ΦΥΣ. 131

Τελική Εξέταση: 11-Δεκεμβρίου-2011

Πριν αρχίσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητας).

Ονοματεπώνυμο	**Αριθμός ταυτότητας**

Απενεργοποιήστε τα κινητά σας.

Σας δίνονται 25 ισοδύναμες ερωτήσεις. Κάθε ερώτηση αντιστοιχεί σε 10 μονάδες.
Σημειώστε καθαρά τις απαντήσεις σας σε κάθε ερώτηση.

Η μέγιστη συνολική βαθμολογία είναι 250 μονάδες.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μόνο το τυπολόγιο που σας δίνεται και απαγορεύται η χρήση οποιοδήποτε σημειώσεων, βιβλίων, κινητών.

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΣΤΕ ΜΟΝΟ ΤΙΣ ΣΕΛΙΔΕΣ ΠΟΥ ΣΑΣ ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΜΗΝ ΚΟΨΕΤΕ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΣΕΛΙΔΑ

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 4 ώρες. Καλή Επιτυχία !

Τύποι που μπορεί να φανούν χρήσιμοι

Γραμμική κίνηση:

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a\left(x - x_0\right)$$

Στροφική κίνηση:

1περιστροφή = 360° = 2π ακτίνια

$$\theta = \frac{s}{r}$$

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \qquad \bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega = \omega_0^2 + 2\alpha\left(\theta - \theta_0\right)$$

$$\upsilon_{\varepsilon\varphi} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \upsilon_{\varepsilon\varphi} = \omega r$$

$$\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad \vec{a}_{\varepsilon\varphi} = \vec{\alpha} \times \vec{r} \Rightarrow \left|\vec{a}_{\varepsilon\varphi}\right| = |\alpha||r|$$

$$\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho} = \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow \left|\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}\right| = \frac{\upsilon_{\varepsilon\varphi}^2}{r} = \omega^2 r$$

$$\vec{a}_{\gamma\rho\alpha\mu} = \vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} + \vec{a}_{\varepsilon\varphi} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\upsilon_{\varepsilon\varphi}}$$

Περιστροφή σώματος:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

$$E_{\kappa\iota\nu}^{\pi\varepsilon\rho.} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = I\alpha$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I\vec{\omega}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Απομονωμένο σύστημα: $L_i = L_f$

μετάπτωση γυροσκοπίου $\omega_\mu = \dfrac{\tau}{I\omega_{\pi\varepsilon\rho}}$

Συνθήκες στατικής ισορροπίας:

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} = 0 \text{ και } \sum \vec{\tau}_{\varepsilon\xi} = 0$$

Έργο – Ενέργεια:

Έργο σταθερής δύναμης: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

Έργο μεταβαλλόμενης δύναμης: $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$

$$\vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}}$$

$$\Delta U = -\int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}kx^2$$

$U_g = mgh$ (h<<R$_{\gamma\eta\varsigma}$)

$$W = \Delta E_{\kappa\iota\nu.}$$

$W = -\Delta U$ (για συντηρητικές δυνάμεις)

$$E_{\mu\eta\chi.} = E_{\kappa\iota\nu.} + U$$

$$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

$W = \Delta E_{\mu\eta\chi.}$ (για μη συντηρητικές δυνάμεις)

$$\vec{F}_{\varepsilon\lambda} = -k\vec{x}$$

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$$

Ορμή – Ώθηση - Κρούσεις:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$$

Ώθηση: $\vec{I} = \int F\,dt = \Delta\vec{p}$

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Απομονωμένο σύστημα: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$

Ελαστική κρούση: $\Delta\vec{p} = 0,\ \Delta E = 0$

Μη ελαστική κρούση: $\Delta\vec{p} = 0,\ \Delta E \neq 0$

Ελαστική κρούση σε 1-Δ: $\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2 = -\left(\vec{\upsilon}_1' - \vec{\upsilon}_2'\right)$

$$x_{CM} = \frac{1}{M_{o\lambda}}\sum_i m x_i$$

$$\vec{\upsilon}_{CM} = \frac{1}{M_{o\lambda}}\sum_i m\upsilon_i$$

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} = M\vec{a}_{CM}$$

Βαρυτική έλξη:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$G = 6.67\times10^{-11}\, N\cdot m^2/kg^2$$

$$U_g = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - G\frac{m_1 m_2}{r}$$

$$\upsilon_{\delta o\rho \upsilon \varphi.} = \sqrt{\frac{2GM_{\gamma\eta}}{R_{\gamma\eta}}}$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G\mathrm{M_H}}\right)r^3$$

$$R_{\gamma\eta} = 6.4\times10^3\, km$$

$$M_{\gamma\eta} = 5.97\times10^{24}\, kg$$

Ταλαντώσεις:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Λύσεις εξίσωσης αρμονικού ταλαντωτή:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = B\sin(\omega t + \psi)$$

$$x(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$$

$$x(t) = Ee^{i\omega t} + Fe^{-i\omega t}$$

$$\upsilon(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} = 2\pi f$$

$$E = U + E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}k\mathrm{A}^2$$

$$\upsilon = \pm\omega\sqrt{\left(A^2 - x^2\right)}$$

Φθίνουσες ταλαντώσεις:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,,\ \gamma = \frac{b}{2m},\ \ \omega_0 = \frac{k}{m}$$

Μικρή απόσβεση:

$$x(t) = De^{-\gamma t}\cos\left(\Omega t + \varphi\right),\ \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Μεγάλη απόσβεση:

$$x(t) = \mathrm{A}e^{-(\gamma+\Omega)t} + Be^{-(\gamma-\Omega)t}\,,\Omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Κριτική απόσβεση: $(\gamma = \omega_0)$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(A + Bt\right)$$

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f\cos\omega_d t$$

Λύση: $x(t) = \frac{f}{R}\cos\left(\omega_d t - \theta\right),\ \frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega_d\right)^2}}$

Κυματική:

$$y(t) = A\sin\left[2\pi\left(x - \upsilon t\right)\right]$$

$$y(t) = A\sin\left(kx - \omega t\right),\ k = \frac{2\pi}{\lambda},\ \omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} = 2\pi f$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\upsilon$$

$\upsilon = \sqrt{\frac{\mathrm{B}}{\rho}}$ (υγρά) $\upsilon = \sqrt{\frac{\mathrm{Y}}{\rho}}$ (στερεά) $\upsilon = \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\mu}}$ (χορδή)

$$s(x,t) = s_{\max}\cos\left(kx - \omega t\right)$$

$$\Delta P = \Delta P_{\max}\sin\left(kx - \omega t\right)$$

$$\Delta P_{\max} = \rho\upsilon\omega s_{\max}$$

$$I = \frac{1}{2}\rho\upsilon\left(\omega s_{\max}\right)^2$$

$$\beta = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Doppler $f' = \left(\frac{\upsilon \pm \upsilon_{\pi\alpha\rho.}}{\upsilon \mp \upsilon_{\pi\eta\gamma.}}\right)f$

Στάσιμα κύματα:

$$y(t) = \left(2A\sin kx\right)\cos\omega t$$

$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ n=1,2,3,…

$f_n = \frac{n}{2L}\upsilon$ n=1,2,3,… (για δύο άκρα ανοικτά ή κλειστά)

$f_n = \frac{n}{4L}\upsilon$ n=1,3,5,… (για άκρο κλειστό και άκρο ανοικτό)

Απλό εκκρεμές: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Φυσικό εκκρεμές: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$

Ροπές αδράνειας

Δίσκος: $I_{CM} = MR^2/2$

Συμπαγής σφαίρα: $I_{CM} = 2MR^2/5$

Κοίλη σφαίρα: $I_{CM} = 2MR^2/3$

Συμπαγής κύλινδρος: $I_{CM} = MR^2/2$

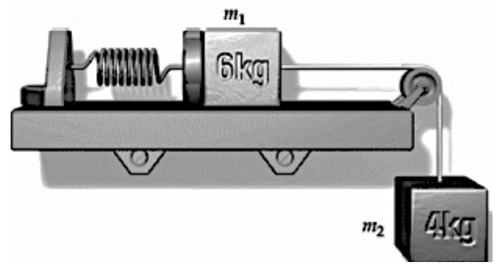
Κυλινδρικός φλοιός/στεφάνι: $I_{CM} = MR^2$

Ράβδος: $I_{CM} = ML^2/12$

Ερώτηση 1

Αυτή και η επόμενη ερώτηση αναφέρονται στην ακόλουθη φυσική περίπτωση

Ένα κιβώτιο 2 μάζας 4.0kgr κρέμεται από ένα αβαρές νήμα το οποίο περνά από μια λεία και αβαρή τροχαλία και το άλλο άκρο του είναι εξαρτημένο από ένα άλλο κιβώτιο 1 μάζας 6.0kgr το οποίο είναι ακίνητο πάνω σε μια τραχειά επιφάνεια. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ του κιβωτίου 1 και της επιφάνειας είναι $\mu_\kappa = 0.2$. Το κιβώτιο 1 πιέζεται πάνω σε ελατήριο προκαλώντας συσπείρωση κατά 30cm (το κιβώτιο 1 δεν είναι εξαρτημένο στο ελατήριο). Η σταθερά του ελατηρίου είναι 180 N/m. Το σύστημα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί. Προσδιορίστε αν το νήμα θα παραμένει τεντωμένο.



Το νήμα θα παραμένει τεντωμένο, αν η συνισταμένη δύναμη στο σώμα μάζας m_1 του δίνει επιτάχυνση λιγότερο από g

Αρχικά η δύναμη που ασκείται στο m_1 προέρχεται από το ελατήριο και είναι:

$$k\cdot\Delta x_1 = 180\cdot 0.3 = 54\,N$$

Αυτή η δύναμη θα πρέπει να είναι λιγότερη από μια δύναμη:

$$F = m_1 g = 6\cdot 9.8 = 58.8\,N$$

Επομένως το νήμα θα παραμένει πάντοτε τεντωμένο, αφού μετά την απελευθέρωση του ελατηρίου η $F_{ελ}$ ελαττώνεται και η δύναμη της τριβής ελαττώνει τη συνισταμένη δύναμη. Έτσι η επιτάχυνση του κιβωτίου 1 θα είναι πάντοτε λιγότερο από g.

Ερώτηση 2

Να βρεθεί η ταχύτητα των κιβωτίων τη στιγμή που το ελατήριο έχει αφεθεί ελεύθερο και το κιβώτιο 2 έχει κινηθεί κατά 40 cm.

Η αρχική ενέργεια του συστήματος είναι: $E^{i}_{ελ} = \frac{1}{2}kx^2$

Η ενέργεια του συστήματος όταν το κιβώτιο 2 έχει πέσει κατά Δh θα είναι:

$$E^{f}_{μηχ} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_\kappa^2 - m_2 g\Delta h$$

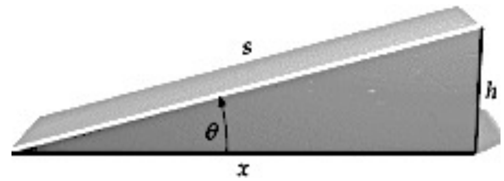
Η διαφορά των δυό ενεργειών ισούται με το έργο της τριβής:

$$W_{Tρ} = f_{τρ}\cdot\Delta s = \mu_\kappa m_1 g\Delta h = \frac{1}{2}kx^2 - \left[\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_\kappa^2 - m_2 g\Delta h\right]$$

$$\Rightarrow v_\kappa^2 = \frac{kx^2 + 2m_2 g\Delta h - 2\mu_\kappa m_1 g\Delta h}{m_1+m_2} = 3.82\,m^2/s^2 \Rightarrow \boxed{v_\kappa = 1.95\,m/s}$$

Ερώτηση 3

Ένα αυτοκίνητο μάζας 1000kg κινείται με σταθερή ταχύτητα 100km/h σε κάποιο ανηφορικό δρόμο κλίσης 10% (αυτό σημαίνει ότι η γωνία κλίσης του κεκλιμένου επιπέδου με την οριζόντια διεύθυνση είναι $\tan\theta = 0.1$. Για τέτοια τιμή της κλίσης $\tan\theta \approx \sin\theta$).



Πόση πρέπει να είναι η ελάχιστη ισχύς που πρέπει να δώσει η μηχανή του αυτοκινήτου; (Αγνοήστε την αντίσταση του αέρα και την τριβή κύλησης).

Σημείωση: Η ισχύς που δίνεται από το αυτοκίνητο προέρχεται από την αλλαγή της χημικής του ενέργειας και ένα μέρος του πηγαίνει σε μηχανική ενέργεια και κάποιο άλλο μέρος σε θερμική ενέργεια η οποία αποβάλλεται με τη μορφή των καυσαερίων.

Η ισχύς της μηχανής προέρχεται από ελάττωση της χημικής ενέργειας:

$$P = -\frac{dE_{χημ}}{dt}$$

Η μεταβολή στη χημική ενέργεια του αυτοκινήτου βρίσκεται από διατήρηση της ενέργειας (μηχανική, θερμική και χημική)

$$\Delta E_{ολ} = 0 \Rightarrow \Delta E_{μηχ} + \Delta E_{θερ} + \Delta E_{χημ} = 0 \Rightarrow \Delta E_{χημ} = -\Delta E_{μηχ} - \Delta E_{θερ}$$

Επομένως η ισχύς θα είναι:

$$P = -\frac{dE_{χημ}}{dt} = \frac{dE_{μηχ}}{dt} + \frac{dE_{θερ}}{dt} \quad (1)$$

Αλλά $\frac{dE_{μηχ}}{dt} = \frac{dU_{δυν}}{dt} = \frac{d(mgh)}{dt} = mg\frac{dh}{dt} \quad (2)$

Η κινητική ενέργεια παραμένει σταθερή εφόσον $υ = σταθ$

Από το σχήμα: $h = s \cdot \sin\theta \Rightarrow h \simeq s\tan\theta = 0.1 s \quad (3)$

Χρησιμοποιώντας την (3) η (2) γίνεται: $\frac{dE_{μηχ}}{dt} = mg 0.1 \frac{ds}{dt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dE_{μηχ}}{dt} = 0.1 mgυ \quad (4)$$

Αντικατάσταση της (4) στην (1) δίνει: ($υ = 100km/h = 28 m/s$)

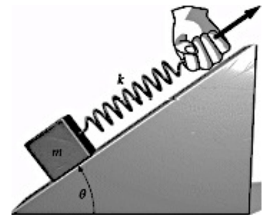
$$P = \frac{dE_{θερ}}{dt} + 0.1mgυ = 0.1 \cdot 1000 \cdot 9.8 \cdot 28 + \frac{dE_{θερ}}{dt}$$

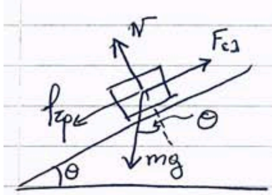
Η ελάχιστη ισχύς θα είναι όταν $\frac{dE_{θερ}}{dt} = 0$ οπότε $\boxed{P = 27.5kW}$

Ερώτηση 4

Αυτή και η επόμενη ερώτηση αναφέρονται στην ακόλουθη περίπτωση

Ένα κιβώτιο μάζας m είναι αρχικά ακίνητο πάνω σε τραχειά κεκλιμένη επιφάνεια γωνίας κλίσης θ με την οριζόντια διεύθυνση. Το κιβώτιο είναι εξαρτημένο από το άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς k, και αρχικά βρίσκεται προς το πάνω μέρος της κεκλιμένης επιφάνειας. Οι συντελεστές στατικής και κινητικής τριβής είναι μ_s και μ_κ αντίστοιχα. Τραβάμε το ελατήριο αργά προς την κορυφή της κεκλιμένης επιφάνειας και παράλληλα προς αυτή έως ότου το κιβώτιο να αρχίσει να κινείται. Να βρεθεί η επιμήκυνση του ελατηρίου τη στιγμή που το κιβώτιο αρχίζει να κινείται.





Εφαρμόζουμε το 2° νόμο του Νεύτωνα στο κιβώτιο:

Τη στιγμή που είναι έτοιμο να κινηθεί:

$$\Sigma F_x = F_{ελ} - f_{στ} - mg\sin\theta = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta \quad (2)$$

Αντικατάσταση στην (1) $F_{ελ} - \mu_s N - mg\sin\theta = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow kd - \mu_s mg\cos\theta - mg\sin\theta = 0 \Rightarrow \boxed{d = \frac{mg}{k}(\mu_s\cos\theta + \sin\theta)}$$

Ερώτηση 5

Να προσδιοριστεί η τιμή του συντελεστή της κινητικής τριβής, μ_κ, τέτοια ώστε το κιβώτιο να έρθει και πάλι στην κατάσταση της ηρεμίας τη στιγμή που το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, δηλαδή δεν υπάρχει οποιαδήποτε επιμήκυνση ή συσπείρωση.

Από το θεώρημα έργου-ενέργειας έχουμε:

$$W = \Delta E_{μηχ} \Rightarrow -f_k \Delta s = \Delta E_{κιν} + \Delta E_{δυν} + \Delta E_{ελ} \quad (1)$$

Επειδή το κιβώτιο έχει μηδενική ταχύτητα στην αρχική και τελική θέση

$\Delta E_{κιν} = 0$. (2)

Αν θεωρήσουμε ότι στην αρχική θέση το σώμα έχει $U_{δυν} = 0$ τότε στη τελική θέση η δυναμική του ενέργεια θα είναι: mgh

$\Delta E_{δυν} = mgh - 0 = mgd\sin\theta$ (3) όπου d η επιμήκυνση του ελατηρίου

Η αλλαγή στη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου θα είναι:

$$\Delta E_{ελ} = E^{f}_{ελ} - E^{i}_{ελ} = 0 - \frac{1}{2}kd^2 \Rightarrow \Delta E_{ελ} = -\frac{1}{2}kd^2 \quad (4)$$

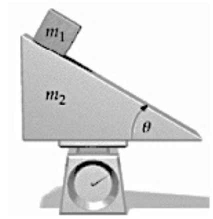
Από (2),(3) και (4) η (1) γίνεται: $-\mu_k N d = mgd\sin\theta - \frac{1}{2}kd^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu_k mg\cancel{d}\cos\theta = mg\cancel{d}\sin\theta - \frac{1}{2}kd^{\cancel{2}} \Rightarrow \mu_k = \tan\theta - \frac{1}{2}\frac{kd}{mg\cos\theta}$$

Από το πρόβλημα 4 $\Rightarrow \mu_k = \tan\theta - \frac{1}{2}\mu_s - \frac{1}{2}\tan\theta \Rightarrow \boxed{\mu_k = \frac{1}{2}(\tan\theta - \mu_s)}$

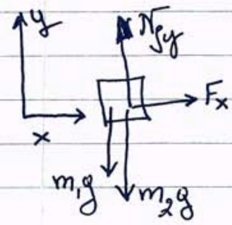
Ερώτηση 6

Μια σφήνα μάζας m_2 βρίσκεται ακίνητη πάνω σε μια ζυγαριά όπως στο σχήμα. Ένα μικρό κιβώτιο μάζας m_1 αρχίζει να γλυστρά προς τη βάση της λείας κεκλιμένης επιφάνειας της σφήνας.



Να βρεθεί η ένδειξη της ζυγαριάς κατά τη διάρκεια της κίνησης του μικρού κιβωτίου;

Θεωρούμε τη σφήνα και το κιβώτιο σαν ένα σύστημα.
Για το σύστημα αυτό, το ΚΜ του μετατοπίζεται καθώς το μικρό κιβώτιο κινείται προς τη βάση της σφήνας.
Θεωρούμε το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος για το σύστημα:



Από το 2ο νόμο του Newton έχουμε:

x-διεύθυνση: $F_x = (m_1 g \sin\theta)\cos\theta$

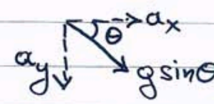
y-διεύθυνση: $N_{ζυγ} - m_1 g - m_2 g = M_{ολ}\, a_{CM} = (m_1+m_2)\, a^y_{CM}$

$$\Rightarrow N_{ζυγ} = (m_1+m_2)g + (m_1+m_2)\, a^y_{CM} \qquad (1)$$

Η y-συνιστώσα της επιτάχυνσης του ΚΜ δίνεται από:

$$a_y^{CM} = \frac{m_1 a_1^y + \cancel{m_2 a_2^y}^{\to 0}}{m_1+m_2} \Rightarrow a_y^{CM} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\, a_1^y \qquad (2)$$

Η επιτάχυνση του κιβωτίου μάζας m_1 είναι: $a_1 = g\sin\theta$
αλλά η επιτάχυνση αυτή είναι κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.
Επομένως την αναλύουμε σε κατακόρυφο και οριζόντια συνιστώσα:



Επομένως $a_1^y = -a_y = -(g\sin\theta)\sin\theta \qquad (3)$

$a_1^x = +a_x = (g\sin\theta)\cos\theta \qquad (4)$

Αντικαθιστώντας τις (2) κ (3) στην (1) θα έχουμε:

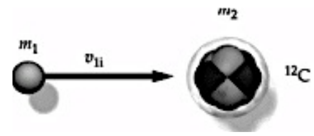
$$N_{ζυγ} = (m_1+m_2)\left(g - \frac{m_1 g \sin^2\theta}{m_1+m_2}\right) \Rightarrow N_{ζυγ} = g\left(m_2 + m_1(1-\sin^2\theta)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{N_{ζυγ} = g\,(m_2 + m_1\cos^2\theta)}$$

Ερώτηση 7

Αυτή και η επόμενη ερώτηση αναφέρονται στην ακόλουθη περίπτωση

Ένα νετρόνιο μάζας m_1 και αρχικής ταχύτητας υ_{1i} συγκρούεται ελαστικά με ένα πυρήνα άνθρακα, ^{12}C ,μάζας m_2 που είναι αρχικά ακίνητος.



Ποιες είναι οι τελικές ταχύτητες των 2 σωματιδίων

Από διατήρηση ορμής έχουμε: $m_1 \upsilon_{1i} = m_1 \upsilon_{1f} + m_2 \upsilon_{2f} \quad (1)$

Για ελαστική κρούση έχουμε $\upsilon_{2f} - \upsilon_{1f} = -(\upsilon_{2i} - \upsilon_{1i}) = \upsilon_{1i} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \upsilon_{2f} = \upsilon_{1i} + \upsilon_{1f} \quad (2)$$

Αντικατάσταση στην (1) δίνει:

$$m_1 \upsilon_{1i} = m_1 \upsilon_{1f} + m_2 \upsilon_{1i} + m_2 \upsilon_{1f} \Rightarrow (m_1 + m_2) \upsilon_{1f} = (m_1 - m_2) \upsilon_{1i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \upsilon_{1i}} \quad (3)$$

Αντικατάσταση της (3) στην (2): $\upsilon_{2f} = \dfrac{\upsilon_{1i}(m_1 + m_2) + (m_1 - m_2)\upsilon_{1i}}{m_1 + m_2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon_{2f} = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} \upsilon_{1i}} \quad (4)$$

Ερώτηση 8

Ποιο ποσοστό της αρχικής του ενέργειας έχασε το νετρόνιο

Η ενέργεια που έχασε το νετρόνιο είναι η τελική ενέργεια του πυρήνα του άνθρακα:

$$-\Delta E^{\kappa\iota\nu}_{\nu\varepsilon\tau} = E^{C}_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} m_2 \upsilon_{2f}^2 = \frac{1}{2} m_2 \frac{4 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \upsilon_{1i}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\Delta E^{\kappa\iota\nu}_{\nu\varepsilon\tau} = \frac{4 m_2 m_1}{(m_1 + m_2)^2} \left(\frac{1}{2} m_1 \upsilon_{1i}^2 \right) = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E^{i}_{\kappa\iota\nu}$$

Επομένως το ποσοστό της ενέργειας που χάθηκε είναι:

$$f = \frac{-\Delta E^{\kappa\iota\nu}_{\nu\varepsilon\tau}}{E^{i}_{\kappa\iota\nu}} = \frac{4 m_1 m_2 \cancel{E^{i}_{\kappa\iota\nu}}}{(m_1 + m_2)^2 \cancel{E^{i}_{\kappa\iota\nu}}} \Rightarrow \boxed{f = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}}$$

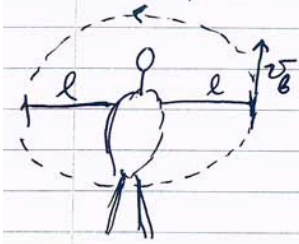
Ερώτηση 9

Αυτή και η επόμενη ερώτηση αναφέρονται στην ακόλουθη περίπτωση

Μια φοιτήτρια κάθεται σε ένα περιστρεφόμενο κάθισμα κρατώντας στα ανοικτά της χέρια δυο βαρίδια ίδιας μάζας m. Η φοιτήτρια περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω. Ξαφνικά αφήνει ένα από τα δυο βαρίδια να πέσει στο έδαφος.

Ποια θα είναι η νέα γωνιακή της ταχύτητα;

Δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές που να ενεργούν στο σύστημα και επομένως η στροφορμή θα διατηρείται.



$$L_i = L_f$$

Η αρχική στροφορμή είναι:

$$L_i = I_\phi \cdot \omega_1 + m l^2 \omega_1 + m l^2 \omega_1 = I_\phi \omega_1 + 2 m l^2 \omega_1$$

Τη στιγμή που η φοιτήτρια αφήνει το ένα βαρίδιο, αυτό έχει ταχύτητα

$v = \omega_1 \cdot l$ και η στροφορμή του θα είναι: $L_{\beta\alpha\rho} = m v l = m \omega_1 l^2$

Η στροφορμή της φοιτήτριας και του εναπομείναντος βαριδίου

$$L^f_{\varphi o\iota\tau} = I_\phi \omega_2 + m l^2 \omega_2$$

Επομένως $I_\phi \omega_1 + m l^2 \omega_1 + \cancel{m l^2 \omega_1} = I_\phi \omega_2 + m l^2 \omega_2 + \cancel{m l^2 \omega_1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{(I_\phi + m l^2)}\,\omega_1 = \cancel{(I_\phi + m l^2)}\,\omega_2 \Rightarrow \boxed{\omega_1 = \omega_2}$$

Ερώτηση 10

Θεωρήστε και πάλι την ίδια φοιτήτρια η οποία περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω με τα δυο της χέρια ανοικτά αλλά δεν κρατά κανένα βάρος. Κάποιος ρίχνει ένα μικρό βάρος κατακόρυφα προς το ένα της χέρι.

Ποια θα είναι η νέα γωνιακή της ταχύτητα;

Αρχικά $L_i = I_\phi \cdot \omega_1$

Όταν πέσει το βαρίδιο στα χέρια της: $L_\beta = m l^2 \omega_2$

ενώ η φοιτήτρια θα περιστρέφεται με ω_2 οπότε $L^f_\phi = I_\phi \omega_2$

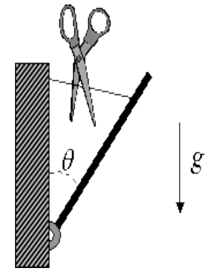
Από διατήρηση της στροφορμής: $L_i = L_f \Rightarrow I_\phi \omega_1 = (I_\phi + m l^2)\omega_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_2 = \frac{I_\phi}{I_\phi + m l^2}\,\omega_1}$$

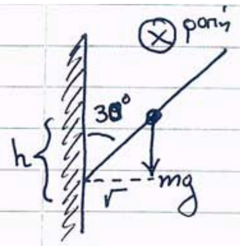
Ερώτηση 11

Αυτή καθώς και η επόμενη ερώτηση αναφέρονται στην ακόλουθη περίπτωση

Μια ο μοιόμορφη ράβδος μάζας M = 2.0kgr και μήκους L = 1.5m είναι εξαρτημένη σε ένα τοίχο με ένα λείο στήριγμα και την βοήθεια ενός αβαρούς νήματος, όπως στο σχήμα. Η αρχική γωνία θ της ράβδου με το τοίχο είναι 30^o. Ξαφνικά το νήμα κόβεται.



Ποια είναι η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου τη στιγμή που κόβεται το νήμα;



Τη στιγμή που κόβεται το νήμα η ράβδος τίθεται σε περιστροφή εξαιτίας της ροπής που προκαλεί η βαρυτική δύναμη ως προς το σημείο στήριξής της στο τοίχο:

$$\tau = mgr = mg\frac{l}{2}\sin\theta \quad (1)$$

Σύμφωνα με το περιστροφικό ισοδύναμο του $2^{ου}$ νόμου του Νεύτωνα:

$$\tau = I_p\alpha \quad (2)$$

Αλλά η ροπή αδράνειας της ράβδου αναφέρεται ως προς άξονα που περνά από το ένα άκρο της. Επομένως εφαρμόζοντας το θεώρημα παράλληλων αξόνων θα έχουμε:

$$I_p = I_{cm} + md^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{12}_{3}}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

Αντικατάσταση στη (2) δίνει $\tau = \frac{1}{3}ml^2\alpha \quad (4)$

Εξισώνοντας (1) και (4): $\cancel{m}g\frac{l}{2}\sin\theta = \frac{1}{3}\cancel{m}l^2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\theta$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}\frac{9.8}{1.5}\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = g/2 \Rightarrow \boxed{\alpha = 4.9 m/s^2}$$

Ερώτηση 12

Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν είναι στην οριζόντια θέση (θ = 90^o);

Θεωρούμε μηδενικό επίπεδο δυναμικής ενέργειας αυτό που περνά από την οριζόντια θέση της ράβδου (θ=90°)
Επομένως αρχικά η δυναμική ενέργεια που έχει η ράβδος μετατρέπεται όλη σε περιστροφική κινητική ενέργεια:

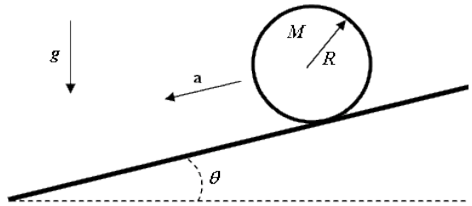
$$E_{δυν} = E_{κιν}^{περ} \Rightarrow mg\frac{l}{\cancel{2}}\cos 30^\circ = \frac{1}{\cancel{2}}I_p\omega^2 \Rightarrow I_p\omega^2 = mgl\cos 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{\cancel{m}gl}{\frac{1}{3}\cancel{m}l^2}\cos 30^\circ \Rightarrow \omega^2 = \frac{3g}{l}\cos 30^\circ \Rightarrow \boxed{\omega = 4.12 rad/s}$$

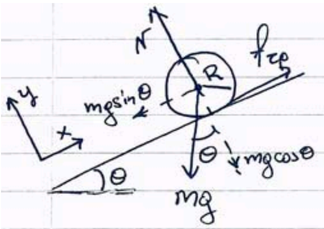
Ερώτηση 13

Αυτή καθώς και η επόμενη ερώτηση αναφέρονται στην ακόλουθη περίπτωση

Μια συμπαγής σφαίρα μάζας M και ακτίνας R αφήνεται από την κατάσταση της ηρεμίας πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης θ με την οριζόντια διεύθυνση. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των επιφανειών της σφαίρας και του κεκλιμένου επιπέδου είναι μ_s. Υποθέστε ότι η σφαίρα κυλά στο κεκλιμένο επίπεδο χωρίς να ολισθαίνει και ότι η δύναμη της στατικής τριβής έχει τη μέγιστη δυνατή τιμή της.



Ποια είναι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας της σφαίρας;



Εφαρμόζοντας το 2° νόμο του Newton:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - mg\cos\Theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\Theta$$

$$\Sigma F_x = ma_{cm} = f_{τρ} - mg\sin\Theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\cancel{m}a_{cm} = \mu_s \cancel{m}g\cos\Theta - \cancel{m}g\sin\Theta \Rightarrow \boxed{a_{cm} = g(\sin\Theta - \mu_s\cos\Theta)}$$

Αλλά $\tau = I\alpha = f_{τρ}\cdot R \Rightarrow f_{τρ} = I\frac{\alpha}{R} = I\frac{a_{cm}}{R^2} \Rightarrow \mu_s \cancel{m}g\cos\Theta = \frac{2}{5}\cancel{m}\cancel{R^2}\frac{a_{cm}}{\cancel{R^2}} \Rightarrow \mu_s g\cos\Theta = \frac{2}{5}a_{cm}$

Οπότε $a_{cm}\left(1+\frac{2}{5}\right) = g\sin\Theta \Rightarrow a_{cm} = \frac{5}{7}g\sin\Theta$

Ερώτηση 14

Ποια είναι η μικρότερη τιμή που μπορεί να έχει ο συντελεστής στατικής τριβής ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη της κύλισης χωρίς ολίσθησης;

Η σφαίρα καθώς κυλά προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου εφασκείται πάνω της η ροπή της δύναμης της τριβής

$$\tau = I\alpha = f_{τρ}\cdot R \Rightarrow \frac{2}{5}\cancel{M}R^{\cancel{2}}\alpha = \mu_s\cancel{M}g\cos\Theta\cdot\cancel{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}R\alpha = \mu_s g\cos\Theta \qquad (1)$$

Για κύλιση χωρίς ολίσθηση $\quad a = \alpha\cdot R \Rightarrow \alpha = \frac{a}{R} \qquad (2)$

Ωστόσο από το προηγούμενο πρόβλημα $a = g(\sin\Theta - \mu_s\cos\Theta) \; (3)$

Αντικατάσταση των (2) και (3) στην (1) θα δώσει:

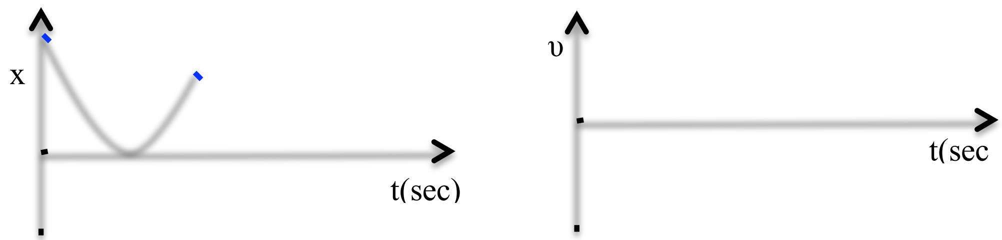
$$\frac{2}{5}\cancel{R}\frac{a}{\cancel{R}} = \mu_s g\cos\Theta \Rightarrow \frac{2}{5}(\sin\Theta - \mu_s\cos\Theta)\cancel{g} = \mu_s\cancel{g}\cos\Theta \Rightarrow$$

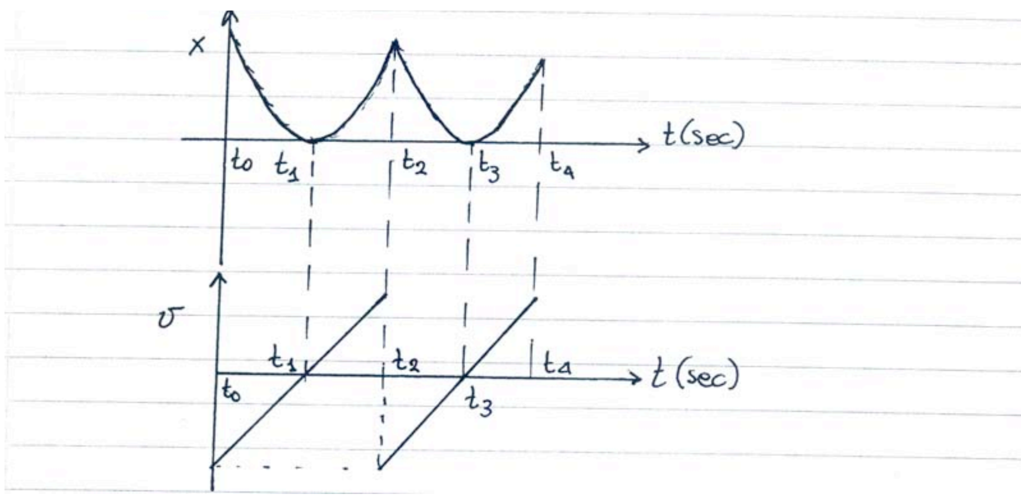
$$\Rightarrow \mu_s\cos\Theta\left(\frac{2}{5}+1\right) = \frac{2}{5}\sin\Theta \Rightarrow \frac{7}{\cancel{5}}\mu_s\cos\Theta = \frac{2}{\cancel{5}}\sin\Theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_s = \frac{2}{7}\tan\Theta}$$

Ερώτηση 15

Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει τη θέση ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου. Να κάνετε το διάγραμμα της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου για τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές





Ερώτηση 16

Ένας αστεροειδής μάζας 250kgr ταξιδεύει κατευθείαν προς τη γη. Όταν βρίσκεται σε απόσταση 25,000km από την επιφάνεια της γης, η ταχύτητά του είναι 10km/s. Να βρεθεί η ταχύτητά του όταν πέφτει στην επιφάνεια της γης. (Αγνοείστε οποιαδήποτε αποτελέσματα εξαιτίας της αντίστασης του αέρα ή της περιστροφής της γης)

Αρχικά ο αστεροειδής έχει ενέργεια : $E^{i}_{μηχ} = \frac{1}{2} m \upsilon_i^2 - G M_Γ \frac{m}{r_1}$

Η μηχανική ενέργεια διατηρείται, οπότε την ίδια ενέργεια θα έχει και την στιγμή της σύγκρουσης με τη γη:

$$E^{f}_{μηχ} = \frac{1}{2} m \upsilon_f^2 - G M_Γ \frac{m}{r_γ}$$

$$E^{f}_{μηχ} = E^{i}_{μηχ} \Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} \upsilon_i^2 - G M_Γ \frac{\cancel{m}}{(r_i + r_γ)} = \frac{1}{2} \cancel{m} \upsilon_f^2 - G M_Γ \frac{\cancel{m}}{r_γ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_f^2 = \upsilon_i^2 - 2GM\left(\frac{1}{r_i + r_γ} - \frac{1}{r_γ}\right)$$

Αντικατάσταση των δεδομένων δίνει : $\upsilon_f^2 = 10^8 - 7.98 \cdot 10^{14}\left(\frac{10^{-3}}{31380} - \frac{10^{3}}{6380}\right)$

$$\Rightarrow \upsilon_f^2 = 10^8 + 99648159.58 \Rightarrow \upsilon_f^2 = 1.996\,10^8 \Rightarrow \boxed{\upsilon_f = 14.13 \text{ km/s}}$$

Ερώτηση 17

Αυτή καθώς και η επόμενη ερώτηση αναφέρονται στην ακόλουθη περίπτωση

Μια μπάλα του bowling μάζας Μ και ακτίνας R ρίχνεται με τέτοιο τρόπο ώστε τη στιγμή που ακουμπά στο δάπεδο αρχίζει να κινείται οριζόντια με ταχύτητα $\upsilon_0 = 5 m/s$ ενώ δεν περιστρέφεται. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ του δαπέδου και της μπάλας είναι $\mu_\kappa = 0.08$.

Να βρεθεί το χρονικό διάστημα που η μπάλα του bowling γλυστρά στο δάπεδο πριν ικανοποιηθεί η συνθήκη κύλησης χωρίς ολίσθηση.

Η συνισταμένη δύναμη στη μπάλα προέρχεται από τη δύναμη της κινητικής τριβής που ενεργεί αντίθετα με τη φορά κίνησης της μπάλας:

$$f_k = -\mu_k \cancel{M} g = \cancel{M} a_{cM} \Rightarrow a_{cM} = -\mu_k g \quad (1)$$

Η ταχύτητα του ΚΜ της μπάλας επιβραδύνεται:

$$\upsilon_{cM} = \upsilon_0^{cM} + a \cdot t \Rightarrow \upsilon_{cM} = \upsilon_0^{cM} - \mu_k g t \quad (2)$$

Η μπάλα περιστρέφεται εξαιτίας της ροπής της δύναμης της κινητικής τριβής:

$$\tau = \mu_k M g R = I_{cM} \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\mu_k M g R}{I_{cM}} = \frac{\mu_k \cancel{M} g \cancel{R}}{\frac{2}{5} \cancel{M} R^{\cancel{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{R} \quad (3)$$

Εξαιτίας της γωνιακής επιτάχυνσης, η μπάλα αποκτά γωνιακή ταχύτητα ω που μετά από χρόνο t θα είναι:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{R} t \Rightarrow \omega = \frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{R} t \quad (4)$$

Όταν η σφαίρα αρχίζει να κυλά χωρίς να ολισθαίνει $\upsilon_{cM} = \omega R \; (5)$

Επομένως από (2), (4) και (5) έχουμε:

$$\upsilon_0^{cM} - \mu_k g t = \frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{\cancel{R}} t \cancel{R} \Rightarrow \upsilon_0^{cM} = \frac{7}{2} \mu_k g t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{2}{7} \frac{\upsilon_0^{cM}}{\mu_k g} \Rightarrow \boxed{t_{oj} = \frac{10}{7(0.08)9.8} = 1.8 s}$$

Ερώτηση 18

Ποια είναι η απόσταση που κάλυψε η μπάλα πριν αρχίσει να κυλά χωρίς ολίσθηση;

Η απόσταση που θα διανύσει η μπάλα μέχρι να αρχίσει να ολισθαίνει είναι:

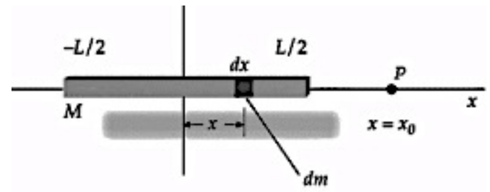
$$\Delta x = \upsilon_0^{cM} t_{oj} + \frac{1}{2} a_{cM} t_{oj}^2 = \upsilon_0^{cM} \frac{2\upsilon_0^{cM}}{7\mu_k g} - \frac{1}{2} \mu_k g \left(\frac{2\upsilon_0^{cM}}{7\mu_k g}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{2\upsilon_0^{cM\,2}}{7\mu_k g} - \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \upsilon_0^{cM\,2}}{49 \mu_k g} \Rightarrow \Delta x = \frac{12}{49} \frac{\upsilon_0^{cM\,2}}{\mu_k g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{12}{49} \frac{5^2}{0.08 \cdot 9.8} \Rightarrow \boxed{\Delta x = 7.8 m}$$

Ερώτηση 19

Μια ομογενής ράβδος μάζας M και μήκους L είναι τοποθετημένη στον x-άξονα και συμμετρικά ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Να βρεθεί η ένταση του βαρυτικού πεδίου που προκαλεί η μάζα της ράβδου σε ένα σημείο x_0 που βρίσκεται στον x-άξονα και $x_0>L/2$. *Σημείωση:* σαν ένταση του βαρυτικού πεδίου θεωρούμε την $F_g/m = g$. Για το βαρυτικό πεδίο της γης η ένταση του βαρυτικού πεδίου στην επιφάνεια της γης είναι $GM/r_\gamma^2 = g$).



Θεωρούμε μια στοιχειώδη μάζα dm σε απόσταση dx. Κάθε μιά από αυτές τις στοιχειώδεις μάζες προκαλούν ένα βαρυτικό πεδίο το οποίο έχει κατεύθυνση προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων

Για να υπολογίσουμε το ολικό πεδίο θα πρέπει να ολοκληρώσουμε ως προς όλα τα πεδία που δημιουργούν οι στοιχειώδεις μάζας dm που βρίσκονται μεταξύ $-L/2$ και $L/2$

Το στοιχειώδες πεδίο είναι $dg = \frac{G\,dm}{r^2}$

Αλλά $dm = \frac{M}{L}dx$

$$\Rightarrow dg = \frac{GM}{L r^2}dx \quad (1)$$

Η απόσταση μεταξύ ~~της~~ μιας στοιχειώδους μάζας dm και του σημείου P είναι:

$$r = x_0 - x \quad (2)$$

Αντικατάσταση της (2) στην (1) δίνει:

$$dg = \frac{GM}{L}\frac{dx}{(x_0-x)^2} \Rightarrow g = \int dg = \int_{-L/2}^{L/2}\frac{GM}{L}\frac{dx}{(x_0-x)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = \frac{GM}{L}\left[\frac{1}{x_0-x}\right]_{-L/2}^{L/2} \Rightarrow g = \frac{GM}{L}\left(\frac{1}{x_0-\frac{L}{2}} - \frac{1}{x_0+\frac{L}{2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{g = \frac{GM}{x_0^2 - L^2/4}} \quad \text{μέτρο}$$

Σε μορφή διανύσματος $\vec{g} = -\frac{GM}{x_0^2-\frac{L^2}{4}}\hat{i}$ με φορά προς την αρχή των αξόνων.

Ερώτηση 20

Αυτή και η επόμενη ερώτηση αναφέρονται στην ακόλουθη περίπτωση

Θεωρείστε ότι ανοίξατε μια τρύπα από την επιφάνεια της γης προς το κέντρο της. Αγνοείστε την αντίσταση του αέρα και την περιστροφή της γης. Θεωρήστε επίσης ότι η μάζα της γης είναι $M_Γ$, η πυκνότητά της ρ είναι σταθερή και η ακτίνας της $R_Γ$, ενώ η ένταση του βαρυτητικού πεδίου είναι g.

Πόσο έργο απαιτείται να καταναλωθεί ώστε να σηκώσετε ένα σώμα μάζας m από το κέντρο της γης στην επιφάνειά της;

Έστω r η απόσταση του σώματος από το κέντρο της γης. Το έργο το οποίο θα πρέπει να καταναλωθεί για να φέρουμε το σώμα από το κέντρο της γης στην επιφάνειά της θα είναι:

$$W=\int_0^R F_g\,dr = \int_0^R \frac{GMm}{r^2}\,dr \qquad (1)$$

Ωστόσο η μάζα M μεταβάλλεται καθώς κινούμαστε από το κέντρο της γης προς την επιφάνειά της

$$\left.\begin{array}{l} M=\rho V=\rho\frac{4}{3}\pi r^3 \\ M_{γης}=\rho\frac{4}{3}\pi R^3\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{M}{M_{γης}}=\left(\frac{r}{R}\right)^3 \Rightarrow M=M_{γης}\left(\frac{r}{R}\right)^3 \quad (2)$$

Αντικατάσταση στην (1) δίνει:

$$W=\int_0^R \frac{Gm}{\cancel{r^2}} M_{γης}\frac{r^{\cancel{3}}}{R^3}\,dr = \frac{GmM_{γης}}{R^3}\int_0^R r\,dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \frac{GM_{γης}m}{R^3}\frac{1}{2}r^2\Big|_0^R = \frac{GM_{γης}m}{2R^{\cancel{3}}}\cancel{R^2} \Rightarrow \boxed{W=\frac{GM_{γης}m}{2R}}$$

Επειδή $g=\frac{GM_{γης}}{R^2}$ μπορούμε να γράψουμε: $W=\frac{gmR}{2}$

Ερώτηση 21

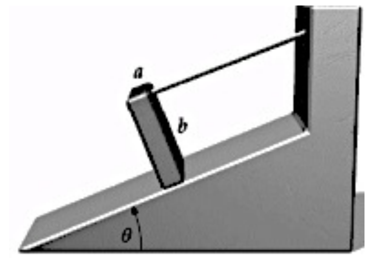
Αν το σώμα αφαιθεί από την επιφάνεια της γης να πέσει μέσω αυτής της τρύπας στο κέντρο της γης, με πόση ταχύτητα θα φθάσει στο κέντρο;

Από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας, η κινητική ενέργεια του σώματος καθώς φθάνει στο κέντρο της γης θα ισούται με το έργο που καταναλώθηκε για να σηκώσει το σώμα στην επιφάνεια της γής

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}v^2 = W = \frac{GM_{γης}\cancel{m}}{\cancel{2}R_Γ} \Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM_{γης}}{R_Γ}} \\ \text{και πάλι: } g=\frac{GM_Γ}{R_Γ^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

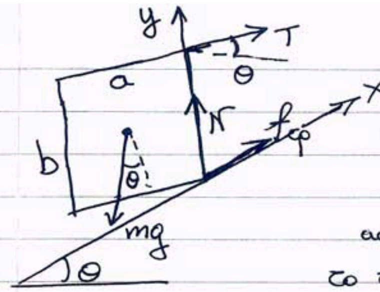
$$\Rightarrow \boxed{v=\sqrt{gR_Γ}}$$

Ερώτηση 22



Ένα ψηλό, ομογενές και ορθογώνιο τούβλο βρίσκεται πάνω σε μια κεκλιμένη επιφάνεια όπως στο σχήμα. Ένα νήμα είναι δεμένο στην πάνω πλευρά του τούβλου για να το αποτρέψει να πέσει.

Ποια είναι η μέγιστη γωνία θ του κεκλιμένου επιπέδου για την οποία το τούβλο δεν θα γλιστρήσει πάνω στην κεκλιμένη επιφάνεια; Θεωρήστε ότι ο λόγος των διαστάσεων του ορθογωνίου τούβλου είναι b/α = 4 και $\mu_s = 0.8$.



Όταν η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου αυξάνει και ξεπεράσει μια μέγιστη τιμή Θ_{max} το τούβλο θα ανασηκωθεί και θα ακουμπά στην κεκλιμένη επιφάνεια μόνο στο κατώτερο δεξί άκρο του. Αυτό συμβαίνει επειδή το πάνω άκρο του είναι δεμένο με το σχοινί.

Ακριβώς πριν γλιστρήσει οι δυνάμεις που ασκούνται στο δεξί άκρο του είναι η δύναμη της τριβής f_s και η αντίδραση N από την επιφάνεια.

Ακριβώς στην κατάσταση πριν γλιστρήσει, βρίσκεται σε ισορροπία, οπότε:

$$\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow T + \mu_s N - mg\sin\Theta = 0 & (1) \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - mg\cos\Theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\Theta & (2) \end{cases}$$

$\Sigma\vec{\tau}=0 \Rightarrow$ ως προς το δεξί άκρο

$$\frac{1}{2}\alpha(mg\cos\Theta) + \frac{1}{2}b(mg\sin\Theta) - bT = 0 \qquad (3)$$

Από (1) και (2) $T = -\mu_s mg\cos\Theta + mg\sin\Theta \Rightarrow T = mg(\sin\Theta - \mu_s\cos\Theta)$

Αντικατάσταση στην (3) δίνει:

$$\frac{1}{2}(a\cos\Theta + b\sin\Theta)mg - bmg(\sin\Theta - \mu_s\cos\Theta) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{mg}{2}a\cos\Theta - \frac{1}{2}bmg\sin\Theta + b\mu_s mg\cos\Theta = 0 \qquad (\text{ξέρουμε } b = 4a)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{mg}\cancel{a}\cos\Theta - \frac{1}{2}4\cancel{a}\cancel{mg}\sin\Theta + 4\cancel{a}\mu_s\cancel{mg}\cos\Theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\Theta - 4\sin\Theta + 8\mu_s\cos\Theta = 0 \Rightarrow (1+8\mu_s)\cos\Theta - 4\sin\Theta = 0 \Rightarrow$$

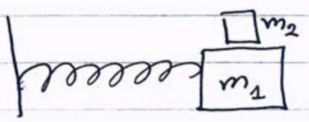
$$\Rightarrow \tan\Theta = \frac{1+8\mu_s}{4} \Rightarrow \Theta = \tan^{-1}\left(\frac{1+8\mu_s}{4}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1+0.64}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Theta_{max} = 61.6^\circ}$$

Ερώτηση 23

Ένα σώμα μάζας m_1 κινείται πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια ενώ είναι εξαρτημένο από οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k και ταλαντώνεται με πλάτος A. Όταν το ελατήριο έχει τη μέγιστη επιμήκυνσή του και η μάζα m_1 είναι στιγμιαία ακίνητη, ένα δεύτερο σώμα μάζας m_2 τοποθετείται πάνω στο ταλαντευώμενο σώμα.

Ποια είναι η μικρότερη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής μ_s τέτοια ώστε το δεύτερο σώμα να μην γλυστήσει πάνω στο πρώτο;



Από το 2ο νόμο του Newton για το 2ο σώμα:

$$\Sigma F_x = m_2 a_x = f_s = m_2 g \mu_s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_x = g \mu_s \Rightarrow \mu_s = \frac{a_x}{g} \qquad (1)$$

Αυτή είναι η μέγιστη επιτάχυνση του ταλαντωτή:

$$a_x = A\omega^2 = A\frac{k}{m_1 + m_2} \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε: $\mu_s = \dfrac{A\frac{k}{m_1+m_2}}{g} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_s = \frac{Ak}{g(m_1+m_2)}}$$

Ερώτηση 24

Ένα μικρό μεγάφωνο το οποίο εκπέμπει ήχους συχνότητας 1000Hz είναι δεμένο στο άκρο μιας ράβδου μήκους 0.8m. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται ως προς το άλλο άκρο της. Η ράβδος περιστρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο με γωνιακή ταχύτητα ω = 4.0rad/s. Η ταχύτητα του εκπεμπόμενου σήματος στον αέρα είναι 340m/s.

Να βρεθεί μια εξίσωση για τη συχνότητα που αντιλαμβάνεται ένας ακίνητος παρατηρητής ο οποίος βρίσκεται μακριά από το περιστρεφόμενο μεγάφωνο. <u>*Υπόδειξη:*</u> ίσως σας φανεί χρήσιμη η σχέση που δίνει το διωνυμικό ανάπτυγμα $(1-\varepsilon)^{-1} \simeq 1+\varepsilon$ όπου $\varepsilon << 1$

Η συχνότητα που ακούει ένας ακίνητος παρατηρητής θα μεταβάλλεται καθώς το μεγάφωνο περιστρέφεται.

Από την εξίσωση του φαινομένου Doppler μπορούμε να βρούμε τη συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής συναρτήσει της ταχύτητας της πηγής, ενώ η ταχύτητα της πηγής μπορεί να υπολογισθεί από την εφαπτομενική ταχύτητα ενός σώματος που εκτελεί κυκλική κίνηση:

$$f = \frac{f_\pi}{1-u_\pi/V} = \left(1-\frac{u_\pi}{V}\right)^{-1} f_\pi$$

Μπορούμε να γράψουμε: $\left(1-\frac{u_\pi}{V}\right)^{-1} \simeq 1+\frac{u_\pi}{V}$ εφόσον $\frac{u_\pi}{V} << 1$

$$\Rightarrow f = \left(1+\frac{u_\pi}{V}\right) f_\pi \quad (1)$$

Η ταχύτητα της πηγής, u_π, συναρτήσει του χρόνου είναι:

$$u_\pi = \omega \cdot r \cdot \sin\omega t = 0.8 \cdot 4 \cdot \sin 4 \cdot t \Rightarrow u_\pi = 3.2\sin(4t) \quad (2)$$

Από (1) και (2) $\Rightarrow f = \left[1+\frac{3.2}{V}\sin(4t)\right] f_\pi \Rightarrow$

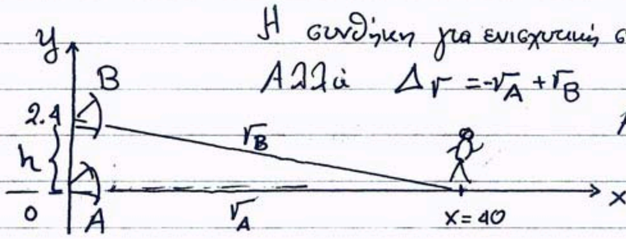
$$f = \left[1+\frac{3.2}{340}\sin(4t)\right] 1000 \Rightarrow \boxed{f = 1000 + 9.41\sin(4t)}$$

Ερώτηση 25

Μια ηχητική πηγή Α βρίσκεται στη θέση με συντεταγμένες x = 0, y=0 και μια άλλη πηγή Β βρίσκεται στη θέση x = 0, y = 2.4m. Οι δυο πηγές εκπέμπουν σε φάση. Μια παρατηρηρής στη θέση x = 40m, y = 0 παρατηρεί πως όταν κινείται είτε στη θετική ή αρνητική διεύθυνση y, η ένταση του ήχου που αντιλαμβάνεται ελαττώνεται.

Να βρεθούν η χαμηλότερη και η αμέσως επόμενη συχνότητα των πηγών που συνάδουν με την παραπάνω παρατήρηση. Θεωρήστε ότι η ταχύτητα του ήχου είναι 340m/s.

Επειδή η ένταση του ήχου ελαττώνεται καθώς ο παρατηρητής κινείται παράλληλα προς τη γραμμή που περνά από τις δύο πηγές ο παρατηρητής θα πρέπει να βρίσκεται σε θέση που έχουμε ενισχυτική συμβολή των ηχητικών κυμάτων.



Η συνθήκη για ενισχυτική συμβολή είναι: $\Delta r = n\lambda, \; n=1,2,3\ldots$ (1)

Αλλά $\Delta r = -r_A + r_B$ (2)

Αλλά $r_B^2 = r_A^2 + h^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r_B = \sqrt{40^2 + 2.4^2}$ (3)

Επομένως $\Delta r = \sqrt{40^2 + 2.4^2} - 40 \Rightarrow \Delta r = 0.07194m$

Αντικατάσταση στην (1) δίνει: $\lambda = \dfrac{\Delta r}{n} = \dfrac{0.07194}{n}$ (4)

Από την εξίσωση της ταχύτητας του ήχου: $\upsilon = f\lambda \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_n = \frac{\upsilon}{\lambda} \overset{(4)}{\Rightarrow} f_n = \frac{\upsilon}{0.07194} n \Rightarrow f_n = n\frac{340}{0.07194} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f_n = n\, 4726\ Hz}$$

Επομένως οι συχνότητες για n=1 και n=2 θα είναι:

$$\boxed{f_1 = 4726\,Hz} \quad \text{και} \quad \boxed{f_2 = 9452\,Hz}$$

<u>Βαθμολογία ερωτήσεων</u>

Άσκηση	Βαθμός	Άσκηση	Βαθμός
1		14	
2		15	
3		16	
4		17	
5		18	
6		19	
7		20	
8		21	
9		22	
10		23	
11		24	
12		25	
13			
Σύνολο 130		Σύνολο 120	
Βαθμός			