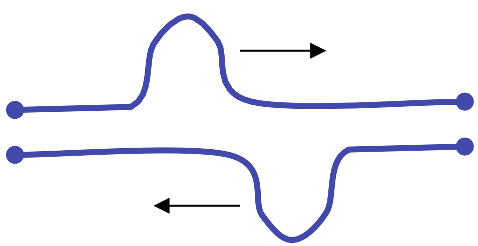
Στάσιμα κύματα

Θεωρήστε μια χορδή, μήκους L με τα άκρα της ακλόνητα.

Χτυπήσετε την ! Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα θα έχετε προσπίπτοντα κύματα και ανακλώμενα κύματα.



Τα κύματα αυτά συμβάλλουν.

$$y(x,t) = A\left[\cos(kx - \omega t + \varphi) + \cos(kx + \omega t + \varphi + \pi)\right]$$

αντίθετη κατεύθυνση αναστροφή

Συνοριακές συνθήκες: Ακλόνητα άκρα $\boxed{y(0,t) = y(L,t) = 0}$

$$y(0,t) = A\left[\cos(-\omega t + \varphi) + \cos(\omega t + \varphi + \pi)\right] = 0$$

$$y(0,t) = A\left[\cos(-\omega t + \varphi) - \cos(\omega t + \varphi)\right] = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

Επομένως $y(x,t) = A\left[\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t)\right]$

Στάσιμα κύματα

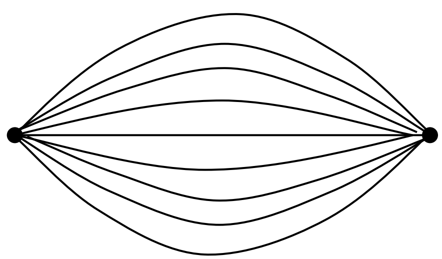
Μπορούμε να γράψουμε την τελευταία σχέση καλύτερα:

$$y(x,t) = A\left[\cos(kx-\omega t) - \cos(kx+\omega t)\right]$$

αλλά $\cos a - \cos b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)$ $\quad a = kx-\omega t$, $b = kx+\omega t$

Επομένως η πρώτη εξίσωση γίνεται $\boxed{y(x,t) = 2A\sin kx \sin\omega t}$

Το κύμα αυτό δεν διαδίδεται αλλά στέκεται!!!



Η χορδή ταλαντώνεται πάνω και κάτω.
Το πλάτος ταλάντωσης κάθε σημείου είναι $2A\sin kx$

Μέγιστο πλάτος είναι 2Α και αυτό για ορισμένα σημεία

Όταν $\sin kx = 0$ έχουμε δεσμό - το πλάτος ταλάντωσης είναι 0

Όταν $\sin kx = \pm 1$ έχουμε αντι-δεσμό - το πλάτος ταλάντωσης είναι Α

Δεσμούς έχουμε για $kx = n\pi$, $n = 0,1,2...$

Αντιδεσμούς έχουμε για $kx = (2n+1)\pi/2$, $n = 0,1,2,...$

Στάσιμα κύματα

$$\boxed{y(x,t) = 2A\sin kx \sin \omega t}$$

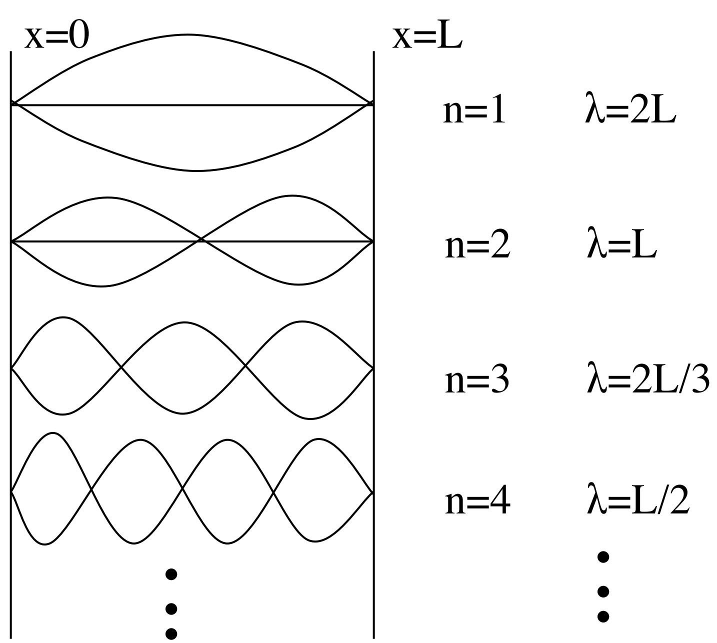
Στην περίπτωση της χορδής οι συνοριακές συνθήκες είναι δύο μια και τα δύο άκρα της είναι ακλόνητα. Είπαμε ότι y(L,t) = 0

Αντικαθιστώντας στην κυματοσυνάρτηση των στάσιμων κυμάτων έχουμε:

$$y(L,t) = 2A\sin kL \sin \omega t = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}L = n\pi$$

Άρα υπάρχουν συνθήκες για το σχηματισμό στάσιμων κυμάτων: $\boxed{\lambda_n = \dfrac{2L}{n}}$

Επομένως μόνο συγκεκριμένα μήκη κύματος επιτρέπονται



Παράδειγμα στάσιμου κύματος

Χορδή με ακλόνητα σημεία. Χορδή κιθάρας

$$\frac{\omega}{k} = \mathrm{v} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Μια χορδή έχει συχνότητες: $f_n = \dfrac{\mathrm{v}}{\lambda_n} = \mathrm{v}\left(\dfrac{n}{2L}\right) = \dfrac{n}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

Η θεμελιώδης συχνότητα είναι $n = 1 \quad f_1 = \dfrac{\mathrm{v}}{2L}$

Οι υπόλοιπες αρμονικές $n>1$

$T \nearrow \qquad f \nearrow$

$\mu \nearrow \qquad f \searrow$

Θεώρημα Fourier – Σύνθετα κύματα

- Κάθε περιοδική κυματομορφή μπορεί να αναλυθεί σαν συμβολή πολλών ημιτονοειδών και συνημιτονοειδών κυματοσυναρτήσεων που αποτελούν αρμονική σειρά

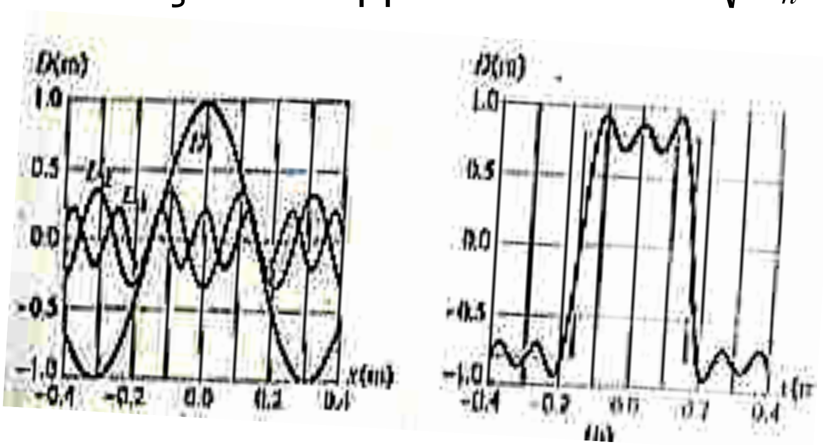
Οι συχνότητές τους είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους συχνότητας

$$y(t) = \sum_n \left(A_n \sin 2\pi f_n t + B_n \cos 2\pi f_n t\right)$$

όπου $f_n = n f_1$ και f_1= θεμελιώδης συχνότητα

Οι συντελεστές A_n και B_n παριστάνουν τα πλάτη των διαφόρων κυμάτων

Το πλάτος του n-αρμονικού είναι $\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$



Ανάλυση τετραγωνικής κυματομορφής σε σειρά από ημιτονοειδείς αρμονικές με συχνότητες περιττά πολ/σια της θεμελιώδους συχνότητας

Διακροτήματα

Συμβολή δύο αρμονικών κυμάτων με διαφορετικές συχνότητες διαδιδόμενα στην ίδια διεύθυνση

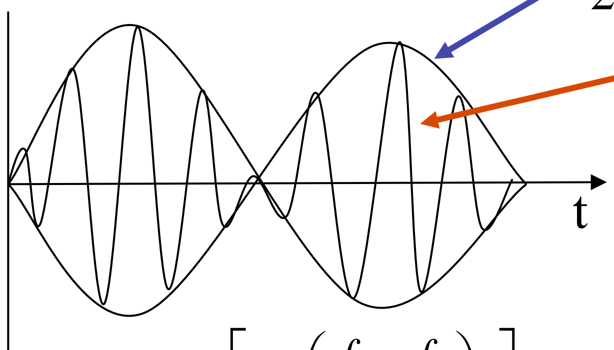
Εξετάζουμε ένα σημείο x,

$$y_1(t) = A\cos 2\pi f_1 t$$

$$y_2(t) = A\cos 2\pi f_2 t$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\left[2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right]\cos\left[2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t\right]$$

Έχει δύο συχνότητες: $\frac{f_1 - f_2}{2}$ μικρή αργή $\frac{f_1 + f_2}{2}$ μεγάλη γρήγορη



Περιοδική μεταβολή στην ένταση του κύματος με συχνότητα $(f_1 + f_2)/2$

Όταν $\cos\left[2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right] = \pm 1$ τότε υπάρχει μέγιστο - **Διακρότημα**

Υπάρχουν 2 μέγιστα/περίοδο Διακροτήματα/sec $f_\delta = |f_1 - f_2|$

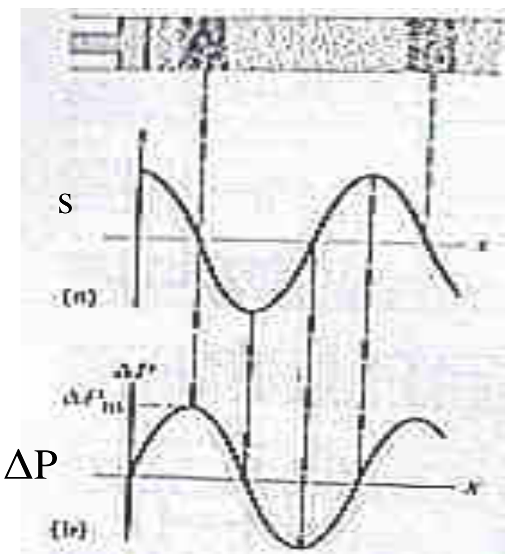
Ηχητικά κύματα – Διαμήκη κύματα

Τα ηχητικά κύματα χρειάζονται ένα μέσο για να μεταδοθούν π.χ. αέρας

- Δεν υπάρχει ήχος στο κενό
- Ηχητικές συχνότητες 20Hz – 20KHz

- Τα ηχητικά κύματα διαδίδονται με μεταβολές πίεσης ενός συμπιεστού μέσου. Το τμήμα της διαφορετικής πίεσης δημιουργεί μεταβολές πίεσης στο χώρο και έτσι μεταδίδεται ένα κύμα εκτόπισης

- Το κύμα εκτόπισης είναι: $s = s_m \sin(kx - \omega t) = s(x,t)$



Δηλαδή η εκτόπιση είναι κατά μήκος της διεύθυνσης x από τη θέση ισορροπίας.

Η μεταβολή της πίεσης είναι:

$$\Delta P = -\Delta P_m \cos(kx - \omega t)$$

- Το κύμα της πίεσης είναι σε διαφορά φάσης από το κύμα εκτόπισης

Μέγιστο πλάτος πίεσης $\Delta P_m = \rho \upsilon \omega s_m$

Ταχύτητα του ήχου

Η ταχύτητα του ήχου εξαρτάται από το μέτρο της ελαστικότητας του μέσου στο οποίο διαδίδεται το ηχητικό κύμα. Ανάλογα είχαμε και για την γενική περίπτωση κυμάτων σε χορδή

Η ταχύτητα των μηχανικών κυμάτων εξαρτάται από τις ελαστικές ιδιότητες του μέσου και από την πυκνότητα μάζας του μέσου (ρ, μ)

$$\upsilon = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}$$

όπου dP η μεταβολή της πίεσης
$d\rho$ η μεταβολή της πυκνότητας

π.χ αέρας:
υ=331m/sec

Η μεταβολή της πίεσης δείχνει τη συμπιεστότητα ενός αερίου μέσου
Για στερεά μέσα η ταχύτητα του ήχου είναι:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

όπου Υ: η ελαστικότητα του στερεού
ρ: η πυκνότητα

π.χ σίδηρος:
υ=5130m/sec

Για υγρά μέσα η ταχύτητα του ήχου είναι:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

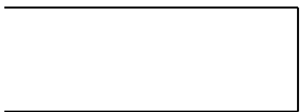
όπου Β: η ελαστικότητα όγκου του υγρού
ρ: η πυκνότητα

π.χ νερό:
υ=1493m/sec

Ηχητικά κύματα – Ειδικές περιπτώσεις

$$\boxed{y(x,t) = 2A\sin kx \sin \omega t}$$

Είδαμε την περίπτωση της χορδής με το ένα ή και τα δύο άκρα της ακλόνητα. Στην περίπτωση αυτή το (τα) άκρα της χορδής δεν κινούνται



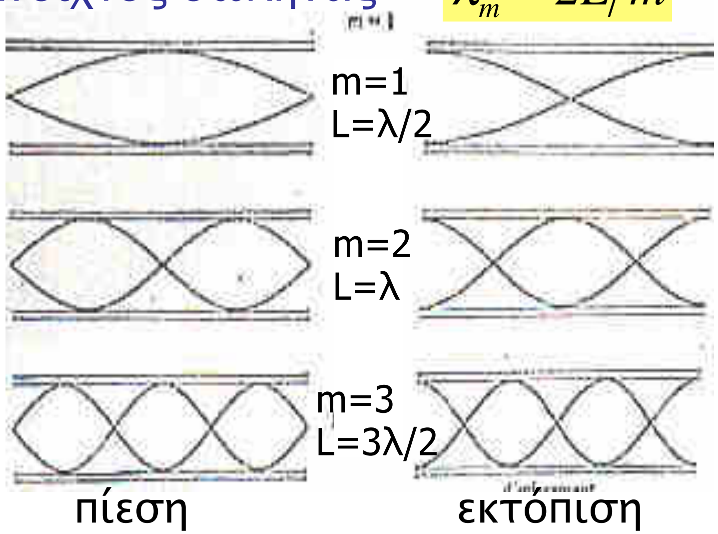
Ηχητικό κύμα πάνω σε ακλόνητο τοίχωμα.
Τα μόρια του μέσου δεν μπορούν να κινηθούν

Σε ένα κλειστό σωλήνα (τοίχωμα) υπάρχει ένας δεσμός μετατόπισης αλλά η πίεση αλλάζει μέγιστα (αντι-δεσμός πίεσης)

Στο ανοιχτό άκρο υπάρχει ένας αντι-δεσμός εκτόπισης και επομένως ένας δεσμός πίεσης!! (η πίεση είναι σταθερή)

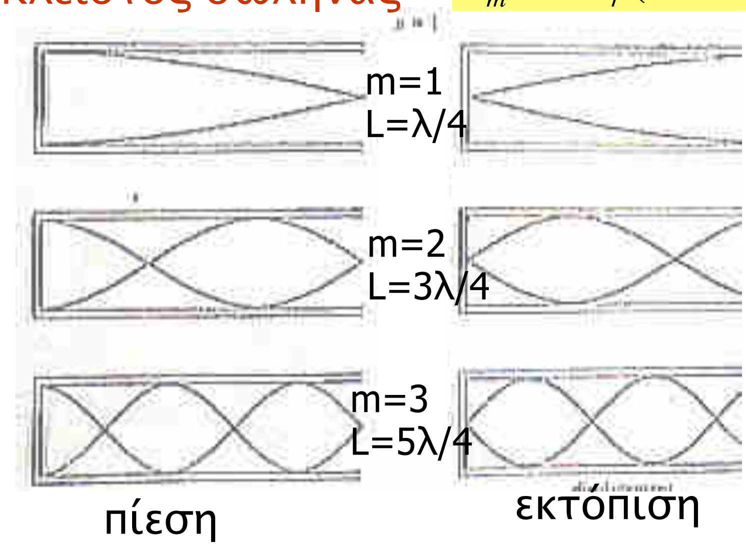
Ανοιχτός σωλήνας $\lambda_m = 2L/m$

Όλες οι αρμονικές



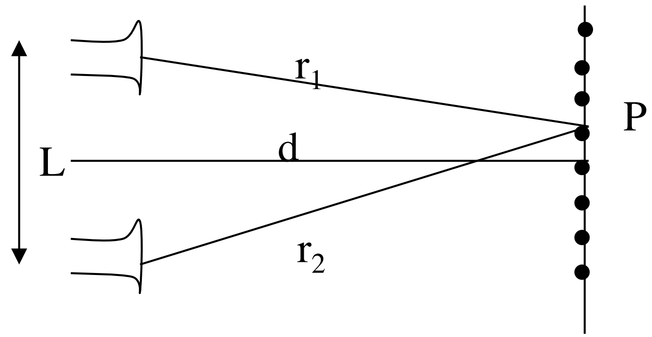
Κλειστός σωλήνας $\lambda_m = 4L/(2m-1)$

Περιττές αρμονικές



Παράδειγμα: Συμβολή ηχητικών κυμάτων

- Θεωρήστε δύο ηχεία τα οποία είναι συνδεδεμένα με την ίδια ηχητική πηγή και έχοντας την ίδια φάση.



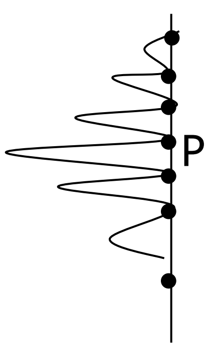
Η διαφορά διαδρομής των δύο κυμάτων στο σημείο P, $r_2 - r_1 = \Delta r$ έχει σαν αποτέλεσμα τα κύματα να φθάνουν στο P με διαφορά φάσης. Επομένως ανάλογα με την διαφορά της απόστασης Δr θα έχουμε ενισχυτική ή καταστρεπτική συμβολή.

$$\boxed{y(x,t) = 2A\cos\frac{\varphi}{2}\sin\left(kx - \omega t - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\Delta r = \frac{\lambda}{2\pi}\varphi$$

Αν $\Delta r = 0$ ή $\Delta r = n\lambda$ τότε τα κύματα συμβάλουν ενισχυτικά

Αν $\Delta r = m\lambda/2$ $m=1,3,5,7,\ldots$, τότε τα κύματα συμβάλουν καταστρεπτικά



πλάτος κύματος

Αν το πρώτο ελάχιστο είναι στο P τότε:

$$\Delta r = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2\Delta r$$

$$\upsilon_s = \lambda f \Rightarrow f = \frac{\upsilon_s}{\lambda} = \frac{343}{2\Delta r}$$

Ένταση ήχου - Decibels

Πως μπορούμε να περιγράψουμε πόσο δυνατός είναι ένας ήχος?

Η δύναμη του ήχου σχετίζεται με την ισχύ του κύματος.

Όσο απομακρυνόμαστε από την πηγή, το κύμα δεν είναι τόσο δυνατό

Θυμηθείτε ότι η ένταση κύματος δίνεται από $I = \dfrac{\overline{P}}{E\mu\beta\alpha\delta o} = \dfrac{\overline{P}}{4\pi R^2}$

Είναι η ένταση του ηχητικού κύματος που χαρακτηρίζει το πόσο δυνατό είναι. Διαφοροποιείται σα $1/R^2$

Το ανθρώπινο αυτί είναι ένας τόσο καλός ανιχνευτής ήχων που είναι εφοδιασμένος με μια ευαισθησία που καλύπτει μια δυναμική ζώνη εντάσεων που εκτείνονται σε 10 τάξεις μεγέθους (δηλαδή 10^{10} !!)

Η ένταση επομένως δεν είναι η κατάλληλη τιμή για να εκφράσουμε πόσο δυνατό είναι ένα ηχητικό κύμα.

Αντίθετα χρησιμοποιούμε λογαριθμική κλίμακα για να ορίζουμε το decibel

Decibel $\beta \equiv 10\log_{10}\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$

όπου $I_0 = 10^{-12}$W/m^2 (κατώφλι ακοής)

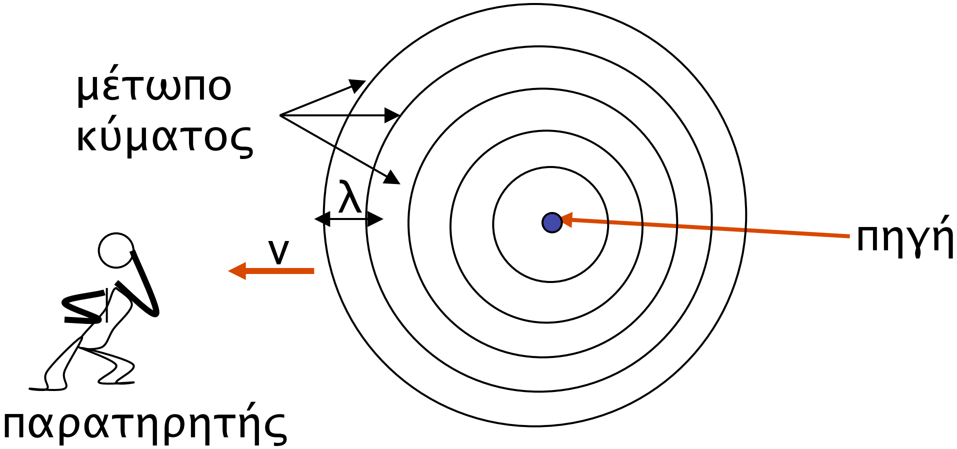
Το αυτί μπορεί να ανιχνεύσει μεταβολές πίεσης $\Delta P \sim 3\times10^{-10}$ατμ, $\Delta x \sim 1\times10^{-11}$m

Φαινόμενο Doppler

- Το φαινόμενο εμφανίζεται όταν η πηγή του ηχητικού κύματος, ή ο δέκτης του κύματος (π.χ. ακροατής) κινούνται με κάποια ταχύτητα το ένα προς το άλλο.
  - Το αποτέλεσμα είναι ότι η αντιλαμβανόμενη συχνότητα του κύματος μετατοπίζεται.
- Για να γίνει κατανοητό αυτό, θυμηθείτε την εξίσωση της ταχύτητας του κύματος $\mathrm{v} = \lambda f$
  - Λύνοντας ως προς τη συχνότητα γράφουμε: $f = \dfrac{\mathrm{v}}{\lambda}$
- Επομένως αν η παρατηρούμενη ή μετρούμενη ταχύτητα του κύματος ή το μετρούμενο μήκος κύματος διαφέρουν ως προς αυτό που εκπέμπεται από την πηγή τότε και η συχνότητα θα είναι διαφορετική

Πρώτα η εύκολη περίπτωση

- Πηγή και παρατηρητής είναι και τα δύο σε κατάσταση ηρεμίας (σχετικά με το μέσο διάδοσης του κύματος, π.χ. αέρας)



Στην περίπτωση αυτή ούτε η ταχύτητα του κύματος (ταχύτητα ήχου) αλλά ούτε και το μήκος κύματος αντιλαμβάνονται διαφορετικά από τον παρατηρητή.

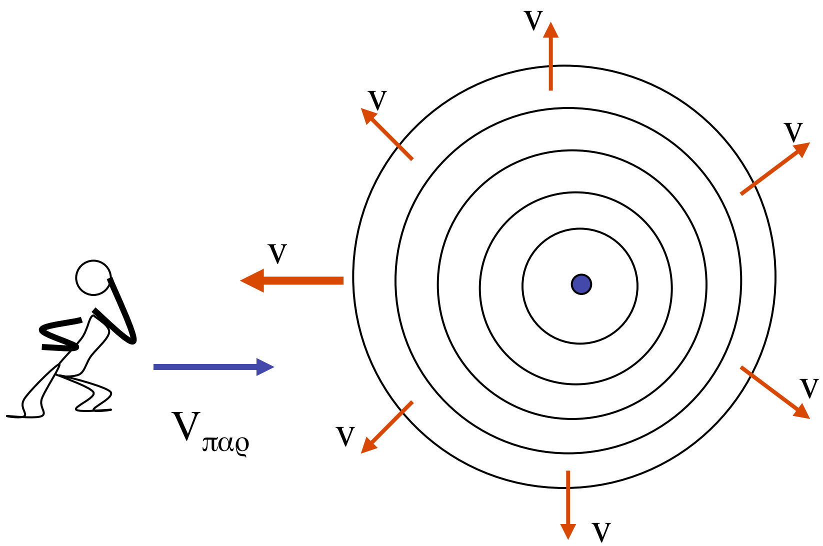
Επομένως:

$$f_{\pi\eta\gamma\eta\varsigma} = f_{\pi\alpha\rho\alpha\tau\eta\rho\eta\tau\eta}$$

Παρατηρητής κινείται προς ακίνητη πηγή

- Τι συμβαίνει όταν ο παρατηρητής κινείται με ταχύτητα $V_{\pi\alpha\rho}$ προς την πηγή του κύματος η οποία παραμένει ακίνητη.
- Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται την ταχύτητα του κύματος να είναι η ταχύτητα του κύματος στο μέσο διάδοσης, v, προστιθέμενη στην δική του ταχύτητα κίνησης
- Ωστόσο το παρατηρούμενο μήκος κύματος, λ, παραμένει αναλλοίωτο.

Επομένως αντικαθιστώντας στην εξίσωση της συχνότητας έχουμε:



$$f_{\pi\alpha\rho\alpha\tau\eta\rho\eta\tau\eta} = \frac{(\mathrm{v} + V_{\pi\alpha\rho})}{\lambda} = \left(1 + \frac{V_{\pi\alpha\rho}}{\mathrm{v}}\right)\frac{\mathrm{v}}{\lambda} \Rightarrow$$

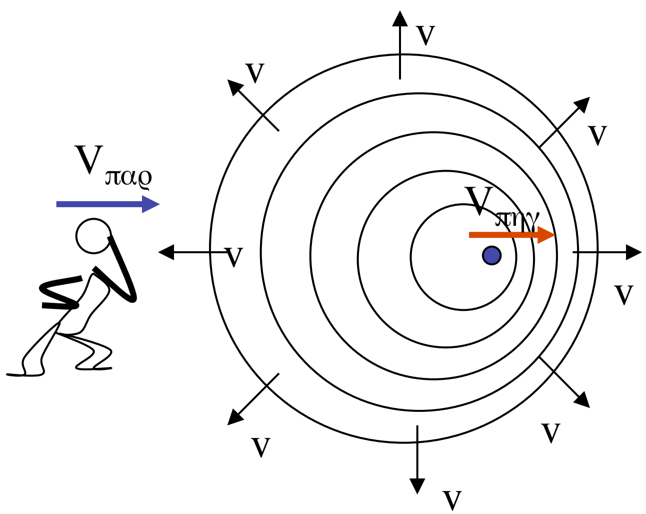
$$f_{\pi\alpha\rho\alpha\tau\eta\rho\eta\tau\eta} = \left(1 + \frac{V_{\pi\alpha\rho}}{\mathrm{v}}\right) f_{\pi\eta\gamma\eta}$$

Παρατηρητής και πηγή κινούνται

- Η παρατηρούμενη ταχύτητα είναι όπως και στην προηγούμενη περίπτωση $V=V_{\pi\alpha\rho}+v$
- Στην περίπτωση αυτή το μήκος κύματος αλλάζει επίσης.

  Ο λόγος; Στον χρόνο T που απαιτείται ώστε το μέτωπο κύματος να κινηθεί κατά απόσταση ίση με το μήκος κύματος, η πηγή κινήθηκε απόσταση $s_\pi=TV_{\pi\eta\gamma}$
- Αλλά $T=\lambda/v$ και τότε δύο διαδοχικά μέτωπα κύματος θα έχουν απόσταση

$$\lambda' = \lambda + V_{\pi\eta\gamma}T = \lambda + V_{\pi\eta\gamma}\frac{\lambda}{v} = \lambda\left(1+\frac{V_{\pi\eta\gamma}}{v}\right)$$



Η συχνότητα που θα αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής θα είναι τότε:

$$f_{\pi\alpha\rho} = \frac{\left(v+V_{\pi\alpha\rho}\right)}{\lambda'} = \frac{\left(1+\frac{V_{\pi\alpha\rho}}{v}\right)v}{\left(1+\frac{V_{\pi\eta\gamma\eta}}{v}\right)\lambda} = \left(\frac{1+\frac{V_{\pi\alpha\rho}}{v}}{1+\frac{V_{\pi\eta\gamma}}{v}}\right)f_{\pi\eta\gamma\eta}$$

Πρόσημα στη μετατόπιση Doppler

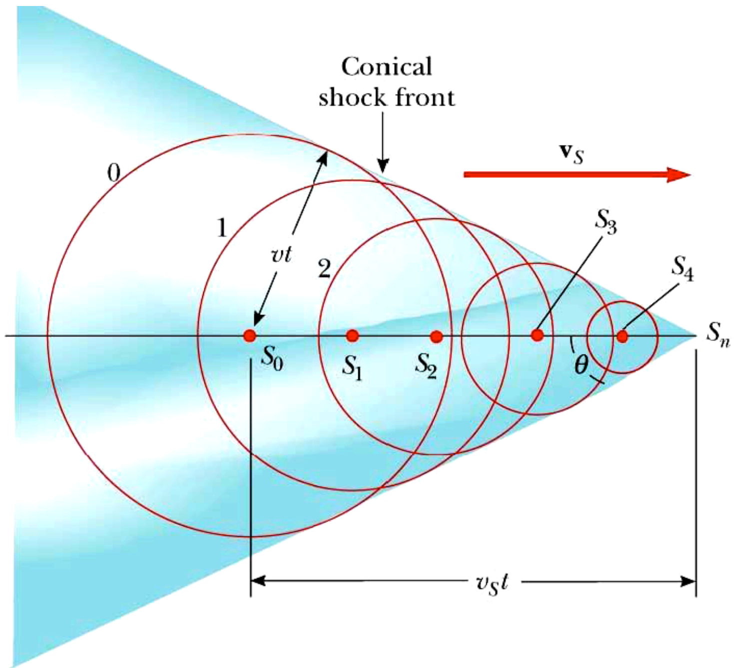
- Τα πρόσημα που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό των σχετικών ταχυτήτων στο φαινόμενο Doppler έχουν την ακόλουθη σύμβαση:
  - Θεωρούμε πάντοτε την κίνηση στην διεύθυνση από τον παρατηρητή προς την πηγή σαν θετική.
  - Θετική κίνηση του παρατηρητή είναι αυτή **προς** την πηγή
  - Θετική κίνηση της πηγής είναι η **απομακρυνόμενη** από το παρατηρητή
- Όταν η σχετική κίνηση είναι προς συγκλίνουσα κατεύθυνση, ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται μια αυξάνουσα συχνότητα.
- Όταν η σχετική κίνηση είναι αποκλίνουσα τότε η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, ελαττώνεται.

Γενική εξίσωση για φαινόμενο Doppler: $$\boxed{f_{\pi\alpha\rho} = \left(\frac{\mathrm{v} \pm V_{\pi\alpha\rho}}{\mathrm{v} \mp V_{\pi\eta\gamma\eta}}\right) f_{\pi\eta\gamma\eta}}$$

Τα πάνω πρόσημα ("+", "-") χρησιμοποιούνται όταν πηγή και παρατηρητής πλησιάζουν και τα κάτω ("-", "+") όταν απομακρύνονται

Κρουστικά κύματα

- Αν η πηγή κινείται τόσο γρήγορα ώστε η ταχύτητά της να ξεπερνά την ταχύτητα διάδοσης του κύματος μέσα στο μέσο τότε ένας κρουστικός κώνος δημιουργείται πίσω από την πηγή.
- Όλα τα κυματικά μέτωπα εφάπτονται αυτού του κώνου ο οποίος έχει γωνία κορυφής 2θ που υπολογίζεται από τη σχέση:



$$\sin\theta = \frac{\mathrm{v}t}{V_{\pi\eta\gamma\eta}\, t} = \frac{\mathrm{v}}{V_{\pi\eta\gamma\eta}} = \frac{1}{\alpha\rho\iota\theta\mu o\varsigma\ \text{Mach}}$$

Ωστικά κύματα

Όταν κρουστικό κύμα δημιουργείται $v_{πηγης} > v$ τότε το κύμα λέγεται ωστικό.

Το ωστικό κύμα έχει μεγάλες ποσότητες ενέργειας συγκεντρο-μένες στην επιφάνεια του κώνου

Ιατρικές εφαρμογές ηχητικών κυμάτων

- 3-D ultra-sound απεικόνιση:

  Πως δουλεύει: Τα ηχητικά κύματα ανακλώνται στα σύνορα μεταξύ δύο υλικών μέσων που έχουν διαφορετικές πυκνότητες. Πολλαπλές σαρώσεις της ίδιας περιοχής καταγράφονται και κατόπιν επεξεργάζονται από υπολογιστή για να δημιουργηθεί μια 3-D απεικόνιση

- Doppler ultra-sound:

  Πως δουλεύει: Παλμοί ultrasound κυμάτων ανακλώνται από κινούμενα ερυθρά κύτταρα του αίματος, επιστρέφοντας Doppler μετατοπισμένα κύματα. Μεταβολές στην συχνότητα μετρούνται και απεικονίζονται δηλώνοντας την ταχύτητα κίνησης των ερυθρών κυττάρων σε μια περιοχή του σώματος.
  Η μέθοδος χρησιμοποιείται για ανίχνευση φραγμένων αρτηριών, φλεβών, παρακολούθηση καρδιακού παλμού εμβρύων κλπ.

- Λιθότριψη με κρουστικά κύματα:

  Πως δουλεύει: Υψηλής ενέργειας κρουστικά κύματα εστιάζονται σε πέτρες νεφρών, με αποτέλεσμα να τα τις διαλύουν σε κομμάτια αρκετά μικρά ώστε να αποβληθούν από το σώμα

19ο Mini Exam

Έτοιμοι?