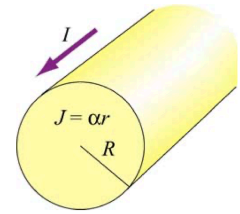
ΦΥΣ. 112

8ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή: Παρασκευή 15.11.2024**

1. Θεωρήστε έναν απείρου μήκους κυλινδρικό αγωγό ακτίνας R που διαρρέεται από ρεύμα I με μια μη ομοιογενή πυκνότητα ρεύματος $J = ar$ όπου α είναι μία σταθερά. Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο σε τυχαίο σημείο στο χώρο.



Χρησιμοποιούμε το νόμο του Ampere: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{encl}$

όπου το $I_{encl} = \int \vec{J}\cdot d\vec{A} = \int (\alpha r')(2\pi r' dr')$

(α) Για $r<R$, το ρεύμα το οποίο περικλείεται είναι:

$$I_{encl} = \int_0^r 2\pi\alpha r'^2 dr' = \frac{2\pi\alpha r'}{3}$$

Χρησιμοποιώντας το νόμο του Ampere, το μαγνητικό πεδίο στο σημείο P_1 είναι: $B_1(2\pi r) = \frac{2\mu_0\pi\alpha r^3}{3} \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0\alpha}{3} r^2$, για $r<R$

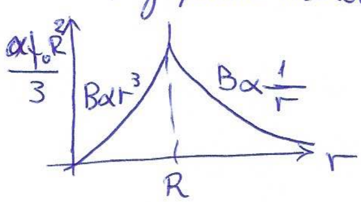
Η διεύθυνση του πεδίου $\vec{B}_1$ είναι εφαπτόμενο στον βρόχο Ampere που περιέχει το ρεύμα.

(b) Για $r>R$, το περιεχόμενο ρεύμα είναι: $I_{enc} = \int_0^R 2\pi\alpha r'^2 dr' = \frac{2\pi\alpha R^3}{3}$

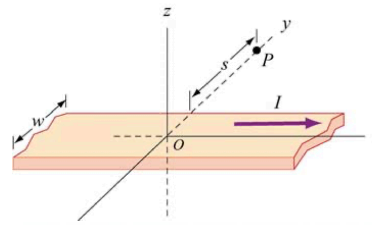
Με εφαρμογή του νόμου του Ampere, έχουμε: $B_2(2\pi r) = \frac{2\pi\alpha R^3}{3}\mu_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow B_2 = \frac{\alpha\mu_0 R^3}{3r}, \text{ για } r>R$$

Το γράφημα της έντασης του μαγνητικού πεδίου συναρτήσει της απόστασης r φαίνεται παρακάτω:

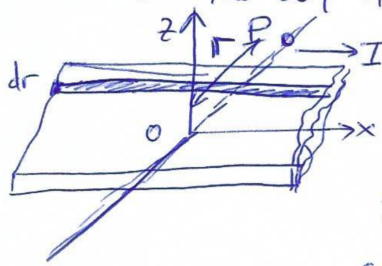


2. Θεωρήστε μια απείρου μήκους λεπτή μεταλλική λωρίδα πλάτους w που βρίσκεται πάνω στο xy-επίπεδο. Η λωρίδα διαρρέετα από ρεύμα I το οποίο έχει φορά στη $+x$-διεύθυνση, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Βρείτε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο P που βρίσκεται στο επίπεδο της λωρίδας



Θεωρούμε μία λεπτή λωρίδα πλάτους dr παράλληλη προς την διεύθυνση του ρεύματος και σε απόσταση r από το P, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Η ποσότητα του ρεύματος που διαρρέει τη λωρίδα αυτή θα είναι:



$$dI = I\,\frac{dr}{w}$$

Χρησιμοποιούμε το νόμο του Ampere, και βλέπουμε τη συνεισφορά της λωρίδας στο μαγνητικό πεδίο στο σημείο P είναι: $dB(2\pi r) = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 (dI)$

Η συνεισφορά στο μαγνητικό πεδίο είναι:

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r} I \frac{dr}{w}.$$

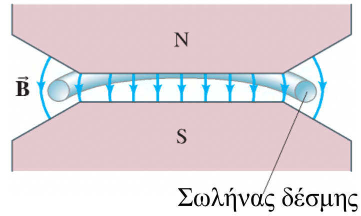
Ολοκληρώνουμε την τελευταία και παίρνουμε: $B = \int_s^{s+w} \frac{\mu_0 I}{2\pi w}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi w}\ln\left(\frac{s+w}{s}\right)$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του δεξιού χεριού, η διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου είναι στη $+z$-διεύθυνση και επομένως: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi w}\ln\left(\frac{s+w}{s}\right)\hat{k}$

Στο όριο που το πάχος είναι πολύ μικρό, $w \ll s$, $\ln(1+w/s) \simeq w/s$

Η έκφραση για το B γίνεται: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{k}$ που είναι το μαγνητικό πεδίο ενός αγωγού άπειρου μήκους

3. Το Betatron ήταν ένα επιταχυντής που χρησιμοποιήθηκε για να επιταχύνει ηλεκτρόνια σε υψηλές ενέργειες. Αποτελούνταν από έναν κυκλικό σωλήνα κενού που ήταν τοποθετημένος σε μαγνητικό πεδίο. Ηλεκτρόνια εισαγάγονταν στον σωλήνα αυτό για επιτάχυνση. Ο ηλεκτρομαγνήτης παρήγαγε ένα πεδίο το οποίο (i) κρατούσε τα ηλεκτρόνια σε κυκλική τροχιά και (ii) αύξανε την ταχύτητα των ηλεκτρονίων όταν άλλαζε το μαγνητικό πεδίο *B*. (α) Εξηγήστε πως επιταχύνονταν τα ηλεκτρόνια. (β) Ποια η διεύθυνση κίνησης των ηλεκτρονίων; (γ) Θα πρέπει το μαγνητικό πεδίο *B* να αυξάνει ή να ελαττώνεται ώστε να επιταχύνονται τα ηλεκτρόνια; (δ) Το μαγνητικό πεδίο ήταν στην πραγματικότητα εναλλασσόμενο με συχνότητα 60Hz. Δείξτε ότι τα ηλεκτρόνια μπορούν να επιταχυνθούν μόνο κατά το ¼ του κύκλου του μαγνητικού πεδίου (1sec/240). Να σημειωθεί ότι κατά το χρονικό αυτό διάστημα, τα ηλεκτρόνια πραγματοποιούν εκατοντάδες χιλιάδες περιστροφών και αποκτούν μεγάλη ενέργεια.



(α) Το μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο αλλάζει τη μαγνητική ροή που διαπερνά μια επιφάνεια που οριοθετείται από την τροχιά του ηλεκτρονίου. Σύμφωνα με το νόμο του Faraday αυτό προκαλεί ΗΕΔ κατά μήκος του σωλήνα κενού. Θα έχουμε επομένως $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} \neq 0$, όπου E θα χρησιμοποιηθεί για την επιτάχυνση του ηλεκτρονίου.

(β) Τα ηλεκτρόνια κινούνται στο εσωτερικό του σωλήνα κενού σε κυκλικές τροχιές με τη βοήθεια της μαγνητικής δύναμης $F = q\vec{v}\times\vec{B}$. Αν τα ηλεκτρόνια κινούνταν αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, αυτή η δύναμη θα είχε διεύθυνση προς το εξωτερικό της κυκλικής τροχιάς και δεν θα μπορούσε να κρατήσει τα ηλεκτρόνια σε κυκλική τροχιά.

Ωστόσο, αν τα ηλεκτρόνια κινούνται σύμφωνα με τη φορά των δεικτών τότε η δύναμη είναι προς το εσωτερικό της τροχιάς. Επομένως τα ηλεκτρόνια κινούνται σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

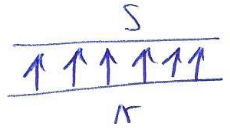
(γ) Για να επιταχύνουμε τα ηλεκτρόνια που κινούνται σύμφωνα με τη φορά των δεικτών, χρειάζεται να υπάρχει μια ΗΕΔ με φορά αντίθετη της φοράς των ηλεκτρονίων, αφού αρνητικά φορτία επιταχύνονται στη διεύθυνση αντίθετη με το E. Ο νόμος του Lenz ίσως λέει ωστόσο ότι αυξάνοντας το B προς το εσωτερικό της σελίδας, θα παραχθεί τέτοιου είδους ΗΕΔ γιατί το ρεύμα που κινείται αντίθετα με τη φορά των δεικτών, θα προκαλέσει B προς το εξωτερικό της σελίδας και θα αντιτίθεται στη αλλαγή του εξωτερικού πε

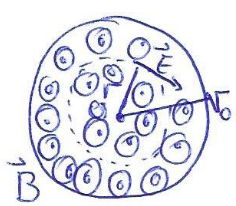
(δ) Αν ο ηλεκτρομαγνήτης είναι AC, τότε το μαγνητικό πεδίο θα μεταβάλλεται ημιτονοειδώς με το χρόνο. Θα μπορούσε για παράδειγμα να ξεκινά από την τιμή ϕ και αυξάνει προς το εσωτερικό της σελίδας. Κατά τη διάρκεια του πρώτου $T/4$, το μαγνητικό πεδίο θα έχει τη σωστή διεύθυνση ώστε να καθορίσει την τροχιά των ηλεκτρονίων που κινούνται σύμφωνα με τη φορά των δεικτών, και θα αλλάξει με τέτοιο τρόπο ώστε να επάγει ΗΕΔ με τη σωστή διεύθυνση για να επιταχύνει τα ηλεκτρόνια σε υψηλές ταχύτητες.

Αλλά ξεκινώντας από τον δεύτερο $T/4$, το μαγνητικό πεδίο θα ελαττώνεται σε μέτρο. Η διεύθυνση του πεδίου θα συνεχίσει να βοηθά για να κρατά τα ηλεκτρόνια σε κυκλική τροχιά αλλά στην περίπτωση αυτή, η επαγόμενη ΗΕΔ θα είναι τώρα σύμφωνα με τη φορά της κίνησης των ηλεκτρονίων και θα ελαττώνει την ταχύτητά τους. Επομένως ωφέλιμη επιτάχυνση επιτυγχάνεται μόνο κατά το πρώτο $T/4$ της ημιτονοειδούς τάσης.

4. Δείξτε ότι τα ηλεκτρόνια σε ένα betatron, επιταχύνονται σε σταθερή ακτίνα αν το μαγνητικό πεδίο B_0 στη θέση της τροχιάς του ηλεκτρονίου στο σωλήνα της δέσμης ισούται με το μισό της μέσης τιμής του μαγνητικού πεδίου ($B_{\mu έση}$) ως προς την επιφάνεια της κυκλικής σε οποιαδήποτε στιγμή: $B_0 = B_{\mu έση}/2$. Αυτός είναι και ο λόγος που οι πόλοι του betatron στο παραπάνω σχήμα έχουν αυτό το περίεργο σχήμα

Η μεταβολή στη μαγνητική ροή που διαπερνά την επιφάνεια που οριοθετεί η τροχιά του αμπεριανού ακτίνας r όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, θα προκαλέσει μια ΗΕΔ κατά μήκος του κύκλου.





Επειδή όλα τα σημεία κατά μήκος του κύκλου είναι ισοδύναμα το ηλεκτρικό πεδίο θα έχει την ίδια ισοδυναμία και επομένως θα είναι στο επίπεδο κάθετο στο μαγνητικό πεδίο, και εφαπτόμενο στον κύκλο ακτίνας r.

Λαμβάνουμε τον κύκλο του σχήματος σαν τη διαδρομή της ολοκλήρωσης και θα έχουμε:

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \Rightarrow E\,2\pi \cancel{r} = \frac{dB}{dt}\cancel{\pi} r^{2}$$ (αγνοούμε προς το παρόν το πρόσημο)

$$\Rightarrow E = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt} \quad \text{για } r < r_0 \quad (1)$$

Για $r > r_0$ τότε θα έχουμε: $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \Rightarrow E\,2\cancel{\pi} r = \cancel{\pi} r_0^2 \frac{dB}{dt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E = \frac{r_0^2}{r}\frac{1}{2}\frac{dB}{dt} \quad \text{για } r > r_0 \quad (2)$$

Για το Betatron, η δύναμη που ασκείται στα ηλεκτρόνια, θα είναι:

$$Eq = F \Rightarrow E\cdot q = ma \Rightarrow a = E\frac{q}{m} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{dv}{dt} = \frac{q}{m}\frac{r}{2}\frac{dB_{av}}{dt} \Rightarrow$$ (στο εσωτερικό)

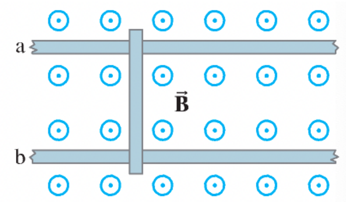
Η δύναμη που κρατά το ηλεκτρόνιο σε κυκλική τροχιά θα είναι:

$$F_L = F_K \Rightarrow B\cancel{v}q = m\frac{v^{\cancel{2}}}{r} \Rightarrow v = \frac{qBr}{m} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{qr}{m}\frac{dB_0}{dt}$$

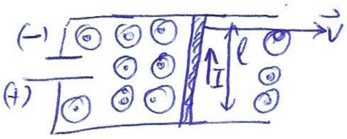
Εξισώνοντας τις δύο σχέσεις της επιτάχυνσης: $\frac{\cancel{q}}{\cancel{m}}\frac{\cancel{r}}{2}\frac{dB_{av}}{dt} = \frac{\cancel{q}\cancel{r}}{\cancel{m}}\frac{dB_0}{dt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{B_{av}/2 = B_0}$$

5. Θεωρήστε ότι μια αγώγιμη ράβδος μάζας *m* και αντίστασης *R* είναι ακίνητη σε δύο λείες και αμελητέας αντίστασης παράλληλες ράγες που απέχουν απόσταση *l* και βρίσκονται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο *B* το οποίο είναι κάθετο στην ράβδο και στις ράγες όπως στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή *t*=0, η ράβδος είναι ακίνητη και μια πηγή ΗΕΔ είναι συνδεδεμένη στα άκρα α και β. Προσδιορίστε την ταχύτητα της ράβδου συναρτήσει του χρόνου αν (α) η πηγή παρέχει ένα ρεύμα σταθερής έντασης *I,* (β) η πηγή παρέχει σταθερή ΗΕΔ $\mathcal{E}_0$. (γ) Μπορεί η ράβδος να αποκτήσει οριακή ταχύτητα σε κάποια από τις δύο περιπτώσεις; Αν ναι ποια η τιμής της;



(α) Για σταθερό ρεύμα, με πόλωση όπως στο σχήμα, η μαγνητική δύναμη είναι σταθερή και ίση με: $F=BIl$



Από τον 2ο νόμο του Newton, μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα από ολοκλήρωση της επιτάχυνσης: $F = m\frac{dv}{dt} = BIl \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{B}{m}Il \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^v dv = \int_0^t \frac{BIl}{m}dt \Rightarrow \boxed{v(t)=\frac{BIl}{m}t}$$

(β) Για σταθερή ΗΕΔ, το ρεύμα θα αλλάζει με την ταχύτητα της ράβδου καθώς κινητική ΗΕΔ αντιτίθεται στην κίνηση της ράβδου. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση: $F=BIl$, με το ρεύμα να δίνεται από το νόμο του Ohm και η επαγόμενη ΗΕΔ από την εξίσωση $\mathcal{E}=Bvl$ που προκύπτει από $\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{BdA}{dt} = B\frac{l\overbrace{vdt}^{x}}{dt} = Bvl$.

Το ρεύμα το οποίο παράγεται από την επαγόμενη τάση αντιτίθεται στο ρεύμα της μπαταρίας.

Θα έχουμε επομένως: $F = m\frac{dv}{dt} = BIl = \underbrace{\left(\frac{\mathcal{E}_0 - Bvl}{R}\right)}_{I} lB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dv}{\mathcal{E}_0 - Bvl} = \frac{lB}{mR}dt \Rightarrow \frac{dv}{v-\mathcal{E}_0/Bl} = -\frac{B^2l^2}{mR}dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^v \frac{dv}{v-\mathcal{E}_0/Bl} = -\frac{B^2l^2}{mR}\int_0^t dt \Rightarrow \ln\left(\frac{v-\mathcal{E}_0/Bl}{-\mathcal{E}_0/Bl}\right) = -\frac{B^2l^2}{mR}t \Rightarrow v(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{Bl}\left(1-e^{-\frac{B^2l^2t}{mR}}\right)$$

(γ) Με σταθερό ρεύμα, η επιτάχυνση είναι σταθερή και η ταχύτητα δεν φτάνει στην οριακή τιμή. Ωστόσο, με σταθερή ΗΕΔ, η αυξανόμενη κινητική ΗΕΔ ελαττώνει την εφαρμοζόμενη δύναμη. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα σε περιορισμένη ή οριακή ταχύτητα ίση με $v_3 = \mathcal{E}_0/Bl$

6. Να βρείτε την εξίσωση του συνιστάμενου ηλεκτρικού πεδίου σε μια κινούμενη ράβδο συναρτήσει του χρόνου για το προηγούμενο πρόβλημα, συναρτήσει του χρόνου για κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις.

(α) Το ηλεκτρικό πεδίο είναι η μεταβολή του δυναμικού στα άκρα της ράβδου (όπως προκύπτει από τον νόμο του Ohm) διαιρούμενη με το μήκος της ράβδου: $E = \frac{\Delta V}{\ell} = \frac{IR}{\ell}$

(β) Το ηλεκτρικό πεδίο όπως προηγουμένως είναι $E = \frac{\Delta V}{\ell}$.
Στην περίπτωση αυτή, το ηλεκτρικό δυναμικό είναι η εφαρμοζόμενη διαφορά δυναμικού ελαττούμενη από την κινητική $ΗΕΔ = Bv\ell$
Η ταχύτητα είναι αυτή που βρέθηκε στο προηγούμενο πρόβλημα:

$$E = \frac{\Delta V}{\ell} = \frac{\mathcal{E}_0 - Bv\ell}{\ell} = \frac{\mathcal{E}_0 - \cancel{B\ell}\frac{\mathcal{E}_0}{\cancel{B\ell}}\left(1 - e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t}\right)}{\ell} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\mathcal{E}_0 e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t}}{\ell}}$$

7. Ένα δακτυλίδι ακτίνας $3.0cm$ και αντίστασης 0.025Ω περιστρέφεται ως προς άξονα που περνά από την διάμετρό του κατά 90^o σε ένα μαγνητικό πεδίο $0.23T$ κάθετο στον άξονα περιστροφής. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός ηλεκτρονίων που θα περάσουν ένα σταθερό σημείο στο δακτυλίδι καθώς πραγματοποιείται η διαδικασία αυτή;

Έχουμε ότι: $\mathcal{E} = \frac{d\phi_m}{dt} \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow dQ = \frac{\mathcal{E}}{R}dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q = \int dQ = \int \frac{\mathcal{E}}{R}dt = \frac{1}{R}\int \mathcal{E}dt = \frac{1}{R}\int \frac{d\phi_m}{dt}dt = \frac{1}{R}\int d\phi_m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{R}\int_{BA\cos(\theta)}^{BA\cos(90+\theta)} d\phi_m \Rightarrow Q = \frac{BA[\cos(90+\theta) - \cos\theta]}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = \frac{(0.23T)\pi(0.030m)^2}{0.025\Omega}[\cos(\theta+90^\circ) - \cos\theta] = 0.02601\,C[\cos(90^\circ+\theta) - \cos\theta]$$

Για να βρούμε το μέγιστο φορτίο, ζητούμε η παράγωγος του Q ως προς Θ να είναι ϕ.

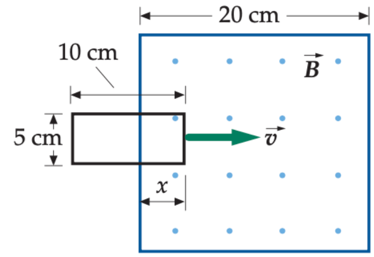
$$\frac{dQ}{d\theta} = 0.02601\,C[-\sin(\theta+90) + \sin\theta] = 0.02601\,C[-\cos\theta + \sin\theta] = 0 \Rightarrow$$

$$\cos\theta - \sin\theta = 0 \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ \text{ ή } \theta = 225^\circ$$

$$Q_{max} = 0.02601\,C[\cos(225^\circ + 90^\circ) - \cos(225^\circ)] = 0.03678\,C$$

$$N_{ηλ} = \frac{Q_{max}}{q_e} = \frac{0.03678\cancel{C}}{1.6\times10^{-19}\cancel{C}/e} \Rightarrow \boxed{N_{ηλ} = 2.3\times10^{17} \text{ ηλεκτρόνια}}$$

8. Ένας ορθογώνιος βρόχος έχει διαστάσεις $10.0cm \times 5.0cm$ και αντίσταση R =2.5Ω. Ο βρόχος κινείται με σταθερή ταχύτητα 2.$4cm/$s σε μια περιοχή με ομογενές μαγνητικό πεδίο 1.7T το οποίο έχει φορά προς το εξωτερικό της σελίδας, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το μπροστινό τμήμα του βρόχου εισέρχεται στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου τη χρονική στιγμή t = 0. (α) Κάντε το γράφημα της μαγνητικής ροής που διαπερνά το βρόχο συναρτήσει του χρόνου t. (β) Κάντε το γράφημα της επαγόμενης ΗΕΔ καθώς και του ρεύματος που διαρρέει το βρόχο συναρτήσει του χρόνου t. Αγνοήστε οποιαδήποτε αυτεπαγωγή του βρόχου και κατασκευάστε το γράφημα ώστε να συμπεριλαμβάνει το χρονικό διάστημα $0 \le t \le 16s$.



(α) Ο χρόνος που απαιτείται ώστε ο βρόχος να εισέλθει στην περιοχή με το ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι:

$$t = \frac{l_{πλευρά}}{v} = \frac{10cm}{2.4cm/s} \Rightarrow t = 4.17s$$

Υπολογίζουμε τη ροή που διαρρέει την επιφάνεια του βρόχου (μήκος l, πλάτος w)

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_m = NBA = NBw \cdot l \\ l = vt, \quad t \text{ ο χρόνος να εισέλθει στο πεδίο} \end{array}\right\} \Rightarrow \Phi_M = NBwvt \Bigg\} \Rightarrow \Phi_M = N(1.7T)(0.05m)(0.024)t \Rightarrow \boxed{\Phi_M = (2.04\ mWb/s)t}$$

Ο βρόχος αρχίζει να εξέρχεται από το μαγνητικό πεδίο, όταν θα έχει καλύψει μήκος ίσο με την πλευρά του (αφότου έχει εισέλθει ολόκληρο στην περιοχή του πεδίου). Δηλαδή: $t_{εξ} = \frac{l_{πλευρά}}{v} = \frac{10cm}{2.4cm/s} \Rightarrow t_{εξ} = 4.17s$

Επομένως θα αρχίσει να εξέρχεται 8.33s $(t_{εισ.} + t_{εξ})$ αφότου έχει αρχίσει να εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο.

Η ροή που διαπερνά τον βρόχο κατά τη διάρκεια των $4.17 < t < 8.33s$ θα είναι: $\boxed{\Phi_M = NBA = NBlw = (1.7T)(0.10m)(0.050m) = 8.5mWb}$

Ο χρόνος που χρειάζεται ώστε η αριστερή πλευρά του βρόχου να εξέλθει από το μαγνητικό πεδίο, είναι $t = l_{πλευρά}/v = \frac{10cm}{2.4cm} \Rightarrow t = 4.17sec$

επομένως $t_{ολ} = 12.51sec$

Η μαγνητική ροή στο διάστημα $8.33 < t < 12.51s$ θα είναι:

Καθώς ο βρόχος εξέρχεται η ροή αρχίζει να ελαττώνεται γραμμικά από την μέγιστη τιμή που είχε όταν βρίσκονταν ολόκληρος ο βρόχος μέσα στο μαγνητικό πεδίο, έως την τιμή 0 όταν η αριστερή πλευρά εξήλθε από το μαγνητικό πεδίο:

$$\phi_m = mt + b \Rightarrow \begin{cases} t_0 = 8.33\,s & \phi_m = 8.5\,mW \Rightarrow 8.5 = 8.33 \cdot m + b \quad (1) \\ t = 12.51\,s & \phi_m = 0 \qquad\;\; \Rightarrow 0 = 12.51m + b \end{cases}$$

$\Rightarrow b = -12.51m$ και αντικατάσταση στην (1) $\Rightarrow 8.5 = 8.33m - 12.51m \Rightarrow$

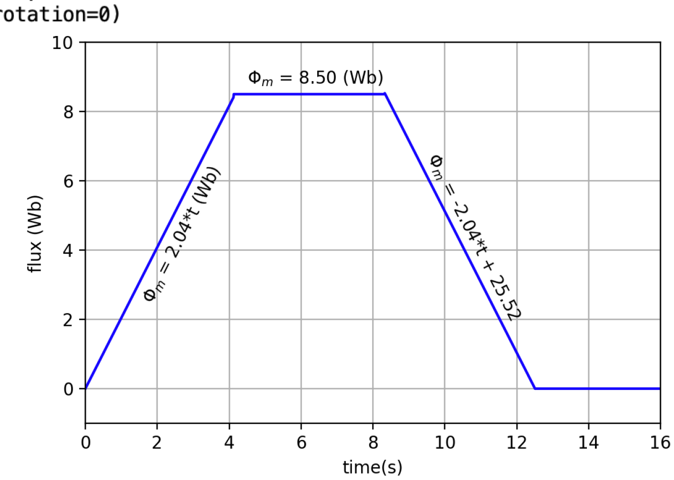
$\Rightarrow -4.18m = 8.5 \Rightarrow m = \frac{8.5}{-4.18} \Rightarrow \underline{m = -2.04\,mWb/s}$

Επομένως $b = -12.51 * (-2.04\,mW/s) \Rightarrow \underline{b = 25.52\,mWb}$.

Άρα η ροή δίνεται από την εξίσωση $\boxed{\phi_m = (-2.04\,mWb/s)t + 25.52\,mWb}$

```python
#!/usr/bin/python3
import matplotlib.pyplot as plt
t=[0.01*k for k in range(1600)]
fl=[2.04*tim if tim<=4.12 else 8.50 if tim<8.33 else -2.04*tim+25.52 \
    if tim< 12.52 else 0.0 for tim in t]

plt.figure(figsize=(6,4))
plt.plot(t,fl,'b-')
plt.xlabel('time(s)')
plt.ylabel('flux (Wb)')
plt.ylim(-1,10)
plt.xlim(0,16)
plt.text(1.5,2.5,r'$\Phi_m$ = 2.04*t (Wb)',rotation=63)
plt.text(9.4,2,r'$\Phi_m$ = -2.04*t + 25.52',rotation=-63)
plt.text(4.5,8.8,r'$\Phi_m$ = 8.50 (Wb)',rotation=0)
plt.grid(True)
plt.show()
```



(β) Από τον νόμου του Faraday μπορούμε να βρούμε την επαγωγική τάση:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

Για $0 < t < 4.17\,s$ $\quad \mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\left[(2.04\,mW/s)\,t\right] = -2.04\,mV$

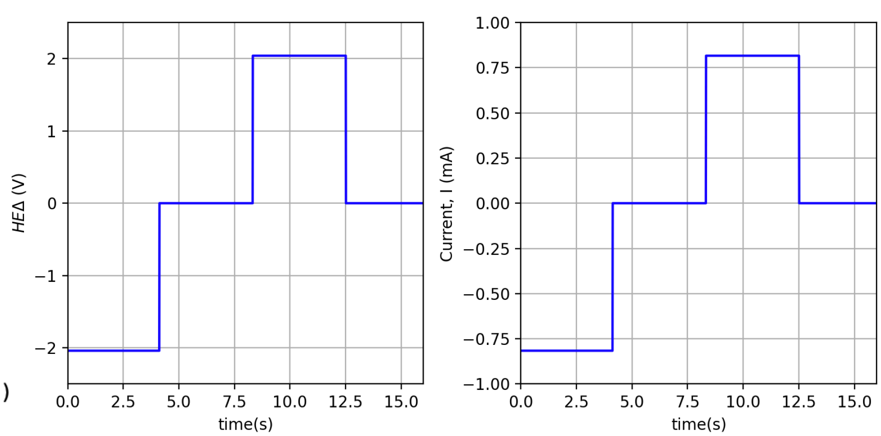
Για $4.17 < t < 8.33\,s$ $\quad \mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\left(8.50\,mWb/s\right) = 0.\ V.$

Για $8.33 < t < 12.5\,s$ $\quad \mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\left[(-2.04\,mW/s)\,t + 25.5\,mW\right] = +2.04\,mV$

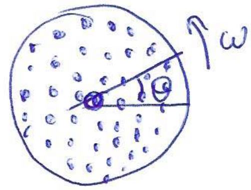
Για $t > 12.5\,s$ $\quad \mathcal{E} = 0$ αφού το πλαίσιο είναι εκτός του μαγνητικού πεδίου

Το ρεύμα θα είναι: $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ και επομένως θα ακολουθεί ακριβώς την ίδια κατανομή όπως και η ηλεκτρεγερτική δύναμη επαγωγής

```python
#!/usr/bin/python3
import matplotlib.pyplot as plt
t=[0.01*k for k in range(1600)]
HED=[-2.04 if tim<=4.12 else 0 if tim<8.33 else +2.04 if tim< 12.52 \
     else 0.0 for tim in t]
R = 2.5
I=[-2.04/R if tim<=4.12 else 0 if tim<8.33 else +2.04/R if tim< 12.52 \
   else 0.0 for tim in t]
plt.figure(figsize=(8,4))
plt.subplot(1,2,1)
plt.plot(t,HED,'b-')
plt.ylim(0.,2.5)
plt.xlim(0.,16.0)
plt.xlabel('time(s)')
plt.ylabel(r'$HE\Delta$ (V)')
plt.ylim(-2.5,2.5)
plt.xlim(0,16)
plt.grid(True)
plt.subplot(1,2,2)
plt.plot(t,I,'b-')
plt.ylim(-1.,1.)
plt.xlim(0.,16.0)
plt.xlabel('time(s)')
plt.ylabel(r'Current, I (mA)')
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```



9. Ένας κυκλικός μεταλλικός δίσκος ακτίνας R περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω ως προς άξονα που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στην επιφάνεια του δίσκου. Ο δίσκος περιστρέφεται σε ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο B η διεύθυνση του οποίου είναι παράλληλη προς τον άξονα περιστροφής. Προσδιορίστε την επαγόμενη ΗΕΔ μεταξύ του κέντρου και των άκρων.



Η ολική ΗΕΔ κατά μήκος του δίσκου, είναι το ολοκλήρωμα της διαφορικής ΗΕΔ κατά μήκος κάθε μικρού τμήματος της ακτινικής γραμμής που περνά από το κέντρο του δίσκου σε σημείο της περιφέρειας

Για κάθε στοιχειώδες ακτινικό μήκος dr, η στοιχειώδης ΗΕΔ, δίνεται από την διαφορική μορφή της $B\upsilon l$.

Η ταχύτητα είναι $\upsilon = \omega r$

Επειδή ο δίσκος περιστρέφεται αντίθετα των δεικτών του ρολογιού και το μαγνητικό πεδίο έχει φορά προς το εσωτερικό της σελίδας η ΗΕΔ αυξάνει καθώς αυξάνεται η ακτίνα και ως αποτέλεσμα τα σημεία της περιφέρειας του δίσκου είναι σε υψηλότερο δυναμικό.

$$\underline{d\mathcal{E}} = B\upsilon dl = B\omega r dr \Rightarrow \mathcal{E} = \int d\mathcal{E} = \int_0^R B\omega r dr = \underline{\underline{\frac{1}{2} B\omega R^2}}$$

10. Στο προηγούμενο πρόβλημα, ποιο είναι το μέτρο και η διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο του περιστρεφόμενου δίσκου;

Ξέρουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο ισούται με το αρνητικό της κλίσης του ηλεκτρικού δυναμικού, όπου το διαφορικό δυναμικό θα είναι αυτό του προηγούμενου προβλήματος: $d\mathcal{E} = Bv\,dl = B\omega r\,dr$

Επομένως: $\vec{E} = -\frac{d\mathcal{E}}{dr}\hat{r} = -\frac{B\omega r}{dr}dr\,\hat{r} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -B\omega r\,\hat{r}}$

Το ηλεκτρικό πεδίο έχει μέτρο $B\omega r$ και διεύθυνση ακτινική με φορά προς το κέντρο του δίσκου