ΦΥΣ. 133

ΕΡΓΑΣΙΑ # 6 **Επιστροφή 23-3-2006**

1. Χρησιμοποιώντας την Lagrangian $\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 - U(r) = \mathcal{L}_{CM} + \mathcal{L}_{\sigma\chi\varepsilon\tau.}$ να γραφούν οι τρεις εξισώσεις Lagrange για τις σχετικές συντεταγμένες x, y και z και να δειχθεί ότι η κίνηση της σχετικής θέσης $\vec{r}$ είναι ίδια με αυτή ενός και μόνο σώματος με διάνυσμα θέσης $\vec{r}$, δυναμική ενέργεια U(r) και μάζα ίση με την ανηγμένη μάζα μ.

Χρησιμοποιώντας $\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 + \left(\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}} - U(r)\right)$ να γραφούν οι 3 εξισώσεις Lagrange

Μεταφερόμαστε στο σύστημα συντεταγμένων όπου $\dot{\vec{R}} = 0$.

Επομένως $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}} - U(r) = \frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x,y,z)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial x} = \mu\ddot{x} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial y} = \mu\ddot{y} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial z} = \mu\ddot{z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

3 εξισώσεις δύναμης για ένα σωματίδιο μάζας μ και διανύσματος θέσης $\vec{r}$ που κινείται κάτω από τη επίδραση του πεδίου της δύναμης $F = -\vec{\nabla}U$

2. Δύο μάζες m_1 και m_2 κινούνται σε ένα επίπεδο και αλληλεπιδρούν μέσω ενός δυναμικού $U(r)=\frac{1}{2}kr^2$. Να γραφεί η Lagrangian του συστήματος συναρτήσει του CM και τις σχετικές θέσεις $\vec{R}$ και $\vec{r}$. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης για τις συντεταγμένες X, Y (του CM) και x, y (σχετικής θέσης). Περιγράψτε την κίνηση και βρείτε την συχνότητα της σχετικής κίνησης.

Θέλουμε τη Lagrangian του συστήματος συναρτήσει του CM και των θέσεων $\vec{R}$ και $\vec{r}$

Τα σώματα αλληλεπιδρούν μέσω του δυναμικού $U=\frac{1}{2}kr^2$

$$L=\frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2+\frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2-\frac{1}{2}kr^2$$

Έστω $\vec{R}=(X,Y,Z)$, $\vec{r}=(x,y,z)$

$$\frac{\partial L}{\partial X}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \Rightarrow 0=\frac{d}{dt}(M\dot{X}) \Rightarrow \boxed{M\ddot{X}=0}$$

Ανάλογα για τα Y κ Z $\Rightarrow$ $\boxed{M\ddot{Y}=0}$ κ $\boxed{M\ddot{Z}=0}$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\vec{R}}=0}$$

Δεν υπάρχει επιτάχυνση για το ΚΜ.

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) \Rightarrow -kx=\frac{d}{dt}(\mu\dot{x}) \Rightarrow \boxed{\mu\ddot{x}=-kx}$$

και ανάλογα $\boxed{\mu\ddot{y}=-ky}$ $\boxed{\mu\ddot{z}=-kz}$

$$\Rightarrow \boxed{\mu\ddot{\vec{r}}=-k\vec{r}}$$

Εξίσωση 3-d αρμονικού ταλαντωτή

$$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{k}{\mu}}}$$

3. Ένα σωματίδιο είναι περιορισμένο να κινείται στην επιφάνειας ενός κώνου ο άξονας του οποίου είναι συμπίπτει με τον κατακόρυφο άξονα z ενώ η κορυφή του κώνου συμπίπτει με την αρχή των αξόνων και η μισή γωνία ανοίγματος του κώνου είναι α. (α) Να γραφεί η Lagrangian σε σφαιρικές συντεταγμένες r και φ. (β) Να βρεθούν οι δύο εξισώσεις κίνησης. Θεωρήστε ότι η εξίσωση κίνησης ως προς φ σαν την κατακοκόρυφο συνιστώσα της στροφορμής, l_z, και χρησιμοποιήστε την σχέση αυτή για να απαλείψετε την ποσότητα $\dot{\phi}$ από την ακτινική εξίσωση αντικαθιστώντας την με την σταθερά l_z. Έχει νόημα η νέα εξίσωση ως προς r όταν $l_z = 0$; Βρείτε τη τιμή r_0 του r για την οποία το σωματίδιο μπορεί να παραμείνει σε μια οριζόντια κυκλική διαδρομή. (γ) Υποθέστε ότι προσδίδεται στο σωματίδιο μια μικρή ακτινική ώθηση ώστε $r(t) = r_0 + \varepsilon(t)$, όπου $\varepsilon(t)$ είναι μικρό. Χρησιμοποιήστε την εξίσωση ως προς r για να δείτε αν η κυκλική τροχιά είναι σταθερή. Αν όντως είναι σταθερή, ποια είναι η συχνότητα με την οποία το r ταλαντώνεται γύρω από το r_0;

(α) Η Lagrangian του συστήματος θα εξαρτάται μόνο από r και φ αφού η γωνία θ είναι σταθερή. Δηλαδή έχουμε 2 βαθμούς ελευθερίας. $\mathcal{L} = \mathcal{L}(r, \phi)$.

Σε σφαιρικές συντεταγμένες η ταχύτητα του σώματος είναι: $v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \sin^2 a\, \dot{\phi}^2$

ενώ $U = mgz = mgr\cos a$

Έτσι $$\boxed{\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 a\, \dot{\phi}^2) - mgr\cos a} \quad (1)$$

(β) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}\left(mr^2 \sin^2 a\, \dot{\phi}\right) \Rightarrow \boxed{mr^2 \sin^2 a\, \dot{\phi} = \text{σταθ} = l_z} \quad (2)$$

Δηλαδή η z-συνιστώσα της στροφορμής διατηρείται

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) \Rightarrow mr\sin^2 a\, \dot{\phi}^2 - mg\cos a = m\ddot{r}$$

Αντικαθιστούμε από την (2) την $\dot{\phi}$ συναρτήσει της l_z

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{r} = \frac{l_z^2}{m^2 r^3 \sin^2 a} - g\cos a} \quad (3)$$

Αν $l_z = 0$, το σώμα απλά γλιστρά στην ακτινική διεύθυνση με επιτάχυνση $g\cos a$

Η συνθήκη για σταθερή οριζόντια κίνηση είναι $\ddot{r} = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} \boxed{r = r_0 = \left[\frac{l_z^2}{m g \sin^2 a \cos a}\right]^{1/2}}$

(γ) Αν $r = r_0 + \varepsilon$ τότε:

$$\ddot{r} = \ddot{\varepsilon} = \frac{l_z^2}{m^2 r_0^3 \sin^2 a}\left(1 + \frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{-3} - g\cos a \xRightarrow{\text{Ανάπτυγμα Taylor}} \ddot{\varepsilon} \simeq \frac{l_z^2}{m^2 r_0^3 \sin^2 a}\left(1 - 3\frac{\varepsilon}{r_0}\right) - g\cos a$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varepsilon} \simeq \frac{-3 l_z^2}{m^2 r_0^4 \sin^2 a}\, \varepsilon}$$

Δηλαδή απλή αρμονική κίνηση γύρω από r_0 με $\omega = \sqrt{\frac{3 l_z^2}{m^2 r_0^4 \sin^2 a}}$

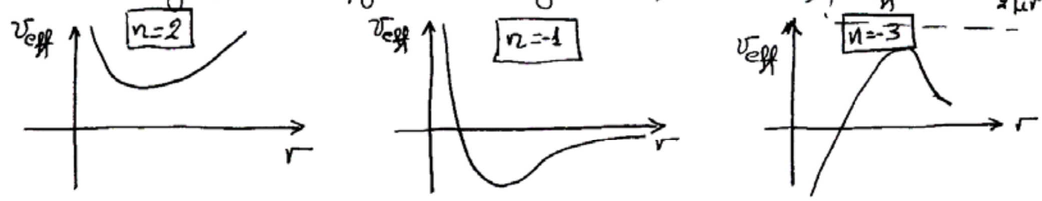
4. Θεωρείστε ένα σωματίδιο με ανηγμένη μάζα μ το οποίο περιστρέφεται μέσα σε ένα κεντρικό πεδίο $U = kr^n$ όπου $kn>0$. (α) Εξηγήστε τη σημασία της συνθήκης $kn>0$ ως προς το είδος της δύναμης. Σχεδιάστε το ενεργό δυναμικό U_{eff} για τις περιπτώσεις n = 2, -1 και -3. (β) Βρείτε την ακτίνα στην οποία το σωματίδιο (με δεδομένη στροφορμή l) μπορεί να περιστρέφεται σε σταθερή ακτίνα. Για ποιες τιμές του n η κυκλική αυτή τροχιά είναι ευσταθής. Τα γραφήματα του U_{eff} δείχνουν κάτι τέτοιο. (γ) Για την σταθερή περίπτωση, δείξτε ότι η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων γύρω από την κυκλική τροχιά είναι $\tau_{\tau\alpha\lambda} = \tau_{\pi\varepsilon\rho.} / \sqrt{n+2}$. Εξηγήστε γιατί αν $\sqrt{n+2} = \dfrac{p}{q}$, με p και q ακεραίους τότε οι τροχιές αυτές είναι κλειστές. Σχεδιάστε τις τροχιές αυτές για n = 2, -1 και 7.

(α) Σωματίδιο κινείται μέσα σε πεδίο κεντρικής δύναμης με $U(r) = kr^n$ όπου $kn>0$

Αυτό σημαίνει ότι είτε $k>0$ και $n>0$ ή $k<0$ και $n<0$.

$F = -\dfrac{dU}{dr} = -knr^{n-1}$ Επομένως $kn>0$ δηλώνει ότι έχουμε μια ελκτική δύναμη

Σχεδιάζουμε το ενεργό δυναμικό για $n = 2, -1$ και -3, $\boxed{U_{eff} = kr^n + \dfrac{l^2}{2\mu r^2}}$



Όπως και στην άσκηση του φροντιστηρίου, θα μπορούσατε να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις για τιμές του r που παρουσιάζονται σταθερές/ασταθείς θέσεις ισορροπίας και μελετώντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης U_{eff} για $r \to \infty$, $r \to 0$.

(β) Ξέρουμε ότι $U_{eff} = kr^n + \dfrac{l^2}{2\mu r^2} \Rightarrow F = -\dfrac{dU}{dr} = -knr^{n-1} + \dfrac{l^2}{\mu r^3} = \emptyset$ στη θέση ισορροπίας

οπότε $\boxed{r_0 = \left[\dfrac{l^2}{\mu k n}\right]^{1/(n+2)}}$ (A)

Για να βρούμε το είδος της σταθερότητας (ευσταθής/ασταθής) χρειάζεται να μελετήσουμε

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2U}{dr^2} &= kn(n-1)r^{n-2} + 3\frac{l^2}{\mu r^4} \\ \text{Αλλά } \cancel{k}nr_0^{n-1} &= \cancel{\ }\frac{l^2}{\mu r_0^3}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{knr_0^{n-1}}(n-1)r_0^{-1} + 3\frac{l^2}{\mu r_0^4} = \frac{d^2U}{dr^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2U}{dr^2} = (n-1)\frac{l^2}{\mu r_0^4} + \frac{3l^2}{\mu r_0^4} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2U}{dr^2} = \frac{(n+2)l^2}{\mu r_0^4}}$$

Επομένως για $n > -2$ $\dfrac{d^2U}{dr^2} > 0$. και έχουμε ευσταθή ισορροπία.

Το οποίο και συμφωνεί με τα γραφήματα για $n=2$ και $n=-1$.

(γ) Για σταθερή ισορροπία, θέλουμε την περίοδο των μικρών ταλαντώσεων γύρω από τη σταθερή κυκλική τροχιά:

Όταν $r = r_0 + \varepsilon$ (όπου ε μικρό) έχουμε: (παίρνοντας το ανάπτυγμα Taylor)

$$U_{eff} = C + \frac{1}{2} U''_{eff}(r_0)\,\varepsilon^2 = \boxed{C + \frac{1}{2}\frac{n+2}{\mu r_0^4}\ell^2\varepsilon^2}$$

όπου $n > -2$ σύμφωνα με το (β)

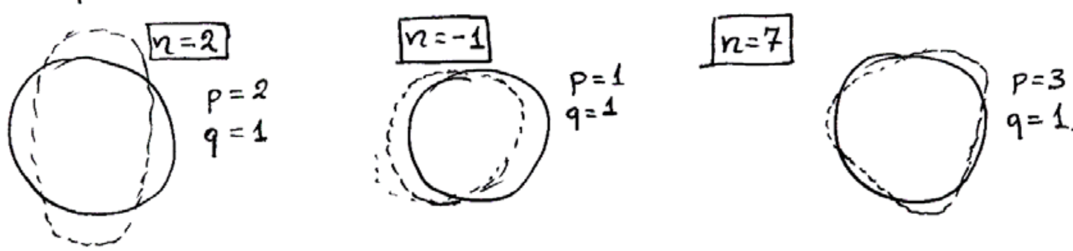
Αλλά $\mu\ddot{\varepsilon} = -U'_{eff} \Rightarrow \boxed{\mu\ddot{\varepsilon} = -\frac{(n+2)\ell^2}{\mu r_0^4}\varepsilon} \Rightarrow \ddot{\varepsilon} = -\frac{(n+2)\ell^2}{\mu^2 r_0^4}\varepsilon$

Δηλαδή έχουμε και πάλι την εξίσωση ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή με $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{n+2}{\mu^2}\frac{\ell}{r_0^2}}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{n+2}\,\frac{\ell}{\mu r_0^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{n+2}\,\omega_0 \quad \text{όπου } \omega_0 = \frac{\ell}{\mu r_0^2}$$

Επομένως η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων θα είναι: $\boxed{T_{\tau\alpha\lambda} = \frac{T_0}{\sqrt{n+2}}}$

(δ) Αν $\sqrt{n+2} = \frac{p}{q}$ όπου p και q ακέραιοι τότε μετά από χρόνο $t = pT_{\tau\alpha\lambda} = qT_0$ και οι τροχιακές αλλά και οι ακτινικές ταλαντώσεις επανέρχονται στην αρχική τους θέση:



5. Για ένα δεδομένο δορυφόρο της γης με δεδομένη στροφορμή *l*, δείξτε ότι η ελάχιστη απόσταση προσέγγισης r_{min}, σε μια παραβολική τροχιά είναι το μισό της κυκλικής τροχιάς.

Για οποιαδήποτε keplerian τροχιά έχουμε: $r = \dfrac{c}{1+e\cos\phi}$ όπου $c = \dfrac{l^2}{mk}$

Για κυκλική τροχιά $e=0 \Rightarrow r = c$

Για παραβολική τροχιά $e=1 \Rightarrow \boxed{r_{min} = \dfrac{c}{1+e} = \dfrac{c}{2}}$

Επομένως η απόσταση της μέγιστης προσέγγισης σε παραβολική τροχιά, r_{min}, είναι το μισό της κυκλικής τροχιάς.

6. Ένα σωματίδιο κινείται στο πεδίο μιας κεντρικής δύναμης: $U(r) = -k\dfrac{e^{-ar}}{r}$, όπου k και α είναι θετικές σταθερές. (α) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ισοδυναμίας με ένα μονοδιάστατο δυναμικό, περιγράψτε το είδος της κίνησης, προσδιορίζοντας το εύρος των τιμών που μπορούν να πάρουν η ενέργεια Ε και η στροφορμή *l* σε κάθε περίπτωση. (β) Πότε μπορούν να παρουσιαστούν σταθερές κυκλικές τροχιές; (γ) Να βρεθεί η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων γύρω από την κυκλική τροχιά.

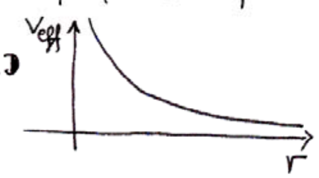
.

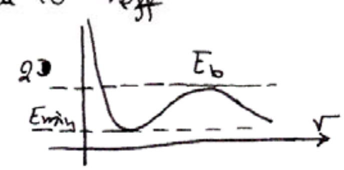
Έχουμε το κεντρικό δυναμικό $V = -k\dfrac{e^{-ar}}{r}$ όπου k και a θετικές σταθερές

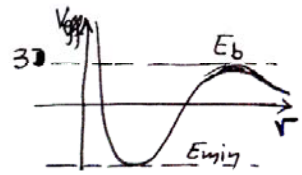
(α) Σύμφωνα με ~~τη~~ μέθοδο του μονοδιάστατου δυναμικού, θα έχουμε για την κίνηση μιας μάζας m :

$$m\ddot{r} = -\frac{dV_{eff}}{dr} \quad \text{όπου} \quad V_{eff} = -\frac{ke^{-ar}}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

Θεωρούμε 3 περιπτώσεις για το V_{eff}

1)


2)


3)


Σημειωτέον ότι για a>0, ο όρος από το δυναμικό στροφορμής κυριαρχεί πάντα για αρκετά μεγάλα r. Επομένως υπάρχει πάντοτε μια μή φραγμένη τροχιά για E>0

1) $\underline{E>0}$: Η συνθήκη αυτή είναι απαραίτητη για την περίπτωση (1) και μόνο μή φραγμένες τροχιές υπάρχουν για κάθε E. Η περίπτωση αντιστοιχεί σε μικρές τιμές του k και μεγάλες τιμές της στροφορμής l.

2) $\underline{E>0}$: Η συνθήκη αυτή είναι και πάλι απαραίτητη. Για $E_{min} < E < E_b$ υπάρχουν και φραγμένες τροχιές πέρα από τις μή-φραγμένες.

3) $\underline{E \geq E_{min}}$: Η συνθήκη αυτή απαιτείται για επιτρεπτή κίνηση. Για $E>0$ υπάρχει πάντα μή-φραγμένη τροχιά. Για $E_{min} < E < E_b$ μια φραγμένη τροχιά υπάρχει. Αυτή αντιστοιχεί στην περίπτωση μεγάλων τιμών για k και μικρών για l.

(β) Πότε είναι δυνατές κυκλικές τροχιές?

Αυτό θα συμβεί όταν V_{eff} έχει τοπικά ελάχιστα. Από τα προηγούμενα γραφήματα αυτό είναι πιθανό μόνο για τις περιπτώσεις (2) και (3) μόνο.

$$\left.\frac{dV_{eff}}{dr}\right|_{r=r_0}=0 \Rightarrow \left. k a\frac{e^{-ar}}{r}+k\frac{e^{-ar}}{r^2}-\frac{\ell^2}{mr^3}\right|_{r=r_0}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{k\left(a+\frac{1}{r_0}\right)\frac{e^{-ar_0}}{r_0}-\frac{\ell^2}{mr_0^3}=0}$$

(γ) Για να βρούμε την περίοδο των μικρών ταλαντώσεων γύρω από την κυκλική τροχιά:

$$m\ddot{r}=-\frac{dV_{eff}}{dr} \Rightarrow m\ddot{r}=-\left\{\left.\frac{dV_{eff}}{dr}\right|_{r=r_0}+(r-r_0)\left.\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\right|_{r=r_0}+\cdots\right\}$$

Ανάπτυγμα Taylor γύρω από την r_0

Έστω ότι $r=r_0+\varepsilon$ θα έχουμε:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}=\underbrace{-\frac{1}{m}\left.\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\right|_{r=r_0}}_{-\omega^2}\varepsilon \quad (A)$$

οπότε έχουμε εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή: $\boxed{\ddot{\varepsilon}=-\omega^2\varepsilon}$

Επομένως χρειάζεται να βρούμε τη λύση για μικρές ακτινικές ταλαντώσεις της μορφής $\varepsilon(t)=A\cos(\omega t+\phi)$ οπότε βρίσκουμε και τη συχνότητα/περίοδο των ταλαντώσεων.

$$\left.\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\right|_{r=r_0}=-k\left(a+\frac{1}{r_0}\right)^2\frac{e^{-ar_0}}{r_0}-k\frac{e^{-ar_0}}{r_0^3}+\frac{3\ell^2}{mr_0^4} \quad (B)$$

Αλλά από (A) $\Rightarrow$ $$\omega^2=\frac{1}{m}\left.\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\right|_{r=r_0}\overset{(B)}{=}-\frac{k}{m}\left(a+\frac{1}{r_0}\right)^2\frac{e^{-ar_0}}{r_0}-\frac{ke^{-ar_0}}{mr_0^3}+\frac{3\ell^2}{m^2r_0^4}$$