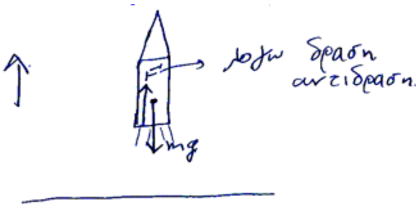
ΦΥΣ. 131

Φροντιστήριο # 6

1. Ένας πύραυλος που ανυψώνεται κατακόρυφα εκτοξεύει μάζα αερίων με σταθερό ρυθμό $\dfrac{dm}{dt} = -100$ kg/s. Η αρχική συνολική μάζα του πυραύλου είναι $m_0 = 2x10^4$kg. Η αρχική μάζα των καυσίμων είναι $m_{0\kappa} = 0.865m_0$ και η ταχύτητα αποβολής των αερίων ως προς τον πύραυλο είναι υ_{ex} = 4.0km/s. Δίνεται ότι τη χρονική στιγμή t = 0 η ταχύτητα του πύραυλου είναι $V_0 = 0$. (Η ταχύτητα αποβολής των αερίων ως προς τον πύραυλο και η επιτάχυνση της βαρύτητας θεωρούνται σταθερές). (α) Να σημειώσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στον πύραυλο και να τις υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_1=100s. (β) Να υπολογίσετε το χρόνο που απαιτείται για να αδειάσει ο πύραυλος από καύσιμα και να υπολογίσετε τη ταχύτητά του τη χρονική στιγμή τότε. (g=10.0m/s^2).

① $\dfrac{dm}{dt} = -100$ kg/s

+ ↑



$m_0 = 2\times10^4$ kg.

$m_{0\kappa} = 0{,}865\, m_0$

$U_{ex} = 4$ Km/S

$t=0 \Rightarrow V_0 = 0$

(α) $\dfrac{dm}{dt} = -100$ kg/s $\Rightarrow \displaystyle\int_{m_0}^{m} dm = -100\int_0^{100} dt \Rightarrow m - m_0 = -100 \cdot 100$

$\Rightarrow m - m_0 = -10000$

$\Rightarrow m = m_0 - 10000$

$\Rightarrow m = 10^4$ kg.

$\Rightarrow$ Την χρονική στιγμη $t = 100s \Rightarrow m = 10^4$ kg.

$B = m \cdot g = 10^4 \, 10 = 10^5 N \Rightarrow \boxed{B = 10^5 N}$

$F_{ext} = m \cdot \dfrac{du}{dt} - U_{ext} \cdot \dfrac{dm}{dt}$ → κινητήρια δύναμη του πυραύλου

$F_1 = U_{ex} \cdot \dfrac{dm}{dt} = 4\times10^3 \cdot 10^2 = 4\times10^5 \Rightarrow \boxed{F_1 = 4\times10^5}$

(β) $m' = m_0 - m_{0K} = 2\times10^4 - 0{,}865\times2\times10^4 = 0{,}27\times10^4$ kg

m' : μάζα του πυραύλου χωρίς καύσιμα.

m_0 : η αρχική συνολική μάζα του πυραύλου

m_{0K}: Η αρχική μάζα των καυσίμων

$dm = -100\, dt \Rightarrow \displaystyle\int_{m_{0K}}^{m'} dm = -100\int_0^t dt \Rightarrow m' - m_{0K} = -100t$

$\Rightarrow (0{,}27 - 2)\times10^4 = -100t \Rightarrow -1{,}73\times10^4 = -100t \Rightarrow \boxed{t = 173\,S}$

$$F = \frac{d}{dt} m v = m \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} - \bar{v}_{ex} \frac{dm}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -mg = m \cdot \frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{v}_{ex} \frac{dm}{dt}$$ (διαιρω δια m)

$$-g = \frac{dv}{dt} + \frac{v_{ex}}{m} \cdot \frac{dm}{dt} \Rightarrow -g\,dt = dv + v_{ex} \cdot dm.$$

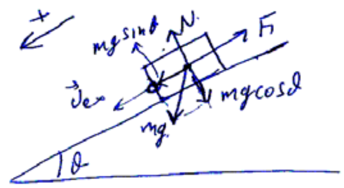
$$\Rightarrow -\int_0^v dv = \int_0^t g\,dt + \int_{m_0}^{m'} v_{ex} \cdot \frac{dm}{m} \Rightarrow$$

$$-v = 173 \cdot 10 + 4 \cdot 10^3 \left(\ln \frac{m'}{m_0}\right) = 1730 + 4 \cdot 10^3 \left(\ln \frac{m'}{m_0}\right)$$

$$\Rightarrow -v = -6270 \text{ m/s.} \Rightarrow \boxed{v = 6270 \text{ m/s.}}$$

2. Δοχείο γεμάτο με νερό ξεκινά από την ηρεμία του και ολισθαίνει χωρίς τριβές κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου με γωνία κλίσης θ. Από τρύπα στο δοχείο, εκτοξεύεται νερό κατά την διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου με σταθερή ταχύτητα υ_{ex} ως προς το δοχείο και με σταθερό ρυθμό dm/dt = -α, όπου α>0. Η μάζα του δοχείου όταν είναι άδειο είναι $m_{0\Delta}$ και η αρχική μάζα του νερού είναι m_{0N}. Αναφέρατε και σημειώστε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο με δοχείο με το νερό και βρείτε την ταχύτητα του δοχείου όταν θα έχει αδειάσει όλο το νερό, αν $\dfrac{m_{0\Delta}}{a} \geq \dfrac{\upsilon_{ex}}{g \sin\theta}$.

②



$$\Sigma F = m \cdot \frac{d\upsilon}{dt}$$

$$\Rightarrow mg\sin\theta - F_1 = m \cdot \frac{d\upsilon}{dt} \quad \xRightarrow{F_1 = -\upsilon_{ex}\frac{dm}{dt}}$$

$$\cancel{m} g\sin\theta + \frac{\upsilon_{ex}}{m} \cdot \frac{dm}{dt} = \cancel{m} \cdot \frac{d\upsilon}{dt}$$

$$\Rightarrow dt\, g\sin\theta + \upsilon_{ex} \cdot \frac{dm}{m} = d\upsilon$$

$$\Rightarrow \int d\upsilon = g\sin\theta \int_0^t + \upsilon_{ex} \int_{m_{0\Delta}+m_{0N}}^{m_{0\Delta}} \frac{dm}{m} \Rightarrow$$

$$\upsilon = g\sin\theta \cdot t + \upsilon_{ex} \ln \frac{m_{0\Delta}}{m_{0\Delta}+m_{0N}}$$

$$\xRightarrow{1} \boxed{\upsilon = g\sin\theta \cdot \frac{m_{0N}}{a} + \upsilon_{ex} \cdot \ln \frac{m_{0\Delta}}{m_{0\Delta}+m_{0N}}}$$

$m_{0\Delta}$: μάζα του δοχείου όταν είναι άδειο.

m_{0N} : αρχική μάζα του νερού

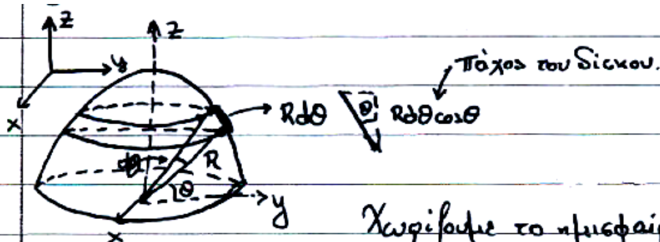
$$\frac{dm}{dt} = -a$$

$$\Rightarrow \int_{m_{0N}}^{0} dm = -a \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow -m_{0N} = -at$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \frac{m_{0N}}{a}} \quad (1)$$

3. Να βρεθεί το κέντρο μάζας ενός συμπαγούς ημισφαιρίου ακτίνας R και ομοιόμορφης πυκνότητας μάζας.



Χωρίζουμε το ημισφαίριο σε οριζόντιες κυκλικές φέτες (δίσκους) (1)
Συναρτήσει της γωνίας Θ, η ακτίνα κάθε οριζόντιας "φέτας" είναι $R\cos\Theta = r$
Προφανώς η ακτίνα αυτή μεταβάλλεται (ελαττώνεται) καθώς η γωνία Θ μεγαλώνει μια και ανεβαίνουμε προς το υψηλότερο σημείο του ημισφαιρίου.

Το πάχος κάθε φέτας είναι $\boxed{dy = Rd\Theta\cos\Theta}$ (2) (δείτε το σχήμα). Το πάχος είναι η κάθετη απόσταση μεταξύ των δύο οριζόντιων κύκλων που ορίζουν τη φέτα. Πάνω στο ημισφαίριο η απόσταση των δίσκων είναι ουσιαστικά το μήκος του τόξου κύκλου που ενώνει τα άκρα των 2 οριζόντιων κύκλων ($Rd\Theta$) αλλά δεν είναι το πάχος της "φέτας".

Επομένως η στοιχειώδης μάζα θα είναι: $dm = \rho\cdot dV$ όπου dV ο στοιχειώδης όγκος και ρ: η πυκνότητας μάζας του ημισφαιρίου.

Αλλά $dV = A\cdot dy = (\pi r^2)\cdot Rd\Theta\cos\Theta$ όπου dy είναι το πάχος (2) και A το εμβαδό του κύκλου που ορίζει τη βάση της "φέτας" (1)

$$\boxed{dm = \rho\,\pi(R\cos\Theta)^2 R\cos\Theta\, d\Theta}$$

Επομένως θα έχουμε: $Z_{cm} = \frac{1}{M}\int z\,dm = \frac{1}{M}\int_0^{\pi/2}\underbrace{(R\sin\Theta)}_{z}(\pi R^2\cos^2\Theta)\rho R\,d\Theta\cos\Theta$

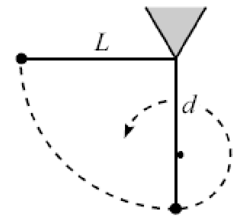
$$\Rightarrow Z_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^{\pi/2}\pi R^4\rho\cos^3\Theta\sin\Theta\, d\Theta = -\frac{\pi R^4\rho}{M}\int_1^0\cos^3\Theta\, d(\cos\Theta) = -\frac{\pi R^4\rho}{4M}(\cos^4\Theta)\Big|_1^0 \Rightarrow$$

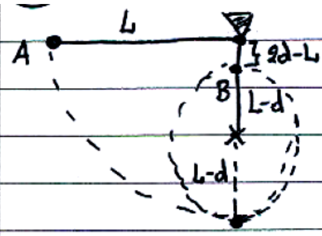
$$\Rightarrow Z_{cm} = -\frac{\pi R^4\rho}{4M}(0-1) \Rightarrow \boxed{Z = \frac{\pi\rho R^4}{4M}} \Bigg\} \Rightarrow \boxed{Z_{cm} = \frac{3}{8}R}$$

Αλλά η συνολική μάζα είναι $M = \rho V = \rho(\frac{2}{3}\pi R^3)$

Λόγω συμμετρίας $x_{cm} = y_{cm} = \phi$

4. Ένα εκκρεμές μήκους L κρατιέται αρχικά σε οριζόντια θέση και μετά αφήνεται ελεύθερο. Το νήμα του εκκρεμούς χτυπά κατά τη διαδρομή του σε ένα καρφί που βρίσκεται σε απόσταση d κάτω από το σημείο στήριξης του εκκρεμούς. Ποια είναι η μικρότερη τιμή της απόστασης d ώστε το νήμα να παραμένει πάντοτε τεντωμένο;





Η ακτίνα του κύκλου είναι $L-d$ όπου d το σημείο που βρίσκεται το καρφί από το χαμηλότερο σημείο της πτώσης του εκκρεμούς.

Επομένως το ύψος του υψηλότερου σημείου του κύκλου θα είναι: $L-2(L-d) = -L+2d = 2d-L$

Για να παραμένει το σχοινί πάντοτε τεντωμένο, θα πρέπει: η τάση του νήματος του εκκρεμούς να είναι $T \geq 0$. Αυτό γιατί οι δυνάμεις που ασκούνται στη μάζα του εκκρεμούς είναι το βάρος και η τάση του νήματος. Η συνισταμένη τους είναι η κεντρομόλος δύναμη:

(υψηλότερο σημείο) διεύθυνση προς τα κάτω

$$\Sigma F_y = m\frac{v^2}{R} = T + mg \Rightarrow \text{αν } T \geq 0 \Rightarrow \cancel{m}\frac{v^2}{R} \geq \cancel{m}g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v \geq \sqrt{gR} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v^2 \geq g(L-d)} \quad (1)$$

Διατήρηση της ενέργειας από το αρχικό σημείο A στο σημείο B δίνει: (θεωρώ την οριζόντια θέση σαν θέση μηδενικής δυναμικής ενέργειας)

$$U_i + E_{κιν}^{i} = U_f + E_{κιν}^{f} \Rightarrow 0 + 0 = mg\left(-(2d-L)\right) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = mgL - 2mgd + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 = \cancel{m}g(2d-L) \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}g(L-d) \leq g(2d-L) \Rightarrow g(L-d) \leq 2g(2d-L) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3L \leq 5d \Rightarrow \boxed{d \geq \frac{3}{5}L}$$