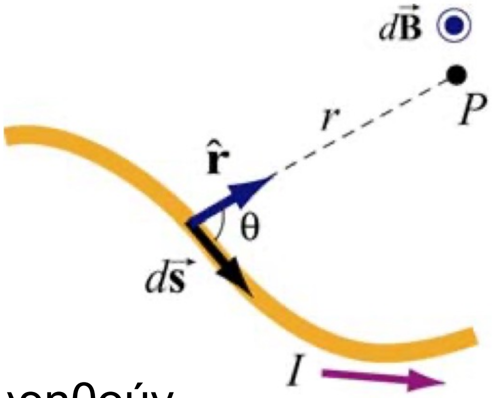
Πηγές Μαγνητικών Πεδίων

Νόμος των Biot - Savart

Ρεύματα που προκύπτουν από την κίνηση φορτίων αποτελούν την πηγή μαγνητικών πεδίων



Όταν φορτίο διαρρέει ένα αγώγιμο σύρμα και δημιουργεί ένα ρεύμα έντασης I, το μαγνητικό πεδίο σε ένα σημείο P εξαιτίας του ρεύματος μπορεί να υπολογιστεί αθροίζοντας τις στοιχειώδεις συνεισφορές $d\vec{B}$ στο μαγνητικό πεδίο από όλα τα $d\vec{s}$ του σύρματος.

Τα στοιχειώδη αυτά τμήματα $d\vec{s}$ του σύρματος μπορούν να θεωρηθούν ως απειροστά διανύσματα ρεύματος και επομένως ως διανυσματικές ποσότητες με μέτρο το μήκος του σύρματος και με κατεύθυνση τη φορά του ρεύματος .

Απειροστά διανύσματα ρεύματος: $Id\vec{s}$

Έστω $\vec{r}$ η απόσταση του σημείου *P* από την πηγή του ρεύματος και $\hat{r}$ το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα. Ο νόμος των Biot-Savart δίνει μια έκφραση για την συνεισφορά στο μαγνητικό πεδίο, $d\vec{B}$, από την πηγή ρεύματος, $Id\vec{s}$,

Νόμος των Biot – Savart: $\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{s}\times\hat{r}}{r^2}}$

μ_0: *μαγνητική διαπερατότητα του κενού*

$\boxed{\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}Tm/A}$

Νόμος των Biot-Savart: Σύγκριση $\vec{E}$ και $\vec{B}$

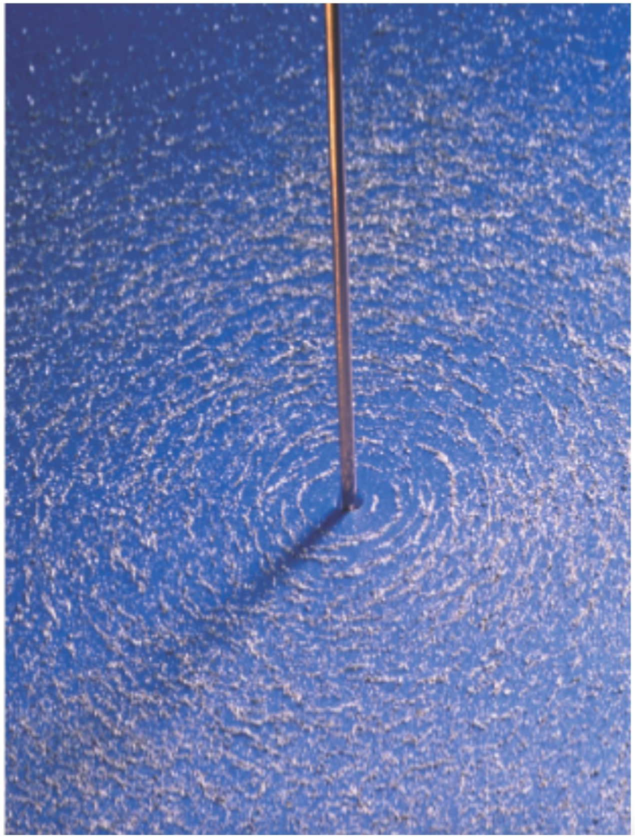
Η προηγούμενη έκφραση μοιάζει με την αντίστοιχη έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί στοιχειώδες φορτίο *dq*, όπως προκύπτει από τον νόμου του Coulomb

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

- Το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται από κάποιο μεμονωμένο ηλεκτρικό φορτίο.
- Το μαγνητικό πεδίο δημιουργείται από κάποιο κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο.
- Το μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο είναι αντιστρόφως ανάλογα του τετραγώνου της απόστασης από την πηγή ή το ηλεκτρικό φορτίο
- Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από ένα σημειακό φορτίο έχει ακτινική διεύθυνση
- Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από ένα κινούμενο φορτίο (ρεύμα) έχει διεύθυνση κάθετη τόσο στο στοιχειώδες τμήμα $d\vec{s}$ όσο και στο μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{r}$.

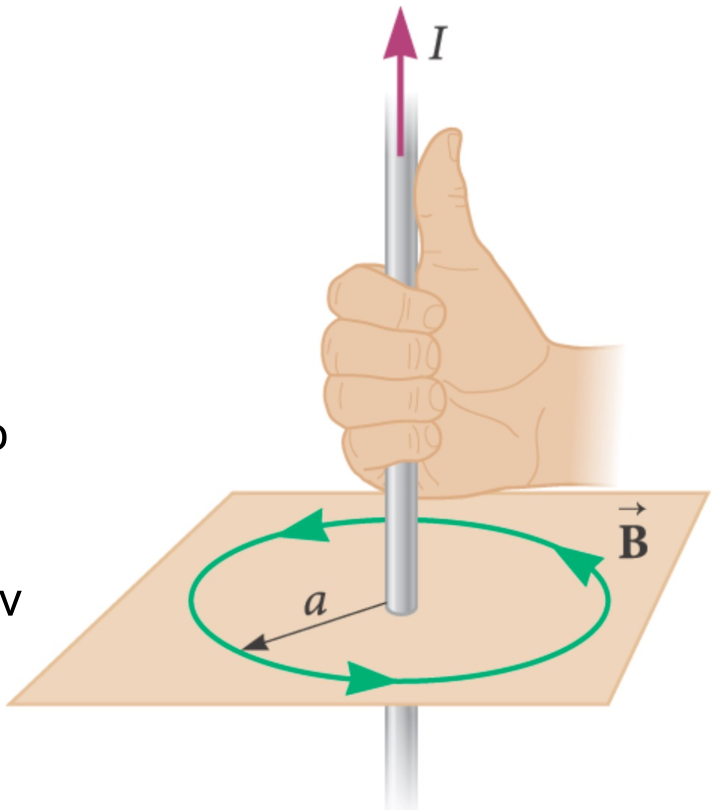
Μαγνητικό πεδίο ενός ρευματοφόρου σύρματος

- Τα ρινίσματα του σιδήρου αποτυπώνουν το κυκλικό μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται γύρω από τον ρευματοφόρο αγωγό

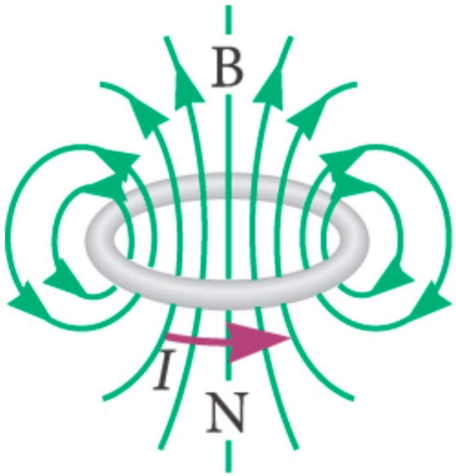


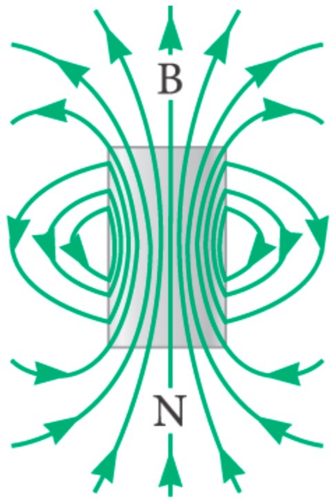
Μαγνητικό πεδίο ενός ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού άπειρου μήκους

- Οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι κύκλοι ομόκεντροι του ρευματοφόρου αγωγού
- Οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι σε επίπεδα κάθετα στον αγωγό
- Το μέτρο του πεδίου είναι σταθερό σε κάθε κύκλο ακτίνας α
- Η κατεύθυνση του πεδίου προσδιορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού



Οι μαγνητικές γραμμές του πεδίου ενός βρόχου





- Οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου για κυκλικό βρόχο που διαρρέεται από ρεύμα
- Οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου για ραβδόμορφο μαγνήτη

Τα μαγνητικά πεδία στις δύο περιπτώσεις είναι όμοια

Μαγνητικό πεδίο σωληνοειδούς

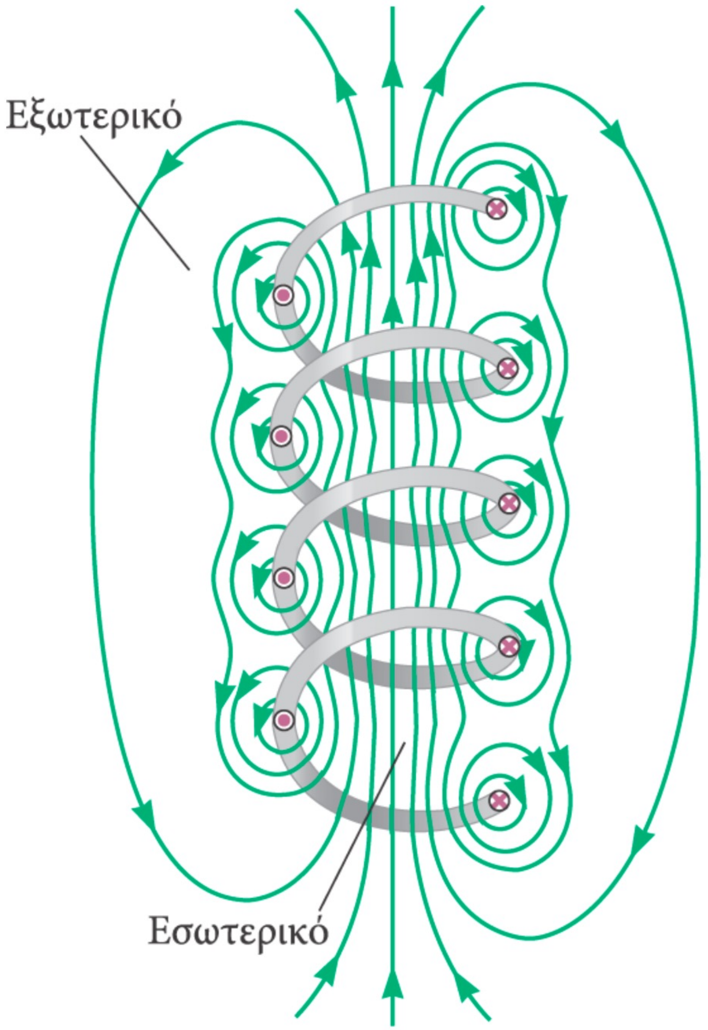
Αναφέρουμε ως σωληνοειδές, ένα σύρμα μεγάλου μήκους τυλιγμένο σαν έλικα.

Όταν το σωληνοειδές διαρρέεται από ρεύμα, τότε δημιουργείται ένα σχετικά ομογενές μαγνητικό πεδίο στο χώρο που περιβάλλουν οι σπείρες του σωληνοειδούς (στο εσωτερικό του).

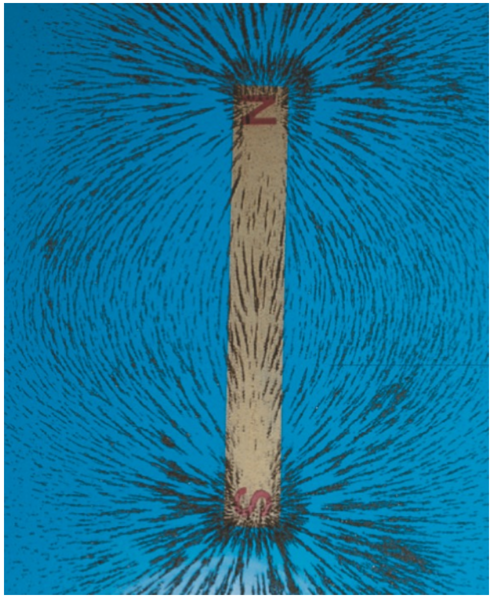
Οι γραμμές του πεδίου στο εσωτερικό του σωληνοειδούς είναι:

- Σχεδόν παράλληλες γραμμές
- Κατανεμημένες ομοιόμορφα
- Σε κοντινή απόσταση μεταξύ τους

Επομένως το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς είναι ισχυρό και σχεδόν ομογενές



Μαγνητικό πεδίο σωληνοειδούς με πυκνές σπείρες



Η κατανομή του μαγνητικού πεδίου μοιάζει με αυτή ενός ραβδόμορφου μαγνήτη

Όσο μεγαλύτερο το μήκος του σωληνοειδούς:

- Το μαγνητικό πεδίο γίνεται περισσότερο ομογενές στο εσωτερικό του
- Το μαγνητικό πεδίο γίνεται ασθενέστερο στο εξωτερικό του

Ιδανικό σωληνοειδές

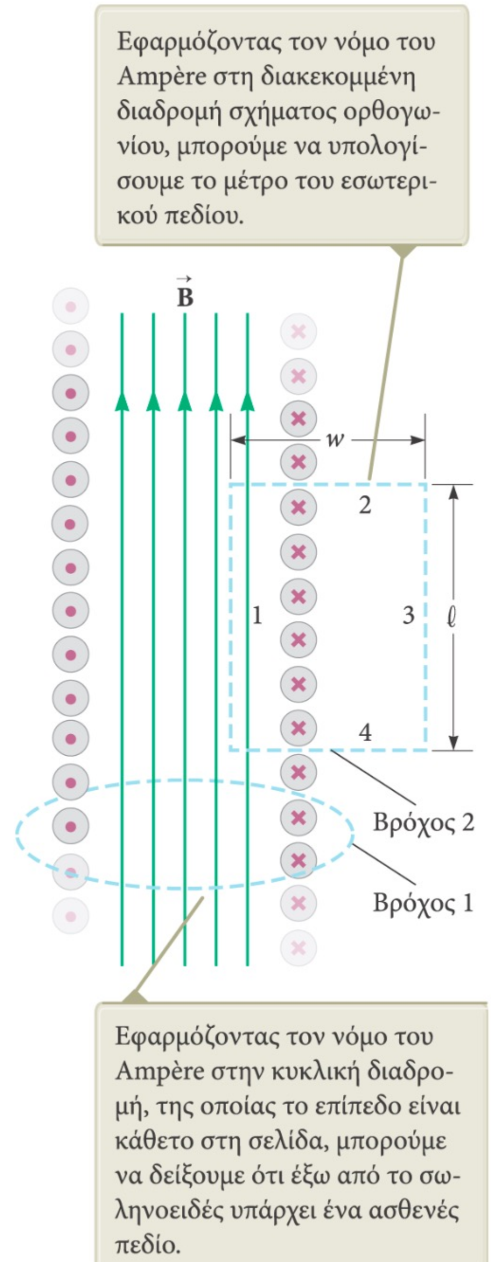
Η περίπτωση ενός ιδανικού σωληνοειδούς προσεγγίζεται όταν:

- Οι σπείρες του σωληνοειδούς είναι πυκνές
- Το μήκος του σωληνοειδούς είναι πολύ μεγαλύτερο της ακτίνας των σπειρών του

Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς που αποτελείται από N σπείρες, δίνεται από την σχέση:

$$\boxed{B = \mu_0 N I}$$

Η σχέση ισχύει μόνο για σημεία που βρίσκονται κοντά στο κέντρο των σπειρών ενός σωληνοειδούς μεγάλου μήκους.



Μαγνητικό πεδίο από πεπερασμένο ευθύγραμμο σύρμα

Ολοκλήρωση της $d\vec{B}$ για όλα τις στοιχειώδεις πηγές ρεύματος οδηγεί στην εύρεση του $\vec{B}$ στο σημείο P:

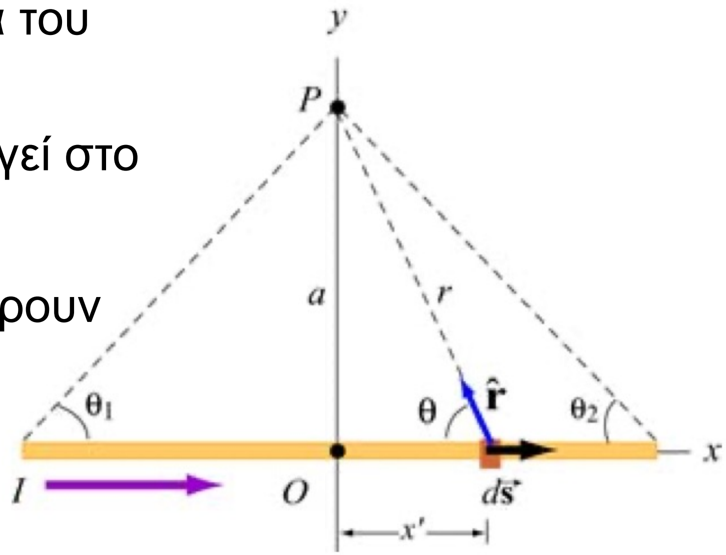
$$\boxed{\vec{B} = \int_{\sigma\acute{\upsilon}\rho\mu\alpha} d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\sigma\acute{\upsilon}\rho\mu\alpha} \frac{d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2}}$$

Διανυσματικό ολοκλήρωμα, ένα για κάθε συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου, όπως προκύπτει από το $d\vec{s}\times\hat{r}$

Εξετάζουμε αρχικά το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί στο σημείο *P* ένα πεπερασμένου μήκους σύρμα.

- Υποθέτουμε ότι τα άκρα του σύρματος συνεισφέρουν στοιχειώδη πεδία που αλληλοαναιρούνται.

Θεωρούμε στοιχειώδες μήκος σύρματος $d\vec{s} = dx'\hat{\imath}$ που διαρρέεται από ρεύμα I.



Έστω $\vec{r}'$ το διάνυσμα θέσης αυτής της στοιχειώδους πηγής: $\vec{r}' = x'\hat{\imath}$

Το διάνυσμα θέσης του σημείου *P* ως προς το O γράφεται ως $\vec{r}_P = a\hat{\jmath}$

Το σχετικό διάνυσμα θέσης του σημείου *P* ως προς την πηγή: $\vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}' = a\hat{\jmath} - x'\hat{\imath}$

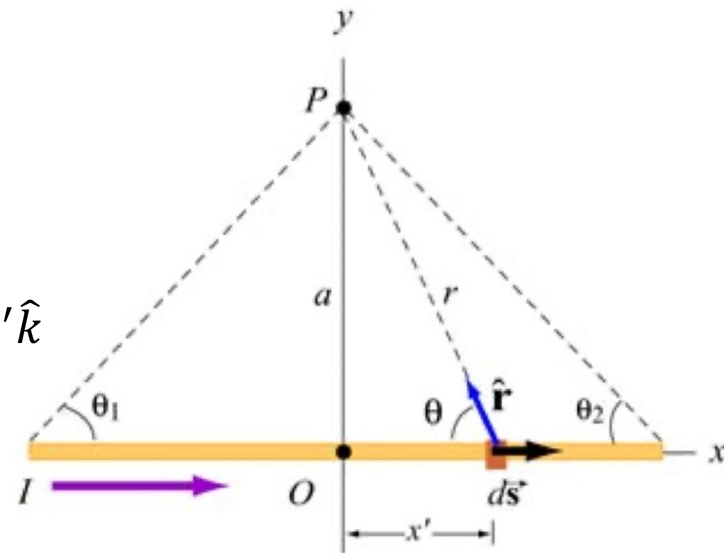
Μαγνητικό πεδίο από πεπερασμένο ευθύγραμμο σύρμα

Το σχετικό διάνυσμα θέσης του σημείου *P* ως προς την πηγή: $\vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}' = a\hat{j} - x'\hat{i}$

Το μέτρο του σχετικού διανύσματος θέσης είναι: $|\vec{r}| = \sqrt{a^2 + x'^2}$

Το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα είναι:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{a\hat{j} - x'\hat{i}}{\sqrt{a^2 + x'^2}} \Rightarrow \hat{r} = sin\theta\hat{j} - cos\theta\hat{i}$$



Υπολογίζουμε το εξωτερικό γινόμενο: $d\vec{s}\times\hat{r}$

$$d\vec{s}\times\hat{r} = (dx'\hat{\imath})\times(-cos\theta\hat{\imath} + sin\theta\hat{\jmath}) \Rightarrow d\vec{s}\times\hat{r} = sin\theta dx'\hat{k}$$

Από τον νόμο των Biot-Savart έχουμε:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{s}\times\hat{r}}{r^2} \Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dx' sin\theta}{r^2}\hat{k} \Rightarrow$$

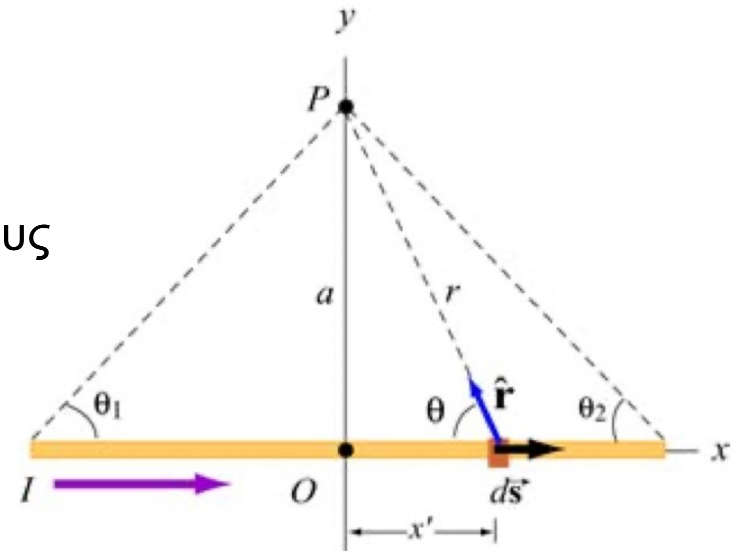
Επομένως το μαγνητικό πεδίο έχει κατεύθυνση έξω από την σελίδα

Χρειάζεται τώρα να κάνουμε την ολοκλήρωση ως προς όλο το σύρμα:

$$\vec{B} = \int_{σύρμα} d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{σύρμα}\frac{d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{σύρμα}\frac{sin\theta dx'}{r^2}\hat{k}$$

Μαγνητικό πεδίο από πεπερασμένο ευθύγραμμο σύρμα

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\sigma\acute{\upsilon}\rho\mu\alpha} \frac{sin\theta dx'}{r^2} \hat{k}$$



Ωστόσο τα *x*, *θ* και *r* δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους μεταβλητές.

Γράφουμε τα *x* και *r* συναρτήσει του *θ*:

$$r = \frac{a}{sin\theta} = \alpha csc\theta$$

$$x' = acot\theta \Rightarrow dx' = -a \csc^2 \theta d\theta$$

Αντικαθιστούμε τις προηγούμενες εκφράσεις και έχουμε:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{sin\theta \, (-a\csc^2\theta) d\theta}{\alpha^2 \csc^2 \theta} \hat{k} \Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi\alpha} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} sin\theta d\theta \hat{k}$$

Το **-** στη γωνία θ_1 απαιτείται ώστε να λάβουμε υπόψιν ότι μέρος του σύρματος βρίσκεται στα αρνητικά *x*:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\alpha}(cos\theta_2 + cos\theta_1)\hat{k}}$$

ο όρος που σχετίζεται με θ_2 αναφέρεται στη συνεισφορά του θετικού τμήματος και ο όρος που σχετίζεται με θ_1 αναφέρεται στη συνεισφορά του αρνητικού τμήματος του σύρματος. Οι δύο συνεισφορές προστίθενται.

Μαγνητικό πεδίο από πεπερασμένο ευθύγραμμο σύρμα

Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις:

- **Συμμετρική περίπτωση**: ($\theta_1 = -\theta_2$)

  Το σημείο *P* του πεδίου βρίσκεται στην κάθετο διάμεσο του ευθύγραμμου αγωγού.

  Αν το μήκος του σύρματος είναι 2*L* τότε $cos\theta_1 = L/\sqrt{L^2+a^2}$ και το μαγνητικό πεδίο γράφεται:

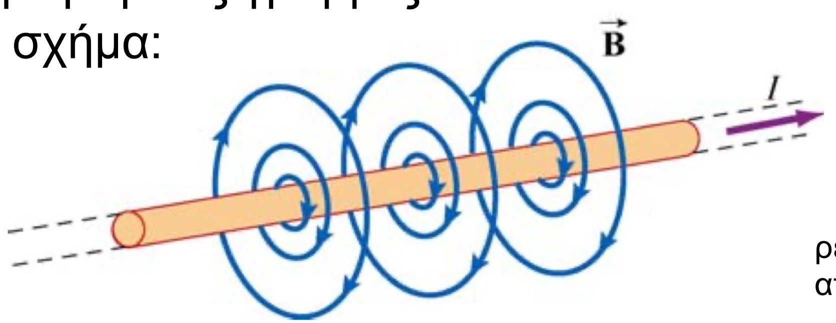
$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\alpha} 2cos\theta_1 \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha} \frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}} \hat{k}}$$

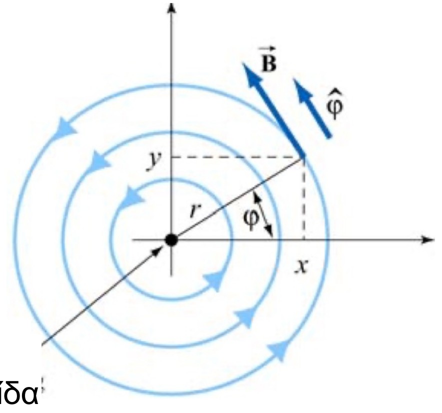
- **Περίπτωση αγωγού άπειρου μήκους**: ($L \rightarrow \infty$)

  Τα όρια προκύπτουν θέτοντας $\theta_1 = \theta_2 = 0$.

  Το μαγνητικό πεδίο σε απόσταση α από το σύρμα θα είναι: $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha} \hat{k}}$

  Στο όριο αυτό το σύστημα έχει κυλινδρική συμμετρία και οι μαγνητικές γραμμές είναι κύκλοι όπως στο σχήμα:

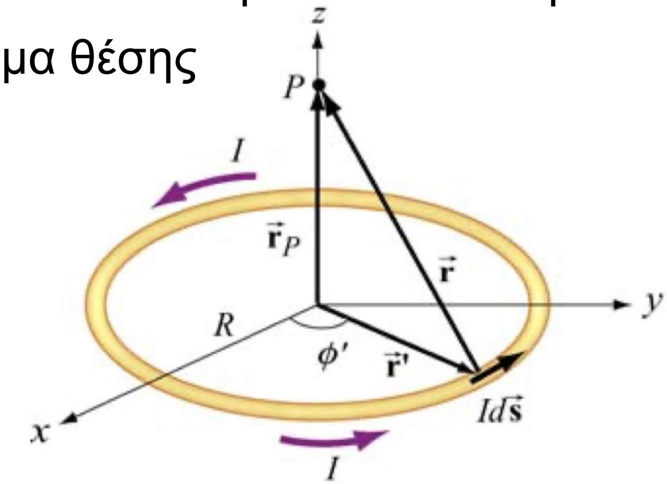




ρεύμα έξω
από τη σελίδα

Μαγνητικό πεδίο κυκλικού βρόχου

Θεωρούμε κυκλικό βρόχο ακτίνας *R* που διαρρέεται από ρεύμα *I*. Θα βρούμε το μαγνητικό πεδίο σε σημείο *P* στον άξονα συμμετρίας σε απόσταση *z* από το κέντρο



Όπως πριν, το στοιχειώδες ρεύμα βρίσκεται σε διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}' = R(cos\varphi\hat{\imath} + sin\varphi\hat{\jmath})$$

και μπορεί να γραφεί ως:

$$Id\vec{s} = I\frac{d\vec{r}'}{d\varphi'}d\varphi' = IRd\varphi'(-sin\varphi'\hat{\imath} + cos\varphi'\hat{\jmath})$$

Το διάνυσμα θέσης του σημείου *P* είναι: $\vec{r}_P = z\hat{k}$

Το διάνυσμα της σχετικής θέσης του σημείου *P* είναι ως προς την πηγή είναι:

$$\vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}' = -Rcos\varphi'\hat{\imath} - Rsin\varphi'\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

Το μέτρο του είναι: $|\vec{r}| = \sqrt{R^2 + z^2}$

και το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα είναι: $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}_P - \vec{r}'}{|\vec{r}_P - \vec{r}'|}$

Μπορούμε να γράψουμε το εξωτερικό γινόμενο $d\vec{s}\times(\vec{r}_P - \vec{r}')$ με τη μορφή:

$$d\vec{s}\times(\vec{r}_P - \vec{r}') = Rd\varphi'(-sin\varphi'\hat{\imath} + cos\varphi'\hat{\jmath})\times\left[-Rcos\varphi'\hat{\imath} - Rsin\varphi'\hat{\jmath} + z\hat{k}\right] \Rightarrow$$

$$d\vec{s}\times(\vec{r}_P - \vec{r}') = Rd\varphi'\left[zcos\varphi'\hat{\imath} + zsin\varphi'\hat{\jmath} + Rsin^2\varphi'\hat{k} + Rcos^2\varphi'\hat{k}\right] \Rightarrow$$

Μαγνητικό πεδίο κυκλικού βρόχου

Επομένως: $d\vec{s}\times(\vec{r}_P - \vec{r}') = Rd\varphi'\left[zcos\varphi'\hat{\imath} + zsin\varphi'\hat{\jmath} + R\hat{k}\right]$

Η συνεισφορά του στοιχειώδους ρεύματος στο μαγνητικό πεδίο στο σημείο *P*, σύμφωνα με τον νόμο των Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times(\vec{r}_P - \vec{r}')}{[\vec{r}_P - \vec{r}']^3} \Rightarrow$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\frac{\left[zcos\varphi'\hat{\imath} + zsin\varphi'\hat{\jmath} + R\hat{k}\right]}{(R^2+z^2)^{3/2}}d\varphi'$$

Η ολοκλήρωση της προηγούμενης σχέσης για όλο το μήκος του κυκλικού βρόχου:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left[zcos\varphi'\hat{\imath} + zsin\varphi'\hat{\jmath} + R\hat{k}\right]}{(R^2+z^2)^{3/2}}d\varphi'$$

Οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου στη *x* και *y* διεύθυνση είναι:

$$\vec{B}_x = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{zcos\varphi'\hat{\imath}}{(R^2+z^2)^{3/2}}d\varphi' \Rightarrow \vec{B}_x = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\frac{z\hat{\imath}}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left.sin\varphi'\right|_0^{2\pi} \Rightarrow \quad \vec{B}_x = \vec{0}$$

$$\vec{B}_y = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{zsin\varphi'\hat{\jmath}}{(R^2+z^2)^{3/2}}d\varphi' \Rightarrow \vec{B}_x = -\frac{\mu_0 IR}{4\pi}\frac{z\hat{\jmath}}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left.cos\varphi'\right|_0^{2\pi} \Rightarrow \quad \vec{B}_y = \vec{0}$$

Μαγνητικό πεδίο κυκλικού βρόχου

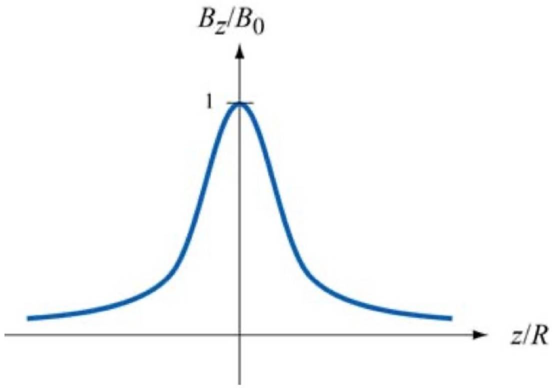
Η z-συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου θα είναι:

$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R\hat{k}}{(R^2+z^2)^{3/2}} d\varphi' \Rightarrow \vec{B}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} \hat{k} d\varphi' \Rightarrow \boxed{\vec{B}_z = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}}$$

Κατά μήκος του άξονα συμμετρίας, η z-συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου, είναι η μόνη συνιστώσα που δεν μηδενίζεται.

Αν θεωρήσουμε το μαγνητικό πεδίο για $z = 0$ τότε θα έχουμε: $B_0 = \mu_0 I/(2R)$.

Μπορούμε να κάνουμε το γράφημα B_z/B_0 συναρτήσει του λόγου R/z



Μαγνητικό Δίπολο Μαγνητικό πεδίο κυκλικού βρόχου

Θεωρούμε ότι ένα μαγνητικό δίπολο, $\vec{\mu} = \mu_z \hat{k}$, εισάγεται στο μαγνητικό πεδίο στο σημείο *P*.

Εξαιτίας της ανομοιογένειας του μαγνητικού πεδίου, στο μαγνητικό δίπολο θα εξασκείται δύναμη, που είναι:

$$\vec{F}_B = \vec{\nabla}(\vec{\mu}\cdot\vec{B}) \Rightarrow \vec{F}_B = \vec{\nabla}(\mu_z B_z) \Rightarrow \vec{F}_B = \mu_z\left(\frac{dB_z}{dz}\right)\hat{k}$$

Παραγώγιση της $\vec{B}_z = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}$ ως προς *z*

$$\Rightarrow \vec{F}_B = -\frac{3}{2}\frac{\mu_0 \mu_z I R^2 z}{(R^2+z^2)^{5/2}}\hat{k}$$

Παρατηρούμε, ότι το μαγνητικό δίπολο έλκεται προς τον βρόχο που διαρρέεται από ρεύμα

Αν αντιστρέψουμε τη διεύθυνση του μαγνητικού δίπολου ($\vec{\mu} = -\mu_z \hat{k}$) τότε η δύναμη που ασκείται από το βρόχο γίνεται απωστική

10ο Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

Έτοιμοι