

Quark Model – Μεσόνια

□ Δέσμιες καταστάσεις $q\bar{q}$

➤ Χρωματικά ουδέτερα

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}\rangle$$

➤ Μηδενικός βαρυονικός αριθμός $B = 1/3 + (-1/3) = 0$

□ Στροφορμή \vec{L}

➤ Για τα ελαφρύτερα μεσόνια

Χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση

$L=0$ μεταξύ των quarks

□ Parity P

$P = +1$ για φερμιόνια (quarks/λεπτόνια) $P = -1$ για αντι-φερμιόνια (anti-(quarks/λεπτόνια))

$$P(q\bar{q}) = P_q P_{\bar{q}} (-1)^L \Rightarrow P(q\bar{q}) = (+1)(-1)(-1)^L \Rightarrow P(q\bar{q}) = (-1)^{L+1}$$

➤ Parity είναι ίδια για μποζόνια και αντι-μποζόνια

□ Ολική στροφορμή $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

Περιέχει το spin των quarks

$S=0$ Spins αντιπαράλληλα $\uparrow\downarrow \quad \downarrow\uparrow$

➤ $J^P = 0^-$ Ψευδο-βαθμωτά μεσόνια

$S=1$ Spins παράλληλα $\uparrow\uparrow \quad \downarrow\downarrow$

➤ $J^P = 1^-$ Διανυσματικά μεσόνια

Quark Model – Ελαφρά Μεσόνια

- Δέσμιες καταστάσεις των ελαφρύτερων quarks: (**u**, **d**, **s**)

$$m_u \sim 0.3\text{GeV} \quad m_d \sim 0.3\text{GeV} \quad m_s \sim 0.5\text{GeV}$$

- Κατάσταση ελάχιστης ενέργειας αντιστοιχεί σε $L=0$, καθορίζει το “spin” του μεσονίου όπως προκύπτει από το spin των quarks

S=0 Ψευδο-βαθμωτά

S=1 Διανυσματικά

- Parity μεσονίων: $P(q\bar{q}) = P_q P_{\bar{q}} (-1)^L \Rightarrow P(q\bar{q}) = (+1)(-1)(-1)^L \Rightarrow P(q\bar{q}) = (-1)^{L+1}$

- Καταστάσεις γεύσης:

$u\bar{d} \quad u\bar{s} \quad d\bar{u} \quad d\bar{s} \quad s\bar{u} \quad s\bar{d}$ και μίξη των $u\bar{u} \quad d\bar{d} \quad s\bar{s}$

- Αναμένουμε:

□ 9 μεσόνια με $J^P = 0^-$ 9-πλέτα ψευδο-βαθμωτών μεσονίων

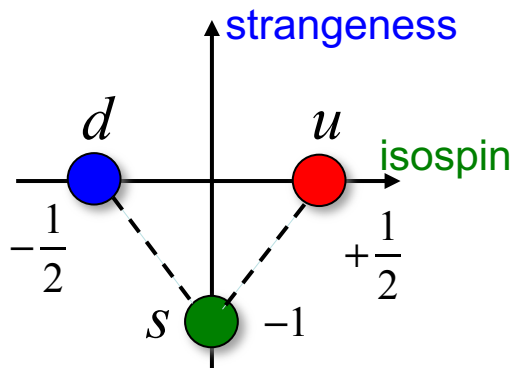
□ 9 μεσόνια με $J^P = 1^-$ 9-πλέτα διανυσματικών μεσονίων

Πολλαπλότητες/ομάδες u, d, s

➤ Βασική πολλαπλότητα των quarks – κβαντικοί αριθμοί:

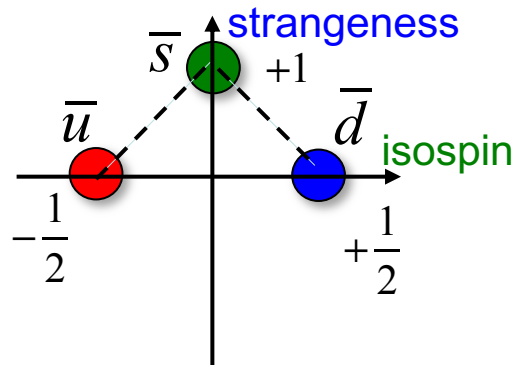
QUARKS

$$J^P = \frac{1}{2}^+$$



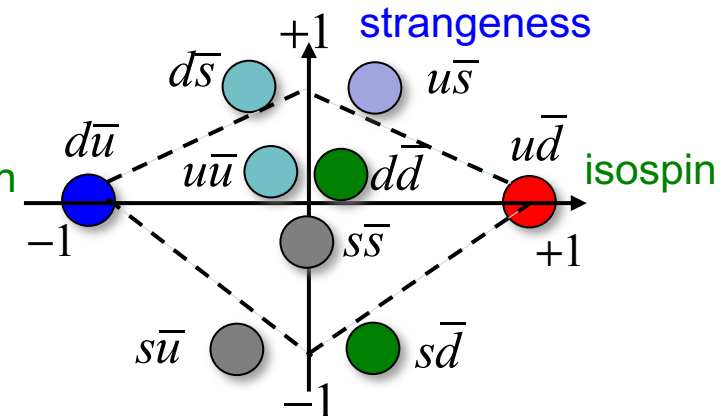
Anti - QUARKS

$$J^P = \frac{1}{2}^-$$



Μεσόνια

$$Spin \quad J = 0 \text{ ή } J = 1$$



Απλή ταξινόμηση βασισμένη στο περιεχόμενο σε quarks των πρώτων μεσονίων που βρέθηκαν και στους κβαντικούς αριθμούς της παραδοξότητας και isospin

Μετρώνται ουσιαστικά τις γεύσεις των quarks:

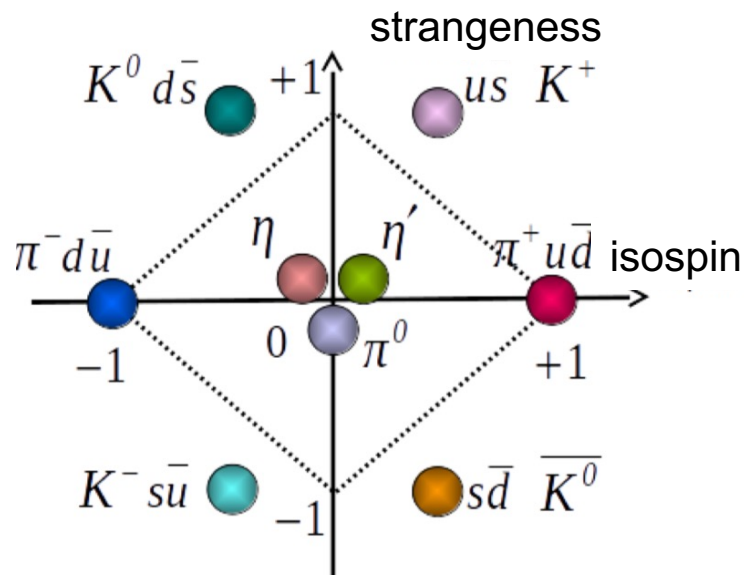
$$\text{Isospin: } \frac{1}{2}(n_u - n_d - n_{\bar{u}} + n_{\bar{d}})$$

$$\text{Παραδοξότητα: } n_{\bar{s}} - n_s$$

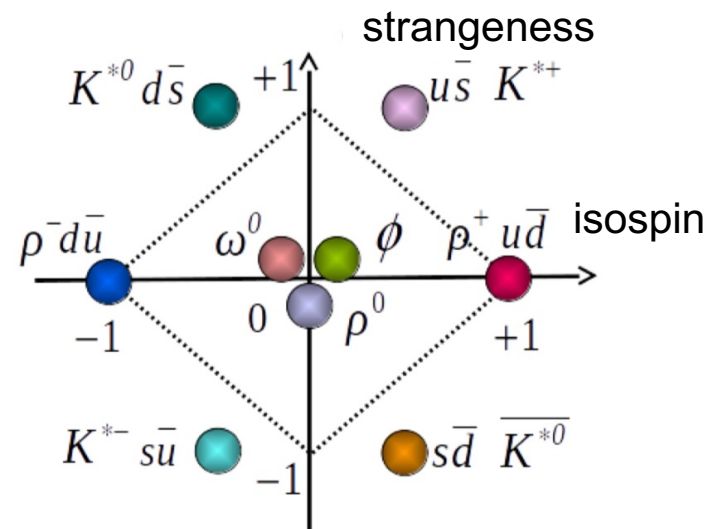
Πρότυπο αδρονίων με βάση στατικά quarks

Το 1961, οι Gell-Mann και Neemann παρατήρησαν ότι πολλά από τα γνωστά σωματίδια μπορούν να ταξινομηθούν με βάση το φορτίο και την παραδοξότητα και μάζα σε σχηματισμούς οκτάδων:

$J^P = 0^-$ 9-αδα βαθμωτών μεσονίων



$J^P = 1^-$ 9-αδα διανυσματικών μεσονίων



Τα η , η' και π^0 , ρ^0 , ϕ , ω^0 είναι συνδυασμοί $u\bar{u}$ $d\bar{d}$ $s\bar{s}$

Οι μάζες των μεσονίων είναι (MeV): $\pi(140)$ $K(495)$ $\eta(550)$ και $\eta'(960)$
 ενώ για τα διανυσματικά μεσόνια: $\rho(770)$ $K^*(890)$ $\omega(780)$ και $\phi(1020)$

Η ενδιαφέρουσα περίπτωση αποτελούσε το η -μεσόνιο το οποίο δεν ήταν γνωστό στην αρχική ταξινόμηση.

Ωστόσο βρέθηκε με τις αναμενόμενες ιδιότητες σύμφωνα με την ταξινόμηση

Πρότυπο αδρονίων με βάση στατικά quarks

Η ομαδοποίηση αυτή είναι χαρακτηριστική μιας $SU(3)$ συμμετρίας, η οποία αποτελεί επέκταση της $SU(2)$ συμμετρίας που προέρχεται από το spin- $\frac{1}{2}$.

Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν 3 κβαντικές ιδιότητες αντί για τις 2 του σπιν

Η $SU(3)$ προβλέπει μερικούς ακόμα σχηματισμούς:

- μονήρεις καταστάσεις (singlets) το η' μεσόνιο το οποίο δεν ήταν ακόμα γνωστό
- δεκα-πλέτες (decuplets)

Οι διεγερμένες καταστάσεις των βαρυονίων έμοιαζε να ικανοποιεί την ομαδοποίηση σε δεκάδες, μόνο που 9 από τα 10 σωματίδια είχαν βρεθεί.

Το μοντέλο απαιτούσε ένα 10^ο σωματίδιο και προέβλεπε όχι μόνο την μάζα του αλλά και την παραδοξότητά του η οποία έπρεπε να είναι $s=-3$

Το σωματίδιο βρέθηκε το 1964 στο Brookhaven σε ένα θάλαμο φουσαλίδων

Πρότυπο αδρονίων με βάση στατικά quarks

Οι καταστάσεις $u\bar{u}$ $d\bar{d}$ $s\bar{s}$ έχουν μηδενική γεύση και μπορούν να αναμειχθούν:

$$J^P = 0^- \begin{cases} \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \\ \eta^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \\ \eta' = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \end{cases} \quad J^P = 1^- \begin{cases} \rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\ \omega^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \\ \varphi = s\bar{s} \end{cases}$$

Οι συντελεστές μίξης προκύπτουν πειραματικά από τις μάζες των μεσονίων και τις διασπάσεις τους

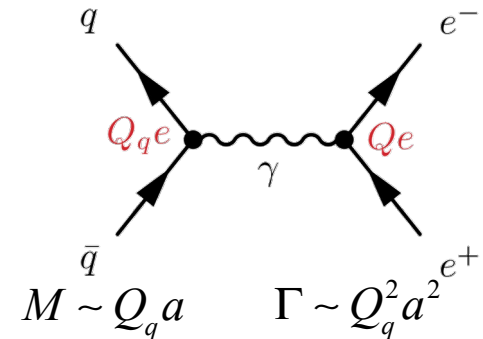
Για παράδειγμα οι λεπτονικές διασπάσεις διανυσματικών μεσονίων

$$M(\rho^0 \rightarrow e^+e^-) \sim \frac{e}{q^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(Q_u e - Q_d e) \right]$$

$$\Gamma(\rho^0 \rightarrow e^+e^-) \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) \right) \right]^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Gamma(\omega^0 \rightarrow e^+e^-) \propto \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{3} \right) \right) \right]^2 = \frac{1}{18}$$

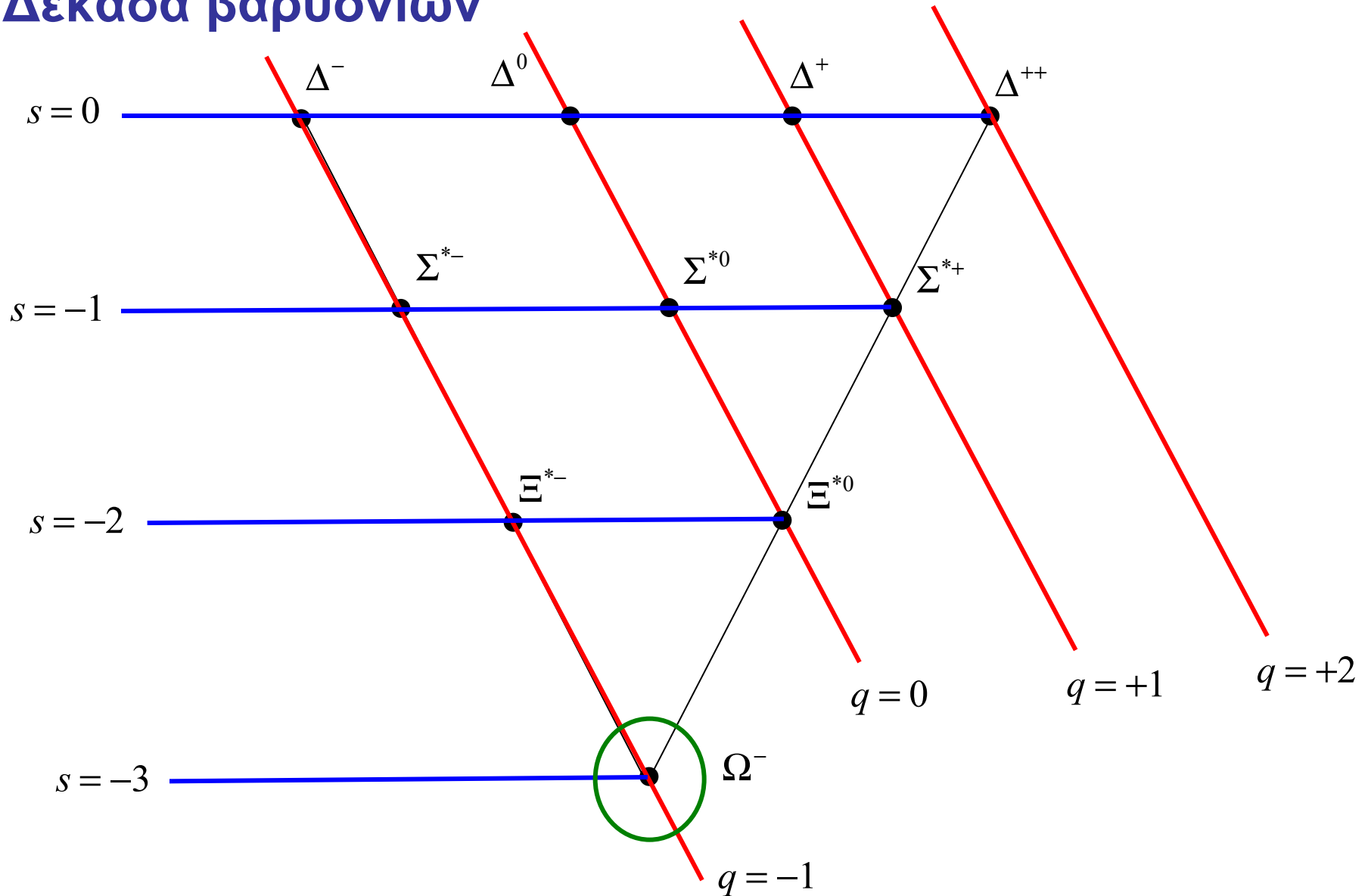
$$\Gamma(\varphi^0 \rightarrow e^+e^-) \propto \left[\frac{1}{3} \right]^2 = \frac{1}{9}$$



Αναμενόμενο θεωρητικά: $\Gamma_{\rho^0} : \Gamma_{\omega^0} : \Gamma_{\varphi^0} = 9 : 1 : 2$

Πειραματικά: $(8.8 \pm 2.6) : 1 : (1.7 \pm 0.4)$

Δεκάδα βαρυονίων



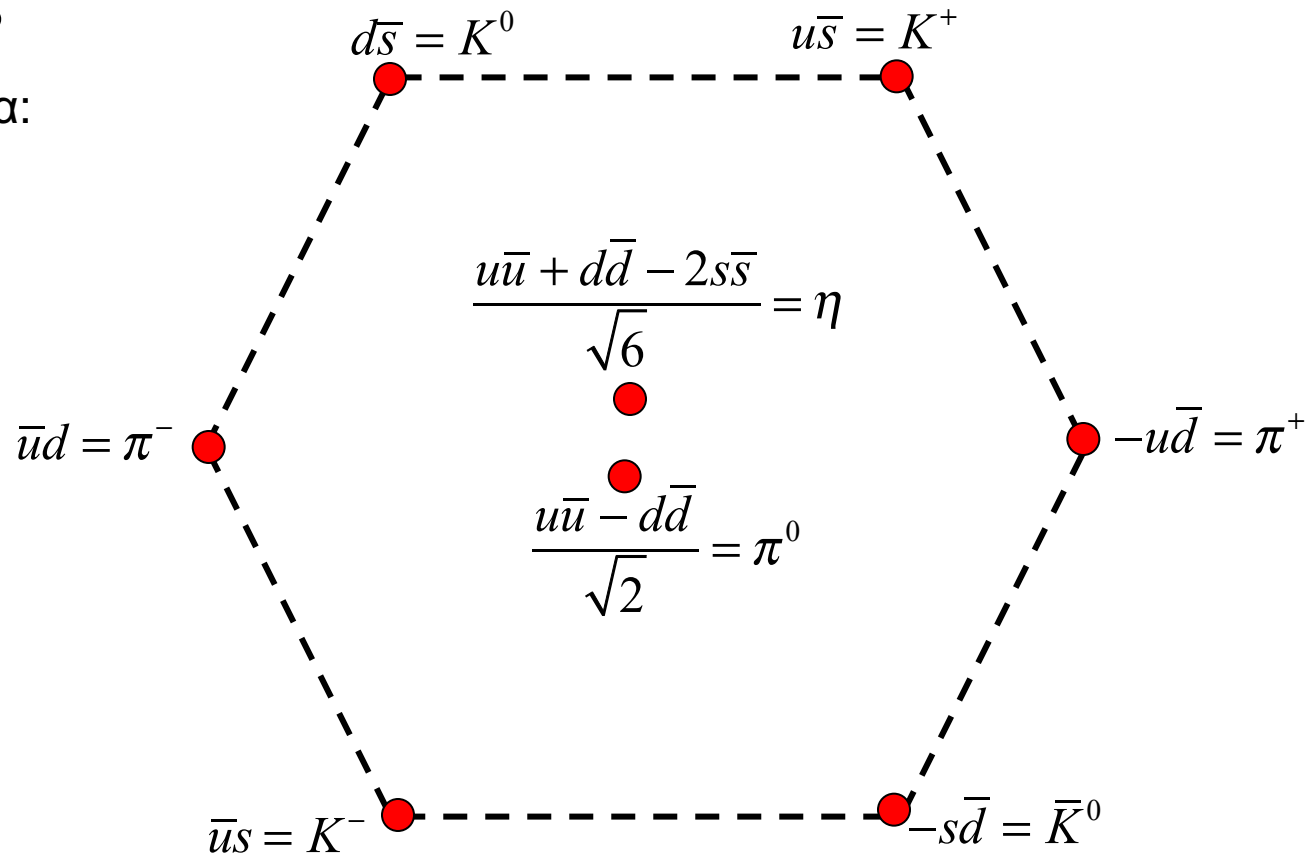
Οκτάδα

Υπάρχουν 9 συνδυασμοί των u, d και s quarks καθώς και των αντι-quarks τους $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$

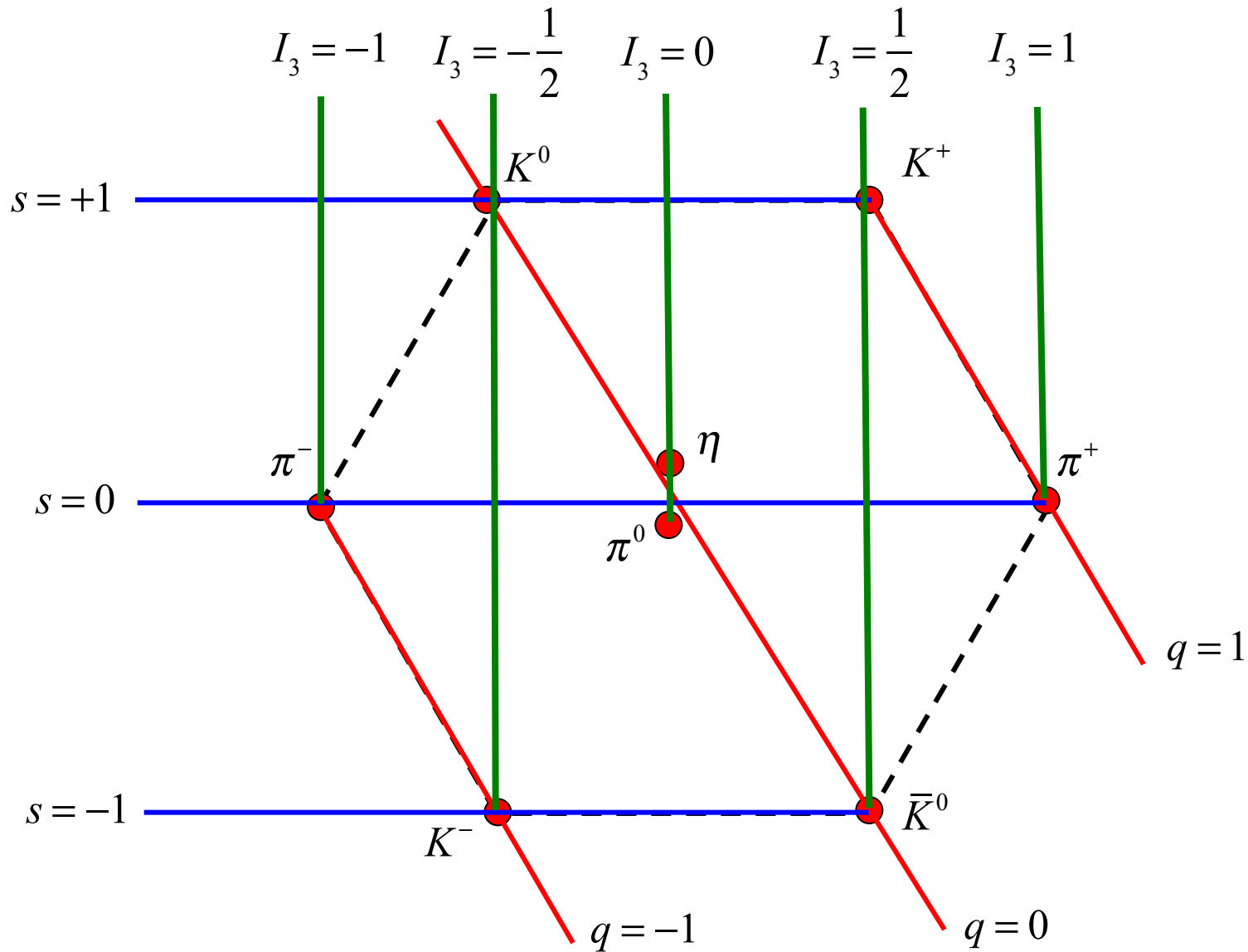
Στην ομάδα SU(3) οι συνδυασμοί αυτοί χωρίζονται σε μια μονήρη κατάσταση τους

$$\frac{u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}}{\sqrt{3}} \rightarrow \eta'$$

και σε μια οκτάδα:



Isospin - οκτάδας



Η οκτάδα

Η μονήρης κατάσταση είναι η ίδια για όλους τους 8 $SU(3)$ πίνακες

Οι καταστάσεις της οκτάδας είναι όλες ορθογώνιες μεταξύ τους καθώς και στην μονήρη κατάσταση.

Για όλους τους $SU(3)$ πίνακες, οι καταστάσεις απλά γράφονται σαν περιστροφές, γραμμικούς συνδυασμούς των διαφόρων καταστάσεων.

Με τον ίδιο τρόπο που γράφονται οι τριπλές και μονήρεις καταστάσεις του spin

Το μοντέλο των quarks

Η δεκάδα των quarks μπορεί να φτιαχθεί με τον ίδιο αλλά υπάρχει ένα πρόβλημα:

- Τα βαρυόνια στις κορυφές αποτελούνται από 3 ίδια quarks με αποτέλεσμα να παραβιάζεται η απογορευτική αρχή του Pauli
- Στην πραγματικότητα η κατάσταση είναι χειρότερη, γιατί κάθε σωματίδιο μέλος της δεκάδας έχει spin 3/2 και επομένως τα 3 quarks έχουν τα spins τους ομόρροπα
- Όλα τα σωματίδια, εκτός του κεντρικού, έχουν 2 ίδια quarks
- Όλα τα σωματίδια της δεκάδας παραβιάζουν την απαγορευτική αρχή του Pauli
- ❑ Ο μόνος τρόπος για να βρεθεί λύση στο πρόβλημα αυτό είναι μέσω της εισαγωγής ενός νέου κβαντικού αριθμού, **χρώματος**, διαφορετικό για τα διάφορα quarks

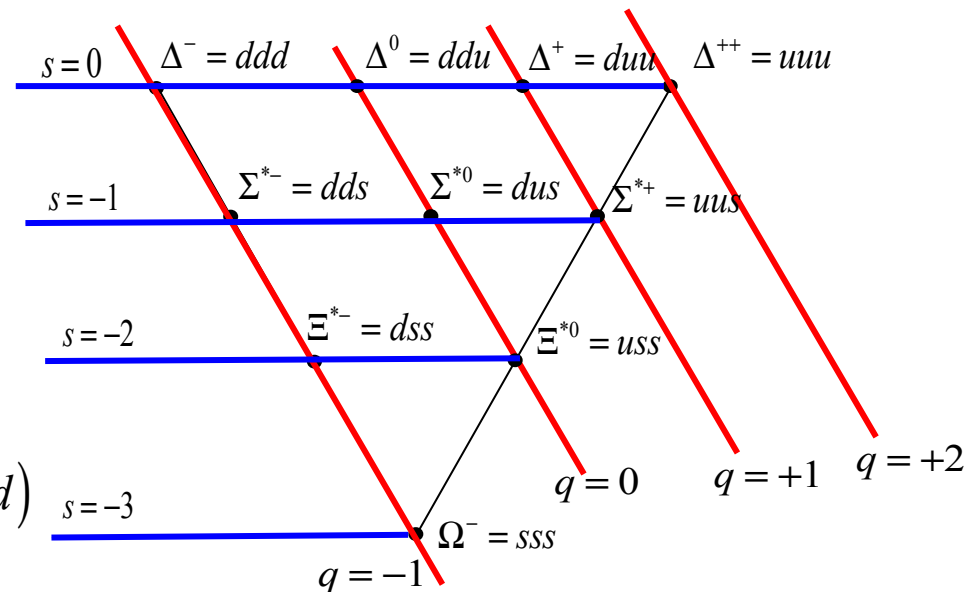
Επειδή οι 3 καταστάσεις στις κορυφές είναι συμμετρικές θα πρέπει όλες οι καταστάσεις να είναι συμμετρικές

Η πραγματικά συμμετρική κατάσταση

$$\Delta^0 = ddu \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}(ddu + udd + dud)$$

ενώ για την Σ^{*0} θα έχουμε:

$$\Sigma^{*0} = dus \rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}}(dsu + uds + sud + sdu + dus + usd)$$



Εισαγωγή χρώματος

Τα quarks έρχονται με 3 χρώματα. Τα ονομάζουμε **κόκκινο**, **μπλέ** και **πράσινο**

Τα βαρυόνια αποτελούνται από 3 quarks διαφορετικού χρώματος

- Η κυματοσυνάρτηση περιέχει τώρα και ένα επιπλέον όρο, αυτόν του χρώματος που συνοδεύει τον χωρικό όρο και τον όρο του spin
- Απαιτούμε ο όρος του χρώματος να είναι αντισυμμετρικός κάτω από εναλλαγή

$$rgb - rbg + gbr - grb + brg - bgr$$

- Τότε αν το χωρικό τμήμα και το τμήμα του spin είναι συμμετρικά κάτω από εναλλαγή, τότε όλη η κυματοσυνάρτηση είναι αντισυμμετρική και ικανοποιείται η απαγορευτική αρχή του Pauli
- Αυτό απαιτεί ακριβώς 3 quarks ή ένα ζεύγος quark-anti-quark

Εγκλωβισμός χρώματος

- Οι φορείς της δύναμης, τα gluons, πρέπει να μεταφέρουν το φορτίο του χρώματος και επομένως αλληλεπιδρούν μεταξύ τους
 - Οι γραμμές του χρωματικού πεδίου έλκουν η μια την άλλη
 - Σαν αποτέλεσμα το πεδίο χρώματος μεταξύ δυο απομακρυνσμένων quarks, τείνουν να δημιουργούν μια χρωματική χορδή, η οποία έχει ακριβώς την ίδια δύναμη σε οποιαδήποτε σημείο πάνω στην χορδή.
 - Η ενέργεια του χρωματικού πεδίου της χορδής είναι ανάλογη του μήκους της
-
- ❑ Αν τεντωθεί η χρωματική χορδή αρκετά, η ενέργεια είναι αρκετή ώστε να δημιουργηθεί ένα ζεύγος quark – anti-quark στο μέσο της χορδής
 - ❑ Η δημιουργία του ζεύγους αυτού τερματίζει τις γραμμές του πεδίου στις ενδιάμεσες υπο-χορδές
 - ❑ Η προσπάθεια να εξαχθεί ένα quark έξω από ένα αδρόνιο καταλήγει πάντοτε στην δημιουργία ενός μεσονίου αντί για ένα ελεύθερο quark

Απλός τύπος μάζας αδρονίων

- ❑ Υποθέτουμε ότι το u και d quarks έχουν την ίδια μάζα, το s-quark έχει μάζα λίγο μεγαλύτερη και ότι υπάρχει μια αλληλεπίδραση μεταξύ των spins με μια μαγνητική ροπή χρώματος αντιστρόφως ανάλογη της μάζας:
- ❑ Σε αναλογία με την αλληλεπίδραση μεταξύ μαγνητικών διπολικών ροπών: $\vec{\mu}_i = \frac{e_i}{2m_i} \vec{s}_i$
- ❑ Η ενέργεια αλληλεπίδρασης είναι ανάλογη του: $\vec{\mu}_i \vec{\mu}_j / r_{ij}^3$
- ❑ Η ενέργεια που οφείλεται στην αλληλεπίδραση διπόλου-διπόλου σε S-σχετική κατάσταση είναι:

$$\Delta E = \frac{2\pi}{3} \frac{e_i e_j}{m_i m_j} |\psi(0)|^2 \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j$$
- ❑ όπου $\psi(0)$ η κυματοσυνάρτηση του συστήματος των δυο σωματιδίων στην αρχή των αξόνων $r_{ij}=0$ ενώ ο αριθμητικός συντελεστής οφείλεται σε γωνιακή ολοκλήρωση της κυματοσυνάρτησης
- ❑ Στα quarks το ηλεκτρικό φορτίο είναι ασθενές για να προκαλέσουν ισχυρή αλληλεπίδραση στη κλίμακα των αδρονικών μαζών. Υποθέτουμε ότι το χρώμα όμως σαν φορτίο μπορεί να προκαλέσει ανάλογη διπολική ροπή οπότε η αλληλεπίδραση μπορεί να γραφεί σαν

$$M = m_1 + m_2 + A \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{m_1 m_2}$$

Απλός τύπος μάζας αδρονίων

- Εφόσον : $J^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ θα έχουμε: $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2}(J^2 - S_1^2 - S_2^2)$
 ή διαφορετικά $-\frac{3}{4}\hbar^2$ για $J=0$ και $\frac{1}{4}\hbar^2$ για $J=1$
- Θεωρώντας ότι οι μάζες των quarks είναι: $m_u = m_d = 0.307 GeV$ και $m_s = 0.490 GeV$
 και ότι: $A = 0.06 GeV^3$ ο τύπος δουλεύει αρκετά καλά
- Η σχέση δουλεύει αρκετά καλά ακόμα και αγνοώντας οποιοδήποτε τύπο δυναμικού ή κινητικής ενέργειας για την σύζευξη
- Ο παράγοντας για τον όρο της spin-spin αλληλεπίδρασης θα πρέπει να εξαρτάται από την απόσταση μεταξύ των quarks που κανονικά θα διαφέρει σε μεσόνια και βαρυόνια. Αυτό μπορεί να απορροφά μέρος της διαφοράς σε κινητική και δυναμική ενέργεια
- Ο όρος μάζα που χρησιμοποιήθηκε παραπάνω αναφέρεται σε μάζα συστατικού
- Οι ενδείξεις από πειράματα σκέδασης πρωτονίου – ηλεκτρονίου είναι ότι η μάζα των u και d quarks είναι πολύ μικρότερη και της τάξης των MeV
 Η μικρή αυτή μάζα ονομάζεται τρέχουσα μάζα.