## ΑΣΚΗΣΗ # 1

Η ροπή αδράνειας δίνεται από τη σχέση $I = \int r^2 dm$.

Στην περίπτωση της σφαίρας η μάζα της είναι κατανεμημένη ομοιόμορφα στον όγκο της και επομένως υπάρχουν στοιχειώδεις ποσότητες που βρίσκονται σε απόσταση μικρότερη από την ακτίνα της σφαίρας.

Στην περίπτωση του σφαιρικού φλοιού, όλες οι στοιχειώδεις μάζες που απαρτίζουν την συνολική μάζα βρίσκονται στην ακτίνα του φλοιού και άρα η απόστασή τους από τον άξονα περιστροφής είναι R.

Επομένως αφού και τα 2 σώματα έχουν την ίδια μάζα, ο στερεός φλοιός θα έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας (μεγαλύτερη απόσταση) σε σχέση με τη σφαίρα.

## ΑΣΚΗΣΗ # 2

Από διατήρηση της ενέργειας έχουμε $\Delta U + \Delta K = \emptyset$. όπου $U$ είναι η δυναμική ενέργεια και K η κινητική ενέργεια των σωμάτων.

Κάθε σφαίρα ξεκινά από ηρεμία και επομένως $K_i = \emptyset$. Η αρχική δυναμική ενέργεια είναι ίδια και για τις 2 σφαίρες: $U_i = Mgh = MgL\sin\theta$.

Η τελική δυναμική ενέργεια είναι $\emptyset$ $U_f = \emptyset$ και για τις δύο σφαίρες αφού φτάνουν στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου που θεωρούμε σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας: Επομένως:

$$U_i + \cancel{K_i}^{\,0} = \cancel{U_f}^{\,0} + K_f \Rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2 \Rightarrow \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m} v_{CM}^2 + \frac{1}{2}\left[c\cancel{M}\cancel{R^2}\right]\frac{v_{CM}^2}{\cancel{R^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2gh = v_{CM}^2 + c\,v_{CM}^2 \Rightarrow 2gh = (1+c)\,v_{CM}^2 \Rightarrow \boxed{v_{CM} = \sqrt{\frac{2gh}{c+1}}}$$

όπου c είναι ο συντελεστής μεταξύ 0 και 1 στον τύπο που δίνει τη ροπή αδράνειας ($\frac{2}{3}$ για την κοίλη σφαίρα και $\frac{2}{5}$ για τη συμπαγή σφαίρα)

$$\text{Άρα} \left.\begin{aligned} v_{CM}^{\text{κοίλη}} &= \sqrt{\frac{2gh}{c_1+1}} \\ v_{CM}^{\text{συμπαγή}} &= \sqrt{\frac{2gh}{c_2+1}} \end{aligned}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow} \frac{v_{CM}^{\text{κοίλη}}}{v_{CM}^{\text{συμπαγή}}} = \sqrt{\frac{c_2+1}{c_1+1}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{5}+1}{\frac{2}{3}+1}} = \sqrt{\frac{\frac{7}{5}}{\frac{5}{3}}} = \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5} < 1$$

Επομένως η κοίλη σφαίρα θα φθάσει πιο αργά. αφού η ταχύτητά της είναι μικρότερη

## ΑΣΚΗΣΗ #3

Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχουν τριβές και επομένως τα σώματα δεν μπορούν να περιστραφούν, αφού δεν υπάρχει η στατική τριβή για να προκαλέσει περιστροφή. Επομένως γλυστρούν πρός το κάτω μέρος του επιπέδου. Από την αρχή διατήρησης ενέργειας όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα έχουμε:

$$U_i + K_i = U_f + K_f \Rightarrow mgh + \phi = 0 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \Bigg\} \Rightarrow$$

Οπως είπαμε δεν υπάρχει κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής

$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m} v_{cm}^2 \Rightarrow v_{cm}^2 = 2gh \Rightarrow \boxed{v_{cm} = \sqrt{2gh}}$$

Δεν υπάρχει εξάρτηση από μάζα, ή ακτίνα

Αρα τα 2 σώματα φθάνουν ταυτόχρονα στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

## ΑΣΚΗΣΗ #4

Σύμφωνα με το 2ο νόμο του kepler η επιβατική ακτίνα κάθε πλανήτη σαρώνει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους.

Επομένως από τη στιγμή που έχουμε 2 διαφορετικούς πλανήτες τα εμβαδά που σαρώθηκαν από τις δύο ακτίνες θα είναι και διαφορετικά

## ΑΣΚΗΣΗ #5

Και τα 2 τεχνικά λάθη του άρθρου είναι στο τέλος. (α) "Σε περιβάλλον χωρίς βάρος" και (β) "έξω από τη βαρυτική έλξη της γής".

Το (α) είναι λάθος γιατί σώματα στο διάστημα εξακολουθούν να έχουν βάρος απλά κάνουν ελεύθερη πτώση. Ελεύθερη πτώση όμως κάνει και το Διαστημόπλοιο ή το διαστημικό λεωφορείο ή ο δορυφόρος μέσα στον οποίο βρίσκονται.
Η σωστή διατύπωση θα ήταν σε περιβάλλον μηδενικής κάθετης δύναμης γιατί η κάθετη δύναμη είναι αυτή που μετρά το βάρος ενός σώματος. Στην προκειμένη περίπτωση η ανάδραση αυτή είναι μηδέν, όχι όμως και το βάρος. Αλλωστε εξαιτίας του βάρους, της δύναμης έλξης της γής, τα σώματα περιστρέφονται γύρω από τη γή. Είναι η κεντρομόλος δύναμη που ασκείται στα σώματα.
(β) Προφανώς η βαρυτική έλξη της γης εκτείνεται στο άπειρο. Επομένως υπάρχει πάντα. Αν δεν υπήρχε τα σώματα θα έφευγαν εφαπτομενικά της κυκλικής τροχιάς στο διάστημα.

## ΑΣΚΗΣΗ # 6

Και οι πίνετε χάσανε το στοίχημα και προφανώς δεν πήρανε καμιά λίρα πίσω.

Το στοίχημα ήταν πως θα μπορούσε να εκτοξεύσει ένα δορυφόρο της γής με τα χέρια του.

Προφανώς αν πετάξετε μια πέτρα προς τα πάνω, η πέτρα αυτόματα γίνεται δορυφόρος της γής. Επομένως εκτοξεύεται ένα δορυφόρο της γης με τα χέρια σας. Φυσικά για να γίνει κανονικός δορυφόρος θα πρέπει να ολοκληρώσει μιά τροχιά γύρω από τη γη. Ωστόσο το στοίχημα δεν έλεγε ότι θα θέσει ένα δορυφόρο σε τροχιά γύρω από τη γή. Απλά ότι θα εκτοξεύσει ένα δορυφόρο και αυτό προφανώς είναι εφικτό από τον καθένα.

## ΑΣΚΗΣΗ # 7

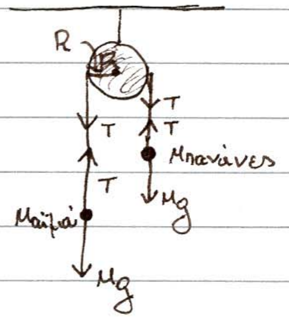
Η ολική ορμή είναι διανυσματικό μέγεθος. Δηλαδή $\vec{P}_{TOT} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$

Το γεγονός ότι η ολική ορμή είναι μηδέν σημαίνει ότι οι ορμές των 2 σωμάτων είναι ίσες και έχουν αντίθετη φορά.

Δηλαδή τα 2 σώματα έχουν ταχύτητες με αντίθετες φορές.

Η κινητική ενέργεια δίνεται από το τετράγωνο του μέτρου της ταχύτητας και επομένως είναι $K_1 \geq 0$ και $K_2 \geq 0$. Προφανώς $K_1 = K_2 = \phi$ όταν τα σώματα ηρεμούν.

## ΑΣΚΗΣΗ #8



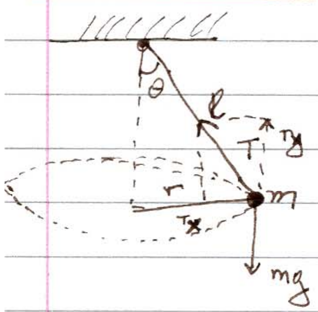

(a) $\Sigma\vec{\tau} = Mg\cdot R - MgR = \phi$

Η μαϊμού και οι μπανάνες πάντοτε ενεργούν στο σχοινί με την ίδια δύναμη $Mg$

(b) $\Sigma\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow L = σταθ$

Στην πραγματικότητα $L=\phi$ επειδή η αρχική στροφορμή είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι η μαϊμού και οι μπανάνες κινούνται προς τα πάνω με την ίδια ταχύτητα και για οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Η μαϊμού δεν θα φθάσει τις μπανάνες παρά μόνο τη στιγμή που το σχοινί έχει τελειώσει (στο σημείο της τροχαλίας). Επίσης από τη στιγμή που η τάση είναι η ίδια και για τις δύο πλευρές, ο $2^{ος}$ νόμος του Newton εφαρμοζόμενος και στη μαϊμού και μπανάνες δίνουν την ίδια επιτάχυνση προς τα πάνω.

## ΑΣΚΗΣΗ #9




$r = l\sin\theta$

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_x = ma_x &\Rightarrow T\sin\theta = \frac{mv^2}{R} \\ \Sigma F_y = ma_y &\Rightarrow T\cos\theta = mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\cancel{m}g\tan\theta = \frac{\cancel{m}v^2}{R} \Rightarrow g\tan\theta = \frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{Rg\tan\theta}$$

Από τον ορισμό της στροφορμής: $L = rmv\sin 90° \Rightarrow L = rm\sqrt{rg\tan\theta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow L = l\sin\theta\, m\sqrt{l\sin\theta\, g\tan\theta} = ml\sqrt{l\sin^3\theta\, g\tan\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{L = ml\sqrt{lg\frac{\sin^4\theta}{\cos\theta}}}$$

## ΑΣΚΗΣΗ # 10

Το γεγονός ότι η ταχύτητα του βλήματος είναι μεγάλη σημαίνει ότι το βλήμα θα φθάσει σε ύψος που είναι μεγαλύτερο από την ακτίνα της γής ή περίπου ανάλογο. Επομένως δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσεγγιστική εξίσωση $U = mgh$ που δίνει τη δυναμική ενέργεια για ύψη $h \ll R_{γης}$.

Χρησιμοποιούμε την γενική εξίσωση: $U = -\dfrac{G M_γ M}{r}$

Από διατήρηση της ενέργειας μεταξύ των σημείων εκτόξευσης και μέγιστου ύψους:

$$K_i + U_i = K_f + U_f \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m_{βλ}}\,v^2 - \frac{G M_γ \cancel{m_{βλ}}}{R_γ} = 0 - \frac{G M_γ \cancel{m_{βλ}}}{R_γ + h_{max}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v_{βλ}^2 = G M_γ \left(\frac{1}{R_γ} - \frac{1}{R_γ + h_{max}}\right) \Rightarrow v_{βλ}^2 = 2 G M_γ \left(\frac{\cancel{R_γ} + h_{max} - \cancel{R_γ}}{R_γ (R_γ + h_{max})}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{βλ}^2 = 2 G M_γ \frac{h_{max}}{R_γ^2 + R_γ h_{max}} \Rightarrow v_{βλ}^2 R_γ^2 + v_{βλ}^2 R_γ h_{max} = 2 G M_γ h_{max} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{βλ}^2 R_γ^2 = h_{max}\left(2 G M_γ - v_{βλ}^2 R_γ\right) \Rightarrow h_{max} = \frac{v_{βλ}^2 \cdot R_γ^2}{2 G M_γ - v_{βλ}^2 \cdot R_γ}$$

Αντικαθιστούμε: $v_{βλ} = 10 \cdot 10^3 = 10^4\, m/s$

$R_γ = 6.4 \cdot 10^6\, m$

$G = 6.6726 \cdot 10^{-11} \dfrac{Nm^2}{kg^2} = \dfrac{m^3}{kg^2 s^2}$

$M_γ = 5.97 \cdot 10^{24}\, kg$

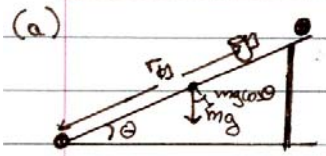
$$h_{max} = \frac{10^8 \cdot (6.4)^2 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 6.6726 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24} - 10^8 \cdot 6.4 \cdot 10^6} = \frac{(6.4)^2 \cdot 10^{20}}{79.67 \cdot 10^{13} - 6.4 \cdot 10^{14}} = \frac{(6.4)^2 \cdot 10^{20}}{(7.967 - 6.4) 10^{14}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_{max} = \frac{4.096 \cdot 10^{21}}{1.567 \cdot 10^{14}} \Rightarrow h_{max} = 2.61 \cdot 10^7\, m \Rightarrow \boxed{h_{max} = 26.1 \cdot 10^3\, km}$$

Αφού $R_γ = 6.4 \cdot 10^3\, km$ Άρα $h_{max} \simeq 4.08\, R_γ$

## ΑΣΚΗΣΗ # 11

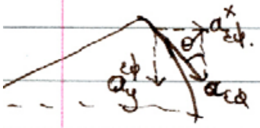
(α)




Το σύστημα σανίδα-φλιτζάνι περιστρέφονται γύρω από το σταθερό σημείο της σανίδας λόγω της ροπής που προκαλείται από το βάρος του συστήματος.

Από την άλλη πλευρά, η μπάλα από μόνη της εκτελεί ελεύθερη πτώση με επιτάχυνση $g$. Για να πέσει η μπάλα στο φλιτζάνι θα πρέπει η επιτάχυνση του συστήματος σανίδας-φλιτζανιού να είναι μεγαλύτερη από την επιτάχυνση της μπάλας.

Το σύστημα φλιτζάνι-σανίδα αποκτά γωνιακή επιτάχυνση $\alpha$ και επομένως έχει γραμμική εφαπτομενική κ κεντρομόλο επιτάχυνση. Ενδιαφερόμαστε ωστόσο για την εφαπτομενική επιτάχυνση και περισσότερο για τη συνιστώσα της παράλληλη προς τον κατακόρυφο άξονα $a^{y}_{εφ} = a_{εφ}\cos\theta$




Επομένως:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\vec{\tau} &= I\alpha = \vec{r}\times\vec{F} \\ I &= \frac{1}{3}ML^2 \\ \vec{r}\times\vec{F} &= \frac{L}{2}Mg\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow I\alpha = \frac{L}{2}Mg\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\cancel{M}\alpha L^{\cancel{2}} = \frac{\cancel{L}}{2}\cancel{M}g\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3}{2L}g\cos\theta \qquad (1)$$

Αλλά $a_{εφ} = \alpha r \Rightarrow a_{εφ} = \frac{3}{2}g\cos\theta\,\frac{r}{L}$ $\qquad (2)$

Η κατακόρυφη συνιστώσα της εφαπτομενικής επιτάχυνσης είναι: $a_y^{εφ} = a_{εφ}\cdot\cos\theta$ (3)

και για να ισχύει η επίδειξη θα πρέπει $a_y^{εφ} \geq g$ $\qquad$ (4)

Επομένως αντικαθιστώντας (1), (2), (3) στην (4) έχουμε: $\frac{3}{2}\cancel{g}\cos^2\theta\,\frac{r}{L} \geq \cancel{g} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos^2\theta \geq \frac{2}{3}\frac{L}{r} \quad \text{για } r=L \Rightarrow \cos^2\theta \geq \frac{2}{3} \Rightarrow \cos\theta \geq \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta \leq 35.3^\circ}$$

(β) Την στιγμή που η μπάλα μπαίνει στο φλιτζάνι η θέση των δύο σωμάτων είναι ίδια $(x,y)$. Αλλά η μπάλα βρίσκεται πάντοτε στη θέση $x = L\cos\theta$.

Το ποτήρι βρίσκεται σε ακτίνα $r_c \Rightarrow r_c = L\cos\theta \Rightarrow r_c = 1\cdot\cos 35.3 = 81.61\,cm$

Επομένως θα βρίσκεται σε θέση $x = 100 - 81.61 \Rightarrow \boxed{x = 18.39\,cm}$

## ΑΣΚΗΣΗ # 12

Οι δύο αστροναύτες αποτελούν ένα απομονωμένο σύστημα, και επομένως η ολική στροφορμή του συστήματος διατηρείται:

$$L_i = L_f \Rightarrow \cancel{2} m R_i^2 \omega_i = \cancel{2} m R_f^2 \omega_f \Rightarrow \left(\frac{20}{2}\right)^2 \frac{2\pi}{2} = \left(\frac{10}{2}\right)^2 2\pi\nu \Rightarrow$$

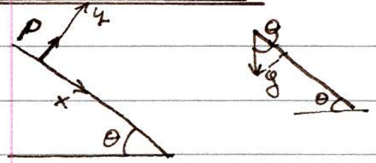
$$\Rightarrow \nu = \frac{4\cdot 100}{200} \Rightarrow \boxed{\nu = 2\ Hz}$$

$$E_i = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 = 2\,\frac{1}{2} m \left(\frac{20}{2}\right)^2 \left(\frac{2\pi}{2}\right)^2 = 73947\ N$$

$$E_f = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 = 2\,\frac{1}{2} m \left(\frac{10}{2}\right)^2 (4\pi)^2 = 295788\ N$$

$$E_f - E_i = 221841\ N = W$$

## ΑΣΚΗΣΗ #13




Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις, ορμές κλπ πάνω σε σύστημα συντεταγμένων με τον άξονα των x-παράλληλο του κεκλιμένου επιπέδου και τον άξονα y κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο.

Η επιτάχυνση της μπάλας είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας g, την οποία και αναλύουμε σε δύο συνιστώσες:

$$a_x = g\sin\theta$$
$$a_y = -g\cos\theta$$

(α) Ξέρουμε ότι $v_{0x} = 0$ και $v_{0y} = \frac{P}{m}$

$$x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad (1)$$

$$y - y_0 = v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \quad (2)$$

Όταν η μπάλα χτυπά την πρώτη φορά $y = y_0$

Επομένως: $0 = \frac{P}{m} t + \frac{1}{2}(-g\cos\theta) t^2 \Rightarrow \boxed{t = \frac{2P}{mg\cos\theta}}$ (3)

Αντικαθιστούμε αυτή τη σχέση στην (2) και έχουμε:

$$x - x_0 = 0 + \frac{1}{2} g\sin\theta \left(\frac{2P}{mg\cos\theta}\right)^2 = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{g}\sin\theta\, 4P^2}{m^2 g^2 \cos^2\theta} \Rightarrow \boxed{x - x_0 = \frac{2P^2 \sin\theta}{m^2 g \cos^2\theta}}$$

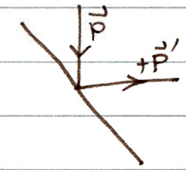
## ΑΣΚΗΣΗ 13 (συνέχεια)

β) Ξέρουμε ότι

$$\left.\begin{array}{l} v_x = v_{x_0} + a_x t \\ v_y = v_{y_0} + a_y t \end{array}\right\} \Rightarrow v_x = 0 + g\sin\theta\, t \overset{(3)}{=} \cancel{g}\sin\theta \frac{2p}{m\cancel{g}\cos\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_x = \frac{2p\sin\theta}{m\cos\theta} \Rightarrow \boxed{p_x = 2p\tan\theta}$$

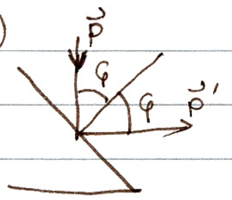
$$v_y = \frac{p}{m} - \cancel{g}\cos\theta \frac{2p}{\cos\theta\, m\cancel{g}} \Rightarrow \boxed{v_y = -\frac{p}{m}} \Rightarrow \boxed{p_y = -p}$$

γ) 


Σε μια ελαστική κρούση, η x-συνιστώσα της ορμής κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου δεν αλλάζει ενώ η y-συνιστώσα (κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο) αλλάζει πρόσημο.

Άρα μετά τη σύγκρουση:

$$\boxed{\begin{array}{l} p'_x = p_x = 2p\tan\theta \\ p'_y = -p_y = p \end{array}}$$

δ) 


Η γωνία είναι ίδια και δίνεται από τη σχέση:

$$\tan\varphi = \frac{p_x}{-p_y} = \frac{2p\tan\theta}{p} = 2\tan\theta \Rightarrow$$

$$\varphi = \tan^{-1}(2\tan\theta)$$

(ε) Περίπου: