ΦΥΣ 131: ΓΕΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι: ΜΗΧΑΝΙΚΗ, ΚΥΜΑΤΙΚΗ, ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

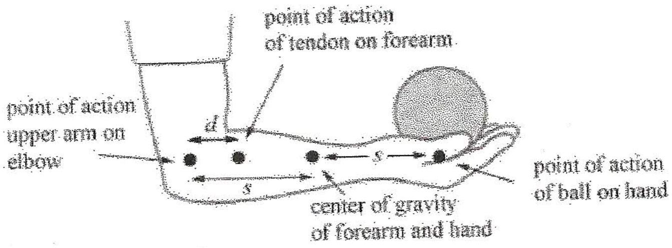
Φροντιστήριο #11

Άσκηση 1

Στατική ισορροπία του πήχη του χεριού. Μια μάζα m2 κρατείται στην παλάμη με το κέντρο βάρους της σε απόσταση 2s από το σημείο σύνδεσης του πήχη στον αγκώνα. Ο πήχης του χεριού έχει μάζα m1 με το κέντρο βάρους σε απόσταση s από τον αγκώνα. Σε απόσταση d βρίσκεται η σύνδεση από τον τένοντα του δικέφαλου μυός, και ασκείται δύναμη η οποία κρατά το χέρι οριζόντιο.

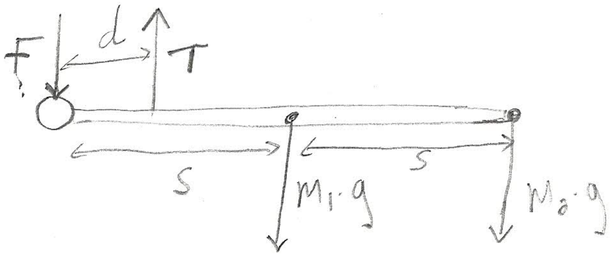
α) Βρείτε την τάση στον τένοντα του δικέφαλου.

β) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο σημείο σύνδεσης του αγκώνα.



Στατική ισορροπία $\Rightarrow$ $\vec{F}_{tot} = \vec{0}$, $\vec{\tau}_{tot} = \vec{0}$

Δυνάμεις:



$$\Rightarrow \boxed{T - F - m_1 \cdot g - m_2 \cdot g = 0} \quad (1)$$

Ροπές: $\tau_{tot} = \tau_F + \tau_T + \tau_1 + \tau_2 = 0$

$\tau_F = 0$, $\tau_T = T \cdot d$, $\tau_1 = -m_1 \cdot g \cdot s$, $\tau_2 = -m_2 \cdot g \cdot 2s$

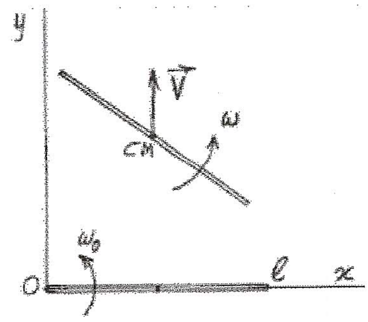
$$\Rightarrow \boxed{T \cdot d - m_1 \cdot g \cdot s - m_2 \cdot g \cdot 2s = 0} \Rightarrow \boxed{T = \frac{s \cdot g}{d} (m_1 + 2m_2)} \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow F = T - m_1 g - m_2 g = \boxed{\frac{s \cdot g}{d}(m_1 + 2m_2) - g(m_1 + m_2)}$$

Άσκηση 2

Μια ομοιογενής ράβδος μάζας M, μήκους λ, περιστρέφεται πάνω στο λείο και οριζόντιο επίπεδο (x,y) γύρω από τον άξονα z ο οποίος περνά από το άκρο O της ράβδου. Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου είναι ωο. Σε κάποια χρονική στιγμή όταν η ράβδος συμπίπτει με τον άξονα τον x, ο άξονας περιστροφής εξαφανίζεται και η ράβδος είναι ελεύθερη να κινηθεί στο επίπεδο (x,y) χωρίς εξωτερικές δυνάμεις.

α) Να βρεθούν η ταχύτητα Vcm του κέντρου μάζας της ράβδου
β) η γωνιακή ταχύτητα ω της περιστροφής της ράβδου γύρω από το κέντρο μάζας της.
γ)Η ενέργεια Εο της ράβδου πριν εξαφανιστεί ο άξονας περιστροφής της z και η ενέργεια της Ε μετά.



(a) $\vec{V}_{CM} = \omega_0 \cdot r = \omega_0 \cdot \frac{\lambda}{2}\,\hat{y}$

(b) Η αρχική στροφορμή είναι $\vec{L}_0 = I_0 \cdot \vec{\omega}_0 = I_0 \cdot \omega_0\,\hat{z}$

$$I_0 = I_{CM} + ML^2 = \frac{1}{12}M\lambda^2 + M\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}M\lambda^2 + \frac{1}{4}M\lambda^2 = \boxed{\frac{1}{3}M\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_0 = \frac{1}{3}M\lambda^2\omega_0\,\hat{z}}$$

Επειδή δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές η στροφορμή είναι σταθερή

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + M\,\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM}$$

$$\vec{L}_{CM} = I_{CM}\cdot\omega = \frac{1}{12}M\lambda^2\omega$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{R}_{CM} &= \frac{1}{2}\lambda\hat{x} + \vec{V}_{CM}\cdot t = \frac{1}{2}\lambda\hat{x} + \frac{1}{2}\lambda\,\omega_0\cdot t\cdot\hat{y} \\ \vec{V}_{CM} &= \frac{\lambda}{2}\omega_0\,\hat{y} \end{aligned}\right\} \vec{R}_{CM}\times\vec{V}_{CM} = \frac{1}{4}M\lambda^2\omega_0\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_0 = \vec{L} \Rightarrow \frac{1}{3}\cancel{M}\cancel{\lambda^2}\omega_0\,\hat{z} = \frac{1}{12}M\cancel{\lambda^2}\omega\,\hat{z} + \frac{1}{4}\cancel{M}\cancel{\lambda^2}\omega_0\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = 12\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{\omega}_0 - \frac{1}{4}\vec{\omega}_0\right) \Rightarrow \vec{\omega} = 12\cdot\frac{1}{12}\vec{\omega}_0 \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = \vec{\omega}_0}$$

C: $E_0 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 = \boxed{\frac{1}{6} M \lambda^2 \omega_0^2}$

$$E = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{1}{2}\lambda\omega_0\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} M \lambda^2\right)\omega_0^2$$

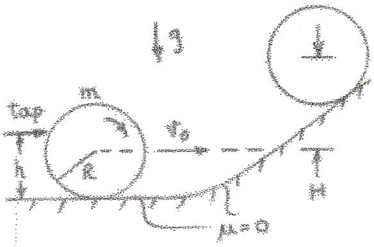
$$\Rightarrow E = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right) M \lambda^2 \omega_0^2 = \frac{1}{6} M \lambda^2 \omega_0^2 = E_0$$

Άσκηση 3

Ένας κύλινδρος μάζας m, ακτίνας R βρίσκεται σε ηρεμία πάνω σε πάγο (δεν ασκεί τριβή). $I_{κυλ} = \frac{mR^2}{2}$

α) Ο κύλινδρος δέχεται ένα οριζόντιο κτύπημα σε σημείο με απόσταση h από τον πάγο. Στη συνέχεια ο κύλινδρος κυλά χωρίς να ολισθαίνει με ταχύτητα υο. Υπολογίστε το ύψος h.

b)Ο κύλινδρος συνεχίζει να κυλά και ανεβαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο από πάγο. Βρείτε το ύψος H στο οποίο θα φτάσει ο κύλινδρος.



(a)

Απο το κτύπημα δημιουργείται μια ορμή στον κύλινδρο, $P = m υ_0$

Η στροφορμή του κυλίνδρου λόγω κτυπήματος είναι $L = P \cdot \Delta h$

$$\Rightarrow L = I \cdot \omega_0 = m \cdot υ_0 \cdot (h-R) \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}R^2 \left(\frac{υ_0}{R}\right)^{=\omega_0} = \cancel{m υ_0}(h-R)$$

$$\Rightarrow \frac{R}{2} = h - R \Rightarrow \boxed{h = \frac{3R}{2}}$$

(b) Απο διατήρηση ενεργειας, η Ενεργεια του κυλίνδρου στο μέγιστο ύψος είναι ιση με την ενέργεια του ακριβως μετά το κτύπημα.

$$E = E'$$

$$E = \frac{1}{2} m υ_0^2 + \frac{1}{2} I \omega_0^2$$

Αφού δεν ασκούνται ροπές στον κύλινδρο, η στροφορμή του διατηρείται άρα διατηρείται η γωνιακή του ταχύτητα και η περιστροφική ενέργεια (Στο μέγιστο ύψος ο κύλινδρος θα συνεχίσει να περιστρέφεται)

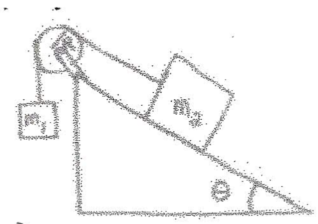
$$\Rightarrow E' = mgH + \frac{1}{2} I \omega_0^2$$

$$\Rightarrow E = E' \Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} υ_0^2 + \cancel{\frac{1}{2} I \omega_0^2} = \cancel{m} gH + \cancel{\frac{1}{2} I \omega_0^2}$$

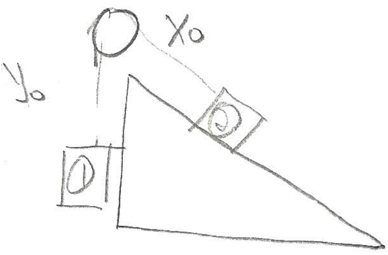
$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{υ_0^2}{2g}}$$

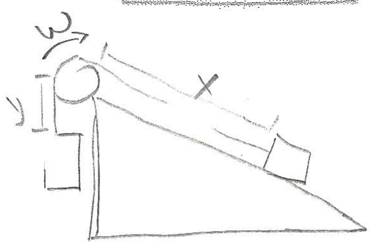
Άσκηση 4

Μια τροχαλία μάζας m_τ ακτίνας R, ροπή αδρανείας $I_{cm,\tau} = \frac{m_\tau R^2}{2}$ είναι τοποθετημένη στη κορυφή κεκλιμένου επιπέδου (μ=0, γωνιάς θ). Ένα σώμα μάζας m1, κρέμεται και είναι συνδεδεμένο με αβαρές σχοινί μέσω της τροχαλίας με ένα άλλο σώμα μάζας m2 το οποίο βρίσκεται και μπορεί να ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο. Υπολογίστε την ταχύτητα του σώματος 2, συναρτήσει της απόστασης στην οποία κινείται πάνω στο επίπεδο.



Αρχικά





$$U_0 = -m_1 \cdot g \cdot y_0 - m_2 g \cdot X_0 \sin\theta$$

$$K_0 = 0$$

$$\Rightarrow E_0 = -m_1 g y_0 - m_2 g X_0 \sin\theta$$

$$U = -m_1 \cdot g \cdot y - m_2 g X \sin\theta$$

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_\tau \omega^2$$

$$E = -m_1 g y - m_2 g X \sin\theta + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_\tau \omega^2$$

$$v_1 = v_2 = v, \quad \omega = \frac{v}{R} \quad \Rightarrow E = -m_1 g y - m_2 g x \sin\theta + \frac{v^2}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I_\tau}{R^2}\right)$$

$$E = E_0 \Rightarrow -m_1 g y_0 - m_2 g X_0 \sin\theta = -m_1 g y - m_2 g X \sin\theta + \frac{v^2}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I_\tau}{R^2}\right)$$

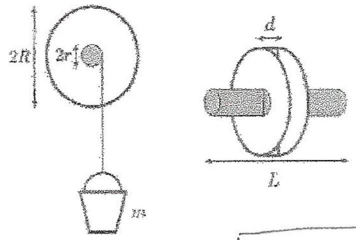
$$\Rightarrow m_1 g (y - y_0) + m_2 \cdot g (x - X_0) \cdot \sin\theta = \frac{v^2}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I_\tau}{R^2}\right)$$

$$(y - y_0) = (x - x_0) = d \Rightarrow v^2 = \frac{2}{m_1 + m_2 + \frac{I_\tau}{R}} \cdot d \cdot g\,(m_1 + m_2 \sin\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot d\,(m_1 + m_2 \sin\theta)}{m_1 + m_2 + \frac{I_\tau}{R}}}}$$

Άσκηση 5

Ένας κουβάς μάζας m είναι συνδεδεμένος με ένα σχοινί το οποίο είναι περιτυλιγμένο σε ένα άξονα ακτίνας r, μήκους L. Ο άξονας περνά από το κέντρο ενός λεπτού κυλίνδρου ακτίνας R πάχους d. Άξονας και κύλινδρος έχουν την ίδια πυκνότητα ρ. Βρείτε την επιτάχυνση του κουβά όταν αφήνεται να πέσει.



Η συνολική δύναμη στον κουβά είναι $\boxed{F = mg - T = m\cdot a}$ (1)

T: Τάση στο σχοινί, a: η επιτάχυνση του κουβά.

Η ροπή στον άξονα είναι: $\boxed{\tau = T\cdot r = I\cdot \alpha}$ (2), α: γωνιακή επιτάχυνση άξονα.

όμως $\boxed{a = \alpha\cdot r}$ (3)

Από (1), (2), (3) $\Rightarrow$ $a = \dfrac{m\cdot g - \dfrac{I\cdot a}{r^2}}{m}$ $\Rightarrow$ $\boxed{a = \dfrac{mg\cdot r^2}{mr^2 + I}}$

$I = I_{αξ} + I_{κυλ} = \frac{1}{2}m_1 r^2 + \frac{1}{2}m_2 R^2$

$m_1 = \pi r^2\cdot L\cdot \rho$

$m_2 = \pi R^2\cdot d\cdot \rho$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\pi r^2 L\cdot\rho\cdot r^2 + \frac{1}{2}\pi R^2\cdot d\cdot R^2$

$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2}\pi\rho\left(Lr^4 + dR^4\right)}$