ΦΥΣ 331 – Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Ενδιάμεση Εξέταση

Κυριακή 28/10/2018 **Διάρκεια: 16:00 – 18:00**

Σας δίνονται 10 ισοδύναμες ασκήσεις και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλες. Σύνολο μονάδων 100.

Καλή Επιτυχία

1. [**10μ**]

Προσδιορίστε τον λόγο των ποσοστών διακλάδωσης: $R=\dfrac{\Gamma\left(\rho^0\to\pi^0\pi^0\right)}{\Gamma\left(\rho^0\to\pi^+\pi^-\right)}$. Θα πρέπει να υπολογίσετε τον λόγο αυτό με δύο τρόπους, (α) χρησιμοποιώντας συμμετρίες [**5μ**] και (β) χρησιμοποιώντας επιχειρήματα από τη θεωρία του isospin [**5μ**]. Το σωματίδιο ρ^0 είναι διανυσματικό μεσόνιο με κβαντικούς αριθμούς $I^G\left(J^{PC}\right)=1^+\left(1^{--}\right)$ ενώ τα π είναι ψευδοβαθμωτά μεσόνια με κβαντικούς αριθμούς $I^G\left(J^P\right)=1^-\left(0^-\right)$.

Διατήρηση της στροφορμής καθορίζει την τροχιακή στροφορμή των δύο πιονίων της τελικής κατάστασης. Θα έχουμε $\ell=1$ για τα δύο πιόνια.

(α) Διατήρηση της parity στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις απαιτεί:

$$P_\rho = P_\pi P_\pi (-1)^\ell \Rightarrow (-1) = (-1)(-1)(-1) = (-1)$$

Αν τα δύο πιόνια π^0 είναι πανομοιότυπα μποζόνια και επομένως θα πρέπει η κυματοσυνάρτηση να είναι συμμετρική. Εφόσον η τροχιακή στροφορμή $\ell=1$ είναι αντισυμμετρική κάτω από εναλλαγή των σωματιδίων, η διεργασία είναι απαγορευμένη. Έτσι ο λόγος $R=0$.

(β) Τα μεσόνια ρ έχουν isospin 1. Επομένως θα έχουμε για το ρ^0, $I=1$, $I_3=0$. Η κατάσταση του ρ^0 μπορεί να γραφεί $|1\,0\rangle$. Τα προϊόντα διάσπασης $\pi^+\pi^-$ στην κατάσταση αυτή του isospin του ρ^0 επειδή:

$$|1\,1\rangle|1\,-1\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{6}}\,|2\,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,|1\,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|0\,0\rangle$$

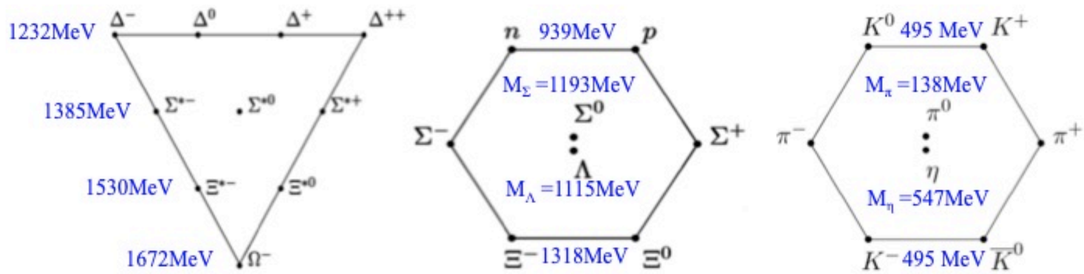
Ωστόσο η κατάσταση με δύο π^0 θα δώσει: $|1\,0\rangle|1\,0\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|2\,0\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|0\,0\rangle$

Επομένως δεν περιέχει την κατάσταση με $I=1$.

Για όσους αναρωτηθούν, η κατάσταση του isospin $|1\,0\rangle$ των δύο φορτισμένων πιονίων $\pi^+\pi^-$, είναι αντισυμμετρική κάτω από εναλλαγή και επομένως η ολική κυματοσυνάρτηση ικανοποιεί Bose στατιστική όπως θα έπρεπε.

2. **[10μ]**

Δεδομένου ότι οι ισχυρές και ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις διατηρούν την παραδοξότητα (strangeness) και λαμβάνοντας υπόψην θεμελειώδεις νόμους διατήρησης δείξτε ότι η διάσπαση του Ω^- βαρυονίου που ανήκει στη 10-πλετα των βαρυονίων με spin $3/2$ μπορεί να γίνει μόνο μέσω ασθενών αλληλεπιδράσεων. Σας δίνεται η 10-πλετα των βαρυονίων, η 8-πλετα των βαρυονίων με σπιν $1/2$ και η 8-πλετα των μεσονίων.



Το Ω^- βαρυόνιο έχει παραδοξότητα $S=-3$, $I=0$ και $J^P = \frac{3}{2}^+$ όπως φαίνεται από την 10-πλέτα στην οποία ανήκει. Επίσης ο βαρυονικός αριθμός είναι $B=1$ και η μάζα του 1672 MeV.

Οι ισχυρές και ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις διατηρούν την παραδοξότητα. Για να συμβεί αυτό υπάρχουν τρεις πιθανές εκδοχές για τη διάσπαση του Ω^-

(α) Θα μπορούσε να διασπαστεί σε ένα ελαφρύ βαρυόνιο (p ή n) για να διατηρηθεί ο βαρυονικός αριθμός και 3 καόνια. Ωστόσο κινηματικά η διάσπαση αυτή

$\Omega^- \to K^- + p + K^0 + K^-$ ή $\Omega^- \to n + K^- + K^+ + K^-$ δεν μπορεί να γίνει γιατί

$m_{\Omega^-} = 1672\,MeV$ και $m_{p/n} = 939\,MeV$. Επομένως η διαθέσιμη ενέργεια

είναι $E = m_{\Omega^-} - m_{p/n} = 1672\,MeV - 939\,MeV \Rightarrow E = 733\,MeV$.

Η μάζα των τριών καονίων είναι: $3\cdot(495) \Rightarrow M_{3K} = 1485\,MeV > E$

(β) Θα μπορούσε η διάσπαση να γίνει μέσω ενός βαρυονίου με παραδοξότητα $S=-2$ και κάποιο K οπότε η συνολική παραδοξότητα διατηρείται. Για παράδειγμα

$\Omega^- \to \Xi^- K^0$ ή $\Omega^- \to \Xi^0 K$ Η μάζα του Ξ είναι 1318 MeV.

Επομένως η διαθέσιμη ενέργεια θα είναι: $E = M_{\Omega^-} - M_{\Xi^-} = 1672 - 1318 = 354\,MeV$

Αυτή η ενέργεια είναι μικρότερη της μάζας του καονίου οπότε η διάσπαση κινηματικά δεν μπορεί να συμβεί (γ) Θα μπορούσε η διάσπαση να γίνει μέσω ενός βαρυονίου με παραδοξότητα -1 και παράλληλη παραγωγή δύο καονίων. Για παράδειγμα θα μπορούσε να γίνει

$\Omega^- \to \Lambda^0 + K^0 + K^-$ (το Λ^0 είναι το ελαφρύτερο βαρυόνιο με $S=-1$).

Αλλά και πάλι θα είχαμε: $m_{\Omega^-} - m_{\Lambda^0} = 1672 - 1115 \Rightarrow E = 557\,MeV$

Η ενέργεια αυτή είναι πολύ μικρότερη από τη μάζα των δύο καονίων. Επομένως ούτε αυτή η διεργασία μπορεί να προχωρήσει.

Η μόνη διεργασία που μπορεί να υπάρχει είναι η διάσπαση να συμβεί μέσω ασθενών αλληλεπιδράσεων οι οποίες δεν διατηρούν την παραδοξότητα και την γεύση των quarks

3. [**10μ**]

Η οικογένεια των Σ βαρυονίων ανήκει στην οικογένεια των βαρυονίων με ένα strange quark και αποτελεί μία τριπλέτα στην οποία ανήκουν τα βαρυόνια Σ^+, το Σ^0 και το Σ^-. Οι μάζες των βαρυονίων είναι 1187.4, 1192.6 και 1197.5 MeV/c^2 αντίστοιχα.

(α) Βρείτε το περιεχόμενο σε quarks των βαρυονίων αυτών, το μέτρο του isospin τους και την 3η συνιστώσα του isospin. [**4μ**]

(β) Κάντε το διάγραμμα Feynman για τις διασπάσεις $\Sigma^- \to n\pi^-$, $\Sigma^0 \to \Lambda^0\gamma$, $\Sigma^0 \to p\pi^-$ και $\Sigma^+ \to n\pi^+$. [**4μ**]

(γ) Εξηγήστε γιατί η διάσπαση $\Sigma^0 \to \Lambda^0\gamma$ είναι σχεδόν 100% ενώ η διάσπαση $\Sigma^0 \to p\pi^-$ έχει πολύ μικρό ποσοστό διακλάδωσης; [**2μ**]

(α) Τα βαρυόνια $\Sigma^\pm$ και Σ^0 είναι τα ελαφρύτερα βαρυόνια-τριπλέτας και το περιεχόμενό του σε quarks θα πρέπει να ικανοποιεί το φορτίο των βαρυονίων. Θα έγραφε επομένως:

Σ^+ : s u u $\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)\to Q=+1$

Σ^0 : s d u $\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)\to Q=0$

Σ^- : s d d $\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\to Q=-1$

Με βάση τη σχέση του υπερφορτίου και 3ης συνιστώσας του isospin θα έχουμε:

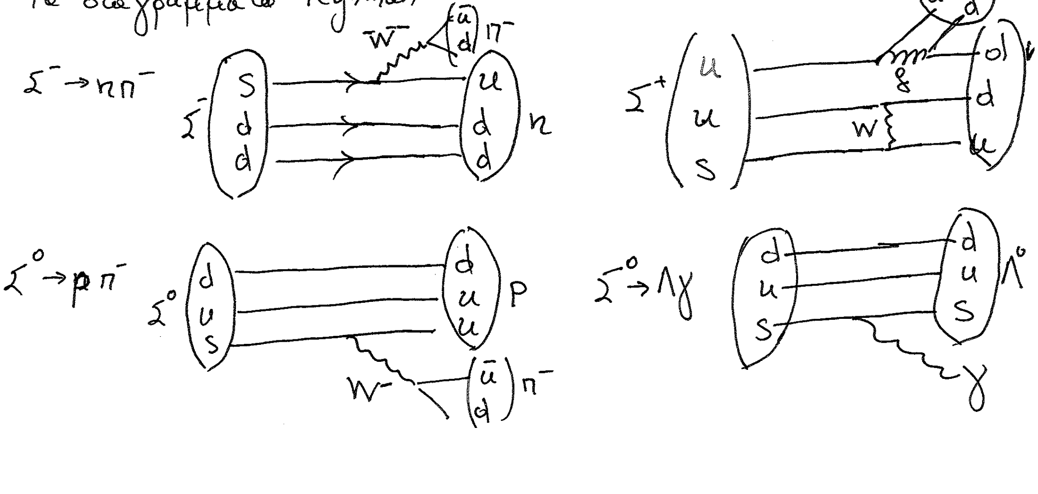
$I_3 = Q - \frac{Y}{2} = Q - \frac{S+B}{2}$ όπου B είναι ο βαρυονικός αριθμός.

Όλα τα $\Sigma^\pm, \Sigma^0$ βαρυόνια έχουν $B=1$ και $S=-1$, επομένως $Y_\Sigma = 0$

Άρα η τρίτη συνιστώσα του isospin είναι: $I_{\Sigma^+}=+1$, $I_{\Sigma^0}=0$ και $I_{\Sigma^-}=-1$

Οι καταστάσεις isospin για τα τρία βαρυόνια θα είναι: $\begin{cases} \Sigma^+ : |1\,1\rangle \\ \Sigma^0 : |1\,0\rangle \\ \Sigma^- : |1\,-1\rangle \end{cases}$

(β) Τα διαγράμματα Feynman θα είναι:



(γ) Η διάσπαση $\Sigma^0 \to \Lambda^0 \gamma$ διατηρεί την παραδοξότητα γιατί συμβαίνει μέσω των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων. Στην διάσπαση έχουμε $\Delta S = 0$.

Στην δεύτερη περίπτωση ωστόσο $\Sigma^0 \to p \pi^-$ υπάρχει παραβίαση της παραδοξότητας και επομένως δεν μπορεί να γίνει μέσω των ισχυρών και ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων αλλά μέσω των ασθενών. Ο ρυθμός διάσπασης ωστόσο είναι αρκετά μικρός και κυριαρχεί η διάσπαση μέσω ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων $(\Sigma^0 \to \Lambda^0 \gamma)$

4. [**10μ**]

(α) Θεωρήστε την διάσπαση $D^0 \to K^-\pi^+$. Οι μάζες των σωματιδίων είναι 1864.6MeV/c^2, 493.7MeV/c^2 και 139.6MeV/c^2 αντίστοιχα. Ποιά είναι η ορμή του π^+ στο σύστημα αναφοράς του D^0; [**3μ**]

(β) Ποιά είναι η ελάχιστη ενέργεια μιας δέσμης πρωτονίων που προσπίπτει σε σταθερό στόχο ώστε να είναι δυνατή η αντίδραση $pp \to p\Lambda_C^+\bar{D}^0$. Η μάζα του Λ_C^+ είναι 2285.1MeV/c^2 και το περιεχόμενό σε quarks είναι $\Lambda_C^+ = udc$. Η μάζα του πρωτονίου είναι 938.3MeV/c^2 kai η μάζα του $\bar{D}^0$ είναι 1864.6MeV/c^2 και το περιεχόμενό του σε quarks είναι $\bar{D}^0 = u\bar{c}$. [**3μ**]

(γ) Ποιά είναι η μέγιστη ενέργεια του ηλεκτρονίου στη διάσπαση: $\tau \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau$; Η μάζα του τ -λεπτονίου είναι 1776.86MeV/c^2. [**4μ**]

(α) Έχουμε τη διάσπαση $D^0 \to K^-\pi^+$

Γράφουμε τα τετραδιανύσματα των σωματιδίων:

$$\underset{\to}{P}_{D^0} = \underset{\to}{P}_{K^-} + \underset{\to}{P}_{\pi^+} \Rightarrow \left(\underset{\to}{P}_D - \underset{\to}{P}_{\pi^+}\right)^2 = \underset{\to}{P}_{K^-}^2 \Rightarrow \underset{\to}{P}_{D^0}^2 + \underset{\to}{P}_{\pi^+}^2 - 2\underset{\to}{P}_D \cdot \underset{\to}{P}_{\pi^+} = m_{K^-}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{D^0}^2 + m_{\pi^+}^2 - 2\underset{\to}{P}_D \cdot \underset{\to}{P}_{\pi^-} = m_{K^-}^2 \Rightarrow m_{D^0}^2 + m_{\pi^+}^2 - 2\underbrace{(m_D, \vec{0})}_{\text{CM του } D^0} \cdot (E_{\pi^+}, \vec{P}_{\pi^+}) = m_{K^-}^2$$

$$\Rightarrow m_{D^0}^2 + m_{\pi^+}^2 - 2E_{\pi^+}m_D = m_{K^-}^2 \Rightarrow E_{\pi^+} = \frac{m_{D^0}^2 + m_{\pi^+}^2 - m_{K^-}^2}{2m_{D^0}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{\pi^+} = \frac{1864.6^2 + 139.6^2 - 493.7^2}{2 \cdot 1864.6} \Rightarrow \boxed{E_{\pi^+} = 872.2\ MeV}$$

$$E_{\pi^+} = \sqrt{\vec{P}_{\pi^+}^2 + m_{\pi}^2} \Rightarrow \left|\vec{P}_{\pi^+}\right|^2 = E_{\pi^+}^2 - m_{\pi^+}^2 \Rightarrow \left|\vec{P}_{\pi^+}\right| = \sqrt{872.2^2 - 139.6^2} = \underline{\underline{860\ MeV/c}}$$

(β) Για την ελάχιστη ενέργεια δέσμης, θα πρέπει τα σωματίδια που παράγονται να βρίσκονται σε ηρεμία στο ΚΜ του συστήματος, οπότε

$$\underset{\to}{P}_\delta + \underset{\to}{P}_\sigma = \underset{\to}{P}_p + \underset{\to}{P}_{\Lambda_c} + \underset{\to}{P}_D \Rightarrow \left(\underset{\to}{P}_\delta + \underset{\to}{P}_\sigma\right)^2 = \left(m_p + m_{\Lambda_c} + m_D\right)^2$$

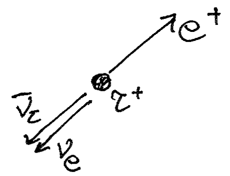
όπου $\underset{\to}{P}_\delta$ και $\underset{\to}{P}_\sigma$ τα 4-διανύσματα δέσμης και στόχου

$$m_p^2 + 2\underset{\to}{P}_\delta \cdot \underset{\to}{P}_\sigma + m_p^2 = \left(m_p + m_{\Lambda_c} + m_D\right)^2 - 0^2 \Rightarrow$$

$$m_p^2 + 2(E_\delta, \vec{P}_\delta)(\cancelto{m_p}{E_\sigma}, \cancelto{0}{\vec{P}_\sigma}) + m_p^2 = \left(m_p + m_{\Lambda_c} + m_D\right)^2 \Rightarrow 2m_p^2 + 2E_\delta m_p = \left(m_p + m_{\Lambda_c} + m_D\right)^2$$

$$\Rightarrow E_\delta = \frac{\left(m_p + m_{\Lambda_c} + m_D\right)^2 - 2m_p^2}{2m_p} = \frac{(938.3 + 2285.1 + 1864.6)^2 - 2 \cdot 938.6^2}{2 \cdot 938.6} \Rightarrow \boxed{E_\delta = 12856.7 Me}$$

(γ) Η μέγιστη ενέργεια του e^+ θα συμβεί όταν τα 2 νετρίνο κινούνται στην ίδια διεύθυνση και το e^+ κινείται ακριβώς αντίθετα προς αυτά. Έτσι, στο κέντρο μάζας του διασπώμενου τ^+, το e^+ θα πάρει σαν ενέργεια τη μισή μάζα ηρεμίας του τ^+ και τα 2 νετρίνο την άλλη μισή. Επομένως η μέγιστη ορμή θα είναι (θεωρώντας ότι $m_e \cong 0 = m_\nu$)

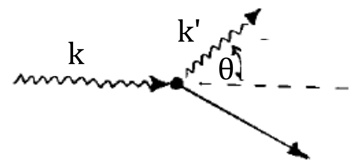


$$E_{e^+} = |\vec{p}_{e^+}| = m_\tau/2$$

$$E_{\bar{\nu}_\tau} = E_{\nu_e} = |\vec{p}_{\nu_\tau}| = |\vec{p}_{\nu_e}| = m_\tau/4$$

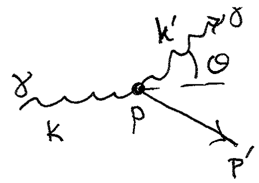
5. **[10μ]**

Η σκέδαση Compton είναι η σκέδαση φωτονίων από ηλεκτρόνια. Αποδείξτε την εξίσωση της σκέδασης Compton σχετίζοντας την μετατόπιση του μήκους κύματος του φωτονίου με τη γωνία σκέδασης *θ*.



$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

Η σκέδαση Compton



Έστω οι τετρα-ορμές του φωτονίου και του ηλεκτρονίου πριν και μετά τη σκέδαση είναι k, p, k', p'.

Θα έχουμε επομένως $\underline{k}+\underline{p} = \underline{k}'+\underline{p}' \Rightarrow \underline{p}' = (\underline{k}-\underline{k}')+\underline{p} \Rightarrow$

$$\underline{p}'^2 = (\underline{k}-\underline{k}')^2 + \underline{p}^2 + 2\underline{p}\cdot(\underline{k}-\underline{k}') \Rightarrow \boxed{m^2c^2 = \underline{p}^2 + \underline{k}^2 + \underline{k}'^2 - 2\underline{k}\cdot\underline{k}' + 2\underline{p}\cdot(\underline{k}-\underline{k}')} \ (A)$$

Αλλά $\underline{k}^2 = \underline{k}'^2 = 0$ και $\underline{k}\cdot\underline{k}' = EE'/c^2\,(1-\cos\theta)$

$\underline{p}^2 = m^2c^2$

Αντικατάσταση στην (A) θα δίνει:

$$\cancel{m^2c^2} = \cancel{m^2c^2} + 0 + 0 - \cancel{2}\frac{EE'}{c^2}(1-\cos\theta) + \cancel{2}m\cancel{c}(E-E')/\cancel{c} \Rightarrow \frac{EE'}{c^2}(1-\cos\theta) = (E-E')m$$

$$\Rightarrow EE'(1-\cos\theta) = mc^2(E-E')$$

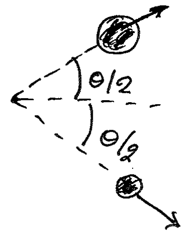
Αλλά $E = h\nu = hc/\lambda$

$$\Rightarrow (1-\cos\theta) = mc^2\left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E}\right) \Rightarrow$$

$$(1-\cos\theta) = m\cancel{c^2}\left(\frac{\lambda'}{h\cancel{c}} - \frac{\lambda}{h\cancel{c}}\right) \Rightarrow \boxed{(\lambda'-\lambda) = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)}$$

6. [10μ]

Ένα πρωτόνιο με παράγοντα Lorentz $\gamma = 1\big/\sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)}$ συγκρούεται ελαστικά με πρωτόνιο σε ηρεμία. Μετά τη σκέδαση τα πρωτόνια εξέρχονται με ίσες ενέργειες. Ποιά η γωνία θ που σχηματίζεται μεταξύ των διευθύνσεων πτήσης τους;



Από τη στιγμή που η ενέργεια των πρωτονίων είναι η ίδια μετά την σύγκρουση, σημαίνει ότι τα πρωτόνια εξέρχονται σχηματίζοντας την ίδια γωνία $\Theta/2$ με την διεύθυνση της προσπίπτουσας ορμής των πρωτονίων.

Θα έχουμε επομένως πριν την σκέδαση: $p = m\beta\gamma$ και $E = m\gamma$ (1)

Από διατήρηση ορμής έχουμε: $\cancel{m}\beta\gamma = 2\cancel{m}\beta'\gamma'\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\beta\gamma = 2\beta'\gamma'\cos\frac{\Theta}{2}}$

όπου β' και γ' είναι οι παράγοντες Lorentz μετά τη σκέδαση.

Διατήρηση ενέργειας θα δώσει: $m + m\gamma = 2m\gamma' \Rightarrow \boxed{\gamma + 1 = 2\gamma'}$ (2)

Έχουμε ότι $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \Rightarrow \gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\beta\gamma = \sqrt{\gamma^2 - 1}}$ (3)

Επομένως $\beta'\gamma' = \sqrt{\gamma'^2 - 1} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \boxed{\beta'\gamma' = \sqrt{\frac{(\gamma+1)^2}{4} - 1}}$ (4)

Αντικαθιστούμε την (4) στην (1) και έχουμε:

$$\beta\gamma = 2\sqrt{\frac{(\gamma+1)^2}{4} - 1}\,\cos\frac{\Theta}{2} \overset{(3)}{\Rightarrow} \sqrt{\gamma^2 - 1} = 2\sqrt{\frac{(\gamma+1)^2}{4} - 1}\,\cos\frac{\Theta}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma^2 - 1 = 4\left(\frac{(\gamma+1)^2}{4} - 1\right)\cos^2\frac{\Theta}{2} \Rightarrow \gamma^2 - 1 = \left[(\gamma+1)^2 - 4\right]\cos^2\frac{\Theta}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma^2 - 1 = \left(\gamma^2 + 1 + 2\gamma - 4\right)\cos^2\frac{\Theta}{2} = \left(\gamma^2 + 2\gamma - 3\right)\cos^2\frac{\Theta}{2} \Rightarrow (\gamma-1)(\gamma+1) = \left(\gamma^2 + 3\gamma - \gamma - 3\right)\cos^2\frac{\Theta}{2} \Rightarrow$$

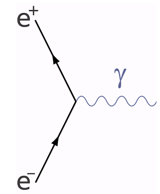
$$\Rightarrow (\gamma-1)(\gamma+1) = \left[\gamma(\gamma-1) + 3(\gamma-1)\right]\cos^2\frac{\Theta}{2} = (\gamma+3)(\gamma-1)\cos^2\frac{\Theta}{2} \Rightarrow \boxed{\cos^2\frac{\Theta}{2} = \frac{\gamma+1}{\gamma+3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+\cos\Theta)/2 = \frac{\gamma+1}{\gamma+3} \Rightarrow \cos\Theta = \frac{2(\gamma+1)}{\gamma+3} - 1 \Rightarrow \boxed{\cos\Theta = \frac{\gamma-1}{\gamma+3}}$$

Για $\gamma \simeq 1$ έχουμε κλασικό όριο οπότε $\cos\Theta \simeq 0 \Rightarrow \Theta = 90^\circ$ όπως ξέραμε για κρούσεις δύο σφαιρικών σωμάτων. Για $\gamma >> 1$ τότε $\cos\Theta \simeq 1 \Rightarrow \Theta \simeq 0$.

7. **[10μ]**

Εξηγήστε γιατί η διεργασία $\gamma \rightarrow e^{+}e^{-}$ που φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα Feynman δεν παρατηρείται.



Η διεργασία $\gamma \to e^+e^-$ δεν μπορεί να συμβεί γιατί παραβιάζεται η ενέργεια και ορμή. Τα φωτόνια έχουν μηδενική μάζα

Αν θεωρούσαμε ότι βρισκόμασταν με κάποιο τρόπο στο σύστημα αναφοράς του ΚΜ του φωτονίου (δεν μπορεί να συμβεί γιατί δεν ορίζεται για σωματίδια με μηδενική μάζα) τότε $2p_e^2 = E_{cm}^2 = 0 \Rightarrow 2m_e^2 = 0$ που δεν μπορεί να ισχύει.

Διαφορετικά θα μπορούσαμε να ορίσουμε ένα σύστημα αναφοράς όπου το ζεύγος των e^- και e^+ έχουν ολική ορμή $\emptyset$. Τότε από διατήρηση της ορμής θα πρέπει στο σύστημα αυτό το φωτόνιο να έχει ορμή επίσης $\emptyset$. Αλλά τότε η ενέργειά του θα είναι $\emptyset$ και το ζεύγος έχει ενέργεια ίση με τη μάζα των δύο λεπτονίων παραβιάζοντας την ενέργεια.

Μπορούμε να το δούμε και διαφορετικά? Από διατήρηση της ενέργειας έχουμε: $p_\gamma = \sqrt{p_{e^+}^2 + m_{e^+}^2} + \sqrt{p_{e^-}^2 + m_{e^-}^2}$ αλλά τα δύο λεπτόνια έχουν την ίδια ορμή γιατί θα πρέπει να διατηρείται στη διεύθυνση κάθετη στην ορμή του φωτονίου

Επομένως $\boxed{p_\gamma = 2\sqrt{p_e^2 + m_e^2}}$ (A)

Διατήρηση της ορμής στην διεύθυνση του προσπίπτοντος φωτονίου θα δώσει:

$p_\gamma = p_e\cos\theta + p_e\cos\theta = 2p_e\cos\theta \overset{(A)}{\Rightarrow} \cancel{2}\sqrt{p_e^2+m_e^2} = \cancel{2}p_e\cos\theta \Rightarrow p_e^2 + m_e^2 = p_e^2\cos^2\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2\theta = 1 + (m_e/p_e)^2 \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \sqrt{1+(m_e/p_e)} > 1}$ που είναι αδύνατο

8. **[10μ]**

Ένα ηλεκτρόνιο σε ένα άτομο υδρογόνου βρίσκεται σε κατάσταση τροχιακής στροφορμής $l = 1$. Αν η ολική στροφορμή του ηλεκτρονίου είναι $J = 3/2$ και η z-συνιστώσα της ολικής στροφορμής είναι $m_J = 1/2$, ποιά είναι η πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο με $m_s = 1/2$;

Το ηλεκτρόνιο έχει spin 1/2 επομένως η κατάστασή του είναι $|s\, m_s\rangle = |\tfrac{1}{2}\, \tfrac{1}{2}\rangle$

Χρειαζόμαστε όμως το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασής του ώστε να εμφανιστεί σε μιά κατάσταση με τροχιακή στροφορμή $l=1$.

Επομένως θα καταφύγουμε για την σύνδεση $1 \otimes \frac{1}{2}$ από τους πίνακες CG.

Ξέρουμε την ολική στροφορμή J και την z-προβολή της m_J δίνοντας την κατάσταση $|J\, m_J\rangle = |\tfrac{3}{2}\, \tfrac{1}{2}\rangle$

Επομένως θα πάρουμε από τον πίνακα CG τη στήλη $J = \frac{3}{2}$ και $m_J = \frac{1}{2}$

$1 \otimes \frac{1}{2}$	3/2, 3/2	3/2, 1/2	1/2, 1/2	3/2, −1/2	1/2, −1/2	3/2, −3/2
+1, +1/2	1					
+1, −1/2		1/3	2/3			
0, +1/2		2/3	−1/3			
0, −1/2				2/3	1/3	
−1, +1/2				1/3	−2/3	
−1, −1/2						1

Σύμφωνα με τον πίνακα, η κατάσταση $|\tfrac{3}{2}\, \tfrac{1}{2}\rangle$ είναι γραμμικός συνδυασμός των καταστάσεων:

$|1\, {+1}\rangle\, |\tfrac{1}{2}\, {-\tfrac{1}{2}}\rangle$ και

$|1\, 0\rangle\, |\tfrac{1}{2}\, {+\tfrac{1}{2}}\rangle$ με τη μορφή

$$|\tfrac{3}{2}\, \tfrac{1}{2}\rangle = a_1 |1\, {+1}\rangle |\tfrac{1}{2}\, {-\tfrac{1}{2}}\rangle + a_2 |1\, 0\rangle |\tfrac{1}{2}\, {+\tfrac{1}{2}}\rangle$$

Σύμφωνα με τον πίνακα $a_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ και $a_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad |\tfrac{3}{2}\, \tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, |1\, {+1}\rangle |\tfrac{1}{2}\, {-\tfrac{1}{2}}\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, |1\, 0\rangle |\tfrac{1}{2}\, {+\tfrac{1}{2}}\rangle$$

Προκύπτει επομένως ότι η πιθανότητα να βρούμε το ηλεκτρόνιο με $m_s = \frac{1}{2}$ είναι

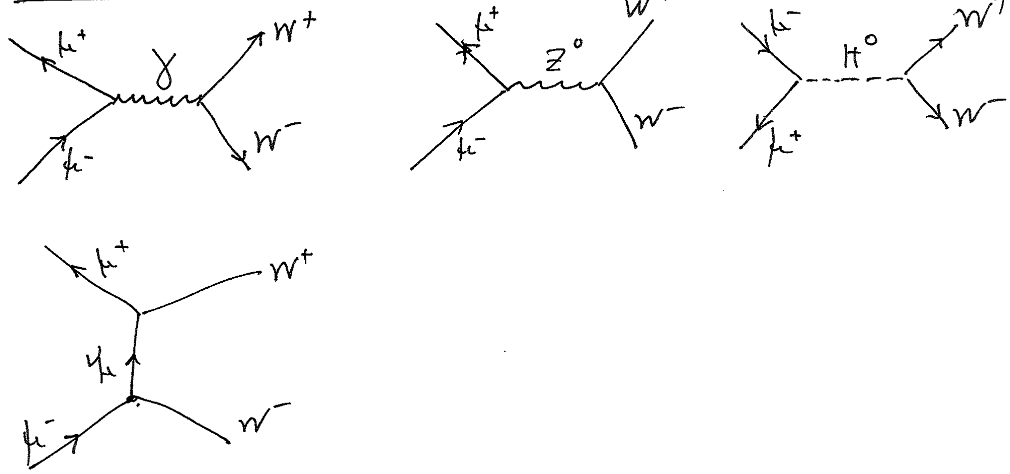
$$\boxed{a_2^2 = \frac{2}{3}}$$

9. [10μ]

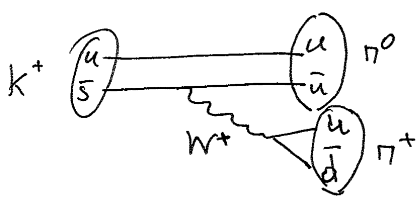
Σχεδιάστε όλα τα διαγράμματα Feynman μικρότερης τάξης για τις ακόλουθες διεργασίες:

(α) $\mu^+\mu^- \to W^+W^-$ (β) $K^+ \to \pi^+\pi^0$ (γ) $e^+\gamma \to e^+\gamma$ (δ) $pp \to \bar{t}t$ (ε) $\tau^+ \to \pi^+\nu_\tau$

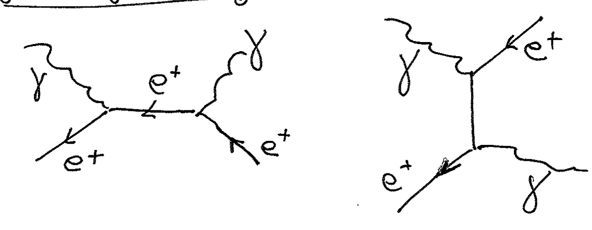
(α) $\mu^+\mu^- \to W^+W^-$



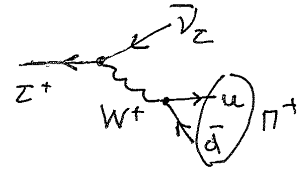
(β) $K^+ \to \pi^+\pi^0$



(γ) $e^+\gamma \to e^+\gamma$

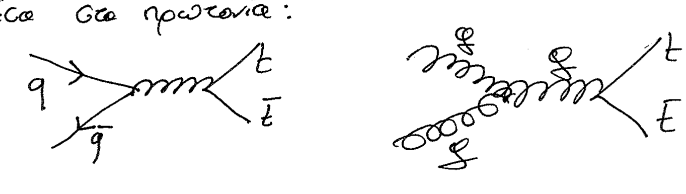


(ε) $\tau^+ \to \pi^+\nu_\tau$



(δ) $pp \to t\bar{t}$

Στη διεργασία αυτή δεν ανταλλάσσονται τα πρωτόνια αλλά quarks/gluons μέσα στα πρωτόνια:



10. **[10μ]**

Εξηγήστε γιατί οι παρακάτω διεργασίες δεν είναι δυνατές ή αν είναι δυνατές κάτω από ποιές διεργασίες μπορούν να συμβούν:

(α) $K^0 \to \bar{K}^0$ (β) $\Lambda^0 \to K^- p$ (γ) $K^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e$ (δ) $p \to \pi^0 e^+$ (ε) $\pi^- \to \mu^- \gamma$

(α) $K^0 \to \overline{K^0}$

Η διεργασία παραβιάζει την παραδοξότητα επομένως μπορεί να συμβεί μόνο μέσω ασθενών αλληλεπιδράσεων. Η διεργασία όπως ξέρουμε συμβαίνει μέσω ταλαντώσεων των ουδέτερων καονίων.

(β) $\Lambda^0 \to K^- p$

Η αλληλεπίδραση αυτή δεν παραβιάζει παραδοξότητα. οπότε μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε μέσω ισχυρών ή ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων. Ωστόσο είναι αδύνατο να πραγματοποιηθεί γιατί παραβιάζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας εφόσον η μάζα του Λ^0 είναι $M_{\Lambda^0} = 1115 MeV$ και η μάζα του πρωτονίου $m_p = 937 MeV$ και του K^- είναι $m_{K^-} = 495 MeV$

Επομένως $M_{K^- + p} = 937 + 495 = 1432 MeV > M_{\Lambda^0}$

(γ) $K^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e$

Η διάσπαση αυτή παραβιάζει την παραδοξότητα και επομένως μπορεί να γίνει μόνο μέσω ασθενών αλληλεπιδράσεων. Δεν παραβιάζεται κάτι άλλο και επομένως μπορεί να προχωρήσει κανονικά.

(δ) $p \to \pi^0 e^-$

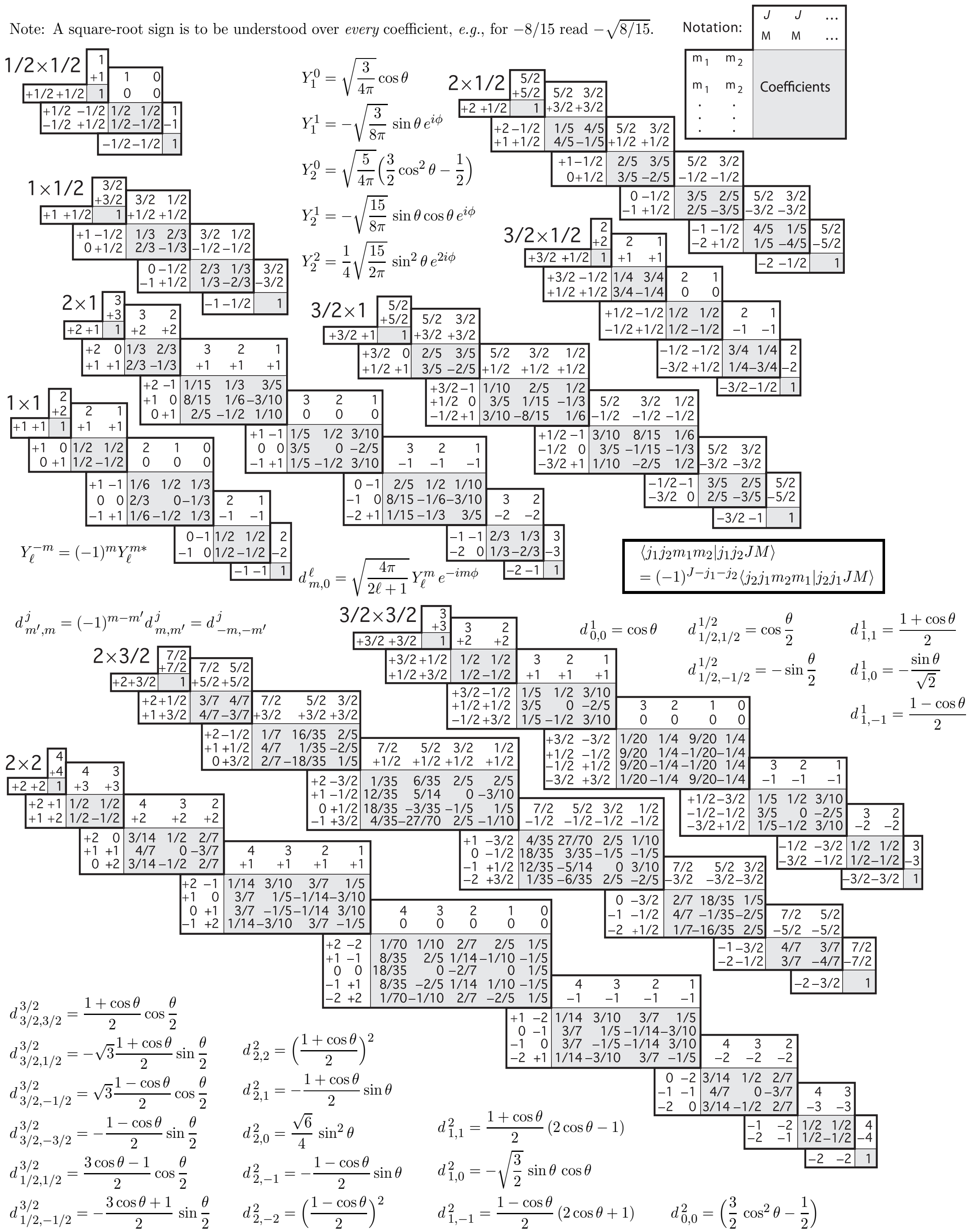
Η διάσπαση αυτή αποτελεί τη βασική διεργασία για αναζήτηση διάσπασης πρωτονίου. Παραβιάζεται επομένως ο βαρυονικός αριθμός, αλλά και ο λεπτονικός αριθμός. Ξέρουμε ότι υπάρχει ένα ελάχιστο όριο για παρατήρηση της διάσπασης του πρωτονίου της τάξης των 10^{34} χρόνια.

(ε) $\pi^- \to \mu^- \gamma$

Έχουμε παραβίαση του λεπτονικού αριθμού και η διεργασία αυτή δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί

43. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.



$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^{\,\ell}_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

$$d^{\,j}_{m',m} = (-1)^{m-m'} d^{\,j}_{m,m'} = d^{\,j}_{-m,-m'}$$

$$d^{\,1}_{0,0} = \cos\theta \qquad d^{\,1/2}_{1/2,1/2} = \cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,1}_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$d^{\,1/2}_{1/2,-1/2} = -\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,1}_{1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}$$

$$d^{\,1}_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,3/2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,1/2} = -\sqrt{3}\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,2}_{2,2} = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,-1/2} = \sqrt{3}\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,2}_{2,1} = -\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,-3/2} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,2}_{2,0} = \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta \qquad d^{\,2}_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta - 1)$$

$$d^{\,3/2}_{1/2,1/2} = \frac{3\cos\theta - 1}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,2}_{2,-1} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta \qquad d^{\,2}_{1,0} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta$$

$$d^{\,3/2}_{1/2,-1/2} = -\frac{3\cos\theta + 1}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,2}_{2,-2} = \left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2 \qquad d^{\,2}_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta + 1) \qquad d^{\,2}_{0,0} = \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

Figure 43.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974).