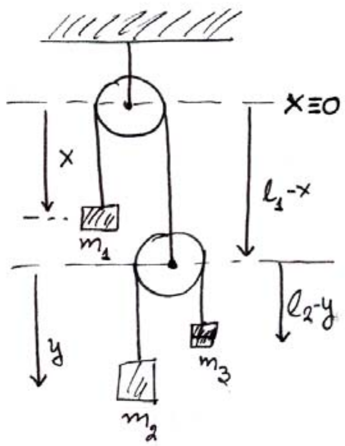
ΦΥΣ. 133

ΕΡΓΑΣΙΑ # 5 **Επιστροφή 13-3-2006**

1. Προσδιορίστε την Hamiltonian και τις εξισώσεις κίνησης του Hamilton για την διπλή μηχανή του Atwood της διάλεξης 7.



Οι 3 μάζες έχουν ταχύτητες:

$$V_1 = \dot{x}_1$$

$$V_2 = \frac{d}{dt}\left(\ell_1 - x_1 + y\right) = -\dot{x}_1 + \dot{y}$$

$$V_3 = \frac{d}{dt}\left(\ell_1 - x_1 + \ell_2 - y\right) = -\dot{x}_1 - \dot{y}$$

Η κινητική ενέργεια επομένως είναι:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(-\dot{x}_1 + \dot{y}\right)^2 + \frac{1}{2} m_3 \left(-\dot{x}_1 - \dot{y}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\right) + \frac{1}{2} m_3 \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}_1\dot{y}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + m_3\right)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\left(m_2 + m_3\right)\dot{y}^2 + \left(m_3 - m_2\right)\dot{x}_1\dot{y}$$

Η δυναμική ενέργεια είναι:

$$V = -m_1 g x_1 - m_2 g\left(\ell_1 - x_1 + y\right) - m_3 g\left(\ell_1 - x_1 + \ell_2 - y\right) \Rightarrow$$

$$V = -g\left[\left(m_1 - m_2 - m_3\right)x_1 + \left(m_2 - m_3\right)y\right] \underbrace{- g\left[\left(m_2 + m_3\right)\ell_1 + m_3 \ell_2\right]}_{\text{σταθερά η οποία δεν παίζει ρόλο στη δυναμική του συστήματος}}$$

Επομένως η Lagrangian γράφεται:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + m_3\right)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\left(m_2 + m_3\right)\dot{y}^2 + \left(m_3 - m_2\right)\dot{x}_1\dot{y} - g\left[\left(m_1 - m_2 - m_3\right)x_1 + \left(m_2 - m_3\right)y\right]$$

Οι γενικευμένες ορμές γράφονται:

$$P_{x_1} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = (m_1+m_2+m_3)\dot{x}_1 + (m_3-m_2)\dot{y}$$

$$P_y \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = (m_2+m_3)\dot{y} + (m_3-m_2)\dot{x}$$

Λύνουμε για $\dot{x}_1$ και $\dot{y}$ συναρτήσει των P_{x_1}, P_y

Άρα:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{D}\left[(m_2+m_3)P_{x_1} + (m_2-m_3)P_y\right]$$

$$\dot{y} = \frac{1}{D}\left[(m_2-m_3)P_{x_1} + (m_1+m_2+m_3)P_y\right]$$

όπου $D = m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3$

Από τον ορισμό της Hamiltonian έχουμε:

$$H = \dot{x}_1 P_{x_1} + \dot{y} P_y - \mathcal{L} =$$

Αλλά στο σύστημα το δυναμικό εξαρτάται μόνο από τις συντεταγμένες και όχι από ταχύτητα ή το χρόνο, οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$H = T + V$ και επομένως αντικαθιστούμε T και V σωστά παράλληλα

Χρησιμοποιήσουμε τις εκφράσεις για $\dot{x}_1$ και $\dot{y}$ συναρτήσει των ορμών:

$$H = \frac{1}{2D^2}\Big[(m_1+m_2+m_3)\left\{(m_2+m_3)P_{x_1} + (m_2-m_3)P_y\right\}^2 + (m_2+m_3)\left[(m_2-m_3)P_{x_1} + (m_1+m_2+m_3)P_y\right]^2 +$$
$$+ 2(m_2-m_3)\left[(m_2+m_3)P_{x_1} + (m_2-m_3)P_y\right]\left[(m_2-m_3)P_{x_1} + (m_1+m_2+m_3)P_y\right]\Big\} - V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2D^2}\Big\{P_{x_1}^2\left[(m_1+m_2+m_3)(m_2+m_3)^2 + (m_2+m_3)(m_2-m_3)^2 + 2(m_3-m_2)(m_2+m_3)(m_2-m_3)\right] +$$
$$P_y^2\left[(m_1+m_2+m_3)(m_2-m_3)^2 + (m_2+m_3)(m_1+m_2+m_3)^2 + 2(m_3-m_2)(m_2-m_3)(m_1+m_2+m_3)\right] +$$
$$+ 2P_{x_1}P_y\Big[(m_1+m_2+m_3)(m_2+m_3)(m_2-m_3) + (m_2+m_3)(m_2-m_3)(m_1+m_2+m_3) + (m_3-m_2)\big[(m_2+m_3)(m_1+m_2+m_3)$$
$$+ (m_2-m_3)^2\big]\Big]\Big\} - V$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2D^2}\Big\{ P_{x_1}^2 (m_2+m_3)\left[m_1(m_2+m_3)+(m_2+m_3)^2+\cancel{(m_2-m_3)^2}-\cancel{2}(m_2-m_3)^2\right] +$$

$$P_y^2(m_1+m_2+m_3)\left[\cancel{(m_2-m_3)^2}+m_1(m_2+m_3)+(m_2+m_3)^2-\cancel{2}(m_2-m_3)^2\right] +$$

$$2P_{x_1}P_y(m_2-m_3)\left[m_1(m_2+m_3)+\cancel{(m_2+m_3)^2}+\cancel{m_1(m_2+m_3)}+(m_2+m_3)^2 -\right.$$

$$\left.-\cancel{m_1(m_2+m_3)}-\cancel{(m_2+m_3)^2}-(m_2-m_3)^2\right\} - V$$

Παρατηρούμε ότι κάθε [ ] έχει κοινό παράγοντα το : $m_1(m_2+m_3)+(m_2+m_3)^2-(m_2-m_3)^2 = D$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2D}\left\{(m_2+m_3)P_{x_1}^2+(m_1+m_2+m_3)P_y^2+2(m_2-m_3)P_xP_y\right\} - g\left[(m_1-m_2-m_3)x+(m_2-m_3)y\right]+U_0$$

Οι εξισώσεις κίνησης είναι :

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_{x_1}} = \frac{1}{D}\left[(m_2+m_3)P_{x_1}+(m_2-m_3)P_y\right] \qquad (1)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_y} = \frac{1}{D}\left[(m_1+m_2+m_3)P_y+(m_2-m_3)P_{x_1}\right] \qquad (2)$$

$$\dot{P}_{x_1} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = g(m_1-m_2-m_3) \qquad (3)$$

$$\dot{P}_y = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = g(m_2-m_3) \qquad (4)$$

Από (3) & (4) $\xRightarrow{\text{ολοκλήρωση}}$ $\begin{cases} P_{x_1} = g(m_1-m_2-m_3)t \\ P_y = g(m_2-m_3)t \end{cases}$ $\xRightarrow{\text{Αντικαθιστούμε}}$ στις (1), (2)

$$x_1(t) = \frac{1}{D}\left[g(m_1-m_2-m_3)(m_2+m_3)\frac{t^2}{2}+(m_2-m_3)^2 g\frac{t^2}{2}\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{D}\left[g(m_1+m_2+m_3)(m_1-m_2-m_3)\frac{t^2}{2}+(m_2-m_3)^2 g\frac{t^2}{2}\right]$$

2. Βρείτε την Hamiltonian ενός μη αρμονικού ταλαντωτή του οποίου η Lagragian είναι:

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} - ax^3 + bx\dot{x}^2$$

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} - ax^3 + bx\dot{x}^2$$

Η συζυγής ορμή θα είναι: $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} + 2bx\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{1+2bx}$

Η Hamiltonian του συστήματος θα είναι:

$$H = \dot{x}p_x - L = \dot{x}(\dot{x} + 2b\dot{x}) - \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + ax^3 - bx\dot{x}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + ax^3 + bx\dot{x}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{p_x^2}{2(1+2bx)^2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + ax^3 + bx\frac{p_x^2}{(1+2bx)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{p_x^2}{2(1+2bx)} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + ax^3.}$$

3. Θεωρείστε ένα ιδανικό στεφάνι μάζας M και ακτίνας R το οποίο κυλά χωρίς ολίσθηση προς το κατώτερο σημείο ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης α με την οριζόντια διεύθυνση. Το στεφάνι αφήνεται από τη κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου από την κατάσταση ηρεμίας τη χρονική στιγμή t=0. Ορίστε σαν θ την γωνία κατά την οποία έχει περιστραφεί το στεφάνι από την αρχική του θέση. Ορίστε S την απόσταση που έχει διανύσει το κέντρο του στεφανιού από τη στιγμή που άρχισε να κινείται:

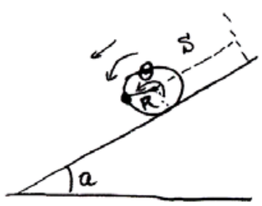
(α) Γράψτε την Lagrangian για το σύστημα συναρτήσει της γωνίας θ (εφαρμόστε το δεσμό της κύλισης χωρίς ολίσθηση για να απαλείψετε την εξάρτηση από το S).

(β) Βρείτε την εξίσωση κίνησης Lagrange για θ από την Lagrangian και προσδιορίστε την γωνιακή επιτάχυνση $\ddot{\theta}$.

(γ) Γράψτε τώρα μια Lagrangian στην οποία εμφανίζονται τα θ και S μαζί με ένα πολλαπλασιαστή Lagrange που περιγράφει το δεσμό της κύλισης χωρίς ολίσθηση.

(δ) Βρείτε και πάλι τις εξισώσεις κίνησης για αυτή τη Lagrangian και επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα που βρήκατε στο υποερώτημα (β) για την γωνιακή επιτάχυνση.

(ε) Από το πολλαπλασιαστή Lagrange, προσδιορίστε το μέγεθος της δύναμης της τριβής που απαιτείται για να μην υπάρχει ολίσθηση του στεφανιού. Για ένα σταθερό συντελεστή στατικής τριβής μ_s, βρείτε, την μέγιστη τιμή της γωνίας κλίσης α για την οποία δεν έχουμε ολίσθηση. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε απλές μεθόδους από τη Newtonian μηχανική για να προσδιορίσετε την κάθετη δύναμη μεταξύ του στεφανιού και του κεκλιμένου επιπέδου).



α) Το στεφάνι εκτελεί μεταφορική και περιστροφική κίνηση

Η κινητική του ενέργεια είναι $T=\frac{1}{2}M\dot{S}^2+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \Rightarrow$

$\boxed{S=R\theta}$ κύλιση χωρίς ολίσθηση $\Rightarrow T=\frac{1}{2}M(R\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}\underbrace{(MR^2)}_{I}\dot{\theta}^2 \Rightarrow \boxed{T=MR^2\dot{\theta}^2}$

$V=V_0-MgS\sin a \Rightarrow \boxed{V=V_0-MgR\theta\sin a}$

$\Delta V=-\int F\,ds \Rightarrow V-V_0=-MgS\sin a\theta \Rightarrow V=V_0-MgS\sin a\,\theta$

Επομένως η Lagrangian γράφεται:

$L=T-V=\boxed{MR^2\dot{\theta}^2-V_0+\theta MgS\sin a}$

β) $\frac{\partial L}{\partial \theta}=MgR\sin a \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=2MR^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=2MR^2\ddot{\theta}$

Άρα η εξίσωση κίνησης γράφεται: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0 \Rightarrow \cancel{M}g\cancel{R}\sin a=2\cancel{M}R^{\cancel{2}}\ddot{\theta} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta}=\frac{1}{2}\frac{g}{R}\sin(a)}$

γ) $L = \frac{1}{2} M\dot{s}^2 + \frac{1}{2} MR^2\dot{\theta}^2 + Mgs\sin(a) + \lambda(s - R\theta) - V_0$

δ) $\frac{\partial L}{\partial s} = Mg\sin(a) + \lambda$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = M\dot{s} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) = M\ddot{s}$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0 \Rightarrow \boxed{M\ddot{s} = Mg\sin(a) + \lambda}$ (A)

λ είναι το αντίθετο της δύναμης τριβής που ασκείται στο στεφάνι

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\lambda R \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = MR^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = MR^2\ddot{\theta}$

οπότε η δεύτερη τροποποιημένη διαφορική εξίσωση Euler-Lagrange είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow +\lambda R + MR^2\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow MR^2\ddot{\theta} = -\lambda R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = -MR\ddot{\theta}} \quad (B)$$

Από την εξίσωση του δεσμού έχουμε: $s = R\theta \Rightarrow \boxed{\ddot{s} = R\ddot{\theta}} \overset{(\Gamma)}{\Rightarrow}$

(A) & (B) $\Rightarrow$

$$\cancel{M}\ddot{s} = \cancel{M}g\sin(a) - \cancel{M}R\ddot{\theta} \overset{(\Gamma)}{\Rightarrow} \ddot{s} = g\sin(a) - \ddot{s} \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{s} = \frac{g}{2}\sin(a)} \quad \& \quad \boxed{\ddot{\theta} = \frac{g}{2R}\sin a}$$

που είναι ίδια με αυτή του (β)

Η δύναμη του δεσμού $F_\lambda \equiv -\lambda \overset{(B)}{=} MR\ddot{\theta} \Rightarrow F_\lambda = M\cancel{R}\frac{g}{2\cancel{R}}\sin a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{F_\lambda = \frac{1}{2} Mg\sin(a)}$$

(ε) Η κάθετη δύναμη που ασκείται μεταξύ του κεκλιμένου επιπέδου & στεφανιού είναι: $F_N = Mg\cos(a)$

Η δύναμη της τριβής είναι: $F_f \le \mu_s F_N \le \mu_s Mg\cos(a)$

Το στεφάνι δεν γλιστρά όσο ισχύει: $F_\lambda < F_f \le \mu_s Mg\cos(a) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{Mg}\sin(a) < \mu_s \cancel{Mg}\cos(a) \Rightarrow \boxed{\mu_s > \frac{\tan(a)}{2}}$$

4. Ένα σφαιρικό εκκρεμές αποτελείται από μια μάζα m που εξαρτάται από το άκρο μιας αβαρούς ράβδου μήκους *l*. Το άλλο άκρο της ράβδου μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα προς όλες τις κατευθύνσεις γύρω από το σημείο στήριξής της. (α) Βρείτε την συνάρτηση Hamilton σε σφαιρικές συντεταγμένες (αν $p_\varphi=0$, το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με αυτό του απλού εκκρεμούς). (β) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης του Hamilton. (γ) Συγχωνέψτε τους όρους που εξαρτώνται από p_φ με τους όρους του κανονικού δυναμικού για να ορίσετε ένα ενεργό δυναμικό $V(\theta,p_\varphi)$. Σχεδιάστε το V συναρτήσει του θ για αρκετές τιμές του p_φ συμπεριλαμβανομένης και της τιμής $p_\varphi=0$. (δ) Σχολιάστε τα χαρακτηριστικά της κίνησης, και τονίστε τις διαφορές μεταξύ $p_\varphi=0$ και $p_\varphi\neq0$.

Σφαιρικό εκκρεμές μάζας m και μήκους l

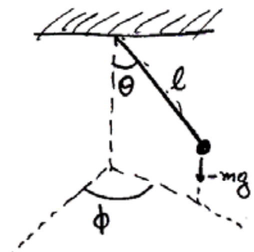
(α) Χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες με το σημείο στήριξης του εκκρεμούς στο κέντρο: Η ταχύτητα σε σφαιρικές συντεταγμένες δίνεται από:

$$v = \dot r\hat r + r\dot\theta\hat\theta + \dot\phi r\sin\theta\hat\phi$$

Επομένως η κινητική ενέργεια είναι $T=\frac{1}{2}m\left(\dot r^2+(r\dot\theta)^2+\dot\phi^2 r^2\sin^2\theta\right) \overset{r=l\Rightarrow}{\Rightarrow} \dot r=0$

και άρα $T=\frac{m}{2}r^2\left(\dot\theta^2+\dot\phi^2\sin^2\theta\right) \Rightarrow \boxed{T=\frac{m}{2}l^2\left(\dot\theta^2+\dot\phi^2\sin^2\theta\right)}$

Η δυναμική ενέργεια είναι: $\boxed{V=-mgl\cos\theta}$ θεωρώντας την αρχή (σημείο στήριξης) $V=0$.



Επομένως: $L = T-V \Rightarrow \boxed{L=\frac{m}{2}l^2\left(\dot\theta^2+\dot\phi^2\sin^2\theta\right)+mgl\cos\theta}$

Οι συζυγείς ορμές είναι:

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}=ml^2\dot\theta \Rightarrow \dot\theta=\frac{p_\theta}{ml^2}$$

$$p_\phi=\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}=ml^2\sin^2\theta\,\dot\phi \Rightarrow \dot\phi=\frac{p_\phi}{ml^2\sin^2\theta}.$$

Επομένως η Hamiltonian του συστήματος γράφεται: $H=\dot\theta p_\theta+\dot\phi p_\phi-L \Rightarrow$

$$H=\frac{P_\theta}{ml^2}P_\theta+\frac{P_\phi}{ml^2\sin^2\theta}P_\phi-\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{P_\theta^2}{m^2l^4}+\cancel{\sin^2\theta}\frac{P_\phi^2}{m^2l^4\sin^{\cancel{4}2}\theta}\right)-mgl\cos\theta\Rightarrow$$

$$H=\frac{P_\theta^2}{ml^2}+\frac{P_\phi^2}{ml^2\sin^2\theta}-\frac{1}{2}\cancel{ml^2}\left(\frac{P_\theta^2}{m^2l^4}+\frac{P_\phi^2}{m^2l^4\sin^2\theta}\right)-mgl\cos\theta\Rightarrow$$

$$\Rightarrow H=\frac{P_\theta^2}{ml^2}+\frac{P_\phi^2}{ml^2\sin^2\theta}-\frac{1}{2}\frac{P_\theta^2}{ml^2}-\frac{1}{2}\frac{P_\phi^2}{ml^2\sin^2\theta}-mgl\cos\theta\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{H=\frac{1}{2}\left[\frac{P_\theta^2}{ml^2}+\frac{P_\phi^2}{ml^2\sin^2\theta}\right]-mgl\cos\theta.}$$

(β) Οι εξισώσεις Hamilton θα είναι:

$$\dot\theta=\frac{\partial H}{\partial P_\theta}=\frac{P_\theta}{ml^2}$$

$$\dot P_\theta=-\frac{\partial H}{\partial\theta}=\frac{P_\phi^2}{ml^2\sin^2\theta\tan\theta}+mgl\sin\theta$$

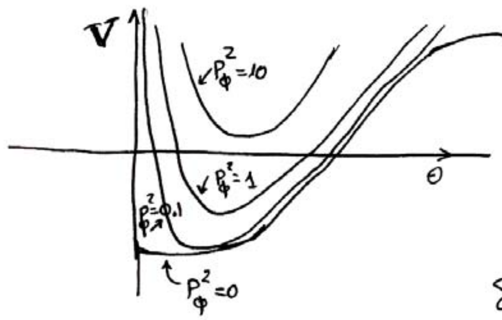
$$\dot\phi=\frac{\partial H}{\partial P_\phi}=\frac{P_\phi}{ml^2\sin^2\theta}$$

$$\dot P_\phi=-\frac{\partial H}{\partial\phi}=0. \quad\Rightarrow$$ η ϕ είναι κυκλική και P_ϕ = σταθερά κίνησης
Δηλαδή η γωνιακή ορμή (στροφορμή) διατηρείται.

(γ) Αφού P_ϕ = σταθ μπορούμε να γράψουμε:

$$H=\frac{P_\theta^2}{2ml^2}+V(\theta,P_\phi)\quad \text{όπου}\quad V(\theta,P_\phi)=\frac{P_\phi^2}{2ml^2\sin^2\theta}-mgl\cos\theta.$$

Θέτοντας $m=1kgr$, $l=1m$ και $g=10$ μπορούμε εύκολα να σχεδιάσουμε το ενεργό δυναμικό:



(δ) Για $P_\phi^2=0$, η κίνηση είναι αυτή του απλού αρμονικού ταλαντωτή - εκκρεμούς. Αυτό φαίνεται από το γράφημα του δυναμικού γιατί έχει ελάχιστο για $\Theta=\emptyset$ με θετική δεύτερη παράγωγο. Για $P_\phi^2 \neq 0$ βλέπαμε ότι $V(\Theta, P_\phi) \to \infty$ καθώς $\Theta \to 0$. Αυτό σημαίνει ότι το σφαιρικό εκκρεμές ποτέ δε θα περάσει ακριβώς κάτω από το σημείο στήριξης. Αυτό όμως είναι αποτέλεσμα διατήρησης της στροφορμής αφού αν $\Theta \to 0$ τότε $\dot{\phi} \to \infty$ το οποίο είναι αδύνατο.

Βρίσκουμε ωστόσο νέες σταθερές τιμές για το Θ για τις οποίες το εκκρεμές θεωρεί θέσεις ισορροπίας για να ταλαντώνεται.

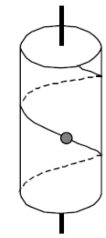
Αυτά τα νέα κέντρα ταλάντωσης μπορούν να υπολογισθούν με το να παραγωγίσουμε το δυναμικό V και να ζητήσουμε η παράγωγος να είναι $\emptyset$.

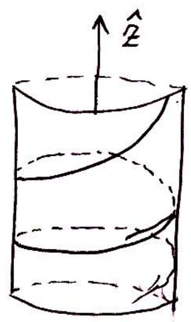
Μία τέτοια λύση είναι:

$$0 = \frac{dV}{d\Theta} \Rightarrow \frac{-P_\phi^2 \cos\Theta}{ml^2 \sin^3\Theta} + mgl\sin\Theta = 0 \Rightarrow \frac{P_\phi^2}{ml^2\cos^3\Theta} = mgl\sin\Theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_\phi^2}{m^2gl^3} = \sin^3\Theta \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta} \Rightarrow \boxed{\tan\Theta \sin^3\Theta = \frac{P_\phi^2}{m^2gl^3}}$$

5. Ένας ομοιόμορφος κύλινδρος ακτίνας α και πυκνότητας ρ είναι τοποθετημένος ώστε να μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από ένα κατακόρυφο άξονα. Στην εξωτερική επιφάνεια του κυλίνδρου υπάρχει μια ελικοειδής τροχιά κατά μήκος της οποίας ένα υλικό σημείο μάζας m γλιστρά χωρίς τριβές. Υποθέστε ότι το σωματίδιο ξεκινά από την ηρεμία στο ψηλότερο σημείο του κυλίνδρου και γλιστρά προς τα κάτω υπό την επίδραση της βαρύτητας. Χρησιμοποιώντας ένα οποιοδήποτε group από γενικευμένες συντεταγμένες βρείτε την Hamiltonian του συστήματος (σωματίδιο και κύλινδρος) και λύστε τις εξισώσεις Hamilton για να βρείτε την κίνηση του συστήματος. Υποθέστε ότι η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου είναι $I = \frac{1}{2}Ma^2$.





Διαλέγω σα γενικευμένες συντεταγμένες τις γωνίες θ, γωνία με την οποία στρέφεται ο κύλινδρος και τη γωνία φ, γωνία με την οποία στρέφεται το σώμα ως προς τον κύλινδρο.

Για την εξίσωση της έλικας ξέρουμε ότι ισχύει: $\boxed{z = c\phi}$, όπου c η απόσταση μεταξύ των σπειρών της έλικας.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

(α) κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής του κυλίνδρου: $\boxed{T_1 = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2}$

(β) κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής του σώματος: Το σώμα κινείται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = \dot{\theta} + \dot{\phi}$ ως προς τον άξονα $\hat{z}$ και έχει ροπή αδράνειας ως προς $\hat{z}$ ma^2. Επομένως: $\boxed{T_2 = \frac{1}{2} ma^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2}$

(γ) Κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς του σώματος στον άξονα $-\hat{z}$ (διεύθυνση $\hat{z}$)

$$T_3 = \frac{1}{2} m \dot{z} \Rightarrow \boxed{T_3 = \frac{1}{2} m c^2 \dot{\phi}^2}$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος προέρχεται από τη δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας από τη θέση του σώματος: $\boxed{V = -mgc\phi}$ (V=0 στην κορυφή του κυλίνδρου)

Επομένως η Lagrangian του συστήματος είναι:

$$\boxed{L = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \left[a^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 + c^2 \dot{\phi}^2 \right] + mgc\phi}$$

Οι συζυγείς ορμές θα είναι:

$$P_\theta \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = I\dot\theta + ma^2(\dot\theta+\dot\phi)$$

$$P_\phi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi} = m\left[a^2(\dot\theta+\dot\phi) + c^2\dot\phi^2\right]$$

Λύνουμε ως προς $\dot\theta$ κ $\dot\phi$

$$\left.\begin{aligned} (I+ma^2)\dot\theta + ma^2\dot\phi &= P_\theta \\ ma^2\dot\theta + m(a^2+c^2)\dot\phi &= P_\phi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \dot\theta &= \frac{\begin{vmatrix} P_\theta & ma^2 \\ P_\phi & m(a^2+c^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I+ma^2 & ma^2 \\ ma^2 & m(a^2+c^2) \end{vmatrix}} \\ \dot\phi &= \frac{\begin{vmatrix} I+ma^2 & P_\theta \\ ma^2 & P_\phi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I+ma^2 & ma^2 \\ ma^2 & m(a^2+c^2) \end{vmatrix}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \dot\theta = \frac{\cancel{m}\left[P_\theta(a^2+c^2) - P_\phi a^2\right]}{I\cancel{m}(a^2+c^2) + \cancel{m^2a^4} + m^2a^2c^2 - \cancel{m^2a^4}} \Rightarrow \boxed{\dot\theta = \frac{P_\theta(a^2+c^2) - P_\phi a^2}{I(a^2+c^2) + ma^2c^2}}$$

$$\dot\phi = \frac{IP_\phi + ma^2(P_\phi - P_\theta)}{Im(a^2+c^2) + m^2a^2c^2} \Rightarrow \boxed{\dot\phi = \frac{P_\phi(I+ma^2) - ma^2P_\theta}{m\left[I(a^2+c^2) + ma^2c^2\right]}}$$

Η Hamiltonian θα έχει τη μορφή: $\mathcal{H} = p_\theta\dot\theta + p_\phi\dot\phi - \mathcal{L}$. Αντικαθιστώντας:

$$\mathcal{H} = P_\theta \frac{P_\theta(a^2+c^2) - P_\phi a^2}{\underbrace{I(a^2+c^2) + ma^2c^2}_{A}} + P_\phi \frac{P_\phi(I+ma^2) - ma^2P_\theta}{m[\underbrace{I(a^2+c^2) + ma^2c^2}_{A}]} - \frac{1}{2}I\left[\frac{P_\theta(a^2+c^2) - P_\phi a^2}{\underbrace{I(a^2+c^2) + ma^2c^2}_{A}}\right]^2 -$$

$$- \frac{1}{2}m\left[a^2\left(\frac{P_\theta(a^2+c^2) - P_\phi a^2}{\underbrace{I(a^2+c^2) + ma^2c^2}_{A}} + \frac{P_\phi(I+ma^2) - ma^2P_\theta}{m[\underbrace{I(a^2+c^2) + ma^2c^2}_{A}]}\right)^2 + \frac{c^2\left[P_\phi(I+ma^2) - ma^2P_\theta\right]^2}{m^2[\underbrace{I(a^2+c^2) + ma^2c^2}_{A}]^2}\right] -$$

$$- mgc\phi \Rightarrow$$

$$\mathcal{H} = \frac{mP_\theta^2(a^2+c^2) - mP_\theta P_\phi a^2 + P_\phi^2(I+ma^2) - ma^2P_\theta P_\phi}{mA} - \frac{1}{2}I\frac{P_\theta^2(a^2+c^2)^2 + P_\phi^2 a^{2\,2} - 2P_\phi P_\theta(a^2+c^2)a^2}{A^2}$$

$$-\frac{1}{2}\cancel{m}\left[a^2\frac{\left(P_\theta m(a^2+c^2) - P_\phi a^2 m + P_\phi(I+ma^2) - ma^2P_\theta\right)^2}{m^{\cancel{2}}A^2}\right] - \frac{\cancel{m}c^2\left[ma^2(P_\phi - P_\theta) + IP_\phi\right]^2}{2m^{\cancel{2}}A^2} - mgc\phi$$

$$\mathcal{H} = \frac{mP_\Theta^2(a^2+c^2)+P_\phi^2(I+ma^2)-2ma^2P_\Theta P_\phi}{mA} - \frac{I}{2}\,\frac{\left[P_\Theta^2(a^2+c^2)^2+P_\phi^2a^2-2P_\phi P_\Theta(a^2+c^2)a^2\right]}{A^2} -$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{a^2\left[P_\Theta mc^2+IP_\phi\right]^2+\left[ma^2(P_\phi-P_\Theta)+IP_\phi\right]^2c^2}{mA^2}\right\} - mgc\phi$$

και μετά από πράξεις :

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \frac{P_\phi^2(I+ma^2)-2ma^2P_\phi P_\Theta+P_\Theta^2m(a^2+c^2)}{2m\left[I(a^2+c^2)+ma^2c^2\right]} - mgc\phi$$

① $$\dot{\phi} \equiv \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\phi} = \frac{P_\phi(I+ma^2)-ma^2P_\Theta}{m\left[I(a^2+c^2)+ma^2c^2\right]}$$

② $$\dot{P}_\phi \equiv -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = mgc$$

③ $$\dot{\Theta} \equiv \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\Theta} = \frac{P_\Theta m(a^2+c^2)-ma^2P_\phi}{m\left[I(a^2+c^2)+ma^2c^2\right]}$$

④ $$\dot{P}_\Theta \equiv -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Theta} = \phi$$

Σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες, για $t=\phi$ το σύστημα είναι σε ηρεμία

④ $\Rightarrow \boxed{P_\Theta = \phi}$

② $\Rightarrow \dot{P}_\phi = mgc \Rightarrow P_\phi = mgct + k$ αλλά $t=0$ $P_\phi=0 \Rightarrow k=0$ οπότε $\boxed{P_\phi = mgct}$

Αντικαθιστώντας στις ① ∧ ③ και ολοκληρώνοντας έχουμε :

$$\dot{\phi} = \frac{I+ma^2}{m\left[I(a^2+c^2)+ma^2c^2\right]}mgct \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{1}{2}\,\frac{I+ma^2}{m\left[I(a^2+c^2)+ma^2c^2\right]}mgct^2}$$

$$\dot{\Theta} = \frac{-ma^2P_\phi}{m\left[I(a^2+c^2)+ma^2c^2\right]} \Rightarrow \boxed{\Theta = -\frac{1}{2}\,\frac{m^2a^2gct^2}{m\left[I(a^2+c^2)+ma^2c^2\right]}}$$