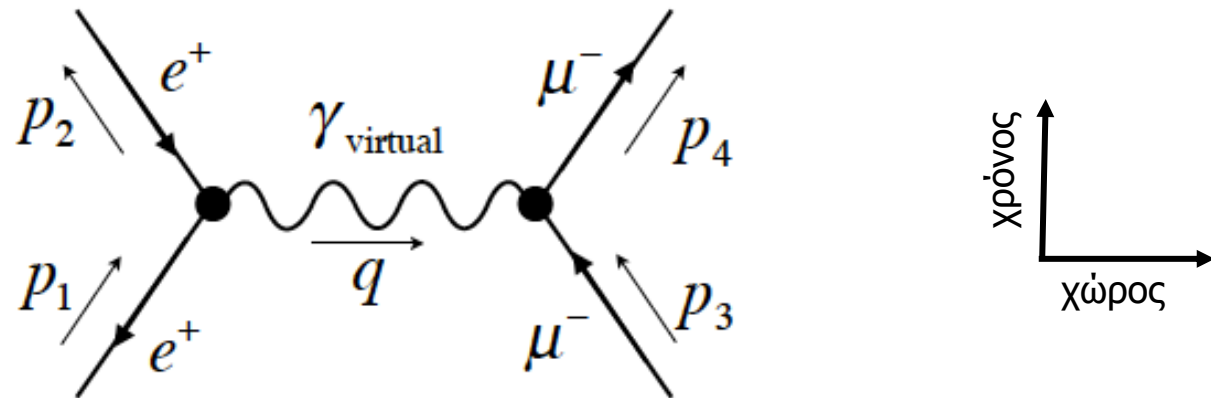


# **Κανόνες Feynman στην QED και πραγματικές QED ενεργές διατομές**

# Σκέδαση $e^+ \mu^- \rightarrow e^+ \mu^-$



$$\bar{v}^{s1}(p_1) \left[ -ig\gamma^\mu \right] v^{s2}(p_2) \quad -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \quad \bar{u}^{s4}(p_4) \left[ ig\gamma^\nu \right] u^{s3}(p_3)$$

Για ποζιτρόνιο, ανατρέχοντας στο βέλος σημαίνει πηγαίνουμε μπροστά στο χρόνο.

Για το μιονίο, ανατρέχοντας στο βέλος σημαίνει πηγαίνουμε προς τα πίσω στο χρόνο.

Αλλάζουμε το πρόσημο του  $g$  εξαιτίας του φορτίου

Χρησιμοποιούμε  $\mu$  για το Lorentz δείκτη του ποζιτρονίου και  $\nu$  για τον Lorentz δείκτη του μιονίου

$$p_1 = p_2 + q \Rightarrow q = p_1 - p_2$$

## Σκέδαση $e^+ \mu^- \rightarrow e^+ \mu^-$

$$i[\bar{\nu}^{s_1}(p_1)(-ig\gamma^\mu)\nu^{s_2}(p_2)]\left(-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)[\bar{u}^{s_4}(p_4)(ig\gamma^\nu)u^{s_3}(p_3)]$$

$$i[\bar{\nu}(1)(-ig\gamma^\mu)\nu(2)]\left(-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)[\bar{u}(4)(ig\gamma^\nu)u(3)]$$

$$i[\bar{\nu}(1)\gamma^\mu\nu(2)]\left[-\frac{ig^2}{(p_1-p_2)^2}\right][\bar{u}(4)\gamma_\mu u(3)]$$

$$M = \frac{g^2}{(p_1-p_2)^2} [\bar{\nu}(1)\gamma^\mu\nu(2)][\bar{u}(4)\gamma_\mu u(3)]$$

Αν κάναμε την σκέδαση  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  θα είχαμε παντού  $u$ 'ς και όχι  $v$ 'ς (για το ποζιτρόνιο) καθώς επίσης το πρόσημο θα ήταν αντίθετο στο τέλος αλλά αυτό δεν επηρεάζει αφού το  $M$  θα πρέπει να υψωθεί στο τετράγωνο.

# Το πλάτος μετάβασης

Βρήκαμε ότι: 
$$M = \frac{g^2}{(p_1 - p_2)^2} [\bar{v}(1) \gamma^\mu v(2)] [\bar{u}(4) \gamma_\mu u(3)]$$

$\bar{v}(1) = \bar{v}^{s_1}(p_1)$  είναι ένα διάνυσμα γραμμής με 4 στοιχεία. Είναι 4 νούμερα που μπορούμε να υπολογίσουμε από την ορμή και spin του εισερχόμενου ποζιτρονίου 1

$v(2) = v^{s_2}(p_2)$  είναι ένα διάνυσμα στήλης με 4 στοιχεία. Είναι 4 νούμερα που μπορούμε να υπολογίσουμε από την ορμή και spin του εξερχόμενου ποζιτρονίου 2

$\gamma^\mu$  Αντιπροσωπεύει τους 4 γ-πίνακες. Κάνουμε ένα γινόμενο γραμμή-πίνακα-στήλης  $\bar{v}(1) \gamma^\mu v(2)$  μια φορά για κάθε γ-πίνακα (4 φορές)  
Αυτό δίνει 4 μιγαδικούς αριθμούς

$\gamma_\mu$  Αντιπροσωπεύει τους 4 γ-πίνακες τώρα με ένα «-» πρόσημο για όλους εκτός του  $\gamma_0$ .

$\bar{u}(4) \gamma_\mu u(3)$  Κάνουμε ένα γινόμενο γραμμή-πίνακα-στήλης δίνοντας 4 μιγαδικούς αριθμούς

Υπάρχει ένα άθροισμα ως προς τον επαναλαμβανόμενο δείκτη. Κάνουμε επομένως ένα εσωτερικό γινόμενο των δυο 4-διανυσμάτων (το  $\gamma_\mu$  έκανε την αντιστροφή του πρόσημου των χωρικών συνιστωσών οπότε δεν χρειάζεται να το κάνουμε εδώ ξανά)

Σαν αποτέλεσμα παίρνουμε ένα και μοναδικό μιγαδικό αριθμό, επί τον παράγοντα  $\frac{g^2}{(p_1 - p_2)^2}$

# Σκέδαση $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Για σκέδαση  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  υπάρχει 1 μόνο διάγραμμα

Ανατρέχουμε τα βέλη των γραμμών των σωματιδίων για να γράψουμε τους παράγοντες των spinors και συζυγή spinors

Σύμφωνα με την συνθήκη: το πρώτο σωματίδιο που συναντάται όταν ακολουθούμε την γραμμή που αντιπροσωπεύει ένα ρεύμα φερμιονίου από το τέλος προς την αρχή στην διεύθυνση ανάποδα από αυτή που δείχνουν τα βέλη, πάντοτε εμφανίζεται σαν συζυγές spinor

Στην προκειμένη περίπτωση: το εισερχόμενο  $e^+$  και το εξερχόμενο  $\mu^-$  γράφονται σαν συζυγές spinors

Επομένως γράφουμε για τους όρους:

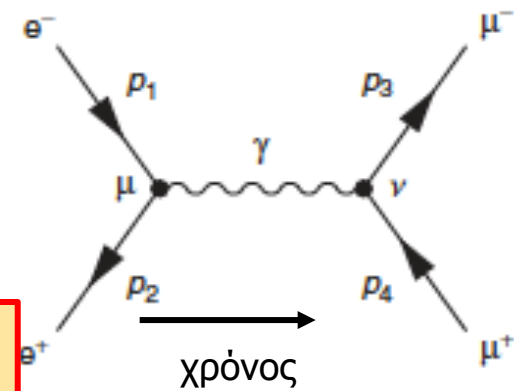
κορυφή  $e^+e^-$ :  $\bar{v}(2)[ig\gamma^\mu]u(1)$

$\gamma$ -διαδότης:  $-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}$

κορυφή  $\mu^+\mu^-$ :  $\bar{u}(3)[ig\gamma^\nu]v(4)$

πολ/ζουμε και βάζουμε μπροστά έναν όρο  $i$

$$M = \frac{g^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{u}(3)\gamma_\mu v(4)] [\bar{v}(2)\gamma^\mu u(1)]$$



# Πολύ πληροφορία για spin

Συνήθως δεν ξέρουμε τη διεύθυνση των αρχικών spins.

Αυτό συνήθως σημαίνει ότι υπάρχουν  $2^2=4$  δυνατοί συνδυασμοί των spin καταστάσεων.

Αλλά όλες είναι το ίδιο πιθανές και επομένως θα πρέπει να πάρουμε μια μέση τιμή.

Συνήθως δεν μετρούμε την διεύθυνση του spin των τελικών προϊόντων και επομένως υπάρχουν  $2^2=4$  δυνατές καταστάσεις spin

Οι τελικές καταστάσεις του δεν έχουν όμως την ίδια πιθανότητα να εμφανιστούν και εξαρτάται από την τιμή της  $M^2$ . Επομένως θα πρέπει να αθροίσουμε ως προς τις καταστάσεις αυτές.

Χρειάζεται επομένως να κάνουμε όλους τους  $16M^2$  υπολογισμούς να τους προσθέσουμε και να διαιρέσουμε με 4 (για να πάρουμε την μέση τιμή ως προς τις αρχικές καταστάσεις).

Υπάρχει όμως ένα καλό trick για να ελαττώσουμε κατά πολύ τους υπολογισμούς αυτούς

Το trick αυτό έχει να κάνει με το άθροισμα ως προς τους γ-πίνακες, και ονομάζεται **Casimir trick** και θα το δούμε παρακάτω.

# Spinors Ελικότητας

Τα spinors ελικότητας είναι: (όπου  $N = \sqrt{\frac{E + mc^2}{c}}$ )

$$\begin{aligned}
 u_{\uparrow}(\underline{p}) &= N \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \\ \frac{pc}{E + mc^2} \cos(\theta/2) \\ \frac{pc}{E + mc^2} e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} & u_{\downarrow}(\underline{p}) &= N \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \\ \frac{pc}{E + mc^2} \sin(\theta/2) \\ \frac{-pc}{E + mc^2} e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \\
 v_{\uparrow}(\underline{p}) &= N \begin{pmatrix} \frac{pc}{E + mc^2} \sin(\theta/2) \\ \frac{-pc}{E + mc^2} e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} & v_{\downarrow}(\underline{p}) &= +N \begin{pmatrix} \frac{pc}{E + mc^2} \cos(\theta/2) \\ \frac{pc}{E + mc^2} e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

# Μάζες σωματιδίων

Για σκέδαση  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  η ενέργεια του ηλεκτρονίου στο σύστημα αναφοράς του CM θα πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με την μάζα του μιονίου  $105.7\text{MeV}/c^2$

Άρα το ηλεκτρόνιο έχει ένα παράγοντα  $\gamma \sim 200$  και είναι ασφαλές να αγνοήσουμε την μάζα του

Αν η ενέργεια CM είναι π.χ.  $2\text{ GeV}$  τότε κάθε μιονίο θα έχει  $1\text{ GeV}$  ενέργεια και επομένως ο παράγοντας  $\gamma \sim 10$ .

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να αγνοήσουμε την μάζα των μιονίων

Το να αγνοήσουμε μάζες, σημαίνει ότι:  $E = pc$  και  $m = 0$



# Spinors Ελικότητας - αγνοώντας τις μάζες

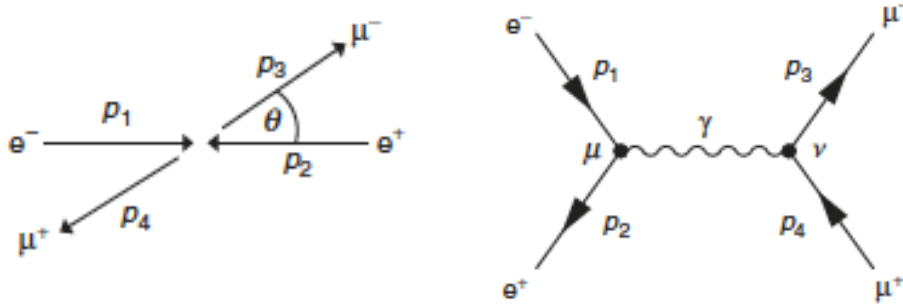
Τα spinors ελικότητας είναι στην περίπτωση αυτή απλουστεύονται στην μορφή:

$$u_{\uparrow}(\underline{p}) \approx \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \quad u_{\downarrow}(\underline{p}) \approx \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \\ -e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$v_{\uparrow}(\underline{p}) \approx \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad v_{\downarrow}(\underline{p}) \approx \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

# Spinors Ελικότητας – $\theta_{e^-} = \varphi_{e^-} = 0, \theta_{e^+} = \varphi_{e^+} = \pi$

Τα spinors ελικότητας στην περίπτωση αυτή απλουστεύονται στην μορφή:



$$u_{\uparrow}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{\uparrow}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_{\downarrow}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_{\downarrow}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

# Spinors Ελικότητας – τελικά προϊόντα – $\phi=0,\pi$

Τα spinors ελικότητας στην περίπτωση αυτή απλουστεύονται στην μορφή:

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε για το  $\mu^-$  τις γωνίες  $(\theta, 0)$  και για το  $\mu^+$  τις γωνίες  $(\pi-\theta, \pi)$

Ξέρουμε ακόμα ότι:  $\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$  και  $\cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$  ενώ  $e^{i\pi} = -1$

$$u_{\uparrow}(\underline{p}) = \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} +\cos(\theta/2) \\ +\sin(\theta/2) \\ +\cos(\theta/2) \\ +\sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$u_{\downarrow}(\underline{p}) = \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ +\cos(\theta/2) \\ +\sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$v_{\uparrow}(\underline{p}) = +\sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} +\cos(\theta/2) \\ +\sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$v_{\downarrow}(\underline{p}) = \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} +\sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \\ +\sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

## Υπολογισμός της ποσότητας $\bar{\psi}\gamma^\mu\phi$

Χρησιμοποιώντας τους γ-πίνακες μπορούμε να υπολογίσουμε τις ποσότητες:

$$\bar{\psi}\gamma^0\phi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\phi = \psi_1^*\phi_1 + \psi_2^*\phi_2 + \psi_3^*\phi_3 + \psi_4^*\phi_4$$

$$\bar{\psi}\gamma^1\phi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^1\phi = \psi_1^*\phi_4 + \psi_2^*\phi_3 + \psi_3^*\phi_2 + \psi_4^*\phi_1$$

$$\bar{\psi}\gamma^2\phi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^2\phi = -i[\psi_1^*\phi_4 - \psi_2^*\phi_3 + \psi_3^*\phi_2 - \psi_4^*\phi_1]$$

$$\bar{\psi}\gamma^3\phi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^3\phi = \psi_1^*\phi_3 - \psi_2^*\phi_4 + \psi_3^*\phi_1 - \psi_4^*\phi_2$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Υπολογισμός της ποσότητας $\bar{\psi}\gamma^\mu\phi$

$$\gamma^0\gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & +i & 0 \\ 0 & +i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma^0\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & +i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ +i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \gamma^0\gamma^2\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & +i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ +i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma^0\gamma^2\phi = \begin{pmatrix} -i\phi_4 \\ +i\phi_3 \\ -i\phi_2 \\ +i\phi_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \psi^\dagger\gamma^0\gamma^2\phi = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\phi_4 \\ +i\phi_3 \\ -i\phi_2 \\ +i\phi_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \psi^\dagger\gamma^0\gamma^2\phi = -i(\psi_1^*\phi_4 - \psi_2^*\phi_3 + \psi_3^*\phi_2 - \psi_4^*\phi_1)$$

## Υπολογισμός της αρχικής κατάστασης $\bar{v}_\downarrow \gamma^\mu u_\downarrow$ και $\bar{v}_\downarrow \gamma^\mu u_\uparrow$

$$\bar{v}_\downarrow \gamma^0 u_\downarrow = (0)(0) + (-1)(+1) + (0)(0) + (-1)(-1) = 0$$

$$\bar{v}_\downarrow \gamma^1 u_\downarrow = (0)(-1) + (-1)(0) + (0)(+1) + (-1)(0) = 0$$

$$\bar{v}_\downarrow \gamma^2 u_\downarrow = -i[(0)(-1) - (-1)(0) + (0)(+1) - (-1)(0)] = 0$$

$$\bar{v}_\downarrow \gamma^3 u_\downarrow = (0)(0) - (-1)(-1) + (0)(+0) - (-1)(+1) = 0$$

$$\bar{v}_\downarrow \gamma^0 u_\uparrow = (0)(+1) + (-1)(0) + (0)(+1) + (-1)(0) = 0$$

$$\bar{v}_\downarrow \gamma^1 u_\uparrow = (0)(0) + (-1)(+1) + (0)(0) + (-1)(+1) = -2$$

$$\bar{v}_\downarrow \gamma^2 u_\uparrow = -i[(0)(0) - (-1)(+1) + (0)(0) - (-1)(+1)] = -2i$$

$$\bar{v}_\downarrow \gamma^3 u_\uparrow = (0)(+1) - (-1)(0) + (0)(+1) - (-1)(0) = 0$$

$$v_\downarrow(\underline{p}) = \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_\downarrow(\underline{p}) = \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\psi} \gamma^0 \phi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \phi = \psi_1^* \phi_1 + \psi_2^* \phi_2 + \psi_3^* \phi_3 + \psi_4^* \phi_4$$

$$\bar{\psi} \gamma^1 \phi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^1 \phi = \psi_1^* \phi_4 + \psi_2^* \phi_3 + \psi_3^* \phi_2 + \psi_4^* \phi_1$$

$$\bar{\psi} \gamma^2 \phi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^2 \phi = -i[\psi_1^* \phi_4 - \psi_2^* \phi_3 + \psi_3^* \phi_2 - \psi_4^* \phi_1]$$

$$\bar{\psi} \gamma^3 \phi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^3 \phi = \psi_1^* \phi_3 - \psi_2^* \phi_4 + \psi_3^* \phi_1 - \psi_4^* \phi_2$$

Όπου αγνοήσαμε τον παράγοντα N των spinors

## Υπολογισμός της αρχικής κατάστασης $\bar{v}_{\uparrow}\gamma^{\mu}u_{\downarrow}$ και $\bar{v}_{\uparrow}\gamma^{\mu}u_{\uparrow}$

$$\bar{v}_{\uparrow}\gamma^0u_{\downarrow} = (+1)(0) + (0)(+1) + (-1)(0) + (0)(-1) = 0$$

$$\bar{v}_{\uparrow}\gamma^1u_{\downarrow} = (+1)(-1) + (0)(0) + (-1)(+1) + (0)(0) = -2$$

$$\bar{v}_{\uparrow}\gamma^2u_{\downarrow} = -i[(+1)(-1) - (0)(0) + (-1)(+1) - (0)(0)] = +2i$$

$$\bar{v}_{\uparrow}\gamma^3u_{\downarrow} = (+1)(0) + (0)(-1) + (-1)(0) - (0)(+1) = 0$$

$$\bar{v}_{\uparrow}\gamma^0u_{\uparrow} = (+1)(+1) + (0)(0) + (-1)(+1) + (0)(0) = 0$$

$$\bar{v}_{\uparrow}\gamma^1u_{\uparrow} = (+1)(0) + (0)(+1) + (-1)(0) + (0)(+1) = 0$$

$$\bar{v}_{\uparrow}\gamma^2u_{\uparrow} = -i[(+1)(0) - (0)(+1) + (-1)(0) - (0)(+1)] = 0$$

$$\bar{v}_{\uparrow}\gamma^3u_{\uparrow} = (+1)(+1) - (0)(0) + (-1)(+1) - (0)(0) = 0$$

## Υπολογισμός της τετραγωνικής αγκύλης αρχικής κατάστασης

$$\left[ \bar{v}_{\downarrow} \gamma^{\mu} u_{\downarrow} \right] = 0$$

$$\left[ \bar{v}_{\downarrow} \gamma^{\mu} u_{\uparrow} \right] = \sqrt{\frac{E}{c}} (0, -2, -2i, 0) \sqrt{\frac{E}{c}} = \frac{2E}{c} (0, -1, -i, 0)$$

$$\left[ \bar{v}_{\uparrow} \gamma^{\mu} u_{\downarrow} \right] = \sqrt{\frac{E}{c}} (0, -2, +2i, 0) \sqrt{\frac{E}{c}} = \frac{2E}{c} (0, -1, +i, 0)$$

$$\left[ \bar{v}_{\uparrow} \gamma^{\mu} u_{\uparrow} \right] = 0$$



## Υπολογισμός της τελικής κατάστασης $\bar{u}_\uparrow \gamma^\mu v_\downarrow$ και $\bar{u}_\uparrow \gamma^\mu v_\uparrow$

$$\bar{u}_\uparrow \gamma^0 v_\downarrow = (+c)(+s) + (+s)(-c) + (+c)(+s) + (+s)(-c) = 0$$

$$\bar{u}_\uparrow \gamma^1 v_\downarrow = (+c)(-c) + (+s)(+s) + (+c)(-c) + (+s)(+s) = -2 \left[ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] = 2 \cos \theta$$

$$\bar{u}_\uparrow \gamma^2 v_\downarrow = -i \left[ (+c)(-c) - (+s)(+s) + (+c)(-c) - (+s)(+s) \right] = -i \left[ -2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] = 2i$$

$$\bar{u}_\uparrow \gamma^3 v_\downarrow = (+c)(+s) - (+s)(-c) + (+c)(+s) - (+s)(-c) = 4 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} = 2 \sin \theta$$

$$\bar{u}_\uparrow \gamma^0 v_\uparrow = (+c)(+c) + (+s)(+s) + (+c)(-c) + (+s)(-s) = 0$$

$$\bar{u}_\uparrow \gamma^1 v_\uparrow = (+c)(+s) + (+s)(+c) + (+c)(-s) + (+s)(-c) = 0$$

$$\bar{u}_\uparrow \gamma^2 v_\uparrow = -i \left[ (+c)(+s) - (+s)(+c) + (+c)(-s) - (+s)(-c) \right] = 0$$

$$\bar{u}_\uparrow \gamma^3 v_\uparrow = (+c)(+c) - (+s)(+s) + (+c)(-c) - (+s)(-s) = 0$$

Όπου αγνοήσαμε τον παράγοντα N των spinors ενώ ο συμβολισμός:  $c = \cos \frac{\theta}{2}$  και  $s = \sin \frac{\theta}{2}$

## Υπολογισμός της αρχικής κατάστασης $\bar{u}_{\downarrow}\gamma^{\mu}v_{\uparrow}$ και $\bar{u}_{\downarrow}\gamma^{\mu}v_{\downarrow}$

$$\bar{u}_{\downarrow}\gamma^0v_{\downarrow} = (-s)(+s) + (+c)(-c) + (+s)(+s) + (-c)(-c) = 0$$

$$\bar{u}_{\downarrow}\gamma^1v_{\downarrow} = (-s)(-c) + (+c)(+s) + (+s)(-c) + (-c)(+s) = 0$$

$$\bar{u}_{\downarrow}\gamma^2v_{\downarrow} = -i[(-s)(-c) - (+c)(+s) + (+s)(-c) - (-c)(+s)] = 0$$

$$\bar{u}_{\downarrow}\gamma^3v_{\downarrow} = (-s)(+s) - (+c)(-c) + (+s)(+s) - (-c)(-c) = 0$$

$$\bar{u}_{\downarrow}\gamma^0v_{\uparrow} = (-s)(+c) + (+c)(+s) + (+s)(-c) + (-c)(-s) = 0$$

$$\bar{u}_{\downarrow}\gamma^1v_{\uparrow} = (-s)(+s) + (+c)(+c) + (+s)(-s) + (-c)(-c) = 2\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = +2\cos\theta$$

$$\bar{u}_{\downarrow}\gamma^2v_{\uparrow} = -i[(-s)(+s) - (+c)(+c) + (+s)(-s) - (-c)(-c)] = -i\left[-2\sin^2\frac{\theta}{2} - 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right] = +2i$$

$$\bar{u}_{\downarrow}\gamma^3v_{\uparrow} = (-s)(+c) - (+c)(+s) + (+s)(-c) - (-c)(-s) = -4\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = -2\sin\theta$$

## Υπολογισμός της τετραγωνικής αγκύλης τελικής κατάστασης

$$\left[ \bar{u}_{\downarrow} \gamma^{\mu} v_{\downarrow} \right] = 0$$

$$\left[ \bar{u}_{\downarrow} \gamma^{\mu} v_{\uparrow} \right] = \sqrt{\frac{E}{c}} (0, +2 \cos \theta, +2i, -2 \sin \theta) \left( -\sqrt{\frac{E}{c}} \right) = \frac{2E}{c} (0, -\cos \theta, -i, \sin \theta)$$

$$\left[ \bar{u}_{\uparrow} \gamma^{\mu} v_{\downarrow} \right] = \sqrt{\frac{E}{c}} (0, -2 \cos \theta, +2i, 2 \sin \theta) \sqrt{\frac{E}{c}} = \frac{2E}{c} (0, -\cos \theta, +i, \sin \theta)$$

$$\left[ \bar{u}_{\uparrow} \gamma^{\mu} v_{\uparrow} \right] = 0$$

# Σκέδαση $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

$$M = \frac{g^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{u}(3)\gamma_\mu v(4)] [\bar{v}(2)\gamma^\mu u(1)]$$

Χρησιμοποιώντας τους spinors ελικότητας και στην προσέγγιση  $m \sim 0$  και υπολογίζοντας δυνατές περιπτώσεις προσανατολισμού του spin των σωματιδίων της αρχικής και τελικής κατάστασης καταλήξαμε:

$$[\bar{v}_\downarrow \gamma^\mu u_\downarrow] = 0$$

$$[\bar{v}_\downarrow \gamma^\mu u_\uparrow] = \frac{2E}{c} (0, -1, -i, 0)$$

$$[\bar{v}_\uparrow \gamma^\mu u_\downarrow] = \frac{2E}{c} (0, -1, +i, 0)$$

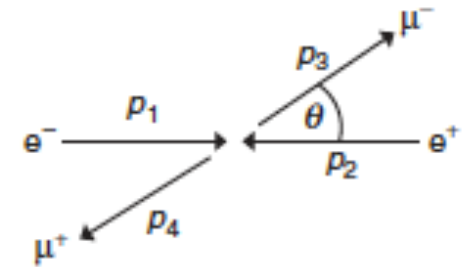
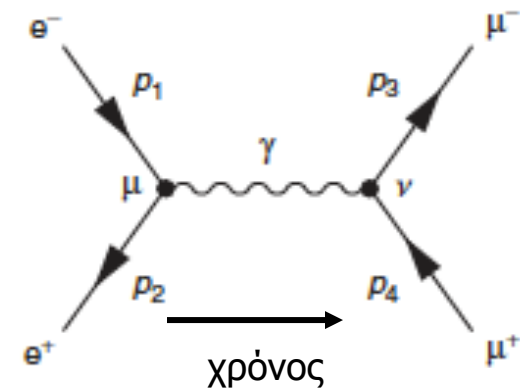
$$[\bar{v}_\uparrow \gamma^\mu u_\uparrow] = 0$$

$$[\bar{u}_\downarrow \gamma^\mu v_\downarrow] = 0$$

$$[\bar{u}_\downarrow \gamma^\mu v_\uparrow] = \frac{2E}{c} (0, -\cos\theta, -i, \sin\theta)$$

$$[\bar{u}_\uparrow \gamma^\mu v_\downarrow] = \frac{2E}{c} (0, -\cos\theta, +i, \sin\theta)$$

$$[\bar{u}_\uparrow \gamma^\mu v_\uparrow] = 0$$



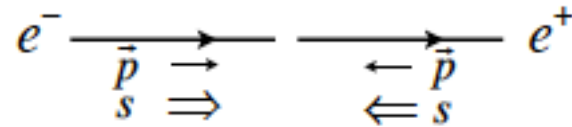
# Διατήρηση ελικιότητας - $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Για την αρχική κατάσταση  $e^+ e^- \rightarrow \gamma^*$  βρήκαμε:

$$[\bar{v}_\downarrow \gamma^\mu u_\downarrow] = j_{e,LL}^\mu = 0$$

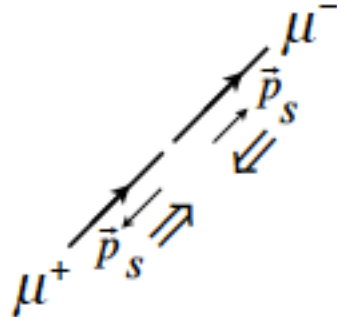


$$[\bar{v}_\uparrow \gamma^\mu u_\uparrow] = j_{e,RR}^\mu = 0$$

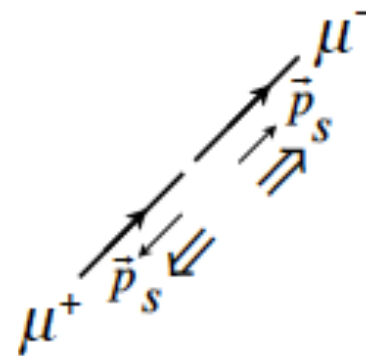


Για την τελική κατάσταση  $\gamma^* \rightarrow \mu^+ \mu^-$  βρήκαμε:

$$[\bar{u}_\downarrow \gamma^\mu v_\downarrow] = j_{\mu,LL}^\mu = 0$$



$$[\bar{u}_\uparrow \gamma^\mu v_\uparrow] = j_{\mu,RR}^\mu = 0$$



Αν τα spins είναι αντίθετα σε οποιαδήποτε διεύθυνση, τότε το ρεύμα είναι μηδέν

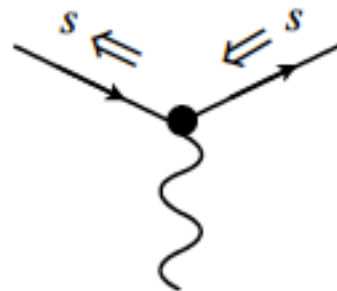
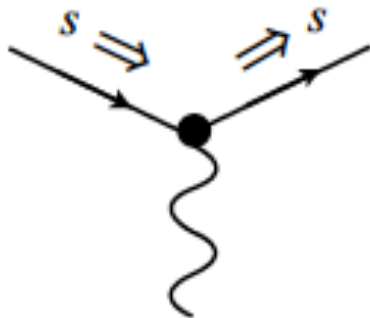
# Διατήρηση ελικιότητας - $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Είδαμε ότι το «ρεύμα» εξαύλωσης όπου συμμετέχει ένα  $u$  και ένα  $\bar{u}$  είναι μηδέν

Αλλά αυτό ισχύει για «ρεύμα σκέδασης» όπου έχουμε 2  $u$ 'ς ή 2  $\bar{u}$ 'ς για τα οποία

$$[\bar{u}_\downarrow \gamma^\mu u_\downarrow] = [\bar{u}_\uparrow \gamma^\mu u_\uparrow] = [\bar{v}_\uparrow \gamma^\mu v_\uparrow] = [\bar{v}_\downarrow \gamma^\mu v_\downarrow] = 0$$

Τα μόνα ρεύματα (τετραγωνικές αγκύλες) που δεν έχουν μηδενική συνεισφορά είναι αυτά στα οποία τα spins είναι «συνεχή» ανεξάρτητα από τον τρόπο προσανατολισμού του διαγράμματος

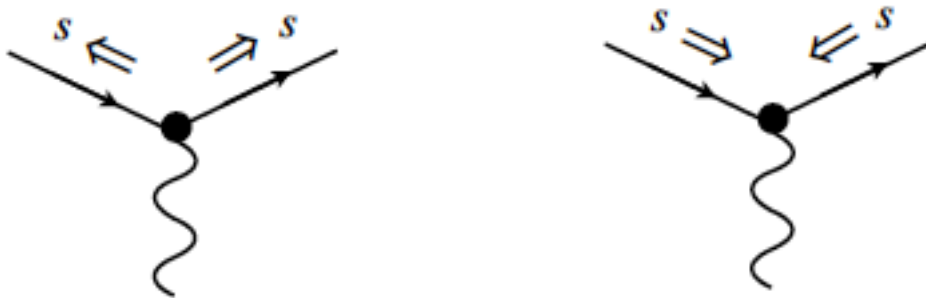


## Διατήρηση ελικότητας

Η ελικότητα διατηρείται στο όριο των υψηλών ενεργειών όπου μπορούμε να αγνοήσουμε την μάζα των σκεδαζόμενων σωματιδίων

Σε πολλά πειράματα, αυτό αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση

Ωστόσο σε μικρές σχετικά ενέργειες, οι τετραγωνικές αγκύλες (ρεύματα) όπου τα spins είναι αντίθετα, δίνουν συνεισφορά που είναι ανάλογη του λόγου  $m/E$



Η συνεισφορά των διαγραμμάτων αυτών δεν είναι μηδενική αν ο λόγος  $m/E$  είναι σημαντικός

# Ελικότητα και Μετασχηματισμοί Lorentz

Αν τα spins των σωματιδίων είναι προσανατολισμένα στην διεύθυνση της ορμής τους, τότε αν δώσουμε ώθηση στην διεύθυνση της ορμής, το spin δεν αλλάζει.

Αλλάζει το μέτρο της ορμής των σωματιδίων αλλά αυτό με την σειρά του ακυρώνεται στον ορισμό της ελικότητας οπότε η ελικότητα του σωματιδίου παραμένει ίδια.

Αν όμως δώσουμε ώθηση αντίθετα με την διεύθυνση κίνησης του σωματιδίου, τόση όση χρειάζεται για να αλλάξει η διεύθυνση της ορμής, το πρόσημο της ελικότητας θα αλλάξει

Για σωματίδια που η μάζα τους είναι μηδενική, πάντοτε κινούνται με την ταχύτητα του φωτός  
Για τα σωματίδια αυτά, είναι αδύνατο να δώσουμε τόση μεγάλη ώθηση για να αλλάξει το πρόσημο της ορμής

Για σωματίδια με μηδενική μάζα, η ελικότητα είναι ένα Lorentz αναλλοίωτο μέγεθος αλλά αυτό δεν ισχύει ακριβώς για σωματίδια με μή μηδενική μάζα



## Υπολογισμός Ενεργών Διατομών στην QED

# Χειραλικότητα - Chirality

Η χειραλικότητα εισάγεται ορίζοντας τον  $\gamma^5$ -πίνακα ως:  $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 =$

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιότητες του  $\gamma^5$  πίνακα εξάγονται ουσιαστικά από τις μεταθετικές και Ερμιτισιανές ιδιότητες των  $\gamma$ -πινάκων που οδηγούν στις ακόλουθες σχέσεις:

$$(\gamma^5)^2 = 1 \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \quad \text{και} \quad \gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$$

Η χειραλικότητα είναι ανεξάρτητη από οποιεσδήποτε περιστροφές ως προς οποιονδήποτε άξονα.

Από την στιγμή που υπάρχουν περιστροφές που μπορεί να αλλάξουν το spin ενός σωματιδίου σε ηρεμία, η χειραλικότητα δεν είναι πανομοιότυπη με το spin του σωματιδίου.

Αντί να χρησιμοποιήσουμε ιδιοκαταστάσεις ελικότητας σαν Dirac βάση, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε ιδιοκαταστάσεις χειραλικότητας.

Οι ιδιοκαταστάσεις χειραλικότητας συνήθως συμβολίζονται με  $u_L, u_R, v_L, v_R$  αντί  $u_\uparrow, u_\downarrow, v_\uparrow, v_\downarrow$

Σε υψηλές ενέργειες ισχύει ότι:  $\gamma^5 u_\uparrow = +u_\uparrow$   $\gamma^5 u_\downarrow = -u_\downarrow$   $\gamma^5 v_\uparrow = -v_\uparrow$  και  $\gamma^5 v_\downarrow = +v_\downarrow$

Δηλαδή σε υψηλές ενέργειες, οι ιδιοκαταστάσεις της χειραλικότητας και ελικότητας είναι ίδιες αλλά αυτό δεν ισχύει για σωματίδια χαμηλής ενέργειας

Η χειραλικότητα είναι ακριβώς Lorentz αναλλοίωτη ποσότητα και διατηρείται ακριβώς από τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις

# Χειραλικότητα - Chirality

Εν γένει, οι ιδιοκαταστάσεις της χειραλικότητας ορίζονται σαν **L(left)-handed** και **R(right)-handed** ενώ οι ιδιοκαταστάσεις της ελिकότητας συμβολίζονται όπως είπαμε σαν  $\uparrow\downarrow$

$$\gamma^5 u_L = -u_L \quad \gamma^5 v_L = +v_L$$

$$\gamma^5 u_R = +u_R \quad \gamma^5 v_R = -v_R$$

Με την παραπάνω σύμβαση, φαίνεται ότι για υψηλές ενέργειες οι ιδιοκαταστάσεις της ελικότητας και χειραλικότητας ταυτίζονται τόσο για σωματίδια όσο και αντισωματίδια

Δηλαδή για παράδειγμα ισχύει:  $u_R \rightarrow u_{\uparrow}$  και  $v_L \rightarrow v_{\downarrow}$

Οι λύσεις της εξίσωσης Dirac που είναι και ιδιοκαταστάσεις του  $\gamma^5$  είναι ίδιες με τις ιδιοκαταστάσεις της ελικότητας για την περίπτωση μηδενικής μάζας

Επομένως θα έχουμε:

$$u_R \equiv N \begin{pmatrix} c \\ se^{i\varphi} \\ c \\ se^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad u_L \equiv N \begin{pmatrix} -s \\ ce^{i\varphi} \\ s \\ -ce^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad v_R \equiv N \begin{pmatrix} s \\ -ce^{i\varphi} \\ -s \\ ce^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad v_L \equiv N \begin{pmatrix} c \\ -se^{i\varphi} \\ c \\ se^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\text{Όπου: } N = \sqrt{\frac{E+m}{c}} \quad \text{και} \quad c = \cos(\theta/2) \quad \text{ενώ} \quad s = \sin(\theta/2)$$

Σε αντίθεση με την ελικότητα δεν υπάρχει απλή φυσική ερμηνεία για την χειραλικότητα

# Χειραλικοί Τελεστές προβολής

Μπορούμε να αναλύσουμε σε χειραλικές συνιστώσες οποιοδήποτε Dirac spinor χρησιμοποιώντας τους χειραλικούς τελεστές προβολής  $P_L$  και  $P_R$  που ορίζονται ως:

$$P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \quad \text{και} \quad P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}$$

Οι τελεστές  $P_L$  και  $P_R$  ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$P_L + P_R = 1 \quad P_R P_R = P_R \quad P_L P_L = P_L \quad \text{και} \quad P_R P_L = 0$$

Οι τελεστές  $P_L$  και  $P_R$  μπορούν να γραφούν σε μορφή πίνακα σαν

$$P_R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

Συνδυάζοντας με τις ιδιοκαταστάσεις της χειραλικότητας θα έχουμε:

$$P_R u_R = u_R \quad P_R u_L = 0 \quad P_R v_R = 0 \quad \text{ενώ} \quad P_R v_L = v_L$$

$$P_L u_R = 0 \quad P_L u_L = u_L \quad P_L v_R = v_R \quad \text{ενώ} \quad P_L v_L = 0$$

Αφού έχουμε προβολές χειραλικών καταστάσεων, τότε ένα οποιοδήποτε spinor γράφεται:

$$u = a_R u_R + a_L u_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)u + \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u \quad \text{όπου } a_L, a_R \text{ είναι μιγαδικοί συντελεστές και } u_L, u_R \text{ είναι χειραλικές ιδιοκαταστάσεις}$$

## Πίσω στην σκέδαση $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Βρήκαμε ότι το πλάτος για την μετάβαση είναι:  $M = \frac{e^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{u}(3)\gamma_\mu v(4)] [\bar{v}(2)\gamma^\mu u(1)]$

και τα μή μηδενικά 4-διανύσματα ρευμάτων ήταν:

$$\begin{aligned} [\bar{v}_\downarrow \gamma^\mu u_\uparrow] &= \frac{2E}{c} (0, -1, -i, 0) & [\bar{u}_\downarrow \gamma^\mu v_\uparrow] &= \frac{2E}{c} (0, -\cos\theta, -i, \sin\theta) \\ [\bar{v}_\uparrow \gamma^\mu u_\downarrow] &= \frac{2E}{c} (0, -1, +i, 0) & [\bar{u}_\uparrow \gamma^\mu v_\downarrow] &= \frac{2E}{c} (0, -\cos\theta, +i, \sin\theta) \end{aligned} \quad \text{και}$$

Υπολογίζουμε τώρα τα εσωτερικά γινόμενα των 4-διανυσμάτων αυτών:

$$[\bar{u}_\downarrow \gamma^\mu v_\uparrow] \cdot [\bar{v}_\downarrow \gamma^\mu u_\uparrow] = \frac{4E^2}{c^2} (0, -\cos\theta, -i, \sin\theta) \cdot (0, -1, -i, 0) = +\frac{4E^2}{c^2} (\cos\theta - 1)$$

$$[\bar{u}_\downarrow \gamma^\mu v_\uparrow] \cdot [\bar{v}_\uparrow \gamma^\mu u_\downarrow] = \frac{4E^2}{c^2} (0, -\cos\theta, -i, \sin\theta) \cdot (0, -1, +i, 0) = +\frac{4E^2}{c^2} (\cos\theta + 1)$$

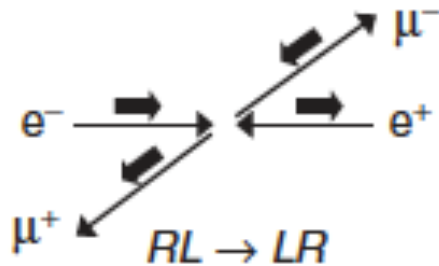
$$[\bar{u}_\uparrow \gamma^\mu v_\downarrow] \cdot [\bar{v}_\downarrow \gamma^\mu u_\uparrow] = \frac{4E^2}{c^2} (0, -\cos\theta, +i, \sin\theta) \cdot (0, -1, -i, 0) = +\frac{4E^2}{c^2} (\cos\theta + 1)$$

$$[\bar{u}_\uparrow \gamma^\mu v_\downarrow] \cdot [\bar{v}_\uparrow \gamma^\mu u_\downarrow] = \frac{4E^2}{c^2} (0, -\cos\theta, +i, \sin\theta) \cdot (0, -1, +i, 0) = +\frac{4E^2}{c^2} (\cos\theta - 1)$$

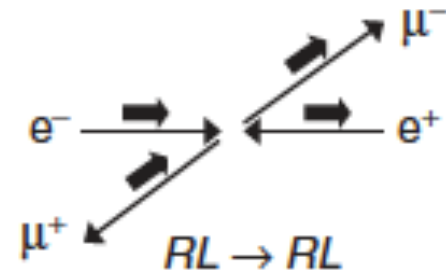
# Συνδυασμός ρευμάτων στη σκέδαση $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Για τα μη μηδενικά 4-διανύσματα ρευμάτων έχουμε:

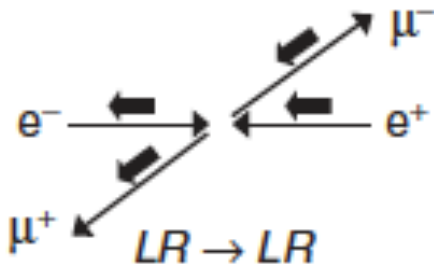
$$[\bar{u}_\downarrow \gamma^\mu v_\uparrow] \cdot [\bar{v}_\downarrow \gamma^\mu u_\uparrow] = + \frac{4E^2}{c^2} (\cos\theta - 1)$$



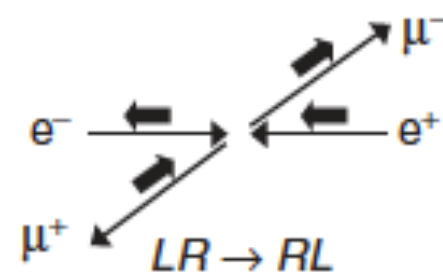
$$[\bar{u}_\uparrow \gamma^\mu v_\downarrow] \cdot [\bar{v}_\downarrow \gamma^\mu u_\uparrow] = + \frac{4E^2}{c^2} (\cos\theta + 1)$$



$$[\bar{u}_\downarrow \gamma^\mu v_\uparrow] \cdot [\bar{v}_\uparrow \gamma^\mu u_\downarrow] = + \frac{4E^2}{c^2} (\cos\theta + 1)$$



$$[\bar{u}_\uparrow \gamma^\mu v_\downarrow] \cdot [\bar{v}_\uparrow \gamma^\mu u_\downarrow] = + \frac{4E^2}{c^2} (\cos\theta - 1)$$



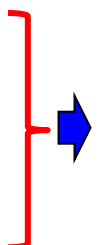
Οι καταστάσεις spin της αρχικής κατάστασης θα πρέπει να ευθυγραμμιστούν ώστε να συμβεί η σκέδαση.

Τα spins της τελικής κατάστασης θα πρέπει και αυτά να ευθυγραμμιστούν.

Το πλάτος μετάβασης είναι μεγάλο όταν οι αρχικές και τελικές καταστάσεις ευθυγραμμίζονται μεταξύ τους, και είναι μηδέν όταν δείχνουν αντίθετα.

## Συνδυασμός ρευμάτων στη σκέδαση $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Το πλάτος μετάβασης είναι:  $M = \frac{e^2}{s} [\bar{u}(3)\gamma_\mu v(4)][\bar{v}(2)\gamma^\mu u(1)]$

Το γινόμενο δύο ρευμάτων θα δώσει:  $(\sqrt{s} = 2E/c = (p_1 + p_2))$   
 $\frac{4E^2}{c^2}(\cos\theta \pm 1) = s(\cos\theta \pm 1)$    $M = e^2(\cos\theta \pm 1)$

Οι καταστάσεις είναι διακριτές αλλά δεν ξέρουμε αρχικά spins και δεν μετρούμε τελικά spins.

Επομένως υψώνουμε στο τετράγωνο τα ξεχωριστά πλάτη, αθροίζουμε και διαιρούμε με 4

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum |M|^2 &= \frac{1}{4} \left\{ 2 \left[ e^2 (\cos\theta + 1) \right]^2 + 2 \left[ e^2 (\cos\theta - 1) \right]^2 \right\} \\ &= \frac{e^4}{2} \left[ (\cos^2\theta + 1 + 2\cos\theta) + (\cos^2\theta + 1 - 2\cos\theta) \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \sum |M|^2 = e^4 (1 + \cos^2\theta)$$

# Διαφορική ενεργός διατομή σκέδασης $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Η ενεργός διατομή σκέδασης για σκέδαση 2 σωμάτων σε 2 σώματα ( $2 \rightarrow 2$ ) στο σύστημα αναφοράς του CM είναι:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{1}{S} \frac{|M|^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{p_F}{p_I} = \left( \frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{1}{S} \frac{|M|^2}{s} \frac{p_F}{p_I}$$

Ο παράγοντας των συνδυασμών,  $S$ , είναι 1, ενώ αν αγνοήσουμε τις μάζες:  $\frac{p_F}{p_I} = 1$

Εισάγουμε τον όρο του  $M^2$  που υπολογίσαμε προηγουμένως οπότε θα πάρουμε τελικά:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{e^4 (1 + \cos^2 \theta)}{s}$$

Αλλά η σταθερά της λεπτής υφής είναι:  $\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (\hbar c)^2 \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta)$$