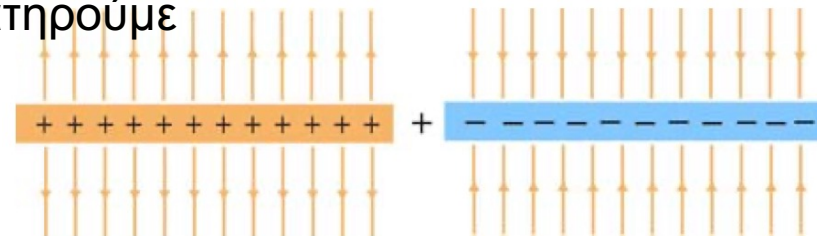
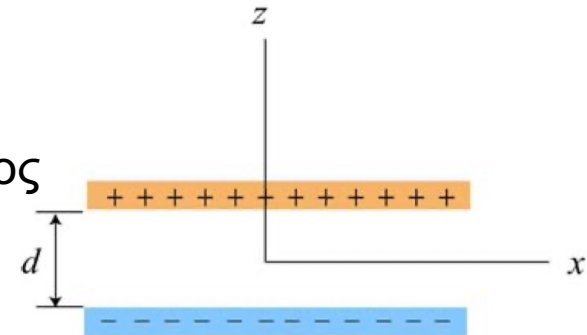


## Άσκηση 1<sup>η</sup>: Δύο παράλληλες επιφάνειες απείρων διαστάσεων

Δύο παράλληλες μη αγώγιμες επιφάνειες απείρων διαστάσεων βρίσκονται στο  $x$ - $y$  επίπεδο και απέχουν μεταξύ τους απόσταση  $d$ . Κάθε επίπεδο είναι ομοιόμορφα φορτισμένο με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου ίσου μέτρου αλλά αντίθετου πρόσημου. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο οπουδήποτε στο χώρο.

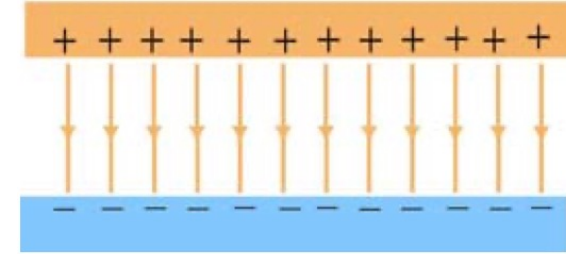
- Μπορούμε να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας στο αποτέλεσμα του προβλήματος της εύρεσης του ηλεκτρικού πεδίου μιας επιφάνειας απείρων διαστάσεων που συζητήσαμε στη διάλεξη 7.
- Αφού οι δύο επιφάνειες έχουν ίσες αλλά αντίθετες πυκνότητες φορτίου, τα πεδία που δημιουργούνται έχουν ίσα μέτρα αλλά αντίθετη φορά. Το πεδίο από την θετικά φορτισμένη επιφάνεια δείχνει μακριά από την επιφάνεια, ενώ το πεδίο από την αρνητικά φορτισμένη επιφάνεια δείχνει προς την επιφάνεια.
- Το μέτρο των δύο ηλεκτρικών πεδίων θα είναι:  $E_+ = E_- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
- Προσθέτοντας τα δύο πεδία μεταξύ τους, παρατηρούμε ότι μεταξύ των δύο επιφανειών το πεδίο γίνεται διπλάσιο αυτού για κάθε επιφάνεια ξεχωριστά, ενώ εκτός των δύο επιφανειών το πεδίο αυτό μηδενίζεται.



# Άσκηση 1<sup>η</sup>: Δύο παράλληλες επιφάνειες απείρων διαστάσεων

- Το ηλεκτρικό πεδίο της θετικής και αρνητικής επιφάνειας:

$$\vec{E}_+ = \begin{cases} +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} & z > d/2 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} & z < d/2 \end{cases} \quad \text{και} \quad \vec{E}_- = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} & z > -d/2 \\ +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} & z < -d/2 \end{cases}$$



- Προσθέτοντας τα δύο πεδία θα πάρουμε:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0\hat{k} & z > d/2 \\ -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{k} & -d/2 < z < d/2 \\ 0\hat{k} & z < -d/2 \end{cases}$$

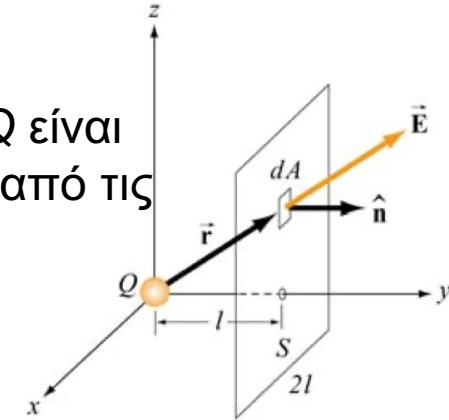
## Άσκηση 2<sup>η</sup>: Ηλεκτρική ροή που διαπερνά τετραγωνική επιφάνεια

(α) Υπολογισμός της ηλεκτρικής ροής πεδίου που διαπερνά μια τετραγωνική επιφάνεια πλευράς  $2l$  που βρίσκεται σε απόσταση  $l$  από το φορτίο  $+Q$  που δημιουργεί το πεδίο.

(β) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από το (α), αν το φορτίο  $+Q$  είναι στο κέντρο κύβου πλευράς  $2l$  να βρεθεί η ολική ροή που εξέρχεται από τις 6 πλευρές της κλειστής επιφάνειας

➤ Το ηλεκτρικό πεδίο εξαιτίας του σημειακού φορτίου  $+Q$  είναι:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{r} \right) \quad \text{όπου } r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$



Στην επιφάνεια  $S$ ,  $y = l$  και το στοιχείο επιφάνειας είναι  $d\vec{A} = dA\hat{j} = (dx dz)\hat{j}$

$$\text{Επομένως: } \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{y dx dz}{r} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} dx dz$$

Επομένως η ροή μέσω της επιφάνειας θα είναι:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Ql}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^{+l} dx \int_{-l}^l \frac{dz}{(x^2 + l^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{Ql}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l dx \left. \frac{z}{(x^2 + l^2)(x^2 + l^2 + z^2)^{1/2}} \right|_{-l}^l$$

## Άσκηση 2<sup>η</sup>: Ηλεκτρική ροή που διαπερνά τετραγωνική επιφάνεια

$$\Rightarrow \Phi_E = \frac{Ql}{2\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{ldx}{(x^2 + l^2)(x^2 + 2l^2)^{1/2}} \Rightarrow \Phi_E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \tan^{-1} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2l^2}} \right) \Big|_{-l}^l$$

$$\Rightarrow \Phi_E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left( \tan^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \tan^{-1} \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) \Rightarrow \Phi_E = \frac{Q}{6\epsilon_0}$$

Όπου κάναμε χρήση των ακόλουθων ολοκληρωμάτων :  $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(a^2 + x^2)^{1/2}}$

$$\text{και } \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^{1/2}} = \frac{1}{a(b^2 - a^2)^{1/2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2(x^2 + b^2)}}, \quad b^2 > a^2$$

(β) Με βάση την συμμετρία του προβλήματος, η ροή πρέπει να είναι ίδια σε όλες τις πλευρές του: Επομένως η ολική ροή θα είναι 6 φορές τη ροή από τη μία πλευρά:

$$\Rightarrow \Phi_E = 6 \left( \frac{Q}{6\epsilon_0} \right) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

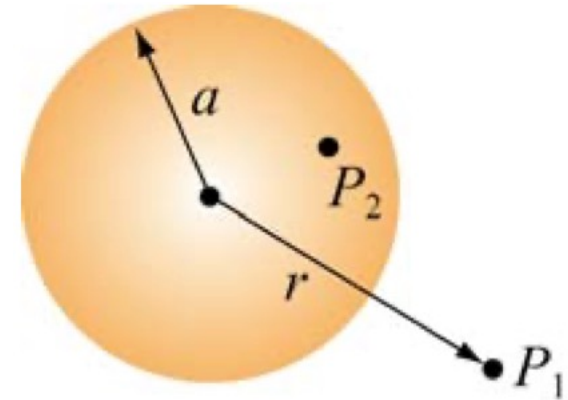
Το αποτέλεσμα δείχνει ότι η ροή που περνά από μια κλειστή επιφάνεια, είναι ανάλογη του ολικού φορτίου που περικλείει. Το αποτέλεσμα ενισχύει την άποψη ότι η ροή δεν εξαρτάται από τη μορφή της επιφάνειας.

## Άσκηση 3<sup>η</sup>: Δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας

Μια μονωμένη αγώγιμη σφαίρα ακτίνας  $a$  έχει ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου  $\rho$ .  
Να βρεθεί το ηλεκτρικό δυναμικό παντού στο χώρο.

Όπως είδαμε, από τον νόμο του Gauss βρίσκουμε το πεδίο από την κατανομή των φορτίων του προβλήματος:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & z \geq a \\ \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \hat{r} & z \leq a \end{cases}$$



Το δυναμικό στο σημείο  $P_1$  έξω από την σφαίρα, είναι:

$$V(r) - V(\infty) = V(r) = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \Rightarrow V(r) = k_e \frac{Q}{r}$$

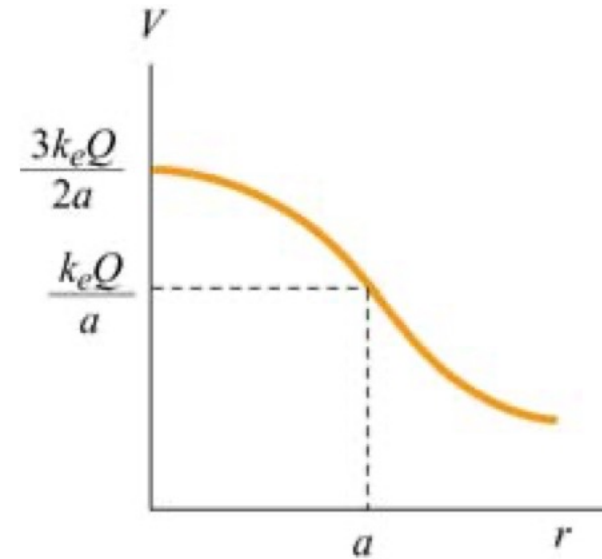
Το δυναμικό στο σημείο  $P_2$  στο εσωτερικό της σφαίρας θα είναι:

$$V(r_2) - V(\infty) = V(r_2) = - \int_{\infty}^a d\hat{r} \cdot \vec{E}(r \geq a) - \int_a^{r_2} d\hat{r} \cdot \vec{E}(r \leq a) = - \int_{\infty}^a \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \int_a^{r_2} dr' \frac{Qr'}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

$$\Rightarrow V(r_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^3} \frac{1}{2} (r^2 - a^2) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} \left[ 3 - \frac{r^2}{a^2} \right] = k_e \frac{Q}{2a} \left[ 3 - \frac{r^2}{a^2} \right]$$

## Άσκηση 3<sup>η</sup>: Δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας

Το δυναμικό συναρτήσει της απόστασης  $r$ , δίνεται στο σχήμα:



## Χωρητικότητα και διηλεκτρικά

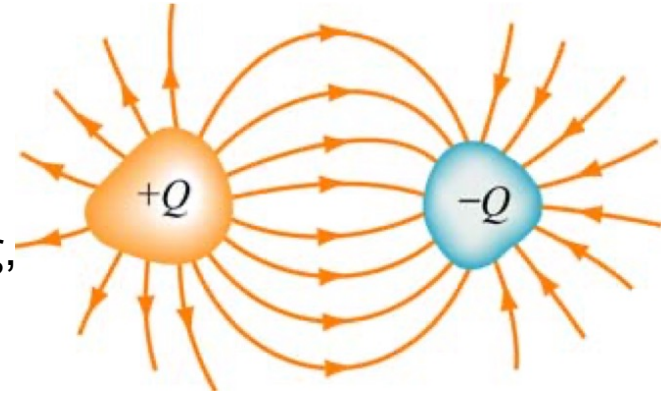
Ο πυκνωτής είναι μια διάταξη η οποία αποθηκεύει ηλεκτρικό φορτίο.

Οι πυκνωτές εν γένει έχουν διαφορετικό σχήμα και μέγεθος.

Βασικό χαρακτηριστικό είναι ότι αποτελούνται από δύο αγωγούς με ίσα και αντίθετα φορτία

Χρησιμοποιούνται στα ηλεκτρονικά κυκλώματα για:

- την αποθήκευση ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας,
- την καθυστέρηση μεταβολής του δυναμικού όταν συνδυαστούν με αντιστάσεις,
- το φιλτράρισμα μη επιθυμητών συχνοτήτων κάποιων σημάτων,
- τη δημιουργία κυκλωμάτων συντονισμού,
- ως διαιρέτες τάσης όταν συνδυαστούν με αντιστάσεις.



Στη βασική τους κατάσταση, αφόρτιστη κατάσταση, το φορτίο σε κάθε αγωγό του συστήματος, είναι μηδέν.

Κατά την φόρτισή τους, φορτίο  $Q$  μεταφέρεται από τον έναν αγωγό στον άλλο προσδίδοντας στον έναν αγωγό φορτίο  $+Q$  και στον άλλο φορτίο  $-Q$ .

Σαν αποτέλεσμα, έχουμε την δημιουργία διαφοράς δυναμικού  $\Delta V$  με τον θετικά φορτισμένο αγωγός σε υψηλότερο δυναμικό από τον αρνητικά φορτισμένο αγωγό.

Το συνολικό φορτίο στον πυκνωτή είναι μηδέν ανεξάρτητα από το αν είναι φορτισμένος ή αφόρτιστος

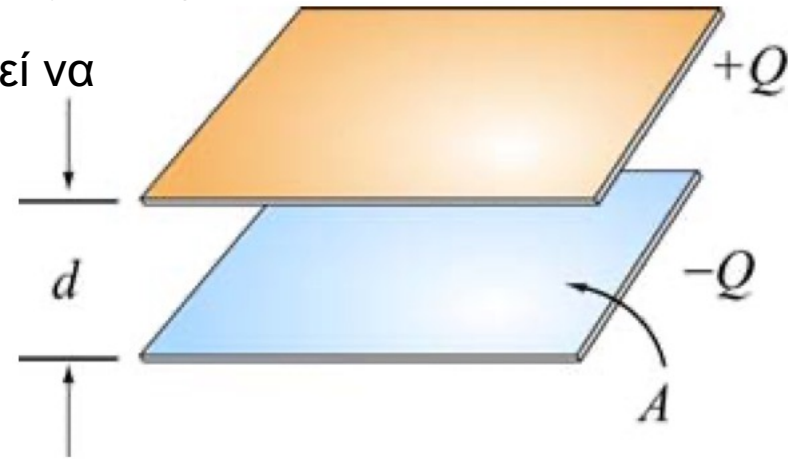
# Χωρητικότητα

Η απλούστερη διάταξη ενός πυκνωτή αποτελείται από δύο παράλληλες αγωγίμες πλάκες εμβαδού  $A$ , που απέχουν απόσταση  $d$  μεταξύ τους.

Πειραματικά, γνωρίζουμε ότι το φορτίο που μπορεί να αποθηκευτεί σε έναν πυκνωτή είναι ανάλογο της διαφοράς δυναμικού,  $\Delta V$ .

$$Q = C|\Delta V|$$

$C$ : θετική σταθερά αναλογίας – **χωρητικότητα**

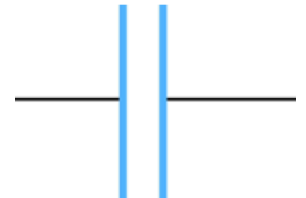


Αντιπροσωπεύει την ικανότητα της διάταξης να αποθηκεύσει ηλεκτρικό φορτίο για δεδομένη διαφορά δυναμικού  $\Delta V$

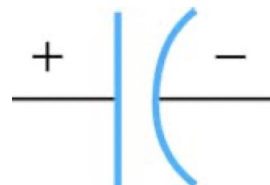
Μονάδα μέτρησης της χωρητικότητας είναι το **Farad (F)**,  $1F = \frac{1\text{Coulomb}}{\text{volt}} = 1 \frac{C}{V}$

Τυπικές τιμές χωρητικότητας είναι το  $\mu F$  ( $10^{-6}F$ ) ή το  $pF$  ( $10^{-12}F$ )

Ο συμβολισμός της χωρητικότητας που χρησιμοποιείται σε κυκλώματα



Για πυκνωτές συγκεκριμένης πόλωσης φορτίων χρησιμοποιείται ο συμβολισμός:





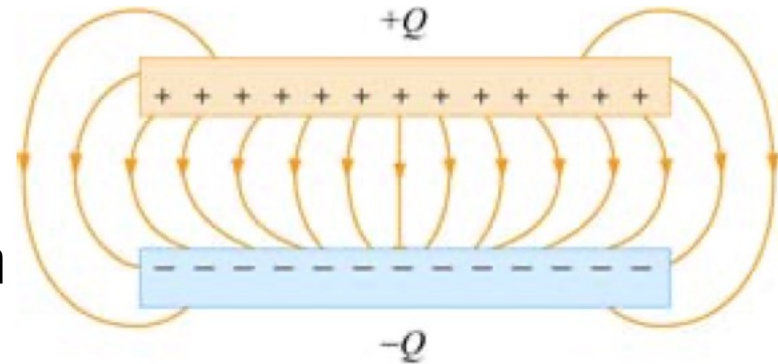
## Υπολογισμός Χωρητικότητας

Θεωρούμε την περίπτωση δύο παράλληλων επίπεδων μεταλλικών πλακών που απέχουν απόσταση  $d$ . Η πάνω πλάκα είναι φορτισμένη με  $+Q$  φορτίο και η κάτω πλάκα με  $-Q$ .

Η φόρτιση των δύο πλακών μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση σταθεράς διαφοράς δυναμικού

Εύρεση της χωρητικότητας  $C$ , προϋποθέτει γνώση του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των δύο πλακών.

Λόγω των πεπερασμένων διαστάσεων της διάταξης οι ηλεκτρικές γραμμές στα άκρα των πλακών δεν είναι ευθείες γραμμές αλλά καμπυλώνουν και το ηλεκτρικό πεδίο δεν εμπεριέχεται πλήρως ανάμεσα στις πλάκες. Το ηλεκτρικό πεδίο δεν είναι ομογενές στα άκρα και ονομάζεται *fringing field*



# Υπολογισμός Χωρητικότητας

Στο όριο που οι δύο πλάκες είναι πολύ μεγάλων διαστάσεων, το σύστημα έχει επίπεδη συμμετρία και το ηλεκτρικό πεδίο υπολογίζεται σύμφωνα με τον νόμο του Gauss

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{εσ.}}}{\epsilon_0}$$

Χρησιμοποιούμε επιφάνεια Gauss με εμβαδό βάσης  $A'$  που να περιέχει το φορτίο της θετικά φορτισμένης πλάκας.

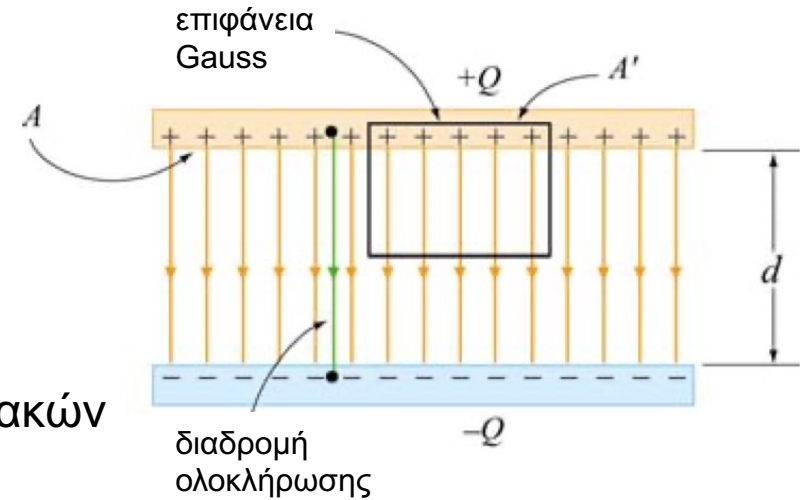
Το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή μεταξύ των πλακών

$$EA' = \frac{q_{\text{εσ.}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A'}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα το βρήκαμε χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας στην αρχή της διάλεξης

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο πλακών είναι:  $\Delta V = V_- - V_+ = - \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = -Ed$  (διαδρομή ολοκλήρωσης, το ευθύγραμμο τμήμα από την θετικά πλάκα στην αρνητική και  $V_- < V_+$ .) Στην εύρεση της χωρητικότητας το πρόσημο δεν ενδιαφέρει:  $|\Delta V| = Ed$

Από τον ορισμό της χωρητικότητας:  $C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\sigma A}{Ed} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} d} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$  παράλληλες πλάκες



## 4<sup>ο</sup> Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

Έτοιμοι