ΦΥΣ 145 –Υπολογιστικές Μέθοδοι στη Φυσική

6η Εργασία **Επιστροφή: 29/03/21 πριν τις 14:30**

<u>Υπενθύμιση:</u> Οι εργασίες πρέπει να επιστρέφονται με e-mail στο fotis@ucy.ac.cy που θα στέλνετε από το πανεπιστημιακό σας λογαριασμό το αργότερο μέχρι την ημερομηνία που αναγράφεται και πριν το εργαστήριο της συγκεκριμένης ημέρας.
Ως subject του e-mail θα πρέπει να αναγράφεται την εργασία (username_phy145_hmX όπου X ο αριθμός της εργασίας)
Κάθε αρχείο που επισυνάπτετε (attach) στο e-mail σας θα πρέπει να έχει το όνομα στη μορφή username_hmX.tgz όπου username είναι το username του e-mail σας και X ο αριθμός της εργασίας. Επίσης σαν πρώτο σχόλιο μέσα σε κάθε file που περιέχει το πρόγραμμά σας θα πρέπει να αναφέρεται το ονοματεπώνυμό σας. Οι εργασίες είναι ατομικές και πανομοιότυπες εργασίες δε θα βαθμολογούνται. Για να κάνετε ένα tgz file (ουσιαστικά tar zipped file) θα πρέπει να δώσετε στο terminal την εντολή tar -czvf username_hmX.tgz *.py όπου py είναι όλα τα py files των προγραμμάτων σας

1. Ένα βαρέλι περιέχει αρχικά S=2*kg* αλάτι το οποίο έχει διαλυθεί σε 20*lt* νερό. Αν ρίχνουμε καθαρό νερό στο βαρέλι με ρυθμό 0.4*lt*/min και το βαρέλι χάνει με τον ίδιο ρυθμό το αρχικό διάλυμα αλατόνερου πόσο αλάτι θα περιέχει το βαρέλι μετά από 8*mn*; (**α**) Γράψτε την διαφορική εξίσωση του προβλήματος και τη λύση της ως σχόλιο στο πρόγραμμά σας. (**β**) Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο λύνει τη διαφορική εξίσωση με τη μέθοδο του Euler και τη μέθοδο Runge-Kutta 2ου βαθμού. (**γ**) Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει το αποτέλεσμα που βρίσκετε τόσο με την αναλυτική όσο και με την θεωρητική λύση μετά από πάροδο 8min. (**δ**) Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της ποσότητας αλατιού στο βαρέλι συναρτήσει του χρόνου χρησιμοποιώντας κατάλληλα ονοματισμένους άξονες τόσο για την αναλυτική όσο και για την αριθμητική λύση. (**ε**) Χρησιμοποιώντας γραμμική παρεμβολή (linear interpolation) βρείτε τον χρόνο που απαιτείται ώστε το βαρέλι να περιέχει 1kg αλάτι.

2. Ένα σώμα κινείται σε οριζόντια διεύθυνση με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 4.0 m/s^2$ και δέχεται την επίδραση μιας δύναμης αντίστασης η οποία παρουσιάζει γραμμική εξάρτηση από την ταχύτητα, υ, του σώματος. Η δύναμη της αντίστασης είναι τέτοια ώστε οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση του σώματος είναι:

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon \quad \text{και} \quad \frac{d\upsilon}{dt} = 4.0 - 0.5\upsilon$$

(α) Λύστε αριθμητικά τις δυο αυτές εξισώσεις κίνησης χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Runge-Kutta 2ου βαθμού. Θα πρέπει να βρείτε ότι η τιμή της ταχύτητα πλησιάζει ένα ανώτερο όριο.

(β) Κάντε τα γραφήματα της ταχύτητας, $\upsilon(t)$ και θέσης, $x(t)$ ως προς το χρόνο t για το χρονικό διάστημα $t = 0$ ως τη χρονική στιγμή t που το σώμα αποκτά ταχύτητα τουλάχιστον ίση με το 99% της ανώτατης τιμής που μπορεί να λάβει. Το γράφημά σας θα πρέπει να έχει κατάλληλα ονοματισμένους άξονες. Αποθηκεύστε το file αυτό με το όνομα *AirResistance_plot1.pdf.*

(γ) Να κάνετε ένα ακόμα ζευγάρι γραφημάτων που να δείχνει το ποσοστιαίο σφάλμα της αριθμητικής σας λύσης ως προς την θεωρητικά αναμενόμενη τιμή της θέσης, x(t), και της ταχύτητας, υ(t), του σώματος για το ίδιο χρονικό διάστημα. Αποθηκεύστε το γράφημα αυτό στο file με όνομα *AirResistance_plot2.pdf.*

Θεωρήστε ότι στο πρόβλημα αυτό η επίδραση της βαρύτητας είναι αμελητέα.

3. Δύο σωματίδια 1 και 2 βάλλονται από την θέση $x = 0$ την ίδια χρονική στιγμή $t = 0$ με ταχύτητες v_1=5*m/s* και v_2= -10*m/s*. Τα σωματίδια κινούνται μέσα σε ένα δυναμικό της μορφής $U(x) = 9[\cosh(x) - 1]$. (Όπως ξέρετε, η δύναμη δίνεται από τη σχέση $F = -\frac{dU}{dx}$). Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο ταχύτητας-Verlet για να παρακολουθήσετε την εξέλιξη και των δύο σωματιδίων ταυτόχρονα και προσδιορίστε την χρονική στιγμή καθώς και την θέση που τα σωματίδια συναντιούνται και πάλι. Χρησιμοποιήστε σα χρονικό βήμα dt=9.76563x10^{-5}s και θεωρήστε t_{max} = 100*s* σα το μέγιστο επιτρεπτό χρονικό διάστημα για να σταματήσετε το πρόγραμμα αν δεν έχουν συναντηθεί τα σωματίδια. Προσέξτε τη συνθήκη που θα θέσετε για να συναντηθούν καθώς επίσης και το γεγονός ότι οι θέσεις τους όταν συναντιούνται, όπως και η χρονική στιγμή, θα πρέπει να υπολογιστούν με γραμμική interpolation. Θα πρέπει να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των τροχιών των δύο σωματιδίων ($x(t)$ συναρτήσει του t) στο ίδιο γράφημα στο οποίο θα πρέπει να φαίνονται ποια σημεία αντιστοιχούν σε ποιο σωματίδιο. Το γράφημα αυτό θα πρέπει να το σώσετε σε ένα pdf file με όνομα *particles.pdf*. Οι θέσεις των σωματιδίων τη στιγμή της συνάντησης και ο χρόνος συνάντησης θα πρέπει να αναγραφούν ως σχόλια στο τέλος του προγράμματός σας.

4. Θεωρήστε ότι ένα μικρό χαλίκι εκτινάσσεται κατακόρυφα προς τα πάνω (θεωρήστε την φορά προς τα πάνω σα τη +y) με αρχική ταχύτητα υ_0. Σε συνθήκες έλλειψης αντίστασης του αέρα ξέρουμε ότι η πέτρα θα ανέβει σε ένα ύψος $\frac{\upsilon_0^2}{2g}$, ενώ η ταχύτητα με την οποία επιστρέφει στο έδαφος είναι και ίδια με την αρχική της ταχύτητα υ_0 και ο χρόνος ανόδου είναι ίσος με το χρόνο καθόδου. Πριν κάνετε οποιαδήποτε αριθμητική επίλυση του προβλήματος δώστε μια απλή ποιοτική εξήγηση για το πως νομίζετε ότι θα επηρεαστούν οι ποσότητες αυτές με την παρουσία αντίστασης του αέρα. Ιδιαίτερα εξηγήστε πως θα διαφέρει ο χρόνος ανόδου από το χρόνο καθόδου (μεγαλύτερος, μικρότερος ή ίδιος). (δώστε τις απαντήσεις σας στο παρακάτω χώρο.

Θα κάνετε τώρα μια αριθμητική επίλυση του προβλήματος για να δείτε αν οι απαντήσεις σας ήταν σωστές. Για την επίλυση του προβλήματος θα χρησιμοποιήσετε την Runge-Kutta 4^{ης} τάξης μέθοδο λύσης διαφορικών εξισώσεων. Για το πρόβλημα που έχετε να επιλύσετε υποθέστε ότι η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας, υ^2. Θεωρήστε ότι η μάζα της πέτρας είναι 10^{-2} *kg*, η ακτίνας της 0.01m με αποτέλεσμα η σταθερά αντίστασης να είναι D = 10^{-2}*kg* οπότε η δύναμη της αντίστασης του αέρα δίνεται από την σχέση $F_D = -mD\upsilon^2$. Θεωρήστε ότι η πέτρα ρίχνεται με αρχική ταχύτητα υ_0 = 50*m/s*. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να υπολογίσει το χρόνο ανόδου και το χρόνο καθόδου, το μέγιστο ύψος στο οποίο φθάνει η πέτρα και να κάνει τη γραφική παράσταση της συνισταμένης δύναμης συναρτήσει της ταχύτητας υ. Θα πρέπει να αποθηκεύσετε το γράφημα αυτό σε μορφή pdf με όνομα *stone.pdf*.

5. Γνωρίζουμε ότι ο πληθυσμός ενός είδους ζώων περιγράφεται από μια συνάρτηση $N(t)$ (συνάρτηση του χρόνου, *t*, όπου *t* μετράται σε μήνες) η οποία αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης:$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2$, όπου α και b είναι θετικές σταθερές ποσότητες. Όταν $b = 0$, ο πληθυσμός αυξάνει εκθετικά, αλλά όταν $b > 0$ ο δεύτερος όρος εισάγει μια μείωση του πληθυσμού σαν αποτέλεσμα ανταγωνισμού μεταξύ ζευγαριών του πληθυσμού. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Runge-Kutta 4ης τάξης λύστε αριθμητικά το πρόβλημα αυτό για τις ακόλουθες δυο περιπτώσεις: (i) $\alpha = 10$, $b = 3$ και $N(0) = 10$ και (ii) $\alpha = 10$, $b = 0.01$ και $N(0) = 1000$. Με βάση τα αποτελέσματά σας να γίνουν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις του πληθυσμού, $N(t)$, συναρτήσει του χρόνου *t*. Τα αποτελέσματα εξαρτώνται από το χρονικό βήμα που επιλέγεται. Διαλέξτε ένα κατάλληλο βήμα και συνολικό χρόνο μελέτης της εξέλιξης του πληθυσμού για να εξάγετε τα αποτελέσματά σας. Η παραπάνω διαφορική εξίσωση έχει αναλυτική λύση της μορφής $N(t) = \frac{N_0 a e^{at}}{a - bN_0 + bN_0 e^{at}}$, όπου $N(t=0) = N_0$. Συγκρίνετε γραφικά τα αποτελέσματά σας με τη θεωρητική αυτή λύση. Θα πρέπει το γράφημά σας να έχει κατάλληλα ονοματισμένους άξονες.

<u>Περιγραφή των Μεθόδων Runge-Kutta</u>:

Η μέθοδος χρειάζεται την διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$y'' = f(x, y, y')$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

Από τη στιγμή που η ανεξάρτητη μεταβλητή στο πρόβλημά μας είναι *t*, θα έχουμε:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{b}{m}\frac{dx}{dt} = f_x\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \Rightarrow \ddot{x} = f_x(t, x, \dot{x}) \Rightarrow f_x(t, x, \dot{x}) = -\frac{b}{m}\dot{x}$$

και αντίστοιχα στη *y*-διεύθυνση:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{b}{m}\frac{dy}{dt} = f_y\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \Rightarrow \ddot{y} = f_y(t, y, \dot{y}) \Rightarrow f_y(t, y, \dot{y}) = -g - \frac{b}{m}\dot{y}$$

Ο αλγόριθμος Runge-Kutta 2ης τάξης πρώτα είναι:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad \textbf{[1]}$$

$$y(t) = \int f(t, y)dt \qquad \textbf{[2]}$$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y)dt \qquad \textbf{[3]}$$

Έστω ότι παίρνουμε το ανάπτυγμα Taylor της $f(t, y)$ ως προς το μέσο του διαστήματος ολοκλήρωσης t_i και t_{i+1}, δηλαδή στο $t_i + h/2$, όπου h είναι το χρονικό βήμα. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του ενδιάμεσου σημείου για να κάνουμε την ολοκλήρωση και ορίζοντας $y(t_i + h/2) = y_{i+1/2}$ και $t_i + h/2 = t_{i+1/2}$, έχουμε:

$$\int_{t_i}^{t_i+1} f(t, y)dt \approx hf\left(t_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right) + O(h^3) \qquad \textbf{[4]}$$

Αυτό σημαίνει ότι θα έχουμε:

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(t_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right) + O(h^3) \quad \textbf{[5]}$$

Ωστόσο δεν γνωρίζουμε την τιμή $y_{i+1/2}$. Εδώ εφαρμόζουμε την επόμενη προσέγγιση, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Euler για να βρούμε προσεγγιστικά το $y_{i+1/2}$. Επομένως, θα έχουμε:

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2}\frac{dy}{dt} = y(t_i) + \frac{h}{2} f(t_i, y_i) \quad \textbf{[6]}$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να ορίσουμε τον ακόλουθο αλγόριθμο για τη μέθοδο Runge-Kutta 2ης τάξης:

$$k_1 = f(t_i, y_i) \quad \textbf{[7]}$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1\right) \quad \textbf{[8]}$$

και τελικά:

$$y_{i+1} \approx y_i + hk_2 + O(h^3) \quad \textbf{[9]}$$

Η διαφορά με τις προηγούμενες μεθόδου ενός βήματος είναι ότι χρειαζόμαστε ένα ενδιάμεσο βήμα στους υπολογισμούς μας, το βήμα $t_i + h/2 = t_{i+1/2}$ όπου υπολογίζουμε την παράγωγο f.

Η μέθοδος Runge-Kutta 4ης τάξης ή RK4 ξεκινά και πάλι με την εξίσωση:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y) dt$$

αλλά αντί να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα με τη μέθοδο του ενδιάμεσου σημείου χρησιμοποιούμε την μέθοδο ολοκλήρωσης του Simpson στο $t_i + h/2$. Η μέθοδος Simpson ολοκλήρωσης, ορίζοντας $y(t_i + h/2) = y_{i+1/2}$ και $t_i + h/2 = t_{i+1/2}$ έχουμε:

$$\int_{t_i}^{t_i+1} f(t, y) dt \approx \frac{h}{6}\left[f(t_i, y_i) + 4f\left(t_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right) + f(t_{i+1}, y_{i+1}\right] + O(h^5) \quad \textbf{[10]}$$

Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να γνωρίζουμε τις τιμές των $y_{i+1/2}$και y_{i+1}. Η μέθοδος Runge-Kutta 4ου βαθμού χωρίζει τους υπολογισμούς του ενδιάμεσου σημείου σε δυο βήματα:

$$y_{i+1} \approx y_i + \frac{h}{6}\left(f(t_i, y_i) + 2f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_{i+1/2}\right) + 2\left(t_i + \frac{h}{2}, y_{i+1/2}\right) + (t_{i+1}, y_{i+1})\right) \quad \textbf{[11]}$$

αφού θέλουμε να προσεγγίσουμε τη κλίση στο $y_{i+1/2}$ σε δυο βήματα. Οι δύο πρώτοι υπολογισμοί της συνάρτησης είναι όπως και στη μέθοδο RK2. Ο αλγόριθμος είναι ο ακόλουθος:

(**i**) Πρώτα υπολογίζουμε: $k_1 = f(t_i, y_i)$ **[12]**

την κλίση (παράγωγο) στην αρχή του χρονικού διαστήματος t_i.

(**ii**) Χρησιμοποιούμε την κλίση από το (**i**) για να προβλέψουμε τη θέση, $y_{i+1/2}$, στο μέσο του χρονικού διαστήματος κάνοντας μισό βήμα Euler όπως και στη μέθοδο RK2. Θα έχουμε επομένως: $y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} k_1$. Με βάση το ενδιάμεσο σημείο $y_{i+1/2}$ που βρήκαμε υπολογίζουμε την κλίση στο σημείο αυτό. Υπολογίζουμε:

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1\right) \quad \textbf{[13]}$$

(**iii**) Εφόσον έχουμε μια πρώτη εκτίμηση της κλίσης στο ενδιάμεσο σημείο, μπορούμε να έχουμε μια καλύτερη εκτίμηση, αν ξέρουμε καλύτερα το ενδιάμεσο σημείο. Επομένως χρησιμοποιούμε την κλίση k_2 για να βρούμε και πάλι το $y_{i+1/2}$ κάνοντας μισό βήμα Euler από το σημείο y_i. Υπολογίζουμε επομένως $y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2}k_2$. Αυτό το σημείο προσεγγίζει καλύτερα το ενδιάμεσο σημείο από ότι στο βήμα (ii) και επομένως μπορούμε να προσεγγίσουμε καλύτερα την πραγματική κλίση στον ενδιάμεσο σημείο. Η κλίση στο $y_{i+1/2}$ θα είναι τώρα:

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right) \qquad [\mathbf{14}]$$

(**iv**) Χρησιμοποιώντας την k_3 κλίση μπορούμε να υπολογίσουμε τη τιμή y_{i+1} κάνοντας ένα ολόκληρο βήμα Euler από το σημείο y_i. Θα Πάρουμε ότι: $y_{i+1} = y_i + hk_3$. Γνωρίζοντας το σημείο y_{i+1}, μπορούμε να υπολογίσουμε την κλίση στο σημείο αυτό:

$$k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3) \qquad [\mathbf{15}]$$

(**v**) Από τα προηγούμενα 4 βήματα έχουμε τις εκτιμήσεις των κλίσεων σε 4 σημεία στο χρονικό διάστημα *h.* Μπορούμε να εκτιμήσουμε την τιμή της κλίσης της συνάρτησης $y(t)$ στο διάστημα αυτό, παίρνοντας την μέση τιμή των παραπάνω κλίσεων. Η μέση τιμή είναι:

$$k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad [\mathbf{16}]$$

Με βάση τα προηγούμενα και έχοντας την καλύτερη εκτίμηση της κλίσης στο διάστημα *h* Από την **εξ.** [**16**] μπορούμε να κάνουμε ένα βήμα Euler από το σημείο y_i για να βρούμε τι σημείο y_{i+1}:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad [\mathbf{17}]$$

Η ακρίβεια της μεθόδου είναι h^5 και η συνολική ακρίβεια h^4.