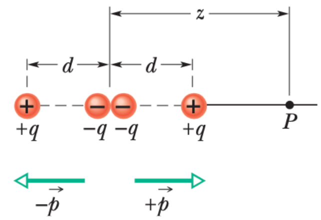
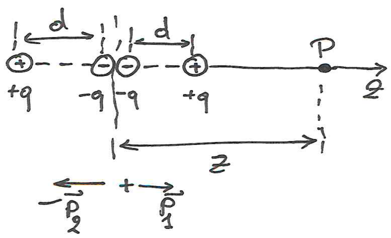
ΦΥΣ. 112

2º ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή 23.09.2022**

1. Ηλεκτρικό τετράπολο. Το διπλανό σχήμα παρουσιάζει ένα ηλεκτρικό τετράπολο το οποίο αποτελείται από δύο δίπολα με διπολικές ροπές. Δείξτε ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P που βρίσκεται κατά μήκος του άξονα του τετραπόλου και σε απόσταση z από το κέντρο του (υποθέστε ότι $z \gg d$) δίνεται από τη σχέση: $E = 3Q/(4\pi\varepsilon_0 z^4)$ όπου $(Q = 2qd^2)$ ορίζει την τετραπολική ροπή της κατανομής φορτίου.





Το σημείο P βρίσκεται στον z-άξονα σε απόσταση z από το κέντρο του τετραπόλου. Θεωρούμε ότι το πεδίο E είναι θετικό όταν έχει φορά προς το θετικό άξονα z.

Το πεδίο που δημιουργεί το δίπολο 1 του τετραπόλου δίνεται από την εξίσωση $E_1 = \frac{qd}{2\pi\varepsilon_0 (z-d/2)^3}$ (1) ενώ το πεδίο που δημιουργεί το δίπολο θα είναι: $E_2 = -\frac{qd}{2\pi\varepsilon_0 (z+\frac{d}{2})^3}$ (2)

Εκφράζουμε τους παρανομαστές από το διωνυμικό ανάπτυγμα:

$$\left(z-\frac{d}{2}\right)^{-3} \simeq z^{-3} - 3z^{-4}\left(-\frac{d}{2}\right)$$

$$\left(z+\frac{d}{2}\right)^{-3} \simeq z^{-3} - 3z^{4}\left(+\frac{d}{2}\right)$$

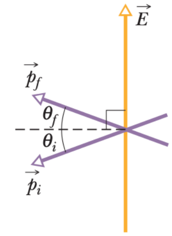
Αντικατάσταση στις (1) και (2) θα δώσει:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{qd}{2\pi\varepsilon_0 (z-\frac{d}{2})^3} - \frac{qd}{2\pi\varepsilon_0 (z+\frac{d}{2})^3} \cong \frac{qd}{2\pi\varepsilon_0}\left[\cancel{\frac{1}{z^3}} + \frac{3d}{2z^4} - \cancel{\frac{1}{z^3}} + \frac{3d}{2z^4}\right] \Rightarrow$$

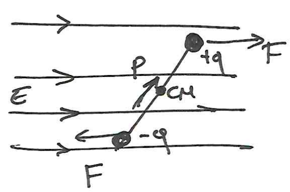
$$\Rightarrow \boxed{E \simeq \frac{6qd^2}{2\pi\varepsilon_0 z^4}} \quad \Bigg\} \Rightarrow \boxed{E = \frac{3Q}{2\pi\varepsilon_0 z^4}}$$

Εφόσον η τετραπολική ροπή είναι $Q = 2qd^2$

2. Ένα ηλεκτρικό δίπολο ταλαντώνεται από μια αρχική κατεύθυνση θ_i = -*20.0º* σε μία τελική κατεύθυνση θ_f = *20.0º* μέσα σε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο E, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ηλεκτρική διπολική ροπή είναι $1.6 \times 10^{-27} C \cdot m$ και το πεδίο $E = 3.0 \times 10^{6} N/C$. Ποια είναι η αλλαγή στην δυναμική ενέργεια του διπόλου κατά την ταλάντωση αυτή;



Είδαμε στις διαλέξεις ότι η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ενός διπόλου μέσα σε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, ισούται με το έργο που εκτελεί το πεδίο για να στρέψει το δίπολο κατά μία γωνία Θ, ξεκινώντας από τη γωνία των 90° ως προς την κατεύθυνση του πεδίου. Η γωνία αυτή των 90° λαμβάνεται και ως θέση αναφοράς για την μηδενική δυναμική ηλεκτρική ενέργεια:



$$\Delta U = U_\Theta - \underbrace{\cancel{U_{90^\circ}}}_{0} = -W = -\int_{90}^{\Theta} \tau \, d\Theta = -\int_{90^\circ}^{\Theta} pE\sin\Theta \, d\Theta \Rightarrow$$

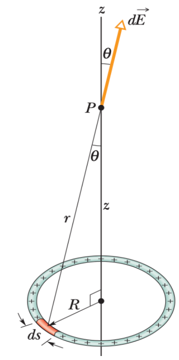
$$\Rightarrow U_\Theta = -pE\cos\Theta \Rightarrow \boxed{U_\Theta = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$$

Επομένως για την περίπτωση της άσκησης: $\Theta_i = 110.0^\circ$ και $\Theta_f = 70.0^\circ$

Άρα $\Delta U = U_{\Theta=70^\circ} - U_{\Theta=110^\circ} = -pE\cos(70^\circ) + pE\cos(110^\circ) \Rightarrow$

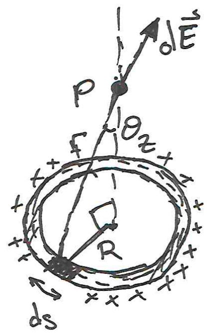
$$\Rightarrow \Delta U = -pE(\cos 70^\circ - \cos 110^\circ) \Rightarrow \boxed{\Delta U = -3.28 \cdot 10^{-21} J}$$

3. Ένα ηλεκτρόνιο είναι περιορισμένο να κινείται στον κεντρικό άξονα ενός φορτισμένου δακτυλίου φορτίου Q και ακτίνας R με $z \gg R$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Δείξτε ότι η ηλεκτροστατική δύναμη στο ηλεκτρόνιο μπορεί να το αναγκάσει να ταλαντώνεται ως προς το κέντρο του δακτυλίου με γωνιακή συχνότητα που δίνεται από τη σχέση:



$$\omega = \sqrt{\frac{eQ}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}},$$

Όπου Q είναι το φορτίο του δακτυλίου και m η μάζα του ηλεκτρονίου.



Το ηλεκτρικό πεδίο στον άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο ενός φορτισμένου δακτυλίου με ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου, και πέρα από το κέντρο του δακτυλίου, δίνεται από την σχέση: $E = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}}$ όπου z η απόσταση από τον κέντρο του δακτυλίου, και q το φορτίο του δακτυλίου ενώ R είναι η ακτίνα του δακτυλίου.

Θεωρούμε θετική φορά προς τα πάνω, και επομένως πάνω από το επίπεδο του δακτυλίου η φορά του πεδίου είναι θετική (για θετικά φορτισμένο δακτύλιο) και κάτω από το επίπεδο του δακτυλίου είναι αρνητική.

Η δύναμη που αναπτύσσεται στο ηλεκτρόνιο που βρίσκεται στον άξονα είναι:

$$F = -\frac{eqz}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}}$$

Για ταλαντώσεις μικρού πλάτους $z \ll R$ και επομένως μπορούμε να αγνοήσουμε το z στον παρονομαστή, οπότε $F = -\frac{eqz}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = -kz$

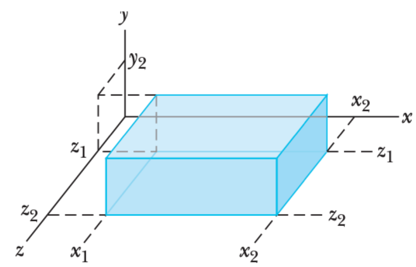
Η δύναμη αυτή είναι δύναμη επαναφοράς εφόσον προσπαθεί να φέρει το ηλεκτρόνιο προς το κέντρο του δακτυλιδιού, στο $z=0$.

Η δύναμη είναι ανάλογη της απόστασης από το κέντρο του δακτυλιδιού και επομένως δρα σα δύναμη ελατηρίου με σταθερά $k = \frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$

Επομένως κάτω από αυτές τις συνθήκες, η κίνηση που αντιστοιχεί για το ηλεκτρόνιο είναι αυτή ενός σώματος που ταλαντώνεται με γωνιακή συχνότητα

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}}$ όπου m η μάζα του ηλεκτρονίου

4. Η Gaussian επιφάνεια του διπλανού σχήματος , έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και περικλείει φορτίο $+24.0\varepsilon_0 C$ και βρίσκεται σε ηλεκτρικό πεδίο που δίνεται από τη σχέση $\vec{E} = \left[(10.0 + 2.0x)\hat{\imath} - 3.0\hat{\jmath} + bz\hat{k}\right] N/C$, όπου x και z μετρούνται σε μέτρα και b είναι σταθερά. Η κάτω πλευρά της επιφάνειας βρίσκεται στο x-y επίπεδο ενώ η πάνω πλευρά βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο που περνά από το $y_2 = 1.0m$. Αν $x_1 = 1.0m$, $x_2 = 4.00m$, $z_1 = 1.0m$ και $z_2 = 3.0m$ ποια η τιμή της σταθεράς b;



Η ολική ροή που διαπερνά την επιφάνεια του κύβου είναι: $\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A}$

Η συνολική ροή που περνά από τις δύο επιφάνειες του κύβου παράλληλες προς το επίπεδο yz θα είναι:

$$E = 10+2x \begin{cases} x=4 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\Phi_{yz} = \iint \left[E_x(x=x_2) - E_x(x=x_1)\right]dy\,dz = \int_{y_1=0}^{y_2=1} dy \int_{z_1=1}^{z_2=3} dz \left[\underbrace{\cancel{10}+2(4)-\cancel{10}-2(1)}_{6}\right]$$

$$\Rightarrow \Phi_{yz} = 6\int_{y_1=0}^{y_2=1} dy \int_{z_1=1}^{z_2=3} dz \Rightarrow \Phi_{yz} = 6\cdot(1-0)(3-1) \Rightarrow \boxed{\Phi_{yz} = 12\ Nm^2/C}$$

Παρόμοια, η συνισταμένη ροή που περνά τις δύο επιφάνειες του κύβου που είναι παράλληλες προς το xz-επίπεδο θα είναι:

$$\Phi_{xz} = \iint \left[E_y(y=y_2) - E_y(y=y_1)\right]dx\,dy = \int_{x_1=1}^{x_2=4} dx \int_{z_1=1}^{z_2=3} \left[\cancel{-3-(-3)}^{\,0}\right] dz \Rightarrow \boxed{\Phi_{xz} = 0}$$

Τέλος οι δύο πλευρές παράλληλες με το επίπεδο xy διαπερνώνται από ροή

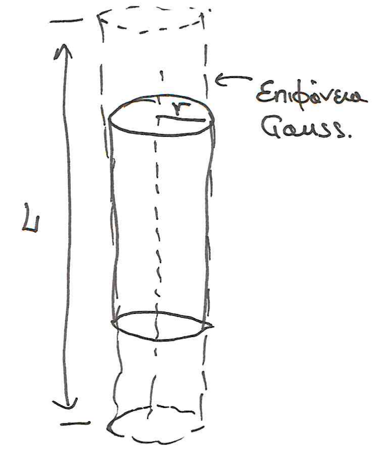
$$\Phi_{xy} = \iint \left[E_z(z=z_2) - E_z(z=z_1)\right]dx\,dy = \int_{x_1=1}^{x_2=4} dx \int_{y_1=0}^{y_2=1} dy \left[3b-b\right] = 2b(4-1)(1-0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_{xy} = 6b\ \frac{Nm^2}{C}}$$

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss θα έχουμε: $q_{ολ} = \varepsilon_0 \Phi = \varepsilon_0(\Phi_{xy}+\Phi_{xz}+\Phi_{yz}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow q_{ολ} = \varepsilon_0(6.0b+0+12)\frac{Nm^2}{C} \Rightarrow q_{ολ} = \cancel{12}^{\,2}\varepsilon_0 + \cancel{6}b\varepsilon_0 = \cancel{24}^{\,4}\varepsilon_0 \Rightarrow b = 2\frac{C}{Nm}$$

5. Ένας μακρύς, μονωμένος συμπαγής κύλινδρος ακτίνας 4.0*cm* είναι φορτισμένος με μη ομοιόμορφη κατανομή φορτίου πυκνότητας ρ, η οποία παρουσιάζει συναρτησιακή εξάρτηση από την ακτινική απόσταση r από τον άξονα του κυλίνδρου σύμφωνα με τη σχέση $\rho = Ar^2$. Θεωρήστε ότι $A = 2.5\mu C/m^5$. Ποιο είναι το μέτρο της έντασης του πεδίου σε απόσταση (α) $r = 3.0cm$ και (β) $r = 5.0\ cm$;



Θεωρούμε κυλινδρική επιφάνεια εμβαδού $A=2\pi r L$ όπου L το ύψος του κυλίνδρου το οποίο θεωρούμε πολύ μεγαλύτερο από αυτό του φορτισμένου κυλίνδρου.

Η χωρική πυκνότητα φορτίου είναι: $\rho = A r^2 \frac{\mu C}{m^3}$

Επομένως το φορτίο που περικλείεται από την κυλινδρική επιφάνεια Gauss θα είναι:

$$q_{ολ} = \int \rho\, dV = \int r'^2 A \underbrace{(2\pi r' L)\, dr}_{dV \text{ ο στοιχειώδης όγκος του κυλίνδρου}}$$

Επομένως: $q_{ολ} = \int_0^r r'^3 A 2\pi L\, dr \Rightarrow \boxed{q_{ολ} = \frac{\pi L}{2} A r^4}$

Εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss: $\Phi_E = E \cdot 2\pi r L = \frac{q_{ολ}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q_{ολ}}{2\pi r L \varepsilon_0}$

$$\Rightarrow E = \frac{\cancel{\frac{\pi}{2}} A \cancel{L} r^{\cancel{4}\,3}}{2\cancel{\pi}\cancel{L}\cancel{r}\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{Ar^3}{4\varepsilon_0}}$$

Όταν $r = 0.030m$ το μέτρο του πεδίου είναι: $E = \frac{2.5\mu C\ 0.03^3 m^{\cancel{3}}}{4\varepsilon_0\ m^{\cancel{5}\,2}}$ $\Big\} \Rightarrow$

$\varepsilon_0 = 8.85\cdot 10^{-12} N^{-1} m^{-2} C^2$

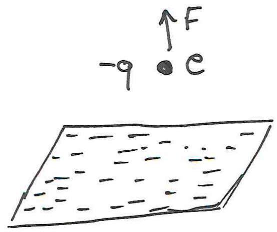
Για $r = 0.030m$ $\quad E = \frac{2.5\cdot 10^{-6}\cancel{C}\cdot 27\cdot 10^{-6}}{4\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\ m^2 N^{-1} m^{-2} C^{2}} \Rightarrow E = 1.9\ \frac{N}{C}$

Όταν είμαστε εκτός του κυλίνδρου μπορούμε να εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα για την ένταση πεδίου ενός μεγάλου μήκους κυλίνδρου γραμμικής πυκνότητας λ.

Το ολικό φορτίο του κυλίνδρου θα είναι: $q_{ολ} = \frac{\pi L A r^4}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{q_{ολ}}{L} = \frac{\pi A r^4}{2}$

Επομένως από το νόμο του Gauss: $E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow E = \frac{\cancel{\pi} A r^4}{4\cancel{\pi}\varepsilon_0 R} \Rightarrow E = \frac{A\, 4^4 10^{-8}}{4\varepsilon_0\, 5\cdot 10^{-2}} = 3.6\frac{N}{C}$

6. Ένα ηλεκτρόνιο εκτοξεύεται απευθείας προς το κέντρο ενός πολύ μεγάλου μεταλλικού επιπέδου επιφανειακής πυκνότητας φορτίου $\sigma = -2.0 \times 10^{-6} C/m^2$. Αν η αρχική κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι $1.60 \times 10^{-17} J$ και αν το ηλεκτρόνιο σταματά εξαιτίας της ηλεκτροστατικής άπωσης από το μεταλλικό επίπεδο καθώς φθάνει στη φορτισμένη επιφάνεια, πόσο μακριά από την επιφάνεια αυτή θα πρέπει να βρίσκεται το σημείο εκτόξευσης του ηλεκτρονίου;



Η μεταλλική επιφάνεια είναι αρνητικά φορτισμένη και επομένως ασκεί μια απωστική δύναμη στο ηλεκτρόνιο επιβραδύνοντάς το έως ότου σταματήσει πλησιάζοντας στην επιφάνεια. Η κίνησή του μετά το σημείο της εγγύτερης προσέγγισης θα αναστραφεί και θα αρχίσει να απομακρύνεται.

Θεωρούμε ότι η αρχική διεύθυνση κίνησης είναι θετική (προς την επίπεδη επιφάνεια). Επομένως η δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο είναι αρνητική:

$F = eE = -e\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ όπου σ η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου.

Η επιτάχυνση με την οποία κινείται το ηλεκτρόνιο θα είναι: $a = \frac{F}{m_e} = \frac{-e\sigma}{\varepsilon_0 m_e}$

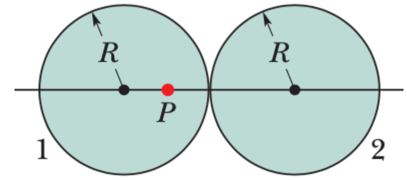
Το ηλεκτρόνιο κινείται κάτω από σταθερή δύναμη, η οποία παράγει έργο και μεταβάλλει την κινητική του κατάσταση. Από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας:

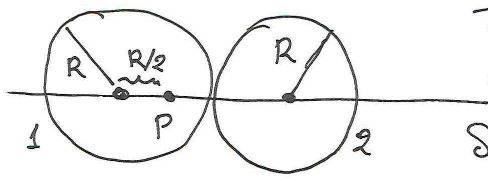
$$\Delta E_{κιν} = W_F \Rightarrow \frac{1}{2} m_e v_f^2 - \frac{1}{2} m_e v_i^2 = F_e \cdot \Delta x \Rightarrow \frac{1}{2} m_e (v_f^2 - v_i^2) = \frac{-e\sigma}{\varepsilon_0}\Delta x$$

$$\Rightarrow \cancelto{0}{v_f^2} - v_i^2 = -\frac{2e\sigma}{\varepsilon_0 m_e}\Delta x \Rightarrow \cancel{-}v_i^2 = \cancel{-}\frac{2e\sigma}{\varepsilon_0 m_e}\Delta x \Rightarrow \cancelto{0}{x_f} - x_i = \frac{v_i^2 m_e \varepsilon_0}{2e\sigma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{8.85\cdot 10^{-12}\frac{C^2}{Nm^2}\cdot 1.60\cdot 10^{-17} J}{1.6\cdot 10^{-19} C \cdot 2\cdot 10^{-6} C/m^2} \Rightarrow x_i = \frac{8.85}{2}\cdot 10^{-4} m \Rightarrow \boxed{x_i = 4.43\times 10^{-4} m}$$

7. Το διπλανό σχήμα δείχνει σε κάτοψη δύο συμπαγείς σφαίρες με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου σε όλο τον όγκο τους. Κάθε σφαίρα έχει ακτίνα R. Το σημείο P βρίσκεται σε γραμμή που ενώνει τα κέντρα των δύο σφαιρών και σε ακτινική απόσταση $R/2.0$ από το κέντρο της σφαίρας 1. Αν η συνολική ένταση του πεδίου στο σημείο P είναι 0, ποιος ο λόγος q_2/q_1 των δύο φορτίων;





Το σημείο P βρίσκεται στο εσωτερικό της σφαίρας 1. Σύμφωνα με τα αποδείξαμε στις διαλέξεις, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό ομοιόμορφα φορτισμένης συμπαγούς μη αγώγιμης σφαίρας δίνεται από τη σχέση:

$$E_1 = \frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r_1$$

όπου r_1 η απόσταση του σημείου από το κέντρο της σφαίρας και q_1 το φορτίο της.

Για σημείο εκτός της σφαίρας, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, δίνεται από τη σχέση της έντασης σημειακού φορτίου, οπότε για το σημείο P που βρίσκεται εκτός της σφαίρας 2 θα έχουμε:

$$E_2 = \frac{|q_2|}{4\varepsilon_0 r^2}$$

Στο σημείο P οι εντάσεις των δύο πεδίων είναι ίσες και αντίθετες, οπότε θα έχουμε:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{|q_1|}{\cancel{4\pi\varepsilon_0} R^{\cancel{3}\,2}} \frac{\cancel{R}}{2} = \frac{|q_2|}{\cancel{4\pi\varepsilon_0}(1.5\cancel{R})^{\cancel{2}}} \Rightarrow \frac{|q_1|}{|q_2|} = \frac{2}{(1.5)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |q_1| = \frac{2}{2.25}|q_2| \Rightarrow \boxed{|q_2| = 1.125\,|q_1|}$$

8. Ποια είναι η ταχύτητα διαφυγής ενός ηλεκτρονίου που αρχικά είναι ακίνητο στην επιφάνεια μιας σφαίρας ακτίνας $1.0cm$ και φορτίου $1.6 \times 10^{-15}C$ ομοιόμορφα κατανεμημένου στη σφαίρα. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να βρεθεί η αρχική ταχύτητα την οποία θα πρέπει να έχει το ηλεκτρόνιο ώστε να φθάσει σε άπειρη απόσταση από το κέντρο της σφαίρας με μηδενική κινητική ενέργεια.

Η ταχύτητα διαφυγής υπολογίζεται όπως και στην περίπτωση του πεδίου βαρύτητας, ως η ταχύτητα που πρέπει να έχει ένα σώμα ώστε να φθάσει στο άπειρο, όπου η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν, με μηδενική ταχύτητα.

Επομένως θα έχουμε ότι εφόσον η ενέργεια διατηρείται:

$$\left.\begin{aligned} &U_i + E_K^i = \cancel{U_f + E_K^f}^{\,\to 0} \Rightarrow E_K^i = -U_i \Rightarrow \frac{1}{2}m v_i^2 = -qV \\ &V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \text{ για το δυναμικό σημειακού φορτίου σε απόσταση } R. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

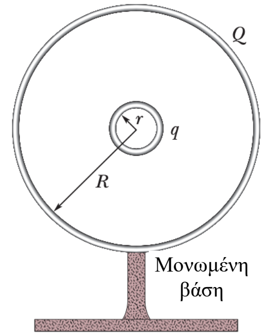
$$\frac{1}{2}m v_i^2 = -(-e)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow v_i^2 = \frac{\cancel{2}Qe}{\cancel{2}4\pi\varepsilon_0 mR} \Rightarrow v_i = \sqrt{\frac{Qe}{2\pi\varepsilon_0 mR}} \Rightarrow$$

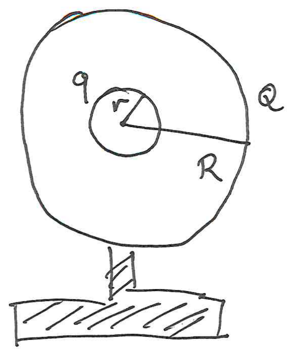
$$\Rightarrow v_i = \sqrt{\frac{10000\, e^2\, \cancel{C^2}}{2\pi\; 8.85\cdot10^{-12}\,\frac{\cancel{C^2}}{Nm^2}\; 9.11\cdot10^{-31}\,kg\cdot 0.01\cancel{m}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_i = \sqrt{\frac{10^4\cdot(1.6\cdot10^{-19})^2}{2\pi\cdot 8.85\cdot 9.11\cdot 10^{-45}\,\frac{kg}{Nm}}} = \sqrt{\frac{(1.6)^2\cdot10^{-34}}{2\pi\cdot 8.85\cdot 9.11\cdot10^{-45}\,\frac{kg}{Nm}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_i = 10^3\sqrt{\frac{(1.6)^2\, Nm}{2\pi\cdot 8.85\cdot 9.11\; kg}} = 10^3\sqrt{\frac{(1.6)^2}{506.6}\,\frac{m^2}{s^2}} = \underline{225\, m/s}$$

9. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο μεταλλικές σφαίρες, η μία ακτίνας $r = 3.0cm$ και φορτίου $q = 5\mu C$ ομόκεντρη με τη δεύτερη σφαίρα ακτίνας R=6.0cm και φορτίου $Q = 15\mu C$. (α) Ποια είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο σφαιρών; Αν συνδέσουμε κατόπιν τις σφαίρες με ένα μεταλλικό σύρμα, ποιο θα είναι το φορτίο (β) στη σφαίρα της μικρότερης ακτίνας και (γ) στη σφαίρα της μεγαλύτερης ακτίνας;





(α) Υπολογίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των ακτίνων r και R, παίρνοντας μια Gaussian σφαίρα σε απόσταση x από το κέντρο της εσωτερικής σφαίρας όπου $r < x < R$

Χρησιμοποιώντας το νόμο του Gauss θα έχουμε:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow 4\pi x^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\hat{x}}$$

όπου $\hat{x}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην ακτινική διεύθυνση.

Από τη σχέση μεταξύ ηλεκτρικού πεδίου και διαφοράς δυναμικού θα έχουμε:

$$V_r - V_R = -\int_{x=r}^{x=R} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_{x=r}^{x=R} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\,dx = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$ οπότε με αριθμητική αντικατάσταση

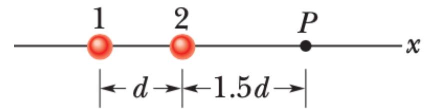
$$V_r - V_R = 5\cdot 10^{-6}\cancel{C}\cdot 9\cdot 10^{+9}\frac{Nm}{C^2}\left(\frac{1}{0.03} - \frac{1}{0.06}\right) \Rightarrow \Delta V = \frac{45}{6\cdot 10^{-2}}\cdot 10^{+3} \Rightarrow$$

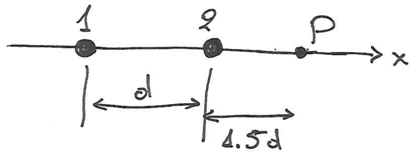
$$\Rightarrow \boxed{\Delta V = 7.5\cdot 10^{5} V}$$

(β) Συνδέοντας τις δύο μεταλλικές επιφάνειες των σφαιρών με ένα σύρμα, δημιουργούμε έναν αγωγό και οποιοδήποτε πλεονάζον φορτίο θα μετανεμηθεί ομοιόμορφα στην επιφάνεια του αγωγού. Σαν αποτέλεσμα το φορτίο στην εσωτερική σφαίρα θα είναι σίγουρα μηδέν

(γ) Εφόσον όλο το φορτίο βρίσκεται στην επιφάνεια της μεγάλης σφαίρας, θα έχουμε ότι $Q' = Q + q = 15\mu C + 5\mu C \Rightarrow Q' = 20\mu C$.

10. Στο διπλανό σχήμα, δύο σωματίδια φορτίων q_1 και q_2 αντίστοιχα είναι τοποθετημένα στον x-άξονα. Αν ένα τρίτο σωματίδιο, φορτίου +6.0μC, μεταφερθεί από το άπειρο στο σημείο P, τότε το σύστημα των τριών σωματιδίων έχει την ίδια ηλεκτρική ενέργεια όπως αυτή του αρχικού συστήματος των δύο σωματιδίων. Να βρεθεί ο λόγος των φορτίων q_1/q_2.





Το δυναμικό στο σημείο P εξαιτίας του φορτίου στη θέση 1 είναι: $V_P^{(1)} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$

Αντίστοιχα το δυναμικό στο P εξαιτίας του φορτίου στη θέση 2 είναι: $V_P^{(2)} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$

Επομένως το συνολικό δυναμικό του πεδίου, είναι:

$$V_p = V_p^{(1)} + V_p^{(2)} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right)$$

Αλλά $r_1 = \frac{5d}{2}$ και $r_2 = \frac{3d}{2}$

$$\Rightarrow V_p = \frac{q_1 2}{4\pi\varepsilon_0 5d} + \frac{2q_2}{4\pi\varepsilon_0 \frac{3d}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_p = \frac{q_1 6 + 10q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 15d} \Rightarrow V_p = \frac{6q_1 + 10q_2}{60\pi\varepsilon_0 d}$$

Για να μην αλλάξει η δυναμική ενέργεια σημαίνει ότι το δυναμικό στη θέση αυτή θα είναι μηδέν:

$$V_p = 0 \Rightarrow \cancel{6}^{3} q_1 + \cancel{10}^{5} q_2 = 0 \Rightarrow 3q_1 + 5q_2 = 0 \Rightarrow \boxed{q_1 = -\frac{5}{3}q_2}$$