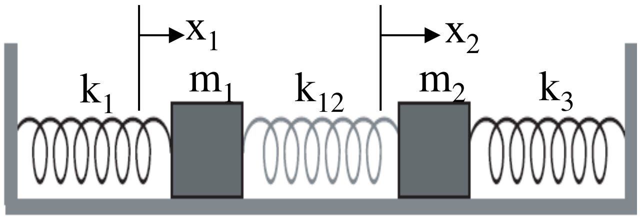
Εφαρμογή της γενικής λύσης

Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές συχνότητες του συστήματος



Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$U = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k_{12}\left(x_2 - x_1\right)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \Rightarrow$$

$$U = \frac{1}{2}\left(k + k_{12}\right)x_1^2 + \frac{1}{2}\left(k + k_{12}\right)x_2^2 - k_{12}x_1x_2$$

Υπολογίζουμε τα V_{jk}:

$$V_{11} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}\right|_0 = k + k_{12} \qquad V_{22} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}\right|_0 = k + k_{12} \qquad V_{12} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_0 = -k_{12} = V_{21}$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι: $T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$

Αλλά είδαμε ότι: $T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} M_{jk}\dot{x}_j\dot{x}_k$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} m_{11} = m_{22} = M \\ m_{12} = m_{21} = 0 \end{array}$$

Από την χαρακτηριστική εξίσωση παίρνουμε:

$$\begin{vmatrix} k + k_{12} - M\omega^2 & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k + k_{12} \pm k_{12}}{M}} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k + 2k_{12}}{M}} \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{k}{M}} \end{cases}$$

Κανονικές συντεταγμένες

- Η γενική λύση για την κίνηση της συντεταγμένης q_j είναι ένας γραμμικός συνδυασμός διαφόρων όρων καθένας από τους οποίους εξαρτάται από μια ξεχωριστή συχνότητα.
- Τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{a}_r$ είναι επίσης ορθοκανονικά μεταξύ τους:

$$\sum_{j,k} M_{jk} a_{jr} a_{ks} = \delta_{rs} = \begin{cases} 0 & r \neq s \\ 1 & r = s \end{cases}$$

- Για να αποφύγουμε το περιορισμό από την αυθαίρετη κανονικοποίηση χρησιμοποιούμε κάποιο συντελεστή κλίμακας που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες και μπορούμε να γράψουμε την κίνηση της $q_j(t)$:

$$q_j(t) = \sum_r \alpha_r a_{jr} e^{i(\omega_r t - \delta_r)} = \sum_r \beta_r a_{jr} e^{i\omega_r t}$$ όπου β_r είναι ο συντελεστής κλίμακας

- Ορίζουμε τώρα την ποσότητα η_r: $\boxed{\eta_r = \beta_r e^{i\omega_r t}}$

  έτσι ώστε: $\boxed{q_j(t) = \sum_r a_{jr} \eta_r(t)}$ κανονικές συντεταγμένες

  Τα η_r ικανοποιούν εξισώσεις της μορφής: $\ddot{\eta}_r + \omega_r \eta_r = 0$

- Υπάρχουν n ανεξάρτητες τέτοιες εξισώσεις, και οι εξισώσεις κίνησης εκφρασμένες σε κανονικές συντεταγμένες γίνονται διαχωρίσιμες

Μεθοδολογία

- Επιλογή γενικευμένων συντεταγμένων και εύρεση των T και U σύμφωνα με το συνηθισμένο τρόπο των προβλημάτων με Lagrangian.

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j,k} V_{jk} q_j q_k \qquad V_{jk} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \, \partial q_k}\right|_0$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \qquad M_{jk} = m_{jk}\left(q_{l0}\right)$$

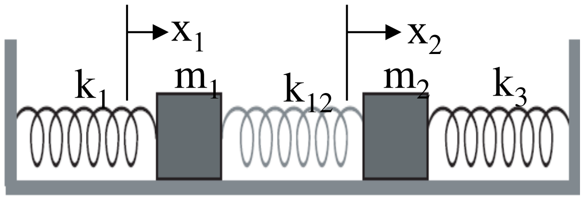
- Αντικατάσταση των V_{jk} και M_{jk} σαν πίνακες $n \times n$ και χρησιμοποίηση της εξίσωσης $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{V}\mathbf{q}$ για εύρεση των n τιμών των ιδιοσυχνοτήτων ω_r
- Για κάθε τιμή ιδιοσυχνότητας ω_r, προσδιορισμός των λόγων $\alpha_{1r}:\alpha_{2r}:\alpha_{3r}:\ldots:\alpha_{nr}$ αντικαθιστώντας στην εξίσωση:

$$\sum_j \left(V_{ji} - \omega_r^2 M_{ji}\right) a_{jr} = 0$$

- Αν χρειαστεί, προσδιορίζονται οι σταθερές κλίμακας β_i από αρχικές συνθ.
- Προσδιορισμός των κανονικών συντεταγμένων η_i με κατάλληλους γραμ. συνδυασμούς των q_j συντεταγμένων που φαίνονται να ταλαντώνουν στην συγκεκριμένη ιδιοσυχνότητα ω_i. Η κίνηση για τη συγκεκριμένη κανονική συντεταγμένη ονομάζεται normal mode. Η γενική κίνηση του συστήματος είναι υπέρθεση όλων των normal modes.

Παράδειγμα

Εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων, ιδιοδιανυσμάτων και κανονικών συντεταγμένων του συστήματος που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Υποθέτουμε ότι $k_{12} = k$



Στο παράδειγμα της σελ. 14 στο 1ο βήμα βρήκαμε τα T και U και τους πίνακες $\mathbf{M}$ και $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} k+k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k+k_{12} \end{pmatrix} \text{ και } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \text{ όπου } m_{11} = m_{22} = m$$

Ιδιοσυχνότητες:

Χρησιμοποιώντας την χαρακτηριστική εξίσωση βρίσκουμε τις ιδιοσυχνότητες:

$$\begin{vmatrix} k+k_{12}-m\omega^2 & -k_{12} \\ -k_{12} & k+k_{12}-m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k+k_{12} \pm k_{12}}{m}} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{k+2k_{12}}{m}} = \sqrt{\dfrac{3k}{m}} \end{cases}$$

Ιδιοδιανύσματα

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα χρησιμοποιούμε την εξίσωση:

$$\sum_j \left(V_{ji} - \omega_r^2 M_{ji}\right) a_{jr} = 0$$

όπου a_{jr} οι συνιστώσες j του ιδιοδιανύσματος $\boldsymbol{a_r}$ το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοσυχνότητα ω_r

$$\begin{pmatrix} V_{11} - \omega_r^2 M_{11} & V_{12} - \omega_r^2 M_{12} \\ V_{12} - \omega_r^2 M_{12} & V_{22} - \omega_r^2 M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \end{pmatrix} = \begin{matrix} \left(V_{11} - \omega_r^2 M_{11}\right) a_{1r} + \left(V_{12} - \omega_r^2 M_{12}\right) a_{2r} = 0 \\ \left(V_{12} - \omega_r^2 M_{12}\right) a_{1r} + \left(V_{22} - \omega_r^2 M_{22}\right) a_{2r} = 0 \end{matrix}$$

2 εξισώσεις για κάθε τιμή του r, αλλά μπορούμε να βρούμε μόνο το α_{1r}/α_{2r} επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο τη μια εξίσωση.

Για r=1, δηλαδή την 1η ιδιοσυχνότητα: $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ αντικαθιστώντας τα V_{ij}, M_{ij} έχουμε (χρησιμοποιούμε $k_{12} = k$) :

$$\Big(\underbrace{2k}_{k+k_{12}=V_{11}} - \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_1} \underbrace{m}_{M_{11}}\Big) a_{11} + \underbrace{k}_{V_{12}} a_{21} = 0 \Rightarrow ka_{11} - ka_{21} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{a_{11}}{a_{21}} = 1}$$

άρα: $\boxed{\mathbf{a}_1 = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ (1)

Ανάλογα για τη 2η ιδιοσυχνότητα $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k + 2k_{12}}{m}} \approx \sqrt{\dfrac{3k}{m}}$

$$\left(2k - \frac{3k}{m} m\right) a_{12} + ka_{22} = 0 \Rightarrow -ka_{12} - ka_{22} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{a_{12}}{a_{22}} = -1}$$

άρα: $\boxed{\mathbf{a}_2 = a_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ (2)

Ιδιοδιανύσματα – Ορθοκανονικότητα

Αφού τα $\mathbf{a}_1$ και $\mathbf{a}_2$ είναι ορθοκανονικά θα έχουμε:

$$\sum_{j,k} M_{jk} a_{jr} a_{ks} = \delta_{rs} = \begin{cases} M_{11}a_{1r}a_{1s} + M_{12}a_{1r}a_{2s} + M_{12}a_{2r}a_{1s} + M_{22}a_{2r}a_{2s} = 0 & r \neq s \\ M_{11}a_{1r}a_{1r} + M_{12}a_{1r}a_{2r} + M_{12}a_{2r}a_{1r} + M_{22}a_{2r}a_{2r} = 1 & r = s \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας α_{jr} στην εξίσωση και αφού M_{12}=0 και M_{11} = M_{22} = m:

$$M_{11}a_{1r}a_{1r} + M_{12}a_{1r}a_{2r} + M_{12}a_{2r}a_{1r} + M_{22}a_{2r}a_{2r} = 1 \Rightarrow r = 1, \quad ma_{11}^2 + ma_{21}^2 = 1$$

Αλλά α_{11}=α_{21} οπότε: $2ma_{11}^2 = 1 \Rightarrow a_{11} = \dfrac{1}{\sqrt{2m}} \Rightarrow \mathbf{a}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Κατά τον ίδιο τρόπο βάζοντας για $r = 2$ έχουμε: $a_{22} = \dfrac{1}{\sqrt{2m}} \Rightarrow \mathbf{a}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Κανονικές συντεταγμένες

Η γενική λύση θα είναι της μορφής:

$$q_j(t) = \sum_r a_{jr}\eta_r(t) \quad \text{όπου} \quad \eta_r(t) \equiv \beta_r e^{i\omega_r t}$$

Επομένως θα έχουμε:

μάζα 1: $x_1 = a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 = a_{11}\eta_1 - a_{22}\eta_2$

μάζα 2: $x_2 = a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 = a_{11}\eta_1 + a_{22}\eta_2$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας τα x_1 και x_2 έχουμε:

$$\eta_1 = \frac{1}{2a_{11}}(x_1 + x_2) \qquad \eta_2 = \frac{1}{2a_{22}}(x_1 - x_2)$$

Όταν το σύστημα κινείται κάτω από ένα από τα 2 normal modes έχουμε:

$$\eta_1 = \frac{1}{2a_{11}}(x_1 + x_2) \text{ και } \eta_2 = 0 \quad \text{ή} \quad \eta_2 = \frac{1}{2a_{22}}(x_1 - x_2) \text{ και } \eta_1 = 0$$

Όταν $\eta_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

Άρα για mode 1 x_1 και x_2 σε φάση

Όταν $\eta_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$

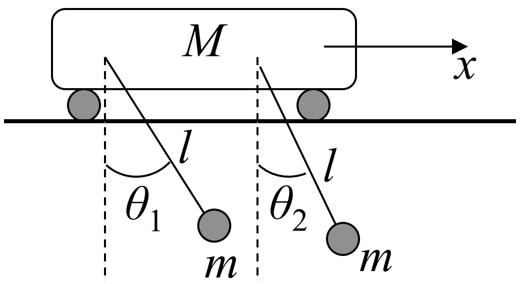
Άρα για mode 2 x_1 και x_2 έχουν αντίθετη φάση

Σημειωτέον ότι στο πρόβλημα δεν μας δίνονται αρχικές συνθήκες και επομένως δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε το β_r ούτε την πλήρη λύση

Παράδειγμα – βαγονάκι και δυο εκκρεμή

Δυο όμοια εκκρεμή, το καθένα αποτελούμενο από μια μάζα m εξαρτώμενη από ράβδο αμελητέας μάζας και μήκους l, κρέμονται από βαγονάκι μάζας M, που κινείται σε οριζόντια λεία σιδηροτροχιά.

- (**α**) Να γραφεί η Lagrangian



Η ταχύτητα της μάζας των εκκρεμών είναι:

$$x_i = x + l\sin\theta_i \;\Rightarrow\; \upsilon_i^x = \dot{x} + l\dot{\theta}_i\cos\theta_i$$

$$y_i = -l\cos\theta_i \;\Rightarrow\; \upsilon_i^y = l\dot{\theta}_i\sin\theta_i$$

όπου i=1,2

Η T θα είναι: $T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[\upsilon_{1x}^2 + \upsilon_{1y}^2 + \upsilon_{2x}^2 + \upsilon_{2y}^2\right]$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\Big[\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}_1^2\cos^2\theta_1 + 2l\dot{x}\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l^2\dot{\theta}_1^2\sin^2\theta_1 + + \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}_2^2\cos^2\theta_2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + l^2\dot{\theta}_2^2\sin^2\theta_2\Big] \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[2\dot{x}^2 + l^2\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) + 2l\dot{x}\left(\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2\cos\theta_2\right)\right]$$

Για μικρές γωνίες θ_1 και θ_2: $\cos\theta_i \simeq 1 - \frac{\theta_i^2}{2} \Rightarrow \cos\theta_i \simeq 1$

Επειδή T περιέχει όρους της μορφής $\dot{x}\dot{\theta}_i$ κρατώντας και τον 2ο όρο του αναπτύγματος θα είχαμε όρους $\dot{x}\dot{\theta}_i\theta_i^2$ που είναι πολύ μικροί.

Επομένως: $$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[2\dot{x}^2 + l^2\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) + 2l\dot{x}\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\right] \qquad (1)$$

Παράδειγμα – βαγονάκι και δυο εκκρεμή

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος προέρχεται από την δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας για τα 2 εκκρεμή και επομένως γράφουμε:

$$U = mgl(1-\cos\theta_1)+mgl(1-\cos\theta_2) \Rightarrow U = 2mgl - mgl(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

Για μικρές γωνίες θ_1 και θ_2: $\cos\theta_i \simeq 1 - \frac{\theta_i^2}{2}$

$$\Rightarrow U = 2mgl - mgl\left(2 - \frac{\theta_1^2+\theta_2^2}{2}\right) \Rightarrow U = mgl\left(\theta_1^2+\theta_2^2\right)/2 \qquad (2)$$

Επομένως από (1) και (2) η Lagrangian του συστήματος είναι:

$$L = \frac{1}{2}(M+2m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[l^2\left(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2\right)+2l\dot{x}\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\right] - \frac{mgl}{2}\left(\theta_1^2+\theta_2^2\right)$$

- (**β**) Ποιες οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης του συστήματος
  - Οι ιδιοσυχνότητες θα βρεθούν από τις λύσεις της: $\det\left\{[K]-[M]\omega^2\right\}=0$
  - Αλλά: $[K] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial\theta_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial\theta_1\partial\theta_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial\theta_1\partial x} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial\theta_2\partial\theta_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial\theta_2^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial\theta_2\partial x} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial\theta_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial\theta_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \end{bmatrix} \Rightarrow [K] = \begin{bmatrix} mgl & 0 & 0 \\ 0 & mgl & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Παράδειγμα – βαγονάκι και δυο εκκρεμή

- Επίσης: $[M]=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\theta}_1^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\theta}_1\partial\dot{\theta}_2} & \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\theta}_1\partial\dot{x}} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\theta}_2\partial\dot{\theta}_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\theta}_2^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\theta}_2\partial\dot{x}} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{x}\partial\dot{\theta}_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{x}\partial\dot{\theta}_2} & \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{x}^2} \end{bmatrix} \Rightarrow [M]=\begin{bmatrix} ml^2 & 0 & ml \\ 0 & ml^2 & ml \\ ml^2 & ml & M+2m \end{bmatrix}$
- Επομένως η χαρακτηριστική εξίσωση θα γραφεί:

$$\Rightarrow \det\begin{bmatrix} mgl-ml^2\omega^2 & 0 & -ml\omega^2 \\ 0 & mgl-ml^2\omega^2 & -ml\omega^2 \\ ml\omega^2 & -ml\omega^2 & -(M+2m)\omega^2 \end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \omega^2(M+2m)\left(\omega^2ml^2-mgl\right)^2-2\left(ml\omega^2\right)^2\left(ml^2\omega^2-mgl\right)=0$$

$$\Rightarrow \omega^2\left(\omega^2 l-g\right)\left[M\omega^2 l-(M+2m)g\right]m^2l^2=0$$

- Επομένως οι τρεις ιδιοσυχνότητες θα είναι:

$$\omega_1=0 \qquad \omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{και} \quad \omega_3=\sqrt{\frac{M+2m}{Ml}g}$$

Παράδειγμα – βαγονάκι και δυο εκκρεμή

- (γ) Ποιοι οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης του συστήματος

- Από την εξίσωση των ιδιοδιανυσμάτων μπορούμε να βρούμε την σχέση που συνδέει τα $\alpha_1{:}\alpha_2{:}\alpha_3$ αντικαθιστώντας κάθε τιμή των ω_i που βρήκαμε

$$\left\{[K]-[M]\omega_i^2\right\}\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{όπου} \quad \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{pmatrix}$$

τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην συχνότητα ω_i

Επομένως θα έχουμε:

- $\omega^2 = \omega_1^2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} mgl - \cancelto{0}{ml^2\omega^2} & 0 & \cancelto{0}{-ml\omega^2} \\ 0 & mgl - \cancelto{0}{ml^2\omega^2} & \cancelto{0}{-ml\omega^2} \\ \cancelto{0}{ml\omega^2} & \cancelto{0}{-ml\omega^2} & \cancelto{0}{-(M+2m)\omega^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} mgl & 0 & 0 \\ 0 & mgl & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{21} = 0 \\ a_{31} = \text{τυχαια τιμη} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως τα σώματα (εκκρεμή) είναι ακίνητα ενώ το βαγονάκι κινείται εκτελώντας απλά μεταφορική κίνηση.

Παράδειγμα – βαγονάκι και δυο εκκρεμή

- $\omega^2 = \omega_2^2 = \dfrac{g}{l}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cancelto{0}{mgl - ml^2\frac{g}{l}} & 0 & -m\cancel{l}\frac{g}{\cancel{l}} \\ 0 & \cancelto{0}{mgl - ml^2\frac{g}{l}} & -m\cancel{l}\frac{g}{\cancel{l}} \\ m\cancel{l}\frac{g}{\cancel{l}} & -m\cancel{l}\frac{g}{\cancel{l}} & -(M+2m)\frac{g}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -mg \\ 0 & 0 & -mg \\ -mg & -mg & -(2m+M)\frac{g}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_{12} = w \\ a_{22} = -a_{12} \\ a_{32} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως τα σώματα (εκκρεμή) κινούνται σε αντίθετη φάση ενώ το βαγονάκι παραμένει ακίνητο.

Παράδειγμα – βαγονάκι και δυο εκκρεμή

- $\omega^2 = \omega_3^2 = \dfrac{M+2m}{Ml}g$

$$\begin{pmatrix} mgl - ml^2\dfrac{(M+2m)}{Ml}g & 0 & \text{-}ml\dfrac{(M+2m)}{Ml}g \\ 0 & mgl - ml^2\dfrac{(M+2m)}{Ml}g & \text{-}ml\dfrac{(M+2m)}{Ml}g \\ ml\dfrac{(M+2m)}{Ml}g & \text{-}ml\dfrac{(M+2m)}{Ml}g & \text{-}(M+2m)\dfrac{(M+2m)}{Ml}g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = 0$$

- 1η σειρά: $\Rightarrow \left(mgl - ml\dfrac{(M+2m)}{M}g\right)a_{13} - \dfrac{m}{M}(M+2m)ga_{33} = 0$

$$\Rightarrow a_{33} = \frac{M}{m(M+2m)g}\left(mgl - ml\frac{(M+2m)}{M}g\right)a_{13} \quad \Rightarrow a_{33} = -\frac{2ml}{(M+2m)}a_{13}$$

- 3η σειρά: $m\dfrac{(M+2m)}{M}ga_{13} - \dfrac{m}{M}(M+2m)ga_{23} - (M+2m)\dfrac{(M+2m)}{Ml}a_{33} = 0$

$$\Rightarrow -\frac{m}{M}a_{13} - \frac{m}{M}a_{23} - \frac{(M+2m)}{Ml}\frac{(-2ml)}{M+2m}a_{13} = 0 \Rightarrow -\frac{m}{M}a_{13} - \frac{m}{M}a_{23} + \frac{2m}{M}a_{13} = 0$$

$$\Rightarrow -a_{13} - a_{23} + 2a_{13} = 0 \quad \Rightarrow a_{23} = a_{13}$$

Παράδειγμα – βαγονάκι και δυο εκκρεμή

- Επομένως για την 3η ιδιοσυχνότητα, το ιδιοδιάνυσμα είναι: $$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\dfrac{2ml}{M+2m} \end{pmatrix}$$

Τα δυο εκκρεμή κινούνται σε φάση ενώ το βαγονάκι κινείται με αντίθετη φάση

Το κέντρο μάζας του συστήματος παραμένει ακίνητο