Νόμος του Gauss

Ο Νόμος του Gauss

Νόμος Gauss

«Η συνολική ροή που διαπερνά μια κλειστή επιφάνεια *S* είναι ανάλογη του συνολικού φορτίου Q που περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια.»

Η μαθηματική διατύπωση του νόμου του Gauss είναι:

$$\boxed{\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{o\lambda}^S}{\varepsilon_0}}$$

όπου $q_{o\lambda.}^S$ το ολικό φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια *S*

Ένας απλός τρόπος να εξηγήσουμε γιατί ισχύει ο νόμος του Gauss είναι να θεωρήσουμε ότι το πλήθος των ηλεκτρικών γραμμών που εξέρχονται από το φορτίο είναι ανεξάρτητο από το είδος της νοητικής επιφάνειας Gauss που θα θεωρήσουμε ότι περικλείει το φορτίο

Απόδειξη του νόμου του Gauss

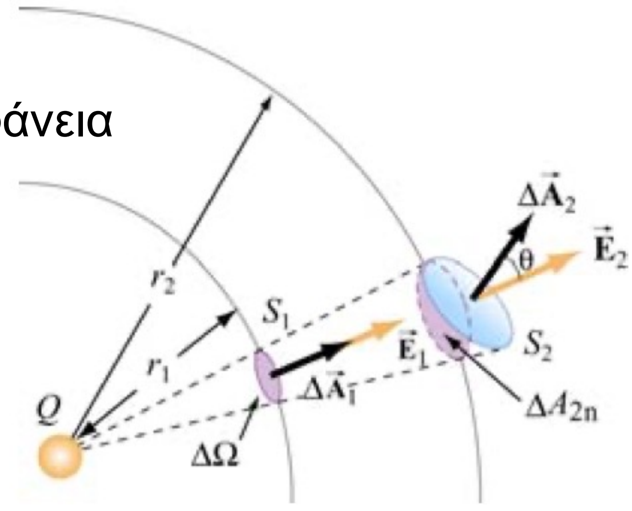
Για να αποδείξουμε το νόμο του Gauss, εισάγουμε την έννοια της στερεάς γωνίας.

Έστω $\Delta\vec{A} = \Delta A\hat{r}$ μια στοιχειώδης επιφάνεια της σφαιρικής επιφάνειας S_1 που έχει ακτίνα r_1, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Η στερεά γωνία ΔΩ, που υπόκειται στην στοιχειώδη επιφάνεια $\Delta\vec{A}_i = \Delta A_i\hat{r}$ στο κέντρο της σφαίρας, ορίζεται από:

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A_i}{r_i^2}$$

Η στερεά γωνία είναι μια αδιάστατη ποσότητα που μετριέται σε steradians.

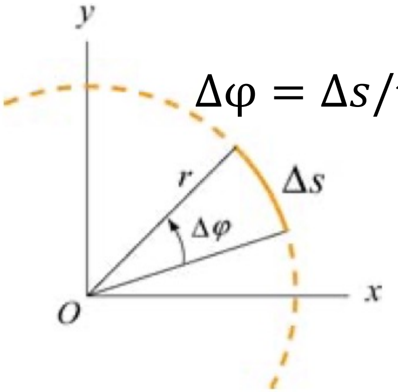


Εφόσον η επιφάνεια μιας σφαίρας είναι $4\pi r^2$, η στερεά γωνία που αντιστοιχεί στην επιφάνεια μιας σφαίρας θα είναι:

$$\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} \Rightarrow \Omega = 4\pi$$

Η έννοια της στερεάς γωνίας σε 3-διαστάσεις είναι ανάλογη της έννοιας της γωνίας σε 2 διαστάσεις: μια γωνία δφ είναι ο λόγος του μήκους ενός τόξου ως προς την ακτίνα του κύκλου

$$\Delta\varphi = \Delta s/r$$



Απόδειξη του νόμου του Gauss

Εφόσον το συνολικό μήκος της κυκλικής περιφέρειας είναι $s = 2\pi r$, η γωνία που καθορίζεται από τόξο ίσο με την περιφέρεια του κύκλου θα είναι $\varphi = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$

Στο σχήμα, η στοιχειώδης επιφάνεια $\Delta\vec{A}_2$ σχηματίζει γωνία θ με το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα $\hat{r}$. Η στερεά γωνία που καθορίζεται από την στοιχειώδη επιφάνεια $\Delta\vec{A}_2$ είναι:

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta\vec{A}_2 \cdot \hat{r}}{r_2^2} = \frac{\Delta \mathrm{A}_2 cos\theta}{r_2^2} = \frac{\Delta \mathrm{A}_{2n}}{r_2^2}$$

όπου ΔA_{2n} είναι το εμβαδό της ακτινικής προβολής της ΔA_2 σε μια δεύτερη σφαιρική επιφάνεια S_2 ακτίνας r_2 ομόκεντρης της S_1

Η στερεά γωνία που καθορίζεται από τις στοιχειώδεις επιφάνειες ΔA_1 και ΔA_2 είναι ακριβώς ίδια: $\Delta\Omega = \frac{\Delta A_1}{r_1^2} = \frac{\Delta \mathrm{A}_2 cos\theta}{r_2^2}$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ένα σημειακό φορτίο Q εισάγεται στο κέντρο των δύο ομόκεντρων σφαιρών. Το ηλεκτρικά πεδία E_1 και E_2 στο κέντρο των δύο στοιχειωδών επιφανειών ΔA_1 και ΔA_2 σχετίζονται με βάση το νόμο του Coulomb:

$$E_i = \frac{\mathrm{Q}}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Απόδειξη του νόμου του Gauss

Η ροή που διαπερνά την στοιχειώδη επιφάνεια ΔA_1 της σφαίρας S_1 είναι:

$$\Delta\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{A}_1 = E_1 \Delta A_1$$

Η ροή που διαπερνά την στοιχειώδη επιφάνεια ΔA_2 της σφαίρας S_2 είναι:

$$\Delta\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \Delta\vec{A}_2 = E_2 \Delta A_2 cos\theta$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση μεταξύ των εντάσεων του ηλεκτρικού πεδίου στις ΔA_1 και ΔA_2 θα πάρουμε:

$$\Delta\Phi_2 = E_2 \Delta A_2 cos\theta = E_1 \frac{r_1^2}{r_2^2}\frac{r_2^2}{r_1^2} \Delta A_1 \Rightarrow \Delta\Phi_2 = E_1 \Delta A_1 = \Delta\Phi_1$$

Βλέπουμε επομένως ότι η ηλεκτρική ροή μέσω μιας τυχαίας στοιχειώδους επιφάνειας που καθορίζει σταθερή στερεά γωνία είναι σταθερή, ανεξάρτητα του σχήματος της επιφάνειας ή του προσανατολισμού της.

Ο νόμος του Gauss παρέχει έναν εύκολο τρόπο για τον υπολογισμό ηλεκτρικών πεδίων. Ωστόσο η χρήση του περιορίζεται σε συστήματα με συγκεκριμένη συμμετρία, κυλινδρική, σφαιρική ή επίπεδη.

Νόμος του Gauss – εφαρμογή

Παραδείγματα στα οποία μπορούμε να εφαρμόσουμε τον νόμο του Gauss, για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου, με τις αντίστοιχες επιφάνειες Gauss φαίνονται στον πίνακα.

Συμμετρία	Σύστημα	Επιφάνεια Gauss
Κυλινδρική	Ράβδος άπειρου μήκους	Ομοαξονικός κύλινδρος
Επίπεδη	Επίπεδο άπειρου μήκους	Gaussian κύλινδρος
Σφαιρική	Σφαίρα, Σφαιρικός φλοιός	Ομόκεντρη σφαίρα

Τα ακόλουθα βήματα είναι εν γένει χρήσιμα όταν εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss.

(α) Αναγνώριση της συμμετρίας που σχετίζεται με την συγκεκριμένη κατανομή φορτίου.

(β) Προσδιορισμός της διεύθυνσης του ηλεκτρικού πεδίου και της επιφάνειας Gauss, όπου το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι σταθερό για τμήματα της επιφάνειας

(γ) Χωρισμός του χώρου σε διαφορετικές περιοχές που σχετίζονται με την κατανομή φορτίου. Για κάθε περιοχή, υπολογισμός του $q^{S}_{o\lambda.}$ που περικλείεται από την *S*

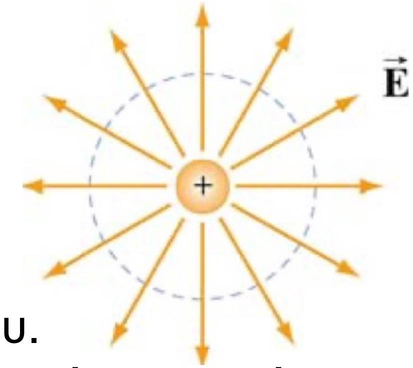
(δ) Υπολογισμός της ροής Φ_E που περνά κάθε περιοχή

(ε) Εξίσωση της ολικής ροής Φ_E με $q^{S}_{o\lambda.}/\varepsilon_0$ και εξαγωγή του μέτρου του πεδίου

Νόμος Gauss – ράβδος άπειρου μήκους

Μια ράβδος άπειρου μήκους και αμελητέας ακτίνας έχει ομοιόμορφη γραμμική πυκνότητα φορτίου λ. Να υπολογίσετε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση *r* από τη ράβδο

- Θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο χρησιμοποιώντας τα βήματα της μεθοδολογίας που αναφέραμε προηγουμένως.

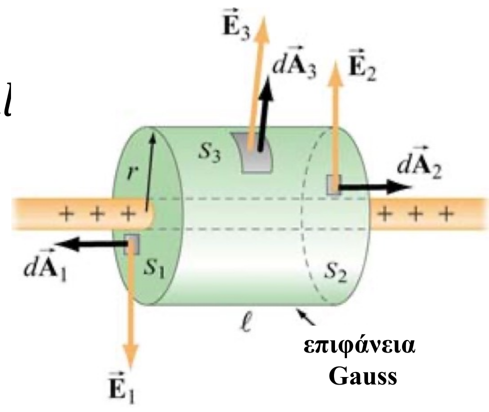


1) Μια απείρου μήκους ράβδος χαρακτηρίζεται από κυλινδρική συμμετρία.
2) Η πυκνότητα φορτίου είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο μήκος της ράβδου και το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ πρέπει να έχει διεύθυνση ακτινική απομακρυνόμενο από τον άξονα της ράβδου.

   Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι σταθερό σε κυλινδρικές επιφάνειες ακτίνας *r*

- Επιλέγουμε ως νοητική επιφάνεια Gauss αυτή ενός ομοαξονικού κυλίνδρου.

3) Η ποσότητα φορτίου που περικλείεται από την επιφάνεια Gauss (ένας κύλινδρος ακτίνας r και μήκους l) είναι $q_{o\lambda.}^{S} = \lambda l$



4) Η επιφάνεια Gauss αποτελείται από 3 τμήματα: τις 2 βάσεις S_1 και S_2 και το κυλινδρικό τοίχωμα S_3. Η ροή που διαπερνά την επιφάνεια Gauss είναι:

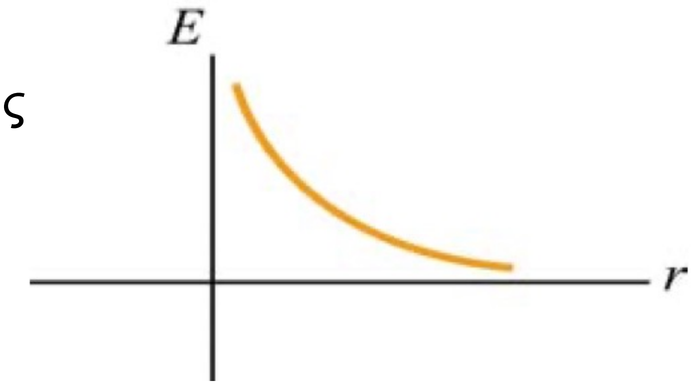
$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{A}_2 + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot d\vec{A}_3 = 0 + 0 + E_3 A_3 = E(2\pi r l)$$

Εφαρμογή νόμου Gauss – ράβδος απείρου μήκους

Στον προηγούμενο υπολογισμό, θέσαμε $E_1 = E_2 = 0$ γιατί δεν υπάρχει ηλεκτρική ροή μέσω των δύο βάσεων της επιφάνειας Gauss αφού τα διανύσματα των επιφανειών $d\vec{A}_1$ και $d\vec{A}_2$ είναι κάθετα στο ηλεκτρικό πεδίο το οποίο είναι στην ακτινική διεύθυνση.

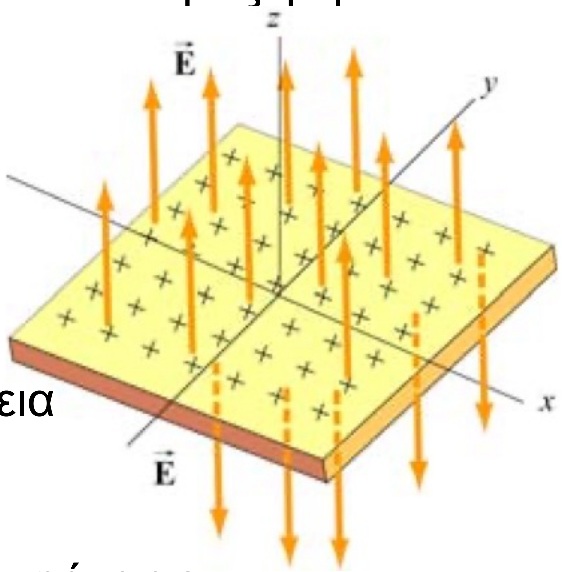
5) Εφαρμογή του νόμου του Gauss δίνει: $E(2\pi r l) = \dfrac{q^{S}_{o\lambda.}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\lambda l}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$

- Πλήρης συμφωνία με το αποτέλεσμα που βρήκαμε χρησιμοποιώντας τον νόμο του Coulomb.
- Το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από το μήκος l του κυλίνδρου και εξαρτάται μόνο από την απόσταση r από τον άξονα συμμετρίας.
- Η μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου συναρτήσει της απόστασης από τον άξονα συμμετρίας φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Νόμος Gauss – άπειρη επίπεδη επιφάνεια

Μια επίπεδη επιφάνεια απείρων διαστάσεων και επιφανειακής πυκνότητας φορτίου σ. Να υπολογίσετε το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο

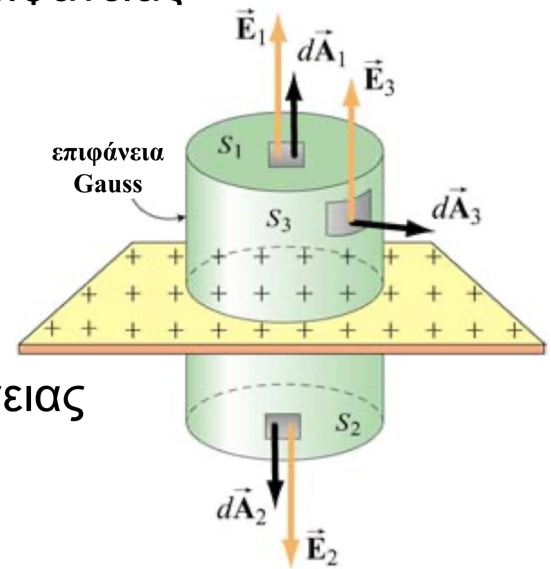


- Ακολουθούμε τα βήματα της μεθοδολογίας.

1) Ένα απείρων διαστάσεων επίπεδο χαρακτηρίζεται από επίπεδη συμμετρία.

2) Το φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνεια και επομένως το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνεια και με κατεύθυνση απομακρυνόμενο από την επιφάνεια, $\vec{E} = E\hat{k}$. Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι σταθερό σε επίπεδα τα οποία είναι παράλληλα προς το επίπεδο της επιφάνειας

- Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss έναν κύλινδρο. Η επιφάνεια αποτελείται από τρεις επιμέρους επιφάνειες, δύο βάσεις S_1 και S_2 και το κυλινδρικό τοίχωμα S_3.



3) Εφόσον η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι σταθερή, το φορτίο που εμπεριέχεται στην επιφάνεια Gauss θα είναι

$q^{S}_{o\lambda.} = \sigma A$ όπου A το εμβαδόν των δυο βάσεων της επιφάνειας Gauss

Νόμος Gauss – άπειρη επίπεδη επιφάνεια

4) Η ολική ροή που διαπερνά την επιφάνεια Gauss θα είναι:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \iint_{S_1} \vec{E}_1\cdot d\vec{A}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}_2\cdot d\vec{A}_2 + \iint_{S_3} \vec{E}_3\cdot d\vec{A}_3 = E_1A_1 + E_2A_2 + 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_E = A_1(E_1+E_2) \Rightarrow \quad \Phi_E = A(E_1+E_2)$$

Εφόσον οι δύο βάσεις έχουν την ίδια απόσταση από την επίπεδη επιφάνεια, λόγω συμμετρίας, το ηλεκτρικό πεδίο θα πρέπει να είναι το ίδιο $E_1 = E_2 = E$

Επομένως η ολική ροή θα είναι: $\Phi_E = 2EA$

5) Εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss οπότε θα πάρουμε:

$$\Phi_E = \frac{q^S_{o\lambda.}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

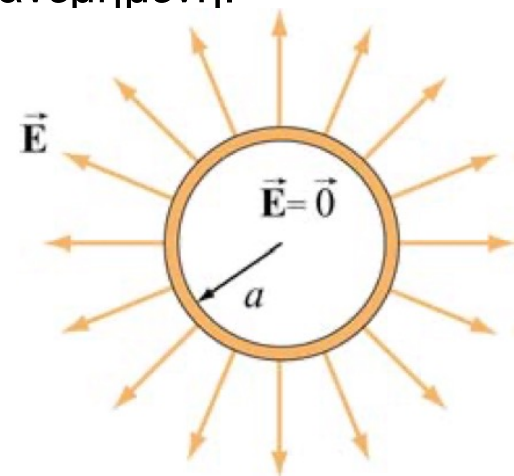
Χρησιμοποιώντας μοναδιαία διανύσματα θα έχουμε: $\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & z>0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & z<0 \end{cases}$

Καταλήγουμε στο αποτέλεσμα που βρήκαμε χρησιμοποιώντας τον νόμο του Coulomb:

Νόμος Gauss – ομοιόμορφα φορτισμένο σφαιρικό κέλυφος

Ένα λεπτό σφαιρικό κέλυφος ακτίνας a έχει φορτίο $+Q$ ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνειά του. Να υπολογίσετε το ηλεκτρικό πεδίο τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό του σφαιρικού κελύφους.

Η κατανομή του φορτίου είναι ομοιόμορφη και συμμετρικά κατανεμημένη.



Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου θα είναι: $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi a^2}$

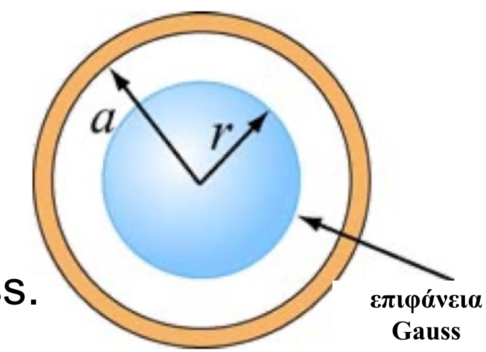
όπου $4\pi a^2$ η επιφάνεια του σφαιρικού κελύφους

Το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να είναι ακτινικά συμμετρικό και να έχει διεύθυνση προς τα έξω.

Θα εξετάσουμε τις περιοχές με $r \leq a$ και $r \geq a$ ξεχωριστά.

Περίπτωση 1: $r \leq a$

Επιλέγουμε την επιφάνεια Gauss να είναι μια σφαίρα ακτίνας $r \leq a$.



Το φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια Gauss είναι 0. εφόσον το φορτίο βρίσκεται στο εξωτερικό της επιφάνειας Gauss.

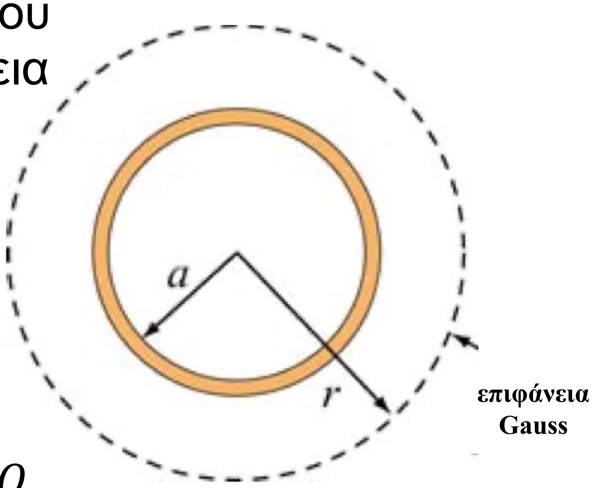
Επομένως από τον νόμο του Gauss, $\Phi_E = \dfrac{q^S_{o\lambda.}}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow EA = 0 \Rightarrow E$

Νόμος Gauss – ομοιόμορφα φορτισμένο σφαιρικό κέλυφος

Περίπτωση 2: $r \geq a$

Στην περίπτωση αυτή, η επιφάνεια Gauss είναι μια σφαίρα ακτίνας $r \geq a$.

Εφόσον η ακτίνα της επιφάνειας Gauss είναι μεγαλύτερη του σφαιρικού φλοιού, όλο το φορτίο περικλείεται στην επιφάνεια Gauss.



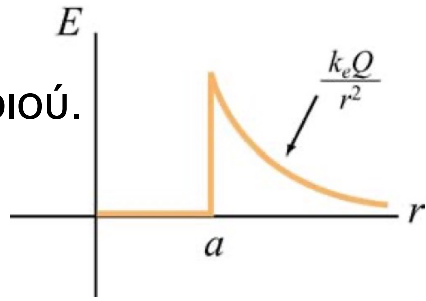
$$q_{o\lambda.}^{S} = Q$$

Η ηλεκτρική ροή μέσω της επιφάνειας Gauss, είναι:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA \Rightarrow \Phi_E = E4\pi r^2$$

Εφαρμογή του νόμου Gauss, δίνει: $E4\pi r^2 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \dfrac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$

Το ηλεκτρικό πεδίο έξω από τον σφαιρικό φλοιό είναι το ίδιο σαν να είχαμε όλο το φορτίο συγκεντρωμένο στο κέντρο του σφαιρικού φλοιού.



Η συμπεριφορά του ηλεκτρικού πεδίου *E*, συναρτήσει της απόστασης από το κέντρο του σφαιρικού κελύφους φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Όπως και στην περίπτωση της επίπεδης επιφάνειας υπάρχει μια ασυνέχεια καθώς οι γραμμές περνούν την επιφάνεια στη θέση $r = a$.

$$\Delta E = E_+ - E_- \Rightarrow$$
$$\Delta E = Q/4\pi\varepsilon_0 \alpha^2$$

Νόμος Gauss – ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα

Ένα ηλεκτρικό φορτίο +Q είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σε μια συμπαγή μη αγώγιμη σφαίρα ακτίνας *α*. Να υπολογίσετε το ηλεκτρικό πεδίο τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό της σφαίρας.

Η κατανομή του φορτίου είναι ομοιόμορφη και συμμετρικά κατανεμημένη και δίνεται

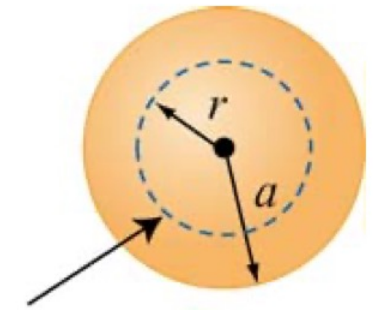
$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi\alpha^3}$$ όπου *V* ο όγκος της σφαίρας

Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ είναι ακτινικά συμμετρικό και η διεύθυνση του είναι προς τα έξω. Το μέτρο του είναι σταθερό σε σφαιρικές επιφάνειες ακτίνας r.

Όπως και προηγουμένως εξετάζουμε δύο περιπτώσεις, $r \leq a$ και $r \geq a$.

1η περίπτωση: $r \leq a$

Επιλέγουμε την επιφάνεια Gauss να είναι μία σφαίρα ακτίνας $r \leq \alpha$



Η ηλεκτρική ροή που διαπερνά την επιφάνεια Gauss είναι:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = E(4\pi r^2)$$

Με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου, το φορτίο που περικλείεται είναι:

$$q_{o\lambda.}^{S} = \int_V \rho dV = \rho V = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = Q\left(\frac{r^3}{a^3}\right)$$ που είναι ανάλογο του όγκου που περιέχει η επιφάνεια Gauss

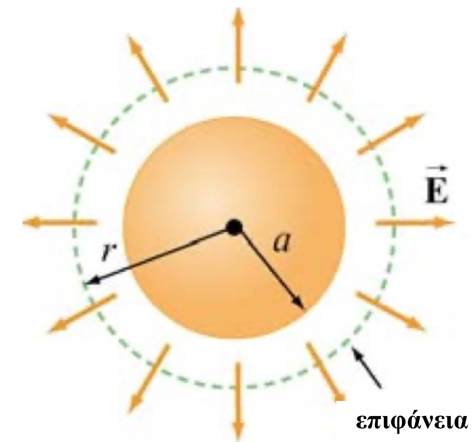
Νόμος Gauss – ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα

Εφαρμογή του νόμου Gauss, δίνει: $\Phi_E = E4\pi r^2 = \dfrac{q_{o\lambda.}^S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E4\pi r^2 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{r^3}{a^3}\right) \Rightarrow$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \alpha^3} r, \qquad r \le a}$$

2η περίπτωση: $r \ge a$

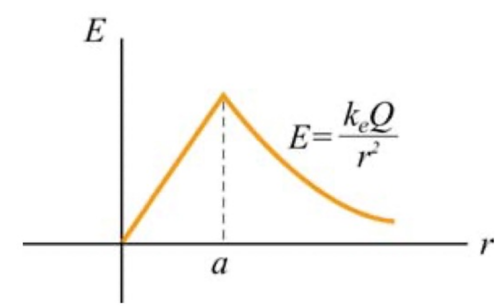
Στην περίπτωση αυτή η επιφάνεια Gauss είναι μία σφαίρα ακτίνας $r \ge \alpha$ που περικλείει όλο το φορτίο της σφαίρας. Επομένως $q_{o\lambda.}^S = \mathrm{Q}$



Η ροή που διαπερνά την επιφάνεια Gauss είναι: $\Phi_E = E4\pi r^2$

Εφαρμογή του νόμου Gauss, δίνει: $\Phi_E = E4\pi r^2 = \dfrac{q_{o\lambda.}^S}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad r \ge a}$$



Το πεδίο έξω από την σφαίρα είναι σαν όλο το φορτίο της σφαίρας να είναι συγκεντρωμένο στο κέντρο της