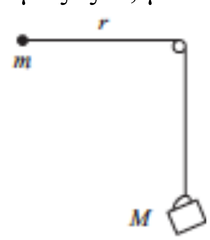
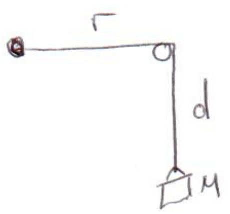
ΦΥΣ. 211
ΕΡΓΑΣΙΑ # 3
Επιστροφή την Δευτέρα 15/2/2016 στο τέλος της διάλεξης

1. Θεωρείστε ένα φλιτζάνι καφέ μάζας *M*, το οποίο συνδέεται με ένα άλλο σώμα μάζας *m*, μέσω ενός νήματος. Το φλιτζάνι κρέμεται μέσω μιας λείας και πολύ μικρής τροχαλίας, ενώ η μάζα *m*, είναι αρχικά ακίνητη σε οριζόντια θέση, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η μάζα *m*, αφήνεται κατόπιν ελεύθερη. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης ως προς *r,* (το μήκος του νήματος μεταξύ της μάζας *m* και της τροχαλίας) και ως προς *θ*, την γωνία που σχηματίζει το τμήμα του νήματος μεταξύ της μάζας *m* και της τροχιαλίας με την οριζόντια διεύθυνση. Υποθέστε ότι η διάταξη είναι τέτοια ώστε η μάζα *m*, δεν χτυπά στο κατακόρυφο τμήμα του νήματος μεταξύ της τροχαλίας και του φλιτζανιού.





Η κινητική ενέργεια του φλιτζανιού είναι: $T_\varphi = \frac{1}{2} M \dot{r}^2$

Από την στιγμή που η μάζα μπορεί να περιστραφεί, η κινητική της ενέργεια είναι $T_m = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$

Η δυναμική ενέργεια των δυο σωμάτων θα είναι:

$$V = -Mgd - mgr\sin\theta = -Mg(l-r) - mgr\sin\theta \Rightarrow V = Mgr - mgr\sin\theta$$

και αγνοούμε τον παράγοντα $-Mgl$ που δεν συνεισφέρει στη δυναμική

Επομένως η Lagrangian θα είναι:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2} M\dot{r}^2 - Mgr + mgr\sin\theta$$

Οι εξισώσεις κίνησης επομένως θα είναι:

$$r: \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r} \Rightarrow \boxed{(m+M)\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - Mg + mg\sin\theta}$$

$$\theta: \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \cancel{m}\cancel{r}\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = \cancel{m}g\cancel{r}\cos\theta \Rightarrow \boxed{r\ddot{\theta} = g\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}}$$

2. Είδαμε στις διαλέξεις ότι η αρχή του Hamilton μας λέει ότι αν μια συνάρτηση $x_0(t)$ κάνει το ολοκλήρωμα της δράσης να είναι στάσιμο, τότε αυτό συμβαίνει όταν ισχύει η εξίσωση Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_0}=0$. Για να το αποδείξουμε, θεωρήσαμε ότι η συνάρτηση Lagrange είχε εξάρτηση μόνο από τα x, $\dot{x}$ και t, δηλαδή $L=L(x,\dot{x},t)$. Θεωρήστε ότι η Lagrangian είναι επιπλέον συνάρτηση της $\ddot{x}$. Στην περίπτωση αυτή θα υπάρχει ένας επιπλέον όρος $\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_a}\ddot{\beta}$ στην εξίσωση $\frac{\partial}{\partial a}S\left[x_a(t)\right]=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x_a}\beta+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}\dot{\beta}\right)dt$ όπου $\beta=\frac{\partial x_a}{\partial a}$ και $\dot{\beta}=\frac{\partial \dot{x}_a}{\partial a}$. Μπορεί κάποιος να εφαρμόσει ολοκλήρωση κατά παράγοντες δυο φορές στον όρο αυτό και να οδηγηθεί σε μια τροποποιημένη μορφή της εξίσωσης: $\frac{\partial L}{\partial x_0}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_0}\right)=0$. Εξηγήστε αν το αποτέλεσμα αυτό είναι σωστό και αν όχι ποιο το λάθος του συλλογισμού που οδηγεί στο αποτέλεσμα αυτό.

Εισάγοντας έναν όρο εξαρτώμενο από $\ddot{x}$, η ελαχιστοποίηση της δράσης γίνεται ως:

$$\frac{\partial}{\partial a}S[x_a(t)]=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x_a}\beta+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}\dot{\beta}+\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_a}\ddot{\beta}\right)dt$$

Ολοκληρώνουμε κατά μέλη δυο φορές τον τελευταίο όρο και έχουμε:

$$\int\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_a}\ddot{\beta}\,dt=\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_a}\dot{\beta}-\int\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_a}\right)\dot{\beta}\,dt=\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_a}\dot{\beta}-\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_a}\right)\beta-\int\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_a}\right)\beta\,dt\right.$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial a}S[x_a(t)]=\int_{t_1}^{t_2}\beta\left[\frac{\partial L}{\partial x_a}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}\right)+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_a}\right)\right]dt+$$
$$+\beta\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_a}\right)\right]_{t_1}^{t_2}+\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_a}\dot{\beta}\Big|_{t_1}^{t_2}$$

Ο όρος που πολλαπλασιάζει το β μηδενίζεται γιατί υποθέταμε ότι β πρέπει να μηδενίζεται στα άκρα της διαδρομής.
Ο όρος που πολλαπλασιάζει το $\dot{\beta}$ μπορεί ωστόσο να μην είναι μηδέν αφού δεν έχαμε κάνει κάποια υπόθεση σχετικά με μηδενισμό των παραγώγων στα ακραία σημεία. Επομένως το προτεινόμενο δεν είναι σωστό.

3. Υποθέστε ότι ένα σωματίδιο κινείται στο χώρο κάτω από την επίδραση ενός συντηρητικού δυναμικού $V(r)$, αλλά είναι περιορισμένο να κινείται πάντοτε πάνω σε μια επιφάνεια, η εξίσωση της οποίας είναι $\sigma(r,t)=0$, όπου θα πρέπει να προσέξετε την ακριβή εξάρτηση από τον χρόνο. Η στιγμιαία δύναμη του δεσμού είναι κάθετη στην επιφάνεια. Δείξτε αναλυτικά ότι η ενέργεια του σωματιδίου δεν διατηρείται αν η επιφάνεια κινείται με το χρόνο.

Στην περίπτωση ύπαρξης δεσμών, η περιγραφή της δυναμικής του συστήματος περιγράφεται με την χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange λ.

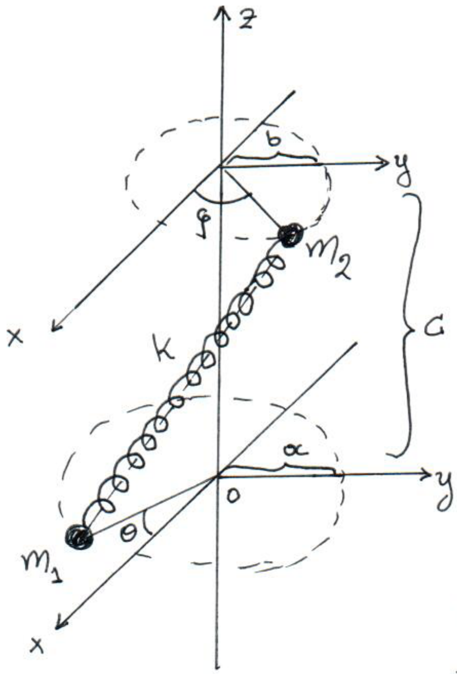
Η Lagrangian του συστήματος για την περίπτωση αυτή δίνεται από την σχέση $L = T - V - \lambda f$ και για την περίπτωση του προβλήματος

$L = T - V - \lambda\sigma$

Αν E είναι η ενέργεια του συστήματος τότε $\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial t} \neq 0$

αν το σ εξαρτάται από τον χρόνο.

4. Θεωρείστε δυο σωματίδια μάζας m_1 και m_2 αντίστοιχα. Έστω το σωματίδιο μάζας m_1 είναι περιορισμένο να κινείται σε κύκλο ακτίνας α στο επίπεδο $z = 0$, ως προς το σημείο $x = y = 0$. Έστω το σώμα μάζας m_2 είναι περιορισμένο να κινείται σε κύκλο ακτίνας b στο επίπεδο $z=c$ ως προς το σημείο $x = y = 0$. Ένα ελατήριο αμελητέας μάζας και σταθεράς ελατηρίου k, συνδέει τα δυο σώματα. (α) Να βρεθεί η Lagrangian του συστήματος. (β) Λύστε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές Lagrange και δώστε την φυσική ερμηνεία του κάθε πολλαπλασιαστή που χρησιμοποιείτε.



Έστω οι δυό μάζες m_1 και m_2 που βρίσκονται στα άκρα του ελατηρίου.

Για την περιγραφή των θέσεων των δυο μαζών στα δυο επίπεδα, χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες, με ακτίνες $\rho_1 = a$ και $\rho_2 = b$ σταθερές και γωνίες Θ και φ ως προς τους άξονες x των δυο επιπέδων. (όπως στο διπλανό σχήμα)

Επομένως η κινητική ενέργεια του συστήματος θα είναι:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \left(\cancelto{0}{\dot{\rho}_1^2} + \rho_1^2 \dot{\Theta}^2\right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\cancelto{0}{\dot{\rho}_2^2} + \rho_2^2 \dot{\varphi}^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} m_1 a^2 \dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 b^2 \dot{\varphi}^2} \quad (A)$$

Θεωρούμε ότι το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι αμελητέο και επομένως η δυναμική ενέργεια ελατηρίου του συστήματος θα είναι: $V = \frac{1}{2} k (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2$

όπου $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$ είναι τα διανύσματα θέσης των δυό μαζών m_1 και m_2.

Θα έχουμε επομένως: $V = \frac{1}{2} k (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{1}{2} k \left(r_1^2 + r_2^2 - 2\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2\right)$

Αλλά $\vec{r}_1 = \rho_1 \cos\Theta\, \hat{i} + \rho_1 \sin\Theta\, \hat{j} + 0\, \hat{k} \Rightarrow \boxed{\vec{r}_1 = a\cos\Theta\, \hat{i} + a \sin\Theta\, \hat{j}}$

και $\vec{r}_2 = \rho_2 \cos\phi\, \hat{i} + \rho_2 \sin\phi\, \hat{j} + c\, \hat{k} \Rightarrow \boxed{\vec{r}_2 = b\cos\phi\, \hat{i} + b\sin\phi\, \hat{j} + c\, \hat{k}}$

$$f_3 = x_1^2 + y_1^2 - a^2 = 0 \qquad (3)$$

$$f_4 = x_2^2 + y_2^2 - b^2 = 0 \qquad (4)$$

Τα διανύσματα θέσης των μαζών m_1 και m_2 είναι: $\vec{r_1} = x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} + z_1 \hat{k}$

$$\vec{r_2} = x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} + z_2 \hat{k}$$

Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες για απλούστευση των σχέσεων αυτών. οπότε θα έχουμε (ρ_1, θ, z_1) και (ρ_2, ϕ, z_2)

Επομένως η ταχύτητα και το διάνυσμα θέσης θα είναι:

$$\boxed{\vec{r_1} = \rho_1 \cos\theta \, \hat{i} + \rho_1 \sin\theta \, \hat{j} + z_1 \hat{k}} \Rightarrow \dot{\vec{r_1}} = \left(\dot{\rho}_1 \cos\theta - \rho_1 \sin\theta \, \dot{\theta}\right)\hat{i} + \left(\dot{\rho}_1 \sin\theta + \rho_1 \dot{\theta} \cos\theta\right)\hat{j} + \dot{z}_1 k$$

$$\Rightarrow \left|\dot{\vec{r_1}}\right|^2 = \dot{\vec{r_1}} \cdot \dot{\vec{r_1}} = \dot{\rho}_1^2 \cos^2\theta + \rho_1^2 \sin^2\theta \, \dot{\theta}^2 - \cancel{2\dot{\rho}_1 \rho_1 \dot{\theta} \cos\theta \sin\theta} +$$

$$\dot{\rho}_1^2 \sin^2\theta + \rho_1^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta + \cancel{2\dot{\rho}_1 \rho_1 \dot{\theta} \cos\theta \sin\theta} + \dot{z}_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left|\dot{\vec{r_1}}\right|^2 = \dot{\rho}_1^2 + \rho_1^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}_1^2}$$

Αντίστοιχα για την μάζα m_2 θα έχουμε: $\vec{r_2} = \rho_2 \cos\phi \, \hat{i} + \rho_2 \sin\phi \, \hat{j} + z_2 \hat{k}$ και

$$\dot{\vec{r_2}} = \left(\dot{\rho}_2 \cos\phi - \rho_2 \dot{\phi} \sin\phi\right)\hat{i} + \left(\dot{\rho}_2 \sin\phi + \rho_2 \dot{\phi} \cos\phi\right)\hat{j} + \dot{z}_2 k \quad \text{οπότε:}$$

$$\boxed{\left|\dot{\vec{r_2}}\right|^2 = \dot{\rho}_2^2 + \rho_2^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}_2^2}$$

Με την χρήση των κυλινδρικών συντεταγμένων οι εξισώσεις των δεσμών (3) & (4) γίνονται:

$$f_3 = \rho_1^2 - a^2 = 0 \quad (3a) \Rightarrow \boxed{\rho_1 - a \Rightarrow \dot{\rho}_1 = \ddot{\rho}_2 = 0}$$

$$f_4 = \rho_2^2 - b^2 = 0 \quad (4a) \Rightarrow \boxed{\rho_2 = b \Rightarrow \dot{\rho}_2 = \ddot{\rho}_2 = 0}$$

Χρησιμοποιούμε τις Euler-Lagrange εξισώσεις τροποποιημένες για τους πολλαπλασιαστές Lagrange των 4 εξισώσεων των δεσμών με λ_1, λ_2, λ_3 και λ_4.

$$r_1^2 = a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta \Rightarrow r_1^2 = a^2$$

$$r_2^2 = b^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi + c^2 \Rightarrow r_2^2 = b^2 + c^2$$

$$\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2 = ab\left(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi\right) \Rightarrow \vec{r}_1\cdot\vec{r}_2 = ab\cos(\theta-\phi)$$

Επομένως η ελαστική δυναμική ενέργεια του συστήματος θα είναι:

$$\boxed{V = \frac{1}{2}k\left(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos(\theta-\phi)\right)} \quad (B)$$

Από (A) και (B) η Lagrangian του συστήματος θα είναι:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1 a^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2 b^2\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}k\left(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos(\theta-\phi)\right)$$

Η εξίσωση Euler-Lagrange ως προς θ θα είναι:

$$\theta: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial\theta} \Rightarrow m_1 a^{\cancel{2}}\ddot{\theta} = -\cancel{a}bk\sin(\theta-\phi) \Rightarrow \boxed{m_1 a\ddot{\theta} = -bk\sin(\theta-\phi)}$$

Αντίστοιχα η εξίσωση ως προς ϕ θα είναι:

$$\phi: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right) = \frac{\partial L}{\partial\phi} \Rightarrow m_2 b^{\cancel{2}}\ddot{\phi} = +a\cancel{b}k\sin(\theta-\phi) \Rightarrow \boxed{m_2 b\ddot{\phi} = ak\sin(\theta-\phi)}$$

(B) Χρησιμοποίηση των πολλαπλασιαστών Lagrange

Η μάζα m_1 είναι περιορισμένη να κινείται στο επίπεδο $z_1 = 0$ και στο κύκλο: $x_1^2 + y_1^2 = a^2$

Η μάζα m_2 είναι περιορισμένη να κινείται στο επίπεδο $z_2 = c$ και στο κύκλο: $x_2^2 + y_2^2 = b^2$

Επομένως στην Lagrangian που έχουμε, θα πρέπει να προσθέσουμε 4 νέους όρους για τους 4 δεσμούς που υπάρχουν παραπάνω.

Θα έχουμε:

$$f_1 = z_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{z}_1 = \ddot{z}_1 = 0} \quad (1)$$

$$f_2 = z_2 = c \Rightarrow z_2 - c = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{z}_2 = \ddot{z}_2 = 0} \quad (2)$$

$$f_3 = x_1^2 + y_1^2 - a^2 = 0 \qquad (3)$$

$$f_4 = x_2^2 + y_2^2 - b^2 = 0 \qquad (4)$$

Τα διανύσματα θέσης των μαζών m_1 και m_2 είναι: $\vec{r_1} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$

$\vec{r_2} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$

Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες για απλούστευση των σχέσεων αυτών.
οπότε θα έχουμε (ρ_1, θ, z_1) και (ρ_2, ϕ, z_2)

Επομένως η ταχύτητα και το διάνυσμα θέσης θα είναι:

$$\boxed{\vec{r_1} = \rho_1\cos\theta\,\hat{i} + \rho_1\sin\theta\,\hat{j} + z_1\hat{k}} \Rightarrow \dot{\vec{r_1}} = \left(\dot\rho_1\cos\theta - \rho_1\sin\theta\,\dot\theta\right)\hat{i} + \left(\dot\rho_1\sin\theta + \rho_1\dot\theta\cos\theta\right)\hat{j} + \dot z_1 k$$

$$\Rightarrow \left|\dot{\vec{r_1}}\right|^2 = \dot{\vec{r_1}}\cdot\dot{\vec{r_1}} = \dot\rho_1^2\cos^2\theta + \rho_1^2\sin^2\theta\,\dot\theta^2 - \cancel{2\dot\rho_1\rho_1\dot\theta\cos\theta\sin\theta} +$$

$$\dot\rho_1^2\sin^2\theta + \rho_1^2\dot\theta^2\cos^2\theta + \cancel{2\dot\rho_1\rho_1\dot\theta\cos\theta\sin\theta} + \dot z_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left|\dot{\vec{r_1}}\right|^2 = \dot\rho_1^2 + \rho_1^2\dot\theta^2 + \dot z_1^2}$$

Αντίστοιχα για την μάζα m_2 θα έχουμε: $\vec{r_2} = \rho_2\cos\phi\,\hat{i} + \rho_2\sin\phi\,\hat{j} + z_2\hat{k}$ και

$\dot{\vec{r_2}} = \left(\dot\rho_2\cos\phi - \rho_2\dot\phi\sin\phi\right)\hat{i} + \left(\dot\rho_2\sin\phi + \rho_2\dot\phi\cos\phi\right)\hat{j} + \dot z_2 k$ οπότε:

$$\boxed{\left|\dot{\vec{r_2}}\right|^2 = \dot\rho_2^2 + \rho_2^2\dot\phi^2 + \dot z_2^2}$$

Με την χρήση των κυλινδρικών συντεταγμένων οι εξισώσεις των δεσμών (3) κ (4) γίνονται:

$$f_3 = \rho_1^2 - a^2 = 0 \qquad (3a) \Rightarrow \boxed{\rho_1 - a \Rightarrow \dot\rho_1 = \ddot\rho_2 = 0}$$

$$f_4 = \rho_2^2 - b^2 = 0 \qquad (4a) \Rightarrow \boxed{\rho_2 = b \Rightarrow \dot\rho_2 = \ddot\rho_2 = 0}$$

Χρησιμοποιούμε τις Euler-Lagrange εξισώσεις τροποποιημένες για τους πολλαπλασιαστές Lagrange των 4 εξισώσεων των δεσμών με λ_1, λ_2, λ_3 και λ_4.

Θα πάρουμε:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1|\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\vec{r}}_2|^2 - \frac{1}{2}k(\vec{r}_1-\vec{r}_2)^2 - \lambda_1(t)f_1 - \lambda_2(t)f_2 - \lambda_3(t)f_3 - \lambda_4(t)f_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1(\dot{\rho}_1^2 + \rho_1^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{\rho}_2^2 + \rho_2^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}_2^2) - \frac{1}{2}k(|\vec{r}_1|^2 + |\vec{r}_2|^2 - 2\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2) - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2 - \lambda_3(\rho_1 - a) -$$
$$- \lambda_4(\rho_2 - b)$$

Αλλά $|\vec{r}_1|^2 + |\vec{r}_2|^2 - 2\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2 = \rho_1^2 + z_1^2 + \rho_2^2 + z_2^2 - 2\rho_1\rho_2[\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi] - 2z_1z_2 \Rightarrow$

$(\vec{r}_1-\vec{r}_2)^2 = |\vec{r}_1|^2 + |\vec{r}_2|^2 - 2\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + z_1^2 + z_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\theta-\phi) - 2z_1z_2$

Αντικατάσταση στην εξίσωση της συνάρτησης Lagrange δίνει:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1(\dot{\rho}_1^2 + \rho_1^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{\rho}_2^2 + \rho_2^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}_2^2) + kz_1z_2 - \frac{k}{2}(\rho_1^2 + \rho_2^2 + z_1^2 + z_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\theta-\phi)) -$$
$$- \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2 - \lambda_3(\rho_1 - a) - \lambda_4(\rho_2 - b).$$

Οι τροποποιημένες εξισώσεις Euler-Lagrange θα είναι:

ρ_1: $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\rho}_1} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho_1} \Rightarrow m_1\ddot{\rho}_1 = m_1\rho_1\dot{\theta}^2 - k\rho_1 + k\rho_2\cos(\theta-\phi) - \lambda_3$

ρ_2: $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\rho}_2} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho_2} \Rightarrow m_2\ddot{\rho}_2 = m_2\rho_2\dot{\phi}^2 - k\rho_2 + k\rho_1\cos(\theta-\phi) - \lambda_4$

θ: $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} \Rightarrow m_1\rho_1^{\cancel{2}}\ddot{\theta} = -k\cancel{\rho_1}\rho_2\sin(\theta-\phi) \Rightarrow \boxed{m_1\rho_1\ddot{\theta} = -k\rho_2\sin(\theta-\phi)}$

ϕ: $\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \Rightarrow m_2\rho_2^{\cancel{2}}\ddot{\phi} = +k\rho_1\cancel{\rho_2}\sin(\theta-\phi) \Rightarrow \boxed{m_2\rho_2\ddot{\phi} = k\rho_1\sin(\theta-\phi)}$

z_1: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}_1}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z_1} \Rightarrow m_1\ddot{z}_1 = kz_2 - kz_1 - \lambda_1 \overset{(1)}{\Rightarrow} -k\overbrace{(z_2-z_1)}^{c} + \lambda_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = +kc}$

z_2: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}_2}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z_2} \Rightarrow m_2\ddot{z}_2 = kz_1 - kz_2 - \lambda_2 \overset{(2)}{\Rightarrow} +k\overbrace{(z_2-z_1)}^{c} + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = -kc}$

Οι εξισώσεις $\lambda_1 = kc$ και $\lambda_2 = -kc$ αντιπροσωπεύουν τις δυνάμεις στην z-διεύθυνση που απαιτούνται ώστε να εξουδετερώνεται η δύναμη του ελατηρίου ώστε $\ddot{z}_1 = \ddot{z}_2 = 0$. Οι δυνάμεις αυτές είναι $\lambda_1 \cancel{\frac{\partial f_1}{\partial z_1}}^{\,1}$ και $\lambda_2 \cancel{\frac{\partial f_2}{\partial z_2}}^{\,1} \Rightarrow$
$Q_{z_1} = kc$ και $Q_{z_2} = -kc$

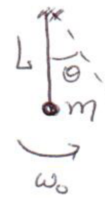
Από τις εξισώσεις Euler-Lagrange ως προς ρ_1 και ρ_2 και χρησιμοποιώντας τους δεσμούς (3α) & (4α) θα πάρουμε:

$$0 = m_1 a \dot{\theta}^2 - ka + kb\cos(\theta-\phi) - \lambda_3 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = m_1 a \dot{\theta}^2 - ka + kb\cos(\theta-\phi)}$$
$$0 = m_2 b \dot{\phi}^2 - kb + ka\cos(\theta-\phi) - \lambda_4 \Rightarrow \boxed{\lambda_4 = m_2 b \dot{\phi}^2 - kb + ka\cos(\theta-\phi)}$$

Από την στιγμή που έχουμε εξισώσεις για $\ddot{\theta}$ και $\ddot{\phi}$ που περιγράφουν την δυναμική του συστήματος, οι παραπάνω δύο εξισώσεις δεν προσθέτουν οτιδήποτε στην δυναμική παρά μόνο χρησιμοποιούνται για τον ορισμό των δυνάμεων των δεσμών.
Οι δυνάμεις: $\lambda_3 \cancel{\frac{\partial f_3}{\partial \rho_1}} = \lambda_3$ και $\lambda_4 \cancel{\frac{\partial f_4}{\partial \rho_2}} = \lambda_4$ είναι οι απαραίτητες δυνάμεις που χρειάζονται για να σταματήσουν οποιαδήποτε ακτινική κίνηση των μαζών.
Όπως και στην περίπτωση της λύσης χωρίς πολλαπλασιαστές Lagrange, η δυναμική του συστήματος περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$m_1 a \ddot{\theta} = -kb\sin(\theta-\phi)$$
$$m_2 b \ddot{\phi} = ka\sin(\theta-\phi)$$

5. Ένα σωματίδια μάζας m, κρέμεται από ένα αβαρές νήμα μήκους L. Αρχικά το σώμα κρέμεται ακίνητο σε ένα βαρυτητικό πεδίο έντασης g. Το σώμα ξαφνικά δέχεται την επίδραση μιας δύναμης η οποία ασκείται πολύ μικρό χρονικό διάστημα με αποτέλεσμα να αποκτήσει μια γωνιακή ταχύτητα ω. Αν η γωνιακή ταχύτητα ω, είναι μικρή, το σωματίδιο θα αρχίσει να ταλαντώνεται ως προς την αρχική θέση ισορροπίας. Αν η γωνιακή ταχύτητα ω, έχει μεγάλη τιμή το σώμα θα αρχίσει να περιστρέφεται ως προς το σημείο στήριξης. Ποια είναι η κριτική τιμή της γωνιακής ταχύτητας ω_c για την οποία το νήμα χαλαρώνει σε κάποιο σημείο της κίνησης του σώματος;



Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες με πολλαπλασιαστές Lagrange για να περιγράψουμε την δυναμική του προβλήματος.

Ο δεσμός που υπάρχει είναι $r = L$ ενώ για $t=0$ $\theta=0$

Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι (πολικές συντεταγμένες) $T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$

και η δυναμική ενέργεια $V=-mgr\cos\theta$ με μηδενική δυναμική ενέργεια στο επίπεδο που περνά από το σημείο στήριξης.

Από την εξίσωση του δεσμού έχουμε $f=r-L=0$.

Επομένως η Lagrangian με την χρήση του πολλαπλασιαστή λ είναι:

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+mgr\cos\theta-\lambda f=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+mgr\cos\theta-\lambda(r-L)$$

Οι εξισώσεις κίνησης γίνονται επομένως:

$$r: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)=\frac{\partial L}{\partial r}+\lambda\frac{\partial f}{\partial r} \Rightarrow m\ddot{r}=+mr\dot{\theta}^2+mg\cos\theta+\lambda \quad (1)$$

$$\theta: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=\frac{\partial L}{\partial \theta}+\lambda\frac{\partial f}{\partial \theta} \Rightarrow \cancel{m}r^{\cancel{2}}\ddot{\theta}=-\cancel{m}g\cancel{r}\sin\theta \Rightarrow r\ddot{\theta}=-g\sin\theta \quad (2)$$

Από την εξίσωση του δεσμού έχουμε $r=L \Rightarrow \dot{r}=\ddot{r}=0$

Η εξίσωση (1) δίνει: $\boxed{\lambda = -mL\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta}$ (3)

Η δύναμη αυτή αποτελεί αυτή που είναι στην αναγκαία δέσμευση και προκαλεί το δεσμό $r=L$

Η Lagrangian δεν εξαρτάται από τον χρόνο και επομένως $E=$σταθ.

Η ενέργεια του συστήματος είναι $E=\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL\cos\theta$

Αρχικά η ενέργεια του συστήματος είναι σύμφωνα με την εκφώνηση:

$$E_0 = \frac{1}{2}mL^2\omega^2 - mgL\cancel{\cos\theta}^{1} \Rightarrow E_0 = \frac{1}{2}mL^2\omega^2 - mgL$$

Στο κρίσιμο σημείο που το νήμα χαλαρώνει, $\lambda=0$ οπότε σύμφωνα με την (3) θα έχουμε: $-mL\dot{\theta}_c^2 - mg\cos\theta_c = 0 \Rightarrow mL\dot{\theta}_c^2 = -mg\cos\theta_c$

Η ενέργεια στο σημείο αυτό θα είναι: $E_c = -\frac{L}{2}mg\cos\theta_c - Lmg\cos\theta_c \Rightarrow$

$\Rightarrow E_c = -\frac{3L}{2}mg\cos\theta_c$.

Λόγω διατήρησης της ενέργειας όμως: $-\frac{3\cancel{L}}{2}\cancel{m}g\cos\theta_c = \frac{1}{2}\cancel{m}L^{\cancel{2}}\omega^2 - \cancel{m}g\cancel{L} \Rightarrow$

$\Rightarrow -3g\cos\theta_c = L\omega^2 - 2g \Rightarrow L\omega^2 = 2g - 3g\cos\theta_c$

Αν $\theta_c = \pi/2$ τότε η μικρότερη τιμή του ω για να χαλαρώσει το νήμα στη θέση αυτή είναι: $L\omega^2 = 2g - \cancel{3g\cos\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{2g/L}}$

6. Έστω το οριζόντιο επίπεδο *x-y*. Μια χάντρα μάζας *m*, γλυστρά με ταχύτητα *υ*, κατά μήκος μιας καμπύλης που περιγράφεται από την συνάρτηση $y = f(x)$. Αγνοώντας την βαρυτητική δύναμη, ποια δύναμη εξασκεί η καμπύλη στην χάντρα;

Η Lagrangia του προβλήματος είναι: $L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - V(r)$

όπου r είναι η απόσταση του σώματος από την καμπύλη.

Οι εξισώσεις κίνησης θα είναι:

$$x: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{\partial V(r(x,y))}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$y: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} \Rightarrow m\ddot{y} = -\frac{\partial V(r(x,y))}{\partial y} \Rightarrow m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}$$

Ξέρουμε ότι $F = -\frac{\partial V}{\partial r}$ και επομένως: $m\ddot{x} = F(r)\frac{\partial r}{\partial x} \quad (1)$

$$m\ddot{y} = F(r)\frac{\partial r}{\partial y} \quad (2)$$

Η καμπύλη σύμφωνα με την άσκηση περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y = f(x) \Rightarrow \dot{y} = \frac{df(x)}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \ddot{y} = \frac{df}{dx}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2f}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = \frac{df}{dx}\ddot{x} + \frac{d^2f}{dx^2}\dot{x}^2 \quad (3)$$

Αντικαθιστούμε την (1),(2) στην (3) οπότε έχουμε: $\frac{F(r)}{m}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{df}{dx}\frac{F(r)}{m}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{d^2f}{dx^2}\dot{x}^2$

$$\Rightarrow \frac{F}{m}\left[\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{df}{dx}\frac{\partial r}{\partial x}\right] = \frac{d^2f}{dx^2}\dot{x}^2 \Rightarrow \boxed{F = \frac{m\frac{d^2f}{dx^2}\dot{x}^2}{\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{df}{dx}\frac{\partial r}{\partial x}}}$$

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους του r ως προς x και y.
Έστω Θ η γωνία που σχηματίζει η καμπύλη με τον x-άξονα σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Η εφαπτόμενη επομένως της καμπύλης σε οποιοδήποτε σημείο στο x-άξονα είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x) = \tan\Theta$$

⇒ χρησιμοποιούμε την ίδια γεωμετρική προσέγγιση για την χάντρα που βρίσκεται σε απόσταση r από την καμπύλη:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\sin\Theta \quad \text{και} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \cos\Theta$$

Εφόσον $\frac{\sin\Theta}{\cos\Theta} = f'(x) \Rightarrow \sin\Theta = f'(x)\cos\Theta$

$\cos\Theta = \sin\Theta / f'(x)$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = -f'(x)\cos\Theta = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1+\tan^2\Theta}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\Theta}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}}}$$

Ανακαθιστούμε τις παραπάνω 2 εξισώσεις για $\frac{\partial r}{\partial x}$ και $\frac{\partial r}{\partial y}$ στην εξίσωση της δύναμης, οπότε έχουμε:

$$F = \frac{m \frac{d^2 f}{dx^2} \dot{x}^2}{\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} + \frac{f'^2}{\sqrt{1+f'^2}}} = \frac{m f'' \dot{x}^2}{\sqrt{1+f'^2}}$$

Από την στιγμή που $\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$

$$\dot{x} = v\cos\Theta = v\frac{\partial r}{\partial y} = v\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{F = \frac{m f'' v^2}{(1+f'^2)^{3/2}}}$$