ΦΥΣ. 211

Τελική Εξέταση 10-Μάη-2014

Πριν ξεκινήσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, αριθμό ταυτότητας) στο πάνω μέρος της σελίδας αυτής.

Για τις λύσεις των ασκήσεων θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε μόνο τις σελίδες που δίνονται και μην κόψετε καμιά από τις σελίδες.

Προσπαθήστε να δείξετε τη σκέψη σας και να γράψετε καθαρές εξισώσεις. Για πλήρη ή μερική βαθμολόγηση θα πρέπει να φαίνεται καθαρά αυτό που προσπαθείτε να δείξετε. Αν δεν μπορώ να διαβάσω τι γράφετε αυτόματα θα υποθέσω ότι είναι λάθος.

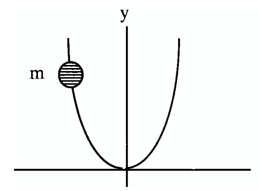
Σας δίνονται 10 ισοδύναμες ασκήσεις με σύνολο 100 μονάδων και πρέπει να απαντήσετε σε όλα.

Η σειρά των ασκήσεων δεν είναι αντιπροσωπευτική της δυσκολίας τους. Πριν ξεκινήσετε διαβάστε όλα τις ασκήσεις και σκεφτείτε τι χρειάζεται να κάνετε.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 180 λεπτά.

Καλή επιτυχία.

1. (**10π συνολικά**)
Θεωρείστε μια χάντρα μάζας m η οποία περιορίζεται να κινείται κατά μήκος ενός σταθερού σύρματος έτσι ώστε η κατακόρυφη απομάκρυνσή της σχετίζεται με την οριζόντια απομάκρυνσή της με την σχέση $y = \frac{1}{2}ax^2$.



(**α**) Γράψτε την Lagrangian για τη χάντρα [**2π**]
(**β**) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης. [**3π**]
(**γ**) Για μικρές απομακρύνσεις γύρω από τη θέση $x = 0$ η χάντρα εκτελεί ταλάντωση. Να βρεθεί η συχνότητα των ταλαντώσεων. [**5π**]

(α) $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$
$y = \frac{1}{2}ax^2 \Rightarrow \dot{y} = a\dot{x}x$
$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + a^2x^2\dot{x}^2) = \frac{1}{2}m(1+a^2x^2)\dot{x}^2$

Η δυναμική ενέργεια είναι $U = mgy = \frac{1}{2}mgax^2$

Επομένως η Lagrangian είναι: $\boxed{L = T - U = \frac{1}{2}m(1+a^2x^2)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}mgax^2}$

(β) Οι εξισώσεις κίνησης λαμβάνονται από τις εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(1+a^2x^2)\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m(1+a^2x^2)\ddot{x} + 2ma^2x\dot{x}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = ma^2x\dot{x}^2 - mgax$$

Επομένως $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m(1+a^2x^2)\ddot{x} + 2ma^2x\dot{x}^2 - ma^2x\dot{x}^2 + mgax = 0$

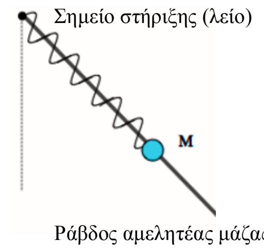
$$\Rightarrow \boxed{(1+a^2x^2)\ddot{x} + a^2x\dot{x}^2 + gax = 0}$$

(γ) Για μικρές ταλαντώσεις, αγνοούμε όλους τους μη γραμμικούς όρους:

$$\ddot{x} + agx = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{ag}}$$

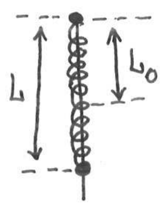
2. (**10π συνολικά**)

Ένα επίπεδο εκκρεμές αποτελείται από ένα ελατήριο του οποίου οι σπείρες είναι τυλιγμένες γύρω από μια ευθύγραμμη και αβαρή ράβδο απεριόριστου μήκους. Το ελατήριο έχει φυσικό μήκος L_0 και σταθερά k. Το ένα άκρο του ελατηρίου και η ράβδος εξαρτώνται από ένα σημείο το οποίο δεν παρουσιάζει τριβές. Μια χάντρα μάζας M είναι τρυπημένη ώστε να διαπερνά τη ράβδο και εξαρτάται από το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου και όταν η μάζα είναι σε ηρεμία ισχύει $Mg = k(L - L_0)$. Δεν υπάρχουν δυνάμεις τριβών στο πρόβλημα.



(α) Να βρεθεί η Lagrangian του συστήματος. Έστω r η απόσταση της μάζας M από το σημείο στήριξης και θ η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την κατακόρυφο. Θεωρήστε σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που περνά από το σημείο στήριξης. [**3π**]

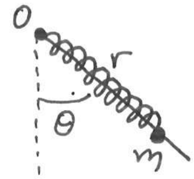
(β) Βρείτε προσεγγιστικές λύσεις στις εξισώσεις Lagrange στο όριο ταλαντώσεων μικρού πλάτους, για τις οποίες το σύστημα παραμένει κοντά στην κατάσταση ισορροπίας. Δώστε ακριβείς εξηγήσεις για τις προσεγγίσεις που κάνετε. [<u>*Υπόδειξη:*</u> μπορεί να σας φανεί χρήσιμο να ορίσετε την μικρή ποσότητα $\varepsilon = r - L$]. [**7π**]



Σε ισορροπία: $Mg = k(L-L_0)$ όπου L το μήκος του εκκρεμούς σε ισορροπία και L_0 είναι το φυσικό μήκος του ελατηρίου

Το ελατήριο και η ράβδος έχουν αμελητέα μάζα.

(a)



r: η απόσταση από το σημείο στήριξης

$U_g = 0$ η βαρυτική δυναμική ενέργεια στο επίπεδο που περνά από το σημείο στήριξης

Επομένως η βαρυτική δυναμική ενέργεια θα είναι: $\boxed{U_g = -mgr\cos\theta}$ (1)

Η κινητική ενέργεια είναι $T = \frac{1}{2}mv^2$. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες

$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \Rightarrow \vec{v}^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ οπότε $\boxed{T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)}$ (2)

Η συνολική δυναμική ενέργεια θα είναι: $U_{ολ} = U_g + U_{ελ} = -mgr\cos\theta + \frac{1}{2}k(r-L_0)^2$

Η Lagrangian είναι: $L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta - \frac{1}{2}k(r-L_0)^2$

(β) Οι εξισώσεις κίνησης:

r: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - k(r-L_0) = m\ddot{r}$ (A)

θ: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = -mgr\sin\theta$ (B)

Λύνουμε τις (A) και (B) κοντά στην θέση ισορροπίας που αντιστοιχεί σε $\theta=0$, $r=L$

Γύρω από την θέση ισορροπίας, η θ έχει μικρό πλάτος A. Ξέρουμε ότι $\dot{\theta} \propto A$ και $\ddot{\theta} \propto A$, επομένως $\dot{\theta}$ και $\ddot{\theta}$ είναι επίσης μικρά σε μέγεθος

Ορίζουμε, σύμφωνα με την υπόδειξη, $\varepsilon = r - L$ την ακτινική απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας. Η ποσότητα αυτή είναι μικρή σε μέγεθος αφού $r \approx L$. Επομένως οι διαφορικές εξισώσεις για r και θ θα γίνουν:

<u>Συμπεριφορά r</u>: (A) $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{mr\dot{\theta}^2}_{\substack{2^{ης} \text{ τάξης σε } A \\ \text{και μπορεί να} \\ \text{αγνοηθεί}}} + mg\underbrace{\cos\theta}_{\substack{\simeq 1 \text{ αφού} \\ \theta \text{ μικρό}}} - k(\varepsilon + L - L_0) = m\ddot{\varepsilon} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow mg - k\varepsilon - k(L - L_0) \simeq m\ddot{\varepsilon} \\ \text{από την συνθήκη ισορροπίας: } mg = k(L - L_0) \end{array}\right\} \Rightarrow -k\varepsilon \simeq m\ddot{\varepsilon} \Rightarrow \boxed{\ddot{\varepsilon} = -\frac{k}{m}\varepsilon}$$

Επομένως το r ταλαντώνεται γύρω από την θέση ισορροπίας $r_{eq} = L$, με συχνότητα $\boxed{\omega_1 \cong \sqrt{\frac{k}{m}}}$

<u>Συμπεριφορά του θ</u>: (B) $\Rightarrow$

$$-mg\underbrace{r}_{\sim L}\underbrace{\sin\theta}_{\sim\theta} = \underbrace{2mr\dot{r}\dot{\theta}}_{\substack{2^{ης} \text{ τάξης} \\ \text{και άρα μπορεί} \\ \text{να αγνοηθεί}}} + m\underbrace{r^2}_{\sim L^2}\ddot{\theta}$$

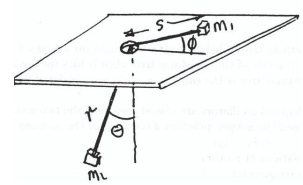
Άρα η εξίσωση γίνεται: $\cancel{m}L^2\ddot{\theta} \simeq -\cancel{m}g\cancel{L}\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta}$$

Δηλαδή η συντεταγμένη θ εκτελεί ταλάντωση με συχνότητα $\boxed{\omega_2 \simeq \sqrt{g/L}}$

3. (**10π συνολικά**)

Θεωρήστε την περίπτωση δυο μαζών m_1 και m_2 που συνδέονται με ένα μη ελαστικό σχοινί αμελητέας μάζας και μήκους $r + s = l$. Η μάζα m_1 κινείται στο οριζόντιο επίπεδο ενός λείου τραπεζιού ενώ η μάζα m_2 κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο. Χρησιμοποιήστε τις συντεταγμένες του σχήματος.



(**α**) Αναφέρετε τους δεσμούς του συστήματος και προσδιορίστε την Lagrangian και Hamiltonian του συστήματος. [**5π**]

(**β**) Προσδιορίστε τις εξισώσεις κίνησης. [**3π**]

(**γ**) Δείξτε ποιες μεταβλητές είναι κυκλικές. [**2π**]

Οι μάζες m_1 και m_2 συνδέονται με σχοινί μήκους l. Η μάζα m_1 είναι σε οριζόντιο επίπεδο που δεν παρουσιάζει τριβές, ενώ η μάζα m_2 κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο

(α) Οι δεσμοί του συστήματος είναι

1. m_1 κινείται σε οριζόντιο επίπεδο
2. m_2 κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο
3. $r+s=l$ (όπου l το μήκος του σχοινιού) $\Rightarrow \dot{r} = -\dot{s}$

Λαμβάνοντας υπόψιν τους δεσμούς, υπάρχουν $6-3=3$ βαθμοί ελευθερίας
Χρησιμοποιούμε σαν γενικευμένες συντεταγμένες τις r, θ και ϕ, οπότε:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{s}^2 + s^2\dot{\phi}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{r}^2 + (l-r)^2\dot{\phi}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)}$$

όπου κάναμε χρήση της εξίσωσης του δεσμού του σχοινιού και πολικών συντεταγμένων

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας, θεωρώντας σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό του οριζόντιου επιπέδου που κινείται η μάζα m_1 θα είναι:

$$V = 0 - m_2 g r\cos\theta \Rightarrow \boxed{V = -mgr\cos\theta}$$

Η Lagrangian επομένως θα είναι: $L = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{r}^2 + (l-r)^2\dot{\phi}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + mgr\cos\theta$

Το σύστημα είναι κεντρικής δύναμης και συντηρητικό και επομένως η Hamiltonian είναι:

$$H = \frac{p_r^2}{2(m_1+m_2)} + \frac{p_\phi^2}{2m_1(l-r)^2} + \frac{p_\theta^2}{2m_2 r^2} - m_2 g r\cos\theta = E$$

(β) Τα διαφορικά για τις εξισώσεις κίνησης θα είναι:

$$r: \quad \frac{\partial L}{\partial r} = -m_1(l-r)\dot{\phi}^2 + m_2 r\dot{\theta}^2 + m_2 g\cos\theta$$

$$P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = (m_1+m_2)\dot{r}$$

$$\theta: \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -m_2 g r\sin\theta$$

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_2 r^2\dot{\theta}$$

$$\phi: \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m_1(l-r)^2\dot{\phi}$$

Οι τρεις εξισώσεις κίνησης θα είναι, από τις εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$r: \quad (m_1+m_2)\ddot{r} + m_1(l-r)\dot{\phi}^2 - m_2 r\dot{\theta}^2 - m_2 g\cos\theta = 0$$

$$\theta: \quad \frac{d}{dt}\left[m_2 r^2\dot{\theta}\right] + m_2 g r\sin\theta = 0 \Rightarrow 2m_2 r\dot{r}\dot{\theta} + r^2 m_2\ddot{\theta} + m_2 g r\sin\theta = 0$$

$$\phi: \quad \frac{d}{dt}\left[m_1(l-r)^2\dot{\phi}\right] = 0$$

Αυτή η τελευταία εξίσωση εκφράζει διατήρηση στροφορμής.

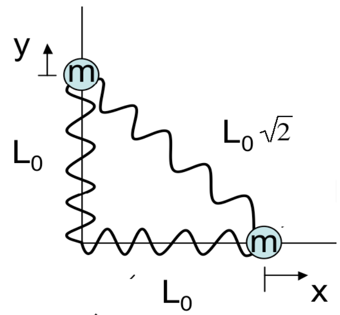
(γ) Κυκλικές συντεταγμένες είναι αυτές για τις οποίες: $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$.

Επομένως η αντίστοιχη γενικευμένη ορμή είναι σταθερά της κίνησης.

Στο ερώτημα (β) είδαμε ότι $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$ και επομένως P_ϕ διατηρείται

4. (**10π συνολικά**)

Το παρακάτω σχήμα δείχνει τρια ελατήρια στην θέση ισορροπίας τους. Και τα τρια ελατήρια έχουν σταθερά k ενώ η μάζα τους θεωρείται αμελητέα (μπορείτε να αγνοήσετε τη βαρύτητα για το πρόβλημα αυτό). Τα ελατήρια 1 και 2 είναι τυλιγμένα γύρω από λείες ράβδους, έτσι ώστε το ελατήριο 1 μπορεί να κινείται στη x-διεύθυνση μόνο, ενώ το ελατήριο 2 μόνο στη y-διεύθυνση. Δυο μπάλες μάζας m είναι στερεωμένες στα άκρα των ελατηρίων 1 και 2. Το τρίτο ελατήριο συνδέει τις δυο μάζες. Τα μήκη ισορροπίας των ελατηρίων είναι L_0, L_0 και $\sqrt{2}L_0$ για τα ελατήρια 1, 2 και 3 αντίστοιχα.

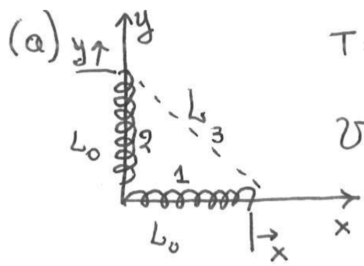


(α) Να βρεθεί η δυναμική ενέργεια όταν το ελατήριο 1 επιμηκύνεται κατά μια ποσότητα x και το ελατήριο 2 επιμηκύνεται κατά μια ποσότητα y, όπου x και y είναι και τα δυο πολύ μικρότερα από το L_0. [**4π**].

(β) Να βρεθούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος αυτού, υποθέτοντας ότι $x \ll L_0$ και $y \ll L_0$. [**4π**]

(γ) Περιγράψτε ένα τρόπο για να θέσετε το σύστημα σε κίνηση έτσι ώστε να ταλαντώνεται στην χαμηλότερη συχνότητα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. [**2π**]

(α)



$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}kz^2$$

x: επιμήκυνση ελατηρίου 1, y: επιμήκυνση ελατηρίου 2, z: επιμήκυνση ελατηρίου 3

$$L^2 = (L_0+x)^2 + (L_0+y)^2 = L_0^2 + 2L_0x + x^2 + L_0^2 + 2L_0y + y^2 = 2L_0^2 + 2L_0(x+y) + x^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L^2 = 2L_0^2\left(1 + \frac{(x+y)}{L_0} + \frac{x^2+y^2}{2L_0^2}\right)$$ αλλά $x, y \ll L_0$ οπότε η εξίσωση γράφεται:

$$L^2 \simeq 2L_0^2\left(1 + \frac{(x+y)}{L_0}\right) \Rightarrow L \simeq L_0\sqrt{2}\left(1 + \frac{x+y}{L_0}\right)^{1/2} \Rightarrow L \simeq L_0\sqrt{2}\left(1 + \frac{x+y}{2L_0}\right)$$

Η επιμήκυνση του 3ου ελατηρίου θα είναι: $z = L_0\sqrt{2} - L = L_0\sqrt{2} - L_0\sqrt{2}\left(1 + \frac{x+y}{2L_0}\right)$

$$\Rightarrow z = -L_0\sqrt{2}\,\frac{x+y}{2L_0} \Rightarrow \boxed{z = -\frac{x+y}{\sqrt{2}}}$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος θα είναι: $U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{4}k(x+y)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{4}kx^2 + \frac{1}{4}ky^2 + \frac{1}{2}kxy \Rightarrow \boxed{U = \frac{3}{4}k(x^2+y^2) + \frac{1}{2}kxy}$$

(β) $\{V\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial^2 y} \end{pmatrix} \Rightarrow \{V\} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}k & k/2 \\ k/2 & 3/2\, k \end{pmatrix}$

$\{T\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial^2 \dot{x}} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x} \partial \dot{y}} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{y} \partial \dot{x}} & \frac{\partial^2 T}{\partial^2 \dot{y}} \end{pmatrix} \Rightarrow \{T\} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$

Από την χαρακτηριστική εξίσωση: $\left| \{V\} - \omega^2 \{T\} \right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{3}{2}k - \omega^2 M & k/2 \\ k/2 & \frac{3}{2}k - \omega^2 M \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}k - m\omega^2 \right)^2 - \left(\frac{k}{2} \right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}k - m\omega^2 = \pm \frac{k}{2} \Rightarrow \boxed{\omega_1^2 = \frac{k}{m}} \, , \, \boxed{\omega_2^2 = \frac{2k}{m}}$

(γ) Για την συχνότητα $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$ αντικαθιστούμε στην χαρακτηριστική εξίσωση για να βρούμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα:

$\left(\{V\} - \{T\} \omega_1^2 \right) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2}k - \frac{k}{\cancel{m}}\cancel{M} & k/2 \\ k/2 & \frac{3}{2}k - \frac{k}{\cancel{m}}\cancel{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{k}{2} & \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & \frac{k}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow a_{11} = -a_{21}$ Επομένως το ιδιοδιάνυσμα είναι $\vec{a}_1 = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Αν επιμηκύνουμε το ένα ελατήριο κατά μια ποσότητα α και συσπειρώσουμε το άλλο ελατήριο κατά την ίδια ποσότητα και τα αφήσουμε να κινηθούν το σύστημα θα ταλαντώνεται με συχνότητα ω_1.

5. (**10π συνολικά**)

Ένα Frisbee ρίχνεται οριζόντια από το νότιο πόλο σε ύψος 1m πάνω από το έδαφος με πολύ μεγάλη ταχύτητα υ. Πιστέψτε το ή όχι κατορθώνει να φθάσει στο βόρειο πόλο πετώντας πάνω από αυτόν με ταχύτητα υ/2.

(**α**) Σε τι ύψος πάνω από το έδαφος περνά πάνω από το βόρειο πόλο; (**3 β**)

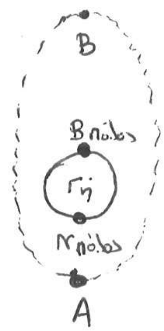
(**β**) Όταν επιστρέφει στο νότιο πόλο, σε τι ύψος πάνω από το έδαφος φθάνει; (**2 β**)

(**γ**) Ποια είναι η εκκεντρότητα της τροχιάς; (**3 β**)

(**δ**) Ποιος ο μικρός ημιάξονας; (**2 β**)

Αγνοήστε την τριβή λόγω αέρα. Η ακτίνα της γης είναι R=6370km.

Θεωρήστε 1m<<R. Δικαιολογήστε λεπτομερώς όλες τις απαντήσεις σας.



(α) Το δυναμικό στην περίπτωσή μας είναι $V=-k/r$ και επομένως το πρόβλημα του frisbee ανάγεται σε αυτό του kepler. Το frisbee ρίχνεται οριζόντια σε ένα σημείο A, έτσι ώστε $\dot{r}(A)=0$. Επομένως το σημείο A είναι ένα σημείο αψίδας και η στροφορμή $l=|\vec{r}\times\vec{p}| = m r_A v$ όπου r_A η ακτινική απόσταση από το κέντρο της γης στο A. Ο βόρειος πόλος είναι επίσης σημείο αψίδας και επομένως $l = m\frac{v}{2} r_B = m v r_A \Rightarrow r_A = r_B/2$

όπου χρησιμοποιήσαμε διατήρηση στροφορμής.

Ξέραμε ακόμη ότι $r_A = r_{γης} + 1m \simeq r_{γης} \Rightarrow r_B = 2r_A \Rightarrow r_B \simeq 2r_{γης}$

Το frisbee περνά από το βόρειο πόλο σε ύψος ίσο με μια ακτίνα της γης.

(β) Το πρόβλημα kepler επιτρέπει κλειστές (φραγμένες) τροχιές για E<0 και επομένως το frisbee επιστρέφει και πάλι στο σημείο A στο ίδιο ύψος.

(γ) $$\left.\begin{aligned} r_{min} &= a(1-\varepsilon) = r_A \\ r_{max} &= a(1+\varepsilon) = r_B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{r_A}{r_B} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1-r_A/r_B}{1+r_A/r_B} = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{1}{3}}$$

(δ) $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ ενώ $a = r_A(1+\varepsilon)$ οπότε $b = r_A\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \Rightarrow \boxed{b = r_A\sqrt{2}}$

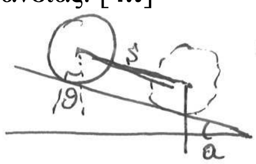
6. (**10π συνολικά**)

Θεωρήστε ένα ιδανικό στεφάνι μάζας M, και ακτίνας R, το οποίο κυλά χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος μιας κεκλιμένης επιφάνειας κλίσης α ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Την χρονική στιγμή t=0, το στεφάνι αφήνεται από την κορυφή της κεκλιμένης επιφάνειας να κυλήσει προς την βάση της χωρίς αρχική ταχύτητα. Έστω θ η γωνία κατά την οποία περιστρέφεται το στεφάνι ως προς την αρχική του θέση. Θεωρήστε επίσης σαν S την απόσταση που διαγράφει το κέντρο μάζας του στεφανιού από την αρχική του θέση. Η ροπή αδράνειας του στεφανιού ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο στεφάνι είναι $I_{cm} = MR^2$.

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange:

(**α**) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης για το σύστημα αυτό. [**6π**]

(**β**) Βρείτε το μέτρο της δύναμης που απαιτείται ώστε το στεφάνι να κυλά χωρίς ολίσθηση. Για μια συγκεκριμένη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής, $\mu_ς$, να βρεθεί η μέγιστη τιμή της γωνίας της κλίσης, α, για την οποία δεν υπάρχει ολίσθηση μεταξύ του στεφανιού και κεκλιμένης επιφάνειας. [**4π**]



(α) Η κινητική ενέργεια του στεφανιού είναι :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{S}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \dot{\theta}^2$$

Η δυναμική ενέργεια θα είναι: $V = V_0 - mgS\sin(a)$

όπου V_0 η δυναμική ενέργεια στην αρχική θέση (κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου)

Η Lagrangian επομένως θα είναι: $L = \frac{1}{2} m \dot{S}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 - V_0 + mgS\sin(a)$

Ο δεσμός της κύλησης χωρίς ολίσθηση είναι: $f = S - R\theta = 0$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange χρησιμοποιώντας πολλ/στή Lagrange είναι:

$$L' = \frac{1}{2} m \dot{S}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + mgS\sin(a) + \lambda(S - R\theta) - V_0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{S}}\right) - \frac{\partial L}{\partial S} = 0 \Rightarrow m\ddot{S} - mg\sin(a) - \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{m\ddot{S} = mg\sin(a) + \lambda} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow mR^2\ddot{\theta} + \lambda R = 0 \Rightarrow mR^{\cancel{2}}\ddot{\theta} = -\lambda \cancel{R} \Rightarrow \boxed{mR\ddot{\theta} = -\lambda} \quad (2)$$

Από την εξίσωση του δεσμού $\boxed{S - R\theta = 0} \Rightarrow \boxed{\dot{S} = R\dot{\theta}} \Rightarrow \boxed{\ddot{S} = R\ddot{\theta}} \quad (3)$

Αντικατάσταση των (2) & (3) στην (1) δίνει: $mR\ddot{\theta} = mg\sin(a) - (mR\ddot{\theta}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2R\ddot{\theta} = \cancel{m}g\sin(a) \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = g\sin(a)/2R}$$

Η δύναμη του δεσμού είναι: $F_\lambda \equiv -\lambda = MR\ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{F_\lambda = \frac{1}{2} mg\sin(a)}$

(β) Η κάθετη δύναμη που ασκείται μεταξύ της κεκλιμένης επιφάνειας και του στεφανιού είναι: $F_\kappa = mg\cos(a)$

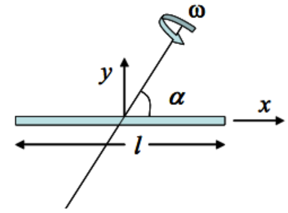
Η δύναμη της τριβής είναι $F_s \le \mu_s F_\kappa \le \mu_s mg\cos(a)$

Το στεφάνι δεν θα γλυστρήσει ~~πάνω~~ στην κεκλιμένη επιφάνεια αν ισχύει η συνθήκη: $F_\eta < F_s \le \mu_s mg\cos(a) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{mg}\sin(a) \le \mu_s \cancel{mg}\cos(a) \Rightarrow \boxed{\tan(a) \le 2\mu_s}$$

7. (**10π συνολικά**)

Μια λεπτή ομοιόμορφη ράβδος μήκους *l*, και μάζας *m*, είναι περιορισμένη να κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα *ω*, γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο της *O* και σχηματίζει γωνία *α* με την διεύθυνση της ράβδου, όπως στο διπλανό σχήμα. Για το πρόβλημα αγνοήστε το πάχος της ράβδου στις *y* και *z* διευθύνσεις.



(**α**) Γράψτε τον τανυστή αδράνειας στο σύστημα αναφοράς του σώματος (*x*,*y*,*z*) που δείχνονται στο σχήμα (ο *z*-άξονας δείχνει έξω από την σελίδα). [**3π**]

(**β**) Βρείτε το μέγεθος και την διεύθυνση του διανύσματος της στροφορμής στο σύστημα αναφοράς του σώματος. [**4π**]

(**γ**) Υπολογίστε την ροπή που είναι απαραίτητη ώστε η ράβδος να περιστρέφεται με τον παραπάνω τρόπο. [**3π**]

(α) Υπολογίζουμε τον τανυστή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της:

$$I_{yy} = I_z = \rho\int_{-l/2}^{l/2} x^2\,dx = \rho\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-l/2}^{l/2} = \rho\,\frac{l^3}{12} = \rho l\,\frac{l^2}{12} \Rightarrow I_{yy} = M\frac{l^2}{12}$$

Όμοια $I_{zz} = I_{yy} = M\frac{l^2}{12}$ ενώ $I_{xx} = 0$

Οι όροι $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

Επομένως ο τανυστής αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της είναι

$$I = \frac{Ml^2}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(β) Η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ θα έχει συνιστώσες κατά μήκος του x και y άξονα, αλλά όχι κατά μήκος του z-άξονα. Επομένως οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας θα είναι:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega\cos(a) \\ \omega\sin(a) \\ 0 \end{pmatrix}$$ και επομένως η στροφορμή θα είναι: $\vec{L} = I\vec{\omega} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{L} = \frac{ml^2}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega\cos(a) \\ \omega\sin(a) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{L} = \frac{ml^2}{12}\begin{pmatrix} 0 \\ \omega\sin(a) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(γ) $$\vec{\tau} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{ακιν} = \underbrace{\cancel{\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{σωμ}}}_{0} + \vec{\omega}\times\vec{L} \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{\omega}\times\vec{L} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega\cos a & \omega\sin a & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12}\omega\sin a & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \hat{k}\left(\frac{ml^2}{12}\omega^2\cos a\sin a\right)}$$

Η ροπή είναι πάντοτε κάθετη στην διεύθυνση της στροφορμής

Οι συνιστώσες του διανύσματος έχουν γραφεί για την χρονική στιγμή που οι ακίνητοι και οι άξονες του σώματος συμπίπτουν.

8. (**10π συνολικά**)
Θεωρήστε μια λεπτή ομογενή πλάκα, με κύριες ροπές αδράνειας I_1 κατά μήκος του κύριου άξονα x_1, $I_2 > I_1$ κατά μήκος του κύριου άξονα x_2, και $I_3 = I_1 + I_2$. Έστω το κέντρο μάζας, O, του σώματος αποτελεί την αρχή των συστημάτων συντεταγμένων x_i και x_i'. Την χρονική στιγμή t=0, η πλάκα τίθεται σε περιστροφική κίνηση απουσία οποιασδήποτε δύναμης με γωνιακή ταχύτητα Ω, γύρω από άξονα που σχηματίζει γωνία α με το επίπεδο της πλάκας και είναι κάθετος στον x_2 άξονα. Αν ο λόγος $I_1/I_2 = \cos(2\alpha)$, δείξτε ότι την χρονική στιγμή t, η γωνιακή ταχύτητα ως προς τν x_2-άξονα ισούται με $\omega_2(t) = \Omega\cos\alpha\tanh(\Omega t\sin\alpha)$. [*Υπόδειξη:* Ξεκινήστε από τις εξισώσεις Euler.]

Η αρχική γωνιακή ταχύτητα της πλάκας έχει μέτρο Ω και έχει διεύθυνση σε άξονα που βρίσκεται στο x_1-x_3 επίπεδο και σχηματίζει γωνία a με τον x_1-άξονα.

Επομένως μπορούμε να γράψουμε τις συνιστώσες του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας ως προς τους τρεις κύριους άξονες ως:

$$\vec{\omega}(0) = \begin{pmatrix} \omega_1(0) \\ \omega_2(0) \\ \omega_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega\cos a \\ 0 \\ \Omega\sin a \end{pmatrix}$$

Οι εξισώσεις Euler για την περίπτωση απουσίας ροπής γράφονται ως:

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_3\omega_2 = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} I_1\dot{\omega}_1 + (I_1 + \cancel{I_2} - \cancel{I_2})\omega_3\omega_2 = 0 \Rightarrow \dot{\omega}_1 + \omega_3\omega_2 = 0 \quad (1)$$

$$I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} I_2\dot{\omega}_2 + (\cancel{I_1} - \cancel{I_1} - I_2)\omega_1\omega_3 = 0 \Rightarrow \dot{\omega}_2 - \omega_1\omega_3 = 0 \quad (2)$$

$$I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} (I_1 + I_2)\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = 0 \Rightarrow \dot{\omega}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}\omega_1\omega_2 \quad (3)$$

Ξέρουμε ακόμα ότι $I_3 = I_1 + I_2$. (4)

Από την (3) θα έχουμε: $\dot{\omega}_3 = \dfrac{\frac{I_1}{I_2} - 1}{\frac{I_1}{I_2} + 1}\omega_1\omega_2 \Rightarrow \dot{\omega}_3 = \dfrac{\cos(2a) - 1}{\cos(2a) + 1}\omega_1\omega_2$

Διαιρούμε τις (1) κ (2) οπότε: $\dfrac{\dot{\omega}_1}{\dot{\omega}_2} = -\dfrac{\omega_2}{\omega_1} \Rightarrow \dot{\omega}_1\omega_1 = -\dot{\omega}_2\omega_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega_1\frac{d\omega_1}{dt} = -\omega_2\frac{d\omega_2}{dt} \Rightarrow \omega_1 d\omega_1 = -\omega_2 d\omega_2 \Rightarrow \boxed{\omega_1^2 = -\omega_2^2 + C_1} \quad (A)$$

Διαφορούμε τις εξισώσεις (2) και (3) οπότε έχουμε:

$$\frac{\dot{\omega}_2}{\dot{\omega}_3} = \frac{\omega_3}{A\,\omega_2} \qquad \text{όπου } A = \frac{\cos 2a - 1}{1 + \cos 2a} = \frac{-\cancel{2}\sin^2 a}{\cancel{2}\cos^2 a} = -\tan^2 a$$

Οπότε $$\frac{\dot{\omega}_2}{\dot{\omega}_3} = \frac{\omega_3}{-\tan^2 a\,\omega_2} \Rightarrow \omega_3\, d\omega_3 = -\tan^2 a\, \omega_2\, d\omega_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_3^2 = -\omega_2^2 \tan^2 a + C_2} \quad (B)$$

Με βάση τις αρχικές συνθήκες για $t=0$, $\omega_1 = \Omega\cos a \Rightarrow C_1 = \Omega^2\cos^2 a$

ενώ $\omega_3 = \Omega\sin a \Rightarrow C_2 = \Omega^2 \sin^2 a$.

Επομένως οι εξισώσεις (A) και (B) γίνονται: $\begin{cases} \omega_1^2 = -\omega_2^2 + \Omega^2\cos^2 a \\ \omega_3^2 = -\omega_2^2 \tan^2 a + \Omega^2 \sin^2 a \end{cases}$

Αντικαθιστούμε στην (2) οπότε θα έχουμε:

$$\dot{\omega}_2 = \omega_1\omega_3 = \sqrt{\Omega^2\cos^2 a - \omega_2^2}\sqrt{\Omega^2\sin^2 a - \omega_2^2\tan^2 a} = \sqrt{\Omega^4\cos^2 a\sin^2 a - \omega_2^2\Omega^2\sin^2 a - \omega_2^2\Omega^2\sin^2 a + \omega_2^4\tan^2 a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\omega}_2 = \sqrt{\Omega^4\sin^2 a\cos^2 a - 2\omega_2^2\Omega^2\sin^2 a + \omega_2^4\tan^2 a} = \sin a\cos a\sqrt{\Omega^4 - 2\omega_2^2\Omega^2\frac{1}{\cos^2 a} + \frac{\omega_2^4}{\cos^4 a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\omega}_2 = \sin a\cos a\sqrt{\left(\Omega^2 - \frac{\omega_2^2}{\cos^2 a}\right)^2} \Rightarrow \dot{\omega}_2 = \sin a\cos a\left(\Omega^2 - \frac{\omega_2^2}{\cos^2 a}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\omega}_2 = \Omega^2\sin a\cos a\left(1 - \frac{\omega_2^2}{\Omega^2\cos^2 a}\right) \Rightarrow \frac{d\left(\frac{\omega_2}{\Omega\cos a}\right)}{1 - \left(\frac{\omega_2}{\Omega\cos a}\right)^2} = dt\,\Omega\sin a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tanh^{-1}\left(\frac{\omega_2}{\Omega\cos a}\right) = \Omega t\sin a + C_3$$

Αλλά $\omega_2(t=0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$

$$\Rightarrow \tanh^{-1}\left(\frac{\omega_2}{\Omega\cos a}\right) = \Omega t\sin a \Rightarrow \frac{\omega_2}{\Omega\cos a} = \tanh(\Omega t\sin a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_2(t) = \Omega\cos a\tanh(\Omega t\sin a)}$$

9. (**10π συνολικά**)

Δυο παρατηρητές Α και Β εξετάζουν κάποιο στερεό σώμα ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο. Και οι δυο χρησιμοποιούν καρτεσιανό σύστημα αναφοράς για να καταγράψουν τις παρατηρήσεις τους αλλά τα δυο συστήματα αναφοράς δεν είναι απαραίτητα τα ίδια. Οι μετρήσεις του παρατηρηρή Α οδηγεί σε τανυστή αδράνειας που δίνεται από τον ακόλουθο διαγώνιο πίνακα $I_A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ενώ ο Β στο δικό του σύστημα συντεταγμένων μετρά $I_B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Είναι δυνατόν και οι δυο να παρατηρούν το ίδιο στερεό αντικείμενο; Εξηγήστε πλήρως την απάντησή σας.

Θα μπορούσε κάποιος να εξετάσει αν οι δυό τανυστές σχετίζονται μέσω κάποιου ορθογώνιου μετασχηματισμού U τέτοιο ώστε: $I_B = U I_A U^T$.

Ωστόσο δεν χρειάζεται να ψάξουμε για τον πίνακα U. Αρκεί να εξετάσουμε ότι οι ιδιοτιμές του I_A και I_B είναι ίδιες.

Ο I_A είναι διαγώνιος, επομένως αρκεί να εξετάσουμε αν οι ιδιοτιμές του I_B είναι 3, 6 και 9.

Επομένως χρειάζεται να βρούμε τις λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης:

$$\det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 7-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)(6-\lambda)(7-\lambda) - 4(5-\lambda) - 4(7-\lambda) = 0$$

Ωστόσο οι λύσεις του πολυωνύμου δεν είναι απαραίτητα εύκολο να βρεθούν. Μπορούμε όμως να αντικαταστήσουμε τις τιμές 3, 6, 9 και να εξετάσουμε αν η ορίζουσα μηδενίζεται, δηλαδή τα 3, 6, 9 αντιπροσωπεύουν τις ιδιοτιμές του I_B.

Όντως για $\lambda = 3$ έχουμε: $(5-3)(6-3)(7-3) - 4(5-3) - 4(7-3) = 2\cdot3\cdot4 - 4\cdot2 - 4\cdot4 = 0$

Για $\lambda = 6$ έχουμε: $(5-6)(6-6)(7-6) - 4(5-6) - 4(7-6) = 0 + 4 - 4 = 0$

Για $\lambda = 9$ έχουμε: $(5-9)(6-9)(7-9) - 4(5-9) - 4(7-9) = -4\cdot3\cdot2 + 4\cdot4 + 4\cdot2 = 0$

Επομένως οι 2 παρατηρητές μελετούν το ίδιο στερεό σε δύο συστήματα που σχετίζονται με ένα απλό μετασχηματισμό στροφής.

10. (**10π συνολικά**)

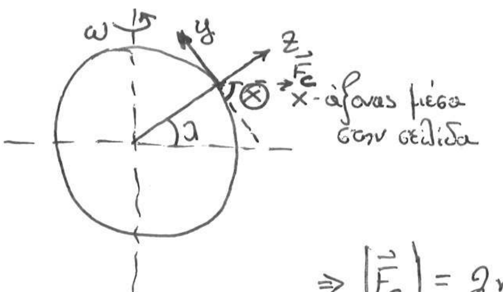
Υποθέστε ότι ο batman οδηγεί το αυτοκίνητό του (batmobile) ανατολικά με σταθερή ταχύτητα και σε βόρειο γεωγραφικό πλάτος 42^{o}. Στο πρόβλημα αυτό μπορείτε να αγνοήσετε την επίδραση της φυγοκέντρου δύναμης, αποτέλεσμα της περιστροφής της γης. Ωστόσο θα πρέπει να θεωρήσετε μόνο το πρόβλημα της δύναμης Coriolis.

(**α**) Το αποτέλεσμα της δύναμης Coriolis είναι να αποκλίνει το αυτοκίνητο βόρεια ή νότεια; Εξηγήστε [**2π**]

(**β**) Πως αλλάζει η δύναμη Coriolis την κάθετο αντίδραση από το έδαφος στο αυτοκίνητο; [**3π**]

(**γ**) Αν ο συντελεστής στατικής τριβής των ελαστικών του αυτοκινήτου είναι 0.01, ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα με την οποία μπορεί να κινείται το batmobile πριν η δύναμη Coriolis το αποκλίνει από την ευθεία διαδρομή; [**5π**]

[<u>*Υπόδειξη:*</u> η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της γης είναι $\omega = 7.3\text{x}10^{-5}$rad/sec]



Η δύναμη Coriolis είναι $\vec{F}_c = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}$

$\vec{v} = v\underset{\text{ανατολικά}}{\hat{x}} \Rightarrow \vec{v}\perp\vec{\omega}$ $\Bigg\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow |\vec{F}_c| = 2m\omega v \Rightarrow F_c = -2m\omega v\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 0 & \cos\lambda & \sin\lambda\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F}_c = 2m\omega v\left(-\sin\lambda\,\hat{y} + \cos\lambda\,\hat{z}\right)$$

(α) Η δύναμη Coriolis είναι στην $-\hat{y}$-διεύθυνση και επομένως θα προκαλεί απόκλιση προς τα νότια.

(β) Από την στιγμή που το αυτοκίνητο δεν κινείται στην κατακόρυφο διεύθυνση, η συνισταμένη δύναμη στην z-διεύθυνση θα πρέπει να είναι μηδέν.

Θα έχουμε επομένως: $\underset{\text{κάθετη}}{N} - \underset{\text{βαρύτητα}}{mg} + \underset{\text{κατακόρυφος συνιστώσα Coriolis}}{2m\omega v\cos\lambda} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow N = mg - 2m\omega v\cos\lambda \Rightarrow \boxed{N = m(g - 2\omega v\cos\lambda)}$$

Η κάθετος δύναμη έχει ελαττωθεί εξαιτίας της συνιστώσας της δύναμης Coriolis

(γ) Όταν το αυτοκίνητο είναι να γλιστρήσει, τότε η συνιστώσα της δύναμης Coriolis στην $\hat{y}$-διεύθυνση υπερνικά την μέγιστη δύναμη στατικής τριβής

$$2m\omega v\sin\lambda = \mu_s N \Rightarrow 2\cancel{m}\omega v\sin\lambda = \mu_s\cancel{m}(g - 2\omega v\cos\lambda) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{\mu_s g}{2\omega(\mu_s\cos\lambda + \sin\lambda)} = \frac{0.01\cdot 9.8}{2\cdot 7.3\,10^{-5}(0.01\cdot\cos 42^\circ + \sin 42^\circ)} \Rightarrow \boxed{v = 992\ m/s}$$