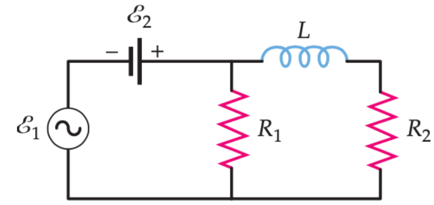
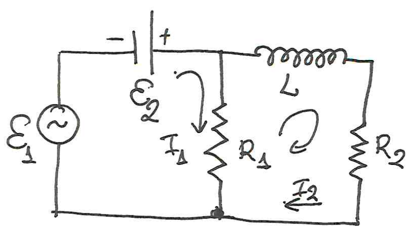
ΦΥΣ. 112

10

10ο (και τελευταίο) ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή: Παρασκευή 02.12.2022**

1. Μία ιδανική πηγή εναλλασσόμενου ρεύματος με ΗΕΔ $\mathcal{E}_1 = (20V)\cos(2\pi f t)$ και μια ιδανική μπαταρία με ΗΕΔ $\mathcal{E}_1 = 16V$ είναι συνδεδεμένες με ένα συνδυασμό 2 αντιστατών και ενός πηνίου όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Οι δύο αντιστάτες έχουν αντίσταση R_1=10Ω και R_2=8.0Ω ενώ το πηνίο έχει αυτεπαγωγή ίση με L=6.0mH. Βρείτε την μέση ισχύ που προσφέρεται σε κάθε αντιστάτη αν η οδηγούσα συχνότητα είναι (α) 100Hz, (β) 200Hz και (γ) 800Hz.





(α) Η ολική ισχύς που καταναλώνεται στις αντιστάσεις R_1 και R_2 είναι:

$$P_1 = P_{1,dc} + P_{1,ac} \quad (1)$$

$$P_2 = P_{2,dc} + P_{2,ac} \quad (2)$$

Η ισχύς της σταθερής πηγής είναι: $$P_{1,dc} = \frac{\mathcal{E}_2^2}{R_1} \quad (3)$$

$$P_{2,dc} = \frac{\mathcal{E}_2^2}{R_2} \quad (4)$$

Η μέση AC ισχύς θα είναι: $$P_{1,ac} = \frac{\mathcal{E}_{1,rms}^2}{R_1} = \frac{\mathcal{E}_{1,0}^2}{2R_1} \quad (5)$$

Από τον 2ο νόμο του Kirchhoff στο βρόχο που περιλαμβάνει την R_1, R_2 και L:

$$R_1 I_1 - Z_2 I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{R_1 I_1}{Z_2} = \frac{\cancel{R_1}}{Z_2}\frac{\mathcal{E}_{1,0}}{\cancel{R_1}} = \frac{\mathcal{E}_{1,0}}{Z_2} \Rightarrow I_2 = \frac{\mathcal{E}_{1,0}}{Z_2} \quad (6)$$

Η μέση AC ισχύς στην αντίσταση R_2: $$P_{2,ac} = \frac{I_{2,0}^2}{2} R_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{E}_{1,0}}{Z_2}\right)^2 R_2 \Rightarrow$$

$$P_{2,ac} = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{E}_1^2}{Z_2^2} R_2 \quad (7)$$

Αντικαθιστούμε την (3) κ (5) στην (1) και την (7) κ (4) στην (2)

$$P_1 = \frac{\mathcal{E}_2^2}{R_1} + \frac{\mathcal{E}_{1,0}^2}{2R_1} \Rightarrow P_1 = \frac{(16V)^2}{10\Omega} + \frac{(20V)^2}{2(10\Omega)} \Rightarrow \boxed{P_1 = 46W}$$

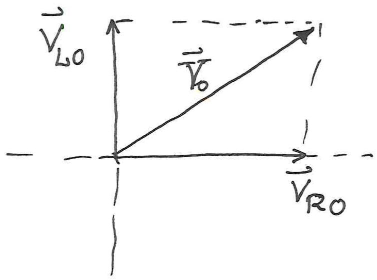
$$P_2 = \frac{\mathcal{E}_2^2}{R_2} + \frac{\mathcal{E}_1^2}{2Z_2^2}R_2 \Rightarrow P_2 = \frac{(16V)^2}{8.0\Omega} + \frac{(20V)^2 \cdot 8\Omega}{2\left[8.0^2 + \left(\frac{2\pi}{0.01} \cdot 6mH\right)^2\right]} \Rightarrow \boxed{P_2 = 52W}$$

(β) Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα για να βρούμε P_1 και P_2 για $f = 200Hz$: $P_1 = 46W$, $P_2 = 45W$

(γ) Για $f = 800Hz$ έχουμε $P_1 = 46W$ και $P_2 = 34W$.

2. Ένα ac κύκλωμα αποτελείται από έναν αντιστάτη και ένα ιδανικό πηνίο συνδεδεμένα σε σειρά. Η *rms* τάση στα άκρα της συνδεσμολογίας σε σειρά είναι ίση με $100V$ και η *rms* τάση στα άκρα του πηνίου είναι $80V$. Βρείτε την *rms* τάση στα άκρα του αντιστάτη.

Το διανυσματικό διάγραμμα φάσεων θα είναι:



$V_{rms} = V_0/\sqrt{2}$

$$V_0^2 = V_{R0}^2 + V_{L0}^2 \Rightarrow V_{R0}^2 = V_0^2 - V_{L0}^2 \Rightarrow$$

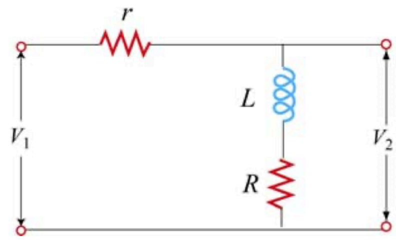
$$\Rightarrow V_R^{rms} = \sqrt{V_{rms}^2 - V_{L,rms}^2} = \sqrt{\mathcal{E}_{0,rms}^2 - V_{L,rms}^2} \Rightarrow$$

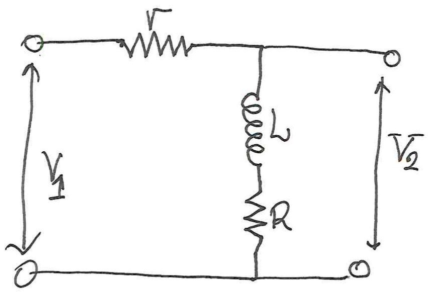
$$V_R = \sqrt{(100)^2 - (80)^2}\ V \Rightarrow \boxed{V_R = 60V}$$

3. Ένα *RL* φίλτρο υψηλών συχνοτήτων (το κύκλωμα κόβει όλα τα ρεύματα χαμηλών AC-ρευμάτων) αναπαρίσταται με αυτό που φαίνεται στο σχήμα. Η αντίσταση *R* είναι η εσωτερική αντίσταση του πηνίου.

(α) Βρείτε τον λόγο V_{20}/V_{10}, τον λόγο της μέγιστης εξωτερικής τάσης, V_{20} προς τη μέγιστη τάση εισόδου.

(β) Υποθέστε ότι $r = 15.0\Omega$, $R = 250\Omega$ και $L = 250mH$. Βρείτε τη συχνότητα για την οποία ο λόγος αυτός (V_{20}/V_{10}) ισούται με ½.





(α) Η εμπέδηση του κυκλώματος είναι:

$$Z_1 = \sqrt{(R+r)^2 + X_L^2} \quad \text{όπου } X_L = L\omega$$

Η εμπέδηση του κυκλώματος εξόδου είναι: $Z_2 = \sqrt{R^2 + X_L^2}$.

Επομένως το μέγιστο ρεύμα είναι:

$$I_0 = \frac{V_{10}}{Z_1} = \frac{V_0}{\sqrt{(R+r)^2 + X_L^2}}$$

Ανάλογα, το μέγιστο ρεύμα εξόδου θα είναι: $I_0 = \frac{V_{20}}{Z_2} \Rightarrow V_{20} = I_0\sqrt{R^2+X_L^2}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \frac{V_{20}}{V_{10}} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\sqrt{R^2+X_L^2}}{\sqrt{(R+r)^2+X_L^2}}$$

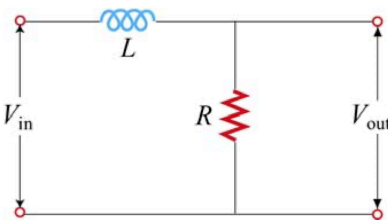
(β) Για $\frac{V_{20}}{V_{10}} = \frac{1}{2}$ θα έχουμε: $\frac{R^2+X_L^2}{(R+r)^2+X_L^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow X_L = \sqrt{\frac{(R+r)^2-4R^2}{3}}$

Αλλά $X_L = \omega L = 2\pi f L$

Αντικατάσταση δίνει: $f = \frac{1}{2\pi L}\sqrt{\frac{(R+r)^2-4R^2}{3}} \Rightarrow f = \frac{1}{(2\pi)(0.25H)}\sqrt{\frac{(10+15)^2\Omega^2-4(10^5)^2}{3}}$

$$\Rightarrow \underline{f = 5.51 Hz}$$

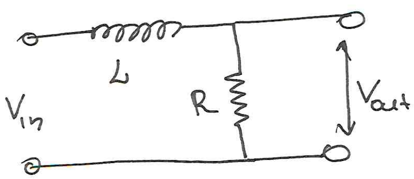
4. Το *RL* κύκλωμα το σχήματος παρουσιάζει ένα *RL* φίλτρο. Θεωρήστε ότι το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 400\ mH$ και η τάση εισόδου είναι $V_{in} = (20.0\text{V})\ \sin\omega t$, όπου ω=200rad/s.



(α) Ποια είναι η τιμή της αντίστασης *R* τέτοια ώστε η τάση εξόδου, ακολουθεί την τάση εισόδου κατά 30°;

(β) Προσδιορίστε το λόγο των πλατών της τάσης εξόδου και της τάσης εισόδου. Τί είδους φίλτρο είναι το συγκεκριμένο κύκλωμα, υψηλών ή χαμηλών συχνοτήτων;

(γ) Αν οι θέσεις του αντιστάτη και του πηνίου εναλλαχθούν, το κύκλωμα που προκύπτει θα είναι φίλτρο υψηλών συχνοτήτων ή φίλτρο χαμηλών συχνοτήτων.



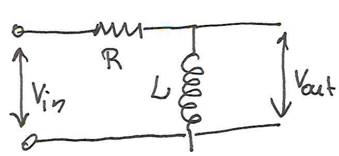
(α) Η τάση εξόδου είναι σε φάση με το ρεύμα γιατί μετράται στα άκρα της αντίστασης. Επομένως η διαφορά φάσης μεταξύ της τάσης εισόδου και της τάσης εξόδου είναι ίδια με αυτή τη διαφορά φάσης και ικανοποιεί:

$$\tan\phi = \frac{V_L}{V_R} = \frac{\cancel{I}X_L}{\cancel{I}R} = \frac{\omega L}{R} \Rightarrow R = \frac{\omega L}{\tan\phi} = \frac{(200r/s)(0.4H)}{\tan 30^\circ} \Rightarrow R = 139\Omega$$

(β) Ο λόγος δίνεται από $\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{V_R}{V_{in}} = \frac{R}{\sqrt{R^2+X_L^2}} = \cos\phi = \cos 30^\circ = 0.866$

Το κύκλωμα αποτελεί ένα φίλτρο υψηλών συχνοτήτων, εφόσον ο λόγος $\frac{V_{out}}{V_{in}}$ ελαττώνεται καθώς αυξάνει η συχνότητα ω.

(γ) Στην περίπτωση αυτή το κύκλωμα είναι όπως το παρακάτω σχήμα:



Ο λόγος της τάσης εξόδου προς την τάση εισόδου είναι:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{X_L}{\sqrt{R^2+X_L^2}} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} = \left[1+\left(\frac{R}{\omega L}\right)^2\right]^{-1/2}$$

Στην περίπτωση αυτή για $\omega \to 0$ $\frac{V_{out}}{V_{in}} \to 0$ οπότε το κύκλωμα είναι ένα φίλτρο χαμηλών συχνοτήτων.

καθώς το $\omega \gg \frac{R}{L}$, τότε $\frac{V_{out}}{V_{in}} \to 1$

5. Ένα κύκλωμα αποτελείται από μια ιδανική γεννήτρια εναλλασσόμενου ρεύματος (ac), έναν ιδανικό πυκνωτή και ένα ιδανικό πηνίο, όλα συνδεδεμένα σε σειρά. Το φορτίο στον πυκνωτή είναι $Q = (15\mu C)\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$, όπου $\omega = 1250 rad/s$. (α) Βρείτε το ρεύμα στο κύκλωμα συναρτήσει του χρόνου *t*. (β) Βρείτε την χωρητικότητα αν η αυτεπαγωγή του πηνίου είναι $L = 28mH$. (γ) Γράψτε τις εξισώσεις που δίνουν την ηλεκτρική ενέργεια U_e, την μαγνητική ενέργεια U_μ, και την ολική ενέργεια συναρτήσει του χρόνου.

(α) Από την εξίσωση του φορτίου Q, παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο, θα έχουμε:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(15\mu C)\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)\right] = -(15\mu C)(1250 s^{-1})\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(t) = -(18.75mA)\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right) = -(19mA)\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)$$ όπου $\omega = 1250 \frac{rad}{s}$

(β) Ξέρουμε ότι η ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος είναι: $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\omega^2 L} \Rightarrow C = \frac{1}{(1250 s^{-1})^2(28mH)} \Rightarrow C = 22.86\mu F \Rightarrow \boxed{C \simeq 23\mu F}$$

(γ) Η μαγνητική ενέργεια $U_m(t)$ είναι:

$$U_m(t) = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}(28mH)(18.75mA)^2\sin^2\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \boxed{U_m(t) = (4.9\mu J)\sin^2\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)}$$

Για να βρούμε την ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στον πυκνωτή έχουμε:

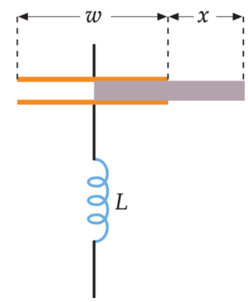
$$U_C(t) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{(15\mu F)^2}{22.86\mu F}\cos^2\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right) = (4.92\mu J)\cos^2\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

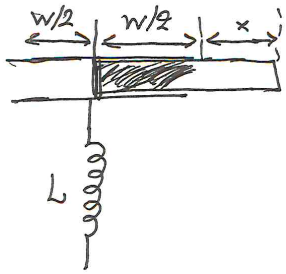
$$\Rightarrow \boxed{U_C(t) = (4.9\mu J)\cos^2(\omega t+\pi/4)}$$

Η ολική ενέργεια είναι το άθροισμα της μαγνητικής και ηλεκτρικής ενέργειας:

$$U_{ol}(t) = U_m(t) + U_C(t) = (4.92\mu J)\sin^2\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right) + (4.92\mu J)\cos^2\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right) = \underline{4.9\mu J.}$$

6. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας πυκνωτής σε σειρά με έναν πυκνωτή παράλληλων πλακών. Ο πυκνωτής έχει πλάτος w = 20cm και η απόσταση μεταξύ των οπλισμών του είναι 2.0*mm*. Ένα διηλεκτρικό υλικό με διηλεκτρική σταθερά ίση με 4.8 μπορεί να εισχωρήσει στο εσωτερικό και εξωτερικό του διάκενου μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή. Το πηνίο έχει αυτεπαγωγή $L = 2.0mH$. Όταν το μισό του διηλεκτρικού έχει εισαχθεί ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή ($x = w/2$), η συχνότητα συντονισμού είναι 90*MHz*. (α) Βρείτε την χωρητικότητα του πυκνωτή χωρίς το διηλεκτρικό (β) Βρείτε η συχνότητα συντονισμού συναρτήσει του x για τιμές στο διάστημα $0 \le x \le w$.





(α) Μπορούμε να προσεγγίσουμε τον πυκνωτή σαν τον ισοδύναμο πυκνωτή δύο πυκνωτών συνδεδεμένων παράλληλα.

Έστω C_1 η χωρητικότητα του πυκνωτή που είναι γεμάτος με διηλεκτρικό και C_2 η χωρητικότητα του πυκνωτή με αέρα.

Θα έχουμε: $C(x) = C_1 + C_2 = \dfrac{k\varepsilon_0 A_1}{d} + \dfrac{\varepsilon_0 A_2}{d}$ (1)

Γράφουμε την A_2 συναρτήσει της ολικής επιφάνειας A ενός πυκνωτή με μήκος w και ενός με μήκος οπλισμού x. Επομένως θα έχουμε: $\dfrac{A_2}{A} = \dfrac{x}{w} \Rightarrow A_2 = A\dfrac{x}{w}$ (2)

Το εμβαδό A_1 μπορεί να γραφεί συναρτήσει του A_1 και A ως: $A_1 = A - A_2 = A\left(1 - \dfrac{x}{w}\right)$ (3)

Αντικαθιστούμε την (2) και (3) στην (1) οπότε θα έχουμε:

$$C(x) = \frac{k\varepsilon_0 A}{d}\left(1 - \frac{x}{w}\right) + \frac{\varepsilon_0 A}{d}\frac{x}{w} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left[k\left(1 - \frac{x}{w}\right) + \frac{x}{w}\right] = kC_0\left[1 - \frac{k-1}{kw}x\right]$$

με $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$

Επομένως η χωρητικότητα όταν $x = \frac{w}{2}$ θα είναι:

$$C\left(\frac{w}{2}\right) = kC_0\left[1 - \frac{k-1}{k\cancel{w}}\frac{\cancel{w}}{2}\right] \Rightarrow C\left(\frac{w}{2}\right) = kC_0\left[1 - \frac{k-1}{2k}\right] \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{w}{2}\right) = C_0\frac{k+1}{2}}$$

Η συχνότητα συντονισμού του κυκλώματος συναρτήσει του L και $C(x)$ είναι:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC(x)}} \Rightarrow f\left(x = \frac{w}{2}\right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0\frac{k+1}{2}}} \Rightarrow \boxed{f\left(x = \frac{w}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{(k+1)LC_0}}} \ \text{(A)}$$

Λύνουμε ως προς C_0 και θα πάρουμε: $C_0 = \dfrac{1}{2\pi^2 f^2\left(x = \frac{w}{2}\right)L(k+1)}$

Αντικαθιστούμε αριθμητικά δεδομένα: $C_0 = \dfrac{1}{2\pi^2(90MHz)^2\left(\frac{20cm}{2}\right)(2.0mH)(4.8+1)} \Rightarrow \boxed{C_0 = 5.4fF}$

(β) Αντικαθιστούμε για $C(x)$ στην εξίσωση (A) θα δώσει:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{L k C_0 \left[1 - \frac{k-1}{kW}x\right]}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(2.0\,mH)(4.8)(5.39\cdot 10^{-16}F)\left[1 - \frac{4.8-1}{4.8(0.2m)}x\right]}} \Rightarrow$$

$$\boxed{f(x) = \frac{70\,MHz}{\sqrt{1-(4.0\,m^{-1})x}}}$$

7. Ένας ηχητικός ταλαντωτής (πηγή ac) έχει εσωτερική αντίσταση 200Ω και rms τάση εξόδου ίση με 12.0V σε ανοικτό κύκλωμα. Ο ταλαντωτής σχεδιάζεται ώστε να οδηγήσει σε ταλάντωση το πηνίο ενός μεγάφωνου το οποίο έχει αντίσταση 8.0Ω. (α) Ποιος θα πρέπει να είναι ο λόγος του αριθμού των σπειρών του πρωτεύοντος ως προς τον αριθμό των σπειρών του δευτερεύοντος πηνίου ενός μετασχηματιστή ώστε η ισχύς που προσφέρεται στο μεγάφωνο να είναι μέγιστη. (β) Υποθέστε ότι ένα δεύτερο ιδανικό μεγάφωνο συνδέεται παράλληλα με το πρώτο μεγάφωνο. Πόση μέση ισχύς παρέχεται συνολικά στο σύστημα των δύο μεγάφωνων στην περίπτωση αυτή;

(α) Η αντίσταση που εμφανίζει το μεγάφωνο στο πρωτεύον κύκλωμα είναι:

$$R_\phi = \frac{V_{1,rms}}{I_{1,rms}}$$

Αλλά ξέρουμε ότι $V_{1,rms} = V_{2,rms}\frac{N_1}{N_2}$

$I_{1,rms} = I_{2,rms}\frac{N_2}{N_1}$

$$\Rightarrow R_\phi = \frac{V_{2,rms}\frac{N_1}{N_2}}{I_{2,rms}\frac{N_2}{N_1}} = \frac{V_{2,rms}}{I_{2,rms}}\frac{N_1^2}{N_2^2}$$

Λύνουμε για N_1/N_2 οπότε έχουμε: $\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{I_{2,rms}R_\phi}{V_{2,rms}}} = \sqrt{\frac{R_\phi}{R_2}}$ (1)

Για $R_\phi = R_{πην}$ θα δώσει: $\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{2000Ω}{8.0Ω}} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = 15.811 \Rightarrow \boxed{\frac{N_1}{N_2} = 15.8}$

(β) Η ισχύς που προσφέρεται στα δύο μεγάφωνα που είναι συνδεδεμένα παράλληλα,

$$P_{μεγ} = I_{1,rms}^2 \cdot R_\phi \qquad (2)$$

$$\frac{1}{R_{μεγ}} = \frac{1}{8.0Ω} + \frac{1}{8.0Ω} \Rightarrow R_{μεγ} = 4.0Ω$$

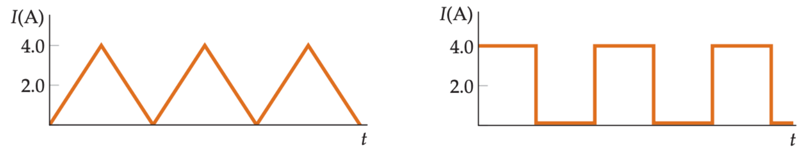
Αντικατάσταση στην εξ. (1) και λύση ως προς $R_\phi = R_2\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = 4\cdot(15.8)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow R_\phi = 1000Ω$$

Μπορούμε να βρούμε το ρεύμα της πηγής: $I_{1,rms} = \frac{V_{rms}}{R_{tot}} = \frac{12.0V}{(1000Ω + 2000Ω)} \Rightarrow I_{1,rms} = 4.mA$

Αντικαθιστούμε στην (2) θα δώσει: $P_{μεγ} = 16mA^2(1000Ω) \Rightarrow \boxed{P_{μεγ} = 16mW}$

8. Να βρεθούν η μέση και η rms τιμή του ρεύματος για τις δύο κυματομορφές που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Όπως έχουμε αναφέρει, η μέση τιμή μιας οποιασδήποτε ποσότητας ως προς ένα χρονικό διάστημα ΔT, είναι το ολοκλήρωμα της ποσότητας ως προς το χρονικό διάστημα διαιρούμενο με το χρονικό διάστημα ΔT.

Επομένως θα έχουμε: $I_{av} = \frac{1}{\Delta T}\int_0^{\Delta T} I\,dt$ και $I_{rms} = \sqrt{(I^2)_{av}}$

(α) Για την πρώτη κυματομορφή, το ρεύμα κατά τη διάρκεια του πρώτου μισού κύκλου του χρονικού διαστήματος ΔT θα είναι:

$$I_a = \frac{4A}{\Delta T}t \Rightarrow I_{av,a} = \frac{1}{\Delta T}\int_0^{\Delta T}\frac{4.0A}{\Delta T}t\,dt = \frac{4.A}{(\Delta T)^2}\int_0^{\Delta T} t\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{av,a} = \frac{\cancel{4A}^{2}}{\cancel{(\Delta T)^2}}\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\Delta T^2} \Rightarrow \boxed{I_{av,a} = 2A}$$

Το τετράγωνο του ρεύματος θα είναι: $I_a^2 = \frac{(4.A)^2}{\Delta T^2}t^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (I_a^2)_{av} = \frac{1}{\Delta T}\int_0^{\Delta T}\frac{(4A)^2}{\Delta T^2}t^2\,dt = \frac{(4.A)^2}{\cancel{\Delta T^3}}\frac{1}{3}\cancel{\Delta T^3} \Rightarrow \boxed{(I_a^2)_{av} = \frac{16A^2}{3}} \Rightarrow$$

$$I_{rms,a} = \sqrt{\frac{16}{3}A^2} = 2.3A$$

(β) Το ρεύμα κατά τη διάρκεια του δεύτερου κύκλου είναι 0, επομένως εφαρμόζουμε το ρεύμα για το πρώτο μισό κύκλο του χρονικού διαστήματος $\Delta T/2$, $I_b = 4.0A$

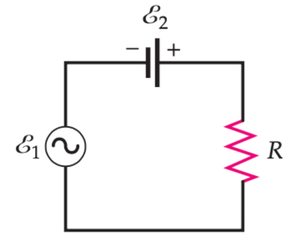
Έχουμε: $I_{av,b} = \frac{4.0A}{\Delta T}\int_0^{\Delta T/2} dt = \frac{4.0A}{\cancel{\Delta T}}\frac{\cancel{\Delta T}}{2} \Rightarrow \boxed{I_{av,b} = 2A}$

Το τετράγωνο του ρεύματος μετά το μισό κύκλο: $I_b^2 = (4.0A)^2$

$$(I_b)^2_{av} = \frac{(4.0A)^2}{\Delta T}\int_0^{\Delta T/2} dt = \frac{4.0A^2}{\Delta T}(t)\Big|_0^{\Delta t/2} \Rightarrow (I_b^2)_{av} = 8.0A^2 \Rightarrow I_{rms,b} = \sqrt{8.0A^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{I_{rms,b} = 2.8A}$$

9. Στο κύκλωμα που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η ac πηγή έχει τάση $\mathcal{E}_1 = (20V)\cos(2\pi f t)$, όπου $f = 180Hz$. Η $\mathcal{E}_2 = 18V$ και η αντίσταση του αντιστάτη είναι $R = 36\Omega$. Βρείτε τη μέγιστη, την ελάχιστη, και την rms τιμή του ρεύματος στον αντιστάτη.



Από τον 2° νόμο του kirchhoff για το βρόχο έχουμε:

$$\mathcal{E}_{1,0}\cos\omega t + \mathcal{E}_2 - IR = 0 \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}_{1,0}}{R}\cos\omega t + \frac{\mathcal{E}_2}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = A_1\cos\omega t + A_2 \quad \text{όπου} \quad A_1 = \frac{\mathcal{E}_{1,0}}{R} \quad \text{και} \quad A_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R}$$

Αντικατάσταση αριθμητικών δεδομένων δίνει:

$$I = \left(\frac{20V}{36\Omega}\right)\cos\left(2\pi(180\,s^{-1})t\right) + \frac{18V}{36\Omega} = (0.556A)\cos\left[(1131\,s^{-1})t\right] + 0.50A$$

Το ρεύμα μεγιστοποιείται όταν $\cos\left[(1131\,s^{-1})t\right] = 1 \Rightarrow I_{max} = 0.556A + 0.50A \Rightarrow$

$\Rightarrow I_{max} = 1.06A$

Αντίστοιχα, ελαχιστοποιείται όταν $\cos\left[(1131\,s^{-1})t\right] = -1$ οπότε $I_{min} = 0.50A - 0.556A$

$\Rightarrow I_{min} = -0.06A$

Από τη στιγμή που $\langle\cos\omega t\rangle = 0$ το $I_{AV} = 0.50A$

Αντίστοιχα το $\langle I^2\rangle = \left[(A_1\cos\omega t + A_2)^2\right]_{av} = \left[A_1^2\cos^2\omega t + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\omega t\right]_{av} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle I^2\rangle = \left[A_1^2\cos^2\omega t\right]_{av} + \left[A_2^2\right]_{av} + \left[2A_1A_2\cos\omega t\right]_{av} = A_1^2\left[\cos^2\omega t\right]_{av} + A_2^2 + 2A_1A_2\underbrace{\left[\cos\omega t\right]}_{0}$$

$$\Rightarrow \langle I^2\rangle = A_1^2\underbrace{\left[\cos^2\omega t\right]_{av}}_{1/2} + A_2^2 \Rightarrow \langle I^2\rangle = \frac{1}{2}A_1^2 + A_2^2 \Rightarrow I_{rms} = \sqrt{\langle I^2\rangle} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2}A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{E}_1}{R}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}_2}{R}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{20V}{36\Omega}\right)^2 + \left(\frac{18V}{36\Omega}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{rms} = 0.64A}$$

10. Δύο πυκνωτές συνδέονται παράλληλα στους πόλους μιας γεννήτριας ημιτονοειδούς τάσης, ΗΕΔ ίση με 11-*V* rms και συχνότητας 67*kHz*. Η γεννήτρια παρέχει συνολικό *rms* ρεύμα ίσο με 29*mA*. Όταν οι δύο πυκνωτές συνδέονται μεταξύ τους σε σειρά, τότε η rms τιμή του ρεύματος μειώνεται σε 5.5*mA*. Βρείτε τις δύο χωρητικότητες των δύο πυκνωτών.

Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι $I_{rms} = \frac{V_{rms}}{X_c} = \omega C V_{rms} = 2\pi f C V_{rms}$ (1)

Για παράλληλη συνδεσμολογία: $C_{ισοδ} = C_1 + C_2$

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε: $I_{rms} = \omega V_{rms}(C_1 + C_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow C_1 + C_2 = \frac{I^{(1)}_{rms}}{\omega V_{rms}} = \frac{56\cdot 10^{-3} A}{2\pi(7.5\cdot 10^{3} Hz)24V} \Rightarrow \boxed{C_1 + C_2 = 49.51 nF} \ (A)$$

Για συνδεσμολογία σε σειρά: $C_{ισοδ}^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1} \Rightarrow C_{ισοδ} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

Αντικατάσταση στην (1) δίνει: $I^{(2)}_{rms} = \omega V_{rms}\left(\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{I^{(2)}_{rms}}{\omega V_{rms}} = \frac{2.8\cdot 10^{-3} A}{2\pi(7.5\cdot 10^{3} Hz)24V} \Rightarrow \boxed{\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 2.475 nF} \ (B)$$

Πολλαπλασιάζουμε (A)·(B) οπότε:

$$\left.\begin{aligned} C_1\cdot C_2 &= 122.57\ nF^2 \\ C_1 + C_2 &= 49.51\ nF \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1^2 + C_1 C_2 = 49.51 C_1$$

$\Rightarrow C_1^2 - 49.51 C_1 + 122.57 = 0$

Οπότε $C_1 = \frac{49.51 + \sqrt{(49.51)^2 - 4\cdot 122.57}}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{49.51 + \sqrt{1960.96}}{2} \Rightarrow \underline{C_1 = 46.9 nF}$

Επομένως από την $C_1 + C_2 = 49.51 \Rightarrow C_2 = 49.51 - 46.9 \Rightarrow \underline{C_2 = 2.61 nF}$