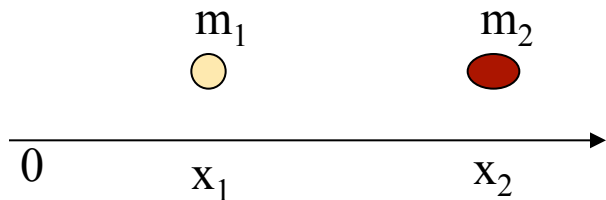


Κέντρο μάζας

Μέχρι τώρα είδαμε την κίνηση υλικών σημείων μεμονωμένα.

Όταν αρχίσουμε να θεωρούμε συστήματα σωμάτων ή στερεά σώματα κάποιων διαστάσεων είναι πιο χρήσιμο και ευκολότερο να ορίσουμε μια νέα ποσότητα που ονομάζεται **κέντρο μάζας** (**KM** ή **CM**) η οποία ακολουθεί τους νόμους του Newton

Για 2 σώματα η θέση του κέντρου μάζας ορίζεται


$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

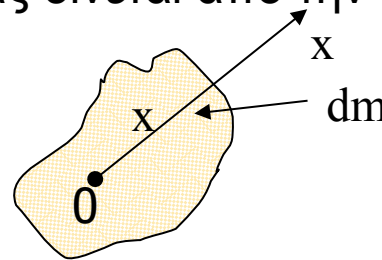
Κέντρο μάζας περισσότερων σωμάτων

Αν είχαμε N σώματα τότε το κέντρο μάζας ορίζεται από την σχέση:

$$x_{cm} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i x_i}{M} \quad \text{όπου} \quad M = \sum_{i=1}^N m_i$$

Αν το σύστημά μας δεν αποτελείται από διακριτά σημεία αλλά είναι ένα συνεχές σώμα τότε το κέντρο μάζας δίνεται από την σχέση

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int x dm$$



Για N διακριτά σώματα σε 3 διαστάσεις η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

Για συνεχή κατανομή μάζας έχουμε:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

όπου $dm = \rho dV$ απειροστή μάζα
 dm σε απειροστό όγκο dV

Κέντρο μάζας

Η τελευταία σχέση είναι μια διανυσματική εξίσωση που ουσιαστικά περιέχει 3 βαθμωτές εξισώσεις ως προς τους 3 άξονες συντεταγμένων

$$x_{cm} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i x_i}{M} \quad y_{cm} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i y_i}{M} \quad z_{cm} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i z_i}{M}$$

Το κέντρο μάζας αντιστοιχεί σε ένα σημείο στο χώρο.

Δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει στο σημείο αυτό κάποια μάζα.

Διαισθητικά το κέντρο της βαρυτικής μάζας (κέντρο βάρους) ενός σώματος είναι το σημείο στο οποίο η βαρύτητα δεν προκαλεί καμιά κίνηση.

□ Πως βρίσκουμε το κέντρο μάζας ενός συστήματος

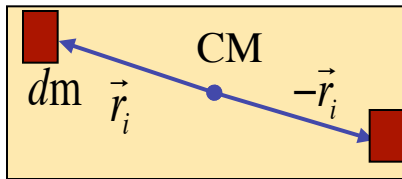
Ο σωστότερος τρόπος είναι να λύσουμε τα ολοκληρώματα ή να πάρουμε τα αθροίσματα.

Αλλά μερικές φορές συμμετρίες του συστήματος βοηθάνε να βρούμε πιο εύκολα το κέντρο μάζας

Εύρεση του κέντρου μάζας

□ Συμμετρίες:

Ένα ομογενές συνεχές παραλληλόγραμμο έχει το κέντρο μάζας του στο γεωμετρικό του κέντρο. Θεωρώ το κέντρο αυτό σα την αρχή των αξόνων



Για κάθε μάζα dm σε θέση r_i υπάρχει μια στοιχειώδης μάζα dm στη συμμετρική θέση $-r_i$.

Οι δύο όροι $r_i dm + (-r_i) dm = 0$.

Το ίδιο ισχύει για οποιαδήποτε μάζα-θέση του συστήματος

□ Άθροισμα επιμέρους τμημάτων:

- Χωρισμό του σώματος σε επιμέρους συμμετρικά σώματα.
- Εύρεση της συνολικής μάζας του κάθε επιμέρους τμήματος.
- Εύρεση του κέντρου μάζας χρησιμοποιώντας κάθε επιμέρους τμήμα σαν υλικό σημείο με μάζα και θέση τη μάζα και θέση του κέντρου μάζας του

□ Διαφορά επιμέρους τμημάτων:

Ίδια με την προηγούμενη μέθοδο αλλά στην περίπτωση αυτή αφαιρούμε συγκεκριμένα κανονικά γεωμετρικά σώματα

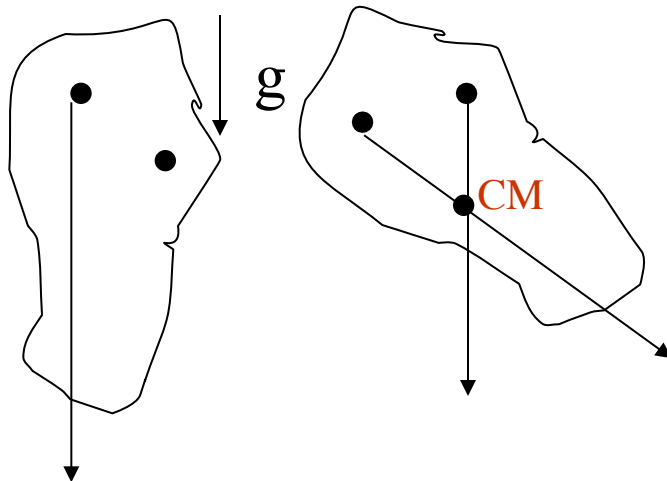
Εύρεση κέντρου μάζας

❑ Πειραματική μέθοδος

Πολλές φορές το σώμα τελείως ανώμαλο και οι άλλες μέθοδοι δεν δουλεύουν.

Πειραματικά μπορούμε να βρούμε το κέντρο μάζας κρεμώντας το σώμα από 2 τυχαία σημεία.

- Όταν ένα σώμα ισορροπεί ελεύθερα κρεμασμένο από κάποιο σημείο, η μάζα του θα κρέμεται με το κέντρο μάζας στην κατακόρυφο ευθεία από το σημείο στήριξης και κάτω από το σημείο αυτό μια και θα ελαττώνει τη δυναμική ενέργεια.
- Το σημείο στο οποίο τέμνονται οι κατακόρυφοι σε δυο διαδοχικές προσπάθειες στήριξης ορίζουν το CM του σώματος.

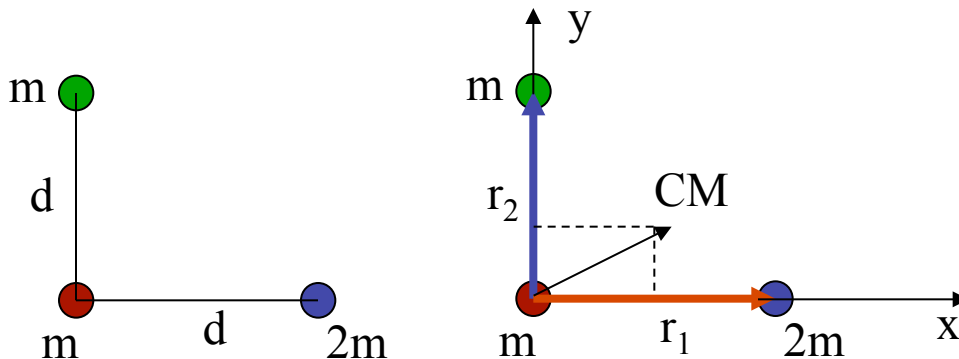


Παραδείγματα – Κέντρο μάζας 3 μαζών

Να βρεθεί η θέση του κέντρου μάζας των 3 μαζών του σχήματος

Λύση

Ορίζουμε ένα σύστημα συντεταγμένων όπως παρακάτω



Τα διανύσματα θέσης των μαζών θα είναι:

$$\vec{r}_1 = d\hat{x}$$

$$\vec{r}_2 = d\hat{y}$$

$$\vec{r}_3 = 0$$

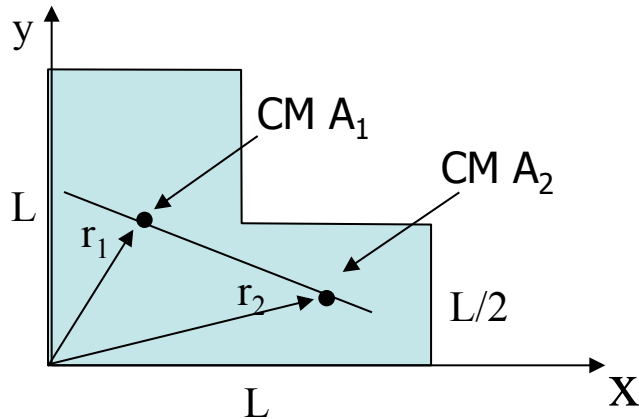
$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}(\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2 + \vec{r}_3 m_3) = \frac{1}{(2m + m + m)}(2md\hat{x} + md\hat{y} + 0)$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{4m}(2md\hat{x} + md\hat{y}) \Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{d}{4}(2\hat{x} + \hat{y})$$

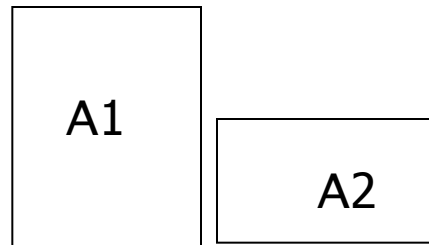
Κέντρο μάζας με διαχωρισμό τμημάτων

Που βρίσκεται το κέντρο μάζας (CM) ενός τμήματος φύλου μετάλλου όπως στο σχήμα με επιφανειακή μάζα (μάζα/εμβαδό επιφάνειας) σ

Λύση



Το χωρίζουμε σε 2 τμήματα A1 και A2



Χρησιμοποιούμε συμμετρία:

Το CM του A1 είναι στο κέντρο του παρ/μου με πλευρές L και L/2. Ανάλογα και για το A2.

Τα διανύσματα θέσης των 2 CM είναι

$$\vec{r}_1 = \frac{L}{4} \hat{x} + \frac{L}{2} \hat{y}$$

$$\vec{r}_2 = \frac{3L}{4} \hat{x} + \frac{L}{4} \hat{y}$$

Οι ολικές μάζες των 2 τμημάτων είναι

$$m_{A1} = L \cdot \frac{L}{2} \cdot \sigma = \frac{\sigma L^2}{2}$$

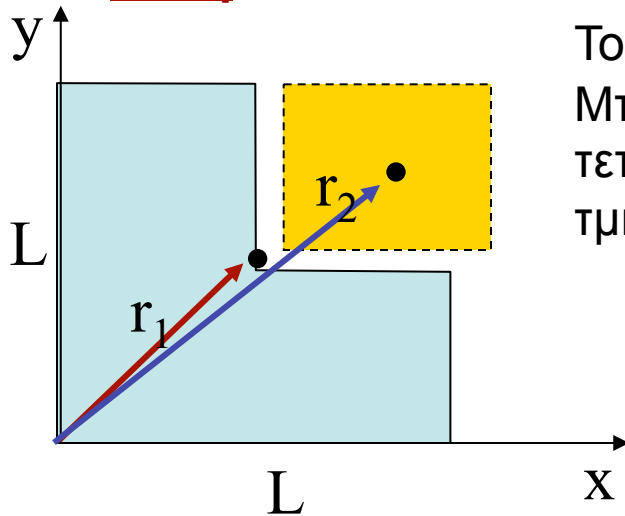
$$m_{A2} = \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \sigma = \frac{\sigma L^2}{4}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} (m_{A1} \vec{r}_1 + m_{A2} \vec{r}_2) = \frac{1}{\frac{\sigma L^2}{2} + \frac{\sigma L^2}{4}} \left[\frac{\sigma L^2}{2} \left(\frac{L}{4} \hat{x} + \frac{L}{2} \hat{y} \right) + \frac{\sigma L^2}{4} \left(\frac{3L}{4} \hat{x} + \frac{L}{4} \hat{y} \right) \right] \Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{5L}{12} \hat{x} + \frac{5L}{12} \hat{y}$$

Κέντρο μάζας – αφαιρετική μέθοδος

Να βρεθεί το κέντρο μάζας ενός φύλλου μετάλλου πλευράς L από το οποίο αποκόπηκε ένα τετράγωνο τμήμα πλευράς $L/2$.

Λύση



Το πρόβλημα είναι το ανάστροφο του προηγούμενου. Μπορούμε να υπολογίσουμε το CM του αρχικού τετραγώνου και το CM του αποκομμένου τμήματος και να τα προσθέσουμε.

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_1 &= \frac{L}{2} \hat{x} + \frac{L}{2} \hat{y} \\ \vec{r}_2 &= \frac{3L}{4} \hat{x} + \frac{3L}{4} \hat{y} \end{aligned} \right\} \text{Διανύσματα θέσης}$$

Μάζες των 2 τμημάτων

$$\left\{ \begin{aligned} m_{A1} &= L \cdot L \cdot \sigma = \sigma L^2 \\ m_{A2} &= \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \sigma = \frac{\sigma L^2}{4} \Rightarrow m_{A2} = -\frac{\sigma L^2}{4} \end{aligned} \right.$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} (m_{A1} \vec{r}_1 + m_{A2} \vec{r}_2) = \frac{1}{\sigma L^2 - \frac{\sigma L^2}{4}} \left(\sigma L^2 \left[\frac{L}{2} \hat{x} + \frac{L}{2} \hat{y} \right] - \frac{\sigma L^2}{4} \left[\frac{3L}{4} \hat{x} + \frac{3L}{4} \hat{y} \right] \right) \Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{5L}{12} \hat{x} + \frac{5L}{12} \hat{y}$$

Κέντρο μάζας συνεχούς κατανομής μάζας

Να βρεθεί το κέντρο μάζας μιας ράβδου μήκους L , μάζας M και πυκνότητας $\lambda = M/L$

Λύση



Χωρίς να υπολογίσουμε ξέρουμε ότι το κέντρο μάζας είναι σε $x_{cm} = L/2$ (συμμετρία)

Ας το ελέγξουμε με υπολογισμούς:

$$dm = \lambda dx$$

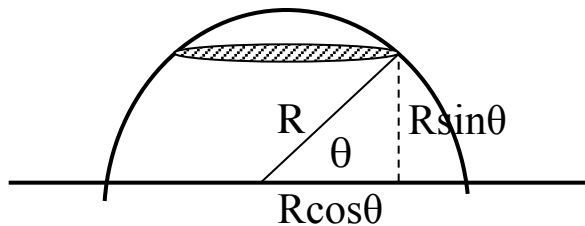
$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int_0^M x dm \Rightarrow \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx$$

$$x_{cm} = \frac{\lambda x^2}{2M} \Big|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M} = \frac{(\lambda L)L}{2M} = \frac{ML}{2M} \Rightarrow x_{cm} = \frac{L}{2}$$

Εύρεση κέντρου μάζας – Ένα ακόμα παράδειγμα

Να βρεθεί το κέντρο μάζας ενός ημισφαιρικού κελύφους (άδεια σφαίρα) ακτίνας R και πυκνότητας μάζας σ Kg/m²

Λύση



Κοιτάμε σε ένα κύκλο σε γωνία θ πάνω από τον ορίζοντα.

Η κυκλική λωρίδα έχει μάζα:

$$dm = \sigma(dA) = \sigma(\text{μηκος})(\text{παχος}) \Rightarrow dm = \sigma(2\pi R \cos \theta)(R d\theta)$$

Όλα τα σημεία στο κύκλο αυτό έχουν $y = R \sin \theta$ άρα

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{2\pi R^2 \sigma} \int_0^{\pi/2} (R \sin \theta)(2\pi R^2 \sigma \cos \theta d\theta)$$

$$y_{CM} = R \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = R \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} \Rightarrow y_{CM} = \frac{R}{2}$$

Πόσο είναι το x_{CM} ? **0**

Δυναμική συστήματος σωμάτων

Είπαμε ότι το CM μπορεί να αντικαταστήσει το σύνολο των σωμάτων του συστήματός μας σαν ένα υλικό σημείο με μάζα την μάζα των σωμάτων και διάνυσμα θέσης \vec{r}_{cm} .

➤ Η ταχύτητα του CM θα είναι:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = \frac{1}{M} \left(m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} \right) \Rightarrow \vec{V}_{CM} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)$$

για N σώματα
$$\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i \quad (1)$$

➤ Η επιτάχυνση

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \frac{1}{M} \left(m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} \right) \Rightarrow \vec{a}_{CM} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2) \Rightarrow \vec{a}_{CM} = \frac{1}{M} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

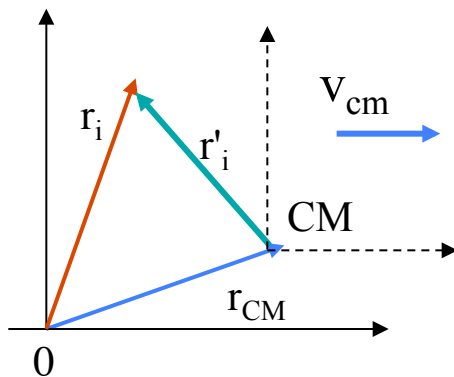
για N σώματα
$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{a}_i \quad (2)$$

Από την (1) έχουμε:
$$M \vec{V}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i \Rightarrow \vec{P}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Από την (2) έχουμε:
$$M \vec{a}_{CM} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i (\vec{F}_{\varepsilon\xi} + \vec{F}_{\varepsilon\sigma}) = \frac{d\vec{P}_{ολ}}{dt}$$

Κινητική ενέργεια κέντρου μάζας

Έστω \vec{r}'_i το διάνυσμα θέσης ενός σώματος ως προς το CM



$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}'_i \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i \quad \leftarrow \text{ταχύτητα σώματος } i \text{ ως προς ΚΜ}$$

$$KE = \sum_i \frac{1}{2} (m_i \vec{v}_i^2) = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i)^2 \Rightarrow$$

$$KE = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i)$$

$$(\vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{v}'_i) = \vec{v}_{CM}^2 + \vec{v}'_i{}^2 + 2\vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}'_i$$

Άρα η κινητική ενέργεια μπορεί να γραφεί:

$$KE = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}'_i{}^2 + \vec{v}_{CM} \cdot \sum_i m_i \vec{v}'_i \Rightarrow KE = \frac{1}{2} M \vec{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}'_i{}^2 + 0$$

Τα \vec{r}'_i ορίζονται ως προς το σύστημα συντεταγμένων με αρχή το CM

Αλλά από τον ορισμό του CM έχουμε
$$\vec{r}'_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = (0,0)$$

$$\sum_i m_i \vec{r}'_i = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}'_i = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}'_i = 0$$

Σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας

Το σύστημα αναφοράς με αρχή το κέντρο μάζας ενός συστήματος σωμάτων λέγεται σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας.

Στο σύστημα αυτό η ολική ορμή των σωμάτων του συστήματος είναι μηδέν

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

Αν διαλέξουμε σαν αρχή των αξόνων το κέντρο μάζας τότε $\vec{r}_{CM} = 0$

Ενώ οι θέσεις των σωμάτων σχετικά με αυτό το σύστημα θα ναι \vec{r}_i'

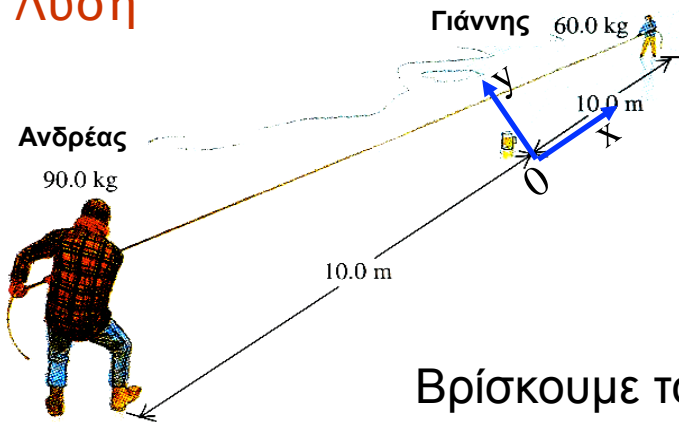
$$0 = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i' \Rightarrow 0 = \sum_i m_i \vec{r}_i' \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i' \Rightarrow \sum_i m_i \vec{v}_i' = 0 \Rightarrow \sum_i \vec{p}_i = 0 \Rightarrow \vec{p}_{CM}^{tot} = 0$$

Κέντρο μάζας - Παράδειγμα

Ο Γιάννης και ο Ανδρέας στέκονται πάνω σε μια παγωμένη λίμνη σε 20m απόσταση. Ο Γιάννης έχει μάζα 60kg ενώ ο Ανδρέας έχει μάζα 90kg. Στο μέσο της απόστασής τους υπάρχει ένα ποτήρι μπύρα πάνω στο πάγο. Τραβάνε τα άκρα ενός αβαρούς σχοινιού το οποίο εκτείνεται μεταξύ τους.

Όταν ο Ανδρέας έχει κινηθεί κατά 6.0m προς το ποτήρι, πόσο έχει κινηθεί ο Γιάννης και προς πια κατεύθυνση?

Λύση



Σύστημα: Ανδρέας – Γιάννης - Σχοινί

$$\sum \vec{F} = 0 \text{ (απομονωμένο)} \quad \Delta \sum \vec{p}_i = 0 \Rightarrow \vec{p}_{ol}^i = \vec{p}_{ol}^f$$

$$\text{Αλλά } \vec{p}_{ol}^i = 0 \text{ και } \vec{v}_\Gamma = \vec{v}_A = \vec{v}_{CM} = 0$$

Έστω σύστημα συντεταγμένων με αρχή το ποτήρι και θετική φορά αυτή προς το Γιάννη.

$$\text{Βρίσκουμε το CM: } x_{CM} = \frac{(90\text{kg})(-10\text{m}) + (60\text{kg})(10\text{m})}{90 + 60} = -2.0\text{m}$$

Η νέα θέση του Ανδρέα είναι -4.0m αφού κινήθηκε κατά 6.0m προς το ποτήρι

Έστω x_2 η νέα θέση του Γιάννη. Αφού το CM είναι ακίνητο:

$$x_{CM} = \frac{-360 + 60x_2}{150} = -2.0 \Rightarrow x_2 = 1\text{m} \quad \text{Ο Γιάννης είναι πολύ κοντά στο ποτήρι.}$$

Η απόσταση που κινούνται είναι ανάλογη του αντιστρόφου του λόγου των μαζών

Γιατί ? $P_{ol}^i = P_{ol}^f = 0 \Rightarrow 0 = m_A \vec{v}_A + m_\Gamma \vec{v}_\Gamma \Rightarrow \frac{m_\Gamma}{m_A} = -\frac{v_A}{v_\Gamma} = \frac{d_A}{d_\Gamma}$