ΦΥΣ. 133

ΕΡΓΑΣΙΑ # 6 **Επιστροφή 23-3-2006**

1. Χρησιμοποιώντας την Lagrangian $\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(r) = \mathcal{L}_{CM} + \mathcal{L}_{\sigma\chi\varepsilon\tau.}$ να γραφούν οι τρεις εξισώσεις Lagrange για τις σχετικές συντεταγμένες x, y και z και να δειχθεί ότι η κίνηση της σχετικής θέσης $\vec{r}$ είναι ίδια με αυτή ενός και μόνο σώματος με διάνυσμα θέσης $\vec{r}$, δυναμική ενέργεια U(r) και μάζα ίση με την ανηγμένη μάζα μ.

2. Δύο μάζες m_1 και m_2 κινούνται σε ένα επίπεδο και αλληλεπιδρούν μέσω ενός δυναμικού $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$. Να γραφεί η Lagrangian του συστήματος συναρτήσει του CM και τις σχετικές θέσεις $\vec{R}$ και $\vec{r}$. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης για τις συντεταγμένες X, Y (του CM) και x, y (σχετικής θέσης). Περιγράψτε την κίνηση και βρείτε την συχνότητα της σχετικής κίνησης.

3. Ένα σωματίδιο είναι περιορισμένο να κινείται στην επιφάνειας ενός κώνου ο άξονας του οποίου είναι συμπίπτει με τον κατακόρυφο άξονα z ενώ η κορυφή του κώνου συμπίπτει με την αρχή των αξόνων και η μισή γωνία ανοίγματος του κώνου είναι α. (α) Να γραφεί η Lagrangian σε σφαιρικές συντεταγμένες r και φ. (β) Να βρεθούν οι δύο εξισώσεις κίνησης. Θεωρήστε ότι η εξίσωση κίνησης ως προς φ σαν την κατακοκόρυφο συνιστώσα της στροφορμής, l_z, και χρησιμοποιήστε την σχέση αυτή για να απαλείψετε την ποσότητα $\dot{\phi}$ από την ακτινική εξίσωση αντικαθιστώντας την με την σταθερά l_z. Έχει νόημα η νέα εξίσωση ως προς r όταν $l_z = 0$; Βρείτε τη τιμή r_0 του r για την οποία το σωματίδιο μπορεί να παραμείνει σε μια οριζόντια κυκλική διαδρομή. (γ) Υποθέστε ότι προσδίδεται στο σωματίδιο μια μικρή ακτινική ώθηση ώστε $r(t) = r_0 + \varepsilon(t)$, όπου $\varepsilon(t)$ είναι μικρό. Χρησιμοποιήστε την εξίσωση ως προς r για να δείτε αν η κυκλική τροχιά είναι σταθερή. Αν όντως είναι σταθερή, ποια είναι η συχνότητα με την οποία το r ταλαντώνεται γύρω από το r_0;

4. Θεωρείστε ένα σωματίδιο με ανηγμένη μάζα μ το οποίο περιστρέφεται μέσα σε ένα κεντρικό πεδίο $U = kr^n$ όπου $kn>0$. (α) Εξηγήστε τη σημασία της συνθήκης $kn>0$ ως προς το είδος της δύναμης. Σχεδιάστε το ενεργό δυναμικό U_{eff} για τις περιπτώσεις n = 2, -1 και -3. (β) Βρείτε την ακτίνα στην οποία το σωματίδιο (με δεδομένη στροφορμή l) μπορεί να περιστρέφεται σε σταθερή ακτίνα. Για ποιες τιμές του n η κυκλική αυτή τροχιά είναι ευσταθής. Τα γραφήματα του U_{eff} δείχνουν κάτι τέτοιο. (γ) Για την σταθερή περίπτωση, δείξτε ότι η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων γύρω από την κυκλική τροχιά είναι $\tau_{\tau\alpha\lambda} = \tau_{\pi\varepsilon\rho.}/\sqrt{n+2}$. Εξηγήστε γιατί αν $\sqrt{n+2} = \frac{p}{q}$, με p και q ακεραίους τότε οι τροχιές αυτές είναι κλειστές. Σχεδιάστε τις τροχιές αυτές για n = 2, -1 και 7.

5. Για ένα δεδομένο δορυφόρο της γης με δεδομένη στροφορμή l, δείξτε ότι η ελάχιστη απόσταση προσέγγισης r_{min}, σε μια παραβολική τροχιά είναι το μισό της κυκλικής τροχιάς.

6. Ένα σωματίδιο κινείται στο πεδίο μιας κεντρικής δύναμης: $U(r) = -k\dfrac{e^{-ar}}{r}$, όπου k και α είναι θετικές σταθερές. (α) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ισοδυναμίας με ένα μονοδιάστατο δυναμικό, περιγράψτε το είδος της κίνησης, προσδιορίζοντας το εύρος των τιμών που μπορούν να πάρουν η ενέργεια Ε και η στροφορμή l σε κάθε περίπτωση. (β) Πότε μπορούν να παρουσιαστούν σταθερές κυκλικές τροχιές; (γ) Να βρεθεί η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων γύρω από την κυκλική τροχιά.

.