Σχετικιστική Δυναμική: Ειδική θεωρία της σχετικότητας

Σωματίδια τα οποία μελετούμε κινούνται με μεγάλες ταχύτητες και φυσιολογικά η δυναμική περιγράφεται από την ειδική θεωρία της σχετικότητας :

Στα επόμενα ακολουθεί μια σύντομη επισκόπηση θεμάτων που έχετε δει σε άλλα μαθήματα και πρέπει να σας είναι γνωστά

- Η ειδική θεωρία της σχετικότητας (STR) ➡ εύκολα κατανοητή
- Η ειδική θεωρία της σχετικότητας (STR) ➡ δύσκολα πιστευτή
- Σαν αποτέλεσμα η διαίσθηση που χρησιμοποιεί κάποιος στην λύση προβλημάτων δεν είναι πιστευτή με αποτέλεσμα STR πιο δύσκολα εφαρμόσιμη
- Στην STR η βαρύτητα αγνοείται και δουλεύουμε σε Ευκλείδιο χώρο (επίπεδο χωρόχρονο) σε αντίθεση με τον χωρόχρονο Riemann που περιλαμβάνει τις καμπυλώσεις της βαρύτητας
- Στην STR περιοριζόμαστε σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς:
  - ✓ Σώματα σε κινήση συνεχίζουν την κίνησή τους εκτός αν ενεργήσει κάποια δύναμη
- Πως ελέγχουμε ότι βρισκόμαστε σε αδρανειακό σύστημα?:
  - ✓ Ρίχνουμε πέτρες σε 3 ορθογώνιες μεταξύ τους διευθύνσεις και παρατηρούμε αν υπάρχει καμπύλωση της τροχιάς κάποιου ➡ μη αδρανειακό σύστημα

SRT: Ειδική θεωρία της σχετικότητας

- STR στηρίζεται σε 2 βασικές παραδοχές:
  - Η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα
  - Οι νόμοι της φυσικής πρέπει να έχουν την ίδια μορφή όταν διατυπώνονται σε οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα
- Οι νόμοι που ακολουθούν την $2^{η}$ παραδοχή θεωρούμε ότι είναι συναλοίωτοι
  - Σημαίνει ότι όλες οι μεταβλητές τους αλλάζουν με το σωστό τρόπο ώστε να διατηρούν την συναρτησιακή μορφή αμετάβλητη κάτω από μετασχηματισμό του συστήματος αναφοράς παρόλο που αριθμητικά οι τιμές των μεταβλητών αλλάζουν
  - ✓ Η εξίσωση Schrödinger είναι παράδειγμα μη συναλλοίωτη

$$\left[\frac{\hbar^2 p^2}{2m}+V\left(\vec{r}\right)\right]\Psi\left(\vec{r},t\right)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi\left(\vec{r},t\right)$$

$1^{ης}$ τάξης σε χρόνο

$2^{ης}$ τάξης σε χώρο

Η εξίσωση Dirac όπως θα δούμε είναι συναλλοίωτη

- ✓ Οι εξισώσεις Maxwell είναι συναλλοίωτες παρόλο που διατυπώθηκαν πρίν SRT γιατί στηρίζονται σε πειραματικές παρατηρήσεις

SRT: Ειδική θεωρία της σχετικότητας

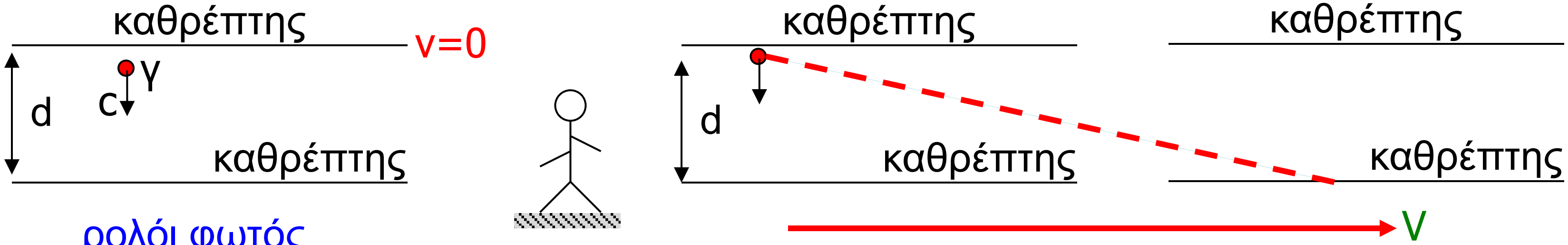
- STR προκύπτει από τις 2 βασικές παραδοχές:

- Το γεγονός ότι η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα οδηγεί στη μίξη των χωρικών και χρονικών συντεταγμένων

- Ένας ακίνητος παρατηρητής αντιλαμβάνεται τον χρόνο ενός κινούμενου συστήματος να «τρέχει» πιο αργά (διαστολή χρόνου) ενώ η διάσταση κατά μήκος της διεύθυνσης της κίνησης να έχει μικρύνει (συστολή του μήκους)
  - ✓ Θα ξαναθυμηθούμε τις περιπτώσεις αυτές με τη χρήση ενός απλού ρολογιού:

του ρολογιού του φωτός: Ένα και μόνο φωτόνιο που ανακλάται ανάμεσα σε δυο καθρέπτες

SRT: Ειδική θεωρία της σχετικότητας



ρολόι φωτός ακίνητο

ρολόι σε κίνηση

χρονικό tick: $\Delta t = \dfrac{d}{c}$

$$\Delta t' = \frac{\sqrt{d^2 + (v\Delta t')^2}}{c} \Rightarrow c^2 \Delta t'^2 = d^2 + (v\Delta t')^2$$

$$\Rightarrow \Delta t' \sqrt{(c^2 - v^2)} = d \Rightarrow \Delta t' = \frac{d}{\sqrt{(c^2 - v^2)}} = \frac{d}{c\sqrt{\left(1 - (v/c)^2\right)}}$$

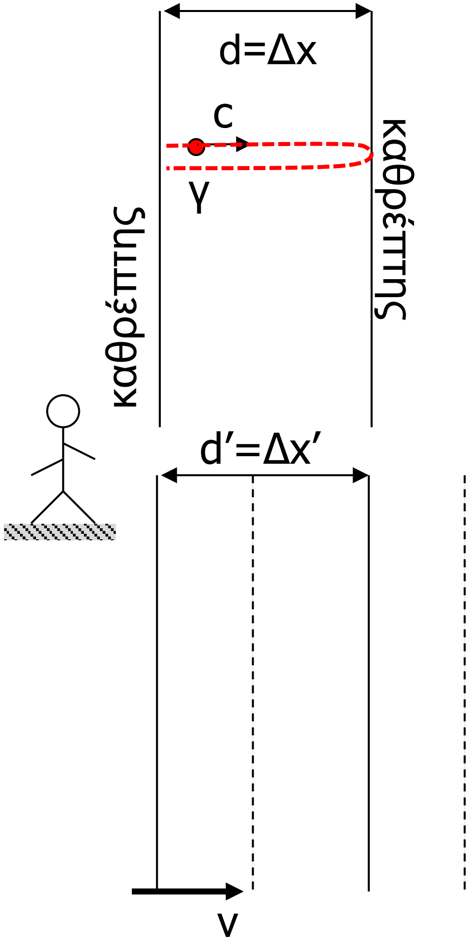
$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \Rightarrow t' = \frac{t}{\sqrt{(1-\beta^2)}} \qquad \boxed{\Rightarrow t' = \gamma t} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

χρονικό tick έχει διασταλεί ως προς το αρχικό Δt

- γ>>1 και επομένως ο χρόνος στο κινούμενο ρολόι όπως είναι αντιληπτός από το ακίνητο σύστημα, εμφανίζεται να αλλάζει με πιο αργό ρυθμό
- Το γεγονός ότι 2 παρατηρητές σε σχετική κίνηση ο ένας ως προς τον άλλο δεν έχουν ένα ίδιο απόλυτο χρόνο σημαίνει, ότι δυο γεγονότα που συμβαίνουν ταυτόχρονα στο ένα σύστημα δεν θα συμφωνούν στο άλλο σύστημα.
- Παραβίαση του 3ου νόμου του Newton για δυνάμεις εξαποστάσεως

SRT: Ειδική θεωρία της σχετικότητας

- Περιστρέφουμε το ρολόι ώστε το φωτόνιο να κινείται παράλληλα με την διεύθυνση κίνησης του ρολογιού



- Στο σύστημα αναφοράς των καθρεπτών
  - Η χρονική διάρκεια για την διαδρομή από τον ένα καθρέπτη στον άλλο και πίσω, όπως γίνεται αντιληπτή για παρατηρητή στο σύστημα αυτό είναι:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2d}{c} \Rightarrow \Delta t = 2\frac{\Delta x}{c}$$

- Στο ακίνητο σύστημα αναφοράς
  - Όπως γίνεται αντιληπτό από ακίνητο παρατηρητή (ενώ το ρολόι κινείται με ταχύτητα v) ο χρόνος της κλειστής διαδρομής είναι:

$$\Delta t' = \Delta t_1' + \Delta t_2' \Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta x' + v\Delta t_1'}{c} + \frac{\Delta x' - v\Delta t_2'}{c}$$

$$\Delta t_1' = \frac{\Delta x'}{c-v} \qquad \Delta t_2' = \frac{\Delta x'}{c+v}$$

$$\Rightarrow \Delta t' = 2\frac{\Delta x'}{c}\frac{1}{1-\left(v/c\right)^2} \qquad \Rightarrow \Delta t' = 2\frac{\Delta x'}{c}\gamma^2$$

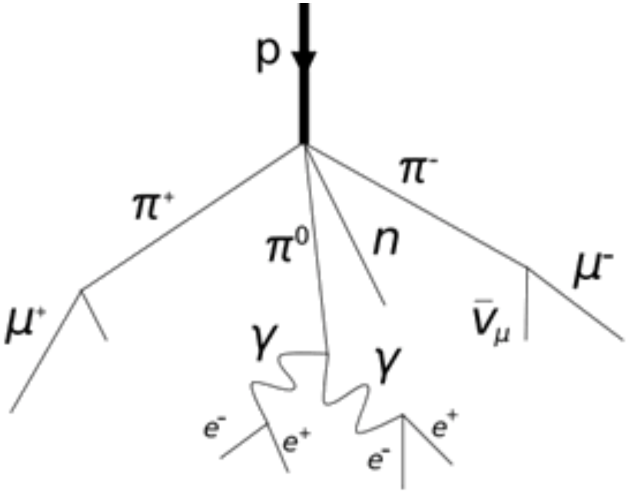
- Αντικατάσταση του διεσταλμένου χρόνου $\Delta t' = \gamma \Delta t$ δίνει: $\gamma \Delta t = 2\frac{\Delta x'}{c}\gamma^2 \Rightarrow \Delta x' = \gamma^{-1}\frac{c\Delta t}{2}$

$$\boxed{\Rightarrow \Delta x' = \gamma^{-1}\Delta x}$$

- Ο ακίνητος παρατηρητής βλέπει συστολή μήκους κατά μήκος της κίνησης κατά ένα παράγοντα γ. Η κάθετη διεύθυνση δεν επηρεάζεται

SRT: Ειδική θεωρία της σχετικότητας

- Έστω έχουμε μια ηλιακή έκρηξη και κοσμικές ακτίνες φθάνουν στα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας. Τα πρωτόνια αλληλεπιδρούν με τα άτομα της ατμόσφαιρας και παράγουν π^0, $\pi^{\pm}$ τα οποία διασπώνται σε μιόνια και νετρίνα. Τα μιόνια παράγονται υψηλά στην ατμόσφαιρα (~8km) και κινούνται με ταχύτητα κοντά στου φωτός (0.998c). Ο χρόνος ζωής του μ (στο σύστημα αναφοράς του) είναι 2.2μs. Πόση απόσταση θα καλύψει πρίν διασπαστεί σε μιόνια



Κλασική προσέγγιση

$$d = \tau \cdot \upsilon = 2.2\times10^{-6}\cdot 0.998\cdot 3\times10^{8}\,m$$

$$\Rightarrow d = 6.57\times10^{2}\,m \sim 657\,m \ll 8km$$

Σχετικιστική προσέγγιση

$$\upsilon = 0.998c \Rightarrow \beta = \frac{\upsilon}{c} = 0.998 \Rightarrow \gamma = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2} = \sqrt{250} = 15.8$$

Σύμφωνα με ακίνητο παρατηρητή ο χρόνος ζωής του μ θα έχει διασταλεί γ-φορές

Η απόσταση επομένως θα είναι: $d = \gamma\tau\cdot\upsilon = 10380m \;\; > 8km$

Αρκετά επομένως μιόνια θα φθάσουν κατά μέσο όρο στην επιφάνεια της γης:

SRT: Ειδική θεωρία της σχετικότητας

Στο σύστημα του μιονίου:

Στην περίπτωση αυτή το μήκος που διανύουν θα συσταλεί κατά τον παράγοντα γ

Παρόλο που η διαδρομή που εκτελούν πριν διασπαστούν είναι 660m,
η απόστασή τους από την επιφάνεια της γης θα συσταλεί σε 8000/15.8 = 506 < 660

Επομένως αρκετά μιόνια θα φθάσουν στην επιφάνεια της γης

- Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την ενέργεια των μιονίων από την σχέση:

$$E_\mu = \gamma m c^2 \;\Rightarrow E_\mu \sim 1.7 GeV$$

- Η ενέργεια αυτή δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλη, παρόλα αυτά εξαιτίας της μικρής τους μάζας τα σωματίδια κινούνται με ταχύτητα κοντά στην ταχύτητα του φωτός

- Τι συμβαίνει με τα πιόνια? Μπορούν να φθάσουν στη γη??

  Ο χρόνος ζωής τους είναι ~10^{-8}sec

  Ακόμα και να κινούμε με την ίδια ταχύτητα των μιονίων 0.998c,
  η απόσταση που θα καλύψουν είναι:

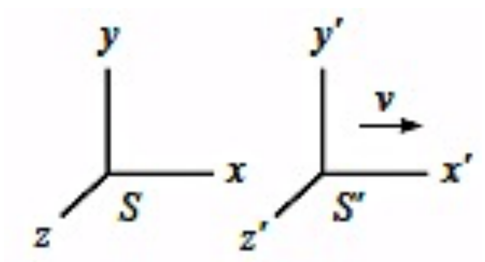
$$d_\mu \times \frac{\tau_\pi}{\tau_\mu} = 10800 \times \frac{10^{-8}}{10^{-6}} = 108m$$ δε φθάνουν στην γη

Μετασχηματισμοί Lorentz

Μπορούμε να συνδυάσουμε την συστολή του μήκους και την διαστολή του χρόνου σε γενικές εξισώσεις μετασχηματισμών μεταξύ συστημάτων αναφοράς

Οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι γνωστοί σαν μετασχηματισμοί Lorentz

Έστω δυο αδρανειακά συστήματα αναφοράς S και S', όπου το S' κινείται με σταθερή ταχύτητα v ως προς το S κατά μήκος του κοινού τους άξονα x/x'. Έστω ότι τα 2 συστήματα συμπίπτουν για t = 0



Η συστολή του μήκους μεταξύ των δυο συστημάτων $x - vt = \dfrac{x'}{\gamma}$

Θεωρώντας παρατηρητή στο σύστημα S' θα έχουμε: $\dfrac{x}{\gamma} = vt' + x'$

Απαλοίφουμε το x' μεταξύ των 2 εξισώσεων: $x = \gamma\left[\gamma\left(x - vt\right) + vt'\right]$

Λύνοντας ως προς t' έχουμε: $t' = \dfrac{x\left(1-\gamma^2\right)}{\gamma v} + \gamma t = \gamma\left[t + \dfrac{x}{v}\left(\dfrac{1}{\gamma^2} - 1\right)\right]$

Αλλά $\dfrac{1}{v}\left(\dfrac{1}{\gamma^2} - 1\right) = \dfrac{1}{v}\left(\left(1-\beta^2\right) - 1\right) = -\dfrac{\beta^2}{v} = -\dfrac{v}{c^2}$

$$\boxed{t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)}$$

Διευθύνσεις κάθετες στην κίνηση δεν επηρεάζονται από τους μετασχηματισμούς αυτούς :

Μετασχηματισμοί Lorentz

Οι μετασχηματισμοί Lorentz επομένως παίρνουν τη μορφή:

$$x' = \gamma\left(x - vt\right)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$v \to -v$$

$$x = \gamma\left(x' + vt'\right)$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$$

Κανόνας πρόσθεσης ταχυτήτων του Einstein

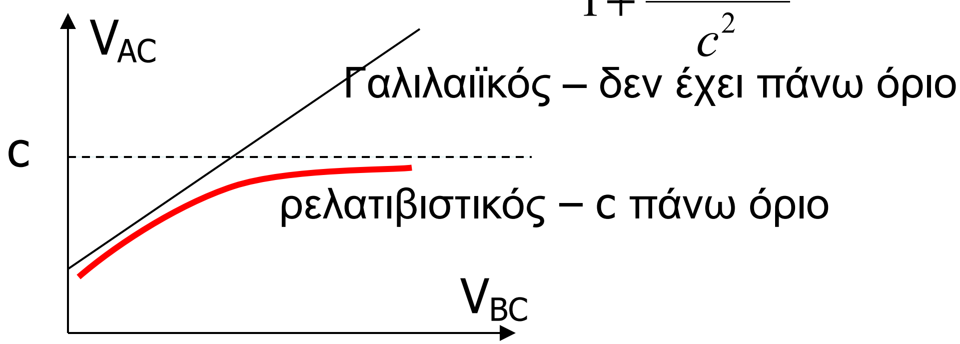
Έστω σωματίδιο P κινείται με ταχύτητα u στο S και u’ στο S’ (το οποίο κινείται με v ως προς S)

$$\left.\begin{aligned} dx' &= \gamma\left(dx - v\,dt\right) \\ dt' &= \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right) \end{aligned}\right\} u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma\left(dx - v\,dt\right)}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} \Rightarrow u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx/dt - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} \Rightarrow u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

Η εξίσωση αυτή γίνεται περισσότερο κατανοητή αν αλλάξουμε το συμβολισμό μας

$$V_{AB} \equiv u \qquad V_{AC} \equiv u' \qquad \Rightarrow v = V_{CB} = -V_{BC}$$

Οπότε θα έχουμε: $$V_{AC} = \frac{V_{AB} + V_{BC}}{1 + \frac{V_{AB}V_{BC}}{c^2}} \begin{cases} \xrightarrow{V_{AB},\,V_{BC} \ll c} V_{AC} \approx V_{AB} + V_{BC} & \text{Γαλιλαϊκός} \\ \xrightarrow{V_{AB}=c} V_{AC} \approx c & \text{ταχύτητα του φωτός ίδια σε όλα τα συστήματα} \end{cases}$$



Η πρόσθεση των ταχυτήτων γίνεται αρκετά μη γραμμική καθώς κάποια από τις 2 ταχύτητες πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός.

Τετραδιανύσματα

Σύμφωνα με τον Feynman, καλός συμβολισμός βοηθά στη λύση μαθηματικών και άρα φυσικής

Οι μετασχηματισμοί Lorentz και η σχετικιστική άλγεβρα γίνονται πιο απλά με την χρήση των τετραδιανυσμάτων, της μετρικής και συμβολισμό συναλλοίωτων/ανταλλοίωτων μεγεθών

Ένα συνηθισμένο διάνυσμα χωρικών συντεταγμένων συμβολίζεται με ένα διάνυσμα 3 συνιστωσών όπως r ή v η p

Στην STR έχουμε όπως είδαμε μίξη χωρικών και χρονικών συντεταγμένων.

Ορίζουμε το τετραδιάνυσμα – χρόνου – χώρου x^μ με μ=0,1,2,3

0:χρονοειδής συνιστώσα

1,2,3: χωροειδείς

$$x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \qquad \begin{aligned} x^0 &= ct \\ x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^3 &= z \end{aligned}$$

Με βάση τα παραπάνω, οι μετασχηματισμοί Lorentz γράφονται με την μορφή:

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

Πίνακας μετασχηματισμών Lorentz: **Λ**

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = 1\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

$\Lambda^\mu{}_\nu$ $\mu \longleftarrow$ γραμμές, $\nu \longleftarrow$ στήλες

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

Συμβολισμός αθροίσματος Einstrein

Βαθμωτό γινόμενο

Δεδομένων δυο 4-διανυσμάτων α^μ και b^μ ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο:

$$a \cdot b \equiv a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

Ο ορισμός κάνει το αποτέλεσμα αυτό αμετάβλητο κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz και ονομάζεται επίσης Lorentz βαθμωτό μέγεθος

Για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό και να αφαιρέσουμε τα «-» πρόσημα, εισάγουμε την μετρική $g_{\mu\nu}$

$$g = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix}$$ Ισχύει $g^{-1} = g$

Με την προηγούμενη μετρική μπορούμε να γράψουμε: $a \cdot b = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$

Συναλλοίωτα 4-διανύσματα:

ανταλλοίωτο

Μια διαφορετική προσέγγιση είναι να εισάξουμε συναλλοίωτα 4-διανύσματα: $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$

Εφόσον $g^{-1} = g$ ισχύει: $a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$

Επομένως: $a_0 = a^0 \quad a_1 = -a^1 \quad a_2 = -a^2 \quad a_3 = -a^3$

Μπορούμε να γράψουμε: $a \cdot b = a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$

$$a^2 = a \cdot a = \left(a^0\right)^2 - \vec{a} \cdot \vec{a}$$

Βαθμωτό γινόμενο - αποστάσεις

Δεδομένων δυο γεγονότων στα σημεία P_1 και P_2, το διάστημα μεταξύ τους θα είναι

$$\Delta x^{\mu} = \left(\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3\right) = \left(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z\right)$$

Παρατηρητές σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς θα διαφωνούν για τα 4-διανύσματα των θέσεων και του διαστήματος αλλά θα συμφωνούν για την απόσταση των δυο σημείων

$$\Delta s^2 = \Delta x^{\mu}\Delta x_{\mu} = \left(\Delta x^0\right)^2 - \left(\Delta x^1\right)^2 - \left(\Delta x^2\right)^2 - \left(\Delta x^3\right)^2 = \left(c\Delta t\right)^2 - \left(\Delta x\right)^2 - \left(\Delta y\right)^2 - \left(\Delta z\right)^2$$

➢ Μπορούμε να ρωτήσουμε τα ακόλουθα:

❑ Υπάρχει σύστημα αναφοράς που τα γεγονότα P_1 και P_2 συμβαίνουν ταυτόχρονα?

Στο σύστημα αυτό τότε Δt'=0 οπότε θα έχουμε:

$$\Delta s^2 = \left(c\Delta t\right)^2 - \left(\Delta x\right)^2 - \left(\Delta y\right)^2 - \left(\Delta z\right)^2 = -\left(\Delta x'\right)^2 - \left(\Delta y'\right)^2 - \left(\Delta z'\right)^2 \leq 0$$

Σύστημα στο οποίο δυο γεγονότα συμβαίνουν ταυτόχρονα μπορεί να υπάρξει μόνο αν: $\Delta s^2 \leq 0$ χωροειδής απόσταση

❑ Υπάρχει σύστημα αναφοράς που τα γεγονότα P_1 και P_2 συμβαίνουν στην ίδια θέση?

Στο σύστημα αυτό τότε Δx'=Δy'=Δz'=0 οπότε θα έχουμε:

$$\Delta s^2 = \left(c\Delta t\right)^2 - \left(\Delta x\right)^2 - \left(\Delta y\right)^2 - \left(\Delta z\right)^2 = \left(c\Delta t'\right)^2 \geq 0$$

Σύστημα στο οποίο δυο γεγονότα συμβαίνουν στην ίδια θέση μπορεί να υπάρξει μόνο αν: $\Delta s^2 \geq 0$ χρονοειδής απόσταση

Αφού η απόσταση είναι αναλλοίωτη ποσότητα, τότε σε όλα τα συστήματα Lorentz θα ισχύει

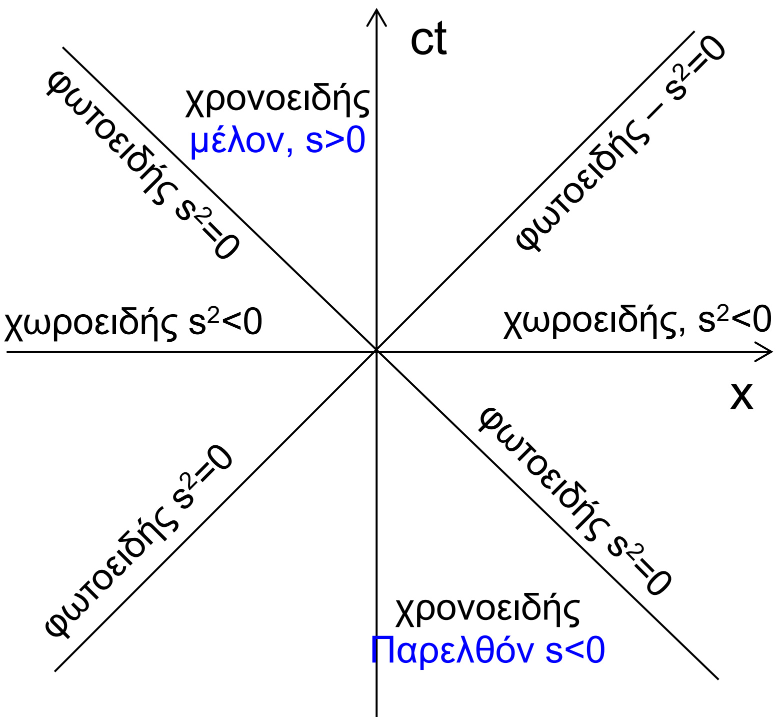
είτε $\Delta s^2 \geq 0$ ή $\Delta s^2 \leq 0$ Θα πρέπει να προσθετεί και η περίπτωση 2 γεγονότων συνδεόμενα με σήμα φωτός και $\Delta s^2 = 0$

Κώνος φωτός

Θεωρώντας όλα τα δυνατά γεγονότα ως προς δεδομένο γεγονός το οποίο τοποθετούμε στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Η απόσταση από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων θα είναι:

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Κατασκευάζουμε το γράφημα δυο συντεταγμένων (t,x):



s=0: Σύνδεση γεγονότων με την αρχή του συστήματος μέσω σημάτων φωτονίων μόνο

$s^2>0$: Σύνδεση γεγονότων με την αρχή του συστήματος μέσω σημάτων που κινούνται με ταχύτητες < c

Δύο περιπτώσεις:

s<0: Παρελθόν Γεγονός εμφανίζεται πριν το 0

s>0: Μέλον Γεγονός εμφανίζεται μετά το 0

Αφού το s^2 είναι αναλλοίωτο, δεν μπορεί να υπάρξει μετασχηματισμός από s<0 σε s>0
Οι μετασχηματισμοί απαρτίζουν μια συνεχή, συνεκτική ομάδα

$s^2<0$: Δεν μπορεί να υπάρχει επικοινωνία/αλληλεπίδραση μεταξύ 0 και του γεγονότος

Τανυστές – 2ης και μεγαλύτερης τάξης

Έστω έχουμε την περίπτωση:

$$\left.\begin{aligned} s'^{\mu\nu} &= \Lambda^{\mu}{}_{k}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}s^{k\sigma} \\ t'^{\mu\nu\lambda} &= \Lambda^{\mu}{}_{k}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\Lambda^{\lambda}{}_{\tau}t^{k\sigma\tau} \end{aligned}\right\}$$

Κάθε δείκτης απαιτεί ένα πίνακα μετασχηματισμού Λ

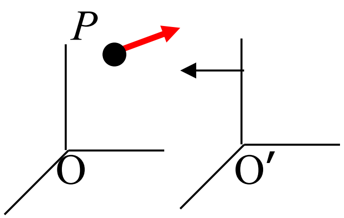
Μπορούμε να κατασκευάσουμε μεικτούς τανυστές με χρήση της μετρικής:

$$s^{\mu}_{\nu} = g_{\nu\lambda}s^{\mu\lambda} \qquad s_{\mu\nu} = g_{\mu k}g_{\nu\lambda}s^{k\lambda}$$

O $a^{\mu}b^{\nu}$ είναι τανυστής 2ης τάξης ενώ ο $a^{\mu}t^{\mu\lambda\sigma}$ είναι τανυστής 4ης τάξης και ο s^{μ}_{μ} βαθμωτός

Ενέργεια και ορμή

Έστω ότι ένα σωματίδιο βρίσκεται σε κίνηση ως προς ένα αριθμό αδρανειακών συστημάτων



Στο σύστημα αναφοράς του σωματιδίου, ο χρόνος ονομάζεται ιδιόχρονος ή proper time

Ως προς οποιοδήποτε άλλο σύστημα ο χρόνος αυτός είναι μεγαλύτερος κατά τον παράγοντα γ-Lorentz $dt = \gamma\tau$

Ο ιδιόχρονος αποτελεί βαθμωτό μέγεθος Lorentz, δηλαδή όλοι οι παρατηρητές θα υπολογίσουν τον ίδιο ιδιόχρονο.

Σε αναλογία με τον ιδιόχρονο μπορούμε να ορίσουμε την ιδιο-ταχύτητα ή proper velocity: $\vec{\eta} = \dfrac{d\vec{x}}{d\tau}$

Το πλεονέκτημα της χρήσης της ιδιοταχύτητας είναι ότι μόνο ο αριθμητής μετασχηματίζεται με μετασχηματισμούς Lorentz (ο παρονομαστής είναι βαθμωτό)

σε αντίθεση με την κανονική ταχύτητα: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{x}}{dt}$ που παρουσιάζει πολύπλοκη μορφή λόγω Lorentz μετασχηματισμών τόσο στον αριθμητή όσο και στον παρονομαστή

Γράφοντας την ιδιοταχύτητα σε μορφή 4-διανύσματος: $\eta^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$

Οι συνιστώσες θα είναι: $\eta^0 = \dfrac{dx^0}{d\tau} = \dfrac{d(ct)}{1/\gamma\, dt} \Rightarrow \eta^0 = \gamma c$ και το χωρικό μέρος: $\vec{\eta} = \dfrac{d\vec{x}}{1/\gamma\, dt} = \gamma\vec{v}$

Επομένως γράφουμε: $\eta^\mu = \gamma\left(c, v_x, v_y, v_z\right)$

Ελέγχουμε: $\eta_\mu \eta^\mu = \gamma^2\left(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2\right) = \gamma^2 c^2\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right) = \dfrac{\gamma^2 c^2}{\gamma^2} = c^2$ αναλλοίωτη ποσότητα όπως αναμένουμε

Ορμή

Από την στιγμή που ορίσαμε την ιδιο-ταχύτητα μπορούμε να ορίσουμε την ορμή: $\vec{p} = m\vec{\eta}$

Μπορούμε να την γράψουμε με την μορφή 4-διανύσματος σύμφωνα με την εξίσωση: $p^\mu = m\eta^\mu$

Στην περίπτωση αυτή: $p^0 = \gamma mc$ και η χωρική συνιστώσα: $\vec{p} = \gamma m\vec{v} = \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \gamma mc\vec{\beta}$

Ενέργεια

Η ενέργεια μπορεί να γραφεί με την μορφή: $E = \gamma mc^2 = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ δηλαδή: $E = p^0 c$

Επομένως η ενέργεια και το 3-διάνυσμα της ορμής αποτελούν το 4-διάνυσμα της ενέργειας-ορμής:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right)$$ που ουσιαστικά είναι το 4-διάνυσμα της ορμής

Το βαθμωτό μέγεθος, γινόμενο: $p^\mu p_\mu = \dfrac{E^2}{c^2} - \left|\vec{p}\right|^2 = \dfrac{m^2c^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} - \dfrac{m^2v^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = \dfrac{m^2c^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right) = m^2c^2$

Η ποσότητα $p^\mu p_\mu = m^2c^2$ είναι επομένως αναλλοίωτη όπως και θα έπρεπε

Για ταχύτητες $v \ll c$ μπορούμε να αναπτύξουμε κατά Taylor την σχέση $E = \gamma mc^2$ και θα έχουμε:

$$E = mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \cdots\right) \Rightarrow E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \cdots$$

ενέργεια
μάζας ηρεμίας

Κλασική Κ.Ε.

Η σχετικιστική κινητική ενέργεια θα είναι επομένως: $T \equiv mc^2(\gamma - 1) = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{3}{8}m\dfrac{v^4}{c^2} + \cdots$

Σχετικιστική ενέργεια

Προσοχή: Ο όρος σχετικιστική μάζα προκαλεί συγχύσεις και θα πρέπει να αποφεύγεται

Κάποιος μπορεί να έλεγε ότι: $m_{rel} \equiv \gamma m$

Αυτό ωστόσο είναι: $m_{rel} \equiv E/c^2$ οπότε δεν χρειάζεται να οριστεί κάτι

Επομένως όταν μιλάμε για μάζα θα εννοούμε την μάζας ηρεμίας του σωματιδίου

Σωματίδια με μηδενική μάζα ηρεμίας:

Τα σωματίδια αυτά κινούνται με την ταχύτητα του φωτός, $v = c$

Η σχέση Ενέργειας – ορμής δίνει: $E = |\vec{p}|c$

Για την ενέργεια ενός φωτονίου έχουμε από QM: $E = h\nu$

βρίσκουμε το μήκος κύματος

Έχουμε: $E = h\frac{c}{\lambda} = |\vec{p}|c \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p}$ μήκος κύματος deBroglie

Για άμαζα σωματίδια, $p^{\mu} p_{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - p^2 \equiv 0$ φωτοειδές

Μετασχηματισμοί Lorentz Ενέργειας - ορμής

Το 4-διάνυσμα της ορμής μετασχηματίζεται όπως το διάνυσμα της θέσης

Θεωρώντας μια ώθηση κατά μήκος του x-άξονα, οι Ενέργεια και ορμή θα μετασχηματιστούν:

$E' = \gamma\left(E - \frac{v}{c} p_x c\right)$ και $p'_x c = \gamma\left(p_x c - \frac{v}{c} E\right)$ ενώ: $p'_y = p_y$ και $p'_z = p_z$

$$E' = \gamma\left(E - \beta p_x c\right)$$
$$p'_x c = \gamma\left(-\beta E + p_x c\right)$$
$$p'_y = p_y$$
$$p'_z = p_z$$