ΦΥΣ 145 – Υπολογιστικές Μέθοδοι στη Φυσική

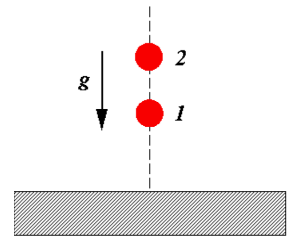
4$^{\eta}$ Εργασία **Επιστροφή: 24/3/13**

Υπενθύμιση: Οι εργασίες πρέπει να επιστρέφονται με e-mail που θα στέλνετε από το πανεπιστημιακό σας λογαριασμό το αργότερο μέχρι την ημερομηνία που αναγράφεται.
Σα θέμα (subject) του e-mail θα πρέπει να αναγράφεται την εργασία (Homework 4)
Κάθε αρχείο που επισυνάπτετε (attach) στο e-mail σας θα πρέπει να έχει το όνομα στη μορφή ***username_hm4.tgz*** όπου username είναι το *username του e-mail σας*. Επίσης σα πρώτο σχόλιο μέσα σε κάθε file θα πρέπει να αναφέρεται το ονοματεπώνυμό σας. Η εντολή tar είναι: tar –czvf username_hm4.tgz *.f

1. Μια σφαίρα βρίσκεται σε θερμοκρασία 1200^{o}K και την αφήνουμε να κρυώσει μέχρι τη θερμοκρασία δωματίου (300^{o}K). Υποθέστε ότι θερμότητα χάνεται μόνο μέσω ακτινοβολίας και επομένως η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη μεταβολή της θερμοκρασίας της σφαίρας δίνεται από:
$$\frac{d\theta}{dt} = -2.2067\times 10^{-12}\left(\theta^4 - 81\times 10^8\right)$$
όπου θ η θερμοκρασία του σώματος σε βαθμούς Kelvin (K) και ο χρόνος t σε sec.
(α) Να βρεθεί η θερμοκρασία της σφαίρας τη χρονική στιγμή $t = 480$ sec χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ***Euler***. Υποθέστε χρονικό βήμα 30sec.
(β) Να βρεθεί η χρονική στιγμή στην οποία η θερμοκρασία της σφαίρας είναι 320^{o}K όταν το χρονικό βήμα που χρησιμοποιείτε είναι 240sec.
(γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της θερμοκρασίας που υπολογίζετε για τη χρονική στιγμή $t = 480$sec συναρτήσει του χρονικού βήματος που χρησιμοποιείται για βήματα dt = 15, 30, 60, 120, 240 και 480 sec.

2. Γνωρίζουμε ότι ο πληθυσμός ενός είδους ζώων περιγράφεται από μια συνάρτηση $N(t)$ (συνάρτηση του χρόνου, t, όπου t μετράται σε μήνες) η οποία αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης: $\frac{dN}{dt} = aN - bN^2$, όπου α και b είναι θετικές σταθερές ποσότητες. Όταν b = 0, ο πληθυσμός αυξάνει εκθετικά, αλλά όταν b > 0 ο δεύτερος όρος εισάγει μια μείωση του πληθυσμού σαν αποτέλεσμα ανταγωνισμού μεταξύ ζευγαριών του πληθυσμού. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ***ενδιάμεσου σημείου*** λύστε αριθμητικά το πρόβλημα αυτό για τις ακόλουθες δυο περιπτώσεις:
(**i**) $\alpha = 10$, $b = 3$ και $N(0) = 10$ και (**ii**) $\alpha = 10$, $b = 0.01$ και $N(0) = 1000$. Με βάση τα αποτελέσματά σας να γίνουν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις του πληθυσμού, $N(t)$, συναρτήσει του χρόνου t. Τα αποτελέσματα εξαρτώνται από το χρονικό βήμα που επιλέγεται. Διαλέξτε ένα κατάλληλο βήμα και συνολικό χρόνο μελέτης της εξέλιξης του πληθυσμού για να εξάγετε τα αποτελέσματά σας. Η παραπάνω διαφορική εξίσωση έχει αναλυτική λύση της μορφής $N(t) = \frac{N_0 a e^{at}}{a - bN_0 + bN_0 e^{at}}$, όπου $N(t{=}0) = N_0$ Συγκρίνετε γραφικά τα αποτελέσματά σας με τη θεωρητική αυτή λύση Θα πρέπει το γράφημά σας να έχει κατάλληλα ονοματισμένους άξονες. Σχολιάστε τη γραφική παράσταση στη δεύτερη περίπτωση.

3. Θεωρήστε ότι έχετε 2 μπάλες μάζας m_1 και m_2 αντίστοιχα. Οι 2 μπάλες αφήνονται από την κατάσταση της ηρεμίας να πέσουν στο έδαφος υπό την επίδραση της βαρύτητας (δεν υπάρχει αντίσταση από τον αέρα). Υποθέστε ότι οι μπάλες μπορούν να κινηθούν κατακόρυφα, έτσι ώστε να συγκρούονται κεντρικά είτε μεταξύ τους ή με το έδαφος (μόνο η μπάλα 1). Αν υποθέσουμε τέλεια ελαστικές συγκρούσεις οι 2 μπάλες θα συνεχίσουν να συγκρούονται μεταξύ τους επ΄άπειρον.



Η κίνηση της κάθε μπάλας επομένως καθορίζεται από την επιτάχυνση της βαρύτητας και το αποτέλεσμα της σύγκρουσής της με την άλλη μπάλα ή το έδαφος. Όταν η μπάλα 1 χτυπά στο έδαφος, η ταχύτητά της αντιστρέφεται, $\upsilon_1' = -\upsilon_1$. Στην περίπτωση της σύγκρουσης μεταξύ των 2 μπαλών ξέρουμε από την εισαγωγική φυσική ότι για τέλεια ελαστικές κρούσεις οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση ως προς τις ταχύτητές πριν την κρούση δίνονται από τις σχέσεις:

$$\upsilon_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)\upsilon_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)\upsilon_2$$
$$\upsilon_2' = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)\upsilon_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)\upsilon_2$$

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο ***Verlet - ταχύτητας*** για να περιγράψετε την κίνηση των δυο σωμάτων.

Για την περίπτωση της κρούσης, ο απλούστερος τρόπος είναι να ελέγχετε σε κάθε χρονικό βήμα τις θέσεις των δυο σωμάτων. Αν στην αντίστοιχη χρονική στιγμή έχει συμβεί κάποια σύγκρουση τότε θα πρέπει να τροποποιήσετε κατάλληλα τις αντίστοιχες ταχύτητες σύμφωνα με τους παραπάνω τύπους και να συνεχίσετε την χρονική εξέλιξη της κίνησης των σωμάτων. Για παράδειγμα για την περίπτωση της κρούσης της μπάλας 1 με το έδαφος αρκεί να ελέγξετε αν $x_1 < r_1$ όπου r_1 είναι η ακτίνα της μπάλας 1. Αν η συνθήκη ισχύει τότε μπορούμε να αντιστρέψουμε την ταχύτητα.

Η απλή αυτή προσέγγιση ωστόσο οδηγεί σε κάποια σφάλματα γιατί κάποιο ποσοστό του χρόνου *dt* η μπάλα 1 θα μπορούσε να βρεθεί σε αρνητική θέση. Ανάλογα ισχύουν και στην κρούση των δυο μπαλών. Επομένως θα πρέπει στις περιπτώσεις αυτές να χρησιμοποιήσετε γραμμική παρεμβολή για να βρείτε τόσο την ταχύτητα που αντιστοιχεί στο σημείο της κρούσης όσο και το χρόνο της κρούσης. Αυτός ο χρόνος θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί και για τις 2 μπάλες για να συνεχίσετε την εξέλιξη του συστήματός σας.

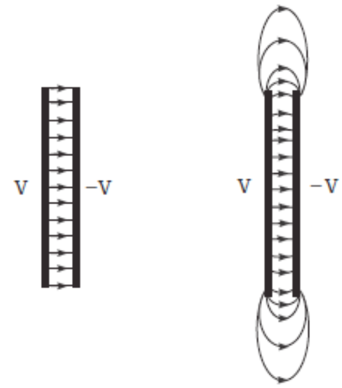
Θεωρείστε για το πρόβλημά σας ότι $m_1 = 1kg$, $m_2 = 1kg$, $x_1 = 1m$, $x_2 = 3m$, $g = 9.81 m/s^2$, $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0$, $r_1 = r_2 = 0.1m$ και $dt = 0.003sec$

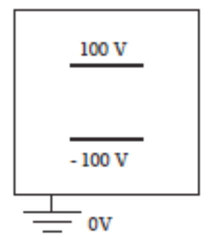
(α) Να γράψετε το πρόγραμμα που περιγράφει την κίνηση των 2 σωμάτων.

(β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση των x_1 και x_2 ως προς το χρόνο για $t_{max} = 100sec$. Το γράφημα αυτό να το ονομάσετε *collision_graph*1*.pdf*.

(γ) Τρέξτε και πάλι το πρόγραμμά σας για λόγο μαζών $m_1/m_2 = 2$ και κάντε και πάλι το ίδιο γράφημα με το ερώτημα (β). Ονομάστε το γράφημα *collision_graph2.pdf*. Τι παρατηρείτε σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση;

4. Οι πυκνωτές είναι διατάξεις με δυνατότητα να αποθηκεύουν φορτίο. Συνήθως αποτελούνται από 2 αγωγούς του ίδιου περίπου σχήματος σε κάποια απόσταση μεταξύ τους, και αντίθετου ηλεκτρικού φορτίου. Σαν αποτέλεσμα το ηλεκτρικό πεδίο το οποίο θα εκτείνονταν σε όλο το χώρο, συμπυκνώνεται στην περιοχή ανάμεσα στους 2 αγωγούς. Στα παρακάτω θα προσεγγίσουμε τους πυκνωτές σαν δυσδιάστατες διατάξεις (στην πραγματικότητα το πρόβλημα είναι 3 διαστάσεων). Το διπλανό σχήμα δείχνει ένα πυκνωτή αποτελούμενο από δυο παράλληλες πλάκες. Το σχήμα στα αριστερά δείχνει την ιδανική περίπτωση όπως το ηλεκτρικό πεδίο είναι ομοιόμορφο, ενώ στα δεξιά παρουσιάζει την συνηθισμένη περίπτωση όπου το ηλεκτρικό πεδίο στα άκρα των αγωγών ξεφεύγει ανάμεσα στον περιβάλλοντα χώρο. Συνήθως για την λύση του προβλήματος εύρεσης του ηλεκτρικού πεδίου ανάμεσα στους δυο αγωγούς θεωρούμε ότι η διάταξη βρίσκεται στο εσωτερικό ενός γειωμένου κιβωτίου ενώ οι δυο αγωγοί συνδεόνται με μια ηλεκτρική πηγή που τα κρατά σε σταθερό δυναμικό, όπως στο διπλανό σχήμα. Θεωρούμε το γειωμένο κιβώτιο ώστε να περιορίσουμε το πεδίο στο χώρο (το φορτίο στο κιβώτιο είναι 0). Αφού λύσουμε το πρόβλημα για την συγκεκριμένη διάταξη, να μεγαλώσουμε το κουτί ώστε να μην έχει επίδραση στο πεδίο κοντά στον πυκνωτή. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα με την βοήθεια του υπολογιστή.





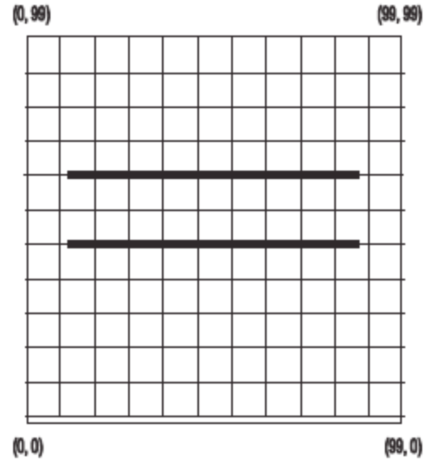
Αντί ωστόσο να λύσουμε για το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}(x,y)$, μπορούμε να λύσουμε για το ηλεκτρικό δυναμικό $V(x,y)$, το οποίο είναι ευκολότερο γιατί το δυναμικό V είναι βαθμωτό μέγεθος ενώ το πεδίο $\boldsymbol{E}$, διανυσματικό και επομένως οι εξισώσεις είναι απλούστερες. Ακόμα από την στιγμή που το πεδίο $\boldsymbol{E}$ είναι η κλίση του δυναμικού V, οι εξισώσεις είναι ισοδύναμες (οι γραμμές του πεδίου είναι κάθετες στις ισοδυναμικές επιφάνειες και έχουν διεύθυνση από θέσεις υψηλότερου δυναμικού σε θέσεις χαμηλότερου δυναμικού). Έχετε μάθει πως μπορείτε να προσδιορίσετε το ηλεκτρικό πεδίο διαφόρων διατάξεων χρησιμοποιώντας το νόμο του Gauss. Χωρίς να μπούμε το μαθηματικό φορμαλισμό, η λύση χρησιμοποιώντας το νόμο του Gauss είναι ισοδύναμη με την λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial y^2}=0 \qquad \textbf{(1)}$$

η οποία ονομάζεται εξίσωση Laplace. Το σύμβολο ∂ αναφέρεται στην μερική παράγωγο του δυναμικού V ως προς x και y.

Ο πιο απλός τρόπος για την λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης φαίνεται σχηματικά στο διπλανό σχήμα και ονομάζεται μέθοδος πεπερασμένων διαφορών. Αυτό το οποίο βλέπουμε είναι ένα πλέγμα τιμών x και y που είναι ομοιόμορφα διακριτοποιημένες με ένα βήμα $\Delta x = \Delta y = \Delta$. Αντί να προσπαθήσουμε να βρούμε μια λύση για την συνεχή κατανομή τιμών x και y θα προσπαθήσουμε να βρούμε την λύση για πεπερασμένο αριθμό τιμών οι οποίες βρίσκονται στις κορυφές του πλέγματος.

Αυτό σημαίνει ότι ακόμα και για ένα μικρό πλέγμα 100x100 θα πρέπει να λύσουμε για 10,000 αγνώστους. Το πεδίο του πυκνωτή προσδιορίζεται μόνο στα σημεία (x,y) που βρίσκονται στο πλέγμα. Το δυναμικό στους αγωγούς του πυκνωτή και στο γειωμένο κιβώτιο που περιέχει τον πυκνωτή διατηρείται σταθερό.



Ωστόσο η αριθμητική λύση των παραγώγων είναι αρκετά εύκολη. Στην περίπτωσή μας μπορούμε να γράψουμε την δεύτερη μερική παράγωγο χρησιμοποιώντας την προσέγγιση:

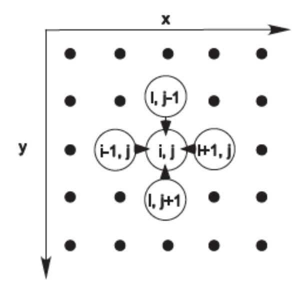
$$\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x^2} \cong \frac{V(x+\Delta,y)+V(x-\Delta,y)-2V(x,y)}{\Delta^2} \text{ και} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial y^2} \cong \frac{V(x,y+\Delta)+V(x,y-\Delta)-2V(x,y)}{\Delta^2} \qquad \textbf{(3)}$$

όπου Δ είναι η απόσταση των πλεγματικών σημείων. Αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στην εξίσωση Laplace οδηγεί στην μορφή της εξίσωσης Laplace σύμφωνα με την μέθοδο των στοιχειωδών διαφορών:

$$V(x,y) \cong \frac{1}{4}\left[V(x+\Delta,y)+V(x-\Delta,y)+V(x,y+\Delta)+V(x,y-\Delta)\right] \qquad \textbf{(4)}$$

Γραφικά η εξίσωση αυτή φαίνεται στο διπλανό σχήμα όπου το δυναμικό σε ένα πλεγματικό σημείο (i,j) προσεγγίζεται από την μέση τιμή των τιμών δυναμικού των πλησιεστέρων πλεγματικών κορυφών. Αν γράφαμε την εξίσωση αυτή για τα 10,000 πλεγματικά σημεία, θα καταλήγαμε σε ένα σύστημα 10,000 εξισώσεων με 10,000 αγνώστους (τις τιμές δυναμικού στα πλεγματικά σημεία). Ενώ το σύστημα αυτό μπορεί να λυθεί σχετικά εύκολα ακολουθούμε μια διαφορετική τεχνική που ονομάζεται τεχνική εξισορρόπησης.



Σύμφωνα με την τελευταία εξίσωση, το δυναμικό σε ένα πλεγματικό σημείο δίνεται από την μέση τιμή των τιμών δυναμικού στα τέσσερα πλησιέστερα σημεία. Με βάση αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε μια επαναληπτική διαδικασία για να βρούμε την λύση σύμφωνα με τα ακόλουθα βήματα:

(α) Ξεκινούμε με μια αρχική εκτίμηση του δυναμικού V(x,y) = 0 για όλα τα πλεγματικά σημεία.

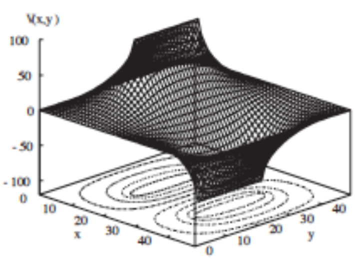
(β) Για να βελτιώσουμε την αρχική εκτίμηση, εφαρμόζουμε την εξίσωση (4) σε όλα τα σημεία του πλεγματικού χώρου εκτός από τους δυο αγωγούς του πυκνωτή και τις πλευρές του γειωμένου κιβωτίου.

(γ) Συνεχίζουμε να εφαρμόζουμε την εξίσωση (4) για να βελτιώσουμε την εκτίμηση των τιμών του δυναμικού στα διάφορα σημεία μέχρις ότου η διαφορά τιμών του δυναμικού στα πλεγματικά σημεία μεταξύ δυο διαδοχικών επαναλήψεων διαφέρει λιγότερο από μια προκαθορισμένη τιμή επιθυμητής ακρίβειας.

Δεν υπάρχει εγγύηση ότι η μέθοδος της εξισσορόπησης θα συγκλίνει για τυχαίες τιμές της πλεγματικής απόστασης Δ ή για διαφορετικές γεωμετρικές καταστάσεις.

<u>Τι πρέπει να κάνετε</u>

Θα πρέπει να γράψετε ένα πρόγραμα το οποίο εφαρμόζει την μέθοδο της εξισορρόπησης για την περίπτωση ενός επίπεδου πυκνωτή. Θεωρήστε ότι υπάρχουν 101 πλεγματικές γραμμές στην *x*-διεύθυνση και 101 στην *y*-διεύθυνση. Θεωρήστε επίσης ότι οι αγωγός *+100V* βρίσκεται στην 13^{η} *j*-πλεγματική γραμμή και μεταξύ της 20^{ης} και 80^{ης} *i*-πλεγματικής γραμμής, ενώ ο αγωγός -100*V* βρίσκεται στην 26^{η} *j*-πλεγματική γραμμή και μεταξύ της 20^{ης} και 80^{ης} *i*-πλεγματικής γραμμής. Οι πλευρές του γειωμένου κιβωτίου καταλάμβανουν τις περιφερειακές πλεγματικές γραμμές. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώσει τις τιμές του δυναμικού μετά από 1000 επαναλήψεις της μεθόδου εξισορρόπησης στο αρχείο *capacitor.dat*. Χρησιμοποιώντας το αρχείο αυτό στο gnuplot κατασκευάστε ένα τρισδιάστατο γράφημα με τις συντεταγμένες των πλεγματικών σημείων *x* και *y* και τις τιμές του δυναμικού του κάθε σημείου στον z-άξονα. Η προβολή του γραφήματος αυτού στο επίπεδο *x-y* αντιπροσωπεύουν τις ισοδυναμικές επιφάνειες. Να κάνετε τα αντίστοιχα γραφήματα τα οποία θα πρέπει να μοιάζουν όπως του παραπάνω σχήματος.



<u>*Υπόδειξη*</u>: Για να κάνετε το γράφημα επιφάνειας (2-Δ ή 3-Δ) στο *gnuplot* θα πρέπει να δώσετε την εντολή *splot* και το file σας θα πρέπει να έχει 3 στήλες για *x, y,* και *z* άξονα. Για παράδειγμα θα δίνατε *splot 'capacitor.dat' with lines.*Για να δείτε την προβολή στον επίπεδο *x-y* θα πρέπει να δώσετε την εντολή *set contour.* Επειδή το γράφημα δεν μπορεί να στραφεί ενώ το βλέπετε θα πρέπει να δώσετε την γωνία με την οποία θα μπορούσατε να το δείτε καλύτερα χρησιμοποιώντας την εντολή *set view 65,45* (ή κάποια άλλες γωνίες) και μετά να δώσετε την εντολή *replot* ώστε να δείτε το γράφημα στραμένο. Αν θέλετε το γράφημά σας να μην έχει πολλές γραμμές στο επίπεδο *x-y* μπορείτε να καθορίσετε τον αριθμό αυτό με την εντολή *set cntrparam levels 10* (για 10 γραμμές).

Οι γραμμές που πέρνετε με την προβολή στο *x-y* επίπεδο είναι οι ισοδυναμικές επιφάνειες.

Αντί για τις 1000 επαναλήψεις στο παραπάνω πρόγραμμα θα μπορούσατε να θέσετε μια τιμή ακρίβειας ώστε η αλλαγή των τιμών δυναμικούν μεταξύ δυο διαδοχικών επαναλήψεων είναι μικρότερη από την επιθυμητή ακρίβεια. Ωστόσο αν παρατήρησετε το γράφημα της προβολής στο *x-y* επίπεδο, υπάρχει μια διαγώνια γραμμή η οποία διαπερνά όλες τις τιμές των ισοδυναμικών γραμμών. Με βάση την παρατήρηση αυτή μπορείτε να ορίσετε μια νέα μεταβλητή που ισούται με το ίχνος των στοιχείων του πίνακα των δυναμικών κάθε πλεγματικής κορυφής $trace = \sum_i \left|V(i,i)\right|$, που αντιπροσωπεύει το ίχνος του πίνακα. Αν η τιμή της μεταβλητής *trace* αλλάζει λιγότερο από μια κάποια προκαθορισμένη ακρίβεια (6^{ου} δεκαδικού ψηφίου για παράδειγμα) μεταξύ δυο διαδοχικών επαναλήψεων τότε έχετε επιτύχει την επιθυμητή ακρίβεια και μπορείτε να τυπώσετε τα αποτελέσματά σας.