ΦΥΣ. 211
Τελική Εξέταση 11-Μάη-2015

Πριν ξεκινήσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, αριθμό ταυτότητας) στο πάνω μέρος της σελίδας αυτής.

Για τις λύσεις των ασκήσεων θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε μόνο τις σελίδες που δίνονται και μην κόψετε καμιά από τις σελίδες.

Προσπαθήστε να δείξετε τη σκέψη σας και να γράψετε καθαρές εξισώσεις. Για πλήρη ή μερική βαθμολόγηση θα πρέπει να φαίνεται καθαρά αυτό που προσπαθείτε να δείξετε. Αν δεν μπορώ να διαβάσω τι γράφετε αυτόματα θα υποθέσω ότι είναι λάθος.

Σας δίνονται 10 ισοδύναμες ασκήσεις με σύνολο 100 μονάδων και πρέπει να απαντήσετε σε όλες.

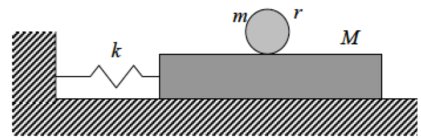
Η σειρά των ασκήσεων δεν είναι αντιπροσωπευτική της δυσκολίας τους. Πριν ξεκινήσετε διαβάστε όλες τις ασκήσεις και σκεφτείτε τι χρειάζεται να κάνετε.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 180 λεπτά.

Καλή επιτυχία.

1. (**10μ συνολικά**)

Ένας ομογενής κύλινδρος ακτίνας *r* και μάζας *m*, κυλά χωρίς να ολισθαίνει στην επιφάνειας ενός κιβωτίου μάζας *M*. Το κιβώτιο με την σειρά του μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε λεία επιφάνεια με την βοήθεια ενός ελατηρίου σταθεράς *k*, το ένα άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο και το άλλο άκρο του στο κιβώτιο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύστημα εκτρέπεται από την θέση ισορροπίας του και αφήνεται να κινηθεί. Θεωρήστε ότι η ροπή αδράνειας ενός κυλίνδρου μάζας *M* και ακτίνας *R* ως προς άξονα κάθετο στην βάση του και περνά από το κέντρο μάζας του είναι $I = MR^2/2$.



(α) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος και τα ολοκληρώματα κίνησης. [**6μ**]

(β) Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα να βρεθεί η συχνότητα των μικρών γραμμικών ταλαντώσεων του συστήματος. [**2μ**]

(γ) Σχεδιάστε τον κανονικό τρόπο ταλάντωσης όταν *m* = *M*. [**2μ**]

Χρησιμοποιούμε σαν γενικευμένες συντεταγμένες, την θέση του ΚΜ του κιβωτίου x_1 και του κυλίνδρου x_2. Σύμφωνα με την επιλογή αυτή η Lagrangian του προβλήματος θα είναι:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \qquad (1)$$

Η επιμήκυνση/συσπείρωση του ελατηρίου είναι ίδια με την αλλαγή στην θέση του κιβωτίου. Η συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση για τον κύλινδρο εισάγει τον δεσμό: $r\theta = x_1 - x_2 \Rightarrow r\dot{\theta} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \Rightarrow r\omega = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \qquad (2)$

Από την (1) και (2) έχουμε:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\frac{(\dot{x}_1-\dot{x}_2)^2}{r^2} - \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{4}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{4}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}_1\dot{x}_2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m+M\right)\dot{x}_1^2 + \frac{3}{4}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}_1\dot{x}_2 - \frac{1}{2}kx_1^2}$$

Επομένως οι εξισώσεις κίνησης θα είναι:

$$x_1: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}m+M\right)\ddot{x}_1 - \frac{1}{2}m\ddot{x}_2 = -kx_1 \qquad (3)$$

x_2: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} m \ddot{x}_2 - \frac{1}{2} m \ddot{x}_1 = 0$ (4)

Η εξίσωση (4) αποτελεί το πρώτο ολοκλήρωμα κίνησης εφόσον:

$$\frac{3}{2} m \dot{x}_2 - \frac{1}{2} m \dot{x}_1 = 0 \Rightarrow \boxed{3\cancel{m}\dot{x}_2 = \cancel{m}\dot{x}_1} \Rightarrow \boxed{3\dot{x}_2 = \dot{x}_1} \quad (5)$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα κίνησης δίνεται από διατήρηση της ενέργειας:

$$\boxed{E = \left(\frac{1}{2} M + \frac{1}{4} m\right)\dot{x}_1^2 + \frac{3m}{4}\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} m \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{1}{2} k x_1^2} \quad (6)$$

(β) Αντικαθιστώντας την εξίσωση (4) στην (3) ως προς $\ddot{x}_1$ παίρνουμε:

$$\boxed{\ddot{x}_2 = \frac{1}{3}\ddot{x}_1} \quad (7)$$

$$\left(\frac{1}{2} m + M\right)\ddot{x}_1 - \frac{1}{2} m \frac{1}{3}\ddot{x}_1 = -k x_1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3} m + M\right)\ddot{x}_1 = -k x_1 \Rightarrow$$

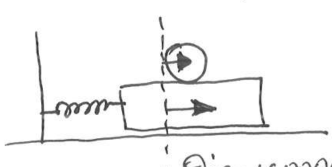
$$\Rightarrow (m + 3M)\ddot{x}_1 = 3k x_1 \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_1 = -\left(\frac{3k}{3M+m}\right) x_1}$$ εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή

Η συχνότητα ταλάντωσης είναι: $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{3k}{3M+m}}}$ ή διαφορετικά $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{m}{3}}}}$

(γ) Από την εξίσωση (7) ή την εξίσωση (4) είναι προφανές ότι

$x_2 = \frac{1}{3} x_1$ για οποιαδήποτε λόγο μαζών των δυό σωμάτων

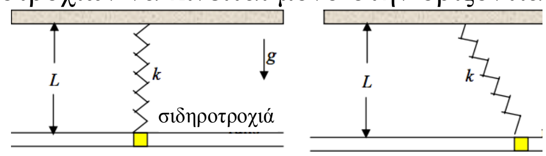
Δηλαδή ο κύλινδρος ταλαντώνεται σε φάση με το κιβώτιο αλλά το πλάτος της ταλάντωσής του είναι 3 φορές μικρότερο του κιβωτίου.



Θέση ισορροπίας

2. (**10μ συνολικά**)

Ένα κουτί μάζας M είναι προσαρτημένο σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k και φυσικού μήκους L. Η μάζα είναι περιορισμένη μέσω δυο σιδηροτροχιών να κινείται μόνο στην οριζόντια διεύθυνση η οποία είναι σε απόσταση L από το σημείο εξάρτησης του ελατηρίου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Επομένως όταν το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία το ελατήριο είναι στο φυσικό του μήκος. Θεωρήστε τη θετική y-διεύθυνση προς τα πάνω και τη θετική x-διεύθυνση προς τα δεξιά.

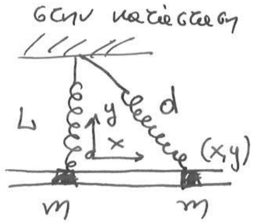


(α) Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange, προσδιορίστε την δύναμη του δεσμού, f, που προσδίδει η σιδηροτροχιά. Θα πρέπει να προσδιορίσετε τις διευθύνσεις των δυνάμεων των δεσμών. [**6μ**]

(β) Προσδιορίστε αν το σύστημα αυτό εκτελεί αρμονική κίνηση για μικρές μετατοπίσεις από την θέση ισορροπίας. Θα πρέπει να δώσετε την σχετική διαφορική εξίσωση. [**4μ**]

(α) Για την χρήση των πολλαπλασιαστών Lagrange, θα πρέπει να κρατήσουμε τις συντεταγμένες χωρίς να εφαρμόσουμε την εξίσωση του δεσμού και την εξάρτηση που υπάρχει μεταξύ συντεταγμένων.

Επιλέγουμε σαν αρχή του συστήματος συντεταγμένων την θέση της μάζας στην κατάσταση ισορροπίας, όταν δηλαδή το ελατήριο είναι κατακόρυφο.



Σε μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή, η μάζα m θα βρίσκεται σε θέση με συντεταγμένες (x,y).

Η επιμήκυνση/συμπίεση του ελατηρίου θα είναι:

$$\Delta \ell = d - L = \sqrt{x^2+(y-L)^2} - L \qquad (1)$$

Η εξίσωση του δεσμού είναι $f(x,y) = y = 0$ εφόσον η μάζα είναι περιορισμένη να κινείται στην οριζόντια μόνο διεύθυνση.

Η συνάρτηση Lagrange θα είναι επομένως:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 - mgy \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - mgy - \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+(y-L)^2}-L\right)^2$$

Οι τροποποιημένες εξισώσεις Euler-Lagrange με την εισαγωγή των πολλαπλασιαστών

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) \Rightarrow -\frac{kx}{\sqrt{x^2+(y-L)^2}}\left(\sqrt{x^2+(y-L)^2}-L\right) = m\ddot{x} \qquad (2)$$

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) \Rightarrow \lambda - mg - \frac{k(y-L)}{\sqrt{x^2+(y-L)^2}}\left(\sqrt{x^2+(y-L)^2}-L\right) = m\ddot{y} \qquad (3)$$

Από την (2) έχουμε: $+kx\left(\frac{1}{\sqrt{(y-L)^2+x^2}}-1\right)=m\ddot{x}$ (4)

Από την (3) έχουμε: $\lambda - mg + k(y-L)\left(\frac{L}{\sqrt{(y-L)^2+x^2}}-1\right)=m\ddot{y}$ (5)

και η εξίσωση του δεσμού: $y=0$ (6)

Εφαρμόζουμε την (6) στην (4) οπότε έχουμε: $\ddot{x}+\frac{k}{m}x\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2/L^2}}-1\right)=0$ (7)

Από την (5) και (6) θα πάρουμε: $\lambda = mg + kL\left(\frac{L}{\sqrt{1+x^2/L^2}}-1\right)$ (8)

Η εξίσωση (7) είναι η εξίσωση κίνησης της μάζας ενώ η (8) μας δίνει τον πολλαπλασιαστή για να υπολογίσουμε τις δυνάμεις:

$F_x = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0$ και $F_y=\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=mg+kL\left(\frac{L}{\sqrt{1+x^2/L^2}}-1\right)$

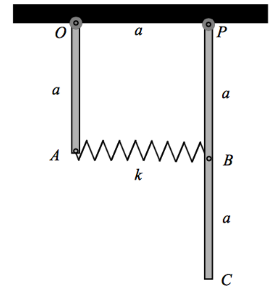
Η σιδηροτροχιά δίνει επομένως μια κατακόρυφο συνισταμένη δύναμης που αντιτίθεται της δύναμης της βαρύτητας και της δύναμης επαναφοράς του ελατηρίου στην κατακόρυφο διεύθυνση.

(β) Από την εξίσωση (7) αν αναπτύξουμε κατά Taylor για την ποσότητα x/L θα πάρουμε: $\ddot{x}+\frac{k}{m}x\left[\left(1-\frac{x^2}{2L^2}\right)-1\right]=0$ όπου $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{L^2}}}\simeq 1-\frac{x^2}{2L^2}$

$\Rightarrow \ddot{x}+\frac{k}{m}x\left(-\frac{x^2}{2L^2}\right)=0 \Rightarrow \boxed{\ddot{x}=\frac{k}{2mL^2}x^3}$ Η εξίσωση αυτή δεν είναι εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή.

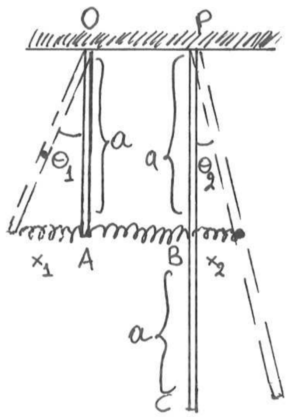
3. (**10μ συνολικά**)

Δυο ράβδοι OA και PC μήκους α και 2α και μάζας m και $2m$ αντίστοιχα, κρέμονται από κατάλληλα σημεία στην οροφή τα οποία επιτρέπουν τις ράβδους να ταλαντώνονται ως προς την κατακόρυφο χωρίς να υπάρχουν τριβές. Ένα ελατήριο φυσικού μήκους α και σταθεράς k, συνδέει το ελεύθερο άκρο της μιας ράβδου με το μέσο της άλλης ράβδου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η απόσταση OP μεταξύ των δυο ραβδών είναι α έτσι ώστε οι ράβδοι να είναι κατακόρυφοι στην θέση ισορροπίας. Υποθέστε ότι το σύστημα διαταράσσεται από την κατάσταση ισορροπίας και εκτελεί μικρού πλάτους ταλάντωση. Να βρεθούν:



(α) Οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος. [**5μ**]

(β) Τα ιδιοδιανύσματα. [**5μ**]



Θεωρούμε την γωνιακή απόκλιση των δυο ράβδων, θ_1 και θ_2 ως προς την κατακόρυφο θέση ισορροπίας τους.

Η κινητική ενέργεια ως προς τα σημεία O και P είναι:

$$T = \frac{1}{2} I_{1O}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{2P}\dot{\theta}_2^2$$

$$I_{1O} = \frac{1}{3} m l_1^2 = \frac{1}{3} m a^2$$

$$I_{2P} = \frac{1}{3} 2m l_2^2 = \frac{1}{3} 2m\, 4a^2 = \frac{8}{3} m a^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\frac{1}{3} m a^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{8}{3} m a^2 \dot{\theta}_2^2$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος προέρχεται από την δυναμική ενέργεια λόγω της θέσης του ΚΜ των δυο ράβδων και την δυναμική ενέργεια του ελατηρίου:

$$U_g = -mg\frac{l_1}{2}\cos\theta_1 - 2mg\frac{l_2}{2}\cos\theta_2 = -mg\frac{a}{2}\cos\theta_1 - 2mg\frac{2a}{2}\cos\theta_2 \quad (A)$$

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι: $U_{ελ} = \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 = \frac{1}{2}k(l_1\sin\theta_1 - l_2\sin\theta_2)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow U_{ελ} = \frac{1}{2}k(a\sin\theta_1 - a\sin\theta_2)^2 = \frac{1}{2}ka^2(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)^2 \quad (B)$$

Για μικρές γωνιακές αποκλίσεις από την θέση ισορροπίας, από τα αναπτύγματα Taylor

$\sin\theta_i \simeq \theta_i$ και $\cos\theta_i = 1 - \frac{\theta_i^2}{2}$

Επομένως η (A) και (B) γίνονται: $U_g = -mg\frac{a}{2}\left(1 - \frac{\theta_1^2}{2}\right) - 2mga\left(1 - \frac{\theta_2^2}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow U_g = -mg\frac{a}{2} + mg\frac{a}{2}\frac{\theta_1^2}{2} - 2mga + 2mga\frac{\theta_2^2}{2} \Rightarrow \boxed{U_g = -\frac{5mga}{2} + mga\left(\frac{\theta_1^2}{4} + \theta_2^2\right)} \quad (\Gamma)$$

Η δυναμική ενέργεια ελατηρίου γίνεται: $\boxed{U_{ελ} = \frac{1}{2}ka^2(\theta_1 - \theta_2)^2} \quad (\Delta)$

Η Lagrangian του συστήματος θα είναι:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m a^2 \left(\frac{1}{3}\dot{\theta}_1^2 + \frac{8}{3}\dot{\theta}_2^2\right) - mga\left(\frac{\theta_1^2}{4} + \theta_2^2\right) - \frac{1}{2} k a^2 (\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{5mga}{2}.$$

Ο τελευταίος όρος είναι σταθερός και συνεπώς δεν συνεισφέρει στην δυναμική του προβλήματος και μπορεί να αγνοηθεί. Θα έχουμε επομένως:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m a^2 \left[\left(\frac{1}{3}\dot{\theta}_1^2 + \frac{8}{3}\dot{\theta}_2^2\right) - \frac{2g}{a}\left(\frac{\theta_1^2}{4} + \theta_2^2\right) - \frac{2}{2}\frac{k}{m}\left(\theta_1^2 + \theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m a^2 \left\{\left[\left(\frac{1}{3}\dot{\theta}_1^2 + \frac{8}{3}\dot{\theta}_2^2\right) - \frac{2g}{a}\left[\frac{\theta_1^2}{4} + \theta_2^2 + \frac{1}{2}\frac{ka}{mg}\left(\theta_1^2 + \theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2\right)\right]\right]\right\}$$

Ορίζουμε $\frac{ka}{mg} = \omega_0^2$ οπότε η συνάρτηση Lagrange γίνεται:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m a^2 \left\{\left[\left(\frac{1}{3}\dot{\theta}_1^2 + \frac{8}{3}\dot{\theta}_2^2\right) - \frac{2g}{a}\left[\frac{\theta_1^2}{2}\left(\frac{1}{2} + \omega_0^2\right) + \theta_2^2\left(1 + \frac{\omega_0^2}{2}\right) - \omega_0^2\theta_1\theta_2\right]\right]\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m a^2 \left\{\left[\left(\frac{1}{3}\dot{\theta}_1^2 + \frac{8}{3}\dot{\theta}_2^2\right) - \frac{g}{a}\left[\theta_1^2\left(\omega_0^2 + \frac{1}{2}\right) + \theta_2^2\left(2 + \omega_0^2\right) - 2\omega_0^2\theta_1\theta_2\right]\right]\right\}$$

Ο πίνακας της κινητικής ενέργειας θα είναι: $[T] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \partial^2 T/\partial\dot{\theta}_1^2 & \partial^2 T/\partial\dot{\theta}_1\partial\dot{\theta}_2 \\ \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\theta}_2\partial\dot{\theta}_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\theta}_2^2} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow [T] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας της δυναμικής ενέργειας θα είναι: $[V] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \partial^2 V/\partial\theta_1^2 & \partial^2 V/\partial\theta_1\partial\theta_2 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial\theta_2\partial\theta_1} & \partial^2 V/\partial\theta_2^2 \end{pmatrix}$

Επομένως $[V] = \frac{g}{a}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2 + \omega_0^2 \end{pmatrix}$

Οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος βρίσκονται λύνοντας την χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\det\left(-[T]\omega^2 + [V]\right) = 0 \Rightarrow \det\left|\frac{g}{a}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \omega_0^2 - \frac{a}{3g}\omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2 + \omega_0^2 - \frac{8a}{3g}\omega^2 \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+2\omega_0^2-\frac{2a}{3g}\omega^2+\frac{\omega_0^2}{2}+\cancel{\omega_0^4}-\frac{a}{3g}\omega_0^2\omega^2-\frac{4a}{3g}\omega^2-\frac{8a}{3g}\omega_0^2\omega^2+\frac{8}{9}\frac{a^2}{g^2}\omega^4-\cancel{\omega_0^4}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\frac{5\omega_0^2}{2}-\frac{2a}{g}\omega^2-3\frac{a}{g}\omega_0^2\omega^2+\frac{8}{9}\frac{a^2}{g^2}\omega^4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8}{9}\frac{a^2}{g^2}\omega^4-\omega^2\left(2+3\omega_0^2\right)\frac{a}{g}+\left(1+\frac{5\omega_0^2}{2}\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8}{9}\omega^4-\omega^2\left(2+3\omega_0^2\right)\frac{g}{a}+\left(1+\frac{5\omega_0^2}{2}\right)\left(\frac{g}{a}\right)^2=0$$

Οι ρίζες της δευτεροβάθμιας αυτής εξίσωσης είναι:

$$\omega_{1,2}^2=\frac{\left(2+3\omega_0^2\right)\frac{g}{a}\pm\sqrt{\left(2+3\omega_0^2\right)^2\left(\frac{g}{a}\right)^2-\frac{4}{9}8\left(1+\frac{5\omega_0^2}{2}\right)\left(\frac{g}{a}\right)^2}}{\frac{16}{9}}\Rightarrow$$

$$\omega_{1,2}^2=\frac{g}{a}\left[\left(6+9\omega_0^2\right)\pm\sqrt{\left(4+9\omega_0^4+12\omega_0^2\right)9-32-80\omega_0^2}\right]\frac{3}{16}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{1,2}^2=\frac{g}{a}\left[\left(6+9\omega_0^2\right)\pm\sqrt{4+28\omega_0^2+81\omega_0^4}\right]\frac{3}{16}}$$

(β) Οι δυο τιμές $\omega_{1,2}^2$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση των ιδιο-διανυσμάτων. Θα έχουμε:

$$\frac{g}{a}\begin{pmatrix}\omega_0^2+\frac{1}{2}-\frac{a}{3g}\omega_1^2 & -\omega_0^2\\ -\omega_0^2 & \omega_0^2+2-\frac{8a}{3g}\omega_1^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\end{pmatrix}=0\Rightarrow\left(\omega_0^2+\frac{1}{2}-\frac{a}{3g}\omega_1^2\right)a_{11}-\omega_0^2a_{21}=0\Rightarrow$$

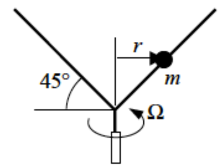
$$\Rightarrow \boxed{\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2+\frac{1}{2}-\frac{a}{3g}\omega_1^2}}$$

$$\frac{g}{a}\begin{pmatrix}\omega_0^2+\frac{1}{2}-\frac{a}{3g}\omega_2^2 & -\omega_0^2\\ -\omega_0^2 & \omega_0^2+2-\frac{8a}{3g}\omega_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{12}\\ a_{22}\end{pmatrix}=0\Rightarrow\left(\omega_0^2+\frac{1}{2}-\frac{a}{3g}\omega_2^2\right)a_{12}-\omega_0^2a_{22}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a_{22}}{a_{12}}=\frac{\omega_0^2+\frac{1}{2}-\frac{a}{3g}\omega_2^2}{\omega_0^2}}$$

4. (**10μ συνολικά**)

Ένα σύρμα αμελητέας μάζας έχει σχήμα Y, όπου οι δυο βραχίονές του βρίσκονται σε γωνία 45^o. Το σύρμα μπορεί να περιστρέφεται ως προς τον κατακόρυφο άξονα όπως στο σχήμα. Μια μάζα m, είναι ελεύθερη να κινείται πάνω σε έναν από τους βραχίονες του σύρματος.

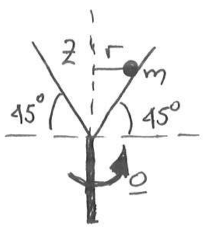


(α) Να γραφεί η Hamiltonian του συστήματος. [**3μ**]

(β) Να προσδιοριστεί μια διατηρήσιμη ποσότητα. [**2μ**]

(γ) Δείξτε ότι το πρόβλημα μπορεί να αναχθεί σε πρόβλημα κεντρικού δυναμικού και βρείτε το ενεργό δυναμικό. [**2μ**]

(δ) Βρείτε την θέση ισορροπίας της μάζας όταν το σύρμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω. [**3μ**]



Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{x} = \dot{\rho}\cos\theta - \rho\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{\rho}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$z = z \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = \dot{z}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{x}^2 = \dot{\rho}^2\cos^2\theta + \rho^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta - 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta \\ \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2\sin^2\theta + \rho^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2$$

Επομένως η Lagrangian του συστήματος θα είναι:

$$\left.\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz \right\} \Rightarrow$$

Επειδή η γωνία είναι 45^o θα έχουμε ότι $z = \rho = r$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\right) - mgr = \frac{1}{2}m\left(2\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgr$$

Η Hamiltonian του συστήματος θα είναι:

$$\mathcal{H} = \sum p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L} = \left(2m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{1}{2}m\left(2\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + mgr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = 2m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 - m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mgr \Rightarrow \boxed{\mathcal{H} = m\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 + mgr}$$

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = 2m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{2m}$$

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

Επομένως $\boxed{\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{4m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + mgr}$

(β) Από τις εξισώσεις Hamilton έχουμε:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{και} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{οπότε:} \quad \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{2m} \quad \text{και} \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}$$

$$\text{και} \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{p_\theta^2}{mr^3} - mg \quad \text{και} \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow p_\theta = \text{σταθ}$$

Επομένως η διατηρήσιμη ορμή είναι: $\boxed{p_\theta = \frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}}$.

(γ) Είδαμε προηγουμένως ότι:

$H = m\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 + mgr$ θεωρώντας $\boxed{\mu = 2m}$ το πρόβλημα ανάγεται:

$$H = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{eff}(r) \quad \text{όπου} \quad V_{eff}(r) = \frac{p_\theta^2}{\mu r^2} + \frac{\mu g r}{2}$$

(δ) Η θέση ισορροπίας βρίσκεται εκεί που $\frac{\partial V_{eff}}{\partial r} = 0$.

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p_\theta^2}{\mu r^2} + \frac{\mu g r}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{-2p_\theta^2}{\mu r^3} + \frac{\mu g}{2} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{4p_\theta^2}{\mu^2 g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{4m^2r^4\dot{\theta}^2}{\mu^2 g} = \frac{\cancel{\mu^2} r^4\dot{\theta}^2}{\cancel{\mu^2} g} = \frac{r^4}{g}\Omega^2 \Rightarrow \boxed{r = \frac{g}{\Omega^2}}$$

5. (**10μ συνολικά**)

Ένας πλανήτης μάζας m περιστρέφεται γύρω από τον ήλιο μάζας M, σε ελλειπτική τροχιά εκκεντρότητας e της οποίας ο μεγάλος ημιάξονας είναι α. Στο περιήλιο της τροχιάς, το μέτρο της στροφορμής L του πλανήτη είναι $m\upsilon(1-e)a$ ενώ στο αφήλιο είναι $m\upsilon'(1+e)a$. Στο περιήλιο η ενέργεια του πλανήτη είναι $E=\frac{m\upsilon^2}{2}-\frac{GMm}{a(1-e)}$ ενώ στο αφήλιο είναι $E=\frac{m\upsilon'^2}{2}-\frac{GMm}{a(1+e)}$.

(α) Χρησιμοποιώντας διατήρηση της στροφορμής αποδείξτε ότι: [**3μ**]

$$\upsilon=\frac{L}{m(1-e)a} \text{ και } \upsilon'=\frac{L}{m(1+e)a}$$

(β) Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στους τύπους της ενέργειας E και χρησιμοποιώντας διατήρηση της ενέργειας αποδείξτε ότι: $L^2=GMm^2a\left(1-e^2\right)$. [**2μ**]

(γ) Αντικαθιστώντας την εξίσωση για υ στον τύπο για την ενέργεια E, και χρησιμοποιώντας την εξίσωση για L^2 αποδείξτε ότι: $E=-\frac{GMm}{2a}$. [**5μ**]

(α) Απο διατήρηση της στροφορμής έχουμε: $L=m\upsilon(1-e)a=m\upsilon'(1+e)a$

Λύνοντας ως προς υ και υ' θα πάρουμε: $\boxed{\upsilon=\frac{L}{m(1-e)a}}$

και $\boxed{\upsilon'=\frac{L}{m(1+e)a}}$

(β) Από διατήρηση της ενέργειας έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2-\frac{GMm}{a(1-e)}=\frac{1}{2}m\upsilon'^2-\frac{GMm}{a(1+e)} \Rightarrow \frac{m}{2}\left(\upsilon^2-\upsilon'^2\right)=-\frac{GMm}{a}\left(\frac{1}{1+e}-\frac{1}{1-e}\right)$$

Αντικαθιστούμε από το (α) ερώτημα τα υ και υ' και θα πάρουμε:

$$\frac{\cancel{m}}{2}\left[\frac{L^2}{m^{\cancel{2}}a^2}\left(\frac{1}{(1-e)^2}-\frac{1}{(1+e)^2}\right)\right]=-\frac{GMm}{a}\left(\frac{(1-e)-(1+e)}{1-e^2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{L^2}{2ma^2}\left(\frac{\cancel{1}+\cancel{e^2}+2e-\cancel{1}-\cancel{e^2}+2e}{\left(1-e^2\right)^2}\right)=-\frac{GMm}{a}\left(\frac{-2e}{1-e^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{L^2}{\cancel{2}ma^{\cancel{2}}}\frac{\cancel{4e}}{(1-e^2)^{\cancel{2}}}=+\frac{GMm}{\cancel{a}}\frac{\cancel{2e}}{\cancel{1-e^2}} \Rightarrow \boxed{L^2=GMm^2\left(1-e^2\right)a}$$

(γ) Από την στιγμή που η ενέργεια διατηρείται, μπορούμε να την υπολογίσουμε σε ένα σημείο της τροχιάς (έστω στο περιήλιο) και θα είναι η ίδια σε οποιοδήποτε άλλο σημείο της τροχιάς.

Επομένως θα έχουμε για το περιήλιο: $E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{a(1-e)}=\frac{m}{2}\frac{L^2}{m^2(1-e)^2a^2}-\frac{GMm}{a(1-e)}$

$$\Rightarrow E=\frac{L^2}{2m(1-e)^2a^2}-\frac{GMm}{a(1-e)}$$

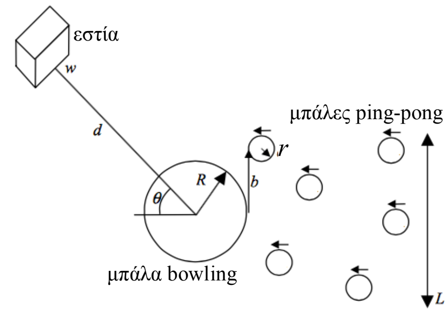
Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β) για L^2 θα έχουμε:

$$E=\frac{GMm^{\cancel{2}}(1-e^2)a}{2\cancel{m}(1-e)^2a^2}-\frac{GMm}{a(1-e)}=\frac{GMm\cancel{(1-e)}(1+e)\cancel{a}}{2(1-e)^{\cancel{2}}a^{\cancel{2}}}-\frac{GMm}{a(1-e)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E=\frac{GMm(1+e)-2GMm}{2a(1-e)}=\frac{-GMm\cancel{(1-e)}}{2a\cancel{(1-e)}}\Rightarrow \boxed{E=-\frac{GMm}{2a}}$$

6. (**10π συνολικά**)

Θεωρήστε μπαλάκια του ping-pong ακτίνας r και μάζας m, τα οποία σκεδάζονται τέλεια ελαστικά πάνω σε μια μπάλα του bowling ακτίνας R και μάζας $M \gg m$. Η μπάλα του bowling παραμένει ακίνητη μετά την κρούση. Τα μπαλάκια του ping-pong εκτοξεύονται από ένα μηχάνημα πολλά μαζί έτσι ώστε να κατανέμονται ομοιόμορφα σε όλο το μήκος L, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ο συνολικός αριθμός των μπαλών N είναι πολύ μεγάλος. Μια εστία βρίσκεται σε απόσταση d και έχει πλάτος w. Θεωρήστε ότι η απόσταση της εστίας d είναι πολύ μεγαλύτερη από τις διαστάσεις της μπάλας του bowling και της μπάλας του ping-pong $d \gg R$, $d \gg a$, και ότι $d \gg w$, το εύρος δηλαδή της εστίας είναι πολύ μικρότερο από την απόσταση.

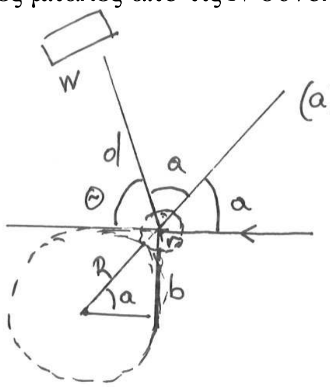


(α) Ποια η σχέση μεταξύ της παραμέτρου κρούσης και της γωνίας σκέδασης θ, της μπάλας του ping-pong. [**3μ**]

(β) Ορίστε μια ενεργό διατομή σκέδασης σε δυο διαστάσεις έτσι ώστε η ποσότητα $\left(N/L\right)\sigma\left(\theta\right)d\theta$ να δίνει τον αριθμό των μπαλών του ping-pong που σκεδάζονται σε γωνία $d\theta$. Ποια είναι η ενεργός διατομή σκέδασης στην περίπτωση αυτή; [**4μ**]

(γ) Πόσες μπάλες από τις N συνολικά θα βρεθούν στην εστία; [**2μ**]

(δ) Πόσες μπάλες από τις N συνολικά θα χτυπήσουν την μπάλα του bowling; [**1μ**]



(α) Για ελαστική κρούση, η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με την γωνία ανάκλασης.

Από το σχήμα βλέπουμε ότι $\Theta + 2a = \pi \Rightarrow \Theta = \pi - 2a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Theta = \pi - 2\sin^{-1}\left(\frac{b}{R+r}\right) \Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{b}{R+r}\right) = \frac{\pi-\Theta}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi-\Theta}{2} = \frac{b}{R+r} \Rightarrow \cancel{\sin\frac{\pi}{2}}^{\,1}\cos\frac{\Theta}{2} - \sin\frac{\Theta}{2}\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}^{\,0} = \frac{b}{R+r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\frac{\Theta}{2} = \frac{b}{R+r}} \Rightarrow \boxed{b = (R+r)\cos\frac{\Theta}{2}}$$

(β) Όπως έχουμε δει στις διαλέξεις, ο αριθμός των σωματιδίων που σκεδάζονται σε μια γωνία $d\Theta$, είναι ο αριθμός που περιέχεται σε ένα δακτύλιο db της παραμέτρου πρόσκρουσης. Δηλαδή:

$$\frac{N}{L}db = \frac{N}{L}\sigma(\Theta)d\Theta \Rightarrow \sigma(\Theta) = \left|\frac{db}{d\Theta}\right| = \left|\frac{d}{d\Theta}(R+r)\cos\frac{\Theta}{2}\right| \Rightarrow \boxed{\sigma(\Theta) = \frac{R+r}{2}\left|\sin\frac{\Theta}{2}\right|}$$

(γ) Οι μπάλες που θα καταλήξουν στην εστία θα είναι: $N_{\varepsilon\sigma\tau\iota\alpha} = \frac{N}{L}\,\sigma(\Theta)\,d\Theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow N_{\varepsilon\sigma\tau\acute{\iota}\alpha} = \frac{N}{L}\,\frac{(R+r)}{2}\,\sin\frac{\Theta}{2}\,\frac{w}{\pi d}$$ όπου ο τελευταίος όρος $d\Theta = \frac{w}{\pi d}$

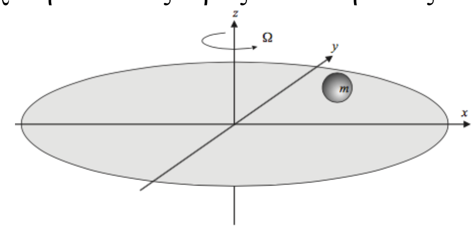
(δ) Ο αριθμός των μπαλών που θα χτυπήσουν την μπάλα του bowling, προκύπτει πολ/ζοντας την πυκνότητα των μπαλών $\frac{N}{L}$ με την ολική ενεργό διατομή:

$$N_{boul} = \frac{N}{L}\,\sigma_{\tau o\tau} = \frac{N}{L}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma(\Theta)\,d\Theta = \frac{N}{L}\,\frac{R+r}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\frac{\Theta}{2}\,d\Theta \Rightarrow N_{boul} = \frac{N}{L}\,\frac{R+r}{\cancel{2}}\,\cancel{2}\int_{0}^{\pi}\sin\frac{\Theta}{2}\,d\Theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{N_{boul} = 2\,\frac{N}{L}\,(R+r)}$$

7. (**10μ συνολικά**)

Θεωρήστε ένα δίσκο που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα *Ω* ως προς ακλόνητο άξονα κάθετο στη επιφάνεια που περνά από το κέντρο του. Μια μπάλα μάζας *m* και ακτίνας *R*, κυλά χωρίς να ολισθαίνει πάνω στην επιφάνεια. Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης του κέντρου μάζας της μπάλας.



<u>*Υπόδειξη*</u>: Θα πρέπει να βρείτε την συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθησης για την μπάλα. Χρησιμοποιείστε τις διανυσματικές εξισώσεις κίνησης $m\ddot{\vec{r}}_G = \vec{F}$ και $\dot{\vec{L}}_G = -R\hat{e}_z \times \vec{F}$ και την ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς το κέντρο μάζας της $I = 2mR^2/5$.

Η συνθήκη για κύλιση χωρίς ολίσθηση είναι η ταχύτητα του χαμηλότερου σημείου της μπάλας που είναι σε επαφή με την μπάλα και της ταχύτητα του σημείου επαφής στην πλατφόρμα θα πρέπει να είναι ίδιες. Έστω $v_{B\pi}$ η ταχύτητα του σημείου της πλατφόρμας

Επομένως $\quad v_{B\pi} = \vec{\Omega} \times \vec{r} = \Omega \hat{k} \times (x\hat{i} + y\hat{j}) = -\Omega y \hat{i} + \Omega x \hat{j}$

Η ταχύτητα του κατώτερου σημείου της μπάλας που είναι σε επαφή με την πλατφόρμα

$$\vec{v}_{B\mu} = \vec{v}_\mu + \vec{\omega} \times (-R\hat{k}) = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} - R(\omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j}) \times \hat{k} = (\dot{x} - R\omega_y)\hat{i} + (\dot{y} + R\omega_x)\hat{j}$$

Εξισώνοντας θα πάρουμε: $\vec{v}_{B\mu} = \vec{v}_{B\pi} \Rightarrow -\Omega y \hat{i} + \Omega x \hat{j} = (\dot{x} - R\omega_y)\hat{i} + (\dot{y} + R\omega_x)\hat{j} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} - R\omega_y = -\Omega y & (1) \\ \dot{y} + R\omega_x = \Omega x & (2) \end{cases}$$

Η στροφορμή της μπάλας είναι: $\vec{L} = I\vec{\omega}$

$$\left.\begin{array}{l} m\ddot{\vec{r}}_G = \vec{F} \\ \dot{\vec{L}}_G = -R\hat{k} \times \vec{F} \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{\vec{L}}_G = -R\hat{k} \times m\ddot{\vec{r}}_G = -Rm(\hat{k} \times \ddot{\vec{r}}_G) \quad \Rightarrow \boxed{I\dot{\vec{\omega}} = -Rm(\hat{k} \times \ddot{\vec{r}}_G)} \quad (3)$$

Αλλά $\vec{r}_G = x\hat{i} + y\hat{j} + R\hat{k} \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_G = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} \Rightarrow \boxed{\hat{k} \times \ddot{\vec{r}}_G = +\ddot{x}\hat{j} - \ddot{y}\hat{i}} \quad (4)$

Επομένως:

$$(3) \wedge (4) \quad \begin{cases} I\dot{\omega}_x = +Rm\ddot{y} & (5) \\ I\dot{\omega}_y = -Rm\ddot{x} & (6) \end{cases}$$

Παίρνουμε την παράγωγο των (1) κ (2) ως προς χρόνο :

$$\ddot{x} - R\dot{\omega}_y = -\Omega\dot{y} \qquad (7) \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega}_y = \frac{\ddot{x}}{R} + \frac{\Omega}{R}\dot{y}$$

$$\ddot{y} + R\dot{\omega}_x = \Omega\dot{x} \qquad (8) \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega}_x = -\frac{\ddot{y}}{R} + \frac{\Omega}{R}\dot{x}$$

Αντικαθιστούμε στις (5) κ (6) οπότε έχουμε:

$$I\frac{\ddot{x}}{R} + I\frac{\Omega}{R}\dot{y} = -Rm\ddot{x} \Rightarrow I\frac{\ddot{x}}{mR^2} + I\frac{\Omega}{mR^2}\dot{y} = -\ddot{x} \Rightarrow \left(m+\frac{I}{R^2}\right)\ddot{x} + \frac{I}{R^2}\Omega\dot{y} = 0$$

$$-I\frac{\ddot{y}}{R} + I\frac{\Omega}{R}\dot{x} = Rm\ddot{y} \Rightarrow -I\frac{\ddot{y}}{mR^2} + I\frac{\Omega}{mR^2}\dot{x} = \ddot{y} \Rightarrow \left(m+\frac{I}{R^2}\right)\ddot{y} - \frac{I}{R^2}\Omega\dot{x} = 0$$

Από τις τελευταίες δυο εξισώσεις έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + I\Omega/(mR^2+I)\,\dot{y} &= 0 \\ \ddot{y} - I\Omega/(mR^2+I)\,\dot{x} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \ddot{x} + \left[\Omega/\left(1+\frac{mR^2}{I}\right)\right]\dot{y} &= 0 \qquad (9) \\ \ddot{y} - \left[\Omega/\left(1+\frac{mR^2}{I}\right)\right]\dot{x} &= 0 \qquad (10) \end{aligned}$$

$$\text{Θέτουμε} \quad \omega = \frac{\Omega}{1+\frac{mR^2}{I}} = \frac{\Omega}{1+\frac{\cancel{mR^2}}{\frac{2}{5}\cancel{mR^2}}} = \frac{2}{7}\Omega$$

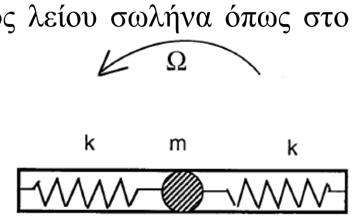
Επομένως οι (9) και (10) γίνονται:

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{2}{7}\Omega\dot{y} = 0}$$

$$\boxed{\ddot{y} - \frac{2}{7}\Omega\dot{x} = 0}$$

8. (**10μ συνολικά**)

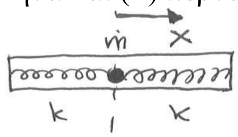
Ένα σώμα μάζας *m* είναι περιορισμένο να κινείται κατά μήκος ενός λείου σωλήνα όπως στο σχήμα. Εκατέρωθεν της μάζας υπάρχουν δυο ελατήρια αμελητέας μάζας και σταθεράς *k*, τα άλλα άκρα των οποίων είναι προσαρτημένα στα άκρα του σωλήνα. Ο σωλήνας είναι τοποθετημένος σε οριζόντια κυκλική πλατφόρμα η οποία μπορεί να περιστρέφεται ως προς κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο της.



(α) Υποθέστε ότι αρχικά η πλατφόρμα δεν περιστρέφεται. Αν την χρονική στιγμή $t = 0$, η μάζα έχει μετατόπιση x_o προς τα δεξιά από το κέντρο του σωλήνα και αφαιθεί να κινηθεί, να βρεθεί η περίοδος των ταλαντώσεων της μάζας. [**2μ**]

(β) Υποθέστε τώρα ότι η πλατφόρμα περιστρέφεται αντίθετα των δεικτών του ρολογιού με γωνιακή ταχύτητα *Ω*. Ποια θα είναι η περίοδος των ταλαντώσεων; [**3μ**]

(γ) Αν η πλατφόρμα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα Ω αντίθετα των δεικτών του ρολογιού και η μάζα την χρονική στιγμή $t = 0$ έχει απομάκρυνση x_o προς τα δεξιά του κέντρου του σωλήνα, και αφαιθεί να κινηθεί, ποια θα είναι η κάθετη δύναμη που ασκούν τα τοιχώματα του σωλήνα στην μάζα όταν αυτή βρίσκεται (i) στη μέγιστη απομάκρυνσή της από το κέντρο του σωλήνα και (ii) περνά από το κέντρο του σωλήνα. [**5μ**]



Έστω η απομάκρυνση από το κέντρο του σωλήνα είναι x ενώ η y-διεύθυνση είναι κάθετη στον x-άξονα

Η δύναμη που ασκείται στην μάζα m, προέρχεται από τα ελατήρια $F_{ελ} = -kx - kx \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{F_{ελ} = -2kx}$ από την στιγμή που υπάρχουν δυό ελατήρια

(α) Όταν η πλατφόρμα δεν περιστρέφεται τότε:

$m\ddot{x} = F = -2kx \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{2k}{m}x$ Εξίσωση απλού αρμονικού ταλαντωτή με $\boxed{\omega_o = \sqrt{\frac{2k}{m}}} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}}$

(β) Όταν η πλατφόρμα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα Ω

Στο μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς που περιστρέφεται με την πλατφόρμα, στην μάζα m ασκείται η φυγόκεντρος δύναμη και η δύναμη Coriolis σαν μη αδρανειακές δυνάμεις που θα πρέπει να προστεθούν στην εξίσωση κίνησης:

$\vec{F}_{φυγοκ} = -m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}) = +m\Omega^2 x\,\hat{i}$ $\qquad (\vec{\Omega}\times\vec{r}) = \Omega\hat{k}\times x\hat{i} = -\Omega x\hat{j}$

$\vec{\Omega}\times(-\Omega x\hat{j}) = -\Omega\hat{k}\times\Omega x\hat{j} = +\Omega^2 x\hat{i}$

$\vec{F}_{coriolis} = -2m\vec{\Omega}\times\vec{v} = -2m\Omega\hat{k}\times\dot{x}\hat{i} = -2m\Omega\dot{x}\hat{j}$

Απο την στιγμή που η μάζα m είναι περιορισμένη να κινείται μέσα στον σωλήνα, και η δύναμη Coriolis είναι κατά μήκος του $\hat{y}$ άξονα, δεν επηρεάζει την κίνηση της μάζας.
Επομένως μόνο η φυγόκεντρος δύναμη επηρεάζει την κίνηση και η εξίσωση κίνησης γίνεται: $m\ddot{x} = F + F_{φυγ} \Rightarrow m\ddot{x} = -2kx + m\Omega^2 x = -(2k - m\Omega^2)x$ εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή

Η συχνότητα ταλάντωσης είναι τώρα $\boxed{\omega = \sqrt{(2k - m\Omega^2)/m}}$ αν $m\Omega^2 > 2k$ η μάζα θα είναι στην άκρη του σωλήνα

(γ) Απο την στιγμή που η μάζα δεν κινείται στην y-διεύθυνση (κάθετα στον σωλήνα) όπως γίνεται αντιληπτό από τον περιστρεφόμενο παρατηρητή, η συνισταμένη δύναμη στην διεύθυνση αυτή θα πρέπει να είναι μηδέν.

Οι δυνάμεις στην κάθετη διεύθυνση, είναι η κάθετη αντίδραση από τα τοιχώματα του σωλήνα και η δύναμη Coriolis.

$\vec{N} + \vec{F}_{cor} = 0 \Rightarrow \vec{N} = -\vec{F}_{coriolis} \Rightarrow \vec{N} = 2m\Omega\dot{x}\,\hat{j}$
- $\vec{N}$ στην $+\hat{j}$-διεύθυνση όταν η μάζα κινείται στα δεξιά
- $\vec{N}$ στην $-\hat{j}$-διεύθυνση όταν η μάζα κινείται αριστερά.

Όταν η μάζα εκτελεί ταλάντωση, η απομάκρυνσή της συναρτήσει του χρόνου είναι:

$x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ όπου x_0 η αρχική απομάκρυνση της μάζας και ω η γωνιακή ταχύτητα που βρέθηκε στο (β) ερώτημα

Επομένως $\dot{x}(t) = -x_0 \omega \sin(\omega t)$

Επομένως η δύναμη από τα τοιχώματα του σωλήνα θα είναι:

(i) $\dot{x} = 0$, η μπάλα αρχικά ακίνητη: $\boxed{\vec{N} = 0}$

(ii) $\dot{x} = \dot{x}_{max}$ η μάζα περνά από την θέση ισορροπίας της, οπότε $\dot{x} = \pm x_0 \omega$

όπου (+) όταν η μάζα κινείται προς τα δεξιά και (−) όταν κινείται προς τα αριστερά

Η κάθετη δύναμη από τα τοιχώματα θα είναι τότε $\boxed{\vec{N} = \pm 2m\Omega\omega x_0\,\hat{j}}$

9. (**10μ συνολικά**)

Ένα στερεό σώμα αποτελείται από τρεις ίσες διακριτές μάζες m, στις θέσεις $(\alpha,0,0)$, $(0,\alpha,2\alpha)$ και $(0,2\alpha,\alpha)$.

(α) Βρείτε τον τανυστή αδράνειας **I**, ως προς το σύστημα συντεταγμένων *x,y,* και *z* στο οποίο οι θέσεις των μαζών δίνονται όπως παραπάνω. [**3μ**]

(β) Βρείτε τις κύριες ροπές αδράνειας του σώματος αυτού. [**3μ**]

(γ) Βρείτε τις διευθύνσεις τριων κυρίων αξόνων του συστήματος αυτού. [**4μ**]

(α) Βρίσκουμε τον τανυστή αδράνειας $[I]$ χρησιμοποιώντας τις x, y, z συντεταγμένες των μαζών στο σύστημα που δίνονται:

$$I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha \left(\delta_{ij} r_\alpha^2 - x_i x_j\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I_{xx} = m_1(0) + m_2\left(a^2 + 4a^2\right) + m_3\left(4a^2 + a^2\right) = 10ma^2$$

$$I_{yy} = m_1\left(a^2\right) + m_2\left(4a^2\right) + m_3\left(a^2\right) = 6ma^2$$

$$I_{zz} = m_1\left(a^2\right) + m_2\left(a^2\right) + m_3\left(4a^2\right) = 6ma^2$$

$$I_{xy} = I_{yx} = 0 = I_{xz} = I_{zx}$$

$$I_{yz} = I_{yz} = m_1(0) + m_2\left(-2a^2\right) + m_3\left(-2a^2\right) = -4ma^2$$

Επομένως ο τανυστής αδράνειας είναι: $[\underset{\sim}{I}] = ma^2 \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

(β) Οι κύριες ροπές αδράνειας βρίσκονται από τις ιδιοτιμές του τανυστή αδράνειας $[I]$.

$$\det\begin{pmatrix} 10-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6-\lambda & -4 \\ 0 & -4 & 6-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (10-\lambda)\left[(6-\lambda)^2 - 16\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (10-\lambda)(6-\lambda-4)(6-\lambda+4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (10-\lambda)(2-\lambda)(10-\lambda) = 0 \Rightarrow (10-\lambda)^2(2-\lambda) = 0.$$

Επομένως $\lambda_{1,2} = 10$ εκφυλισμένη και $\lambda_3 = 2$.

Οι κύριες ροπές αδράνειας επομένως είναι: $I_{xx} = I_{yy} = 10ma^2$ και $I_{zz} = 2ma^2$

(γ) Για να βρούμε μια ομάδα κυρίων αξόνων αδράνειας θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση:

$$\begin{pmatrix} 10-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6-\lambda & -4 \\ 0 & -4 & 6-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = 0$$ για κάθε τιμή του λ που έχουμε:

$\lambda = 10$: $$\begin{pmatrix} 10-10 & 0 & 0 \\ 0 & 6-10 & -4 \\ 0 & -4 & 6-10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -4b_1 - 4c_1 = 0 \Rightarrow b_1 = -c_1$$ και a_1: αυθαίρετο $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$\lambda = 2$: $$\begin{pmatrix} 10-2 & 0 & 0 \\ 0 & 6-2 & -4 \\ 0 & -4 & 6-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_3 = 0 \text{ και } 4b_3 - 4c_3 = 0 \Rightarrow b_3 = c_3 \Rightarrow \boxed{\hat{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Το 3ο ιδιοδιάνυσμα μπορεί να βρεθεί εφαρμόζοντας την συνθήκη ορθοκανονικότητας με τα άλλα δυο. Θα πρέπει όμως να εξακολουθεί να ικανοποιεί την σχέση: $b_2 = -c_2$ σύμφωνα με την εξίσωση που βρήκαμε πιο πάνω για $\lambda = 10$, αφού η ιδιοτιμή αυτή είναι εκφυλισμένη.

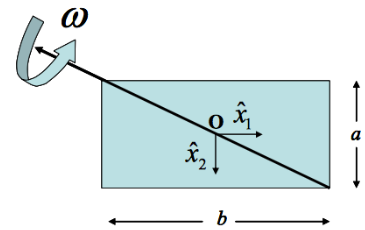
Επομένως θα έχουμε: $a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1 \Rightarrow a_2^2 = 1 - 2b_2^2$ $\Big\} \Rightarrow a_2 = 1.$

$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0 \Rightarrow (1b_2 + 1c_2) = 0.$
$\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = 0 \Rightarrow (1b_2 - 1c_2) = 0$ $\Big\} \Rightarrow$ $b_2 = -c_2$, $b_2 = c_2$ $\Big\} \Rightarrow b_2 = c_2 = 0$

Επομένως μια επιλογή που θα μπορούσαμε να έχουμε είναι: $\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

10. (**10μ συνολικά**)

Μια λεπτή μεταλική επιφάνεια έχει το σχήμα ενός ορθογωνίου παραλληλογράμου με πλευρές a και b. Η επιφάνεια έχει μάζα M και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω όπως στο σχήμα. Οι κύριες ροπές αδράνειας της επιφάνειας ως προς το κέντρο O, είναι: $I_1 = \frac{1}{12} M a^2$, $I_2 = \frac{1}{12} M b^2$ και $I_3 = \frac{1}{12} M\left(a^2 + b^2\right)$.



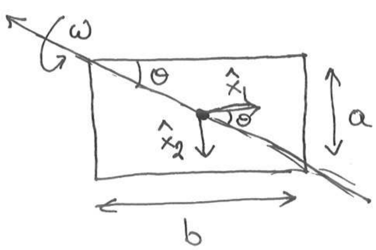
(α) Να βρεθεί το μέτρο και η διεύθυνση της στροφορμής του σώματος συναρτήσει των a, b, M και ω. Μπορείτε να προσδιορίσετε την διεύθυνση ως προς το σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) του σώματος. Βρείτε επίσης τη κινητική ενέργεια του σώματος. [**6μ**]

(β) Να βρεθεί το μέτρο και η διεύθυνση της ροπής ως προς το O που είναι απαραίτητη ώστε το σώμα να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Μπορείτε να προσδιορίσετε την διεύθυνση ως προς το σύστημα συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3) του σώματος. [**3μ**]

(γ) Η ροπή που υπολογίζετε στο ερώτημα (β) μηδενίζεται για μια συγκεκριμένη τιμή του λόγου a/b των πλευρών του ορθογωνίου. Βρείτε την τιμή του λόγου a/b για την οποία η ροπή μηδενίζεται και δώστε την φυσική ερμηνεία. [**1μ**]

Οι κύριες ροπές αδράνειας του ορθογωνίου ως προς το σημείο O είναι:

$$I_1 = \frac{1}{12} m a^2 \qquad I_2 = \frac{1}{12} m b^2 \qquad \text{και} \qquad I_3 = \frac{1}{12} m (a^2+b^2)$$



Για να βρούμε την διεύθυνση της στροφορμής, ορίζοντας τις συνιστώσες της ως προς το σύστημα συντεταγμένων του σώματος (x_1, x_2, x_3). Θα έχουμε ότι ο τανυστής είναι:

$$[I] = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} m a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} m b^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} m (a^2+b^2) \end{pmatrix} = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

Η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ μπορεί να γραφεί σαν: $\vec{\omega} = -\omega \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega \begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$

Επομένως έχουμε: $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = -\omega \begin{pmatrix} b/\sqrt{a^2+b^2} \\ a/\sqrt{a^2+b^2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Η στροφορμή επομένως θα είναι: $\vec{L} = [I]\vec{\omega} = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} a^2\omega_1 \\ b^2\omega_2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{mab\omega}{12} \begin{pmatrix} a/\sqrt{a^2+b^2} \\ b/\sqrt{a^2+b^2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Το μέτρο της στροφορμής είναι: $|\vec{L}| = \frac{mab\omega}{12} \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} \right) \Rightarrow \boxed{|\vec{L}| = \frac{mab\omega}{12}}$

(β) Η διεύθυνση και μέτρο της ροπής για να κρατήσουμε το ορθογώνιο να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, μπορούν να βρεθούν από τις εξισώσεις Euler ή εφαρμόζοντας την σχέση: $\left(\frac{dL}{dt}\right)_{αδρ} = \left(\frac{dL}{dt}\right)_{σωμ} + \vec{\omega}\times\vec{L} = \vec{\omega}\times\vec{L}$

Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις Euler:

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = \tau_1 \Rightarrow \dot{\omega}_1 = 0 \ \& \ \omega_3 = 0 \ \text{οπότε} \ \tau_1 = 0.$$

$$I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = \tau_2 \Rightarrow \dot{\omega}_2 = 0 \ \& \ \omega_3 = 0 \ \text{οπότε} \ \tau_2 = 0$$

$$I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = \tau_3 \Rightarrow \dot{\omega}_3 = 0 \ \text{οπότε:} \ \frac{m}{12}(b^2 - a^2)\frac{\omega^2 ab}{a^2 + b^2} = \tau_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_3 = \frac{m}{12}\omega^2\frac{ab}{a^2+b^2}(b^2 - a^2)}$$

(γ) Όταν $a = b$ τότε η ροπή, $\tau_3 = 0$, μηδενίζεται. Στην περίπτωση αυτή το ορθογώνιο είναι τετράγωνο και η διαγώνιός του όπως ξέραμε είναι κύριος άξονας της ροπής αδράνειας.