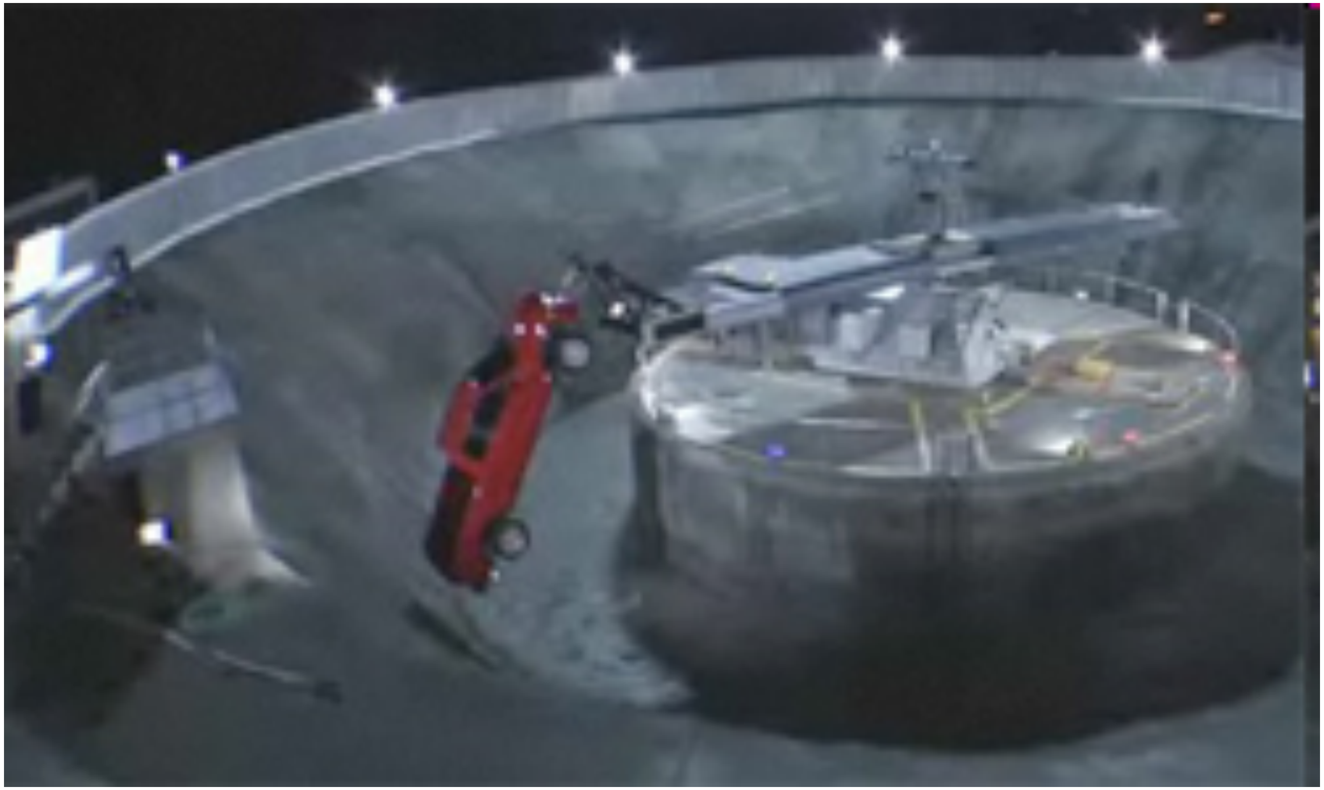
Κινηματική και δυναμική κυκλικής κίνησης



Παράδειγμα – roller coaster

Ποια πρέπει να είναι η ελάχιστη ταχύτητα που θα πρέπει να έχει το τρενάκι ώστε να μη χάσει επαφή με τη τροχιά στο υψηλότερο σημείο της κίνησης;

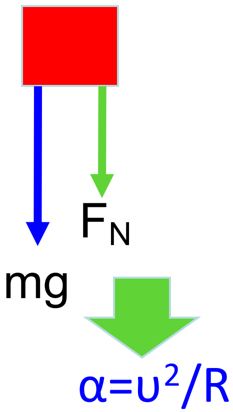
y-διεύθυνση:

$$\sum F = ma = -m\frac{\upsilon^2}{R}$$

$$\Rightarrow -F_N - mg = -m\frac{\upsilon^2}{R}$$

Όταν είναι να χάσει επαφή $F_N = 0$:

$$\Rightarrow -mg = -m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow g = \frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{gR}$$

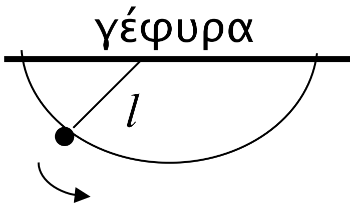



(a)

Παράδειγμα – Μετακίνηση αλά Tarzan

Κάποιοι ριψοκίνδυνοι είχαν μια καταπληκτική ιδέα:

Να δέσουν το ένα άκρο ενός σχοινιού σε μια γέφυρα, και κρατώντας το άλλο άκρο να προσπαθήσουν να περάσουν απέναντι



Το σχοινί ήταν περίπου 50m και υπήρχαν περίπου 5-6 άτομα που ήθελαν να περάσουν όλοι μαζί (~500Kgr).

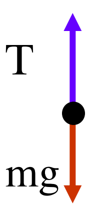
Πήραν ένα σχοινί το οποίο άντεχε 2 φορές το βάρος τους.

Τι έγινε?

Η διατήρηση της ενέργειας λέει ότι: ταχύτητα στο χαμηλότερο σημείο είναι $v = \sqrt{2gl}$ (περισσότερα την άλλη βδομάδα)

Άρα η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι

$a = \frac{v^2}{r} = \frac{2gl}{l} = 2g \Rightarrow \sum F = ma = 2mg$ και στο χαμηλότερο σημείο έχουμε τις δυνάμεις:



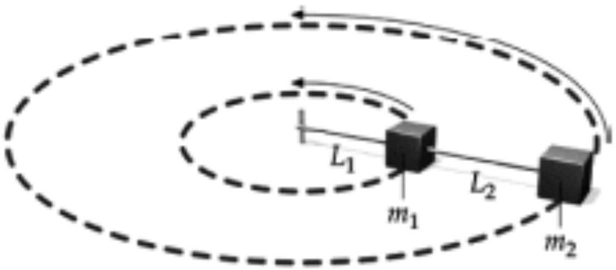
$$\sum F = ma = T - mg = 2mg \Rightarrow T = 3mg!!!$$

Στο χαμηλότερο σημείο, η τάση είναι 3 φορές μεγαλύτερη του βάρους!!

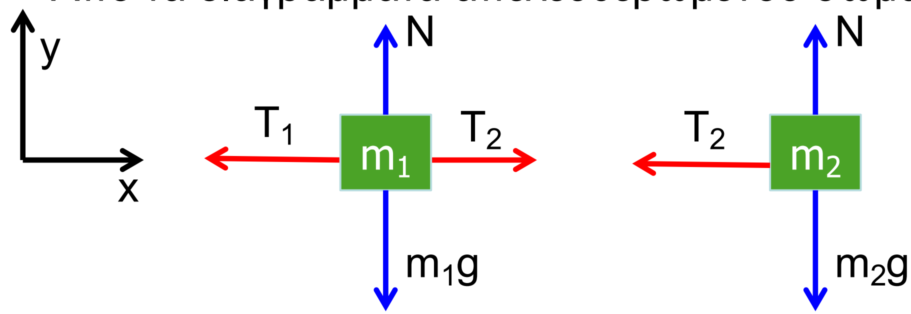
Αποτέλεσμα; Το σχοινί έσπασε.

Κυκλική κίνηση

Δυο κιβώτια περιστρέφονται σε κυκλική τροχιά πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια όπως στο σχήμα. Το 1ο κιβώτιο έχει μάζα m_1 και το 2ο έχει μάζα m_2. Τα νήματα που τα συνδέουν έχουν μήκος L_1 και L_2. Αν η περίοδος περιστροφής είναι T ποια η τάση στα δυο νήματα.



Από τα διαγράμματα απελευθερωμένου σώματος έχουμε:



Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Newton. Η συνισταμένη δύναμη αποτελεί την κεντρομόλο

$$m_1: \quad \sum F_x = T_2 - T_1 = -m_1 a_1 \Rightarrow T_1 - T_2 = m_1 \frac{\upsilon_1^2}{L_1}$$

$$m_2: \quad \sum F_x = -T_2 = -m_2 a_2 \quad \Rightarrow T_2 = m_2 \frac{\upsilon_2^2}{L_1 + L_2}$$

Αλλά $\upsilon = \omega R = \frac{2\pi}{T} R$

$$T_1 - T_2 = m_1 \omega^2 L_1 = m_1 \frac{4\pi^2}{T^2} L_1$$

$$T_2 = m_2 \omega^2 \left(L_1 + L_2\right) = m_2 \frac{4\pi^2}{T^2}\left(L_1 + L_2\right)$$

Αντικατάσταση της T_2 στην 1η εξίσωση

$$T_1 = m_1 \frac{4\pi^2}{T^2} L_1 + m_2 \frac{4\pi^2}{T^2}\left(L_1 + L_2\right)$$

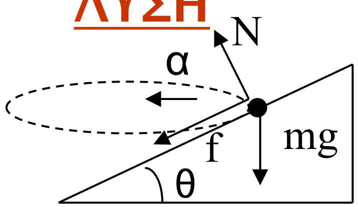
$$\Rightarrow T_1 = \left[\left(m_1 + m_2\right) L_1 + m_2 L_2\right] \frac{4\pi^2}{T^2}$$

Αυτοκίνητο σε δρόμο με κλίση προς ορίζοντα

Αυτοκίνητο παίρνει στροφή σε δρόμο που σχηματίζει γωνία με τον ορίζοντα.
Η στροφή αντιστοιχεί σε κυκλική τροχιά ακτίνας R. και ο συντελεστής τριβής είναι μ

Ποια η μέγιστη ταχύτητα του αυτοκινήτου για την οποία το αυτοκίνητο παραμένει στο δρόμο χωρίς να γλυστρήσει;

ΛΥΣΗ



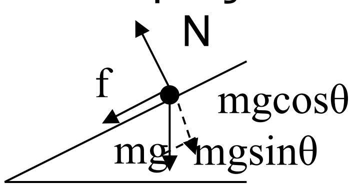
Οι δυνάμεις που ενεργούν είναι mg, f και N

Βρίσκουμε πρώτα την f με την προϋπόθεση f ≤ μN

Ποιους άξονες θα πρέπει να διαλέξουμε?

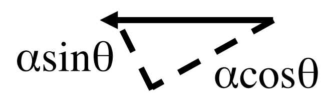
Τους αρχικούς x και y? Αυτούς που είναι κάθετος και παράλληλος προς το επίπεδο? Και τα 2 συστήματα είναι κατάλληλα.

Δυνάμεις



Διαλέγω το δεύτερο σύστημα για το πρόβλημα.

Η επιτάχυνση είναι: $a = a_\kappa = \dfrac{\upsilon^2}{R}$



$$// \; F = ma: \quad f + mg\sin\theta = ma\cos\theta = \frac{m\upsilon^2}{R}\cos\theta \;\Rightarrow\; f = \frac{m\upsilon^2}{R}\cos\theta - mg\sin\theta$$

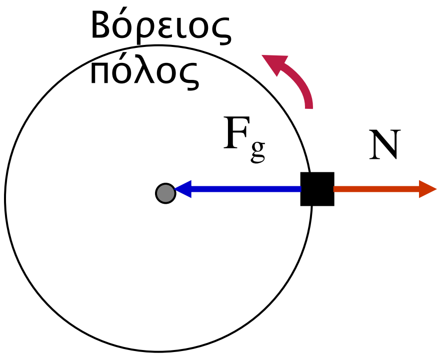
$$\perp \; F = ma: \quad N - mg\cos\theta = ma\sin\theta = \frac{m\upsilon^2}{R}\sin\theta \;\Rightarrow\; N = \frac{m\upsilon^2}{R}\sin\theta + mg\cos\theta$$

Η συνθήκη $f \leq \mu N$ γίνεται: $\dfrac{\upsilon^2}{R}\cos\theta - g\sin\theta \leq \mu\left(\dfrac{\upsilon^2}{R}\sin\theta + g\cos\theta\right) \Rightarrow \upsilon^2 \leq \dfrac{gR\left(\sin\theta + \mu\cos\theta\right)}{\left(\cos\theta - \mu\sin\theta\right)}$

Δεν υπάρχει άνω όριο στην ταχύτητα αν cosθ<μsinθ

Παράδειγμα

Πόσο λιγότερο ζυγίζει ένα άτομο 70kg στον ισημερινό εξαιτίας της περιστροφής της γης;



Η ένδειξη της ζυγαριάς είναι η δύναμη που ασκεί η ζυγαριά ⇒ η κάθετη δύναμη Ν

Στο σώμα ασκείται η βαρυτική έλξη ⇒ βάρος, F_g

Το σώμα περιστρέφεται μαζί με τη γη ⇒ Κεντρομόλος δύναμη

Η κεντρομόλος είναι η συνισταμένη των άλλων δυνάμεων

$$F = ma \Rightarrow F_g - N = \frac{m\upsilon^2}{r} \Rightarrow N = F_g - \frac{m\upsilon^2}{r} \Rightarrow N = F_g - m\omega^2 r$$

Αλλά $\omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{86400s}\right)^2 \left(6.37\times10^6 m\right) = 0.033 m/s^2 \Rightarrow N = F_g - \left(70kg\right)\left(0.033 m/s^2\right)$

Το μετρούμενο g στον ισημερινό είναι $g_{ισ}$=9.78m/s² $\Rightarrow N = mg_{ισ}$

Περιέχει περιστροφή

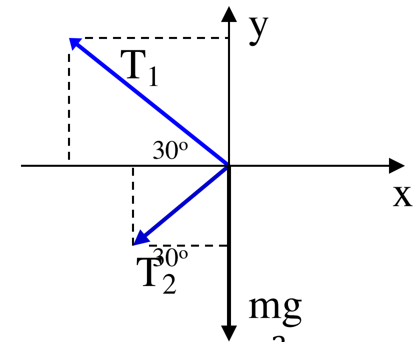
$$F_g = N + \frac{m\upsilon^2}{r} \Rightarrow F_g = m\left(g_{ισ.} + \frac{\upsilon^2}{r}\right) = m\left(9.78\frac{m}{s^2} + 0.03\frac{m}{s^2}\right) \Rightarrow F_g = m\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)$$

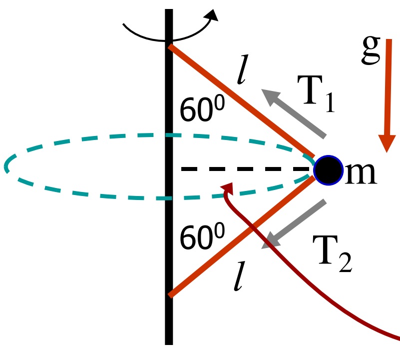
Τιμή του g αν η γη δεν γύριζε και είχε το ίδιο σχήμα

Παράδειγμα

Δύο ράβδοι συνδέουν την μάζα m σε ένα στύλο. Η μάζα m περιστρέφεται κυκλικά σε ένα οριζόντιο κύκλο με σταθερή ταχύτητα v.

Ποιες είναι οι τάσεις T_1 και T_2?





Αναλύουμε τις δυνάμεις σε άξονες

$$F_x: \quad \sum F_x = (T_1 + T_2)\cos 30^0 = ma$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l\cos 30^0}$$

$$\Rightarrow \cos^2(30^0)(T_1 + T_2) = \frac{mv^2}{l}$$

$$F_y: \quad T_1 \sin 30^0 = T_2 \sin 30^0 + mg \Rightarrow T_1 = T_2 + 2mg$$

$$\frac{3}{4}(2T_2 + 2mg) = \frac{mv^2}{l} \quad \boxed{\Rightarrow T_2 = \frac{2}{3}\frac{mv^2}{l} - mg} \quad \boxed{T_1 = \frac{2}{3}\frac{mv^2}{l} + mg}$$

Παρατηρήσεις

- Η $T_1 > 0$ πάντα ➔ Η πάνω ράβδος είναι πάντα τεντωμένη
- Η T_2 $\begin{cases} > 0 & \text{τεντωμένη μόνο όταν } v > \sqrt{\frac{3}{2}gl} \\ = 0 & \text{δεν παίζει ρόλο, δηλαδή δεν χρειάζεται όταν } v = \sqrt{\frac{3}{2}gl} \\ < 0 & \text{συμπεσμένη, η ταχύτητα μικρή και η μάζα στηρίζεται στη ράβδο} \end{cases}$