

Άσκηση [15μ]

Θεωρήστε ότι ρίχνετε μια μπάλα με αρχική ταχύτητα $u_0=46\text{m/s}$ από την θέση $y_0=0$.

(α) Υπολογίστε το μέγιστο ύψος

(β) Χρησιμοποιήστε την μέθοδο Euler για να βρείτε την ταχύτητα του σώματος συναρτήσει του χρόνου για το διάστημα της κίνησης 0 έως 10 sec με βήμα 1, 0.1 και 0.01 sec αντίστοιχα.

(γ) Κάντε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου για τα 3 χρονικά βήματα που θεωρήσατε στο (β)

(δ) Βρείτε το μέγιστο ύψος για κάθε ένα χρονικό βήμα που χρησιμοποιήσατε στο ερώτημα (β) και συγκρίνετέ το με αυτό που υπολογίσατε στο ερώτημα (α).

Απάντηση:

(α) Το μέγιστο ύψος, θεωρητικά, βρίσκεται από το σημείο στο οποίο η ταχύτητα του σώματος στην κατακόρυφο διεύθυνση μηδενίζεται. Θα έχουμε $v_f^2 - v_i^2 = -2gh_{max} \Rightarrow h_{max} = \frac{v_i^2}{2g}$.

(β) Η μέθοδος του Euler για την κίνηση του σώματος δίνεται από το ακόλουθο πρόγραμμα:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def interpolate(y1,y2,x1,x2,x0):
    return y0 = y1 - (x1-x0)(y1-y2)/(x1-x2)

def Euler(u0, y0, t0, tmax, dt):
    t = t0
    u = u0
    y = y0
    a = -9.81
    while t <= tmax :
        velo += [u]
        posi += [y]
        time += [t]
        upr = u
        ypr = y
        y = y + u * dt
        u = u + a * dt
        t = t + dt
        if upr*u < 0 or u == 0 :      # Η ταχύτητα αλλάζει πρόσημο στο μέγιστο ύψος
            hmax=interpolate(ypr,y,upr,u,0) # Γραμμική παρεμβολή
    return time,velo,posi,hmax

v0 = 46; h0 = 0
tmx = 10; t0 = 0
dt = 1.0
gr ['k-','r-','b-']
for k in range(3):
    tstep = dt/10**k
    Time, Velo, Ypos = [], [], []
    Time,Velo,Ypos,Hmax = Euler(v0,h0,t0,tmx,tstep)
    if k==0: plt.figure(figsize(6,6))
    plt.plot(Time,Velo,gr[k])
    print("For time step = %3.2f the hmax = %6.2f"%(tstep,Hmax))
    if (k==2) plt.show()
```

(γ) Το ερώτημα υπάρχει στις τελευταίες 3 γραμμές του παραπάνω κώδικα.

(δ) Για να βρούμε το μέγιστο ύψος θα πρέπει να βρούμε που αλλάζει πρόσημο η ταχύτητα και να χρησιμοποιήσουμε γραμμική παρεμβολή για να βρούμε το ύψος για το οποίο η ταχύτητα μηδενίζεται. Θεωρούμε το γράφημα του ύψους συναρτήσει της ταχύτητας και υποθέτουμε για την εφαρμογή της γραμμικής παρεμβολής, ότι το ύψος ανάμεσα στα δύο τελευταία σημεία που η ταχύτητα αλλάζει πρόσημο, το γράφημα αυτό παρουσιάζει γραμμική συμπεριφορά. Οπότε εφαρμόζουμε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα δύο σημεία και από το σημείο που η ταχύτητα είναι 0. Δηλαδή :

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \Rightarrow y_0 = y_1 - (x_1 - x_0) \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

όπου x_1, x_2 είναι οι τιμές της ταχύτητας όταν αλλάζει πρόσημο και y_1, y_2 τα αντίστοιχα ύψη, ενώ x_0, y_0 οι τιμές της ταχύτητας και του ύψους όταν η ταχύτητα $x_0 = 0$.