**ΦΥΣ 331 – Χειμερινό Εξάμηνο 2017**

**Τελική Εξέταση**

**Πέμπτη 14/12/2017** **Διάρκεια**: **17:00 – 20:00**

Σας δίνονται 9 προβλήματα και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλα.
Σύνολο μονάδων 120.

**Καλή Επιτυχία**

Μερικοί τύποι που ίσως φανούν χρήσιμοι:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ και $\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$, $\gamma^\mu = (\beta, \beta\vec{\alpha})$ οπότε $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ $\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$

$\gamma^0 = \beta$ $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ $(\gamma^0)^2 = I$. Για $k = 1,2,3$ $(\gamma^k)^2 = -I$ $\gamma^{k\dagger} = -\gamma^k$ και $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^k\gamma^0$ $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$

$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ και $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. Ισχύει ότι $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$ $(\gamma^5)^2 = I$ και $\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0$

**1. [10μ]**

Για ένα σωματίδιο με spinor $u$, ικανοποιείται η εξίσωση του Dirac $(\not{p} - m)u = 0$. Να δείξετε ότι ικανοποείται επίσης η σχέση $\bar{u}(\not{p} - m) = 0$. Όπου $\not{p} = p_\mu \gamma^\mu$ και $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$.

**2. [10μ]**

Θεωρήστε ένα φορτισμένο πιόνιο, $\pi^+$, ενέργειας $E_\pi$ μετρούμενη στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Δουλεύοντας στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου βρείτε την ενέργεια $E_\nu$ του νετρίνο, που παράγεται από τη διάσπαση του πιονίου $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$ συναρτήσει της γωνίας $\theta$ που σχηματίζει το εκπεμπόμενο νετρίνο με την διεύθυνση κίνησης του διασπώμενου $\pi^+$ στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.

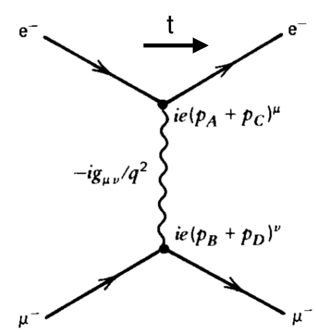
**3. [10μ]**

(**α**) Δείξτε ότι οι τελεστές $P_R \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma^5)$ και $P_L \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma^5)$, όπου $\gamma^5$ ο χειραλικός τελεστής, έχουν τις ιδιότητες να είναι δεξιόστροφος και αριστερόστροφος τελεστές προβολής. Δηλαδή ικανοποιούν τις σχέσεις: $P_i^2 = P_i \qquad P_L + P_R = 1$ και $P_L P_R = 0$. [**4μ**]

(**β**) Χρησιμοποιώντας την Dirac – Pauli αναπαράσταση των γ-πινάκων, δείξτε ότι σε υψηλές ενέργειες $\gamma^5 u^{(s)} \simeq \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix} u^{(s)}$ όπου $u^{(s)}$ είναι ο spinor του ηλεκτρονίου $u^{(s)} = N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix}$, $E > 0$ όπου $\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Θα πρέπει να δείξετε δηλαδή ότι στο σχετικιστικό όριο ο τελεστής χειραλικότητας $\gamma^5$ και ο τελεστής ελικότητας ταυτίζονται και ως παράδειγμα αυτό σημαίνει ότι $\frac{1}{2}(1-\gamma^5)u = u_L$ αντιπροσωπεύει ένα ηλεκτρόνιο με αρνητική ελικότητα. [**6μ**]

**4. [10μ]**

Θεωρήστε την σκέδαση ηλεκτρονίου-μιονίου σε μία θεωρία που τα σωματίδια αυτά δεν έχουν spin και οι μάζες τους είναι μηδενικές. Τα σωματίδια σχεδάζονται σε υψηλές ενέργειες και στην περίπτωση αυτή το πλάτος σκέδασης δίνεται από τη σχέση:



$$-iM = \left(ie\left(p_A + p_C\right)^{\mu}\right)\left(-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right)\left(ie\left(p_B + p_D\right)^{\nu}\right)$$

όπου $q = p_C - p_A$. Δείξτε ότι στην περίπτωση αυτή:

$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{CM} = \frac{a^2}{4s}\left(\frac{3+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)^2$ όπου $\theta$ η γωνία σκέδασης και $a = \frac{e^2}{4\pi}$.

5. **[10μ]**

Υπολογίστε την ελάχιστη ενέργεια που θα πρέπει να έχει μία δέσμη $\pi^-$ η οποία προσπίπτοντας σε στόχο πρωτονίων μπορεί να παράξει αντιπρωτόνια. Οι μάζες των πρωτονίων, νετρονίων, πιονίων είναι $m_p = m_{\bar{p}} = 938.3\, MeV/c^2$ $m_n = 939.6\, MeV/c^2$ και $m_{\pi^-} = 139.6\, MeV/c^2$ αντίστοιχα. <u>*Υπόδειξη:*</u> Σκεφτείτε τα σωματίδια που μπορεί να παρουσιάζονται στην τελική κατάσταση της διεργασίας αυτής.

6. **[15μ]**

Θεωρήστε τη διάσπαση του ουδέτερου ψευδοβαθμωτού πιονίου $\pi^0 \to \gamma\gamma$ σε δύο φωτόνια με διανύσματα πόλωσης $\vec{\varepsilon}_1$ και $\vec{\varepsilon}_2$ αντίστοιχα.

(**α**) Ποια η parity και στροφορμή της τελικής κατάστασης; Γιατί; [**3μ**]

(**β**) Ποια είναι η ενέργεια και ορμή για κάθε φωτόνιο στο κέντρο μάζας του πιονίου; [**3μ**]

(**γ**) Δείξτε ότι το τετράγωνο του πλάτους μετάβασης για τη διεργασία αυτή στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας του διασπώμενου πιονίου δίνεται από την σχέση $\left|M\right|^2 = A_0^2\left|\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2\right|^2 E^2$. Τι αντιπροσωπεύει η ποσότητα *E* στην προηγούμενη σχέση; [**4μ**]

<u>*Υπόδειξη*</u>: Είναι χρήσιμο να θεωρήσετε ότι η κυματοσυνάρτηση της τελικής κατάστασης μπορεί να γραφεί ως: $\Psi_{\tau\varepsilon\lambda} = \left|\gamma_1\gamma_2\right\rangle = D\left(\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2\right) + F\left(\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2\right)\cdot\hat{k}$ όπου *D* και *F* είναι συναρτήσεις της ενέργειας του φωτονίου.

(**δ**) Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα υπολογίστε το ρυθμό διάσπασης στο σύστημα αναφοράς του CM του διασπώμενου πιονίου. Πότε ο ρυθμός αυτός γίνεται μέγιστος; Ποια θα ήταν η απάντησή σας αν η ολική ενέργεια του πιονίου είναι 900 *MeV*; [**3μ**]

(**ε**) Μπορεί το πιόνιο να διασπαστεί σε 5 φωτόνια, $\pi^0 \to 5\gamma$ ; Γιατί ναί ή γιατί όχι [**2μ**].

**7.** [**20μ**]

Πρωτόνια τα οποία προέρχονται από μακρινά σημεία του σύμπαντος φθάνουν στη Γη και συγκρούονται με τα άτομα της ανώτερης ατμόσφαιρας και δημιουργούν κυρίως φορτισμένα και ουδέτερα πιόνια και σε μικρότερα ποσοστά καόνια και περισσότερο βαριά σωματίδια. Ωστόσο τα σωματίδια αυτής της κοσμικής καταιγίδας που φθάνουν στην επιφάνεια της θάλασσας αποτελείται κυρίως από υψηλής ενέργειας μιόνια ενώ το τμήμα της καταιγίδας με μικρότερη ενέργεια αντιστοιχεί σε ηλεκτρόνια και φωτόνια.

(**α**) Περιγράψτε τον μηχανισμό παραγωγής των μιονίων, φωτονίων και ηλεκτρονίων στην επιφάνεια της θάλασσας και σχεδιάστε τα σχετικά διαγράμματα Feynman. Εξηγήστε γιατί τα μιόνια είναι περισσότερο ενεργειακά σε σχέση με τα ηλεκτρόνια που έχουν χαμηλή ενέργεια. [**5μ**]

(**β**) Εξηγήστε γιατί στην επιφάνεια της θάλασσας, ο αριθμός των νετρίνο και αντι-νετρίνο μιονίων είναι διπλάσιος από τον αντίστοιχο αριθμό των νετρίνο και αντι-νετρίνο ηλεκτρονίων. [**1μ**]

(**γ**) Υποθέστε ότι το κεντρικό τμήμα της καταιγίδας, στην επιφάνεια της θάλασσας, περιέχει μια πολύ στενή, κατακόρυφη δέσμη μιονίων ενέργειας 1000 GeV η οποία διεισδύει στο υπέδαφος. Υποθέστε επίσης ότι οι απώλειες ενέργειας λόγω ιονισμού στα πετρώματα του υπεδάφους είναι σταθερή και ίση με 2 MeV $g^{-1}cm^{-2}$. Υπολογίστε το βάθος στο οποίο η δέσμη αυτή των μιονίων σταματά. Υποθέστε ότι η πυκνότητα των πετρωμάτων είναι σταθερή και ίση με 3 g $cm^{-3}$. [**2μ**]

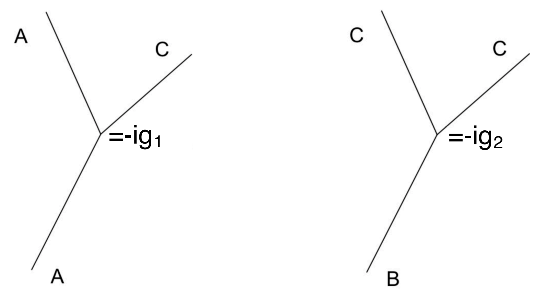
(**δ**) Εξηγήστε βασιζόμενοι στη θεωρία της απώλειας ενέργειας των φορτισμένων σωματιδίων λόγω ιονισμού για το κατά πόσο αναμένεται τα μιόνια να χάνουν ενέργεια ανά μονάδα μήκους να αυξάνεται, να ελαττώνεται ή να παραμένει σταθερή καθώς η ταχύτητα των μιονίων ελαττώνεται και πλησιάζει στο να σταμτήσουν. [**2μ**]

(**ε**) Ποιος ο ορισμός του μήκους ακτινοβολίας; [**3μ**]

(**στ**) Το τετράγωνο της γωνιακής απόκλισης που υφίσταται ένα σωματίδιο φορτίου z εξαιτίας της πολλαπλής σκέδασης Coulomb στην αλληλεπίδρασή του με υλικό πάχους *dx*, δίνεται από την εξίσωση: $\left(\theta_{RMS}\right)^2 = \left(\frac{zE_s}{p\beta}\right)^2 \times \frac{dx}{X_0}$ όπου $E_s = 21 MeV$ και *p*, *β*, $X_0$ είναι η ορμή, ταχύτητα του σωματιδίου και μήκος ακτινοβολίας του υλικού αντίστοιχα. Υπολογίστε το ακτινική *RMS* διασπορά που έχουν υποστεί τα μιόνια ενέργειας 1000 GeV της κοσμικής ακτινοβολίας πριν σταματήσουν στα πετρώματα του υπεδάφους. Λάβετε υπόψη ότι η ορμή των σωματιδίων δεν είναι σταθερή αλλά ελαττώνεται γραμμικά όπως περιγράφηκε στο προηγούμενο ερώτημα (3). Θεωρήστε ότι το μήκος ακτινοβολίας των πετρωμάτων είναι $X_0 = 25 g\ cm^{-2}$. [**4μ**] (**ζ**) Τα ηλεκτρόνια χάνουν ενέργεια μέσω ακτινοβολίας φωτονίων με ρυθμό που είναι $\sim(200)^2$ μεγαλύτερος από τον ρυθμό με τον οποίο χάνουν ενέργεια μιόνια της ίδιας ενέργειας. Σχεδιάστε τα διαγράμματα Feynman για την διεργασία Bremsstrahlung και δώστε προσεγγιστικούς τύπους για την ενέργεια που χάνεται από τα μιόνια και ηλεκτρόνια λόγω της ακτινοβολίας αυτής χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση. Εξηγήστε γιατί τα μιόνια χάνουν μικρότερη ενέργεια με την διεργασία αυτή. [**3μ**]

**8.** [**25μ**]

Θεωρήστε μία θεωρία με τρία σωματίδια A, B και C όλα χωρίς spin. Κάθε ένα από τα σωματίδια αυτά είναι επίσης και το αντισωματίδιό του. Το σωματίδιο C έχει μηδενική μάζα, $m_C = 0$, ενώ η μάζα του A είναι μεγαλύτερη από τη μάζα του B, $m_A > m_B$. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή υπάρχουν οι ακόλουθοι κανόνες Feynman:




(**α**) Ποια είναι η πιθανή τιμή της parity για κάθε σωματίδιο αν η θεωρία διατηρεί την parity; [**2μ**]

(**β**) Με ποιες προϋποθέσεις θα μπορούσε η τιμή της C συζυγίας φορτίου του σωματιδίου C να έχει τιμή -1; [**1μ**]

(**γ**) Ποια σωματίδια μπορούν να είναι ασταθή στη θεωρία αυτή και κάτω από ποιές συνθήκες; [**3μ**]

(**δ**) Υπολογίστε τον ρυθμό διάσπασης συναρτήσει των μαζών και των σταθερών σύζευξης για καθένα από τα ασταθή σωματίδια που ικανοποιούν τις συνθήκες που περιγράψατε στο προηγούμενο ερώτημα. Θεωρήστε μόνο χαμηλότερης τάξης ως προς τις σταθερές σύζευξης διεργασίες. [**5μ**]

(**ε**) Σχεδιάστε τα διαγράμματα της επόμενης τάξης ως προς τις σταθερές σύζευξης, τα οποία διορθώνουν την διεργασία στο (**γ**) ερώτημα. Θα πρέπει να δείξετε στα διαγράμματά σας ποια σωματίδια υπάρχουν στις αντίστοιχες γραμμές που σχεδιάζετε. [**4μ**]

(**στ**) Θεωρήστε ότι το σωματίδιο B σκεδάζεται με το σωματίδιο A. Θεωρώντας μόνο διαγράμματα χαμηλότερης τάξης ως προς τις σταθερές σύζευξης ποια σωματίδια μπορούν να παραχθούν στο τελικό στάδιο της σκέδασης αυτής; [**2μ**] (**ζ**) Σχεδιάστε και τοποθετήστε τα κατάλληλα σωματίδια στις αντίστοιχες γραμμές για την διεργασία της σκέδασης του προηγούμενου ερωτήματος. [**2μ**]

(**η**) Υπολογίστε το πλάτος μετάβασης σε χαμηλότερης τάξης διεργασίες ως προς τις σταθερές σύζευξης $g_1$ και $g_2$ για την διεργασία της σκέδασης που θεωρήσατε στα προηγούμενα δύο ερωτήματα. Απλουστεύστε την απάντησή σας στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου όπου το σωματίδιο A είναι σε ηρεμία. Πως αλλάζει η απάντησή σας στο όριο που η ενέργεια του προσπίπτοντος σωματιδίου B γίνεται μεγάλη; [**6μ**]

**9.** [**10μ**]

Πρόσφατα αποτελέσματα από τον επιταχυντή Tevatron και τα πειράματα CDF και D0 έδειξαν ότι στις σκεδάσεις $p\bar{p} \to t\bar{t}$ εμφανίζεται μια μη αναμενόμενη ασυμμετρία. Συγκεκριμένα το top quark κινείται στη διεύθυνση κίνησης του $p$ ενώ το $\bar{t}$ στη διεύθυνση κίνησης του $\bar{p}$. Σημειώστε ότι στο Tevatron η παραγωγή των ζευγών $t\bar{t}$ γίνεται κυρίως μέσω της σκέδασης $q\bar{q} \to t\bar{t}$, όπου το $q$ προέρχεται από το πρωτόνιο και το $\bar{q}$ από το αντιπρωτόνιο. Επομένως η ασυμμετρία μπορεί να συσχετιτεί με τις διευθύνσεις των $q$ και $\bar{q}$. Η ασυμμετρία αυτή δεν μπορεί να εξηγηθεί εύκολα στα πλαίσια του Καθιερωμένου Προτύπου.

Προφανώς είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον να μελετηθεί αυτή η διεργασία στα πειράματα του LHC. Στην περίπτωση αυτή ωστόσο η διεργασία είναι περισσότερο πολύπλοκη για δύο λόγους. Πρωταρχικά η ενεργός διατομή σκέδασης $gg \to t\bar{t}$ είναι πολύ μεγαλύτερη από την $q\bar{q} \to t\bar{t}$ και η ασυμμετρία της $q\bar{q}$ διεργασίας «χάνεται» λόγω της συνεισφοράς των *gg.* Ο δεύτερος λόγος οφείλεται στο γεγονός ότι στη διεργασία $q\bar{q} \to t\bar{t}$ στο LHC (*p-p* επιταχυντής) δεν ξέρουμε ποιο από τα δύο πρωτόνια είναι η πηγή του $q$ και ποιο είναι η πηγή του $\bar{q}$. Σαν αποτέλεσμα δεν μπορεί κάποιος να προσδιορίσει τον ορισμό της ασυμμετρίας.

(α) Εξηγήστε το λόγο που η διεργασία $gg \to t\bar{t}$ γίνεται πολύ πιο σημαντική ως προς τη διεργασία $q\bar{q} \to t\bar{t}$ καθώς πηγαίνουμε από τις ενέργειες του Tevatron στις ενέργειες του LHC. [**7μ**]

(β) Προτείνετε ένα κινηματικό κριτήριο επιλογής γεγονότων $t\bar{t}$ στο LHC έτσι ώστε κάποια πληροφορία της αρχικής διεύθυνσης κίνησης του $q$ και $\bar{q}$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να οριστεί η ασυμμετρία. [**3μ**]