Παράδειγμα 1

Θεωρήστε την κίνηση ενός σώματος,μάζας m σε ελκτικό δυναμικό:

$$V(r) = -ke^{-r/a} \quad \text{όπου } k \text{ και } \alpha \text{ θετικές σταθερές}$$

(α) Σχεδιάστε το V_{eff} για μικρές και μεγάλες τιμές της στροφορμής, l, και περιγράψτε τα είδη των κινήσεων που μπορούν να συμβούν

- Κεντρικό δυναμικό: $l =$ σταθ. και $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - ke^{-r/a} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$
  - Εξέταση της συμπεριφοράς του V_{eff} για οριακές περιπτώσεις:

$$r \to 0 \quad V_{eff} = \frac{l^2}{2mr^2} - ke^{-r/a} \Rightarrow V_{eff} \cong \frac{l^2}{2mr^2} \to \infty \quad \text{ενώ} \quad ke^{-r/a} \to 0$$

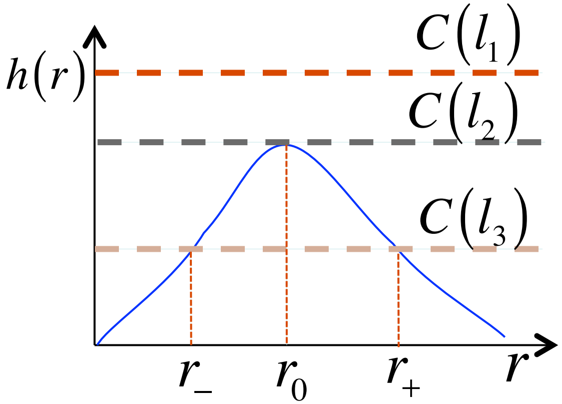
$$r \to \infty \quad V_{eff} \sim \frac{l^2}{2mr^2} \to 0 \quad \text{ελαττώνεται πιο αργά από τον όρο } ke^{-r/a}$$

  - Έλεγχος της συμπεριφοράς του V_{eff} ανάμεσα στα 2 αυτά όρια

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = 0 \Rightarrow -\frac{l^2}{mr^3} + \frac{k}{a}e^{-r/a} = 0 \Rightarrow r^3 e^{-r/a} = \frac{al^2}{mk} \Rightarrow r^3 e^{-r/a} = C(l) \quad \text{όπου: } C(l) = \frac{al^2}{mk}$$

Παράδειγμα 1(a) $r^3 e^{-r/a} = C(l)$ όπου: $C(l) = \dfrac{al^2}{mk}$

- Εξέταση της συμπεριφοράς της $C(l)$ για διάφορες τιμές του l



Έστω: $h(r) = r^3 e^{-r/a}$

Θεωρούμε διάφορες τιμές για l ➡ διάφορα $C(l)$

$$\frac{dh(r)}{dr} = 3r^2 e^{-r/a} - r^3 \frac{e^{-r/a}}{a} = \left(3 - \frac{r}{a}\right) r^2 e^{-r/a} = 0 \begin{cases} \Rightarrow r = 0 \\ \Rightarrow r_0 = r = 3a \end{cases}$$

$$V'_{eff} = \frac{dV_{eff}}{dr}$$

Για: $l = l_1 > l_2 > l_3 \Rightarrow V'_{eff} \neq 0 \quad \forall r$ ➡ δεν υπάρχει ακρότατο

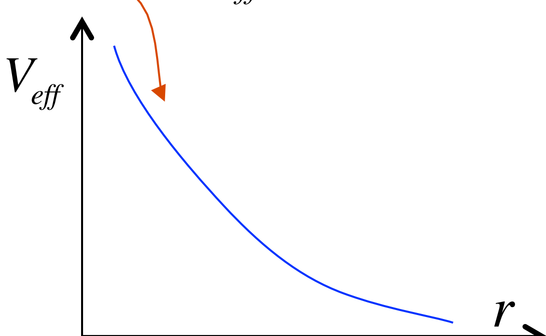
Για: $l = l_2$ υπάρχει ένα σημείο τομής $\Rightarrow V'_{eff}(r = 3a) = 0$

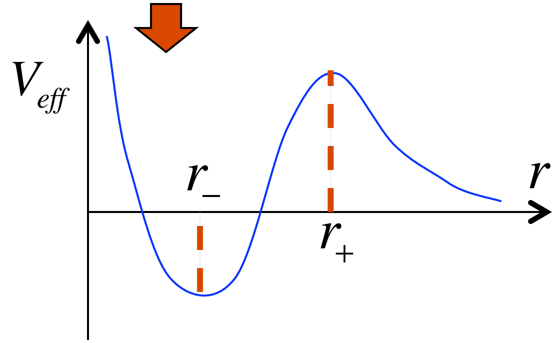
Για: $l = l_3$ υπάρχουν δυο σημεία τομής $\Rightarrow V'_{eff}(r = r_+, r = r_-) = 0$

⬇

V_{eff} παρουσιάζει ελάχιστο για r_- και μέγιστο για r_+

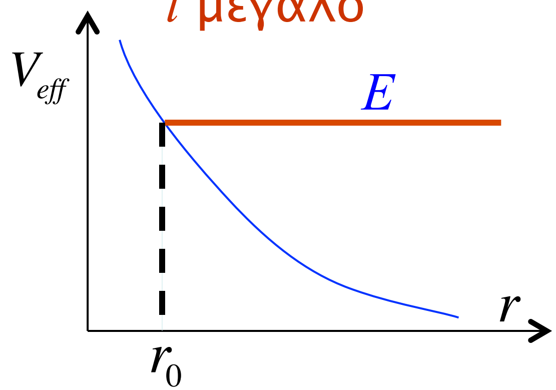
⬇





Παράδειγμα 1(α)

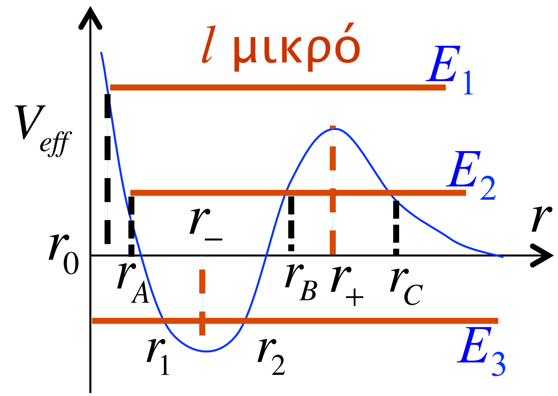
- Ανάλογα με την ενέργεια και πιθανόν τις αρχικές συνθήκες έχουμε διαφοροποιήσεις στο είδος κίνησης



$r > r_0$ μή φραγμένη

$r < r_0$ απαγορευμένη

$E < 0$ απαγορευμένη



(i) $E = E_1 > 0 > V_{eff}$

μή φραγμένη για $r > r_0$

(ii) $0 < E = E_2 < V_{eff}$

μή φραγμένη για $r > r_C$

φραγμένη για $r_A < r < r_B$

απαγορευμένη για

$r_B < r < r_C$ και $r < r_A$

(iii) $V_{eff} < E = E_3 < 0$

φραγμένη για $r_1 < r < r_2$

απαγορευμένη για

$r < r_1 \quad r > r_2$

(iv) $E = V_{eff}\left(r_-\right)$

σταθερή κυκλική

(v) $E = V_{eff}\left(r_+\right)$

ασταθής κυκλική

Παράδειγμα 1(β)

(β) Βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα a, k, m, l για να υπάρχει σταθερή κυκλική τροχιά

- Για κυκλική τροχιά ακτίνας r^* θα πρέπει: $\dfrac{dV_{eff}(r^*)}{dr} = 0$ και $E = V_{eff}(r^*)$
- Για να είναι ευσταθής η κυκλική τροχιά θα πρέπει επιπλέον: $\dfrac{d^2V_{eff}(r^*)}{d^2r} > 0$

$$\frac{dV_{eff}(r^*)}{dr} = 0 \Rightarrow -\frac{l^2}{m(r^*)^3} + \frac{k}{a}e^{-r^*/a} = 0 \Rightarrow (r^*)^3 e^{-r^*/a} = \frac{al^2}{mk} \Rightarrow \frac{k}{a}e^{-r^*/a} = \frac{l^2}{m(r^*)^3} \qquad (1)$$

$$\frac{d^2V_{eff}(r^*)}{d^2r} > 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(\frac{dV_{eff}(r^*)}{dr}\right) > 0 \Rightarrow \frac{3l^2}{m(r^*)^4} - \frac{k}{a^2}e^{-r^*/a} > 0$$

$$\frac{3l^2}{m(r^*)^4} - \frac{k}{a^2}e^{-r^*/a} = \frac{3}{(r^*)}\frac{l^2}{m(r^*)^3} - \frac{k}{a^2}e^{-r^*/a} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{3}{(r^*)}\frac{k}{a}e^{-r^*/a} - \frac{k}{a^2}e^{-r^*/a} = \left[\frac{3}{r^*} - \frac{1}{a}\right]\frac{k}{a}e^{-r^*/a}$$

- Θα πρέπει: $\left[\dfrac{3}{r^*} - \dfrac{1}{a}\right]\dfrac{k}{a}e^{-r^*/a} > 0$ αλλά k, a >0 οπότε: $\dfrac{k}{a}e^{-r^*/a} > 0$

  Άρα : $\dfrac{3}{r^*} - \dfrac{1}{a} > 0 \Rightarrow \dfrac{3}{r^*} > \dfrac{1}{a} \Rightarrow r^* < 3a$

Παράδειγμα 1(γ)

(γ) Ποια η συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων για την κυκλική τροχιά ακτίνας R και πως συγκρίνεται με την περίοδο της κυκλικής τροχιάς; Η διαταραγμένη κυκλική τροχιά είναι κλειστή;

- Η περιόδος περιστροφής για την κυκλική τροχιά είναι:

$$l = mR^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{l}{mR^2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{l}{mR^2} \Rightarrow T_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{2\pi mR^2}{l}$$

- Αν αυτή η τροχιά διαταραχθεί τότε: $r(t) = R + \delta r(t)$
- Η Lagrangian για την τροχιά αυτή θα γίνει: $L = \frac{1}{2}m\delta\dot{r}^2 - V_{eff}(R+\delta r)$
- Αναπτύσουμε κατά Taylor το δυναμικό γύρω από το R

$$V_{eff}(R+\delta r) \rightarrow V_{eff}(R) + V'_{eff}(R)\delta r + \frac{1}{2}V''_{eff}(R)\delta r^2 + 0(\delta r^3)$$

$V_{eff}(R)$ σταθερός όρος και δεν παίξει ρόλο στην δυναμική

$V'_{eff}(R) = 0$ συνθήκη για κυκλική τροχιά

Επομένως: $V_{eff}(R+\delta r) \sim \frac{1}{2}V''_{eff}(R)\delta r^2$

Παράδειγμα 1(γ)

- Η Lagrangian για την διαταραγμένη κυκλική τροχιά γίνεται:

$$L = \frac{1}{2} m \delta \dot{r}^2 - \frac{1}{2} V''_{eff}(R) \delta r^2$$

- Η εξίσωση κίνησης δίνεται από την εξίσωση Euler – Lagrange:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial L}{\partial \delta \dot{r}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \delta r} \Rightarrow m \delta \ddot{r} = -V''_{eff}(R) \delta r \Rightarrow \delta \ddot{r} = -\frac{V''_{eff}(R)}{m} \delta r$$

Εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή

- Η περίοδος ταλάντωσης της διαταραγμένης τροχιάς είναι: $\omega = \sqrt{\frac{V''_{eff}(R)}{m}}$

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{V''_{eff}(R)}{m}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{V''_{eff}(R)}} \qquad \text{(A)}$$

- Βρήκαμε στο (β) ερώτημα ότι: $V''_{eff}(R) = \frac{3l^2}{mR^4} - \frac{k}{a^2} e^{-R/a}$

$$V'_{eff}(R) = 0 \Rightarrow R^3 e^{-R/a} = \frac{al^2}{mk} \Rightarrow e^{-R/a} = \frac{al^2}{mkR^3}$$

$$V''_{eff}(R) = \frac{3l^2}{mR^4} - \frac{k}{a^2} \frac{al^2}{mkR^3}$$

$$\Rightarrow V''_{eff}(R) = \frac{l^2}{mR^4}\left(3 - \frac{R}{a}\right)$$

Αντικατάσταση στην (Α): $T = \frac{2\pi m R^2}{l} \sqrt{\frac{1}{3 - R/a}}$

Αλλά $T_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{2\pi m R^2}{l}$ επομένως: $T_{\tau\alpha\lambda.} = T_{\pi\varepsilon\rho.} \sqrt{\frac{1}{3 - R/a}}$

Παράδειγμα 1(γ)

- Η διαταραγμένη κυκλική τροχιά είναι κλειστή αν για 2 ακεραίους n_1, n_2

$$n_1 T_{\tau\alpha\lambda.} = n_2 T_{\pi\varepsilon\rho.} \Rightarrow n_1 T_{\pi\varepsilon\rho.}\sqrt{\frac{1}{3-R/a}} = n_2 T_{\pi\varepsilon\rho.} \Rightarrow n_1\sqrt{\frac{1}{3-R/a}} = n_2$$

$$\Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{3-\frac{R}{a}} \quad \Rightarrow \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 = 3-\frac{R}{a}$$

Για παράδειγμα αν $n_1=1$ και $n_2=2$ τότε: $\frac{R}{a} = 3-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{R}{a} = \frac{11}{4}$

- Εν γένει για να είναι κλειστή η τροχιά θα πρέπει ο λόγος των δυο περιόδων να είναι ρητός αριθμός

Παράδειγμα 2

Ένας πλανήτης μάζας m, περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά γύρω από αστέρα μάζας M (M>>m). Λόγω μιας έκρηξης supernova, ο αστέρας χάνει το 20% της αρχικής του μάζας. Η έκρηξη είναι σφαιρικά συμμετρική, και το δυναμικό εξακολουθεί να είναι Keplerian. Η έκρηξη και η απώλεια μάζας του αστέρα είναι στιγμιαία

(α) Ποια η ενέργεια και στροφορμή του συστήματος πριν/μετά την έκρηξη

- Σφαιρικά συμμετρική έκρηξη, το δυναμικό εξακολουθεί να είναι Keplerian

$$V = -\frac{GMm}{r}$$

Πριν την έκρηξη

$$V = -\frac{GMm}{r} = -\frac{k}{r}$$

Μετά την έκρηξη

$$V_n = -\frac{k'}{r} = -\frac{GM'm}{r} \Rightarrow V_n = -\frac{4}{5}\frac{GMm}{r} \Rightarrow V_n = -\frac{4}{5}V$$

- Η ποσότητα που διατηρείται είναι η στροφορμή
  Κεντρικά δυναμικά και μή ύπαρξη εξωτερικών δυνάμεων

$$l_n = l = const$$

- Η ενέργεια του συστήματος δεν διατηρείται (υπάρχει απώλεια μάζας)

$$M >> m \Rightarrow \mu = \frac{Mm}{M+m} \approx m$$ ⇨ CM συμπίπτει με τον αστέρα – έστω ακίνητος

Παράδειγμα 2(α)

Έστω R η ακτίνα της αρχικής κυκλικής τροχιάς:

$$E = T + V = \frac{1}{2}\mu\upsilon^2 - \frac{GMm}{r} \Rightarrow E \approx \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{GMm}{R} \qquad (1) \quad \text{(Ε πριν την έκρηξη)}$$

$$E_n = T_n + V_n = \frac{1}{2}\mu{\upsilon_n}^2 - \frac{4}{5}\frac{GMm}{r} \Rightarrow E_n = \frac{1}{2}m{\upsilon_n}^2 - \frac{4}{5}\frac{GMm}{R} \qquad (2) \quad \text{(Ε μετά την έκρηξη)}$$

(πλανήτης στην ίδια θέση)

- Η ταχύτητα, υ, του πλανήτη λόγω της περιστροφής του, άρα λόγω l

$$\left.\begin{aligned} l &= \mu\upsilon R \\ l_n &= \mu\upsilon_n R \\ l_n &= l \end{aligned}\right\} l = \mu\upsilon R = \mu\upsilon_n R \Rightarrow \upsilon = \upsilon_n = \frac{l}{\mu R} \Rightarrow \upsilon = \upsilon_n \approx \frac{l}{mR} \qquad (3)$$

- Λόγω της αρχικής κυκλικής τροχιάς: $\left.\frac{dV_{eff}}{dr}\right|_{r=R} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(\frac{l^2}{2\mu r^2} + \left(-\frac{GmM}{r}\right)\right) = 0$

$$\Rightarrow -\frac{l^2}{mR^3} + \frac{GmM}{R^2} = 0 \Rightarrow \frac{l^2}{mR^3} = \frac{GmM}{R^2} \Rightarrow l^2 = Gm^2RM \Rightarrow l = m\sqrt{GRM} \qquad (4)$$

* Θα μπορούσαμε να πάρουμε το ίδιο από: $F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} = F_g \Rightarrow \frac{m\upsilon^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}$

Από (3) και (4): $\upsilon = \upsilon_n = \frac{m\sqrt{GMR}}{mR} \Rightarrow \upsilon = \upsilon_n = \sqrt{GM/R} \qquad (5)$

Παράδειγμα 2(α-β)

Αντικαθιστούμε στις (1) και (2):

$$E = \frac{mGM}{2R} - \frac{GMm}{R} \Rightarrow E = -\frac{GMm}{2R} \Rightarrow E = -\frac{k}{2R}$$

$$E_n = \frac{mGM}{2R} - \frac{4GMm}{5R} \Rightarrow E_n = -\frac{3mGM}{10R} \Rightarrow E_n = -\frac{3k}{10R}$$

Αρνητική ενέργεια φραγμένη νέα τροχιά

(β) Να βρεθεί η εκκεντρότητα της νέας τροχιάς του πλανήτη

- Εξίσωση εκκεντρότητας: $e^2 = 1 + \frac{2E_n l_n^2}{\mu k_n^2} \approx 1 + \frac{2E_n l_n^2}{m k_n^2}$

  Αντικατάσταση της E_n, l_n, k από το ερώτημα (α) δίνει:

$$e^2 = 1 + \frac{2\left(-\frac{3k}{10R}\right)l^2}{m\left(\frac{4}{5}\right)^2 k^2} \Rightarrow e^2 = 1 - \frac{l^2 \frac{3}{5}\frac{k}{R}}{m\frac{16}{25}k^2} \Rightarrow e^2 = 1 - \frac{15 l^2}{16 mkR} \Rightarrow e^2 = 1 - \frac{15 m^2 GMR}{16 mkR}$$

$$\Rightarrow e^2 = 1 - \frac{15 m^2 GM}{16 mGMm} \Rightarrow e^2 = 1 - \frac{15}{16} \Rightarrow e^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow e = \frac{1}{4}$$

έλλειψη

Παράδειγμα 2(γ)

(γ) Να βρεθούν τα σημεία καμπής της νέας τροχιάς συναρτήσει του R

- Πρέπει να βρούμε το περιήλιο (πιο κοντινό σημείο) και το αφήλιο (πιο απομακρυνσμένο σημείο) της ελλειπτικής τροχιάς. Δηλαδή r_{min} και r_{max}

  $r_{\min} = a(1-e)$ και $r_{\max} = a(1+e)$ ενώ $a = -\dfrac{k}{2E}$ ο μεγάλος ημιάξονας

  Αντικαθιστούμε για τις τιμές της e, E και k της νέας τροχιάς

$$a = -\frac{k_n}{2E_n} \Rightarrow a = -\frac{\frac{4}{5}k}{2\left(-\frac{3}{10}\frac{k}{R}\right)} \Rightarrow a = \frac{4R}{3}$$

$$r_{\min} = a(1-e) \Rightarrow r_{\min} = \frac{4R}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow r_{\min} = R$$

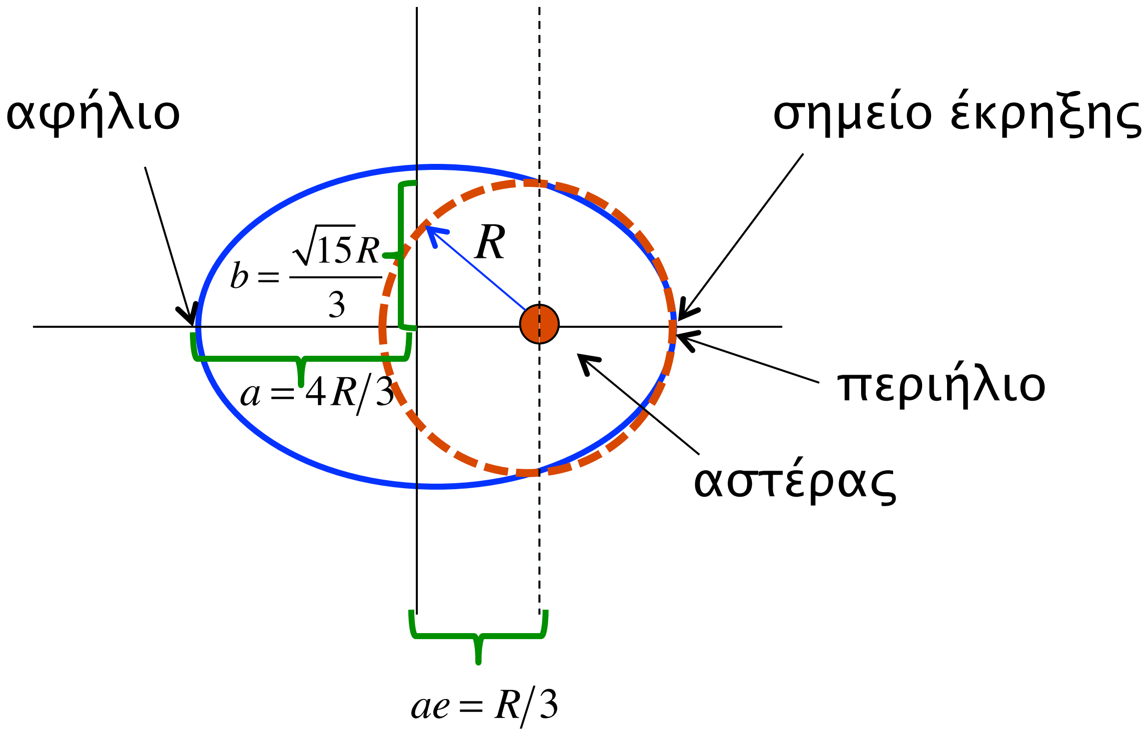
$$r_{\max} = a(1+e) \Rightarrow r_{\max} = \frac{4R}{3}\left(1+\frac{1}{4}\right) \Rightarrow r_{\max} = \frac{5R}{3}$$

Ο μικρός ημιάξονας της έλλειψης δίνεται από την σχέση:

$$b^2 = a^2\left(1-e^2\right) \Rightarrow b^2 = \frac{16R^2}{9}\left(1-\frac{1}{16}\right) \Rightarrow b^2 = \frac{15R^2}{9} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{15}R}{3}$$

Παράδειγμα 2(δ)

(δ) Να γίνει το σχήμα της παλιάς και νέας τροχιάς του πλανήτη με όλα τα χαρακτηριστικά που περιγράφουν την τροχιά



Παράδειγμα 3

Δυο σώματα μάζας m_1 και m_2 έλκονται μεταξύ του βάση ενός λογαριθμικού δυναμικού της μορφής: $U(r) = U_0 \ln(r/a)$
(α) Να βρεθεί και να σχεδιαστεί το ενεργό δυναμικό

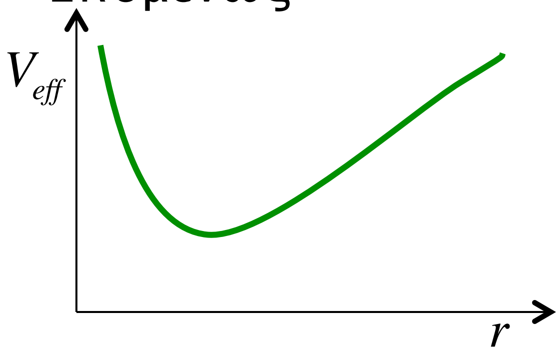
$U(r) = U_0 \ln(r/a)$ και εφόσον τα σώματα έλκονται τότε $U_0 > 0$

Η ενέργεια του συστήματος είναι: $E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + U_0 \ln\left(\frac{r}{a}\right)$

Όλες οι ποσότητες είναι θετικές – $r \to 0$ τότε $U_{eff} \to \infty$

$r \to \infty$ τότε $U = \frac{l^2}{2\mu r^2} \to 0$ ενώ $U = U_0 \ln\left(\frac{r}{a}\right) \to \infty$

Επομένως



Παράδειγμα 3(β-γ)

(β) Να βρεθεί η ακτίνα και η περίοδος της κυκλικής τροχιάς

Για να έχουμε κυκλική τροχιά θα πρέπει: $\frac{dU_{eff}(r)}{dr}=0$

$$U_{eff}=\frac{l^2}{2\mu r^2}+U_0\ln\left(\frac{r}{a}\right) \Rightarrow \frac{dU_{eff}}{dr}=-\frac{l^2}{\mu r_0^3}+\frac{U_0}{r_0}=0 \Rightarrow r_0=\sqrt{\frac{l^2}{U_0\mu}}$$

R κυκλικής τροχιάς

$$\dot{\theta}=\frac{2\pi}{T}=\frac{l}{\mu r_0^2} \Rightarrow T=2\pi\frac{\mu r_0^2}{l} \Rightarrow T=2\pi\frac{\mu}{l}\frac{l^2}{U_0\mu} \Rightarrow T=2\pi\frac{l}{U_0}$$

T κυκλικής τροχιάς

(γ) Για μικρές αποκλίσεις από την κυκλική τροχιά να γραφεί: $r(t)=r_0+\eta(t)$
Να γραφεί η εξίσωση κίνησης υποθέτοντας ότι η(t) μικρή ποσότητα

$$L=T-U=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{l^2}{2\mu}\left(\frac{1}{r_0^2}-\frac{2}{r_0^3}\eta+\frac{3}{r_0^4}\eta^2+0\left(\eta^3\right)\right)-U_0\left(\ln\frac{r_0}{a}+\frac{1}{r_0}n-\frac{1}{2r_0^2}\eta^2+0\left(\eta^3\right)\right)$$

Η εξίσωση κίνησης θα είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}\right)=\frac{\partial L}{\partial r} \Rightarrow \mu\ddot{\eta}+\eta\left[\frac{U_0}{r_0^2}+\frac{3l^2}{\mu r_0^4}\right]=0 \Rightarrow \mu\ddot{\eta}+\eta\omega^2=0 \qquad \omega^2=\frac{U_0}{r_0^2}+\frac{3l^2}{\mu r_0^4}$$

* Οι όροι γραμμικοί ως προς η απαλείφονται αφού $\frac{dU_{eff}(r)}{dr}=0$

Παράδειγμα 3(δ)

Η λύση της εξίσωσης: $\mu\ddot{\eta}+\eta\omega^2=0$ είναι: $\eta(t)=A\cos(\omega_0 t)+\delta$

(δ) Να βρεθεί η γεωμετρική εξίσωση της διαταραχής [η(φ)], και αν η τροχιά είναι κλειστή

Η λύση της εξίσωσης είναι: $\eta(t)=A\cos(\omega_0 t)+\delta$ και για ευκολία θέτουμε δ=0

Μπορούμε να γράψουμε: $t=\frac{\theta}{\dot{\theta}}$ οπότε η λύση γίνεται: $\eta(t)=A\cos\left(\omega_0\frac{\theta}{\dot{\theta}}\right)$

Για να δούμε αν η τροχιά είναι κλειστή, εξετάζουμε αν: $\eta(\theta=0)=\eta(\theta=2\pi)$

το οποίο είναι ισοδύναμο με την συνθήκη: $\eta(t=0)=\eta(t=T_0)$

Για t = 0: $\eta(t=0)=A$

Για t = T_0: $\eta(T_0)=A\cos\left[\boxed{\sqrt{\left(\frac{U_0}{r_0^2}+\frac{3l}{\mu r_0^4}\right)}\frac{2\pi l}{U_0}}\right]$

Πρέπει να ισούται με $2\pi N$ για να είναι περιοδική

$$N\overset{?}{=}\frac{l}{U_0}\sqrt{\left(\frac{U_0}{r_0^2}+\frac{3l}{\mu r_0^4}\right)}$$

Το δεξί μέλος δεν είναι ακέραιος αριθμός και άρα η τροχιά δεν είναι κλειστή

Παράδειγμα 4

Δορυφόρος κινείται σε ελειπτική τροχιά με περίοδο T, εκκεντρότητα, e, και μεγάλο ημιάξονα α. Να δειχθεί ότι η μέγιστη ακτινική ταχύτητα του δορυφόρου είναι $\dot{r}_{\max} = 2\pi a e \big/ \left(T_0\sqrt{1-e^2}\right)$

- Η ενέργεια του δορυφόρου είναι: $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$ όπου $V_{eff} = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{GMm}{r}$
- Η ενέργεια διατηρείται, και επομένως: $\dot{r} \to \dot{r}_{\max}$ όταν: $V_{eff}(r) \to V_{eff}^{\min}$
- Αλλά $V_{eff}(r) \to V_{eff}^{\min}$ όταν $\frac{dV_{eff}}{dr} = 0$

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = 0 \Rightarrow -\frac{2l^2}{2\mu r^3} + \frac{GMm}{r^2} = 0 \Rightarrow \frac{l^2}{\mu r} = GMm \Rightarrow r = \frac{l^2}{GMm^2} \qquad (1)$$

- Αντικαθιστούμε στην εξίσωση του V_{eff}:

$$V_{eff} = \frac{l^2 G^2 M^2 m^4}{2ml^4} - \frac{G^2 M^2 m^3}{l^2} \Rightarrow V_{eff} = \frac{m}{2}\left(\frac{GMm}{l}\right)^2 - m\left(\frac{GMm}{l}\right)^2 \Rightarrow V_{eff} = -\frac{G^2 M^2 m^3}{2l^2}$$

- Αντικατάσταση στην εξίσωση του ενέργειας:

$$\dot{r}_{\max} = \sqrt{2\left[\frac{E - V_{eff}^{\min}}{m}\right]} \Rightarrow \dot{r}_{\max} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E + \frac{G^2 M^2 m^3}{2l^2}\right]} \Rightarrow \dot{r}_{\max} = \frac{GMm}{l}\sqrt{1 + \frac{2El^2}{G^2 M^2 m^3}}$$

Παράδειγμα 4 $\dot{r}_{max} = \frac{GMm}{l}\sqrt{1+\frac{2El^2}{G^2M^2m^3}}$

- Από τον ορισμό της εμβαδικής ταχύτητας: $\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2m}$

  Σε μια περίδο, T_0, το εμβαδό που καλύπτεται είναι: $A = \pi ab$ $\Big\}$ $T_0 = \frac{A}{dA/dt}$

  $$\Rightarrow T_0 = \frac{\pi ab}{l/(2m)} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi mab}{l} \qquad \text{(A)}$$

  Η εκκεντρότητα της έλειψης δίνεται από την σχέση: $e = \sqrt{1+\frac{2El^2}{mk^2}}$

  αλλά $k = GMm$ οπότε: $e = \sqrt{1+\frac{2El^2}{G^2M^2m^3}}$ (B)

- Χρησιμοποιώντας τις (A) και (B) έχουμε:

$$\dot{r}_{max} = \frac{GMm}{l}\sqrt{1+\frac{2El^2}{G^2M^2m^3}} \Rightarrow \dot{r}_{max} = \frac{GMm}{2\pi mab/T_0}e \Rightarrow \dot{r}_{max} = \frac{eGMT_0}{2\pi ab} \qquad (\Gamma)$$

- Ο μικρός ημιάξονας της έλειψης δίνεται από $b = a\sqrt{1-e^2}$ (Δ)
- Ο 3ος νόμος του Kepler: $T_0^2 = \frac{4\pi^2a^3}{GM} \Rightarrow GM = \frac{4\pi^2a^3}{T_0^2}$ (E)
- Αντικατάσταση των (Δ) και (E) στην (Γ): $\dot{r}_{max} = \frac{2\pi ae}{T_0\sqrt{1-e^2}}$

Παράδειγμα 5

Σώμα μάζας m κινείται στην επιφάνεια ενός παραβολοειδούς, η εξίσωση του οποίου σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι $r^2 = 4az$. Αν το σώμα είναι κάτω από μια βαρυτητική δύναμη, να δειχθεί ότι η συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων ως προς μια κυκλική τροχιά ακτίνας $\rho = \sqrt{4az_0}$ είναι

$$\omega = \sqrt{2g/(a+z_0)}$$

- Η Lagrangian του συστήματος είναι: $L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$
- Από την εξίσωση του δεσμού: $r^2 = 4az \Rightarrow 2r\dot{r} = 4a\dot{z} \;\Rightarrow \dot{z} = r\dot{r}/2a$

Η Lagrangian γίνεται: $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \left(\frac{r\dot{r}}{2a}\right)^2\right) - mg\frac{r^2}{4a}$

- Οι εξισώσεις κίνησης:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0 \Rightarrow mr^2\dot{\theta} = l = const \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{l}{mr^2} \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial L}{\partial r} \Rightarrow m\ddot{r} + \frac{m}{4a^2}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{r}\right) = mr\dot{\theta}^2 + m\frac{r\dot{r}^2}{4a^2} - \frac{mgr}{2a} \xrightarrow{\text{(A)}}$$

$$\Rightarrow m\ddot{r} + \frac{m}{4a^2}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{r}\right) = mr\frac{l^2}{m^2r^4} + m\frac{r\dot{r}^2}{4a^2} - \frac{mgr}{2a} \Rightarrow \frac{l^2}{m^2r^3} + \frac{r\dot{r}^2}{4a^2} - \frac{gr}{2a} - \ddot{r} - \frac{1}{4a^2}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{r}\right) = 0$$

Παράδειγμα 5

$$\Rightarrow \frac{l^2}{m^2 r^3} + \frac{r\dot{r}^2}{4a^2} - \frac{gr}{2a} - \ddot{r} - \frac{1}{4a^2}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{r}\right) = 0 \qquad \text{(A)}$$

αλλά $\rho^2 = 4az_0 \Rightarrow \rho = \sqrt{4az_0} = const \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$

$$\Rightarrow \frac{l^2}{m^2\rho^3} - \frac{g\rho}{2a} = 0 \Rightarrow \rho^4 = \frac{2al^2}{m^2 g}$$

$$\Rightarrow l^2 = \frac{m^2 g\rho^4}{2a}$$

Επομένως γυρνώντας και πάλι στην εξίσωση κίνησης (A):

$$\frac{m^2 g\rho^4}{2am^2r^3} + \frac{r\dot{r}^2}{4a^2} - \frac{gr}{2a} - \ddot{r} - \frac{1}{4a^2}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{r}\right) = 0 \Rightarrow \frac{g\rho^4}{2ar^3} + \frac{r\dot{r}^2}{4a^2} - \frac{gr}{2a} - \ddot{r} - \frac{1}{4a^2}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{r}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{g\rho^4}{2ar^3} + \frac{r\dot{r}^2}{4a^2} - \frac{gr}{2a} - \ddot{r} - \frac{r^2\ddot{r}}{4a^2} - \frac{r\dot{r}^2}{2a^2} = 0 \Rightarrow \frac{g\rho^4}{2ar^3} + \frac{r\dot{r}^2}{4a^2} - \frac{gr}{2a} - \ddot{r}\left(1 + \frac{r^2}{4a^2}\right) - \frac{r\dot{r}^2}{2a^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{g\rho^4}{2ar^3} - \frac{r\dot{r}^2}{4a^2} - \frac{gr}{2a} - \ddot{r}\left(1 + \frac{r^2}{4a^2}\right) = 0 \qquad \text{(B)}$$

Παράδειγμα 5

$$\frac{g\rho^4}{2ar^3}-\frac{r\dot{r}^2}{4a^2}-\frac{gr}{2a}-\ddot{r}\left(1+\frac{r^2}{4a^2}\right)=0$$

Για μικρές αποκλίσεις από την κυκλική τροχιά ρ: $r(t)=\rho+\eta(t)$ με η<<ρ

Από ανάπτυγμα Taylor $r^2=(\rho+\eta)^2\approx\rho^2+2\eta\rho$ και $r^{-3}\approx(\rho-3\eta)/\rho^3$

Ισχύει επίσης ότι $\dot{r}=\dot{\eta}$ και $\ddot{r}=\ddot{\eta}$

Αντικατάσταση στην διαφορική εξίσωση δίνει:

$$\frac{g\rho^4}{2a}\frac{(\rho-3\eta)}{\rho^4}-\frac{(\rho+\eta)\dot{\eta}^2}{4a^2}-\frac{g(\rho+\eta)}{2a}-\ddot{\eta}\left(1+\frac{\rho^2+2\eta\rho}{4a^2}\right)=0$$

Προσεγγιστικά, ο όρος $(\rho+\eta)\dot{\eta}^2\to 0$ όπως και ο όρος $(2\eta\rho)\ddot{\eta}\to 0$

$$\frac{g(\rho-3\eta)}{2a}-\frac{g(\rho+\eta)}{2a}-\ddot{\eta}\left(1+\frac{\rho^2}{4a^2}\right)=0\Rightarrow-\frac{4g\rho\eta}{2a}-\ddot{\eta}\left(1+\frac{\rho^2}{4a^2}\right)=0$$

$$\Rightarrow\ddot{\eta}\left(1+\frac{\rho^2}{4a^2}\right)+\eta\frac{2g}{a}=0$$ Εξίσωση ταλαντωτή

$$\omega^2=\frac{2g}{a}\Big/\left(1+\frac{\rho^2}{4a^2}\right)\Rightarrow\omega^2=\frac{2g}{a\left(1+\frac{4az_0}{4a^2}\right)}\Rightarrow\omega^2=\frac{2g}{(a+z_0)}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{2g}{(a+z_0)}}$$

Παράδειγμα 6

Σώμα κινούμενο σε ελειπτική τροχιά δέχεται ώθηση, $\Delta\vec{p} = p_0\hat{r}$ καθώς βρίσκεται στο περιήλιο της τροχιάς. Ποια η τελική τροχιά του σώματος

- Η στροφορμή του σώματος είναι: $l = \vec{r}\times\vec{p}$
- Η ώθηση που δέχεται είναι ακτινική: $\Delta\vec{p} = p_0\hat{r}$

$$\left.\begin{array}{l} l = \vec{r}\times\vec{p} \\ \Delta\vec{p} = p_0\hat{r} \end{array}\right\} l = l' = const$$

- Η ενέργεια του συστήματος αλλάζει: $\Delta E = \dfrac{\Delta p^2}{2m} \Rightarrow \Delta E = \dfrac{p_0^2}{2m}$
- Η εκκεντρότητα της τροχιάς δίνεται από: $e^2 = 1 + \dfrac{2El^2}{4mk^2}$

$$e_f^2 = 1 + \frac{2E_f l^2}{4mk^2} \Rightarrow e_f^2 = 1 + \frac{2\left(E_i + \Delta E\right)l^2}{4mk^2} \Rightarrow e_f^2 = \underbrace{\boxed{1 + \frac{2E_i l^2}{4mk^2}}}_{e_i^2} + \frac{p_0^2 l^2}{4m^2k^2} \Rightarrow e_f^2 = e_i^2 + \left(\frac{p_0 l}{2mk}\right)^2$$

- Ο μεγάλος ημιάξονας της ελειπτικής τροχιάς δίνεται από: $a = \dfrac{l^2/mk}{1-e^2}$

$$\left.\begin{array}{l} a_i = \dfrac{l^2/mk}{1-e_i^2} \\ a_f = \dfrac{l^2/mk}{1-e_f^2} \end{array}\right\} \frac{a_f}{a_i} = \frac{1-e_i^2}{1-e_f^2} \Rightarrow a_f = a_i\frac{1-e_i^2}{1-e_f^2} \Rightarrow a_f = a_i\frac{1-e_i^2}{1-e_i^2-\left(p_0 l/mk\right)^2}$$

$$\Rightarrow a_f = \frac{\left(1-e_i^2\right)a_i}{1-e_i^2-\left(p_0^2/mk\right)\left(l^2/mk\right)} \Rightarrow a_f = \frac{\left(1-e_i^2\right)a_i}{1-e_i^2-\left(p_0^2/mk\right)a_i\left(1-e_i^2\right)}$$

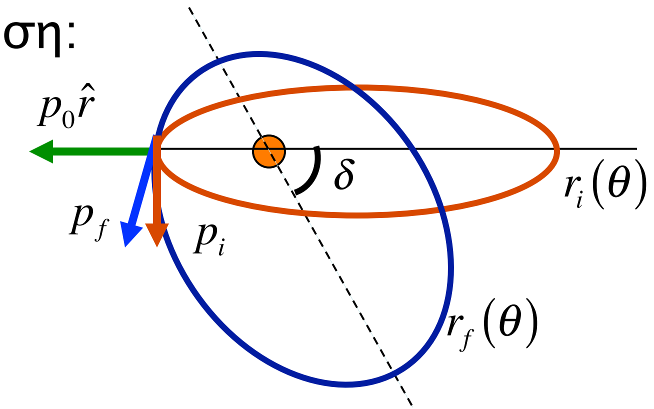
Παράδειγμα 6

$$\Rightarrow a_f = \frac{\left(1-e_i^2\right)a_i}{1-e_i^2-\left(p_0^2/mk\right)a_i\left(1-e_i^2\right)} \Rightarrow a_f = \frac{\left(1-e_i^2\right)a_i}{\left(1-e_i^2\right)\left[1-\left(p_0^2/mk\right)a_i\right]}$$

$$\Rightarrow a_f = \frac{a_i}{\left[1-\left(p_0^2/mk\right)a_i\right]}$$

- Η νέα έλειψη θα περιγράφεται από την εξίσωση:

$$r_f(\theta) = \frac{l^2}{mk^2}\frac{1}{\left[1-e_f\cos(\theta+\delta)\right]}$$



- Η διαφορά φάσης, δ, προσδιορίζεται με το να θέσουμε: $r_i(\pi) = r_f(\pi)$

εφόσον ξέρουμε ότι στο περιήλιο οι 2 τροχιές συμπίπτουν

$$r_f(\pi) = r_i(\pi) \Rightarrow \frac{l^2}{mk^2}\frac{1}{\left[1+e_f\cos(\delta)\right]} = \frac{l^2}{mk^2}\frac{1}{\left[1+e_i\right]} \Rightarrow \cos(\delta) = \frac{e_i}{e_f}$$