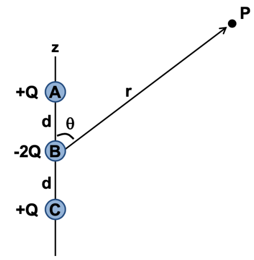
# ΦΥΣ. 112

**2$^{o}$ ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ** **Επιστροφή: Παρασκευή 27.09.2024**

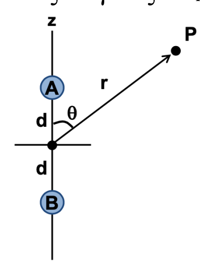
**1.** Θεωρήσετε μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας 4cm με κέντρο την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Σημειακά φορτία $+q$ και $-2q$ βρίσκονται τοποθετημένα στις θέσεις A με συντεταγμένες (2m, 0, 0) και B με συντεταγμένες (8m, 0, 0). Δείξτε ότι κάθε σημείο της σφαιρικής επιφάνειας βρίσκεται σε μηδενικό δυναμικό.

**2.** Ένας μη αγώγιμος δίσκος ακτίνας $R$ και ομοιόμορφης επιφανειακής πυκνότητας φορτίου σ, είναι τοποθετημένος στο έδαφος με τον άξονά του κατακόρυφο. Ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο φορτίου $+q$ και μάζας $m$ εκτοξεύεται κατακόρυφα κατά μήκος του άξονα του δίσκου από ύψος $H$ και με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0$. Το σωματίδιο έχει $\frac{q}{m} = \frac{4\varepsilon_0 g}{\sigma}$. (α) Βρείτε το ύψος $H$ αν το σωματίδιο μόλις και φθάνει στην επιφάνεια του δίσκου. (β) Σχεδιάστε τη δυναμική ενέργεια του σωματιδίου συναρτήσει του ύψους $h$ και προσδιορίστε το σημείο ισορροπίας.

**3.** Στην προηγούμενη ΚΟΕ, ασχοληθήκατε με την ένταση του ηλεκτρικό πεδίο ενός δίπολου. Στην άσκηση αυτή θα ασχοληθείτε με το ηλεκτρικό τετράπολο. Το τετράπολο αποτελείται από 2 θετικά φορτία $+q$ σε απόσταση $2d$ μεταξύ τους ενώ στο μέσο της απόστασής τους βρίσκεται ένα αρνητικό φορτίο $-2Q$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα σημείο $P$ που βρίσκεται σε απόσταση $r$ από το φορτίο $-2Q$. *<u>Υπόδειξη:</u>* οι αποστάσεις $r_A$ και $r_C$ του σημείου $P$ από τα θετικά φορτία στις θέσεις A και C σχετίζονται με την απόσταση $r$ και τα πολυώνυμα Legendre που αναφέρονται στο παράρτημα του παρόντος. Θα βοηθήσει να θεωρήσετε τους λόγους $r/r_A$ και $r/r_B$.




**4.** Σε αναλογία με τα προηγούμενα, βρείτε το βαρυτικό δυναμικό του συστήματος που αποτελείται από δύο πανομοιότυπα σημειακές μάζες $m$ σε απόσταση $d$ μεταξύ τους σε ένα σημείο $P$ που βρίσκεται σε απόσταση $r$ από το μέσο της απόστασης των δύο μαζών, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.




**5.** Έστω ένα σύστημα φορτίων $Q_1, Q_2, Q_3$… των οποίων τα διανύσματα θέσης ως προς ένα σημείο $O$ είναι $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \ldots$ Το διανυσματικό άθροισμα $\vec{p} = \sum Q_i \vec{r}_i$ ορίζεται ως η διπολική ροπή του συστήματος των φορτίων ως προς το σημείο O. Αυτός είναι ο γενικός ορισμός της διπολικής ροπής αλλά δεν διαφέρει από τον απλό ορισμό που δώσαμε στις διαλέξεις. Αποδείξτε ότι αν το ολικό σύστημα έχει μηδενικό συνολικά φορτίο, δηλαδή υπάρχει τόσο θετικό όσο και αρνητικό φορτίο, η διπολική ροπή που ορίσαμε παραπάνω είναι ανεξάρτητη της επιλογής του σημείου αναφοράς O.

**6.** Ένα απλό εκκρεμές μάζας $5.0 \times 10^{-3} kg$ και μήκους $1.0m$ τοποθετείτε μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο το οποίο έχει κατακόρυφη διεύθυνση με φορά προς τα πάνω. Το σώμα που είναι τοποθετημένο στην άκρη του εκκρεμούς είναι φορτισμένο με φορτίο -8.0μC. Η περίοδος του εκκρεμούς είναι 1.2s. Βρείτε το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$.

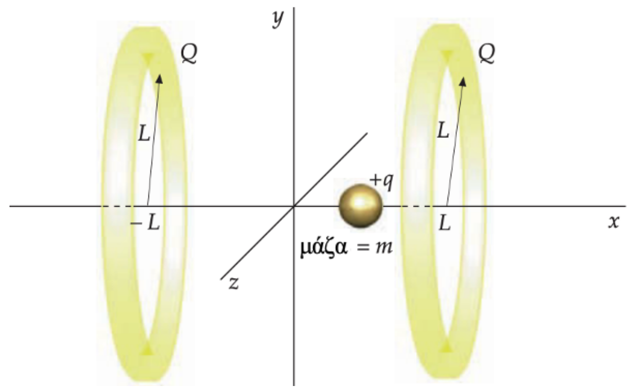
**7.** Ένα λεπτό κέλυφος σε σχήμα ημισφαιρίου ακτίνας $R$ έχει ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο της βάσης του ημισφαιρικού κελύφους.

**8.** Ένα μακρύ, λεπτό, εύκαμπτο πλαστική ράβδος είναι λυγισμένη σε σχήμα κυκλικού δακτυλίου ακτίνας $R$. Μεταξύ των δύο άκρων της ράβδου υπάρχει ένα μικρό κενό μήκους $l$

όπου $l << R$. Θετικό φορτίο $Q$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στην ράβδο. (α) Βρείτε τη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο του δακτυλίου. Εξηγήστε την απάντησή σας. (β) Βρείτε το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο του δακτυλίου.

**9.** Ένας δίσκος ακτίνας $R$ έχει επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma = \sigma_0 R/r$ όπου $\sigma_0$ σταθερά και $r$ είναι η απόσταση από το κέντρο του δίσκου. (α) Βρείτε το ολικό φορτίο του δίσκου. (β) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό σε απόσταση $x$ από το κέντρο του δίσκου στον άξονα που περνά από το κέντρο του δίσκου και είναι κάθετος στην επιφάνειά του.

**10.** Ένα σωματίδιο έχει μάζα $m$ και θετικό φορτίο $+q$. Το σωματίδιο είναι περιορισμένο να κινείται κατά μήκος του $x$-άξονα. Στις θέσεις $x = -L$ και $x = +L$ υπάρχουν δύο φορτισμένοι δακτύλιοι ακτίνας $L$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το κέντρο του κάθε δακτυλίου βρίσκεται στον $x$-άξονα και το επίπεδό τους είναι κάθετο σε αυτόν. Κάθε δακτύλιος έχει θετικό φορτίο $+Q$ το οποίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο κατά μήκος του δακτυλίου. (α) Βρείτε μια εξίσωση για το δυναμικό $V(x)$ στον $x$-άξονα εξαιτίας του φορτίου στους δακτυλίους. (β) Δείξτε ότι το δυναμικό $V(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$. (γ) Δείξτε ότι για $x << L$, η εξίσωση του δυναμικού παίρνει την μορφή $V(x) = V(0) + ax^2$. (δ) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος για να βρείτε την γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης της μάζας $m$ αν μετατοπιστεί ελαφρά από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και αφεθεί ελεύθερη να κινηθεί. (Υποθέστε ότι το δυναμικό ισούται με μηδέν σε σημεία πολύ μακριά από τους δακτυλίους).




## Παράρτημα – Σχετικά με τα πολυώνυμα Legendre

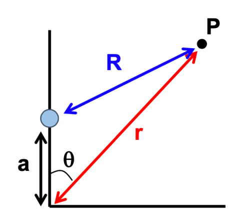
Τα πολυώνυμα Legendre, $P_n(x)$, αποτελούν λύσεις της διαφορικής εξίσωσης Legendre:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x)^2\frac{d}{dx}P_n(x)\right] + n(n+1)P_n(x) = 0$$

Γιατί η εξίσωση αυτή είναι χρήσιμη ή πώς προσδιορίζονται τα πολυώνυμα Legendre θα το δείτε σε μεταγενέστερο μάθημα. Ωστόσο αυτό που είναι χρήσιμο για το παρόν μάθημα είναι ότι τα πολυώνυμα Legendre σχετίζονται με μια έκφραση που συναντούμε συχνά:

$$\frac{1}{(1-2xy+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(y)x^n$$

Θεωρήστε το σύστημα του διπλανού σχήματος όπου η απόσταση μεταξύ της θέσης ενός σημειακού σωματιδίου και της θέσης ενός σημείου στο χώρο $P$ στο οποίο μετρούμε τις ιδιότητες του χώρου εξαιτίας του σωματιδίου είναι $R$, ενώ το μέτρο του διανύσματος θέσης του σωματιδίου και του σημείου $P$ είναι $a$ και $r$ αντίστοιχα.




Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές εξισώσεις έχουμε ότι: $R^2 = r^2 + a^2 - 2ra\cos\theta$.

Από την τελευταία εξίσωση έχουμε:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{(r^2 + a^2 - 2racos\theta)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{r\left(1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{r}\right)cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Θεωρώντας $x = \frac{a}{r}$, η προηγούμενη εξίσωση είναι της μορφής της $2^{ης}$ εξίσωσης που γράψαμε παραπάνω:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n$$

Επομένως τα πολυώνυμα Legendre είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος Taylor του παρονομαστή. Τα πρώτα πολυώνυμα Legendre δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

| N | $P_n(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | $x$ |
| 2 | $\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ |
| 3 | $\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ |
| 4 | $\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$ |

Μερικές ιδιότητες των πολυωνύμων Legendre είναι οι ακόλουθες που ίσως θυμάστε από το μάθημα PHY140 είναι:

$$P_n(-y) = (-1)^n P_n(y)$$

$$(n+1)P_{n+1}(y) = (2n+1)yP_n(y) - nP_{n-1}(y)$$