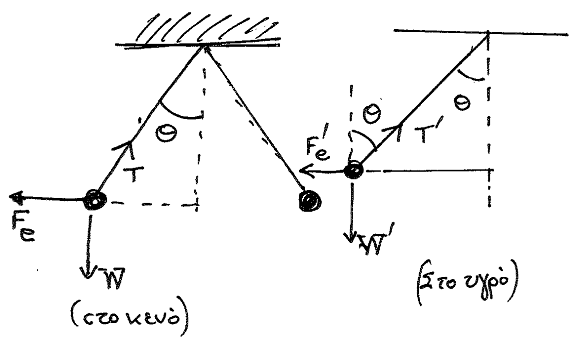
ΦΥΣ. 112

1ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή: Παρασκευή 20.09.2024**

1. Δύο πανομοιότυπες σφαίρες η καθεμία με πυκνότητα ρ κρέμονται από ένα κοινό σημείο με δύο μονωμένα σύρματα ίσου μήκους. Και οι δύο σφαίρες έχουν το ίδιο φορτίο και μάζα. Σε κατάσταση ισορροπίας κάθε νήμα σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο διεύθυνση. Φανταστείτε τώρα ότι και οι δύο σφαίρες εισάγονται μέσα σε ένα υγρό. Η γωνία που σχηματίζουν τα νήματα με την κατακόρυφο διεύθυνση παραμένει σταθερή και ίση με θ. Η πυκνότητα του υγρού είναι σ. Βρείτε την διηλεκτρική σταθερά του υγρού.



Στο υγρό η δύναμη που ασκεί σα θα είναι: $\boxed{F_e' = \frac{F_e}{k}}$ (A) όπου k η διηλεκτρική σταθερά του υγρού.

Από τον 1° νόμο του Newton για τις δύο περιπτώσεις έχουμε ότι:

(κενό):
$$\left.\begin{aligned} F_e &= T_x = T\cdot\cos(90^\circ-\theta) = T\sin\theta \\ W &= T_y = T\cdot\sin(90^\circ-\theta) = T\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{F_e}{W} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

(υγρό):
$$\left.\begin{aligned} F_e' &= T_x' = T'\cos(90^\circ-\theta) = T'\sin\theta \\ W' &= T_y' = T\sin(90^\circ-\theta) = T'\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{F_e'}{W'} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

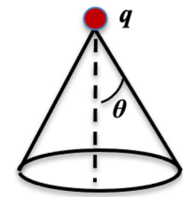
Από τις 2 τελευταίες έχουμε ότι: $\frac{F_e}{W} = \frac{F_e'}{W'} \Rightarrow \frac{F_e}{F_e'} = \frac{W}{W'} \overset{(A)}{\Rightarrow}$

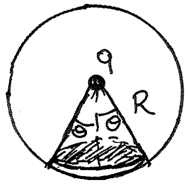
$$\Rightarrow \frac{\cancel{F_e}}{\frac{\cancel{F_e}}{k}} = \frac{W}{W'} \Rightarrow \boxed{k = \frac{W}{W'}}$$

Το βάρος της σφαίρας στο υγρό είναι $W' = W - \text{Άνωση} = \underbrace{\rho_{σφ}V_{σφ}}_{m_{σφ}} g - \underbrace{\sigma_{υγρό}V_{σφ}}_{m_{υγρού\ που\ εκτοπ.}} g$

$$k = \frac{\rho \cancel{V} \cancel{g}}{\rho \cancel{V} \cancel{g} - \sigma \cancel{V} \cancel{g}} \Rightarrow \boxed{k = \frac{\rho}{\rho - \sigma}}$$

2. Ένα σημειακό φορτίο q είναι τοποθετημένο στην κορυφή ενός κώνου γωνίας κορυφής θ με την κατακόρυφη διεύθυνση. Δείξτε ότι η ηλεκτρική ροή που περνά από την βάση του κώνου είναι $q(1-cos\theta)/2\varepsilon_0$.

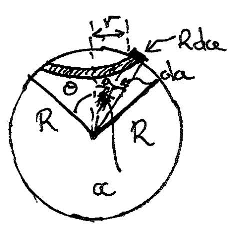




Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα με τη θεώρηση συμμετρίας. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια σφαιρική Gaussian επιφάνεια με κέντρο την κορυφή του κώνου και ακτίνα R ίση με το μήκος της κωνικής επιφάνειας.

Σύμφωνα με τον νόμο του Gauss, η ροή που διαπερνά όλη την σφαιρική επιφάνεια θα είναι: $\phi_E^{ολ} = \frac{q}{\varepsilon_0}$. Η ροή που περνά από την βάση της κωνικής επιφάνειας θα πρέπει να είναι μέρος της ολικής ροής σε αναλογία με το εμβαδό της σφαιρικής επιφάνειας που αντιστοιχεί στην ίδια στερεά γωνία που καθορίζει ο κώνος. Δηλαδή $\phi_E^k = \frac{S}{S_{σφ}}\frac{q}{\varepsilon_0}$ (1) όπου $S_{σφ}$ = εμβαδό όλης της σφαιρικής επιφάνειας.

Θα πρέπει να υπολογίσουμε επομένως την επιφάνεια S, που βρίσκεται κάτω από την βάση του κώνου.



Θεωρούμε τον γραμμοσκιασμένο δακτύλιο ο οποίος έχει ακτίνα r και η πλευρά του στη σφαιρική επιφάνεια έχει μήκος ίσο με το μήκος του τόξου στον κύκλο με ακτίνα R. Το μήκος αυτό είναι $Rd\alpha$ όπου $d\alpha$ η στοιχειώδης γωνία που αντιστοιχεί στο τόξο αυτό. Ο δακτύλιος βρίσκεται σε γωνία α ως προς την κατακόρυφο.

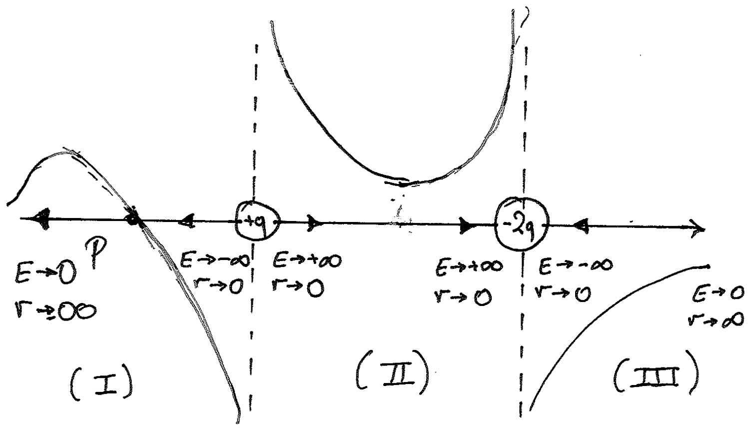
Επομένως $\left.\begin{matrix} r = R\cdot\sin\alpha \\ dr = R\cdot d\alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow dS =$ Εμβαδό δακτυλίου $= 2\pi R^2 \sin\alpha\, d\alpha$ (2)

Για να βρούμε το εμβαδό της σφαιρικής επιφάνειας που καθορίζεται από τη γωνία Θ που αντιστοιχεί στον κώνο θα πρέπει να αθροίσουμε όλα τα εμβαδά των στοιχειωδών δακτυλίων (2) από $\alpha=0$ έως $\alpha=\Theta$.

$$S = \int dS = 2\pi R^2 \int_0^\Theta \sin\alpha\, d\alpha = 2\pi R^2(-\cos\alpha)\Big|_0^\Theta = -2\pi R^2(\cos\Theta - 1) \Rightarrow \boxed{S = 2\pi R^2(1-\cos\Theta)}$$

Αντικαθιστούμε στην (1) οπότε: $\phi_E^k = \frac{\cancel{2\pi R^2}(1-\cos\Theta)}{2\cancel{4\pi R^2}}\frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\phi_E^k = \frac{q(1-\cos\Theta)}{2\varepsilon_0}}$

3. Σχεδιάστε ένα γράφημα με την ένταση (*E*) του ηλεκτρικού πεδίου ως προς την απόσταση *r* (*E*-*r* γράφημα) που δημιουργείται από δύο σημειακά φορτία +*q* και -2*q* τα οποία βρίσκονται σε κάποια συγκεκριμένη απόσταση κατά μήκος της ευθείας που περνά από τα δύο φορτία.

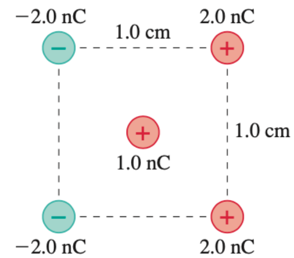


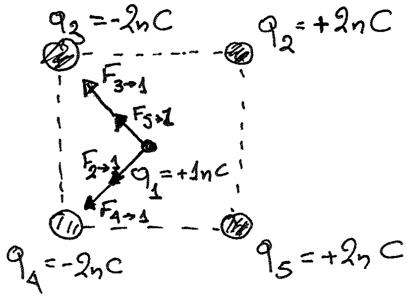
<u>Περιοχή I</u>: Η ένταση του πεδίου που οφείλεται στο +q έχει φορά προς τα αριστε και επομένως είναι αρνητική. Η ένταση του πεδίου που οφείλεται στο φορτίο −2q έχει φορά προς τα δεξιά και επομένως είναι θετική. Κοντά στο φορτίο +q το πεδίο από το +q θα είναι πολύ μεγάλο, και επομένως η τιμή του θα είναι αρνητική αφού δείχνει προς τα αρνητικά. Σε κάποιο σημείο, P, η ένταση από το +q και −2q θα είναι ίσες και αντίθετες και επομένως $E_p = 0$. Περισσότερο αρνητικά από το P, το πεδίο από το −2q είναι μεγαλύτερο και επομένως θα είναι θετικό καθώς απομακρυνόμαστε από το P προς $r \to \infty$ το $E_{-\infty} = 0$.
Ανάμεσα επομένως στο $E_p = 0$ και $E_{-\infty} = 0$ θα πρέπει να υπάρχει ένα μέγι

<u>Περιοχή II</u>: Η ένταση E από το +q είναι προς τα δεξιά, όπως και αυτή από τ −2q. Άρα η ένταση E θα είναι θετική. Πολύ κοντά στο +q και −2q η ένταση θα είναι $E \to +\infty$. Καθώς απομακρυνόμαστε από τα δύο φορτία η ένταση ελλατώνεται όπως στο σχήμα.

<u>Περιοχή III</u>: Η E από το +q είναι θετική αλλά από το −2q αρνητική. Το πεδίο του −2q υπερισχύει του +q και επομένως το πεδίο θα είναι πάντοτε αρνητικό.

4. Βρείτε τη συνισταμένη ηλεκτρική δύναμη που ασκείται στο φορτίο 1nC που βρίσκεται στο κέντρο του τετραγώνου, εξαιτίας των φορτίων που είναι τοποθετημένα στις κορυφές του τετραγώνου. Να δοθεί σε μορφή συνιστωσών.





Η δύναμη στο q_1 είναι η συνισταμένη των δυνάμεων από όλα τα άλλα φορτία που βρίσκον[ται] στις κορυφές του τετραγώνου.

Το μέτρο των δυνάμεων αυτών είναι το ίδιο γιατί τα φορτία είναι ίσα σε μέγεθος, και απέχου[ν] ίδια απόσταση από το q_1

Επομένως $F_{2\to1}=F_{3\to1}=F_{4\to1}=F_{5\to1}=k\,\dfrac{q_i\,q_1}{r_{i1}^2}=\dfrac{(9\cdot10^{9}\,N\,m^2/C^2)(2\cdot10^{-9})(1\cdot10^{-9})}{\left[(0.5\cdot10^{-2}\,m)\sqrt{2}\right]^2}$

$$\Rightarrow \boxed{F_{2\to1}=F_{3\to1}=F_{4\to1}=F_{5\to1}=3.6\times10^{-4}\,N}$$

Διανυσματικά:

$$\Sigma\vec{F}=\vec{F}_{\text{στο } q_1}=\left(3.6\times10^{-4}N,\ \text{μακριά από το } q_2\right)+\left(3.6\times10^{-4}N,\ \text{μακριά από το } q_5\right)+$$

$$+\left(3.6\times10^{-4}N,\ \text{προς το } q_3\right)+\left(3.6\times10^{-4}N,\ \text{προς το το } q_4\right)\Rightarrow$$

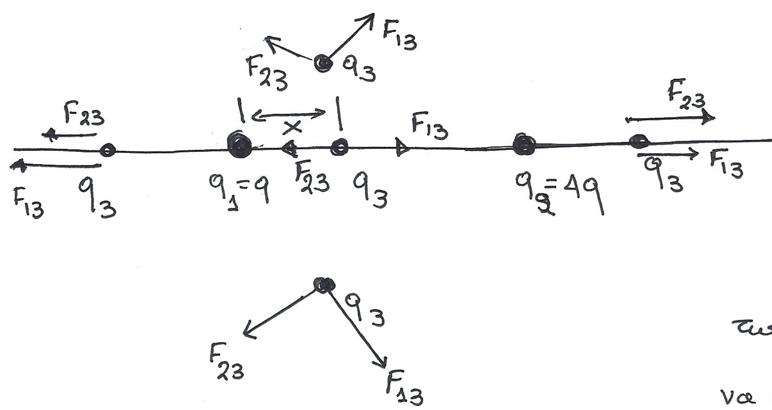
$$\Sigma\vec{F}=3.6\times10^{-4}N\left[\left(-\cos45^\circ\hat{i}-\sin45^\circ\hat{j}\right)+\left(-\cos45^\circ\hat{i}+\sin45^\circ\hat{j}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\cos45^\circ\hat{i}+\sin45^\circ\hat{j}\right)+\left(-\cos45^\circ\hat{i}+\sin45^\circ\hat{j}\right)\right]\Rightarrow$$

$$\Sigma\vec{F}=3.6\times10^{-4}N\left(-4\cdot\cos45^\circ\hat{i}\right)\Rightarrow\boxed{\Sigma\vec{F}=-1.0\times10^{-3}\hat{i}\,N}$$

Όπως αναμέναμε η συνισταμένη δύναμη θα είναι μόνο στη x-διεύθυνση και η y-συνιστώσα είναι Ø.

5. Δύο σημειακά θετικά φορτία $+q$ και $+4q$ βρίσκονται στις θέσεις $x = 0$ και $x = L$ και είναι ελεύθερα να κινηθούν. Ένα τρίτο φορτίο εισάγεται στο χώρο και το σύστημα των 3 φορτίων βρίσκεται σε στατική ισορροπία. Βρείτε το μέγεθος και πρόσημο του 3ου φορτίου καθώς και την θέση του στη x-διεύθυνση.



Από το γράφημα βλέπουμε ότι η μόνη περιοχή που μπορεί να βρίσκεται το φορτίο q_3 και η συνισταμένη των δυνάμεων από το q_1 και q_2 να είναι μηδέν είναι ανάμεσα στα δύο φορτία q_1 & q_2 και στον άξονα που τα ενώνει. Σε όλες τις άλλες περιοχές η συνισταμένη δύναμη δεν μπορεί να είναι μηδέν.

Έστω x η απόσταση του q_3 από το q_1. Επομένως η απόστασή του από το φορτίο q_2 θα είναι $L-x$. Το μέτρο των δυνάμεων θα είναι:

$$F_{13} = k\frac{|q_1||q_3|}{x^2} \quad \text{και} \quad F_{23} = k\frac{|q_2||q_3|}{(L-x)^2}$$

Από τη στιγμή που πρέπει να βρίσκεται σε ισορροπία $F_{13} = F_{23}$ οπότε:

$$\cancel{k}\frac{|q_1|\cancel{|q_3|}}{x^2} = \cancel{k}\frac{|q_2|\cancel{|q_3|}}{(L-x)^2} \Rightarrow |q_2|x^2 = |q_1|(L-x)^2 \Rightarrow 4\cancel{q}x^2 = \cancel{q}(L-x)^2$$

$$\Rightarrow (2x)^2 - (L-x)^2 = 0 \Rightarrow (2x-L+x)(2x+L-x) = 0 \Rightarrow (3x-L)(x+L) = 0$$

Επομένως οι λύσεις θα είναι: $x = \frac{L}{3}$ και $x = -L$

Η δεύτερη λύση απορρίπτεται γιατί από το σχήμα, όπως γράψαμε, δεν επιτρέπεται. Επομένως $\boxed{x = L/3}$

Το μέγεθος του φορτίου q_3 υπολογίζεται από τη συνθήκη ισορροπίας του φορτίου q_1: $F_{31} = F_{21} \Rightarrow \cancel{k}\frac{q|q_3|}{(\cancel{L}/3)^2} = \cancel{k}\frac{4qq}{\cancel{L^2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 9|q_3| = 4q \Rightarrow \boxed{|q_3| = \frac{4}{9}q}$$

Το μέτρο του 3ου φορτίου. Πρέπει να υπολογίσουμε το πρόσημο

Θεωρούμε την συνθήκη ισορροπίας του φορτίου q_2 από τις δυνάμεις των q_1 και q_3:

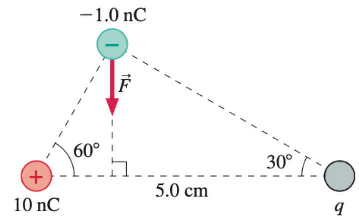
$$F_{12} = F_{32} \Rightarrow \cancel{k}\frac{q\,4q}{L^2} = \cancel{k}\frac{4q|q_3|}{\left(L-\frac{L}{3}\right)^2} \Rightarrow \frac{\cancel{4}\cancel{q^2}}{L^2} = \frac{\cancel{4}\cdot\frac{4}{9}\cancel{q^2}}{\left(\frac{2L}{3}\right)^2} = 1$$

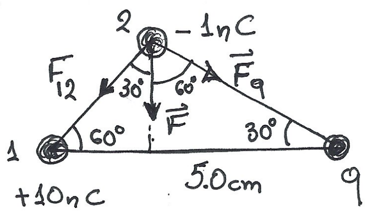
Το φορτίο q_3 θα πρέπει να είναι <u>αρνητικό.</u>

Αν το q_3 ήταν θετικό, τότε δεν θα μπορούσε να υπάρχει ισορροπία για τα φορτία q_1 ή q_2 γιατί η συνισταμένη δύναμη από τα φορτία q_2 και q_3 για την περίπτωση του q_1 ή από τα q_1 και q_3 για την περίπτωση του q_2 θα ήταν απωστική.

Επομένως αν ένα φορτίο $q_3 = -\frac{4}{9}q$ τοποθετηθεί σε απόσταση $x = \frac{L}{3}$ από το φορτίο q_1 τότε το σύστημα των τριών φορτίων βρίσκεται σε στατική ισορροπία

6. Η δύναμη που ασκείται στο φορτίο -1.0nC φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που φαίνονται στο σχήμα βρείτε το μέτρο της δύναμης αυτής.





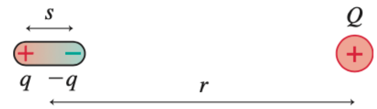
Από το σχήμα έχουμε ότι: $F = \frac{F_{12}}{\cos 30^\circ}$ (1)

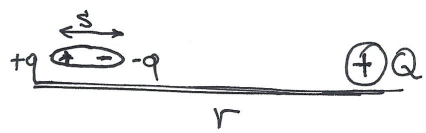
Η απόσταση r_{12} θα είναι: $r_{12} = (5.0cm)\cos 60^\circ$ (2)

Επομένως $F_{12} = k\frac{(10\times10^{-9}C)(+1\cdot10^{-9}C)}{(5\cdot10^{-2})\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{F_{12}=1.44\cdot10^{-4}N}$ το μέτρο της δύναμης από το 1 στο 2

Αντικαθιστούμε στην (1) και έχουμε: $F=\frac{1.44\cdot10^{-4}N}{\sqrt{3}/2} \Rightarrow \boxed{F=1.7\cdot10^{-4}N}$

7. Ένα φορτισμένο αντικείμενο ασκεί πάντοτε πάνω σε ένα ηλεκτρικό δίπολο ελκτική δύναμη και θα εξετάσουμε τον ισχυρισμό αυτό στα παρακάτω. Θεωρήστε ένα ηλεκτρικό δίπολο όπως στο διπλανό σχήμα, το οποίο αποτελείται από δύο φορτία $+q$ και $-q$ σε σταθερή απόσταση s μεταξύ τους. Το φορτίο $+Q$ βρίσκεται σε απόσταση r από το κέντρο του δίπολου. Θα υποθέσουμε ότι $r \gg s$. (α) Γράψτε την συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο δίπολο από το φορτίο $+Q$. (β) Εξηγήστε κατά πόσο η δύναμη αυτή είναι προς την θέση του φορτίου $+Q$ ή αντίθετα. (γ) Χρησιμοποιώντας την διονυμική προσέγγιση $(1+x)^{-n} \approx 1 - nx$ όταν $x \ll 1$, δείξτε ότι το αποτέλεσμα που βρήκατε στο υπο-ερώτημα (α) μπορεί να γραφεί ως $|\Sigma\vec{F}| = 2KQqs/r^3$. (δ) Πως μπορεί μία δύναμη να έχει εξάρτηση αντιστρόφως ανάλογη του κύβου της απόστασης; Αυτό φαίνεται να έρχεται σε αντίθεση με τον νόμο του Coulomb όπου η δύναμη είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης. Εξηγήστε.





(α) Η δύναμη στο δίπολο είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο +q και −q.

Θα έχουμε:

$$\vec{F}_{Q(-q)} = \frac{kQq}{(r-\frac{s}{2})^2}(+\hat{\imath})$$

$$\vec{F}_{Q(+q)} = \frac{kQq}{(r+\frac{s}{2})^2}(-\hat{\imath})$$

$$\Rightarrow \Sigma\vec{F} = kQq\left[\frac{1}{(r-\frac{s}{2})^2} - \frac{1}{(r+\frac{s}{2})^2}\right]\hat{\imath}$$

(β) Η συνισταμένη δύναμη στο δίπολο έχει κατεύθυνση προς το +Q φορτίο γιατί η δύναμη στο −q φορτίο είναι μεγαλύτερη από την απωστική δύναμη που ασκείται στο θετικό φορτίο +q από το +Q λόγω της μεγαλύτερης απόστασης.

(γ) Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα θα έχουμε:

$$\left(r \pm \frac{s}{2}\right)^{-2} = r^{-2}\left(1 \pm \frac{s}{2r}\right)^{-2} \simeq r^{-2}\left(1 \mp \frac{2s}{2r} + \dots\right) = r^{2}\left(1 \mp \frac{s}{r}\right)$$

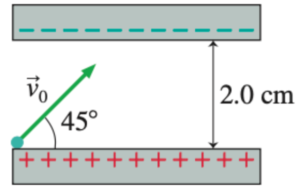
Επομένως η συνισταμένη δύναμη θα πάρει την μορφή:

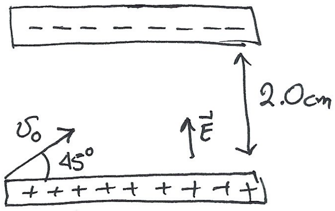
$$\Sigma\vec{F} = \frac{kQq}{r^2}\left[\left(1+\frac{s}{r}\right) - \left(1-\frac{s}{r}\right)\right]\hat{\imath} \Rightarrow \Sigma\vec{F} = kQq\frac{2s}{r^3}\hat{\imath}$$

(δ) Βλέπουμε ότι η δύναμη είναι αντιστρόφως ανάλογη του r^3 σε αντίθεση με την μορφή του νόμου του Coulomb όπου $F \propto r^{-2}$. Αλλά η δύναμη στον νόμο του Coulomb αναφέρεται σε σημειακά φορτία. Το δίπολο

δεν είναι σημειακό φορτίο και επομένως δεν υπάρχει λόγος η δύναμη μεταξύ ενός διπόλου και ενός σημειακού φορτίου να πρέπει να ακολουθεί τον νόμο του αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης.
Παρατηρούμε ωστόσο ότι όταν $s \to 0$ τότε $\Sigma \vec{F} \to \vec{0}$. Στο όριο αυτό το δίπολο συμπεριφέρεται σαν σημειακό φορτίο με μηδενικό φορτίο.

8. Το διπλανό σχήμα δείχνει δύο παράλληλες φορτισμένες πλάκες που βρίσκονται σε απόσταση 2cm μεταξύ τους. Η ένταση του πεδίου ανάμεσα στις πλάκες είναι 1.0 x 10^4N/C. Ένα ηλεκτρόνιο εκτοξεύεται υπό γωνία 45^o από την θετικά φορτισμένη πλάκα. Ποια είναι η μέγιστη αρχική ταχύτητα $υ_o$ που μπορεί να δοθεί στο ηλεκτρόνιο ώστε να μην χτυπήσει στην αρνητική πλάκα;





Το ηλεκτρικό πεδίο είναι ομογενές ανάμεσα στις δύο πλάκες. Επομένως στο ηλεκτρόνιο ασκείται σταθερή επιτάχυνση λόγω του ηλεκτρικού πεδίου.

Για να μη χτυπήσει στην αρνητικά φορτισμένη πλάκα, θα πρέπει η κατακόρυφος συνιστώσα της ταχύτητάς του να μηδενιστεί ακριβώς φθάνοντας στην αρνητικά φορτισμένη πλάκα.

Θα έχουμε: $\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} \Rightarrow a_y = \frac{(-1.6\cdot10^{-19}C)(1.0\cdot10^{4}\frac{N}{C})}{9.11\cdot10^{-31}kg}$

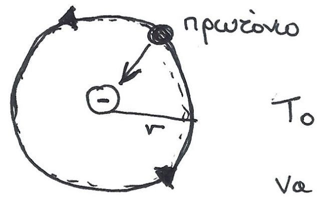
$$\Rightarrow \boxed{a_y = -1.756\cdot10^{+15}\, m/s^2}$$

Θέλουμε η ταχύτητα του ηλεκτρονίου στην κατακόρυφο διεύθυνση να μηδενιστεί όταν φθάσει στην αρνητικά φορτισμένη πλάκα:

$$v_y^{f\,2} = v_y^{i\,2} + 2a_y(y_f - y_0) \Rightarrow 0\,\frac{m}{s} = v_0^2\sin^2(45^o) + 2\left(-1.756\cdot10^{15}\frac{m}{s^2}\right)(0.02m)$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{8.381\cdot10^{6}\, m/s}{\sqrt{2}/2} \Rightarrow \boxed{v_0 = 1.19\cdot10^{7}\, m/s}$$

9. Ένα πρωτόνιο κινείται γύρω από ένα μακρύ φορτισμένο ευθύγραμμο σύρμα εκτελώντας 1.0 x 10^6 περιστροφές το δευτερόλεπτο. Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι 1.0 cm. Βρείτε τη γραμμική πυκνότητα φορτίου του σύρματος.



Το σύρμα θα πρέπει να είναι αρνητικά φορτισμένο ώστε να μπορεί να έλκει το πρωτόνιο.

Στις διαλέξεις είδαμε ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί μια γραμμική κατανομή φορτίου άπειρου μήκους δίνεται από τη σχέση:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda|}{r}$$ όπου λ: η γραμμική πυκνότητα φορτίου.

Εξαιτίας αυτού του ηλεκτρικού πεδίου, πάνω στο πρωτόνιο ασκείται μια δύναμη που δρα ως κεντρομόλος δύναμη. Επομένως θα έχουμε:

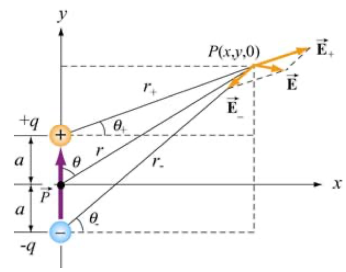
$$F = qE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q|\lambda|}{r} = \frac{m\upsilon^2}{r} \Rightarrow |\lambda| = (4\pi\varepsilon_0)\left(\frac{m\upsilon^2}{2q}\right) = 4\pi\varepsilon_0\frac{m(2\pi r f)^2}{2q}$$

$$\Rightarrow |\lambda| = \frac{(1.67\cdot10^{-27}kg)\,4\pi^2(1.0\cdot10^{-2}m)^2(1.0\cdot10^{6}s^{-1})^2}{2\cdot(9.0\times10^{9}\,Nm^2/C)(1.6\cdot10^{-19}C)} \Rightarrow \boxed{|\lambda| = 2.3\cdot10^{-9}\,C/m}$$

Επειδή το φορτίο στο σύρμα πρέπει να είναι αρνητικό για να έλκει το πρωτόνιο, θα έχουμε ότι $\boxed{\lambda = -2.3\cdot10^{-9}\,C/m}$

10. Θεωρήστε το ηλεκτρικό δίπολο του σχήματος.

(α) Δείξτε ότι οι δύο συνιστώσες E_x και E_y του ηλεκτρικού πεδίου του διπόλου στο όριο που $r \gg a$ δίνονται από τις σχέσεις:



$$E_x = \frac{3p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} sin\theta cos\theta \qquad E_y = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1)$$

όπου $sin\theta = x/r$ και $cos\theta = y/r$.

(β) Δείξτε ότι οι δύο παραπάνω σχέσεις για τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου μπορούν να γραφούν σε πολικές συντεταγμένες με την μορφή: $\vec{E}(r,\theta) = E_r\hat{r} + E_\theta\hat{\theta}$, όπου:

$$E_r = \frac{2pcos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad E_\theta = \frac{psin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

(α) Υπολογίζουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση $r \gg a$, από το δίπολο. Η x-συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P με καρτεσιανές συντεταγμένες $(x, y, 0)$ δίνεται από τη σχέση:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\cos\theta_+}{r_+^2} - \frac{\cos\theta_-}{r_-^2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x}{[x^2+(y-a)^2]^{3/2}} - \frac{x}{[x^2+(y+a)^2]^{3/2}}\right]$$

όπου $r_\pm^2 = r^2 + a^2 \mp 2ra\cos\theta = x^2 + (y \mp a)^2$

Παρόμοια, η y-συνιστώσα δίνεται από τη σχέση:

$$E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\sin\theta_+}{r_+^2} - \frac{\sin\theta_-}{r_-^2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{y-a}{[x^2+(y-a)^2]^{3/2}} - \frac{y+a}{[x^2+(y+a)^2]^{3/2}}\right]$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα Taylor για να αναπτύξουμε το ηλεκτρικό πεδίο, και θα κρατήσουμε μόνο όρους που είναι ανάλογοι του $1/r^3$ και θα αγνοήσουμε όρους μεγαλύτερης τάξης από $1/r^5$. όπου $r = (x^2+y^2)^{1/2}$

Έχουμε αρχικά:

$$[x^2+(y\pm a)^2]^{-3/2} = (x^2+y^2+a^2 \pm 2ay)^{-3/2} = r^{-3}\left[1 + \frac{a^2 \pm 2ay}{r^2}\right]^{-3/2}$$

Στο όριο $r \gg a$ χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα Taylor με $s = \frac{a^2 \pm 2ay}{r^2}$

$$(1+s)^{-3/2} \simeq 1 - \frac{3}{2}s + \frac{15}{8}s^2 - \dots$$

Οι εξισώσεις για τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου γίνονται επομένως:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{6xya}{r^5} + \dots$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{2a}{r^3} + \frac{6y^2a}{r^5} \right) + \dots$$

όπου αγνοούμε όρους τάξης ίσης ή μεγαλύτερης του s^2. Το ηλεκτρικό πεδίο επομένως γράφεται:

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{2a}{r^3}\hat{j} + \frac{6ya}{r^5}(x\hat{i} + y\hat{j}) \right] = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\frac{3yx}{r^2}\hat{i} + \left(\frac{3y^2}{r^2} - 1 \right)\hat{j} \right]$$

όπου χρησιμοποιούμε τον ορισμό του μέτρου της ηλεκτρικής διπολικής ροπής $p = 2aq$

Συναρτήσει των πολικών συντεταγμένων, με $\sin\theta = \frac{x}{r}$ και $\cos\theta = \frac{y}{r}$ θα πάρουμε:

$$\boxed{E_x = \frac{3p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \sin\theta\cos\theta} \quad \text{και} \quad \boxed{E_y = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1)}$$

(β) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε ~~καρτεσιανές~~ συντεταγμένες θα είναι:

$$\vec{E}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3\sin\theta\cos\theta\,\hat{i} + (3\cos^2\theta - 1)\hat{j} \right]$$

Με πράξεις, η προηγούμενη σχέση γράφεται ως:

$$\vec{E}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta(\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}) + \sin\theta\cos\theta\,\hat{i} + (\cos^2\theta - 1)\hat{j} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta(\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}) + \sin\theta(\cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j}) \right]$$

Σε πολικές συντεταγμένες μπορούμε να γράψουμε τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{r}$ και $\hat{\theta}$ ως:

$$\hat{r} = \sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j}$$

Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο γράφεται χρησιμοποιώντας τα $\hat{r}$ και $\hat{\theta}$

$$\boxed{\vec{E}(r,\theta) = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right]}$$

Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ θα είναι:

$$E = \left(E_x^2 + E_y^2\right)^{1/2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\cos^2\theta + 1\right)^{1/2}}$$