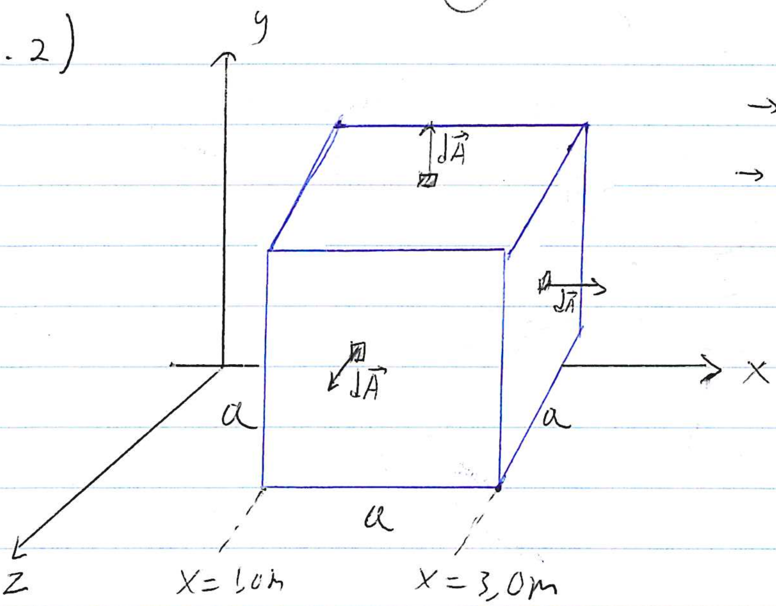
Ευτύχιος Καϊμακαμάκης

Problem 23.2)



→ $a = 2,0\,m$

→ $\vec{E} = [4,0\,\hat{i} - 3,0(y^2+2,0)\,\hat{j}]\ \frac{N}{C}$

→ $\Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}$

(a) Πάνω επιφάνεια: $\Phi_1 = -3,0\left(\frac{N}{C}\right)\int_0^a dx \int_0^a (a^2+2,0)\,dy$

Το y στην επιφάνεια είναι σταθερό => $y = a$

$= -6,0\left(\frac{Nm}{C}\right)\left[a^3 + 2,0\cdot y\right]_0^a = \boxed{-72,0\left(\frac{Nm^2}{C}\right)}$

(b) Κάτω επιφάνεια: $\Phi_2 = -3,0\left(\frac{N}{C}\right)\int_0^a dx \int_0^a (0^2+2,0)(-dy)$

$= \boxed{24,0\left(\frac{Nm^2}{C}\right)}$

(c) Αριστερή επιφάνεια: $\Phi_3 = 4,0\left(\frac{N}{C}\right)\int_0^a (-dx)\int_0^a dy = \boxed{-16,0\left(\frac{Nm^2}{C}\right)}$

(d) Πίσω επιφάνεια: $\boxed{\Phi_4 = 0}$ ($\vec{E}$ δεν έχει z συνιστώσα)

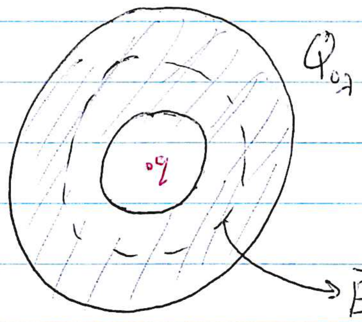
(e) $\Phi_{ολ} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \underbrace{\Phi_5}_{Δεξιά} + \underbrace{\Phi_6}_{Μπροστά}$

→ $\Phi_6 = 0$ (ομοίως με Φ_4)

→ $\Phi_5 = 4,0\left(\frac{N}{C}\right)\int_0^a dx\int_0^a dy = 16,0\left(\frac{Nm^2}{C}\right)$

=> $\boxed{\Phi_{ολ} = -48,0\left(\frac{Nm^2}{C}\right)}$

Problem 23.21)



$\to \vec{E} = 0$ (αγωγός)

$\to Q_{ολ} = 10 \cdot 10^{-6} C = 10^{-5} C$

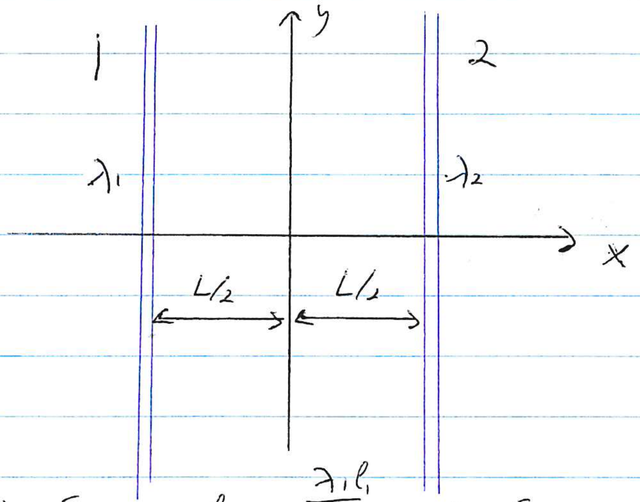
$\to q = 3{,}0 \cdot 10^{-6} C$

(a) Φορτίο τοιχώματος: $\boxed{q_u = -q = -3{,}0 \cdot 10^{-6} C}$

$\Rightarrow q_{ολ} = 0 \Rightarrow \Phi = 0$ (Gauss)

(β) Φορτίο εξωτερικής επιφάνειας: $\boxed{q_{εξ} = Q_{ολ} - q_u = 1{,}3 \cdot 10^{-5} C}$

Problem 23.30)



$\to L = 8{,}0\,cm$

$\to \lambda_1 = 6{,}0\,\mu C/m$

$\to \lambda_2 = -2{,}0\,\mu C/m$

Gauss: (1) $E_1 \cdot 2\pi x_1 l_1 = \dfrac{\lambda_1 l_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda_1}{x_1} = \dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{x+\frac{L}{2}}$

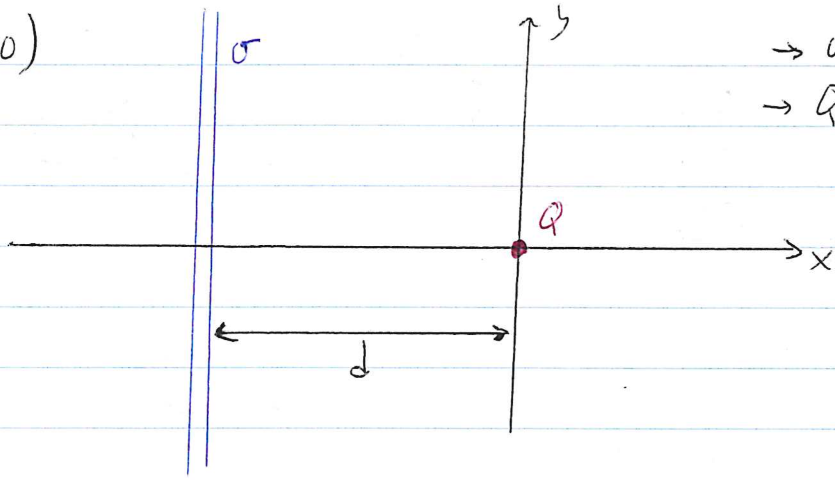
(2) $E_2 \cdot 2\pi x_2 l_2 = \dfrac{\lambda_2 l_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda_2}{x_2} = \dfrac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{x-\frac{L}{2}}$

$\to E_{ολ} = 0 \Rightarrow E_1 + E_2 = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{\lambda_1}{x+\frac{L}{2}} + \dfrac{\lambda_2}{x-\frac{L}{2}}\right) = 0$

$\Rightarrow \left(x + \frac{L}{2}\right)\lambda_2 = -\lambda_1\left(x - \frac{L}{2}\right)$

$\Rightarrow \boxed{x = \left(\dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)\dfrac{L}{2} = L = 8{,}0\,cm}$

Problem 23.40)



$\rightarrow \sigma = -2{,}00\ \mu C/m^2$

$\rightarrow Q = 6{,}00\ \mu C$

$d = 0{,}200m \longrightarrow$ (a) $x > 0 \Rightarrow \vec{E}_{ol} = 0$

(b) $x < 0 \Rightarrow \vec{E}_{ol} = 0$ $\Big\}$ πέραν του απείρου

$$\vec{E}_Q = k_e \frac{Q}{r^2}\hat{r} \xrightarrow[\text{άξονα } x]{\text{σημείο στον}} \vec{E}_Q = k_e \frac{Q}{x^2}\hat{\imath}$$

$$\underline{\text{Gauss.}}\quad E_\sigma 2A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_\sigma = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\imath} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\imath}, & x > -d \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\imath}, & x < -d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2\pi}\frac{Q}{\sigma} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2\pi}\ m^2$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\ m \Rightarrow \text{(a)} \boxed{x = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\ m}$$

$$\text{(b)} \boxed{x = -\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\ m}$$

(c) $d = 0{,}800\ m$

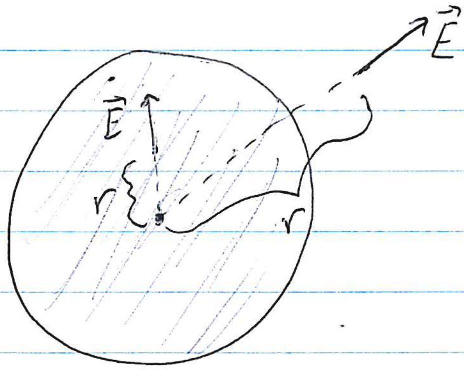
$\Rightarrow$ Η απάντηση δεν αλλάζει <u>αλλά</u> η θέση $x = -\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\ m$

βρίσκεται μεταξύ πλάκας και σωματιδίου $\Rightarrow$ <u>Απαγορεύεται</u>

$$\Rightarrow \boxed{x = +\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\ m}$$

στο χωρίο $-d < x < 0$ λόγω αντίθετων φορτίων, τα $\vec{E}_Q$ και $\vec{E}_\sigma$ γίνονται ομόρροπα και δεν αλληλεξουδετερώνονται

Problem 23.55)



σταθερά

$\rightarrow \vec{E} = (K r^4)\,\hat{r}$ (μέσα)

$\rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{ολ}}{r^2}\,\hat{r}$ (έξω)

$\rho(r)$: συνάρτηση του r

Gauss: $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\iiint \rho\, dV}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho\, r'^2 dr'$

$$\Rightarrow r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho\, r'^2 dr' = (K r^4)\, r^2 = K r^6$$

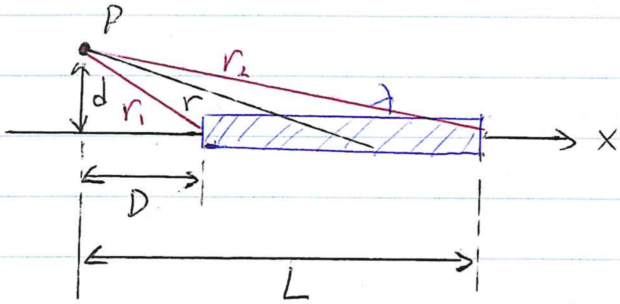
$$\Rightarrow \rho r^2 = \varepsilon_0 K \frac{d}{dr}(r^6)$$

$$\Rightarrow \rho r^2 = 6\varepsilon_0 K r^5$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = 6\varepsilon_0 K r^3}$$

Ευτύχιος Καϊμακάμης

Problem 24.26)



$\rightarrow \lambda = 2{,}00\ \mu C/m$

$\rightarrow d = D = \dfrac{L}{4{,}00}$

$\rightarrow dq = \lambda\, dx$

$\rightarrow r_1 = \sqrt{d^2+D^2} = \sqrt{2}\, d$

$\rightarrow r_2 = \sqrt{d^2+L^2} = \sqrt{17}\, d$

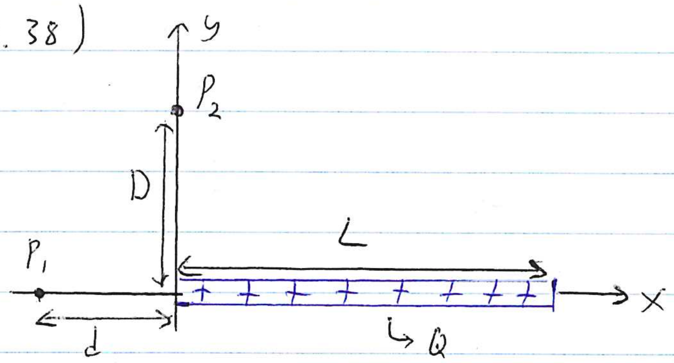
$\rightarrow r = \sqrt{d^2+x^2}$

$$\rightarrow V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_D^L \frac{dx}{\sqrt{d^2+x^2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+d^2}\right)\right]_d^{4d} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{4+\sqrt{17}}{1+\sqrt{2}}\right)$$

$$= \boxed{2{,}18 \cdot 10^4\ V}$$

Problem 24.38)



$\left.\begin{aligned}&\rightarrow L = 13{,}5\ cm\\ &\rightarrow Q = 43{,}6\ fC\end{aligned}\right\}\ \lambda = \dfrac{Q}{L}$

$\Rightarrow dq = \lambda\, dx$

$$(a)\ V(P_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r} = \frac{Q}{L}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L\frac{dx}{d+x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L}\left[\ln(x+d)\right]_0^L$$

$$= \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L}\ln\left(\frac{L+d}{d}\right)}$$

$$(b)\ d \rightarrow -x \Rightarrow V(P_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L}\ln\left(\frac{-L+x}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(P_1) = -\vec{\nabla}V\Big|_{x=-d} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L}\left(\frac{1}{x-L}-\frac{1}{x}\right)\Big|_{x=-d}\hat{\imath}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L}\left[\frac{\cancel{x}-\cancel{x}+L}{x(x-L)}\right]\Big|_{x=-d}\hat{\imath}$$

$$= \boxed{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{d(d+L)}\hat{\imath}}$$

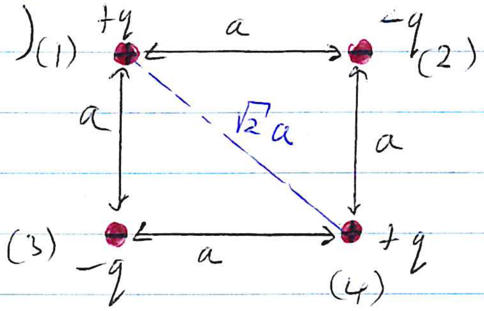
(c) $E_x < 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Γωνία } 180^\circ \text{ με τον άξονα } x}$

(d) $d = 6{,}20\ \text{cm} \Rightarrow \boxed{E_x(P_1) = 0{,}0321\ \text{N/C}}$

(e) $\boxed{E_y(P_1) = 0}$ $\longrightarrow$ Από συμμετρία ράβδου, σημεία πάνω στο άξονα x έχουν δυναμικό εξαρτώμενο μόνο από το x

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \Rightarrow \boxed{E_y = 0}$$

Problem 24.43)



$\rightarrow q = 2{,}30\ \mu C$

$\rightarrow a = 64{,}0\ \text{cm}$

$\rightarrow U_i = 0$ (καθόλου σωματίδια)

$$\rightarrow U_{1-2} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} \qquad \rightarrow U_{1-4} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2}a}$$

$$\rightarrow U_{1-3} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} \qquad \rightarrow U_{2-4} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

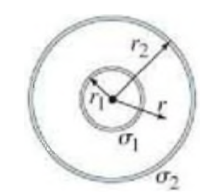
$$\rightarrow U_{2-3} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2}a} \qquad \rightarrow U_{3-4} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

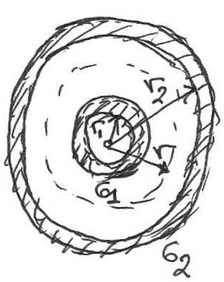
$$\Rightarrow U_f = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}\left(-1 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 - 1\right)$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right)$$

$$\Rightarrow W = U_f - U_i = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right) = \boxed{-1{,}92 \cdot 10^{-13}\ \text{J}}$$

6. Δύο λεπτά ομόκεντρα σφαιρικά κελύφη ακτίνας r_1 και r_2 ($r_1 < r_2$) είναι φορτισμένα και περιέχουν ίδιου πρόσημου ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ_1 και σ_2 αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο (α) $0 < r < r_1$ (β) $r_1 < r < r_2$ και (γ) $r > r_2$. (δ) Βρείτε την συνθήκη για την οποία $E = 0$ για $r > r_2$. (ε) Βρείτε την συνθήκη για την οποία $E = 0$ για $r_1 < r < r_2$. Θεωρήστε αμελητέο το πάχος των σφαιρικών κελυφών.





Από τη συμμετρία του προβλήματος, θα μπορούσαμε αμέσως να συμπεράνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι στην ακτινική διεύθυνση, και ότι είναι συνάρτηση μόνο του r.

Θεωρούμε ως επιφάνεια Gauss έναν σφαιρικό φλοιό ομόκεντρο με τους σφαιρικούς φλοιούς, και με ακτίνα r στην περιοχή όπου θα θέλαμε να προσδιορίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο.

Σύμφωνα με τον νόμο του Gauss, θα έχουμε:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = Q_{\varepsilon\sigma}/\varepsilon_0 \Rightarrow 4\pi r^2 E = Q_{\varepsilon\sigma}/\varepsilon_0$$

(α) Στην περιοχή όπου $r < r_1$, $Q_{\varepsilon\sigma} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$.

(β) Στην περιοχή όπου $r_1 < r < r_2$, $Q_{\varepsilon\sigma} = 4\pi r_1^2 \sigma_1 \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{r_1}{r}\right)^2 \hat{r}$

(γ) Στην περιοχή όπου $r > r_2$, $Q_{\varepsilon\sigma} = 4\pi\left(r_1^2\sigma_1 + r_2^2\sigma_2\right) \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{\left(r_1^2\sigma_1 + r_2^2\sigma_2\right)}{\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

(δ) Το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι $\vec{E} = \vec{0}$ αν $r_1^2\sigma_1 = -r_2^2\sigma_2$. Αυτό ισοδυναμεί με το να έχουμε τους δύο σφαιρικούς φλοιούς με ίσα και αντίθετα φορτία.

(ε) $\vec{E} = \vec{0}$ για $r_1 < r < r_2$ είναι δυνατόν μόνο αν $\sigma_1 = 0$, ανεξάρτητα της τιμής της σ_2.