Τυχαίοι αριθμοί και τυχαίες διεργασίες

τυχαίοι περίπατοι – Random walks

Τυχαίοι αριθμοί

Είδαμε τρόπους με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε ακολουθία τυχαίων αριθμών στην Python χρησιμοποιώντας τη βιβλιοθήκη random.

Μπορούμε να πάρουμε τυχαίους αριθμούς χρησιμοποιώντας μεθόδους από την βιβλιοθήκη numpy.

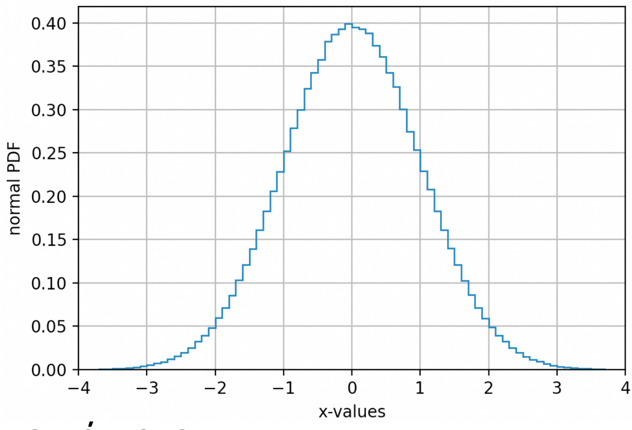
Η κλάση random της numpy περιέχει διάφορες μεθόδους για δημιουργία τυχαίων αριθμών

```
from numpy.random import rand, randn, RandomState
```

RandomState() δημιουργεί ακολουθία τυχαίων αριθμών

rand() δημιουργεί τυχαίους αριθμούς ομοιόμορφα κατανεμημένους

randn() δημιουργεί τυχαίους αριθμούς κατανεμημένους σύμφωνα με την gaussian κατανομή με μέση τιμή μ=0 και σ = 1



seed(όρισμα) ξεκινά την ακολουθία των τυχαίων αριθμών με κάποιο προκαθορισμένο αριθμό («σπόρος»)

RandomState()

Είναι μια κλάση της numpy και χρησιμοποιείται για να δημιουργήσουμε σύνολο τυχαίων αριθμών.

Οι τυχαίοι αριθμοί δημιουργούνται με χρήση των μεθόδων της κλάσης (π.χ. rand, randn)

Κάθε αντικείμενο της κλάσης RandomState() έχει τη δική του ακολουθία τυχαίων αριθμών

- Η ακολουθία δημιουργείται τη στιγμή που δημιουργείται το αντικείμενο τύπου RandomState()
- Ο αρχικός σπόρος της ακολουθίας μπορεί να αλλάξει με την μέθοδο seed()
- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το RandomState() για να έχουμε διαφορετικές ακολουθίες τυχαίων αριθμών ή να επανα-εκινήσουμε κάποια υπάρχουσα ακολουθία

Χρήση της RandomState()

```
#!/usr/bin/python3

from numpy.random import RandomState

#dimiourgia enos antikeimenou RandomState
t = RandomState()
print("generate array of 5 uniform random numbers")
print(t.rand(5))

#Xrisi enos akeraiou ws seed eggyatai tin epanalipsi tis akoloythias
t2=RandomState(123456)    # tyxaia akoloythia
t3=RandomState(123456)    # mia alli akoloythia-me idio sporo

#
print("check 2 akolouthies initiated me idio seed")
print("1st akoloythia:",t2.rand(5))
print("2nd akoloythia:",t3.rand(5))
```

```
generate array of 5 uniform random numbers
[0.21086267 0.47951258 0.91310128 0.39611011 0.59386412]
check 2 akolouthies initiated me ton idio sporo
1st akoloythia: [0.12696983 0.96671784 0.26047601 0.89723652 0.37674972]
2nd akoloythia: [0.12696983 0.96671784 0.26047601 0.89723652 0.37674972]
```

Χρήση της RandomState() - Binomial κατανομή

Δημιουργία συνόλου τυχαίων αριθμών που κατανέμονται σύμφωνα με την κατανομή

Διονυμική (binomial) : $\boldsymbol{p(m) = {}^{N}C_m p^m (1-q)^{(N-m)}}$ όπου $\boldsymbol{{}^{N}C_m = \frac{N!}{m!\,(N-m)!}}$

Αν μια προσπάθεια η οποία δίνει επιτυχία με πιθανότητα *p*, τεθεί σε δοκιμή *N* φορές, η πιθανότητα *p*(*m*) να βρούμε ακριβώς *m* επιτυχίες δίνεται από τη διονυμική σχέση

Είδαμε τις περιπτώσεις ρίψης ενός νομίσματος ή ενός ζαριού. Για την περίπτωση του νομίσματος, η πιθανότητα να έρθει η μια όψη του νομίσματος είναι p=0.5 ενώ q=0.5.

Έστω ότι ρίχνουμε ένα νόμισμα 2 φορές (επομένως N=2).

Η πιθανότητα να πάρουμε την ίδια όψη του νομίσματος:

Καμία φορά (*m*=0): $p(0) = \frac{2!}{0!\,2!} 0.5^0 (1-0.5)^2 = 0.25$

Μία φορά (*m*=1): $p(1) = \frac{2!}{1!\,1!} 0.5^1 (1-0.5)^1 = 0.50$

Δύο φορές (*m*=2): $p(2) = \frac{2!}{2!\,0!} 0.5^2 (1-0.5)^0 = 0.25$

Έστω ότι ρίχνουμε το νόμισμα 10 φορές (επομένως N=10). $p(m=10) = 0.5^{10} = 0.00098$

Η πιθανότητα να πάρουμε την ίδια όψη 1, 5 ή 10 φορές είναι:

$p(m=1) = \frac{10!}{1!\,9!} 0.5^1 (1-0.5)^9 = 0.0098$ $p(m=5) = \frac{10!}{5!\,5!} 0.5^5 (1-0.5)^5 = 0.2461$

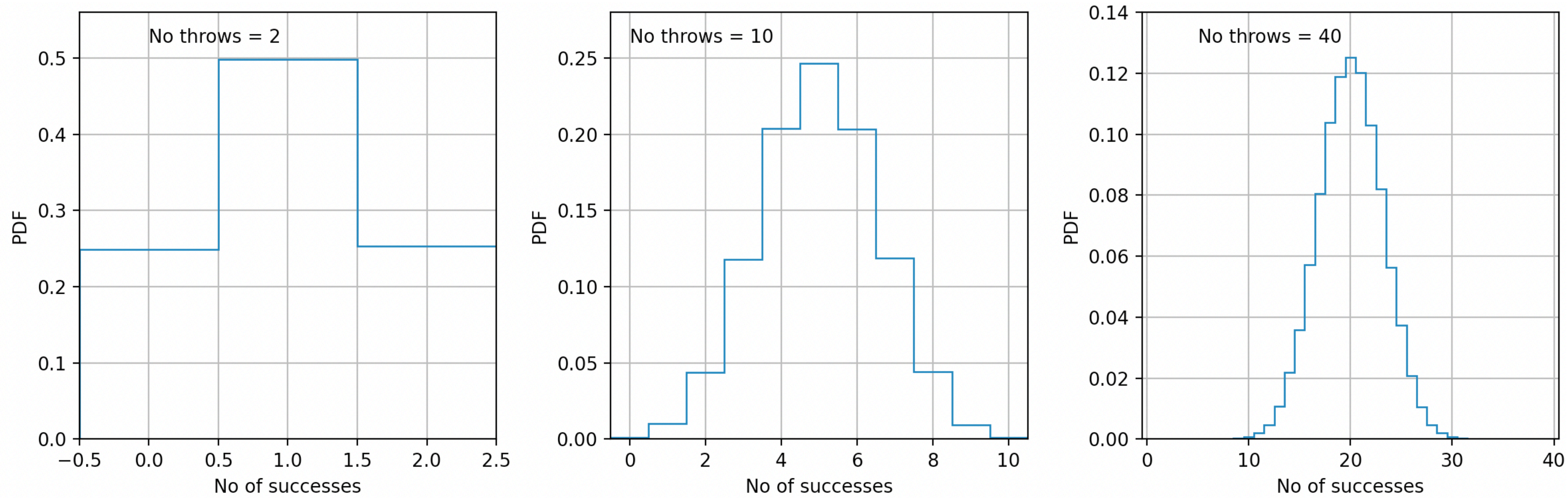
Χρήση της RandomState() - Binomial κατανομή

Θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε τυχαίους αριθμούς σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα με την χρήση της μεθόδου **binomial(Ntries,p,size=N ή tuple)** όπου Ntries p αριθμός των δοκιμών για κάποιο αποτέλεσμα το οποίο συμβαίνει με πιθανότητα p. size=N ή tuple δηλώνει το πλήθος των αριθμών που τα δημιουργηθούν σύμφωνα με την binomial κατανομή. Θα μπορούσε να δοθεί ένα tuple διαστάσεων και να γεμίσουν ένα πίνακα.

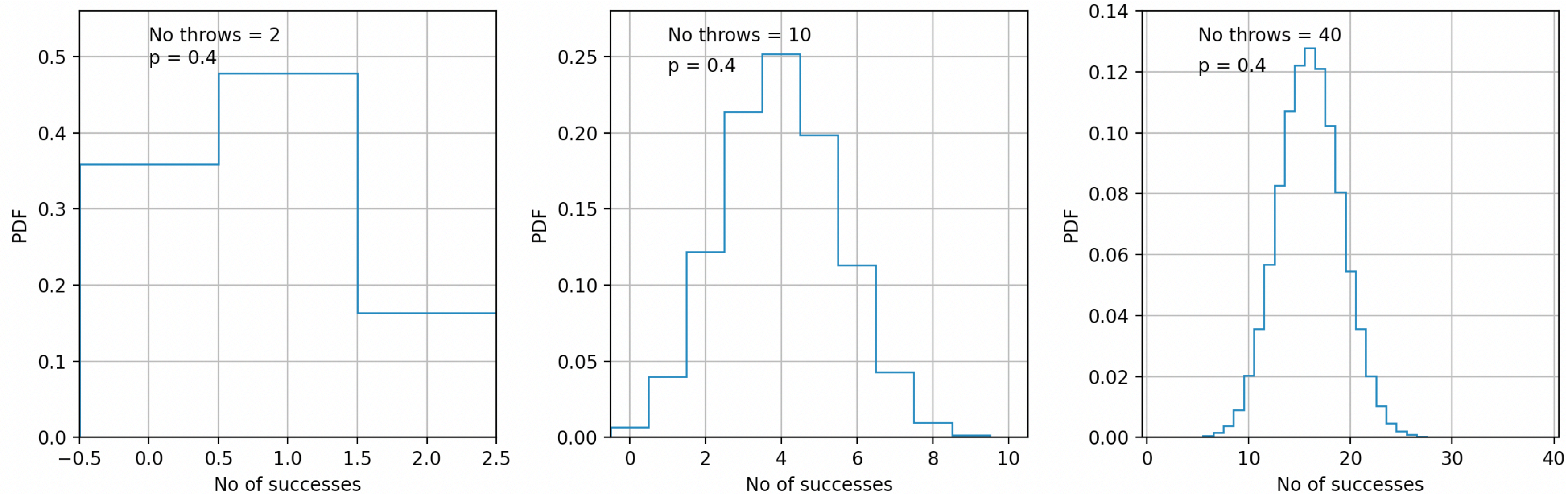
Αν δεν προσδιοριστεί το size, τότε επιστρέφει μόνο έναν αριθμό

```
#!/usr/bin/python3
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy.random import RandomState
t=RandomState(123456)
p = 0.5
nums1 = t.binomial(2,p,100000)
nums2 = t.binomial(10,p,100000)
nums3 = t.binomial(40,p,100000)
plt.figure(figsize=(12,4))
plt.subplot(131)
count, xbins, ign = plt.hist(nums1,3,range=(0.5,2.5),
                         density=True,histtype='step')
plt.xlim(-0.5,2.5)
plt.ylim(0,0.56)
plt.xlabel('No of successes')
plt.ylabel('PDF')
plt.text(0,0.52,r'No throws = 2')
plt.grid(True)
plt.subplot(132)
count, xbins, ign = plt.hist(nums2,11,range=(0.5,10.5),
                         density=True,histtype='step')
plt.xlim(-0.5,10.5)
plt.ylim(0,0.28)
plt.xlabel('No of successes')
plt.ylabel('PDF')
plt.text(0,0.26,r'No throws = 10')
plt.grid(True)
plt.subplot(133)
count, xbins, ign = plt.hist(nums3,41,range=(-0.5,40.5),
                         density=True,histtype='step')
plt.xlim(-0.5,40.5)
plt.ylim(0,0.14)
plt.xlabel('No of successes')
plt.ylabel('PDF')
plt.text(5,0.13,r'No throws = 40')
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Χρήση της RandomState() - Binomial κατανομή



«Πειραγμένο νόμισμα» p=0.4



Χρήση της RandomState() – Poisson κατανομή

Δημιουργία συνόλου τυχαίων αριθμών που κατανέμονται σύμφωνα με την κατανομή

Poisson: $\boldsymbol{f(k,\lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}$

περιγράφει την πιθανότητα *k*-γεγονότα να συμβούν στο διάστημα λ (χρόνου ή χώρου) αν τα γεγονότα συμβαίνουν με γνωστό σταθερό μέσο ρυθμό και ανεξάρτητα από τον χρόνο του τελευταίου γεγονότος

Αποτελεί ειδική περίπτωση της διονυμικής κατανομής όταν η πιθανότητα p τείνει στο 0 και ο αριθμός N των προσπαθειών είναι πολύ μεγάλος (τείνει στο άπειρο) και N*p συγκεκριμένο

Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να βρούμε την πιθανότητα να ανιχνεύσουμε τον αριθμό των κλήσεων που δέχεται ένα κέντρο άμεσης βοήθειας σε 1 λεπτό, όταν είναι γνωστό ότι δέχεται 180 κλήσεις σε μία ώρα.

Στην περίπτωση αυτή, ενδιαφερόμαστε για τον αριθμό των κλήσεων σε 1 min.

Ο μέσος ρυθμός είναι λ=3 κλήσεις/min. Θα μπορούσαμε να έχουμε, 0,1,2, 3, 4, … κλήσεις.

Για 0 κλήσεις: $f(0,3) = \frac{3^0 e^{-3}}{0!} = \frac{1}{e^3} \Rightarrow$ πιθανότητα ~4.98%:

Για 1 κλήση: $f(1,3) = \frac{3^1 e^{-3}}{1!} = \frac{3}{e^{-3}} \Rightarrow$πιθανότητα ~14,94%:

Για 2 κλήσεις: $f(2,3) = \frac{3^2 e^{-3}}{2!} = \frac{9}{2e^3} \Rightarrow$πιθανότητα ~22,40%:

Για 3 κλήσεις: $f(3,3) = \frac{3^3 e^{-3}}{3!} = \frac{27}{6e^3} \Rightarrow$πιθανότητα ~22,40%:

Χρήση της RandomState() - Poisson κατανομή

Θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε τυχαίους αριθμούς σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα με την χρήση της μεθόδου **poisson(λ,size=N)** όπου N αριθμός ή tuple

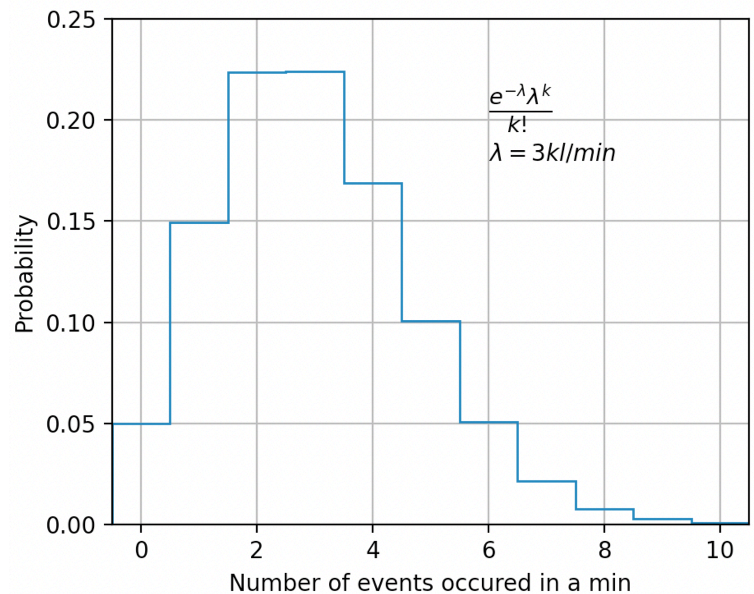
Αν δεν προσδιοριστεί το size, τότε επιστρέφει μόνο έναν αριθμό

```
#!/usr/bin/python3

from numpy.random import RandomState
import matplotlib.pyplot as plt

t = RandomState()
lam = 3                                    # 3 kliseis/min
mynums = t.poisson(lam,1000000)    # 1M tyxaious arithmous

plt.figure(figsize=(5,4))
cont,xbins,ign=plt.hist(mynums,bins=11,range=(-0.5,10.5), \
                          density=True,histtype='step')
plt.xlabel('Number of events occured in a min')
plt.ylabel('Probability')
plt.xlim(-0.5,10.5)
plt.ylim(0.,0.25)
plt.grid(True)
plt.text(6,0.20, r'$\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$',size=14)
plt.text(6,0.18, r'$\lambda=3kl/min$')
plt.show()
```



Χρήση της RandomState() - Gauss κατανομή

Δημιουργία συνόλου τυχαίων αριθμών που κατανέμονται σύμφωνα με την κατανομή

Gauss: $\mathbf{g}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sigma}\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}}} \boldsymbol{e}^{-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathbf{2}}/\mathbf{2}\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}}}$ όπου: **μ** η μέση τιμή, και
σ η τυπική απόκλιση

Φυσικά μεγέθη τα οποία αναμένονται να είναι άθροισμα πολλών ανεξάρτητων διεργασιών, όπως για παράδειγμα τα σφάλματα των μετρήσεων, συχνά έχουν κατανομές που ακολουθούν gaussian στατιστική

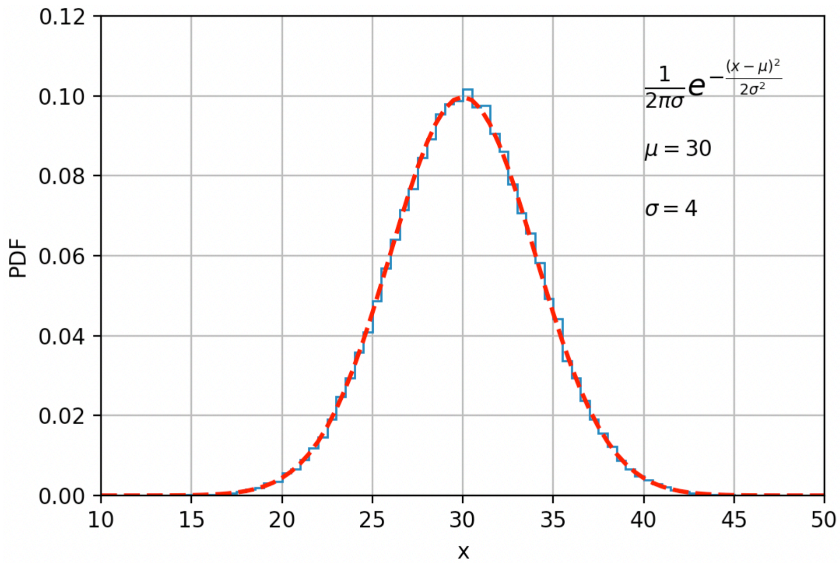
Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο: **normal**(**mean**, **sigma**, size=**value or tuple**) όπου value είναι το πλήθος των τυχαίων αριθμών που θα δημιουργηθούν ή το tuple δίνει τις διαστάσεις ενός πίνακα που θα έχει τις τυχαίες τιμές

- Αν **size=none**, (κανονική συνθήκη) τότε μόνο ένας τυχαίος αριθμός επιστρέφεται επιλεγμένος από την gaussian κατανομή

Αν δώσουμε x = t.**normal**(**mean**, **sigma**, (nx,ny))
θα επιστρέψει έναν array nx x ny με τυχαίους αριθμούς που επιλέχθηκαν από την gaussian κατανομή

Χρήση της RandomState() - Gauss κατανομή

```
#!/usr/bin/python3
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import pi, sqrt, exp
from numpy.random import RandomState
t=RandomState(123456)
mu, sigma = 30, 4.0
# Dimiourgia 100K tyxaiwn arithmwn apo gauss
nums = t.normal(mu,sigma,100000)
pdf = (lambda x : 1/sigma/sqrt(2*pi)*exp(-0.5*((x-mu)/sigma)**2))
plt.figure(figsize=(6,4))
count, xbins, ignored = plt.hist(nums, 80, range=(10,50), \
                                density=True,histtype='step')
plt.plot(xbins, pdf(xbins),linestyle='dashed',linewidth=2,color='r')
plt.xlim(10,50)
plt.ylim(0,0.12)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('PDF')
plt.text(40,0.10,r'$\frac{1}{2\pi\sigma}e^{-\frac{(x-
\mu)^2}{2\sigma^2}}$',size=14)
plt.text(40,0.085,r'$\mu = 30$')
plt.text(40,0.070,r'$\sigma = 4$')
plt.grid(True)
plt.show()
```



Τυχαίες Διαδρομές – Random Walks

Random walk σε 1-Διάσταση

Ένας μεθυσμένος κινείται από στύλο σε στύλο καθώς προσπαθεί να γυρίσει στο σπίτι του. Σε κάθε κολόνα σταματά για λίγο και συνεχίζει. Κάθε φορά που σταματά μπορεί να κινηθεί εξίσου προς ή μακριά από το σπίτι του. Αν οι κολόνες απέχουν απόσταση α ποια είναι η μέση τιμή και η απόκλιση της μετατόπισής του d από το σημείο εκκίνησής του μετά από N βήματα;

Έστω n_R ο αριθμός των βημάτων προς το σπίτι του και n_L ο αριθμός των βημάτων στη λάθος κατεύθυνση: $n_L = N - n_R$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy.random import RandomState

n = 1000    # number of steps
r = RandomState()

p = np.zeros(n)   # αρχεικοποίηση
p[0] = 0.0            # Εκκίνηση από τη θέση 0

for i in range(n-1):
    if (r.rand() >= 0.5):
        p[i+1] = p[i] + 1   # Βήμα προς τα εμπρός όταν r > 0.5
    else:
        p[i+1] = p[i] – 1  # Βήμα προς τα πίσω όταν r < 0.5
```

Random walk σε 1-Διάσταση

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy.random import RandomState

n = 100
r = RandomState()

plt.figure(figsize=(8,6))
steps=np.arange(0,100,1)

for j in range(7):
    p = np.zeros(n)
    p[0] = 0.0

    for i in range(n-1):
        if (r.rand() >= 0.5):
            p[i+1] = p[i] + 1
        else:
            p[i+1] = p[i] - 1

    plt.plot(steps,p)

plt.xlabel('Step')
plt.ylabel('Position')
plt.title('1-D Random Walk')
plt.xlim(0,100)
plt.ylim(-20,20)
plt.grid(True)
plt.show()
```

Random walk σε 1-Διάσταση

Εξετάζουμε την τελική θέση του σώματος για 10M random walks των 100 βημάτων

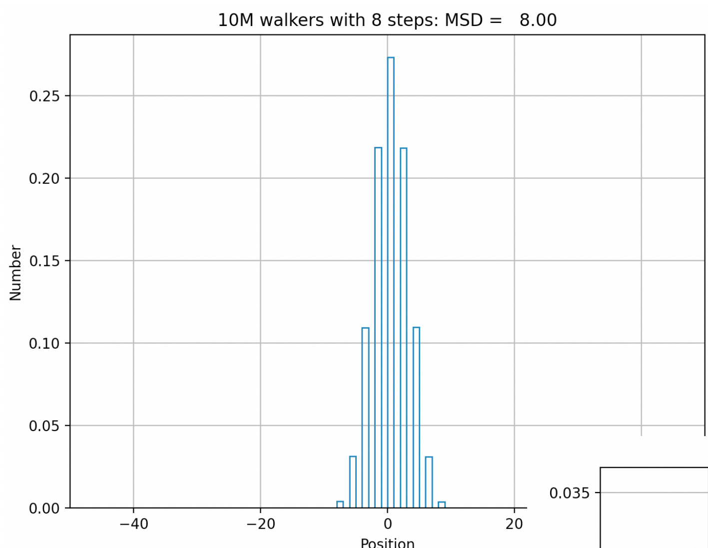
Χαρακτηριστικά ενός random walk:

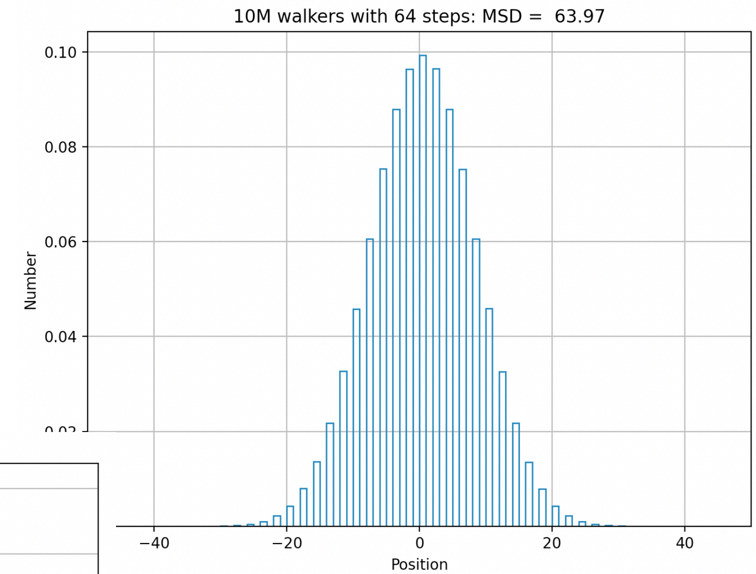
- Μέση τιμή θέσης είναι 0
- Διασπορά η οποία αυξάνεται με το πλήθος των βημάτων

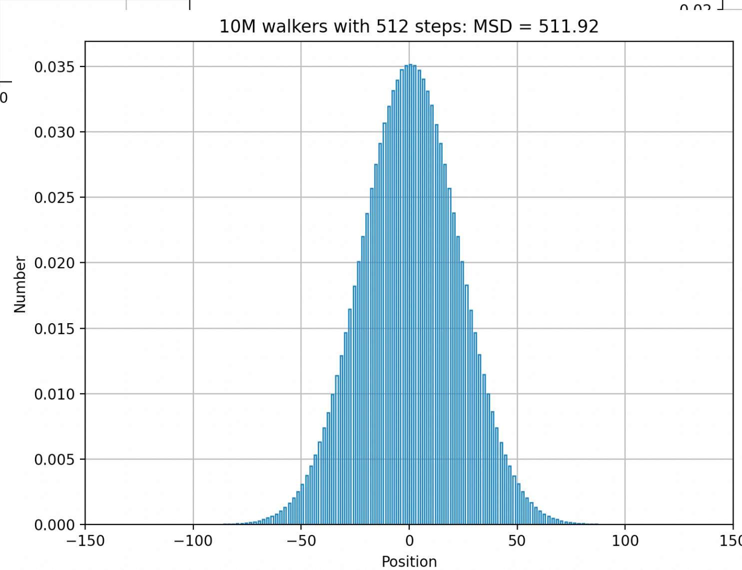
Random walk σε 1-Διάσταση

Εξετάζουμε την μέση τιμή του τετραγώνου της απόστασης που κάλυψε ο περιπατητής.
Θα δείξουμε ότι αυτή ισούται με τον αριθμό των βημάτων του random walk

Μέση τιμή τετραγώνου της απόστασης = $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} d_i^2$ όπου N ο αριθμός των περιπάτων

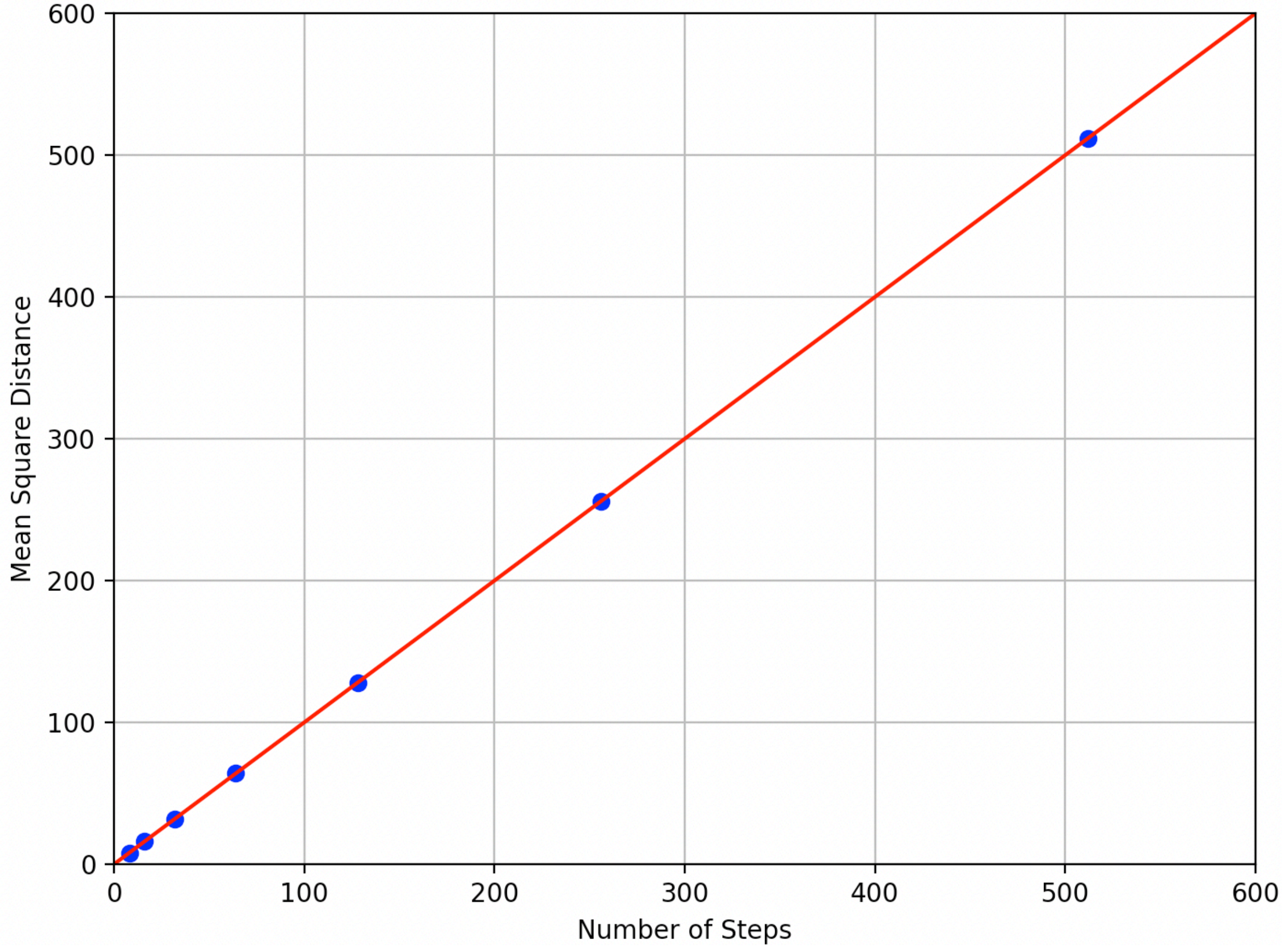






Random walk σε 1-Διάσταση

Μέση τιμή τετραγώνου της απόστασης = $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i^2$ = αριθμός των βημάτων



Random walk – Το αποτέλεσμα

Μπορούμε να καταλάβουμε το αποτέλεσμα θεωρώντας τα ακόλουθα

Η θέση του περιπατητή μετά από Ν βήματα είναι $d = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N = \sum_{i=1}^{N} a_i$

όπου α_i τα βήματα που κάνει ο περιπατητής.

Αν επαναλάβουμε το πείραμα πολλές φορές, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέση τιμή <d>

$$\langle d \rangle = \langle a_1 \rangle + \langle a_2 \rangle + \langle a_3 \rangle + \cdots + \langle a_N \rangle$$

Αλλά $\langle a_1 \rangle = 0$ γιατί έχει την ίδια πιθανότητα να είναι +1 ή -1. Επομένως $\langle d \rangle = 0$

Παρόλο που $\langle d \rangle = 0$ μπορούμε να θεωρήσουμε το τετράγωνο της μετατόπισης d^2 που θα είναι πάντα θετικό και επομένως η μέση τιμή δεν μπορεί να είναι μηδέν

$$\langle d^2 \rangle = \langle (a_1 + a_2 + \cdots + a_N)^2 \rangle = \langle (a_1 + a_2 + \cdots + a_N)(a_1 + a_2 + \cdots + a_N) \rangle =$$

$$\left(\langle a_1^2 \rangle + \langle a_2^2 \rangle + \cdots + \langle a_N^2 \rangle\right) + 2(\langle a_1 a_2 \rangle + \langle a_1 a_3 \rangle + \cdots + \langle a_1 a_N \rangle + \langle a_2 a_3 \rangle + \cdots + \langle a_2 a_N \rangle + \cdots)$$

Αλλά $\langle a_1^2 \rangle = 1$ όπως και τα $\langle a_2^2 \rangle, \langle a_3^2 \rangle, \ldots . \langle a_{\mathrm{N}}^2 \rangle$. Επομένως: $\left(\langle a_1^2 \rangle + \langle a_2^2 \rangle + \cdots + \langle a_N^2 \rangle\right) = N$

Random walk – Το αποτέλεσμα

Τι συμβαίνει με το $\langle a_1 a_2 \rangle$. Υπάρχουν 4 ισοπίθανοι συνδυασμοί για το αποτέλεσμα:

α_1	α_2	$\alpha_1\alpha_2$
1	1	1
1	-1	-1
-1	1	-1
-1	-1	1

Εφόσον $a_1 a_2$ είναι το ίδιο πιθανό να είναι 1 ή -1 επομένως $\langle a_1 a_2 \rangle = 0$

Το ίδιο ισχύει και για όλα τα υπόλοιπα γινόμενα:

$$\langle a_1 a_3 \rangle, \langle a_1 a_N \rangle, \ldots, \langle a_2 a_3 \rangle, \ldots, \langle a_{N-1} a_N \rangle$$

Επομένως: $\langle d^2 \rangle = N + 2(0 + 0 + \cdots + 0) = N$ $\Rightarrow \sqrt{\langle d^2 \rangle} = \sqrt{N}$

Αναμένουμε ότι μετά από *N* βήματα, ο περιπατητής θα βρίσκεται $\sqrt{N}$ βήματα από το σημείο από το οποίο ξεκίνησε σε οποιαδήποτε διεύθυνση.

Κάποιες φορές μπορεί να κινηθεί περισσότερα ή λιγότερα βήματα, αλλά αυτό που θα αναμένουμε για την θέση του είναι $\sqrt{N}$

Random walk

Η μετατόπισή του d από το σημείο εκκίνησης είναι: $d = (n_R - n_L)a = (2n_R - N)a$

Θεωρούμε σα προσπάθεια ένα βήμα, ενώ σαν επιτυχία ένα βήμα προς το σπίτι του

Επομένως n_R είναι κατανεμημένη διονυμικά με πιθανότητα p=1/2

Η μέση τιμή και διασπορά της n_R είναι: $\langle n_R \rangle = Np = \frac{N}{2}$ και $V[n_R] = \langle [\Delta n_R]^2 \rangle = Npq = \frac{N}{4}$

Η μέση τιμή της μετατόπισης είναι: $\langle d \rangle = \langle a[2n_R - N] \rangle = a(2\langle n_R \rangle - N) = a(N - N) = 0$

Η διασπορά της μετατόπισης είναι: $\langle \Delta d^2 \rangle = \langle (d - \langle d \rangle)^2 \rangle = \langle [a(2n_R - N - \langle 2n_R - N \rangle)]^2 \rangle$

$$\langle \Delta d^2 \rangle = \langle [a(2n_R - N - 2\langle n_R \rangle + N)]^2 \rangle = \langle [2a(n_R - \langle n_R \rangle)]^2 \rangle = \langle [2a\Delta n_R]^2 \rangle = 4a^2 \langle \Delta n_R^2 \rangle$$

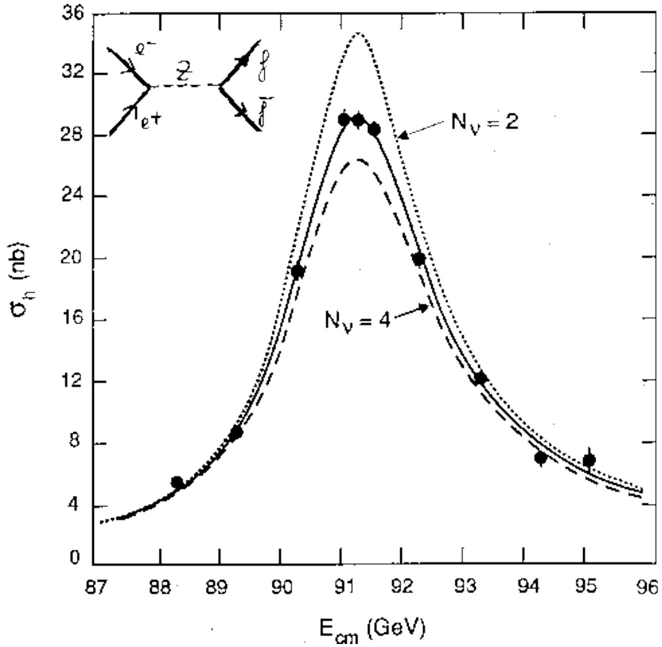
Αλλά $V[n_R] = \langle [\Delta n_R]^2 \rangle$ οπότε $\langle \Delta d^2 \rangle = 4a^2 V[n_R] \Rightarrow V[d] = 4a^2 V[n_R] \Rightarrow V[d] = 4a^2 \frac{N}{4} = a^2 N$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Αβεβαιότητα – ανάγκη για πιθανότητα

- Καθημερινά έχουμε να κάνουμε με αβεβαιότητα – αποφάσεις λαμβάνονται απουσία πλήρους πληροφορίας
- Οι περισσότεροι κλάδοι των επιστημών «φαίνεται» να μην περιέχουν αβεβαιότητα
- Ωστόσο συναντούμε αβεβαιότητα ευρέως στις επιστήμες και θα πρέπει να βρούμε τρόπο να την αντιμετωπίσουμε επιστημονικά
- Στις πειραματικές επιστήμες: υπάρχουν πρακτικά όρια στην ακρίβεια των μετρήσεων
  Μπορούμε να μετρήσουμε μια ποσότητα με πεπερασμένη ακρίβεια
  Όπως ξέρουμε το αποτέλεσμα ενός πειράματος δεν λέει ποτέ ότι μια θεωρία είναι λάθος ή ότι είναι σωστή. Μας δίνει ωστόσο αποδείξεις στηριζόμενοι πάνω τους μπορούμε να έχουμε μια περισσότερο σημαντική αντίληψη για το τι είναι αληθές.

Σημαντικά στοιχεία στην ανάλυση αυτή είναι ο προσεγμένος υπολογισμός των σφαλμάτων και η χρήση κατάλληλων εργαλείων από τη θεωρία πιθανοτήτων



Αβεβαιότητα – ανάγκη για πιθανότητα

- Στις θεωρητικές επιστήμες υπάρχουν θεμελειώδη όρια για το τι μπορούμε να ξέρουμε ή να προβλέψουμε:

Σε συστήματα πολλών σωμάτων: δεν μπορούμε να ξέρουμε π.χ. τι κάνουν όλα τα άτομα σε ένα τμήμα ύλης γιατί η γνώση εμπεριέχει πολύ περισσότερη λεπτομέρεια από αυτή μπορούμε να συλλέξουμε
Ο αριθμός των μορίων νερού που βρίσκονται σε ένα ποτήρι είναι τόσο τεράστιος που πρακτικά είναι αδύνατο να προβλέψουμε τι ακριβώς κάνουν: Έχει νόημα να πούμε ποια η ταχύτητα του 1247890-ου μορίου; Ωστόσο μπορούμε να ρωτήσουμε πόσο πιθανό είναι ένα μόριο να κινείται με ταχύτητα μεγαλύτερη από 200m/s

Μη γραμμικά συστήματα: δεν μπορούμε να προβλέψουμε τη μελλοντική κατάσταση ενός συστήματος το οποίο κινείται κάτω από μη γραμμικές δυνάμεις γιατί η μελοντική τους κατάσταση επιρεάζεται από την γνώση της παρούσας κατάστασής τους.
Η κίνηση ενός εκκρεμούς το άκρο του οποίου δεν είναι ακλόνητο αλλά κινείται εξαιτίας μιας περιοδικής δύναμης. Εξάρτηση από τη συχνότητα της δύναμης, συντονισμός. Δεν έχει νόημα να ρωτήσουμε που θα βρίσκεται η μάζα μετά από 10 ταλαντώσεις αλλά μπορούμε να αναρωτηθούμε ποια θα είναι η πιο πιθανή της θέση

Κβαντομηχανικά συστήματα: δεν ξέρουμε τη διαδρομή που ακολούθησε ακόμα και ένα μόνο ηλεκτρόνιο γιατί εξαιτίας της αρχής της αβεβαιότητας δεν είναι εν γένει γνωστή.

Η σημασία της πιθανότητας

Η έννοια χρησιμοποιείται ευρέως

Δυο «σχολές» για τον ορισμό πιθανότητας:

(A) Συχνότητας (frequentist) ή εμπειρική:

πιθανότητα κάποια δήλωση είναι αληθής: $\dfrac{\text{N\# η δήλωση είναι αληθής}}{\text{N\# θα μπορούσε να είναι αληθής}}$

όπου ο παρονομαστής είναι μεγάλος

(B) Bayesian:

πιθανότητα κάποια δήλωση είναι αληθής = Ο βαθμός της ορθολογικής πίστης ότι είναι αληθής

Λίγο αόριστος και υποκειμενικός ορισμός αλλά πολύ ευρής για να καλύπτει όλες τις περιπτώσεις

Συμβολισμός και σημειογραφία

Εν γένει προσπαθούμε να αποδόσουμε μια πιθανότητα σε κάποια «δήλωση» ενώ δίνεται κάποια άλλη «δήλωση»

Η δήλωση εκφράζει το ρόλο της πιθανότητας σα προέκταση των κανόνων της λογικής στη περιοχή που βρίσκεται μεταξύ των δυο άκρων: του αληθές και ψευδούς

Η δήλωση που δίνεται ονομάζεται πληροφορία, I,
ενώ η δήλωση της οποίας ελέγχεται η πιθανότητα ονομάζεται υπόθεση, A.

Παραδείγματα:

I: Διάλεξα ένα χαρτί από την τράπουλα — Αλλά έλειπαν 14 χαρτιά

A: Το χαρτί αυτό θα είναι ο άσσος σπαθί

I: Αγόρασα ένα λαχείο — Πριν 2 εβδομάδες

A: Θα κερδίσω το λαχείο αυτή την εβδομάδα

- Η πιθανότητα της A εξαρτάται από την πληροφορία, I
- Η πιθανότητα της υπόθεσης A δεδομένης της πληροφορίας, I, συμβολίζεται: $P(A|I)$

◆ Το κατά πόσο αληθής είναι η πληροφορία I είναι άσχετο με τη τιμή της P(A|I)

Κανόνες πιθανοτήτων

Οι δυο ορισμοί πιθανοτήτων (frequentist, Bayesian) υπάγονται στους ίδιους κανόνες

(Α) Διάστημα τιμών

Η πιθανότητα βρίσκεται πάντοτε στο διάστημα $0 \leq P(A \mid I) \leq 1$

P(A|I)=1 δηλώνει βεβαιότητα ότι η υπόθεση Α είναι αληθής

(Β) AND συνδυασμοί: γενική περίπτωση

Θεωρήστε 2 υποθέσεις A_1 και A_2 και έστω $A_1{\bullet}A_2$ (ή A_1 AND A_2) η σύνθετη υπόθεση ότι και οι 2 υποθέσεις είναι αληθείς. Προκύπτει ότι:

$$P(A_1 \bullet A_2 \mid I) = P(A_2 \mid A_1 \bullet I) P(A_1 \mid I)$$

όπου: $P(A_2 \mid A_1 \bullet I)$ δηλώνει τη πιθανότητα της A_2 δεδομένης της υπόθεσης $A_1{\bullet}I$

Παράδειγμα

I: Ένα χαρτί έχει τραβηχτεί από την τράπουλα

A_1: Το χαρτί είναι άσος

A_2: Το χαρτί είναι σπαθί

$A_1{\bullet}A_2$: ο άσος είναι σπαθί

(Γ) AND συνδυασμοί αμοιβαίως ανεξάρτητοι μεταξύ τους (mutually independent)

(Το αληθές της A_1 δεν μας λέει τίποτα για το αληθές της A_2)

Σε αλγεβρική μορφή: $P\left(A_2 \mid A_1 \bullet I\right) = P\left(A_2 \mid I\right)$ και $P\left(A_1 \mid A_2 \bullet I\right) = P\left(A_1 \mid I\right)$

Τότε προκύπτει ότι: $P\left(A_2 \bullet A_1 \mid I\right) = P\left(A_1 \mid I\right) \times P\left(A_2 \mid I\right)$

Κανόνες πιθανοτήτων

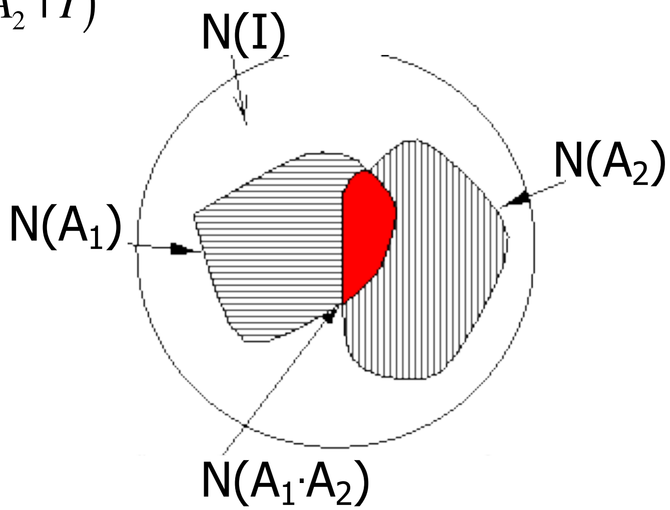
(Δ) OR συνδυασμοί: γενική περίπτωση

Θεωρήστε 2 υποθέσεις A_1 και A_2 και έστω A_1 OR A_2 η σύνθετη υπόθεση ότι τουλάχιστον η μια από τις 2 υποθέσεις είναι αληθής. Προκύπτει ότι:

$$P\left(A_1 \ or \ A_2 \mid I\right) = P\left(A_1 \mid I\right) + P\left(A_2 \mid I\right) - P\left(A_1 \bullet A_2 \mid I\right)$$

Παράδειγμα:

Έστω N(I) το πλήθος όλων των περιπτώσεων I και $N(A_1)$, $N(A_2)$ και $N(A_1 \cdot A_2)$ το πλήθος των περιπτώσεων που η A_1,η A_2 και οι A_1 και A_2 ταυτόχρονα είναι αληθείς αντίστοιχα.
Το αποτέλεσμα θα είναι:
$N(A_1 \text{ or } A_2) = N(A_1)+N(A_2)-N(A_1 \cdot A_2)$
Προφανώς πρέπει να αφαιρέσουμε το κοινό τμήμα γιατί μετράται δυο φορές.



(Ε) OR συνδυασμοί αμοιβαίως αποκλειστικοί μεταξύ τους (mutually exclusive)

(Η A_1 και A_2 δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα αληθείς)

Σε αλγεβρική μορφή: $P\left(A_2 \bullet A_1 \mid I\right) = 0$

Προκύπτει ότι: $P\left(A_1 \ or \ A_2 \mid I\right) = P\left(A_1 \mid I\right) + P\left(A_2 \mid I\right)$

Κανόνες πιθανοτήτων

(ΣΤ) Κανονικοποίηση: αποτελέσματα αμοιβαίως αποκλειστικά και εξαντλητικά: mutually exclusive and exhaustive (MEE)

Θεωρήστε το σύνολο Ω των υποθέσεων A_1, A_2, A_3,...,A_Ω εκ των οποίων τουλάχιστον μια είναι αληθής. Δηλαδή σε αλγεβρική μορφή: $P\left(A_1 \ or \ A_2 \ or \ \mathrm{A}_3 \ or \cdots A_\Omega \mid I\right) = 1$

Παράδειγμα:

I: ένα χαρτί τραβήχτηκε από μια τράπουλα

A_1: είναι άσος

A_2: είναι χαρτί φιγούρας

A_3: είναι κοινό χαρτί

Οι υποθέσεις είναι αποκλειστικές μεταξύ τους και καλύπτουν όλο το πλήθος των δυνατών τιμών

Προκύπτει ότι για ένα τέτοιο σύνολο ισχύει: $\sum_{r=1}^{\Omega} P\left(A_r \mid I\right) = 1$

Απόδοση τιμών στις πιθανότητες

(A) Ίσες εκ των προτέρων πιθανότητες:

Έστω ότι η πληροφορία I προσδιορίζει ένα πλήθος Ω από ΜΕΕ αποτελέσματα και δεν μας λέει τίποτα που να προτιμά το ένα αποτέλεσμα σχετικά με τα άλλα. Τότε στην περίπτωση αυτή της μέγιστης άγνοιας οι πιθανότητες μπορούν να αποδοθούν εκ των προτέρων.

Στην περίπτωση αυτή η πιθανότητα που αποδίδεται σε κάθε υπόθεση του Ω είναι:

$$P_r \equiv P\left(A_r \mid \Omega\right) = \frac{1}{\Omega} \quad \text{για όλα τα r}$$

Σύμφωνα με το κανόνα των ΜΕΕ θα έχουμε: $1 = \sum_{r=1}^{\Omega} P_r = \Omega \times P_r$

Παράδειγμα 1:

Ρίχνουμε ένα νόμισμα

Στην περίπτωση αυτή ξέρουμε ότι Ω=2 δυνατά αποτελέσματα

Πρέπει να αποδόσουμε στο καθένα από τα δυνατά αποτελέσματα την ίδια πιθανότητα: $p = P_r = 1/\Omega = 1/2$

Παράδειγμα 2:

Ένα αέριο αφήνεται να έρθει σε ισορροπία σε απομονωμένο δοχείο

Η κβαντομηχανική μας λέει ότι μπορεί να βρεθεί σε μια οποιαδήποτε μικροσκοπική κατάσταση από ένα σύνολο Ω δυνατών καταστάσεων.

Πρέπει να αποδόσουμε σε κάθε μια από τις καταστάσεις αυτές την πιθανότητα 1/Ω

Αυτό αποτελεί το θεμελειώδη λίθο της στατιστικής φυσικής και επομένως το πως κατανοούμε τη συμπυκνωμένη ύλη

Απόδοση τιμών στις πιθανότητες

(Β) Επιχειρήματα ανάλογα με τους δυνατούς τρόπους

Υποθέτουμε ότι ένα αποτέλεσμα A μπορεί να ληφθεί με W δυνατούς τρόπους A_1, A_2, A_W που αποτελούν μέλη μιας μεγαλύτερης ομάδας $A_1, A_2, \ldots, A_\Omega$ που είναι ΜΕΕ δεδομένης της πληροφορίας I. Τότε αν δεν υπάρχει οποιαδήποτε επιπλέον πληροφορία

$$P(A \mid W, \Omega) = \frac{W}{\Omega}$$

Παράδειγμα:

Ρίχνουμε 2 ζάρια: Ποια η πιθανότητα το άθροισμα τους να δώσει 7

Στη περίπτωση αυτή η πληροφορία I είναι η ρίψη των 2 ζαριών

Το αποτέλεσμα που θα πρέπει να ελέγξουμε είναι A: το άθροισμά τους να είναι 7

Υπάρχουν συνολικά Ω=6x6=36 δυνατά αποτελέσματα

Καθένα από αυτά πρέπει να του αποδοθεί η ίδια πιθανότητα: $P_r = 1/\Omega = 1/36$

Συνολικό score 7 μπορούν να δώσουν οι συνδυασμοί:

(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)

δηλαδή W = 6.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Επομένως η πιθανότητα να πάρουμε άθροισμα 7 θα είναι:

$$P(7 \mid 6, 36) = \frac{W}{\Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Διονυμικός παράγοντας

Εφαρμογή στα προηγούμενα βρίσκει ο διονυμικός παράγοντας που δίνει:

$$^{N}C_{m} = \binom{N}{m} = \frac{N!}{m!(N-m)!}$$

(α) το πλήθος των διαφορετικών τρόπων μια ομάδα από N ξεχωριστά μεταξύ τους αντικείμενα μπορούν να χωριστούν σε 2 υπο-ομάδες από m και N-m αντικείμενα
(β) τον αριθμό των διαφορετικών δυνατών ακολουθιών N αντικειμένων που φτιάχνουν δυο υπο-ομάδες από m μη διαχωρίσημα και N-m μη διαχωρήσιμα μεταξύ τους αντικειμένων.

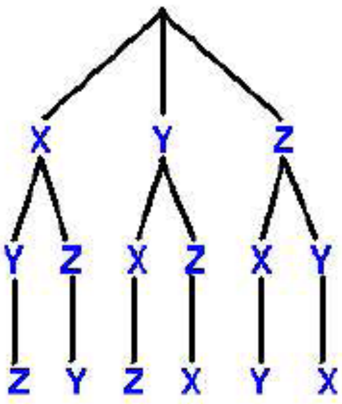
Ας θεωρήσουμε αρχικά ταξινομημένες ομάδες. Έστω ότι έχουμε 2 στοιχεία x και y. Οι ταξινομημένες ομάδες που μπορούμε να έχουμε είναι:

$$\{x,y\} \quad \text{και} \quad \{y,x\}$$

Θεωρήστε ταξινομημένες ομάδες τριών στοιχείων x, y και z. Υπάρχουν 6 δυνατές περιπτώσεις:

$$\{x,y,z\},\{x,z,y\},\{y,x,z\},\{y,z,x\},\{z,x,y\},\{z,y,x\}$$

Αν είχαμε n στοιχεία ο αριθμός των δυνατών περιπτώσεων θα ήταν n!

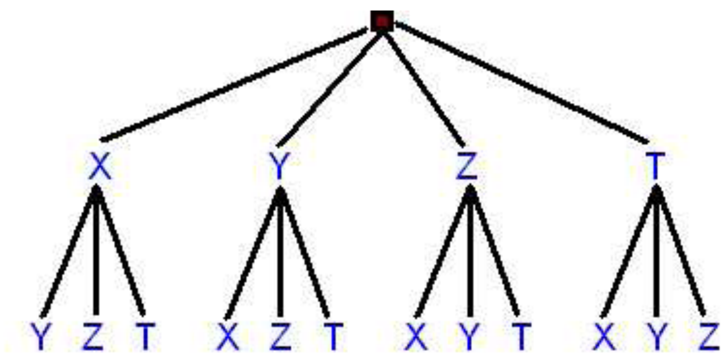


Υπάρχουν *n* δυνατές περιπτώσεις να έχουμε ένα συγκεκριμένο στοιχείο στη 1η θέση, κατόπιν υπάρχουν n-1 περιπτώσεις να έχουμε ένα από τα εναπομείναντα στοιχεία στη 2η θέση κ.ο.κ.
Ο αριθμός αυτός ονομάζεται αριθμός διευθετήσεων:

Διονυμικός παράγοντας

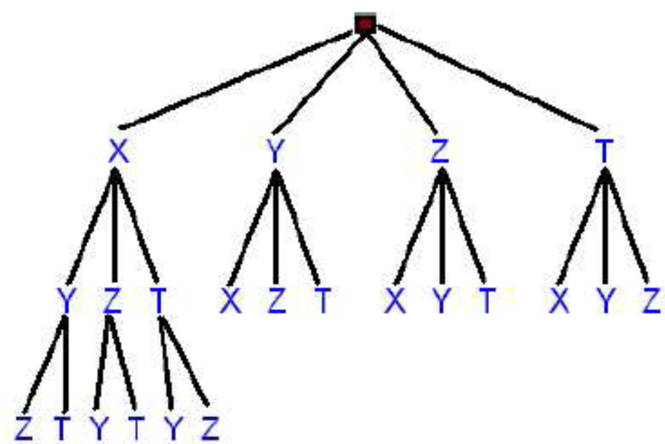
Θεωρούμε τώρα τον αριθμό των δυνατών περιπτώσεων να έχουμε ταξινομημένες ομάδες από $k \leq n$ στοιχεία από κάποια ομάδα n στοιχείων. Αυτός ο αριθμός είναι ο αριθμός των μεταθέσεων $P(n,k)$. Δείχνει τον αριθμό των ανταλλαγών/μεταθέσεων των n στοιχείων όταν πέρνουμε k κάθε φορά.

Έστω ότι έχουμε 4 στοιχεία και πέρνουμε 2 κάθε φορά. Επομένως έχουμε υπο-ομάδες δυο στοιχείων και το παρακάτω σχήμα δείχνει το «δένδρο» των αποφάσεων



Κάθε διαδρομή αντιστοιχεί σε μια ταξινομημένη ομάδα.
Επομένως $P(4,2)=12$

Αν θέλαμε τον αριθμό των ταξινομημένων περιπτώσεων 3 στοιχείων τα οποία πέρνουμε από ένα σύνολο 4 στοιχείων, τότε θα είχαμε:



Επομένως $P(4,3)=24$

Γενικά: $P(n,k)=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)$

$$\Rightarrow P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

Διονυμικός παράγοντας

Θεωρούμε τώρα τον αριθμό των δυνατών μεταθέσεων σε ομάδες μη ταξινομημένες.
Συνδυασμοί είναι οι αριθμοί των διευθετήσεων των στοιχείων χωρίς να λαμβάνουμε υπόψην κάποια συγκεκριμένη σειρά ή θέση.
π.χ. για 2 στοιχεία x, y, υπάρχει μόνο 1 ομάδα: {x,y}

Ο αριθμός των υπο-ομάδων μεγέθους k στοιχείων που λαμβάνονται από n στοιχεία συμβολίζεται με $C(n,k)$. Προφανώς $C(n,n)=1$

Για παράδειγμα, ο αριθμός των μη ταξινομημένων ομάδων 2 στοιχείων τα οποία λαμβάνονται από ένα σύνολο 4 στοιχείων {x,y,z,w} είναι:

$$\{x,y\},\{x,z\},\{x,w\},\{y,z\},\{y,w\},\{z,w\} \Rightarrow C(4,2)=6$$

Για να βρούμε το τύπο που δίνει τον αριθμό των δυνατών συνδυασμών, θεωρούμε και πάλι το προβλημα εύρεσης του αριθμού των δυνατών ταξινομημένων ομάδων με k στοιχεία τα οποία λαμβάνονται από n-στοιχεία.

(α) Δημιουργούμε όλες τις μη ταξινομημένες ομάδες μεγέθους k
(β) Ταξινομούμε τα στοιχεία σε κάθε συνδυασμό που βρήκαμε στο (α)

Απο το προηγούμενο παράδειγμα: $\{x,y\},\{x,z\},\{x,w\},\{y,z\},\{y,w\},\{z,w\}$

Η ταξινόμηση τώρα είναι απλή:

$$\{x,y\},\{x,z\},\{x,w\},\{y,z\},\{y,w\},\{z,w\}$$
$$\{y,x\},\{z,x\},\{w,x\},\{z,y\},\{w,y\},\{w,z\}$$

Επομένως: $P(4,2)=2\times C(4,2)$

Διονυμικός παράγοντας

Σαν ένα ακόμα παράδειγμα, θεωρείστε όλες τις υπο-ομάδες 3 στοιχείων που λαμβάνονται από 4 στοιχεία {x,y,z,w}

$$\{x,y,z\},\{x,y,w\},\{x,z,w\},\{y,z,w\}$$

Υπάρχουν 6 δυνατοί τρόποι να ταξινομήσουμε κάθε μια από τις 4 υπο-ομάδες:

$$\{x,y,z\},\{x,z,y\},\{y,x,z\},\{z,x,y\},\{y,z,x\},\{z,y,x\}$$

Επομένως: $P(4,3)=6\times C(4,3)$

Δείχνουμε λοιπόν με το τρόπο αυτό ότι: $P(n,k)=P(k,k)\times C(n,k)$

Από τη παραπάνω σχέση καταλήγουμε ότι:

$$C(n,k)=\frac{P(n,k)}{P(k,k)}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Παραδείγματα

1. Η πιθανότητα να τραβήξουμε 3 συγκεκριμένα χαρτιά απο μια τράπουλα 52 χαρτιών

Το πλήθος των δυνατών 3-συγκεκριμένων καρτών βρίσκεται αν χωρίσουμε την τράπουλα σε 2 υπο-ομάδες των 3 και 52-3=49 καρτών. Οπότε το πλήθος θα είναι:

$$\Omega = {}^{49}C_3 = \frac{52!}{3!49!}$$

Κάθε περίπτωση έχει εκ των προτέρων πιθανότητα:

$$p = \frac{1}{\Omega} = \frac{3! \times 49!}{52!} = \frac{6}{52 \times 51 \times 50} = 4.5 \times 10^{-5}$$

2. Έχουμε μια τράπουλα 52 χαρτιών. Ποια η πιθανότητα τραβώντας μια κάρτα να πάρουμε είτε άσο ή σπαθί;

Γενική εφαρμογή του Or θα δώσει:

P(άσο OR σπαθί) = P(άσο|52)+P(σπαθί|52)-P(άσο·σπαθί|52) = $\frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$

3. Ποια η πιθανότητα ρίχνοντας 2 ζάρια να πάρουμε το ένα να δείχνει 3;

Η πιθανότητα να πάρουμε 3 ρίχνοντας ένα ζάρι είναι 1/6. Η πιθανότητα να πάρουμε μια οποιαδήποτε άλλη πλευρά είναι 5/6. Επομένως η πιθανότητα να πάρουμε μια οποιαδήποτε πλευρά ρίχνοντας 2 ζάρια θα είναι 5/6 x 5/6 = 25/36. Άρα η πιθανότητα να πάρουμε 3 τουλάχιστον από ένα ζάρι θα είναι 1-25/36 = 11/36

Απόδοση τιμών στις πιθανότητες

(Γ) Χρησιμοποίηση επιπλέον πληροφορίας – Θεώρημα Bayes

Η πιθανότητα που δίνουμε σε κάποια υπόθεση εξαρτάται από τη πληροφορία που έχουμε. Όταν περισσότερη πληροφορία γίνεται προσβάσιμη οπότε η ολική πληροφορία είναι E•I τότε η πιθανότητα θα αλλάξει. Η διαφορά στη τιμή της πιθανότητας πριν και μετά την απόκτηση επιπλέον πληροφορίας αποτελεί το

θεώρημα Bayes: $$P(A \mid E \bullet I) = P(A \mid I)\frac{P(E \mid A \bullet I)}{P(E \mid I)}$$

Παράδειγμα:

Υπόθεση, A: υπάρχει ζωή στον Άρη

Πληροφορία, I: γενικά γνωστά στοιχεία για τον Άρη

Επιπλέον πληροφορία E: υπάρχει νερό στον Άρη

Πιθανότητες:

P(A|I): πιθανότητα ζωής στον Άρη δεδομένης της I

P(A|E·I): πιθανότητα ζωής στον Άρη δεδομένης επίσης της E ότι υπάρχει νερό

P(E|A·I): πιθανότητα ύπαρξης νερού στον Άρη δεδομένου ότι υπάρχει ζωή

P(E|I): πιθανότητα ύπαρξης νερού στον Άρη δεδομένης της I

Από τη στιγμή που η ζωή όπως τη ξέρουμε απαιτεί νερό $P(E \mid A \bullet I) = 1$

Από τη στιγμή που πληροφορία I δεν είναι αρκετή να εξασφαλίζει νερό, $P(E \mid I) < 1$

Από το θεώρημα Bayes: $$\frac{P(A \mid E \bullet I)}{P(A \mid I)} = \frac{P(E \mid A \bullet I)}{P(E \mid I)} = \frac{1}{P(E \mid I)} > 1$$

Θεώρημα Bayes – Conditional Probability

Έστω A_1, A_2, A_3,…,A_n ένα σύνολο από n αποκλειστικές (μη αλληλεπικαλύψιμες) υποθέσεις οι οποίες όλες μαζί περιγράφουν ένα σύνολο S. Έστω E είναι μια υπόθεση από το σύνολο S η οποία έχει πιθανότητα P(E|S)>0.
Τότε η πιθανότητα $P(A_k|E)$ δίνεται από:

$$P(A_k \mid E \bullet S) = \frac{P(A_k \bullet E \mid S)}{P(A_1 \bullet E \mid S) + P(A_2 \bullet E \mid S) + \cdots + P(A_n \bullet E \mid S)}$$

Θεώρημα Bayes

Αλλά: $P(A_k \bullet E \mid S) = P(A_k \mid S) P(E \mid A_k \bullet S)$ και επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$P(A_k \mid E \bullet S) = \frac{P(A_k \mid S) P(E \mid A_k \bullet S)}{P(A_1 \mid S) P(E \mid A_1 \bullet S) + P(A_2 \mid S) P(E \mid A_2 \bullet S) + \cdots + P(A_n \mid S) P(E \mid A_n \bullet S)}$$

Παράδειγμα:

Έστω η Μαρία ετοιμάζει το ψήσιμο του οβελία για το πάσχα στην ύπαιθρο. Τα τελευταία χρόνια βρέχει πολύ σπάνια, μόνο 5 μέρες το χρόνο. Ο μετερεωλόγος δυστυχώς έχει προβλέψει βροχή για το πάσχα. Όταν βρέχει, ο μετερεωλόγος προβλέπει ότι θα βρέξει με επιτυχία 90%. Όταν δεν βρέχει, ο μετερεωλόγος προβλέπει 10% πιθανότητα βροχής. Ποια η πιθανότητα να βρέξει το πάσχα?

Bayes θεώρημα

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, το σύνολο των δυνατών καταστάσεων προσδιορίζεται από 2 αμοιβαίως μη αλληλεπικαλυπτόμενες καταστάσεις, να βρέξει ή να μη βρέξει. Υπάρχει μια επιπλέον περίπτωση, αυτή που καθορίζεται από την πρόβλεψη του μετερεωλόγου για βροχή. Θα έχουμε:

A_1: Θα βρέξει τη μέρα του Πάσχα

A_2: Δε θα βρέξει τη μέρα του Πάσχα

E: Ο μετερεωλόγος προβλέπει βροχή

Με βάση τις πιθανότητες θα έχουμε:

$P(A_1) = 5/365 = 0.0136985$ βρέχει 5 μέρες το χρόνο

$P(A_2) = 360/365 = 0.9863014$ Δεν βρέχει 360 μέρες το χρόνο

$P(E \mid A_1) = 0.90$ Όταν βρέχει, ο μετερεωλόγος προβλέπει βροχή 90%

$P(E \mid A_2) = 0.10$ Όταν δεν βρέχει, υπάρχει πρόβλεψη για βροχή 10%

Από το θεώρημα Bayes έχουμε:

$$P(A_1 \mid E) = \frac{P(A_1)P(E \mid A_1)}{P(A_1)P(E \mid A_1) + P(A_2)P(E \mid A_2)} = \frac{0.014 \times 0.9}{0.014 \times 0.9 + 0.986 \times 0.1} = 0.111$$

Θεώρημα Bayes – παράδειγμα

Δίνονται 2 συρτάρια (A,B) στα οποία περιέχονται 2 χρυσά νομίσματα στο ένα συρτάρι ενώ στο άλλο συρτάρι υπάρχουν 1 χρυσό και 1 ασημένιο νόμισμα. Ωστόσο δεν μπορείτε να δείτε το περιεχόμενο των συρταριών. Αν κάποιος τραβήξει τυχαία ένα νόμισμα από το συρτάρι A και αυτό είναι χρυσό, ποια η πιθανότητα το συρτάρι αυτό περιέχει ακόμα ένα χρυσό νόμισμα;

Γεγονός	Περιγραφή	Πιθανότητα
A_1	Το συρτάρι A έχει 2 χρυσά νομίσματα	0.5
B	Επιλογή ενός χρυσού νομίσματος από τα 4 νομίσματα	0.75
$B\|A_1$	Πιθανότητα να διαλέξουμε 1 χρυσό νόμισμα όταν το συρτάρι έχει 2 χρυσά νομίσματα	1

$$P(A \mid \mathrm{B}) = \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)} = \frac{0.5 \times 1}{0.5 \times 1. + 0.5 \times 0.5} = \frac{2}{3} = 0.666$$

Αναμενόμενη τιμή

Ορισμός

Η πυκνότητα πιθανότητας, PD, εκφράζει τα πάντα τα οποία χρειάζεται να γνωρίζουμε σχετικά με την σχετιζόμενη τυχαία μεταβλητή
Αλλα η PD μπορεί να χαρακτηριστεί απλά από 2 ιδιότητές της: τη μέση τιμή και τη διασπορά της
Οι δυο αυτές χαρακτηριστικές της PD είναι ειδικές περιπτώσεις της γενικότερης έννοιας της αναμενόμενης τιμής

Έστω g(x) μια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής x.
Η αναμενόμενη τιμή της g(x) δίνεται

$$\langle g(x)\rangle = \begin{cases} \sum_i p(x_i)g(x_i) & \text{αν η X είναι διακριτή} \\ \int f(x)g(x)dx & \text{αν η X είναι συνεχής} \end{cases}$$

Η αναμενόμενη τιμή της g(x) συμπίπτει με το μέσο όρο μεγάλου αριθμού παρατηρήσεων της g(x)

Κανόνες

Μερικοί απλοί αλλά σημαντικοί κανόνες

$$\langle g_1(x) + g_2(x)\rangle = \langle g_1(x)\rangle + \langle g_2(x)\rangle$$

Αν α είναι σταθερά ανεξάρτητη του X τότε: $\langle a\rangle = a$ και $\langle ag(x)\rangle = a\langle g(x)\rangle$

Αναμενόμενη τιμή

Μέση τιμή

Η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι εξ' ορισμού η αναμενόμενη τιμή της

$$\langle x \rangle = \begin{cases} \sum_i p(x_i) x_i & \text{αν η X είναι διακριτή} \\ \int dx f(x) x & \text{αν η X είναι συνεχής} \end{cases}$$

Η μέση τιμή συμπίπτει με το μέσο όρο για μεγάλες τιμές παρατηρήσεων της x

Παραδείγματα

1. Μέση τιμή μια διακριτής μεταβλητής

   Έστω X το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού. Η X πέρνει τιμές x_i=1,2,3...,6 με πιθανότητα $p(x_i)$=1/6. Η μέση τιμή (ή αναμενόμενη τιμή) της x είναι:

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1} p(x_i) x_i = p \sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2}$$

2. Μέση τιμή μιας συνεχούς μεταβλητής

   Έστω X μια συνεχής μεταβλητή που επιλέγεται τυχαία στο διάστημα [1,6]
   Η X έχει τότε PDF:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & 1 \leq \mathrm{x} \leq 6 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

Επομένως η μέση τιμή θα είναι: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x\, dx = \frac{1}{5} \left. \frac{x^2}{2} \right|_1^6 = \frac{7}{2}$

Διασπορά και τυπική απόκλιση

Η διασπορά V[x] μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι η αναμενόμενη τιμή του τετραγώνου της απόκλισής της από τη μέση τιμή:

$$V[x]=\begin{cases}\sum_i p(x_i)(\Delta x_i)^2 & \text{όπου } \Delta x_i=x_i-\langle x\rangle \quad \text{και x διακριτή}\\ \int f(x)dx(\Delta x)^2 & \text{όπου } \Delta x=x-\langle x\rangle \quad \text{και x συνεχής}\end{cases}$$

Μπορούμε να γράψουμε ακόμα: $V[x]=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2$

Η τυπική απόκλιση μια τυχαίας μεταβλητής X είναι η τετραγωνική ρίζα της διασποράς της $\sigma(x)=\sqrt{V[x]}$

Ιδιότητες της διονυμικής κατανομής

μέση τιμή: $\langle m \rangle \equiv \sum_{m=0}^{N} m p(m) = Np$

διασπορά: $V[m] \equiv \langle \Delta m^2 \rangle \equiv \sum_{m=0}^{N} \left(m - \langle m \rangle\right)^2 p(m) = Npq$

τυπική απόκλιση: $\sigma \equiv \sqrt{V[m]} = \sqrt{Npq}$

Η διονυμική κατανομή προσδιορίζεται από δυο παραμέτρους N και p.

Η μέση τιμή αυξάνει γραμμικά με τον αριθμό των προσπαθειών ενώ η τυπική απόκλιση μόνο συναρτήσει της τετραγωνικής ρίζας N

Κατανομή Poisson

Η κατανομή Poisson είναι ειδική περίπτωση της διονυμικής κατανομής όταν:

Η πιθανότητα, p, μιας προσπάθειας να δώσει επιτυχία είναι μικρή (πηγαίνει στο 0)

Ο αριθμός των προσπαθειών είναι μεγάλος (πηγαίνει στο άπειρο)

Ο μέσος αριθμός επιτυχιών, Np, είναι συγκεκριμένος αριθμός (δεν πηγαίνει στο 0 ή στο άπειρο)

Για την διονυμική κατανομή μπορούμε να γράψουμε:

$p \to 0,\ N \to \infty$ ενώ Np δεν είναι 0 ή άπειρο

$$p(m) = e^{-\langle m \rangle} \frac{\langle m \rangle^m}{m!}$$ Poisson κατανομή

Ιδιότητες της κατανομής Poisson:

Στο Poisson όριο της διονυμικής κατανομής, η τυπική απόκλιση δίνεται από

$$\sigma[m] = \sqrt{Npq} = \sqrt{Np(1-p)} \simeq \sqrt{Np} = \sqrt{\langle m \rangle}$$

Επομένως η Poisson κατανομή προσδιορίζεται από την <m>