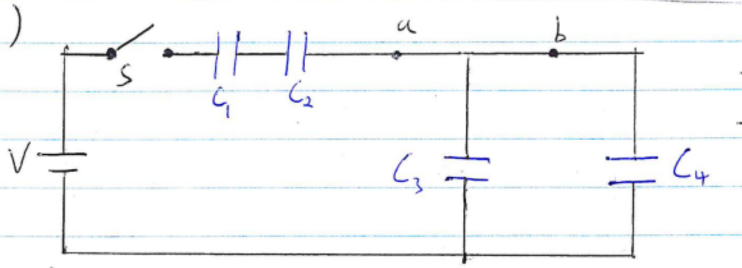
Question (25.19)

Problem 25.19)



→ $V = 9{,}0\,V$

→ $C_2 = 3{,}0\,\mu F$

→ $C_4 = 4{,}0\,\mu F$

→ Όταν κλείνει ο διακόπτης: $Q_a = 12\,\mu C$, $Q_b = 8{,}0\,\mu C$

3

→ $V_2 = \dfrac{Q_a}{C_2} = 4\,V$

→ $V_4 = \dfrac{Q_b}{C_4} = 2\,V$

$$\left.\begin{array}{l} \to V = V_1 + V_2 + V_{34} \\ \to V_{34} = V_3 = V_4 \text{ (παράλληλη σύνδεση)} \end{array}\right\} \Rightarrow V_1 = V - V_2 - V_4 = 3\,V$$

(a) $\Rightarrow \boxed{C_1 = \dfrac{Q_a}{V_1} = 4\,\mu F}$

(b) $\boxed{C_3 = \dfrac{Q_a - Q_b}{V_3} = 2\,\mu F}$

Question (25.35)

Problem 25.35)

$u(A) = ?$ $\longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \\ E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{u = \frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}}$

(a) $r = 1{,}00$ mm

$\left.\begin{array}{l} \rightarrow e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \\ \rightarrow \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ C^2/N.m^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{u(A) = 9{,}16 \cdot 10^{-18}\ J/m^3}$

(b) $r = 1{,}00\ \mu m \Rightarrow \boxed{u(A) = 9{,}16 \cdot 10^{-6}\ J/m^3}$

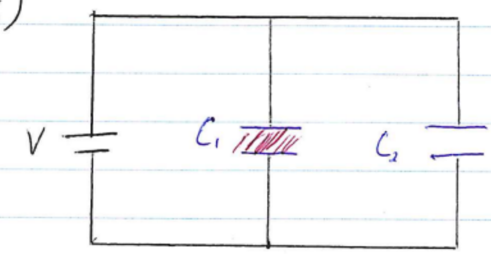
(c) $r = 1{,}00$ nm $\Rightarrow \boxed{u(A) = 9{,}16 \cdot 10^{6}\ J/m^3}$

(d) $r = 1{,}00$ pm $\Rightarrow \boxed{u(A) = 9{,}16 \cdot 10^{18}\ J/m^3}$

(e) $r \rightarrow 0 \Rightarrow \boxed{u \rightarrow +\infty}$

Question (25.46)

Problem 25.46)



$\rightarrow V = 12{,}0\ V$

$\rightarrow$ Διηλεκτρικό στο C_1: $K = 3{,}00$

$\rightarrow A_1 = A_2 = 5{,}00 \cdot 10^{-3}\ m^2$

$\rightarrow d_1 = d_2 = 2{,}00\ mm$

$\hookrightarrow V_1 = V_2 = V$ (παράλληλα)

(4)

$\rightarrow C_1 = \frac{K \varepsilon_0 A_1}{d_1} = 6{,}64 \cdot 10^{-11}\ F \Rightarrow Q_1 = C_1 \cdot V_1 = 8{,}00 \cdot 10^{-10}\ C$

$\rightarrow C_2 = \frac{\varepsilon_0 A_2}{d_2} = \frac{1}{3} C_1 = 2{,}21 \cdot 10^{-11}\ F \Rightarrow Q_2 = C_2 \cdot V_2 = 2{,}66 \cdot 10^{-10}\ C$

$\Rightarrow \boxed{Q_{ολ} = Q_1 + Q_2 = 1{,}06 \cdot 10^{-9}\ C}$

Question (004)

(α) Υπολογίζουμε την χωρητικότητα του σφαιρικού πυκνωτή όπως έχουμε δει από τις διαλέξεις:

$$C_{σφ} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1R_2}{R_2-R_1} = 4\pi\left(8.85\times10^{-12}\right)\left(\frac{(0.06)(0.09)}{0.09-0.06}\right) = 2.00\times10^{-11}\,F$$

Για τον κυλινδρικό πυκνωτή έχουμε:

$$C_{κυλ} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)} = \frac{2\pi\left(8.85\times10^{-12}\right)}{\ln(0.09/0.06)} = 2.06\times10^{-11}\,F$$

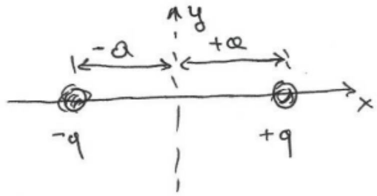
Οι δύο χωρητικότητες είναι σχεδόν ίσες γιατί η απόσταση των οπλισμών είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις, και η επιφάνεια των πυκνωτών είναι σχεδόν ίδια που οδηγεί στην ίδια χωρητικότητα είναι για τις δύο περιπτώσεις όπως αποδεικνύεται στο επόμενο ερώτημα.

(β) Για $R_2 = R_1+\delta$ ($\delta << R_1$) για τον σφαιρικό πυκνωτή θα έχουμε:

$$C_{σφ} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1(R_1+\delta)}{\cancel{R_1}+\delta-\cancel{R_1}} = \varepsilon_0 \frac{4\pi R_1^2}{\delta}\left(1+\delta/R_1\right).$$

Για $\delta/R_1 << 1$, το παραπάνω θα δώσει $C_{σφ} = \varepsilon_0 A/\delta$ όπου $A = 4\pi R_1^2$ το εμβαδό του φλοιού, που είναι η εξίσωση του πυκνωτή με παράλληλους οπλισμούς.
Για τον κυλινδρικό πυκνωτή θα χρησιμοποιήσουμε Taylor expansion για $x<<1$, $\ln(1+x)\simeq x$
Η χωρητικότητα είναι: $C_{κυλ} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(1+\delta/R_1)} \simeq \varepsilon_0 \frac{2\pi R_1 L}{\delta} \Rightarrow C_{κυλ} = \varepsilon_0 A/\delta$
όπου $A=2\pi R_1 L$, το εμβαδό των επιφανειών του κυλίνδρου. Βλέπουμε δηλαδή όταν η απόσταση μεταξύ των οπλισμών γίνεται πολύ μικρή, οι πυκνωτές ανόμοιας και καμπύλης γεωμετρίας μοιάζουν με πυκνωτές με παράλληλους οπλισμούς

Question (005)



Το ηλεκτρικό δυναμικό θα το βρούμε με την εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας.

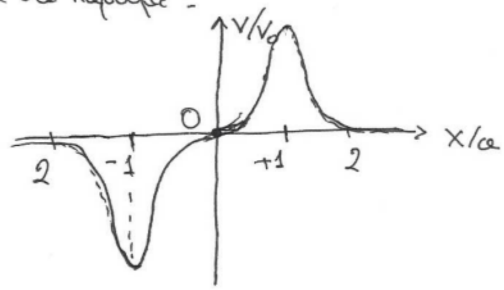
Σε ένα σημείο πάνω στον x-άξονα θα έχουμε:

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{|x-a|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(-q)}{|x+a|} \Rightarrow V(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|x-a|} + \frac{1}{|x+a|}\right]$$

Βγάζουμε την απόσταση a κοινό παράγοντα οπότε θα πάρουμε:

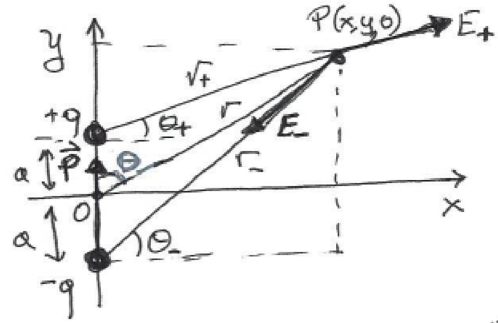
$$V(x) = \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}}_{V_0}\left[\frac{1}{\left|\frac{x}{a}-1\right|} + \frac{1}{\left|\frac{x}{a}+1\right|}\right] \Rightarrow V(x) = V_0\left[\frac{1}{\left|\frac{x}{a}-1\right|} + \frac{1}{\left|\frac{x}{a}+1\right|}\right]$$

Αν κάνουμε το γράφημα του λόγου $\frac{V(x)}{V_0}$ συναρτήσει του $\frac{x}{a}$ θα πάρουμε:



Το δυναμικό απειρίζεται για $\frac{x}{a} = \pm 1$ όπου βρίσκονται τα δύο φορτία.

Question (006)



Χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας θα έχουμε:

$$V = \sum_{i=1}^{2} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}\right) \text{ όπου}$$

$$r_\pm^2 = r^2 + a^2 \mp 2ra\cos\theta$$

Αν πάρουμε το όριο όπου $r \gg a$, τότε (από το διωνυμικό ανάπτυγμα)

$$\frac{1}{r_\pm} = \frac{1}{r}\left[1 + (a/r)^2 \mp 2(a/r)\cos\theta\right]^{-1/2} \simeq \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}(a/r)^2 \pm \left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta + \dots\right]$$

Επομένως το δυναμικό του διπόλου μπορεί να προσεγγιστεί ως:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}(a/r)^2} + (a/r)\cos\theta - \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}(a/r)^2} + (a/r)\cos\theta + \dots\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,\frac{2a\cos\theta}{r} \Rightarrow V \simeq \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \boxed{V \simeq \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \quad \vec{p} = 2aq\hat{j}$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες ο τελεστής της κλίσης $\vec{\nabla}$ γράφεται ως:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\phi}$$

Επειδή το δυναμικό είναι συνάρτηση του r και θ, το ηλεκτρικό πεδίο θα έχει συνιστώσες στην διεύθυνση των $\hat{r}$ και $\hat{\theta}$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό: $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ θα πάρουμε: $\boxed{E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}}$ και

$\boxed{E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$ και $\boxed{E_\phi = 0}$