Συμμετρίες

Οι συμμετρίες είχαν και έχουν σημαντικό και κεντρικό ρόλο στη σωματιδιακή φυσική

Δεν είναι απαραίτητο οι συμμετρίες να εμφανιστούν σε αντικείμενα ή στη κίνησή τους

Μπορούν να εμφανιστούν στην ομάδα όλων των δυνατών κινήσεων ή στις εξίσωσεις κίνησης

1917: Emmy Noether:

- Κάθε συμμετρία οδηγεί σε κάποιο νόμο διατήρησης
- Κάθε νόμος διατήρησης αντικατοπτρίζει μια κρυμένη συμμετρία

Συμμετρία	Νόμος διατήρησης
μετάθεση στο χώρο	ορμή
περιστροφή στο χώρο	στροφορμή
μετάθεση στο χρόνο	ενέργεια
μετασχηματισμός βαθμίδος	φορτίο

Γνωστά από κλασική μηχανική

Συμμετρίες

- Παρόμοια και στην κβαντική μηχανική: $\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \left\langle \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{A}\right] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}\right\rangle$

$\Rightarrow \frac{d\langle E\rangle}{dt} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = 0$ Hamiltonian ανεξάρτητη του χρόνου

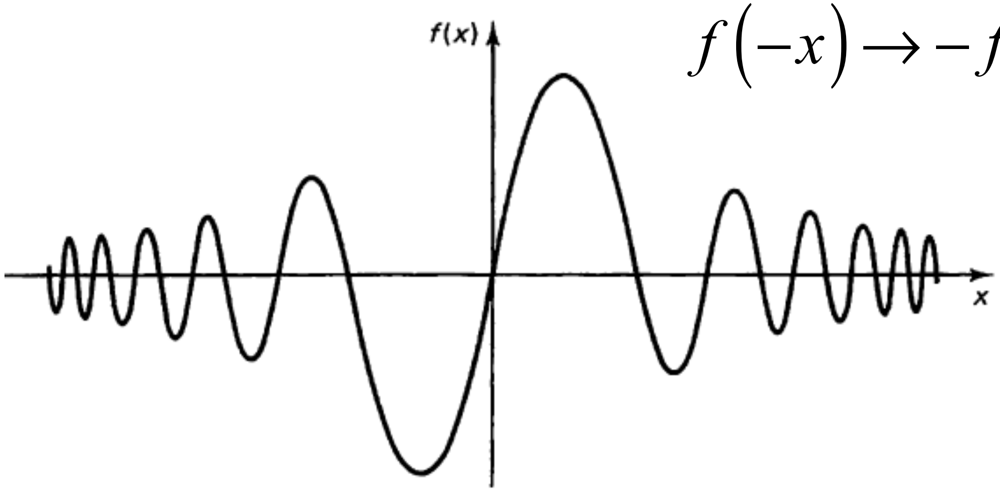
$\Rightarrow \frac{d\langle p\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right] = 0$ Hamiltonian ανεξάρτητη του x

$\Rightarrow \frac{d\langle L\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi}\right] = 0$ Hamiltonian ανεξάρτητη της φ

Συμμετρίες

Συμμετρία ορίζεται σαν την διαδικασία η οποία ενεργώντας σε κάποιο σύστημα το αφήνει αμετάβλητο

το μετασχηματίζει σε μια κατάσταση πανομοιότυπη με την αρχική



$$f(-x) \to -f(x)$$

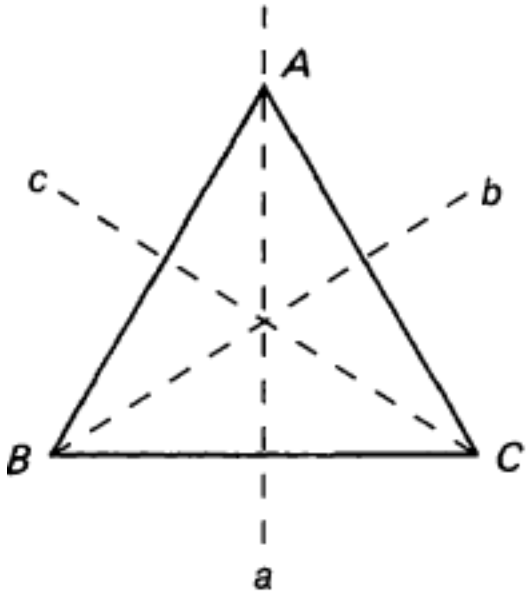
Πολλές ιδιότητες της συνάρτησης μπορούν να εξαχθούν παρατηρώντας απλά και μόνο ότι είναι περιττή χωρίς να ξέρουμε την συναρτησιακή της μορφή

Αυτή είναι και η συμμετρία της συνάρτησης: αλλαγή του πρόσημου του ορίσματος και πολλαπλασιασμός του αποτελέσματος με -1

$$f(x) \to -f(-x)$$

Συμμετρίες

Ένα απλό παράδειγμα συμμετρίας είναι οι περιστροφές ενός ισόπλευρου τριγώνου



Περιστροφές κατά 120^o σύμφωνα ή αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, περιστροφές ως προς τους άξονες α, b ή c, αφήνουν το σύστημα αμετάβλητο

Ανάλογα περιστροφή κατά 240^o προς μια κατεύθυνση είναι ίδια με περιστροφή 120^o στην αντίθετη κατεύθυνση

Περιστροφές σε 3-διαστάσεις μιας σφαίρας

Μπορούμε να περιγράψουμε τις περιστροφές με 3 γωνίες

Άπειρες διεργασίες συμμετρίας αφού οι γωνίες μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή

Συμμετρίες

Για τις διεργασίες συμμετρίας αυτές υπάρχουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- Μια διεργασία συμμετρίας ακολουθούμενη από μια άλλη διεργασία συμμετρίας είναι επίσης διεργασία συμμετρίας $R_i R_j = R_k$
- Αν δεν εφαρμόσουμε κάποια διεργασία συμμετρίας, είναι επίσης συμμετρία $IR_i = R_i I = R_i$
- Για κάθε διεργασία συμμετρίας, υπάρχει μια διεργασία συμμετρίας που αναιρεί την προηγούμενη ώστε το καθαρό αποτέλεσμα των δυο διεργασιών να μην επιφέρει καμιά μεταβολή στο σύστημα $R_i R_i^{-1} = R_i^{-1} R_i = I$
- Για οποιεσδήποτε 3 συμμετρίες, το αποτέλεσμα εφαρμόζοντας την #1, ακολουθούμενη από το αποτέλεσμα της # 2 ακολουθούμενη από την #3 είναι το ίδιο με το αποτέλεσμα της #1 ακολουθούμενη από την #2 και κατόπιν εφαρμόζοντας την #3 $R_i\left(R_j R_k\right) = \left(R_i R_j\right) R_k$

Οι παραπάνω είναι οι ιδιότητες που προσδιρίζουν μια ομάδα (group).
Η θεωρία των ομάδων είναι το μαθηματικό πλαίσιο για την μελέτη συμμετριών και αποτελεί ένα σημαντικό κεφάλαιο της φυσικής στοιχειωδών σωματιδίων

- Προσοχή: μια διεργασία συμμετρίας #1 ακολουθούμενη από μια διεργασία #2 δεν είναι απαραίτητα το ίδιο αποτέλεσμα από την διεργασία #2 ακολουθούμενη από την διεργασία #1.

  Η περίπτωση του ισόπλευρου τριγώνου ικανοποιεί την διαδικασία αυτή, ενώ η περίπτωση της σφαίρας δεν την ικανοποιεί.

  Ομάδες που ισχύει η αντιμεταθετική αυτή ιδιότητα ονομάζονται αβελιανές ομάδες και μή αβελιανές είναι αυτές που δεν ισχύει

Συμμετρίες

Ενδιαφέροντες ομάδες στην φυσική:

- Συνήθως αποτελούν ομάδες nxn πινάκων μοναδιαίων πινάκων $U(n)$
  - ✓ μοναδιαίοι πίνακες: ($U^{-1} = \tilde{U}^{*}$)
- Συχνά περιοριζόμαστε στους μοναδιαίους πίνακες που η ορίζουσά τους είναι 1: SU(n)
- Για μοναδιαίους πίνακες πραγματικούς πίνακες οι αντίστοιχες ομάδες είναι οι: O(n)
- Και οι πραγματικοί μοναδιαίοι πίνακες με ορίζουσα 1 αποτελούν τις λεγόμενες ομάδες SO(n)
  - ✓ Τέτοιο παράδειγμα είναι οι πίνακες περιστροφών σε χώρο n-διαστάσεων
  - ✓ SU(2) είναι οι πίνακες που αντιπροσωπεύουν στη κβαντική μηχανική τους πίνακες Pauli
  - ✓ SU(2) και SU(3) είναι οι πίνακες των περισσότερο σημαντικών ομάδων στη φυσική στοιχειωδών σωματιδίων

- Συχνά μιλάμε για αναπαράσταση μιας ομάδας από μια ομάδα πινάκων. Αυτό ισχύει αν για κάθε στοιχείο α της ομάδας υπάρχει ένας αντίστοιχος πίνακας M_{α} και η αντιστοιχία ικανοποιεί πολλαπλασιασμό στοιχείων της ομάδας, δηλαδή αν ισχύει $ab = c \rightarrow M_a M_b = M_c$
- Μια αναπαράσταση ομάδας θεωρείται πιστή αν κάθε στοιχείο της ομάδας αντιπροσωπεύεται από διαφορετικό πίνακα. Η πιστή αναπαράσταση με τη μικρότερη διάσταση αποτελεί τη θεμελειώδη αναπαράσταση

Στροφορμή

Μερικές πρακτικές πληροφορίες και επισκόπηση για διεργασίες που χρησιμοποιούν στροφορμή και ιδιαίτερα πρόσθεση στροφορμών με έμφαση στα spins

Θεωρήστε ότι έχει ένα διάνυσμα $\vec{J}$

Αν υπάρχει κάποιος αντιμεταθετικός κανόνας μεταξύ των καρτεσιανών συνιστωσών του

$$\left[J_i, J_j\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k \quad \text{όπου} \quad \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i,j,k \text{ όλα διαφορετικά και κυκλικά} \\ -1 & i,j,k \text{ όλα διαφορετικά και μη κυκλικά} \\ 0 & \text{όποια άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

Levi-Civita

τότε λέμε ότι το $\vec{J}$ αντιπροσωπεύει κάποια στροφορμή (τροχιακή ή ιδιοστροφορμή)

Εξαιτίας της αντιμεταθετικής ιδιότητας, δεν μπορούμε να μετρήσουμε ταυτόχρονα δυο οποιεσδήποτε συνιστώσες της στροφορμής

Μπορούμε ωστόσο να μετρήσουμε ταυτόχρονα μια συνιστώσα και το μέτρο της στροφορμής

Αυτό γιατί: $\vec{J}\cdot\vec{J} = J^2$ και αυτό αντιμετατίθεται με οποιαδήποτε συνιστώσα J_i: $\left[J_i, J^2\right] = 0$

Τροχιακή στροφορμή

Ορίζουμε: $\vec{J} \rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = -i\hbar \vec{r} \times \vec{\nabla}$

Σύμφωνα με την κβαντομηχανική, μετρήσεις δίνουν συγκεκριμένες διακριτικοποιημένες τιμές για L^2 και L_z

L^2 μετρήσεις: $l(l+1)\hbar^2$ όπου $l = 0,1,2,\cdots$

L_z μετρήσεις: $m_l \hbar$ όπου $m_l = \underbrace{-l,-l+1,\cdots,l-1,l}_{2l+1 \text{ συνδυασμοί}}$

Σημειωτέον ότι παρόλο που το μέτρο της στροφορμής είναι $\left|\vec{J}\right|^2 = \hbar\sqrt{l(l+1)}$

η z-συνιστώσα της στροφορμής δεν μπορεί να πάρει την μέγιστη τιμή: $J_z < \left|\vec{J}\right|$

γιατί τότε J_x, J_y θα γίνουν 0 και τότε θα παραβιαστεί ο περιορισμός της αβεβαιότητας

Ιδιοστροφορμή - spin

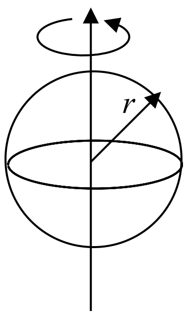
Το spin είναι μια ενδογενής ιδιότητα των στοιχειωδών σωματιδίων

- Στοιχείωδη φερμιόνια όλα έχουν spin ½ - quarks και λεπτόνια
- Φορείς δυνάμεων: (μποζόνια βαθμίδος) όλα έχουν spin 1
- Το μποζόνιο Higgs έχει spin 0, ενώ το graviton πιστεύεται ότι έχει spin 2

Το spin δεν εξηγήται σαν κάποια περιστροφική κίνηση στο χώρο γύρω από κάποιο άξονα

Το γεγονός ότι η κλασική αυτή εικόνα δεν ισχύει μπορεί να εξηγηθεί με το ακόλουθο:

έστω ότι το ηλεκτρόνιο περιστρέφεται γύρω από άξονα και έστω ότι μπορεί



να αναπαρασταθεί σαν μια στερεά σφαίρα, ακτίνας r , μάζας m που περιστρέφεται με στροφορμή $\hbar/2$

Πειραματικά ξέρουμε ότι $r_e < 10^{-16}\,cm$

Θεωρώντας το πάνω όριο, και χρησιμοποιώντας τη μάζα του ηλεκτρονίου μπορούμε να προσδιορίσουμε την ροπή αδράνειας του ηλεκτρονίου

$I_e = \frac{2}{5} m r_e^2$ Η γωνιακή ταχύτητα θα είναι: $\omega = \frac{\upsilon}{r_e}$ και η στροφορμή: $L = I\omega$

Αλλά: $\frac{\hbar}{2} = \frac{2}{5} m r_e^2 \frac{\upsilon}{r_e} \Rightarrow \upsilon = \frac{5\hbar}{4 m r_e}$ για $m_e = 9\times 10^{-31} kg$ και $r_e = 10^{-18} m$ έχουμε:

$$\upsilon = 10^{14}\, m/s = 10^{6} c$$

Στην κλασική απεικόνιση αυτή, μπορούμε να εξηγήσουμε το 1/εκατομμυριοστό της μετρούμενης ιδιοστροφορμής

Ιδιοστροφορμή

Συμβολίζοντας την ιδιοστροφορμή με $\vec{s}$

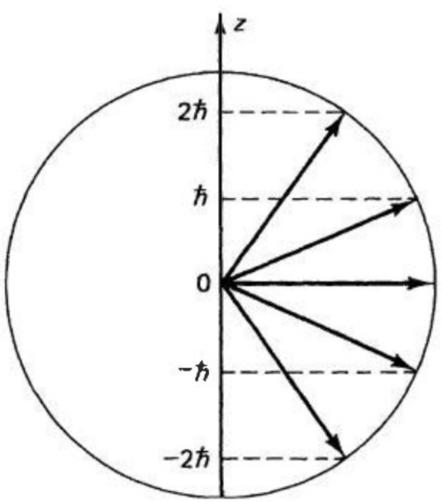
Μετρήσεις του μέτρου της ιδιοστροφορμής θα είναι: $s(s+1)\hbar^2$ όπου: $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \cdots$

Αντίθετα με την τροχιακή στροφορμή, η κβαντική τιμή της ιδιοστροφορμής μπορεί να γίνει ημιακέραια (φερμιόνιο) ή ακέραια (μποζόνιο)

Μετρήσεις της z-συνιστώσας δίνει: $m_s\hbar$ όπου: $m_s = \underbrace{-s, -s+1, \cdots, s-1, s}_{2s+1 \text{ συνδυασμοί}}$

Όταν αναφερόμαστε σε spin s σωματίδιο, αναφερόμαστε στην τιμή

Σημειωτέον: ενα δεδομένο σωματίδιο μπορεί να έχει οποιαδήποτε τροχιακή στροφορμή αλλά για κάθε τύπο σωματιδίου η τιμή της ιδιοστροφορμής είναι καθορισμένη



Παράδειγμα: *l* = 2

$$L^2 = l(l+1)\hbar^2 = 6\hbar^2 = 2.45\hbar$$

L_z μπορεί να πάρει μόνο τις τιμές: $-2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar$

L_z δεν μπορεί να είναι καθαρά στην z-διεύθυνση

Ανάλογα για το spin

$$s^2 = s(s+1)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 = 0.866\hbar$$

s_z έχει τιμές: $-\hbar/2, \hbar/2$

Ιδιοστροφορμή 1/2

Από την στιγμή που όλα τα quarks και λεπτόνια είναι φερμιόνια με spin ½ χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή και σημασία για τις ιδιότητές τους

Φυσικά τα πρωτόνια και νετρόνια που είναι σύνθετα σωματίδια (βαριόνια), αποτελούνται από 3 quarks και έχουν επίσης spin ½.

Συμβολίζουμε την κατάσταση σε συμβολισμό ket ως: $\left|s, m_s\right\rangle \xrightarrow{spin\ 1/2} \left|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right\rangle$

με εναλλακτικό συμβολισμό ως: $m_s = +\frac{1}{2}\hbar$(spin πάνω) και $m_s = +\frac{1}{2}\hbar$ (spin κάτω)

Η αναπαράσταση των kets είναι καλύτερη με την χρήση spinors διανυσμάτων:

$$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Η πιο γενική περίπτωση spinor – διανύσματος είναι: $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

όπου *α* και *β* είναι μιγαδικοί και αντιπροσωπεύουν την πιθανότητα η μέτρηση του s_z να δώσει $+\hbar/2$ ή $-\hbar/2$ αντίστοιχα και ικανοποιούν τη συνθήκη κανονικοποίησης $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

Pauli spin πίνακες

Εφόσον αναπαραστούμε τα διάφορα μεγέθη με ερμιτιανούς τελεστές, που με τη σειρά τους μπορούν να γραφούν σε μορφή πινάκων, για το δυσδιάστατο spin-1/2 χώρο, η μορφή των τελεστών αυτών θα είναι 2x2 πίνακες

Εισάγουμε τους πίνακες Pauli με καρτεσιανές συνιστώσες:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Μπορούμε να εκφράσουμε έτσι τον τελεστή του spin: $\hat{\vec{s}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\vec{\sigma}}$

Τα ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές κάθε καρτεσιανής συνιστώσας είναι: $s_i|x_i\rangle = \lambda_i|x_i\rangle$

x-συνιστώσα:

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\lambda_x I - S_x) = 0 \Rightarrow \lambda_x^2 - \frac{\hbar^2}{4} = 0 \Rightarrow \lambda_x = \pm\frac{\hbar}{2}$$

Αντικαθιστώντας τις λύσεις για τις ιδιοτιμές, βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα:

$\lambda_{x,+} = +\frac{\hbar}{2}$ δίνει: $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = b \\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \end{matrix} \quad \left\{ |\chi_{x+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$

$\lambda_{x,-} = -\frac{\hbar}{2}$ δίνει: $\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = -b \\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \end{matrix} \quad \left\{ |\chi_{x-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right.$

Pauli spin πίνακες

y-συνιστώσα:

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(\lambda_y I - S_y\right) = 0 \Rightarrow \lambda_y^2 - \frac{\hbar^2}{4} = 0 \Rightarrow \lambda_y = \pm\frac{\hbar}{2}$$

Αντικαθιστώντας τις λύσεις για τις ιδιοτιμές, βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα:

$$\lambda_{y,+} = +\frac{\hbar}{2} \quad \text{δίνει:} \quad \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} a = -ib \\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \end{array} \left\{ \left|\chi_{y+}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right.$$

$$\lambda_{y,-} = -\frac{\hbar}{2} \quad \text{δίνει:} \quad \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} a = ib \\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \end{array} \left\{ \left|\chi_{y-}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right.$$

z-συνιστώσα:

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(\lambda_z I - S_z\right) = 0 \Rightarrow \lambda_z^2 - \frac{\hbar^2}{4} = 0 \Rightarrow \lambda_z = \pm\frac{\hbar}{2}$$

Αντικαθιστώντας τις λύσεις για τις ιδιοτιμές, βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα:

$$\lambda_{z,+} = +\frac{\hbar}{2} \quad \text{δίνει:} \quad \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} b = 0 \\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \end{array} \left\{ \left|\chi_{z+}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\lambda_{z,-} = -\frac{\hbar}{2} \quad \text{δίνει:} \quad \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} a = 0 \\ |a|^2 + |b|^2 = 1 \end{array} \left\{ \left|\chi_{z-}\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$$

Παράδειγμα

Υποθέστε ότι ένα ηλεκτρόνιο βρίσκεται στη κατάσταση $\left|\psi\right\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ (κανονικοποιημένη)

(α) Ποια η αναμενόμενη τιμή του S_x?

Τι τιμές μπορείτε να βρείτε για το S_x και με ποια πιθανότητα;

(β) Επαναλάβατε το (α) μέρος για S_y και S_z

Λύση

$\left|S_x\right\rangle = \left\langle\psi\right|\hat{S}_x\left|\psi\right\rangle$ και αν $\left|\psi\right\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ τότε: $\left\langle\psi\right| = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix}$

Έχουμε: $\left|S_x\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\frac{4}{5}$ αρκετά κοντά σε $\frac{\hbar}{2}$

Οι επιμέρους πιθανότητες για $+\hbar/2$ και $-\hbar/2$ για το S_x:

$$P\left(S_x = +\frac{\hbar}{2}\right) = \left|\left\langle\chi_{x+}\middle|\psi\right\rangle\right|^2 = \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}\right|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{9}{10}$$

$$P\left(S_x = -\frac{\hbar}{2}\right) = \left|\left\langle\chi_{x-}\middle|\psi\right\rangle\right|^2 = \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}\right|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{1}{10}$$

Το οποίο αποδεικνύει την αναμενόμενη τιμή του S_x: $+(\hbar/2)(9/10) + (-\hbar/2)(1/10) = 4\hbar/10$

Παράδειγμα

Για το (β) ερώτημα θα έχουμε: $\left\langle S_y \right\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\left(\frac{-2i}{5} + \frac{2i}{5}\right) = 0$

$$P\left(S_y = +\frac{\hbar}{2}\right) = \left|\left\langle \chi_{y+} \middle| \psi \right\rangle\right|^2 = \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P\left(S_y = -\frac{\hbar}{2}\right) = \left|\left\langle \chi_{y-} \middle| \psi \right\rangle\right|^2 = \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\left\langle S_z \right\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{4}{5}\right) = -\frac{\hbar}{2}\frac{3}{5}$$

$$P\left(S_z = +\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{5}$$

$$P\left(S_z = -\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{4}{5}$$

Τα οποία μπορούμε να γράψουμε απευθείας αφού $\hat{S}_z$ διαγώνιο στην αναπαράσταση αυτή

Ιδιότητες των Pauli πινάκων

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} I + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

$$\left[\sigma_i, \sigma_j\right] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

$\left\{\sigma_i, \sigma_j\right\} = 2\delta_{ij} I$ αντιμεταθέτης $\left\{A, B\right\} \equiv AB + BA$

Για δυο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ ισχύει: $\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}\right) = \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) I + i\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$

Περιστροφές spinors

Μια ιδιαίτερη ιδιότητα των spinors είναι ο τρόπος με τον οποίο περιστρέφονται στο χώρο

Περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από τον z-άξονα πραγματοποιείται πολλαπλασιάζοντας το spinor με τον πίνακα $U_z\left(\theta\right) = e^{-i\theta\sigma_z/2}$

Γενική περιστροφή κατά γωνία θ ως προς άξονα-n είναι:

$$U_z\left(\theta\right) = e^{-i\theta\vec{\sigma}\cdot\hat{n}/2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} - in_z\sin\frac{\theta}{2} & c.c. \\ \left(-in_x + n_y\right)\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} + in_z\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

και άρα $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = U\left(\theta\right)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

Πρακτικά, αν θεωρήσουμε θ=2π τότε U(2π) = -1. Δηλαδή spin-1/2 spinors ανακτούν την διεύθυνσή τους μετά από περιστροφή 4π

Πρόσθεση στροφορμών

Είδαμε ότι καταστάσεις στροφορμών μπορούν να αναπαρασταθούν με kets με τη μορφή:

$$|l, m_l\rangle \qquad |s, m_s\rangle$$

Για παράδειγμα το ηλεκτρόνιο στο άτομο του υδρογόνου το οποίο καταλαμβάνει:

- τροχιακή κατάσταση $|3, -1\rangle \longrightarrow l=3 \;\; m_l=-1$
- spin κατάσταση $|1/2, 1/2\rangle \longrightarrow s=1/2 \;\; m_s=1/2$

Μπορεί να χρειαστούμε την ολική στροφορμή **L+S**:

Πως προσθέτουμε τις στροφορμές J_1 και J_2 για να έχουμε: $\mathbf{J} = \mathbf{J_1} + \mathbf{J_2}$

Όπως έχουμε προαναφέρει, μπορούμε να δουλέψουμε με το μέτρο και μια μόνο συνιστώσα:

- Τι θα πάρουμε αν προσθέσουμε τις καταστάσεις: $|j_1, m_1\rangle$ και $|j_2, m_2\rangle$
  - Οι z-συνιστώσες απλά προστίθενται: $\mathbf{m = m_1 + m_2}$
  - Τα μέτρα όμως εξαρτώνται από τους σχετικούς προσανατολισμούς των J_1 και J_2:
    - Αν είναι παράλληλα απλά προσθέτουμε τα μέτρα
    - Αν είναι αντι-παράλληλα απλά αφαιρούμε τα μέτρα
    - Στην γενική περίπτωση: $j = |j_1-j_2|, |j_1-j_2|+1, |j_1-j_2|+2, \ldots, (j_1+j_2)-1, (j_1+j_2)$

Πρόσθεση στροφορμών

Για παράδειγμα:

- Ένα σωματίδιο με σπιν 1 βρίσκεται σε τροχιακή στροφορμή l=4

  Θα έχουμε: **J = 5** ($J^2=30\hbar^2$) **J = 4** ($J^2=20\hbar^2$), **J=3** ($J^2=12\hbar^2$)

- Ένα quark και ένα αντι-quark σε δέσμια κατάσταση με μηδενική τροχιακή στροφορμή:

  $\underbrace{j=½+½=1}$, $\underbrace{j=½-½=0}$

  "Διανυσματικά" μεσόνια (ρ, K*, φ, ω)

  "Ψευδο-βαιθμωτά" μεσόνια (π, K's, η, η')

- Πρόσθεση τριων στροφορμών: πρώτα προσθέτουμε τις 2 και μετά την $3^{η}$
  - Για την περίπτωση των 2 quarks, προσθέτοντας την τροχιακή στροφορμή l >0 :

    $l+1$, l, $l-1$

- Τροχιακός κβαντικός αριθμός πρέπει να είναι ακέραιος και επομένως:
  - Όλα τα μεσόνια (δέσμια κατάσταση quark-αντι-quark) έχουν ακέραιο σπιν (μποζόνια)
  - Όλα τα βαρυόνια (δέσμια κατάσταση 3 quarkς) έχουν ημι-ακέραιο σπιν (φερμιόνια)

Πρόσθεση στροφορμών

- Πρόσθεση τριων στροφορμών: πρώτα προσθέτουμε τις 2 και μετά την 3η
- Πρόσθεση τριων quarks σε κατάσταση με μηδενική τροχιακή στροφορμή:

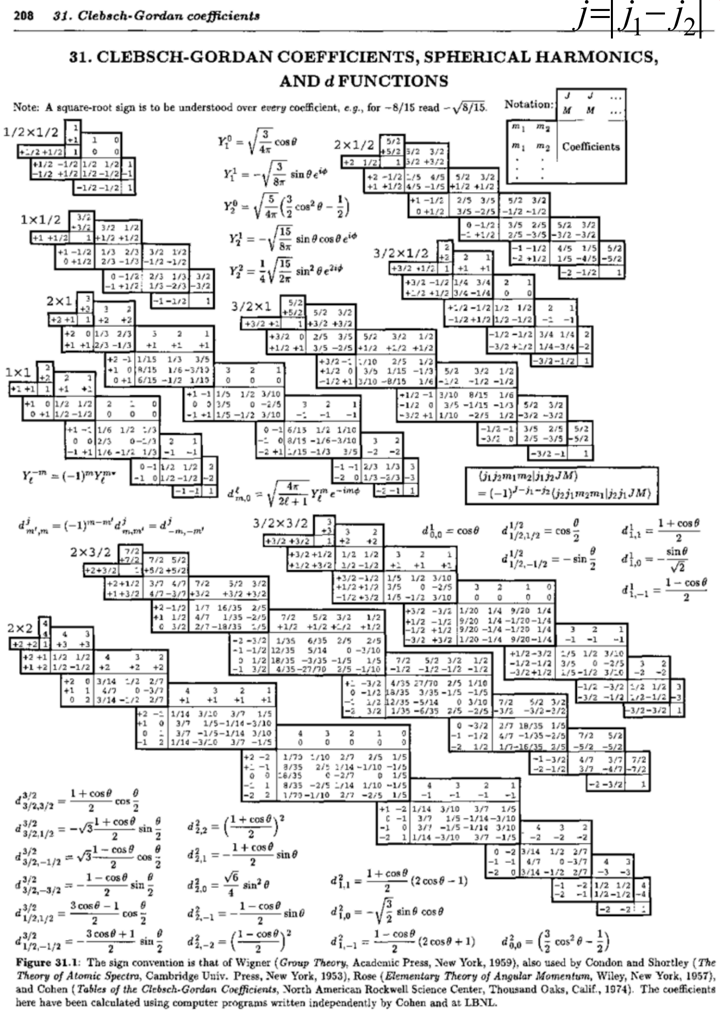
Από δυο quarks (το καθένα με spin ½)	Πρόσθεση του 3ου quark (επίσης με spin ½)	
	$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	Decuplet
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$		
	$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	
		Octets
$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$		
	$0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	

Πρόσθεση στροφορμών

- Πέρα από την ολική στροφορμή, αρκετές φορές χρειαζόμαστε συγκεκριμένες καταστάσεις:

$$\left|j_1 \;\; m_1\right\rangle \left|j_2 \;\; m_2\right\rangle = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C^{j\,j_1 j_2}_{m\,m_1 m_2} \left|j \; m\right\rangle, \quad \mu\varepsilon \; m = m_1 + m_2$$

Clebsch-Gordan coefficients



(Particle Physics Booklet, internet, βιβλία, κλπ)

$2 \times 1/2$

m_1	m_2	M	$J = 5/2$	$J = 3/2$
+2	1/2	+5/2	1	
+2	−1/2	+3/2	1/5	4/5
+1	+1/2	+3/2	4/5	−1/5
+1	−1/2	+1/2	2/5	3/5
0	+1/2	+1/2	3/5	−2/5
0	−1/2	−1/2	3/5	2/5
−1	+1/2	−1/2	2/5	−3/5
−1	−1/2	−3/2	4/5	1/5
−2	+1/2	−3/2	1/5	−4/5
−2	−1/2	−5/2	1	

Πρόσθεση στροφορμών

(θεωρήστε τετραγωνική ρίζα για τις αναγραφόμενες τιμές)

$2 \times 1/2$

m=5/2

		5/2
		+5/2
+2	1/2	1

m=3/2

		5/2	3/2
		+3/2	+3/2
+2	−1/2	1/5	4/5
+1	+1/2	4/5	−1/5

m=1/2

		5/2	3/2
		+1/2	+1/2
+1	−1/2	2/5	3/5
0	+1/2	3/5	−2/5

m= -1/2

		5/2	3/2
		−1/2	−1/2
0	−1/2	3/5	2/5
−1	+1/2	2/5	−3/5

m= -3/2

		5/2	3/2
		−3/2	−3/2
−1	−1/2	4/5	1/5
−2	+1/2	1/5	−4/5

m= -5/2

		5/2
		−5/2
−2	−1/2	1

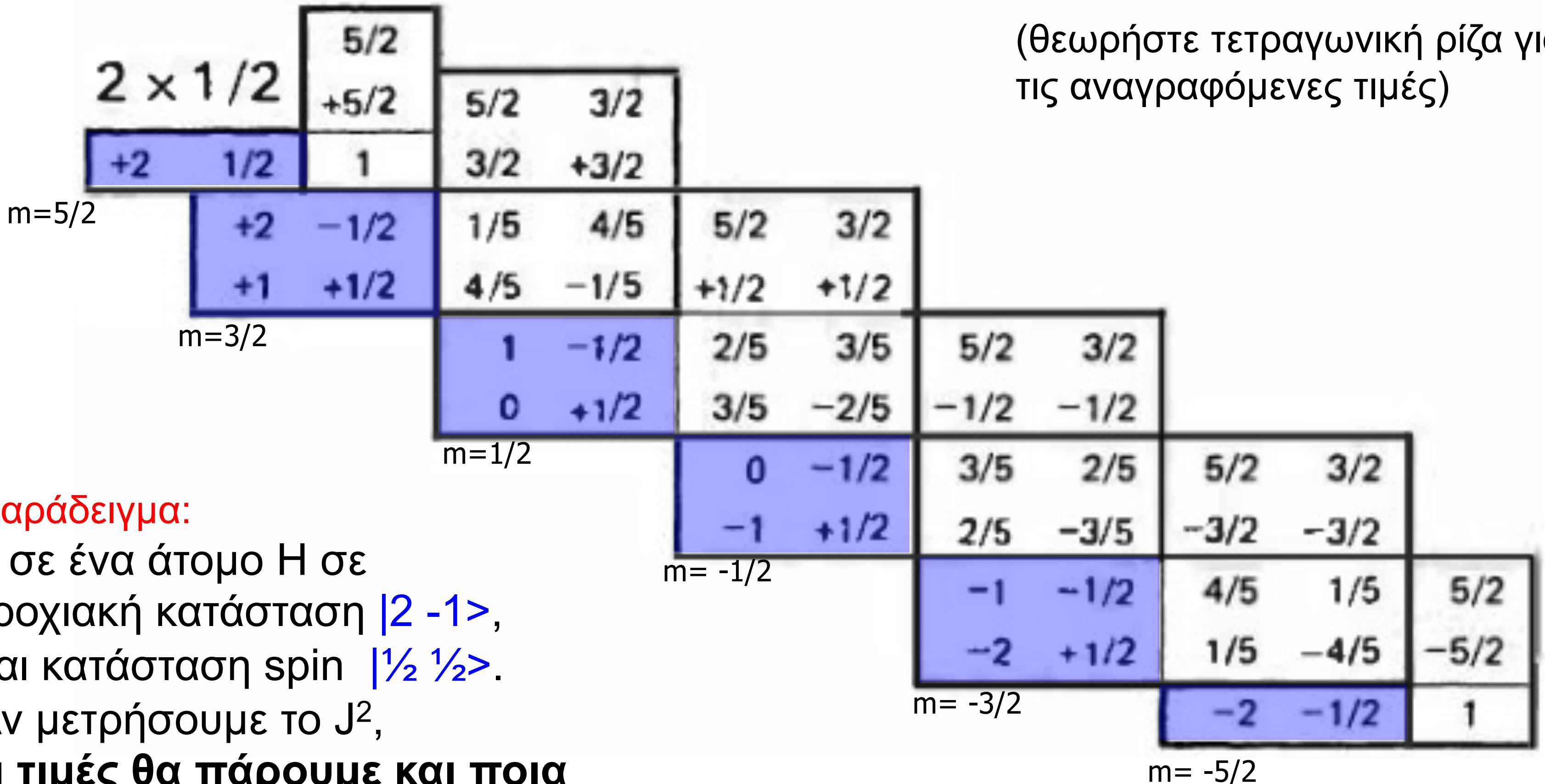
Παράδειγμα:

e σε ένα άτομο H σε τροχιακή κατάσταση |2 -1>, και κατάσταση spin |½ ½>. Αν μετρήσουμε το J^2, **τι τιμές θα πάρουμε και ποια η πιθανότητα για κάθε μια;**

$$\left|j_1\, m_1\right\rangle \left|j_2\, m_2\right\rangle = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C^{j\,j_1 j_2}_{m m_1 m_2} \left| j\, m\right\rangle, \quad \text{with } m = m_1 + m_2$$

Πρόσθεση στροφορμών

(θεωρήστε τετραγωνική ρίζα για τις αναγραφόμενες τιμές)



Παράδειγμα:

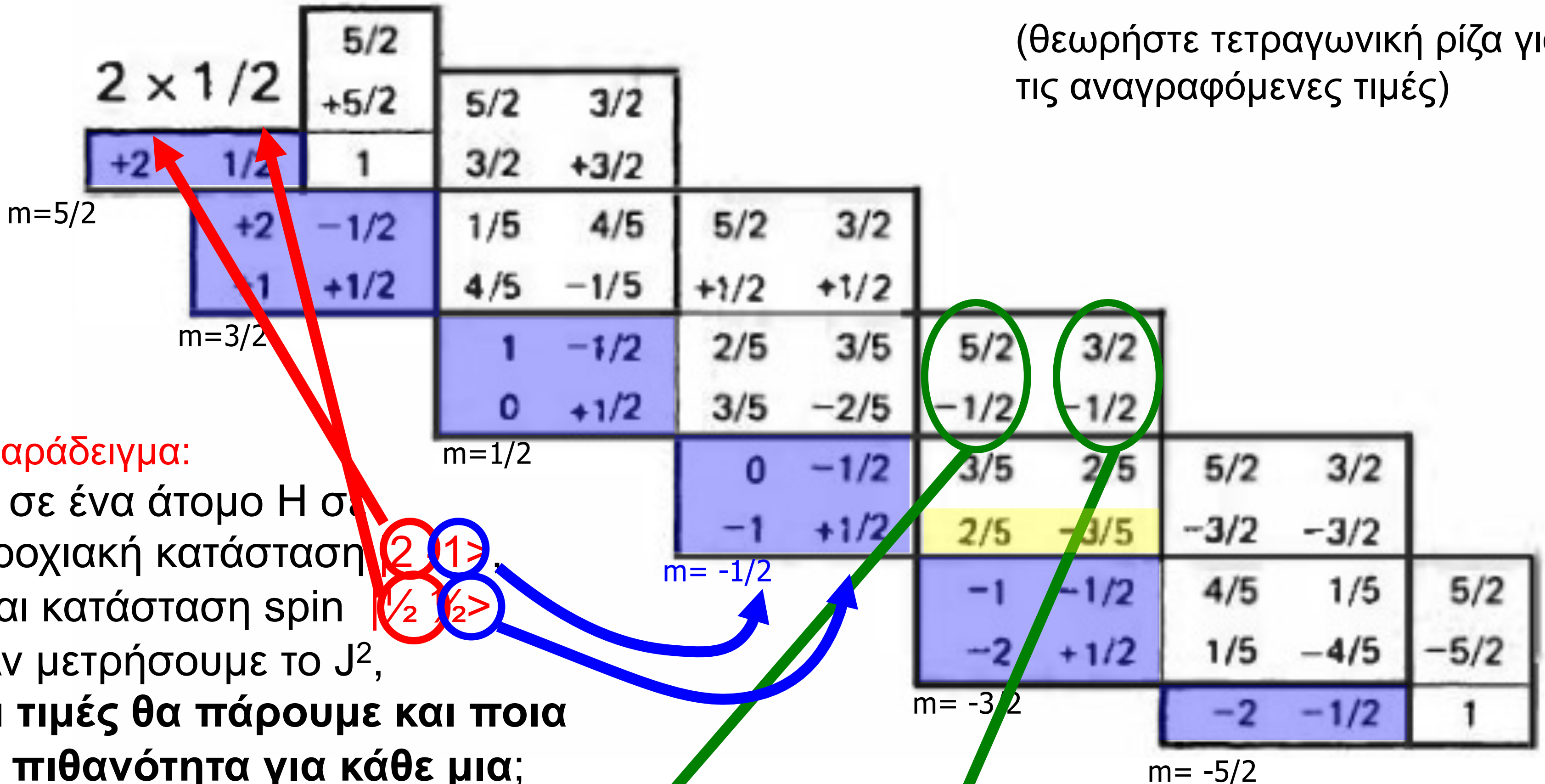
e σε ένα άτομο H σε τροχιακή κατάσταση |2 -1>, και κατάσταση spin |½ ½>. Αν μετρήσουμε το J^2, **τι τιμές θα πάρουμε και ποια η πιθανότητα για κάθε μια;**

Πιθανές τιμές: l+s = 2+½ = $^5/_2$, l-s = 2 – ½ = $^3/_2$

z συνιστώσα: m = -1 + ½ = **–½**

Πρόσθεση στροφορμών

(θεωρήστε τετραγωνική ρίζα για τις αναγραφόμενες τιμές)



Παράδειγμα:

e σε ένα άτομο Η σε τροχιακή κατάσταση |2 1>, και κατάσταση spin |½ ½>

Αν μετρήσουμε το J^2,

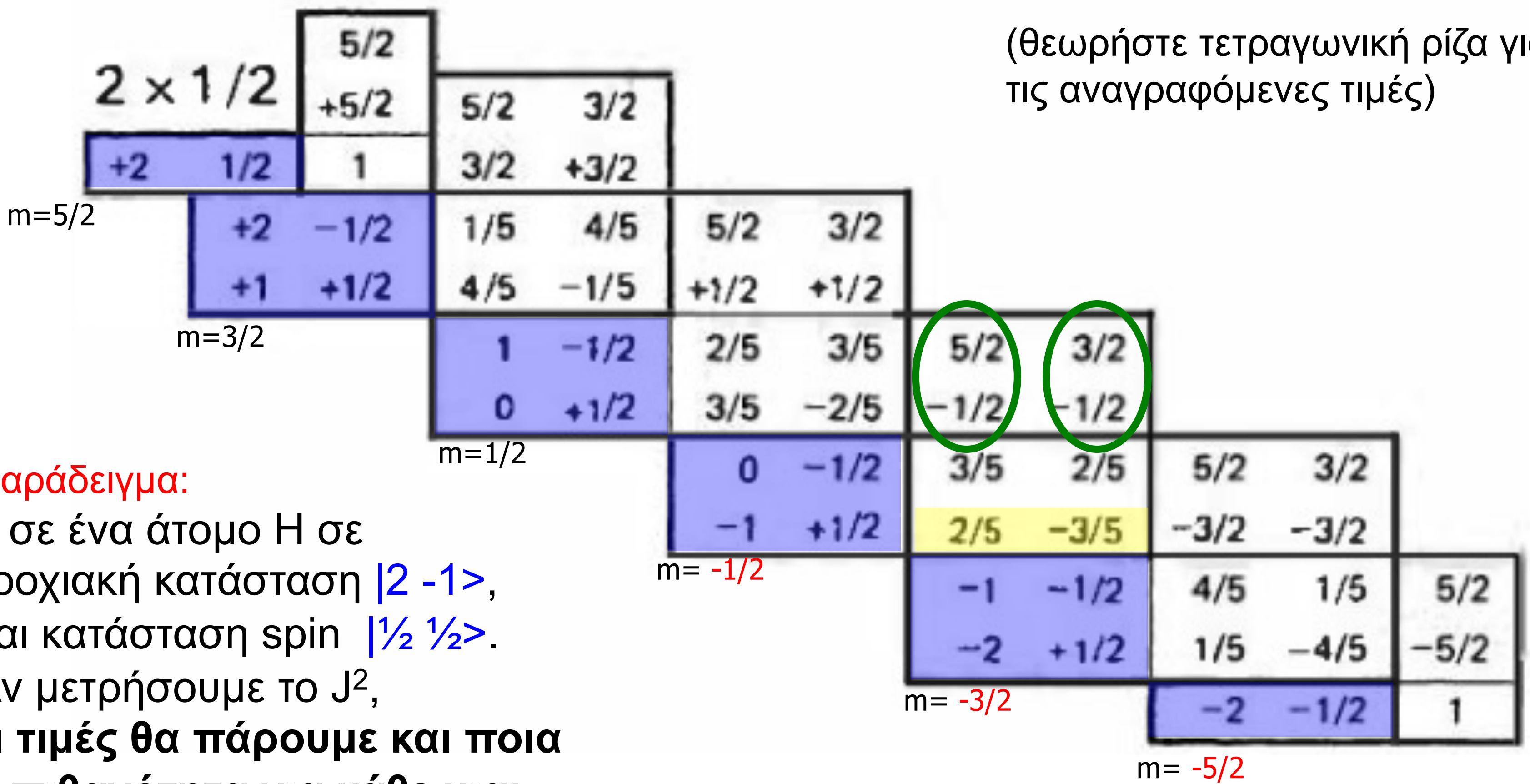
τι τιμές θα πάρουμε και ποια η πιθανότητα για κάθε μια;

Δυνατές τιμές: $l+s = 2+½ = {}^{5}/_{2}$, $l-s = 2 – ½ = {}^{3}/_{2}$

z συνιστώσα: $m = -1 + ½ = –½$

Πρόσθεση στροφορμών

(θεωρήστε τετραγωνική ρίζα για τις αναγραφόμενες τιμές)

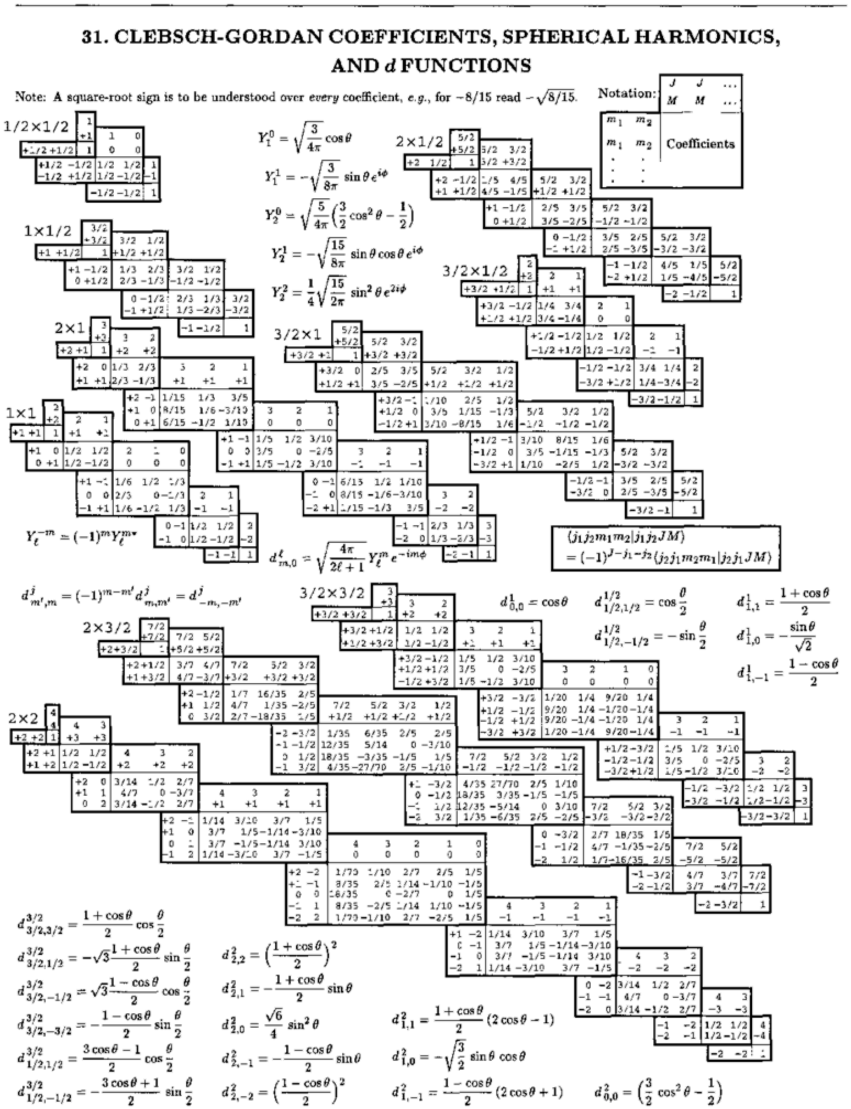


Παράδειγμα:
e σε ένα άτομο H σε τροχιακή κατάσταση |2 -1>, και κατάσταση spin |½ ½>. Αν μετρήσουμε το J^2, **τι τιμές θα πάρουμε και ποια η πιθανότητα για κάθε μια;**

$$\left|2\ -1\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle=\sqrt{\tfrac{2}{5}}\left|\tfrac{5}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\left|\tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

Πρόσθεση στροφορμών

Παράδειγμα: Θεωρήστε ότι δυο spin-1/2 καταστάσεις συνδυάζονται και δίνουν σπιν-1 και σπιν-0 κατάσταση. Να βρεθούν ακριβώς οι συντελεστές Clebsch-Gordan



31. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for −8/15 read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

		J	J	...
		M	M	...
m_1	m_2	Coefficients		
m_1	m_2			
.	.			
.	.			

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^\ell_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

$$d^j_{m',m} = (-1)^{m-m'} d^j_{m,m'} = d^j_{-m,-m'}$$

$$d^1_{0,0} = \cos\theta \qquad d^{1/2}_{1/2,1/2} = \cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{1/2}_{1/2,-1/2} = -\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^1_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2} \qquad d^1_{1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \qquad d^1_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,3/2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{3/2}_{3/2,1/2} = -\sqrt{3}\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^{3/2}_{3/2,-1/2} = \sqrt{3}\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,-3/2} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^{3/2}_{1/2,1/2} = \frac{3\cos\theta-1}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{3/2}_{1/2,-1/2} = -\frac{3\cos\theta+1}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^2_{2,2} = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2 \qquad d^2_{2,1} = -\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta \qquad d^2_{2,0} = \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta$$

$$d^2_{2,-1} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta \qquad d^2_{2,-2} = \left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2$$

$$d^2_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta-1) \qquad d^2_{1,0} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta \qquad d^2_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta+1) \qquad d^2_{0,0} = \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

1/2×1/2

m_1	m_2	$J=1$, $M=+1$	$J=1$, $M=0$	$J=0$, $M=0$	$J=1$, $M=-1$
+1/2	+1/2	1			
+1/2	−1/2		1/2	1/2	
−1/2	+1/2		1/2	−1/2	
−1/2	−1/2				1

Πρόσθεση στροφορμών

1/2×1/2	1 +1	1 0	0 0	1 −1
+1/2 +1/2	1			
+1/2 −1/2		1/2	1/2	
−1/2 +1/2		1/2	−1/2	
−1/2 −1/2				1

$$\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle = \left|1\ 1\right\rangle$$

$$\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left|1\ 0\right\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left|0\ 0\right\rangle$$

$$\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left|1\ 0\right\rangle - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left|0\ 0\right\rangle$$

$$\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle = \left|1\ -1\right\rangle$$

Ισοδύναμα (λύνοντας για καταστάσεις j=0,1)

$$\left|1\ 1\right\rangle = \left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|1\ 0\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle + \left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle\right]$$

$$\left|1\ -1\right\rangle = \left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

Συμμετρική κάτω από εναλλαγή 1←→2

Spin 1 καταστάσεις

"triplet"

$$\left|0\ 0\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle - \left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle\right]$$

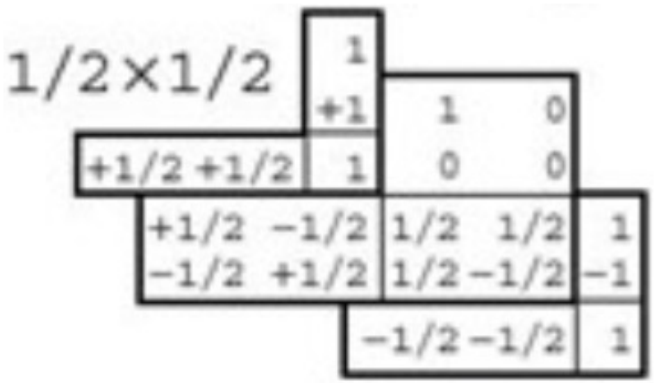
Αντισυμμετρική

Spin 0 κατάσταση

"singlet"

Πρόσθεση στροφορμών

Παράδειγμα: Θεωρήστε ότι δυο spin-1/2 καταστάσεις συνδυάζονται και δίνουν σπιν-1 και σπιν-0 κατάσταση. Να βρεθούν ακριβώς οι συντελεστές Clebsch-Gordan



$$\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle = \left|1\ 1\right\rangle$$

$$\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left|1\ 0\right\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left|0\ 0\right\rangle$$

$$\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left|1\ 0\right\rangle - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left|0\ 0\right\rangle$$

$$\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle = \left|1\ -1\right\rangle$$

Ισοδύναμα (λύνοντας για τις καταστάσεις με j=0,1):

$$\left|1\ 1\right\rangle = \left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|1\ 0\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle + \left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle\right]$$

$$\left|1\ -1\right\rangle = \left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|0\ 0\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle - \left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle\right]$$

Θα μπορούσαμε να διαβάσουμε τους συντελεστές αυτούς από το πίνακα των συντελεστών Clebsch-Gordan)

Ισοσπίν - isospin

Ο Heisenberg παρατήρησε ότι οι μάζες του πρωτονίου και νετρονίου ήταν παρόμοιες

$m_p = 938.28$ MeV/c^2 και $m_n = 939.57$ MeV/c^2

Υπόθεση/Πρόταση: δυο καταστάσεις του ίδιου σωματιδίου?

Σύμφωνα με τον Heisenberg αν μπορούσαμε να «σβήσουμε» το φορτίο, τότε θα ήταν αδύνατο να διαχωρίσουμε το πρωτόνιο από το νετρόνιο

Διαφορετικά, οι ισχυρές δυνάμεις που εφαρμόζονται στο πρωτόνιο και νετρόνιο είναι πανομοιότυπες

Μπορούμε να γράψουμε τον πυρήνα σαν ένα διάνσμα δυο συνιστωσών.

Θα έχουμε επομένως:

$$N = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Σε πλήρη αναλογία με το φορμαλισμό για το σπιν, εισάγεται η έννοια του **Isospin,** $\vec{I}$

Σε αντίθεση με το σπιν, το ισοσπιν δεν είναι διάνυσμα στον κανονικό χώρο, με συνιστώσες κατά μήκος των χωρικών διευθύνσεων *x*, *y* και *z*, αλλά είναι αδιάστατο σε ένα αφηρημένο χώρο isospin με συνιστώσες I_1, I_2, I_3

Με βάση την παραδοχή αυτή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όλο το φορμαλισμό που αναπτύχθηκε για τη στροφορμή και για την περίπτωση του ισοσπιν:

Το νουκλεόνια έχουν ισοσπίν ½ οπότε: $p = \left|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle$ και: $n = \left|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle$

I_3 συνιστώσα
(1/2 πάνω)
(-1/2 κάτω)

Isospin

Από την στιγμή που οι ισχυρές δυνάμεις είναι αναλοίωτες κάτω από περιστροφές στο χώρο του ισοσπιν, τότε σύμφωνα με το νόμο της Noether, το isospin διατηρείται στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις

Το isospin εφαρμόζεται μόνο στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις και δεν είναι κάτι εφαρμόσιμο στα λεπτόνια. Για συμβατότητα και πληρότητα, θεωρούμε ότι όλα τα λεπτόνια έχουν isospin 0 όπως και οι φορείς των δυνάμεων: **$I_{λεπτόνια} = 0$**

Για τα quarks, το u και d quark έχουν isospin ½ και -½ (όπως το πρωτόνιο και νετρόνιο)

$$u = \left| \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} \right\rangle \qquad d = \left| \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} \right\rangle$$

Όλα τα υπόλοιπα quarks έχουν isospin μηδέν.

- Δυναμικά επακόλουθα του isospin:
  - Για δυο νουκλεόνια, σύμφωνα με τους κανόνες πρόσθεσης στροφορμών, ο συνδυασμός θα δώσει (I = 1 ή 1):

$$\left.\begin{aligned} |1,1\rangle &= pp \\ |1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(pn+np) \\ |1,-1\rangle &= nn \end{aligned}\right\}$$

συμμετρική iso-triplet

$$|0\,0\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(pn-np)$$

αντί-συμμετρική iso-singlet

  - Πειραματικά, το n και p δημιουργούν μια μόνο δέσμια κατάσταση, το δευτέριο
  - Δεν υπάρχει δέσμια κατάσταση με 2p ή 2n. Επομένως το δευτέριο θα πρέπει να είναι η αντισυμμετρική iso-singlet κατάσταση
  - Η διατήρηση του isospin από τις ισχυρές δυνάμεις έχει ιδιαίτερα αποτελέσματα στις σκεδάσεις νουκλεονίων-νουκλεονίων