Σφαιρικά σώματα και βαρύτητα

- Χρησιμοποιήσαμε τις εκφράσεις $F(r) = -\frac{GMm}{r^2}$ και $V(r) = -\frac{GMm}{r}$

  που ισχύουν για σημειακές μάζες M και m.

- Ένα χαρακτηριστικό γεγονός, που κάνει τους υπολογισμούς πολύ πιο εύκολους είναι ότι αυτές οι εξισώσεις ισχύουν και για τις σφαίρες.

  Για τη βαρύτητα, σφαιρικά σώματα μοιάζουν σαν υλικά σημεία με όλη τη μάζα τους στο κέντρο της σφαίρας.

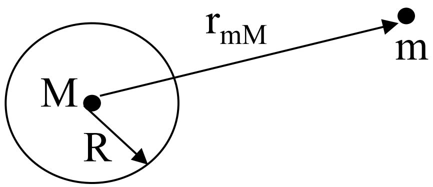
- Προς το παρών δεχόμαστε δύο σημαντικά γεγονότα:
  - Αν είστε **ΕΞΩ** από μια σφαιρική κοιλότητα, η κοιλότητα μοιάζει σαν υλικό σημείο.

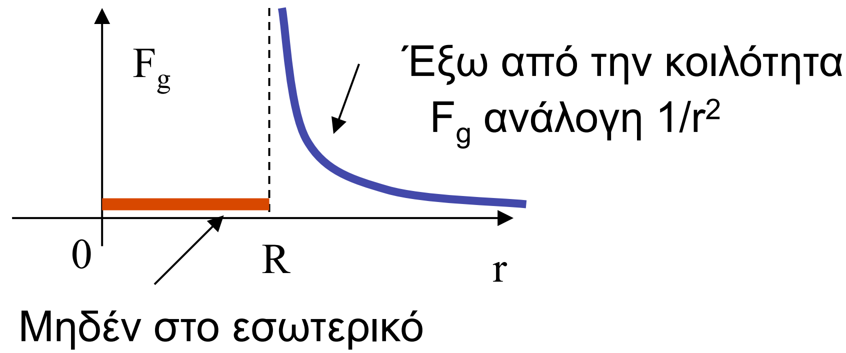
    Οι σφαίρες μοιάζουν να αποτελούνται από πολλές σφαιρικές κοιλότητες και άρα οι σφαίρες μοιάζουν επίσης σαν υλικά σημεία
  - Αν είστε **ΜΕΣΑ** σε μια σφαιρική κοιλότητα, η κοιλότητα μοιάζει σαν τίποτα.

    Είναι σα να μην υπάρχει καμιά δύναμη.

Γραφική αναπαράσταση

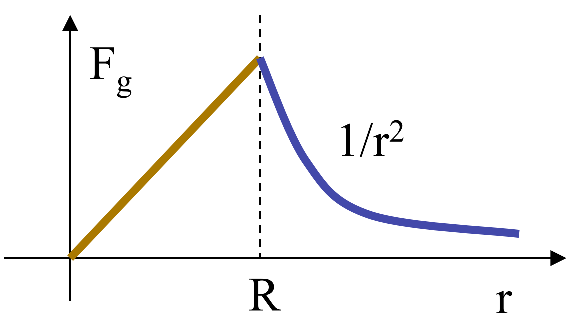
Για σφαιρικές κοιλότητες:





Για σφαίρες: Άθροισμα σφαιρικών κοιλοτήτων

Αθροίζουμε όλες τις σφαιρικές κοιλότητες για να δημιουργήσουμε μια συμπαγή σφαίρα



$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \qquad r \geq R$$

$$\vec{F}_g = -\frac{GmM'}{r^2}\hat{r} \qquad r < R$$

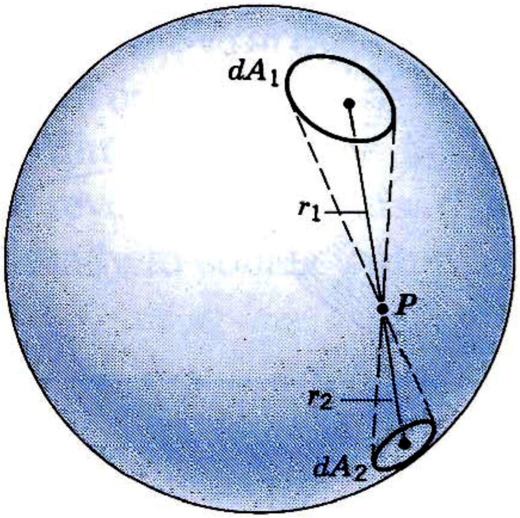
όπου M΄ είναι η μάζα που περιέχεται σε σφαίρα ακτίνας r < R

Για σφαίρα ομοιόμορφης πυκνότητας:

$$\frac{M'}{M} = \frac{\rho V'}{\rho V} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow F_g = -\frac{GMm}{R^3} r^3 \quad \text{για} \quad r < R \Rightarrow r \to 0 \;\; F_g \to 0$$

Μια απόδειξη για την περίπτωση των κοίλων σφαιρών

κοίλη σφαίρα



Αποδεικνύεται εύκολα ότι οι δυνάμεις από τα τμήματα των μαζών στις 2 απέναντι πλευρές του P αλληλοαναιρούνται.

Ας υποθέσουμε για ευκολία ότι η περιοχή A_1 είναι δύο φορές πιο μακριά από το P σε σχέση με την περιοχή A_2.

Επομένως το εμβαδό και άρα η μάζα του A_1 θα είναι 4 φορές μεγαλύτερο από αυτό στο A_2.

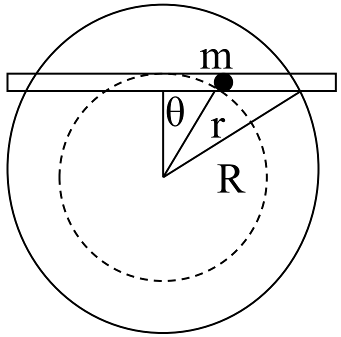
Αυτός ακριβώς ο όρος, $4=2^2$, στη μάζα αναιρεί το παράγοντα $2^2=4$ στο r^2 του παρονομαστή της δύναμης, καταλήγοντας σε ίσες και αντίθετες δυνάμεις στο P ➔ $\Sigma F=0$

Σημειώστε ότι το παραπάνω επιχείρημα δεν δουλεύει για κυκλικά στεφάνια (αντί κοιλότητας) γιατί χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι τα A_1 και A_2 είναι εμβαδά, που είναι ανάλογα των τετραγώνων των αντίστοιχων μηκών.

Ένα απίθανο παράδειγμα

Ανοίγουμε μια τρύπα στη γη από τη μια πλευρά στην άλλη και κατά μήκος μιας χορδής της. Αφήνουμε ένα σώμα να πέσει μέσα στην τρύπα αυτή. Αγνοώντας τριβές κ.λ.π. βρείτε το χρόνο που χρειάζεται για να περάσει από την άλλη άκρη.

Λύση



Η δύναμη στο m είναι $GM_r m/r^2$, προς το εσωτερικό, M_r είναι η μάζα που περικλείεται σε μια ακτίνα r

(Θυμηθείτε: η μάζα m δεν «βλέπει» τη μάζα που περικλείεται σε κοίλες σφαίρες έξω από την ακτίνα r).

Ο όγκος είναι ανάλογος του r^3 και επομένως $M_r = M(r/R)^3$

$$F_g = \frac{GM\frac{r^3}{R^3}m}{r^2} = \frac{GMmr}{R^3}$$

Θέλουμε μόνο την συνιστώσα της F κατά μήκος της χορδής που ανοίξαμε

$$F_x = ma = F\sin\theta = F\left(\frac{x}{r}\right) = -\frac{GMmx}{R^3} = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{GM}{R^3}x$$

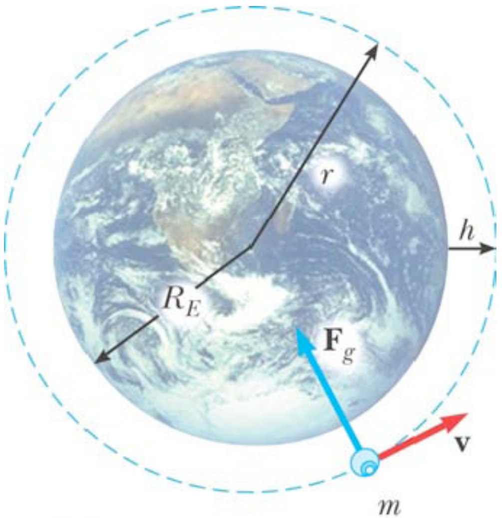
Εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή με συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} = 2\pi T \Rightarrow T \sim 84\,\text{min}$

Άρα θα χρειαστεί 42min για ένα one-way ταξίδι

Και ένα πιθανό...

- Σύγχρονοι Δορυφόροι: Μένουν πάντοτε πάνω από το ίδιο σημείο της γης. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα τέτοιο δορυφόρο πάνω από τον ισημερινό. Άρα η περίοδος περιστροφής τους είναι T = 1 ημέρα. Θέλουμε να βρούμε την ακτίνα της τροχιάς τους r, και την γραμμική ταχύτητα v.

$$\frac{GMm_{\delta o \rho .}}{r^2} = m_{\delta o \rho .}\frac{\mathrm{v}^2}{r}$$



Αλλά $$\mathrm{T} = \frac{2\pi r}{v} = 1\eta\mu . \Rightarrow \mathrm{v} = \frac{2\pi r}{T}$$

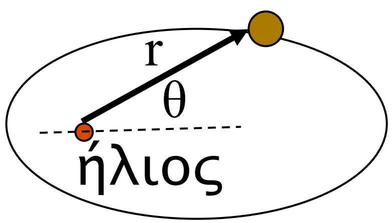
Επομένως $$\frac{GMm_{\delta o \rho .}}{r^2} = m_{\delta o \rho .}\frac{(2\pi r)^2}{T^2 r}$$

Κίνηση πλανητών – Νόμοι του Kepler

- Θα υποθέσουμε ότι ο ήλιος είναι ακίνητος (σχεδόν σωστό αφού έχει τόσο μεγάλη μάζα και η γη δεν τον κινεί).
- Οι τροχιές των πλανητών μοιάζουν κάπως σα τις παρακάτω ελλείψεις

Θέλουμε να ξέρουμε το r συναρτήσει της γωνίας θ.

Η συνάρτηση αυτή θα μας δώσει το σχήμα της τροχιάς του πλανήτη.



Ο υπολογισμός είναι αρκετά πολύπλοκος και δεν θα τον προχωρήσουμε μέχρι το τέλος

Η βαρύτητα είναι κεντρική δύναμη και επομένως δεν δημιουργεί ροπές (σχετικά με τον ήλιο)

Άρα η στροφορμή του συστήματος διατηρείται:

$$mr\mathrm{v} = L \Rightarrow mr\left(r\frac{d\theta}{dt}\right) = L \Rightarrow mr^2\dot{\theta} = L = \sigma\tau\alpha\theta$$

Επίσης η ενέργεια του συστήματος διατηρείται, και έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 + V(r) = E \Rightarrow \left(\frac{1}{2}m\mathrm{v}_r^2 + \frac{1}{2}m\mathrm{v}_\theta^2\right) - \frac{GMm}{r} = E \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\big(r\dot{\theta}\big)^{\overset{\omega^2}{2}} - \frac{GMm}{r} = E \Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = E$$

Κίνηση πλανητών – Νόμοι του Kepler

Καταλήξαμε στην: $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = E$

Από την τελευταία μπορούμε να γράψουμε:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2E}{m} - \frac{L^2}{m^2r^2} + \frac{GM}{r}$$

Αλλά $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \Rightarrow \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{m^2r^4}$

Τις διαιρούμε για να διώξουμε την εξάρτηση από t

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr/dt}{d\theta/dt}\right)^2 = \frac{2Emr^4}{L^2} - r^2 + \frac{2GM^2m^2r^3}{L^2} \equiv \mathcal{F}(r)$$

Με διαχωρισμό μεταβλητών έχουμε: $\int \frac{dr}{\sqrt{\mathcal{F}(r)}} = \int d\theta$

Αυτή η τελευταία σχέση μπορεί να ολοκληρωθεί για να δώσει τη θ συναρτήσει του r και κατόπιν να αναστραφεί για να πάρουμε το r συναρτήσει του θ.

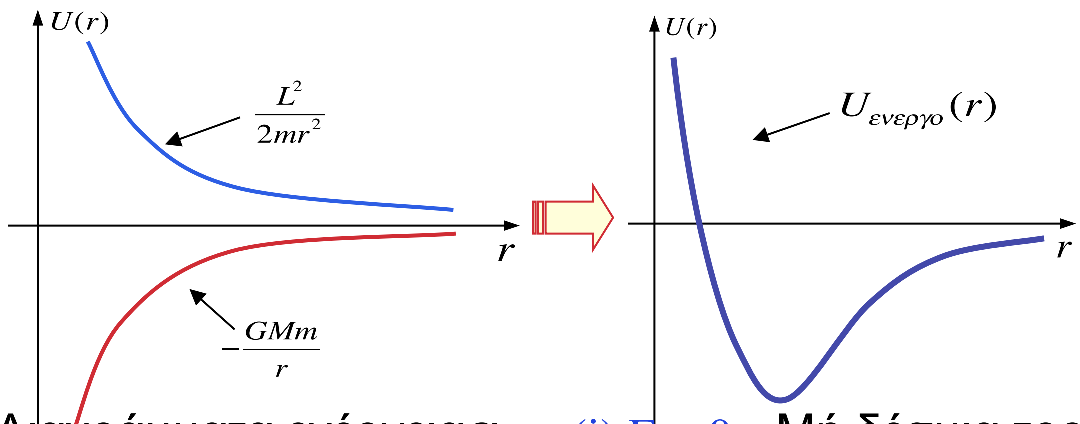
Ο υπολογισμός είναι πολύπλοκος.

Τελικό αποτέλεσμα: η εξίσωση της τροχιάς, r(θ), είναι έλλειψη με τον ήλιο σε μια εστία της.

Διάγραμμα ενέργειας

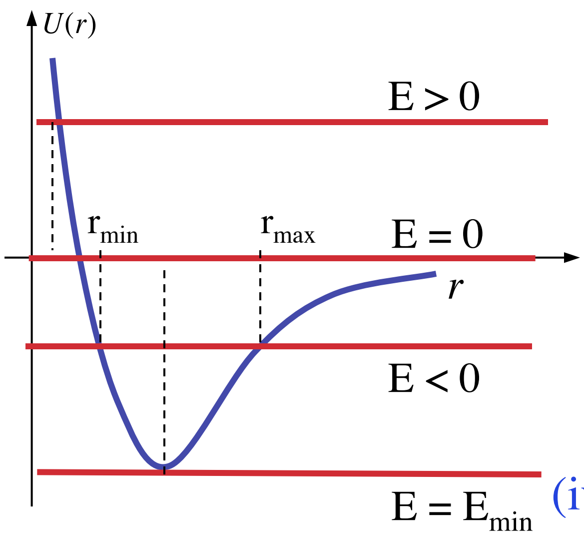
Είδαμε ότι από: $E = \frac{1}{2}m\text{v}^2 - \frac{GMm}{r}$ πήραμε $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\varepsilon\nu\varepsilon\rho\gamma o}(r)$$



- για $L \neq 0$ ο όρος $\frac{L^2}{2mr^2}$ υπερισχύει για μικρά r
- ο όρος $-\frac{GMm}{r}$ υπερισχύει για μεγάλα r

Διαγράμματα ενέργειας:



(i) $E > 0$ Μή δέσμια τροχιά. Το σώμα πλησιάζει μέχρι κάποιο r_{min} ($E = U_{ενεργό}$) όπου $E_{κιν}=0$ και μετά επιστρέφει εκεί απ΄όπου ήρθε
Η τροχιά είναι υπερβολή

(ii) $E = 0$ Παρόμοια με την περίπτωση (i) αλλά στο όριο μεταξύ δέσμιας και μή δέσμιας τροχιάς
Η τροχιά είναι παραβολή

(iii) $E < 0$ Η κίνηση περιορίζεται μεταξύ r_{min} και r_{max}
Η τροχιά είναι έλλειψη

(iv) $E = E_{min}$ Η κίνηση επιτρέπεται για μια μόνο τιμή του r
Η τροχιά είναι κυκλική

Ταχύτητα διαφυγής

Ορισμός: Ταχύτητα διαφυγής είναι η ταχύτητα που πρέπει να αποκτήσει ένα σώμα ώστε να φθάσει στο άπειρο ($r=\infty$) με ταχύτητα 0.

Ποια αρχική ταχύτητα v_0 απαιτείται ώστε ένα σώμα να ξεφύγει από την βαρυτική δύναμη της γης;

Η μηχανική ενέργεια διατηρείται, και επομένως:

$$E_{\mu\eta\chi}^{i} = E_{\mu\eta\chi}^{f} \Rightarrow U_i + K_i = U_f + K_f \qquad (1)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της ταχύτητας διαφυγής: $\upsilon_f = 0.0 m/s$

Αλλά ξέρουμε ακόμα ότι: $U(r=\infty) = 0 = U_f$

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 - \frac{G\cancel{m}M_{\Gamma\eta}}{r_{\Gamma\eta}} = 0 + 0 \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2GM_{\Gamma\eta}}{r_{\Gamma\eta}}}}$$

Η ταχύτητα είναι ανεξάρτητη της μάζας του σώματος.

Κυκλικές τροχιές

Η μηχανική ενέργεια για δορυφόρο που κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R κοντά στην γη θα είναι:

$$E_{\mu\eta\chi} = U_g + K \;\Rightarrow E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2} m_\delta \upsilon^2 - G\frac{M_\Gamma m_\delta}{R} \qquad (1)$$

Αλλά για κυκλική τροχιά η βαρύτητα προσφέρει τη κεντρομόλο δύναμη:

$$F_g = F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} \Rightarrow G\frac{M_\Gamma m_\delta}{R^2} = m_\delta \frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow \upsilon^2 = G\frac{M_\Gamma}{R} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας (2) στην (1) έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2} m_\delta \frac{GM_\Gamma}{R} - G\frac{M_\Gamma m_\delta}{R} \;\Rightarrow E_{\mu\eta\chi} = -\frac{1}{2} m_\delta \frac{GM_\Gamma}{R} \Rightarrow E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2} U_g = -E_{\kappa\iota\nu}$$

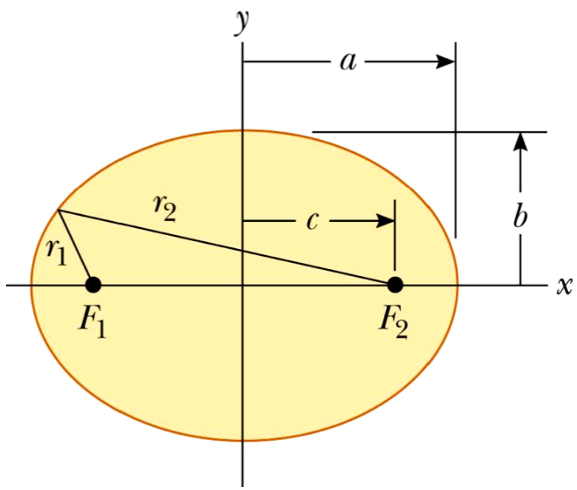
Η τελευταία σχέση ισχύει για όλες τις κυκλικές τροχιές

Κίνηση πλανητών – Νόμοι του Kepler

- Τρεις οι νόμοι του Kepler:
  - Οι πλανήτες κινούνται σε ελλειπτικές τροχιές με τον ήλιο σε μια εστία τους.
  - Η επιβατική ακτίνα ενός πλανήτη διαγράφει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους
  - Το τετράγωνο της περιόδου ενός πλανήτη είναι ανάλογο του κύβου του μέγιστου ημιάξονα της ελλειπτικής τροχιάς του με μια σταθερά αναλογίας που δεν εξαρτάται από την μάζα του πλανήτη:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

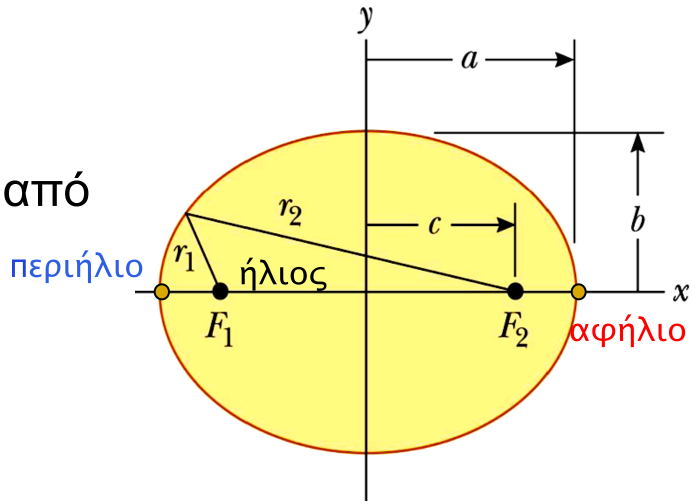
Σχετικά με ελλείψεις



- F_1 και F_2 είναι οι εστίες της έλλειψης
  - Είναι σε απόσταση c από το κέντρο
- Η μεγαλύτερη απόσταση διαμέσου του κέντρου ονομάζεται κύριος άξονας της έλλειψης
  - Ο α είναι ο μεγάλος ημιάξονας.
- Η μικρότερη απόσταση διαμέσου του κέντρου ονομάζεται δευτερεύων άξονας της έλλειψης
  - Ο b είναι ο μικρός ημιάξονας.
- Η εκκεντρότητα της έλλειψης ορίζεται ως: $\boxed{e = \frac{c}{a}}$
  - Για κυκλική τροχιά: $e = 0$
  - Η εκκεντρότητα παίρνει τιμές στο διάστημα: $0 < e < 1$
- Η εκκεντρότητα μιας παραβολικής τροχιάς (Ε = 0) είναι: $e = 1$
- Η εκκεντρότητα μιας υπερβολικής τροχιάς (Ε > 0) είναι: $e > 1$

Σχετικά με ελλειπτικές τροχιές πλανητών

- Ο ήλιος είναι σε μια εστία της έλλειψης
  - Η άλλη εστία είναι κενή

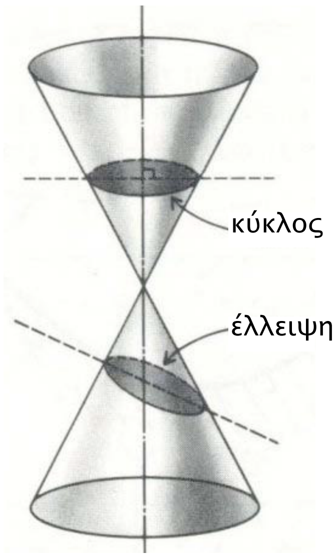


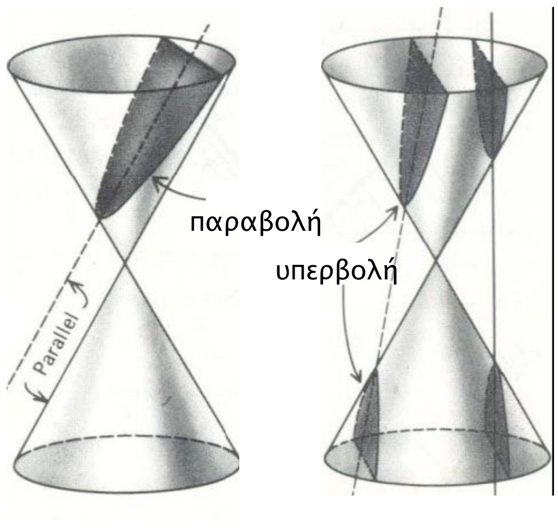
- Αφήλιο ονομάζεται το πιο απομακρυσμένο από τον ήλιο σημείο της έλλειψης.
  - Η απόσταση του αφηλίου είναι: α + c
  - Για μια τροχιά γύρω από την γη το σημείο αυτό ονομάζεται απόγειο.

- Περιήλιο ονομάζεται το πιο κοντινό στον ήλιο σημείο της έλλειψης
  - Η απόσταση του περιηλίου είναι: α - c
  - Για μια τροχιά γύρω από το γη το σημείο αυτό ονομάζεται περίγειο

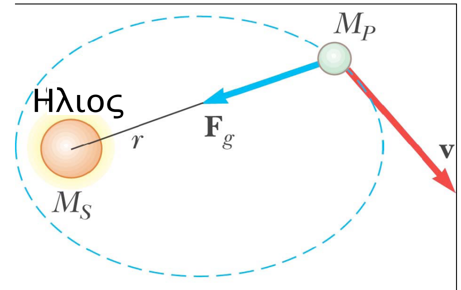
Ο 1ος νόμος του Kepler

- Μια κυκλική τροχιά είναι ειδική περίπτωση της γενικής ελλειπτικής τροχιάς.
- Είναι αποτέλεσμα της εξάρτησης από το r^{-2} της βαρυτικής δύναμης
- Ελλειπτικές (και κυκλικές) τροχιές επιτρέπονται για δέσμια σώματα
  - Ένα σώμα είναι δέσμιο όταν περιφέρεται γύρω από το κέντρο έλξης
  - Ένα σώμα μη δέσμιο θα περάσει αλλά δε θα επιστρέψει
    - Αυτά τα σώματα θα έχουν τροχιές που είναι παραβολές (e = 1) ή υπερβολές (e > 1)

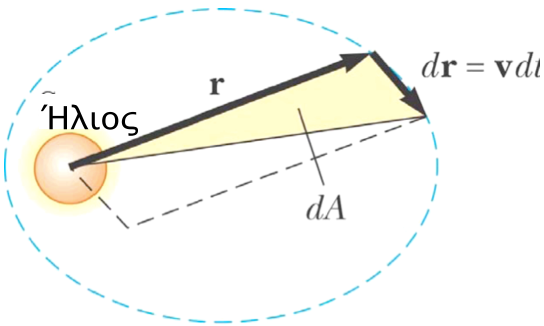




Ο 2ος Νόμος του Kepler



- Είναι αποτέλεσμα της διατήρησης της στροφορμής
- Η βαρυτική έλξη δεν προκαλεί ροπή ➔ L = σταθ.
- Μπορούμε να τον αποδείξουμε εύκολα:

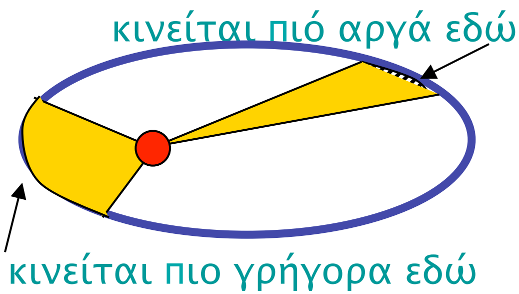


Σε χρόνο dt, η ακτίνα σαρώνει το εμβαδό dA που είναι το μισό του παραλληλογράμμου: $|\vec{r} \times d\vec{r}|$

Αλλά $d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt = rd\theta$

$$dA = \frac{1}{2}r(rd\theta) \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{mr^2\dot{\theta}}{2m} = \frac{L}{2m} \qquad L = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \sigma\tau\alpha\theta.$$



εμβαδική ταχύτητα = σταθ.

Ο 2ος νόμος του Kepler ισχύει για οποιαδήποτε κεντρική δύναμη ανεξάρτητα από το αν ακολουθεί το νόμο r^{-2}.

Ο 3ος Νόμος του Kepler

- Μπορεί να προβλεφθεί από το νόμο της παγκόσμιας έλξης και το 2ο νόμο του Newton:

$$G\frac{M_{\text{Ηλιου}} m_{\pi\lambda\alpha\nu\eta\tau\eta}}{r^2} = m_{\pi\lambda\alpha\nu\eta\tau\eta}\frac{\upsilon^2}{r}$$ υποθέτοντας κυκλική τροχιά

- Η βαρυτική δύναμη προκαλεί κεντρομόλο δύναμη και επομένως $\upsilon = \frac{2\pi r}{T}$
- Λύνοντας ως προς Τ θα έχουμε:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_{\text{Ηλιου}}}\right) r^3 = K_{\text{Η}} r^3$$

Η σταθερά $K_{\text{Η}}$ εξαρτάται από τη μάζα του ήλιου και όχι του πλανήτη

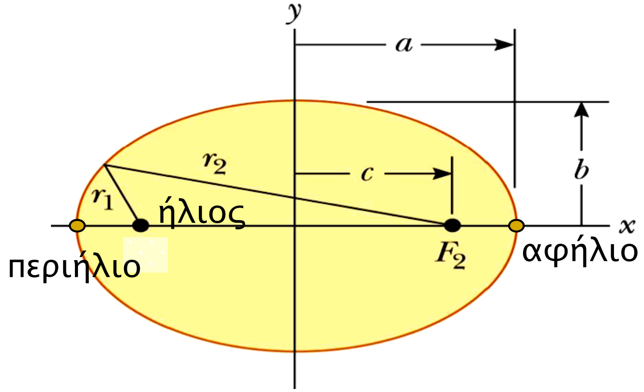
- Τα παραπάνω μπορούν να επεκταθούν και για ελλειπτικές τροχιές αντικαθιστώντας r με α (το μεγάλο ημιάξονα της έλλειψης)

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_{H\lambda\iota o\upsilon}}\right) a^3 = K_{\text{Η}} a^3$$

- Από την απόσταση ήλιου-γης και την περίοδο της γης βρίσκουμε $M_{\text{ήλιου}}$

Παράδειγμα

Ένας πλανήτης κινείται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τον ήλιο. Εάν γνωρίζετε την ταχύτητά του στο σημείο του περιήλιου, υ_π, υπολογίστε την ταχύτητά του στο σημείο του αφήλιου, υ_α.



Η στροφορμή του πλανήτη σε σχέση με τον ήλιο διατηρείται.

Η στροφορμή δίνεται από τη σχέση $\vec{L} = m_{\pi\lambda\alpha\nu\eta\tau\eta}\vec{r}\times\vec{\upsilon}$

Στα σημεία του περιηλίου και αφηλίου η ακτίνα είναι κάθετη στην ταχύτητα:

$$L_\pi = m_{\pi\lambda\alpha\nu\eta\tau\eta} r_\pi \upsilon_\pi \qquad L_\alpha = m_{\pi\lambda\alpha\nu\eta\tau\eta} r_\alpha \upsilon_\alpha \qquad L_\pi = L_\alpha$$

$$m_{\pi\lambda\alpha\nu\eta\tau\eta} r_\pi \upsilon_\pi = m_{\pi\lambda\alpha\nu\eta\tau\eta} r_\alpha \upsilon_\alpha \Rightarrow \boxed{\upsilon_\alpha = \frac{r_\pi}{r_\alpha}\upsilon_\pi}$$

Μελανές Οπές – Black Holes

- Μελανή οπή είναι το απομεινάρι ενός αστέρα που συνεθλίβει κάτω από το δικό του βαρυτικό πεδίο

- Είδαμε ότι η ταχύτητα διαφυγής δίνεται από την σχέση: $v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

- Η ταχύτητα διαφυγής για την περίπτωση μιας μελανής οπής είναι πολύ μεγάλη εξαιτίας της μεγάλης συγκέντρωσης μάζας μέσα σε μια σφαίρα πολύ μικρής ακτίνας.
  - Αν η ταχύτητα διαφυγής ξεπεράσει την ταχύτητα του φωτός τότε ακτινοβολία δεν μπορεί να διαφύγει και εμφανίζεται σα μελανό σώμα.

- Από στη σχέση της ταχύτητας διαφυγής αντικαταστήσουμε όπου $v_0 = c$ τότε παίρνουμε:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$ ακτίνα Schwarzchild (1916)

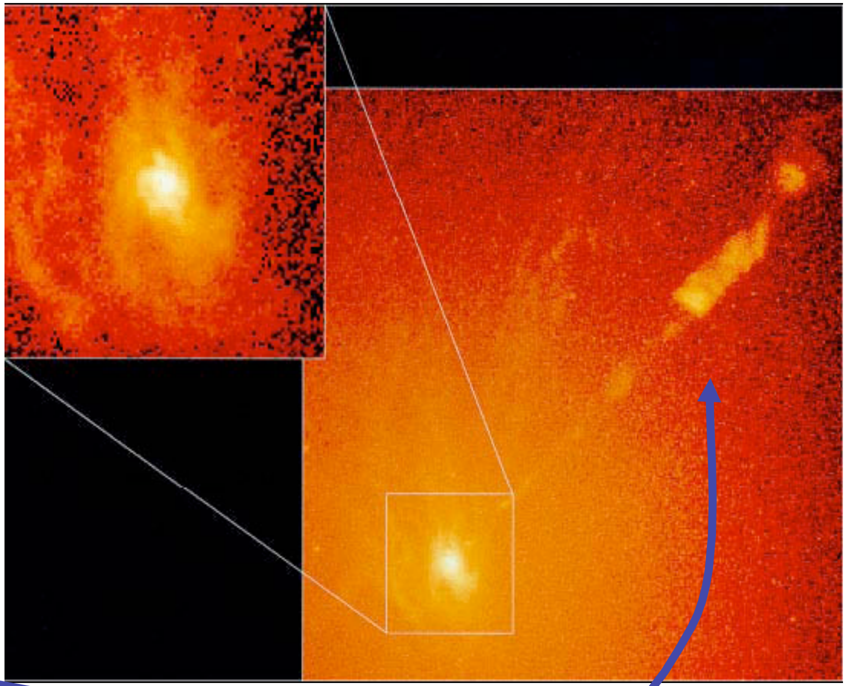
Για $M \sim 3M_{Ηλιου}$ ένας αστέρας μπορεί να γίνει μελανή οπή.
Στην περίπτωση αυτή $R_s = 9$ Km
Η πυκνότητα αυτής της μελανής οπής είναι: $\sigma = \frac{2M_{Ηλιου}}{V} = \frac{2M_{Ηλιου}}{\frac{4\pi}{3}R_S^3} \Rightarrow$

$$\sigma = 6\times 10^{17}\, kgr/m^3$$

Μελανές οπές και Γαλαξίες

Υπάρχουν ενδείξεις ότι μελανές οπές πολύ μεγάλης μάζας υπάρχουν στο κέντρο των γαλαξιών

Η θεωρία προβλέπει ότι πίδακες ύλης (jets) πρέπει να είναι ανιχνεύσιμοι κατά μήκος του άξονα περιστροφής της μελανής οπής



Φωτογραφία του γαλαξία M87 από το τηλεσκόπιο Hubble. Ο πίδακας ύλης θεωρείται σαν ένδειξη ότι υπάρχει μια πολύ μεγάλης μάζας μελανή οπή

Να σημειώσουμε εδώ ότι οι σχέσεις που βρήκαμε στηρίζονται στους νόμους του Newton που δεν έχουν εφαρμογή σε ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του φωτός. Ωστόσο είναι από τις λίγες περιπτώσεις που τα αποτελέσματα της σχετικιστικής δυναμικής συμφωνούν με αυτά της κλασικής

15^{o} Mini Exam

Έτοιμοι?