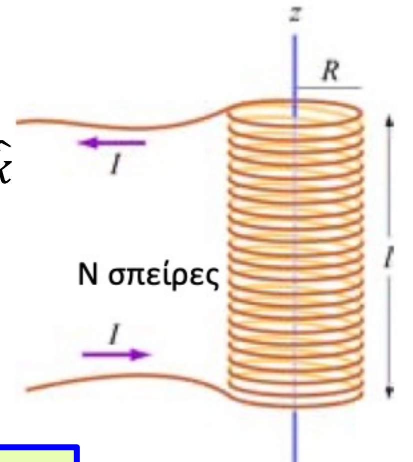
# Αμοιβαία Επαγωγή - Αυτεπαγωγή
# Ενέργεια Μαγνητικού Πεδίου

# Παράδειγμα: Συντελεστής αυτεπαγωγής πηνίου

Θα υπολογίσουμε τον συντελεστή αυτεπαγωγής ενός πηνίου που αποτελείται από $N$ σπείρες ακτίνας $R$, έχει μήκος $l$, διαρρέεται από ρεύμα $I$

Από τον νόμο του Ampere, έχουμε ότι το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του πηνίου δίνεται από την σχέση: $\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{l}\hat{k}$




Η μαγνητική ροή που διαπερνά κάθε σπείρα είναι: $\Phi_m = \frac{\mu_0 N I}{l}\pi R^2$

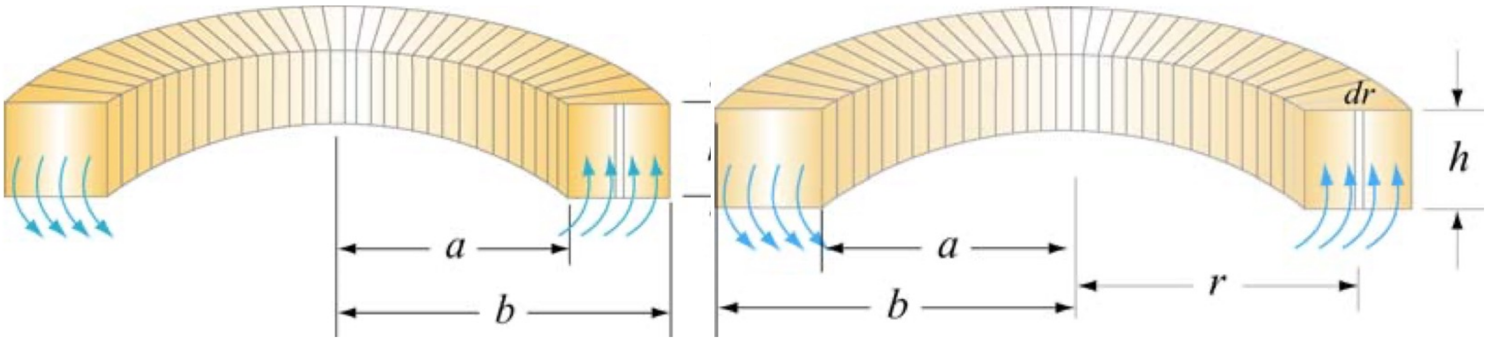
Επομένως, ο συντελεστής αυτεπαγωγής θα είναι:

$$L = \frac{N\Phi_m}{I} = N\frac{\mu_0 N I}{lI}\pi R^2 \Rightarrow L = \frac{N\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 \pi N^2}{l}R^2 \Rightarrow \boxed{L = \mu_0 \pi n^2 l R^2}$$

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής εξαρτάται από όλους τους γεωμετρικούς παράγοντες και είναι ανεξάρτητος του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο.

# Παράδειγμα: Συντελεστής αυτεπαγωγής τοροειδούς

Θα υπολογίσουμε τον συντελεστή αυτεπαγωγής ενός τοροειδούς πηνίου που αποτελείται από $N$ σπείρες, έχει το σχήμα ορθογωνίου, εσωτερική ακτίνα $\alpha$, εξωτερική ακτίνα $b$ και ύψος σπείρας $h$.




Σύμφωνα με τον νόμο του Ampere, το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του τοροειδούς δίνεται από τη σχέση:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \oint B\,ds = B\oint ds = B2\pi r = \mu_0 NI \Rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

Η μαγνητική ροή που περνά μέσω μιας σπείρας είναι: $\Phi_m = \iint \vec{B}\cdot d\vec{A}$ όπου $d\vec{A} = hdr$

$$\Rightarrow \Phi_m = \int_a^b \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} hdr \Rightarrow \Phi_m = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} h\ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \Phi_m^{o\lambda} = N\Phi_m = \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} h\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

# Παράδειγμα: Συντελεστής αυτεπαγωγής τοροειδούς

Επομένως ο συντελεστής αυτεπαγωγής είναι: $L = \frac{\Phi_m^{o\lambda.}}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} ln\left(\frac{b}{a}\right)$

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, ο συντελεστής αυτεπαγωγής είναι ανεξάρτητος του ρεύματος και εξαρτάται από γεωμετρικά χαρακτηριστικά.

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου $a \gg b - a$. Αναπτύσσουμε τον *log* οπότε:

$$ln\left(\frac{b}{a}\right) = ln\left(1 + \frac{b-a}{a}\right) \approx \frac{b-a}{a}$$

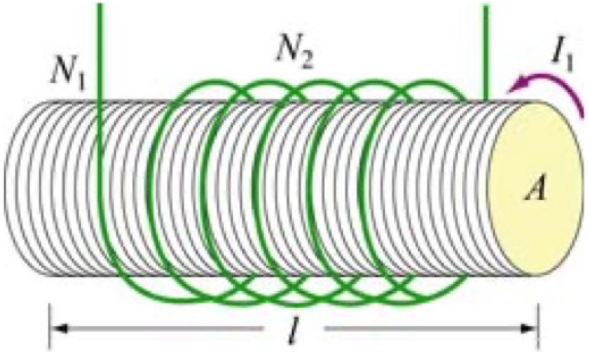
και ο συντελεστής της αυτεπαγωγής γίνεται: $L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\frac{b-a}{a} \Rightarrow L \approx \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi a}$

όπου $A = h(b-a)$ το εμβαδό της σπείρας και $l = 2\pi a$ το μήκος του τοροειδούς.

Παρατηρούμε ότι στο όριο αυτό, ο συντελεστής αυτεπαγωγής για το τοροειδές και το πηνίο συμπίπτουν.

# Παράδειγμα: Συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής μεταξύ ενός βρόχου που περιβάλει σωληνοειδές

Ένα μακρύ σωληνοειδές μήκους $l$ και επιφάνειας διατομής $A$, αποτελείτε από $N_1$ σπείρες. Ένας δεύτερος μονωμένος βρόχος είναι τυλιγμένος γύρω από το σωληνοειδές.




(α) Θα βρεθεί η αμοιβαία επαγωγή μεταξύ των δύο πηνίων υποθέτοντας ότι ροή δεν χάνεται.

(β) Θα βρεθεί η σχέση της αμοιβαίας επαγωγή $M$ με τους συντελεστές αυτεπαγωγής $L_1$ και $L_2$ των δύο πηνίων.

(α) Η μαγνητική ροή που περνά από κάθε σπείρα του εξωτερικού βρόχου εξαιτίας του σωληνοειδούς είναι: .

$\Phi_{21} = BA = \dfrac{\mu_0 N_1 I_1}{l} A$ όπου $B = \mu_0 N_1 I_1 / l$ το ομογενές μαγνητικό πεδίο του σωληνοειδούς

Επομένως ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής θα είναι: $M = \dfrac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \dfrac{\mu_0 N_1 N_2}{l} A$

(β) Είδαμε ότι ο συντελεστής αυτεπαγωγής για ένα πηνίο είναι: $L_1 = \dfrac{N_1 \Phi_{11}}{I_1} = \dfrac{\mu_0 N_1^2}{l} A$

όπου $\Phi_{11}$ η μαγνητική ροή που περνά από μια σπείρα του σωληνοειδούς και προέρχεται από το πεδίο που δημιουργεί το ρεύμα $I_1$.

# Παράδειγμα: Συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής μεταξύ ενός βρόχου που περιβάλει σωληνοειδές

Παρόμοια θα πάρουμε για τον δεύτερο (εξωτερικό) βρόχο ότι ο συντελεστής αυτεπαγωγής θα είναι:

$$L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2}{l} A$$

Ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής συναρτήσει των $L_1$ και $L_2$ είναι: $M = \sqrt{L_1 L_2}$

Γενικά, ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής συναρτήσει των $L_1$ και $L_2$ είναι:

$M = k\sqrt{L_1 L_2}$ όπου $0 \leq k \leq 1$ ο συντελεστής σύζευξης

Στις εξεταζόμενες περιπτώσεις υποθέτουμε ότι όλη η ροή που παράγει το σωληνοειδές περνά από το εξωτερικό βρόχο και το ανάποδο.

# Ενέργεια που αποθηκεύεται σε μαγνητικό πεδίο

Είδαμε ότι ο συντελεστής αυτεπαγωγής υποδηλώνει την αντίσταση ενός πηνίου στην αλλαγή του ρεύματος που το διαρρέει.

Επομένως η εξωτερική πηγή θα πρέπει να δαπανήσει έργο ώστε να αποκαταστήσει ένα ρεύμα διαμέσου του πηνίου.

Από το θεώρημα έργου-κινητική ενέργειας συμπεραίνουμε ότι ενέργεια μπορεί να αποθηκευτεί σε ένα πηνίο. Ο ρόλος που παίζει ένα πηνίο στην περίπτωση του μαγνητισμού είναι ανάλογος του ρόλου που παίζει ο πυκνωτής στην περίπτωση της ηλεκτροστατικής.

Η ισχύς ή διαφορετικά ο ρυθμός που μια εξωτερική ΗΕΔ, $\mathcal{E}_{\varepsilon\xi.}$, δουλεύει για να αποκαταστήσει το ρεύμα που διαρρέει ένα πηνίο είναι ως ακολούθως:

$$P_L = \frac{dW_{\varepsilon\xi.}}{dt} = I\mathcal{E}_{\varepsilon\xi.}$$

Αν στο κύκλωμα υπάρχει μόνο η εξωτερική πηγή και το πηνίο, τότε: $\mathcal{E}_{\varepsilon\xi.} = -\mathcal{E}_L$

Από αυτό συνεπάγεται ότι: $P_L = \frac{dW_{\varepsilon\xi.}}{dt} = I\mathcal{E}_{\varepsilon\xi.} = -I\mathcal{E}_L \Rightarrow P_L = IL\frac{dI}{dt}$

# Ενέργεια που αποθηκεύεται σε μαγνητικό πεδίο

Αν το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο αυξάνει, $dI/dt > 0$, τότε $P > 0$ που σημαίνει ότι η εξωτερική πηγή καταναλώνει έργο στο κύκλωμα ώστε να μεταφέρει ενέργεια στο πηνίο και η εσωτερική ενέργεια του πηνίου αυξάνει.

Αν το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο ελαττώνεται, $dI/dt < 0$, τότε $P < 0$ που σημαίνει ότι η εξωτερική πηγή παίρνει ενέργεια από το πηνίο ελαττώνοντας την ενέργειά του.

Το ολικό έργο που παράγει η εξωτερική πηγή για να φέρει το ρεύμα από την τιμή 0 στη τιμή $I$ είναι:

$$W_{\varepsilon\xi.} = \int dW_{ex.} = \int_0^I LI'dI' = \frac{1}{2}LI^2$$

Αυτό ισούται με την μαγνητική ενέργεια που αποθηκεύεται στο πηνίο: $U_M = \frac{1}{2}LI^2$

Η τελευταία εξίσωση είναι ανάλογη της ενέργειας που αποθηκεύεται σε πυκνωτή στην ηλεκτροστατική: $U_{E.} = \frac{1}{2}QC = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

Επομένως καθαρά ενεργειακά, υπάρχει σαφής διαχωρισμός μεταξύ αντιστάτη και πηνίου. Όταν ρεύμα *I* ρέει διαμέσου μιας αντίστασης, ενέργεια καταναλώνεται στην αντίσταση και την ζεσταίνει ανεξάρτητα αν το ρεύμα είναι σταθερό ή μεταβάλλεται.

Στην περίπτωση του πηνίου, ενέργεια εισέρχεται στο πηνίο μόνο όταν $dI/dt > 0$ και αποθηκεύεται στο πηνίο. Καταναλώνεται αργότερα όταν $dI/dt < 0$.

Όταν το ρεύμα που περνά από ένα πηνίο είναι σταθερό, τότε δεν υπάρχει αλλαγή στην ενέργεια εφόσον: $P_L = LIdI/dt = 0$

# Ενέργεια αποθηκευμένη σε σωληνοειδές

Θεωρούμε ένα μακρύ σωληνοειδές, μήκους $l$, $N$ σπειρών ακτίνας $R$ που διαρρέεται από ρεύμα *I*. Πόση ενέργεια είναι αποθηκευμένη στο σωληνοειδές;

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση της ενέργειας: $U_M = \frac{1}{2}LI^2$

Αλλά : $L = \frac{\mu_0 N^2}{l}A$

Αντικατάσταση της 2ης στην 1η δίνει: $U_M = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 A N^2 I^2}{l} = \frac{1}{2}\mu_0 \pi l R^2 n^2 I^2$

Μπορούμε να εκφράσουμε το αποτέλεσμα συναρτήσει του πεδίου, $B = \mu_0 n I$ οπότε θα έχουμε:

$$U_M = \frac{1}{2}\frac{\pi l R^2 B^2}{\mu_0}$$

Αλλά $\pi l R^2$ είναι ο όγκος που καταλαμβάνει το πηνίο

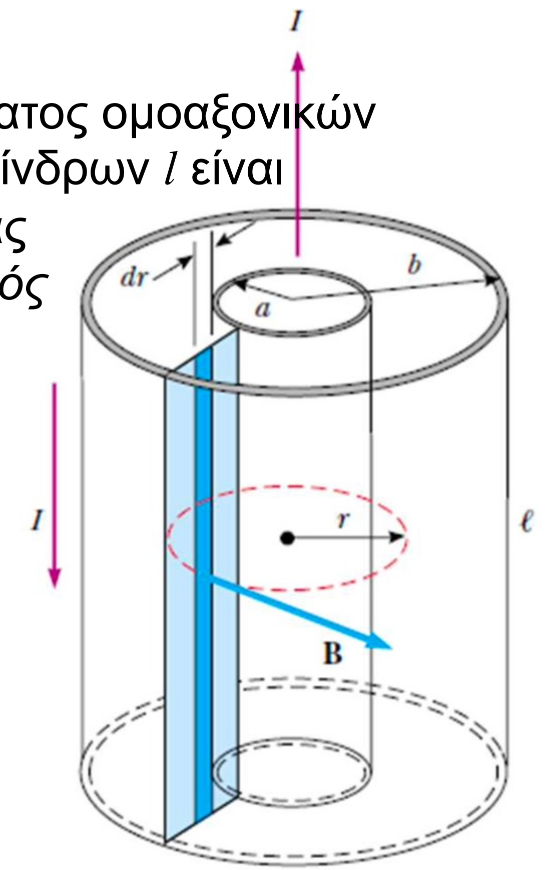
Ορίζουμε την πυκνότητα μαγνητικής ενέργειας: $\boxed{u_M = \frac{U_M}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0}}$

Η παραπάνω έκφραση ισχύει τόσο για ομογενές όσο και μη ομογενές πεδίο.

Το αποτέλεσμα μπορεί να συγκριθεί με αυτό του ηλεκτρικού πεδίου: $\boxed{u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$

# Παράδειγμα:

Θα υπολογίσουμε τον συντελεστή αυτεπαγωγής ενός συστήματος ομοαξονικών κυλίνδρων με ακτίνες α και b. Θεωρούμε ότι το μήκος των κυλίνδρων $l$ είναι πολύ μεγάλο και οι κύλινδροι διαρρέονται από αντίθετης φοράς ρεύματα, έντασης $I$. *Το σύστημα αυτό αποτελεί προσέγγιση ενός ομοαξονικού καλωδίου.*




Όταν το σύστημα διαρρέεται από τα αντίθετα ρεύματα, δημιουργείται μαγνητικό πεδίο το οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε με τον νόμο του Ampere.

- Για $r < a$: $B_1 = 0$
- Για $a \leq r \leq b$: θα πάρουμε: $\oint_C \vec{B}_2 \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \Rightarrow$

$$\oint_C B ds = \mu_0 I \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B2\pi r = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- Για $r \geq b$: $B_3 = 0$

Από το γραμμοσκιασμένο ορθογώνιο του σχήματος με διαστάσεις $(b-a)\times l$ διέρχεται μαγνητική ροή $\Phi_m$ που μπορούμε υπολογίσουμε θεωρώντας τα στοιχειώδη εμβαδά των έντονα γραμμοσκειασμένων ορθογωνίων: $d\vec{A} = l\hat{\imath}\times dr\hat{\jmath} \Rightarrow d\vec{A} = ldr\hat{k}$

# Παράδειγμα

Θα έχουμε επομένως: $d\Phi_m = B_2 l dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr$

Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε: $\Phi_m = \int d\Phi_m = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \int_a^b \frac{dr}{r} \Rightarrow$

$$\Phi_m = \frac{\mu_0 l I}{2\pi} ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Από τον ορισμό της επαγόμενης τάσης θα έχουμε: $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} ln\left(\frac{b}{a}\right)\frac{dI}{dt}$

Από τον ορισμό της τάσης αυτεπαγωγής έχουμε: $\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}$

Επομένως καταλήγουμε ότι ο συντελεστής αυτεπαγωγής είναι: $L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} ln\left(\frac{b}{a}\right)$

# Παράδειγμα

Θεωρούμε ένα πλατύ χάλκινο έλασμα πλάτους *w*, το οποίο τυλίγεται σε κύλινδρο ακτίνας *R* , όπως στο σχήμα. Το έλασμα διαρρέεται από ρεύμα *I* το οποίο είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα κατά το πλάτος της επιφάνειας του ελάσματος. Με τον τρόπο αυτό σχηματίζεται ένα σωληνοειδές μια σπείρας.


(α) Ποιο το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου *B* μέσα στο σωληνωτό τμήμα. Υποθέτουμε ότι το μαγνητικό πεδίο έξω από το σωληνοειδές αυτό τμήμα είναι αμελητέο.

(β) Ποιος είναι ο συντελεστής αυτεπαγωγής του σωληνοειδούς αυτού, αγνοώντας τις επίπεδες προεκτάσεις.


Θεωρούμε μια κλειστή καμπύλη που να περνά από το έλασμα, όπως στο σχήμα, και εφαρμόζουμε το νόμο του Ampere:

$$\oint_{ABCDA} B ds = \mu_0 I \Rightarrow \cancelto{0}{\int_A^B Bd} + \cancelto{0}{\int_B^C BW} + \cancelto{0}{\int_C^D Bd} + \int_D^A BW = \mu_0 I \Rightarrow BW = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{W}$$

Από τις σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi_m}{dt} \\ \mathcal{E} &= -L\frac{dI}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow LI = \Phi_m \Rightarrow L = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\pi R^2 B}{I} = \frac{\pi R^2 \mu_0 I}{WI} \Rightarrow L = \frac{\mu_0 \pi R^2}{W}$$