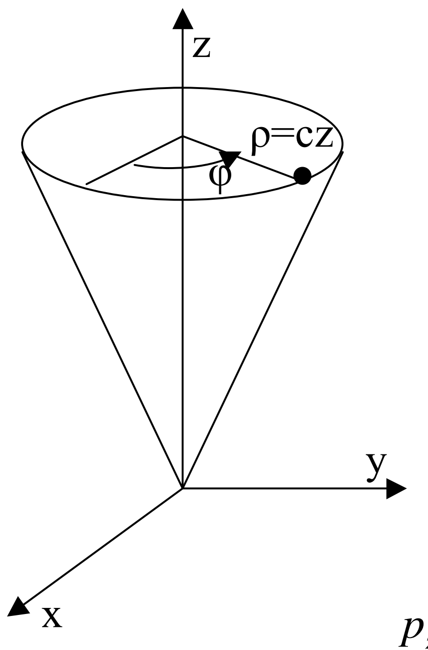
Τρίτο Παράδειγμα

Εφαρμογή του φορμαλισμού Hamilton για μια μάζα m η οποία κινείται στο εσωτερικό επιφάνειας κατακόρυφου κώνου $\rho=cz$. Το σώμα κινείται μέσα σε ομοιόμορφο βαρυτικό πεδίο με g προς τα κάτω. Χρησιμοποιήστε z και φ σα γενικευμένες συντεταγμένες. Να δειχθεί ότι για μια οποιαδήποτε δεδομένη λύση υπάρχουν μέγιστα και ελάχιστα ύψη z_{max} και z_{min} στα οποία περιορίζεται η κίνηση. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα αυτό για να περιγράψετε την κίνηση της μάζας. Δείξτε ότι για μια οποιαδήποτε τιμή του $z>0$ υπάρχει μια λύση για την οποία το σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά σε συγκεκριμένο ύψος z.



Οι γενικευμένες συντεταγμένες είναι z και φ, με ρ να προσδιορίζεται από το δεσμό $\varrho=cz$

Η κινητική ενέργεια δίνεται από:

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2+(\rho\dot{\varphi})^2+\dot{z}^2\right)=\frac{1}{2}m\left((c^2+1)\dot{z}^2+(cz\dot{\varphi})^2\right)$$

Η δυναμική ενέργεια είναι: $U=mgz$

Επομένως οι γενικευμένες ορμές είναι:

$$p_z=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}}=\frac{\partial T}{\partial\dot{z}}=m(c^2+1)\dot{z} \qquad \text{και} \qquad p_\varphi=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=mc^2z^2\dot{\varphi}$$

Σωματίδιο σε κώνο

Μπορούμε να λύσουμε τις εξισώσεις αυτές ως προς $\dot{z}$ και $\dot{\varphi}$

$$\dot{z} = \frac{p_z}{m(c^2+1)} \qquad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mc^2z^2}$$

Οπότε η Hamiltonian γίνεται: $\mathcal{H} = \sum_i p_i\dot{q}_i - \mathcal{L} = E = T + U$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\frac{p_z^2}{\left(c^2+1\right)} + \frac{p_\varphi^2}{c^2z^2}\right) + mgz$$

Από αυτή την τελευταία σχέση προκύπτουν οι εξισώσεις του Hamilton

$$\dot{z} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m\left(c^2+1\right)} \quad \text{και} \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z} = \frac{p_\varphi^2}{mc^2z^3} - mg$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mc^2z^2} \quad \text{και} \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi} = 0$$

Αλλά p_φ είναι η συνιστώσα της στροφορμής στη διεύθυνση z και είναι σταθερή όπως περιμέναμε

Σωματίδιο σε κώνο

Ο πιο εύκολος τρόπος για να δούμε αν η κίνηση του σωματιδίου είναι περιορισμένη μεταξύ z_{max}, z_{min} για μια οποιαδήποτε λύση είναι με το να θυμηθούμε ότι η Hamiltonian είναι ίση με την ενέργεια και η ενέργεια διατηρείται.

Επομένως για κάθε λύση $\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = E_j$ όπου E_j η ενέργεια της συγκεκριμένης λύσης και $E_j = E$

Αλλά $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\frac{p_z^2}{(c^2+1)} + \frac{p_\varphi^2}{c^2 z^2}\right) + mgz > 0$ ενώ $mgz \to \infty$ όταν $z \to \infty$

Επομένως αφού η E=σταθ. θα πρέπει $z < z_{max}$

Κατά το ίδιο σκεπτικό όταν $z \to 0$ ο όρος $\frac{p_\varphi^2}{c^2 z^2} \to \infty$

Επομένως αφού η E=σταθ. θα πρέπει $z > z_{min} > 0$

Η μάζα δεν μπορεί να πέσει στην κορυφή του κώνου όπου $z=0$

Άρα η κίνηση της μάζας είναι: κινείται γύρω από τον άξονα-z με σταθερή στροφορμή $p_z = m(c^2+1)\dot{z}$ Αφού p_φ = σταθ., η $\dot{\varphi}$μεταβάλλεται (αυξάνει Όταν z είναι μικρό και ελαττώνεται για μεγάλα z).
Το ύψος της μάζας, z, ταλαντώνεται μεταξύ z_{max}, z_{min}

Σωματίδιο σε κώνο

Υπάρχει λύση για την οποία το σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά?

Αυτό συνεπάγεται ότι $z = const \Rightarrow \dot{z} = 0$

Αλλά τότε από την: $\dot{z} = \dfrac{p_z}{m(c^2+1)} \Rightarrow p_z = 0 \Rightarrow \dot{p}_z = 0$

Από την εξίσωση Hamilton: $\dot{p}_z = \dfrac{p_\varphi^2}{mc^2 z^3} - mg = 0 \Rightarrow p_\varphi = \pm mc\sqrt{gz^3}$

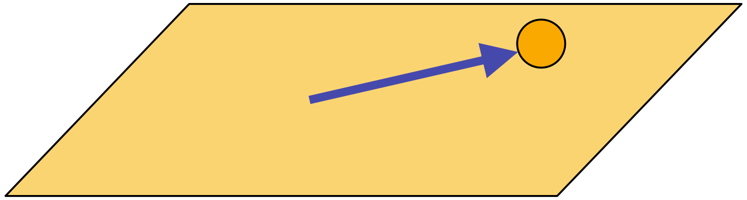
Δηλαδή αν από κάποιο ύψος z εκτοξεύσουμε την μάζα m με $p_z = 0$ και p_φ με μια από τις 2 τιμές τότε αφού η $\dot{p}_z = 0 \Rightarrow p_z = 0, \quad \dot{z} = 0$ πάντοτε
Η μάζα θα συνεχίσει να κινείται στο αρχικό της ύψος και γύρω στον κύκλο.

Παράδειγμα κυκλικής συντεταγμένης

- Πρόβλημα κεντρικής δύναμης σε 2 διαστάσεις.

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \Rightarrow$$

$$p_r = m\dot{r}, \qquad p_\theta = mr^2\dot{\theta},$$



$$\mathcal{H}(x_i, p_i) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + V(r) \Rightarrow$$

$$\mathcal{H}(x_i, p_i) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{l^2}{r^2}\right) + V(r)$$

Θ κυκλική, p_θ=σταθ.=l

- Οι εξισώσεις Hamilton είναι:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \qquad \dot{p}_r = \frac{l^2}{mr^3} - \frac{\partial V(r)}{\partial t}$$

Οι κυκλικές συντεταγμένες δεν εμφανίζονται από μόνες τους στις εκφράσεις

Σωματίδιο σε ΕΜ πεδίο

- Για σωματίδιο σε ΕΜ πεδίο

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}_i^2 - q\phi + qA_i\dot{x}_i$$

⇐ Δεν μπορούμε να πάμε απ' ευθείας στο $\mathcal{H}$=E εξαιτίας του τελευταίου όρου, αλλά

$$\Rightarrow \quad p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H} = (m\dot{x}_i + qA_i)\dot{x}_i - \mathcal{L} = \frac{m\dot{x}_i^2}{2} + q\phi$$

⇐ Αυτό αντιστοιχεί στην ενέργεια E

- Θα είχαμε τελειώσει αν θέλαμε να βρούμε την συνάρτηση ενέργειας h
- Η Hamiltonian όμως εξαρτάται μόνο από τα q και p.
  Πρέπει επομένως να τη ξαναγράψουμε χρησιμοποιώντας

$$p_i = m\dot{x}_i + qA_i$$

$$\boxed{\mathcal{H}(x_i, p_i) = \frac{(p_i - qA_i)^2}{2m} + q\phi}$$

Σωματίδιο σε ΕΜ πεδίο

$$\mathcal{H}(x_i, p_i) = \frac{(p_i - qA_i)^2}{2m} + q\phi$$

- Οι εξισώσεις του Hamilton θα είναι επομένως:

$$\boxed{\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{p_i - qA_i}{m}}$$

$$\boxed{\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = q\frac{p_j - qA_j}{m}\frac{\partial A}{\partial x_i} - q\frac{\partial \phi}{\partial x_i}}$$

- Είναι ισοδύναμες με την συνήθη δύναμη Lorentz?

- Μπορούμε να το ελέγξουμε απαλείφοντας το p_i

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}_i + qA_i) = q\dot{x}_i\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(m\mathrm{v}_i) = qE_i + q(\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{B}})_i$$