ΦΥΣ. 211
2^{η} ΠΡΟΟΔΟΣ 2-Απρίλη-2016

Πριν ξεκινήσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, αριθμό ταυτότητας) στο πάνω μέρος της σελίδας αυτής.

Για τις λύσεις των ασκήσεων θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε μόνο τις σελίδες που σας δίνονται. Μην κόψετε καμιά από τις σελίδες που σας δίνονται.

Προσπαθήστε να δείξετε τη σκέψη σας και να γράψετε καθαρές εξισώσεις. Για πλήρη ή μερική βαθμολόγηση θα πρέπει να φαίνεται καθαρά το τι προσπαθείτε να δείξετε.

Σας δίνονται 7 ασκήσεις και πρέπει να απαντήσετε σε όλες. Σύνολο μονάδων 100.

Διαβάστε πρώτα όλες τις ασκήσεις και προσπαθήστε να σκεφτείτε τι περίπου χρειάζεται να κάνετε. Η σειρά των προβλημάτων δεν είναι ενδεικτική της δυσκολία τους.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 180 λεπτά.

Καλή επιτυχία.

1. [**10μ**]

Ένα σώμα μάζας M, κινείται σε μια διάσταση μέσα σε δυναμικό της μορφής $U(x) = ax^3 - bx^2$ όπου α και β θετικές σταθερές.

(α) Σχεδιάστε το δυναμικό. [**2μ**]

(β) Βρείτε τα χαρακτηριστικά σημεία της κίνησης. [**2μ**]

(γ) Βρείτε η συχνότητα ταλαντώσεων ως προς το σημείο ευσταθούς ισορροπίας. [**3μ**]

(δ) Σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης για την κίνηση του σώματος. [**3μ**]

Έχουμε $U(x) = ax^3 - bx^2$ όπου a και $b > 0$.

Το δυναμικό $U(x) \to \infty$ όταν $x \to +\infty$ και $U(x) \to -\infty$ όταν $x \to -\infty$

Για $x = 0$ $U(x) = 0$ αλλά και για $x = b/a$ έχουμε επίσης $U(x = \frac{b}{a}) = 0$

Η παράγωγος του δυναμικού είναι: $\frac{dU(x)}{dx} = 0 \Rightarrow 3ax^2 - 2bx = 0 \Rightarrow$

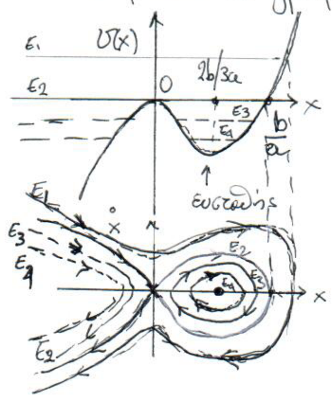
$\Rightarrow x(3ax - 2b) = 0 \Rightarrow$ Υπάρχουν δύο χαρακτηριστικά σημεία, (σημεία ισορροπίας)

$\boxed{x = 0}$ και $3ax - 2b = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{2b}{3a}}$

Θα πρέπει να εξετάσουμε τη δεύτερη παράγωγο του δυναμικού στα σημεία ισορροπίας: για να ελέγξουμε το είδος της ισορροπίας:

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = 6ax - 2b \Rightarrow \begin{cases} \left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=0} = -2b < 0 & \text{ασταθής ισορροπία} \\ \left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=\frac{2b}{3a}} = \cancel{6a}^{2}\,\frac{2b}{\cancel{3a}} - 2b = 2b & \text{ευσταθής ισορροπία} \end{cases}$$

Επομένως το γράφημα του δυναμικού θα είναι:



Γράφουμε τη Lagrangian: $L = \frac{1}{2}mv^2 - U(x)$ και αναπτύσσουμε το δυναμικό ως προς τη θέση ισορροπίας $x = \frac{2b}{3a}$

οπότε θα έχουμε: $L = \frac{1}{2}m\dot{\delta x}^2 - \left[U_0(x_0) + \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_0}\delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=x_0}\delta x^2\right]$

σταθ. 0

οπότε οι εξισώσεις κίνησης

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{\delta x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\delta x \Rightarrow m\ddot{\delta x} = -2b\delta x \Rightarrow$$

$$\ddot{\delta x} = -\frac{2b}{m}\delta x \Rightarrow \omega^2 = \frac{2b}{m} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2b}{m}}}$$

2. [**10μ**]

Θεωρήστε έναν μονοδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή με μικρή απόσβεση, πάνω στον οποίο δρα μια αποσβένουσα δύναμη $F_d = 2m\beta\dot{x}$ και μια διεγείρουσα δύναμη της μορφής $F(t) = amt$.

(α) Γράψτε την εξίσωση κίνησης και προσδιορίστε πλήρως μια ειδική λύση. <u>*Υπόδειξη:*</u> μια ειδική λύση έχει την μορφή $x_{\varepsilon\iota\delta.}(t) = At + B$. [**3μ**]

(β) Αν ένα σώμα την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας, $x = 0$, στην κατάσταση ισορροπίας, να βρεθεί η θέση του σώματος, $x(t)$ σε μια μετέπειτα χρονική στιγμή. [**7μ**]

(α) Η εξίσωση κίνησης είναι: $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha t$ θεωρώντας ότι $m = 1$

Σύμφωνα με την υπόδειξη, η ειδική λύση είναι της μορφής: $x_{\varepsilon\iota\delta} = At + B$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση κίνησης μπορούμε να βρούμε τα A και B

Έχουμε $\dot{x}_{\varepsilon\iota\delta} = A$ και $\ddot{x}_{\varepsilon\iota\delta} = 0$ Επομένως η εξίσωση κίνησης γίνεται:

$$0 + 2\beta A + \omega_0^2 A t + \omega_0^2 B = at \Rightarrow \omega_0^2 A = \alpha \Rightarrow \boxed{A = \frac{\alpha}{\omega_0^2}}$$

και $$2\beta A + \omega_0^2 B = 0 \Rightarrow B = -\frac{2\beta A}{\omega_0^2} \Rightarrow \boxed{B = -\frac{2\beta a}{\omega_0^4}}$$

(β) Για να βρούμε τη γενική λύση, χρειάζεται να προσθέσουμε τις λύσεις της ομογενούς, αυτής δηλαδή που λύνει την διαφορική εξίσωση: $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Αλλά η λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι της μορφής:

$x_0(t) = Ce^{-\beta t}\cos\omega_1 t + De^{-\beta t}\sin\omega_1 t$ όπου $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ και C, D σταθερές που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος $(x(0) = 0$ & $\dot{x}(0) = 0)$

Η γενική λύση λοιπόν είναι: $x(t) = x_0(t) + x_{\varepsilon\iota\delta}(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{\alpha}{\omega_0^2}t - \frac{2\beta\alpha}{\omega_0^4} + Ce^{-\beta t}\cos\omega_1 t + De^{-\beta t}\sin\omega_1 t$$

Για $$x(t=0) = -\frac{2\alpha\beta}{\omega_0^4} + C = 0 \Rightarrow \boxed{C = \frac{2\alpha\beta}{\omega_0^4}}$$

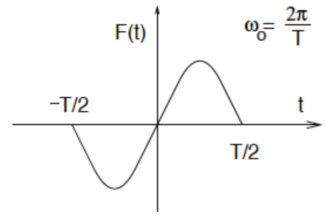
$$\dot{x}(t=0) = \frac{\alpha}{\omega_0^2} - \beta\left[Ce^{-\beta t}\cos\omega_1 t + De^{-\beta t}\sin\omega_1 t\right] - \omega_1\left[Ce^{-\beta t}\sin\omega_1 t - De^{-\beta t}\cos\omega_1 t\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t=0) = \frac{\alpha}{\omega_0^2} - \beta C + \omega_1 D = 0 \Rightarrow \omega_1 D = \beta C - \frac{\alpha}{\omega_0^2} \Rightarrow \boxed{D = \frac{2\alpha\beta^2 - \alpha\omega_0^2}{\omega_0^4\omega_1}}$$

3. [**10μ**]

Ένας μη αποσβένων ταλαντωτής ο οποίος έχει γωνιακή συχνότητα $\omega_0 = 2\pi/T$, διεγείρεται από μια εξωτερική δύναμη η οποία έχει την μορφή:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < -T/2 \\ F_0 \sin(\omega_0 t) & -T/2 < t < T/2 \\ 0 & t > T/2 \end{cases}$$



Χρησιμοποιήστε την μέθοδο των συναρτήσεων Green και υπολογίστε την μετατόπιση του ταλαντωτή για χρονικές στιγμές $t > T/2$. [**10μ**]

Ξεκινώντας από την γενική λύση των συναρτήσεων Green έχουμε:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \, \frac{F(t')}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t')} \sin[\omega_1(t-t')]$$

Από τη στιγμή που δεν υπάρχει απόσβεση $\gamma = 0$ και επομένως $x(t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \, \frac{F(t')}{m\omega_1} \sin[\omega_1(t-t')]$

Η δύναμη είναι $\emptyset$ πριν την χρονική στιγμή $t = -T/2$ όπως και μετά τη χρονική στιγμή $t = T/2$ και μας ενδιαφέρει μόνο η απόκριση του ταλαντωτή, $x(t)$, για $t > T/2$

Μπορούμε να γράψουμε επομένως:

$$x(t) = \int_{-T/2}^{T/2} dt' \, \frac{F_0 \sin(\omega_0 t')}{m\omega_0} \sin[\omega_0(t-t')] = \int_{-T/2}^{T/2} dt' \, \frac{F_0 \sin(\omega_0 t')}{m\omega_0} \left[\sin\omega_0 t \cos\omega_0 t' - \cos\omega_0 t \sin\omega_0 t'\right] \Rightarrow$$

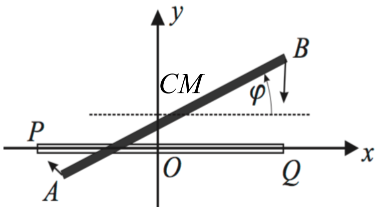
$$\Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{m\omega_0} \left[\sin\omega_0 t \int_{-T/2}^{T/2} \sin\omega_0 t' \cos\omega_0 t' \, dt' - \cos\omega_0 t \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2\omega_0 t' \, dt'\right]$$

Ο $1^{ος}$ όρος του ολοκληρώματος μηδενίζεται, ενώ ο $2^{ος}$ όρος μπορεί να υπολογιστεί προσέχοντας ότι η μέση τιμή του $\sin^2\omega_0 t$ σε μια περίοδο είναι $1/2$. Επομένως θα έχουμε:

$$\boxed{x(t) = -\frac{F_0}{m\omega_0} \cos\omega_0 t \left(\frac{T}{2}\right) = -\frac{F_0 \pi}{m\omega_0^2} \cos\omega_0 t}$$ όπου $T = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_0}$

4. [**15μ**]

Μια ράβδος AB μάζας m και μήκους 2α, μπορεί να κινείται πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Τα άκρα της ράβδου είναι δεμένα σε λαστιχάκια με τέτοιο τρόπο ώστε στην θέση ισορροπίας, η ράβδος να βρίσκεται μεταξύ των σημείων P και Q τα οποία βρίσκονται σε απόσταση 2α, και τότε οι δυνάμεις στη ράβδο είναι μηδέν. Όταν η ράβδος μετατοπίζεται στο επίπεδο, οι δυνάμεις στα δύο άκρα της A και B την αναγκάζουν να κινηθεί προς τα σημεία P και Q. Τα μέτρα των δυνάμεων αυτών είναι ανάλογα των αποστάσεων, δηλαδή $\left|\vec{F}_A\right| = k|AP|$ και $\left|\vec{F}_B\right| = k|BQ|$.



(α) Βρείτε την κινητική ενέργεια της ράβδου. [**2μ**]
(β) Βρείτε τη δυναμική ενέργεια της ράβδου. [**7μ**]
(γ) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης της ράβδου. [**3μ**]
(δ) Ποιες είναι οι γωνιακές συχνότητες για μετατοπίσεις μικρού πλάτους. [**4μ**]
Χρησιμοποιήστε σαν γενικευμένες συντεταγμένες τις x, y και φ του κέντρου μάζας.
<u>Υπόδειξη:</u> η δυναμική ενέργεια της δύναμης F_A είναι της μορφής $V_A = k\left(\vec{r}_A - \vec{r}_P\right)^2/2$

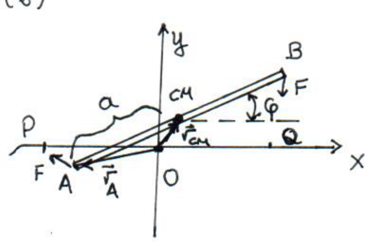
(α) Η κινητική ενέργεια της ράβδου θα είναι η κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς του κέντρου μάζας και η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής της ράβδου κατά γωνία φ ως προς το κέντρο μάζας

Έχοντας x_c, y_c τις συντεταγμένες του CM, θα έχουμε:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2\right) + \frac{1}{2}I_p\dot{\varphi}^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m(2a)^2\right)\dot{\varphi}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \frac{1}{3}a^2\dot{\varphi}^2\right)} \qquad (A)$$

(β)



Μπορούμε να γράψουμε το διάνυσμα της σχετικής θέσης των δύο άκρων $\vec{r}_{AP} = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_{a_1} - \vec{r}_P \qquad (1)$

και το διάνυσμα $\vec{r}_{BQ} = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_{a_2} - \vec{r}_Q \qquad (2)$

Θεωρούμε σαν διανύσματα $\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{i} + y_{CM}\hat{j} \qquad (3)$

$\vec{r}_P = -a\hat{i}$ και $\vec{r}_Q = +a\hat{i} \qquad (4)$

Το διάνυσμα $\vec{r}_{a_1} = -a\cos\varphi\,\hat{i} - a\sin\varphi\,\hat{j}$ ενώ το $\vec{r}_{a_2} = a\cos\varphi\,\hat{i} + a\sin\varphi\,\hat{j} \qquad (5)$ ορίζονται με σύστημα συντεταγμένων με αρχή το CM και στραμμένο κατά φ ως προς το αρχικό σύστημα.

Επομένως τα διανύσματα $\vec{r}_{AP}$ και $\vec{r}_{BQ}$ γράφονται:

$$\vec{r}_{AP} = x_{CM}\hat{i} + y_{CM}\hat{j} - a\cos\varphi\,\hat{i} - a\sin\varphi\,\hat{j} + a\hat{i} = (x_{CM} - a\cos\varphi + a)\hat{i} + (y_{CM} - a\sin\varphi)\hat{j}$$

$$\vec{r}_{BQ} = x_{CM}\hat{i} + y_{CM}\hat{j} + a\cos\varphi\,\hat{i} + a\sin\varphi\,\hat{j} - a\hat{i} = (x_{CM} + a\cos\varphi - a)\hat{i} + (y_{CM} + a\sin\varphi)\hat{j}$$

Επομένως το μέτρο του $|\vec{r}_{AP}|^2 = (x_{CM} - a[\cos\varphi - 1])^2 + (y_{CM} - a\sin\varphi)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\vec{r}_{AP}|^2 = (x_{CM}^2 + y_{CM}^2 + a^2\cos^2\varphi + a^2 - 2a^2\cos\varphi + a^2\sin^2\varphi - 2y_{CM}a\sin\varphi -$$

$$- 2ax_{CM}\cos\varphi + 2ax_{CM}) = x_{CM}^2 + y_{CM}^2 + a^2 + a^2 - 2a^2\cos\varphi -$$

$$- 2ax_{CM}\cos\varphi - 2ay_{CM}\sin\varphi + 2ax_{CM}$$

$$|\vec{r}_{BQ}|^2 = (x_{CM}^2 + a^2\cos^2\varphi + a^2 + 2ax_{CM}\cos\varphi - 2ax_{CM} - 2a^2\cos\varphi + y_{CM}^2 + a^2\sin^2\varphi + 2ay_{CM}\sin\varphi)$$

Η δυναμική ενέργεια θα είναι επομένως: $V = \frac{1}{2}k(\vec{r}_{AP})^2 + \frac{1}{2}k(\vec{r}_{BQ})^2 \Rightarrow$

$$V = \frac{1}{2}k\Big[x_{CM}^2 + y_{CM}^2 + 2a^2 - 2a^2\cos\varphi - \cancel{2ax_{CM}\cos\varphi} - \cancel{2ay_{CM}\sin\varphi} + \cancel{2ax_{CM}} +$$

$$x_{CM}^2 + y_{CM}^2 + 2a^2 - 2a^2\cos\varphi + \cancel{2ax_{CM}\cos\varphi} + \cancel{2ay_{CM}\sin\varphi} - \cancel{2ax_{CM}}\Big] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2}k\left[2x_{CM}^2 + 2y_{CM}^2 + 2a^2(1 - 2\cos\varphi)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V = k\left[x_{CM}^2 + y_{CM}^2 + a^2(1 - 2\cos\varphi)\right]}$$

(γ) Η Lagrangian του προβλήματος είναι: $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_{CM}^2 + \dot{y}_{CM}^2 + \frac{1}{3}a^2\dot{\varphi}^2) - k[x_{CM}^2 + y_{CM}^2 + a^2(1 - 2\cos\varphi)]$

Κ(δ)

Έχουμε 3 εξισώσεις κίνησης ως προς x, y και φ.

x_{CM}: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{CM}} = \frac{\partial L}{\partial x_{CM}} \Rightarrow m\ddot{x}_{CM} = -2kx_{CM} \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_{CM} = -\frac{2k}{m}x_{CM}} \Rightarrow$ Αρμονική ταλάντωση $\boxed{\omega_x^2 = \frac{2k}{m}}$

y_{CM}: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_{CM}} = \frac{\partial L}{\partial y_{CM}} \Rightarrow m\ddot{y}_{CM} = -2ky_{CM} \Rightarrow \boxed{\ddot{y}_{CM} = -\frac{2k}{m}y_{CM}} \Rightarrow$ Αρμονική ταλάντωση $\boxed{\omega_y^2 = \frac{2k}{m}}$

Θ: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} = \frac{\partial L}{\partial \Theta} \Rightarrow \frac{m}{3}\cancel{a^2}\ddot{\varphi} = -2k\cancel{a^2}\sin\varphi \Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{6k}{m}\sin\varphi}$ για μικρές γωνίες $\boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{6k}{m}\varphi}$

οπότε $\boxed{\omega_\varphi^2 = 6k/m}$

5. [**15μ**]

Θεωρήστε φορτισμένο σωματίδιο (θετικού ή αρνητικού φορτίου) με κινητική ενέργεια *T*, την οποία μπορείτε να θεωρήσετε ως μη σχετικιστική. Θεωρήστε επίσης ένα βαρύ πυρήνα με φορτίο *Ze* και φαινομενική ακτίνα *b*. Φανταστείτε ότι το φορτισμένο σωματίδιο «χτυπά» τον πυρήνα όταν το σημείο της εγγύτερης προσέγγισής του βρίσκεται σε απόσταση *b* ή λιγότερο από τον πυρήνα. Αγνοώντας την ανάκρουση του πυρήνα όπως και οποιαδήποτε άλλα αποτελέσματα από ατομική αλληλεπιδράσεων, δείξτε ότι η ενεργός διατομή σκέδασης για το φορτισμένο αυτό σωματίδιο, είναι: $\sigma = \pi b^2 (T - V)/T$ για θετικά φορτισμένα σωματίδια, και $\sigma = \pi b^2 (T + V)/T$ για αρνητικά φορτισμένα σωματίδια, όπου $V = Ze^2/b$. [**15μ**]

Έστω d η παράμετρος κρούσης με την οποία το φορτισμένο σωματίδιο πλησιάζει τον πυρήνα. Το φορτισμένο σωματίδιο έχει αρχική ταχύτητα $\frac{1}{2} m v_0^2 = T \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2T}{m}}}$

Η στροφορμή του σωματιδίου είναι: $\ell = m v_0 d = m \sqrt{\frac{2T}{m}}\, d \Rightarrow \boxed{\ell = \sqrt{2Tm}\, d}$

Στο σημείο της εγγύτερης προσέγγισης, το σωματίδιο δεν έχει ακτινική ταχύτητα $v_r = 0$ και $v = b\dot{\theta}$.

Από διατήρηση της στροφορμής έχουμε $\ell_0 = \ell_{εγγ.σημ} \Rightarrow \sqrt{2Tm}\, d = m b^2 \dot{\theta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow d = \frac{m b^2 \dot{\theta}}{\sqrt{2Tm}} \Rightarrow \boxed{d = \sqrt{\frac{m}{2T}}\, b^2 \dot{\theta}}$$

Από διατήρηση της ενέργειας έχουμε: $E = T_0 = V + \frac{1}{2} m b^2 \dot{\theta}^2 \Rightarrow b\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2(T-V)}{m}}$

Η ενεργός διατομή σκέδασης είναι: $\sigma = \pi d^2 = \pi \frac{m}{2T} b^4 \dot{\theta}^2 = \frac{m}{2T} \frac{2(T-V)}{m} b^2 \pi \Rightarrow$

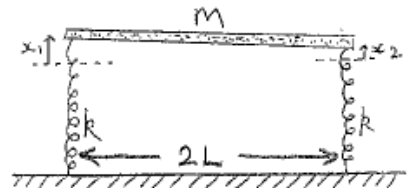
$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \left(\frac{T-V}{T}\right) \pi b^2}$$

Θεωρώντας ότι $V = \frac{Ze^2}{b}$ για θετικά φορτισμένα σωματίδια: $\boxed{\sigma = \pi b^2 \left(\frac{T-V}{T}\right)}$

Για αρνητικά φορτισμένα σωματίδια: $V = -\frac{Ze^2}{b}$ οπότε $\boxed{\sigma = \pi b^2 \left(\frac{T+V}{T}\right)}$

6. [**20μ**]

Θεωρήστε το σύστημα του διπλανού σχήματος όπου μια ράβδος μάζας *m*, τοποθετείται πάνω σε δύο πανομοιότυπα ελατήρια σταθεράς *k*.



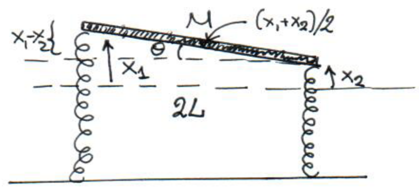
(α) Να βρεθεί η Lagrangian του συστήματος. [**5μ**]

(β) Να βρεθούν οι πίνακες του δυναμικού [*V*] και κινητικής ενέργειας [*T*]. [**2μ**]

(γ) Να βρεθούν οι ιδιοσυχνότητες. [**5μ**]

(δ) Να βρεθούν τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα. [**5μ**]

(ε) Να γραφεί η απομάκρυνση του συστήματος την χρονική στιγμή *t*.[**3μ**]



Έστω M η μάζα της ράβδου και 2L το μήκος της.
Η ροπή αδράνειας της ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της είναι $I_p^{CM} = \frac{1}{12}M(2L)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_p^{CM} = \frac{1}{12}M4L^2 \Rightarrow I_p^{CM} = \frac{1}{3}ML^2$$

Αν Θ είναι η γωνία περιστροφής της ράβδου ως προς την οριζόντια διεύθυνση τότε θα έχουμε: $\Theta = \frac{x_1 - x_2}{2L}$ για μικρές γωνίες απόκλισης.

Η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής θα είναι επομένως:

$$T_{περ} = \frac{1}{2} I_p^{CM} \dot{\Theta}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}M\cancel{L^2}\frac{(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2}{(2\cancel{L})^2} \Rightarrow \boxed{T_{περ} = \frac{1}{24}M(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2} \quad (A)$$

Η κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς θα είναι: $T_{μετ} = \frac{1}{2}M\left(\frac{1}{2}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)\right)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow T_{μετ} = \frac{1}{2}M\frac{1}{4}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 \Rightarrow \boxed{T_{μετ} = \frac{1}{8}M(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2} \quad (B)$$

Η δυναμική ενέργεια των ελατηρίων είναι: $\boxed{V = \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2)}$ (1)

Επειδή στην κινητική ενέργεια εμφανίζονται όροι με την μορφή (x_1+x_2) και (x_1-x_2) γράφουμε τον όρο του δυναμικού ως: $x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}\left[(x_1+x_2)^2 + (x_1-x_2)^2\right]$

Επομένως το δυναμικό παίρνει την μορφή $\boxed{V = \frac{1}{4}k\left[(x_1+x_2)^2 + (x_1-x_2)^2\right]}$ (Γ)

Να σημειωθεί ότι η βαρύτητα δεν χρειάζεται να υπολογισθεί στην δυναμική ενέργεια γιατί εξετάζουμε τις μετατοπίσεις της ράβδου ως προς τα σημεία ισορροπίας που περιλαμβάνει το αποτέλεσμα της βαρύτητας.

Από τις σχέσεις (A), (B) και (Γ) βλέπουμε ότι η Lagrangian του προβλήματος είναι 2ου βαθμού συνάρτηση ως προς τις κανονικές συντεταγμένες του προβλήματος

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8} m \left(\dot{x}_1 + \dot{x}_2\right)^2 + \frac{1}{24} m \left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right)^2 - \frac{k}{4}\left(x_1 + x_2\right)^2 - \frac{k}{4}\left(x_1 - x_2\right)^2$$

Γράφοντας την Lagrangian με αυτή τη μορφή έχουμε ουσιαστικά τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης $\boxed{q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1 + x_2\right)}$ με $\boxed{\omega_1^2 = \frac{k/4}{m/8} = \frac{2k}{m}}$

και $\boxed{q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1 - x_2\right)}$ με $\boxed{\omega_2^2 = \frac{k/4}{m/24} = \frac{6k}{m}}$

Ωστόσο θα μπορούσαμε να δουλέψουμε κανονικά ξεκινώντας από την μορφή της Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8} m \left(\dot{x}_1 + \dot{x}_2\right)^2 + \frac{1}{24} m \left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right)^2 - \frac{1}{2} k \left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

Οι πίνακες του δυναμικού και κινητικής ενέργειας θα ήταν:

$$[V] = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[T] = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{3} & \frac{m}{6} \\ \frac{m}{6} & \frac{m}{3} \end{pmatrix} = \frac{m}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Οι ιδιοσυχνότητες βρίσκονται από την χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\left([V] - \omega^2 [T]\right)[a] = 0 \Rightarrow \det\left([V] - \omega^2 [T]\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} k - \frac{m}{3}\omega^2 & -\frac{m}{6}\omega^2 \\ -\frac{m}{6}\omega^2 & k - \frac{m}{3}\omega^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left(k - \frac{m}{3}\omega^2\right)^2 - \left(\frac{m}{6}\omega^2\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(k - \frac{m}{3}\omega^2 - \frac{m}{6}\omega^2\right)\left(k - \frac{m}{3}\omega^2 + \frac{m}{6}\omega^2\right) =$$

$$\Rightarrow \left(k - \frac{3m}{6}\omega^2\right)\left(k - \frac{m}{6}\omega^2\right) = 0 \Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \begin{cases} \frac{2k}{m} \\ \frac{6k}{m} \end{cases}$$ όπως βρήκαμε προηγουμένως

Από τη στιγμή που έχουμε τις ιδιοτιμές, μπορούμε να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα

$$\begin{pmatrix} k-\frac{m}{3}\omega_r^2 & -\frac{m}{6}\omega_r^2 \\ -\frac{m}{6}\omega_r^2 & k-\frac{m}{3}\omega_r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left(k-\frac{m}{3}\omega_r^2\right)a_{1r} - \frac{m}{6}\omega_r^2 a_{2r} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(k-\frac{\cancel{m}}{3}\frac{2k}{\cancel{m}}\right)a_{11} - \frac{\cancel{m}}{\cancel{6}\,3}\frac{\cancel{2}k}{\cancel{m}}a_{21} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{k}{3}a_{11} - \frac{k}{3}a_{21} = 0 \Rightarrow a_{11} = a_{21}$ και το ιδιοδιάνυσμα για την πρώτη ιδιοσυχνότητα είναι: $\boxed{\omega_1^2 = \frac{2k}{m} \quad a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Ανάλογα για το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα, θα έχουμε:

$$\left(k-\frac{m}{3}\omega_2^2\right)a_{12} - \frac{m}{6}\omega_2^2 a_{22} = 0 \Rightarrow \left(k-\frac{\cancel{m}}{\cancel{3}}\frac{\overset{2}{\cancel{6}}k}{\cancel{m}}\right)a_{12} - \frac{\cancel{m}}{\cancel{6}}\frac{\cancel{6}k}{\cancel{m}}a_{22} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -k a_{12} - k a_{22} = 0 \Rightarrow a_{12} = -a_{22}$$

Επομένως για την δεύτερη ιδιοσυχνότητα $\boxed{\omega_2^2 = \frac{6k}{m} \quad a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

Κανονικοποιούμε τα ιδιοδιανύσματα με βάση την συνθήκη ορθοκανονικότητας:

$$\vec{a}_k^T [T] \vec{a}_j = \delta_{kj} \Rightarrow \frac{m}{6}a^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \frac{ma^2}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$\Rightarrow \frac{ma^2}{\cancel{6}}\cancel{6} = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{\sqrt{m}}}$ Επομένως το $\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{a}_k^T [T] \vec{a}_j = \delta_{kj} \Rightarrow \frac{m}{6}a^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \frac{ma^2}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$\Rightarrow \cancel{2}\frac{ma^2}{\cancel{6}\,3} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{3}{m} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{3}{m}}$ οπότε το $\vec{a}_2 = \sqrt{\frac{3}{m}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ο modal πίνακας θα είναι: $A = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Βρίσκουμε τον αντίστροφο του A, $A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{m}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-2\sqrt{3}/m} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Οι κανονικές συντεταγμένες επομένως θα είναι:

$$\eta = A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\eta_1 = -\frac{\sqrt{m}}{2\cancel{\sqrt{3}}}(-\cancel{\sqrt{3}})(x_1+x_2)\\ \eta_2 = -\frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{3}}(-1)(x_1-x_2)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l}\eta_1 = \frac{\sqrt{m}}{2}(x_1+x_2)\\ \eta_2 = \frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{3}}(x_1-x_2)\end{array}$$

Η Lagrangian επομένως θα γράφει: $L = \frac{1}{2}\dot{\eta}^T\dot{\eta} - \frac{1}{2}\eta^T\omega^2\eta \Rightarrow$

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2\right) - \frac{1}{2}\eta_1^2\omega_1^2 - \frac{1}{2}\eta_2^2\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{4}(\dot{x}_1+\dot{x}_2)^2 + \frac{m}{12}(\dot{x}_1-\dot{x}_2)^2\right) - \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{m}}{4}\frac{\cancel{2}k}{\cancel{m}}(x_1+x_2)^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\cancel{m}}{\cancel{12}\,2}\frac{\cancel{6}k}{\cancel{m}}(x_1-x_2)^2 \Rightarrow L = \frac{m}{8}(\dot{x}_1+\dot{x}_2)^2 + \frac{m}{24}(\dot{x}_1-\dot{x}_2)^2 - \frac{k}{4}\left[(x_1+x_2)^2 + (x_1-x_2)^2\right]$$ ίδια με πριν

Η θέση του συστήματος σε μια τυχαία χρονική στιγμή θα είναι:

$$x(t) = \begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\cos\omega_1 t + B\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\cos\omega_2 t + C\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\sin\omega_1 t + D\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\sin\omega_2 t$$

Αν γνωρίζαμε τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε τις σταθερές A, B, C και D.

7. [**20μ**]

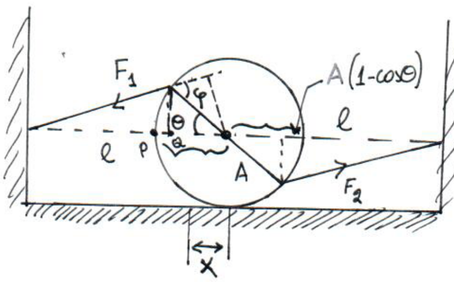
Ένας λεπτός δίσκος μάζας *M* και ακτίνας *A* συνδέεται με ακίνητα σημεία μέσω δύο ελατηρίων σταθεράς *k* εκατέρωθεν αυτού. Ο δίσκος βρίσκεται πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Ο δίσκος μπορεί να περιστρέφεται αλλά είναι περιορισμένος να κινείται σε ένα επίπεδο. Κάθε ελατήριο έχει φυσικό μήκος l_0. Αρχικά όταν το σύστημα βρίσκεται στην θέση ισορροπίας, η επιμήκυνση και τα δύο ελατηρίων είναι $l > l_0$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) Ποιες οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης για μικρές μετατοπίσεις από την θέση ισορροπίας; [**7μ**]

(β) Ποια τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα; [**6μ**]

(γ) Ποιες είναι οι κανονικές συντεταγμένες; [**4μ**]

(δ) Σχεδιάστε την κίνηση κάθε τρόπου ταλάντωσης. [**3μ**]



Έστω ότι δίσκος μετακινεί το CM κατά x και στρέφεται κατά γωνία Θ.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος θα είναι:

μεταφορική, άν το σύστημα κινηθεί κατά x τότε

$$\boxed{T_{μετ} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2}$$

Επίσης θα έχει περιστροφική κινητική ενέργεια: $\boxed{T_{περ} = \frac{1}{2} I_{CM} \dot{\Theta}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2} M A^2 \dot{\Theta}^2}$

Θα πρέπει να υπολογίσουμε την επιμήκυνση ή συσπείρωση των ελατηρίων, όταν ο δίσκος μετακινηθεί κατά x και στραφεί κατά τη γωνία Θ.

Η επιμήκυνση θα είναι: $\boxed{\vec{l}_1 = \left[l + A(1-\cos\Theta) + x\right]\hat{i} + A\sin\Theta\,\hat{j}}$ (A)

ό. όρος $A(1-\cos\Theta)$ αναφέρεται στο οριζόντιο τμήμα PQ όταν ο δίσκος απλά στρέφεται ενώ ο όρος x δίνει την οριζόντια μετατόπιση του δίσκου. Ο όρος $A\sin\Theta$ δίνει την κατακόρυφη συνιστώσα της θέσης του ελατηρίου.

Στην δεξιά πλευρά το διάνυσμα της επιμήκυνσης του ελατηρίου θα είναι:

$$\boxed{\vec{l}_2 = \left[l + A(1-\cos\Theta) - x\right]\hat{i} + A\sin\Theta\,\hat{j}} \quad (B)$$

Για να υπολογίσουμε την δυναμική ενέργεια, θέλουμε: $U = \frac{1}{2}k(l_1-l_0)^2 + \frac{1}{2}k(l_2-l_0)^2$

Επομένως θα πρέπει να υπολογίσουμε: $(l_1-l_0)^2 = l_1^2 + l_0^2 - 2l_1 l_0$

και αντίστοιχα $(l_2-l_0)^2 = l_2^2 + l_0^2 - 2l_2 l_0$

$$\ell_1^2 = \left[\ell + A(1-\cos\Theta)+x\right]^2 + A^2\sin^2\Theta =$$

$$= \ell^2 + x^2 + A^2(1-\cos\Theta)^2 + 2A\ell(1-\cos\Theta) + 2\ell x + 2Ax(1-\cos\Theta) + A^2\sin^2\Theta =$$

$$= \ell^2+x^2+A^2+\underline{A^2\cos^2\Theta} - 2A^2\cos\Theta + 2A\ell(1-\cos\Theta)+2\ell x+2Ax(1-\cos\Theta)+A^2\underline{\sin^2\Theta} \Rightarrow$$

$$\boxed{\ell_1^2 = \ell^2+x^2+2A^2-2A^2\cos\Theta+2A\ell(1-\cos\Theta)+2\ell x+2Ax(1-\cos\Theta)} \qquad (1)$$

$$\ell_1 = \ell\left[1+\frac{x^2}{\ell^2}+\frac{2A^2}{\ell^2}-\frac{2A^2\cos\Theta}{\ell^2}+\frac{2A\ell}{\ell^2}(1-\cos\Theta)+\frac{2\ell x}{\ell^2}+\frac{2Ax(1-\cos\Theta)}{\ell^2}\right]^{1/2}$$

Αναπτύσσουμε κατά Taylor $(1+\varepsilon)^{1/2}\simeq 1+\frac{1}{2}\varepsilon$ όπου $\varepsilon = \frac{(\dots)}{\ell^2}$ οπότε

$$\boxed{\ell_1 \simeq \ell\left[1+\frac{x^2}{2\ell^2}+\frac{A^2}{\ell^2}-\frac{A^2\cos\Theta}{\ell^2}+\frac{A}{\ell}(1-\cos\Theta)+\frac{x}{\ell}+\frac{Ax(1-\cos\Theta)}{\ell^2}\right]} \qquad (2)$$

Ανάλογα για την περίπτωση του ℓ_2 θα έχουμε:

$$\ell_2^2 = \left[\ell + A(1-\cos\Theta)-x\right]^2 + A^2\sin^2\Theta =$$

$$= \ell^2+x^2+A^2+A^2\underline{\cos^2\Theta}-2A^2\cos\Theta+2\ell A(1-\cos\Theta)-2\ell x-2Ax(1-\cos\Theta)+A^2\underline{\sin^2\Theta}\Rightarrow$$

$$\boxed{\ell_2^2 = \ell^2+x^2+2A^2-2A^2\cos\Theta+2\ell A(1-\cos\Theta)-2\ell x-2Ax(1-\cos\Theta)} \qquad (3)$$

Όπως και προηγουμένως, μετά το ανάπτυγμα Taylor θα έχουμε:

$$\boxed{\ell_2\simeq \ell\left[1+\frac{x^2}{2\ell^2}+\frac{A^2}{\ell^2}-\frac{A^2}{\ell^2}\cos\Theta+\frac{A}{\ell}(1-\cos\Theta)-\frac{x}{\ell}-\frac{Ax}{\ell^2}(1-\cos\Theta)\right]} \qquad (4)$$

Υπολογίζουμε το άθροισμα: $(\ell_1-\ell_0)^2+(\ell_2-\ell_0)^2 = \ell_0^2+\ell_1^2-2\ell_1\ell_0+\ell_0^2+\ell_2^2-2\ell_2\ell_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\ell_1-\ell_0)^2+(\ell_2-\ell_0)^2 = 2\ell_0^2+\ell_1^2+\ell_2^2-2\ell_0\left[\ell_1+\ell_2\right]$ αντικαθιστούμε τις (1),(2),(3) και (4)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (\ell_1-\ell_0)^2+(\ell_2-\ell_0)^2 = 2\ell_0^2 + \Big[&\ell^2+x^2+2A^2-2A^2\cos\Theta+2A\ell(1-\cos\Theta)+\cancel{2\ell x}+\cancel{2Ax(1-\cos\Theta)}+\\
&\ell^2+x^2+2A^2-2A^2\cos\Theta+2A\ell(1-\cos\Theta)-\cancel{2\ell x}-\cancel{2Ax(1-\cos\Theta)}\Big]+\\
-2\ell_0\ell\Big[&1+\frac{x^2}{2\ell^2}+\frac{A^2}{\ell^2}-\frac{A^2\cos\Theta}{\ell^2}+\frac{A}{\ell}(1-\cos\Theta)+\cancel{\frac{x}{\ell}}+\cancel{\frac{Ax}{\ell^2}(1-\cos\Theta)}+\\
&1+\frac{x^2}{2\ell^2}+\frac{A^2}{\ell^2}-\frac{A^2\cos\Theta}{\ell^2}+\frac{A}{\ell}(1-\cos\Theta)-\cancel{\frac{x}{\ell}}-\cancel{\frac{Ax}{\ell^2}(1-\cos\Theta)}\Big]
\end{aligned}$$

Συγκεντρώνοντας τους όρους του αθροίσματος, έχουμε:

$$(\ell_1-\ell_0)^2+(\ell_2-\ell_0)^2=2\ell_0^2+2\ell^2+2x^2+4A^2-4A^2\cos\theta+4A\ell(1-\cos\theta)-$$

$$-2\ell\ell_0\left[2+\frac{x^2}{\ell^2}+\frac{2A^2}{\ell^2}-\frac{2A^2\cos\theta}{\ell^2}+\frac{2A}{\ell}(1-\cos\theta)\right]=$$

$$=2\ell_0^2+2\ell^2-4\ell\ell_0+2x^2-2x^2\frac{\ell_0}{\ell}+4A^2(1-\cos\theta)+4A\ell(1-\cos\theta)-$$

$$-4\frac{A^2\ell_0}{\ell}+\frac{4A^2\ell_0}{\ell}\cos\theta-4A\ell_0(1-\cos\theta)=$$

$$=2(\ell-\ell_0)^2+2x^2\left(1-\frac{\ell_0}{\ell}\right)+4A^2(1-\cos\theta)+4A\ell(1-\cos\theta)-$$

$$-\frac{4A^2\ell_0}{\ell}(1-\cos\theta)-4A\ell_0(1-\cos\theta)=$$

$$=2(\ell-\ell_0)^2+2x^2\left(1-\frac{\ell_0}{\ell}\right)+\left[4A^2+4A\ell-4A^2\frac{\ell_0}{\ell}-4A\ell_0\right](1-\cos\theta)$$

$$=2(\ell-\ell_0)^2+2x^2\left(1-\frac{\ell_0}{\ell}\right)+4A\left[(A+\ell)-\ell_0\left(\frac{A+\ell}{\ell}\right)\right](1-\cos\theta)$$

$$=2(\ell-\ell_0)^2+2x^2\left(1-\frac{\ell_0}{\ell}\right)+\frac{4A(A+\ell)(\ell-\ell_0)}{\ell}(1-\cos\theta)$$

Taylor: $\cos\theta\simeq1-\frac{\theta^2}{2}$

$$\Rightarrow(\ell_1-\ell_0)^2+(\ell_2-\ell_0)^2=2(\ell-\ell_0)^2+2x^2\left(1-\frac{\ell_0}{\ell}\right)+\frac{\overset{2}{\cancel{4}}A(A+\ell)(\ell-\ell_0)}{\ell}\theta^2/\cancel{2}$$

Επομένως η δυναμική ενέργεια του συστήματος λόγω των ελατηρίων είναι:

$$V=\frac{1}{2}k\left[(\ell_1-\ell_0)^2+(\ell_2-\ell_0)^2\right]=\frac{1}{\cancel{2}}k\cancel{2}\left[(\ell-\ell_0)^2+x^2\left(1-\frac{\ell_0}{\ell}\right)+\frac{A(A+\ell)(\ell-\ell_0)}{\ell}\theta^2\right]$$

$$\Rightarrow\boxed{V=k\left[(\ell_1-\ell_0)^2+(\ell_2-\ell_0)^2\right]=k\left[(\ell-\ell_0)^2+x^2\left(1-\frac{\ell_0}{\ell}\right)+\frac{A(A+\ell)(\ell-\ell_0)}{\ell}\theta^2\right]}$$

Όπως βλέπουμε είναι τετραγωνική συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων του συστήματος x και θ

Η Lagrangian του προβλήματος θα είναι:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}MA^2\dot{\Theta}^2 - k\left[(\ell-\ell_0)^2 + x^2\left(1-\frac{\ell_0}{\ell}\right) + \frac{A(A+\ell)(\ell-\ell_0)}{\ell}\Theta^2\right]$$

Οι εξισώσεις κίνησης θα είναι: (ασύζευκτες ταλαντώσεις)

x : $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \Rightarrow M\ddot{x} = -2kx\frac{(\ell-\ell_0)}{\ell}$ Αρμονικός ταλαντωτής $\boxed{\omega_1^2 = \frac{2k}{M}\left(1-\frac{\ell_0}{\ell}\right)}$

Θ : $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Theta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Theta} \Rightarrow \frac{1}{2}MA^{\cancel{2}}\ddot{\Theta} = -\frac{2k\cancel{A}(A+\ell)(\ell-\ell_0)}{\ell}\Theta$ Αρμονικός ταλαντωτής

όπου $\boxed{\omega_2^2 = \frac{4k(A+\ell)(\ell-\ell_0)}{MA\ell}}$

Οι κινήσεις των δύο κανονικών τρόπων ταλάντωσης, αντιστοιχούν σε γραμμική ταλάντωση αλλά και περιστροφική ταλάντωση: