Κίνηση στερεών σωμάτων

- Κίνηση στερεού σώματος:
  - Υπολογισμός της κινητικής ενέργειας
  - Θεωρήσαμε ότι ένα σώμα διακριτής ή συνεχούς κατανομής μάζας
- Η κινητική ενέργεια δίνεται από την σχέση: $T = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \left(\vec{\omega}^2 \vec{r}_a^{\,2} - \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_a \right)^2 \right)$

  η οποία γράφεται σε απλούστερη μορφή σαν: $T = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{3} \omega_i I_{ij} \omega_j$

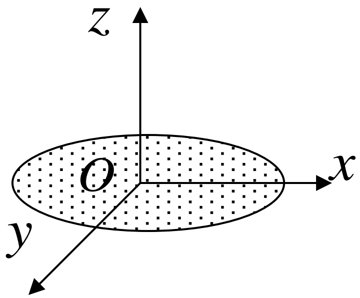
  $\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \vec{e}_i$ η γωνιακή ταχύτητα και $I_{ij} = \sum_{a=1}^{N} m_a \left(\vec{r}_a^{\,2} \delta_{ij} - r_i^a r_j^a \right)$ ο τανυστής αδράνειας

  Συμμετρικός, χρονικά ανεξάρτητος 3×3 πίνακας

  - Για συνεχή κατανομή μάζας: $I_{ij} = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) \left\{ \vec{r}^{\,2} \delta_{ij} - \left(\vec{r} \cdot \vec{e}_i \right) \left(\vec{r} \cdot \vec{e}_j \right) \right\}$
- Ο τανυστής αδράνειας μπορεί να διαγωνοποιηθεί μέσω: $\mathbf{O}\mathbf{I}\mathbf{O}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}'$
  - Ο ορθογώνιος πίνακας **O**, ορίζει ένα μετασχηματισμό στροφής του συστήματος συντεταγμένων σε τρεις νέους άξονες (κύριοι άξονες) ως προς τους οποίους ο τανυστής αδράνειας είναι διαγώνιος $\hat{\vec{e}}_i = O_{ij} \vec{e}_j$
  - Κατανομή μάζας συγγραμμική με κύριο άξονα δεν έχει ροπή αδράνειας

Δίσκος

- Δίσκος με πυκνότητα $\rho = M/(\pi R^2)$ στο $z=0$ επίπεδο.
  Ποια η ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο του



- Οι κύριοι άξονες θα είναι οι τρεις άξονες x,y και z:

$$I_x = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R dr \int_0^{2\pi} r\,d\theta \left[\underbrace{\left(x^2 + y^2\right) - x^2}_{y^2 = r^2 \sin^2\theta} \right]$$

$$I_x = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R dr \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2 d\theta = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R \pi r^3\, dr = \frac{M}{R^2}\frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{4}$$

$$I_y = I_x$$

$$I_z = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R dr \int_0^{2\pi} r\,d\theta \left[\left(x^2 + y^2\right) - z^2\right] = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R dr \int_0^{2\pi} r\,d\theta \left(x^2 + y^2\right)$$

$$I_z = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi \frac{R^2}{4} \Rightarrow I_z = \frac{MR^2}{2}$$

Τανυστής αδράνειας ως προς κέντρο μάζας

- Η ροπή αδράνειας και ο τανυστής αδράνειας εξαρτώνται από την αρχή ως προς την οποία υπολογίζεται ο τανυστής αδράνειας
  - Αν ξέρουμε τον τανυστή αδράνειας ως προς κάποιο σημείο, τότε δεν σημαίνει ότι ξέρουμε τον τανυστή ως προς ένα άλλο σημείο
  - Μια εξαίρεση: Αν ξέρουμε τον τανυστή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας τότε είναι εύκολο να τον υπολογίσουμε ως προς άλλο σημείο
  - Έστω μια συλλογή υλικών σημείων με μάζες m_a και διανύσματα θέσης $\vec{r}_a$
  - Το ΚΜ θα είναι: $\vec{R}_{CM} = \dfrac{\sum_a m_a \vec{r}_a}{\sum_a m_a}$ και έστω ξέρουμε τον τανυστή αδράνειας:
  - Θέλουμε να υπολογίσουμε τον τανυστή αδράνειας ως προς σημείο: $\vec{R} = \vec{R}_{CM} + \vec{c}$
  - Έστω χρησιμοποιούμε σύστημα συντεταγμένων τέτοιο ώστε: $\vec{R}_{CM} = 0$
  - Επομένως: $\sum_a m_a \vec{r}_a = 0$
  - Ο τανυστής αδράνειας ως προς το νέο σημείο θα είναι:

$$I_{ij}^{\vec{c}} = \sum_a m_a \left[\left(\vec{r}_a - \vec{c}\right)^2 \delta_{ij} - \left(\vec{r}_a - \vec{c}\right)_i \cdot \left(\vec{r}_a - \vec{c}\right)_j \right]$$

$$= I_{ij}^{CM} + \sum_a m_a \left[\xcancel{-2\vec{c}\cdot\vec{r}_a\delta_{ij}}^{\,0} + \xcancel{c_i \vec{r}_{a,j}}^{\,0} + \xcancel{c_j \vec{r}_{a,i}}^{\,0} \right] + \sum_a m_a \left(\vec{c}^{\,2}\delta_{ij} - c_i c_j\right)$$

$$\boxed{I_{ij}^{\vec{c}} = I_{ij}^{CM} + \xcancel{\sum_a m_a}^{\,M} \left(\vec{c}^{\,2}\delta_{ij} - c_i c_j\right)}$$

Υπολογισμός με τον τανυστή αδράνειας ως προς το CM

- Υπολογίσαμε τον τανυστή αδράνειας του δίσκου ως προς το CM
  - Έστω θέλουμε να τον υπολογίσουμε ως προς ένα σημείο σε θέση $\vec{R} = \vec{c} = c\hat{x}$
  - Βρήκαμε προηγουμένως ότι: $I_{ij}^{\vec{c}} = I_{ij}^{CM} + M\left(\vec{c}^{\,2}\delta_{ij} - c_i c_j\right)$

$$I^{\vec{c}} = M\begin{pmatrix} \frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{pmatrix} + M\begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} - M\begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I^{\vec{c}} = M\begin{pmatrix} \frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4} + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} + c^2 \end{pmatrix}$$

Αν μετακινήσουμε την αρχή ως προς την οποία υπολογίζουμε τον τανυστή αδράνειας στην $\hat{c}$-διεύθυνση, τότε η ποσότητα $\hat{c}^{T}\mathbf{I}\hat{c} = \sigma\tau\alpha\theta.$

Αν μετακινήσουμε το σώμα κατά μήκος ενός κύριου άξονα, τότε η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα θα μείνει ίδια

Δυναμική ενός ελεύθερου στερεού

- Η πλέον γενική κίνηση ενός στερεού σώματος είναι: μεταφορά + περιστροφή
- Αν η θέση ενός τμήματος του στερεού είναι: $\vec{r}_a$
  - Μπορούμε να γράψουμε συναρτήσει της θέσης του κέντρου μάζας:

$$\vec{r}_a = \vec{R}_{CM}(t) + \Delta\vec{r}_a(t) \longrightarrow \text{αποκλίσεις από το κέντρο μάζας}$$

  - Θεωρώντας σύστημα αναφοράς με αρχή το CM θα έχουμε: $\sum_a m_a \Delta\vec{r}_a = 0$
  - Ενώ η θέση του CM δίνεται από είναι: $\vec{R}_{CM} = \sum_a m_a \vec{r}_a \Big/ \sum_a m_a$
- Για να μελετήσουμε την δυναμική του στερεού, γράφουμε την Lagrangian:

$$L = T = \frac{1}{2}\sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_a m_a \left(\dot{\vec{R}}_{CM} + \Delta\dot{\vec{r}}_a\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_a m_a \dot{\vec{R}}_{CM}^2 + 2\sum_a m_a \left(\dot{\vec{R}}_{CM} \cdot \Delta\dot{\vec{r}}_a\right) + \sum_a m_a \Delta\dot{\vec{r}}_a^{\,2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}_{CM}^2 + \dot{\vec{R}}_{CM} \cdot \cancel{\sum_a d\left(m_a \Delta\vec{r}_a\right)}^{\,0}/dt + \frac{1}{2}\sum_a m_a \Delta\dot{\vec{r}}_a^{\,2} \Rightarrow L = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}_{CM}^2 + \frac{1}{2}\sum_a m_a \Delta\dot{\vec{r}}_a^{\,2}$$

Δυναμική ενός ελεύθερου στερεού

- Η κινητική ενέργεια του στερεού γράφεται επομένως: $L = T_{CM} + T^{\text{περιστρ}}_{\text{ως προς CM}}$
  - όπου: $T_{CM} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2_{CM}$ κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας
  - και: $T^{\text{περιστρ}}_{\text{ως προς CM}} = \frac{1}{2}\sum_a m_a \left(\Delta\dot{\vec{r}}_a^{\,2}\right)$ κινητική ενέργεια των m_α ως προς το CM
  - Αλλά είδαμε ότι : $\frac{1}{2}\sum_a m_a \left(\Delta\dot{\vec{r}}_a^{\,2}\right) = \frac{1}{2}\sum_a m_a \left(\omega \times \Delta\vec{r}_a\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \omega_i I_{ij} \omega_j$

    όπου I_{ij} ο τανυστής αδράνειας του στερεού υπολογισμένος ως προς το CM
- Η κίνηση του CM είναι αυτή ενός ελεύθερου σώματος με μάζα ίση με M και διάνυσμα θέσης $\vec{R}_{CM}$
- Επομένως αυτό που απομένει να μελετηθεί είναι η δυναμική του στερεού σώματος λόγω της περιστροφής του ως προς το CM με γωνιακή ταχύτητα ω
- Θα επικεντρωθούμε επομένως στον όρο: $T_{\text{περ.}} = \frac{1}{2}\sum_{ij} \omega_i I_{ij} \omega_j$

Στροφορμή στερεού

- Έχοντας την Lagrangian χρειάζεται να βρούμε τις εξισώσεις κίνησης:
  - Δυο τρόποι για να το κάνουμε:
    - Από τις εξισώσεις Euler-Lagrange θεωρώντας τα Δr_a σαν ανεξάρτητες δυναμικές μεταβλητές από τις οποίες εξαρτώνται οι συνιστώσες της ω
    - Ευκολότερα, αρκεί να προσέξουμε ότι:
      - ✓ Το σύστημα είναι αμετάβλητο κάτω από περιστροφές:
      - ✓ Αλλά λόγω συμμετριών ξέρουμε ότι περιστροφική συμμετρία ισοδυναμεί με διατήρηση της στροφορμής
  - Δεν χρειάζεται επομένως να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης
  - Αρκεί να γράψουμε την εξίσωση διατήρησης της στροφορμής για να πάρουμε αυτόματα τις εξισώσεις κίνησης
- Χρειάζεται να υπολογίσουμε την στροφορμή του συστήματος:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{l} = \sum_a \vec{l}_a = \sum_a m_a \vec{r}_a \times \dot{\vec{r}}_a \\ &\text{αλλά} \quad \dot{\vec{r}}_a = \vec{\omega} \times \vec{r}_a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{l} = \sum_a m_a \vec{r}_a \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_a\right)$$

$$\text{όμως} \quad \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{l} = \sum_a m_a \left[\vec{\omega}\left(\vec{r}_a \cdot \vec{r}_a\right) - \vec{r}_a\left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_a\right)\right] \Rightarrow \vec{l} = \sum_a m_a \left[\vec{r}_a^{\,2} \vec{\omega} - \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_a\right)\vec{r}_a\right]$$

Στροφορμή στερεού

- Η στροφορμή του στερεού γράφεται σαν: $\vec{l} = \sum_a m_a \left[\vec{r}_a^{\,2} \vec{\omega} - \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_a \right) \vec{r}_a \right]$ (1)
- Αλλά ο τανυστής αδράνειας έχει οριστεί σαν: $I_{ij} = \sum_a m_a \left(\vec{r}_a^{\,2} \delta_{ij} - r_i^a r_j^a \right)$ (2)
- Η γωνιακή ταχύτητα δίνεται από: $\vec{\omega} = \sum_i \omega_i \vec{e}_i$ (3)
- Μπορούμε να γράψουμε το διάνυσμα της στροφορμής στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς σαν: $\vec{l} = \sum_i l_i \vec{e}_i$
- Από τις (2) και (3) η (1) μπορεί να γραφεί: $l_i = \sum_j I_{ij} \omega_j$ (4)
- Από διατήρηση στροφορμής: $\dot{\vec{l}} = 0$
  - Αλλά: $\dot{\vec{l}} = \frac{d}{dt} \vec{l} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i l_i \vec{e}_i \right) \Rightarrow \dot{\vec{l}} = \sum_i \left(\dot{l}_i \vec{e}_i + l_i \dot{\vec{e}}_i \right) \Rightarrow \dot{\vec{l}} = \sum_i \left(\dot{l}_i \vec{e}_i + l_i \vec{\omega} \times \vec{e}_i \right)$

$$\Rightarrow \dot{\vec{l}} = \sum_i \left(\dot{l}_i + l_i \vec{\omega} \times \quad \right) \vec{e}_i = 0$$

- Αλλά από την (4) θα έχουμε: $\dot{l}_i = \sum_j I_{ij} \dot{\omega}_j$
- ενώ: $\vec{\omega} \times \vec{e}_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \omega_j \vec{e}_k$
- και: $l_i \vec{\omega} \times \vec{e}_i = \sum_{jk} l_i \varepsilon_{ijk} \omega_j \vec{e}_k = \sum_{jk} \left(\sum_l I_{il} \omega_l \right) \varepsilon_{ijk} \omega_j \vec{e}_k$

$$\dot{l}_i = \sum_j I_{ij} \dot{\omega}_j + \sum_{jkl} \varepsilon_{jkl} \omega_j I_{kl} \omega_l = 0$$