# ΦΥΣ. 111

**1ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ** **Επιστροφή 14.09.2020**

**1.** Οι κόκκοι άμμου μιας παραλίας της Αγίας Νάπας είναι περίπου σφαιρικοί με μέση ακτίνα σφαίρας $50\mu m$. Οι κόκκοι είναι φτιαγμένοι από οξείδιο του πυριτίου το οποίο έχει πυκνότητα $2600 kg/m^3$. Ποια θα είναι η μάζα των κόκκων της άμμου που θα έχει συνολική επιφάνεια (συνολική επιφάνεια όλων των σφαιρών) ίση με την επιφάνεια ενός κύβου όγκου $1.00 m^3$;

Οι κόκκοι της άμμου είναι σφαιρικοί. Επομένως, το εμβαδό της επιφάνειας κάθε κόκκου, θα είναι το εμβαδό της σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας r που δίνεται από την σχέση: $A = 4\pi r^2$ (1)

Ο όγκος κάθε κόκκου άμμου είναι: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (2)

Η πυκνότητα μάζας θα είναι: $\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V \overset{(2)}{\Rightarrow} m = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\Rightarrow m = \frac{4}{3}\pi \left(2600 \frac{kg}{m^3}\right)\left(50 \cdot 10^{-6} m\right)^3 \Rightarrow m = 1.36 \cdot 10^{-9} kg$$

Ένας κύβος έχει όγκο $V_{κυβ} = a^3$ όπου a η ακμή (το μήκος πλευράς) του κύβου. Οπότε $a = V_{κυβ}^{1/3} \Rightarrow a = (1m^3)^{1/3} \Rightarrow a = 1m$

Ο κύβος έχει 6 επιφάνειες ίσου εμβαδού, ίσου με $a^2$ η κάθε μία

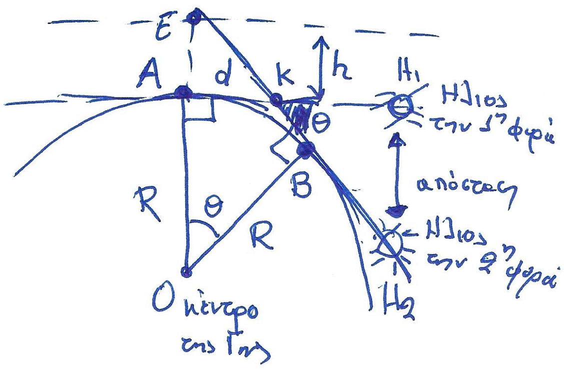
Ο κύβος έχει συνολική επιφάνεια εμβαδού $A_{κυβ} = 6 \cdot a^2 \Rightarrow A_{κυβ} = 6m^2$

Ο αριθμός των κόκκων άμμου θα είναι: $N = \frac{A_{κυβ}}{A_{κοκ}} = \frac{6m^2}{4\pi \cdot (50 \cdot 10^{-6} m)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow N = \frac{6}{\pi} 10^8 \text{ κόκκοι}$$

Η μάζα τους θα είναι: $M_{αμμος} = m \cdot N = 1.36 \cdot 10^{-9} kg \frac{6}{\pi} 10^8 = \underline{0.260 kg}$

**2.** Υποθέστε ότι ενώ είστε ξαπλωμένοι σε μια παραλία κοντά στον Ισημερινό και παρατηρείται τον ήλιο να δύει στην ήσυχη θάλασσα ξεκινάτε το χρονόμετρο του κινητού σας καθώς το πάνω μέρος του ήλιου εξαφανίζεται. Σηκώνεστε όρθιοι έτσι ώστε τα μάτια σας βρίσκονται σε ύψος 1.70*m* πάνω από την αρχική σας θέση και σταματάτε το χρονόμετρο καθώς το πάνω μέρος του ήλιου εξαφανίζεται και πάλι. Αν το χρονικό διάστημα που κατέγραψε το χρονόμετρό σας ήταν 11.1*sec* να βρείτε την ακτίνα της γης.




Σύμφωνα με το διπλανό σχήμα, όταν χάνεται ο ήλιος την πρώτη φορά, η γραμμή όρασής σας στον ήλιο είναι εφαπτόμενη στην επιφάνεια της γης, στο σημείο A. Όταν στέκεστε, το ύψος των ματιών σας από το A είναι h. Η ευθεία όρασής σας προς τη δεύτερη θέση του ήλιου, είναι εφαπτόμενη στην επιφάνεια της γης στο σημείο B. Πέρα από το σημείο στο οποίο βρίσκεται ο ήλιος, θα χαθεί γιατί θα πέσει πιο χαμηλά από την εφαπτόμενη.

Έστω d, η απόσταση του σημείου B από τα μάτια σας E, $d=EB$.

Έχουμε ότι $d^2+R^2=(R+h)^2 \Rightarrow d^2+\cancel{R^2}=\cancel{R^2}+h^2+2Rh \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2=h^2+2Rh$ όπου R η ακτίνα της γης και η οποία είναι αρκετά μεγαλύτερη του h, $R>>h$

$$\Rightarrow d^2=(2R+h)h \Rightarrow d^2=R\left(2+\cancel{\frac{h}{R}}^{\simeq 0}\right)h \Rightarrow d^2 \simeq 2Rh \quad (1)$$

Η γωνία μεταξύ των δύο εφαπτομένων ευθειών στο σημείο τομής τους είναι Θ και ίση με την επίκεντρη γωνία $\widehat{AOB}$. Αυτή είναι και η γωνία που διέγραψε ο ήλιος κατά την διάρκεια των 11.1 sec, $\widehat{KH_1H_2}=\widehat{AOB}=\Theta$

Αλλά $\dfrac{\Theta}{2\pi}=\dfrac{t}{24h} \Rightarrow \Theta=\dfrac{2\pi}{24h}t \Rightarrow \Theta=\dfrac{2\pi\,(11.1s)}{(24h)(60\frac{min}{h})(60\frac{s}{min})} \Rightarrow \Theta=8.07\cdot10^{-4}\,rad$

Στο τρίγωνο OBE $\Rightarrow d=R\tan\Theta \Rightarrow d^2=R^2\tan^2\Theta \overset{(1)}{\Rightarrow} 2\cancel{R}h=R^{\cancel{2}}\tan^2\Theta \Rightarrow R=\dfrac{2h}{\tan^2\Theta}$

Επομένως με απλή αντικατάσταση: $R=\dfrac{2\cdot1.70m}{(6.516\cdot10^{-7})} \Rightarrow R=5217957m$

$\Rightarrow R=5.2\cdot10^6 m$

**3.** Θεωρήστε ότι γεμίζετε με νερό ένα μεγάλο δοχείο το οποίο όμως έχει μια μικρή τρύπα και έτσι παρουσιάζεται απώλεια. Θεωρήστε ότι η μάζα του νερού συναρτήσει του χρόνου δίνεται από την σχέση $m = 5.00t^{0.8} - 3.00t + 20.00$, όπου $t \geq 0$, $m$ μετράται σε γραμμάρια και $t$ σε δευτερόλεπτα. (α) Σε ποια χρονική στιγμή η μάζα του νερού είναι μέγιστη; (β) ποια είναι η μέγιστη τιμή της μάζας; Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της μάζας, εκφρασμένος σε *kg/min*, τις χρονικές στιγμές $t$ =2.00*s* και $t$ = 5.00*s*;

Η παράγωγος της συνάρτησης της μάζας ως προς τον χρόνο, $t$, δίνει το ρυθμό μεταβολής της μάζας.

Αν θέσουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης (τον ρυθμό στην προκειμένη περίπτωση) ίση με μηδέν, τότε θα βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης ελάχιστα και μέγιστα. Στην περίπτωσή μας η ακρότατη τιμή αντιστοιχεί σε μέγιστο μάζας, εφόσον αφού το ελάχιστο θα αντιστοιχεί σε μηδενική μάζα (όταν δεν υπάρχει νερό στο δοχείο)

(α) Παραγωγίζουμε ως προς τον χρόνο: $\frac{d}{dt}m(t) = \frac{d}{dt}\left(5.00t^{0.8} - 3.00t + 20.00\right)$

$$\Rightarrow \frac{dm(t)}{dt} = (5.00 \times 0.8)\, t^{-0.2} - 3.00 \Rightarrow \frac{dm(t)}{dt} = 4.00\, t^{-0.2} - 3.00$$

Θέτοντας $\frac{dm(t)}{dt} = 0 \Rightarrow 4.00\, t^{-0.2} - 3.0 = 0 \Rightarrow t = \left(\frac{3.00}{4.00}\right)^{1/0.2} \Rightarrow \boxed{t = 4.21s}$

(β) Την χρονική στιγμή $t = 4.21s$ η μάζα του νερού θα είναι:

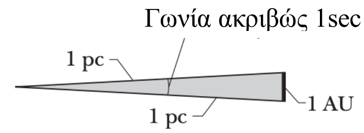
$$m(t) = 5.00 \cdot (4.21s)^{0.8} - 3.00(4.21s) + 20.00 \Rightarrow \underline{m(t) = 23.2gr}$$

(γ) Ο ρυθμός μεταβολής της μάζας για $t = 2.00sec$ είναι:

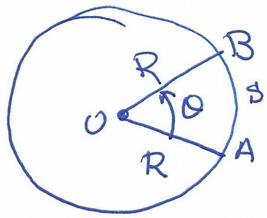
$$\frac{dm}{dt} = \left[4.00t^{-0.2} - 3.00\right] g/s \Rightarrow \left.\frac{dm}{dt}\right|_{t=2s} = 0.48 g/s = 0.48 \frac{\cancel{g}}{\cancel{s}} \frac{1kg}{1000\cancel{g}} \frac{60\cancel{s}}{1m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dm}{dt} = 2.88 \cdot 10^{-2}\, kg/m}$$

**4.** Η αστρονομική μονάδα (AU) ισούται με την μέση απόσταση μεταξύ Γης και Ήλιου, που είναι $1.496x10^{11}m$. Το parsec (pc) είναι η ακτίνα ενός κύκλου για τον οποίο μια επίκεντρη γωνία 1 δευτέρου καλύπτει τόξο μήκους μιας αστρονομικής μονάδας (AU). Το έτος φωτός είναι η απόσταση που διανύει το φως στο κενό κινούμενο με ταχύτητα $3.00x10^{8}m/s$, σε ένα έτος. Να εκφράσετε την απόσταση ήλιου-γης σε (α) parsecs και (β) σε έτη φωτός.




Ξέρουμε ότι το τόξο ενός κύκλου που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη




επίκεντρη γωνία, μετρούμενη σε ακτίνια, δίνεται από τη σχέση: $\boxed{s = R\Theta}$ όπου R η ακτίνα του κύκλου. Για $\Theta = 2\pi$ το τόξο αντιστοιχεί στην περιφέρεια του κύκλου $s = 2\pi R$.

Αν η ακτίνα R είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με το τόξο s ($R >> s$), μπορούμε να προσεγγίσουμε το τόξο με ευθύγραμμο τμήμα, όπως στην περίπτωσή μας που η γωνία Θ είναι πολύ μικρή και το τόξο ισούται με 1AU, ενώ η ακτίνα του κύκλου σε 1pc.

Για γωνία $\Theta = 1\,\text{arc sec} = (1\,\text{arc}\cancel{\text{sec}})\left(\frac{1\,\cancel{\text{arcmin}}}{60\,\text{arc}\cancel{\text{sec}}}\right)\left(\frac{1^\circ}{60\,\cancel{\text{arcmin}}}\right)\left(\frac{2\pi\,\text{rad}}{360^\circ}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\Theta = 4.85 \times 10^{-6}\,\text{rad}}$$

(α) Επομένως $R = \frac{s}{\Theta} = \frac{1AU}{4.85 \times 10^{-6}} \Rightarrow \boxed{R = 1pc = 2.06 \cdot 10^{5}\,AU} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{1AU = 4.9 \cdot 10^{-6}\,pc}$$ απόσταση ήλιου-γης

(β) Εφόσον $1AU = 1.496 \times 10^{11}\,m$ και η ταχύτητα του φωτός είναι $c = 3 \times 10^{8}\,m/s$

1 έτος έχει 365 ημέρες, και κάθε μέρα έχει $24\cancel{h} \times 60\frac{\cancel{min}}{\cancel{h}} \times 60\frac{s}{\cancel{min}} = 86400\,s/\text{μέρα}$

1 έτος έχει $3.16 \times 10^{7}\,s$. Το φως καλύπτει απόσταση: $1ly = 3.16 \times 10^{7}\cancel{s} \times 3 \cdot 10^{8}\frac{m}{\cancel{s}}$

$$\Rightarrow \boxed{1ly = 9.48 \cdot 10^{15}\,m}$$

Επομένως $1AU = 1.49 \times 10^{11}\,m = 1.49 \times 10^{11}\,\cancel{m}\,\frac{1\,ly}{9.48 \cdot 10^{15}\,\cancel{m}} \Rightarrow \boxed{1AU = 1.57 \times 10^{-5}\,ly}$

**5.** Τρία διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, το καθένα μέτρου $50m$ βρίσκονται στο επίπεδο $x$-y. Οι κατευθύνσεις τους ως προς τον θετικό $x$-άξονα είναι 30°, 195° και 315° αντίστοιχα. Να βρεθούν (α) το μέτρο και (β) η γωνία του διανύσματος $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ και (γ) το μέτρο και (δ) η γωνία του διανύσματος $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$. Ποιο θα είναι (ε) το μέτρο και (στ) η γωνία ενός τέταρτου διανύσματος $\vec{d}$ τέτοιου ώστε $(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{c}-\vec{d})=\vec{0}$.

(α) $\vec{a}=(50m)\cos(30°)\hat{i}+(50m)\sin(30°)\hat{j}$

$\vec{b}=(50m)\cos(195°)\hat{i}+(50m)\sin(195°)\hat{j}$

$\vec{c}=(50m)\cos(315°)\hat{i}+(50m)\sin(315°)\hat{j}$

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(50m)\left[\cos(30°)+\cos(195°)+\cos(315°)\right]\hat{i}+(50m)\left[\sin(30°)+\sin(195°)+\sin(315°)\right]\hat{j}$

$\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(30.4\,m)\,\hat{i}-(23.3m)\,\hat{j} \Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{(30.4)^2+(23.3)^2}\,m \Rightarrow$

$\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=38m$

(β) Στο σκέλος (α) βρήκαμε ότι

$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})_x=30.4m$

$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})_y=-23.3m$

Εφόσον η x-συνιστώσα είναι θετική και η y-συνιστώσα αρνητική, το διάνυσμα βρίσκεται στο 4° τεταρτημόριο.

$\cos\Theta=\dfrac{(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})_x}{|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|}=\dfrac{30.4\cancel{m}}{38\cancel{m}}=0.8 \Rightarrow \Theta=-36.87°$

ή $\Theta=323.13°$

(γ) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=(50m)\left[\cos(30°)-\cos(135°)+\cos(315°)\right]\hat{i}+(50m)\left[\sin(30°)-\sin(135°)+\sin(315°)\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\left[43.3m-(-48.3m)+(35.4m)\right]\hat{i}+\left[25m-(-12.9m)+(-35.4m)\right]\hat{j}=(127\,\hat{i}+2.6\,\hat{j})m$

Το μέτρο θα είναι: $|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{(127)^2+(2.6)^2}\,m \simeq 1.3\cdot10^2 m$

(δ) Η γωνία του διανύσματος $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ με τον x-άξονα είναι: $\tan\Theta=\dfrac{2.6\cancel{m}}{127\cancel{m}}=0.02 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Theta \simeq 1.17°$

(ε) Όπως και πριν, $-\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c} \Rightarrow \vec{d}=(+40.4m)\hat{i}+(-47.4m)\hat{j}$ και $|\vec{d}|=\sqrt{40.4^2+47.4^2}=62m$

(στ) Το διάνυσμα $\vec{d}$ βρίσκεται στο 4° τεταρτημόριο γιατί $d_x=+40.4m$ & $d_y=-47.4m$

Επομένως $\tan\Theta=\dfrac{-47.4}{+40.4} \Rightarrow \Theta=2\pi-49.6° \Rightarrow \Theta\simeq330°$

**6.** Αν το διάνυσμα $\vec{B}$ προστεθεί στο διάνυσμα $\vec{C} = 3.0\hat{\imath} + 4.0\hat{\jmath}$, το αποτέλεσμα είναι ένα διάνυσμα στην θετική κατεύθυνση του $y$-άξονα, το μέτρο του οποίου είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\vec{C}$. Ποιο είναι το μέτρο του διανύσματος $\vec{B}$;

$\vec{B} + \vec{C} = \vec{A}$ όπου $\vec{C} = 3.0\hat{\imath} + 4.0\hat{\jmath}$ και $\vec{B} = \vec{A} - \vec{C} = ?$

Ξέρουμε ότι $|\vec{C}| = |\vec{A}|$ και ότι $\vec{A} = |\vec{A}|\hat{\jmath} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_x = 0$ και $A_y = |\vec{A}| = |\vec{C}|$ $\Big\} \Rightarrow$

Αλλά $|\vec{C}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} \Rightarrow |\vec{C}| = 5$

$\Rightarrow A_y = 5$

Επομένως έχουμε: $B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} = \vec{A} - \vec{C} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} - C_x\hat{\imath} - C_y\hat{\jmath} \Rightarrow$

$\Rightarrow B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} = (A_x - C_x)\hat{\imath} + (A_y - C_y)\hat{\jmath}$

Εφόσον τα διανύσματα $\vec{B}$ και $\vec{A} - \vec{C}$ είναι ίσα, θα πρέπει και οι συνιστώσες τους να είναι ίσες μία προς μία:

$$\left.\begin{array}{l} B_x = A_x - C_x = 0 - 3 \Rightarrow B_x = -3 \\ B_y = A_y - C_y = 5 - 4 \Rightarrow B_y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{B} = -3\hat{\imath} + 1\hat{\jmath}$$

Επομένως το μέτρο του διανύσματος $|\vec{B}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10} \Rightarrow \underline{|\vec{B}| = 3.2}$

**7.** Το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων οδηγεί στην εξίσωση $\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$. Η εξίσωση αυτή δίνει την δύναμη Lorentz που αναπτύσεται σε ένα φορτίο $q$ το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{u}$ μέσα σε μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$. Θεωρήστε ότι το φορτίο είναι $q = 2C$, ότι η ταχύτητα του φορτίου είναι $\vec{u} = 2.0\hat{\imath} + 4.0\hat{\jmath} + 6.0\hat{k}$ και η δύναμη είναι $\vec{F} = 4.0\hat{\imath} - 20.0\hat{\jmath} + 12.0\hat{k}$. Να βρείτε το διάνυσμα της έντασης του πεδίου $\vec{B}$ σε μορφή μοναδιαίων διανυσμάτων θεωρώντας ότι $B_x = B_y$.

Η δύναμη Lorentz δίνεται από τη σχέση: $\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B} \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k} = q\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = q\Big[(u_yB_z - u_zB_y)\hat{\imath} - (u_xB_z - u_zB_x)\hat{\jmath} + (u_xB_y - u_yB_x)\hat{k}\Big] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F_x = q\,(u_yB_z - u_zB_y)$$

$$F_y = q\,(u_zB_x - u_xB_z)$$

$$F_z = q\,(u_xB_y - u_yB_x)$$

Αντικαθιστώντας αριθμητικά δεδομένα έχουμε:

$$4.0 = 2\,(4.0\,B_z - 6.0\,B_y)$$

$$-20 = 2\,(6.0\,B_x - 2.0\,B_z)$$

$$\left.\begin{aligned} 12 &= 2\,(2.0\,B_y - 4.0\,B_x) \\ B_x &= B_y \end{aligned}\right\} \Rightarrow 12 = 2\,(-2.0)\,B_x \Rightarrow B_x = -3.0 = B_y$$

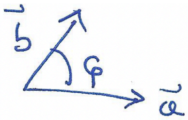
Αντικατάσταση στην 1η εξίσωση δίνει

$$4.0 = 2\cdot 4.0\,B_z + 36 \Rightarrow 8B_z = -32 \Rightarrow B_z = -4.0$$

Επομένως $\vec{B} = -3.0\,\hat{\imath} - 3.0\,\hat{\jmath} - 4.0\,\hat{k}$

***8.*** Το διάνυσμα $\vec{A}$ έχει μέτρο 6.00 μονάδες ενώ το διάνυσμα $\vec{B}$ έχει μέτρο 7.00 μονάδες. Το εσωτερικό τους γινόμενο, $\vec{A} \cdot \vec{B}$ έχει τιμή 14.0. Να βρεθεί η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{A}$ και $\vec{B}$.

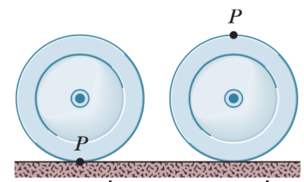
Ο ορισμός του εσωτερικού γινομένου είναι:



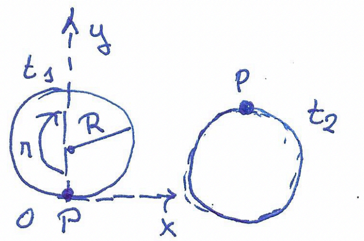

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\varphi) \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{14}{6 \cdot 7} = \frac{14}{43} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\cos(\varphi) = 0.333 \Rightarrow \varphi = 70.53^\circ$$

**9.** Μια ρόδα ακτίνας 45.0*cm* κυλά χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος μιας οριζόντιας επιφάνειας όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t_1$, το σημείο $P$ που βρίσκεται στην περιφέρεια της ρόδας, είναι σε επαφή με την οριζόντια επιφάνεια. Σε μια μεταγενέστερη χρονική στιγμή $t_2$, η ρόδα έχει κυλήσει κατά το μισό μιας πλήρης περιστροφής. Να βρεθούν (α) το μέτρο και (β) η γωνία ως προς το έδαφος της μετατόπισης του σημείου $P$.




χρονική στιγμή $t_1$    χρονική στιγμή $t_2$




Καθώς η ρόδα κυλά από την αρχική της θέση τη χρονική στιγμή $t_1$, στην τελική της θέση τη χρονική στιγμή $t_2$, το σημείο P μετατοπίζεται από την κατώτερη θέση της περιφέρειας στην ανώτερη θέση. Επομένως αν θεωρήσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων που η αρχή του συμπίπτει με το σημείο P τη χρονική στιγμή $t_1$, τη χρονική στιγμή $t_2$, το σημείο P θα βρίσκεται στη θέση $2R$ ως προς τον y-άξονα.

Η οριζόντια μετατόπιση της ρόδας θα είναι αυτή που αντιστοιχεί σε μισή περιφέρεια κύκλου, αφού η ρόδα στράφηκε κατά γωνία π και το τόξο του κύκλου ακτίνας R που αντιστοιχεί σε γωνία π είναι $s = R\theta \Rightarrow s = \pi R$

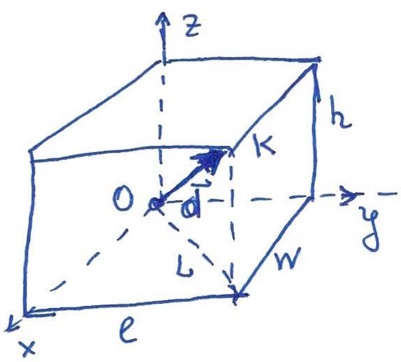
Επομένως οι συντεταγμένες του P τη χρονική στιγμή $t_2$ είναι $(\pi R, 2R)$ και μπορούμε να γράψουμε το διάνυσμα θέσης ως $\vec{r} = \pi R\,\hat{i} + 2R\,\hat{j}$

Το μέτρο του διανύσματος είναι: $|\vec{r}| = \sqrt{\pi^2 R^2 + 4R^2} \Rightarrow |\vec{r}| = R\sqrt{\pi^2 + 4}$

Αντικατάσταση αριθμητικών δεδομένων δίνει: $\vec{r} = 1.41\,\hat{i} + 0.90\,\hat{j}$

Το μέτρο είναι $|\vec{r}| = 1.68m$. Η κατεύθυνση του διανύσματος βρίσκεται από τη γωνία με τον x-άξονα: $\tan(\theta) = \frac{0.90}{1.41} = 0.645 \Rightarrow \underline{\theta = 32.8^\circ}$

**10.** Ένα δωμάτιο έχει διαστάσεις 3.0$m$ (ύψος) x 3.70$m$ (μήκος) x 4.30$m$ (πλάτος). Μία μύγα ξεκινά από τη μία γωνία του δωματίου και καταλήγει πετώντας στην γωνία που βρίσκεται απέναντι γωνία της αρχικής κατά μήκος της διαγώνιου του δωματίου. (α) Να βρεθεί η μετατόπιση της μύγας. (β) Μπορεί το μήκος της διαδρομής που ακολούθησε να είναι μεγαλύτερο από την μετατόπισή της; (γ) μεγαλύτερο; (δ) ίσο; Επιλέξτε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων ώστε να εκφράσετε το διάνυσμα της μετατόπισης της μύγας χρησιμοποιώντας τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ και $\hat{k}$. (ε) Αν η μύγα αντί να πετά, περπατά για να πάει από την μία κορυφή στην άλλη, ποιο είναι το μήκος της μικρότερης διαδρομής που μπορεί να ακολουθήσει; (*<u>Υπόδειξη:</u>* Η απάντηση στο ερώτημα αυτό μπορεί να δοθεί και χωρίς τη χρήση διαφορικού λογισμού. Θεωρήστε το δωμάτιο σαν ένα κουτί και ανοίξτε τις πλευρές του ώστε να γίνει επίπεδο).




Θεωρήστε το δωμάτιο στο σχήμα ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου μήκους $l$, πλάτους $w$ και ύψους $h$. Θεωρήστε επίσης το σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ όπως στο σχήμα με αρχή την κάτω γωνία του δωματίου. Η μύγα ξεκινά από το σημείο O την αρχή του συστήματος συντεταγμένων, και καταλήγει στην κορυφή K που είναι η κορυφή διαγώνια αντίθετη της O. Το διάνυσμα θέσης της κορυφής αυτής είναι $\vec{d}=\vec{OK}$ και αποτελεί τη μετατόπιση της μύγας

(α) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{d}$ είναι: $\vec{d} = w\hat{\imath} + l\hat{\jmath} + h\hat{k}$ οπότε:

$$|\vec{d}| = \sqrt{w^2+l^2+h^2} \Rightarrow |\vec{d}| = \sqrt{(3.70m)^2+(4.30m)^2+(3.00m)^2} \Rightarrow |\vec{d}| = 6.42m$$

(β) Η μετατόπιση της μύγας είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις δύο ακραίες θέσεις της κίνησής της, O και K, με κατεύθυνση από το O στο K. Η ευθεία που ενώνει δύο σημεία στο χώρο αντιστοιχεί στην μικρότερη απόσταση μεταξύ των σημείων και επομένως οποιαδήποτε άλλη διαδρομή θα έχει μήκος μεγαλύτερο από το ευθύγραμμο τμήμα της μετατόπισης

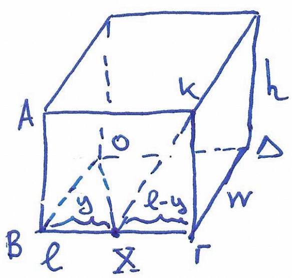
(γ) Το μήκος της διαδρομής που διανύει η μύγα μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το μήκος της μετατόπισης $d$.

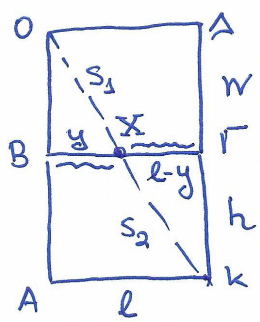
(δ) Το μήκος της διαδρομής της μύγας είναι ίσο με το μέτρο της μετατόπισης μόνο αν η μύγα κινηθεί κατά μήκος του διανύσματος $\vec{d}$.

(ε) Στο ερώτημα (α) το διάνυσμα της μετατόπισης γράφηκε συναρτήσει των μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ θεωρώντας τις συντεταγμένες της κορυφής k που αντιστοιχούν σε μετατόπιση κατά w στον x-άξονα, l κατά τον y-άξονα και h κατά τον z-άξονα

$$\vec{d} = w\hat{i} + l\hat{j} + h\hat{k} \Rightarrow \vec{d} = (3.70m)\hat{i} + (4.30m)\hat{j} + (3.00m)\hat{k}.$$

(στ) Υποθέστε ότι η διαδρομή που ακολουθεί η μύγα με το μικρότερο μήκος είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα. Θεωρήστε τώρα ότι η επιφάνεια ΑΒΓΚ μπορεί να ανοίξει και να την τοποθετήσουμε οριζόντια μπροστά από την επιφάνεια ΟΒΓΔ. Θα έχουμε:




Το ευθύγραμμο τμήμα Οk είναι η μικρότερη δυνατή απόσταση μεταξύ του σημείου Ο και του σημείου Κ. Το μήκος της διαδρομής αυτής είναι:

$$S_{ελαχ} = \sqrt{(w+h)^2+l^2} = \sqrt{(3.7+3.0)^2+4.3^2}\,m$$

$$\Rightarrow S_{ελαχ} = 7.96m.$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η συντομότερη διαδρομή είναι η παραπάνω με χρήση διαφορικού λογισμού. Έστω ότι $\boxed{S = S_1 + S_2 = \sqrt{w^2+y^2} + \sqrt{h^2+(l-y)^2}}$ (A)

Το μήκος της διαδρομής είναι συνάρτηση της μεταβλητής y, δηλαδή $S=f(y)$.

Ξέρουμε ότι μια συνάρτηση συνεχής παρουσιάζει ακρότατο (ελάχιστο ή μέγιστο) όταν η παράγωγός της είναι μηδέν. Επομένως $\frac{dS}{dy}=0 \Rightarrow \frac{dS}{dy} = \frac{y}{\sqrt{y^2+w^2}} - \frac{l-y}{\sqrt{(l-y)^2+h^2}} = 0$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{y^2+w^2} = \frac{(l-y)^2}{(l-y)^2+h^2} \Rightarrow \cancel{y^2(l-y)^2} + h^2y^2 = \cancel{(l-y)^2y^2} + (l-y)^2w^2 \Rightarrow h^2y^2 = (l-y)^2w^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow hy = (l-y)w \Rightarrow (h+w)y = lw \Rightarrow y = \frac{lw}{(h+w)}$$

Αντικατάσταση στην (A), θα δώσει:

$$S_{\varepsilon\lambda\alpha\chi}=\sqrt{w^2+\frac{\ell^2 w^2}{(h+w)^2}}+\sqrt{h^2+\left(\ell-\frac{\ell w}{h+w}\right)^2}=\sqrt{w^2\left(1+\frac{\ell^2}{(h+w)^2}\right)}+\sqrt{h^2+\left(\frac{\ell h}{h+w}\right)^2}$$

$$\Rightarrow S_{\varepsilon\lambda\alpha\chi}=w\sqrt{1+\frac{\ell^2}{(h+w)^2}}+h\sqrt{1+\frac{\ell^2}{(h+w)^2}}\Rightarrow S_{\varepsilon\lambda\alpha\chi}=(h+w)\sqrt{1+\frac{\ell^2}{(h+w)^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\varepsilon\lambda\alpha\chi}=\cancel{(h+w)}\frac{\sqrt{(h+w)^2+\ell^2}}{\cancel{h+w}}\Rightarrow S_{\varepsilon\lambda}=\sqrt{\ell^2+(h+w)^2}$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα που βρήκαμε πριν τη χρήση διαφορικού λογισμού

**11.** Ένα αντικείμενο μάζας $m$ ταλαντώνεται δεμένο στο άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς ελατηρίου $k$. Ο χρόνος για μια πλήρη ταλάντωση αποτελεί την περίοδο της ταλάντωσης $T$. Υποθέστε ότι η περίοδος εξαρτάται από την μάζα $m$, και την σταθερά $k$. Χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση βρείτε την συναρτησιακή εξάρτηση της περιόδου $T$ από τα μεγέθη $m$ και $k$, δηλαδή την μορφή της συνάρτησης $T = f(m, k)$, αγνοώντας οποιαδήποτε σταθερά αναλογίας. Προσέξτε ότι οι μονάδες της σταθεράς $k$ βρίσκονται από τον νόμο του Hooke σύμφωνα με τον οποίο $\vec{F} = -k\vec{x}$, η δύναμη του ελατηρίου είναι ανάλογη της μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας.

Χρησιμοποιούμε διαστατική ανάλυση και γράφουμε τη συναρτησιακή εξάρτηση της περιόδου $T$, από τα μεγέθη $k, m$: $\boxed{T \propto k^{a} \cdot m^{b}}$ (1)

Η μάζα $m$ είναι θεμελιώδες μέγεθος με διαστάσεις μάζας $[M]$ (2)

Η σταθερά $k$ είναι παράγωγο μέγεθος που προκύπτει από το νόμο του Hooke

$F = -kx \Rightarrow k = \dfrac{F}{x}$ (3) με $x$ σε διαστάσεις μήκους $[L]$

Η δύναμη $F$ είναι επίσης παράγωγο μέγεθος και προκύπτει από τον 2ο νόμο του Newton, οπότε: $F = ma$ όπου η επιτάχυνση $a$ έχει διαστάσεις $\dfrac{[L]}{[T]^2}$

Επομένως από την (3) θα έχουμε ότι οι διαστάσεις της σταθεράς ελατηρίου $[k]$ είναι:

$$[k] = \frac{[M]\cancel{[L]}/[T]^2}{\cancel{[L]}} \Rightarrow [k] = \frac{[M]}{[T]^2} \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας τις διαστάσεις των μεγεθών στην εξίσωση (1) έχουμε:

$$[T] = \left(\frac{[M]}{[T]^2}\right)^{a}[M]^{b} \Rightarrow [T]^{1} = [T]^{-2a}[M]^{a+b} \Rightarrow [T]^{1}[M]^{0} = [T]^{-2a}[M]^{a+b}$$

Για να ισχύει η εξίσωση, θα πρέπει οι εκθέτες των βάσεων να είναι ίσοι:

$[T]$: $1 = -2a \Rightarrow a = -1/2$

$[M]$: $0 = a + b \Rightarrow a = -b \Rightarrow b = +1/2$

Αντικατάσταση στην (1) δίνει: $T \propto k^{-1/2} m^{1/2} \Rightarrow \boxed{T \propto \sqrt{\dfrac{m}{k}}}$

**12.** Χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση, να προσδιορίσετε τη ταχύτητα των κυμάτων σε μια χορδή συναρτήσει της μάζας *m,* μήκους *l* και της τάσης *T* της χορδής (της δύναμης δηλαδή με την οποία τεντώνουμε τη χορδή και η οποία είναι της μορφής *T* = *ma*).

Χρησιμοποιούμε διαστατική ανάλυση για την επίλυση του προβλήματος.

Θα πρέπει οι μονάδες των μεγεθών που δίνονται, υψωμένες σε κάποιους εκθέτες να δίνουν ως αποτέλεσμα, μονάδες ταχύτητας $\frac{m}{sec}$, δηλαδή σε διαστάσεις μήκους ανά χρόνο: $[L][T]^{-1}$.

Η μάζα m, έχει διαστάσεις μάζας $[M]$ (kgr)

το μήκος της χορδής έχει διαστάσεις μήκους $[L]$ (m)

ενώ η τάση T της χορδής έχει διαστάσεις δύναμης. Η δύναμη όμως είναι ένα σύνθετο μέγεθος: $F = m \cdot a$ και έχει διαστάσεις μάζας $[M]$ και επιτάχυνσης, που είναι $[L][T]^{-2}$ $m/s^2$

Επομένως η ταχύτητα των κυμάτων της χορδής θα πρέπει να έχει τη συναρτησιακή μορφή: $\boxed{\upsilon \propto T^a m^b L^c} = F^a m^b L^c = (ma)^a m^b L^c \Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon = m^{a+b} * a^a * L^c \Rightarrow$ (A)

$$[L][T]^{-1} = [M]^{a+b} * [L]^a [T]^{-2a} * [L]^c \Rightarrow [L][T]^{-1} = [M]^{a+b} * [L]^{a+c} [T]^{-2a}$$

Για να ισχύει η εξίσωση θα πρέπει οι εκθέτες των βάσεων να είναι ίσοι:

$[L]: \quad 1 = a + c \Rightarrow a = 1 - c$

$[T]: \quad -1 = -2c \Rightarrow \boxed{c = 1/2}$ $\Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{b = -1/2}$

$[M]: \quad 0 = a + b \Rightarrow a = -b$

Αντικατάσταση στην (A) δίνει: $\upsilon \propto \sqrt{\frac{Tl}{m}} \propto \sqrt{\frac{T}{m/l}} \Rightarrow \upsilon \propto \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

όπου $\mu = \frac{m}{l}$ η γραμμική πυκνότητα