ΦΥΣ. 211
ΕΡΓΑΣΙΑ # 8
Επιστροφή την Τετάρτη 30/3/2016 στο τέλος της διάλεξης

1. Μια μάζα m είναι εξαρτημένη από το άκρο ενός ελατηρίου με φυσική συχνότητα ω. Η μάζα αφήνεται να κινηθεί από την κατάσταση της ηρεμίας και ενώ βρίσκεται στην θέση x_0. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται αλλά αυτή τη φορά το σύστημα είναι βυθισμένο σε κάποιο υγρό που προκαλεί απόσβεση της ταλάντωσης που εκτελεί το σύστημα. Η κίνηση του ταλαντωτή μέσα στο υγρό αντιστοιχεί σε ταλάντωση με μεγάλη απόσβεση με συντελεστή απόσβεσης $\gamma = \omega/2Q$, όπου Q ο συντελεστής ποιότητας. (Συχνά γράφεται και με τη μορφή $\gamma = b/2m$ όπου b σταθερά και m η μάζα του ταλαντωτή). Να βρεθεί ο λόγος των μέγιστων ταχυτήτων του συστήματος στις δυο περιπτώσεις κίνησης (απλός αρμονικός ταλαντωτής/ταλαντωτής με μεγάλη απόσβεση). Ποιος είναι ο λόγος των ταχυτήτων στο όριο της πολύ ισχυρής απόσβεσης ($\gamma >> \omega$) και ποιος στο όριο της κριτικής απόσβεσης;

Για την περίπτωση που δεν υπάρχει απόσβεση η γενική λύση είναι της μορφής: $x(t)=C\cos(\omega t+\phi)$

Η αρχική συνθήκη είναι: $\upsilon(t=0)=0 \Rightarrow -C\omega\sin(\cancel{\omega t}^{\,0}+\phi)=0 \Rightarrow -C\omega\sin\phi=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\phi=0 \Rightarrow \boxed{\phi=0.}$

Η 2η συνθήκη μας λέει ότι $x(t=0)=x_0 \Rightarrow C\cos(\cancel{\omega t}^{\,0}+0)=x_0 \Rightarrow \boxed{C=x_0}$

Επομένως η εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή χωρίς απόσβεση είναι: $\boxed{x=x_0\cos\omega t}$ και $\boxed{\upsilon=-x_0\omega\sin\omega t}$ με μέγιστη ταχύτητα $\boxed{\upsilon_{max}=\omega x_0}$

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση με μεγάλη απόσβεση. Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$x(t)=Ae^{iat}$ και αντικατάσταση στην εξίσωση κίνησης καταλήγει στην λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης: $-a^2+\omega^2+i\dfrac{a\omega}{Q}=0$ με λύσεις $a=a_\pm=\dfrac{i\omega}{2Q}\pm\sqrt{\omega^2\left(1-\dfrac{1}{4Q^2}\right)}$

Από την άσκηση ξέρουμε ότι ο ταλαντωτής υπόκειται σε μεγάλη απόσβεση και επομένως $\left(1-\dfrac{1}{4Q^2}\right)<0$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της απόσβεσης σαν $\gamma=\dfrac{\omega}{2Q}$ η εξίσωση γράφεται: $a=a_\pm=i\gamma\pm\sqrt{\omega^2-\gamma^2}=i\gamma\pm i\sqrt{\gamma^2-\omega^2} \Rightarrow a=a_\pm=i\left(\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)$

Έτσι η γενική λύση στην περίπτωση αυτή θα είναι: $x(t)=Ae^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t}+Be^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t}$

Ορίζοντας $\Omega=\sqrt{\gamma^2-\omega^2}$ η σχέση γράφεται απλούστερα: $x(t)=Ae^{-\gamma t-\Omega t}+Be^{-\gamma t+\Omega t}$

Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι $x(t=0)=x_0$ και $\upsilon(t=0)=\dot{x}(t=0)=0$

Επομένως από την γενική λύση αντικαθιστώντας για $t=0$ θα πάρουμε:

$$\left.\begin{array}{l} A+B=x_0 \\ A(-\gamma-\Omega)+B(-\gamma+\Omega)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B=x_0-A \\ -A(\gamma+\Omega)-(\gamma-\Omega)(x_0-A)=0 \Rightarrow -\cancel{A\gamma}-A\Omega-\gamma x_0+\cancel{\gamma A}+x_0\Omega-A\Omega=0 \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow -2A\Omega-\gamma x_0+x_0\Omega=0 \Rightarrow \boxed{A=-\frac{x_0(\gamma-\Omega)}{2\Omega}} \quad \text{και} \quad \boxed{B=\frac{x_0(\gamma+\Omega)}{2\Omega}}$$

Επομένως η εξίσωση θέσης του ταλαντωτή γράφεται:

$$\boxed{x(t)=\frac{x_0}{2\Omega}\left[(\gamma+\Omega)e^{-(\gamma-\Omega)t}-(\gamma-\Omega)e^{-(\gamma+\Omega)t}\right]}$$

Παραγωγίζοντας ως προς χρόνο θα δώσει: $\dot{x}(t)=\upsilon(t)=\frac{x_0}{2\Omega}\left[-(\gamma+\Omega)(\gamma-\Omega)e^{-(\gamma-\Omega)t}+(\gamma-\Omega)(\gamma+\Omega)e^{-(\gamma+\Omega)t}\right]$

Αλλά $\Omega^2=\gamma^2-\omega^2 \Rightarrow \omega^2=\gamma^2-\Omega^2$ Επομένως η εξίσωση της ταχύτητας γίνεται:

$$\dot{x}(t)=\frac{x_0}{2\Omega}\left[-(\gamma^2-\Omega^2)e^{-(\gamma-\Omega)t}+(\gamma^2-\Omega^2)e^{-(\gamma+\Omega)t}\right] \Rightarrow \boxed{\dot{x}(t)=\frac{\omega^2 x_0}{2\Omega}\left[e^{-(\gamma+\Omega)t}-e^{-(\gamma-\Omega)t}\right]}$$

Παραγωγίζουμε και πάλι, βρίσκουμε ότι η μέγιστη ταχύτητα συμβαίνει όταν $\frac{d\dot{x}}{dt}=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2 x_0}{2\Omega}\left[-(\gamma+\Omega)e^{-(\gamma+\Omega)t}+(\gamma-\Omega)e^{-(\gamma-\Omega)t}\right]=0 \Rightarrow \cancel{-}(\gamma+\Omega)e^{-(\gamma+\Omega)t}=\cancel{-}(\gamma-\Omega)e^{-(\gamma-\Omega)t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma+\Omega}{\gamma-\Omega}=e^{(-\cancel{\gamma}+\Omega+\cancel{\gamma}+\Omega)t} \Rightarrow e^{+2\Omega t}=\frac{\gamma+\Omega}{\gamma-\Omega} \Rightarrow 2\Omega t=\ln\frac{\gamma+\Omega}{\gamma-\Omega} \Rightarrow \boxed{t_{\upsilon_{max}}=\frac{1}{2\Omega}\ln\frac{\gamma+\Omega}{\gamma-\Omega}}$$

Αντικαθιστούμε τον χρόνο αυτό στην εξίσωση της ταχύτητας οπότε θα έχουμε:

$$\dot{x}_{max}=\upsilon_{max}=-\frac{\omega^2 x_0}{2\Omega}\exp\left(-\frac{\gamma}{2\Omega}\ln\frac{\gamma+\Omega}{\gamma-\Omega}\right)\left(\sqrt{\frac{\gamma+\Omega}{\gamma-\Omega}}-\sqrt{\frac{\gamma-\Omega}{\gamma+\Omega}}\right) \Rightarrow \boxed{\upsilon_{max}=-\omega^2 x_0\left(\frac{\gamma-\Omega}{\gamma+\Omega}\right)^{\gamma/2\Omega}}$$

Επομένως ο λόγος των μέγιστων ταχυτήτων για τις δυο περιπτώσεις αρμονικού ταλαντωτή θα είναι:

$$R=\frac{\upsilon_{max}^{αποσ.}}{\upsilon_{max}^{αρμ.}}=\frac{-\cancel{\omega^2 x_0}\left(\frac{\gamma-\Omega}{\gamma+\Omega}\right)^{\gamma/2\Omega}}{-\cancel{\omega^2 x_0}} \Rightarrow \boxed{R=\left(\frac{\gamma-\Omega}{\gamma+\Omega}\right)^{\gamma/2\Omega}}$$

Για $\gamma \gg \omega \Rightarrow \Omega=\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\simeq\gamma-\frac{\omega^2}{2\gamma}$ και ο λόγος γίνεται: $R\cong\left(\frac{2\gamma}{\omega^2/2\gamma}\right)^{1/2} \Rightarrow \boxed{R\simeq\frac{2\gamma}{\omega}}$ πολύ μεγάλη απόσβεση

Για $\gamma\simeq\omega$, $\Omega\cong0$, τότε $\frac{\Omega}{\gamma}\equiv\varepsilon$ οπότε $R\simeq\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{1/2\varepsilon}\simeq(1+2\varepsilon)^{1/2\varepsilon} \Rightarrow \boxed{R\simeq e}$ κριτική απόσβεση

2. (α) Ένας αποσβένων ταλαντωτής διεγείρεται από μια δύναμη βήματος της μορφής: $F(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ F_0 & t>0 \end{cases}$. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των συναρτήσεων Green, βρείτε την μορφή της εξίσωσης της θέσης, $x(t)$, του ταλαντωτή. Η απάντησή σας θα πρέπει να είναι της μορφής $x(t)=\frac{F_0}{m\omega_0^2}\left(1-e^{-\beta t}\cos\omega_1 t-\frac{\beta}{\omega_1}e^{-\beta t}\sin\omega_1 t\right)$ για $t>0$. Σχεδιάστε την λύση αυτή για $\beta=0$ και $\beta=\omega_0/4$. Προσέξτε ότι με βάση τη λύση που βρήκατε, υπάρχει μεγάλη μετατόπιση ως προς την θέση ισορροπίας $\frac{F_0}{m\omega_0^2}$. Να βρεθεί ο χρόνος, t_m, που χρειάζεται για να βρεθεί ο ταλαντωτής τη πρώτη φορά στην μέγιστη απομάκρυνση καθώς και η θέση του, $x(t_m)$, την στιγμή αυτή, t_m. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό θα είναι της μορφής $x(t_m)=\frac{F_0}{m\omega_0^2}\left(1+e^{-\beta\tau/\omega_1}\right)$.

(β) Θεωρήστε τώρα ότι ο ίδιος ταλαντωτής υπόκειται σε μια πεπερασμένη ώθηση της μορφής: $F(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ F_0 & 0<t<T \\ 0 & t>T \end{cases}$. Να βρεθεί η λύση της θέσης, $x(t)$, για την περίπτωση αυτή. Υποθέστε ότι η απόσβεση είναι αρκετά μεγάλη ώστε οι αρχικές ταλαντώσεις έχουν αποσβεστεί πριν ενεργοποιηθεί η δύναμη (δηλαδή $e^{-\beta T}\sim 0$). Σχεδιάστε την $x(t)$ για την περίπτωση αυτή.

Όπως έχουμε δει από τις διαλέξεις, ο γενικός τύπος για $x(t)$ δίνεται από:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}dt'\,\frac{F(t')}{m\omega_1}e^{-\beta(t-t')}\sin\omega_1(t-t') \quad \text{όπου} \quad \boxed{\omega_1^2=\omega_0^2-\beta^2 \Rightarrow \beta^2=\omega_1^2+\omega_0^2 \Rightarrow \omega_0^2=\omega_1^2+\beta^2}$$

Υποθέτουμε ότι $F(t)=0$ για $t<0$ και το ολοκλήρωμα γίνεται:

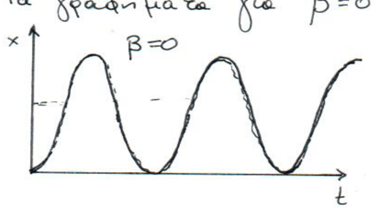
$$x(t)=\frac{F_0}{m\omega_1}\int_0^t dt'\,e^{-\beta(t-t')}\sin\omega_1(t-t')=\frac{F_0}{m\omega_1}\mathrm{Im}\int_0^t dt'\,e^{-(\beta-i\omega_1)(t-t')}\Rightarrow$$

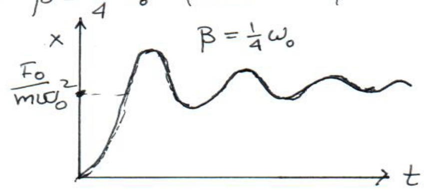
$$\Rightarrow x(t)=\frac{F_0}{m\omega_1}\mathrm{Im}\left(\frac{e^{-(\beta-i\omega_1)(t-t')}}{\beta-i\omega_1}\Bigg|_0^t\right)\Rightarrow x(t)=\frac{F_0}{m\omega_1}\mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{-(\beta-i\omega_1)t}}{\beta-i\omega_1}\right)$$

$$\Rightarrow x(t)=\frac{F_0}{m\omega_1}\frac{1}{\beta^2+\omega_1^2}\mathrm{Im}\left[\left(-e^{-\beta t}(\cos\omega_1 t+i\sin\omega_1 t)+1\right)(\beta+i\omega_1)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t)=\frac{F_0}{m\omega_0^2}\left(1-e^{-\beta t}\cos\omega_1 t-\frac{\beta}{\omega_1}e^{-\beta t}\sin\omega_1 t\right)}$$

Τα γραφήματα για $\beta=0$ και $\beta=\frac{1}{4}\omega_0$ φαίνονται παρακάτω





Ο ταλαντωτής βρίσκεται σε μέγιστο από την θέση ισορροπίας, όταν η ταχύτητα στο σημείο αυτό γίνει μηδέν. Οπότε παραγωγίζουμε την θέση:

$$\dot{x}(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\left(\cancel{\beta e^{-\beta t}\cos\omega_1 t} + \omega_1 e^{-\beta t}\sin\omega_1 t + \frac{\beta^2}{\omega_1} e^{-\beta t}\sin\omega_1 t - \cancel{\beta e^{-\beta t}\cos\omega_1 t}\right) \Rightarrow$$

$$\dot{x}(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\left(\omega_1 + \frac{\beta^2}{\omega_1}\right) e^{-\beta t}\sin\omega_1 t = 0 \Rightarrow \sin\omega_1 t = 0$$

Επομένως το πρώτο μέγιστο από τη θέση ισορροπίας είναι για $\omega_1 t_M = \pi$

Την χρονική στιγμή αυτή, η απομάκρυνση του ταλαντωτή είναι:

$$x(t_M) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\left(1 + e^{-\beta\frac{\pi}{\omega_1}}\right)$$

(β) Το πρόβλημα είναι ακριβώς ίδιο με το προηγούμενο για $t < T$. Μετά την χρονική στιγμή T, θα πρέπει να ολοκληρώσουμε:

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_1}\int_0^T dt'\, e^{-\beta(t-t')}\sin[\omega_1(t-t')] \Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{m\omega_1}\, Im\, \frac{e^{-(\beta-i\omega_1)(t-t')}}{\beta - i\omega_1}\Bigg|_0^T \Rightarrow$$

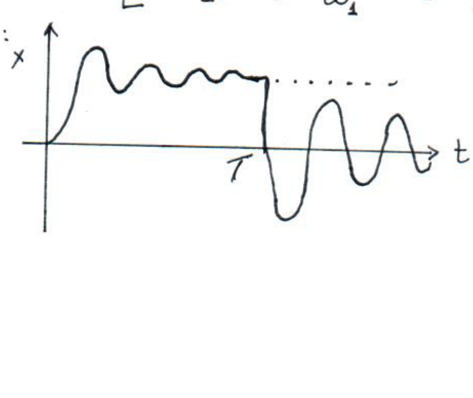
$$\Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{m\omega_1}\, Im\left[\frac{\left(e^{-(\beta-i\omega_1)(t-T)} - e^{-(\beta-i\omega_1)t}\right)}{\beta - i\omega_1}\right] \Rightarrow$$

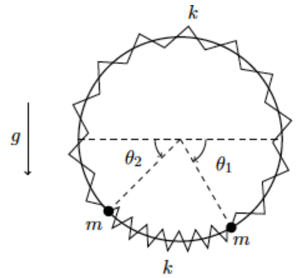
$$\Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{m\omega_1}\frac{1}{\beta^2+\omega_1^2}\, Im\Big[(\beta+i\omega_1)\Big\{ e^{-\beta(t-T)}[\cos\omega_1(t-T) + i\sin\omega_1(t_1-T)] - e^{-\beta t}[\cos\omega_1 t + i\sin\omega_1 t]\Big\}\Big] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\left[e^{-\beta(t-T)}\cos\omega_1(t-T) + e^{-\beta(t-T)}\frac{\beta}{\omega_1}\sin\omega_1(t-T) - e^{-\beta t}\cos\omega_1 t - \frac{\beta}{\omega_1}e^{-\beta t}\sin\omega_1 t\right]$$

Αν η απόσβεση είναι πολύ ισχυρή, τότε μπορούμε να αγνοήσουμε όρους που περιέχουν $e^{-\beta t}$ οπότε θα πάρουμε: $x(t) \simeq \frac{F_0}{m\omega_0^2} e^{-\beta(t-T)}\left[\cos\omega_1(t-T) + \frac{\beta}{\omega_1}\sin\omega_1(t-T)\right]$ για $t > T$

Το γράφημα της ταλάντωσης είναι:





3. Θεωρήστε δυο χάντρες μάζας m η κάθε μία, οι οποίες είναι περιορισμένες να κινούνται σε ένα στεφάνι ακτίνας R. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, οι μάζες συνδέονται μεταξύ τους με δυο ελατήρια ίδιου φυσικού μήκους και σταθεράς ελατηρίου, k. Υποθέστε αρχικά ότι δεν υπάρχει βαρύτητα (θα εξετάσετε τις επιδράσεις της βαρύτητας σε μετέπειτα ερώτημα της άσκησης).

(i) Χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες θ_1 και θ_2, όπως στο διπλανό σχήμα, γράψτε την Lagrangian του συστήματος.

(ii) Βρείτε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης και τις κανονικές συχνότητες ταλάντωσης. Θεωρείστε ότι οι δυο συχνότητες είναι ω_α και ω_β όπου θεωρούμε ότι $\omega_\beta < \omega_\alpha$.

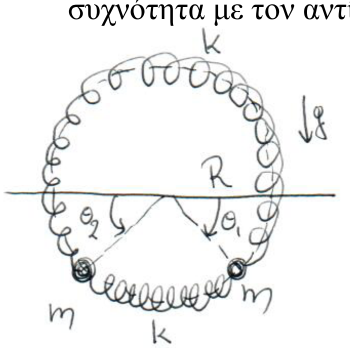
(iii) Θεωρώντας την ω_β, την κανονική συχνότητα ταλάντωσης με την μικρότερη τιμή, εξηγήστε την τιμή της στηριζόμενοι σε έννοιες κυκλικών συντεταγμένων και διατηρούμενων μεγεθών.

(iv) Έστω ότι προσθέσουμε ένα νέο όρο 4^{ου} βαθμού στο δυναμικό του ελατηρίου ώστε να αποκτήσει τη μορφή: $V(x) = kx^2/2 + \lambda x^4/4$. Πως θα αλλάξει η συχνότητα ω_β;

(v) Θεωρήστε τώρα ότι υπάρχει βαρύτητα. Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν δυο θέσεις ισορροπίας. Η μια θέση αντιστοιχεί σε σταθερή ισορροπία ενώ η άλλη σε ασταθή ισορροπία. Περιγράψτε τις δυο αυτές θέσεις ισορροπίας (δεν χρειάζεται να τις βρείτε).

(vi) Αγνοήστε την ύπαρξη του όρου 4^{ου} βαθμού στο δυναμικό και θεωρήστε απλά το δυναμικό ενός ελατηρίου. Βρείτε τις θέσεις των δυο μαζών στην κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας. Θα πρέπει να καταλήξετε σε μια εξίσωση της μορφής $x = a\cos x$, η οποία δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά και δεν χρειάζεται να τη λύσετε. Θεωρήστε ότι οι γωνίες που αντιστοιχούν στις θέσεις των μαζών στην κατάσταση αυτή είναι γ_1 και γ_2 για τις γωνίες θ_1 και θ_2 αντίστοιχα.

(vii) Υποθέστε ότι οι γωνίες γ_1 και γ_2 είναι γνωστές και οι τιμές τους είναι αρκετά μικρές. Βρείτε τις συχνότητες και κανονικούς τρόπους ταλάντωσης κάτω από την προϋπόθεση μικρών ταλαντώσεων από την θέση ισορροπίας. Θα πρέπει να αναγνωρίσετε κάθε συχνότητα με τον αντίστοιχο κανονικό τρόπο ταλάντωσης.



(α) Σύμφωνα με τις συντεταγμένες του προβλήματος, όταν η μάζα m στα δεξιά κινηθεί κατά Θ_1, η δύναμη που αναπτύσσεται πάνω της είναι $K(\Theta_1+\Theta_2)R$, ενώ για τη μάζα m στα αριστερά που και αυτή έχει κινηθεί κατά Θ_2, η δύναμη θα είναι επίσης $K(\Theta_1+\Theta_2)R$.

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος επομένως θα είναι: $V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2}KR^2(\theta_1+\theta_2)^2 + \frac{1}{2}KR^2(\theta_1+\theta_2)^2$

$$\Rightarrow V(\theta) = KR^2(\theta_1+\theta_2)^2$$

Η κινητική ενέργεια των μαζών θα είναι, (χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες):

$$T = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_2^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2)$$

Η Lagrangian του συστήματος: $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2) - KR^2(\theta_1+\theta_2)^2$

(β) Το σύστημά μας είναι συμμετρικό και επομένως οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης θα πρέπει να είναι ο συμμετρικός και αντισυμμετρικός τρόπος.

Ορίζουμε τις συντεταγμένες $\alpha = \theta_1 + \theta_2$ και $\beta = \theta_1 - \theta_2$ και $\mu = \frac{m}{2}$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \Rightarrow \dot{\alpha}^2 = \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ \dot{\beta} &= \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \Rightarrow \dot{\beta}^2 = \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 - 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 = 2\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right)$$

Έχουμε ακόμα ότι $\alpha + \beta = 2\theta_1$ και $\alpha - \beta = 2\theta_2$

Επομένως στην βάση αυτή συντεταγμένων, η Lagrangian γράφεται: $\boxed{L = \frac{\mu R^2}{2}\left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2\right) - KR^2\alpha^2}$

Βλέπουμε ότι η συντεταγμένη β είναι κυκλική αφού $\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0$, επομένως η αντίστοιχη ιδιοσυχνότητα, $\omega_\beta = 0$, ενώ για την συντεταγμένη α θα έχουμε από την εξίσωση κίνησης:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \alpha} \Rightarrow \mu R^2 \ddot{\alpha} = -2KR^2\alpha \Rightarrow \mu\ddot{\alpha} = -2K\alpha \text{ οπότε } \omega_\alpha = \frac{2k}{\mu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_\alpha = \frac{4k}{m}}$$

Θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο που κάναμε με τους πίνακες και την βάση συντεταγμένων θ_1 και θ_2.

Θα είχαμε: και πάλι την χαρακτηριστική εξίσωση ιδιοτιμών/ιδιοδιανυσμάτων:

$$\det\left([K] - [T]\omega^2\right) = 0 \Rightarrow \det\left|\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}_1^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}_1 \partial \dot{\theta}_2} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2 \partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2^2} \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det\left|\begin{matrix} 2KR^2 & 2KR^2 \\ 2KR^2 & 2KR^2 \end{matrix} - \begin{pmatrix} mR^2\omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 mR^2 \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow \det\left|2KR^2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - mR^2\omega^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\Rightarrow \left(2KR^2 - mR^2\omega^2\right)^2 - \left(2KR^2\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(2KR^2 - mR^2\omega^2 - 2KR^2\right)\left(2KR^2 - mR^2\omega^2 + 2KR^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mR^2\omega^2\left(4KR^2 - mR^2\omega^2\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\omega_1^2 &= 0 \\ \omega_2^2 &= 4K/m\end{aligned}}$$ όπως και προηγουμένως

(γ) Από την στιγμή που η συντεταγμένη β είναι κυκλική, υπάρχει μια ποσότητα που διατηρείται και αυτή είναι η ορμή του συμμετρικού τρόπου ταλάντωσης που αντιστοιχεί στην $\omega_\beta = 0$.

(δ) Αν προσθέσουμε ένα όρο $4^{ου}$ βαθμού στο ελατήριο, τότε θα είναι της μορφής:
$V_{ελ.} = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{4} \lambda x^4$ όπου $x = \alpha = \theta_1 + \theta_2$. Επομένως και πάλι η Lagrangian δεν εξαρτάται από την συντεταγμένη β η οποία είναι κυκλική, και άρα $\omega_\beta = 0$

(ε) Η ισορροπία θα πρέπει να είναι συμμετρική. Υπάρχουν 2 δυνατότητες, είτε $\theta_1 = \theta_2$ και επομένως $\beta = 0$ ή ότι η μάζα η μια είναι στο πάνω μέρος και η άλλη στο κάτω μέρος. Η τελευταία περίπτωση είναι ασταθής ισορροπία γιατί η δυναμική ενέργεια βαρύτητας είναι η μεγαλύτερη.

(στ) Όταν ενεργεί η βαρύτητα, η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$V = kR^2(\theta_1 + \theta_2)^2 - mgR(\sin\theta_1 + \sin\theta_2).$$

Για να βρούμε το ελάχιστο, υπολογίζουμε τις παραγώγους, και λόγω συμμετρίας μπορούμε να υπολογίσουμε μόνο ως προς την μια από αυτές, έστω θ_1. Θα έχουμε:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = 2kR^{\cancel{2}}(\theta_1 + \theta_2) - mg\cancel{R}\cos\theta_1 = 0$$

Απο το γεγονός ότι στην θέση ισορροπίας $\theta_1 = \theta_2$

$$\Rightarrow 2kR^{\cancel{2}} 2\theta_1 = mg\cancel{R}\cos\theta_1 \Rightarrow \boxed{\theta_1 = \frac{mg}{4kR}\cos\theta_1}$$

Η λύση είναι: $\gamma_1 = \gamma_2$

Από την εξίσωση $\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = 0$ μπορούμε να δούμε την ασταθή θέση ισορροπίας
Παρατηρώντας ότι $\theta_1 = -\theta_2 = \pi/2$ είναι λύση

(ζ) Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης πρέπει να είναι ο συμμετρικός και αντισυμμετρικός. Ο ένας τρόπος ταλάντωσης είναι αυτός που το σύστημα κινείται με τα ελατήρια στο φυσικό τους μήκος. Ο άλλος τρόπος αντιστοιχεί στην περίπτωση που το κέντρο μάζας παραμένει στο κέντρο του δακτυλιδιού και οι μάζες κινούνται συμμετρικά γύρω από αυτό με τα ελατήρια να αλλάζουν μήκος. (συσπείρωση/επιμήκυνση). Για να βρούμε τις ιδιοσυχνότητες αναπτύσσουμε το δυναμικό ως προς το ελάχιστο (τη θέση ισορροπίας)

$$K_{ij} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right|_{\theta_1=\gamma_1,\theta_2=\gamma_2} = \begin{pmatrix} 2kR^2 + mgR\sin\gamma_1 & 2kR^2 \\ 2kR^2 & 2kR^2 + mgR\sin\gamma_2 \end{pmatrix} = 2kR^2 \begin{pmatrix} 1+z & 1 \\ 1 & 1+z \end{pmatrix}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει $z = mg\sin\gamma / (2kR)$ και $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2$

Επομένως από την χαρακτηριστική εξίσωση θα έχουμε:

$$\det\left([V''] - \omega^2 [T]\right) = 0 \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} 2kR^2(1+z) & 2kR^2 \\ 2kR^2 & 2kR^2(1+z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} mR^2\omega^2 & 0 \\ 0 & mR^2\omega^2 \end{pmatrix} \right| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2kR^2(1+z) - mR^2\omega^2 & 2kR^2 \\ 2kR^2 & 2kR^2(1+z) - mR^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(2kR^2(1+z) - mR^2\omega^2\right)^2 - \left(2kR^2\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

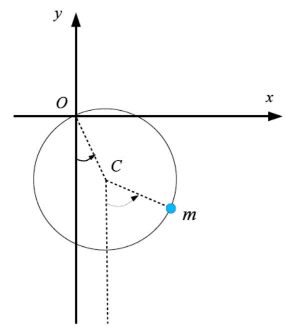
$$\Rightarrow \left(2kR^2(1+z) - mR^2\omega^2 - 2kR^2\right)\left(2kR^2(1+z) - mR^2\omega^2 + 2kR^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(2kR^2 z - mR^2\omega^2\right)\left(4kR^2 + 2kR^2 z - mR^2\omega^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_1^2 = \frac{2kz}{m}} \quad \text{και} \quad \boxed{\omega_2^2 = \frac{4k + 2kz}{m}}$$

Αν θεωρήσουμε την περίπτωση που $z \to 0$, σημαίνει ότι έχουμε τον συμμετρικό τρόπο και βλέπουμε ότι η ιδιοσυχνότητα αντιστοιχεί στην $\omega_2 = \frac{4k}{m}$ την μεγαλύτερη από τις δύο συχνότητες.

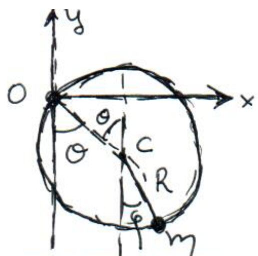
4. Ένα συντηρητικό μηχανικό σύστημα αποτελείται από ένα στεφάνι ακτίνας R και μάζας M και ομοιόμορφης κατανομής μάζας. Στο στεφάνι υπάρχει μια χάντρα μάζας m, που μπορεί να κινείται στην περιφέρεια του στεφανιού χωρίς τριβές. Το σύστημα κρέμεται από ένα καρφί σε κάποιο σημείο O, της περιφέρειας του στεφανιού και μπορεί να κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο $(\hat{x},\hat{y})$. Με το τρόπο αυτό το στεφάνι μπορεί να ταλαντώνεται ως προς το σημείο O ενώ η χάντρα κινείται στην περιφέρειά του. Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε βαρυτικό πεδίο.



(i) Γράψτε την Lagrangian του συστήματος.

(ii) Βρείτε την κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας του συστήματος.

(iii) Για την περίπτωση που $M = 2m$ υπολογήστε τις συχνότητες των μικρών ταλαντώσεων ως προς την θέση της ευσταθούς ισορροπίας που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.



$x_{CM} = R\sin\Theta$
$y_{CM} = -R\cos\Theta$

Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας τους οποίους μπορούμε να παραμετροποιήσουμε χρησιμοποιώντας τη γωνίες Θ και φ όπως φαίνονται στο σχήμα

Η ροπή αδράνειας του στεφανιού ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του στεφανιού είναι $I_{CM} = MR^2$

Η ροπή αδράνειας του στεφανιού ως προς το σημείο O μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας το θεώρημα παράλληλων αξόνων $I_O = MR^2 + I_{CM} = 2MR^2$

Θεωρούμε αρχικά το πρόβλημα εύρεσης της κινητικής ενέργειας του στεφανιού σαν την κινητική ενέργεια του στεφανιού λόγω περιστροφής ως προς το CM και την κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς του CM:

$$T_{στ} = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_{CM}^2 + \dot{y}_{CM}^2\right) + \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\Theta}^2 = \frac{1}{2}M\left(R^2\dot{\Theta}^2\cos^2\Theta + R^2\dot{\Theta}^2\sin^2\Theta\right) + \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\Theta}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{στ} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\dot{\Theta}^2 \Rightarrow T_{στ} = \frac{1}{2}\left(MR^2 + I_{CM}\right)\dot{\Theta}^2$$

Θα καταλήγαμε στο ίδιο αποτέλεσμα αν θεωρούσαμε την περιστροφή του στεφανιού ως προς το σημείο O και υπολογίζαμε την κινητική ενέργεια περιστροφής ως προς το σημείο αυτό: $T_{στ} = \frac{1}{2}I_0\dot{\Theta}^2 = \frac{1}{2}\left(MR^2 + I_{CM}\right)\dot{\Theta}^2$.

Οι συντεταγμένες της μάζας m θα είναι:

$$\left.\begin{aligned} x_m &= x_{cm} + x_{M/cm} = R\sin\theta + R\sin\varphi \\ y_m &= y_{cm} + y_{m/cm} = -R\cos\theta - R\cos\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \dot{x}_{cm} &= R\dot{\theta}\cos\theta + R\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{y}_{cm} &= R\dot{\theta}\sin\theta + R\dot{\varphi}\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \dot{x}_{cm}^2 &= (R\dot{\theta})^2\cos^2\theta + (R\dot{\varphi})^2\cos^2\varphi + 2R^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi \\ \dot{y}_{cm}^2 &= (R\dot{\theta})^2\sin^2\theta + (R\dot{\varphi})^2\sin^2\varphi + 2R^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{x}_{cm}^2 + \dot{y}_{cm}^2 = R^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + 2R^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)$$

Επομένως η κινητική ενέργεια του συστήματος θα είναι:

$$T = T_{\sigma\tau} + T_m = \frac{1}{2}\left(MR^2 + MR^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\left[\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}2MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\left[\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)\right]$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι η δυναμική ενέργεια του στεφανιού και η δυναμική ενέργεια της μάζας m, $V = V_{\sigma\tau} + V_m = -MgR\cos\theta - mgR(\cos\theta + \cos\varphi)$

Επομένως η Lagrangian του συστήματος είναι:

$$\boxed{L = \frac{1}{2}mR^2\left[\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta-\varphi)\right] + MR^2\dot{\theta}^2 + MgR\cos\theta + mgR(\cos\theta + \cos\varphi)}$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial\theta} \Rightarrow mR^2\left[\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}\cos(\theta-\varphi) - \dot{\varphi}(\cancel{\dot{\theta}} - \dot{\varphi})\sin(\theta-\varphi)\right] + 2MR^2\ddot{\theta} =$$

$$= -mR^2\cancel{\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin}(\theta-\varphi) - (M+m)gR\sin\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{mR^2\left[\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}\cos(\theta-\varphi) + \dot{\varphi}^2\sin(\theta-\varphi)\right] + 2MR^2\ddot{\theta} = -(m+M)gR\sin\theta}$$

Ανάλογα για την εξίσωση κίνησης ως προς φ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial\varphi} \Rightarrow mR^2\left[\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}\cos(\theta-\varphi) - \dot{\theta}(\dot{\theta} - \cancel{\dot{\varphi}})\sin(\theta-\varphi)\right] = mR^2\cancel{\dot{\theta}\dot{\varphi}}\sin(\theta-\varphi) - mRg\sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{mR^2\left[\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}\cos(\theta-\varphi) - \dot{\theta}^2\sin(\theta-\varphi)\right] = -mgR\sin\theta}$$

(β) Τα σημεία ισορροπίας προκύπτουν από τη δυναμική ενέργεια:

$$V = -gR\left[(M+m)\cos\theta + m\cos\varphi\right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = gR(M+m)\sin\theta \quad \text{και} \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = gRm\sin\varphi$$

Τα σημεία ευσταθούς ισορροπίας είναι για $\theta = \varphi = \emptyset$.

Αυτό προκύπτει αν υπολογίσουμε την 2η παράγωγο:

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\varphi=0} = \left. gR(M+m)\cos\theta \right|_{\theta=0} = gR(M+m)$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right|_{\theta=\varphi=0} = \left. gRm\cos\varphi \right|_{\varphi=0} = gRm$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \theta}\right|_{\theta=\varphi=0} = 0$$

Οπότε θα έχουμε $[V''] = \begin{pmatrix} gR(M+m) & 0 \\ 0 & gRm \end{pmatrix}$ και $\det[V''] > 0$

οπότε έχουμε ελάχιστο και τα σημεία είναι σημεία ευσταθούς ισορροπίας.

(γ) Από την Lagrangian του προβλήματος, θεωρώντας μικρές αποκλίσεις για θ, φ μπορούμε να αναπτύξουμε κατά Taylor $\sin\theta \simeq \theta$ και $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ κρατώντας συνιστώσα μέχρι όρους 2ης τάξης.

$$L = \frac{1}{2} mR^2\left[\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 + 2\dot\varphi\dot\theta\right] + MR^2\dot\theta^2 - (M+m)gR\frac{\theta^2}{2} - mgR\frac{\varphi^2}{2}$$

Γράφουμε τους πίνακες $[T]$ και $[k]$

$$[T] = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot\theta^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot\theta \partial \dot\varphi} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot\varphi \partial \dot\theta} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot\varphi^2} \end{pmatrix} \Rightarrow [T] = \begin{pmatrix} (m+2M)R^2 & mR^2 \\ mR^2 & mR^2 \end{pmatrix}$$

$$[k] = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi} & \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \end{pmatrix} \Rightarrow [k] = \begin{pmatrix} gR(m+M) & 0 \\ 0 & gRm \end{pmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση των ιδιοτιμών/ιδιοδιανυσμάτων:

$$\left([k]-\omega^2[T]\right)[a]=0 \Rightarrow \det\left([k]-\omega^2[T]\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} gR(M+m)-\omega^2(m+2M)R^2 & -mR^2\omega^2 \\ -mR^2\omega^2 & gRm-mR^2\omega^2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (gR)^2m(M+m)-gR^3m(m+2M)\omega^2-gR^3m(M+m)\omega^2+R^4m(m+2M)\omega^4-m^2R^4\omega^4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (gR)^2m(M+m)-gR^3m(2m+3M)\omega^2+2MmR^4\omega^4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g^2(M+m)-gR(2m+3M)\omega^2+2MR^2\omega^4=0$$

Επομένως οι λύσεις της 2-βάθμιας εξίσωσης θα είναι:

$$\omega_{1,2}^2=\frac{gR(2m+3M)\pm\sqrt{g^2R^2(2m+3M)^2-24MR^2g^2(M+m)}}{4MR^2}=\frac{g\cancel{R}(2m+3M)\pm g\cancel{R}\sqrt{M^2+4m^2+4Mm}}{4MR^{\cancel{2}}}$$

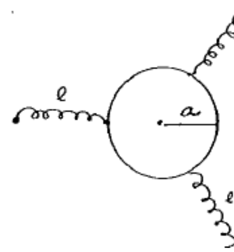
$$\Rightarrow \omega_{1,2}^2=\frac{g(2m+3M)\pm g\sqrt{(M+2m)^2}}{4MR}=\frac{g(2m+3M)\pm(M+2m)g}{4MR} \Rightarrow$$

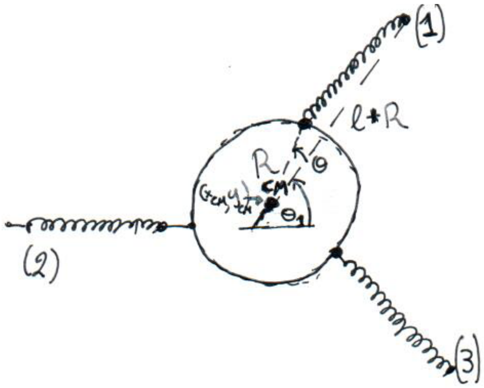
$$\Rightarrow \boxed{\omega_1^2=\frac{g}{R}\left(1+\frac{m}{M}\right) \quad \text{και} \quad \omega_2^2=\frac{g}{2R}}$$

Όταν $M=2m$ τότε οι ιδιοσυχνότητες γίνονται:

$$\boxed{\omega_1^2=\frac{3g}{2R} \quad \text{και} \quad \omega_2^2=\frac{g}{2R}}$$

5. Ένας ομογενής δίσκος μάζας *M* και ακτίνας *R*, βρίσκεται σε ηρεμία σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Συνδέεται με τρία όμοια ελατήρια σταθεράς *k* και φυσικού μήκους l_0. Τα τρία ελατήρια συνδέονται με σταθερά σημεία τα οποία βρίσκονται σε τέτοιες θέσεις ώστε τα ελατήρια να σχηματίζουν γωνία 120° μεταξύ τους. Στην θέση ισορροπίας τα ελατήρια έχουν μήκος $l > l_0$. Να βρεθούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης συμπεριλαμβανομένης της περιστροφικής. [*Υπόδειξη:* Η απάντησή σας θα πρέπει να είναι της μορφής $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{2m}\frac{2l-l_0}{l}}$ και $\omega_3 = \sqrt{\frac{6k}{m}\frac{(l-l_0)(a+l)}{al}}$].





Η κινητική ενέργεια του δίσκου, είναι το άθροισμα της μεταφορικής κινητικής ενέργειας του CM και της περιστροφικής κινητικής ενέργειας ως προς το CM.

Δηλαδή: $T = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}_{CM}^2 + \dot{y}_{CM}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2$

Για να βρούμε την δυναμική ενέργεια του συστήματος λόγω των ελατηρίων, θα πρέπει να υπολογίσουμε την επιμήκυνση του κάθε ελατηρίου. Το διάνυσμα της επιμήκυνσης του τυχαίου ελατηρίου-i δίνεται από το παραπάνω σχήμα

$$\vec{l}_i = \left[(l+R)\cos\theta_i - x_{CM} - R\cos(\theta_i+\theta)\right]\hat{i} + \left[(l+R)\sin\theta_i - y_{CM} - R\sin(\theta_i+\theta)\right]\hat{j}$$

Επομένως το τετράγωνο του μέτρου του θα είναι:

$$l_i^2 = l^2\cos^2\theta_i + R^2\cos^2\theta_i + 2lR\cos^2\theta_i + x_{CM}^2 + R^2\cos^2(\theta_i+\theta) - 2(l+R)\cos\theta_i R\cos(\theta_i+\theta) -$$
$$- 2(l+R)x_{CM}\cos\theta_i + 2x_{CM}R\cos(\theta_i+\theta) +$$
$$l^2\sin^2\theta_i + R^2\sin^2\theta_i + 2lR\sin^2\theta_i + y_{CM}^2 + R^2\sin^2(\theta_i+\theta) - 2(l+R)R\sin\theta_i\sin(\theta_i+\theta) -$$
$$- 2(l+R)y_{CM}\sin\theta_i + 2y_{CM}R\sin(\theta_i+\theta) \Rightarrow$$

$$l_i^2 = l^2 + R^2 + x_{CM}^2 + y_{CM}^2 + R^2 + 2Rl(\cos^2\theta_i + \sin^2\theta_i) - 2(l+R)R\left[\overbrace{\cos\theta_i\cos(\theta_i+\theta) + \sin\theta_i\sin(\theta_i+\theta)}^{\cos(\theta_i+\theta-\theta_i)}\right]$$
$$- 2(l+R)(x_{CM}\cos\theta_i + y_{CM}\sin\theta_i) + 2R\left[x_{CM}\cos(\theta_i+\theta) + y_{CM}\sin(\theta_i+\theta)\right]$$

Συνεχίζοντας την άλγεβρα για απλούστευση της σχέσης, θα έχουμε:

$$l_i^2 = l^2 + x_{CM}^2 + y_{CM}^2 + 2R(R+l) - 2R(R+l)\cos\Theta - 2l\left(x_{CM}\cos\Theta_i + y_{CM}\sin\Theta_i\right) -$$
$$- 2R\left[x_{CM}\cos\Theta_i - x_{CM}\cos(\Theta+\Theta_i) + y_{CM}\sin\Theta_i - y_{CM}\sin(\Theta+\Theta_i)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_i^2 = l^2 + x_{CM}^2 + y_{CM}^2 + 2R(R+l)(1-\cos\Theta) - 2l\left(x_{CM}\cos\Theta_i + y_{CM}\sin\Theta_i\right) -$$
$$- 2R\left[x_{CM}\left(\cos\Theta_i - \cos\Theta_i\cos\Theta + \sin\Theta_i\sin\Theta\right) + y_{CM}\left(\sin\Theta_i - \sin\Theta_i\cos\Theta - \cos\Theta_i\sin\Theta\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_i^2 = l^2 + x_{CM}^2 + y_{CM}^2 + 2R(R+l)(1-\cos\Theta) - 2l\left(x_{CM}\cos\Theta_i + y_{CM}\sin\Theta_i\right) -$$
$$- 2R\left[x_{CM}\cos\Theta_i(1-\cos\Theta) + x_{CM}\sin\Theta_i\sin\Theta + y_{CM}\sin\Theta_i(1-\cos\Theta) - y_{CM}\cos\Theta_i\sin\Theta\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_i^2 = l^2 + x_{CM}^2 + y_{CM}^2 + 2R(R+l)(1-\cos\Theta) - 2l\left(x_{CM}\cos\Theta_i + y_{CM}\sin\Theta_i\right) -$$
$$- 2R\left(x_{CM}\cos\Theta_i + y_{CM}\sin\Theta_i\right)(1-\cos\Theta) - 2R\left(x_{CM}\sin\Theta_i - y_{CM}\cos\Theta_i\right)\sin\Theta \qquad (A)$$

Η επιμήκυνση επομένως του ελατηρίου ως προς το φυσικό του μήκος l_0 είναι:

$$(l_i - l_0)^2 = l_i^2 + l_0^2 - 2l_i l_0 \qquad (B)$$

Πρέπει να αντικαταστήσουμε την σχέση (A). Εδώ κάνουμε την προσέγγιση από το διωνυμικό ανάπτυγμα: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$ και επίσης τις περιπτώσεις $\cos\Theta \simeq 1 - \frac{\Theta^2}{2}$ και $\sin\Theta \simeq \Theta$

Με βάση τις προσεγγίσεις αυτές γράφουμε την (A) ως:

$$l_i^2 \simeq l^2 + x_{CM}^2 + y_{CM}^2 + \cancel{2}R(R+l)\left(\cancel{1-1}+\frac{\Theta^2}{\cancel{2}}\right) - 2l\left(x_{CM}\cos\Theta_i + y_{CM}\sin\Theta_i\right) - 2R\left(x_{CM}\sin\Theta_i - y_{CM}\cos\Theta_i\right)\Theta$$
$$- \cancel{2}R\left(x_{CM}\cos\Theta_i + y_{CM}\sin\Theta_i\right)\left(\cancel{1-1}+\frac{\Theta^2}{\cancel{2}}\right) \Rightarrow$$

$$l_i^2 \simeq l^2 + x_{CM}^2 + y_{CM}^2 + R(R+l)\Theta^2 - 2l\left(x_{CM}\cos\Theta_i + y_{CM}\sin\Theta_i\right) - R\left(x_{CM}\cos\Theta_i + y_{CM}\sin\Theta_i\right)\Theta^2 -$$
$$- 2R\left(x_{CM}\sin\Theta_i - y_{CM}\cos\Theta_i\right)\Theta \qquad (\Gamma)$$

Βρίσκουμε την ποσότητα l_i από την (Γ) βγάζοντας το l^2 κοινό παράγοντα και χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα

$$\boxed{l_i = l\left[1 + \frac{x_{CM}^2}{2l^2} + \frac{y_{CM}^2}{2l^2} + \frac{R(R+l)}{2l^2}\Theta^2 - \frac{(x_{CM}\cos\Theta_i + y_{CM}\sin\Theta_i)}{l} - \frac{R\Theta}{l^2}(x_{CM}\sin\Theta_i - y_{CM}\cos\Theta_i) - \frac{R\Theta^2}{2l^2}(x_{CM}\cos\Theta_i + y_M\sin\Theta_i)\right] \quad (\Delta)}$$

Αντικαθιστώντας την (Γ) κ (Δ) στην (Β)

$$(l_i - l_0)^2 = l_0^2 + l^2 + x_{CM}^2 + y_{CM}^2 + R(R+l)\Theta^2 - 2l(x_{CM}\cos\Theta_i + y_{CM}\sin\Theta_i) - 2R(x_{CM}\sin\Theta_i - y_M\cos\Theta_i)\Theta$$
$$- R(x_{CM}\cos\Theta_i + y_{CM}\sin\Theta_i)\Theta^2 - 2l_0 l\left[1 + \frac{x_{CM}^2}{2l^2} + \frac{y_{CM}^2}{2l^2} + \frac{R(R+l)}{2l^2}\Theta^2 - \frac{(x_{CM}\cos\Theta_i + y_{CM}\sin\Theta_i)}{l} - \right.$$
$$\left. - \frac{R\Theta}{l^2}(x_{CM}\sin\Theta_i - y_{CM}\cos\Theta_i) - \frac{R\Theta^2}{2l^2}(x_{CM}\cos\Theta_i + y_M\sin\Theta_i)\right] \quad (E)$$

Η Lagrangian του συστήματος θα είναι: $\mathcal{L} = T - \mathcal{V} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_{CM}^2 + \dot{y}_{CM}^2) + \frac{1}{4}mR^2\dot{\Theta}^2 - \sum_{i=1}^{3}\mathcal{V}_i$

Αλλά $\mathcal{V}_i = \frac{1}{2}k(l_i - l_0)^2$ οπότε $\mathcal{V} = \frac{1}{2}k\sum_{i=1}^{3}(l_i - l_0)^2$

Ωστόσο, λόγω της γεωμετρίας του προβλήματος όλοι οι όροι που περιέχουν $\cos\Theta_i$, $\sin\Theta_i$ όταν αθροιστούν και για τα 3 ελατήρια θα δίνουν $\sum_{i=1}^{3}\cos\Theta_i = \sum_{i=1}^{3}\sin\Theta_i = \sum_{i=1}^{3}\cos\Theta_i\sin\Theta_i = 0$ αφού τα ελατήρια σχηματίζουν γωνία 120° μεταξύ τους.

Επίσης αυτό που θα έχουμε είναι ότι $\sum_{i=1}^{3}\cos^2\Theta_i = \sum_{i=1}^{3}\sin^2\Theta_i = \frac{3}{2}$

Μηδενίζοντας επομένως τους όρους των $\cos\Theta_i$ κ $\sin\Theta_i$ όταν κάναμε το άθροισμα θα πάρουμε:

$$\mathcal{V}_{ol} = \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{3}\mathcal{V}_i = \frac{3k}{2}\left[l_0^2 + l^2 + x_{CM}^2 + y_{CM}^2 + R(R+l)\Theta^2 - 2ll_0 - \frac{x_{CM}^2}{l}l_0 - \frac{y_{CM}^2}{l}l_0 - \frac{Rl_0(R+l)}{l}\Theta^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{V}_{ol} = \frac{3k}{2}\left[(l-l_0)^2 + R(R+l)\Theta^2\left(1 - \frac{l_0}{l}\right) + x_{CM}^2\left(1 - \frac{l_0}{l}\right) + y_{CM}^2\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{V}_{ol} = \frac{3k}{2}\left[(l-l_0)^2 + \frac{R(R+l)(l-l_0)}{l}\Theta^2 + \frac{(l-l_0)}{l}(x_{CM}^2 + y_{CM}^2)\right]$$

Επομένως η συνάρτηση Lagrange θα είναι:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}_{CM}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_{CM}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\Theta}^2 - \frac{3k}{2}(l-l_0)^2 - \frac{3k}{2}\frac{R(R+l)(l-l_0)}{l}\Theta^2 - \frac{3k}{2}\frac{l-l_0}{l}(x_{CM}^2 + y_{CM}^2)$$

Επομένως οι εξισώσεις κίνησης προκύπτουν από τις εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{1}{2} m R^{\cancel{2}} \ddot\theta = -3k\cancel{R}\frac{(R+\ell)(\ell-\ell_0)}{\ell}\theta \Rightarrow \boxed{\ddot\theta = -\frac{6k}{m}\frac{(R+\ell)(\ell-\ell_0)}{R\ell}\theta}$$

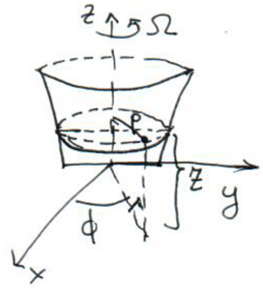
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot x_{cm}} = \frac{\partial L}{\partial x_{cm}} \Rightarrow m\ddot x_{cm} = -3k\frac{(\ell-\ell_0)}{\ell}x_{cm} \Rightarrow \boxed{\ddot x_{cm} = -\frac{3k}{m}\frac{\ell-\ell_0}{\ell}x_{cm}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot y_{cm}} = \frac{\partial L}{\partial y_{cm}} \Rightarrow m\ddot y_{cm} = -3k\frac{(\ell-\ell_0)}{\ell}y_{cm} \Rightarrow \boxed{\ddot y_{cm} = -\frac{3k}{m}\frac{\ell-\ell_0}{\ell}y_{cm}}$$

Έχουμε επομένως 3 εξισώσεις αρμονικών ταλαντωτών ασύζευκτες μεταξύ τους. Από τις εξισώσεις παρατηρούμε ότι οι συχνότητες ταλάντωσης είναι:

$\omega_1 = \sqrt{\frac{6k}{m}\frac{(R+\ell)(\ell-\ell_0)}{R\ell}}$ ενώ οι άλλες δύο είναι: $\omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{m}\frac{\ell-\ell_0}{\ell}}$

6. Θεωρήστε ότι έχετε ένα κουβά με νερό τον οποίο περιστρέφεται ως προς την κατακόρυφο άξονα συμμετρίας του με γωνιακή ταχύτητα Ω. Δείξτε ότι από την στιγμή που το νερό έχει βρεθεί σε ισορροπία ως προς τον κουβά, η επιφάνειά του θα έχει το σχήμα της παραβολής. [<u>*Υπόδειξη:*</u> χρησιμοποιείστε κυλινδρικές συντεταγμένες και το γεγονός ότι η επιφάνεια του νερού είναι μια ισοδυναμική επιφάνεια κάτω από τη συνδυαστική δράση της βαρυτικής και φυγοκεντρικής δύναμης].



Θεωρούμε μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς xyz με αρχή το κάτω μέρος του κουβά

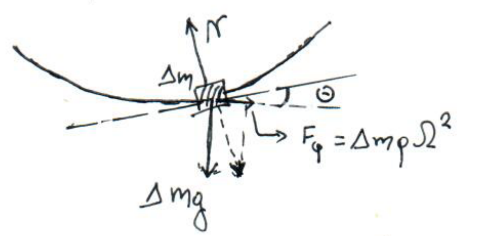
Έστω ρ, φ και z κυλινδρικές συντεταγμένες του συστήματος

Εξαιτίας της κυλινδρικής συμμετρίας του προβλήματος η z-συνιστώσα της επιφάνειας του νερού στου κουβά θα πρέπει και είναι συνάρτηση μόνο του ρ.

Δηλαδή θα έχουμε: $\quad z = z(\rho)$

Όταν το νερό βρίσκεται σε ισορροπία μέσα στον κουβά που περιστρέφεται, όλα τα τμήματα του βρίσκονται σε ισορροπία στο περιστρεφόμενο αυτό σύστημα. Αφού δεν υπάρχει ταχύτητα $\Rightarrow F_{coriolis} = 0$

Θεωρούμε ένα τέτοιο στοιχειώδες τμήμα μάζας του νερού Δm:



N: η δύναμη που αναπτύσσεται από τα γειτονικά τμήματα του νερού στην στοιχειώδη μάζα Δm. Αυτή η δύναμη πρέπει να είναι κάθετη στην επιφάνεια του υγρού.

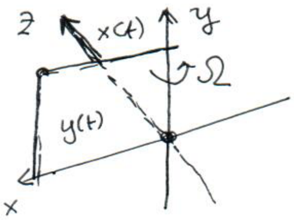
Από την στιγμή που η στοιχειώδης μάζα είναι σε ισορροπία θα πρέπει η συνισταμένη των υπόλοιπων δυνάμεων (βάρους και φυγόκεντρη) να μηδενίζεται στην εφαπτομενική διεύθυνση στην επιφάνεια του νερού και να είναι ίση και αντίθετη στην δύναμη N στην κάθετη στην επιφάνεια διεύθυνση.

Θα έχουμε επομένως: $\cancel{\Delta m}\rho\Omega^2\cos\Theta = \cancel{\Delta m}g\sin\Theta \Rightarrow \boxed{\tan\Theta = \rho\,\Omega^2/g}$

Αλλά $\tan\Theta$ αντιπροσωπεύει την κλίση της επιφάνειας σε ακτίνα ρ

$$\frac{dz}{d\rho} = \frac{\Omega^2}{g}\rho \Rightarrow z(\rho) = \int \frac{\Omega^2}{g}\rho\, d\rho \Rightarrow \boxed{z(\rho) = \frac{1}{2}\frac{\Omega^2}{g}\rho^2 + z_0}$$ επομένως εξίσωση παραβολής

7. Ένα σώμα μάζας *m*, είναι περιορισμένο να κινείται απουσία τριβών, σε ένα κατακόρυφο επίπεδο με τους άξονες *x* στην οριζόντια διεύθυνση και τον *y* στην κατακόρυφη διεύθυνση με θετική φορά προς τα πάνω. Το επίπεδο τίθεται σε περιστροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα *Ω*, ως προς τον κατακόρυφο *y*-άξονα. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης για *x* και *y*, να λυθούν και να περιγράψετε τις πιθανές κινήσεις του σώματος.



Το διάνυσμα θέσης του σώματος είναι: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), 0)$

και το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\Omega} = (0, \Omega, 0)$

Η δύναμη Coriolis $\vec{F} = 2m\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} = 2m \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & \Omega & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{cor} = 2m\Omega\,\dot{x}\,\Omega\,\hat{k}}$ (1)

Η φυγοκεντρική δύναμη θα είναι: $\vec{F}_{φυγ} = m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega} = m(\Omega\hat{j} \times (x\hat{i} + y\hat{j})) \times \Omega\hat{j}$

$\Rightarrow \vec{F}_{φυγ} = -mx\Omega\hat{k} \times \Omega\hat{j} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{φυγ} = mx\Omega^2\hat{i}}$ (2)

Η δύναμη Coriolis ασκείται κάθετα στο επίπεδο x-y, αλλά το σωματίδιο είναι περιορισμένο να κινείται στο επίπεδο αυτό. Σαν αποτέλεσμα, η δύναμη Coriolis δεν επηρεάζει την κίνηση του σώματος.

Γράφοντας την εξίσωση κίνησης του σώματος θα έχουμε $m(\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j}) = mx\Omega^2\hat{i} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} m\ddot{x} = mx\Omega^2 \\ m\ddot{y} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x(t) = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t} \\ y(t) = Ct + D \end{array}$$

(αν υπάρχει βαρύτητα προσθέτουμε $-\frac{1}{2}gt^2$)

Από τις παραπάνω δύο εξισώσεις βλέπουμε ότι η περίπτωση της κίνησης στην y-διεύθυνση είναι μια απλή μεταφορική κίνηση.

Για την κίνηση στην x-διεύθυνση εξετάζουμε δύο περιπτώσεις:

(α) $A = 0$ οπότε $x(t) = Be^{-\Omega t}$

καθώς $t \to \infty$, $x(t) \to 0$. Η αρχική ταχύτητα του σώματος είναι:

$\dot{x}(t=0) = -B\Omega\cancel{e^{-\Omega t}}^{1} \Rightarrow \dot{x}(t=0) = -B\Omega$

Δηλαδή παρόλο που η φυγόκεντρος δύναμη τείνει να σπρώξει το σώμα προς τα θετικά x, η αρχική ταχύτητα του σώματος το κινεί προς τον y-άξονα. καθώς το σώμα πλησιάζει τον y-άξονα, η φυγόκεντρος δύναμη γίνεται μικρότερη που επιτρέπει το σώμα να κινηθεί πιο κοντά στον y-άξονα.

(β) $A \neq 0$ οπότε $x(t) = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}$

Στην περίπτωση αυτή το σώμα κινείται προς $x = \pm\infty$ ανάλογα με το πρόσημο του A. Η φυγόκεντρος δύναμη επιτυγχάνει να σπρώξει το σώμα μακριά από τον άξονα.

Αν $A = B$ τότε $x(t) = A\left(e^{\Omega t} + e^{-\Omega t}\right)$ και $\dot{x}(t=0) = A(\Omega - \Omega) = 0$

Το $x(t) \rightarrow \pm\infty$ για $t \rightarrow \infty$. Δηλαδή αν ένα σώμα βρίσκεται σε ηρεμία στον x-άξονα την χρονική στιγμή $t=0$, η φυγόκεντρος δύναμη θα το σπρώξει σε $\pm\infty$

8. Θεωρήστε ένα λείο μικρό δίσκο πάνω σε οριζόντια επιφάνεια, η οποία περιστρέφεται με αντίθετα της φοράς των δεικτών του ρολογιού με γωνιακή ταχύτητα *Ω*.

(α) Γράψτε τν 2^o νόμο του Newton για τις συντεταγμένες *x* και *y* του δίσκου σύμφωνα με παρατηρητή που στέκεται στη περιστρεφόμενη επιφάνεια. Θα πρέπει να συμπεριλάβετε την φυγόκεντρη δύναμη και την δύναμη Coriolis αλλά μπορείτε να αγνοήσετε την περιστροφή της γης.

(β) Λύστε τις δυο εξισώσεις γράφοντας $\eta = x + iy$ και μαντεύοντας ότι η λύση είναι της μορφής $\eta = e^{-iat}$ (οι λύσεις μοιάζουν με αυτές του αρμονικού ταλαντωτή με κριτική απόσβεση). Γράψτε την γενική λύση.

(γ) Την χρονική στιγμή $t = 0$, ωθούμε τον μικρό δίσκο από την θέση με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_0 = (x_0, 0)$ με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0 = (\upsilon_{x_0}, \upsilon_{y_0})$ (όλα μετρούμενα ως προς παρατηρητή που βρίσκεται στην περιστρεφόμενη επιφάνεια). Δείξτε ότι:

$$x(t) = (x_0 + \upsilon_{x_0} t)\cos\Omega t + (\upsilon_{y_0} + \Omega x_0) t \sin\Omega t$$

$$y(t) = -(x_0 + \upsilon_{x_0} t)\sin\Omega t + (\upsilon_{y_0} + \Omega x_0) t \cos\Omega t$$

(δ) Περιγράψτε και σχεδιάστε την συμπεριφορά του δίσκου για μεγάλες τιμές του *t*. [*Υπόδειξη*: Για μεγάλες τιμές του *t*, οι όροι που είναι ανάλογοι του *t* υπερισχύουν (εκτός και αν οι σταθερές αναλογίας είναι μηδέν). Όταν ο χρόνος *t* είναι μεγάλος, γράψτε τις δυο εξισώσεις του ερωτήματος (γ) με την μορφή $x(t) = t(B_1 \cos\Omega t + B_2 \sin\Omega t)$ και με μια ανάλογη έκφραση για *y*(*t*) και προσπαθήστε να ενώσετε τους όρους ημιτόνου και συνημιτόνου σε μια μόνο τριγωνομετρική συνάρτηση ημιτόνου ή συνημιτόνου για το *y*(*t*).

(α) Ο 2ος νόμος του Newton για την περιστρεφόμενη επιφάνεια παίρνει την μορφή:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{φυγ} + \vec{F}_{cor} \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = m(\vec{\Omega}\times\vec{r})\times\vec{\Omega} + 2m\dot{\vec{r}}\times\vec{\Omega}$$

Αλλά $\vec{r} = (x, y, 0)$, $\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$ και $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = m\Omega^2 x\hat{x} + m\Omega^2 y\hat{y} + 2m\Omega\dot{y}\hat{x} - 2m\Omega\dot{x}\hat{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \ddot{x} &= \Omega^2 x + 2\Omega\dot{y} \\ \ddot{y} &= \Omega^2 y - 2\Omega\dot{x} \end{aligned}$$

(β) Χρησιμοποιώντας το trick $\eta = x + iy$ και υποθέτοντας λύση με την μορφή: $\eta = e^{-iat}$

Θα έχουμε: $\ddot{x} + i\ddot{y} = \Omega^2 x + 2\Omega\dot{y} + i\Omega^2 y - 2i\Omega\dot{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\eta} = \Omega^2\eta - 2i\Omega\dot{\eta}}$$

Αν $\eta = e^{-iat} \Rightarrow \dot{\eta} = -ia\eta$ και $\ddot{\eta} = -a^2\eta$

$$\Rightarrow -a^2\eta = \Omega^2\eta - 2a\Omega\eta \Rightarrow -a^2 = \Omega^2 - 2a\Omega \Rightarrow (a-\Omega)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \Omega}$$

Μια μόνο λύση, όπως στην περίπτωση της κριτικής απόσβεσης θα πρέπει να υπάρχει ακόμα μια λύση: $\eta(t) = C_1 e^{-i\Omega t} + C_2 t e^{-i\Omega t}$

(γ) Για να βρούμε τις συνιστώσες της θέσης του δίσκου, ξεκινάμε από την εξίσωση της λύσης και τις αρχικές συνθήκες που μας δίνονται:

$$\eta(0) = x_0 = C_1 \qquad (A)$$

$$\dot{\eta}(0) = V_{x_0} + i V_{y_0} = C_2 - i\Omega C_1 \overset{(A)}{\Rightarrow} C_2 = V_{x_0} + i(V_{y_0} + \Omega x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta(t) = e^{-i\Omega t}\left[x_0 + V_{0x} t + i(V_{y_0} + \Omega x_0)t\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = (x_0 + V_{0x} t)\cos(\Omega t) + (V_{y_0} + \Omega x_0)t\sin(\Omega t)$$

$$y(t) = -(x_0 + V_{0x} t)\sin(\Omega t) + (V_{y_0} + \Omega x_0)t\cos(\Omega t)$$

(δ) Για μεγάλες τιμές του t, η $2^{η}$ λύση είναι ανάλογη του χρόνου και κυριαρχεί ως προς την $1^{η}$ λύση.

Επομένως θα έχουμε: $x(t) \cong t\,(B_1 \cos\Omega t + B_2 \sin\Omega t)$

$$y(t) \simeq t\,(-B_1 \sin\Omega t + B_2 \cos\Omega t)$$

όπου $B_1 = V_{x_0}$ και $B_2 = V_{y_0} + x_0$

Οι εξισώσεις έχουν την μορφή κυκλικής τροχιάς. Η διαφορά είναι ότι η ακτίνα της τροχιάς αυξάνει με την πάροδο του χρόνου. Επομένως η κίνηση που εκτελεί το σώμα είναι σπειροειδής προς τα έξω