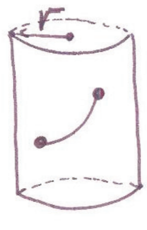
ΦΥΣ. 133 - ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ 4

1. Αποδείξτε ότι η γεωδεσιακή μιας κυλινδρικής επιφάνειας είναι κυλινδρική έλικα η εξίσωση της οποίας είναι $z=C_1\varphi+C_2$, όπου C_1, C_2 σταθερές.



Η απόσταση 2 σημείων σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι: $ds=\sqrt{r^2d\phi^2+dz^2}$

Επομένως αν η γραμμή που συνδέει τα δύο σημεία είναι $\mathcal{L}$ θέλουμε το ολοκλήρωμα $\mathcal{L}=\int ds$ να έχει ελάχιστο

Επομένως: $$\mathcal{L}=\int ds=\int\sqrt{r^2d\phi^2+dz^2}=\int dz\sqrt{r^2\frac{d\phi^2}{dz^2}+1}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ αναγνωρίζοντας τη συνάρτηση $f=\sqrt{r^2\frac{d\phi^2}{dz^2}+1}$ και εφαρμόζοντας τη διαφορική εξίσωση Euler-Lagrange παίρνουμε:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial f}{\partial\phi'}\right)=\frac{\partial f}{\partial\phi}\Rightarrow\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial\sqrt{r^2\phi'^2+1}}{\partial\phi'}\right)=\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sqrt{r^2\phi'^2+1}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\frac{\partial\sqrt{r^2\phi'^2+1}}{\partial\phi'}=\text{σταθ}=C_1}\quad\text{αφού}\quad\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sqrt{r^2\phi'+1}\right)=0$$

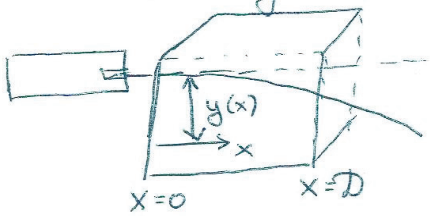
Άρα $$\frac{r^2\phi'}{\sqrt{r^2\phi'^2+1}}=C_1\Rightarrow\frac{r^4\phi'^2}{r^2\phi'^2+1}=C_1^2\Rightarrow r^4\phi'^2=C_1^2r^2\phi'^2+C_1^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\phi'^2=\frac{C_1^2}{r^4-C_1^2r^2}\Rightarrow\phi'=\frac{C_1}{\sqrt{r^4-C_1^2r^2}}\Rightarrow\frac{d\phi}{dz}=\frac{C_1}{\sqrt{r^4-C_1^2r^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\phi=\phi_0+kz}\quad\text{όπου}\quad\boxed{k=\frac{C_1}{r\sqrt{r^2-C_1^2}}}$$

ή διαφορετικά: $$\boxed{z=\frac{\phi-\phi_0}{k}}$$

Η αρχή του Fermat: Ένα διάλυμα ζάχαρης με ανομοιογενή δείκτη διάθλασης $n[y]$ καμπυλώνει μιά δέσμη φωτός που περνά από το διάλυμα.



Ο δείκτης διάθλασης είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του y, $(y(x))$ όπου y το ύψος της δέσμης μέσα στο διάλυμα, και $0 \leq x \leq D$.

Η ταχύτητα του φωτός είναι επομένως μεγαλύτερη στο πάνω μέρος του διαλύματος και επομένως ένα μέτωπο κύματος φωτός ταξιδεύει πιο γρήγορα στο πάνω μέρος απ' ότι στο κάτω. Από τη στιγμή που η διεύθυνση του φωτός ορίζεται στη διεύθυνση της καθέτου στο μέτωπο κύματος το φως θα καμπυλώσει προς τα κάτω.

Η κίνηση του φωτός διαμέσου του ανομοιογενούς μέσου περιγράφεται από την αρχή του Fermat (ελαχίστου χρόνου): $\int dt =$ ένα ελάχιστο.

Χρησιμοποιώντας την αρχή αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε τη διαδρομή του φωτός στο μέσο χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τη κυματική θεωρία του φωτός. Οι διαδρομές του φωτός μέσα σε οπτικές ίνες μπορούν να υπολογισθούν με το τρόπο αυτό. Έστω ότι το φως ξεκινά στο $x=y=0$ και αρχικά είναι οριζόντια $\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$

Ξέρουμε ότι: $\quad v = \frac{ds}{dt} = \frac{c}{n[y]}$ όπου c: η ταχύτητα του φωτός στο κενό

(α) Χρησιμοποιώντας το x σαν ανεξάρτητη μεταβλητή, δείξτε ότι η αρχή του Fermat είναι ισοδύναμη με την εύρεση της διαδρομής $y(x)$ που ελαχιστοποιεί:

$$\int_0^D L\,dx \quad \text{όπου} \quad L = L[y, dy/dx]$$

(β) Υποθέτοντας ότι $n[y(0)] = n_0$ χρησιμοποιήσετε την εξίσωση E-L για να δείξετε ότι $y(x)$ είναι η λύση της εξίσωσης:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\ln(n[y])}{dy}\left(1+y'^2\right)$$

(γ) Αν $y'(0)=0$ δείξτε ότι η λύση της προηγούμενης Δ.Ε. είναι:

$$\left(\frac{n[y]}{n_0}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{n}{n_0}\right)^2 - 1}}$$

(a) Το στοιχειώδες μήκος ds δίνεται από $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow ds = dx\sqrt{1+y'^2}$$

Επομένως ο στοιχειώδης χρόνος είναι: $dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds\, n[y]}{c} \Rightarrow$

$$\Rightarrow dt = \frac{n[y]}{c}\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

Αλλά ξέρουμε από την αρχή του Fermat: $\int dt = I_{min} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{c}\underbrace{\int n[y]\sqrt{1+y'^2}}\, dx = I_{min} \Rightarrow \int L\left(y, dy/d\cancel{x}\right) dx = I_{min}$$

$$L\left(y, dy/d\cancel{x}\right) = \frac{1}{c}\, n[y]\sqrt{1+y'^2}$$

(β) Χρησιμοποιούμε την εξίσωση του Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{n[y]}{\cancel{c}}\frac{\cancel{2}y'}{\cancel{2}\sqrt{1+y'^2}}\right] - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\cancel{c}}\frac{\partial n[y]}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dn[y]}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} + n[y]\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right] - \sqrt{1+y'^2}\frac{\partial n[y]}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Αλλά: $$\frac{dn[y]}{dx} = \frac{dn[y]}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dn[y]}{dy}y' \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right] = \frac{y''\sqrt{1+y'^2} - y'\cancel{2}y'y''\frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}}{1+y'^2} = \frac{y''(1+y'^2) - y''y'^2}{(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right] = \frac{y''}{(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}} \quad (3)$$

$$\frac{\partial n[y]}{\partial y} = \frac{dn[y]}{dy} \quad (4)$$ εξάρτηση από y μόνο

Χρησιμοποιώντας τις (2), (3) κ (4) η (1) γίνεται:

$$\frac{dn[y]}{dy}\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} + n[y]\frac{y''}{(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}} - \sqrt{1+y'^2}\,\frac{dn[y]}{dy} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dn[y]}{dy}\left[\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - \sqrt{1+y'^2}\right] + \frac{n[y]\,y''}{(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dn[y]}{dy}\left[\frac{\cancel{y'^2} - 1 - \cancel{y'^2}}{\cancel{\sqrt{1+y'^2}}}\right] + \frac{n[y]\,y''}{(1+y'^2)\cancel{\sqrt{1+y'^2}}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{dn[y]}{dy} + \frac{n[y]\,y''}{(1+y'^2)} = 0 \Rightarrow \frac{dn[y]}{n[y]\,dy} = \frac{y''}{(1+y'^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(1+y'^2)}{dy}\,\frac{dn[y]}{n[y]} = y'' \Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\ln n[y])}{dy}(1+y'^2)}$$

(γ) Βρήκαμε προηγουμένως ότι: $y'' = \dfrac{d(\ln n[y])}{dy}(1+y'^2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dy'}{dx} = \frac{d(\ln n[y])}{dy}(1+y'^2) \Rightarrow \frac{dy'}{dx} = (1+y'^2)\frac{d(\ln n[y])}{dx}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'^{-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{y'dy'}{(1+y'^2)} = d(\ln n[y]) \xRightarrow{\text{Ολοκληρώνοντας}} \int_{x=0}^{x}\frac{y'dy'}{(1+y'^2)} = \int_0^x d(\ln n[y]) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+y'^2)\Big|_{x=0}^{x} = \ln(n[y])\Big|_{x=0}^{x} \Rightarrow$$

Αλλά η άσκηση δίνει: $y'(x=0)=0$ και $n[y=0]\equiv n_0$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln\left(1+y'^2\right) = \ln n[y] - \ln n_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln\left(1+y'^2\right) = \ln\frac{n[y]}{n_0} \Rightarrow \ln\left[\sqrt{1+y'^2}\right] = \ln\frac{n[y]}{n_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1+y'^2} = \frac{n[y]}{n_0} \Rightarrow \quad 1+y'^2 = \frac{n^2[y]}{n_0^{\,2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y' = \sqrt{\left(\frac{n[y]}{n_0}\right)^2 - 1}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{n[y]}{n_0}\right)^2 - 1} \Rightarrow \boxed{x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{n[y]}{n_0}\right)^2 - 1}}}$$