

# Κλασική Μηχανική και Κβαντομηχανική

## Γενική Φυσική III: ΦΥΣ 133

Άνοιξη 2007

Διδάσκων:

Φώτης Πτωχός

**e-mail:** fotis@ucy.ac.cy

**Τηλ:** 22.89.2837

**Γραφείο:** B235 – ΘΕΕ02 – Τμήμα Φυσικής

## Γενικές Πληροφορίες

- **Ώρες/Αίθουσα διδασκαλίας:**
  - Δευτέρα/Πέμπτη 13:30 – 15:00 & Τετάρτη 13:00 -14:00
  - Αίθουσα: 103 ΧΩΔ01
- **Φροντιστήρια/Απορίες**
  - Οι συναντήσεις της Τετάρτης θα είναι ένας συνδυασμός για λύσεις ασκήσεων και παραδόσεων
  - **Επιπλέον** ώρες φροντιστηρίων κάθε Τετάρτη 16:30 - 18:30
  - Διακόπτετε για να ρωτήσετε τυχόν απορίες σας οποιαδήποτε στιγμή κατά την διάρκεια των διαλέξεων.
  - **Περάστε από το γραφείο μου:** Ώρες Τρίτη 12:00-15:00μμ
  - Πείτε μου αν κάτι στο μάθημα δεν δουλεύει για σας
- Ιστοσελίδα του μαθήματος:  
<http://www.ucy.ac.cy/~fotis/phy133/phy133.htm>

## Προαπαιτούμενα

- ☐ ΦΥΣ131 & ΦΥΣ132

Εισαγωγική μηχανική και Ηλεκτρομαγνητισμός

- ☐ ΜΑΣ021, ΜΑΣ022 και ΜΑΣ023

Ολοκληρωτικός λογισμός, γραμμική άλγεβρα και διαφορικές εξισώσεις

- ☐ Θεωρήστε σοβαρά τα προαπαιτούμενα αυτά

- Χωρίς το απαραίτητο υπόβαθρο θα χαθείτε εύκολα και θα είναι δύσκολο να παρακολουθήσετε.
- Αν **επιμένετε** και θέλετε να δοκιμάσετε ζητήστε την άδεια των καθηγητών υπεύθυνων του προγράμματος σπουδών σας.

## Βιβλιογραφία

- Κλασσική Μηχανική – **Η.Σ.Τριανταφυλλόπουλος** (εκδ. Συμεων)
- Μαθήματα Αναλυτικής Μηχανικής – **Γ.Α. Κατσιάρης** (εκδ. Συμμετρία)
- **An Introduction to Mechanics** – **Kleppner & Kolenkow** (εκδ. McGraw Hill)
- **Classical Dynamics of particles and Systems** – **Marion & Thornton** (εκδ. Thomson)
- **Classical Mechanics** – **R.W.Goldstein** (εκδ. Addison-Wesley)
- **Κβαντομηχανική Ι** – **Σ. Τραχανάς** (εκδ. Π.Ε.Κ)

Βιβλία χρήσιμα για ασκήσεις

- **Θεωρητική Μηχανική** – **M.R. Spiegel** σειρά Schaum (Μετάφραση Ι. Χατζηαγαπίου εκδ. ΕΣΠΙ)
- **Θεωρητική Μηχανική: Θεωρία και λυμένες ασκήσεις** – **Α. Κυριάκης**
- **Προβλήματα Κβαντομηχανικής** – **Σ. Τραχανάς**

## Βαθμολογία

- Η βαθμολογία θα βασιστεί στα ακόλουθα:
  - **75% : 3 γραπτές εξετάσεις προόδου** (90 λεπτών)  
Ημερομηνίες: 12-Φλεβάρη  
12-Μάρτη  
16-Απρίλη
  - **25% : τελική εξέταση** – 3-ωρη εξέταση (Κυριακή 6 Μάη)

## Εργασίες στο σπίτι

- Εργασίες για το σπίτι θα σας δίνονται κάθε βδομάδα (Πέμπτη)
  - Εξαρτάται απο σας αν θα τις κάνετε
  - **Δεν θα βαθμολογούνται**
- Το μάθημα χρησιμοποιεί αρκετά μαθηματικά και περισσότερο δύσκολες έννοιες από τη μέχρι τώρα φυσική σας και λύνοντας ασκήσεις θα σας βοηθήσει να εμπεδώσετε την ύλη

## Ύλη του μαθήματος

- Κλασσική Μηχανική
- Συστήματα αναφοράς αδράνειας και γενικευμένες συντεταγμένες
- Νευτώνεια Μηχανική
- Εισαγωγή στις εξισώσεις Lagrange
- Νόμοι διατήρησης, κίνηση σε κεντρικό δυναμικό, πεδία βαρύτητας
- Ταλαντώσεις μικρού μεγέθους
- Μηχανική στερεού σώματος
- Εξισώσεις Hamilton
- Κβαντομηχανική, εξίσωση Schrödinger και κυματοσυνάρτηση
- Στατιστική ερμηνεία της Κβαντομηχανικής
- Κανονικοποίηση κυματοσυνάρτησης. Μέσες τιμές και τελεστές θέσεις, ορμής και ενέργειας.
- Μονοδιάστατα δυναμικά. Απειρόβαθο πηγάδι
- Αρμονικός ταλαντωτής. Δυναμικό συνάρτησης δέλτα.
- Πεπερασμένο πηγάδι. Ελεύθερο σωματίδιο

# ΦΥΣ 133 - Κλασική Μηχανική & Κβαντομηχανική

## Μικρή Εισαγωγή





# Μηχανική

Ο κλάδος των φυσικών επιστημών που ασχολείται με ενέργεια και δυνάμεις και την επίδραση τους σε σώματα

- Η μηχανική ασχολείται με:
  - Τη **κίνηση** σωμάτων → Ταχύτητα και επιτάχυνση
  - **Αιτία** της κίνησης → Δύναμη και ενέργεια
- Τα σώματα κινούνται **αλλά** δεν αλλάζουν ιδιότητες:
  - Ιδανικά υλικά σημεία και στερεά σώματα
  - **Μάζα** και **ροπή αδράνειας** είναι ότι ενδιαφέρει άμεσα
- Τρεις Νόμοι του Newton για την κίνηση:
  - Τους θυμάστε?
  - **Principia** (1687) περιέχει όλες τις ιδέες και αρχές

## Κλασσική έναντι Μοντέρνας Φυσικής

- Μοντέρνα στη φυσική ισοδυναμεί με τον 20<sup>ο</sup> αιώνα:
  - Κβαντομηχανική (QM)
  - Σχετικότητα
- Κλασσική Μηχανική = Πριν την κβαντομηχανική
  - Συμπεριλαμβάνουμε ειδική θεωρία σχετικότητας και Ηλεκτρομαγνητισμό (E&M)
- Τι συνέβη μεταξύ του 17<sup>ου</sup> και 20<sup>ου</sup> αιώνα?

## Γιατί ενδιαφερόμαστε?

- Ξέρουμε ότι η Σχετικότητα και η QM δίνουν τις σωστές απαντήσεις
  - Η Newtonian μηχανική είναι μια προσέγγιση στην κλίμακα του ανθρώπου και της καθημερινής ζωής
- Δεν είναι αυτό αρκετό?
  - Γιατί θα πρέπει να ασχολούμαστε ακόμα με μια θεωρία που είναι ξεπερασμένη?

## Γιατί λοιπόν Κλασσική Μηχανική?

- Τρεις βασικοί καλοί λόγοι:
  - Στενή σχέση με την Μοντέρνα φυσική
    - Καλή κατανόηση κλασσικής μηχανικής κάνει πιο εύκολη την κατανόηση της QM
  - Πολύ χρήσιμα και ευέλικτα «εργαλεία»/tricks μαθηματικών
  - Επαναπροσδιορισμός γνωστών νόμων της φυσικής με διαφορετική τελείως προσέγγιση
    - Πιο καθαρός και γενικός φορμαλισμός
    - It is cool!!
- Ας κάνουμε όμως μια αναδρομή στο 17<sup>ο</sup> αιώνα....

## Newtonian Μηχανική

- Θεωρητικά, η εξίσωση κίνησης του Newton προέβλεψε την κίνηση οποιαδήποτε σώματος (σωμάτων) υπό την δύναμη:
  - Για την λύση χρειάζεται κάποιος ένα μεγάλο και γρήγορο υπολογιστή
- Στην πραγματικότητα όμως η ζωή δεν ήταν τόσο απλή
  - Η εταιρία Intel δεν υπήρχε μέχρι το 1968
  - Πιο σημαντικά ωστόσο, η δύναμη μπορεί να είναι άγνωστη
    - Μπορεί να εξαρτάται από το χρόνο, τη θέση, ακόμα και την ταχύτητα
    - Σκεφτείτε την περίπτωση όπου  $\geq 2$  σώματα έλκονται μεταξύ τους λόγω βαρύτητας
    - Επίλυση ενός συστήματος 3-σωμάτων είναι αδύνατο
- Ανάγκη για εύρεση πιο ευέλικτων μαθηματικών μεθόδων

## Γενικεύοντας την εξίσωση κίνησης

- Η Newtonian μηχανική ασχολείται με την θέση του σώματος:
  - **Στόχος:** να βρεθούν  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ ,  $z=z(t)$
  - 3 συντεταγμένες για κάθε σώμα  $\rightarrow 3N$  για  $N$  σώματα
- Ωστόσο υπάρχουν άπειροι τρόποι για να περιγράψει κάποιος την κίνηση
  - Για παράδειγμα, ένας πιο φυσικός τρόπος για την περιγραφή της κίνησης ενός εκκρεμούς είναι:  
$$x=L \cos\theta, y=L \sin\theta, z=0, \theta = \theta(t)$$
  - Ο αριθμός των ελεύθερων μεταβλητών μπορεί να μην είναι  $3N$
  - Ας καλέσουμε τις νέες μεταβλητές **γενικευμένες συντεταγμένες**
- Ποιες θα είναι οι εξισώσεις κίνησης με τις νέες συντεταγμένες?

## Φορμαλισμός Lagrange

- Η εξίσωση του Newton είναι όλα σχετικά με την δύναμη

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

- Ξεκινάμε με  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, t)$  για όλα τα υλικά σημεία
  - 3N συναρτήσεις αντιστοιχούν σε 3N συντεταγμένες
- Ξεχάστε τη δύναμη! Εισάγουμε κάτι εντελώς διαφορετικό

**Lagrangian:**

$$L = L(q, \dot{q})$$

Συντεταγμένη  $q$  και η χρονική της παράγωγος

**Εξισώσεις Lagrange:**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Τα πάντα για το σύστημα αυτό περιέχονται μέσα στη βαθμωτή συνάρτηση  $L$

Η Lagrangian δεν εξαρτάται από σύστημα συντεταγμένων  
Είναι πολύ εύκολο να αλλάξουμε συστήματα συντεταγμένων

## Αρχή του Hamilton

- Η εξίσωση του Lagrange απορρέει από την **ΑΡΧΗ του HAMILTON** σύμφωνα με ένα απλό κανόνα:

Το ολοκλήρωμα της  $L$  ως προς χρόνο είναι αμετάβλητο για την τροχιά που ακολουθήσε το φυσικό σύστημα

$$\delta \int_1^2 L dt = 0$$

- Οι Νόμοι του Newton βρέθηκαν εξ' επαγωγής
  - «Είναι έτσι επειδή συμφωνεί με τόσες παρατηρήσεις»
  - Το να τους εξαγάγουμε από μια αρχή σημαίνει ότι γνωρίζουμε την αιτία που είναι έτσι
  - Βέβαια δεν είναι τόσο δραματική η κατάσταση, ωστόσο υπονοεί κάποια βαθύτερη αιτία
- Όλα αυτά στηρίζονται στο **λογισμό των μεταβολών** που θα δούμε κατά τη διάρκεια των πρώτων διαλέξεων και είναι μια πολύ χρήσιμη τεχνική



## Hamiltonian φορμαλισμός

- Η εξίσωση Hamilton είναι:  $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad -\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q}$ 
  - $(p, q)$  είναι κανονικές μεταβλητές
  - $H$  είναι μια συνάρτηση που ονομάζεται Hamiltonian
- Κανονικές μεταβλητές  $\sim$  θέση και ορμή
  - Δεν συνδέονται με την σχέση  $p = mv$  ?
- Θέση και ορμή σαν ανεξάρτητες μεταβλητές
  - Επιτρέπει μεγαλύτερη κλίμακα μετασχηματισμών μεταξύ μεταβλητών σε σχέση με τον Lagrangian φορμαλισμό
    - Ο φορμαλισμός είναι πιο καθαρός με πολλές συμμετρίες
    - Υπάρχουν πολλές ομοιότητες με το τι ακολουθεί η QM

## Επιτυχία μέσα από την αποτυχία...

- Η αναζήτηση εργαλείων για την επίλυση του προβλήματος 3-σωμάτων απέτυχε
  - Εκτός βέβαια και αν κάποιος θεωρήσει επιτυχία την ανάπτυξη των super computers
- Αποτέλεσμα αυτής της αναζήτησης είχε σαν επακόλουθο την ανάπτυξη μεθόδων (Lagrangians και Hamiltonians) που αποτελούν τις βάσεις της Κβαντομηχανικής
  - Η ανάπτυξη της QM οδηγήθηκε από αναλογίες στους Lagrangian και Hamiltonian φορμαλισμούς
  - Οι θεμελιωτές της QM μεγάλωσαν με κλασσική μηχανική
- Η Κλασσική μηχανική είναι ο συνδετικός κρίκος μεταξύ Newton και Schrödinger

## Τι θα μελετήσουμε λοιπόν

- Εξισώσεις Lagrange και αρχή Hamilton
  - Πρόβλημα κεντρικής δύναμης
  - Κίνηση στερεού σώματος
  - Ταλαντώσεις
- Εξισώσεις Hamilton και κανονικοί μετασχηματισμοί
- Εισαγωγή στην κβαντομηχανική
  - Εξίσωση Schrödinger και κυματοσυναρτήσεις
  - Στατιστική ερμηνεία της κβαντομηχανικής
  - Τελεστές θέσης, ορμής και ενέργειας
  - Λύσεις της κυματικής εξίσωσης σε μονοδιάστατα δυναμικά

## Στόχος για σήμερα

- Ανακεφαλαίωση των βασικών αρχών της Newtonian μηχανικής
  - Σύντομα ώστε να μην κοιμηθείτε
- Συζήτηση της κίνησης ενός σωματιδίου
  - Ορισμός των συμβόλων και τη χρησιμοποίησή τους
  - Ορμές, νόμοι διατήρησης, κινητική και δυναμική ενέργεια
- Όλα αυτά πρέπει να σας είναι ήδη γνωστά

## Υλικό σημείο

- Υλικό σημείο = το αντικείμενο με αμελητέο μέγεθος
  - Ηλεκτρόνιο μέσα σε ένα επιταχυντή
  - Η μπάλα του baseball που ρίχνει ένας pitcher
  - Η γη που περιστρέφεται γύρω από τον ήλιο
  - Έχει μάζα  $m$  και θέση  $\mathbf{r}$

Ταχύτητα  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$

Γραμμική ορμή  $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}}$

- Ο 2<sup>ος</sup> νόμος του Newton για την κίνηση

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}} = m\ddot{\mathbf{r}}$$

## Αδρανειακό σύστημα

- Η αρχή **O** του **r** είναι κάπως αφηρημένη
  - Εκλογή σημείου αρχής μέτρησης → σύστημα αναφοράς
  - Αδρανειακό σύστημα = σύστημα αναφοράς στο οποίο ισχύει  $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$
- Ο 2<sup>ος</sup> νόμος του Newton θα μπορούσε να διατυπωθεί ακριβέστερα ως  
Υπάρχουν συστήματα αναφοράς για τα οποία η παράγωγος της γραμμικής ορμής ως προς το χρόνο ισούται με την δύναμη
- Και υπάρχει άπειρος αριθμός τέτοιων συστημάτων

## Αδρανειακά συστήματα

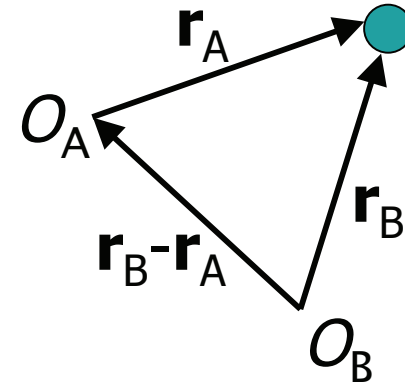
- Σκεφθείτε 2 αδρανειακά συστήματα A και B
  - Ένα σημείο είναι στο  $\mathbf{r}_A$  στο A,  $\mathbf{r}_B$  στο B
  - Αρχή συντεταγμένων του A είναι στη θέση  $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$  του B

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}_A = m\ddot{\mathbf{r}}_B \rightarrow \ddot{\mathbf{r}}_B - \ddot{\mathbf{r}}_A = 0$$

$$\rightarrow \dot{\mathbf{r}}_B - \dot{\mathbf{r}}_A = \text{σταθερό}$$

Οποιαδήποτε 2 αδρανειακά συστήματα κινούνται με σταθερή σχετική ταχύτητα

Ο Γαλιλαίος έδειξε την ισοδυναμία αυτών των συστημάτων



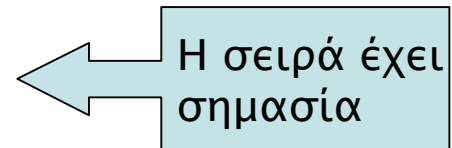
## Στροφορμή

- Ορισμός

- Στροφορμή
- Ροπή

$$L = r \times p$$

$$N = r \times F$$



- Από τη σχέση  $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$  εξάγουμε  $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}}$
- Οι ορισμοί εξαρτώνται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων  $O$ 
  - $r$  εξαρτάται από το  $O$
  - Η εξίσωση  $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{L}}$  ισχύει για οποιαδήποτε  $O$



## Διατήρηση της Ορμής

- Δύο θεωρήματα διατήρησης βγαίνουν
  - Από

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$$

Αν η ολική δύναμη είναι μηδέν τότε  
η ορμή διατηρείται

- Από

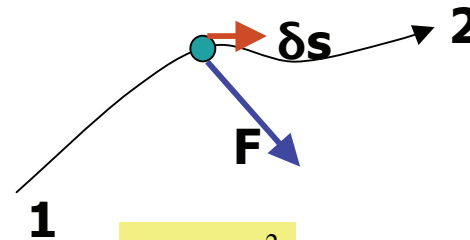
$$N = \dot{L}$$

Αν η ολική ροπή είναι μηδέν τότε  
η στροφορμή διατηρείται

## Έργο από εξωτερική Δύναμη

- Υλικό σημείο κινείται από τη θέση 1 στη θέση 2 κάτω από την επίδραση της δύναμης  $\mathbf{F}$ 
  - Το έργο  $\mathbf{W}_{12}$  που παράγει η δύναμη  $\mathbf{F}$  ορίζεται ως

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

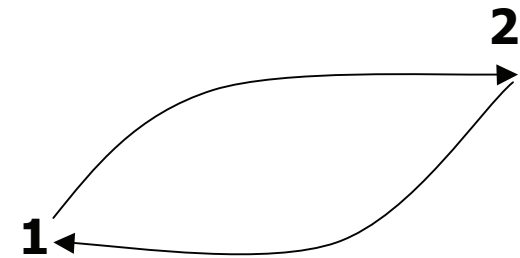
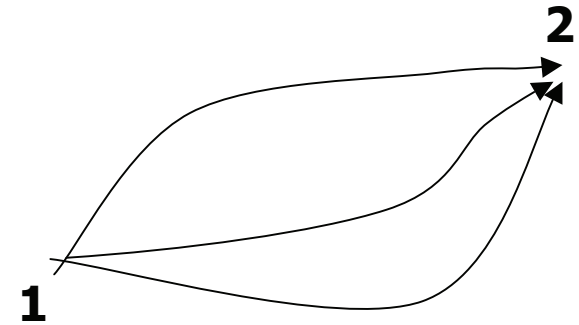


- Η κινητική ενέργεια ορίζεται ως  $T \equiv \frac{mv^2}{2}$
- Και αποδεικνύεται ότι  $W_{12} = T_2 - T_1$
- Το έργο που παράγεται ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας

## Συντηρητική δύναμη

- Αν  $\mathbf{W}_{12}$  είναι το ίδιο για κάθε δυνατή διαδρομή από το 1 στο 2, τότε η  $\mathbf{F}$  είναι **συντηρητική**  
 $W_{12}$  εξαρτάται μόνο από τις 2 θέσεις και όχι από τη διαδρομή
- Ισοδύναμα αν εκτελέσει μια κλειστή διαδρομή, τότε το έργο είναι μηδέν

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_2^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$



## Δυναμική Ενέργεια

- Αν η  $\mathbf{F}$  είναι συντηρητική  $\leftrightarrow F$  εκφράζεται ως  $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$ 
  - $V$  είναι η **δυναμική ενέργεια**
  - Το έργο  $\mathbf{W}_{12}$  εκφράζεται τότε από

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = V_1 - V_2$$

και βρήκαμε πριν ότι είναι ίσο με  $T_2 - T_1$   
επομένως  $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Αν η δύναμη είναι συντηρητική τότε η ολική ενέργεια  
 $T + V$  διατηρείται

**Θεώρημα διατήρησης Ενέργειας**

## Περίληψη

- Ανακεφαλαιώσαμε τις βασικές αρχές της Newtonian Μηχανικής
  - Ορισμούς συμβόλων και χρησιμοποίηση
  - Γραμμική ορμή, στροφορμή, νόμοι διατήρησης κινητική και δυναμική ενέργεια

Ελπίζω πως όλα είναι κατανοητά και γνώριμα, αν όχι βαρετά

Επόμενη διάλεξη θα ξαναθυμηθούμε πώς λύνονται μερικά προβλήματα που βασίζονται σ' ότι είπαμε σήμερα