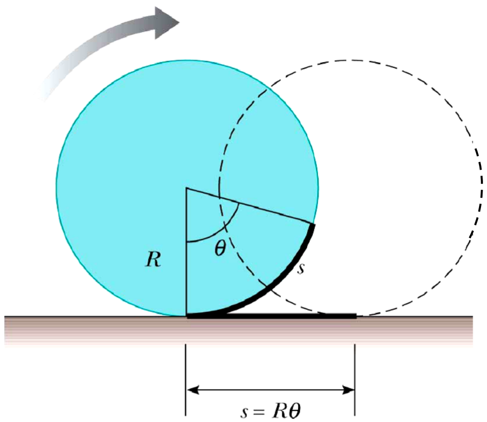
Κύληση

Κύλιση χωρίς ολίσθηση

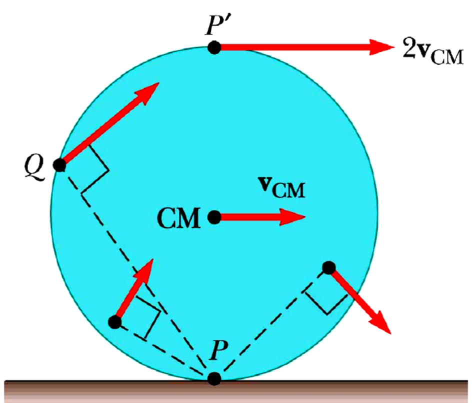


Η συνθήκη για να έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση είναι:

$$s = R\theta = d \qquad \text{ή} \qquad a_{\varepsilon\phi.} = \alpha R$$

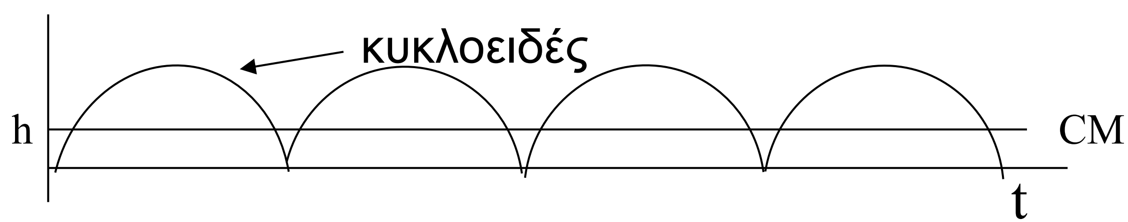
$$V_{CM} = \frac{d}{dt}(R\theta) = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$ για σταθερό R

Το σημείο επαφής ρόδας – εδάφους : $V_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\eta\varsigma/\varepsilon\delta\alpha\varphi o\upsilon\varsigma} = 0$ δεν υπάρχει ολίσθηση



Επομένως $V_{\mathrm{CM}/\varepsilon\delta\alpha\varphi o\upsilon\varsigma} = V_{\mathrm{CM}/\varepsilon\pi\alpha\varphi\eta\varsigma} + V_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\eta\varsigma/\varepsilon\delta\alpha\varphi o\upsilon\varsigma} = \omega R$

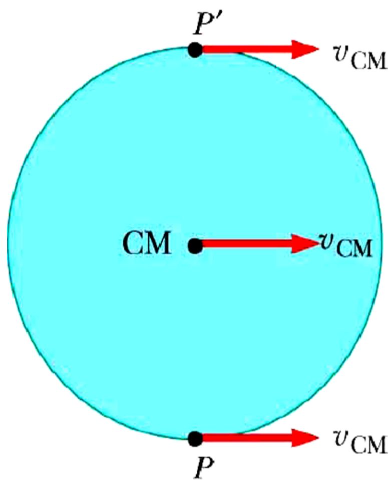
$$V_{\varepsilon\pi\alpha\varphi\eta\varsigma/\mathrm{CM}} = -\omega R$$



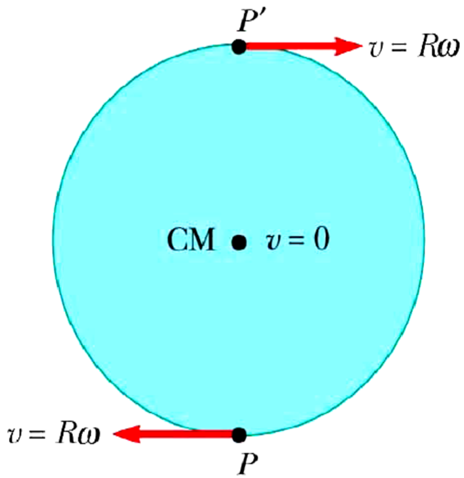
Με σημείο αναφοράς
το έδαφος ή ένα σημείο P

Γράφημα της θέσης ενός σημείου
της ρόδας συναρτήσει του χρόνου

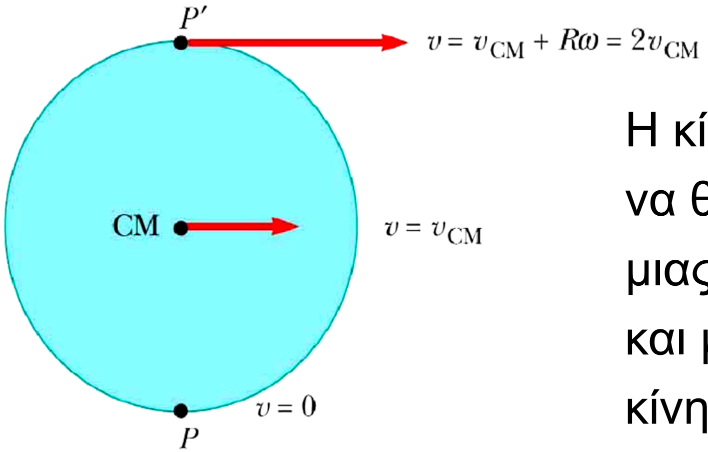
Κύλιση χωρίς ολίσθηση



Καθαρά μεταφορική



Καθαρά περιστροφική

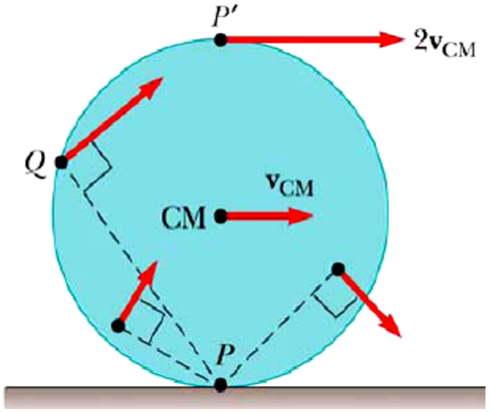


Η κίνηση της κύλισης μπορεί να θεωρηθεί σαν ο συνδυασμός μιας καθαρά μεταφορικής και μιας καθαρά περιστροφικής κίνησης

Κινητική ενέργεια κύλισης

Η ολική κινητική ενέργεια ενός σώματος που κυλίεται χωρίς ολίσθηση είναι το άθροισμα της κινητικής ενέργειας του κέντρου μάζας του λόγω μεταφοράς και της κινητικής του ενέργειας λόγω περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας του.

$$K = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$



Ξέρουμε ότι η κινητική ενέργεια περιστροφής ως προς το σημείο P δίνεται από τη σχέση:

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \qquad (1)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα παράλληλων αξόνων έχουμε:

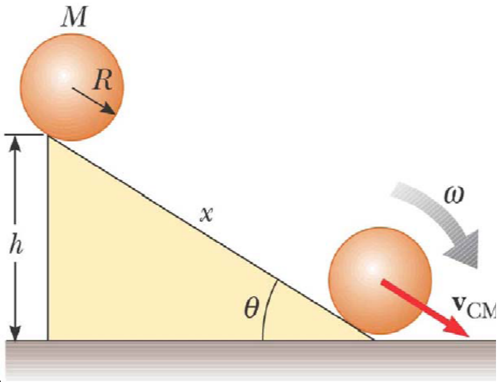
$$I_P = I_{CM} + MR^2$$ αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

Τι κάνει ένα σώμα να κυλά?

- Ένα σώμα κυλά χωρίς ολίσθηση όταν η δύναμη της στατικής τριβής εμφανίζεται μεταξύ του σώματος και της επιφάνειας.
  - Η τριβή είναι στατική επειδή το σημείο επαφής του σώματος με την επιφάνεια είναι, τη στιγμή της επαφής, ακίνητο.
- Η δύναμη της τριβής δεν παράγει έργο επειδή δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της.
- Είναι η ροπή της δύναμης της τριβής που κάνει το σώμα να κυλά.

  Καθώς το σώμα κυλά προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου θα έχουμε από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας:



$$U_g^i + K^i = U_g^f + K^f \Rightarrow mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_f^2$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_f^2\left[1 + \frac{I_{CM}}{mR^2}\right] \Rightarrow v_{CM} = \left[\frac{2gh}{1 + \left(I_{CM}/mR^2\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

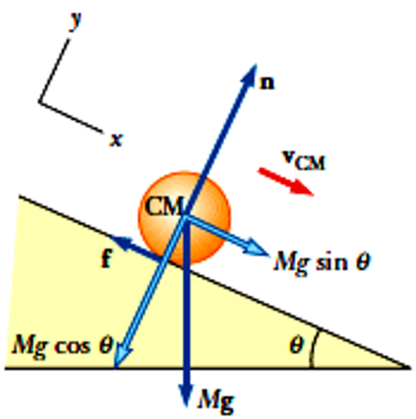
Αλλά $I_{CM} = KmR^2$ (K εξαρτάται από το σώμα)

$$\Rightarrow v_{CM} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \left(KmR^2/mR^2\right)}} = \sqrt{\frac{2gh}{1+K}}$$

Δυο ομοιόμορφοι συμπαγείς κύλινδροι έχουν διαφορετική μάζα και ροπή αδράνειας. Ξεκινούν από την κατάσταση της ηρεμίας από την κορυφή ενός κεκλιμένου επιπέδου κλίσης θ ως προς τον ορίζοντια διεύθυνση και κυλούν χωρίς να ολισθαίνουν προς τη βάση του επιπέδου. Ποιος κύλινδρος φθάνει πρώτος στη βάση του επιπέδου;

(Α) Ο κύλινδρος με τη μεγαλύτερη μάζα
(Β) Ο κύλινδρος με τη μικρότερη μάζα
(Γ) Ο κύλινδρος με τη μεγαλύτερη ροπή αδράνειας
(Δ) Ο κύλινδρος με τη μικρότερη ροπή αδράνειας
(Ε) Οι δυο κύλινδροι φθάνουν μαζί

Τα δυο σώματα κατεβαίνουν με την ίδια επιτάχυνση αφού:



$$\tau = fR = I\alpha = I\frac{a_{CM}}{R} \Rightarrow fR^2 = Ia_{CM} \Rightarrow a_{CM} = \frac{fR^2}{I}$$

Αλλά $Mg\sin\theta - f = Ma_{CM} \Rightarrow f = Mg\sin\theta - Ma_{CM}$

Αντικατάσταση στην 1η εξίσωση δίνει $a_{CM} = \dfrac{MR^2 g\sin\theta}{I + MR^2}$

Η ροπή αδράνειας είναι της μορφής: $I = kMR^2$

Επομένως $a_{CM} = g\sin\theta/(k+1)$ και άρα καλύπτουν ίσα διαστήματα σε ίσους χρόνους και άρα φθάνουν ταυτόχρονα

Β’ τρόπος - Ενεργειακά

Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας (η τριβή δεν παράγει έργο αφού δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της) έχουμε

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = \Delta E_{\kappa\iota\nu.} + \Delta U_{\beta\alpha\rho.} = 0 \Rightarrow \Delta E_{\kappa\iota\nu.} = -\Delta U_{\beta\alpha\rho.} \Rightarrow E_k^f - E_k^i = -\left(U_g^f - U_g^i\right) \quad (1)$$

Αλλά $E_k^i = 0 = U_g^f$ ενώ $U_g^i = mgh = mgS\sin\theta$ (2)

$$E_k^f = \frac{1}{2}m\upsilon_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\frac{\upsilon_{CM}^2}{R^2}$$ όπου $\upsilon_{CM} = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon_{CM}}{R}$

Όπως προηγουμένως η ροπή αδράνειας ως προς το CM είναι: $I_{CM} = kMR^2$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της τελικής κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$E_k^f = \frac{1}{2}m\upsilon_{CM}^2 + \frac{1}{2}kMR^2\frac{\upsilon_{CM}^2}{R^2} \Rightarrow E_k^f = \frac{1}{2}m\upsilon_{CM}^2 + \frac{1}{2}km\upsilon_{CM}^2 \Rightarrow E_k^f = \frac{1}{2}(k+1)m\upsilon_{CM}^2 \quad (3)$$

Επομένως από τις (2) και (3) η (1) γίνεται:

$$\frac{1}{2}(k+1)m\upsilon_{CM}^2 = mgh \Rightarrow \boxed{\upsilon_{CM}^2 = \frac{2gh}{(k+1)}}$$

Η υ_{CM} είναι ανεξάρτητη από τις διαστάσεις και μάζα του σώματος!! Εξαρτάται μόνο από το k (σχήμα)

Χρειαζόμαστε την επιτάχυνση. Αλλά από κινηματική έχουμε ότι:

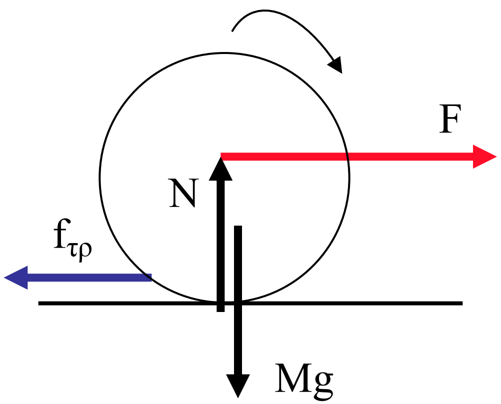
$$\upsilon_{CM_f}^2 = \upsilon_{CM_i}^2 + 2a_{CM}(x - x_0) \Rightarrow \upsilon_{CM_f}^2 = 2a_{CM}S \Rightarrow \frac{2gh}{(k+1)} = 2a_{CM}S \Rightarrow \frac{gS\sin\theta}{(k+1)} = a_{CM}S \Rightarrow$$

$$\boxed{a_{CM} = \frac{g\sin\theta}{(k+1)}}$$

Καρούλι σε επιφάνεια με τριβή

Ποια είναι η μέγιστη δύναμη F που μπορώ να τραβήξω το καρούλι πριν αυτό αρχίσει να γλιστρά

Λύση



Η τριβή δίνει την ροπή για να κυλήσει το καρούλι.

Το κέντρο του καρουλιού είναι το σημείο στροφής

Επομένως μόνο η τριβή $f_{τρ}$, παράγει ροπή.

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{f} = Rf \quad \text{με φορά} \quad \otimes$$

$$\sum F_x = F - f = Ma_x \qquad (1)$$

$$\sum F_y = N - Mg = 0 \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum \tau_z = fR = I_{CM}\alpha_z \\ \\ a_x = \alpha_z R \end{array}\right\} \Rightarrow \sum \tau_z = I_{CM}\frac{a_x}{R} \qquad (3)$$

Η συνθήκη κύλισης είναι: $a_x = \alpha_z R$

$$\tau = Rf_{τρ} = \frac{I_{CM}\,a_x}{R} \Rightarrow a_x = \frac{R^2 f_{τρ}}{I_{CM}} \overset{(1)}{\Rightarrow} F - f_{τρ} = \frac{MR^2 f_{τρ}}{I_{CM}} \Rightarrow f_{τρ} = \frac{F}{\left(1 + \frac{MR^2}{I_{CM}}\right)} \Rightarrow f_{τρ} = \frac{F}{3}$$

$$I_{CM} = \frac{MR^2}{2}$$

$$f_{τρ}^{\max} = \mu_s N = \mu_s Mg \quad \Rightarrow F_{\max} = 3\mu_s Mg$$

Καρούλι σε επιφάνεια με τριβή (συνέχεια)

Επομένως αν

$$F > F_{\max} = 3 f_{\tau\rho}^{\max} = 3\mu_s M g \quad \Rightarrow \quad \text{γλιστρά}$$

Τι σημαίνει αυτό για την μέγιστη γραμμική επιτάχυνση α_{max}?

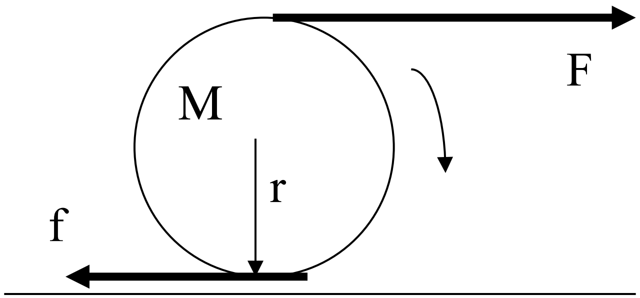
$$F_{\max} - f_{\tau\rho}^{\max} = M a_{\max} \Rightarrow$$

$$3 f_{\tau\rho}^{\max} - f_{\tau\rho}^{\max} = 2 f_{\tau\rho}^{\max} = M a_{\max} \Rightarrow$$

$$a_{\max} = \frac{2 f_{\tau\rho}^{\max}}{M} \Rightarrow a_{\max} = \frac{2 M \mu_s g}{M} \Rightarrow a_{\max} = 2\mu_s g$$

Ανεξάρτητη της μάζας Μ!

Ένα ακόμα παράδειγμα με τροχαλίες



$$\sum \tau_z = I\alpha_z = (f+F)r \Rightarrow \alpha_z = \frac{(f+F)r}{I} \qquad (1)$$

$$F - f = Ma_x = M\alpha_z r \qquad (2)$$

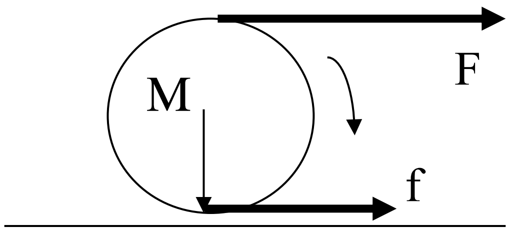
Αφαιρούμε την (2) από την (1) εξίσωση:

$$f + F - F + f = I\frac{\alpha_z}{r} - M\alpha_z r \Rightarrow$$

$$2f = \frac{1}{2}Mr^2\frac{\alpha_z}{r} - M\alpha_z r = \frac{1}{2}M\alpha_z r - M\alpha_z r = -\frac{1}{2}M\alpha_z r \Rightarrow$$

$$f = -\frac{1}{4}M\alpha_z r < 0$$

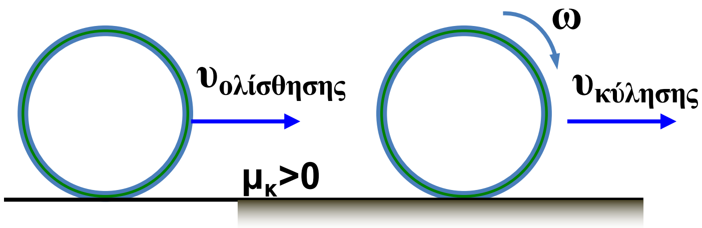
Σχεδιάσαμε την f ανάποδα!

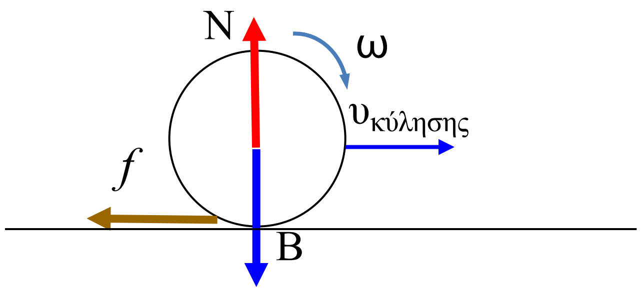


Στην περίπτωση αυτή, η τριβή αντιτίθεται στην κύλιση και επομένως η επιτάχυνση α_x θα είναι μεγαλύτερη

Κύληση με ολίσθηση - Παράδειγμα

Σώμα ροπής αδράνειας $I = KmR^2$ γλυστρά χωρίς να κυλά κατά μήκος μια λείας επιφάνειας. Το σώμα έχει αρχική ταχύτητα $υ_{ολίσθησης}$. Κατά τη διαδρομή του το σώμα συναντά μια τραχιά επιφάνεια (συντελεστή τριβής $μ_κ$. Αφού κινηθεί κατά μια απόσταση το σώμα αρχίζει να κυλά χωρίς να ολισθαίνει και η μεταφορική του ταχύτητα είναι $υ_{κύλησης}$. Ποιος ο λόγος των ταχυτήτων $υ_{κύλησης}/υ_{ολίσθησης}$





Η τριβή αρχίζει να περιστρέφει το σώμα δίνοντας του μια γωνιακή ταχύτητα ω

Η ω αυξάνει με το χρόνο ενώ το σώμα εξακολουθεί να ολισθαίνει μέχρι τη στιγμή t, η ω να πάρει τιμή ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη: $\upsilon_{cm}^{f} = \omega_f R$

Επομένως υπάρχει μια γωνιακή επιτάχυνση ώστε: $\omega_t = \alpha t$

Η ροπή της τριβής είναι: $\tau = fR = I\alpha \Rightarrow \alpha = fR/I$

Η κινητική τριβή όμως είναι: $f = \mu_\kappa N = \mu_\kappa mg$

$$\Rightarrow \alpha = \mu_\kappa mgR/I$$

και επιβραδύνει το σώμα αφού αυτό ολισθαίνει: $\sum F_x = ma_{cm} = f \Rightarrow f = ma_{cm}$

$$\Rightarrow \mu_\kappa mg = ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \mu_\kappa g$$

Η επιβράδυνση αυτή ελαττώνει τη ταχύτητα του ΚΜ για όσο χρόνο t, το σώμα περιστρέφεται ολισθαίνοντας: $\upsilon_{cm}^{t} = \upsilon_{cm}^{ολισθ.} - a_{cm}t$ ($\upsilon^{ολισθ.}$ είναι η ταχύτητα ολίσθησης)

Κύληση με ολίσθηση - Παράδειγμα

Έχουμε επομένως τις εξισώσεις κίνησης:

$$\left.\begin{aligned}\omega_t &= \alpha t \\ \alpha &= \mu_\kappa mgR/I\end{aligned}\right\} \omega_t = \frac{\mu_\kappa mgR}{I}t$$ γωνιακή ταχύτητα στεφανιού τη στιγμή t

$$\left.\begin{aligned}a_{cm} &= \mu_\kappa g \\ \upsilon^t_{cm} &= \upsilon^i_{cm} - a_{cm}t\end{aligned}\right\} \upsilon^t_{cm} = \upsilon^{o\lambda\iota\sigma\theta.}_{cm} - \mu_\kappa gt$$ μεταφορική ταχύτητα CM στεφανιού τη στιγμή t

Τη στιγμή t, που το στεφάνι σταματά να ολισθαίνει, η τριβή γίνεται στατική τριβή (σημείο επαφής με το έδαφος είναι στιγμιαία ακίνητο) και αρχίζει κύλιση χωρίς ολίσθηση:

$$\upsilon^f_{cm} = \omega^f_t R \Rightarrow \upsilon^f_{cm} = \frac{\mu_\kappa mgR^2}{I}t \Rightarrow t = \frac{I\upsilon^f_{cm}}{\mu_\kappa mgR^2}$$ και η $\upsilon^t_{cm} = \upsilon^{o\lambda\iota\sigma\theta.}_{cm} - \mu_\kappa gt$ γίνεται:

$$\upsilon^f_{cm} = \upsilon^{o\lambda\iota\sigma\theta.}_{cm} - \mu_\kappa g\frac{I\upsilon^f_{cm}}{\mu_\kappa mgR^2} \Rightarrow \upsilon^f_{cm} = \upsilon^{o\lambda\iota\sigma\theta.}_{cm} - \frac{I}{mR^2}\upsilon^f_{cm} \Rightarrow \upsilon^{o\lambda\iota\sigma\theta.}_{cm} = \left(1+\frac{I}{mR^2}\right)\upsilon^f_{cm}$$

Αλλά $I = KmR^2$ και επομένως: $\upsilon^{o\lambda\iota\sigma\theta.}_{cm} = \left(1+\frac{KmR^2}{mR^2}\right)\upsilon^f_{cm} \Rightarrow \upsilon^{o\lambda\iota\sigma\theta.}_{cm} = (1+K)\upsilon^f_{cm}$

Η στατική τριβή δεν προκαλεί μεταβολή στη κινητική κατάσταση του σώματος και η ταχύτητα του CM του παραμένει σταθερή