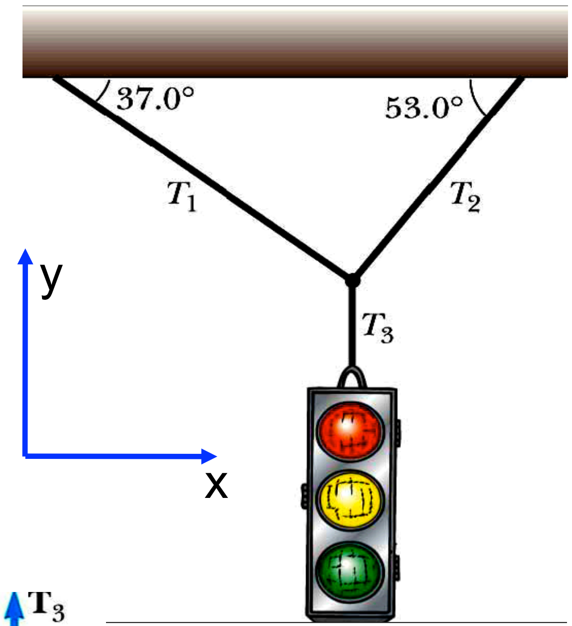
Ισορροπία – Παράδειγμα

Δεν υπάρχει κίνηση στο σηματοδότη οπότε βρίσκεται σε ισορροπία και η επιτάχυνση είναι μηδέν.



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = 0 \\ \sum \vec{F}_y = 0 \end{cases}$$

Ανάλυση του προβλήματος

2 σώματα (σηματοδότης – σημείο ένωσης σχοινιών)

2 διαγράμματα απελευθερωμένου σώματος

- Συνθήκη ισορροπίας στο σηματοδότη

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow T_3 - F_g = 0 \Rightarrow T_3 = F_g \quad (1)$$

- Συνθήκη ισορροπίας στο κόμπο

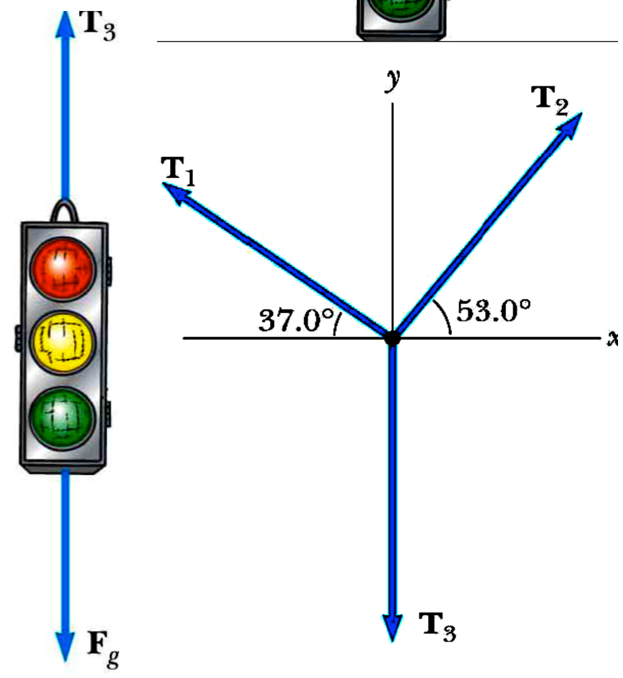
$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow T_2 \cos\left(53^0\right) - T_1 \cos\left(37^0\right) = 0$$

$$\Rightarrow T_2 \cos\left(53^0\right) = T_1 \cos\left(37^0\right) \quad (2)$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow T_1 \sin\left(37^0\right) + T_2 \sin\left(53^0\right) - T_3 = 0$$

$$\Rightarrow T_1 \sin\left(37^0\right) + T_2 \sin\left(53^0\right) = T_3 = F_g \quad (3)$$

Σύστημα 2 εξισώσεων (2,3) με 2 αγνώστους

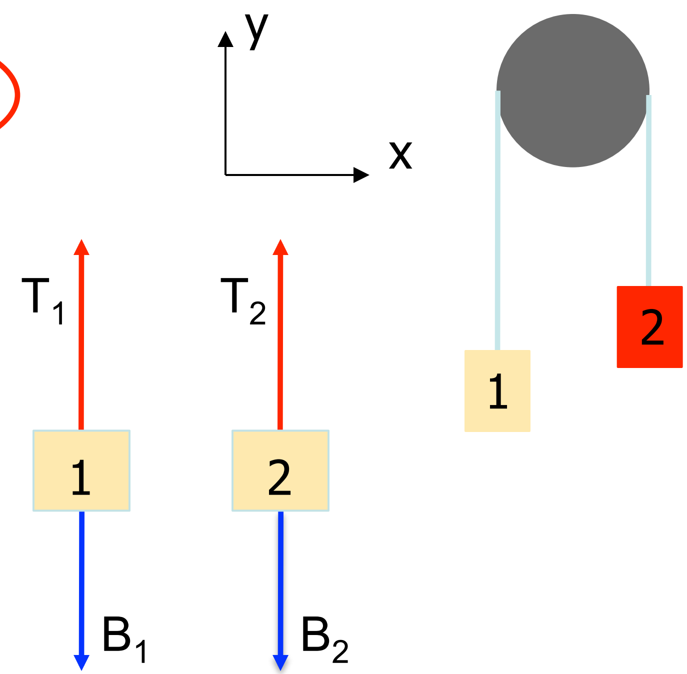


Τάση νήματος - τροχαλία

- Δυο σώματα συνδέονται μεταξύ τους με σχοινί μέσω μιας τροχαλίας αμελητέας μάζας. Τα δυο σώματα είναι σε ισορροπία όπως στο σχήμα.

➡ Συγκρίνετε τις μάζες των 2 σωμάτων

(A) $M_1>M_2$ (B) $M_1<M_2$ (Γ) $M_1=M_2$



$\sum \vec{F} = 0$ ισορροπία

$$T_1 - B_1 = 0 \Rightarrow T_1 = m_1 g$$

$$T_2 - B_2 = 0 \Rightarrow T_2 = m_2 g$$

Η τάση του νήματος είναι
ίδια σε όλο το μήκος του σχοινιού

$$T_1 = \mathrm{T}_2$$

Επομένως: $m_1 = m_2$

Παρουσία συνισταμένης δύναμης

Σε ένα σώμα ασκείται μη μηδενική συνισταμένη δύναμη τότε υπάρχει επιτάχυνση

Κάνουμε το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος

Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Newton

Οι δυνάμεις που δρουν είναι:

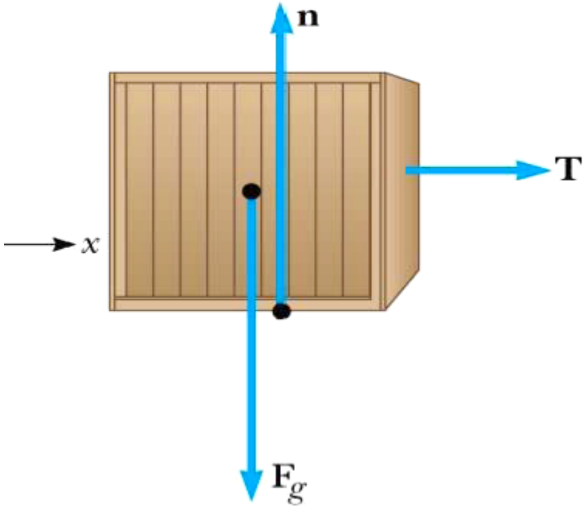
το βάρος F_g

η τάση T

η αντίδραση N του δαπέδου

$$\sum F_x = T = ma_x$$

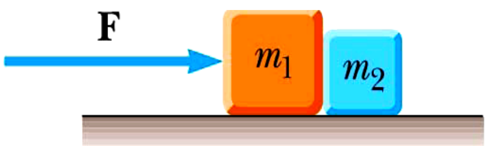
$$\sum F_y = F_g - n = ma_y = 0$$



Περίπτωση πολλών σωμάτων

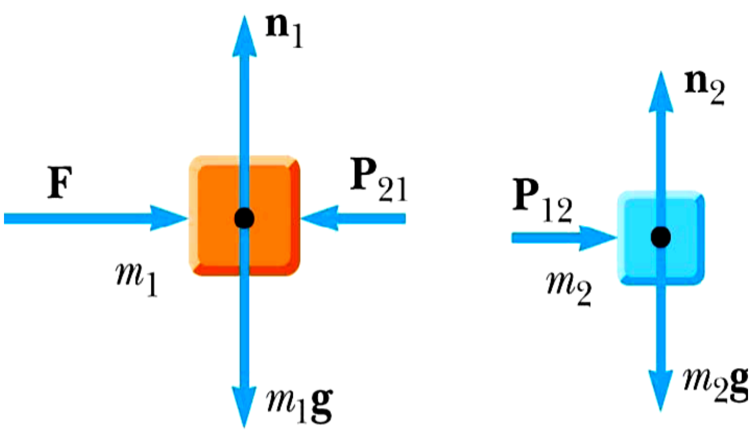
Αν πολλά σώματα συνδέονται μεταξύ τους ή εφάπτονται τότε ο νόμος του Newton μπορεί να εφαρμοστεί στο σύστημα σα να είναι ένα σώμα ή σε κάθε σώμα ξεχωριστά

(α) Λαμβάνουμε το σύστημα σαν ένα σώμα



$$\sum F_x = M_{\sigma\upsilon\sigma\tau} a_x \Rightarrow F = \left(m_1 + m_2\right) a_x$$

(β) Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα εφαρμόζοντας το νόμο του Newton σε κάθε σώμα ξεχωριστά



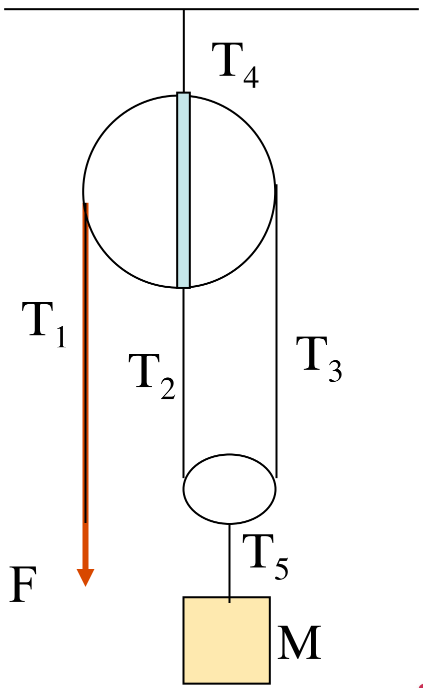
Στο x–άξονα για m_1: $F - P_{21} = m_1 a_x$

Στο x–άξονα για m_2: $P_{12} = m_2 a_x$

Αλλά $|P_{12}| = |P_{21}|$ δράση – αντίδραση

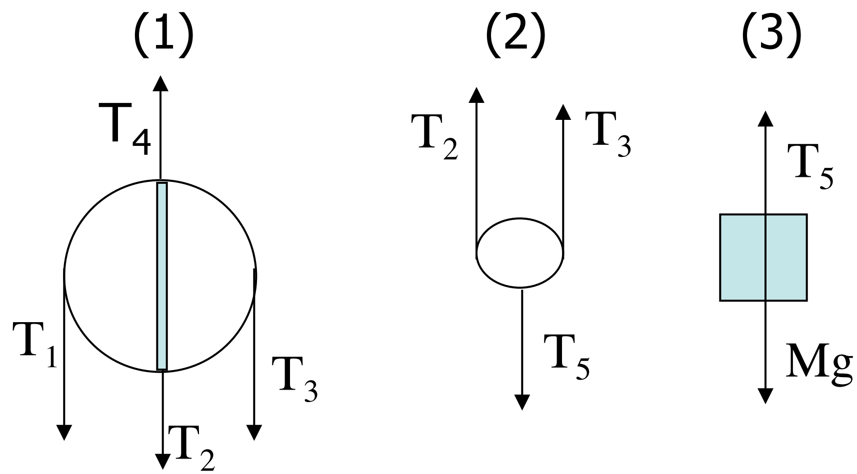
Οπότε $F - m_2 a_x = m_1 a_x \Rightarrow F = \left(m_1 + m_2\right) a_x$

Παράδειγμα τροχαλίας



Ζητάμε να βρούμε τις τάσεις σε κάθε τμήμα του συστήματος και την δύναμη *F* για να μην κινηθεί η μάζα *M*.

Διαγράμματα απελευθερωμένων σωμάτων



Η τάση στο σχοινί είναι σταθερή: $T_1=T_3=T_2$

Σύμφωνα με το 2ο νόμο:

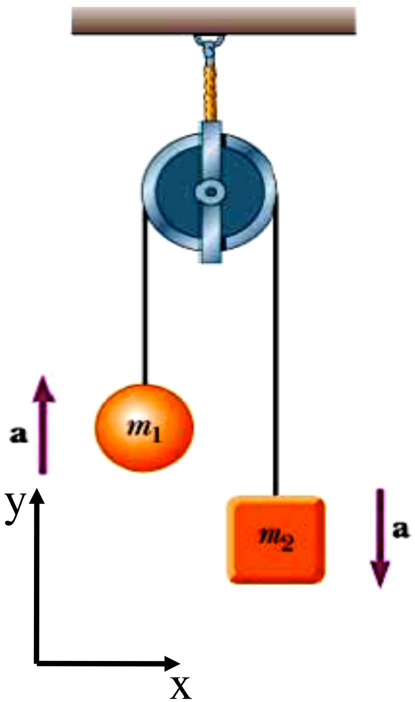
(3): $\sum F=0 \Rightarrow T_5 - Mg = 0 \Rightarrow T_5 = Mg$

(2): $\sum F=0 \Rightarrow T_2 + T_3 - T_5 = 0 \Rightarrow 2T_2 = T_5 \Rightarrow T_2 = T_1 = T_3 = \dfrac{Mg}{2}$

(1): $\sum F=0 \Rightarrow T_4 - T_1 - T_2 - T_3 = 0 \Rightarrow T_4 = \dfrac{3Mg}{2}$

$F = T_1 = Mg/2$

Μηχανή του Atwood



Οι μόνες δυνάμεις που δρουν είναι η Τάση και το Βάρος

Από τη στιγμή που τα σώματα είναι συνδεδεμένα, όλα έχουν την ίδια επιτάχυνση

Για το m_1: $\sum F_y = m_1 a \;\Rightarrow T - m_1 g = m_1 a \;\Rightarrow T = m_1 g + m_1 a$

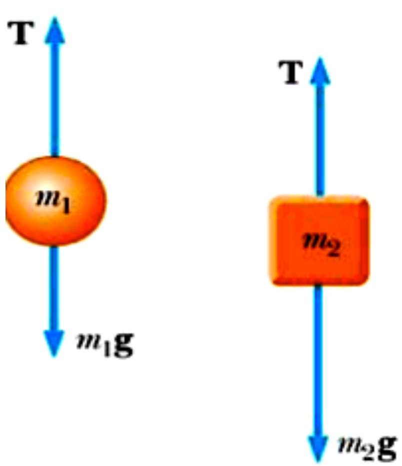
Για το m_2: $\sum F_y = -m_2 a \Rightarrow T - m_2 g = -m_2 a \Rightarrow T = m_2 g - m_2 a$

$$\Rightarrow m_2 g - m_2 a = m_1 g + m_1 a \;\Rightarrow (m_2 - m_1) g = (m_1 + m_2) a$$

$$\boxed{a = \frac{(m_2 - m_1) g}{(m_1 + m_2)} < g}$$

Ποια είναι η Τ?

$$T = m_1 (a + g) = m_1 \left(\frac{(m_2 - m_1) g}{(m_1 + m_2)} + g \right) = \frac{2 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} g$$



Θα μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα θεωρώντας m_1,m_2 σαν ένα σύστημα με μάζα $M=(m_1+m_2)$ κινούμενα κάτω από μια δύναμη $F = (m_2 - m_1) g$

$$a = \frac{F}{M} = \frac{(m_2 - m_1) g}{(m_1 + m_2)}$$

Παράδειγμα Τάσεων

Το παιδί της διπλανής εικόνας θέλει να φθάσει ένα μήλο στο δέντρο χωρίς να σκαρφαλώσει. Χρησιμοποιεί ένα σχοινί αμελητέας μάζας και μια αβαρή τροχαλία. Τραβάει το σχοινί προς τα κάτω και το δυναμόμετρο δείχνει μια δύναμη F=250N. Το βάρος του παιδιού είναι 320N ενώ το βάρος της καρέκλας είναι 160N. Προσδιορίστε:

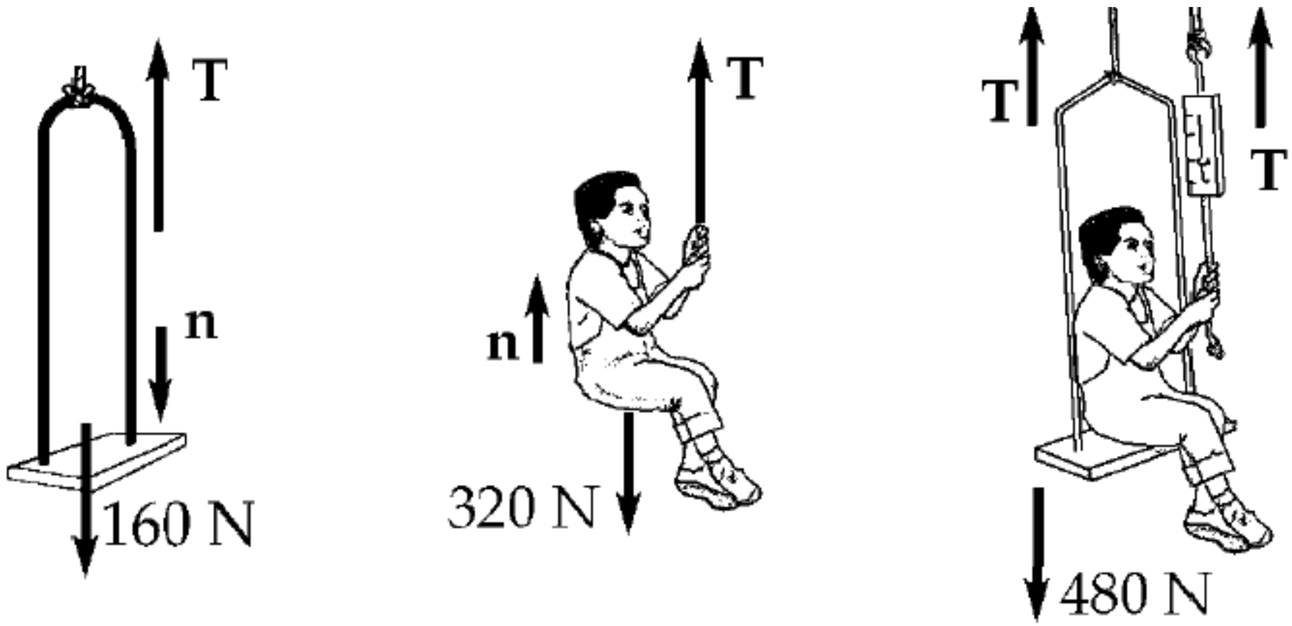
(α) Τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος για το παιδί και την καρέκλα ξεχωριστά και για τα δύο σαν να αποτελούσαν ένα σύστημα.

(β) Το μέτρο και διεύθυνση της επιτάχυνσης του συστήματος.

(γ) Την δύναμη που το παιδί ασκεί στην καρέκλα.

Παράδειγμα τάσεων

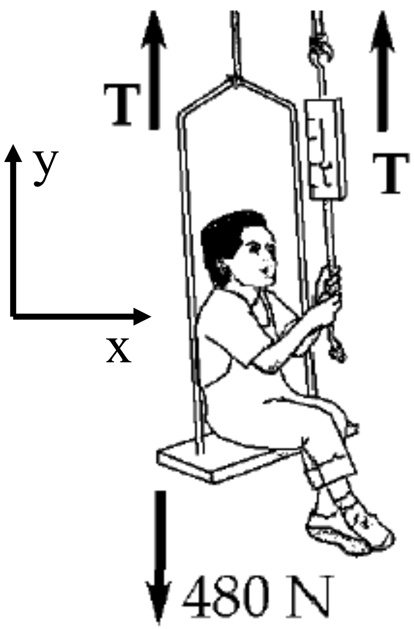
Τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος για την καρέκλα (α), το παιδί (β) και για το σύστημα του παιδιού-καρέκλας (γ).



(α) (β) (γ)

Παράδειγμα τάσεων

(β) Να βρεθεί το μέτρο και διεύθυνση της επιτάχυνσης του συστήματος



Θεωρούμε ότι το σύστημά μας αποτελείται από το παιδί και την καρέκλα.

Προσέξτε ότι 2 σχοινιά στηρίζουν το σύστημα και η τάση σε κάθε σχοινί είναι T=250N όση δείχνει το δυναμόμετρο.

Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Newton:

$$\sum F = ma \Rightarrow 2T - 480 = \frac{480}{g} a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{(2 \times 250 - 480)g}{480} \Rightarrow a = 0.408 m/s^2$$

Η επιτάχυνση του συστήματος έχει φορά προς τα πάνω.

Παράδειγμα τάσεων

(γ) Να βρεθεί η δύναμη που ασκεί το παιδί στην καρέκλα

Θεωρούμε ότι το σύστημά μας αποτελείται από το παιδί.

Η δύναμη που ασκεί το παιδί στην καρέκλα είναι ίση και αντίθετη με την αντίδραση **n** που δέχεται το παιδί από την καρέκλα (3ος νόμος του Newton).

Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Newton στο σύστημα:

$$\sum F = m_\pi a \Rightarrow T + n - m_\pi g = m_\pi a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 320 - 250 + \underbrace{\frac{320a}{g}}_{m_{\pi\alpha\iota\delta\iota o\acute{\upsilon}}} \Rightarrow \boxed{n = 83.3N}$$

Δυνάμεις τριβής

Οι δυνάμεις αυτές είναι πολύ σημαντικές

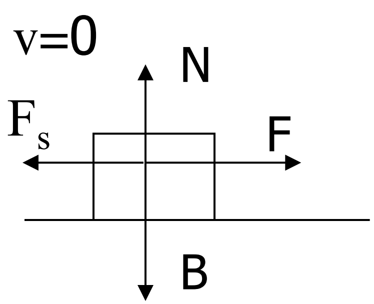
Σκεφθείτε πόσο δύσκολο είναι να περπατήσετε πάνω σε πάγο.

Η τριβή αναπτύσσεται μεταξύ 2 επιφανειών που έρχονται σε επαφή και η μία αρχίζει να κινείται σε σχέση με τη άλλη.

Η διεύθυνσή τους είναι αντίθετη της φοράς κίνησης

Δεν ξέρουμε τι ακριβώς συμβαίνει αλλά υπάρχουν μερικοί εμπειρικοί κανόνες

- **Στατική τριβή** $F_s \leq \eta_s N$



Η δύναμη της τριβής είναι ανάλογη της κάθετης δύναμης (αντίδρασης της επιφάνειας) και ανεξάρτητη της ταχύτητας ή του εμβαδού επαφής

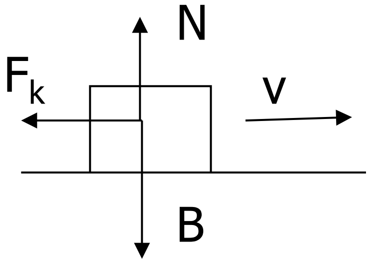
Η σταθερά η_s δίνει μια μέγιστη τιμή.

Προσοχή: η δύναμη της στατικής τριβής έχει οποιαδήποτε τιμή με μέγιστη τιμή: $n_s N$ που λαμβάνεται τι στιγμή που θα κινηθεί το σώμα

Η δύναμη F_s δεν θα 'ναι ίση με $\eta_s N$ αν τραβήξουμε με μια μικρή F

Δυνάμεις τριβής

- **Κινητική τριβή** $F_k = \eta_k N$



Η δύναμη της τριβής είναι ανάλογη της κάθετης δύναμης (αντίδρασης επιφάνειας) και ανεξάρτητη της ταχύτητας ή του εμβαδού επαφής (προσέγγιση)

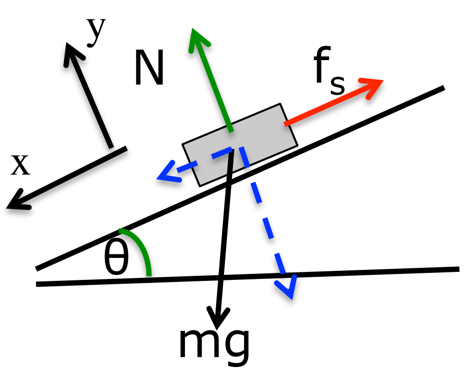
Η σταθερά η_κ εξαρτάται από το είδος και των 2 επιφανειών σε επαφή

Οι προηγούμενοι εμπειρικοί νόμοι καλοί για τους σκοπούς μας.
Γενικά $\eta_\varsigma > \eta_\kappa$

Μπορούμε να κρατήσουμε κάτι που κινείται με μικρότερη δύναμη από αυτή που χρειάστηκε για να το θέσουμε σε κίνηση

Σώμα σε κεκλιμένο επίπεδο και τριβή

Σώμα βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Ποιος ο συντελεστής στατικής τριβής



Το σώμα ισορροπεί εξαιτίας της ύπαρξης της δύναμης της στατικής τριβής f_s που αντιτίθεται στη κίνηση του προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

Εφόσον το σώμα δεν κινείται $f_s \le f_s^{max} = \mu_s N$

Αυξάνοντας τη γωνία του κεκλιμένου επιπέδου, θ, η συνιστώσα της βαρυτικής δύναμης στη x-διεύθυνση αυξάνει και επομένως η τριβή μέχρι f_s^{max}

Τη στιγμή που συμβαίνει αυτό το σώμα είναι έτοιμο να γλυστρήσει πάνω στην επιφάνεια και όταν αρχίσει να κινείται έχουμε κινητική τριβή

Στην οριακή αυτή περίπτωση, $f_s = f_s^{max} = \mu_s N$

Εφαρμόζοντας το 2º νόμο του Newton θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\text{x-διεύθυνση: } mg\sin\theta - f_s = 0 \Rightarrow mg\sin\theta - \mu_s N = 0 \Rightarrow \mu_s N = mg\sin\theta \\ \text{y-διεύθυνση: } N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta\end{array}\right\} \Rightarrow$$

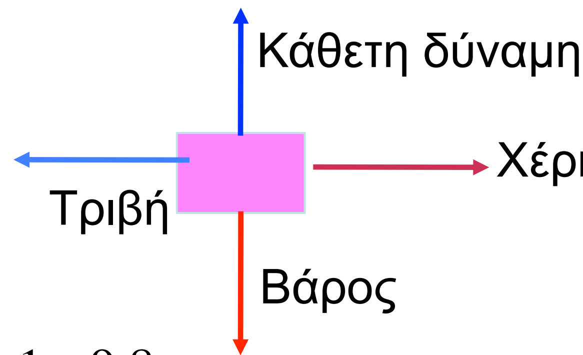
$$\mu_s mg\cos\theta = mg\sin\theta \Rightarrow \mu_s = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \mu_s = \tan\theta$$

Ανεξάρτητος της μάζας και διαστάσεων του σώματος!!

Τριβή

- Ποιά δύναμη απαιτείται ώστε το σώμα να κινείται με <u>σταθερή ταχύτητα</u>. Η μάζα του βιβλίου είναι 1kg, ο συντελεστής στατικής τριβής η_s=0.84 και ο συντελεστής της κινητικής τριβής η_κ=0.75.

Σταθερή ταχύτητα ➡ $\sum \vec{F} = 0$



x-διεύθυνση

$$F_{\chi\varepsilon\rho.} - F_{\tau\rho.} = 0$$

$$F_{\chi\varepsilon\rho.} = F_{\tau\rho.}$$

$$F_{\chi\varepsilon\rho.} = \eta_\kappa F_{\kappa\alpha\theta.}$$

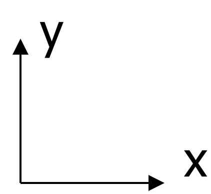
y-διεύθυνση

$$F_{\kappa\alpha\theta.} - F_{\beta\alpha\rho.} = 0$$

$$F_{\kappa\alpha\theta.} = F_{\beta\alpha\rho.} = mg$$

$$F_{\chi\varepsilon\rho.} = \eta_\kappa mg = 0.75 \times 1 \times 9.8$$

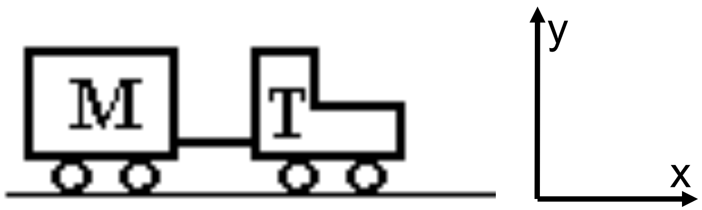
$$\Rightarrow F_{\chi\varepsilon\rho.} = 7.3N$$

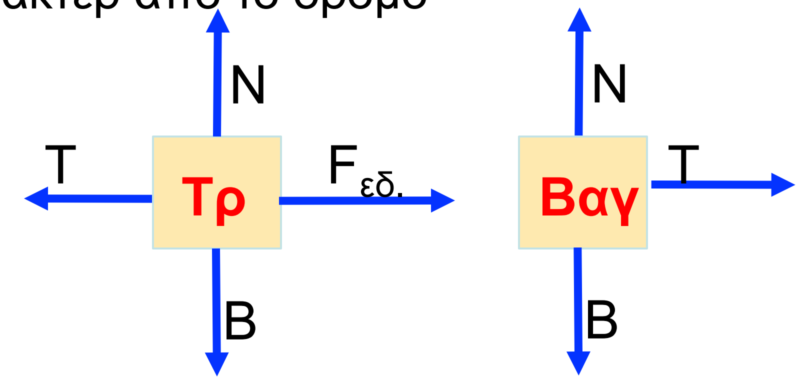


Παράδειγμα επιταχυνόμενης κίνησης

Ένα τρακτέρ Τ μάζας m_T=300Kg τραβά ένα βαγονάκι μάζας m_B=400kg με σταθερή δύναμη σε οριζόντιο δρόμο. Το σύστημα κινείται με σταθερή επιτάχυνση 1.5m/s^2.

- Να βρεθεί η οριζόντια δύναμη στο τρακτέρ από το δρόμο





x-διεύθυνση: Τρακτέρ

$$\sum F_x = m_T a \Rightarrow F_{\varepsilon\delta} - T = m_T a$$

$$\Rightarrow F_{\varepsilon\delta} = T + m_T a$$

x-διεύθυνση: Βαγονάκι

$$\sum F_x = m_{\mathrm{B}} a \Rightarrow T = m_{\mathrm{B}} a$$

$$\Rightarrow F_{\varepsilon\delta} = m_B a + m_T a \Rightarrow F_{\varepsilon\delta} = \left(m_B + m_T\right) a$$

- Να βρεθεί η καθαρή δύναμη που ασκείται στο τρακτέρ και στο βαγονάκι

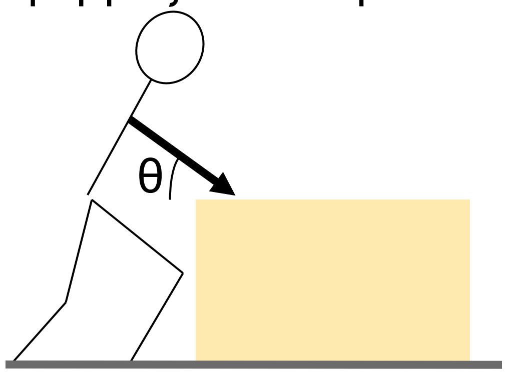
$$F_{\tau\rho.} = m_T a \Rightarrow F_{\tau\rho} = 300 \times 1.5 = 450\mathrm{N}$$

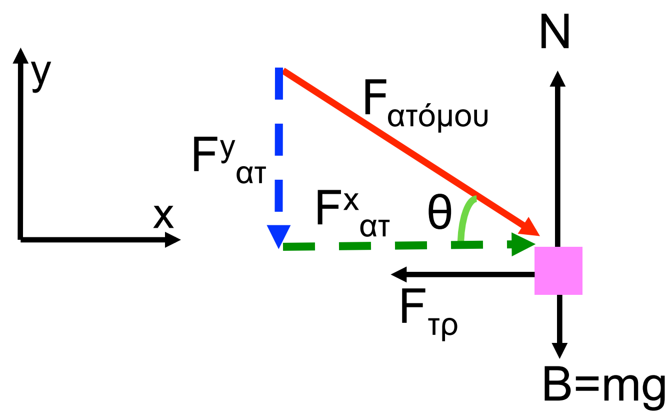
$$F_{\beta\alpha\gamma.} = m_{\mathrm{B}} a \Rightarrow F_{\beta\alpha\gamma.} = 400 \times 1.5 = 600\mathrm{N}$$

Παράδειγμα δύναμης με γωνία

Ένα άτομο σπρώχνει ένα κιβώτιο μάζας 15kg με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος ενός δαπέδου. Ο συντελεστής κινητικής τριβής δαπέδου-κιβωτίου είναι $\eta_\kappa=0.4$. Το άτομο σπρώχνει το κιβώτιο με γωνία 25^o.

- Να βρεθεί η δύναμη που εφαρμόζει το άτομο





x-διεύθυνση:

$$\sum F_x = ma_x = 0 \quad \text{(υ=σταθ.)}$$

$$\Rightarrow F^x_{\alpha\tau} - F_{\tau\rho} = 0$$

$$F^x_{\alpha\tau} = F_{\alpha\tau}\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow F_{\alpha\tau}\cos(\theta) = F_{\tau\rho}$$

$$F_{\tau\rho.} = \eta_\kappa N$$

y-διεύθυνση:

$$\sum F_y = ma_y = 0$$

$$\Rightarrow N - B - F^y_{\alpha\tau} = 0$$

$$\Rightarrow N = B + F_{\alpha\tau}\sin(\theta)$$

$$\Rightarrow F_{\tau\rho.} = \eta_\kappa\left(B + F_{\alpha\tau}\sin(\theta)\right)$$

$$\Rightarrow F_{\alpha\tau}\left[\cos(\theta) - \eta_\kappa\sin(\theta)\right] = \eta_\kappa mg$$

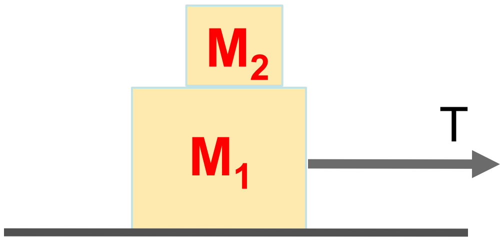
$$\Rightarrow F_{\alpha\tau} = \frac{\eta_\kappa mg}{\left[\cos(\theta) - \eta_\kappa\sin(\theta)\right]}$$

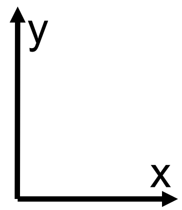
Η κάθετη δύναμη είναι μεγαλύτερη από το βάρος

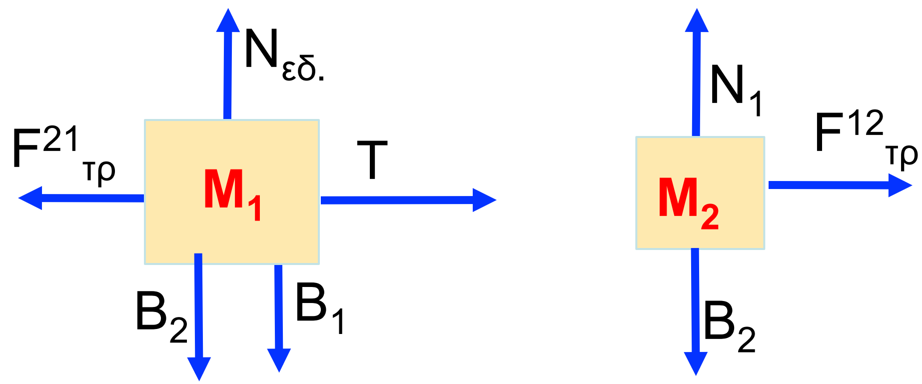
Παράδειγμα

Μια δύναμη T εφαρμόζεται σε σχοινί που είναι εξαρτημένο σε σώμα 1 προκαλώντας επιτάχυνση α=3m/s^2. Η τριβή κρατά το σώμα 2 πάνω στο σώμα 1 χωρίς να γλυστρά.

- Να βρεθεί η δύναμη T







x-διεύθυνση: Μάζα 2

$$\sum F_x = m_2 a \Rightarrow F_{12}^{\tau\rho} = m_2 a$$

x-διεύθυνση: Μάζα 1

$$\sum F_x = m_1 a \Rightarrow T - F_{21}^{\tau\rho} = m_1 a$$

3ος Νόμος:

$$\left|F_{21}^{\tau\rho}\right| = \left|F_{12}^{\tau\rho}\right|$$

$$\Rightarrow T = m_1 a + m_2 a \Rightarrow T = \left(m_1 + m_2\right) a$$

Ίδιο αποτέλεσμα σα να είχαμε ένα και μόνο σώμα με μάζα M = M_1 + M_2