# Στροφορμή

# Στροφορμή

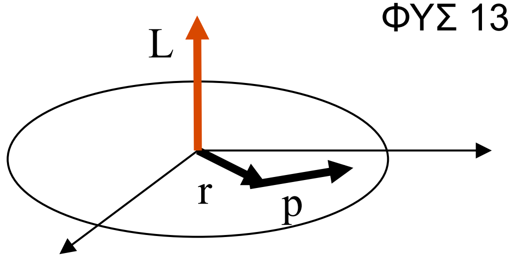
- Ένα από τα βασικά μεγέθη που σχετίζονται με την περιστροφική κίνηση είναι η στροφορμή
- Θυμηθείτε ότι για μάζα m που κινείται με ταχύτητα v ορίζουμε την ορμή p=mv (όπου η ταχύτητα μετριέται ως προς σύστημα αναφοράς με αρχή O).
  - Η μεταβολή της ορμής σχετίζεται με την ολική δύναμη βάση του 2ου νόμου του Newton.
- Η στροφορμή έχει την παρόμοια σημασία:

Οποιαδήποτε η τροχιά ενός σώματος, ευθύγραμμη, καμπυλόγραμμη η **στροφορμή L** του σώματος σε κάθε σημείο της τροχιάς του **ως προς ένα αδρανειακό σημείο αναφοράς** (όπως η αρχή των αξόνων) δίνεται από:

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$$

Οι διαστάσεις της στροφορμής είναι $Kgm^2/sec$

# Στροφορμή $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$




- Το μέτρο και η διεύθυνση της στροφορμής σχετίζονται πάντα με την αρχή του συστήματος συντεταγμένων ή το σημείο αναφοράς ως προς το οποίο μετρούμε την στροφορμή.
- Αν η διεύθυνση της ταχύτητας του σώματος περνά από το σημείο αναφοράς τότε η στροφορμή είναι μηδέν.
- Θα αποδείξουμε τώρα το ανάλογο του 2$^{ου}$ νόμου του Newton σε περιστροφική κίνηση:
  - Εφαρμόζοντας μια ροπή μπορούμε να αλλάξουμε την στροφορμή ενός σώματος:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} - \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \Rightarrow$$

$$\vec{\tau} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} - \vec{\mathrm{v}} \times m\vec{\mathrm{v}} \Rightarrow \vec{\tau} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

Αν $\sum \vec{\tau} = 0$ τότε $\vec{L} = \sigma\tau\alpha\theta.$ $\Rightarrow$ **Νόμος διατήρησης στροφορμής**

# Προσοχή!!!!

- Η εξίσωση για την μεταβολή της στροφορμής: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ ισχύει μόνο όταν:

  (α) Η αρχή είναι ένα σταθερό σημείο

  (β) Όταν το σημείο αναφοράς είναι το CM

- Είναι μια διανυσματική εξίσωση και επομένως έχουμε 3 εξισώσεις

$$\tau_x = \frac{dL_x}{dt}, \qquad \tau_y = \frac{dL_y}{dt}, \qquad \tau_z = \frac{dL_z}{dt}$$

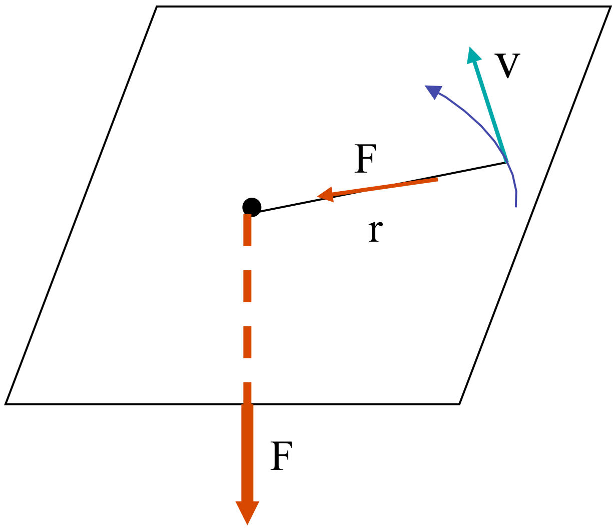
- Προσοχή: Η ροπή και η στροφορμή πρέπει να υπολογίζονται ως προς το ίδιο σημείο ή άξονα

- Για να βρούμε την στροφορμή ενός συστήματος προσθέτουμε τις στροφορμές κάθε ξεχωριστού σώματος του συστήματος:

$$L_z = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = I\omega \qquad \sum \tau_{\varepsilon\xi} = \frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

# Παράδειγμα

Σώμα εξαρτημένο στην άκρη ενός νήματος, σε επίπεδο, με δύναμη κάθετη στο επίπεδο. Αλλάζετε το r, τι συμβαίνει στη στροφορμή;




$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\mathrm{v}r\sin\theta \Rightarrow \vec{L} = m\mathrm{v}r \qquad (\theta = 90^0)$$

Για 2 διαφορετικές θέσεις του σώματος θα έχουμε:

$$m\mathrm{v}_1 r_1 = m\mathrm{v}_2 r_2 \Rightarrow \mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2 \frac{r_2}{r_1}$$

# Στροφορμή

Είδαμε ότι $\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Αλλά ξέρουμε ότι $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

$$\Rightarrow I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

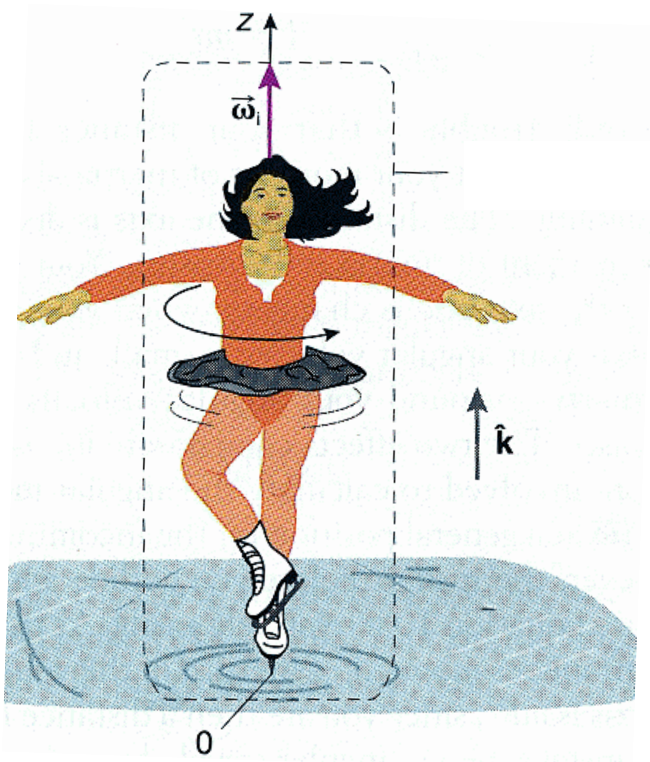
Η παραπάνω σχέση ισχύει για στερεό σώμα που περιστρέφεται γύρω από σταθερό σημείο ή σταθερό άξονα ή άξονα που περνά από το CM του και παραμένει παρ/λος προς την αρχική του διεύθυνση.

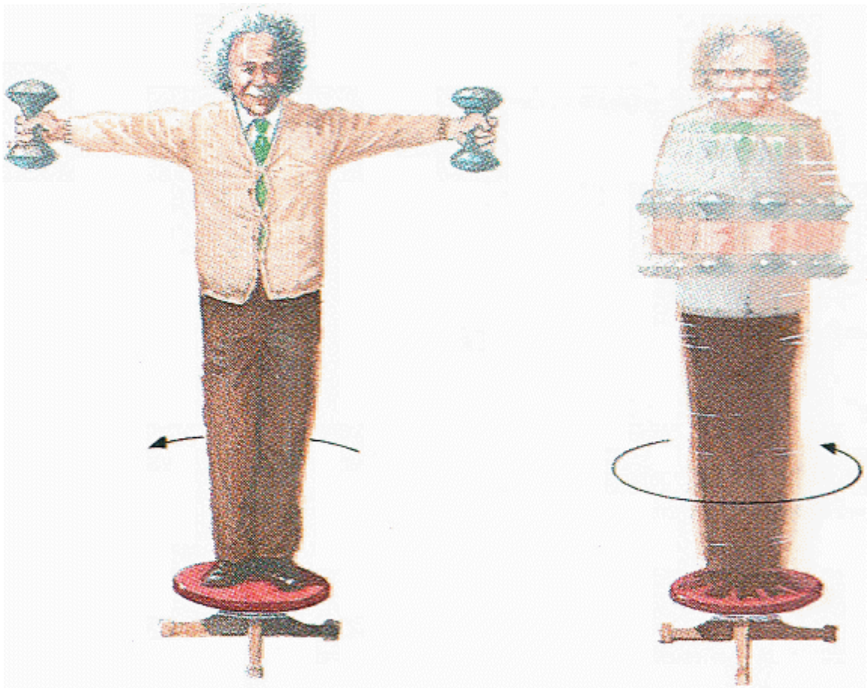
Αν η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών είναι μηδέν τότε $\vec{L}_i = \vec{L}_f$

σε αναλογία με διατήρηση της γραμμικής ορμής

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \quad \text{όταν} \quad \sum \vec{F}_{\varepsilon\xi.} = 0$$

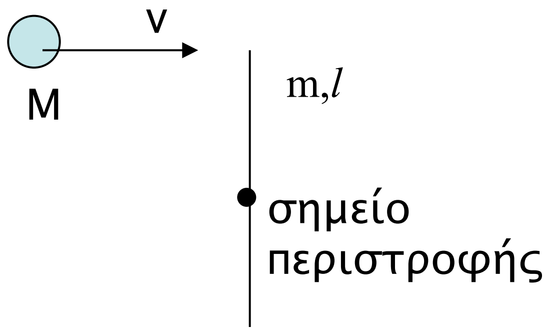
# Τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα



# Παράδειγμα

Μια μπάλα μάζας M συγκρούεται με ένα ραβδί που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το κέντρο του. Αν η κρούση είναι πλαστική ποια είναι η προκληθείσα γωνιακή ταχύτητα?




## Λύση

Αρχικά υπολογίζουμε τη στροφορμή ως προς το σημείο περιστροφής.

Ως προς το σημείο αυτό η στροφορμή διατηρείται επειδή η εξωτερική δύναμη που δρα πάνω του δεν προκαλεί ροπή.

$$L_i = M\mathrm{v}\frac{l}{2} \quad \text{(στροφορμή μπάλας)}$$

$$L_f = I\omega = \left(I_{\mathrm{CM}}^{\rho\alpha\beta.} + I_{\mu\pi\alpha\lambda\alpha\varsigma}\right)\omega = \left(\frac{1}{12}ml^2 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)\omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\mathrm{M}\mathrm{v}l/2}{\frac{ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{4}} = \frac{\mathrm{M}\mathrm{v}l}{\frac{ml^2}{6} + \frac{Ml^2}{2}}$$

**Προσοχή**: Σε περιπτώσεις που ένα σώμα παραμορφώνεται και αλλάζει η ροπή αδράνειας I, η διατήρηση της στροφορμής, L, λέει

$$I_{\mathrm{i}}\omega_{\mathrm{i}} = I_{\mathrm{f}}\omega_{\mathrm{f}}$$

# Merry-go-round

Έχει ακτίνα R=1.3m και ροπή αδράνειας I και στρέφεται με $\omega_0$.
Ενα αγόρι μάζας Μ που περπατούσε με κατεύθυνση προς το κέντρο, πηδάει πάνω στο merry-go-round. Ποια η νέα ω?
Αργότερα ένα κορίτσι μάζας Μ που τρέχει εφαπτομενικά προς το merry-go-round πηδά πάνω. Αν η διεύθυνση της κίνησης της είναι ίδια με του merry-go-round ποια η νέα ω?

## Λύση

Περπατώντας κατευθείαν προς τον άξονα περιστροφής, το αγόρι δεν έχει στροφορμή ως προς τον άξονα, και επομένως η ολική στροφορμή είναι $I\omega_0$.

Αλλά όταν ανεβαίνει στο merry-go-round, προσθέτει στην ροπή αδράνειας του συστήματος ένα ποσό $MR^2$.

Από διατήρηση της στροφορμής έχουμε:

$$I\omega_o = (I + MR^2)\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{I\omega_0}{(I + MR^2)}$$

# Merry-go-round

Το κορίτσι που τρέχει εφαπτομενικά έχει στροφορμή προς τον άξονα $M\upsilon R$

Επομένως η συνολική στροφορμή του συστήματος είναι: $I\omega_0 + M\upsilon R$

Όταν ανεβαίνει στο merry-go-round η συνολική ροπή αδράνειας περιλαμβάνει τη ροπή αδράνειας του merry-go-round καθώς και αυτή του κάθε παιδιού που είναι $MR^2$.

Ορίζοντας σαν $\omega_3$ την τελική γωνιακή ταχύτητα από διατήρηση της στροφορμής έχουμε:

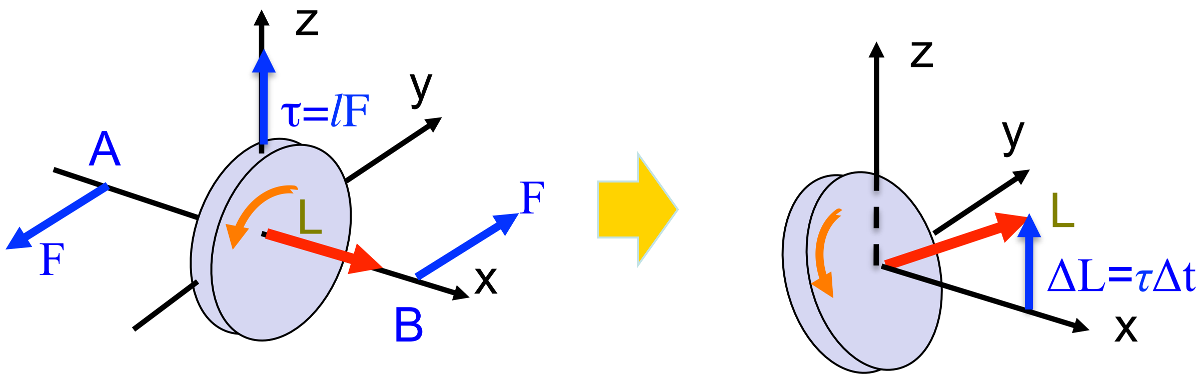
$$I\omega_o + M\upsilon R = (I + MR^2 + MR^2)\omega_3 \Rightarrow \omega_3 = \frac{I\omega_0 + M\upsilon R}{(I + 2MR^2)}$$

Διατηρείται η μηχανική ενέργεια όταν τα παιδιά ανέβουν στο merry-go-round?

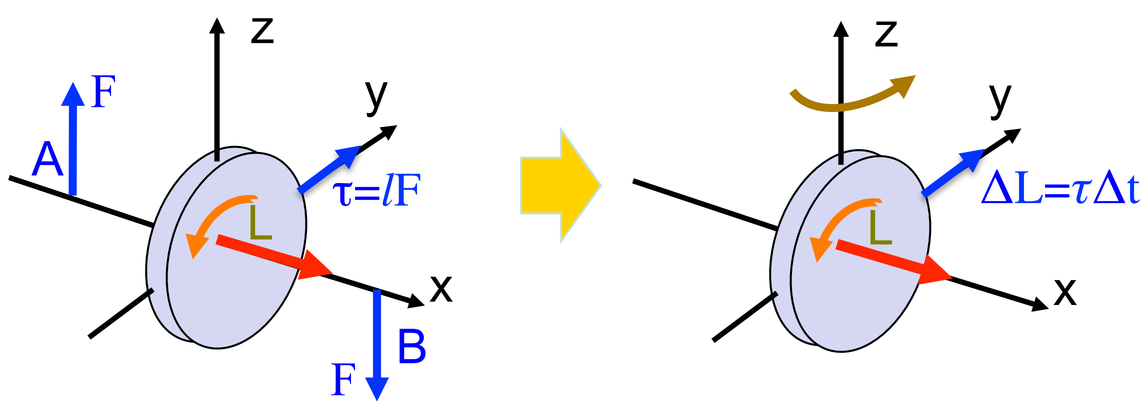
**ΟΧΙ**

Δυνάμεις τριβής ενεργούν για να φέρουν τα παιδιά και το merry-go-round σε ηρεμία σε σχέση με το καθένα και η περίπτωση μοιάζει αυτή της πλαστικής κρούσης.

# Γυροσκόπιο – Περιστροφή με ροπή

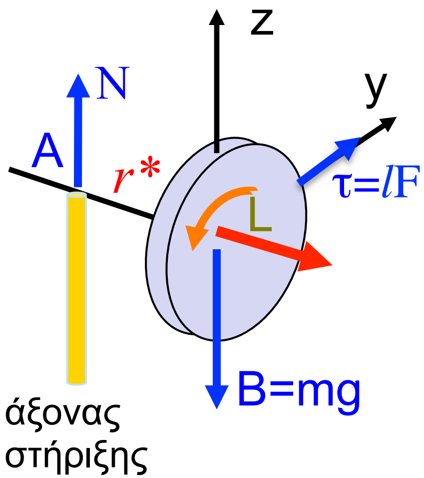


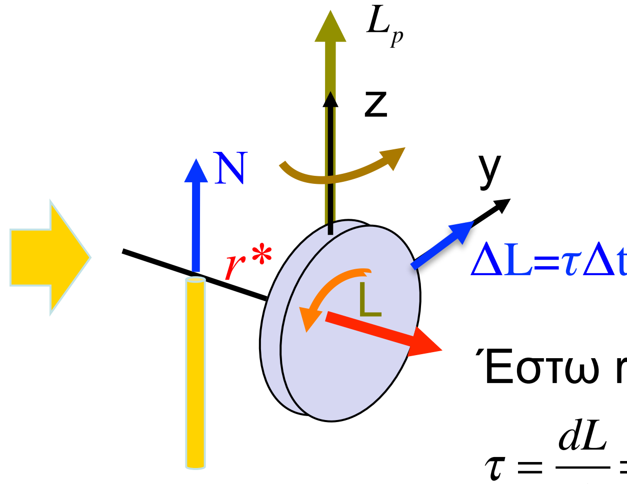

Η μεταβολή της στροφορμής είναι πάντοτε στη διεύθυνση της ροπής




# Γυροσκόπιο – Περιστροφή με ροπή

Έστω ότι κάποιος δίσκος περιστρέφεται με μια γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο του και ο άξονας περιστροφής στηρίζεται σε κάποιο σημείο



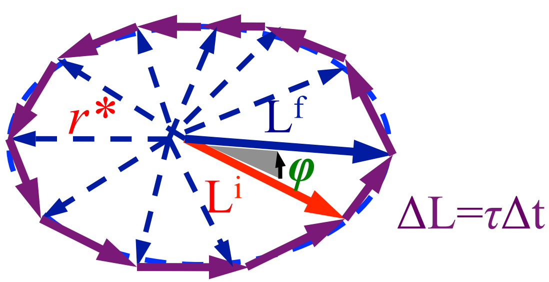




Έστω r* η απόσταση του Β από το Α

$$\tau = \frac{dL}{dt} \Rightarrow mgr^* = \frac{dL}{dt} \Rightarrow dL = mgr^* dt$$

Ο δίσκος διαγράφει τόξο γωνίας dφ:

$$dL = Ld\varphi \Rightarrow mgr^* dt = Ld\varphi \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgr^*}{L}$$



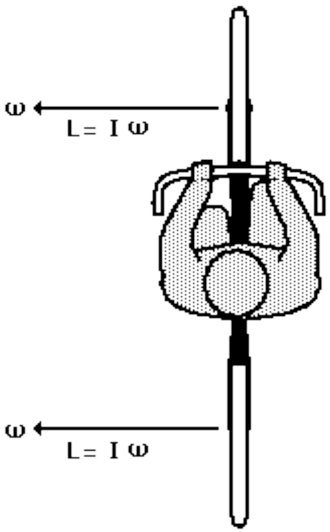

Αλλά $L = I\omega_{spin}$

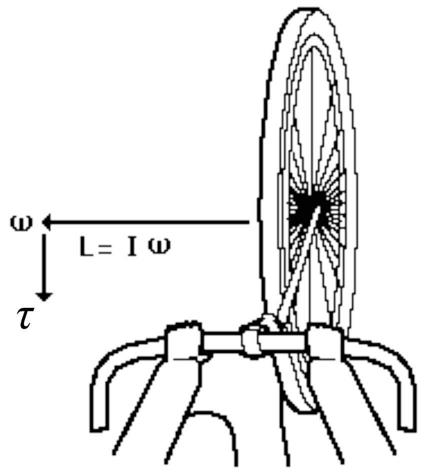
ενώ $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_{μεταπτ.}$ γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης

Επομένως: $\boxed{\omega_{μεταπτ.} = \frac{mgr^*}{I\omega_{spin}}} \Rightarrow \omega_{spin} \times \omega_{μεταπτ.} = \frac{mgr^*}{I} = σταθ.$ (για $L_{spin} >> L_{tot}$)

Ο δίσκος έχει δυο είδη περιστροφής και η ολική στροφορμή είναι: $\vec{L}_{tot} = \vec{L}_{spin} + \vec{L}_{μεταπτ.}$

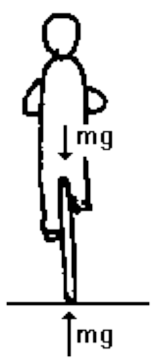
# Κίνηση του ποδηλάτου

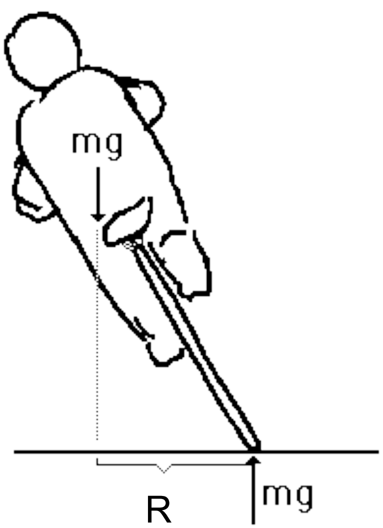



Καθώς γέρνουμε προς τα αριστερά, το βάρος παράγει ροπή που έχει φορά προς τη πίσω ρόδα και μεταβάλει τη διεύθυνση της στροφορμής

Σαν αποτέλεσμα η στροφορμή προσπαθεί να στραφεί προς τη διεύθυνση της ροπής και επομένως αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, δηλαδή αριστερά




Η φυγόκεντρος δύναμη που εμφανίζεται λόγω της κυκλικής αυτής κίνησης διορθώνει τη κλίση φέρνοντας το ποδήλατο στη κατακόρυφο θέση