

## Φυσικό σύστημα μονάδων

Τα βασικά μεγέθη τα οποία χρησιμοποιούμε στη Φυσική περιλαμβάνουν την μάζα  $[M]$ , το χρόνο  $[T]$  και το μήκος  $[L]$ .

Ωστόσο οι μονάδες του συστήματος SI είναι άβολες για την τομέα της φυσικής των στοιχειωδών σωματιδίων

➤ Μονάδα ενέργειας χρησιμοποιείται το **eV** και πολλαπλάσιά του:

eV,	keV,	MeV,	GeV,	TeV,	PeV
<b><math>10^3</math></b>	<b><math>10^6</math></b>	<b><math>10^9</math></b>	<b><math>10^{12}</math></b>	<b><math>10^{15}</math></b>	

**1 eV** είναι η ενέργεια που αποκτά ένα ηλεκτρόνιο όταν επιταχύνεται μεταξύ διαφοράς δυναμικού 1Volt.

$$E = q\Delta V \quad q = 1.6 \times 10^{-19} C \Rightarrow 1eV = 1.6 \times 10^{-19} CV = 1.6 \times 10^{-19} J$$

LHC είναι ο μεγαλύτερος σε ενέργεια επιταχυντής σήμερα, με ενέργεια δέσμης

$$E = 6.5TeV = 6.5 \times 10^{12} \times 1.6 \times 10^{-19} J \sim 1\mu J$$

➤ Μονάδες μέτρησης της μάζας είναι:  $E = mc^2 \quad [E] = [m][v]^2$

Στο φυσικό σύστημα μονάδων, η ταχύτητα είναι αδιάστατη γιατί:  $[v] = \frac{[L]}{[T]}$

Αλλά στην σχετικότητα το μήκος και ο χρόνος διαχειρίζονται ισότιμα:  $[L] = [T]$

## Φυσικό σύστημα μονάδων

Στο φυσικό σύστημα μονάδων, χρησιμοποιούμε σαν διαστάσεις τη **μάζα**  $[M]$ , την **ταχύτητα**  $[u]=[LT^{-1}]$  και την **στροφορμή**  $[J]=[MuL]=[ML^2T^{-1}]$  ή **ισοδύναμα** τη **δράση**  $[S]=[ET]=[ML^2T^{-1}]$

Η τυπική ταχύτητα είναι αυτή του φωτός που την θέτουμε ίση με 1  $\rightarrow c = 1$

Επομένως έχουμε:  $[M]=[E]=GeV$  ή  $MeV$

Μερικές φορές χρησιμοποιούμε τις μονάδες:  $[M]=GeV/c^2$  ή  $MeV/c^2$

➤ Μονάδες μέτρησης της ορμής:  $[p]=[m][\cancel{v}] \Rightarrow [p]=[m]=[E]=GeV$   
αδιάστατο

➤ Μονάδες μέτρησης της στροφορμής:  $[J]=[L][p]=[L][E]$

αλλά στη φυσική κλίμακα, η στροφορμή των σωματιδίων είναι κβαντισμένη ίση  $\hbar$   
 Στο φυσικό σύστημα μονάδων  $\hbar = 1$

Επομένως η στροφορμή στο φυσικό σύστημα μονάδων είναι αδιάστατο μέγεθος

$$[L]=[T]=[E]^{-1} \Rightarrow [J]=[E][E]^{-1}=1$$

Θυμηθείτε ακόμα ότι:  $\hbar = 1 \times 10^{-34} J \text{ sec} = 6.6 \times 10^{-22} MeV/s$

## Φυσικό σύστημα μονάδων

➤ Μονάδες φορτίου:

Η δύναμη Coulomb δίνεται από την σχέση:  $F \propto \frac{Q^2}{r^2} \Rightarrow [Q] = \sqrt{[F][L]^2}$

$$\Rightarrow [Q] = \sqrt{[M] \frac{[L]}{[T]^2} [L]^2} \Rightarrow [Q] = \sqrt{[M][L]} = \sqrt{[E][L]} = 1$$

Το ηλεκτρικό φορτίο επομένως στο φυσικό σύστημα μονάδων είναι αδιάστατο μέγεθος

Αν χρησιμοποιούσαμε το σύστημα Gauss-CGS τότε:

$$|F| = \frac{Q^2}{r^2} \Rightarrow Q = \sqrt{|F|r^2} \Rightarrow [Q] = [M]^{1/2} [L]^{3/2} [T]^{-1}$$

Στο CGS η μονάδα φορτίου είναι το *esu* και επομένως θα έχουμε:

$$Q^2 = Fr^2 \Rightarrow 1 \text{ esu}^2 = \text{dyn} \cdot \text{cm}^2 = 10^{-5} \text{ N} \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \Rightarrow 1 \text{ esu}^2 = 10^{-9} \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

Στο σύστημα SI, γράφοντας το νόμο του Coulomb σαν:  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2}$

$$\Rightarrow \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi F} \frac{Q^2}{r^2} \text{ σημείωση ότι: } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

Αντικαθιστώντας τις διαστάσεις για δύναμη, Q και r έχουμε:  $[\epsilon_0] = [C^2 M^{-1} L^{-3} T^2]$

## Φυσικό σύστημα μονάδων

Μερικές ενδιαφέρουσες μετατροπές και ισοδυναμίες μονάδων στο φυσικό σύστημα:

Επειδή:  $c \approx 3 \times 10^8 m \cdot s^{-1}$   
 $\hbar \approx 6.6 \times 10^{-22} MeV \cdot s$  }  $\Rightarrow \hbar c \approx 200 MeV \cdot fm$

Προκύπτει:  $1s \approx 3 \times 10^8 m$

$$1 MeV \approx (1/6.6) \times 10^{22} s^{-1}$$

$$1 fm \approx (1/200) MeV^{-1} = 5 GeV^{-1}$$

Η βασική μονάδα μάζας είναι αυτή του πρωτονίου:  $m_p (= m_p c^2) \approx 938 MeV$

Η βασική μονάδα μήκους είναι:  $\lambda_p = \frac{1}{m_p} \left( = \frac{\hbar}{m_p c} \right) \left( = \frac{\hbar c}{m_p c^2} = \frac{200 MeV \cdot fm}{938 MeV} \right) \approx 0.21 fm$

Η βασική μονάδα χρόνου:  $t_p = \frac{1}{m_p} \left( = \frac{\hbar}{m_p c^2} \right) \left( = \frac{6.6 \times 10^{-22} MeV \cdot s}{938 MeV} \right) \approx 7 \times 10^{-25} s$

Χρησιμοποιώντας τη φυσική μονάδα μήκους και τον ορισμό της μονάδας ενεργού διατομής θα έχουμε:

$$1 mb = 10^{-27} cm^2 = 0.1 fm^2 \Rightarrow 1 mb \approx 0.1 \times 5^2 GeV^{-2} \Rightarrow 1 GeV^{-2} \approx 0.4 mb$$

# Φυσικό σύστημα μονάδων

Συνοψίζοντας, για το φυσικό σύστημα μονάδων έχουμε:  $c = \hbar = 1$

Μέγεθος	Μονάδες	Μετατροπή σε SI
$E$	$GeV$	$1GeV = 1.6 \times 10^{-10} J$
$p$	$GeV$	$1/c$
$m$	$GeV$	$1/c^2$
$L$	$1/GeV$	$\hbar c = 0.197 GeV \cdot fm$
$T$	$1/GeV$	$\hbar = 6.6 \times 10^{-22} MeV \cdot sec$
$J$	αδιάστατο	$\hbar$
$Q$	αδιάστατο	

# Εξισώσεις ηλεκτροδυναμικής

Οι εξισώσεις της ηλεκτροδυναμικής χρησιμοποιούνται στη φυσική στοιχειωδών σωματιδίων μπορούν να γραφούν σε μια γενική μορφή επιτρέποντας την εύκολη μετατροπή τους από το ένα σύστημα μονάδων σε κάποιο άλλο

Θα έχουμε:

Δυναμικό Coulomb:  $V = k_e \frac{q_1 q_2}{r}$

Δύναμη Lorentz:  $\vec{F} = q \left( \vec{E} + k_f \vec{v} \times \vec{B} \right)$

Εξισώσεις Maxwell:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi k_e \rho & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -k_e \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= 4\pi k_m \vec{j} + \frac{k_m}{k_e} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Πεδία:  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - k_f \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Οι τιμές των σταθερών στα διάφορα συστήματα είναι:

Σταθερά	Gauss-CGS	SI	Φυσικό (Heaviside)
$k_e$	1	$1/4\pi\epsilon_0$	$1/4\pi$
$k_f$	$1/c$	1	$1/c$
$k_m$	$1/c$	$\mu_0/4\pi$	$1/4\pi c$
$k_m/k_e$	$1/c$	$\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$	$1/c$

## Σταθερά λεπτής υφής

➤ Η ισχύς των ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων εκφράζεται από την σταθερά της λεπτής υφής που ορίζεται σαν η αδιάστατη ποσότητα που προκύπτει από τον λόγο της ηλεκτροστατικής ενέργειας άπωσης μεταξύ δύο ηλεκτρονίων που βρίσκονται σε απόσταση ίση με το μήκος κύματος Compton του ηλεκτρονίου, προς την ενέργεια της μάζας ηρεμίας του ηλεκτρονίου

$$a = \frac{e^2 / \lambda_c^e}{m_e c^2} = \frac{e^2 / (\hbar / m_e c)}{m_e c^2} \Rightarrow a = \frac{e^2}{\hbar c}$$

σύστημα Gauss-CGS

$$a = \frac{e^2 / 4\pi\epsilon_0 (\hbar / m_e c)}{m_e c^2} \Rightarrow a = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$$

σύστημα SI

$$a = \frac{e^2 / 4\pi (\hbar / m_e c)}{m_e c^2} \Rightarrow a = \frac{e^2}{4\pi \hbar c} \Rightarrow a = \frac{e^2}{4\pi}$$

σύστημα Lorentz-Heaviside

Σε όλα τα συστήματα η σταθερά της λεπτής υφής ισούται με  $a \approx \frac{1}{137}$

και είναι αδιάστατη

➤ Για παράδειγμα στο σύστημα CGS:

$$[e] = [M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}] \Rightarrow [e]^2 = [ML^3 T^{-2}]$$

$$[\hbar] = [ML^2 T^{-1}] \text{ και } [c] = [LT^{-1}] \Rightarrow [\hbar c] = [ML^3 T^{-2}]$$

$$[e]^2 = [\hbar c]$$

και άρα αδιάστατη

## Σταθερά λεπτής υφής

➤ Αριθμητικά θα έχουμε:

$$e = 4.802 \times 10^{-10} \text{ esu}$$

$$\hbar = 1.504 \times 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}$$

$$c = 2.997 \times 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} e \\ \hbar \\ c \end{array} \right\} \Rightarrow a \approx \frac{1}{137}$$



## Σχετικιστική Δυναμική: Ειδική θεωρία της σχετικότητας

Σωματίδια τα οποία μελετούμε κινούνται με μεγάλες ταχύτητες και φυσιολογικά η δυναμική περιγράφεται από την ειδική θεωρία της σχετικότητας :

Στα επόμενα ακολουθεί μια σύντομη επισκόπηση θεμάτων που έχετε δει σε άλλα μαθήματα και πρέπει να σας είναι γνωστά

- ❑ Η ειδική θεωρία της σχετικότητας (STR) ➡ εύκολα κατανοητή
- ❑ Η ειδική θεωρία της σχετικότητας (STR) ➡ δύσκολα πιστευτή
- Σαν αποτέλεσμα η διαίσθηση που χρησιμοποιεί κάποιος στην λύση προβλημάτων δεν είναι πιστευτή με αποτέλεσμα STR πιο δύσκολα εφαρμόσιμη
- Στην STR η βαρύτητα αγνοείται και δουλεύουμε σε Ευκλείδιο χώρο (επίπεδο χωρόχρονο) σε αντίθεση με τον χωρόχρονο Riemann που περιλαμβάνει τις καμπυλώσεις της βαρύτητας
- Στην STR περιοριζόμαστε σε **αδρανειακά συστήματα αναφοράς**:
  - ✓ Σώματα σε κίνηση συνεχίζουν την κίνησή τους εκτός αν ενεργήσει κάποια δύναμη
- Πως ελέγχουμε ότι βρισκόμαστε σε αδρανειακό σύστημα?:
  - ✓ Ρίχνουμε πέτρες σε 3 ορθογώνιες μεταξύ τους διευθύνσεις και παρατηρούμε αν υπάρχει καμπύλωση της τροχιάς κάποιου ➡ μη αδρανειακό σύστημα

# SRT: Ειδική θεωρία της σχετικότητας

☐ STR στηρίζεται σε 2 βασικές παραδοχές:

- ➡ Η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα
- ➡ Οι νόμοι της φυσικής πρέπει να έχουν **την ίδια μορφή** όταν διατυπώνονται σε οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα

☐ Οι νόμοι που ακολουθούν την 2<sup>η</sup> παραδοχή θεωρούμε ότι είναι **συναλλοίωτοι**

➤ Σημαίνει ότι όλες οι μεταβλητές τους αλλάζουν με το σωστό τρόπο ώστε να διατηρούν την συναρτησιακή μορφή αμετάβλητη κάτω από μετασχηματισμό του συστήματος αναφοράς παρόλο που αριθμητικά οι τιμές των μεταβλητών αλλάζουν

✓ Η εξίσωση Schrödinger είναι παράδειγμα μη συναλλοίωτη

$$\left[ \frac{\hbar^2 p^2}{2m} + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t)$$

1<sup>ης</sup> τάξης σε χρόνο  
2<sup>ης</sup> τάξης σε χώρο

Η εξίσωση Dirac όπως θα δούμε είναι συναλλοίωτη

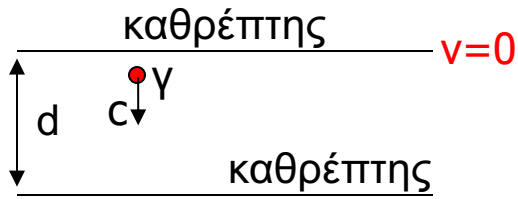
✓ Οι εξισώσεις Maxwell είναι συναλλοίωτες παρόλο που διατυπώθηκαν πριν SRT γιατί στηρίζονται σε πειραματικές παρατηρήσεις

# SRT: Ειδική θεωρία της σχετικότητας

❑ STR προκύπτει από τις 2 βασικές παραδοχές:

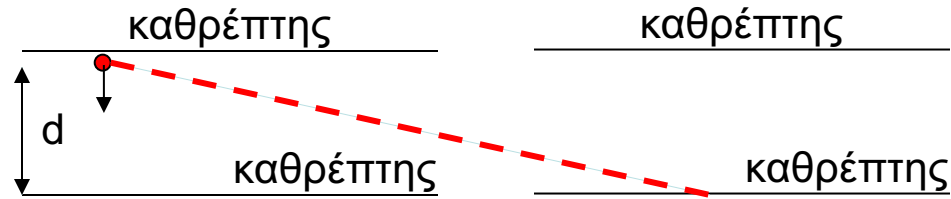
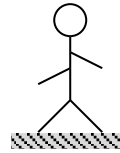
- Το γεγονός ότι η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα οδηγεί στη μίξη των χωρικών και χρονικών συντεταγμένων
- Ένας ακίνητος παρατηρητής αντιλαμβάνεται τον χρόνο ενός κινούμενου συστήματος να «τρέχει» πιο αργά (διαστολή χρόνου) ενώ η διάσταση κατά μήκος της διεύθυνσης της κίνησης να έχει μικρύνει (συστολή του μήκους)
  - ✓ Θα ξαναθυμηθούμε τις περιπτώσεις αυτές με τη χρήση ενός απλού ρολογιού:  
του ρολογιού του φωτός: Ένα και μόνο φωτόνιο που ανακλάται ανάμεσα σε δυο καθρέπτες

# SRT: Ειδική θεωρία της σχετικότητας



ρολόι φωτός  
ακίνητο

χρονικό tick:  $\Delta t = \frac{d}{c}$



ρολόι σε κίνηση

$$\Delta t' = \frac{\sqrt{d^2 + (v\Delta t')^2}}{c} \Rightarrow c^2 \Delta t'^2 = d^2 + (v\Delta t')^2$$

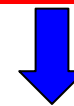
$$\Rightarrow \Delta t' \sqrt{(c^2 - v^2)} = d \Rightarrow \Delta t' = \frac{d}{\sqrt{(c^2 - v^2)}} = \frac{d}{c\sqrt{(1 - (v/c)^2)}}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow t' = \frac{t}{\sqrt{(1 - \beta^2)}}$$

$$\Rightarrow t' = \gamma t$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

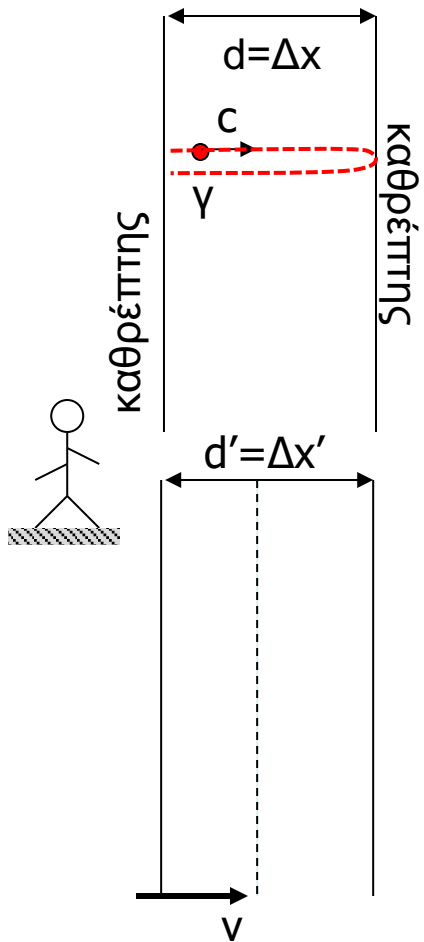


χρονικό tick έχει διασταλεί ως προς το αρχικό  $\Delta t$

- ❑  $\gamma \gg 1$  και επομένως ο χρόνος στο κινούμενο ρολόι όπως είναι αντιληπτός από το ακίνητο σύστημα, εμφανίζεται να αλλάζει με πιο αργό ρυθμό
- ❑ Το γεγονός ότι 2 παρατηρητές σε σχετική κίνηση ο ένας ως προς τον άλλο δεν έχουν ένα ίδιο απόλυτο χρόνο σημαίνει, ότι δυο γεγονότα που συμβαίνουν ταυτόχρονα στο ένα σύστημα δεν θα συμφωνούν στο άλλο σύστημα.
- ❑ Παραβίαση του 3<sup>ου</sup> νόμου του Newton για δυνάμεις εξαποστάσεως

# SRT: Ειδική θεωρία της σχετικότητας

- Περιστρέφουμε το ρολόι ώστε το φωτόνιο να κινείται παράλληλα με την διεύθυνση κίνησης του ρολογιού



- Στο σύστημα αναφοράς των καθρεπτών

- Η χρονική διάρκεια για την διαδρομή από τον ένα καθρέπτη στον άλλο και πίσω, όπως γίνεται αντιληπτή για παρατηρητή στο σύστημα αυτό είναι:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2d}{c} \Rightarrow \Delta t = 2 \frac{\Delta x}{c}$$

- Στο ακίνητο σύστημα αναφοράς

- Όπως γίνεται αντιληπτό από ακίνητο παρατηρητή (ενώ το ρολόι κινείται με ταχύτητα  $v$ ) ο χρόνος της κλειστής διαδρομής είναι:

$$\Delta t' = \Delta t'_1 + \Delta t'_2 \Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta x' + v\Delta t'_1}{c} + \frac{\Delta x' - v\Delta t'_2}{c}$$

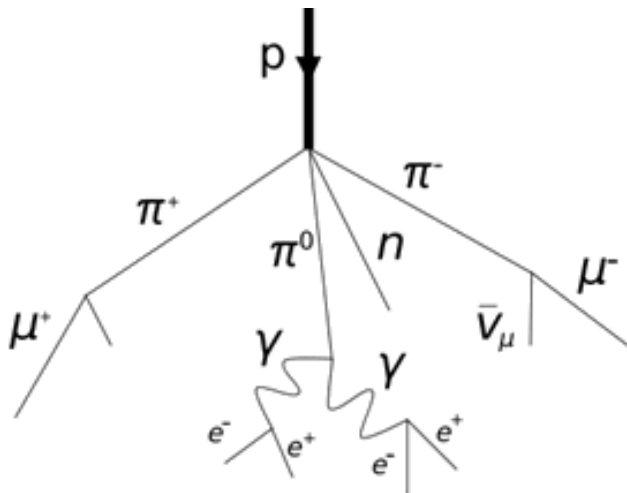
$$\Delta t'_1 = \frac{\Delta x'}{c - v} \quad \Delta t'_2 = \frac{\Delta x'}{c + v}$$

$$\Rightarrow \Delta t' = 2 \frac{\Delta x'}{c} \frac{1}{1 - (v/c)^2} \Rightarrow \Delta t' = 2 \frac{\Delta x'}{c} \gamma^2$$

- Αντικατάσταση του διεσταλμένου χρόνου  $\Delta t' = \gamma \Delta t$  δίνει:  $\gamma \Delta t = 2 \frac{\Delta x'}{c} \gamma^2 \Rightarrow \Delta x' = \gamma^{-1} \frac{c \Delta t}{2}$   
 $\Rightarrow \Delta x' = \gamma^{-1} \Delta x$
- Ο ακίνητος παρατηρητής βλέπει συστολή μήκους κατά μήκος της κίνησης κατά ένα παράγοντα  $\gamma$ . Η κάθετη διεύθυνση δεν επηρεάζεται

# SRT: Ειδική θεωρία της σχετικότητας

- Έστω έχουμε μια ηλιακή έκρηξη και κοσμικές ακτίνες φθάνουν στα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας. Τα πρωτόνια αλληλεπιδρούν με τα άτομα της ατμόσφαιρας και παράγουν  $\pi^0$ ,  $\pi^\pm$  τα οποία διασπώνται σε μίονια και νετρίνα. Τα μίονια παράγονται υψηλά στην ατμόσφαιρα ( $\sim 8\text{km}$ ) και κινούνται με ταχύτητα κοντά στο φως ( $0.998c$ ). Ο χρόνος ζωής του  $\mu$  (στο σύστημα αναφοράς του) είναι  $2.2\mu\text{s}$ . Πόση απόσταση θα καλύψει πρίν διασπαστεί σε μίονια



## Κλασική προσέγγιση

$$d = \tau \cdot v = 2.2 \times 10^{-6} \cdot 0.998 \cdot 3 \times 10^8 \text{ m}$$

$$\Rightarrow d = 6.57 \times 10^2 \text{ m} \sim 657 \text{ m} \ll 8 \text{ km}$$

## Σχετικιστική προσέγγιση

$$v = 0.998c \Rightarrow \beta = \frac{v}{c} = 0.998 \Rightarrow \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = \sqrt{250} = 15.8$$

Σύμφωνα με ακίνητο παρατηρητή ο χρόνος ζωής του  $\mu$  θα έχει διασταλεί γ-φορές

Η απόσταση επομένως θα είναι:  $d = \gamma \tau \cdot v = 10380 \text{ m} > 8 \text{ km}$

Αρκετά επομένως μίονια θα φθάσουν κατά μέσο όρο στην επιφάνεια της γης:

# SRT: Ειδική θεωρία της σχετικότητας

## Στο σύστημα του μιονίου:

Στην περίπτωση αυτή το μήκος που διανύουν θα συσταλεί κατά τον παράγοντα  $\gamma$

Παρόλο που η διαδρομή που εκτελούν πριν διασπαστούν είναι 660m, η απόστασή τους από την επιφάνεια της γης θα συσταλεί σε  $8000/15.8 = 506 < 660$

Επομένως αρκετά μίονια θα φθάσουν στην επιφάνεια της γης

➤ Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την ενέργεια των μιονίων από την σχέση:

$$E_{\mu} = \gamma mc^2 \Rightarrow E_{\mu} \sim 1.7 GeV$$

➤ Η ενέργεια αυτή δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλη, παρόλα αυτά εξαιτίας της μικρής τους μάζας τα σωματίδια κινούνται με ταχύτητα κοντά στην ταχύτητα του φωτός

□ Τι συμβαίνει με τα πιόνια? Μπορούν να φθάσουν στη γη??

Ο χρόνος ζωής τους είναι  $\sim 10^{-8} \text{sec}$

Ακόμα και να κινούμε με την ίδια ταχύτητα των μιονίων 0.998c, η απόσταση που θα καλύψουν είναι:

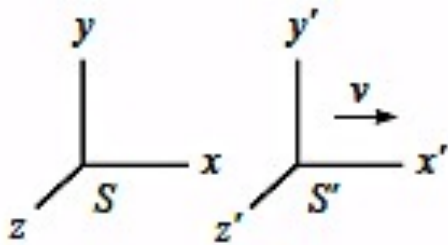
$$d_{\mu} \times \frac{\tau_{\pi}}{\tau_{\mu}} = 10800 \times \frac{10^{-8}}{10^{-6}} = 108m \quad \text{δε φθάνουν στην γη}$$

# Μετασχηματισμοί Lorentz

Μπορούμε να συνδυάσουμε την συστολή του μήκους και την διαστολή του χρόνου σε γενικές εξισώσεις μετασχηματισμών μεταξύ συστημάτων αναφοράς

Οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι γνωστοί σαν **μετασχηματισμοί Lorentz**

Έστω δυο αδρανειακά συστήματα αναφοράς  $S$  και  $S'$ , όπου το  $S'$  κινείται με σταθερή ταχύτητα  $v$  ως προς το  $S$  κατά μήκος του κοινού τους άξονα  $x/x'$ . Έστω ότι τα 2 συστήματα συμπίπτουν για  $t = 0$



Η συστολή του μήκους μεταξύ των δυο συστημάτων  $x - vt = \frac{x'}{\gamma}$

Θεωρώντας παρατηρητή στο σύστημα  $S'$  θα έχουμε:  $\frac{x}{\gamma} = vt' + x'$

Απαλοΐφουμε το  $x'$  μεταξύ των 2 εξισώσεων:  $x = \gamma \left[ \gamma(x - vt) + vt' \right]$

$$\text{Λύνοντας ως προς } t' \text{ έχουμε: } t' = \frac{x(1 - \gamma^2)}{\gamma v} + \gamma t = \gamma \left[ t + \frac{x}{v} \left( \frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) \right]$$

$$\text{Αλλά } \frac{1}{v} \left( \frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) = \frac{1}{v} \left( (1 - \beta^2) - 1 \right) = -\frac{\beta^2}{v} = -\frac{v}{c^2}$$

$$t' = \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

Διευθύνσεις κάθετες στην κίνηση δεν επηρεάζονται από τους μετασχηματισμούς αυτούς :



# Μετασχηματισμοί Lorentz

Οι μετασχηματισμοί Lorentz επομένως παίρνουν τη μορφή:

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$v \rightarrow -v$$



$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

# Κανόνας πρόσθεσης ταχυτήτων του Einstein

Έστω σωματίδιο P κινείται με ταχύτητα  $u$  στο  $S$  και  $u'$  στο  $S'$  (το οποίο κινείται με  $v$  ως προς  $S$ )

$$\left. \begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - vdt) \\ dt' &= \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right) \end{aligned} \right\} u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} \Rightarrow u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx/dt - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} \Rightarrow u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

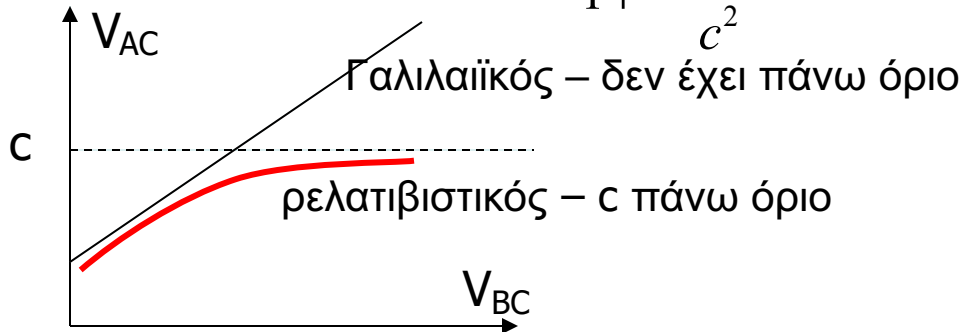
Η εξίσωση αυτή γίνεται περισσότερο κατανοητή αν αλλάξουμε το συμβολισμό μας

$$V_{AB} \equiv u \quad V_{AC} \equiv u' \quad \Rightarrow v = V_{CB} = -V_{BC}$$

Οπότε θα έχουμε:

$$V_{AC} = \frac{V_{AB} + V_{BC}}{1 + \frac{V_{AB}V_{BC}}{c^2}}$$

$\xrightarrow{V_{AB}, V_{BC} \ll c} V_{AC} \approx V_{AB} + V_{BC}$  Γαλιλαϊκός  
 $\xrightarrow{V_{AB} = c} V_{AC} \approx c$  ταχύτητα του φωτός ίδια σε όλα τα συστήματα



Η πρόσθεση των ταχυτήτων γίνεται αρκετά μη γραμμική καθώς κάποια από τις 2 ταχύτητες πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός.

# Τετραδιανύσματα

Σύμφωνα με τον Feynman, καλός συμβολισμός βοηθά στη λύση μαθηματικών και άρα φυσικής

Οι μετασχηματισμοί Lorentz και η σχετικιστική άλγεβρα γίνονται πιο απλά με την χρήση των τετραδιανυσμάτων, της μετρικής και συμβολισμό συναλλοίωτων/ανταλλοίωτων μεγεθών

Ένα συνηθισμένο διάνυσμα χωρικών συντεταγμένων συμβολίζεται με ένα διάνυσμα 3 συνιστωσών όπως  $\mathbf{r}$  ή  $\mathbf{v}$  ή  $\mathbf{p}$

Στην STR έχουμε όπως είδαμε μίξη χωρικών και χρονικών συντεταγμένων.

Ορίζουμε το τετραδιάνυσμα – χρόνου – χώρου  $x^\mu$  με  $\mu=0,1,2,3$  0:χρονοειδής συνιστώσα  
1,2,3: χωροειδείς

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad \begin{aligned} x^0 &= ct \\ x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^3 &= z \end{aligned}$$

Με βάση τα παραπάνω, οι μετασχηματισμοί Lorentz γράφονται με την μορφή:

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

Πίνακας μετασχηματισμών Lorentz:  $\Lambda$

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$$

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad \begin{aligned} \Lambda^\mu &\leftarrow \text{γραμμές} \\ \nu &\leftarrow \text{στήλες} \end{aligned}$$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad \begin{aligned} &\text{Συμβολισμός αθροίσματος} \\ &\text{Einstein} \end{aligned}$$

# Βαθμωτό γινόμενο

Δεδομένων δυο 4-διανυσμάτων  $a^\mu$  και  $b^\mu$  ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο:

$$a \cdot b \equiv a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

Ο ορισμός κάνει το αποτέλεσμα αυτό αμετάβλητο κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz και ονομάζεται επίσης Lorentz βαθμωτό μέγεθος

Για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό και να αφαιρέσουμε τα «-» πρόσημα, εισάγουμε την μετρική  $g_{\mu\nu}$

$$g = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Ισχύει} \quad g^{-1} = g$$

Με την προηγούμενη μετρική μπορούμε να γράψουμε:  $a \cdot b = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$

## Συναλλοίωτα 4-διανύσματα:

Μια διαφορετική προσέγγιση είναι να εισάξουμε συναλλοίωτα 4-διανύσματα:  $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$

ανταλλοίωτο  
↓

Εφόσον  $g^{-1} = g$  ισχύει:  $a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$

Επομένως:  $a_0 = a^0 \quad a_1 = -a^1 \quad a_2 = -a^2 \quad a_3 = -a^3$

Μπορούμε να γράψουμε:  $a \cdot b = a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$

$$a^2 = a \cdot a = (a^0)^2 - \vec{a} \cdot \vec{a}$$

# Βαθμωτό γινόμενο - αποστάσεις

Δεδομένων δυο γεγονότων στα σημεία  $P_1$  και  $P_2$ , το διάστημα μεταξύ τους θα είναι

$$\Delta x^\mu = (\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3) = (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

Παρατηρητές σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς θα διαφωνούν για τα 4-διανύσματα των θέσεων και του διαστήματος αλλά θα συμφωνούν για την απόσταση των δυο σημείων

$$\Delta s^2 = \Delta x^\mu \Delta x_\mu = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

➤ Μπορούμε να ρωτήσουμε τα ακόλουθα:

❑ Υπάρχει σύστημα αναφοράς που τα γεγονότα  $P_1$  και  $P_2$  συμβαίνουν ταυτόχρονα?

Στο σύστημα αυτό τότε  $\Delta t' = 0$  οπότε θα έχουμε:

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = -(\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \leq 0$$

Σύστημα στο οποίο δυο γεγονότα συμβαίνουν ταυτόχρονα

μπορεί να υπάρξει μόνο αν:  $\Delta s^2 \leq 0$  χωροειδής απόσταση

❑ Υπάρχει σύστημα αναφοράς που τα γεγονότα  $P_1$  και  $P_2$  συμβαίνουν στην ίδια θέση?

Στο σύστημα αυτό τότε  $\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$  οπότε θα έχουμε:

$$\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = (c\Delta t')^2 \geq 0$$

Σύστημα στο οποίο δυο γεγονότα συμβαίνουν στην ίδια θέση

μπορεί να υπάρξει μόνο αν:  $\Delta s^2 \geq 0$  χρονοειδής απόσταση

Αφού η απόσταση είναι αναλλοίωτη ποσότητα, τότε σε όλα τα συστήματα Lorentz θα ισχύει

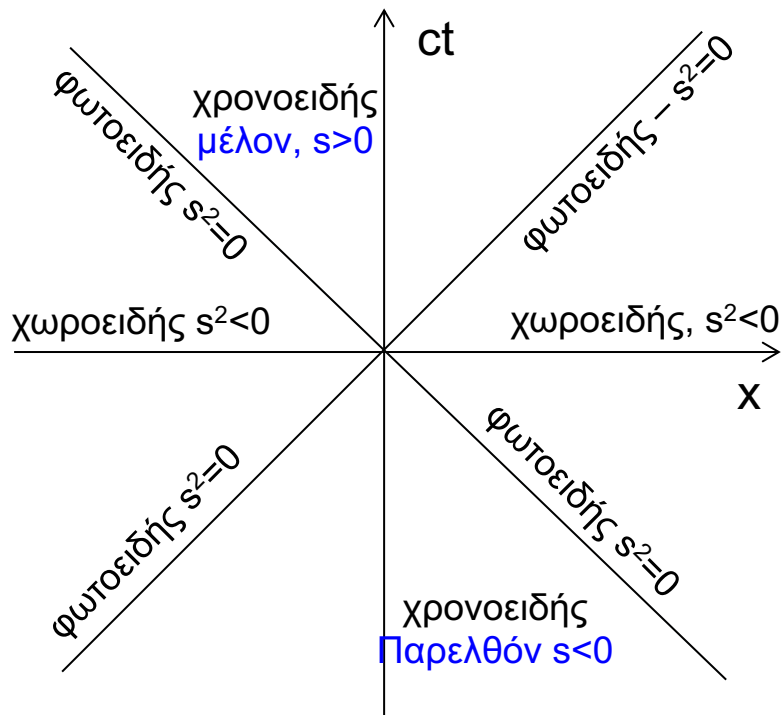
είτε  $\Delta s^2 \geq 0$  ή  $\Delta s^2 \leq 0$  Θα πρέπει να προσθετεί και η περίπτωση 2 γεγονότων συνδεδεμένα με σήμα φωτός και  $\Delta s^2 = 0$

# Κώνος φωτός

Θεωρώντας όλα τα δυνατά γεγονότα ως προς δεδομένο γεγονός το οποίο τοποθετούμε στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Η απόσταση από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων θα είναι:

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Κατασκευάζουμε το γράφημα δυο συντεταγμένων (t,x):



**$s=0$ :** Σύνδεση γεγονότων με την αρχή του συστήματος μέσω σημάτων φωτονίων μόνο

**$s^2>0$ :** Σύνδεση γεγονότων με την αρχή του συστήματος μέσω σημάτων που κινούνται με ταχύτητες  $< c$

**Δύο περιπτώσεις:**

**$s<0$ : Παρελθόν** Γεγονός εμφανίζεται πριν το 0

**$s>0$ : Μέλον** Γεγονός εμφανίζεται μετά το 0

Αφού το  $s^2$  είναι αναλλοίωτο, δεν μπορεί να υπάρξει μετασχηματισμός από  $s<0$  σε  $s>0$

Οι μετασχηματισμοί απαρτίζουν μια συνεχή, συνεκτική ομάδα

**$s^2<0$ :** Δεν μπορεί να υπάρχει επικοινωνία/αλληλεπίδραση μεταξύ 0 και του γεγονότος

# Τανυστές – 2<sup>ης</sup> και μεγαλύτερης τάξης

Έστω έχουμε την περίπτωση:

$$\left. \begin{aligned} s'^{\mu\nu} &= \Lambda^\mu_k \Lambda^\nu_\sigma s^{k\sigma} \\ t'^{\mu\nu\lambda} &= \Lambda^\mu_k \Lambda^\nu_\sigma \Lambda^\lambda_\tau t^{k\sigma\tau} \end{aligned} \right\} \text{ Κάθε δείκτης απαιτεί ένα πίνακα μετασχηματισμού } \Lambda$$

Μπορούμε να κατασκευάσουμε μεικτούς τανυστές με χρήση της μετρικής:

$$s^\mu_\nu = g_{\nu\lambda} s^{\mu\lambda} \quad s_{\mu\nu} = g_{\mu k} g_{\nu\lambda} s^{k\lambda}$$

Ο  $a^\mu b^\nu$  είναι τανυστής 2<sup>ης</sup> τάξης ενώ ο  $a^\mu t^{\mu\lambda\sigma}$  είναι τανυστής 4<sup>ης</sup> τάξης και ο  $s^\mu_\mu$  βαθμωτός