ΦΥΣ. 331

5η Εργασία **Επιστροφή: Τετάρτη 22/11/23**

1. Ένα σωματίδιο σε μια διάσταση και μάζα *m* βρίσκεται σε πηγάδι δυναμικού:

$$V = \begin{cases} 0 & -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ \infty & x \notin \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) \end{cases}$$

Το σωματίδιο βρίσκεται αρχικά στην κατάσταση 10^9+1, με την χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση $n = 1$. Την χρονική στιγμή $t = 0$, εισάγεται μια διαταραχή με $\Delta V = b\delta(x)$. Η διαταραχή αυτή παύει να υπάρχει την χρονική στιγμή $t = T$ που μπορεί να υποτεθεί ότι είναι αρκετά σύντομη. Μετά την χρονική στιγμή *T*, ποια η πιθανότητα το σωματίδιο να βρεθεί στην κατάσταση:

(α) $n = 10^9$; (β) $n = 10^9+1$; (γ) $n = 10^9+2$; (δ) $n = 10^9+3$;

Η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου θα πρέπει να μηδενίζεται στα δυο σύνορα, και

επομένως: $\psi(x) = A\cos kx$ με $kx = k\frac{a}{2} = n\frac{\pi}{2} \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a}$ για περιττά n

ή $\psi(x) = A\sin kx$ με $kx = k\frac{a}{2} = n\frac{\pi}{2} \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a}$ για άρτια n

Η ενέργεια είναι $E_n = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2$ και η κανονικοποίηση δίνει $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$

Ξεκινούμε με όλο το πλάτος στην κατάσταση $n = 10^9+1 = s$ που είναι περιττή

Η πιθανότητα να παρατηρήσουμε μια άλλη κατάσταση n είναι:

$$|c_n(t)|^2 = 2\frac{|\langle\psi_n|\Delta V|\psi_s\rangle|^2}{(E_n - E_s)^2}\left[1 - \cos\left(\frac{E_s - E_n}{\hbar}t\right)\right]$$

Το ολοκλήρωμα του πινακοστοιχείου $\langle\psi_n|\Delta V|\psi_s\rangle$ θα είναι μηδέν, αν κάποια από τις δυο κυματοσυναρτήσεις είναι sin, γιατί η διαταραχή είναι δ-συνάρτηση στο $x=0$. Ωστόσο ξεκινάμε με cos κυματοσυνάρτηση επειδή η s είναι περιττή.

Για τις περιπτώσεις (α) και (γ), οι τελικές καταστάσεις είναι άρτιες και άρα οι κυματοσυναρτήσεις είναι sin και το ολοκλήρωμα επομένως θα είναι μηδέν και άρα η πιθανότητα

Για το (δ), η τελική κατάσταση είναι κυματοσυνάρτησης τύπου cos, και το ολοκλήρωμα

είναι: $\langle \psi_n | \Delta V | \psi_s \rangle = \int A\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) b\delta(x) \cdot A\cos\left(\frac{s\pi x}{a}\right)dx = A^2 b\cos^2(\phi) = \frac{2b}{a}$

Για σύντομους χρόνους μπορούμε να αναπτύξουμε κατά Taylor το cos, στην χρονική εξάρτηση: $\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$ οπότε:

$$\left[1-\cos\left(\frac{E_s-E_n}{\hbar}T\right)\right] \cong \frac{1}{2}\left(\frac{E_s-E_n}{\hbar}T\right)^2 = \frac{1}{2}(E_s-E_n)^2\left(\frac{T}{\hbar}\right)^2$$

Επομένως $|c_n(T)|^2 \cong \cancel{2}\frac{|\langle\psi_n|\Delta V|\psi_s\rangle|^2}{\cancel{(E_n-E_s)^2}}\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{(E_s-E_n)^2}\left(\frac{T^2}{\hbar^2}\right) \Rightarrow |c_n(T)|^2 \simeq |\langle\psi_n|\Delta V|\psi_s\rangle|^2\frac{T^2}{\hbar^2}$

Αντικαθιστώντας το πινακοστοιχείο, θα έχουμε:

$$|c_n(T)|^2 = \left(\frac{2b}{a}\right)^2\frac{T^2}{\hbar^2} \Rightarrow |c_n(T)|^2 = \frac{4b^2}{a^2}\frac{T^2}{\hbar^2}$$

Για το (β), θέλουμε την πιθανότητα να παραμείνει στην αρχική κατάσταση, που είναι $1-\sum_m P_m$ όπου P_m είναι η πιθανότητα να μεταβεί σε κάποια άλλη προσβάσιμη κατάσταση.

Σύμφωνα με τον χρυσό κανόνα Fermi, ο ολικός ρυθμός μετάβασης είναι:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar}|V_{ns}|^2\rho(E_s)$$

Το πινακοστοιχείο $V_{ns} = \begin{cases}0 & \text{για n άρτιο}\\ \frac{2b}{a} & \text{για n περιττό}\end{cases}$

Η πυκνότητα καταστάσεων είναι $\rho = \frac{dn}{dE} = \frac{1}{dE/dn}$ όπου $\frac{dE}{dn} = \frac{d}{dn}\left(\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2\right) = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}2n$

Επομένως θεωρώντας όλες τις καταστάσεις $\rho = \frac{ma^2}{n\pi^2\hbar}$

Ωστόσο, μόνο οι μισές καταστάσεις είναι προσβάσιμες από την αρχική κατάσταση. Αυτό μπορούμε να το λύσουμε παίρνοντας το τετράγωνο του πινακοστοιχείου $(2b/a)^2$ για τις προσβάσιμες καταστάσεις και διαιρώντας με δύο την πυκνότητα καταστάσεων.

Ένας διαφορετικός τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε ολόκληρη την πυκνότητα των καταστάσεων αλλά να πάρουμε την μέση τιμή των τετραγώνων των πινακοστοιχείων $\left[(0)^2+\left(\frac{2b}{a}\right)^2\right]/2$. Και οι δυο τρόποι δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Καταλήγουμε επομένως στο γεγονός ότι ο ρυθμός μετάβασης είναι:

$$\frac{dP}{dt}=\frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{2b}{a}\right)^2\frac{1}{2}\frac{ma^2}{n\pi^2\hbar^2} \Rightarrow \frac{dP}{dt}=\frac{4b^2m}{n\pi\hbar^3}$$

Η ολική πιθανότητα να εξέλθει από την αρχική κατάσταση, είναι ο παραπάνω ρυθμός μετάβασης επί τον χρόνο T. Επομένως η πιθανότητα να παραμείνει στην αρχική κατάσταση θα είναι:

$$P = 1 - T\frac{dP}{dt} = 1 - T\frac{4b^2m}{n\pi\hbar^3} \quad \text{όπου } \underline{n=10^9+1}$$

2. Ένα σωματίδιο σε 3-διαστάσεις, με μάζα m, ορμή p και φορτίο q, σκεδάζεται από ένα δυναμικό της μορφής $V(r) = Zqe^{-\frac{r^2}{2a^2}}$. Ποια η διαφορική ενεργός διατομή $\frac{d\sigma}{d\Omega}$; (Μπορείτε να αφήσετε το αποτέλεσμά σας στο δύσκολο ολοκλήρωμα που καταλήγετε μετά τις πράξεις σας).

Από τις διαλέξεις, έχουμε ότι: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{\pi\hbar^4}\left|V_{\vec{k}\vec{k}'}\right|^2$ όπου $V_{\vec{k}\vec{k}'} = \int e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} V(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{x}$

Συνδυάζοντας τα εκθετικά θα έχουμε: $V_{\vec{k}\vec{k}'} = \int e^{+i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{x}} V(\vec{x})\, d^3\vec{x}$

Για το δυναμικό αυτό, είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε καρτεσιανές συντεταγμένες

Υποθέτουμε ότι η αρχική ορμή είναι στην z-διεύθυνση, και η τελική ορμή είναι στην γωνία Θ στο $\cancel{x}z$ επίπεδο. Το μέτρο της ορμής δεν αλλάζει, οπότε:

$$V_{\vec{k}\vec{k}'} = \int Zq e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{2a^2}} e^{i\vec{k}(x\sin\theta + z(\cos\theta - 1))} dx\,dy\,dz = Zq \int e^{-\frac{x^2}{2a}+ikx\sin\theta} e^{-\frac{y^2}{2a^2}} e^{-\frac{z^2}{2a^2}+ikz\ldots} dx\,dy\ldots$$

Οι τρεις ολοκληρώσεις ως προς x, y και z μπορούν να γίνουν ξεχωριστά. Το y-ολοκλήρωμα θα δώσει:

$$\int e^{-y^2/2a} dy = \sqrt{2\pi}\,a$$

Για το x-ολοκλήρωμα θα έχουμε: $\frac{x^2}{2a^2} - bx = \left(\frac{x}{\sqrt{2}a} - \frac{ab}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{(ab)^2}{2}$

Επομένως: $\int e^{-\frac{x^2}{2a^2}+\sin\theta(ikx)} dx = \int e^{-\left[\left(\frac{x}{\sqrt{2}a} - \frac{ika\sin\theta}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{(ika\sin\theta)^2}{2}\right]} dx \Rightarrow$

$$\int e^{-\frac{x^2}{2a^2}+ikx\sin\theta} dx = \int e^{-\left[\left(\frac{x}{\sqrt{2}a} - \frac{ika\sin\theta}{\sqrt{2}}\right)^2\right]} e^{-\frac{(ka\sin\theta)^2}{2}} dx = e^{-\frac{(ka\sin\theta)^2}{2}} \int e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}a} - \frac{ika\sin\theta}{\sqrt{2}}\right)\ldots} dx$$

Ο εναπομείναν όρος του ολοκληρώματος είναι και πάλι Gaussian, μετατοπισμένος στο x, και επομένως θα δώσει ακόμα ένα παράγοντα $\sqrt{2\pi}\,a$

Για το Z ολοκλήρωμα, το αποτέλεσμα είναι το ίδιο μόνο που το $\sin\Theta \to \cos\Theta - 1$

Επομένως το αποτέλεσμα θα είναι:

$$V_{\vec{k}'\vec{k}} = Zq(2\pi)^{3/2} a^3 e^{\frac{(ka)^2}{2}(\sin^2\Theta + 1 - 2\cos\Theta + \cos^2\Theta)} = Zq(2\pi)^{3/2} a^3 e^{-(ka)^2(1-\cos\Theta)}$$

Επομένως η ενεργός διατομή θα είναι:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{\pi\hbar^4}\left|V_{\vec{k}'\vec{k}}\right|^2 = \frac{m^2}{\pi\hbar^4}(Zq)^2(2\pi)^3 a^6 e^{-2(ka)^2(1-\cos\Theta)}$$

<u>Σε σφαιρικές συντεταγμένες</u> το σωματίδιο σκεδάζεται σε κάποια γωνία α, αλλά το μέτρο της ορμής δεν αλλάζει, και άρα $\vec{k}$ και $\vec{k}'$ είναι ίσες πλευρές ενός τριγώνου με γωνία α μεταξύ τους, και $|\vec{k}'-\vec{k}| = 2k\sin\frac{\alpha}{2}$.

Αλλάζοντας σε σφαιρικές συντεταγμένες με την Θ μετρούμενη ~~ως~~ προς την $\vec{k}'-\vec{k}$ διεύθυνση (η γωνία σκέδασης είναι α και όχι Θ) και γράφοντας το εσωτερικό γινόμενο συναρτήσει των μέτρων και γωνιών, σημειώνουμε ότι το δυναμικό εξαρτάται μόνο από r

$$V_{\vec{k}'\vec{k}} = \int V(\vec{r}) e^{+i|\vec{k}'-\vec{k}||\vec{r}|\cos\Theta} r^2 \sin\Theta \, dr \, d\phi \, d\Theta$$

Το ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από την γωνία ϕ και το ολοκλήρωμα θα δίνει 2π

$$V_{\vec{k}'\vec{k}} = 2\pi\int V(r) e^{(2ikr\sin\alpha/2)\cos\Theta} \sin\Theta \, d\Theta \, r^2 dr$$

Για να κάνουμε την ολοκλήρωση κατά Θ, προσέχουμε ότι:

$$\int_{\Theta=0}^{\Theta=\pi} e^{ib\cos\Theta}\sin\Theta \, d\Theta = -\frac{1}{ib}\int_{\cos\Theta=1}^{\cos\Theta=-1} e^{ib\cos\Theta} d(ib\cos\Theta) = -\frac{1}{ib}\left[e^{ib\cos\Theta}\right]_{\cos\Theta=1}^{\cos\Theta=-1} = \frac{e^{ib}-e^{-ib}}{ib} \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_{\Theta=0}^{\Theta=\pi} e^{ib\cos\Theta}\sin\Theta \, d\Theta = \frac{2\sin\Theta}{b}}$$

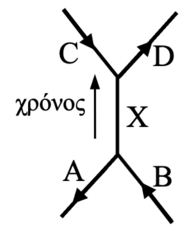
Με $b = 2kr\sin\alpha/2$ θα πάρουμε: $V_{\vec{k}'\vec{k}} = 2\pi\int V(r)\frac{2\sin(2kr\sin\frac{\alpha}{2})}{2kr\sin\alpha/2} r^2 dr$

Θέτοντας $c = 2k\sin\alpha/2$, θα έχουμε: $V_{\vec{k}'\vec{k}} = 4\pi\int V(r)\frac{\sin(cr)}{cr} r^2 dr$ που είναι αληθές για οποιοδήποτε σφαιρικό δυναμικό.

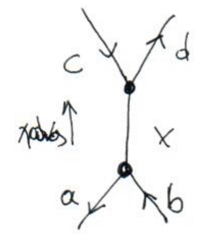
Εισάγουμε $V(r) = Zqe^{-r^2/2a^2}$ έχουμε: $V_{\vec{k}'\vec{k}} = 4\pi\int Zqe^{-r^2/2a^2}\frac{\sin(cr)}{cr} r^2 dr \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{\vec{k}'\vec{k}} = \frac{4\pi Zq}{c}\int_{r=0}^{r=\infty} e^{-r^2/2a^2} r\sin(cr) \, dr$ που είναι ένα δύσκολο ολοκλήρωμα

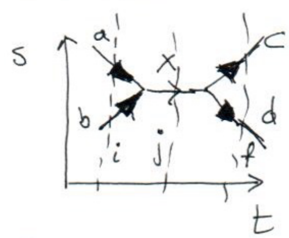
3. Σχεδιάστε τα δυο χρονικά ταξινομημένα διαγράμματα για την διεργασία του διπλανού σχήματος. Δείξτε ότι το άθροισμα των διαγραμμάτων δίνει έναν διαδότη για το X της μορφής:

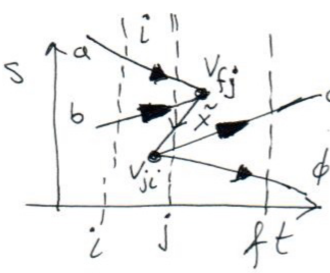


$$\frac{2E_X}{(\vec{p}_a+\vec{p}_b-m_X^2)}$$



Τα δυό διαγράμματα της διεργασίας χρονικά ταξινομημένα θα είναι:





$$E_a+E_b=E_c+E_d$$

Επομένως $$M=\frac{g^2}{(E_a+E_b)-E_x}+\frac{g^2}{(E_a+E_b)-(E_a+E_b+E_x+E_c+E_d)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow M=\frac{g^2}{E_a+E_b-E_x}+\frac{g^2}{-(E_x+E_c+E_d)}=\frac{g^2}{E_b+E_a-E_x}-\frac{g^2}{E_x+E_a+E_b}\Rightarrow$$

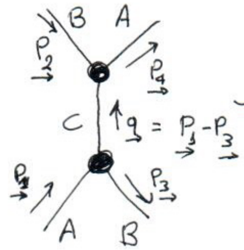
$$\Rightarrow M=g^2\frac{(E_x+E_a+E_b)-(E_b+E_a-E_x)}{(E_b+E_a-E_x)(E_x+E_a+E_b)}\Rightarrow \boxed{M=g^2\frac{2E_x}{(E_a+E_b)^2-E_x^2}}$$

$$\Rightarrow M=g^2\frac{2E_x}{(E_a+E_b)^2-(\vec{p}_x^{\,2}+m_x^2)}=g^2\frac{2E_x}{(E_a+E_b)^2-(\vec{p}_a+\vec{p}_b)^2-m_x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow M=g^2\frac{2E_x}{(\underrightarrow{p}_a+\underrightarrow{p}_b)^2-m_x^2}\Rightarrow M=g^2\frac{2E_x}{q_+^2-m_x^2}\quad \text{όπου } q_+^2=(\underrightarrow{p}_a+\underrightarrow{p}_b)^2$$

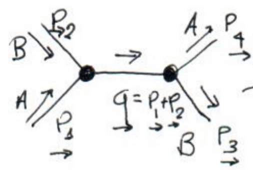
4. Υπολογίστε την διαφορική ενεργό διατομή $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ συναρτήσει της γωνίας θ, στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας στο μοντέλο ABC για την περίπτωση σκέδασης $A + B \to A + B$, υποθέτοντας ότι $m_B = m_C$.

Έχουμε δυο διαγράμματα:



$$\mathcal{M} = i(-ig)\frac{i}{(p_1-p_3)^2 - m_C^2c^2}(-ig) = \frac{g^2}{(p_1-p_3)^2 - m_C^2c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{M} = \frac{g^2}{p_1^2 + p_3^2 - 2p_1\cdot p_3 - m_C^2c^2} = \frac{g^2}{m_A^2c^2 + m_B^2c^2 - 2p_1\cdot p_3 - m_C^2c^2}$$



$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{(p_1+p_2)^2 - m_C^2c^2} = \frac{g^2}{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1\cdot p_2 - m_C^2c^2} = \frac{g^2}{m_A^2c^2 + m_B^2c^2 + 2p_1\cdot p_2 -}$$

Υποθέτοντας ότι $m_B = m_C = 0$ και προσθέτοντας την συνεισφορά των δύο διαγραμμάτων

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{m_A^2c^2 - 2p_1\cdot p_3} + \frac{g^2}{m_A^2c^2 + 2p_1\cdot p_2} \qquad (A)$$

Αλλά στο κέντρο μάζας, $p_1\cdot p_2 = \frac{E_1E_2}{c^2} - \vec{p}_1\cdot\vec{p}_2 = \frac{E_AE_B}{c^2} - \vec{p}_1\cdot(-\vec{p}_1) = \boxed{\frac{E_AE_B}{c^2} + p_{CM}^2}$ (B)

Επίσης θα έχουμε: $p_1\cdot p_3 = \frac{E_AE_B}{c^2} - \vec{p}_1\cdot\vec{p}_3 = \frac{E_AE_B}{c^2} - p_{CM}\,p_{CM}\cos\theta_{13} \Rightarrow p_1\cdot p_3 = \frac{E_AE_B}{c^2} - p_{CM}^2\cos\theta$

Από την στιγμή που $m_B = 0 \Rightarrow E_B = p_Bc = p_{CM}c$ οπότε $\boxed{p_1\cdot p_3 = \frac{E_Ap_{CM}}{c} - p_{CM}^2\cos\theta_{13}}$ (

Αντικατάσταση των (B) κ (Γ) στην (A) δίνει:

$$\mathcal{M} = g^2 \frac{\left[m_A^2 c^2 - 2\left(\frac{E_A P_{CM}}{c} - P_{CM}^2 \cos\Theta_{13}\right)\right] + \left[m_A^2 c^2 + 2\left(\frac{E_A P_{CM}}{c} + P_{CM}^2\right)\right]}{\left[m_A^2 c^2 - 2\left(\frac{E_A P_{CM}}{c} - P_{CM}^2 \cos\Theta_{13}\right)\right] \times \left[m_A^2 c^2 + 2\left(\frac{E_A P_{CM}}{c} + P_{CM}^2\right)\right]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{M} = 2g^2 \frac{m_A^2 c^2 + P_{CM}^2 (1 + \cos\Theta_{13})}{\left[m_A^2 c^2 - 2\frac{E_A P_{CM}}{c} + 2P_{CM}^2 \cos\Theta_{13}\right]\left[m_A^2 c^2 + 2\frac{E_A P_{CM}}{c} + 2P_{CM}^2\right]}$$

Αυτή είναι η μορφή στην οποία μπορούμε να καταλήξουμε.

Αν $m_A = 0$ και επομένως $E_A = P_{CM} c$ τότε θα έχουμε:

$$\mathcal{M} = 2g^2 \frac{P_{CM}^2 (1 + \cos\Theta_{13})}{\left[-2P_{CM}^2 + 2P_{CM}^2 \cos\Theta_{13}\right]\left[2P_{CM}^2 + 2P_{CM}^2\right]} = -\frac{g^2}{4P_{CM}^2} \frac{1 + \cos\Theta_{13}}{1 - \cos\Theta_{13}}$$

Η ενεργός διατομή σκέδασης για σκέδαση 2 σωματίων στο σύστημα του CM είναι:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{S\,(E_1 + E_2)^2} \frac{P_{final}}{P_{initial}} \left|\mathcal{M}\left(\vec{P}_{final}(\theta)\right)\right|^2$$

Από την στιγμή που δεν υπάρχει αλλαγή μάζας $P_{final} = P_{initial} = P_{CM}$ και επειδή τα σωματίδια είναι διαφορετικά μεταξύ τους $S = 1$. Άρα:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{(E_A + P_{cm} c)^2} |\mathcal{M}|^2 = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{4g^2}{(E_A + P_{CM} c)^2} \frac{\left[m_A^2 c^2 + P_{CM}^2 (1 + \cos\Theta_{13})\right]^2}{\left[m_A^2 c^2 - 2\frac{E_A P_{CM}}{c} + 2P_{CM}^2 \cos\Theta_{13}\right]^2 * \left[m_A^2 c^2 + 2\frac{E_A P_{CM}}{c} + 2P_{CM}^2\right]^2}$$

Η σχέση απλουστεύεται αρκετά, όπως είδαμε, αν $m_A = 0$, οπότε:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{g^4}{16\, P_{CM}^6 c^2} \left(\frac{1 + \cos\Theta_{13}}{1 - \cos\Theta_{13}}\right)^2$$

5. Εκτιμήστε τον χρόνο ζωής του π^0 εξαιτίας της διάσπασής του $\pi^0 \to \gamma\gamma$. Με διαστατική ανάλυση το πλάτος διάσπασης για 1 σωματίδιο να διασπάται σε 2 σωματίδια θα πρέπει να έχει διαστάσεις ορμής. Κάθε κορυφή φωτονίου θα πρέπει να συνεισφέρει έναν παράγοντα $\sqrt{\alpha}$ με $\sqrt{\alpha} = 1/137$. Συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με τον πραγματικό χρόνο ζωής.

Σύμφωνα με την υπόδειξη της άσκησης, το πλάτος μετάβασης είναι ανάλογο της ορμής. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα οι ποσότητες που ενδιαφέρουν είναι η ορμή των φωτονίων. Στο σύστημα αναφοράς του CM του π^0, η ενέργεια του φωτονίου είναι:

$E_\gamma = \frac{m_\pi c^2}{2}$ και η ορμή είναι: $P_F = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{m_\pi c}{2}$.

Επομένως το πλάτος μετάβασης θα είναι ανάλογο του $\mathcal{M} = \alpha p_F = a \cdot \frac{m_\pi c}{2}$

Σύμφωνα με τον χρυσό κανόνα Fermi θα έχουμε για διάσπαση σε 2 σωματίδια

$$\Gamma = \frac{1}{S} \frac{1}{8\pi\hbar m^2 c} P_F |\mathcal{M}|^2$$ όπου $a = \frac{1}{137}$ λόγω των κορυφών των φωτονίων

Από τη στιγμή που υπάρχουν 2 φωτόνια στην τελική κατάσταση που είναι μη διακρίσιμα μποζόνια ο παράγοντας $S = 2$. Αντικαθιστώντας $\mathcal{M} = a\frac{m_\pi c}{2}$ θα πάρουμε:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \frac{1}{8\pi\hbar m_\pi^2 c} P_F |a p_F|^2 = \frac{1}{2} \frac{a^2 p_F^3}{8\pi\hbar m_\pi^2 c} = \frac{a^2 (m_\pi c/2)^3}{16\pi\hbar m_\pi^2 c} = \frac{a^2 m_\pi c^2}{128\pi\hbar}$$

Επομένως για να ελέγξουμε διαστατικά την εξίσωση θα έχουμε: ότι $[\Gamma] \propto t^{-1}$ ή $E/\hbar$ και από την προηγούμενη εξίσωση θα έχουμε όντως $m_\pi c^2/\hbar = E/\hbar$

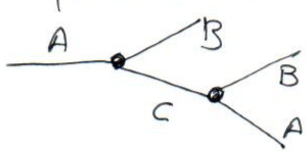
Αντικατάσταση δίνει: $$\Gamma = \frac{\left(\frac{1}{137}\right)^2 (135.0 \times 10^6 \, eV) \times (1.602 \times 10^{-19} \, J/eV)}{128\pi \, (1.054 \times 10^{-34} \, J \cdot sec)} \Rightarrow \underline{\underline{\Gamma = 2.718 \cdot 10^{16} \, sec^{-1}}}$$

Επομένως ο χρόνος ζωής θα είναι $\tau = 3.678 \cdot 10^{-17} sec \simeq 8.4 \cdot 10^{-17} sec$ μετρούμενο

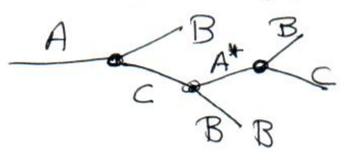
6. Θεωρήστε το μοντέλο ABC που είδαμε στις διαλέξεις και η μάζα του A είναι αρκετά μεγάλη. Εξετάστε αν η διεργασία $A \to BB$ είναι δυνατή στο μοντέλο αυτό. Αν η διεργασία δεν μπορεί να συμβεί, ποια είναι τα επιτρεπτά διαγράμματα για το A να διασπαστεί μέχρι το ανώτερο 5 σωματίδια στη τελική κατάσταση θεωρώντας πάντοτε ότι η μάζα του είναι αρκετά μεγάλη.

Σύμφωνα με το μοντέλο θα έχουμε: ότι η απλούστερη μετάβαση $A \to BC$ φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

Το σωματίδιο C μπορεί να δώσει $C \to BA$ και επομένως σε συνδυασμό με το προηγούμενο κανάλι θα έχουμε $A \to BBA$, το οποίο όμως είναι κινηματικά αδύνατο να συμβεί αφού το $A \to A$ με 2 ακόμα σωματίδια B.



Θα μπορούσε το A αυτό να είναι δυνητικό, οπότε θα υπάρξει διάσπαση και πάλι σε BC και η τελική διάσπαση θα μοιάζει $A \to BBBC$



Ανάλογες διασπάσεις θα μπορούσαμε να έχουμε αν το $B \to AC$ αλλά τότε η αλυσίδα θα έδινε: $A \to BCCC$.
Επομένως αν συνεχίζουμε τη διαδικασία θα είχαμε πάντοτε ένα περιττό αριθμό από B ή C σωματίδια συνοδευόμενα από ένα C ή B.
Ποτέ όμως δεν θα είχαμε $A \to BB$.