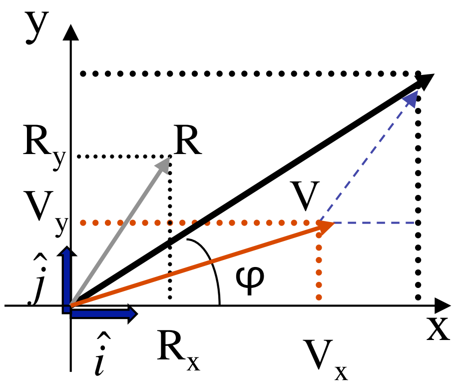
# Διανύσματα




$$\hat{i} = (1,0) \qquad \hat{j} = (0,1)$$

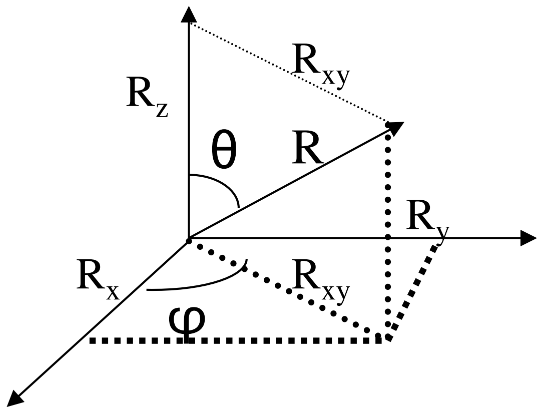
$$\vec{R} + \vec{V} = (R_x + V_x)\hat{i} + (R_y + V_y)\hat{j}$$

$$\left|\vec{R} + \vec{V}\right| = \sqrt{\left((R_x + V_x)^2 + (R_y + V_y)^2\right)}$$

Η κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{R} + \vec{V}$ θα δίνεται από την γωνία φ

$$\varphi = arc(\tan\varphi) = arc\left(\frac{(R_y + V_y)}{(R_x + V_x)}\right)$$

Ανάλογες σχέσεις ισχύουν και για 3 διαστάσεις




$$R_x = R_{xy}\cos\phi = R\sin\theta\cos\varphi$$

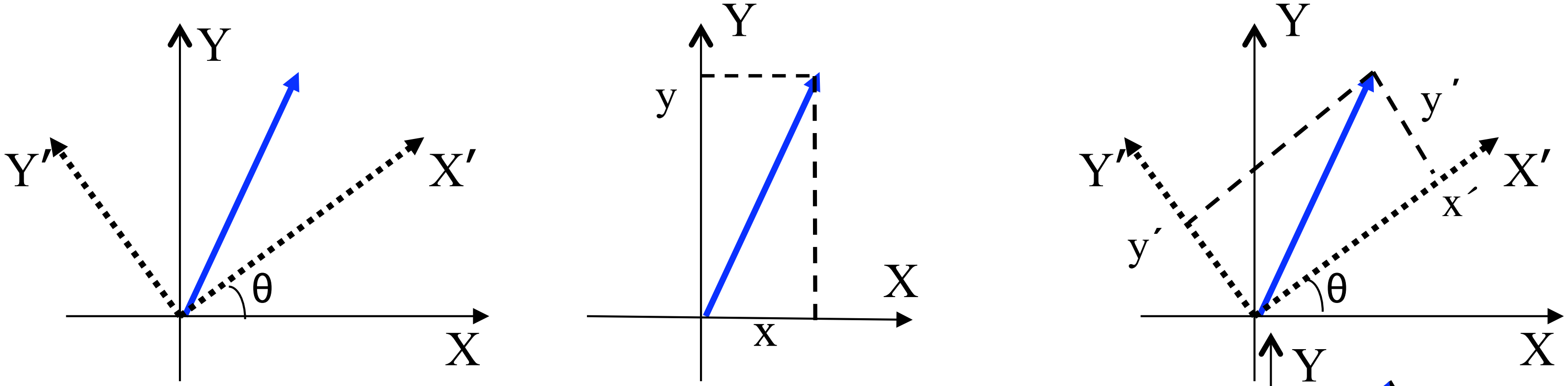
$$R_y = R_{xy}\sin\phi = R\sin\theta\sin\varphi$$

$$R_z = R\cos\theta$$

$$\boxed{R = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}}$$

# Παράδειγμα/πρόβλημα

Να βρεθούν οι συντεταγμένες $(x,y)$ συναρτήσει των $(x', y')$ του περιστρεφόμενου συστήματος συντεταγμένων

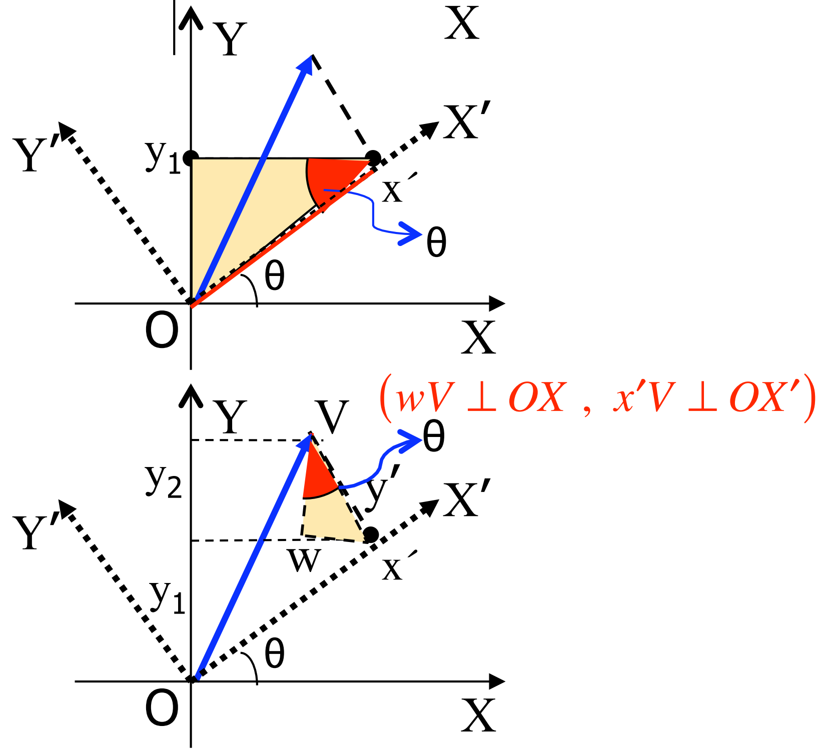



Κινηθείτε μια απόσταση x′ κατά μήκος του x′-άξονα (η προβολή στο x′)

→ $y_1$ είναι: $\sin\theta = \dfrac{Oy_1}{Ox'} = \dfrac{y_1}{x'} \Rightarrow y_1 = x'\sin\theta$

Από το x′ πηγαίνουμε στο V (κίνηση κατά y′)

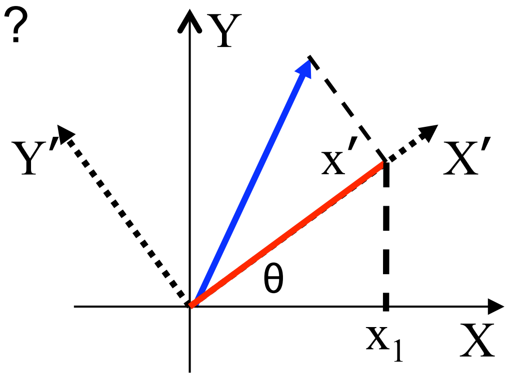
→ $y_2$ είναι: $\cos\theta = \dfrac{wV}{x'V} = \dfrac{y_2}{y'} \Rightarrow y_2 = y'\cos\theta$




Το ύψος δεν εξαρτάται από το δρόμο που ακολουθήσατε: $y = y_1 + y_2 = x'\sin\theta + y'\cos\theta$

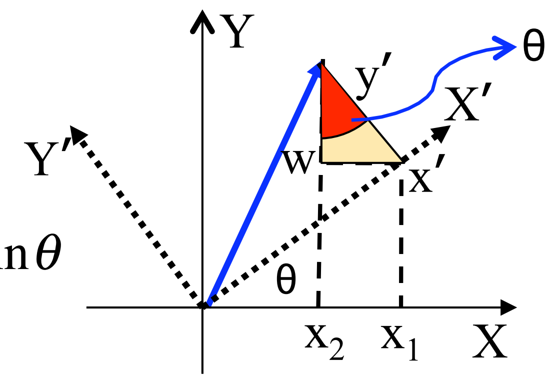
# Παράδειγμα συνέχεια

Πως βρίσκουμε το x συναρτήσει των x' και y' ?




Κινούμαστε και πάλι στον x'-άξονα κατά x'

→ $x_1$ είναι: $\cos\theta = \dfrac{Ox_1}{Ox'} = \dfrac{x_1}{x'} \Rightarrow x_1 = x'\cos\theta$




Κινούμαστε στον Y'-άξονα κατά y'

→ $x_1x_2$ είναι: $\sin\theta = \dfrac{wx'}{y'} = \dfrac{x_1x_2}{y'} \Rightarrow x_1x_2 = y'\sin\theta$

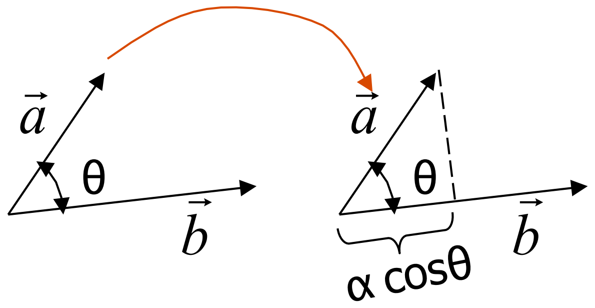
Αλλά: $x = Ox_2 = Ox_1 - x_1x_2 \Rightarrow x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$

Επομένως καταλήγουμε: $\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$

Θα μπορούσαμε να το γράψουμε και με τη μορφή: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

# Διανύσματα: εσωτερικό γινόμενο

Εσωτερικό γινόμενο 2 διανυσμάτων α,β ορίζεται σαν




$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

Είναι βαθμωτό μέγεθος και όχι διάνυσμα

Συμβολίζει την προβολή του διανύσματος α στο διάνυσμα β

Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να γραφτεί σαν συνάρτηση των συνιστωσών των 2 διανυσμάτων ως:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

επειδή $\hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{k}=1$ και $\hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{j}\cdot\hat{k}=\hat{i}\cdot\hat{k}=0$

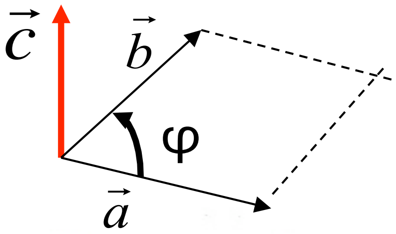
Το εσωτερικό γινόμενο υπακούει στον επιμεριστικό κανόνα

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

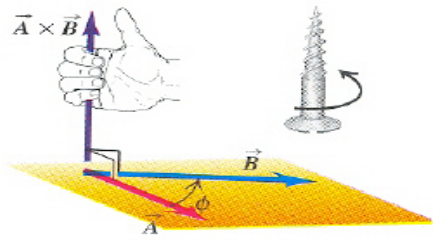
# Διανύσματα: εξωτερικό γινόμενο

Εξωτερικό γινόμενο 2 διανυσμάτων a και b είναι ένα διάνυσμα c

με μέτρο $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\phi$ όπου φ η γωνία των a,b.

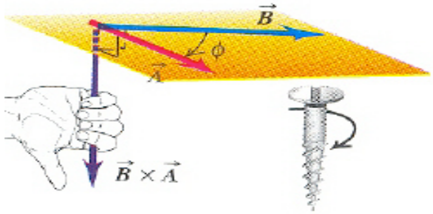



Η διεύθυνση του c είναι κάθετη στο επίπεδο των α και b και το μέτρο του ισούται με το εμβαδό του παραλ/μου.

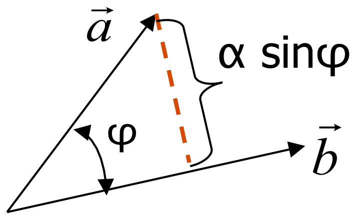


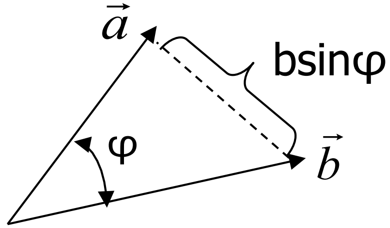
(a)

Η διεύθυνσή του βρίσκεται σύμφωνα με το κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία:




Με το δεξί μας χέρι να στρέφεται προς τη διεύθυνση φ του διανύσματος a προς το b, ο αντίχειρας δηλώνει την διεύθυνση του διανύσματος c.




Το εξωτερικό γινόμενο ισούται με το γινόμενο του μέτρου του ενός διανύσματος επί την κάθετη συνιστώσα του άλλου διανύσματος ως προς το πρώτο

# Διανύσματα: εξωτερικό γινόμενο/ιδιότητες

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \hat{i}\times\hat{j}=\hat{k} \quad \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i} \quad \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

$$\vec{a}\times\vec{a}=0 \quad \Rightarrow \quad \hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= (a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})\times(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k})\\ &= a_x\hat{i}\times b_x\hat{i}+a_x\hat{i}\times b_y\hat{j}+a_x\hat{i}\times b_z\hat{k}\\ &\quad +a_y\hat{j}\times b_x\hat{i}+a_y\hat{j}\times b_y\hat{j}+a_y\hat{j}\times b_z\hat{k}\\ &\quad +a_z\hat{k}\times b_x\hat{i}+a_z\hat{k}\times b_y\hat{j}+a_z\hat{k}\times b_z\hat{k}\Rightarrow\end{aligned}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=a_xb_y\left(+\hat{k}\right)+a_xb_z\left(-\hat{j}\right)+a_yb_x\left(-\hat{k}\right)+a_yb_z\left(+\hat{i}\right)+a_zb_x\left(+\hat{j}\right)+a_zb_y\left(-\hat{i}\right)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\hat{i}+(a_xb_z-a_zb_x)\hat{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\hat{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\hat{i}\times\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\hat{j}\times\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\hat{k}\times\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}$$

# Άλγεβρα

$$a^{-x} = \frac{1}{a^{x}} \qquad a^{(x \pm y)} = a^{x} a^{\pm y}$$

$$\log a = x \Rightarrow a = 10^{x} \qquad \log a \pm \log b = \log(ab^{\pm 1}) \qquad \log(a^{n}) = n \log(a)$$

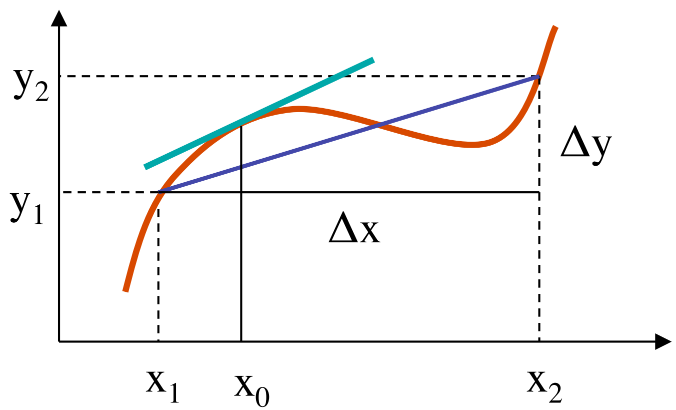
$$\ln a = x \Rightarrow a = e^{x} \qquad \ln a \pm \ln b = \ln(ab^{\pm 1}) \qquad \ln(a^{n}) = n \ln(a)$$

**Άσκηση για το σπίτι:** Διαβάστε το παράρτημα Β του βιβλίου

# Διαφορικός λογισμός

Έστω y = f(x) μια συναρτησιακή σχέση της μεταβλητής y ως προς την μεταβλητή x: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Η παράγωγος του y ως προς το χ ορίζεται ως το όριο των κλίσεων των χορδών που φέρονται μεταξύ 2 σημείων στην γραφική παράσταση του y ως προς το x καθώς το x τείνει στο μηδέν




$$\frac{dy}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{dx \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

# Διαφορικός λογισμός – ιδιότητες παραγώγων

- Η παράγωγος του αθροίσματος 2 συναρτήσεων είναι

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left[g(x) + h(x)\right] = \frac{d}{dx}g(x) + \frac{d}{dx}h(x)$$

- Η παράγωγος του γινομένου 2 συναρτήσεων είναι

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left[g(x)h(x)\right] = h\frac{dg}{dx} + g\frac{dh}{dx}$$

- Πηλίκο δύο συναρτήσεων? $\frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right) = \frac{h\frac{dg}{dx} - g\frac{dh}{dx}}{h^2}$

- Αν y = f(x) και x είναι συνάρτηση μιας άλλης μεταβλητής z τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz}$$

- Η δεύτερη παράγωγος της y ως προς x ορίζεται $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

# Διαφορικός λογισμός - τυπολόγιο

$$\frac{d}{dx}ax^{n} = nax^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin ax) = a\cos ax$$

$$\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a\sin ax$$

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx}\ln(ax) = \frac{a}{x}$$

# Ολοκληρωτικός λογισμός

- Θεωρούμε την ολοκλήρωση ως το αντίστροφο της διαφόρισης:

$$f(x) = \frac{dy}{dx} \rightarrow dy = f(x)dx$$

Μπορούμε να βρούμε την y(x) αθροίζοντας για όλες τις τιμές του x.

Αυτή η αντίστροφη πράξη γράφεται $y(x) = \int f(x)dx$

π.χ. για μιά συνάρτηση $f(x) = 3ax^2 + b$ η παραπάνω ολοκλήρωση δίνει

$$y(x) = \int (3ax^2 + b)dx = ax^3 + bx + c$$

Το ολοκλήρωμα ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα επειδή η τιμή του εξαρτάται από τη τιμή της σταθεράς c.

Το αόριστο ολοκλήρωμα ορίζεται ως $I(x) = \int f(x)dx$

Η συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται ολοκληρωτέα συνάρτηση: $f(x) = \dfrac{dI(x)}{dx}$

Για μια συνεχή συνάρτηση το ολοκλήρωμα μπορεί να περιγραφεί σα το εμβαδό που ορίζεται από την καμπύλη της $f(x)$ και του άξονα x, μεταξύ 2 ορισμένων τιμών $x_1$ και $x_2$ ➡ Ορισμένο ολοκλήρωμα

# Ολοκληρωτικός λογισμός

- Ένα από τα πιο χρήσιμα ολοκληρώματα που συναντιούνται είναι:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Διαφόριση του δεξιού μέλους δίνει $f(x) = x^n$. Αν τα όρια της ολοκλήρωσης είναι γνωστά τότε το ολοκλήρωμα δίνει:

$$\int x^n dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_{x_q}^{x_2} = \frac{x_2^{n+1} - x_1^{n+1}}{n+1}$$

- ## Μερικοί τρόποι ολοκληρώσεως

  - Ολοκλήρωση κατά παράγοντες: $\int udv = uv - \int vdu$

Για παράδειγμα: $I(x) = \int x^2 e^x dx = \int \underset{u}{x^2}\, d(\underset{v}{e^x}) = x^2 e^x - 2\int e^x x dx + c_1$

Επαναλαμβάνοντας στο δεύτερο όρο έχουμε

$$-2\int e^x x dx = -2e^x x + 2\int e^x dx = -2e^x x + 2e^x + c_2$$

# Ολοκληρωτικός λογισμός

- Τέλειο διαφορικό : προσπαθούμε με αλλαγή της μεταβλητής ολοκλήρωσης το διαφορικό της συνάρτησης να είναι διαφορικό της ανεξάρτητης μεταβλητής που εμφανίζεται στην ολοκληρωτέα συνάρτηση

π.χ

$$I(x) = \int \cos^2 x \sin x dx$$

$$d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$\Rightarrow I(x) = -\int \cos^2 x d(\cos x)$$

## Μερικά χρήσιμα ολοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1} dx = \ln x \qquad \int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx) \qquad \int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$$

$$\int \sin(ax)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) \qquad \int \cos(ax)dx = \frac{1}{a}\sin(ax)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$$

# Αναπτύγματα σε σειρές

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots$$ Για x<<1 $$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$ Για x<<1 $$e^x \approx 1 + x$$

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$ Για x<<1 $$\ln(1 \pm x) \approx \pm x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

x σε ακτίνια