ΦΥΣ 145 – Μαθηματικές Μέθοδοι στη Φυσική

15 Μαίου 2013

Συμπληρώστε τα στοιχεία σας στο παρακάτω πίνακα τώρα

Ονοματεπώνυμο	
Αρ. Ταυτότητας	
Username	
Password	

Δημιουργήστε ένα φάκελο στο home directory σας με το όνομα **Final** (όχι άλλα ονομάτα). Θα πρέπει να δουλέψετε όλα τα προβλήματα της εξέτασης στο φάκελο αυτό και πουθενά αλλού. Στο τέλος της εξέτασης τα αρχεία σας θα παρθούν από το φάκελο αυτό.

Σας δίνονται 4 προβλήματα και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλα. Συνολική βαθμολογία 100 μονάδες. Διαβάστε όλα τα προβλήματα και αρχίστε να δουλεύετε πρώτα με αυτά που αισθάνεστε ότι δεν θα σας πάρει πολύ χρόνο για να λύσετε. Η σειρά των προβλημάτων δεν είναι ενδεικτική της δυσκολίας τους.

Όλα τα προγράμματα σας θα πρέπει να ονομάζονται ανάλογα με την άσκηση (π.χ. *askisi1.f*) και για να βαθμολογηθούν θα πρέπει να κάνουν τουλάχιστον compile.

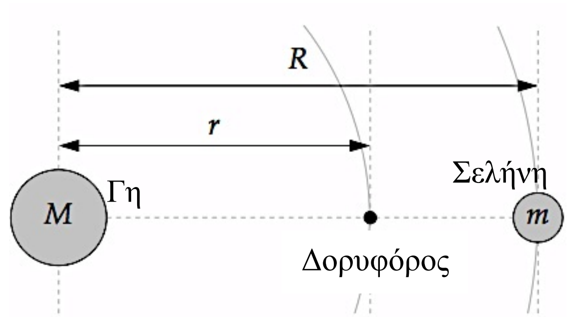
Ο χρόνος εξέτασης είναι 240 λεπτά.

Επιτρέπεται: η χρήση του υλικού των ιστοσελίδων και μόνο του μαθήματος, καθώς και οι ασκήσεις/λύσεις των εργαστηρίων και homeworks που έχετε δώσει και σας έχουν δοθεί. ***Απαγορεύονται:*** η συνεργασία/συζήτηση και οποιαδήποτε ανταλλαγή αρχείων, η χρήση e-mail καθώς και η χρήση κινητών τηλεφώνων τα οποία θα πρέπει να απενεργοποιηθούν τώρα.

Καλή επιτυχία
Καλό καλοκαίρι και
Καλή συνέχεια στις σπουδές σας

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Το σημείο Lagrange είναι ένα σημείο μεταξύ Γης και Σελήνης στο οποίο όταν βρεθεί ένας δορυφόρος τότε μπορεί να περιφέρεται γύρω από την Γη σε πλήρη συγχρονισμό με την Σελήνη, παραμένοντας πάντοτε ανάμεσα στην Γη και την Σελήνη. Αυτό συμβαίνει γιατί η βαρυτική έλξη που ασκεί η Γη και η βαρυτική έλξη που ασκεί η Σελήνη πάνω στο δορυφόρο δημιουργούν την απαραίτητη κεντρομόλο δύναμη ώστε ο δορυφόρος να παραμένει στην τροχιά του, όπως στο διπλανό σχήμα.



Υποθέτοντας κυκλικές τροχιές μπορεί να δειχθεί ότι η απόσταση του σημείου Lagrange, r, από το κέντρο της Γης ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{GM_{\Gamma}}{r^2} - \frac{Gm_{\Sigma}}{(R-r)^2} = \omega^2 r,$$

όπου M_{Γ} και m_{Σ} η μάζα της Γης και Σελήνης αντίστοιχα, G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, R η απόσταση μεταξύ Γης-Σελήνης και ω η κοινή γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου και της Σελήνης. Θεωρείστε ότι $G = 6.674x10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$, $M_{\Gamma} = 5.974x10^{24} kgr$, $m_{\Sigma} = 7.348x10^{22} kgr$, $\omega = 2.662x10^{-6} s^{-1}$ και $R = 3.844x10^{8} m$.

Να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει την απόσταση του σημείου Lagrange από την Γη με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων. [**20μ**]

2. Θεωρήστε την κίνηση ενός ηλεκτρικά φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Όπως έχετε δει στην Φυσική ΙΙ το σωματίδιο υπόκειται στην επίδραση της δύναμης Lorentz η εξίσωση της οποίας είναι: $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{\upsilon} \times \vec{B}\right)$όπου q και $\vec{\upsilon}$ είναι το φορτίο του σωματιδίου και το διάνυσμα της ταχύτητάς του ενώ $\vec{E}$ και $\vec{B}$ τα διανύσματα της έντασης του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου αντίστοιχα. Η επιτάχυνση του σωματιδίου εξαιτίας της δύναμης Lorentz είναι προφανώς $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$ όπου m η μάζα του σωματιδίου. Θεωρήστε ότι η κίνηση του σωματιδίου γίνεται σε σταθερό μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B\hat{z}$ με $qB/m = 1.0$ και σε σταθερό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y}$ όπου $qE_x/m = qE_y/m = 0.1$. Το σωματίδιο έχει αρχικά ταχύτητα $\vec{\upsilon}(t=0) = 1.0\hat{y} + 0.1\hat{z}$ και το διάνυσμα θέσης του είναι $\vec{r}(t=0) = 1.0\hat{x}$.

Θα γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει την τροχιά του σωματιδίου στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο από t_0 μέχρι $t_f = 40\,\mathrm{sec}$ και βήμα dt = 0.04sec. Το πρόγραμμά σας θα περιέχει τα ακόλουθα:

(α) Θεωρήστε ότι για τα πρώτα 10sec της κίνησης το ηλεκτρικό πεδίο είναι σβηστό ($\vec{E} = 0$) και ότι το σώμα κινείται υπό την επίδραση μόνο του μαγνητικού πεδίου. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο *Euler-Cromer* να υπολογιστεί η τροχιά του σωματιδίου για αυτή τη διάρκεια της κίνησης του σωματιδίου. Θα πρέπει να γράψετε τα αποτελέσματά σας (χρόνο και τις συντεταγμένες της θέσης του σωματιδίου) στο αρχείο *trajectory1.dat*. [**10μ**]

(β) Χρησιμοποιώντας το λογισμικό *gnuplot* και το αρχείο *trajectory1.dat* να κάνετε το γράφημα της τροχιάς του σωματιδίου (επειδή η τροχιά είναι τρισδιάστατη θα πρέπει να δώσετε στο *gnuplot* την εντολή *splot* αντί για *plot*). Θα πρέπει να αποθηκεύσετε την γραφική στο αρχείο *trajectory1.ps*. [**3μ**].

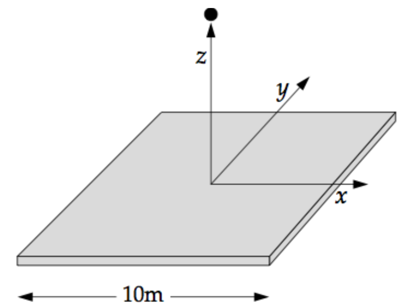
(γ) Την χρονική στιγμή t = 10sec "ανάβουμε" το ηλεκτρικό πεδίο και επομένως η κίνηση γίνεται υπό την επίδραση και των δυο πεδίων. Να υπολογίσετε την εξέλιξη της τροχιάς του σωματιδίου για το υπόλοιπο χρονικό διάστημα της κίνησης χρησιμοποιώντας την μέθοδο Runge-Kutta 4^{ου} βαθμού. Τα αποτελέσματά σας (ίδιο format με το ερώτημα (α)) θα πρέπει να τα αποθηκεύσετε στο αρχείο *trajectory2.dat*. [**10μ**]

(δ) Χρησιμοποιώντας και πάλι το λογισμικό *gnuplot* κάνετε το γράφημα της τροχιάς του σωματιδίου όπως και στο ερώτημα (β) και αποθηκεύστε το γράφημα της τροχιάς στο αρχείο *trajectory2.ps*. [**2μ**]

(ε) Κάντε το γράφημα της ενέργειας του σωματιδίου καθόλη τη διάρκεια της κίνησής του συναρτήσει του χρόνου *t*. Προσέξτε τους όρους που συνεισφέρουν στην ενέργεια του σωματιδίου κατά την διάρκεια των δυο χρονικών περιόδων της κίνησης. [**5μ**]

3. Ένας παίκτης παρουσιάζεται σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι και έχει να διαλέξει ανάμεσα σε 3 κλειστές πόρτες αυτή πίσω από την οποία βρίσκεται μια Φερράρι. Αφού διαλέξει την πόρτα που επιθυμεί ο παρουσιαστής ανοίγει μια από τις άλλες δυο πόρτες η οποία σίγουρα δεν περιέχει το αυτοκίνητο. Ο παρουσιαστής ζητά από τον παίκτη αν επιθυμεί να αλλάξει την πόρτα που έχει επιλέξει και να διαλέξει την άλλη κλειστή πόρτα. Το ερώτημα είναι αν ο παίκτης πρέπει να αλλάξει την αρχική του επιλογή ή όχι. Το πρόβλημα αυτό προκάλεσε πολλούς μαθηματικούς που έδωσαν σαν σωστή απάντηση ότι δεν κάνει καμιά διαφορά για την επιτυχία ή όχι αν ο παίκτης αλλάξει την αρχική του επιλογή. Δηλαδή η πιθανότητα να κερδίσει είναι 50%. Ωστόσο η απάντηση είναι λάθος. Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο λύνει με Monte Carlo το πρόβλημα και βρείτε ποια επιλογή είναι αυτή που δίνει την μεγαλύτερη πιθανότητα να κερδίσει ο παίκτης. Δοκιμάστε το πρόγραμμά σας για 10,000 προσπάθειες. [**20μ**]

4. Μια ομογενής τετραγωνική μεταλλική επιφάνεια (αμελητέου πάχους), πλευράς 10*m* και μάζας 10,000*kg* αιωρείται ακίνητη στο χώρο. Θεωρήστε ένα σφαιρικό σωματίδιο μάζας 1.0*kg* το οποίο βρίσκεται σε απόσταση *z* από το κέντρο της μεταλλικής επιφάνειας και σε διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια, όπως στο σχήμα. Η βαρυτική δύναμη που δέχεται το σωματίδιο εξαιτίας της έλξης που ασκεί μια στοιχειώδης μάζα στην επιφάνεια *dxdy* είναι: $dF_z = G\rho \frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} dxdy$,



όπου $G = 6.674\times10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-1}$ η σταθερά της παγκόσμιας έλξης και ρ η επιφανειακή πυκνότητα της μεταλλικής επιφάνειας.

(α) Να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει την δύναμη που ασκεί η μεταλλική επιφάνεια στο σφαιρικό σώμα για *z* =0.0*m* μέχρι *z* = 1.0*m* με βήμα *dz* = 0.1*m*. Για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος χρησιμοποιήστε μια μέθοδο Monte Carlo της προτίμησής σας και 1,000,000 δοκιμές. [**8μ**]

(β) Επαναλάβετε τον υπολογισμό της βαρυτικής δύναμης χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά την μέθοδο ολοκλήρωσης *Simpson* για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος. Θεωρήστε ότι έχετε 100 διαστήματα σε κάθε άξονα ολοκλήρωσης. [**16μ**]

(γ) Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματά των ερωτημάτων (α) και (β) για να κάνετε με την βοήθεια του λογισμικού *gnuplot* το γράφημα της υπολογιζόμενης δύναμης με τις δυο μεθόδους συναρτήσει της απόστασης *z*. Θα πρέπει να αποθηκεύσετε το γράφημα στο αρχείο *gravitationalforce.ps* [**3μ/γράφημα**]

Υπόδειξη για το (β) ερώτημα: Όπως έχουμε δει στις διαλέξεις η μέθοδος *Simpson* για απλά ολοκληρώματα σε μια διάσταση γράφεται με την μορφή:

$$S_x = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h_x}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+2f\left(x_{N_x-2}\right)+4f\left(x_{N_x-1}\right)+f\left(x_{N_x}\right)\right) \quad \textbf{(1)}$$

όπου το διάστημα [*a,b*] έχει χωριστεί σε N_x ίσα υποδιαστήματα μεγέθους $h_x = (b-a)/N_x$ και οι συντελεστές 4 και 2 εναλλάσονται σε όλο το ενδιάμεσο διάστημα εκτός των δυο ακραίων τιμών του *x* ($x_o=a$ και $x_N=b$). Η εξίσωση (1) μπορεί να γραφεί σε πιο απλή μορφή όπως την έχουμε χρησιμοποιήσει: $S_x = \frac{h_x}{3}\left[f(x_0)+f\left(x_{N_x}\right)+4\sum_{j=1}^{\frac{N_x}{2}} f\left(x_{2j-1}\right)+2\sum_{j=1}^{\frac{N_x-2}{2}} f\left(x_{2j}\right)\right]$ **(2)**

Ένα τυπικό διπλό ολοκλήρωμα έχει την μορφή: $S = \iint f(x,y)\,dx\,dy$ και η μέθοδος *Simpson* εφαρμόζεται στην περίπτωση αυτή σε δυο στάδια. Στο πρώτο στάδιο εφαρμόζεται ως προς την μια μεταβλητή (έστω *x*) και καταλήγουμε στην ανάλογη μορφή της εξίσωσης (2):

$$S_x(y_i) = f(x_0,y_i)+f\left(x_{N_x},y_i\right)+4\sum_{j=1}^{\frac{N_x}{2}} f\left(x_{2j-1},y_i\right)+2\sum_{j=1}^{\frac{N_x-2}{2}} f\left(x_{2j},y_i\right)$$

Στο δεύτερο στάδιο εφαρμόζουμε και πάλι τη μέθοδο αλλά στο εξωτερικό ολοκλήρωμα και κάνοντας τις πράξεις καταλήγουμε στην:

$$S = \frac{h_x h_y}{9}\times\left[S_x(y_0)+S_x\left(y_{N_y}\right)+4S_x(y_1)+2S_x(y_2)+\cdots+4S_x\left(y_{N_y-2}\right)+2S_x\left(y_{N_y-1}\right)\right]$$

και συλλέγοντας τα αθροίσματα μπορεί να γραφεί με την μορφή:

$$S = \frac{h_x h_y}{9} \times \left[S_x\left(y_0\right) + S_x\left(y_{N_y}\right) + 4\sum_{i=1}^{\frac{N_y}{2}} S_x\left(y_{2i-1}\right) + 2\sum_{i=1}^{\frac{N_y-2}{2}} S_x\left(y_{2i}\right) \right]$$

Η τελευταία εξίσωση δείχνει ουσιαστικά ότι η μέθοδος *Simpson* για διπλό (ή μεγαλύτερης τάξης) ολοκλήρωμα αποτελείται από μια ολοκλήρωση κατά μήκος του ενός άξονα για κάθε υποδιάστημα στο ορθογώνιο άξονα, ακολουθούμενη από εφαρμογή της μεθόδου *Simpson* στα αποτελέσματα που λαμβάνονται στον ορθογώνιο άξονα.