

**Τρίτη 27/10/2015**

**Διάρκεια: 17:30 – 19:30**

Σας δίνονται 6 ισοδύναμα προβλήματα και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλα.  
Σύνολο μονάδων 60.

### Καλή Επιτυχία

#### 1. [10μ]

Ένα σωματίδιο το οποίο κινείται με ταχύτητα  $u$ , προσεγγίζει ένα πανομοιότυπο σωματίδιο σε ηρεμία (στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου).

(α) Δείξτε ότι η ταχύτητα κάθε σωματιδίου στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας δίνεται από την σχέση  $\frac{c^2}{u} \left(1 - \sqrt{1 - u^2/c^2}\right)$ . [6μ]

(β) Βρείτε την αντίστοιχη έκφραση για το μη σχετικιστικό όριο. [4μ]



Σύστημα αναφοράς εργαστηρίου

Σύστημα αναφοράς KM

Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου η ενέργεια του σώματος είναι:  $E_{tot} = (1+\gamma)mc^2$

$$\text{και } u \text{ αρκεί } P_{lab}^{tot} = \gamma mu$$

$$E_{tot} = (1+\gamma)mc^2$$

Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας:  $E_{CM}^{tot} = 2\gamma mc^2$  και  $P_{CM}^{tot} = 0$

Ανά τα δυνατά τα σεραφούμιν έχουμε:  $(P_k P^k = \frac{E^2}{c^2} - p^2)$

$$P_k P^k = (\gamma + 1)^2 \gamma c^2 - \gamma^2 m^2 \frac{u^2}{c^2} = \gamma^2 \gamma c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma^2 = \frac{(\gamma + 1)^2 - \gamma^2 \frac{u^2}{c^2}}{4} \Rightarrow \gamma^2 = \frac{1 + 2\gamma + \gamma^2 - \gamma^2 \beta^2}{4} = \frac{1 + 2\gamma + \gamma^2 (1 - \beta^2)}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma^2 = \frac{1 + 2\gamma + \gamma^2}{4} \Rightarrow \gamma^2 = \frac{\gamma(\gamma + 1)}{2} \Rightarrow \gamma^2 = \frac{\gamma + 1}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow \frac{1}{\gamma^2} = \frac{2}{\gamma+1} \Rightarrow 1-\beta^2 = \frac{2}{1+\gamma} \Rightarrow 1 - \left(\frac{u'}{c}\right)^2 = \frac{2}{1+\gamma} \Rightarrow \left(\frac{u'}{c}\right)^2 = 1 - \frac{2}{1+\gamma} \\
 & \Rightarrow \left(\frac{u'}{c}\right)^2 = \frac{\gamma-1}{1+\gamma} \Rightarrow \frac{u'}{c} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \Rightarrow u' = c \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} = c \sqrt{\frac{(\gamma-1)^2}{\gamma^2-1}} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow u' = c \frac{\gamma-1}{\sqrt{\gamma^2-1}} \Rightarrow u' = c \frac{\gamma-1}{\sqrt{\gamma^2 \beta^2}} = c \frac{\gamma-1}{\gamma \beta} = \frac{c}{\beta} \frac{\gamma-1}{\gamma} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow u' = \frac{c}{\beta} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \Rightarrow u' = \frac{c}{\beta} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\right) = \frac{c}{\beta} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\right) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \boxed{u' = \frac{c}{u} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\right)}
 \end{aligned}$$

(b) Όταν  $u \ll c$  τηρούμε τα γραμματικά:  $\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2}$

Ανά το αντίτυπο των διακοπών σας προσγραφέντα ερώτηση θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 u' &= \frac{c^2}{u} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\right) \xrightarrow[\text{όπως}]{\text{κλασικό}} u' \approx \frac{c^2}{u} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2}\right)\right] = \cancel{\frac{c^2}{u}} \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \boxed{u' = \frac{u}{2}}
 \end{aligned}$$

η ταξιδιώση σας κεντροφυσικής  
για το μέλλον σας

2. [10μ]

(α) Δείξτε ότι τα φορτισμένα σωματίδια δεν είναι ιδιοκαταστάσεις του C, του τελεστή συζυγίας φορτίου. [6μ]

(β) Δείξτε ότι οι εξισώσεις Maxwell στο κενό είναι αναλλοίωτες κάτω από αναστροφή χρόνου. [4μ]

Υπενθύμιση: Για όσους ίσως δεν θυμούνται, οι εξισώσεις Maxwell είναι:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \vec{j}$$

(α) Θεωρήστε ότι πρωτόκο λειτουργικό φορτίο  $q$ . Έσσω Q στη σελεσία των φορτίου. Οι έχουμε  $\langle Q | q \rangle = q | q \rangle$

Δρώντες λειτουργική C στη σελεσία:  $\langle C | Q | q \rangle = q | C | q \rangle = q | -q \rangle$  (1)

Δρώντες πρώτα λειτουργική C και μετά λειτουργική των φορτίων έχουμε:

$$\langle Q | C | q \rangle = \langle Q | -q \rangle = -q | q \rangle \quad (2)$$

Από (1) και (2) επομένως θα έχουμε:  $\langle C | Q | q \rangle - \langle Q | C | q \rangle = q | q \rangle + q | q \rangle$   
 $\Rightarrow (CQ - QC) | q \rangle = 2q | -q \rangle \Rightarrow \{C, Q\} \neq 0$  ενώς και αν  $q=0$

(β) Κάτω από αναστροφή χρόνου,  $\vec{B}$  αλλάζει πρόσωπο, (το ρείκια που δημιουργεί το B-νεδίο, αντιστρέφεται σε διεύδυνη κίνηση από δράση της T. Ηέντερογκ  $\vec{E}$ , στη λειτουργική πεδίου παραβινει αναλλοίωτη.

Το ρείκια  $\vec{j}$  αλλάζει επίσης κατενδυτική κίνηση από δράση της T.

Επομένως οι εξισώσεις των Maxwell θα γραφούν:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \vec{j} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \\ \vec{\nabla} \times (-\vec{B}) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = -\vec{j} \end{array} \right.$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot (-\vec{B}) = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (-\vec{B}) = 0 \end{array} \right.$$

Πιοντεινει αναλλοίωτης επομένως κίνηση από την δράση της T.

3. [10μ]

Θεωρήστε τις διασπάσεις του η-μεσονίου,  $\eta \rightarrow \pi\pi$  και  $\eta \rightarrow \pi\pi\pi$ . Εξηγήστε αναλυτικά:

(α) Γιατί η διάσπαση σε δύο πιόνια απαγορεύεται για τις ισχυρές και ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις. [4μ]

(β) Γιατί η διάσπαση σε τρία πιόνια επιτρέπεται από τις ηλεκτρομαγνητικές αλλά απαγορεύεται από τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις. [6μ]

(α) Όπως βλέπουμε από το πίνακα που αναφέρεται στη σύσταση και διεύθυνση

του  $\eta^0$ -μεσονίου, δεν υπάρχουν διασπάσεις  $\eta^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$  ή  $\eta^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ .

Απλούστερα δεν υπάρχουν διασπάσεις του  $\eta^0$  σε δύο πιόνια.

Το  $\eta^0$  άπως και τα πιόνια έχουν parity -1. Επομένως η διάσπαση

$\eta^0 \rightarrow \pi\pi$  θα παραβιάζει την parity εφόσον  $P_{final} = (-1)(-1) = +1$  και

$P_{\eta^0} = -1$ . Συζώστε αυτά σε δύο πιόνια της τελικής κατεύθυνσης δρίσματος

σε ερχόμενη σφραγίδη περισσού αριθμού, όπου η κυριαρχία της τελικής κατεύθυνσης θα πάρει μια ανατοφορά από τον όρο  $(-1)^l$  και η ολική parity θα είναι αριττημένη. Άλλα για περισσή τερψίδης στη σφραγίδη  $l=1, 3, \dots$  Θα έχουμε παραβιάση της σφραγίδης αφού το  $\eta^0$ -μεσόνιο έχει parity 0. Επομένως η διάσπαση  $\eta^0 \rightarrow \pi\pi$  παραβιάζει την parity

Οι λογικοί λόγοι για την απορρίψη αυτής διασπάσεων στην parity και αριθμό

η αντιμετρίαν της διάσπασης δεν βοηθεί μέσω λογικών λόγων.

(b) Η διάσπαση  $\eta^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$  ή  $\eta^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0$  είναι ένα σπιτο πλόνω, απότελος της αριθμητικής αυτής η parity Symmetries. Η διάσπαση του  $\eta^0$ -meson προχώρα πίεσε των EM and LHC Symmetries (αντί Symmetries αντί αντιμετρίας του  $\eta^0$ ) και όχι πίεσε των ισχυρών αλληλεπιδράσεων. Αν Sothe τα πιάλες των διάσπων των εμφανίσιων, το  $\eta^0$ -meson έχει G-parity +1, ενώ τα πλόνα έχουν G-parity τον βαθμό -1. Επομένως ο συνδυασμός των τριών πλόνων παραβιάζει την G-parity των Symmetries αντί των ισχυρών αλληλεπιδράσεων.

Οι γενεροφυγικές αλληλεπιδράσεις παρεβαίσουν το isospin και επομένως δεν διασπούν την G-parity. Επομένως η διεργασία προχώρα πίεσε την EM αλληλεπιδράσεων.

Να αντικειμένω διάσπασης ή σημείου φάντασης και σημείου αίσκησης για το  $\omega^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \eta^0$ , η διάσπαση του  $\eta^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0$  δεν περιέχει όρους  $\langle 000 | 000 \rangle$  μετάβασης αριθμητικής παρεβαίσης την G-parity.

Η διάσπαση  $\eta^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$  περιέχει ένα όρο  $\langle 000 | 000 \rangle$  αλληλεπιδράσεων στην G-parity

4. [10μ]

Να δείξετε ότι η διάσπαση  $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$  διατηρεί το isospin ενώ η διάσπαση  $\omega \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0$  δεν το διατηρεί.

Το  $\omega$ -βαρύνικό είναι βαρύγρως καταίσθετη του isospin στα λόρδους: |10>

όπως φαίνεται από τους πίνακες που δίδηκαν.

Η καταίσθετη του isospin για την περίπτωση της διάσπασης σε 3-συμμετόχη προκύπτει ανδυαλόφορες τα 2 συμμετόχη και προσδιέποντες στους ανδυαλόφορες αυτούς το γρίπο συμμετόχη:

Για τα δύο πάνω θα είχαμε: (Ευθείας από τους πίνακες CG το ανδυαλό 1x1)

$$|\pi^+ \pi^-> = |11>_I |1-1>_I = \frac{1}{\sqrt{6}} |20> + \frac{1}{\sqrt{2}} |30> + \frac{1}{\sqrt{3}} |00>$$

Στην πάνω πάνω καταίσθετη προσδιέποντες το  $\pi^0$  που είναι isospin καταίσθετη |10>

$$|\pi^+ \pi^- \pi^0> = \frac{1}{\sqrt{6}} |20> |10> + \frac{1}{\sqrt{2}} |30> |10> + \frac{1}{\sqrt{3}} |00> |10> \quad (\text{A})$$

Εξετάζουμε από τους πίνακες CG τις περιπτώσεις  $2 \times 1$  με  $m_1 > m_2 = 0$  οι καδίσιες και τους πίνακες  $1 \times 1$  με  $m_1 > m_2 = 0, 0$ . Έχουμε:

$$|20> |10> = \sqrt{\frac{3}{5}} |30> + 0 |20> - \sqrt{\frac{2}{5}} |10> = \sqrt{\frac{3}{5}} |30> - \sqrt{\frac{2}{5}} |10>.$$

$$|10> |10> = \sqrt{\frac{2}{3}} |20> + 0 |10> - \sqrt{\frac{1}{3}} |00> = \sqrt{\frac{2}{3}} |20> - \sqrt{\frac{1}{3}} |00>$$

Ανδυαλόφορες τις προηγούμενες δύο εχέγεις με την (A) θα έχουμε:

$$|\pi^+ \pi^- \pi^0> = \frac{1}{\sqrt{6}} \left( \sqrt{\frac{3}{5}} |30> - \sqrt{\frac{2}{5}} |10> \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} |20> - \sqrt{\frac{1}{3}} |00> \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} |10> \Rightarrow$$

$$|\pi^+ \pi^- \pi^0> = \frac{1}{\sqrt{10}} |30> + \frac{1}{\sqrt{3}} |20> + \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{5}} \right) |10> - \frac{1}{\sqrt{6}} |00>$$

Μας ενδιαφέρει η βεριγιάση  $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$  οπότε θα πρέπει να υπολογίσουμε  $\langle \pi^+ \pi^- \pi^0 | \omega \rangle$ . Το γινόμενο αυτό θα είναι μισόν για όλες τις καταστάσεις εκτός από αυτή που περιέχει  $\langle 00 | 00 \rangle = -\sqrt{\frac{1}{6}}$ .

Από τη σχήμα που υπάρχει όπος που δεν είναι μισόν, η διεργασία σημειώνεται

Εξετασθε τώρα την περίπτωση της Σιάφρας GE τρία πόντα  $\omega \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0$

$|\pi^0 \pi^0\rangle = |\text{10}\rangle |\text{10}\rangle$  Ανά τους πίνακες CG έχουμε για την περίπτωση  $1 \times 1$

$$|\pi^0 \pi^0\rangle = |\text{10}\rangle |\text{10}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |\text{20}\rangle + 0 |\text{10}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\text{00}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |\text{20}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\text{00}\rangle$$

Τροποποιήστε στο τρίτο πόντο ταν παραπάνω αντιστοίχιο :

$$|\pi^0 \pi^0 \pi^0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |\text{20}\rangle |\text{10}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\text{00}\rangle |\text{10}\rangle \quad \begin{matrix} \text{χρησιμοποίηση των πίνακών} \\ \text{CG για } 2 \times 1 \end{matrix}$$

$$|\pi^0 \pi^0 \pi^0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \sqrt{\frac{3}{5}} |\text{30}\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} |\text{10}\rangle \right) - \sqrt{\frac{1}{3}} |\text{10}\rangle \Rightarrow$$

$$|\pi^0 \pi^0 \pi^0\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}} |\text{30}\rangle - \left( \frac{\sqrt{4} + \sqrt{5}}{\sqrt{15}} \right) |\text{10}\rangle = A |\text{30}\rangle + B |\text{10}\rangle.$$

$$\Theta \text{ αρέται να πάρει και νάλι στο γυρίζει } \langle \pi^0 \pi^0 \pi^0 | \omega \rangle = (A \langle \text{30} | + B \langle \text{10} | ) | \text{00} \rangle$$

Το γυρίζει αυτό δεν έχει όρασ Σιάφρας τα λυδεώδη ερώτηση  $|\pi^0 \pi^0 \pi^0\rangle$

κατιστούγει, δεν περιέχει όρο  $|\text{00}\rangle$ . Ενοψίως η Σιάφρα  $\omega \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0$  δεν επιτρέπεται.

5. [10μ]

(α) Αποδείξτε τις σχέσεις που δίνουν την ενέργεια κέντρου μάζας για τις περιπτώσεις ενός επιταχυντή και δέσμης-σταθερού στόχου. Θα πρέπει να λάβετε υπόψην σας τις μάζες των συγκρουόμενων σωματιδίων. [4μ]

(β) Δυο σχετικά πρόσφατα πειράματα, το BaBar στο SLAC των ΗΠΑ και το Belle στο KEK της Ιαπωνίας, μελετούσαν  $B^0$ -μεσόνια ( $m_{B^0} = 5.28 \text{ GeV}/c^2$ ) που παράγονταν σε διασπάσεις  $Y(4S)$  μέσω της διαδικασίας  $e^+e^- \rightarrow Y(4S) \rightarrow B^0\bar{B}^0$ . Οι δυο επιταχυντές λειτουργούσαν σε ενέργεια κέντρου μάζας  $E_{CM} = M_{Y(4S)} = 10.58 \text{ GeV}/c^2$ . Το κέντρο μάζας είναι προωθημένο ώστε να κάνει τους χρόνους ζωής μετρήσιμους.

(i) Για μια ώθηση  $\beta\gamma = 0.56$ , προσδιορίστε τις απαιτούμενες ενέργειες των  $e^+$  και  $e^-$  των δύο δεσμών. [2μ]

(ii) Προσδιορίστε την μέση απόσταση μεταξύ του σημείου παραγωγής του  $B$ -μεσονίου και του σημείου διάσπασής του στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Δίνεται ότι ο ιδιόχρονος του  $B^0$ -μεσονίου είναι  $\tau = 1.52 \text{ ps}$ . [1μ]

(iii) Για την διάσπαση  $B^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$  προσδιορίστε το εύρος των τιμών των ορμών των δύο πιονίων στο σύστημα του εργαστηρίου. [3μ]

(α) Στο σύστημα αναφοράς των κεντρούς φύσεων των δύο εμβολιασίων μέσω  $m_1$  και  $m_2$  (Θεωρούμε να είναι ίδιες ημέρες) και ενέργειας  $E_1$  και  $E_2$ , η ενέργεια είναι:

$$S = E_{CM}^2 = (P_1 + P_2)^2 \quad \text{όπου } P_1 \text{ και } P_2 \text{ οι τετραορθίες των εμβολιασίων}$$

των δέσμων:  $P_1 = (E_1, \vec{p}_1)$  και  $P_2 = (E_2, \vec{p}_2)$

$$\Rightarrow S = E_{CM}^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = \underbrace{E_1^2}_{\sim} + \underbrace{E_2^2}_{\sim} + 2E_1 E_2 - \underbrace{\vec{p}_1^2}_{\sim} - \underbrace{\vec{p}_2^2}_{\sim} - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2} \quad (A)$$

Θεωρούμε ότι τα εμβολιαστικά συμράσουν διεταπικά οπότε οι διειδήνεις αυτούς ορθών των είναι αντιδετοί. Θα έχουμε από την (A):  $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = |\vec{p}_1||\vec{p}_2| \cos \theta$

$$\vec{p} = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 \left[ 1 + \sqrt{\left(1 - \frac{m_1^2}{E_1^2}\right) \left(1 - \frac{m_2^2}{E_2^2}\right)} \right] \quad |\vec{p}_1| = \sqrt{E_1^2 - m_1^2}$$

Av ois píofor taww confacidion éival funpíofor se címpoq'h fe os evíppher cos funpíofor va avan tu'foufe

$$\begin{aligned}
 \text{Taipoufe: } S &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 \left[ s + \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{E_1^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{m_2^2}{E_2^2} \right) \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow S &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 \left( 2 + \frac{1}{4} \frac{m_1^2}{E_1^2} \frac{m_2^2}{E_2^2} - \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{E_1^2} - \frac{1}{2} \frac{m_2^2}{E_2^2} \right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow S &= m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 \left( 2 + \frac{1}{4} \frac{m_1^2 m_2^2}{E_1^2 E_2^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{m_1^2}{E_1^2} + \frac{m_2^2}{E_2^2} \right) \right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow S &= 4E_1 E_2 + m_1^2 + m_2^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1^2 m_2^2}{E_1 E_2} - \frac{m_1^2 E_2}{E_1} - \frac{m_2^2 E_1}{E_2} \Rightarrow \frac{m_1^2 m_2^2}{E_1^2 E_2^2} \xrightarrow{0} \\
 \Rightarrow S &\approx 4E_1 E_2 + m_1^2 \left( 1 - \frac{E_2}{E_1} \right) + m_2^2 \left( 1 - \frac{E_1}{E_2} \right)
 \end{aligned}$$

Av cosu referencia awci exi'g' agnógoche reñelius eris píofor:

$$S = 4E_1 E_2 + m_1^2 \left[ s - \frac{E_2}{E_1} + s - \frac{E_1}{E_2} \right] = 4E_1 E_2 + m^2 \left[ 2 - \frac{E_1^2 + E_2^2}{E_1 E_2} \right] \text{ iken tu'fes}$$

Tu' m ≈ 0 se exi'g' fe cosu evíppher cos Ta' exoufe:

$$S = 4E_1 E_2 \Rightarrow E_{cm}^2 = 4E_1 E_2 \Rightarrow \boxed{E_{cm} = \sqrt{4E_1 E_2}} \text{ òinwa' bríspafe e cos Su'ef'ees.}$$

Tu' cosu neptintwaw Segħihs se qedepò cosi'x, exoufe:

$$\begin{aligned}
 S &= E_{cm}^2 = (E_\delta + E_{GZ})^2 - (\vec{P}_\delta + \vec{P}_{GZ})^2 = E_\delta^2 + E_{GZ}^2 + 2E_\delta E_{GZ} - \vec{P}_\delta^2 - \vec{P}_{GZ}^2 - 2\vec{P}_\delta \cdot \vec{P}_{GZ} \Rightarrow \\
 \Rightarrow S &= E_{cm}^2 = m_{GZ}^2 + m_\delta^2 + 2E_\delta E_{GZ} - 2\vec{P}_\delta \cdot \vec{P}_{GZ}
 \end{aligned}$$

Ariu t'ixx qiegħi nor o gróxos éival aktar, Ta' exoufe  $E_{GZ} = m_{GZ}$  u  $\vec{P}_{GZ} = \emptyset$

Errefixx n'isprova kien exi'g' jikk:  $S = E_{cm}^2 = m_{GZ}^2 + m_\delta^2 + 2E_\delta m_{GZ} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_{cm} = \sqrt{2E_\delta m_{GZ} + m_{GZ}^2 + m_\delta^2} \quad \text{av deewpicej òu } E_\delta \gg m_{GZ}, m_\delta \text{ n' provaliexx exi'g' naipver taww fuoppis: } \boxed{E_{cm} = \sqrt{2E_\delta m_{GZ}}}$$

(B) (ii) Αν αγοράσεις φίλες του γηπετώνται με προσανατολή, σχετικά με τις επιπτώσεις

τους, το μέντρο φίλες θα έχει ένα λιγότερο το όντο βιβλίο του από το παρόντα.

$$(A) \quad \boxed{P = \frac{P_{\text{tot}}}{E_{\text{tot}}} = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2}} \quad \text{όπου } E_1 \text{ και } E_2 \text{ είναι οι επιπτώσεις των } e^+ \text{ και } e^- \text{ στην αναθρόπηση της επιφάνειας}$$

Η επίπτωση των μέντρων φίλες είναι στη μέση των  $X(4S)$  που παρατίθεται:

$$\text{Εποικείωσης: } \boxed{4E_1 E_2 = M_{Y(4S)}^2} = (B)$$

$$\text{Ανταντά } (A) \text{ και } (B) \text{ παραπέτανε στην } \boxed{\boxed{P_{\text{tot}} = \frac{E_1 - E_2}{M_{Y(4S)}}}} = (C)$$

Ανταντά  $(B)$  και  $(C)$  διαπιστώνται:

$$E_1 - E_2 = b_Y M_Y \Rightarrow \boxed{E_2 = E_1 - b_Y M_Y} \quad (1) \quad \text{ανανεωτική σχέση } (B)$$

$$4E_1 E_2 = M_Y^2 \Rightarrow 4E_1^2 - 4b_Y E_1 M_Y - M_Y^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_1^2 - b_Y E_1 M_Y - \frac{M_Y^2}{4} = 0 \Rightarrow E_1 = \frac{b_Y M_Y \pm \sqrt{b_Y^2 M_Y^2 + M_Y^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{b_Y M_Y + M_Y \sqrt{b_Y^2 + 1}}{2} \Rightarrow \boxed{E_1 = \frac{M_Y}{2} \left( b_Y + \sqrt{b_Y^2 + 1} \right)} \quad (A)$$

$$\text{Ανανεωτική σχέση } (1) \text{ δίνει: } \boxed{E_2 = \frac{M_Y}{2} \left( -b_Y + \sqrt{b_Y^2 + 1} \right)} \quad (E)$$

Τις νέες αναπτύξεις των πεπτώντων ως "πίστες" για την επίπτωση

Ανταντά τις δύο επίπτωσης εποικείωσης των δεσμών  $e^+$  και  $e^-$

$$E_1 = \frac{10.58}{2} \left[ 0.56 + \sqrt{(0.56)^2 + 1} \right] \Rightarrow \boxed{E_1 = 9.03 \text{ GeV}}$$

$$E_2 = \frac{10.58}{2} \left[ -0.56 + \sqrt{(0.56)^2 + 1} \right] \Rightarrow \boxed{E_2 = 3.1 \text{ GeV}}$$

Όνου ου δύο παριετών ενέργειες λόγω της αναδιπονής είναι  $\gamma^+ \gamma^-$   
 Οι οποίες είναι επιφενείς και επομένως λόγω χρησιμοποίησης γεν παριετών  
 για βελτιστοποίησης των αγχυτερήσιων επιτοξυνίας. Σας αριθμήσατε τις  
 SLAC και τις KEK, η δέκτη των ηλεκτρονίων περισσότερος επιφανειας.

(6)(ii) Η φάση ανάστασης των διειδών της  $B^0$  στην Συναρμούσα, εφαρμακεύεται  
 την διειδώση τους για  $Y(4S)$  συνάρτηση αναθοπίδας. Αλλάζεται  $Y(4S)$  σχετικά  
 ταχύτητας είναι:

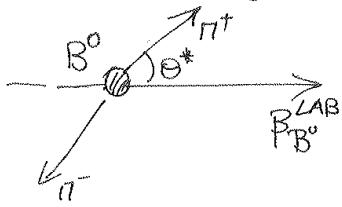
$$\gamma = \frac{E_B^{CM}}{m_B} = \frac{M_Y/2}{m_B} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \frac{M_Y}{2m_B} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow$$

$$1-\beta^2 = \frac{4m_B^2}{M_Y^2} \Rightarrow \beta^2 = 1 - \frac{4m_B^2}{M_Y^2} \Rightarrow \beta = \sqrt{1 - \frac{4m_B^2}{M_Y^2}} \Rightarrow \beta = \sqrt{1 - \frac{4 \cdot 5.28^2}{10.58^2}} \Rightarrow \boxed{\beta = 0.06} \quad (2)$$

Η ταχύτητα της ωδής γενικότερα είναι πολύ μεγάλη λεπτομέρεια της ταχύτητας των  
 κέντρου μεταξύ της οποίας είναι περίπου 10 φορές μεγαλύτερη. Επομένως  
 η ανάσταση των διειδών κατεβαίνει στην διειδώση της δέκτης της  
 είναι:  $\langle l \rangle = \beta \gamma c \tau_0 \approx 0.06 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1.52 \cdot 10^{-12} \Rightarrow \boxed{\langle l \rangle = 255 \cdot 10^{-6} m = 255 \mu m} \quad (3)$

(6)(iii) Το κέντρο μεταξύ της  $B^0$ , της πιονίας είναι ιδιαίτερα αναδιπονητικός  
 και ενέργειες ισχύει το μεταξύ της ενέργειας των κέντρων μεταξύ της πιονίας  
 $E_{\pi^\pm}^{CM} = \frac{m_B}{2}$  και  $P_{\pi^\pm}^{CM} = P_{\pi^\mp}^{CM}$ .

Το πιονίο αναθοποίει την επιφακτικότητα, μετατρέπει την πιονία σε πιονία  
 ανά την γανία Θ της διειδώσης λίγης της πιονίας της διειδώσης της ωδής.



Θεωρήστε για απλισσεύση, ότι η πιονία σε πιονία  
 είναι πολύ μεμονωμένη της ενέργειας της πιονίας  
 και την αγχυτεροποίηση.

Anò eo peregrinatio Lorentz anò eo sincrotronis anò kinezi  
kifor zov  $B^0$  eo epracējao Da ēxpreſe:

$$P_{Z_{\pi^\pm}}^{\text{lab}} = \gamma_{B^0} \left( P_{Z_{\pi^\pm}} + \beta_{B^0} E_{\pi^\pm} \right) \Rightarrow \boxed{P_{Z_{\pi^\pm}}^{\text{lab}} = \gamma_B E_{\pi^\pm} (\beta \cos \theta^* + 1)} \quad (4)$$

H iedher jivečas fizicas ócas za  $\pi^\pm$  kinezitacis sen ūiedwys zovs  
Senjōdī sen ūiedwys zov  $B^0$  kinezioris H iedher jivečas fizicas ócas sen  
zov  $B^0$  kinezitacis sen ūiedwys kinezits zov  $\Upsilon(4s)$ .

H kinezitacis iedher enofēns Da ēver ūiedwys fizikas kinezitacis zovs

$$\beta_{\max} = \frac{\beta_{\Upsilon(4s)} + \beta_{B^0}}{1 - \beta_{\Upsilon(4s)} \beta_{B^0}} = \frac{0.56 \pm 0.061}{1 - 0.56 \pm 0.061} \Rightarrow \beta_{\max} = 0.57$$

H ūiedwys iedher da ēver!

$$\beta_{\min} = \frac{\beta_{\Upsilon(4s)} - \beta_{B^0}}{1 + \beta_{\Upsilon(4s)} \beta_{B^0}} = \frac{0.56 - 0.061}{1 + 0.56 \pm 0.061} \Rightarrow \beta_{\min} = 0.41$$

Arenadiscrencias sen (4) tis 2 rifi's zov  $\beta_{\min}$  kai  $\beta_{\max}$ , tis  
avaciroges tis juc zov neperjorce Lorentz  $\gamma_{\min}$  kai  $\gamma_{\max}$  avaciroges  
tun rifi' tis  $E = m_{B^0}/2$  kai tis ūuo neperjorce  $\cos \theta^* = \pm 1$  Da ēxpreſe:

$$P_{\max} = \frac{m_{B^0}}{2} \gamma_{\max} (1 + \beta_{\max}) \simeq \frac{5.28}{2} \frac{1}{\sqrt{1-0.57^2}} (1+0.57) \Rightarrow \boxed{P_{\max} \simeq 5.04 \text{ GeV}}$$

$$P_{\min} = \frac{m_{B^0}}{2} \gamma_{\min} (1 + \beta_{\min}) \simeq \frac{5.28}{2} \frac{1}{\sqrt{1-0.41^2}} (1-0.41) \Rightarrow \boxed{P_{\min} \simeq 1.71 \text{ GeV}}$$

6. [10μ]

Μια δέσμη  $K^0$  παράγεται από την σκέδαση  $\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda^0$  και διαδίδεται στο κενό και μπορεί να διασπαστεί. Σε απόσταση  $d$  που αντιστοιχεί σε 20 φορές τον χρόνο ζωής του  $K_1$  ( $d = 20c\tau_{K_1}$ ) υπάρχει ένας στόχος που απορροφά το 10% της προσπίπουσας δέσμης των  $K^0$ . Αν η ενεργός διατομή σκέδασης των  $\bar{K}^0$  είναι τρεις φορές μεγαλύτερη από αυτή των  $K^0$ , υπολογίστε το σχετικό ποσοστό των  $K_1$  και  $K_2$  στην δέσμη:

(α) Ακριβώς στο σημείο παραγωγής της δέσμης. [2μ]

(β) Ακριβώς πριν τον στόχο. [3μ]

(γ) Ακριβώς μετά τον στόχο. [5μ]

Υποθέστε ότι τα καόνια είναι χαμηλής ενέργειας και αγνοήστε σχετικιστικές επιδράσεις. Σας δίνεται ότι ο χρόνος ζωής των  $K_2$  είναι  $\tau_{K_2} \approx 600\tau_{K_1}$ .

(α) Η παραγωγή της δέσμης των  $K^0$  προσέκες από ακέδαιη π $\bar{p} \rightarrow K^0 \Lambda$ .

Όπως έχουμε ευθύνεις σαν διετίθετες το  $K^0$  και  $\bar{K}^0$  δέν είναι διαμετατάξεις της CP αλλαγής πάνω σε ωχυρές αλληλεπιδρίσεις μεταξύ των γενετικών θεραπειών ή στην CP μετατάξεις της γενετικής παραγωγής:

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \quad |K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1\rangle + |K_2\rangle) \quad (1)$$

$$|K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \quad |\bar{K}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1\rangle - |K_2\rangle) \quad (2)$$

Από την (1) διέπομψε πώς εφόσον η δέσμη με την οποία γενετική είναι  $K^0$ , η σύστασή της θα είναι  $50\% |K_1\rangle$  και  $50\% |K_2\rangle$

(β) Ο στόχος βρίσκεται σε απόσταση  $d = 20c\tau_{K_1} \approx 20 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 90 \cdot 10^{-12} \Rightarrow$

$$\Rightarrow d = 54 \cdot 10^{-2} m \Rightarrow d = 54 cm.$$

Σύμφωνα με το νόμο της εκθετικής διάσπασης, η συγκέντρωση  $K_1$  της δέσμης εφαρμόζεται κατεύθυντα:  $\frac{N(t)}{N_0} = e^{-t/\tau} = e^{-20 \cdot 10^{-12} t} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{N_{K_1}(t)}{N_0} = e^{-20} \approx 2 \cdot 10^{-9}. \quad \text{Επομένως μετά από 20 χρόνια, } n$$

συγκέντρωση  $K_1$  έχει εφαπτυστεί. Η συγκέντρωση  $K_2$  έχει χρόνο ζωής

που είναι 600 φορές μεγαλύτερος από αυτού της  $K_1$  ( $\tau_{K_2} \approx 600 \tau_{K_1}$ )  
και επομένως  $\frac{N_{K_2}(t)}{N_{K_2}} = e^{-20\pi t/600\tau_{K_1}} = e^{-t/30}$  Ουασανί Σεν

Ο πάρχει καθόλου εξαρτήσεις της συγκεκριμένης. Επομένως πρώτης  
στάχτη, η δεύτερη θα είναι "καταρρή" για  $K_2$ .

(g) Όπως είδαμε από τις (1) και (2) στο σημερινό (a), η δεύτερη  $|K_2\rangle$   
την φέρει σα στάχτη, ανοτελείται: 50% από  $K^0$  και 50%  $\bar{K}^0$ .

Οι συγκεκριμένες αυτές ( $K^0$  και  $\bar{K}^0$ ) απηλευθερώνονται των λεχύνων  
απλιλεπιδράσεων (είναι ιδιαιτεράστικες) όπως σε υπόλοιπο των στάχτων.

Οι πιθανότητες απλιλεπιδράσεων είναι 10% για τη  $K^0$  και 30% για  $\bar{K}^0$

Άπο την σημερινή ποση δεύτερη ποση φέρει σα στάχτη είναι απλά το 50% των  
αρχικής δεύτερης των  $K^0$  που παρέχεται, και εφόσον η δεύτερη περιέχει  
δεσμών του στάχτη γε χρόνο  $t_C$ , βγαίνουντας από τον στάχτη, η σύνθετη  
της δεύτερης θα είναι:

$$f_{K^0} = \frac{P_{K^0/6} * P_{K^0/K_2} * N_{K_2}}{\left[ P_{K^0/6} * P_{K^0/K_2} + P_{\bar{K}^0/6} * P_{\bar{K}^0/K_2} \right] N_{K_2}} = \frac{P_{K^0/6} * P_{K^0/K_2}}{\left[ P_{K^0/6} * P_{K^0/K_2} + P_{\bar{K}^0/6} * P_{\bar{K}^0/K_2} \right]}$$

όπου  $P_{K^0/6}$  είναι το ποσοστό της δεύτερης των  $K^0$  που δεν εξαρτείται από;

O.Φ. Ενώ  $P_{K^0/K_2}$  αναπτυχθεί σα ποσοστό των  $K^0$  στη δεύτερη των  $K_2$

Ανατοιχα,  $P_{K^0/6}$  ειναι το ποσοστο των  $\bar{K}^0$  στη σειρα των  $K_2$  παραγωγων πηληδημορουν με το αντικρο, Σημαντικο  $P_{K^0/6} \approx 0.7$ , ειναι το ποσοστο  $P_{K^0/K_2}$  αφού η διεγη φεμια 50%

Επομενως μετα απο χρονο  $t_c$  θα ιχθυε:  $\frac{0.8+0.5}{0.8+0.5+0.7+0.5} = 0.56 \Rightarrow$   
το ποσοστο των  $K^0$  ειναι 56% και το ποσοστο των  $\bar{K}^0$  θα ειναι:

$$\frac{0.7 \cdot 0.5}{0.8 \cdot 0.5 + 0.7 \cdot 0.5} = 0.437 \approx 43.7\% \text{ για } \bar{K}^0.$$

Συναρπηστικοι αριθμοι των  $K_1$  και  $K_2$  θα ιχθυε μετα απο χρονο  $t_c$

$$K_1(t_c) = \left( K^0(t_c) + \bar{K}^0(t_c) \right) / \sqrt{2} = (56 + 44) / \sqrt{2} \Rightarrow K_1(t_c) = 70.7$$

$$K_2(t_c) = \left( K^0(t_c) - \bar{K}^0(t_c) \right) / \sqrt{2} = (56 - 44) / \sqrt{2} \Rightarrow K_2(t_c) = 8.5$$

Οι σχετικοι λόγοι των διαφορων ειναι:  $K_1(t_c) / (K_1(t_c) + K_2(t_c)) = 82.3\%$  και

$$\text{για το } K_2(t_c) \text{ ειναι } K_2(t_c) / (K_1(t_c) + K_2(t_c)) = 10.7\% \text{ για } K_2$$

Επομενως ο αντικρος ουσιαστικα ιση πρωτηγενης παραγωγης των  $K_1$



$$J^P = 1^-(0^-)$$

We have omitted some results that have been superseded by later experiments. The omitted results may be found in our 1988 edition Physics Letters **B204** 1 (1988).

### $\pi^\pm$ MASS

VALUE (MeV)	DOCUMENT ID	TECN	CHG	COMMENT
<b>139.57018±0.00035 OUR FIT</b>				Error includes scale factor of 1.2.

### $\pi^+$ DECAY MODES

$\pi^-$  modes are charge conjugates of the modes below.

For decay limits to particles which are not established, see the section on Searches for Axions and Other Very Light Bosons.

Mode	Fraction ( $\Gamma_i/\Gamma$ )	Confidence level
$\Gamma_1 \mu^+ \nu_\mu$	[a] $(99.98770 \pm 0.00004) \%$	
$\Gamma_2 \mu^+ \nu_\mu \gamma$	[b] $(2.00 \pm 0.25) \times 10^{-4}$	
$\Gamma_3 e^+ \nu_e$	[a] $(1.230 \pm 0.004) \times 10^{-4}$	
$\Gamma_4 e^+ \nu_e \gamma$	[b] $(7.39 \pm 0.05) \times 10^{-7}$	
$\Gamma_5 e^+ \nu_e \pi^0$	$(1.036 \pm 0.006) \times 10^{-8}$	
$\Gamma_6 e^+ \nu_e e^+ e^-$	$(3.2 \pm 0.5) \times 10^{-9}$	
$\Gamma_7 e^+ \nu_e \nu \bar{\nu}$	$< 5 \times 10^{-6}$	90%

Citation: K.A. Olive *et al.* (Particle Data Group), Chin. Phys. C, **38**, 090001 (2014) and 2015 update



$$J^P = 1^-(0^-+)$$

We have omitted some results that have been superseded by later experiments. The omitted results may be found in our 1988 edition Physics Letters **B204** 1 (1988).

### $\pi^0$ MASS

The value is calculated from  $m_{\pi^\pm}$  and  $(m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0})$ . See also the notes under the  $\pi^\pm$  Mass Listings.

VALUE (MeV)	DOCUMENT ID
<b>134.9766±0.0006 OUR FIT</b>	Error includes scale factor of 1.1.

## $\pi^0$ DECAY MODES

For decay limits to particles which are not established, see the appropriate Search sections ( $A^0$  (axion) and Other Light Boson ( $X^0$ ) Searches, etc.).

Mode	Fraction ( $\Gamma_i/\Gamma$ )	Scale factor/ Confidence level
$\Gamma_1$ $2\gamma$	$(98.823 \pm 0.034) \%$	S=1.5
$\Gamma_2$ $e^+ e^- \gamma$	$(1.174 \pm 0.035) \%$	S=1.5
$\Gamma_3$ $\gamma$ positronium	$(1.82 \pm 0.29) \times 10^{-9}$	
$\Gamma_4$ $e^+ e^+ e^- e^-$	$(3.34 \pm 0.16) \times 10^{-5}$	
$\Gamma_5$ $e^+ e^-$	$(6.46 \pm 0.33) \times 10^{-8}$	
$\Gamma_6$ $4\gamma$	$< 2 \times 10^{-8}$	CL=90%
$\Gamma_7$ $\nu \bar{\nu}$	[a] $< 2.7 \times 10^{-7}$	CL=90%
$\Gamma_8$ $\nu_e \bar{\nu}_e$	$< 1.7 \times 10^{-6}$	CL=90%
$\Gamma_9$ $\nu_\mu \bar{\nu}_\mu$	$< 1.6 \times 10^{-6}$	CL=90%
-		-

Citation: K.A. Olive *et al.* (Particle Data Group), Chin. Phys. C, **38**, 090001 (2014) and 2015 update

$\omega(782)$

$$J^G(J^P C) = 0^-(1^{--})$$

## $\omega(782)$ DECAY MODES

Mode	Fraction ( $\Gamma_i/\Gamma$ )	Scale factor/ Confidence level
$\Gamma_1$ $\pi^+ \pi^- \pi^0$	$(89.2 \pm 0.7) \%$	
$\Gamma_2$ $\pi^0 \gamma$	$(8.28 \pm 0.28) \%$	S=2.1
$\Gamma_3$ $\pi^+ \pi^-$	$(1.53^{+0.11}_{-0.13}) \%$	S=1.2
$\Gamma_4$ neutrals (excluding $\pi^0 \gamma$ )	$(8^{+8}_{-5}) \times 10^{-3}$	S=1.1
$\Gamma_5$ $\eta \gamma$	$(4.6 \pm 0.4) \times 10^{-4}$	S=1.1
$\Gamma_6$ $\pi^0 e^+ e^-$	$(7.7 \pm 0.6) \times 10^{-4}$	
$\Gamma_7$ $\pi^0 \mu^+ \mu^-$	$(1.3 \pm 0.4) \times 10^{-4}$	S=2.1



$I^G(J^{PC}) = 0^+(0^-+)$

We have omitted some results that have been superseded by later experiments. The omitted results may be found in our 1988 edition Physics Letters **B204** (1988).

### $\eta$ MASS

Recent measurements resolve the obvious inconsistency in previous  $\eta$  mass measurements in favor of the higher value first reported by NA48 (LAI 02). We use only precise measurements consistent with this higher mass value for our  $\eta$  mass average.

VALUE (MeV)	EVTS	DOCUMENT ID	TECN	COMMENT
<b>547.862±0.017 OUR AVERAGE</b>				

### $\eta$ DECAY MODES

Mode	Fraction ( $\Gamma_i/\Gamma$ )	Scale factor/ Confidence level
<b>Neutral modes</b>		
$\Gamma_1$ neutral modes	(72.12±0.34) %	S=1.2
$\Gamma_2$ $2\gamma$	(39.41±0.20) %	S=1.1
$\Gamma_3$ $3\pi^0$	(32.68±0.23) %	S=1.1
$\Gamma_4$ $\pi^0 2\gamma$	( 2.56±0.22) $\times 10^{-4}$	
$\Gamma_5$ $2\pi^0 2\gamma$	< 1.2 $\times 10^{-3}$	CL=90%
$\Gamma_6$ $4\gamma$	< 2.8 $\times 10^{-4}$	CL=90%
$\Gamma_7$ invisible	< 1.0 $\times 10^{-4}$	CL=90%
<b>Charged modes</b>		
$\Gamma_8$ charged modes	(28.10±0.34) %	S=1.2
$\Gamma_9$ $\pi^+\pi^-\pi^0$	(22.92±0.28) %	S=1.2
$\Gamma_{10}$ $\pi^+\pi^-\gamma$	( 4.22±0.08) %	S=1.1

### 43. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND $d$ FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, e.g., for  $-8/15$  read  $-\sqrt{8/15}$ .

$1/2 \times 1/2$  $1 \times 1/2$  $2 \times 1$  $1 \times 1$  $2 \times 2$ 	$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$ $Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$ $Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$ $Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$ $Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$	Notation: <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td><math>m_1</math></td><td><math>m_2</math></td><td>...</td></tr> <tr><td><math>M</math></td><td><math>M</math></td><td>...</td></tr> </table> Coefficients	$m_1$	$m_2$	...	$M$	$M$	...
$m_1$	$m_2$	...						
$M$	$M$	...						
$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^m$	$d_{m,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$	$\langle j_1 j_2 m_1 m_2   j_1 j_2 JM \rangle$ $= (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1   j_2 j_1 JM \rangle$						
$d_{m',m}^j = (-1)^{m-m'} d_{m,m'}^j = d_{-m,-m'}^j$	$3/2 \times 3/2$  $2 \times 3/2$ 	$d_{0,0}^1 = \cos \theta$ $d_{1/2,1/2}^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2}$ $d_{1,1}^{1/2} = \frac{1+\cos \theta}{2}$ $d_{1/2,-1/2}^{1/2} = -\sin \frac{\theta}{2}$ $d_{1,0}^{1/2} = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$ $d_{1,-1}^{1/2} = \frac{1-\cos \theta}{2}$						
$d_{3/2,3/2}^{3/2} = \frac{1+\cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ $d_{3/2,1/2}^{3/2} = -\sqrt{3} \frac{1+\cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$ $d_{3/2,-1/2}^{3/2} = \sqrt{3} \frac{1-\cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ $d_{3/2,-3/2}^{3/2} = -\frac{1-\cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$ $d_{1/2,1/2}^{3/2} = \frac{3\cos \theta - 1}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ $d_{1/2,-1/2}^{3/2} = -\frac{3\cos \theta + 1}{2} \sin \frac{\theta}{2}$	$d_{2,2}^2 = \left( \frac{1+\cos \theta}{2} \right)^2$ $d_{2,1}^2 = -\frac{1+\cos \theta}{2} \sin \theta$ $d_{2,0}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4} \sin^2 \theta$ $d_{2,-1}^2 = -\frac{1-\cos \theta}{2} \sin \theta$ $d_{2,-2}^2 = \left( \frac{1-\cos \theta}{2} \right)^2$ $d_{1/2,1/2}^2 = \frac{1-\cos \theta}{2} (2\cos \theta - 1)$ $d_{1/2,-1/2}^2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \theta$ $d_{1,-1}^2 = \frac{1-\cos \theta}{2} (2\cos \theta + 1)$ $d_{0,0}^2 = \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$	$d_{0,0}^1 = \cos \theta$ $d_{1/2,1/2}^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2}$ $d_{1,1}^{1/2} = \frac{1+\cos \theta}{2}$ $d_{1/2,-1/2}^{1/2} = -\sin \frac{\theta}{2}$ $d_{1,0}^{1/2} = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$ $d_{1,-1}^{1/2} = \frac{1-\cos \theta}{2}$						

**Figure 43.1:** The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974).