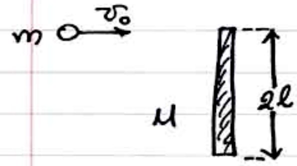
ΦΥΣ. 131
ΕΡΓΑΣΙΑ # 9

1. Μια σανίδα μήκους 2l και μάζας M βρίσκεται πάνω σε μια λεία επιφάνεια. Μια μπάλα μάζας m που κινείται με ταχύτητα υ_0 χτυπά το ένα άκρο της σανίδας. Να βρεθεί η τελική ταχύτητα της μπάλας, υ_f, υποθέτοντας ότι η μηχανική ενέργεια διατηρείται και ότι η υ_f είναι κατά μήκος της αρχικής διεύθυνσης κίνησης. (β) Βρείτε την υ_f υποθέτοντας ότι η σανίδα περιστρέφεται γύρω από το άκρο της το οποίο δεν χτυπήθηκε από την μπάλα.



Υποθέτουμε ότι η σύγκρουση είναι ελαστική και ότι $\vec{\upsilon}_f = -\upsilon_f\hat{x}$. Θέλουμε την υ_f

Από διατήρηση της ορμής και ενέργειας έχουμε:

$P_i = P_f \Rightarrow m\upsilon_0 = -m\upsilon_f + MV_f$ (1)

$I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_{CM} = \frac{1}{12}M(2l)^2 \Rightarrow$

$\boxed{I_{CM} = \frac{1}{3}Ml^2}$

$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_f^2 + \underbrace{\frac{1}{2}MV_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2}_{\text{κινητική ενέργεια σανίδας}}$ (2)

Αφού δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές που δρουν στο σύστημα σανίδας–μπάλας, η στροφορμή διατηρείται, οπότε:

$$L_i = L_f \xRightarrow{\text{ως προς CM της σανίδας}} m\upsilon_0\left(\frac{\cancel{2}l}{\cancel{2}}\right) = -m\upsilon_f\left(\frac{\cancel{2}l}{\cancel{2}}\right) + I\omega_f \quad (3)$$

Επομένως έχουμε τρεις εξισώσεις και 3 αγνώστους (υ_f, V_f κ ω)

Από την (3) λύνοντας ως προς ω_f έχουμε: $\omega_f = \frac{ml(\upsilon_0+\upsilon_f)}{I}$

Από την (1) λύνοντας ως προς V_f έχουμε: $V_f = \frac{m}{M}(\upsilon_0+\upsilon_f)$

Επομένως αντικαθιστούμε στη (2) και λύνουμε ως προς υ_f

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon_f^2 + \frac{1}{2}\cancel{M}\frac{m^2}{M^{\cancel{2}}}(\upsilon_0+\upsilon_f)^2 + \frac{1}{2}\cancel{I}\left[\frac{ml^2}{I^{\cancel{2}}}(\upsilon_0+\upsilon_f)^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}\upsilon_f^2 + \frac{m}{M}(\upsilon_0+\upsilon_f)^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^{\cancel{2}}}{\frac{1}{3}Ml^{\cancel{2}}}(\upsilon_0+\upsilon_f)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}\upsilon_f^2 + \frac{1m}{2M}(\upsilon_0+\upsilon_f)^2 + \frac{3}{2}\frac{m}{M}(\upsilon_0+\upsilon_f)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}\upsilon_f^2 + \frac{4}{2}\frac{m}{M}(\upsilon_0+\upsilon_f)^2 \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}\upsilon_0^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\upsilon_f^2 + \frac{4}{\cancel{2}}\frac{m}{M}(\upsilon_0^2+\upsilon_f^2+2\upsilon_0\upsilon_f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M\upsilon_0^2 = M\upsilon_f^2 + 4m\upsilon_0^2 + 4m\upsilon_f^2 + 4m\upsilon_0\upsilon_f \Rightarrow (M+4m)\upsilon_f^2 + 8m\upsilon_0\upsilon_f + (4m-M)\upsilon_0^2$$

$$\Rightarrow \upsilon_f = \frac{-8m\upsilon_0 \pm \sqrt{64m^2\upsilon_0^2 - 4[(4m)^2-M^2]\upsilon_0^2}}{\cancel{2}(M+4m)} = \frac{-8m\upsilon_0 \pm \sqrt{4M^2\upsilon_0^2}}{2(M+4m)} = \frac{-\cancel{8}^{4}m\upsilon_0 \pm \cancel{2}M\upsilon_0}{\cancel{2}(M+4m)}$$

$$\Rightarrow v_f = \frac{-4mv_0 \pm Mv_0}{(M+4m)} \Rightarrow v_f = \begin{cases} \dfrac{(M-4m)}{M+4m} v_0 \\ -\left(\dfrac{M+4m}{M+4m}\right) v_0 \end{cases}$$

Απορρίπτεται γιατί v_f είναι αντίθετο της $\vec{v}_f$

Οπότε : $\boxed{v_f = \frac{M-4m}{M+4m} v_0}$

για $M \to \infty$ $v_f = v_0$ και για $M \to 0 \Rightarrow \underbrace{v_f = -v_0}_{\vec{v}_f = -(-v_0)x = v_0 x}$

άρα: $\vec{v}_f = -v_0 \hat{x}$ ανάκλαση

(β) Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει καθαρή μεταφορική ενέργεια της σανίδας. Όλη η ενέργεια πηγαίνει στο να κάνει τη ράβδο να περιστραφεί γύρω από το άλλο άκρο της.
Υπάρχει ωστόσο ένα επιπλέον πρόβλημα. Τώρα έχουμε 2 αγνώστους (v_f και ω_f). Άρα μια από τις 3 εξισώσεις δεν ισχύει. Στην περίπτωση αυτή ωστόσο δεν πρέπει να χρησιμοποιήσουμε διατήρηση της ορμής γιατί το σημείο περιστροφής εξασκεί μια άγνωστη δύναμη, αλλά επειδή το σημείο αυτό βρίσκεται στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων δεν εξασκεί καμιά ροπή.

Άρα: $E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ως προς το άκρο}}}{I_A} \omega_f^2$

$$L_f = L_i \Rightarrow m v_0 (2\ell) = -m v_f 2\ell + I_A \omega_f^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_f^2 = \frac{2m\ell(v_0+v_f)}{I_A}$$

$$I_A = I_{cm} + M\ell^2 = \frac{1}{3} M\ell^2 + M\ell^2 = \frac{4}{3} M\ell^2$$

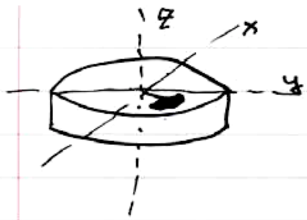
$$\Rightarrow \cancel{\tfrac{1}{2}} \cancel{m} v_0^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}} \cancel{m} v_f^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} \frac{\cancel{4} m^{\cancel{2}} \cancel{\ell^2} (v_0+v_f)^2}{\frac{\cancel{4}}{3} M \cancel{\ell^2}} \Rightarrow v_0^2 = v_f^2 + \frac{3m}{M}(v_0+v_f)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M v_0^2 = M v_f^2 + 3m v_0^2 + 3m v_f^2 + 6m v_0 v_f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (M+3m) v_f^2 + 6m v_0 v_f + (3m-M) v_0^2 = 0 \Rightarrow v_f = \frac{-6mv_0 + \sqrt{36m^2v_0^2 - 4(9m^2 - M^2)v_0^2}}{2(M+3m)}$$

$$\Rightarrow v_f = \frac{-\cancel{6}^{3} m v_0 + \cancel{2} M v_0}{\cancel{2}(M+3m)} \Rightarrow \boxed{v_f = \frac{M-3m}{M+3m} v_0}$$

2. Ένας κλόουν η μάζα του οποίου είναι 100.0kg ανεβαίνει στην εξωτερική περιφέρεια ενός δίσκου ακτίνας 20.0m και μάζας 2000kg. Υποθέστε ότι ο δίσκος είναι στερεωμένος σε ένα λείο κατακόρυφο άξονα και αρχικά είναι σε ηρεμία. Αν ο κλόουν αρχίζει να τρέχει πάνω στο δίσκο κατά μήκος της εξωτερικής περιφέρειας και με φορά αυτή των δεικτών του ρολογιού και ταχύτητα υ=2.0m/s, πόσο γρήγορα γυρνά ο δίσκος και ποια είναι η στροφορμή του; ($I_{CM}^{\delta\iota\sigma\kappa o\upsilon} = \frac{1}{2}MR^2$)



Απο τη στιγμή που δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές που ασκούνται στο σύστημα κλόουν-δίσκος μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής.

Αρχικά η στροφορμή του συστήματος είναι μηδέν (πριν ανέβει ο κλόουν στο δίσκο). Επομένως και αφού ανέβει στο δίσκο η στροφορμή πρέπει να παραμένει μηδέν

$$\vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{\delta\iota\sigma\kappa o\upsilon} + \vec{L}_{\kappa\lambda} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{\delta\iota\sigma\kappa} = -\vec{L}_{\kappa\lambda}$$

Η τελευταία εξίσωση μας λέει ότι τα μέτρα των 2 στροφορμών είναι ίσα αλλά έχουν αντίθετη φορά. Επειδή ο κλόουν τρέχει προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού, ο δίσκος θα περιστρέφεται αντίθετα της φοράς των δεικτών.

Αν υποθέσουμε ότι ο κλόουν μπορεί να αναπαρασταθεί σαν υλικό σημείο η στροφορμή του κλόουν ως προς τον άξονα περιστροφής θα είναι:

$$\vec{L}_{\kappa\lambda} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Επειδή ο κλόουν τρέχει πάνω σε κυκλική περιφέρεια ακτίνας r, η ταχύτητά του είναι κάθετη στην ακτίνα οπότε

$$L_{\kappa\lambda} = m r \upsilon_{\kappa\lambda} = 100 \cdot 20 \cdot 2 = 4{,}000$$

Αυτό είναι και το μέτρο της στροφορμής του δίσκου.
Αλλά ξέρουμε ότι:

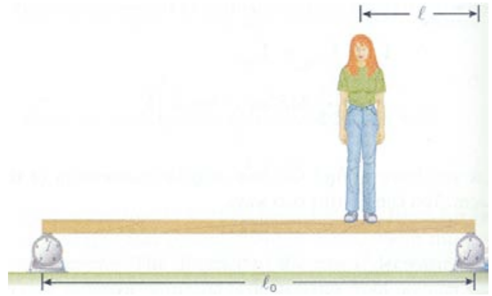
$|\vec{L}_\delta| = I_\delta \omega_\delta$ όπου I_δ: η ροπή αδράνειας του δίσκου
ω_δ: η γωνιακή ταχύτητα.

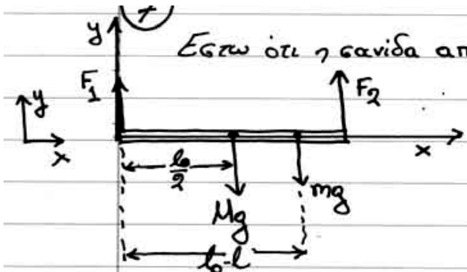
$$\Rightarrow \omega_\delta = \frac{|\vec{L}_{\kappa\lambda o\acute{o}\upsilon\nu}|}{I_\delta}$$

Η μόνη άγνωστη μεταβλητή μας είναι η ροπή αδράνειας του δίσκου I_δ.
Αλλά μας δίνεται ότι $I_\delta = \frac{1}{2}MR^2$

Οπότε: $\omega_\delta = \frac{\overset{4}{\cancel{4{,}000}}}{\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2000}\,20^2} = \frac{4}{400} = \boxed{0.01 \text{ rad/sec}}$ Η γραμμική ταχύτητα $\boxed{\upsilon = \omega R = 20 \cdot 0.01 = 0.2}$

3. Μια ξύλινη σανίδα μάζας M και μήκους l_0 στηρίζεται σε δύο ζυγαριές που είναι τοποθετημένες στα δυο άκρα της. Ένα άτομο μάζας m βρίσκεται ακίνητο πάνω στη σανίδα και σε απόσταση l από το ένα άκρο της όπως στο σχήμα. Η σανίδα και το άτομο είναι σε ισορροπία. Ποιο είναι το μέγεθος της δύναμης που εξασκεί κάθε ζυγαριά πάνω στη σανίδα;





Έστω ότι η σανίδα αποτελεί το σύστημα. Οι δυνάμεις στο σύστημα είναι:

(α) Η δύναμη του ατόμου πάνω στη σανίδα που είναι ίση με το βάρος του ατόμου. mg

(β) Το βάρος της σανίδας Mg

(γ) Οι αντιδράσεις F_1 και F_2 των δύο ζυγαριών στη σανίδα

Χρησιμοποιούμε το σύστημα συντεταγμένων του σχήματος, παίρνοντας σαν αρχή του συστήματος το ένα άκρο της σανίδας. Η επιλογή αυτή γίνεται για να μηδενίσουμε τη ροπή μιας από τις άγνωστες δυνάμεις αφού το σημείο εφαρμογής της θα περνά από τον άξονα περιστροφής.

Η πρώτη συνθήκη ισορροπίας: $\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow F_1\hat{j}+F_2\hat{j}-Mg\hat{j}-mg\hat{j}=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_1+F_2=(M+m)g \qquad (1)$$

Η εξίσωση αυτή δεν είναι αρκετή για τη λύση του προβλήματος, αφού έχουμε 2 άγνωστες δυνάμεις F_1 και F_2.

Η δεύτερη συνθήκη ισορροπίας λέει ότι: $\Sigma\vec{\tau}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{\tau}_{F_1}+\vec{\tau}_{F_2}+\vec{\tau}_{Mg}+\vec{\tau}_{mg}=0$ αλλά η ροπή της F_1 είναι μηδέν λόγω επιλογής του συστήματος συντεταγμένων: $\vec{\tau}_{F_1}=0$

Η ροπή του ατόμου θα είναι: $\vec{\tau}_{mg}=(l_0-l)\hat{i}\times(-mg)\hat{j} \Rightarrow \vec{\tau}_{mg}=-(l_0-l)mg\,\hat{k}$

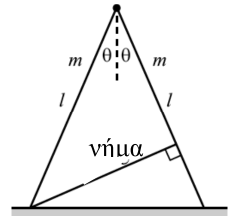
Η ροπή του βάρους της σανίδας: $\vec{\tau}_{Mg}=\frac{l_0}{2}\hat{i}\times(-Mg)\hat{j} \Rightarrow \vec{\tau}_{Mg}=-\frac{l_0}{2}Mg\,\hat{k}$

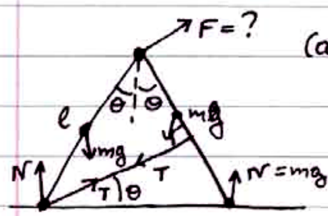
Η ροπή της δύναμης F_2 είναι: $\vec{\tau}_{F_2}=l_0\hat{i}\times(F_2)\hat{j} \Rightarrow \vec{\tau}_{F_2}=l_0F_2\,\hat{k}$

$$\Rightarrow 0+l_0F_2-(l_0-l)mg-\frac{l_0}{2}Mg=0 \Rightarrow \boxed{F_2=\frac{(l_0-l)mg+\frac{l_0}{2}Mg}{l_0}}$$

Από (1) $\Rightarrow F_1=(m+M)g-F_2 \Rightarrow \boxed{F_1=\frac{l}{l_0}mg+\frac{Mg}{2}}$

4. Δύο ράβδοι κάθε μια μήκους l και μάζας m συνδέονται με ένα λείο μεντεσέ. Και οι δυο σχηματίζουν γωνία θ με την κατακόρυφη διεύθυνση. Ένα αβαρές νήμα συνδέει το κάτω άκρο της αριστερής ράβδου με την δεξιά ράβδο ακριβώς κάθετα, όπως δείχνει το σχήμα. Όλο το σύστημα στέκεται σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια. (α) Ποια η τάση στο νήμα. (β) Τι δύναμη εξασκεί η αριστερή ράβδος στην δεξιά ράβδο στο σημείο επαφής τους;





(α) Εξετάζοντας τις ροπές όλου του συστήματος ως προς το μεντεσέ, βλέπουμε ότι οι κάθετες δυνάμεις στα κάτω άκρα κάθε ράβδου είναι ίσες.

Από $\Sigma F_y = 0$ για όλο το σύστημα σημαίνει ότι οι κάθετες αντιδράσεις είναι mg

Οι ροπές στη δεξιά μόνο ράβδο ως προς το μεντεσέ:

$$mg\frac{l}{2}\sin\theta + Tl\cos 2\theta = mgl\sin\theta \Rightarrow \boxed{T = \frac{mg\sin\theta}{2\cos 2\theta}}$$

(β) Εξετάζουμε τις δυνάμεις στη δεξιά ράβδο:

Η κάθετη δύναμη N εξισορροπεί τη δύναμη της βαρύτητας

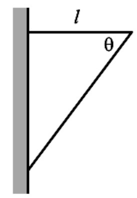
Επομένως η δύναμη F πρέπει να εξισορροπεί τη τάση από το νήμα, μια και αυτές είναι οι υπόλοιπες 2 δυνάμεις που ασκούνται στη δεξιά ράβδο.

Επομένως $F = T$ (ίσες και αντίθετες)

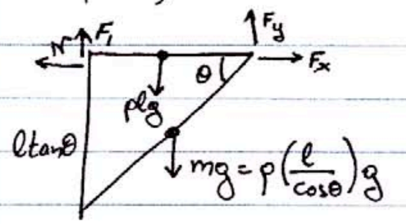
Από το (α) υποερώτημα $\Rightarrow$ $F = \frac{mg\sin\theta}{2\cos 2\theta}$ και έχει

διεύθυνση προς τα πάνω και σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση.

5. Δύο ράβδοι συνδέονται μεταξύ τους με μεντεσέδες και με ένα τοίχο όπως φαίνεται στο σχήμα. Η γωνία μεταξύ των ραβδών είναι θ και κάθε ράβδος έχει την ίδια γραμμική πυκνότητα ρ, ενώ η οριζόντια ράβδος έχει μήκος *l*. Να βρεθεί η δύναμη (να δωθούν η οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της) που ασκεί η χαμηλότερη ράβδος στην οριζόντια ράβδο.



Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται (διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος):



Όπως φαίνεται στο σχήμα, χρησιμοποιώ τη γενική περίπτωση όπου δεν ξέρουμε αν η δύναμη που ζητούμε είναι στη διεύθυνση ~~της~~ της χαμηλότερης ράβδου. Σχεδιάζω επομένως τις 2 συνιστώσες της.

Οι συνθήκες ισορροπίας: (οριζόντια ράβδος)

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_1 + F_y = mg \Rightarrow F_1 + F_y = \rho l g$$

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow F_1\left(\frac{l}{2}\right) - F_y\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \Rightarrow F_1 \frac{l}{2} = F_y \frac{l}{2} \Rightarrow F_1 = F_y$$

$$\Rightarrow \boxed{F_y = \frac{\rho l g}{2}}$$

(ως προς το κέντρο της ράβδου)

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{N = F_x} \quad (A)$$

$\Sigma \tau$ για όλο το σύστημα. Θεωρώ το σημείο επαφής της χαμηλότερης ράβδου με τον τοίχο.

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow N(\cancel{l}\tan\theta) = \rho \cancel{l} g\left(\frac{l}{2}\right) + \frac{\rho l g}{\cos\theta}\left(\frac{l}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = \frac{\rho l g}{2}\left[1 + \frac{1}{\cos\theta}\right]\frac{1}{\tan\theta} \Rightarrow \boxed{N = \frac{\rho l g}{2}\left[\frac{1}{\tan\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\right]}$$

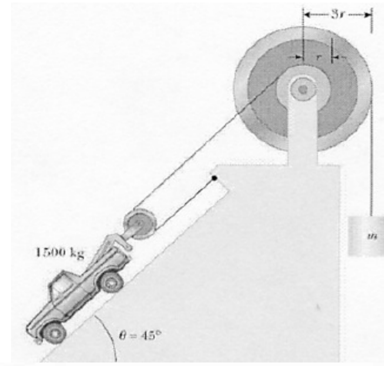
Αλλά από (A) $N = F_x \Rightarrow$

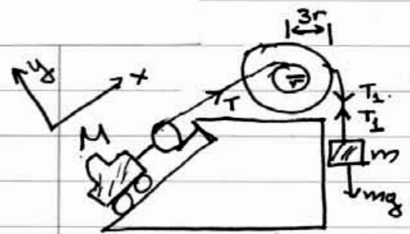
$$\boxed{F_x = \frac{\rho l g}{2}\left[\frac{1}{\tan\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\right]}$$

για $\theta \to 0 \Rightarrow F_x = \infty$

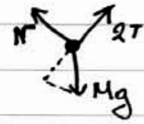
$\theta \to 90^\circ \Rightarrow F_x = \frac{\rho l g}{2}$

6. Βρείτε τη μάζα m του αντίβαρου που χρειάζεται ώστε το φορτηγάκι του σχήματος μάζας 1500kg να ισορροπεί στο κεκλιμένο επίπεδο. Υποθέστε ότι οι τροχαλίες είναι αβαρείς και δεν εμφανίζουν τριβές.





Αφού το σύστημα ισορροπεί, η συνισταμένη των δυνάμεων στο φορτηγάκι πρέπει να είναι μηδέν



Η τάση είναι $2T$ θεωρώντας ότι κάθε σχοινί που βρίσκεται δεξιά και αριστερά της τροχαλίας που κρατά το φορτηγάκι έχουν τάση T

Θεωρώ το σύστημα συντεταγμένων του σχήματος. Από το 2ο νόμο του Newton

$$\Sigma F_x = 2T - Mg\sin\theta = 0 \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} Mg\sin\theta} \qquad (1)$$

Οι ροπές στην τροχαλία πρέπει να έχουν συνισταμένη μηδέν για να ικανοποιείται η δεύτερη συνθήκη στατικής ισορροπίας:
Οι δυνάμεις που προκαλούν ροπή στην τροχαλία είναι η τάση του νήματος T που έχει μοχλοβραχίονα r ως προς το κέντρο της τροχαλίας και η τάση του νήματος T_1 με μοχλοβραχίονα $3r$ ως προς το κέντρο της τροχαλίας. Η τάση $T_1 = mg$ εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Newton στο αντίβαρο το οποίο πρέπει επίσης να ισορροπεί.
Η ροπή της T_1 είναι με φορά αυτή των δεικτών του ρολογιού ενώ η T έχει ροπή με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού

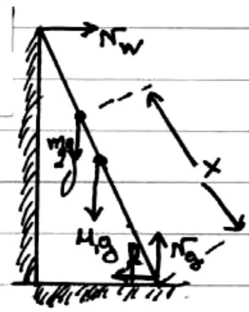
$$\Sigma \vec{\tau} = 0 \Rightarrow T\cdot r - T_1 \cdot 3r = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{1}{2} M\cancel{g}\sin\theta \cancel{r} = m\cancel{g}3\cancel{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} M\sin\theta = 3m \Rightarrow m = \frac{1}{6} M\sin\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{6}(1500)\sin 45^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m = 177\,kg}$$

7. Μια ομοιογενής σκάλα μήκους L και μάζας m_1 είναι στηρίζεται ακίνητη σε ένα λείο τοίχο. Η σκάλα σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντιο διεύθυνση. (α) Βρείτε τις οριζόντιες και κατακόρυφες δυνάμεις που ασκεί το έδαφος στην βάση της σκάλας όταν ένας πυροσβέστης μάζας m_2 βρίσκεται πάνω στη σκάλα και σε απόσταση x από τη βάση της. (β) Αν η σκάλα είναι στο σημείο που ετοιμάζεται να ολισθήσει όταν ο πυροσβέστης βρίσκεται σε απόσταση d από τη βάση, ποιος είναι ο συντελεστής της στατικής τριβής μεταξύ του εδάφους και της σκάλας;



Οι δυνάμεις στη βάση της σκάλας είναι η αντίδραση N_g κ η τριβή f

(α) Οι συνθήκες στατικής ισορροπίας είναι:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \qquad \Sigma \vec{\tau} = 0.$$

Η πρώτη συνθήκη δίνει:

$$\Sigma F_x = f - N_W = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = N_g - m_1 g - m_2 g = 0 \qquad (2)$$

Η δεύτερη συνθήκη, θεωρώντας τις ροπές των δυνάμεων ως προς τη βάση της σκάλας:

$$\Sigma \vec{\tau} = 0 \Rightarrow -m_1 g \frac{L}{2}\cos\theta - m_2 g\, x\cos\theta + N_W L\sin\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_W = \left(\frac{1}{2} m_1 g + \frac{x}{L} m_2 g\right)\cot\theta \overset{(1)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} f &= \left(\frac{1}{2} m_1 g + \frac{x}{L} m_2 g\right)\cot\theta \overset{(2)}{\Rightarrow} \\ N_g &= m_1 g + m_2 g \end{aligned}}$$

οι δυνάμεις που αναπτύσσονται από το έδαφος στη σκάλα

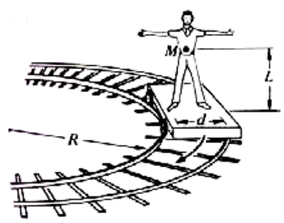
(β) Αν η σκάλα είναι έτοιμη να γλιστρήσει τότε $f = \mu N_g$

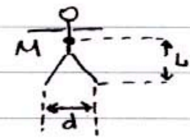
οπότε αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα του (α) σκέλους έχουμε:

$$\left(\frac{1}{2} m_1 g + \frac{x}{L} m_2 g\right)\cot\theta = \mu\,(m_1 g + m_2 g) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = \frac{\left(\frac{1}{2} m_1 g + \frac{x}{L} m_2 g\right)\cot\theta}{m_1 g + m_2 g}}$$

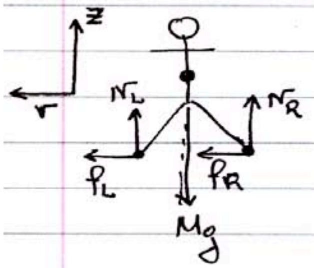
8. Ένας άντρας μάζας M στέκεται σε ένα βαγόνι τρένου το οποίο κινείται σε μια οριζόντια κυκλική τροχιά ακτίνας R με ταχύτητα υ. Το κέντρο μάζας του ατόμου βρίσκεται σε ύψος L από το δάπεδο του βαγονιού ενώ κρατά τα πόδια του ανοικτά και σε απόσταση d μεταξύ τους (όπως στο σχήμα). Ο άντρας έχει προσανατολισμό ώστε να βλέπει προς τη φορά της κίνησης. Πόσο βάρος βρίσκεται σε κάθε πόδι του;





Ο άντρας στέκεται στο βαγόνι το οποίο κινείται με ταχύτητα υ σε μια στροφή ακτίνας R

Το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος θα είναι:



Από τη στιγμή που κινείται σε κυκλική τροχιά, η συνισταμένη δύναμη που εφαρμόζεται στην ακτινική διεύθυνση θα είναι η κεντρομόλος, δηλαδή:

$$\sum_r F_r = M\alpha_r = M\alpha_\kappa = M\frac{\upsilon^2}{R} \quad (1)$$

αλλά $\sum_r F_r = f_L + f_R \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{f_L + f_R = M\frac{\upsilon^2}{R}}$ (2)

Στη z-διεύθυνση δεν έχει επιτάχυνση και επομένως: $\sum F_z = 0 \Rightarrow \boxed{Mg = N_L + N_R}$ (A)

Επίσης δεν περιστρέφεται και επομένως η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών ως προς το ΚΜ του θα είναι μηδέν:

$$\sum \tau = I\alpha = 0 \Rightarrow \frac{d}{2}N_R - \frac{d}{2}N_L - L(f_R + f_L) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_R - N_L = 2\frac{L}{d}(f_L + f_R) \quad (3)$$

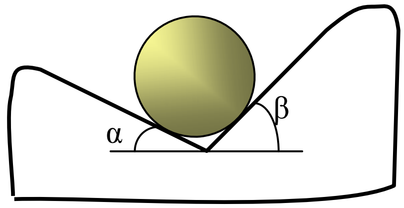
από την (2) $\Rightarrow N_R - N_L = 2\frac{L}{d}M\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow$

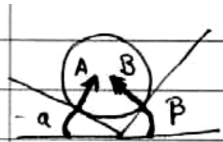
από την (A) $\Rightarrow N_R - (Mg - N_R) = 2\frac{L}{d}M\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow$

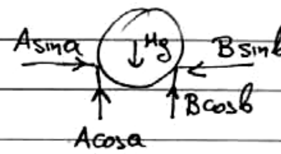
$$\Rightarrow 2N_R = Mg + 2\frac{L}{d}M\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{N_R = \frac{Mg}{2} + \frac{L}{d}M\frac{\upsilon^2}{R}} \quad \kappa \quad \boxed{N_L = \frac{Mg}{2} - \frac{L}{d}M\frac{\upsilon^2}{R}}$$

9. Μια συμπαγής σφαίρα ακτίνας R και μάζας M είναι τοποθετημένη σε ένα αυλάκι όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Οι εσωτερικές επιφάνειες του αυλακιού δεν παρουσιάζουν τριβές. Προσδιορίστε τις δυνάμεις που ασκεί το αυλάκι στη σφαίρα στα δύο σημεία επαφής.







Ονομάζουμε τις κάθετες δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα από το αυλάκι σαν A και B. Σχηματίζουν γωνίες a και b με την κατακόρυφο.

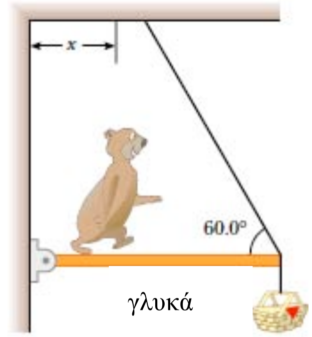
$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow A\sin a - B\sin b = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A\cos a + B\cos b - Mg = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow B = A\frac{\sin a}{\sin b} \quad (1)$$

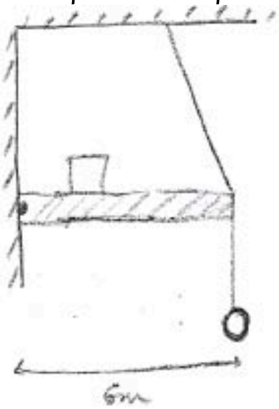
$$A\left(\cos a + \frac{\sin a}{\sin b}\cos b\right) = Mg \Rightarrow$$

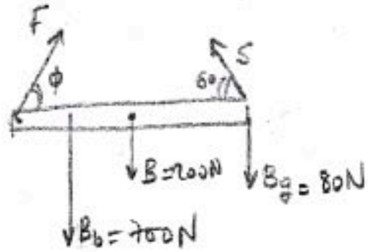
$$\Rightarrow A(\cos a \sin b + \sin a \cos b) = Mg \sin b \Rightarrow \boxed{A = Mg\frac{\sin b}{\sin(a+b)}}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) $\Rightarrow$ $\boxed{B = Mg\frac{\sin a}{\sin(a+b)}}$

10. Ένα πεινασμένο αρκουδάκι βάρους 700N περπατάει πανω σε ένα δοκάρι προσπαθώντας να πιάσει μερικά «γλυκά» που κρέμονται στην άκρη του δοκαριού, όπως στο σχήμα. Το δοκάρι είναι ομοιογενές, ζυγίζει 200N και έχει μήκος 6m. Τα γλυκά ζυγίζουν 80N. (α) Σχεδιάστε το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος για το δοκάρι. (β) Όταν το αρκουδάκι βρίσκεται στη θέση x=1m, βρείτε την τάση του σύρματος και τις συνιστώσες της δύναμης της αντίδρασης στο σημείο στήριξης του δοκαριού στο τοίχο. (γ) Αν το σύρμα μπορεί να αντέξει μια μέγιστη τάση 900N, ποια είναι η μέγιστη απόσταση που μπορεί να περπατήσει το αρκουδάκι πριν σπάσει το σύρμα;







$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow B_b \times 1m + B \times 3m + B_g \times 6m = S \sin 60 \times$$

$$700 \times 1 + 200 \times 3 + 80 \times 6 = S \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6$$

$$700 + 600 + 480 = S\, 3\sqrt{3}$$

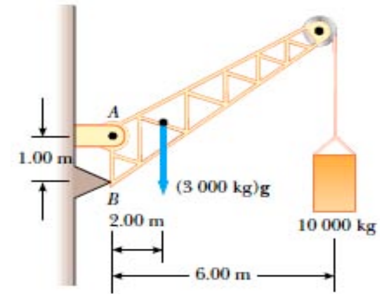
$$1780 = S\, 3\sqrt{3}$$

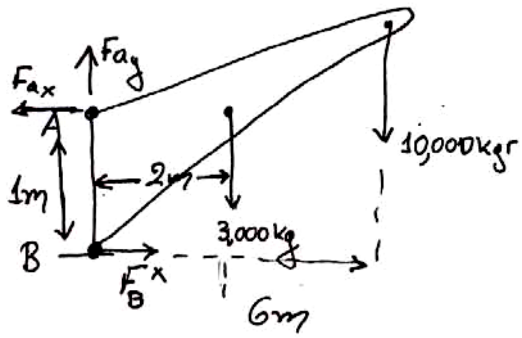
$$\underline{\underline{S = 342.6\,N}}$$

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow 700x + 200 \cdot 3 + 80 \cdot 6 = 900 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6$$

$$\underline{\underline{x \cong 5.13\,m}}$$

11. Ένας γερανός μάζας 3000kg σηκώνει ένα βάρος 10000kg όπως στο σχήμα. Ο βραχίονας του γερανού περιστρέφεται γύρω από λείο άξονα στο σημείο Α και στηρίζεται σε λείο υποστήριγμα στο Β. Να βρεθούν οι δυνάμεις αντίδρασης στο Α και Β.





Από τη στιγμή που το στήριγμα στο σημείο Β είναι λείο δεν υπάρχει τριβή με το κατακόρυφο τοίχωμα και επομένως υπάρχει μόνο οριζόντια δύναμη.

Στο σημείο Α, (ο άξονας περιστροφής) υπάρχει μια δύναμη οριζόντια και μια κατακόρυφος οι οποίες και συνιστούν την αντίδραση στον άξονα από το βραχίονα του γερανού.

Από το 2ο νόμο του Newton:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{Bx} - F_{Ax} = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{Ay} - W_{\gamma\varepsilon\rho} - W_{\beta\alpha\rho.} = 0 \quad (2)$$

Η δεύτερη συνθήκη ισορροπίας μας λέει ότι $\Sigma \vec{\tau} = 0$.

Θεωρούμε σα σημείο για τις ροπές το σημείο Α, οπότε μηδενίζουμε τις ροπές από F_{Ax} & F_{Ay}. Επομένως έχουμε:

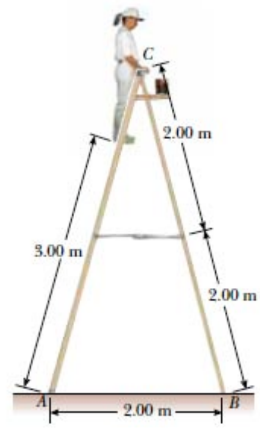
$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow F_{Bx} \cdot (AB) - W_\gamma \cdot 2m - W_\beta \cdot 6m = 0 \Rightarrow F_{Bx} = \frac{(2 \cdot 3000 + 6 \cdot 10{,}000)g}{1}$$

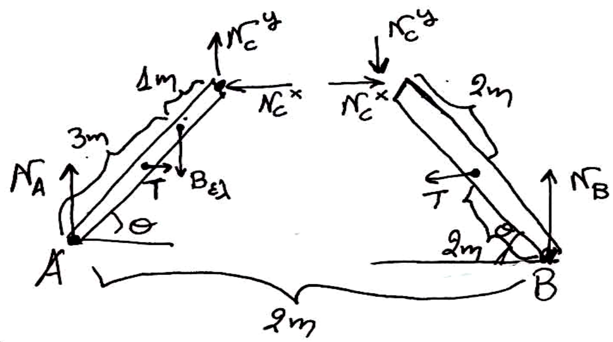
$$\Rightarrow \boxed{F_{Bx} = 72{,}000 \cdot g}$$

Από την (1) $\Rightarrow \boxed{F_{Ax} = F_B = 72{,}000 g}$

και η (2) $\Rightarrow F_{Ay} = (3{,}000 + 10{,}000)g \Rightarrow \boxed{F_{Ay} = 13{,}000 g}$

12. Μια σκάλα αμελητέας μάζας είναι συναρμολογημένη όπως στο σχήμα. Ένας ελαιοχρωματιστής μάζας 70kg στέκεται πάνω στη σκάλα σε ύψος 3.0m από το έδαφος. Υποθέτοντας ότι το έδαφος είναι λείο να βρεθούν, (α) η τάση στην ορζόντια ράβδο που συνδέει τα δυο «πόδια» της σκάλας. (β) Την κάθετη αντίδραση στα σημεία Α και Β και (γ) τις συνιστώσες της δύναμης της αντίδρασης στο μοναδικό «μεντεσέ» C που ασκεί το αριστερό μέρος της σκάλας στο δεξί μέρος. (Υπόδειξη: Δουλέψτε την άσκηση σα να είναι η σκάλα ένα σώμα, αλλά θα πρέπει σε κάποιο σημείο να πάρετε κάθε μισό της σκάλας ξεχωριστά





Απο τη γεωμετρία του σώματος βλέπουμε ότι η γωνία Θ είναι:

$$\cos\Theta = \frac{AB/2}{\ell_{σκάλας}} = \frac{1m}{4m} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Theta = 75.5^\circ}$$ (το τρίγωνο είναι ισοσκελές)

Για το αριστερό μέρος της σκάλας (ελαιοχρωματιστής επάνω) έχουμε για ισορροπία:

$\Sigma F_x = T - N_C^x = 0$ (1)

$\Sigma F_y = N_A + N_C^x - B_{ελ} = 0$ (2)

$\Sigma \tau = 0 = B_{ελ}\cdot(1m\cdot\cos 75.5^\circ) - N_A\cdot(\ell\cos\Theta) + T\left(\frac{\ell}{2}\cdot\sin\Theta\right) = 0.$ (3)

(οι ροπές υπολογίζονται ως προς το C)

Για το δεξί μέρος της σκάλας θα έχουμε ανάλογα:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_C^x - T = 0$ (4)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_B - N_C^y = 0$ (5)

$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow N_B\cdot\ell\cos\Theta - T\frac{\ell}{2}\sin\Theta = 0$ (6)

Λύνοντας το σύστημα των 6 εξισώσεων έχουμε:

$\boxed{T = 133N}$ $\boxed{N_A = 429N}$ $\boxed{N_B = 257N}$

$\boxed{N_C^x = 133N}$ $\boxed{N_C^y = 257N}$

Επομένως η δύναμη που ασκεί το ~~δεξί~~ αριστερό μέρος της σκάλας στο δεξί είναι στα δεξιά (αυτή πήραμε σα θετική φορά) και προς τα κάτω.