Νόμος του Gauss

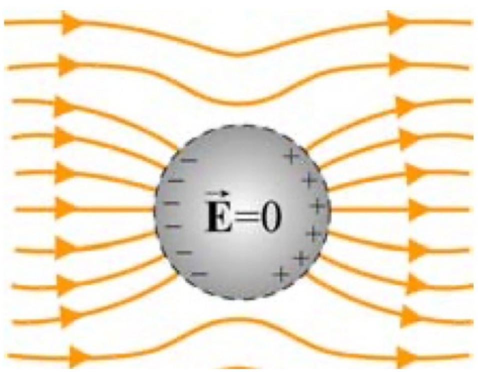
Αγωγοί

Υπάρχουν υλικά στα οποία τα φορτία (ηλεκτρόνια) προσαρτώνται σε συγκεκριμένα άτομα της δομής τους και δεν μπορούν να κινηθούν ελεύθερα αλλά χρειάζεται να δαπανηθεί έργο. Τέτοια υλικά όπως το πλαστικό, το γυαλί ή το χαρτί είναι μονωτές.

Υπάρχουν υλικά στα οποία τα ηλεκτρόνια μπορούν να κινηθούν ελεύθερα και τα υλικά αυτά αποτελούν τους λεγόμενους αγωγούς.

- Τα βασικά χαρακτηριστικά των αγωγών είναι τα ακόλουθα:
  - Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό ενός αγωγού είναι μηδέν: $\vec{E} = \vec{0}$

Αν μια αγώγιμη σφαίρα εισαχθεί σε ένα εξωτερικό σταθερό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_0$, τότε φορτία θα επαχθούν στην επιφάνεια του αγωγού, όπως στο σχήμα.



Τα φορτία αυτά δημιουργούν ένα ηλεκτρικό πεδίο, $\vec{E}'$

Στο εσωτερικό του αγωγού το πεδίο αυτό, $\vec{E}'$, έχει αντίθετη φορά από αυτή του εξωτερικού πεδίου $\vec{E}_0$

Τα φορτία συνεχίζουν να κινούνται έτσι ώστε το εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο ακυρώσει το εξωτερικό πεδίο. Στην κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας:

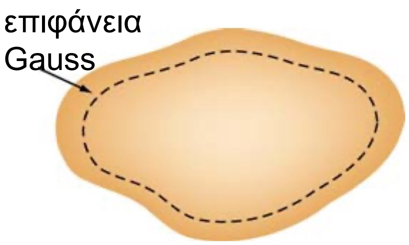
$$\overrightarrow{E'} = -\vec{E}_0 \Rightarrow \vec{E}_0 + \vec{E}' = \vec{E} = \vec{0}$$

Στο εξωτερικό του αγωγού, το επαγόμενο πεδίο είναι αυτό ενός διπόλου και το συνολικό πεδίο θα είναι: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$

Αγωγοί – χαρακτηριστικά

- Αν ο αγωγός είναι φορτισμένος, τότε το φορτίο είναι κατανεμημένο στην επιφάνεια

  Αν ο αγωγός είχε φορτίο εσωτερικά, τότε το φορτίο αυτό θα έπρεπε σύμφωνα με τον νόμο του Gauss να είναι μηδέν ώστε $\vec{E} = \vec{0}$ στο εσωτερικό του.



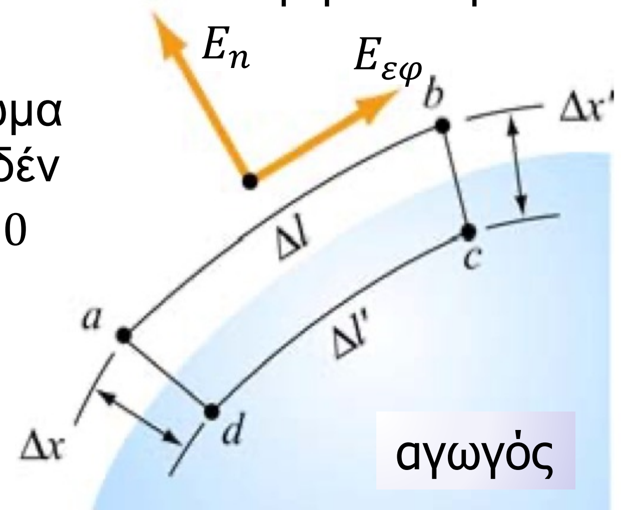
- Στην επιφάνεια του αγωγού, η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου είναι μηδέν, $\vec{E}_{\varepsilon\varphi.} = \vec{0}$.

  Για απομονωμένο αγωγό, το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του είναι μηδέν. Κάθε επιπλέον φορτίο εισάγεται στον αγωγό, θα πρέπει να κατανεμηθεί στην επιφάνειά του.

  Θεωρούμε μια κλειστή διαδρομή $abcda$. Το ολοκλήρωμα του πεδίου κατά μήκος της διαδρομής αυτής είναι μηδέν γιατί το ηλεκτρικό πεδίο είναι συντηρητικό: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$

$$\oint_{abcda} \vec{E}\cdot d\vec{s} = E_n \Delta x + E_{\varepsilon\varphi}\Delta l - E_n \Delta x' + 0\Delta l' = 0$$

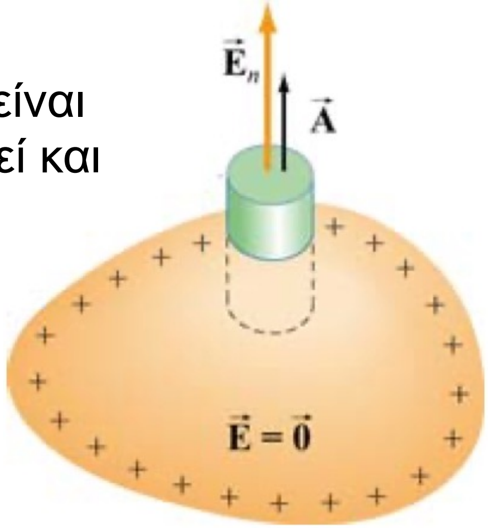
  Όταν $\Delta x, \Delta x' \to 0$ τότε $E_{\varepsilon\varphi}\Delta l = 0$ οπότε $E_{\varepsilon\varphi} = 0$.



  Η επιφάνεια αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία είναι ισοδυναμική επιφάνεια: $V_b - V_a = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_a^b \left(\overset{0}{\cancel{\vec{E}_{\varepsilon\varphi}}} + \overset{\perp d\vec{s}}{\cancel{\vec{E}_n}}\right)\cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow V_A = V_B$

Αγωγοί – χαρακτηριστικά

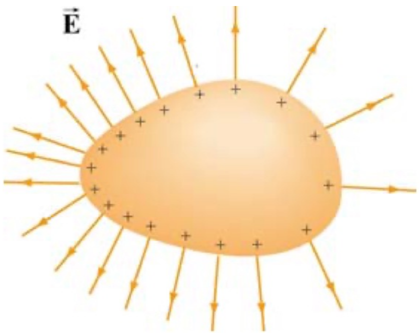
- Το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού, ακριβώς έξω από τον αγωγό.
  - Αν η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου δεν είναι μηδέν, τότε θα υπάρξει κίνηση φορτίων έως ότου μηδενιστεί και η μόνη συνιστώσα που θα παραμείνει είναι η κάθετη.



  - Για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο ακριβώς έξω από τον αγωγό, θεωρούμε την επιφάνεια Gauss του κυλίνδρου όπως στο σχήμα. Από τον νόμο του Gauss θα έχουμε:

$$\Phi_E = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E_n A + (0)A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

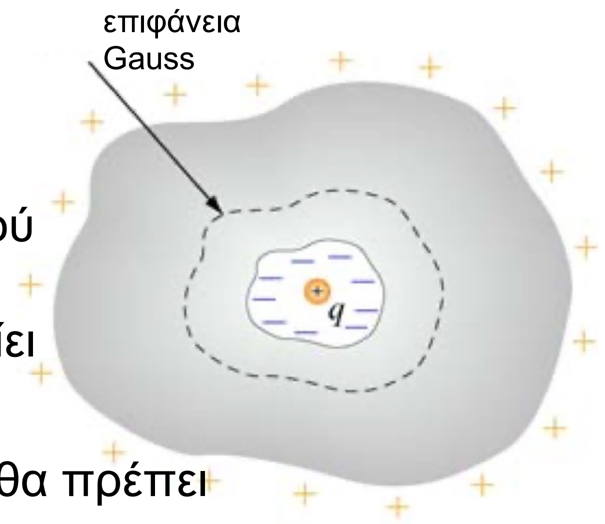
  - Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για αγωγό οποιουδήποτε σχήματος. Οι διευθύνσεις των γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου κοντά στην επιφάνεια του αγωγού είναι όπως στο διπλανό σχήμα.



  - Όπως και στις περιπτώσεις φορτισμένης επιφάνειας απείρων διαστάσεων ή ενός φορτισμένου σφαιρικού φλοιού, έτσι και στην περίπτωση του αγωγού, υπάρχει ασυνέχεια στο ηλεκτρικό πεδίο καθώς διαπερνάτε η επιφάνεια του αγωγού. $\Delta E = E_n^+ - E_n^- = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} - 0 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

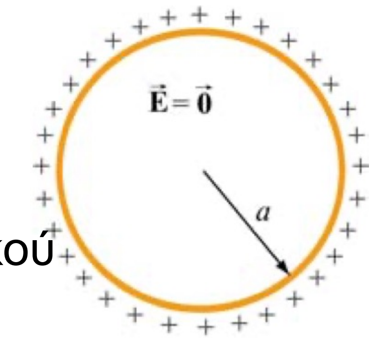
1ο Παράδειγμα: φορτισμένος αγωγός σε κοιλότητα

Θεωρούμε ένα κοίλο αγωγό ο οποίος έχει φορτίο +*Q*. Στην κοιλότητα του αγωγού υπάρχει φορτίο +*q*. Να βρεθεί το φορτίο στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού



- Από τη στιγμή που το πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού πρέπει να είναι μηδέν, τότε αν θεωρήσουμε μια επιφάνεια Gauss, το συνολικό φορτίο που θα περικλείει θα πρέπει να είναι μηδέν.
- Επομένως στην εσωτερική επιφάνεια της κοιλότητας θα πρέπει να έχει επαχθεί φορτίο -*q*.
- Ο αγωγός έχει φορτίο +*Q* και επομένως στην εξωτερική του επιφάνεια το συνολικό φορτίο θα πρέπει να είναι *Q* + *q*.

2ο Παράδειγμα: ηλεκτρικό δυναμικό εξαιτίας σφαιρικού φλοιού



Θεωρούμε ένα μεταλλικό σφαιρικό φλοιό ακτίνας α και φορτίου +Q.
(α) Ποιο το ηλεκτρικό δυναμικό
(β) Ποια η δυναμική ενέργεια του συστήματος

- **(α)** Εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss για την περίπτωση σφαιρικού φλοιού (διάλεξη 7), βρήκαμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι:

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & r > a \\ \vec{0} & r < a \end{cases}$$

- Υπολογίζουμε το ηλεκτρικό δυναμικό από την σχέση: $V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$
  - Για $r > a$, θα έχουμε:

$$V(r) - V(\infty) = -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} dr' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = k_e \frac{Q}{r}$$ όπου θεωρούμε ότι $V(\infty) = 0$

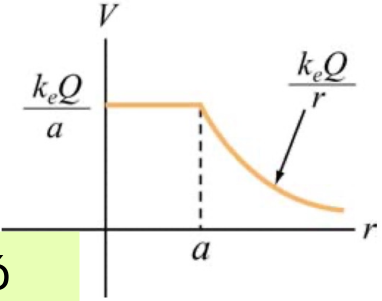
  - Για $r < a$, θα έχουμε:

$$V(r) - V(\infty) = -\int_\infty^a drE(r > a) - \int_a^r dr\cancelto{0}{E(r < a)} = -\int_\infty^a dr \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$\Rightarrow V(r) = k_e \frac{Q}{a}$$

2ο Παράδειγμα: ηλεκτρικό δυναμικό εξαιτίας σφαιρικού φλοιού

- Η μορφή του ηλεκτρικού δυναμικού συναρτήσει της απόστασης από το κέντρο του σφαιρικού φλοιού είναι όπως στο διπλανό σχήμα



  - Στο εσωτερικό του σφαιρικού φλοιού το δυναμικό είναι σταθερό

- **(β)** Η δυναμική ενέργεια *U* μπορεί να θεωρηθεί ως το έργο που πρέπει να καταναλωθεί για να δημιουργηθεί το σύστημα. Για να φορτιστεί ο σφαιρικός φλοιός θα πρέπει ένας εξωτερικός παράγοντας να μεταφέρει το φορτίο από το άπειρο και να το τοποθετήσει στην επιφάνεια του σφαιρικού αγωγού.

  - Έστω ότι το φορτίο το οποίο συγκεντρώθηκε στον σφαιρικό φλοιό σε κάποια χρονική στιγμή είναι *q*.

  Την στιγμή αυτή το δυναμικό στην επιφάνεια της σφαίρας θα είναι: $V(r) = k_e \dfrac{q}{a}$

  Το έργο που πρέπει να καταναλωθεί από έναν εξωτερικό παράγοντα για να μεταφέρει στοιχειώδες φορτίο *dq* από το άπειρο στη σφαίρα θα είναι:

$$dW_{\varepsilon\xi.} = V dq = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} dq$$

  Άρα το ολικό έργο που απαιτείται ώστε να φορτιστεί η σφαίρα με φορτίο Q είναι:

$$W = \int_0^Q dW_{\varepsilon\xi.} = \int_0^Q \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} dq \Rightarrow W_{\varepsilon\xi.} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

2ο Παράδειγμα: ηλεκτρικό δυναμικό εξαιτίας σφαιρικού φλοιού

Βρήκαμε ότι το έργο που απαιτείται για την φόρτιση του σφαιρικού φλοιού με φορτίο *Q* είναι:

$$W_{\varepsilon\xi.} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

Αλλά το δυναμικό είναι: $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$

ενώ: $W_{\varepsilon\xi.} = U$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2}QV}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να συγκριθεί με αυτό για την περίπτωση σημειακού φορτίου.

Το έργο που απαιτείται για να φέρουμε ένα σημειακό φορτίο +Q από το άπειρο σε ένα σημείο του χώρου με δυναμικό *V* που δημιουργείται από άλλα υπάρχοντα φορτία θα είναι:

$$W_{\varepsilon\xi.} = QV$$

Άρα για ένα σημειακό φορτίο Q, η δυναμική ενέργεια είναι: $\boxed{U = QV}$

3ο Παράδειγμα: δύο φορτισμένες σφαίρες σε επαφή

Υποθέστε τώρα ότι υπάρχουν δύο φορτισμένες μεταλλικές σφαίρες ακτίνας r_1 και r_2. Οι δύο σφαίρες συνδέονται με λεπτό αγώγιμο σύρμα.

Φορτίο θα συνεχίσει να ρέει από την μία σφαίρα στην άλλη έως ότου επέλθει ηλεκτροστατική ισορροπία και οι δύο σφαίρες να έχουν το ίδιο δυναμικό $V_1 = V_2 = V$

Υποθέτουμε ότι στην κατάσταση ισορροπίας, το φορτίο στις σφαίρες είναι q_1 και q_2 αντίστοιχα.

Αγνοώντας το σύρμα, η συνθήκη ισοδυναμικών επιφανειών στην κατάσταση ισορροπίας οδηγεί (υποθέτοντας ότι η πυκνότητα φορτίου σε κάθε σφαίρα δεν επηρεάζεται από την παρουσία της άλλης σφαίρας)

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = V_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{\sigma_1 \pi r_1^2}{\sigma_2 \pi r_2^2} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να γραφεί ως:

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{\sigma_1 \pi r_1^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} \text{ και } E_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = \frac{\sigma_2 r_2^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} \text{ οπότε: } \frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

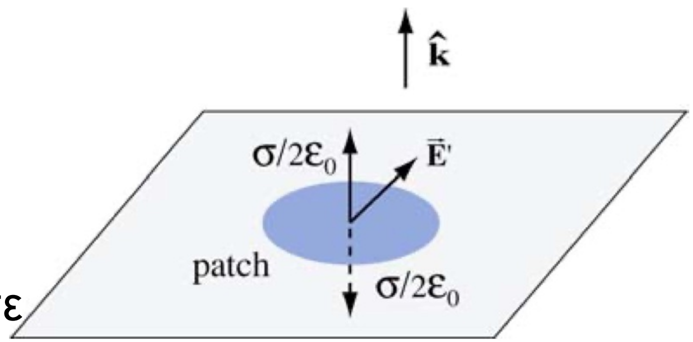
$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας και το ηλεκτρικό πεδίο είναι μεγαλύτερο σε επιφάνειες μικρής καμπυλότητας.
Αιχμηρές επιφάνειες δημιουργούν πολύ μεγάλα ηλεκτρικά πεδία.

Δύναμη που αναπτύσσεται σε αγωγό

Για έναν αγωγό με ομογενή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου, η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνειά του αγωγού πρέπει να είναι μηδέν και επομένως συνεχής ενώ η κάθετη συνιστώσα παρουσιάζει ασυνέχεια ίση με σ/ε_0

Θεωρούμε έναν μικρό τμήμα φορτίου σε μια αγώγιμη επιφάνεια. Θέλουμε να βρούμε πόση είναι η δύναμη που αναπτύσσεται στο τμήμα αυτό του φορτίου;



Για να απαντήσουμε στο ζητούμενο θα πρέπει να υπολογίσουμε το πεδίο που αναπτύσσεται οπουδήποτε έξω από την επιφάνεια.

Έστω ότι το πεδίο αυτό είναι: $\vec{E} = \vec{E}_{\varphi o \rho.} + \overrightarrow{E'}$

$\overrightarrow{E'}$ το πεδίο από όλα τα άλλα φορτία και $\vec{E}_{\varphi o \rho \tau.}$ το πεδίο από το μικρό τμήμα της επιφάνειας.

Εξαιτίας του 3ου νόμου του Newton το φορτίο δεν ασκεί δύναμη στο ίδιο και άρα δέχεται δύναμη μόνο από το $\overrightarrow{E'}$

Υποθέτουμε ότι το τμήμα φορτίου είναι μια επίπεδη επιφάνεια. Από τον νόμο του Gauss, το ηλεκτρικό πεδίο εξαιτίας του φορτίου της μικρής επιφάνειας είναι:

$$\vec{E}_{\varphi o \rho.} = \begin{cases} +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & z > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & z < 0 \end{cases}$$

Δύναμη που αναπτύσσεται σε αγωγό

Από την αρχή της επαλληλίας, το ηλεκτρικό πεδίο πάνω από το τμήμα φορτίου είναι

$$\vec{E}_{πάνω} = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} + \overrightarrow{E'} \qquad z > 0$$

και με παρόμοιο τρόπο για το ηλεκτρικό πεδίο κάτω από τον αγωγό:

$$\vec{E}_{κάτω} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} + \overrightarrow{E'} \qquad z < 0$$

Το ηλεκτρικό πεδίο $\overrightarrow{E'}$ είναι συνεχές διαπερνώντας την επιφάνεια. Αυτό γιατί αν φανταστούμε ότι απομακρύνουμε το τμήμα του φορτίου, τότε το ηλεκτρικό πεδίο στην εναπομένουσα «τρύπα» δεν παρουσιάζει ασυνέχεια.

Προσθέτουμε τις δύο προηγούμενες εξισώσεις και λύνουμε ως προς $\overrightarrow{E'}$:

$$\overrightarrow{E'} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}_{πάνω} + \vec{E}_{κάτω}\right) = \vec{E}_{avg}.$$

Για την περίπτωση αγωγού: $\vec{E}_{πάνω} = +\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{k}$ και $\vec{E}_{κάτω} = 0\hat{k}$ οπότε: $\vec{E}_{avg} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$

Σαν αποτέλεσμα, η δύναμη που ενεργεί πάνω στο τμήμα του φορτίου είναι:

$$\vec{F} = q\vec{E}_{avg} = (\sigma A)\,\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{k} = \frac{\sigma^2 A}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$ όπου *A* το εμβαδό του τμήματος φορτίου

Δύναμη που αναπτύσσεται σε αγωγό

$$\vec{F} = q\vec{E}_{avg} = (\sigma A)\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ \hat{k} = \frac{\sigma^2 A}{2\varepsilon_0}\hat{k}$$

Αυτή είναι η δύναμη που χρειάζεται για να έρθουν τα φορτία ενός αγωγού σε κατάσταση ισορροπίας όπου το ηλεκτρικό πεδίο στο εξωτερικό του αγωγού παίρνει την τιμή σ/ε_0 και μηδενίζεται στο εσωτερικό του.

Θεωρώντας την δύναμη και την επιφάνεια του τμήματος του φορτίου, μπορούμε να ορίσουμε την ηλεκτροστατική πίεση στο τμήμα του φορτίου ως:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2$$

όπου E είναι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου ακριβώς πάνω από το τμήμα φορτίου

Η πίεση διαδίδεται μέσω του ηλεκτρικού πεδίου.

3ο Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

Έτοιμοι