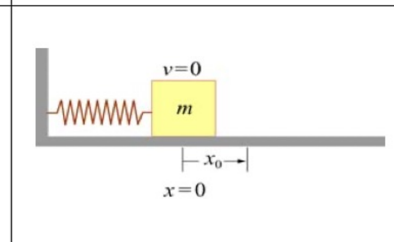
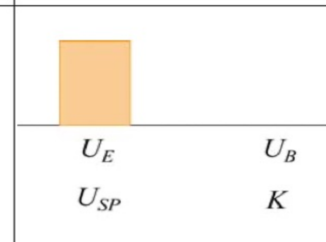
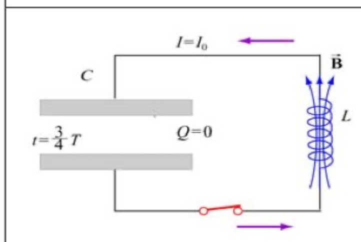
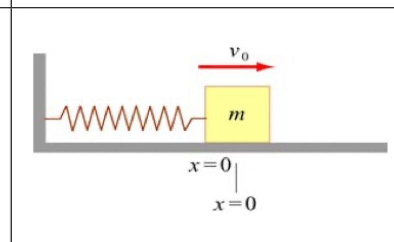
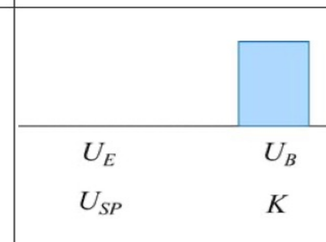
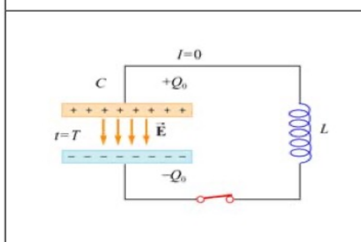
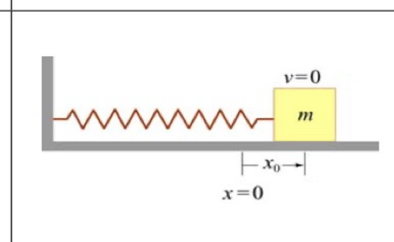
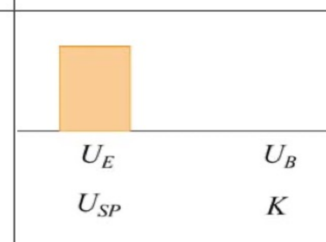
Με γενική λύση: $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$ όπου $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ η γωνιακή συχνότητα και x_0 το πλάτος

Σε μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή, η ενέργεια του συστήματος γράφεται:

$$U = \frac{1}{2}kx_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}mx_0^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}kx_0^2[\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)]$$

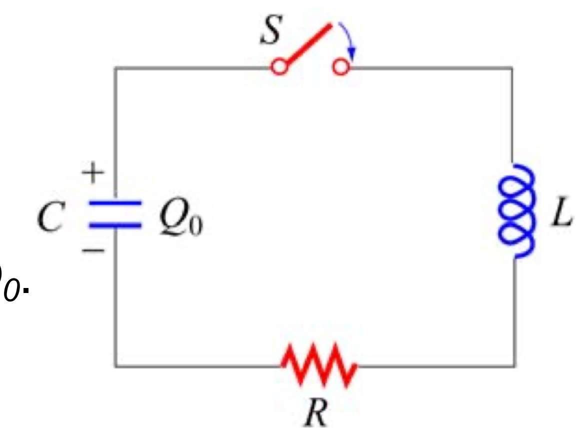
$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}kx_0^2$$

Ισοδυναμία LC κυκλώματος και αρμονικού ταλαντωτή

<table>
<tr><th>LC κύκλωμα</th><th>Μάζα – ελατήριο</th><th>Ενέργεια</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

Το κύκλωμα RLC σε σειρά

Έστω το *RLC* κύκλωμα του παρακάτω σχήματος, το οποίο περιέχει μια αντίσταση *R*, έναν πυκνωτή χωρητικότητας *C* και ένα πηνίο συντελεστή αυτεπαγωγής *L*, όλα σε σειρά.



Αρχικά ο πυκνωτής είναι φορτισμένος και περιέχει φορτίο Q_0.

Όταν κλείσει ο διακόπτη *S*, ρεύμα αρχίζει να διαρρέει το κύκλωμα και ο πυκνωτής αποφορτίζεται.

Σε αντίθεση με το *LC* κύκλωμα, που είδαμε προηγουμένως, ενέργεια καταναλώνεται στην αντίσταση *R*.

Ο ρυθμός με τον οποίο ενέργεια καταναλώνεται στην αντίσταση είναι: $P = \frac{dU}{dt} = -I^2 R$

όπου το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η ολική ενέργεια ελαττώνεται.

Όπως προηγουμένως, η ενέργεια του κυκλώματος είναι το άθροισμα της ηλεκτρικής ενέργειας του πυκνωτή και της μαγνητικής ενέργειας στο πηνίο.

$$U = U_C + U_L = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2\right) = -I^2 R \Rightarrow \boxed{\frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = -I^2 R}$$

όπου θεωρήσαμε και πάλι ότι το ρεύμα είναι ο ρυθμός ελάττωσης του φορτίου των οπλισμών του πυκνωτή, $I = -dQ/dt$.

Το κύκλωμα RLC σε σειρά

Ξεκινώντας από τη σχέση: $\frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = -I^2R$ διαιρούμε και τα δύο μέλη με *I*

$$\frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = -IR \Rightarrow \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} + IR = 0 \Rightarrow \frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{dQ}{dt}R = 0$$

Η προηγούμενη σχέση αντιστοιχεί σε αυτή της φθίνουσας ταλάντωσης:

$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0$ Θεωρούμε ότι: $\gamma = \frac{R}{2L}$ και: $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ φυσική συχνότητα του συστήματος

Έχουμε ως λύση τη μορφής: $Q(t) = Ae^{at}$

Αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση δίνει: $a^2Ae^{at} + 2\gamma aAe^{at} + \omega_0^2Ae^{at} = 0 \Rightarrow$

$\boxed{\Rightarrow a^2 + 2\gamma a + \omega_0^2 = 0}$ οπότε: $\boxed{a = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$ τρεις περιπτώσεις ανάλογα με τη τιμή της διακρίνουσας

Για μικρές τιμές της αντίστασης *R* (μικρή απόσβεση ταλάντωσης) βρίσκουμε εύκολα ότι η λύση είναι της μορφής:

$\boxed{Q(t) = Q_0e^{-\gamma t}\cos(\omega'_0 t + \varphi)}$ όπου $\gamma = \frac{R}{2L}$ ο παράγοντας απόσβεσης:

$\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ η γωνιακή συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης

Q_0 και φ προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες

Εναλλασσόμενα ρεύματα

Πηγές Εναλλασσόμενων ρευμάτων

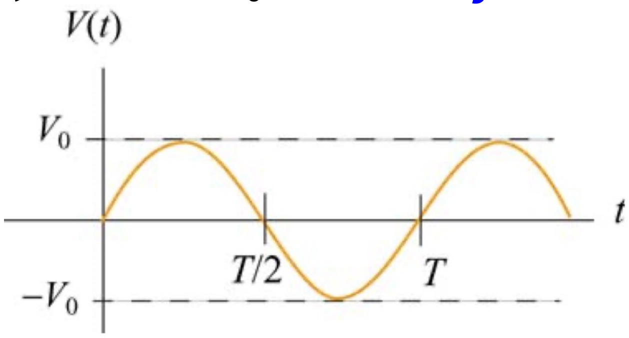
Έχουμε δει ότι μεταβολές στη μαγνητική ροή που περνά από κάποια επιφάνεια μπορεί να προκαλέσει μια επαγόμενη ΗΕΔ σύμφωνα με τον νόμο του Faraday

Συγκεκριμένα αν ένα πηνίο περιστρέφεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο, η επαγόμενη ΗΕΔ μεταβάλλεται ημιτονοειδώς συναρτήσει του χρόνου και το ρεύμα που δημιουργείται έχει την ίδια εναλλασσόμενη συμπεριφορά (AlternatingCurrent) και δημιουργεί μια πηγή AC ισχύος.

Συμβολίζουμε την AC πηγή με το σύμβολο:

Μια εναλλασσόμενη τάση έχει τη μορφή: $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$ όπου V_0 το πλάτος

Εξαιτίας της περιοδικότητας του ημιτόνου, η τάση V σε κάποια χρονική στιγμή θα είναι ίση με τη τάση την χρονική στιγμή ($t+T$), όπου T η περίοδος



Η συχνότητα ορίζεται ως $1/T$ με μονάδες (s^{-1}) ή Hz, ενώ η γωνιακή συχνότητα $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$

Πηγές Εναλλασσόμενων ρευμάτων

Όταν μια πηγή δυναμικού συνδεθεί σε ένα κύκλωμα RLC, πρόσφερει ενέργεια στο σύστημα ώστε να αντισταθμίσει την απώλεια ενέργειας στην αντίσταση και ως αποτέλεσμα η ταλάντωση του κυκλώματος δεν θα φθίνει. Οι ταλαντώσεις του ρεύματος, φορτίου, διαφοράς δυναμικού οδηγούνται ή εξαναγκάζονται από την πηγή.

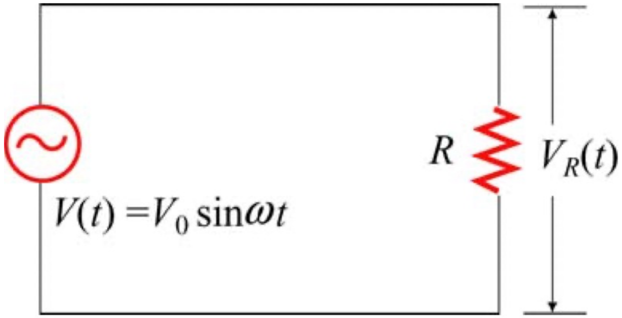
Μετά από ένα αρχικό χρονικό διάστημα, ένα AC ρεύμα θα διαρρέει το κύκλωμα ως αποτέλεσμα της πηγής δυναμικού. Το ρεύμα μπορεί να γραφεί με την μορφή:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

και ταλαντώνεται με την ίδια γωνιακή συχνότητα όπως και η πηγή δυναμικού, με πλάτος I_0 και διαφορά φάσης φ που εξαρτάται από την συχνότητα εξαναγκασμού.

Απλά AC κυκλώματα

Εξετάζουμε μερικές απλές περιπτώσεις κυκλωμάτων με ένα μόνο στοιχείο (πυκνωτή, πηνίο ή αντίσταση).



➢ Ωμικό κύκλωμα

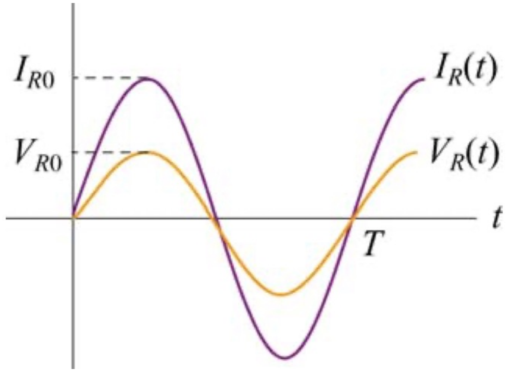
Εφαρμογή του νόμου του Kirchhoff:

$$V(t) - V_R(t) = V(t) - I_R(t)R$$

όπου $V_R(t) = I_R(t)R$ η στιγμιαία πτώση δυναμικού στην αντίσταση *R*.

Το στιγμιαίο ρεύμα στην αντίσταση θα είναι:

$$\boxed{I_R(t) = \frac{V_R(t)}{R} = \frac{V_{R0}\sin(\omega t)}{R} = I_{R0} sin\omega t}$$



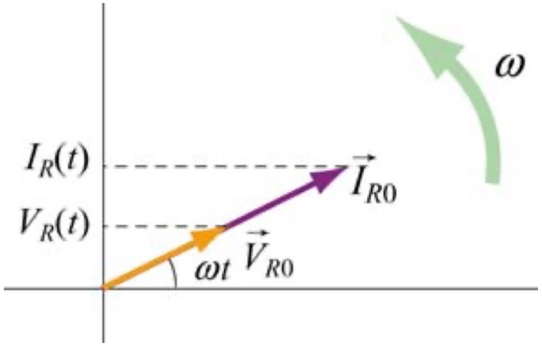
Συγκρίνοντας με τη γενική σχέση: $I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$

Παρατηρούμε ότι φ = 0 και επομένως το ρεύμα με την πηγή δυναμικού για το ωμικό καθαρά κύκλωμα βρίσκονται στην ίδια φάση.

Ωμικό κύκλωμα

Χρησιμοποιούμε τα διανυσματικό διάγραμμα (phasors), για να αναπαραστήσουμε το πλάτος του ρεύματος και της τάσης ως διανύσματα με όρισμα την αντίστοιχη φάση

διανυσματικό διάγραμμα (phasor)



Η προβολή στον κατακόρυφο άξονα δίνει το στιγμιαίο ρεύμα ή τάση τη χρονική στιγμή *t.*

Η μέση τιμή του ρεύματος κατά την διάρκεια μιας περιόδου μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$\langle I_R(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T I_R(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T I_{R0}sin(\omega t)dt = \frac{I_{R0}}{T}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}\right)dt = 0$$

Η μέση τιμή μηδενίζεται γιατί $\langle \sin(\omega t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T sin(\omega t)dt = 0$

Παρόμοια έχουμε:

$$\langle \cos(\omega t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T cos(\omega t)dt = 0$$

$$\langle \sin^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt = \frac{1}{2}$$

$$\langle \sin(\omega t)\cos(\omega t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T cos(\omega t)sin(\omega t)dt = 0$$

$$\langle \cos^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\,dt = \frac{1}{2}$$

Ωμικό κύκλωμα

Παρατηρούμε από τα προηγούμενα ότι η μέση τιμή του τετραγώνου του ρεύματος δεν μηδενίζεται:

$$\left\langle I_R^2(t)\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T I_R^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T I_{R0}^2 \sin^2(\omega t)\,dt = \frac{I_{R0}^2}{T}\int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}\right)dt = \frac{I_{R0}^2}{2}$$

Ορίζουμε ως ενεργό ρεύμα την τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής του τετραγώνου του ρεύματος:

$$I_{rms} = \sqrt{\langle I_R^2(t)\rangle} = \frac{I_{R0}}{\sqrt{2}}$$

Παρόμοια ορίζουμε την ενεργό τάση:

$$V_{rms} = \sqrt{\langle V_R^2(t)\rangle} = \frac{V_{R0}}{\sqrt{2}}$$

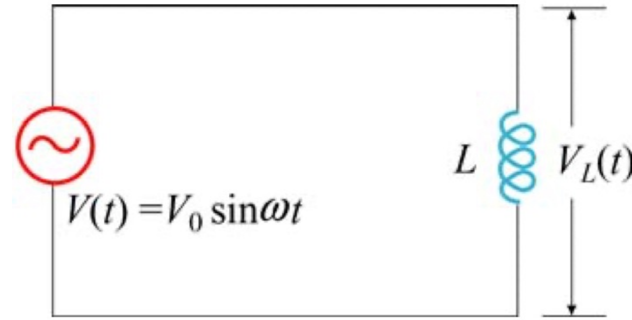
Η ενεργός τάση που έχουμε στους διακόπτες στη καθημερινή ζωή μας είναι 220V με συχνότητα 50Hz

Η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση είναι: $P_R(t) = I_R(t)V_R(t) = I_R^2(t)R$

Η μέση τιμή της ισχύος σε μια περίοδο θα είναι: $\langle P_R(t)\rangle = R\left\langle I_R^2(t)\right\rangle \Rightarrow$

$$\langle P_R(t)\rangle = \frac{1}{2}I_{R0}^2R = I_{rms}^2R = I_{rms}V_{rms} = \frac{V_{rms}^2}{R}$$

Κύκλωμα μόνο με πηνίο



Θεωρούμε τώρα το κύκλωμα το οποίο αποτελείται από μια AC πηγή και ένα πηνίο.

Εφαρμόζουμε τον τροποποιημένο 2ο νόμο του Kirchhoff:

$$V(t) - V_L(t) = V(t) - L\frac{dI_L(t)}{dt} = 0$$

Από τη σχέση αυτή έχουμε: $\frac{dI_L(t)}{dt} = \frac{V(t)}{L} = \frac{V_{L0}}{L} sin(\omega t)$

Ολοκληρώνουμε και παίρνουμε: $I_L(t) = \int dI_L = \frac{V_{L0}}{L}\int sin(\omega t)dt = -\left(\frac{V_{L0}}{\omega L}\right) cos(\omega t)$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση: $-cos(\omega t) = sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{I_L(t) = \left(\frac{V_{L0}}{\omega L}\right) sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$

Συγκρίνοντας με την γενική μορφή της εξίσωσης του ρεύματος: $I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$

Βλέπουμε: $\boxed{I_{L0} = \frac{V_{L0}}{\omega L} = \frac{V_{L0}}{X}}$ όπου $\boxed{X = \omega L}$ επαγωγική αντίσταση [μονάδες Ω]

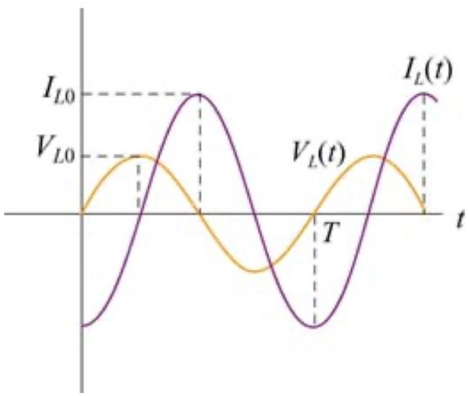
Αντίθετα με την αντίσταση, η επαγωγική αντίσταση X, εξαρτάται από την γωνιακή συχνότητα ω. Η αντίσταση στην ροή του ρεύματος αυξάνει με την συχνότητα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι σε υψηλές συχνότητες το ρεύμα αλλάζει πιο γρήγορα απ' ότι στις χαμηλές συχνότητες. Για ω=0, η επαγωγική αντίσταση μηδενίζεται $X = 0$

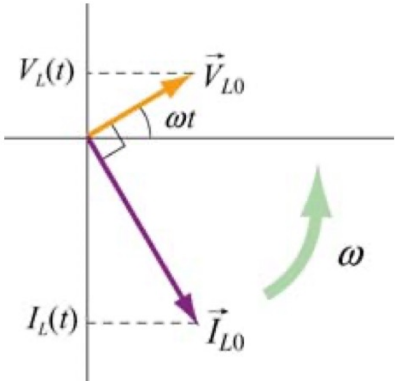
Κύκλωμα μόνο με πηνίο

Συγκρίνοντας με την γενική μορφή της εξίσωσης του ρεύματος: $I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$

και την: $I_L(t) = \left(\frac{V_{L0}}{\omega L}\right) sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ βλέπουμε ότι: $\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}}$

Τα γραφήματα του ρεύματος και της τάσης και τα διανυσματικά διαγράμματα είναι:

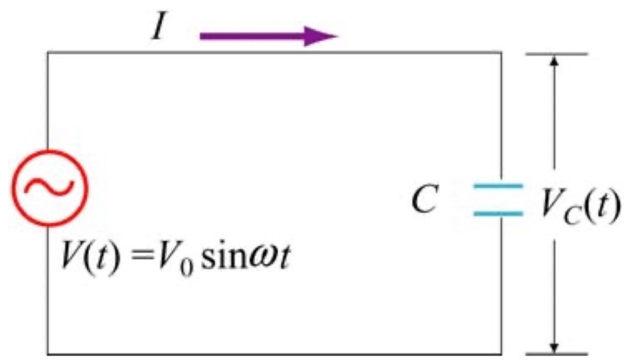




Το ρεύμα I_L είναι εκτός φάσης με την τάση V_L κατά μια γωνία $\varphi = +\pi/2$. Φθάνει στη μέγιστη τιμή κατά ¼ κύκλου αφού η V_L φθάσει στη μέγιστη τιμή της.

Στο κύκλωμα με μόνο επαγωγική αντίσταση το ρεύμα I_L υπολείπεται της τάσης V_L κατά μια γωνία $\varphi = \pi/2$.

Κύκλωμα μόνο με πυκνωτή



Θεωρούμε τώρα το κύκλωμα το οποίο αποτελείται από μια AC πηγή και έναν πυκνωτή χωρητικότητας C.

Από τον 2ο νόμο του Kirkhhoff έχουμε:

$$V(t) - V_C(t) = V(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0$$

Από την εξίσωση αυτή παίρνουμε: $Q(t) = CV(t) = CV_C(t) = CV_{C0}sin(\omega t)$

Το ρεύμα θα είναι: $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \omega CV_{C0}cos(\omega t) \Rightarrow \boxed{I(t) = \omega CV_{C0}sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$

όπου χρησιμοποιήσαμε την τριγωνομετρική σχέση: $cos(\omega t) = sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

Συγκρίνοντας με την γενική μορφή της εξίσωσης του ρεύματος: $I(t) = I_0\sin(\omega t - \varphi)$

Βλέπουμε: $\boxed{I_{C0} = C\omega V_{C0} = \frac{V_{C0}}{X_C}}$ όπου $\boxed{X_C = \frac{1}{C\omega}}$ χωρητική αντίσταση [μονάδες Ω]

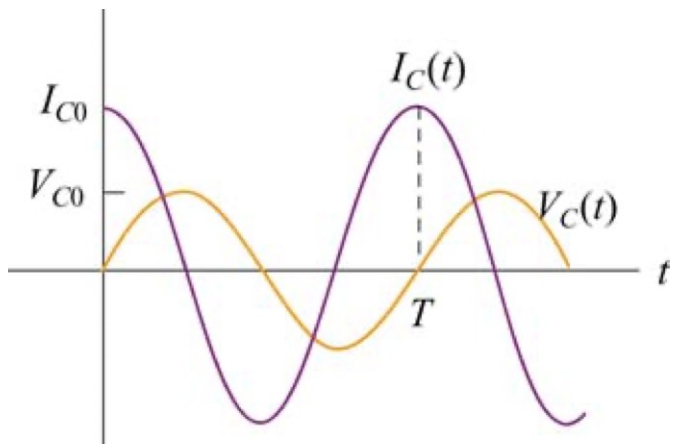
Αντίθετα με την αντίσταση, η χωρητική αντίσταση X_C, εξαρτάται από την γωνιακή συχνότητα ω. Η αντίσταση γίνεται άπειρη καθώς το $\omega \rightarrow 0$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι σε χαμηλές συχνότητες το ρεύμα αλλάζει πολύ αργά και γίνεται συνεχές οπότε ο πυκνωτής φορτίζεται και κατόπιν ενεργεί ως ανοικτός διακόπτης.

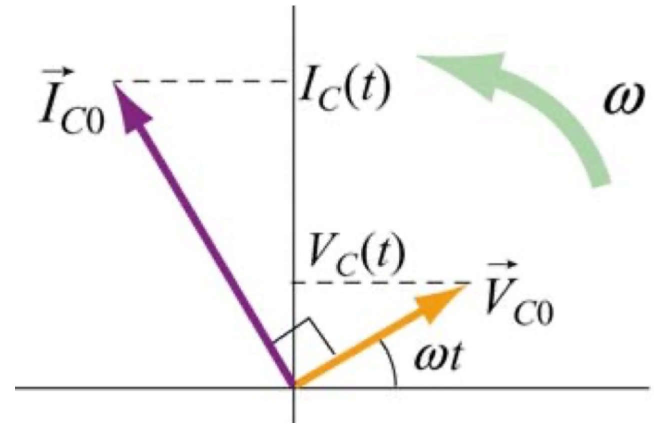
Κύκλωμα μόνο με πυκνωτή

Συγκρίνοντας με την γενική μορφή της εξίσωσης του ρεύματος: $I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$

και την: $I_C(t) = \left(\frac{V_{C0}}{X_C}\right) sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ βλέπουμε ότι: $\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2}}$

Τα γραφήματα του ρεύματος και της τάσης και τα διανυσματικά διαγράμματα είναι:

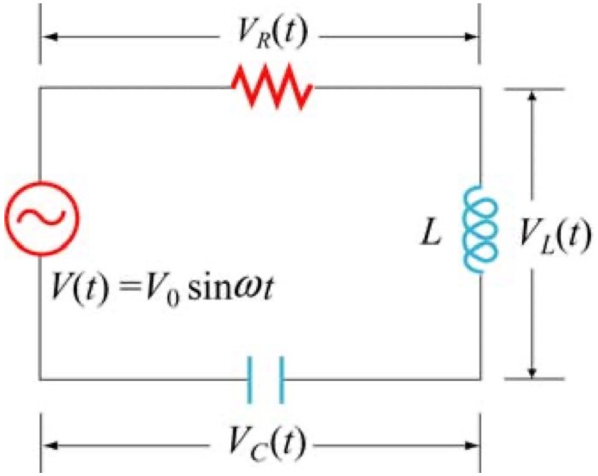




Τη χρονική στιγμή t=0, η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή είναι 0 αλλά το ρεύμα βρίσκεται στο μέγιστο. Το ρεύμα φθάνει τη μέγιστη τιμή του κατά ¼ του κύκλου πριν την τάση ($\varphi = \pi/2$).

Στο κύκλωμα με μόνο χωρητική αντίσταση το ρεύμα I_C προηγείται της τάσης V_C κατά μια γωνία $\varphi = \pi/2$.

Κύκλωμα RLC σε σειρά



Θεωρούμε τώρα το κύκλωμα το οποίο αποτελείται από μια AC πηγή, έναν πυκνωτή χωρητικότητας C, ένα πηνίο αυτεπαγωγής *L* και μια αντίσταση *R* συνδεδεμένα σε σειρά

Εφαρμόζουμε τον τροποποιημένο 2° νόμο του Kirkhhoff:

$$V(t) - V_R(t) - V_L(t) - V_C(t) = V(t) - IR - L\frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

που οδηγεί στην διαφορική εξίσωση:

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = V_0 sin(\omega t)$$

Υποθέτοντας ότι ο πυκνωτής είναι αρχικά αφόρτιστος ώστε $I = +dQ/dt$ είναι ανάλογο της αύξησης του φορτίου στον πυκνωτή, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση ως:

$$\boxed{L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 sin(\omega t)}$$

Μια δυνατή λύση στην παραπάνω εξίσωση είναι: $\boxed{Q(t) = Q_0 cos(\omega t - \varphi)}$

όπου το πλάτος είναι: $Q_0 = \dfrac{V_0/L}{\sqrt{\left(\frac{R\omega}{L}\right)^2 + \left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)^2}} = \dfrac{V_0}{\omega\sqrt{(R)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$

Κύκλωμα RLC σε σειρά

Θεωρώντας την χωρητική, $X_C = 1/C\omega$, και επαγωγική αντίσταση $X_L = L\omega$, το πλάτος γράφεται:

$$Q_0 = \frac{V_0}{\omega\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Η διαφορά τάσης μπορεί να γραφεί: $$tan\varphi = \frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{C\omega}\right) = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Το αντίστοιχο ρεύμα μπορεί να γραφεί ως:

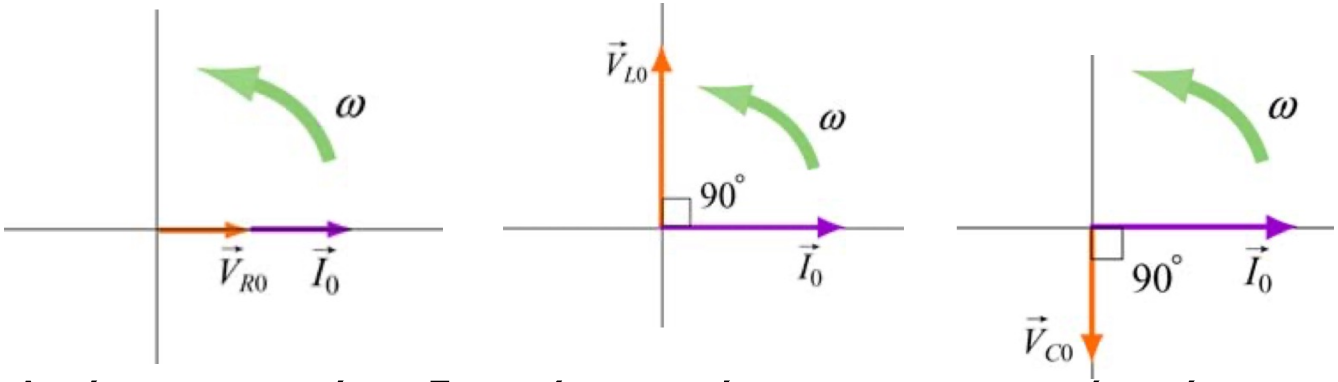
$$I(t) = +\frac{dQ}{dt} = I_0 sin(\omega t - \varphi)$$ με πλάτος: $$I_0 = -Q_0\omega = -\frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Το ρεύμα έχει το ίδιο πλάτος και φάση σε όλα τα σημεία σε ένα κύκλωμα RLC σε σειρά.

Σε αντίθεση, η στιγμιαία διαφορά δυναμικού σε κάθε στοιχείο του κυκλώματος *R, L,* και *C*, έχει πλάτος και διαφορετική σχέση φάσης με το ρεύμα.

Κύκλωμα RLC σε σειρά

Τα διανυσματικά διαγράμματα δείχνουν:



Από τα παραπάνω διαγράμματα έχουμε τις στιγμιαίες τάσεις:

$$V_R(t) = I_0 R sin(\omega t) = V_{R0} sin(\omega t)$$

$$V_L(t) = I_0 X_L sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = V_{L0} cos(\omega t)$$

$$V_C(t) = I_0 X_C sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -V_{C0} cos(\omega t)$$

Το άθροισμα των τριών διαφορών δυναμικού ισούται με την στιγμιαία τάση που δίνει η πηγή δυναμικού:

$$V(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$$

Το ίδιο θα μπορούσε να γραφεί με τα διανύσματα από το διανυσματικά διαγράμματα:

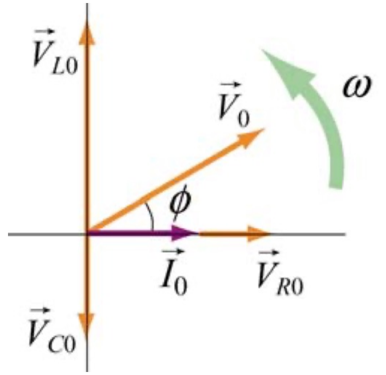
$$\vec{V}_0 = \vec{V}_{R0} + \vec{V}_{L0} + \vec{V}_{C0}$$

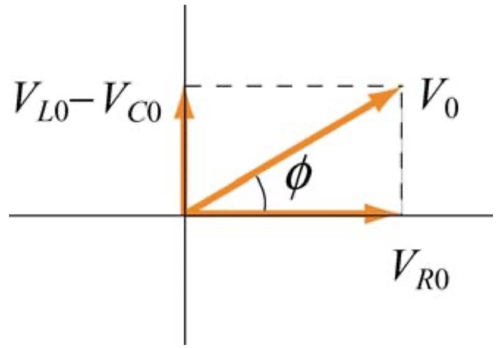
Κύκλωμα RLC σε σειρά

Από τα διανυσματικά διαγράμματα βλέπουμε ότι το ρεύμα $\vec{I}_0$ προηγείται της διαφοράς δυναμικού στον πυκνωτή κατά $\pi/2$ αλλά έπεται της επαγωγικής διαφοράς δυναμικού κατά $\pi/2$.

Τα τρία διανύσματα της διαφοράς δυναμικού περιστρέφονται αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού με τις σχετικές τους θέσεις συγκεκριμένες.

Η σχέση μεταξύ των διαφόρων πλατών διαφοράς δυναμικού δίνεται από τα δύο παρακάτω διανυσματικά διαγράμματα:





Προκύπτει ότι:

$$V_0 = |\vec{V}_0| = |\vec{V}_{R0} + \vec{V}_{L0} + \vec{V}_{C0}| \Rightarrow$$

$$V_0 = \sqrt{V_{R0}^2 + (V_{L0} - V_{C0})^2} \Rightarrow$$

$$V_0 = \sqrt{(I_0 R)^2 + (I_0 X_L - I_0 X_C)^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{V_0 = I_0 \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Θα πρέπει να τονιστεί ότι το μέγιστο πλάτος της AC διαφοράς δυναμικού V_0 δεν ισούται με το άθροισμα των πλατών της διαφοράς δυναμικού στα επιμέρους στοιχεία:

$$\boxed{V_0 \neq V_{R0} + V_{L0} + V_{C0}}$$

Αυτό συμβαίνει γιατί οι τάσεις έχουν διαφορά φάσης μεταξύ τους και δεν φθάνουν στις μέγιστες τιμές τους ταυτόχρονα