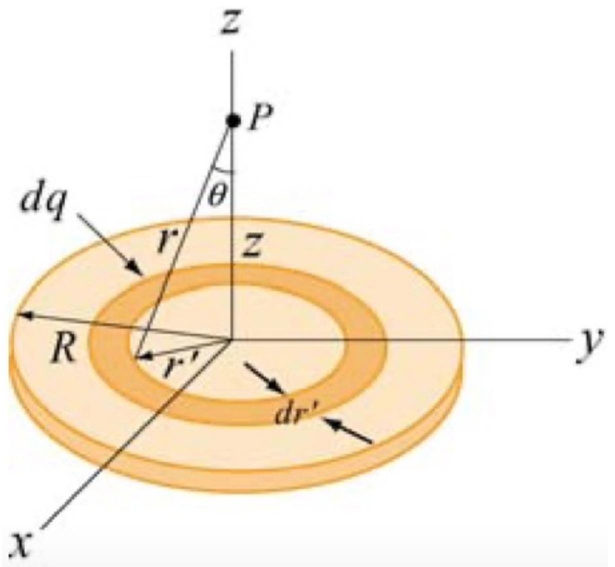
3ο Παράδειγμα: Δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου

Θεωρούμε μη αγώγιμο ομοιόμορφα φορτισμένο δίσκο ακτίνας *R* και επιφανειακής πυκνότητας φορτίου σ. Ο δίσκος βρίσκεται στο x-y επίπεδο. Να βρεθεί το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο *P* που βρίσκεται σε απόσταση *z* από τον κεντρικό άξονα.

Θεωρούμε έναν δακτύλιο ακτίνας r' και πλάτους dr'.



Το φορτίο του στοιχειώδους αυτού δακτυλίου είναι:

$$dq = \sigma dA = \sigma\,(2\pi r' dr')$$

Το δυναμικό στο σημείο *P* εξαιτίας αυτού του στοιχειώδους φορτίου θα είναι:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\,(2\pi r' dr')}{\sqrt{r'^2 + z^2}}$$

Αθροίζουμε (ολοκληρώνουμε) ως προς όλους τους στοιχειώδεις δακτυλίους που απαρτίζουν τον δίσκο:

$$V = \int dV = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{(r' dr')}{\sqrt{r'^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{(r' dr')}{\sqrt{r'^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{r'^2 + z^2}\right]\Big|_0^R \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2 + z^2} - |z|\right]}$$

3ο Παράδειγμα: Δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου

Στο όριο $|z| \gg R$ μπορούμε να πάρουμε το διονυμικό ανάπτυγμα της $\sqrt{R^2+z^2}$ οπότε:

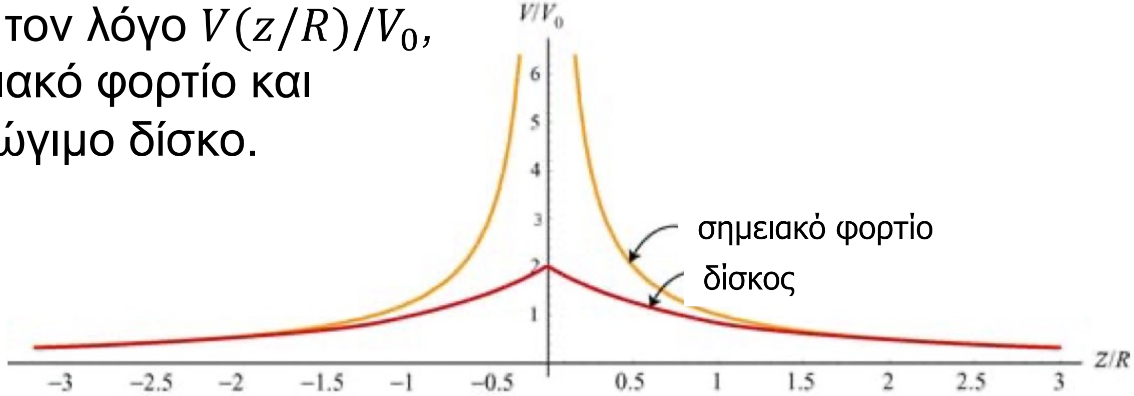
$$\sqrt{R^2+z^2} = |z|\sqrt{\left(\frac{R}{z}\right)^2+1} = |z|\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{z}\right)^2+\cdots\right] = |z|\left(1+\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}\right)$$

Οπότε το δυναμικό απλουστεύεται σε αυτό του σημειακού φορτίου:

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|z|\left[1+\frac{R^2}{2z^2}-1\right] \Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|z|\frac{R^2}{2z^2} \Rightarrow V = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\frac{R^2}{|z|} \Rightarrow V = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\pi R^2}{|z|} \Rightarrow \boxed{V = \frac{Q}{4|z|\pi\varepsilon_0}}$$

Όπως είναι αναμενόμενο, το δυναμικό εξαιτίας ενός μη αγώγιμου δίσκου φορτίου Q είναι το ίδιο με αυτό που προκαλεί ένα σημειακό φορτίο Q.

Το διπλανό γράφημα συγκρίνει τον λόγο $V(z/R)/V_0$, όπου $V_0 = Q/(4\pi\varepsilon_0 R)$ για σημειακό φορτίο και ομοιόμορφα φορτισμένο μη-αγώγιμο δίσκο.



3ο Παράδειγμα: Δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου

Βρήκαμε ότι το δυναμικό που προκαλεί φορτισμένος δίσκος ομοιόμορφης κατανομής φορτίου σε σημείο P σε απόσταση *z* είναι: $V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right]$

Το δυναμικό στο κέντρο του δίσκου $(z = 0)$ είναι:

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}R = \frac{\sigma\pi R^2}{2\pi\varepsilon_0 R} = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \boxed{\Rightarrow V = 2V_0}$$

Το έργο που χρειάζεται για να φέρουμε το μοναδιαίο φορτίο από το άπειρο στο κέντρο του δίσκου.

Το αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο *P* θα είναι:

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]$$

που συμφωνεί με τον υπολογισμό ξεκινώντας από τον ορισμό του ηλεκτρικού πεδίου:

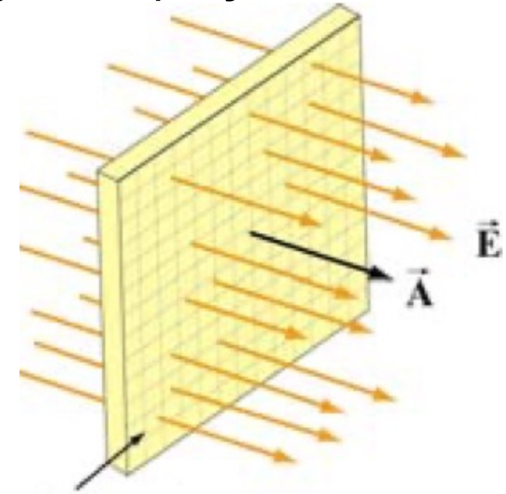
Στο όριο $R \gg z$, η εξίσωση δίνει $E_z = \sigma/2\varepsilon_0$ που είναι το ηλεκτρικό πεδίο άπειρης μη-αγώγιμης επιφάνειας.

Νόμος του Gauss

Η έννοια της ροής

Μέχρι τώρα είδαμε πως η ένταση ενός ηλεκτρικού πεδίου είναι ανάλογη του αριθμού των γραμμών πεδίου ανά μονάδα επιφάνειας.

- Ο αριθμός των γραμμών πεδίου που διαπερνούν μια δεδομένη επιφάνεια ονομάζεται ηλεκτρική ροή και συμβολίζεται με το γράμμα Φ_E.
- Το ηλεκτρικό πεδίο θα μπορούσαμε να το θεωρήσουμε ως το πλήθος των γραμμών πεδίου ανά μονάδα επιφάνειας.



Θεωρούμε την επιφάνεια του σχήματος και ορίζουμε το διάνυσμα της επιφάνειας $\vec{A} = A\hat{n}$ όπου $\hat{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια και A το μέτρο του εμβαδού της επιφάνειας.

Αν η επιφάνεια τοποθετηθεί σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ το οποίο δείχνει προς την κατεύθυνση όπως και το $\hat{n}$, δηλαδή κάθετα στην επιφάνεια A, τότε η ροή διαμέσου της επιφάνειας δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = \vec{E} \cdot \hat{n}A = EA}$$

Αν το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ σχηματίζει γωνία θ με το $\hat{n}$, η ηλεκτρική ροή γράφεται με τη μορφή

$$\boxed{\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EAcos\theta = E_n A}$$

όπου $E_n = E \cdot \hat{n}$ η συνιστώσα του πεδίου κάθετη στην επιφάνεια

Ροή ηλεκτρικών γραμμών

Με βάση τον ορισμό του κάθετου διανύσματος, $\hat{n}$, η ηλεκτρική ροή Φ_E είναι θετική αν οι γραμμές του πεδίου εξέρχονται της επιφάνειας και αρνητικές αν εισέρχονται στην επιφάνεια.

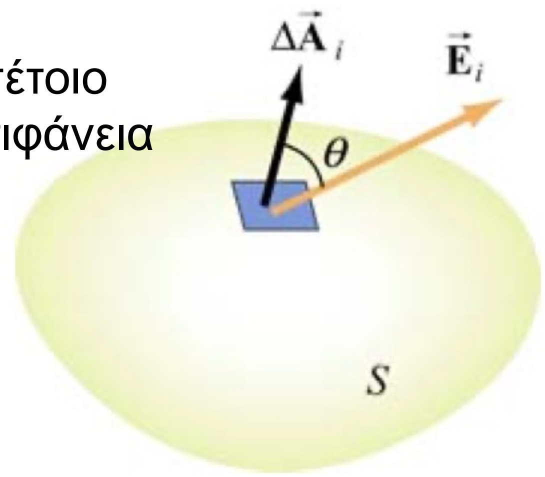
Εν γένει, μια επιφάνεια *S* μπορεί να είναι καμπύλη και το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ μπορεί να μεταβάλλεται κατά μήκος της επιφάνειας.

- Θα επικεντρωθούμε στις περιπτώσεις που η επιφάνεια αυτή είναι κλειστή

Θεωρούμε μια επιφάνεια κλειστή όταν περικλείει πλήρως έναν όγκο.

Για να υπολογίσουμε την ροή, θα πρέπει να χωρίσουμε την επιφάνεια σε έναν μεγάλο αριθμό στοιχειωδών επιφανειών $\Delta\vec{\mathrm{A}}_i = \Delta A_i \hat{n}_i$.

Για κλειστή επιφάνεια, το κάθετο διάνυσμα $\hat{n}_i$, επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε να έχει την διεύθυνση που εξέρχεται από την επιφάνεια



Η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την στοιχειώδη επιφάνεια $\Delta\vec{A}_i$ είναι:

$$\Delta\Phi_E = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i = E_i \Delta A_i cos\theta$$

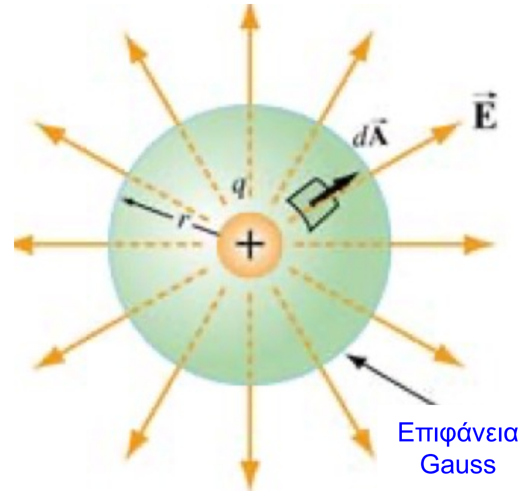
Ηλεκτρική Ροή

Η ολική ροή που διέρχεται από την S βρίσκεται ολοκληρώνοντας ως προς όλες τις στοιχειώδεις επιφάνειες και λαμβάνοντας το όριο $\Delta\vec{A} \rightarrow 0$:

$$\boxed{\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \vec{E}_i \cdot d\vec{A}_i = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$

Το σύμβολο $\oint\!\!\!\oint$ αναφέρεται σε ένα διπλό ολοκλήρωμα ως προς την κλειστή επιφάνεια S. Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αυτό θα πρέπει να καθορίσουμε αρχικά την επιφάνεια και κατόπιν να αθροίσουμε ως προς το γινόμενο $\vec{E} \cdot d\vec{A}$

Ο Νόμος του Gauss



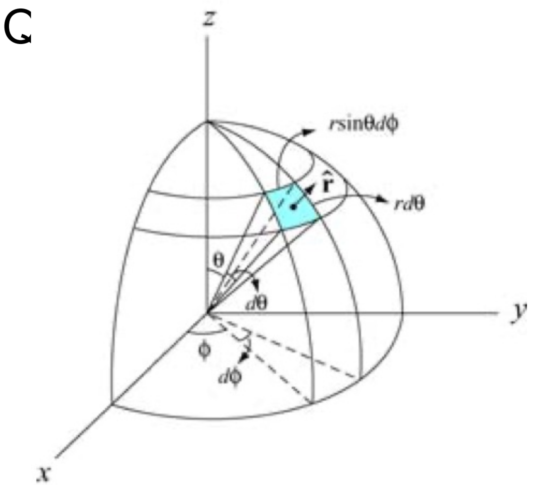
Θεωρούμε ένα θετικό σημειακό φορτίο Q, το οποίο βρίσκεται στο κέντρο μιας σφαίρας ακτίνας *r*.

Το ηλεκτρικό πεδίο εξαιτίας του σημειακού φορτίου είναι: $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

Το πεδίο έχει ακτινική διεύθυνση με φορά από το ηλεκτρικό φορτίο προς το άπειρο.

Θεωρούμε μια νοητική επιφάνεια η οποία περικλείει το φορτίο Q

- Ονομάζουμε την επιφάνεια αυτή ως «Επιφάνεια Gauss»



Σε σφαιρικές συντεταγμένες, η στοιχειώδης επιφάνεια πάνω στην σφαίρα δίνεται από: $\boxed{d\vec{A} = r^2 sin\theta d\theta d\varphi \hat{r}}$

Σαν αποτέλεσμα, η ολική ηλεκτρική ροή που διαπερνά τη στοιχειώδη επιφάνεια είναι:

$$d\Phi_E = \vec{E}\cdot d\vec{A} = EdA = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(r^2 sin\theta d\theta d\varphi) \Rightarrow d\Phi_E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(sin\theta d\theta d\varphi)$$

Η ολική ροή που διαπερνά την επιφάνεια της σφαίρας θα είναι: $\Phi_E = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} \Rightarrow \Phi_E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi} sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

Ο Νόμος του Gauss

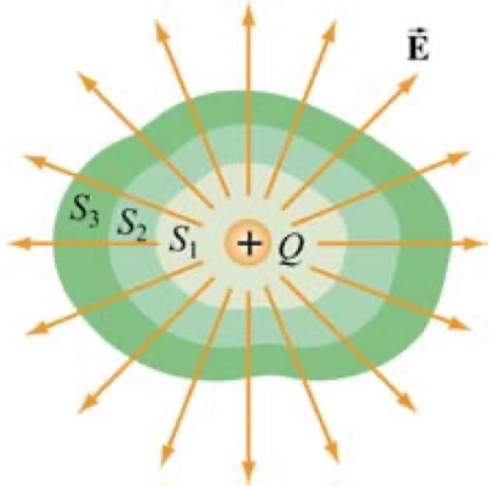
Θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα αν θεωρούσαμε ότι μια σφαίρα ακτίνας r έχει εμβαδό επιφάνειας $4\pi r^2$, και εφόσον το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο στην σφαιρική επιφάνεια είναι $E = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$, η ηλεκτρική ροή που περνά την επιφάνεια θα είναι:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\oiint_S dA = EA \Rightarrow \Phi_E = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)(4\pi r^2) \Rightarrow \Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Στον παραπάνω υπολογισμό θεωρήσαμε ως επιφάνεια Gauss, την επιφάνεια της σφαίρας. Ωστόσο, το είδος της κλειστής επιφάνειας Gauss που θεωρούμε μπορεί να είναι οποιοδήποτε.

Θα καταλήγαμε στο ίδιο αποτέλεσμα για την ολική ροή ανεξάρτητα του είδους της επιφάνειας που θα διαλέγαμε:

$$\Phi_E^{S_1} = \Phi_E^{S_2} = \Phi_E^{S_3} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



Ο Νόμος του Gauss

Νόμος Gauss

«Η συνολική ροή που διαπερνά μια κλειστή επιφάνεια *S* είναι ανάλογη του συνολικού φορτίου Q που περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια.»

Η μαθηματική διατύπωση του νόμου του Gauss είναι:

$$\boxed{\Phi_E = \oiint\limits_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q^S_{o\lambda}}{\varepsilon_0}}$$

όπου $q^S_{o\lambda.}$ το ολικό φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια *S*

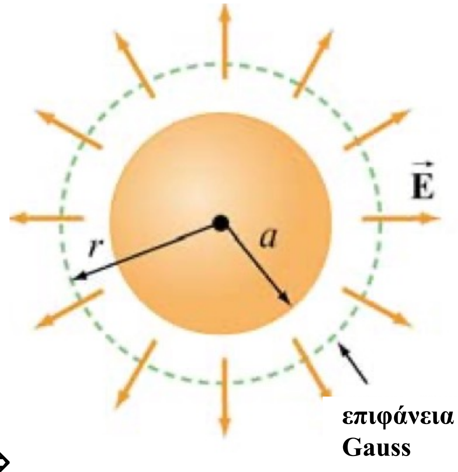
Ένας απλός τρόπος να εξηγήσουμε γιατί ισχύει ο νόμος του Gauss είναι να θεωρήσουμε ότι το πλήθος των ηλεκτρικών γραμμών που εξέρχονται από το φορτίο είναι ανεξάρτητο από το είδος της νοητικής επιφάνειας Gauss που θα θεωρήσουμε ότι περικλείει το φορτίο

Νόμος Gauss – ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα

Εφαρμογή του νόμου Gauss, δίνει: $\Phi_E = E4\pi r^2 = \dfrac{q^S_{o\lambda.}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E4\pi r^2 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{r^3}{a^3}\right) \Rightarrow$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \alpha^3} r, \qquad r \leq a}$$

2η περίπτωση: $r \geq a$

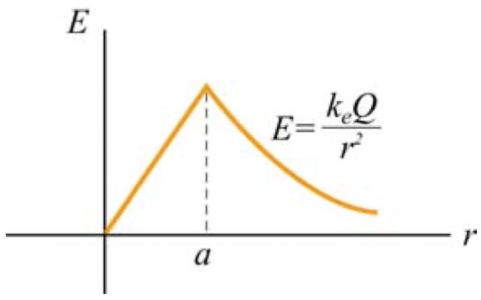


Στην περίπτωση αυτή η επιφάνεια Gauss είναι μία σφαίρα ακτίνας $r \geq \alpha$ που περικλείει όλο το φορτίο της σφαίρας. Επομένως $q^S_{o\lambda.} = \mathrm{Q}$

Η ροή που διαπερνά την επιφάνεια Gauss είναι: $\Phi_E = E4\pi r^2$

Εφαρμογή του νόμου Gauss, δίνει: $\Phi_E = E4\pi r^2 = \dfrac{q^S_{o\lambda.}}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad r \geq a}$$



Το πεδίο έξω από την σφαίρα είναι σαν όλο το φορτίο της σφαίρας να είναι συγκεντρωμένο στο κέντρο της