Εύρεση ηλεκτρικού πεδίου από ηλεκτρικό δυναμικό

Είδαμε ότι η σχέση μεταξύ ηλεκτρικού δυναμικού και ηλεκτρικού πεδίου είναι:

$$\boxed{\Delta V_e = \frac{\Delta U_e}{q} = -\int_A^B \left(\frac{\vec{F}_e}{q_0}\right)\cdot d\vec{s} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}}$$

Έστω ότι έχουμε δύο σημεία τα οποία απέχουν μικρή απόσταση, $d\vec{s}$, μεταξύ τους.

Η προηγούμενη σχέση οδηγεί στη διαφορική μορφή: $\boxed{dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s}}$

Χρησιμοποιώντας Καρτεσιανές συντεταγμένες:

$\vec{E} = E_x\hat{\imath} + E_y\hat{\jmath} + E_z\hat{k}$ και $d\vec{s} = d_x\hat{\imath} + d_y\hat{\jmath} + d_z\hat{k}$

οπότε: $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s} = -(E_x\hat{\imath} + E_y\hat{\jmath} + E_z\hat{k})\cdot(d_x\hat{\imath} + d_y\hat{\jmath} + d_z\hat{k}) = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)$

Η τελευταία σχέση υποδηλώνει ότι: $E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x}$ $\quad E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y}$ $\quad E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z}$

Χρησιμοποιώντας τον τελεστή «*del*»: $\nabla \equiv \dfrac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \dfrac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \dfrac{\partial}{\partial z}\hat{k}$

Γράφουμε το ηλεκτρικό πεδίο: $\vec{E} = E_x\hat{\imath} + E_y\hat{\jmath} + E_z\hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι αν το ηλεκτρικό δυναμικό αυξάνει καθώς ένα θετικό φορτίο κινείται σε μια κατεύθυνση, έστω *x*, με $\frac{\partial V}{\partial x} > 0$, τότε υπάρχει μη μηδενικη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου, $-E_x \neq 0$, στην αντίθετη κατεύθυνση.

Εύρεση ηλεκτρικού πεδίου από ηλεκτρικό δυναμικό

Αν η κατανομή φορτίου έχει σφαιρική συμμετρία, τότε το ηλεκτρικό πεδίο είναι συνάρτηση της ακτινικής απόστασης *r*, δηλαδή $\vec{E} = E_r \hat{r}$

Στην περίπτωση αυτή, $dV = -E_r \hat{r}$

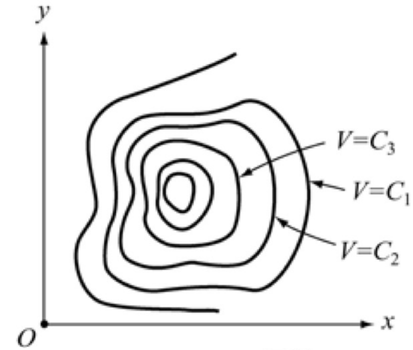
Αν γνωρίζουμε το $V(r)$ τότε μπορούμε να βρούμε το $\vec{E}$: $\vec{E} = E_r \hat{r} = -\left(\frac{dV}{dr}\right)\hat{r}$

Σαν παράδειγμα το ηλεκτρικό δυναμικό ενός σημειακού φορτίου είναι $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Από την προηγούμενη σχέση θα πάρουμε τότε: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

Κλίση και ισοδυναμικές

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σύστημα σε δύο διαστάσεις με δυναμικό *V*(x,y). Οι καμπύλες που χαρακτηρίζονται από σταθερό δυναμικό *V*(x,y) ονομάζονται ισοδυναμικές καμπύλες



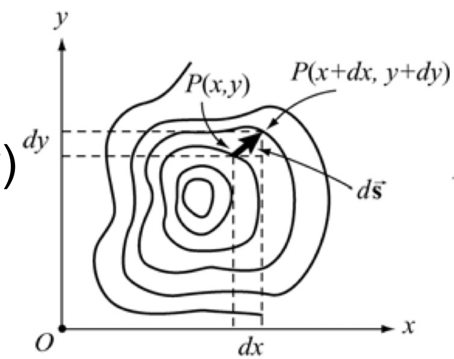
Σε τρεις διαστάσεις έχουμε ισοδυναμικές επιφάνειες και περιγράφονται από τη σχέση: *V*(x,y,z) = σταθ.

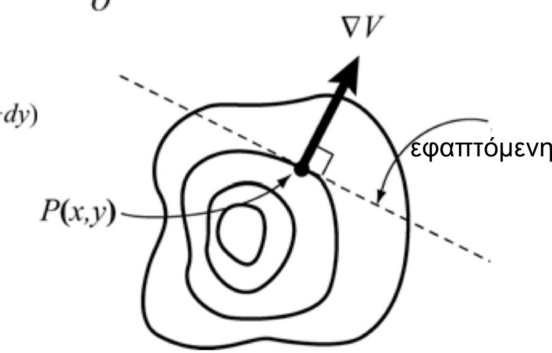
Εφόσον $\vec{E} = -\nabla V$ μπορούμε να δείξουμε ότι η διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ είναι πάντα κάθετη στην ισοδυναμική στο σημείο τομής.

Απόδειξη:

Έστω ένα σημείο *P*(x,y) με δυναμικό *V*(x,y)

Έστω ένα γειτονικό σημείο *P*(x+dx,y+dy).
Πόσο μπορεί να αλλάξει το δυναμικό;





Έστω η διαφορά δυναμικού είναι: $dV = V(x+dx, y+dy) - V(x,y) \Rightarrow$

$$dV = \left[V(x,y) + \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \cdots\right] - V(x,y) \approx \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy$$

Αλλά το διάνυσμα της μετατόπισης είναι: $d\vec{s} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath}$ και μπορούμε να γράψουμε:

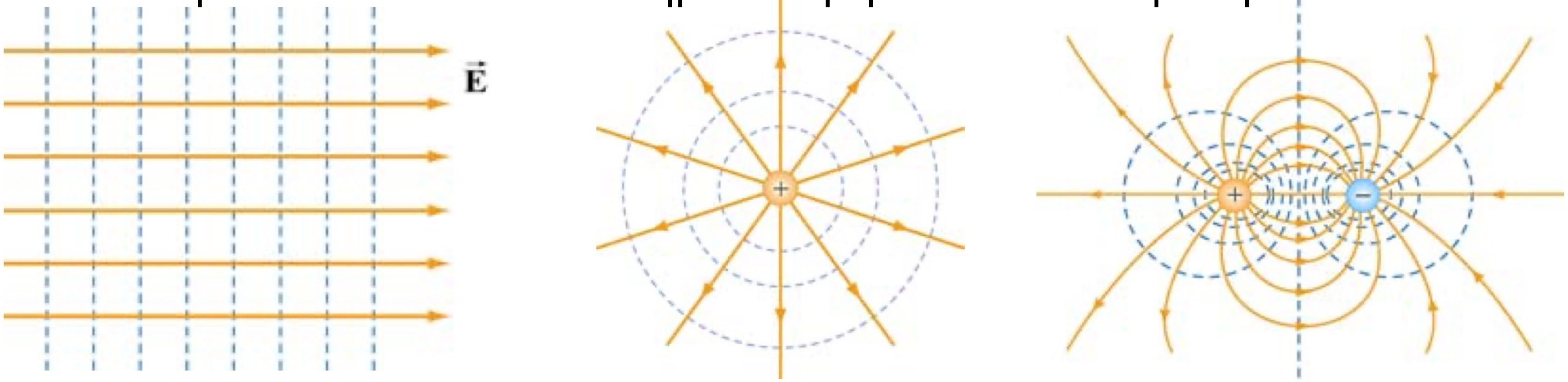
$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath}\right)\cdot(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath}) \Rightarrow dV = (\nabla V)\cdot d\vec{s} \Rightarrow dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s}$$

Αν $d\vec{s}$ κατά μήκος της εφαπτόμενης, τότε dV=0 (ισοδυναμική)

$$\Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{s}$$

Ισοδυναμικές

σταθερό πεδίο σημειακό φορτίο ηλεκτρικό δίπολο



Τα χαρακτηριστικά των ισοδυναμικών επιφανειών είναι:

(α) Οι ηλεκτρικές γραμμές είναι κάθετες πάντοτε στις ισοδυναμικές και έχουν διεύθυνση από υψηλότερο σε χαμηλότερο δυναμικό.

(β) Λόγω συμμετρίας, οι ισοδυναμικές επιφάνειες που παράγονται από σημειακό φορτίο είναι πάντοτε ομόκεντρες σφαίρες και για σταθερό ηλεκτρικό πεδίο, δημιουργούν μια οικογένεια από επίπεδα κάθετα στις γραμμές του πεδίου.

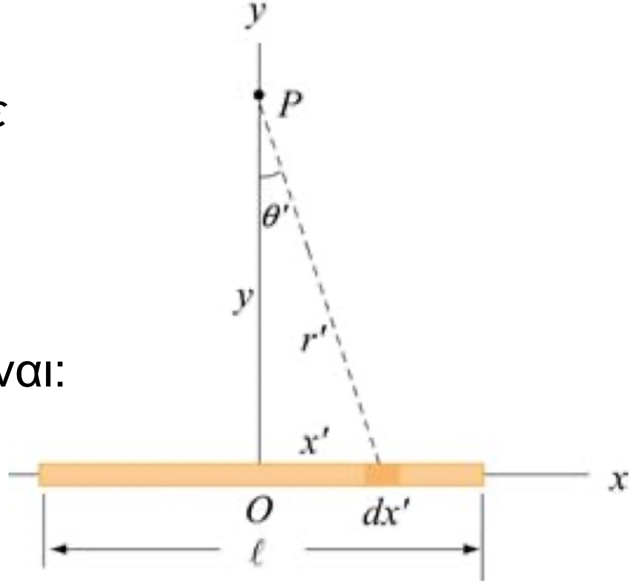
(γ) Η εφαπτόμενη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος της ισοδυναμικής επιφάνειας είναι μηδέν, διαφορετικά θα υπάρχει έργο για την μετακίνηση φορτίου από ένα σημείο της επιφάνειας σε ένα άλλο.

(δ) Δεν απαιτείται έργο για την μετακίνηση ενός φορτίου κατά μήκος μιας ισοδυναμικής επιφάνειας

1ο Παράδειγμα: Δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένης ράβδου

Θεωρούμε μια μη αγώγιμη ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδο μήκους *l* και γραμμικής πυκνότητας φορτίου λ. Ποιο το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο *P* που βρίσκεται σε απόσταση *y* από τη ράβδο στην κατακόρυφο που περνά από το μέσο της ράβδου.

Θεωρούμε στοιχειώδες μήκος dx' το οποίο εμπεριέχει φορτίο $dq = \lambda dx'$.



Το στοιχειώδες φορτίο που δημιουργεί το πεδίο βρίσκεται στη θέση $(x', 0)$ ενώ το δοκιμαστικό φορτίο στη θέση *P* *με* συντεταγμένες $(0, y)$

Η απόσταση από την πηγή στο *P* είναι: $\sqrt{x'^2 + y^2}$

Η συνεισφορά του στοιχειώδους φορτίου στο δυναμικό είναι:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx'}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$$

Θεωρούμε ότι το δυναμικό είναι 0 στο άπειρο.

Επομένως το δυναμικό εξαιτίας όλης της ράβδου θα είναι:

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{dx'}{\sqrt{x'^2 + y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} ln\left[x' + \sqrt{x'^2 + y^2}\right]\Bigg|_{-l/2}^{+l/2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} ln\left[\frac{(l/2) + \sqrt{(l/2)^2 + y^2}}{-(l/2) + \sqrt{(l/2)^2 + y^2}}\right]$$

1ο Παράδειγμα: Δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένης ράβδου

Το γράφημα του $V(y)/V_0$ όπου $V_0 = \lambda/4\pi\varepsilon_0$, συναρτήσει της ποσότητας y/l.

Στο όριο $l \gg y$, το δυναμικό γίνεται:

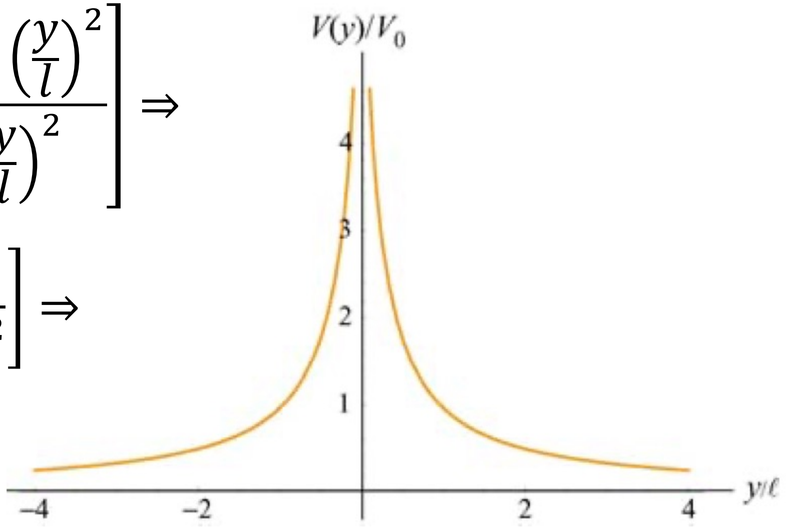
$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} ln\left[\frac{(l/2) + (l/2)\sqrt{1 + (2y/l)^2}}{-(l/2) + (l/2)\sqrt{1 + (2y/l)^2}}\right] = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} ln\left[\frac{1 + \sqrt{1 + (2y/l)^2}}{-1 + \sqrt{1 + (2y/l)^2}}\right] \Rightarrow$$

διονυμικό ανάπτυγμα

$$V \approx \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} ln\left[\frac{1 + \{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2y}{l}\right)^2\}}{-1 + \{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2y}{l}\right)^2\}}\right] = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} ln\left[\frac{2 + 2\left(\frac{y}{l}\right)^2}{2\left(\frac{y}{l}\right)^2}\right] \Rightarrow$$

$$V \approx \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} ln\left[\frac{2}{2\left(\frac{y}{l}\right)^2}\right] = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} ln\left[\frac{1}{\left(\frac{y}{l}\right)^2}\right] = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} ln\left[\frac{l^2}{y^2}\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\left[\frac{l}{y}\right]}$$

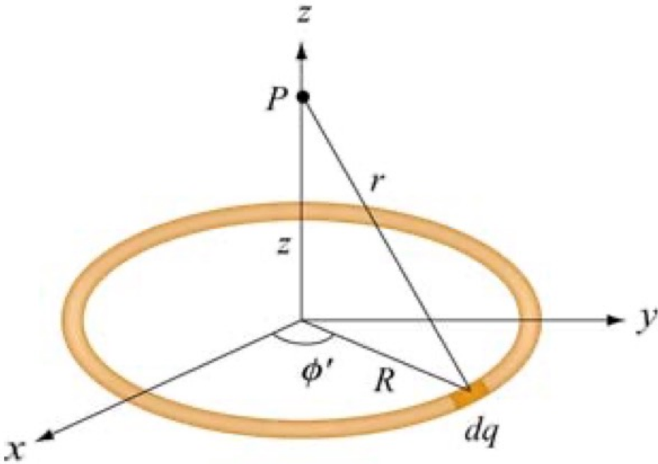


Το αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + y^2}}$$

2ο Παράδειγμα: Δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένου δακτυλίου

Θεωρούμε έναν μη αγώγιμο ομοιόμορφα φορτισμένο δακτύλιο ακτίνας *R* και γραμμικής πυκνότητας φορτίου λ. Ποιο το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο *P* που βρίσκεται σε απόσταση *z* από τον κεντρικό άξονα.



Θεωρούμε στοιχειώδες μήκος $dl' = Rd\varphi'$.

Το τμήμα αυτό εμπεριέχει φορτίο $dq = \lambda dl' = \lambda R d\varphi'$.

Το στοιχειώδες δυναμικό στο *P* θα είναι επομένως:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R d\varphi'}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

Το δυναμικό στο *P* θα είναι επομένως:

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}}\oint d\varphi' \Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda 2\pi R}{\sqrt{R^2+z^2}} \Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

Όταν $z \gg R$, το δυναμικό προσεγγίζεται με αυτό του σημειακού φορτίου: $V \sim \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{z}$

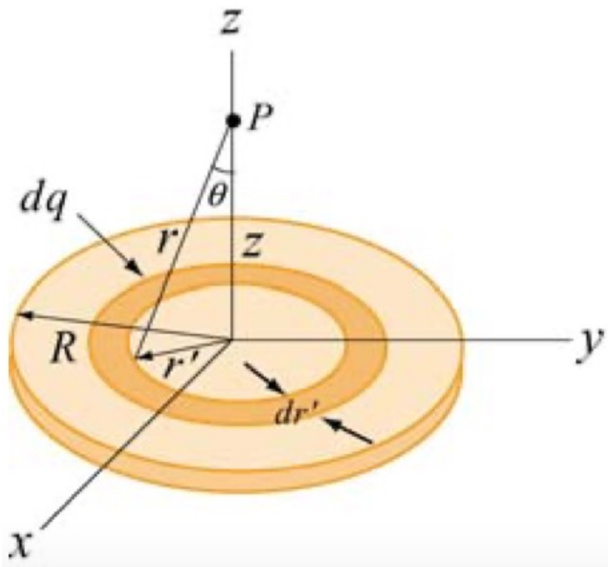
Το ηλεκτρικό πεδίο στην θέση *P* υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \Rightarrow E_z = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \Rightarrow \boxed{E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qz}{(R^2+z^2)^{3/2}}}$$

3ο Παράδειγμα: Δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου

Θεωρούμε μη αγώγιμο ομοιόμορφα φορτισμένο δίσκο ακτίνας *R* και επιφανειακής πυκνότητας φορτίου σ. Ο δίσκος βρίσκεται στο x-y επίπεδο. Να βρεθεί το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο *P* που βρίσκεται σε απόσταση *z* από τον κεντρικό άξονα.

Θεωρούμε έναν δακτύλιο ακτίνας r' και πλάτους dr'.



Το φορτίο του στοιχειώδους αυτού δακτυλίου είναι:

$$dq = \sigma dA = \sigma\,(2\pi r' dr')$$

Το δυναμικό στο σημείο *P* εξαιτίας αυτού του στοιχειώδους φορτίου θα είναι:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\,(2\pi r' dr')}{\sqrt{r'^2 + z^2}}$$

Αθροίζουμε (ολοκληρώνουμε) ως προς όλους τους στοιχειώδεις δακτυλίους που απαρτίζουν τον δίσκο:

$$V = \int dV = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{(r' dr')}{\sqrt{r'^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{(r' dr')}{\sqrt{r'^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{r'^2 + z^2}\right]\Big|_0^R \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2 + z^2} - |z|\right]}$$

3ο Παράδειγμα: Δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου

Στο όριο $|z| \gg R$ μπορούμε να πάρουμε το διονυμικό ανάπτυγμα της $\sqrt{R^2+z^2}$ οπότε:

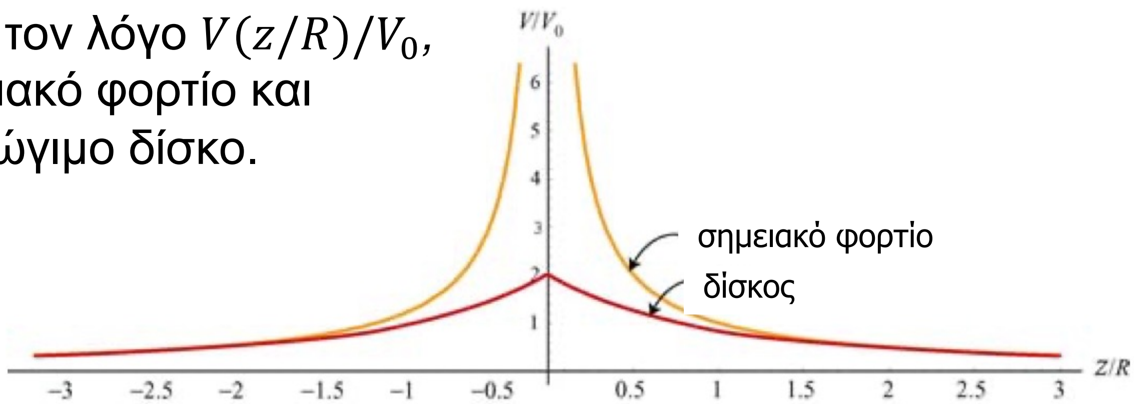
$$\sqrt{R^2+z^2} = |z|\sqrt{\left(\frac{R}{z}\right)^2+1} = |z|\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{z}\right)^2+\cdots\right] = |z|\left(1+\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}\right)$$

Οπότε το δυναμικό απλουστεύεται σε αυτό του σημειακού φορτίου:

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|z|\left[1+\frac{R^2}{2z^2}-1\right] \Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|z|\frac{R^2}{2z^2} \Rightarrow V = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\frac{R^2}{|z|} \Rightarrow V = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\pi R^2}{|z|} \Rightarrow \boxed{V = \frac{Q}{4|z|\pi\varepsilon_0}}$$

Όπως είναι αναμενόμενο, το δυναμικό εξαιτίας ενός μη αγώγιμου δίσκου φορτίου Q είναι το ίδιο με αυτό που προκαλεί ένα σημειακό φορτίο Q.

Το διπλανό γράφημα συγκρίνει τον λόγο $V(z/R)/V_0$, όπου $V_0 = Q/(4\pi\varepsilon_0 R)$ για σημειακό φορτίο και ομοιόμορφα φορτισμένο μη-αγώγιμο δίσκο.



3ο Παράδειγμα: Δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου

Βρήκαμε ότι το δυναμικό που προκαλεί φορτισμένος δίσκος ομοιόμορφης κατανομής φορτίου σε σημείο P σε απόσταση *z* είναι: $V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right]$

Το δυναμικό στο κέντρο του δίσκου ($z = 0$) είναι:

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}R = \frac{\sigma\pi R^2}{2\pi\varepsilon_0 R} = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \boxed{\Rightarrow V = 2V_0}$$

Το έργο που χρειάζεται για να φέρουμε το μοναδιαίο φορτίο από το άπειρο στο κέντρο του δίσκου.

Το αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο *P* θα είναι:

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]$$

που συμφωνεί με τον υπολογισμό ξεκινώντας από τον ορισμό του ηλεκτρικού πεδίου:

Στο όριο $R \gg z$, η εξίσωση δίνει $E_z = \sigma/2\varepsilon_0$ που είναι το ηλεκτρικό πεδίο άπειρης μη-αγώγιμης επιφάνειας.

4ο Παράδειγμα: Υπολογισμός ηλεκτρικού πεδίου από δυναμικό

Έστω ότι το ηλετρικό δυναμικό εξαιτίας μιας κατανομής φορτίου γράφεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες ως:

$$V(x, y, z) = Ax^2y^2 + Bxyz$$ όπου *A*, *B*, σταθερές.

Ποιο το ηλεκτρικό πεδίο που σχετίζεται με το δυναμικό αυτό;

Το ηλεκτρικό πεδίο βρίσκεται από τις εξισώσεις:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2Axy^2 - Byz$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -2Ax^2y - Bxz$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -Bxy$$

Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι:

$$\vec{E} = (-2Axy^2 - Byz)\hat{\imath} - (2Ax^2y + Bxz)\hat{\jmath} - Bxy\hat{k}$$