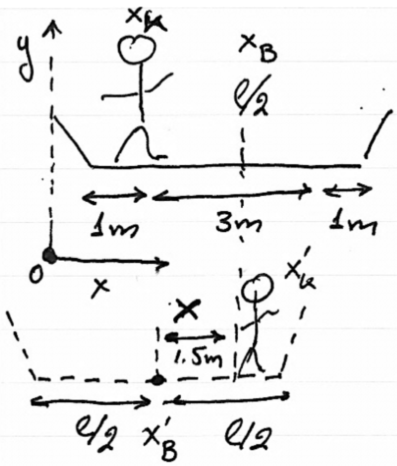
ΦΥΣ. 111

9º ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή 18.11.2020**

1. Μια κοπέλα μάζας 45.0*kg* στέκεται 1.0m από το άκρο μιας βάρκας μήκους 5*m* και μάζας 60.0*kg*. Περπατά από το σημείο αυτό προς κάποιο άλλο σημείο το οποίο βρίσκεται 1.0*m* από το άλλο άκρο της βάρκας. Αν θεωρήσετε αμελητέες τις τριβές της βάρκας με το νερό, ποσό μετακινήθηκε η βάρκα κατά την κίνηση της κοπέλας;



Στη x-διεύθυνση δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη (θεωρούμε αμελητέα την αντίσταση του νερού). Επομένως η ορμή του συστήματος διατηρείται. Τα σώματα του συστήματος (γυναίκα-βάρκα) είναι αρχικά ακίνητα και επομένως το ΚΜ είναι ακίνητο. Μετά τη κίνηση και εφόσον η ολική ορμή διατηρείται το ΚΜ θα παραμείνει στην ίδια θέση.

Στην αρχική θέση το ΚΜ βρίσκεται: $x_{CM} = \dfrac{m_K \cdot x_K + x_B \cdot m_B}{m_K + m_B}$

Όταν η γυναίκα κινηθεί στο άλλο σημείο της βάρκας, η βάρκα κινείται και το μέσο της κινείται κατά x.

Λαμβάνοντας το αριστερό άκρο της βάρκας για τη θέση x=0, αρχικά η γυναίκα έχει $x_K = 1m$ και $x_B = \frac{\ell}{2} = 2.5m$.

Μετά την κίνηση η γυναίκα βρίσκεται στη θέση x'_K και το μέσο της βάρκας στη θέση x'_B.
Η θέση όμως της γυναίκας είναι 1m αριστερά του δεξιού άκρου της βάρκας και δεξιά κατά 1.5m από το μέσο της βάρκας.
Δηλαδή $x'_K = x'_B + 1.5$

Το ΚΜ θα είναι: $x'_{CM} = \frac{m_K x'_K + m_B x'_B}{m_K + m_B} = \frac{m_K (x'_B + 1.5) + m_B x'_B}{m_K + m_B}$

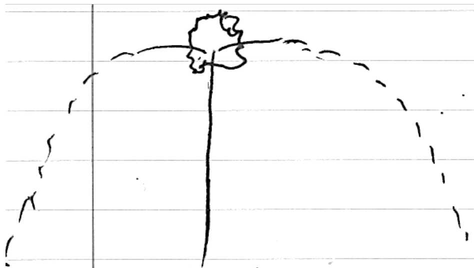
Αλλά $x'_{CM} = x_{CM} \Rightarrow m_K x_K + m_B x_B = m_K (x'_B + 1.5) + m_B x'_B \Rightarrow$

$\Rightarrow 45 \cdot 1 + 60 \cdot 2.5 = (45 + 60) x'_B + 45 \cdot 1.5 \Rightarrow x'_B = \frac{127.5}{105} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x'_B = 1.21m.}$ Επομένως η βάρκα κινήθηκε κατά:

$x = x'_B - x_B = 1.21 - 2.5 \Rightarrow x = -1.29m$ στα αριστερά.

2. Ένα πυροτέχνημα βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του, $80m$ από το έδαφος, εκρήγνυται σε δυο τμήματα, ένα με μάζα $1.40kg$ και ένα άλλο με μάζα $0.28kg$. Κατά την έκρηξη $860J$ χημικής ενέργειας μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια των δυο θραυσμάτων. (α) Ποιά είναι η ταχύτητα των θραυσμάτων ακριβώς μετά την έκρηξη. (β) Παρατηρείται ότι τα δυο θραύσματα φθάνουν ταυτόχρονα στο έδαφος. Ποιά είναι η απόσταση των σημείων που χτυπούν στο έδαφος; Υποθέστε ότι το έδαφος είναι επίπεδο και αγνοήστε την αντίσταση του αέρα.



Το βλήμα κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω και τα θραύσματά του κάνουν ανάλογα κινήσεις βλημάτων. Κατά την έκρηξη το σύστημα είναι απομονωμένο και επομένως έχουμε διατήρηση ενέργειας και ορμής.

Η σημαντική πληροφορία που μας δίνει η άσκηση είναι σχετικά με το χρόνο πτώσης των θραυσμάτων. Αφού τα θραύσματα φθάναν ταυτόχρονα στο έδαφος σημαίνει ότι θα πρέπει το μέγιστο ύψος της κίνησής τους πρέπει να είναι ίδιο.
Επειδή το αρχικό βλήμα εκρήγνυται στο μέγιστο ύψος, η ταχύτητά του είναι μηδέν και επομένως δεν υπάρχει ορμή στην y-διεύθυνση όπως και στη x-διεύθυνση μια και η κίνησή του είναι κατακόρυφη.
Για το λόγο αυτό και για να ικανοποιηθεί η συνθήκη της ταυτόχρονης προσγείωσης, τα 2 θραύσματα θα πρέπει να εκτελούν οριζόντια βολή, οπότε πέφτουν από το ίδιο ύψος, και οι 2 ταχύτητες είναι αντίθετες.

$$m_1 = 1.4kgr \quad m_2 = 0.28kgr$$

$$\Sigma \vec{p}_x = 0 \Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0 \Rightarrow P_1 - P_2 = 0 \Rightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2 \quad (1)$$

Από ενέργεια: $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 860\,J \quad (2)$

Από ενέργεια: $\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = 860J$ (2)

Αντικαθιστούμε από την (1) $\Rightarrow v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1$ στη (2) οπότε:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\cancel{m_2}\frac{m_1^2}{m_2^{\cancel{2}}} v_1^2 = \frac{1}{2}v_1^2\left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right) = 860J \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1^2 = \frac{1720}{m_1(1+m_1/m_2)} = \frac{1720}{1.4(1+\frac{1.4}{0.28})} \Rightarrow \boxed{v_1 = 14.3\frac{m}{s}}$$

Από την (1) $\Rightarrow v_2 = \frac{1.4}{0.28} 14.3 \Rightarrow \boxed{v_2 = 71.5m/s}$

(β) Βρίσκουμε το χρόνο για να φθάσουν τα θραύσματα στο έδαφος: $(v_y = 0m/s)$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 80}{9.8}} \Rightarrow \boxed{t = 4.04\ sec}$$

Κατά το χρόνο αυτό τα θραύσματα κινούνται οριζόντια μια απόσταση:

$$x_1 = v_1 \cdot t = 14.3 \cdot 4.04 \Rightarrow \boxed{x_1 = 57.8m}$$

$$x_2 = v_2 \cdot t = 71.5 \cdot 4.04 \Rightarrow \boxed{x_2 = 289.m}$$

Αφού κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις η απόστασή τους θα είναι:

$$x = x_1 + x_2 = 57.8 + 289 \Rightarrow \boxed{x = 346.8m}$$

3. Ένα βλήμα μάζας 12.0*kg* εκτοξεύεται με γωνία 55^o πάνω από την οριζόντια διεύθυνση με αρχική ταχύτητα 150*m/s*. Όταν βρίσκεται στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του το βλήμα εκρήγνυται σε 2 θραύσματα, το ένα με μάζα 3 φορές μεγαλύτερη του άλλου. Τα δυο θραύσματα φθάνουν στο έδαφος ταυτόχρονα. Αγνοήστε την αντίσταση του αέρα. Αν το βαρύτερο θραύσμα χτυπά στο έδαφος στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε το βλήμα, σε ποιό σημείο θα πέσει το ελαφρύτερο θραύσμα και πόση ενέργεια ελευθερώθηκε κατά την έκρηξη;

Στο σημείο στο οποίο εκρήγνυται το βλήμα (μέγιστο ύψος) έχει ταχύτητα μόνο στη x-διεύθυνση.
Τα δυό θραύσματα φθάνουν στο έδαφος ταυτόχρονα. Οπότε πρέπει να έχουν το ίδιο μέγιστο ύψος τροχιάς
Από τη στιγμή που δεν υπάρχει αρχική ορμή στη y-διεύθυνση, τα 2 θραύσματα δεν μπορούν να έχουν y-συνιστώσα ταχύτητας γιατί τότε οι δύο συνιστώσες θα έπρεπε να είναι σε αντίθετη διεύθυνση και σαν αποτέλεσμα το ένα θραύσμα θα έφθανε στο έδαφος πιο γρήγορα από το άλλο.
Επομένως τα δύο θραύσματα κινούνται οριζόντια (αμέσως μετά την έκρηξη) και σε αντίθετες κατευθύνσεις.

Εφαρμόζουμε διατήρηση ορμής θα έχουμε:

$$m_\beta \vec{v}_\beta = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

όπου $v_\beta = v_{0x} = v_0 \cos 55^o \Rightarrow v_\beta = 86 m/s$.

$m_1 = 3m_2 \Rightarrow m_1 + m_2 = m_\beta \Rightarrow 4m_2 = m_\beta \Rightarrow m_2 = \frac{12}{4} = 3 kgr$

$\Rightarrow m_1 = 9 kgr$

$\Rightarrow \boxed{12 \cdot 86 = -9 \cdot v_1 + 3 v_2}$ (1) (το βαρύ βλήμα κινείται προς την αρχή άρα έχει αρνητική ταχύτητα)

Ξέρουμε ότι το βαρύ βλήμα προσγειώνεται στο σημείο εκτόξευσης. Αυτό σημαίνει ότι κινείται στη x-διεύθυνση απόσταση ίση με το μισό του βεληνεκούς του αρχικού βλήματος (η έκρηξη γίνεται στο μέγιστο ύψος, που γίνεται στο μέσο της x-κίνησης).

Επομένως:

$$x_1 = \frac{R_B}{2} = \frac{v_0^2 \sin(110^\circ)}{2g} \Rightarrow \boxed{x_1 = 1078\,m.}$$

Η ταχύτητα του βαρέος βλήματος θα ισούται (μετά την έκρηξη) με την ταχύτητα του αρχικού βλήματος στη x-διεύθυνση αφού καλύπτουν την ίδια οριζόντια απόσταση, στο ίδιο χρόνο.

Επομένως $v_1 = -v_B^x \Rightarrow \boxed{v_1 = -86\,m/s}$

Από την (1) θα έχουμε:

$$12 \cdot 86 = -9 \cdot 86 + 3v_2 \Rightarrow \cancel{3}v_2 = \overset{7}{\cancel{21}} \cdot 86 \Rightarrow \boxed{v_2 = 602\,m/s}$$

Το βαρύ θραύσμα κινείται $x_1 = v_1 t \Rightarrow t = \frac{x_1}{v_1}$

Τον ίδιο χρόνο κινείται και το 2ο θραύσμα. Επομένως η απόσταση που διανύει θα είναι:

$$x_2 = v_2 \cdot t = v_2 \frac{x_1}{v_1} \Rightarrow x_2 = \frac{602}{86} \cdot 1078 \Rightarrow$$

$\boxed{x_2 = 7546\,m}$ από το σημείο έκρηξης.

Η απόσταση των 2 θραυσμάτων θα είναι:

$$x = x_1 + x_2 = 1078 + 7546 \Rightarrow \boxed{x = 8624\,m}$$

(β) Η ενέργεια που εκλύεται κατά την έκρηξη θα είναι:

$$W = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}m_{βλ} v_{0x\,βλ}^2 = \frac{1}{2}9\cdot 86^2 + \frac{1}{2}3\cdot 602^2 - \frac{1}{2}12\cdot 86^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \frac{3}{2}\left(602^2 - 86^2\right) \Rightarrow \boxed{W = 5.33\times 10^5 J}$$

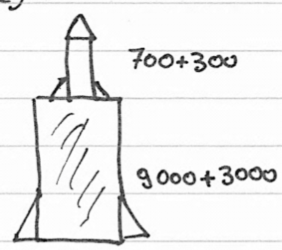
Να σημειώσουμε ότι την απόσταση των 2 θραυσμάτων θα μπορούσαμε να τη βρούμε, θεωρώντας το ΚΜ των 2 θραυσμάτων, το οποίο είναι το αρχικό βλήμα.
Όταν τα βλήματα φθάνουν στο έδαφος, το ΚΜ θα βρίσκεται στο σημείο το οποίο θα έφθανε το αρχικό βλήμα. Άρα στο μέγιστο βεληνεκές.
Θεωρώντας το σημείο εκτόξευσης σαν αρχή των αξόνων, θα έχουμε:

$$x_{CM} = R = \frac{x_1\cdot m_1 + x_2 m_2}{m_1+m_2} = \frac{0\cdot 9 + x_2\cancel{3}}{\cancel{12}4} = \frac{x_2}{4} \Rightarrow x_2 = 4\cdot R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = 4\cdot 2156 = \underline{\underline{8624\,m}}$$

4. Υποθέστε ότι έχετε έναν πύραυλο δύο σταδίων. Το πρώτο στάδιο έχει συνολική μάζα 12,000*kg* από τα οποία 9,000*kg* είναι καύσιμο. Η συνολική μάζα του δευτέρου σταδίου είναι 1000*kg*, από τα οποία 700*kg* είναι καύσιμο. Υποθέστε ότι η σχετική ταχύτητα εκτόξευσης των αεριών καύσης είναι σταθερή και αγνοήστε οποιαδήποτε επιρροή από την βαρύτητα. (α) Υποθέστε ότι όλο το καύσιμο που κουβαλά ο πύραυλος χρησιμοποιείται σε ένα πύραυλο ενός μόνο σταδίου αλλά με την ίδια συνολική μάζα 13,000*kg*. Συναρτήσει της ταχύτητας εκτόξευσης $V_{εκτ.}$, ποια είναι η ταχύτητα του πυραύλου ο οποίος ξεκινά από την ηρεμία όταν έχει καταναλώσει όλα τα καύσιμα; (β) Για τον πύραυλο δύο σταδίων, ποια είναι η ταχύτητά του όταν έχει καταναλώσει τα καύσιμα του πρώτου σταδίου, όταν το πρώτο στάδιο μεταφέρει το δεύτερο στάδιο στο σημείο αυτό; Αυτή η ταχύτητα γίνεται κατόπιν αρχική ταχύτητα για το δεύτερο στάδιο. (γ) Ποια είναι η τελική ταχύτητα του δευτέρου σταδίου; (δ) Ποια τιμή $V_{εκτ.}$ απαιτείται ώστε να δοθεί στο δεύτερο στάδιο του πυραύλου ταχύτητα 7000*km/s*;

α)



$$V_f = V_{εκ} \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) = V_{εκ} \ln\left(\frac{13{,}000}{3{,}300}\right) = \boxed{1.37 V_{εκ}}$$

$$m_f = 13{,}000 - 9{,}000 - 700 = 3{,}300$$

β) Στην περίπτωση αυτή $m_f = 13{,}000 - 9{,}000 = 4{,}000$ οπότε

$$V_f = V_{εκ} \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) = V_{εκ} \ln\left(\frac{13{,}000}{4{,}000}\right) = 1.18 V_{εκ}$$

γ) Το τμήμα μάζας 3,000 kg του πρώτου σταδίου έχει αποκολληθεί.

Σχετικά με το σύστημα αναφοράς που κινείται με ταχύτητα $1.18V_{εκτ}$ η τελική ταχύτητα του δεύτερου σταδίου θα είναι:

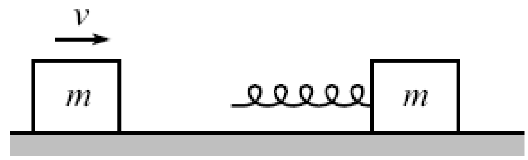
$$V_f' = V_{εκ} \ln\left(\frac{1000}{300}\right) = 1.20 V_{εκτ}$$

Επομένως η σχετική ταχύτητα του δεύτερου σταδίου ως προς το έδαφος θα είναι:

$$V_f = V_f' + V_{1f} = 1.18 V_{εκτ} + 1.20 V_{εκτ} \Rightarrow \boxed{V_f = 2.38 V_{εκτ}}$$

δ) $2.38\, V_{εκτ} = 7\ km/s \Rightarrow \boxed{V_{εκτ} = 2.94\ km/s}$

5. Ένα τούβλο μάζας *m* γλιστρά με ταχύτητα υ πάνω σε λείο δάπεδο προς κάποιο άλλο τούβλο μάζας m. Ένα ελατήριο αμελητέας μάζας και σταθεράς ελατηρίου *k* είναι εξαρτημένο στο πίσω τμήμα του δεύτερου τούβλου, όπως στο σχήμα. Ποια είναι η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου; *<u>Υπόδειξη:</u>* Συγκρίνετε τις ταχύτητες των τούβλων στη μέγιστη συσπείρωση.



Στη μέγιστη συσπείρωση, οι ταχύτητες είναι ίσες, διαφορετικά η απόσταση των δύο τούβλων θα ελαττώνονταν, ή θα μεγάλωνε από κάποια μικρότερη τιμή, αφού το ελατήριο θα προσπαθούσε να ανοίξει.

Έστω λοιπόν ότι η κοινή αυτή ταχύτητα είναι u.

Από διατήρηση της ορμής θα έχουμε: $mV = (2m)u$ (1)

Απο διατήρηση της ενέργειας : $\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}(2m)u^2 + \frac{1}{2}kx^2$ (2)

Απο την (1) παίρνουμε: $u = \frac{V}{2}$. Αντικαθιστώντας στη (2) παίρνουμε:

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}V^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}(\cancel{2}\cancel{m})\frac{V^2}{\cancel{4}\,2} + \cancel{\tfrac{1}{2}}kx^2 \Rightarrow kx^2 = m\left(V^2 - \frac{V^2}{2}\right) = \frac{mV^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = V\sqrt{\frac{m}{2k}}}$$

<u>ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΗ ΛΥΣΗ</u>

Θα μπορούσαμε να θεωρήσαμε το σύστημα αναφοράς στο οποίο τα 2 τούβλα κινούνται το ένα ως προς το άλλο με ταχύτητες $\frac{V}{2}$

Απο διατήρηση της ενέργειας θα πάρουμε:

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}m\left(\frac{V}{2}\right)^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}m\left(\frac{V}{2}\right)^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}kx^2 \Rightarrow \cancel{2}\,\frac{V^2 m}{\cancel{4}\,2} = kx^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = v\sqrt{\frac{m}{2k}}}$$

6. Μια σακούλα με καραμέλες αδειάζει μέσα στο καλάθι μιας ζυγαριάς ελατηρίου η οποία αρχικά είχε μηδενική ένδειξη. Κάθε καραμέλα ζυγίζει 2*gr* και πέφτει στη ζυγαριά από ύψος 1.2m. Οι καραμέλες πέφτουν στη ζυγαριά με ρυθμό 6 καραμέλες/s. Ποια είναι η ένδειξη της ζυγαριάς μετά από 10sec αν όλες οι καραμέλες συγκρούονται με την ζυγαριά τελείως πλαστικά;

Κάθε κομμάτι καραμέλας έχει μάζα m_0. Οι καραμέλες έχουν αρχικά δυναμική ενέργεια η οποία μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια καθώς πέφτουν προς τη ζυγαριά. Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας:

$$E_{βαρ} = E_{κιν} \Rightarrow m_0 g h = \frac{1}{2} m_0 v_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Αυτή είναι η ταχύτητα με την οποία οι καραμέλες χτυπούν στο καλάθι της ζυγαριάς. Καθώς χτυπούν χάνουν όλη την ταχύτητά τους και η ορμή τους γίνεται μηδέν.

Επομένως υπάρχει μια μεταβολή ορμής $\Delta p = 0 - m_0 v = + m_0\sqrt{2gh}$
(θεωρώντας θετική τη φορά προς τα πάνω). $\hookrightarrow (-\sqrt{2gh})$

Αυτή η μεταβολή της ορμής προκαλείται από μια δύναμη F

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = v\frac{\Delta m}{\Delta t}$$

Οι καραμέλες χτυπούν στο καλάθι της ζυγαριάς με μια σταθερή ροή. Επομένως:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta m \cdot g}{g \cdot t} = \frac{W}{gt}$$ είναι η μάζα των καραμελών που χτυπούν τη ζυγαριά /sec

Επομένως η δύναμη θα είναι: $F = v\frac{\Delta m}{\Delta t} = \sqrt{2gh}\frac{\Delta m}{\Delta t} \Rightarrow F = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1.2} \cdot \frac{6}{sec} \cdot 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow F = 58.8 \cdot 10^{-3}\ Nt$$

Αυτή η δύναμη είναι σταθερή και εξαρτάται μόνο από το ρυθμό πτώσης. Μετά από 10sec. Η ένδειξη της ζυγαριάς θα είναι το βάρος ~~των~~ καραμελών στη ζυγαριά + τη σταθερή δύναμη F. Δηλαδή

$$F_{ζυγ} = F + F_{βαρ} = (58.8 + 10 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10 m/sec^2) \cdot 10^{-3} \Rightarrow F_{ζυγ} = 1258.5 \cdot 10^{-3} = \underline{1.26 Nt}$$

7. Δίσκος ακτίνας *R* έχει μια κυκλική τρύπα ακτίνας *R*/4. Το κέντρο της τρύπας απέχει *R*/2 από το κέντρο του δίσκου. Η μάζα *m* του δίσκου είναι κατανεμημένη ομοιογενώς. Ποια η θέση του κέντρου μάζας του δίσκου.

Η συνολική μάζα του δίσκου θα είναι η μάζα του δίσκου σαν να μην υπήρχε η τρύπα μείον τη μάζα της τρύπας:

$$M = M_{δισκ} - m_{τρυπ} = A_{δισκ} * ρ - A_{τρυπ} * ρ = (A_{δισκ} - A_{τρυπ}) * ρ = \left(πR^2 - \frac{πR^2}{16}\right)ρ$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \frac{15}{16}πR^2 ρ} \Rightarrow \boxed{ρ = \frac{16}{15}\frac{M}{πR^2}}$$

Η μάζα της τρύπας θα είναι: $m_{τρ} = ρ * A_{τρυπ} = \frac{16}{15}\frac{M}{\cancel{πR^2}}\frac{\cancel{πR^2}}{\cancel{16}} \Rightarrow \boxed{m_{τρυπ} = \frac{M}{15}}$

Θεωρούμε το διάνυσμα θέσης του ολόκληρου δίσκου σαν το κέντρο του δίσκου να συμπίπτει με την αρχή του συστήματος συντεταγμένων:

$$\vec{r}^{\,CM}_{δισ} = (0\hat{i} + 0\hat{j})$$

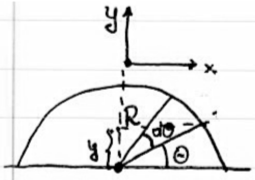
Το ΚΜ της τρύπας θα έχει διάνυσμα θέσης $\vec{r}^{\,CM}_{τρυπ} = -\frac{R}{4}\hat{i}$

Το διάνυσμα θέσης του ΚΜ του δίσκου με την τρύπα θα είναι σε:

$$x_{CM} = \frac{\vec{x}^{\,CM}_{δ} \cdot M_δ + \vec{x}^{\,CM}_{τρυπ} \cdot (-m_{τρυπ})}{M_{δισκ} + (-m_{τρυπ})} = \frac{0 - \left(-\frac{R}{2}\right)\frac{M}{15}}{\frac{16M}{15\cancel{πR^2}}\cancel{πR^2} - \frac{M}{15}} = \frac{\cancel{M}R/30}{\cancel{15/15\,M}} \Rightarrow \boxed{x_{CM} = \frac{R}{30}}$$

$$y_{CM} = \frac{y^{CM}_{δ} \cdot M_δ + y^{CM}_{τρυπ} * (-m_{τρυπ})}{M_{δισκ} + (-m_{τρυπ})} = \frac{0 - 0}{m} \Rightarrow \boxed{y_{CM} = 0}$$

8. Φανταστείτε ένα σύρμα το οποίο λυγίζετε ώστε να σχηματίζει ημικύκλιο ακτίνας *R*. Βρείτε τη θέση του κέντρου μάζας του συρμάτινου αυτού ημικυκλίου.



Λόγω συμμετρίας $x_{CM} = \emptyset$ (Θεωρούμε την αρχή του συστήματος συντεταγμένων στο κέντρο του συρμάτινου ημικυκλίου).

Ξέρουμε ότι για συνεχείς κατανομές μάζας: $r = \frac{1}{M}\int r\,dm$

Επομένως $\boxed{y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm}$ (1)

Έστω ότι η πυκνότητα του σύρματος είναι σ

Η θέση y μπορεί να γραφεί συναρτήσει της γωνίας Θ σαν: $\boxed{y = R\sin\Theta}$ (2)

Ενώ η πυκνότητα $\sigma = \frac{M}{L}$ όπου L το μήκος του συρμάτινου ημικυκλίου. Το μήκος του τόξου αυτού είναι όμως RΘ όπου Θ σε ακτίνια

Επομένως η στοιχειώδης μάζα dm μπορεί να γραφεί: $dm = \sigma\, dl$

όπου dl το στοιχειώδες μήκος τόξου κύκλου: $dl = R\,d\Theta$ $\Rightarrow$

$\boxed{dm = \sigma R\, d\Theta}$ (3)

Η ολική μάζα είναι $\boxed{M = \sigma R\pi}$ (4) (όπου π είναι η γωνία Θ για ημικύκλιο)

Επομένως αντικαθιστώντας στην (1) τις (2), (3), (4) έχουμε:

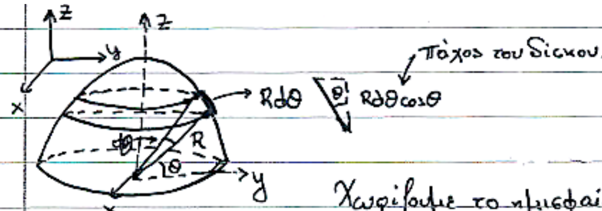
$$y_{CM} = \frac{1}{\pi \cancel{R}\cancel{\sigma}}\int_0^\pi (\cancel{R}\sin\Theta)(\cancel{\sigma}R\,d\Theta) = \frac{R}{\pi}\int_0^\pi \sin\Theta\, d\Theta = \frac{R}{\pi}(-\cos\Theta)\Big|_0^\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{CM} = \frac{R}{\pi}\left(-((-1)-1)\right) \Rightarrow \boxed{y_{CM} = \frac{2R}{\pi}}$$

που ουσιαστικά είναι υψηλότερα από το μέσο της κατακόρυφης ακτίνας.

Σημειωτέον ότι η ολοκλήρωση έχει όρια 0÷π μια και έχουμε ημικύκλιο και επομένως η γωνία Θ καλύπτει αυτές τις γωνίες.

9. Να βρεθεί το κέντρο μάζας ενός συμπαγούς ημισφαιρίου ακτίνας R και ομοιόμορφης πυκνότητας μάζας.



Χωρίζουμε το ημισφαίριο σε οριζόντιες κυκλικές φέτες (δίσκους) (1) συναρτήσει της γωνίας Θ, η ακτίνα κάθε οριζόντιας "φέτας" είναι $R\cos\Theta = r$. Προφανώς η ακτίνα αυτή μεταβάλλεται (ελαττώνεται) καθώς η γωνία Θ μεγαλώνει μια και ανεβαίνουμε προς το υψηλότερο σημείο του ημισφαιρίου.

Το πάχος κάθε φέτας είναι $\boxed{dy = Rd\Theta\cos\Theta}$ (2) (δείτε το σχήμα). Το πάχος είναι η κάθετη απόσταση μεταξύ των δύο οριζόντιων κύκλων που ορίζουν τη φέτα. Πάνω στο ημισφαίριο η απόσταση των δίσκων είναι ουσιαστικά το μήκος του τόξου κύκλου που ενώνει τα άκρα των 2 οριζόντιων κύκλων ($Rd\Theta$) αλλά δεν είναι το πάχος της "φέτας".

Επομένως η στοιχειώδης μάζα θα είναι: $dm = \rho \cdot dV$ όπου dV ο στοιχειώδης όγκος και ρ: η πυκνότητας μάζας του ημισφαιρίου.

Αλλά $dV = A \cdot dy = (\pi r^2) \cdot Rd\Theta\cos\Theta$ όπου dy είναι το πάχος (2) και A το εμβαδό του κύκλου που ορίζει τη βάση της "φέτας" (1)

$$\boxed{dm = \rho\, \pi (R\cos\Theta)^2 R\cos\Theta\, d\Theta}$$

Επομένως θα έχουμε: $Z_{cm} = \frac{1}{M}\int z\,dm = \frac{1}{M}\int_0^{\pi/2} \underbrace{(R\sin\Theta)}_{z}(\pi R^2\cos^2\Theta)\rho R d\Theta\cos\Theta$

$$\Rightarrow Z_{cM} = \frac{1}{M}\int_0^{\pi/2} \pi R^4 \rho \cos^3\Theta \sin\Theta\, d\Theta = -\frac{\pi R^4 \rho}{M}\int_1^0 \cos^3\Theta\, d(\cos\Theta) = -\frac{\pi R^4 \rho}{4M}\left(\cos^4\Theta\right)\Big|_1^0 \Rightarrow$$

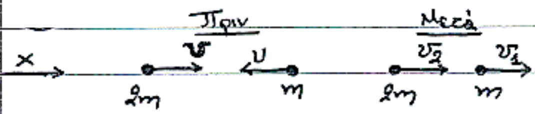
$$\Rightarrow Z_{cM} = -\frac{\pi R^4 \rho}{4M}(0-1) \Rightarrow \boxed{Z = \frac{\pi \rho R^4}{4M}}$$

Αλλά η συνολική μάζα είναι $M = \rho V = \rho\left(\frac{2}{3}\pi R^3\right)$

$$\Rightarrow \boxed{Z_{cM} = \frac{3}{8}R}$$

Λόγω συμμετρίας $x_{cM} = y_{cM} = \phi$

10. Θεωρήστε την ακόλουθη κρούση σε 1-διάσταση. Μια μάζα $2m$ κινείται προς τα δεξιά και μια μάζα m κινείται προς τα αριστερά και οι δυο με ταχύτητα υ. Συγκρούονται ελαστικά. Βρείτε την τελική τους ταχύτητα ως προς το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Λύστε το πρόβλημα αυτό (α) Δουλεύοντας στο σύστημα του εργαστηρίου και (β) στο σύστημα του κέντρου μάζας.



Υποθέτουμε ότι οι ταχύτητές τους μετά την κρούση είναι v_1 και v_2 για τις μάζες m και $2m$ αντίστοιχα.

Από το πιο πάνω σχήμα, θεωρώ ότι η μάζα $2m$ έχει ταχύτητα προς τη θετική φορά

Από διατήρηση της ορμής έχουμε: $p_i^1 + p_i^2 = p_f^1 + p_f^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\cancel{m}\cdot v - \cancel{m}v = 2\cancel{m}v_2 + \cancel{m}v_1 \Rightarrow \boxed{v = 2v_2 + v_1} \quad (1)$$

Από διατήρηση της ενέργειας έχουμε:

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}2\cancel{m}v^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}v^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}2\cancel{m}v_2^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}v_1^2 \Rightarrow 2v^2 + v^2 = 2v_2^2 + v_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{3v^2 = 2v_2^2 + v_1^2} \quad (2)$$

Σύμφωνα με τη σχέση για τη σχετική ταχύτητα 2 μαζών πριν και μετά την κρούση (ισχύει μόνο για 1-D κρούσεις, όπως δείξαμε...)

$$\vec{v}_1^{\,i} - \vec{v}_2^{\,i} = \vec{v}_2^{\,f} - \vec{v}_1^{\,f} \Rightarrow (-v) - v = v_2 - v_1 \Rightarrow -2v = v_2 - v_1 \Rightarrow$$

$$\boxed{2v = v_1 - v_2} \quad (3)$$

Από (1) και (3) έχουμε αφαιρώντας: $v = (v_1 - v_2) - (2v_2 + v_1) = -3v_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{v_2 = -\frac{v}{3}}$$

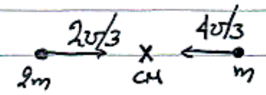
Αντικατάσταση στην (3) δίνει: $v_1 = 2v + v_2 = 2v - \frac{v}{3} \Rightarrow \boxed{v_1 = \frac{5}{3}v}$

(β) Το κέντρο μάζας κινείται με ταχύτητα :

$$V_{CM} = \frac{(2m)v + m(-v)}{3m} \Rightarrow V_{CM} = \frac{v}{3}$$

Θεωρώντας το σύστημα του CM σα σύστημα αναφοράς, οι αρχικές ταχύτητες του συστήματος γράφονται :

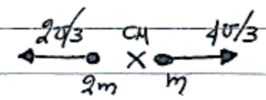
$$v - v_{CM} = v - \frac{v}{3} = \frac{2v}{3} \quad \text{και} \quad -v - v_{CM} = -(v + v_{CM}) = -\frac{4v}{3}$$



(πριν τη σύγκρουση)

Στο κέντρο μάζας όμως η αρχική ορμή είναι μηδέν πάντοτε, ενώ η τελική ορμή πρέπει να είναι επίσης μηδέν λόγω διατήρησης της ορμής

Δηλαδή μετά την κρούση τα 2 σώματα αντιστρέφουν τη φορά των ταχυτήτων τους



(μετά τη σύγκρουση)

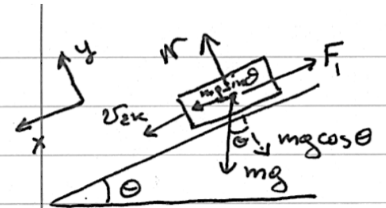
Επομένως οι ταχύτητες των 2 σωμάτων στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου θα είναι : (προσθέτω στις ταχύτητες των 2 μαζών στο CM την ταχύτητα του CM ως προς το σύστημα εργαστηρίου).

$$v_2 = -\frac{2v}{3} + v_{CM} = -\frac{2v}{3} + \frac{v}{3} \Rightarrow \boxed{v_2 = \frac{v}{3}}$$

$$v_1 = v_1^{CM} + v_{CM} = \frac{4v}{3} + \frac{v}{3} \Rightarrow \boxed{v_1 = \frac{5v}{3}}$$

όπως βρήκαμε και στο (α) μέλος

11. Δοχείο γεμάτο με νερό ξεκινά από την ηρεμία και ολισθαίνει χωρίς τριβές κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης θ. Από τρύπα στο δοχείο, εκτοξεύεται νερό κατά τη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου με σταθερή ταχύτητα υ_{ex} ως προς το δοχείο και με σταθερό ρυθμό $dm/dt = -a$, όπου $a > 0$. Η μάζα του δοχείου όταν είναι άδειο είναι $m_{0\Delta}$ και η αρχική μάζα του νερού είναι m_{0N}. Αναφέρετε και σημειώστε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο δοχείο με το νερό και βρείτε την ταχύτητα του δοχείου όταν θα έχει αδειάσει όλο το νερό, αν $\frac{m_{0\Delta}}{a} \geq \frac{\upsilon_{ex}}{g\sin\theta}$.



$\Sigma F = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow$

$\Rightarrow mg\sin\theta - F_1 = m\frac{dv}{dt}$ (1)

Η F_1 είναι η ώθηση που δέχεται το σώμα λόγω της εκτόξευσης του νερού και μεταβολής της μάζας του δοχείου. (Διατήρηση ορμής)

$F_1 = -v_{\text{εκτ}}\frac{dm}{dt}$ (2) Επομένως από (1) ∧ (2) ⇒

$\cancel{m}g\sin\theta - \frac{v_{\text{εκτ}}}{m}\frac{dm}{dt} = \cancel{m}\frac{dv}{dt} \Rightarrow g\sin\theta - \frac{v_{\text{εκ}}}{m}\frac{dm}{dt} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow$

$\Rightarrow g\sin\theta\, dt - v_{\text{εκ}}\frac{dm}{m} = dv \Rightarrow \int_0^v dv = \int_0^t g\sin\theta\, dt - \int_{m_\Delta + m_{\text{νερ}}}^{m_\Delta} v_{\text{εκ}}\frac{dm}{m} \Rightarrow$

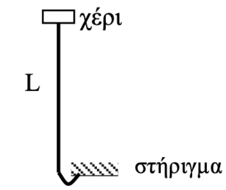
$\Rightarrow v = g\sin\theta\cdot t - v_{\text{εκ}}\ln\frac{m_\Delta}{m_\Delta + m_{\text{νερ}}}$ (3)

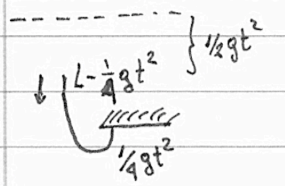
Θα πρέπει να βρούμε το χρόνο ώστε να αδειάσει το δοχείο:

$a = -\frac{dm}{dt} \Rightarrow a\,dt = -dm \Rightarrow \int_0^t a\,dt = -\int_{m_{\text{νερ}}}^{0} dm \Rightarrow at = m_{\text{νερ}} \Rightarrow \boxed{t = \frac{m_{\text{νερ}}}{a}}$ (4)

Αντικατάσταση στη (3) από (4) ⇒ $\boxed{v = g\sin\theta\cdot\frac{m_{\text{νερ}}}{a} - v_{\text{εκ}}\ln\frac{m_\Delta}{m_\Delta + m_{\text{νερ}}}}$

12. Ένα σχοινί μάζας M και μήκους L κρατιέται όπως στο διπλανό σχήμα, με το ένα άκρο του στερεωμένο σε κάποιο στήριγμα. Υποθέστε ότι μόνο ένα αμελητέο τμήμα του σχοινιού ξεκινά κάτω L από το στήριγμα. Το σχοινί αφήνεται ελεύθερο. Βρείτε την δύναμη που το στήριγμα εξασκεί στο σχοινί συναρτήσει του χρόνου.





Το αριστερό μέρος του σχοινιού κάνει ελεύθερη πτώση. Επομένως κινείται με ταχύτητα gt και έχει πέσει ένα ύψος $\frac{1}{2}gt^2$.

Κάτω από το στήριγμα το σχοινί διπλώνεται κάνει κοιλιά και επομένως το μήκος είναι $\frac{1}{4}gt^2$

Το τμήμα κάτω από το στήριγμα κρέμεται σε ηρεμία ενώ ένα τμήμα σχοινιού $L-\frac{1}{4}gt^2$ πέφτει με ταχύτητα gt.

Λαμβάνοντας τη διεύθυνση προς τα πάνω σα τη θετική φορά, η ορμή ολόκληρου του σχοινιού θα είναι:

$$P = \sigma\left(L-\frac{1}{4}gt^2\right)(-gt) \quad (1) \quad \text{όπου} \quad \sigma = \frac{M}{L} = \text{μάζα/μονάδα μήκους}$$

Ας υποθέσουμε ότι η δύναμη από το στήριγμα είναι F. Επομένως η ολική δύναμη σε όλο το σχοινί είναι $F_{Tot} = F - Mg = F - \sigma L g \Rightarrow F_{TOT} = \frac{dP}{dt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_{TOT} = F - \sigma L g = \frac{dP}{dt} \overset{(1)}{\Longrightarrow} F - \sigma L g = \sigma \frac{d}{dt}\left[\left(L-\frac{1}{4}gt^2\right)(-gt)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F - \cancel{\sigma L g} = \sigma \frac{d}{dt}\left(-Lgt + \frac{1}{4}g^2t^3\right) = -\cancel{\sigma L g} + \frac{3\sigma g^2}{4}t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F = \frac{3\sigma g^2 t^2}{4}}$$

Το αποτέλεσμα ισχύει μέχρι που το πάνω μέρος του σχοινιού έχει πέσει ένα μήκος $2L$ (το χρόνο $t=\sqrt{4L/g}$). Μετά το χρόνο αυτό, η δύναμη F είναι ίση με Mg

Σημειώνω ότι ακριβώς πριν την χρονική στιγμή $t=\sqrt{4L/g}$, η δύναμη F είναι ίση με $F=3Mg$. Μετά από τη στιγμή t, πέφτει απότομα στην τιμή $F=Mg$.

Η δύναμη F είναι μεγαλύτερη από το βάρος του σχοινιού που κρέμεται: $\left(\frac{M}{L}\frac{1}{4}g^2t^2\right)$, επειδή η F πρέπει επίσης να προκαλέσει την αλλαγή στην ορμή των ατόμων του σχοινιού τα οποία απότομα σταματούν από την αρχική τους πτώση.

ΔΕΥΤΕΡΗ ΛΥΣΗ

Η δύναμη από το στήριγμα είναι υπεύθυνη για να κάνει δύο πράγματα (α) να κρατήσει το τμήμα του σχοινιού που κρέμεται ακίνητο και (β) να αλλάξει την ορμή των ατόμων τα οποία έρχονται σε ηρεμία από την αρχική ελεύθερη πτώση τους.

Από την πρώτη λύση είδαμε, ότι το τμήμα του σχοινιού που είναι ακίνητο είναι $\frac{1}{4}gt^2$ και επομένως η δύναμη που το συγκρατεί είναι: $\boxed{F_1 = \frac{\sigma}{4} g^2 t^2}$ $\sigma = \frac{M}{L}$

Η δύναμη που προκαλεί την αλλαγή στην ορμή των ατόμων τώρα:

Τη στιγμή t, η ταχύτητα του σχοινιού είναι gt.

Σε μιά πολύ μικρή χρονική στιγμή dt, το πάνω μέρος του σχοινιού πέφτει μιά απόσταση $(gt)dt$

Εξαιτίας του φαινομένου της "κοιλιάς" του σχοινιού, μόνο το μισό από το μήκος αυτό έρχεται σε κατάσταση ηρεμίας στο χρόνο dt.

Επομένως ενα μικρό κομμάτι με μάζα $\frac{1}{2}\sigma(gt)dt$ που κινούνται με ταχύτητα gt έρχεται σε ηρεμία το χρονικό διάστημα dt.

Η ορμή όμως ήταν $\overbrace{-\frac{1}{2}\sigma(gt)dt}^{m} \cdot \overbrace{(gt)}^{v} = -\frac{1}{2}\sigma(gt)^2 dt$ και ξαφνικά

↳ το πρόσημο (−) γιατί κινείται πρός τα κάτω

γίνεται $\emptyset$. Η μεταβολή της ορμής δηλαδή είναι : $dp = \emptyset - \left(-\frac{1}{2}\sigma(gt)^2 dt\right) \Rightarrow$

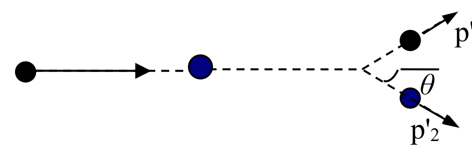
$\Rightarrow dp = \frac{1}{2}\sigma(gt)^2 dt$.

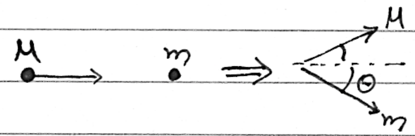
Η δύναμη F_2 που προκαλεί την αλλαγή αυτή είναι : $F_2 = \frac{dp}{dt} \Rightarrow \boxed{F_2 = \frac{1}{2}\sigma(gt)^2}$

Η συνολική δύναμη επομένως θα είναι $F = F_1 + F_2 = \frac{\sigma}{4}g^2t^2 + \frac{1}{2}\sigma g^2 t^2 \Rightarrow$

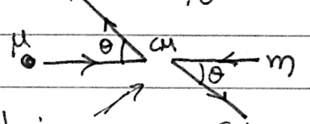
$$\Rightarrow F = \frac{3\sigma}{4} g^2 t^2 \Rightarrow \boxed{F = \frac{3}{4}\frac{M}{L} g^2 t^2}$$

13. Μια μάζα *M* που κινείται στην θετική *x*-διεύθυνση συγκρούεται ελαστικά με μια ακίνητη μάζα *m*. Η σύγκρουση δεν είναι απαραίτητα κεντρική και σαν αποτέλεσμα οι μάζες εξέρχονται της κρούσης με γωνίες όπως φαίνονται στο σχήμα. Υποθέστε ότι θ είναι η γωνία της διεύθυνσης της μάζας *m* μετά την κρούση. Ποια πρέπει να είναι η θ ώστε η μάζα *m* να έχει τη μεγαλύτερη δυνατόν ταχύτητα στην *y*-διεύθυνση; <u>*Υπόδειξη:*</u> Σκεφτείτε πώς θα έμοιαζε η κρούση στο κέντρο μάζας.





Παρατηρούμε ότι από την στιγμή που δεν υπάρχει κίνηση στην y-διεύθυνση αρχικά, τότε η ταχύτητα στην διεύθυνση αυτή θα ναι ίδια και για το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου και για το σύστημα του κέντρου μάζας.

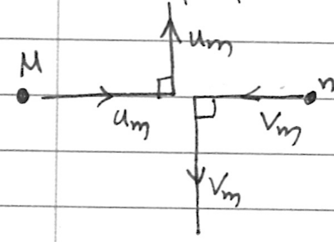


Η σύγκρουση στο CM.

Επομένως μεγιστοποιώντας την V_y στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου είναι το ίδιο σαν να το κάναμε στο σύστημα αναφοράς του CM.

Ξέρουμε ότι στο CM τα σώματα πρέπει να διατηρήσουν την ίδια ταχύτητά τους και να αλλάξουν φορά. Δηλαδή να κινηθούν σε αντίθετες κατευθύνσεις. Αυτός είναι ο μόνος τρόπος για να διατηρήσουν E και $\vec{p}$. (Οι ταχύτητες πρέπει να παραμείνουν στην ίδια αναλογία, που είναι αντιστρόφως ανάλογα των μαζών, ώστε να έχουμε $\vec{P}_{tot} = 0$.) Αλλά οι ταχύτητες δεν μπορούν να αυξηθούν ή ελαττωθούν μαζί και τότε η E δεν διατηρείται)

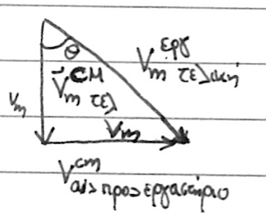
Αν θέλουμε $\vec{V}_m$ να έχει την μεγαλύτερη δυνατή y-συνιστώσα, το καλύτερο που μπορούμε να έχουμε είναι η $\vec{V}_m$ νάναι κατακόρυφη ⇒



Τώρα για να γυρίσουμε στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου θα πρέπει να προσθέσουμε την ταχύτητα του CM. Αλλά αυτό είναι απλά η V_m στην x-διεύθυνση. Αυτό αληθεύει γιατί η μάζα m ήταν αρχικά ακίνητη, στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, και επομένως η ταχύτητα του CM ως προς την m είναι ίση με την ταχύτητα της m ως προς CM και για το λόγο αυτό την ονομάσαμε παραπάνω V_m.

Δηλαδή $\vec{V}^{\,εργ}_{m,\,τελική} = \vec{V}^{\,CM}_{m,\,τελική} + \vec{V}^{\,ως\ προς\ εργαστήριο}_{CM}$ ⇒

$V^{εργ}_{m\,τελ}$ =



Οι 2 πλευρές του τριγώνου είναι ίσες ⇒ $\boxed{\Theta = 45^\circ}$