ΦΥΣ. 133 – Φροντιστήριο 8ο

1. Να βρεθεί η δύναμη ενός κεντρικού πεδίου που επιτρέπει ένα σωματίδιο να κινείται σε σπειροειδή τροχιά της μορφής $r = k\theta^2$, όπου k είναι σταθερά

Μας δίνεται ότι $r = k\theta^2$ με k = σταθ.

Απο την εξίσωση της τροχιάς έχουμε:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r} - \frac{\mu r^2}{\ell^2}F(r) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{k}\frac{d}{d\theta}\left(\theta^{-2}\right) = -\frac{2}{k}\theta^{-3}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right) = +\frac{6}{k}\theta^{-4} \Rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{6k^2}{\cancel{k}r^2}$$

Επομένως η εξίσωση της τροχιάς γίνεται:

$$\underline{6k}\theta^{-4} + k\theta^{-2} = -\frac{\mu k^2\theta^4}{\ell^2}F(r) \Rightarrow \frac{6k}{r^2} + \frac{1}{r} = -\frac{\mu r^2}{\ell^2}F(r) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6k\ell^2}{mr^4} + \frac{\ell^2}{\mu r^3} = -F(r) \Rightarrow \boxed{F(r) = -\frac{\ell^2}{\mu}\left(\frac{6k}{r^4} + \frac{1}{r^3}\right)}$$

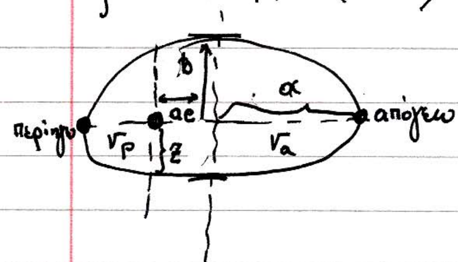
2. Ένας δορυφόρος της γης έχει περιήγιο 300 Km και απόγειο 3,500Km από την επιφάνεια της γης. Πόσο μακριά από την επιφάνεια της γης βρίσκεται ο δορυφόρος όταν (α) έχει περιστραφεί κατά 90° γύρω από την γη από το περιήγιο και (β) έχει κινηθεί κατά τη μισή απόσταση από το περιήγιο στο απόγειο. Η ακτίνα της γης είναι R_γ=6,380 km.

(α) Ξέρουμε ότι η σχέση μεταξύ της τροχιάς ενός σωματιδίου και της εκκεντρότητας είναι:

$$\frac{1}{r} = C(1+e\cos\theta) \quad \text{όπου} \quad C = \frac{mk}{\ell^2}$$, k: η σταθερά του δυναμικού

$$e = \sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{\mu k^2}}$$

Η κίνηση του δορυφόρου είναι ελλειπτική, με κύριο και δευτερεύων άξονα έλλειψης (2a κ 2b) αντίστοιχα:



$$a = \frac{z}{1-e^2} \quad \text{όπου} \quad z = 1/C = \ell^2/mk$$

$$b = \frac{z}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$r_p = a(1-e) = \frac{z}{1+e}$$

$$r_a = a(1+e) = \frac{z}{1-e}.$$

Για την περίπτωσή μας ισχύει: $r_p = r_\gamma + r_{min} = 6380+300 = 6{,}680\,km$

$$r_a = r_\gamma + r_{max} = 6380+3500 = 9880\,km$$

Επομένως ο μεγάλος ημιάξονας θα είναι:

$$a = \frac{r_p+r_a}{2} = \frac{6680+9880}{2} \Rightarrow a = 8280\,km$$

Η εκκεντρότητα της τροχιάς του δδ είναι: $r_a = a(1+e) \Rightarrow e = \frac{r_a - a}{a} \Rightarrow$

$$\Rightarrow e = \frac{r_a}{a} - 1 \Rightarrow e = 0.1932$$

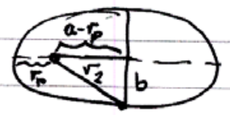
Ξέροντας την εκκεντρότητα υπολογίζουμε την Z:

$$Z = r_p(1+e) \Rightarrow Z = 6{,}680(1+0.1932) \Rightarrow Z = 7970\,km$$

Αντικαθιστώντας στην $\frac{1}{r} = \frac{(1+e\cos\theta)}{Z} \Rightarrow r = \frac{Z}{(1+e\cos\theta)} = \frac{7970}{1+0.19\cos\theta}$

Για $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{r = \frac{7970}{1}} \Rightarrow d = 7980 - r_\gamma \Rightarrow d = 1{,}590\,km$ πάνω από τη γη

(β)



$$r_2 = \sqrt{b^2 + (a-r_p)^2} - r_\gamma$$

Αλλά $b = \frac{Z}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Z}{a}}} = \sqrt{\frac{Z^2}{\frac{Z}{a}}} \Rightarrow b = \sqrt{Za}$

$$\Rightarrow r_2 = \sqrt{Za + (a-r_p)^2} - r_\gamma \Rightarrow r_2 = 8280 - 6380 \Rightarrow r_2 = 1900\,km$$