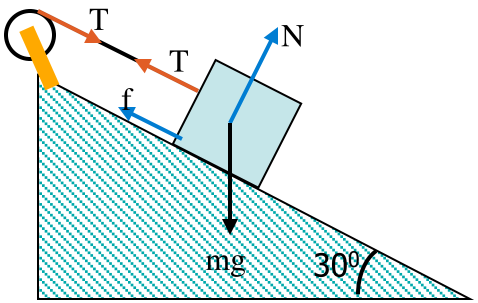
Παράδειγμα 6ο

Ένα τούβλο μάζας 18.0kg γλιστρά προς το χαμηλότερο σημείο ενός κεκλιμένου επιπέδου. Το τούβλο εξαρτάται από ένα αβαρές σχοινί το οποίο είναι τυλιγμένο γύρω από μια τροχαλία ακτίνας R=0.25m και μάζας 6.0kg. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ του τούβλου και του επιπέδου είναι μ_κ=0.24.
Ποιο είναι το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας;

Λύση



Οι δυνάμεις που ενεργούν στο σύστημα είναι:

Τούβλο:

$$\left.\begin{aligned}\sum F_x &= mg\sin\theta - T - f_k = ma\\ \sum F_y &= N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta\\ f_k &= \mu_k N = \mu_k mg\cos\theta\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg\sin\theta - T - \mu_k mg\cos\theta = ma \qquad (1)$$

Τροχαλία: Η τάση, T, προκαλεί ροπή ως προς το κέντρο της

$$TR = I\alpha = \left(\frac{MR^2}{2}\right)\alpha \Rightarrow T = \left(\frac{MR}{2}\right)\alpha \qquad (2)$$

Συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση : $a = R\alpha$ (3)

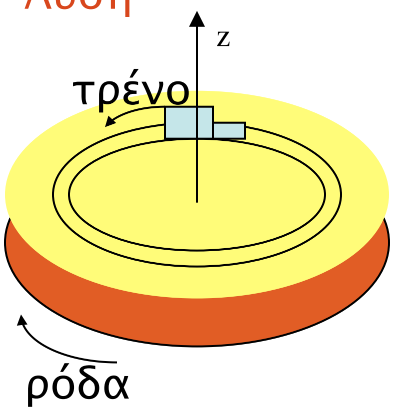
Αντικαθιστώντας (2) και (3) στην (1) έχουμε: $mg\sin\theta - \frac{MR}{2}\alpha - \mu_k mg\cos\theta = mR\alpha$

Λύνουμε ως προς α: $\alpha = \dfrac{\sin\theta - \mu_k\cos\theta}{m + \frac{M}{2}}\left(\dfrac{mg}{R}\right) \Rightarrow \alpha = \left(\sin\theta - \mu_k\cos\theta\right)\left(\dfrac{1}{1 + \frac{M}{2m}}\right)\left(\dfrac{g}{R}\right)$

Παράδειγμα 7ο

Μια σιδηροδρομική τροχιά ενός παιδικού τρένου είναι τοποθετημένη στην εξωτερική περιφέρεια μιας μεγάλης ρόδας η οποία είναι ελεύθερη να περιστρέφεται χωρίς τριβή γύρω από ένα κατακόρυφο άξονα. Το παιδικό τρένο μάζας m, τοποθετείται πάνω στην τροχιά κι' όταν τροφοδοτείται με ρεύμα φθάνει σε μια σταθερή ταχύτητα υ ως προς τη ράγα. Αν η ρόδα έχει μάζα M, ακτίνα R, και ροπή αδράνειας $I=MR^2$ γύρω από τον άξονα περιστροφής της, να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα ω της ρόδας συναρτήσει των M, m, υ και R.

Λύση



Η ισχύς που χρησιμοποιείται για να επιταχύνει το τρένο προσθέτει εξωτερική ενέργεια στο σύστημα αλλά δεν δημιουργεί κάποια εξωτερική ροπή.

Η ολική στροφορμή στον z–άξονα διατηρείται. $L_i = L_f$

Πριν ξεκινήσει το τρένο: $L_i = L_\tau + L_\rho = 0$

Η σχετική ταχύτητα του τρένου ως προς τη ρόδα είναι υ

Επομένως η σχετική γωνιακή ταχύτητα θα είναι: $\omega = \dfrac{\upsilon}{R}$

Η ρόδα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα αντίθετη αυτής του τρένου:

Επομένως η γωνιακή ταχύτητα τρένου (ως προς ακίνητο παρατηρητή) θα είναι:

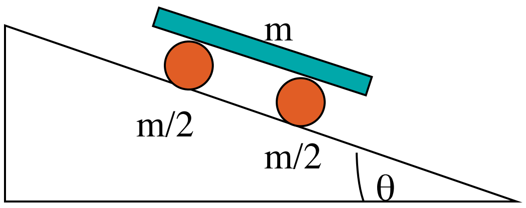
$$\omega_\tau = \omega_{\sigma\chi} - \omega_\rho \Rightarrow \omega_\tau = \frac{\upsilon}{R} - \omega_\rho$$

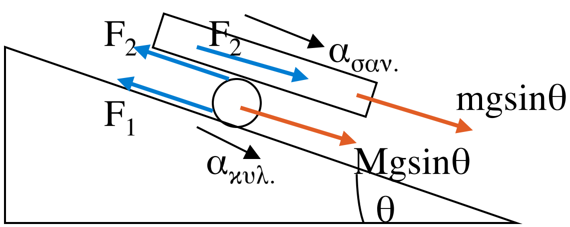
Από διατήρηση της στροφορμής έχουμε $0 = I_\rho \omega_\rho - I_\tau \omega_\tau \Rightarrow I_\rho \omega_\rho = I_\tau \omega_\tau$

$$I_\rho \omega_\rho = I_\tau \left(\frac{\upsilon}{R} - \omega_\rho\right) \Rightarrow MR^2 \omega_\rho = mR^2\left(\frac{\upsilon}{R} - \omega_\rho\right) \Rightarrow M\omega_\rho = m\left(\frac{\upsilon}{R} - \omega_\rho\right) \Rightarrow (M+m)\omega_\rho = m\frac{\upsilon}{R} \Rightarrow \omega_\rho = \left(\frac{m}{M+m}\right)\frac{\upsilon}{R}$$

Παράδειγμα 8ο

Μια σανίδα βρίσκεται πάνω σε 2 ομοιόμορφους κυλίνδρους (με ροπή αδράνειας $I=MR^2/2$) που βρίσκονται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης θ όπως στο σχήμα. Η σανίδα έχει μάζα m και κάθε ένας από τους κυλίνδρους έχει μάζα $m/2$. Αν δεν υπάρχει ολίσθηση μεταξύ των διαφόρων επιφανειών ποιά είναι η επιτάχυνση της σανίδας;





Λύση

Αφού δεν υπάρχει ολίσθηση τότε οι κύλινδροι θα κινηθούν με τον ίδιο τρόπο και θα μπορούσαμε να τους αντικαταστήσουμε με ένα κύλινδρο με μάζα m

Τα διαγράμματα απελευθερωμένου σώματος για την σανίδα και το κύλινδρο φαίνονται στο σχήμα.

Κύλινδρος: $\sum F = ma_{\kappa\upsilon\lambda.} \Rightarrow mg\sin\theta - F_1 - F_2 = ma_{\kappa\upsilon\lambda.}$ (1)

(όπου $\alpha_{\kappa\upsilon\lambda.}$ είναι η γραμμική επιτάχυνση του κυλίνδρου)

Σανίδα: $\sum F = ma_{\sigma\alpha\nu.} \Rightarrow mg\sin\theta + F_2 = ma_{\sigma\alpha\nu.}$ (2)

Οι δυνάμεις των τριβών F_1 και F_2 προκαλούν την περιστροφή του κυλίνδρου

Ροπή: $\tau = F_1R - F_2R = I\alpha_{\kappa\upsilon\lambda.} \Rightarrow F_1R - F_2R = \frac{mR^2}{2}\alpha_{\kappa\upsilon\lambda.} \Rightarrow F_1 - F_2 = \frac{mR}{2}\frac{a_{\kappa\upsilon\lambda.}}{R} \Rightarrow F_1 - F_2 = \frac{m}{2}a_{\kappa\upsilon\lambda.}$ (3)

Τρείς εξισώσεις με 4 αγνώστους (F_1, F_2, $\alpha_{\kappa\upsilon\lambda.}$ και $\alpha_{\sigma\alpha\nu.}$) Μια ακόμα εξίσωση

Το σημείο επαφής κυλίνδρου - σανίδας έχει γραμμική επιτάχυνση $a_{\varepsilon\pi} = a_{\sigma\alpha\nu.}$

$$a_{\varepsilon\pi} = a_{\kappa\upsilon\lambda.} + \alpha R \Rightarrow a_{\varepsilon\pi} = a_{\kappa\upsilon\lambda.} + \frac{a_{\kappa\upsilon\lambda.}}{R}R \Rightarrow a_{\varepsilon\pi} = 2a_{\kappa\upsilon\lambda.} = a_{\sigma\alpha\nu.} \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας στις τρεις πρώτες εξισώσεις έχουμε:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \mathrm{mgsin}\theta - F_1 - F_2 = ma_{\kappa\upsilon\lambda.} \\ (2) & \mathrm{mgsin}\theta + F_2 = 2ma_{\kappa\upsilon\lambda.} \\ (3) & F_1 - F_2 = \frac{1}{2}ma_{\kappa\upsilon\lambda.}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll}(1)+(2) \Rightarrow & 2\mathrm{mgsin}\theta - F_1 = 3ma_{\kappa\upsilon\lambda.} \\ (2)+(3) \Rightarrow & \mathrm{mgsin}\theta + F_1 = \frac{5}{2}ma_{\kappa\upsilon\lambda.}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow 3\mathrm{mgsin}\theta = \frac{11}{2}ma_{\kappa\upsilon\lambda.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow 3\mathrm{gsin}\theta = \frac{11}{2}a_{\kappa\upsilon\lambda.} \Rightarrow a_{\kappa\upsilon\lambda.} = \frac{6}{11}g\sin\theta \\ \text{Από την (4) όμως έχουμε} \quad a_{\sigma\alpha\nu.} = 2a_{\kappa\upsilon\lambda.}\end{array}\right\} \Rightarrow a_{\sigma\alpha\nu.} = \frac{12}{11}g\sin\theta$$