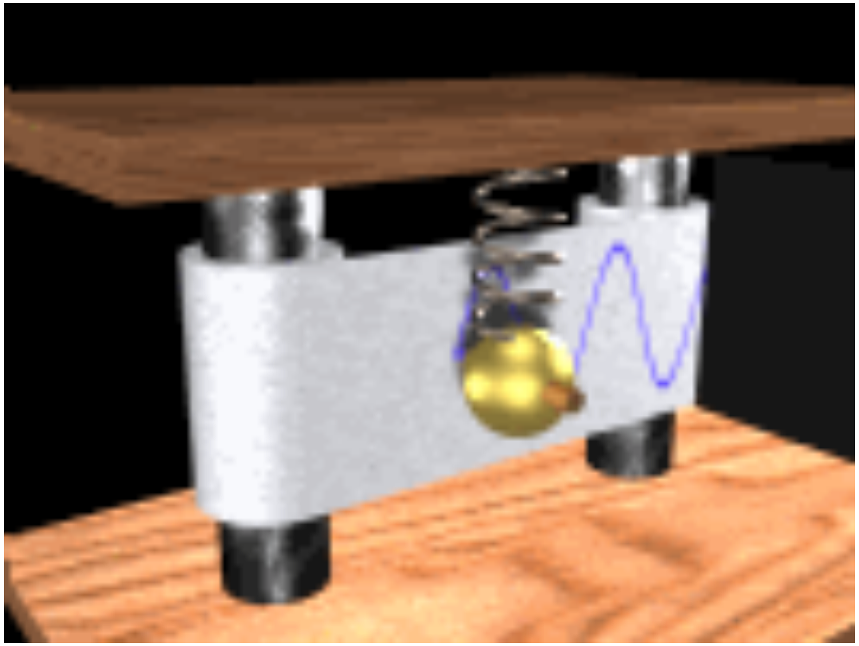
Αρμονικοί ταλαντωτές

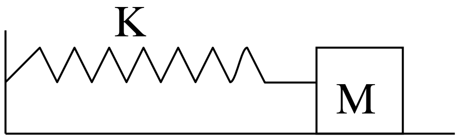


Αρμονικοί ταλαντωτές

- Μερικά από τα θέματα που θα καλύψουμε:
- Μάζες σε ελατήρια, εκκρεμή
- Διαφορικές εξισώσεις: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$
  - Με λύση της μορφής: $x = x_{\max}\cos(\omega t + \varphi)$ όπου $\omega^2 = \frac{K}{m}$
- Φθίνουσες ταλαντώσεις
- Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

Ελατήρια

- Θεωρήστε το γνωστό σας ελατήριο



Το σύστημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας

Η εξίσωση της κίνησης γράφεται σύμφωνα με το 2ο νόμο του Newton

$F = ma = -Kx$ σε συνδυασμό με το νόμο του Hooke

Ξέρουμε όμως ότι η επιτάχυνση $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

Η εξίσωση της κίνησης γράφεται λοιπόν σαν:

$$F = m\ddot{x} = -Kx \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + Kx = 0}$$

Δευτέρας τάξης (δεύτερη παράγωγος), ομογενής (=0), γραμμική (οι παράγωγοι εμφανίζονται σε πρώτη δύναμη) διαφορική εξίσωση

Oooops τι κάνουμε ?

Λύση της Δ.Ε. του απλού αρμονικού ταλαντωτή

Ένας τρόπος για να λύσουμε την εξίσωση είναι με τη μέθοδο διαχωρισμού των μεταβλητών.

Ορίζω: $\boxed{\omega^2 = \frac{K}{m}}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = -\omega^2 x \Rightarrow \upsilon\frac{d\upsilon}{dx} = -\omega^2 x \Rightarrow \upsilon d\upsilon = -\omega^2 x dx$$

$$\Rightarrow \int \upsilon\, d\upsilon = \int -\omega^2 x\, dx \Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 \Rightarrow \upsilon^2 = -\omega^2 x^2 \Rightarrow \upsilon = \pm\sqrt{-\omega^2}\,x$$

Παύση... Είμαστε στη μέση !!

Αυτή τη στιγμή έχουμε τη ταχύτητα συναρτήσει της θέσης.

Θέλουμε όμως την θέση συναρτήσει του χρόνου ! Δηλαδή x(t) = …

$$\upsilon = \sqrt{-\omega^2}\,x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{-\omega^2}\,x \Rightarrow \frac{dx}{x} = \sqrt{-\omega^2}\,dt \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\sqrt{-\omega^2}\,dt \Rightarrow$$

$$\ln x + C = \sqrt{-\omega^2}\,t \Rightarrow x = Ae^{\pm\sqrt{-\omega^2}\,t}$$

Λύση της διαφορικής εξίσωσης

Λύση της Δ.Ε. απλού αρμονικού ταλαντωτή

- Yeaks !!! Η μέθοδος είναι μακρόσυρτη και καθόλου ευχάριστη

  Το αποτέλεσμα είναι όμως ενδιαφέρον: $x(t) = Ae^{\pm\sqrt{-\omega^2}t}$

  Τη λύση αυτή μπορούσαμε να την δοκιμάσουμε από την αρχή!!

  Δηλαδή για να λύσουμε την Δ.Ε. δοκιμάζουμε διάφορες λύσεις.

  Αν την επαληθεύουν τότε το τι δοκιμάσαμε είναι όντως λύση !!!

- Η λύση που βρήκαμε είναι η μοναδική? Υπάρχουν άλλες λύσεις?

  Από θεωρία Δ.Ε.: Για κάθε Δ.Ε. εξίσωση n-τάξης υπάρχουν n-ανεξάρτητες μεταξύ τους λύσεις.

  (γραμμικές μόνο): Αν n-λύσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους τότε και ο γραμμικός τους συνδυασμός είναι λύση

  Δηλαδή $x(t) = Ae^{+\sqrt{-\omega^2}t} + Be^{-\sqrt{-\omega^2}t}$ είναι λύση και μάλιστα καλείται γενική λύση ή πλήρης λύση της εξίσωσης

➢ Ένα ακόμα προβληματικό σημείο:

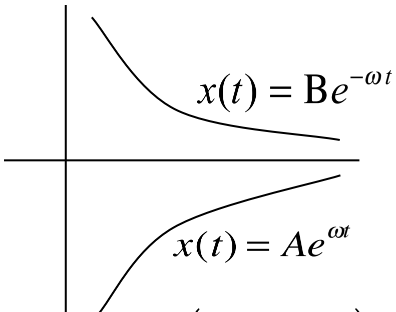
  Τι συμβαίνει με το ω? Είναι θετικό ? αρνητικό?

Λύση Δ.Ε. απλού αρμονικού ταλαντωτή

- Αν K < 0 ή m < 0 (δεν έχουμε φυσικό σύστημα) $-\omega^2 = -K/m > 0$
  - Οι λύσεις είναι της μορφής $x(t) = Ae^{\omega t}$ και $x(t) = Be^{-\omega t}$

    Ο γραμμικός τους συνδυασμός είναι επίσης λύση $x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

Η εξίσωση αυτή δεν αντιστοιχεί σε αρμονική κίνηση.
Εν αντιθέσει αντιστοιχεί σε εκθετικά αυξανόμενη ή φθίνουσα κίνηση



$$\cosh x = \tfrac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$
$$\sinh x = \tfrac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$\frac{d\cosh x}{dx} = \sinh x$$
$$\frac{d\sinh x}{dx} = \cosh x$$

Χρησιμοποιώντας την: $e^{\omega t} = \cosh\omega\, t + \sinh\omega\, t$

Μπορούμε να γράψουμε τις λύσεις με τις ακόλουθες ισοδύναμες μορφές:

$$x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$
$$x(t) = C\cosh\omega t + D\sinh\omega t$$
$$x(t) = \mathrm{E}\cosh(\omega t + \varphi_1)$$
$$x(t) = F\sinh(\omega t + \varphi_2)$$

Λύση Δ.Ε. Απλού αρμονικού ταλαντωτή

- Αν $K > 0$ και $m > 0$ (φυσικό σύστημα) τότε $\omega > 0 \Rightarrow -\omega^2 < 0$

  Οι λύσεις είναι της μορφής $x(t) = Ae^{i\omega t}$ και $x(t) = Be^{-i\omega t}$

  με πλήρη λύση: $x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$

  Χρησιμοποιώντας $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ έχουμε

$$x(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$$

$$x(t) = E\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x(t) = F\sin(\omega t + \varphi_2)$$

Όλες οι μορφές είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης του αρμονικού ταλαντωτή

Οι σταθερές A,B, ή C και D, E,F και φ_1,φ_2 καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Δηλαδή την κατάσταση του συστήματος μια χρονική στιγμή $t=t_0$ συνήθως $t_0 = 0$.

Αν $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ τότε

$x(0) = A$ αρχική θέση

$\dfrac{dx(0)}{dt} = \omega B$ αρχική ταχύτητα

Απλός αρμονικός ταλαντωτής

Η γενική μορφή της λύσης του αρμονικού ταλαντωτή είναι

$$x(t) = A\cos\omega\, t + B\sin\omega\, t$$

- Εν γένει αν $x(t) = x(t+T)$ η κίνηση είναι περιοδική με περίοδο T

$$\cos\omega\, t = \cos\left(\omega\left(t+T\right)\right) = \cos(\omega\, t + 2\pi)$$

αν $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{\nu}}$ ⇐ Περίοδος ταλάντωσης ή συχνότητα

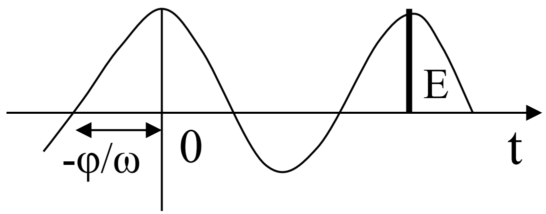
Οι μορφές που γράψαμε πριν βγαίνουν από την γενική με την βοήθεια τριγωνομετρικών σχέσεων και οι σταθερές συνδέονται μεταξύ τους

Χρησιμοποιώντας $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

$$x(t) = E\cos\left(\omega\, t + \varphi_1\right) = E\cos\left(\omega t\right)\cos\varphi_1 - E\sin\left(\omega t\right)\sin\varphi_1$$

Επομένως για $A = E\cos\varphi_1$ και $B = -E\sin\varphi_1$ γίνεται:

$$x(t) = E\cos\left(\omega t + \varphi_1\right) = A\cos\left(\omega t\right) + B\sin\left(\omega t\right)$$



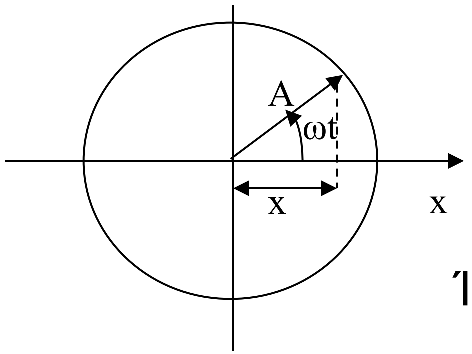
Απλός αρμονικός ταλαντωτής και κυκλική κίνηση

- Επομένως η εξίσωση $x(t) = A\cos(\omega\, t + \varphi)$
  παριστάνει μια περιοδική, συνημιτονοειδή κίνηση με απομάκρυνση ή πλάτος A και η γωνία φ προσδιορίζει την φάση της κίνησης.

  Το πλάτος και η φάση είναι σταθερές της κίνησης που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του συστήματος.

  Η φάση εν γένει χρησιμοποιείται για την σύγκριση της κίνησης δύο συστημάτων.

- Χαρακτηριστικά, η κίνηση που περιγράφεται από την εξίσωση είναι όμοια με την κίνηση που εκτελεί η προβολή μιας κυκλικής κίνησης στον x-άξονα

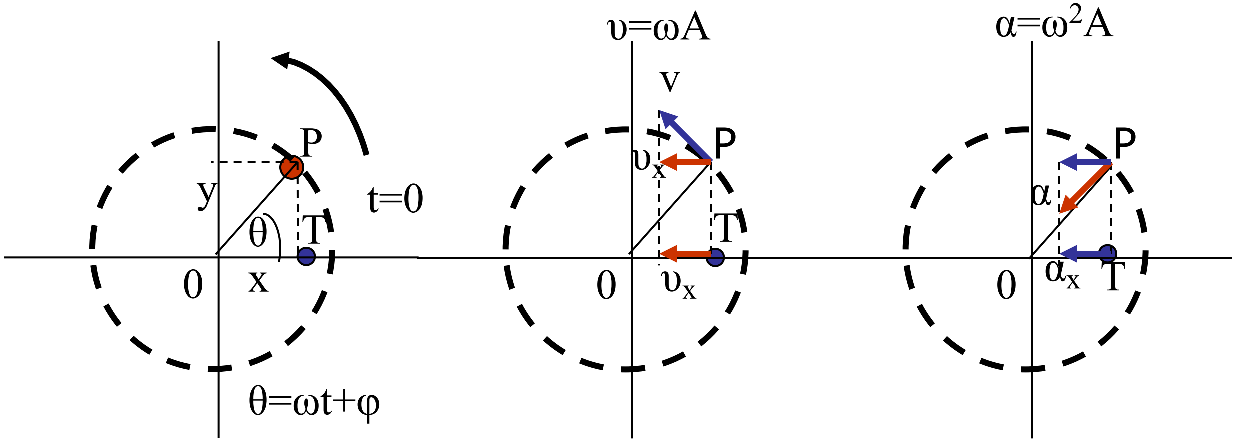


Ομοιόμορφη κυκλική κίνηση χαρακτηρίζεται από

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r} \Rightarrow a_x = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \;\Rightarrow\; \ddot{x} = -\omega^2 x$$

Ίδια διαφορική εξίσωση με αυτή μάζας εξαρτημένης σε ελατήριο

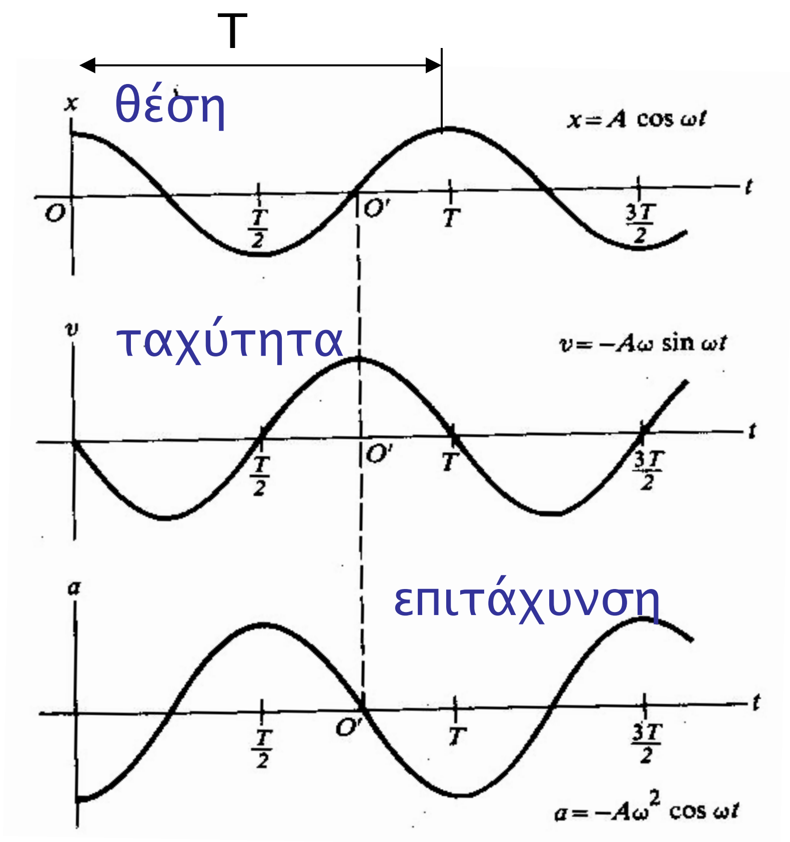
Απλός αρμονικός ταλαντωτής και κυκλική κίνηση



- Για $t=0$, $\theta=\varphi$ η γωνία που διαγράφει η OP με τον x-άξονα
- Συναρτήσει του t, το P περιστρέφεται πάνω στο κύκλο ακτίνας R=A ενώ το T κινείται παλινδρομικά στο x-άξονα ανάμεσα σε +A και –A

  Τα σημεία P και T έχουν την ίδια συντεταγμένη x ➔ $x=A\cos(\omega t+\varphi)$
- Ο χρόνος για μια πλήρη περιστροφή είναι ίσος με την περίοδο κίνησης γωνιακή ταχύτητα περιστροφής = γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης
- Η γραμμική ταχύτητα του P, $\upsilon=\omega R=\omega A$ ενώ του T, $\upsilon_x=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$ από dx/dt
- Η γραμμική επιτάχυνση του P έχει φορά προς το κέντρο, $\alpha=\omega^2 A$
- Η επιτάχυνση του T: $\alpha_x=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi)$=x-συνιστώσα της α του P

Απλή Αρμονική ταλάντωση – Εξισώσεις κίνησης



Από την εξίσωση-λύσης της ΔΕ του αρμονικού ταλαντωτή μπορούμε να εξαγάγουμε τις υπόλοιπες εξισώσεις κίνησης:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

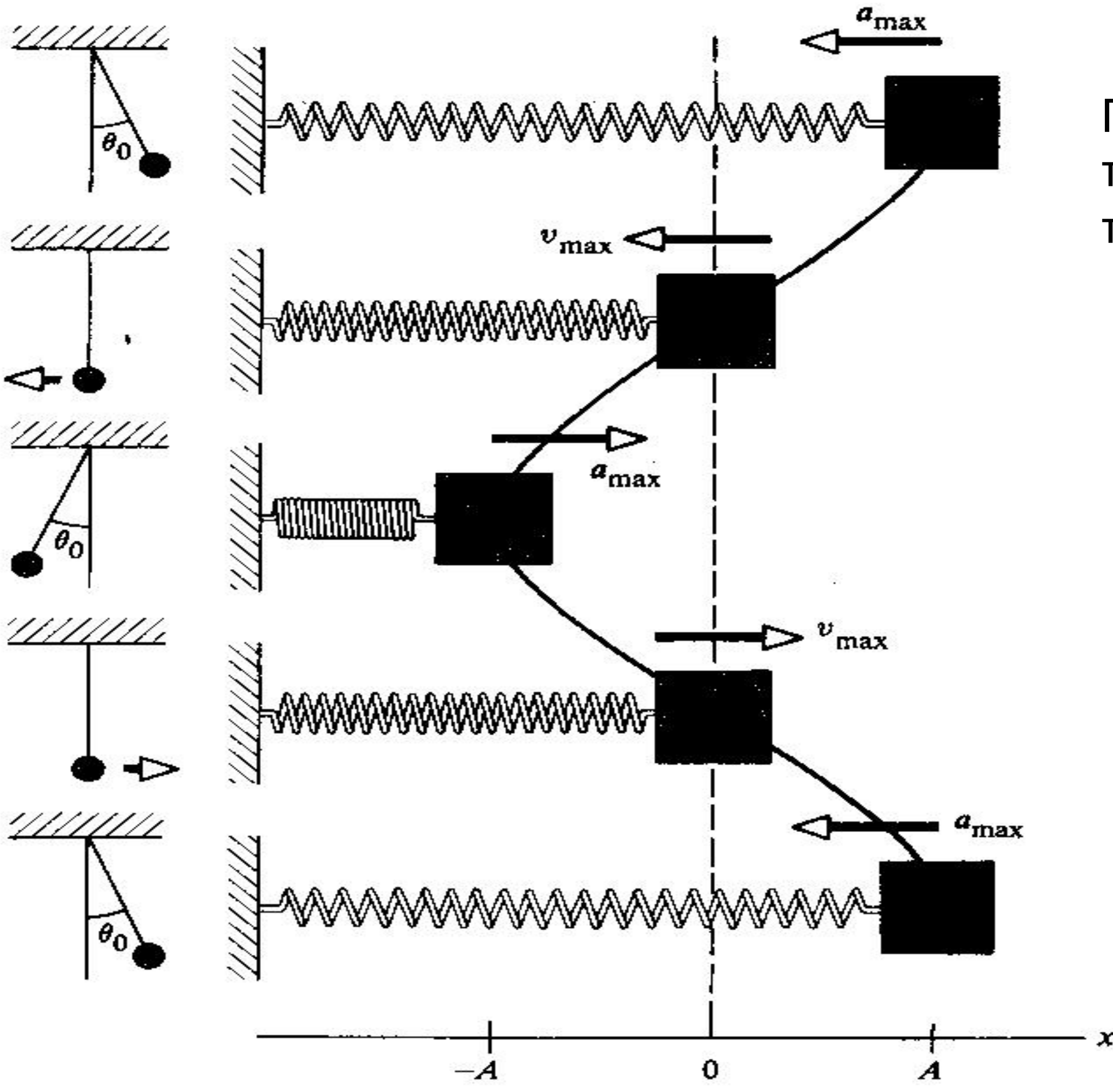
$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\upsilon}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow a(t) = -\omega^2 x$$

Οι ακραίες τιμές είναι επομένως:

$$\upsilon(t)_{\max} = -A\omega \qquad a(t)_{\max} = -A\omega^2$$

- Η φάση της ταχύτητας διαφέρει από αυτή της θέσης κατά 90° ή π/2
- Η φάση της ταχύτητας διαφέρει από αυτή της επιτάχυνσης κατά 90° ή π/2
- Η φάση της επιτάχυνσης διαφέρει από αυτή της θέσης κατά 180° ή π

Μάζα σε ελατήριο



$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

Για t=0, x(0)=0
το σύστημα περνά από
τη θέση ισορροπίας

Απλή αρμονική ταλάντωση

- Τι έχουμε δει μέχρι τώρα

$$F = m\ddot{x} = -Kx \Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0$$

Εξίσωση κίνησης αρμονικού ταλαντωτή

Διάφορες μορφές λύσεις της εξίσωσης:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

$$x(t) = B\sin(\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$$

$$x(t) = Ee^{i\omega t} + Fe^{-i\omega t}$$

A: πλάτος ταλάντωσης

φ: φάση

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$ γωνιακή συχνότητα

Άλλες εξισώσεις κίνησης:

$$\upsilon_x = -(A\omega)\sin(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = \ddot{x} = -(A\omega^2)\cos(\omega t + \varphi)$$

Ταχύτητα: $|\upsilon_{\max}| = A\omega$

Επιτάχυνση: $|a_{\max}| = A\omega^2$

- Κίνηση παρόμοια με την κίνηση της προβολής στον x-άξονα ενός σώματος που εκτελεί κυκλική κίνηση

- Η ταχύτητα μικρότερη κοντά στο A περνά περισσότερη ώρα εκεί

Ενέργεια απλού αρμονικού ταλαντωτή

- ✓ Στις διαλέξεις για έργο και ενέργεια είχαμε συζητήσει την δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται σε ένα ελατήριο κατά την συμπίεση ή επιμήκυνσή του καθώς και την σχέση μεταξύ δυναμικής και κινητικής ενέργειας για μια μάζα m εξαρτημένη από το ελατήριο.

- ❑ Ξέρουμε ότι το ελατήριο με μια μάζα εξαρτώμενη από το ένα άκρο του αποτελούν σύστημα απλού αρμονικού ταλαντωτή: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

- ❑ Η μηχανική ενέργεια είναι: $E = K + U$ και διατηρείται

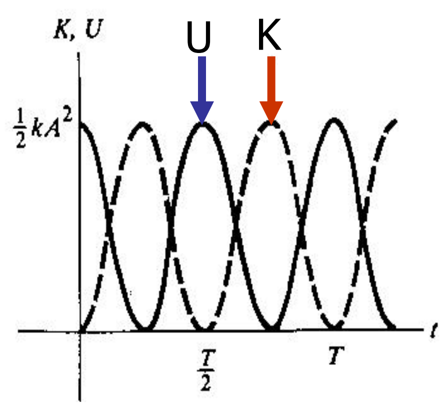
$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad \text{αφού} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

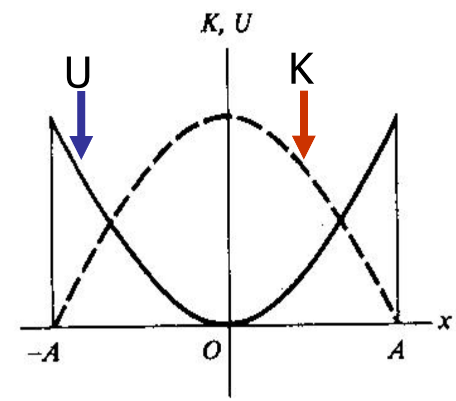
$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$U_{\max} = K_{\max}$ Ε ανάλογη πλάτους

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow$$

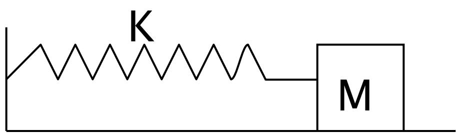
$$\upsilon = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)} = \pm\omega\sqrt{\left(A^2 - x^2\right)}$$





Παράδειγμα

- Μάζα 12Kg είναι εξαρτημένη σε ελατήριο με $K=1.3x10^4$. Το σύστημα ξεκινά με επιμήκυνση +55cm. Ποια η $υ_{max}$.



$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\upsilon(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\upsilon(t=0) = -A\omega\sin(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \ \eta \ \varphi = \pi$$

Διαλέγουμε την περίπτωση με φ=0 μια και η αρχική επιμήκυνση >0

$$x(t=0) = A\cos(\varphi) = 0.55$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 33rad/s$$

$$x(t) = 0.55\cos(33t)$$

$$\upsilon_{\max} = A\omega = 18m/s$$

$$\upsilon(t) = -\upsilon_{\max}\sin(33t)$$

Συνθήκες για να έχουμε απλή αρμονική ταλάντωση

- Μια κίνηση είναι απλή αρμονική ταλάντωση μόνο όταν μια από τις 2 παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες ισχύουν:

(α) Αν υπάρχει μια συνισταμένη δύναμη σε ένα σύστημα η οποία είναι ανάλογη της θέσης του συστήματος όπως μετριέται από τη θέση ισορροπίας του με μια σταθερά αναλογίας του τύπου του ελατηρίου

$$\boxed{\vec{F}_{tot} = -kx\hat{i}}$$

ανεξάρτητα από το αν η δύναμη είναι από ελατήριο ή όχι και αν η δύναμη αυτή, ή η δύναμη μαζί με μια σταθερή δύναμη που ασκείται κατά μήκος του ίδιου άξονα, είναι οι μόνες δυνάμεις του συστήματος ενεργούσες στην x-διεύθυνση

(β) Αν εφαρμόζοντας το νόμο του Newton καταλήξουμε σε Δ.Ε. πανομοιότυπη της Δ.Ε. του απλού αρμονικού ταλαντωτή.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0\ m/s^2$$

Απλή αρμονική ταλάντωση - Αρχικές συνθήκες

- Αν δίνονται τα K και m, και οι αρχικές συνθήκες $x(0)=x_0$ και $\upsilon(0) = \upsilon_0$, να βρεθεί η εξίσωση τροχιάς x(t).

  Λύση:

- Κάθε μορφή της λύσης της εξίσωσης κίνησης περιέχει ΔΥΟ άγνωστες ποσότητες.

  Αυτές δεν μπορούν να υπολογισθούν από την F=ma.

- Προσδιορίζονται από τις 2 αρχικές τιμές της θέσης (x) και ταχύτητας (υ)

- Αν γράψουμε το x σαν $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \quad \mu\varepsilon \quad \omega = \sqrt{\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}}$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &\equiv x(t=0) = A\cos\ \varphi \\ \upsilon_0 &\equiv \upsilon(t=0) = A\omega\sin\ \varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan\varphi = -\frac{\upsilon_0}{\omega x_0} \qquad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega^2}}$$

Διατήρηση ενέργειας

$$\frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}Kx_0^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_0^2$$

$$A^2 = x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega^2} = x_0^2 + \frac{m}{K}\upsilon_0^2$$

- Αν χρησιμοποιούσαμε $x(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$

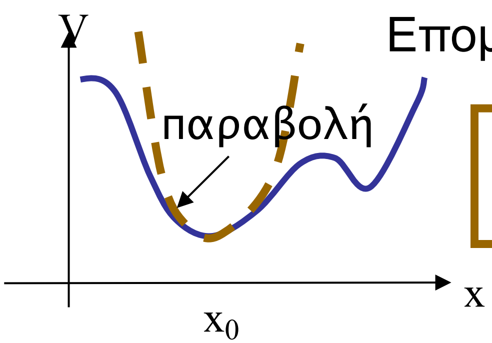
$$\left.\begin{aligned} x_0 &\equiv x(t=0) = C \\ \upsilon_0 &\equiv \upsilon(t=0) = \omega D \end{aligned}\right\} \Rightarrow x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{\upsilon_0}{\omega}\sin\omega t$$

Έτσι φαίνονται περισσότερο οι αρχικές συνθήκες

Γιατί τα κοιτάζουμε όλα αυτά?

- Διαλέγουμε να μελετήσουμε την F=-kx για δύο βασικούς λόγους:
  - Τέτοιες δυνάμεις συναντάμε πολύ συχνά στη φύση
  - Μπορούμε εύκολα να λύσουμε την εξίσωση κίνησης
- Σχετικά με το πρώτο λόγο, φανταστείτε ένα δυναμικό της μορφής V(x).
- Επικεντρώνουμε την προσοχή μας σε ένα τοπικό ελάχιστο.
- Έστω ότι το V(x) έχει ένα ελάχιστο στη θέση x_0. Μπορούμε να πάρουμε το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor του V(x) της μορφής:

$$V(x)=\underbrace{V(x_0)}_{\text{σταθ.}}+\underbrace{V'(x_0)}_{\text{εξ'ορισμού}=0}(x-x_0)+\frac{1}{2!}V''(x_0)(x-x_0)^2+\underbrace{\frac{1}{3!}V'''(x_0)(x-x_0)^3+\cdots}_{\text{αρκετά μικρό για x κοντά στο } x_0}$$

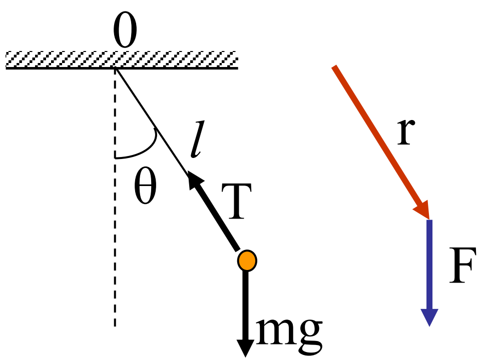


Επομένως μπορούμε να γράψουμε: $\boxed{V(x)\approx\frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2}$

> Δηλαδή **κάθε** δυναμικό μοιάζει με μια παραβολή αν πάμε αρκετά κοντά σε ένα ελάχιστο.

Δηλαδή π.χ. $V''(x_0)="K"$ τότε: $\frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2\leftrightarrow\frac{1}{2}K(ax)^2$

Εκκρεμή - Απλό εκκρεμές



$$\left.\begin{aligned}\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = -mgl\sin\theta \\ \vec{\tau} = I\vec{\alpha}, \quad \mathrm{I} = Ml^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow Ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgl\sin\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta}$$ Διαφορική εξίσωση

Αυτή η εξίσωση είναι δύσκολο να λυθεί. Δεν μοιάζει με τη γνωστή εξίσωση

Για μικρές γωνίες θ μπορούμε όμως να γράψουμε $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots \approx \theta$

Επομένως η διαφορική εξίσωση γίνεται: $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta$ Δ.Ε. αρμονικού ταλαντωτή

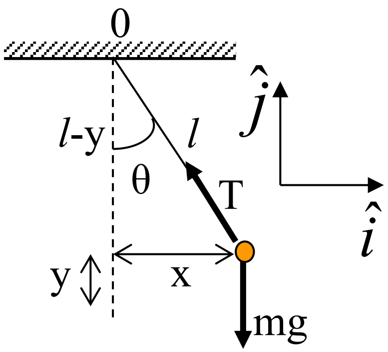
Άρα η λύση είναι: $\theta(t) = A\cos(\omega\, t + \varphi)$ όπου: $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Προσοχή στην ορολογία: Το ω δεν είναι η γωνιακή ταχύτητα, αλλά η γωνιακή συχνότητα:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \Rightarrow \mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Ανεξάρτητο της μάζας

Απλό εκκρεμές – Με το 2° νόμο του Newton



Η δύναμη του νήματος T στη μάζα m γράφεται:

$$\vec{T} = (-T\sin\theta)\hat{i} + (T\cos\theta)\hat{j}$$

Το βάρος είναι: $\vec{w} = (-mg)\hat{j}$

Επομένως στον y-άξονα η συνισταμένη δύναμη είναι:

$$\sum F_y = ma_y = (-mg + T\cos\theta) \Rightarrow -mg + T\cos\theta = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

Αλλά γεωμετρικά: $\cos\theta = \frac{l-y}{l}$ $\boxed{-mg + T\frac{l-y}{l} = m\frac{d^2y}{dt^2}}$

Στη x-διεύθυνση: $\sum F_x = ma_x = T\sin\theta \Rightarrow T\sin\theta = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \boxed{T\frac{x}{l} = m\frac{d^2x}{dt^2}}$

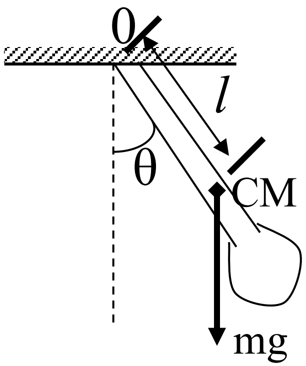
Για μικρές γωνίες εκτροπής θ, η κατακόρυφη κίνηση είναι αμελητέα συγκριτικά με την οριζόντια και μπορούμε να αγνοήσουμε την d^2y/dt^2

Ακόμα για μικρές γωνίες y << l και επομένως: $\cos\theta = {}^{l-y}\!/_{l} \approx 1$

Η εξίσωση στην y-διεύθυνση γίνεται: $-mg + T \approx 0 \Rightarrow T \approx mg$

Στη x-διεύθυνση έχουμε: $-mg\frac{x}{l} = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0$ Δ.Ε. αρμονικού ταλαντωτή

Εκκρεμή - Φυσικό εκκρεμές



$$\vec{\tau} = -mgl\sin\theta = \mathrm{I}\frac{d^2\theta}{dt^2} = I\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{mgl}{I}\sin\theta$$

για μικρό θ: sinθ~θ οπότε $\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{mgl}{I}\theta}$

Επομένως εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή. Η λύση γνωστή

Η γωνιακή συχνότητα, ω, στην περίπτωση αυτή είναι:

$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}}$ ενώ πριν είχαμε βρει μόνο: $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

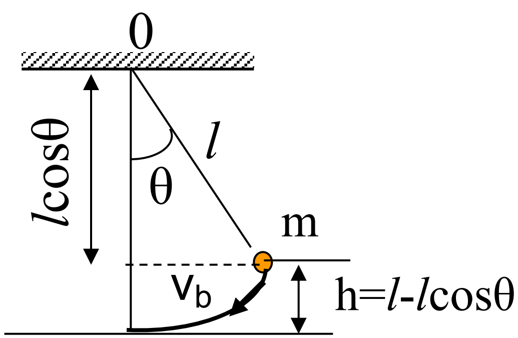
Επομένως η περίοδος είναι διαφορετική μεταξύ απλού και φυσικού. Πόσο?

Για ένα μέτρο μήκος εκκρεμούς αλλάζει σε σχέση με το φυσικό κατά ~2%

Τα περισσότερα ρολόγια έχουν περίοδο 2 sec.

Ενέργεια εκκρεμούς

Θεωρήστε την ενέργεια του εκκρεμούς:



Η δυναμική ενέργεια θεωρώντας σαν επίπεδο μηδενικού δυναμικού (U=0) το χαμηλότερο σημείο:

$$U = mgh = mgl(1-\cos\theta)$$

Παίρνοντας και πάλι το ανάπτυγμα Taylor έχουμε:

$$\cos\theta \cong 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \cdots$$

Επομένως το δυναμικό γράφεται: $U = \frac{1}{2}mgl\theta^2$

Η εξίσωση της τροχιάς είναι $\theta(t) = \theta_{max}\cos(\omega t + \varphi)$

Άρα $U = \frac{1}{2}mgl\theta_{max}^2\cos^2(\omega t + \varphi)$

Ποιο το ω? $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow \omega^2 l = g$ ταχύτητα? $\upsilon_b = l\frac{d\theta}{dt}$

Κινητική ενέργεια? $E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}ml^2\omega^2\theta_{max}^2\sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}mgl\theta_{max}^2\sin^2(\omega t + \varphi)$

Ολική Ενέργεια: $E = U + E_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow E = \frac{1}{2}mgl\theta_{max}^2$

Παράδειγμα

Ένα εκκρεμές μήκους 15m ξεκινά με ταχύτητα υ_0=3.9m/s, θ=10^o
Ποιο το πλάτος της ταλάντωσης;

Λύση

θ=10^o επομένως μικρό

$$E \approx \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 = \frac{1}{2}mgl\theta_{\max}^2 \Rightarrow$$

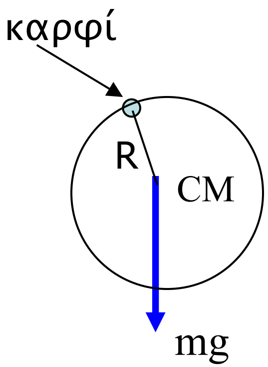
$$\theta_{\max}^2 = \frac{2E}{mgl} = \frac{\upsilon^2}{gl} + \theta^2$$

Απλή αντικατάσταση:

$$\theta_{\max}^2 = \frac{(3.9)^2}{(9.8)(15)} + (10\pi/180)^2 \Rightarrow \theta_{\max}^2 = 0.13 \Rightarrow \theta_{\max} = 0.37\alpha\kappa\tau\iota\nu\iota\alpha$$

Παράδειγμα φυσικού εκκρεμούς

Ένα στεφάνι ακτίνας 30cm κρέμεται από ένα καρφί. Ποια η συχνότητα των ταλαντώσεών του



Το στεφάνι καθώς ταλαντώνεται γύρω από το καρφί αποτελεί ένα φυσικό εκκρεμές.

Ξέρουμε ότι η γωνιακή συχνότητα του φυσικού εκκρεμούς δίνεται από

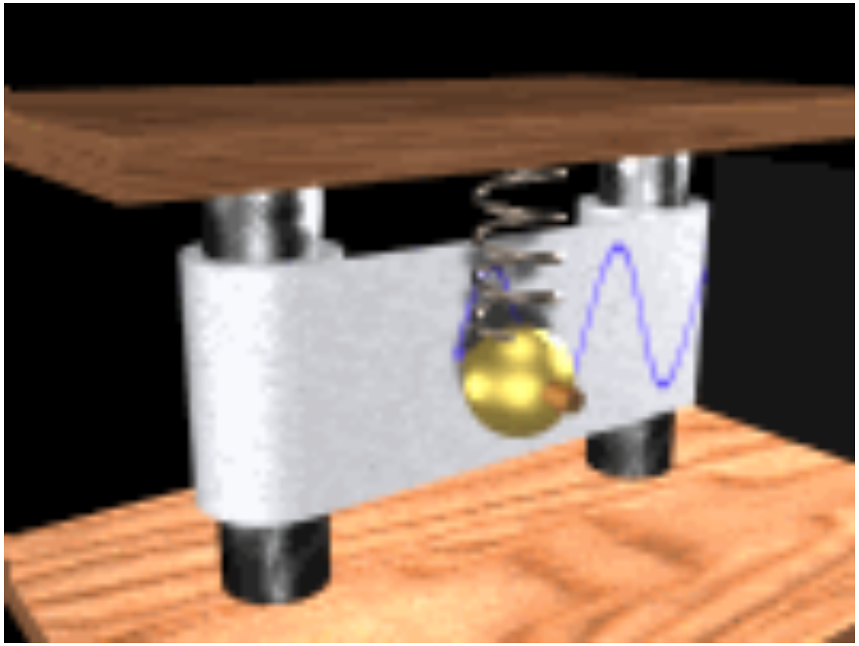
$$\omega = \sqrt{\frac{Mgd}{I_{\kappa\alpha\rho\varphi\iota}}}, \qquad d = R$$

$$I_{\kappa\alpha\rho\varphi\iota} = I_{CM} + MR^2 \Rightarrow I_{\kappa\alpha\rho\varphi\iota} = MR^2 + MR^2 \Rightarrow I_{\kappa\alpha\rho\varphi\iota} = 2MR^2$$

Οπότε $$\omega = \sqrt{\frac{MgR}{2MR^2}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{2R}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{9.8}{2\times 0.3}} \Rightarrow \omega = 4.04$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = 0.64\,Hz$$

Φθίνουσες και εξαναγκασμένες ταλαντώσεις



Φθίνουσες ταλαντώσεις

- Οι περισσότερες ταλαντώσεις στη φύση εξασθενούν (φθίνουν) γιατί χάνεται ενέργεια.
- Φανταστείτε ένα σύστημα κάτω από μια δύναμη αντίστασης της μορφής

$$F = -b\upsilon \equiv -b\dot{x}$$

  Αυτή η δύναμη δρα επιπλέον της δύναμης επαναφοράς του ελατηρίου
- Κοιτάμε τέτοιες δυνάμεις επειδή:
  - Είναι λογικό να 'χουμε τέτοια συμπεριφορά δύναμης
  - Μπορούμε να λύσουμε ακριβώς την εξίσωση για x(t)

$$F = ma \Rightarrow -Kx - b\dot{x} = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (1)$$

όπου $\gamma \equiv \dfrac{b}{2m}$ και $\omega_0^2 \equiv \dfrac{K}{m}$ ← φυσική συχνότητα συστήματος

- Μαντεύουμε μια λύση της μορφής $x(t) = Ae^{at}$ και αντικαθιστούμε:

$$(1) \Rightarrow a^2 Ae^{at} + 2\gamma a Ae^{at} + \omega_0^2 Ae^{at} = 0 \Rightarrow a^2 + 2\gamma a + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow$$

$$a = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$ ⇒ Τρεις περιπτώσεις ανάλογα με την τιμή της διακρίνουσας

Φθίνουσες ταλαντώσεις – Μικρή απόσβεση ($\gamma<\omega_0$)

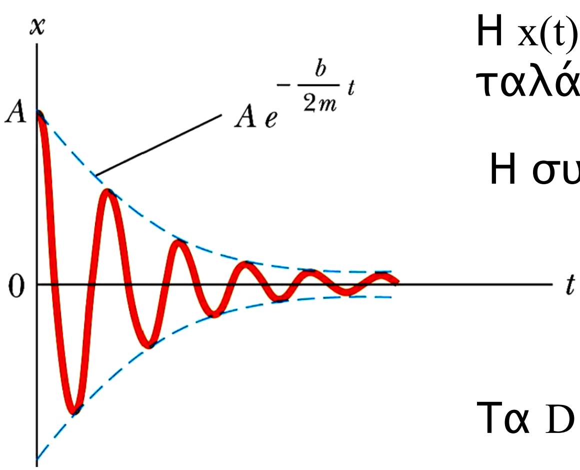
Ορίζουμε $\Omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ επομένως $a \equiv -\gamma \pm i\Omega$

Έχουμε έτσι δύο λύσεις: $x(t) = Ae^{-\gamma t + i\Omega}$ και $x(t) = Ae^{-\gamma t - i\Omega}$

- Από τη στιγμή που η εξίσωση είναι γραμμική ως προς x το άθροισμα των παραπάνω λύσεων θα είναι επίσης λύση.
- Μια και λέμε ότι κάνουμε φυσική, η εξίσωση θέσης, x(t), πρέπει να ʼναι πραγματική και όχι μιγαδική.

Άρα οι 2 λύσεις πρέπει να ʼναι συζυγείς μιγαδικοί: $A = B^* \equiv Ce^{i\varphi t}$

$$x(t) = Ce^{-\gamma t}\left(e^{i(\Omega t+\varphi)} + e^{-i(\Omega t+\varphi)}\right) = De^{-\gamma t}\cos\left(\Omega t + \varphi\right)$$



Η x(t) μοιάζει με μια συνημιτονοειδή συνάρτηση ταλάντωσης μέσα σε μια $e^{-\gamma t}$ εκθετικά φθίνουσα συνάρτηση

Η συχνότητα ταλάντωσης είναι:

$$\Omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{K}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

παράδειγμα

Τα D και φ της x(t) καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες

Φθίνουσες ταλαντώσεις – Μεγάλη απόσβεση ($\gamma>\omega_0$)

Ορίζουμε $\Omega \equiv \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ επομένως $a \equiv -\gamma \pm \Omega$

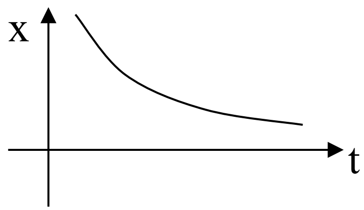
Η γενική λύση στην περίπτωση αυτή είναι $\boxed{x(t) = \mathrm{A}e^{-(\gamma+\Omega)\,t} + \mathrm{B}e^{-(\gamma-\Omega)t}}$

Αρνητικό εκθετικό

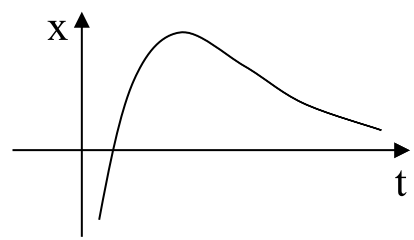
και προφανώς πραγματική.

Δεν υπάρχει κίνηση ταλάντωσης στην περίπτωση αυτή.

x(t) μοιάζει όπως τα παρακάτω σχήματα



ή



Σημειώστε ότι $\gamma + \Omega > \gamma - \Omega \Rightarrow$ για μεγάλα t, x(t) μοιάζει με $x(t) \approx Be^{-(\gamma-\Omega)t}$

αφού ο πρώτος όρος $x(t) = \mathrm{A}e^{-(\gamma+\Omega)\,t}$ είναι ακόμα πιο μικρός

Για μεγάλα γ, $\gamma - \Omega$ είναι πολύ μικρό και το x πηγαίνει στο 0 αργά

$$\text{γιατί} \quad \gamma - \Omega = \gamma - \gamma\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}} \approx \gamma - \gamma\left(1 - \frac{\omega_0^2}{2\gamma^2}\right) = \frac{\omega_0^2}{2\gamma} = \text{μικρό}$$

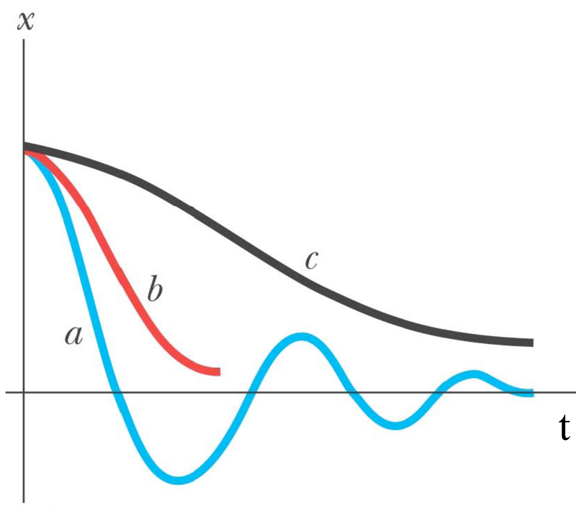
Φθίνουσες ταλαντώσεις – Κριτική απόσβεση ($\gamma=\omega_0$)

- Στην περίπτωση αυτή, $a=-\gamma\pm 0$, και επομένως έχουμε μόνο μια λύση της Δ.Ε
  - Είναι η περίπτωση που η στρατηγική του να δοκιμάζουμε μια εκθετική λύση για την επίλυση Δ.Ε. δεν δουλεύει.
- Μια άλλη λύση βγαίνει τελικά ότι είναι της μορφής $x(t)=Bte^{-\gamma t}$
- Προσθέτοντάς την στην προηγούμενη γενική λύση έχουμε:

$$\boxed{x(t)=Ae^{-\gamma t}+Bte^{-\gamma t}\Rightarrow x(t)=e^{-\gamma t}(A+Bt)}$$

Ο όρος $e^{-\gamma t}$ υπερισχύει του όρου Bt και για μεγάλα t το x→0 κατά $e^{-\gamma t}$

- Η κριτική απόσβεση επαναφέρει το x στο μηδέν γρηγορότερα απ' όλες τις διεργασίες απόσβεσης.



- Για πολύ μεγάλα γ, η μεγάλη απόσβεση πηγαίνει στο $x=0$ πολύ αργά (καμπύλη c)
- Για πολύ μικρά γ, η μικρή απόσβεση πηγαίνει στο $x=0$ πολύ αργά (καμπύλη α)
- Για $\gamma=\omega_0$, κριτική απόσβεση πηγαίνει στο $x=0$ γρηγορότερα (καμπύλη b)

Εξαναγκασμένες φθίνουσες ταλαντώσεις

- Στην περίπτωση αυτή μελετάμε την δεδομένη οδηγό δύναμη: $F_d(t) = F\cos\omega_d t$
  η οποία δρα επιπλέον των άλλων δυνάμεων: $-Kx - b\dot{x}$

- Η συχνότητα μπορεί να ’ναι οτιδήποτε.

- Εν γένει είναι χρήσιμο να κοιτάξουμε τέτοιες δυνάμεις γιατί κάθε γενική συνάρτηση του t μπορεί να γραφεί συναρτήσει ημιτόνων και συνημίτονων μέσω Fourier ανάλυση.

- Επικεντρωνόμαστε στην $F_d(t) = F\cos\omega_d t$ γιατί μπορούμε να την λύσουμε

$$F = ma \Rightarrow -Kx - b\dot{x} + F_d\cos\omega_d t = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f\cos\omega_d t$$

όπου $\gamma \equiv \dfrac{b}{2m}$ και $\omega_0^2 \equiv \dfrac{K}{m}$ και $f = \dfrac{F_d}{m}$

Ως συνήθως μαντεύουμε την λύση της μορφής $x(t) = A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t$

Θα μπορούσαμε να πάρουμε οποιαδήποτε άλλη συχνότητα πέρα από την συχνότητα της οδηγού δύναμης.

Αν δούμε ότι δεν έχουμε λύση για ω_d τότε δοκιμάζουμε άλλη συχνότητα.

Αλλά θα δούμε ότι πάντα υπάρχει λύσει για ω_d

Εξαναγκασμένες φθίνουσες ταλαντώσεις

- Η λύση αυτή είναι διαφορετική από τι έχουμε κάνει μέχρι τώρα.
- Εδώ μαντεύουμε την συχνότητα και λύνουμε ως προς τις σταθερές A και B ενώ πριν λύναμε για τη συχνότητα και βρίσκαμε A και B από αρχικές συνθήκες.

Αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση (F=mα) έχουμε:

$$-\omega_d^2 A\cos\omega_d t - \omega_d^2 B\sin\omega_d t + 2\gamma\left(-\omega_d A\sin\omega_d t + \omega_d B\cos\omega_d t\right) + \omega_0^2\left(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t\right) = f\cos\omega_d t$$

Αν η σχέση ισχύει για κάθε t τότε οι συντελεστές των $\cos\omega_d t$ και $\sin\omega_d t$ πρέπει να συμφωνούν και από τις 2 πλευρές της εξίσωσης:

$$\sin\omega_d t \Rightarrow \omega_d^2 B - 2\gamma\omega_d A + \omega_0^2 B = 0$$

$$\cos\omega_d t \Rightarrow -\omega_d^2 A + 2\gamma\omega_d B + \omega_0^2 A = f$$

Σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους το οποίο δίνει για A και B

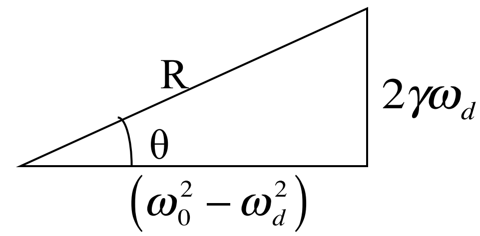
$$A = \frac{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega_d\right)^2} \qquad B = \frac{\left(2\gamma\omega_d\right) f}{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega_d\right)^2}$$

Ορίζουμε $R = \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega_d\right)^2}$ οπότε $A = \dfrac{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2}{R^2}$ $\qquad B = \dfrac{\left(2\gamma\omega\right) f}{R^2}$

Εξαναγκασμένες φθίνουσες ταλαντώσεις

Γράφουμε την x(t) μετά την εύρεση των A και B:

Ορίζουμε τις ποσότητες: $R \equiv \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega_d\right)^2}$ και θ



$$\tan\theta = \frac{2\gamma\omega_d}{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)}{R} \\ \sin\theta = \dfrac{2\gamma\omega_d}{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \dfrac{f\cos\theta}{R} \\ \mathrm{B} = \dfrac{f\sin\theta}{R} \end{array} \right.$$

$$x(t) = \frac{f\cos\theta}{R}\cos\omega_d t + \frac{f\sin\theta}{R}\sin\omega_d t \boxed{\Rightarrow x(t) = \frac{f}{R}\cos\left(\omega_d t - \theta\right)}$$

Όλα σ' αυτή την λύση είναι προσδιορισμένα!! Δεν υπάρχουν ελεύθερες παράμετροι. Δεν έχει να κάνει με τις αρχικές συνθήκες του x και υ.

Η πιο γενική λύση της εξίσωσης είναι αυτή που έχει την παραπάνω λύση και την λύση της ομογενούς που βρήκαμε προηγουμένως

$$x(t) = \frac{f}{R}\cos\left(\omega_d t - \theta\right) + \text{ Λύση ομογενούς } \qquad De^{-\gamma t}\cos\left(\Omega t + \varphi\right)$$

Αν υπάρχει απόσβεση τότε ο όρος $e^{-\gamma t}$ της ομογενούς κάνει τον όρο να μηδενίζεται και απομένει μια λύση που ταλαντώνει με συχνότητα ω_d και η οποία είναι ανεξάρτητη από τις αρχικές συνθήκες.

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις - Συντονισμός

Το πλάτος της συγκεκριμένης ταλάντωσης είναι ανάλογο του

$$\frac{1}{R} \equiv \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega_d\right)^2}}$$

- Για συγκεκριμένα γ και ω_d, γίνεται μέγιστο όταν ο πρώτος όρος στην ρίζα είναι μηδέν.

  Αυτό συμβαίνει όταν $\omega_0 = \omega_d$.

- Αν το γ είναι μικρό (μικρή απόσβεση) και ω_0(ιδιοσυχνότητα) είναι κοντά στην ω_d (οδηγούσα συχνότητα) το πλάτος είναι πολύ μεγάλο.

- Όταν $\omega_0 = \omega_d$ λέμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε συντονισμό

- Για συγκεκριμένα γ και ω_0, χρειάζεται κάποια δουλειά για να βρούμε την συχνότητα ω_d στην οποία το πλάτος μεγιστοποιείται. Αυτό που χρειάζεται να κάνουμε είναι να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση

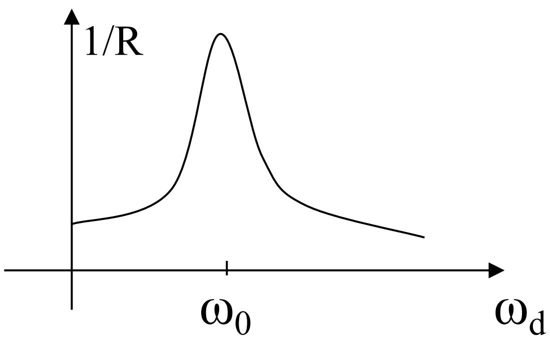
$$\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega_d\right)^2$$

Θέτοντας την παράγωγο ίση με 0 έχουμε $x = \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$

Για μικρά γ (που είναι η συνηθισμένη περίπτωση) έχουμε και πάλι $\omega_0 = \omega_d$

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις - Συντονισμός

Για συγκεκριμένες τιμές των γ και ω_0, η τιμή του $1/R$ συναρτήσει του ω_d μπορεί να μοιάζει με το παρακάτω σχήμα:



Η φάση θ:

Για συγκεκριμένο ω_0, η φάση θ στην εξίσωση μπορεί να υπολογισθεί για ορισμένες περιπτώσεις

$$x(t) = \frac{f}{R}\cos(\omega_d t - \theta)$$

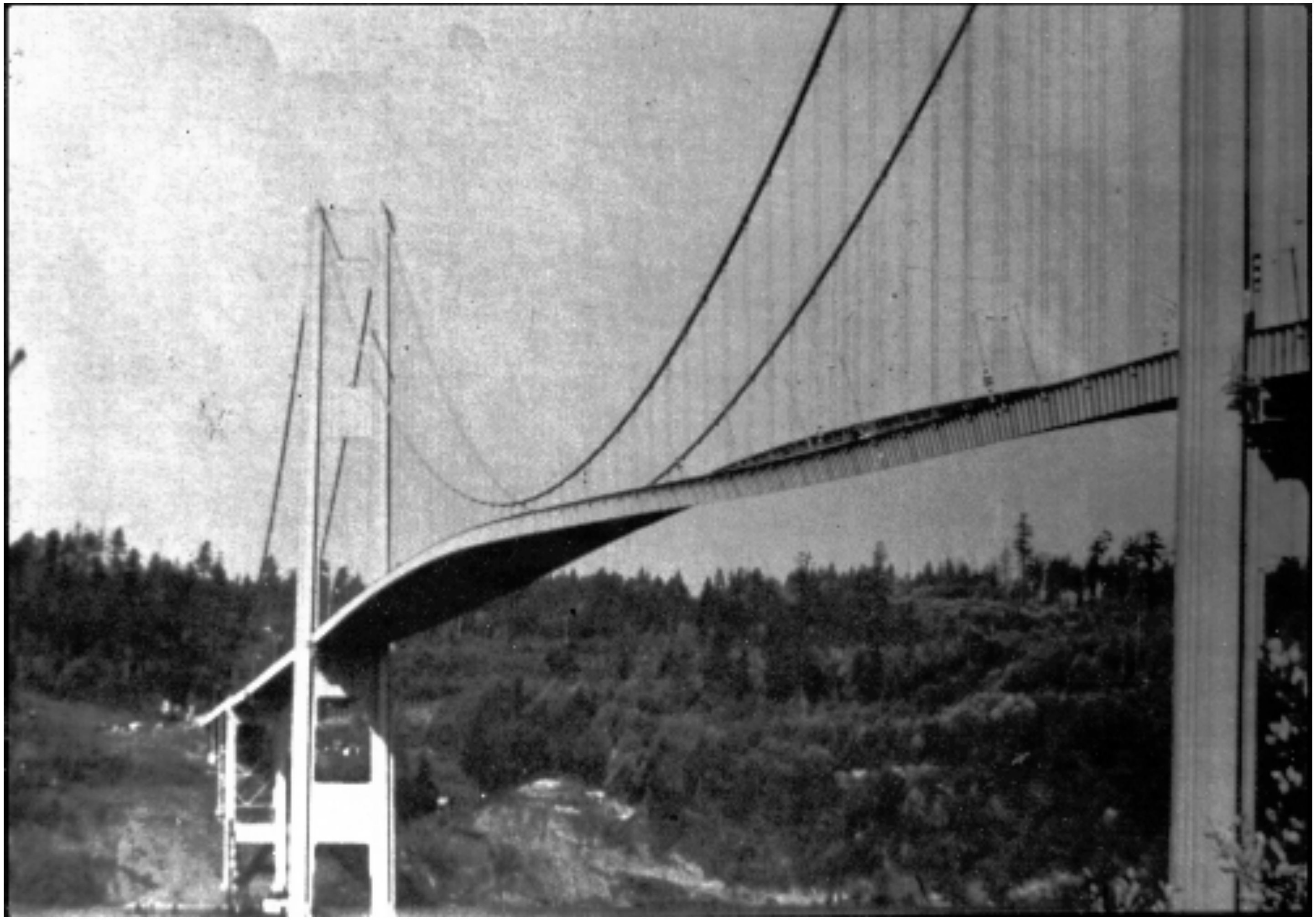
χρησιμοποιώντας $$\tan\theta = \frac{2\gamma\omega_d}{(\omega_0^2 - \omega_d^2)}$$

$\omega_d \sim 0 \Rightarrow \theta \sim 0$ (σε φάση με τη δύναμη)

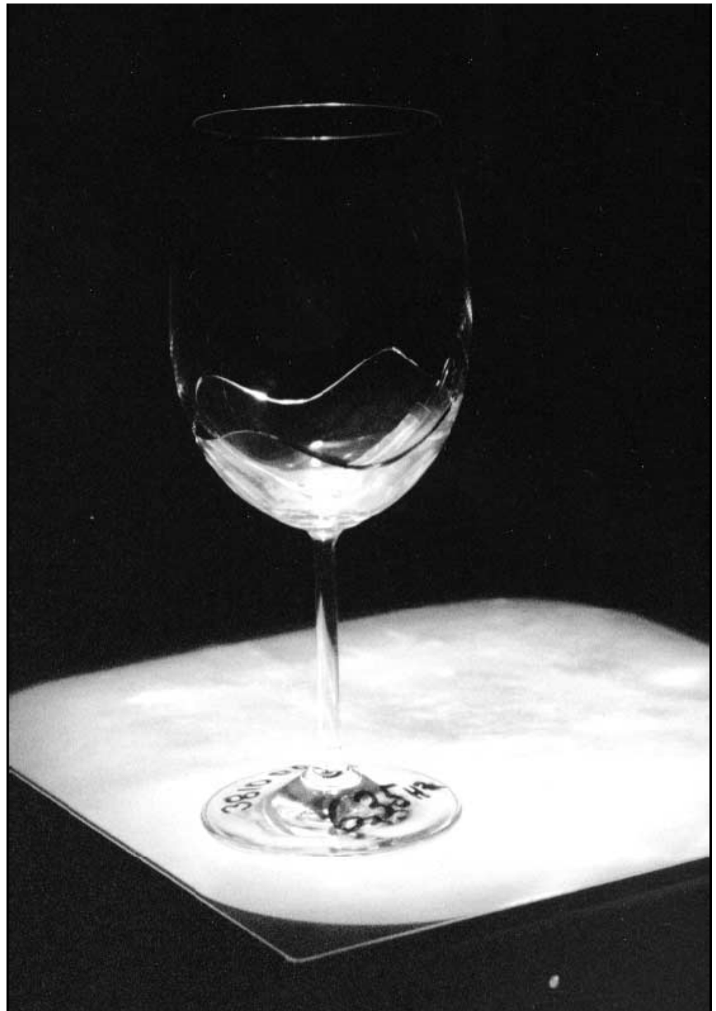
$\omega_d \sim \omega_0 \Rightarrow \theta \sim \pi/2$ (δύναμη μέγιστη στο x=0). Εφαρμόζουμε τη δύναμη όταν το σώμα κινείται ταχύτατα $(x = 0) \Rightarrow P = F\upsilon$.
Μέγιστη μεταφορά ισχύος ⇒ Μέγιστη E ⇒ Μέγιστο πλάτος

$\omega_d \to \infty \Rightarrow \theta \sim \pi$ (Η κίνηση δεν είναι σε φάση με την δύναμη). Η μάζα δεν κινείται ιδιαίτερα και το ελατήριο δίνει μικρή δύναμη

Συντονισμός και η γέφυρα **Tacoma Narrows**



Σπάζοντας ένα ποτήρι



Παραδείγματα

Μια μάζα 3kg τοποθετείται σε ένα ελατήριο σταθεράς k=24N/m. Επιμηκύνεται κατά 5cm και αφήνεται να ταλαντωθεί.

(α) Ποια εξίσωση περιγράφει τη θέση του συναρτήσει του χρόνου

(β) Ποια η ενέργεια του συστήματος

(γ) Ποια η μέγιστη ταχύτητα του συστήματος

(δ) Μετά από πόσο χρόνο έχει και πάλι απομάκρυνση +5cm

(α) Ξέρουμε ότι για t = 0, x=5cm ενώ υ=0m/s. Επομένως: $x(t) = 5\cos(\omega t)$

(β) Η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Επομένως τη χρονική στιγμή t = 0

$$E_{\mu\eta\chi} = E_{\kappa\iota\nu.} + E_{\varepsilon\lambda.} = 0 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\times 24\times\left(5\times 10^{-2}\right)^2 = 0.3J$$

(γ) Το σώμα έχει μέγιστη ταχύτητα όταν η $E_{\delta\upsilon\nu}$=0, ενώ $E_{\mu\eta\chi}$=σταθ.

$$E_{\mu\eta\chi} = E_{\kappa\iota\nu.} + E_{\varepsilon\lambda.} = 0 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = 0.3J \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2\times 0.3}{3}} \Rightarrow \upsilon = 0.14m/s$$

(δ) Η γωνιακή συχνότητα του συστήματος είναι:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{24}} \Rightarrow T = 2.2s$$