ΦΥΣ 331 – Χειμερινό Εξάμηνο 2023

Ενδιάμεση Εξέταση

Κυριακή 29/10/2023 **Διάρκεια: 11:30 – 14:00**

Σας δίνονται 10 ισοδύναμες ασκήσεις και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλες. Σύνολο μονάδων 100.

Καλή Επιτυχία

1. [**10μ**]

(α) Εξηγήστε πως με ζεύγος quark και anti-quark είναι δυνατόν να δημιουργηθούν τόσο βαθμωτά ($J^P = 0^+$) όσο και ψευδο-βαθμωτά ($J^P = 0^-$) μεσόνια. [**5μ**]

(β) Το νετρόνιο και το αντι-νετρόνιο είναι ουδέτερο σωματίδιο-αντισωματίδιο, όπως συμβαίνει με το K^0 και το $\overline{K}^0$. Όπως έχουμε δει, τα K^0 και $\overline{K}^0$ αναμειγνύονται μεταξύ τους ταλαντώνοντας από τη μία κατάσταση στην άλλη. Εξηγήστε τον λόγο που δεν συμβαίνει το ίδιο με το σύστημα του νετρονίου – αντινετρονίου. [**5μ**]

2. [**10μ**]

(α) Υποθέστε ότι η απαγορευμένη διεργασία $p \to e^+ + \pi^0$ παρατηρείται. Υπολογίστε την ενέργεια του ποζιτρονίου στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας του πρωτονίου δεδομένου ότι το π^0 έχει μάζα 0.135GeV/c^2. [**4μ**]

(β) Δίνεται η διεργασία $K^- + p \to X + \pi^- + \pi^+$ στην οποία παρατηρείται ότι η κατανομής της αναλλοίωτης μάζα του συστήματος $X\pi^+$ παρουσιάζει κορυφή συντονισμού στα 1358MeV/c^2 με πλήρες εύρος 50 MeV/c^2. Η κορυφή αυτή καλείται ως σωματίδιο Y_1.
Η κατανομή της αναλλοίωτης μάζας του συστήματος $X\pi^-$ χρησιμοποιώντας διαφορετικά γεγονότα παρουσιάζει κορυφή στην ίδια περιοχή και το εύρος είναι παρόμοιο.

(β1) Με βάση τα παραπάνω δεδομένα, προσδιορίστε την παραδοξότητα (περιεχόμενο σε s-quark, strangeness), υπερ-φορτίο (hypercharge) και ισοτοπικό σπιν του Y_1. [**4μ**]

(β2) Έχει παρατηρηθεί ότι η κατάσταση $X\pi^+$ του Y_1 βρίσκεται αντιστοιχεί σε p-κατάσταση στροφορμής. Ποιο είναι η στροφορμή J του Y_1; Ποια η τιμή της parity; Θεωρήστε ότι η parity του X είναι +1 και του π^+ είναι -1. [**2μ**]

3. [**10μ**]

Ένα σωματίδιο το οποίο κινείται με ταχύτητα u, προσεγγίζει ένα πανομοιότυπο σωματίδιο σε ηρεμία (στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου).

(α) Δείξτε ότι η ταχύτητα κάθε σωματιδίου στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας δίνεται από την σχέση $\frac{c^2}{u}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\right)$. [**6μ**]

(β) Βρείτε την αντίστοιχη έκφραση για το μη σχετικιστικό όριο. [**4μ**]

4. [**10μ**]

(α) Δείξτε ότι τα φορτισμένα σωματίδια δεν είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή της συζυγίας φορτίου C. [**6μ**]

(β) Δείξτε ότι οι εξισώσεις Maxwell στο κενό είναι αναλλοίωτες κάτω από αναστροφή χρόνου. [**4μ**]. *Υπενθύμιση:* Για όσους ίσως δεν θυμούνται, οι εξισώσεις Maxwell είναι:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \vec{j}$$

5. [**10μ**]

(α) Υπολογίστε την ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να έχει ένα K^- που προσπίπτει σε ακίνητο πρωτόνιο για να παραχθεί ένα βαρυόνιο Ω^-μέσω της σκέδασης $K^- + p \to \Omega^- + K^+ + K^0$. Οι μάζες των σωματιδίων $K^-, K^0,\ p,\ \Omega^-$που συμμετέχουν στη σκέδαση είναι 0.494, 0.498, 0.938 και 1.672GeV/c^2 αντίστοιχα. [**5μ**]

(β) Το Ω^- που παράγεται διασπάται κατόπιν σύμφωνα με την διεργασία $\Omega^- \to \Lambda^0 K^-$. Σχεδιάστε το διάγραμμα Feynman χαμηλότερης τάξης που περιγράφει τη διεργασία αναγράφοντας λεπτομερώς όλα τα σωματίδια και κορυφές αλληλεπίδρασης που συμμετέχουν και αναφέρετε την αλληλεπίδραση υπεύθυνη για την διεργασία αυτή. Σε αντίθεση με την προηγούμενη διεργασία, η διάσπαση $\Omega^- \to \Lambda^0 \pi^-$ δεν παρατηρείται ή το ποσοστό διακλάδωσής της είναι πολύ μικρό στο Καθιερωμένο Πρότυπο. Σχολιάστε για ποιο λόγο πιθανώς αυτό να συμβαίνει.

6. [**10μ**]

Σχεδιάστε τα διαγράμματα Feynman χαμηλότερης τάξης για τις παρακάτω διεργασίες. Σε κάθε περίπτωση αναφέρετε τα σωματίδια που συμμετέχουν στις αλληλεπιδράσεις:

(i) $\mu^+ + \mu^- \to \nu_e + \bar{\nu}_e$

(ii) $K^0 \leftrightarrow \overline{K}^0$

(iii) $gg \to H^0 \to gg$

(iv) $qq \to q'q''H^0(\to e^+\mu^+e^-\mu^-)$

(v) $pp \to t\bar{t}H^0(\to \gamma\gamma)$

7. [**10μ**]

Η οικογένεια των Σ βαρυονίων ανήκει στην οικογένεια των βαρυονίων με ένα strange quark και αποτελεί μία τριπλέτα στην οποία ανήκουν τα βαρυόνια Σ^+, το Σ^0 και το Σ^-. Οι μάζες των βαρυονίων είναι 1187.4, 1192.6 και 1197.5 MeV/c^2 αντίστοιχα.

(α) Βρείτε το περιεχόμενο σε quarks των βαρυονίων αυτών, το μέτρο του isospin τους και την 3η συνιστώσα του isospin. [**4μ**]

(β) Κάντε το διάγραμμα Feynman για τις διασπάσεις $\Sigma^- \to n\pi^-$, $\Sigma^0 \to \Lambda^0\gamma$, $\Sigma^0 \to p\pi^-$ και $\Sigma^+ \to n\pi^+$. [**4μ**]

(γ) Εξηγήστε γιατί η διάσπαση $\Sigma^0 \to \Lambda^0\gamma$ είναι σχεδόν 100% ενώ η διάσπαση $\Sigma^0 \to p\pi^-$ έχει πολύ μικρό ποσοστό διακλάδωσης; [**2μ**]

8. [**10μ**]

Εξηγήστε λεπτομερώς ποιες από τις παρακάτω διεργασίες είναι επιτρεπτές ή τον λόγο για τον οποίο απαγορεύονται. Αν η διεργασία είναι επιτρεπτή ποια αλληλεπίδραση είναι υπεύθυνη για τη διεργασία;

(α) $K^+ \to \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$

(β) $e^+ + e^- \to p + \pi^-$

(γ) $\omega \to \pi^0 + \pi^0$

(δ) $e^- + \mu^+ \to e^+ + \mu^-$

(ε) $\pi^0 \to \gamma + \gamma + \gamma + \gamma + \gamma$

9. [**10μ**]

(α) Ποιες από τις παρακάτω αλληλεπιδράσεις είναι επιτρεπτές; Αν δεν είναι επιτρεπτές, αναφέρετε λεπτομερώς τον λόγο που απαγορεύονται: [**3μ**]

(i) $\pi^- + p \to K^- + \Sigma^+$

(ii) $d + d \to \ ^4He + \pi^0$

(iii) $K^- + p \to \Xi^- + K^+$

(β) Υποθέστε ότι οι σκεδάσεις $p + p \to \pi^+ + d$ και $n + p \to \pi^0 + d$ πραγματοποιούνται με στην ίδια ενέργεια κέντρου μάζας. Υπολογίστε τον λόγο των ενεργών διατομών τους: [**7μ**]

$$R = \frac{\sigma(p + p \to \pi^+ + d)}{\sigma(n + p \to \pi^0 + d)}$$

10. [**10 μ**]

(α1) Δείξτε ότι το K^0 και $\overline{K}^0$ δεν είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή της CP. [**1μ**]

(α2) Γράψτε τις δύο καταστάσεις K_1 και K_2 που είναι ιδιοκαταστάσεις της CP και δείξτε ότι έχουν ιδιοτιμές +1 και -1 αντίστοιχα. [**2μ**]

(α3) Εκφράστε τις καταστάσεις K^0 και $\overline{K}^0$ συναρτήσει των ιδιοκαταστάσεων K_1 και K_2. [**1μ**]

(β) Ο παράγοντας ασυμμετρίας φορτίου, δ, εκφράζει τον αριθμό των διασπάσεων των ουδέτερων καονίων K^0 σε $\pi^- e^+ \nu_e$ συγκριτικά με τον αριθμό των διασπάσεων των $\overline{K}^0$ σε $\pi^+ e^- \overline{\nu}_e$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$\delta = \frac{N(K^0 \to \pi^- e^+ \nu_e) - N(\overline{K}^0 \to \pi^+ e^- \overline{\nu}_e)}{N(K^0 \to \pi^- e^+ \nu_e) + N(\overline{K}^0 \to \pi^+ e^- \overline{\nu}_e)}$$

Θεωρήστε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε μια καθαρή δέσμη καονίων, K^0. Θεωρήστε ακόμη ότι η CP διατηρείται. Υπολογίστε τα ακόλουθα

(β1) Τη τιμή του παράγοντα δ την χρονική στιγμή $t = 0$. [**1μ**]

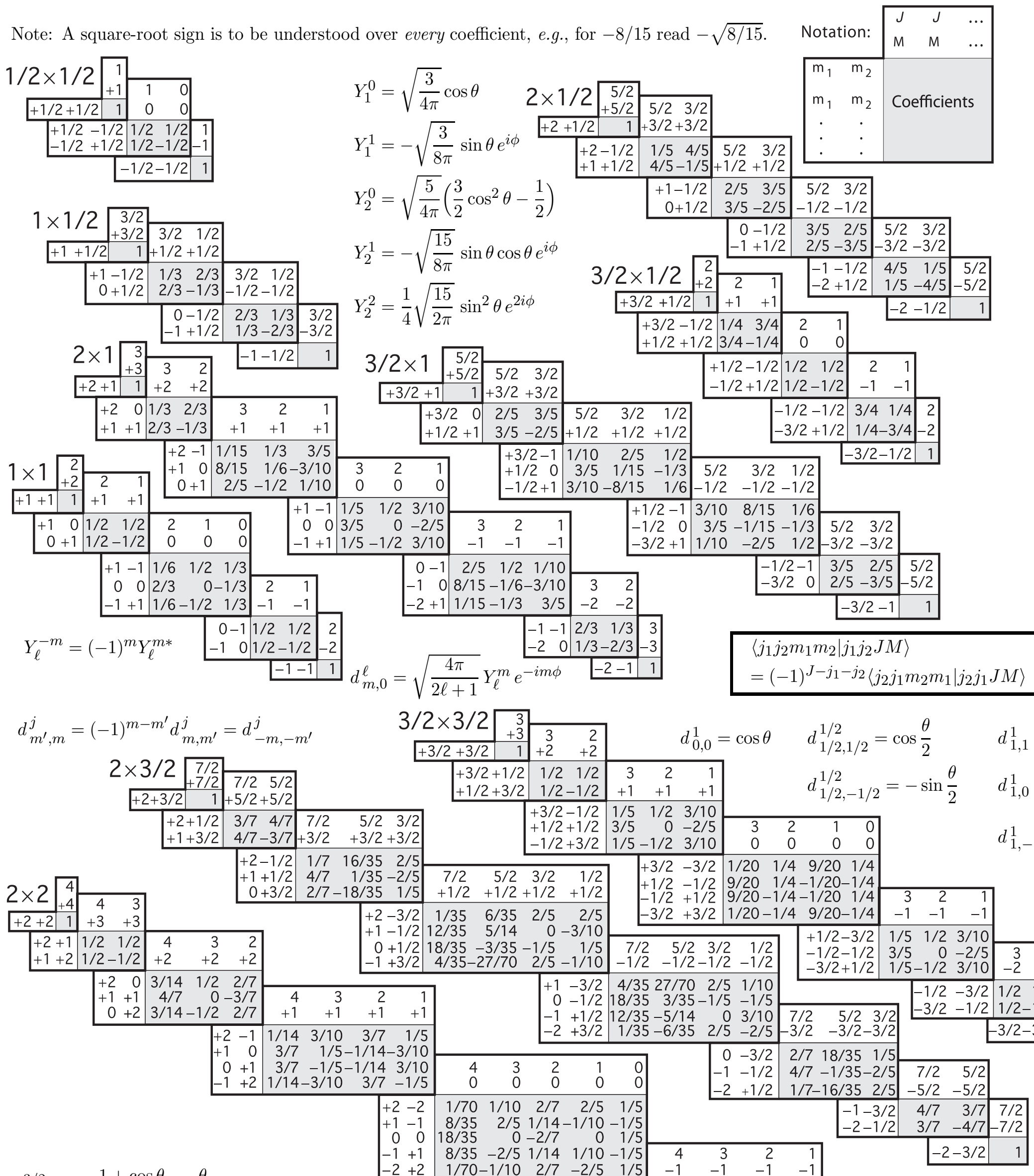
(β2) Τη χρονο-εξελιγμένη κατάσταση των ουδέτερων καονίων μετά από χρόνο t. [**2μ**]

(β3) Τη συμπεριφορά του παράγοντα δ, συναρτήσει του χρόνου και εξηγήστε πως μπορεί να εξαχθεί η διαφορά μάζας μεταξύ των ιδιο-καταστάσεων της CP. [**3μ**]

Υπόδειξη: Η χρονοεξέλιξη μιας κατάστασης $|X(t)\rangle = |X(t=0)\rangle\, e^{-\left(im_X t + \frac{\Gamma_X t}{2}\right)}$. [**10μ**]

43. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.



$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^{\,\ell}_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

$$d^{\,j}_{m',m} = (-1)^{m-m'} d^{\,j}_{m,m'} = d^{\,j}_{-m,-m'}$$

$$d^{\,1}_{0,0} = \cos\theta \qquad d^{\,1/2}_{1/2,1/2} = \cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,1/2}_{1/2,-1/2} = -\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,1}_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2} \qquad d^{\,1}_{1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \qquad d^{\,1}_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,3/2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,1/2} = -\sqrt{3}\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,2}_{2,2} = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,-1/2} = \sqrt{3}\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,2}_{2,1} = -\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,-3/2} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,2}_{2,0} = \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta \qquad d^{\,2}_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta - 1)$$

$$d^{\,3/2}_{1/2,1/2} = \frac{3\cos\theta - 1}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,2}_{2,-1} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta \qquad d^{\,2}_{1,0} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta$$

$$d^{\,3/2}_{1/2,-1/2} = -\frac{3\cos\theta + 1}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,2}_{2,-2} = \left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2 \qquad d^{\,2}_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta + 1) \qquad d^{\,2}_{0,0} = \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

Figure 43.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974).

For $I = 1$ (π, b, ρ, a): $u\overline{d}$, $(u\overline{u} - d\overline{d})/\sqrt{2}$, $d\overline{u}$;
for $I = 0$ (η, η', h, h', ω, ϕ, f, f'): $c_1(u\overline{u} + d\overline{d}) + c_2(s\overline{s})$

$\boxed{\pi^{\pm}}$ $I^G(J^P) = 1^-(0^-)$

$\boxed{\pi^0}$ $I^G(J^{PC}) = 1^-(0^{-+})$

$K^+ = u\overline{s}$, $K^0 = d\overline{s}$, $\overline{K}^0 = \overline{d}s$, $K^- = \overline{u}s$, similarly for K^*'s

$\boxed{K^{\pm}}$ $I(J^P) = \frac{1}{2}(0^-)$

$\boxed{K^0}$ $I(J^P) = \frac{1}{2}(0^-)$

$\Sigma^+ = uus$, $\Sigma^0 = uds$, $\Sigma^- = dds$ $I(J^P) = 1(\frac{1}{2}^+)$

$\Xi^0 = uss$, $\Xi^- = dss$ $I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$

$\Omega^- = sss$ $I(J^P) = 0(\frac{3}{2}^+)$

$\Lambda^0 = uds$ $I(J^P) = 0(\frac{1}{2}^+)$