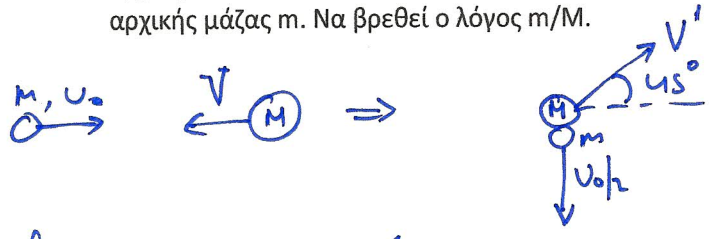
ΦΥΣ 131: ΓΕΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι: ΜΗΧΑΝΙΚΗ, ΚΥΜΑΤΙΚΗ, ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

Φροντιστήριο #7

Άσκηση 1

Ένα σωματίδιο μάζας m, κινείται οριζόντια και προς τα δεξιά με αρχική ταχύτητα υο και συγκρούεται τέλεια ελαστικά με ένα άλλο σωματίδιο άγνωστης μάζας Μ το οποίο κινείται στην αντίθετη διεύθυνση. Μετά τη σύγκρουση η μάζα m έχει ταχύτητα υο/2 και διεύθυνση κάθετη στην αρχική διεύθυνση κίνησης, ενώ η μάζα Μ κινείται σε γωνιά 45ο ως προς την αρχική διεύθυνση της αρχικής μάζας m. Να βρεθεί ο λόγος m/M.



Από διατήρηση ορμής: $\hat{x}$: $m\upsilon_{0x} - MV_x = MV'\cos 45 \Rightarrow \boxed{m\upsilon_0 - MV = MV'\frac{\sqrt{2}}{2}}$ (1)

$\hat{y}$: $0 = m\frac{\upsilon_0}{2} - MV'\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{MV'\sqrt{2} = m\upsilon_0}$ (2)

$\Rightarrow \boxed{V' = \frac{m}{M}\frac{\upsilon_0}{\sqrt{2}}}$

Ελαστική κρούση ⇒ διατήρηση κινητικής ενέργειας:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m\frac{\upsilon_0^2}{4} + \frac{1}{2}MV'^2 \quad (3)$$

(1) & (2) $\Rightarrow m\upsilon_0 - MV = \frac{m\upsilon_0}{2} \Rightarrow \boxed{V = \frac{m}{M}\frac{\upsilon_0}{2}}$ (4)

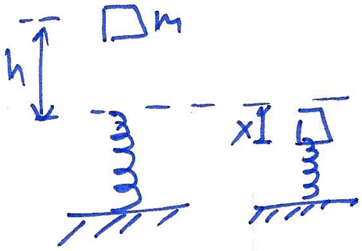
Αντικαθιστούμε στην (3)

$$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\cancel{\upsilon_0^2} + \frac{1}{\cancel{2}}M\frac{1}{4}\frac{m^{\cancel{2}}}{M^2}\cancel{\upsilon_0^2} = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\frac{\cancel{\upsilon_0^2}}{4} + \frac{1}{\cancel{2}}M\cdot\frac{1}{2}\frac{m^{\cancel{2}}}{M^2}\cancel{\upsilon_0^2}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{4}\frac{m}{M} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{m}{M} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\frac{m}{M} \Rightarrow \boxed{\frac{m}{M} = 3}$$

Άσκηση 2

Μια μάζα m αφήνεται από ύψος h πάνω από ένα κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς ελατηρίου k. Να βρεθεί το ύψος στο οποίο η μάζα φθάνει σε ηρεμία.



Διατήρηση μηχανικής ενέργειας: $\Rightarrow E_{μηχ}^{i} = E_{μηχ}^{f}$

$\Rightarrow E_{δυν}^{i} + E_{κιν}^{i} + E_{ελατ}^{i} = E_{δυν}^{f} + E_{κιν}^{f} + E_{ελατ}^{f}$

όμως: $v^{i} = 0 = v^{f} \Rightarrow E_{κιν}^{i} = E_{κιν}^{f} = 0$

$E_{ελατ}^{i} = 0$ (φυσικό μήκος)

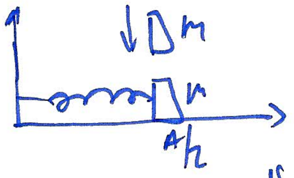
$\Rightarrow mgh = mg(-x) + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 - mgx - mgh = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 4(\frac{1}{2}k)(mgh)}}{k}$ (Θέλουμε θετική λύση)

$\Rightarrow \boxed{x = \dfrac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2kh}{mg}}\right)}$

Άσκηση 3

Μια μάζα m, η οποία είναι εξαρτημένη από ένα ελατήριο σταθεράς ελατηρίου k, ταλαντώνεται πάνω σε ένα οριζόντιο τραπέζι με πλάτος ταλάντωσης A. Τη χρονική στιγμή που το ελατήριο έχει επιμήκυνση A/2, μια δεύτερη μάζα επίσης m, πέφτει κατακόρυφα πάνω στην πρώτη μάζα και αμέσως κολλά πάνω της. Ποιο θα είναι το πλάτος της κίνησης και των δυο μαζών;



(Διατήρηση ενέργειας μεταξύ A και A/2)

· Ταχύτητα στο A/2 : $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m v_0^2 \Rightarrow \boxed{v_0^2 = \frac{3k}{4M}A^2}$ (1)

· Πλαστική κρούση ⇒ διατήρηση ορμής : $P_x^i = P_x^f \Rightarrow m v_0 + 0 = 2m v' \Rightarrow \boxed{v' = \frac{v_0}{2}}$

· Διατήρηση ενέργειας μεταξύ της στιγμής της κρούσης και το νέο πλάτος ταλάντωσης B.

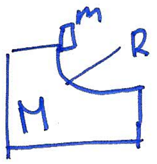
$$\frac{1}{2}kB^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(2m)v'^2 \xRightarrow{(2)} kB^2 = \frac{kA^2}{4} + 2m\frac{v_0^2}{4}$$

$$\xRightarrow{(1)} kB^2 = \frac{kA^2}{4} + m\frac{3k}{8M}A^2 \Rightarrow B^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{3A^2}{8} \Rightarrow B^2 = \frac{5}{8}A^2$$

$$\Rightarrow \boxed{B = A\sqrt{5/8}}$$

Άσκηση 4

Ένα τούβλο σχήματος τεταρτημορίου, ακτίνας R, έχει μάζα M και βρίσκεται πάνω σε μια λεία επιφάνεια. Ένα μικρότερο τούβλο μάζας m, αφήνεται από τη κορυφή του μεγαλύτερου τούβλου και γλιστρά προς τα κάτω χωρίς τριβές. Να βρεθούν οι ταχύτητες των δυο τούβλων ως προς το έδαφος, την στιγμή που χάνουν επαφή το ένα με το άλλο.



Διατήρηση ενέργειας: $E^i_{μηχ} = E^f_{μηχ} \Rightarrow E^i_{δυν} + E^i_{κιν} = E^f_{δυν} + E^f_{κιν}$

$$\Rightarrow \boxed{mgR = \frac{1}{2} m V_1^2 + \frac{1}{2} M V_2^2} \quad (1)$$

Διατήρηση ορμής: $p^i = p^f \Rightarrow \emptyset + \emptyset = mV_1 - MV_2 \Rightarrow \boxed{V_2 = \frac{m}{M} V_1}$ (2)

$$(1)\ \&\ (2) \Rightarrow \cancel{m} g R = \frac{1}{2} \cancel{m} V_1^2 + \frac{1}{2} M \frac{m^2}{M^2} V_1^2 \Rightarrow gR = \frac{V_1^2}{2} + \frac{V_1^2}{2} \frac{m}{M}$$

$$\Rightarrow gR = \frac{1}{2} V_1^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right) \Rightarrow V_1^2 = \frac{2gR}{1 + m/M}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_1 = \sqrt{\frac{2gR}{1 + m/M}}}, \quad \boxed{V_2 = \frac{m}{M} \sqrt{\frac{2gR}{1 + m/M}}}$$