Σειρά	Θέση

ΦΥΣ. 131
Τελική Εξέταση: 13-Δεκεμβρίου-2006

Πριν αρχίσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητας).

Ονοματεπώνυμο	Αριθμός ταυτότητας

Σας δίνονται 10 ισότιμα προβλήματα (20 βαθμοί το καθένα) και πρέπει να απαντήσετε σε όλα.

Προσπαθήστε να δείξετε την σκέψη σας και να εξηγήσετε όσο το δυνατόν πιο καθαρά για ποιό λόγο κάνετε ότι γράφετε. Γράψτε καθαρά διαγράμματα με δυνάμεις, ταχύτητες, επιταχύνσεις.

ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ ΕΙΔΟΣ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ ΟΠΩΣ ΕΠΙΣΗΣ ΧΡΗΣΗ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ, ΒΙΒΛΙΩΝ, ΚΙΝΗΤΩΝ Η ΟΤΙΔΗΠΟΤΕ ΑΛΛΟ.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. Καλή Επιτυχία

Τύποι που μπορεί να φανούν χρήσιμοι

Γραμμική κίνηση:

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Στροφική κίνηση:

1περιστροφή = 360° = 2π ακτίνια

$$\theta = \frac{s}{r}$$

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad \overline{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$\upsilon_{\varepsilon\phi} = \omega R$$

$$a_{\varepsilon\phi} = \alpha R$$

$$a_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho} = \frac{\upsilon_{\varepsilon\phi}^2}{R} = \omega^2 R$$

$$\vec{a}_{\gamma\rho\alpha\mu} = \vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} + \vec{a}_{\varepsilon\phi}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi R}{\upsilon_{\varepsilon\phi}}$$

Περιστροφή σώματος:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

$$E_{\kappa\iota\nu}^{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho o\varphi\iota\kappa\acute{\eta}} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = I\alpha$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$L = I\omega$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Απομονωμένο σύστημα: $L_i = L_f$

Έργο – Ενέργεια:

Έργο σταθερή δύναμης: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

Έργο μεταβαλλόμενης δύναμης: $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$

$$\vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}}$$

$$\Delta U = -\int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}kx^2$$

$U_g = mgh$ (h<<$R_{\gamma\eta\varsigma}$)

$$W = \Delta E_{\kappa\iota\nu.}$$

$W = -\Delta U$ (για συντηρητικές δυνάμεις)

$$E_{\mu\eta\chi.} = E_{\kappa\iota\nu.} + U$$

$$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

$W = \Delta E_{\mu\eta\chi.}$ (για μη συντηρητικές δυνάμεις)

$$\vec{F}_{\varepsilon\lambda} = -k\vec{x}$$

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$$

Ορμή – Ώθηση - Κρούσεις:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$$

Ώθηση: $\vec{I} = \int F dt = \Delta\vec{p}$

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Απομονωμένο σύστημα: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$

Ελαστική κρούση: $\Delta\vec{p} = 0,\ \Delta E = 0$

Μη ελαστική κρούση: $\Delta\vec{p} = 0,\ \Delta E \neq 0$

Ελαστική κρούση σε 1-Δ: $\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2 = -(\vec{\upsilon}_1' - \vec{\upsilon}_2')$

Κέντρο μάζας:

$$x_{CM} = \frac{1}{M_{ολ}}\sum_i m x_i$$

$$\vec{\upsilon}_{CM} = \frac{1}{M_{ολ}}\sum_i m \upsilon_i$$

$$\sum \vec{F}_{εξ} = M\vec{a}_{CM}$$

Συνθήκες στατικής ισορροπίας:

$$\sum \vec{F}_{εξ} = 0 \text{ και } \sum \vec{\tau}_{εξ} = 0$$

Βαρυτική έλξη:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$G = 6.67\times 10^{-11}\ N\cdot m^2/kg^2$$

$$U_g = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - G\frac{m_1 m_2}{r}$$

$$\upsilon_{δορυφ.} = \sqrt{\frac{2GM_{γη}}{R_{γη}}}$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_{H}}\right)r^3$$

$$R_{γη} = 6.4\times 10^3\, km$$

$$M_{γη} = 5.97\times 10^{24}\, kg$$

Ταλαντώσεις:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Λύσεις:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$x(t) = B\sin(\omega t + \psi)$$

$$x(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$$

$$x(t) = Ee^{i\omega t} + Fe^{-i\omega t}$$

$$\upsilon(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$E = U + E_{κιν} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\upsilon = \pm\omega\sqrt{\left(A^2 - x^2\right)}$$

Φθίνουσες ταλαντώσεις:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,\ \gamma = \frac{b}{2m},\ \omega_0 = \frac{k}{m}$$

$x(t) = De^{-\gamma t}\cos(\Omega t + \phi),\ \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ (μικρή απόσβεση)

$x(t) = Ae^{-(\gamma+\Omega)t} + Be^{-(\gamma-\Omega)t},\ \Omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ (μεγάλη απόσβεση)

$x(t) = e^{-\gamma t}(A + Bt)$ (κριτική απόσβεση, $\gamma = \omega_0$)

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f\cos\omega_d t$$

Λύση: $x(t) = \frac{f}{R}\cos(\omega_d t - \theta),\ \frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega_d\right)^2}}$

Κυματική:

$$y(t) = A\sin\left[2\pi(x - \upsilon t)\right]$$

$$y(t) = A\sin(kx - \omega t),\ k = \frac{2\pi}{\lambda},\ \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\upsilon$$

$\upsilon = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$ (υγρά) $\upsilon = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ (στερεά)

$$\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$s(x,t) = s_{\max}\cos(kx - \omega t)$$

$$\Delta P = \Delta P_{\max}\sin(kx - \omega t)$$

$$\Delta P_{\max} = \rho\upsilon\omega s_{\max}$$

$$I = \frac{1}{2}\rho\upsilon(\omega s_{\max})^2$$

$$\beta = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

$$f' = \left(\frac{\upsilon \pm \upsilon_{παρ.}}{\upsilon \mp \upsilon_{πηγή}}\right)f$$

Στάσιμα κύματα:

$$y(t) = (2A\sin kx)\cos\omega t$$

$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ n=1,2,3,…

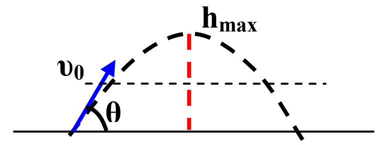
$f_n = \frac{n}{2L}\upsilon$ n=1,2,3,… (για δύο άκρα ανοικτά ή κλειστά)

$f_n = \frac{n}{4L}\upsilon$ n=1,3,5,… (για άκρο κλειστό και άκρο ανοικτό)

Απλό εκκρεμές: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Φυσικό εκκρεμές: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$

1. Αν ρίξετε ένα βλήμα με ταχύτητα υ_0 και γωνία θ ως προς τον ορίζοντα, πόσο ποσοστό του συνολικού χρόνου πτήσης του βρίσκεται σε ύψος πάνω από το μισό του μέγιστου ύψους του; **(20 π)**



Ξέρουμε ότι το μέγιστο ύψος βρίσκεται από: $h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$

Ο χρόνος που χρειάζεται να φθάσει στο μέγιστο ύψος είναι: $\boxed{t_{\alpha\nu} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}}$ (A)

Στο $h = h_{max}/2$ το βλήμα έχει ταχύτητα: $v^2 = v_{0y}^2 + 2a(h-h_0)$

όπου $v_{0y} = v_0 \sin\theta$, $a = -g$ και $h_0 = 0$ ενώ $h = h_{max}/2$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow v^2 = v_0^2 \sin^2\theta - \cancel{2}g\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2\cdot\cancel{2}\cancel{g}} \Rightarrow v^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{2}} v_0 \sin\theta$$

$$\Rightarrow v_{h_{max}/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_0 \sin\theta$$

Ο χρόνος που χρειάζεται για να φθάσει στην ταχύτητα αυτή κινούμενο από κάτω προς τα πάνω είναι:

$$v = v_{0y} - g t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_{0y} - v}{g} = \frac{v_0 \sin\theta - \frac{1}{\sqrt{2}} v_0 \sin\theta}{g} \Rightarrow t_1 = \frac{v_0 \sin\theta \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{g}.$$

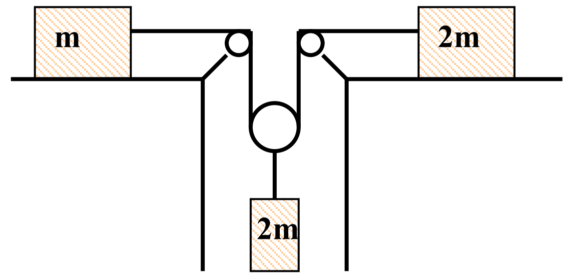
Ο χρόνος που χρειάζεται για να κινηθεί από το $h_{max}/2$ σε h_{max} είναι:

$$v_{h_{max}} = v_{h_{max}/2} - g t_2 \Rightarrow 0 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_0 \sin\theta - g t_2 \Rightarrow \boxed{t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_0 \sin\theta}{g}} \ (B)$$

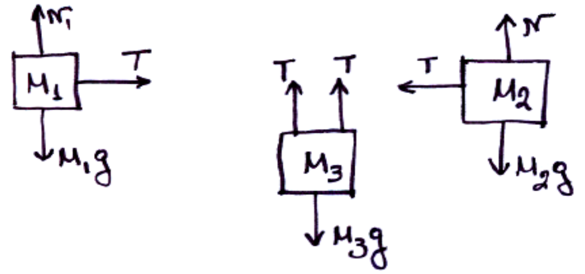
Από (A) και (B) έχουμε:

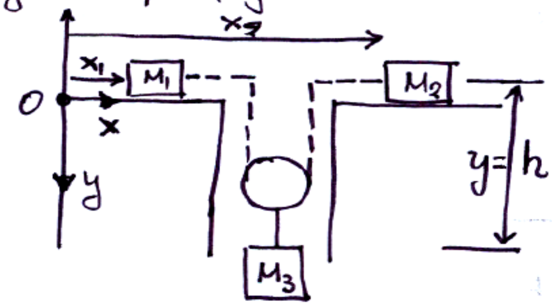
$$\frac{t_2}{t} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cancel{v_0 \sin\theta / g}}{\cancel{v_0 \sin\theta / g}} \Rightarrow \boxed{\frac{t_2}{t_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 70\%}$$

2. Το σύστημα των τροχαλιών του διπλανού σχήματος αφήνεται από την κατάσταση ηρεμίας να κινηθεί. Αν το νήμα που συνδέει τα σώματα είναι αβαρές, οι τροχαλίες λείες και αβαρείς και δεν υπάρχουν τριβές, να βρεθούν οι επιταχύνσεις των μαζών καθώς και η τάση του νήματος. Εκφράστε τις απαντήσεις σας συναρτήσει των m και g. **(20π)**



Τα διαγράμματα απελευθερωμένου σώματος για τις τρείς μάζες είναι :





Μετρώντας μετατοπίσεις από τη δεξιά πλευρά (μάζα M_1) και το ύψος ως προς την επιφάνεια που βρίσκονται οι μάζες M_1 και M_2 έχουμε :

$$x_2 - x_1 + 2y = \text{μήκος σχοινιού} = \text{σταθ.} \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(x_2 - x_1 + 2y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x_2}{dt^2} - \frac{d^2x_1}{dt^2} + 2\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 - a_1 + 2a_3 = 0} \ (A)$$

Εφαρμόζοντας το 2° νόμο του Newton για κάθε μάζα έχουμε :

Σώμα (1) : $T = M_1 a_1$ (1)

Σώμα (2) : $-T = M_2 a_2$ (2)

$$\Rightarrow M_1 a_1 = -M_2 a_2 \Rightarrow \cancel{m} a_1 = -2\cancel{m} a_2 \Rightarrow \boxed{a_1 = -2a_2} \ (B)$$

Σώμα (3) : $M_3 g - 2T = M_3 a_3 \Rightarrow \cancel{2}mg - \cancel{2}T = \cancel{2}m a_3 \Rightarrow \boxed{mg - T = m a_3}$ (Γ)

Από (A) κ (B) έχουμε $a_2 - (-2a_2) + 2a_3 = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = -\frac{3}{2} a_2}$ (Δ)

Αντικαθιστώντας στη (Γ) τη (2) έχουμε: $\cancel{m}g + 2\cancel{m} a_2 = \cancel{m}\left(-\frac{3}{2}\right) a_2 \Rightarrow$

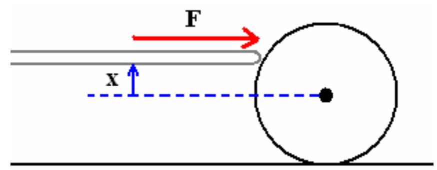
$$\Rightarrow g = -\left(\frac{4}{2} + \frac{3}{2}\right) a_2 \Rightarrow \boxed{a_2 = -\frac{2}{7} g}$$ οπότε η (B) $\Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{4}{7} g}$

5

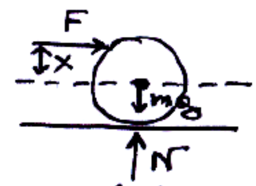
και η (Δ) $\Rightarrow \boxed{a_3 = +\frac{3}{7} g}$

Τέλος η τάση είναι (από Γ κ a_3) $T = mg - m a_3 = mg - m\frac{3}{7} g \Rightarrow \boxed{T = \frac{4}{7} mg}$

3. Θεωρήστε ότι παίζετε μπιλιάρδο και σε κάποιο χτύπημα αποφασίζετε να χτυπήσετε την μπάλα κρατώντας την στέκα οριζόντια (παράλληλα προς το τραπέζι) και σε ύψος x πάνω από το κέντρο της μπάλας όπως στο σχήμα. Να βρεθεί η τιμή του x για την οποία η μπάλα του μπιλιάρδου αρχίζει αμέσως να κινείται εκτελώντας κύλιση χωρίς ολίσθηση. (Δηλαδή η κίνηση της μπάλας αμέσως μετά το χτύπημα της στέκας είναι κύλιση χωρίς ολίσθηση). Να εκφράσετε την απάντησή σας συναρτήσει της ακτίνας R της μπάλας. Υποθέστε ότι η τριβή μεταξύ της επιφάνειας και της μπάλας είναι σχεδόν αμελητέα. Η ροπή αδράνειας μιας σφαίρας ως προς το CM είναι $I_{CM} = 2/5MR^2$. (**20 π**)



Το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος είναι:



Αφού η τριβή θεωρείται αμελητέα δεν χρειάζεται να τη λάβουμε υπ' όψιν.

Η ροπή της δύναμης F ως προς τον άξονα που περνά από το ΚΜ είναι

$\boxed{\tau = F\cdot x}$ (1) ενώ το βάρος και η αντίδραση δεν προκαλούν ροπή

Το κέντρο μάζας του σώματος θα αποκτήσει γραμμική επιτάχυνση a_{CM} σύμφωνα με το 2ο νόμο του Newton: $F = ma_{CM} \Rightarrow \boxed{a_{CM} = \frac{F}{m}}$ (2)

Αλλά αφού θα περιστρέφεται (κύλιση) θα έχουμε:

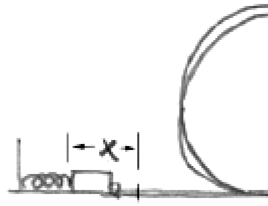
$$\tau = I_{CM}\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\tau}{I_{CM}}} \quad (3)$$

Για κύλιση χωρίς ολίσθηση ισχύει η συνθήκη: $a_{CM} = \alpha R$

Αντικαθιστώντας την (2) κ (3) $\Rightarrow \frac{F}{m} = \frac{\tau}{I_{CM}}R \overset{(1)}{\Rightarrow} \cancel{\frac{F}{m}} = \frac{\cancel{F}x}{I_{CM}}R \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{I_{CM}}{mR} \Rightarrow x = \frac{\frac{2}{5}\cancel{m}R^{\cancel{2}}}{\cancel{mR}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{5}R}$$

4. Μια σημειακή μάζα m πιέζεται πάνω σε ένα ελατήριο σταθεράς k και κρατείται σε ηρεμία με την βοήθεια ενός stopper. Το ελατήριο συσπειρώνεται μια άγνωστη απόσταση x. Όταν το stopper απομακρύνεται η μάζα αφήνει το ελατήριο και γλιστρά κατά μήκος ενός κλειστού λείου κυκλικού στεφανιού ακτίνας r. Όταν η μάζα φθάνει στο ανώτερο σημείο του στεφανιού, η δύναμη που ασκεί το στεφάνι στη μάζα είναι ίση με το διπλάσιο του βάρους της μάζας. Αγνοήστε τριβές:



(α) Βρείτε την κινητική ενέργεια στο υψηλότερο σημείο. Εκφράστε την απάντησή σας συναρτήσει των k, m, x, g και r. (**2π**)

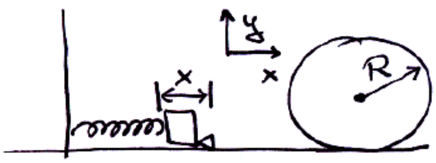
(β) Υπολογίστε το έργο από το ελατήριο στη μάζα. Εξηγήστε το πρόσημο (**1+2 π**).

(γ) Χρησιμοποιώντας το 2^{ο} νόμο του Newton, βρείτε τη ταχύτητα της μάζας στο υψηλότερο σημείο του στεφανιού. (**4π**)

(δ) Ποια ήταν η συσπείρωση του ελατηρίου; (**4π**)

(ε) Αν θεωρήσετε μόνο στατική τριβή μεταξύ της μάζας και του στεφανιού, η δύναμη της τριβής έχει διεύθυνση εφαπτομενική, ποια η κινητική ενέργεια της μάζας στο ψηλότερο σημείο; (**4π**)

(στ) Αν η μάζα αντικατασταθεί από ένα κυλιόμενο δίσκο ακτίνας R, ποια θα είναι η κινητική ενέργεια στο υψηλότερο σημείο του στεφανιού; (**3π**)



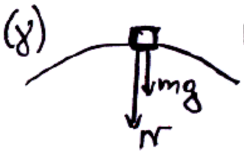
(α) Οι μόνες δυνάμεις που δρουν είναι συντηρητικές και επομένως έχουμε διατήρηση της μηχανικής ενέργειας

$$E^i = E^f \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = mg(2R) + E_{κιν} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{κιν} = \frac{1}{2}kx^2 - 2mgR} \quad (A)$$

(β) $W = \int F dx = \int_0^x kx\,dx = \boxed{\frac{1}{2}kx^2}$ Το πρόσημο είναι θετικό γιατί η F έχει διεύθυνση προς τη θετική φορά

(γ)



N και mg είναι οι δυνάμεις που ασκούνται στη μάζα στο υψηλότερο σημείο. Επομένως

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F = N + mg \\ N = 2mg \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma F = 3mg$$

Αφού κινείται σε κυκλική τροχιά η συνισταμένη δύναμη παίζει το ρόλο της κεντρομόλου: $\Sigma F = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow 3\cancel{m}g = \cancel{m}\frac{v^2}{R} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{3gR}}$

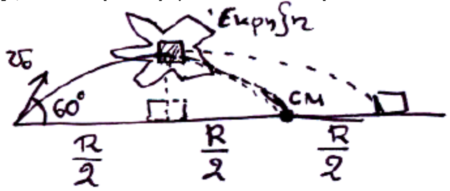
(δ) Από την (A) και το υποερώτημα (γ) έχουμε: $\frac{1}{2}kx^2 = 2mgR + \frac{1}{2}m3gR \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}kx^2 = \frac{7}{\cancel{2}}mgR \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{7mgR}{k}}}$$

(ε) Η στατική τριβή δεν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της οπότε δεν παράγει έργο. Άρα η εξίσωση (A) δεν αλλάζει.

(στ) $\frac{1}{2}kx^2 = 2mgR + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega^2$ Επιπλέον όρος λόγω περιστροφής

5. Ένα βλήμα μάζας 20kg εκτοξεύεται με γωνία 60° πάνω από την οριζόντια διεύθυνση με μια αρχική ταχύτητα 250m/sec. Στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς του, το βλήμα εκρήγνυται σε 2 θραύσματα ίσης μάζας, το ένα από τα οποία πέφτει κατακόρυφα με μηδενική αρχική ταχύτητα. **(α)** Σε ποια απόσταση από το σημείο εκτόξευσης πέφτει το δεύτερο θραύσμα στο έδαφος; **(12π)** **(β)** Πόση ενέργεια εκλύθηκε κατά την έκρηξη; **(8π)**



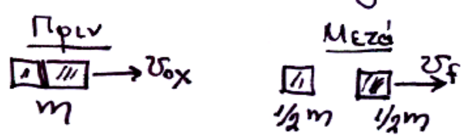
Έστω ότι το βεληνεκές του αρχικού βλήματος (δηλαδή αν δε διασπώνταν) είναι R.

(α) Από διατήρηση της ορμής, αφού το 1° θραύσμα έχει μηδενική αρχική ταχύτητα στη y-διεύθυνση, τότε και το 2° θραύσμα θα έχει μηδενική αρχική ταχύτητα.

Τα 2 θραύσματα πέφτουν το ίδιο ύψος και επομένως φθάνουν ταυτόχρονα στο έδαφος. Το ίδιο και το κέντρο μάζας τους το οποίο ακολουθεί την αρχική τροχιά του βλήματος και επομένως πέφτει σε απόσταση R από το σημείο εκτόξευσης. Το 1° θραύσμα πέφτει σε απόσταση $\frac{R}{2}$, στο μέσο της αρχικής τροχιάς. Επειδή τα 2 θραύσματα έχουν την ίδια μάζα θα πρέπει να έχουν ίσες αποστάσεις από το κέντρο μάζας. Άρα το 2° θραύσμα θα είναι σε απόσταση $\frac{R}{2}$ από το σημείο πτώσης του CM.

Επομένως η συνολική απόσταση θα είναι: $\frac{R}{2}+R=\boxed{\frac{3}{2}R}=\frac{3}{2}\frac{\upsilon_0^2}{2g}(\sin(2\cdot 60))$

Διαφορετικά: Εφαρμόζουμε διατήρηση ορμής:



Ακριβώς μετά την έκρηξη το 1° κομμάτι είναι σε ηρεμία ενώ το 2° κομμάτι έχει οριζόντια ταχύτητα

Άρα $\cancel{m}\upsilon_{0x}=\frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon_f \Rightarrow \boxed{\upsilon_f=2\upsilon_{0x}}$ (1)

Ο χρόνος πτώσης είναι ίσος με το χρόνο ανόδου του αρχικού βλήματος

οπότε: $t_{\pi\tau}=t_{\alpha\nu}=\frac{1}{2}\frac{2\upsilon_y}{g}=\frac{1}{2}\frac{\upsilon_0\sin\theta}{g}\Rightarrow\boxed{t_{\pi\tau}=\frac{\upsilon_0\sin\theta}{2g}}$ (2)

Αυτός είναι ο χρόνος κίνησης στην οριζόντια διεύθυνση του 2ου κομματιού, άρα διανύει

$$S=\upsilon_f\cdot t_{\pi\tau}\overset{(1)\kappa(2)}{\Rightarrow}S=2\upsilon_{0x}\frac{\upsilon_0\sin\theta}{2g}=2\upsilon_0^2\frac{\cos\theta\sin\theta}{2g}=\frac{\upsilon_0^2\sin 2\theta}{2g}\Rightarrow S=R.$$

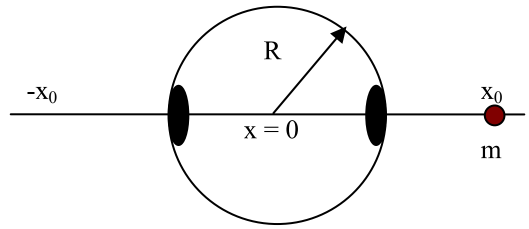
Η συνολική απόσταση θα είναι επομένως: $\frac{R}{2}+S=\frac{R}{2}+R=\frac{3}{2}R.$

) Η ενέργεια που εκλύεται δίνεται από την αλλαγή στην κινητική ενέργεια 8
των 2 θραυσμάτων, αφού η δυναμική ενέργεια βαρύτητας είναι αναλλοίωτη

$$\Delta E=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m\right)\upsilon_f^2+\cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m\right)\phi^2}^{\,0}-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}+\frac{m}{2}\right)\upsilon_{0x}^2=\frac{m}{4}(2\upsilon_{0x})^2-\frac{m}{2}\upsilon_{0x}^2\Rightarrow\Delta E=\frac{1}{2}m\upsilon_{0x}^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\Delta E=\frac{m}{2}\upsilon_0^2\cos^2\theta\Rightarrow\boxed{\Delta E=187{,}500\,J}$$

6. Ένα πολύ λεπτό σφαιρικό κέλυφος (κοίλη σφαίρα) μάζας M και ακτίνας R κατέχει κάποια σταθερή θέση στο χώρο ώστε το κέντρο του να συμπίπτει με την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Δύο μικρές τρύπες ανοίγονται στο κέλυφος ακριβώς στα σημεία στα οποία ο x-άξονας διαπερνά το κέλυφος. Μια μικρή μάζα m κινείται κατά μήκος του x-άξονα από τη θέση x_0 στη θέση $-x_0$. Οι διαστάσεις των τρυπών είναι λίγο μεγαλύτερες από τις διαστάσεις της μάζας και έτσι η μάζα μπορεί να περάσει μέσα από τις τρύπες αυτές.



(α) Προσδιορίστε τη βαρυτική δυναμική ενέργεια U(x) του συστήματος, όπου x είναι η (μεταβαλλόμενη) θέση της m. Θεωρήστε όλες τις τιμές του x από $-x_0$ στη θέση $+x_0$. **(5π)** Κάντε επίσης το γράφημα της U(x) συναρτήσει της θέσης x **(5π)**.

(β) Προσδιορίστε τη βαρυτική δύναμη F(x) στη μάζα m, για όλες τις τιμές του x από το $-x_0$ στο $+x_0$. **(5π)**

Κάντε επίσης το γράφημα της F(x) συναρτήσει του x. **(5π)**.

Θεωρήστε την F αρνητική αν έχει κατεύθυνση στην –x-διεύθυνση και θετική αν έχει κατεύθυνση στην +x-διεύθυνση.

Όπως είδαμε, σε προβλήματα σφαιρικής γεωμετρίας, η βαρυτική δύναμη σε ακτίνα R είναι ίδια σα να προέρχεται από σημειακή μάζα M(R), όπου M(R) η μάζα που περικλείεται σε σφαίρα ακτίνας R με κέντρο την αρχή των αξόνων.

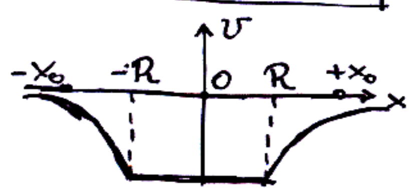
(α) Για $x>R$, η δυναμική ενέργεια είναι $U=-\frac{GMm}{|x|}$

Για $x<R$, δεν υπάρχει μάζα στο εσωτερικό της σφαιρικής κοιλότητας και επομένως η βαρυτική δύναμη είναι μηδέν, $F=0$. Αλλά ξέρουμε ότι

$$F=-\frac{dU}{dx} \Rightarrow 0=\frac{dU}{dx} \Rightarrow \boxed{U=\text{σταθ.}} \Rightarrow \boxed{U(x)=U(|x|=R)=-\frac{GMm}{R}}$$

Επομένως:

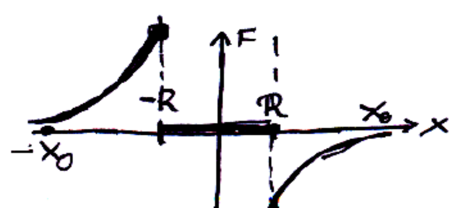
$$U(x)=\begin{cases} -\frac{GMm}{R} & \text{για } |x|\le R \\ -\frac{GMm}{|x|} & \text{για } |x|\ge R \end{cases}$$



(β) Έξω από το κέλυφος $F=-\frac{GMm}{|x|^2}$ για $x\ge R$ και $F=+\frac{GMm}{|x|^2}$ για $x\le -R$

Μέσα στο κέλυφος $F=\emptyset$. Άρα:

$$F(x)=\begin{cases} +\frac{GMm}{|x|^2} & \text{για } -x_0\le x\le -R \\ 0 & \text{για } -R<x<R \\ -\frac{GMm}{|x|^2} & \text{για } R\le x\le x_0 \end{cases}$$



Η δύναμη δεν είναι συνεχής γιατί το κέλυφος έχει πολύ μικρό πάχος, άρα η μάζα είναι στην επιφάνεια

7. Η δυναμική ενέργεια δύο ατόμων σε κάποιο συγκεκριμένο διατομικό μόριο είναι:

$$U(r) = -\frac{a}{r^6} + \frac{b}{r^{12}}$$

όπου r η απόσταση μεταξύ των ατόμων και α και β δύο θετικές σταθερές.
(α) Για ποιες τιμές του r η U είναι σε ελάχιστο; Μέγιστο; **(6π)**
(β) Για ποιες τιμές του r η U = 0; **(2π)**
(γ) Σχεδιάστε την U(r) αναγράφοντας όλα τα σημαντικά σημεία για το γράφημα. **(6π)**
(δ) Περιγράψτε την κίνηση του ενός ατόμου ως προς το άλλο όταν η συνολική τους ενέργεια είναι E > 0 και όταν E < 0. **(6π)**

(α) Για να βρούμε τα τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα θα πρέπει να εξισώσουμε τη 1η παράγωγο να είναι μηδέν και κατόπιν το πρόσημο της 2ης παραγώγου.

Άρα: $\frac{dU(r)}{dr} = +\frac{6a}{r^7} - \frac{12b}{r^{13}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^7}\left(6a - \frac{12b}{r^6}\right) = 0 \Rightarrow r = \left(\frac{12b}{6a}\right)^{1/6} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{r = \left(\frac{2b}{a}\right)^{1/6}}$$

Στο σημείο αυτό η 2η παράγωγος είναι:

$$\left.\frac{d^2U(r)}{dr^2}\right|_{r=\left(\frac{2b}{a}\right)^{1/6}} = \frac{d}{dr}\left(\frac{dU}{dr}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{6a}{r^7} - \frac{12b}{r^{13}}\right) = -\frac{42a}{r^8} + \frac{12\cdot 13b}{r^{14}} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2U}{dr^2} = \frac{1}{r^8}\left(-42a + 156\frac{b}{r^6}\right) = \frac{1}{r^8}\left(-42a + \cancel{156}^{78}\frac{\cancel{b}}{\left(\frac{2\cancel{b}}{a}\right)^{\cancel{6/6}}}\right) = \frac{1}{r^8}\left(-42a + 78a\right)$$

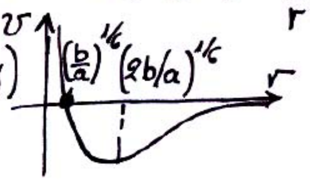
$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2U}{dr^2} = \frac{1}{r^8}36a > 0}$$ άρα έχουμε ελάχιστο

Για μικρά r, ο όρος $\frac{1}{r^{12}}$ κυριαρχεί και επομένως $U(0) = +\infty$, $r=0$ είναι ma

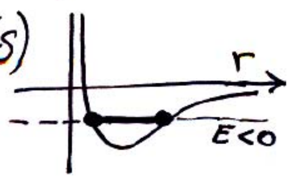
Για μεγάλα r, ο όρος $\frac{1}{r^6}$ κυριαρχεί και $U \to 0$. Αλλά $\frac{dU}{dr} > 0$ για $r > \left(\frac{2b}{a}\right)^{1/6}$
επομένως για $r = +\infty$ έχουμε $U \to 0$ σαν maximum αφού $\frac{dU}{dr} > 0$.

(β) $U(r) = 0 \Rightarrow \frac{a}{r^6} = \frac{b}{r^{12}} \Rightarrow r^6 = \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{r = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/6}}$

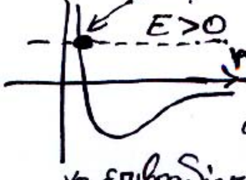
(γ)



(δ)



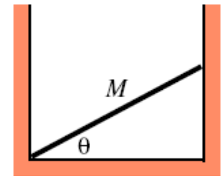
Ταλάντωση του ενός ατόμου ως προς το άλλο.

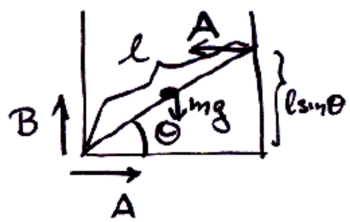


10

Τα 2 άτομα αρχικά επιταχύνονται το ένα προς το άλλο αλλά ξαφνικά αρχίζουν να επιβραδύνονται μέχρι που σταματούν και μετά απομακρύνονται μεταξύ τους

8. Μια ομοιόμορφη βέργα μάζας Μ τοποθετείται μέσα σε ένα ρηχό πηγάδι τα τοιχώματα του οποίου δεν παρουσιάζουν τριβές. Η βέργα σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση. Ποιες είναι οι δυνάμεις που ασκεί το πηγάδι στη βέργα στα δύο άκρα της; **(20π)**





Η ροπή ως προς ένα άκρο θα είναι: (κατώτερο)

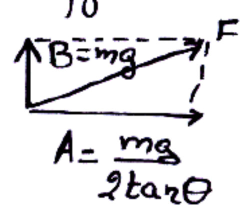
$$mg\left(\frac{\ell}{2}\cos\theta\right) = A\cancel{\ell}\sin\theta \Rightarrow \boxed{A=\frac{mg}{2\tan\theta}}$$

Αλλά $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \boxed{B = mg}$

Η δύναμη της αντίδρασης στο πάνω άκρο της ράβδου είναι κάθετη από το τοίχωμα στη ράβδο γιατί το τοίχωμα είναι λείο.

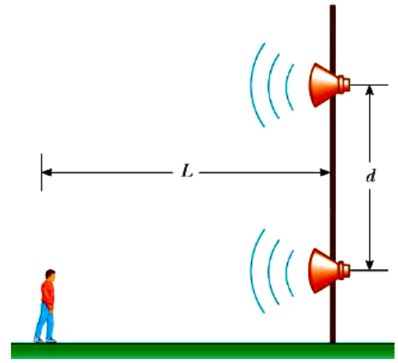
Άρα οι δυνάμεις που ασκούνται στη βέργα είναι:

Στο κάτω αριστερό άκρο   F =



Στο πάνω δεξί άκρο: $F' = A = \dfrac{mg}{2\tan\theta}$ $\overleftarrow{F}$

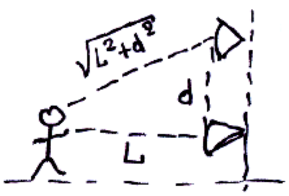
9. Δύο μεγάφωνα “οδηγούνται” από τον ίδιο ταλαντωτή συχνότητας 200Hz. Είναι τοποθετημένα σε ένα κατακόρυφο στύλο και σε απόσταση 4.00m το ένα από το άλλο. Ένα άτομο περπατά προς το μεγάφωνο που βρίσκεται στην χαμηλότερη θέση και με διεύθυνση κάθετη στο στύλο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



(α) Πόσες φορές θα ακούσει ένα ελάχιστο σε ένταση ήχου;
(β) Πόσο μακριά βρίσκεται από τον στύλο τις στιγμές που ακούει το ελάχιστο της έντασης;
Υποθέστε ότι η ταχύτητα του ήχου είναι 330m/s και αγνοήστε ανακλάσεις του ήχου προερχόμενες από το έδαφος. **(20π)**

Υποθέτουμε ότι το μεγάφωνο στη χαμηλότερη θέση είναι στο ίδιο ύψος με τον παρατηρητή.

Το ηχητικό κύμα που προέρχεται από το μεγάφωνο που βρίσκεται στην υψηλότερη θέση φθάνει στον παρατηρητή με μια διαφορά χρόνου Δt σε σχέση με αυτό από το χαμηλότερο μεγάφωνο επειδή διανύει μια επιπλέον απόσταση $\sqrt{L^2+d^2}-L$



Ο παρατηρητής ακούει ένα ελάχιστο όταν $\frac{(2n-1)\lambda}{2}$ όπου $n=1,2,3$

Επομένως $\sqrt{L^2+d^2}-L=\frac{2n-1}{2}\lambda \Rightarrow \sqrt{L^2+d^2}-L=\frac{n-\frac{1}{2}}{f}\upsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{L^2+d^2}=\frac{n-1/2}{f}\upsilon+L \Rightarrow \cancel{L^2}+d^2=\frac{(n-1/2)^2}{f^2}\upsilon^2+\cancel{L^2}+\frac{2(n-1/2)}{f}\upsilon L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{L=\frac{d^2-(n-1/2)^2\upsilon^2/f^2}{2(n-1/2)\upsilon/f}} \text{ (A) για } n=1,2,3,\ldots$$

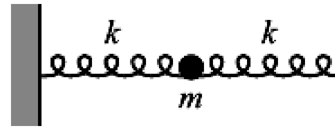
Η διαφορά της διαδρομής ξεκινά από ~ 0 όταν ο παρατηρητής βρίσκεται πολύ μακριά από τα μεγάφωνα ($d \ll L$) και αυξάνει σε d όταν ο παρατηρητής βρίσκεται ακριβώς στο χαμηλότερο μεγάφωνο ($L=0$). Ο αριθμός των ελαχίστων που ακούει είναι η μεγαλύτερη ακέραια λύση της ανισότητας: $d \geq \frac{n-1/2}{f}\upsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{n \leq \frac{fd}{\upsilon}+\frac{1}{2}} \text{ (B)}$$

(α) Από τη (B) $\Rightarrow \frac{fd}{\upsilon}+\frac{1}{2}=\frac{4\cdot 200}{330}+\frac{1}{2}=2.92$ Επομένως ακούει $\boxed{2 \text{ ελάχιστα}}$

(β) Από την (A) για $n=1$ και $n=2$ έχουμε: $\left\{\begin{array}{ll} L=9.28m & n=1 \\ L=1.99m & n=2 \end{array}\right\}$

10. Τα ελατήρια του παρακάτω σχήματος βρίσκονται στα φυσικά τους μήκη (μήκος ηρεμίας). Η μάζα ταλαντώνεται κατά μήκος των ελατηρίων (δηλαδή παράλληλα προς την διεύθυνση των ελατηρίων) με πλάτος ταλάντωσης d. Κάποια στιγμή (ας υποθέσουμε ότι η στιγμή αυτή είναι η t=0) η μάζα βρίσκεται στη θέση x=d/2 κινούμενη προς τα δεξιά, αφαιρούμε το δεξί ελατήριο.



(α) Ποια είναι η εξίσωση της θέσης x(t) για την κίνηση της μάζας;
Θα πρέπει να βρείτε όλους τους όρους που καθορίζουν την εξίσωση συναρτήσει των δεδομένων του προβλήματος και να μην γράψετε απλά μια εξίσωση. **(13π)**
(β) Ποιο είναι το πλάτος της νέας ταλάντωσης, **(7π)**

(α) Το πρόβλημα είναι η εύρεση των αρχικών συνθηκών που θα βοηθήσουν στον προσδιορισμό των συντελεστών της λύσης της αρμονικής ταλάντωσης:

$$x(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t \qquad (A)$$

Αλλά οι συνθήκες μας δίνονται. Τη στιγμή $t=0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $\boxed{x=\frac{d}{2}}$. Χρειαζόμαστε ακόμα μια. Αυτή είναι η ταχύτητα. Το σώμα στη θέση $x=\frac{d}{2}$ έχει και κινητική ενέργεια και ισχύει ότι η ολική ενέργεια στη θέση $x=\frac{d}{2}$ ισούται με την ολική ενέργεια στη θέση του μέγιστου πλάτους d.

Δηλαδή: $\cancel{\frac{1}{2}}k_1 d^2 = \cancel{\frac{1}{2}}k_1\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \cancel{\frac{1}{2}}mv^2 \Rightarrow 2kd^2 = 2k\frac{d^2}{4} + mv^2 \Rightarrow mv^2 = \frac{3}{2}kd^2 \Rightarrow$

$k_1 = 2k$ λόγω 2 ελατηρίων

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{k}{m}}\,d}$$

Στη νέα κίνηση, εξίσωση (Α), $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ αφού έχουμε ένα μόνο ελατήριο.

Από την (Α) $\Rightarrow \boxed{v(t) = -C\omega\sin\omega t + D\omega\cos\omega t} \quad (B)$

Αλλά $x(t=0) = x_0 \Rightarrow C\cos(0) + D\sin(0) = \frac{d}{2} \Rightarrow \boxed{C = \frac{d}{2}}$

και $v(t=0) = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{k}{m}}\,d \Rightarrow -C\omega\sin(0) + D\omega\cos(0) = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{k}{m}}\,d \Rightarrow D\cancel{\omega} = \sqrt{\frac{3}{2}}\cancel{\omega}d \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{D = \sqrt{\frac{3}{2}}\,d}$$

Άρα η εξίσωση κίνησης είναι: $\boxed{x(t) = \frac{d}{2}\cos\omega t + \sqrt{\frac{3}{2}}\,d\sin\omega t}$

13

(β) Το πλάτος ταλάντωσης είναι: $A = \sqrt{C^2 + D^2} = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{3}{2}d^2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{7}{4}d^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{\sqrt{7}}{2}d}$$