ΦΥΣ 331 – Χειμερινό Εξάμηνο 2023

Ενδιάμεση Εξέταση

Κυριακή 29/10/2023 **Διάρκεια: 11:30 – 14:00**

Σας δίνονται 10 ισοδύναμες ασκήσεις και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλες. Σύνολο μονάδων 100.

Καλή Επιτυχία

1. [**10μ**]

(α) Εξηγήστε πως με ζεύγος quark και anti-quark είναι δυνατόν να δημιουργηθούν τόσο βαθμωτά ($J^P = 0^+$) όσο και ψευδο-βαθμωτά ($J^P = 0^-$) μεσόνια. [**5μ**]

(β) Το νετρόνιο και το αντι-νετρόνιο είναι ουδέτερο σωματίδιο-αντισωματίδιο, όπως συμβαίνει με το K^0 και το $\overline{K}^0$. Όπως έχουμε δει, τα K^0 και $\overline{K}^0$ αναμειγνύονται μεταξύ τους ταλαντώνοντας από τη μία κατάσταση στην άλλη. Εξηγήστε τον λόγο που δεν συμβαίνει το ίδιο με το σύστημα του νετρονίου – αντινετρονίου. [**5μ**]

(α) Τα μεσόνια σχηματίζονται από ζεύγη quark-αντιquark. Τα quarks είναι φερμιόνια με σπιν 1/2 και επομένως υπάρχουν δύο τρόποι με τον οποίο μπορούν να συνδυαστούν για να έχουν ένα μεσόνιο με $J=0$: είτε τα spins των quarks είναι αντι-παράλληλα και έχουν τροχιακή στροφορμή $L=0$, ή τα spins των quarks είναι παράλληλα και η τροχιακή τους στροφορμή είναι $L=1$ και αντίθετη με τη διεύθυνση των spins με αποτέλεσμα να αλληλο αναιρούνται και $J=0$.

Από τη στιγμή που τα φερμιόνια και τα αντιφερμιόνια έχουν αντίθετες τιμές ομοτιμίας, η ομοτιμία του συστήματος quark-αντι-quark είναι $(-1)^{L+1}$. Έτσι, όταν $L=0$ η ομοτιμία του συστήματος είναι $P=-1$ (ψευδο-βαθμωτό μεσόνιο) και όταν $L=1$ μας δίνει $P=+1$ (βαθμωτό μεσόνιο).

(β) Τα ουδέτερα καόνια και αντι-καόνια διαφέρουν κατά 2 μονάδες παραδοξότητας, αλλά μπορούν να αναμειχθούν γιατί η παραδοξότητα δεν διατηρείται από τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις.

Το νετρόνιο και το αντι-νετρόνιο διαφέρουν κατά 2 μονάδες του βαρυονικού αριθμού. Ωστόσο δεν μπορούν να αναμειχθούν γιατί ο βαρυονικός αριθμός διατηρείται από όλες τις γνωστές αλληλεπιδράσεις.

2. [**10μ**]

(α) Υποθέστε ότι η απαγορευμένη διεργασία $p \to e^+ + \pi^0$ παρατηρείται. Υπολογίστε την ενέργεια του ποζιτρονίου στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας του πρωτονίου δεδομένου ότι το π^0 έχει μάζα $0.135 GeV/c^2$. [**4μ**]

(α) Έχουμε την διεργασία $p \to e^+ + \pi^0$

Από διατήρηση της ενέργειας $m_p = E_e + E_{\pi^0} \Rightarrow E_{\pi^0}^2 = (m_p - E_e)^2$ (1)

Από διατήρηση της ορμής $E_e^2 - m_e^2 = E_{\pi^0}^2 - m_{\pi^0}^2$ (2)

Από την (1): $E_{\pi^0}^2 = m_p^2 + E_e^2 - 2m_p E_e$. (3)

Από την (2): $\cancel{E_e^2} - m_e^2 \overset{(3)}{=} \cancel{E_e^2} - 2m_p E_e + m_p^2 - m_{\pi^0}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2m_p E_e = m_p^2 + m_e^2 - m_{\pi^0}^2 \Rightarrow \boxed{E_e = \frac{m_p^2 + m_e^2 - m_{\pi^0}^2}{2m_p}}$

Για τις τιμές των μαζών θα έχουμε: $E_e = \frac{0.938^2 + 0.0005^2 - 0.135^2}{2 * 0.938} \Rightarrow \underline{E_e = 459 MeV}$

(β) Δίνεται η διεργασία $K^- + p \to X + \pi^- + \pi^+$ στην οποία παρατηρείται ότι η κατανομής της αναλλοίωτης μάζα του συστήματος $X\pi^+$ παρουσιάζει κορυφή συντονισμού στα $1358 MeV/c^2$ με πλήρες εύρος $50\ MeV/c^2$. Η κορυφή αυτή καλείται ως σωματίδιο Y_1.
Η κατανομή της αναλλοίωτης μάζας του συστήματος $X\pi^-$ χρησιμοποιώντας διαφορετικά γεγονότα παρουσιάζει κορυφή στην ίδια περιοχή και το εύρος είναι παρόμοιο.
(β1) Με βάση τα παραπάνω δεδομένα, προσδιορίστε την παραδοξότητα (περιεχόμενο σε s-quark, strangeness), υπερ-φορτίο (hypercharge) και ισοτοπικό σπιν του Y_1. [**4μ**]
(β2) Έχει παρατηρηθεί ότι η κατάσταση $X\pi^+$ του Y_1 βρίσκεται αντιστοιχεί σε p-κατάσταση στροφορμής. Ποιο είναι η στροφορμή J του Y_1; Ποια η τιμή της parity; Θεωρήστε ότι η parity του X είναι +1 και του π^+ είναι -1. [**2μ**]

(β1) Η κατάσταση συντονισμού $Y_1 = X\pi^+$ έχει εύρος $\Gamma = 50 MeV$. Επομένως ο χρόνος ζωής του σωματιδίου θα είναι: $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{6.6 \cdot 10^{-22}}{50} \Rightarrow \boxed{\tau = 1.3 \cdot 10^{-23} sec}$

Ο χρόνος ζωής είναι της τάξης των ισχυρών αλληλεπιδράσεων και επομένως η διάσπαση του Y_1 γίνεται μέσω ισχυρών αλληλεπιδράσεων που διατηρούν όλες τις συμμετρίες.

Η αντίδραση είναι $K^- + p \to X + \pi^- + \pi^+$ και εφόσον προχωρά μέσω ισχυρών αλληλεπιδράσεων θα έχουμε διατήρηση παραδοξότητας και άρα το X θα πρέπει να έχει την ίδια παραδοξότητα με το K^- ενώ το p, π^-, π^+ έχουν παραδοξότητα $S=0$. Το K^- έχει παραδοξότητα $S=-1$. και επομένως $S_X = -1$

Ο βαρυονικός αριθμός της αρχικής κατάστασης $B(K^-+p) = B(K^-)+B(p) = 1$

ενώ για την τελική κατάσταση: $B(X+\pi^-+\pi^+) = B(X)+\cancel{B(\pi^-)}^{0}+\cancel{B(\pi^+)}^{0} = B(X)=1$

Το X περιέχει ένα s-quark επομένως θα πρέπει να περιέχει 2 ακόμα quarks ώστε να είναι βαρυόνιο και να παρουσιάζει $B(X)=1$.

Για να έχουμε διατήρηση φορτίου θα πρέπει $Q_X=0$ και επομένως το περιεχόμενο σε quarks του X θα είναι: uds, δηλαδή το X είναι το Λ^0

Επομένως το σωματίδιο Y_1 είναι κατάσταση των $\Lambda^0\pi^+$ με φορτίο $Q_{Y_1}=+1$

Η παραδοξότητα του Y_1 θα είναι: $S_{Y_1} = S_{\Lambda^0}+S_{\pi^+} = -1+0 = -1 \Rightarrow \boxed{S_{Y_1}=-1}$

Το υπερφορτίο ορίζεται ως: $Y = B+S-\frac{C-B'+T'}{3}$ όπου

$B = n_q - n_{\bar{q}}$

$S = -(n_s - n_{\bar{s}})$

$C = n_c - n_{\bar{c}}$

$B' = -(n_b - n_{\bar{b}})$

$T' = n_t - n_{\bar{t}}$

Επομένως το υπερφορτίο του Y_1 θα είναι

$$Y_{Y_1} = Y_{\Lambda^0}+Y_{\pi^+} = B_{\Lambda^0}+\cancel{B_{\pi^+}}^{0}+S_{\Lambda^0}+\cancel{S_{\pi^+}}^{0} = 1+(-1)=0 \Rightarrow \boxed{Y_{Y_1}=0}$$

Η σχέση ισοτοπικού σπιν και υπερφορτίου είναι:

$$Q = I_3+\frac{Y}{2} \Rightarrow I_3 = Q-\frac{Y}{2} \Rightarrow I_3^{Y_1} = Q_{Y_1}-\frac{Y_{Y_1}}{2} \Rightarrow \boxed{I_3^{Y_1}=1}.$$

Το ισοτοπικό spin του Y_1 θα είναι:

$$I_{Y_1} = I_{\Lambda^0}+I_{\pi^+} \Rightarrow I_{Y_1} = 0+1 \Rightarrow \boxed{I_{Y_1}=1}$$

(β2) Εφόσον βρήκαμε ότι το σωματίδιο Y_1 είναι $\Lambda^0\pi^+$, έχουμε ότι $J_{\Lambda^0}=\frac{1}{2}$ ενώ $J_{\pi^+}=0$. Η σχετική κίνηση των $\Lambda^0\pi^+$ δίνει p-κατάσταση με $\ell=1$.

Επομένως $J_{Y_1} = J_{\Lambda^0+\pi^+}+L_{\Lambda^0+\pi^+} = \vec{\frac{1}{2}}+\vec{1}$ Επομένως θα έχουμε ως δυνατές τιμές $\frac{1}{2}$ και $\frac{3}{2}$.

Η parity του Y_1 θα είναι: $P(Y_1) = P(\pi^+)P(\Lambda^0)(-1)^L = (-1)(+1)(-1) = \underline{+1}$

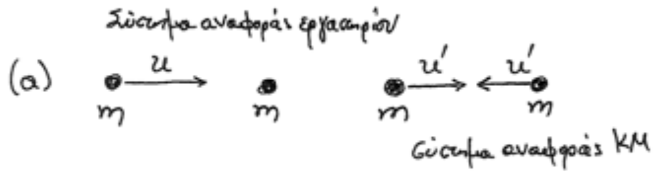
3. [**10μ**]

Ένα σωματίδιο το οποίο κινείται με ταχύτητα u, προσεγγίζει ένα πανομοιότυπο σωματίδιο σε ηρεμία (στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου).

(α) Δείξτε ότι η ταχύτητα κάθε σωματιδίου στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας δίνεται από την σχέση $\frac{c^2}{u}\left(1-\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)$. [**6μ**]

(β) Βρείτε την αντίστοιχη έκφραση για το μη σχετικιστικό όριο. [**4μ**]

(a)



Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου η ενέργεια του σώματος είναι: $\boxed{E^{tot}_{Lab}=(1+\gamma)mc^2}$

και η ορμή του $\boxed{P^{tot}_{Lab}=\gamma m u}$

Στο σύστημα αναφοράς του ΚΜ: $\boxed{E^{tot}_{CM}=2\gamma' mc^2}$ και $\boxed{P^{tot}_{CM}=0}$

Από τα διανύσματα των 4-ορμών έχουμε: $\left(P_\mu P^\mu=\frac{E^2}{c^2}-P^2\right)$

$$P_\mu P^\mu=(\gamma+1)^2\cancel{m^2}\cancel{c^4}-\gamma^2\cancel{m^2}u^2\cancel{c^4}/c^2=4\gamma'^2\cancel{m^2}\cancel{c^4}\Rightarrow\gamma'^2=\frac{(\gamma+1)^2-\gamma^2\frac{u^2}{c^2}}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\gamma'^2=\frac{1+2\gamma+\gamma^2-\gamma^2\beta^2}{4}=\frac{1+2\gamma+\gamma^2(1-\beta^2)}{4}=\frac{1+2\gamma+\cancel{\gamma^2}\,\frac{1}{\cancel{\gamma^2}}}{4}\Rightarrow\gamma'^2=\frac{1+2\gamma+1}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\gamma'^2=\frac{\cancel{2}(1+\gamma)}{\cancel{4}\,2}\Rightarrow\gamma'^2=\frac{\gamma+1}{2}\Rightarrow\frac{1}{\gamma'^2}=\frac{2}{\gamma+1}\Rightarrow1-\beta'^2=\frac{2}{1+\gamma}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow1-\left(\frac{u'}{c}\right)^2=\frac{2}{1+\gamma}\Rightarrow\left(\frac{u'}{c}\right)^2=1-\frac{2}{1+\gamma}\Rightarrow\left(\frac{u'}{c}\right)^2=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\Rightarrow\frac{u'}{c}=\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'=c\sqrt{\frac{(\gamma-1)^2}{\gamma^2-1}}\Rightarrow u'=c\,\frac{\gamma-1}{\sqrt{\gamma^2-1}}=c\,\frac{\gamma-1}{\sqrt{\gamma^2\beta^2}}=c\,\frac{\gamma-1}{\gamma\beta}=\frac{c}{\beta}\,\frac{\gamma-1}{\gamma}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'=\frac{c}{\beta}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\Rightarrow u'=\frac{c}{\beta}\left(1-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}\right)\Rightarrow u'=\frac{c}{\beta}\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'=\frac{c}{\frac{u}{c}}\left(1-\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)\Rightarrow\boxed{u'=\frac{c^2}{u}\left(1-\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)}$$

(β) Για $u<<c$ γράφουμε: $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\simeq1-\frac{1}{2}u^2/c^2$. Αντικαθιστούμε στην απάντηση του ερωτήματος (α) οπότε θα πάρουμε: $u'=\frac{c^2}{u}\left(\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}\right)\to u'=\frac{\cancel{c^2}}{\cancel{u}}\frac{u^{\cancel{2}}}{2\cancel{c^2}}\Rightarrow$

$\Rightarrow\boxed{u'=\frac{u}{2}}$ η ταχύτητα στο ΚΜ για το κλασικό όριο.

4. [**10μ**]

(α) Δείξτε ότι τα φορτισμένα σωματίδια δεν είναι ιδιοκαταστάσεις του C, του τελεστή συζυγίας φορτίου. [**6μ**]
(β) Δείξτε ότι οι εξισώσεις Maxwell στο κενό είναι αναλλοίωτες κάτω από αναστροφή χρόνου. [**4μ**]
<u>Υπενθύμιση:</u> Για όσους ίσως δεν θυμούνται, οι εξισώσεις Maxwell είναι:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \vec{0}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \vec{j}$$

(α) Έστω ότι έχουμε ένα σωματίδιο με ηλεκτρικό φορτίο q, και έστω Q ο τελεστής του φορτίου. Επομένως θα έχουμε: $Q|q\rangle = q|q\rangle$

Δρώντας με τον τελεστή C της ομοτιμίας φορτίου θα έχουμε:

$$\boxed{CQ|q\rangle = qC|q\rangle = q|-q\rangle} \quad (1)$$

Δρώντας πρώτα με τον τελεστή C θα πάρουμε: $\boxed{QC|q\rangle = Q|-q\rangle = -q|-q\rangle}$ (2)

Από (1) κ (2) θα έχουμε επομένως: $CQ|q\rangle - QC|q\rangle = q|-q\rangle + q|-q\rangle \Rightarrow$

$$\Rightarrow (CQ - QC)|q\rangle = 2q|-q\rangle \Rightarrow \boxed{[C,Q] \neq 0 \text{ εκτός και αν } q=0.}$$

(β) Κάτω από αναστροφή χρόνου, $\vec{B}$ αλλάζει πρόσημο (το ρεύμα που δημιουργεί το μαγνητικό πεδίο, αντιστρέφεται σε διεύθυνση κάτω από τη δράση του τελεστή T.).
Η ένταση $\vec{E}$ του ηλεκτρικού πεδίου παραμένει αναλλοίωτη.
Το ρεύμα $\vec{j}$ αλλάζει κατεύθυνση κάτω από δράση της T.
Επομένως οι εξισώσεις του Maxwell θα γραφούν ως:

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho & \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \vec{j} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \vec{0} \end{array}\right\} \xRightarrow{T} \begin{array}{ll} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho & \vec{\nabla}\times(-\vec{B}) + \frac{\partial\vec{E}}{-\partial t} = -\vec{j} \\ \vec{\nabla}\cdot(-\vec{B}) = 0 & \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial(-\vec{B})}{-\partial t} = \vec{0} \end{array}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι αναλλοίωτες κάτω από δράση της T.

5. [**10μ**]

(α) Υπολογίστε την ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να έχει ένα K^- που προσπίπτει σε ακίνητο πρωτόνια για να παραχθεί ένα βαρυόνιο Ω^- μέσω της σκέδασης $K^- + p \to \Omega^- + K^+ + K^0$. Οι μάζες των σωματιδίων $K^-, K^0,\ p,\ \Omega^-$ που συμμετέχουν στη σκέδαση είναι 0.494, 0.498, 0.938 και 1.672GeV/c^2 αντίστοιχα. [**5μ**]

(β) Το Ω^- που παράγεται διασπάται κατόπιν σύμφωνα με την διεργασία $\Omega^- \to \Lambda^0 K^-$. Σχεδιάστε το διάγραμμα Feynman χαμηλότερης τάξης που περιγράφει τη διεργασία αναγράφοντας λεπτομερώς όλα τα σωματίδια και κορυφές αλληλεπίδρασης που συμμετέχουν και αναφέρετε την αλληλεπίδραση υπεύθυνη για την διεργασία αυτή. Σε αντίθεση με την προηγούμενη διεργασία, η διάσπαση $\Omega^- \to \Lambda^0\pi^-$ δεν παρατηρείται ή το ποσοστό διακλάδωσής της είναι πολύ μικρό στο Καθιερωμένο Πρότυπο. Σχολιάστε για ποιο λόγο πιθανώς αυτό να συμβαίνει.

(α) Η ελάχιστη ενέργεια βρίσκεται αν θεωρήσουμε την περίπτωση που τα προϊόντα της τελικής κατάστασης είναι σε ηρεμία: $K^- + p \to \Omega^- + K^+ + K^0$

$$E^* = (1.672 + 0.494 + 0.498)\,GeV/c^2 \Rightarrow \boxed{E^* = 2.664\,GeV/c^2}$$

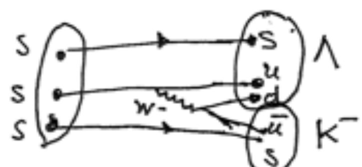
Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου αυτή η ενέργεια θα είναι:

$$E^{*2} = (E + 0.938)^2 - (p)^2 \Rightarrow E^{*2} = E^2 + 2\cdot 0.938\,E + 0.938^2 - p^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E^{*2} = \underbrace{(E^2 - p^2)}_{m_K^2} + 2\cdot 0.938 + 0.938^2 \Rightarrow E^{*2} = (0.494^2 + 0.938^2 + 2\,0.938\,E)$$

$$\Rightarrow E = \frac{(2.664)^2 - 0.938^2 - 0.494^2}{2\cdot 0.938} \Rightarrow \boxed{E = 3.184\,GeV/c^2}$$

(β)



Η διεργασία προχωρεί μέσω των ασθενών αλληλεπιδράσεων.

Η διεργασία $\Omega^- \to \Lambda^0\pi^-$ είναι σπάνια επειδή εμπεριέχει μεταβολή στην παραδοξότητα κατά 2 μονάδες ($\Delta S = 2$). Θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί μέσω διπλού ανταλλαγής ουδέτερου ρεύματος (Z,γ) και την μετατροπή δύο s-quarks του Ω^- σε d quarks. Αυτό καθιστά την διεργασία ιδιαίτερα σπάνια.

6. [**10μ**]

Σχεδιάστε τα διαγράμματα Feynman χαμηλότερης τάξης για τις παρακάτω διεργασίες. Σε κάθε περίπτωση αναφέρετε τα σωματίδια που συμμετέχουν στις αλληλεπιδράσεις:

(i) $\mu^+ + \mu^- \to \nu_e + \overline{\nu}_e$

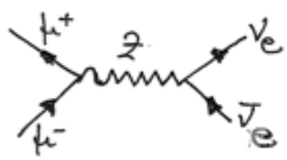
(ii) $K^0 \leftrightarrow \overline{K}^0$

(iii) $gg \to H^0 \to gg$

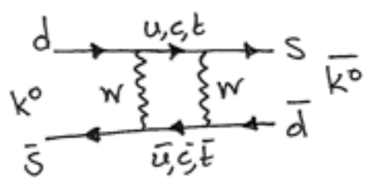
(iv) $qq \to qq'H^0(\to e^+\mu^+e^-\mu^-)$

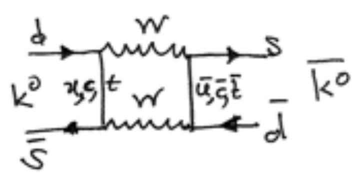
(v) $pp \to t\bar{t}H^0(\to \gamma\gamma)$

(i)

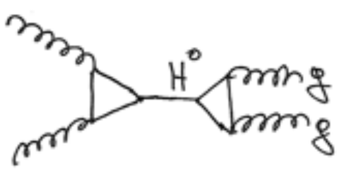


(ii)

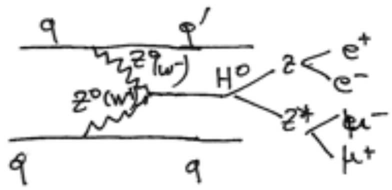




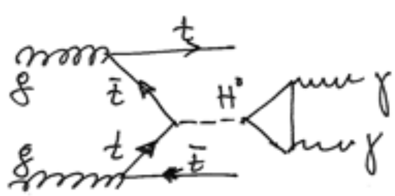
(iii)



(iv)



(v)



7. [**10μ**]

Η οικογένεια των Σ βαρυονίων ανήκει στην οικογένεια των βαρυονίων με ένα strange quark και αποτελεί μία τριπλέτα στην οποία ανήκουν τα βαρυόνια Σ^+, το Σ^0 και το Σ^-. Οι μάζες των βαρυονίων είναι 1187.4, 1192.6 και 1197.5 MeV/c^2 αντίστοιχα.

(α) Βρείτε το περιεχόμενο σε quarks των βαρυονίων αυτών, το μέτρο του isospin τους και την 3η συνιστώσα του isospin. [**4μ**]

(β) Κάντε το διάγραμμα Feynman για τις διασπάσεις $\Sigma^- \to n\pi^-$, $\Sigma^0 \to \Lambda^0\gamma$, $\Sigma^0 \to p\pi^-$ και $\Sigma^+ \to n\pi^+$. [**4μ**]

(γ) Εξηγήστε γιατί η διάσπαση $\Sigma^0 \to \Lambda^0\gamma$ είναι σχεδόν 100% ενώ η διάσπαση $\Sigma^0 \to p\pi^-$ έχει πολύ μικρό ποσοστό διακλάδωσης; [**2μ**]

(α) Τα βαρυόνια $\Sigma^\pm$ και Σ^0 είναι τα ελαφρύτερα βαρυόνια-τριπλέτας και το περιεχόμενό του σε quarks θα πρέπει να ικανοποιεί το φορτίο των βαρυονίων. Θα έχουμε επομένως:

Σ^+ : s u u $\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right) \to Q=+1$

Σ^0 : s d u $\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right) \to Q=0$

Σ^- : s d d $\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right) \to Q=-1$

Με βάση τη σχέση του υπερφορτίου και 3ης συνιστώσας του isospin θα έχουμε:

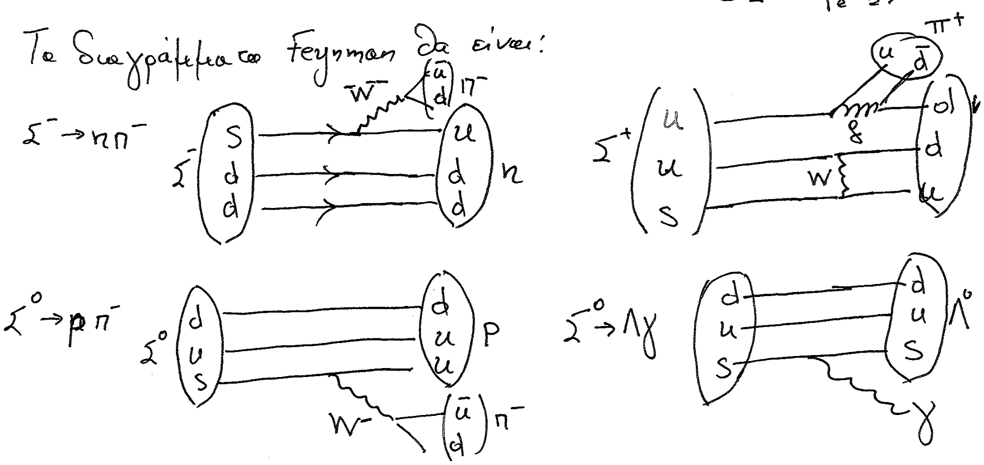
$I_3 = Q - \frac{Y}{2} = Q - \frac{S+B}{2}$ όπου B είναι ο βαρυονικός αριθμός.

Όλα τα $\Sigma^\pm, \Sigma^0$ βαρυόνια έχουν $B=1$ και $S=-1$, επομένως $Y_\Sigma = 0$

Άρα η τρίτη συνιστώσα του isospin είναι: $I_{\Sigma^+}=+1$, $I_{\Sigma^0}=0$ και $I_{\Sigma^-}=-1$

Οι καταστάσεις isospin για τα τρία βαρυόνια θα είναι: $\begin{cases} \Sigma^+ : |1\,1\rangle \\ \Sigma^0 : |1\,0\rangle \\ \Sigma^- : |1\,-1\rangle \end{cases}$

(β) Τα διαγράμματα Feynman θα είναι:



(γ) Η διάσπαση $\Sigma^0 \to \Lambda^0 \gamma$ διατηρεί την παραδοξότητα γιατί συμβαίνει μέσω των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων. Στην διάσπαση έχουμε $\Delta S = 0$.

Στην δεύτερη περίπτωση ωστόσο $\Sigma^0 \to p \pi^-$ υπάρχει παραβίαση της παραδοξότητας και επομένως δεν μπορεί να γίνει μέσω των ισχυρών και ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων αλλά μέσω των ασθενών.
Ο ρυθμός διάσπασης ωστόσο είναι αρκετά μικρός και κυριαρχεί η διάσπαση μέσω ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων $(\Sigma^0 \to \Lambda^0 \gamma)$

8. [**10μ**]

Εξηγήστε λεπτομερώς ποιες από τις παρακάτω διεργασίες είναι επιτρεπτές ή τον λόγο για τον οποίο απαγορεύονται. Αν η διεργασία είναι επιτρεπτή ποια αλληλεπίδραση είναι υπεύθυνη για τη διεργασία;

(α) $K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$

(β) $e^+ + e^- \to p + \pi^-$

(γ) $\omega \to \pi^0 + \pi^0$

(δ) $e^- + \mu^+ \to e^+ + \mu^-$

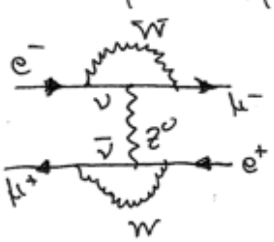
(ε) $\pi^0 \to \gamma + \gamma + \gamma + \gamma + \gamma$

(α) $K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$ Η διεργασία πραγματοποιείται μέσω ασθενών αλληλεπιδράσεων και έχουμε αλλαγή παραδοξότητας

(β) $e^+ + e^- \to \pi^- + p$ Η διεργασία δεν είναι επιτρεπτή γιατί παραβιάζεται ο βαρυονικός αριθμός αλλά και η διατήρηση της στροφορμής

(γ) $\omega \to \pi^0\pi^0$ Η διεργασία δεν είναι επιτρεπτή γιατί το ω είναι αδρόνιο με ολική στροφορμή $J=1$ επομένως η στροφορμή του συστήματος θα πρέπει να είναι $\ell=1$ που σημαίνει ότι η κυματοσυνάρτηση του $\pi^0\pi^0$ συστήματος θα είναι αντισυμμετρική κάτω από εναλλαγή. Τότε όμως παραβιάζεται η στατιστική Bose για τα $\pi^0\pi^0$.

(δ) $e^- + \mu^+ \to e^+ + \mu^-$ Η διεργασία αυτή είναι αδύνατη λόγω παραβίασης του λεπτονικού αριθμού. Ωστόσο αν κάποιος δεχτεί τις ταλαντώσεις νετρίνο, τότε υπάρχει ένα πολύ μικρό πλάτος μετάβασης για την διεργασία, να πραγματοποιηθεί μέσω διαγραμμάτων ακτινοβολίας.



(ε) $\pi^0 \to \gamma + \gamma + \gamma + \gamma + \gamma$ Το π^0 δεν μπορεί να διασπαστεί σε 5 φωτόνια. Ξέρουμε ότι η συζυγία φορτίου για τα φωτόνια είναι -1 και ότι η συζυγία φορτίου διατηρείται. Επομένως τα πιόνια μπορούν να διασπαστούν σε άρτιο αριθμό φωτονίων και σαν αποτέλεσμα η διεργασία σε 5γ είναι απαγορευμένη

9. [**10 μ**]

(α1) Δείξτε ότι το K^0 και $\overline{K}^0$ δεν είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή της CP. [**1μ**]
(α2) Γράψτε τις δύο καταστάσεις K_1 και K_2 που είναι ιδιοκαταστάσεις της CP και δείξτε ότι έχουν ιδιοτιμές +1 και -1 αντίστοιχα. [**2μ**]
(α3) Εκφράστε τις καταστάσεις K^0 και $\overline{K}^0$ συναρτήσει των ιδιοκαταστάσεων K_1 και K_2. [**1μ**]

(α) Έχουμε ότι: K^0 είναι δέσμια κατάσταση $d\bar{s}$, $\overline{K^0} = \bar{d}s$ κ $K^0 \neq \overline{K^0}$

Επομένως $CP|K^0\rangle = |\overline{K^0}\rangle$ και $CP|\overline{K^0}\rangle = |K^0\rangle$ } δεν είναι ιδιοκαταστάσεις της CP
Δηλαδή δεν είναι της μορφής $O|X\rangle = \lambda|X\rangle$

Η ιδιοκατάσταση $|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^0\rangle + |\overline{K^0}\rangle\right)$ (1)

$|K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^0\rangle - |\overline{K^0}\rangle\right)$ (2)

$$CP|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} CP\left(|K^0\rangle + |\overline{K^0}\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\overline{K^0}\rangle + |K^0\rangle\right) = \underline{+|K_1\rangle}$$

$$CP|K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} CP\left(|K^0\rangle - |\overline{K^0}\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\overline{K^0}\rangle - |K^0\rangle\right) = \underline{-|K_2\rangle}$$

Επομένως οι ιδιοτιμές της CP για τις καταστάσεις $|K_1\rangle$ και $|K_2\rangle$ είναι ± 1.

Από τις σχέσεις (1) κ (2) προσθέτοντας και αφαιρώντας θα έχουμε:

$$\frac{2}{\sqrt{2}}|K^0\rangle = |K_1\rangle + |K_2\rangle \Rightarrow |K^0\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|K_1\rangle + |K_2\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K_1\rangle + |K_2\rangle\right) \quad (3)$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}|\overline{K^0}\rangle = |K_1\rangle - |K_2\rangle \Rightarrow |\overline{K^0}\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|K_1\rangle - |K_2\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K_1\rangle - |K_2\rangle\right) \quad (4)$$

(β) Ο παράγοντας ασυμμετρίας φορτίου, δ, εκφράζει τον αριθμό των διασπάσεων των ουδέτερων καονίων K^0 σε $\pi^- e^+ \nu_e$ συγκριτικά με τον αριθμό των διασπάσεων των $\overline{K}^0$ σε $\pi^+ e^- \overline{\nu}_e$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$\delta = \frac{N(K^0 \to \pi^- e^+ \nu_e) - N(\overline{K}^0 \to \pi^+ e^- \overline{\nu}_e)}{N(K^0 \to \pi^- e^+ \nu_e) + N(\overline{K}^0 \to \pi^+ e^- \overline{\nu}_e)}$$

Θεωρήστε ότι τη χρονική στιγμή t = 0 έχουμε μια καθαρή δέσμη καονίων, K^0. Θεωρήστε ακόμη ότι η CP διατηρείται. Υπολογίστε τα ακόλουθα

(β1) Τη τιμή του παράγοντα δ την χρονική στιγμή t = 0. [**1μ**]

(β2) Τη χρονο-εξελιγμένη κατάσταση των ουδέτερων καονίων μετά από χρόνο t. [**2μ**]

(β3) Τη συμπεριφορά του παράγοντα δ, συναρτήσει του χρόνου και εξηγήστε πως μπορεί να εξαχθεί η διαφορά μάζας μεταξύ των ιδιο-καταστάσεων της CP. [**3μ**]

Υπόδειξη: Η χρονοεξέλιξη μιας κατάστασης $|X(t)\rangle$ =$|X(t = 0)\rangle\ e^{-\left(im_X t + \frac{\Gamma_X t}{2}\right)}$.

(β) Όταν $t=0$, η δέσμη είναι καθαρή σε K^0. Στον χρονική αυτή στιγμή η διάσπαση $K^0 \to \pi^- e^+ \nu_e$ επιτρέπεται ενώ η διάσπαση $K^0 \to \pi^+ e^- \bar{\nu}_e$ δεν επιτρέπεται

Επομένως ο παράγοντας δ θα είναι: $\delta(t=0) = \frac{N(\pi^- e^+ \nu_e) - N(\pi^+ e^- \bar{\nu}_e)}{N(\pi^- e^+ \nu_e) + N(\pi^+ e^- \bar{\nu}_e)} = 1$

Από τις (1) κ (2) του (α) ερωτήματος έχουμε: $|K_1(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|K^0(t=0)\rangle$

$|K_2(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|K^0(t=0)\rangle$

Μετά από χρόνο t θα έχουμε:

$|K_1(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^0(t=0)\rangle\right) e^{-(im_1 t + \Gamma_1 t/2)}$

$|K_2(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^0(t=0)\rangle\right) e^{-(im_2 t + \Gamma_2 t/2)}$

Αντικατάσταση στις (3) κ (4) θα δώσει:

$|K^0(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K_1(t)\rangle + |K_2(t)\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(|K^0(t=0)\rangle\right)\left[e^{-(im_1 t + \Gamma_1 t/2)} + e^{-(im_2 t + \Gamma_2 t/2)}\right]$

$|\overline{K}^0(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K_1(t)\rangle - |K_2(t)\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(|K^0(t=0)\rangle\right)\left[e^{-(im_1 t + \Gamma_1 t/2)} - e^{-(im_2 t + \Gamma_2 t/2)}\right]$

Υποθέτοντας ότι η πιθανότητα διάσπασης του $K^0 \to \pi^- e^+ \nu_e$ είναι ίση με του $\bar{K}^0 \to \pi^+ e^- \bar{\nu}_e$ θα έχουμε:

$$\delta(t) = \frac{\left|e^{-(im_1 t+\Gamma_1 t/2)} + e^{-(im_2 t+\Gamma_2 t/2)}\right|^2 - \left|e^{-(im_1 t+\Gamma_1 t/2)} - e^{-(im_2 t+\Gamma_2 t/2)}\right|^2}{\left|e^{-(im_1 t+\Gamma_1 t/2)} + e^{-(im_2 t+\Gamma_2 t/2)}\right|^2 + \left|e^{-(im_1 t+\Gamma_1 t/2)} - e^{-(im_2 t+\Gamma_2 t/2)}\right|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta(t) = \frac{2e^{-(im_1 t+\Gamma_1 t/2)}e^{-(-im_2 t+\Gamma_2 t/2)} + 2e^{-(-im_1 t+\Gamma_1 t/2)}e^{-(im_2+\Gamma_2 t/2)}}{2e^{-(im_1 t+\Gamma_1 t/2)}e^{-(-im_1 t+\Gamma_1 t/2)} + 2e^{-(im_2 t+\Gamma_2 t/2)}e^{-(-im_2 t+\Gamma_2 t/2)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta(t) = \frac{\cancel{2}e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)t/2}\left(e^{i(m_2-m_1)t} + e^{-i(m_2-m_1)t}\right)}{\cancel{2}\left(e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t}\right)} \Rightarrow \delta(t) = \frac{e^{-(\Gamma_1+\Gamma_2)t/2}\left[2\cos(m_2-m_1)t\right]}{e^{-\Gamma_1 t} + e^{-\Gamma_2 t}}$$

Επομένως από την καμπύλη ταλάντωσης της $\delta(t)$ μπορούμε να εξάγουμε τη διαφορά μάζας $\Delta m \equiv |m_2 - m_1|$

10. [**10μ**]

(α) Ποιες από τις παρακάτω αλληλεπιδράσεις είναι επιτρεπτές; Αν δεν είναι επιτρεπτές, αναφέρετε λεπτομερώς τον λόγο που απαγορεύονται:

(i) $\pi^- + p \to K^- + \Sigma^+$

(ii) $d + d \to \ ^4He + \pi^0$

(iii) $K^- + p \to \Xi^- + K^+$

(β) Υποθέστε ότι οι σκεδάσεις $p + p \to \pi^+ + d$ και $n + p \to \pi^0 + d$ πραγματοποιούνται με στην ίδια ενέργεια κέντρου μάζας. Υπολογίστε τον λόγο των ενεργών διατομών τους:

$$R = \frac{\sigma(p + p \to \pi^+ + d)}{\sigma(n + p \to \pi^0 + d)}$$

(i) $p + \pi^- \to K^- + \Sigma^+$: η διεργασία απαγορεύεται γιατί έχουμε

$\Delta I_3 = (-\frac{1}{2}) + (+1) - (-1) - \frac{1}{2} = 1 \neq 0$

$\Delta S = (-1) + (-1) - 0 - 0 = -2 \neq 0$

(ii) $d + d \to {}^4He + \pi^0$: η διεργασία απαγορεύεται γιατί: $I(d) = I({}^4He) = 0$

$I(\pi^0) = 1$ και επομένως $\Delta I = 1 \neq 0$.

(iii) $K^- + p \to \Xi^- + K^+$: η διεργασία επιτρέπεται από τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις γιατί διατηρούνται το Q, I, I_3 και S

(β) Η διαφορά στην ενεργό διατομή μεταξύ των δύο διεργασιών: $p + p \to \pi^+ + d$ και $n + p \to \pi^0 + d$ σχετίζεται με το isospin. Γράφοντας τις καταστάσεις με βάση το isospin θα έχουμε:

$$|pp\rangle = |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = |1, 1\rangle$$

$$|\pi^+ d\rangle = |1, 1\rangle |0, 0\rangle = |1, 1\rangle$$

$$|np\rangle = |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |0, 0\rangle$$

$$|\pi^0 d\rangle = |1, 0\rangle |0, 0\rangle = |1, 0\rangle$$

Επομένως το πινακοστοιχείο για την διεργασία $pp \to \pi^+ d$ θα είναι:

$$\langle \pi^+ d | \hat{H} | pp \rangle = \langle 1, 1 | \hat{H} | 1, 1 \rangle = \langle 1 | \hat{H} | 1 \rangle = a_1$$

Αντίστοιχα για την διεργασία $np \to \pi^0 d$ θα είναι:

$$\langle \pi^0 d|\hat{H}|np\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1,0|\hat{H}|1,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\cancelto{0}{\langle 1,0|\hat{H}|0,0\rangle} = \frac{a_1}{\sqrt{2}}$$

Επομένως
$$\frac{\sigma(pp \to \pi^+ d)}{\sigma(np \to \pi^0 d)} = \frac{|\langle \pi^+ d|\hat{H}|pp\rangle|^2}{|\langle \pi^0 d|\hat{H}|np\rangle|^2} = \frac{a_1^2}{a_1^2/2} = 2$$