ΦΥΣ. 111

Τελική Εξέταση: 17-Δεκεμβρίου-2019

Πριν αρχίσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητας).

Ονοματεπώνυμο	**Αριθμός Ταυτότητας**

Απενεργοποιήστε τα κινητά σας.

Η εξέταση περιέχει 10 ισότιμες ασκήσεις και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλες από αυτές. Η μέγιστη συνολική βαθμολογία της εξέτασης είναι 100 μονάδες.

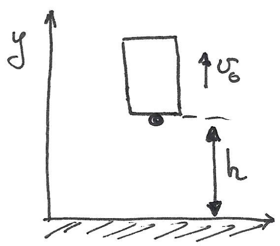
ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΣΤΕ ΜΟΝΟ ΤΙΣ ΣΕΛΙΔΕΣ ΠΟΥ ΣΑΣ ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΜΗΝ ΚΟΨΕΤΕ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΣΕΛΙΔΑ

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 180 λεπτά. Καλή Επιτυχία !

Άσκηση	**Βαθμός**
$1^{η}$ (10μ)	
$2^{η}$ (10μ)	
$3^{η}$ (10μ)	
$4^{η}$ (10μ)	
$5^{η}$ (10μ)	
$6^{η}$ (10μ)	
$7^{η}$ (10μ)	
$8^{η}$ (10μ)	
$9^{η}$ (10μ)	
$10^{η}$ (10μ)	
Σύνολο	

Άσκηση 1 [10μ]

Ένας ανελκυστήρας που βρίσκεται αρχικά σε μηδενικό ύψος από το έδαφος, αρχίζει να κινείται προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα υ τη χρονική στιγμή $t = 0$. Τη χρονική στιγμή T_1 ένας επιβάτης μέσα στον ανελκυστήρα ρίχνει μία μικρή μπάλα μέσω μιας τρύπας στο δάπεδο του ανελκυστήρα. Η μπάλα πέφτει με σταθερή επιτάχυνση $g = 9.8$ m/s^2 και τη χρονική στιγμή T_2 χτυπά στο έδαφος. Να βρείτε το ύψος από το έδαφος στο οποίο βρίσκεται ο ανελκυστήρας τη χρονική στιγμή T_1.



Ο ανελκυστήρας κινείται προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα υ_0. Η θέση του συναρτήσει του χρόνου δίνεται από τη σχέση: $y = \upsilon_0 t$

Τη χρονική στιγμή T_1 που αφήνεται η μπάλα, ο ανελκυστήρας βρίσκεται σε ύψος $h = \upsilon_0 T_1$ πάνω από το έδαφος. Επομένως $T_1 = \frac{h}{\upsilon_0}$

Η μπάλα αφήνεται ελεύθερη να πέσει τη χρονική στιγμή T_1, και επομένως η αρχική της θέση είναι h και η αρχική της ταχύτητα υ_0 όπως και του ανελκυστήρα. Η θέση της μπάλας από το έδαφος σε μεταγενέστερη χρονική στιγμή θα είναι:

$$y = h + \upsilon_0 (t - T_1) - \frac{1}{2} g (t - T_1)^2 =$$

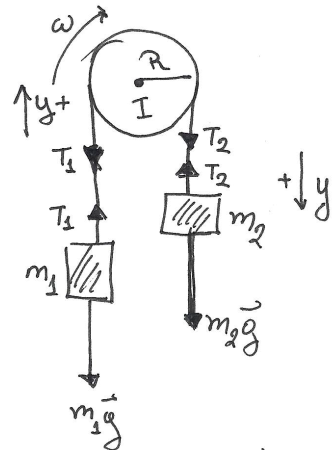
Τη χρονική στιγμή $t = T_2$ η μπάλα χτυπά στο έδαφος όπου $y = 0$.

Επομένως: $0 = h + \upsilon_0 (T_2 - T_1) - \frac{1}{2} g (T_2 - T_1)^2 = h + \frac{h}{T_1}(T_2 - T_1) - \frac{1}{2} g (T_2 - T_1)^2$

$$\Rightarrow 0 = h \frac{T_2}{T_1} - \frac{1}{2} g (T_2 - T_1)^2 \Rightarrow \boxed{h = \frac{1}{2} g \frac{T_1}{T_2} (T_2 - T_1)^2}$$

Άσκηση 2 [10μ]

Μία μηχανή Atwood αποτελείται από μία τροχαλία ακτίνας R και ροπής αδράνειας I ως προς άξονα που περνά από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδο της τροχαλίας. Ένα αβαρές και μη εκτατό σχοινί περνά από την τροχαλία και στα δύο άκρα του είναι δεμένα δύο σώματα με μάζα m_1 και m_2 αντίστοιχα όπου $m_2 > m_1$. Το σύστημα είναι αρχικά σε ηρεμία και αφήνεται να κινηθεί. Προσδιορίστε την επιτάχυνση των μαζών m_1 και m_2.



Εφόσον $m_2 > m_1$, το σύστημα θα κινηθεί σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων για τα δύο σώματα όπως στο διπλανό σχήμα.

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα στα διαγράμματα ελεύθερου σώματος για τις μάζες m_1 και m_2:

$$m_1: \quad \Sigma \vec{F}_y = m_1 \vec{a} \Rightarrow T_1 - m_1 g = m_1 a \Rightarrow \boxed{T_1 = m_1(a+g)} \quad (1)$$

$$m_2: \quad \Sigma \vec{F}_y = m_2 \vec{a} \Rightarrow m_2 g - T_2 = m_2 a \Rightarrow \boxed{T_2 = m_2(g-a)} \quad (2)$$

Οι δύο τάσεις δεν είναι ίσες γιατί προκαλούν ροπή στην τροχαλία. Η συνισταμένη ροπή είναι αυτή που προκαλεί την περιστροφή της τροχαλίας:

$$\Sigma \vec{\tau} = I\vec{\alpha} \Rightarrow T_1 \cdot R - T_2 R = -I\alpha \xRightarrow{(1)\wedge(2)} m_1(a+g)R - m_2(g-a)R = -I\alpha$$

$$\Rightarrow R\left[(m_1+m_2)a - (m_2-m_1)g\right] = -I\frac{a}{R} \Rightarrow (m_1+m_2)a = (m_2-m_1)g - I\frac{a}{R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[(m_1+m_2) + \frac{I}{R^2}\right]a = (m_2-m_1)g \Rightarrow a = \frac{m_2-m_1}{(m_1+m_2)+\frac{I}{R^2}}\, g$$

Συνήθως η ροπή αδράνειας είναι της μορφής $I = \beta M R^2$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2-m_1}{(m_1+m_2)+\frac{\beta M \cancel{R^2}}{\cancel{R^2}}}\, g \Rightarrow \boxed{a = \frac{m_2-m_1}{(m_1+m_2)+\beta M}\, g}$$

Άσκηση 3 [10μ]

Ένα τούβλο μάζας M ταλαντώνεται σε οριζόντια λεία επιφάνεια εξαρτημένο από ελατήριο σταθεράς k. Το τούβλο ταλαντώνεται με πλάτος A_0 και περίοδο $T_0 = 2\pi\sqrt{M/k}$.

(**α**) Ένα κομμάτι πλαστελίνης μάζας m πέφτει πάνω στο τούβλο και προσκολλάται χωρίς να αναπηδήσει. Η πλαστελίνη χτυπά το τούβλο τη στιγμή που έχει μηδενική ταχύτητα. Να βρείτε:

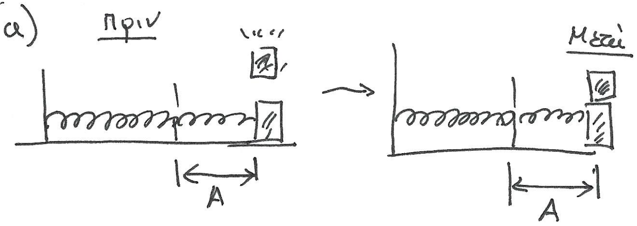
(i) Τη νέα περίοδο ταλάντωσης. [**1μ**]

(ii) Το νέο πλάτος ταλάντωσης. [**2μ**]

(iii) Την μεταβολή στη μηχανική ενέργεια του συστήματος. [**2μ**]

(**β**) Επαναλάβατε το μέρος (α) της άσκησης αλλά αυτή τη φορά θεωρήστε ότι το τούβλο κινείται με μέγιστη ταχύτητα τη στιγμή που η πλαστελίνη χτυπά στο τούβλο. [**5μ**]

(α)



(i) Η αρχική περίοδος ταλάντωσης είναι $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$. Το σύστημα αποκτά επιπλέον μάζα και γίνεται: $M_{ολ} = M+m$.

Η νέα περίοδος ταλάντωσης θα είναι τώρα: $\boxed{T_f = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}} = T_0\sqrt{\frac{M+m}{M}}}$

(ii) Η κρούση συμβαίνει όταν το ελατήριο έχει την μέγιστη απομάκρυνσή του και επομένως το πλάτος της ταλάντωσης δεν αλλάζει. Επιπλέον δεν υπάρχει μεταφορά ορμής στη x-διεύθυνση από το κομμάτι της πλαστελίνης.

(iii) Η μηχανική ενέργεια είναι $E = \frac{1}{2}kA^2$ και εφόσον το πλάτος παραμένει σταθερό, η μηχανική ενέργεια παραμένει αμετάβλητη μετά την κρούση.

(β) (i) Όπως και προηγουμένως, η νέα περίοδος ταλάντωσης θα γίνει: $T_f = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$

$\Rightarrow \boxed{T_f = T_0\sqrt{\frac{M+m}{M}}}$

(ii) Στην περίπτωση αυτή έχουμε διατήρηση της ορμής όταν η πλαστελίνη κολλά στη μάζα του ελατηρίου αλλά η ενέργεια δεν διατηρείται.

Από διατήρηση της ορμής έχουμε: $P_i^x = P_f^x \Rightarrow M v_i^x = (M+m) v_f^x \Rightarrow \boxed{v_f^x = \frac{M}{M+m} v_i^x}$

Επομένως η μηχανική ενέργεια μετά την κρούση θα είναι:

$E^f_{μηχ} = E^f_{κιν} + \cancel{U^f_{ελ}}^{0} = \frac{1}{2}(m+M)\,υ_f^2 = \frac{1}{2}kA_f^2 \Rightarrow \frac{1}{2}kA_f^2 = \frac{1}{2}\cancel{(M+m)}\frac{M^2υ_i^2}{(M+m)^{\cancel{2}}} = \frac{\frac{1}{2}Mυ_i^2 M}{M+m}$

Αλλά η αρχική μηχανική ενέργεια του ταλαντωτή ήταν: $\frac{1}{2}Mυ_i^2 = \frac{1}{2}kA_0^2$

Επομένως: $\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{k}A_f^2 = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{k}A_0^2\frac{M}{M+m} \Rightarrow A_f^2 = A_0^2\frac{M}{M+m} \Rightarrow \boxed{A_f = A_0\sqrt{\frac{M}{M+m}}}$

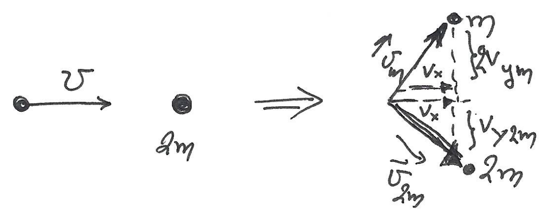
(iii) Η νέα μηχανική ενέργεια είναι: $E^f_{μηχ} = \frac{1}{2}kA_f^2 = \frac{1}{2}kA_0^2\frac{M}{M+m} \Rightarrow \boxed{E^f_{μηχ} = E^i_{μηχ}\frac{M}{M+m}}$

Άσκηση 4 [10μ]

Σώμα μάζας *m* κινείται με ταχύτητα *υ* κατά τη *x*-διεύθυνση και συγκρούεται ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας 2*m*. Μετά τη σύγκρουση, παρατηρείται, ότι τα δύο σώματα έχουν τις συνιστώσες των ταχυτήτων τους στη *x*-διεύθυνση ίσες.

(**α**) Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η διεύθυνση της ταχύτητας του σώματος μάζας 2*m* με τον *x*-άξονα, δουλεύοντας στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου (ακίνητος παρατηρητής) [**5μ**]

(**β**) Επιβεβαιώστε την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα δουλεύοντας στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας. [**5μ**]



Διατήρηση της ορμής στη y-διεύθυνση δίνει: $P_y^i = P_y^f \Rightarrow 0 = P_{ym}^f + P_{y2m}^f \Rightarrow$

$\Rightarrow P_{y2m}^f = -P_{ym}^f \Rightarrow \cancel{2m}\,\upsilon_{y2m}^f = -\cancel{m}\,\upsilon_{ym}^f \Rightarrow 2\upsilon_{ym}^f = -\upsilon_{y2m}^f \Rightarrow 2|\upsilon_{ym}^f| = |\upsilon_{y2m}^f|$

Διατήρηση της ορμής στην x-διεύθυνση δίνει:

$$\left.\begin{aligned} P_x^i = P_x^f \Rightarrow m\upsilon &= m\upsilon_{xm}^f + 2m\upsilon_{x2m}^f \\ \text{αλλά}\quad \upsilon_{xm}^f &= \upsilon_{x2m}^f \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cancel{m}\upsilon = 3\cancel{m}\upsilon_x^f \Rightarrow \boxed{\upsilon_x^f = \frac{\upsilon}{3}}$$

Από διατήρηση της ενέργειας έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{\upsilon}{3}\right)^2 + \left(2\upsilon_{y2m}\right)^2\right] + \frac{1}{2}2m\left[\left(\frac{\upsilon}{3}\right)^2 + \upsilon_{y2m}^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}\upsilon^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}\left[\frac{\upsilon^2}{9} + 4\upsilon_{y2m}^2\right] + \cancel{\tfrac{1}{2}}2\cancel{m}\left[\frac{\upsilon^2}{9} + \upsilon_{y2m}^2\right] \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{\cancel{3}\upsilon^2}{\cancel{9}\,3} + 6\upsilon_{y2m}^2 \Rightarrow$$

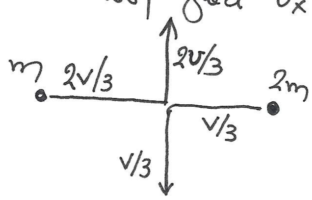
$$\Rightarrow 3\upsilon^2 - \upsilon^2 = 18\upsilon_{y2m}^2 \Rightarrow \cancel{2}\upsilon^2 = \cancel{18}^{\,9}\upsilon_{y2m}^2 \Rightarrow \boxed{\upsilon_{y2y} = \frac{\upsilon}{3}}$$

Επομένως $\upsilon_x = \upsilon_y = \frac{\upsilon}{3}$ και η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα της 2m είναι 45°.

Θα μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα, δουλεύοντας στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας.

Αν οι x-συνιστώσες των ταχυτήτων είναι ίσες στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, τότε θα πρέπει να είναι ίσες και στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας, αφού η ίδια ταχύτητα (η ταχύτητα του κέντρου μάζας) αφαιρείται ή προστίθεται πηγαίνοντας στο/από το σύστημα του κέντρου μάζας:

Αλλά στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας, οι τελικές ταχύτητες θα πρέπει να είναι αντίθετες. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν βρίσκονται στην κατακόρυφη διεύθυνση γιατί v_x-συνιστώσες είναι ίσες.



Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι: $v_{cm} = \frac{mv+0}{3m} = \frac{v}{3}$

Επομένως οι αρχικές ταχύτητες στο κέντρο μάζας είναι:

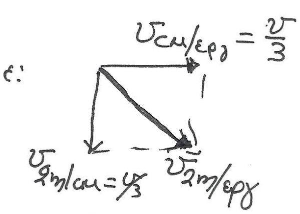
$$v_{m/cm} = v_{m/εp} - v_{cm/εpγ} \Rightarrow v_{m/cm} = v - \frac{v}{3} \Rightarrow v_{m/cm} = \frac{2v}{3}$$

$$v_{2m/cm} = v_{m/εp} - v_{cm/εpγ} \Rightarrow v_{2m/cm} = 0 - \frac{v}{3} \Rightarrow v_{2m/cm} = -\frac{v}{3}$$

Για διατήρηση της ενέργειας αυτές είναι και οι τελικές ταχύτητες.

Για να πάμε ξανά στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου θα πρέπει να προστεθεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας.

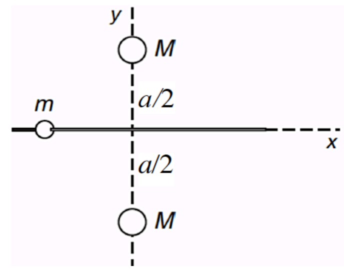
Επομένως για το σώμα μάζας 2m θα έχουμε:



Οι δύο συνιστώσες είναι ίσες και επομένως η τελική ταχύτητα στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου σχηματίζει 45° με την οριζόντια διεύθυνση

Άσκηση 5 [10μ]

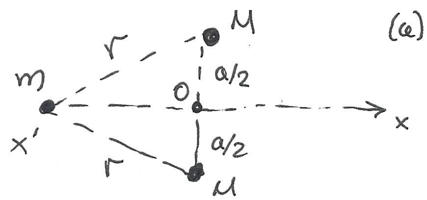
Μία χάντρα μάζας *m* γλιστρά χωρίς τριβές σε λεία ράβδο που έχει την διεύθυνση του *x*-άξονα. Η ράβδος ισαπέχει από δύο σφαίρες μάζας *M* οι οποίες είναι ακίνητες. Οι σφαίρες βρίσκονται στις θέσεις $x = 0$ και $y = \pm a/2$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, και έλκουν βαρυτικά τη χάντρα.



(**α**) Βρείτε τη βαρυτική δυναμική ενέργεια της χάντρας. [**1μ**]

(**β**) Η χάντρα αφήνεται να κινηθεί από τη θέση $x = 3a$ με ταχύτητα υ_i και φορά προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Βρείτε την ταχύτητα της χάντρας καθώς περνά από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. [**3μ**]

(**γ**) Θεωρήστε ότι η χάντρα μετατοπίζεται κατά μία μικρή απόσταση *x* από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και αφήνεται να κινηθεί. Να βρείτε τη συχνότητα των ταλαντώσεων της ράβδου ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. <u>*Υπόδειξη:*</u> Θα βοηθούσε η χρήση του αναπτύγματος Taylor. [**6μ**]



(α) Αρχικά η μάζα m βρίσκεται στη θέση x'.
Η ολική βαρυτική ενέργεια του συστήματος είναι το άθροισμα της δυναμικής βαρυτικής ενέργειας από κάθε μάζα M

Θεωρούμε ότι $U_g = 0$ όταν $r \to \infty$

Επομένως $U_g = -\dfrac{GMm}{r} - \dfrac{GMm}{r} = -\dfrac{2GMm}{r}$

Αλλά $r^2 = x'^2 + \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow r = \sqrt{x'^2 + \dfrac{a^2}{4}}$

$$\Rightarrow \boxed{U_g = -\frac{2GMm}{\sqrt{x'^2 + \frac{a^2}{4}}}} \quad (1)$$

(β) Η μηχανική ενέργεια στο σύστημα των 3-μαζών διατηρείται. Επομένως θα έχουμε: $x' = 3a$:

$$E^i_{μηχ} = E^f_{μηχ} \Rightarrow E^i_{κιν} + U^i_g = E^f_{κιν} + U^f_g \Rightarrow \frac{1}{2} m\upsilon_i^2 - \frac{2GMm}{\sqrt{9a^2 + \frac{a^2}{4}}} = E^f_{κι} + U^f_g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon_i^2 - \frac{2GM\cancel{m}}{\sqrt{37a^2/4}} = \frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon_f^2 - \frac{2GM\cancel{m}}{\sqrt{a^2/4}} \Rightarrow \upsilon_f^2 = \upsilon_i^2 - \frac{4GM \cdot 2}{a\sqrt{37}} + \frac{4GM}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon_f = \sqrt{\upsilon_i^2 - \frac{4GM}{a}\left[\frac{2}{\sqrt{37}} - 1\right]}} \quad (2)$$

(γ) Στο ερώτημα (α) βρήκαμε ότι η δυναμική ενέργεια είναι: $U_g = -\dfrac{2GMm}{\sqrt{x^2 + a^2/4}}$

Αναπτύσσουμε κατά Taylor τη δυναμική ενέργεια ως προς το $x=0$. Οπότε έχουμε:

$$U_g(x) = U_g(x=0) + \left.\frac{dU_g}{dx}\right|_{x=0}(x-0) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2U_g}{dx^2}\right|_{x=0}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3U_g}{dx^3}\right|_{x=0}(x-0)^3 + \dots$$

Για $x=0$: $U_g(x=0) = -\dfrac{2GMm}{a/2} \Rightarrow U_g(x=0) = -\dfrac{4GMm}{a}$

$$\frac{dU_g}{dx} = -2GMm\left[\left(x^2+\frac{a^2}{4}\right)^{-1/2}\right]' \Rightarrow \frac{dU_g}{dx} = \frac{2GMm\,x}{(x^2+a^2/4)^{3/2}} \Rightarrow \left.\frac{dU_g}{dx}\right|_{x=0} = 0$$

$$\frac{d^2U_g}{dx^2} = \frac{2GMm}{(x^2+a^2/4)^{3/2}} - \frac{6GMm\,x^2}{(x^2+a^2/4)^{5/2}} \Rightarrow \left.\frac{d^2U_g}{dx^2}\right|_{x=0} = \frac{2GMm}{(a/2)^3}$$

$\Rightarrow$

Παίρνοντας τους 3 πρώτους όρους του αναπτύγματος, θα έχουμε

$$\boxed{U_g(x) \cong -\frac{4GMm}{a} + 0 + \frac{1}{2}\,\frac{2GMm}{(a/2)^3}\,x^2} \quad (3)$$

Όπως ξέρουμε, ένας ιδανικός αρμονικός ταλαντωτής έχει δυναμική ενέργεια της μορφής: $\boxed{U_{ελ} = \frac{1}{2}kx^2}$

Επομένως η (3) είναι μια συνάρτηση της μορφής αρμονικού ταλαντωτή με τον 1^o όρο που είναι σταθερός να μπορεί να απορροφηθεί ως σταθερά.

Επομένως η (3) μπορεί να γραφεί ως $U'_g(x) \simeq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2GMm}{a^3/8}\right)x^2$

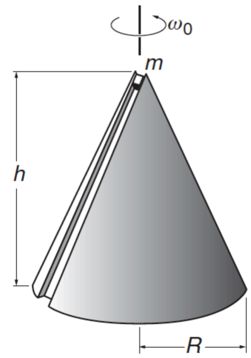
Η "σταθερά" k στην περίπτωση αυτή είναι: $k = \dfrac{2GMm}{a^3/8}$

Ξέρουμε ότι η γωνιακή συχνότητα είναι: $\omega^2 = \dfrac{k}{m} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{16GM}{a^3} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{16GM}{a^3}}}$$ συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων ως προς $x=0$

Άσκηση 6 [10μ]

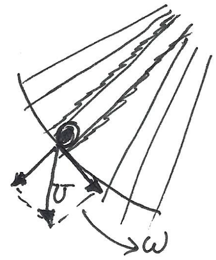
Ένας κώνος μάζας M, ύψους h και ακτίνας βάσης R μπορεί να περιστρέφεται ως προς σταθερό κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο της βάσης του. Ο κώνος περιέχει στην επιφάνειά του ένα λείο αυλάκι, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ο κώνος τίθεται σε περιστροφική κίνηση με αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0. Μία μικρή σφαίρα μάζας m τοποθετείται στο αυλάκι στην κορυφή του κώνου και αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί προς τη βάση του κώνου. Υποθέστε ότι η σφαίρα παραμένει στο αυλάκι κατά την διάρκεια της καθόδου της. Υποθέστε ακόμα ότι η ροπή αδράνειας του κώνου ως προς τον κατακόρυφο άξονα είναι I_0. Υποθέστε ότι δεν υπάρχουν τριβές με τον άξονα περιστροφής.



(**α**) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα του κώνου όταν η σφαίρα φθάνει στη βάση του; [**4μ**].

(**β**) Ποια είναι η ταχύτητα της σφαίρας όταν φθάνει στη βάση του κώνου σύμφωνα με ακίνητο παρατηρητή στο έδαφος; [**6μ**]

(α)



Ο κώνος περιστρέφεται αρχικά με γωνιακή ταχύτητα ω_0 και η στροφορμή του είναι κατά μήκος του z-άξονα με φορά προς τα πάνω.

Δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές να ασκούνται στον κώνο-σφαίρα σύστημα και επομένως η στροφορμή διατηρείται σε μέτρο και διεύθυνση.

Η σφαίρα αποκτά στροφορμή καθώς κατεβαίνει ίση με $L_{σφ} = mR^2\omega$ και η στροφορμή του κώνου ελαττώνεται: $L_i = L_f \Rightarrow I_k\omega_0 = I_k\omega_f + L_{σφ} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_k\omega_0 = I_k\omega_f + mR^2\omega_f \Rightarrow \boxed{\omega_f = \left(\frac{I_k}{I_k + mR^2}\right)\omega_0} \quad (1)$$

(β) Δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις ή δυνάμεις τριβής και επομένως η μηχανική ενέργεια του συστήματος κώνου-σφαίρας-γης διατηρείται.

Αρχικά η σφαίρα έχει μόνο δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας, ενώ ο κώνος έχει περιστροφική κινητική ενέργεια. Στην τελική θέση, η μάζα έχει μόνο κινητική ενέργεια ενώ ο κώνος έχει περιστροφική κινητική ενέργεια αλλά έχει ελαττωθεί:

$$E^{i}_{\mu\eta\chi} = E^{f}_{\mu\eta\chi} \Rightarrow \frac{1}{2} I_k \omega_0^2 + mgh = \frac{1}{2} I_k \omega_f^2 + \frac{1}{2} m v_f^2 \Rightarrow \frac{1}{2} I_k \left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right) + mgh = \frac{1}{2} m v_f^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_f^2 = \frac{I_k}{m}\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right) + 2gh \overset{(1)}{\Rightarrow} v_f^2 = \frac{I_k}{m}\left[\omega_0^2 - \left(\frac{I_k}{I_k + mR^2}\right)^2 \omega_0^2\right] + 2gh \Rightarrow$$

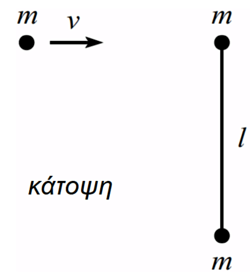
$$\Rightarrow v_f^2 = \frac{I_k}{m}\omega_0^2\left[1 - \frac{I_k^2}{\left(I_k + mR^2\right)^2}\right] + 2gh = \frac{I_k}{m}\omega_0^2\left[\frac{\left(I_k + mR^2\right)^2 - I_k^2}{\left(I_k + mR^2\right)^2}\right] + 2gh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_f^2 = \frac{I_k}{m}\omega_0^2 \frac{\left(\cancel{I_k} + mR^2 - \cancel{I_k}\right)\left(I_k + mR^2 + I_k\right)}{\left(I_k + mR^2\right)^2} + 2gh \Rightarrow v_f^2 = \frac{I_k}{\cancel{m}}\omega_0^2 \frac{\cancel{m}R^2\left(2I_k + mR^2\right)}{\left(mR^2 + I_k\right)^2} + 2gh$$

$$\Rightarrow v_f^2 = \frac{\omega_0^2}{\left(I_k + mR^2\right)^2} I_k\left(2I_k + mR^2\right)R^2 + 2gh \Rightarrow \boxed{v_f = \sqrt{\frac{\omega_0^2 I_k R^2}{\left(I_k + mR^2\right)^2}\left(2I_k + mR^2\right) + 2gh}}$$

Άσκηση 7 [10μ]

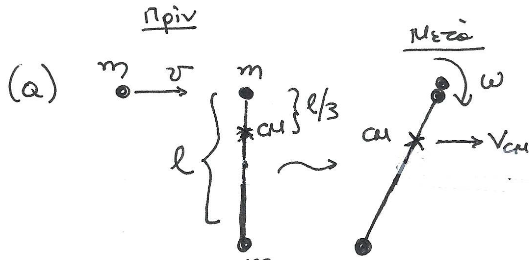
Σώμα μάζας *m* κινείται με ταχύτητα *v* σε λεία οριζόντια επιφάνεια και σε διεύθυνση κάθετη προς μία ακίνητο ράβδο αμελητέας μάζας και μήκους *l*. Στα άκρα της ράβδου είναι στερεωμένες δύο σώματα με μάζα επίσης *m* το καθένα. Η κινούμενη μάζα χτυπά στο σώμα που βρίσκεται στην πάνω άκρη της διάταξης ράβδου – σωμάτων και προσκολλάται.



(**α**) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος μετά τη σύγκρουση; [**4μ**]

(**β**) Ποια είναι η ταχύτητα του άκρου της ράβδου που βρίσκονται οι δύο μάζες, όταν η ράβδος έχει εκτελέσει μισή περιστροφή; [**6μ**]

(α)



Το κέντρο μάζας του συστήματος μετά την κρούση, βρίσκεται σε απόσταση:

$$y_{cm} = \frac{\cancel{y_1}(m+m) + y_2(m)}{m+m+m} \Rightarrow y_{cm} = \frac{y_2 \cancel{m}}{3\cancel{m}} \Rightarrow$$

$y_{cm} = \frac{l}{3}$ από το πάνω μέρος της ράβδου.

Το σύστημα κινείται σε λεία οριζόντια επιφάνεια, και είναι ελεύθερο να κινηθεί. Επομένως δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές και συνεπώς η στροφορμή διατηρείται: Θεωρούμε τη στροφορμή ως προς σημείο στην λεία επιφάνεια που συμπίπτει με την θέση του ΚΜ του τελικού συστήματος. Δηλαδή απέχει $\frac{l}{3}$ από το πάνω άκρο.

$$L_i = L_f \Rightarrow mv\frac{l}{3} = I_f\omega_f + \cancel{3mv_{CM}x}^{\,0}$$

εφόσον το κέντρο μάζας κινείται στην ευθεία που περνά από το σημείο ως προς το οποίο θεωρούμε την περιστροφή.

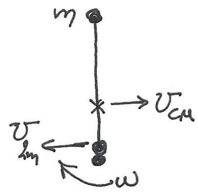
$$\Rightarrow \boxed{mv\frac{l}{3} = I_f\omega_f} \quad (1)$$

Αλλά η ροπή αδράνειας του συστήματος μετά τη πλαστική κρούση θα είναι:

$$I_f = 2m\frac{l^2}{3^2} + m\left(\frac{2l}{3}\right)^2 = 2m\frac{l^2}{9} + m\frac{4l^2}{9} \Rightarrow I_f = \frac{\cancel{6}^{\,2}m}{\cancel{9}_{\,3}}l^2 \Rightarrow \boxed{I_f = \frac{2}{3}ml^2} \quad (2)$$

Αντικατάσταση στη (1) δίνει: $mv\frac{l}{3} = I_f\omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{\cancel{m}v\cancel{l/3}}{2\cancel{m}l^{\cancel{2}}\cancel{/3}} \Rightarrow \boxed{\omega_f = \frac{v}{2l}}$ (3)

(β) Μετά από μισή στροφή του συστήματος θα έχουμε :



$$\boxed{\vec{v}_{2m/E} = \vec{v}_{2m/CM} + \vec{v}_{CM/E}} \quad (4)$$

Αλλά η ταχύτητα των 2 μαζών ως προς το κέντρο μάζας ως προς το οποίο περιστρέφεται η ράβδος είναι: $v_{2m/CM} = \omega_f \cdot r_{2m/CM} = \omega_f \frac{\ell}{3} \Rightarrow$ (3)

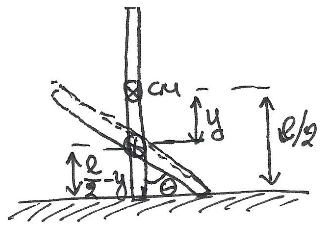
$\Rightarrow v_{2m/CM} = -\frac{v}{2\cancel{\ell}}\frac{\cancel{\ell}}{3} \Rightarrow \boxed{v_{2m/CM} = -\frac{v}{6}}$ (5)

Η ταχύτητα του CM ως προς το έδαφος βρίσκεται αν εφαρμόσουμε διατήρηση ορμής στην αρχική κρούση: $mv = (m+m+m)v_{CM} \Rightarrow \boxed{v_{CM} = v/3}$ (6) Θετική

Αντικατάσταση της (5) & (6) στην (4) $\Rightarrow v_{2m} = \frac{v}{3} - \frac{v}{6} \Rightarrow \boxed{v_{2m} = \frac{v}{6}}$

Άσκηση 8 [10μ]

Μία ράβδος μήκους *l* και μάζας *m* βρίσκεται αρχικά σε κατακόρυφη θέση πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια και αρχίζει να ανατρέπεται με εφαρμογή στιγμιαίας μικρής ώθησης ενός ζεύγους δυνάμεων. Να βρείτε την ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου συναρτήσει της γωνίας *θ* που σχηματίζει η ράβδος με την κατακόρυφο καθώς πέφτει.



Από τη στιγμή που δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις επαφής ή τριβής, το κέντρο μάζας της ράβδου θα παραμείνει στην ίδια θέση καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης.

Έστω σε μία τυχαία χρονική στιγμή κατά την πτώση της ράβδου, έχει περιστραφεί κατά μία γωνία θ, και το ΚΜ βρίσκεται σε ύψος y από την αρχική θέση του.

Η αρχική ενέργεια της ράβδου είναι: $E_i^{μηχ} = \cancel{E_κ^i}^{\,0} + U_g^i \Rightarrow \boxed{E_i^{μηχ} = mg\frac{l}{2}}$ (1)

Τη χρονική στιγμή t, η ράβδος έχει αποκτήσει κινητική ενέργεια μεταφορική και περιστροφική, λόγω της περιστροφής της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της:

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow \boxed{E_{κιν} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m l^2\right)\omega^2} \quad (2)$$

Η δυναμική ενέργεια θα είναι: $\boxed{U_g = mg\left(\frac{l}{2} - y\right)}$ (3)

Από την πτώση της ράβδου έχουμε: $\frac{l}{2} - y = \frac{l}{2}\cos\theta \Rightarrow \boxed{y = \frac{l}{2}(1-\cos\theta)}$ (4)

Παραγωγίζουμε την τελευταία εξίσωση για να βρούμε τη σχέση μεταξύ της $\frac{d\theta}{dt}$ και $\frac{dy}{dt}$.
Δηλαδή μεταξύ της γωνιακής ταχύτητας και της γραμμικής ταχύτητας του ΚΜ

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{l}{2}\frac{d}{dt}(\cos\theta) = +\frac{l}{2}\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{v_{CM} = \frac{l}{2}\sin\theta\,\omega} \quad (5)$$

Εφαρμόζουμε διατήρηση μηχανικής ενέργειας: $E_i^{μηχ} = E_t^{μηχ} \overset{(1)}{\Rightarrow} mg\frac{l}{2} = E_{κιν}^t + U_g^t \Rightarrow$

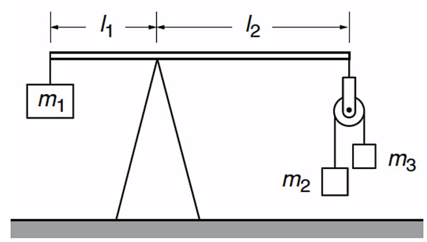
$$\overset{(2)\ \&\ (3)}{\Rightarrow} \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m} v_{CM}^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{12}\cancel{m} l^2\omega^2 + \overset{2}{}\cancel{m}g\left(\frac{l}{2} - y\right) = \cancel{m}g\frac{l}{\cancel{2}} \Rightarrow v_{CM}^2 + \frac{1}{12}l^2\omega^2 + 2g\left(\frac{l}{2}-y\right) = gl$$

$$\overset{(5)}{\Rightarrow} v_{CM}^2 + \frac{1}{\cancel{12}_3}\cancel{l^2}\frac{v_{CM}^2}{\frac{\cancel{l^2}}{\cancel{4}}\sin^2\theta} = \cancel{gl} - \cancel{gl} + 2gy \Rightarrow v_{CM}^2 + \frac{v_{CM}^2}{3\sin^2\theta} = 2gy \Rightarrow$$

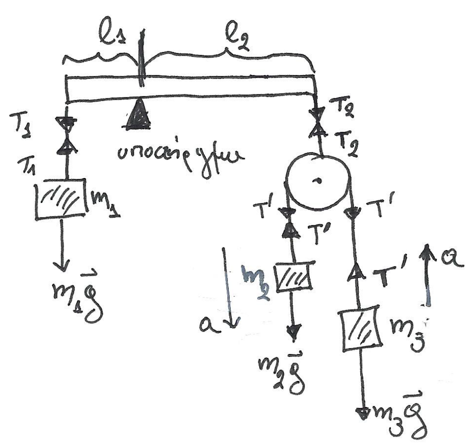
$$\Rightarrow v_{CM}^2\left(\frac{3\sin^2\theta + 1}{3\sin^2\theta}\right) = 2gy \overset{(4)}{\Rightarrow} v_{CM}^2 = \frac{\cancel{2}g\,3\sin^2\theta(1-\cos\theta)\frac{l}{\cancel{2}}}{3\sin^2\theta + 1} \Rightarrow \boxed{v_{CM} = \sqrt{\frac{3gl\sin^2\theta(1-\cos\theta)}{3\sin^2\theta+1}}}$$

Άσκηση 9 [10μ]

Μία αβαρής ράβδος μήκους l είναι ακουμπισμένη σε υποστήριγμα. Στο ένα άκρο της ράβδου και σε απόσταση l_1 από το υποστήριγμα, είναι κρεμασμένη μία μάζας m_1 ενώ στο άλλο άκρο της ράβδου και σε απόσταση l_2 από το υποστήριγμα υπάρχει κρεμασμένη μία μηχανή Atwood, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η μηχανή Atwood αποτελείται από μία μικρή αβαρή και λεία τροχαλία εκατέρωθεν της οποίας κρέμονται μέσω ενός αβαρούς νήματος δύο μάζες m_2 και m_3 όπου $m_2 > m_3$. Οι μάζες m_2 και m_3 είναι αρχικά ακίνητες.



Βρείτε μία σχέση μεταξύ των μαζών m_1, m_2, m_3, και των αποστάσεων l_1 και l_2 τέτοια ώστε η ράβδος να παραμένει σε ισορροπία όταν οι μάζες m_2 και m_3 αφαιθούν ελεύθερες να κινηθούν.



Κάνουμε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος για την μάζα m_1 και την μηχανή Atwood με τις δύο μάζες m_2 & m_3.

Από τη στιγμή που η διάταξη είναι σε ισορροπία θεωρούμε τις ροπές ως προς το υποστήριγμα, και θα πρέπει η συνισταμένη τους να είναι μηδέν.

$$\Sigma\vec{\tau}=\vec{0} \Rightarrow -T_2 l_2 + T_1 l_1 = 0 \Rightarrow T_2 l_2 = T_1 l_1 \Rightarrow \boxed{T_2 = T_1 \frac{l_1}{l_2}} \quad (1)$$

Το σώμα μάζας m_1 είναι σε ισορροπία και επομένως: $\Sigma\vec{F}_1=\vec{0} \Rightarrow \boxed{T_1 = m_1 g}$ (2)

Η τροχαλία της μηχανής Atwood είναι επίσης ακίνητη και επομένως:

$$\Sigma\vec{F}_T=\vec{0} \Rightarrow T_2 = T' + T' \Rightarrow \boxed{T_2 = 2T'} \quad (3)$$

Εξετάζουμε τα σώματα της μηχανής Atwood: $m_2 > m_3$ και επομένως η μάζα m_2 κινείται προς τα κάτω και η μάζα m_3 προς τα πάνω.

Έστω a η επιτάχυνση των δύο μαζών m_2 και m_3. Από τις εξισώσεις κίνησης:

$$\left.\begin{aligned} m_2 a &= m_2 g - T' \\ m_3 a &= T' - m_3 g \end{aligned}\right\} \xRightarrow{(+)} (m_2+m_3)a = (m_2-m_3)g \Rightarrow \alpha = \frac{m_2-m_3}{m_2+m_3}g$$

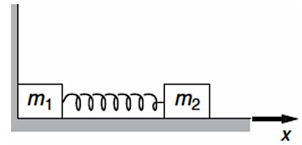
$$\Rightarrow T' = m_3(a+g) = m_3\left(\frac{m_2-m_3}{m_2+m_3}+1\right)g = \boxed{m_3\frac{2m_2}{m_2+m_3}g} \quad (4)$$

Αντικαθιστούμε (1) ∧ (2) στη (3) και εξισώνουμε με την (4).

Θα πάρουμε: $T_1\dfrac{l_1}{l_2} = 2T' \Rightarrow m_1 \cancel{g}\dfrac{l_1}{l_2} = 2\cdot\dfrac{2m_2m_3}{m_2+m_3}\cancel{g} \Rightarrow \boxed{m_1 l_1 = \dfrac{4m_2m_3}{m_2+m_3}l_2}$

Άσκηση 10 [10μ]

Ένα σύστημα σωμάτων αποτελείται από ένα συσπειρωμένο ελατήριο φυσικού μήκους l και σταθεράς k και δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 συνδεδεμένα στα δύο άκρα του ελατηρίου. Τα σύστημα μπορεί να κινείται σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Αρχικά το σώμα m_2 κρατιέται ακίνητο και το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $l/2$ ενώ το σώμα m_1 πιέζεται πάνω σε τοίχο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα m_2 αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί. Βρείτε:

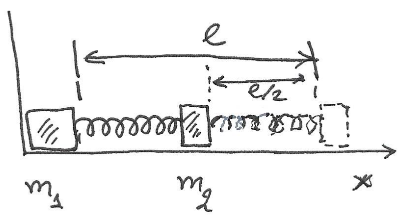


(**α**) Την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του συστήματος των δύο σωμάτων m_1 και m_2 τη στιγμή που το σώμα m_2 αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί. [**2μ**]

(**β**) Την ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος των δύο σωμάτων τη στιγμή που το σώμα m_1 χάνει επαφή με τον τοίχο. [**2μ**]

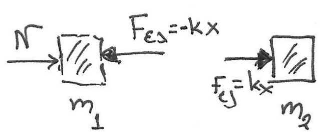
(**γ**) Τη θέση του σώματος m_2 τη στιγμή που το σώμα m_1 χάνει επαφή με τον τοίχο. [**2μ**].

(**δ**) Περιγράψτε την κίνηση του κέντρου μάζας του συστήματος των δύο σωμάτων συναρτήσει του χρόνου. [**4μ**]



Αρχικά το σύστημα των δύο σωμάτων είναι σε κατάσταση ώστε το ελατήριο να είναι συσπειρωμένο κατά $l/2$ ως προς το φυσικό του μήκος.

Στα δύο σώματα ασκούνται οι δυνάμεις όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα ελευθέρου σώματος: (αγνοούμε τις κάθετες δυνάμεις του βάρους και της αντίδρασης από την οριζόντια επιφάνεια γιατί δεν συμμετέχουν στην κίνηση των σωμάτων).



$x = l + x_2$ με x_2 τη θέση

Στο σώμα m_1 ασκείται η δύναμη του ελατηρίου και η αντίδραση από τον τοίχο N. Στο σώμα m_2 ασκείται η δύναμη του ελατηρίου. Η μόνη εξωτερική δύναμη στο σύστημα των δύο σωμάτων - ελατηρίου, είναι η κάθετη αντίδραση N από το τοίχο.

(α) Για το σώμα m_2: $2^{ος}$ νόμος του Newton: $\Sigma\vec{F}_2 = m_2\vec{a}_2 \Rightarrow kx = m_2 a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{k}{m_2}x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{k}{m_2}\frac{l}{2}} \quad (1)$$

Για το σώμα m_1: $2^{ος}$ νόμος του Newton: $\Sigma\vec{F}_1 = m_1\vec{a}_1 \Rightarrow N - kx = 0 \Rightarrow N = kx \Rightarrow N = k\frac{l}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = 0} \quad (2)$$

Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας τη στιγμή που το m_2 αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί είναι

$$\vec{a}_{cm} = \frac{\vec{a}_1 m_1 + \vec{a}_2 m_2}{m_1+m_2} \Rightarrow a_{cm} = \frac{0 m_1 + m_2 a_2}{m_1+m_2} \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{a_{cm} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{k}{\cancel{m_2}}\frac{\ell}{2} = \frac{k}{m_1+m_2}\frac{\ell}{2}} \quad (A)$$

Θα μπορούσαμε να πάρουμε το σύστημα των δύο σφαιριδίων - ελατηρίου και να εφαρμόσουμε τον 2° νόμο του Newton: $\Sigma F = m a_{cm} \Rightarrow N = m a_{cm} \Rightarrow k(x) = (m_1+m_2) a_{cm} \Rightarrow \boxed{a_{cm} = \frac{k}{m_1+m_2} x}$

(β) Τη στιγμή που το σώμα m_1 χάνει επαφή με τον τοίχο έχουμε ότι η δύναμη της αντίδρασης από τον τοίχο γίνεται $N=0$ επομένως $F_{ελ} = N = 0 \Rightarrow x=0$.

Το ελατήριο επομένως βρίσκεται στο φυσικό του μήκος.

Η ταχύτητα του σώματος m_1 είναι μηδέν: $\boxed{v_1 = 0}$ (3) τη στιγμή που χάνει επαφή με τον τοίχο

Η ταχύτητα του σώματος m_2 μπορεί να βρεθεί από εφαρμογή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας εφόσον δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις ή δυνάμεις τριβών:

0 (φυσικό μήκος)

$$E^i_{μηχ} = E^f_{μηχ} \Rightarrow U^i_{ελ} + \cancel{E^i_{κιν_2}} = \cancel{U^f_{ελ}} + E^f_{κιν_2} \Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}} k x_i^2 = \cancel{\frac{1}{2}} m_2 v_{2f}^2 \Rightarrow k\frac{\ell^2}{4} = m_2 v_{2f}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{2f} = \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{k}{m_2}}} \quad (4) \qquad \text{ορίζουμε } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας θα είναι: $v_{cm} = \frac{\cancel{v_1} m_1 + v_2 m_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{k}{m_2}} \Rightarrow$

$$\boxed{v_{cm} = \frac{m_2 \ell \omega}{2(m_1+m_2)}} \Rightarrow \boxed{v_{cm} = \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{k m_2}{(m_1+m_2)^2}}} \quad (B)$$

τη χρονική στιγμή που το m_1 χάνει επαφή με τον τοίχο

Η ταχύτητα αυτή παραμένει σταθερή αφού η ορμή διατηρείται.

(γ) Εφόσον το σώμα m_2 χάσει επαφή με τον τοίχο, το σύστημα ελατηρίου-σφαιριδίων είναι απομονωμένο και η ορμή του συστήματος διατηρείται, όπως και η ενέργεια.

Εφαρμογή διατήρησης ενέργειας: $\cancel{\frac{1}{2}}(m_1+m_2) v_{cm}^2 = \cancel{\frac{1}{2}} k x_{max}^2 \overset{(B)}{\Rightarrow} \cancel{(m_1+m_2)}\frac{\ell^2}{4}\frac{\cancel{k} m_2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}} = \cancel{k} x_{max}^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\ell^2}{4}\frac{m_2}{m_1+m_2} = x_{max}^2 \Rightarrow \boxed{x_{max} = \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}} \quad (Γ)$$

(δ) Καθώς το σώμα m_1 βρίσκεται κολλημένο στον τοίχο και είναι ακίνητο, το σώμα μάζας m_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση από τη στιγμή που αφήνεται να κινηθεί.

Ξέρουμε ότι η θέση του ταλαντωτή συναρτήσει του χρόνου δίνεται από την εξίσωση:

$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ ως προς τη θέση ισορροπίας του συστήματος

Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος καθορίζουν τις σταθερές A και B.

Έχουμε ότι για $t=0$ η θέση του σώματος m_2 είναι $x(t=0) = -\frac{\ell}{2}$ ενώ η ταχύτητά του είναι μηδέν: $\upsilon_2(t=0)=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}x(t)\Big|_{t=0} = \left(-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t\right)\Big|_{t=0}$

Επομένως: $x(t=0) = -\frac{\ell}{2} \Rightarrow A = -\frac{\ell}{2}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$ $\quad \upsilon(t=0) = 0 \Rightarrow B\omega = 0 \Rightarrow B = 0$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = -\frac{\ell}{2}\cos\omega t} \quad (5)$$

Η θέση του σώματος m_2 επομένως θα είναι (ως προς τον τοίχο):

$$x_2 = \ell + x \overset{(5)}{\Rightarrow} \boxed{x_2 = \ell - \frac{\ell}{2}\cos(\omega t)} \quad (6)$$

Η θέση του κέντρου μάζας έως ότου το σώμα m_1 χάσει επαφή με το τοίχο είναι:

$$x_{cm} = \frac{\cancel{m_1 x_1}^{\,0} + m_2 x_2}{m_1+m_2} \overset{(6)}{\Longrightarrow} x_{cm} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\left(\ell - \frac{\ell}{2}\cos(\omega t)\right) \Rightarrow \boxed{x_{cm} = \frac{m_2\ell}{m_1+m_2}\left(1 - \frac{1}{2}\cos(\omega t)\right)} \quad (7)$$

(ως προς τον τοίχο)

Τη στιγμή που $x(t_1) = 0$, η δύναμη του ελατηρίου γίνεται ϕ και το σώμα m_1 χάνει επαφή με τον τοίχο. Αυτό συμβαίνει όταν $x_2 = \ell$ και $\cos(\omega t_1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega t_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2\omega} \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m_2}{k}}} \quad (8)$$

Τη στιγμή αυτή t_1, η ταχύτητα του σώματος m_1 είναι ϕ και του m_2 είναι:

$$\upsilon_2 = \frac{dx_2}{dt} = +\frac{\omega\ell}{2}\sin\omega t_1 \overset{(8)}{\Rightarrow} \upsilon_2 = \frac{\omega\ell}{2}\sin\left(\cancel{\omega}\frac{\pi}{2\cancel{\omega}}\right) \Rightarrow \boxed{\upsilon_2 = \frac{\omega\ell}{2}}$$

όπως βρήκαμε στο (4)

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι: $v_{cm} = \dfrac{\cancel{v_1}^{0} m_1 + v_2 m_2}{m_1+m_2} \Rightarrow \boxed{v_{cm} = \dfrac{m_2 \omega l}{2(m_1+m_2)}}$ (Δ)

Το παραπάνω αποτέλεσμα συμφωνεί με το αποτέλεσμα (Β) του ερωτήματος (β)

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας (Δ) παραμένει σταθερή αφ' ότου το σώμα m_1 χάσει επαφή με τον τοίχο, γιατί στο σύστημα των δύο σωμάτων δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις.

Η χρονική στιγμή που το m_1 χάνει επαφή με τον τοίχο είναι (από 8): $\boxed{t_1 = \dfrac{\pi}{2\omega}}$

Την χρονική στιγμή t_1, η θέση του κέντρου μάζας είναι: (ως προς τον τοίχο)

$$x_{cm}(t=t_1) \overset{(7)}{=} \frac{m_2 l}{m_1+m_2}\left(1-\frac{1}{2}\cos\cancel{\omega}\frac{\pi}{2\cancel{\omega}}\right) \Rightarrow \boxed{x_{cm}(t=t_1) = \frac{m_2 l}{m_1+m_2}} \quad (9)$$

Βρήκαμε από την (7) ότι η θέση του κέντρου μάζας για $t \le t_1$: $x_{cm}(t) = \dfrac{m_2 l}{m_1+m_2}\left[1-\dfrac{\cos\omega t}{2}\right]$

Για $t \ge t_1$ η ταχύτητα είναι σταθερή και επομένως:

$$v_{cm} = \frac{dx_{cm}}{dt} \Rightarrow dx_{cm} = v_{cm}dt \Rightarrow \int dx_{cm} = \int v_{cm}dt \Rightarrow \boxed{x_{cm}(t \ge t_1) = v_{cm}t + C} \quad (10)$$

Θέλουμε για $t = t_1 = \dfrac{\pi}{2\omega}$ η εξίσωση της θέσης $x_{cm}(t \ge t_1)$ να δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με την εξίσωση της θέσης του κέντρου μάζας για $t \le t_1$.

$$x_{cm}(t \ge t_1)\Big|_{t=t_1} = x_{cm}(t \le t_1)\Big|_{t=t_1} \overset{(9)\&(10)}{\Rightarrow} \frac{m_2 \cancel{\omega} l}{2(m_1+m_2)}\frac{\pi}{2\cancel{\omega}} + C = \frac{m_2 l}{m_1+m_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{m_2 l}{m_1+m_2} - \frac{m_2 l \pi}{4(m_1+m_2)} \Rightarrow C = \frac{m_2 l}{m_1+m_2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \boxed{C = \frac{m_2 l\omega}{2(m_1+m_2)}\left(\frac{4-\pi}{2\omega}\right)} \quad (11)$$

Επομένως η (11) γράφεται ως: $x_{cm}(t \ge t_1) = \dfrac{m_2 \omega l}{2(m_1+m_2)}t - \dfrac{m_2 l\omega}{2(m_1+m_2)}\left(\dfrac{\pi-4}{2\omega}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} t \le t_1 : \; x_{cm}(t) = \dfrac{m_2 l}{m_1+m_2}\left(1-\dfrac{\cos\omega t}{2}\right) \\ t \ge t_1 : \; x_{cm}(t) = \dfrac{m_2 l\omega}{2(m_1+m_2)}\left(t - \dfrac{\pi-4}{2\omega}\right) \end{array}}$$