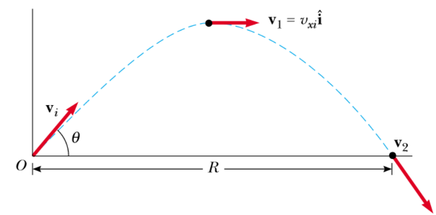
ΦΥΣ 111: ΓΕΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ 1 **02/12/20 10ο Φροντιστήριο**

1. Ένα σώμα μάζας m εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα vi που σχηματίζει γωνιά θ με το οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Το σώμα κινείται στο βαρυτικό πεδίο της Γης. Βρείτε τη στροφορμή του σώματος ως προς την αρχή των συντεταγμένων όταν το σώμα βρίσκεται: (α) στην αρχή των συντεταγμένων, (β) στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς του, (γ) στο σημείο ακριβώς προτού προσκρούσει στο έδαφος. (δ) Ποια ροπή προκαλεί μεταβολές της στροφορμής τους;



1/α) $\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{U}_0 = 0$ αφού $\vec{r}=0$

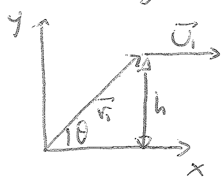
β) $\vec{a} = -g\hat{j}$

$\vec{U} = U_0\cos\theta\,\hat{i} + U_0\sin\theta\,\hat{j} - gt\,\hat{j}$

$\vec{r} = U_0 t\cos\theta\,\hat{i} + U_0 t\sin\theta\,\hat{j} - \frac{1}{2}gt^2\hat{j}$

Στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς: $U_y = 0 \Rightarrow U_0\sin\theta - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{U_0\sin\theta}{g}$

$h = U_0\frac{U_0\sin\theta}{g}\sin\theta - \frac{1}{2}g\frac{U_0^2\sin^2\theta}{g^2} \Rightarrow h = \frac{1}{2}\frac{U_0^2}{g}\sin^2\theta$



$\vec{L} = r_1(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}) \times mU_1\hat{i}$, $U_1 = U_{x0}$

$= mU_{x0}r_1(\cancel{\cos\theta\,\hat{i}\times\hat{i}} + \sin\theta\,\hat{j}\times\hat{i})$

$= -mU_{x0}r\sin\theta\,\hat{k}$

$h = r_1\sin\theta = \frac{1}{2}\frac{U_0^2}{g}\sin^2\theta$

$U_{x0} = U_0\cos\theta$

$\Rightarrow \vec{L} = -\frac{m}{2g}U_0^3\sin^2\theta\cos\theta\,\hat{k}$

γ) Όταν το σώμα προσκρούει στο έδαφος η ταχύτητα είναι:

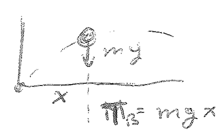
$\vec{U}_2 = U_{0x}\hat{i} - U_{0y}\hat{j} = U_0\cos\theta\,\hat{i} - U_0\sin\theta\,\hat{j}$

$\vec{r}_2 = R\hat{i}$

$\Rightarrow \vec{L} = \vec{r}_2\times m\vec{U}_2 = R\hat{i}\times m\vec{U}_2 = -mU_0R\sin\theta\,\hat{k}$

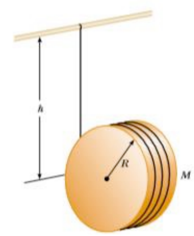
$R = \frac{2U_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}$

$\Rightarrow \vec{L} = -\frac{2m}{g}U_0^3\sin^2\theta\cos\theta\,\hat{k}$



δ) Η δύναμη του βάρους ασκεί ροπή στο σώμα ως προς την αρχή των αξόνων ($\tau_B = mgx$) και γι'αυτό μεταβάλλεται η στροφορμή του σώματος ως προς την αρχή των αξόνων.

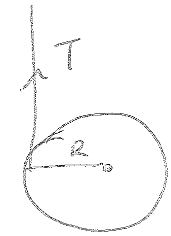
2. Ένας σπάγγος είναι τυλιγμένος γύρω από έναν ομογενή δίσκο ακτίνας R και μάζας M. Ο δίσκος αφήνεται ελεύθερος ενώ ακινητούσε με τον σπάγγο κατακόρυφο και το ένα άκρο του δεμένο σε ένα σταθερό υποστήριγμα (βλ. σχήμα). Καθώς ο δίσκος κατέρχεται, αποδείξτε ότι: (α) Η τάση του σπάγγου είναι το ένα τρίτο του βάρους του δίσκου. (β) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας είναι 2g/3 και (γ) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι (4gh/3)1/2 . (δ) Επαληθεύσετε την απάντησή σας στο (γ) χρησιμοποιώντας ενεργειακή μέθοδο.



2) a) $\Sigma F_y = M a_y$

$\Rightarrow -T + Mg = M a_y$

$\Rightarrow \boxed{a_y = \frac{Mg - T}{M}}$ (1)



$\Sigma \tau = I\alpha$ όπου $\alpha = \frac{a}{R}$

$I = \frac{1}{2} M R^2$ (για δίσκο)

$\tau = \overset{\to \text{τάση}}{T} R$

$\tau = I\alpha = \frac{1}{2} M R^2 \frac{a_y}{R} = \frac{M R a_y}{2}$ $\Big\} \Rightarrow TR = \frac{M R a_y}{2} \Rightarrow \boxed{T = \frac{M a_y}{2}}$ (2)

(1), (2) : $T = \frac{M}{2}\left(\frac{Mg - T}{M}\right) \Rightarrow 2T = Mg - T \Rightarrow 3T = Mg \Rightarrow \boxed{T = \frac{Mg}{3}}$

$a_y = \frac{2T}{M}$

β) $a_{cM} = a_y = \frac{2T}{M} = \frac{2}{M}\,\frac{1}{3} M g = 2g/3$

γ) $v_{cM} = v_f$, $v_f^2 = \cancel{v_i^2}^{\,0} + 2a\Delta y$ → δυναμική ενέργεια

$\Rightarrow v_f^2 = 2\,\frac{2g}{3}\cdot h = \frac{4hg}{3}$

$\Rightarrow v_f = \left(\frac{4hg}{3}\right)^{1/2}$

δ) $E^i_{κιν} + E^i_{δυν} = E^f_{κιν} + E^f_{δυν}$

$\Rightarrow 0 + Mgh = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M v_f^2 + 0$

$\Rightarrow Mgh = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} M R^2 \frac{v_f^2}{R^2} + \frac{1}{2} M v_f^2$

$\Rightarrow gh = \frac{1}{4} v_f^2 + \frac{1}{2} v_f^2 = \frac{3}{4} v_f^2$

$\Rightarrow \boxed{v_f = \sqrt{\frac{4gh}{3}}}$

3. Ένας κλόουν, η μάζα του οποίου είναι $100.0kg$, ανεβαίνει στην εξωτερική περιφέρεια ενός δίσκου ακτίνας $20.0m$ και μάζας 200kg. Υποθέστε ότι ο δίσκος είναι στερεωμένος σε ένα λείο κατακόρυφο άξονα και αρχικά είναι σε ηρεμία. Αν ο κλόουν αρχίζει να τρέχει πάνω στο δίσκο κατά μήκος της εξωτερικής περιφέρειας, με φορά αυτή των δεικτών του ρολογιού και ταχύτητα u = $2.0m/s$, πόσο γρήγορα γυρνά ο δίσκος και ποια είναι η στροφορμή του;

3) Στο σύστημα δίσκος - κλόουν δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης στροφορμής.

$\vec{L}_{συσ} = 0 \Rightarrow \vec{L}_{δίσκου} + \vec{L}_{κλόουν} = 0$, $I_{δίσκ} = \frac{1}{2} M_δ R^2$

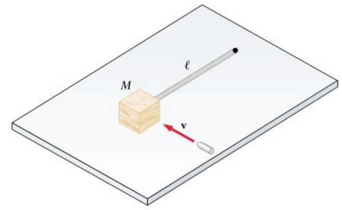
$\vec{L}_{κλόουν} = \vec{r} \times m\vec{υ}$

Αφού $\vec{r} \perp \vec{υ}$ (τρέχει κατά μήκος της περιφέρειας)

τότε $|\vec{L}_{κλόουν}| = m r υ = 4000\ kg m^2/s$

$|\vec{L}_{δίσκου}| = I_{δίσκ}\, ω \Rightarrow U = \frac{|\vec{L}_{δίσκου}|}{\frac{1}{2} M R^2} = \frac{|\vec{L}_{κλόουν}|}{\frac{1}{2} M R^2} = 0{,}01\ rad/s$

4. Ένα ξύλινο σώμα μάζας M βρίσκεται πάνω σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια και είναι προσαρμοσμένο σε μια άκαμπτη ράβδο μήκους l και αμελητέας μάζας (Σχήμα 3). Η ράβδος είναι στερεωμένη σταθερά στο άλλο άκρο. Μια σφαίρα όπλου μάζας m, που κινείται παράλληλα προς την οριζόντια επιφάνεια και κάθετα προς τη ράβδο, με ταχύτητα v, χτυπάει το ξύλινο σώμα και ενσωματώνεται σε αυτό. (α) Ποια είναι η στροφορμή του συστήματος σφαίρα – σώμα; (β) Ποιο κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας χάθηκε κατά την κρούση;



4/α) Η αρχική στροφορμή της σφαίρας ως προς το σταθερό σημείο της ράβδου δίνεται από την έκφραση: $L = |\vec{L}| = m\upsilon R$.

Αφού η συνισταμένη ροπή στο σύστημα σφαίρας – σώματος είναι 0 η στροφορμή του συστήματος είναι σταθερή και ίση με $L_{αρχ} = m\upsilon R$

β) $E_{αρχ} = \frac{1}{2} m \upsilon^2$

$E_{τελ} = \frac{1}{2} I \omega^2$, I είναι η ολική ροπή αδράνειας του συστήματος και δίνεται από την έκφραση: $I = (M+m)\ell^2$

$$m\upsilon\ell = I\omega \Rightarrow m\upsilon\ell = (M+m)\ell^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{m\upsilon}{(M+m)\ell}$$

$$E_{τελ} = \frac{1}{2}(M+m)\ell^2 \frac{m^2\upsilon^2}{(M+m)^2\ell^2} = \frac{1}{2}\frac{m^2\upsilon^2}{(M+m)}$$

$$E_{τελ} - E_{αρχ} = \frac{1}{2}\frac{m^2\upsilon^2}{(M+m)} - \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{m^2\upsilon^2 - mM\upsilon^2 - m^2\upsilon^2}{2(M+m)} = \frac{-mM\upsilon^2}{2(M+m)}$$

$$\frac{E_{τελ} - E_{αρχ}}{E_{αρχ}} = \frac{\frac{mM\upsilon^2}{2(M+m)}}{\frac{m\upsilon^2}{2}} = \frac{M}{M+m}$$

5. Τα ηλεκτρόνια είναι θεμελιώδη σωματίδια με ιδιοστροφορμή (εσωτερική στροφορμή) S=h/4π όπου h είναι η σταθερά του Plank και ισούται με: $h=6.67.10^{-34}\,Kgm^2/s$. Χρησιμοποιώντας ως δεδομένο ότι η ροπή αδράνειας σφαίρας με σταθερή πυκνότητα μάζας δίνεται από την έκφραση $I=5/2MR^3$ και ότι η μάζα του ηλεκτρονίου είναι $m_e=9{,}1.10^{-31}Kg$ βρείτε πόση πρέπει να είναι η ακτίνα του ηλεκτρονίου αν τα σημεία της περιφέρειας του έχουν ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του φωτός ($c=3.10^8m/s$). Πειραματικά βρέθηκε ότι η ακτίνα του ηλεκτρονίου είναι μικρότερη από 10^{-18}m. Τι συμπέρασμα βγαίνει από αυτό για την ικανότητα της κλασσικής μηχανικής να περιγράψει μικροσκοπικά σωματίδια; Αν η κατανομή μάζας ήταν τέτοια ώστε η στροφορμή του ηλεκτρονίου να ήταν μέγιστη ποια θα ήταν τότε η ακτίνα του ηλεκτρνίου (θεωρήστε ότι η πυκνότητα του ηλεκτρονίου παραμένει σφαιρικά συμμετρική);

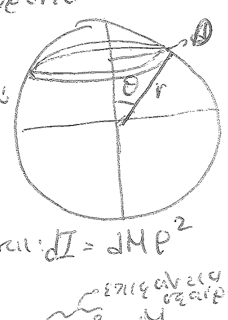
5) Αφού τα σημεία της περιφέρειας του ηλεκτρονίου δεν μπορούν να ξεπεράσουν την ταχύτητα του φωτός c τότε: $\omega_{max} \equiv \omega = \frac{c}{R}$

Έτσι $L_{max} = L = \omega I = \frac{c}{\cancel{R}}\frac{2}{5}MR^2 = \frac{2MRc}{5}$

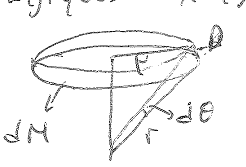
$L = \frac{h}{4\pi} = \frac{2MRc}{5} \Rightarrow R = \frac{5h}{4\cdot 2\pi Mc} = \frac{5\,6{,}67.10^{-34}}{2\cdot 4\cdot\pi\cdot 9{,}1.10^{-31}\cdot 3.10^{8}} = 9{,}73.10^{-15}\,m$

Η ακτίνα πρέπει να είναι πολύ μεγαλύτερη από την πειραματική της τιμής επομένως συμπεραίνουμε ότι η κλασσική μηχανική δεν μπορεί να περιγράψει μικροσκοπικά σωματίδια (χωρίς να παραβιάσει το όριο της ταχύτητας του φωτός).

Για να βρούμε την μέγιστη στροφορμή για σφαιρικά συμμετρικά ηλεκτρόνια πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την κατανομή μάζας με την μεγαλύτερη ροπή αδράνειας που είναι η περίπτωση που το ηλεκτρόνιο είναι ένα άδειο κέλυφος.



Για να υπολογίσουμε την ροπή αδράνειας του σφαιρικού κελύφους το χωρίζουμε σε δακτυλίους πάχους d.



$\rho = r\sin\theta,\ D = r\,d\theta$

Η ροπή αδράνειας του δακτυλιδιού είναι: $dI = dM\rho^2$

$dM = \sigma\, 2\pi\rho D$ όπου σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα: $\underbrace{4\pi r^2}_{\text{επιφάνεια σφαίρας}} \sigma = M \Rightarrow \sigma = \frac{M}{4\pi r^2}$

$\Rightarrow dI = r^2\sin^2\theta\, \cancel{2\pi}\, \cancel{r}\sin\theta \frac{M}{2\cancel{4\pi r^2}}\, r\,d\theta = \frac{r^2M}{2}\sin^3\theta\, d\theta$

$I_{\sigma\varphi\alpha\iota\rho\iota\kappa\acute{o}} = \int dI = \int_0^{\pi} \frac{r^2M}{2}\sin^3\theta\, d\theta = \frac{r^2M}{2}\int_0^{\pi}\left[\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right] = \frac{2r^2M}{3}$

$L_1 = \omega_1 I_1 = \frac{c}{R}\frac{2}{3}MR^2 = \frac{h}{4\pi} \Rightarrow R = \frac{3h}{4\pi Mc} = 5{,}85.10^{-15}\,m \gg 10^{-18}\,m$

$\omega_1 = \omega$

Και πάλι η κλασσική μηχανική αποτυγχάνει.