ΦΥΣ 331 – Χειμερινό Εξάμηνο 2022

Ενδιάμεση Εξέταση

Τρίτη 25/10/2022 **Διάρκεια: 09:00 – 11:00**

Σας δίνονται 10 ισοδύναμες ασκήσεις και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλες. Σύνολο μονάδων 100.

Καλή Επιτυχία

1. [**10μ**]

Αποδείξτε ότι οι τελεστές του φορτίου, Q, και της συζυγίας φορτίου, C, δεν μετατίθενται. Για την ακρίβεια δείξτε ότι $[C,Q] = 2CQ$. *Υπόδειξη*: Θεωρήστε το αποτέλεσμα της ενέργειας των δύο αυτών τελεστών σε μία κατάσταση $|q\rangle$.

Η ενέργεια της συζυγίας φορτίου σε μια κατάσταση $|q\rangle$ θα αλλάξει το πρόσημο των προσθετικών κβαντικών αριθμών: $C|q\rangle = |-q\rangle$ (1)

Όταν ο τελεστής του φορτίου Q δράσει στην κατάσταση $|q\rangle$ θα δώσει:

$$Q|q\rangle = q|q\rangle \quad (2)$$

Επομένως θεωρούμε την δράση των δύο τελεστών Q και C στην κατάσταση $|q\rangle$

$$\left.\begin{aligned} CQ|q\rangle &= qC|q\rangle = q|-q\rangle \\ QC|q\rangle &= Q|-q\rangle = -q|-q\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow (CQ-QC)|q\rangle = 2q|-q\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (CQ-QC)|q\rangle = 2CQ|q\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{[C,Q] = 2CQ}$$

2. [10μ]

Ένα αντι-πρωτόνιο με κινητική ενέργεια 1 *GeV* χτυπά ένα πρωτόνιο σε ηρεμία στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Το πρωτόνιο και το αντι-πρωτόνιο έχουν ίδια μάζα και ίση με 938MeV/c^2. Τα δύο σωματίδια εξαϋλώνονται και δύο φωτόνια παράγονται κατά την διεργασία αυτή. Ένα από το φωτόνια κινείται στην διεύθυνση του προσπίπτοντος αντι-πρωτονίου ενώ το άλλο πρωτόνιο στην αντίθετη κατεύθυνση.

(α) Ποια είναι η ενέργεια του κάθε φωτονίου;

(β) Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας του αντι-πρωτονίου, τι ενέργεια έχει το κάθε φωτόνιο;

(α) Έχουμε ένα φωτόνιο να κινείται στην διεύθυνση της αρχικής δέσμης των πρωτονίων και ένα αντίθετα.

Από διατήρηση της ενέργειας θα έχουμε: $E_{\bar{p}} + E_p = E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{(1000 + 2\cdot 938)\,MeV = E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2}} \qquad (A)$$

Η ορμή των αντιπρωτονίων θα είναι: $\boxed{P_{\bar{p}} = (E_{\gamma_1} - E_{\gamma_2})}$ (B)

Αλλά $E_{\bar{p}}^2 = m_{\bar{p}}^2 + P_{\bar{p}}^2 \Rightarrow P_{\bar{p}}^2 = E_{\bar{p}}^2 - m_{\bar{p}}^2 \Rightarrow P_{\bar{p}}^2 = 1938^2 - 938^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{P_{\bar{p}} = 1695.9\,MeV} \qquad (1)$$

Από τις (A) κ (B) έχουμε:
$$\left.\begin{aligned} E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2} &= 2876\ MeV \\ E_{\gamma_1} - E_{\gamma_2} &= 1695.9\ MeV \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} E_{\gamma_1} &= 2286\,MeV \\ E_{\gamma_2} &= 590\,MeV \end{aligned}$$

(β) $E_{\bar{p}} = 1 + 0.938 \Rightarrow E_{\bar{p}} = 1938\,MeV$

Αλλά $E_{\bar{p}} = \gamma m_{\bar{p}} \Rightarrow \gamma = \dfrac{E_{\bar{p}}}{m_{\bar{p}}} = \dfrac{1938}{938} \Rightarrow \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{1938}{938} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1-\beta^2 = \left(\frac{938}{1938}\right)^2 \Rightarrow \beta^2 = 1 - \left(\frac{938}{1938}\right)^2 \Rightarrow \frac{v_{\bar{p}}^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{938}{1938}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_p}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{938}{1938}\right)^2} \Rightarrow \boxed{v_p = 0.875c}$$

Η ενέργεια των φωτονίων σε αυτό το σύστημα αναφοράς θα είναι:

$$E'_{\gamma_1} = \gamma\left(E_{\gamma_1} - v p_{\gamma_1}\right) = \gamma\left(E_{\gamma_1} - \frac{v}{c}E_{\gamma_1}\right) \Rightarrow E'_{\gamma_1} = \gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right)E_{\gamma_1} = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}E_{\gamma_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E'_{\gamma_1} = \frac{1-\beta}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}}E_{\gamma_1} = \sqrt{\frac{(1-\beta)^{\cancel{2}}}{\cancel{(1-\beta)}(1+\beta)}}E_{\gamma_1} \Rightarrow E'_{\gamma_1} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}E_{\gamma_1} = \sqrt{\frac{1-0.875}{1+0.875}}E_{\gamma_1} = 590\,\text{MeV}$$

$$E'_{\gamma_2} = \gamma\left(E_{\gamma_2} - v P_{\gamma_2}\right) = \gamma\left(E_{\gamma_2} + \frac{v}{c}E_{\gamma_2}\right) \Rightarrow E'_{\gamma_2} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}E_{\gamma_2} \Rightarrow E'_{\gamma_2} = 2286\,\text{MeV}$$

Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας του αντιπρωτονίου οι ενέργειες εναλλάσσονται

3. [**10μ**]

Βρείτε το λόγο των ενεργών διατομών για τις ακόλουθες διεργασίες όταν η ενέργεια του κέντρου μάζας είναι 1232 MeV:

(α) $\pi^- + p \rightarrow K^0 \Sigma^0$

(β) $\pi^- + p \rightarrow K^+ \Sigma^-$

(γ) $\pi^+ + p \rightarrow K^+ \Sigma^+$

Δίνεται ότι το isospin του K^0 είναι (1/2, -1/2) του K^+ είναι (1/2,1/2) του Σ^0είναι (1,0) και του Σ^+ είναι (1,1).

(α) $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Sigma^0$

Για την αρχική κατάσταση έχουμε:

$$|\psi\rangle_L = |1,-1\rangle \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

Για την τελική κατάσταση έχουμε:

$$|\psi\rangle_R = \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle |1,0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

Επομένως από τις δύο καταστάσεις μπορούμε να υπολογίσουμε το πλάτος της διεργασίας:

$$_L\langle\psi^*|M|\psi\rangle_R = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right) \Big| M \Big| \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle M \left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}\left\langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right|M\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}} M_{3/2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}} M_{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(M_{3/2} - M_{1/2}\right) = A_a$$

(β) Για την διεργασία $\pi^- + p \rightarrow K^+ \Sigma^-$

Για την αρχική κατάσταση έχουμε τα ίδια με το (α)

$$|\psi\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

Για την τελική κατάσταση:

$$|\psi\rangle_R = \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle |1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

Επομένως το πλάτος μετάβασης:

$$ {}_L\langle \psi^* | M | \psi \rangle_R = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \langle \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2} | - \sqrt{\tfrac{2}{3}} \langle \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} | \right) | M | \left(\frac{1}{\sqrt{3}} | \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2} \rangle - \sqrt{\tfrac{2}{3}} | \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} \rangle \right) $$

$$ = \frac{1}{3} M_{3/2} + \frac{2}{3} M_{1/2} = \frac{1}{3} \left(M_{3/2} + 2 M_{1/2} \right) = A_b $$

(γ) Για την τρίτη διεργασία έχουμε: $\pi^+ + p \to K^+ + \Sigma^+$

$$ |\psi\rangle_L = |1,1\rangle |\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle = |\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle $$

$$ |\psi_f\rangle_R = |\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle |1,1\rangle = |\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle $$

Επομένως το πλάτος της μετάβασης θα είναι: ${}_L\langle \psi^* | M | \psi \rangle_R = M_{3/2} = A_\gamma$

Για τον υπολογισμό των ενεργών διατομών θα έχουμε:

$$ \frac{\sigma_a}{\sigma_\gamma} = \left| \frac{A_a}{A_\gamma} \right|^2 = \frac{2}{9} \left| \frac{M_{3/2} - M_{1/2}}{M_{3/2}} \right|^2 $$

$$ \frac{\sigma_B}{\sigma_\gamma} = \left| \frac{A_b}{A_\gamma} \right|^2 = \frac{1}{9} \left| \frac{M_{3/2} + 2M_{1/2}}{M_{3/2}} \right|^2 $$

Στα 1232 MeV το π και το p δημιουργούν μια δέσμια κατάσταση συντονισμού, Δ, και για το σωματίδιο αυτό ξέρουμε ότι $I = 3/2$ οπότε $M_{3/2} >> M_{1/2}$

Επομένως $\dfrac{\sigma_a}{\sigma_\gamma} \simeq \dfrac{2}{9}$ και $\dfrac{\sigma_b}{\sigma_\gamma} \simeq \dfrac{1}{9}$

4. [**10μ**]

Θεωρήστε τις ακόλουθες διεργασίες:

(α) $n \rightarrow p + \pi^-$ (β) $n \rightarrow p + \gamma$ (γ) $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$

(δ) $\Lambda^0 \rightarrow K^+ + K^-$ (ε) $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$

Για κάθε περίπτωση, αναφέρετε δίνοντας την ερμηνεία σας:

(i) επιτρεπτή ή μη επιτρεπτή διεργασία

(ii) αιτιολογία για μη επιτρεπτή διεργασία

(iii) είδος της αλληλεπίδρασης αν είναι επιτρεπτή.

(α) $n \rightarrow p + \pi^-$: απαγορευμένη γιατί παραβιάζει διατήρηση ενέργειας

(β) $n \rightarrow p + \gamma$: απαγορευμένη γιατί παραβιάζει διατήρηση φορτίου

(γ) $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$: Επιτρέπεται. Μέσω ασθενών αλληλεπιδράσεων.
Πρέπει να είναι ασθενής η διεργασία επειδή εμφανίζεται $e^- \bar{\nu}_e$ επομένως παραγωγή ενός W για να ικανοποιήσει την αλλαγή της γεύσης του quark στη διεργασία

(δ) $\Lambda^0 \rightarrow K^+ + K^-$: Απαγορευμένη γιατί παραβιάζεται ο βαρυονικός αριθμός

(ε) $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$: Απαγορευμένη γιατί παραβιάζεται η διατήρηση της ενέργειας.

5. **[10μ]**

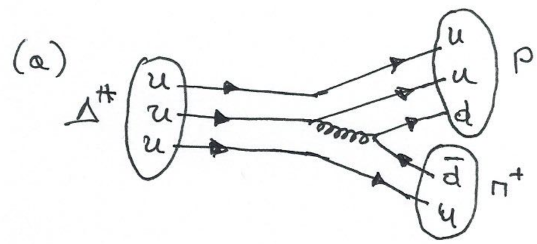
Σχεδιάστε τα διαγράμματα Feynman για τις παρακάτω διεργασίες ονοματίζοντας καθαρά κάθε σωματίδιο που συμμετέχει. Για κάθε περίπτωση πρέπει να γράψετε ποια είναι η θεμελιώδης δύναμη που προκαλεί την αλληλεπίδραση.

(α) $\Delta^{++} \to p + \pi^{+}$ (β) $e^{+} + e^{-} \to \mu^{-} + \mu^{+}$ (γ) $B^{+} \to D^{0} + \mu^{+} + \nu_{\mu}$

(δ) $\omega^{0} \to \pi^{+} + \pi^{-} + \pi^{0}$ (ε) $B^{0} \to K^{+} + \pi^{-}$

Δίνεται το περιεχόμενο σε quarks για τα διάφορα σωματίδια: $\Delta^{++} = (uuu)$, $p = (uud)$, $\omega^{0} = \frac{u\bar{u}+d\bar{d}}{\sqrt{2}}$, $\pi^{+} = (u\bar{d})$, $\pi^{-} = (d\bar{u})$, $\pi^{-} = (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$, $B^{+} = (u\bar{b})$, $D^{0} = (c\bar{u})$.

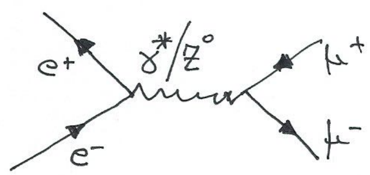
(α)



$\Delta^{++} \to p + \pi^{+}$

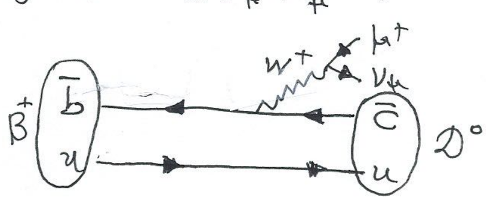
Ισχυρή αλληλεπίδραση

(β) $e^{+} + e^{-} \to \mu^{+} + \mu^{-}$

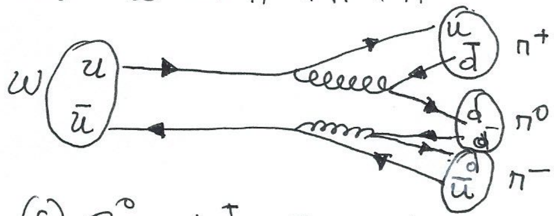


Ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση

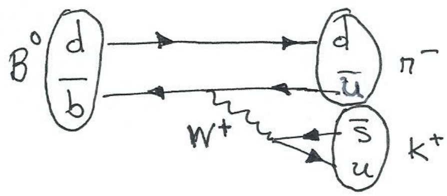
(γ) $B^{+} \to D^{0} + \mu^{+} + \nu_{\mu}$: Ασθενής αλληλεπίδραση



(δ) $\omega^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$



(ε) $B^0 \rightarrow K^+ + \pi^-$: Ασθενής αλληλεπίδραση



6. **[10μ]**

Ο επιταχυντής SuperKEKB σχεδιάζεται ώστε να έρχονται σε μετωπική σκέδαση ηλεκτρόνια ενέργειας 7 TeV και ποζιτρόνια ενέργειας 4 TeV. Υπολογίστε την ενέργεια του κέντρου μάζας αυτού του συστήματος καθώς επίσης και την Lorentz προώθηση $\beta\gamma$ στην περίπτωση που το μεσόνιο $\Upsilon(4s)$ με μάζα 10.578 GeV είναι το σωματίδιο που παράγεται στην σκέδαση.

Έχουμε ότι $E^{*2} = (E_A + E_B)^2 - (\vec{p}_A + \vec{p}_B)^2$ η ενέργεια του κέντρου μάζας.

οπότε:

$$\left.\begin{aligned} E^{*2} &= E_A^2 + E_B^2 + 2E_AE_B - |\vec{p}_A|^2 - |\vec{p}_B|^2 - 2\vec{p}_A\cdot\vec{p}_B \\ E_A^2 - |\vec{p}_A|^2 &= m_A^2 \\ E_B^2 - |p_B|^2 &= m_B^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$E^{*2} = m_A^2 + m_B^2 + 2E_AE_B - 2\vec{p}_A\cdot\vec{p}_B$$

Αν αγνοήσουμε τις μάζες θα έχουμε: $E^{*2} = 2E_AE_B - 2(\vec{p}_A)\cdot(-\vec{p}_B)$

$$\left.\begin{aligned} |\vec{p}_A|^2 &= E_A^2 - m_A^2 \\ |\vec{p}_B|^2 &= E_B^2 - m_B^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} |\vec{p}_A| &\simeq E_A \\ |\vec{p}_B| &\simeq E_B \end{aligned}$$ γιατί B κινείται στην αντίθετη κατεύθυνση $\Rightarrow$

$$\Rightarrow E^{*2} = 2E_AE_B + 2E_AE_B \Rightarrow E^{*2} = 4E_AE_B \Rightarrow E^* = \sqrt{4E_AE_B} = 2\sqrt{7\times4}\,GeV$$

$$\Rightarrow \boxed{E^* = 10.58\,GeV}$$

Ο παράγοντας Lorentz, βγ, μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση: $\beta\gamma = \frac{p}{m} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \beta\gamma = \frac{3\,GeV}{10.578} \Rightarrow \boxed{\beta\gamma = 0.28.}$$

Όπου έχει αγνοηθεί η μάζα του ηλεκτρονίου/ποζιτρονίου και υποθέσαμε ότι $E \approx p$

Η ορμή προκύπτει από διατήρηση της ορμής; και επομένως η ορμή του κέντρου μάζας θα είναι: $\vec{P}^* = \vec{P}_{e^-} + \vec{P}_{e^+} \cong E_{e^-} - E_{e^+} \Rightarrow |\vec{p}^*| = 7\,GeV - 4\,GeV = 3\,GeV$

7. **[10 μ]**

Ένα πιόνιο εγκλωβίζεται από έναν πυρήνα δευτερίου σε P τροχιά, στην διεργασία:

$$\pi^- + d \rightarrow n + n$$

Δείξτε ότι τα δύο ουδέτερα νετρόνια πρέπει να βρίσκονται σε μονήρη κατάσταση (singlet). Δίνονται ότι το pion είναι $J^P = 0^-$, το νετρόνιο είναι $\frac{1}{2}^+$, ενώ το δευτέριο d είναι 1^+.

Η parity της αρχικής κατάστασης είναι:

$$P(\pi^- + d) = P_i = P(\pi^-)P(d)(-1)^l = (-1)(+1)(-1)^1 = +1$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι $l=1$ αφού το πιόνιο εγκλωβίζεται σε P- τροχιά, οπότε $l=1$.

Αν η διεργασία πραγματοποιείται μέσω ισχυρών αλληλεπιδράσεων, τότε η parity στην τελική κατάσταση θα πρέπει να διατηρείται και να είναι $+1$.
Αν η ενδογενής parity του νετρονίου είναι $+1$, τότε η parity της τελικής κατάστασης των δύο νετρονίων, nn, θα είναι:

$$P(nn) = P_f = (+1)(+1)(-1)^l = (-1)^l = +1$$

όπου l η τροχιακή στροφορμή του συστήματος των δύο νετρονίων. Για να διατηρείται η parity, θα πρέπει $l = 0, 2, 4 \ldots$

Ωστόσο, η ολική κυματοσυνάρτηση της τελικής κατάστασης, η οποία αποτελείται από δύο πανομοιότυπα φερμιόνια, θα πρέπει να είναι αντισυμμετρική κάτω από εναλλαγή των δύο φερμιονίων. Για να διατηρείται η parity, η στροφορμή είναι άρτια, που δηλώνει ότι η κυματοσυνάρτηση είναι συμμετρική κάτω από εναλλαγή. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει η κυματοσυνάρτηση του spin να είναι αντισυμμετρική κάτω από εναλλαγή. Επομένως θα πρέπει τα δύο νετρόνια να είναι σε μονήρη spin κατάσταση.

8. [**10μ**]

Το σωματίδιο $N^*(1440)$ με $J^P = \frac{1}{2}^+$ και $I = \frac{1}{2}$ διασπάται σε $N^* \rightarrow N + \pi$, όπου $N = p, n$.

Προσδιορίστε:

(α) Αν η διάσπαση συμβαίνει μέσω ισχυρών αλληλεπιδράσεων δίνοντας πλήρη εξήγηση. [**4μ**]

(β) Την γωνιακή στροφορμή της τελικής κατάστασης. [**6μ**]

(α) Για να εξετάσουμε αν η διάσπαση προχωράει μέσω ισχυρών αλληλεπιδράσεων μπορούμε να υπολογίσουμε το isospin της τελικής κατάστασης.
Το νουκλεόνιο, (πρωτόνιο ή νετρόνιο) έχει isospin $1/2$ ενώ το πιόνιο έχει isospin 1. Θα πρέπει επομένως να συνδυάσουμε isospin $1 \oplus 1/2$ και η πρόσθεση αυτή δίνει δύο δυνατότητες: $\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{2}$.
Η τελική κατάσταση μπορεί επομένως να βρεθεί στην ίδια τιμή isospin με την αρχική κατάσταση και επομένως η διεργασία προχωρά μέσω ισχυρών αλληλεπιδράσεων.

(β). Για να βρούμε την στροφορμή, θα πρέπει να θεωρήσουμε διατήρηση στροφορμής.
Η αρχική κατάσταση έχει ολική στροφορμή $J = 1/2$.
Η τελική κατάσταση αποτελείται από ένα νουκλεόνιο και ένα πιόνιο.
Το πιόνιο έχει spin 0 ενώ το p ή n έχει spin $1/2$. Ο συνδυασμός των spins των δύο σωματιδίων δίνει $S_{ολ} = 1/2$. Επομένως $J_{ολ} = 1/2$ αν η τροχιακή στροφορμή των δύο σωματιδίων της τελικής κατάστασης είναι είτε $L = 0$ ή $L = 1$.
Μπορούμε να διαχωρίσουμε τις δύο καταστάσεις εξετάζοντας την parity, η οποία θα πρέπει να διατηρείται από ισχυρές αλληλεπιδράσεις. Η parity της τελικής κατάστασης είναι: $P_f = (-1)^L P_N P_\pi = (-1)^L (+1)(-1) = -(-1)^L = P_i = +1$.
Επομένως $L = 1$ για να διατηρείται η parity.

9. [**10μ**]

Διεξάγεται ένα πείραμα για να διερευνηθεί κατά πόσο η διάσπαση $p + p \rightarrow Y + K^{+} + K^{-}$ μπορεί να παρατηρηθεί. Δίνεται ότι η μάζα του καονίου είναι 0.494GeV.

(α) Προσδιορίστε τις τιμές του ηλεκτρικού φορτίου, παραδοξότητας και βαρυονικού αριθμού του σωματιδίου Y που παράγεται. Προσδιορίστε τον αριθμό των quarks σθένους που μπορεί να έχει το Y. [**3μ**]

(β) Ένας θεωρητικός προσδιορισμός της μάζας του σωματιδίου Y οδηγεί στην πρόβλεψη ότι η αναλλοιώτη μάζα του σωματιδίου Y είναι 2150 MeV. Υπολογίστε την ελάχιστη ενέργεια που μπορεί να έχουν τα πρωτόνια της δέσμης ώστε να παραχθεί το συγκεκριμένο σωματίδιο. Θεωρήστε ότι τα πρωτόνια του στόχου είναι ακίνητα. [**4μ**]

(γ) Υποθέστε ότι η πρόβλεψη της μάζας είναι σωστή. Εξηγήστε τους πιθανούς τρόπους διάσπασης του σωματιδίου θεωρώντας τόσο διεργασίες μέσω ισχυρών και ασθενών αλληλεπιδράσεων. [**3μ**]

(α) Το περιεχόμενο σε quarks του K^{+} μεσονίου είναι: $(\bar{s}u)$. Επομένως το K^{+} έχει $S = 1$, $B = 0$.

Το Y-σωματίδιο που παράγεται μαζί με τα K^{+} αναμένεται να έχει $S = -2$ ώστε να διατηρείται η παραδοξότητα ενώ επίσης θα πρέπει να έχει βαρυονικό αριθμό $B = 2$ ώστε να έχουμε διατήρηση βαρυονικού αριθμού μεταξύ αρχικής και τελικής κατάστασης.

Για να ικανοποιούνται τα δύο αυτά απαιτούμενα, θα πρέπει το Y-σωματίδιο να αποτελείται από τουλάχιστον 6 quarks (uudd ss)

Έτσι θα έχει και ηλεκτρικό φορτίο $Q = 0$ ώστε να έχουμε διατήρηση φορτίου

(β) Για ελάχιστη ενέργεια προσπίπτοντος σωματιδίου δέσμης, θα πρέπει τα προϊόντα της σκέδασης να παράγονται σε ηρεμία, στο κέντρο μάζας.

Επομένως: $E_{CM}^{2} = m_{CM}^{2} = E^{2} - |\vec{p}|^{2} = \left(\underset{\rightarrow}{P}_{p_1} + \underset{\rightarrow}{P}_{p_2}\right)^{2} = \left(\underset{\rightarrow}{P}_{K_1^+} + \underset{\rightarrow}{P}_{K_2^+} + \underset{\rightarrow}{P}_{Y}\right)^{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow P_{p_1}^2 + P_{p_2}^2 + 2P_{p_1}\cdot P_{p_2} = P_{K_1^+}^2 + P_{K_2^+}^2 + P_Y^2 + 2\left(P_{K_1^+}\cdot P_{K_2^+} + P_{K_1^+}\cdot P_Y + P_{K_2^+}\cdot P_Y\right)$$

$P_{p_1} = (E_0, \vec{p}_{p_1})$ για δέσμη $\quad P_{K_1^+} = (m_{K^+}, 0) \quad P_Y = (m_Y, 0)$

$P_{p_2} = (m_p, 0)$ στόχος $\quad P_{K_2^+} = (m_{K^+}, 0)$

$$\Rightarrow m_p^2 + m_p^2 + 2E_0 m_p = m_{K^+}^2 + m_{K^+}^2 + m_Y^2 + 2m_{K^+}^2 + 4m_Y m_{K^+}$$

$$\Rightarrow 2m_p^2 + 2E_0 m_p = 4m_{K^+}^2 + m_Y^2 + 4m_{K^+}m_Y \Rightarrow E_0 = \frac{(m_Y + 2m_{K^+})^2 - 2m_p^2}{2m_p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{(2.15 + 2\cdot 0.494)^2\,\mathrm{GeV}^2 - 2\cdot 0.938^2\,\mathrm{GeV}^2}{2\cdot 0.938\,\mathrm{GeV}} \Rightarrow \boxed{E_0 = 4.311\,\mathrm{GeV}}$$

Βρήκαμε ότι η ελάχιστη ενέργεια της προσπίπτουσας δέσμης είναι:

$E_0 = 4.311$ GeV.

Επομένως η ελάχιστη ορμή της δέσμης θα είναι: $E_0^2 = m_p^2 + |\vec{P}_p|^2 \Rightarrow$

$$|\vec{P}| = \sqrt{E_0^2 - m_p^2} = \sqrt{(4.311^2 - 0.938^2)\,\mathrm{GeV}^2} \Rightarrow |\vec{P}_p| = 4.208\,\mathrm{GeV}$$

(γ) Για τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις $\Delta S = 0$ και $\Delta B = 0$,
Επομένως τα μόνα επιτρεπτά κανάλια διάσπασης θα είναι:

$Y \to \Lambda^0\Lambda^0,\ \Lambda^0\Sigma^0,\ \Xi^- p$ και $\Xi^0 n$.

Ωστόσο όλα αυτά τα κανάλια διάσπασης παραβιάζουν διατήρηση της ενέργειας γιατί οι μάζες των τελικών προϊόντων είναι μεγαλύτερες του αρχικού Y.

Αν θεωρήσουμε διασπάσεις μέσω ασθενών αλληλεπιδράσεων, τότε θα έχουμε δυνατότητα μέσω λεπτονικών και μη λεπτονικών διασπάσεων:

μη λεπτονικές: $Y \to \Lambda^0 + n,\ \Sigma^0 + n,\ \Sigma^- + p$

λεπτονικές διασπάσεις: $Y \to \Lambda^0 + p + e^- + \bar{\nu}_e,\ \Sigma^0 + p + e^- + \bar{\nu}_e$

10. [10μ]

Δείξτε ότι η διάσπαση $\omega \rightarrow \pi^{+}\pi^{-}\pi^{0}$ διατηρεί το isospin ενώ η διάσπαση $\omega \rightarrow \pi^{0}\pi^{0}\pi^{0}$ δεν το διατηρεί.

Το ω-βαρυόνιο είναι μονήρης κατάσταση του isospin της μορφής: $|00\rangle$

όπως φαίνεται από τους πίνακες που δόθηκαν.

Η κατάσταση του isospin για την περίπτωση της διάσπασης σε 3-σωματίδια προκύπτει συνδυάζοντας τα 2 σωματίδια και προσθέτοντας στους συνδυασμούς αυτούς το τρίτο σωματίδιο.

Για τα δυο πιόνια θα έχουμε: (διαβάζουμε από τους πίνακες CG το συνδυασμό 1×1)

$$|\pi^{+}\pi^{-}\rangle = |11\rangle_{I}\,|1\,-1\rangle_{I} = \frac{1}{\sqrt{6}}|20\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle$$

Στην πιο πάνω κατάσταση προσθέτουμε το π^{0} που είναι isospin κατάσταση $|10\rangle$

$$|\pi^{+}\pi^{-}\pi^{0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|20\rangle|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle|10\rangle \qquad (A)$$

Εξετάζουμε από τους πίνακες CG τις περιπτώσεις 2×1 με m_1 & m_2 0 0 καθώς και τον πίνακα 1×1 με m_1 & m_2 0, 0. Έχουμε:

$$|20\rangle|10\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}|30\rangle + 0|20\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}|10\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}|30\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}|10\rangle.$$

$$|10\rangle|10\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|20\rangle + 0|10\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|00\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|20\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|00\rangle$$

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες δυό σχέσεις με την (A) θα έχουμε:

$$|\pi^{+}\pi^{-}\pi^{0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}|30\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}|10\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}|20\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|00\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}|10\rangle \Rightarrow$$

$$|\pi^{+}\pi^{-}\pi^{0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}|30\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|20\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{5}}\right)|10\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|00\rangle$$

Μας ενδιαφέρει η μετάβαση $\omega \rightarrow \pi^{+}\pi^{-}\pi^{0}$ οπότε θα πρέπει να υπολογίσουμε $\langle \pi^{+}\pi^{-}\pi^{0}|\omega\rangle$. Το γινόμενο αυτό θα είναι μηδέν για όλες τις καταστάσεις εκτός από αυτή που περιέχει $\langle 00|00\rangle = -\sqrt{\frac{1}{6}}$.

Από τη στιγμή που υπάρχει όρος που δεν είναι μηδέν, η διεργασία επιτρέπεται

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση της διάσπασης σε τρία πιόνια $\omega \to \pi^0\pi^0\pi^0$

$|\pi^0\pi^0\rangle = |10\rangle|10\rangle$ Από τους πίνακες CG έχουμε για την περίπτωση 1×1

$$|\pi^0\pi^0\rangle = |10\rangle|10\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|20\rangle + 0|10\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|00\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|20\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|00\rangle$$

Προσθέτουμε το τρίτο π^0 στον παραπάνω συνδυασμό :

$$|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|20\rangle|10\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|00\rangle|10\rangle$$ χρησιμοποιώντας το πίνακα CG για 2×1 έχουμε :

$$|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}|30\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}|10\rangle\right) - \sqrt{\frac{1}{3}}|10\rangle \Rightarrow$$

$$|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}|30\rangle - \left(\frac{\sqrt{4}+\sqrt{5}}{\sqrt{15}}\right)|10\rangle = A|30\rangle + B|10\rangle.$$

Θα πρέπει να πάρουμε και πάλι το γινόμενο $\langle\pi^0\pi^0\pi^0|\omega\rangle = \left(A\langle 30| + B\langle 10|\right)|00\rangle$

Το γινόμενο αυτό δεν έχει όρους διάφορους του μηδενός εφόσον η $|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle$ κατάσταση, δεν περιέχει όρο $|00\rangle$. Επομένως η διεργασία $\omega \to \pi^0\pi^0\pi^0$ δεν επιτρέπεται.