ΦΥΣ 111: ΓΕΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ 1

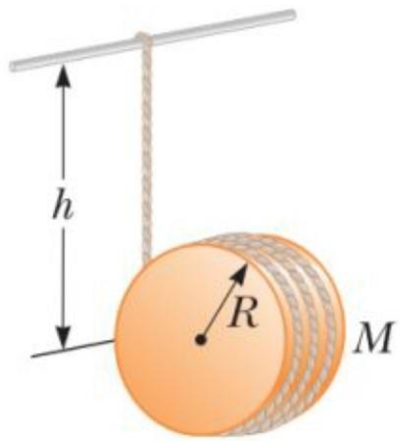
25/11/20 9ο Φροντιστήριο

Προβλήματα:

1. Ένας λεπτός δίσκος ακτίνας R έχει επιφανειακή πυκνότητα σ και το κέντρο του βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.
   Α) Υπολογίστε το δυναμικό σε απόσταση Z πάνω από το κέντρο του δίσκου.
   Β) Βρείτε το δυναμικό για τις περιπτώσεις όπου Z >> R και Z << R.

2. Βρείτε τη ροπή αδράνειας ενός κώνου μάζας M, ακτίνας βάσης R, ύψους H και πυκνότητας ρ ως προς τον άξονα συμμετρίας του.

3. Ένας σπάγγος είναι τυλιγμένος γύρω από έναν ομογενή δίσκο ακτίνας R και μάζας M. Ο δίσκος αφήνεται ελεύθερος ενώ ακινητούσε με τον σπάγγο κατακόρυφο και το ένα άκρο του δεμένο σε ένα σταθερό υποστήριγμα (βλ. σχήμα). Καθώς ο δίσκος κατέρχεται, αποδείξτε ότι:
   a. Η τάση του σπάγγου είναι το ένα τρίτο του βάρους του δίσκου.
   b. Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας είναι $2g/3$.
   c. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι $(4gh/3)$^1/2 .
   d. Επαληθεύσετε την απάντησή σας στο (c) χρησιμοποιώντας ενεργειακή μέθοδο.



4. Ένας κυλινδρικός δακτύλιος έχει μάζα m, εξωτερική ακτίνα $R1$ και εσωτερική ακτίνα $R2$. Δείξτε ότι η ροπή αδράνειάς του ως προς άξονα που περνά από το κέντρο του είναι:

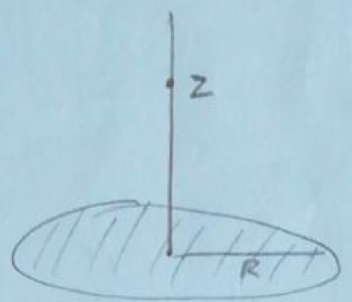
$$\frac{1}{2}m\,(R1^2 + R2^2)$$

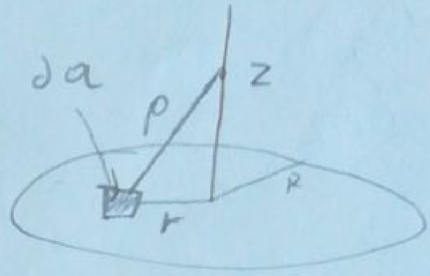
5. Σε ένα σύστημα δύο αστέρων, οι αστέρες περιστρέφονται σε κυκλικές τροχιές ως προς το κοινό κέντρο μάζας τους. Αν οι αστέρες έχουν μάζες $m1$ και $m2$ και η μεταξύ τους απόσταση είναι r, δείξτε ότι η περίοδος περιστροφής τους συναρτήσει του r δίνεται από τη σχέση:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G(m_1 + m_2)}$$

1.

$$\sigma \pi R^2 = M$$





α) Βρίσκω το δυναμικό ∂V που προκαλεί το κομάτι ∂a.

$$\partial V = -\frac{G\,\partial M}{\rho} \qquad \partial m = \sigma\,\partial a \qquad \partial a = r\,\partial r\,\partial\theta$$

$$\rho = \sqrt{r^2+z^2}$$

$$\Rightarrow \partial V = -\frac{G\sigma r\,\partial r\,\partial\theta}{\sqrt{r^2+z^2}} \Rightarrow V = -G\sigma \int_0^{2\pi}\partial\theta \int_0^R \partial r \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$= -2\pi\sigma G \int_0^R r\,(r^2+z^2)^{-1/2}\,\partial r = -2\pi\sigma G\left[\sqrt{r^2+z^2}\right]_0^R$$

$$= -2\pi\sigma G\sqrt{R^2+z^2} + 2\pi\sigma G z \Rightarrow \boxed{V = 2\pi\sigma G\left(z - \sqrt{R^2+z^2}\right)}$$

Bi) $z >> R$

$$V = 2\pi\sigma G\left(z - z\sqrt{\frac{R^2}{z^2}+1}\right) = 2\pi\sigma G z\left(1 - \left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{1/2}\right)$$

$$\approx 2\pi\sigma G z\left(\cancel{1} - \cancel{1} - \frac{R^2}{2z^2}\right) \approx -\frac{\cancel{2}\pi\sigma G R^2}{\cancel{2} z} \approx -\underbrace{\sigma\pi R^2}_{=M}\frac{G}{z}$$

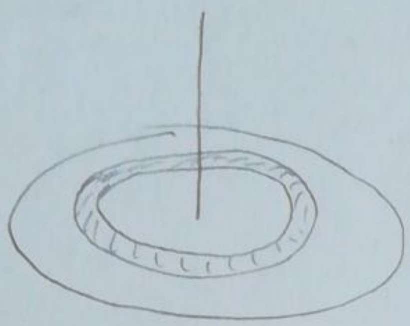
$$\Rightarrow \boxed{V = -\frac{GM}{z}}$$

Bii) $z << R$

$$V = 2\pi\sigma G\left(z - R\sqrt{1+\frac{z^2}{R^2}}\right) \approx 2\pi\sigma G\left(z - R\left(1+\frac{z^2}{2R^2}\right)\right)$$

$$\approx 2\pi\sigma G z - 2\pi\sigma G R - \frac{\pi\sigma G z^2}{R} \Rightarrow \boxed{V \approx 2\pi\sigma G\left[z - R - \frac{z^2}{2R}\right]}$$

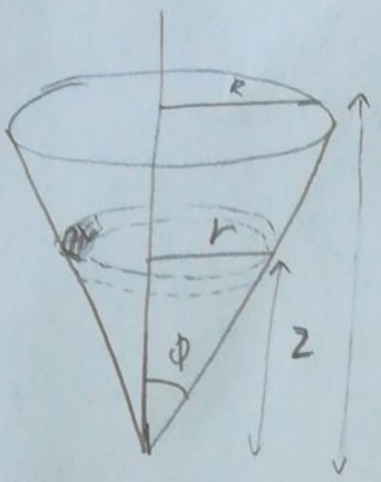
Εναλλακτικός τρόπος σκέψης εύρεση ∂a



$$\partial a = 2\pi r \, \partial r$$

$$\Rightarrow \partial V = -2\pi G\sigma \int_0^R \frac{\partial r \, r}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

2.



Με όμοια τρίγωνα

$$\frac{r}{z} = \frac{R}{h} \Rightarrow r = \frac{R}{h} z$$

$$I = \rho \int r^2 dV \qquad \rho = \frac{M}{V} \qquad V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

$$dV = r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$\Rightarrow I = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{Rz/h} dr \int_0^{h} dz\, r^3 = \int_0^h 2\pi\rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{Rz/h} dz$$

$$= \frac{\pi\rho}{2} \int_0^h \frac{R^4 z^4}{h^4} dz = \frac{\pi\rho R^4}{2h^4} \int_0^h z^4 dz = \frac{\pi \rho R^4}{2h^4} \left[\frac{z^5}{5}\right]_0^h$$

$$= \frac{\pi\rho R^4}{10 h^4} h^5 = \frac{\pi \rho R^4 h}{10}, \quad \rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{\pi R^2 h}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi R^{\cancel{4}\,2} \cancel{h}}{10} \cdot \frac{3M}{\cancel{\pi} \cancel{R^2} \cancel{h}} \Rightarrow \boxed{I = \frac{3}{10} M R^2}$$

Εναλλακτικά για dV

ροπή αδράνειας στοιχειώδους δίσκου

$$dV = \pi r^2 dz \qquad I = \int dI, \quad dI = \frac{1}{2} dM r^2$$

$$I = \frac{1}{2}\rho \int_0^h r^2 \pi r^2 dz$$

$$= \frac{1}{2}\pi\rho \int_0^h \frac{R^4 z^4}{h^4} dz = \frac{\rho\pi R^4}{2h^4}\left[\frac{z^5}{5}\right]_0^h$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi R^4 \rho h}{10}$$

3.

a) $\Sigma F_\psi = M a_\psi \Rightarrow Mg - T = M a_\psi$ $\downarrow +$

$$\Rightarrow \boxed{a_\psi = \frac{Mg - T}{M}} \quad (1)$$

$$\tau = I \gamma \quad , \gamma = \frac{a}{R} \quad , I = \frac{1}{2} M R^2$$

$$\left.\begin{aligned} \tau &= T R \\ \tau &= \frac{1}{2} M \cancel{R^2} \frac{a_\psi}{\cancel{R}} = \frac{M R a_\psi}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{T = \frac{M a_\psi}{2}} \quad (2)$$

$$\xRightarrow{(1),(2)} T = \frac{\cancel{M}}{2} \left(\frac{Mg - T}{\cancel{M}} \right) \Rightarrow 2T = Mg - T \Rightarrow \boxed{T = \frac{Mg}{3}} \quad (3)$$

B) $a_{cm} = a_\psi = \frac{2T}{M} = \frac{2}{\cancel{M}} \frac{1}{3} \cancel{M} g \Rightarrow \boxed{a_{cm} = \frac{2g}{3}}$

γ) $v_{cm} = v_f$

$$v_f^2 = \cancel{v_i^2}^{\,0} + 2 a \Delta \psi = 2 \cdot \frac{2g}{3} h = \frac{4hg}{3}$$

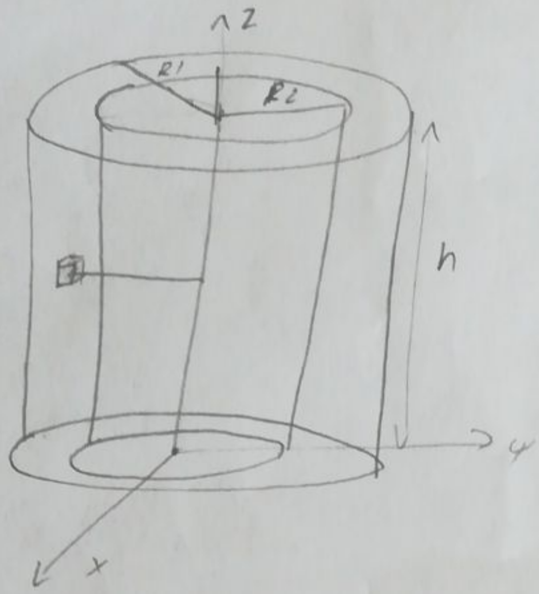
$$\Rightarrow \boxed{v_f = \left(\frac{4hg}{3} \right)^{1/2}}$$

δ) $Mgh = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M v_f^2$

$$\Rightarrow \cancel{M} g h = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \cancel{M} \cancel{R^2} \frac{v_f^2}{\cancel{R^2}} + \frac{1}{2} \cancel{M} v_f^2$$

$$\Rightarrow g h = \frac{v_f^2}{4} + \frac{1}{2} v_f^2 \Rightarrow \boxed{v_f = \sqrt{\frac{4gh}{3}}}$$

4



$$I = \rho \int r^2 \, dV$$

$$dV = r \, dr \, d\theta \, dz$$

$$\Rightarrow I = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \int_{R_1}^{R_2} r^3 \, dr$$

$$\Rightarrow I = 2\pi\rho h \int_{R_1}^{R_2} r^3 \, dr = 2\pi\rho h \left[\frac{r^4}{4} \right]_{R_2}^{R_1}$$

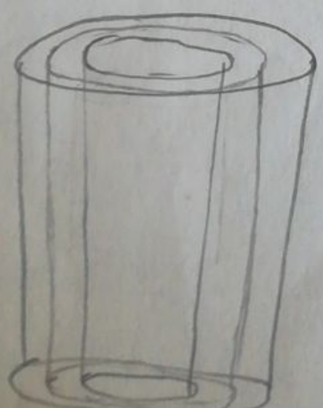
$$\Rightarrow I = \frac{\pi \rho h}{2} \left(R_1^2 + R_2^2 \right) \left(R_1^2 - R_2^2 \right)$$

$$dm = \rho r \, dr \, d\theta \, dz \quad \Rightarrow M = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \int_{R_1}^{R_2} r \, dr$$

$$\Rightarrow M = 2\pi\rho h \left[\frac{r^2}{2} \right]_{R_2}^{R_1} \quad \Rightarrow M = \pi \rho h \left(R_1^2 - R_2^2 \right)$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{M}{\pi h \left(R_1^2 - R_2^2 \right)} \quad \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2} M \left(R_1^2 + R_2^2 \right)}$$

Εναλλακτικά για dV

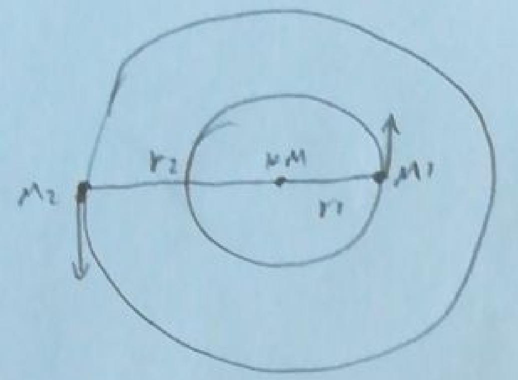


$$dV = 2\pi r h \, dr$$

κυλινδρικό "κέλυφος"

πάχους dr

5



$$r = r_1 + r_2$$

$$T = \frac{2\pi}{w} \Rightarrow \boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{w^2}} \quad (1)$$

Η ακτινική δύναμη που ασκείται στην m_2 αποτελεί την κεντρομόλο δύναμη.

$$\Rightarrow \frac{G m_1 m_2}{(r_1+r_2)^2} = \frac{m_2 v^2}{r_2} = \frac{m_2 w^2 r_2^2}{r_2} \Rightarrow \frac{G m_1 m_2}{(r_1+r_2)^2} = m_2 w^2 r_2$$

$$\Rightarrow \boxed{w^2 r_2 = \frac{G m_1}{(r_1+r_2)^2}} \quad (2)$$

$$\xRightarrow{(1),(2)} \boxed{T^2 = \frac{4\pi^2 (r_1+r_2)^2 r_2}{G m_1}} \quad (3)$$

κέντρο μάζας στην αρχή των αξόνων

$$\Rightarrow m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2} = 0 \Rightarrow m_1 r_1 - m_2 r_2 = 0$$

$$\Rightarrow m_1 r_1 = m_2 r_2 \Rightarrow r_2 = \frac{m_1 r_1}{m_2} \Rightarrow r_2 = \frac{m_1 (r - r_2)}{m_2}$$

$$\Rightarrow r_2 = \frac{m_1 r}{m_2} - \frac{m_1 r_2}{m_2} \Rightarrow \frac{r_2 (m_1 + m_2)}{m_2} = \frac{m_1 r}{m_2} \Rightarrow \boxed{r_2 = \frac{m_1 r}{m_1 + m_2}} \quad (4)$$

Ανάλογα : $\boxed{r_1 = \frac{m_2 r}{m_1 + m_1}} \quad (5)$

$$\xRightarrow{(3),(4),(5)} \boxed{T = \frac{4\pi^2 r^3}{G(m_1+m_2)}}$$