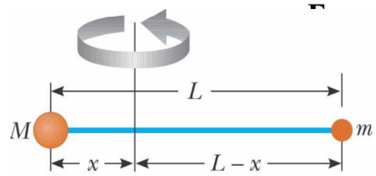
ΦΥΣ. 111

11ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή 02.12.2020**

1. Δυο μάζες M και m συνδέονται διαμέσου μιας ράβδου μήκους L και αμελητέας μάζας όπως στο σχήμα. Για ένα άξονα κάθετο στην ράβδο, δείξτε ότι το σύστημα έχει την ελάχιστη ροπή αδράνειας όταν ο άξονας περνά από το κέντρο μάζας. Δείξτε ότι αυτή η ροπή αδράνειας είναι $I = \mu L^2$ όπου $\mu = \frac{mM}{M+m}$.



Η ροπή αδράνειας του συστήματος δίνεται από:

$$I = \sum_a m_a r_a^2 = Mx^2 + m(L-x)^2$$

Για να βρούμε την ελάχιστη τιμή θα πρέπει $\frac{dI}{dx} = 0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 2Mx - 2m(L-x) = 0 \Rightarrow x = \frac{mL}{M+m}$$

Αυτό είναι πράγματι ελάχιστο μια και η δεύτερη παράγωγος

$$\frac{d^2I}{dx^2} = 2m + 2M > 0$$

Σύμφωνα με το θεώρημα παράλληλων αξόνων, η ροπή αδράνειας ως προς ένα κατακόρυφο άξονα ο οποίος τέμνει τη ράβδο δίνεται από:

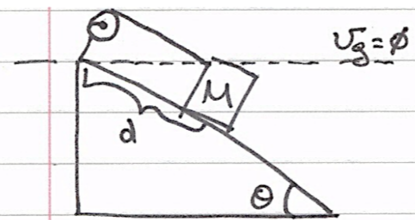
$$I = I_{CM} + MD^2$$ όπου D η απόσταση του CM από τον άξονα περιστροφής

Αυτή η ροπή αδράνειας είναι πάντοτε μεγαλύτερη από τη ροπή αδράνειας ως προς το CM αφού η ποσότητα $D^2 > 0$.

Επομένως η ελάχιστη ροπή αδράνειας είναι ως προς το CM.

Μπορούμε να το ελέγξουμε ως εξής: Το CM βρίσκεται στη θέση $x_{CM} = \frac{M(0) + m(L)}{M+m} = \frac{mL}{M+m}$ δηλαδή στο σημείο που βρήκαμε το ελάχιστο ~~της~~ ροπής αδράνειας

2. Ένα σχοινί είναι τυλιγμένο γύρω από μια τροχαλία μάζας m και ακτίνας r. Το ελεύθερο άκρο του σχοινιού είναι συνδεδεμένο σε ένα τούβλο μάζας M. Το τούβλο αρχίζει από την ηρεμία και αρχίζει να γλιστρά πως το χαμηλότερο σημείο ενός κεκλιμένου επιπέδου το οποίο σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ του τούβλου και της επιφάνειας του κεκλιμένου επιπέδου είναι μ. (α) Χρησιμοποιήστε μεθόδους με βάση τις ενέργειες για να δείξετε ότι η ταχύτητα του τούβλου συναρτήσει της θέσης του, d, πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο δίνεται από την σχέση: $v = \sqrt{\frac{4gdM(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{m+2M}}$.
(β) Βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης του τούβλου συναρτήσει των μ, m, M, g και θ.



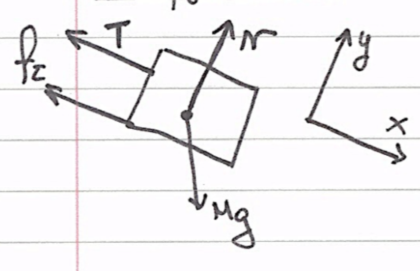
Η τροχαλία έχει μάζα **M** και ακτίνα **R**
Μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουμε σχήμα κυλίνδρου, οπότε η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς άξονα που περνά από το CM είναι: $I_{CM} = \frac{1}{2} mR^2$

Θεωρούμε επίσης ότι το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας είναι αυτό που περνά από το υψηλότερο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου.

(α) Αρχικά: $E_i^{\mu\eta\chi} = E_{\kappa\iota\nu}^{i} + U_g^{i} = 0 + 0 = \emptyset$ (A)

Τελικά: $E_f^{\mu\eta\chi} = E_{\kappa\iota\nu}^{f} + U_g^{f} = \underbrace{\frac{1}{2} I\omega^2}_{\text{κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής τροχαλίας}} + \underbrace{\frac{1}{2} Mv^2}_{\text{κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς}} - Mg\underbrace{d\sin\theta}_{h}$

Το έργο της τριβής: Θεωρούμε τις δυνάμεις που δρούν στο τούβλο



$$\Sigma F_y = N - Mg\cos\theta \equiv Ma_y = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = Mg\sin\theta - T - f_\tau \equiv Ma_x \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \boxed{Mg\sin\theta - T - \mu_k Mg\cos\theta = Ma_x} \quad (B)$$

Η ροπή στην τροχαλία: ως προς το κέντρο της:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma\tau = TR \\ \Sigma\tau = I\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} TR = \frac{1}{2} m_{\tau\rho} R^2 \alpha = \\ a_{\varepsilon\varphi} = \alpha R \Rightarrow \alpha = \frac{a_{\varepsilon\varphi}}{R}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

↑ γωνιακή επιτάχυνση

$$\Rightarrow TR = \frac{1}{2} m_{\tau\rho} \cancel{R} \frac{a_{\varepsilon\varphi}}{\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{TR = \frac{1}{2} m_{\tau\rho} a_{\varepsilon\varphi} R} \quad (\Gamma)$$

Αλλά $\boxed{a_x = a_{\varepsilon\varphi}}$ για το σχοινί (Δ)

Η διατήρηση ενέργειας θα μας δώσει:

$$E^{i}_{\mu\eta\chi} = E^{f}_{\mu\eta\chi} + W_{f_{\tau\rho}} \overset{(A)}{\Rightarrow} 0 = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} M v^2 - Mgd\sin\theta + f_{\tau\rho}\cdot d \Rightarrow$$

$$0 = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} M v^2 - Mgd\sin\theta + \mu_k Mg\cos\theta \cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2} R^2\right) \underbrace{\omega^2}_{\frac{v^2}{R^2}} + \frac{1}{2} M v^2 - Mgd(\sin\theta - \mu_k \cos\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} m \cancel{R^2} \frac{v^2}{\cancel{R^2}} + \frac{1}{2} M v^2 = Mgd(\sin\theta - \mu_k\cos\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2M + m) v^2 = 4Mgd(\sin\theta - \mu_k\cos\theta) \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{4Mgd(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)}{(2M+m)}}}$$

(Β) Βρήκαμε τις σχέσεις (Β), (Γ) κ (Δ)

Από (Γ) κ (Δ) $\Rightarrow T = \frac{1}{2} m_{\tau\rho} a_x$ (5)

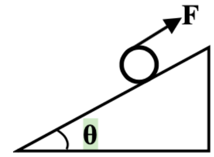
Αντικαθιστούμε στην (Β) οπότε έχουμε:

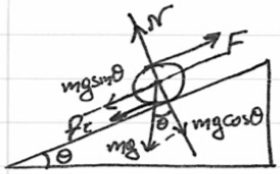
$$Mg\sin\theta - \frac{1}{2} m_{\tau\rho} a_x - \mu_k Mg\cos\theta = M a_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Mg(\sin\theta - \mu_k\cos\theta) = \frac{1}{2}(m_{\tau\rho} + M\cdot 2) a_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a_x = \frac{2Mg(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)}{(2M + m_{\tau\rho})}}$$

3. Ένας κύλινδρος κυλά προς το πάνω μέρος ενός κεκλιμένου επιπέδου με την βοήθεια μιας ταινίας όπως φαίνεται στο σχήμα. Ποια είναι η ελαχίστη τιμή της δύναμης F που απαιτείται αν η γωνία είναι θ=30°; Το βάρος του κυλίνδρου είναι 2N.





Από το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος και το 2° νόμο του Newton έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_x &= ma_x = F - mg\sin\theta - f_{\tau\rho} \\ \Sigma F_y &= ma_y = 0 = N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F - mg\sin\theta - \mu N = ma_x \Rightarrow ma_x = F - mg\sin\theta - \mu mg\sin\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ma_x = F - mg(\sin\theta - \mu\cos\theta) \quad (1)$$

Ωστόσο η άσκηση δεν μας δίνει το συντελεστή τριβής μεταξύ του κυλίνδρου και του κεκλιμένου επιπέδου. Επομένως χρειαζόμαστε μια εξίσωση ακόμα. Αυτή έρχεται θεωρώντας τη ροπή των δυνάμεων ως προς το CM του κυλίνδρου.
Δυνάμεις που προκαλούν ροπή είναι η τριβή f_τ, και η F
Το βάρος δεν προκαλεί ροπή γιατί η διεύθυνσή του περνά από το σημείο ως προς το οποίο θεωρούμε την περιστροφή.
Οι ροπές των 2 αυτών δυνάμεων είναι ομόρροπες, (έχουν την ίδια διεύθυνση και φορά) την οποία και θεωρούμε θετική. Οπότε:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma\tau = F\cdot R + f_{\tau\rho}\cdot R = F\cdot R + \mu mg\cos\theta\, R \\ &\text{Αλλά} \quad \Sigma\tau = I\alpha \quad (I\text{: ροπή αδράνειας, } \alpha\text{: γωνιακή επιτάχυνση}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow F\cdot R + \mu mg\cos\theta\, R = I\alpha \\ &\text{Επειδή έχουμε περιστροφή χωρίς ολίσθηση} \quad \alpha = \frac{a_{\varepsilon\varphi}}{R} = \frac{a_x}{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

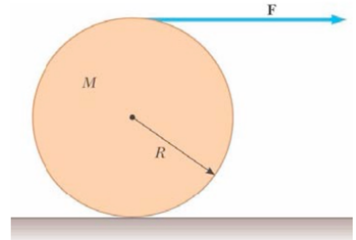
$$\Rightarrow F\cdot R + \mu mg\cos\theta\, R = I\frac{a_x}{R} \Rightarrow \mu mg\cos\theta = -F - \frac{I}{R^2}a_x \quad (2)$$

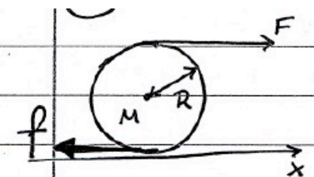
Από (1) ∧ (2) $\Rightarrow ma_x = F - mg\sin\theta + F - \frac{I}{R^2}a_x \Rightarrow \left(m + \frac{I}{R^2}\right)a_x = 2F - mg\sin\theta$

$$\Rightarrow \boxed{a_x = \frac{2F - mg\sin\theta}{m + \frac{I}{R^2}}}$$

Η ελάχιστη δύναμη δε θα επιταχύνει τον κύλινδρο αλλά θα τον κινήσει με σταθερή ταχύτητα $\boxed{a_x = 0 \Rightarrow F = \frac{mg}{2}\sin\theta}$

4. Ένα καρούλι σύρματος μάζας M και ακτίνας R ξετυλίγεται εξαιτίας μιας σταθερής δύναμης F όπως στο σχήμα. Υποθέτοντας ότι το πηνίο είναι ένας ομογενής στερεός κύλινδρος που δεν ολισθαίνει, δείξτε ότι (α) η επιτάχυνση του κέντρου μάζας είναι $4\vec{F}/3M$ και (β) ότι η δύναμ της τριβής έχει διεύθυνση προς τα δεξιά και μέτρο ίσο με F/3. (γ) Αν το πηνίο ξεκινά από την ηρεμία και κυλά χωρίς να ολισθαίνει ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας του αφού έχει κυλήσει μια απόσταση d; Υποθέστε ότι η δύναμη παραμένει σταθερή.





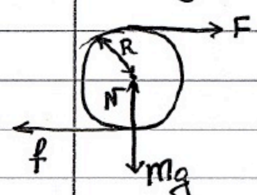
Το πηνίο είναι κύλινδρος οπότε η ροπή αδράνειάς του θα είναι: $\boxed{I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2}$ (1)

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος

Αν η δύναμη της τριβής έχει φορά προς τα δεξιά θα πάρουμε αρνητικό πρόσημο για την f_s

Από το 2ο νόμο του Newton έχουμε: $\Sigma F_x = Ma_x = F - f_s \Rightarrow \boxed{Ma_x = F - f_s}$ (2)

Σχεδιάζουμε τις ροπές που ενεργούν στο καρούλι:



Το βάρος και η αντίδραση της επιφάνειας στο καρούλι N δεν παράγουν ροπές γιατί περνάν από τον άξονα περιστροφής του που είναι στο Κ.Μ. του.

Η δύναμη F και η δύναμη της τριβής f είναι αυτές που παράγουν ροπές. Οι ροπές των 2 δυνάμεων έχουν την ίδια φορά, σύμφωνα με τη φορά δεικτών του ρολογιού. Επομένως η συνισταμένη ροπή θα είναι:

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{\tau}_F + \vec{\tau}_f = I_{cm}\alpha \Rightarrow FR + fR = I_{cm}\alpha \overset{(1)}{\Rightarrow} F\cancel{R} + f\cancel{R} = \frac{1}{2}MR^{\cancel{2}}\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F + f = \frac{1}{2}MR\alpha$$

Αφού δεν έχουμε ολίσθηση $a_x = R\alpha$

$$\Rightarrow \boxed{F + f = \frac{1}{2}Ma_x} \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις (2) και (3) έχουμε: $\frac{3}{2}Ma_x = 2F \Rightarrow \boxed{a_x = \frac{4}{3}\frac{F}{M}}$

(β) Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα στην (3) οπότε έχουμε:

$$F + f = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{M}\frac{\cancel{4}^{2}}{3}\frac{F}{\cancel{M}} \Rightarrow 3F + 3f = 2F \Rightarrow 3f = -F \Rightarrow \boxed{f = -\frac{F}{3}}$$

Η απάντηση είναι αρνητική οπότε η δύναμη f έχει αντίθετη φορά από αυτή που σχεδιάστηκε.

(γ) Αφού το ΚΜ έχει καλύψει μια απόσταση d, ξεκινώντας από ηρεμία, θα έχουμε:

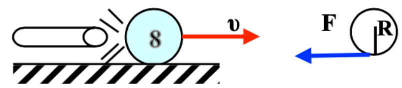
$$\left.\begin{aligned} d = \frac{1}{2}a_x t^2 &\Rightarrow t^2 = \frac{2d}{a_x} \\ \text{Αλλά} \quad \upsilon = at &\Rightarrow \upsilon^2 = a_x^2 t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \upsilon^2 = a_x^{\cancel{2}} \frac{2d}{\cancel{a_x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon^2 = 2a_x d \Rightarrow$$

$\Rightarrow \upsilon = \sqrt{2a_x d}$ αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα από (α)

έχουμε: $\upsilon = \sqrt{2\frac{4}{3}\frac{F}{M}d} \Rightarrow \boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{Fd}{M}}}$

5. Μια μπάλα του μπιλιάρδου κτυπιέται με τη στέκα όπως στο σχήμα. Η διεύθυνση της ώθησης της δύναμης είναι οριζόντια και περνά από το κέντρο της μπάλας. Η αρχική ταχύτητα υ_0 της μπάλας μετά την ώθηση, η ακτίνα της μπάλας R, η μάζα της M και ο συντελεστής τριβής με την τσόχα του τραπεζιού μ, θεωρούνται γνωστές ποσότητες. Να βρεθούν (α) Πόσο μακριά θα κινηθεί η μπάλα πριν σταματήσει να γλιστρά στο τραπέζι και ξεκινά να κυλά. (β) Ποια θα είναι η γωνιακή της ταχύτητα στο σημείο αυτό;



(α) Από τη στιγμή που η μπάλα χτυπήθηκε από τη στέκα μέχρι τη χρονική στιγμή που ξεκινά να κυλά χωρίς να γλιστρά, η δύναμη της τριβής μεταξύ της μπάλας και του τραπεζιού την επιβραδύνει γραμμικά, αλλά ταυτόχρονα αναπτύσει μια ροπή ως προς το κέντρο της μπάλας. (CM). Αυτή η ροπή αναγκάζει τη μπάλα να αποκτήσει μια γωνιακή επιτάχυνση.

Η μπάλα αρχίζει να κυλά χωρίς να ολισθαίνει όταν η γραμμική της ταχύτητα και η γωνιακή της ταχύτητα έχουν ελαττωθεί και αυξηθεί αντίστοιχα ώστε να ισχύει η σχέση :

$$v = \omega R$$

Αυτή η σχέση είναι ουσιαστικά ο ορισμός της γραμμικής ταχύτητας ως προς τη γωνιακή ταχύτητα για καθαρή κύλιση.

Η δύναμη της τριβής στη μπάλα είναι :

$$f_{\tau\rho} = \mu N = \mu m g$$

Η δύναμη έχει φορά αντίθετη με τη φορά κίνησης της μπάλας.

Η γραμμική επιτάχυνση της μπάλας είναι: $a = \dfrac{f_{\tau\rho}}{m} = -\mu g$

Επομένως η γραμμική της ταχύτητα μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή

$$v = v_0 + at \Rightarrow \boxed{v = v_0 - \mu g t} \quad (1)$$

Η ροπή στη μπάλα είναι : $\tau = f_{\tau\rho} \cdot R = \mu m g R$

αλλά συναρτήσει της γωνιακής επιτάχυνσης: $\tau = I\alpha = \underbrace{\frac{2}{5} m R^2}_{I_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma}} \alpha$

Ξέρουμε ακόμα ότι : $a_{\varepsilon\varphi} = a_x = \alpha R$

$$\Rightarrow \mu \cancel{m} g \cancel{R} = \frac{2}{5} \cancel{m} R^{\cancel{2}} \frac{a_x}{\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{a_x = \frac{5}{2} \mu g}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση της μπάλας θα είναι $\alpha = a_x/R \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{5\mu g}{2R}}$

Η γωνιακή της ταχύτητα:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \boxed{\omega(t) = \frac{5\mu g}{2R} t} \quad (2)$$

Για να υπολογίσουμε την απόσταση που θα κινηθεί η μπάλα πριν αρχίσει να κυλά χωρίς ολίσθηση, πρέπει πρώτα να βρούμε το χρονικό διάστημα που απαιτείται ώστε να συμβεί αυτό.

Κύλιση ξεκινά όταν: $v(t) = \omega(t) R \overset{(1)\wedge(2)}{\Longrightarrow}$

$$v_0 - \mu g t = \frac{5\mu g}{2\cancel{R}} t \cancel{R} \Rightarrow 2v_0 - 2\mu g t = 5\mu g t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2v_0 = 7\mu g t \Rightarrow \boxed{t = \frac{2v_0}{7\mu g}}$$

Η απόσταση που καλύπτει η μπάλα στο χρονικό αυτό διάστημα είναι: (η επιτάχυνση είναι σταθερή)

$$S = \cancelto{0}{S_0} + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow S = v_0 \frac{2v_0}{7\mu g} - \frac{1}{2}\mu g t^2 \Rightarrow$$

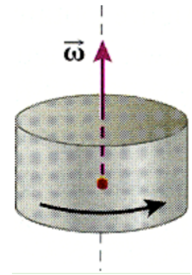
$$\Rightarrow S = \frac{2v_0^2}{7\mu g} - \frac{1}{\cancel{2}} \mu g \frac{\cancel{4}2 v_0^2}{49\mu g^{\cancel{2}}} \Rightarrow S = \frac{2v_0^2}{7\mu g} - \frac{2v_0^2}{49\mu g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{12}{49} \frac{v_0^2}{\mu g}}$$

(β) Η γωνιακή της ταχύτητα θα είναι:

$$\omega(t) = \cancelto{0}{\omega_0} + \alpha t = \alpha t = \frac{5}{\cancel{2}} \frac{\cancel{\mu g}}{R} \frac{\cancel{2} v_0}{7\cancel{\mu g}} \Rightarrow \boxed{\omega(t) = \frac{5 v_0}{7R}}$$

6. Σφόνδυλοι είναι βαριοί κυκλικοί δίσκοι που χρησιμοποιούνται για την αποθήκευση μεγάλων ποσοτήτων ενέργειας σε διάφορες μηχανές. Θεωρήστε έναν τέτοιο δίσκο σφονδύλου μάζας 150.0*kg* και ακτίνας 25.0*cm* που περιστρέφεται με ρυθμό 1000 στροφές/*min* γύρω από έναν άξονα που είναι κάθετος στον δίσκο και περνά από το κέντρο μάζας του όπως στο σχήμα. (α) Βρείτε την κινητική ενέργεια περιστροφής του συστήματος του σφονδύλου (β) Τι ταχύτητα θα πρέπει να έχει ένα σώμα μάζας 1.0*kg* ώστε να έχει την ίδια κινητική ενέργεια με αυτή του σφονδύλου;



(α) Η ροπή αδράνειας του σφονδύλου είναι: $I_{CM} = \frac{1}{2} m R^2 \Rightarrow$

$$I_{CM} = \frac{1}{2}(1500\,kg)(0.25\,m)^2 \Rightarrow \boxed{I_{CM} = 4.69\ kg\,m^2}$$

Η γωνιακή του ταχύτητα είναι: $\omega = \frac{1000\ στ/min}{60\ s/min}\, 2\pi \left(\frac{rad}{στ}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega = 104.7\ rad/s.$$

Επομένως η κινητική ενέργεια του σφονδύλου θα είναι:

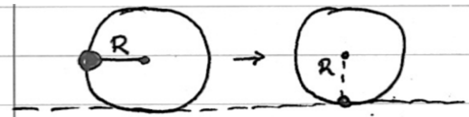
$$E_{κιν} = \frac{1}{2} I_{CM}\,\omega^2 \Rightarrow E_{κιν} = \frac{1}{2}(4.69\ kg\,m^2)\left(104.7\ \frac{r}{s}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{κιν} = 2.57 \times 10^4\ J}$$

(β) Ένα υλικό σημείο μάζας m το οποίο κινείται με ταχύτητα υ έχει κινητική ενέργεια $E_κ = \frac{1}{2} m \upsilon^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\,1(kg)\,\upsilon^2 = 2.57 \times 10^4\ J \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon = 227\ m/s}$$

7. Ένας ομοιόμορφος ομογενής δίσκος μάζας *M* και ακτίνας *R* μπορεί να στραφεί ως προς άξονα που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου. Ένα μικρό σώμα με μάζα επίσης Μ είναι κολλημένο στην περιφέρεια του δίσκου. Το σύστημα δίσκος-σώμα κρατιέται ακίνητο με το σώμα στην οριζόντια θέση. Το σύστημα αφήνεται κατόπιν ελεύθερο να στραφεί. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του σώματος όταν αυτό βρίσκεται ακριβώς κάτω από τον άξονα του δίσκου (στη χαμηλότερη κατακόρυφο θέση).



Θεωρούμε το επίπεδο που περνά από το κατώτερο σημείο της περιφέρειας του δίσκου, σα το επίπεδο της μηδενικής δυναμικής ενέργειας.

Καθώς το σύστημα περιστρέφεται από την οριζόντια θέση, στο κατώτερο σημείο του δίσκου, πηγαίνει σε σημείο χαμηλότερης δυναμικής ενέργειας και επομένως η ενέργεια αυτή μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια:

Η κινητική ενέργεια $E_{κιν} = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 = mgR$

Ο δίσκος και το σώμα έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω, και επομένως η γραμμική ταχύτητα του σώματος θα είναι: $v = \omega R \Rightarrow$

Αντικαθιστούμε και έχουμε: $\frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 = \frac{1}{2}(I + mR^2)\omega^2$

Η ροπή αδράνειας του δίσκου είναι: $I = \frac{1}{2} mR^2$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_{κ} = mgR \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cancel{m}R^2 + \cancel{m}R^2\right)\omega^2 = \cancel{m}gR \Rightarrow \omega^2 = \frac{2g\cancel{R}}{3R^{\cancel{2}}/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{g}{R}}}$$

Επομένως η ταχύτητα του μικρού σώματος θα είναι $v = \omega R \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4}{3} gR}$

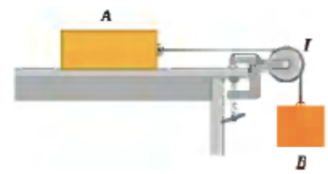
Ας σημειωθεί ότι αν το σώμα απλά το αφήναμε να πέσει από ύψος R τότε η γραμμική του ταχύτητα θα ήταν:

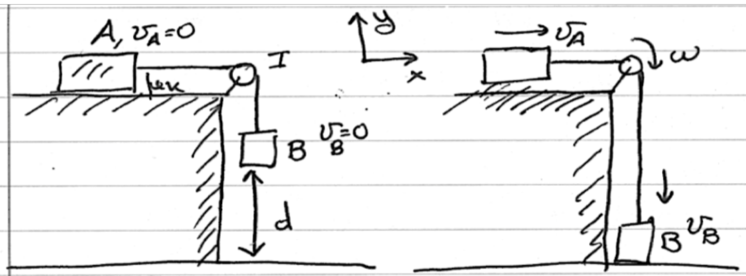
$$E_{κιν} = mgR \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 = \cancel{m}gR \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gR}$$

Επομένως η ταχύτητά του όταν είναι εξαρτημένο στο δίσκο ελαττώνεται κατά: $\frac{v_{Σ}}{v_{ΕΘ}} = \sqrt{\frac{\cancel{4}^{2} gR}{3\cdot \cancel{2}gR}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

8. Η τροχαλία του σχήματος έχει ακτίνα R και ροπή αδράνειας I. Το σχοινί δεν γλιστρά καθώς περνά από την τροχαλία ενώ η τροχαλία περιστρέφεται ως προς λείο άξονα κάθετο στο επίπεδό της. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ του σώματος Α και του τραπεζιού είναι μ_K. Το σύστημα είναι αρχικά ακίνητο και κατόπιν αφήνεται να κινηθεί ελεύθερα οπότε και το σώμα Β κατεβαίνει. Το σώμα Α έχει μάζα m_A και το σώμα Β έχει μάζα m_B. Χρησιμοποιώντας μεθόδους από ενέργεια να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος Β συναρτήσει του ύψους d που έχει κατέβει.





Από το θεώρημα έργου ενέργειας έχουμε ότι το έργο των μη-συντηρητικών δυνάμεων ισούται με τη μεταβολή της ενέργειας του συστήματος:

$$W_{\tau\rho} = \Delta E_{\mu\eta\chi} = E_{\mu\eta\chi}^{\tau\varepsilon\lambda} - E_{\mu\eta\chi}^{\alpha\rho\chi} = E_{\kappa\iota\nu}^{\tau\varepsilon\lambda} + E_{\delta\upsilon\nu}^{\tau\varepsilon\lambda} - E_{\kappa\iota\nu}^{\alpha\rho\chi} - E_{\delta\upsilon\nu}^{\alpha\rho\chi} \quad (1)$$

Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων x-y με τη φορά προς τα πάνω σα +y και προς τα δεξιά σα +x. Η αρχή του συστήματος θεωρείται ότι είναι στο έδαφος και το οποίο λαμβάνουμε σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας.

Η τάση του σχοινιού παράγει θετικό έργο στο σώμα Α και αρνητικό στο σώμα Β και ίδιου μεγέθους με αυτό στο Α, επομένως το έργο στο σχοινί είναι μηδέν.

Εφόσον το σχοινί δε γλιστρά στη τροχαλία, τα 2 σώματα έχουν την ίδια γραμμική ταχύτητα και ίδια με τη γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας.

Όση απόσταση κινείται το σώμα Β στην κατακόρυφη διεύθυνση την ίδια απόσταση κινείται το σώμα Α οριζόντια και επομένως η τριβή παράγει έργο κατά την απόσταση αυτή:

$$W_{\tau\rho} = -\mu_\kappa m_1 g \cdot d \qquad (2)$$

Αρχικά το σύστημα είναι ακίνητο, οπότε $E_{\kappa\iota\nu}^{\alpha\rho\chi} = 0$ ενώ υπάρχει αρχική δυναμική ενέργεια λόγω της θέσης του σώματος Β $E_{\delta\upsilon\nu}^{\alpha\rho\chi} = m_2 g d$.
(Η δυναμική ενέργεια του Α αγνοείται γιατί η βαρύτητα δεν παράγει έργο)

Στην τελική θέση, η δυναμική ενέργεια είναι $E_{δυν}^{τελ} = 0$.

Το σύστημα έχει αποκτήσει κινητική ενέργεια $E_{κιν}^{τελ} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$

Αλλά $v_1 = v_2 = v_{τροχ} = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}$ όπου $v = v_1 = v_2$, $I = \frac{1}{2} MR^2$

Επομένως:

$$W_{τρ} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{R^2} - m_2 g d \Rightarrow -\mu_k m_1 g d = \frac{1}{2}\left[(m_1 + m_2) + I/R^2\right] v^2 - m_2 g d$$

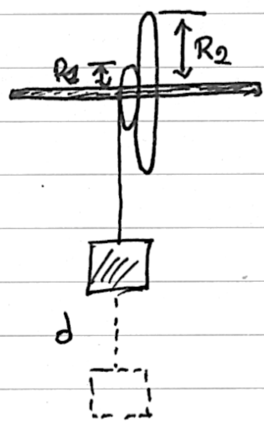
$$\Rightarrow v^2 \left[\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)\right] = (m_2 - \mu_k m_1) g d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2(m_2 - \mu_k m_1) g d}{(m_1 + m_2 + I/R^2)}}}$$

Αν $m_2 \gg (m_1, I/R^2)$ τότε $v = \sqrt{2gd}$ που σημαίνει ότι το σώμα B πέφτει ελεύθερα. Αν η ροπή αδράνειας I είναι πολύ μεγάλη τότε το σώμα B πέφτει πολύ αργά.

Για να κινηθεί το σύστημα θα πρέπει $m_2 \gg \mu_k m_1$, δηλαδή το βάρος του B θα πρέπει νάναι μεγαλύτερο της δύναμης της τριβής στο A.

9. Δυο μεταλλικοί δίσκοι, ένας ακτίνας R_1=2.50*cm* και μάζας M_1=0.80*kg* και ένας άλλος ακτίνας R_2=5*cm* και μάζας M_2=1.60*kg*, είναι συγκολλημένοι και ένας λείος άξονας περνά από το κέντρο τους. (α) Ποια είναι η συνολική ροπή αδράνειας του συστήματος των δυο δίσκων; (β) Ένα ελαφρύ νήμα τυλίγεται γύρω από την περιφέρεια του μικρότερου δίσκου και ένα σώμα μάζας 1.50*kg* εξαρτάται από το ελεύθερο άκρο του νήματος. Αν το σώμα αφήνεται από την κατάσταση της ηρεμίας και 2.0*m* πάνω από το έδαφος, ποια είναι η ταχύτητά του ακριβώς πριν χτυπήσει στο έδαφος; (γ) Επαναλάβατε τους υπολογισμούς του ερωτήματος (β) αλλά αυτή τη φορά υποθέστε ότι το νήμα είναι τυλιγμένο γύρω από το μεγαλύτερο δίσκο. Σε ποια από τις δυο περιπτώσεις η τελική ταχύτητα του σώματος είναι μεγαλύτερη; Εξηγήστε γιατί συμβαίνει αυτό.



Η ροπή αδράνειας του συστήματος των 2 δίσκων είναι το άθροισμα των ροπών αδράνειας των 2 δίσκων.

Οι δίσκοι έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα και η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του δίσκου γύρω από την οποία περιέχε το σχοινί έχουν την ίδια ταχύτητα με το κρεμάμενο σώμα.

Εφόσον δεν υπάρχουν μη-συντηρητικές δυνάμεις η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Έτσι θά 'χουμε:

$$E_{κιν}^{αρχ} + E_{δυν}^{αρχ} = E_{κιν}^{τελ} + E_{δυν}^{τελ} \Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{ολ}\cdot\omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(I_{1δ} + I_{2δ})\frac{v^2}{R_1^2} \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I_{1δ}+I_{2δ}}{R_1^2}\right)v^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2\cancel{m}gh}{\cancel{m}\left(1 + \frac{I_{1δ}+I_{2δ}}{mR_1^2}\right)} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1 + \frac{I_{1δ}+I_{2δ}}{mR_1^2}\right)}}} \quad (1)$$

$$I_{1δ} = \frac{1}{2}M_1R_1^2 \quad \text{και} \quad I_{2δ} = \frac{1}{2}M_2R_2^2 \quad \text{οπότε} \quad I_{1δ} + I_{2δ} = \frac{1}{2}0.8(2.5\cdot10^{-2})^2 + \frac{1}{2}1.6(5\cdot10^{-2})^2 \Rightarrow$$

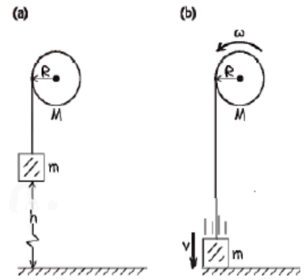
$$I_{ολ} = I_{1δ} + I_{2δ} = 2.25\cdot10^{-3}\,kg\,m^2$$

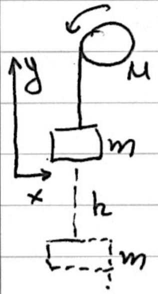
Αντικατάσταση στην (1) $\Rightarrow$ $v = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 9.8 \cdot 2}{1 + \left(2.25 \cdot 10^{-2} / \left[1.5 \cdot (0.025)^2\right]\right)}} \Rightarrow \boxed{v = 3.4\, m/s}$

Αν χρησιμοποιήσουμε την ακτίνα R_2 αντί της R_1 τότε $\boxed{v = 4.95\, m/s}$

Επομένως όταν το σώμα έχει συνδεθεί στο μεγαλύτερο δίσκο αποκτά μεγαλύτερη ταχύτητα. Για $R = R_2$ μεγαλύτερο ποσοστό της ολικής κινητικής ενέργειας βρίσκεται στο σώμα. Η ολική κινητική ενέργεια και στις 2 περιπτώσεις είναι ίδια, αλλά μεγαλύτερο μέρος της κινητικής ενέργειας είναι στο σώμα που κρέμεται, το οποίο και έχει μεγαλύτερη ταχύτητα.

10. Στο σύστημα του διπλανού σχήματος μια μάζα 12.0*kg* αρχικά ακίνητη αφήνεται να πέσει προκαλώντας το ομοιόμορφο κύλινδρο μάζας 10.0*kg* και διαμέτρου 30.0*cm* να περιστραφεί ως προς λείο άξονα που περνά από το κέντρο του. Πόσο απόσταση πρέπει να κατέβει η μάζα ώστε ο κύλινδρος να αποκτήσει 250*J* κινητικής ενέργειας;





Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας θα έχουμε!

$$\Delta E_{\mu\eta\chi}=0 \Rightarrow E^{\tau\varepsilon\lambda}_{\mu\eta\chi}-E^{\alpha\rho\chi}_{\mu\eta\chi}=0 \Rightarrow E^{\tau\varepsilon\lambda}_{\kappa\iota\nu}+E^{\tau\varepsilon\lambda}_{\delta\upsilon\nu}=E^{\alpha\rho\chi}_{\kappa\iota\nu}+E^{\alpha\rho\chi.}_{\delta\upsilon\nu}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2_{\alpha\rho}+\frac{1}{2}I\omega^2_{\alpha\rho\chi}+E^{\alpha\rho\chi}_{\delta\upsilon\nu}=\frac{1}{2}m\upsilon^2_{\tau\varepsilon\lambda}+\frac{1}{2}I\omega^2_{\tau\varepsilon\lambda}+E^{\tau\varepsilon\lambda}_{\delta\upsilon\nu}$$

Θεωρούμε τη θέση του σώματος m μετά τη κίνησή του κατά απόσταση h σα το επίπεδο της μηδενικής δυναμικής ενέργειας. Επομένως $E^{\alpha\rho\chi}_{\delta\upsilon\nu}=mgh$ και $E^{\tau\varepsilon\lambda}_{\delta\upsilon\nu}=0$.

Το σύστημα είναι αρχικά ακίνητο οπότε $\upsilon_{\alpha\rho}=0$ κ $\omega=0$
Στη τελική θέση η ταχύτητα της περιφέρειας της τροχαλίας είναι ίδια με τη ταχύτητα του σώματος $\upsilon=\upsilon_{\tau\rho\chi}=\omega\cdot R$, $I=\frac{1}{2}MR^2$

Οπότε: $\frac{1}{2}m\upsilon^2_{\tau\varepsilon\lambda}+\frac{1}{2}I\omega^2_{\tau\varepsilon\lambda}=mgh \Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2R^2+\frac{1}{2}I\omega^2=mgh$

Αλλά $\frac{1}{2}I\omega^2=250\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{250\cdot2}{I}}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{500}{I}}$ $\Rightarrow$

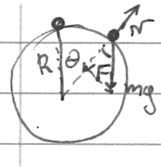
$$\Rightarrow \frac{1}{2}mR^2\frac{500}{I}+\frac{1}{2}\cancel{I}\frac{500}{\cancel{I}}=mgh\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}m\cancel{R^2}\frac{500}{\cancel{\frac{1}{2}}M\cancel{R^2}}+\frac{1}{2}500=mgh\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 500\left(\frac{m}{M}+\frac{1}{2}\right)=mgh\Rightarrow h=\frac{500(2m+M)}{2Mmg}\Rightarrow h=\frac{\overset{25}{\cancel{500}}(2\cdot12+10)}{\cancel{2\cdot10}\cdot12\cdot9.8}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h=\frac{25\cdot34}{12\cdot9.8}\Rightarrow h=\underline{\underline{7.23m}}$$

Η αρχική ενέργεια του συστήματος είναι η δυναμική ενέργεια $E_{\delta\upsilon\nu}=mgh\Rightarrow$
$\Rightarrow E_{\delta\upsilon\nu}=12\cdot9.8\cdot7.23=850J$.
Η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου είναι $E^{\pi\varepsilon\rho}_{\kappa\iota\nu}=250J$. Οπότε η μάζα έχει κινητική ενέργεια 600J.

11. Μία μπίλια κυλά ακτίνας r κυλά χωρίς να γλιστρά στην επιφάνεια μίας σφαίρας ακτίνας R, ξεκινώντας από την κατάσταση της ηρεμίας και το πάνω μέρος της σφαίρας. Δείξτε ότι η γωνία θ στην οποία η μπίλια χάνει επαφή με την επιφάνεια της σφαίρας είναι $\theta = \cos^{-1}(10/17)$.



Η μπίλια φεύγει από την σφαίρα όταν η κάθετη δύναμη γίνεται μηδέν.

Η ακτινική δύναμη $F=ma$ γράφεται (η φορά προς το εσωτερικό της σφαίρας παίρνεται σα θετική)

$$mg\cos\Theta - N = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow N = mg\cos\Theta - \frac{mv^2}{R}$$

Επομένως το σωματίδιο φεύγει όταν $\boxed{mg\cos\Theta = \frac{mv^2}{R}}$ (1)

Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα v παίρνουμε το θεώρημα της διατήρησης της κινητικής δυναμικής ενέργειας:

αν είχαμε ολίσθηση ο όρος αυτός δεν θα υπήρχε

$$-\Delta U = \Delta E_{κιν} = -(mgR\cos\Theta - mgR) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - \emptyset \Rightarrow$$

αν είχαμε ολίσθηση δεν θα ίσχυε αυτό

$$\Rightarrow mgR(1-\cos\Theta) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\cancel{m}\cancel{r^2}\right)\left(\frac{v^2}{\cancel{r^2}}\right) \Rightarrow$$

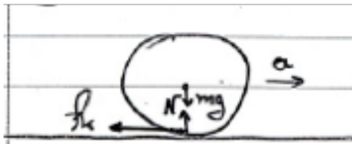
$$\Rightarrow gR(1-\cos\Theta) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{5}v^2 \Rightarrow gR(1-\cos\Theta) = \frac{7}{10}v^2 \Rightarrow \boxed{v^2 = \frac{10}{7}gR(1-\cos\Theta)} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) έχουμε:

$$\cancel{mg}\cos\Theta = \frac{\cancel{m}}{\cancel{R}}\frac{10}{7}\cancel{gR}(1-\cos\Theta) \Rightarrow \cos\Theta = \frac{10}{7}(1-\cos\Theta) \Rightarrow \frac{17}{\cancel{7}}\cos\Theta = \frac{10}{\cancel{7}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\Theta = \frac{10}{17} \Rightarrow \boxed{\Theta = 54^\circ}$$

12. Μία μπάλα του bowling ρίχνεται προς τον διάδρομο με αρχική ταχύτητα υ_0. Αρχικά ολισθαίνει χωρίς να κυλίεται αλλά εξαιτίας των τριβών αρχίζει να κυλά. Να δειχθεί ότι η ταχύτητά της όταν κυλά χωρίς να ολισθαίνει είναι $5\upsilon_0/7$.



Οι δυνάμεις που δρουν πάνω στη μπάλα του bowling είναι η δύναμη της βαρύτητας mg, η αντίδραση του εδάφους N και η κινητική τριβή (ενώ γλιστρά στο έδαφος)

Από το 2ο νόμο του Newton έχουμε: $\Sigma F_x = -f_k = ma \Rightarrow a = -\dfrac{f_k}{m}$ (1)

Επομένως η ταχύτητα του ΚΜ της μπάλας συναρτήσει του χρόνου είναι:

$$\boxed{\upsilon(t) = \upsilon_0 - \frac{f_k}{m} t} \quad (2)$$

Εξετάζοντας τις ροπές των δυνάμεων ως προς το ΚΜ της μπάλας έχουμε ότι το βάρος και η αντίδραση δεν προκαλούν ροπή αφού η διεύθυνσή τους περνά από το Κ.Μ. Η δύναμη που προκαλεί ροπή είναι η δύναμη της τριβής και επομένως θα έχουμε:

$$\Sigma\tau = f_k \cdot R = I_{cm}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{f_k R}{I_{cm}} = \frac{f_k R}{\frac{2}{5} m R^2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{5}{2}\frac{f_k}{mR}} \quad (3)$$

Η γωνιακή ταχύτητα της μπάλας συναρτήσει του χρόνου θα είναι:

$$\omega(t) = \cancel{\omega_0}^{\,0} + \alpha t \Rightarrow \boxed{\omega(t) = \frac{5}{2}\frac{f_k}{mR} t} \quad (4)$$

αρχικά η μπάλα δεν κυλά

Τη στιγμή που η μπάλα αρχίζει να κυλά χωρίς ολίσθηση $\upsilon = \omega R$

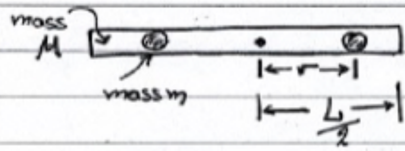
από (2) κ (4) $\Rightarrow \upsilon_0 - \dfrac{f_k}{m} t = \dfrac{5}{2}\dfrac{f_k}{m\cancel{R}} t \cancel{R} \Rightarrow \upsilon_0 = \left(\dfrac{5}{2}+1\right)\dfrac{f_k}{m} t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{t_k = \frac{2}{7}\frac{m}{f_k}\upsilon_0} \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας την (5) στην (2) έχουμε:

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 - \frac{\cancel{f_k}}{\cancel{m}}\frac{2}{7}\frac{\cancel{m}}{\cancel{f_k}}\upsilon_0 \Rightarrow \boxed{\upsilon(t_{κυλ}) = \frac{5}{7}\upsilon_0}$$

13. Μία ομοιόμορφη ράβδος μάζας 100*g* και μήκους 50.0*cm* περιστρέφεται σε ένα οριζόντιο επίπεδο γύρω από ένα σταθερό κατακόρυφο και λείο καρφί που περνά από το κέντρο της. Δύο μικρές χάντρες, κάθε μια μάζας 30*gr* τοποθετούνται στη ράβδο έτσι ώστε να μπορούν να γλιστρούν κατά μήκους της ράβδου χωρίς τριβές. Αρχικά οι χάντρες κρατούνται ακίνητες με κάποια ειδικά φρένα και σε απόσταση 10.0*cm* εκατέρωθεν του κέντρου της ράβδου, ενώ το σύστημα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα 20 *rad*/*s*. Ξαφνικά, τα φρένα που κρατούσαν τις χάντρες ελευθερώνονται και οι χάντρες γλιστρούν προς τις εξωτερικές άκρες της ράβδου. (α) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος τη στιγμή που οι χάντρες φθάνουν στα άκρα της ράβδου; (β) Τι θα συμβεί αν οι χάντρες φύγουν από τη ράβδο; Πόση θα είναι η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αφού οι χάντρες έχουν ξεφύγει από πάνω της.



Τα δεδομένα του προβλήματος είναι:

$L = 0.5m, \quad M = 0.1kg \quad m = 0.03kg$

Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς το καρφί, που βρίσκεται στο ΚΜ της ράβδου, θα είναι:

$$I = I_{cm} + mr^2 + mr^2 \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{12}ML^2 + 2mr^2} \quad (1)$$

(α) Δεν υπάρχουν ροπές εξωτερικών δυνάμεων οπότε η ολική στροφορμή του συστήματος διατηρείται:

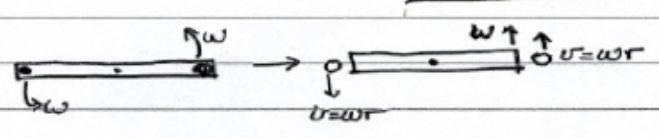
$$L_i = L_f \Rightarrow I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow \boxed{\omega_f = \frac{I_i\omega_i}{I_f}} \quad (2)$$

Η ροπή αδράνειας του συστήματος μεταβάλλεται αφού οι χάντρες απομακρύνονται από τον άξονα περιστροφής. Το τελικό r_f των χαντρών θα είναι ίσο με το $L/2$. Επομένως από (1) ∧ (2) ⇒

$$\omega_f = \frac{\frac{1}{12}ML^2 + 2mr^2}{\frac{1}{12}ML^2 + 2m\frac{L^2}{4}}\,\omega_i \Rightarrow \omega_f = \frac{\frac{1}{12}0.1\cdot 0.5^2 + 2\cdot 0.03\cdot 0.1^2}{\frac{1}{12}ML^2 + 2m\,0.25^2}\,20 \Rightarrow$$

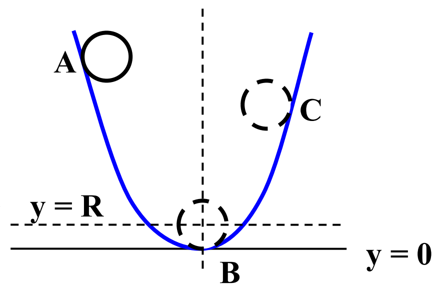
$$\Rightarrow \boxed{\omega_f = 9.2\,rad/s}$$

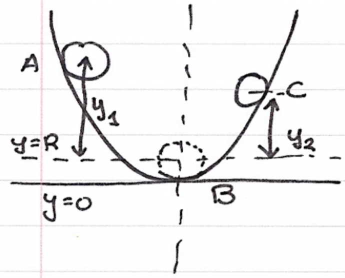
(β)



Η γωνιακή ταχύτητα είναι η ίδια αφού $\vec{L}_{συστήματος}$ διατηρείται και δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές.

14. Ένας ομοιόμορφος κύλινδρος, ακτίνας R, κυλά από την κατάσταση ηρεμίας προς το κατώτερο σημείο ενός παραβολικού σωλήνα η εξίσωση επιφάνειας του οποίου δίνεται από $y=Kx^2$. Ο κύλινδρος δεν ολισθαίνει από το σημείο A στο B αλλά η επιφάνεια του σωλήνα μεταξύ των σημείων B και C είναι λεία (δείτε το σχήμα). Σε ποιο ύψος προς την διεύθυνση του C θα ανέβει ο κύλινδρος; Κάτω από τις ίδιες συνθήκες, ποιο θα είναι το ύψος που θα καλύψει μια ομοιόμορφη σφαίρα της ίδιας ακτίνας με αυτή του κυλίνδρου; Λιγότερο ή περισσότερο από αυτό του κυλίνδρου; Θεωρήστε γνωστές τις ροπές αδράνειας του κυλίνδρου και της σφαίρας.





Από τη στιγμή που δε ξέρουμε το συντελεστή τριβής και επομένως τη δύναμη τριβής που ενεργεί στο κύλινδρο, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μεθόδους δυναμικής για να βρούμε την τελική θέση του κυλίνδρου. Ωστόσο μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας και να συσχετίσαμε την ενέργεια του κυλίνδρου στο σημείο A με αυτή στο σημείο C.

Η τριβή ενεργεί μόνο κατά μήκος της διαδρομής AB και όχι κατά μήκος της BC. Επομένως εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας σε 2 βήματα. Πρώτα στα σημεία A κ B και κατόπιν στα σημεία B και C.

Ο κύλινδρος ξεκινά από την ηρεμία (σημείο A) και άρα έχει μόνο δυναμική ενέργεια. Θεωρούμε σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το σημείο B (κορυφή της παραβολής όπου $y=R$).

Επομένως $\boxed{E_A = mgy_1}$

Πηγαίνοντας από το A στο B υπάρχει <u>τριβή</u>, η οποία όμως παράγει <u>μηδενικό έργο</u> αφού δεν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της, <u>μια και ο κύλινδρος δεν ολισθαίνει.</u> Επίσης θα έχουμε ακόμα: $v_{CM}=\omega R$

Άρα η ενέργεια του κυλίνδρου στο σημείο B είναι: $\boxed{E_B=\frac{1}{2}mv_{cm}^2+\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2}$

όπου I_{cm} η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου.

Πηγαίνοντας από το B στο C, δεν υπάρχει τριβή. Σαν αποτέλεσμα ο κύλινδρος δεν μπορεί να κυλίσει και επομένως ανεβαίνει στο σημείο C περιστρεφόμενος ("σπινάρει") γύρω από το κέντρο μάζας του. Στο σημείο C η γραμμική ταχύτητα του CM γίνεται μηδέν αλλά εξακολουθεί να περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω.

Δηλαδή κατά τη διαδρομή BC η κινητική ενέργεια περιστροφής παραμένει σταθερή, και επομένως στο σημείο C η ενέργεια του κυλίνδρου είναι:

$$E_C = mgy_2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Εφαρμόζουμε διατήρηση ενέργειας:

$$\left.\begin{array}{l} E_A = E_B \\ E_B = E_C \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} mgy_1 = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgy_2 + \frac{I}{2}\omega^2 \end{array}$$

Αλλά $\omega = v_{CM}/R$ οπότε αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} mgy_1 = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_{CM}^2}{R^2} \Rightarrow v_{CM}^2 = \dfrac{2mgy_1}{\left(m + \frac{I}{R^2}\right)} \\ \text{Ενώ} \quad \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \cancel{\frac{1}{2}I\omega^2} = mgy_2 + \cancel{\frac{1}{2}I\omega^2} \Rightarrow v_{CM}^2 = 2gy_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{2}m\cancel{g}y_1}{m + \frac{I}{R^2}} = \cancel{2}\cancel{g}y_2 \Rightarrow \boxed{y_2 = \frac{my_1}{m + \frac{I}{R^2}}}$$

Αλλά $I_{κυλ} = \frac{1}{2}mR^2$

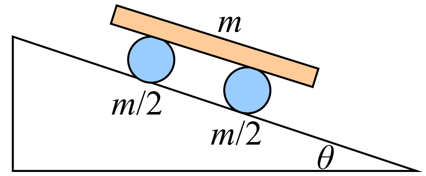
$$\Rightarrow y_2 = \frac{\cancel{m}y_1}{\cancel{m} + \frac{\cancel{m}R^2}{2R^2}} \Rightarrow \boxed{y_2 = \frac{2}{3}y_1}$$

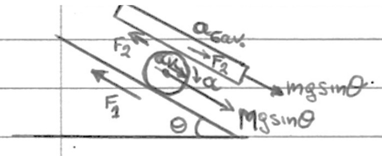
Για την περίπτωση της σφαίρας $I_{σφ} = \frac{2}{5}mR^2$ επομένως:

$$y_2 = \frac{\cancel{m}y_2}{\cancel{m} + \frac{2}{5}\frac{\cancel{m}\cancel{R^2}}{\cancel{R^2}}} \Rightarrow \boxed{y_2 = \frac{5}{7}y_1}$$

Η σφαίρα δηλαδή θα κινηθεί μεγαλύτερη διαδρομή.

15. Μία σανίδα βρίσκεται πάνω σε 2 ομοιόμορφους κυλίνδρους (με ροπή αδράνειας $I=MR^2/2$) που βρίσκονται πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης θ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η σανίδα έχει μάζα m και κάθε ένας από τους κυλίνδρους έχει μάζα $m/2$. Αν δεν υπάρχει ολίσθηση μεταξύ των διαφόρων επιφανειών, ποιά είναι η επιτάχυνση της σανίδας





Και οι 2 κύλινδροι θα κινηθούν ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, (από τη στιγμή που δεν γλυστράν σχετικά με τη σανίδα) επομένως θα μπορούσαμε να τους θεωρήσουμε σαν ένα κύλινδρο με μάζα ίση με m.

Το διάγραμμα ελευθέρου σώματος είναι όπως στο διπλανό σχήμα:

$$F_{κεντρ} = m a_{κυλ} \Rightarrow mg\sin\theta - F_1 - F_2 = m a_{κυλ} \quad (1)$$

($a_{κυλ}$ = η γραμμική επιτάχυνση του κυλίνδρου)

$$F_{σαν.} = m a_{σαν.} \Rightarrow mg\sin\theta + F_2 = m a_{σαν.} \quad (2)$$

$$\tau_{κεντρ} = I a_{κυλ} \Rightarrow F_1\cancel{R} - F_2\cancel{R} = \left(\tfrac{1}{2}mR^2\right)\alpha = \left(\tfrac{1}{2}m\cancel{R}^{\cancel{2}}\right)\frac{a_{κυλ}}{\cancel{R}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_1 - F_2 = \frac{1}{2} m a_{κυλ} \quad (3)$$

Επομένως έχουμε 3 εξισώσεις με 4 αγνώστους: F_1, F_2, $a_{κυλ}$, $a_{σαν.}$ και χρειαζόμαστε ακόμα μιά εξίσωση.

Αλλά ξέρουμε ότι το πάνω μέρος του κυλίνδρου κινείται με διπλάσια ταχύτητα από ότι το κέντρο του; αφού $a_{σαν.} = a_{κυλ} + \alpha R = a_{κυλ} + \frac{a_{κυλ}}{\cancel{R}}\cancel{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_{σαν.} = 2a_{κυλ} \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας στις 3 πρώτες εξισώσεις έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}(1) &\Rightarrow mg\sin\theta - F_1 - F_2 = m a_{κυλ}\\ (2) &\Rightarrow mg\sin\theta + F_2 = 2m a_{κυλ}\\ (3) &\Rightarrow F_1 - F_2 = \tfrac{1}{2} m a_{κυλ}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}(1)+(2) &\Rightarrow 2mg\sin\theta - F_1 = 3m a_{κυλ}\\ (2)+(3) &\Rightarrow mg\sin\theta + F_1 = \tfrac{5}{2} m a_{κυλ}\end{aligned}\right\} \overset{+}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 3\cancel{m}g\sin\theta = \frac{11}{2}\cancel{m}a_{κυλ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{κυλ} = \frac{6}{11}g\sin\theta \overset{(4)}{\Rightarrow} a_{σαν.} = 2a_{κυλ} \Rightarrow \boxed{a_{σαν.} = \frac{12}{11}g\sin\theta}$$