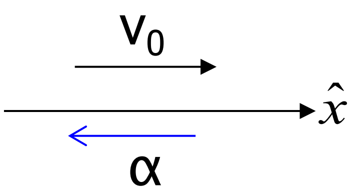
Παράδειγμα

Ένα σώμα κινείται σε 1-διάσταση

Αρχικές συνθήκες:

για $t=0$, $x_0 = 10m$, $v_0=15m/s$, $\alpha=-5m/sec^2$, ως προς $\hat{x}$

➡ Ποια η ταχύτητα **v** και διάνυσμα θέσης **x** του σώματος μετά από 8 sec



Το σώμα με $v_0 > 0$ ελαττώνει ταχύτητα αφού $\alpha < 0$

$$v(t) = v_0 + at \Rightarrow v(t=8s) = 15\frac{m}{s} + \left(-5\frac{m}{s^2}\right)\times 8s = -25m/s$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t=8s) = (-25m/s)\hat{i}$$

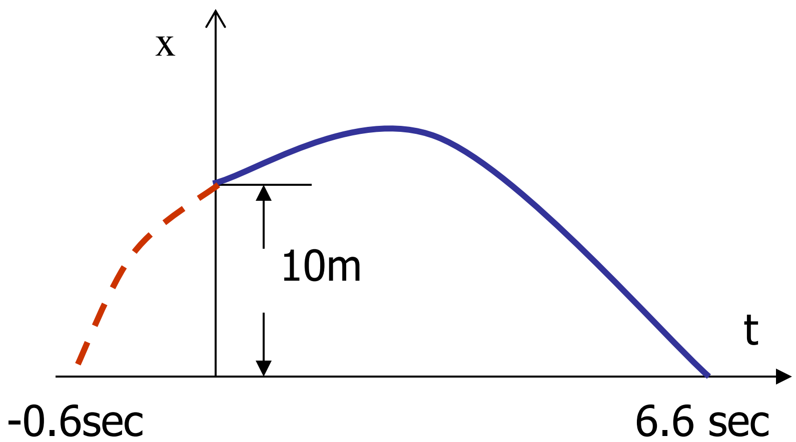
Η ταχύτητα του σώματος ελαττώνεται μέχρι να μηδενιστεί και κατόπιν αλλάζει φορά κίνησης (προς τη -x διεύθυνση)

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow x(t=8s) = 10m + \frac{1}{2}\left(-5\frac{m}{s^2}\right)\times 8^2 s^2 + 15\frac{m}{s}\times 8s = -30m$$

$$\Rightarrow \vec{x}(t=8s) = (-30m)\hat{i}$$

Παράδειγμα (συνέχεια) – Μερικές ερωτήσεις

Πότε το σώμα περνά από x = 0?



$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}at^2 + \mathrm{v}_0 t$$

$$x(t) = 10 - \frac{5}{2}t^2 + 15t = 0$$

Δευτεροβάθμια εξίσωση με λύσεις

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\gamma}}{2a}$$

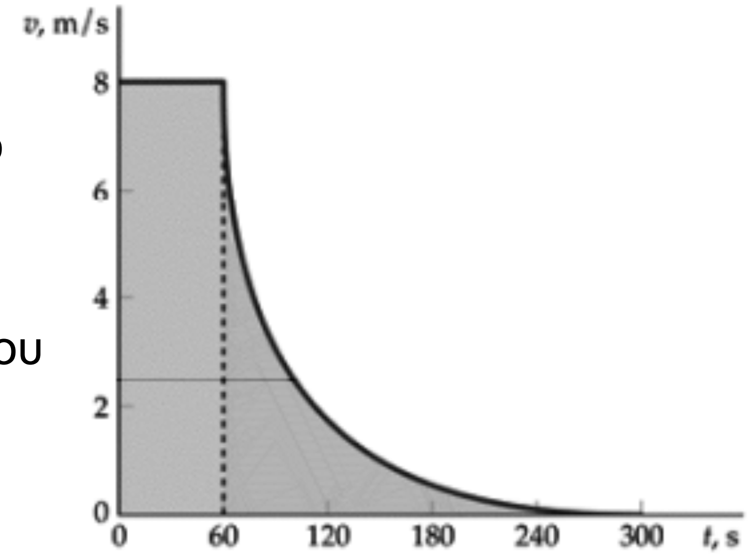
$$t_{1,2} = 3 \pm \sqrt{13} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 6.6s \\ t_2 = -0.6s \end{cases}$$

Ποια από τις 2 απαντήσεις είναι φυσική?

Εξαρτάται από το πρόβλημα. Τι συνέβη τη χρονική στιγμή -0.6 sec;
Πιθανόν να ρίξαμε το σώμα προς τα πάνω.
Επομένως t_2=-0.6s είναι ο χρόνος που χρειάστηκε για να αποκτήσει την αρχική ταχύτητα u_0= 15m/s και να βρεθεί στην αρχική θέση x_0=10m.

Κίνηση με μεταβαλλόμενη ταχύτητα, υ = f(t)

Ένα ferry-boat κινείται με σταθερή ταχύτητα για t_1 = 60s. Κατόπιν σταματά τις μηχανές του και συνεχίζει να κινείται με ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση $v(t) = vt_1^2/t^2$ όπου t_1 = 60s. Ποια είναι η μετατοπιση του πλοίου από t = 0 σε t = ∞



Το γράφημα της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου δίνεται στο διπλανο σχήμα.
Η συνολική μετατόπιση είναι το άθροισμα των μετατοπίσεων Δx_1 από t=0s σε t_1=60s και Δx_2 από t_1 = 60s σε t = ∞

Η ταχύτητα του πλοίου είναι σταθερή τα πρώτα 60s και επομένως η μετατόπιση είναι:

$$\Delta x_1 = v \times \Delta t = 8\frac{m}{s} \times 60s = 480m$$

Η υπόλοιπη μετατόπιση του πλοίου δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$\Delta x_2(t) = \int_{60}^{\infty} v(t)dt = \int_{60}^{\infty} \frac{vt_1^2}{t^2}dt \Rightarrow \Delta x_2(t) = vt_1^2 \int_{60}^{\infty} t^{-2}\,dt = -vt_1^2 \left.\frac{1}{t}\right|_{60}^{\infty}$$

$$\Rightarrow \Delta x_2(t) = -vt_1^2\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{60}\right] = \frac{vt_1^2}{60} \qquad \Rightarrow \Delta x_2(t) = 480m$$

Η συνολική μετατόπιση του πλοίου είναι: $\Delta x_{o\lambda} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 960m$

Κίνηση με μεταβαλλόμενη επιτάχυνση, α = *f*(t)

Στην περίπτωση αυτή πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ολοκληρώματα:

- Έστω α(t) = Kt και ότι $v_0 = 0.0$ m/s τη χρονική στιγμή t=0s

$$\mathrm{v(t)} = \int_0^t a(t)\,dt + \mathrm{v}_0 = \int_0^t Kt\,dt \Rightarrow \mathrm{v}(t) = \frac{1}{2}Kt^2$$

- Τι συμβαίνει με το x(t) ?

Έστω $x_0 = 0.0$ m τότε

$$x = x_0 + \int_0^t \mathrm{v}(t)\,dt = \int_0^t \mathrm{v}(\mathrm{t})\,dt = \int_0^t \frac{1}{2}Kt^2\,dt \Rightarrow x = \frac{1}{6}Kt^3$$

Κίνηση με σταθερή επιτάχυνση – 2 σώματα

Ένα αυτοκίνητο που κινείται με ταχύτητα 25m/s αρχίζει καταδιώκεται από ένα περιπολικό το οποίο ξεκινά από την κατάσταση ηρεμίας και επιταχύνει με ρυθμό $5m/s^2$ την στιγμή που περνά μπροστά από το περιπολικό.

(α) Μετά από πόσο χρόνο το περιπολικό φθάνει το αυτοκίνητο;

(β) Ποια η ταχύτητα του περιπολικού όταν φθάνει το αυτοκίνητο;

(γ) Ποια η ταχύτητα του περιπολικού όταν βρίσκεται 25m πίσω από το αυτοκίνητο;

Γράφουμε τις εξισώσεις θέσης των 2 αυτοκινήτων συναρτήσει του χρόνου. Τη στιγμή που το περιπολικό φθάνει το αυτοκίνητο οι θέσεις τους είναι ίδιες ενώ ο χρόνος κίνησης είναι ίδιος

$$\left.\begin{aligned} x_a &= \upsilon_a t \\ x_\pi &= \upsilon_0^\pi t + \frac{1}{2}a_\pi t^2 = \frac{1}{2}at^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \upsilon_a t = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = 2\frac{\upsilon_a}{a} = \frac{2\times 25m/s}{5m/s^2} = 10s$$

Τη στιγμή αυτή η ταχύτητα του περιπολικού είναι: $\upsilon_\pi = at = \left(5m/s^2\right)\times\left(10s\right) = 50m/s$

Η ταχύτητα του περιπολικού όταν βρίσκεται 25m πίσω από το αυτοκίνητο είναι: $\upsilon_\pi = at_1$

Πρέπει να βρούμε τη χρονική στιγμή t_1 που η διαφορά θέσης, $x_\alpha - x_\pi$, των δυο αυτοκινήτων είναι 25m:

$$\Delta x = x_a - x_\pi = \upsilon_a t_1 - \frac{1}{2}at_1^2 = 25m$$

Οι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης: $\left\{\begin{aligned} t_1 &= 5+\sqrt{15} = 8.87s \\ t_1 &= 5-\sqrt{15} = 1.13s \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \upsilon_1 &= 44.4m/s \\ \upsilon_1 &= 5.65m/s \end{aligned}\right.$

Κίνηση με σταθερή επιτάχυνση – 2 σώματα

Οι δυο λύσεις που βρίσκουμε στο τελευταίο ερώτημα είναι αποδεκτές

Τα δυο αυτοκίνητα έχουν απόσταση 25m δυό φορές κατά τη διάρκεια της κίνησής τους: Στην αρχή της καταδίωξης και λίγο πριν το περιπολικό φθάσει το αυτοκίνητο

Σε κάθε χρονική στιγμή, t, η απόσταση μεταξύ των δυο αυτοκινήτων είναι:

$$\Delta x = s = x_a - x_\pi = \upsilon_a t - \frac{1}{2}at^2$$

Η απόσταση αυτή είναι μέγιστη όταν: $\frac{d}{dt}s = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\upsilon_a t - \frac{1}{2}at^2\right) = 0$

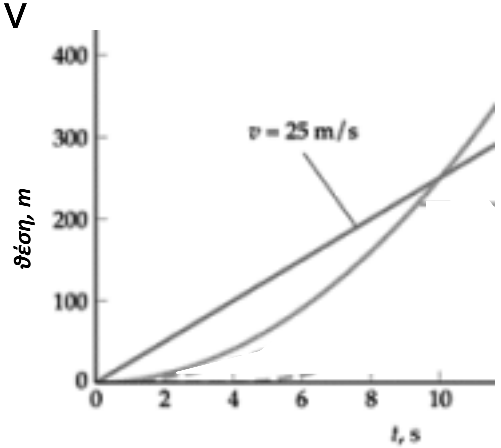
$$\Rightarrow \upsilon_a - a_\pi t = 0 \Rightarrow t = \frac{\upsilon_a}{a_\pi} = 5s$$

Σε ίσα χρονικά διαστήματα πριν και μετά το χρόνο των 5sec, η απόσταση των αυτοκινήτων είναι ίση όπως στην περίπτωση των 25m της άσκησης

Η χρονική στιγμή t_1=8.87sec είναι Δt =8.87-5.0=3.87s από την χρονική στιγμή της μέγιστης απόστασης όπως και η χρονική στιγμή t_1=1.13s (Δt =5-1.13=3.87s)

Αυτό φαίνεται και από το γράφημα της θέσης των δυο αυτοκινήτων συναρτήσει του χρόνου

Η απόσταση ξεκινά από το 0, φθάνει σε μια μέγιστη τιμή και κατόπιν ελαττώνεται



Ελεύθερη πτώση

Ο Γιώργος και η Μαρία στέκονται στην άκρη ενός λόφου.Ο Γιώργος ρίχνει μια μπάλα κατακόρυφα προς τα πάνω ενώ την ίδια στιγμή η Μαρία ρίχνει μια μπάλα με την ίδια ταχύτητα κατακόρυφα προς τα κάτω.

➡ Ποιά μπάλα φθάνει στο έδαφος πρώτη

(Α) Του Γιώργου (Β) Της Μαρίας (Γ) Ίδιος χρόνος

$$y = y_0 + \upsilon_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

Γιώργος: $0 = H + \upsilon_0 t - gt^2/2$

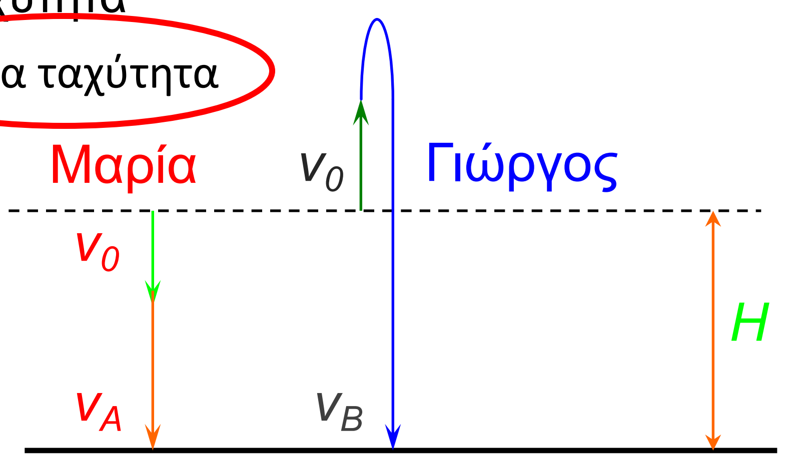
Μαρία: $0 = H - \upsilon_0 t - gt^2/2$

➡ Ποιά μπάλα φθάνει με τη μεγαλύτερη ταχύτητα

(Α) Του Γιώργου (Β) Της Μαρίας (Γ) Ίδια ταχύτητα

$$\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2 = 2g\Delta y \Rightarrow \upsilon_f^2 - \upsilon_i^2 = 2gH$$

$$\Rightarrow \upsilon_f^2 = \upsilon_i^2 + 2gH$$

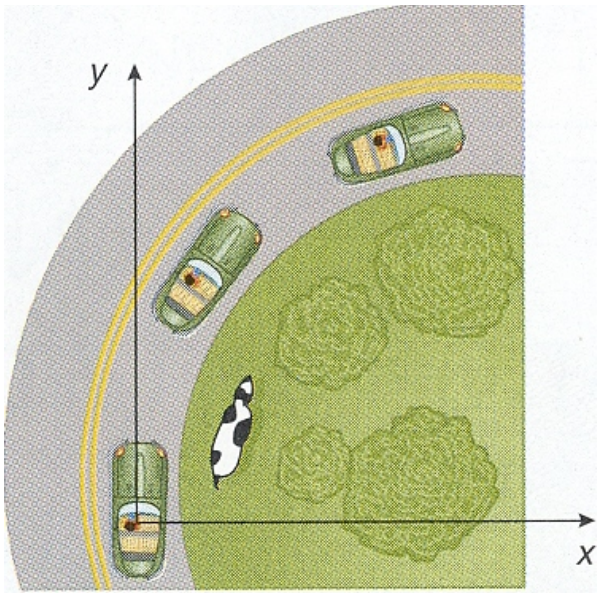


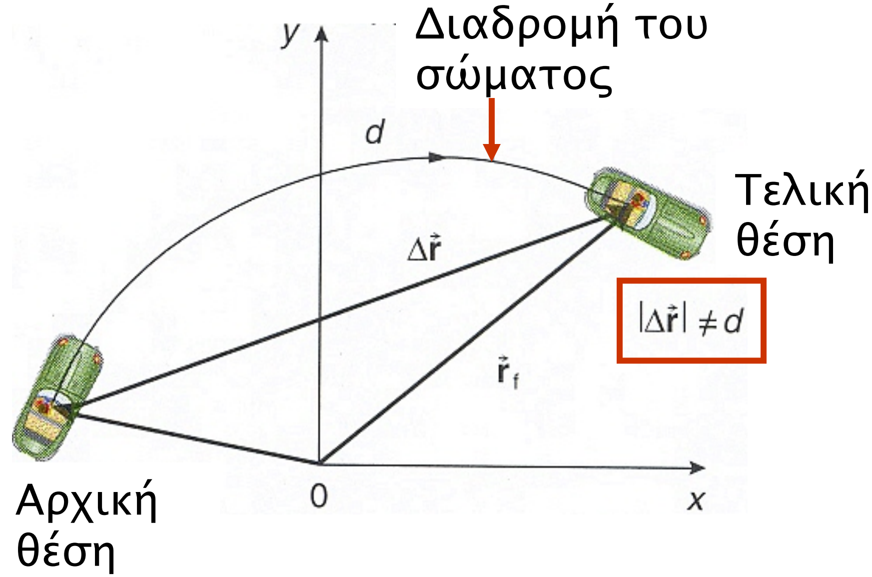
4ο Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας
- Θα στείλετε τη φωτογραφία της απάντησής σας στο fotis@ucy.ac.cy

Έτοιμοι

Κίνηση σε δύο διαστάσεις





Η κίνηση που κάνει το αυτοκίνητο καθώς στρίβει περιορίζεται σε ένα οριζόντιο επίπεδο x-y

Η αλλαγή στο διάνυσμα θέσης δίνεται από τη διανυσματική διαφορά των διανυσμάτων θέσης στις 2 χρονικές στιγμές t_f και t_i

$$\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}_f - \vec{r}_i = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) \Rightarrow$$

$$\Delta\vec{r}(t) = \left[x(t+\Delta t) - x(t)\right]\hat{i} + \left[y(t+\Delta t) - y(t)\right]\hat{j}$$

Κίνηση σε 2 διαστάσεις

- Έστω ένα κινούμενο σώμα που περιγράφεται από το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}$ που γράφεται

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} \Rightarrow \vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + x\cancelto{0}{\left(\frac{d}{dt}\hat{i}\right)} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + y\cancelto{0}{\left(\frac{d}{dt}\hat{j}\right)}$$

$$\Rightarrow \vec{\mathrm{v}} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} \Rightarrow \vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}_x\hat{i} + \mathrm{v}_y\hat{j}$$

- Αν το σώμα κινείται με επιτάχυνση $\boldsymbol{\alpha}(\mathrm{t})$ τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{a}(t) = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \frac{d\mathrm{v}_x}{dt}\hat{i} + \frac{d\mathrm{v}_y}{dt}\hat{j} \Rightarrow a_x = \frac{d\mathrm{v}_x}{dt} \quad \kappa\alpha\iota \quad a_y = \frac{d\mathrm{v}_y}{dt}$$

- Με ολοκλήρωση θα πάρουμε

$$d\mathrm{v}_\mathrm{x} = a_x dt \Rightarrow \mathrm{v}_\mathrm{x} = \int a_x\, dt \quad \text{και ανάλογα} \quad \mathrm{v}_\mathrm{y} = \int a_y\, dt$$

- Αν η επιτάχυνση είναι σταθερή (μέτρο και διεύθυνση) τότε α_x=σταθ. και α_y=σταθ. και έχουμε

$$\mathrm{v}_\mathrm{x} = a_x\int dt = a_x t + \underbrace{\mathrm{c}_1}_{\mathrm{v}_{0x}} \qquad \mathrm{v}_\mathrm{y} = a_y\int dt = a_y t + \underbrace{c_2}_{\mathrm{v}_{0y}}$$

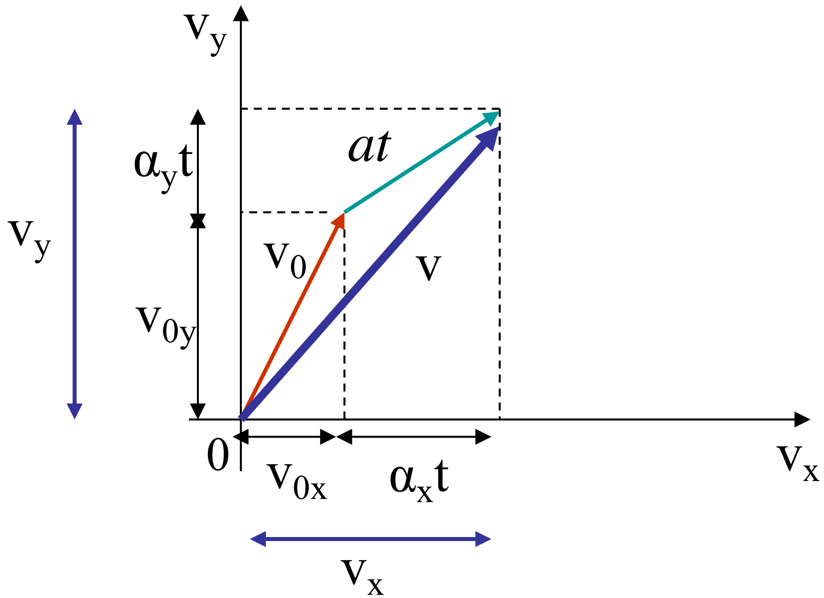
Κίνηση σε 2 διαστάσεις

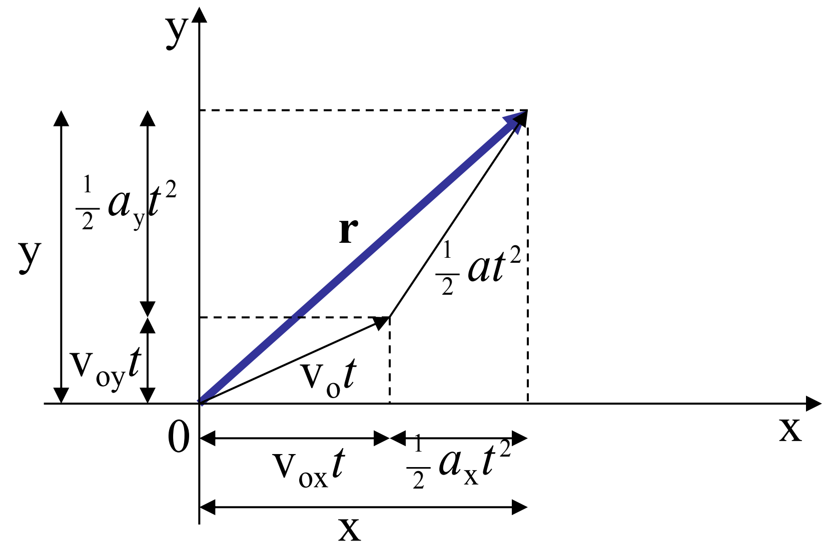
Αντικαθιστώντας στα προηγούμενα έχουμε

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = (a_x t + v_{0x})\hat{i} + (a_y t + v_{0y})\hat{j}$$

$$= (v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}) + (a_x\hat{i} + a_y\hat{j})t \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

Η ταχύτητα ενός σώματος κατά τη στιγμή t είναι το διανυσματικό άθροισμα της ταχύτητας v_0 και της πρόσθετης ταχύτητας αt που απέκτησε κατά το διάστημα t

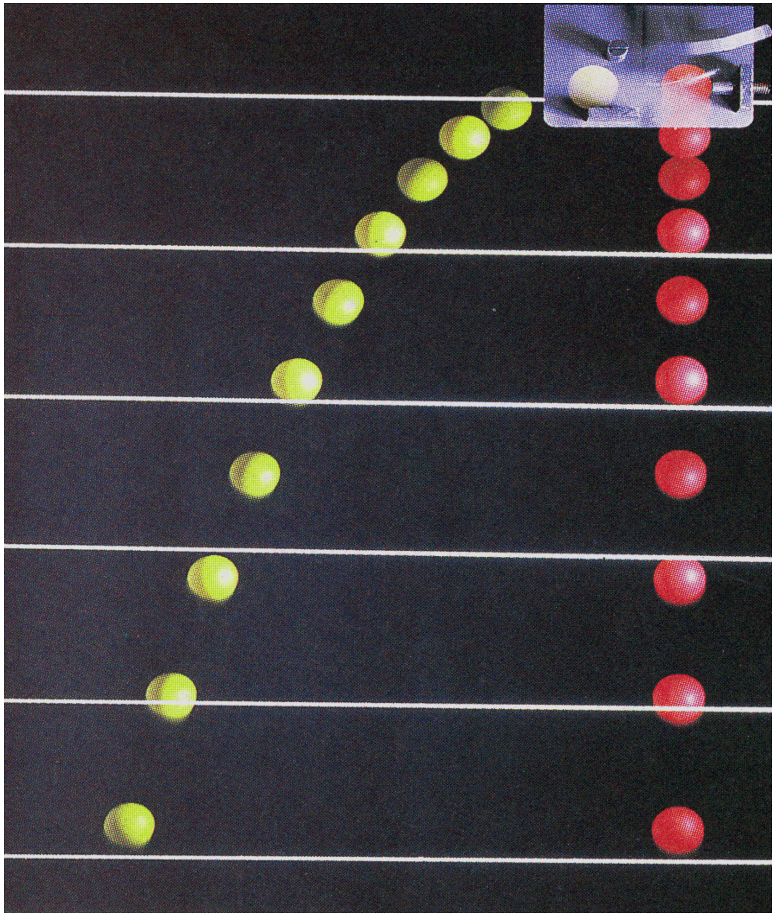




Ανεξαρτησία κάθετων μεταξύ των κινήσεων

Εξαρτώνται οι τιμές των α_x, v_x και x από τις τιμές των α_y, v_y και y την ίδια ή κάποια άλλη χρονική στιγμή?

Το ερώτημα που τίθεται είναι κατά πόσο η κίνηση στην μια κάθετη διεύθυνση επηρεάζει την κίνηση στην άλλη κάθετη διεύθυνση.



Πειραματικά:

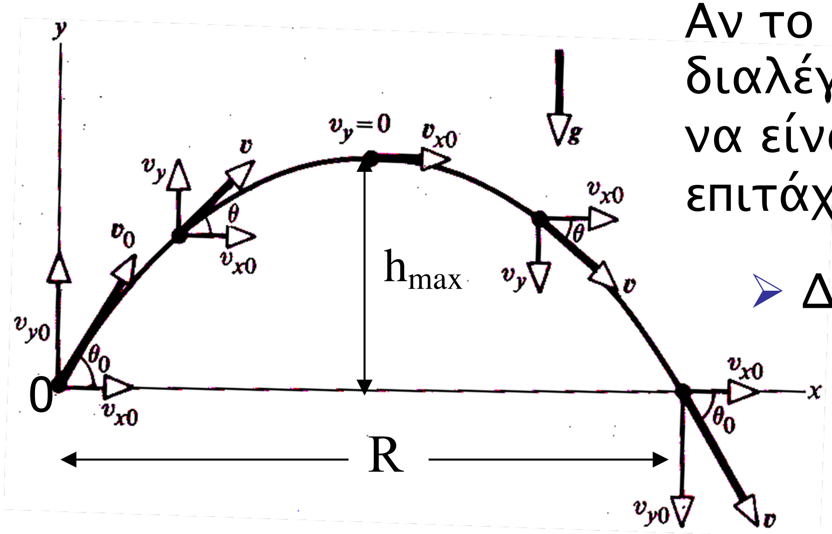
Κάθετες κινήσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους

Οι κατακόρυφες κινήσεις των 2 μπαλών είναι πανομοιότυπες

Φθάνουν στο έδαφος την ίδια χρονική στιγμή

Μπορούμε επομένως να αναλύσουμε την κίνηση σε κάθε άξονα ξεχωριστά

Κίνηση σε 2 διαστάσεις-κίνηση βλήματος



Ταχύτητα εφαπτόμενη της τροχιάς σε κάθε σημείο της τροχιάς

Αν το διάνυσμα της επιτάχυνσης είναι σταθερό, διαλέγουμε ένα από τους άξονες συντεταγμένων να είναι η γραμμή που περιέχει το διάνυσμα της επιτάχυνσης ή κάποια παράλληλη διεύθυνση

- Διαλέγουμε την κατακόρυφη διεύθυνση (y//g)

(A) $\alpha_x = 0$ (έλλειψη επιτάχυνσης στο x)

$\alpha_y = -g$ (επιτάχυνσης βαρύτητας)

$$v_x = v_{0x} + a_x t = v_{0x}$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t = v_{0y} - gt$$

(B) Οι αρχικές συνθήκες:

$$\theta_i = \theta_0 \quad x_0 = y_0 = 0 \quad v_i = v_0 \quad a_x = 0$$

$$\cos\theta_0 = \frac{v_{0x}}{v_0} \quad \sin\theta_0 = \frac{v_{0y}}{v_0} \quad a_y = -g$$

*Αγνοούμε την αντίσταση του αέρα

Κίνηση σε 2-διαστάσεις

(Γ) $\mathrm{v}_x = \mathrm{v}_{0x} = \mathrm{v}_0 \cos\theta_0 = \sigma\tau\alpha\theta.$

$\mathrm{v}_y = \mathrm{v}_{0y} - gt = \mathrm{v}_0 \sin\theta - gt$

$$x = x_0 + \mathrm{v}_{0_x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad y = y_0 + \mathrm{v}_{0_y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \mathrm{v}_{0_x} t = (\mathrm{v}_0 \cos\theta_0) t \\ y &= \mathrm{v}_0 \sin\theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \right\}$$

Παραμετρικές εξισώσεις κίνησης

Εξίσωση τροχιάς y(x)

Απαλοιφή του χρόνου από τις δύο παραμετρικές εξισώσεις των συντεταγμένων

$$x = (\mathrm{v}_0 \cos\theta_0) t \Rightarrow t = \frac{x}{\mathrm{v}_0 \cos\theta_0} \qquad y = x \tan\theta_0 - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{\mathrm{v}_0^2 \cos^2\theta_0}$$

Η εξίσωση της τροχιάς είναι 2ου βαθμού ως προς x, δηλαδή η διαδρομή του σώματος στο χώρο είναι παραβολική $y = ax + bx^2$

Κίνηση βλήματος

Πόσο χρόνο χρειάζεται το βλήμα να φτάσει στο μέγιστο ύψος του και ποιο είναι το ύψος αυτό? (κίνηση στον y-άξονα)

Όταν $y = h_{\max}, \upsilon_y = 0 \quad \Rightarrow 0 = \upsilon_{0_y} - gt \Rightarrow t_{h_{\max}} = \dfrac{\upsilon_{0_y}}{g}$ $\boxed{\Rightarrow t_{h_{\max}} = \dfrac{\upsilon_0 \sin\theta}{g}}$

Αντικαθιστώντας στη εξίσωση y(t)

$$y(t_{\max}) = h_{\max} = \cancelto{0}{y_0} + \upsilon_{0_y} t_{\max} - \frac{1}{2} g t_{\max}^2 = (\upsilon_0 \sin\theta)\frac{\upsilon_0 \sin\theta}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{\upsilon_0 \sin\theta}{g}\right)^2 \boxed{\Rightarrow h_{\max} = \frac{(\upsilon_0 \sin\theta)^2}{2g}}$$

Πόσο μακριά θα πάει το βλήμα στο επίπεδο του εδάφους και πόσο χρόνο κάνει? (κίνηση στον x-άξονα)

Στο x_{max} το σώμα έχει επιστρέψει και πάλι στη θέση $h = y_0 = 0$

$$y = 0 = \cancelto{0}{y_0} + \upsilon_{0_y} t - \frac{1}{2} g t^2 = (\upsilon_0 \sin\theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ \boxed{t_2 = \dfrac{2\upsilon_0 \sin\theta}{g}} \end{cases}$$

$t_1 = 0$ ← προφανής

$\boxed{t_2 = 2(t_{h\max})}$

Η μέγιστη απόσταση στον x-άξονα (βεληνεκές) θα είναι:

$$x_{\max} = \cancelto{0}{x_0} + \upsilon_{0_x} t_{x_{\max}} = \upsilon_0 \cos\theta \left(\frac{2\upsilon_0 \sin\theta}{g}\right) \boxed{\Rightarrow x_{\max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\theta}{g}}$$

Βεληνεκές βλήματος

$$x_{\max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

Όταν $\theta=45^0$ τότε $\sin2\theta=1$ και έχουμε μέγιστο βεληνεκές

Για συμπληρωματικές γωνίες το βεληνεκές είναι ίδιο (π.χ. $\theta=30°$ και $\theta=60°$)