

ΦΥΣ 145 – Μαθηματικές Μέθοδοι στη Φυσική

Τελική Εξέταση

24 – Μάη – 2005

Group: B

Γράψτε το ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητάς σας στο πάνω μέρος της αυτής της σελίδας.

Πρέπει να απαντήσετε και στα 5 προβλήματα που σας δίνονται. Όλα τα προβλήματα είναι ισοδύναμα και το καθένα αντιστοιχεί σε 16 μονάδες για σύνολο 80 μονάδων.

Τα προγράμματα θα πρέπει να τα στείλετε σαν attachments σε ένα και μόνο e-mail στο phy145@ucy.ac.cy και με τίτλο το group των ασκήσεων που λύνετε (στην προκειμένη περίπτωση groupB). Κάθε πρόγραμμα θα πρέπει να ονομάζεται σύμφωνα με τον αριθμό της άσκησης που αντιστοιχεί, π.χ. program askisi1 και το αντίστοιχο αρχείο επίσης ανάλογα π.χ. askisi1.f

Ο χρόνος εξέτασης είναι 4 ώρες.

Από τη στιγμή αυτή δεν υπάρχει συνεργασία/συζήτηση ανταλλαγή αρχείων και e-mails με κανένα και φυσικά κουδούνισμα κινητού που πρέπει να κλείσουν. Σημειώσεις, χαρτάκια κλπ απαγορεύονται όπως και επισκέψεις σε ιστοσελίδες που δεν αναφέρονται στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

Καλή επιτυχία

1. Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει τον binomial συντελεστή $\binom{n}{i}$ για μη αρνητικούς ακεραίους n και i (όπου $i \leq n$). Ο συντελεστής ορίζεται ως εξής:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$$

Για παράδειγμα $\binom{8}{3} = \frac{8!}{5!3!} = 56$.

2. Όταν υπολογίζουμε κάποιες σειρές πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί. Θεωρήστε τη σειρά:

$$S^{(up)} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n},$$

η οποία είναι πεπερασμένη όσο το N είναι πεπερασμένο. Όταν αθροίζουμε αναλυτικά, δεν έχει σημασία αν αθροίζουμε τη σειρά προς τα πάνω (από το $n=1$ στο N) ή προς τα κάτω (από το $n=N$ στο 1), δηλαδή:

$$S^{(down)} = \sum_{n=N}^1 \frac{1}{n},$$

ωστόσο εξαιτίας σφάλματος στρογγυλοποίησης $S^{(up)} \neq S^{(down)}$.

- (α) Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει τα δύο αθροίσματα χρησιμοποιώντας απλή ακρίβεια (single precision) για $N = 10^p$ όπου $p = 2, 3, 4, 5, 6$ και 7 .
- (β) Υπολογήστε τα δυο αθροίσματα με διπλή ακρίβεια (double precision).
- (γ) Δείξτε ότι για διπλή ακρίβεια τα δύο αθροίσματα συμφωνούν με μεγάλη ακρίβεια.
- (δ) Υποθέτοντας ότι το αποτέλεσμα της διπλής ακρίβειας είναι σωστό μέσα στα όρια της επιθυμητής ακρίβειας, δείξτε ότι με απλή ακρίβεια το άθροισμα $S^{(up)}$ είναι λιγότερο ακριβές από το $S^{(down)}$ και ότι το σφάλμα αυξάνει με αυξανόμενο N .
- (ε) Εξηγήστε παρακάτω γιατί το $S^{(up)}$ είναι λιγότερο ακριβές από το $S^{(down)}$.

3. Σχεδιάστε τη συνάρτηση $x^3 - 5x + 3 = 0$. Προσδιορίστε τις δύο θετικές λύσεις με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της διχοτόμησης. Πρέπει πρώτα να βρείτε το διάστημα που περιέχει κάθε λύση.

4. Θεωρήστε την εξίσωση κίνησης ενός σώματος υπό την επίδραση αντίστασης μέσου, όπου η αντίσταση είναι γραμμική (linear drag):

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{1}{\theta} \mathbf{u},$$

όπου θ είναι σταθερά, την οποία καλούμε χρόνο απόσβεσης.

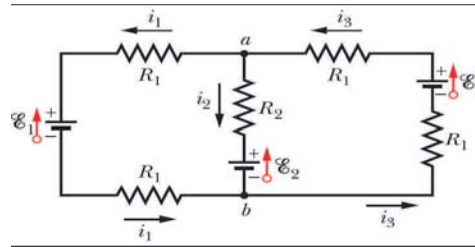
(α) Λύστε την διαφορική εξίσωση αναλυτικά για να βρείτε $\mathbf{r}(t)$ και $\mathbf{u}(t)$ δεδομένων των αρχικών συνθηκών $\mathbf{r}(0)$ και $\mathbf{u}(0)$.

(β) Γράψτε ένα πρόγραμμα που λύνει αυτές τις εξισώσεις χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Euler, κάνοντας το γράφημα της $|\mathbf{r}(t)|/(|\mathbf{u}(0)|\theta)$ συναρτήσει του t/θ . Συγκρίνεται τα αριθμητικά αποτελέσματα με τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης για τις περιπτώσεις $\tau=\theta$, $\frac{1}{2}\theta$, $\frac{1}{4}\theta$ και $\frac{1}{8}\theta$. Πάρτε σαν αρχικές συνθήκες $\mathbf{r}(0) = 0$ και $\mathbf{u}(0) = 1$. Υπολογίστε τη λύση μέχρι $\tau=10\theta$.

(γ) Επανάλαβατε το προηγούμενο μέρος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Euler-Cromer.

(Πρέπει να επιστρέψετε το αντίστοιχο γράφημα μαζί με το πρόγραμμα).

5. Θυμηθείτε από την Φυσική II ότι το ρεύμα σε κάθε κλάδο ενός κυκλώματος μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας τους κανόνες του Kirchhoff. Το άθροισμα όλων των διαφορών δυναμικού καθώς κινούμαστε μέσα σε ένα κλειστό βρόγχο του κυκλώματος πρέπει να είναι μηδέν. Επίσης ξέρουμε ότι το φορτίο διατηρείται και επομένως το ρεύμα που εισέρχεται σε ένα κόμβο θα πρέπει να είναι ίδιο με το ρεύμα που εξέρχεται από το κόμβο. Επομένως το άθροισμα όλων των ρευμάτων (εισερχομένων και εξερχομένων) πρέπει να είναι μηδέν.



Θεωρήστε το κύκλωμα του παραπάνω σχήματος. Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει τα ρεύματα σε κάθε κλάδο του κυκλώματος. Σας δίνεται ότι $E_1=3.0\text{V}$, $E_2=6.0\text{V}$ και $R_1=2.0\Omega$ και $R_2=4.0\Omega$ αντίστοιχα. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει τον κλάδο και το αντίστοιχο ρεύμα. Χρησιμοποιήστε το παρακάτω χώρο για να λύσετε αρχικά το πρόβλημα.