Τι έχουμε δει:

- Είδαμε πως βγαίνουν οι εξισώσεις Lagrange από τις εξισώσεις του Newton

  Χρησιμοποιώντας την αρχή του D'Alembert - διαφορική προσέγγιση

- Οι εξισώσεις Lagrange ισχύουν μόνο αν
  - Οι δεσμοί είναι ολόνομοι → Γενικευμένες συντεταγμένες
  - Οι αντιδράσεις των δεσμών δεν παράγουν έργο → Όχι τριβές
  - Άλλες δυνάμεις είναι μονογενείς → Γενικευμένο δυναμικό

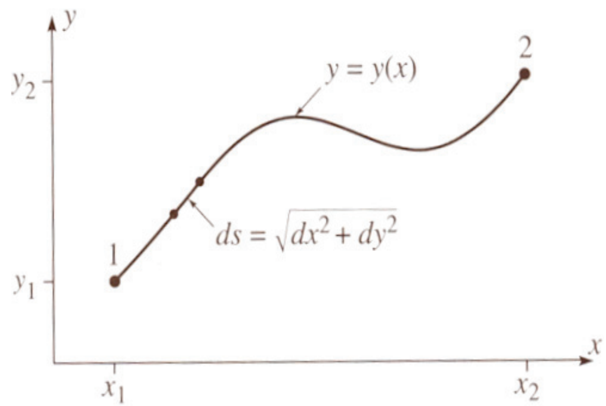
$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

Για τη συνέχεια σήμερα...?

- Εισαγωγή στο λογισμό των μεταβολών (calculus of variations)
- Η εξίσωση Euler-Lagrange
- Αρχή του Hamilton

Λογισμός μεταβολών - εισαγωγικά

- Εύρεση του ελάχιστου ή μέγιστου μιας ποσότητας που εκφράζεται με τη μορφή ενός ολοκληρώματος
- Τι εννοούμε με αυτό?
  - Παράδειγμα: Έστω δύο σημεία 1 (x_1,y_1) και 2 (x_2,y_2) Ποια η ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση.



Το στοιχειώδες μήκος ds είναι: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

Αλλά $dy = \dfrac{dy}{dx}dx = y'dx$

$$ds = \sqrt{dx^2 + y'^2 dx^2} \Rightarrow ds = dx\sqrt{1 + y'^2}$$

Επομένως το ολικό μήκος της διαδρομής είναι:

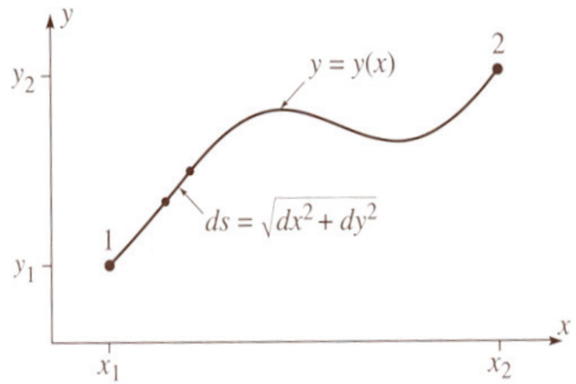
$$\boxed{D = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1 + y'^2}}$$

Το πρόβλημα είναι να βρεθεί η y(x) (όλα τα σημεία και όχι ένα σημείο) ώστε η D (το ολοκλήρωμα δηλαδή) γίνεται ελάχιστη

- Το πρόβλημα είναι πιο πολύπλοκο από το συνηθισμένο του να βρεθεί το x_0 που η f(x)=min στο x_0

Λογισμός μεταβολών - εισαγωγικά

Δεύτερο παράδειγμα: Η αρχή του Fermat: Η διαδρομή που ακολουθεί το φως καθώς περνά από μέσα με διαφορετικούς δείκτες διάθλασης είναι αυτή που ελαχιστοποιεί το χρόνο που απαιτείται για να πάει από το ένα σημείο στο άλλο.



Το πρόβλημα είναι παρόμοιο με αυτό της ελάχιστης απόστασης

Ο χρόνος που απαιτείται να διασχίσει την απόσταση ds:

$$dt = ds / \mathrm{v} = ds / (c / n) \Rightarrow dt = nds / c$$

δείκτης διάθλασης

Άρα ο συνολικός χρόνος είναι:

$$Time = \int_1^2 dt = \int_1^2 \frac{nds}{c} = \frac{1}{c}\int_1^2 nds$$

Προφανώς αν n σταθερό τότε το πρόβλημα είναι ίδιο με το προηγούμενο.

Ωστόσο συνήθως n είναι της μορφής: n(x,y)

$$Time = \frac{1}{c}\int_1^2 n(x,y)ds \Rightarrow Time = \frac{1}{c}\int_1^2 n(x,y)dx\sqrt{1+y'^2}$$

Θέλουμε το ολοκλήρωμα να είναι ελάχιστο για να ικανοποιεί την αρχή του Fermat

Εν γένει σε προβλήματα μπορεί να θέλουμε το ολοκλήρωμα να είναι μέγιστο ή ελάχιστο

Λογισμός μεταβολών

Έστω μια συνάρτηση f(x) και εξετάζουμε αν παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο σε x_0

Εξετάζουμε αν η παράγωγος $df / dx = 0$ στο x_0

Η συνθήκη δεν είναι ικανή να εξασφαλίσει μέγιστο ή ελάχιστο

Αν df/dx = 0 σε κάποιο σημείο x_0, τότε το x_0 είναι μέγιστο ή ελάχιστο ή αν $\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$ τότε τίποτα από τα δύο (σαμάρι ή saddle σημείο)

- Σταθερό ή Στάσιμο σημείο (stationary point) το σημείο x_0 για το οποίο $\frac{df}{dx} = 0$ αλλά δεν ξέρουμε σε ποια περίπτωση ανήκει (ελάχιστο,μέγιστο ή saddle)
- Απειροστή μεταβολή του x ως προς το x_0 αφήνει την f(x) αμετάβλητη

Στην περίπτωση των ολοκληρωμάτων χρειάζεται να βρούμε το σύνολο των σημείων, τη συνάρτηση δηλαδή y(x), ή τη διαδρομή, ώστε το ολοκλήρωμα να είναι stationary, δηλαδή να μην αλλάζει όταν θεωρούμε οποιαδήποτε απειροστή μεταβολή της σωστής τροχιάς.

Εξίσωση Euler - Lagrange

Το πρόβλημα των μεταβολών: έχουμε ένα ολοκλήρωμα:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f\left[y(x), y'(x), x\right] dx$$

όπου y(x) άγνωστη συνάρτηση σημείων x, που ενώνει τα σημεία x_1 και x_2
και για την οποία ισχύει: $y(x_1)=y_1$ και $y(x_2)=y_2$

Ανάμεσα σε όλες τις δυνατές καμπύλες που ενώνουν τα σημεία 1 και 2
πρέπει να βρούμε αυτή που ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί το ολοκλήρωμα S

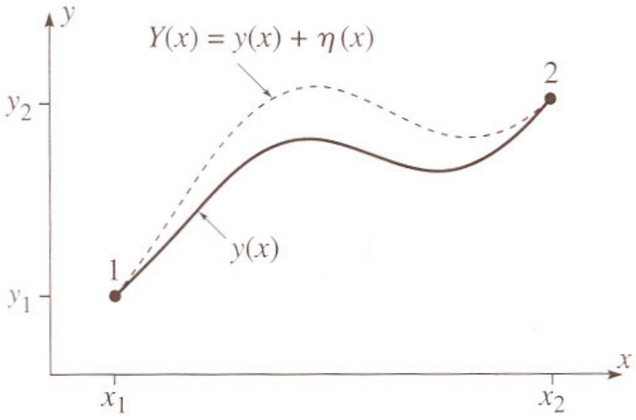
Προσέξτε ότι ενώ η συνάρτηση f εξαρτάται από 3 μεταβλητές $f\left[y(x), y'(x), x\right]$

το ολοκλήρωμα ακολουθεί τη διαδρομή $y = y(x)$ με αποτέλεσμα η ολοκληρώσιμη ποσότητα είναι συνάρτηση μιας μόνο μεταβλητής x

Έστω ότι θεωρούμε την y(x) σα τη καμπύλη που δίνει την
ελάχιστη τιμή στο ολοκλήρωμα S για s=y(x)

Οποιαδήποτε άλλη καμπύλη Y(x) θα δίνει τιμή για το ολοκλήρωμα S μεγαλύτερη από αυτή που παίρνει όταν χρησιμοποιούμε την y=y(x)

Εξίσωση Euler – Lagrange



Γράφουμε τη 'λάθος' καμπύλη Y(x) με τη μορφή:

$$Y(x) = y(x) + n(x)$$

Όπου η(x) η διαφορά μεταξύ της λάθος Y(x) και της σωστής καμπύλης y(x)

Αφού όλες οι δυνατές καμπύλες πρέπει να περνούν από τα σημεία 1 και 2 τότε:

$$n(x_1) = 0 = n(x_2)$$

Επειδή η S κατά μήκος μιας οποιασδήποτε καμπύλης Y(x) θα παίρνει τιμές πάντα μεγαλύτερες από αυτή όταν S υπολογίζεται με την σωστή y(x) ανεξάρτητα από το πόσο μικρή η διαφορά τους τότε γράφουμε:

$$Y(x) = y(x) + \alpha n(x) \qquad (1)$$

Τώρα η S υπολογιζόμενη με την Y(x) εξαρτάται από την α, S(α)

Για α=0 παίρνουμε από την (1) τη σωστή καμπύλη και επομένως S(α) είναι ελάχιστο για α=0. (dS/dα =0 για α=0)

Δηλαδή μετατρέψαμε το πρόβλημα, σε υπολογισμό της παραγώγου μιας συνηθισμένης συνάρτησης, S(α), στο σημείο α

Εξίσωση Euler – Lagrange

$$\left(\frac{dS}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} \stackrel{?}{=} 0$$

$$S(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(Y, Y', x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(y+\alpha n, y'+\alpha n', x)dx \Rightarrow$$

$$\frac{dS(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{d\alpha}dx = \int_{x_1}^{x_2}\left(\eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx = 0 \qquad (2)$$

Η συνθήκη αυτή πρέπει να ισχύει για οποιοδήποτε n για το οποίο ισχύει:

$$n(x_1) = 0 = n(x_2) \qquad (3)$$

Ολοκλήρωση κατά μέλη της (2) ($\int udv = uv - \int vdu$)

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta'\frac{\partial f}{\partial y'}dx = \left[\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx$$

Λόγω της (3) το α′ μέλος είναι μηδέν οπότε:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta'\frac{\partial f}{\partial y'}dx = -\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx$$

Αντικαθιστώντας στη (2)

Εξίσωση Euler – Lagrange

$$\frac{dS(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} - \eta \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = 0 = \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

Θεμελιώδες Λήμμα:

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x)dx = 0 \quad \text{για κάθε } \eta(x) \quad \Rightarrow \quad M(x) = 0 \;\; \text{για} \;\; x_1 < x < x_2$$

Επομένως η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad \forall x \quad x_1 < x < x_2 \qquad \text{Euler-Lagrange}$$

Η μεθοδολογία για τη λύση τέτοιου προβλήματος είναι:

(1) Γράφουμε το πρόβλημα ώστε η ποσότητα της οποίας ζητάτε τη στάσιμη διαδρομή εκφράζεται σαν ολοκλήρωμα στη καθιερωμένη μορφή:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f\left[y(x), y'(x), x\right] dx$$

(2) Γράφουμε τις εξισώσεις Euler - Lagrange

(3) Προσπαθούμε να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση Euler-Lagrange για την $y(x)$

Λογισμός μεταβολών

Είδαμε ότι ένα ολοκλήρωμα της μορφής: $S = \int_{x_1}^{x_2} f\left[y(x), y'(x), x\right] dx$

υπολογισμένο κατά μήκος της διαδρομής $y(x)$ είναι στάσιμο ως προς τις μεταβολές της τροχιάς αν και μόνο αν η $y(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση Euler-Lagrange

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \quad \forall \mathrm{x} \quad \mathrm{x}_1 < \mathrm{x} < \mathrm{x}_2$$

Καταλήξαμε σε αυτή τη σχέση γράφοντας μια τυχαία "λάθος" διαδρομή με τη μορφή

$$Y(x) = y(x) + \alpha n(x)$$

όπου $n(x)$ μια τυχαία καλώς συμπεριφερόμενη συνάρτηση με $n(x_1) = 0 = n(x_2)$

Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα S πάνω στην καμπύλη Y, αυτό εξαρτάται από το α.

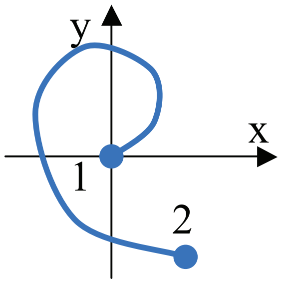
Αλλά για α=0 έχουμε τη διαδρομή y(x) για την οποία το ολοκλήρωμα είναι στάσιμο που οδηγεί στη συνθήκη:

$$\left(\frac{dS(Y(x))}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = 0$$

Euler – Lagrange (περισσότερες μεταβλητές)

Τα περισσότερα προβλήματα στη φυσική έχουν περισσότερες από 2 μεταβλητές από τις οποίες ευτυχώς υπάρχει μόνο μια ανεξάρτητη, ο χρόνος t.

Όταν προσπαθήσαμε να βρούμε τη πιο σύντομη διαδρομή μεταξύ 2 σημείων υποθέσαμε ότι αυτή γράφεται y=y(x).



Όπως φαίνεται στο σχήμα αυτό δεν ισχύει πάντα.

Μπορούμε όμως να γράψουμε: $x = x(u) \qquad y = y(u)$

όπου u οποιαδήποτε μεταβλητή που "βολεύει"

Το στοιχειώδες μήκος κατά μήκος της διαδρομής είναι:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = du\sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2} \quad \text{οπου} \quad x'(u) = \frac{dx}{du} \quad y'(u) = \frac{dy}{du}$$

Το μήκος της διαδρομής είναι: $S = \int_{u_1}^{u_2} du\sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}$

και πρέπει να βρούμε τις συναρτήσεις x(u) και y(u) για να κάνουμε στάσιμο το S

Το γενικό πρόβλημα που έχουμε να λύσουμε είναι:

$$S = \int_{u_1}^{u_2} f\left[x(u), x'(u), y(u), y'(u), u\right] du$$

Να βρεθούν οι διαδρομές x(u) και y(u) ώστε το S να είναι στάσιμο

Euler – Lagrange (περισσότερες μεταβλητές)

Το πρόβλημα είναι παρόμοιο με αυτό της μιας μεταβλητής:

Έστω ότι η σωστή διαδρομή είναι: $x = x(u) \qquad y = y(u)$

Τότε κάθε λάθος διαδρομή θα μπορεί να γραφεί:

$$x = x(u) + \alpha\xi(u) \qquad y = y(u) + \beta\eta(u)$$

Η απαίτηση το ολοκλήρωμα S να 'ναι στάσιμο για τη σωστή διαδρομή ισοδυναμεί με την απαίτηση το ολοκλήρωμα S(α,β) υπολογιζόμενο στη λάθος διαδρομή

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 0 \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial \beta}\right)_{\beta=0} = 0$$

Όπως και για την περίπτωση της μιας μεταβλητής οι δύο αυτές εξισώσεις οδηγούν στις εξισώσεις Euler - Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{du}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{du}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

Χώρος μορφής

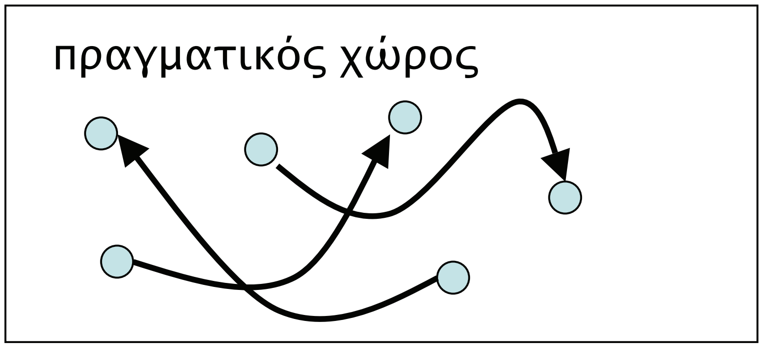
✓ Η εξίσωση Euler-Lagrange γενικεύεται για ένα αυθαίρετο αριθμό εξαρτημένων μεταβλητών $q_i(t)$

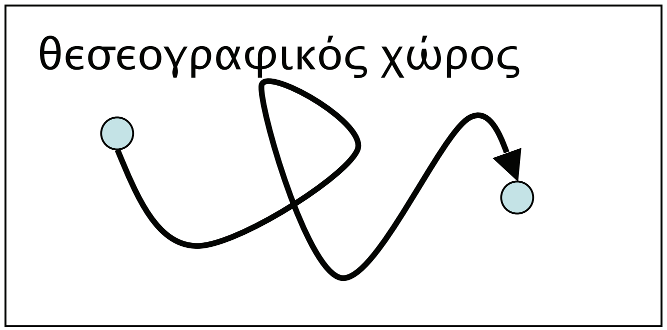
➢ Η ανεξάρτητη μεταβλητή στη μηχανική είναι ο χρόνος t.

✓ Οι γενικευμένες συντεταγμένες $q_1,\ldots,q_n$ περιγράφουν πλήρως την κατάσταση του συστήματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή

➢ Σκεφθείτε ένα χώρο n-διαστάσεων ⇐ χώρος μορφής

- ➢ Κάθε σημείο στο χώρο αυτό ($q_1,\ldots,q_n$) αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη κατάσταση του συστήματος
- ➢ Καθώς το σύστημα εξελίσσεται χρονικά → διαδρομή στο χώρο μορφής





Ολοκλήρωμα δράσης

- Ένα σύστημα κινείται σύμφωνα με $q_j=q_j(t)$ $j=1,\ldots,n$
- Το ολοκλήρωμα S του οποίου η στάσιμη τιμή προσδιορίζει την εξέλιξη ενός μηχανικού συστήματος καλείται ολοκλήρωμα δράσης
- Η ολοκληρώσιμη ποσότητα είναι η Lagrangian L και είναι

$$L(q,\dot{q},t)=L(q(t),\dot{q}(t),t)=L(t)$$

ολοκληρώνοντας

$$\boxed{S=\int_{t_1}^{t_2} L\,dt}$$

Δράση ή ολοκλήρωμα δράσης

- Η δράση εξαρτάται από ολόκληρη την διαδρομή από το t_1 στο t_2
  - Η εκλογή των συντεταγμένων q_j δεν επηρεάζει
  - Η δράση είναι ανεξάρτητη κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων

Η αρχή του Hamilton

"Το ολοκλήρωμα δράσης ενός φυσικού συστήματος είναι στάσιμο για την πραγματική διαδρομή"

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t),\dot{q}(t),t)dt \Rightarrow \delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q(t),\dot{q}(t),t)dt = 0$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με τις εξισώσεις Lagrange

Επομένως έχουμε 3 ισοδύναμους φορμαλισμούς

- Εξισώσεις του Newton εξαρτόνται πλήρως από x-y-z συντεταγμένες
- Οι εξισώσεις Lagrange είναι ίδιες για οποιεσδήποτε γενικευμένες συντεταγμένες
- Η αρχή του Hamilton δεν αναφέρεται σε συντεταγμένες

Τα πάντα βρίσκονται στο ολοκλήρωμα δράσης