ΦΥΣ 112

Ενδιάμεση Εξέταση: 20-Οκτωβρίου-2022

Πριν αρχίσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητας).

Ονοματεπώνυμο	**Αριθμός Ταυτότητας**

Απενεργοποιήστε τα κινητά σας.

Το δοκίμιο περιέχει 20 ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών (2 μονάδες/ερώτηση) και 2 προβλήματα που θα πρέπει να λύσετε αναλυτικά (30 μονάδες/άσκηση). Η μέγιστη συνολική βαθμολογία της εξέτασης είναι 100 μονάδες.

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΣΤΕ ΜΟΝΟ ΤΙΣ ΣΕΛΙΔΕΣ ΠΟΥ ΣΑΣ ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΜΗΝ ΚΟΨΕΤΕ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΣΕΛΙΔΑ

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 180 λεπτά. Καλή Επιτυχία !

Μέρος Α – Πολλαπλές επιλογές			
Ερώτηση	**Βαθμός**	**Ερώτηση**	**Βαθμός**
1		11	
2		12	
3		13	
4		14	
5		15	
6		16	
7		17	
8		18	
9		19	
10		20	
Σύνολο			

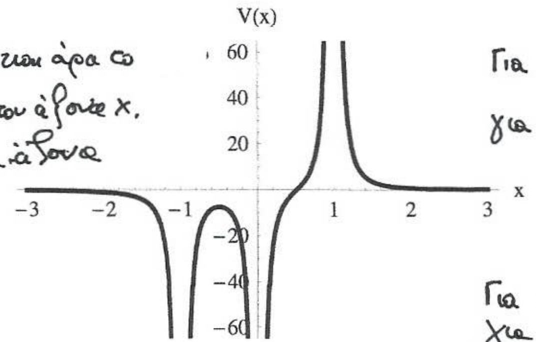
Μέρος Β	
Άσκηση	**Βαθμός**
$1^{η}$ (30μ)	
$2^{η}$ (30μ)	
Σύνολο	

Ερωτήσεις Πολλαπλών Επιλογών – Σύνολο 40 μονάδες – 2 μονάδες/ερώτηση

Οι επόμενες 2 ερωτήσεις αναφέρονται στο γράφημα του παρακάτω σχήματος, το οποίο δείχνει το δυναμικό στον x-άξονα, συναρτήσει του x.

Τα φορτία είναι σημειακά και άρα το πεδίο είναι ακτινικό και στον άξονα x. Θα έχει τη διεύθυνση του x-άξονα.

Το πεδίο βρίσκεται από $\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\hat{i}$

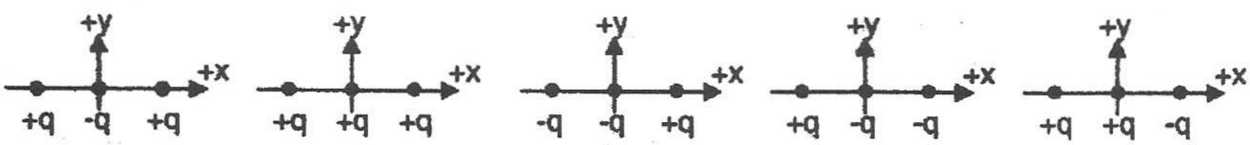


Για $x \in [-\infty,-1)$ $\frac{dV}{dx} < 0 \Rightarrow E_x > 0$
για $x \in (-1,-0.5)$ $\frac{dV}{dx} > 0 \Rightarrow E_x < 0$ $\Big\}$ $q_{x=-1} < 0$

Για $x \in (-0.5,0)$ $\frac{dV}{dx} < 0 \Rightarrow E_x > 0$
για $x \in (0,0.5)$ $dV/dx > 0 \Rightarrow E_x < 0$ $\Big\}$ $\Rightarrow q_{x=0} < 0$

Για $x \in (0.5,1)$ $dV/dx > 0 \Rightarrow E_x < 0$
για $x \in (1,\infty]$ $dV/dx < 0 \Rightarrow E_x > 0$ $\Big\}$ $\Rightarrow q_{x=1} > 0$

1. Ποια από τις διατάξεις φορτίων που φαίνονται στο επόμενο σχήμα θα μπορούσε να προκαλέσει το δυναμικό του διπλανού σχήματος;

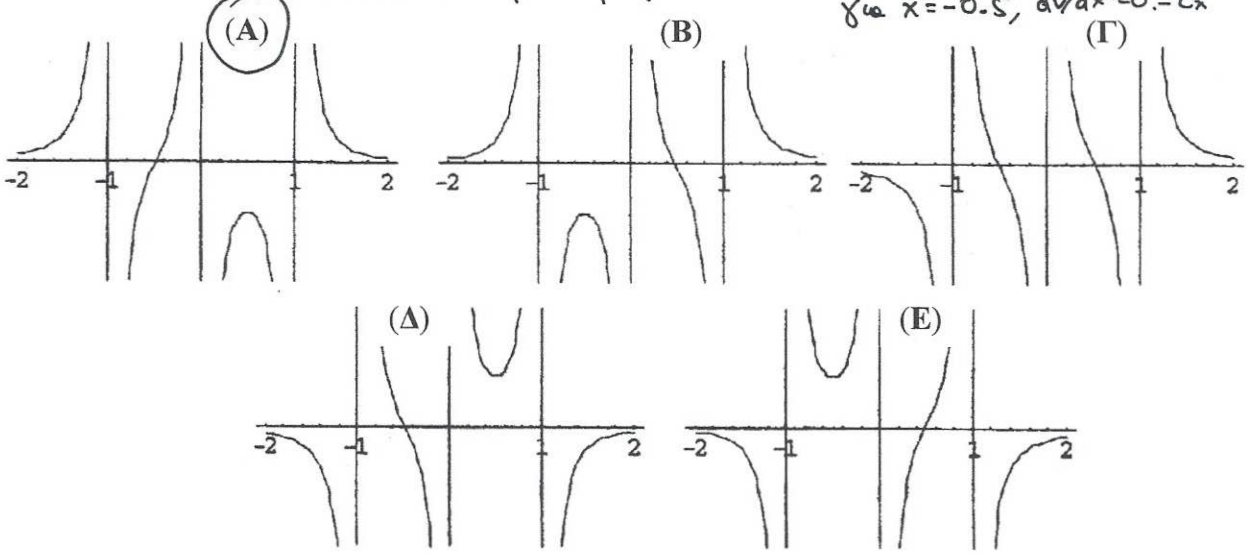


(Α) (Β) (Γ) (Δ) (Ε)

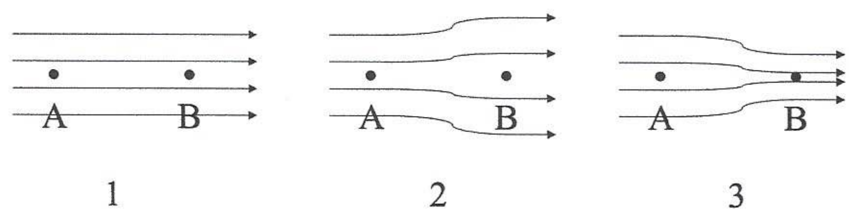
2. Ποια είναι η x-συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου για σημεία που βρίσκονται στον x-άξονα με βάση το δυναμικό που φαίνεται στο παραπάνω γράφημα.

Από το 1 έχουμε το πρόσημο της E_x.

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\varnothing$ για $x=-0.5$, $dV/dx = 0 = E_x$



3. Σε κάθε ένα από τα παρακάτω γραφήματα, τα βέλη αντιπροσωπεύουν τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές, ενώ η απόσταση μεταξύ των σημείων A και B παραμένει σταθερή. Υποθέστε ότι το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο A είναι ίδιο και για τις τρεις περιπτώσεις. Κατατάξτε σε αύξουσα σειρά τη διαφορά δυναμικού $\Delta V_{AB} = V(B) - V(A)$ για τις τρεις περιπτώσεις:

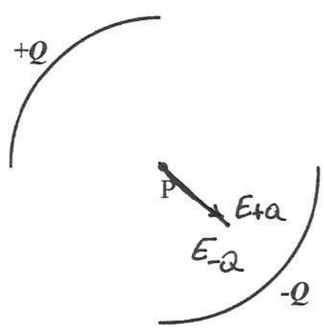


(A) περίπτωση (1) < περίπτωση (2) < περίπτωση (3)
(B) περίπτωση (2) < περίπτωση (3) < περίπτωση (1)
(Γ) περίπτωση (3) = περίπτωση (1) < περίπτωση (2)
(Δ) περίπτωση (2) < περίπτωση (3) = περίπτωση (1)
(E) περίπτωση (3) < περίπτωση (1) < περίπτωση (2)

Από τα παραπάνω γραφήματα έχουμε ότι $E_2 < E_1 < E_3$
Αλλά $\Delta V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$ όπου $|d\vec{\ell}| = AB = \text{cte}$
Επομένως $\Delta V_i = -E_i\,(AB) \Rightarrow$
$\Delta V_3 < \Delta V_1 < \Delta V_2$

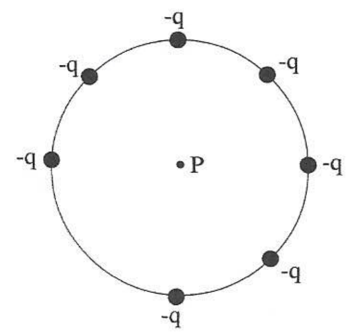
4. Το παρακάτω σχήμα δείχνει δύο τόξα ίδιας ακτίνας με κέντρο το σημείο *P*. Θετικό φορτίο $+Q$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο πάνω τόξο και αρνητικό φορτίο $-Q$ είναι κατανεμημένο στο κάτω τόξο. Ποιο από τα βέλη περιγράφει καλύτερα το ηλεκτρικό πεδίο *P* στο κέντρο των τόξων;

(A) ↓
(B) ↘
(Γ) ↖
(Δ) →
(E) 0



Το ηλεκτρικό πεδίο βρίσκεται από την αρχή της επαλληλίας
Επομένως $\vec{E}_P = \vec{E}_{+Q} + \vec{E}_{-Q}$
Τόσο το $\vec{E}_{+Q}$ όσο και το $\vec{E}_{-Q}$ έχουν κατεύθυνση προς το τόξο με φορτίο $-Q$, άρα και το $\vec{E}_P$

Οι ακόλουθες 3 ερωτήσεις αναφέρονται στην ακόλουθη περίπτωση. Αρχικά υπάρχουν 8 φορτία αρνητικά φορτία τα οποία συγκρατούνται στην περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας R. Ένα από τα φορτία αφαιρείται και η κατανομή φορτίων είναι όπως στο παρακάτω σχήμα:



5. Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο του κύκλου είναι:

(Α) 0.
(Β) $(1/8)kq/R^2$
(Γ) $(7/8)kq/R^2$
(Δ) kq/R^2
(Ε) $7kq/R^2$

Αν υπήρχε το 8° φορτίο $\vec{E}_P = \vec{0}$. Εφόσον λείπει, η συνεισφορά του αντιδιαμετρικού φορτίου από αυτό που λείπει δεν εξουδετερώνεται, ενώ τα υπόλοιπα 6 φορτία είναι αντιδιαμετρικά.
Επομένως $|E_P| = k\dfrac{q}{R^2}$

6. Η διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο του κύκλου είναι:

(Α) ↓
(Β) ↗
(Γ) ↙
(Δ) →
(Ε) 0

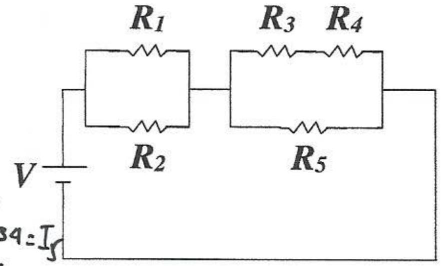
Η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου είναι προς το αρνητικό φορτίο και ακτινικώς

7. Ποιο είναι το ηλεκτρικό δυναμικό στο κέντρο του κύκλου; (Υποθέστε ότι το δυναμικό γίνεται μηδέν σε άπειρη απόσταση από το κέντρο του κύκλου)

(Α) 0.
(Β) $-(1/8)kq/R$
(Γ) $-(7/8)kq/R$
(Δ) $-kq/R$
(Ε) $-7kq/R$

Το δυναμικό προέρχεται από την συνεισφορά των επιμέρους δυναμικών από τα 7 σημειακά φορτία.
Το ηλεκτρικό δυναμικό από κάθε φορτίο είναι:
$V_q = -kq/R$ και επομένως το συνολικό ηλεκτρικό δυναμικό θα είναι $V_P = -7kq/R$

8. Μία μπαταρία και 5 αντιστάτες ίδιας αντίστασης είναι συνδεδεμένα όπως στο σχήμα. Ποιος αντιστάτης διαρρέεται από το μεγαλύτερο ρεύμα;



(A) R_1 $R_1 // R_2 \Rightarrow I_{R_1} = I_{R_2}$

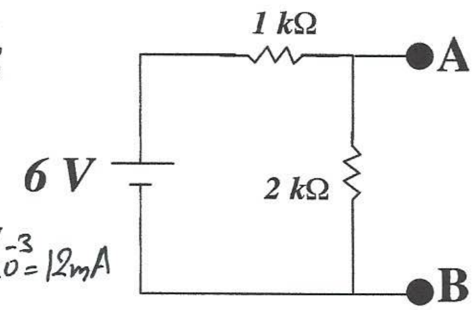
(B) R_2 $R_{34} = R_3 + R_4$ (σε σειρά) και $R_{34} // R_5$

(Γ) R_3 Άρα $R_5 < R_{34}$. Το ρεύμα $I_{12} = I_{R_1} + I_{R_2}$

(Δ) R_5 διαρρέει και την $R_3 R_4 R_5$. $I_{34} = \frac{V_{R_{34}}}{R_{34}} < \frac{V_{R_{34}}}{R_5} = I_5$

(Ε) Το ρεύμα που διαρρέει κάθε αντιστάτη είναι το ίδιο για όλους τους αντιστάτες.

9. Ένας πυκνωτής φορτίζεται πλήρως σε δυναμικό $24V$ και κατόπιν συνδέεται στα άκρα AB του παρακάτω σχήματος με τον θετικό οπλισμό συνδεδεμένο στο σημείο A. Ποιο είναι το ρεύμα που διαρρέει τον αντιστάτη με αντίσταση 2kΩ;



(A) 0mA Τη στιγμή που συνδέουμε τον πυκνωτή

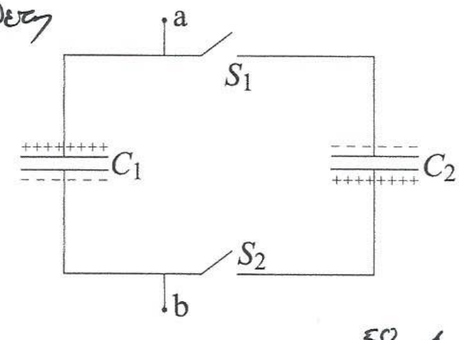
(B) 2mA στα σημεία AB, $V_{AB} = V_C = 24V$

(Γ) 4mA Αυτή είναι η τάση στα άκρα της

(Δ) 8mA αντίστασης 2kΩ και επομένως

(Ε) 12mA το ρεύμα που την διαρρέει είναι $\frac{24V}{2\Omega} 10^{-3} = 12mA$

10. Στο διπλανό σχήμα, κάθε πυκνωτής είναι φορτισμένος σε διαφορά δυναμικού $100V$. Αφότου κλείσουν οι διακόπτες S_1 και S_2 ποια είναι η τελική διαφορά δυναμικού $V_b - V_a$ σε volts μεταξύ των σημείων a και b; Δίνεται ότι $C_1 = 1\mu F$ και $C_1 = 3\mu F$:



(A) $50V$ Οι οπλισμοί των πυκνωτών έχουν αντίθετη

(B) $33V$ πολικότητα. Όταν κλείσουν οι διακόπτες

(Γ) $25V$ φορτία θα κινηθούν, και το ολικό φορτίο

(Δ) $10V$ θα αλλάξει. Οι δύο πυκνωτές θα έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού.

(Ε) $5V$ Αρχικά $Q_1 = C_1 \cdot V = -100\mu C$

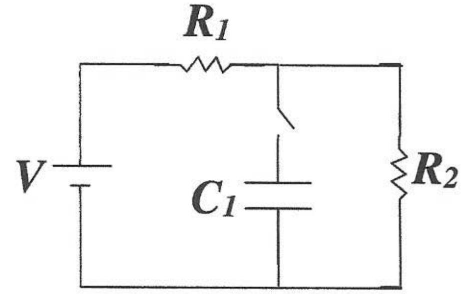
$Q_2 = C_2 V = +300\mu C$

$S_1 S_2$ κλειστοί: $C_{ισοδ} = C_1 + C_2 = (1+3)\mu F = 4\mu F$

$Q_{ολ} = 200\mu C$

$\Rightarrow V = \frac{Q_{ολ}}{C_{ολ}} = \frac{\cancel{200}^{50} \cdot \cancel{10^{-6}} C}{\cancel{4} \cdot \cancel{10^{-6}} F} \Rightarrow \boxed{V_{ba} = 50V}$

Οι επόμενες 3 ερωτήσεις αναφέρονται στην ακόλουθη περίπτωση. Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο διακόπτης κλείνει.



11. Το ρεύμα, I_o, που διαρρέει τον αντιστάτη R_1, τη χρονική στιγμή $t = 0$, είναι:

(A) $I_0 = V/(R_1 + R_2)$ — Από τον 2ο κανόνα του Kirchhoff στον βρόχο με τον πυκνωτή, R_1, V

(B) $I_0 = V/R_1$ — θα έχουμε $V - I_{t=0} \cdot R_1 - \cancel{\frac{Q_{t=0}}{C_1}}_{\to 0} = 0 \Rightarrow I_{t=0} = \frac{V}{R_1}$

(Γ) $I_0 = V/R_2$

(Δ) 0

12. Αφότου έχει κλείσει ο διακόπτης για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα, η διαφορά δυναμικού, V_C, στα άκρα του πυκνωτή είναι

(A) $V_C = V$ — Μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα, $t \to \infty$, ο πυκνωτής βρίσκεται

(B) $V_C = V(R_1/R_2)$ — στο δυναμικό της αντίστασης R_2. $V_C = V_{R_2} \Rightarrow$

(Γ) $V_C = V\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ — $\Rightarrow V_C = I_{t=\infty} \cdot R_2 = \left(\frac{V}{R_1 + R_2}\right) R_2$

(Δ) $V_C = V\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)$

(E) $V_C = V\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)$

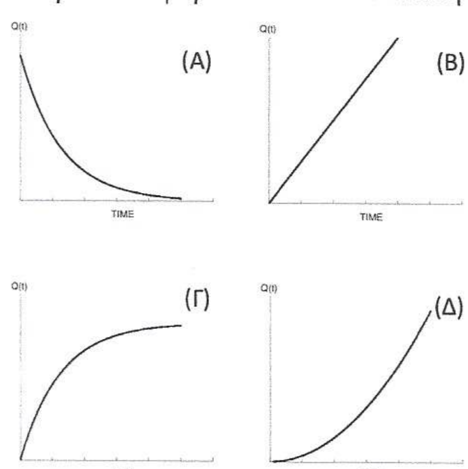
13. Ποια από τις ακόλουθες γραφικές αναπαριστά καλύτερα το φορτίο στον πυκνωτή συναρτήσει του χρόνου;

(A) A — Ο πυκνωτής φορτίζεται:

(B) B — $Q(t) = Q(t=0)\left(1 - e^{-t/RC}\right)$

(Γ) Γ

(Δ) Δ



14. Τέσσερα θετικά φορτισμένα σωματίδια με ίσα φορτία $+Q$ βρίσκονται κοντά σε ένα πολύ μακρύ σύρμα φορτισμένο με αρνητικό φορτίο. Η κατανομή του φορτίου παρουσιάζει γραμμική πυκνότητα $-\lambda$. Μια σφαίρα ακτίνας R έχει το κέντρο της στο σημείο P όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η ηλεκτρική ροή, $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$ που περνά τη σφαίρας θα είναι:

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss για τη σφαίρα:

$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{περ.}}{\varepsilon_0} = \frac{+2Q-\lambda\cdot 2R}{\varepsilon_0}$

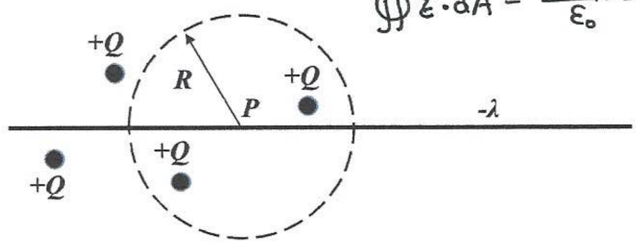
(A) $\Phi_E = 0$

(B) $\Phi_E = (8\pi Q R^2 - 4\pi\lambda R^2)/\varepsilon_0$

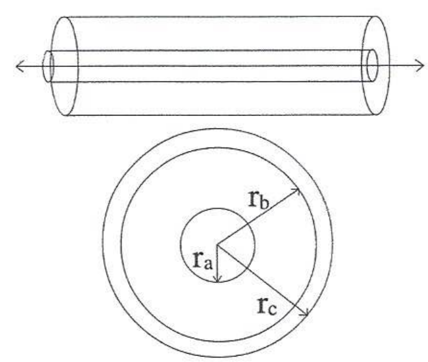
(Γ) $\Phi_E = (2Q - 2\lambda R)/\varepsilon_0$

(Δ) $\Phi_E = -2\lambda R/\varepsilon_0$

(E) $\Phi_E = 2Q/\varepsilon_0$



15. Θεωρήστε ένα μεταλλικό κυλινδρικό φλοιό εσωτερικής και εξωτερικής ακτίνας r_b και r_c αντίστοιχα. Ο φλοιός αυτός είναι ομόκεντρος με ένα μεταλλικό σύρμα ακτίνας r_a. Η γραμμική πυκνότητα φορτίου για το σύρμα είναι $+\lambda$ ενώ η γραμμική πυκνότητα φορτίου για τον κυλινδρικό φλοιό είναι $-\lambda$. Ποιο/ποια από το/τα ακόλουθο/α είναι αληθές/ή:



(I) Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των r_c και r_b είναι μηδέν.

(II) Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των r_a και r_b είναι μηδέν.

(III) Η διαφορά δυναμικού μεταξύ ενός σημείου έξω από τον κυλινδρικό φλοιό και του r_c είναι μηδέν.

(IV) Το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ ενός σημείου έξω από τον κυλινδρικό φλοιό και του r_c είναι μηδέν.

(A) Μόνο το (I) και (IV) είναι αληθή.

(B) Μόνο το (II) και (IV) είναι αληθή.

(Γ) Μόνο το (I) και (III) είναι αληθή

(Δ) Μόνο τα (II), (III) και (IV).

(E) Μόνο το (I), (III) και (IV) είναι αληθή

(I) Στο εσωτερικό του αγωγού $\vec{E}=\vec{0}$ – αληθής

(II) $E \neq 0$ στην περιοχή $r_a < r < r_b$ – ψευδής

(III) Από τον νόμο του Gauss, το ολικό φορτίο στο εσωτερικό μιας σφαίρας με $r > r_c$ είναι 0. Επομένως $E_{r>r_c} = 0$ και επομένως η διαφορά δυναμικού θα είναι μηδέν. – αληθής

(IV) όπως εξηγήθηκε πιο πάνω στο III – αληθής

16. Ένα σημειακό φορτίο Q κρατείται ακίνητο σε κάποιο σημείο. Ένα άλλο σημειακό φορτίο q πλησιάζει το φορτίο Q κινούμενο με σταθερή ταχύτητα v. Ποιο/ποια από το/τα ακόλουθο/α είναι αληθές/ή:

(I) Η ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια του q αυξάνει καθώς πλησιάζει το Q εάν τα φορτία q και Q έχουν το ίδιο πρόσημο. –

(II) Το έργο το οποίο εκτελεί η ηλεκτροστατική δύναμη είναι θετικό εάν τα φορτία q και Q έχουν το ίδιο πρόσημο.

(III) Το έργο που εκτελεί μια εξωτερική δύναμη για να φέρει το φορτίο q πιο κοντά στο Q, είναι θετικό εάν τα φορτία q και Q έχουν αντίθετο πρόσημο.

(IV) Το έργο που εκτελεί μια εξωτερική δύναμη για να φέρει το φορτίο q πιο κοντά στο Q, είναι αρνητικό εάν τα φορτία q και Q έχουν αντίθετο πρόσημο.

(A) Μόνο το (I).
(B) Μόνο το (II).
(Γ) Μόνο το (I) και (II).
(Δ) Μόνο το (I) και (IV).
(E) Μόνο το (II) και (III).

I. $U = qV = k\frac{Qq}{r} \Rightarrow U_f - U_i = kQq\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)$ αν $r_f < r_i \Rightarrow 1/r_f > 1/r_i \Rightarrow \Delta U > 0$

Αληθής.

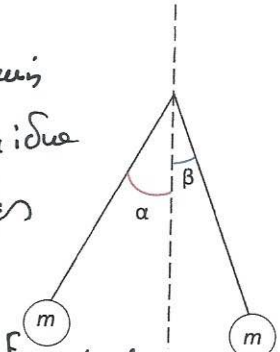
II. $W = -\Delta U = -kqQ\left(\frac{r_i - r_f}{r_i \cdot r_f}\right)$ όταν $r_f < r_i \Rightarrow W < 0$ – ψευδής

III. $W_{εξ} = \Delta U = kqQ\left(\frac{r_i - r_f}{r_i r_f}\right)$ όταν $r_f < r_i$ και $q \cdot Q < 0 \Rightarrow \Delta U < 0$

ψευδής

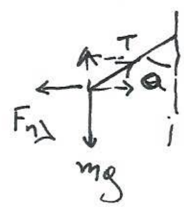
IV. Σύμφωνα με το III αν $q \cdot Q < 0$, $\Delta U < 0$ οπότε αληθής.

17. Δύο σφαίρες ίσης μάζας m κρέμονται από δύο μεταξωτά νήματα ίσου μήκους. Αν η σφαίρα στα δεξιά έχει φορτίο $+4q$ και η σφαίρα στα αριστερά έχει φορτίο $+q$, η σχέση που συνδέει τις γωνίες απόκλισης των δύο σφαιρών από την κατακόρυφο είναι:



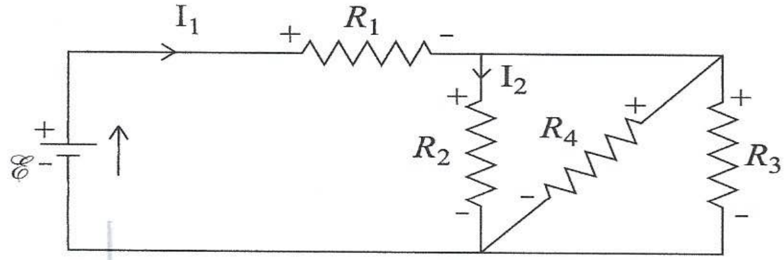
(A) $\alpha = \frac{1}{4}\beta$
(B) $\alpha = \frac{1}{2}\beta$
(Γ) $\alpha = \beta$
(Δ) $\alpha = 2\beta$
(E) $\alpha = 4\beta$

Από τον 3ο νόμο του Νεύτωνα, η ηλεκτροστατική δύναμη που αναπτύσσεται στα 2 φορτία είναι ίδια και απωθούνται με την ίδια δύναμη. Οι μάζες είναι ίσες. Επομένως:



$$\left.\begin{aligned} T_x = F_{ηλ} &\Rightarrow T\sin\alpha = F_{ηλ} \\ T_y = mg &\Rightarrow T\cos\alpha = mg \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{F_{ηλ}}{mg} = \tan\beta.$$

18. Ποιο είναι το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R_2 στο παρακάτω κύκλωμα;



$\mathcal{E} = 6.0V$

$R_1 = 100\Omega$

$R_2 = R_3 = 50\Omega$

$R_4 = 75\Omega$

(A) 0.02A

(B) 1.00A

(Γ) 0.05A

(Δ) 0.015A

(Ε) 0.25A

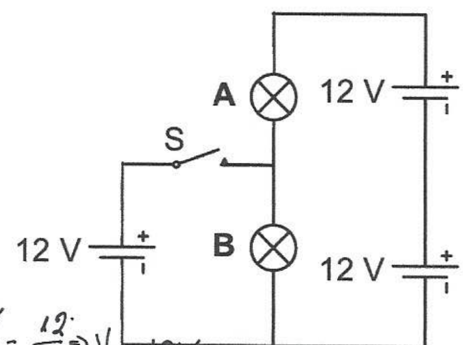
$R_2 \| R_3 \| R_4 \Rightarrow R_{234} = \frac{R_2R_3R_4}{R_3R_4 + R_2R_4 + R_2R_3} = \frac{75}{4}\Omega$

$R_{234} + R_1 = R_{1234} = 100 + \frac{75}{4} = \frac{475}{4}\Omega$

$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_{1234}} = \frac{6V}{475/4\,\Omega} = \frac{24V}{475\Omega}$

$V_{R_2} = I_1 \cdot R_{234} \Rightarrow I_{R_2} = I_1 \frac{R_{234}}{R_2} = \frac{\cancel{24V}\,3}{475\Omega} \cdot \frac{\cancel{75}\,3}{4 \cdot \cancel{50}} = \frac{9}{475} = 0.02A$

19. Οι λαμπτήρες Α και Β στο παρακάτω κύκλωμα είναι πανομοιότυποι. Όταν ο διακόπτης S κλείσει τι θα συμβεί στην φωτεινότητα των λαμπτήρων;



(A) Δεν θα αλλάξει τίποτα.

(B) Ο λαμπτήρας Α γίνεται πιο φωτεινός.

(Γ) Ο λαμπτήρας Β γίνεται πιο φωτεινός.

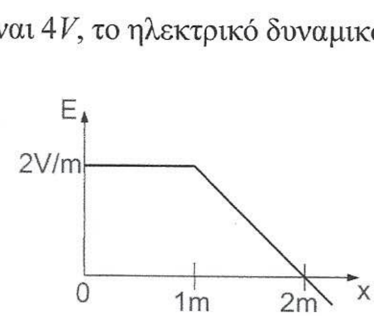
(Δ) Ο λαμπτήρας Α γίνεται λιγότερο φωτεινός

(Ε) Ο λαμπτήρας Β γίνεται λιγότερο φωτεινός

Οι λαμπτήρες έχουν την ίδια αντίσταση: $I_A = I_B = \frac{24V}{2R} = \frac{12}{R} \Rightarrow V_B = 12V$

Όταν κλείσει ο διακόπτης τότε $V_B = 12V$ όπως και πριν κλείσει ο διακόπτης.

20. Το ηλεκτρικό πεδίο συναρτήσει της θέσης για την περίπτωση μίας διάστασης, φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν το ηλεκτρικό δυναμικό στη θέση x=0m είναι 4V, το ηλεκτρικό δυναμικό στη θέση x=2m είναι:



(A) 0 V

(B) 1 V

(Γ) 3 V

(Δ) 7 V

(Ε) 8 V

$\Delta V = -\int_{x=0}^{2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ Επομένως:

$\Delta V = -$Εμβαδό $= -\left(2\frac{V}{m} \cdot 1m + \frac{1}{2} 1 \cdot 2\right) \Rightarrow$

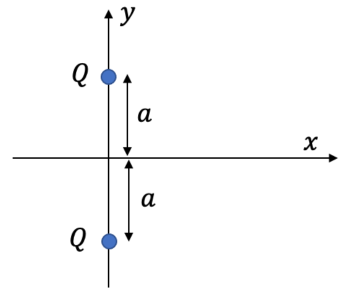
$\Delta V = -3V$.

$\Delta V = V_{x=2} - V_{x=0} \Rightarrow V_{x=2} = V_{x=0} + \Delta V \Rightarrow V_{x=2} = 4V - 3V \Rightarrow V_{x=2} = 1V$

<u>**Μέρος Β – Αναλυτικά προβλήματα – Σύνολο 60 μονάδες**</u>

<u>**Άσκηση 1**</u> **[30μ]**

Δύο θετικά φορτία $+Q$ είναι τοποθετημένα στον y-άξονα στις θέσεις $y = \pm\alpha$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα (1α).



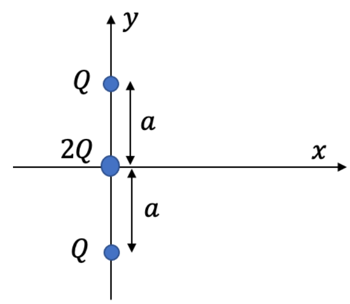
(α) Προσδιορίστε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ στον x-άξονα, για όλες τις τιμές του x. [**5μ**]

(β) Προσδιορίστε το ηλεκτροστατικό δυναμικό $V(x)$ για όλα τα σημεία του x-άξονα. [**5μ**]

(γ) Σχεδιάστε το ηλεκτροστατικό δυναμικό $V(x)$ για όλες τις τιμές στον x-άξονα. [**4μ**]

(δ) Από το γράφημα σας στο ερώτημα (γ), προσδιορίστε τα σημεία στα οποία το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν. [**3μ**]

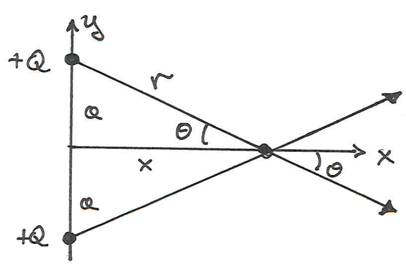
Υποθέστε τώρα ότι ένα τρίτο φορτίο $+2Q$ μεταφέρεται από το άπειρο και τοποθετείται στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων, όπως φαίνεται στο σχήμα (1β).



(ε) Υπολογίστε το έργο που απαιτείται από έναν εξωτερικό παράγοντα ώστε να τοποθετηθεί το φορτίο $+2Q$ στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων. [**5μ**]

(στ) Υπολογίστε την ολική ηλεκτροστατική ενέργεια της διάταξης των τριών φορτίων. [**5μ**]

(g) Αν τα φορτία αφεθούν ελεύθερα να κινηθούν, υπολογίστε το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των τριών σωματιδίων όταν βρίσκονται πολύ μακριά το ένα από το άλλο. [**3μ**]



(α) Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ στον x-άξονα θα έχει x-συνιστώσα μόνο γιατί η y-συνιστώσα λόγω συμμετρίας μηδενίζεται.

$$\vec{E}(x) = E_x = \frac{2kQ}{r^2}\cos\theta\,\hat{\imath} \quad \text{όπου } \cos\theta = \frac{x}{r}$$

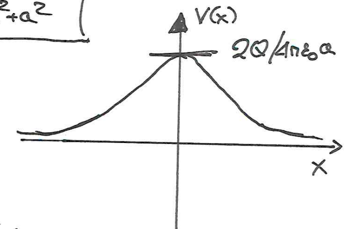
Επομένως $$\boxed{\vec{E}(x) = \vec{E}_x = \frac{2kQ}{(x^2+a^2)^{3/2}}x\,\hat{\imath} = \frac{2Qx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+a^2)^{3/2}}\hat{\imath}}$$

Για $x<0$, το ηλεκτρικό πεδίο αλλάζει πρόσημο, αλλά η έκφραση αλλάζει επίσης πρόσημο και επομένως η παραπάνω εξίσωση ισχύει για όλες τις τιμές του x.

(β) Το δυναμικό στο x είναι απλά το αλγεβρικό άθροισμα των επιμέρους συνεισφορών

$$V(x) = \frac{2kQ}{r} = \frac{2kQ}{\sqrt{(x^2+a^2)}} \Rightarrow \boxed{V(x) = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+a^2}}}$$

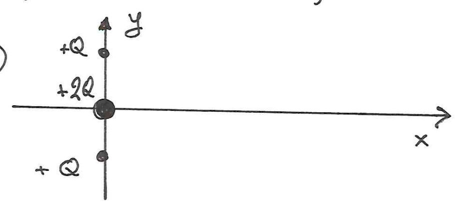
(γ) Το γράφημα του δυναμικού συναρτήσει του x:



(δ) $\vec{E}_x=\vec{0}$ στα σημεία που $dV/dx=0$ το οποίο συμβαίνει όταν $x=0$ και $x=\pm\infty$

Άρα $\vec{E}=\vec{0}$ στον x-άξονα στα $x=0$ και $x=\pm\infty$

(ε)



Το έργο θα είναι: $W = q\Delta V$ με $q=+2Q$

Το δυναμικό στο $x=0$ (αρχή του συστήματος συντεταγμένων) είναι: $V = \frac{2kQ}{a}$

Το δυναμικό στο $x=\infty$ είναι $V(x=\infty)=0$ και επομένως $\Delta V = 2kQ/a$

Επομένως το έργο που δαπανά ένας εξωτερικός παράγοντας για να φέρει το φορτίο $+2Q$ στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων θα είναι:

$$W = \frac{2kQ}{a}\cdot 2Q = \frac{4kQ^2}{a} = \underline{\underline{\frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 a}}}$$

(στ) Η ενέργεια της διάταξης των τριών φορτίων θα είναι:

$$U_{ολ} = U_{12} + U_{23} + U_{13} = \frac{kQ^2}{2a} + \frac{2kQ^2}{a} + \frac{2kQ^2}{a} \Rightarrow \boxed{U_{ολ} = \frac{9kQ^2}{2a}}$$

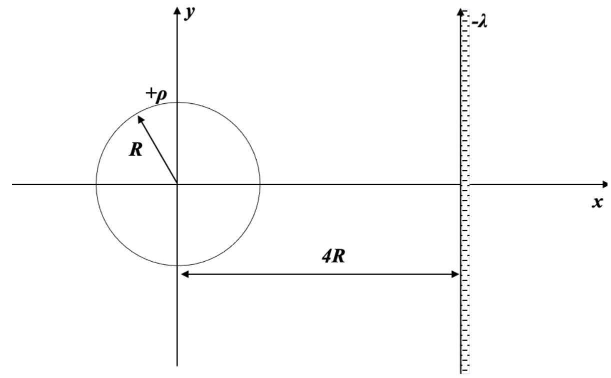
(ζ) Αν τα σωματίδια αφεθούν ελεύθερα να κινηθούν, όλη η δυναμική ενέργεια που υπολογίστηκε στο ερώτημα (στ) θα μετατραπεί σε κινητική ενέργεια.

Επομένως $\boxed{E_k = \frac{9kQ^2}{2a}}$

Το ποσοστό κινητικής ενέργειας που θα πάρει το κάθε ένα από τα σωματίδια εξαρτάται από τον τρόπο που ελευθερώθηκαν, αλλά το άθροισμα θα είναι πάντοτε το ίδιο και ίσο με $9kQ^2/2a$

<u>Άσκηση 2</u> [30μ]

Μια μονωμένη σφαίρα ακτίνας R βρίσκεται στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Είναι φορτισμένη ομοιόμορφα με θετικό φορτίο και έχει χωρική πυκνότητα φορτίου ρ. Επιπλέον, μια πολύ λεπτή και μακριά ράβδος είναι τοποθετημένη παράλληλα προς τον άξονα y στη θέση θέση $x = 4R$. Η ράβδος είναι φορτισμένη αρνητικό φορτίο και γραμμική πυκνότητα φορτίου $-\lambda$. Στα επόμενα δώστε τις απαντήσεις σας συναρτήσει των μεγεθών ρ, λ, R και πιθανώς άλλων σταθερών. Θα πρέπει να αποδείξετε ότι τύπο χρησιμοποιήσετε από το τυπολόγιο.



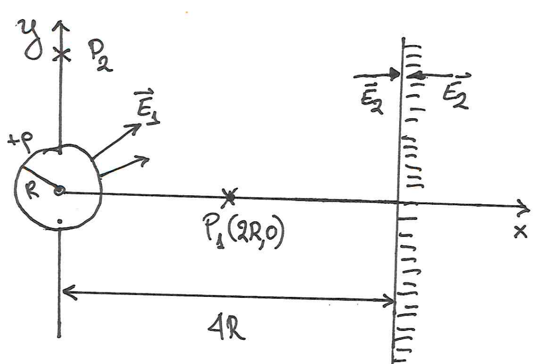
(α) Προσδιορίστε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ στο σημείο $x = 2R$, $y = 0$. [**6μ**]

(β) Προσδιορίστε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ στο σημείο $x = 0$, $y = 3R$. [**6μ**]

(γ) Προσδιορίστε τη συνεισφορά στη x-συνιστώσα, E_x, του ηλεκτρικού πεδίου, **μόνο** από τη ράβδο, συναρτήσει της θέσης x στον x-άξονα. Σχεδιάστε αυτή την συνεισφορά. [**7μ**]

(δ) Προσδιορίστε τη συνεισφορά στη x-συνιστώσα, E_x, του ηλεκτρικού πεδίου, **μόνο** από τη σφαίρα, συναρτήσει της θέσης x στον x-άξονα. Σχεδιάστε αυτή την συνεισφορά. [**7μ**]

(ε) Προσδιορίστε την ηλεκτρική ροή, Φ_E, μέσω ενός κύβου πλευράς $R/3$ με το κέντρο του στη θέση $x = 0$, $y = 2R$. [**4μ**]



(α) Υπολογίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P_1 με $x=2R$ και $y=0$.

Το πεδίο θα είναι η επαλληλία των πεδίων της κατανομής φορτίου της σφαίρας και της ράβδου.

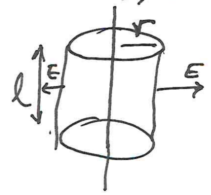
Για την σφαίρα, από το θεώρημα Gauss:

$$\oiint \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\pi\varepsilon\rho}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E_1 = \frac{Q_{o\lambda}}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{Q_{o\lambda}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{R^3\rho}{3r^2\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_1 = \frac{\rho R^3}{3r^2\varepsilon_0}\hat{r}} \quad (1)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο της ράβδου θα είναι, και πάλι από το θεώρημα Gauss με επιφάνεια Gauss, ενός κυλίνδρου ομοαξονικού με την ράβδο:



$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{\pi\epsilon\rho}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2\pi r l E = \frac{-\lambda l}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = -\frac{\lambda \cancel{l}}{2\pi r \cancel{l}\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_2 = -\frac{\lambda \hat{r}}{2\pi\varepsilon_0 r}} \quad (2)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο E_2 έχει ακτινική φορά πρός τον άξονα του κυλίνδρου.

Στο σημείο P_1, έχουμε $\hat{r} = -\hat{\imath}$ και $r = 2R$. Επομένως $\vec{E}_2(P_1) = -\frac{\lambda(-\hat{\imath})}{2\pi\varepsilon_0(2R)} = +\frac{\lambda\hat{\imath}}{4\pi\varepsilon_0 R}$

Το ηλεκτρικό πεδίο από την σφαίρα με βάση την (1) θα είναι: $\vec{E}_1(P_1) = \frac{\rho R^{\cancel{3}}}{3\cdot 4\cdot \cancel{R^2}\varepsilon_0}\hat{\imath} = +\frac{\rho R}{12\varepsilon_0}\hat{\imath}$

Επομένως το πεδίο στο P_1 είναι $\vec{E}_{P_1} = \vec{E}_{1P} + \vec{E}_{2P} = \frac{\rho R}{12\varepsilon_0}\hat{\imath} + \frac{\lambda\hat{\imath}}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{E_{P_1} = \frac{\pi\varepsilon_0\rho R^2 + 3\lambda}{12\pi\varepsilon_0 R}\hat{\imath}}$$

(β) Το ηλεκτρικό πεδίο στο P_2 όπου $x=0$ και $y=3R$.

Όπως και στο ερώτημα (α) για τα E_1 και E_2:

$E_1(P_2) = \frac{\rho R^3}{3r^2\varepsilon_0}\hat{r}$ με $\hat{r}=\hat{\jmath}$ και $r=3R$, θα έχουμε:

$E_1(P_2) = \frac{\rho R^{\cancel{3}}}{3\cdot 9 \cancel{R^2}\varepsilon_0}\hat{\jmath} \Rightarrow \boxed{E_1(P_2) = \frac{\rho R}{27\varepsilon_0}\hat{\jmath}}$ ηλεκτρικό πεδίο σφαίρας

$E_2(P_2) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}$ με $\hat{r} = -\hat{\imath}$ αφού E_2 είναι κάθετο στην γραμμή του φορτίου
$r = 4R$

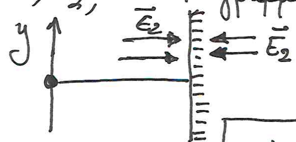
Επομένως: $\boxed{E_2(P_2) = \frac{\lambda\hat{\imath}}{8\pi\varepsilon_0 R}}$ ηλεκτρικό πεδίο γραμμικής κατανομής.

Άρα το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο P_2 θα είναι: $\vec{E}_{P_2} = \vec{E}_1(P_2) + \vec{E}_2(P_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{P_2} = \frac{\rho R}{27\varepsilon_0}\hat{\jmath} + \frac{\lambda\hat{\imath}}{8\pi\varepsilon_0 R}}$$

(γ) Το ηλεκτρικό πεδίο, $\vec{E}_2$, από την γραμμική κατανομή είναι μόνο στην x-διεύθυνση

$$E_2 = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\hat{\imath}$$

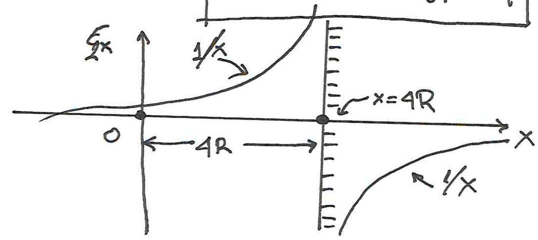


$\vec{E}_2$ (στον x-άξονα) $= \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0|x-4R|}\hat{\imath}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\vec{E}_2 = \vec{E}_{2x} = -\frac{\lambda\,\hat{\imath}}{2\pi\varepsilon_0|x-4R|}}$$

για όλες τις τιμές του x

Προσέξτε την αλλαγή του πρόσημου για x = 4R



(δ) Το ηλεκτρικό πεδίο εξαιτίας της σφαίρας; στον x-άξονα:

Για $|x|>R$, έχουμε από το (α) υποερώτημα: $\vec{E}_1 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{\imath}$ όπου $r=x$

Για $x<0$, E_1 αλλάζει πρόσημο και η κατεύθυνση είναι $-\hat{\imath}$.

Επομένως: $\boxed{\vec{E}_{1x} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 x^2}\hat{\imath}}$ για $x>R$

$\boxed{\vec{E}_{1x} = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 x^2}\hat{\imath}}$ για $x<-R$

Για $|x|<R$ θα πρέπει να θεωρήσουμε το γεγονός ότι μόνο ένα μέρος του φορτίου περιλαμβάνεται στην επιφάνεια Gauss που θεωρούμε για τον υπολογισμό της ροής στον νόμο του Gauss:

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{περ}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{\varepsilon_0} \Rightarrow \cancel{4\pi r^2}\,E_{1r} = \frac{\cancel{4\pi}\rho r^{\cancel{3}}}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{1r} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r}}$$

Για $x>0$ $\hat{r}=\hat{\imath}$, $r=x$

για $x<0$ $\hat{r}=-\hat{\imath}$

και επομένως: $\boxed{\vec{E}_{1x} = \frac{\rho x}{3\varepsilon_0}\hat{\imath} \text{ για } |x|<R}$

για $x>0$ και $x<0$. Σημειώστε την αλλαγή κατεύθυνσης καθώς περνούμε από το $x=0$.