

Νόμος του Faraday - Επαγωγή

Ο νόμος της επαγωγής του Faraday

Για ένα σωληνοειδές που αποτελείται από N σπείρες η ολική επαγόμενη ΗΕΔ είναι:

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Συνδυάζοντας τον τύπο του νόμου του Faraday με τον τύπο της μαγνητικής ροής ομογενούς μαγνητικού πεδίου \vec{B} :

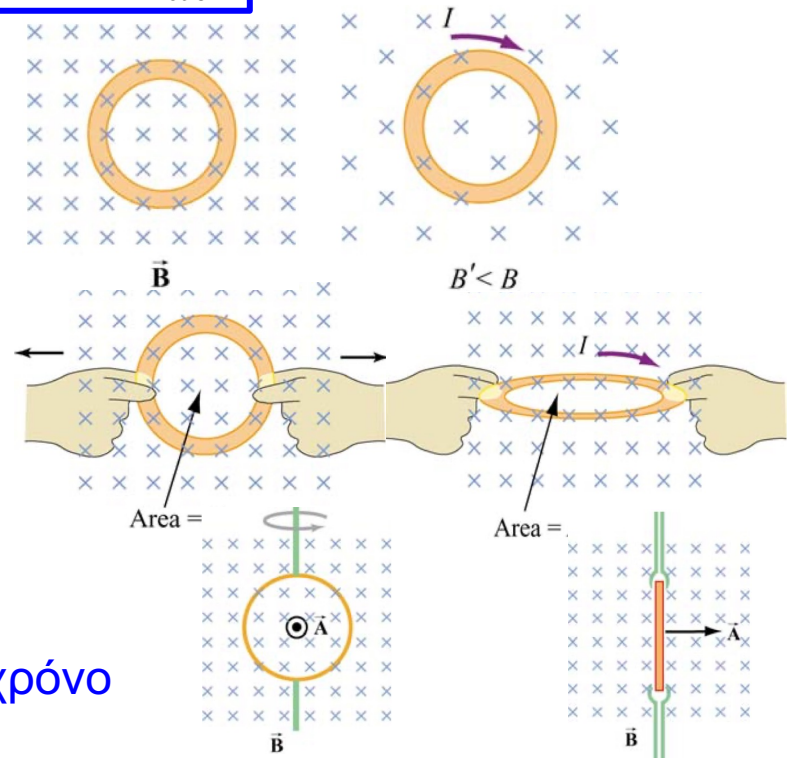
$$\mathcal{E} = - \frac{d(BA \cos\theta)}{dt} = - \frac{dB}{dt} A \cos\theta - B \frac{dA}{dt} + B A \sin\theta \frac{d\theta}{dt}$$

Επομένως η ΗΕΔ μπορεί να προκληθεί από τους εξής τρόπους:

➤ Μεταβάλλοντας το μέτρο του \vec{B} με το χρόνο

➤ Μεταβάλλοντας το μέτρο του \vec{A} με το χρόνο

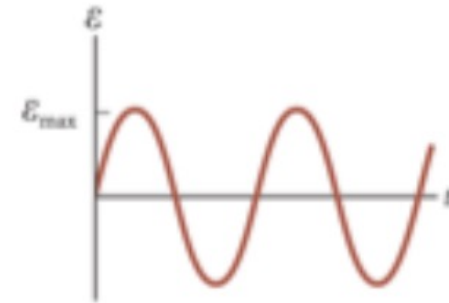
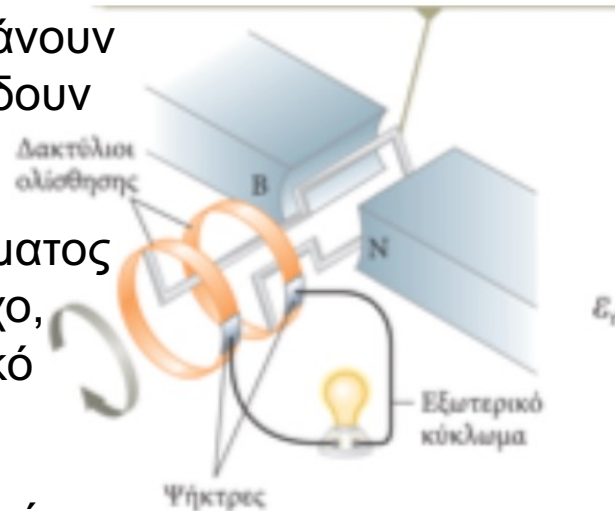
➤ Μεταβάλλοντας τη γωνία του \vec{A} και \vec{B} με το χρόνο



Παράδειγμα: Η ηλεκτρική γεννήτρια

Οι ηλεκτρικές γεννήτριες προσλαμβάνουν ενέργεια μέσω έργου, και την αποδίδουν μέσω ηλεκτρικής μετάδοσης

Μια γεννήτρια εναλλασσόμενου ρεύματος αποτελείται από ένα συρμάτινο βρόχο, που περιστρέφεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο από εξωτερικό μέρος.



Θεωρούμε ένα βρόχος με N σπείρες, ίσου μεταξύ τους εμβαδού, ο οποίος περιστρέφεται σε μαγνητικό πεδίο

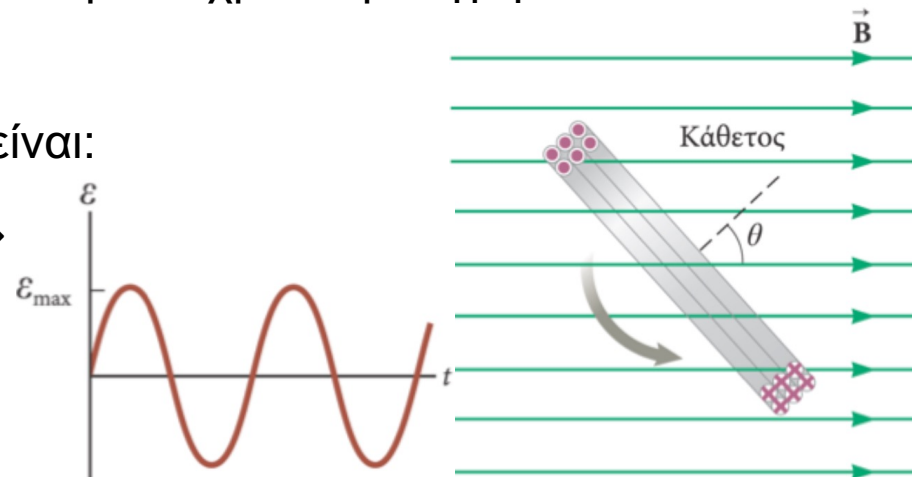
Η ροή που διαπερνά το βρόχο οποιαδήποτε χρονική στιγμή είναι:

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA \cos \theta = BA \cos \omega t$$

Η ΗΕΔ που επάγεται στον βρόχο είναι:

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -N \frac{d(BA \cos \omega t)}{dt} \Rightarrow$$

$$\mathcal{E} = -NB\omega A \sin \omega t$$



Παράδειγμα: ράβδος μέσα σε μαγνητικό πεδίο

Θα εξετάσουμε, ότι λόγω της κίνησης της ράβδου στο ομογενές μαγνητικό πεδίο, επάγεται ΗΕΔ στα άκρα της.

Λόγω της κίνησης της ράβδου, δύναμη Lorentz αναπτύσσεται στα ελεύθερα ηλεκτρόνια της ράβδου και (σύμφωνα με το σχήμα) τα κινεί προς τα κάτω.

Ως αποτέλεσμα, ηλεκτρόνια συσσωρεύονται στο κάτω άκρο της ράβδου, δημιουργώντας ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού.

Η συσσώρευση των φορτίων στα δύο άκρα του αγωγού συνεχίζεται έως ότου η ηλεκτρική δύναμη εξισωθεί με την μαγνητική δύναμη. Ισορροπία επομένως επιτυγχάνεται όταν:

$$qE = Bvq \Rightarrow E = Bv$$

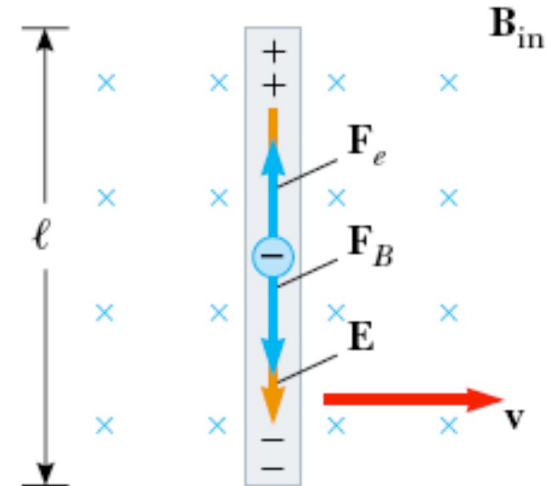
Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται στον αγωγό συνδέεται με τη διαφορά δυναμικού στα άκρα του σύμφωνα με τη σχέση:

$$U = El \Rightarrow U = Bvl \quad \text{Κινητική ΗΕΔ και εν γένει:}$$

$$\mathcal{E} = U = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

Η διαφορά δυναμικού διατηρείται μεταξύ των άκρων του αγωγού καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης του αγωγού μέσα στο μαγνητικό πεδίο.

Αν αντιστραφεί η φορά κίνησης αντιστρέφεται και η πολικότητα της διαφοράς δυναμικού.



Παράδειγμα:

Μια μεταλλική ράβδος μήκους l γλιστρά παράλληλα προς τον εαυτό της πάνω σε δύο παράλληλους αγωγούς (αμελητέας αντίστασης) που συνδέονται με αντίσταση R . Η ράβδος κινείται σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B\hat{k}$. Μια εξωτερική δύναμη F_{ext} αναγκάζει τη ράβδο να κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v} = v\hat{i}$. Θα υπολογίσουμε την διαφορά δυναμικού που εμφανίζεται στα άκρα της ράβδου και την ένταση που την διαρρέει

Η επιφάνεια του κυκλώματος σε κάθε χρονική στιγμή είναι: lx

Η μαγνητική ροή που περνά από τον κλειστό βρόχο που σχηματίζει η ράβδος και οι παράλληλοι αγωγοί είναι:

$$\Phi_B = BA = Blx$$

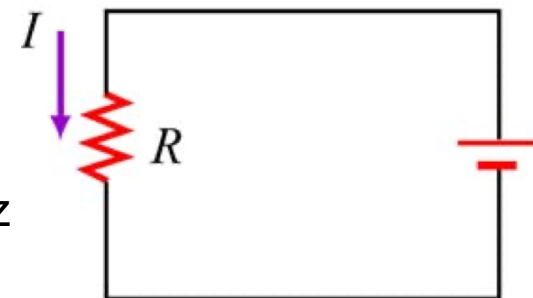
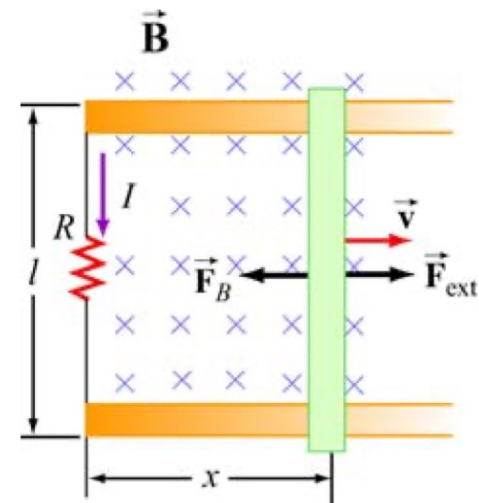
Από τον νόμο του Faraday: $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(Blx)}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt}$

$$\mathcal{E} = -Blv$$

Το ρεύμα το οποίο επάγεται θα είναι:

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{Bvl}{R}$$

Η διεύθυνση του ρεύματος αυτού είναι αντίθετη με τη φορά των δεικτών του ρολογιού σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz



Παράδειγμα

Η μαγνητική δύναμη που αναπτύσσεται στη ράβδο καθώς κινείται προς τα δεξιά είναι:

$$\vec{F}_B = I(l\hat{j}) \times (-B\hat{k}) = -Bl\hat{i} \Rightarrow \vec{F}_B = -\frac{B^2 l^2 v}{R} \hat{i}$$

Η μαγνητική δύναμη έχει αντίθετη φορά με τη φορά κίνησης:

Για να κινείται η ράβδος με σταθερή ταχύτητα, μια εξωτερική δύναμη πρέπει να ασκείται στη ράβδο ώστε η συνισταμένη δύναμη να είναι μηδέν. Επομένως:

$$\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_B = \frac{B^2 l^2 v}{R} \hat{i}$$

Η ισχύς που προσφέρεται από την εξωτερική αυτή δύναμη είναι ίση με την ισχύ που καταναλώνεται πάνω στην αντίσταση του κυκλώματος αυτού:

$$P = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v} = \frac{B^2 l^2 v}{R} \hat{i} \cdot v\hat{i} \Rightarrow P = \frac{B^2 l^2 v^2}{R} \Rightarrow P = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$$

όπως είναι αναμενόμενο από διατήρηση ενέργειας

Παράδειγμα

Η ράβδος κινείται με σταθερή ταχύτητα εξαιτίας της εφαρμογής μιας εξωτερικής δύναμης. Τι θα συμβεί αν τη χρονική στιγμή $t = 0$, η ράβδος είχε ταχύτητα v_0 και η εξωτερική δύναμη σταματούσε να ασκείται στη ράβδο.

Στην περίπτωση αυτή, η ράβδος θα επιβραδυνθεί γιατί η μαγνητική δύναμη έχει φορά προς τα αριστερά.

Από τον 2^ο νόμο του Newton θα έχουμε: $F_B = -\frac{B^2 l^2 v}{R} = ma = m \frac{dv}{dt}$

Γράφουμε επομένως: $\frac{dv}{v} = -\frac{B^2 l^2}{mR} dt = -\tau dt$ όπου: $\tau = \frac{B^2 l^2}{mR}$

Ολοκληρώνοντας θα πάρουμε: $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$

Η ταχύτητα ελαττώνεται εκθετικά απουσία μιας εξωτερικής δύναμης που παράγει έργο στο σύστημα.

Η ράβδος δεν σταματά να κινείται ποτέ αλλά μπορεί να επιβεβαιωθεί ότι η ολική μετατόπιση είναι πεπερασμένη.

Επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο

Είδαμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο και το δυναμικό μεταξύ δύο σημείων συνδέονται με την σχέση:

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Όταν το ηλεκτρικό πεδίο είναι συντηρητικό όπως στην περίπτωση του ηλεκτροστατικού πεδίου, το παραπάνω επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της διαδρομής, επομένως για μια κλειστή διαδρομή θα είναι 0:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Σύμφωνα με τον νόμο του Faraday, καθώς η μαγνητική ροή μεταβάλλεται χρονικά, εμφανίζεται το επαγόμενο ρεύμα το οποίο προκαλείται από την επαγόμενη ΗΕΔ που είναι το έργο που δαπανάται ανά μονάδα φορτίου.

Αλλά το μαγνητικό πεδίο δεν παράγει έργο και επομένως το έργο που δαπανάται πάνω στο κινούμενο φορτίο πρέπει να είναι ηλεκτρικής φύσεως.

Στην περίπτωση αυτή ωστόσο το ηλεκτρικό πεδίο δεν μπορεί να είναι συντηρητικό γιατί τότε θα έπρεπε να μηδενιστεί για μια κλειστή διαδρομή.

Επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο

Άρα υπάρχει ένα μη-συντηρητικό πεδίο που σχετίζεται με την επαγόμενη ΗΕΔ:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{s} \quad \left. \vphantom{\oint \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{s}} \right\} \Rightarrow \oint \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{s} = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

Συνδυάζοντας με τον νόμο του Faraday: $\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt}$

Η προηγούμενη έκφραση λέει ότι η μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή επάγει ένα μη συντηρητικό ηλεκτρικό πεδίο το οποίο μεταβάλλεται με τον χρόνο.

Είναι σημαντικός ο διαχωρισμός μεταξύ ενός επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου που δεν είναι συντηρητικό από το ηλεκτρικό πεδίο που προκαλούν ηλεκτρικά φορτία

Έστω ένα μαγνητικό πεδίο περιορισμένο σε μια κυκλική περιοχή ακτίνας R και με κατεύθυνση στο εσωτερικό της σελίδας.

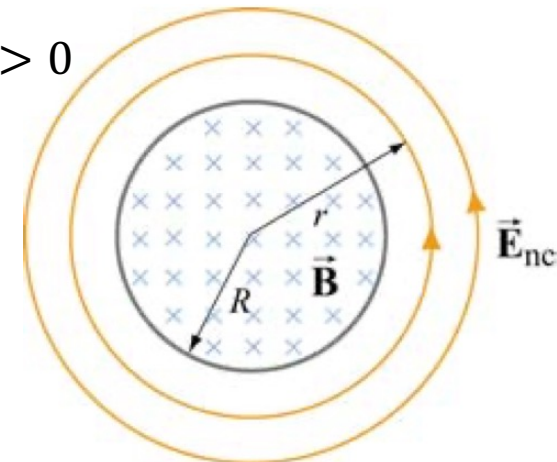
Υποθέτουμε ότι το μαγνητικό πεδίο αυξάνει με το χρόνο, $\frac{dB}{dt} > 0$

Θα βρούμε το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο.

Θεωρούμε έναν κύκλο ακτίνας r ως τη διαδρομή που θα χρησιμοποιήσουμε για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

Το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο έχει σταθερό μέτρο κατά μήκος της περιφέρειας του κύκλου.

Σύμφωνα με τον νόμο του Lenz, η διεύθυνση του \vec{E}_{nc} θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε το επαγόμενο ρεύμα που δημιουργεί να είναι αντίθετο της αλλαγής της μαγνητικής ροής



Επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο

Θεωρώντας το διάνυσμα της επιφάνειας \vec{A} με κατεύθυνση προς το εξωτερικό της σελίδας, $\Phi_m < 0$.

Επειδή $\frac{dB}{dt} > 0$ η μεταβολή στη μαγνητική ροή αυξάνει αρνητικά

Επομένως το επαγόμενο ρεύμα θα πρέπει να έχει διεύθυνση αντίθετη με τη φορά των δεικτών του ρολογιού ώστε να αντισταθμίσει τη μεταβολή αυτή της μαγνητικής ροής

Άρα και το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο θα έχει διεύθυνση ίδια με του επαγόμενου ρεύματος.

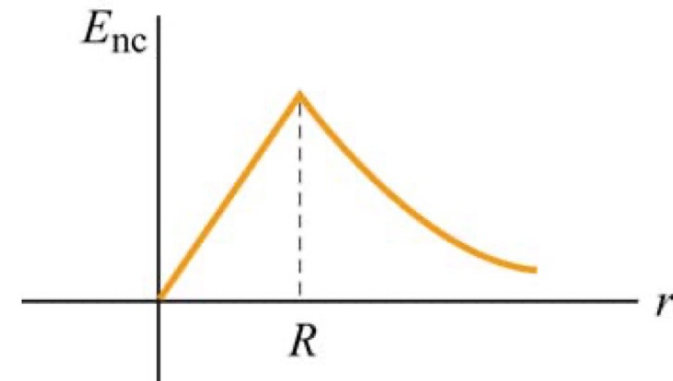
Για να υπολογίσουμε το μέτρο του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου, θα έχουμε:

$$\text{Για } r < R: \quad \frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{d(\vec{B} \cdot \vec{A})}{dt} = \frac{d(-BA)}{dt} \Rightarrow \frac{d\Phi_m}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\text{Έχουμε ακόμα:} \quad -\frac{d\Phi_m}{dt} = \oint_C \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \pi r^2 \frac{dB}{dt} = E_{nc} 2\pi r \Rightarrow E_{nc} = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

Παρόμοια για $r > R$ θα έχουμε:

$$E_{nc} 2\pi r = \pi R^2 \frac{dB}{dt} \Rightarrow E_{nc} = \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt} \Rightarrow$$



14° Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

Έτοιμοι