ΦΥΣ 145 – Υπολογιστικές Μέθοδοι στη Φυσική

Τελική εξέταση **19 Μάη 2008** **Ομάδα 2η**

Γράψτε το ονοματεπώνυμο, αριθμό ταυτότητάς **και το password** σας στο πάνω μέρος της αυτής της σελίδας.

Πρέπει να απαντήσετε σε όλα τα προβλήματα που σας δίνονται. Η βαθμολογία του κάθε προβλήματος αναγράφεται όπως και η βαθμολογία των επιμέρους ερωτημάτων. Η βαθμολογία δεν είναι αντιπροσωπευτική της δυσκολία τους. Συνολική βαθμολογία της εξέτασης 80 μονάδες.

Πριν ξεκινήσετε διαβάστε προσεκτικά όλα τα προβλήματα. Ξεκινήστε από αυτό που νομίζετε ευκολότερο και συνεχίστε στα υπόλοιπα. Τα προγράμματά σας θα πρέπει να κάνουν compilation και να περιέχουν κάποια σχόλια για την κατανόηση του τι κάνετε.

ΟΔΗΓΙΕΣ – ΚΑΝΟΝΕΣ

Όλα τα προγράμματά σας θα πρέπει να τα γράψετε μέσα στο directory final_groupB. Τα προγράμματά σας δεν θα τα στείλετε με e-mail αλλά θα τα αφήσετε μέσα στο directory που δημιουργήσατε.

Μην ξεχάσετε να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας και αριθμό ταυτότητας σε κάθε file που αντιστοιχεί σε άσκηση.

Ο χρόνος εξέτασης είναι 3 ώρες.

Από τη στιγμή αυτή δεν υπάρχει συνεργασία/συζήτηση, ανταλλαγή αρχείων και e-mails με κανένα. Όλα τα κινητά θα πρέπει να παραμείνουν κλειστά. Σημειώσεις, χαρτάκια κλπ απαγορεύονται. Περίεργα logins από/προς accounts, windows κλπ θεωρούνται σοβαρές και άμεσες παραβάσεις των κανόνων των εξετάσεων.

Directories με files που δεν σας ανήκουν (labs ή homeworks) και δεν είναι από τις λύσεις ή παραδείγματα των διαλέξεων (δηλαδή τα πήρατε για εξάσκηση, για διάβασμα ή οτιδήποτε άλλο) θα πρέπει να τα σβήσετε πριν αρχίσει η εξέταση. Κατά τη διάρκεια της εξέτασης θα ελεγχθούν όλοι οι directories και όσοι βρεθούν με περίεργα files στα directories τους θα αποκλειστούν αυτόματα. Επομένως για αποφυγή παρεξηγήσεων σας παρακαλώ να σβήσετε οτιδήποτε δεν πρέπει να υπάρχει τώρα!

Με τον web browser μπορείτε να επισκεφθείτε **μόνο** την ιστοσελίδα του μαθήματος και ιστοσελίδες που είναι linked μέσω του μαθήματος.

Καλή επιτυχία

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ

1. [**10β**] Η πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης, F(x), μπορεί να υπολογιστεί με την προσέγγιση $F' = \dfrac{\left(F(x+h) - F(x)\right)}{h}$ όπου h είναι μια μικρή αλλά μη μηδενική ποσότητα..

(α) Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο χρησιμοποιεί την παραπάνω σχέση της παραγώγου και υπολογίζει την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης $F\left(x\right) = 3.4 + 18.7x - 1.6x^2$ στο σημείο x=4.7 για h=0.01. [**2β**]

(β) Συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με το ακριβές αποτέλεσμα που παίρνετε αναλυτικά. Ποιό είναι το σφάλμα σας; Εξηγήστε ποιοτικά την αιτία ή αιτίες του σφάλματος που βρίσκετε και να συγκεκριμενοποιήσετε ποσοτικά την συνεισφορά της κάθε πηγής σφάλματος. [**8β**]

Θα πρέπει να στείλετε το πρόγραμμα, τα αποτελέσματα και τα συμεράσματά σας σαν σχόλια στο τέλος του προγράμματός σας.

2. [**20β**] Η ταχύτητα ενός σωματιδίου το οποίο κινείται σε μια ευθεία γραμμή μετράται σε m/sec κάθε δευτερόλεπτο για 30 δευτερόλεπτα. Οι μετρήσεις είναι καταγραμμένες στο file που μπορείτε να κατεβάσετε από την θέση http://www.ucy.ac.cy/~phy145/exams/particle.dat Τα δεδομένα στο αρχείο αυτό περιέχουν σε κάθε γραμμή ένα πραγματικό αριθμό που αντιπροσωπεύει την ταχύτητα του σωματιδίου την χρονική στιγμή που αντιστοιχεί στον αριθμό γραμμής του αρχείου.

(α) Γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο δημιουργεί ένα output όπως παρακάτω:

Speed Statistics

Average : xx.xxxx
Mesi apoklisi : xx.xxx όπου μέση απόκλιση δίνεται από τη σχέση $\sum\left(x^2\right)/n-\left(\sum x/n\right)^2$
Minimum: xx.xxx (vrethike ti stigmi t = xx)
Maximum: xx.xxx (vrethike ti stigma t = xx)

Τα αποτελέσματα αυτά θα πρέπει να γραφούν στο αρχείο *myresults.dat* το οποίο και θα πρέπει να στείλετε μαζί με το πρόγραμμά σας. [**8β**]

(γ) Κάντε τη γραφική παράσταση της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου [**2β**].

(β) Προσθέστε μια υπορουτίνα η οποία υπολογίζει την απόσταση που διήνυσε το σωματίδιο. Το αποτέλεσμα θα πρέπει επίσης να γραφεί στο file *myresults.dat* [**10β**]

3. [**20β**] Θεωρήστε την κίνηση ενός ποδηλάτη υπό την επίδραση της αντίστασης του αέρα. Όπως έχουμε δεί η δύναμη αντίστασης, «drag force»,είναι πάντοτε αντίθετη της διεύθυνσης της ταχύτητας και έχει την προσεγγιστική τιμή $F_d = -B\upsilon^2$. Ο όρος B μετράται συνήθως πειραματικά. Ωστόσο μπορούμε να προσεγγίσουμε τη σχέση κάνοντας την απλή υπόθεση ότι το έργο το οποίο παράγεται από την δύναμη της αντίστασης είναι ανάλογο της μάζας του αέρα που εκτοπίζεται από την επιφάνεια του ποδηλάτη ή εν γένει του κινούμενου σώματος, η οποία με τη σειρά της είναι ανάλογη της πυκνότητας του αέρα, και τελικά καταλήγουμε στη σχέση $F_d = -CrA\upsilon^2$, όπου C είναι ο συντελεστής αντίστασης με τιμές περίπου 0.5 (ανάλογα με το κινούμενο σώμα). Η αντίσταση του αέρα έχει σαν αποτέλεσμα η ταχύτητα του σώματος συνεχώς να ελαττώνεται μέχρι να σταματήσει (στα παραπάνω αγνοούμε οποιοδήποτε είδος τριβής). Για να συνεχίσει να κινείται θα πρέπει ο ποδηλάτης να παρέχει κάποια θετική επιτάχυνση. Η επιτάχυνση αυτή δεν είναι σταθερή αλλά μπορεί να υπογιστεί από την ισχύ, P, που παρέχει ο ποδηλάτης ώστε να υπερνικήσει το έργο της αντίστασης του αέρα (θυμηθείτε ότι η ισχύς είναι ο ρυθμός μεταβολής της ολικής ενέργειας στη μονάδα του χρόνου).

(α) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Euler θα πρέπει να εξάγετε τις εξισώσεις της κίνησης, ταχύτητας και διαστήματος, για την περίπτωση της κίνησης με ή αντίσταση αέρα για τη περίπτωση που ο ποδηλάτης παρέχει σταθερή ισχύ P (θεωρήστε μονοδιάστατη κίνηση στη διεύθυνση x). [**5β**]

(β) Να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο δίνει την δυνατότητα υπολογισμού της κίνησης του ποδηλάτη χωρίς και με την επίδραση της αντίστασης του αέρα (θα πρέπει να περιέχονται στο ίδιο πρόγραμμα). [**10β**]

(γ) Κάνετε τις γραφικές παραστάσεις της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου και της μετατόπισης συναρτήσει του χρόνου και για τις 2 περιπτώσεις. [**3β**]

(δ) Ποια είναι η ορική ταχύτητα που αποκτά ο ποδηλάτης στην περίπτωση (β) με βάση τις συνθήκες του προβλήματος όπως δίνονται παρακάτω; [**2β**]

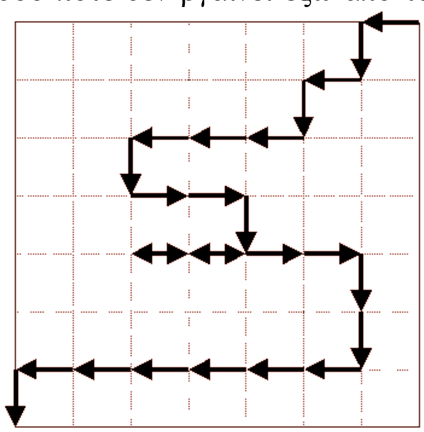
Υποθέστε οτι οι αρχικές παράμετροι του προβλήματος είναι οι ακόλουθες: η αρχική ταχύτητα του ποδηλάτη είναι υ=4m/sec, η ισχύς που καταναλώνει είναι P=400Watts, η μάζα του ποδηλάτη και ποδηλάτου μαζί είναι 70Kgr, ο συντελεστής αντίστασης C=0.5, η επιφάνεια του συστήματος ποδηλάτη-ποδήλατο είναι A=0.33m^2 και η πυκνότητα του αέρα είναι r=1.29kgr/m^3. Θεωρήστε σα χρονικό βήμα 0.1sec.

4. [**10β**] Η συνάρτηση Gauss, $G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-x^2/2\right)$ εμφανίζεται πάρα πολύ στη φυσική. Το εμβαδό της συνάρτησης αυτής είναι ίσο με τη μονάδα: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-x^2/2\right)dx=1$.

Να βρεθεί η τιμή του α με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων τέτοια ώστε το ολοκλήρωμα $A=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\exp\left(-x^2/2\right)dx=\frac{1}{2}$

Εκ πρώτης όψεως αυτό που ζητά η άσκηση μοιάζει περίεργο. Ωστόσο είναι αρκετά απλό αρκεί να προσέξετε ότι χρειάζεται να βρείτε τη λύση της εξίσωσης Α – ½ = 0. Επομένως αυτό που χρειάζεται να κάνετε είναι να χρησιμοποιήσετε μια μέθοδο ολοκλήρωσης (τραπεζίου ή Simpson για απλούστευση) που υπολογίζει το ολοκλήρωμα συναρτήσει διαφόρων τιμών του α, F(α), και η οποία καλείται κατόπιν από μια μέθοδο εύρεσης λύσης εξίσωσης όπως η μέθοδος της διχοτόμησης. Σαν επιλέον βοήθημα η τιμή του α βρίσκεται στο διάστημα 0.5-1.0 όπως μπορείτε να βρείτε υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα Α για τις δύο αυτές τιμές του α. Σημειώστε ότι μια και η συνάρτηση είναι συμμετρική αρκεί να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα με κάτω όριο το 0 και να το διπλασιάσετε.
Θα πρέπει να γυρίσετε με το κώδικά σας τη τιμή του α που βρήκατε σα σχόλιο.

5. [**20β**] Μια σειρά από προβλήματα διάχυσης αερίων μπορούν να προσομοιωθούν με μια προσομοίωση τυχαίας διαδρομής που μπορεί να απλουστευθεί ως ακολούθως: Ένας μεθυσμένος φυσικός ξεκινά από το υψηλότερο δεξί άκρο (π.χ. συντεταγμένες 8,8) του τετραγωνικού πλέγματος των δρόμων που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα και προσπαθεί να φθάσει στο σπίτι του που είναι στη θέση με συντεταγμένες (1,1) περπατώντας τυχαία στους δρόμους. Κάθε φορά που φθάνει σε μια γωνία αποφασίζει τυχαία ποια κατεύθυνση θα ακολουθήσει. Ωστόσο ποτέ δεν βγαίνει έξω από τα όρια του τετραγώνου του πλέγματος των δρόμων.



Μια πιθανή διαδρομή φαίνεται στο σχήμα. Όπως βλέπετε αρκετές φορές χρειάζεται να πισωγυρίσει στον ίδιο δρόμο γιατί όλες οι διευθύνσεις (4 στα εσωτερικά σημεία, μείον 1 στα όρια του πλεγματικού τετραγώνου) έχουν την ίδια πιθανότητα. Η διαδρομή που φαίνεται στο σχήμα έχει μήκος 26m γιατί αποτελείται από 26 βήματα και η πλευρά του μικρού τετραγώνου είναι 1m.

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει το μέγιστο, ελάχιστο και αναμενόμενο μήκος της διαδρομής. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να προσομοιώνει 5000 επιτυχείς διαδρομές (επιτυχής είναι η διαδρομή στην οποία ο φυσικός μας φθάνει τελικά στο σπίτι του) και υπολογίζει τις τρεις παραπάνω ποσότητες. Πρέπει να προσέξετε τα βήματα στα όρια του πλέγματος. Βήματα τα οποία οδηγούν στην υπέρβαση των ορίων δεν θα πρέπει να επιτρέπονται και δεν θα πρέπει να επηρεάζουν το μήκος της διαδρομής. [**12β**]

Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει τον αριθμό της διαδρομής, τον αριθμό των βημάτων που εκτελέστηκαν, την αναμενόμενη τιμή βημάτων, την μέγιστο και ελάχιστο αριθμό βημάτων που έχουν βρεθεί και τέλος το αναμενόμενο μήκος της διαδρομής με βάση όλες τις επιτυχείς διαδρομές. [**8β**].

Η αναμενόμενη τιμή της διαδρομής είναι το άθροισμα των διαδρομών κάθε επιτυχημένης διαδρομής δια το συνολικό αριθμό των επιτυχημένων διαδρομών που τρέξατε.

$$\alpha_{d,n} = \frac{F_d}{m} = -\frac{CrA}{m}\upsilon_{x,n}^2 \qquad x_{n+1} = x_n + \upsilon_{x,n}dt \qquad \upsilon_{x,n+1} = \upsilon_{x,n} - (CrA\upsilon_{x,n}^2 / m)dt$$

$$\alpha_{\pi} = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{P}{m\upsilon_x} \qquad P = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\upsilon_x^2\right) = m\upsilon_x\frac{d\upsilon_x}{dt} \quad x_{n+1} = x_n + \upsilon_{x,n}dt$$

$$\upsilon_{x,n+1} = \upsilon_{x,n} + \left(\frac{P}{m\upsilon_x}\right)dt - (CrA\upsilon_{x,n}^2 / m)dt$$