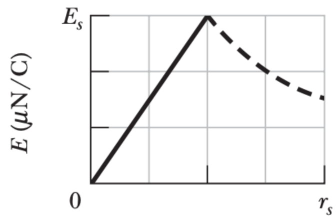
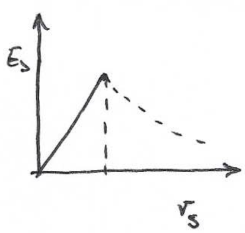
ΦΥΣ. 112

9º ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή: Τρίτη 26.11.2024**

1. Μία κυκλική περιοχή στο οριζόντιο επίπεδο *xy* βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο το οποίο έχει φορά προς τον θετικό *z*-άξονα. Το μέτρο της έντασης του πεδίου είναι *B* (σε Tesla) και αυξάνει γραμμικά με τον χρόνο *t* σύμφωνα με την εξίσωση $B = at$, όπου *α* σταθερά. Το μέτρο της έντασης, *E*, του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από την αύξηση του μαγνητικού πεδίου δίνεται στο διπλανό σχήμα, συναρτήσει της ακτινικής απόστασης *r*. Η κλίμακα του κατακόρυφου άξονα είναι $300\mu N/C$ ενώ η κλίμακα του οριζόντιου άξονα, είναι $r_i = 4.00$cm. Βρείτε την σταθερά αναλογίας *a*.





Από τον νόμο του Faraday έχουμε ότι:

$$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{A} \Rightarrow E(2\pi r) = -\frac{dB}{dt}\cdot \vec{A} \Rightarrow$$

το μέτρο επομένως $\Rightarrow$ $E\cdot 2\pi \cancel{r} = \pi r^{\cancel{2}}\frac{d}{dt}(a\cdot t) \Rightarrow 2\cancel{\pi}E = \cancel{\pi}ar \Rightarrow \boxed{E = \frac{ar}{2}}$

Η σταθερά α θα είναι επομένως: $a = \frac{2E}{r} = 2\frac{E}{r}$

Από το γράφημα έχουμε ότι $\frac{E}{r}$ = κλίση της ευθείας.

Η κλίμακα στον y-άξονα είναι $300\mu N/C$. (επομένως κάθε μεγάλη υποδιαίρεση αντιστοιχεί σε $100\mu N/m$ ενώ η κλίμακα του x-άξονα είναι 4.00cm

Επομένως κάθε υποδιαίρεση είναι 1.00cm.

Από το γράφημα έχουμε ότι: $E_{max} = 300\mu N/C$ για $r = 2.0$cm.

Η κλίση επομένως είναι $\frac{E}{r} = \frac{300\mu N/C}{2.0cm} = \frac{3\cdot 10^{-4}}{2\cdot 10^{-2}}\frac{N}{m\cdot C} = \frac{3}{2}\cdot 10^{-2}\frac{N}{mC} \Rightarrow$

$\frac{E}{r} = 1.5\cdot 10^{-2}\frac{N}{m\cdot C}$

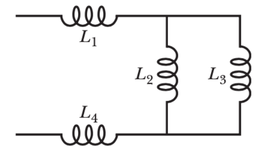
Από τη δύναμη Lorentz: $F = qvB$ έχουμε $[B] = \frac{[F]}{[qv]} = \frac{N}{C\cdot \frac{m}{s}} \Rightarrow$

$[B] = \frac{N}{C\cdot m}s \Rightarrow \frac{N}{C\cdot m} = T\cdot s^{-1}$

Η κλίση θα είναι: $\frac{E}{r} = 0.015\cdot T.s^{-1}$

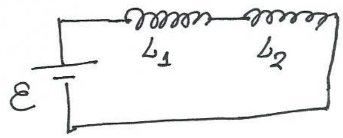
Η σταθερά α θα είναι επομένως: $a = 2\frac{E}{r} = 0.03\ Ts^{-1}$

2. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται μια διάταξη των πηνίων με συντελεστές αυτεπαγωγής L_1=30.0mH, L_2=50.0mH, L_3=20.0mH και L_4=15.0mH. Η διάταξη είναι συνδεδεμένη με πηγή ρεύματος. Βρείτε τον ισοδύναμο συντελεστή αυτεπαγωγής του κυκλώματος.



Για δύο πηνία με επαγωγή L_1 και L_2 συνδεδεμένα σε σειρά και σε αρκετή απόσταση μεταξύ τους ώστε να μην επηρεάζει το ένα το άλλο, μπορούμε να δείξουμε ότι $L_{ισοδ} = L_1 + L_2$ και για N πηνία $L_{ισοδ} = L_1 + L_2 + \dots + L_N$

Ξέρουμε ότι η διαφορά δυναμικού στα άκρα ενός πηνίου είναι $\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$ όπου



$\frac{dI}{dt}$ η μεταβολή του ρεύματος που το διαρρέει.

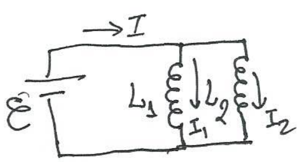
Εφόσον το ίδιο ρεύμα διαρρέει και τις 2 αυτεπαγωγές τότε η διαφορά δυναμικού θα είναι:

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= -L_1\frac{dI}{dt}\\ \mathcal{E}_2 &= -L_2\frac{dI}{dt}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \Rightarrow -L_{ισοδ}\frac{\cancel{dI}}{\cancel{dt}} = -L_1\frac{\cancel{dI}}{\cancel{dt}} - L_2\frac{\cancel{dI}}{\cancel{dt}} \Rightarrow$$

$$\boxed{L_{ισοδ} = L_1 + L_2}$$

η σχέση γενικεύεται για πολλά πηνία σε σειρά:

$$\boxed{L_{ισοδ} = L_1 + L_2 + \dots + L_N = \sum_{i=1}^{N} L_i}$$



Στην περίπτωση της παράλληλης συνδεσμολογίας θα έχουμε:

$$\mathcal{E}_1 = L_1\frac{dI_1}{dt}$$

$$\mathcal{E}_2 = -L_2\frac{dI_2}{dt}$$

αλλά $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ αφού είναι συνδεδεμένα παράλληλα

$$\mathcal{E} = -L_{ισοδ}\frac{dI}{dt}$$

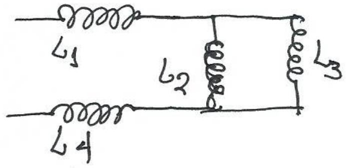
$$-L_1\frac{dI_1}{dt} = -L_2\frac{dI_2}{dt} \Rightarrow \frac{dI_1}{dt} = \frac{L_2}{L_1}\frac{dI_2}{dt}$$

$$\mathcal{E} = -L_{ισοδ}\frac{dI}{dt} = -L_{ισοδ}\frac{d(I_1+I_2)}{dt} = -L_{ισοδ}\left[\frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt}\right] \Rightarrow \mathcal{E} = -L_{ισοδ}\left(\frac{L_2}{L_1}\frac{dI_2}{dt} + \frac{dI_2}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -L_{ισοδ}\left(1 + \frac{L_2}{L_1}\right)\frac{dI_2}{dt} = \mathcal{E}_2 = -L_2\frac{dI_2}{dt} \Rightarrow L_{ισοδ} = \frac{L_2 L_1}{L_1 + L_2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{L_{ισοδ}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$$ και γενικεύοντας: $$\boxed{\frac{1}{L_{ισοδ}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{L_i}}$$

Επομένως στο κύκλωμα της άσκησης θα πρέπει να εφαρμόσουμε τα προηγούμενα της συνδεσμολογίας: Τα πηνία L_2 κ L_3 είναι παράλληλα συνδεδεμένα



και η ισοδύναμη αυτή επαγωγή είναι συνδεδεμένη σε σειρά με τα L_1 και L_4.

Επομένως θα έχουμε: $L_2 \| L_3 \Rightarrow L_{23} = \frac{L_2 L_3}{L_2 + L_3}$

$$L_{23} + L_1 + L_4 \Rightarrow L_{1234} = L_1 + \frac{L_2 L_3}{L_2 + L_3} + L_4 = \frac{L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3 + L_4 L_2 + L_4 L_3}{L_2 + L_3}$$

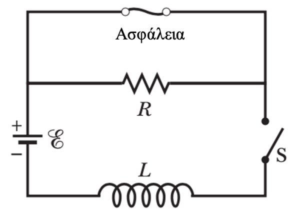
Επομένως: $$L_{1234} = \frac{L_1 L_2 + L_1 L_3 + L_2 L_3 + L_{42} + L_{43}}{L_2 + L_3}$$

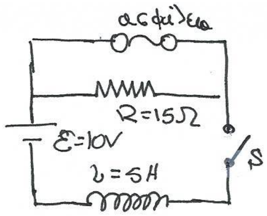
Αριθμητική αντικατάσταση θα δώσει:

$$L_{1234} = \frac{1500mH^2 + 600mH^2 + 1000mH^2 + 750mH^2 + 300mH^2}{70\cancel{mH}} \Rightarrow$$

$$L_{1234} = \frac{4150mH}{70} \Rightarrow \boxed{L_{1234} \simeq 59.2\,mH}$$

3. Το κύκλωμα του διπλανού σχήματος αποτελείται από μια αντίσταση $R = 15\Omega$, πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 5.0H$ και μια ιδανική μπαταρία (μηδενική εσωτερική αντίσταση) ηλεκτρεγερτικής δύναμης $\mathcal{E} = 10V$. Στο πάνω τμήμα του κυκλώματος υπάρχει μια ασφάλεια με όριο ρεύματος $3.0A$. Η ασφάλεια παρουσιάζει μηδενική αντίσταση όσο το ρεύμα που την διαρρέει έχει ένταση μικρότερη από $3.0A$. Όταν η ένταση του ρεύματος ξεπεράσει τα $3.0A$, η ασφάλεια «καίγεται» (λειώνει) και έτσι μετέπειτα παρουσιάζει άπειρη αντίσταση. Ο διακόπτης S είναι κλειστός τη χρονική στιγμή $t = 0$. (α) Πότε «καίγεται» η ασφάλεια; (β) Σχεδιάστε το ρεύμα, i, που διαρρέει το πηνίο συναρτήσει του χρόνου. Σημειώστε στο γράφημα τη στιγμή που «καίγεται» η ασφάλεια.





(α) Όταν κλείσει ο διακόπτης το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα που ωστόσο δεν διαρρέει την αντίσταση R γιατί η ασφάλεια λόγω της μικρής της αντίστασης την βραχυκυκλώνει. Το πηνίο επίσης έχει αμελητέα αντίσταση και αποτελεί βραχυκύκλωμα. Το ρεύμα επομένως αυξάνει έως ότου καεί η ασφάλεια.

Εφαρμόζουμε τον τροποποιημένο 2ο νόμο του Kirchhoff στον κλάδο της ασφάλειας και του πηνίου, οπότε θα έχουμε:

$$\mathcal{E} - L\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow L\frac{dI}{dt} = \mathcal{E} \Rightarrow dI = \frac{\mathcal{E}}{L}dt \Rightarrow \int dI = \int \frac{\mathcal{E}}{L}dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{L}t} \quad (A)$$

Η ασφάλεια καίγεται όταν το ρεύμα στην (A) γίνει 3A. Επομένως αυτό θα συμβεί την χρονική στιγμή: $t_0 = \frac{L}{\mathcal{E}} I_0 = \frac{5}{10}3 \Rightarrow \underline{t_0 = 1.5s}$

(β) Σύμφωνα με την (A) το ρεύμα αυξάνει γραμμικά για $t \in [0, t_0]$

Τη στιγμή που καίγεται η ασφάλεια, ρεύμα αρχίζει να ρέει στο κύκλωμα που περιλαμβάνει την αντίσταση R και το πηνίο, έως ότου έρθει στη σταθερή κατάσταση: Εφαρμόζουμε τον τροποποιημένο 2ο κανόνα του Kirchhoff στον βρόχο αυτό:

$$\mathcal{E} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow -L\frac{dI}{dt} = -\mathcal{E} + IR \Rightarrow -\frac{L}{R}\frac{dI}{dt} = -\frac{\mathcal{E}}{R} + I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{I - \mathcal{E}/R} = -\frac{R}{L}dt \Rightarrow \int_{I_0}^{I} \frac{dI'}{I' - \mathcal{E}/R} = -\frac{R}{L}\int_{t_0}^{t} dt' \Rightarrow \ln\left(I' - \frac{\mathcal{E}}{R}\right)\Bigg|_{I_0}^{I} = -\frac{R}{L}(t - t_0)$$

$$\Rightarrow \ln\left(I - \frac{\mathcal{E}}{R}\right) - \ln\left(I_0 - \frac{\mathcal{E}}{R}\right) = -\frac{R}{L}(t - t_0) \Rightarrow \ln\left(\frac{I - \mathcal{E}/R}{I_0 - \mathcal{E}/R}\right) = -\frac{R}{L}(t - t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(I - \mathcal{E}/R\right)/\left(I_0 - \mathcal{E}/R\right) = e^{-R/L(t - t_0)} = e^{-(t - t_0)/\tau} \Rightarrow I - \frac{\mathcal{E}}{R} = \left(I_0 - \frac{\mathcal{E}}{R}\right)e^{-(t - t_0)/\tau}$$

Οπότε θα πάρουμε ότι το ρεύμα, για $t > t_0 = 1.5s$ στιγμή που "καίγεται" η ασφάλεια γίνεται:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} + \left(I_0 - \frac{\mathcal{E}}{R}\right) e^{-(t-t_0)/\tau} \qquad \tau = \frac{L}{R} = \frac{5H}{15\Omega} \Rightarrow \tau = \frac{1}{3}s$$

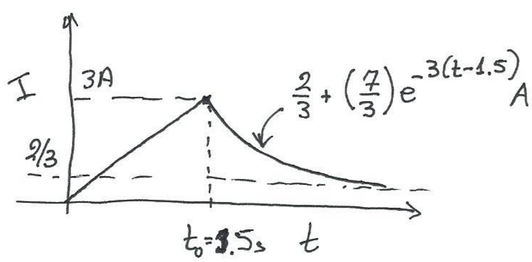
Αντικατάσταση αριθμητικών δεδομένων δίνει:

$$I = \frac{10V}{15\Omega} + \left(3A - \frac{10V}{15\Omega}\right) e^{-(t-1.5)s/(1/3)} \Rightarrow I = \frac{2}{3} + \left(3 - \frac{2}{3}\right) e^{-3(t-1.5)}$$

Για $t = 1.5s$ $I = 3A$ ενώ για $t = \infty$ το ρεύμα παίρνει την τιμή:

$t = \infty$ $\quad I = \frac{2}{3}A$ το πηνίο έχει μηδενική αντίσταση και το ρεύμα διαρρέει την αντίσταση R $\quad IR = \mathcal{E} \Rightarrow I = \frac{10V}{15\Omega}$

Το γράφημα επομένως του ρεύματος συναρτήσει του χρόνου αφότου έχει ανοίξει ο διακόπτης S είναι:

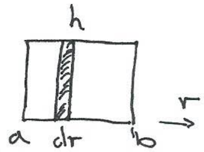


4. Ένας τοροειδής μαγνήτης αποτελείται από τετραγωνικές σπείρες με εσωτερική ακτίνα 10*cm* και εξωτερική ακτίνα 12*cm*. Αποτελείται από ένα σύρμα το οποίο έχει διάμετρο 1.0*mm* και αντίσταση ανά μέτρο 0.020Ω/m. (α) Βρείτε την αυτεπαγωγή και (β) την επαγωγική σταθερά του τοροειδούς μαγνήτη. Μπορείτε να αγνοήσετε το πάχος του μονωτικού υλικού του αγωγού.

(α) Θεωρούμε τον τοροειδή μαγνήτη με τετραγωνικές σπείρες, ύψους h και εσωτερικής πλευράς a και εξωτερικής πλευράς b. Θα έχουμε ότι εφόσον είναι τετραγωνικές σπείρες $h = b - a = 0.12m - 0.10m \Rightarrow h = 0.02m$

Η ροή που περνά ένα τοροειδές μαγνήτη είναι:

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint B\,dA = \int_a^b \left(\frac{\mu_0 I N}{2\pi r}\right) h\,dr \Rightarrow$$



$$\Phi_m = \frac{\mu_0 I N}{2\pi} h \int_a^b \frac{dr}{r} \Rightarrow \boxed{\Phi_m = \frac{\mu_0 I N}{2\pi} h \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (A)$$

Η αυτεπαγωγή του πηνίου θα είναι: $L\frac{dI}{dt} = \frac{d\Phi_m}{dt} \Rightarrow L\,dI = d\Phi_m \Rightarrow$

για N σπείρες $\Rightarrow L = \frac{N\Phi_m}{I} \Rightarrow L = \dfrac{\frac{\mu_0 \cancel{I} N^2}{2\pi} h \ln(b/a)}{\cancel{I}} \Rightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 h \ln\frac{b}{a}} \quad (B)$

Το τοροειδές είναι κατασκευασμένο από σύρμα το οποίο έχει πάχος $2R = 10^{-3}m$ και οι περιελίξεις του σύρματος αυτού καλύπτουν ομοιόμορφα την εσωτερική του περιφέρεια. Επομένως ο αριθμός των περιελίξεων N επί το πάχος του σύρματος της μιας περιέλιξης θα είναι: $N \cdot (2R) = 2\pi a \Rightarrow$

$$N = \frac{2\pi a}{2R} = \frac{2\pi \cdot 0.1\,\cancel{m}}{10^{-3}\,\cancel{m}} \Rightarrow N = 628 \text{ περιελίξεις.}$$

Αντικαθιστούμε στη (B) οπότε: $L = \frac{\mu_0}{2\pi}(628)^2 0.02 \cdot \ln\left(\frac{0.12}{0.10}\right) = \boxed{2.9 \cdot 10^{-4} H}$

(β) Η επαγωγική σταθερά του μαγνήτη θα βρεθεί από την $\tau = \frac{L}{R}$.

Η αντίσταση του σύρματος που αποτελεί τον τοροειδή μαγνήτη είναι το μήκος της περιέλιξης επί τον αριθμό των περιελίξεων. Επομένως θα έχουμε:

$R = \rho N \cdot \ell_{σπείρας} = \rho N \cdot (4 \cdot h) = 628 \cdot 4 \cdot 0.02 \cdot 0.02 \Rightarrow R = 50.04\,\cancel{m} \cdot 0.02 \frac{\Omega}{\cancel{m}} = 1\Omega$

Επομένως $\tau = 2.9 \cdot 10^{-4} H / 1 \Rightarrow \boxed{\tau = 2.9 \cdot 10^{-4} s}$

5. Ένα τμήμα σύρματος χαλκού διαρρέεται από ρεύμα 10A το οποίο κατανέμεται ομοιόμορφα σε όλη την εγκάρσια επιφάνειά του. Υπολογίστε την πυκνότητα ενέργειας (α) του μαγνητικού πεδίου και (β) του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια του σύρματος. Η διάμετρος του σύρματος είναι 2.5mm και η αντίστασή του ανά μονάδα μήκους είναι 3.3Ω/km.

(α) Ξέρουμε ότι η πυκνότητα μαγνητικής ενέργειας δίνεται από τη σχέση:

$$u_M = \frac{1}{2}\frac{B_0^2}{\mu_0} \quad (1)$$

Για κυλινδρικό αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα I, εφαρμόζοντας τον νόμο του Ampere έχουμε ότι: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ όπου R η ακτίνα του κυλινδρικού αγωγού

Αντικατάσταση στην (1) δίνει: $u_B = \frac{1}{2}\frac{1}{\cancel{\mu_0}}\frac{\mu_0^{\cancel{2}} I^2}{4\pi^2 R^2} \Rightarrow u_B = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow u_B = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10^2}{8\pi^2\left(\frac{2.5\cdot 10^{-3}}{2}\right)^2} \Rightarrow \boxed{u_B = 1.02\ J/m^2}$$

(β) Η πυκνότητα της ηλεκτρικής ενέργειας είναι: $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ (2)

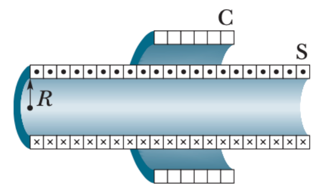
Αλλά για αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα I και αντιστοιχεί πυκνότητα ρεύματος J, υπάρχει η σχέση $E = \rho J$ που συνδέει την ένταση του πεδίου και την πυκνότητα ρεύματος, όπου ρ η ειδική αντίσταση του αγωγού.

Αλλά $J = \frac{I}{A}$ και $R = \rho\frac{l}{A}$ επομένως $E = \rho\frac{I}{A} = \frac{R}{l}I$

Αντικατάσταση στη (2) δίνει: $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{R^2}{l^2}I^2 = \frac{1}{2}8.85\cdot 10^{-12}\left(\frac{10\cdot 3.3}{10^3}\right)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{u_E = 4.82\cdot 10^{-15}\ J/m^3}$$

6. Ένα αγώγιμος βρόχος C αποτελείται από N σπείρες και είναι τοποθετημένο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, γύρω από ένα άλλο πηνίο S, το οποίο έχει μεγάλο μήκος και η ακτίνα των σπειρών του είναι R ενώ ο αριθμός των σπειρών του ανά μονάδα μήκους είναι n. (α) Δείξτε ότι ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής τους δίνεται από τη σχέση $M = \mu_0 \pi R^2 n N$. (β) Εξηγήστε γιατί ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής M, δεν εξαρτάται από το σχήμα και μέγεθος ή από το πόσο κοντά έχει τις σπείρες του ο βρόχος C.



(α) Ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής $M = \frac{N_{βρ} \cdot \Phi_m}{I_{σωλ}} = \frac{N_{βρ} \cdot B_{σωλ} \pi R^2}{I_{σωλ}}$

Αλλά $\Phi_m = \overbrace{\frac{\mu_0 I N_{σωλ}}{l_{σωλ}}}^{B_{σωλ}} \pi R^2_{σωλ}$ (2)

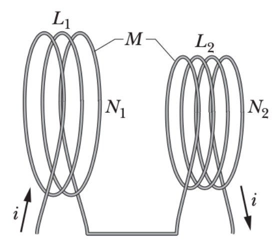
Από (1) κι (2) έχουμε: $M = \frac{N_{βρ} \mu_0 \cancel{I} \pi R^2}{l \cdot \cancel{I}} \Rightarrow \boxed{M = \mu_0 N_{βρ} n \pi R^2_{σωλ}}$

(β) Το μαγνητικό πεδίο του σωληνοειδούς περιέχεται εξ' ολοκλήρου στη διατομή των σπειρών του βρόχου C.

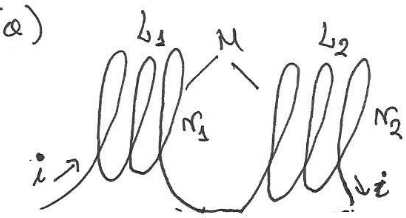
Η ροή του μαγνητικού πεδίου του σωληνοειδούς στο βρόχο C είναι:

$\Phi_m = B_{σωλ} \cdot A_{σωλ} = B_{σωλ} \pi R^2_{σωλ}$ και δεν εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του βρόχου.

7. Δύο πηνία με αυτεπαγωγή L_1 και L_2 αντίστοιχα, είναι συνδεδεμένα όπως στο διπλανό σχήμα. Ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής είναι M. (α) Δείξτε ότι αυτός ο συνδυασμός τους μπορεί να αντικατασταθεί με ένα και μόνο πηνίο με ισοδύναμη επαγωγή που δίνεται από τη σχέση $L_{ισοδ.} = L_1 + L_2 + 2M$. (β) Πώς θα μπορούσατε να συνδέσετε τα πηνία μεταξύ τους ώστε η ισοδύναμη επαγωγή της διάταξης που προκύπτει να είναι ίση με $L_{ισοδ.} = L_1 + L_2 - 2M$; Θεωρήστε ότι τα πηνία δεν είναι πολύ μακριά το ένα από το άλλο.



(α)



Θεωρούμε το πηνίο L_1, το οποίο διαρρέεται από ρεύμα i το οποίο δημιουργεί μαγνητικό πεδίο με φορά προς τα δεξιά προς το πηνίο L_2.
Το πηνίο L_2 δημιουργεί επίσης μαγνητικό πεδίο με φορά προς τα δεξιά.

Η αλλαγή του ρεύματος δημιουργεί αλλαγή στο μαγνητικό πεδίο και οι μεταβολές στις μαγνητικές ροές επάγουν ηλεκτρεγερτικές δυνάμεις ίδιας κατεύθυνσης. Θα έχουμε επομένως:

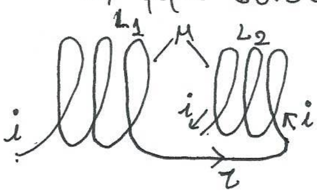
$$\mathcal{E}_1 = -(L_1 + M)\frac{dI}{dt} \quad \text{και} \quad \mathcal{E}_2 = -(L_2 + M)\frac{dI}{dt}$$

Η ολική ηλεκτρεγερτική δύναμη θα είναι: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = -(L_1 + L_2 + 2M)\frac{dI}{dt}$

Αλλά η ολική ηλεκτρεγερτική δύναμη θα μπορούσε να προκληθεί από ένα ισοδύναμο πηνίο αυτεπαγωγής $L_{ισοδ.}$: $\mathcal{E} = -L_{ισοδ}\frac{dI}{dt}$

Επομένως $\boxed{L_{ισοδ} = L_1 + L_2 + 2M}$

(β) Θεωρούμε την παραπάνω συνδεσμολογία των δύο πηνίων αλλά αυτή τη φορά συνδέεται το τέλος του L_1 με το τέλος του L_2 όπως στο σχήμα



Στην περίπτωση αυτή το πεδίο που δημιουργεί το ρεύμα i στο L_2 είναι αντίθετης κατεύθυνσης απ' ότι στην περίπτωση (α) και επομένως αντίθετο από το πεδίο που δημιουργεί το L_1.
Στην περίπτωση αυτή οι δύο μαγνητικές ροές έχουν αντίθετο πρόσημο. Καθώς το ρεύμα στο πηνίο 1 αυξάνει, η ροή του αυξάνει. Αλλά το ρεύμα στο L_2 τείνει να την ελαττώσει επειδή η ροή που δημιουργεί έχει αντίθετη φορά.

Η ηλεκτρεγερτική δύναμη στο L_1 θα είναι: $E_1 = -(L_1 - M)\frac{dI}{dt}$

Ανάλογο φαινόμενο έχουμε στο πηνίο L_2 οπότε $E_2 = -(L_2 - M)\frac{dI}{dt}$

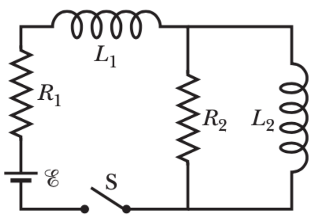
Η ολική ηλεκτρεγερτική δύναμη στα δύο πηνία θα είναι:

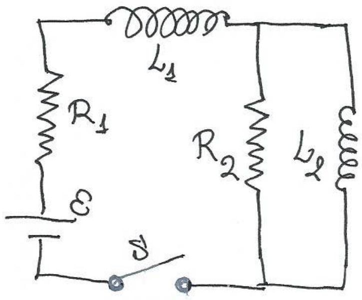
$$\mathcal{E} = E_1 + E_2 = -(L_1 - M) + (-L_2 + M)\frac{dI}{dt} = -(L_1 + L_2 - 2M)\frac{dI}{dt}$$

Όπως και πριν αυτό ισοδυναμεί με ένα πηνίο αυτεπαγωγής:

$$\boxed{L_{\text{ισοδ}} = L_1 + L_2 - 2M}$$

8. Το κύκλωμα του διπλανού σχήματος αποτελείται από δύο αντιστάτες R_1=8.0Ω και R_2=10Ω και δύο πηνία L_1=0.30H και L_2=0.20H και μια ιδανική μπαταρία, ηλεκτρεγερτικής δύναμης $\mathcal{E} = 6.0V$. (α) Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής τους ρεύματος στο πηνίο 1 από τη στιγμή που κλείνει ο διακόπτης S. (β) Βρείτε το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο 1 όταν έχει αποκατασταθεί ισορροπία στο κύκλωμα και το ρεύμα που το διαρρέει είναι σταθερό.





(α) Όταν ο διακόπτης S κλείσει, τα δύο πηνία αντιτίθενται στη μεταβολή της ροής και προσπαθούν να διατηρήσουν το ρεύμα που τα διαρρέει. Εφόσον το κύκλωμα ήταν ανοικτό αρχικά, το ρεύμα που διαρρέει αρχικά τα πηνία είναι $\emptyset$.
Αυτή η συνθήκη αποτελεί την αρχική συνθήκη του κυκλώματος. και ως αποτέλεσμα δεν διαρρέεται από ρεύμα το κύκλωμα τη στιγμή που κλείνει ο διακόπτης.

Εφαρμόζουμε τον 2° τροποποιημένο κανόνα του kirchhoff στον αριστερό βρόχο.

$\mathcal{E}_{L_1} = -L_1 \frac{dI}{dt} = \mathcal{E}$ ώστε να μη κυκλοφορεί ρεύμα στο βρόχο.

Ως αποτέλεσμα ο ρυθμός μεταβολής $\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L_1} = \frac{6.0V}{0.3H} \Rightarrow \frac{dI}{dt} = 20A/s$

(β) Στην κατάσταση ισορροπίας τα πηνία λειτουργούν ως βραχυκυκλώματα.
Εφόσον δεν υπάρχει μεταβολή στη μαγνητική ροή λόγω μεταβολής του ρεύματος, τότε θα πρέπει να μην υπάρχει διαφορά δυναμικού στα άκρα τους. Επομένως το πηνίο L_2 βραχυκυκλώνει την αντίσταση R_2 και το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι: $\mathcal{E} - IR_1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R_1} = \frac{6.0V}{8.0\Omega} \Rightarrow I = 0.75A$$

9. Ο συντελεστής αυτεπαγωγής ενός βρόχου με σφικτή περιέλιξη σπειρών προκαλεί ηλεκτρεγερτική δύναμη επαγωγής 3.00mV όταν ο βρόχος διαρρέεται από ρεύμα η ένταση του οποίου μεταβάλλεται με ρυθμό 5.0A/s. Ρεύμα σταθερής έντασης 8.0A προκαλεί μαγνητική ροή 40.0μWb διαμέσου κάθε σπείρας του βρόχου. (α) Βρείτε τον συντελεστή αυτεπαγωγής και (β) τον αριθμό των σπειρών που αποτελούν τον βρόχο.

(α) Η ηλεκτρεγερτική δύναμη επαγωγής δίνεται από: $\mathcal{E} = L\frac{dI}{dt} \Rightarrow L = \frac{\mathcal{E}}{dI/dt}$

Αντικατάσταση αριθμητικών δεδομένων: $L = \frac{3\,mV}{5.0\,A/s} \Rightarrow \underline{L = 0.6\,mH}$

(β) Η σχέση που δίνει την αυτεπαγωγή ενός πηνίου είναι: $L = \frac{N\Phi_m}{I} \Rightarrow$

$\Rightarrow N = \frac{L\,I}{\Phi_m} = \frac{0.6\cdot10^{-3}\cdot\cancel{8}.0A}{5\,\cancel{4}0\cdot10^{-6}Wb} \Rightarrow N = \frac{6}{5}\cdot10^{2} \Rightarrow \underline{N = 120 \text{ σπείρες}}$

10. Ένα τετραγωνικό πλαίσιο πλευράς 20*cm* και αντίστασης 20*mΩ*, έχει το επίπεδό του κάθετο στην διεύθυνση ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου έντασης $B = 2.0$T. Αν απομακρύνετε δύο αντίθετες πλευρές του πλαισίου μακριά την μία από την άλλη, τότε στις άλλες δύο πλευρές εμφανίζεται ελκτική δύναμη που φέρνει τις πλευρές κοντά μεταξύ τους ελαττώνοντας το εμβαδό της περιοχής που περικλείεται από το πλαίσιο. Αν το εμβαδό της περιοχής ελαττωθεί σε μηδενιστεί σε χρόνο $\Delta t = 0.20s$, υπολογίστε (α) την μέση ηλεκτρεγερτική δύναμη, *emf* και (β) την μέση τιμή του ρεύματος που επάγεται στο πλαίσιο κατά το χρονικό διάστημα Δt.

(α) Η μαγνητική ροή δίνεται από τη σχέση: $\Phi_m = \vec{B}\cdot\vec{A} = BA\cos\phi$

όπου ϕ η γωνία μεταξύ του μαγνητικού πεδίου και της επιφάνειας.

Από τον νόμο του Faraday έχουμε ότι: $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(BA\cos\phi)}{dt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -A\cos\phi\frac{dB}{dt} - B\cos\phi\frac{dA}{dt} + BA\sin\phi\frac{d\phi}{dt}.$$

Στην προκειμένη περίπτωση B και ϕ είναι σταθερά, οπότε η ηλεκτρεγερτική δύναμη προκαλείται από την αλλαγή την επιφάνεια, $A = 0.2^2 m^2$

$$|\mathcal{E}| = \frac{dA}{dt} B\cancel{\cos\phi}^{1} \Rightarrow |\mathcal{E}| = 2.0T\cdot\frac{(0.2)^2}{0.2s} \Rightarrow \underline{|\mathcal{E}| = 0.40V}$$

(β) Το μέσο επαγόμενο ρεύμα θα είναι: $\langle I \rangle = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{0.4}{20\cdot10^{-3}\Omega} = 20A.$