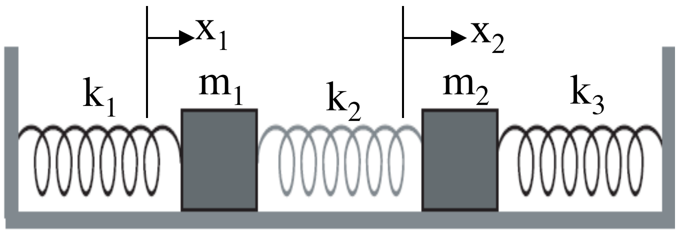
Συζευγμένα ταλαντώσεις – Ένα άλλο σύστημα

- Το παρακάτω σύστημα είναι ανάλογο με το σύστημα των δύο εκκρεμών.
- Οι δυο ιδιοσυχνότητες του συστήματος είναι ίδιες με τις ιδιοσυχνότητες των δυο εκκρεμών αντικαθιστώντας όπου



$$\omega_0^2 \equiv \frac{g}{a} \Rightarrow \omega_0^2 \equiv \frac{k_0}{m}$$ (για $k_1=k_3=k_0$ $m_1=m_2=m$)

Η μελέτη της κίνησης δίνει:

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 + k_2\left(x_2 - x_1\right) \\ m_2\ddot{x}_2 &= k_2\left(x_1 - x_2\right) - k_3x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

Μπορούμε να γράψουμε δηλαδή:
$$\underbrace{\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

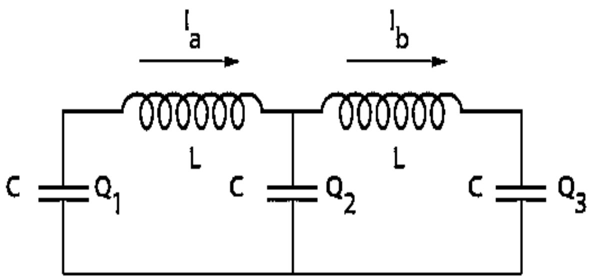
Οι λύσεις είναι της μορφής: $\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \begin{bmatrix} b_1 e^{-i\delta_1 t} \\ b_2 e^{-i\delta_2 t} \end{bmatrix} e^{i\omega t}$ (μιγαδικές)

Αλλά αφού έχουμε φυσικό σύστημα, η πραγματική λύση είναι το $\Re\left[\mathbf{z}(t)\right]$

Επομένως καταλήγουμε: $\boxed{-\omega^2\mathbf{M}\mathbf{a}e^{i\omega t} = -\mathbf{K}\mathbf{a}e^{i\omega t} \Rightarrow \left(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}\right)\mathbf{a} = 0}$

Ένα άλλο σύστημα

- Το παρακάτω σύστημα είναι ανάλογο με το σύστημα των δύο εκκρεμών.



- Έχουμε 3 πυκνωτές αντί για ελατήρια
- Έχουμε 2 πηνία αντί για μάζες
- Η V_L είναι ίση με $V_{C1} - V_{C2}$

Επομένως γράφουμε: $L\dfrac{dI_a}{dt} = \dfrac{Q_1}{C} - \dfrac{Q_2}{C}$ και $L\dfrac{dI_b}{dt} = \dfrac{Q_2}{C} - \dfrac{Q_3}{C}$

Παραγωγίζοντας ως προς t έχουμε: $\ddot{I}_a = -\dfrac{I_a}{LC} + \dfrac{(I_b - I_a)}{LC}$ και $\ddot{I}_b = -\dfrac{I_b}{LC} - \dfrac{(I_b - I_a)}{LC}$

Αν $I_\alpha = I_b$ (συμμετρικός τρόπος), οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν: $\boxed{\omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$

Δηλαδή ο μεσαίος πυκνωτής δεν φορτίζεται ποτέ και μπορεί να αφαιρεθεί

Το ισοδύναμο κύκλωμα έχει 2 πυκνωτές σε σειρά $C_{ο\lambda} = \dfrac{C}{2}$

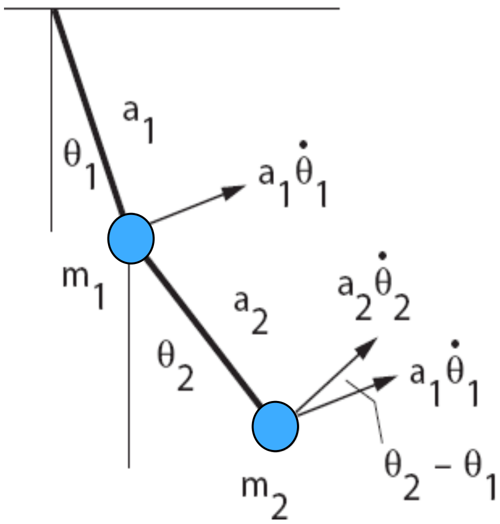
και 2 πηνία σε σειρά: $L_{ο\lambda} = 2L$

$$\left.\begin{array}{l} C_{ο\lambda} = \dfrac{C}{2} \\ L_{ο\lambda} = 2L \end{array}\right\} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Αν $I_\alpha = -I_b$ τότε οι εξισώσεις δίνουν: $\boxed{\omega = \dfrac{3}{\sqrt{LC}}}$

Ίδια περίπτωση με τις 2 μάζες και 3 ελατήρια ίδιας σταθεράς K

Το διπλό εκκρεμές



Δουλεύοντας σε πολικές συντεταγμένες:

Το εκκρεμές 1 έχει ταχύτητα: $a_1\dot{\theta}_1 \perp a_1$

Το εκκρεμές 2 έχει ταχύτητα: $a_2\dot{\theta}_2 \perp a_2 + \ a_1\dot{\theta}_1$

Η γωνία $\Delta\theta$ μεταξύ των 2 ταχυτήτων είναι: $\Delta\theta = \ \theta_2 - \theta_1$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= m_1 g a_1 \cos\theta_1 \\ U_2 &= m_2 g\left[a_2\cos\theta_2 + a_1\cos\theta_1\right] \end{aligned}\right\} \text{ως προς το σημείο στήριξης}$$

Οι κινητικές ενέργειες των 2 εκκρεμών είναι: $T_1 = \frac{1}{2}m_1 a_1^2\dot{\theta}_1^2$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2\left(a_2\dot{\vec{\theta}}_2 + a_1\dot{\vec{\theta}}_1\right)^2 = \frac{1}{2}m_2\left(a_2^2\dot{\theta}_2^2 + a_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2a_1a_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\Delta\theta\right)$$

Επομένως η Lagrangian του συστήματος γίνεται:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_2a_2^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)a_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2a_1a_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\left(\theta_2-\theta_1\right) +$$

$$+\left(m_1+m_2\right)ga_1\cos\theta_1 + m_2ga_2\cos\theta_2$$

Το διπλό εκκρεμές

Θα μπορούσαμε να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης αλλά είναι περίπλοκες.

- Θεωρώντας ότι οι γωνίες απόκλισης θ_1 και θ_2 είναι μικρές, αναπτύσουμε κατά Taylor ως προς $sin\theta_i$ και $cos\theta_i$ κρατώντας τους πρώτους όρους:

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots \approx \theta \qquad \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \cdots \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_2 a_2^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)a_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + $$

$$+(m_1+m_2)ga_1\cos\theta_1 + m_2 g a_2 \cos\theta_2 \Rightarrow$$

1 γιατί $\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$ μικρό

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_2 a_2^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)a_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - (m_1+m_2)ga_1\frac{\theta_1^2}{2} - m_2 g a_2 \frac{\theta_2^2}{2}$$

αγνοώντας $(m_1+m_2)ga_1 + m_2 g a_2$

Εφαρμόζοντας τη εξίσωση Lagrange παίρνουμε τις εξισώσεις κίνησης:

$$(m_1+m_2)a_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 a_1 a_2 \ddot{\theta}_2 = -(m_1+m_2)ga_1\theta_1$$

$$m_2 a_1 a_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 a_2^2 \ddot{\theta}_2 = -m_2 g a_2 \theta_2$$

Η προσέγγιση μικρών γωνιών οδήγησε σε ομογενή εξίσωση 2ου βαθμού και δευτεροβάθμια εξάρτηση από ταχύτητες και συντεταγμένες για T και U

Το διπλό εκκρεμές

Μπορούμε να γράψουμε τις δύο εξισώσεις κίνησης στην μορφή: $\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{K}\boldsymbol{\theta}$

$$\begin{pmatrix} (m_1+m_2)a_1^2 & m_2a_1a_2 \\ m_2a_1a_2 & m_2a_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} (m_1+m_2)ga_1 & 0 \\ 0 & m_2ga_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας **M** δεν έχει μόνο μάζες αλλά έχει και τις ιδιότητες, αφού πολ/ζει τις επιταχύνσεις και επομένως παίζει το ρόλο της μάζας αδράνειας

- Θεωρούμε ίσες μάζες και μήκη εκκρεμών για απλούστευση πράξεων

$$ma^2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = -mga\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Όπως και πριν οποιαδήποτε λύση μπορεί να γραφεί σαν το πραγματικό μέρος μιας μιγαδικής λύσης $z(t)$ με χρονική εξάρτηση $e^{i\omega t}$

- Άρα θα πρέπει να ικανοποιείται η χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\left(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}\right) = \begin{pmatrix} 2\left(\omega_0^2-\omega^2\right) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \left(\omega_0^2-\omega^2\right) \end{pmatrix} = 0 \text{ όπου } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$$

Το διπλό εκκρεμές

- Οι ιδιοσυχνότητες δίνονται από: $Det\left(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}\right)=0 \Rightarrow \omega^4 - 4\omega^2\omega_0^2 + 2\omega_0^4 = 0$
  - με λύσεις: $\omega^2 = \left(2 \pm \sqrt{2}\right)\omega_0^2$
  - Οι φυσικές συχνότητες είναι: $\boxed{\omega_1^2 = \left(2-\sqrt{2}\right)\omega_0^2}$ και $\boxed{\omega_2^2 = \left(2+\sqrt{2}\right)\omega_0^2}$
- Από τις φυσικές συχνότητες βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα και επομένως τους φυσικούς τρόπους ταλάντωσης.
  - Αντικαθιστώντας στη χαρακτηριστική εξίσωση τις ω_1 και ω_2 έχουμε:
- $\omega = \omega_1$: $\left(\mathbf{K}-\omega_1^2\mathbf{M}\right)\mathbf{a} = ma^2\omega_0^2\left(\sqrt{2}-1\right)\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} = 0$
  - Η λύση της παραπάνω δίνει: $a_2 = \sqrt{2}a_1$
  - Τα εκκρεμή ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα και ίδια φάση
- Για τη συχνότητα ω_2 δίνει: $a_2 = -\sqrt{2}a_1$
  - Τα εκκρεμή ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα αλλά αντίθετη φάση
- Γράφοντας: $a_1 = A_2 e^{-i\delta_2 t}$ η κίνηση περιγράφεται από:

$$\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \Re\left(\mathbf{a}e^{i\omega_2 t}\right) = A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \cos\left(\omega_2 t - \delta_2\right)$$

Συζευγμένοι ταλαντωτές - Η γενική περίπτωση

- Τα προηγούμενα παραδείγματα δείχνουν ότι για συστήματα με 2 DoF υπάρχουν 2 χαρακτηριστικές συχνότητες και τρόποι ταλάντωσης
- Θεωρούμε ένα συντηρητικό σύστημα που περιγράφεται:
  - Από μια ομάδα από k-γενικευμένες συντεταγμένες q_k
  - το χρόνο t
  - το σύστημα έχει n-βαθμούς ελευθερίας
- Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια κατάσταση σταθερής ισορροπίας και ότι στην ισορροπία οι συντεταγμένες είναι: q_{k0}.

  Οι εξισώσεις Lagrange ικανοποιούνται από

$$q_k = q_{k0}, \quad \dot{q}_k = 0, \quad \ddot{q}_k = 0, \quad k = 1,\ 2, \cdots, n$$

- Οι μή μηδενικοί όροι της μορφής $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right)$ πρέπει να περιέχουν είτε $\dot{q}_k$ ή $\ddot{q}_k$
  - Όλοι οι όροι αυτής της μορφής θα μηδενίζονται στην ισορροπία
- Στην κατάσταση ισορροπίας, η εξίσωση του Lagrange θα γραφεί:

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\right|_0 = \left.\frac{\partial T}{\partial q_k}\right|_0 - \left.\frac{\partial U}{\partial q_k}\right|_0 = 0$$

Συζευγμένοι ταλαντωτές - Η γενική περίπτωση

- Υποθέτουμε ότι οι εξισώσεις μεταξύ γενικευμένων και ορθογώνιων συντεταγμένων δεν περιέχουν ακριβώς τον χρόνο: $\vec{r}_a = \vec{r}_a(q_1, q_2, \cdots, q_n)$
  - Επομένως (όπως ξέρουμε) η κινητική ενέργεια μπορεί να γραφεί:

$$T = \frac{1}{2}\sum_a m\dot{\vec{r}}_a^2 \Rightarrow T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{j,k} m_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k$$

Όχι απαραίτητα νούμερα
Μπορεί να εξαρτώνται από τις συντεταγμένες:

$$m_{jk} = \sum_a m_a \sum_i \frac{\partial r_{a,i}}{\partial q_j}\frac{\partial r_{a,i}}{\partial q_k}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial q_k}\right|_0 = 0, \quad k = 1,2,\cdots,n$$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\right|_0 = \left.\frac{\partial T}{\partial q_k}\right|_0 - \left.\frac{\partial U}{\partial q_k}\right|_0 = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial U}{\partial q_k}\right|_0 = 0, \quad k = 1,2,\cdots,n$$

- Αν υποθέσουμε ότι η θέση ισορροπίας είναι τέτοια ώστε $q_{k_0} = 0$
  - ενδιαφερόμαστε για μικρές μετατοπίσεις από τη θέση ισορροπίας

Ανάπτυγμα Taylor:

$$U(q_1, q_2, \cdots, q_n) = \underbrace{U_0}_{\text{σταθ.}} + \underbrace{\sum_k \left.\frac{\partial U}{\partial q_k}\right|_0 q_k}_{0} + \frac{1}{2}\sum_{j,k}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}\right|_0 q_j q_k + \cdots$$

$$U(q_1, q_2, \cdots, q_n) = \frac{1}{2}\sum_{j,k}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}\right|_0 q_j q_k \boxed{\Rightarrow U = \frac{1}{2}\sum_{j,k} V_{jk} q_j q_k} \text{ με } V_{jk} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}\right|_0$$

Συζευγμένοι ταλαντωτές - Η γενική περίπτωση

- Ανάλογα με την δυναμική ενέργεια, αναπτύσσουμε κατά Taylor την T
  - Αφού δεν υπάρχει ακριβής χρονική εξάρτηση των q_k και η T περιέχει μόνο όρους $\dot{q}_j\dot{q}_k$ που είναι 2ου βαθμού ως προς q_k

$$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{j,k} M_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k$$

  - Ο όρος M_{jk} αποτελεί τον πρώτο μη μηδενικό όρο του αναπτύγματος των m_{jk} ως προς τη θέση ισορροπίας:

$$m_{jk}(q_1,q_2,\cdots,q_n) = m_{jk}(q_{l0}) + \sum_l \left.\frac{\partial m_{jk}}{\partial q_l}\right|_0 q_l + \cdots$$

  - Αλλά ο σταθερός όρος $m_{jk}(q_{l0})$ δεν μπορεί να είναι μηδέν

- Κρατώντας αυτό τον όρο έχουμε την ίδια τάξη προσέγγισης με το δυναμικό γιατί ο επόμενος όρος του αναπτύγματος της T θα δώσει όρους της μορφής $\dot{q}_j\dot{q}_k q_l$ που είναι ανώτερης τάξης από το ανάπτυγμα της U

Επομένως: $\boxed{M_{jk} = m_{jk}(q_{l0})}$

Συζευγμένοι ταλαντωτές - Η γενική περίπτωση

Επομένως καταλήγουμε ότι για μικρές αποκλίσεις από τη θέση ισορροπίας:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j,k} V_{jk} q_j q_k \qquad V_{jk} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}\right|_0$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \qquad M_{jk} = m_{jk}\left(q_{l0}\right)$$

$n \times n$ πίνακες αριθμητικών τιμών που καθορίζουν τους τρόπους σύζευξης των διαφόρων συντεταγμένων

Αν $M_{jk} \neq 0$ για $j \neq k$ τότε η T περιέχει ένα όρο ανάλογο προς $\dot{q}_j \dot{q}_k$

και υπάρχει σύζευξη μεταξύ των j και k συντεταγμένων.

Αν ο πίνακας είναι διαγώνιος τότε $M_{jk} \neq 0$ για $j = k$ ενώ $M_{jk} = 0$ για $j \neq k$

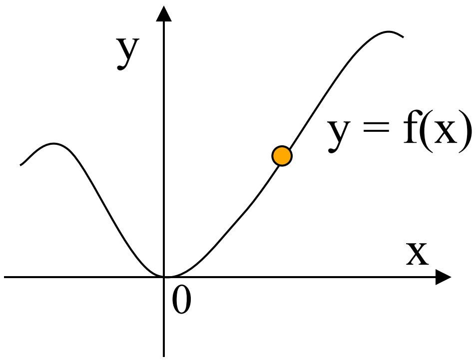
τότε: $T = \frac{1}{2}\sum_{j} M_j \dot{q}_j^2$

Αν και ο πίνακας V_{jk} είναι διαγώνιος τότε U είναι απλό άθροισμα ξεχωριστών δυναμικών ενεργειών και κάθε συντεταγμένη συμπεριφέρεται σαν να κάνει ταλαντώσεις με μια ορισμένη συχνότητα

Άρα αν βρούμε ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων που να διαγωνοποιεί τους πίνακες $\mathbf{M}$ και $\mathbf{V}$ τότε το σύστημα μπορεί να περιγραφεί με τον απλούστερο δυνατό τρόπο ⟹ κανονικές συντεταγμένες

Παράδειγμα προσέγγισης μικρών ταλαντώσεων

Μια χάντρα μάζας m μπορεί να κινείται σε ένα λείο σύρμα που βρίσκεται στο επίπεδο x-y και το οποίο είναι λυγισμένο στο σχήμα μιας συνάρτησης $y = f(x)$ και η οποία παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση (0,0). Να γραφεί η δυναμική και κινητική ενέργεια καθώς και η απλοποιημένη μορφή τους κατάλληλη για μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση (0,0).



1 βαθμός ελευθερίας ➔ γενικευμένη συντεταγμένη x

$$U = mgy = mgf(x)$$

Για μικρές ταλαντώσεις αυτό θα δώσει: $f(0) = 0 = f'(x_0)$

$$U \approx mgf(x_0) + mgf'(x_0) + \frac{1}{2}mgf''(x_0)x^2 \Rightarrow U \approx \frac{1}{2}mgf''(0)x^2$$

Η κινητική ενέργεια θα είναι:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \left(\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}\right)^2\right) \Rightarrow T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + f'(x)^2\right)$$

Από τη στιγμή που T περιέχει τον όρο $\dot{x}^2$ μπορούμε να θέσουμε $f'(x) = 0$

και για μικρές ταλαντώσεις: $T = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + f'(x)^2\right) \approx \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2$

Άρα T και U έγιναν ομογενείς 2ου βαθμού συναρτήσεις του x και $\dot{x}$

Εξίσωση κίνησης συζευγμένων ταλαντωτών – γενική περίπτωση

Επιστρέφοντας στην απλοποιημένη μορφή των T και U, η Lagrangian γίνεται:

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = T(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n) - U(q_1,q_2,\cdots,q_n)$$

και θα έχουμε n-εξισώσεις κίνησης της μορφής:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial (T-U)}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Αντικαθιστώντας τα T και U και παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j M_{ij}\dot{q}_j \qquad \frac{\partial U}{\partial q_i} = \sum_j V_j q_j$$

Η εξίσωση κίνησης γίνεται:

$$\sum_j M_{ji}\ddot{q}_j + \sum_j V_{ji}q_j = 0 \boxed{\Rightarrow \sum_j \left(M_{ji}\ddot{q}_j + V_{ji}q_j\right) = 0}$$

γραμμικό σύστημα n-ομογενών Δ.Ε. $2^{ης}$ τάξης

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται σε μορφή πίνακα: $\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{V}\mathbf{q}}$ με $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$

και οι πίνακες $\mathbf{M}$ και V είναι οι ανάλογοι πίνακες “Μαζών” και “σταθερών” ελατηρίων

Συζευγμένοι ταλαντωτές – Γενική λύση συστήματος

Αναμένουμε λύσεις της μορφής: $q_j(t) = a_j e^{i(\omega t - \delta)}$

- α_j είναι πραγματικοί αριθμοί (πλάτος) και δ η φάση
- ω είναι πραγματικός αριθμός
  - ✓ δεν είναι μιγαδικός γιατί δεν θα είχαμε διατήρηση ενέργειας

Αντικαθιστώντας τη παραπάνω λύση στην εξίσωση της κίνησης έχουμε:

$$\sum_j \left(V_{ji} - \omega^2 M_{ji}\right) a_j = 0$$

Για μη τετριμένη λύση για α_j θα πρέπει η ορίζουσα να μηδενίζεται:

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 M_{11} & V_{12} - \omega^2 M_{12} & V_{13} - \omega^2 M_{13} & \cdots \\ V_{12} - \omega^2 M_{12} & V_{22} - \omega^2 M_{22} & V_{23} - \omega^2 M_{23} & \cdots \\ V_{13} - \omega^2 M_{13} & V_{23} - \omega^2 M_{23} & V_{33} - \omega^2 M_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0$$

Εξίσωση n-βαθμού ως προς ω^2 και επομένως n-λύσεις ω_i^2

Τα ω_i ονομάζονται φυσικές ή χαρακτηριστικές συχνότητες

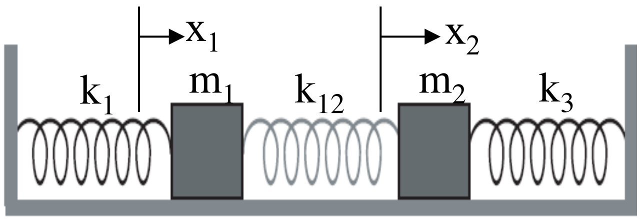
Όταν μια ή περισσότερες συχνότητες είναι ίσες έχουμε εκφυλισμό

Αντικαθιστώντας τιμές των ω_i προκύπτουν τα ιδιοδιανύσματα a_i

Η γενική λύση είναι υπέρθεση των λύσεων για κάθε n-τιμή της i

Εφαρμογή της γενικής λύσης

Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές συχνότητες του συστήματος



Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$U=\frac{1}{2}kx_1^2+\frac{1}{2}k_{12}\left(x_2-x_1\right)^2+\frac{1}{2}kx_2^2 \Rightarrow$$

$$U=\frac{1}{2}\left(k+k_{12}\right)x_1^2+\frac{1}{2}\left(k+k_{12}\right)x_2^2-k_{12}x_1x_2$$

Υπολογίζουμε τα V_{jk}:

$$V_{11}=\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}\right|_0=k+k_{12} \qquad V_{22}=\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}\right|_0=k+k_{12} \qquad V_{12}=\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_0=-k_{12}=V_{21}$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι: $T=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$

Αλλά είδαμε ότι: $T=\frac{1}{2}\sum_{j,k}M_{jk}\dot{x}_j\dot{x}_k$

$$\left.\begin{aligned} m_{11}&=m_{22}=M \\ m_{12}&=m_{21}=0 \end{aligned}\right.$$

Από την χαρακτηριστική εξίσωση παίρνουμε:

$$\begin{vmatrix} k+k_{12}-M\omega^2 & -k_{12} \\ -k_{12} & k+k_{12}-M\omega^2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k+k_{12}\pm k_{12}}{M}} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1=\sqrt{\dfrac{k+2k_{12}}{M}} \\ \omega_2=\sqrt{\dfrac{k}{M}} \end{cases}$$

Κανονικές συντεταγμένες

- Η γενική λύση για την κίνηση της συντεταγμένης q_j είναι ένας γραμμικός συνδυασμός διαφόρων όρων καθένας από τους οποίους εξαρτάται από μια ξεχωριστή συχνότητα.
- Τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{a}_r$ είναι επίσης ορθοκανονικά μεταξύ τους:

$$\sum_{j,k} M_{jk} a_{jr} a_{ks} = \delta_{rs} = \begin{cases} 0 & r \neq s \\ 1 & r = s \end{cases}$$

- Για να αποφύγουμε το περιορισμό από την αυθαίρετη κανονικοποίηση χρησιμοποιούμε κάποιο συντελεστή κλίμακας που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες και μπορούμε να γράψουμε την κίνηση της $q_j(t)$:

$$q_j(t) = \sum_r \alpha_r a_{jr} e^{i(\omega_r t - \delta_r)} = \sum_r \beta_r a_{jr} e^{i\omega_r t}$$ όπου β_r είναι ο συντελεστής κλίμακας

- Ορίζουμε τώρα την ποσότητα η_r: $\boxed{\eta_r = \beta_r e^{i\omega_r t}}$

έτσι ώστε: $\boxed{q_j(t) = \sum_r a_{jr} \eta_r(t)}$ κανονικές συντεταγμένες

Τα η_r ικανοποιούν εξισώσεις της μορφής: $\ddot{\eta}_r + \omega_r \eta_r = 0$

- Υπάρχουν n ανεξάρτητες τέτοιες εξισώσεις, και οι εξισώσεις κίνησης εκφρασμένες σε κανονικές συντεταγμένες γίνονται διαχωρίσιμες

Μεθοδολογία

- Επιλογή γενικευμένων συντεταγμένων και εύρεση των T και U σύμφωνα με το συνηθισμένο τρόπο των προβλημάτων με Lagrangian.

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j,k} V_{jk} q_j q_k \qquad V_{jk} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}\right|_0$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \qquad M_{jk} = m_{jk}\left(q_{l0}\right)$$

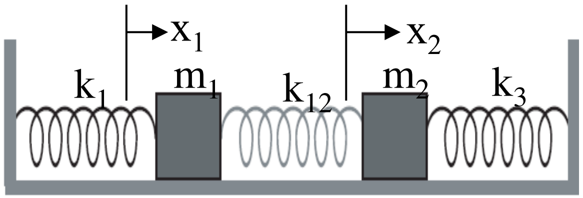
- Αντικατάσταση των V_{jk} και M_{jk} σαν πίνακες $n\ x\ n$ και χρησιμοποίηση της εξίσωσης $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{V}\mathbf{q}$ για εύρεση των n τιμών των ιδιοσυχνοτήτων ω_r
- Για κάθε τιμή ιδιοσυχνότητας ω_r, προσδιορισμός των λόγων $\alpha_{1r}:\alpha_{2ri}:\alpha_{3r}:\ldots:\alpha_{nr}$ αντικαθιστώντας στην εξίσωση:

$$\sum_j \left(V_{ji} - \omega_r^2 M_{ji}\right) a_{jr} = 0$$

- Αν χρειαστεί, προσδιορίζονται οι σταθερές κλίμακας β_i από αρχικές συνθ.
- Προσδιορισμός των κανονικών συντεταγμένων η_i με κατάλληλους γραμ. συνδυασμούς των q_j συντεταγμένων που φαίνονται να ταλαντώνουν στην συγκεκριμένη ιδιοσυχνότητα ω_i. Η κίνηση για τη συγκεκριμένη κανονική συντεταγμένη ονομάζεται normal mode. Η γενική κίνηση του συστήματος είναι υπέρθεση όλων των normal modes.

Παράδειγμα

Εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων, ιδιοδιανυσμάτων και κανονικών συντεταγμένων του συστήματος που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Υποθέτουμε ότι $k_{12} = k$



Στο παράδειγμα της σελ. 14 στο 1ο βήμα βρήκαμε τα T και U και τους πίνακες $\mathbf{M}$ και $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad \text{όπου } m_{11} = m_{22} = m$$

Ιδιοσυχνότητες:

Χρησιμοποιώντας την χαρακτηριστική εξίσωση βρίσκουμε τις ιδιοσυχνότητες:

$$\begin{vmatrix} k + k_{12} - m\omega^2 & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k + k_{12} \pm k_{12}}{m}} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{k + 2k_{12}}{m}} = \sqrt{\dfrac{3k}{m}} \end{cases}$$

Ιδιοδιανύσματα

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα χρησιμοποιούμε την εξίσωση:

$$\sum_j \left(V_{ji} - \omega_r^2 M_{ji}\right) a_{jr} = 0$$

όπου α_{jr} οι συνιστώσες j του ιδιοδιανύσματος $\boldsymbol{a_r}$ το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοσυχνότητα ω_r

$$\begin{pmatrix} V_{11} - \omega_r^2 M_{11} & V_{12} - M_{12} \\ V_{12} - M_{12} & V_{22} - \omega_r^2 M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \end{pmatrix} = \begin{matrix} \left(V_{11} - \omega_r^2 M_{11}\right) a_{1r} + \left(V_{12} - M_{12}\right) a_{2r} = 0 \\ \left(V_{12} - M_{12}\right) a_{1r} + \left(V_{22} - \omega_r^2 M_{22}\right) a_{2r} = 0 \end{matrix}$$

2 εξισώσεις για κάθε τιμή του r, αλλά μπορούμε να βρούμε μόνο το α_{1r}/α_{2r} επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο τη μια εξίσωση.

Για r=1, δηλαδή την 1η ιδιοσυχνότητα: $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ αντικαθιστώντας τα V_{ij}, M_{ij} έχουμε (χρησιμοποιούμε $k_{12} = k$) :

$$\left(2k - \frac{k}{m} m\right) a_{11} + k a_{21} = 0 \Rightarrow k a_{11} - k a_{21} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{a_{11}}{a_{21}} = 1} \text{ άρα: } \boxed{\mathbf{a}_1 = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad (1)$$

$k+k_{12} = V_{11}$ ω_1 M_{11} V_{12}

Ανάλογα για τη 2η ιδιοσυχνότητα $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k + 2k_{12}}{m}} \approx \sqrt{\dfrac{3k}{m}}$

$$\left(2k - \frac{3k}{m} m\right) a_{12} + k a_{22} = 0 \Rightarrow -k a_{12} - k a_{22} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{a_{12}}{a_{22}} = -1} \text{ άρα: } \boxed{\mathbf{a}_2 = a_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \quad (2)$$

Ιδιοδιανύσματα – Ορθοκανονικότητα

Αφού τα $\mathbf{a}_1$ και $\mathbf{a}_2$ είναι ορθοκανονικά θα έχουμε:

$$\sum_{j,k} M_{jk} a_{jr} a_{ks} = \delta_{rs} = \begin{cases} M_{11}a_{1r}a_{1s} + M_{12}a_{1r}a_{2s} + M_{12}a_{2r}a_{1s} + M_{22}a_{2r}a_{2s} = 0 & r \neq s \\ M_{11}a_{1r}a_{1r} + M_{12}a_{1r}a_{2r} + M_{12}a_{2r}a_{1r} + M_{22}a_{2r}a_{2r} = 1 & r = s \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας α_{jr} στην εξίσωση και αφού M_{12}=0 και $M_{11} = M_{22} = m$:

$$M_{11}a_{1r}a_{1r} + M_{12}a_{1r}a_{2r} + M_{12}a_{2r}a_{1r} + M_{22}a_{2r}a_{2r} = 1 \Rightarrow r = 1, \quad ma_{11}^2 + ma_{21}^2 = 1$$

Αλλά $\alpha_{11}=\alpha_{21}$ οπότε: $2ma_{11}^2 = 1 \Rightarrow a_{11} = \dfrac{1}{\sqrt{2m}} \Rightarrow \mathbf{a}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Κατά τον ίδιο τρόπο βάζοντας για $r = 2$ έχουμε: $a_{22} = \dfrac{1}{\sqrt{2m}} \Rightarrow \mathbf{a}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Κανονικές συντεταγμένες

Η γενική λύση θα είναι της μορφής:

$$q_j(t) = \sum_r a_{jr}\eta_r(t) \quad \text{όπου} \quad \eta_r(t) \equiv \beta_r e^{i\omega_r t}$$

Επομένως θα έχουμε:

μάζα 1: $x_1 = a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 = a_{11}\eta_1 - a_{22}\eta_2$

μάζα 2: $x_2 = a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 = a_{11}\eta_1 + a_{22}\eta_2$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας τα x_1 και x_2 έχουμε:

$$\eta_1 = \frac{1}{2a_{11}}(x_1 + x_2) \qquad \eta_2 = \frac{1}{2a_{22}}(x_1 - x_2)$$

Όταν το σύστημα κινείται κάτω από ένα από τα 2 normal modes έχουμε:

$$\eta_1 = \frac{1}{2a_{11}}(x_1 + x_2) \;\text{ και }\; \eta_2 = 0 \qquad \text{ή} \qquad \eta_2 = \frac{1}{2a_{22}}(x_1 - x_2) \;\text{ και }\; \eta_1 = 0$$

Όταν $\eta_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

Άρα για mode 1 x_1 και x_2 σε φάση

Όταν $\eta_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$

Άρα για mode 2 x_1 και x_2 έχουν αντίθετη φάση

Σημειωτέον ότι στο πρόβλημα δεν μας δίνονται αρχικές συνθήκες και επομένως δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε το β_r ούτε την πλήρη λύση