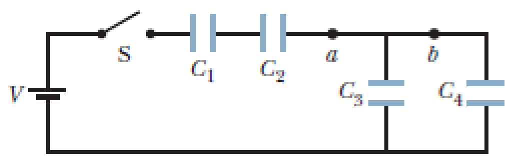
Φροντιστήριο 2 ΦΥΣ112

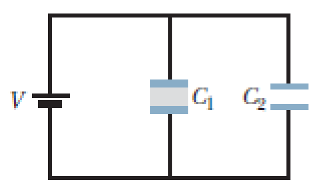
4/10/2023

25.19) Στο κάτωθι σχήμα η μπαταρία έχει διαφορά δυναμικού $V = 9.0\,V$, δύο εκ των πυκνωτών έχουν χωρητικότητα $C_2 = 3.0\,\mu F$ και $C_4 = 4.0\,\mu F$, και όλοι οι πυκνωτές είναι αρχικά αφόρτιστοι. Όταν ο διακόπτης S κλείσει, συνολικό φορτίο $12\,\mu C$ περνά από το σημείο a και συνολικό φορτίο $8.0\,\mu C$ περνά από το b. Πόση είναι η χωρητικότητα (a) C_1 και (b) C_3;



25.35) Υποθέστε ένα στάσιμο ηλεκτρόνιο αποτελεί ένα σημειακό φορτίο. Ποια είναι η πυκνότητα ενέργειας u του ηλεκτρικού του πεδίου στις ακτινικές αποστάσεις (a) $r = 1.00\,mm$, (b) $r = 1.00\,\mu m$, (c) $r = 1.00\,nm$ και (d) $r = 1.00\,pm$; (e) Πόσο είναι το u στο όριο $r \to 0$;

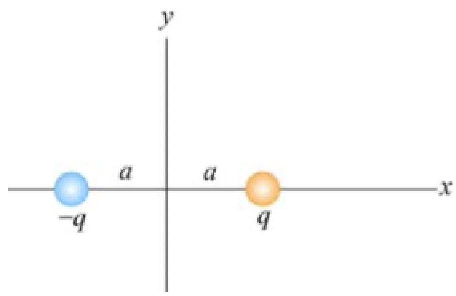
25.46) Στο σχήμα που ακολουθεί, πόσο συνολικό φορτίο φυλάσσεται στους πυκνωτές με παράλληλες πλάκες που είναι συνδεδεμένοι με μπαταρία $12.0\,V$; Ο ένας περιέχει μόνο αέρα, ενώ ο άλλος διηλεκτρικό με $\kappa = 3.00$. Και οι δύο πυκνωτές έχουν επιφάνεια πλάκας $5.00 \times 10^{-3}\,m^2$ και διαχωριστική απόσταση $2.00\,mm$.



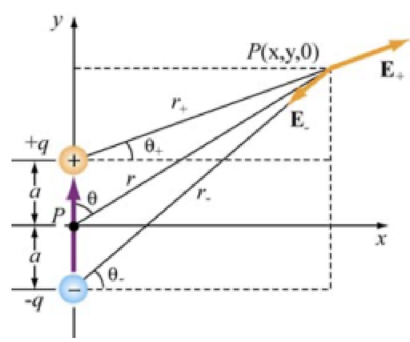
Άσκηση 4) (α) Συγκρίνετε την χωρητικότητα ενός πυκνωτή αποτελούμενος από 2 ομόκεντρες σφαίρες ακτίνας $R_1 = 6cm$ και $R_2 = 9cm$ με αυτή ενός κυλινδρικού πυκνωτή που αποτελείται από δύο ομοαξονικούς κυλίνδρους ίδιας ακτίνας όπως και ο σφαιρικός πυκνωτής και έχουν μήκος $15cm$. Γιατί οι χωρητικότητες είναι σχεδόν παρόμοιες·

(β) Δείξτε ότι όταν R_1 και R_2 είναι σχεδόν ίσες ($R_2 = R_1 + \delta$, $\delta \ll R_1$) οι εξισώσεις που δίνουν τη χωρητικότητα για έναν σφαιρικό και έναν κυλινδρικό πυκνωτή μπορούν να προσεγγιστούν με την εξίσωση που δίνει την χωρητικότητα ενός επίπεδου πυκνωτή $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$. *Υπόδειξη*: Μπορείτε να κάνετε το ανάπτυγμα Taylor για την ποσότητα $\frac{\delta}{R_1}$.

Άσκηση 5) Να βρεθεί το ηλεκτρικό δυναμικό $V(x)$ σε ένα τυχαίο σημείο στο άξονα στον οποίο βρίσκονται δύο ίσα και αντίθετα σημειακά φορτία που έχουν απόσταση 2 μεταξύ τους όπως φαίνεται στο σχήμα. Να σχεδιάσετε επίσης τη συνάρτηση $\frac{V(x)}{V_0}$ όπου $V_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$.

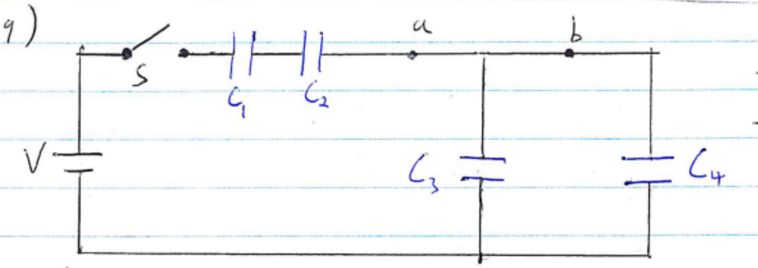


Άσκηση 6) Θεωρήστε το ηλεκτρικό δίπολο του διπλανού σχήματος το οποίο είναι προσανατολισμένο κατά μήκος του y-άξονα. Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό V σε ένα σημείο P το οποίο βρίσκεται στο επίπεδο $x - y$ και χρησιμοποιήστε το δυναμικό V για να υπολογίσετε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ στο σημείο αυτό. *Υπόδειξη*: Θα πρέπει να θεωρήσετε το όριο $r >> a$ για να καταλήξετε σε μια σχέση και κατόπιν να γράψετε τον τελεστή $\vec{\nabla}$ σε σφαιρικές συντεταγμένες.



Question (25.19)

Problem 25.19)



→ $V = 4{,}0\ V$

→ $C_2 = 3{,}0\ \mu F$

→ $C_4 = 4{,}0\ \mu F$

→ Όταν κλείνει ο διακόπτης: $Q_a = 12\ \mu C$, $Q_b = 8{,}0\ \mu C$

(3)

→ $V_2 = \dfrac{Q_a}{C_2} = 4\ V$

→ $V_4 = \dfrac{Q_b}{C_4} = 2\ V$

→ $V = V_1 + V_2 + V_{34}$

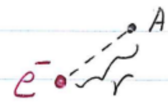
→ $V_{34} = V_3 = V_4$ (παράλληλη σύνδεση) $\Big\} \Rightarrow V_1 = V - V_2 - V_4 = 3\ V$

(a) $\Rightarrow \boxed{C_1 = \dfrac{Q_a}{V_1} = 4\ \mu F}$

(b) $\boxed{C_3 = \dfrac{Q_a - Q_b}{V_3} = 2\ \mu F}$

Question (25.35)

Problem 25.35)



$u(A) = ?$ $\longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \\ E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{u = \frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}}$

(a) $r = 1{,}00$ mm

$\left.\begin{array}{l} \rightarrow e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ C \\ \rightarrow \varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ C^2/N{\cdot}m^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{u(A) = 9{,}16\cdot 10^{-18}\ J/m^3}$

(b) $r = 1{,}00\ \mu m \Rightarrow \boxed{u(A) = 9{,}16\cdot 10^{-6}\ J/m^3}$

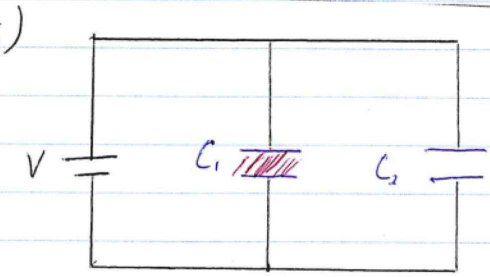
(c) $r = 1{,}00\ nm \Rightarrow \boxed{u(A) = 9{,}16\cdot 10^{6}\ J/m^3}$

(d) $r = 1{,}00\ pm \Rightarrow \boxed{u(A) = 9{,}16\cdot 10^{18}\ J/m^3}$

(e) $r \rightarrow 0 \Rightarrow \boxed{u \rightarrow +\infty}$

Question (25.46)

Problem 25.46)



→ $V = 12{,}0\ V$

→ <u>Διηλεκτρικό στο C_1</u>: $K = 3{,}00$

→ $A_1 = A_2 = 5{,}00 \cdot 10^{-3}\ m^2$

→ $d_1 = d_2 = 2{,}00\ mm$

↳ $V_1 = V_2 = V$ (παράλληλα)

(4)

→ $C_1 = \dfrac{K \varepsilon_0 A_1}{d_1} = 6{,}64 \cdot 10^{-11}\ F \Rightarrow Q_1 = C_1 \cdot V_1 = 8{,}00 \cdot 10^{-10}\ C$

→ $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 A_2}{d_2} = \dfrac{1}{3} C_1 = 2{,}21 \cdot 10^{-11}\ F \Rightarrow Q_2 = C_2 \cdot V_2 = 2{,}66 \cdot 10^{-10}\ C$

$$\Rightarrow \boxed{Q_{o\lambda} = Q_1 + Q_2 = 1{,}06 \cdot 10^{-9}\ C}$$

Question (004)

(a) Υπολογίζουμε την χωρητικότητα του σφαιρικού πυκνωτή όπως έχουμε δει από τις διαλέξεις:

$$C_{σφ} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1R_2}{R_2-R_1} = 4\pi\left(8.85\times10^{-12}\right)\left(\frac{(0.06)(0.09)}{0.09-0.06}\right) = 2.00\times10^{-11}\,F$$

Για τον κυλινδρικό πυκνωτή έχουμε:

$$C_{κυλ} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)} = \frac{2\pi\left(8.85\times10^{-12}\right)}{\ln(0.09/0.06)} = 2.06\times10^{-11}\,F$$

Οι δύο χωρητικότητες είναι σχεδόν ίσες γιατί η απόσταση των οπλισμών είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις, και η επιφάνεια των πυκνωτών είναι σχεδόν ίδια που οδηγεί στην ίδια χωρητικότητα ~~είναι~~ για τις δύο περιπτώσεις όπως αποδεικνύεται στο επόμενο ερώτημα.

(b) Για $R_2 = R_1+\delta$ ($\delta << R_1$) για τον σφαιρικό πυκνωτή θα έχουμε:

$$C_{σφ} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1(R_1+\delta)}{\cancel{R_1}+\delta-\cancel{R_1}} = \varepsilon_0 \frac{4\pi R_1^2}{\delta}\left(1+\delta/R_1\right).$$

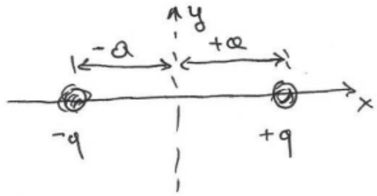
Για $\delta/R_1 << 1$, το παραπάνω θα δώσει $C_{σφ} = \varepsilon_0 A/\delta$ όπου $A = 4\pi R_1^2$ το εμβαδό του φλοιού, που είναι η εξίσωση του πυκνωτή με παράλληλους οπλισμούς.

Για τον κυλινδρικό πυκνωτή θα χρησιμοποιήσουμε Taylor expansion για $x<<1$, $\ln(1+x)\simeq x$

Η χωρητικότητα είναι: $C_{κυλ} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(1+\delta/R_1)} \simeq \varepsilon_0 \frac{2\pi R_1 L}{\delta} \Rightarrow C_{κυλ} = \varepsilon_0 A/\delta$

όπου $A = 2\pi R_1 L$, το εμβαδό των επιφανειών του κυλίνδρου. Βλέπουμε δηλαδή όταν η απόσταση μεταξύ των οπλισμών γίνεται πολύ μικρή, οι πυκνωτές ακόμα και καμπύλης γεωμετρίας μοιάζουν με πυκνωτές με παράλληλους οπλισμούς

Question (005)



Το ηλεκτρικό δυναμικό θα το βρούμε με την εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας.

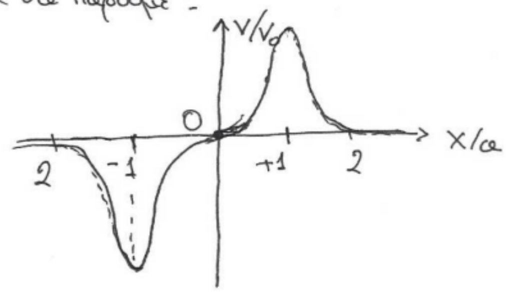
Σε ένα σημείο πάνω στον x-άξονα θα έχουμε:

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|x-a|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{|x+a|} \Rightarrow V(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|x-a|} + \frac{1}{|x+a|}\right]$$

Βγάζουμε την απόσταση a κοινό παράγοντα οπότε θα πάρουμε:

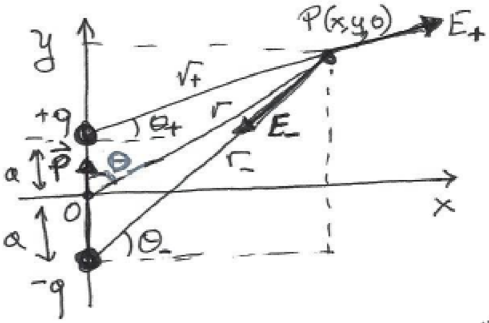
$$V(x) = \underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}}_{V_0}\left[\frac{1}{\left|\frac{x}{a}-1\right|} + \frac{1}{\left|\frac{x}{a}+1\right|}\right] \Rightarrow V(x) = V_0\left[\frac{1}{\left|\frac{x}{a}-1\right|} + \frac{1}{\left|\frac{x}{a}+1\right|}\right]$$

Αν κάνουμε το γράφημα του λόγου $\frac{V(x)}{V_0}$ συναρτήσει του $\frac{x}{a}$ θα πάρουμε:



Το δυναμικό απειρίζεται για $\frac{x}{a}=\pm 1$ όπου βρίσκονται τα δύο φορτία.

Question (006)



Χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας θα έχουμε:

$$V=\sum_{i=1}^{2} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_+}-\frac{q}{r_-}\right) \text{ όπου}$$

$$r_\pm^2 = r^2 + a^2 \mp 2ra\cos\theta$$

Αν πάρουμε το όριο όπου $r \gg a$, τότε (από το διωνυμικό ανάπτυγμα)

$$\frac{1}{r_\pm} = \frac{1}{r}\left[1+(a/r)^2 \mp 2(a/r)\cos\theta\right]^{-1/2} \simeq \frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{2}(a/r)^2 \pm \left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta+\dots\right]$$

Επομένως το δυναμικό του διπόλου μπορεί να προσεγγιστεί ως:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\cancel{1}-\cancel{\frac{1}{2}(a/r)^2}+(a/r)\cos\theta-\cancel{1}+\cancel{\frac{1}{2}(a/r)^2}+(a/r)\cos\theta+\dots\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V\simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,\frac{2a\cos\theta}{r} \Rightarrow V\simeq \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \boxed{V\simeq \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \quad \vec{p}=2aq\hat{j}$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες ο τελεστής της κλίσης $\vec{\nabla}$ γράφεται ως:

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\phi}$$

Επειδή το δυναμικό είναι συνάρτηση του r και θ, το ηλεκτρικό πεδίο θα έχει συνιστώσες στην διεύθυνση των $\hat{r}$ και $\hat{\theta}$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό: $\vec{E}=-\vec{\nabla}V$ θα πάρουμε: $\boxed{E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}}$ και

$\boxed{E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$ και $\boxed{E_\phi = 0}$