ΦΥΣ. 211
Τελική Εξέταση 20-Μάη-2016

Πριν ξεκινήσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, αριθμό ταυτότητας) στο πάνω μέρος της σελίδας αυτής.

Για τις λύσεις των ασκήσεων θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε μόνο τις σελίδες που δίνονται και μην κόψετε καμιά από τις σελίδες.

Προσπαθήστε να δείξετε τη σκέψη σας και να γράψετε καθαρές εξισώσεις. Για πλήρη ή μερική βαθμολόγηση θα πρέπει να φαίνεται καθαρά αυτό που προσπαθείτε να δείξετε. Αν δεν μπορώ να διαβάσω τι γράφετε αυτόματα θα υποθέσω ότι είναι λάθος.

Απαντήστε σε 7 από τις 8 ασκήσεις που σας δίνονται με σύνολο 70 μονάδων. Θα μετρήσουν οι 7 ασκήσεις που σας δίνουν τη μεγαλύτερη συνολική βαθμολογία.

Η σειρά των ασκήσεων δεν είναι αντιπροσωπευτική της δυσκολίας τους. Πριν ξεκινήσετε διαβάστε όλες τις ασκήσεις και σκεφτείτε τι χρειάζεται να κάνετε.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 4 ώρες.

Καλή επιτυχία και καλό καλοκαίρι.

Τυπολόγιο

Διανύσματα:

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}, \qquad \vec{A}\times\vec{A} = 0, \qquad \vec{A}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = 0,$$

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot \mathrm{C}, \qquad \vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right) - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$$

Ανάπτυγμα Taylor συνάρτησης ως προς σημείο α:

$$f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(z-a)^2 f''(a) + \frac{1}{3!}(z-a)^3 f'''(a) + \cdots$$

Σειρά διωνύμου:

$$(1+z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2!}z^2 + \cdots \quad \text{για } |z|<1$$

Στροφορμή:

$$\vec{L} = \sum_i^n \vec{L}_i = \sum_i^n \vec{r}_i\times\vec{p}_i = I\vec{\omega}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{\omega\varsigma,CM} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i^n\left[\vec{r}_i\times\vec{F}_i^{\,\varepsilon\xi}\right]$$

Κέντρο μάζας:

$$R_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1} m_i\vec{r}_i,\; M = \sum_{i=1} m_i \;\text{ ή }\; R_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

Τανυστής αδράνειας

$$I_{ij} = \sum_{a=1}^N m_a\left(\vec{r}_a^{\,2}\delta_{ij} - r_i^a r_j^a\right) \;\text{ ή }\; I_{ij} = \int d^3\vec{r}\,\rho\left(\vec{r}\right)\left\{\vec{r}^{\,2}\delta_{ij} - \left(\vec{r}\cdot\vec{e}_i\right)\left(\vec{r}\cdot\vec{e}_j\right)\right\} \;\text{ και }\; I_{ij}^{\vec{c}} = I_{ij}^{CM} + M\left(\vec{c}^{\,2}\delta_{ij} - c_i c_j\right)$$

Συνθήκες για μια δύναμη να είναι συντηρητική:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r) \;\text{ και }\; \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0 \quad \text{όπου} \quad \vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Euler-Lagrange εξισώσεις:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f\left[y(x), y'(x), x\right]dx \;\text{ είναι στάσιμο κατά μήκος της }\; y = y(x) \;\text{ αν }\; \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \mathrm{T} - V$$

Αρχή Hamilton:

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}\,dt$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) - U(\rho\phi z)$$

Σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) - U(r\theta\phi)$$

Εξισώσεις Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Εξισώσεις Lagrange με πολλαπλασιαστές:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^m \lambda_k(t)\frac{\partial f_k}{\partial q_i} \quad (i = 1,2,3,\ldots s)$$

Γενικευμένη ορμή:

$$p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$$

Αγνοήσιμη ή κυκλική συντεταγμένη:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Hamiltonian:

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i\dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}$$

Εξισώσεις Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i} \qquad [i = 1,\cdots,n]$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i} \qquad [i = 1,\cdots,n]$$

Ανηγμένη μάζα:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Ενεργό δυναμικό:

$$U_{eff}(r) = U(r) + U_{cf}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

Μετασχηματισμένη ακτινική Δ.Ε. τροχιάς:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u + \frac{\mu}{l^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) = 0, \text{ όπου } u = \frac{1}{r}$$

Ενέργεια τροχιάς:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)$$

Τροχιές Kepler:

$F = G\dfrac{m_1m_2}{r^2} = \dfrac{\gamma}{r^2}$ λύση ακτινικής εξίσωσης είναι: $r(\phi) = \dfrac{c}{1 + e\cos\phi}$, με $c = \dfrac{l^2}{\gamma\mu}$

Εκκεντρότητα (e): $E = \dfrac{\gamma^2\mu}{2l^2}\left(e^2 - 1\right)$ όπου Ε = Ενέργεια

Εκκεντρότητα	Ενέργεια	Είδος Τροχιάς
$e = 0$	$E < 0$	κυκλική
$0 < e < 1$	$E < 0$	ελλειπτική
$e = 1$	$E = 0$	παραβολική
$e > 1$	$E > 0$	υπερβολική

Περιήλιο: $r_{\min} = \dfrac{c}{1+e}$ Αφήλιο: $r_{\max} = \dfrac{c}{1-e}$ Μεγάλος ημιάξ.: $a = \dfrac{c}{1-e^2}$ Μικρός ημιάξ.: $b = \dfrac{c}{\sqrt{1-e^2}}$

Νόμοι Kepler:

1^ος^ νόμος: τροχιές πλανητών είναι ελλείψεις με τον ήλιο σε μια από τις εστίες της έλλειψης

2^ος^ νόμος: $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{l}{2\mu}$ 3^ος^ νόμος: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM_H}a^3$

Συζευγμένοι ταλαντωτές:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} M_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \quad M_{jk} = \sum_a m_a \sum \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_j}\frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_k} \qquad U = \frac{1}{2}\sum_{j,k} V_{jk}q_jq_k \quad V_{jk} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}$$

$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{V}\mathbf{q}$ $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ ιδιοσυχνότητες: $\det(\mathbf{V} - \omega^2\mathbf{M}) = 0$ ιδιοδιανύσματα: $\sum_j \left(V_{jk} - \omega_r^2 M_{jk}\right)a_{jr} = 0$

$q_j(t) = \sum_r a_{jr}\eta_r(t)$ Κανονικές συντεταγμένες: $\eta_r(t) = \beta_r e^{i\omega_r t}$

Ορθοκανονικότητα: $\sum_{j,k} M_{jk}a_{jr}a_{kr} = \delta_{rs} = \begin{cases} 0 & r \neq s \\ 1 & r = s \end{cases}$

Ταλαντώσεις:

$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ με λύσεις: $\omega^2 < 0$ $q(t) = A\cos(\omega t) + B\cos(\omega t)$ ή αν $\omega^2 > 0$ $q(t) = Ae^{+|\omega|t} + Be^{-|\omega|t}$

$\ddot{q} + \dfrac{\omega}{Q}\dot{q} + \omega^2 q = 0$ με λύσεις: $q(t) = Ae^{-|a_+|t} + Be^{+|a_-|t}$ όπου $a = a_\pm = \dfrac{i\omega}{2Q} \pm \sqrt{\omega^2\left(1 - \dfrac{1}{4Q^2}\right)}$ και $Q < 1/2$

$q(t) = Ae^{-\frac{\omega t}{2Q}}e^{i\omega\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t}$ με $Q > 1/2$ και $q(t) = Ae^{-\omega t} + Bte^{-\omega t}$ για $Q = 1/2$

$\ddot{q} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{q} + \omega_0^2 q = F\cos\omega t$ $q(t) = Ae^{i\delta t}e^{i\omega t} + q_{ομογ}$ $\tan\delta = -\dfrac{\omega\omega_0}{Q\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$ $A = \dfrac{F_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \dfrac{\omega}{\omega_0^2Q^2}}}$

Περιστρεφόμενα συστήματα

$\vec{a} = \vec{a}_{σωμ.} + 2\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_{σωμ} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$ $\dot{\vec{r}}_{αδρ.} = d\vec{r}/dt = \sum_i\left(\dot{r}_i^{σωμ} + r_i\vec{\omega}\times\right)\vec{e}_i = \dot{\vec{r}}_{σωμ} + \vec{\omega}\times\vec{r}$

Εξισώσεις Euler:

$$I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3\left(I_3 - I_2\right) = \tau_1$$
$$I_2\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\left(I_1 - I_3\right) = \tau_2$$
$$I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2\left(I_2 - I_1\right) = \tau_3$$

Συμμετρική σβούρα:

Συχνότητα μετάπτωσης (χωρίς εξωτερική δύναμη): $\Omega = \omega_3 \dfrac{I_1 - I_3}{I_1}$

Μετάπτωση χωρίς κλόνηση (βαριά σβούρα): $I_3^2\omega_3^2 > 4MglI_1\cos\theta_0$

Γωνιακή ταχύτητα: $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$

Τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\sec(a) = 1/\cos(a)$$
$$\csc(a) = 1/\sin(a)$$
$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$$
$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Ροπές αδράνειας σωμάτων:

Ράβδου ως προς το CM: $\frac{1}{12}ml^2$

Δίσκου ως προς το CM: $\frac{1}{2}mR^2$ *και ως προς διάμετρο του δίσκου:* $\frac{1}{4}mR^2$

Στεφανιού: mR^2

Μεγέθη σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων:

Καρτεσιανό	*Σφαιρικό*	*Κυλινδρικό*
$d\vec{s} = dx_1\hat{e}_1 + dx_2\hat{e}_2 + dx_3\hat{e}_3$	$d\vec{s} = dr\hat{e}_r + rd\theta\hat{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\hat{e}_\varphi$	$d\vec{s} = dr\hat{e}_r + rd\varphi\hat{e}_\varphi + dz\hat{e}_z$
$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$	$ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$	$ds^2 = dr^2 + r^2d\varphi^2 + dz^2$
$\upsilon^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2$	$\upsilon^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2$	$\upsilon^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$
$\vec{\upsilon} = \dot{x}_1\hat{e}_1 + \dot{x}_2\hat{e}_2 + \dot{x}_3\hat{e}_3$	$\vec{\upsilon} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$	$\vec{\upsilon} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi + \dot{z}\hat{e}_z$

1. **(10μ συνολικά)**

Θεωρήστε ένα φορτισμένο σωματίδιο σε ένα ηλεκτρικό πεδίο. Η Lagrangian μπορεί να γραφεί με την μορφή: $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + QE_0 x$, όπου Q είναι το φορτίο του σωματιδίου και E_0 η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.

(α) Ποια η Hamiltonian του συστήματος; [**3μ**]

(β) Ποιες οι εξισώσεις Hamilton; [**2μ**]

(γ) Το σώμα ξεκινά από την θέση x = 0 τη χρονική στιγμή t = 0. Σχεδιάστε τη μετέπειτα διαδρομή του σωματιδίου στο φασικό χώρο. [**5μ**]

2. (10μ συνολικά)

Μια αράχνη κρέμεται μέσω μιας λεπτής κλωστής του ιστού της από το κλαδί ενός δέντρου στην Πανεπιστημιούπολη στην Αγλαντζιά. Βρείτε το προσανατολισμό και τιμή της γωνίας που σχηματίζει η κλωστή με την κατακόρυφο διεύθυνση (π.χ. τη διεύθυνση της βαρύτητας) λαμβάνοντας υπόψη την περιστροφή της Γης. Θεωρήστε ότι το γεωγραφικό πλάτος στο οποίο βρίσκεται η Πανεπιστημιούπολη είναι $\theta \sim 35^{o}$ και η ακτίνα της Γης είναι R ~ 6400km.

3. (10π συνολικά)

Θεωρήστε ένα ορειβάτη ο οποίος θέλει να αναρριχηθεί σε μια πλαγιά κωνικού σχήματος που περιγράφεται από την εξίσωση $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$. Δυστυχώς, η μετερεωλογική εταιρεία προβλέπει την ύπαρξη καταιγίδας και θα πρέπει ο ορειβάτης να βρει γρήγορα το καταφύγιο πριν πληγεί από την καταιγίδα. Να βρεθεί η ακριβής εξίσωση της συντομότερης διαδρομής στο καταφύγιο που βρίσκεται στην θέση με συντεταγμένες (-1,0,-1) αν την στιγμή που πήρε την ειδοποίηση για την καταιγίδα βρίσκονταν στην θέση με συντεταγμένες (1,0,-1).

Υπόδειξη: *Πιθανόν να σας φανεί χρήσιμο να αντικαταστήσετε την συντεταγμένη, w, ως προς την οποία βρίσκετε την διαφορική εξίσωση, με μια νέα μεταβλητή* $u = 1/w$ *, και να χρησιμοποιήσετε τριγωνομετρικές ταυτότητες για να απλουστεύσετε την απάντησή σας.*

4. **(10μ συνολικά)**

Τροχιές γύρω από μια μαύρη τρύπα μάζας M μπορούν να περιγραφούν με βάση ένα ενεργό δυναμικό της μορφής: $U_{eff}\left(r\right)=-\frac{1}{r}+\frac{l^2}{2r^2}-\frac{l^2}{r^3}$, όπου l είναι η στροφορμή της τροχιάς. Ως προς το κλασικό Keplerian δυναμικό, η μοναδική τροποποίηση είναι ο τελευταίος όρος $1/r^3$ ενώ για χάρη απλότητας υποθέτουμε ότι η ανηγμένη μάζα είναι $\mu = 1$ και η σταθερά του πεδίου είναι $G_N = 1$. Το δυναμικό αυτό μπορεί να ερμηνευτεί και χρησιμοποιηθεί με τον συνήθη τρόπο, ότι δηλαδή, η ακτινική εξίσωση της κίνησης για ένα σωματίδιο που κινείται γύρω από την μαύρη τρύπα προέρχεται από μια Lagrangian της μορφής $L=\frac{1}{2}\dot{r}^2-U_{eff}\left(r\right)$.

(α) Δείξτε ότι για $l^2<12$ δεν υπάρχουν κυκλικές τροχιές, ενώ για $l^2>12$ υπάρχουν δύο κυκλικές τροχιές. [**2μ**]

(β) Σχεδιάστε το ενεργό δυναμικό, U_{eff}(r), για $l^2<12$ και $l^2>12$. [**4μ**]

(γ) Περιγράψτε ποιοτικά τις πιθανές τροχιές για $l^2<12$ και $l^2>12$. [**4μ**]

5. (10μ συνολικά)

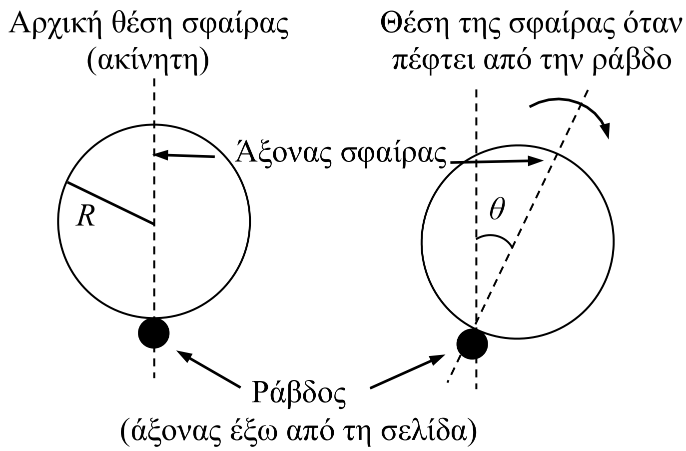
Μια συμπαγής σφαίρα ακτίνας R και μάζας M βρίσκεται πάνω σε μια λεπτή ράβδο που είναι στερεωμένη και παραμένει ακίνητη. Η σφαίρα ξεκινά από την κατάσταση της ηρεμίας να κυλά πάνω στη ράβδο χωρίς να ολισθαίνει ώσπου τελικά πέφτει από την ράβδο.

(α) Ποιος δεσμός υπάρχει για το σύστημα; [**2μ**]

(β) Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange, να υπολογίσετε την γωνία, θ, που η σφαίρα χάνει επαφή με τη ράβδο. [**8μ**]

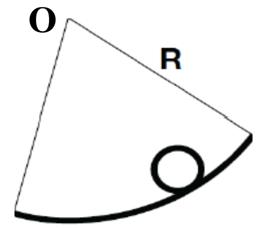
Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ισούται με $I_{CM}^{\sigma\varphi} = 2MR^2/5$.

<u>Υπόδειξη</u>: *Θα μπορούσε να βοηθήσει στην επίλυση της εξίσωσης που θα καταλήξετε η χρήση διατήρησης της ενέργειας.*



6. (10μ συνολικά)

Μια κούνια μάζας m έχει σχήμα τόξου ακτίνας R και κρέμεται από σημείο στήριξης μέσω σχοινιών στα άκρα της (δείτε το διπλανό σχήμα). Ένα στεφάνι ακτίνας α, ίδιας μάζας m όπως και η κούνια και ροπής αδράνειας $I = m\alpha^2$, κυλά χωρίς να ολισθαίνει στην επιφάνεια της κούνιας. Η κίνηση του στεφανιού και της κούνιας δεν υπόκεινται σε απώλειες λόγω τριβών ενώ συμβαίνουν κάτω από την επίδραση της βαρυτικής δύναμης $\vec{F}_g = -mg\hat{j}$.

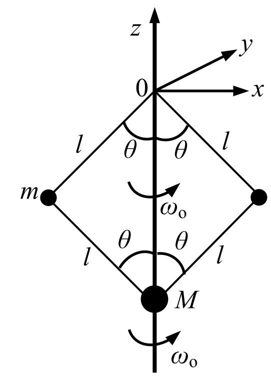


Βρείτε όλες τις δυνατές συχνότητες ταλαντώσεων του συστήματος για μικρές αποκλίσεις από την ισορροπία θεωρώντας ότι $a/R \ll 1$.

<u>*Υπόδειξη*</u>: *Η γωνιακή απομάκρυνση, θ, του κέντρου μάζας του στεφανιού και η γωνιακή απομάκρυνση, φ, της κούνιας ως προς το σημείο Ο δεν είναι ίδιες γιατί τότε το στεφάνι θα ήταν ακίνητο σχετικά με την κούνια. Το στεφάνι επίσης περιστρέφεται ως προς το CM λόγω κύλησης.*

7. (10μ συνολικά)

Η διπλανή διάταξη αποτελείται από 2 μάζες m που συνδέονται μεταξύ τους με βραχίονες αμελητέας μάζας και μήκους l ο καθένας, και μια μάζα, M, στο κατώτερο μέρος της διάταξης. Η διάταξη είναι περιορισμένη να κινείται ως προς κατακόρυφο άξονα πάνω στον οποίο η μάζα M μπορεί να κινείται κατακόρυφα χωρίς τριβές. Αγνοήστε τριβές και αντιστάσεις του αέρα, καθώς και τις διαστάσεις της μάζας M. Υποθέστε ακόμα ότι ο άξονας περιστροφής περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0.



(α) Εκφράστε τις θέσεις των μαζών συναρτήσει τα μήκη των βραχιόνων και της γωνίας θ. [**1μ**]

(β) Βρείτε την εξίσωση κίνησης του συστήματος. [**3μ**]

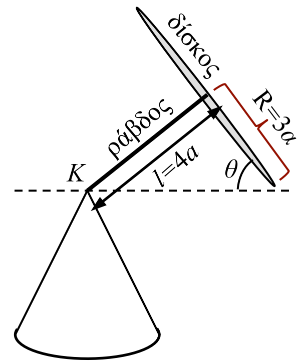
(γ) Υπολογίστε το ύψος στο οποίο ισορροπεί η μάζα M. Το ύψος αυτό αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη γωνία θ_o, γωνία ισορροπίας. [**3μ**]

(δ) Θεωρώντας μικρές γωνιακές αποκλίσεις, θ', από τη γωνία ισορροπίας, θ_o, και κρατώντας μόνο όρους $1^{ης}$ τάξης ως προς θ' στην εξίσωση κίνησης, υπολογίστε την συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων γύρω από την θέση αυτή ισορροπίας. [**3μ**]

<u>Υπόδειξη</u>: *Προσέξτε ότι το σύστημα της διάταξης αποτελεί μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς.*

8. (10μ συνολικά)

Μια συμμετρική «σβούρα» αποτελείται από λεπτό ομοιογενή δίσκο μάζας $4m$ και ακτίνας $R=3\alpha$. Μια λεπτή συμπαγής ράβδος μήκους $l=4\alpha$ και μάζας m είναι στερεωμένη στο κέντρο του δίσκου όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η ράβδος είναι κάθετη στο επίπεδο του δίσκου. Η «σβούρα» στηρίζεται στην κορυφή ενός κωνικού στηρίγματος, όπως φαίνεται στο σχήμα. Επιλέξτε ένα σύστημα συντεταγμένων σώματος τέτοιο ώστε ο άξονας $\hat{x}_3$ να έχει διεύθυνση κατά μήκος της ράβδου.



Ως υπενθύμιση, οι γωνίες Euler ορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο: φ αντιπροσωπεύει περιστροφή ως προς τον $\hat{x}_3$- άξονα, θ αντιπροσωπεύει περιστροφή ως προς τον νέο $\hat{x}_1$- άξονα ($\hat{x}_1'$ - άξονας) που προκύπτει από την περιστροφή ως προς φ, ενώ η γωνία ψ αντιπροσωπεύει περιστροφή ως προς τον $\hat{x}_3$- άξονα ($\hat{x}_e'$ - άξονας) που προκύπτει μετά την περιστροφή κατά θ. Οι εξισώσεις κίνησης για τις συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας σώματος ω_1, ω_2, ω_3 συναρτήσει των γωνιών Euler, θ, φ, και ψ, είναι:

$$\omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \quad \text{και}$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

(α) Βρείτε την θέση του κέντρου μάζας του συστήματος και τις ροπές αδράνειας, I_1, I_2, I_3 κατά μήκος των αξόνων $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ και $\hat{x}_3$ ως προς την κορυφή του στηρίγματος K. [**4μ**]

(β) Η σβούρα μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα (χωρίς τριβές) ως προς το σημείο στήριξης στην κορυφή του κωνικού στηρίγματος, και υπόκειται στη σταθερή βαρυτική επιτάχυνση g. Βρείτε την Lagrangian του συστήματος συναρτήσει των γωνιών Euler φ, θ και ψ. Δεν χρειάζεται να γνωρίζετε ακριβώς τις τιμές των κύριων ροπών αδράνειας I_1, I_2, I_3. [**2μ**]

(γ) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης για τις γωνίες Euler. Προσδιορίστε τυχόν διατηρήσιμες ποσότητες. Όπως και στο ερώτημα (β) δεν χρειάζεται να ξέρετε ακριβώς τις I_1, I_2, I_3. [**2μ**]

(δ) Προσδιορίστε την ελάχιστη ταχύτητα περιστροφής του δίσκου ως προς την ράβδο (σπιν), τέτοια ώστε η σβούρα να μεταπίπτει σε σταθερή κατάσταση κίνησης (steady state) όπου $\dot{\theta} = 0 = \ddot{\theta} = \ddot{\varphi} = \ddot{\psi}$, $\dot{\varphi} = \Omega$ και το χαμηλότερο σημείο της περιφέρειας του δίσκου να είναι στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με την κορυφή του στηρίγματος, όπως φαίνεται στο σχήμα. [**2μ**]