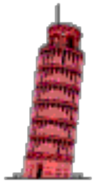
ΦΥΣ 114

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ Ι
ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Φθινόπωρο 2019

Διδάσκοντες/Υπεύθυνοι: Γρηγόρης Ίτσκος &
Φώτης Πτωχός

e-mail: itskos@ucy.ac.cy και f.ptohos@ucy.ac.cy
Τηλ: 22.89.2835 και 22.89.2837
Γραφείο: B235, B233
web-page: http://www2.ucy.ac.cy/~fotis/phy114/phy114.htm



Γενικές Πληροφορίες

- **Ώρες/Χώρος εργαστηρίου**: B212 ΘΕΕ02
  - Δευτέρα 09:00 – 13:00 group A

    Δευτέρα 14:00 – 18:00 group B

Θα χωριστείτε σε 3-μελείς ομάδες

Οι ομάδες θα ανακοινωθούν την επόμενη εβδομάδα.

Κάθε ομάδα θα εκτελεί μια άσκηση/βδομάδα.
Η σειρά με την οποία θα εκτελεί κάθε ομάδα τις ασκήσεις
θα καθοριστεί τυχαία.

Όλες οι ομάδες θα εκτελέσουν τις ίδιες εργαστηριακές ασκήσεις

Τι περιμένουμε από εσάς

- Η παρουσία και συμμετοχή σας στα εργαστήρια είναι **υποχρεωτική**

  Δεν επιτρέπονται απουσίες πέρα από σοβαρούς λόγους και μετά από συννενόησή σας μαζί μας.

  Οποιαδήποτε εργαστηριακή άσκηση δεν είστε σε θέση να συμμετάσχετε κάποια μέρα θα πρέπει να την αναπληρώσετε με την πρώτη ευκαιρία και μετά από συννενόηση μαζί μας

  - Πέρα της μιας αδικαιολόγητης απουσίας ισοδυναμεί με αυτόματη αποτυχία

- Η προετοιμασία σας για κάθε άσκηση (θεωρία – διατάξεις όργανα που θα χρησιμοποιηθούν) πριν έρθετε στο εργαστήριο θεωρείται απαραίτητη

- Ο καθένας από σας θα πρέπει να έχει το προσωπικό του log–book στο οποίο θα πρέπει να σημειώνετε σχολαστικά οτιδήποτε μετρήσεις κάνετε καθώς και σχόλια για τις συνθήκες της εργαστηριακής άσκησης που εκτελείτε – Περισσότερα αργότερα

Βαθμολογία

- Η βαθμολογία θα βασιστεί στα ακόλουθα:
  - **45% Αξιολόγηση/συμμετοχή στις εργαστηριακές ασκήσεις**
    - 15% 10-λεπτα quiz σχετικά με την προετοιμασία σας πριν κάθε εργαστήριο
    - 15% Αξιολόγηση γραπτής έκθεσης που περιέχει την επεξεργασία των μετρήσεων και συμπεράσματά σας
    - 15% Συνοπτική παρουσίαση (10-λεπτά) της ανάλυσης των αποτελεσμάτων σας από τη προηγούμενο εργαστήριο και πριν το επόμενο

  Θα δούμε ποια θα είναι η σωστή μορφή και περιεχόμενο της γραπτής έκθεσης και παρουσίασης

  Οι εκθέσεις και παρουσιάσεις θα είναι συλλογική προσπάθεια της κάθε ομάδας. Κάποιο άτομο της ομάδας θα επιλέγεται τυχαία να παρουσιάσει τα αποτελέσματα ενώ τα υπόλοιπα μέλη θα πρέπει να είναι σε θέση να βοηθήσουν ή να απαντήσουν σε ερωτήσεις. Η βαθμολογία της παρουσίασης και έκθεσης θα είναι συλλογική

  - **55% 4-ωρη τελική εξέταση**

    Πρακτική εξέταση με την εκτέλεση μέρους μιας εργαστηριακής άσκησης όχι απαραίτητα με τον τρόπο που θα τις εκτελέσετε και ανάλυση αποτελεσμάτων καθώς και μερικές ασκήσεις από τη θεωρία σφαλμάτων

Θέματα/Ασκήσεις που θα καλυφθούν

- Εισαγωγή στη στατιστική και πιθανότητες – Ανάλυση δεδομένων
  - Σημαντικά ψηφία
  - Μέτρηση – προσδιορισμός σφάλματος και μετάδοση σφαλμάτων
  - Κατανομές (Δυονυμική [binomial] – Gauss – Poisson)
  - Μέθοδοι προσαρμογής (fitting) – Ελάχιστα τετραγώνα (χ^2) – Likelihood

1ος κύκλος ασκήσεων

- 1η ΑΣΚΗΣΗ: Απλό εκκρεμές και υπολογισμός της επιτάχυνσης λόγω της βαρυτικής δύναμης
- 2η ΑΣΚΗΣΗ: Ελεύθερη πτώση και υπολογισμός της επιτάχυνσης λόγω της βαρυτικής δύναμης
- 3η ΑΣΚΗΣΗ: Ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση
- 4η ΑΣΚΗΣΗ: Πλάγια βολή
- 5η ΑΣΚΗΣΗ: Κρούσεις

2ος κύκλος ασκήσεων

- 6η ΑΣΚΗΣΗ: Διατήρηση μηχανικής ενέργειας
- 7η ΑΣΚΗΣΗ: Μελέτη περιστροφικής κίνησης στερεών
- 8η ΑΣΚΗΣΗ: Μελέτη της στροφορμής και γυροσκοπίου
- 9η ΑΣΚΗΣΗ: Μελέτη ροπής αδράνειας στερεών σωμάτων
- 10η ΑΣΚΗΣΗ: Αεροδυναμική στερεών σωμάτων

Θεωρία – Πείραμα – Μετρήσεις – Σφάλματα

- **Θεωρία:** Η απάντηση που ζητάτε είναι αποτέλεσμα μαθηματικών πράξεων και εφαρμογή τύπων. Το αποτέλεσμα είναι συγκεκριμένο

- **Πείραμα:** Στηρίζεται σε μετρήσεις. Κάθε μέτρηση όσο προσεκτικά και αν έχει πραγματοποιηθεί περιέχει μια αβεβαιότητα

- Όλη η δομή και εφαρμογή των επιστημών στηρίζονται σε πείραμα και επομένως μετρήσεις. Η ικανότητα να υπολογίσουμε την αβεβαιότητα των μετρήσεων και να περιορίσουμε το μέγεθός τους είναι ιδιαίτερα σημαντικό αν θέλουμε να εξάγουμε σημαντικά συμπεράσματα

- Η μεθοδολογία, τα όργανα που χρησιμοποιούνται αλλά και μεις οι ίδιοι δεν είμαστε αλάνθαστοι με αποτέλεσμα οι μετρήσεις που παίρνουμε συνοδεύονται πάντοτε με κάποια αβεβαιότητα που ονομάζεται πειραματικό σφάλμα της μέτρησης

- Το σφάλμα αντιπροσωπεύει την διαφορά της μετρούμενης ή υπολογιζόμενης τιμής ενός μεγέθους από την αληθινή τιμή του μεγέθους αυτού

Σφάλματα μετρήσεων

- Είναι σημαντικό σε όλες τις επιστήμες:
  - να σχεδιάσουμε και να πραγματοποιήσουμε κάποιο πείραμα

Αλλά είναι περισσότερο σημαντικό

  - να κατανοήσουμε τους περιορισμούς που επιβάλει ο σχεδιασμός του και οι συσκευές που χρησιμοποιούνται για την μέτρηση διαφόρων φυσικών μεγεθών

- Είναι απαραίτητο να καταλάβουμε τα πειραματικά σφάλματα και πως μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε αν θέλουμε να συγκρίνουμε θεωρητικά και πειραματικά αποτελέσματα και να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα

Γιατί τόσο σημαντική η γνώση του σφάλματος?

- Έστω ότι έχετε κάποιο πολύτιμο νόμισμα το οποίο θέλετε να βρείτε άν είναι χρυσό ή κάποιο άλλο κράμα μετάλλων. Ξέρετε ότι η πυκνότητα του χρυσού είναι 15.5γρ/cm^3 ενώ του κράματος είναι 13.8γρ/cm^3. Καλείτε 2 ειδικούς οι οποίοι μετρούν με κάποια μέθοδο τη πυκνότητα του νομίσματος:
  - Α' ειδικός: Η πυκνότητα είναι 15 και σίγουρα στο διάστημα: $[13.5 - 16.5]$
  - Β' ειδικός: Η πυκνότητα είναι 13.9 και σίγουρα στο διάστημα: $[13.7 - 14.1]$
- Η μέτρηση του Β' ειδικού είναι περισσότερο ακριβής αλλά η μέτρηση του Α' ειδικού είναι επίσης σωστή. Οι δυό μετρήσεις είναι συμβατές στα όρια της ακρίβειας της κάθε μέτρησης. Επομένως και οι δυό μετρήσεις μπορούμε να υποθέσουμε (και πιθανόν) είναι σωστές.
- Η μέτρηση του Α' ειδικού δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμη ωστόσο – Η αβεβαιότητα είναι πολύ μεγάλη και περιέχει και τις δυο τιμές που θέλουμε να υπολογίσουμε Επομένως δεν μπορούμε να εξαγάγουμε κάποιο συμπέρασμα
- Η μέτρηση του Β' ειδικού δείχνει ότι το νόμισμα δεν είναι χρυσό. Η πυκνότητα του κράματος (13.8γρ/cm^3) περιέχεται στην αβεβαιότητα της μέτρησης
- Ο Β' ειδικός θα πρέπει να δώσει επιχειρήματα που να πείθουν για το μέγεθος της αβεβαιότητας της μέτρησής του. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό
- Χωρίς τη γνώση των αβεβαιοτήτων των 2 μετρήσεων τα αποτελέσματα θα ήταν άχρηστα και συγκρουόμενα: Ο Α' ειδικός λέει ότι είναι χρυσό και ο Β' το αντίθετο

Σφάλματα

"Το σφάλμα είναι ανθρώπινο. Το να περιγράψουμε το σφάλμα σωστά είναι μια μορφή τέχνης"

Οι φυσικές επιστήμες χωρίζονται σε 2 κλάδους: θεωρία και πείραμα

Ο τρόπος που οι 2 κλάδοι εξετάζουν αριθμητικά αποτελέσματα είναι σημαντικά διαφορετικός.

Παράδειγμα: Σώμα το οποίο πέφτει υπό την επίδραση της βαρύτητας κινείται με σταθερή επιτάχυνση $g=9.8 m/s^2$

Η πρόταση αυτή είναι απολύτως αποδεκτή όταν λύνουμε κάποιο πρόβλημα. Ωστόσο όταν κάνουμε κάποια μέτρηση είναι ημιτελής.

Η επιτάχυνση g είναι 9.7 ή 9.9 m/s^2 ?

Είναι πιο κοντά στο 9.80001 ή στο 9.79999 m/s^2 ?

Όλοι ξέρουμε ότι η επιτάχυνση g μεταβάλεται με το ύψος από την επιφάνεια της γης. Εξαρτάται ακόμα από το γεωγραφικό πλάτος.

Ακόμα περισσότερο η μέτρηση μιας φυσικής ποσότητας (όπως το g) εξαρτάται από τα όργανα που χρησιμοποιούμε και κανένα όργανα δεν είναι τέλειο.

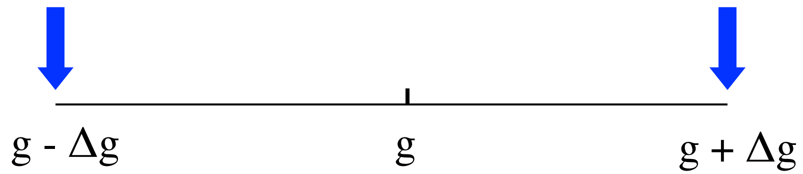
Επομένως είναι αδύνατο να μετρήσουμε ακριβώς την τιμή της επιτάχυνσης g

Σφάλματα

Από πειραματική άποψη η προηγούμενη πρόταση θα ήταν σωστή ως:

“Μια μπάλα 5gr που αφήνεται ελεύθερη να πέσει υπό την επίδραση της δύναμης της βαρύτητας από ύψος $1.0 \pm 0.1m$ από την επιφάνεια του εδάφους μετρήθηκε ότι κινείται με σταθερή επιτάχυνση $g = 9.81 \pm 0.03 m / s^2$
Η μέτρηση πραγματοποιήθηκε στο εργαστήριο B212 του Πανεπιστημίου Κύπρου στη Λευκωσία στις 15:00 τη Πέμπτη 8 Σεπτεμβρίου 2011. “

Ο αριθμός που εμφανίζεται στα δεξιά του συμβόλου ± προσδιορίζει το σφάλμα της μέτρησης. Την αβεβαιότητα (ή βεβαιότητα) της μέτρησης. Σημαίνει ότι η πραγματική τιμή του μεγέθους που μετρούμε βρίσκεται μεταξύ των τιμών $g-\Delta g$ και $g+\Delta g$



Προσοχή: Το σωστό πείραμα είναι αυτό που έχει εκτελεσθεί σωστά και επομένως

Το σφάλμα σε μια πειραματικά μετρούμενη ποσότητα δεν μπορεί ποτέ να βρεθεί σε κάποιο βιβλίο ή σε κάποια ιστοσελίδα

Αβεβαιότητα – (uncertainty)

Μιλήσαμε για σφάλματα (errors), δηλώνοντας ότι δείχνουν ασυμφωνία μεταξύ της μετρούμενης τιμής ενός φυσικού μεγέθους και της πραγματικής τιμής του.

Στόχος της επιστημονικής έρευνας είναι να βρει κάτι νέο, τη τιμή του οποίου δεν γνωρίζουμε από πριν. ‘Έτσι δεν μπορούμε να κάνουμε αναφορά σε πραγματική τιμή ενός μεγέθους και έτσι ο ορισμός του σφάλματος δεν ισχύει.

Ο πραγματικός επιστήμονας που ανακαλύπτει κάτι υποθέτει πάντοτε ότι το πείραμά του δεν έχει σφάλμα μέτρησης. Υπάρχει πάντα αυτή η πιθανότητα και πάντοτε μια μέθοδος αναλύεται διεξοδικά για αποφυγή σφάλματος μέτρησης

Αργότερα, επαναλαμβάνοντας μια μέτρηση μπορεί να ανακαλυφθεί κάποιο σφάλμα αλλά αρχικά δεν υπάρχει κάποιος οδηγός για σύγκριση με την πραγματική τιμή.

Αβεβαιότητα μιας μετρούμενης τιμής είναι το διάστημα γύρω από την μετρούμενη τιμή τέτοιο ώστε η επανάλειψη της μέτρησης θα δώσει ένα αποτέλεσμα το οποίο περικλείεται στο διάστημα αυτό

Το διάστημα αυτό δηλώνεται από τον ερευνητή σύμφωνα με προκαθορισμένες αρχές υπολογισμού της αβεβαιότητας. Η αβεβαιότητα είναι ο σημαντικός όρος που επιτρέπει τους επιστήμονες να κάνουν πλήρως βέβαια συμπεράσματα

Αβεβαιότητα

Έστω ότι κάποιος συνάδελφός σας μέτρησε ότι το πάχος ενός βιβλίου είναι 8.53±0.08cm. Δηλώνοντας την αβεβαιότητα (0.08) πιστοποιεί ότι οποιαδήποτε μέτρηση του πάχους του βιβλίου θα δώσει μια τιμή στο διάστημα 8.45 – 8.61 cm

Αν σας έλεγε ότι το βιβλίο έχει πάχος 8.53 cm τότε η πληροφορία αυτή είναι ελλειπής αφού δεν έχετε γνώση των περιορισμών του οργάνου μέτρησης.
Δεν μπορείτε να συζητήσετε για σφάλμα στην περίπτωση αυτή και δεν θα μιλήσετε με σιγουριά για το αποτέλεσμα.

Χρειάζεται πάντοτε να ορίσετε το διάστημα εμπιστοσύνης (confidence interval) και τότε μπορείτε να εκφράσετε οτιδήποτε με εμπιστοσύνη που κάποιος επιστήμονας θα πρέπει να συμφωνήσει μαζί σας. Ο απώτερος σκοπός είναι να κάνετε το διάστημα αυτό όσο το δυνατό μικρότερο και αυτό επιτυγχάνεται με εμπειρία.

Αβεβαιότητα επομένως μιας αναφερόμενης μέτρησης είναι το διάστημα εμπιστοσύνης γύρω από την μετρούμενη τιμή τέτοιο ώστε η μετρούμενη τιμή δεν μπορεί να βρίσκεται έξω από αυτό

Η αβεβαιότητα μπορεί να δοθεί και σα πιθανότητα. Στη περίπτωση αυτή η μετρούμενη τιμή έχει τη δηλώμενη πιθανότητα να βρίσκεται στο διάστημα εμπιστοσύνης.

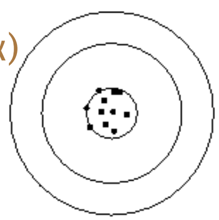
Ακρίβεια και πιστότητα μέτρησης

- Πιστότητα (accuracy) ενός πειράματος μέτρησης μιας ποσότητας είναι το μέτρο του πόσο κοντά στην αληθινή τιμή της φυσικής ποσότητας βρίσκεται το αποτέλεσμα

- Ακρίβεια (precision) ενός πειράματος μέτρησης μιας ποσότητας υποδηλώνει κατά πόσο διαδοχικές μετρήσεις συμπίπτουν ή επαναλαμβάνονται και αναφέρεται στη διακριτική ικανότητα (resolution) της μέτρησης.

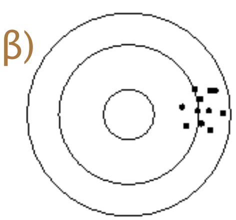
  Η διακριτική ικανότητα δείχνει πόσο στενά είναι τα όρια στα οποία προσδιορίζεται το μετρούμενο μέγεθος

(α)



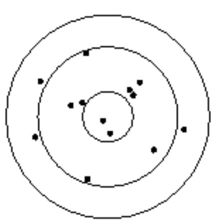
Πιστό και ακριβές

(β)



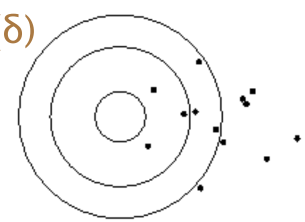
Ακριβές αλλά όχι πιστό

(γ)



Πιστό αλλά όχι ακριβές

(δ)



Ούτε ακριβές και ούτε πιστό

Είδη σφαλμάτων

- Ακούσια ή απαράδεκτα σφάλματα

  Έλλειψη προσοχής

  Λανθασμένη ανάγνωση ή καταγραφή μετρήσεων

  Λάθη πράξεων

  Ανώμαλες πειραματικές συνθήκες

- Στην περίπτωση αυτή, οι μετρήσεις πρέπει να επαναληφθούν ή αν είναι μέρος μιας σειράς μετρήσεων τότε η συγκεκριμένη μέτρηση παραλείπεται

- Συστηματικά σφάλματα

  Σφάλματα οργάνων μέτρησης (π.χ. λάθος βαθμονόμηση οργάνου μέτρησης)

  Σφάλματα περιβάλλοντος (π.χ. Θερμοκρασία, πίεση, μαγνητικό πεδίο της γης, μη ακριβές θεωρητικό μοντέλο)

  Σφάλματα θεωρητικής φύσης

- Στατιστικά ή τυχαία σφάλματα

  Σφάλματα που εισέρχονται κατά τη διάρκεια μιας μέτρησης και έχουν σαν αποτέλεσμα να μετρούμε είτε μεγαλύτερη ή μικρότερη τιμή από τη πραγματική.

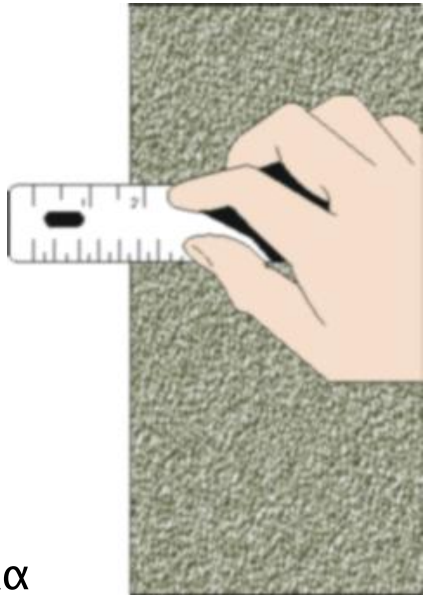
  π.χ. ο χρόνος αντίδρασής μας στη μέτρηση χρόνου με ένα χρονόμετρο

  Τα υπολογίζουμε και ελαττώνουμε με πολλαπλές μετρήσεις αλλά δεν μπορούμε να αποφύγουμε – υπάρχουν πάντα

Συστηματικά σφάλματα

Σφάλματα παρατήρησης (π.χ. ανάγνωση οργάνου – έμμεση ή άμεση εξάρτηση από τον ανθρώπινο παράγοντα)

Συνήθως απαλείφονται με την επανάληψη της μέτρησης από άλλους παρατηρητές



Η μέτρηση στο διπλανό σχήμα δείχνει να υποφέρει από κάποιο σφάλμα: Ο παρατηρητής μάλλον χρειάζεται να καθαρίσει τα γυαλιά του γιατί η μέτρηση που κάνει δεν διαβάζεται καθαρά

Η μέτρηση δηλαδή έχει προτίμηση (bias) εξαιτίας του παρατηρητή. Επανάληψη της μέτρησης από άλλους παρατηρητές ουσιαστικά θα μας δώσει μια κατανομή τιμών γύρω από την αληθινή τιμή

Τα συστηματικά σφάλματα δεν αναγνωρίζονται εύκολα και ο προσδιορισμός τους είναι πολλές φορές επίπονος

Ονομάζονται συστηματικά σφάλματα γιατί το αποτέλεσμα της μέτρησης είναι πάντοτε μετατοπισμένο προς μια κατεύθυνση σχετικά με την αληθινή τιμή του μετρούμενου μεγέθους (προς τα πάνω ή προς τα κάτω)

Τα συστηματικά σφάλματα επηρεάζουν την πιστότητα (accuracy) ενός πειράματος

Στατιστικά ή τυχαία σφάλματα

Τα σφάλματα αυτά εμφανίζονται ακόμα και όταν έχουν απαλοιφεί τα συστηματικά και ακούσια σφάλματα ή έχουν ληφθεί υπόψη

Προέρχονται από συνδυασμό διαφόρων αιτιών όπως και τα συστηματικά σφάλματα αλλά ο τρόπος με τον οποίο επηδρούν σε μια μέτρηση είναι τυχαίος

Τα σφάλματα αυτά δεν είναι ή δεν φαίνονται να είναι συνδεδεμένα με κάποια αιτία και δεν επαναλαμβάνονται αλλά είναι τυχαία

Εξαιτίας τους η μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους μπορεί να δώσει τιμή μεγαλύτερη της αληθινής ενώ η επανάληψη της μέτρησης μπορεί να δώσει κάποια μικρότερη τιμή της αληθινής

Τα σφάλματα αυτά υπάρχουν σε κάθε μέτρηση με αποτέλεσμα τόσο η αληθινή όσο και το ακριβές σφάλμα μιας μέτρησης να μη μπορούν να προσδιορισθούν

Ένα καλό παράδειγμα τυχαίου σφάλματος είναι αυτό που σχετίζεται με την δειγματοληψία ή μέτρηση. Έστω ότι μελετάμε μια ραδιενεργό διάσπαση που γίνεται τυχαία με ένα σταθερό ρυθμό. Αν ένα δείγμα έχει 1000 ραδιενεργείς διασπάσεις/sec τότε ο αναμενόμενος αριθμός διασπάσεων σε 5sec είναι 5000. Αν παίρνουμε μετρήσεις κάθε 5sec τότε οι τιμές των διασπάσεων που θα μετρούμε θα διαφέρει από την αναμενόμενη τιμή, 5000, αλλά εν γένει η τιμή που θα μετρούμε θα είναι γύρω από την τιμή $5000 \pm \sqrt{5000}$

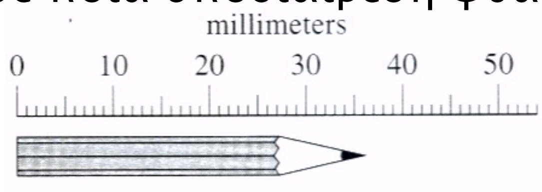
Τα στατιστικά σφάλματα επηρεάζουν την ακρίβεια (precision) ενός πειράματος και ελαττώνονται με αρκετές επαναλήψεις της μέτρησης

Σφάλμα ανάγνωσης οργάνου

Το σφάλμα αυτό αναφέρεται σε αβεβαιότητες στη μέτρηση που προκαλούνται από τις πεπερασμένες ιδιότητες του οργάνου μέτρησης και/ή από τις δικές μας πεπερασμένες ικανότητες τη στιγμή της μέτρησης (π.χ. χρόνος αντίδρασης)

Το σφάλμα αυτό δεν αναφέρεται σε άλλα σφάλματα που μπορούν να γίνουν κατά τη διάρκεια ενός πειράματος

- Το σφάλμα ανάγνωσης επηρεάζει την ακρίβεια ενός πειράματος
- Μήκος ενός μολυβιού: Τοποθετούμε τη μια πλευρά στο 0 του χάρακα και πρέπει να αποφασίσουμε σε ποια υποδιαίρεση φθάνει η αιχμηρή πλευρά του



Για να υπολογήσουμε το σφάλμα ανάγνωσης πρέπει να απαντήσουμε στην ερώτηση: ποια είναι η μέγιστη και ελάχιστη τιμή που μπορεί να είχε η θέση για την οποία δεν θα δούμε καμιά διαφορά

Δεν υπάρχει κάποιος κανόνας που να μας βοηθά στην απάντηση

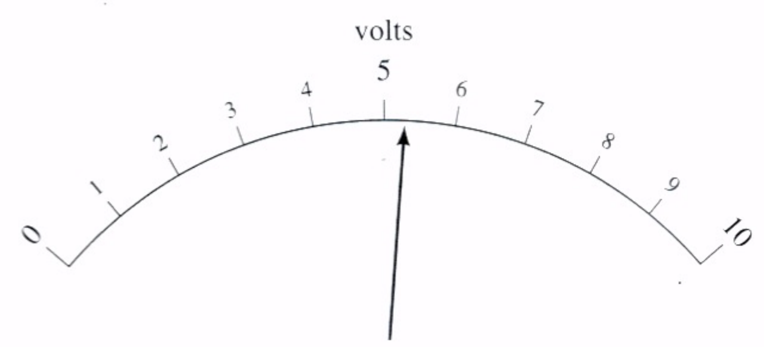
Οι υποδιαιρέσεις του χάρακα είναι αρκετά κοντά (1mm) και μπορούμε αναμφίβολα να αποφασίσουμε ότι το μήκος του μολυβιού είναι πιο κοντά στα 36mm από ότι στα 35mm ή 37mm αλλά σίγουρα θέλουμε καλύτερη ανάγνωση.

Θα μπορούσε να ήταν <36.5mm ? Πολύ πίθανο αλλά μάλλον μικρότερη
Θα μπορούσε να ήταν <35.5mm? Μάλλον απίθανο

- Η πιθανότερη τιμή του σφάλματος ανάγνωσης είναι ±0.5mm και η μέτρηση του μήκους είναι 36.0±0.5 mm.

Σφάλμα ανάγνωσης οργάνου

- Μέτρηση διαφοράς ηλεκτρικού δυναμικού στο άκρα μιας αντίστασης



Οι υποδιαιρέσεις στην περίπτωση αυτή έχουν μεγαλύτερη απόσταση. Μπορούμε ωστόσο να υπολογίσουμε τη θέση του δείκτη μεταξύ δυο υποδιαιρέσεων

Μια πιθανή (λογική) τιμή για την τάση θα ήταν 5.3V με πιθανό εύρος 5.2–5.4V

Για άλλους παρατηρητές το σφάλμα να ήταν ±0.2V ή μικρότερο π.χ. 0.05V αλλά κανείς δεν θα αμφισβητούσε ότι το εύρος που δόθηκε αρχικά (0.1V) δεν αποτελεί μια λογική εκτίμηση του σφάλματος

Συχνά αναφέρεται στην βιβλιογραφία ότι το σφάλμα ανάγνωσης είναι ± μισό της μικρότερης υποδιαίρεσης.

Αυτό είναι λάθος! Το σφάλμα ανάγνωσης τέτοιων οργάνων μπορούν να προσδιοριστούν μόνο από το παρατηρητή που διαβάζει την ένδειξη του οργάνου και μπορεί να είναι διαφορετική για διαφορετικά άτομα

Σφάλμα ανάγνωσης οργάνου

Για ένα ψηφιακό όργανο το σφάλμα ανάγνωσης είναι συνήθως είναι ±το μισό του τελευταίου ψηφίου

Η έκφραση "± το μισό του τελευταίου ψηφίου" είναι η "γλώσσα" που χρησιμοποιείται στους οδηγούς των κατασκευαστών του οργάνου

Δεν σημαίνει το μισό της τιμής του τελευταίου ψηφίου ("0.8" στη περίπτωσή μας) αλλά το μισό της δύναμης του 10 που αντιπροσωπεύει το τελευταίο ψηφίο.

Δηλαδή για την περίπτωσή μας: $\frac{1}{2} \times 0.1 = 0.05$

Είναι σα να λέμε ότι η τιμή είναι πιο κοντά στο 12.8 από το 12.7 ή

Η τελική μας απάντηση επομένως θα ήταν 12.80 ±0.05 ^{0}C

Προσοχή: Το σφάλμα του οργάνου καθορίζεται από τους κατασκευαστές και θα πρέπει να ανατρέχουμε στο αντίστοιχο οδηγό χρήσης του οργάνου

Σφάλμα σε επαναλβανόμενες μετρήσεις

Έστω ότι μετρούμε σε ένα πείραμα το χρόνο που χρειάζεται μια μπάλα να φθάσει στο έδαφος όταν την αφήσουμε από ένα συγκεκριμένο ύψος

Οι μετρήσεις μας εξαρτώνται από τις διαφοροποιήσεις στο χρόνο αντίδρασής μας για να ξεκινήσουμε ή να σταματήσουμε το χρονόμετρο, τυχαίες διακυμάνσεις της κίνησης του αέρα, διακυμάνσεις στις αρχικές συνθήκες. Όλες αυτές οι διακυμάνσεις οδηγούν σε μια σειρά μετρήσεων που μπορεί να παρουσιάζουν σημαντική διασπορά.

Η αληθινή τιμή βρίσκεται κάπου μεταξύ της μικρότερης και μεγαλύτερης τιμής που έχουμε μετρήσει ενώ η διασπορά (το διάστημα που βρίσκονται οι τιμές) δίνει το πιο πιθανό διάστημα τιμών.

Υποθέτουμε ότι η καλύτερη εκτίμηση των μετρήσεών μας δίνεται από την αριθμητική μέση τιμή των μετρήσεων αυτών

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Πάντοτε ζητούμε και μια μέτρηση της διασποράς των τιμών x_i

Η διασπορά σχετίζεται με την αβεβαιότητα της υπολόγιζόμενης τιμής από την αληθινή τιμή του μεγέθους x. Ο καλύτερος υπολογισμός της διασποράς δίνεται από την τυπική απόκλιση, σ, του x και δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + (x_3-\bar{x})^2 + \cdots + (x_n-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}$$

Για n>30 $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}$

Τυπικό σφάλμα ή σφάλμα μέσης τιμής

Η τυπική απόκλιση σχετίζεται με το σφάλμα κάθε ξεχωριστής μέτρησης x_i

Ωστόσο αυτό που συνήθως θέλουμε είναι το σφάλμα στη καλύτερη εκτίμηση της τιμής του x, που είναι η μέση τιμή $\bar{x}$

Το σφάλμα αυτό είναι μικρότερο από την τυπική απόκλιση, σ, γιατί διαφορετικά θα μπορούσαμε να υπολογήσουμε την αληθινή τιμή του x το ίδιο καλά με μια και μόνο μέτρηση όπως θα κάναμε με πολλές μετρήσεις.

Το σφάλμα της μέσης τιμής ή τυπικό σφάλμα ορίζεται σαν η τυπική απόκλιση, σ, όλων των μετρήσεων διαιρούμενη με την τετραγωνική ρίζα του αριθμού των μετρήσεων:

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

Επομένως η απάντησή μας στην ερώτηση “ποιά είναι η αληθινή μετρούμενη τιμή της φυσικής ποσότητας x? “ είναι:

$$x = \bar{x} \pm \sigma_x = \bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Το σφάλμα έχει τις ίδιες διαστάσεις με τη μετρούμενη ποσότητα

Θα πρέπει επομένως να πάρουμε αρκετές μετρήσεις ώστε να ελαττώσουμε το σφάλμα αλλά όχι περισσότερες από όσες οδηγούν σε σφάλμα μικρότερο από το σφάλμα ανάγνωσης του οργάνου.

Μερικοί ακόμα ορισμοί …

Μέγιστο σφάλμα: $\Delta x_{\max} = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$ Όπου x_{max} και x_{min} είναι οι ακρότατες τιμές που μετρήθηκαν και δεν μπορεί να βρεθεί τιμή έξω από το διάστημα $\bar{x} \pm \Delta x_{\max}$

Πιθανό σφάλμα: Το σφάλμα αυτό προσδιορίζει το διάστημα $\bar{x} \pm \Delta x_{\pi\iota\theta.}$ που περικλύει το 50% των μετρούμενων τιμών

Απόλυτο σφάλμα: Το τυπικό σφάλμα μιας μέτρησης ονομάζεται και απόλυτο

Σχετικό σφάλμα: $\Delta x_{\sigma\chi\varepsilon\tau.} = \dfrac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}} \times 100\%$ Είναι αδιάστατος αριθμός

Σημαντικά ψηφία

Κάθε πείραμα όπως είδαμε περιέχει ένα βαθμό αβεβαιότητας.
Ας υποθέσουμε ότι τρεις παρατηρητές μετρούν το μήκος ενός φύλου χαρτιού με ένα χάρακα με μικρότερη υποδιαίρεση το mm και βρίσκουν
27.92cm, 27.96cm και 27.90cm

Παρατηρήστε ότι όλοι συμφωνούν στα τρία πρώτα ψηφία. Προφανώς το 4ο ψηφίο (το οποίο υπολογίστηκε από τον καθένα) είναι ένα αβέβαιο ψηφίο. (Ακόμα και το 3ο ψηφίο μπορεί να είναι αβέβαιο ανάλογα με τις συνθήκες)

Ορισμός

Τα ψηφία που θεωρούνται σωστά και το πρώτο αβέβαιο ψηφίο ονομάζονται σημαντικά ψηφία

Ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων σε μια μέτρηση εξαρτάται από την ακρίβεια του οργάνου της μέτρησης και σε ένα βαθμό από την ικανότητα του παρατηρητή και θα πρέπει να προσπαθούμε να πάρουμε τόσα ψηφία όσα μας επιτρέπει το όργανο μέτρησης.

Ανάλογα θα πρέπει να καταγράφουμε μετρήσεις μόνο με τα σωστά σημαντικά ψηφία και όχι με περισσότερα ψηφία που υποδηλώνουν μεγαλύτερη ακρίβεια από αυτή που καθορίζεται από το όργανο ή τη μέθοδο μέτρησης

Σημαντικά ψηφία

Για παράδειγμα έστω ότι μετρήσαμε τη μάζα ενός σώματος να είναι 12.743509 Kgr και προσδιορίσαμε την αβεβαιότητα της μέτρησης σαν ±0.3.

Ο αριθμός 12.743509 αποτελείται από 8 σημαντικά ψηφία ενώ η αβεβαιότητα μας λέει ότι τα 5 τελευταία ψηφία (43509) δεν έχουν καμιά σημαντική βαρύτητα εφόσον αντιπροσωπεύουν ποσότητα μικρότερη από την αβεβαιότητα.
Τα ψηφία αυτά ονομάζονται μή σημαντικά.

Οι υπολογιστικές μηχανές δείχνουν μη σημαντικά ψηφία και μπορούμε να πάρουμε μη σημαντικά ψηφία απλά και μόνο από απλές υπολογιστικές πράξεις.

Για παράδειγμα έστω ότι μετρήσαμε το μήκος μιας ράβδου και το βρήκαμε 12 ίντσες. Μια ίντσα είναι 2.54cm και επομένως το μήκος της ράβδου θα είναι l = 12 x 2.54 = 30.48cm. Ξεκινώντας δηλαδή από μια μέτρηση με 2 σημαντικά ψηφία (12) καταλήξαμε στο προσδιορισμό του μήκους με 4 σημαντικά ψηφία (μεγαλύτερη ακρίβεια) που δεν μπορεί να ισχύει. Επομένως θα έπρεπε να γράψουμε ότι το ύψος είναι 30.cm και όχι 30.48cm

Σημαντικά ψηφία – Κανόνες γραφής – μέτρησης

(1α) Γράφουμε τις τιμές των φυσικών μεγεθών ώστε το τελευταίο μετρούμενο ψηφίο πέφτει στα δεξιά της υποδιαστολής. Αυτό μπορούμε να το επιτύχουμε είτε χρησιμοποιώντας επιστημονική σήμανση (π.χ. $3.45 = 0.345 \times 10^1$) ή χρησιμοποιούμε μεγαλύτερες μονάδες.

(1β) Το ψηφίο που αντιπροσωπεύει την μικρότερη μετρούμενη υποδιαίρεση κλίμακος πρέπει να γραφεί ακριβώς ακόμα και αν είναι μηδέν (π.χ. 3.430 m με κλίμακα mm)

(1γ) Στρογγυλοποίηση. Όταν διώχνουμε τα μη σημαντικά ψηφία συνήθως αν το πρώτο μη σημαντικό ψηφίο είναι ≥5 τότε το στρογγυλοποιούμε το τελευταίο σημαντικό ψηφίο προς τα πάνω ένω αν είναι το πρώτο σημαντικό ψηφίο < 5 η στρογγυλοποίηση γίνεται προς τα κάτω. (π.χ. 4.7664 –> 4.77 ενώ 4.7644–>4.76

(2) Αν το πρώτο μη σημαντικό ψηφίο είναι 5 τότε μπορείτε να το στρογγυλοποιήσετε όπως επιθυμήτε προς τα πάνω ή κάτω αλλά θα πρέπει να χρησιμοποείται πάντα τον ίδιο τρόπο

(3) Ακέραιοι αριθμοί (1…9) είναι πάντοτε σημαντικοί.

(4) Ψηφία που βρίσκονται στα δεξιά της υποδιαστολής είναι σημαντικά.
π.χ.   12.456 έχει 5 σημαντικά ψηφία.
Ο αριθμός 0.45932 έχει 5 σημαντικά ψηφία.

Σημαντικά ψηφία – κανόνες μέτρησης

(5) Προσοχή χρειάζεται στα μηδενικά:

(α) Μηδενικά αμέσως μετά την υποδιαστολή δεν υπολογίζονται στα σημαντικά ψηφία αν μετά ακολουθεί στα δεξιά τους κάποιος ακέραιος και δεν υπάρχει ακέραιος στα αριστερά της υποδιαστολή

Ο αριθμός 0.00003 έχει 1 σημαντικό ψηφίο

Ο αριθμός 1.0003 έχει 5 σημαντικά ψηφία

(β) Μηδενικά που ακολουθούν την υποδιαστολή και δεν έχουν κάποιο ψηφίο στα δεξιά τους θεωρούνται σημαντικά ψηφία

Ο αριθμός 234.00 έχει 5 σημαντικά ψηφία

(γ) Μηδενικά που ακολουθούν ακέραιους αριθμός και δεν έχουν υποδιαστολή στα δεξιά τους δεν θεωρούνται σημαντικά

Ο αριθμός 11900 έχει 3 σημαντικά ψηφία

Σημαντικά ψηφία – Πράξεις

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των πειραματικών δεδομένων είναι ότι τα σφάλματα συνδυάζονται στους υπολογισμούς και παράγουν νέα σφάλματα στα υπολογιζόμενα αποτελέσματα

Επομένως υπολογισμοί μεταξύ αριθμών με διαφορετικά σημαντικά ψηφία οδηγούν σε αποτελέσματα με διαφορετικά σημαντικά σημεία

Οι κανόνες είναι:

Για πολλαπλασιασμό και διαίρεση: Τα αποτελέσματα πολ/σμού και διαίρεσης στρογγυλοποιούνται στο ίδιο αριθμό σημαντικών ψηφίων με αυτό του αριθμού με την χειρότερη ακρίβεια

Για πρόσθεση και αφαίρεση: Βρίσκουμε τον αριθμό του οποίου το τελευταίο σημαντικό ψηφίο καταλαμβάνει τη θέση πιο κοντά στην υποδιαστολή. Αυτή είναι η θέση του τελευταίου σημαντικού ψηφίου του αποτελέσματος

Παράδειγμα πολ/σμου

(το σύμβολο – πάνω από τον αριθμό δηλώνει Το τελευταίο σημαντικό ψηφίο)

$$
\begin{array}{r}
39.5\bar{4} \\
\times\ 2.8\bar{6} \\
\hline
\overline{23724} \\
3163\bar{2} \\
790\bar{8} \\
\hline
11\overline{3.9844}
\end{array}
$$

Πολ/σμός με το αβέβαιο ψηφίο δίνει αβέβαιο αποτέλεσμα

Το τελικό αποτέλεσμα έχει 2 βέβαια ψηφία. Το ψηφίο 3 είναι αβέβαιο και τα υπόλοιπα δεν έχουν σημασία

Το αποτέλεσμα θα είναι 114

Παράδειγμα πρόσθεσης

$$
\begin{array}{r}
0.5286\overline{5} \\
+\ 39.4\overline{2} \\
+\ 15.\overline{1} \\
+\ 0.0289\overline{6} \\
\hline
55.\overline{07761}
\end{array}
$$

Το αποτέλεσμα επομένως θα είναι 55.1

Σημαντικά ψηφία – Παραδείγματα

Είδαμε ότι για μια αριθμητική ποσότητα η οποία μετράται πειραματικά, τα σημαντικά ψηφία είναι τα ψηφία της ποσότητας τα οποία καθορίζονται από την πειραματική μέτρηση.

Μερικά παραδείγματα/ερωτήσεις:

Προσδιορίστε τον αριθμό σημαντικών ψηφίων για τα ακόλουθα

(α) 5280 $\Longrightarrow$ 3 σημαντικά ψηφία

(β) 0.35 $\Longrightarrow$ 2 σημαντικά ψηφία

(γ) .0037 $\Longrightarrow$ 2 σημαντικά ψηφία

(δ) 204100 $\Longrightarrow$ 4 σημαντικά ψηφία

(ε) 180.00 $\Longrightarrow$ 5 σημαντικά ψηφία

Παραδείγματα στρογγυλοποίησης:

Στρογγυλοποιήστε τα ακόλουθα, κρατώντας μόνο τον αριθμό σημαντικών ψηφίων που δείχνει η παρένθεση

(α) 14.356 (3) $\Longrightarrow$ 14.4

(β) 7.5368 (2) $\Longrightarrow$ 7.5

(γ) 152.535 (3) $\Longrightarrow$ 153

(δ) 152.535 (5) $\Longrightarrow$ 152.54

(ε)9827.35 (3) $\Longrightarrow$ 9830

Σημαντικά ψηφία – παραδείγματα

Πράξεις με σημαντικά ψηφία – ερωτήσεις

Έστω ότι δίνονται τα ακόλουθα: A =38.275, B=0.134, C=38.322 και D=1/3.
Υπολογήστε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(α) A x B $\Longrightarrow$ 5.13

(β) A – B $\Longrightarrow$ 38.141

(γ) (C – A)/C $\Longrightarrow$ 0.0012 ή 1.2x10^{-3} $\Rightarrow (38.322 - 38.275)/38.322 = 0.047/38.322$

(δ) D x C – D x A $\Longrightarrow$ 0.016 ή 1.6x10^{-2} $\Rightarrow (38.322 - 38.275)/3.0 = 0.047/3.0 = 0.016$

(ε) 23 x D $\Longrightarrow$ 7.7 $\Rightarrow 23/3.0 = 7.7$

Ακρίβεια υπολογιζόμενης τιμής

Έστω ότι μετρούμε τις πλευρές ενός ορθογωνίου παρ/μου και βρίσκουμε ότι είναι: 45.0±0.1cm και 544 ±1cm

Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι: 45.0x544 = 24480cm^2

Πόσο ακριβές είναι όμως το εμβαδό που υπολογίζουμε?

Για να υπολογίσουμε την αβεβαιότητα μιας ποσότητας η οποία εξαρτάται από μετρούμενα μεγέθη τα οποία είναι γνωστά με συγκεκριμένη αβεβαιότητα ακολουθούμε μερικούς απλούς κανόνες:

1. Αν οι ποσότητες προστίθενται ή αφαιρούνται, προσθέτουμε τις επιμέρους αβεβαιότητες ώστε να πάρουμε την αβεβαιότητα του αποτελέσματος
   - $a.\quad (324\pm1)cm+(670\pm1)cm=994\pm2cm$
   - $b.\quad (764\pm1)cm-(670\pm1)cm=94\pm2cm$
2. Αν οι ποσότητες πολ/ζονται ή διαιρούνται, προσθέτουμε τις επιμέρους σχετικές (επί τοις εκατό) αβεβαιότητες ώστε να πάρουμε τη σχετική αβεβαιότητα (επί τοις εκατό) του αποτελέσματος. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και τις σχετικές αβεβαιότητες για αποφυγή πολλών εκατοντάδων στους υπολογισμούς).

Για το παράδειγμα του εμβαδού θα έχουμε:

$$(544\pm1)cm+(45.0\pm0.1)cm=(544\pm0.2\%)cm\times(45.0\pm0.2\%)cm=24480\pm0.4\%cm^2\left(=24480\pm97.92cm^2\right)$$

Επομένως το αποτέλεσμα θα είναι $A=24500\pm100cm^2$ Ακρίβεια 1 σημαντικού ψηφίου

Ακρίβεια υπολογιζόμενης τιμής

3. Για τη διαίρεση θα είχαμε:

$$(544 \pm 1)cm/(45.0 \pm 0.1)cm = (544 \pm 0.2\%)/(45.0 \pm 0.2\%) = 12.089 \pm 0.4\% = 12.089 \pm 0.048 \quad = 12.1 \pm 0.1$$

4. Όταν βρίσκουμε τη τετραγωνική ρίζα μιας ποσότητας, διαιρούμε την αβεβαιότητα με 2, ενώ όταν υπολογίζουμε το τετράγωνο τότε πολ/ζουμε την αβεβαιότητα με 2. Ανάλογοι κανόνες ισχύουν και για άλλες δυνάμεις

$$\sqrt{45.0 \pm 0.1} = \sqrt{45.0 \pm 0.2\%} = 6.708 \pm 0.1\% = 6.708 \pm 0.007$$

$$(45.0 \pm 0.1)^2 = (45.0 \pm 0.2\%)^2 = 2025 \pm 0.4\% = 2025 \pm 8$$

Εξάσκηση:

Έστω A=37.82±0.03, B=33.46±0.05, C=2.1±0.4 και D=3.31±0.01.
Να υπολογισθούν οι τιμές των ακόλουθων εξισώσεων και η ακρίβειά τους σύμφωνα με τους κανόνες που είδαμε. Κάνετε στρογγυλοποίηση της απάντησής σας στα κατάλληλα σημαντικά ψηφία

(α) (A – B) x D $\Longrightarrow$ 14.4 ± 0.3 $\Rightarrow (37.82 - 33.46) \times 3.31 = 4.36 \times 3.31 = 14.4316 = 14.4$

$\Rightarrow (4.36 \pm 0.08) \times (3.31 \pm 0.01) = (4.36 \pm 1.83\%) \times (3.31 \pm 0.3\%) = 14.4 \pm 2.137\% = 14.4 \pm 0.3077$

(β) A/B – C $\Longrightarrow$ -1 ± 0.4 $\Rightarrow 37.82/33.46 - 2.1 = 1.1303 - 2.1 = -1.0303 = -1$

(γ) B/C $\Longrightarrow$ 16 ± 3 $\Rightarrow 33.46/2.1 = 15.93 = 16$

(δ) 2(π)A $\Longrightarrow$ 237.6 ± 0.2

(ε) (AxB)/D $\Longrightarrow$ 382 ± 2