

## Εναλλασσόμενα ρεύματα

## Συντονισμός – RLC κύκλωμα

Είδαμε ότι το ρεύμα συναρτήσει της εμπέδισης, γράφεται με την μορφή:

$$I = \frac{V_0}{Z} \sin(\omega t - \varphi)$$

Επομένως το ρεύμα γίνεται μέγιστο όταν η εμπέδιση γίνεται ελάχιστη.

Η εμπέδιση είναι:  $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$  και γίνεται ελάχιστη όταν:  $(X_L - X_C) = 0$

Από την σχέση  $(X_L - X_C) = 0$  θα έχουμε:  $X_L = X_C \Rightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Η γωνιακή αυτή συχνότητα είναι χαρακτηριστική του συγκεκριμένου κυκλώματος εφόσον εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του και ονομάζεται **ιδιοσυχνότητα** και συμβολίζεται με  $\omega_0$ .

Το φαινόμενο στο οποίο το ρεύμα  $I_0$  γίνεται μέγιστο ονομάζεται **συντονισμός** και η χαρακτηριστική συχνότητα  $\omega_0$  ονομάζεται **συχνότητα συντονισμού**.

Στη συχνότητα συντονισμού, η εμπέδιση γίνεται καθαρά ωμική,  $Z=R$  ενώ το πλάτος του ρεύματος θα είναι:

$$I_0 = \frac{V_0}{R} \quad \text{και η φάση είναι: } \varphi=0 \text{ αφού } \frac{(X_L - X_C)}{R} = \tan \varphi \Rightarrow \varphi = 0$$

## Συντονισμός – RLC κύκλωμα

Ποιοτικά, η συμπεριφορά του ρεύματος συναρτήσει της συχνότητας της πηγής δυναμικού φαίνεται στο σχήμα.

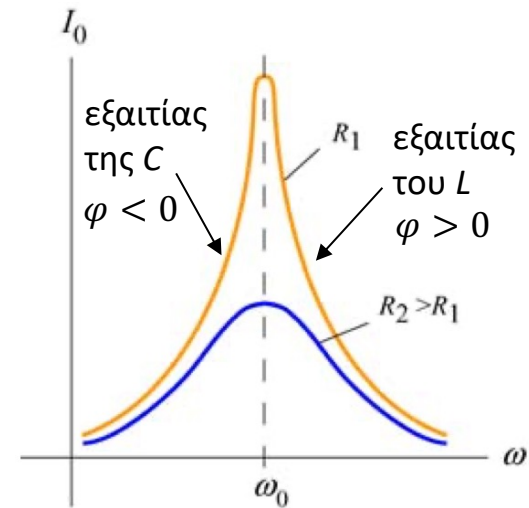
Είδαμε ότι:  $\tan\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$

Όταν  $\omega L - \frac{1}{\omega C} > 0$  τότε η γωνία  $\varphi > 0$  οπότε η τάση προηγείται του ρεύματος

Όταν  $\omega L - \frac{1}{\omega C} < 0$  τότε η γωνία  $\varphi < 0$  οπότε το ρεύμα προηγείται της τάσης

Το ρεύμα είναι  $I = \frac{V_0}{Z} \sin(\omega t - \varphi) = I_0 \sin(\omega t - \varphi) \Rightarrow I_0 = \frac{V_0}{Z}$

Η μέγιστη τιμή του ρεύματος είναι:  $I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$  και εξαρτάται από το  $\omega$



➤ Εξετάζουμε διάφορες τιμές του  $\omega$  και διερευνούμε τη συμπεριφορά της εμπέδισης  $Z$  και επομένως του ρεύματος  $I_0$ :

Για  $\omega \rightarrow 0$  τότε  $Z \rightarrow \infty$ : και το ρεύμα  $I_0 \rightarrow 0$ : Αυτό οφείλεται στον χωρητική αντίσταση

Για  $\omega \rightarrow \infty$  τότε  $Z \rightarrow \infty$ : και το ρεύμα  $I_0 \rightarrow 0$ : Αυτό οφείλεται στην επαγωγική αντίσταση

## Ισχύς σε ένα AC κύκλωμα

Η ισχύς που προσφέρεται σε ένα RLC κύκλωμα δίνεται από τη σχέση:

$$P(t) = I(t)V(t) = \frac{V_0}{Z} \sin(\omega t - \varphi) V_0 \sin(\omega t) = \frac{V_0^2}{Z} \sin(\omega t - \varphi) \sin(\omega t)$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα:  $\sin(\omega t - \varphi) = \sin(\omega t)\cos\varphi - \cos(\omega t)\sin\varphi$

$$P(t) = \frac{V_0^2}{Z} [\sin^2(\omega t)\cos\varphi - \sin(\omega t)\cos(\omega t)\sin\varphi]$$

Η μέση ισχύς ως προς τον χρόνο θα είναι:

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_0^2}{Z} [\sin^2(\omega t)\cos\varphi - \sin(\omega t)\cos(\omega t)\sin\varphi] dt =$$

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_0^2}{Z} [\sin^2(\omega t)\cos\varphi] dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_0^2}{Z} \sin(\omega t)\cos(\omega t)\sin\varphi dt \Rightarrow$$

$$\langle P(t) \rangle = \frac{V_0^2}{Z} \cos\varphi \langle \sin^2(\omega t) \rangle - \frac{V_0^2}{Z} \sin\varphi \langle \sin(\omega t)\cos(\omega t) \rangle \Rightarrow \langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{Z} \cos\varphi$$

# Ισχύς σε ένα AC κύκλωμα

Χρησιμοποιώντας τις ενεργές τιμές της τάσης και ρεύματος:

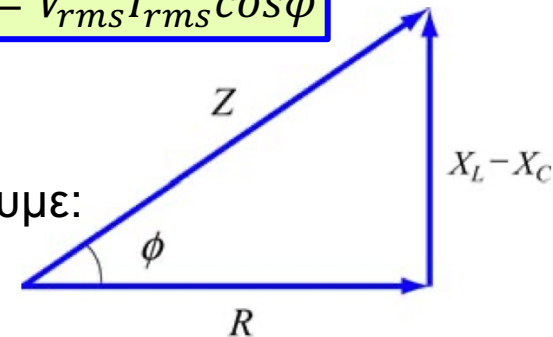
$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{Z} \cos\varphi = \frac{V_{rms}^2}{Z} \cos\varphi = V_{rms} \frac{V_{rms}}{Z} \cos\varphi \Rightarrow \boxed{\langle P(t) \rangle = V_{rms} I_{rms} \cos\varphi}$$

Η ποσότητα  $\cos\varphi$  ονομάζεται **παράγοντας ισχύος**

Από την διανυσματική αναπαράσταση των αντιστάσεων έχουμε:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \quad \text{οπότε γράφουμε για την ισχύ:}$$

$$\langle P(t) \rangle = V_{rms} I_{rms} \cos\varphi \Rightarrow \langle P(t) \rangle = V_{rms} I_{rms} \frac{R}{Z} = I_{rms} \frac{V_{rms}}{Z} R \Rightarrow \boxed{\langle P(t) \rangle = I_{rms}^2 R}$$



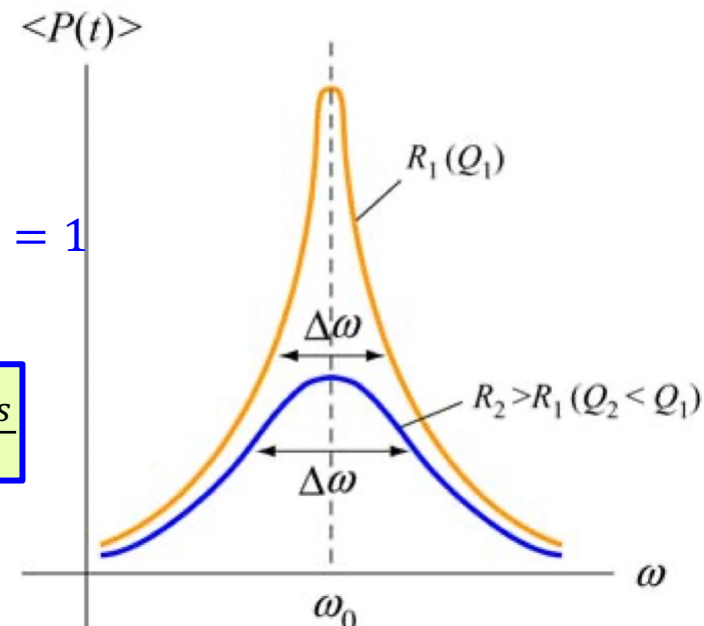
Η μέση ισχύς συναρτήσει της συχνότητας,  $\omega$ , της διεγείρουσας τάσης

Η μέση ισχύς αποκτά μέγιστο όταν  $\omega = \omega_0$

Στην περίπτωση αυτή  $X_C = X_L$  οπότε  $Z = R$  και  $\cos\varphi = 1$

που αποτελεί τη συνθήκη για συντονισμό

➤ Στον συντονισμό έχουμε:  $\boxed{\langle P(t) \rangle = V_{rms} I_{rms} = \frac{V_{rms}^2}{R}}$



## Εύρος της καμπύλης συντονισμού

Η κορυφή του συντονισμού έχει κάποιο εύρος το οποίο περιγράφουμε ορίζοντας την ποσότητα:  $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$

όπου  $\omega_{\pm}$  είναι οι τιμές της διεγείρουσας συχνότητας τέτοιες ώστε η μέση ισχύς να ισούται με το μισό της μέγιστης τιμής της στον συντονισμό.

Οι συχνότητες  $\omega_{\pm}$  αντιστοιχούν σε ρεύμα ίσο με 70% του ρεύματος σε συντονισμό

Το εύρος αυτό ονομάζεται *full width at half maximum* όπως φαίνεται στο σχήμα

➤ Το εύρος  $\Delta\omega$  αυξάνει με την αντίσταση  $R$ .

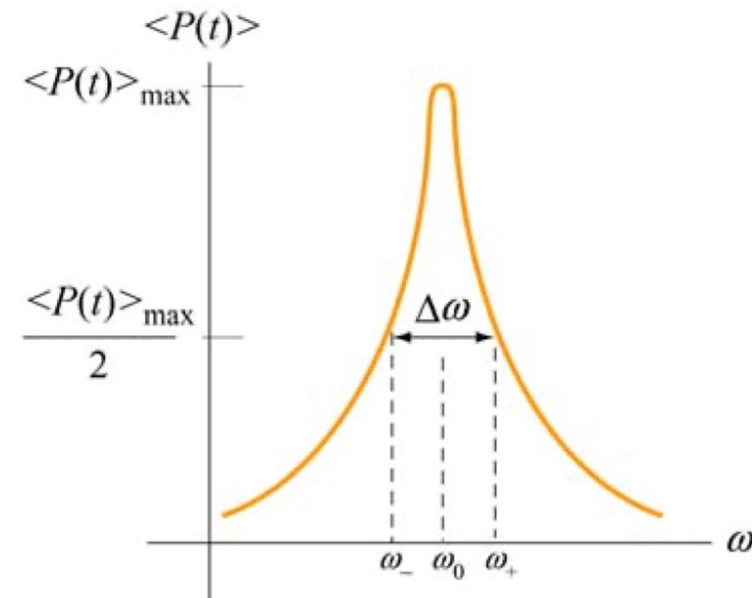
Για να βρούμε το  $\Delta\omega$ , γράφουμε και πάλι την εξίσωση της ισχύος ως:

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{Z} \cos\varphi = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 R}{Z^2} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 R \omega^2}{\omega^2 R^2 + L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \Rightarrow \langle P(t) \rangle_{max} = \frac{V_0^2}{2R}$$

Η συνθήκη για να βρούμε τις τιμές  $\omega_{\pm}$  είναι:

$$\frac{1}{2} \langle P(t) \rangle_{max} = \langle P(t) \rangle \Big|_{\omega_{\pm}} \Rightarrow \frac{V_0^2}{4R} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 R \omega^2}{\omega^2 R^2 + L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \Big|_{\omega_{\pm}} \Rightarrow (\omega^2 - \omega_0^2)^2 = \left(\frac{R\omega}{L}\right)^2$$



## Εύρος της καμπύλης συντονισμού

Βρήκαμε ότι:  $(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = \left(\frac{R\omega}{L}\right)^2$  από την οποία προκύπτουν οι δύο λύσεις για  $\omega_{\pm}$

**Περίπτωση 1: Θετική λύση:**  $\omega_+^2 - \omega_0^2 = +\frac{R\omega_+}{L}$

Λύνουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση και κρατώντας την θετική λύση θα έχουμε:

$$\omega_+ = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{4L}\right)^2 + \omega_0^2}$$

**Περίπτωση 2: Αρνητική λύση:**  $\omega_-^2 - \omega_0^2 = -\frac{R\omega_-}{L}$

Λύνουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση και κρατώντας την θετική λύση θα έχουμε:

$$\omega_- = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{4L}\right)^2 + \omega_0^2}$$

Το εύρος στο μισό της μέγιστης τιμής θα είναι:  $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$  και με αντικατάσταση

$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- \Rightarrow \Delta\omega = \frac{R}{L}$  και, ο παράγοντας ποιότητας  $Q$  δίνεται από:  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0 L}{R}$

Συγκρίνοντας με τον παράγοντα ποιότητας στη φθίνουσα ταλάντωση:  $Q = \frac{\omega' L}{R} =$

όπου  $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - (R/2L)^2} \approx \omega_0$  βλέπουμε ότι συνάδουν για μικρές τιμές της  $R$

# **Μετασχηματιστές**

## **Επίλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων**



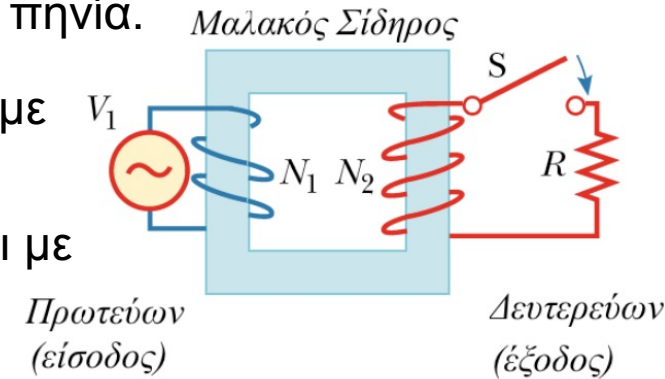
# Μετασχηματιστές

Ο μετασχηματιστής είναι μια διάταξη που χρησιμοποιείται για να αυξήσει ή να μειώσει την AC τάση σε ένα κύκλωμα χωρίς να μεταβάλει ιδιαίτερα το γινόμενο  $IV$  την ισχύ στο κύκλωμα.

Ο μετασχηματιστής αποτελείται από 2 πηνία, ένα πρωτεύον και ένα δευτερεύον, τα οποία είναι τυλιγμένα γύρω από έναν κλειστό πυρήνα σιδήρου, που εξασφαλίζει την ίδια μαγνητική ροή (μαγνητική σύζευξη) και στα δύο πηνία.

Το πρωτεύον πηνίο το οποίο έχει  $N_1$  σπείρες συνδέεται με την πηγή της εναλλασσόμενης τάσης  $V_1(t)$ .

Το δευτερεύον πηνίο το οποίο έχει  $N_2$  σπείρες συνδέεται με ωμικό φορτίο  $R$ .



Η αρχή λειτουργίας του μετασχηματιστή στηρίζεται στην αρχή ότι ένα εναλλασσόμενο ρεύμα στο πρωτεύον πηνίο θα προκαλέσει ΗΕΔ επαγωγής στο δευτερεύον πηνίο εξαιτίας της αμοιβαίας επαγωγής τους.

Στο πρωτεύον κύκλωμα, και αγνοώντας την μικρή ωμική του αντίσταση θα έχουμε από τον νόμο του *Faraday*

$$V_1 = -N_1 d\Phi_m / dt$$

όπου  $\Phi_m$  η ροή που περνά από μια σπείρα πρωτεύοντος

# Μετασχηματιστές

Ο πυρήνας του σιδήρου χρησιμεύει στο να αυξηθεί το μαγνητικό πεδίο το οποίο παράγει το ρεύμα στο πρωτεύον πηνίο και η μαγνητική ροή περνά από το πρωτεύον στο δευτερεύον πηνίο

Η ΗΕΔ επαγωγής στο δευτερεύον πηνίο θα είναι:

$$V_2 = -N_2 d\Phi_m / dt$$

Θεωρώντας ότι έχουμε ιδανικό μετασχηματιστή, απώλειες ισχύος εξαιτίας της θέρμανσης Joule μπορεί να αγνοηθεί και επομένως η ισχύς από το πρωτεύον πηνίο μεταφέρεται στο δευτερεύον:

$$I_2 V_2 = I_1 V_1 \Rightarrow I_1 N_1 d\Phi_m / dt = I_2 N_2 d\Phi_m / dt \Rightarrow I_1 N_1 = I_2 N_2 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί την **εξίσωση του μετασχηματιστή**:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{V_2}{V_1}$$

Έστω ότι το δευτερεύον συνδέεται με αντίσταση φόρτου  $R_L$

Στην περίπτωση αυτή το ρεύμα που διαρρέει το πρωτεύον πρέπει να είναι:

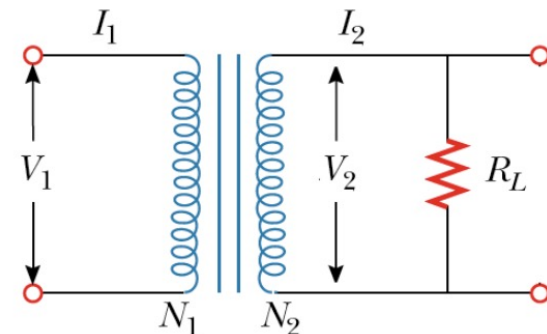
$$I_1 = \frac{N_2}{N_1} I_2 = \frac{N_2}{N_1} \frac{V_2}{R_L} = \frac{N_2}{N_1} \frac{\frac{N_2 V_1}{N_1}}{R_L} = \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 \frac{V_1}{R_L}$$

Αλλά:  $I_1 = \frac{V_1}{R_{eq}}$

οπότε:

$$R_{eq} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 R_L$$

Θεωρούμε ότι το κύκλωμα του πρωτεύοντος έχει αντίσταση  $R_{eq}$



## Επίλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων

Επίλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων σημαίνει εύρεση των ρευμάτων, των τάσεων και των διαφορών φάσεων στους διάφορους κλάδους του κυκλώματος.

Τρεις μέθοδοι για την επίλυση: η αλγεβρική, η γεωμετρική και η μέθοδος των μιγαδικών μεγεθών.

### □ Η αλγεβρική μέθοδος:

Χρησιμοποιούμε τις τιμές των στιγμιαίων ρευμάτων και τάσεων.

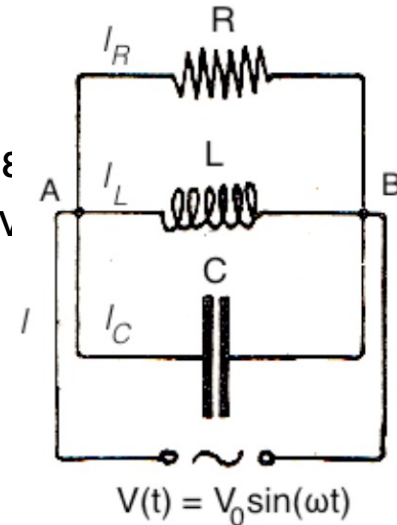
Αν το συνολικό ρεύμα είναι  $I = I_0 \sin(\omega t)$ , τότε για την τάση γράφουμε  $V = V_0 \sin(\omega t + \varphi)$  και αντίστροφα.

Για τις στιγμιαίες τιμές εφαρμόζουμε τους κανόνες του Kirchhoff και τα ζητούμενα μεγέθη προκύπτουν από τις αλγεβρικές εξισώσεις που προκύπτουν

## Αλγεβρική μέθοδος - Παράδειγμα

Έστω το κύκλωμα RLC σε παράλληλη συνδεσμολογία. Έστω ότι  $V = V_0 \sin(\omega t)$ . Θα βρούμε την ένταση του ρεύματος σε κάθε κλάδο, το συνολικό ρεύμα, την εμπέδιση του κυκλώματος και την διαφορά φάσης του συνολικού ρεύματος με την τάση.

Έστω ότι το συνολικό ρεύμα είναι:  $I$  και τα ρεύματα που διαρρέουν το  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , είναι  $I_R$ ,  $I_L$  και  $I_C$  αντίστοιχα.



Θα έχουμε επομένως:  $I = I_R + I_L + I_C$  (1)

Στους 3 κλάδους έχουμε την ίδια τάση:  $I_R = \frac{V_R}{R} = \frac{V_0}{R} \sin(\omega t)$  (2)

Για τον πυκνωτή:  $I_C = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(CV) = CV_0 \frac{d}{dt} \sin(\omega t) \Rightarrow I_C = \omega C V_0 \cos(\omega t)$  (3)

Για το πηνίο, εφαρμόζουμε τον 2<sup>ο</sup> νόμο του Kirchhoff:

$$V(t) - L \frac{dI_L}{dt} = 0 \Rightarrow L \frac{dI_L}{dt} = V(t) \Rightarrow dI_L = \frac{V(t)}{L} dt = \frac{V_0}{L} \sin(\omega t) dt \Rightarrow$$

$$\int dI_L = \frac{V_0}{L} \int \sin(\omega t) dt \Rightarrow I_L = -\frac{V_0}{L\omega} \cos(\omega t) \quad (4)$$

Αντικαθιστούμε τις (2),(3) και (4) στην (1) οπότε:  $I = \frac{V_0}{R} \sin(\omega t) + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) V_0 \cos(\omega t)$

## Αλγεβρική μέθοδος - Παράδειγμα

Βρήκαμε ότι το συνολικό ρεύμα είναι:  $I = \frac{V_0}{R} \sin(\omega t) + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) V_0 \cos(\omega t)$  (5)

Μπορούμε να το γράψουμε με την μορφή:  $I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$  (6)

Θα πρέπει να προσδιορίσουμε τις σταθερές  $I_0$  και  $\varphi$ .

Γράφουμε την (6) με την μορφή:  $I_0 \sin(\omega t) \cos \varphi + I_0 \cos(\omega t) \sin \varphi$  (7)

Για να είναι η (5) και η (7) ίσες, θα πρέπει οι συντελεστές των  $\sin(\omega t)$  και  $\cos(\omega t)$  να είναι ίσοι. Επομένως:

$$I_0 \cos \varphi = \frac{V_0}{R} \quad (8)$$

$$I_0 \sin \varphi = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) V_0 \quad (9)$$

$$\Rightarrow I_0^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = V_0^2 \left[ \frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2 \right] \Rightarrow$$

$$I_0 = V_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

Η εμπέδιση του κυκλώματος θα είναι:  $Z = \frac{V_0}{I_0}$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

Η εφαπτομένη της διαφοράς φάσης προκύπτει από τις (8) και (9)

$$\tan \varphi = \frac{(\omega C - 1/\omega L)}{1/R} \Rightarrow \tan \varphi = R \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$