Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

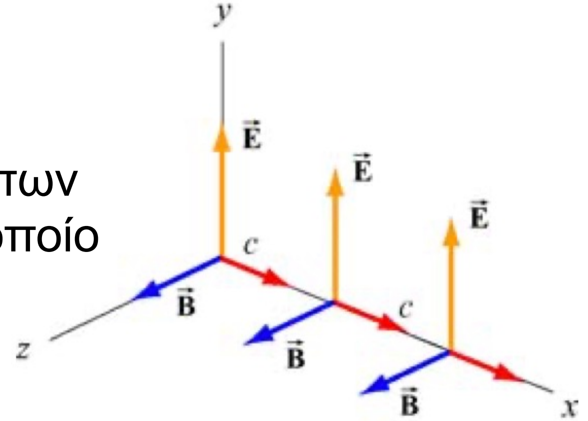
Ηλεκτρομαγνητικά κύματα – Επίπεδα κύματα

Απόρροια των νόμων του Maxwell είναι η πρόβλεψη για την ύπαρξη ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$.

Ο λόγος είναι ότι επειδή η μεταβολή ηλεκτρικού πεδίου επάγει μαγνητικό πεδίο και η μεταβολή μαγνητικού πεδίου επάγει ηλεκτρικό πεδίο και λόγω της σύζευξης μεταξύ των δύο πεδίων δημιουργούνται ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

Η πρόβλεψη αυτή επιβεβαιώθηκε από τον Hertz το 1887.

Για να εξετάσουμε τις ιδιότητες των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων θεωρούμε για απλούστευση ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα το οποίο διαδίδεται στη +*x*-διεύθυνση με το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ στη +*y*-διεύθυνση και το μαγνητικό πεδίο στη *z*-διεύθυνση



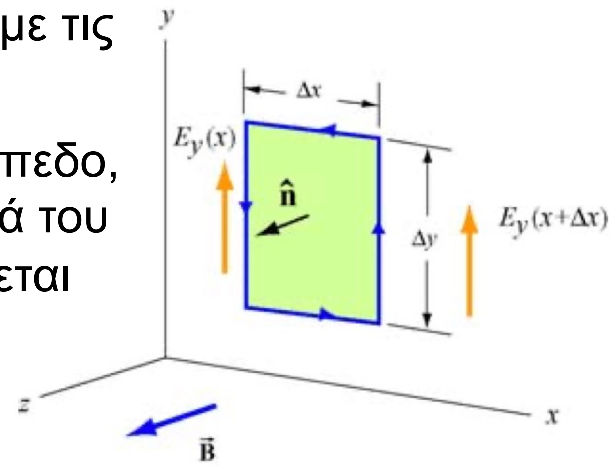
Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο κύμα επειδή σε κάθε χρονική στιγμή, τόσο το $\vec{E}$ όσο και το $\vec{B}$ είναι ομοιόμορφα ως προς οποιοδήποτε επίπεδο κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης.

Επιπλέον, το κύμα είναι εγκάρσιο επειδή και τα δύο πεδία είναι κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης η οποία συμπίπτει με τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{E}\times\vec{B}$

Επίπεδα Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Maxwell μπορούμε να βρούμε τις σχέσεις μεταξύ των μέτρων των πεδίων.

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο πλαίσιο που βρίσκεται στο *xy* επίπεδο, με την αριστερή πλευρά του πλαισίου στη θέση *x* και τη δεξιά του πλευρά στη θέση *x+Δx*. Η κάτω πλευρά του πλαισίου βρίσκεται στη θέση *y* και η πάνω πλευρά στη θέση *y+Δy*.



Θεωρούμε το διάνυσμα της επιφάνειας του πλαισίου, $\hat{n}$, το οποίο βρίσκεται στη +*z*-διεύθυνση, $\hat{n} = \hat{k}$.

Χρησιμοποιώντας το νόμο του Faraday, έχουμε: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint \vec{B} \cdot d\vec{A}$ (1)

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης μπορεί να γραφεί ως:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_y(x+\Delta x)\Delta y - E_y(x)\Delta y = \left[E_y(x+\Delta x) - E_y(x)\right]\Delta y = \frac{\partial E_y}{\partial x}(\Delta x \Delta y) \qquad (2)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το ανάπτυγμα: $E_y(x+\Delta x) \approx E_y(x) + \frac{\partial E_y}{\partial x}\Delta x + \cdots$

Ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ροής στο δεξί μέλος της εξ. 1 δίνεται από:

$$-\frac{d}{dt}\iint \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)(\Delta x \Delta y) \qquad (3)$$

Επίπεδα Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Έχουμε επομένως: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\iint \vec{B}\cdot d\vec{A}$ (1)

και: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\partial E_y}{\partial x}(\Delta x \Delta y)$ (2)

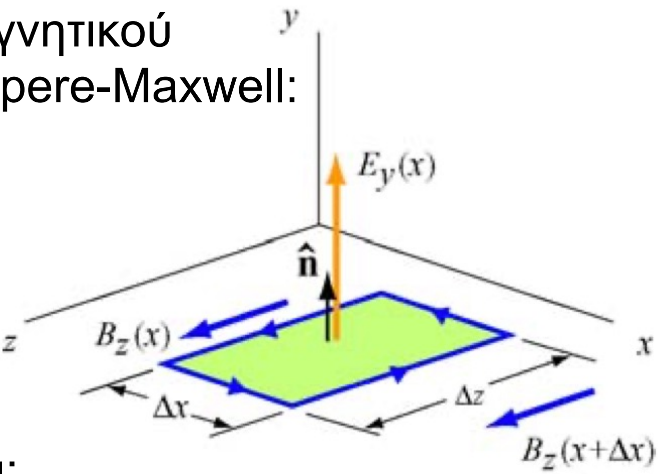
και: $-\frac{d}{dt}\iint \vec{B}\cdot d\vec{A} = -\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)(\Delta x \Delta y)$ (3)

Από (2) και (3) εξισώνοντας και διαιρώντας με το εμβαδό του πλαισίου (ΔxΔy)

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}(\Delta x \Delta y) = -\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)(\Delta x \Delta y) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)} \quad \text{(A)}$$

Η 2η συνθήκη για τη σχέση μεταξύ του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου μπορεί να εξαχθεί χρησιμοποιώντας τον νόμο Ampere-Maxwell:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\iint \vec{E}\cdot d\vec{A}$$



Θεωρούμε ένα ορθογώνιο πλαίσιο στο *xz*-επίπεδο με το διάνυσμα της επιφάνειας $\hat{n} = \hat{j}$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του μαγνητικού πεδίου δίνει:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = B_z(x)\Delta z - B_z(x+\Delta x)\Delta z = [B_z(x) - B_z(x+\Delta x)]\Delta z \approx -\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\Delta x \Delta z \quad (4)$$

Επίπεδα Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Το δεύτερο σκέλος της εξίσωσης του νόμου Ampere-Maxwell δίνει:

$$\mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\iint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \mu_0\varepsilon_0\left(\frac{\partial E_y}{\partial t}\right)(\Delta x\Delta z) \qquad (5)$$

Εξισώνοντας τις (4) και (5) και διαιρώντας με το εμβαδό του πλαισίου (*ΔxΔz*), έχουμε:

$$-\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\Delta x\Delta z = \mu_0\varepsilon_0\left(\frac{\partial E_y}{\partial t}\right)(\Delta x\Delta z) \Rightarrow \boxed{-\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = \mu_0\varepsilon_0\left(\frac{\partial E_y}{\partial t}\right)} \qquad (\mathrm{B})$$

Το αποτέλεσμα δείχνει ότι ένα χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται από ένα χωρικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (Α) κα (Β) θα δείξουμε ότι τόσο το ηλεκτρικό όσο και το μαγνητικό πεδίο ικανοποιούν την εξίσωση του 1-Δ κύματος

Παίρνουμε αρχικά τη μερική παράγωγο ως προς *x* της εξίσωσης (Α) και μια ακόμα μερική παράγωγο της (Β) ως προς *t*:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}} \qquad (\Gamma)$$

Προσοχή στην αλλαγή της σειράς εφαρμογής των μερικών παραγώγων:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)$$

Επίπεδα Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Με τον ίδιο τρόπο, παίρνουμε μια ακόμα μερική παράγωγο της (Β) ως προς το *x* και κατόπιν ακόμη μια παράγωγο της (Α) ως προς τον χρόνο *t*:

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial B_z}{\partial t}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}} \quad (\Delta)$$

Μπορούμε να συνοψίσουμε τα αποτελέσματα (Γ) και (Δ) με τη μορφή:

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{Bmatrix} E_y(x,t) \\ B_z(x,t)\end{Bmatrix} = 0}$$

Η γενική μορφή του 1-Δ κύματος δίνεται από την εξίσωση: $\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(x,t) = 0}$

όπου υ είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος και $\psi(x,t)$ η συνάρτηση κύματος.

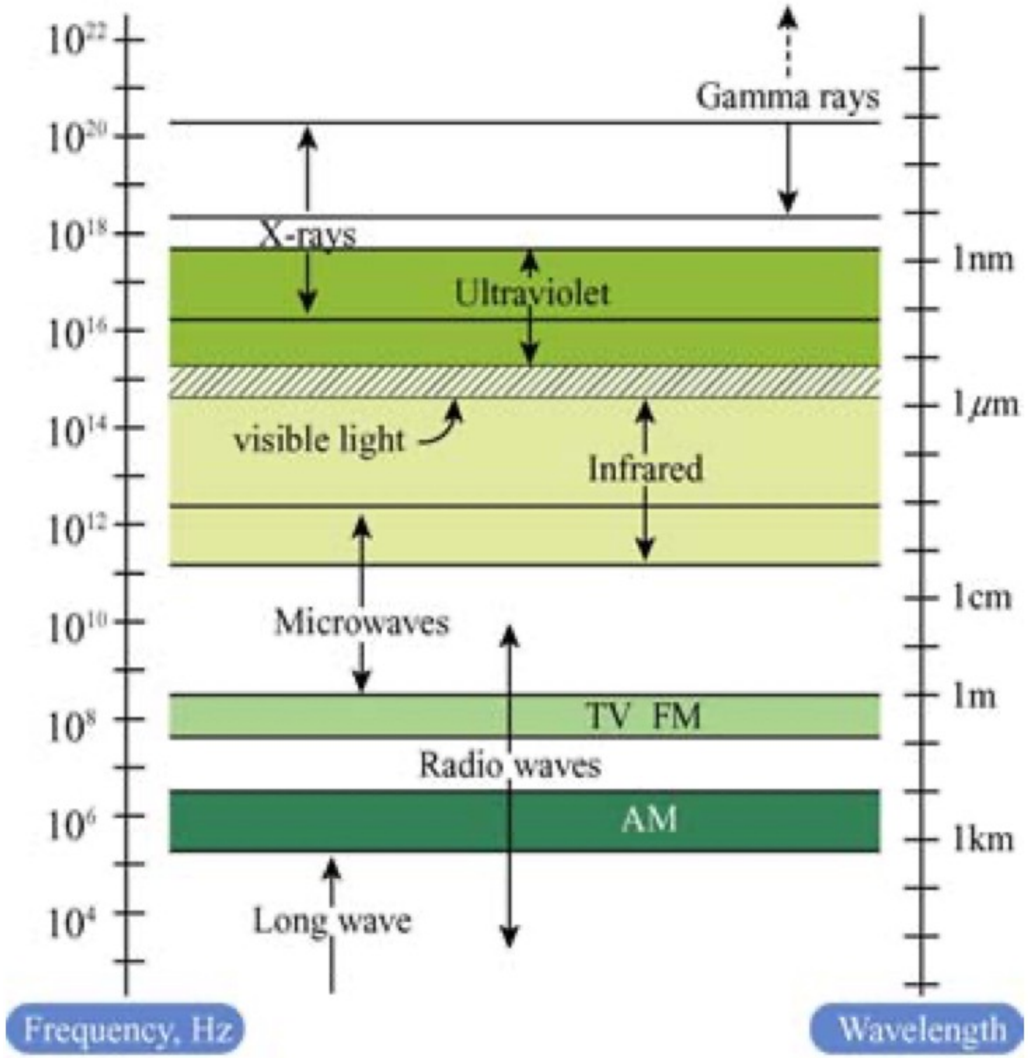
Συγκρίνοντας τις δύο εξισώσεις, βλέπουμε ότι τόσο το E_y όσο και το B_z ικανοποιούν την εξίσωση κύματος και διαδίδονται με ταχύτητα:

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{(4\pi\times10^{-7}T\ \cdot m/A)(8.85\times10^{-12}C^2/N\cdot m^2)}} = 2.997\times10^8 m/s$$

Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το φως είναι ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Το φάσμα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Το φάσμα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Μονοδιάστατη εξίσωση κύματος

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι οποιαδήποτε συνάρτηση της μορφής $\psi(x,t)$ ικανοποιεί την 1-D εξίσωση κύματος

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(x,t) = 0}$$

Έστω $x' = x \pm \upsilon t$ επομένως: $\frac{\partial}{\partial x}(x') = 1$ και $\frac{\partial}{\partial t}(\pm \upsilon t) = \pm \upsilon$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, οι πρώτες δύο μερικές παράγωγοι ως προς *x* δίνουν:

$$\frac{\partial \psi(x')}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x'} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi(x')}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x'}\right) = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x'}\right)\frac{\partial x'}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi(x')}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2}$$

Παρόμοια, οι μερικοί παράγωγοι ως προς χρόνο θα δώσουν:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} = \pm \upsilon \frac{\partial \psi}{\partial x'} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \pm \upsilon \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial x'} = \pm \upsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2}$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις έχουμε: $\frac{\partial^2 \psi(x')}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$

που αποδεικνύει ότι η $\psi(x \pm \upsilon t)$ ικανοποιεί την 1-Δ εξίσωση κύματος.

Η 1-D εξίσωση κύματος είναι ένα παράδειγμα γραμμικής διαφορικής εξίσωσης που σημαίνει ότι αν $\psi_1(x,t)$ και $\psi_2(x,t)$ είναι λύσεις τότε και ο γραμμικός τους συνδυασμός θα είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης. Σαν αποτέλεσμα, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ακολουθούν την εξίσωση της υπέρθεσης

Μονοδιάστατη εξίσωση κύματος

Μια δυνατή λύση της εξίσωσης κύματος μπορεί να είναι:

$$\vec{E} = E_y(x,t)\hat{\jmath} = E_0\cos[k(x-\upsilon t)]\hat{\jmath} = E_0\cos(kx-\omega t)\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{B} = B_z(x,t)\hat{k} = B_0\cos[k(x-\upsilon t)]\hat{k} = B_0\cos(kx-\omega t)\,\hat{k}$$

όπου τα πεδία είναι ημιτονοειδή με πλάτη E_0 και B_0.

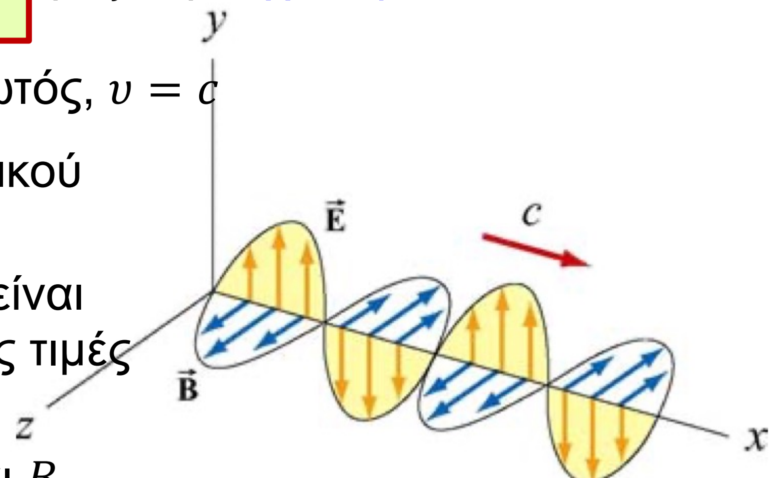
Ο γωνιακός κυματάριθμος k σχετίζεται με το μήκος κύματος λ: $\boxed{k = 2\pi/\lambda}$

Η γωνιακή συχνότητα ω είναι $\boxed{\omega = k\upsilon = \frac{2\pi\upsilon}{\lambda} = 2\pi f}$ με f τη συχνότητα

Στο κενό, το κύμα διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός, $\upsilon = c$

Η συμπεριφορά ενός ημιτονοειδούς ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι όπως στο σχήμα.

Παρατηρούμε ότι το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο είναι πάντοτε σε φάση (λαμβάνουν μέγιστες και ελάχιστες τιμές ταυτόχρονα)



Για να βρούμε τις σχέσεις μεταξύ των πλατών E_0 και B_0

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} E_0\cos(kx-\omega t) &= -E_0 k\sin(kx-\omega t) \\ \frac{\partial}{\partial t} B_0\cos(kx-\omega t) &= B_0\omega\sin(kx-\omega t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_0 k = \omega B_0 \Rightarrow \boxed{\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = c}$$

που ισχύει για τυχαία t, $E/B = c$

Μονοδιάστατη εξίσωση κύματος

Τα σημαντικά χαρακτηριστικά των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι τα ακόλουθα:

- Το κύμα είναι εγκάρσιο εφόσον τόσο το $\vec{E}$ όσο και το $\vec{B}$ είναι κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος, που δείχνει στη διεύθυνση του εξωτερικού γινομένου $\vec{E}\times\vec{B}$
- Τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους και επομένως $\vec{E}\cdot\vec{B}=0$
- Ο λόγος των πλατών και των μέτρων των πεδίων είναι: $\dfrac{E_0}{B_0}=\dfrac{E}{B}=c$
- Η ταχύτητα διάδοσης στο κενό ισούται με την ταχύτητα του φωτός: $c=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$
- Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα υπακούν την αρχή της υπέρθεσης

Στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου δύο ημιτονοειδή κύματα, ένα διαδιδόμενο στη +x-διεύθυνση, με:

$$E_{1y}(x,t) = E_{10}\cos(k_1 x - \omega_1 t) \quad \text{και} \quad B_{1z}(x,t) = B_{10}\cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

και το άλλο να κινείται στη –*x*-διεύθυνση με:

$$E_{2y}(x,t) = -E_{20}\cos(k_2 x + \omega_2 t) \text{ και } B_{2z}(x,t) = B_{20}\cos(k_2 x + \omega_2 t)$$

Για απλούστευση, υποθέτουμε ότι τα δύο αυτά ηλεκτρομαγνητικά κύματα έχουν το ίδιο πλάτος ($E_{10} = E_{20} = E_0$, και $B_{10} = B_{20} = B_0$) και κυματάριθμους ($k_1 = k_2 = k$ και $\omega_1 = \omega_2 = \omega$).

Χρησιμοποιώντας την αρχή της υπέρθεσης, το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο γράφονται:

$$E_y(x,t) = E_{1y}(x,t) + E_{2y}(x,t) = E_0[cos(kx - \omega t) - cos(kx + \omega t)]$$

$$B_z(x,t) = B_{1z}(x,t) + B_{2z}(x,t) = B_0[cos(kx - \omega t) + cos(kx + \omega t)]$$

Από τις τριγωνομετρικές ταυτότητες: $[cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)\,]$

$$E_y(x,t) = E_0[cos(kx)\cos(\omega t) + \sin(kx)\sin(\omega t) - cos(kx)\cos(\omega t) + \sin(kx)\sin(\omega t)]$$

$$\Rightarrow E_y\,(x,t) = 2E_0[\sin(kx)\sin(\omega t)]$$

$$B_z(x,t) = B_0[cos(kx)\cos(\omega t) + \sin(kx)\sin(\omega t) + cos(kx)\cos(\omega t) - \sin(kx)\sin(\omega t)]$$

$$\Rightarrow B_z\,(x,t) = 2E_0[\cos(kx)\cos(\omega t)]$$

Στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Μπορούμε να δείξουμε ότι τα πεδία υπέρθεσης $E_y(x,t)$ και $B_z(x,t)$ ικανοποιούν την κυματική εξίσωση παρόλο που δεν είναι της μορφής $kx \pm \omega t$

Τα κύματα που περιγράφονται από τις εξισώσεις: $E_y(x,t) = 2E_0[\sin(kx)\sin(\omega t)]$

και $B_z(x,t) = 2E_0[\cos(kx)\cos(\omega t)]$ είναι στάσιμα κύματα,

τα οποία δεν διαδίδονται αλλά απλά ταλαντώνονται στο χώρο και χρόνο

Εξετάζουμε αρχικά την χωρική εξάρτηση των πεδίων.

Από την εξίσωση: $E_y(x,t) = 2E_0[\sin(kx)\sin(\omega t)]$ βλέπουμε ότι $E_y(x,t) = 0$ για όλες τις περιπτώσεις αν $\sin(kx) = 0$ ή εάν: $kx = n\pi \Rightarrow x = \dfrac{n\pi}{k} = \dfrac{n\pi}{2\pi/\lambda} \Rightarrow x = \dfrac{n\lambda}{2}, n = 0,1,2,\ldots$

Τα επίπεδα που περιέχουν αυτά τα σημεία ονομάζονται επίπεδα δεσμών του ηλεκτρικού πεδίου.

Αν το $\sin(kx) = \pm 1$ τότε: $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2\pi/\lambda} = \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\lambda$, με $n = 0,1,2,\ldots$.

Το πλάτος του πεδίου είναι στο μέγιστο $2E_0$. Τα επίπεδα που περιέχουν αυτά τα σημεία ονομάζονται επίπεδα αντι-δεσμών. Πρέπει να σημειωθεί ότι μεταξύ δύο επιπέδων δεσμών υπάρχει ένα επίπεδο αντιδεσμού και το ανάποδο.

Στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Για το μαγνητικό πεδίο, τα επίπεδα των δεσμών περιέχουν σημεία που ικανοποιούν τη συνθήκη $coskx = 0$. Αυτή η απαίτηση οδηγεί:

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k} = \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\lambda \quad \text{όπου } n = 0,1,2 \ldots \text{ (επίπεδα δεσμών)}$$

Με παρόμοιο τρόπο, τα επίπεδα των αντι-δεσμών περιέχουν σημεία που ικανοποιούν τη συνθήκη $coskx = \pm 1$. Αυτή η απαίτηση οδηγεί:

$$x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{n\pi}{\lambda} \quad \text{όπου } n = 0,1,2 \ldots \text{ (επίπεδα αντι-δεσμών του } \vec{B}\text{)}$$

Παρατηρούμε ότι ένα επίπεδο δεσμού για το $\vec{E}$ αντιστοιχεί σε επίπεδο αντιδεσμού γοα το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ και το αντίστροφο.

Για την χρονική εξάρτηση, η εξίσωση: $E_y(x,t) = 2E_0[\sin(kx)\sin(\omega t)]$ γίνεται 0 παντού, όταν sin(ωt) = 0 ή .

$$t = \frac{n\pi}{\omega} = \frac{n\pi}{2\pi/\mathrm{T}} = \frac{nT}{2}, \ n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{όπου } T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \text{ η περίοδος}$$

Ωστόσο αυτή είναι η μέγιστη συνθήκη για το μαγνητικο πεδίο.

Αντίθετα με το διαδιδόμενο ηλεκτρομαγνητικό κύμα που το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο βρίσκονται πάντοτε σε φάση, στην περίπτωση του στάσιμου κύματος τα μαγνητικό πεδίο είναι 90° εκτός φάσης από το ηλεκτρικό πεδίο.

Στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μπορούν να δημιουργηθούν περιορίζοντας τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μεταξύ δύο τέλεια ανακλώντες αγωγούς, όπως στο σχήμα: