Ανάλυση κυκλωμάτων και κανόνες του Kirchhoff

Ανάλυση κυκλωμάτων

Τα απλά ηλεκτρικά κυκλώματα μπορεί να περιέχουν μπαταρίες, αντιστάτες και πυκνωτές με διάφορους τρόπους συνδεσμολογίας. Η πηγή της ενέργειας για όλα τα κυκλώματα είναι η μπαταρία.

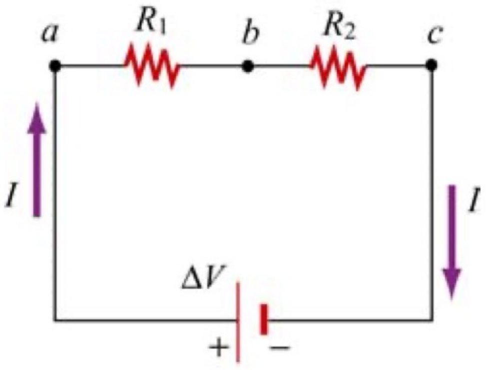
Τα ρεύμα σε ένα κύκλωμα μπορεί να έχει συνεχή φορά ή η φορά του να εναλλάσσεται. Όταν το ρεύμα έχει σταθερή φορά τότε το ρεύμα ονομάζεται συνεχές. Επειδή η διαφορά δυναμικού στα άκρα μιας μπαταρίας είναι σταθερή, η μπαταρία δημιουργεί σταθερό ρεύμα στο κύκλωμα που είναι συνδεδεμένη.

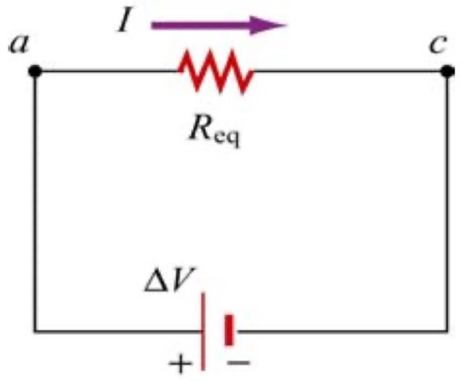
Συνδεσμολογία αντιστάσεων – σε σειρά

Όταν δύο ή περισσότεροι αντιστάτες είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους ώστε το ένα άκρο του ενός να είναι ενωμένο με το ένα άκρο του επόμενου αντιστάτη τότε λέμε ότι οι αντιστάτες είναι ενωμένοι σε σειρά

Στη συνδεσμολογία σε σειρά, το ρεύμα που διαρρέει τους αντιστάτες είναι το ίδιο, επειδή η ποσότητα φορτίου που περνά από τον ένα αντιστάτη πρέπει να περάσει και από τους υπόλοιπους αντιστάτες στο ίδιο χρονικό διάστημα.

Η διαφορά δυναμικού κατανέμεται στους αντιστάτες έτσι ώστε το άθροισμα των διαφορών δυναμικού στα άκρα των αντιστατών να ισούται με τη συνολική διαφορά δυναμικού στα άκρα της συνδεσμολογίας αντιστατών σε σειρά.





$$\Delta V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2)$$

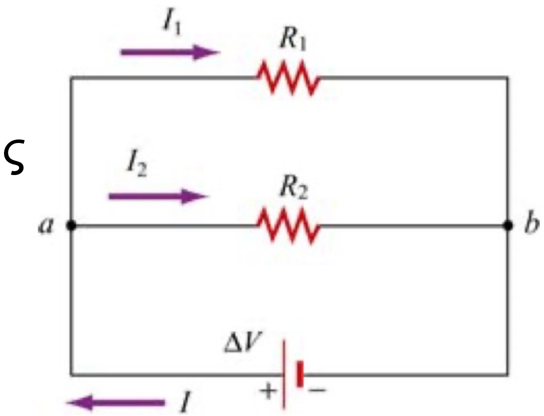
Αντικατάσταση με ισοδύναμη αντίσταση: $\Delta V = IR_{\iota\sigma.} = I(R_1 + R_2)$

$$\Rightarrow R_{\iota\sigma.} = R_1 + R_2$$

Για N αντιστάτες σε σειρά: $R_{\iota\sigma.} = R_1 + \cdots + R_N$

$$\Rightarrow R_{\iota\sigma.} = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

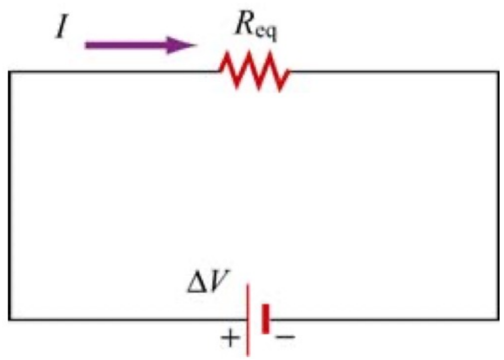
Συνδεσμολογία αντιστάσεων – παράλληλα



Στα άκρα κάθε αντιστάτη υπάρχει η ίδια διαφορά δυναμικού γιατί ο κάθε αντιστάτης είναι συνδεδεμένος στους πόλους της μπαταρίας.

$$\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$$

Τα σημεία στα οποία διακλαδίζεται το ρεύμα ονομάζονται κόμβοι.



Λόγω διατήρησης φορτίου, το ρεύμα που εισρέει σε έναν κόμβο ισούται με το ρεύμα που εκρέει από τον κόμβο:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} \Rightarrow \frac{V}{R_{\iota\sigma.}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{R_{\iota\sigma.}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Για *N* αντιστάτες παράλληλα συνδεδεμένους, η ολική αντίσταση είναι:

$$\frac{1}{R_{\iota\sigma.}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N} \Rightarrow \quad \frac{1}{R_{\iota\sigma.}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$$

Η ισοδύναμη αντίσταση είναι πάντοτε μικρότερη από τη μικρότερη αντίσταση της συνδεσμολογίας

Συνδεσμολογία αντιστάσεων – παράλληλα

Στην παράλληλη συνδεσμολογία όλες οι συσκευές λειτουργούν στην ίδια τάση. Κάθε συσκευή λειτουργεί ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες και αν κάποια από αυτές αποσυνδεθεί, οι υπόλοιπες συνεχίζουν να λειτουργούν κανονικά.

Στα οικιακά κυκλώματα, η καλωδίωση είναι τέτοια ώστε να εξασφαλίζεται η αδιάκοπη λειτουργία των συστημάτων ακόμα και αν κάποια συσκευή τεθεί εκτός λειτουργίας. Επομένως όλες οι συσκευές είναι συνδεδεμένες παράλληλα μεταξύ τους

Το ρεύμα περνά από όλες τις διαδρομές:

Η διαδρομή με την μικρότερη αντίσταση διαρρέεται από το ισχυρότερο ρεύμα

Η διαδρομή με την μεγαλύτερη αντίσταση διαρρέεται επίσης από κάποιο ρεύμα

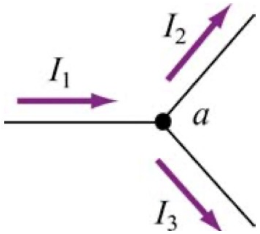
Οι κανόνες Kirchhoff

Για την ανάλυση κυκλωμάτων συνεχούς ρεύματος ανεξάρτητα της περιπλοκότητας του κυκλώματος, χρησιμοποιούμε δύο κανόνες που ονομάζονται κανόνες Kirchhoff

1ος Κανόνας: Κανόνας των κόμβων

Σε κάθε κόμβο του κυκλώματος, το άθροισμα των ρευμάτων πρέπει να είναι μηδέν

Τα ρεύματα που εισέρχονται στον κόμβο θεωρούνται θετικά ($+I$) ενώ αυτά που εξέρχονται θεωρούνται αρνητικά ($-I$)



Ο κανόνας αυτός απορρέει από την αρχή διατήρησης του φορτίου: σε κάθε σημείο του κυκλώματος δεν μπορούμε να έχουμε συσσώρευση φορτίου.

Σε μαθηματική μορφή, ο κανόνας γράφεται ως: $\sum_{κόμβου} I = 0$

2ος Κανόνας: Κανόνας των βρόχων

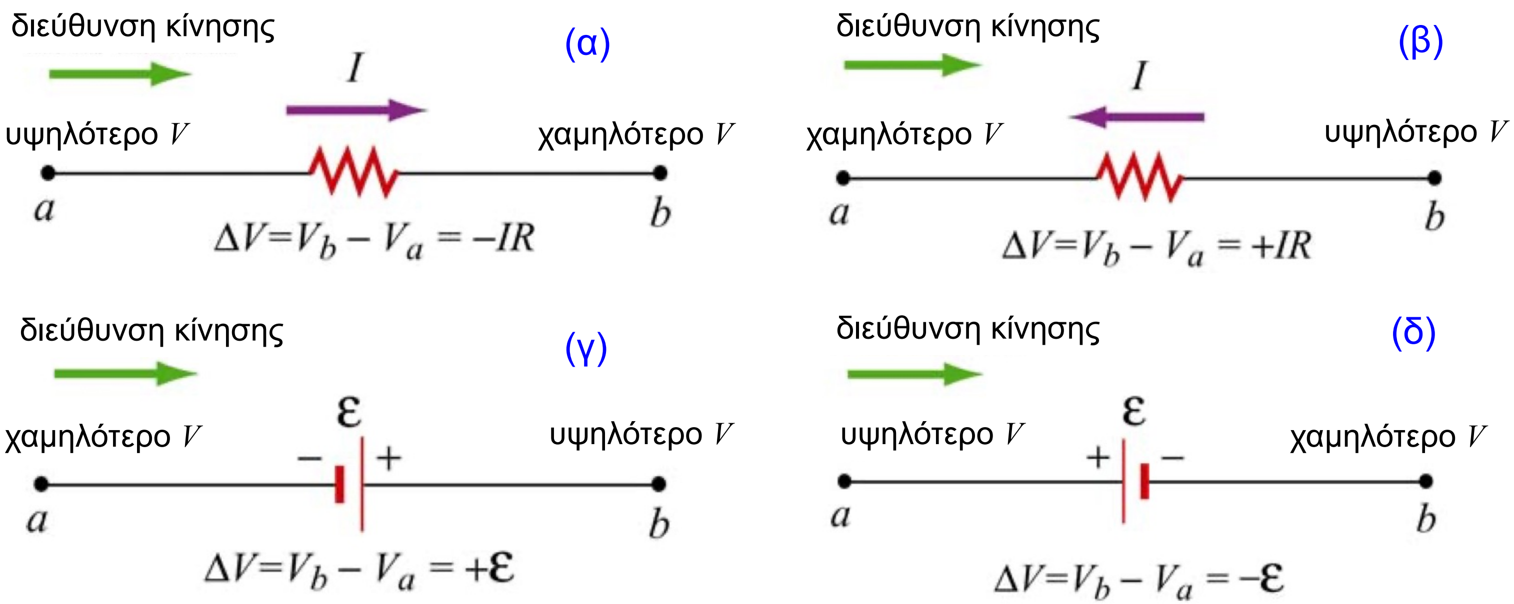
Το άθροισμα των διαφορών δυναμικού στα άκρα όλων των στοιχείων κάθε κλειστού βρόχου του κυκλώματος πρέπει να είναι μηδέν.

Ο κανόνας αυτός απορρέει από την αρχή διατήρησης της ενέργειας

Σε μαθηματική μορφή: $\sum_{βρόχου} \Delta V = 0$

Οι κανόνες Kirchhoff – 2ος νόμος

Οι κανόνες για να προσδιορίσουμε την διαφορά δυναμικού σε αντιστάτες και μπαταρίες κινούμενοι κατά μήκος του βρόχου με προκαθορισμένη φορά κίνησης είναι:



(α) Διατρέχουμε τον αντιστάτη με φορά ίδια με του ρεύματος, οπότε $\Delta V_{ba} = -IR$

(β) Διατρέχουμε τον αντιστάτη με φορά αντίθετη του ρεύματος, οπότε $\Delta V_{ba} = +IR$

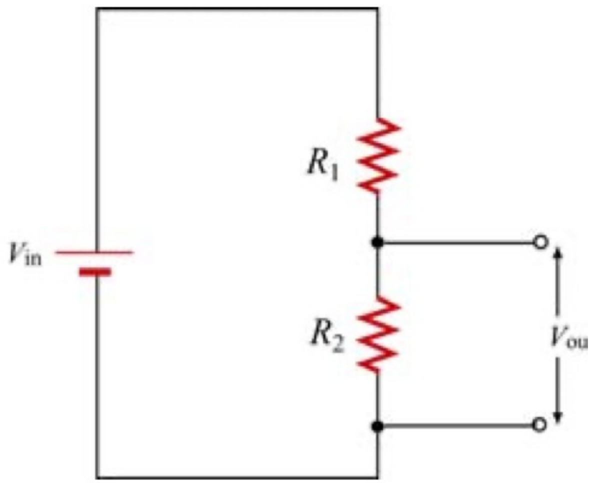
(γ) Διατρέχουμε την πηγή ΗΕΔ με φορά ίδια με αυτή της ΗΕΔ (από τον πόλο – στον πόλο +) οπότε η μεταβολή της διαφοράς δυναμικού είναι $\Delta V_{ba} = +\mathcal{E}$

(δ) Διατρέχουμε την πηγή ΗΕΔ με φορά αντίθετη αυτής της ΗΕΔ (από τον πόλο + στον πόλο -) οπότε η μεταβολή της διαφοράς δυναμικού είναι $\Delta V_{ba} = -\mathcal{E}$

Κανόνες Kirchhoff - παράδειγμα

Θεωρούμε το κύκλωμα του διαιρέτη τάσης που αποτελείται από 2 αντιστάσεις σε σειρά.

Η διαφορά δυναμικού, V_{out}, στον αντιστάτη R_2, θα είναι μικρότερη από V_{in}.



Από τον 2ο κανόνα Kirchhoff: $V_{in} - IR_1 - IR_2 = 0$

Άρα το ρεύμα θα είναι: $I = \dfrac{V_{in}}{(R_1 + R_2)}$

Άρα η διαφορά δυναμικού στα άκρα της R_2 θα είναι:

$$V_{out} = IR_2 = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} V_{in} \Rightarrow \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)}$$

Ο λόγος των διαφορών δυναμικού χαρακτηρίζει τον διαιρέτη τάσης και προσδιορίζεται από τον λόγο των αντιστάσεων.

Μεθοδολογία Επίλυσης προβλημάτων

Μελετούμε το διάγραμμα του κυκλώματος για την αναγνώριση όλων των στοιχείων.

- Προσπαθούμε να απλουστεύσουμε το κύκλωμα συνδυάζοντας τους αντιστάτες σε σειρά και παράλληλα.

  Αν είναι εφικτό τους αντικαθιστούμε με ισοδύναμους αντιστάτες.

  Αν δεν είναι εφικτό:

- Εφαρμόζουμε τους κανόνες Kirchhoff
  - ✓ Προσδιορίζουμε την πολικότητα κάθε μπαταρίας
  - ✓ Υποδεικνύουμε τα γνωστά μεγέθη και δίνουμε σύμβολα στα άγνωστα μεγέθη
  - ✓ Καθορίζουμε τη φορά του ρεύματος σε κάθε βρόχο – είναι αυθαίρετος αλλά θα πρέπει να τηρείται μετέπειτα στην εφαρμογή των κανόνων Kirchhoff
  - ✓ Εφαρμόζουμε τον κανόνα των κόμβων σε όσους κόμβους δίνουν νέες σχέσεις μεταξύ των διαφόρων ρευμάτων
- Ο κανόνας των κόμβων χρησιμοποιείται όσες φορές θέλουμε αρκεί κάθε εξίσωση να περιλαμβάνει ένα ρεύμα που δεν έχει χρησιμοποιηθεί σε άλλη εξίσωση του ίδιου κανόνα

- ❑ Το πλήθος των εξισώσεων που μπορούμε να γράψουμε είναι κατά ένα μικρότερο από το πλήθος των κόμβων του κυκλώματος

Μεθοδολογία Επίλυσης προβλημάτων

- Καθώς διατρέχουμε τον βρόχο πρέπει να προσδιορίσουμε σωστά τη διαφορά δυναμικού σε κάθε στοιχείο του κυκλώματος που συναντάμε.

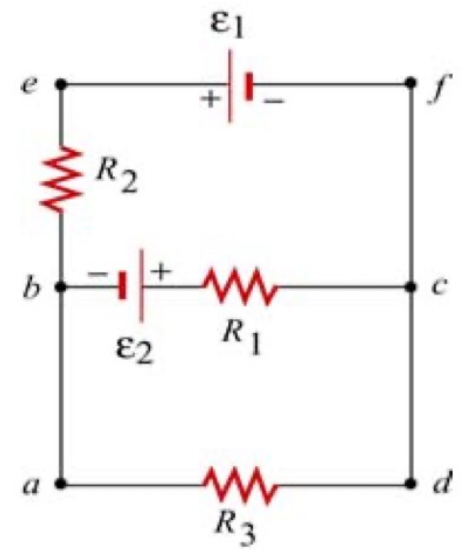
- ✓ Γράφουμε το σύστημα των ανεξάρτητων εξισώσεων με τα άγνωστα ρεύματα

  - **Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων**

- ✓ Ελέγχουμε τις τιμές των ρευμάτων. Αν κάποια τιμή είναι αρνητική, τότε η αρχική φορά που επιλέχθηκε ήταν αντίθετη από την πραγματική και η απόλυτη τιμή είναι η σωστή τιμή του ρεύματος

Αν στο κύκλωμα υπάρχει πυκνωτής τότε αυτός θεωρείται ανοικτός κλάδος του κυκλώματος. Σε σταθερή κατάσταση, το ρεύμα στο κλάδο του κυκλώματος που περιέχει τον πυκνωτή είναι μηδέν.

Παράδειγμα εφαρμογής κανόνων Kirchhoff



Θεωρούμε το κύκλωμα του σχήματος με τις πηγές $\mathcal{E}_1$ και $\mathcal{E}_2$ γνωστές όπως και τις αντιστάτες R_1, R_2, και R_3 γνωστούς.

Θα προσδιορίσουμε τα ρεύματα που διαρρέουν τους αντιστάτες.

(α) Καθορίζουμε τυχαία τη φορά των ρευμάτων στους κλάδους, όπως φαίνεται στο σχήμα (α).

(β) Εφαρμόζουμε τον κανόνα των κόμβων στον κόμβο b.

$$I_3 = I_1 + I_2 \qquad (1)$$

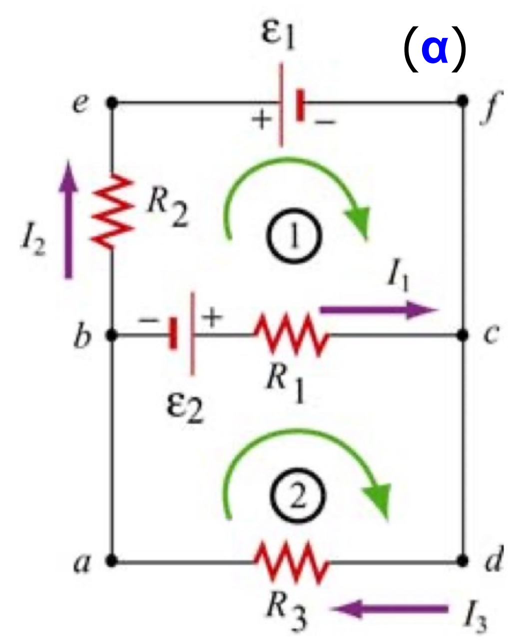
(γ1) Εφαρμόζουμε τον κανόνα των βρόχων στον κλάδο abcda κινούμενοι όπως το πράσινο βέλος.

Θα έχουμε: $\mathcal{E}_2 - I_1 R_1 - I_3 R_3 = 0$ (2)

(γ2) Εφαρμόζουμε τον κανόνα των βρόχων στον κλάδο befcb κινούμενοι όπως το πράσινο βέλος.

Θα έχουμε: $-I_2 R_2 - \mathcal{E}_1 + I_1 R_1 - \mathcal{E}_2 = 0$ (3)

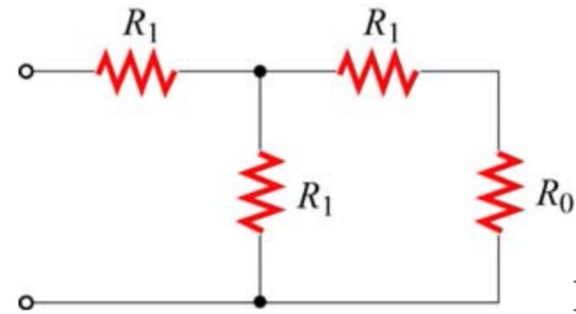
Κάποιος θα μπορούσε να είχε χρησιμοποιήσει τον βρόχο abefcda. Ωστόσο το αποτέλεσμα θα ήταν ο γραμμικός συνδυασμός των δύο άλλων: $-I_2 R_2 - \mathcal{E}_1 - I_3 R_3 = 0$



(α)

Παράδειγμα: Ισοδύναμη αντίσταση

Θεωρήστε το κύκλωμα των αντιστατών του σχήματος



Για δεδομένη τιμή της αντίστασης R_0 ποια πρέπει να είναι η αντίσταση R_1 ώστε η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος να είναι R_0;

Η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος του βρόχου είναι:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 + R_0} = \frac{2R_1 + R_0}{R_1(R_1 + R_0)} \Rightarrow R' = \frac{R_1(R_1 + R_0)}{2R_1 + R_0}$$

Η R' είναι σε σειρά με την 4η αντίσταση R_1 και η συνολική αντίσταση γίνεται:

$$\Rightarrow R_{o\lambda} = R' + R_1 = \frac{R_1(R_1 + R_0)}{2R_1 + R_0} + R_1 \Rightarrow R_{o\lambda} = \frac{3R_1^2 + 2R_1R_0}{R_0 + 2R_1}$$

Για να είναι $R_{o\lambda} = R_0$ θα πρέπει: $\dfrac{3R_1^2 + 2R_1R_0}{R_0 + 2R_1} = R_0 \Rightarrow$

$$3R_1^2 + 2R_1R_0 = R_0^2 + 2R_1R_0 \Rightarrow 3R_1^2 = R_0^2 \Rightarrow R_1 = \frac{R_0}{\sqrt{3}}$$

Παράδειγμα: Μεταβλητή αντίσταση

Δείξτε ότι όταν μια μπαταρία γνωστής ΗΕΔ με εσωτερική αντίσταση r συνδεθεί με μεταβλητή εξωτερική αντίσταση R, καταναλώνει μεγαλύτερη ισχύ στην αντίσταση όταν $r = R$

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα Kirchhoff για τον βρόχο: $\mathcal{E} - Ir - IR = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = I(r+R)$

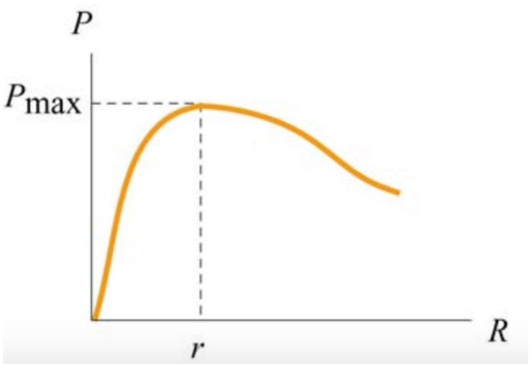
Η ισχύς που καταναλώνεται είναι: $P = I^2 R = \dfrac{\mathcal{E}^2}{(R+r)^2} R$

Για να βρούμε την τιμή της αντίστασης R για την οποία έχουμε την μέγιστη ισχύ, παραγωγίζουμε ως προς R και θέτουμε την παράγωγο να είναι 0 (ακρότατο):

$$\frac{dP}{dR} = \mathcal{E}^2 \left[\frac{(R+r)^2 - 2R(R+r)}{(R+r)^4}\right] = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dR} = \mathcal{E}^2 \left[\frac{(R+r)(R+r-2R)}{(R+r)^4}\right] = 0 \Rightarrow$$

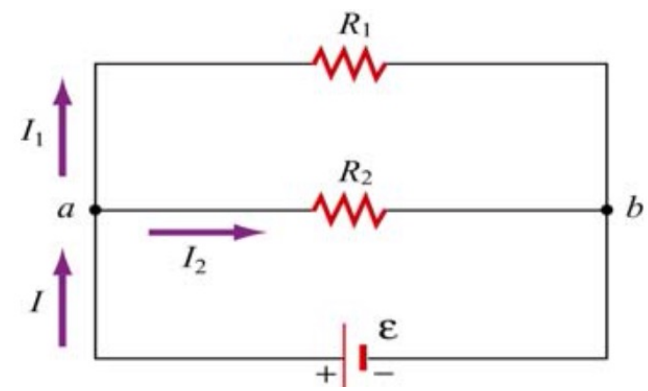
$$\Rightarrow r - R = 0 \Rightarrow R = r$$

Αυτό αποτελεί παράδειγμα ταιριάσματος αντίστασης όπου επιλέγεται η εξωτερική αντίσταση ώστε η ισχύς που καταναλώνεται να είναι μέγιστη



Παράδειγμα: Σύνδεση σε σειρά ως προς παράλληλα

Θεωρήστε το κύκλωμα των δύο αντιστατών με αντιστάσεις R_1 και R_2 συνδεδεμένες παράλληλες ή σε σειρά. Η μπαταρία έχει ΗΕΔ, $\mathcal{E}$.



- R_1 και R_2 συνδεδεμένες παράλληλα

(α) Ποια η ισχύς που παρέχεται στους 2 αντιστάτες

Σε παράλληλη συνδεσμολογία, το ρεύμα σε κάθε αντιστάτη είναι:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} \quad \text{και} \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2}$$

Η ισχύς σε κάθε αντιστάτη θα είναι: $P_1 = I_1^2 R_1 = \dfrac{\mathcal{E}^2}{R_1}$ και $P_2 = I_2^2 R_2 = \dfrac{\mathcal{E}^2}{R_2}$

Όσο μικρότερη επομένως είναι η αντίσταση τόσο μεγαλύτερη η ισχύς που παρέχεται

Αν οι αντιστάτες είναι λαμπτήρες, τότε αυτός με την μικρότερη αντίσταση θα φωτοβολεί περισσότερο λόγω της μεγαλύτερης ισχύος πάνω του

Παράδειγμα: Σύνδεση σε σειρά ως προς παράλληλα

(**β**) Δείξτε ότι το άθροισμα της ισχύος που καταναλώνεται σε κάθε αντιστάτη ισούται με την ισχύ που παρέχει η μπαταρία

Η ολική ισχύς στους αντιστάτες είναι: $P_R = P_1 + P_2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R_1} + \frac{\mathcal{E}^2}{R_2} = \frac{\mathcal{E}^2}{R_{o\lambda}}$

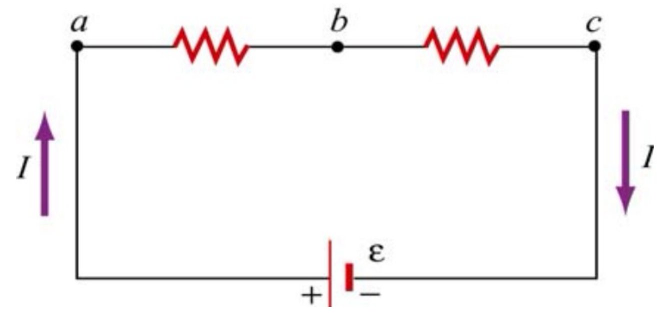
όπου: $\frac{1}{R_{o\lambda}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{o\lambda} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

Η ολική ισχύς που παρέχει η μπαταρία είναι: $P_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}I$ όπου: $I = I_1 + I_2$

άρα: $P_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}(I_1 + I_2) = \mathcal{E}I_1 + \mathcal{E}I_2 = \left(\frac{\mathcal{E}}{R_1}\right)\mathcal{E} + \left(\frac{\mathcal{E}}{R_2}\right)\mathcal{E} \Rightarrow P_{\mathcal{E}} = \left(\frac{\mathcal{E}^2}{R_1}\right) + \left(\frac{\mathcal{E}^2}{R_2}\right) = \frac{\mathcal{E}^2}{R_{o\lambda.}} = P_R$

Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο με βάση την αρχή διατήρησης ενέργειας:

- R_1 και R_2 συνδεδεμένες σε σειρά



(**γ**) Ποια η ισχύς που καταναλώνετε σε κάθε αντίσταση

Η ολική αντίσταση είναι: $R_{o\lambda.} = R_1 + R_2$

και το ρεύμα σε κάθε μία είναι: $I_{o\lambda.} = I_1 = I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_{o\lambda.}}$

και η ισχύς σε κάθε μία είναι: $P_1 = I_1^2 R_1 = \frac{\mathcal{E}^2}{R_{o\lambda.}^2} R_1$ και $P_2 = I_2^2 R_2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R_{o\lambda.}^2} R_2$

Αντίθετα με την παράλληλη συνδεσμολογία, μεγαλύτερη αντίσταση μεγαλύτερη ισχύς

Παράδειγμα: Σύνδεση σε σειρά ως προς παράλληλα

(**δ**) Δείξτε ότι το άθροισμα της ισχύος που καταναλώνεται σε κάθε αντιστάτη ισούται με την ισχύ που παρέχει η μπαταρία

Η ολική ισχύς στους αντιστάτες είναι: $P_R = P_1 + P_2 = \left(\frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}\right)^2 R_1 + \left(\frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}\right)^2 R_2$

$$\Rightarrow P_R = \frac{\mathcal{E}^2}{R_{o\lambda}^2}(R_1 + R_2) = \frac{\mathcal{E}^2}{R_{o\lambda}^2} R_{o\lambda} \Rightarrow P_R = \frac{\mathcal{E}^2}{R_{o\lambda}}$$

Η ολική ισχύς από την μπαταρία είναι: $P_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}I = \mathcal{E}\frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{\mathcal{E}^2}{R_1 + R_2} = \frac{\mathcal{E}^2}{R_{o\lambda.}} = P_R$

όπως αναμένονταν από διατήρηση ενέργειας

(**ε**) Ποια συνδεσμολογία απαιτεί περισσότερη ισχύ;

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα από τα ερωτήματα (β) και (δ) βλέπουμε ότι:

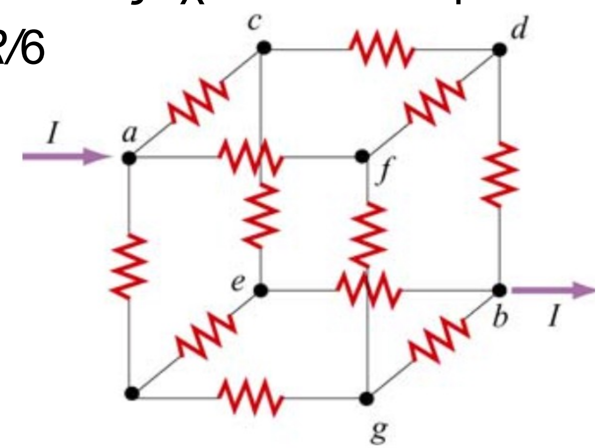
$$P_{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}^2}{R_1} + \frac{\mathcal{E}^2}{R_2} > \frac{\mathcal{E}^2}{R_1 + R_2}$$

Η παράλληλη συνδεσμολογία χρησιμοποιεί περισσότερη ισχύ και άρα ενέργεια.

Η ολική αντίσταση δύο αντιστατών συνδεδεμένων παράλληλα είναι μικρότερη από την ολική τους αντίσταση όταν είναι συνδεδεμένοι σε σειρά.

Παράδειγμα: Δίκτυο αντιστατών

Θεωρήστε το δίκτυο των αντιστατών σε σχήμα κύβου. Ο καθένας έχει αντίσταση *R.* Δείξτε ότι η αντίσταση μεταξύ των σημείων α και b είναι 5*R*/6



Από συμμετρία, το ρεύμα το οποίο εισέρχεται στο α θα πρέπει να χωριστεί σε 3 ίσα ρεύματα κατά μήκος κάθε αντιστάτη που συνδέεται στην κορυφή α.

Επομένως σε κάθε ακμή υπάρχει ρεύμα: $I/3$

Για λόγους συμμετρίας, σε κάθε άλλη κορυφή το ρεύμα θα χωριστεί σε 2 ισοδύναμα ρεύματα. Έτσι στην κορυφή C το ρεύμα θα χωριστεί σε δύο ρεύματα $I'/2$

Το ρεύμα που ρέει στον αντιστάτη *ac* είναι $I' = I/3$ επομένως στους αντιστάτες *cd* και *ce* το ρεύμα θα είναι: $I/6$

Το ρεύμα που ρέει στον αντιστάτη *db* είναι το άθροισμα των ρευμάτων στους αντιστάτες *cd* και *fd.* Δηλαδή θα έχουμε $I/6 + I/6 = I/3$

Η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα *ab* μπορεί να εξαχθεί ως:

$$V_{ab} = V_{ac} + V_{cd} + V_{db} = \frac{I}{3}R + \frac{I}{6}R + \frac{I}{3}R \Rightarrow V_{ab} = \frac{5}{6}RI \Rightarrow R_{o\lambda} = \frac{5}{6}R$$

8ο Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

Έτοιμοι