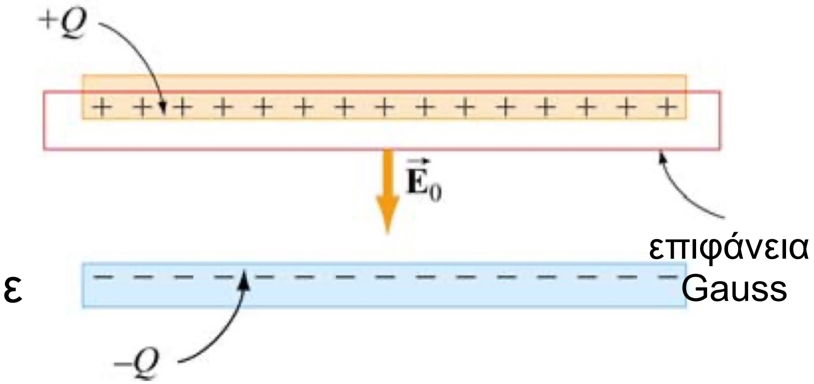
Διηλεκτρικά

(συνέχεια)

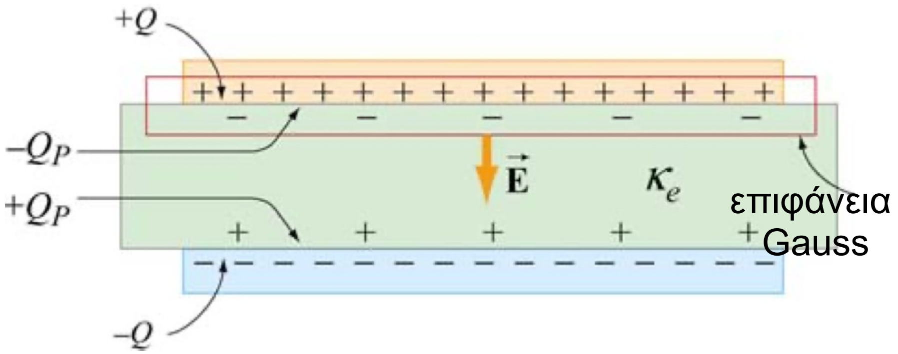
Νόμος Gauss για διηλεκτρικά

Θεωρούμε έναν επίπεδο πυκνωτή με τους οπλισμούς του φορτισμένους με φορτίο Q και βρισκόμενους σε δυναμικό $|\Delta V_0|$



Εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss υπολογίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του πυκνωτή αρχικά για την περίπτωση μη παρουσίας διηλεκτρικού υλικού

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = E_0 A = \frac{Q}{\varepsilon_0} \;\Rightarrow E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Καθώς εισάγουμε το διηλεκτρικό, επάγεται αντίθετο ηλεκτρικό φορτίο Q_P στην επιφάνεια του διηλεκτρικού. Σαν αποτέλεσμα το φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια Gauss ελαττώνεται σε: $Q - Q_P$

Εφαρμογή του νόμου του Gauss στην περίπτωση αυτή:

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = EA = \frac{Q - Q_P}{\varepsilon_0} \;\Rightarrow E = \frac{Q - Q_P}{A\varepsilon_0}$$

Νόμος Gauss για διηλεκτρικά

Η παρουσία του διηλεκτρικού έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση του αρχικού πεδίου E_0 κατά έναν παράγοντα κ_e

Επομένως: $E = \dfrac{E_0}{\kappa_e} = \dfrac{Q}{\kappa_e \varepsilon_0 A} = \dfrac{Q - Q_P}{A\varepsilon_0} \Rightarrow \dfrac{Q}{\kappa_e} = Q - Q_P$

$$\Rightarrow Q_P = Q - \frac{Q}{\kappa_e} \Rightarrow Q_P = Q\left(1 - \frac{1}{\kappa_e}\right)$$

Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου θα είναι: $\sigma_P = \sigma\left(1 - \dfrac{1}{\kappa_e}\right)$

Στο όριο που $\kappa_e \rightarrow 1$ θα πάρουμε $\sigma_P \rightarrow 0$ και $Q_P \rightarrow 0$ που είναι η περίπτωση μη παρουσίας διηλεκτρικού

Αντικαθιστώντας στον νόμο του Gauss τη σχέση για το φορτίο έχουμε:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E_0 A = \frac{Q - Q_P}{\varepsilon_0} \Rightarrow \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\kappa_e \varepsilon_0} \boxed{\Rightarrow \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon}}$$

νόμος Gauss για διηλεκτρικά

Ο όρος $\varepsilon = \kappa_e \varepsilon_0$ ονομάζεται διηλεκτρική διαπερατότητα του υλικού

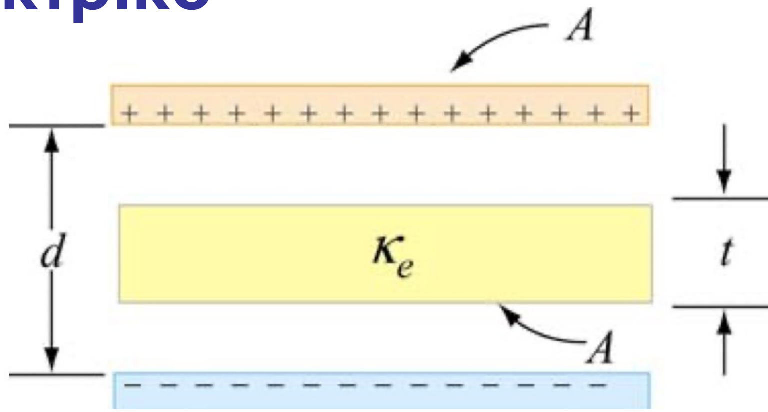
Ο νόμος Gauss γραφεί επίσης ως: $\boxed{\Rightarrow \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q}$

όπου: $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E}}$

διάνυσμα ηλεκτρικής μετατόπισης

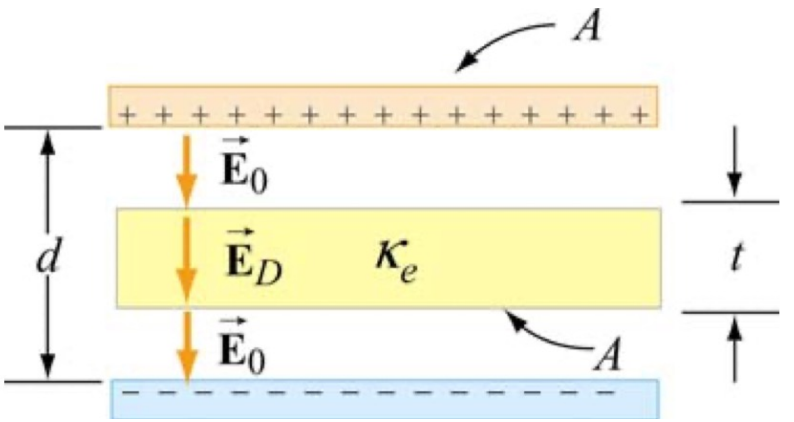
Χωρητικότητα πυκνωτή με διηλεκτρικό

Θεωρήστε ένα μη αγώγιμο κομμάτι υλικού, πάχους *t*, εμβαδού επιφάνειας *A* και διηλεκτρικής σταθεράς κ_e. Το υλικό εισάγεται ανάμεσα στους οπλισμούς ενός επίπεδου πυκνωτή, εμβαδού επιφάνειας *A*, απόστασης *d* και φορτίου *Q*.



Το διηλεκτρικό υλικό δεν βρίσκεται αναγκαστικά στο ενδιάμεσο της απόστασης των δύο οπλισμών. Θα υπολογίσουμε την χωρητικότητα του πυκνωτή

- Υπολογίζουμε αρχικά τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο οπλισμών του πυκνωτή.
- Απουσία διηλεκτρικού το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς είναι: $E_0 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 A}$
- Παρουσία του διηλεκτρικού το ηλεκτρικό πεδίο, όπως είδαμε, ελαττώνεται: $E_D = \dfrac{E_0}{\kappa_e}$

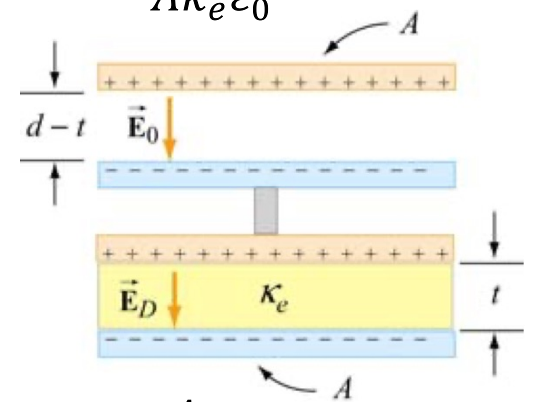


Χωρητικότητα πυκνωτή με διηλεκτρικό

- Υπολογίζουμε το δυναμικό ολοκληρώνοντας το ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος μιας κατακόρυφης γραμμής από τον πάνω οπλισμό στον κάτω:

$$\Delta V = -\int_{+}^{-} E dl = -\Delta V_0 - \Delta V_D = E_0(d-t) - E_D t = -\frac{Q}{A\varepsilon_0}(d-t) - \frac{Q}{A\kappa_e\varepsilon_0}t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta V = -\frac{Q}{A\varepsilon_0}\left[d - t\left(1-\frac{1}{\kappa_e}\right)\right]$$



- Όπου $\Delta V_D = E_D t$ είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο επιφανειών του διηλεκτρικού.

- Από την σχέση του δυναμικού και το φορτίο βρίσκουμε την χωρητικότητα:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{A\varepsilon_0}{\left[d - t\left(1-\frac{1}{\kappa_e}\right)\right]}$$

(α) Για $t \to 0$, καταλήγουμε: $C \to \frac{\varepsilon_0 A}{d} = C_0$

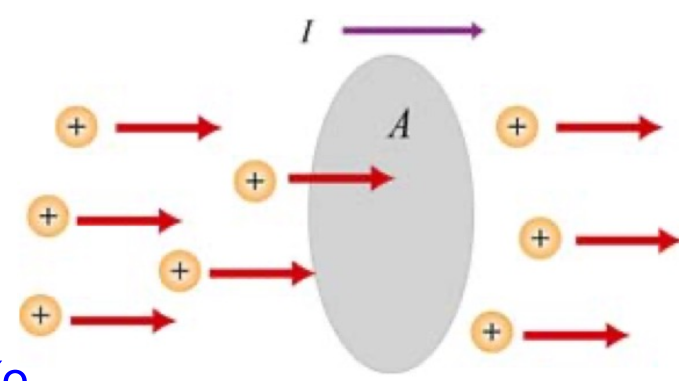
(β) Για $\kappa_e \to 1$, καταλήγουμε: $C \to \frac{\varepsilon_0 A}{d} = C_0$

(γ) Για $t \to d$, καταλήγουμε: $C \to \frac{\kappa_e \varepsilon_0 A}{d} = \kappa_e C_0$

- Η διάταξη μοιάζει με αυτή δύο πυκνωτών συνδεδεμένοι σε σειρά:
- Χρησιμοποιώντας τη σχέση της συνδεσμολογίας σε σειρά: $\frac{1}{C} = \frac{d-t}{e_0 A} + \frac{t}{k_e e_0 A}$

Ρεύμα και Αντίσταση

Ηλεκτρικό ρεύμα



Ηλεκτρικό ρεύμα είναι η ροή ηλεκτρικών φορτίων.

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια επιφάνεια *A.*

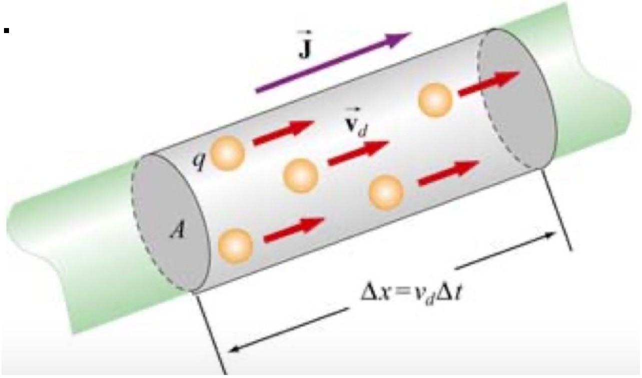
Φορτία κινούνται κάθετα στην επιφάνεια .

- Ορίζουμε ως ηλεκτρικό ρεύμα, το ρυθμό με τον οποίο φορτία ρέουν από μια εγκάρσια επιιφάνεια
- Αν μια ποσότητα φορτίου, *ΔQ,* διαπερνά μια επιφάνεια *A* σε ένα χρονικό διάστημα *Δt* το μέσο ρεύμα είναι: $I_{ave} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$
- Μονάδες μέτρησης ρεύματος στο SI είναι το amper: 1 Ampere = 1C/1sec
- Οι τιμές των ρευμάτων που συναντούμε σε καθημερινή μορφή είναι 1MA (10^6 Αμπέρ που εμφανίζεται σε αστραπές ή 1nA που εμφανίζεται στους νευρώνες)
- Στο όριο που το χρονικό διάστημα $\Delta t \rightarrow 0$ τότε η ποσότητα φορτίου που περνά στο διάστημα αυτό την επιφάνεια *A* ορίζει το ηλεκτρικό ρεύμα: $I = \frac{dq}{dt}$
- Η ροή έχει κατεύθυνση και επομένως το ρεύμα έχει κατεύθυνση. Κατά σύμβαση θεωρούμε ότι η κατεύθυνση του ρεύματος είναι αυτή προς την οποία κινούνται τα θετικά φορτία. Σε έναν αγωγό κινούνται ηλεκτρόνια, ωστόσο το ρεύμα ορίζεται από την κίνηση των θετικών φορτίων

Πυκνότητα ρεύματος

Μπορούμε να συσχετίσουμε το ρεύμα που είναι μια μακροσκοπική ποσότητα με την μικροσκοπική θεώρηση της κίνησης των φορτίων.

Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε έναν αγωγό εγκάρσιας επιφάνειας A όπως στο σχήμα.



Γράφουμε το ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό με την μορφή:

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

όπου $\vec{J}$ είναι η πυκνότητα ρεύματος.
Μονάδα πυκνότητας ρεύματος στο SI είναι A/m^2

Θεωρούμε τον στοιχειώδη όγκο του αγωγού στον οποίο περιέχονται n φορείς φορτίου ανά μονάδα όγκου. Θεωρούμε ότι κάθε φορέας έχει φορτίο q.

Το φορτίο το οποίο περιέχεται στον όγκο αυτό του αγωγού είναι:

$$\Delta Q = q\left(nV_{όγκος}\right) = q(nA\Delta x) = q(nAv_d\Delta t)$$

Με βάση την παραπάνω σχέση και τον ορισμό του ρεύματος έχουμε: $I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = nqAv_d$

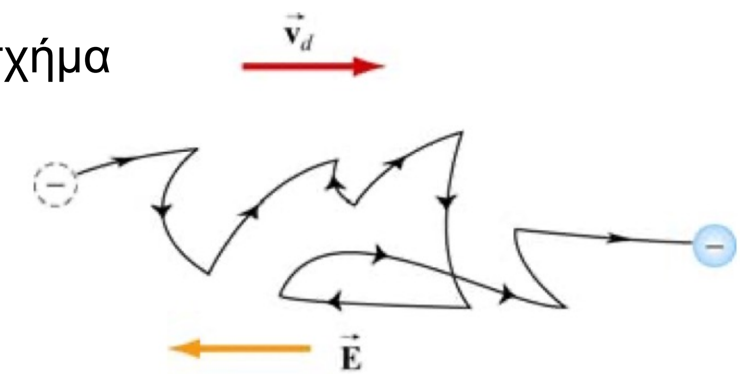
Η ταχύτητα v_d είναι αυτή με την οποία κινούνται οι φορείς φορτίου και ονομάζεται ταχύτητα ολίσθησης.

Ταχύτητα ολίσθησης

Η ταχύτητα ολίσθησης είναι η μέση διανυσματική ταχύτητα των φορέων φορτίου μέσα στον αγωγό όταν εφαρμοστεί εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο.

Το ηλεκτρόνιο στο εσωτερικό του αγωγού, δεν εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση.

Η διαδρομή του είναι άτακτη όπως φαίνεται στο σχήμα



Με βάση τα προηγούμενα, γράφουμε την πυκνότητα ρεύματος, $\vec{J}$, με την μορφή:

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d$$

Για θετικούς φορείς φορτίου, $\vec{J}$ και $\vec{v}_d$ έχουν την ίδια κατεύθυνση ενώ για αρνητικούς φορείς φορτίου έχουν αντίθετη κατεύθυνση

Μέσα στον αγωγό ένα ηλεκτρόνιο δέχεται μια ηλεκτρική δύναμη $\vec{F}_e = -e\vec{E}$

Εξαιτίας της δύναμης αυτής και από τον 2ο νόμο του Newton, κινείται με επιτάχυνση:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_e}{m_e} = -\frac{e\vec{E}}{m_e}$$

Ταχύτητα ολίσθησης

Καθώς το ηλεκτρόνιο κινείται μέσα στον αγωγό συγκρούεται με τα άτομα του υλικού και η διεύθυνση της κίνησής του αλλάζει με κάθε σύγκρουση:

Έστω ότι η ταχύτητα του ηλεκτρονίου μετά από μια σύγκρουση είναι $\vec{v}_i$

Εξαιτίας της επιτάχυνσης από την δύναμη $\vec{F}_e$, η ταχύτητα με την οποία κινείται ακριβώς πριν την επόμενη σύγκρουσή του θα είναι:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}\Delta t = \vec{v}_i - \frac{e\vec{E}}{m_e}\Delta t$$

όπου Δt ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών συγκρούσεων.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση διανυσματική ταχύτητα των ηλεκτρονίων παίρνοντας τη μέση τιμή της $\vec{v}_f$ ως προς όλα τα χρονικά διαστήματα.

Η μέση αυτή διανυσματική ταχύτητα αποτελεί την ταχύτητα ολίσθησης, $\vec{v}_d$ των ηλεκτρικών φορέων:

$$\langle\vec{v}_f\rangle = \vec{v}_d = \langle\vec{v}_i\rangle + \vec{a}\langle\Delta t\rangle = \langle\vec{v}_i\rangle - \frac{e\vec{E}}{m_e}\langle\Delta t\rangle = \langle\vec{v}_i\rangle - \frac{e\vec{E}}{m_e}\tau$$

μέσος ελεύθερος χρόνος μεταξύ συγκρούσεων

Απουσία εξωτερικού πεδίου, $\vec{E} = \vec{0}$ και $\vec{v}_d = \langle\vec{v}_i\rangle = 0$ εφόσον η ταχύτητα είναι τελείως τυχαία. Η συνολική μετατόπισή του είναι 0 και επομένως $\vec{v}_d = 0$

Ταχύτητα ολίσθησης

Επομένως η ταχύτητα ολίσθησης παρουσία εξωτερικού πεδίου γράφεται:

$$\vec{v}_d = -\frac{e\vec{E}}{m_e}\,\tau$$

Χρησιμοποιώντας την ταχύτητα ολίσθησης και από τον ορισμό της πυκνότητας ρεύματος μπορούμε να γράψουμε: ($q = e$)

$$\vec{J} = -ne\vec{v}_d \;\Rightarrow \vec{J} = -ne\left(-\frac{e\vec{E}}{m_e}\tau\right) \Rightarrow \vec{J} = ne^2\left(\frac{\vec{E}}{m_e}\tau\right)$$

Παρατηρούμε ότι η πυκνότητα ρεύματος, $\vec{J}$, και το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ έχουν την ίδια φορά ανεξάρτητα από το είδος των φορέων φορτίου που εξετάζεται

Η ταχύτητα των ηλεκτρονίων μέσα σε έναν αγωγό είναι πάρα πολύ μεγάλη.

Αν θεωρήσουμε τα ηλεκτρόνια μέσα στον αγωγό σαν ιδανικό αέριο τότε η μέση ταχύτητά τους θα είναι:

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{3KT}{m}} = \sqrt{\frac{3\left(1.38\times\frac{10^{-23}J}{K}\right)(293K)}{9.11\times10^{-31}kg}} \Rightarrow \langle v\rangle = 1.2\times10^{5}m/s$$

Η ταχύτητά τους στην διεύθυνση του πεδίου, η ταχύτητα ολίσθησης δηλαδή είναι πάρα πολύ μικρή: $\vec{v}_d \approx 0.05mm/s$ απαιτούνται 5.5h για να διανύσει 1m

6ο Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

Έτοιμοι