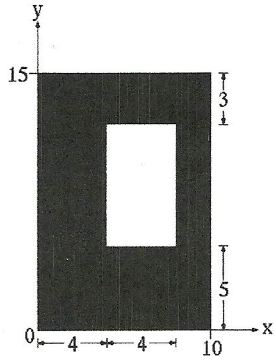
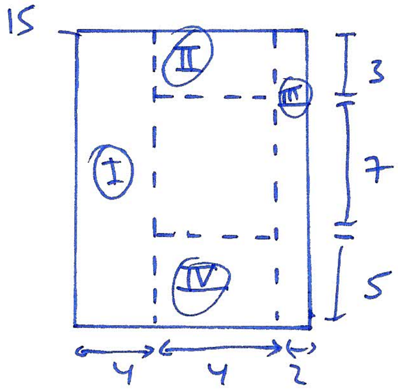
ΦΥΣ 131: ΓΕΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι: ΜΗΧΑΝΙΚΗ, ΚΥΜΑΤΙΚΗ, ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

Φροντιστήριο #8

Άσκηση 1
Βρείτε το κέντρο μάζας του σχήματος



Χωρίζουμε το σχήμα μας σε 4 τετράγωνα:



I: $A_I = 4 \times 15 = 60\,cm^2$	COM_I: (2, 7.5)
II: $A_{II} = 4 \times 3 = 12\,cm^2$	COM_{II}: (6, 13.5)
III: A_{III}: $2 \times 15 = 30\,cm^2$	COM_{III}: (9, 7.5)
IV: A_{IV}: $4 \times 5 = 20\,cm^2$	COM_{IV}: (6, 2.5)

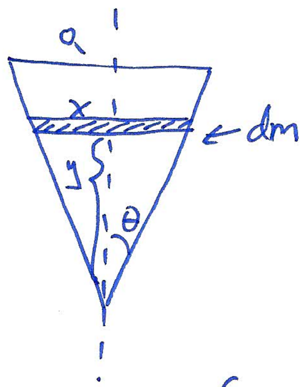
$$\Rightarrow X_{CM} = \frac{(2\cdot 60 + 6\cdot 12 + 9\cdot 30 + 6\cdot 20)\,cm\cdot cm^2}{(60 + 12 + 30 + 20)\,cm^2} = \boxed{4.77\,cm}$$

$$Y_{CM}: = \frac{(7.5\cdot 60 + 13.5\cdot 12 + 7.5\cdot 30 + 2.5\cdot 20)\,cm\cdot cm^2}{(60+12+30+20)\,cm^2} = \boxed{7.27\,cm}$$

$$\Rightarrow \boxed{COM: = (4.77\,cm,\ 7.27\,cm)}$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί η ροπή αδρανείας ενός επίπεδου ισοσκελούς τριγώνου ως προς τον άξονα ο οποίος διχοτομεί την μη ίση γωνιά. Το ύψος του τριγώνου είναι h, η μάζα του M και η διχοτομούμενη γωνιά 2θ. Η ροπή αδρανείας μιας ράβδου μήκους L ως προς το κέντρο μάζας της είναι $I = \frac{1}{12}ML^2$



$$\tan\theta = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y\tan\theta$$

Εμβαδό τριγώνου: $A = \frac{1}{2}h(2a) = \frac{1}{2}\cdot 2h \cdot h\tan\theta$

$$\Rightarrow \boxed{A = h^2\tan\theta}$$

Επιφανειακή πυκνότητα: $\sigma = \frac{M}{A} = \frac{M}{h^2\tan\theta}$

Θεωρούμε οριζόντιες ράβδους πάχους dy, μήκους $2x = 2y\tan\theta$

$$\Rightarrow dM = \sigma\cdot dA = \sigma\cdot(2x)\,dy \Rightarrow dM = 2y\cancel{\tan\theta}\frac{M}{h^2\cancel{\tan\theta}}\,dy$$

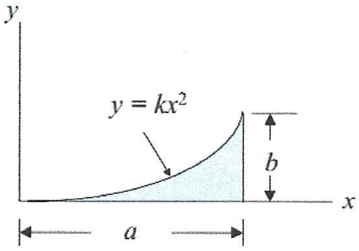
$$\Rightarrow I = \int dI = \int \frac{1}{12}dM(d\ell)^2 = \int \frac{1}{12}\cdot 2y\frac{M}{h^2}dy\,(2x)^2 = \frac{M}{6h^2}\int 4x^2 y\,dy$$

$$\Rightarrow I = \frac{4}{6}\frac{M}{h^2}\int y^2\tan^2\theta\, y\,dy = \frac{2M\tan^2\theta}{3h^2}\int_0^h y^3dy = \frac{2M\tan^2\theta}{3h^2}\left.\frac{y^4}{4}\right|_0^h$$

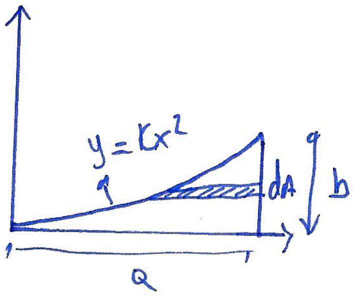
$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{6}Mh^2\tan^2\theta}$$

Άσκηση 3

Βρείτε τη ροπή αδρανείας του σχήματος, ως προς τους άξονες x και y.



Άξονας περιστροφής x:



$$y = kx^2 \qquad b = ka^2 \qquad k = \frac{b}{a^2}$$

$$y = \frac{b}{a^2}x^2 \qquad x = \frac{a}{b^{1/2}}\sqrt{y}$$

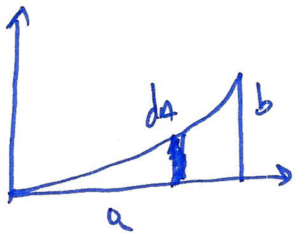
$$dA = (a-x)dy$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^b y^2 (a-x)dy = \int_0^b y^2\left(a - \frac{a}{\sqrt{b}}\sqrt{y}\right)dy$$

$$= a\int_0^b y^2 dy - \frac{a}{\sqrt{b}}\int_0^b y^{5/2}dy = \frac{ay^3}{3}\Big|_0^b - \frac{a}{\sqrt{b}}\left(\frac{2}{7}y^{7/2}\right)\Big|_0^b$$

$$= \frac{ab^3}{3} - \frac{a}{b^{1/2}}\left(\frac{2}{7}b^{7/2}\right) = \frac{ab^3}{3} - \frac{2ab^3}{7} = \Rightarrow \boxed{I_x = \frac{ab^3}{21}}$$

Άξονας y:



$$dA = y\,dx$$

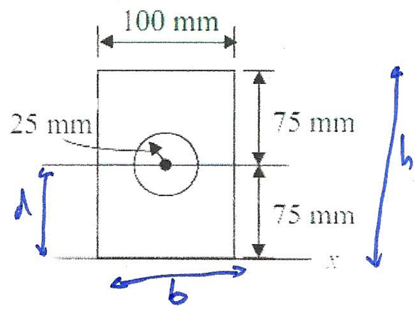
$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^a x^2 y\,dx = \int_0^a x^2\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)dx = \frac{b}{a}\int_0^a x^4 dx$$

$$= \left(\frac{b}{a^2}\right)\left(\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^a = \left(\frac{b}{a^2}\right)\left(\frac{a^5}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{I_y = \frac{a^3 b}{5}}$$

Άσκηση 4

Βρείτε τη ροπή αδρανείας του σχήματος ως προς τον x άξονα:



$$I_x = I_{ορθ} - I_{δισκου}$$

$$= \left(\frac{b \cdot h^3}{3}\right) - \left(I_x + A \cdot d^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}(100)(150)^3 - \left[\frac{1}{4}(\pi r^2) \cdot r^2 + \pi r^2 \cdot d^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}(100)(150)^3 - \left[\frac{1}{4}\pi(25)^2 + \pi \cdot (25)^2 \cdot (75)^2\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{I_x = 101 \times 10^6 \ mm^4}$$