Μικρές ταλαντώσεις – Συζευγμένες ταλαντώσεις

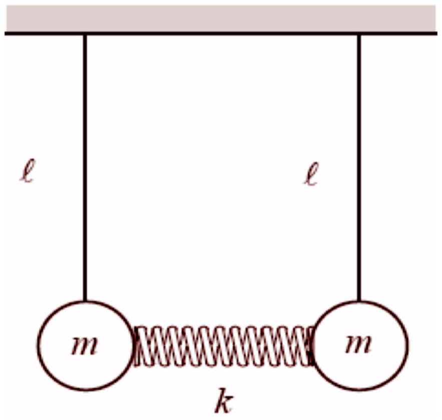
- Ταλαντώσεις εμφανίζονται παντού
  - Μικρές ταλαντώσεις γύρω από θέση ισορροπίας
  - Εμφανίζονται σε πολλά προβλήματα ΚΜ
- Τις έχουμε ήδη συναντήσει σε διάφορα στάδια:
  - Γενική εξίσωση κίνησης αρκετά απλή:

    $\ddot{x} = -\omega^2 x$ με λύση της μορφής: $x = A\exp(-i\omega t)$

- Πολλά σημαντικά συστήματα στη φυσική περιέχουν ταλαντωτές οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους με τέτοιο τρόπο ώστε ενέργεια μπορεί να μεταφερθεί μεταξύ τους.
  - Η κίνηση στην περίπτωση αυτή είναι αρκετά περίπλοκη και ίσως όχι περιοδική
  - Μπορούμε όμως να βρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων ώστε κάθε ταλαντωτής ταλαντώνεται με μια καλά προσδιορισμένη συχνότητα.
  - Στερεό αποτελεί παράδειγμα τέτοιου συστήματος

Συζευγμένες ταλαντώσεις

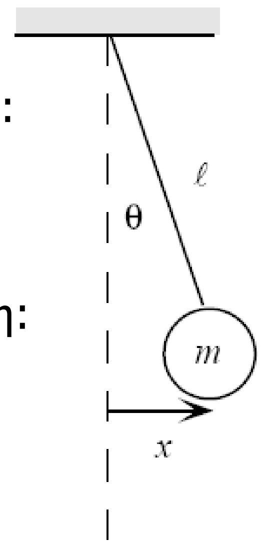
- Ξεκινώντας την μελέτη τέτοιων συστημάτων θα υποθέσουμε ότι έχουμε δυνάμεις όπως οι δυνάμεις ελατηρίων – υπακούν στο νόμο του Hooke
- Υποθέστε ότι έχετε δύο εκκρεμή



Οι μάζες συνδέονται με ένα ελατήριο σταθεράς k και αρχικά είναι σε ηρεμία και σε κατακόρυφη θέση

Ελατήριο είναι στο φυσικό του μήκος

- Στην περίπτωση με ένα μόνο εκκρεμές:



Η εξίσωση κίνησης για μετατόπιση θ είναι:

$\boxed{\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta}$ όπου $\omega_0^2 = \dfrac{g}{l}$

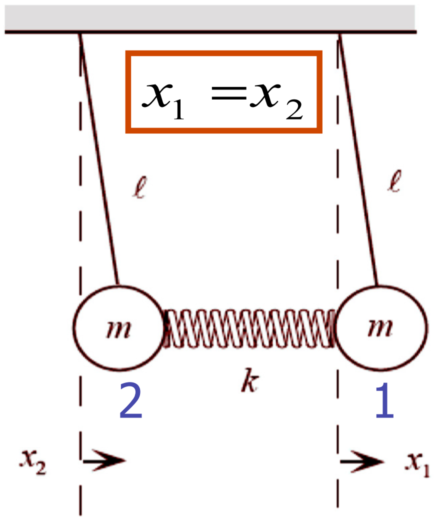
Πολ/ζοντας με l την προηγούμενη εξίσωση:

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega_0^2 x}$$

(υποθέτουμε ότι θ μικρό οπότε $\boxed{x = l\theta}$)

Συζευγμένα εκκρεμή – Συμμετρική ταλάντωση

Έστω ότι μετακινούμε και τα 2 εκκρεμή κατά το ίδιο διάστημα x και προς την ίδια διεύθυνση



- Το ελατήριο παραμένει στο φυσικό του μήκος
  Δεν υπάρχει ούτε επιμήκυνση ούτε συμπίεση

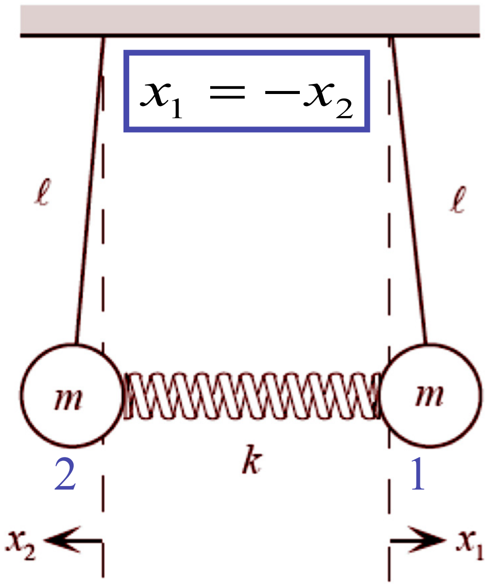
- Το σύστημα συμπεριφέρεται σαν να μην υπάρχει το ελατήριο ανάμεσα στα 2 εκκρεμή.

Τα 2 εκκρεμή ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα $\boxed{\omega_s = \omega_0}$

Συμμετρικός τρόπος ταλάντωσης

Συζευγμένα εκκρεμή – Ασύμμετρη ταλάντωση

Έστω ότι μετακινούμε και τα 2 εκκρεμή κατά το ίδιο διάστημα x και προς αντίθετη διεύθυνση



- Το ελατήριο συμπιέζεται και επιμηκύνεται ανάλογα με την ταλάντωση των εκκρεμών.

- Οι δυνάμεις που ασκούνται στο εκκρεμές 1 είναι:

  Δύναμη επαναφοράς λόγω της βαρύτητας: $\boxed{-m\omega_0^2 x_1}$

  Δύναμη επαναφοράς λόγω ελατηρίου $\boxed{-2kx_1}$

Γιατί ο παράγοντας 2 στη δύναμη ελατηρίου?

Αν το εκκρεμές 1 μετατοπίζεται κατά x τότε και το εκκρεμές 2 μετατοπίζεται κατά x αλλά στην αντίθετη διεύθυνση. ➡ Το ελατήριο επιμηκύνεται κατά 2x

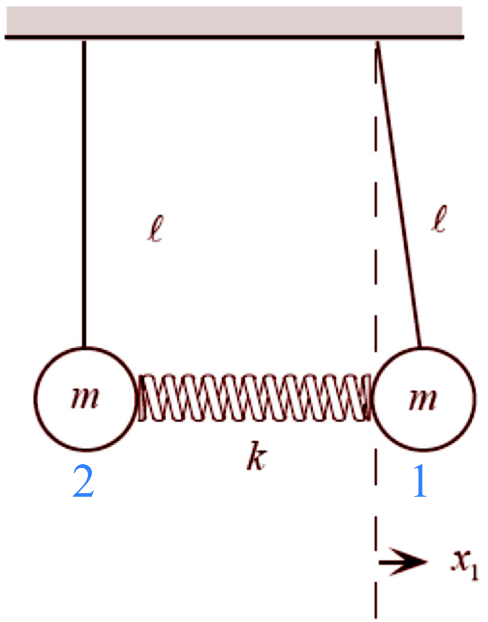
Η δύναμη στο ελατήριο 1 είναι:

$$m\ddot{x}_1 = -m\omega_0^2 x_1 - 2kx_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1 - 2\frac{k}{m}x_1 \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_1 = -\left(\omega_0^2 + 2\omega_C^2\right)x_1}$$

Τα 2 εκκρεμή ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα: $\boxed{\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_C^2}}$

Συζευγμένα εκκρεμή – Άλλοι τρόποι ταλάντωσης

- Ο συμμετρικός και ασύμμετρος τρόπος ταλάντωσης είναι ειδικοί τρόποι ταλάντωσης μια και απαιτούν τα εκκρεμή να αρχίσουν ταλάντωση κατά συγκεκριμένο τρόπο.
- Κάθε τρόπος έχει τη δική του χαρακτηριστική συχνότητα



- Έστω ότι το εκκρεμές 1 μετατοπίζεται κατά x_1 ενώ το εκκρεμές 2 κρατείται ακίνητο.
- Αφήνουμε τα εκκρεμή ελεύθερα από ηρεμία
  - Οι δυνάμεις που δρουν είναι:

εκκρεμές 1: $$m\ddot{x}_1 = -m\omega_0^2 x_1 - k(x_1 - x_2) \qquad (1)$$

εκκρεμές 2: $$m\ddot{x}_2 = -m\omega_0^2 x_2 - k(x_2 - x_1) \qquad (2)$$

- Προσθέτουμε (1) και (2) διαιρώντας με m:

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\omega_0^2 (x_1 + x_2) \qquad (3)$$

- Αφαιρούμε (1) και (2) διαιρώντας με m:

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\omega_0^2 (x_1 - x_2) - 2\omega_C^2 (x_1 - x_2) \qquad (4)$$

Συζευγμένα εκκρεμή – Άλλοι τρόποι ταλάντωσης

- Εισάγουμε τις μεταβλητές: $$\boxed{\begin{aligned} q_1 &= x_1 + x_2 \\ q_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned}} \qquad (5)$$

  - Γράφουμε τις εξισώσεις (3) και (4) συναρτήσει των q_1 και q_2:

$$\boxed{\ddot{q}_1 = -\omega_s^2 q_1} \qquad (6)$$

$$\ddot{q}_2 = -\omega_0^2 q_2 - 2\omega_C^2 q_2 = -\left(\omega_0^2 + 2\omega_C^2\right) q_2 \Rightarrow \boxed{\ddot{q}_2 = -\omega_A^2 q_2} \qquad (7)$$

- Στο σύστημα συντεταγμένων x_1 και x_2 οι εξισώσεις κίνησης είναι συζευγμένες ενώ στο σύστημα των q_1 και q_2 όχι

  - Οι λύσεις των εξισώσεων (6) και (7) είναι: $$\boxed{\begin{aligned} q_1 &= A\cos\omega_s t \\ q_2 &= B\cos\omega_A t \end{aligned}} \qquad (8)$$

    όπου A και B σταθερές

  - Λύνουμε την (5) ως προς x_1 και x_2 και αντικαθιστούμε από την (8):

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \\ x_2 &= \frac{1}{2}(q_1 - q_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\left(A\cos\omega_s t + B\cos\omega_A t\right) \\ x_2 &= \frac{1}{2}\left(A\cos\omega_s t - B\cos\omega_A t\right) \end{aligned}$$

Συζευγμένα εκκρεμή – Άλλοι τρόποι ταλάντωσης

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(A\cos\omega_s t + B\cos\omega_A t\right) \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(A\cos\omega_s t - B\cos\omega_A t\right)$$

- Οι αρχικές συνθήκες για το συγκεκριμένη κίνηση ήταν:

$$x_1(t=0) = C \qquad \dot{x}_1(t=0) = 0$$

$$x_2(t=0) = 0 \quad \text{και} \quad \dot{x}_2(t=0) = 0$$

$$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 2\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)$$

$$\cos\theta_1 - \cos\theta_2 = 2\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)$$

Χρησιμοποιώντας $x_2(t=0) = 0$ στη 2η εξίσωση έχουμε: $A = B$
αντικαθιστώντας στην 1η εξίσωση με $x_1(t=0) = C$ παίρνουμε:

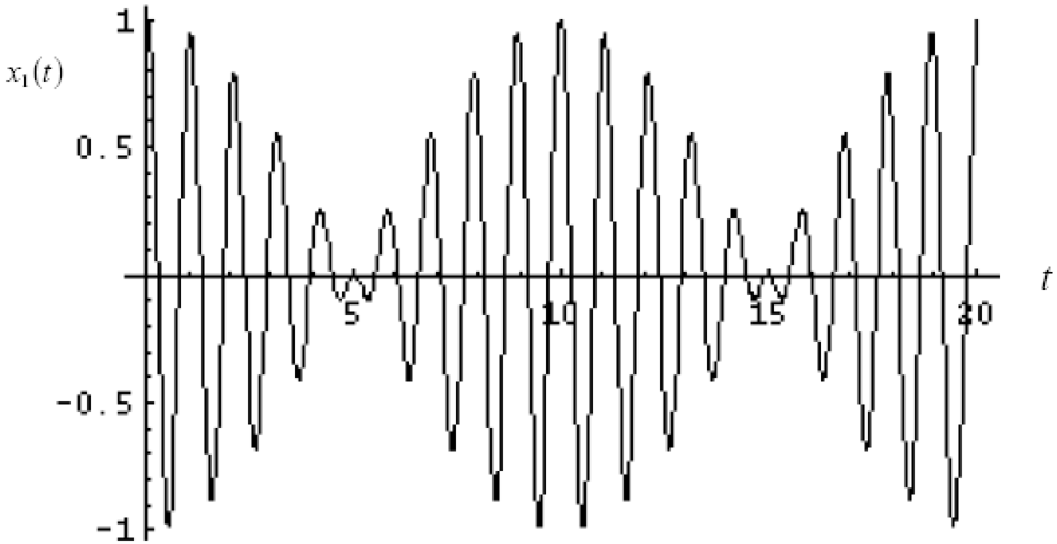
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{C}{2}\left(\cos\omega_s t + \cos\omega_A t\right) \\ x_2 &= \frac{C}{2}\left(\cos\omega_s t - \cos\omega_A t\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1(t) &= C\cos\left(\frac{\omega_s-\omega_A}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_s+\omega_A}{2}t\right) \\ x_2(t) &= C\sin\left(\frac{\omega_s-\omega_A}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_s+\omega_A}{2}t\right) \end{aligned}$$

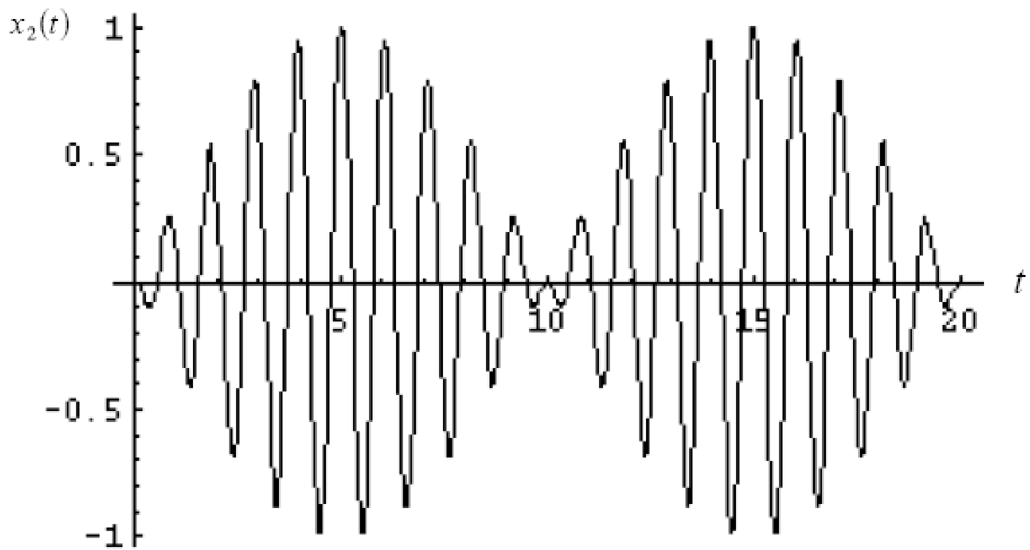
- Και τα δύο εκκρεμή ταλαντώνονται με συχνότητα: $\boxed{\frac{\omega_s+\omega_A}{2}}$

- Το πλάτος του εκκρεμούς 1 $\rightarrow$ 0 εξαιτίας του παράγοντα $\cos\frac{\omega_s-\omega_A}{2}t$

αλλά τότε το πλάτος ταλάντωση του εκκρεμούς 2 είναι μέγιστο

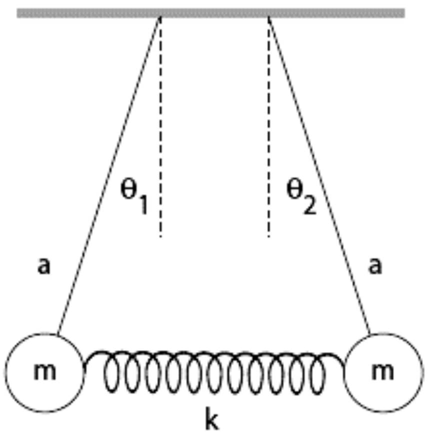
Συζευγμένα εκκρεμή – Άλλοι τρόποι ταλάντωσης





Συζευγμένα εκκρεμή – Τεχνική με πίνακες

Έστω δύο εκκρεμή με μάζα m και μήκος α συζευγμένα με ένα ελατήριο αμελητέας μάζας και σταθεράς k.



Η ενέργεια του συστήματος είναι:

Κινητική ενέργεια: $T = \frac{ma^2}{2}\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right)$

Βαρυτητική δυναμική: $U_g = \frac{mga}{2}\left(\theta_1^2 + \theta_2^2\right)$

$U_g^i = mga(1 - \cos\theta_i)$

$U_g^i \sim mga(1 - 1 + \frac{\theta_i^2}{2!}) \sim mga\frac{\theta_i^2}{2}$

$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$

Δυναμική ελατηρίου: $U_{\varepsilon\lambda} = \frac{ka^2}{2}\left(\theta_2 - \theta_1\right)^2$

$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{ka^2}{2}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2$

$U_{\varepsilon\lambda} \sim \frac{ka^2}{2}(\theta_2 - \theta_1)^2$

Επομένως η Lagrangian του συστήματος είναι:

$$\mathcal{L} = T - U_g - U_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{ma^2}{2}\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) - \frac{mga}{2}\left(\theta_1^2 + \theta_2^2\right) - \frac{ka^2}{2}\left(\theta_2 - \theta_1\right)^2$$

και οι εξισώσεις κίνησης θα μας δώσουν:

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{g}{a}\theta_1 + \frac{k}{m}\left(\theta_1 - \theta_2\right) = 0$$

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{a}\theta_2 + \frac{k}{m}\left(\theta_2 - \theta_1\right) = 0$$

Συζευγμένα εκκρεμή – Τεχνική με πίνακες

Ορίζουμε: $\boxed{\eta \equiv \frac{ka}{mg}}$ και $\boxed{\omega_0^2 \equiv \frac{g}{a}}$

Οπότε οι εξισώσεις κίνησης γράφονται στη μορφή πίνακα:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} 1+\eta & -\eta \\ -\eta & 1+\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Αν δοκιμάσουμε μια λύση της μορφής: $\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$

και ορίζοντας $\boxed{\lambda \equiv \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$ παίρνουμε:

$$-\omega_0^2 \begin{pmatrix} 1+\eta & -\eta \\ -\eta & 1+\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} = -\omega^2 \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+\eta & -\eta \\ -\eta & 1+\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix}$$

Το οποίο είναι της μορφής: $\boxed{A\Theta = \lambda\Theta}$

δηλαδή λύση εξίσωσης ιδιοτιμών / ιδιοδυανυσμάτων

$$\boxed{(A - \lambda \mathbf{1})\Theta = 0}$$

Συζευγμένα εκκρεμή – ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

- Για να υπάρχουν μη τετριμένα ιδιοδιανύσματα, η ορίζουσα του πίνακα που πολ/ζει το $\mathbf{\Theta}$ πρέπει να είναι μηδέν.

- Για να βρούμε τις ιδιοτιμές πρέπει να λύσουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} 1+\eta-\lambda & -\eta \\ -\eta & 1+\eta-\lambda \end{vmatrix} = (1+\eta-\lambda)^2 - \eta^2 = 0$$

- Οι λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι: $\boxed{\lambda_1 = 1}$ και $\boxed{\lambda_2 = 1+2\eta}$

  Η 1η λύση αντιστοιχεί σε $\boxed{\omega_1 = \omega_0}$ συμμετρική

  Η 2η λύση αντιστοιχεί σε $\boxed{\omega_2 = \omega_0\sqrt{1+2\eta}}$ ασύμμετρη

- Τα ιδιοδυανύσματα του πίνακα $\mathbf{A}$ βρίσκονται από την εξίσωση: $\boxed{A\Theta = \lambda\Theta}$

  χρησιμοποιώντας μια φορά την μία ιδιοτιμή και μια την άλλη

  - Σε κάθε περίπτωση αυτό που βρίσκουμε είναι ο λόγος: $\boxed{\Theta_1/\Theta_2}$
  - Η συνολική κανονικοποίηση βρίσκεται ζητώντας το μέτρο του ιδιοδιανύσματος να είναι 1

Συζευγμένα εκκρεμή – ιδιοδιανύσματα

- Τα ιδιοδιανύσματα που παίρνουμε είναι: $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$ και $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}$

  που αναλογούν στις ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 1 + 2\eta$ αντίστοιχα

- Το εσωτερικό γινόμενο των 2 ιδιοδιανυσμάτων είναι 0 - Ορθοκανονικά

- Αν κατασκευάσουμε ένα πίνακα οι στήλες του οποίου είναι τα ιδιοδιανύσματα, ο πίνακας που προκύπτει μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε ένα μετασχηματισμό ομοιότητας για να διαγωνοποιηθεί ο πίνακας A. Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα που προκύπτει είναι οι ιδιοτιμές

  Ένας τέτοιος πίνακας είναι: $S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$

  και σύμφωνα με το μετασχηματισμό ομοιότητας θα έχουμε:

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\eta & -\eta\\ \eta & 1+\eta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1+2\eta\end{pmatrix}$$

Συζευγμένα εκκρεμή

Τα ιδιοδιανύσματα αντιστοιχούν στα: $\boxed{\dfrac{(\Theta_1 + \Theta_2)}{\sqrt{2}}}$ για το συμμετρικό τρόπο

με λ=1 και $\boxed{\dfrac{(\text{-}\Theta_1 + \Theta_2)}{\sqrt{2}}}$ για λ=1+2η

Οι δύο αυτοί συνδυασμοί αποσυζεύγουν τις εξισώσεις κίνησης

Όπως έχουμε δει στο συμμετρικό τρόπο ταλάντωσης τα εκκρεμή έχουν το ίδιο πλάτος ταλάντωσης και είναι σε φάση. Το ελατήριο σύζευξης δεν κάνει απολύτως τίποτα. Κάθε εκκρεμές ταλαντώνεται με την ίδια συχνότητα με λ=1 δίνοντας $\omega_S = \omega_0$.

Στο αντισυμμετρικό τρόπο ταλάντωσης, τα εκκρεμή ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα, αλλά τώρα η αντισυμμετρική συχνότητα με λ=1+2η δίνει:

$$\boxed{\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 + 2\frac{k}{m}}}$$