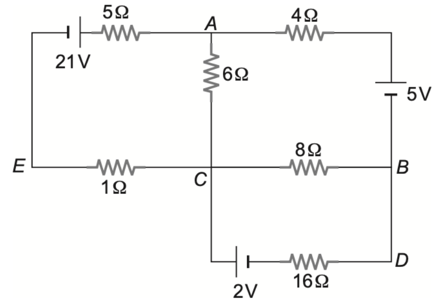
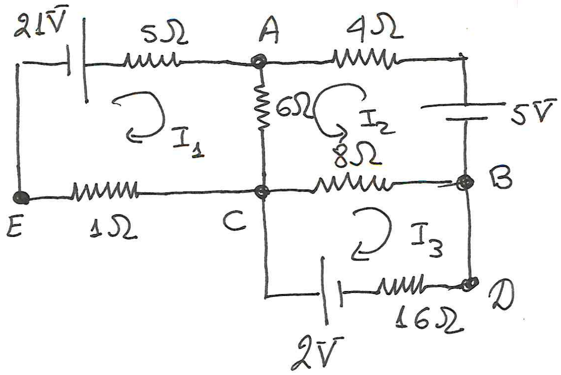
ΦΥΣ. 112

5ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή: Παρασκευή 18.10.2024**

1. Να βρείτε το ρεύμα σε κάθε κλάδο του κυκλώματος του παρακάτω κυκλώματος.





Θα χρησιμοποιήσουμε μια λίγο διαφορετική τεχνική από αυτή του κανόνα του Kirchhoff. Αναθέτουμε στους 3 βρόχους του σχήματος τρία ρεύματα I_1, I_2 και I_3 τα οποία θεωρούμε ότι διαρρέουν τους τρεις βρόχους. Η φορά των ρευμάτων είναι τυχαία.

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Kirchhoff στους τρείς βρόχους οπότε θα πάρουμε:

$$21 - 5i_1 - 6(i_1 + i_2) - 1i_1 = 0 \qquad (1)$$

$$5 - 4i_2 - 6(i_1 + i_2) - 8(i_2 + i_3) = 0 \qquad (2)$$

$$2 - 8(i_2 + i_3) - 16i_3 = 0 \qquad (3)$$

Αφαιρούμε την (2) από την (1): $16 - 5i_1 + 4i_2 - i_1 + 8(i_2 + i_3) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 16 - 6i_1 + 12i_2 + 8i_3 = 0. \qquad (4)$$

Αφαιρούμε την (3) από την (2): $3 - 4i_2 - 6i_1 - 6i_2 + 16i_3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3 - 6i_1 - 10i_2 + 16i_3 = 0. \qquad (5)$$

Αφαιρούμε την (5) από την (4): $13 + 22i_2 - 8i_3 = 0 \qquad (6)$

Αφαιρούμε την (5) από την (4): $13 + 22i_2 - 8i_3 = 0$ (6)

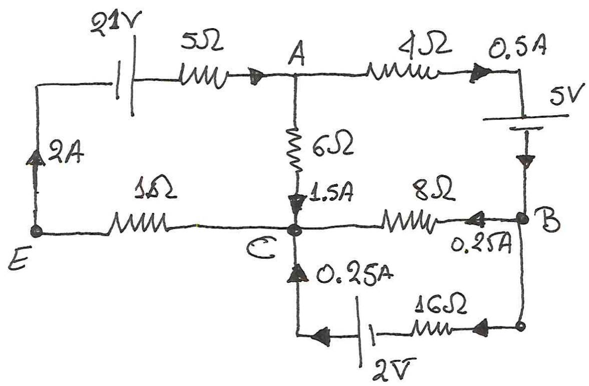
Πολλ/ζουμε την (6)×3 και την αφαιρούμε από την (3):

$$2 - 8i_2 - \cancel{24i_3} - 39 - 66i_2 + \cancel{24i_3} = 0 \Rightarrow -74i_2 = 37 \Rightarrow \boxed{i_2 = -0.5A}$$

Αντικατάσταση στην (3) δίνει: $2 + 4 - 24i_3 = 0 \Rightarrow \cancel{6} = \overset{4}{\cancel{24}}\, i_3 \Rightarrow \boxed{i_3 = 1/4\,A}$

Από την (5) έχουμε: $3 - 6i_1 + \overset{5}{\cancel{10}}\,\frac{1}{\cancel{2}} + \frac{\overset{4}{\cancel{16}}}{\cancel{4}} = 0 \Rightarrow 12 - 6i_1 = 0 \Rightarrow \boxed{i_1 = 2A}$

Με βάση το αποτέλεσμα, τα ρεύματα στους κλάδους του κυκλώματος φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



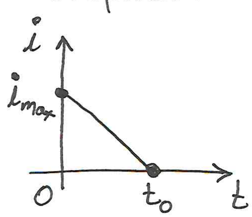
2. Ποια η ποσότητα θερμότητας θα αναπτύξει σε ένα πηνίο αντίστασης R φορτίο q το οποίο περνά από το πηνίο αν το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο (α) ελαττωθεί ομοιόμορφα στη μηδενική τιμή μέσα σε χρονικό διάστημα t_0 ; (β) ελαττωθεί στην μηδενική τιμή διαιρούμενο στο μισό της τιμής του κάθε t_0 δευτερόλεπτα;

Η θερμότητα που αναπτύσσεται σε μια αντίσταση είναι: $\boxed{E = (i^2 R)\cdot t}$ (A)

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα το ρεύμα μεταβάλλεται και επομένως θα πρέπει να βρούμε πως μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου. Θα πρέπει να βρούμε την θερμότητα που χάνεται, dE, σε ένα μικρό χρονικό διάστημα dt και να ολοκληρώσουμε στα λογικά χρονικά όρια για να βρούμε την ολική ενέργεια

Το γράφημα ρεύματος-χρόνου, θα είναι μια ευθεία γραμμή, με το ρεύμα i να ελαττώνεται από μία μέγιστη τιμή (i_{max}) σε μηδενική τιμή, $i_f=0$ σε χρόνο t_0.

Επομένως: $i = i_{max} - a\cdot t$



Από το γράφημα βλέπουμε ότι η κλίση $a = \frac{i_{max}}{t_0}$

$\Rightarrow \boxed{i = i_{max} - \frac{i_{max}}{t_0}t}$ (2)

Το φορτίο θα είναι το εμβαδό κάτω από την καμπύλη $i-t$

Επομένως: $q = \frac{1}{2}(i_{max})(t_0) \Rightarrow \boxed{i_{max} = \frac{2q}{t_0}}$ (3)

Αντικατάσταση της (3) στην (2) θα δώσει: $i = \frac{2q}{t_0} - \frac{2q}{t_0^2}t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{i = \frac{2q}{t_0}\left(1-\frac{t}{t_0}\right)} \quad (4)$$

Τη χρονική στιγμή t, η θερμότητα που εκλύεται σε χρονικό διάστημα dt θα είναι:

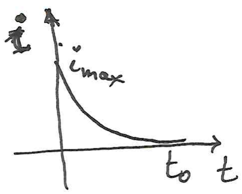
$$dE = i^2 R\,dt = \frac{4q^2}{t_0^2}\left(1-\frac{t}{t_0}\right)^2 R\,dt$$

Ολοκληρώνουμε την τελευταία εξίσωση: $E = \int_0^{t_0} dE = \int_0^{t_0} \frac{R4q^2}{t_0^2}\left(1-\frac{t}{t_0}\right)^2 dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow E = \frac{4q^2R}{t_0^2}\int_0^{t_0}\left(1-\frac{t}{t_0}\right)^2 dt = \frac{4q^2R}{t_0^2}\frac{(t-t_0)^3}{3t_0^2}\Big|_0^{t_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{4q^2R}{3t_0}}$$

(β) Στην 2η περίπτωση το ρεύμα ελαττώνεται εκθετικά σύμφωνα με τη σχέση

$$i = i_{max} e^{-\lambda t} \quad \text{όπου} \quad \lambda = \frac{\ln(2)}{t_0} \qquad (5)$$



Επομένως το φορτίο q θα είναι: $q = \int_0^\infty i\,dt = \int_0^\infty i_{max} e^{-\lambda t} dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow q = \frac{i_{max}}{\lambda} \Rightarrow \boxed{i_{max} = \lambda q} \text{ κι άρα } \boxed{i = \lambda q e^{-\lambda t}}$$

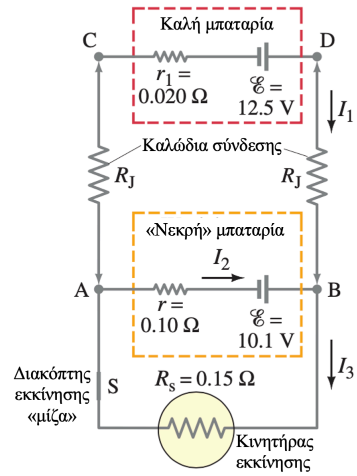
Η ενέργεια που χάνεται λόγω θερμότητας σε χρόνο dt σε κάποια τυχαία χρονική στιγμή t θα είναι:

$$dE = i^2 R\,dt = \lambda^2 q^2 R e^{-2\lambda t} dt \Rightarrow E = \int_0^\infty dE = \lambda^2 q^2 R \int_0^\infty e^{-2\lambda t} dt \Rightarrow$$

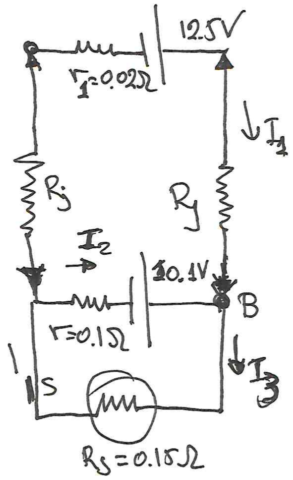
$$\Rightarrow E = \lambda^2 q^2 R \left(-\frac{e^{-2\lambda t}}{2\lambda} \right) \Bigg|_0^\infty = \lambda^2 q^2 R \left[0 + \frac{1}{2\lambda} \right] \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} q^2 \lambda R} \quad (6)$$

Αντικαθιστώντας την (5) θα έχουμε: $E = \frac{1}{2} q^2 R \frac{\ln(2)}{t_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{q^2 R \ln(2)}{2 t_0}}$

3. Μια καλή μπαταρία αυτοκινήτου χρησιμοποιείται για να ξεκινήσει ένα αυτοκίνητο η μπαταρία του οποίου είναι «νεκρή». Η καλή μπαταρία έχει $\mathcal{E} = 12.5V$ και εσωτερική αντίσταση 0.02Ω Υποθέστε ότι η νεκρή μπαταρία έχει $\mathcal{E} = 10.1V$ και εσωτερική αντίσταση 0.10Ω. Χρησιμοποιείται δύο χάλκινα καλώδια για να συνδέσετε τις δύο μπαταρίες και να ξεκινήσετε το αυτοκίνητο. Το κάθε καλώδιο έχει μήκος $3.0m$ και $0.50cm$ διάμετρο. Υποθέστε ότι ο κινητήρας εκκίνησης του αυτοκινήτου μπορεί να αναπαρασταθεί σαν ένας αντιστάτης με αντίσταση $R_s = 0.15\Omega$. Υπολογίστε το ρεύμα που διαπερνά τον κινητήρα εκκίνησης (α) αν μόνο η «νεκρή» μπαταρία είναι συνδεδεμένη και (β) αν συνδεθεί και η καλή μπαταρία όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



(α) Το κύκλωμα μόνο με την "νεκρή" μπαταρία και χωρίς τα καλώδια είναι απλό.



Μια πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης $\mathcal{E}_1 = 10.1V$

συνδεδεμένη με δύο αντιστάσεις σε σειρά $0.10\Omega + 0.15\Omega$

Το ρεύμα επομένως θα είναι: $I = \frac{V}{R} = \frac{10.1V}{0.25\Omega} \Rightarrow \underline{\underline{I = 40A}}$

(β) Η αντίσταση των καλωδίων που συνδέουν την καλή μπαταρία με την "νεκρή" μπαταρία είναι:

$$R_J = \frac{\rho l}{A} = \frac{(1.68 * 10^{-8}\Omega \cdot m)(3.0m)}{\pi (0.25 \times 10^{-2} m)^2} \Rightarrow R_J = 0.0026\Omega$$

Από τον 2ο κανόνα του kirchhoff για το εξωτερικό βρόχο είναι

$$12.5V - I_1(2R_j + r_1) - I_3 R_s = 0 \Rightarrow 12.5V - I_1(0.025\Omega) - I_3(0.15\Omega) = 0 \quad (1$$

Ο κανόνας του kirchhoff για τον χαμηλότερο βρόχο που περιλαμβάνει την νεκρή μπαταρία και την "μίζα" θα είναι:

$$10.1V - I_3(0.15\Omega) - I_2(0.1\Omega) = 0 \qquad (2)$$

Από τον 1ο κανόνα του kirchhoff για το σημείο B: $I_1 + I_2 = I_3$ (3)

Η τελευταία δίνει $I_1 = I_3 - I_2$ και αντικαθιστούμε στην (1) οπότε:

$$12.5V - (I_3 - I_2)(0.025\Omega) - I_3(0.15\Omega) = 0 \Rightarrow 12.5V - I_3(0.175\Omega) + I_2(0.025\Omega) =$$

Η τελευταία εξίσωση με την (2) δίνει:

$$12.5V - I_3(0.175\Omega) + \left[\frac{10.1V - I_3(0.15\Omega)}{0.10\Omega}\right](0.025\Omega) = 0 \Rightarrow I_3 = \frac{12.5V + 2.5V}{(0.175\Omega + 0.0375\Omega} =$$

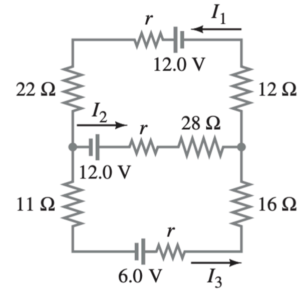
$\Rightarrow \boxed{I_3 = 71A}$ Από την (2) βρίσκουμε: $I_2 = \frac{10.1V - (71A)(0.15\Omega)}{0.1\Omega} \Rightarrow \boxed{I_2 = -5.5A}$

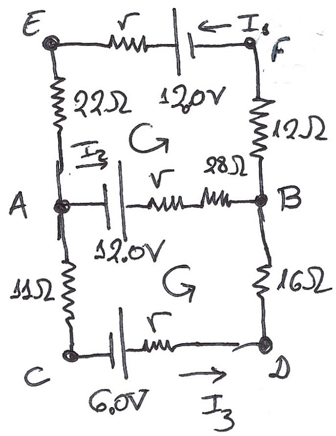
Άρα I_2 έχει φορά αντίθετη αυτής που υποθέσαμε.

Από την (3) θα έχουμε: $I_1 = I_3 - I_2 \Rightarrow \boxed{I_1 = 76.5A}$

Η τάση στους πόλους της "νεκρής" μπαταρίας όταν φορτίζει είναι $V_{BA} = 10.1 - (-5A)(0.1$
$= \underline{10.6V}$

4. Προσδιορίστε τις εντάσεις των ρευμάτων I_1 και I_2 στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος. Υποθέστε ότι η εσωτερική αντίσταση κάθε μπαταρίας είναι $r = 1\Omega$. Ποια είναι η τελική τάση στα άκρα της μπαταρίας των 6-0V; Ποια θα είναι η τιμή του ρεύματος I_1 αν βραχυκυκλωθεί η αντίσταση των 12Ω;





(α) Από τον 1° κανόνα kirchhoff στον κόμβο A θα έχουμε: $I_1 = I_2 + I_3$ (1)

Από τον 2° νόμο του kirchhoff στον βρόχο ABFE έχουμε:

$$12V - I_2(\overbrace{r+28\Omega}^{29\Omega}) - I_1\cdot 12\Omega + 12V - I_1(22\Omega + r) = 0$$

$$\Rightarrow 24V - 29 I_2 - 35 I_1 = 0 \quad (2)$$

Εφαρμογή του 2ου νόμου του kirchhoff στον βρόχο ABDC δίνει:

$$6.0V - I_3(16\Omega + r) + I_2(28+r) - 12.0V - I_3\cdot 11\Omega = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6.0V - 28 I_3 + I_2\, 29 = 0 \quad (3)$$

Αντικαθιστούμε την (1) στην (2) οπότε:

$$24 - 29I_2 - 35I_2 - 35I_3 = 0 \Rightarrow 24 = 64I_2 + 35I_3 \quad (4)$$

και ξαναγράφουμε την (3) $\quad 6 = 29I_2 - 28I_3 \quad (5)$

Πολ/ζουμε την (5) με 4 και αφαιρούμε από την (4) οπότε:

$$0 = -52I_2 + 147I_3 \Rightarrow I_2 = \frac{147}{52} I_3 \quad (6)$$

Αντικαθιστούμε στην (5) και έχουμε: $6 = 29\,\frac{147}{52}I_3 - 28I_3 = 0 \Rightarrow$

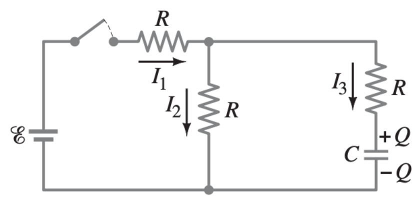
$\Rightarrow 6 = 81.98\, I_3 - 28\, I_3 \Rightarrow \boxed{I_3 = 0.111\,A}$ Από την (6) $\boxed{I_2 = 0.314A}$

Αντικατάσταση στην (1) δίνει: $\boxed{I_1 = 0.425A}$

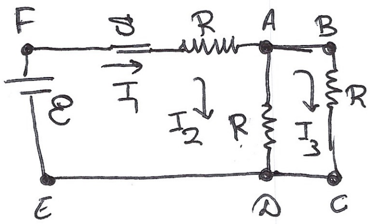
(β) Η διαφορά δυναμικού στα άκρα της μπαταρίας των 6V θα είναι:

$\Delta V = 6.0V - I_3 r = 6.0 - 0.111A\cdot 1\Omega \Rightarrow \Delta V = 5.889$ Volts

5. Θεωρήστε το κύκλωμα του διπλανού σχήματος στο οποίο όλοι οι αντιστάτες έχουν την ίδια αντίσταση R. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ο πυκνωτής C είναι αφόρτιστος και ο διακόπτης κλείνει. (α) Τη χρονική στιγμή $t = 0$, τα τρία ρεύματα μπορούν να προσδιοριστούν αναλύοντας ένα απλούστερο αλλά ισοδύναμο κύκλωμα με αυτό του σχήματος. Σχεδιάστε αυτό το απλούστερο κύκλωμα και χρησιμοποιήστε το για να υπολογίσετε τις τιμές των ρευμάτων I_1, I_2 και I_3 τη χρονική στιγμή $t = 0$. (β) Μετά την πάροδο πολύ μεγάλου χρονικού διαστήματος ($t \to \infty$) τα ρεύματα μπορούν να βρεθούν αναλύοντας ένα απλούστερο αλλά ισοδύναμο κύκλωμα. Σχεδιάστε το απλούστερο αυτό κύκλωμα και χρησιμοποιήστε το για να προσδιορίσετε τις τιμές των ρευμάτων I_1, I_2 και I_3 τη χρονική στιγμή όταν $t = \infty$. (γ) Προσδιορίστε την διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή τη χρονική στιγμή $t = \infty$.



(α) Τη χρονική στιγμή $t=0$ ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος και ο διακόπτης κλείνει. Επομένως τη στιγμή αυτή ο πυκνωτής συμπεριφέρεται σαν βραχυκύκλωμα. Το κύκλωμα θα μοιάζει όπως αυτό του διπλανού σχήματος, όπου οι αντιστάσεις στον βρόχο ABCD είναι παράλληλα συνδεδεμένες και σε σειρά με την αντίσταση στον βρόχο ADEF.

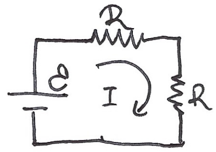


Επομένως το ισοδύναμο κύκλωμα αποτελείται από 1 αντίσταση και μια πηγή που διαρρέεται από ρεύμα

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{ισοδ}} = \frac{\mathcal{E}}{\left(\frac{R\cdot \cancel{R}}{2\cancel{R}} + R\right)} = \frac{2\mathcal{E}}{3R} \Rightarrow \boxed{I = \frac{2}{3}\frac{\mathcal{E}}{R}}$$

Αυτό το ρεύμα διαρρέει τον κλάδο FA και διακλαδίζεται στους κλάδους AD και ABC όπου οι αντιστάσεις είναι ίσες. Επομένως $\boxed{I_2 = I_3 = \frac{I_1}{2} = \frac{\mathcal{E}}{3R}}$

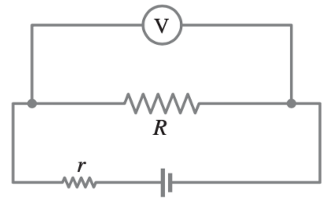
(β) Τη χρονική στιγμή $t = \infty$, ο πυκνωτής έχει φορτιστεί πλήρως και δεν υπάρχει ρεύμα στον κλάδο BC. Επομένως το κύκλωμα συμπεριφέρεται όπως το κύκλωμα του διπλανού σχήματος.

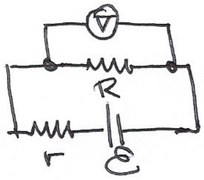


Το ρεύμα θα είναι: $\boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{2R} = I_1 = I_2}$ ενώ $\boxed{I_3 = 0}$

(γ) Από την στιγμή που δεν υπάρχει ρεύμα στον κλάδο BC, δεν θα υπάρχει και διαφορά δυναμικού στα άκρα της αντίστασης. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή θα είναι: $\boxed{V_C = I_2 \cdot R = \frac{\mathcal{E}}{2\cancel{R}}\cancel{R} = \frac{\mathcal{E}}{2}}$

6. Όταν ο αντιστάτης R στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος έχει αντίσταση 35.0-Ω, το βολτόμετρο το οποίο έχει πολύ υψηλή εσωτερική αντίσταση, έχει την ένδειξη 9.7V. Όταν ο αντιστάτης R αντικατασταθεί με έναν άλλο αντίστασης 14.0-Ω, το βολτόμετρο έχει ένδειξη 8.1V. Προσδιορίστε την ηλεκτρεγερτική δύναμη της μπαταρίας και την εσωτερική της αντίσταση.





Εφόσον το βολτόμετρο έχει υψηλή αντίσταση σημαίνει ότι δεν υπάρχει ρεύμα που να περνά από τον κλάδο αυτό του κυκλώματος, και επομένως και στις δύο περιπτώσεις το ρεύμα περνά μόνο διαμέσου της R και r και η διαφορά δυναμικού θα είναι σύμφωνα με τον 2ο κανόνα του kirchhoff

$$\mathcal{E} - I_1 r - I_1 R_1 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r+R_1} \quad (1)$$ περίπτωση 1

$$\mathcal{E} - I_2 r - I_2 R_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r+R_2} \quad (2)$$ περίπτωση 2

Το βολτόμετρο μετρά την διαφορά δυναμικού στα άκρα της αντίστασης R_1 ή R_2

$$V_1 = I_1 R_1 = \frac{\mathcal{E}}{r+R_1} R_1 \quad (3)\ V_1 r + V_1 R_1 = \mathcal{E} R_1 \Rightarrow r = (\mathcal{E} - V_1) R_1 / V_1$$

$$V_2 = I_2 R_2 = \frac{\mathcal{E}}{r+R_2} R_2 \quad (4)\ V_2 r + V_2 R_2 = \mathcal{E} R_2 \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{V_2 (r+R_2)}{R_2}$$

Πολ/ζουμε την (3) με R_2 και την (4) με R_1 και τις αφαιρούμε:

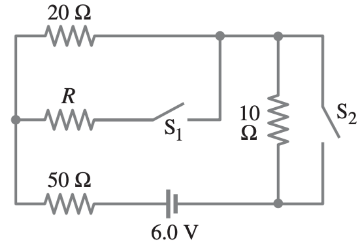
$$\left.\begin{aligned} V_1 (R_1 + r) R_2 &= \mathcal{E} R_1 R_2 \\ V_2 (r + R_2) R_1 &= \mathcal{E} R_1 R_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow R_2 V_1 R_1 + V_1 r R_2 - V_2 r R_1 - V_2 R_1 R_2 = 0$$

$$\Rightarrow r (V_1 R_2 - V_2 R_1) = (V_2 - V_1) R_1 R_2 \Rightarrow$$

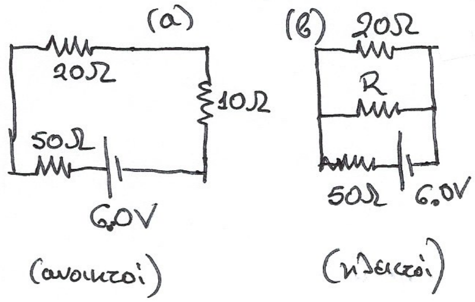
$$\Rightarrow r = \frac{(V_1 - V_2) R_1 R_2}{V_2 R_1 - V_1 R_2} = \frac{(9.7 - 8.1)\, 14 \cdot 35\, V\Omega^2}{8.1 \cdot 35\, V\Omega - 9.7 \cdot 14\, V\Omega} \Rightarrow \boxed{r = 5.3\Omega}$$

Αντικατάσταση στην (3) δίνει: $\mathcal{E} = \frac{V_1 (r + R_1)}{R_1} = \frac{9.7V (5.3 + 35)\Omega}{35\Omega} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = 11.17}$

7. Το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση των 20-*Ω* στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος δεν αλλάζει αν οι διακόπτες S_1 και S_2 είναι και οι δύο ανοικτοί ή και οι δύο κλειστοί. Χρησιμοποιήστε την πληροφορία αυτή για προσδιορίσετε την τιμή της άγνωστης αντίστασης *R*.



Οι δύο περιπτώσεις με τους διακόπτες είτε ανοικτούς ή κλειστούς ταυτόχρονα φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



Στην (α) περίπτωση το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα των 3 αντιστατών σε σειρά είναι:

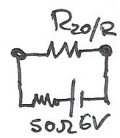
$$I_α = \frac{6.0V}{(50+20+10)Ω} \Rightarrow I_α = \frac{6}{80}A$$

Το ρεύμα αυτό διαρρέει την αντίσταση των 20Ω και στο 2ο κύκλωμα, όπου η άγνωστη αντίσταση R είναι συνδεδεμένη παράλληλα με την 20Ω και το σύστημα των 2 αντιστατών σε σειρά με την 50Ω.

Η διαφορά δυναμικού στα άκρα της αντίστασης 20Ω είναι: $V_{R_{20}} = I_α \cdot R_{20} \Rightarrow$

$$V_{R_{20}} = \cancel{20}Ω \cdot \frac{6}{\cancel{80}_4}A \Rightarrow \boxed{V_{R_{20}} = 1.5\,V = V_R} \quad (1)$$

Εφαρμογή του 2ου κανόνα Kirchhoff στο ισοδύναμο κύκλωμα



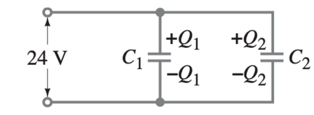
$$50Ω \cdot I + V_{R_{20}} = 6V \Rightarrow I = \frac{(6-1.5)V}{50Ω} \Rightarrow \boxed{I = \frac{4.5}{50}A} \quad (2)$$

Αλλά εφαρμογή του 1ου κανόνα του Kirchhoff στο σημείο σύνδεσης των αντιστατών 20Ω και R δίνει: $I = I_{20} + I_R \Rightarrow I_R = I - I_{R20} \Rightarrow$

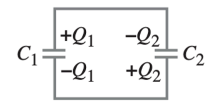
$$\Rightarrow I_R = \left(\frac{4.5}{50} - \frac{6}{80}\right)A = \frac{360-300}{50 \cdot 80} = \frac{6\cancel{0}}{400\cancel{0}}A \Rightarrow \boxed{I_R = \frac{6}{400}A} \quad (3)$$

Από (1) και (3) έχουμε: $R = \dfrac{V_R}{I_R} = \dfrac{\cancel{1.5 \cdot 400}^{\,100}\,Ω}{\cancel{6}\,A} \Rightarrow \boxed{R = 100\,Ω}$

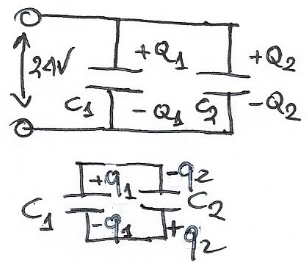
8. Δύο πυκνωτές $C_1 = 2.2\mu F$ και $C_2 = 1.2\mu F$ είναι συνδεδεμένοι παράλληλα μεταξύ και με μια πηγή 24-V όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αφότου φορτιστούν, αποσυνδέονται από την πηγή και μεταξύ τους, και κατόπιν επανασυνδέονται μεταξύ τους απευθείας με τους οπλισμούς των αντίθετων φορτίων να συνδέονται μεταξύ τους. Βρείτε το φορτίο του κάθε πυκνωτή και το δυναμικό στα άκρα του καθένα μετά την αποκατάσταση της ηλεκτροστατικής ισορροπίας.



(α) Αρχική διάταξη σύνδεσης



(β) Τη στιγμή της επανασύνδεσης των πυκνωτών



Στους πυκνωτές εφαρμόζεται η ίδια διαφορά δυναμικού και επομένως

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = C_1 V_i \\ Q_2 = C_2 V_i \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Τα φορτία $Q_1 > Q_2$ εφόσον $C_1 > C_2$.

Επομένως υπάρχει πλεόνασμα φορτίου $Q = Q_1 - Q_2$

Όταν οι πυκνωτές επανασυνδεθούν με τους πόλους τους συνδεδεμένους αντίθετα, το φορτίο ανακατανέμεται με τελικό φορτίο για κατανομή το φορτίο Q. Κάθε πυκνωτής αποκτά φορτίο q_1 και q_2 ανάλογα με την χωρητικότητά του, και στην κατάσταση ισορροπίας $V_1 = V_2 = V_f$

Επομένως: $Q = q_1 + q_2 \Rightarrow (C_1 - C_2)V_i = (C_1 + C_2)V_f \Rightarrow$

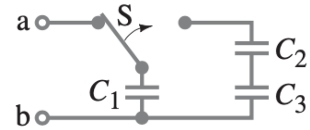
$$\Rightarrow V_f = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} V_i \Rightarrow V_f = \frac{(2.2 - 1.2)\cancel{\mu F}}{(2.2 + 1.2)\cancel{\mu F}} 24V \Rightarrow V_f = \frac{24V}{3.4} \Rightarrow \boxed{V_f = 7.06V}$$

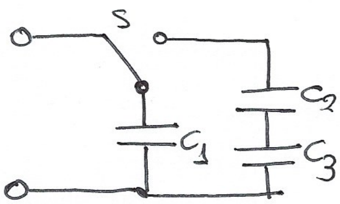
Τα φορτία στους πυκνωτές θα είναι:

$$q_1 = C_1 V_f = 2.2\mu F \cdot 7.06V \Rightarrow \boxed{q_1 = 15.53\mu C}$$

$$q_2 = C_2 V_f = 1.2\mu F\, 7.06V \Rightarrow \boxed{q_2 = 8.47\mu C}$$

9. Στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος $C_1 = 1.0\mu F$ και $C_2 = 2.0\mu F$, $C_2 = 2.0\mu F$ και η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων α και b είναι $V_{ab} = 24V$. Αφότου ο πυκνωτής C_1 φορτιστεί πλήρως, ο διακόπτης γυρνά στην δεξιά θέση. Προσδιορίστε το τελικό φορτίο του κάθε πυκνωτή και την διαφορά δυναμικού στα άκρα του.





Αρχικά φορτίζεται ο πυκνωτής C_1 και οι δύο πυκνωτές C_2 & C_3 είναι εκτός του κυκλώματος. Όταν ο διακόπτης γυρίσει δεξιά, αποσυνδέεται η πηγή και οι πυκνωτές C_2 & C_3 που είναι συνδεδεμένοι σε σειρά συνδέονται με τον πυκνωτή C_1 παράλληλα. Η τάση στα άκρα του πυκνωτή C_1 εφαρμόζεται στα άκρα των πυκνωτών C_2 & C_3. Το φορτίο ανακατανέμεται στους 3 πυκνωτές. Οι πυκνωτές C_2 & C_3 που είναι συνδεδεμένοι σε σειρά θα έχουν το ίδιο φορτίο. Το συνολικό φορτίο στο σύστημα των 3 πυκνωτών θα είναι ίδιο με το αρχικό φορτίο του C_1 όταν ήταν συνδεδεμένος στην πηγή.

$$Q_i = C_1 \cdot V_0 \qquad (1)$$

$$Q_i = Q_1 + Q_{23} = C_1 V_1 + C_{ισοδ} \cdot V_1 = (C_1 + C_{ισοδ}) V_1 \qquad (2)$$

Αλλά $C_{ισοδ} = C_{23} = \dfrac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} \qquad (3)$

Από την (1) & (2) $\Rightarrow C_1 \cdot V_0 = (C_1 + C_{ισοδ}) V_1 \Rightarrow V_1 = \dfrac{C_1 V_0}{C_1 + C_{ισοδ}} \overset{(3)}{\Longrightarrow}$

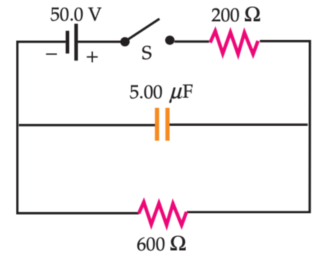
$$\Rightarrow V_1 = \frac{C_1 V_0}{C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}} = \frac{C_1 (C_2 + C_3) V_0}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} \Rightarrow V_1 = \frac{1 \cdot (2. + 2.4) \cdot 24V}{2 + 2.4 + 2 \cdot 2.4} \Rightarrow \boxed{V_1 = 11.48V}$$

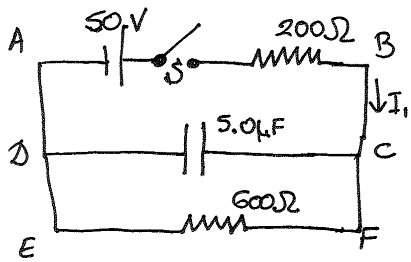
Το φορτίο του C_1 μετά την αποκατάσταση ισορροπίας θα είναι:

$Q_1 = C_1 V_1 = 1 \cdot 11.48 \Rightarrow \boxed{Q_1 = 11.48\mu C}$ ενώ $\boxed{Q_2 = Q_3 = C_1 \Delta V = 12.52\mu C}$

Η διαφορά δυναμικού σε κάθε πυκνωτή C_2 & C_3 είναι: $\begin{cases} V_2 = Q_2 / C_2 \Rightarrow \boxed{V_2 = 6.26V} \\ V_3 = Q_3 / C_3 \Rightarrow \boxed{V_3 = 5.22V} \end{cases}$

10. Για το κύκλωμα του διπλανού σχήματος, ο διακόπτης είναι ανοικτός για πάρα πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα. Την χρονική στιγμή $t = 0$ ο διακόπτης κλείνει. (α) Βρείτε το ρεύμα στην μπαταρία αμέσως μόλις κλείσει ο διακόπτης. (β) Βρείτε το ρεύμα στην μπαταρία μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα αφότου έκλεισε ο διακόπτης. (γ) Βρείτε το ρεύμα που διαρρέει τον αντιστάτη αντίστασης 600Ω συναρτήσει του χρόνου.





(α) Από τον 2° κανόνα του kirchhoff όταν ο διακόπτης κλείνει θα έχουμε:

$$\mathcal{E} = I_0 \cdot 200 - V_{C0}$$

$V_{C0} = 0$ επειδή ο πυκνωτής είναι αρχικά αφόρτιστος

Επομένως: $$I_0 = \frac{\mathcal{E} + V_{C0}}{200} = \frac{50 + \varnothing}{200} \Rightarrow \boxed{I_0 = 0.25A}$$

(β) Εφαρμόζουμε τον 2° κανόνα του kirchhoff όταν έχει περάσει μεγάλο διάστημα

Το ρεύμα κυκλοφορεί στο βρόχο της αντίστασης των 600Ω:

$$\mathcal{E} - I_\infty \cdot 200\Omega - I_\infty 600\Omega = 0 \Rightarrow I_\infty = \frac{50V}{800\Omega} \Rightarrow I_\infty = 0.0625A$$

$$\Rightarrow I_\infty = 62.5mA$$

(γ) Εφαρμόζουμε τον 1° κανόνα του kirchhoff στον κόμβο C

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad (A)$$

Από τον 2° κανόνα του kirchhoff στο βρόχο ABCD έχουμε:

$$\mathcal{E} - I_1(200\Omega) - V_C = 0 \Rightarrow \mathcal{E} - I_1(200\Omega) - \frac{Q}{C} = 0 \qquad (B)$$

Από τον 2° κανόνα του kirchhoff στο βρόχο CDEF θα πάρουμε:

$$\frac{Q}{C} - I_2 600\Omega = 0 \qquad (\Gamma)$$

Παραγωγίζουμε την (B) οπότε: $$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{E} - I_1 \cdot 200 - \frac{Q}{C}\right) = 0 \Rightarrow 200\frac{dI_1}{dt} + \frac{dQ}{Cdt} = 0$$

$$\Rightarrow 200\frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C} I_3 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dI_1}{dt} = -\frac{1}{200C} I_3} \qquad (\Delta)$$

Παραγωγίζουμε την (Γ) ως προς χρόνο και θα πάρουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{C} - 600\, I_2\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} - 600\frac{dI_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{C} I_3 = 600\frac{dI_2}{dt} \Rightarrow$$

$$\overset{(A)}{\Rightarrow} \boxed{\frac{1}{C}(I_1 - I_2) = 600\frac{dI_2}{dt}} \quad (E)$$

Από την εξίσωση (Β) λύναμε ως προς I_1 οπότε: $I_1 = \dfrac{\mathcal{E} - Q/C}{200\Omega} \Rightarrow$

χρησιμοποιώντας την (Γ): $\boxed{I_1 = \dfrac{\mathcal{E} - I_2\, 600\Omega}{200\Omega}}$ (ΣΤ)

Αντικαθιστούμε στην (Ε) και έχουμε:

$$\frac{1}{C}\left(\frac{\mathcal{E} - I_2\, 600}{200} - I_2\right) = 600\frac{dI_2}{dt} \Rightarrow \frac{1}{C}\,\frac{\mathcal{E} - I_2\, 800}{200} = 600\frac{dI_2}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\mathcal{E}}{12\cdot 10^4\cdot C} - \frac{800}{12\cdot 10^4 C} I_2 = \frac{dI_2}{dt}} \quad (Z)$$

Υποθέτουμε λύση της μορφής: $I_2(t) = a + b e^{-t/\tau} \Rightarrow \dfrac{dI_2}{dt} = -\dfrac{b}{\tau} e^{-t/\tau}$

Αντικατάσταση στη (Ζ) θα δώσει:

$$\frac{\mathcal{E}}{12\cdot 10^4 C} - \frac{800}{12\cdot 10^4 C}\left(a + b e^{-t/\tau}\right) = -\frac{b}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Για $t=\infty$ ώστε να ισχύει για όλες τις περιπτώσεις: $\dfrac{\mathcal{E}}{12\cdot 10^4 C} - \dfrac{800}{12\cdot 10^4 C} a = 0 \Rightarrow a = \dfrac{\mathcal{E}}{800}$

Για $t=0$ $\quad \cancel{\dfrac{\mathcal{E}}{12\cdot 10^4 C}} - \cancel{\dfrac{800}{12\cdot 10^4 C}\,\dfrac{\mathcal{E}}{800}} - \cancel{b}\,\dfrac{800}{12\cdot 10^4 C} = -\dfrac{\cancel{b}}{\tau} \Rightarrow \tau = \dfrac{12\cdot 10^4}{800} C$

Αν το $I_2(t=0) = 0 \Rightarrow I_2(t=0) = a + b \Rightarrow a = -b \Rightarrow a = -b = +\dfrac{\mathcal{E}}{800}$

Αντικατάσταση στην $I_2(t)$ θα δώσει:

$$I_2(t) = \frac{\mathcal{E}}{800}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \frac{\mathcal{E}}{800}\left(1 - e^{-t800/12\cdot 10^4 C}\right) = \frac{50}{800}\left(1 - e^{-t/0.75ms}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{I_2(t) = 62.5mA\left(1 - e^{-t/0.75ms}\right)}$$