ΦΥΣ 133
Τελική Εξέταση 6-Μάη-2007

Πριν ξεκινήσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, αριθμό ταυτότητας) στο πάνω μέρος της σελίδας αυτής.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το τυπολόγιο που σας δίνεται στην τελευταία σελίδα το οποίο μπορείτε να βγάλετε. Για τις λύσεις των ασκήσεων θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε μόνο τις σελίδες που σας δίνονται.

Προσπαθήστε να δείξετε τη σκέψη σας και να γράψετε καθαρές εξισώσεις. Για πλήρη ή μερική βαθμολόγηση θα πρέπει να φαίνεται καθαρά το τι προσπαθείτε να δείξετε. Αν δεν μπορώ να διαβάσω τι γράφετε θα θεωρηθεί λάθος οπότε προσπαθήστε να γράψετε ευανάγνωστα.

Διαβάστε πρώτα όλες τις ασκήσεις και προσπαθήστε να σκεφτείτε τι περίπου χρειάζεται να κάνετε. Η σειρά των προβλημάτων ή το σύνολο των μονάδων τους δεν αντικατοπτρίζει τη δυσκολία τους.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 4 ώρες.

Σας δίνονται 6 προβλήματα και πρέπει να απαντήσετε σε όλα. Σύνολο μονάδων 100. Υπάρχει επίσης ένα extra bonus πρόβλημα για 20 επιπλέον μονάδες για όσους θα ήθελαν δοκιμάσουν αλλά δεν είστε υποχρεωμένοι να το λύσετε.

Καλή επιτυχία.

1. **<u>Lagrangian</u> (15π συνολικά)**

Σα γενικός κανόνας, όπως είδαμε, δεν μπορούμε να περιγράψουμε με τη μέθοδο του Lagrange συστήματα όπου εμφανίζονται τριβές. Υπάρχουν ωστόσο μερικές εξαιρέσεις συστημάτων ενός σώματος όπως αυτό που περιγράφεται στο πρόβλημα. Εν γένει δεν μπορούμε να σχηματίσουμε την Lagrangian σα ‘‘τη κινητική ενέργεια μείον την δυναμική ενέργεια’’. Αλλά θεωρήστε την ακόλουθη Lagrangian: $L = e^{\gamma t/m}[\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)]$. Να βρεθούν:

(α) Η εξίσωση κίνησης και να γραφεί με τη μορφή του νόμου του Newton, $\ddot{q} = \cdots$. [**10π**]

(β) Εξηγήστε τι είδους φυσικό σύστημα περιγράφει η εξίσωση κίνησης. [**5π**]

(α) $\mathcal{L} = e^{\gamma t/m}\left[\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)\right]$

Επομένως η εξίσωση κίνησης θα είναι:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{\gamma t/m} m\dot{q}\right] + e^{\gamma t/m}\frac{dV}{dq} = 0 \Rightarrow$$

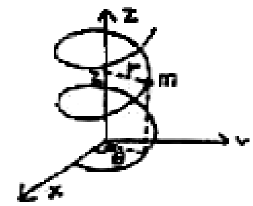
$$\Rightarrow e^{\gamma t/m}\gamma\dot{q} + e^{\gamma t/m}m\ddot{q} + e^{\gamma t/m}\frac{dV}{dq} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{q} = -\gamma\dot{q} - \frac{dV}{dq}$$

(β) Επομένως καταλήγουμε στο νόμο του Newton σε ένα εξωτερικό δυναμικό με μια δύναμη απόσβεσης ανάλογη της ταχύτητας με σταθερά αναλογίας γ.

2. **<u>Hamiltonian</u> (15π συνολικά)**

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται κάτω από την επίδραση της βαρύτητας κατά μήκος μιας ελικοειδούς τροχιάς της μορφής $z = k\theta$, σταθερής ακτίνας r = σταθερά, k είναι μια σταθερά και z η κατακόρυφος διεύθυνση, όπως στο σχήμα. Να βρεθούν:



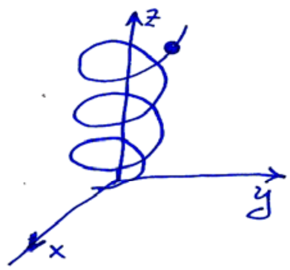
(α) Η Lagrangian του συστήματος. [**5π**]

(β) Η Hamiltonian του συστήματος. [**5π**]

(γ) Οι εξισώσεις κίνησης του Hamilton. [**5π**]

Η τροχιά στην οποία κινείται το σώμα είναι ελικοειδής και επομένως θα έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} z = k\theta \\ r = \text{σταθ} \end{array}\right\} \text{εξισώσεις έλικος} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{z} = k\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \dfrac{\dot{z}}{k} \\ \dot{r} = 0 \end{array}$$



Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες (r, θ, z)

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m\left(\frac{r_0^2}{k^2}\dot{z}^2 + \dot{z}^2\right) \Rightarrow T = \frac{m}{2}\left(\frac{r_0^2}{k^2} + 1\right)\dot{z}^2$$

Η δυναμική ενέργεια θα είναι: $V = mgz$

(α) Επομένως η Lagrangian του συστήματος θα είναι:

$$\boxed{L = T - V = \frac{1}{2} m\left(\frac{r_0^2}{k^2} + 1\right)\dot{z}^2 - mgz}$$

(β) Η συζυγής ορμή θα είναι $p_z = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\left[\left(\dfrac{r_0}{k}\right)^2 + 1\right]\dot{z} \Rightarrow \boxed{\dot{z} = \dfrac{p_z}{m\left[\left(\frac{r_0}{k}\right)^2 + 1\right]}}$

Επομένως η Hamiltonian θα είναι: $H = p_z\dot{z} - L = p_z\dot{z} - \dfrac{1}{2} m\left[\left(\dfrac{r_0}{k}\right)^2 + 1\right]\dot{z}^2 + mgz \Rightarrow$

$$\Rightarrow H = p_z \frac{p_z}{m\left[\left(\frac{r_0}{k}\right)^2 + 1\right]} - \frac{\cancel{m}}{2}\cancel{\left[\left(\frac{r_0}{k}\right)^2 + 1\right]}\frac{p_z^2}{m^{\cancel{2}}\left[\left(\frac{r_0}{k}\right)^2 + 1\right]^{\cancel{2}}} + mgz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{p_z^2}{m\left[\left(\frac{r_0}{k}\right)^2 + 1\right]} - \frac{p_z^2}{2m\left[\left(\frac{r_0}{k}\right)^2 + 1\right]} + mgz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{p_z^2}{2m\left[\left(\frac{r_0}{k}\right)^2 + 1\right]} + mgz}$$

(γ) Οι εξισώσεις του Hamilton θα είναι: $\dot{z} = \dfrac{\partial H}{\partial p_z} \Rightarrow \boxed{\dot{z} = \dfrac{p_z}{m\left[\left(\frac{r_0}{k}\right)^2 + 1\right]}}$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} \Rightarrow \boxed{\dot{p}_z = -mg}$$

Επομένως $\ddot{z}\left[\left(\frac{r_0}{k}\right)^2 + 1\right]\cancel{m} = -\cancel{m}g \Rightarrow \ddot{z} = -\dfrac{g}{\left[(r_0/k)^2 + 1\right]}$

3. **<u>Κεντρικές δυνάμεις</u> (15π συνολικά)**

Θεωρήστε τη κεντρική δύναμη της μορφής:

$$F(r) = -F_0 e^{-r^2/a^2}$$

Όπου α και F_0 είναι σταθερές παράμετροι.

(α) Βρείτε την μέγιστη R_{max} στο εύρος τιμών της ακτινικής απόστασης r, για την οποία αντιστοιχεί μια σταθερή κυκλική τροχιά. [**9π**]

(β) Για την κυκλική τροχιά ακτίνας $r = \frac{1}{\sqrt{2}} R_{max}$, να βρεθεί μια εξίσωση για την κινητική ενέργεια συναρτήσει των σταθερών F_0 και α, και κάποιων αδιάστατων σταθερών. [**6π**]

(α) Δίνεται η δύναμη της μορφής $F(r) = -F_0 e^{-r^2/a}$

Η συνθήκη για σταθερή κυκλική τροχιά στο $r=\rho$ απαιτεί:

$$\frac{F'(\rho)}{F(\rho)} + \frac{3}{\rho} > 0 \quad \& \quad F'(\rho) = \frac{2rF_0}{a^2} e^{-r^2/a^2}$$

Οπότε η συνθήκη γίνεται:

$$\frac{F'(\rho)}{F(\rho)} + \frac{3}{\rho} = \frac{\frac{2\rho F_0}{a^2} e^{-\rho^2/a^2}}{-F_0 e^{-\rho^2/a^2}} + \frac{3}{\rho} =$$

$$= -\frac{2\rho}{a^2} + \frac{3}{\rho} = \frac{3a^2 - 2\rho^2}{\rho a^2} > 0 \Rightarrow 3a^2 - 2\rho^2 > 0 \Rightarrow \boxed{\rho < \sqrt{\frac{3}{2}}\, a}$$

Επομένως $R_{max} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, a$

(β) κυκλική τροχιά στο $r=\rho$ απαιτεί: $F_{κεν} = F_{πεδίου} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{mv^2}{\rho} = |F(\rho)| = F_0 e^{-\rho^2/a^2}$$

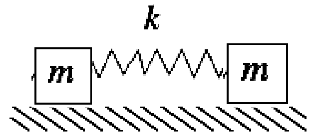
Αλλά $T = \frac{1}{2} m v^2$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} F_0 \rho e^{-\rho^2/a^2}$$

Αν $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} R_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3}{2}}\, a \Rightarrow \rho = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ τότε:

$$T = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} a F_0 e^{-3a^2/4a^2} \Rightarrow \boxed{T = \frac{\sqrt{3}}{4} a F_0 e^{-3/4}}$$

4. **<u>Συζευγμένες ταλαντώσεις</u> (20π συνολικά)**



Δύο όμοια τούβλα μάζας m είναι περιορισμένα να εκτελούν μονοδιάστατη κίνηση πάνω σε μια λεία παγωμένη λίμνη. Τα δύο τούβλα συνδέονται μεταξύ τους μέσω ενός ελατηρίου σταθεράς Κ όπως στο σχήμα.

(α) Ορίστε σα x_1 και x_2 τις οριζόντιες μετατοπίσεις των μαζών από την θέση ισορροπίας τους όταν το κέντρο μάζας του συστήματος είναι σε ηρεμία. Γράψτε τη Lagrangian του συστήματος αυτού [**4π**].

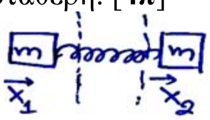
(β) Χρησιμοποιήστε τη Lagrangian για να εξάγετε τις εξισώσεις κίνησης. [**4π**]

(γ) Βρείτε τις ιδιοσυχνότητες του συζευγμένου αυτού συστήματος. [**4π**].

(δ) Περιγράψτε ποιοτικά τους φυσικούς τρόπους ταλάντωσης του συστήματος. [**4π**]

(ε) Συγκρίνετε τις ιδιοσυχνότητες με τις τιμές που παίρνετε για κάθε μάζα όταν η άλλη μάζα κρατείται σταθερή. [**4π**]

(α)



$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

όπου x_1 και x_2 από τις θέσεις ισορροπίας του συστήματος

$$V = \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$$

(β)

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -\frac{1}{2} k\, 2 (x_2 - x_1)(-1) = k(x_2 - x_1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \frac{1}{2} m\, 2 \dot{x}_1 \rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m \ddot{x}_1$$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{x}_1 - k(x_2 - x_1) = 0}$$

Ανάλογα για το x_2 (και από συμμετρία) $\boxed{m\ddot{x}_2 - k(x_1 - x_2) = 0}$

(γ) Υποθέτοντας ότι $x_i = a_i e^{i\omega t} \Rightarrow \ddot{x}_i = -\omega^2 x_i$

Επομένως θα πρέπει $\left([k] - [M]\omega^2\right)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0.$

$$[k] = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \qquad [M] = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

Επομένως:

$$\det\left([k] - [M]\omega^2\right) = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k - m\omega^2)^2 - k^2 = 0 \Rightarrow \left[(k - m\omega^2) - k\right]\left[(k - m\omega^2) + k\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -m\omega^2\left[2k - m\omega^2\right] = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \omega_1^2 &= 0 \\ \omega_2^2 &= 2k/m \end{aligned}}$$

(δ) $$\begin{pmatrix} k-m\omega^2 & -k \\ -k & k-m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k-m\omega^2)a_1 - k a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{m\omega^2 - k}{k} a_1$$

Η παραπάνω σχέση δίνει το τρόπο με τον οποίο συνδέονται τα a_1 και a_2 (συνιστώσες) των ιδιοδιανυσμάτων

Για $\omega_1 = 0$ έχουμε ότι $a_1 = a_2$ $\quad \square\!\rightarrow \quad \square\!\rightarrow$

Τα 2 σώματα κινούνται μαζί και το ελατήριο δεν έχει καμιά συμπίεση ή επιμήκυνση

Για $\omega_2^2 = \frac{2k}{m}$ αντικαθιστώντας έχουμε: $a_2 = -\frac{m\omega_2^2 - k}{k} a_1 = -\frac{\cancel{m}\frac{2k}{\cancel{m}} - k}{k} a_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_2 = -\frac{k}{k} a_1 \Rightarrow a_2 = -a_1 \quad \leftarrow\!\square \quad \square\!\rightarrow$$

Οι 2 μάζες κινούνται αντίθετα

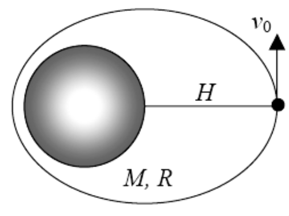
(ε) Αν μια μάζα κρατηθεί ακίνητη τότε έχουμε μιά και μόνο ταλάντωση για μιά από τις 2 μάζες με συχνότητα $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Η σύζευξη των 2 μαζών οδηγεί σε διαχωρισμό των ιδιοσυχνοτήτων

$0 = \omega_1 < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} < \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ με μια συχνότητα μικρότερη της ω_0 και μια μεγαλύτερη

5. **<u>Τροχιές Keppler</u> (15π συνολικά)**

Ένας δορυφόρος εκτοξεύεται από ένα ύψος H πάνω από την επιφάνεια ενός σφαιρικού πλανήτη ακτίνας R και μάζας M. Να βρεθεί το εύρος των τιμών που μπορεί να έχει η αρχική ταχύτητα εκτόξευσης, v_0, (η v_0 είναι κάθετη στην ακτίνα) ώστε η τροχιά που διαγράφει ο δορυφόρος πάνω από την επιφάνεια του πλανήτη είναι πάντοτε κλειστή.



Η ενέργεια του δορυφόρου $E=\frac{mv^2}{2}-\frac{GMm}{r}$ και η στροφορμή είναι ολοκληρώματα κίνησης, όπου η στροφορμή $\ell = mr^2\dot{\theta} = mrv$

Οι αρχικές τιμές της ενέργειας κ στροφορμής (και οι οποίες παραμένουν σταθερές) είναι:

$$E=\frac{mv_0^2}{2}-\frac{GMm}{R+H} \quad \text{και} \quad \ell = m(R+H)v_0$$

Για να βρούμε την ελάχιστη τιμή της ταχύτητας v_0, έστω v_0^{min}, απαιτούμε η ελάχιστη απόσταση από το κέντρο του πλανήτη να είναι R, διαφορετικά ο δορυφόρος θα χτυπήσει στο πλανήτη. Το σημείο αυτό είναι το σημείο καμπής της ελλειπτικής τροχιάς και επομένως η ταχύτητά του θα είναι κάθετη στην ακτινική απόσταση (όπως και στο σημείο εκτόξευσης). Επομένως θα έχουμε:

$$E=\frac{mv_R^2}{2}-\frac{GMm}{R}=\frac{mv_0^{2\,min}}{2}-\frac{GMm}{R+H} \quad \text{(από διατήρηση ενέργειας)}$$

$$\ell_R=\ell_0 \Rightarrow \cancel{m}(R+H)v_0^{min}=\cancel{m}R\,v_R \Rightarrow v_R\,\frac{(H+R)}{R}v_0^{min} \quad \text{(διατήρηση στροφορμής)}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ενέργειας και λύνοντας ως προς v_0^{min} έχουμε:

$$\frac{\cancel{m}(R+H)^2 v_0^{2\,min}}{2R^2}-\frac{GM\cancel{m}}{R}=\frac{\cancel{m}v_0^{2\,min}}{2}-\frac{GM\cancel{m}}{R+H}\Rightarrow \frac{v_0^{2\,min}}{2}\left(\frac{(R+H)^2-R^2}{R^2}\right)=GM\left(-\frac{1}{R+H}+\frac{1}{R}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_0^{2\,min}}{2}\left[\frac{[R+H-R][R+H+R]}{R^2}\right]=GM\frac{-\cancel{R}+\cancel{R}+H}{(R+H)}\Rightarrow \frac{v_0^{2\,min}}{2}\,\frac{\cancel{H}\cdot(2R+H)}{R^2}=\frac{GM\cancel{H}}{R(R+H)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_0^{2\,min}}{2}\,\frac{2R+H}{\cancel{R^2}}=\frac{GM}{(R+H)\cancel{R}}\Rightarrow v_0^{2\,min}=\frac{2GMR}{(2R+H)(R+H)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0^{min}=\sqrt{\frac{2GMR}{(2R+H)(R+H)}}$$

Για να βρούμε το ανώτερο όριο, θα πρέπει η ενέργεια που έχει ο δορυφόρος να είναι το πολύ $E=0$ ώστε η τροχιά να είναι κλειστή. Για $E=0$ έχουμε παραβολή οπότε ο δορυφόρος φεύγει από το σύστημα: (στο σημείο αυτό ζητάμε $E_{\kappa\iota\nu}=0$ κι $U_{\delta\upsilon\nu}=0$.)

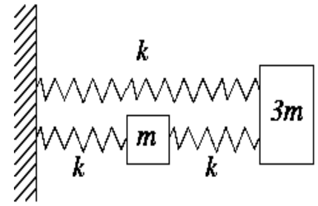
$$E=\frac{1}{2}m\upsilon_0^{2\,max}-\frac{GMm}{R+H}=0 \Rightarrow \upsilon_0^{2\,max}=\frac{2GM\cancel{m}}{\cancel{m}(R+H)} \Rightarrow \boxed{\upsilon_0^{2\,max}=\sqrt{\frac{2GM}{R+H}}}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι όταν $H\neq 0$ τότε η απαραίτητη ταχύτητα ώστε ο δορυφόρος να μπει σε κυκλική τροχιά είναι:

$$F_{\kappa\varepsilon\nu}=F_g \Rightarrow \frac{\cancel{m}\upsilon_{\kappa\upsilon\kappa\lambda}^2}{\cancel{R+H}}=\frac{GM\cancel{m}}{(R+H)^{2}} \Rightarrow \upsilon_{\kappa\upsilon\kappa}=\sqrt{\frac{GM}{R+H}}$$

η οποία είναι μεταξύ των τιμών υ_0^{min} και υ_0^{max} που βγάλαμε πιο πάνω

6. **<u>Συζευγμένες ταλαντώσεις</u> (20π συνολικά)**



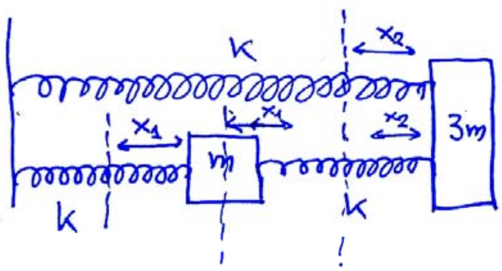
Θεωρήστε το σύστημα μαζών και ελατηρίων του σχήματος, το οποίο εκτελεί μονοδιάστατη κίνηση στην οριζόντια διεύθυνση.

(α) Να βρεθούν οι ιδιοσυχνότητες. (**10π**)

(β) Να βρεθούν και να περιγραφούν οι φυσικοί τρόποι ταλάντωσης. Θα πρέπει να βρείτε ακριβώς τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στους φυσικούς τρόπους ταλάντωσης (**10π**)

(a) Η Lagrangian του συστήματος θα είναι $\mathcal{L} = T - U$

Θεωρώντας ότι οι γενικευμένες συντεταγμένες είναι x_1 και x_2 όπως στο σχήμα (x_1 & x_2 είναι οι απομακρύνσεις από τη θέση ισορροπίας των ελατηρίων).



$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} 3m \dot{x}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2 = kx_1^2 + kx_2^2 - kx_1x_2$$

Αυτό είναι και το εύκολο όταν δουλεύουμε με ελατήρια όπου οι δυνάμεις είναι γραμμικές συναρτήσεις των απομακρύνσεων. Μπορούμε να θεωρούμε την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας χωρίς να ενδιαφερόμαστε για την απόλυτη θέση των σωμάτων. Άλλωστε η απόλυτη θέση είναι η θέση ισορροπίας + σχετική απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας. Αλλά η δύναμη στη θέση ισορροπίας είναι μηδέν (αυτό είναι και το νόημα της θέσης ισορροπίας)

Επομένως ψάχνουμε για λύσεις της μορφής $q_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$ που ικανοποιούν την:

$$\Big[[K] - \omega^2 [M]\Big] \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad (1)$$

$$[K] = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}$$

$$[M] = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 3m \end{pmatrix}$$

Επομένως η (1) γράφεται:

$$\begin{pmatrix} 2k-m\omega^2 & -k \\ -k & 2k-3m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Για μη τετριμμένες λύσεις θα πρέπει η ορίζουσα του πίνακα να'ναι μηδέν:

$$\det\begin{vmatrix} 2k-m\omega^2 & -k \\ -k & 2k-3m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2k-m\omega^2)(2k-3m\omega^2) - k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4k^2 - 2km\omega^2 - 6km\omega^2 + 3m^2\omega^4 - k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3m^2\omega^4 - 8km\omega^2 + 3k^2 = 0 \Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64-36}}{6}\frac{k}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{6}\frac{k}{m} \Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \frac{\cancel{8}^{4} \pm \cancel{2}\sqrt{7}}{\cancel{6}\,3}\frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\dfrac{k}{m} \\ \omega_2^2 = \dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\dfrac{k}{m} \end{cases}}$$

(β) Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα, λύνουμε τη (2) αντικαθιστώντας όπου ω^2 την ω_1^2 ή την ω_2^2 οπότε βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα της ω_1 και ω_2

$$\begin{pmatrix} 2k-m\omega^2 & -k \\ -k & 2k-3m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (2k-m\omega^2)a_1 - ka_2 = 0$$

η $2^η$ εξίσωση είναι γραμμικά εξαρτημένη της $1^{ης}$ αφού $\det([k]-[m]\omega^2)=0$

Επομένως $$\boxed{a_2 = \frac{2k-m\omega^2}{k}a_1} \qquad (3)$$

1) Για $\omega^2 = \omega_1^2$ η (3) $\Rightarrow a_2 = \dfrac{2\cancel{k} - \cancel{m}\frac{(4+\sqrt{7})}{3\cancel{m}}\cancel{k}}{\cancel{k}}a_1 \Rightarrow a_2 = \dfrac{6-4-\sqrt{7}}{3}a_1 \Rightarrow a_2 = \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}a_1.$

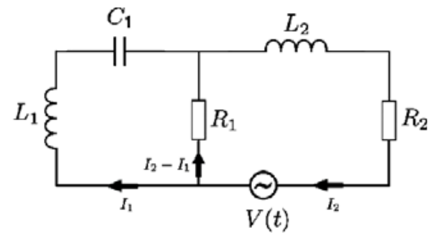
Άρα $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2-\sqrt{7}}{3} \end{pmatrix}$ τα σώματα ταλαντώνονται με αντίθετη φορά αφού $2-\sqrt{7}<0$. Το πλάτος ταλάντωσης του σώματος 3m είναι μικρότερο του m

2) Για $\omega = \omega_2^2$ η (3) $\Rightarrow a_2 = \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}a_1$. Άρα θα έχουμε $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2+\sqrt{7}}{3} \end{pmatrix}$

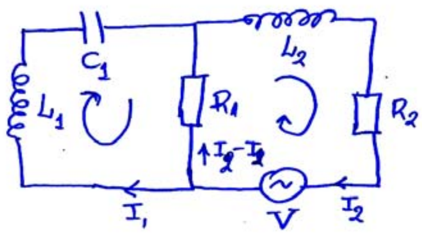
Τα σώματα είναι σε φάση, αλλά το πλάτος της ταλάντωσης του 3m είναι μεγαλύτερο του σώματος m.

7. <u>Bonus πρόβλημα για επιπλέον μονάδες</u> (20π συνολικά)

Θεωρήστε το ακόλουθο κύκλωμα αποτελούμενο από δύο πηνία επαγωγής L_1 και L_2 αντίστοιχα, ένα πυκνωτή χωρητικότητας C_1 και δύο ωμικές αντιστάσεις R_1 και R_2. Το κύκλωμα τροφοδοτείται από μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης $V(t) = V_0 \cos\omega t$. Να κατασκευάσετε το μηχανικό ανάλογό του κυκλώματος αυτού εξηγώντας το ρόλο κάθε μηχανικού τμήματος που εισάγετε και την αντιστοιχία του στο ηλεκτρικό κύκλωμα.



<u>Υπόδειξη:</u> Θα βοηθήσει αν γράψετε τις ‘‘εξισώσεις κίνησης’’ που αντιστοιχούν στο κύκλωμα. τα μηχανικά ανάλογα που σχεδιάζετε.



Χρησιμοποιώντας τους κανόνες του kirkhoff:

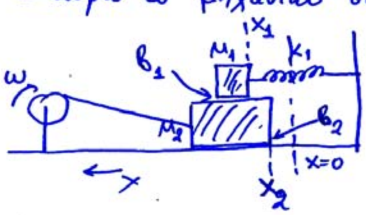
$$\left.\begin{aligned} L_1 \dot{I}_1 + \frac{Q_1}{C_1} + R_1(I_1 - I_2) &= 0 \\ L_2 \dot{I}_2 + R_2 I_2 + R_1(I_2 - I_1) &= V(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \dot{I}_1 &= -\frac{Q_1}{L_1 C_1} - \frac{R_1}{L_1}(I_1 - I_2) \\ \dot{I}_2 &= -\frac{R_2}{L_2} I_2 - \frac{R_1}{L_1}(I_2 - I_1) + \frac{V(t)}{L_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{Q}_1 = -\frac{Q_1}{L_1 C_1} - \frac{R_1}{L_1}\left(\dot{Q}_1 - \dot{Q}_2\right)$$

$$\ddot{Q}_2 = -\frac{R_2}{L_2}\dot{Q}_2 - \frac{R_1}{L_1}\left(\dot{Q}_2 - \dot{Q}_1\right) + \frac{V(t)}{L_1}$$

Θεωρώ το μηχανικό σύστημα:



Τα δύο τούβλα έχουν μάζες M_1 και M_2
Οι συντελεστές τριβής μεταξύ M_1 κ M_2 είναι b_1 και M_2 και οριζόντιας επιφάνειας είναι b_2
Υπάρχει ένα ελατήριο σταθεράς k_1 που συνδέει το τούβλο μάζας M_1 με το τοίχο. Τέλος το σώμα M_2 κινείται μέσω μιας περιοδικής επιτάχυνσης $f_0 \cos(\omega t)$

Αναγνωρίζοντας τους όρους

$$x_1 \leftrightarrow Q_1 , \quad x_2 \leftrightarrow Q_2 , \quad b_1 \leftrightarrow \frac{R_1}{L_1} , \quad b_2 \leftrightarrow \frac{R_2}{L_2} \quad \text{και} \quad k_1 \leftrightarrow \frac{1}{L_1 C_1}$$

και τέλος $f(t) \leftrightarrow V(t)/L_1$