

ΦΥΣ 140 – Εισαγωγή στην Επιστημονική Χρήση Υπολογιστών

7^η Εργασία

Επιστροφή: Τρίτη 22/11/2022

Υπενθύμιση: Οι εργασίες πρέπει να επιστρέφονται με e-mail στο fotis@ucy.ac.cy που θα στέλνεται από το πανεπιστημιακό σας λογαριασμό το αργότερο μέχρι την ημερομηνία που αναγράφεται.

Ως subject του e-mail θα πρέπει να αναγράφεται την εργασία (username_phy140_hmX όπου X ο αριθμός της εργασίας)

Κάθε αρχείο που επισυνάπτετε (attach) στο e-mail σας θα πρέπει να έχει το όνομα στη μορφή username_hmX.tgz όπου username είναι το username του e-mail σας και X ο αριθμός της εργασίας. Επίσης σαν πρώτο σχόλιο μέσα σε κάθε file που περιέχει το πρόγραμμά σας θα πρέπει να αναφέρεται το ονοματεπώνυμό σας. Οι εργασίες είναι ατομικές και πανομοιότυπες εργασίες δε θα βαθμολογούνται. Για να κάνετε ένα tgz file (ουσιαστικά tar zipped file) θα πρέπει να δώσετε στο terminal την εντολή `tar -czvf username_hmX.tgz *.py` όπου py είναι όλα τα py files των προγραμμάτων σας.

1. Θεωρήστε την ακόλουθη διαφορική εξίσωση: $\frac{dy}{dx} = x + y + xy$. Υπολογίστε την τιμή του y για $x = 0.1$ δεδομένης της αρχικής συνθήκης $y(x=0) = 1$. Θεωρήστε βήμα $dx = 0.025$ και χρησιμοποιήστε τόσο την μέθοδο Euler όσο και την μέθοδο Euler – Cromer στο ίδιο πρόγραμμα. Συγκρίνετε το αποτέλεσμα των δύο μεθόδων γραφικά εξελίσσοντας την εξίσωση στο διάστημα τιμών του x $[0, 2.5]$ με βήμα $dx = 0.025$.
2. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Euler, θα πρέπει να βρείτε μια προσεγγιστική λύση για το ακόλουθο πρόβλημα αρχικής συνθήκης: $xy' - y = x^2 \sin(x)$ όταν $y\left(x = -\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Θα πρέπει να θεωρήσετε τη λύση στο διάστημα $[-\pi/2, 10]$ για 101 βήματα. Να κάνετε την γραφική παράσταση της $y(x)$ στο διάστημα $[-\pi/2, 10]$. Δοκιμάστε για 202 και 404 βήματα κρατώντας το διάστημα σταθερό.
3. Θεωρήστε τη διαφορική εξίσωση: $y'(t) = \frac{y(1-y)}{2y-1}$ με $y(t=0) = 5/6$, η λύση της οποίας είναι $y(t) = \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{36}e^{-t}\right]^{1/2}$.
 - (α) Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο λύνει τη διαφορική αυτή εξίσωση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Euler για το χρονικό διάστημα $t = 0$ έως 2.
 - (β) Κάντε τη γραφική παράσταση των αποτελεσμάτων της αριθμητικής και της αναλυτικής λύσης στο ίδιο γράφημα χρησιμοποιώντας χρονικό βήμα 0.1 και χρονικό βήμα 0.0001.
 - (γ) Θα πρέπει επίσης να κάνετε ένα γράφημα του λογάριθμου του σχετικού σφάλματος, $|(αναλυτική - αριθμητική)|/αναλυτική$, συναρτήσεως του λογαρίθμου του χρονικού βήματος, για τη χρονική στιγμή $t = 2s$. Τα χρονικά βήματα, dt , θα πρέπει να ξεκινούν από την τιμή 0.1 έως την τιμή 0.0001 ελαττώνοντας κάθε φορά κατά 5.
4. Ένα βλήμα βάλλεται από την επιφάνεια της Γης με αρχική ταχύτητα, $v_0 = 1000m/s$ και γωνία 35° ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Υποθέτουμε ότι η πυκνότητα του αέρα

μεταβάλλεται συναρτήσει του ύψους στο οποίο βρίσκεται το βλήμα σύμφωνα με τη σχέση $\rho(y) = \rho(y=0)e^{-y/h}$, όπου h είναι μια σταθερά που δείχνει το ύψος στο οποίο η πυκνότητα έχει ελαττωθεί κατά e^{-1} . Ο συντελεστής της αντίστασης του αέρα είναι $B/m = 4 \times 10^{-5} m^{-1}$ (όπου ο όρος m στη σχέση B/m είναι η μάζα του σώματος). Η δύναμη της αντίστασης του αέρα έχει τη μορφή $F_d = -B \frac{\rho}{\rho_0} v^2$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας, g , έχει την τιμή $g = 9.8 m/s^2$ στην επιφάνεια της Γης αλλά μεταβάλλεται με το ύψος στο οποίο βρίσκεται το βλήμα σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης. Το πρόβλημα αυτό δεν έχει αναλυτική λύση. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Euler-Cromer:

(α) Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο λύνει αριθμητικά το παραπάνω πρόβλημα.

(β) Βρείτε τη διαφορά στο μέγιστο ύψος και στο βεληγεκές που υπολογίζετε όταν η πυκνότητα του αέρα και η επιτάχυνση της βαρύτητας παραμένουν σταθερές και ανεξάρτητες της θέσης του σώματος.

(γ) Να γίνουν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις του ύψους συναρτήσει του χρόνου, της οριζόντιας μετατόπισης του βλήματος συναρτήσει του χρόνου καθώς και της τροχιάς του βλήματος και να συγκριθούν στο ίδιο γράφημα και για τις δύο περιπτώσεις κίνησης του προβλήματος.

Το βλήμα υποτίθεται ότι επιστρέφει και πάλι στη Γη. Επομένως θα πρέπει να κάνετε τόσα βήματα ώστε το βλήμα να χτυπήσει στο έδαφος.

Δίνονται:

Χρονικό βήμα: $dt = 0.1s$

Ο νόμος της παγκόσμιας έλξης: $F_g = Gm_1m_2/r^2$.

Η σταθερά της παγκόσμιας έλξης: $G = 6.67259 \times 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$.

Η μάζα της γης είναι: $M_F = 5.972 \times 10^{24} kg$.

Η ακτίνα της Γης: $R_F = 6.37815 \times 10^6 m$.

Η σταθερά h στη μεταβολή της πυκνότητας του αέρα: $h = 1 \times 10^4 m$.

Η πυκνότητα του αέρα στην επιφάνεια της Γης: $\rho(y=0) = 1.2 kg/m^3$.

Όλες οι μονάδες δίνονται στο σύστημα MKS.

- Δύο σωματίδια 1 και 2 βάλονται από την θέση $x = 0$ την ίδια χρονική στιγμή $t = 0$ με ταχύτητες $v_1 = 5m/s$ και $v_2 = -10m/s$. Τα σωματίδια κινούνται μέσα σε ένα δυναμικό της μορφής $U(x) = 9[\cosh(x) - 1]$. (Όπως ξέρετε, η δύναμη δίνεται από τη σχέση $F = -\frac{dU}{dx}$). Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Euler για να παρακολουθήσετε την εξέλιξη και των δύο σωματιδίων ταυτόχρονα και προσδιορίστε την χρονική στιγμή καθώς και την θέση που τα σωματίδια συναντιούνται και πάλι. Χρησιμοποιήστε σα χρονικό βήμα $dt = 9.76563 \times 10^{-5} s$ και θεωρήστε $t_{max} = 100s$ σα το μέγιστο επιτρεπτό χρονικό διάστημα για να σταματήσετε το πρόγραμμα αν δεν έχουν συναντηθεί τα σωματίδια. Προσέξτε τη συνθήκη που θα θέσετε για να συναντηθούν καθώς επίσης και το γεγονός ότι οι θέσεις τους όταν συναντιούνται, όπως και η χρονική στιγμή, θα πρέπει να υπολογιστούν με γραμμική interpolation. Θα πρέπει να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των τροχιών των δύο σωματιδίων ($x(t)$ συναρτήσει του t) στο ίδιο

γράφημα στο οποίο θα πρέπει να φαίνονται ποια σημεία αντιστοιχούν σε ποιο σωματίδιο. Το γράφημα αυτό θα πρέπει να το σώσετε σε ένα pdf file με όνομα *particles.pdf*. Οι θέσεις των σωματιδίων τη στιγμή της συνάντησης και ο χρόνος συνάντησης θα πρέπει να αναγραφούν ως σχόλια στο τέλος του προγράμματός σας.