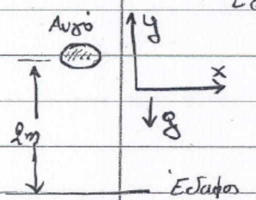
ΦΥΣ. 131
ΕΡΓΑΣΙΑ # 6

1. Ένα αυγό μάζας 0.250kg πέφτει από ένα ύψος 2.0 m στο έδαφος. (α) Υπολογίστε την ώθηση που εξασκεί η δύναμη της βαρύτητας στο αυγό κατά τη διάρκεια της πτώσης του στο έδαφος. (β) Προσδιορίστε την ταχύτητα του αυγού τη στιγμή ακριβώς πριν τη πρόσκρουσή του στο έδαφος, και με βάση το αποτέλεσμά σας υπολογίστε την αλλαγή στην ορμή του κατά τη διάρκεια της πτώσης του. (γ) Το αυγό σταματά στο δάπεδο μέσα σε 0.010s. Βρείτε την ώθηση της συνολικής δύναμης στο αυγό κατά το σπάσιμό του. Βρείτε την μέση δύναμη στο αυγό τη στιγμή που σπάει και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με το βάρος του αυγού.

(α) Το βάρος του αυγού είναι η δύναμη της βαρύτητας. Η δύναμη αυτή είναι σταθερή (τουλάχιστον κοντά στην επιφάνεια της γης)

Έστω ότι έχουμε το σύστημα συντεταγμένων όπως στο σχήμα:



Η δύναμη της βαρύτητας είναι: $\boxed{F_g = -mg}$

Ο χρόνος πτώσης δίνεται από: $y = y_0 + v_{y_0} - \frac{1}{2} g t^2$ $\Rightarrow$

Τη στιγμή που το αυγό χτυπά στο έδαφος $y = 0$

$$0 = 2 + 0 - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{4}{g}} \Rightarrow \boxed{t_\pi = 0.639 \text{ sec}}$$

Η ώθηση της δύναμης της βαρύτητας είναι: $I = \int_0^{t_\pi} F_g dt = F_g \int_0^{t_\pi} dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = -mg(t_\pi - 0) \Rightarrow I = -mg\, 0.639 \Rightarrow \boxed{I = -1.57 \text{ kg}\cdot\text{m/s}} \quad (1)$$

(β) Η ταχύτητα του αυγού τη στιγμή της πρόσκρουσης στο έδαφος είναι:

$$v = v_{0_y} - gt \Rightarrow v = -g t_\pi \Rightarrow \boxed{v_\pi = -6.27 \text{ m/s}}$$

(A)

Επομένως η ορμή του αυγού θα είναι: $p_a^f = m_a v_\pi \Rightarrow \boxed{p_a^f = -1.57 \text{ kg m/s}}$

Η αρχική ορμή του αυγού είναι μηδέν: $p_a^i = 0$ Επομένως η μεταβολή της ορμής του είναι: $\Delta p = p_a^f - p_a^i \Rightarrow \boxed{\Delta p = -1.57 \text{ kg m/s}}$ (2)

Βλέπουμε ότι η μεταβολή της ορμής του αυγού (2) είναι ίση με την ώθηση (1)

Είναι η ώθηση $I = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt = \Delta p$

Επομένως $I = p_\alpha^f - p_\alpha^i \overset{(A)}{=} 0 - (-1.57) \Rightarrow \boxed{I = 1.57\ kg\,m/s}$

Η μέση δύναμη κατά τη διάρκεια του σπασίματος του αυγού είναι:

$$\bar{F} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{1.57}{0.01} \Rightarrow \boxed{\bar{F} = 157\,Nt}$$

Αυτή η μέση δύναμη είναι η συνισταμένη της δύναμης του εδάφους στο αυγό και του βάρους του αυγού (δηλαδή της βαρυτικής δύναμης της γης στο αυγό)

Το μέγεθος της δύναμης $\bar{F} = 157\,Nt$ και το μέγεθος της βαρυτικής δύναμης $F_g = mg = 2.45\,Nt$

Επομένως ο λόγος της μέσης δύναμης κατά το σπάσιμο ως προς το βάρος του αυγού είναι:

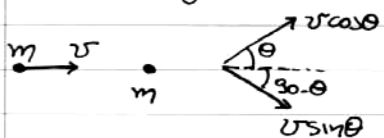
$$\frac{\bar{F}}{mg} = \frac{157}{2.45} \cong 65$$ Πολύ μεγαλύτερη από το βάρος του αυγού.

(γ) Κατά το μικρό διάστημα που το αυγό σπά (η άσκηση λέει $\Delta t = 0.010s$) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το αυγό είχε αρχική ορμή αυτή τη στιγμή που μόλις ακουμπά στο έδαφος (A) και στο τέλος του διαστήματος $p_\alpha^f = 0$

Η δύναμη που σπά το αυγό δεν είναι σταθερή κατά το μικρό αυτό διάστημα αλλά ξέρουμε ότι το ολοκλήρωμα της δύναμης στο χρονικό διάστημα Δt

2. Μια μπάλα ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Τη στιγμή που φθάνει στο μέγιστο ύψος μια ό μοια μπάλα που κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ, συγκρούεται (όχι απαραίτητα μετωπικά) τελείως ελαστικά μαζί της. Ποια είναι η μέγιστη οριζόντια απόσταση η δεύτερη μπάλα μπορεί να διανύσει μέχρι την χρονική στιγμή που επιστρέφει στο αρχικό ύψος της σύγκρουσης. *Υπόδειξη*: μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα της ελαστικής σύγκρουσης 2 μπαλών που αποδείξαμε στις διαλέξεις.

Σύμφωνα με την υπόδειξη ξέρουμε ότι μια ελαστική κρούση μεταξύ 2 ίδιων μαζών θα είναι:



Αντί να το αποδείξουμε μπορούμε να δούμε ότι η ενέργεια και ορμή διατηρούνται για τις τιμές των ταχυτήτων :

Απο διατήρηση της ενέργειας: $\frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}mv^2\sin^2\theta = \frac{1}{2}mv^2$ ισχύει

Η διατήρηση ορμής στην x-διεύθυνση: $mv + 0 = m(v\cos\theta)\cos\theta + m(v\sin\theta)\sin\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow P_x = mv = mv\cos^2\theta + mv\sin^2\theta = mv$ ισχύει

Για P_y: $P_y = 0 + 0 = m(v\cos\theta)\sin\theta - m(v\sin\theta)\cos\theta = \phi$ ισχύει

Επομένως έχουμε μετά την κρούση, τη μελέτη ενός προβλήματος βολής με αρχική ταχύτητα $v\cos\theta$. Ξέρουμε ότι για πλάγιες βολές, το βεληνεκές δίνεται από:

$$d = v_{0x}t = (v_0\cos\theta)\frac{2v_0\sin\theta}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g} \Rightarrow d = \frac{2v^2\cos^2\theta\cos\theta\sin\theta}{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d = \frac{2v^2\cos^3\theta\sin\theta}{g}} \quad (A)$$

Αφού θέλω το μέγιστο, παίρνουμε την παράγωγο ως προς θ να'ναι ϕ $\Rightarrow$

$$3\cos^2\theta(-\sin\theta)\sin\theta + \cos^3\theta\cos\theta = 0 \Rightarrow -3\cos^2\theta\sin^2\theta + \cos^4\theta = 0 \Rightarrow$$

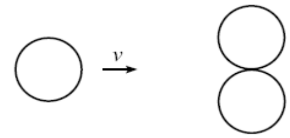
$$\Rightarrow -\cos^2\theta\left(3\sin^2\theta - \cos^2\theta\right) = \phi .$$

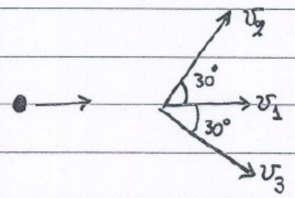
Επομένως $3\sin^2\theta = \cos^2\theta \Rightarrow \tan^2\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\theta = 30^\circ}$.

Αντικαθιστώντας στην (A): $d = \frac{2v^2}{g}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{v^2}{g}}}$

3. Μια μπάλα με αρχική ταχύτητα υ ρίχνεται με τέτοια διεύθυνση ώστε να χτυπήσει ανάμεσα σε δυο άλλες μπάλες, όπως φαίνεται στο σχήμα. Σύμφωνα με το σχήμα, η ελαστική κρούση διώχνει τις δύο μπάλες στα δεξιά με γωνία 30° ως προς την αρχική διεύθυνση της κίνησης. Βρείτε τις ταχύτητες και των 3 μπαλών μετά τη σύγκρουση.





Από διατήρηση της ορμής έχουμε:

$$P_x : P^i_{x_1} + P^i_{x_2} + P^i_{x_3} = P^f_{x_1} + P^f_{x_2} + P^f_{x_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\upsilon = m\upsilon_1 + m\upsilon_2\cos30^\circ + m\upsilon_3\cos30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{m}\upsilon = \cancel{m}\upsilon_1 + \cancel{m}\cos30^\circ(\upsilon_2+\upsilon_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon = \upsilon_1 + (\upsilon_2+\upsilon_3)\cos30^\circ} \quad (1)$$

$$P_y : P^i_{1y} + P^i_{2y} + P^i_{3y} = P^f_{1y} + P^f_{2y} + P^f_{3y} \Rightarrow 0+0+0 = 0 + m\upsilon_2\sin30 - m\upsilon_3\sin\theta =$$

$$\Rightarrow \cancel{m}\upsilon_2\cancel{\sin30^\circ} = \cancel{m}\upsilon_3\cancel{\sin30^\circ} \Rightarrow \boxed{\upsilon_2 = \upsilon_3} \quad (2)$$

Από (1) ∧ (2) $\Rightarrow \upsilon = \upsilon_1 + 2\upsilon_2\cos30^\circ \Rightarrow \upsilon = \upsilon_1 + \cancel{2}\upsilon_2\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \Rightarrow$

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_1 + \sqrt{3}\,\upsilon_2} \quad (3)$$

Από διατήρηση της ενέργειας έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_3^2 \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{\upsilon^2 = \upsilon_1^2 + 2\upsilon_2^2} \quad (4)$$

Λύνουμε τη (3) ως προς υ_1 και αντικαθιστούμε στην (4)

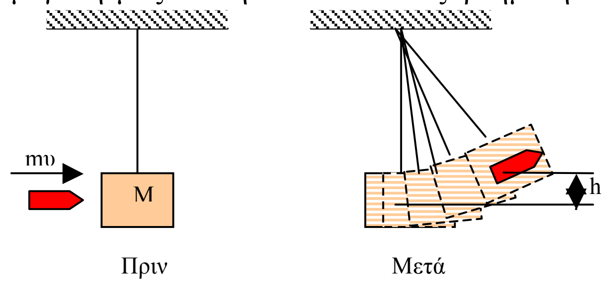
$$\upsilon^2 = (\upsilon - \sqrt{3}\upsilon_2)^2 + 2\upsilon_2^2 \Rightarrow \cancel{\upsilon^2} = \cancel{\upsilon^2} + 3\upsilon_2^2 - 2\sqrt{3}\,\upsilon\upsilon_2 + 2\upsilon_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\upsilon_2^2 - 2\sqrt{3}\,\upsilon\upsilon_2 = 0 \Rightarrow \upsilon = \frac{5}{2\sqrt{3}}\upsilon_2 \Rightarrow \boxed{\upsilon_2 = \frac{2\sqrt{3}}{5}\upsilon = \upsilon_3}$$

Αντικαθιστώντας στην (3) $\Rightarrow \upsilon_1 = \upsilon - \frac{2\sqrt{3}}{5}\sqrt{3}\,\upsilon \Rightarrow \boxed{\upsilon_1 = -\frac{\upsilon}{5}}$

Δηλαδή η μπάλα 1 κινείται προς τα πίσω.

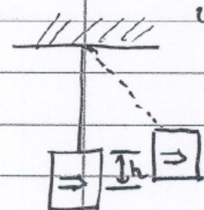
4. Η ταχύτητα μιας σφαίρας μπορεί να μετρηθεί με μια συσκευή που ονομάζεται βαλλιστικό εκκρεμές, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Μια σφαίρα μάζας m κινούμενη με ταχύτητα υ συναντά μια μεγάλη μάζα M η οποία είναι εξαρτημένη από ένα εκκρεμές που βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία. Η μάζα M απορροφά την σφαίρα. Η κρεμασμένη μάζα (που τώρα αποτελείται από M+m) αιωρείται σε κάποιο ύψος h πάνω από την αρχική θέση του εκκρεμούς όπως δείχνεται στο σχήμα; (α) Δείξτε ότι η αρχική ταχύτητα υ' του εκκρεμούς (που περιέχει τη σφαίρα) μετά την πρόσκρουση δίνεται από την σχέση $\upsilon' = \dfrac{m\upsilon}{M+m}$. (β) Δείξτε ότι η ταχύτητα της σφαίρας δίνεται από τη σχέση $\upsilon = \dfrac{M+m}{m}\sqrt{2gh}$. (γ) Αν h=10cm, M=2.50kgr και m=10gr να βρεθεί η ταχύτητα υ της σφαίρας.



(α) Από διατήρηση της ορμής

$$m\upsilon + \emptyset = (m+M)\upsilon' \Rightarrow \boxed{\upsilon' = \frac{m}{m+M}\upsilon} \quad (1)$$

(β) Διατήρησης της ενέργειας (από τη στιγμή της κρούσης στο υψηλότερο σημείο της αιώρησης)



$$\frac{1}{2}\cancel{(m+M)}\upsilon'^2 = \cancel{(m+M)}gh \Rightarrow$$

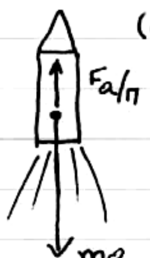
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon'^2 = gh \Rightarrow \upsilon' = \sqrt{2gh} \xRightarrow{\text{από } (1)}$$

$$\sqrt{2gh} = \frac{m}{M+m}\upsilon \Rightarrow \boxed{\upsilon = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gh}} \quad (2)$$

(γ) Αντικαθιστούμε τα δεδομένα του προβλήματος στην (2) και παίρνουμε:

$$\upsilon = \frac{2.5+0.01}{0.01}\sqrt{2\cdot 9.8\cdot 0.1} \Rightarrow \upsilon = 351\ m/sec \Rightarrow \boxed{\upsilon = 1263.6\ km/h}$$

5. Ένας πύραυλος που ανυψώνεται κατακόρυφα εκτοξεύει μάζα αερίων με σταθερό ρυθμό $\frac{dm}{dt} = -100$kg/s. Η αρχική συνολική μάζα του πυραύλου είναι $m_0 = 2x10^4$kg. Η αρχική μάζα των καυσίμων είναι $m_{0\kappa} = 0.865m_0$ και η ταχύτητα αποβολής των αερίων ως προς τον πύραυλο είναι $\upsilon_{ex} = 4.0$km/s. Δίνεται ότι τη χρονική στιγμή t = 0 η ταχύτητα του πύραυλου είναι $V_0 = 0$. (Η ταχύτητα αποβολής των αερίων ως προς τον πύραυλο και η επιτάχυνση της βαρύτητας θεωρούνται σταθερές). (α) Να σημειώσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στον πύραυλο και να τις υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_1=100s. (β) Να υπολογίσετε το χρόνο που απαιτείται για να αδειάσει ο πύραυλος από καύσιμα και να υπολογίσετε τη ταχύτητά του τη χρονική στιγμή τότε. ($g = 10.0 m/s^2$).



(α) Η μεταβολή στη μάζα του πυραύλου είναι:

$$\frac{dm}{dt} = -100 kg/s \Rightarrow \int_{m_0}^{m} dm = -100\int_{t_0}^{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\Big|_{m_0}^{m} = -100(t-t_0) \Rightarrow m - m_0 = -100\cdot 100$$

$$\Rightarrow m = m_0 - 10^4 \Rightarrow m = 2\cdot 10^4 - 10^4 \Rightarrow \boxed{m = 10^4 kg}$$

Αυτή είναι η μάζα του πυραύλου τη χρονική στιγμή $t = 100s$

Η δύναμη $F_{a/\pi}$ είναι λόγω δράσης-αντίδρασης (εσωτερική δύναμη του συστήματος αερίων-πυραύλου)

Το βάρος του πυραύλου τη στιγμή $t = 100s$ είναι $B = mg = 10^4 \cdot 10 = 10^5 N$

Η ώθηση στο πύραυλο $F \cdot dt = \Delta p \Rightarrow F = \frac{\Delta p}{dt} = \frac{\Delta(m\upsilon_{\varepsilon\kappa})}{dt} = \upsilon_{\varepsilon\kappa}\frac{\Delta m}{dt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow F = 4\cdot 10^3 \frac{m}{s} \cdot 100 kg \Rightarrow \boxed{F = 4\cdot 10^5 Nt}$$

(β) Η τελική μάζα του πυραύλου είναι: $m_\pi = m_{o} - m_{\alpha\varepsilon\rho} = m_o - 0.865 m_o \Rightarrow$

$\Rightarrow m_\pi = 0.135 m_o = 0.135 \cdot 2 \cdot 10^4 = 0.27 \cdot 10^4\ kg$

$dm = -100dt \Rightarrow \int_{m_{\alpha\rho}}^{m_{\tau\varepsilon\lambda}} dm = -100 \int_0^t dt \Rightarrow (m_{\tau\varepsilon\lambda} - m_{\alpha\rho}) = -100t \Rightarrow$

$\Rightarrow (0.27 - 2) \cdot 10^4 = -100t \Rightarrow \boxed{t = 173 sec}$

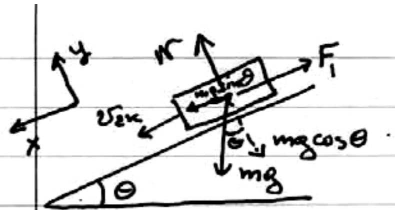
$F = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} - v_{\varepsilon\kappa}\frac{dm}{dt} \Rightarrow -mg = m\frac{dv}{dt} + v_{\varepsilon\kappa}\frac{dm}{dt} \Rightarrow$

$\Rightarrow -g = \frac{dv}{dt} + \frac{v_{\varepsilon\kappa}}{m}\frac{dm}{dt} \Rightarrow -g dt = dv + \frac{v_{\varepsilon\kappa}}{m} dm \Rightarrow$

$\Rightarrow -\int_0^v dv = g\int_{t=0}^{t_{\tau\varepsilon\lambda}} dt + v_{\varepsilon\kappa}\int_{m_o}^{m_{\tau\varepsilon\lambda}} \frac{dm}{m} \Rightarrow -v_{\tau\varepsilon\lambda} = g \cdot 173 + 4 \cdot 10^3 \ln\frac{m_{\tau\varepsilon\lambda}}{m_o} \Rightarrow$

$\Rightarrow -v = -6270\ m/s \Rightarrow \boxed{v = 6.27 \frac{km}{s}}$

6. Δοχείο γεμάτο με νερό ξεκινά από την ηρεμία του και ολισθαίνει χωρίς τριβές κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου με γωνία κλίσης θ. Από τρύπα στο δοχείο, εκτοξεύεται νερό κατά την διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου με σταθερή ταχύτητα υ_{ex} ως προς το δοχείο και με σταθερό ρυθμό dm/dt = -α, όπου α>0. Η μάζα του δοχείου όταν είναι άδειο είναι $m_{0\Delta}$ και η αρχική μάζα του νερού είναι m_{0N}. Αναφέρατε και σημειώστε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο με δοχείο με το νερό και βρείτε την ταχύτητα του δοχείου όταν θα έχει αδειάσει όλο το νερό, αν $\dfrac{m_{0\Delta}}{a} \geq \dfrac{\upsilon_{ex}}{g\sin\theta}$.



$$\Sigma F = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg\sin\theta - F_1 = m\frac{d\upsilon}{dt} \qquad (1)$$

Η F_1 είναι η ώθηση που δέχεται το σώμα λόγω της εκτόξευσης του νερού και μεταβολής της μάζας του δοχείου. (διατήρηση ορμής)

$$F_1 = -\upsilon_{\varepsilon\kappa\tau}\frac{dm}{dt} \qquad (2)$$

Επομένως από (1) ∧ (2) ⇒

$$\cancel{m}g\sin\theta - \frac{\upsilon_{\varepsilon\kappa\tau}}{m}\frac{dm}{dt} = \cancel{m}\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow g\sin\theta - \frac{\upsilon_{\varepsilon\kappa}}{m}\frac{dm}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g\sin\theta\, dt - \upsilon_{\varepsilon\kappa}\frac{dm}{m} = d\upsilon \Rightarrow \int_0^{\upsilon} d\upsilon = \int_0^t g\sin\theta\, dt - \int_{m_\Delta + m_{\nu\varepsilon\rho}}^{m_\Delta} \upsilon_{\varepsilon\kappa}\frac{dm}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = g\sin\theta \cdot t - \upsilon_{\varepsilon\kappa}\ln\frac{m_\Delta}{m_\Delta + m_{\nu\varepsilon\rho}} \qquad (3)$$

Θα πρέπει να βρούμε το χρόνο ώστε να αδειάσει το δοχείο:

$$a = -\frac{dm}{dt} \Rightarrow a\,dt = -dm \Rightarrow \int_0^t a\,dt = -\int_{m_{\nu\varepsilon\rho}}^{0} dm \Rightarrow a t = m_{\nu\varepsilon\rho} \Rightarrow \boxed{t = \frac{m_{\nu\varepsilon\rho}}{a}} \quad (4)$$

Αντικατάσταση στη (3) από (4) ⇒ $$\boxed{\upsilon = g\sin\theta \cdot \frac{m_{\nu\varepsilon\rho}}{a} - \upsilon_{\varepsilon\kappa}\ln\frac{m_\Delta}{m_\Delta + m_{\nu\varepsilon\rho}}}$$

7. Μια σακούλα με καραμέλες αδειάζει μέσα στο καλάθι μια ζυγαριάς ελατηρίου η οποία αρχικά είχε μηδενική ένδειξη. Κάθε καραμέλα ζυγίζει 2gr και πέφτει στη ζυγαριά από ύψος 1.2m. Οι καραμέλες πέφτουν στη ζυγαριά με ρυθμός 6 καραμέλες/sec. Ποια είναι η ένδειξη της ζυγαριάς μετά από 10sec αν όλες οι καραμέλες συγκρούονται με την ζυγαριά τελείως πλαστικά;

Κάθε κομμάτι καραμέλας έχει μάζα m_0. Οι καραμέλες έχουν αρχικά δυναμική ενέργεια η οποία μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια καθώς πέφτουν προς τη ζυγαριά. Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας:

$$E_{βαρ} = E_{κιν} \Rightarrow m_0 g h = \frac{1}{2} m_0 v_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$$

Αυτή είναι η ταχύτητα με την οποία οι καραμέλες χτυπούν στο καλάθι της ζυγαριάς. Καθώς χτυπούν χάνουν όλη την ταχύτητά τους και η ορμή τους γίνεται μηδέν.

Επομένως υπάρχει μια μεταβολή ορμής $\Delta p = 0 - m_0 \underbrace{v}_{(-\sqrt{2gh})} = + m_0\sqrt{2gh}$
(θεωρώντας θετική τη φορά προς τα πάνω).

Αυτή η μεταβολή της ορμής προκαλείται από μια δύναμη F

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = v \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

Οι καραμέλες χτυπούν στο καλάθι της ζυγαριάς με μια σταθερή ροή. Επομένως:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta m \cdot g}{g \cdot t} = \frac{W}{g t}$$ είναι η μάζα των καραμελών που χτυπούν τη ζυγαριά /sec

Επομένως η δύναμη θα είναι: $F = v \frac{\Delta m}{\Delta t} = \sqrt{2gh}\,\frac{\Delta m}{\Delta t} \Rightarrow F = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1.2}\,\frac{6}{sec} \cdot 2 \Rightarrow$

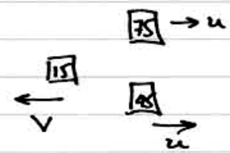
$$\Rightarrow F = 58.8 \cdot 10^{-3}\ Nt$$

Αυτή η δύναμη είναι σταθερή και εξαρτάται μόνο από το ρυθμό πτώσης. Μετά από 10sec. Η ένδειξη της ζυγαριάς θα είναι το βάρος ~~των~~ καραμελών στη ζυγαριά + τη σταθερή δύναμη F. Δηλαδή

$$F_{ζυγ} = F + F_{βαρ} = (58.8 + 10 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10 m/sec^2) \cdot 10^{-3} \Rightarrow F_{ζυγ} = 1258.5 \cdot 10^{-3} = 1.26 Nt$$

8. Ο Γιάννης και η Μαρία στέκονται πάνω σε ένα κιβώτιο μάζας 15.0kg το οποίο είναι σε ηρεμία πάνω στη λεία οριζόντια επιφάνεια μιας παγωμένης λίμνης. Ο Γιάννης έχει μάζα 75.0 kgr ενώ η Μαρία έχει μάζα 45.0 kgr. Ξαφνικά θυμούνται ότι δεν έχουν νερό μαζί τους και ο καθένας πηδά από το κιβώτιο οριζόντια. Αφού το κάθε άτομο πηδήξει από το κιβώτιο συνεχίζει να κινείται με ταχύτητα 4.00m/s σχετικά με το κιβώτιο. (α) Ποια είναι η τελική ταχύτητα του κιβωτίου αν και τα δύο άτομα πηδήξουν ταυτόχρονα από το κιβώτιο. (β) Ποια είναι η τελική ταχύτητα του κιβωτίου αν πηδήξει πρώτα ο Γιάννης και μετά από λίγα δευτερόλεπτα η Μαρία πηδήξει προς την ίδια κατεύθυνση (γ) Ποια είναι η τελική ταχύτητα του κιβωτίου αν πηδήξει πρώτα η Μαρία και μετά ο Γιάννης και πάλι προς την ίδια διεύθυνση.

α)



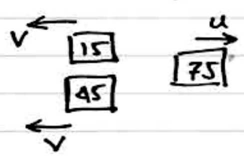
Μας δίνεται ότι: $\boxed{u+V=4\,m/s}$ (1)

Από διατήρηση της ορμής: $15\cdot V=(75+45)\,u$ ⇒ επειδή η αρχική ορμή είναι μηδέν

$\Rightarrow \boxed{V=8u}$ (2)

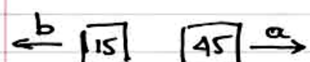
Από (1) και (2) $u+8u=4 \Rightarrow \boxed{u=0.44\,m/s} \Rightarrow \boxed{V=3.56\,m/s}$

(β) Αν πηδήξει πρώτα ο Γιάννης θα έχουμε:



$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} u+V=4\,m/s \\ (15+45)V=75u \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{όπως πριν}} \boxed{V=2.22\,m/s}$

Όταν πηδήξει η Μαρία. Δουλεύουμε στο σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα $V=2.22\,m/s$



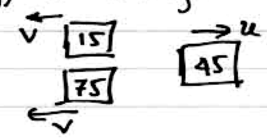
$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=4\,m/s \\ \underbrace{15b=45a} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b=3\,m/sec}$

Στο σύστημα αυτό η αρχική ορμή είναι μηδέν

Η τελική ταχύτητα του κιβωτίου ως προς το έδαφος θα είναι επομένως

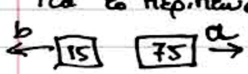
$V+b=2.22+3 \Rightarrow \boxed{V+b=5.22\,m/s}$

(γ) Αν πηδήξει πρώτα η Μαρία:



$\left.\begin{array}{l} u+V=4\,m/sec \\ (15+75)V=45u \end{array}\right\} \Rightarrow V=1.33\,m/sec$

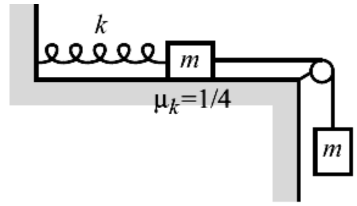
Για τη περίπτωση του Γιάννη, δουλεύουμε όπως πριν στο σύστημα Γιάννης-κιβώτιο:



$\left.\begin{array}{l} a+b=4 \\ 15b=75a \end{array}\right\} \Rightarrow b=3.33\,m/s$

Οπότε η τελική ταχύτητα είναι: $\boxed{V+b=4.67\,m/sec}$

9. Θεωρήστε τη διάταξη του διπλανού σχήματος η οποία αποτελείται από δύο ίσες μάζες m και ένα ελατήριο σταθεράς k. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ της μάζας στα αριστερά του τραπεζιού και της επιφάνειας του τραπεζιού είναι μ=1/4, ενώ η τροχαλία θεωρείστε την ως λεία και αβαρή. Το σύστημα συγκρατείται με ένα ελατήριο το οποίο είναι στο φυσικό του μήκος αρχικά και κατόπιν το σύστημα αφήνεται ελεύθερο. (α) Πόσο επιμηκύνεται το ελατήριο πριν η μάζα έρθει σε κατάσταση ηρεμίας; (β) Ποια η ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής για τον οποίο το σύστημα συνεχίζει να παραμένει σε ηρεμία μετά τη στιγμή που έρχεται για πρώτη φορά σε ηρεμία. (γ) Αν το νήμα κοπεί, ποια είναι η τιμή της μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου εξαιτίας της κίνησης αυτής του σώματος;



(α) Από το θεώρημα έργου-ενέργειας έχουμε: $W = \Delta E_{κιν}$ και οι μάζες σταματούν όταν το ολικό έργο που δαπανάται πάνω τους είναι ∅.
Έστω x η επιμήκυνση του ελατηρίου, τότε το ολικό έργο είναι:

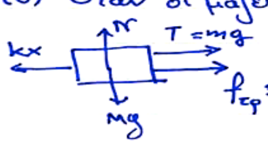
$$W = \underbrace{mgx}_{\text{έργο βαρύτητας}} - \underbrace{\tfrac{1}{2}kx^2}_{\text{έργο ελατηρίου}} - \underbrace{\mu_k mgx}_{\text{Έργο τριβής}}$$

(Το ίδιο θα λέγαμε με ενέργειες: ότι η ελάττωση στη δυναμική ενέργεια βαρύτητας εμφανίζεται σαν ενέργεια ελατηρίου ή θερμότητα)

Θέτοντας $W=0$ και λύνοντας ως προς x έχουμε:

$$x = \frac{2mg}{k}(1-\mu_k) \Rightarrow x = \frac{2mg}{k}\left(1-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \boxed{x = \frac{3mg}{2k}}$$

(β) Όταν οι μάζες σταματούν στο x, οι δυνάμεις στη μάζα στα αριστερά είναι:



$f_{τρ} \leq \mu_s mg$

$$\Rightarrow kx = T + F_{τρ} \leq mg + \mu_s mg \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{k}\,\frac{2\cancel{mg}}{\cancel{k}}(1-\mu_k) \leq \cancel{mg} + \mu_s \cancel{mg} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(1-\mu_k) \leq 1 + \mu_s \Rightarrow \mu_s \geq 1 - 2\mu_k = 1 - 2\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\mu_s \geq \frac{1}{2}}$$

(γ) Τη στιγμή που έχουμε κόψει το νήμα υπάρχει μόνο η αριστερή μάζα. Αυτή σταματά όταν το ολικό έργο που καταναλώνεται είναι μηδέν. Έστω d η απόσταση συσπείρωσης (d θα είναι θετική ποσότητα).
Το έργο επομένως είναι:

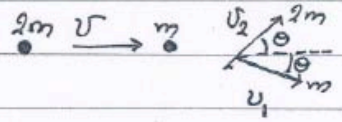
$$W = \left(\frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}kd^2\right) - \mu_k mg(x_0+d) \quad \text{και θέλουμε } W=0 \text{ οπότε}$$

$$0 = \frac{1}{2}k(x_0+d)(x_0-d) - \mu_k mg(x_0+d) = (x_0+d)\left[\frac{1}{2}k(x_0-d) - \mu_k mg\right] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = -d \quad \text{(αυτή είναι η αρχική θέση)} \\ \frac{1}{2}k(x_0-d) - \mu_k mg = 0 \Rightarrow d = x_0 - \frac{2\mu_k mg}{k} = \frac{2mg}{k}(1-\mu_k) - \frac{2\mu_k mg}{k} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{d = \frac{mg}{k}}$$

10. Μια μάζα 2m κινούμενη με ταχύτητα υ συγκρούεται ελαστικά με μια ακίνητη μάζα m. Αν οι δύο μάζες φεύγουν μετά τη σκέδαση με ίσες γωνίες ως προς την αρχική διεύθυνση πρόσκρουσης, ποια είναι η γωνία σκέδασης;



Απο διατήρηση της ορμής: $P^i_{1x}+P^i_{2x}=P^f_{1x}+P^f_{2x} \Rightarrow 2m\upsilon+0=2m\upsilon_2\cos\theta+m\upsilon_1\cos\theta$

$P^i_{1y}+P^i_{1y}=P^f_{1y}+P^f_{2y} \Rightarrow 0+0=2m\upsilon_2\sin\theta - m\upsilon_1\sin\theta$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\cancel{m}\upsilon_2\cos\theta+\cancel{m}\upsilon_1\cos\theta=2\cancel{m}\upsilon \\ 2\cancel{m}\upsilon_2\cancel{\sin\theta}=\cancel{m}\upsilon_1\cancel{\sin\theta} \Rightarrow \boxed{\upsilon_2=\dfrac{\upsilon_1}{2}} \quad (1) \end{cases} \Rightarrow \cancel{2}\upsilon=\cancel{2}\upsilon_1\cos\theta \Rightarrow \boxed{\upsilon=\upsilon_1\cos\theta} \quad (2)$$

Απο διατήρηση της ενέργειας:

$$\frac{1}{2}2m\upsilon^2=\frac{1}{2}2m\upsilon_2^2+\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \Rightarrow 2\upsilon^2=2\upsilon_2^2+\upsilon_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\upsilon^2=\left(2\upsilon_2^2+\upsilon_1^2\right) \xRightarrow{(1)\wedge(2)} 2\cancel{\upsilon_1^2}\cos^2\theta=\left(2\frac{\cancel{\upsilon_1^2}}{4}+\cancel{\upsilon_1^2}\right)$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\theta=\frac{3}{2} \Rightarrow \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\Theta=30^\circ}$$

11. Δυο μάζες 2kg και 3kg αντίστοιχα χρησιμοποιούνται για να συμπιέσουν τις αντίθετες άκρες ενός ιδανικού ελατηρίου με σταθερά ελατηρίου $K=1.50\times10^3$ N/m πάνω σε ένα λείο τραπέζι. Το ελατήριο συμπιέζεται κατά 40 cm από το φυσικό του μήκος και αφήνεται ελεύθερο με τις δύο μάζες αρχικά σε κατάσταση ισορροπίας. Θεωρήστε το σύστημά σας να είναι το ελατήριο με τις δύο μάζες. (α) Εξηγήστε γιατί η ορμή του συστήματος διατηρείται. (β) Εξηγήστε γιατί η ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται. (γ) Προσδιορίστε την ταχύτητα των μαζών τη στιγμή που αφήνουν το ελατήριο.

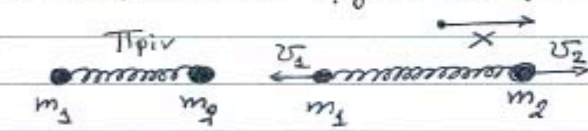
(α)

Στο σύστημα δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις που να ασκούνται στη διεύθυνση x. Επομένως η $P_{ολ}$ στη διεύθυνση-x διατηρείται αφού $\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}$

Η κατακόρυφη δύναμη είναι επίσης $\emptyset$ $(B=N)$ και επομένως $P^y_{ολ}=\emptyset$. άρα είναι πάντα $\emptyset$ και διατηρείται.

(β) Αφού δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις που παράγουν έργο, η ολική μηχανική ενέργεια διατηρείται

(γ)



Απο διατήρηση της ενέργειας έχουμε:

$$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2$$

Από διατήρηση της ορμής:

$$P_1^i+P_2^i=P_1^f+P_2^f \Rightarrow 0+0=m_2\upsilon_2-m_1\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2=\frac{m_1}{m_2}\upsilon_1$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}kx^2=\cancel{\frac{1}{2}}m_1\upsilon_1^2+\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m_2}\frac{m_1^2}{m_2^{\cancel{2}}}\upsilon_1^2 \Rightarrow kx^2=\left(m_1+\frac{m_1^2}{m_2}\right)\upsilon_1^2 \Rightarrow$$

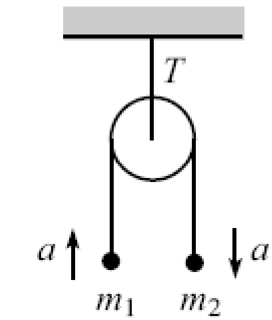
$$\Rightarrow \boxed{\upsilon_1=\sqrt{\frac{m_2}{m_1}\frac{kx^2}{(m_1+m_2)}}} \quad \text{και} \quad \boxed{\upsilon_2=\sqrt{\frac{m_1}{m_2}\frac{kx^2}{(m_1+m_2)}}}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές που δίνονται έχουμε:

$$\upsilon_1=\sqrt{\frac{3}{2}\frac{1.5\cdot10^2\,0.16}{5}}=\sqrt{72} \Rightarrow \boxed{\upsilon_1=8.49\,m/s} \quad \text{και} \quad \boxed{\upsilon_2=5.66\,m/s}$$

12. Σε προηγούμενες ασκήσεις είχαμε δει τη μηχανή του Atwood του παρακάτω σχήματος. Είχαμε δει ότι η επιτάχυνση των μαζών και η τάση του νήματος στο υψηλότερο σημείο δίνονται από τις σχέσεις:

$$a = g\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \quad \text{και} \quad T = g\frac{4m_2 m_1}{m_2 + m_1}$$



Υποθέτουμε ότι $m_2 > m_1$ οπότε η επιτάχυνση είναι προς τα πάνω και θετική.

(α) Θεωρείστε ότι κάθε μάζα έχει μετακινηθεί κατά μια απόσταση d. Υπολογίστε τη δυναμική και κινητική ενέργεια και αποδείξτε ότι η μηχανική ενέργεια διατηρείται.

(β) Δείξτε ότι μετά από ένα χρονικό διάστημα t, $P_{ολική} = F_{ολική}\, t$. Προσέξτε ώστε να συμπεριλάβετε όλες τις δυνάμεις που ενεργούν στο σύστημα.

(α) Ο χρόνος που απαιτείται για να κινηθεί μια απόσταση d δίνεται από $d = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{a}}$

Η ταχύτητα που αποκτησε στη χρονική στιγμή t είναι: $\upsilon = at = \sqrt{2da}$

Αυτή είναι η ταχύτητα που έχουν και οι 2 μάζες.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος θα είναι:

$$E_{κιν} = \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon^2 = \frac{1}{\cancel{2}}(m_1+m_2)\cancel{2}da \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{κιν} = (m_1+m_2)\left(g\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} * d\right) \Rightarrow \boxed{E_{κιν} = dg(m_2-m_1)} \quad (1)$$

Η ενέργεια διατηρείται γιατί $E_{κιν} + U = 0 = σταθ.$

Όπου $U = U_{βαρ}$ σχετικά με την αρχική θέση:

$$U_{βαρ} = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = m_1 g d + m_2 g(-d) = \boxed{gd(m_1-m_2)} \quad (2)$$

(β)

Μετά από χρόνο t η ολική ορμή του συστήματος είναι:

προς τα πάνω είναι η θετική φορά

$$P_{ολ} = m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2 = m_1 a t + m_2 (-a) t = (m_1 - m_2) a t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{ολ} = (m_1 - m_2)\left(g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) t \Rightarrow \boxed{P_{ολ} = -g t \frac{(m_2 - m_1)^2}{m_1 + m_2}} \quad (3)$$

Το σύστημά μας δέχεται την επίδραση των ακόλουθων δυνάμεων:
το βάρος της μάζας m_1, το βάρος της m_2 και την τάση του νήματος στο ανώτερο τμήμα

Η συνισταμένη δύναμη είναι: $F_{ολ} = -m_1 g - m_2 g + T \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_{ολ} = -(m_1 + m_2) g + g \frac{4 m_1 m_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow F_{ολ} = \frac{-(m_1 + m_2)^2 + 4 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{ολ} = \frac{-m_1^2 - m_2^2 - \cancel{2 m_1 m_2} + \cancel{4} m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \Rightarrow F_{ολ} = -g \frac{(m_2 - m_1)^2}{m_1 + m_2} \overset{(3)}{\Rightarrow} F_{ολ} = P_{ολ}/t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{ολ} = F_{ολ} \cdot t = \text{ισχύει}}$$

13. Το ελατήριο ενός όπλου έχει αμελητέα μάζα και μια σταθερά ελατηρίου k = 400N/m. Το ελατήριο συμπιέζεται 0.050m και μια σφαίρα μάζας 0.030kgr τοποθετείται στην οριζόντια κάνη του όπλου ώστε να ακουμπά το άκρο του συσπειρωμένου ελατηρίου. Το ελατήριο κατόπιν ελευθερώνεται και η σφαίρα εκσφενδονίζεται από την κάνη του όπλου. Το μήκος της κάνης είναι 0.050m, έτσι ώστε η σφαίρα χάνει επαφή με το ελατήριο την στιγμή που βγαίνει από την κάνη. Το όπλο κρατιέται ώστε η κάνη να είναι οριζόντια. (α) Υπολογίστε την ταχύτητα με την οποία η σφαίρα εξέρχεται από το όπλο θεωρώντας τις τριβές αμελητέες. (β) Υπολογίστε την ταχύτητα με την οποία η σφαίρα εξέρχεται από την κάνη όταν μια σταθερή δύναμη αντίστασης μέτρου F=6.0N ενεργεί στην σφαίρα καθώς αυτή κινείται μέσα στην κάνη. (γ) Για την περίπτωση του ερωτήματος (β), σε ποια θέση κατά μήκος της κάνης η μπάλα έχει την μέγιστη ταχύτητα; Πόση είναι αυτή η ταχύτητα; (στην περίπτωση αυτή η μέγιστη ταχύτητα δεν αποκτάται στο τέλος της κάνης).

(α) Η ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελατήριο μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια της μπάλας (σφαίρας) $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(400)(0.05)^2 = \frac{1}{2}(0.03)v^2 \Rightarrow \boxed{v = 5.77\ m/s}$$

(β) Το έργο το οποίο παράγει η δύναμη F κατά τη κίνηση της σφαίρας μέσα στην κάνη είναι:

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = Fd = (6.0)(0.05) = 0.3\ J.$$

Στην περίπτωση αυτή το θεώρημα έργου-ενέργειας δίνει:

$$W_{καθ} = \Delta E_{κιν} \Rightarrow W_{ελ} + W_F = \Delta E_{κιν} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 - W_F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}400(0.05)^2 - 0.3 \Rightarrow \boxed{v = 3.65\ m/s}$$

(γ) Έστω ότι η συμπίεση του ελατηρίου είναι y
Το έργο της συνισταμένης δύναμης πάνω στη σφαίρα θα είναι:

$$W = \underbrace{\frac{1}{2}k\left[x_0^2 - y^2\right]} - \left[F\cdot(x_0 - y)\right] \qquad (1)$$

$$W_{ελ} = \int_{x_0}^{y}(-kx)\,dx = -\frac{1}{2}k(y^2 - x_0^2) \qquad W_F = \int_{x_0}^{y} F\,dx = F\cdot x = F(y - x_0) = -F(x_0 - y)$$

όπου x_0 η αρχική συσπείρωση

Η σφαίρα αποκτά τη μέγιστη ταχύτητα όταν το έργο είναι μέγιστο

δηλαδή όταν $\frac{dW}{dy} = \emptyset \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{d}{dy}\left[\frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}ky^2 - Fx + Fy\right] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -ky + F = 0 \Rightarrow y = \frac{F}{k} \Rightarrow y = 0.015 \Rightarrow \boxed{y = 1.5cm}$

Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην (1) παίρνουμε:

$W = 0.245\ J.$

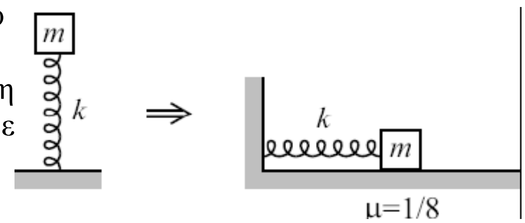
Από το θεώρημα έργου-ενέργειας:

$\frac{1}{2}mv^2 = W \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2W}{m}} \Rightarrow \boxed{v = 4.04 m/s}$

14. Ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου k είναι σε κατακόρυφη θέση και μια μάζα m τοποθετείται στο πάνω άκρο του ελατηρίου. Η μάζα σταδιακά κατεβαίνει στη θέση ισορροπίας της. Με το ελατήριο κρατούμενο στη θέση αυτή της συσπείρωσης, το σύστημα περιστρέφεται κατά 90° στην οριζόντια θέση. Το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου εξαρτάται από ένα τοίχο και η μάζα τοποθετείται πάνω σε τραπέζι με συντελεστή κινητικής τριβής μ=1/8. Η μάζα αφήνεται ελεύθερη:

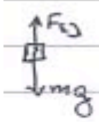
(α) Ποια είναι η α ρχική συσπείρωση του ελατηρίου.

(β) Πόσο ελαττώνεται η μέγιστη συσπείρωση (ή επιμήκυνση) του ελατηρίου μετά από κάθε μισή ταλάντωση (Υπόδειξη: Μην προσπαθήσετε να το λύσετε με $F = ma$).



(γ) Πόσες φορές ταλαντώνεται η μάζα m πριν έρθει στην κατάσταση ηρεμίας;

(α) Στη θέση ισορροπίας της μάζας το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος είναι:



οπότε $kx_0 - mg = 0 \Rightarrow kx_0 = mg \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{mg}{k}}$ (A)

(β) Έστω ότι x_0 είναι η αρχική επιμήκυνση (ή συσπείρωση) και έστω x η συσπείρωση (ή επιμήκυνση) μετά από μισή ταλάντωση (στη χρονική αυτή στιγμή η μάζα επανέρχεται σε θέση ηρεμίας, $υ=0$)

Θεωρούμε ότι τόσο το x_0 και το x (αρχική θέση και η θέση μετά από μισή ταλάντωση) είναι θετικές:

Η διαφορά δυναμικής ενέργειας ελατηρίου θα είναι:

$$\Delta U = \frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}kx^2 \qquad (1)$$

Η διαφορά αυτή θα είναι ίση με το έργο που παράγεται από τη δύναμη της τριβής (το έργο που χάνεται σε θερμότητα)

Το έργο της τριβής είναι:

$$W_{τρ} = F_{τρ}\Delta x = \mu mg(x_0 + x) = \Delta U \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \mu mg(x_0 + x) = \frac{1}{2}k(x_0 + x)(x_0 - x) \Rightarrow x_0 - x = \frac{2\mu mg}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = x_0 - \frac{2(\frac{1}{8})mg}{k} \overset{(A)}{\Rightarrow} \boxed{x = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{4k}} \qquad (B)$$

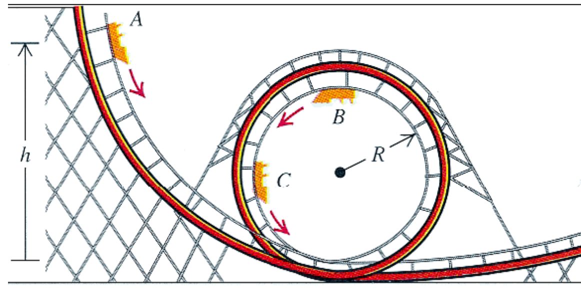
Δηλαδή η μέγιστη συσπείρωση (ή επιμήκυνση) ελαττώνεται κατά $\frac{mg}{4k}$ μετά από κάθε μισή ταλάντωση.

(γ) Το σώμα θα σταματήσει όταν η συσπείρωση ή επιμήκυνσή του γίνει ϕ. Δηλαδή όταν η (Β) γίνει ϕ μετά από η μισές ταλαντώσεις:

$$\frac{\cancel{mg}}{\cancel{k}} = N\frac{\cancel{mg}}{4\cancel{k}} \Rightarrow \boxed{N=4}$$

Δηλαδή το σώμα έρχεται σε ηρεμία μετά από 4 μισές ταλαντώσεις ή 2 πλήρεις.

15. Ένα αυτοκίνητο σε κάποιο λούνα-πάρκ κινείται χωρίς τριβές πάνω στην τροχιά της εικόνας. Ξεκινά από την ηρεμία από ένα σημείο Α και σε ύψος h από το χαμηλότερο σημείο της κυκλικής τροχιάς. (α) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του h (συναρτήσει της ακτίνας R της κυκλικής τροχιάς) ώστε το αυτοκίνητο να συμπληρώσει μια πλήρη περιστροφή χωρίς να πέσει από το υψηλότερο σημείο B. (β) Αν το ύψος είναι h=3.5R και R=25.0m, υπολογίστε την ταχύτητα, ακτινική επιτάχυνση, εφαπτομενική επιτάχυνση των επιβατών του αυτοκινήτου στο σημείο C, το οποίο είναι στο τέλος της οριζόντιας διαμέτρου. Δείξτε τις συνιστώσες αυτές της επιτάχυνσης σε ένα διάγραμμα.



(α) Στο υψηλότερο σημείο της κυκλικής τροχιάς A, το σώμα δέχεται τη δύναμη της βαρύτητας και τη δύναμη της αντίδρασης του δακτυλίου της τροχιάς:

Απο τη στιγμή που εκτελεί κυκλική κίνηση, η συνισταμένη δύναμη παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης:

$$\Sigma F_y = m\frac{v^2}{R} = mg + N \Rightarrow \boxed{N = m\frac{v^2}{R} - mg \geq 0} \quad (1)$$

Το σώμα δεν πέφτει όσο υπάρχει η αντίδραση του δακτυλίου. Δηλαδή, θέλουμε $N \geq 0$. Όταν η αντίδραση γίνει 0, το σώμα χάνει επαφή με την τροχιά. Οπότε από (1) $\Rightarrow \boxed{v_A^2 \geq gR}$ (2)

Η ταχύτητα του σώματος στο σημείο A μπορεί να βρεθεί βάσει της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας: Εξετάζουμε το σημείο από όπου το αφήνουμε ($v=0$) όπου έχει δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας και στο σημείο A όπου έχει κινητική και δυναμική ενέργεια:

$$E^{i}_{\mu\eta\chi} = E^{A}_{\mu\eta\chi} \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_A^2 + mg(2R) \overset{(2)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \cancel{mg}h \geq \frac{1}{2}\cancel{mg}R + 2\cancel{mg}R \Rightarrow \boxed{h \geq \frac{5}{2}R}$$

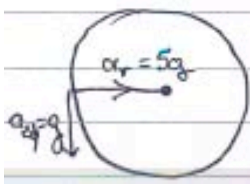
(β) Το σημείο C βρίσκεται σε ύψος R. Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας έχουμε:

$$E^{i}_{\mu\eta\chi} = E^{c}_{\mu\eta\chi} \Rightarrow \cancel{m}g\left(\frac{7}{2}\right)R = \cancel{m}gR + \frac{1}{2}\cancel{m}v_c^2 \Rightarrow v_c^2 = 5gR \Rightarrow$$

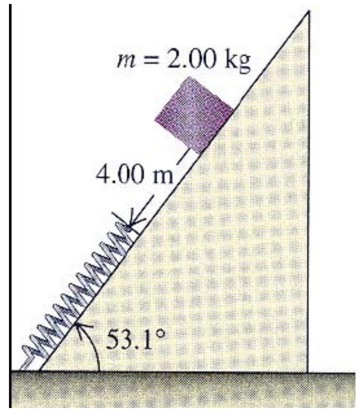
$$\Rightarrow \boxed{v_c = \sqrt{5gR}}$$

Η ακτινική επιτάχυνση είναι: $a_r = \dfrac{v^2}{R} \Rightarrow a_r = \dfrac{5g\cancel{R}}{\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{a_r = 5g}$

Η εφαπτομενική επιτάχυνση είναι $\boxed{a_{\varepsilon\varphi} = g}$ αφού μόνο το βάρος δρά στην διεύθυνση αυτή



16. Ένα κιβώτιο μάζας 2.0kg αφήνεται ελεύθερο σε ένα κεκλιμένο επίπεδο κλίσης 53.1°, 4m απόσταση από ένα μακρύ ελατήριο σταθερής k=140.0N/m το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Οι συντελεστές τριβής μεταξύ του πακέτου και του κεκλιμένου επιπέδου είναι $\mu_ς$=0.40 και $\mu_κ$ =0.20. Η μάζα του ελατηρίου είναι αμελητέα. (α) Ποια είναι η ταχύτητα του πακέτου ακριβώς πριν ακουμπήσει το ελατήριο; (β) Ποια είναι η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου; (γ) Το πακέτο μετά την ταλάντωση του ελατηρίου ελευθερώνεται και επιστρέφει ξανά προς το πάνω μέρος του κεκλιμένου επιπέδου. Πόσο κοντά στην αρχική του θέση μπορεί να φθάσει;



(α) Από το θεώρημα έργου-ενέργειας έχουμε:

$$\Delta E_{κιν} = W \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \underbrace{mgd\sin\theta}_{\text{θετικό έργο από βαρύτητα}} - \underbrace{\mu_k mg\cos\theta \cdot d}_{\text{αρνητικό έργο λόγω τριβής}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = \sqrt{2gd(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2(9.8)(4)(\sin 53.1^\circ - 0.2\cos 53.1^\circ)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon = 7.3 m/s}$$

Ο συντελεστής στατικής τριβής μ_s δεν παίζει ρόλο στο πρόβλημα. Το μόνο που μπορεί να κάνει είναι να σταματήσει το πακέτο από το να ξεκινήσει ξανά από τη στιγμή που έχει σταματήσει.

(β) Ξεκινώντας από το σημείο που το πακέτο ακουμπά το ελατήριο, θα έχουμε:

$$W = \Delta K \Rightarrow mgx\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta \cdot \overset{\text{συσπείρωση}}{x} - \frac{1}{2}kx^2 = 0 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \Rightarrow \quad (\upsilon_0 = 7.3 m/s)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 - mg(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)x - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = 0 \Rightarrow 60x^2 - 13.3x - 53.3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{13.3 \pm 113.9}{120} \Rightarrow \boxed{x = 1.06m}$$

δέχομε το "+" γιατί x είναι θετικό

(γ) Η κύρια ερώτηση είναι αν το πακέτο γυρνά πίσω στο ελατήριο το οποίο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, γιατί χρειάζεται να ξέραμε αν το ελατήριο έχει να κάνει οτιδήποτε με την άλη κίνηση. Κοιτάζουμε την κινητική ενέργεια στο σημείο ισορροπίας. Αν είναι θετική, τότε σημαίνει ότι το κιβώτιο πηγαίνει μέχρι το σημείο εκείνο. Μπορούμε κατόπιν να δούμε πόσο περισσότερο μπορεί να κινηθεί πέρα από το τέλος του ελατηρίου:

(Α) Απο το σημείο της μέγιστης συσπείρωσης στο σημείο ισορροπίας:

$$W = \Delta E_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow W_{\beta\alpha\rho} + W_{\tau\rho\iota\beta} + W_{\varepsilon\lambda} = \Delta E_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow -mg(1.06) - \mu_k mg\cos\theta(1.06) + \frac{1}{2}k(1.06)^2 =$$

$$\Rightarrow \boxed{E^{f}_{\kappa\iota\nu} = 48.3\ \text{Joule}}$$ Δηλαδή θετικό και επομένως φτάνει στο σημείο ισορροπίας

(Β) Από το σημείο ισορροπίας προς τα πάνω: (δεν υπάρχει δύναμη ελατηρίου)

$$W = \Delta E_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow W_{\beta\alpha\rho} + W_{\tau\rho} = \Delta E_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow -mg\,y\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta\, y =$$

$$= \frac{1}{2}m v_y^2 - \frac{1}{2}m v_{\iota\sigma\rho}^2$$ Αφού στο σημείο y σταματά $v_y = 0$. Άρα.

$$-mg\,y\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta \cdot y = -E_{\kappa\iota\nu}^{\iota\sigma}$$ ⇒ όπου $E_{\kappa\iota\nu}^{\iota\sigma} = 48.3\ J$ όπως βρήκαμε στο (Α)

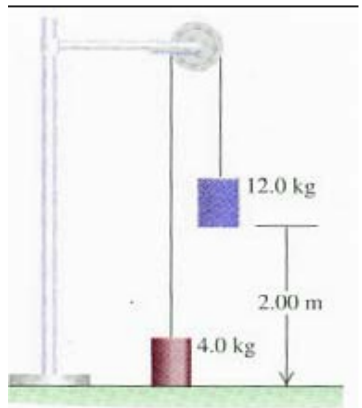
⇒ αντικαθιστώντας τα νούμερα ⇒

$$\Rightarrow \boxed{y = 2.68m}$$

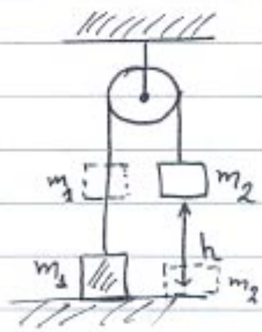
Επομένως η πιο κοντινή απόσταση από το αρχικό σημείο είναι:

$$4m - 2.68m = \boxed{1.32m}$$

17. Το σύστημα του παρακάτω σχήματος αφήνεται από την κατάσταση ηρεμίας με το κουβά της μπογιάς μάζας 12kg, 2.00m πάνω από το έδαφος. Χρησιμοποιήστε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για να βρείτε την ταχύτητα με την οποία ο κουβάς χτυπά στο



έδαφος. Αγνοήστε την τριβή και αδράνεια της τροχαλίας.



Διατήρηση μηχανικής ενέργειας δίνει:

$$E^i_{μηχ} = E^f_{μηχ} \Rightarrow U_i + E^i_{κιν} = U_f + E^f_{κιν} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 g h + \emptyset = m_1 g h + \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2gh(m_2-m_1)}{m_1+m_2} \Rightarrow$$

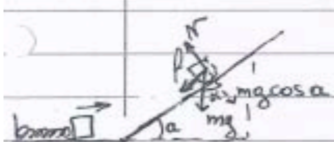
Αντικαθιστώντας τα νούμερα έχουμε:

$$v^2 = \frac{2\cdot(9.8)\cancel{2\cdot(12-4)}}{\cancel{12+4}} \Rightarrow \boxed{v = 4.43\ m/s}$$

18. Ένα κιβώτιο μάζας m πιέζεται πάνω σε ένα ελατήριο αμελητέας μάζας και σταθερής ελατηρίου k, συσπειρώνοντάς το κατά ένα μήκος x. Το κιβώτιο κατόπιν αφήνεται ελεύθερο και αρχίζει να κινείται πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο κλίσης α ως προς τον ορίζοντα. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ του κιβωτίου και του κεκλιμένου επιπέδου είναι μ_{κ}, όπου $\mu_{\kappa} < 1$. Το κιβώτιο συνεχίζει να κινείται πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο αφού έχει καλύψει μια απόσταση $s > |x|$ κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Υπολογίστε τη γωνία α για την οποία η ταχύτητα του κιβωτίου αφού έχει κινηθεί κατά απόσταση s είναι ελάχιστη. Εξηγήστε γιατί η ελάχιστη ταχύτητα δεν συμβαίνει για γωνία α=90°, ακόμα και αν για την γωνία αυτή έχουμε μέγιστη αύξηση της δυναμικής ενέργειας λόγω βαρύτητας

Αφού $s>|x|$, η τελική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι μηδέν.
Η αρχική δυναμική ενέργεια $\frac{1}{2}kx^2$ πηγαίνει σε δυναμική ενέργεια βαρύτητας και κινητική ενέργεια όπως επίσης και σε θερμότητα εξαιτίας της τριβής.

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgs\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha \cdot s + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 - mgs\sin\alpha - \mu mgs\cos\alpha \quad (A)$$

που δεν είναι τίποτα άλλο από το θεώρημα έργου-ενέργειας:

$$\Delta E_{\kappa\iota\nu} = W_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} + W_{\beta\alpha\rho} + W_{\tau\rho\iota\beta\eta\varsigma}.$$

Από (A) Βλέπουμε ότι η ταχύτητα είναι ελάχιστη όταν $-mgs(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$ είναι μέγιστο (δηλαδή όταν αφαιρούμε από την ενέργεια ελατηρίου τη μέγιστη ποσότητα.

Άρα $(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$ γίνεται μέγιστο όταν $\frac{d}{d\alpha}(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\alpha - \mu\sin\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \mu\sin\alpha \Rightarrow \boxed{\tan\alpha = \frac{1}{\mu}}$$

Όταν $\mu=0$ (δεν έχουμε τριβή) $\alpha \to 90°$
Όταν μ μεγάλο ⇒ α μικρό (η κάθετη αντίδραση γίνεται όσο το δυνατόν μεγαλύτερη).

Η γωνία δεν είναι 90° γιατί τότε η κάθετη αντίδραση γίνεται μηδέν και επομένως δεν θα υπάρχει απώλεια ενέργειας λόγω τριβής (αφού $f=0$). Ελαττώνοντας τη γωνία ($\alpha<90°$) αυξάνει τη τριβή ενώ ελαττώνει το ύψος κατά λίγο.