Για τη συνέχεια σήμερα...

- Συζήτηση ξανά των νόμων διατήρησης
  - Χρησιμοποιώντας τον φορμαλισμό Lagrange
  - Γραμμική ορμή και στροφορμή
  - Σύνδεση μεταξύ συμμετρίας, αναλλοίωτο της Lagrangian, και διατήρηση της γενικευμένης ορμής

Νόμοι διατήρησης

- Έχουμε δει διατήρηση γραμμικής ορμής, στροφορμής και ενέργειας στην Newtonian μηχανική
  - Πως δουλεύουν στην Lagrangian μηχανική
    Πρέπει να 'ναι οι ίδιες
- Ωστόσο θα δούμε μερικές διαφορές και μερικές υποθέσεις
  - Προέρχονται από περιορισμούς και προσεγγίσεις που δεν λάβαμε υπ' όψη

Διατήρηση της ορμής

- Ας μελετήσουμε ένα απλό σύστημα:

Δυναμικό δεν εξαρτάται από ταχύτητα

$$L = T - V = \sum_i \frac{m_i\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right)}{2} - V\left(x_i, y_i, z_i, t\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i = p_{ix}$$ ορμή

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_{ix}$$ Δύναμη

Lagrange: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = const. \Rightarrow p_{ix} = const.$$

Η ορμή p_{ix} διατηρείται αν το V δεν εξαρτάται από το x_i

Πως το γενικεύουμε από δω και πέρα?

Γενικευμένη ορμή

- Ορίζουμε σαν γενικευμένη ορμή τον όρο $p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$
  - Γνωστή ακόμα σαν κανονική ή συζυγής ορμή
  - ✓ Είναι ίση με τις "γνωστές" ορμές για x-y-z συντεταγμένες
- Η εξίσωση του Lagrange γίνεται:

$$\frac{dp_j}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

☞ p_j διατηρείται αν η L δεν εξαρτάται ακριβώς από το q_j

➢ Τέτοια συντεταγμένη q_j ονομάζεται κυκλική ή αγνοήσιμη

Γενικευμένη ορμή που σχετίζεται με μια κυκλική συντεταγμένη διατηρείται

⇐ Η διατήρηση της γραμμικής ορμής είναι ιδιαίτερη περίπτωση

Γενικευμένη ορμή $p_j \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

- Η γενικευμένη ορμή μπορεί και να μην μοιάζει με την γραμμική ορμή
  - Οι μονάδες μπορεί να διαφέρουν, αν η q_j δεν είναι χωρική συντεταγμένη
  - $p_j q_j$ πάντα έχει μονάδες της δράσης (=έργο × χρόνο)
  - Η εξίσωση μπορεί να διαφέρει αν το V εξαρτάται από την ταχύτητα

Παράδειγμα: το ΕΜ πεδίο

$$L = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 - q\phi + q\mathbf{A}\cdot\mathrm{v} \Rightarrow p_x = m\dot{x} + qA_x$$

Επιπλέον όρος εξαιτίας της εξάρτησης του δυναμικού από την ταχύτητα

Συμμετρία

- Η γραμμική ορμή $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ είναι συζυγής των (x,y,z) συντεταγμένων
  - Διατηρείται, αν η Lagrangian δεν εξαρτάται ακριβώς από την θέση

Είναι ανεξάρτητη ως προς χωρικές μετατοπίσεις

$$(x,y,z) \rightarrow (x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$$

- Ένα τέτοιο σύστημα ονομάζεται συμμετρικό ως προς χωρικές μετατοπίσεις

Συμμετρία συστήματος = Αναλλοίωτη Lagrangian

$\Downarrow$

Διατήρηση της συζυγούς ορμής

Παράδειγμα: Διατήρηση της ορμής και στροφορμής

Γραμμική ορμή

- Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα με πολλά σώματα $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1,\ldots,q_n,t)$

- Ας υποθέσουμε ότι η μεταβολή της q_1, dq_1, μεταφέρει όλο το σύστημα προς μια κατεύθυνση

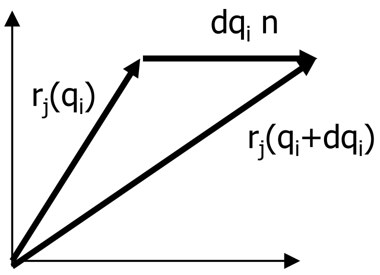
π.χ. x του CM ενός συστήματος στο $r_i = (x_i, y_i, z_i)$

Στην περίπτωση αυτή, η x δεν μπορεί να εμφανιστεί στην T γιατί οι ταχύτητες δεν επιρεάζονται από μετάθεση των αξόνων: $\dfrac{\partial T}{\partial q_1} = 0 = p_1$

Θεωρούμε ότι V ανεξάρτητη των ταχυτήτων

Επομένως η E–L εξίσωση για q_1 είναι: $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial V}{\partial q_1} = Q_1$

Έχουμε δεί ότι: $Q_i = \sum_j \vec{F}_j \cdot \dfrac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}$



Από τον ορισμό της παραγώγου:

$$\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \lim_{dq_i \to 0} \frac{\vec{r}_j(q_i + dq_i) - \vec{r}_j(q_i)}{dq_i} = \frac{dq_i}{dq_i}\hat{n} = \hat{n}$$

Επομένως: $Q_i = \sum_j \vec{F}_j \cdot \dfrac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \Rightarrow Q_i = \sum_j \vec{F}_j \cdot \hat{n} \Rightarrow Q_i = \vec{F} \cdot \hat{n}$

Γραμμική ορμή

- Θα πρέπει να δείξουμε ακόμα ότι $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \dot{p}_1$

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \Rightarrow p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \Rightarrow p_j = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

Αλλά έχουμε δεί ότι: $\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow p_j = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Αλλά $\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \hat{n}$

$$\Rightarrow p_j = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \hat{n} \Rightarrow p_j = \hat{n} \cdot \sum_i m_i \vec{v}_i$$

- Αν η q_j κυκλική τότε: $-\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 = Q_j \Rightarrow \dot{p}_j = 0 \Rightarrow p_j = const$

Στροφορμή

- Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα με πολλά σώματα $\mathbf{r}_i=\mathbf{r}_i(q_1,\ldots,q_n,t)$
  - Ας υποθέσουμε ότι η q_1 περιστρέφει όλο το σύστημα
    - π.χ. φ στο $r_i=(x_i,y_i,z_i)=(r_i\cos\varphi, r_i\sin\varphi, z_i)$
  - Υποθέτουμε ακόμα ότι το V δεν εξαρτάται από το $\dot{\varphi}$
- Συζυγής ορμή είναι:

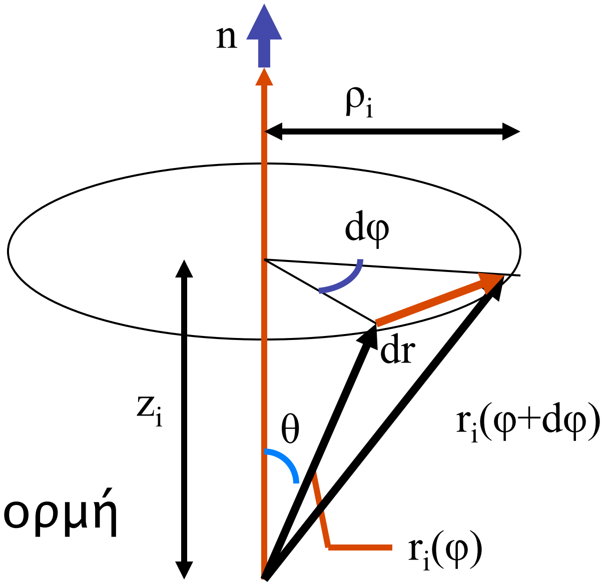
πράξεις

$$p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}$$

$$= \hat{n}\cdot\sum_i \vec{L}_i = \hat{n}\cdot\vec{L}$$

Άξονας περιστροφής

Ολική στροφορμή



Πράξεις.... $\vec{r}_i = \vec{r}_i(\varphi, q_2, \ldots, q_n, t)$

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$ παράγωγος ως προς $\dot{\varphi}$ $\Rightarrow \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \varphi}$

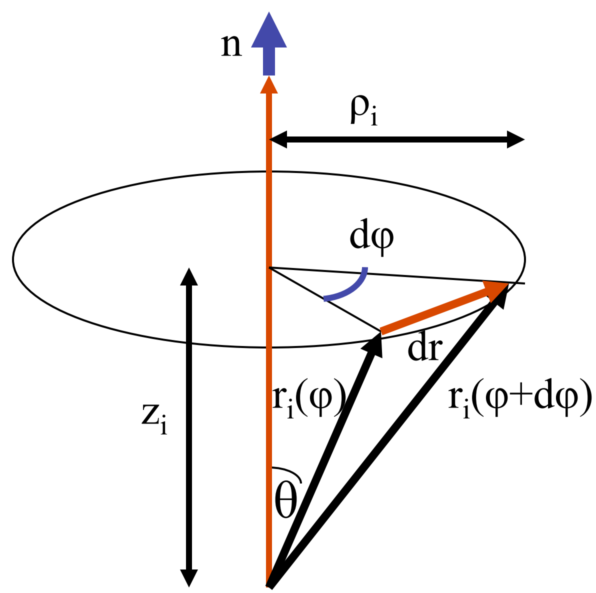
$$T = \sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_j \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{\varphi}} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \varphi}$$

- d$\mathbf{r}_i$ είναι κάθετο και στο **n** και στο $\mathbf{r}_i$
- Το μέτρο του είναι: $|d\vec{r}_i| = r_i \sin\theta d\phi$

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \varphi} = \hat{n} \times \vec{r}_i$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_i m_i \hat{n} \cdot (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) = \hat{n} \cdot \sum_i \vec{L}_i$$



Στροφορμή

- Η στροφορμή διατηρείται αν το σύστημα είναι συμμετρικό σε περιστροφές.
  - Πως σχετίζεται αυτό με την ολική ροπή;

Γενικευμένη Δύναμη

$$\boxed{Q_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \varphi}}$$

Αυτό πρέπει να είναι 0 αν φ κυκλική

Η T δεν μπορεί να εξαρτάται από την φ ← Περιστροφή δεν αλλάζει το μέτρο της v_i^2

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \varphi} = \sum_i \vec{F}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_i) = \hat{n} \cdot \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Ροπή

Αλλά $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

Η συνολική ροπή είναι μηδέν κατά μήκους του άξονα συμμετρίας

Νόμοι διατήρησης

- Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:
  - Ένα σύστημα είναι συμμετρικό ως προς γενικευμένη συντεταγμένη
  - Η συντεταγμένη είναι κυκλική (δεν εμφανίζεται στην Lagrangian)
  - Η συζυγής γενικευμένη συντεταγμένη διατηρείται
  - Η αντίστοιχη γενικευμένη δύναμη είναι μηδέν

Συμμετρία	Χωρικές μετατοπίσεις	Περιστροφή
Συντεταγμένη	Απόσταση κατά μήκους ενός άξονα	Γωνία γύρω από ένα άξονα
Ορμή	Γραμμική	Στροφορμή
Δύναμη	Δύναμη	Ροπή

Διατήρηση της Ενέργειας

- Θεωρούμε την παράγωγο της Lagrangian ως προς το χρόνο

$$\frac{dL(q,\dot{q},t)}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

- Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Lagrange έχουμε ότι:

$$\frac{dL(q,\dot{q},t)}{dt} = \sum_j \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)}\frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{dL(q,\dot{q},t)}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{dL(q,\dot{q},t)}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) + \frac{\partial L}{\partial t} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_j \dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Ορίζουμε αυτό σαν μια συνάρτηση της ενέργειας $h(q,\dot{q},t)$

- Η ποσότητα αυτή διατηρείται αν η Lagrangian δεν εξαρτάται ακριβώς εκφρασμένα από το χρόνο

Συνάρτηση ενέργειας $h(q,\dot{q},t) = \left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right)$

- Αντιπροσωπεύει αυτή η συνάρτηση ενέργειας την ολική ενέργεια?
  - Ας δούμε ένα παράδειγμα:

    Σωματίδιο κινείται κατά μήκος του x-άξονα:

    $$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) \Rightarrow h = m\dot{x}^2 - L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = T + V$$

  - Ok δουλεύει για την περίπτωση αυτή αλλά πόσο γενικό είναι?

Συνάρτηση Ενέργειας $h(q,\dot{q},t)=\left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L\right)$

$$T=\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2=\frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2 \Rightarrow T=M_0+\sum_j M_j\dot{q}_j+\frac{1}{2}\sum_{j,k}M_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k$$

όπου: $M_0=\sum_i \frac{1}{2}m_i\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2 \quad M_j=\sum_i \frac{1}{2}m_i\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad M_{jk}=\sum_{j,k}\frac{1}{2}m_i\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$

$$\Rightarrow T=T_0+T_1+T_2$$

- Ας υποθέσουμε ότι η Lagrangian μπορεί να γραφεί ως:

$$L(q,\dot{q},t)=L_0(q,t)+L_1(q,\dot{q},t)+L_2(q,\dot{q},t)$$

1ης τάξης σε $\dot{q}$ — 2ης τάξης σε $\dot{q}$

- Οι παράγωγοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_j}=0, \qquad \sum_j \dot{q}_j\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j}=L_1, \qquad \sum_j \dot{q}_j\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j}=2L_2$$

Θεώρημα Euler

αν f ομογενής, τάξης n ως προς x_i, τότε

$$\sum_i x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=nf$$

$$\Rightarrow h(q,\dot{q},t)=\left(\sum_j \dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-L\right)=L_2-L_0$$

Συνάρτηση Ενέργειας

$$h(q,\dot{q},t) = L_2 - L_0, \qquad L = T - V$$

- Η συνάρτηση της ενέργειας ισούται με την ολική ενέργεια E=T+V

  αν $T = L_2$ και $V = -L_0$

- $T = L_2$ ικανοποιείται αν οι μετασχηματισμοί από το r στο q_j είναι ανεξάρτητοι του χρόνου.
- $V = -L_0$ ικανοποιείται αν το δυναμικό ανεξάρτητο της ταχύτητας
  - Όχι τριβές

Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Κινητική Ενέργεια

Ανεξάρτητο χρόνου

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2}\dot{r}_i^2, \qquad \vec{r}_\mathrm{i} = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

- Χρησιμοποιώντας τον κανόνα $\dfrac{d\vec{r}_j}{dt} = \sum_j \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j$

$$\sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \sum_i \frac{m_i}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k = \underline{\sum_{j,k}\dot{q}_j\dot{q}_k}\sum_i \frac{m_i}{2}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

Δευτέρου βαθμού ομογενείς

Χωρίς $\dot{q}$

Τα παραπάνω **δεν** θα ίσχυαν αν $\vec{r}_\mathrm{i} = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$ γιατί

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

Διατήρηση της Ενέργειας

- Η συνάρτηση της ενέργειας ισούται με την ολική ενέργεια αν
  - Οι δεσμοί είναι ανεξάρτητοι του χρόνου
  - Η κινητική ενέργεια T είναι δευτέρου βαθμού ομογενής συνάρτηση των ταχυτήτων.
  - Το δυναμικό V είναι ανεξάρτητο της ταχύτητας
- Η συνάρτηση της ενέργειας διατηρείται αν
  - Η Lagrangian δεν εξαρτάται ακριβώς από το χρόνο
- Τα παραπάνω είναι απλά εκφράσεις του θεωρήματος διατήρησης της ενέργειας σε ένα πιο γενικό πλαίσιο.

Περίληψη

- Βγάλαμε τις εξισώσεις Lagrange από την αρχή του Hamilton
  - Λογισμός μεταβολών
- Συζητήσαμε νόμους διατήρησης
  - Γενικευμένη (συζυγής) ορμή $p_j \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$
  - Συμμετρία του συστήματος
    - Αναλλοίωτο της Lagrangian
    - Διατήρηση της ορμής
- Εξισώσεις κίνησης του Hamilton