ΦΥΣ 145 – Υπολογιστικές Μέθοδοι στη Φυσική

Τελική εξέταση **25 Μάη 2006** **Ομάδα $2^{η}$**

Γράψτε το ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητάς σας στο πάνω μέρος της αυτής της σελίδας.

Πρέπει να απαντήσετε και στα 5 προβλήματα που σας δίνονται. Τα προβλήματα είναι ισότιμα. Η σειρά με την οποία δίνονται δεν είναι αντιπροσωπευτική της δυσκολίας τους.

Πριν ξεκινήσετε διαβάστε προσεκτικά όλα τα προβλήματα. Ξεκινήστε από αυτό που νομίζετε ευκολότερο και συνεχίστε στα υπόλοιπα. Τα προγράμματά σας θα πρέπει να κάνουν compilation και να περιέχουν κάποια σχόλια για την κατανόηση του τι κάνετε.
Όλα τα προγράμματά σας θα πρέπει να τα στείλετε με e-mail στο phy145@ucy.ac.cy σε ένα και μοναδικό tar file το οποίο θα περιέχει στο όνομά του το username σας και την ομάδα στην οποία ανήκετε: π.χ. ph0xxx_groupb.tar
Μην ξεχάσετε να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας και αριθμό ταυτότητας σε κάθε file που αντιστοιχεί στο πρόγραμμα που στέλνετε.

Ο χρόνος εξέτασης είναι 4 ώρες.

Από τη στιγμή αυτή δεν υπάρχει συνεργασία/συζήτηση, ανταλλαγή αρχείων και e-mails με κανένα και πλάγιες ματιές στην οθόνη του διπλανού σας. Όλα τα κινητά θα πρέπει να παραμείνουν κλειστά. Σημειώσεις, χαρτάκια κλπ απαγορεύονται όπως και επισκέψεις σε ιστοσελίδες ή accounts που δεν αναφέρονται στην ιστοσελίδα του μαθήματος.
Καλή επιτυχία

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ</u>

1. Θεωρήστε ότι ρίχνεται ένα κέρμα 100 φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να πάρετε ακριβώς 50 φορές γράμματα; Πως αλλάζει αυτή η πιθανότητα αν ο αριθμός των δοκιμών ρίψης του νομίσματος αυξηθεί σε 200; Νομίζετε ότι το αποτέλεσμα έχει νόημα; Εξηγήστε. Για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρησιμοποιήστε την προσέγγιση Poisson: $P(n;a) = \dfrac{a^n e^{-a}}{n!}$.

2. Να γραφεί ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει το ολοκλήρωμα $\int_0^2 \exp(-x)\sin(x)dx$ με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Simpson. (*Υπόδειξη*: Η επιθυμητή ακρίβεια επιτυγχάνεται όταν η διαφορά της τρέχουσας τιμής από την προηγούμενη είναι μικρότερη από την ζητούμενη ακρίβεια).

3. Θεωρήστε ένα σύστημα αποτελούμενο από τον ποδηλάτη και το ποδήλατό του. Το σύστημα έχει μάζα m και κινείται από την ισχύ που καταναλώνει ο ποδηλάτης, $P = dE/dt$, όπου E η ενέργεια που αποδίδει και t ο χρόνος. Υποθέστε ότι όλη αυτή η ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια $E = m\upsilon^2/2$, όπου υ η ταχύτητα του συστήματος. Μπορεί να δειχθεί ότι:

$$\frac{dE}{dt} = m\upsilon\frac{d\upsilon}{dt} \quad (1) \qquad \text{και} \qquad \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{P}{m\upsilon} \quad (2)$$

Αυτή η τελευταία σχέση έχει αναλυτική λύση $\upsilon(t)$. Αν η υ_0 είναι η ταχύτητα του ποδηλάτη τη στιγμή $t = 0$, τότε η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης υποθέτοντας σταθερή ισχύ P, δίνει: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2Pt/m}$. Η εξίσωση αυτή είναι αφύσικη γιατί ουσιαστικά η ταχύτητα θα αυξάνει συνεχώς με το χρόνο. Η αφύσικη αυτή κατάσταση διορθώνεται λαμβάνοντας υπ' όψη και την αντίσταση του αέρα F_d, όπου $F_d = -C\upsilon^2$ και C = σταθερά. Θεωρώντας την μέθοδο του Euler, και μικρές μεταβολές, η παράγωγος της ταχύτητας γράφεται ως: $\frac{d\upsilon}{dt} \approx \frac{\upsilon_{i+1} - \upsilon_i}{\Delta t}$ και επομένως η εξίσωση (2) μπορεί να προσεγγιστεί με τη μορφή:

$$\upsilon_{i+1} = \upsilon_i + \frac{P}{m\upsilon_i}\Delta t \,.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη και την αντίσταση του αέρα η εξίσωση γίνεται:

$$\upsilon_{i+1} = \upsilon_i + \frac{P}{m\upsilon_i}\Delta t - C\upsilon_i^2\Delta t \,.$$

Θεωρώντας $P = 400W$, $m = 70kgr$, $C = 0.1$ και αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 4m/s$ να γραφεί ένα πρόγραμμα το οποίο να λύνει την διαφορική εξίσωση της ταχύτητας για Δt = 0.1s και χρονικό διάστημα 200s, αρχικά αγνοώντας την αντίσταση του αέρα και κατόπιν λαμβάνοντάς την υπ' όψη. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις της ταχύτητας $\upsilon(t)$ συναρτήσει του χρόνου και για τις δύο περιπτώσεις. Να αναφέρετε τις παρατηρήσεις σας σχετικά με τα γραφήματα που παίρνετε.

4. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο LU να λυθεί το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$
\begin{aligned}
x + y + 2z &= 9 \\
2y - 7z &= -17 \\
3y - 11z &= -27
\end{aligned}
$$

Και να επαληθευτεί το αποτέλεσμα που παίρνετε με τους αναλυτικούς υπολογισμούς σας.

5. Να γραφεί ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει τη σειρά $\exp(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$ για τιμές του x στο διάστημα από 0 έως 100 με βήμα 10 και με ακρίβεια *1.0E-10*.

Bonus: Πως θα μπορούσατε να υπολογίσετε τη σειρά γράφοντάς την λίγο διαφορετικά αποφεύγοντας έτσι τον υπολογισμό του παραγοντικού;