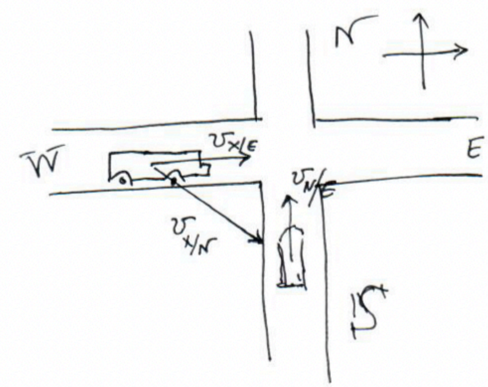
ΦΥΣ. 111

4ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή 05.10.2020**

1. Η Ντίνα οδηγεί το αυτοκίνητό της με ταχύτητα 60*km/h* και κατεύθυνση προς το βορρά ενώ ο Χάρης κινείται ανατολικά με ταχύτητα 45*km/h*. Τα δύο οχήματα πλησιάζουν το ένα το άλλο σε μια διασταύρωση. Ποιά είναι η ταχύτητα του αυτοκινήτου του Χάρη ως προς το σύστημα αναφοράς της Ντίνας;



Έστω S και S' τα συστήματα αναφοράς της Ντίνας και του Χάρη αντίστοιχα.

Η Ντίνα κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_{N/E}$ ως προς το έδαφος με κατεύθυνση προς το Βορρά

Ο Χάρης κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_{X/E}$ ως προς το έδαφος με κατεύθυνση προς Ανατολάς.

Από το Γαλιλαϊκό μετασχηματισμό της ταχύτητος θα έχουμε:

$$\vec{v}_{N/E} = \vec{v}_{N/X} + \vec{v}_{X/E} \Rightarrow \vec{v}_{N/X} = \vec{v}_{N/E} - \vec{v}_{X/E}$$

Αλλά $\vec{v}_{N/X} = -\vec{v}_{X/N}$

$$\Rightarrow -\vec{v}_{X/N} = \vec{v}_{N/E} - \vec{v}_{X/E} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{X/N} = +\vec{v}_{X/E} - \vec{v}_{N/E} \Rightarrow$$

Από τα δεδομένα έχουμε: $\vec{v}_{X/E} = (45\hat{i})\ km/h$

$$\vec{v}_{N/E} = (60\hat{j})\ km/h$$

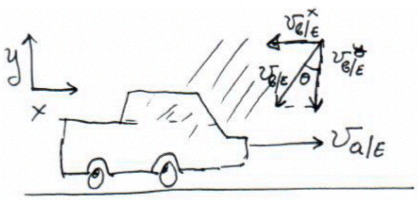
$$\Rightarrow \vec{v}_{X/N} = (45\hat{i} - 60\hat{j})\ km/h$$

Δηλαδή το μέτρο της ταχύτητος είναι: $\left|\vec{v}_{X/N}\right| = \sqrt{45^2 + (-60)^2}\ km/h \Rightarrow \left|\vec{v}_{X/N}\right| = 75\frac{km}{h}$

Η ταχύτητα σχηματίζει γωνία: $\cos\varphi = \frac{\cancel{45}^{\,3}}{\cancel{75}_{\,5}} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{3}{5} \Rightarrow \varphi = 53.13^\circ$ ως προς τον άξονα x

ή νοτιο-ανατολικά.

2. Καθώς οδηγείτε το αυτοκίνητό σας εν μέσω μιας καταιγίδας με κατεύθυνση προς το βορρά και ταχύτητα 25*m/s* παρατηρείτε ότι οι σταγόνες της βροχής σχηματίζουν γωνία 38^{o} με την κατακόρυφη διεύθυνση. Καθώς μερικά λεπτά αργότερα επιστρέφεται πίσω κινούμενοι με την ίδια ταχύτητα παρατηρείτε ότι οι σταγόνες της βροχής πέφτουν ακριβώς κατακόρυφα προς τα κάτω. Με βάση τις δύο αυτές παρατηρήσεις σας να προσδιορίσετε την ταχύτητα και την γωνία πτώσης των σταγόνων της βροχής ως προς το σύστημα αναφοράς του εδάφους.



Έστω S και S΄ το σύστημα αναφοράς του εδάφους και του αυτοκινήτου.
Έστω ακόμη ότι $\vec{v}_{a/\varepsilon}$ η ταχύτητα του αυτοκινήτου ως προς το έδαφος. Η ταχύτητα αυτή θα είναι:

$\vec{v}_{a/\varepsilon} = \left(+25\,\hat{i}\right)\frac{km}{h}$ όταν το αυτοκίνητο κινείται προς το βορρά και $\vec{v}_{a/\varepsilon} = \left(-25\,\hat{i}\right)km/h$

Η ταχύτητα της βροχής ως προς το έδαφος έχει μέτρο $\left|\vec{v}_{\beta/\varepsilon}\right| = v$ και σχηματίζει γωνία Θ με την κατακόρυφο, όπως στο παραπάνω σχήμα.

$$\boxed{\vec{v}_{\beta/\varepsilon} = -v\cdot\sin\Theta\,\hat{i} - v\cos\Theta\,\hat{j}} \quad (1)$$

Η ταχύτητα της βροχής ως προς το σύστημα αναφοράς του αυτοκινήτου είναι $\vec{v}_{\beta/a}$ και η διεύθυνσή της σχηματίζει γωνία φ με την κατακόρυφο διεύθυνση:

$$\boxed{\vec{v}_{\beta/a} = \left|\vec{v}_{\beta/a}\right|\sin\phi\,\hat{i} + \left|\vec{v}_{\beta/a}\right|\cos\phi\,\hat{j}} \quad (2) \Rightarrow \boxed{\tan\phi = \frac{v^{x}_{\beta/a}}{v^{y}_{\beta/a}}} \quad (A)$$

Σύμφωνα με τον Γαλιλαϊκό μετασχηματισμό της ταχύτητας, η ταχύτητα της βροχής ως προς το αυτοκίνητο θα μπορούσε να γραφεί:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_{\beta/a} = \vec{v}_{\beta/\varepsilon} + \vec{v}_{\varepsilon/a}\\ \vec{v}_{\varepsilon/a} = -\vec{v}_{a/\varepsilon}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\vec{v}_{\beta/a} = \vec{v}_{\beta/\varepsilon} - \vec{v}_{a/\varepsilon}\\ \vec{v}_{a/\varepsilon} = \left(\pm 25\frac{km}{h}\right)\hat{i}\end{array}$$

Αντικαθιστώντας την (1) θα έχουμε: $\vec{v}_{\beta/a} = \left(-v\sin\Theta - 25\right)\hat{i} - v\cos\Theta\,\hat{j} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{v}_{\beta/a} = \underbrace{-\left(v\sin\Theta + 25\right)}_{v^{x}_{\beta/a}}\hat{i}\underbrace{-v\cos\Theta}_{v^{y}_{\beta/a}}\hat{j} \Rightarrow \boxed{\tan\phi = \frac{\cancel{-}\left(v\sin\Theta+25\right)}{\cancel{-}v\cos\Theta}} \ (B)$$ όταν πηγαίνει βόρεια.

Όταν το αυτοκίνητο επιστρέφει $\vec{v}_{a/\varepsilon} = -25\frac{km}{h}\hat{i}$ οπότε $\boxed{\tan\phi = \frac{\cancel{-}\left(v\sin\Theta-25\right)}{\cancel{-}v\cos\Theta}}$ (Γ)

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος:

όταν κινείται βόρεια: $\varphi = 38^\circ$ οπότε η (Β) $\Rightarrow \tan 38^\circ = \dfrac{v\sin\theta + 25}{v\cos\theta}$ (Δ)

όταν κινείται νότια $\varphi = 0^\circ$ οπότε η (Γ) $\Rightarrow \tan 0^\circ = \dfrac{v\sin\theta - 25}{v\cos\theta} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{v\sin\theta = 25\ km/h} \quad (E)$$

Αντικατάσταση στην (Δ) δίνει: $\tan 38^\circ = \dfrac{25+25}{v\cos\theta} \Rightarrow v\cos\theta = \dfrac{50}{\tan 38} \Rightarrow$

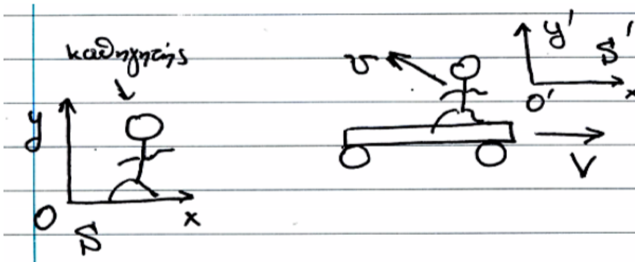
$$\boxed{v\cos\theta = 64\ km/h} \quad (ΣΤ).$$

Από (Ε) και (ΣΤ) έχουμε: $v^2\sin^2\theta + v^2\cos^2\theta = \left(25\ \frac{km}{h}\right)^2 + \left(64\ \frac{km}{h}\right)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow v^2 = 4721\ km^2/h^2 \Rightarrow \boxed{v = 68.7\ km/h}$$

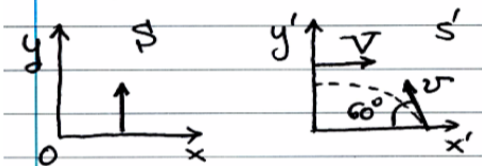
Αντικατάσταση στην (Ε) και (ΣΤ) $\dfrac{\cancel{v}\sin\theta}{\cancel{v}\cos\theta} = \tan\theta = \dfrac{25}{64} \Rightarrow \boxed{\theta = 21.34^\circ}$

3. Ένας φοιτητής επιβαίνει σε ένα βαγόνι τραίνου το οποίο κινείται σε ευθεία οριζόντια τροχιά με σταθερή ταχύτητα 10*m/s*. Ο φοιτητής ρίχνει μια μπάλα προς τα πάνω υπολογίζοντας ότι σχηματίζει γωνία 60° με την οριζόντια διεύθυνση. Ο καθηγητής του φοιτητή που βρίσκεται στο έδαφος βλέπει τη μπάλα να κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω. Ποιο είναι το ύψος στο οποίο βλέπει ο καθηγητής να φθάνει η μπάλα;

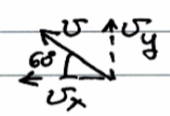


Θεωρούμε το σύστημα του καθηγητή ως το αδρανειακό σύστημα ενώ αυτό του φοιτητή ως το κινούμενο σύστημα

Σύμφωνα με τους 2 παρατηρητές η κίνηση της μπάλας είναι:



Στο σύστημα S' θα έχουμε:



$$\boxed{\tan 60^\circ = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \sqrt{3}} \quad (1)$$

Έστω V η ταχύτητα του S' ως προς το S.
Η ταχύτητα της μπάλας ως προς το S μπορεί να γραφεί σύμφωνα με τη διανυσματική εξίσωση:

$$\vec{\upsilon}_{\mu\pi/S} = \vec{\upsilon}_{\mu\pi/S'} + \vec{V}_{S'/S}$$

Αναλύουμε τη ταχύτητα αυτή στους άξονες x κ y:

$$\upsilon^x_{\mu\pi/S} = \upsilon^x_{\mu\pi/S'} + V^x_{S'/S} \quad (A) \qquad V^x_{S'/S} = 10\,m/s$$

$$\upsilon^y_{\mu\pi/S} = \upsilon^y_{\mu\pi/S'} + V^y_{S'/S} \quad (B) \qquad V^y_{S'/S} = 0\,m/s.$$

Ο καθηγητής βλέπει τη μπάλα να κινείται κατακόρυφα οπότε η συνιστώσα της ταχύτητας της μπάλας στη x-διεύθυνση του S είναι 0

$$\upsilon^x_{\mu\pi/S} = 0 \overset{(A)}{\Rightarrow} 0 = \upsilon^x_{\mu\pi/S'} + V^x_{S'/S} \Rightarrow \boxed{\upsilon^x_{\mu\pi/S'} = -V^x_{S'/S} = -10\,m/s}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε: $\boxed{\upsilon^y_{\mu\pi/S'} = \sqrt{3}\,\upsilon^x_{\mu\pi/S'} = 10\sqrt{3}\,m/s}$

Δηλαδή η μπάλα στο S' ρίχνεται προς τα πίσω.

Ξέρουμε ότι $V^y_{S'/S} = 0$ (το τρένο κινείται στη x-διεύθυνση)

Άρα από την εξίσωση (B) $\boxed{\upsilon^y_{\mu\pi/S} = \upsilon^y_{\mu\pi/S'} = 10\sqrt{3}}$

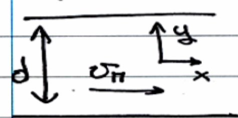
Ξέρουμε από τις εξισώσεις κινηματικής για επιταχυνόμενη κίνηση ότι:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(y_f - y_i) \Rightarrow 0 = v_i^2 - 2g\,h_{max} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_{max} = \frac{v_i^2}{2g} = \frac{(10\sqrt{3})^2}{2g} = \frac{100 \cdot 3}{2 \cdot 9.8} \Rightarrow \boxed{h_{max} = 15.3m}$$

4. Τα νερά ενός ποταμού κινούνται με σταθερή ταχύτητα 2.50*m/s* μεταξύ των παράλληλων όχθεων που απέχουν απόσταση 80m. Πρέπει να παραδώσετε ένα δέμα στο ακριβώς απέναντι σημείο της όχθης αλλά μπορείτε να κολυμπήσετε με ταχύτητα 1.50*m/s*. (α) Αν θέλετε να ελαχιστοποιήσετε το χρόνο που βρίσκεστε στο νερό προς ποια κατεύθυνση θα πρέπει να κολυμπήσετε; (β) Πόση απόσταση κατά μήκος της όχθης θα έχετε κινηθεί; (γ) Αν θέλατε να ελαχιστοποιήσετε την απόσταση που σας μεταφέρει το ποτάμι προς ποια διεύθυνση θα κολυμπούσατε; (δ) Πόσο μακριά κατά μήκος του ποταμού θα μεταφερθείτε στην περίπτωση αυτή;

(α) Για να ελαχιστοποιήσουμε το χρόνο πρέπει να κολυμπάτε κάθετα προς τις όχθες του ποταμού στη y-διεύθυνση

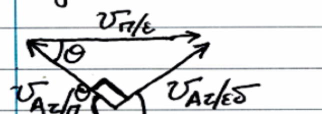


Έστω t ο χρόνος αυτός. Τότε θα έχουμε:

$$\upsilon_y = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{\upsilon_y} = \frac{80}{1.5} \Rightarrow \boxed{t = 53.3\,sec}$$

(β) Στο χρονικό αυτό διάστημα, το νερό του ποταμού σας μεταφέρει απόσταση x ίση με: $x = \upsilon_\pi \cdot t = 2.5 \cdot 53.3 \Rightarrow \boxed{x = 133m}$

(γ) Για να ελαχιστοποιήσουμε την απόσταση αυτή θα πρέπει να κολυμπάτε με τέτοια γωνία ως προς τη ροή του ποταμού ώστε η συνισταμένη ταχύτητά σας ($\vec{\upsilon}_{A\tau/\pi} + \vec{\upsilon}_{\pi/\varepsilon\delta} = \vec{\upsilon}_{A\tau/\varepsilon\delta}$) να σχηματίζει 90° γωνία με τη διεύθυνση που κολυμπάτε. Κάτω από τη συνθήκη αυτή, η γωνία της συνισταμένης ταχύτητας και της διεύθυνσης x, μεγιστοποιείται



Δηλαδή θα πρέπει η διαφορά $\upsilon^x_{A/\varepsilon\delta} = \upsilon^x_{\pi/\varepsilon} - \upsilon^x_{A/\pi}$ να γίνει η μικρότερη δυνατή. Επομένως η γωνία αυτή θα είναι:

$$\cos\theta = \frac{\upsilon_{A\tau/\pi}}{\upsilon_{\pi/\varepsilon}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1.5}{2.5} \Rightarrow \boxed{\theta = 53.1^\circ}$$

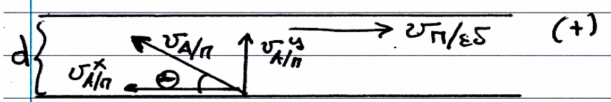
(δ) Επομένως $\upsilon^x_{A\tau/\pi} = \upsilon_{A\tau/\pi} \cdot \cos\theta = 1.5 \cdot 0.6 = 0.9\,m/sec.$

$$\upsilon^y_{A\tau/\pi} = \upsilon_{A\tau/\pi} \cdot \sin\theta = 1.5 \cdot 0.8 \Rightarrow \upsilon^y_{A\tau/\pi} = 1.2\,m/s$$

Με αυτή την ταχύτητα στη y-διεύθυνση καλύπτετε την απόσταση d σε χρόνο: $t = \frac{d}{\upsilon^y_{A\tau/\pi}} = \frac{80}{1.2} \Rightarrow t = 66.7\,sec$

Η συνισταμένη ταχύτητα στη x-διεύθυνση $\upsilon^x_{A/\varepsilon\delta} = \upsilon^x_{A/\pi} + \upsilon^x_{\pi/\varepsilon} \Rightarrow$
$\upsilon^x_{A/\varepsilon\delta} = 2.5 - 0.9 = 1.6\,m/sec$. Επομένως η απόσταση x που θα μεταφερθείτε είναι $x = \upsilon^x_{A/\varepsilon\delta} \cdot 66.7 \Rightarrow x = 1.6 \cdot 66.7 = \underline{106.7m}$

Δεύτερος τρόπος για το ερώτημα (γ)



Αναλύουμε τη ταχύτητα $\upsilon_{A/\pi}$ σε 2 συνιστώσες $\upsilon^{x}_{A/\pi} = \upsilon_{A/\pi}\cos\theta$

$\upsilon^{y}_{A/\pi} = \upsilon_{A/\pi}\sin\theta$

Ο χρόνος που καλύπτει την απόσταση μεταξύ των 2 όχθεων είναι:

$$d = \upsilon^{y}_{A/\pi}\cdot t \Rightarrow t = \frac{d}{\upsilon^{y}_{A/\pi}} = \frac{d}{\upsilon_{A/\pi}\sin\theta} \qquad (1)$$

Το ίδιο χρονικό διάστημα κινείται και στη x-διεύθυνση.

Η ταχύτητα ως προς το έδαφος στη x-διεύθυνση θα είναι:

$$\vec{\upsilon}^{\,x}_{A/\varepsilon\delta} = \vec{\upsilon}^{\,x}_{A/\pi} + \vec{\upsilon}_{\pi/\varepsilon\delta} = -\upsilon_{A/\pi}\cos\theta + \upsilon_{\pi/\varepsilon\delta}$$

Η απόσταση στη x-διεύθυνση θα είναι: $x = \upsilon^{x}_{A/\varepsilon\delta}\cdot t \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \quad x = (\upsilon_{\pi/\varepsilon\delta} - \upsilon_{A/\pi}\cos\theta)\frac{d}{\upsilon_{A/\pi}\sin\theta}$$

Θέλουμε αυτή η απόσταση να είναι ελάχιστη για κάποια γωνία θ,

άρα: $$\frac{dx}{d\theta} = 0 \Rightarrow \cancel{\upsilon_{A/\pi}}\cancel{\sin\theta}\frac{d}{\cancel{\upsilon_{A/\pi}}\cancel{\sin\theta}} - \frac{\upsilon_{\pi/\varepsilon\delta}\, d\cos\theta}{\upsilon_{A/\pi}\sin^2\theta} + \frac{\cancel{\upsilon_{A/\pi}}\, d\cos^2\theta}{\cancel{\upsilon_{A/\pi}}\sin^2\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \quad d - d\,\frac{\upsilon_{\pi/\varepsilon\delta}\cos\theta}{\upsilon_{A/\pi}\sin^2\theta} + d\,\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = 0 \Rightarrow$$

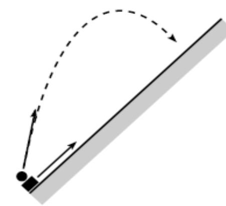
$$\Rightarrow \frac{d}{\upsilon_{A/\pi}\sin^2\theta}\left(\upsilon_{A/\pi}\sin^2\theta - \upsilon_{\pi/\varepsilon\delta}\cos\theta + \upsilon_{A/\pi}\cos^2\theta\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{\upsilon_{A/\pi}\sin^2\theta}\left(\upsilon_{A/\pi}\underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{1} - \upsilon_{\pi/\varepsilon\delta}\cos\theta\right) = 0 \Rightarrow$$

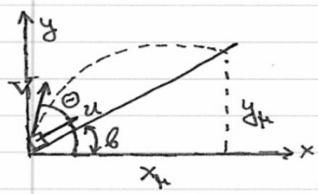
$$\Rightarrow \upsilon_{A/\pi} - \upsilon_{\pi/\varepsilon\delta}\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{\upsilon_{A/\pi}}{\upsilon_{\pi/\varepsilon\delta}} = \frac{1.5}{2.5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = 53.1^\circ}$$

5. Σε μία δεδομένη χρονική στιγμή, ένα τούβλο βάλλεται κατά μήκος ενός λείου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης β. Την ίδια στιγμή μια μπάλα ρίχνεται προς τα πάνω με γωνία θ (οι δύο γωνίες β και θ μετρούνται ως προς τον ορίζοντα). Και τα δύο αντικείμενα ξεκινούν από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Ποιά θα πρέπει να είναι η γωνία θ συναρτήσει της γωνίας β, αν θέλετε η μπάλα να προσγειωθεί στο τούβλο τη στιγμή που το τούβλο φθάνει στο υψηλότερο σημείο της κίνησής του πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο; Ποια είναι η γωνία θ όταν $\beta = 45°$;



Σημείωση: Ίσως θεωρήσετε ότι παρέλειψα να σας δώσω τις αρχικές ταχύτητες των δύο σωμάτων. Ωστόσο θα βρείτε ότι δεν τις χρειάζεστε για να λύσετε το πρόβλημα.



Έστω οι ταχύτητες του τούβλου και της μπάλας είναι u_T και $V_μ$

Η μπάλα χτυπά στο κεκλιμένο επίπεδο όταν

$$\frac{y_μ}{x_μ} = \tan\beta \qquad \text{Αλλά} \quad y_μ = (V_μ \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$x_μ = (V_μ \cos\theta)t$$

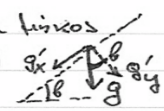
Αντικαθιστώντας: $\tan\beta = \frac{(V_μ \sin\theta)\cancel{t} - \frac{1}{2}gt^{\cancel{2}}}{(V_μ\cos\theta)\cancel{t}} \Rightarrow \tan\beta = \tan\theta - \frac{gt}{2V_μ\cos\theta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = \frac{2V_μ\cos\theta}{g}(\tan\theta - \tan\beta) \qquad (1)$$

Το τούβλο φθάνει στο ψηλότερο σημείο της κίνησής του όταν η ταχύτητά του γίνεται μηδέν:

$$\cancel{u_T}^{0} = u_T^{0} - (g\sin\beta)t \Rightarrow t = \frac{u_T^{0}}{g\sin\beta} \qquad (2)$$

Το τούβλο δέχεται την επίδραση της συνιστώσας της g κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου (όπως δείχνει το διπλανό σχήμα)



Αυτοί οι 2 χρόνοι κίνησης ((1) ∧ (2)) πρέπει να είναι ίδιοι:

(A)

$$\frac{u_T^{0}}{\cancel{g}\sin\beta} = \frac{2V_μ\cos\theta}{\cancel{g}}(\tan\theta - \tan\beta) \Rightarrow \boxed{u_T = 2V_μ\sin\beta\cos\theta(\tan\theta - \tan\beta)}$$

Για να χτυπήσει η μπάλα στο τούβλο θα πρέπει οι αποστάσεις πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο να είναι ίσες:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Για τη μπάλα:} \quad x'_μ = \frac{x_{μπ}}{\cos\beta} = \frac{(V_μ\cdot\cos\theta)t}{\cos\beta} \\ &\text{Για το τούβλο:} \quad x'_T = u_T\cdot t - \frac{1}{2}(g\sin\beta)t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x'_μ = x'_T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_\mu \cos\Theta}{\cos b}\cancel{t} = u_T\cancel{t} - \frac{1}{2} g \sin b\, t^{\cancel{2}}$$

Αντικαθιστούμε το χρόνο από την εξίσωση (2) οπότε:

$$\frac{V_\mu \cos\Theta}{\cos b} = u_T - \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{g \sin b}\frac{u_T}{\cancel{g \sin b}} \Rightarrow \boxed{V_\mu \cos\Theta = \frac{1}{2} u_T \cos b} \quad (B)$$

Από τις εξισώσεις (A) και (B) θα πάρουμε:

$$\cancel{V_\mu} \cancel{\cos\Theta} = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\cancel{V_\mu} \sin b \cancel{\cos\Theta}(\tan\Theta - \tan b)\cos b$$

$$\Rightarrow \boxed{1 = \cos b \sin b(\tan\Theta - \tan b)}$$

Αυτή η εξίσωση προσδιορίζει τη γωνία Θ

Αν $b = 45^\circ$ τότε $1 = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}(\tan\Theta - 1) \Rightarrow \tan\Theta = 3 \Rightarrow \Theta = 71.6^\circ$

Δεύτερη Λύση

Χρησιμοποιούμε σύστημα συντεταγμένων με άξονες παράλληλο και κάθετο προς το κεκλιμένο επίπεδο.
Τα δύο σώματα ξεκινούν από το ίδιο σημείο και δέχονται την ίδια επιτάχυνση κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. ($g \sin b$)
Επομένως για να πέσει η μπάλα στο τούβλο θα πρέπει η αρχική της ταχύτητα κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου, να είναι ίση με τη ταχύτητα του τούβλου, αφού και τα 2 δέχονται την ίδια επιτάχυνση θα έχουν πάντα την ίδια ταχύτητα κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Δηλαδή η μπάλα είναι πάντα "πάνω" στο τούβλο

Άρα: $u_T^{x'} = V_\mu^{x'} \Rightarrow \boxed{u_T = V_\mu \cos(\Theta - b)}$ (A')

γωνία της V με το κεκλιμένο επίπεδο

Ζητάμε η μπάλα να χτυπήσει το τούβλο στο ψηλότερο σημείο της κίνησης του τούβλου.

Ο χρόνος που απαιτείται για να πέσει η μπάλα στο κεκλιμένο επίπεδο είναι:

$$\left.\begin{array}{l} t_{o\lambda} = 2t_{av} \\ V_{\mu\eta}^{y'} = V_{\mu}^{y'} - g_{y'} t_{av} \Rightarrow 0 = V_{\mu}\sin(\theta-b) - g\cos b\, t_{av} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{o\lambda} = 2\frac{V_{\mu}\sin(\theta-b)}{g\cos b}$$

Ο χρόνος που χρειάζεται το τούβλο να φθάσει στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς του είναι:

$$\cancel{u}^{0} = u_T - g\sin b\, t \Rightarrow t = \frac{u_T}{g\sin b}.$$

Εξισώνοντας τους 2 χρόνους $\Rightarrow \boxed{\frac{2V_{\mu}\sin(\theta-b)}{g\cos b} = \frac{u_T}{g\sin b}} \; (B')$

Από την (A') και (B') αντικαθιστώντας την u_T έχουμε:

$$\frac{2\cancel{V_{\mu}}\sin(\theta-b)}{\cancel{g}\cos b} = \frac{\cancel{V_{\mu}}\cos(\theta-b)}{\cancel{g}\sin b} \Rightarrow 2\frac{\sin b}{\cos b}\frac{\sin(\theta-b)}{\cos(\theta-b)} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{2\tan b\tan(\theta-b) = 1}$$

μπορείτε να δείξετε ότι τα 2 αποτελέσματα είναι ίδια :)

Αν $b \to 90° \Rightarrow \theta \to 90°$ λογικό

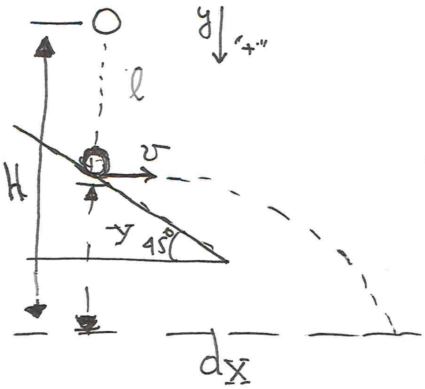
$b \to 0° \Rightarrow \theta \to 90°$ λογικό

Για $b = 45°$ θα έχουμε: $2\cdot(1)\cdot\tan(\theta-45) = 1 \Rightarrow \tan(\theta-45) = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\tan\theta - \cancel{\tan 45°}^{1}}{1+\tan\theta\,\cancel{\tan 45°}^{1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(\tan\theta - 1) = 1 + \tan\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan\theta = 3 \Rightarrow \boxed{\theta = 71.6°}$$

6. Μία μπάλα αφήνεται να πέσει με μηδενική αρχική ταχύτητα από κάποιο ύψος h. Σε κάποιο ύψος y της διαδρομής της, συγκρούεται ελαστικά με την επιφάνεια ενός κεκλιμένου επιπέδου και αναπηδά χωρίς να αλλάζει το μέτρο της ταχύτητάς της. Η κεκλιμένη επιφάνεια σχηματίζει γωνία 45° με την οριζόντια διεύθυνση. Η μπάλα αναπηδά και η ταχύτητά της την στιγμή της αναπήδησης είναι παράλληλη προς την οριζόντια διεύθυνση. (α) Ποιο θα πρέπει να είναι το ύψος y (εκφρασμένο συναρτήσει του ύψους h) στο οποίο βρίσκεται η κεκλιμένη επιφάνεια ώστε η μπάλα να προσγειωθεί στο έδαφος στην μεγαλύτερη απόσταση από την κατακόρυφη διεύθυνση. (β) Ποια η οριζόντια απόσταση που καλύπτει η μπάλα μετά την αναπήδησή της μέχρι να προσγειωθεί στο έδαφος στην βέλτιστη περίπτωση που βρήκατε στο (α) ερώτημα;



Η μπάλα πέφτει κατά ένα ύψος $l = H - y$ όταν συναντά και αναπηδάται στο κεκλιμένο επίπεδο. Η μπάλα ξεκινά από την ηρεμία, οπότε

$$l = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2l}{g} = \frac{2(H-y)}{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{2(H-y)}{g}}} \quad (1)$$

Τη στιγμή που χτυπά στο κεκλιμένο επίπεδο η ταχύτητά της είναι: $\upsilon = g t \overset{(1)}{\Rightarrow} \upsilon = g\sqrt{\frac{2(H-y)}{g}} \Rightarrow \boxed{\upsilon = \sqrt{2g(H-y)}}$ (2)

Η μπάλα συγκρούεται ελαστικά στην κεκλιμένη επιφάνεια, και η γωνία ανάκλασης είναι τέτοια ώστε η μπάλα κινείται οριζόντια. Η ταχύτητα με την οποία αναπηδάται είναι ίση σε μέτρο με την ταχύτητα που προσπίπτει στην επιφάνεια και δίνεται από την εξίσωση (2).

Ο χρόνος που χρειάζεται ώστε να καλύψει την υπόλοιπο ύψος y και μετά την αναπήδησή της στην επιφάνεια, είναι: $y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{2g/y}}$ (3)

Στο ίδιο διάστημα διανύει απόσταση στην οριζόντια διεύθυνση:

$$d_x = \upsilon \cdot t \overset{(2)\kappa(3)}{\Rightarrow} d_x = \sqrt{2g(H-y)} \cdot \sqrt{2y/g} \Rightarrow \boxed{d_x = 2\sqrt{y(H-y)}} \quad (4)$$

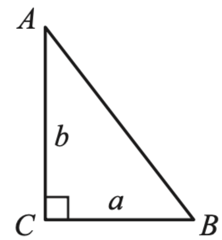
Θέλουμε η απόσταση αυτή να είναι μέγιστη. Επομένως $\frac{dx}{dy} = 0 \Rightarrow \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}\frac{H-2y}{\sqrt{y(H-y)}} = 0$

$$\Rightarrow H - 2y = 0 \Rightarrow \boxed{y = H/2} \quad (A)$$

Αντικατάσταση της y στην (4) δίνει: $dx = 2\sqrt{\frac{H}{2}\frac{H}{2}} \Rightarrow \boxed{d = H}$ (B)

Να σημειωθεί ότι η εξίσωση (4) έχει οριακές συνθήκες $y=0$ κ $y=H$. Δηλαδή όταν $y=0$, η επιφάνεια είναι στο έδαφος και επομένως η μπάλα είναι ήδη στο έδαφος με την αναπήδηση. Όταν $y=H$, η επιφάνεια είναι στο ύψος που αφήνεται η μπάλα και επομένως $\upsilon_0 = 0\,m/s$. Η μπάλα πέφτει ελεύθερα και κατακόρυφα.

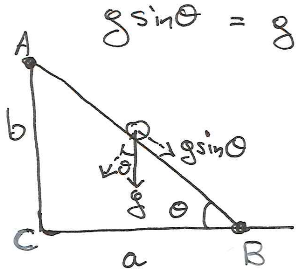
7. Θεωρήστε το ορθογώνιο τρίγωνο του διπλανού σχήματος το οποίο βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση. Μία μικρή μπάλα πέφτει από την κορυφή A στην κορυφή B ακολουθώντας είτε την διαδρομή που καθορίζει η υποτείνουσα του τριγώνου ή κινούμενο στα δύο ευθύγραμμα τμήματα AC και CB (θεωρήστε ότι στην κορυφή C υπάρχει η κατάλληλη καμπύλωση ώστε η μπάλα να κινηθεί από το ένα ευθύγραμμο τμήμα στο άλλο χωρίς να αναπηδήσει και χωρίς να αλλάξει το μέτρο της ταχύτητάς της). Θεωρήστε ακόμα ότι όλες οι επιφάνειες είναι λείες και δεν υπάρχουν τριβές μεταξύ των επιφανειών.



(α) Πόσος χρόνος, t_H, απαιτείται ώστε το σώμα να καλύψει την διαδρομή κινούμενο κατά μήκος της υποτείνουσας;
(β) Πόσος χρόνος, t_L, απαιτείται ώστε η μπάλα να καλύψει τη διαδρομή κινούμενη στα δύο ευθύγραμμα τμήματα;
(γ) Δείξτε ότι $t_H = t_L$ όταν α = 0.
(δ) Πώς συγκρίνονται οι δύο χρόνοι, t_H και t_L, στο όριο όπου η πλευρά b είναι πολύ μικρότερη της πλευράς α ($b \ll a$);
(ε) Εξαιρώντας την περίπτωση $b = a$, τι είδους τρίγωνο θα έχει ως αποτέλεσμα οι δύο χρόνοι να κίνησης, t_H και t_L, να είναι ίσοι μεταξύ τους ($t_H = t_L$) ανεξάρτητα της διαδρομής που ακολουθεί το σώμα;

(α) Έστω Θ είναι η γωνία που σχηματίζει η υποτείνουσα με την οριζόντια διεύθυνση. Η συνιστώσα της επιτάχυνσης της βαρύτητας κατά μήκος της υποτείνουσας θα είναι

$g\sin\Theta = g\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Το σώμα καλύπτει την διαδρομή του μήκους της υποτείνουσας: $AB = \sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{2} g\sin\Theta\, t_H^2 \Rightarrow$



$$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = \frac{1}{2} g \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} t_H^2 \Rightarrow \boxed{t_H = \sqrt{\frac{2(a^2+b^2)}{gb}}} \quad (1)$$

Αν $a \to \infty$ ή $b \to \infty$ ή $b \to 0$ τότε $t_H \to \infty$, που είναι λογικό.

(β) Ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα να πέσει στην κορυφή C είναι:

$b = \frac{1}{2} g t_C^2 \Rightarrow \boxed{t_C = \sqrt{\frac{2b}{g}}}$ (2) Η ταχύτητα της μπάλας στη θέση C θα είναι:

$v_C = g t_C = g\sqrt{\frac{2b}{g}} \Rightarrow \boxed{v_C = \sqrt{2gb}}$ (3)

Το σώμα καλύπτει την οριζόντια διαδρομή από το C στο B με ταχύτητα $v_C = \sqrt{2gb}$ και σε χρόνο: $t_{CA} = a/v_C = \boxed{a/\sqrt{2gb}}$ (4)

Επομένως ο συνολικό χρόνος κίνησης για την διαδρομή ACB είναι:

$t_L = t_{AC} + t_{CA} \Rightarrow \boxed{t_L = \sqrt{\frac{2b}{g}} + \frac{a}{\sqrt{2gb}}}$ (5)

Εξετάζουμε και πάλι οριακές συνθήκες, $b \to \infty$, $b \to 0$ κ $a \to \infty$ οδηγούν σε $t_L \to \infty$.

(γ) Αν $a=0$ τότε τόσο $t_H = \sqrt{\frac{2b}{g}} = t_L$

(δ) Αν $b \ll a$ τότε $t_H \simeq \sqrt{2}\, a/\sqrt{gb}$ (ο όρος b^2 είναι πολύ μικρός)

Αντίστοιχα, $t_L \simeq \frac{a}{\sqrt{2gb}}$ (ο πρώτος όρος της (5) είναι αμελητέος)

Επομένως για $b \ll a$ $\quad t_H = \frac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{gb}} = \frac{2a}{\sqrt{2gb}} \Rightarrow \boxed{t_H \simeq 2t_L}$ για $b \ll a$

Το αποτέλεσμα είναι λογικό, γιατί όταν το σωματίδιο κινείται στη διαδρομή ACB, η μέγιστη ταχύτητά του είναι $\sqrt{2gb}$ όπως βρήκαμε στην εξίσωση (3).
Η ταχύτητα αυτή αντιστοιχεί σχεδόν για ολόκληρη τη διαδρομή όταν $b \ll a$.
Όταν κινείται στην υποτείνουσα, το σώμα έχει την ίδια μέγιστη ταχύτητα, όπως προκύπτει από την (1) και $v = a t_H = g\frac{b}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}} \frac{\sqrt{2\cancel{(a^2+b^2)}}}{\sqrt{gb}} = \sqrt{\frac{2g^2b^2}{gb}} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{2gb}$

Η μέση ταχύτητα είναι η μισή της μέγιστης ταχύτητας, γιατί το σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση οπότε $\bar{v} = \frac{\cancel{v_i} + v_f}{2} = \frac{v_f}{2} \Rightarrow \bar{v} = \frac{1}{2}\sqrt{2gb}$

Η μετατόπιση είναι ίδια, οπότε $t_L = \frac{1}{2} t_H$.

(ε) Αν θεωρήσουμε ότι $t_L = t_H \Rightarrow \sqrt{\frac{2(a^2+b^2)}{\cancel{gb}}} = \sqrt{\frac{2b^2}{\cancel{gb}}} + \frac{a}{\sqrt{2\cancel{gb}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2(a^2+b^2)} = b\sqrt{2} + \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2\sqrt{(a^2+b^2)} = 2b + a \Rightarrow$

$\Rightarrow 4a^2 + \cancel{4b^2} = \cancel{4b^2} + a^2 + 4ab \Rightarrow 3a^{\cancel{2}} = 4\cancel{a}b \Rightarrow \boxed{a = \frac{4b}{3}}$

Δηλαδή οι δύο χρόνοι είναι ίσοι, όταν το τρίγωνο έχει πλευρές σε αναλογία 3 : 4 : 5 με την πλευρά της βάσης να είναι μεγαλύτερη.

8. Ένας κουβάς με νερό έχει μάζα $4.80kg$ και επιταχύνεται προς τα πάνω με ένα σχοινί αμελητέας μάζας, του οποίου το όριο αντοχής χωρίς να σπάσει είναι $75.0N$. Βρείτε ποια είναι η μέγιστη επιτάχυνση προς τα πάνω που μπορεί να δοθεί στον κουβά χωρίς να σπάσει το σκοινί.

(a)

$\Sigma F = T - mg$ (θεωρούμε τη διεύθυνση προς τα πάνω θετική)

(B)

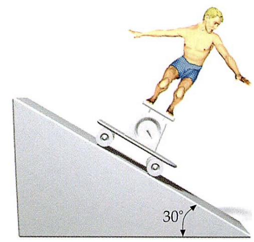
$\Sigma F = ma \Rightarrow T - mg = ma \Rightarrow ma = T - mg \Rightarrow ma \leq 75 - mg$

$T = 75N$ η μέγιστη τάση του νήματος πριν σπάσει

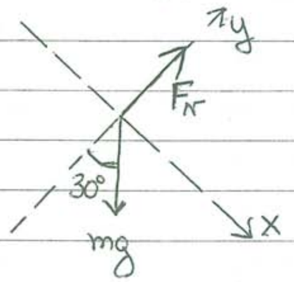
Επομένως $ma \leq 75 - mg \Rightarrow 4.8a \leq 75 - 4.8 \cdot 9.8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a \leq 5.83\ m/sec^2}$

9. Ένας φοιτητής μάζας 65kg ζυγίζεται ενώ στέκεται σε μια ζυγαριά η οποία είναι τοποθετημένη σε ένα skateboard, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το skateboard κινείται προς τη βάση ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\theta = 30^o$. Υποθέστε ότι δεν υπάρχουν τριβές και επομένως η αντίδραση από την επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου στο skateboard είναι κάθετη στην κεκλιμένη επιφάνεια. Ποια είναι η ένδειξη της ζυγαριάς;



Η ένδειξη της ζυγαριάς είναι η δύναμη που η ζυγαριά ασκεί στο παιδί. Κατασκευάζουμε το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος για το παιδί και διαλέγουμε άξονες συντεταγμένων παρ/λο και κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο



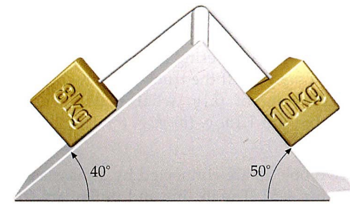
Από το 2ο νόμο του Newton στη y-διεύθυνση:

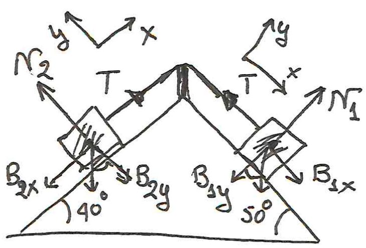
$$\Sigma F_y = m a_y \Rightarrow F_N - mg\cos 30^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_N = mg\cos 30^\circ = 65 \cdot 9.81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F_N = 552.2 N}$$

10. Ένα κιβώτιο μάζας 8*kg* και ένα δεύτερο κιβώτιο μάζας 10*kg* συνδέονται με ένα σχοινί αμελητέας μάζας. Το σχοινί περνά από μία λεία προεξοχή που βρίσκεται στο σημείο που ενώνονται δύο λείες κεκλιμένες επιφάνειες διαφορετικής κλίσης, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. (α) Να βρεθεί η επιτάχυνση των κιβωτίων και η τάση του σχοινιού. (β) Τα δύο κιβώτια αντικαθίστανται με δύο άλλες μάζες έτσι ώστε να μην υπάρχει επιτάχυνση. Βρείτε κάποια σχέση που να συνδέει τις νέες μάζες των δύο κιβωτίων.

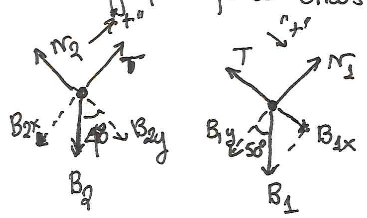




(α) Τα κιβώτια συνδέονται με ένα σχοινί και επομένως τα μέτρα των επιταχύνσεών τους θα είναι ίδια.

Η τάση στο σχοινί θα είναι παντού η ίδια, εφόσον η προεξοχή απλά αλλάζει τη διεύθυνση του σχοινιού.

Επιλέγουμε άξονες όπως στο σχήμα και αναλύουμε τις δυνάμεις.



Σώμα 1: $\Sigma\vec{F}_x = m_1\vec{a}_x = \vec{B}_{1x} + \vec{T} \Rightarrow \vec{B}_{1x} + \vec{T} = m_1\vec{a}$ (1)

$\Sigma\vec{F}_y = \cancel{m_1\vec{a}_y}^{\,0} = \vec{N}_1 + \vec{B}_{1y} \Rightarrow \vec{N}_1 = -\vec{B}_{1y} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{N_1 = +m_1 g\cos\theta_1}$ (2)

Από την (1) $\Rightarrow \boxed{m_1 g\sin\theta_1 - T = m_1 a}$ (3)

Σώμα 2: $\Sigma\vec{F}_x = m_2\vec{a}_x \Rightarrow \boxed{T - m_2 g\sin\theta_2 = m_2 a}$ (4)

$\Sigma\vec{F}_y = m_2\vec{a}_y \Rightarrow N_2 - m_2 g\cos\theta_2 = 0 \Rightarrow \boxed{N_2 = m_2 g\cos\theta_2}$ (5)

Προσθέτουμε (3) κ (4) οπότε: $(m_1\sin\theta_1 - m_2\sin\theta_2)g = (m_1+m_2)a \Rightarrow$

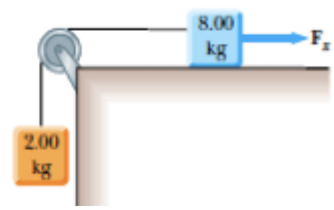
$$\Rightarrow a = \frac{g(m_1\sin\theta_1 - m_2\sin\theta_2)}{m_1+m_2} \Rightarrow a = \frac{\left(9.8\frac{m}{s^2}\right)(10\,kg\cdot\sin 50^\circ - 8\,kg\,\sin 40^\circ)}{(10+8)\,kg} \Rightarrow \boxed{a = 1.37\frac{m}{s^2}}$$

Αντικατάσταση στην (4) και λύση ως προς T δίνει: $T = m_2(g\sin\theta_2 + a) \Rightarrow \boxed{T = 61.4\,N}$

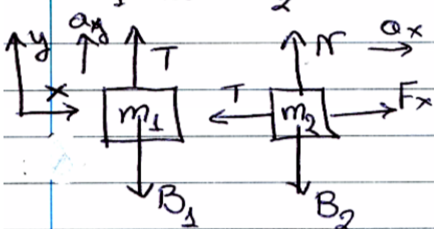
(β) Όταν αντικαταστήσουμε τις μάζες, και το νέο σύστημα είναι σε ισορροπία οι εξισώσεις (3) κ (4) θα δίνουν:

$$\left.\begin{aligned} m_1 g\sin\theta_1 &= T \\ m_2 g\sin\theta_2 &= T \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 50^\circ}}$$

11. Στο σύστημα του διπλανού σχήματος μία οριζόντια δύναμη F_x ασκείται στο σώμα μάζας $m_2 = 8.0kg$. (α) Για ποιά τιμή της F_x η μάζα $m_1 = 2.0kg$ επιταχύνεται προς τα πάνω; (β) Για ποιά τιμή της F_x η τάση στο σχοινί είναι μηδέν; (γ) Σχεδιάστε την επιτάχυνση της μάζας $m_2 = 8.0kg$ συναρτήσει της δύναμης F_x. Θεωρήστε τιμές για την F_x από -1000N μέχρι 1000N.



Κάνουμε το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος για τις μάζες m_1 και m_2



$m_1: \ \Sigma F_y = m_1 a_y \Rightarrow \boxed{T - m_1 g = m_1 a_y}$

$m_2: \ \Sigma F_x = m_2 a_x \Rightarrow \boxed{F_x - T = m_2 a_x}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - B_2 = 0 \Rightarrow N = m_2 g$

Η επιτάχυνση και για τα δύο σώματα είναι ίδια $a_x = a_y$

Επομένως λύνουμε τη 1η εξίσωση ως προς T και αντικαθιστούμε στη 2η $\Rightarrow$

$T = m_1 a_y + m_1 g \qquad (A)$

$F_x - m_1 a_y - m_1 g = m_2 a_x \Rightarrow F_x - m_1 g = m_1 a_y + m_2 a_x \overset{(a_x = a_y)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow F_x - m_1 g = (m_1 + m_2) a_x \Rightarrow \boxed{a_x = \frac{F_x - m_1 g}{m_1 + m_2}} \qquad (B)$

Εφόσον $a_x > 0 \quad F_x - m_1 g > 0 \Rightarrow F_x > m_1 g \Rightarrow \boxed{F_x > 19.6N}$

Αντικαθιστούμε την (B) στην (A) για να βρούμε τη τάση T,

$T = m_1 \frac{F_x - m_1 g}{m_1 + m_2} + m_1 g \Rightarrow T = m_1 \left[\frac{F_x - \cancel{m_1 g} + \cancel{m_1 g} + m_2 g}{m_1 + m_2} \right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{T = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (F_x + m_2 g)} \qquad (\Gamma)$

$T = 0 \Rightarrow F_x + m_2 g = 0 \Rightarrow F_x = -m_2 g$ οπότε για $\boxed{F_x \leq -m_2 g, \ T = 0}$

Όταν η $F_x < 0$ τότε ουσιαστικά σπρώχνει το m_2 προς τα δεξιά και το m_1 κατεβαίνει. Όταν $T=0$ το m_1 κατεβαίνει με επιτάχυνση g

Από την εξίσωση (Β) $\Rightarrow$ $a_x = \dfrac{F_x - m_1 g}{m_1 + m_2}$

Όταν $F_x = m_1 g$ τότε $a_x = \emptyset$

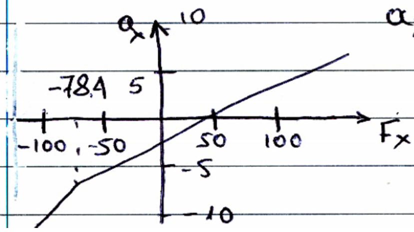
για $F_x \leq -m_2 g$ τότε $a_x \leq -g$ το m_1 κατεβαίνει με $a > g$

για $F_x > -m_2 g$ τότε $a_x > -g$ το m_1 κατεβαίνει με $a < g$

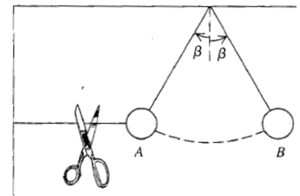
για $F_x > m_1 g$ τότε $a_x > 0$ το m_1 ανεβαίνει

Σε πίνακα:

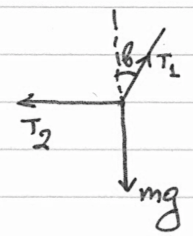
F_x:	-100	-78.4	-50.	0	50.	100
a_x:	-12.5	-9.8	-6.96	-1.96	3.08	8.04



12. Μία μπάλα κρατιέται σε ηρεμία στη θέση Α με τη βοήθεια δύο αβαρών νημάτων όπως στο σχήμα. Το οριζόντιο νήμα κόβεται και η μπάλα αρχίζει να κινείται σαν εκκρεμές. Το σημείο Β είναι το πιο απομακρυσμένο σημείο της κίνησης της μπάλας προς τα δεξιά. Να βρεθεί ο λόγος της τάσης του νήματος του συγκρατεί τη μπάλα στο σημείο Β ως προς την τιμή της στο σημείο Α πριν κοπεί το οριζόντιο νήμα.



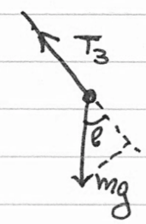
<u>Στη θέση A</u> :



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_1 \cos\beta = mg \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{T_1 = \frac{mg}{\cos\beta}} \quad (1)$$

<u>Στη θέση B</u> :



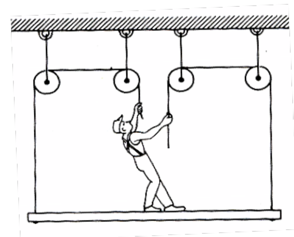
Στη θέση αυτή ΥΠΑΡΧΕΙ επιτάχυνση στη y-διεύθυνση, αλλά <u>δεν</u> <u>υπάρχει</u> επιτάχυνση στην ακτινική διεύθυνση (για τη στιγμή αυτή $V=0$)

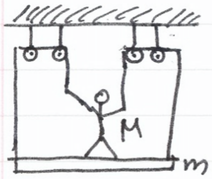
Επομένως αναλύουμε σε άξονες παράλληλο και κάθετο στο νήμα που δίνει τη διεύθυνση την ακτινική.

$$\Sigma F_r = 0 \Rightarrow T_3 - mg\cos\beta = 0 \Rightarrow \boxed{T_3 = mg\cos\beta} \quad (2)$$

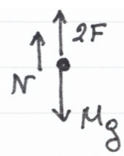
Από τις (1) και (2) $\Rightarrow \dfrac{T_3}{T_1} = \dfrac{\cancel{mg}\cos\beta}{\cancel{mg}/\cos\beta} \Rightarrow \boxed{\dfrac{T_3}{T_1} = \cos^2\beta}$

13. Ένας ελαιοχρωματιστής μάζας M στέκεται πάνω σε μια πλατφόρμα μάζας m και μπορεί να ανεβαίνει προς τα πάνω τραβώντας τις άκρες των δύο σχοινιών όπως στο σχήμα. Τραβά κάθε σχοινί με δύναμη F και επιταχύνεται προς τα πάνω με σταθερή επιτάχυνση α. Να βρεθεί η επιτάχυνση α.





Ο ελαιοχρωματιστής :



πλατφόρμα

Όσο ο άνθρωπος και η πλατφόρμα βρίσκονται σε επαφή, οι επιταχύνσεις τους θα πρέπει να είναι ίσες:

$$a_{\varepsilon\lambda} = a_{\pi\lambda} \Rightarrow \frac{F_{\varepsilon\lambda}}{M} = \frac{F_{\pi\lambda}}{m} \quad (1)$$

$$F_{\varepsilon\lambda} = 2F + N - Mg \quad (2)$$

$$F_{\pi\lambda} = 2F - N - mg \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{2F+N-Mg}{M} = \frac{2F-N-mg}{m}$$

Οπότε :
$$N\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right) = 2F\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{M}\right) + g - g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N\,\frac{(M+m)}{\cancel{Mm}} = 2F\,\frac{M-m}{\cancel{Mm}} \Rightarrow \boxed{N = 2F\,\frac{M-m}{M+m}}$$

Σημειώστε ότι επειδή οι κάθετες δυνάμεις είναι πάντοτε > 0 θέλουμε $M > m$. Διαφορετικά η πλατφόρμα θα επιταχύνει προς τα κάτω και ο άνθρωπος προς τα πάνω.

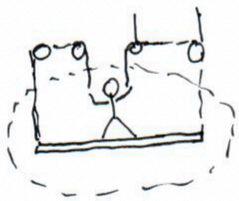
Οι επιταχύνσεις των σωμάτων θα είναι σύμφωνα με την (1)

$$a_{\varepsilon\lambda} = a_{\pi\lambda} = \frac{1}{M}\left[2F + 2F\,\frac{M-m}{M+m} - Mg\right] = 2F\,\frac{1}{M}\,\frac{2M}{M+m} - g \Rightarrow$$

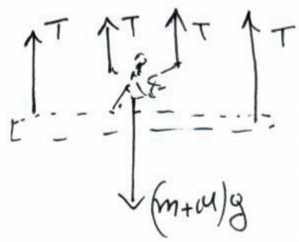
$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{4F}{M+m} - g}$$

Β' Τρόπος

Μπορούμε να θεωρήσουμε το σύστημα ελαιοχρωματιστή - πλατφόρμας :



Στο σύστημα ασκούνται σύμφωνα με το διάγραμμα ελεύθερου σώματος :



$T = F$ η δύναμη που ασκεί ο ελαιοχρωματιστής

$$4T - (m+M)g = (m+M)a \Rightarrow$$

$$4F - (m+M)g = (m+M)a \Rightarrow$$

$$\boxed{a = \frac{4F}{M+m} - g}$$ όπως και πριν.