Εξαναγκασμένες φθίνουσες ταλαντώσεις

- Στην περίπτωση αυτή μελετάμε την δεδομένη οδηγό δύναμη: $F_d(t) = F\cos\omega_d t$ η οποία δρα επιπλέον των άλλων δυνάμεων: $-Kx - b\dot{x}$
- Η συχνότητα μπορεί να 'ναι οτιδήποτε.
- Εν γένει είναι χρήσιμο να κοιτάξουμε τέτοιες δυνάμεις γιατί κάθε γενική συνάρτηση του t μπορεί να γραφεί συναρτήσει ημιτόνων και συνημίτονων μέσω Fourier ανάλυση.
- Επικεντρωνόμαστε στην $F_d(t) = F\cos\omega_d t$ γιατί μπορούμε να την λύσουμε

$$F = ma \Rightarrow -Kx - b\dot{x} + F_d\cos\omega_d t = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f\cos\omega_d t$$

όπου $\gamma \equiv \dfrac{b}{2m}$ και $\omega_0^2 \equiv \dfrac{K}{m}$ και $f = \dfrac{F_d}{m}$

Ως συνήθως μαντεύουμε την λύση της μορφής $x(t) = A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t$

Θα μπορούσαμε να πάρουμε οποιαδήποτε άλλη συχνότητα πέρα από την συχνότητα της οδηγού δύναμης.

Αν δούμε ότι δεν έχουμε λύση για ω_d τότε δοκιμάζουμε άλλη συχνότητα.

Αλλά θα δούμε ότι πάντα υπάρχει λύσει για ω_d

Εξαναγκασμένες φθίνουσες ταλαντώσεις

- Η λύση αυτή είναι διαφορετική από τι έχουμε κάνει μέχρι τώρα.
- Εδώ μαντεύουμε την συχνότητα και λύνουμε ως προς τις σταθερές A και B ενώ πριν λύναμε για τη συχνότητα και βρίσκαμε A και B από αρχικές συνθήκες.

Αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση (F=mα) έχουμε:

$$-\omega_d^2 A\cos\omega_d t - \omega_d^2 B\sin\omega_d t + 2\gamma\left(-\omega_d A\sin\omega_d t + \omega_d B\cos\omega_d t\right) + \omega_0^2\left(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t\right) = f\cos\omega_d t$$

Αν η σχέση ισχύει για κάθε t τότε οι συντελεστές των $\cos\omega_d t$ και $\sin\omega_d t$ πρέπει να συμφωνούν και από τις 2 πλευρές της εξίσωσης:

$$\sin\omega_d t \Rightarrow \omega_d^2 B - 2\gamma\omega_d A + \omega_0^2 B = 0$$

$$\cos\omega_d t \Rightarrow -\omega_d^2 A + 2\gamma\omega_d B + \omega_0^2 A = f$$

Σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους το οποίο δίνει για A και B

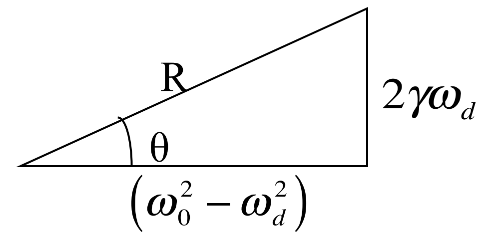
$$A = \frac{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega_d\right)^2} \qquad B = \frac{\left(2\gamma\omega_d\right)f}{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega_d\right)^2}$$

Ορίζουμε $R = \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega_d\right)^2}$ οπότε $A = \dfrac{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2}{R^2}$ $\quad B = \dfrac{\left(2\gamma\omega\right)f}{R^2}$

Εξαναγκασμένες φθίνουσες ταλαντώσεις

Γράφουμε την x(t) μετά την εύρεση των A και B:

Ορίζουμε τις ποσότητες: $R \equiv \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega_d\right)^2}$ και θ



$$\tan\theta = \frac{2\gamma\omega_d}{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)}{R} \\ \sin\theta = \dfrac{2\gamma\omega_d}{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \dfrac{f\cos\theta}{R} \\ \mathrm{B} = \dfrac{f\sin\theta}{R} \end{array} \right.$$

$$x(t) = \frac{f\cos\theta}{R}\cos\omega_d t + \frac{f\sin\theta}{R}\sin\omega_d t \boxed{\Rightarrow x(t) = \frac{f}{R}\cos\left(\omega_d t - \theta\right)}$$

Όλα σ' αυτή την λύση είναι προσδιορισμένα!! Δεν υπάρχουν ελεύθερες παράμετροι. Δεν έχει να κάνει με τις αρχικές συνθήκες του x και υ.

Η πιο γενική λύση της εξίσωσης είναι αυτή που έχει την παραπάνω λύση και την λύση της ομογενούς που βρήκαμε στις (σελίδες 4, 5 και 6).

$$x(t) = \frac{f}{R}\cos\left(\omega_d t - \theta\right) + \text{ Λύση ομογενούς } \qquad De^{-\gamma t}\cos\left(\Omega t + \varphi\right)$$

Αν υπάρχει απόσβεση τότε ο όρος $e^{-\gamma t}$ της ομογενούς κάνει τον όρο να μηδενίζεται και απομένει μια λύση που ταλαντώνει με συχνότητα ω_d και η οποία είναι ανεξάρτητη από τις αρχικές συνθήκες.

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις - Συντονισμός

Το πλάτος της συγκεκριμένης ταλάντωσης είναι ανάλογο του

$$\frac{1}{R} \equiv \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_d^2\right)^2+\left(2\gamma\omega_d\right)^2}}$$

- Για συγκεκριμένα γ και ω_d, γίνεται μέγιστο όταν ο πρώτος όρος στην ρίζα είναι μηδέν.

  Αυτό συμβαίνει όταν $\omega_0=\omega_d$.
- Αν το γ είναι μικρό (μικρή απόσβεση) και ω_0(ιδιοσυχνότητα) είναι κοντά στην ω_d (οδηγούσα συχνότητα) το πλάτος είναι πολύ μεγάλο.
- Όταν $\omega_0=\omega_d$ λέμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε συντονισμό
- Για συγκεκριμένα γ και ω_0, χρειάζεται κάποια δουλειά για να βρούμε την συχνότητα ω_d στην οποία το πλάτος μεγιστοποιείται. Αυτό που χρειάζεται να κάνουμε είναι να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση

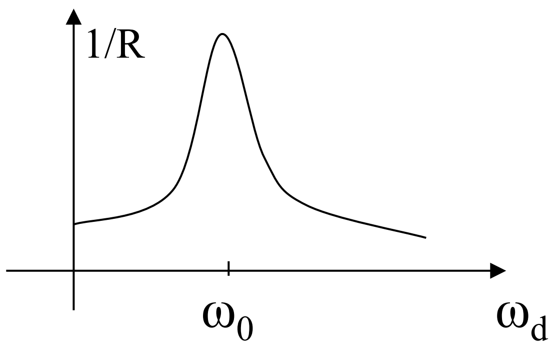
$$\left(\omega_0^2-\omega_d^2\right)^2+\left(2\gamma\omega_d\right)^2$$

Θέτοντας την παράγωγο ίση με 0 έχουμε $x=\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}$

Για μικρά γ (που είναι η συνηθισμένη περίπτωση) έχουμε και πάλι $\omega_0=\omega_d$

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις - Συντονισμός

Για συγκεκριμένες τιμές των γ και ω_0, η τιμή του $1/R$ συναρτήσει του ω_d μπορεί να μοιάζει με το παρακάτω σχήμα:



Η φάση θ:

Για συγκεκριμένο ω_0, η φάση θ στην εξίσωση $x(t) = \frac{f}{R}\cos(\omega_d t - \theta)$ μπορεί να υπολογισθεί για ορισμένες περιπτώσεις

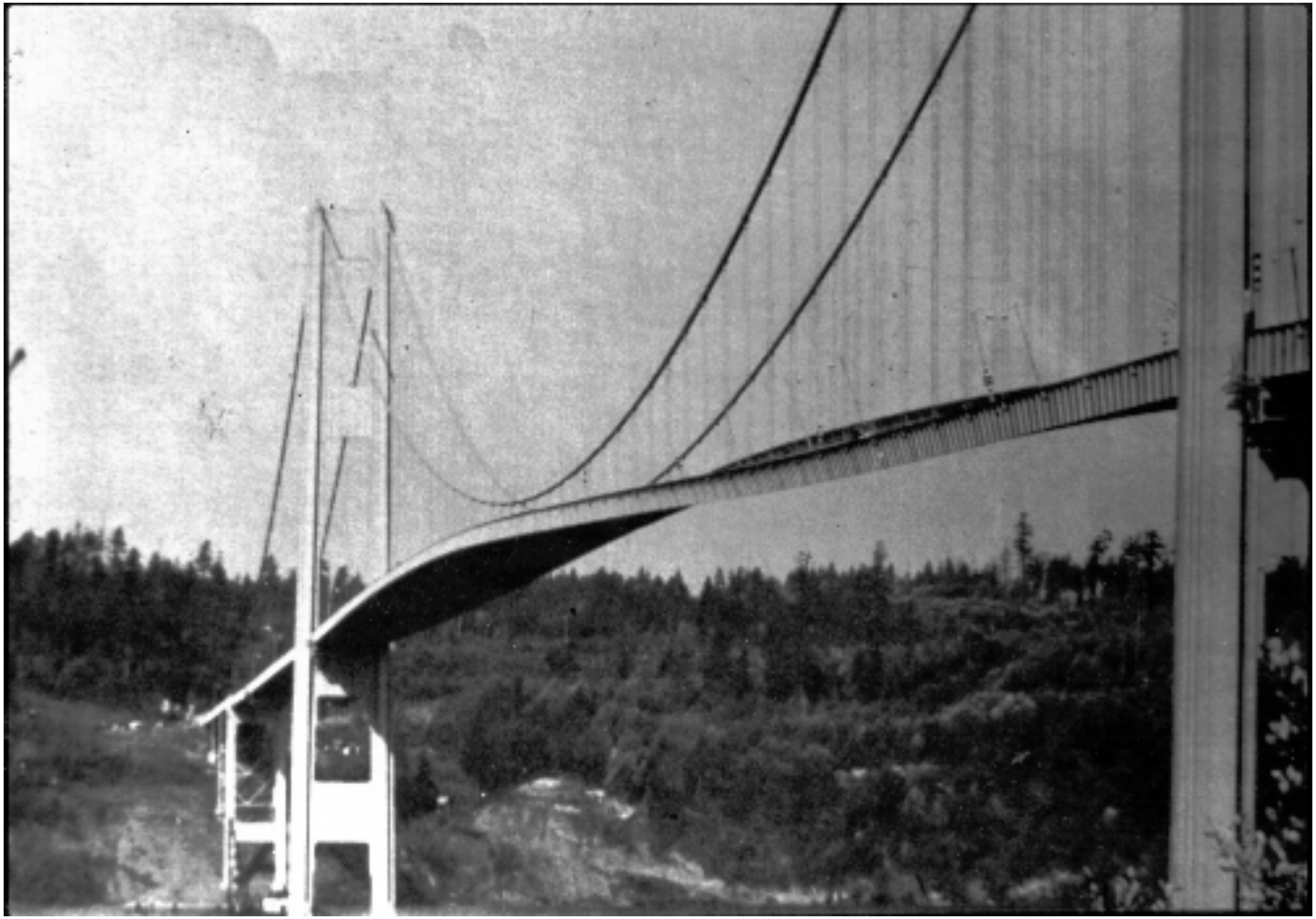
χρησιμοποιώντας $\tan\theta = \frac{2\gamma\omega_d}{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)}$

$\omega_d \sim 0 \Rightarrow \theta \sim 0$ (σε φάση με τη δύναμη)

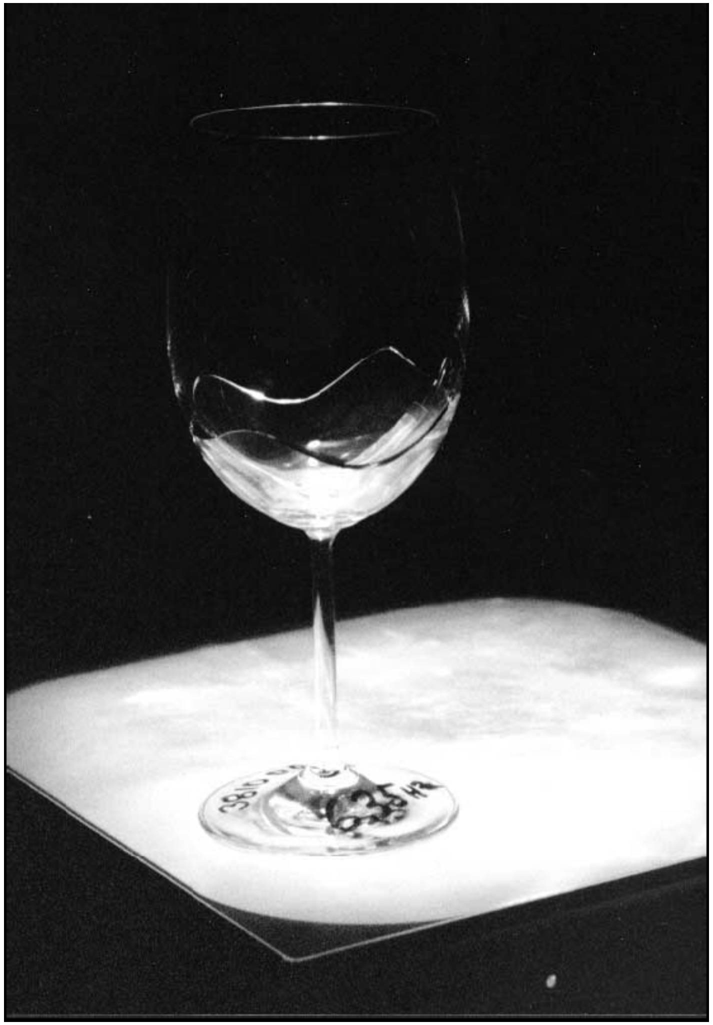
$\omega_d \sim \omega_0 \Rightarrow \theta \sim \pi/2$ (δύναμη μέγιστη στο x=0). Εφαρμόζουμε τη δύναμη όταν το σώμα κινείται ταχύτατα $(x = 0) \Rightarrow P = F\upsilon$. Μέγιστη μεταφορά ισχύος ➔ Μέγιστη Ε ➔ Μέγιστο πλάτος

$\omega_d \to \infty \Rightarrow \theta \sim \pi$ (Η κίνηση δεν είναι σε φάση με την δύναμη). Η μάζα δεν κινείται ιδιαίτερα και το ελατήριο δίνει μικρή δύναμη

Συντονισμός και η γέφυρα Tacoma Narrows



Σπάζοντας ένα ποτήρι



Παραδείγματα

Μια μάζα 3kg τοποθετείται σε ένα ελατήριο σταθεράς k=24N/m. Επιμηκύνεται κατά 5cm και αφήνεται να ταλαντωθεί.

(α) Ποια εξίσωση περιγράφει τη θέση του συναρτήσει του χρόνου

(β) Ποια η ενέργεια του συστήματος

(γ) Ποια η μέγιστη ταχύτητα του συστήματος

(δ) Μετά από πόσο χρόνο έχει και πάλι απομάκρυνση +5cm

(α) Ξέρουμε ότι για t = 0, x=5cm ενώ υ=0m/s. Επομένως: $x(t) = 5\cos(\omega t)$

(β) Η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Επομένως τη χρονική στιγμή t = 0

$$E_{\mu\eta\chi} = E_{\kappa\iota\nu.} + E_{\varepsilon\lambda.} = 0 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \times 24 \times \left(5 \times 10^{-2}\right)^2 = 0.3J$$

(γ) Το σώμα έχει μέγιστη ταχύτητα όταν η $E_{\delta\upsilon\nu}$=0, ενώ $E_{\mu\eta\chi}$=σταθ.

$$E_{\mu\eta\chi} = E_{\kappa\iota\nu.} + E_{\varepsilon\lambda.} = 0 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = 0.3J \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2 \times 0.3}{3}} \Rightarrow \upsilon = 0.14m/s$$

(δ) Η γωνιακή συχνότητα του συστήματος είναι:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{24}} \Rightarrow T = 2.2s$$