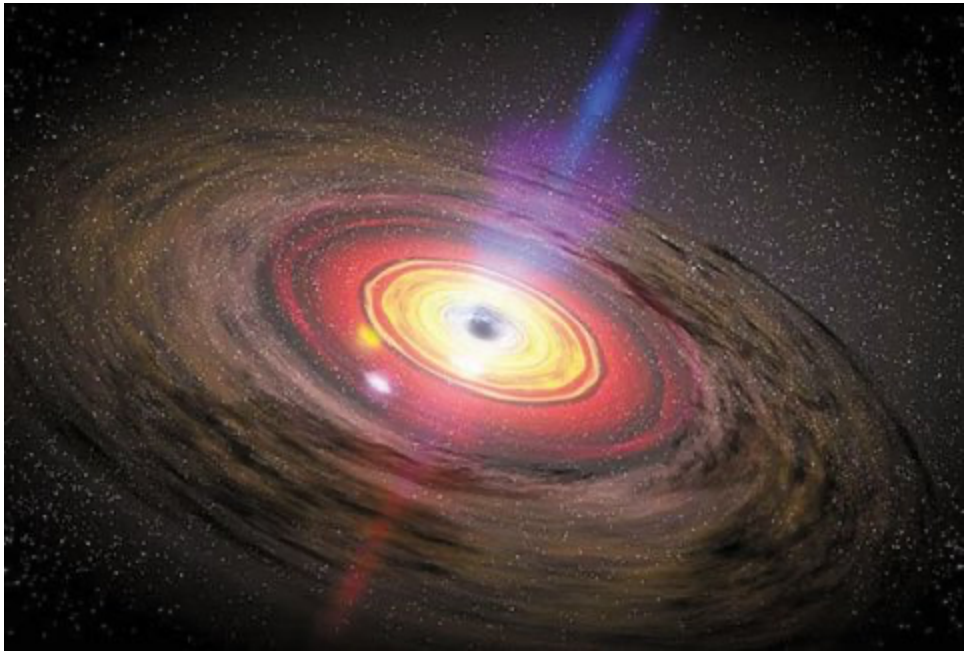
Νόμος παγκόσμιας έλξης



Κοιτάζοντας τα άστρα ...

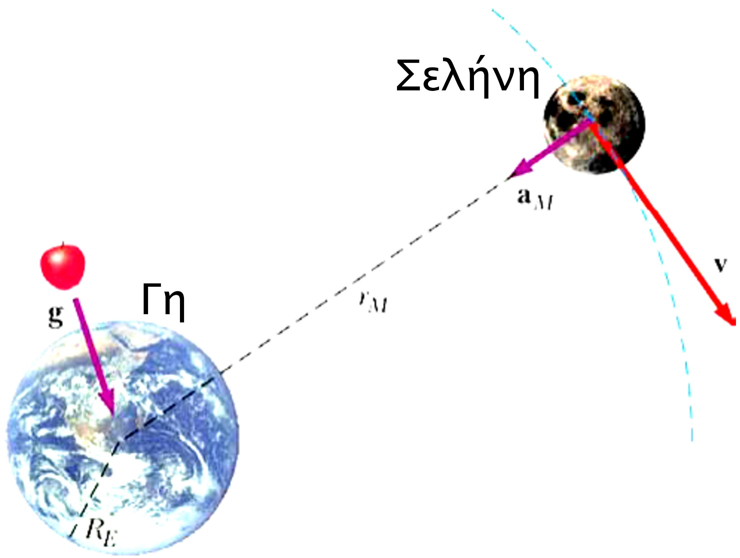
Η εξήγηση για τη δυναμική μεταξύ ουράνιων σωμάτων ξεκίνησε από παρατηρήσεις και πνευματικές αναζητήσεις από την αρχή της ανθρωπότητας

- Πτολεμαίος: Είχε την λάθος γεωκεντρική θεωρία
- Κοπέρνικος: Έδωσε μια περισσότερο σωστή ηλιοκεντρική θεωρία
- Brahe: Πολλές παρατηρήσεις και ακριβή δεδομένα
- Keppler: Χρησιμοποίησε τα δεδομένα του Brahe και πρότεινε τρεις εμπειρικούς νόμους
- Newton: Βρήκε ένα παγκόσμιο νόμο που εξηγεί τους νόμους του Keppler
- Einstein: Δημιούργησε μια νέα θεωρία που εξηγεί μερικές μικρές ανακρίβειες στη θεωρία του Newton

???????: Τι έρχεται για το μέλλον?

Βαρύτητα-Νόμος παγκόσμιας βαρυτικής έλξης

- Ο Newton συνέδεσε την πτώση αντικειμένων στην επιφάνεια της γης με την κίνηση της σελήνης γύρω από την γη.
  - Η σελήνη πέφτει συνεχώς προς την γη:



$$a_r^{\sigma\epsilon\lambda.} = \frac{v^2}{R_{\gamma\eta-\sigma\epsilon\lambda.}} = \frac{(2\pi R_{\gamma\eta-\sigma\epsilon\lambda.}/T)^2}{R_{\gamma\eta-\sigma\epsilon\lambda.}} = 0.00272 m/s^2$$

όπου $R_{\gamma\eta\text{-}\sigma\epsilon\lambda.} = 3.84\text{x}10^8\text{m}$ και $T = 27.3$ ημέρες

Πως συγκρίνεται αυτό με το g?

$$\frac{a_{\epsilon\pi\iota\varphi.\text{-}\gamma\eta\varsigma}}{a_{\tau\rho o\chi\iota\alpha\text{-}\sigma\epsilon\lambda.}} = \frac{9.81 m/s^2}{2.72\times 10^{-3}} \approx 3600$$

Αλλά $$\frac{R_{\gamma\eta-\sigma\epsilon\lambda.}}{R_{\gamma\eta}} = \frac{3.84\times 10^8}{6.37\times 10^6} \approx 60$$

Αφού η επιτάχυνση που προκαλείται από τη βαρυτική δύναμη ελαττώνεται σαν $1/R^2$ τότε και η δύναμη θα μεταβάλλεται όπως $1/R^2$

$$F_r = m a_r \propto \frac{1}{r^2}$$

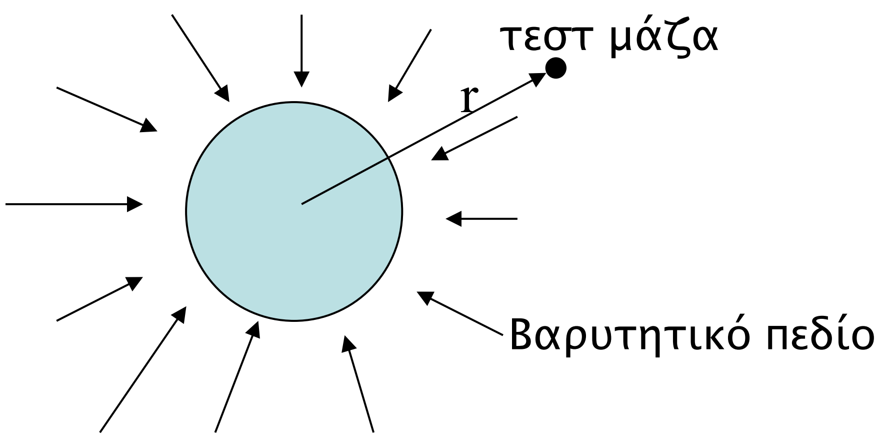
Εξάρτηση από τη μάζα

Μάζα η μόνη κοινή φυσική ιδιότητα μεταξύ γης-σελήνης.

- Από το 3ο νόμο του Newton $F_{γης-σελ} = -F_{σελ-γης}$
- ? Αν η εξίσωση της δύναμης εξαρτώνταν από την μάζα τότε η εξάρτηση μπορούσε να έχει τη μορφή: $(M+m)^n$ ή $(Mm)^n$.
- ✓ Από πειράματα Γαλιλαίου ➔ εξάρτηση της μορφής $(Mm)^n$

(επιτάχυνση μάζας m που προκαλείται από μάζα M είναι ανεξάρτητη της μάζας m)

Βαρυτική δύναμη $F_r \propto \dfrac{Mm}{r^2}$ $\Rightarrow F_{grav} = G\dfrac{Mm}{r^2}$



Αμοιβαία έλξη μεταξύ δύο οποιαδήποτε μαζών στο σύμπαν!

$G = 6.67\times10^{-11}\, Nm^2/kg^2$ πολύ μικρή!!

Βαρυτική μάζα → Αδρανειακή μάζα → Βαρυτική

- Οι μάζες στον νόμο της παγκόσμιας βαρυτικής έλξης – βαρυτικές
- Οι μάζες στο 2ο νόμο του Newton αδρανειακές

- Ποια η σχέση μεταξύ τους? Τι λένε τα πειράματα?

$$F_{grav} = G\frac{M_g m_g}{r^2} = m_{\alpha\delta\rho.}a \;\Rightarrow a = G\frac{M_g}{r^2}\frac{m_g}{m_{\alpha\delta\rho.}}$$

- **Πείραμα**: όλα τα σώματα που κάνουν ελεύθερη πτώση πέφτουν με g

  Επομένως $\mathbf{m_g = m_{\alpha\delta\rho}}$

- Η σταθερά G είναι πάρα πολύ δύσκολο να μετρηθεί και είναι μια από τις λιγότερο γνωστές (σε ακρίβεια) σταθερές στη φυσική

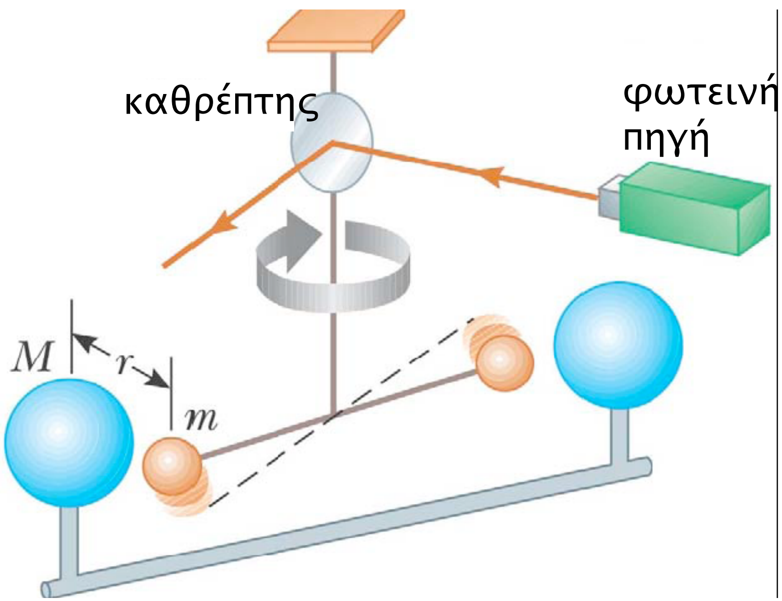
- Οι βαρυτικές δυνάμεις είναι προστιθέμενες:

$$\sum \vec{F}_g = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \cdots + \vec{F}_{1n}$$

Μέτρηση της σταθεράς G

- Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την γη σα μια από τις μάζες αφού δεν ξέρουμε την μάζα της
- Χρειαζόμαστε δύο γνωστές μάζες.
  - Η δύναμη μεταξύ δύο «καθημερινών» μαζών είναι πολύ μικρή. Πρέπει να 'μαστε έξυπνοι.
  - Ο Cavendish ήταν αρκετά έξυπνος. 100 χρόνια μετά το Newton (1798) ήταν ο πρώτος που μέτρησε το G.

Βασική ιδέα: Μέτρηση της παραμόρφωσης λόγω περιστροφής υπό την επίδραση της βαρύτητας ενός λεπτού σύρματος που συνέδεε δύο γνωστές μικρές μάζες.



Το στρίψιμο του σύρματος μετρά τη βαρυτική δύναμη F, ενώ γνωρίζουμε τα m_1, m_2 και r και άρα βρίσκουμε το G

Σημαντικό: Η μέθοδος θεωρεί ότι τα 2 σφαιρικά σώματα δρουν σα να είναι σημειακά. Δηλαδή όλη τους η μάζα στο κέντρο της σφαίρας.

Αυτό αποδεικνύεται σωστό.

Σημασία του πειράματος του Cavendish

- Γνωστό και σα πείραμα μέτρησης του βάρους της Γης:

  Αφού μετρήσαμε το G με 2 γνωστές μάζες μπορούμε να μετρήσουμε τη μάζα της γης από

$$mg = G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow g = G\frac{M}{r^2} \Rightarrow M = \frac{gr^2}{G} \Rightarrow M = \frac{9.8\cdot(6.37\times10^6)^2}{6.67\times10^{-11}} = 5.97\times10^{24}\,kg$$

- Η μέση πυκνότητα της γης είναι ρ = M/(4/3 πR^3) ➔ $\rho_{\alpha\nu}$=5.5gr/cm^3
- Αλλά η πυκνότητα της κρούστας της γης είναι < 5.5 gr/cm^3

  Επομένως το κέντρο της πρέπει να 'ναι περισσότερο συμπαγές.

  Το πείραμα του Cavendish μας δίνει πληροφορίες και για το κόρο της γης

Μεταβολές της επιτάχυνσης της βαρύτητας

- Η επιτάχυνση της βαρύτητας δεν είναι σταθερή στην επιφάνεια της γης:

$$mg = G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow g = G\frac{M}{r^2} \approx 9.8m/s^2$$

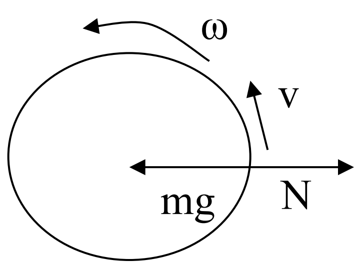
(α) Ο φλοιός δεν είναι ομοιόμορφος.

(β) Η γη δεν είναι σφαίρα (πιο πλατιά στον ισημερινό)

(γ) Η γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της (β και γ σχετίζονται)

- Σε κάποια από τις αρχικές διαλέξεις είχαμε υπολογίσει το g στον ισημερινό.

Λόγω της περιστροφής της γης το g δίνεται από:



$$mg - N = \frac{m\text{v}^2}{R} \Rightarrow N = m\left(g - \frac{\text{v}^2}{R}\right) = m\left(g - \omega^2 R\right)$$

Αλλά:

$$\omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{1\eta\mu\varepsilon\rho\alpha}\right)^2 R = \left(\frac{2\pi}{86400}\right)^2 R = 0.034m/s^2$$

Στη κορυφή ενός βουνού:

$$g = G\frac{M}{(r+h)^2} = \frac{GM}{r^2 + h^2 + 2rh} \approx \frac{GM}{r^2(1 + 2h/r)} = \frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{2h}{r}\right) \Rightarrow g = g\left(1 - \frac{2h}{r}\right)$$

Παρένθεση – το διονυμικό ανάπτυγμα

Μπορούμε να αναπτύξουμε ένα πολυόνυμο της μορφής $(x+y)^n$ σε άθροισμα όρων που περιέχουν $ax^b y^c$ όπου $b,c>0$ και $b+c=n$

Για παράδειγμα: $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + y^4$

Οι συντελεστές α μπροστά από τα γινόμενα ονομάζονται διονυμικοί παράγοντες $\binom{n}{b}$

Ο διονυμικός παράγοντας είναι: $\binom{n}{b} = \dfrac{n!}{(n-b)!b!}$

Στο παράδειγμα: $(x+y)^4$ n=4 και ο 1ος όρος είναι b=4, c=0 $\binom{n}{4} = \dfrac{4!}{(4-4)!4!} = 1$

ο 2ος όρος είναι b=3, c=1 $\binom{n}{3} = \dfrac{4!}{(4-3)!3!} = \dfrac{4\times 3!}{1!3!} = 4$

ο 3ος όρος είναι b=2, c=2 $\binom{n}{2} = \dfrac{4!}{(4-2)!2!} = \dfrac{4\times 3\times 2!}{2!2!} = 6$

ο 4ος όρος είναι b=1, c=3 $\binom{n}{1} = \dfrac{4!}{(4-1)!1!} = \dfrac{4\times 3!}{3!1!} = 4$

Στην περίπτωση που x=1: $(1+y)^4 = 1 + 4y^1 + 6y^2 + 4y^3 + y^4$

Έστω y=ε<<1: $(1+\varepsilon)^n = 1 + \dfrac{n!}{(n-1)!1!}\varepsilon + \dfrac{n!}{(n-2)!2!}\overset{\sim 0}{\varepsilon^2} + \cdots + \overset{\sim 0}{\varepsilon^n} \approx 1 + \dfrac{n(n-1)!}{(n-1)!}\varepsilon \quad = 1 + n\varepsilon$

Παρένθεση – το διονυμικό ανάπτυγμα

Το διονυμικό ανάπτυγμα/θεώρημα γενικεύτηκε από τον Newton για να επιτρέπει πραγματικούς εκθέτες πέρα από τους μή αρνητικούς ακεραίους

Στη γενίκευση αυτή, το πεπερασμένο άθροισμα αντικαθίσταται από άπειρη σειρά.

Οι διονυμικοί παράγοντες τροποποιούνται για άπειρη σειρά ως:

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!} = \frac{(r)_k}{k!}$$

Σε μία γενική περίπτωση θα έχουμε:

$$(x+y)^r = x^r + rx^{r-1}y + \frac{r(r-1)}{2!}x^{r-2}y^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^{r-3}y^3 + \cdots$$

Για r = 1/2 και -1<x<1: $(1+x)^{1/2} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \cdots$

Για r = -1 και -1<x<1: $(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$

Για r = -1/2 και -1<x<1: $(1+x)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \frac{63}{256}x^5 + \cdots$