Εξισώσεις Lagrange - με περιορισμούς
Παραδείγματα - Πολλαπλασιαστών Lagrange

Μέχρι τώρα χρησιμοποιήσαμε τους περιορισμούς-δεσμούς για να βγάλουμε ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας και να γράψουμε τις εξισώσεις E-L συναρτήσει των ανεξάρτητων αυτών βαθμών.

Τώρα θα θεωρήσουμε ότι όλοι οι βαθμοί ελευθερίας είναι ανεξάρτητοι και θα εισάγουμε τους δεσμούς μέσω των πολλαπλασιαστών Lagrange. Όπως είπαμε οι πολ/στές Lagrange σχετίζονται με τις δυνάμεις που αναπτύσσονται λόγω των δεσμών

Χρησιμοποιούμε για το σκοπό αυτό τις τροποποιημένες εξισώσεις Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow$$ f_k: εξισώσεις δεσμών

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial q_i}$$

όπου q_i είναι οι γενικευμένες συντεταγμένες

Όταν q_i είναι μια κανονική συντεταγμένη χώρου (εκφρασμένη σε μονάδες μήκους) τότε $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial q_i}$ είναι μια δύναμη

Αυτό φαίνεται και διαστατικά αφού η Lagrangian L έχει μονάδες ενέργειας και αν το q_i έχει μονάδες μήκους τότε: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$ είναι σε μονάδες ενέργεια/μήκος = μονάδες δύναμης

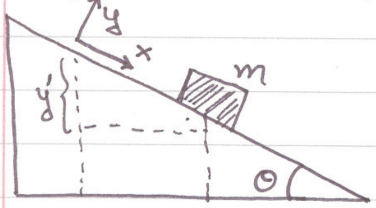
Αν q_i είναι οποιαδήποτε άλλη συντεταγμένη όχι με μονάδες μήκους τότε $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k(t) \frac{\partial f_k}{\partial q_i}$ ονομάζεται "γενικευμένη δύναμη"

Αν q_i είναι γωνία, τότε $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k(t) \frac{\partial}{\partial q_i}$ έχει μονάδες ροπής

Θυμηθείτε επίσης ότι για μια δυνατή μετατόπιση δq_i, $Q_i \delta q_i$ = έργο γενικευμένης δύναμης

Παραδείγματα

Τούβλο μάζας m γλιστρά σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσης Θ ξεκινώντας από το υψηλότερο σημείο του επιπέδου. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης και οι δυνάμεις των δεσμών.



Το γεγονός ότι το τούβλο παραμένει πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο αποτελεί δεσμό της κίνησης.

Σύμφωνα με το σύστημα συντεταγμένων μας ο δεσμός αυτό γράφεται:

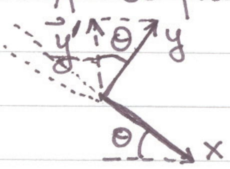
$$f(x,y) = y = 0$$

Αντί να χρησιμοποιήσουμε τον περιορισμό αυτό για να απαλείψουμε το y από τη Lagrangian, το κρατάμε οπότε θα έχουμε τώρα εξάρτηση της Lagrangian από το x και y και θα χρησιμοποιήσουμε τους πολλαπλασιαστές Lagrange για το δεσμό

Επομένως: $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

$U = mgh$ όπου h είναι η κατακόρυφη μετατόπιση του τούβλου.

Θα πρέπει να εκφράσουμε το h συναρτήσει των x κ y του συστήματός μας.



Όπως βλέπουμε από το διπλανό σχήμα, μπορούμε να γράψουμε: ($\hat{y}'$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην h-διεύθυνση)

$$\hat{y}' = \hat{y}\cos\Theta - \hat{x}\sin\Theta \Rightarrow h = \vec{r}\cdot\hat{y}' \Rightarrow$$

όπου $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$ $\qquad h = -x\sin\Theta + y\cos\Theta$

Επομένως $U = mg(-x\sin\Theta + y\cos\Theta) \Rightarrow U = -mg(x\sin\Theta - y\cos\Theta)$

Η Lagrangian θα είναι $L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mg(x\sin\Theta - y\cos\Theta)$

Η τροποποιημένη εξίσωση Lagrange με τους πολ/στές θα είναι:

$\boxed{x:}$ $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=\lambda\frac{\partial f}{\partial x}$$ όπου $\boxed{f=f(x,y)=y=0}$ εξίσωση του δεσμού

Αλλά $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ οπότε έχουμε: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \Rightarrow \boxed{m\ddot{x}-mg\sin\theta=0}$

Η εξίσωση Lagrange για y θα είναι:

$\boxed{y:}$ $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=\lambda\frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \boxed{m\ddot{y}+gm\cos\theta=\lambda}$$ αφού $\frac{\partial f}{\partial y}=1$

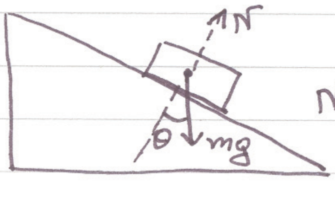
Επομένως έχουμε: $m\ddot{x}=mg\sin\theta \Rightarrow \ddot{x}=g\sin\theta$ επιτάχυνση πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο

$$\left.\begin{array}{l} m\ddot{y}+mg\cos\theta=\lambda \\ \text{Από το δεσμό έχουμε } y=0 \Rightarrow \ddot{y}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lambda=mg\cos\theta}$$

Επομένως οι δυνάμεις των δεσμών (αυτές δηλαδή που δεν συμπεριλαμβάνονται στη δυναμική ενέργεια) είναι:

κατά μήκος του x: $F_x=\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0$

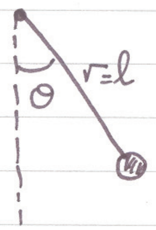
κατά μήκος του y: $F_y=\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=\lambda=mg\cos\theta$



$N=mg\cos\theta$

Επομένως F_y είναι η κάθετη δύναμη που είναι στη y διεύθυνση

Παράδειγμα Θεωρήστε το απλό εκκρεμές μάζας m και μήκους l. Να βρεθεί η δύναμη του δεσμού



Ο δεσμός του σταθερού μήκους γράφεται:

$$\boxed{f(r,\phi) = r - l = 0} \qquad (1)$$

Ξέρουμε ότι $T = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2\right)$ (δεν χρησιμοποιούμε ότι r = σταθ.)

$$U = -mgr\cos\phi$$

Επομένως $L = T - U = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + mgr\cos\phi$

Οι τροποποιημένες εξισώσεις E-L ως προς r και ϕ με πολ/στές:

$\boxed{r:}$ $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} \Rightarrow \boxed{m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 - mg\cos\phi = \lambda} \text{ αφού } \frac{\partial f}{\partial r} = 1$$

$\boxed{\phi:}$ $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \phi} \Rightarrow \boxed{mr^2\ddot{\phi} + 2m\dot{r}\dot{\phi} + mgr\sin\phi = 0} \quad \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0$$

Ο δεσμός: $r = l \Rightarrow \dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$ οπότε αντικαθιστώντας:

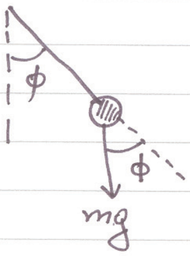
$$-ml\dot{\phi}^2 - mg\cos\phi = \lambda$$

$$\cancel{m}l^{\cancel{2}}\ddot{\phi} + \cancel{m}g\cancel{l}\sin\phi = 0 \Rightarrow \ddot{\phi} + \frac{g}{l}\sin\phi = 0$$ όπως ξέρουμε

Η γενικευμένη δύναμη του δεσμού κατά μήκος της ϕ: $Q_\phi = \lambda\frac{\partial f}{\partial \phi} = 0$ ροπή

κατά μήκος της r: $Q_r = \lambda\frac{\partial f}{\partial r} = \lambda = -mg\cos\phi - ml\dot{\phi}^2$ ακτινική δύναμη

Η ακτινική δύναμη είναι αυτό που περιμέναμε.



Η ακτινική συνιστώσα της επιτάχυνσης είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση: $a_r = -l\dot{\phi}^2$

Επομένως $-ml\dot{\phi}^2$ είναι ~~η~~ η συνισταμένη δύναμη στην ακτινική διεύθυνση: F_r

Επομένως: $F_r = mg\cos\theta - T$ όπου T η τάση του νήματος μήκους l

$$\Rightarrow F_r = mg\cos\theta - T = -ml\dot{\phi}^2 \Rightarrow \text{Δύναμη δεσμού: } -T = -ml\dot{\phi}^2 - mg\cos\theta = \lambda$$

Από τη στιγμή που η δύναμη του δεσμού είναι πάντοτε στη διεύθυνση των αυξανόμενων τιμών ~~της~~ συντεταγμένης, έχουμε ότι η δύναμη του δεσμού $\lambda \frac{\partial f}{\partial r}$ είναι $-T$ αντί για T.

Η δύναμη του δεσμού είναι πάντοτε το τμήμα της συνολικής δύναμης που δεν έχει συμπεριληφθεί στη δυναμική ενέργεια U που βάζουμε στη Lagrangian.

Στη περίπτωση αυτή του εκκρεμούς, αυτή είναι η τάση T.