Νόμος του Gauss

Ο Νόμος του Gauss

Νόμος Gauss

«Η συνολική ροή που διαπερνά μια κλειστή επιφάνεια *S* είναι ανάλογη του συνολικού φορτίου Q που περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια.»

Η μαθηματική διατύπωση του νόμου του Gauss είναι: $\boxed{\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q^S_{o\lambda}}{\varepsilon_0}}$

όπου $q^S_{o\lambda.}$ το ολικό φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια *S*

Ένας απλός τρόπος να εξηγήσουμε γιατί ισχύει ο νόμος του Gauss είναι να θεωρήσουμε ότι το πλήθος των ηλεκτρικών γραμμών που εξέρχονται από το φορτίο είναι ανεξάρτητο από το είδος της νοητικής επιφάνειας Gauss που θα θεωρήσουμε ότι περικλείει το φορτίο

Νόμος του Gauss – εφαρμογή

Παραδείγματα στα οποία μπορούμε να εφαρμόσουμε τον νόμο του Gauss, για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου, με τις αντίστοιχες επιφάνειες Gauss φαίνονται στον πίνακα.

Συμμετρία	Σύστημα	Επιφάνεια Gauss
Κυλινδρική	Ράβδος άπειρου μήκους	Ομοαξονικός κύλινδρος
Επίπεδη	Επίπεδο άπειρου μήκους	Gaussian κύλινδρος
Σφαιρική	Σφαίρα, Σφαιρικός φλοιός	Ομόκεντρη σφαίρα

Τα ακόλουθα βήματα είναι εν γένει χρήσιμα όταν εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss.

(α) Αναγνώριση της συμμετρίας που σχετίζεται με την συγκεκριμένη κατανομή φορτίου.

(β) Προσδιορισμός της διεύθυνσης του ηλεκτρικού πεδίου και της επιφάνειας Gauss, όπου το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι σταθερό για τμήματα της επιφάνειας

(γ) Χωρισμός του χώρου σε διαφορετικές περιοχές που σχετίζονται με την κατανομή φορτίου. Για κάθε περιοχή, υπολογισμός του $q^{S}_{o\lambda.}$ που περικλείεται από την *S*

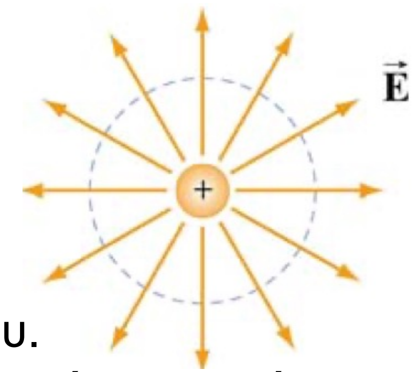
(δ) Υπολογισμός της ροής Φ_E που περνά κάθε περιοχή

(ε) Εξίσωση της ολικής ροής Φ_E με $q^{S}_{o\lambda.}/\varepsilon_0$ και εξαγωγή του μέτρου του πεδίου

Νόμος Gauss – ράβδος άπειρου μήκους

Μια ράβδος άπειρου μήκους και αμελητέας ακτίνας έχει ομοιόμορφη γραμμική πυκνότητα φορτίου λ. Να υπολογίσετε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση *r* από τη ράβδο

- Θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο χρησιμοποιώντας τα βήματα της μεθοδολογίας που αναφέραμε προηγουμένως.

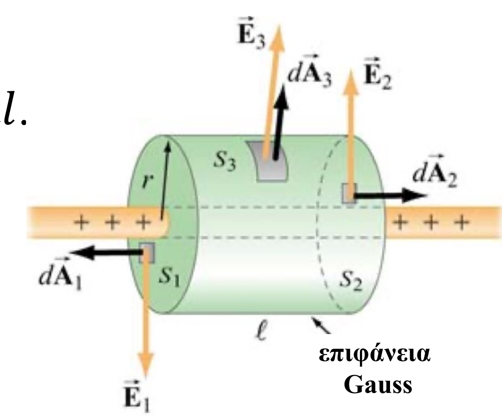


1) Μια απείρου μήκους ράβδος χαρακτηρίζεται από κυλινδρική συμμετρία.
2) Η πυκνότητα φορτίου είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο μήκος της ράβδου και το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ πρέπει να έχει διεύθυνση ακτινική απομακρυνόμενο από τον άξονα της ράβδου.

   Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι σταθερό σε κυλινδρικές επιφάνειες ακτίνας *r*

- Επιλέγουμε ως νοητική επιφάνεια Gauss αυτή ενός ομοαξονικού κυλίνδρου.

3) Η ποσότητα φορτίου που περικλείεται από την επιφάνεια Gauss (ένας κύλινδρος ακτίνας r και μήκους l) είναι $q^S_{ολ.} = \lambda l$.
4) Η επιφάνεια Gauss αποτελείται από 3 τμήματα: τις 2 βάσεις S_1 και S_2 και το κυλινδρικό τοίχωμα S_3. Η ροή που διαπερνά την επιφάνεια Gauss είναι:



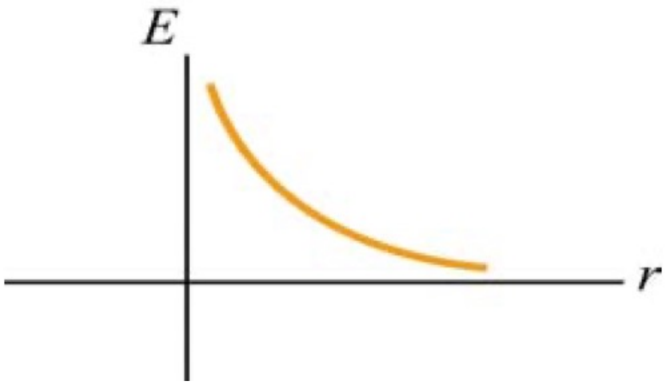
$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{A}_2 + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot d\vec{A}_3 = 0 + 0 + E_3 A_3 = E(2\pi r l)$$

Εφαρμογή νόμου Gauss – ράβδος απείρου μήκους

Στον προηγούμενο υπολογισμό, θέσαμε $E_1 = E_2 = 0$ γιατί δεν υπάρχει ηλεκτρική ροή μέσω των δύο βάσεων της επιφάνειας Gauss αφού τα διανύσματα των επιφανειών $d\vec{A}_1$ και $d\vec{A}_2$ είναι κάθετα στο ηλεκτρικό πεδίο το οποίο είναι στην ακτινική διεύθυνση.

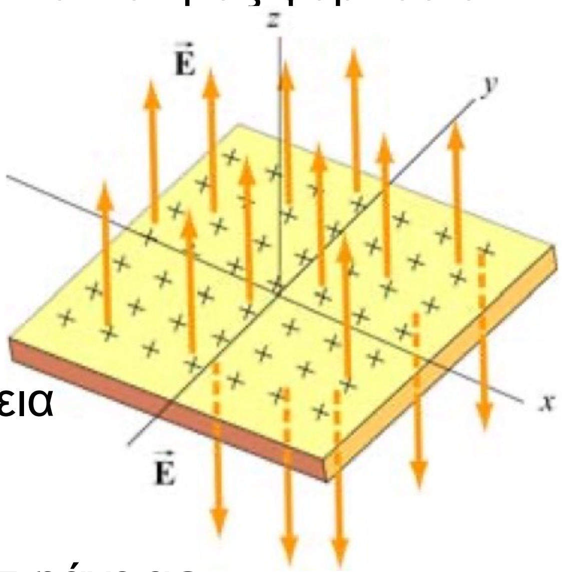
5) Εφαρμογή του νόμου του Gauss δίνει: $E(2\pi r l) = \dfrac{q^S_{o\lambda.}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\lambda l}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$

- Πλήρης συμφωνία με το αποτέλεσμα που βρήκαμε χρησιμοποιώντας τον νόμο του Coulomb.
- Το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από το μήκος l του κυλίνδρου και εξαρτάται μόνο από την απόσταση r από τον άξονα συμμετρίας.
- Η μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου συναρτήσει της απόστασης από τον άξονα συμμετρίας φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Νόμος Gauss – άπειρη επίπεδη επιφάνεια

Μια επίπεδη επιφάνεια απείρων διαστάσεων και επιφανειακής πυκνότητας φορτίου σ. Να υπολογίσετε το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο

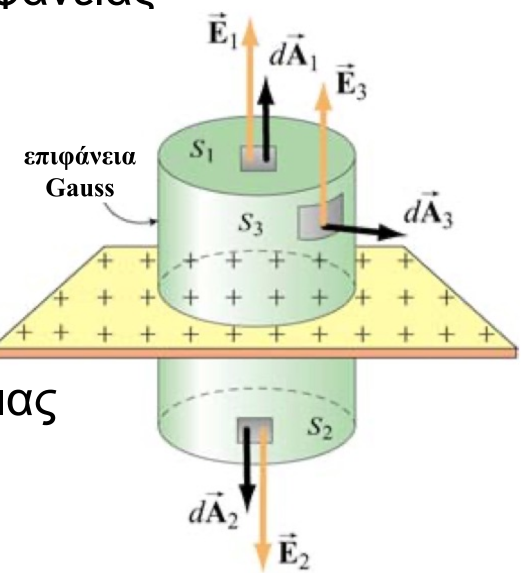


- Ακολουθούμε τα βήματα της μεθοδολογίας.

1) Ένα απείρων διαστάσεων επίπεδο χαρακτηρίζεται από επίπεδη συμμετρία.

2) Το φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνεια και επομένως το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνεια και με κατεύθυνση απομακρυνόμενο από την επιφάνεια, $\vec{E} = E\hat{k}$. Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι σταθερό σε επίπεδα τα οποία είναι παράλληλα προς το επίπεδο της επιφάνειας

- Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss έναν κύλινδρο. Η επιφάνεια αποτελείται από τρεις επιμέρους επιφάνειες, δύο βάσεις S_1 και S_2 και το κυλινδρικό τοίχωμα S_3.



3) Εφόσον η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι σταθερή, το φορτίο που εμπεριέχεται στην επιφάνεια Gauss θα είναι

$q^S_{ολ.} = σA$ όπου A το εμβαδόν των δυο βάσεων της επιφάνειας Gauss

Νόμος Gauss – άπειρη επίπεδη επιφάνεια

4) Η ολική ροή που διαπερνά την επιφάνεια Gauss θα είναι:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{A}_2 + \iint_{S_3} \vec{E}_3 \cdot d\vec{A}_3 = E_1 A_1 + E_2 A_2 + 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_E = A_1(E_1 + E_2) \Rightarrow \quad \Phi_E = A(E_1 + E_2)$$

Εφόσον οι δύο βάσεις έχουν την ίδια απόσταση από την επίπεδη επιφάνεια, λόγω συμμετρίας, το ηλεκτρικό πεδίο θα πρέπει να είναι το ίδιο $E_1 = E_2 = E$

Επομένως η ολική ροή θα είναι: $\Phi_E = 2EA$

5) Εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss οπότε θα πάρουμε:

$$\Phi_E = \frac{q^S_{o\lambda.}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

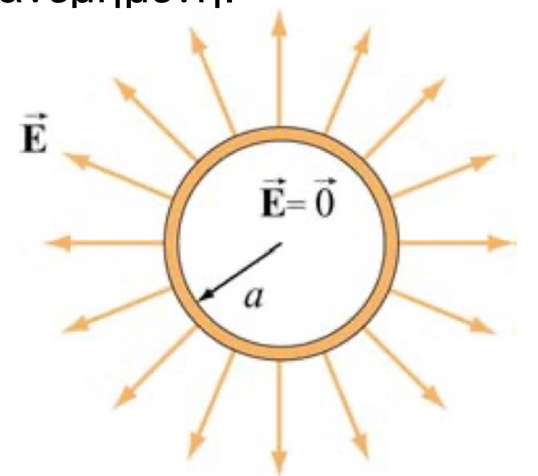
Χρησιμοποιώντας μοναδιαία διανύσματα θα έχουμε: $\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & z > 0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & z < 0 \end{cases}$

Καταλήγουμε στο αποτέλεσμα που βρήκαμε χρησιμοποιώντας τον νόμο του Coulomb.

Νόμος Gauss – ομοιόμορφα φορτισμένο σφαιρικό κέλυφος

Ένα λεπτό σφαιρικό κέλυφος ακτίνας a έχει φορτίο $+Q$ ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνειά του. Να υπολογίσετε το ηλεκτρικό πεδίο τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό του σφαιρικού κελύφους.

Η κατανομή του φορτίου είναι ομοιόμορφη και συμμετρικά κατανεμημένη.



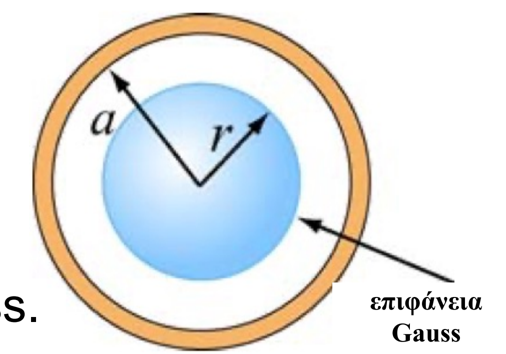
Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου θα είναι: $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi a^2}$

όπου $4\pi a^2$ η επιφάνεια του σφαιρικού κελύφους

Το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να είναι ακτινικά συμμετρικό και να έχει διεύθυνση προς τα έξω.

Θα εξετάσουμε τις περιοχές με $r \leq a$ και $r \geq a$ ξεχωριστά.

Περίπτωση 1: $r \leq a$



Επιλέγουμε την επιφάνεια Gauss να είναι μια σφαίρα ακτίνας $r \leq a$.

Το φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια Gauss είναι 0. εφόσον το φορτίο βρίσκεται στο εξωτερικό της επιφάνειας Gauss.

Επομένως από τον νόμο του Gauss, $\Phi_E = \dfrac{q^S_{o\lambda.}}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow EA = 0 \Rightarrow E = 0$

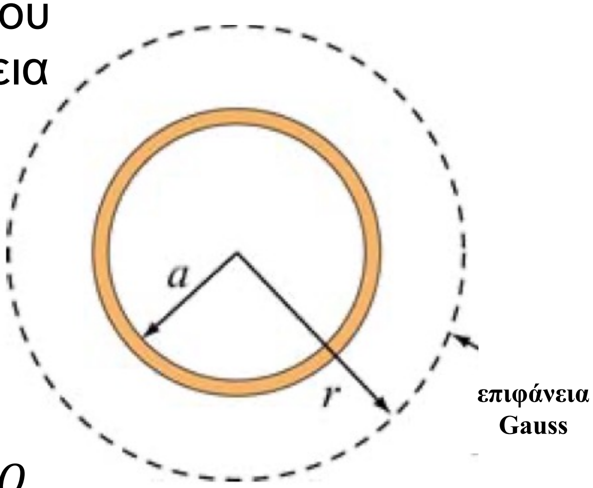
Νόμος Gauss – ομοιόμορφα φορτισμένο σφαιρικό κέλυφος

Περίπτωση 2: $r \geq a$

Στην περίπτωση αυτή, η επιφάνεια Gauss είναι μια σφαίρα ακτίνας $r \geq a$.

Εφόσον η ακτίνα της επιφάνειας Gauss είναι μεγαλύτερη του σφαιρικού φλοιού, όλο το φορτίο περικλείεται στην επιφάνεια Gauss.

$$q^{S}_{o\lambda.} = Q$$



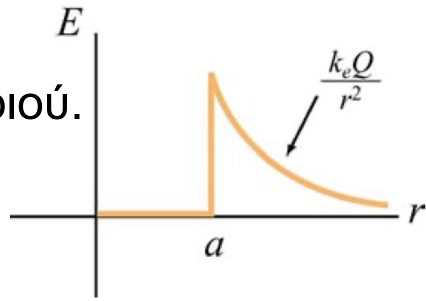
Η ηλεκτρική ροή μέσω της επιφάνειας Gauss, είναι:

$$\Phi_E = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA \Rightarrow \Phi_E = E4\pi r^2$$

Εφαρμογή του νόμου Gauss, δίνει: $E4\pi r^2 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \dfrac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$

Το ηλεκτρικό πεδίο έξω από τον σφαιρικό φλοιό είναι το ίδιο σαν να είχαμε όλο το φορτίο συγκεντρωμένο στο κέντρο του σφαιρικού φλοιού.

Η συμπεριφορά του ηλεκτρικού πεδίου *E*, συναρτήσει της απόστασης από το κέντρο του σφαιρικού κελύφους φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Όπως και στην περίπτωση της επίπεδης επιφάνειας υπάρχει μια ασυνέχεια καθώς οι γραμμές περνούν την επιφάνεια στη θέση $r = a$.

$$\Delta E = E_+ - E_- \Rightarrow$$
$$\Delta E = Q/4\pi\varepsilon_0\alpha^2$$

Νόμος Gauss – ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα

Ένα ηλεκτρικό φορτίο +Q είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σε μια συμπαγή μη αγώγιμη σφαίρα ακτίνας *α.* Να υπολογίσετε το ηλεκτρικό πεδίο τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό της σφαίρας.

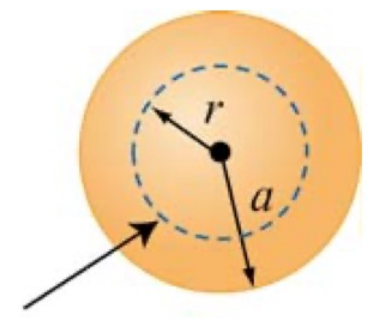
Η κατανομή του φορτίου είναι ομοιόμορφη και συμμετρικά κατανεμημένη και δίνεται

$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi\alpha^3}$ όπου *V* ο όγκος της σφαίρας

Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ είναι ακτινικά συμμετρικό και η διεύθυνση του είναι προς τα έξω. Το μέτρο του είναι σταθερό σε σφαιρικές επιφάνειες ακτίνας r.

Όπως και προηγουμένως εξετάζουμε δύο περιπτώσεις, $r \le a$ και $r \ge a$.

1η περίπτωση: $r \le a$



Επιλέγουμε την επιφάνεια Gauss να είναι μία σφαίρα ακτίνας $r \le \alpha$

Η ηλεκτρική ροή που διαπερνά την επιφάνεια Gauss είναι:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = E(4\pi r^2)$$

Με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου, το φορτίο που περικλείεται είναι:

$$q_{o\lambda.}^S = \int_V \rho dV = \rho V = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = Q\left(\frac{r^3}{a^3}\right)$$

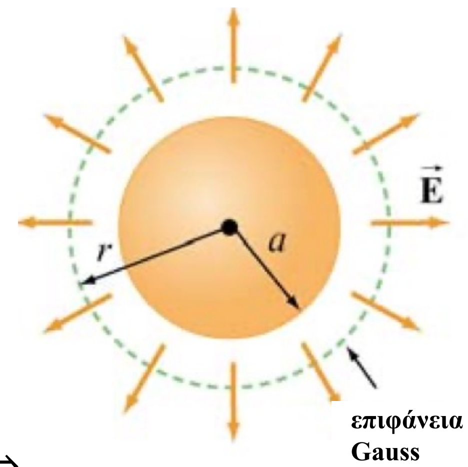
που είναι ανάλογο του όγκου που περιέχει η επιφάνεια Gauss

Νόμος Gauss – ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα

Εφαρμογή του νόμου Gauss, δίνει: $\Phi_E = E4\pi r^2 = \frac{q^S_{o\lambda.}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^3}{a^3}\right) \Rightarrow$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \alpha^3} r, \qquad r \leq a}$$

2η περίπτωση: $r \geq a$

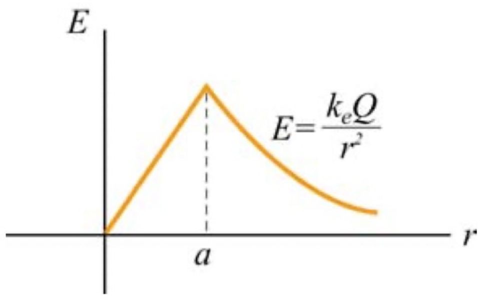


Στην περίπτωση αυτή η επιφάνεια Gauss είναι μία σφαίρα ακτίνας $r \geq \alpha$ που περικλείει όλο το φορτίο της σφαίρας. Επομένως $q^S_{o\lambda.} = \mathrm{Q}$

Η ροή που διαπερνά την επιφάνεια Gauss είναι: $\Phi_E = E4\pi r^2$

Εφαρμογή του νόμου Gauss, δίνει: $\Phi_E = E4\pi r^2 = \frac{q^S_{o\lambda.}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad r \geq a}$$



Το πεδίο έξω από την σφαίρα είναι σαν όλο το φορτίο της σφαίρας να είναι συγκεντρωμένο στο κέντρο της

4ο Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

Έτοιμοι

Αγωγοί

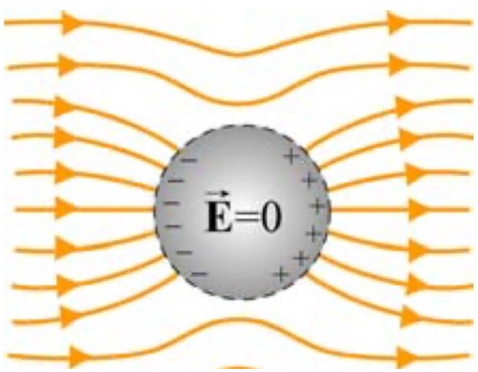
Αγωγοί

Υπάρχουν υλικά στα οποία τα φορτία (ηλεκτρόνια) προσαρτώνται σε συγκεκριμένα άτομα της δομής τους και δεν μπορούν να κινηθούν ελεύθερα αλλά χρειάζεται να δαπανηθεί έργο. Τέτοια υλικά όπως το πλαστικό, το γυαλί ή το χαρτί είναι μονωτές.

Υπάρχουν υλικά στα οποία τα ηλεκτρόνια μπορούν να κινηθούν ελεύθερα και τα υλικά αυτά αποτελούν τους λεγόμενους αγωγούς.

- Τα βασικά χαρακτηριστικά των αγωγών είναι τα ακόλουθα:
  - Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό ενός αγωγού είναι μηδέν: $\vec{E} = \vec{0}$

Αν μια αγώγιμη σφαίρα εισαχθεί σε ένα εξωτερικό σταθερό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_0$, τότε φορτία θα επαχθούν στην επιφάνεια του αγωγού, όπως στο σχήμα.



Τα φορτία αυτά δημιουργούν ένα ηλεκτρικό πεδίο, $\vec{E}'$

Στο εσωτερικό του αγωγού το πεδίο αυτό, $\vec{E}'$, έχει αντίθετη φορά από αυτή του εξωτερικού πεδίου $\vec{E}_0$

Τα φορτία συνεχίζουν να κινούνται έτσι ώστε το εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο ακυρώσει το εξωτερικό πεδίο. Στην κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας:

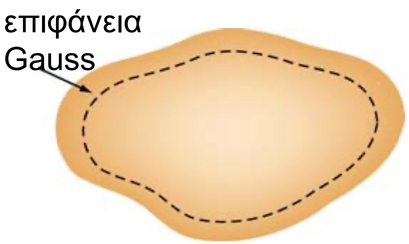
$$\overrightarrow{E'} = -\vec{E}_0 \Rightarrow \vec{E}_0 + \vec{E}' = \vec{E} = \vec{0}$$

Στο εξωτερικό του αγωγού, το επαγόμενο πεδίο είναι αυτό ενός διπόλου και το συνολικό πεδίο θα είναι: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$

Αγωγοί – χαρακτηριστικά

- Αν ο αγωγός είναι φορτισμένος, τότε το φορτίο είναι κατανεμημένο στην επιφάνεια

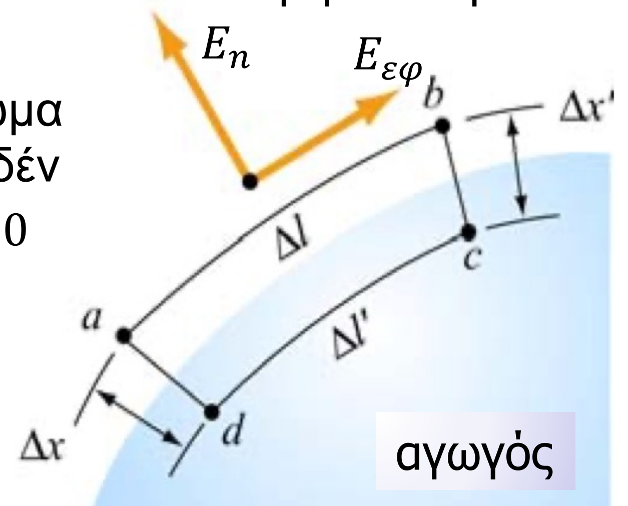
  Αν ο αγωγός είχε φορτίο εσωτερικά, τότε το φορτίο αυτό θα έπρεπε σύμφωνα με τον νόμο του Gauss να είναι μηδέν ώστε $\vec{E} = \vec{0}$ στο εσωτερικό του.



- Στην επιφάνεια του αγωγού, η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου είναι μηδέν, $\vec{E}_{εφ.} = \vec{0}$.

  Για απομονωμένο αγωγό, το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του είναι μηδέν. Κάθε επιπλέον φορτίο εισάγεται στον αγωγό, θα πρέπει να κατανεμηθεί στην επιφάνειά του.

  Θεωρούμε μια κλειστή διαδρομή $abcda$. Το ολοκλήρωμα του πεδίου κατά μήκος της διαδρομής αυτής είναι μηδέν γιατί το ηλεκτρικό πεδίο είναι συντηρητικό: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$



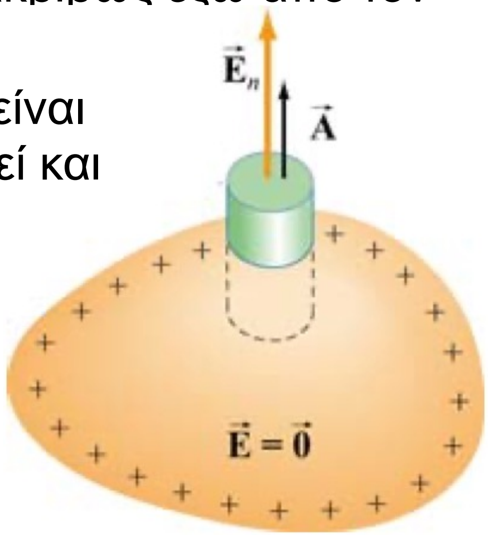
$$\oint_{abcda} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_n \Delta x + E_{εφ} \Delta l - E_n \Delta x' + 0 \Delta l' = 0$$

Όταν $\Delta x, \Delta x' \to 0$ τότε $E_{εφ} \Delta l = 0$ οπότε $E_{εφ} = 0$.

Η επιφάνεια αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία είναι ισοδυναμική επιφάνεια: $V_b - V_a = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \left(\overset{0}{\cancel{\vec{E}_{εφ}}} + \overset{\perp d\vec{s}}{\cancel{\vec{E}_n}}\right) \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow V_a = V_b$

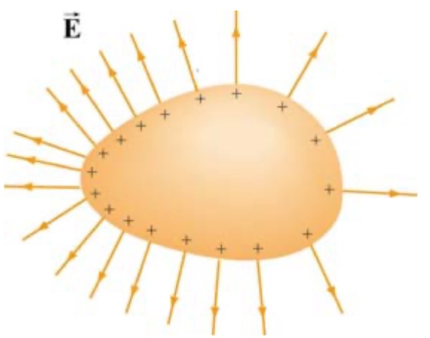
Αγωγοί – χαρακτηριστικά

- Το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού, ακριβώς έξω από τον αγωγό.
  - Αν η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου δεν είναι μηδέν, τότε θα υπάρξει κίνηση φορτίων έως ότου μηδενιστεί και η μόνη συνιστώσα που θα παραμείνει είναι η κάθετη.



  - Για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο ακριβώς έξω από τον αγωγό, θεωρούμε την επιφάνεια Gauss του κυλίνδρου όπως στο σχήμα. Από τον νόμο του Gauss θα έχουμε:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E_n A + (0)A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

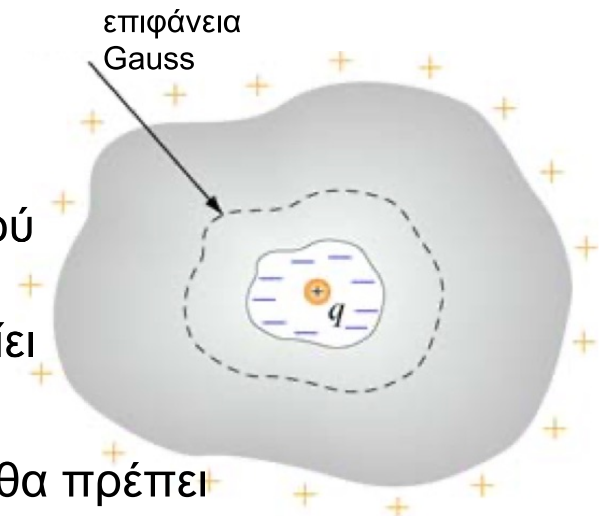


  - Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για αγωγό οποιουδήποτε σχήματος. Οι διευθύνσεις των γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου κοντά στην επιφάνεια του αγωγού είναι όπως στο διπλανό σχήμα.

  - Όπως και στις περιπτώσεις φορτισμένης επιφάνειας απείρων διαστάσεων ή ενός φορτισμένου σφαιρικού φλοιού, έτσι και στην περίπτωση του αγωγού, υπάρχει ασυνέχεια στο ηλεκτρικό πεδίο καθώς διαπερνάτε η επιφάνεια του αγωγού. $\Delta E = E_n^+ - E_n^- = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} - 0 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

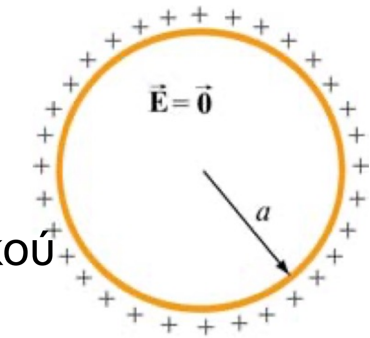
1ο Παράδειγμα: φορτισμένος αγωγός σε κοιλότητα

Θεωρούμε ένα κοίλο αγωγό ο οποίος έχει φορτίο +*Q*. Στην κοιλότητα του αγωγού υπάρχει φορτίο +*q*. Να βρεθεί το φορτίο στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού



- Από τη στιγμή που το πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού πρέπει να είναι μηδέν, τότε αν θεωρήσουμε μια επιφάνεια Gauss, το συνολικό φορτίο που θα περικλείει θα πρέπει να είναι μηδέν.
- Επομένως στην εσωτερική επιφάνεια της κοιλότητας θα πρέπει να έχει επαχθεί φορτίο -*q*.
- Ο αγωγός έχει φορτίο +*Q* και επομένως στην εξωτερική του επιφάνεια το συνολικό φορτίο θα πρέπει να είναι *Q* + *q*.

2ο Παράδειγμα: ηλεκτρικό δυναμικό εξαιτίας σφαιρικού φλοιού



Θεωρούμε ένα μεταλλικό σφαιρικό φλοιό ακτίνας α και φορτίου +Q.
(α) Ποιο το ηλεκτρικό δυναμικό
(β) Ποια η δυναμική ενέργεια του συστήματος

- **(α)** Εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss για την περίπτωση σφαιρικού φλοιού (διάλεξη 7), βρήκαμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι:

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & r > a \\ \vec{0} & r < a \end{cases}$$

- Υπολογίζουμε το ηλεκτρικό δυναμικό από την σχέση: $V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$
  - Για $r > a$, θα έχουμε:

$$V(r) - V(\infty) = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}dr' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = k_e\frac{Q}{r}$$ όπου θεωρούμε ότι $V(\infty) = 0$

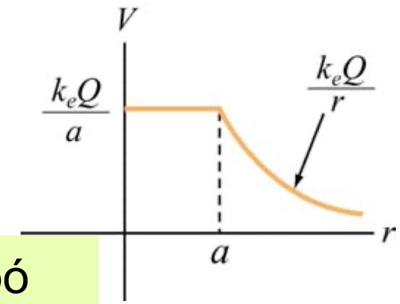
  - Για $r < a$, θα έχουμε:

$$V(r) - V(\infty) = -\int_{\infty}^{a} drE(r>a) - \cancelto{0}{\int_{a}^{r} drE(r<a)} = -\int_{\infty}^{a} dr\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$\Rightarrow V(r) = k_e\frac{Q}{a}$$

2ο Παράδειγμα: ηλεκτρικό δυναμικό εξαιτίας σφαιρικού φλοιού

- Η μορφή του ηλεκτρικού δυναμικού συναρτήσει της απόστασης από το κέντρο του σφαιρικού φλοιού είναι όπως στο διπλανό σχήμα
  - Στο εσωτερικό του σφαιρικού φλοιού το δυναμικό είναι σταθερό



- **(β)** Η δυναμική ενέργεια *U* μπορεί να θεωρηθεί ως το έργο που πρέπει να καταναλωθεί για να δημιουργηθεί το σύστημα. Για να φορτιστεί ο σφαιρικός φλοιός θα πρέπει ένας εξωτερικός παράγοντας να μεταφέρει το φορτίο από το άπειρο και να το τοποθετήσει στην επιφάνεια του σφαιρικού αγωγού.
  - Έστω ότι το φορτίο το οποίο συγκεντρώθηκε στον σφαιρικό φλοιό σε κάποια χρονική στιγμή είναι *q*.

  Την στιγμή αυτή το δυναμικό στην επιφάνεια της σφαίρας θα είναι: $V(r) = k_e \frac{q}{a}$

  Το έργο που πρέπει να καταναλωθεί από έναν εξωτερικό παράγοντα για να μεταφέρει στοιχειώδες φορτίο *dq* από το άπειρο στη σφαίρα θα είναι:

$$dW_{\varepsilon\xi.} = Vdq = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}dq$$

  Άρα το ολικό έργο που απαιτείται ώστε να φορτιστεί η σφαίρα με φορτίο Q είναι:

$$W = \int_0^Q dW_{\varepsilon\xi.} = \int_0^Q \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}dq \Rightarrow W_{\varepsilon\xi.} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

2ο Παράδειγμα: ηλεκτρικό δυναμικό εξαιτίας σφαιρικού φλοιού

Βρήκαμε ότι το έργο που απαιτείται για την φόρτιση του σφαιρικού φλοιού με φορτίο *Q* είναι:

$$W_{\varepsilon\xi.} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

Αλλά το δυναμικό είναι: $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$

ενώ: $W_{\varepsilon\xi.} = U$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U = \frac{1}{2}QV}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να συγκριθεί με αυτό για την περίπτωση σημειακού φορτίου.

Το έργο που απαιτείται για να φέρουμε ένα σημειακό φορτίο +Q από το άπειρο σε ένα σημείο του χώρου με δυναμικό *V* που δημιουργείται από άλλα υπάρχοντα φορτία θα είναι:

$$W_{\varepsilon\xi.} = QV$$

Άρα για ένα σημειακό φορτίο Q, η δυναμική ενέργεια είναι: $\boxed{U = QV}$

3ο Παράδειγμα: δύο φορτισμένες σφαίρες σε επαφή

Υποθέστε τώρα ότι υπάρχουν δύο φορτισμένες μεταλλικές σφαίρες ακτίνας r_1 και r_2. Οι δύο σφαίρες συνδέονται με λεπτό αγώγιμο σύρμα.

Φορτίο θα συνεχίσει να ρέει από την μία σφαίρα στην άλλη έως ότου επέλθει ηλεκτροστατική ισορροπία και οι δύο σφαίρες να έχουν το ίδιο δυναμικό $V_1 = V_2 = V$

Υποθέτουμε ότι στην κατάσταση ισορροπίας, το φορτίο στις σφαίρες είναι q_1 και q_2 αντίστοιχα.

Αγνοώντας το σύρμα, η συνθήκη ισοδυναμικών επιφανειών στην κατάσταση ισορροπίας οδηγεί (υποθέτοντας ότι η πυκνότητα φορτίου σε κάθε σφαίρα δεν επηρεάζεται από την παρουσία της άλλης σφαίρας)

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = V_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{\sigma_1 \pi r_1^2}{\sigma_2 \pi r_2^2} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να γραφεί ως:

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = \frac{\sigma_1 \pi r_1^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} \text{ και } E_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = \frac{\sigma_2 r_2^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} \text{ οπότε: } \frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας και το ηλεκτρικό πεδίο είναι μεγαλύτερο σε επιφάνειες μικρής καμπυλότητας.
Αιχμηρές επιφάνειες δημιουργούν πολύ μεγάλα ηλεκτρικά πεδία.