ΦΥΣ 331 – Χειμερινό Εξάμηνο 2019

Τελική Εξέταση

Τρίτη 07/12/2019 **Διάρκεια**: **10:00 – 14:00**

Σας δίνονται 10 ισοδύναμα προβλήματα και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλα.
Σύνολο μονάδων 100.

Καλή Επιτυχία

Μερικές χρήσιμες σχέσεις:

$$u_1(p) = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{p_z}{E+m} \\ \dfrac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_2(p) = N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \dfrac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \quad \upsilon_1(p) = N\begin{pmatrix} \dfrac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \dfrac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \upsilon_2(p) = N\begin{pmatrix} \dfrac{p_z}{E+m} \\ \dfrac{p_x+ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$N = \sqrt{E+m}$$

$$u_\uparrow(\theta,\varphi) = N\begin{pmatrix} c \\ se^{i\varphi} \\ \dfrac{p}{E+m}c \\ \dfrac{pe^{i\varphi}}{E+m}s \end{pmatrix} u_\downarrow(\theta,\varphi) = N\begin{pmatrix} -s \\ ce^{i\varphi} \\ \dfrac{p}{E+m}s \\ \dfrac{-pe^{i\varphi}}{E+m}c \end{pmatrix} \upsilon_\uparrow(\theta,\varphi) = N\begin{pmatrix} \dfrac{p}{E+m}s \\ \dfrac{-pe^{i\varphi}}{E+m}c \\ -s \\ ce^{i\varphi} \end{pmatrix} \upsilon_\downarrow(\theta,\varphi) = N\begin{pmatrix} \dfrac{p}{E+m}c \\ \dfrac{pe^{i\varphi}}{E+m}s \\ c \\ se^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

$c = \cos(\theta/2)$ και $s = \sin(\theta/2)$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},\ \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ -\sigma_\mu & 0 \end{pmatrix},\ \{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu},\ (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^\mu)^\dagger = -\gamma^\mu$$

1. [10μ]

Για τις ακόλουθες αλληλεπιδράσεις να αναφέρετε τον νόμο διατήρησης ή οποιαδήποτε άλλον μηχανισμό υπεύθυνο ώστε οι ακόλουθες διεργασίες είτε να μην παρατηρούνται ή να να έχουν πολύ μικρή ενεργό διατομή:

(i) $n \to \pi^+ + e^-$

(ii) $n \to p + e^-$

(iii) $\pi^+ \to e^+ + \nu_e$ (ως προς την διεργασία $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$)

(iv) $\Lambda^0 \to K^+ + K^-$

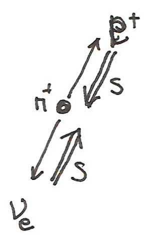
(v) $K_L^0 \to \pi^+ + \pi^-$

(i) $n \to \pi^+ + e^-$ Έχουμε παραβίαση του λεπτονικού και βαρυονικού αριθμού

(ii) $n \to p + e^-$ Έχουμε παραβίαση του λεπτονικού αριθμού και της στροφορμής

(iii) $\pi^+ \to e^+ + \nu_e$ Ο λόγος $\dfrac{\Gamma(\pi^+ \to e^+ \nu_e)}{\Gamma(\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu)} = \left(\dfrac{m_\pi^2 - m_{e^+}^2}{m_\pi^2 - m_{\mu^+}^2}\right)^2 \left(\dfrac{m_{e^+}}{m_{\mu^+}}\right)^2 = 1.2 \times 10^{-4}$

$\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$



Η διάσπαση προχωρεί μέσω των ασθενών αλληλεπιδράσεων που απαιτεί διαφορετική χειραλικότητα για τα λεπτόνια. Το π^+ έχει spin 0 και επομένως τα spins των λεπτονίων πρέπει να είναι αντίθετα όπως και οι ορμές τους για να διατηρήσουν την ορμή.
Η αλληλεπίδραση απαιτεί LH χειραλικότητα για το νετρίνο (μηδενική μάζα) και RH χειραλικότητα για το e^+ ή μ^+.
Για την περίπτωση της $\pi^+ \to e^+ \nu_e$ το ηλεκτρόνιο είναι ρελατιβιστικό και $m_{e^+} \simeq 0$ οπότε η ελικότητα και χειραλικότητα είναι ίδιες οπότε το e^+ έχει LH helicity και χειραλικότητα που δεν μπορεί να αλλάξει. Για το μ^+ στην $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$ το μιόνιο έχει $m \simeq E$ οπότε η LH helicity έχει και συνιστώσα RH χειραλικότητας και η διάσπαση μπορεί να προχωρήσει.

(iv) $\Lambda^0 \to K^+ + K^-$ Παραβίαση βαρυονικού αριθμού

(v) $K_L^0 \to \pi^+ \pi^-$ Παραβίαση της CP

2. [**10μ**]

(**α**) Εξηγήστε τους λόγους για τους οποίους οι ακόλουθες διεργασίες επιτρέπονται ή απαγορεύονται: [**3μ**]

(i) $p+\pi^- \to K^- + \Sigma^+$

(ii) $d+d \to {}^4He+\pi^0$

(iii) $K^- + p \to \Xi^- + K^+$

(**β**) Ποιος είναι ο λόγος των ενεργών διατομών των διεργασιών: $\sigma\left(p+p \to \pi^+ + d\right)/\sigma\left(n+p \to \pi^0 + d\right)$ στην ίδια ενέργεια κέντρου μάζας; [**7μ**]

(i) $p+\pi^- \to K^- + \Sigma^+$: η διεργασία απαγορεύεται γιατί έχουμε

$$\Delta I_3 = \left(-\tfrac{1}{2}\right) + (+1) - (-1) - \tfrac{1}{2} = 1 \neq 0$$

$$\Delta S = (-1) + (-1) - 0 - 0 = -2 \neq 0$$

(ii) $d+d \to {}^4He + \pi^0$: η διεργασία απαγορεύεται γιατί: $I(d) = I({}^4He) = 0$

$I(\pi^0) = 1$ και επομένως $\Delta I = 1 \neq 0$.

(iii) $K^- + p \to \Xi^- + K^+$: η διεργασία επιτρέπεται από τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις γιατί διατηρούνται το Q, I, I_3 και S

(β) Η διαφορά στην ενεργό διατομή μεταξύ των δύο διεργασιών: $p+p \to \pi^+ + d$ και $n+p \to \pi^0 + d$ σχετίζεται με το isospin. Γράφοντας τις καταστάσεις με βάση το isospin θα έχουμε:

$$|pp\rangle = \left|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle \left|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle = |1, 1\rangle$$

$$|\pi^+ d\rangle = |1, 1\rangle |0, 0\rangle = |1, 1\rangle$$

$$|np\rangle = \left|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle \left|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |0, 0\rangle$$

$$|\pi^0 d\rangle = |1, 0\rangle |0, 0\rangle = |1, 0\rangle$$

Επομένως το πινακοστοιχείο για την διεργασία $pp \to \pi^+ d$ θα είναι:

$$\langle \pi^+ d | \hat{H} | pp \rangle = \langle 1, 1 | \hat{H} | 1, 1 \rangle = \langle 1 | \hat{H} | 1 \rangle = \alpha_1$$

Αντίστοιχα για την διεργασία $np \to \pi^0 d$ θα είναι:

$$\langle \pi^0 d|\hat{H}|np\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1,0|\hat{H}|1,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\cancel{\langle 1,0|\hat{H}|0,0\rangle}}_{0} = \frac{a_1}{\sqrt{2}}$$

Επομένως $$\frac{\sigma(pp\to\pi^+ d)}{\sigma(np\to\pi^0 d)} = \frac{|\langle \pi^+ d|\hat{H}|pp\rangle|^2}{|\langle \pi^0 d|\hat{H}|np\rangle|^2} = \frac{a_1^2}{a_1^2/2} = 2$$

3. [**10μ**]

Ένα σωματίδιο X έχει δύο κανάλια διάσπασης με μερικά πλάτη διάσπασης γ_1 (sec^{-1}) και γ_2 (sec^{-1}).

(**α**) Ποιά η ενδογενής αβεβαιότητα στη μάζα του σωματιδίου X; [**4μ**]

(**β**) Μία από τις διασπάσεις του X είναι η διεργασία $X \to \pi^+ + \pi^+$ που πραγματοποιείται μέσω των ισχυρών αλληλεπιδράσεων. Τι μπορείτε να συμπεράνετε για το ισοτοπικό σπιν του σωματιδίου X; [**6μ**]

(α) Ο ολικός ρυθμός διάσπασης του σωματιδίου X είναι: $\lambda = \gamma_1 + \gamma_2$

Επομένως ο μέσος χρόνος ζωής θα είναι: $\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\gamma_1+\gamma_2}$

Η ενδογενής αβεβαιότητα στη μάζα του σωματιδίου, είναι Γ, και δίνεται από την αρχή της αβεβαιότητος: $\Gamma\tau \sim \hbar \Rightarrow \boxed{\Gamma \simeq \frac{\hbar}{\tau} = \hbar(\gamma_1+\gamma_2)}$

(β) Η διάσπαση του $X \to \pi^+\pi^+$ γίνεται μέσω των ισχυρών αλληλεπιδράσεων οι οποίες διατηρούν το isospin. Το π^+ έχει isospin $I = 1$ και $I_3 = 1$

Επομένως η τελική κατάσταση έχει $I = 2$ και άρα το X έχει isospin 2.

4. [10μ]

Οι καταστάσεις $\left|K^0\right\rangle$ και $\left|\bar{K}^0\right\rangle$ των ουδέτερων K-μεσονίων, μπορούν να γραφούν ως γραμμικός συνδυασμός των καταστάσεων $\left|K_L\right\rangle$ και $\left|K_s\right\rangle$: $\left|K^0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|K_L\right\rangle + \left|K_s\right\rangle\right)$ και $\left|\bar{K}^0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|K_L\right\rangle - \left|K_s\right\rangle\right)$. Οι καταστάσεις $\left|K_L\right\rangle$ και $\left|K_s\right\rangle$ να αντιστοιχούν σε συγκεκριμένους χρόνους ζωής $\tau_{K_L} = \frac{1}{\gamma_{K_L}}$ και $\tau_{K_s} = \frac{1}{\gamma_{K_s}}$ και συγκεκριμένες αλλά διαφορετικές μάζες $m_{K_L}c^2 \neq m_{K_s}c^2$. Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$, παράγεται ένα μεσόνιο στην κατάσταση $\left|\psi(t=0)\right\rangle = \left|K^0\right\rangle$. Έστω ότι μετά από χρόνο t, η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση $\left|K^0\right\rangle$ είναι $P_0(t)$ και η πιθανότητα να βρεθεί στην κατάσταση $\left|\bar{K}^0\right\rangle$ είναι $\bar{P}_0(t)$. Βρείτε μία σχέση για την διαφορά $P_0(t) - \bar{P}_0(t)$ συναρτήσει των γ_{K_L}, γ_{K_s}, $m_{K_L}c^2$ και $m_{K_s}c^2$. Θεωρήστε ότι η CP διατηρείται.

Την χρονική στιγμή t η κατάσταση είναι:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle = e^{-iHt}|K^0\rangle = e^{-iHt}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K_L\rangle + |K_s\rangle\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-im_{K_L}t - \gamma_{K_L}t/2}|K_L\rangle + e^{-im_{K_s}t - \gamma_{K_s}t/2}|K_s\rangle\right]$$

όπου οι παράγοντες $e^{-\gamma_{K_s}t/2}$ και $e^{-\gamma_{K_L}t/2}$ περιγράφουν την εξασθένιση της κυματοσυνάρτησης:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{e^{-im_{K_L}t - \gamma_{K_L}t/2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle\right) + e^{-im_{K_s}t - \gamma_{K_s}t/2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle\right)\right\} \Rightarrow$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\left\{\left[e^{-im_{K_L}t - \gamma_{K_L}t/2} + e^{-im_{K_s}t - \gamma_{K_s}t/2}\right]|K^0\rangle + \left[e^{-im_{K_L}t - \gamma_{K_L}t/2} - e^{-im_{K_s}t - \gamma_{K_s}t/2}\right]|\bar{K}^0\rangle\right\}$$

Επομένως $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = P_0(t) + \bar{P}_0(t)$ όπου:

$$P_0(t) = \frac{1}{4}\left\{e^{-\gamma_{K_L} t} + e^{-\gamma_{K_S} t} + 2e^{-(\gamma_{K_L}+\gamma_{K_S})t/2}\cos\left[(m_{K_L}-m_{K_S})t\right]\right\}$$ και

$$\bar{P}_0(t) = \frac{1}{4}\left\{e^{-\gamma_{K_L} t} + e^{-\gamma_{K_S} t} - 2e^{-(\gamma_{K_L}+\gamma_{K_S})t/2}\cos\left[(m_{K_L}-m_{K_S})t\right]\right\}$$

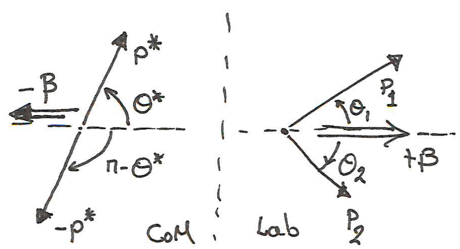
Από τις δύο προηγούμενες εξισώσεις έχουμε: $\boxed{P_0(t) - \bar{P}_0(t) = e^{-(\gamma_{K_L}+\gamma_{K_S})t/2}\cos\left[(m_{K_L}-m_{K_S})t\right]}$

5. [**10μ**]

(**α**) Προσδιορίστε την μικρότερη και μεγαλύτερη γωνία μεταξύ δύο σωματιδίων μηδενικής μάζας τα οποία παράγονται κατά τη διάσπαση ενός σωματιδίου μάζας m και ορμής $\vec{p}$. [**8μ**]

(**β**) Ένα ηλεκτρομαγνητικό καλορίμετρο μπορεί να ξεχωρίσει ηλεκτρομαγνητικές καταιγίδες που προκαλούνται από φωτόνια μεγάλης ενέργειας, όταν η γωνιακή απόσταση των δύο καταιγίδων είναι μεγαλύτερη από 5^o. Το καλορίμετρο χρησιμοποιείται για την ανίχνευση π^0. Ποια είναι η μέγιστη ενέργεια που μπορεί να έχουν τα π^0, ώστε οποιαδήποτε π^0 διάσπαση να μπορεί να ανακατασκευαστεί ως ζεύγος φωτονίων. [**2μ**]

(α)



Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας, τα δύο σωματίδια, (προϊόντα διάσπασης) έχουν ορμή $\vec{p}^*$ και $-\vec{p}^*$ και ενέργεια $E^* = \frac{m}{2} = |\vec{p}^*|$

Επιλέγουμε το σύστημα συντεταγμένων ώστε ο x-άξονας να βρίσκεται στη διεύθυνση της ορμής $\vec{P}$ του διασπώμενου σωματιδίου και ότι η διάσπαση λαμβάνει χώρα στο x-y επίπεδο. Έστω ότι Θ^* η πολική γωνία του ενός από τα προϊόντα διάσπασης το οποίο κινείται στην +y-διεύθυνση, και επομένως το άλλο σωματίδιο θα σχηματίζει γωνία $\pi-\Theta^*$.

Το σύστημα αναφοράς του ΚΜ κινείται με ταχύτητα $\beta = \frac{|\vec{p}|}{E_p}$ ως προς το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.

Οι συνιστώσες της ορμής στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου θα είναι:

$$E_{1,2} = \gamma\left(E^* \pm \beta|\vec{p}^*|\cos\Theta^*\right) = \gamma\left(1 \pm \beta\cos\Theta^*\right)E^* \qquad (1)$$

$$P^x_{1,2} = \gamma\left(\beta E^* \pm |\vec{p}^*|\cos\Theta^*\right) = \gamma\left(\beta \pm \cos\Theta^*\right)E^* \qquad (2)$$

$$P^y_{1,2} = |\vec{p}^*|\sin\Theta^* \qquad (3)$$

Αλλά $$\boxed{\tan\Theta^* = \frac{P^x_{1,2}}{P^y_{1,2}} = \frac{\sin\Theta^*}{\gamma(\beta \pm \cos\Theta^*)}} \qquad (4)$$

Εκφράζουμε τις γωνίες πτήσης θ_1 και θ_2 συναρτήσει της γωνίας θ^*.

Παρατηρούμε ότι $\cos\theta_{1,2} = \dfrac{p^x_{1,2}}{E_{1,2}}$ και επομένως θα έχουμε από τις (1)&(2)

$$\cos\theta_1 = \frac{\beta+\cos\theta^*}{1+\beta\cos\theta^*} \quad , \quad \sin\theta_1 = \frac{\sin\theta^*}{\gamma(1+\beta\cos\theta^*)}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\beta-\cos\theta^*}{1-\beta\cos\theta^*} \quad , \quad \sin\theta_2 = \frac{\sin\theta^*}{\gamma(1-\beta\cos\theta^*)}$$

Έστω $\phi = \theta_1+\theta_2$ οπότε: $\cos\phi = \cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \Rightarrow$

$$\cos\phi = \frac{\beta^2-\cos^2\theta^*}{1-\beta^2\cos^2\theta} - (1-\beta^2)\frac{\sin^2\theta^*}{1-\beta^2\cos^2\theta^*} = \frac{2\beta^2-1-\beta^2\cos^2\theta^*}{1-\beta^2\cos^2\theta^*} = 1-2\left(\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2\cos^2\theta^*}\right)$$

Η τελευταία εξίσωση δίνει τα όρια της γωνίας ϕ. Η μέγιστη γωνία, ϕ_{max}, υπάρχει για $\cos^2\theta^*=1$ ενώ η ελάχιστη γωνία, ϕ_{min}, υπάρχει όταν $\cos^2\theta^*=0$.
Επομένως θα έχουμε:

$$\cos(\phi_{max}) = \min_{\theta^*}(\cos\phi) = 1-2\left.\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2\cos^2\theta^*}\right|_{\cos^2\theta^*=1} \Rightarrow \cos(\phi_{max}) = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_{max} = \pi = \phi(\theta^*=0,\pi)}$$

$$\cos(\phi_{min}) = \max_{\theta^*}(\cos\phi) = 1-2\left.\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2\cos^2\theta^*}\right|_{\cos^2\theta^*=0} \Rightarrow \cos(\phi_{min}) = 2\beta^2-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_{min} = \phi\left(\theta^*=\frac{\pi}{2}\right) = \arccos(2\beta^2-1) = 2\arccos(\beta)}$$

Αν η ορμή $\vec{p}$ του διασπώμενου σωματιδίου είναι πολύ μεγαλύτερη της μάζας του: $|\vec{p}| \gg m$ τότε $\beta \simeq 1$ και τότε ϕ_{min} είναι πολύ μικρή. Μπορούμε τότε να πάρουμε από ανάπτυγμα Taylor του $\cos\phi_{min}$: $2\beta^2-1 = \cos(\phi_{min}) \simeq 1-\dfrac{\phi^2_{min}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\phi^2_{min} = 4(\beta^2-1) \Rightarrow \phi_{min} = 2\sqrt{1-\beta^2} \Rightarrow \boxed{\phi_{min} = \frac{2}{\gamma}} \text{ για } \beta\simeq 1$$

Για μεγάλες ωθήσεις, η γωνία μεταξύ των προϊόντων διάσπασης βρίσκεται στο διάστημα τιμών $[2/\gamma, \pi]$.

(β) Η διακριτική ικανότητα θέσης του καλοριμέτρου είναι αρκετά μικρή, αφού αντιστοιχεί σε 5°.

Μπορούμε επομένως να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα: $\phi_{min} = \frac{2}{\gamma} = \frac{2m_{\pi^0}}{E} > 5^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E < \frac{2m_{\pi^0}}{5^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}} = \frac{2m_{\pi^0} \leftarrow 135\,\text{MeV}}{0.87 \cdot 10^{-1}} \Rightarrow \boxed{E < 3.1\ \text{GeV}}$$

6. [**10μ**]

(**α**) Το μποζόνιο Higgs ανακαλύφθηκε στον LHC του CERN το 2012.

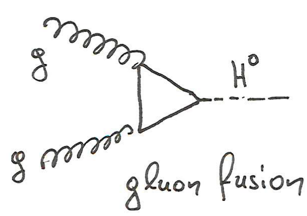
(i) Σχεδιάστε τα δύο βασικά διαγράμματα παραγωγής του. [**2μ**]

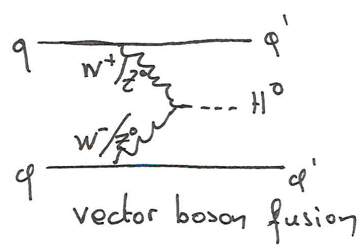
(ii) Αναφέρετε τρεις βασικές διεργασίες διάσπασής του εκτός αυτής μέσω ζεύγους φωτονίων και ζεύγους Z μποζονίων και περιγράψτε τη σημασία τους στη φυσική του Higgs μποζονίου και τους λόγους που κατά τη γνώμη σας είναι περισσότερο δύσκολη ανίχνευσή τους. [**3μ**]

(**β**) Ο ρυθμός διάσπασης ενός Higgs μποζονίου σε ζεύγος φερμιονίων μπορεί να γραφεί: $\Gamma = \frac{p^*}{8\pi m_H^2}\left\langle M_{fi}\right\rangle^2$, όπου p^* είναι η ορμή στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας, m_H είναι η μάζα του Higgs και $\left\langle M_{fi}\right\rangle$ είναι το πινακοστοιχείο που περιγράφει τη διεργασία και δίνεται από τη σχέση: $\left\langle M_{fi}\right\rangle = \frac{g_W m_f p^*}{m_W}$, όπου m_W είναι η μάζα του W, m_f είναι η μάζα του φερμιονίου και g_W είναι η σταθερά σύζευξης των ασθενών αλληλεπιδράσεων.

Να δείξετε ότι ο ρυθμός διάσπασης $H \to f\bar{f}$ δίνεται από τη σχέση: $\Gamma = N_c\left(\frac{G_F m_f^2 m_H}{4\sqrt{2}\pi}\right)\left(1-\frac{4m_f^2}{m_H^2}\right)^{\frac{3}{2}}$, όπου $G_F = 1.2\times10^{-3}GeV^{-2} = \sqrt{2}\,g_W^2/8m_W^2$ η σταθερά Fermi και N_c ο αριθμός των χρωμάτων. Εξηγήστε τι θα πρέπει να θεωρήσετε ώστε να λάβετε υπόψη στον υπολογισμό σας το spin και το χρώμα. Δίνεται ότι $\hbar = 6.6\times10^{-23}GeV\sec$. [**5μ**]

(i)





(ii) Το μποζόνιο Higgs μπορεί να διασπαστεί: $H^0 \to W^+W^{-*}$

$H^0 \to b\bar{b}$, $H^0 \to \tau^-\tau^+$

1. Η πρώτη διεργασία μπορεί να παρατηρηθεί μέσω της διάσπασης των W σε λεπτόνια και νετρίνο. Ωστόσο η διεργασία έχει μεγάλο υπόβαθρο από διασπάσεις $t\bar{t} \to W^-W^+b\bar{b}$ και απευθείας παραγωγή ζεύγους W^+W^-
2. Η δεύτερη διεργασία, $H^0 \to b\bar{b}$, έχει πολύ μεγάλο υπόβαθρο από διεργασίες QCD που έχουν πολύ υψηλές ενεργές διατομές, αλλά και

από παραγωγή και διάσπαση $t\bar{t} \to W^+W^-b\bar{b}$.

3. Η διάσπαση σε ζεύγος δύο τ-λεπτονίων, $H^0 \to \tau^+\tau^-$, μπορεί να ανιχνευτεί από την αναγνώριση τ-jets αλλά και στην περίπτωση αυτή τα τ-jets είναι δύσκολο να αναγνωριστούν και δέχονται μεγάλο υπόβαθρο από QCD jets (quark και gluon jets) που μιμούνται τα χαρακτηριστικά των τ-jets.

(β) Θεωρούμε τον αριθμό των τελικών καταστάσεων που μπορούμε να έχουμε:

Τα φερμιόνια έχουν spin $\frac{1}{2}$ ενώ το Higgs έχει spin 0 και επομένως για να διατηρηθεί η στροφορμή, θα πρέπει να υπάρχουν μόνο δύο δυνατές διατάξεις. Αυτή με τα spins αντιπαράλληλα. (up-down & down-up)

Επίσης μπορούμε να έχουμε έναν παράγοντα N_c που αναφέρεται στο χρώμα, όπου N_c είναι ο αριθμός των χρωμάτων.

Επομένως μπορούμε να γράψουμε τον ρυθμό διάσπασης με τη μορφή:

$$\Gamma = \frac{p^*}{4\cancel{8}\pi m_H^2} M_{fi}^2 \times \cancel{2} \times N_c \Rightarrow \Gamma = \frac{p^*}{4\pi m_H^2}\,\frac{g_W^2 m_f^2 p^{*2}}{m_W^2} N_c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma = \frac{g_W^2 m_f^2 p^{*3}}{m_W^2\, 4\pi m_H^2} N_c}$$

Ξέρουμε ότι: $\frac{G_F}{\sqrt{2}} = g_W^2/8m_W^2$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma = \frac{2G_F m_f^2 (p^*)^3}{\sqrt{2}\,\pi\, m_H^2} N_c} \quad (A)$$

Υπολογίζουμε την ορμή p^* στο σύστημα αναφοράς του ΚΜ. Στο σύστημα αυτό, η ενέργεια κάθε προϊόντος θα είναι: $E^* = \frac{m_H}{2} \Rightarrow (E^*)^2 = \frac{m_H^2}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (p^*)^2 + m_f^2 = \frac{m_H^2}{4} \Rightarrow (p^*)^2 = \frac{m_H^2}{4} - m_f^2 \Rightarrow p^* = \sqrt{\frac{m_H^2}{4} - m_f^2}$$

Αντικατάσταση στην (A) θα δώσει:

$$\Gamma = N_c \frac{2G_F m_f^2}{\sqrt{2}\,\pi\, m_H^2}\left(\frac{m_H^2}{4} - m_f^2\right)^{3/2} = N_c \frac{2G_F m_f^2}{\sqrt{2}\,\pi\, \cancel{m_H^2}} \cancel{m_H^3}\left(\frac{1}{4} - \frac{m_f^2}{m_H^2}\right)^{3/2} \Rightarrow$$

$$\Gamma = N_c \frac{\cancel{2}G_F m_f^2 m_H}{\sqrt{2}\,\pi} \frac{1}{4\cancel{8}}\left(1 - \frac{4m_f^2}{m_H^2}\right)^{3/2} \Rightarrow \boxed{\Gamma = N_c \frac{G_F m_f^2 m_H}{4\sqrt{2}\,\pi}\left(1 - \frac{4m_f^2}{m_H^2}\right)^{3/2}}$$

7. [**10μ**]

Αν δράσουμε στην εξίσωση Dirac $\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\psi=0$ με $\gamma^{\nu}\partial_{\nu}$, δείξτε ότι οι συνιστώσες της ψ ικανοποιούν την εξίσωση Klein-Gordon: $\left(\partial^{\mu}\partial_{\mu}+m^{2}\right)\psi=0$.

Ξεκινούμε από την εξίσωση Dirac και δρούμε με $\gamma^{\nu}\partial_{\nu}$:

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\psi=0 \Rightarrow \left(i\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\partial_{\nu}\partial_{\mu}-\gamma^{\nu}\partial_{\nu}m\right)\psi=0 \xRightarrow{\times i}$$

$$\left(-\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\partial_{\nu}\partial_{\mu}-i\gamma^{\nu}\partial_{\nu}m\right)\psi=0 \Rightarrow -\left(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\partial_{\nu}\partial_{\mu}+i\gamma^{\nu}\partial_{\nu}m\right)\psi=0$$

Αλλά $i\gamma^{\nu}\partial_{\nu}\psi=m\psi$ αφού ικανοποιείται η εξίσωση Dirac.

Επομένως γράφουμε: $\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\partial_{\nu}\partial_{\mu}\psi+m^{2}\psi=0$

Αλλά ξέρουμε ότι $\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}=\frac{1}{2}\left(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}+\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right)=g^{\mu\nu}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(g^{\mu\nu}\partial_{\nu}\partial_{\mu}+m^{2}\right)\psi=0 \Rightarrow \boxed{\left(\partial^{\mu}\partial_{\mu}+m^{2}\right)\psi=0}$$ Klein-Gordon

8. [10μ]

Δείξτε ότι αν $\hat{P}$ είναι ο τελεστής της parity, τότε $\hat{P}u_{\uparrow}(\theta,\varphi)=u_{\downarrow}(\pi-\theta,\pi+\varphi)$. Σχολιάστε το αποτέλεσμα σχετικά με το αποτέλεσμα της δράσης του τελεστή της parity σε ένα LH ή RH σωματίδιο.

Στην αναπαράσταση Dirac-Pauli θα έχουμε:

$$\hat{P}=\gamma^0=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \quad \text{και} \quad u_{\uparrow}(\theta,\phi)=\sqrt{E+m}\begin{pmatrix}c\\ se^{i\phi}\\ \frac{p}{E+m}c\\ \frac{p}{E+m}se^{i\phi}\end{pmatrix}$$

Δρώντας με τον τελεστή της parity στην $u_{\uparrow}$ έχουμε:

$$\hat{P}u_{\uparrow}(\theta,\phi)=\sqrt{E+m}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\ se^{i\phi}\\ \frac{p}{E+m}c\\ \frac{p}{E+m}se^{i\phi}\end{pmatrix} \Rightarrow \hat{P}u_{\uparrow}(\theta,\phi)=\sqrt{E+m}\begin{pmatrix}c\\ se^{i\phi}\\ -\frac{p}{E+m}c\\ -\frac{p}{E+m}se^{i\phi}\end{pmatrix}$$

Εξετάζουμε την περίπτωση του $u_{\downarrow}(\pi-\theta,\pi+\phi)$.

$$u_{\downarrow}(\pi-\theta,\pi+\phi)=\sqrt{E+m}\begin{pmatrix}-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i(\phi+\pi)}\\ \frac{p}{E+m}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\\ \frac{p}{E+m}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i(\phi+\pi)}\end{pmatrix}=\sqrt{E+m}\begin{pmatrix}-c\\ -se^{i\phi}\\ \frac{p}{E+m}c\\ \frac{p}{E+m}se^{i\phi}\end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε επομένως ότι $\hat{P}u_{\uparrow}(\theta,\phi)=u_{\downarrow}(\pi-\theta,\pi+\phi)e^{i\pi}$ όπου $e^{i\pi}$ είναι μια γενική φάση.

Ο τελεστής της parity δρώντας στην ορμή του σωματιδίου $\vec{p}$ την μετατρέπει σε $-\vec{p}$, αλλά αφήνει τον προσανατολισμό του σπιν αμετάβλητο στο χώρο. Σαν αποτέλεσμα, ένα RH σωματίδιο μετασχηματίζεται σε ένα LH σωματίδιο το οποίο κινείται στην αντίθετη διεύθυνση.

9. [**10μ**]

(**α**) Δείξτε ότι ο τελεστής της helicity μπορεί να γραφεί στη μορφή: $\hat{h}=-\frac{1}{2}\frac{\gamma^0\gamma^5\vec{\gamma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}$. [**5μ**]

(**β**) Δείξτε ότι οι χειραλικοί τελεστές προβολής: $P_R=\frac{1}{2}(1+\gamma^5)$ και $P_L=\frac{1}{2}(1-\gamma^5)$ ικανοποιούν τις σχέσεις: $P_R+P_L=1$, $P_RP_R=P_R$, $P_LP_L=P_L$ και $P_LP_R=0$. [**5μ**]

(α) Στην αναπαράσταση Dirac-Pauli έχουμε:

$$\hat{S}_k=\frac{1}{2}\hat{\Sigma}_k=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma_k & 0\\ 0 & \sigma_k\end{pmatrix},\quad \gamma^k=\begin{pmatrix}0 & \sigma_k\\ -\sigma_k & 0\end{pmatrix},\quad \gamma^0=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix} \text{ και } \gamma^5=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}$$

όπου $k=1,2,3$ είναι οι συνιστώσες του τελεστή spin για ένα Dirac spinor.

Από τη σχέση που μας δίνεται έχουμε: $-\frac{1}{2}\gamma^0\gamma^5\gamma^k=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \sigma_k\\ -\sigma_k & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\gamma^0\gamma^5\gamma^k=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \sigma_k\\ -\sigma_k & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma_k & 0\\ 0 & \sigma_k\end{pmatrix}\Rightarrow -\frac{1}{2}\gamma^0\gamma^5\gamma^k=\hat{S}_k$$

Επομένως $\hat{h}=-\frac{1}{2}\frac{\gamma^0\gamma^5\gamma\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}=\frac{\hat{S}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}$ που δίνει την προβολή του spin ενός σωματιδίου στη διεύθυνση κίνησης του σωματιδίου.

(β) Έχουμε ότι $P_R=\frac{1}{2}(1+\gamma^5)$ και $P_L=\frac{1}{2}(1-\gamma^5)$

(i) $P_R+P_L=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\gamma^5+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\gamma^5\Rightarrow \boxed{P_R+P_L=1.}$

(ii) $P_RP_R=\frac{1}{4}(1+\gamma^5)(1+\gamma^5)=\frac{1}{4}\left(1+2\gamma^5+(\gamma^5)^2\right)=\frac{1}{4}(1+2\gamma^5+1)\Rightarrow$

$\Rightarrow P_RP_R=\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\Rightarrow \boxed{P_RP_R=P_R}$

(iii) $P_LP_L=\frac{1}{4}(1-\gamma^5)(1-\gamma^5)=\frac{1}{4}\left(1-2\gamma^5+(\gamma^5)^2\right)=\frac{1}{4}(1-2\gamma^5+1)\Rightarrow$

$\Rightarrow P_LP_L=\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\Rightarrow \boxed{P_LP_L=P_L}$

(iv) $P_LP_R=\frac{1}{4}(1-\gamma^5)(1+\gamma^5)=\frac{1}{4}\left(1-\cancel{\gamma^5}+\cancel{\gamma^5}-(\gamma^5)^2\right)=\frac{1}{4}(1-1)\Rightarrow \boxed{P_LP_R=0}$

10. [**10μ**]

Θεωρήστε το απλό μοντέλο ABC και την ελαστική σκέδαση $A+B \rightarrow A+B$ στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου (το σωματίδιο B είναι αρχικά ακίνητο) και υποθέστε ακόμα ότι η αρχική ενέργεια E_1 του προσπίπτοντος σωματιδίου A ικανοποιεί τη σχέση $E_1 \ll m_B$, έτσι ώστε η ανάκρουση του στόχου μπορεί να αγνοηθεί.

(**α**) Χρησιμοποιήστε τον χρυσό κανόνα Fermi για σκέδαση για να δείξετε ότι η ενεργός διατομή σκέδασης δίνεται από τη σχέση: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|M|^2}{(8\pi m_B)^2}$. [**2μ**]

(**β**) Γράψτε τα διαγράμματα χαμηλότερης τάξης για την διεργασία σκέδασης στο ABC μοντέλο. [**2μ**]

(**γ**) Υπολογίστε το πλάτος της σκέδασης χρησιμοποιώντας τους κανόνες Feynman στο ABC μοντέλο. Να εκφράσετε το αποτέλεσμά σας χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές Mandelstam *s*, *t* και/ή u ανάλογα αν είναι σχετικές στο πρόβλημα. [**2μ**]

(**δ**) Συνδυάστε τα αποτελέσματά σας από τα ερωτήματα (**α**) έως (**γ**) για να βρείτε την διαφορική ενεργό διατομή (στο όριο $E_1 \ll m_B$ και υποθέτοντας ότι m_A και m_C είναι πολύ μικρές ως προς την m_B). [**2μ**]

(**ε**) Δείξτε ότι η ολική ενεργός διατομή δίνεται από τη σχέση $\sigma = g^4/(4\pi m_B^6)$ κάτω από τις συνθήκες που τέθηκαν στο ερώτημα (**δ**). [**2μ**]

(α) Όπως ξέρουμε από τις διαλέξεις, για σκέδαση $2\rightarrow 2$, η ενεργός διατομή δίνεται από την σχέση:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{S|M_{fi}|^2}{(8\pi)^2(E_1+E_2)^2}\frac{|p_f|}{|p_i|}$$ στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας

Αλλά στο COM το σωματίδιο B του στόχου δεν κινείται, αφού η μάζα του είναι πολύ μεγαλύτερη του σωματιδίου A.

Αυτό μπορεί να δειχθεί, μετασχηματίζοντας από το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας:

<u>Σύστημα εργαστηρίου</u>	<u>Σύστημα κέντρου μάζας</u>
Σωματίδιο B: $(m_B, 0)$	Σωματίδιο B: $(\gamma m_B, -\gamma\beta m_B)$
Σωματίδιο A: (E, p)	Σωματίδιο A: $(\gamma E - \gamma\beta p, \gamma p - \gamma\beta E)$

Στο COM $\vec{p}_B + \vec{p}_A = \vec{0} \Rightarrow -\cancel{\gamma}\beta m_B + \cancel{\gamma}p - \cancel{\gamma}\beta E = 0 \Rightarrow p = \beta(E+m_B)$

$$\Rightarrow \beta = \frac{p}{(E+m_B)}$$

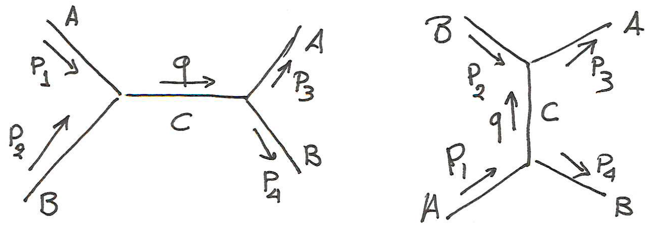
Για $m_B \gg E$ (και $m_B \gg p$) παίρνουμε ότι $\beta \sim 0$.

Επομένως το σωματίδιο A σκεδάζεται από το σωματίδιο B και η ορμή του ως προς το μέτρο δεν αλλάζει, ανεξαρτήτως του συστήματος αναφοράς.

Θα έχουμε: $|p_f| = |p_i|$ και $(E_A + m_B)^2 \simeq m_B^2$ ενώ $S=1$

Η διαφορική ενεργός διατομή επομένως γίνεται: $\boxed{\dfrac{d\sigma}{d\Omega} = \dfrac{|M_{fi}|^2}{(8\pi)^2 m_B^2}}$ (A)

(β) Υπάρχουν δύο διαγράμματα που συνεισφέρουν στη σκέδαση:



Δεν υπάρχει u-διάγραμμα εφόσον τα σωματίδια A, B δεν είναι όμοια

(γ) Εξετάζουμε το s-κανάλι πρώτα (το διάγραμμα αριστερά)

$$M_s = i\int (ig)^2 \left(\frac{i}{q^2-m_c^2}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(\vec{p}_1+\vec{p}_2-\vec{q})(2\pi)^4\delta^{(4)}(\vec{q}-\vec{p}_3-\vec{p}_4)\frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M_s = \frac{g^2}{(p_1+p_2)^2-m_c^2}} \quad (1)$$

Εξετάζουμε το t-κανάλι:

$$M_t = i\int (ig)^2 \left(\frac{i}{q^2-m_c^2}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(\vec{p}_1-\vec{p}_4-\vec{q})(2\pi)^4\delta^{(4)}(\vec{p}_2+\vec{q}-\vec{p}_3)\frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M_t = \frac{g^2}{(p_1-p_4)^2-m_c^2}} \quad (2)$$

Επομένως αθροίζουμε τις δύο συνεισφορές: $M = M_t + M_s = g^2\left(\dfrac{1}{(p_1-p_4)^2-m_c^2}+\dfrac{1}{(p_1+p_2)^2-m_c^2}\right)$

Αλλά $s=(p_1+p_2)^2$ και $t=(p_1-p_4)^2$

Αντικαθιστώντας θα έχουμε: $\boxed{M = g^2\left(\dfrac{1}{t-m_c^2}+\dfrac{1}{s-m_c^2}\right)}$ (B)

(δ) Έχουμε ότι $E_1 \ll m_B$ και $m_A, m_c \ll m_B$

Επομένως $s=(p_1+p_2)^2=(E_1+m_B)^2-|\vec{p}_1|^2 = m_A^2+m_B^2+2E_1m_B \Rightarrow s\simeq m_B^2$

$$t=(p_1-p_4)^2=(E_1-m_B)^2-|\vec{p}_1|^2=m_A^2+m_B^2-2E_1m_B \Rightarrow t\simeq m_B^2$$

Από την (Β) έχουμε: $\mathcal{M}=g^2\left[\dfrac{1}{m_B^2-m_C^2}+\dfrac{1}{m_B^2-m_C^2}\right] \Rightarrow \boxed{\mathcal{M}=\dfrac{2g^2}{m_B^2-m_C^2}}$ (Γ)

Αφού όμως $m_B \gg m_C \Rightarrow m_B^2-m_C^2\simeq m_B^2$

Η (Γ) θα γίνει επομένως: $\boxed{\mathcal{M}=\dfrac{2g^2}{m_B^2}}$ (Δ)

Αντικαθιστούμε την (Δ) στην (Α) και παίρνουμε:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{|\mathcal{M}|^2}{(8\pi m_B)^2}=\frac{\cancel{4}g^4}{16\,\cancel{64}\pi^2 m_B^6} \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{g^4}{16\pi^2m_B^6} \Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{g^2}{4\pi m_B^3}\right)^2}$$

(ε) Η διαφορική ενεργός διατομή δεν περιέχει κάποια γωνιακή εξάρτηση και άρα:

$$\sigma=\int\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega=4\pi\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) \Rightarrow \boxed{\sigma=\frac{g^4}{4\pi m_B^6}}$$