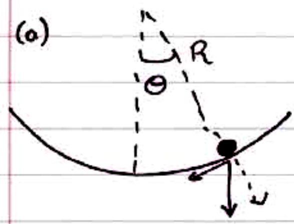
ΦΥΣ. 131
ΕΡΓΑΣΙΑ # 11

1. (α) Ένα μικρό σώμα πηγαινοέρχεται γλιστρώντας στο κατώτερο μέρος ενός κυλινδρικού αυλακιού ακτίνας R. Ποια είναι η περίοδος των ταλαντώσεων του σώματος; (το πλάτος των ταλαντώσεων είναι μικρό – μικρές ταλαντώσεις).
(β) Μια μικρή σφαίρα (με ροπή αδράνειας $I=(2/5)MR^2$) κυλά χωρίς ολίσθηση στο κατώτερο μέρος του κυλινδρικού αυλακιού όπως και στο (α) υποερώτημα. Ποια είναι η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων της μάζας;

(α)



F = ma στην εφαπτομενική διεύθυνση: ⇒

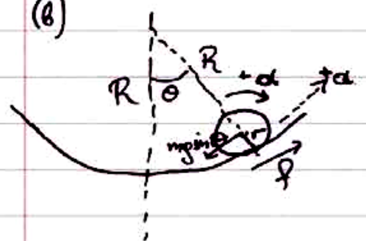
$-mg\sin\theta = ma \Rightarrow -mg\sin\theta = m(R\ddot{\theta}) \Rightarrow$

$\Rightarrow -g\sin\theta = R\ddot{\theta}$ Αλλά για μικρές γωνίες θ

$\sin\theta \simeq \theta$ οπότε:

$-g\theta = R\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{R}\theta \Rightarrow \boxed{\omega=\sqrt{\frac{g}{R}}}$

(β)



Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα και επηρεάζουν τη κίνηση είναι $mg\sin\theta$ και η τριβή f

• Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα στην εφαπτομενική διεύθυνση: $\boxed{f - mg\sin\theta = ma}$ (1)

• Η ροπή ως προς το κέντρο της σφαίρας: $\tau = -f\cdot r = I\alpha$

Η ροπή είναι αρνητική για θετική f σύμφωνα με τα πρόσημα που διάλεξα

$\Rightarrow -f\cancel{r} = \frac{2}{5}m r^{\cancel{2}}\left(\frac{a}{\cancel{r}}\right) \Rightarrow f = -\frac{2}{5}ma$

Επομένως η εξίσωση (1) θα δώσει: $-\frac{2}{5}\cancel{m}a - \cancel{m}g\sin\theta = \cancel{m}a \Rightarrow$

$\Rightarrow -g\sin\theta = \frac{7}{5}a \xRightarrow{\sin\theta\simeq\theta} -g\theta = \frac{7}{5}(R\ddot{\theta}) \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{5}{7}\frac{g}{R}\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{5}{7}\frac{g}{R}}}$

* Η επιτάχυνση $a = r\alpha$ και επίσης $a = R\ddot{\theta}$

Η σφαίρα που κυλά ταλαντώνεται πιό αργά από το σώμα που γλιστρά. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η τριβή ελαττώνει την επιτάχυνση. Η τριβή πρέπει να υπάρχει γιατί είναι η μόνη δύναμη που μπορεί να δώσει ροπή ώστε να κυλίσει η σφαίρα. Ένας άλλος λόγος για να εξηγήσουμε αυτή τη μικρότερη περίοδο είναι ενεργειακά. Ένα μέρος της ενέργειας δαπανάται στην περιστροφή της μπάλας.

2. Ένα σώμα που κρέμεται από ένα ελατήριο ταλαντώνεται με μια γωνιακή συχνότητα ω. Το ελατήριο κρέμεται από την οροφή ενός ανελκυστήρα και είναι ακίνητο σχετικά με τον θάλαμο του ανελκυστήρα καθώς ο θάλαμος κατεβαίνει με μια σταθερή ταχύτητα υ. Ο θάλαμος του ανελκυστήρα σταματά κατόπιν απότομα. (α) Με τι πλάτος ταλαντώνεται το σώμα; (β) Ποια είναι η εξίσωση κίνησης του σώματος; (Διαλέξτε την διεύθυνση προς τα πάνω σα τη θετική φορά του κατακόρυφου άξονα).

(α) Η μέγιστη ταχύτητα είναι $\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow \boxed{A = \frac{\upsilon_{max}}{\omega} = \frac{\upsilon}{\omega}}$

(β) Η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι: $\boxed{x = -A \sin\omega t = -\frac{\upsilon}{\omega} \sin\omega t}$

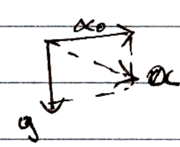
3. Ένα απλό εκκρεμές έχει μήκος 5.0m. (α) Ποια είναι η περίοδος μικρών ταλαντώσεων αυτού του εκκρεμούς αν βρίσκεται μέσα σε ανελκυστήρα ο οποίος επιταχύνεται προς τα επάνω με επιτάχυνση 5.0m/sec^2. (β) Ποια η περίοδος αν ο ανελκυστήρας κατεβαίνει με επιτάχυνση προς τα κάτω 5.0m/sec^2. (γ) Ποια η περίοδος αν τοποθετηθεί μέσα σε ένα φορτηγό το οποίο επιταχύνεται οριζόντια με επιτάχυνση 5.0m/sec^2;

(α) Η τάση του νήματος πρέπει να κρατά το βάρος του σώματος του εκκρεμούς, και να το επιταχύνει προς τα πάνω. Πρέπει να δημιουργεί επίσης την δύναμη επαναφοράς, ακριβώς σαν να ήταν ο θάλαμος του ανελκυστήρα σε ηρεμία σε ένα βαρυτικό πεδίο με επιτάχυνση $g + 5 m/sec^2$.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{5}{14.8}} \Rightarrow \boxed{T = 3.65 s.}$$

(β) $T = 2\pi\sqrt{\frac{5}{(9.8-5)}} = \boxed{6.41 sec}$

(γ) Στην περίπτωση αυτή η ενεργός επιτάχυνση είναι



$$\alpha_{op} = \sqrt{g^2 + \alpha_{op}^2} \Rightarrow \alpha = \sqrt{9.8^2 + 5^2} \Rightarrow \alpha = 11.0 m/sec^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5}{11.0}} \Rightarrow \boxed{T = 4.24 m}$$

4. Ένα απλό εκκρεμές μήκους *l* κρέμεται έξω στον αέρα. Ο αέρας δίνει μια σταθερή οριζόντια δύναμη $F_α$. Θεωρήστε τα $F_α$, m, *l* και g ως δεδομένα.

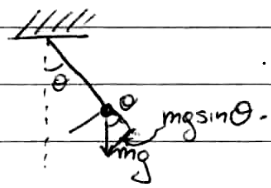
(α) Ποια είναι η ολική εφαπτομενική δύναμη στο εκκρεμές; Μπορείτε να υποθέσετε ότι η δύναμη του αέρα είναι μικρή εν συγκρίσει της δύναμης της βαρύτητας.

(β) Για κάποια απόκλιση θ, δεν υπάρχει δύναμη. Καλέστε την γωνία αυτή $θ_0$. Αυτό είναι το σημείο ισορροπίας του εκκρεμούς. Χρησιμοποιήστε την απάντησή σας από το ερώτημα (α) ώστε να βρείτε μια σχέση μεταξύ των m, g, $F_α$ και $θ_0$. (Χρησιμοποιήστε ότι $\cos θ_0 \sim 1$, $\sin θ_0 \sim θ_0$).

(γ) Επεκταθείτε γύρω από το $θ_0$. (π.χ. γράψτε $θ=θ_0+x$). Χρησιμοποιήστε τα ευρήματα από τα ερωτήματα (α) και (β) για να καταλήξετε σε μια διαφορική εξίσωση για το x.

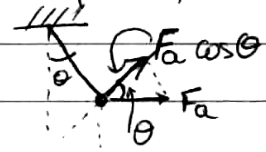
(δ) Ποια είναι η συχνότητα των ταλαντώσεων;

(α)



Η βαρύτητα προσδίδει μια εφαπτομενική δύναμη ίση με $-mg\sin\theta$. (Όπου θεωρώ τη διεύθυνση στα αριστερά σαν αρνητική).

Ο αέρας προσδίδει μια εφαπτομενική δύναμη ίση με $+F_a\cos\theta$



Επομένως $F_{εφ} = F_a\cos\theta - mg\sin\theta$

Taylor μικρό

Για μικρά $\theta \Rightarrow F_{εφ} = F_a\left(1 - \cancel{\frac{\theta^2}{2!}}\right) - mg\theta \Rightarrow \boxed{F_{εφ} = F_a - mg\theta}$

(β) Στο σημείο ισορροπίας $F_{εφ} = 0 \Rightarrow \boxed{F_a = mg\theta_0}$

(γ) $$F_{εφ} = m\frac{d^2s}{dt^2} = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = ml\frac{d^2}{dt^2}(\theta_0 + x) = ml\left(\frac{d^2\theta_0}{dt^2} + \frac{d^2x}{dt^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{εφ} = ml\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) \quad (A)$$

Αλλά $F_{εφ} = F_a - mg\theta = F_a - mg(\theta_0 + x) = F_a - mg\theta_0 - mgx \overset{(β)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow F_{εφ} = \cancel{F_a} - \cancel{F_a} - mgx \Rightarrow F_{εφ} = -mgx \quad (B).$$

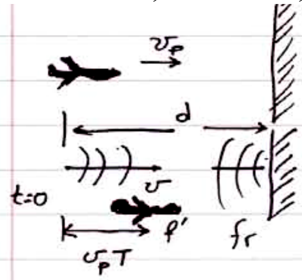
Από (Α) ∧ (Β) έχουμε: $\cancel{m}\ell\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -\cancel{m}gx \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}x}$ (Γ)

(δ) Συγκρίνουμε το παραπάνω αποτέλεσμα (Γ) με την εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή που είναι: $\frac{d^2x}{dx^2} = -\omega^2 x$

Βλέπουμε αμέσως ότι $\omega^2 = \frac{g}{\ell} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \Rightarrow 2\pi f = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}}$$

5. Ένα αεροπλάνο υψηλής τεχνολογίας είναι εφοδιασμένο με ηχοβολιστικό (sonar) και με μετρητή ταχύτητας πετάει με σταθερή ταχύτητα ευθύγραμμα προς ένα τοίχο από τούβλα. Τη χρονική στιγμή t=0 εκπέμπει ένα βραχύ κυματικό παλμό συχνότητας f. Σε χρόνο t=T λαμβάνει την ηχώ συχνότητας f_r. Έστω η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι υ και η ταχύτητα του αεροπλάνου είναι $υ_p$. (α) Βρείτε μια εξίσωση της $υ_p$ συναρτήσει των f, f_r και υ. (β) Έστω ότι d παριστάνει την απόσταση μεταξύ του αεροπλάνου και του τοίχου, όταν t=0. Βρείτε μια εξίσωση του d συναρτήσει των υ, $υ_p$ και T, και μετά χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α), εκφράστε το d συναρτήσει των f, f_r, $υ_p$ και T. (γ) Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (α) και (β) για να βρείτε το d_r, που παριστάνει την απόσταση μεταξύ του αεροπλάνου και του τοίχου όταν t=T. Εκφράστε το d_r συναρτήσει των f, f_r, υ, και T. (δ) Εκτιμήστε τα $υ_p$, d, και d_r για την ακόλουθη περίπτωση: υ = 340 m/s, f=5000Hz, f_r=5280 Hz και T=0.275s.



(α)

$$\left.\begin{aligned} f_r &= f\left(\frac{1}{1-\frac{v_p}{v}}\right) \\ f_r' &= f_r\left(1+\frac{v_p}{v}\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow f_r' = f\left(\frac{\cancel{v}}{v-v_p}\right)\left(\frac{v+v_p}{\cancel{v}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f_r' = f\,\frac{v+v_p}{v-v_p}} \qquad (1)$$

$$(\beta)\quad v=\frac{S}{T} \Rightarrow S = vT \Rightarrow 2d - v_pT = vT \Rightarrow \boxed{d=(v_p+v)\frac{T}{2}} \quad (2)$$

Από την (1) $f'(v-v_p)=f(v+v_p) \Rightarrow v_p(f'+f)=v(f'-f)\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{v_p = \frac{f'-f}{f'+f}\,v} \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε: $d=\left(\frac{f'-f}{f'+f}v+v\right)\frac{T}{2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow d=\frac{vT}{2}\left(\frac{f'-\cancel{f}+f'+\cancel{f}}{f'+f}\right)\Rightarrow d=\frac{vT}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}f'}{f'+f}\Rightarrow \boxed{d=\frac{vTf'}{f'+f}}$$

$$(\gamma)\quad d_r = d - v_pT = \frac{vTf'}{f'+f} - vT\left(\frac{f_r'-f}{f'+f}\right) \Rightarrow d_r = vT\left[\frac{\cancel{f'}-\cancel{f'}+f}{f'+f}\right]\Rightarrow$$

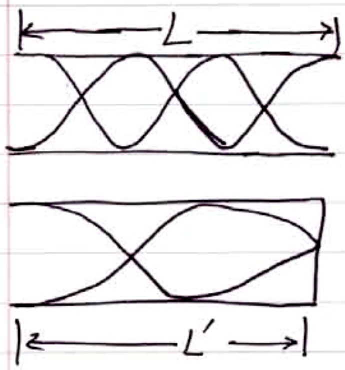
$$\Rightarrow \boxed{d = vT\,\frac{f}{f'+f}}$$

(δ) $v=340\,m/s \qquad f=5000\,Hz \qquad f_r'=5280\,Hz \qquad T=0.275\,s$

$$v_p = 340\left[\frac{5280-5000}{5280+5000}\right]=9.26\,m/s \qquad d=340\cdot 0.275\left(\frac{5280}{10280}\right)=48.02\,m$$

$$d_r = 340\cdot 0.275\,\frac{5000}{10280} \Rightarrow d_r = 45.48\,m$$

6. Η συχν ότητα της τρίτης αρμονικής ενός σωλήνα μουσικού οργάνου, ο οποίος είναι ανοιχτός και στα δύο άκρα, είναι ίση με τη συχνότητα της τρίτης αρμονικής ενός άλλου σωλήνα που είναι κλειστός στο ένα άκρο. (α) Βρείτε το λόγο του μήκους του κλειστού σωλήνα προς το μήκος του ανοικτού σωλήνα. (β) Αν η θεμελιώδης συχνότητα του ανοιχτού σωλήνα είναι 256Hz, ποιο είναι το μήκος καθενός σωλήνα; (Χρησιμοποιήστε σαν δεδομένο ότι υ = 340 m/s)



$$\upsilon = \lambda f$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3\lambda}{2} = L \Rightarrow f_3 = \dfrac{3\upsilon}{2L} = 3f_1 \\ \dfrac{3\lambda}{4} = L' \Rightarrow f_3' = \dfrac{3\upsilon}{4L'} \end{array}\right\} \Rightarrow f_3 = f_3' \Rightarrow$$

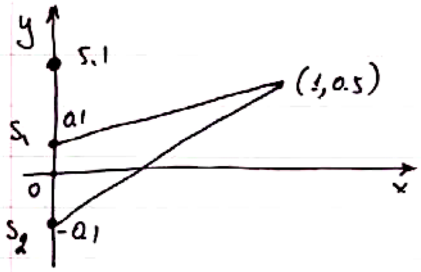
$$\Rightarrow \frac{\cancel{3\upsilon}}{\cancel{2}L} = \frac{\cancel{3\upsilon}}{\cancel{2}\,2L'} \Rightarrow \boxed{L' = \frac{L}{2}}$$

$f_1 = 256Hz$ & $\upsilon = 340m/sec$

Οπότε $f_3 = 3f_1 \Rightarrow f_3 = 3 \cdot 256 = 768 = \dfrac{3\upsilon}{2L} \Rightarrow L = \dfrac{3 \times 340}{768} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{L = 0.65m}$ οπότε $\boxed{L' = 0.325m}$

7. Δύο ίδιες ηχητικές πηγές βρίσκονται κατά μήκος του άξονα y. Η πηγή S_1 βρίσκεται στο σημείο (0,0.1)m και η πηγή S_2 στο σημείο (0,-0.1)m. Οι δύο πηγές εκπέμπουν ισότροπα σε συχνότητα 1715 Hz και το πλάτος καθενός κύματος ξεχωριστά υποτίθεται ότι είναι A. Ένας ακροατής βρίσκεται πάνω στον άξονα y και σε απόσταση 5m από την πηγή S_1. (α) Ποια είναι η διαφορά φάσης μεταξύ των ηχητικών κυμάτων στη θέση του ακροατή; (β) Ποιο είναι το πλάτος του συνιστάμενου κύματος στη θέση του ακροατή; (Χρησιμοποιήστε σα δεδομένο ότι η υ=343 m/s).



Η διαφορά διαδρομής (Δr) και η διαφορά φάσης (Δφ) είναι:

$$\frac{\Delta r}{\lambda} = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \Rightarrow \Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta r}{\lambda} \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi f}{\upsilon}\Delta r$$

$$\Delta r = (5.1+0.1) - (5.1-0.1) = 0.2m$$

$$\Rightarrow \Delta\phi = \frac{6.28 * 1715 * 0.2}{343} \Rightarrow \Delta\phi = 6.28\,rad$$

Οπότε $A' = 2A\cos\frac{\phi}{2} = 1.99A$

(β) $2A\cos\frac{\phi}{2} = 2A = 2A\cos 2n\pi \Rightarrow \phi = 2n\pi \Rightarrow \cancel{2}n\cancel{\pi} = \frac{\cancel{2\pi} f}{\upsilon}\Delta r \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{f = \frac{n\upsilon}{\Delta r}}$ ενίσχυση

$2\cos\frac{\phi}{2} = 0 = 2A\cos\frac{2n+1}{2}\pi \Rightarrow \frac{\phi}{\cancel{2}} = \frac{2n+1}{\cancel{2}}\pi \Rightarrow \phi = (2n+1)\pi \Rightarrow \frac{2\cancel{\pi} f}{\upsilon}\Delta r = (2n+1)\cancel{\pi}$

$\Rightarrow \boxed{f = (2n+1)\frac{\upsilon}{\Delta r}}$ καταστροφικής συμβολής

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \sqrt{(y-y_2)^2 + (x-x_2)^2} - \sqrt{(y-y_1)^2+(x-x_1)^2} = \sqrt{(0.5+0.1)^2+(1-0)^2} - \sqrt{(0.5-0.1)^2+(1-0)^2}$$

$$\Rightarrow \Delta r = \sqrt{0.36+1.0} - \sqrt{0.16+1.0} = \sqrt{1.36} - \sqrt{1.16} \Rightarrow \Delta r = 0.089m$$

$f = \frac{330}{0.089} = 3707.87$ Hz για ενισχυτική συμβολή

$f = \frac{330}{0.089}\frac{1}{2} = 1857.93$ Hz για καταστροφική συμβολή

8. Ένας ερευνητής πρόσεξε ότι η συχνότητα μιας νότας που εκπέμπεται από την κόρνα ενός αυτοκινήτου φαίνεται να ελαττώνεται από τους 284κύκλους/sec στους 266 κύκλους/sec καθώς το αυτοκίνητο τον προσπερνά. Από την παρατήρηση αυτή είναι σε θέση να υπολογίσει την ταχύτητα του αυτοκινήτου γνωρίζοντας ότι η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι 340m/sec. Ποια είναι η τιμή της ταχύτητας που υπολόγισε;

Η συχνότητα που ακούει ο ακίνητος παρατηρητής θα είναι: $f' = f \dfrac{\upsilon}{\upsilon - V_p}$

Καθώς η πηγή απομακρύνεται: $f'' = f \dfrac{\upsilon}{\upsilon + V_p}$

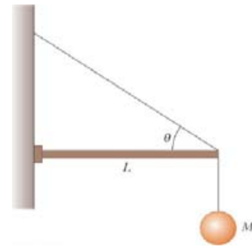
Διαιρώντας τις σχέσεις θα έχουμε:

$$\frac{f'}{f''} = \frac{\upsilon + V_p}{\upsilon - \upsilon_p} = \frac{284}{266} \Rightarrow 266(\upsilon + V_p) = 284(\upsilon - \upsilon_p) \Rightarrow$$

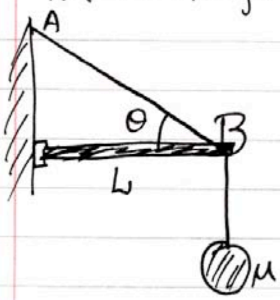
$$\Rightarrow (266 + 284) V_p = (284 - 266)\upsilon \Rightarrow \frac{V_p}{\upsilon} = \frac{18}{550} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_p = \frac{18}{55\cancel{0}} * 34\cancel{0} \Rightarrow \boxed{V_p = 11.13 \text{ m/s}}$$

9. Μια σφαίρα μάζας Μ κρατείται από μια χορδή η οποία περνά πάνω από μια ελαφριά οριζόντια ράβδο μήκους L, όπως φαίνεται στο σχήμα. Υποθέστε ότι η γωνία είναι θ και ότι η θεμελιώδης συχνότητα στάσιμων κυμάτων στο τμήμα της χορδής πάνω από τη ράβδο είναι *f*. Υπολογίστε τη μάζα του τμήματος της χορδής πάνω από τη ράβδο.



Στη θεμελειώδη συχνότητα, η χορδή πάνω από τη ράβδο έχει 2 μόνο δεσμούς, στα σημεία Α και Β, με αντιδεσμό ή κοιλία στο μέσο της χορδής (μεταξύ Α και Β).



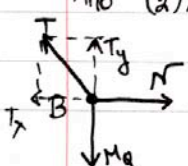
Άρα: $\frac{\lambda}{2} = AB = \frac{L}{\cos\theta} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{\cos\theta}$ (1)

Από τη στιγμή που η θεμελειώδης συχνότητα είναι f, η ταχύτητα κύματος στο τμήμα αυτό της χορδής είναι:

$$\upsilon = \lambda f = \frac{2L}{\cos\theta} f \quad (2)$$

Αλλά $\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{T}{m/AB}} = \sqrt{\frac{TL}{m\cos\theta}}$ (3) όπου T η τάση στο τμήμα αυτό της χορδής.

Από (2)∧(3) $\Rightarrow \frac{2Lf}{\cos\theta} = \sqrt{\frac{TL}{m\cos\theta}} \Rightarrow \frac{4L^{\cancel{2}}f^2}{\cos^{\cancel{2}}\theta} = \frac{T\cancel{L}}{m\cancel{\cos\theta}} \Rightarrow \boxed{m = \frac{T\cos\theta}{4Lf^2}}$

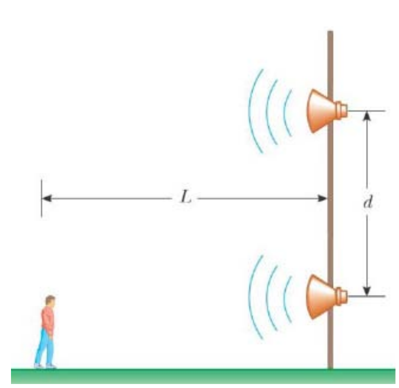


Από 2ο νόμο του Newton: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_x = N$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y = Mg \Rightarrow T\sin\theta = Mg \Rightarrow \boxed{T = \frac{Mg}{\sin\theta}}$

$\Rightarrow m = \frac{Mg}{\sin\theta}\frac{\cos\theta}{4Lf^2} \Rightarrow \boxed{m = \frac{Mg}{4Lf^2\tan\theta}}$

10. Δύο μεγάφωνα “οδηγούνται” από τον ίδιο ταλαντωτή συχνότητας 200Hz. Είναι τοποθετημένα σε ένα κατακόρυφο στύλο και σε απόσταση 4.00m το ένα από το άλλο. Ένα άτομο περπατά προς το μεγάφωνο που βρίσκεται στην χαμηλότερη θέση και με διεύθυνση κάθετη στο στύλο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. (α) Πόσες φορές θα ακούσει ένα ελάχιστο σε ένταση ήχου; (β) Πόσο μακριά βρίσκεται από τον στύλο τις στιγμές που ακούει το ελάχιστο της έντασης; Υποθέστε ότι η ταχύτητα του ήχου είναι 330m/s και αγνοήστε ανακλάσεις του ήχου προερχόμενες από το έδαφος.



Υποθέτουμε ότι τα αυτιά του παρατηρητή είναι στο ίδιο ύψος με το μεγάφωνο στη χαμηλότερη θέση.

Ο ήχος από το μεγάφωνο στην υψηλότερη θέση καθυστερεί κατά κάποιο χρόνο Δt επειδή έχει να διανύσει την επιπλέον απόσταση: $\sqrt{L^2+d^2}-L$

Ο παρατηρητής ακούει ένα ελάχιστο όταν $\frac{(2n-1)\lambda}{2}$ όπου $n=1,2,3,\ldots$

Επομένως $\sqrt{L^2+d^2}-L = \frac{2n-1}{2}\lambda \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{L^2+d^2}-L = \frac{n-\frac{1}{2}}{f}v \Rightarrow \sqrt{L^2+d^2} = \frac{n-\frac{1}{2}}{f}v + L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{L^2}+d^2 = \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{f^2}v^2 + \cancel{L^2} + \frac{2(n-1/2)vL}{f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{d^2-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 v^2/f^2}{2\left(n-\frac{1}{2}\right)v/f}} \; (A) \quad \text{για } n=1,2,3,\ldots$$

Αυτό θα μας δώσει την απάντηση στο ερώτημα (β). Η διαφορά της διαδρομής ξεκινά από 0 όταν ο παρατηρητής βρίσκεται πολύ μακριά και φτάνει σε d όταν $L=0$. Ο αριθμός των ελάχιστων που ακούει είναι η μεγαλύτερη ακέραια λύση της ανισότητας: $d \geq \frac{n-1/2}{f}v \Rightarrow n \leq \frac{fd}{v}+\frac{1}{2}$

(α) $\frac{fd}{v}+\frac{1}{2} = \frac{4\cdot 200}{330}+\frac{1}{2} = 2.92 \Rightarrow$ ακούει $\boxed{2 \text{ ελάχιστα}}$

(β) Αντικαθιστώντας στην (A) γιά $n=1$, και $n=2$ έχουμε: $L = 9.28m \quad n=1$, $L = 1.99m \quad n=2$

11. Η χορδή ενός βιολιού έχει μήκος 0.350m και είναι ρυθμισμένη στο τόνο G, συχνότητα f_G = 392 Hz. Που θα πρέπει να θέσει το δάχτυλό του ο βιολονίστας ώστε να παίξει το κονσέρτο A συχνότητας f_A = 440 Hz; Αν η θέση πρέπει να μείνει σωστή στο μισό του πάχους του δακτύλου (δηλαδή 0.600cm) πόσο είναι το μέγιστο επιτρεπτό ποσοστό αλλαγής της τάσης του χορδής;

$$\lambda_G = 2(0.350) = \frac{v}{f_G} \; ; \quad \lambda_A = 2L_A = \frac{v}{f_A}$$

$$L_G - L_A = L_G - \left(\frac{f_G}{f_A}\right) L_G = L_G \left(1 - \frac{f_G}{f_A}\right) = 0.35\left(1 - \frac{392}{440}\right) = \underline{0.0382\,m}$$

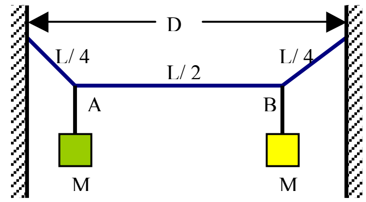
Επομένως $L_A = L_G - 0.0382 \Rightarrow \boxed{L_A = 0.312\,m}$

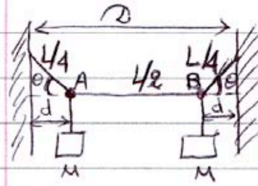
Δηλαδή το δάχτυλο θα πρέπει να τοποθετηθεί 0.312m από ~~την~~ γέφυρα

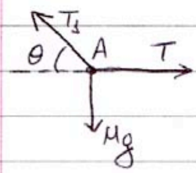
$$L_A = \frac{v}{2f_A} = \frac{1}{2f_A}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow dL_A = \frac{dT}{4f_A\sqrt{T\mu}} \Rightarrow \frac{dL_A}{L_A} = \frac{dT}{2T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T} = 2\frac{dL_A}{L_A} = 2\frac{0.6\,cm}{(35 - 3.82)\,cm} \Rightarrow \boxed{\frac{dT}{T} = 3.84\%}$$

12. Μια ελαφριά χορδή μάζας m και μήκους L έχει τα δύο άκρα της δεμένα σε δύο τοίχους που απέχουν απόσταση D. Δύο σώματα, το καθένα μάζας M, κρέμονται από την χορδή όπως στο διπλανό σχήμα. Αν σταλεί ένας παλμός από το σημείο A πόσο χρόνο θα χρειαστεί για να φθάσει στο σημείο B;







Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σημείο A είναι:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma F_x = 0 &\Rightarrow T_1\cos\theta = T\\ \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow T_1\sin\theta = Mg\end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan\theta = \frac{Mg}{T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{Mg}{\tan\theta}}$$

Επομένως η ταχύτητα εγκάρσιων κυμάτων στο τμήμα αυτό της χορδής θα είναι:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{Mg}{\mu\tan\theta}} = \sqrt{\frac{Mg}{\frac{m}{L}\tan\theta}} = \sqrt{\frac{MgL}{m\tan\theta}}.$$

Επομένως ο χρόνος που χρειάζεται για ένα παλμό να πάει από το σημείο A στο B είναι:

$$\boxed{t = \frac{L/2}{v} = \sqrt{\frac{mL\tan\theta}{4Mg}}}$$

13. Όταν φορτισμένα σωματίδια πολύ υψηλής ενέργειας κινούνται μέσα σε ένα διαφανές υλικό μέσο με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός στο μέσο αυτό, δημιουργείται ένα κρουστικό κύμα φωτός. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται φαινόμενο Cherenkov. Όταν ένας πυρηνικός αντιδραστήρας περιβάλλεται από μια μεγάλη δεξαμενή νερού, η ακτινοβολία Cherenkov παρατηρείται με τη μορφή μπλε φωτός γύρω από την περιοχή του κόρου του αντιδραστήρα, εξαιτίας της κίνησης ηλεκτρονίων πολύ υψηλών ενεργειών μέσα στο νερό. Σε μερικές περιπτώσεις, η ακτινοβολία Cherenkov δημιουργεί ένα μέτωπο κύματος με μισή γωνία κώνου 53°. Υπολογίστε την ταχύτητα των ηλεκτρονίων στο νερό. (Ταχύτητα φωτός στο νερό $\upsilon_l = 2.25\text{x}10^8$ m/s).

Η μισή γωνία του κώνου του κρουστικού κύματος Cherenkov στο νερό δίνεται από:

$$\sin\theta = \frac{V_{φωτός}}{V_s} \Rightarrow V_s = \frac{V_{φωτός}}{\sin\theta} = \frac{2.25\cdot 10^8 \text{ m/s}}{\sin(53^\circ)} \Rightarrow \boxed{V_s = 2.82 \text{ m/s}}$$