

**ΦΥΣ. 211**  
**1<sup>η</sup> ΠΡΟΟΔΟΣ 7-Μάρτη-2015**

Πριν ξεκινήσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, αριθμό ταυτότητας) στο πάνω μέρος της σελίδας αυτής.

Για τις λύσεις των ασκήσεων θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε μόνο τις σελίδες που σας δίνονται. Μην κόψετε καμιά από τις σελίδες που σας δίνονται.

Προσπαθήστε να δείξετε τη σκέψη σας και να γράψετε καθαρές εξισώσεις. Για πλήρη ή μερική βαθμολόγηση θα πρέπει να φαίνεται καθαρά το τι προσπαθείτε να δείξετε.

Σας δίνονται 6 ασκήσεις και πρέπει να απαντήσετε σε όλες. Σύνολο μονάδων 100.

Διαβάστε πρώτα όλες τις ασκήσεις και προσπαθήστε να σκεφτείτε τι περίπου χρειάζεται να κάνετε. Η σειρά των προβλημάτων δεν είναι ενδεικτική της δυσκολία τους.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 180 λεπτά.

**Καλή επιτυχία.**

### Ενεργό δυναμικό

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + U_{\text{cf}}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

### Μετασχηματισμένη ακτινική Δ.Ε. τροχιάς:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u + \frac{\mu}{l^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) = 0, \text{ όπου } u = \frac{1}{r}$$

### Ενέργεια τροχιάς:

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)$$

### Τροχίες Kepler:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{\gamma}{r^2} \text{ λύση ακτινικής εξίσωσης είναι: } r(\theta) = \frac{c}{1 + e \cos \theta}, \text{ με } c = \frac{l^2}{\mu}$$

$$\text{Εκκεντρότητα (e): } E = \frac{\gamma^2 \mu}{2l^2} (e^2 - 1) \text{ όπου } E = \text{Ενέργεια}$$

Εκκεντρότητα	Ενέργεια	Είδος Τροχιάς
$0 < e < 1$	$E < 0$	ελλειπτική
$e = 1$	$E = 0$	παραβολική
$e > 1$	$E > 0$	υπερβολική

$$\text{Περιήλιο: } r_{\min} = \frac{c}{1 + e}$$

$$\text{Αφήλιο: } r_{\max} = \frac{c}{1 - e}$$

$$\text{Μεγάλος ημιάξονας: } a = \frac{c}{1 - e^2}$$

$$\text{Μικρός ημιάξονας: } b = \frac{c}{\sqrt{1 - e^2}}$$

### Νόμοι Kepler:

1<sup>ος</sup> νόμος: τροχίες πλανητών είναι ελλείψεις με τον ήλιο σε μια από τις εστίες της έλλειψης

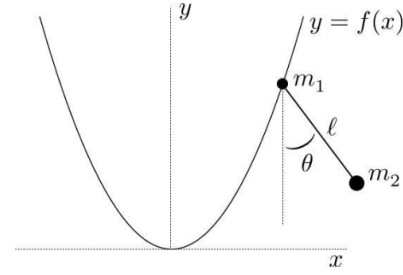
$$2^{\text{ος}} \text{ νόμος: } \frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu}$$

$$3^{\text{ος}} \text{ νόμος: } T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_H} a^3$$

1. Ένα νήμα μήκους  $L$  σχηματίζει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Δείξτε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου είναι μέγιστο όταν αυτό είναι τετράγωνο. [10μ]

2. Ένας κύλινδρος ακτίνας  $a$  και ροπής αδράνειας  $I$ , κυλά χωρίς να ολισθαίνει στο εσωτερικό ενός μεγαλύτερου κυλίνδρου ακτίνας  $R$ , τέτοια ώστε  $R > a$ .
- (α) Βρείτε την Lagrangian και τις εξισώσεις κίνησης. [5μ]
- (β) Βρείτε την συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων. [5μ]

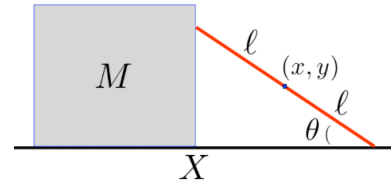
3. Μια σημειακή μάζα  $m_1$  κινείται χωρίς τριβές πάνω στην τυχαίας μορφής καμπύλη  $y = f(x)$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Στην μάζα  $m_1$  είναι στερεωμένο το άκρο μιας ράβδου αμελητέας μάζας και μήκους  $l$ . Στο άλλο άκρο της ράβδου είναι στερεωμένη μια δεύτερη σημειακή μάζα  $m_2$ . Η όλη διάταξη των μαζών κινείται κάτω από την επίδραση της βαρύτητας. Θεωρήστε σαν γενικευμένες συντεταγμένες το σύνολο  $\{x, y, \theta\}$ ,



όπου  $(x, y)$  είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες της μάζας  $m_1$  και  $\theta$  η γωνία όπως φαίνεται στο σχήμα. Θεωρείστε ότι η συνθήκη  $y = f(x)$  αντιπροσωπεύει δεσμό.

- (α) Να βρεθεί η συνάρτηση Lagrange, του συστήματος. [4μ]
- (β) Να βρεθούν οι γενικευμένες ορμές. [5μ]
- (γ) Να βρεθούν οι δυνάμεις  $F_x$ ,  $F_y$  και  $F_\theta$ . [3μ]
- (δ) Να βρεθούν οι δυνάμεις των δεσμών  $Q_x$ ,  $Q_y$ , και  $Q_\theta$ . [2μ]
- (ε) Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης συναρτήσει των  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ , των πρώτων και δεύτερων παραγώγων τους και του πολλαπλασιαστή Lagrange,  $\lambda$ . [5μ]
- (στ) Να βρεθούν οι ποσότητες που διατηρούνται. [1μ]

4. Μια ομοιόμορφη και ομογενής σκάλα μήκους  $2l$ , και μάζας  $m$ , βρίσκεται πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Η ροπή αδράνειας μιας ράβδου μήκους  $L$ , ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας είναι:  $I_{CM} = \frac{1}{12}mL^2$ . Η σκάλα είναι



ακουμπισμένη σε κιβώτιο μάζας  $M$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Χρησιμοποιήστε σαν γενικευμένες συντεταγμένες την οριζόντια θέση  $X$ , της δεξιάς κάτω κορυφής του κιβωτίου, την γωνία  $\theta$ , που σχηματίζει η σκάλα με την οριζόντια επιφάνεια, και τις συντεταγμένες  $(x, y)$  του κέντρου μάζας της σκάλας. Οι συντεταγμένες αυτές δεν είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά συνδέονται με κάποιες εξισώσεις δεσμών.

- (α) Να γραφεί η συνάρτηση Lagrange του συστήματος. [3μ]
- (β) Να γραφούν οι εξισώσεις των δεσμών του συστήματος. [3μ]
- (γ) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης. [3μ]
- (δ) Να γραφεί η συνθήκη για την οποία η σκάλα χάνει επαφή με το κιβώτιο. [1μ]
- (ε) Να βρεθεί μια εξίσωση για την γωνία στην οποία η ράβδος χάνει επαφή. [10μ]

5. Δεδομένης της στροφορμής  $L$  ενός σώματος που κινείται σε πεδίο κεντρικής δύναμης, να βρείτε την συναρτησιακή μορφή της δυναμικής ενέργειας  $V(r)$ , αν το σώμα εκτελεί σπιροειδή τροχιά της μορφής  $r = r_0 \theta^k$ . Θεωρήστε ότι  $E = 0$ . [20μ]

6. Ένα διαστημόπλοιο κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από ένα πλανήτη. Ξαφνικά πυροδοτεί τις ρουκέτες του και αυξάνει την ταχύτητά του κατά ένα παράγοντα  $f$ . Αν ο στόχος της πυροδότησης ήταν να αλλάξει την τροχιά του από κυκλική σε παραβολική,
- (α) Πόσο πρέπει να είναι η  $f$  αν η προώθηση που δέχθηκε ήταν στην εφαπτομενική διεύθυνση; [8μ]
  - (β) Υπάρχει διαφορά αν η προώθηση ήταν στην ακτινική ή μια οποιαδήποτε άλλη διεύθυνση; [5μ]
  - (γ) Ποια είναι η απόσταση της μικρότερης προσέγγισης για την παραβολική τροχιά αν η προώθηση είναι στην ακτινική διεύθυνση. [7μ]