

## 4<sup>ο</sup> Παράδειγμα: Υπολογισμός ηλεκτρικού πεδίου από δυναμικό

Έστω ότι το ηλεκτρικό δυναμικό εξαιτίας μιας κατανομής φορτίου γράφεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες ως:

$$V(x, y, z) = Ax^2y^2 + Bxyz \quad \text{όπου } A, B, \text{ σταθερές.}$$

Ποιο το ηλεκτρικό πεδίο που σχετίζεται με το δυναμικό αυτό;

Το ηλεκτρικό πεδίο βρίσκεται από τις εξισώσεις:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2Axy^2 - Byz$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -2Ax^2y - Bxz$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -Bxy$$

Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι:

$$\vec{E} = (-2Axy^2 - Byz)\hat{i} - (2Ax^2y + Bxz)\hat{j} - Bxy\hat{k}$$

# Νόμος του Gauss

# Η έννοια της ροής

Μέχρι τώρα είδαμε πως η ένταση ενός ηλεκτρικού πεδίου είναι ανάλογη του αριθμού των γραμμών πεδίου ανά μονάδα επιφάνειας.

- Ο αριθμός των γραμμών πεδίου που διαπερνούν μια δεδομένη επιφάνεια ονομάζεται **ηλεκτρική ροή** και συμβολίζεται με το γράμμα  $\Phi_E$ .
- Το ηλεκτρικό πεδίο θα μπορούσαμε να το θεωρήσουμε ως το πλήθος των γραμμών πεδίου ανά μονάδα επιφάνειας.

Θεωρούμε την επιφάνεια του σχήματος και ορίζουμε το διάνυσμα της επιφάνειας  $\vec{A} = A\hat{n}$  όπου  $\hat{n}$  το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια και  $A$  το μέτρο του εμβαδού της επιφάνειας.

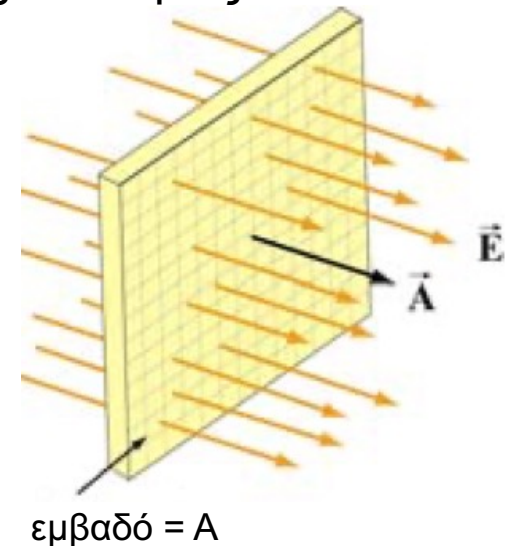
Αν η επιφάνεια τοποθετηθεί σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  το οποίο δείχνει προς την κατεύθυνση όπως και το  $\hat{n}$ , δηλαδή κάθετα στην επιφάνεια  $A$ , τότε η ροή διαμέσου της επιφάνειας δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = \vec{E} \cdot \hat{n}A = EA$$

Αν το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  σχηματίζει γωνία  $\theta$  με το  $\hat{n}$ , η ηλεκτρική ροή γράφεται με τη μορφή

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \theta = E_n A$$

όπου  $E_n = E \cdot \hat{n}$  η συνιστώσα του πεδίου κάθετη στην επιφάνεια



## Ροή ηλεκτρικών γραμμών

Με βάση τον ορισμό του κάθετου διανύσματος,  $\hat{n}$ , η ηλεκτρική ροή  $\Phi_E$  είναι θετική αν οι γραμμές του πεδίου εξέρχονται της επιφάνειας και αρνητικές αν εισέρχονται στην επιφάνεια.

Εν γένει, μια επιφάνεια  $S$  μπορεί να είναι καμπύλη και το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  μπορεί να μεταβάλλεται κατά μήκος της επιφάνειας.

➤ Θα επικεντρωθούμε στις περιπτώσεις που η **επιφάνεια αυτή είναι κλειστή**

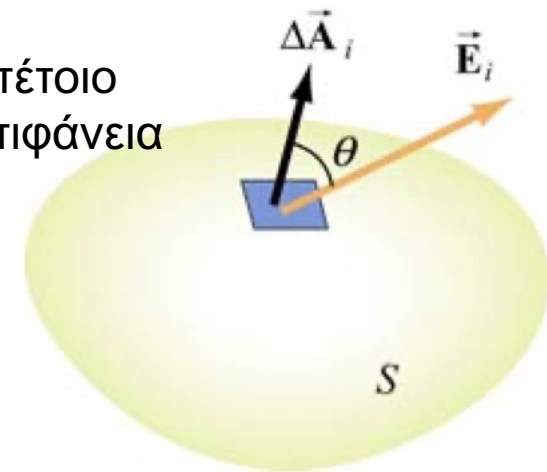
Θεωρούμε μια επιφάνεια κλειστή όταν περικλείει πλήρως έναν όγκο.

Για να υπολογίσουμε την ροή, θα πρέπει να χωρίσουμε την επιφάνεια σε έναν μεγάλο αριθμό στοιχειωδών επιφανειών  $\Delta\vec{A}_i = \Delta A_i \hat{n}_i$ .

Για κλειστή επιφάνεια, το κάθετο διάνυσμα  $\hat{n}_i$ , επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε να έχει την διεύθυνση που εξέρχεται από την επιφάνεια

Η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την στοιχειώδη επιφάνεια  $\Delta\vec{A}_i$  είναι:

$$\Delta\Phi_E = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i = E_i \Delta A_i \cos\theta$$



# Ηλεκτρική Ροή

Η ολική ροή που διέρχεται από την  $S$  βρίσκεται ολοκληρώνοντας ως προς όλες τις στοιχειώδεις επιφάνειες και λαμβάνοντας το όριο  $\Delta \vec{A} \rightarrow 0$ :

$$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \vec{E}_i \cdot d\vec{A}_i = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Το σύμβολο  $\oiint$  αναφέρεται σε ένα διπλό ολοκλήρωμα ως προς την κλειστή επιφάνεια  $S$ . Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αυτό θα πρέπει να καθορίσουμε αρχικά την επιφάνεια και κατόπιν να αθροίσουμε ως προς το γινόμενο  $\vec{E} \cdot d\vec{A}$

# Ο Νόμος του Gauss

Θεωρούμε ένα θετικό σημειακό φορτίο  $Q$ , το οποίο βρίσκεται στο κέντρο μιας σφαίρας ακτίνας  $r$ .

Το ηλεκτρικό πεδίο εξαιτίας του σημειακού φορτίου

$$\text{είναι: } \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

Το πεδίο έχει ακτινική διεύθυνση με φορά από το ηλεκτρικό φορτίο προς το άπειρο.

Θεωρούμε μια νοητική επιφάνεια που περικλείει το φορτίο  $Q$ .

➤ Ονομάζουμε την επιφάνεια αυτή ως «**Επιφάνεια Gauss**»

Σε σφαιρικές συντεταγμένες, η στοιχειώδης επιφάνεια πάνω

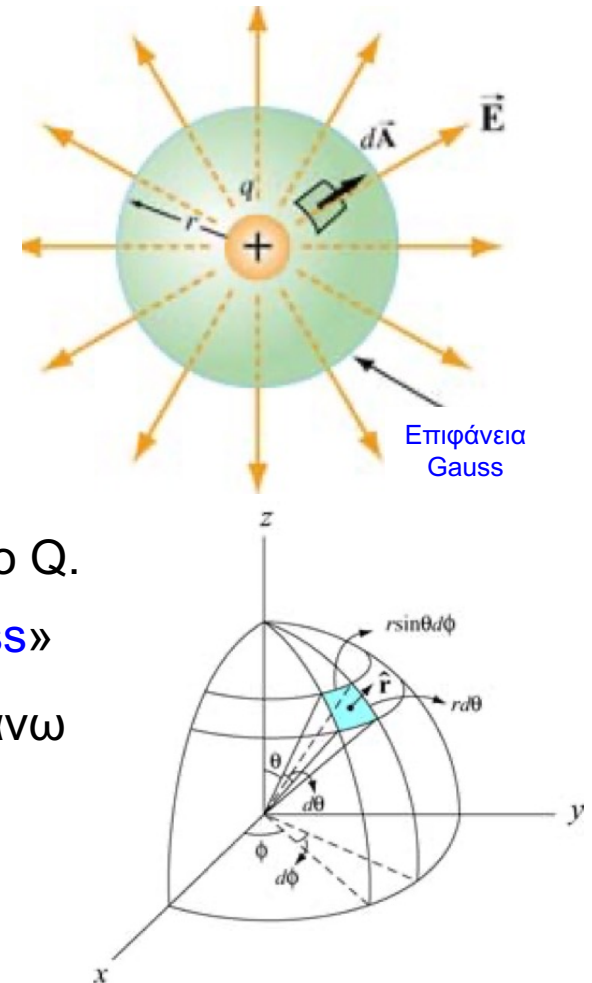
στην σφαίρα δίνεται από:  $d\vec{A} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r}$

Σαν αποτέλεσμα, η ολική ηλεκτρική ροή που διαπερνά τη στοιχειώδη επιφάνεια είναι:

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (r^2 \sin\theta d\theta d\phi) \Rightarrow d\Phi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (\sin\theta d\theta d\phi)$$

Η ολική ροή που διαπερνά την επιφάνεια της σφαίρας θα είναι:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \Phi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



# Ο Νόμος του Gauss

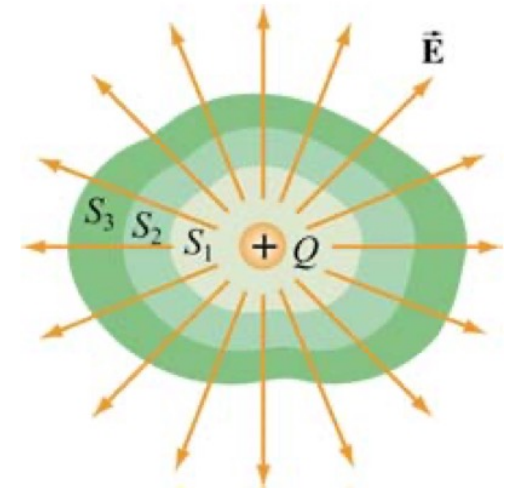
Θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα αν θεωρούσαμε ότι μια σφαίρα ακτίνας  $r$  έχει εμβαδό επιφάνειας  $4\pi r^2$ , και εφόσον το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο στην σφαιρική επιφάνεια είναι  $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$ , η ηλεκτρική ροή που περνά την επιφάνεια θα είναι:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oiint_S dA = EA \Rightarrow \Phi_E = \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) (4\pi r^2) \Rightarrow \Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Στον παραπάνω υπολογισμό θεωρήσαμε ως επιφάνεια Gauss, την επιφάνεια της σφαίρας. Ωστόσο, το είδος της κλειστής επιφάνειας Gauss που θεωρούμε μπορεί να είναι οποιοδήποτε.

Θα καταλήγαμε στο ίδιο αποτέλεσμα για την ολική ροή ανεξάρτητα του είδους της επιφάνειας που θα διαλέγαμε:

$$\Phi_E^{S_1} = \Phi_E^{S_2} = \Phi_E^{S_3} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



# Ο Νόμος του Gauss

## Νόμος Gauss

«Η συνολική ροή που διαπερνά μια κλειστή επιφάνεια  $S$  είναι ανάλογη του συνολικού φορτίου  $Q$  που περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια.»

Η μαθηματική διατύπωση του νόμου του Gauss είναι:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{ολ}^S}{\epsilon_0}$$

όπου  $q_{ολ}^S$  το ολικό φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια  $S$ .

Ένας απλός τρόπος να εξηγήσουμε γιατί ισχύει ο νόμος του Gauss είναι να θεωρήσουμε ότι το πλήθος των ηλεκτρικών γραμμών που εξέρχονται από το φορτίο είναι ανεξάρτητο από το είδος της νοητικής επιφάνειας Gauss που θα θεωρήσουμε ότι περικλείει το φορτίο



# Νόμος Gauss – ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα

1<sup>η</sup> περίπτωση:  $r \leq a$

Εφαρμογή του νόμου Gauss, δίνει:  $\Phi_E = E4\pi r^2 = \frac{q_{ολ.}^S}{\epsilon_0} \Rightarrow E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \left( \frac{r^3}{a^3} \right) \Rightarrow$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} r, \quad r \leq a$$

2<sup>η</sup> περίπτωση:  $r \geq a$

Στην περίπτωση αυτή η επιφάνεια Gauss είναι μία σφαίρα ακτίνας  $r \geq a$  που περικλείει όλο το φορτίο της σφαίρας.

Επομένως  $q_{ολ.}^S = Q$

Η ροή που διαπερνά την επιφάνεια Gauss είναι:  $\Phi_E = E4\pi r^2$

Εφαρμογή του νόμου Gauss, δίνει:  $\Phi_E = E4\pi r^2 = \frac{q_{ολ.}^S}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r \geq a$$

Το πεδίο έξω από την σφαίρα είναι σαν όλο το φορτίο της σφαίρας να είναι συγκεντρωμένο στο κέντρο της

