Hamiltonian φορμαλισμός

- Πριν αρκετό καιρό, είδαμε τον φορμαλισμό Hamilton:
  - Για ένα σύστημα με βαθμούς ελευθερίας q_i και Lagrangian $L(q,\dot{q};t)$
    - Ορίσαμε $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$
    - και την hamiltonian: $H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$
    - Λύσαμε την εξίσωση p_i ως προς $\dot{q}_i$ συναρτήσει των q_i και p_i
    - και γράψαμε την hamiltonian με την μορφή: $H(q_i, p_i)$
    - οι εξισώσεις κίνησης δίνονται από 2N διαφορικές εξισώσεις:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{και} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

    - Ορίσαμε το φασικό χώρο (q_i, p_i) και η χρονική εξέλιξη του συστήματος περιγράφεται από ροή στο φασικό χώρο
    - Ο hamiltonian φορμαλισμός χρησιμοποιεί ισοδύναμα τα (q_i, p_i)
- Σύμφωνα με την αρχή του Hamilton, δεδομένων των q_i και $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ τότε

  $S = \int L dt$ μεγιστοποιείται σε μια λύση της εξίσωσης κίνησης

  $S = S[q_i(t)]$ συναρτησιακό των διαδρομών στο χώρο των θέσεων
- $S = S[q_i(t), p_i(t)]$ συναρτησιακό των διαδρομών στο χώρο των φάσεων

Αγκύλες Poisson

- Φορμαλισμός κλασικής που μοιάζει πάρα πολύ αυτόν που χρησιμοποιείται στην QM
- Θεωρείστε δυο συναρτήσεις, $f(q_i, p_i)$ και $g(q_i, p_i)$, που εξαρτώνται από την θέση ενός συστήματος στο φασικό χώρο
- Ορισμός: Αγκύλη Poisson είναι: $\{f,g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$
- Ποιες οι ιδιότητες των αγκυλών Poisson?
  - $\{f,g\} = -\{g,f\}$ αντισυμμετρική
  - $\{af+bg,h\} = a\{f,h\} + b\{g,h\}$ γραμμική
  - $\{fg,h\} = f\{g,h\} + \{f,h\}g$ κανόνας Leibnitz
  - $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$ ταυτότητα Jacobi
- Οι ταυτότητες αυτές ικανοποιούνται από τον μεταθέτη πινάκων: $[F,G] = FG - GF$
  - Στην QM: συνάρτηση της θέσης και της ορμής είναι ένας τελεστής
  - όταν πολ/ζετε τους τελεστές μεταξύ τους, χρησιμοποιείτε τους μεταθέτες τους
  - θεωρείτε τους τελεστές σαν πίνακες συγκεκριμένων ή άπειρων διαστάσεων ανάλογα με το σύστημα που εξετάζεται
  - τελεστές δεν αντιμετατίθενται στην QM όπως συναρτήσεις του φασικού χώρου δεν αντιμετατίθενται στην CM

Παραδείγματα αγκυλών Poisson

- Ο ορισμός της αγκύλης Poisson: $\{f,g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$
  - Έστω: $f = q_i$ και $g = q_j$ τότε $\{f,g\} = \{q_i,q_j\} = 0$
  - Έστω: $f = p_i$ και $g = p_j$ τότε $\{f,g\} = \{p_i,p_j\} = 0$
  - Έστω: $f = q_i$ και $g = p_j$ τότε $\{f,g\} = \{q_i,p_j\} = 0$ για i ≠ j
  - Έστω: $f = q_i$ και $g = p_j$ τότε $\{f,g\} = \{q_i,p_j\} = 1$ για i = j
- Τα παραπάνω αποτελούν τις θεμελειώδεις αγκύλες Poisson
- Γιατί είναι χρήσιμες οι αγκύλες Poisson?
  - Θεωρήστε μια συνάρτηση: $f(q_i, p_i, t)$
  - Η αλλαγή της συνάρτησης αυτής με τον χρόνο δίνεται από:

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Hamilton

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \Rightarrow \frac{df}{dt} = \{f,H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

  - Για να προσδιορίσουμε πως μια συνάρτηση εξελίσεται χρονικά, χρειάζεται να υπολογίσουμε τον μεταθέτη (αγκύλη Poisson) με την Hamiltonian

Χρησιμότητα αγκυλών Poisson

- Ξέρουμε επομένως πως χρονοεξελίσεται μια συναρτήση των q και p αρκεί να ξέρουμε την Hamiltonian του συστήματος $H(q,p,t)$
  - Έστω ότι έχετε ενα μόριο αποτελούμενο από πολλά άτομα και ενδιαφέρεστε πως μια συνάρτηση των βαθμών ελευθερίας εξελίσεται χρονικά
    - Αντί να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης όλων των ατόμων για να βρείτε πως χρονοεξελίσεται το σύστημα αυτό
    - Γράφετε την αγκύλη Poisson του κέντρου μάζας με την Hamiltonian
- Έστω ότι έχουμε βρεί μια συνάρτηση $I\left(q_i, p_i\right)$ τέτοια ώστε: $\left\{I, H\right\} = 0 \Rightarrow \dfrac{dI}{dt} = 0$
- Σταθερά κίνησης είναι μια συνάρτηση των $\left(q, p\right)$ που μετατίθεται με την H
  - Έστω H συνάρτηση μόνο του p (ανεξάρτητη του q): $H\left(p\right) \Rightarrow \left\{p, H\right\} = 0$
    - p : σταθερά κίνησης Θεώρημα Noether στον φορμαλισμό Hamilton
- Θεωρήστε ότι οι συναρτήσεις I και J αντιπροσωπεύουν διατηρήσιμες ποσότητες $\left\{I, H\right\} = 0 = \left\{J, H\right\}$
  - Η ταυτότητα Jacobi θα είναι: $\left\{\left\{I, J\right\}, H\right\} = \left\{I, \left\{J, H\right\}\right\} + \left\{J, \left\{I, H\right\}\right\} = 0$

    $\left\{I, J\right\}$ σταθερά κίνησης
  - Η αγκύλη Poisson δυο σταθερών κίνησης, είναι επίσης σταθερά κίνησης

Χρησιμότητα αγκυλών Poisson

- Η ομάδα των σταθερών κίνησης είναι ένας διανυσματικός χώρος
- Οι σταθερές κίνησης δημιουργούν, σε μαθηματική γλώσσα, «μια άλγεβρα»
  - Έστω σωματίδιο που κινείται κάτω από την επίδραση ενός δυναμικού $V(\vec{r})$
  - Η στροφορμή του σωματιδίου είναι μια διατηρήσιμη ποσότητα: $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= r_2 p_3 - r_3 p_2 \\ l_2 &= -r_1 p_3 + r_3 p_1 \\ l_3 &= r_1 p_2 - r_2 p_1 \end{aligned}\right\}$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τις αγκύλες Poisson:

$$\{l_i, l_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} l_k$$

➡ SU(2) ή SO(3) άλγεβρα ή άλγεβρα περιστροφών

  - Ας υπολογίσουμε την Poisson αγκύλη: $\{l_1, l_2\}$

$$\{l_1,l_2\} = \{r_2p_3 - r_3p_2, r_3p_1 - r_1p_3\} = \{r_2p_3 - r_3p_2, r_3p_1\} - \{r_2p_3 - r_3p_2, r_1p_3\}$$

$$= \{r_2p_3, r_3p_1\} - \{r_3p_2, r_3p_1\} - \{r_2p_3, r_1p_3\} + \{r_3p_2, r_1p_3\}$$

$$= \{r_2p_3, r_3p_1\} + \{r_3p_2, r_1p_3\} = -r_2p_1 + p_2r_1 \quad \Rightarrow \{l_1,l_2\} = l_3$$

  - Αν δουλεύοντας σε κάτι ανακαλύψουμε ότι δυο συνιστώσες της στροφορμής διατηρούνται, τότε αυτόματα η τρίτη συνιστώσα διατηρείται:

Αγκύλες Poisson – Πρόβλημα Kepler

- Το Keplerian δυναμικό είναι συνάρτηση του $1/r$
  - Διατηρείται η στροφορμή – σύμφωνα με τα προηγούμενα
  - Υπάρχουν 3 επιπλέον διατηρήσιμες ποσότητες: $\vec{A} = \frac{1}{m}\vec{p}\times\vec{l} - \hat{r}$
  - Τι είναι οι τρεις αυτές συμμετρίες?

$$\left\{A_i, l_j\right\} = -\sum_k \varepsilon_{ijk} A_k$$

$$\left\{A_i, A_j\right\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} l_k$$

  - Οι ποσότητες Α και l δημιουργούν μια μεγαλύτερη άλγεβρα – 6 γεννητόρων
    - SO(4) άλγεβρα: συμμετρία/άλγεβρα περιστροφών σε χώρο 4-διαστάσεων
    - Η 4^{η} διάσταση είναι μαθηματική έννοια και όχι πραγματική διάσταση
  - Ίδιες ιδιότητες θα εμφανιστούν όταν μελετήσετε στην QM το άτομο του υδρογόνου που είναι το πρόβλημα Kepler όπου αντί για μάζα υπάρχει το φορτίο

Κανονικοί μετασχηματισμοί

- Το θεώρημα Noether μας λέει ότι αν έχουμε μια συμμετρία τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια σταθερά της κίνησης
- Όταν όμως έχουμε μια σταθερά κίνησης – αυτή αντιστοιχεί σε κάποια συμμετρία
  - Πως βρίσκουμε την συμμετρία που προκαλεί την σταθερά της κίνησης
- Θεωρία κανονικών μετασχηματισμών:
  - Στον φορμαλισμό Lagrange μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε μεταβλητή για να περιγράψουμε ένα σύστημα

    $q_i \longrightarrow Q_i(q_i)$ Ο μετασχηματισμός δεν αλλάζει την φυσική

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial Q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right) = 0$$

- Στον φορμαλισμό Hamilton η θέση και η ορμή χρησιμοποιούνται ισοδύναμα
- Υπάρχει τρόπος να έχουμε κάποιο μετασχηματισμό

$$q_i \longrightarrow Q_i(q_i, p_i)$$
$$p_i \longrightarrow P_i(q_i, p_i)$$

?

- Μόνο μερικοί τέτοιοι μετασχηματισμοί αφήνουν τις εξισώσεις Hamilton αμετάβλητες
  - Τέτοιος μετασχηματισμός ονομάζεται κανονικός μετασχηματισμός

Κανονικοί μετασχηματισμοί

- Έστω ότι έχουμε ένα μετασχηματισμό του φασικού χώρου:

$$(q,p) \longrightarrow \big(Q(q,p), P(q,p)\big)$$

  - Οι εξισώσεις Hamilton: $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = H_p \qquad \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} = -H_q$

- Υπολογίζουμε την χρονική μεταβολή των μετασχηματισμένων μεταβλητών:

$$\dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t} = Q_q\dot{q} + Q_p\dot{p} = Q_q H_p - Q_p H_q \overset{?}{=} H_P = \frac{\partial H}{\partial P}$$

$$\dot{P} = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t} = P_q\dot{q} + P_p\dot{p} = P_q H_p - P_p H_q \overset{?}{=} H_Q = \frac{\partial H}{\partial Q}$$

- Αλλά: $H_q = \dfrac{\partial H}{\partial Q}\dfrac{\partial Q}{\partial q} + \dfrac{\partial H}{\partial P}\dfrac{\partial P}{\partial q} \Rightarrow H_q = H_Q Q_q + H_P P_q$

- όμοια: $H_p = \dfrac{\partial H}{\partial Q}\dfrac{\partial Q}{\partial p} + \dfrac{\partial H}{\partial P}\dfrac{\partial P}{\partial p} \Rightarrow H_p = H_Q Q_p + H_P P_p$

- Επομένως: $\dot{Q} = Q_q H_p - Q_p H_q \Rightarrow \dot{Q} = Q_q\left(H_Q Q_p + H_P P_p\right) - Q_p\left(H_Q Q_q + H_P P_q\right)$

$$\Rightarrow \dot{Q} = H_Q\left(Q_q Q_p - Q_p Q_q\right) + H_P\left(Q_q P_p - Q_p P_q\right) \Rightarrow \dot{Q} = H_P\{Q,P\}$$

Κανονικοί μετασχηματισμοί

- Ο μετασχηματισμός $(q,p) \longrightarrow (Q(q,p), P(q,p))$
  - δίνει: $\dot{Q} = H_P\{Q,P\}$
  - Ανάλογα: $\dot{P} = -H_Q\{Q,P\}$
- Η μορφή των εξισώσεων Hamilton διατηρείται κάνοντας ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων του φασικού χώρου $(q,p) \longrightarrow (Q(q,p), P(q,p))$ μόνο αν $\{Q,P\} = 1$
  - Δηλαδή οι βασικές Poisson αγκύλες έχουν την μορφή:
- Για N βαθμούς ελευθερίας: $\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$
- Κανονικός μετασχηματισμός είναι ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων του φασικού χώρου που διατηρεί τις αγκύλες Poisson μεταξύ p και q