Μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς

- Μέχρι τώρα έχουμε χρησιμοποιήσει συστήματα αναφοράς όπως

(x, y, z) καρτεσιανό

- όπου ο 2^{ος} νόμος του Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ έχει την μορφή: $\begin{cases} \ddot{x} = f(x,y,z) \\ \ddot{y} = q(x,y,z) \\ \ddot{z} = h(x,y,z) \end{cases}$

- Πολύ συχνά χρησιμοποιούνται συντεταγμένες οι οποίες κινούνται ως προς τις στατικές καρτεσιανές συντεταγμένες

- Αν οι εξισώσεις κίνησης του Newton έχουν και πάλι την μορφή $\begin{cases} \ddot{x}' = f \\ \ddot{y}' = q \\ \ddot{z}' = h \end{cases}$
  - το νέο σύστημα συντεταγμένων είναι «αδρανειακό»
  - Γιατί έτσι, ο 1^{ος} νόμος του Newton σύμφωνα με τον οποίο ένα σώμα σε ηρεμία θα παραμείνει σε ηρεμία όταν δεν εφαρμόζονται δυνάμεις πάνω του εξακολουθεί να ισχύει
  - Για παράδειγμα ένα σύστημα συντεταγμένων με μορφή: $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{\upsilon}t$

    είναι αδρανειακό γιατί: $\ddot{\vec{x}}' = \ddot{\vec{x}}$

- Σε διαφορετική περίπτωση το σύστημα συντεταγμένων είναι «μη αδρανειακό»

Μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς

- Οι νόμοι της φυσικής είναι ανεξάρτητοι από το σύστημα συντεταγμένων
  - Αλλάζει μόνο η μορφή των εξισώσεων κίνησης
  - Για παράδειγμα: επιταχυνόμενο σύστημα συντεταγμένων: $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{f}(t)$
    - Αν η συνάρτηση $f(t)$ γραμμική με t έχουμε και πάλι αδρανειακό σύστημα
    - Μια πολύπλοκη μορφή της $f(t)$ περιγράφει επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς
  - Έστω σύστημα συντεταγμένων που κινείται με σταθερή επιτάχυνση:

$$y' = y + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \ddot{y}' = \ddot{y} + a$$

  - Εισαγωγή φανταστικής δύναμης λόγω επιτάχυνσης του συστήματος αναφοράς
  - Η φανταστική δύναμη υπάρχει επειδή γράψαμε την εξίσωση κίνησης σε μη αδρανειακό σύστημα
  - Έστω στο παραπάνω παράδειγμα, ότι βρισκόμαστε στην επιφάνεια της γης
    - Όλα τα σώματα υπόκεινται στην σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας: $\ddot{y} = -g$
    - Επιλέγω ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με επιτάχυνση: $a = g$
      - Στο σύστημα αυτό επομένως: $\Rightarrow \ddot{y}' = 0$
  - Επομένως, η βαρυτική δύναμη στην επιφάνεια της γης μπορεί να αφαιρεθεί κάνοντας αλλαγή του συστήματος αναφοράς – Αρχή της ισοδυναμίας

Περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων

- Σημεία για ξεκαθάρισμα:
  - Η κίνηση συμμβαίνει σε κάποιο περιστρεφόμενο σώμα και παρατηρείται
    - Είτε ως προς σύστημα αναφοράς «καρφωμένο» στο περιστρεφόμενο σώμα
    - Είτε ως προς εξωτερικό σύστημα αναφοράς – «αδρανειακό»/χωρικό
  - Το πρόβλημα της περιγραφής της κίνησης χωρίζεται σε 3 μέρη
    - Πως μετασχηματίζουμε τις συνιστώσες ενός διανύσματος μεταξύ των δυο συστημάτων αναφοράς? (για καθορισμένη περιστροφή)
      - Η απάντηση εξαρτάται από τον σχετικό προσανατολισμό των αξόνων στα δυο συστήματα αναφοράς και όχι από το διάνυσμα
    - Πως μετασχηματίζουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου το οποίο είναι ακίνητο στο ένα σύστημα αναφοράς στις συντεταγμένες του άλλου συστήματος όταν ένα από τα δυο συστήματα περιστρέφεται ως προς το άλλο
    - Πως μετασχηματίζουμε τις χρονικές παραγώγους διανυσμάτων από το ένα σύστημα συντεταγμένων στο άλλο.
      - Ο ρυθμός μεταβολής στο περιστρεφόμενο σύστημα προέρχεται από:

        (α) ρυθμό μεταβολής των συνιστωσών του διανύσματος όπως γίνεται αντιληπτός στο ένα σύστημα και μετασχηματίζεται στο άλλο σύστημα

        (β) μεταβολή του μετασχηματισμού μεταξύ των δυο συστημάτων

Περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων

- Σημεία για προσοχή:
  - Το μέτρο ενός διανύσματος παραμένει σταθερό ανεξάρτητα του συστήματος που επιλέγουμε για να το περιγράψουμε $\vec{r}^{\,2} = \sum_k r_k^2 = \sum_k r_k'^2$
  - Το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων είναι αμετάβλητο από αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_k a_k b_k = \sum_k a_k' b_k'$
  - Για να δούμε τον ακριβή μετασχηματισμό συντεταγμένων
    - ✓ Επιλέξτε δυο συστήματα με ίδια αρχή που διαφέρουν κατά μια περιστροφή
    - ✓ Θεωρήστε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i'$ (προβολή του άξονα i στον άξονα i') και το $\sum_i \vec{r}\cdot\vec{e}_i'$ το οποίο γράφεται: $\sum_i \left(\sum_k r_k \vec{e}_k \right)\cdot \vec{e}_i' = \sum_{i,k} r_k \vec{e}_k \cdot \vec{e}_i'$

      Αναλυτικά:

$$\left.\begin{aligned} r_1' &= r_1\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1' + r_2\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1' + r_3\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1' \\ r_2' &= r_1\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2' + r_2\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2' + r_3\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2' \\ r_3' &= r_1\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3' + r_2\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3' + r_3\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \\ r_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1' & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_1' & \vec{e}_3\cdot\vec{e}_1' \\ \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2' & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2' & \vec{e}_3\cdot\vec{e}_2' \\ \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3' & \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3' & \vec{e}_3\cdot\vec{e}_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

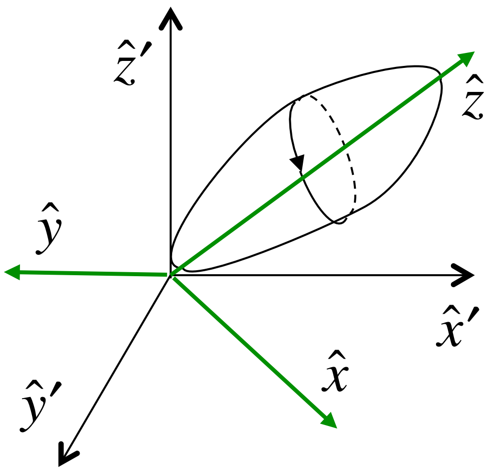
  - Ο παραπάνω μετασχηματισμός αποτελεί και τον ορισμό ενός διανύσματος
    - ✓ Αποφεύγεται η θεώρηση μέτρου και διεύθυνσης που απαιτούν καθορισμό συστήματος συντεταγμένων

Περιστρεφόμενα συστήματα αναφοράς

- Έστω ότι η θέση ενός σώματος ως προς στατικό καρτεσιανό σύστημα: $r_i' \quad i=1,2,3$
- ενώ η θέση ενός σώματος σχετικά με περιστρεφόμενο σύστημα είναι: $r_i \quad i=1,2,3$
- Το διάνυσμα θέσης επομένως στα δυο συστήματα αναφοράς θα είναι:

$\vec{r} = \sum_i r_i' \vec{e}_i'$ με $\vec{e}_i'$ τα διανύσματα των στατικών αξόνων συντεταγμένων

- Ανάλογα: $\vec{r} = \sum_i r_i \vec{e}_i$ με $\vec{e}_i$ τα διανύσματα των περιστρεφόμενων αξόνων
- Για κάποιο περιστρεφόμενο σώμα:



r_i' χωρικές συντεταγμένες = στατικές $\quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \\ r_3' \end{pmatrix}$

r_i συντεταγμένες σώματος = περιστρεφόμενες $\quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$

- Τι σημαίνει όμως ότι τα 2 συστήματα συντεταγμένων σχετίζονται μεταξύ τους μέσω περιστροφής?

Οι στατικοί άξονες, $\vec{e}_i'$, σχετίζονται με τους περιστρεφόμενους άξονες, $\vec{e}_i$, μέσω μιας γραμμικής σχέσης:

διάνυσμα με συνιστώσες διανύσματα $\quad \vec{e}_i = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\vec{e}_i} = \sum_j \boxed{U_{ij}} \boxed{\vec{e}_j'}$$

3×3 πίνακας μετασχηματισμού
πίνακας περιστροφής

Περιστρεφόμενα συστήματα αναφοράς

- Μπορούμε να γράψουμε: $\vec{e}_i = \sum_j U_{ij}\vec{e}'_j$
- Ο πίνακας περιστροφής U_{ij} εν γένει εξαρτάται από τον χρόνο t, άρα έχουμε $U_{ij}(t)$
- Η σύνδεση με τις συνιστώσες θέσης ενός σώματος μέσω του μετασχηματισμού:

$$\vec{r} = \sum_i r_i\vec{e}_i = \sum_{ij} U_{ij}\, r_i\, \vec{e}'_j = \left(\sum_{ij} U_{ji}\, r_j\right)\vec{e}'_i$$

  - και θέλουμε να το συγκρίνουμε με: $\vec{r} = \sum_i r'_i \vec{e}'_i$ εφόσον $\vec{r}$ είναι αμετάβλητο
- Η σχέση μεταξύ των «χωρικών» και «περιστροφικών» συντεταγμένων: $r'_i = \sum_j r_j U_{ji}$
  - και θα μπορούσαμε να το γράψουμε με την μορφή: $r'_i = \sum_j U^{\mathrm{T}}_{ij} r_j$
- Ο πίνακας U_{ij} έχει την ιδιότητα ότι τα $\vec{e}'_i$ και $\vec{e}_i$ είναι ορθοκανονική βάση: $\begin{cases} \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \delta_{ij} \\ \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \end{cases}$

  δηλαδή τα μετασχηματισμένα διανύσματα παραμένουν ορθοκανονικά

  Ορισμός περιστροφής

- Από την σχέση $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ και την $\vec{e}_i = \sum_j U_{ij}\vec{e}'_j$ θα έχουμε:

$$\left(\sum_k U_{ik}\vec{e}_k{}'\right)\cdot\left(\sum_l U_{jl}\vec{e}_l{}'\right) = \delta_{ij} \Rightarrow \left(\sum_{k,l} U_{ik}U_{jl}\vec{e}_k{}'\cdot\vec{e}_l{}'\right) = \delta_{ij} \Rightarrow \left(\sum_{k,l} U_{ik}U_{jl}\delta_{kl}\right) = \delta_{ij}$$

Πίνακας περιστροφής

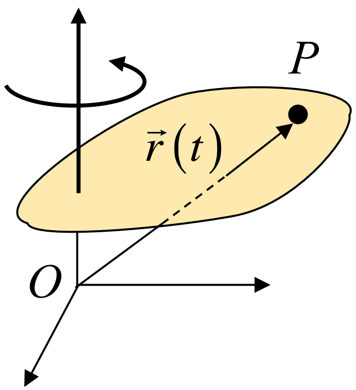
- Από την συνθήκη ορθοκανονικότητας έχουμε: $\sum_{k,l} U_{ik} U_{jl} \delta_{kl} = \sum_{k} U_{ik} U_{jk}$ (1)
- Ουσιαστικά είναι ο τύπος πολ/σμου πινάκων: $\sum_{j} A_{ij} \cdot B_{jk} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{ik}$
- Επομένως μπορούμε να γράψουμε την (1) σαν: $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{U}^{-1}$

  Δηλαδή, ο πίνακας περιστροφής είναι ορθοκανονικός
- Το σύνολο όλων των πινάκων περιστροφής για τους οποίους ισχύει $\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{U}^{-1}$ αποτελούν την οθογώνια ομάδα **O(3)**
  - Επειδή $\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{U}^{-1} \Rightarrow \det \mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \det \mathbf{U}^{-1}$
  - αλλά $\det \mathbf{U} = \det \mathbf{U}^{T}$ και $\det \mathbf{U}^{-1} = 1/\det \mathbf{U}$

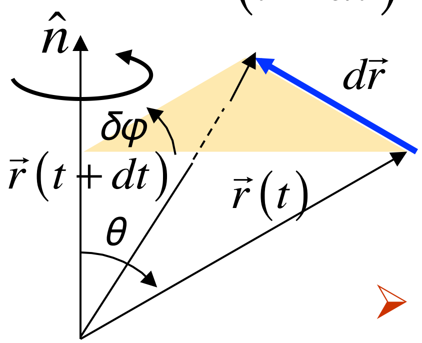
  $\Big\}\ \det \mathbf{U} = \pm 1$ Ορισμός ορθοκανονικού πίνακα
  - Το σύνολο των ορθογώνιων πινάκων με $\det \mathbf{U} = +1$ αποτελούν την ομάδα **SO(3)** στην QM θα δείτε τους πίνακες Pauli (πίνακες spin) που ανήκουν στην SO(3)
- Ο πίνακας U εξαρτάται εν γένει από τον χρόνο και έχουμε δει ότι: $\vec{r} = \sum_{i} r_i \vec{e}_i = \sum_{i} r_i' \vec{e}_i'$

Απειροστές περιστροφές και γωνιακή ταχύτητα

- Θεωρήστε ότι έχετε ένα σώμα το οποίο περιστρέφεται ως προς άξονα:
- Θεωρήστε ότι ένα σημείο P πάνω στο σώμα με διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$



- Εξετάζουμε την κίνηση του P ως προς ακίνητο παρατηρητή
  - Πόσο μετακινείται το P σε χρόνο dt ?
  - Έστω $\vec{r}(t+dt) \equiv \vec{r}(t) + d\vec{r}$ όπου $d\vec{r}$ η απειροστή μετατόπιση



$|d\vec{r}| = r\sin\theta d\varphi$ και $d\vec{r} \perp d\vec{\varphi}$ $\quad d\vec{r} \perp \vec{r}$

- Χρησιμοποιώντας το διάνυσμα $\hat{n}$

  $\hat{n} \times \vec{r} = |\vec{r}|\sin\theta$

- Επομένως: $d\vec{r} = d\varphi \hat{n} \times \vec{r}$
- Θεωρώντας: $d\vec{\varphi} \equiv d\varphi \hat{n}$

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{r} = d\varphi \hat{n} \times \vec{r} \\ d\vec{\varphi} \equiv d\varphi \hat{n} \end{array}\right\} d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$$

- Η σχέση $d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$ ισχύει μόνο για απειροστές περιστροφές
- Η ταχύτητα του σημείου P για συνεχή περιστροφή θα είναι: $\vec{u}_P = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}$
- Ορίζουμε γωνιακή ταχύτητα ω: $\vec{\omega} \equiv \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$ οπότε: $\vec{u}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}$
- Τα διανύσματα ω και dφ δεν είναι ακριβώς διανύσματα – αλλά ψευδο-διανύσματα
  - ψευδοδιανύσματα περιστρέφονται σαν διανύσματα αλλά είναι αμετάβλητα ως προς χωρικούς αντικατοπτρισμούς $(\mathrm{X} \to -\mathrm{X}, \mathrm{Y} \to -\mathrm{Y}, \mathrm{Z} \to -\mathrm{Z})$

Πίνακας περιστροφής

- Ο πίνακας U εξαρτάται εν γένει από τον χρόνο και έχουμε δει ότι: $\vec{r} = \sum_i r_i \vec{e}_i = \sum_i r_i' \vec{e}_i'$
- Η ταχύτητα επομένως του σημείου με διάνυσμα θέσης $\vec{r}$

$\dot{\vec{r}} = \sum_i \dot{r}_i' \vec{e}_i'$ τα $\vec{e}_i'$ είναι σταθερά και δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο

- Αλλά αν προσπαθήσω να γράψω την ταχύτητα του $\vec{r}$ στο περιστρεφόμενο σύστημα τα $\vec{e}_i$ δεν είναι σταθερά και μεταβάλλονται με τον χρόνο
- Η χρονική παράγωγος του $\vec{r}$ θα αποτελείται από δυο τμήματα:

$$\dot{\vec{r}} = \sum_i \dot{r}_i \vec{e}_i + \sum_i r_i \dot{\vec{e}}_i$$

- Ποια η χρονική παράγωγος των $\dot{\vec{e}}_i$? $\dot{\vec{e}}_i = \dfrac{d}{dt}\left(\sum_j U_{ij} \vec{e}_j'\right) = \sum_j \dot{U}_{ij} \vec{e}_j'$

$$\Rightarrow \dot{\vec{e}}_i = \sum_j \dot{U}_{ij} \left(\sum_k U_{jk}^{-1} \vec{e}_k\right) \Rightarrow \dot{\vec{e}}_i = \sum_j \left(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\right)_{ij} \vec{e}_j$$

- Επομένως καταλήγουμε ότι: $\dot{\vec{r}} = \sum_i \dot{r}_i \vec{e}_i + \sum_{ij} r_i \left(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\right)_{ij} \vec{e}_j$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = \sum_i \left[\dot{r}_i + \boxed{\left(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\right)_{ji} r_j}\,\right] \vec{e}_j$$

Διόρθωση για το γεγονός ότι οι άξονες συντεταγμένων δεν είναι σταθεροί χρονικά

Πίνακας περιστροφής

- Είδαμε ότι στο περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων: $\dot{\vec{r}} = \sum_i \left[\dot{r}_i + \left(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \right)_{ji} r_j \right] \vec{e}_j$
- Ορίζουμε τον πίνακα: $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}}$ ο οποίος είναι αντισυμμετρικός
  - **A** αντισυμμετρικός γιατί: $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{1} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \right) = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} + \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}} = 0$

    $$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \left(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \right)^{\mathrm{T}} \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{U}^{\mathrm{T}} \right)^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}} \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}}$$
  - Επομένως: $\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} + \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \Rightarrow$ **A** αντισυμμετρικός
- **A** είναι ένας 3 × 3 αντισυμμετρικός πίνακας

  $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$
  - Καθορίζεται πλήρως με τον ορισμό των στοιχείων πάνω από την κύρια διαγώνιο. Επομένως τα στοιχεία α_{12}, α_{13} και α_{23}

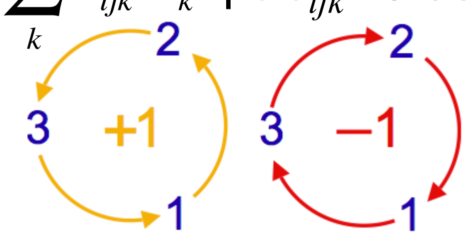
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ & 0 & -\omega_1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

αντισυμμετρικός

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Χρησιμοποιώντας φορμαλισμό δεικτών: $A_{jk} = \sum_k \varepsilon_{ijk} \omega_k$ με ε_{ijk} το σύμβολο Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k) = (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \\ -1 & (i,j,k) = (1,3,2),(3,2,1),(2,1,3) \\ 0 & \end{cases}$$



Ταχύτητα σε περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων

- Είδαμε ότι μπορούμε να γράψουμε: $\mathrm{A}_{ij} = \sum_k \varepsilon_{ijk}\omega_k$
- Τα ω_i είναι οι συνιστώσες του διανύσματος: $\vec{\omega} = \sum_i \omega_i \vec{e}_i$ γωνιακή ταχύτητα
- Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να γράψουμε τις ποσότητες:

$$\dot{\vec{e}}_i = \sum_j \left(\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\right)_{ij}\vec{e}_j \quad \text{και} \quad \dot{\vec{r}} = \sum_i \left[\dot{r}_i + \left(\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\right)_{ji} r_j\right]\vec{e}_j$$

$$\dot{\vec{e}}_i = \sum_j \mathrm{A}_{ij}\vec{e}_j = -\sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\omega_k\vec{e}_j$$

- Από το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων: $\vec{e}_k \times \vec{e}_j = -\varepsilon_{kji}\vec{e}_i = \varepsilon_{jki}\vec{e}_i$

$$\dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega}\times\vec{e}_i$$

- Το διάνυσμα της ταχύτητας θα γραφεί: $\dot{\vec{r}} = \sum_i \left[\dot{r}_i + \mathrm{A}_{ji} r_j\right]\vec{e}_j \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \sum_i \left[\dot{r}_i + r_i\vec{\omega}\times\right]\vec{e}_i$
- Η παραπάνω απόδειξη ισχύει εν γένει, για οποιοδήποτε διάνυσμα **w** και την παράγωγό του ως προς χρόνο σε περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς:

$$\vec{w} = \sum_i w_i\vec{e}_i = \sum_i w_i'\vec{e}_i'$$

$$\dot{\vec{w}} = \sum_i \left(\dot{w}_i + w_i\vec{\omega}\times\right)\vec{e}_i$$

⇒ Άθροισμα δυο όρων, ο ένας εκ των οποίων είναι κάθετος στα διανύσματα $\vec{e}_i$ και ίσος με $w_i\vec{\omega}\times\vec{e}_i$

Επιτάχυνση σε περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς

- Θεωρήστε ένα σώμα με θέση που δίνεται από το διάνυσμα: $\vec{r} = \sum_i r_i \vec{e}_i$
- Η ταχύτητά του θα είναι: $\dot{\vec{r}} = \sum_i \left(\dot{r}_i + r_i \vec{\omega} \times \ \right) \vec{e}_i$ (1)
- Η επιτάχυνση του σώματος (στο περιστρεφόμενο σύστημα) προκύπτει από την παράγωγο της (1): $\vec{a} = d\left(\dot{\vec{r}}\right)/dt$
  - Είδαμε όμως: $\dot{\vec{w}} = dw/dt = \sum_i \left(\boxed{\dot{w}_i} + \boxed{w_i} \vec{\omega} \times \right) \vec{e}_i$ και θεωρήστε ότι: $w_i = \dot{r}_i + r_i \vec{\omega} \times$
  - Επομένως θα έχουμε: $\vec{a} = \sum_i \left[\boxed{\frac{d}{dt}\left(\dot{r}_i + r_i \vec{\omega} \times \right)} + \boxed{\left(\dot{r}_i + r_i \vec{\omega} \times \ \right)} \vec{\omega} \times \ \right] \vec{e}_i$

$$\Rightarrow \vec{a} = \sum_i \left[\ddot{r}_i \ + \dot{r}_i \vec{\omega} \times \ + r_i \dot{\vec{\omega}} \times \ + \dot{r}_i \vec{\omega} \times \ + r_i \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \right] \ \vec{e}_i$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \sum_i \left[\ddot{r}_i + 2\dot{r}_i \vec{\omega} \times \ + r_i \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \ + r_i \dot{\vec{\omega}} \times \right] \vec{e}_i$$

διάνυσμα επιτάχυνσης σε περιστρεφόμενο σύστημα

- Η έκφραση αυτή της επιτάχυνσης οδηγεί στην εισαγωγή «φαινομενικών» δυνάμεων

2ος Νόμος του Newton σε περιστρεφόμενο σύστημα

- Θεωρούμε δυο νέα διανύσματα ορισμένα στο περιστρεφόμενο σύστημα (αγνοώντας τις διορθώσεις από την περιστροφή των αξόνων)

$\vec{v}_{\sigma\omega\mu.} = \sum_i \dot{r}_i \vec{e}_i$ και $\vec{a}_{\sigma\omega\mu.} = \sum_i \ddot{r}_i \vec{e}_i$ (προσοχή: δεν είναι ταχύτητα ή επιτάχυνση)

- Με τα παραπάνω διανύσματα, το διάνυσμα της επιτάχυνσης στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς μπορεί να γραφεί:

$$\vec{a} = \sum_i \left[\ddot{r}_i + 2\dot{r}_i \vec{\omega}\times \;\; + r_i \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times \;\; + r_i \dot{\vec{\omega}}\times\right]\vec{e}_i$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{\sigma\omega\mu.} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{\sigma\omega\mu.} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$$

επιτάχυνση σε περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων

- Επομένως για περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς, οι εξισώσεις κίνησης είναι:
  - Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$
  - Σύμφωνα με την έκφραση της πραγματικής επιτάχυνσης α συναρτήσει της $\alpha_{\sigma\omega\mu.}$ εμφανίζονται 3 νέοι όροι:

$\vec{a}_1 = \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$ φυγόκεντρος επιτάχυνση

$\vec{a}_2 = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{\sigma\omega\mu.}$ Coriolis επιτάχυνση

$\vec{a}_3 = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$ Euler επιτάχυνση

συνεπίπεδη της κίνησης και κάθετη στη φυγόκεντρο. Εμφανίζεται λόγω μεταβολής της ω

Μη αδρανειακές δυνάμεις με φορμαλισμό Lagrange

- Θα θέλαμε να βρούμε τις μη αδρανειακές δυνάμεις χρησιμοποιώντας τον φορμαλισμό Lagrange
- Η Lagrangian ενός σώματος που κινείται σε ένα δυναμικό, γράφεται:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2} - V(r) \qquad (1)$$

- Στο στατικό σύστημα συντεταγμένων θα γραφεί:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}'^{2} - V(r) \Rightarrow L = \frac{1}{2} m \sum_i \dot{r}_i' \dot{r}_i' - V(r) \qquad (2)$$

- Οι εξισώσεις κίνησης χρησιμοποιώντας τις στατικές συντεταγμένες βρίσκονται από τις εξισώσεις Euler-Lagrange και την μορφή της Lagrangian από την (2)
- Ποια θα ήταν η μορφή των εξισώσεων κίνησης χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες του περιστρεφόμενου συστήματος
- Θυμηθήτε από πριν ότι: $r_i' = \sum_j U_{ij}^{-1} r_j = \sum_j U_{ij}^{T} r_j \Rightarrow r_i' = \sum_j U_{ji} r_j$ (3)
- Ενώ η παράγωγος του r ως προς t θα είναι: $\dot{r}_i' = \sum_j \left(\dot{U}_{ji} r_j + U_{ji} \dot{r}_j \right)$ (4)
- Με βάση τις εξισώσεις (3) και (4) μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην (2) και τις εξισώσεις E-L και να χρησιμοποιήσουμε τα r_i σαν τις δυναμικές μεταβλητές

Μη αδρανειακές δυνάμεις με φορμαλισμό Lagrange

- Παραλείποντας τους δείκτες θα μπορούσαμε να γράψουμε: $\dot{r} = \dot{\mathbf{U}} r + \mathbf{U} \dot{r}$
- Επομένως η Lagrangian θα γραφεί: $L \approx \frac{1}{2} m \left(\dot{\mathbf{U}} r + \mathbf{U} \dot{r} \right) \left(\dot{\mathbf{U}} r + \mathbf{U} \dot{r} \right) - V$

$$\Rightarrow L \approx \frac{1}{2} m \left(\dot{\mathbf{U}} \dot{\mathbf{U}} r^2 + \mathbf{U} \dot{\mathbf{U}} r \dot{r} + \mathbf{U} \mathbf{U} \dot{r}^2 \right) - V$$ (παραλείποντας όρους x2)

- Η εξίσωση Euler-Lagrange: $\partial_t \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial L}{\partial r} \Rightarrow \partial_t \left(\mathbf{U} \dot{\mathbf{U}} r + \mathbf{U} \mathbf{U} \dot{r} \right) = \dot{\mathbf{U}} \dot{\mathbf{U}} r + \mathbf{U} \dot{\mathbf{U}} \dot{r} - V'$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{U}} \dot{\mathbf{U}} r + \mathbf{U} \ddot{\mathbf{U}} r + \underbrace{\mathbf{U} \dot{\mathbf{U}}}_{} \dot{r} + \mathbf{U} \mathbf{U} \ddot{r} = V'$$

$\mathbf{A} \dot{r}$

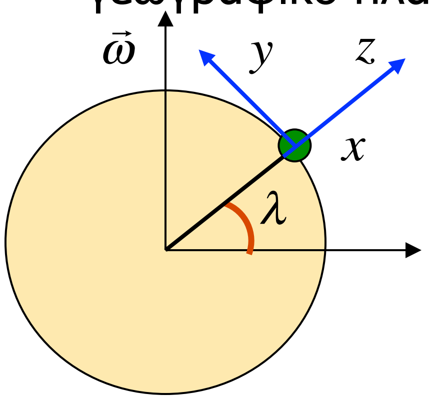
φυγόκεντρος Euler $\vec{\omega} \times \dot{r}$ $\ddot{r}$

Coriolis επιτάχυνση σώματος

- Άσκηση: Προσπαθήστε να λύσετε το παραπάνω με τους σωστούς δείκτες! Σε κάποιους από τους όρους θα πρέπει να θυμηθείτε την συνθήκη ορθοκανονικότητας (π.χ. ο όρος $\mathbf{U} \mathbf{U} \ddot{r}$ που δίνει $\ddot{r}$)

Εφαρμογές

- Το κλασικό παράδειγμα ενός περιστρεφόμενου συστήματος είναι η Γη:
  - Η γωνιακή ταχύτητα είναι: $\omega = \dfrac{2\pi}{24\times 3600} s^{-1} \approx 7\times 10^{-5}\, rad/\sec$
- Μια μάζα η οποία κρέμεται στην άκρη ενός εκκρεμούς βρισκόμενο σε γεωγραφικό πλάτος λ :



- Οι περιστρεφόμενες συντεταγμένες συντεταγμένες είναι:

z : κατακόρυφος άξονας
y : προς τον βόρρειο πόλο
x : «ανατολικά»

άξονες συντεταγμένων σώματος

- Η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ στο σύστημα συντεταγμένων του σώματος θα είναι:

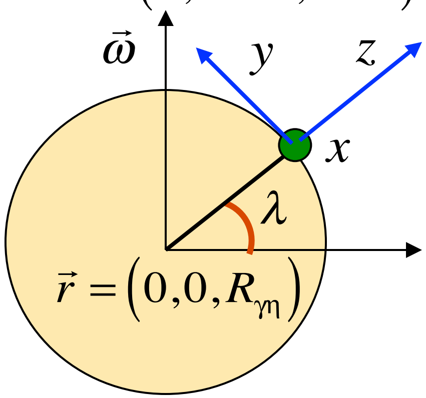
$$\vec{\omega} = \omega\left(0, \cos\lambda, \sin\lambda\right)$$

- Θεωρούμε ότι η μάζα του εκκρεμούς έχει διάνυσμα θέσης $\vec{r} = \left(0, 0, R_{γη}\right)$ (σε συντεταγμένες σώματος):

Εφαρμογές – Κίνηση στην επιφάνεια της Γης

- Ας θεωρήσουμε αρχικά ότι η μάζα δεν κινείται (οπότε η δύναμη Coriolis είναι 0)

$\vec{\omega} = \omega(0, \cos\lambda, \sin\lambda)$



- Χρειάζεται επομένως να υπολογίσουμε την φυγόκεντρο δύναμη
  - Η δύναμη της βαρύτητας είναι: $\vec{F}_{βαρ.} = -mg\hat{z}$
  - Η φυγόκεντρος δύναμη είναι: $\vec{F}_{φυγοκ.} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$

$$\Rightarrow \vec{F}_{φυγοκ.} = -m\vec{\omega}\times(\omega R\cos\lambda\hat{x})$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{φυγοκ.} = -m\omega^2 R(-\cos^2\lambda\hat{z} + \sin\lambda\cos\lambda\hat{y})$$

- Η φυγόκεντρος δύναμη αποτελείται από δυο όρους:
  - Η μάζα θα αποκλίνει προς την $-y$-διεύθυνση («νότια»): $\dfrac{\omega^2 R}{g_{45^o}} \approx 0.3\%$
    - Το αποτέλεσμα «χάνεται» στους πόλους και ισημερινό
  - Η βαρυτική δύναμη «ελαττώνεται» κατά ένα ποσοστό: $\dfrac{\omega^2 R}{g_{45^o}} \approx 0.3\%$
    - Το αποτέλεσμα «χάνεται» στους πόλους ($cos\lambda = 0$) και γίνεται μέγιστο στον ισημερινό

Εφαρμογές – Παράδειγμα δύναμης Coriolis

- Ας θεωρήσουμε ότι αφήνουμε μια μάζα να πέσει από την κορυφή ενός κτιρίου
- Πως επιρεάζει η δύναμη Coriolis την κίνηση του σώματος?
  - Το αποτέλεσμα της δύναμης αυτής θα είναι πολύ μικρό
  - Σε χαμηλότερη τάξη μεγέθους, η ταχύτητα θα είναι: $\vec{\upsilon}_o = -gt\hat{z}$ (το σώμα αφέθηκε την στιγμή t=0, να πέσει από το σημείο x=y=0, z=z):
  - Η δύναμη Coriolis θα είναι: $\vec{F}_{Coriolis} = -2\vec{\omega}\times\vec{v} = -2\vec{\omega}\times\vec{v}_0 + \cdots$

$$\Rightarrow \vec{F}_{Coriolis} = -2\omega(0,\cos\lambda,\sin\lambda)\times(-gt\hat{z}) \Rightarrow \vec{F}_{Coriolis} = -2\omega\cos\lambda(-gt)\hat{x}$$

  - Η δύναμη αυτή θα είναι (1η τάξη αναπτύγματος της επιτάχυνσης του σώματος):

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \vec{F}_{Coriolis} = m\dot{\vec{v}}_1 = 2m\omega gt\cos\lambda\hat{x} \\ \text{Όπου: } \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \cdots \end{array}\right\} \vec{v}_1 = \omega gt^2\cos\lambda\hat{x}$$

  - Η απόκλιση της θέσης του σώματος είναι: $d\vec{r} = \int \vec{v}_1\, dt = \dfrac{\omega gt^3\cos\lambda}{3}\hat{x}$
  - Το σώμα αυτό θα αποκλίνει «ανατολικά»
  - Στο νότιο ημισφαίριο, λ<0, το σώμα θα αποκλίνει «δυτικά»
  - Για ένα 10-όροφο κτίριο η απόκλιση είναι ~5mm

Περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων

- Ξεκινήσαμε να μελετάμε περιστρεφόμενα συστήματα συντεταγμένων:
- Είδαμε ότι για ένα σώμα το οποίο έχει διάνυσμα θέσης $\vec{r}$
  - το $\vec{r}$ γράφεται είτε συναρτήσει στατικών συντεταγμένων: $\vec{r} = \sum_i r_i' \vec{e}_i'$
  - είτε συναρτήσει περιστρεφόμενων συντεταγμένων: $\vec{r} = \sum_i r_i \vec{e}_i$

  τα $\vec{e}_i$ δεν είναι σταθερά αλλά μεταβάλλονται με τον χρόνο ενώ τα $\vec{e}_i$ είναι σταθερά

  - Τα $\vec{e}_i$ και $\vec{e}_i'$ περιγράφουν τους άξονες συντεταγμένων των δυο συστημάτων
- Τα δυο συστήματα αναφοράς σχετίζονται μέσω του πίνακα περιστροφής U:

$$\vec{e}_i = \sum_j U_{ij} \vec{e}_j'$$

- Ο πίνακας U είναι ένας ορθογώνιος πίνακας: $\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{U}^{-1}$ και $\det|\mathbf{U}| = \pm 1$
- Τι θα δούμε σήμερα:
  - πως μετασχηματίζεται η ταχύτητα στο περιστρεφόμενο σύστημα
  - πως μετασχηματίζεται η επιτάχυνση στο περιστρεφόμενο σύστημα
  - η μορφή του 2^{ου} νόμου του Newton στο περιστρεφόμενο σύστημα