Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

Μονοδιάστατη εξίσωση κύματος

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι οποιαδήποτε συνάρτηση της μορφής $\psi(x,t)$ ικανοποιεί την 1-D εξίσωση κύματος

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(x,t) = 0}$$

Έστω $x' = x \pm \upsilon t$ επομένως: $\frac{\partial}{\partial x}(x') = 1$ και $\frac{\partial}{\partial t}(\pm\upsilon t) = \pm\upsilon$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, οι πρώτες δύο μερικές παράγωγοι ως προς *x* δίνουν:

$$\frac{\partial\psi(x')}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial x'} \Rightarrow \frac{\partial^2\psi(x')}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x'}\right) = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x'}\right)\frac{\partial x'}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2\psi(x')}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}$$

Παρόμοια, οι μερικοί παράγωγοι ως προς χρόνο θα δώσουν:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} = \pm\upsilon\frac{\partial\psi}{\partial x'} \Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = \pm\upsilon\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x'} = \pm\upsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \upsilon^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις έχουμε: $\frac{\partial^2\psi(x')}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$

που αποδεικνύει ότι η $\psi(x \pm \upsilon t)$ ικανοποιεί την 1-Δ εξίσωση κύματος.

Η 1-D εξίσωση κύματος είναι ένα παράδειγμα γραμμικής διαφορικής εξίσωσης που σημαίνει ότι αν $\psi_1(x,t)$ και $\psi_2(x,t)$ είναι λύσεις τότε και ο γραμμικός τους συνδυασμός θα είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης. Σαν αποτέλεσμα, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ακολουθούν την εξίσωση της υπέρθεσης

Μονοδιάστατη εξίσωση κύματος

Μια δυνατή λύση της εξίσωσης κύματος μπορεί να είναι:

$$\vec{E} = E_y(x,t)\hat{j} = E_0\cos[k(x-\upsilon t)]\hat{j} = E_0\cos(kx-\omega t)\,\hat{j}$$

$$\vec{B} = B_z(x,t)\hat{k} = B_0\cos[k(x-\upsilon t)]\hat{k} = B_0\cos(kx-\omega t)\,\hat{k}$$

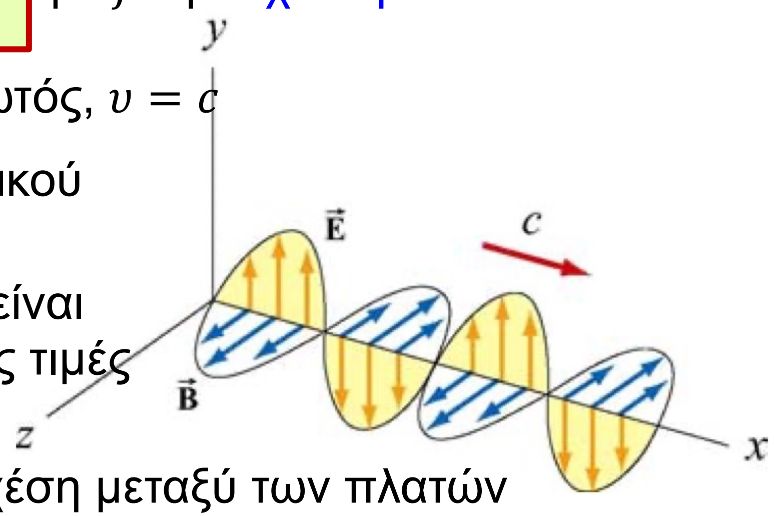
όπου τα πεδία είναι ημιτονοειδή με πλάτη E_0 και B_0.

Ο γωνιακός κυματάριθμος k σχετίζεται με το μήκος κύματος λ: $\boxed{k = 2\pi/\lambda}$

Η γωνιακή συχνότητα ω είναι $\boxed{\omega = k\upsilon = \frac{2\pi\upsilon}{\lambda} = 2\pi f}$ με f τη συχνότητα

Στο κενό, το κύμα διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός, $\upsilon = c$

Η συμπεριφορά ενός ημιτονοειδούς ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι όπως στο σχήμα.



Παρατηρούμε ότι το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο είναι πάντοτε σε φάση (λαμβάνουν μέγιστες και ελάχιστες τιμές ταυτόχρονα)

Από την συνθήκη: $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)$ βρίσκουμε τη σχέση μεταξύ των πλατών

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}E_0\cos(kx-\omega t) &= -E_0 k\sin(kx-\omega t) \\ \frac{\partial}{\partial t}B_0\cos(kx-\omega t) &= B_0\omega\sin(kx-\omega t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_0 k = \omega B_0 \Rightarrow \boxed{\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = c}$$

που ισχύει για τυχαία t, $E/B = c$

Μονοδιάστατη εξίσωση κύματος

Τα σημαντικά χαρακτηριστικά των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι τα ακόλουθα:

- Το κύμα είναι εγκάρσιο εφόσον τόσο το $\vec{E}$ όσο και το $\vec{B}$ είναι κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος, που δείχνει στη διεύθυνση του εξωτερικού γινομένου $\vec{E}\times\vec{B}$
- Τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους και επομένως $\vec{E}\cdot\vec{B}=0$
- Ο λόγος των πλατών και των μέτρων των πεδίων είναι: $\dfrac{E_0}{B_0}=\dfrac{E}{B}=c$
- Η ταχύτητα διάδοσης στο κενό ισούται με την ταχύτητα του φωτός: $c=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$
- Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα υπακούν την αρχή της υπέρθεσης

Στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου δύο ημιτονοειδή κύματα, ένα διαδιδόμενο στη +x-διεύθυνση, με:

$$E_{1y}(x,t) = E_{10}\cos(k_1 x - \omega_1 t) \quad \text{και} \quad B_{1z}(x,t) = B_{10}\cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

και το άλλο να κινείται στη –x-διεύθυνση με:

$$E_{2y}(x,t) = -E_{20}\cos(k_2 x + \omega_2 t) \quad \text{και} \quad B_{2z}(x,t) = B_{20}\cos(k_2 x + \omega_2 t)$$

Για απλούστευση, υποθέτουμε ότι τα δύο αυτά ηλεκτρομαγνητικά κύματα έχουν το ίδιο πλάτος ($E_{10} = E_{20} = E_0$, και $B_{10} = B_{20} = B_0$) και κυματάριθμους ($k_1 = k_2 = k$ και $\omega_1 = \omega_2 = \omega$).

Χρησιμοποιώντας την αρχή της υπέρθεσης, το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο γράφονται:

$$E_y(x,t) = E_{1y}(x,t) + E_{2y}(x,t) = E_0[cos(kx - \omega t) - cos(kx + \omega t)]$$

$$B_z(x,t) = B_{1z}(x,t) + B_{2z}(x,t) = B_0[cos(kx - \omega t) + cos(kx + \omega t)]$$

Από τις τριγωνομετρικές ταυτότητες: $[cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)\,]$

$$E_y(x,t) = E_0[cos(kx)\cos(\omega t) + \sin(kx)\sin(\omega t) - cos(kx)\cos(\omega t) + \sin(kx)\sin(\omega t)]$$

$$\Rightarrow E_y\,(x,t) = 2E_0[\sin(kx)\sin(\omega t)]$$

$$B_z(x,t) = B_0[cos(kx)\cos(\omega t) + \sin(kx)\sin(\omega t) + cos(kx)\cos(\omega t) - \sin(kx)\sin(\omega t)]$$

$$\Rightarrow B_z\,(x,t) = 2B_0[\cos(kx)\cos(\omega t)]$$

Στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Μπορούμε να δείξουμε ότι τα πεδία υπέρθεσης $E_y(x,t)$ και $B_z(x,t)$ ικανοποιούν την κυματική εξίσωση παρόλο που δεν είναι της μορφής $kx \pm \omega t$

Τα κύματα που περιγράφονται από τις εξισώσεις: $E_y(x,t) = 2E_0[\sin(kx)\sin(\omega t)]$

και $B_z(x,t) = 2B_0[\cos(kx)\cos(\omega t)]$ είναι στάσιμα κύματα,

τα οποία δεν διαδίδονται αλλά απλά ταλαντώνονται στο χώρο και χρόνο

Εξετάζουμε αρχικά την χωρική εξάρτηση των πεδίων.

Από την εξίσωση: $E_y(x,t) = 2E_0[\sin(kx)\sin(\omega t)]$ βλέπουμε ότι $E_y(x,t) = 0$ για όλες τις περιπτώσεις που $\sin(kx) = 0$ ή εάν: $kx = n\pi \Rightarrow x = \dfrac{n\pi}{k} = \dfrac{n\pi}{2\pi/\lambda} \Rightarrow x = \dfrac{n\lambda}{2}, n = 0,1,2,\ldots$

Τα επίπεδα που περιέχουν αυτά τα σημεία ονομάζονται επίπεδα δεσμών του ηλεκτρικού πεδίου.

Αν το $\sin(kx) = \pm 1$ τότε: $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2\pi/\lambda} = \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\lambda$, με $n = 0,1,2,\ldots$.

Το πλάτος του πεδίου είναι στο μέγιστο $2E_0$. Τα επίπεδα που περιέχουν αυτά τα σημεία ονομάζονται επίπεδα αντι-δεσμών. Πρέπει να σημειωθεί ότι μεταξύ δύο επιπέδων δεσμών υπάρχει ένα επίπεδο αντιδεσμού και το ανάποδο.

Στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Για το μαγνητικό πεδίο, τα επίπεδα των δεσμών περιέχουν σημεία που ικανοποιούν τη συνθήκη $coskx = 0$. Αυτή η απαίτηση οδηγεί:

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k} = \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)\lambda \quad \text{όπου } n = 0,1,2 \ldots \text{ (επίπεδα δεσμών)}$$

Με παρόμοιο τρόπο, τα επίπεδα των αντι-δεσμών περιέχουν σημεία που ικανοποιούν τη συνθήκη $coskx = \pm 1$. Αυτή η απαίτηση οδηγεί:

$$x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{n\pi}{\lambda} \text{ όπου } n = 0,1,2 \ldots \text{ (επίπεδα αντι-δεσμών του } \vec{B}\text{)}$$

Παρατηρούμε ότι ένα επίπεδο δεσμού για το $\vec{E}$ αντιστοιχεί σε επίπεδο αντι-δεσμού για το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ και το αντίστροφο.

Για την χρονική εξάρτηση, η εξίσωση: $E_y(x,t) = 2E_0[\sin(kx)\sin(\omega t)]$ γίνεται 0 παντού, όταν sin(ωt) = 0 ή διαφορετικά:

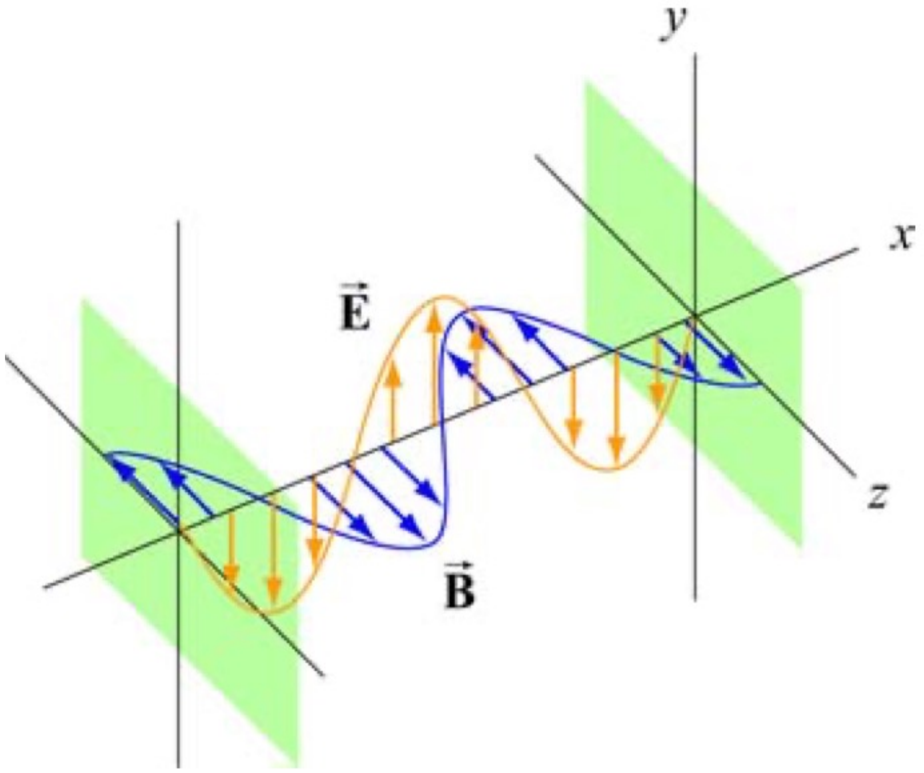
$$t = \frac{n\pi}{\omega} = \frac{n\pi}{2\pi/T} = \frac{nT}{2}, \; n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{όπου } T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \text{ η περίοδος}$$

Ωστόσο αυτή είναι η μέγιστη συνθήκη για το μαγνητικό πεδίο.

Αντίθετα με το διαδιδόμενο ηλεκτρομαγνητικό κύμα που το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο βρίσκονται πάντοτε σε φάση, στην περίπτωση του στάσιμου κύματος τα μαγνητικό πεδίο είναι 90^o εκτός φάσης από το ηλεκτρικό πεδίο.

Στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μπορούν να δημιουργηθούν περιορίζοντας τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μεταξύ δύο τέλεια ανακλώντες αγωγούς, όπως στο σχήμα:



Παραγωγή
Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων

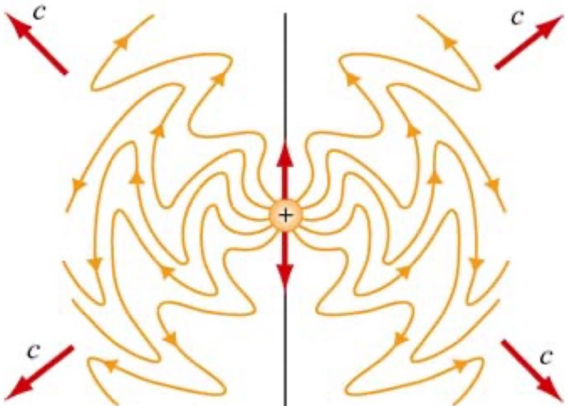
Παραγωγή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα παράγονται όταν ηλεκτρικά φορτία επιταχύνονται.

Δηλαδή ένα φορτίο πρέπει να ακτινοβολήσει (εκπέμψει) ενέργεια όταν επιταχυνθεί.

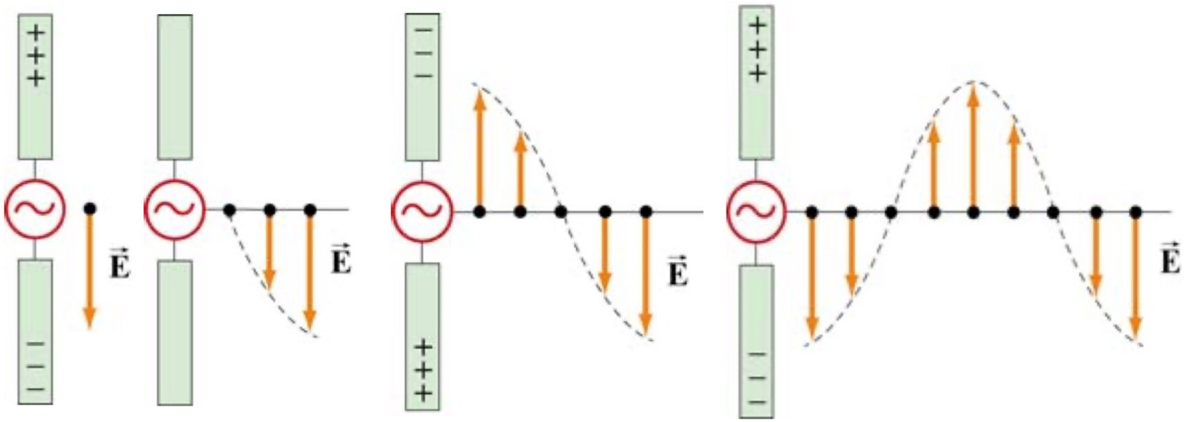
Ακτινοβολία δεν μπορεί να παραχθεί από ακίνητα φορτία ή φορτία τα οποία κινούνται με σταθερή ταχύτητα.

Οι ηλεκτρικές γραμμές που δημιουργούνται από ένα φορτίο που ταλαντώνεται φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



Ένας συνηθισμένος τρόπος για την παραγωγή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι η εφαρμογή μιας ημιτονοειδούς τάσης σε μια κεραία, προκαλώντας φορτία να συγκεντρωθούν στην άκρη της κεραίας.

Σαν αποτέλεσμα δημιουργούμε ένα ταλαντευόμενο ηλεκτρικό δίπολο.



Παραγωγή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Τη χρονική στιγμή t=0 τα άκρα της αντένας είναι φορτισμένα έτσι ώστε το πάνω τμήμα έχει θετικό φορτίο και το κάτω τμήμα έχει ίση ποσότητα αρνητικού φορτίου.

Το ηλεκτρικό πεδίο στην αντένα έχει φορά προς τα κάτω

Τα φορτία αρχίζουν να ελαττώνονται και μετά από χρόνο T/4 τα φορτία χάνονται στιγμιαία και το ηλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται.

Μετέπειτα αλλάζουν πόλωση τα τμήματα της αντένας και αρνητικά φορτία αρχίζουν να συσσωρεύονται στο πάνω τμήμα ενώ θετικά φορτία στο κάτω μέρος. Μετά από χρόνο T/4 (ή την χρονική στιγμή T/2) έχει επιτευχθεί μέγιστο και το ηλεκτρικό πεδίο έχει κατεύθυνση προς τα πάνω.

Καθώς η συσσώρευση φορτίων συνεχίζει να ταλαντώνεται με αποτέλεσμα να δημιουργούνται συνεχώς ηλεκτρικά πεδία που εναλλάσσουν πολικότητα, τα πεδία αυτά δημιουργούνται και απομακρύνονται με την ταχύτητα του φωτός.

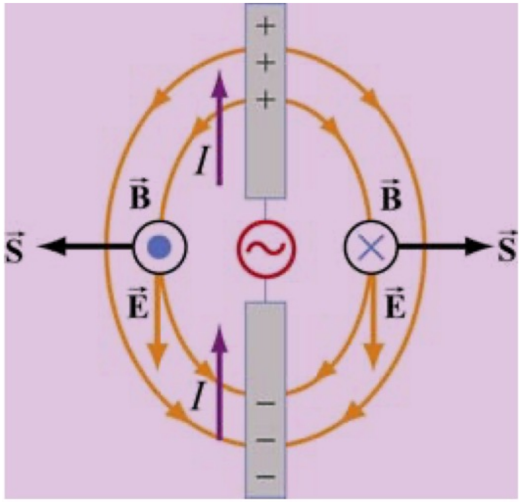
Η κίνηση των φορτίων δημιουργεί ταυτόχρονα, μεταβαλλόμενο ρεύμα το οποίο με τη σειρά του δημιουργεί μαγνητικό πεδίο το οποίο περικλείει την αντένα.

Η συμπεριφορά των πεδίων κοντά στην αντένα αναμένεται να είναι πολύ διαφορετική από τη συμπεριφορά μακριά από την αντένα.

Παραγωγή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Θεωρούμε μια αντένα, κάθε τμήμα της οποίας έχει μήκος ίσο με ένα τέταρτο του μήκους της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας.

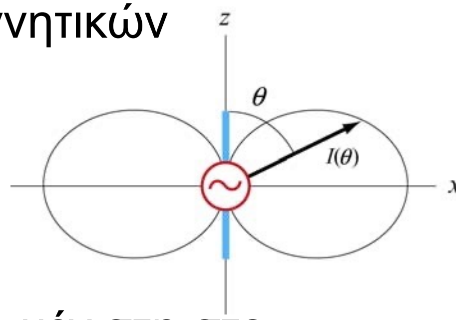
Εφόσον τα φορτία διεγείρονται και ταλαντώνονται μεταξύ των τμημάτων της αντένας από την εναλλασσόμενη τάση, μπορούμε να προσεγγίσουμε τη συμπεριφορά της αντένας αυτής σα ένα ταλαντευόμενο ηλεκτρικό δίπολο.



Το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο για το δίπολο αυτό της αντένας φαίνεται στο διπλανό σχήμα, για την περίπτωση που το ρεύμα έχει φορά προς τα πάνω.

Να σημειωθεί ότι τα διανύσματα Poynting για τη συγκεκριμένη κατάσταση και θέσεις έχουν φορά προς τα έξω.

Εν γένει, τα πεδία που δημιουργούνται κατά την ακτινοβολία κοντά στην αντένα είναι ιδιαίτερα πολύπλοκα. Σε αποστάσεις πολύ μεγαλύτερες από το μήκος κύματος της ακτινοβολίας και των τμημάτων της αντένας, η ακτινοβολία προκαλείται από την συνεχή επαγωγή μαγνητικών πεδίων από μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά πεδία και το αντίστροφο.



Και τα δύο πεδία ταλαντώνονται σε φάση και αλλάζουν σε πλάτος αντιστρόφως ανάλογα της απόστασης από την αντένα $1/r$

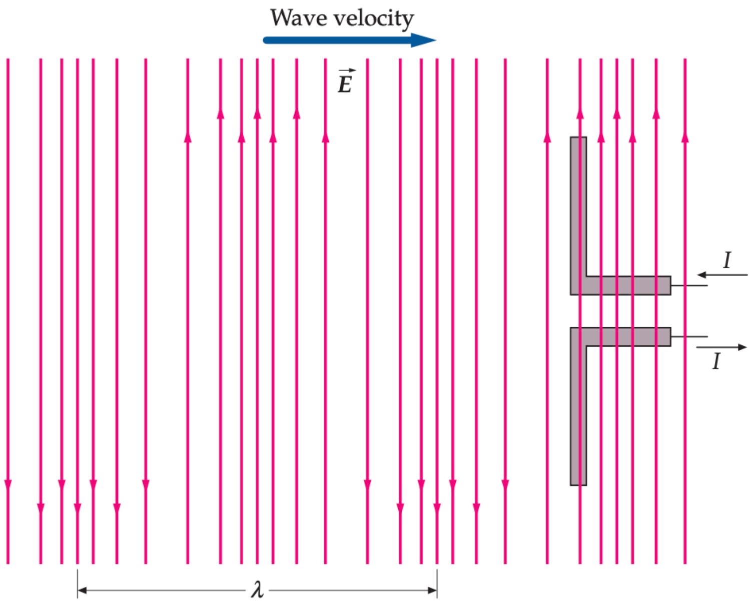
Η ένταση της μεταβολής αυτής αλλάζει ως $\sin^2\theta\,/r^2$ όπου θ είναι η γωνία όπως μετράται από τον άξονα της αντένας. Η ένταση είναι μέγιστη στο επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα του διπόλου και περνά από το μέσο του.

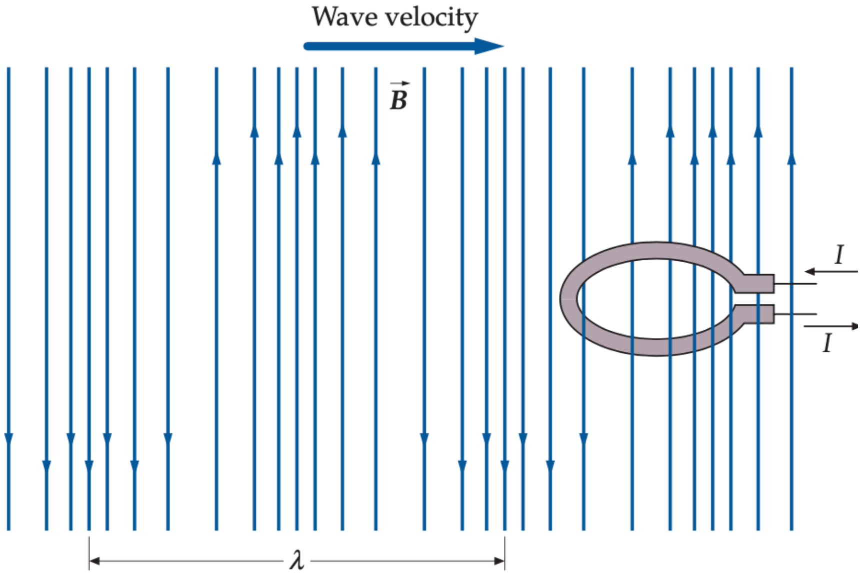
Ανίχνευση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα τηλεόρασης ή ράδιο μπορούν να ανιχνευτούν με μια ηλεκτρική διπολική αντένα που τοποθετείται παράλληλα στο ηλεκτρικό πεδίο του προσπίπτοντος ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα των ραδιο-τηλεοπτικών συχνοτήτων μπορούν να ανιχνευτούν με ένα βρόχο ο οποίος τοποθετείται κάθετα στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου του προσπίπτοντος κύματος. Ηλεκτρικό ρεύμα επάγεται στο βρόχο εξαιτίας του μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου του προσπίπτοντος κύματος.

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα στην περιοχή του ορατού φάσματος συχνοτήτων καταγράφονται σε φωτογραφικά films ή οφθαλμό που είναι ευαίσθητα στο ηλεκτρικό πεδίο του προσπίπτοντος κύματος





Αντένα - παράδειγμα

Μια αντέννα σε σχήμα βρόχου ακτίνας R=10cm χρησιμοποιείται για την ανίχνευση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στα οποία E_{rms}=0.150V/m. Αν το επίπεδο του βρόχου είναι κάθετο στο μαγνητικό πεδίο του ηλεκτρομαγνητικού κύματος βρείτε το rms της ηλεκτρεγερτικής δύναμης που επάγεται στον βρόχο όταν η συχνότητα του κύματος είναι (α) 600kHz και (β) 60MHz.

Από τον νόμο του Faraday έχουμε: $\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi_m}{dt}$

Το κύμα συχνότητας 600kHz μεταδίδεται με ταχύτητα c και το μήκος κύματος είναι

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} = 500m$$

Η διάσταση του βρόχου μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα για αυτό το μήκος κύματος και άρα η επιφάνεια του βρόχου είναι ομοιόμορφη.

$$\Phi_m = BA = \pi R^2 B$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\pi R^2 B}{dt} = -\frac{\pi R^2 \partial B}{\partial t}$$

$$\mathcal{E}_{rms} = \pi R^2 \left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_{rms} \quad \Rightarrow \mathcal{E}_{rms} = \pi R^2 \left(\frac{\partial B_0 \sin(kx - \omega t)}{\partial t}\right)_{rms}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{rms} = \pi R^2 \big(B_0 \omega(-\cos(kx - \omega t))\big)_{rms} \Rightarrow \mathcal{E}_{rms} = \pi R^2 \omega B_0/\sqrt{2} \Rightarrow \mathcal{E}_{rms} = \pi R^2 \omega B_{rms}$$

Αλλά: $E = cB$ και επομένως: $B_{rms} = \dfrac{E_{rms}}{c}$

Από τις 2 τελευταίες: $\mathcal{E}_{rms} = \pi R^2 \omega E_{rms} = \dfrac{2\pi^2 R^2 E_{rms}}{f}$