

**ΦΥΣ. 211**  
**1<sup>η</sup> ΠΡΟΟΔΟΣ 8-Μάρτη-2014**

Πριν ξεκινήσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, αριθμό ταυτότητας) στο πάνω μέρος της σελίδας αυτής.

Για τις λύσεις των ασκήσεων θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε μόνο τις σελίδες που σας δίνονται. Μην κόψετε καμιά από τις σελίδες που σας δίνονται.

Προσπαθήστε να δείξετε τη σκέψη σας και να γράψετε καθαρές εξισώσεις. Για πλήρη ή μερική βαθμολόγηση θα πρέπει να φαίνεται καθαρά το τι προσπαθείτε να δείξετε.

Σας δίνονται 5 ισοδύναμες ασκήσεις και πρέπει να απαντήσετε σε όλες. Σύνολο μονάδων 100.

Διαβάστε πρώτα όλες τις ασκήσεις και προσπαθήστε να σκεφτείτε τι περίπου χρειάζεται να κάνετε. Η σειρά των προβλημάτων δεν αντικατοπτρίζει τη δυσκολία τους.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 150 λεπτά.

**Καλή επιτυχία.**

### Ενεργό δυναμικό

$$U_{eff}(r) = U(r) + U_{cf}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

### Μετασχηματισμένη ακτινική Δ.Ε. τροχιάς:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u + \frac{\mu}{l^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) = 0, \text{ όπου } u = \frac{1}{r}$$

### Ενέργεια τροχιάς:

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)$$

### Τροχιές Kepler:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{\gamma}{r^2} \text{ λύση ακτινικής εξίσωσης είναι: } r(\theta) = \frac{c}{1 + e \cos \theta}, \text{ με } c = \frac{l^2}{\gamma \mu}$$

$$\text{Εκκεντρότητα (e): } E = \frac{\gamma^2 \mu}{2l^2} (e^2 - 1) \text{ όπου } E = \text{Ενέργεια}$$

Εκκεντρότητα	Ενέργεια	Είδος Τροχιάς
$0 < e < 1$	$E < 0$	ελλειπτική
$e = 1$	$E = 0$	παραβολική
$e > 1$	$E > 0$	υπερβολική

$$\text{Περιήλιο: } r_{\min} = \frac{c}{1 + e}$$

$$\text{Αφήλιο: } r_{\max} = \frac{c}{1 - e}$$

$$\text{Μεγάλος ημιάξονας: } a = \frac{c}{1 - e^2}$$

$$\text{Μικρός ημιάξονας: } b = \frac{c}{\sqrt{1 - e^2}}$$

### Νόμοι Kepler:

1<sup>ος</sup> νόμος: τροχιές πλανητών είναι ελλείψεις με τον ήλιο σε μια από τις εστίες της έλλειψης

$$2^{\text{ος}} \text{ νόμος: } \frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu}$$

$$3^{\text{ος}} \text{ νόμος: } T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_H} a^3$$

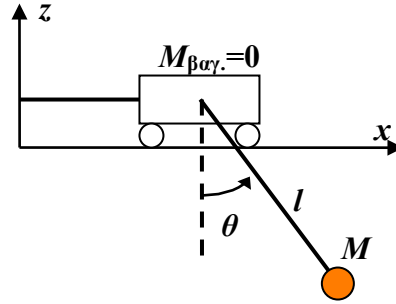
### Ενεργός διαφορική διατομή σκέδασης:

$$\sigma(\Theta) = \frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega} \bigg|_{\text{KM}} = \frac{b(\Theta)}{\sin \Theta} \left| \frac{db}{d\Theta} \right|$$

### Ενεργός διαφορική διατομή σκέδασης Rutherford:

$$\sigma(\Theta) = \frac{1}{4} \left( \frac{ZZ'e^2}{2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \left( \frac{\Theta}{2} \right)}$$

1. Ένα εκκρεμές μάζας  $M$  και μήκος  $l$ , είναι εξαρτημένο από ένα αβαρές βαγονάκι το οποίο με την σειρά του εξαρτάται μέσω ενός εμβόλου από ακλόνητο σημείο. Το βαγονάκι μπορεί να κινηθεί στην οριζόντια διεύθυνση και καθώς κινείται δέχεται την επίδραση της δύναμης  $\vec{F} = -kx\hat{i}$  εξαιτίας του εμβόλου. Όταν το σύστημα είναι ακίνητο το έμβολο έχει φυσικό μήκος  $l_0$ . Η μάζα του εκκρεμούς μπορεί να κινείται μόνο στο κατακόρυφο επίπεδο  $x$ - $z$ .



(α) Να βρεθεί η Lagrangian του συστήματος **(8π)**

(β) Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης. **(5π)**

(γ) Να βρεθεί η συχνότητα ταλάντωσης του εκκρεμούς για την περίπτωση μικρών αποκλίσεων (μικρές τιμές  $\theta$ ) από την θέση ισορροπίας και να εξεταστεί η τιμή της συχνότητας για την περίπτωση που το βαγονάκι είναι ακίνητο. **[7π]**

[Υπόδειξη για το ερώτημα (γ): για μικρές αποκλίσεις από την θέση ισορροπίας  $\cos\theta \approx 1$  και  $\sin\theta \approx \theta$  ενώ όροι δεύτερης ή μεγαλύτερης τάξης σε  $\theta$  θεωρούνται αμελητέοι. Θα σας φανεί χρήσιμο να βγάλετε μια σχέση μεταξύ των γενικευμένων συντεταγμένων χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης στις οποίες καταλήξατε.]

2. (α) Ξεκινώντας από τις ακόλουθες συναρτήσεις Hamilton να βρεθούν οι αντίστοιχες συναρτήσεις Lagrange  $\mathcal{L}$ :

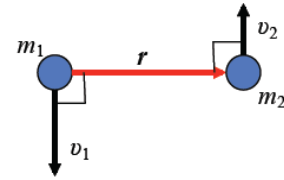
(i)  $H = \frac{p^2}{2m} + \lambda qp + \frac{1}{2} kq^2$ , όπου  $\lambda$  και  $k$  είναι σταθερές. **(4β)**

(ii)  $H = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$ , όπου  $c$  είναι σταθερά. **(6β)**

(iii)  $H = \frac{p_1^2}{2m} + \lambda p_1 p_2 + ax_2^4$ , όπου  $m$ ,  $\lambda$  και  $a$  είναι σταθερές. **(4β)**

- (β) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης του Hamilton και για τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις. **(6β)**

3. Θεωρήστε δυο σώματα με μάζες  $m_1 = 5\text{kg}$  και  $m_2 = 10\text{kg}$  αντίστοιχα και αρχικές ταχύτητες  $v_1$  και  $v_2$ . Η αρχική απομάκρυνση μεταξύ των σωμάτων είναι  $\vec{r}$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το διάνυσμα της ταχύτητας  $\vec{v}_1$  έχει κατεύθυνση προς τα κάτω και μέτρο  $v_1 = 4\text{m/s}$  ενώ το διάνυσμα της ταχύτητας  $\vec{v}_2$  έχει μέτρο  $v_2 = 1\text{m/s}$  και διεύθυνση προς τα πάνω. Τα δυο σώματα αλληλεπιδρούν μέσω ενός ελκτικού δυναμικού  $U = -\frac{k}{r}$  όπου  $k = 50\text{Jm}$ .



- (α) Πόσο μακριά από τη μάζα  $m_1$  βρίσκεται το κέντρο μάζας των δυο σωμάτων; Δώστε την απάντησή σας συναρτήσει της  $\vec{r}$ . [1π]
- (β) Ποια είναι η τιμή της ανηγμένης μάζας των δύο σωμάτων; [1π]
- (γ) Ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας; Θα πρέπει να προσδιορίσετε το μέτρο και την διεύθυνσή της. [2π]
- (δ) Υποθέστε ότι η  $\vec{r}$  στο παραπάνω σχήμα έχει μέτρο  $2m$ . Καθώς τα σώματα κινούνται κάτω από την επίδραση της ελκτικής αλληλεπίδρασής τους, η απόστασή τους,  $\vec{r}(t)$ , παραμένει φραγμένη ή όχι; Θα πρέπει να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. [6π]
- (ε) Για ποια τιμή του  $\vec{r}$  στο παραπάνω σχήμα, η απόσταση  $|\vec{r}|$  μεταξύ των δυο σωμάτων θα παραμείνει σταθερή με το χρόνο; [5π]
- (στ) Υποθέστε ότι η  $\vec{r}$  στο παραπάνω σχήμα έχει μέτρο  $1m$ . Καθώς τα σώματα κινούνται με την πάροδο του χρόνου, το διάνυσμα της απόστασής τους,  $\vec{r}(t)$ , θα παραμείνει φραγμένο. Ποια θα είναι η ελάχιστη και μέγιστη τιμή της απόστασής τους; [5π]

4. Σωματίδια μάζας  $m_1$  και  $m_2$  αλληλεπιδρούν μέσω ενός δυναμικού  $U = kr^4$ , όπου  $r$  είναι η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων. Δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις που ενεργούν στο σύστημα και το κέντρο μάζας βρίσκεται σε ηρεμία. Το μέγεθος της στροφορμής του συστήματος είναι  $l$ .

(α) Σχεδιάστε το ενεργό δυναμικό  $U_{\text{eff}}$  συναρτήσει της απόστασης  $r$ . Λύστε ως προς  $r_{\text{eq}}$  μεταξύ των σωματιδίων η οποία αντιστοιχεί σε κυκλική τροχιά. Η έκφρασή σας θα πρέπει να συνδέει την  $r_{\text{eq}}$  με τη στροφορμή  $l$ . Προσδιορίστε την  $r_{\text{eq}}$  στο διάγραμμά σας. [5π]

(β) Υποθέτοντας ότι η στροφορμή,  $\vec{L}$ , είναι στη  $z$ -διεύθυνση και θεωρώντας την αρχή του συστήματος συντεταγμένων να συμπίπτει με το κέντρο μάζας, να βρεθούν τα διανύσματα θέσης  $\vec{r}_1(t)$  και  $\vec{r}_2(t)$  και να σχεδιαστούν οι τροχιές των  $m_1$  και  $m_2$  (σχεδιάστε τις τροχιές στο ίδιο διάγραμμα και θυμηθείτε ότι  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ). [4π]

(γ) Κάντε ένα άλλο διάγραμμα της  $U_{\text{eff}}$  συναρτήσει της  $r$ . Υποθέτοντας μια ενέργεια,  $E$ , μεγαλύτερη από αυτή που αντιστοιχεί στην κυκλική τροχιά, προσδιορίστε στο διάγραμμά σας την ελάχιστη και μέγιστη απόσταση  $r_{\text{min}}$  και  $r_{\text{max}}$ . [4π]

(δ) Αποδείξτε τη σχέση μεταξύ της δεύτερης παραγώγου του  $U_{\text{eff}}$  και της συχνότητας,  $\omega$ , ταλαντώσεων μικρού πλάτους γύρω από την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς  $r_{\text{eq}}$ . Χρησιμοποιείτε το αποτέλεσμα σας για να βρείτε το  $\omega$  για το πρόβλημα αυτό. [7π]

5. Θεωρήστε ότι έχετε ένα ρολό χαρτί το οποίο θέλετε να αφήσετε να ξετυλιχθεί από την κορυφή ενός κτιρίου ύψους  $20m$  κρατώντας την μια άκρη του χαρτιού. Ωστόσο θέλετε να είστε σίγουροι ότι το χαρτί του ρολό που θα χρησιμοποιήσετε είναι αρκετά ανθεκτικό και δεν θα σχιστεί καθώς το ρολό πέφτει προς το έδαφος και πως η ταχύτητα που θα αποκτήσει το ρολό όταν έχει πέσει  $20m$  δεν είναι αρκετά μεγάλη ώστε να τραυματίσει κάποιον περαστικό. Θεωρήστε ότι το ρολό έχει ακτίνα  $R$  και μάζα  $M$ . Θεωρήστε ακόμα ότι η μάζα του χαρτιού και το πάχος του δεν διαφοροποιούν την μάζα και διαστάσεις του ρολό, δηλαδή τα  $R$  και  $M$  είναι σταθερά κατά την πτώση του ρολό. Θεωρήστε ακόμα ότι η ροπή αδράνειας του ρολό είναι  $I = MR^2/2$ .

(α) Να βρεθεί η Lagrangian του ρολό που πέφτει από την κορυφή του κτιρίου κρατώντας το ελεύθερο άκρο του χαρτιού σταθερό. [5π]

(β) Χρησιμοποιήστε πολλαπλασιαστές Lagrange για να προσδιορίσετε τις εξισώσεις κίνησης. [8π]

(γ) Υπολογίστε την τάση στο χαρτί. [4π]

(δ) Υπολογίστε την κατακόρυφο επιτάχυνση και τελική ταχύτητα του ρολό αφού έχει διανύσει  $20m$ . Θεωρήστε ότι η αρχική του ταχύτητα είναι μηδενική. [3π]