Ολοκληρώματα σε 2 και 3 διαστάσεις

Ολοκληρώματα σε 2 και περισσότερες διαστάσεις

Θεωρήστε ότι έχετε ένα ολοκλήρωμα της μορφής: $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy$

στην ορθογώνια περιοχή [a,b]x[c,d]

Πως θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα αυτό με τις μεθόδους ολοκλήρωσης που αναπτύξαμε?

Εφόσον ξέρουμε πως να βρίσκουμε ολοκληρώματα μιας μεταβλητής, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το διπλό αυτό ολοκλήρωμα ως δύο ολοκληρώματα, το καθένα ως προς μια μεταβλητή και να το προσεγγίσουμε με τις γνωστές μεθόδους.

Εισάγουμε μια συνάρτηση $g(x)$ οπότε: $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy \approx \int_a^b g(x)dx$ όπου: $g(x) = \int_c^d f(x,y)dy$

Καθένα από τα ολοκληρώματα: $\int_a^b g(x)dx$ και $g(x) = \int_c^d f(x,y)dy$

μπορούν να λυθούν με τις αριθμητικές μεθόδους για ολοκληρώματα μιας μεταβλητής

Ολοκληρώματα σε 2 και περισσότερες διαστάσεις

Εφαρμογή με τη μέθοδο του ενδιάμεσου σημείου:

Ξεκινάμε με την συνάρτηση: $g(x) = \int_c^d f(x,y)dy$

Εισάγουμε n_y διαστήματα στο εύρος [c,d] μήκους h_y

Ο κανόνας του ενδιάμεσου σημείου θα γραφεί ως: $g(x) = \int_c^d f(x,y)dy \approx h_y \sum_{j=0}^{n_y-1} f(x,y_j)$

όπου: $y_j = c + \frac{1}{2}h_y + jh_y$

Εφαρμόζουμε τώρα τη μέθοδο του ενδιάμεσου σημείου στη συνάρτηση: $\int_a^b g(x)dx$

$$\int_a^b g(x)dx \approx h_x \sum_{i=0}^{n_x-1} g(x_i) \quad \text{όπου:} \quad x_i = a + \frac{1}{2}h_x + ih_x$$

Συνδυάζοντας τα δύο βήματα μπορούμε να γράψουμε την μέθοδο του ενδιάμεσου σημείου για το διπλό ολοκλήρωμα ως:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy \approx h_x \sum_{i=0}^{n_x-1} h_y \sum_{j=0}^{n_y-1} f(x_i,y_j) = h_x h_y \sum_{i=0}^{n_x-1} \sum_{j=0}^{n_y-1} f(a + \frac{h_x}{2} + ih_x, c + \frac{h_y}{2} + jh_y)$$

Ολοκληρώματα σε 2 και περισσότερες διαστάσεις

Εφαρμογή με τη μέθοδο του ενδιάμεσου σημείου ως διπλό άθροισμα:

```
def midpoint_double1(f, a, b, c, d, nx, ny):
    hx = (b - a)/float(nx)
    hy = (d - c)/float(ny)
    I = 0
    for i in range(nx):
        for j in range(ny):
            xi = a + hx/2 + i*hx
            yj = c + hy/2 + j*hy
            I += hx*hy*f(xi, yj)
    return I
```

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του ενδιάμεσου σημείου χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση για την εφαρμογή της μεθόδου για ολοκλήρωμα συνάρτησης 1 μεταβλητής

- Υπολογισμός του ολοκληρώματος για την συνάρτηση $g(x)$
- Ορισμός της $g(x_i)$ ως το ολοκλήρωμα του ενδιάμεσου σημείου της $f(x, y)$ ως προς y

```
def midpoint_double2(f, a, b, c, d, nx, ny):
  def g(x):
     return midpoint(lambda y: f(x, y), c, d, ny)
  return midpoint(g, a, b, nx)
```

```
def midpoint(f, a, b, n):
  h = float(b-a)/n
  result = 0
  for i in range(n):
     result += f((a + h/2.0) + i*h)
  result *= h
  return result
```

Ολοκληρώματα σε 2 και περισσότερες διαστάσεις

Η μέθοδος του ενδιάμεσου σημείου είναι ακριβής για γραμμικές συναρτήσεις και μπορούμε να ελέγξουμε αν η προηγούμενη προσέγγιση για διπλά ολοκληρώματα δουλεύει ή όχι. Η μέθοδος για ολοκλήρωμα γραμμικής συνάρτησης δύο μεταβλητών θα πρέπει να δίνει ακριβή αποτελέσματα:

Δοκιμάζουμε για την $f(x, y) = 2x + y$ και κάνουμε χρήση της sympy:

```
def test_midpoint_double():
"""Test that a linear function is integrated exactly."""
    def f(x, y):
        return 2*x + y
    a = 0; b = 2; c = 2; d = 3
    import sympy
    x, y = sympy.symbols('x y’)
    I_expected = sympy.integrate(f(x, y), (x, a, b), (y, c, d))
    # Test three cases: nx < ny, nx = ny, nx > ny
    for nx, ny in (3, 5), (4, 4), (5, 3):
       I_computed1 = midpoint_double1(f, a, b, c, d, nx, ny)
       I_computed2 = midpoint_double2(f, a, b, c, d, nx, ny)
       tol = 1E-14
       #print I_expected, I_computed1, I_computed2
       print(abs(I_computed1 - I_expected))
       print(abs(I_computed2 - I_expected))
```

Η μεθοδολογία που αναπτύχθηκε μπορεί να εφαρμοστεί και για τις περιπτώσεις των μεθόδων του τραπεζίου και Simpson

Ολοκληρώματα σε 3 διαστάσεις

Εφαρμογή του προηγούμενου φορμαλισμού για το ενδιάμεσο σημείο μπορούμε να έχουμε για την περίπτωση ενός ολοκληρώματος συνάρτησης τριών μεταβλητών

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα της μορφής: $\int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x,y,z)dxdydz$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις: $p(x,y) = \int_e^f g(x,y,z)dz$ και $q(x) = \int_c^d p(x,y)dy$

οπότε το τριπλό ολοκλήρωμα γράφεται ως: $\int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x,y,z)dxdydz = \int_a^b q(x)dx$

Για καθένα από τα ολοκληρώματα έχουμε: $p(x,y) = \int_e^f g(x,y,z)dz \approx h_z \sum_{k=0}^{n_z-1} g(x,y,z_k)$

$q(x) = \int_c^d p(x,y)dy \approx h_y \sum_{j=0}^{n_y-1} p(x,y_j)$ και $\int_a^b q(x)dx \approx h_x \sum_{i=0}^{n_x-1} q(x_i)$

όπου: $x_i = a + \frac{1}{2}h_x + ih_x$, $y_j = c + \frac{1}{2}h_y + jh_y$ και $z_k = e + \frac{1}{2}h_k + kh_k$

Εφαρμογή της μεθόδου συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω θα δώσει:

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x,y,z)dxdydz \approx h_z h_y h_x \sum_{i=0}^{n_x-1} \sum_{j=0}^{n_y-1} \sum_{k=0}^{n_z-1} g\left(a + \frac{h_x}{2} + ih_x, c + \frac{h_y}{2} + jh_y, e + \frac{h_k}{2} + kh_k\right)$$

Ολοκληρώματα σε 3 διαστάσεις

Εφαρμογή του προηγούμενου φορμαλισμού σε Python function είναι:

```
def midpoint_triple1(g, a, b, c, d, e, f, nx, ny, nz):
  hx = (b - a)/float(nx)
  hy = (d - c)/float(ny)
  hz = (f - e)/float(nz)
  I = 0
  for i in range(nx):
    for j in range(ny):
      for k in range(nz):
          xi = a + hx/2 + i*hx
          yj = c + hy/2 + j*hy
          zk = e + hz/2 + k*hz
          I += hx*hy*hz*g(xi, yj, zk)
  return I
def midpoint(f, a, b, n):
    h = float(b-a)/n
    result = 0
    for i in range(n):
       result += f((a + h/2.0) + i*h)
    result *= h
    return result
def midpoint_triple2(g, a, b, c, d, e, f, nx, ny, nz):
    def p(x, y):
         return midpoint(lambda z: g(x, y, z), e, f,
nz)
    def q(x):
         return midpoint(lambda y: p(x, y), c, d, ny)
return midpoint(q, a, b, nx)
```

```
def test_midpoint_triple():
   def g(x, y, z):
     return 2*x + y - 4*z
   a = 0; b = 2; c = 2; d = 3; e = -1; f = 2
   import sympy
   x, y, z = sympy.symbols('x y z')
   I_expected = sympy.integrate(g(x, y, z), \
                 (x, a, b), (y, c, d), (z, e, f))
     for nx, ny, nz in (3, 5, 2),(4, 4, 4),(5, 3, 6):
       I_computed1 = midpoint_triple1( g, a, b,\
                       c, d, e, f, nx, ny, nz)
       I_computed2 = midpoint_triple2( g, a, b,\
                       c, d, e, f, nx, ny, nz)
     print(I_expected, I_computed1, I_computed2)
     print(abs(I_computed1 - I_expected))
     print(abs(I_computed2 - I_expected)
if __name__ == '__main__':
    test_midpoint_triple()
```

Ολοκλήρωση - Πολλαπλά ολοκληρώματα

Για παράδειγμα, έστω τα ηλεκτρόνια του ατόμου του ^{4}Be:

$$I = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \cdots \int_0^1 dx_{12} f\left(x_1, x_2, \cdots, x_{12}\right)$$

Έχουμε 3 διαστάσεις για κάθε ηλεκτρόνιο x 4 ηλεκτρόνια =12διαστάσεις

Αλλά για 100 σημεία για κάθε ολοκλήρωση τότε θα χρειαστούμε συνολικά

$100^{12} = 10^{24}$ υπολογισμούς

Για τα PCs υποθέτοντας 1Giga υπολογισμούς/sec θα χρειαστούμε 10^{7} χρόνια

Τυχαίοι Αριθμοί

και Monte Carlo

Monte Carlo και τυχαίοι αριθμοί

Τα προσδιορισμένα συστήματα (deterministic systems) περιγράφονται εν γένει από κάποιο μαθηματικό κανόνα

Κάποια συστήματα ωστόσο δεν είναι προσδιορισμένα   Τυχαία ή στοχαστικά

Οποιαδήποτε διεργασία ή αλγόριθμος χρησιμοποιεί τυχαίους αριθμούς και αντιτίθεται σε προσδιορισμένους αλγόριθμους ονομάζεται Monte Carlo

Η μέθοδος Monte Carlo χρησιμοποιείται ευρέως στις επιστήμες:

Φυσική: προσομοίωση φυσικών διεργασιών

Μαθηματικά: αριθμητική ανάλυση

Βιολογία: προσομοίωση κυττάρων

Οικονομικά: εκτίμηση της διακύμανσης του χρηματιστηρίου αξιών

Μηχανική: προσομοίωση πειραματικών διατάξεων

Σημασία των μεθόδων Monte Carlo

Οι μέθοδοι Monte Carlo αποτελούν ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία στη Φυσική

- Ανάλυση δεδομένων
- Προσομοίωση φυσικών γεγονότων που στηρίζονται σε τυχαίες διεργασίες - πιθανότητες
- Σχεδιασμό ανιχνευτών, βελτιστοποίηση και προσομοίωση

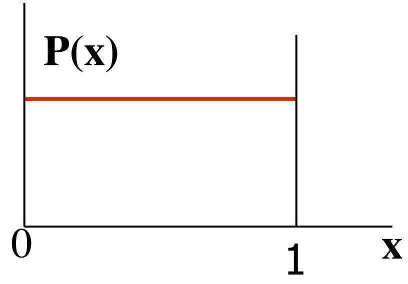
Επομένως ας μάθουμε μερικές από τις βασικές αρχές

- Σκοπός των γεννητόρων/προγραμμάτων Monte Carlo
- Γεννήτορες τυχαίων αριθμών
- Ολοκλήρωση
- Μερικά ιδιαίτερα δημοφιλή Monte Carlo προγράμματα

Τυχαίοι αριθμοί

Τυχαίος αριθμός είναι ένας αριθμός επιλεγμένος σαν να ήταν καθαρά τυχαία από μια συγκεκριμένη κατανομή

Σε μια ομοιόμορφη κατανομή τυχαίων αριθμών στο διάστημα [0,1), κάθε αριθμός έχει την ίδια τύχη να επιλεχθεί



Για παράδειγμα: Όταν ρίχνετε ένα ζάρι οι αριθμοί που μπορείτε να πάρετε είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι μεταξύ 1 και 6.

Κάθε αριθμός έχει την ίδια πιθανότητα να ‘‘βγεί’’

Γεννήτορες τυχαίων αριθμών

Ο καλύτερος τρόπος για να πάρουμε τυχαίους αριθμούς είναι να χρησιμοποιήσουμε μια διεργασία που συμβαίνει στη φύση.

- Ρίξιμο ενός ζαριού ή ενός νομίσματος
- Λότто
- Τα αποτελέσματα του ποδοσφαίρου
- Η ραδιενεργός διάσπαση των πυρήνων

Φυσικά ο τρόπος αυτός για να διαλέξουμε τυχαίους αριθμούς δεν είναι ιδιαίτερα αποδοτικός

- Υπολογιστικές μέθοδοι αναπτύχθηκαν που κάνουν την ίδια διαδικασία

Πως μπορούμε όμως να κάνουμε κάποιο πρόγραμμα να υπολογίζει κάτι τυχαία;

- Με ένα γεννήτορα τυχαίων αριθμών

Γεννήτορες τυχαίων αριθμών

Γεννήτορας τυχαίων αριθμών είναι μία συνάρτηση η οποία δημιουργεί μια ακολουθία τυχαίων αριθμών

Όλοι οι υπολογιστές σήμερα περιέχουν στην βιβλιοθήκη τους ένα μηχανισμό για την δημιουργία ακολουθίας τυχαίων αριθμών οι οποίοι είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι στο διάστημα [0,1)

Η ακολουθία των αριθμών αυτών μπορεί να θεωρηθεί σαν ψευδο-τυχαία ακολουθία αφού για κάθε εκτέλεση του προγράμματος, θα πάρουμε και πάλι την ίδια ακολουθία τυχαίων αριθμών για την ίδια αρχική τιμή του ‘‘σπόρου’’ (seed) της ακολουθίας

Στην πραγματικότητα οι συναρτήσεις που καλούμε στον υπολογιστή χρησιμοποιούν μια μέθοδο (Lehmer 1948) στηριγμένη σε 32-bit ακεραίους και επομένως έχουν περίοδο το πολύ $2^{31} \sim 10^{9}$.

Αυτό είναι το πλήθος των τυχαίων αριθμών που μπορούν να δημιουργηθούν μέσα σε λίγα δευτερόλεπτα σε ένα μοντέρνο υπολογιστή

Η μέθοδος που ακολουθείται χρησιμοποιεί μια εξίσωση της μορφής:

$$x_{n+1} = \mathrm{mod}\left[\left(a x_n + b\right), m\right]$$

όπου mod είναι το modulo. Οι σταθερές α,b και m διαλέγονται προσεκτικά ώστε η ακολουθία των αριθμών να γίνεται χαοτική και ομοιόμορφα κατανεμημένη

Γεννήτορες τυχαίων αριθμών $x_{n+1} = \mathrm{mod}\left[\left(ax_n + b\right), m\right]$

Κανόνες

- Η πρώτη αρχική τιμή, x_0, (seed) επιλέγεται
- Η τιμή του m> x_0 και $a, b \geq 0$
- Το εύρος των τιμών είναι μεταξύ 0 και m
  (διαιρώντας με m μετατρέπεται μεταξύ 0 και 1)
- Η περίοδος του γεννήτορα αυτού είναι m-1

  Το m πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο αφού η περίοδος δεν μπορεί ποτέ να γίνει μεγαλύτερη από m.

Για παράδειγμα:

Ας διαλέξουμε α=b=x_0=7 και m = 10 και από την σχέση: x_i =mod(a*x_{i-1}+b,m)

η ακολουθία ψευδο-τυχαίων αριθμών που θα πάρουμε θα είναι:

7, 6, 9, 0 7, 6, 9, 0 7, 6, 9, 0

Και διαιρώντας με 10 θα έχουμε την ακολουθία

0.7, 0.6, 0.9, 0.0 0.7, 0.6, 0.9, 0.0 0.7, 0.6, 0.9, 0.0 Πολύ κακή ακολουθία

Τυχαίοι αριθμοί στην Python

Στην PYTHON μπορούμε να πάρουμε τυχαίους αριθμούς από την βιβλιοθήκη **random**

from random import randrange, seed, random

seed(42)	
for i in range(4):	
print(randrange(10))	Τυπώνει ένα τυχαίο ακέραιο αριθμό από το 0, 9
random()	Τυπώνει έναν τυχαίο δεκαδικό τυχαίο αριθμό sto [0,1)
randrange(n)	Τυπώνει ένα τυχαίο ακέραιο αριθμό από το 0, n-1
randrange(m,n)	Τυπώνει ένα τυχαίο ακέραιο αριθμό από το m, n-1
randrange(m,n,k)	Τυπώνει ένα τυχαίο ακέραιο αριθμό από το m, n-1 με βηματα k-1
randint(m,n)	Τυπώνει ένα τυχαίο ακέραιο αριθμό στο [m, n]

Οι συναρτήσεις αυτές δίνουν έναν νέο τυχαίο αριθμό κάθε φορά που καλούνται

Ολοκλήρωση χρησιμοποιώντας τυχαίους αριθμούς

Μέθοδοι Monte Carlo

Ολοκλήρωση - Μέθοδος Monte Carlo

Χρησιμοποίηση τυχαίων αριθμών για επίλυση ολοκληρωμάτων

Η μέθοδος Monte Carlo δίνει μια διαφορετική προσέγγιση για την επίλυση ενός ολοκληρώματος

Τυχαίοι αριθμοί

Η συνάρτηση random() προσφέρει μια ακολουθία τυχαίων αριθμών ομοιόμορφα κατανεμημένων στο διάστημα [0,1)

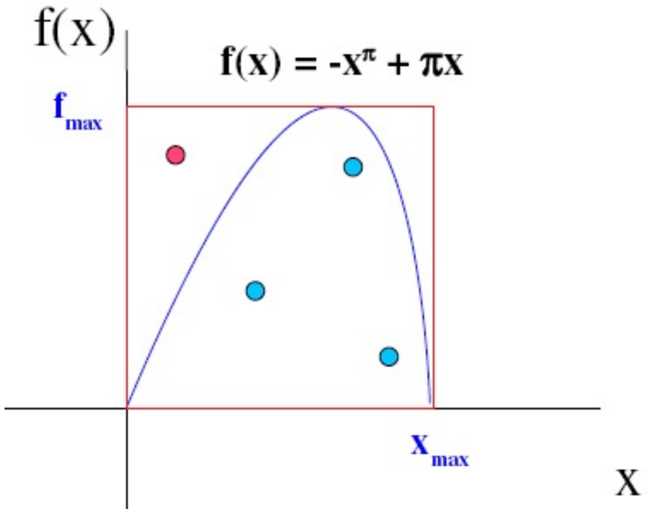
Δύο βασικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται για την επίλυση ολοκληρωμάτων

- Μέθοδος επιλογής ή δειγματοληψίας
- Μέθοδος μέσης τιμής

Monte Carlo μέθοδος δειγματοληψίας

- Περικλείουμε την συνάρτηση που θέλουμε να ολοκληρώσουμε μέσα σε ένα ορθογώνιο στο διάστημα της ολοκλήρωσης
  - Υπολογίζουμε το εμβαδό του ορθογωνίου
- Εισάγουμε τυχαία σημεία στο ορθογώνιο
- Μετρούμε τα σημεία που βρίσκονται μέσα στο ορθογώνιο και αυτά που περικλείονται από την συνάρτηση
- Το εμβαδό της συνάρτησης (ολοκλήρωμα) στο διάστημα ολοκλήρωσης δίνεται από

$$E_{f(x)} = E_{o\rho\theta o\gamma.} \times \frac{N_{f(x)}}{N_{o\rho\theta o\gamma.}}$$



Όπου $N_{f(\chi)}$= αριθμός

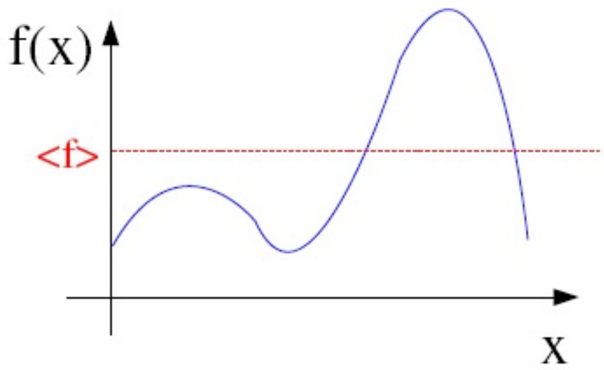
$N_{o\rho\theta o\gamma.}$ = αριθμός

Monte Carlo μέθοδος μέσης τιμής

Η ολοκλήρωση με Monte Carlo γίνεται με το να πάρουμε τη μέση τιμή της συνάρτησης υπολογιζόμενη σε τυχαία επιλεγμένα σημεία μέσα στο διάστημα ολοκλήρωσης

$$I = \int_{x_a}^{x_b} f(x)dx = (b-a) < f(x) >$$

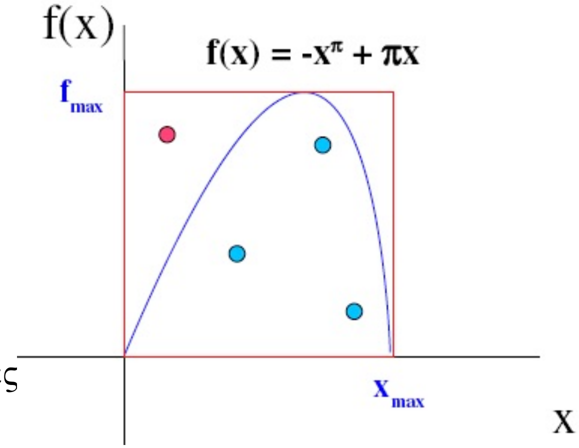
$$< f(x) > \simeq \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} f(x_i)$$



Το στατιστικό σφάλμα: $\delta I = \sigma_{\bar{f}}$ όπου $\sigma_{\bar{f}} = \dfrac{\sigma_f}{\sqrt{N}}$

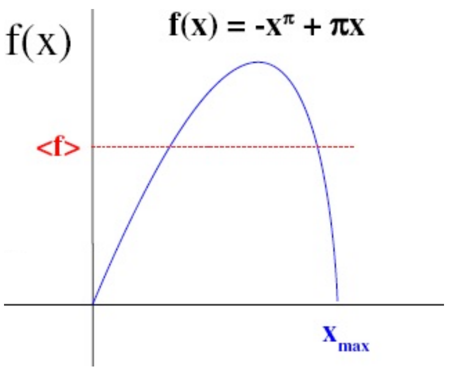
Παράδειγμα κώδικα ολοκλήρωσης Monte Carlo

Τμήμα κώδικα για τη Μέθοδο δειγματοληψίας




```
#/usr/bin/python3
from random import random, seed
seed(12345)
fmax = 4.
Npnts = 1000000
below = 0
for i in range(Npnts):
    x = xmax * random()  # Η συνάρτηση rand() επιστρέφει ψευδοτυχαίες
                         # τιμές στο διάστημα [0,1)
    fRand = fMax * random()
    if fRand < myfunc(x) :   # Έλεγχος αν η τυχαία y-τιμή είναι μικρότερη
                             # της τιμής της συνάρτησης για το x που επιλέχθηκε
        below = below + 1
emvado_orthog. = fmax * xMax
print(' Apotelesma oloklirwsis = ', emvado_orthog * below/Npnts)
```

Τμήμα κώδικα για τη Μέθοδο μέσης τιμής




```
sum = 0
for i in range(Npnts)
    x = xmax * random()
    sum = f(x) + sum
print(' Apotelesma oloklirwsis' , xmax* sum/Npnts)
```

Monte Carlo ολοκλήρωση σε πολλές διαστάσεις

Εύκολο να γενικεύσουμε τη μέθοδο της μέσης τιμής σε πολλές διαστάσεις

Το σφάλμα στη μέθοδο ολοκλήρωσης με Monte Carlo είναι στατιστικό

Ελαττώνεται ως $1/\sqrt{N}$

Για 2 διαστάσεις:

$$I = \int_a^b dx_1 \int_c^d dx_2 f(x,y) \simeq (b-a)(d-c) \times \frac{1}{N} \sum_i^N f(x_i, y_i)$$

Ολοκλήρωση - Πολλαπλά ολοκληρώματα

Για παράδειγμα, έστω τα ηλεκτρόνια του ατόμου του ^{4}Be:

$$I = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \cdots \int_0^1 dx_{12} f\left(x_1, x_2, \cdots, x_{12}\right)$$

Έχουμε 3 διαστάσεις για κάθε ηλεκτρόνιο x 4 ηλεκτρόνια = 12διαστάσεις

$$I = (1-0)^{12} \times \frac{1}{N} \sum f(x_1^i, x_2^i, \cdots, x_{12}^i)$$

Αλλά για N=10^6 σημεία στη ολοκλήρωση Monte Carlo έχουμε 10^6 υπολογισμούς

Για τα PCs υποθέτοντας 1Giga υπολογισμούς/sec θα χρειαστούμε 10^{-3} secs !!

Δημιουργία ακολουθίας τυχαίων αριθμών σύμφωνα με συγκεκριμένη κατανομή

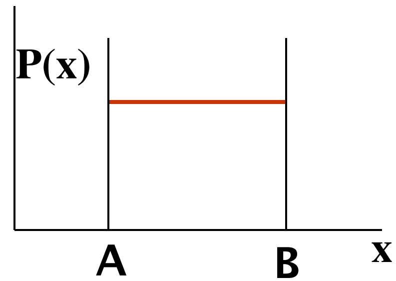
Τυχαίες κατανομές

Ομοιόμορφη (επίπεδη) Κατανομή

Αν το R είναι ένα τυχαίος πραγματικός αριθμός μεταξύ [0,1) και αν τα A και B είναι πραγματικοί αριθμοί, και M, N είναι ακέραιοι αριθμοί τότε η τιμή:

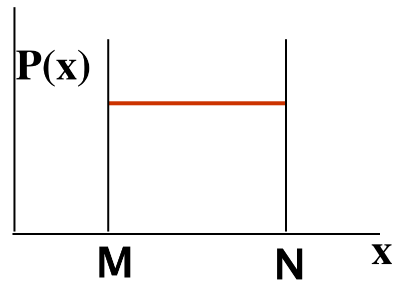
$$A+(B-A)*R$$

θα είναι ένα τυχαίος πραγματικός αριθμός στο διάστημα [A,B)



Η τιμή της $M+INT(N*R)$

θα είναι ένα τυχαίος ακέραιος αριθμός στο διάστημα [M,N)



Για παράδειγμα, για να δημιουργήσουμε την ομοιόμορφη τυχαία κατανομή που αντιστοιχεί στο ρίξιμο των ζαριών (τιμές μεταξύ [1,6]) θα γράφαμε:

$$zari=1+INT(6*R)$$

Τυχαίες κατανομές – Probability Distribution Function (PDF)

- Πως μπορούμε να βρούμε μια γενική Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας (PDF)

Στις προσομοιώσεις μιας τυχαίας διεργασίας συχνά ζητάμε μια μη ομοιόμορφη (ισοπίθανη) κατανομή τυχαίων αριθμών.

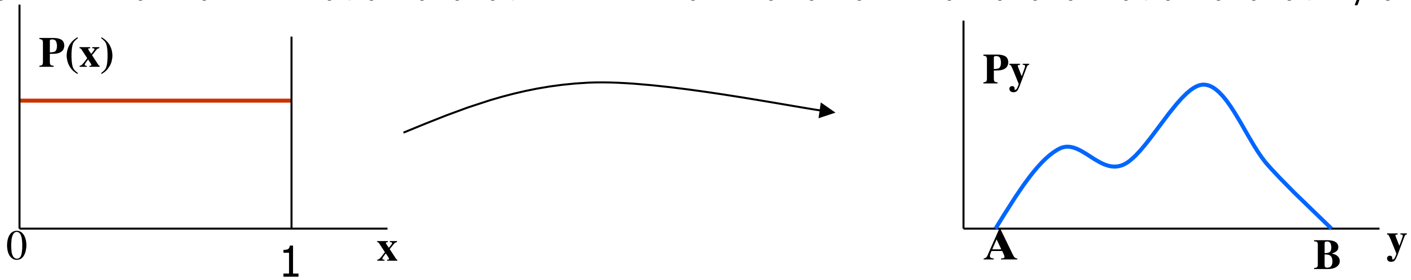
Για παράδειγμα η ραδιενεργός διάσπαση χαρακτηρίζεται από κατανομή Poisson:

$$P(n;\nu)=\frac{\nu^{n}e^{-\nu}}{n!}$$

(πιθανότητα να βρούμε ακριβώς n γεγονότα όταν τα γεγονότα συμβαίνουν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και την ανεξάρτητη μεταβλητή x και με μέσο ρυθμό ν στο διάστημα x)

- Χρησιμοποιούμε δυο μεθόδους (συνήθως)
  - Μέθοδος του μετασχηματισμού (Transformation Method)
  - Μέθοδος της απόρριψης (Rejection Method)

  Σκοπός και των δυο μεθόδων είναι να μετατρέψουν μια ομοιόμορφη κατανομή τυχαίων αριθμών της μορφής $P_x(x)$ σε μια μή ομοιόμορφη της μορφής $P_y(y)$



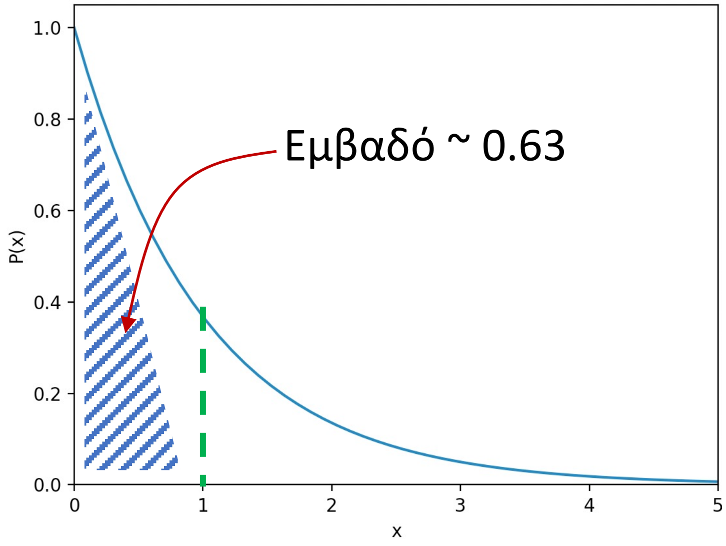
Τυχαίες κατανομές – Η μέθοδος του μετασχηματισμού

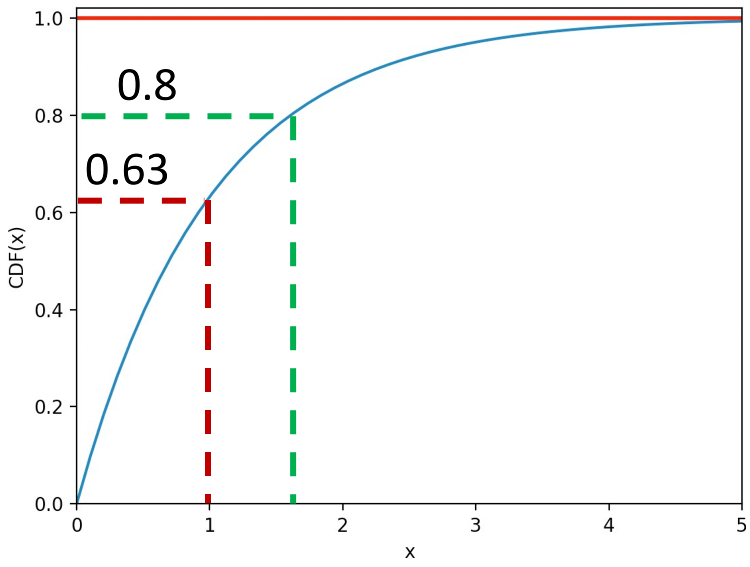
Θεωρήστε μια συλλογή από μεταβλητές $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ που κατανέμονται σύμφωνα με μια συνάρτηση $P_x(x)$. Η πιθανότητα να βρούμε μια τιμή στο διάστημα x και x+dx είναι $P_x(x)dx$. Η συνάρτηση $P_x(x)$ είναι η συνάρτηση της πυκνότητας πιθανότητας PDF

Έστω για παράδειγμα έχουμε την εκθετική PDF.

Ορίζουμε την συνάρτηση της αθροιστικής κατανομής (CDF cumulative distribution function) που μας λέει την πιθανότητα να πάρουμε μια τιμή του x μικρότερη από x_0

Δηλαδή η τιμή της CDF για κάποιο x_0 είναι: $CDF(x_0) = \int_0^{x_0} P_x(x)dx$





Στη μέθοδο του μετασχηματισμού, αυτό που θέλουμε να κάνουμε είναι να πάρουμε την αντίστροφη CDF, δηλαδή για μια τιμή της CDF(x) να βρούμε την τιμή που αντιστοιχεί στον x-άξονα

Τυχαίες κατανομές – Η μέθοδος του μετασχηματισμού

Επομένως θα πρέπει να βρούμε πρώτα την CDF της PDF που μας δίνεται: $CDF(x) = \int_0^x P(x')dx'$

και κατόπιν να αντιστρέψουμε την συνάρτηση αυτή για να πάρουμε την $CDF^{-1}(x)$

Στην περίπτωση της εκθετικής PDF είχαμε: $P(x) = e^{-x}$

Η CDF αυτής θα είναι: $CDF(x) = \int_0^x e^{-x'}dx' = -[e^{-x}]_0^x = 1 - e^{-x}$

Στο στάδιο αυτό, θέλουμε να πάμε από μια τιμή *y* της CDF: $y = CDF(x) = 1 - e^{-x}$

και να λύσουμε την εξίσωση αυτή ως προς *x*: $e^{-x} = 1 - y \Longrightarrow -x = \ln(1-y) \Longrightarrow x = -\ln(1-y)$

Επομένως έχουμε την αντίστροφη CDF, $CDF^{-1}(x) = -\ln(1-y)$

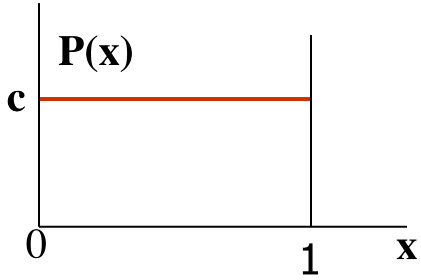
Αν θέλουμε να πάρουμε τις τιμές *x* που αντιστοιχούν σε κάποιο *y*, χρειάζεται να πάρουμε τυχαίες τιμές του *y* στο διάστημα [0,1) χρησιμοποιώντας την ομοιόμορφη κατανομή

Θυμηθείτε ότι η CDF παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1.

Τυχαίες κατανομές – Η μέθοδος του μετασχηματισμού

Αν y είναι κάποια συνάρτηση του x, τότε μπορούμε να γράψουμε: $\left|P_x(x)dx\right| = \left|P_y(y)dy\right|$

Όπου $P_y(y)$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας που περιγράφει την συλλογή $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$



$P_y(y) = c$ Ομοιόμορφη κατανομή

και επομένως: $P_x(x) = c\left|\frac{dy}{dx}\right|$

Για να βρούμε μια ακολουθία που χαρακτηρίζεται από την $P_x(x)$ θα πρέπει να βρούμε τη συνάρτηση μετασχηματισμού x=f(y) που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| = P_x(x)$$

Η σταθερά C μπορεί να αγνοηθεί αφού απλά πολλαπλασιάζει την συνάρτηση

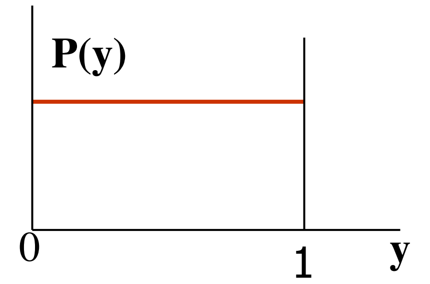
Επομένως:

- Θέλουμε την $P_x(x)$
- Βρίσκουμε την x=f(y) (συνάρτηση μετασχηματισμού) ώστε |dy/dx| = $P_x(x)$

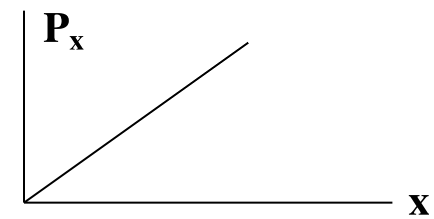
Τυχαίες κατανομές - Η μέθοδος του μετασχηματισμού

Παράδειγμα: Θεωρήστε ότι θέλετε την κατανομή $P_x(x) = x$

Η συνάρτηση μετασχηματισμού είναι τότε:



$$\frac{dy}{dx} = P_x(x) = x \Rightarrow y = \int x dx$$



Λύνοντας ως προς x έχουμε: $y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2y}$

Όπου τα y είναι τυχαίοι αριθμοί στο διάστημα [0,1)

Τυχαίες κατανομές - Η μέθοδος του μετασχηματισμού

Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων μετασχηματισμού είναι τα ακόλουθα:

Επιθυμητή κατανομή $P_x(x)$	Συνάρτηση μετασχηματισμού f(y)
k	y/k
x	$\sqrt{2y}$
x^n	$[(n+1)y]^{1/(n+1)}$
$1/x$	e^y
e^x	$-\ln(y)$
$\cos(x)$	$\arcsin(y)$
$\sqrt{x}$	$\left[\frac{3}{2}y\right]^{2/3}$

Τυχαίες κατανομές – Η μέθοδος της απόρριψης

Η μέθοδος του μετασχηματισμού είναι χρήσιμη όταν η συνάρτηση f(x) μπορεί να υπολογιστεί

Ωστόσο υπάρχουν περιπτώσεις που η επιθυμητή συνάρτηση μπορεί να μην είναι γνωστή σε αναλυτική μορφή.

Για παράδειγμα, θεωρήστε ότι θέλουμε μια Gaussian κατανομή: $P_y(y) = e^{-y^2}$

Για την περίπτωση αυτή δεν βρίσκουμε την συνάρτηση y=f(x) γιατί:

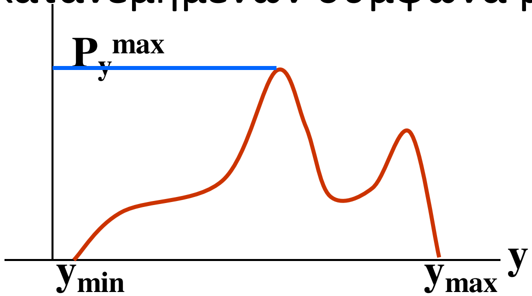
$$\frac{dx}{dy} = P_y(y) = e^{-y^2} \Rightarrow x = \int e^{-y^2} dy$$

Το ολοκλήρωμα αυτό δεν υπολογίζεται αναλυτικά

Για τέτοιου είδους προβλήματα χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της απόρριψης η οποία μπορεί να δημιουργήσει την επιθυμητή κατανομή για οποιαδήποτε συνάρτηση.

Με τη μέθοδο αυτή, η ακολουθία των τυχαίων αριθμών $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ δημιουργείται με μια ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[y_{min}, y_{max}]$ που ενδιαφερόμαστε.

Υποθέστε ότι ο σκοπός μας είναι να δημιουργήσουμε μια ακολουθία αριθμών κατανεμημένων σύμφωνα με τη συνάρτηση $P_y(y)$



Προχωρούμε με την ακολουθία των αριθμών $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$

και δεχόμαστε τιμές που είναι πολλαπλάσια της $P_y(y)$

Τυχαίες κατανομές – Η μέθοδος της απόρριψης

- Ο αλγόριθμος που ακολουθούμε είναι ο ακόλουθος:
  - Θέτουμε m = 0 (μετρητής)
  - Προσδιορίζουμε την μέγιστη τιμή της επιθυμητής κατανομής $P_y(y)$ και το διάστημα $[y_{min}, y_{max}]$ της επιθυμητής κατανομής
  - Δημιουργούμε τυχαίο ζευγάρι zran, yran από μια ομοιόμορφη κατανομή
  - Για κάθε τιμή του y θέτουμε: $y = y_{\min} + \left(y_{\max} - y_{\min}\right) * yran$
    - Δημιουργούμε ένα τυχαίο αριθμό ptest ομοιόμορφα κατανεμημένο στο $[0, P_y^{max}]$

      Py_test = Py_max * zran
    - Ελέγχουμε αν η τιμή της κατανομής P(y) > Py_test

      Αν ναι: Αυξάνουμε τον μετρητή m = m+1

      Κρατάμε τη τιμή y μια και δίνει επιτρεπτή τιμή: θέτουμε z(m) =y

      Αν όχι: Απορρίπτουμε την τιμή y
  - Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία N φορές:

Οι αριθμοί z(m) που απομένουν στην ακολουθία κατανέμονται επομένως σύμφωνα με την συνάρτηση $P_y(y)$

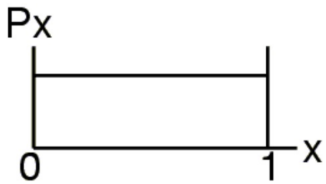
Τυχαίες κατανομές – Η μέθοδος της απόρριψης

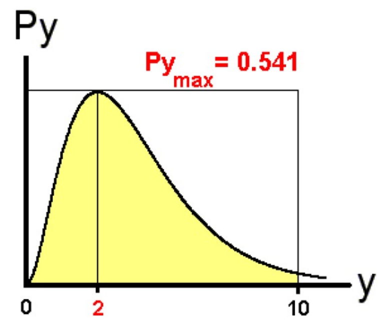
Παράδειγμα: Έστω ότι θέλουμε την κατανομή $P_y(y) = e^{-y} y^2$ στο διάστημα y=[0,10]

Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης P_y βρίσκεται ζητώντας $\frac{dP_y}{dy} = 0$

Η συνάρτηση έχει μέγιστο στο σημείο y=2 το οποίο αντιστοιχεί σε P_{max}=0.541

Επομένως οι τιμές του Py_test θα δημιουργηθούν στο διάστημα [0,0.541]





MONTE CARLO ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ

ΕΥΡΕΣΗ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Monte Carlo βελτιστοποίηση

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τυχαίους αριθμούς για να βρούμε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Τυχαία αναζήτηση

Η μέθοδος αυτή υπολογίζει την συνάρτηση πολλές φορές σε τυχαία επιλεγμένες τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών.

Αν συγκεντρώσουμε ένα ικανοποιητικό αριθμό δειγμάτων τότε προφανώς θα έχουμε εντοπίσει και το ακρότατο.

Παράδειγμα: Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Monte Carlo για να υπολογίσετε το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 6x + 5$ στο διάστημα x [1,5]

Η ακριβής λύση είναι f_{min}=-4.0 για x=3.0

Αλγόριθμος για ελάχιστα:

- Προσδιορισμός του πλήθους των πειραμάτων (N)
- Προσδιορισμός του διαστήματος [A,B]
- Αρχική τιμή για το ελάχιστο fmin=9E9 (πολύ μεγάλη τιμή)
- Επανάληψη της ακόλουθης διεργασίας N φορές)
  - Δημιουργία ενός τυχαίου αριθμού x στο [A,B]
  - Έλεγχος αν F(x) < fmin

    Αν ναι   Βρήκαμε νέο ελάχιστο και κρατάμε τη τιμή του x

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Πιθανότητες

Αν ένα νόμισμα ριχθεί δεν είναι σίγουρο αν θα πάρουμε την πάνω όψη του. Ωστόσο αν συνεχίσουμε να επαναλαμβάνουμε το πείραμα αυτό, έστω N φορές και παίρνουμε την πάνω όψη S φορές, τότε ο λόγος S/N γίνεται σταθερός μετά από ένα μεγάλο πλήθος επανάληψης του πειράματος.

Η πιθανότητα P ενός γεγονότος A ορίζεται ως ακολούθως:

Αν το A μπορεί να συμβεί με S τρόπους από συνολικά K ισότιμους τρόπους τότε:

$$P = \frac{S}{K}$$

Παράδειγμα: Ρίχνοντας ένα νόμισμα, η πάνω όψη μπορεί να συμβεί μια φορά από τις δυνατές δύο περιπτώσεις. Επομένως η πιθανότητα είναι P = 1/2

Ο Αλγόριθμος για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό:

- Προσδιορίζουμε το αριθμό των πειραμάτων N
- Μηδενίζουμε το μετρητή των επιτυχημένων αποτελεσμάτων
- Εκτελούμε τα N πειράματα (διαδικασία loop)
  - Δημιουργούμε ένα τυχαίο αριθμό x (ομοιόμορφη κατανομή)
  - Ελέγχουμε αν το x < P και αν ναι αυξάνουμε το μετρητή κατά 1 (επιτυχημένη προσπάθεια)

Το πρόγραμμα coin.py περιέχει το παραπάνω παράδειγμα

Ρίχνοντας ένα νόμισμα

Ένα νόμισμα ρίχνεται 6 φορές. Ποιά είναι η πιθανότητα να πάρουμε

(α) ακριβώς 4 φορές την πάνω όψη

(β) τουλάχιστον 4 φορές την πάνω όψη

Τα ακριβή αποτελέσματα δίνονται από τη διονυμική κατανομή:

Η διονυμική κατανομή: Μια τυχαία διεργασία με ακριβώς δυο πιθανά αποτελέσματα τα οποία συμβαίνουν με συγκεκριμένες πιθανότητες καλείται διεργασία Bernoulli. Αν η πιθανότητα να πάρουμε κάποιο αποτέλεσμα ("επιτυχία") σε κάθε προσπάθεια είναι p, τότε η πιθανότητα να πάρουμε ακριβώς r επιτυχίες (r=0,1,2,…,N) σε N ανεξάρτητες προσπάθειες χωρίς να παίζει ρόλο η σειρά με την οποία παίρνουμε επιτυχία ή αποτυχία, δίνεται από τη διονυμική κατανομή

$$f(r;N,p) = \frac{N!}{r!(N-r)!} p^r q^{N-r}$$

Για το πρόβλημά μας θα έχουμε επομένως:

(α) r=4 για N = 6 ενώ p=1/2 (q=1-p) και επομένως από τη διονυμική κατανομή:

$$P = \frac{6!}{4!\cdot 2!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{30}{2}\frac{1}{64} = \frac{15}{64} = 0.234375$$

(β) r≥4 για N = 6 ενώ p=1/2 (q=1-p) και επομένως θα έχουμε σαν ολική πιθανότητα το άθροισμα για P(r=4) + P(r=5) + P(r=6)

$$P = \frac{6!}{4!\cdot 2!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{6!}{5!\cdot 1!}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{6!}{6!\cdot 0!}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{11}{32} = 0.34375$$

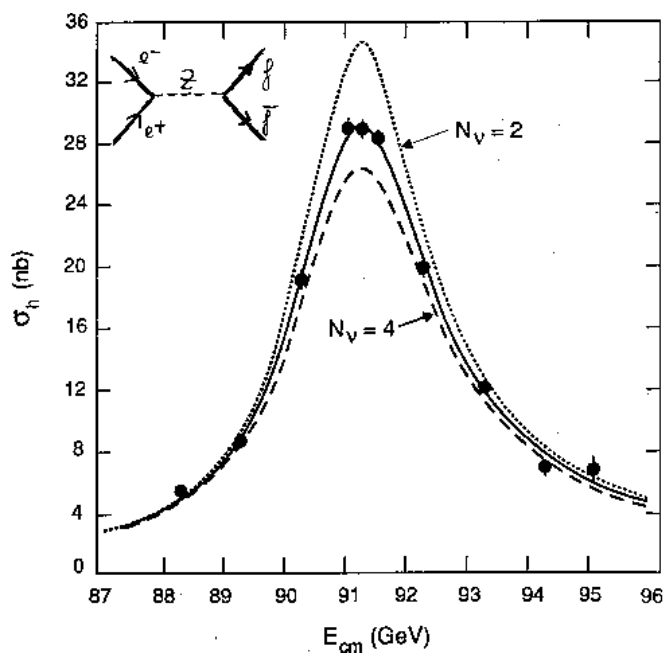
Το πρόγραμμα coin6.py περιέχει τη MC λύση του προβλήματος αυτού

Αβεβαιότητα – ανάγκη για πιθανότητα

- Καθημερινά έχουμε να κάνουμε με αβεβαιότητα – αποφάσεις λαμβάνονται απουσία πλήρους πληροφορίας
- Οι περισσότεροι κλάδοι των επιστημών «φαίνεται» να μην περιέχουν αβεβαιότητα
- Ωστόσο συναντούμε αβεβαιότητα ευρέως στις επιστήμες και θα πρέπει να βρούμε τρόπο να την αντιμετωπίσουμε επιστημονικά

- Στις πειραματικές επιστήμες: υπάρχουν πρακτικά όρια στην ακρίβεια των μετρήσεων
  Μπορούμε να μετρήσουμε μια ποσότητα με πεπερασμένη ακρίβεια
  Όπως ξέρουμε το αποτέλεσμα ενός πειράματος δεν λέει ποτέ ότι μια θεωρία είναι λάθος ή ότι είναι σωστή. Μας δίνει ωστόσο αποδείξεις στηριζόμενοι πάνω τους μπορούμε να έχουμε μια περισσότερο σημαντική αντίληψη για το τι είναι αληθές.

Σημαντικά στοιχεία στην ανάλυση αυτή είναι ο προσεγμένος υπολογισμός των σφαλμάτων και η χρήση κατάλληλων εργαλείων από τη θεωρία πιθανοτήτων



Αβεβαιότητα – ανάγκη για πιθανότητα

- Στις θεωρητικές επιστήμες υπάρχουν θεμελειώδη όρια για το τι μπορούμε να ξέρουμε ή να προβλέψουμε:

Σε συστήματα πολλών σωμάτων: δεν μπορούμε να ξέρουμε π.χ. τι κάνουν όλα τα άτομα σε ένα τμήμα ύλης γιατί η γνώση εμπεριέχει πολύ περισσότερη λεπτομέρεια από αυτή μπορούμε να συλλέξουμε
Ο αριθμός των μορίων νερού που βρίσκονται σε ένα ποτήρι είναι τόσο τεράστιος που πρακτικά είναι αδύνατο να προβλέψουμε τι ακριβώς κάνουν: Έχει νόημα να πούμε ποια η ταχύτητα του 1247890-ου μορίου; Ωστόσο μπορούμε να ρωτήσουμε πόσο πιθανό είναι ένα μόριο να κινείται με ταχύτητα μεγαλύτερη από 200m/s

Μη γραμμικά συστήματα: δεν μπορούμε να προβλέψουμε τη μελλοντική κατάσταση ενός συστήματος το οποίο κινείται κάτω από μη γραμμικές δυνάμεις γιατί η μελοντική τους κατάσταση επιρεάζεται από την γνώση της παρούσας κατάστασής τους.
Η κίνηση ενός εκκρεμούς το άκρο του οποίου δεν είναι ακλόνητο αλλά κινείται εξαιτίας μιας περιοδικής δύναμης. Εξάρτηση από τη συχνότητα της δύναμης, συντονισμός. Δεν έχει νόημα να ρωτήσουμε που θα βρίσκεται η μάζα μετά από 10 ταλαντώσεις αλλά μπορούμε να αναρωτηθούμε ποια θα είναι η πιο πιθανή της θέση

Κβαντομηχανικά συστήματα: δεν ξέρουμε τη διαδρομή που ακολούθησε ακόμα και ένα μόνο ηλεκτρόνιο γιατί εξαιτίας της αρχής της αβεβαιότητας δεν είναι εν γένει γνωστή.

Η σημασία της πιθανότητας

Η έννοια χρησιμοποιείται ευρέως

Δυο «σχολές» για τον ορισμό πιθανότητας:

(A) Συχνότητας (frequentist) ή εμπειρική:

πιθανότητα κάποια δήλωση είναι αληθής: $\dfrac{\text{N\# η δήλωση είναι αληθής}}{\text{N\# θα μπορούσε να είναι αληθής}}$

όπου ο παρονομαστής είναι μεγάλος

(B) Bayesian:

πιθανότητα κάποια δήλωση είναι αληθής = Ο βαθμός της ορθολογικής πίστης ότι είναι αληθής

Λίγο αόριστος και υποκειμενικός ορισμός αλλά πολύ ευρής για να καλύπτει όλες τις περιπτώσεις

Συμβολισμός και σημειογραφία

Εν γένει προσπαθούμε να αποδόσουμε μια πιθανότητα σε κάποια «δήλωση» ενώ δίνεται κάποια άλλη «δήλωση»

Η δήλωση εκφράζει το ρόλο της πιθανότητας σα προέκταση των κανόνων της λογικής στη περιοχή που βρίσκεται μεταξύ των δυο άκρων: του αληθές και ψευδούς

Η δήλωση που δίνεται ονομάζεται πληροφορία, I,
ενώ η δήλωση της οποίας ελέγχεται η πιθανότητα ονομάζεται υπόθεση, A.

Παραδείγματα:

I: Διάλεξα ένα χαρτί από την τράπουλα — Αλλά έλειπαν 14 χαρτιά

A: Το χαρτί αυτό θα είναι ο άσσος σπαθί

I: Αγόρασα ένα λαχείο — Πριν 2 εβδομάδες

A: Θα κερδίσω το λαχείο αυτή την εβδομάδα

- Η πιθανότητα της A εξαρτάται από την πληροφορία, I
- Η πιθανότητα της υπόθεσης A δεδομένης της πληροφορίας, I, συμβολίζεται: $P(A \mid I)$
  - Το κατά πόσο αληθής είναι η πληροφορία I είναι άσχετο με τη τιμή της P(A|I)

Κανόνες πιθανοτήτων

Οι δυο ορισμοί πιθανοτήτων (frequentist, Bayesian) υπάγονται στους ίδιους κανόνες

(Α) Διάστημα τιμών

Η πιθανότητα βρίσκεται πάντοτε στο διάστημα $0 \le P(A \mid I) \le 1$

P(A|I)=1 δηλώνει βεβαιότητα ότι η υπόθεση Α είναι αληθής

(Β) AND συνδυασμοί: γενική περίπτωση

Θεωρήστε 2 υποθέσεις A_1 και A_2 και έστω $A_1{\bullet}A_2$ (ή A_1 AND A_2) η σύνθετη υπόθεση ότι και οι 2 υποθέσεις είναι αληθείς. Προκύπτει ότι:

$$P(A_1 \bullet A_2 \mid I) = P(A_2 \mid A_1 \bullet I) P(A_1 \mid I)$$

όπου: $P(A_2 \mid A_1 \bullet I)$ δηλώνει τη πιθανότητα της A_2 δεδομένης της υπόθεσης $A_1{\bullet}I$

Παράδειγμα

I: Ένα χαρτί έχει τραβηχτεί από την τράπουλα

A_1: Το χαρτί είναι άσος

A_2: Το χαρτί είναι σπαθί

$A_1{\bullet}A_2$: ο άσος είναι σπαθί

(Γ) AND συνδυασμοί αμοιβαίως ανεξάρτητοι μεταξύ τους (mutually independent)

(Το αληθές της A_1 δεν μας λέει τίποτα για το αληθές της A_2)

Σε αλγεβρική μορφή: $P\left(A_2 \mid A_1 \bullet I\right) = P\left(A_2 \mid I\right)$ και $P\left(A_1 \mid A_2 \bullet I\right) = P\left(A_1 \mid I\right)$

Τότε προκύπτει ότι: $P\left(A_2 \bullet A_1 \mid I\right) = P\left(A_1 \mid I\right) \times P\left(A_2 \mid I\right)$

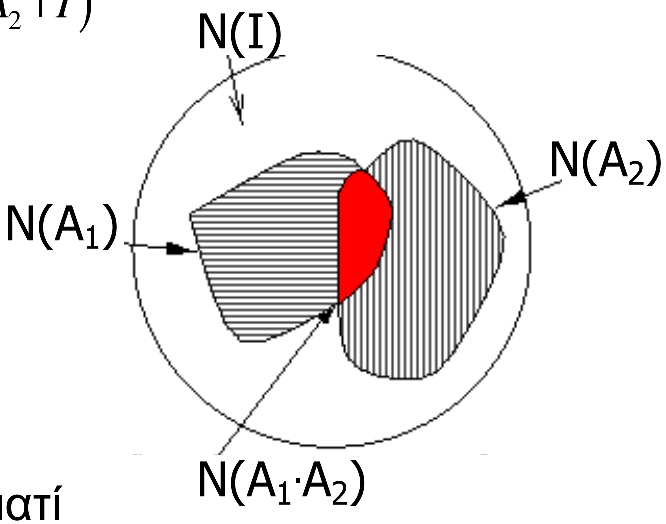
Κανόνες πιθανοτήτων

(Δ) OR συνδυασμοί: γενική περίπτωση

Θεωρήστε 2 υποθέσεις A_1 και A_2 και έστω A_1 OR A_2 η σύνθετη υπόθεση ότι τουλάχιστον η μια από τις 2 υποθέσεις είναι αληθής. Προκύπτει ότι:

$$P\left(A_1 \; or \; A_2 \mid I\right) = P\left(A_1 \mid I\right) + P\left(A_2 \mid I\right) - P\left(A_1 \bullet A_2 \mid I\right)$$

Παράδειγμα:



Έστω N(I) το πλήθος όλων των περιπτώσεων I και $N(A_1)$, $N(A_2)$ και $N(A_1 \cdot A_2)$ το πλήθος των περιπτώσεων που η A_1, η A_2 και οι A_1 και A_2 ταυτόχρονα είναι αληθείς αντίστοιχα.
Το αποτέλεσμα θα είναι:
$N(A_1 \text{ or } A_2) = N(A_1)+N(A_2)-N(A_1 \cdot A_2)$
Προφανώς πρέπει να αφαιρέσουμε το κοινό τμήμα γιατί μετράται δυο φορές.

(Ε) OR συνδυασμοί αμοιβαίως αποκλειστικοί μεταξύ τους (mutually exclusive)

(Η A_1 και A_2 δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα αληθείς)

Σε αλγεβρική μορφή: $P\left(A_2 \bullet A_1 \mid I\right) = 0$

Προκύπτει ότι: $P\left(A_1 \; or \; A_2 \mid I\right) = P\left(A_1 \mid I\right) + P\left(A_2 \mid I\right)$

Κανόνες πιθανοτήτων

(ΣΤ) Κανονικοποίηση: αποτελέσματα αμοιβαίως αποκλειστικά και εξαντλητικά: mutually exclusive and exhaustive (MEE)

Θεωρήστε το σύνολο Ω των υποθέσεων A_1, A_2, A_3,...,A_Ω εκ των οποίων τουλάχιστον μια είναι αληθής. Δηλαδή σε αλγεβρική μορφή: $P\left(A_1 \ or\ A_2 \ or\ \mathrm{A}_3 \ or \cdots A_\Omega \mid I\right) = 1$

Παράδειγμα:

I: ένα χαρτί τραβήχτηκε από μια τράπουλα

A_1: είναι άσος

A_2: είναι χαρτί φιγούρας

A_3: είναι κοινό χαρτί

Οι υποθέσεις είναι αποκλειστικές μεταξύ τους και καλύπτουν όλο το πλήθος των δυνατών τιμών

Προκύπτει ότι για ένα τέτοιο σύνολο ισχύει: $\sum_{r=1}^{\Omega} P\left(A_r \mid I\right) = 1$

Απόδοση τιμών στις πιθανότητες

(A) Ίσες εκ των προτέρων πιθανότητες:

Έστω ότι η πληροφορία I προσδιορίζει ένα πλήθος Ω από MEE αποτελέσματα και δεν μας λέει τίποτα που να προτιμά το ένα αποτέλεσμα σχετικά με τα άλλα. Τότε στην περίπτωση αυτή της μέγιστης άγνοιας οι πιθανότητες μπορούν να αποδοθούν εκ των προτέρων.

Στην περίπτωση αυτή η πιθανότητα που αποδίδεται σε κάθε υπόθεση του Ω είναι:

$$P_r \equiv P\left(A_r \mid \Omega\right) = \frac{1}{\Omega} \quad \text{για όλα τα r}$$

Σύμφωνα με το κανόνα των MEE θα έχουμε: $1 = \sum_{r=1}^{\Omega} P_r = \Omega \times P_r$

Παράδειγμα 1:

Ρίχνουμε ένα νόμισμα
Στην περίπτωση αυτή ξέρουμε ότι Ω=2 δυνατά αποτελέσματα
Πρέπει να αποδόσουμε στο καθένα από τα δυνατά αποτελέσματα την ίδια πιθανότητα: $p = P_r = 1/\Omega = 1/2$

Παράδειγμα 2:

Ένα αέριο αφήνεται να έρθει σε ισορροπία σε απομονωμένο δοχείο
Η κβαντομηχανική μας λέει ότι μπορεί να βρεθεί σε μια οποιαδήποτε μικροσκοπική κατάσταση από ένα σύνολο Ω δυνατών καταστάσεων.
Πρέπει να αποδόσουμε σε κάθε μια από τις καταστάσεις αυτές την πιθανότητα 1/Ω
Αυτό αποτελεί το θεμελειώδη λίθο της στατιστικής φυσικής και επομένως το πως κατανοούμε τη συμπυκνωμένη ύλη

Απόδοση τιμών στις πιθανότητες

(Β) Επιχειρήματα ανάλογα με τους δυνατούς τρόπους

Υποθέτουμε ότι ένα αποτέλεσμα Α μπορεί να ληφθεί με W δυνατούς τρόπους A_1, A_2, A_W που αποτελούν μέλη μιας μεγαλύτερης ομάδας $A_1, A_2, \ldots, A_\Omega$ που είναι ΜΕΕ δεδομένης της πληροφορίας Ι. Τότε αν δεν υπάρχει οποιαδήποτε επιπλέον πληροφορία

$$P(A \mid W, \Omega) = \frac{W}{\Omega}$$

Παράδειγμα:

Ρίχνουμε 2 ζάρια: Ποια η πιθανότητα το άθροισμα τους να δώσει 7

Στη περίπτωση αυτή η πληροφορία Ι είναι η ρίψη των 2 ζαριών

Το αποτέλεσμα που θα πρέπει να ελέγξουμε είναι Α: το άθροισμά τους να είναι 7

Υπάρχουν συνολικά Ω=6x6=36 δυνατά αποτελέσματα

Καθένα από αυτά πρέπει να του αποδοθεί η ίδια πιθανότητα: $P_r = 1/\Omega = 1/36$

Συνολικό score 7 μπορούν να δώσουν οι συνδυασμοί:

(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)

δηλαδή W = 6.

Επομένως η πιθανότητα να πάρουμε άθροισμα 7 θα είναι:

$$P(7 \mid 6, 36) = \frac{W}{\Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Διονυμικός παράγοντας

Εφαρμογή στα προηγούμενα βρίσκει ο διονυμικός παράγοντας που δίνει:

$$^{N}C_{m} = \begin{pmatrix} N \\ m \end{pmatrix} = \frac{N!}{m!(N-m)!}$$

(α) το πλήθος των διαφορετικών τρόπων μια ομάδα από N ξεχωριστά μεταξύ τους αντικείμενα μπορούν να χωριστούν σε 2 υπο-ομάδες από m και N-m αντικείμενα
(β) τον αριθμό των διαφορετικών δυνατών ακολουθιών N αντικειμένων που φτιάχνουν δυο υπο-ομάδες από m μη διαχωρίσημα και N-m μη διαχωρήσιμα μεταξύ τους αντικειμένων.

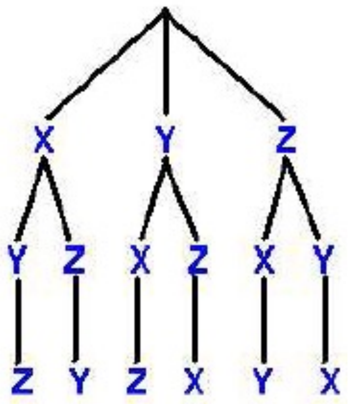
Ας θεωρήσουμε αρχικά ταξινομημένες ομάδες. Έστω ότι έχουμε 2 στοιχεία x και y. Οι ταξινομημένες ομάδες που μπορούμε να έχουμε είναι:

$$\{x, y\} \quad \text{και} \quad \{y, x\}$$

Θεωρήστε ταξινομημένες ομάδες τριών στοιχείων x, y και z. Υπάρχουν 6 δυνατές περιπτώσεις:

$$\{x,y,z\},\{x,z,y\},\{y,x,z\},\{y,z,x\},\{z,x,y\},\{z,y,x\}$$

Αν είχαμε n στοιχεία ο αριθμός των δυνατών περιπτώσεων θα ήταν n!

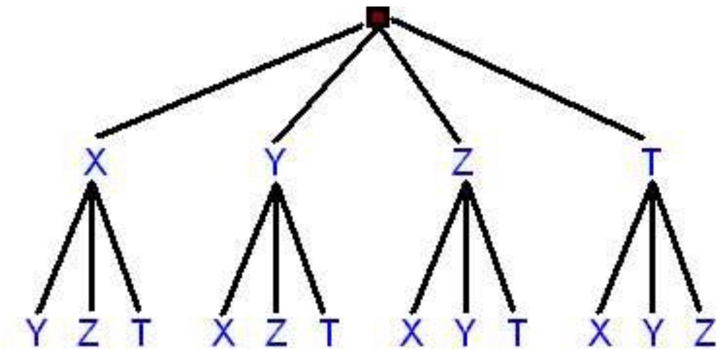


Υπάρχουν *n* δυνατές περιπτώσεις να έχουμε ένα συγκεκριμένο στοιχείο στη 1η θέση, κατόπιν υπάρχουν n-1 περιπτώσεις να έχουμε ένα από τα εναπομείναντα στοιχεία στη 2η θέση κ.ο.κ.
Ο αριθμός αυτός ονομάζεται αριθμός διευθετήσεων:

Διονυμικός παράγοντας

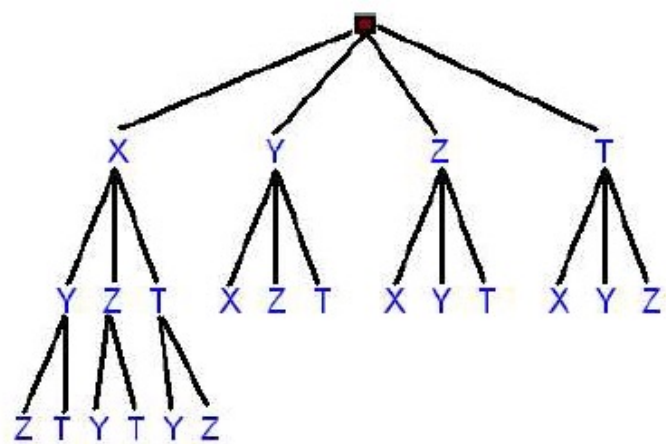
Θεωρούμε τώρα τον αριθμό των δυνατών περιπτώσεων να έχουμε ταξινομημένες ομάδες από $k \leq n$ στοιχεία από κάποια ομάδα n στοιχείων. Αυτός ο αριθμός είναι ο αριθμός των μεταθέσεων $P(n,k)$. Δείχνει τον αριθμό των ανταλλαγών/μεταθέσεων των n στοιχείων όταν πέρνουμε k κάθε φορά.

Έστω ότι έχουμε 4 στοιχεία και πέρνουμε 2 κάθε φορά. Επομένως έχουμε υπο-ομάδες δυο στοιχείων και το παρακάτω σχήμα δείχνει το «δένδρο» των αποφάσεων



Κάθε διαδρομή αντιστοιχεί σε μια ταξινομημένη ομάδα.
Επομένως $P(4,2)=12$

Αν θέλαμε τον αριθμό των ταξινομημένων περιπτώσεων 3 στοιχείων τα οποία πέρνουμε από ένα σύνολο 4 στοιχείων, τότε θα είχαμε:



Επομένως $P(4,3)=24$

Γενικά: $P(n,k)=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)$

$$\Rightarrow P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

Διονυμικός παράγοντας

Θεωρούμε τώρα τον αριθμό των δυνατών μεταθέσεων σε ομάδες μη ταξινομημένες. Συνδυασμοί είναι οι αριθμοί των διευθετήσεων των στοιχείων χωρίς να λαμβάνουμε υπόψην κάποια συγκεκριμένη σειρά ή θέση.
π.χ. για 2 στοιχεία x, y, υπάρχει μόνο 1 ομάδα: {x,y}

Ο αριθμός των υπο-ομάδων μεγέθους k στοιχείων που λαμβάνονται από n στοιχεία συμβολίζεται με $C(n,k)$. Προφανώς $C(n,n)=1$

Για παράδειγμα, ο αριθμός των μη ταξινομημένων ομάδων 2 στοιχείων τα οποία λαμβάνονται από ένα σύνολο 4 στοιχείων {x,y,z,w} είναι:

$$\{x,y\},\{x,z\},\{x,w\},\{y,z\},\{y,w\},\{z,w\} \Rightarrow C(4,2)=6$$

Για να βρούμε το τύπο που δίνει τον αριθμό των δυνατών συνδυασμών, θεωρούμε και πάλι το προβλημα εύρεσης του αριθμού των δυνατών ταξινομημένων ομάδων με k στοιχεία τα οποία λαμβάνονται από n-στοιχεία.

(α) Δημιουργούμε όλες τις μη ταξινομημένες ομάδες μεγέθους k
(β) Ταξινομούμε τα στοιχεία σε κάθε συνδυασμό που βρήκαμε στο (α)

Απο το προηγούμενο παράδειγμα: $\{x,y\},\{x,z\},\{x,w\},\{y,z\},\{y,w\},\{z,w\}$

Η ταξινόμηση τώρα είναι απλή:

$$\{x,y\},\{x,z\},\{x,w\},\{y,z\},\{y,w\},\{z,w\}$$
$$\{y,x\},\{z,x\},\{w,x\},\{z,y\},\{w,y\},\{w,z\}$$

Επομένως: $P(4,2)=2\times C(4,2)$

Διονυμικός παράγοντας

Σαν ένα ακόμα παράδειγμα, θεωρείστε όλες τις υπο-ομάδες 3 στοιχείων που λαμβάνονται από 4 στοιχεία {x,y,z,w}

$$\{x,y,z\},\{x,y,w\},\{x,z,w\},\{y,z,w\}$$

Υπάρχουν 6 δυνατοί τρόποι να ταξινομήσουμε κάθε μια από τις 4 υπο-ομάδες:

$$\{x,y,z\},\{x,z,y\},\{y,x,z\},\{z,x,y\},\{y,z,x\},\{z,y,x\}$$

Επομένως: $P(4,3)=6\times C(4,3)$

Δείχνουμε λοιπόν με το τρόπο αυτό ότι: $P(n,k)=P(k,k)\times C(n,k)$

Από τη παραπάνω σχέση καταλήγουμε ότι:

$$C(n,k)=\frac{P(n,k)}{P(k,k)}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Παραδείγματα

1. Η πιθανότητα να τραβήξουμε 3 συγκεκριμένα χαρτιά απο μια τράπουλα 52 χαρτιών

Το πλήθος των δυνατών 3-συγκεκριμένων καρτών βρίσκεται αν χωρίσουμε την τράπουλα σε 2 υπο-ομάδες των 3 και 52-3=49 καρτών. Οπότε το πλήθος θα είναι:

$$\Omega = {}^{49}C_3 = \frac{52!}{3!49!}$$

Κάθε περίπτωση έχει εκ των προτέρων πιθανότητα:

$$p = \frac{1}{\Omega} = \frac{3! \times 49!}{52!} = \frac{6}{52 \times 51 \times 50} = 4.5 \times 10^{-5}$$

2. Έχουμε μια τράπουλα 52 χαρτιών. Ποια η πιθανότητα τραβώντας μια κάρτα να πάρουμε είτε άσο ή σπαθί;

Γενική εφαρμογή του Or θα δώσει:
P(άσο OR σπαθί) = P(άσο|52)+P(σπαθί|52)-P(άσο·σπαθί|52) = $\frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$

3. Ποια η πιθανότητα ρίχνοντας 2 ζάρια να πάρουμε το ένα να δείχνει 3;

Η πιθανότητα να πάρουμε 3 ρίχνοντας ένα ζάρι είναι 1/6. Η πιθανότητα να πάρουμε μια οποιαδήποτε άλλη πλευρά είναι 5/6. Επομένως η πιθανότητα να πάρουμε μια οποιαδήποτε πλευρά ρίχνοντας 2 ζάρια θα είναι 5/6 x 5/6 = 25/36. Άρα η πιθανότητα να πάρουμε 3 τουλάχιστον από ένα ζάρι θα είναι 1-25/36 = 11/36

Απόδοση τιμών στις πιθανότητες

(Γ) Χρησιμοποίηση επιπλέον πληροφορίας – Θεώρημα Bayes

Η πιθανότητα που δίνουμε σε κάποια υπόθεση εξαρτάται από τη πληροφορία που έχουμε. Όταν περισσότερη πληροφορία γίνεται προσβάσιμη οπότε η ολική πληροφορία είναι E•I τότε η πιθανότητα θα αλλάξει. Η διαφορά στη τιμή της πιθανότητας πριν και μετά την απόκτηση επιπλέον πληροφορίας αποτελεί το

θεώρημα Bayes: $$P(A \mid E \bullet I) = P(A \mid I)\frac{P(E \mid A \bullet I)}{P(E \mid I)}$$

Παράδειγμα:

Υπόθεση, A: υπάρχει ζωή στον Άρη

Πληροφορία, I: γενικά γνωστά στοιχεία για τον Άρη

Επιπλέον πληροφορία E: υπάρχει νερό στον Άρη

Πιθανότητες:

P(A|I): πιθανότητα ζωής στον Άρη δεδομένης της I

P(A|E·I): πιθανότητα ζωής στον Άρη δεδομένης επίσης της E ότι υπάρχει νερό

P(E|A·I): πιθανότητα ύπαρξης νερού στον Άρη δεδομένου ότι υπάρχει ζωή

P(E|I): πιθανότητα ύπαρξης νερού στον Άρη δεδομένης της I

Από τη στιγμή που η ζωή όπως τη ξέρουμε απαιτεί νερό $P(E \mid A \bullet I) = 1$

Από τη στιγμή που πληροφορία I δεν είναι αρκετή να εξασφαλίζει νερό, $P(E \mid I) < 1$

Από το θεώρημα Bayes: $$\frac{P(A \mid E \bullet I)}{P(A \mid I)} = \frac{P(E \mid A \bullet I)}{P(E \mid I)} = \frac{1}{P(E \mid I)} > 1$$

Θεώρημα Bayes – Conditional Probability

Έστω A_1, A_2, A_3,...,A_n ένα σύνολο από n αποκλειστικές (μη αλληλεπικαλύψιμες) υποθέσεις οι οποίες όλες μαζί περιγράφουν ένα σύνολο S. Έστω E είναι μια υπόθεση από το σύνολο S η οποία έχει πιθανότητα P(E|S)>0.
Τότε η πιθανότητα $P(A_k|E)$ δίνεται από:

$$P(A_k \mid E \bullet S) = \frac{P(A_k \bullet E \mid S)}{P(A_1 \bullet E \mid S) + P(A_2 \bullet E \mid S) + \cdots + P(A_n \bullet E \mid S)}$$

Θεώρημα Bayes

Αλλά: $P(A_k \bullet E \mid S) = P(A_k \mid S)P(E \mid A_k \bullet S)$ και επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$P(A_k \mid E \bullet S) = \frac{P(A_k \mid S)P(E \mid A_k \bullet S)}{P(A_1 \mid S)P(E \mid A_1 \bullet S) + P(A_2 \mid S)P(E \mid A_2 \bullet S) + \cdots + P(A_n \mid S)P(E \mid A_n \bullet S)}$$

Παράδειγμα:

Έστω η Μαρία ετοιμάζει το ψήσιμο του οβελία για το πάσχα στην ύπαιθρο. Τα τελευταία χρόνια βρέχει πολύ σπάνια, μόνο 5 μέρες το χρόνο. Ο μετερεωλόγος δυστυχώς έχει προβλέψει βροχή για το πάσχα. Όταν βρέχει, ο μετερεωλόγος προβλέπει ότι θα βρέξει με επιτυχία 90%. Όταν δεν βρέχει, ο μετερεωλόγος προβλέπει 10% πιθανότητα βροχής. Ποια η πιθανότητα να βρέξει το πάσχα?

Bayes θεώρημα

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, το σύνολο των δυνατών καταστάσεων προσδιορίζεται από 2 αμοιβαίως μη αλληλεπικαλυπτόμενες καταστάσεις, να βρέξει ή να μη βρέξει. Υπάρχει μια επιπλέον περίπτωση, αυτή που καθορίζεται από την πρόβλεψη του μετερεωλόγου για βροχή. Θα έχουμε:

A_1: Θα βρέξει τη μέρα του Πάσχα

A_2: Δε θα βρέξει τη μέρα του Πάσχα

Ε: Ο μετερεωλόγος προβλέπει βροχή

Με βάση τις πιθανότητες θα έχουμε:

$P(A_1) = 5/365 = 0.0136985$ βρέχει 5 μέρες το χρόνο

$P(A_2) = 360/365 = 0.9863014$ Δεν βρέχει 360 μέρες το χρόνο

$P(E \mid A_1) = 0.90$ Όταν βρέχει, ο μετερεωλόγος προβλέπει βροχή 90%

$P(E \mid A_2) = 0.10$ Όταν δεν βρέχει, υπάρχει πρόβλεψη για βροχή 10%

Από το θεώρημα Bayes έχουμε:

$$P(A_1 \mid E) = \frac{P(A_1)P(E \mid A_1)}{P(A_1)P(E \mid A_1) + P(A_2)P(E \mid A_2)} = \frac{0.014 \times 0.9}{0.014 \times 0.9 + 0.986 \times 0.1} = 0.111$$

Θεώρημα Bayes – παράδειγμα

Δίνονται 2 συρτάρια (Α,Β) στα οποία περιέχονται 2 χρυσά νομίσματα στο ένα συρτάρι ενώ στο άλλο συρτάρι υπάρχουν 1 χρυσό και 1 ασημένιο νόμισμα. Ωστόσο δεν μπορείτε να δείτε το περιεχόμενο των συρταριών. Αν κάποιος τραβήξει τυχαία ένα νόμισμα από το συρτάρι Α και αυτό είναι χρυσό, ποια η πιθανότητα το συρτάρι αυτό περιέχει ακόμα ένα χρυσό νόμισμα;

Γεγονός	Περιγραφή	Πιθανότητα
A_1	Το συρτάρι Α έχει 2 χρυσά νομίσματα	0.5
B	Επιλογή ενός χρυσού νομίσματος από τα 4 νομίσματα	0.75
$B\|A_1$	Πιθανότητα να διαλέξουμε 1 χρυσό νόμισμα όταν το συρτάρι έχει 2 χρυσά νομίσματα	1

$$P(A \mid \mathrm{B}) = \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)} = \frac{0.5 \times 1}{0.5 \times 1. + 0.5 \times 0.5} = \frac{2}{3} = 0.666$$

Αναμενόμενη τιμή

Ορισμός

Η πυκνότητα πιθανότητας, PD, εκφράζει τα πάντα τα οποία χρειάζεται να γνωρίζουμε σχετικά με την σχετιζόμενη τυχαία μεταβλητή

Αλλα η PD μπορεί να χαρακτηριστεί απλά από 2 ιδιότητές της: τη μέση τιμή και τη διασπορά της

Οι δυο αυτές χαρακτηριστικές της PD είναι ειδικές περιπτώσεις της γενικότερης έννοιας της αναμενόμενης τιμής

Έστω g(x) μια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής x.

Η αναμενόμενη τιμή της g(x) δίνεται

$$\langle g(x)\rangle = \begin{cases} \sum_i p(x_i)g(x_i) & \text{αν η X είναι διακριτή} \\ \int f(x)g(x)dx & \text{αν η X είναι συνεχής} \end{cases}$$

Η αναμενόμενη τιμή της g(x) συμπίπτει με τη μέσο όρο μεγάλου αριθμού παρατηρήσεων της g(x)

Κανόνες

Μερικοί απλοί αλλά σημαντικοί κανόνες

$$\langle g_1(x)+g_2(x)\rangle = \langle g_1(x)\rangle + \langle g_2(x)\rangle$$

Αν α είναι σταθερά ανεξάρτητη του X τότε: $\langle a\rangle = a$ και $\langle ag(x)\rangle = a\langle g(x)\rangle$

Αναμενόμενη τιμή

Μέση τιμή

Η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι εξ'ορισμού η αναμενόμενη τιμή της

$$\langle x \rangle = \begin{cases} \sum_i p(x_i) x_i & \text{αν η X είναι διακριτή} \\ \int dx f(x) x & \text{αν η X είναι συνεχής} \end{cases}$$

Η μέση τιμή συμπίπτει με το μέσο όρο για μεγάλες τιμές παρατηρήσεων της x

Παραδείγματα

1. Μέση τιμή μια διακριτής μεταβλητής

   Έστω X το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού. Η X πέρνει τιμές x_i=1,2,3...,6 με πιθανότητα $p(x_i)$=1/6. Η μέση τιμή (ή αναμενόμενη τιμή) της x είναι:

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^{6} p(x_i) x_i = p \sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2}$$

2. Μέση τιμή μιας συνεχούς μεταβλητής

   Έστω X μια συνεχής μεταβλητή που επιλέγεται τυχαία στο διάστημα [1,6]
   Η X έχει τότε PDF:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & 1 \le x \le 6 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

Επομένως η μέση τιμή θα είναι: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x \, dx = \frac{1}{5} \left. \frac{x^2}{2} \right|_1^6 = \frac{7}{2}$

Διασπορά και τυπική απόκλιση

Η διασπορά V[x] μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι η αναμενόμενη τιμή του τετραγώνου της απόκλισής της από τη μέση τιμή:

$$V[x] = \begin{cases} \sum_i p(x_i)(\Delta x_i)^2 & \text{όπου } \Delta x_i = x_i - \langle x \rangle \quad \text{και x διακριτή} \\ \int f(x)dx(\Delta x)^2 & \text{όπου } \Delta x = x - \langle x \rangle \quad \text{και x συνεχής} \end{cases}$$

Μπορούμε να γράψουμε ακόμα: $V[x] = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$

Η τυπική απόκλιση μια τυχαίας μεταβλητής X είναι η τετραγωνική ρίζα της διασποράς της $\sigma(x) = \sqrt{V[x]}$

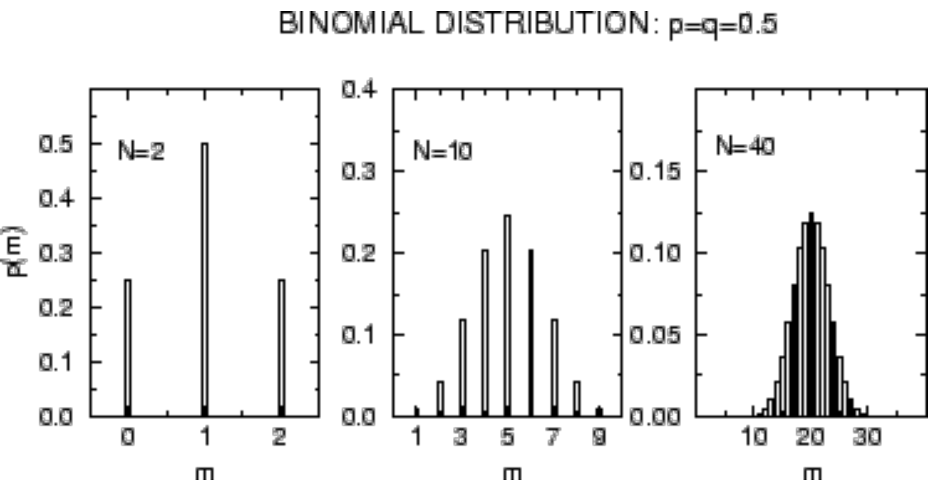
Η Διονυμική κατανομή

Έστω ότι ρίχνουμε ένα κέρμα N φορές. Ποια η πιθανότητα να πάρουμε m φορές τη μια όψη του?

Η πιθανότητα αυτή δίνεται από τη διονυμική κατανομή η οποία λέει ότι:

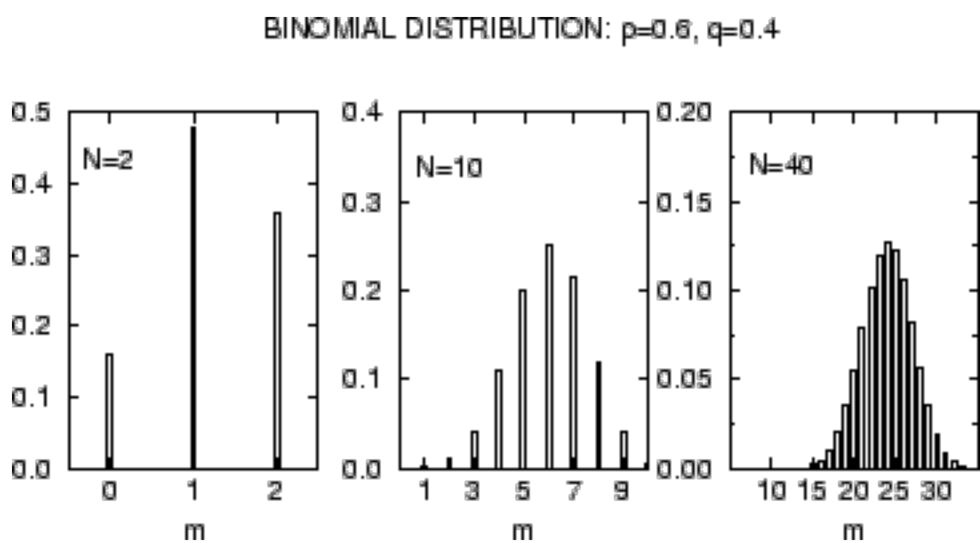
Αν μια προσπάθεια η οποία δίνει επιτυχία με πιθανότητα p, τεθεί σε δοκιμή N φορές, η πιθανότητα p(m) να βρούμε ακριβώς m επιτυχίες δίνεται από τη σχέση:

$$p(m) = {}^{N}C_{m} p^{m} (1-p)^{(N-m)} \quad \mu\varepsilon \quad {}^{N}C_{m} = \frac{N!}{m!(N-m)!}$$



Κανονικό νόμισμα

Κάλπικο νόμισμα



Ιδιότητες της διονυμικής κατανομής

μέση τιμή: $\langle m \rangle \equiv \sum_{m=0}^{N} m p(m) = Np$

διασπορά: $V[m] \equiv \langle \Delta m^2 \rangle \equiv \sum_{m=0}^{N} \left(m - \langle m \rangle\right)^2 p(m) = Npq$

τυπική απόκλιση: $\sigma \equiv \sqrt{V[m]} = \sqrt{Npq}$

Η διονυμική κατανομή προσδιορίζεται από δυο παραμέτρους N και p.

Η μέση τιμή αυξάνει γραμμικά με τον αριθμό των προσπαθειών ενώ η τυπική απόκλιση μόνο συναρτήσει της τετραγωνικής ρίζας N

Παράδειγμα – τυχαίος περίπατος

Ένας μεθυσμένος κινείται από στύλο σε στύλο καθώς προσπαθεί να γυρίσει στο σπίτι του. Σε κάθε κολόνα σταματά για λίγο και συνεχίζει. Κάθε φορά που σταματά μπορεί να κινηθεί εξίσου προς ή μακριά από το σπίτι του. Αν οι κολόνες απέχουν απόσταση α ποια είναι η μέση τιμή και η απόκλιση της μετατόπισής του d από το σημείο εκκίνησής του μετά από Ν βήματα;

Έστω n_R ο αριθμός των βημάτων προς το σπίτι του και n_L ο αριθμός των βημάτων στη λάθος κατεύθυνση: $n_L=N-n_R$

Η μετατόπισή του d από το σημείο εκκίνησης είναι: $d=(n_R-n_L)a=(2n_R-N)a$

Θεωρούμε σα προσπάθεια ένα βήμα, ενώ σαν επιτυχία ένα βήμα το σπίτι του

Επομένως n_R είναι κατανεμημένη διονυμικά με πιθανότητα p=1/2

Η μέση τιμή και διασπορά της n_R είναι: $\langle n_R\rangle = Np = \frac{N}{2}$ και $V[n_R]=\left\langle [\Delta n_R]^2\right\rangle = Npq = \frac{N}{4}$

Η μέση τιμή της μετατόπισης είναι: $\langle d\rangle = \langle a[2n_R-N]\rangle = a(2\langle n_R\rangle - N) = a(N-N)=0$

Η διασπορά της μετατόπισης είναι: $\langle \Delta d^2\rangle = \left\langle (d-\langle d\rangle)^2\right\rangle = \left\langle \left[a(2n_R-N-\langle 2n_R-N\rangle)\right]^2\right\rangle$

$$\langle \Delta d^2\rangle = \left\langle \left[a(2n_R-N-2\langle n_R\rangle+N)\right]^2\right\rangle = \left\langle \left[2a(n_R-\langle n_R\rangle)\right]^2\right\rangle = \left\langle [2a\Delta n_R]^2\right\rangle = 4a^2\langle \Delta n_R^2\rangle$$

Αλλά $V[n_R]=\left\langle [\Delta n_R]^2\right\rangle$ οπότε $\langle \Delta d^2\rangle = 4a^2 V[n_R] \Rightarrow V[d]=4a^2V[n_R] \Rightarrow V[d]=4a^2\frac{N}{4}=a^2N$

Κατανομή Poisson

Η κατανομή Poisson είναι ειδική περίπτωση της διονυμικής κατανομής όταν:

Η πιθανότητα, p, μιας προσπάθειας να δώσει επιτυχία είναι μικρή (πηγαίνει στο 0)

Ο αριθμός των προσπαθειών είναι μεγάλος (πηγαίνει στο άπειρο)

Ο μέσος αριθμός επιτυχιών, Np, είναι συγκεκριμένος αριθμός (δεν πηγαίνει στο 0 ή στο άπειρο)

Για την διονυμική κατανομή μπορούμε να γράψουμε:

$p \to 0, \;\; N \to \infty$ ενώ Np δεν είναι 0 ή άπειρο

$$p(m) = e^{-\langle m \rangle} \frac{\langle m \rangle^m}{m!}$$ Poisson κατανομή

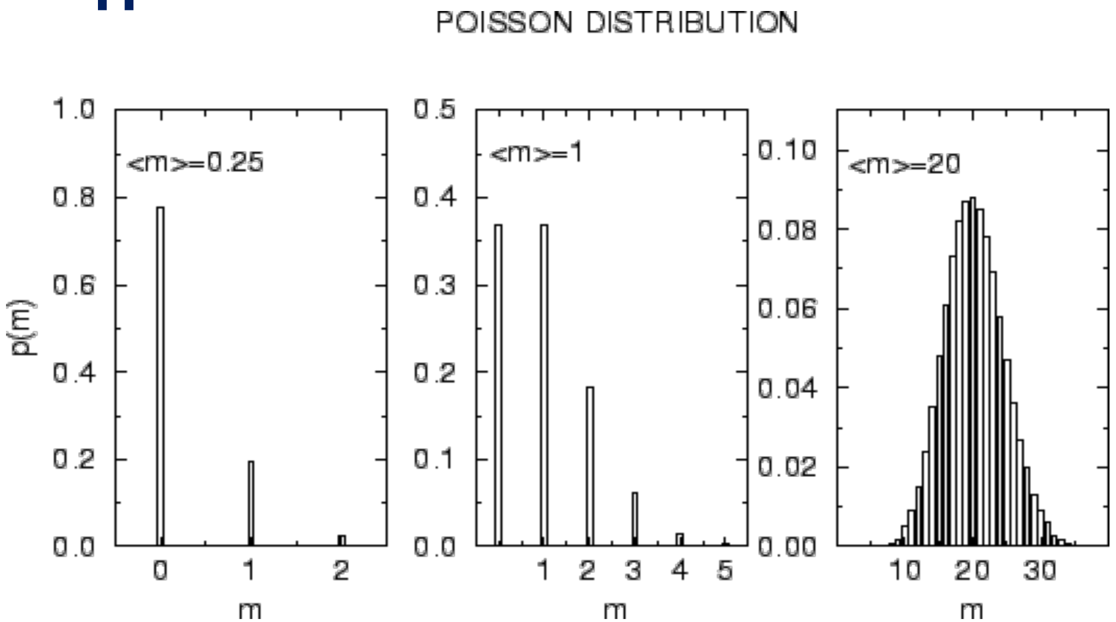
Ιδιότητες της κατανομής Poisson:

Στο Poisson όριο της διονυμικής κατανομής, η τυπική απόκλιση δίνεται από

$$\sigma[m] = \sqrt{Npq} = \sqrt{Np(1-p)} \simeq \sqrt{Np} = \sqrt{\langle m \rangle}$$

Επομένως η Poisson κατανομή προδιορίζεται από την <m>

Παραδείγματα



Κατά τη διάρκεια μιας βροχής μετεωριτών, παρατηρούμε ότι μετεωρίτες πέφτουν με ρυθμό 12.2/h. Υπολογίστε τη πιθανότητα να παρατηρήσετε λιγότερο από 2 σε 0.5h

$$p(m) = e^{-\langle m \rangle} \frac{\langle m \rangle^m}{m!}$$

όπου <m> = 6.1/(0.5h)

Η πιθανότητα να ανιχνεύσουμε < 2 είναι:

$$p(m<2) = p(m=0) + p(m=1) = e^{-\langle m \rangle}\left(1+\langle m \rangle\right) = 0.016$$