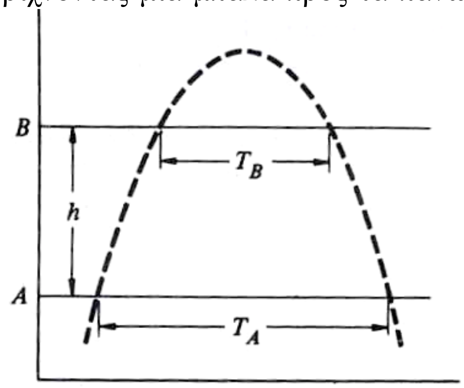
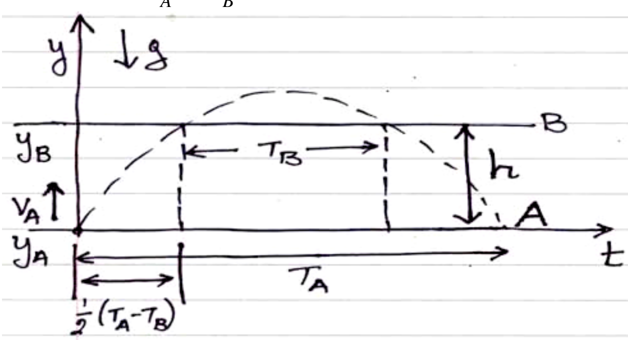
ΦΥΣ. 131
ΕΡΓΑΣΙΑ # 2

1. Η επιτάχυνση της βαρύτητας μπορεί να μετρηθεί ρίχνοντας μια μπάλα προς τα πάνω και μετρώντας το χρόνο που χρειάζεται να περάσει δύο σημεία τα οποία βρίσκονται σε συγκεκριμένο ύψος κατά την άνοδό της και την κάθοδό της. Να δείξετε ότι αν ο χρόνος που απαιτείται ώστε το σώμα να περάσει μια οριζόντια γραμμή A και από τις δυο κατευθύνσεις είναι T_A και ο χρόνος που χρειάζεται για να περάσει από μια οριζόντια γραμμή B και από τις δυο κατευθύνσεις είναι T_B τότε υποθέτοντας ότι η επιτάχυνση είναι σταθερή, το μέτρο της δίνεται από τη σχέση $g = \dfrac{8h}{T_A^2 - T_B^2}$, όπου h είναι το ύψος της γραμμής B πάνω από την A.





Η εξίσωση θέσης ενός σώματος που κινείται με σταθερή επιτάχυνση είναι:

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Οπότε θεωρώντας $y_0 = y_A$ όταν το σώμα ανεβαίνει:

$$y = y_A + V_A t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (1)$$

Όταν το σώμα ξαναπερνά από το σημείο A κατεβαίνοντας, η θέση από την (1) θα είναι $y = y_A$. Ο χρόνος που χρειάστηκε για να περάσει πάλι από το A είναι T_A, οπότε:

$$(1) \Rightarrow \cancel{y_A} = \cancel{y_A} + V_A T_A - \frac{1}{2} g T_A^2 \Rightarrow V_A \cancel{T_A} = \frac{1}{2} g T_A^{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{V_A = \frac{1}{2} g T_A}$$

Ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα να καλύψει το ύψος h και να φθάσει στο σημείο B είναι απλά $t = \frac{1}{2}(T_A - T_B)$.

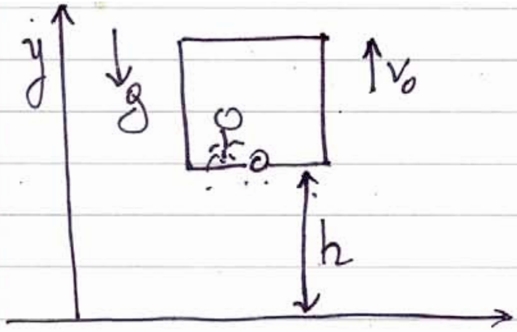
Επομένως και πάλι από την (1) αντικαθιστώντας V_A και $t = \frac{T_A - T_B}{2}$ θα έχουμε:

$$h = V_A \left(\frac{T_A - T_B}{2}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{T_A - T_B}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} g T_A \frac{(T_A - T_B)}{2} - \frac{1}{8} g \left(T_A^2 + T_B^2 - 2 T_A T_B\right)$$

$$\Rightarrow 8h = 2g T_A^2 - \cancel{2g T_A T_B} - g T_A^2 - g T_B^2 + \cancel{2g T_A T_B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 8h = g T_A^2 - g T_B^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{g = \frac{8h}{T_A^2 - T_B^2}}$$

2. Ένας ανελκυστήρας ξεκινώντας από το έδαφος αρχίζει να ανεβαίνει προς τα πάνω με ομοιόμορφη ταχύτητα. Τη στιγμή T_1 ένα αγόρι που βρίσκεται στον ανελκυστήρα ρίχνει μια μπάλα προς το έδαφος μέσω του δαπέδου του ανελκυστήρα. Η μπάλα πέφτει υπό την επίδραση της επιτάχυνσης της βαρύτητας, $g=9.8m/s^2$, και χτυπά στο έδαφος μετά από T_2 secs. Να βρεθεί το ύψος στο οποίο βρίσκεται ο ανελκυστήρας τη χρονική στιγμή T_1.



Η θέση της μπάλας σε μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή t δίνεται από:

$$y = h + V_0 (t - T_1) - \frac{1}{2} g (t - T_1)^2$$

Ουσιαστικά μετράμε το χρόνο ως προς T_1, τη στιγμή που το αγόρι άφησε τη μπάλα. Τη στιγμή εκείνη η μπάλα είχε αρχικό ύψος h, όσο και του ανελκυστήρα, και αρχική ταχύτητα όση και ο ανελκυστήρας και με φορά προς τα πάνω.

Τη στιγμή που χτυπά στο έδαφος έχουμε $y = 0$ και $t - T_1 = T_2$

Επομένως: $0 = h + V_0 T_2 - \frac{1}{2} g T_2^2$

Αφού ο ανελκυστήρας κινείται με $V_0 =$ σταθ $\Rightarrow h = V_0 \cdot T_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_0 = \frac{h}{T_1}$

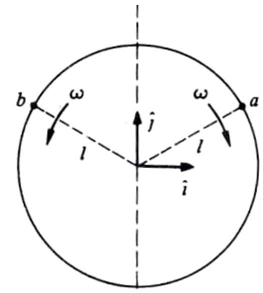
Αντικαθιστώντας έχουμε: $0 = h + \frac{h}{T_1} T_2 - \frac{1}{2} g T_2^2 \Rightarrow$

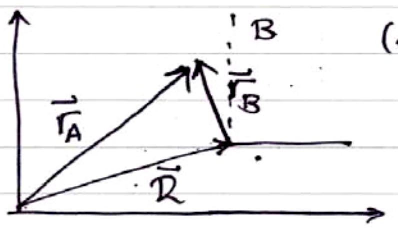
$$\Rightarrow h \left(\frac{T_1 + T_2}{T_1} \right) = \frac{1}{2} g T_2^2 \Rightarrow \boxed{h = \frac{1}{2} g \frac{T_2^2 T_1}{(T_1 + T_2)}}$$

3. Σχετική ταχύτητα ορίζουμε τη ταχύτητα ως προς ένα ορισμένο σύστημα συντεταγμένων (ο όρος ταχύτητα από μόνος του γίνεται αντιληπτός σχετικά με το σύστημα συντεταγμένων του παρατηρητή).

(α) Ένα σημείο Α παρατηρείται να έχει ταχύτητα V_A ως προς το σύστημα συντεταγμένων Α. Να βρεθεί η ταχύτητά του σχετικά με το σύστημα συντεταγμένων Β, το οποίο είναι μετατοπισμένο ως προς το Α κατά $\vec{R}$ (θεωρήστε ότι το $\vec{R}$ μπορεί να αλλάζει με το χρόνο).

(β) Δυο υλικά σημεία α και β κινούνται με κυκλική ταχύτητα ω και σε αντίθετες κατευθύνσεις πάνω σε μια κυκλική στεφάνη όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή t = 0 και τα δυο σώματα βρίσκονται στη θέση $\vec{r} = l\,\hat{j}$ όπου l η ακτίνα της κυκλικής στεφάνης. Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου α ως προς το β.



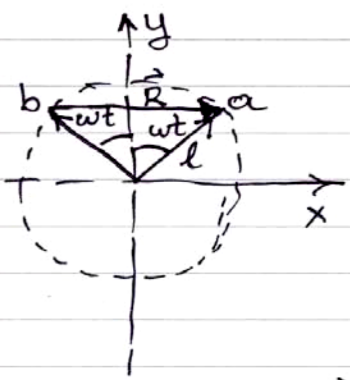


(a)

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{R} \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_A - \vec{\upsilon}_{\sigma\chi}$$



(b)

$$\vec{R} = 2l\sin(\omega t)\cdot\hat{\imath} \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = 2l\omega\cos(\omega t)\,\hat{\imath}$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + 2l\omega\cos(\omega t)\,\hat{\imath}$$

4. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, μια εξωτερική δύναμη της μορφής $F(t) = F_0\cos(\omega t)$ ασκείται σε κάποιο σώμα μάζας m. Αν η αρχική ταχύτητα και θέση του σώματος είναι u_0 και x_0 αντίστοιχα, να βρεθεί η $u(t)$ και $x(t)$.

Από το 2ο νόμο του Newton έχουμε: $F = ma \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_0 \cos\omega t = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{dt} = \int_0^t \frac{F_0}{m}\cos\omega t\, dt \Rightarrow$$

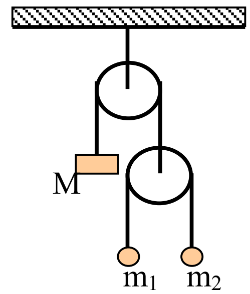
$$\Rightarrow v - v_0 = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\omega}\sin\omega t\Big|_0^t \Rightarrow \boxed{v(t) = v_0 + \frac{F_0}{m\omega}\sin\omega t}$$

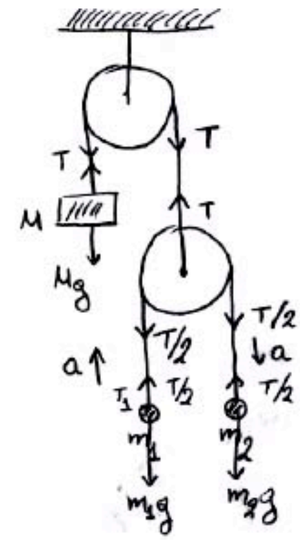
Αλλά $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v\,dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v\,dt \Rightarrow x - x_0 = \int_0^t \left(v_0 + \frac{F_0}{m\omega}\sin\omega t\right)dt$

$$\Rightarrow x - x_0 = v_0 t + \frac{F_0}{m\omega}\left(-\frac{1}{\omega}\right)\cos\omega t\Big|_0^t \Rightarrow x = x_0 + v_0 t - \frac{F_0}{m\omega^2}(\cos\omega t - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{F_0}{m\omega^2}\cos\omega t + \frac{F_0}{m\omega^2}}$$

5. Στη μηχανή Atwood του σχήματος, ποια θα πρέπει να είναι η τιμή της μάζας M ώστε το σύστημα να παραμένει ακίνητο; Θα πρέπει να εκφράσετε την απάντησή σας συναρτήσει των m_1 και m_2.





Οι τάσεις σχετίζονται όπως δείχνει το σχήμα

Από τη στιγμή που η μάζα M είναι σε ισορροπία

$$T = Mg$$

και τα νήματα που κρατούν τις μάζες m_1 και m_2 πρέπει να έχουν τάσεις $Mg/2$ (Θυμηθείτε από τη διάλεξη 8 σελ. 10)

$T_1 = T_2 = T_k$ άρα $T = T_1 + T_2 = 2T_k \Rightarrow$

$\Rightarrow T_k = \dfrac{T}{2} = \dfrac{Mg}{2}$.

Από την εξίσωση του 2ου νόμου του Newton για τις μάζες m_1 και m_2 έχουμε:

$$m_1: \quad T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \Rightarrow \frac{Mg}{2} - m_1 g = m_1 a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{Mg}{2m_1} - g \quad (1)$$

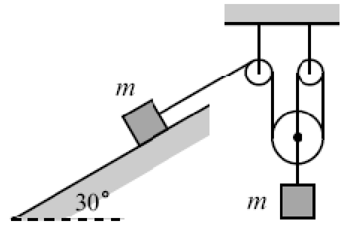
$$m_2: \quad T_2 - m_2 g = -m_2 a_2 \Rightarrow \frac{Mg}{2} - m_2 g = -m_2 a_2 \Rightarrow a_2 = -\frac{Mg}{2m_2} + g \quad (2)$$

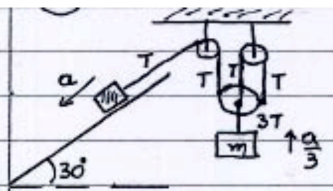
Αφού το νήμα είναι τεντωμένο τα 2 σώματα θα πρέπει να κινούνται με την ίδια επιτάχυνση και επομένως $a_1 = a_2$. Από (1) ∧ (2) έχουμε:

$$\frac{M\cancel{g}}{2m_1} - \cancel{g} = -\frac{M\cancel{g}}{2m_2} + \cancel{g} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right) = 2 \Rightarrow$$

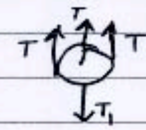
$$\Rightarrow M\left(\frac{\cancel{2}(m_2 + m_1)}{2\cancel{2}\, m_1 m_2}\right) = 2 \Rightarrow \boxed{M = \frac{4 m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$$

6. Θεωρείστε την μηχανή Atwood του παρακάτω σχήματος, με δυο μάζες m. Το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο και έχει κλίση 30° με την οριζόντια διεύθυνση. Βρείτε τις επιταχύνσεις των μαζών.





Αν η τάση στο σχοινί είναι T, τότε η τάση του σχοινιού από το οποίο κρέμεται το σώμα m (στη τελευταία τροχαλία) είναι 3T. Αυτό φαίνεται από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος:



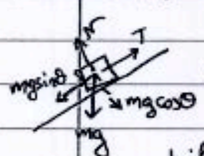
$T_1 - 3T = 0 \Rightarrow \boxed{T_1 = 3T}$

Από "διατήρηση του νήματος" αν η μάζα που κρέμεται κινηθεί προς τα πάνω κατά μια απόσταση d τότε η μάζα στο κεκλιμένο επίπεδο θα πρέπει να μετακινηθεί κατά μια απόσταση 3d. Αυτό γιατί η κίνηση της πρώτης μάζας θα δημιουργήσει ένα μήκος d στο μεσαίο σχοινί και το ίδιο μήκος d στο αριστερό και δεξί σχοινί. Άρα εμφανίζεται ένα μήκος σχοινιού 3d κατά το οποίο θα πρέπει να μετακινηθεί η μάζα στα αριστερά (πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο).

Επομένως αν η μάζα στο κεκλιμένο επίπεδο έχει επιτάχυνση a_1 τότε η κρεμάμενη μάζα θα έχει επιτάχυνση $|a_1|/3 = a_2$

Θυμηθείτε ότι $a_2 = \frac{d}{dt}v = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}x_2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{x_1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_1}{dt}\right) = \frac{1}{3}a_1.$

Στη μάζα στο κεκλιμένο επίπεδο ενεργεί το βάρος και η αντίδραση, όπως επίσης και η τάση T του σχοινιού:



$$\left.\begin{aligned} &\text{μάζα 1}: \Sigma F_x = ma_1 = mg\sin\theta - T \Rightarrow mg\frac{1}{2} - T = ma_1 \\ &\text{μάζα 2}: \Sigma F_y = -ma_2 = mg - T_1 \Rightarrow mg - 3T = -ma_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} mg - 2T &= 2ma_1 \\ mg - 3T &= -m\frac{a_1}{3} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\times 3 \\ &\times 2 \end{aligned} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3mg - 6T &= 6ma_1 \\ 2mg - 6T &= -\frac{2ma_1}{3} \end{aligned}\right\} \overset{(-)}{\Rightarrow} \cancel{m}g = 6\cancel{m}a_1 + \frac{2}{3}\cancel{m}a_1$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{3}{20}g}$$

Η μάζα 2 κινείται επομένως με $a_2 = \frac{a_1}{3} \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{1}{20}g}$

Η διεύθυνση των 2 επιταχύνσεων είναι όπως στο σχήμα

7. Ένας κουβάς με νερό έχει μάζα 4.80kgr και επιταχύνεται προς τα πάνω με ένα σχοινί αμελητέας μάζας, του οποίου το όριο αντοχής χωρίς να σπάσει είναι 75.0N. Βρείτε ποια είναι η μέγιστη επιτάχυνση προς τα πάνω που μπορεί να δοθεί στο κουβά χωρίς να σπάσει το σκοινί.

(α)

$\Sigma F = T - mg$ (θεωρούμε τη διεύθυνση προς τα πάνω θετική)

(β)

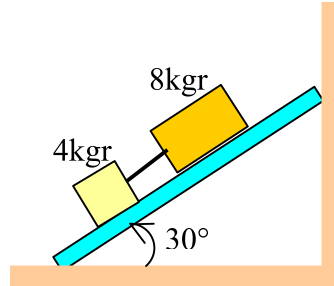
$\Sigma F = ma \Rightarrow T - mg = ma \Rightarrow ma = T - mg \Rightarrow ma \leq 75 - mg$

$T = 75N$ η μέγιστη τάση του νήματος πριν σπάσει

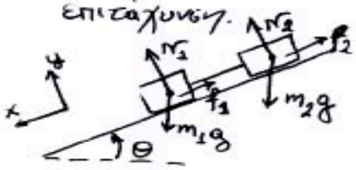
Επομένως $ma \leq 75 - mg \Rightarrow 4.8a \leq 75 - 4.8 \cdot 9.8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a \leq 5.83 \ m/sec^2}$

8. Δυο τούβλα με μάζα 4kgr και 8kgr αντίστοιχα συνδέονται με ένα νήμα αμελητέας μάζας και σέρνονται προς τη βάση ενός κεκλιμένου επιπέδου κλίσης 30° ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Ο συντελεστής τριβής κίνησης μεταξύ του τούβλου μάζας 4kgr και του επιπέδου είναι 0.25 ενώ ο αντίστοιχος συντελεστής για το δεύτερο τούβλο είναι 0.35. (α) Να βρεθεί η επιτάχυνση κάθε τούβλου ξεχωριστά. (β) Να υπολογιστεί η τάση του νήματος. (γ) Τι θα συμβεί αν εναλλάξουμε τις θέσεις των δυο τούβλων, ώστε το τούβλο μάζας 8kgr να βρίσκεται στην κάτω μεριά και αυτό των 4kgr στην πάνω μεριά;



(α) Αν δεν υπήρχε το σχοινί που συνδέει τα δύο τούβλα, τότε το κιβώτιο με τη μικρότερη μάζα θα επιταχύνονταν γρηγορότερα, γιατί ο συντελεστής τριβής μ είναι μικρότερος (μπορείτε να αποδείξετε γρήγορα ότι η επιτάχυνση ενός και μόνο κιβωτίου σε κεκλιμένο επίπεδο δίνεται από $g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$). Έτσι το σχοινί θα παραμένει τεντωμένο και τα δύο κιβώτια θα κινούνται με την ίδια επιτάχυνση.



Αναλύουμε τις δυνάμεις σε άξονες x και y παράλληλο και κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο. Στη διεύθυνση y δεν υπάρχει κίνηση και η συνισταμένη δύναμη είναι $\emptyset$. Επομένως θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} N_1 - m_1 g\cos\theta = \emptyset \\ N_2 - m_2 g\cos\theta = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} N_1 = m_1 g\cos\theta \\ N_2 = m_2 g\cos\theta \end{array}$$

Οι δυνάμεις τριβής f_1 και f_2 θα είναι επομένως: $\left\{\begin{array}{l} f_1 = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g\cos\theta \\ f_2 = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g\cos\theta \end{array}\right.$

Θεωρώντας το σύστημα των δύο τούβλων σαν ένα σύστημα, θα δρα πάνω του μια δύναμη $F = ma$ όπου $m = m_1 + m_2$. Επομένως:

$$F = ma = (m_1+m_2)a = (m_1 g\sin\theta - f_1) + (m_2 g\sin\theta - f_2) \Rightarrow$$

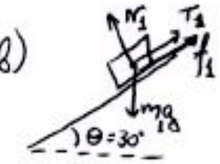
Σημειωτέον ότι η τάση του σχοινιού δεν εισέρχεται γιατί είναι εσωτερική δύναμη του συστήματος αυτού.

$$\Rightarrow (m_1+m_2)a = m_1 g\sin\theta - \mu_1 m_1 g\cos\theta + m_2 g\sin\theta - \mu_2 m_2 g\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (8+4)a = 9.8\cdot\sin 30°(8+4) - 9.8\cdot\cos 30°(0.25\cdot 4 + 0.35\cdot 8) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 2.21\ m/s^2}$$

→ συνέχεια

(β) 

Αυτό είναι το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το τούβλο μάζας 4kgr σα ένα σύστημα. Παρατηρήστε ότι τώρα η τάση T_1 του σχοινιού είναι εξωτερική δύναμη για το τούβλο και επομένως πρέπει να τη λάβαμε υπόψην.

Η συνισταμένη δύναμη κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου είναι:

$$F = m_1 a = m_1 g \sin\theta - T_1 - f_1 = m_1 g \sin\theta - T_1 - \mu_1 m_1 g \cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1 = -m_1 a + m_1 g(\sin\theta + \mu_1 \cos\theta) \Bigg\} \Rightarrow$$

Αλλά βρήκαμε στο (α) ότι η επιτάχυνση είναι $a = 2.21 m/s^2$

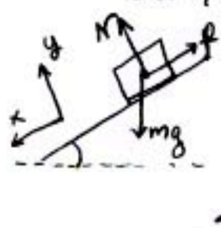
$$T_1 = -4 \cdot 2.21 + 4 \cdot 9.8(\sin 30^\circ + 0.25 \cos 30^\circ) \Rightarrow \boxed{T_1 = 2.27 N}$$

Η απάντηση μπορεί να επιβεβαιωθεί γράφοντας την αντίστοιχη $F = m \cdot a$ εξίσωση για το τούβλο μάζας 8kgr.

(γ) Αν εναλλάξουμε τις θέσεις των 2 τούβλων, το μικρό τούβλο βρίσκεται τώρα στην πίσω θέση και θα φθάσει το μεγαλύτερης μάζας τούβλο γιατί επιταχύνεται γρηγορότερα (ο συντελεστής τριβής είναι μικρότερος). Το σχοινί επομένως θα χαλαρώσει και τα δύο τούβλα θα συγκρουστούν.

Η επιτάχυνση του μικρού τούβλου είναι $g(\sin\theta - \mu_1 \cos\theta) = \boxed{2.78 m/s^2}$

ενώ η επιτάχυνση του μεγάλου τούβλου είναι $g(\sin\theta - \mu_2 \cos\theta) = \boxed{1.93 m/s^2}$

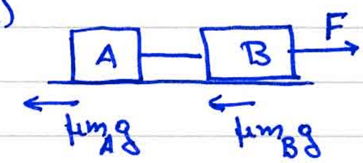


Η τάση δεν υπάρχει αφού όπως γράψαμε, το σχοινί είναι χαλαρό

$$\Sigma F_x = \cancel{m_1} a_1 = \cancel{m_1} g \sin\theta - \mu_1 \cancel{m_1} g \cos\theta \Rightarrow \boxed{a_1 = g(\sin\theta - \mu_1 \cos\theta)}$$

9. Δυο κιβώτια συνδέονται με ένα σχοινί και βρίσκονται πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια όπως στο σχήμα. Το κιβώτιο A έχει μάζα m_A ενώ το κιβώτιο B έχει μάζα m_B. Ο συντελεστής της κινητικής τριβής μεταξύ του κάθε κιβωτίου και της οριζόντιας επιφάνειας είναι μ_κ. Τα κιβώτια σύρονται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα εξαιτίας μιας οριζόντιας δύναμης F. Συναρτήσει των m_A, m_B και μ_κ υπολογίστε (α) το μέτρο της δύναμης F και (β) τη τάση στο σχοινί που συνδέει τα κιβώτια. Να συμπεριλάβετε τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος ή οποιαδήποτε διαγράμματα χρησιμοποιείτε για να προσδιορίσετε τις απαντήσεις σας.

(α)

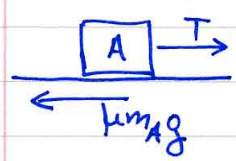


Θεωρίστε ολόκληρο το σύστημα και δείτε τις εξωτερικές δυνάμεις στην οριζόντια διεύθυνση. Η δύναμη F είναι προς τα δεξιά, ενώ οι δύο δυνάμεις τριβών είναι προς τα αριστερά

Η οριζόντια επιτάχυνση είναι μηδέν αφού το σύστημα κινείται με σταθερή ταχύτητα. Άρα έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 = ma_x \Rightarrow F - \mu m_A g - \mu m_B g = 0 \Rightarrow \boxed{F = \mu(m_A + m_B)g}$$

(β) Μπορείτε να θεωρήσετε ένα οποιοδήποτε κιβώτιο, έστω το A. Οι οριζόντιες δυνάμεις που δρουν πάνω του είναι η τάση του σχοινιού και η τριβή:

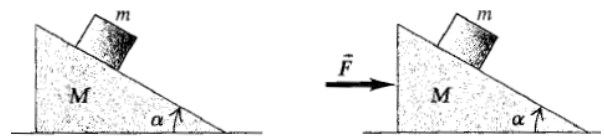


Ξέρουμε ότι $a_x = 0$ άρα $\Sigma F_x^A = 0 \Rightarrow$

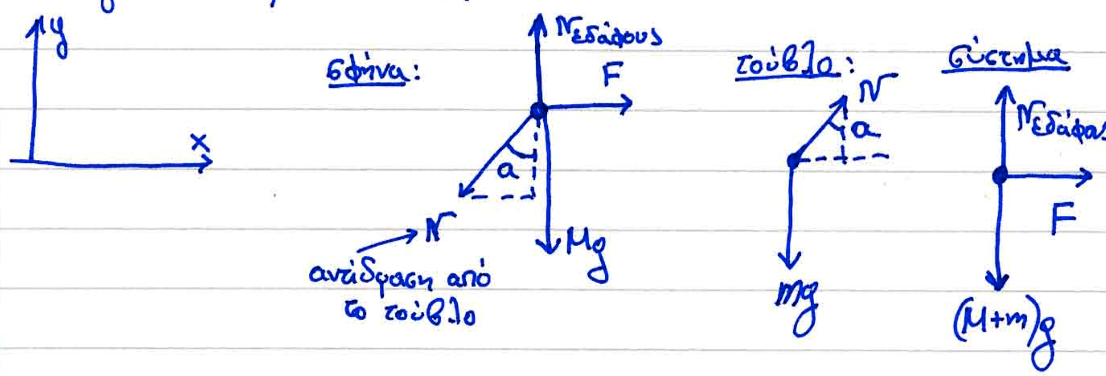
$$\Rightarrow T - \mu m_A g = 0 \Rightarrow \boxed{T = \mu m_A g}$$

Είναι αδύνατο να βρούμε τη T κοιτάζοντας όλο το σύστημα, γιατί η T είναι εσωτερική δύναμη. Για να βρούμε τη T, θα πρέπει η δύναμη T να είναι εξωτερική δύναμη στο υπο-σύστημα σωμάτων που εξετάζουμε.

10. Μια σφήνα μάζας M μένει ακίνητη πάνω σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια. Ένα τούβλο μάζας m τοποθετείται πάνω στη σφήνα και μια οριζόντια δύναμη F εξασκείται στη σφήνα όπως στο διπλανό σχήμα. Ποιο πρέπει να είναι το μέτρο της δύναμης F αν θέλουμε το τούβλο να παραμένει σε σταθερό ύψος πάνω από την επιφάνεια;



Τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος για τα δύο σώματα ξεχωριστά και για ολόκληρο το σύστημα είναι τα ακόλουθα:



Το τούβλο δεν έχει επιτάχυνση στη διεύθυνση y και επομένως $a_y = 0$

Οπότε $\Sigma F_y = ma_y = 0 = N_y - mg \Rightarrow N_y = mg \Rightarrow N\cos a = mg$

Στη x-διεύθυνση: $\Sigma F_x = ma_x = N_x \Rightarrow ma_x = N\sin a$.

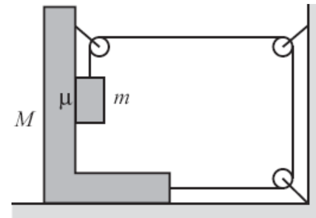
$$\Rightarrow \cancel{m}a_x = \frac{\cancel{m}g}{\cos a}\sin a \Rightarrow \boxed{a_x = g\tan a}$$

Η επιτάχυνση αυτή όμως είναι η επιτάχυνση όλου του συστήματος:

$$\Sigma F_x = M_{συσ} * a_x \Rightarrow \boxed{\Sigma F_x = (M+m)\, g \tan a = F}$$

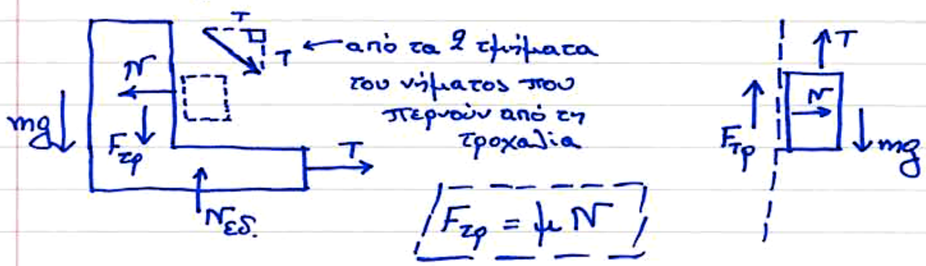
11. Θεωρήστε το σύστημα τροχαλιών του παρακάτω σχήματος (οι τροχαλίες και σχοινιά θεωρούνται αβαρή). Το σώμα σε σχήμα L έχει μάζα M, ενώ το άλλο σώμα έχει μάζα m, και ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ των δυο σωμάτων είναι μ. Το έδαφος είναι λείο.

(α) Σχεδιάστε τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος για τα δυο σώματα. Θα πρέπει να συμπεριλάβετε όλες τις δυνάμεις. (β) Να βρεθεί η επιτάχυνση του σώματος με το L-σχήμα.



(α) Έστω T η τάση στο σχοινί (είναι η ίδια παντού αφού το νήμα είναι αβαρές όπως και οι τροχαλίες)

Τα διαγράμματα ελευθέρων σωμάτων είναι:



$$\boxed{F_{τρ} = \mu N}$$

(β) Η F_y εξίσωση για το L-σώμα δεν βοηθά. Επομένως χρησιμοποιούμε τις τρεις εξισώσεις:

(1) F_x για τη μάζα M: $2T - N = Ma$

(2) F_x για τη μάζα m: $N = ma$

αυτές οι a είναι ίσες εφόσον τα σώματα είναι σε επαφή.

(3) F_y για τη μάζα m: $mg - T - \mu N = m a_y = m(2a)$

Η επιτάχυνση $a_y = 2a$ λόγω "διατήρησης του νήματος". Αν η M κινείται απόσταση d στα δεξιά, τότε συνολικό μήκος 2d του νήματος εξαφανίζεται από την οριζόντια διεύθυνση (κάτω κ πάνω τμήμα) $\Rightarrow$ 2d μήκος πρέπει να εμφανιστεί στο κατακόρυφο τμήμα πάνω από τη μάζα m

Η (1) κ (2) δίνουν: $2T - ma = Ma \Rightarrow T = \frac{1}{2}(M+m)a$

Αντικαθιστώντας στην (3) $\Rightarrow mg - \frac{1}{2}(M+m)a - \mu(ma) = m(2a) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2mg = \left((M+m) + 2\mu m + 4m\right)a \Rightarrow \boxed{a = \frac{2mg}{M+(5+2\mu)m}}$$

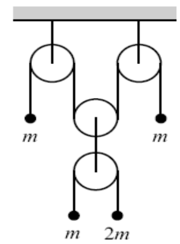
για $m \to 0$, $a \to 0$

12. Θεωρήστε τη μηχανή Atwood του διπλανού σχήματος, με μάζες m, m, m, και 2m.

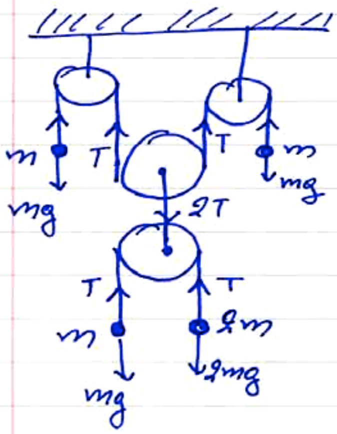
(α) Να γράψετε τις τέσσερεις F=ma εξισώσεις. Θεωρήστε σα θετική τη διεύθυνση προς τα πάνω για όλες τις μάζες.

(β) Χρησιμοποιήστε διατήρηση του νήματος για να βρείτε μια σχέση μεταξύ των τεσσάρων επιταχύνσεων.

(γ) Βρείτε τις επιταχύνσεις και των τεσσάρων μαζών.



(α) Έστω T η τάση στο ψηλότερο σχοινί. Επομένως η τάση που συνδέει τις 2 χαμηλότερες τροχαλίες θα είναι 2T και έτσι η τάση στο χαμηλότερο σχοινί θα είναι T



Επομένως οι εξισώσεις F=ma για όλες τις m-μάζες θα είναι: (όλες έχουν ίδια επιτάχ.)

$$T - mg = ma_i$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a$$

Για τη μάζα 2m η εξίσωση θα είναι:

$$T - 2mg = 2ma_4$$

(β) Έστω ότι οι 2 μάζες στις υψηλότερες τροχαλίες είναι 1 και 2 ενώ οι μάζες στις κατώτερες τροχαλίες είναι 3 και 4.

Επομένως θα έχουμε: $-\frac{a_1+a_2}{2} = \frac{a_3+a_4}{2}$ γιατί κάθε μιά από τις εκφράσεις ισούται με την επιτάχυνση των 2 χαμηλότερων τροχαλιών.

Αυτό ισχύει επειδή το μέσο ύψος των δύο χαμηλότερων μαζών (3 & 4) βρίσκεται σε συγκεκριμένο ύψος από την χαμηλότερη τροχαλία

Αν η μάζα "1" ανεβαίνει κατά y_1 και η μάζα "2" ανεβαίνει κατά y_2, τότε οι δύο χαμηλότερες τροχαλίες πέφτουν κατά $(y_1+y_2)/2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)$$

τόσο παραπάνω σχοινί εμφανίζεται στο μέσο

Από τη στιγμή που $a_1 = a_2 = a_3 \equiv a \Rightarrow$

$$-\left(\frac{a+a}{2}\right) = \frac{a+a_4}{2} \Rightarrow \boxed{a_4 = -3a}$$

Προσέξτε ότι η "διατήρηση του νήματος" δεν έχει να κάνει με τις μάζες