

ΦΥΣ. 211
Τελική Εξέταση 10-Μάη-2014

Πριν ξεκινήσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, αριθμό ταυτότητας) στο πάνω μέρος της σελίδας αυτής.

Για τις λύσεις των ασκήσεων θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε μόνο τις σελίδες που δίνονται και μην κόψετε καμιά από τις σελίδες.

Προσπαθήστε να δείξετε τη σκέψη σας και να γράψετε καθαρές εξισώσεις. Για πλήρη ή μερική βαθμολόγηση θα πρέπει να φαίνεται καθαρά αυτό που προσπαθείτε να δείξετε. Αν δεν μπορώ να διαβάσω τι γράφετε αυτόματα θα υποθέσω ότι είναι λάθος.

Σας δίνονται 10 ισοδύναμες ασκήσεις με σύνολο 100 μονάδων και πρέπει να απαντήσετε σε όλα.

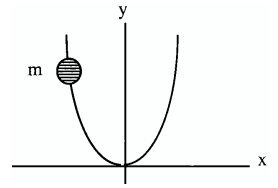
Η σειρά των ασκήσεων δεν είναι αντιπροσωπευτική της δυσκολίας τους. Πριν ξεκινήσετε διαβάστε όλα τις ασκήσεις και σκεφτείτε τι χρειάζεται να κάνετε.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 180 λεπτά.

Καλή επιτυχία.

1. (10π συνολικά)

Θεωρείστε μια χάντρα μάζας m η οποία περιορίζεται να κινείται κατά μήκος ενός σταθερού σύρματος έτσι ώστε η κατακόρυφη απομάκρυνσή της σχετίζεται με την οριζόντια απομάκρυνσή της με την σχέση $y = \frac{1}{2}ax^2$.



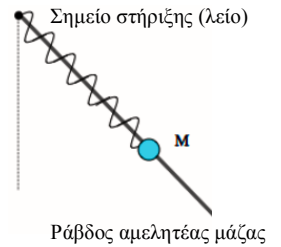
(α) Γράψτε την Lagrangian για τη χάντρα [2π]

(β) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης. [3π]

(γ) Για μικρές απομακρύνσεις γύρω από τη θέση $x = 0$ η χάντρα εκτελεί ταλάντωση. Να βρεθεί η συχνότητα των ταλαντώσεων. [5π]

2. (10π συνολικά)

Ένα επίπεδο εκκρεμές αποτελείται από ένα ελατήριο του οποίου οι σπείρες είναι τυλιγμένες γύρω από μια ευθύγραμμη και αβαρή ράβδο απεριόριστου μήκους. Το ελατήριο έχει φυσικό μήκος L_0 και σταθερά k . Το ένα άκρο του ελατηρίου και η ράβδος εξαρτώνται από ένα σημείο το οποίο δεν παρουσιάζει τριβές. Μια χάντρα μάζας M είναι τρυπημένη ώστε να διαπερνά τη ράβδο και εξαρτάται από το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου και όταν η μάζα είναι σε ηρεμία ισχύει $Mg = k(L - L_0)$. Δεν υπάρχουν δυνάμεις τριβών στο πρόβλημα.

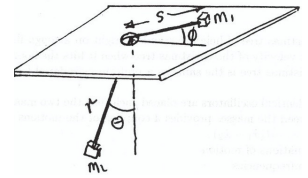


(α) Να βρεθεί η Lagrangian του συστήματος. Έστω r η απόσταση της μάζας M από το σημείο στήριξης και θ η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την κατακόρυφο. Θεωρήστε σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που περνά από το σημείο στήριξης. [3π]

(β) Βρείτε προσεγγιστικές λύσεις στις εξισώσεις Lagrange στο όριο ταλαντώσεων μικρού πλάτους, για τις οποίες το σύστημα παραμένει κοντά στην κατάσταση ισορροπίας. Δώστε ακριβείς εξηγήσεις για τις προσεγγίσεις που κάνετε. [Υπόδειξη: μπορεί να σας φανεί χρήσιμο να ορίσετε την μικρή ποσότητα $\varepsilon = r - L$]. [7π]

3. (10π συνολικά)

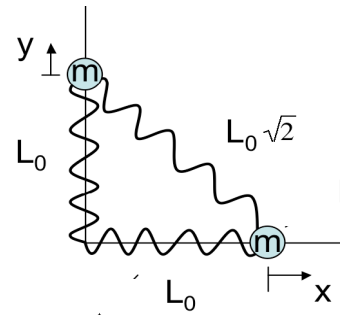
Θεωρήστε την περίπτωση δυο μαζών m_1 και m_2 που συνδέονται με ένα μη ελαστικό σχοινί αμελητέας μάζας και μήκους $r + s = l$. Η μάζα m_1 κινείται στο οριζόντιο επίπεδο ενός λείου τραπέζιού ενώ η μάζα m_2 κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο. Χρησιμοποιήστε τις συντεταγμένες του σχήματος.



- (α) Αναφέρετε τους δεσμούς του συστήματος και προσδιορίστε την Lagrangian και Hamiltonian του συστήματος. [5π]
(β) Προσδιορίστε τις εξισώσεις κίνησης. [3π]
(γ) Δείξτε ποιες μεταβλητές είναι κυκλικές. [2π]

4. (10π συνολικά)

Το παρακάτω σχήμα δείχνει τρία ελατήρια στην θέση ισορροπίας τους. Και τα τρία ελατήρια έχουν σταθερά k ενώ η μάζα τους θεωρείται αμελητέα (μπορείτε να αγνοήσετε τη βαρύτητα για το πρόβλημα αυτό). Τα ελατήρια 1 και 2 είναι τυλιγμένα γύρω από λείες ράβδους, έτσι ώστε το ελατήριο 1 μπορεί να κινείται στη x -διεύθυνση μόνο, ενώ το ελατήριο 2 μόνο στη y -διεύθυνση. Δυο μπάλες μάζας m είναι στερεωμένες στα άκρα των ελατηρίων 1 και 2. Το τρίτο ελατήριο συνδέει τις δυο μάζες. Τα μήκη ισορροπίας των ελατηρίων είναι L_0 , L_0 και $\sqrt{2}L_0$ για τα ελατήρια 1, 2 και 3 αντίστοιχα.



(α) Να βρεθεί η δυναμική ενέργεια όταν το ελατήριο 1 επιμηκύνεται κατά μια ποσότητα x και το ελατήριο 2 επιμηκύνεται κατά μια ποσότητα y , όπου x και y είναι και τα δυο πολύ μικρότερα από το L_0 . [4π].

(β) Να βρεθούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος αυτού, υποθέτοντας ότι $x \ll L_0$ και $y \ll L_0$. [4π]

(γ) Περιγράψτε ένα τρόπο για να θέσετε το σύστημα σε κίνηση έτσι ώστε να ταλαντώνεται στην χαμηλότερη συχνότητα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. [2π]

5. (10π συνολικά)

Ένα Frisbee ρίχνεται οριζόντια από το νότιο πόλο σε ύψος 1m πάνω από το έδαφος με πολύ μεγάλη ταχύτητα u . Πιστέψτε το ή όχι κατορθώνει να φθάσει στο βόρειο πόλο πετώντας πάνω από αυτόν με ταχύτητα $u/2$.

(α) Σε τι ύψος πάνω από το έδαφος περνά πάνω από το βόρειο πόλο; (**3 β**)

(β) Όταν επιστρέφει στο νότιο πόλο, σε τι ύψος πάνω από το έδαφος φθάνει; (**2 β**)

(γ) Ποια είναι η εκκεντρότητα της τροχιάς; (**3 β**)

(δ) Ποιος ο μικρός ημιάξονας; (**2 β**)

Αγνοήστε την τριβή λόγω αέρα. Η ακτίνα της γης είναι $R=6370\text{km}$.

Θεωρήστε $1\text{m} \ll R$. Δικαιολογήστε λεπτομερώς όλες τις απαντήσεις σας.

6. (10π συνολικά)

Θεωρήστε ένα ιδανικό στεφάνι μάζας M , και ακτίνας R , το οποίο κυλά χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος μιας κεκλιμένης επιφάνειας κλίσης α ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Την χρονική στιγμή $t=0$, το στεφάνι αφήνεται από την κορυφή της κεκλιμένης επιφάνειας να κυλήσει προς την βάση της χωρίς αρχική ταχύτητα. Έστω θ η γωνία κατά την οποία περιστρέφεται το στεφάνι ως προς την αρχική του θέση. Θεωρήστε επίσης σαν S την απόσταση που διαγράφει το κέντρο μάζας του στεφανιού από την αρχική του θέση. Η ροπή αδράνειας του στεφανιού ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο στεφάνι είναι $I_{cm} = MR^2$.

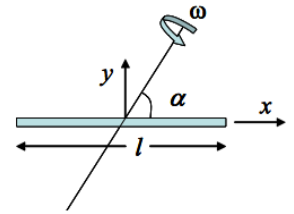
Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange:

(α) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης για το σύστημα αυτό. [6π]

(β) Βρείτε το μέτρο της δύναμης που απαιτείται ώστε το στεφάνι να κυλά χωρίς ολίσθηση. Για μια συγκεκριμένη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής, μ_s , να βρεθεί η μέγιστη τιμή της γωνίας της κλίσης, α , για την οποία δεν υπάρχει ολίσθηση μεταξύ του στεφανιού και κεκλιμένης επιφάνειας. [4π]

7. (10π συνολικά)

Μια λεπτή ομοιόμορφη ράβδος μήκους l , και μάζας m , είναι περιορισμένη να κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω , γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο της O και σχηματίζει γωνία α με την διεύθυνση της ράβδου, όπως στο διπλανό σχήμα. Για το πρόβλημα αγνοήστε το πάχος της ράβδου στις y και z διευθύνσεις.



(α) Γράψτε τον τανυστή αδράνειας στο σύστημα αναφοράς του σώματος

(x, y, z) που δείχνονται στο σχήμα (ο z -άξονας δείχνει έξω από την σελίδα). [3π]

(β) Βρείτε το μέγεθος και την διεύθυνση του διανύσματος της στροφορμής στο σύστημα αναφοράς του σώματος. [4π]

(γ) Υπολογίστε την ροπή που είναι απαραίτητη ώστε η ράβδος να περιστρέφεται με τον παραπάνω τρόπο. [3π]

8. (10π συνολικά)

Θεωρήστε μια λεπτή ομογενή πλάκα, με κύριες ροπές αδράνειας I_1 κατά μήκος του κύριου άξονα x_1 , $I_2 > I_1$ κατά μήκος του κύριου άξονα x_2 , και $I_3 = I_1 + I_2$. Έστω το κέντρο μάζας, O , του σώματος αποτελεί την αρχή των συστημάτων συντεταγμένων x_i και x'_i . Την χρονική στιγμή $t=0$, η πλάκα τίθεται σε περιστροφική κίνηση απουσία οποιασδήποτε δύναμης με γωνιακή ταχύτητα Ω , γύρω από άξονα που σχηματίζει γωνία α με το επίπεδο της πλάκας και είναι κάθετος στον x_2 άξονα. Αν ο λόγος $I_1/I_2 = \cos(2\alpha)$, δείξτε ότι την χρονική στιγμή t , η γωνιακή ταχύτητα ως προς τον x_2 -άξονα ισούται με $\omega_2(t) = \Omega \cos \alpha \tanh(\Omega t \sin \alpha)$. [Υπόδειξη: Ξεκινήστε από τις εξισώσεις Euler.]

9. (10π συνολικά)

Δυο παρατηρητές Α και Β εξετάζουν κάποιο στερεό σώμα ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο. Και οι δυο χρησιμοποιούν καρτεσιανό σύστημα αναφοράς για να καταγράψουν τις παρατηρήσεις τους αλλά τα δυο συστήματα αναφοράς δεν είναι απαραίτητα τα ίδια. Οι μετρήσεις του παρατηρητή Α οδηγεί σε τανυστή αδράνειας που δίνεται από τον ακόλουθο διαγώνιο πίνακα

$$I_A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ ενώ ο Β στο δικό του σύστημα συντεταγμένων μετρά } I_B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Είναι δυνατόν και οι δυο να παρατηρούν το ίδιο στερεό αντικείμενο; Εξηγήστε πλήρως την απάντησή σας.

10. (10π συνολικά)

Υποθέστε ότι ο batman οδηγεί το αυτοκίνητό του (batmobile) ανατολικά με σταθερή ταχύτητα και σε βόρειο γεωγραφικό πλάτος 42° . Στο πρόβλημα αυτό μπορείτε να αγνοήσετε την επίδραση της φυγοκέντρου δύναμης, αποτέλεσμα της περιστροφής της γης. Ωστόσο θα πρέπει να θεωρήσετε μόνο το πρόβλημα της δύναμης Coriolis.

(α) Το αποτέλεσμα της δύναμης Coriolis είναι να αποκλίνει το αυτοκίνητο βόρεια ή νότια; Εξηγήστε [2π]

(β) Πως αλλάζει η δύναμη Coriolis την κάθετο αντίδραση από το έδαφος στο αυτοκίνητο; [3π]

(γ) Αν ο συντελεστής στατικής τριβής των ελαστικών του αυτοκινήτου είναι 0.01, ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα με την οποία μπορεί να κινείται το batmobile πριν η δύναμη Coriolis το αποκλίνει από την ευθεία διαδρομή; [5π]

[Υπόδειξη: η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της γης είναι $\omega = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/sec}$]