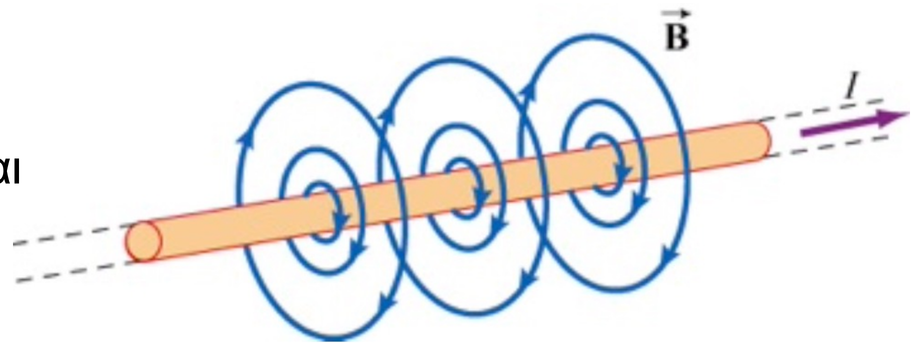
Μαγνητικά Φαινόμενα

Μαγνητικό πεδίο ρευματοφόρου αγωγού

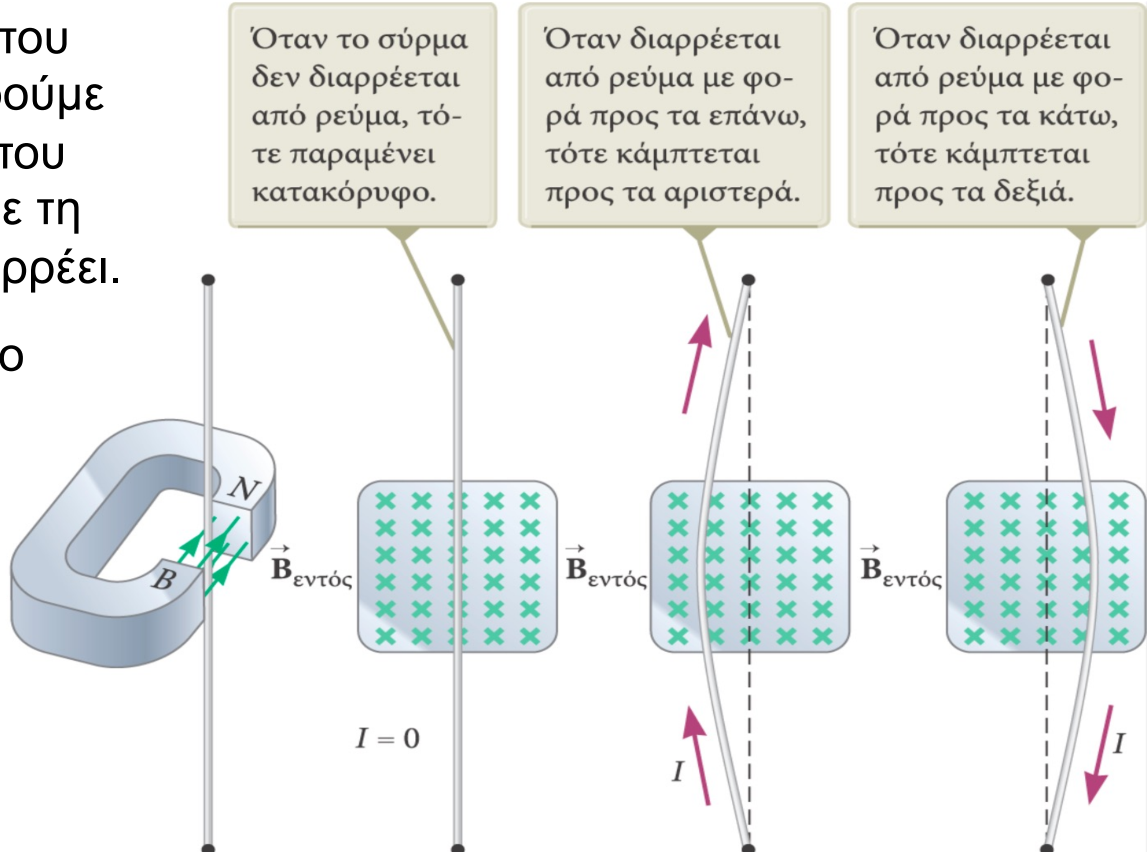
- Συνηθισμένη πηγή μαγνητικού πεδίου είναι αυτή ενός αγωγού που διαρρέεται από ρεύμα.
- Χρησιμοποιώντας τη μαγνητική βελόνα μιας πυξίδας, μπορούμε να βρούμε τη μορφή των μαγνητικών γραμμών του πεδίου που προκαλείται από το ρεύμα που διαπερνά τον αγωγό.
- Οι μαγνητικές γραμμές έχουν την μορφή κύκλων το κέντρο των οποίων βρίσκονται πάνω στον αγωγό.



- Η διεύθυνση της στροφής των κύκλων προσδιορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού:
- Αν ο αντίχειρας του δεξιού χεριού έχει την κατεύθυνση του ρεύματος, τότε τα υπόλοιπα δάκτυλα θα περιστραφούν στην διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου:

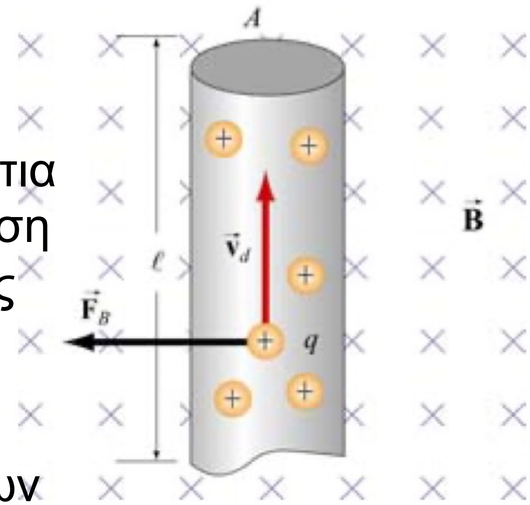
Η μαγνητική δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό

- Το ρεύμα σε έναν αγωγό είναι το σύνολο πολλών κινούμενων σωματιδίων. Άρα σε ρευματοφόρο σύρμα που βρίσκεται σε ένα μαγνητικό πεδίο, ασκείται δύναμη.
- Θεωρήστε ένα λεπτό ευθύγραμμο σύρμα το οποίο περνά το χώρο ανάμεσα στους πόλους ενός μαγνήτη. Θεωρήστε ότι οι το μαγνητικό πεδίο είναι προς το εσωτερικό της σελίδας.
- Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του δεξιού χεριού μπορούμε να βρούμε την κατεύθυνση της δύναμης που ασκείται στο σύρμα ανάλογα με τη φορά του ρεύματος που το διαρρέει.
- Μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο της δύναμης .



Η μαγνητική δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό

- Μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο της δύναμης, θεωρώντας ένα τμήμα του σύρματος το οποίο έχει μήκος l και διατομή A. Θεωρήστε ότι το μαγνητικό πεδίο έχει κατεύθυνση στο εσωτερικό της σελίδας.



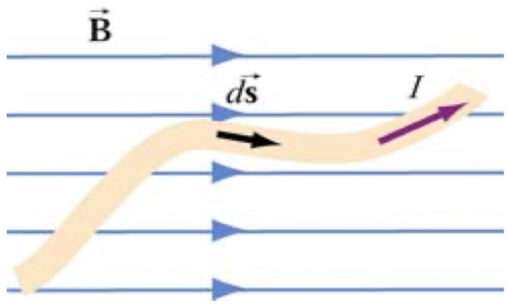
- Τα φορτία κινούνται με ταχύτητα ολίσθησης $\vec{v}_d$.
  - ✓ Η στιγμιαία ταχύτητα των φορέων φορτίου είναι τεράστια και οφείλεται στη θερμική ενέργεια. Ωστόσο η διεύθυνση είναι τυχαία και επομένως η μαγνητική δύναμη εξαιτίας της ταχύτητας αυτής θα είναι 0.
- Το ολικό φορτίο στο τμήμα του σύρματος που εξετάζουμε θα είναι: $Q_{tot} = q(nAl)$ όπου *n* είναι ο αριθμός των φορτίων ανά μονάδα όγκου
- Η μαγνητική δύναμη στο τμήμα του αγωγού θα είναι:

$$\vec{F}_B = Q_{tot}\vec{v}_d \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_B = qnAl(\vec{v}_d \times \vec{B}) \Rightarrow \vec{F}_B = qnAs\left(\frac{\vec{s}}{dt} \times \vec{B}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{F}_B = I(\vec{s} \times \vec{B})}$$

$\frac{qnAs}{dt} = qnAv_d = I$ και $\vec{s}$ το διάνυσμα μήκους με κατεύθυνση αυτή του ρεύματος

Η μαγνητική δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό

- Για ένα σύρμα τυχαίου σχήματος, η μαγνητική δύναμη μπορεί να υπολογιστεί αθροίζοντας διανυσματικά τη δύναμη από όλα τα στοιχειώδη τμήματα $d\vec{s}$ που απαρτίζουν το σύρμα.



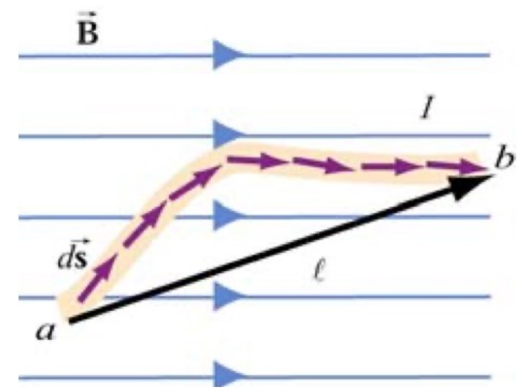
- Η μαγνητική δύναμη στο τμήμα $d\vec{s}$ θα είναι:

$$d\vec{F}_B = I d\vec{s}\times\vec{B}$$

- Επομένως η ολική δύναμη θα είναι:

$$\vec{F}_B = I\int_a^b d\vec{s}\times\vec{B}$$ όπου *a* και *b* οι άκρες του σύρματος.

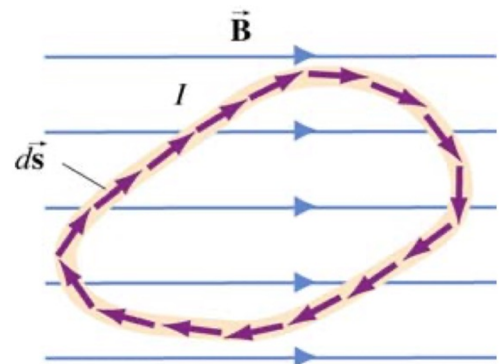
- Για παράδειγμα, έστω ένα καμπυλόγραμμο τμήμα σύρματος μέσα σε μαγνητικό πεδίο.



- ✓ Η δύναμη που ασκείται πάνω του είναι:

$$\vec{F}_B = I\left(\int_a^b d\vec{s}\right)\times\vec{B} \Rightarrow \vec{F}_B = I\vec{l}\times\vec{B}$$

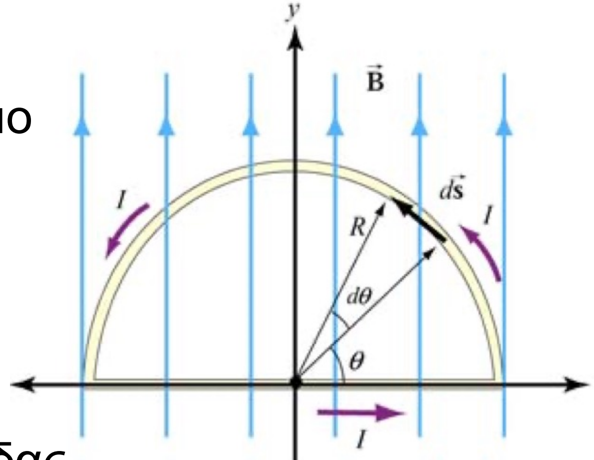
- Αν το σύρμα σχηματίζει έναν κλειστό βρόχο τυχαίου σχήματος, η δύναμη στο βρόχο είναι:



$$\vec{F}_B = I\left(\oint d\vec{s}\right)\times\vec{B} \Rightarrow \vec{F}_B = \vec{0}$$

Παράδειγμα: Μαγνητική δύναμη σε ημικυκλικό σύρμα

- Θεωρήστε ένα κλειστό σύρμα σε σχήμα ημικυκλίου που βρίσκεται στο *xy* επίπεδο και διαρρέεται από ρεύμα I με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού. Εφαρμόζεται ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο με κατεύθυνση τον +*y*-άξονα
- Ποια η μαγνητική δύναμη στο ευθύγραμμο τμήμα του σύρματος και ποια στο τοξοειδές τμήμα του σύρματος



- Έστω: $\vec{B} = B\hat{j}$ και $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ οι δυνάμεις στο ευθύγραμμο και καμπυλόγραμμο τμήμα αντίστοιχα.

- ✓ Από την εξίσωση $\vec{F}_B = I\int_a^b d\vec{s}\times\vec{B}$ και για μήκος $2R$

  η δύναμη στο ευθύγραμμο τμήμα θα είναι:

  $\vec{F}_1 = I(2R\hat{\imath})\times B\hat{\jmath} \Rightarrow \vec{F}_1 = 2IRB\hat{k}$ με το $\hat{k}$ εκτός της σελίδας

- ✓ Για τη δύναμη στο καμπυλόγραμμο τμήμα μπορούμε να γράψουμε το $d\vec{s}$

  $$d\vec{s} = ds\hat{\theta} = Rd\theta(-sin\theta\hat{\imath} + cos\theta\hat{\jmath})$$

  $$d\vec{F}_2 = Id\vec{s}\times\vec{B} = IRd\theta(-sin\theta\hat{\imath} + cos\theta\hat{\jmath})\times B\hat{\jmath} \Rightarrow d\vec{F}_2 = -IRBsin\theta d\theta\hat{k}$$

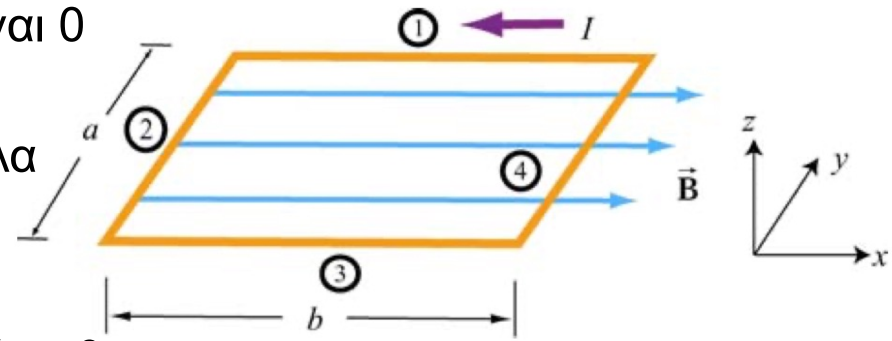
  Ολοκληρώνοντας για το ημικύκλιο έχουμε: $\vec{F}_2 = -IRB\int_0^{\pi} sin\theta d\theta\,\hat{k} \Rightarrow \vec{F}_2 = -2IRB\hat{k}$

  Επομένως η συνολική δύναμη είναι: $\vec{F}_{tot} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ για κλειστό βρόχο

Ροπές σε βρόχους ρεύματος και μαγνήτες

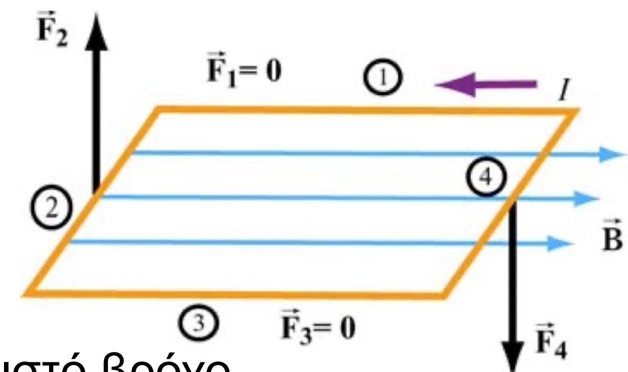
- Θεωρήστε ένα σύρμα σε σχήμα ορθογωνίου βρόχου που διαρρέεται από ρεύμα I, και βρίσκεται στο *xy* επίπεδο μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B\hat{\imath}$.

- Οι δυνάμεις στα τμήματα (1) και (3) θα είναι 0 γιατί τα διανύσματα μήκους $\vec{l}_1 = -b\hat{\imath}$ και $\vec{l}_2 = b\hat{\imath}$ είναι παράλληλα και αντιπαράλληλα με το μαγνητικό πεδίο και το εξωτερικό γινόμενο μηδενίζεται.



- Οι δυνάμεις στα τμήματα (2) και (4) δεν είναι 0.

$$\begin{cases} \vec{F}_2 = I(-a\hat{\jmath})\times(B\hat{\imath}) = IaB\hat{k} \\ \vec{F}_4 = I(a\hat{\jmath})\times(B\hat{\imath}) = -IaB\hat{k} \end{cases}$$



- Η συνισταμένη δύναμη στον ορθογώνιο βρόχο είναι:

$\vec{F}_{o\lambda.} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0}$ όπως αναμέναμε για κλειστό βρόχο

- Οι δυνάμεις $\vec{F}_2$ και $\vec{F}_4$ αποτελούν ζεύγος δυνάμεων και θα προκαλέσουν ροπή στο βρόχο με αποτέλεσμα να περιστραφεί ως προς τον y-άξονα

Ροπές σε βρόχους ρεύματος και μαγνήτες

- Η ροπή του ζεύγους ως προς το κέντρο του βρόχου θα είναι:

$$\vec{\tau} = \left(-\frac{b}{2}\hat{\imath}\right)\times\vec{F}_2 + \left(\frac{b}{2}\hat{\imath}\right)\times\vec{F}_4 = \left(-\frac{b}{2}\hat{\imath}\right)\times IaB\hat{k} + \left(\frac{b}{2}\hat{\imath}\right)\times\left(-IaB\hat{k}\right) \Rightarrow$$

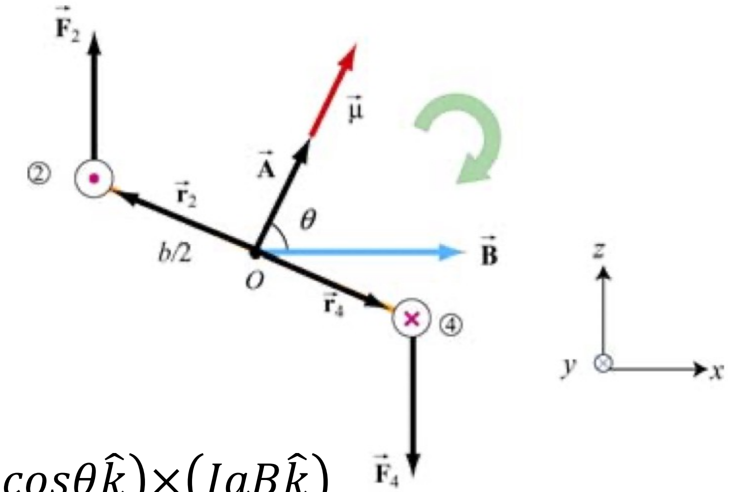
$$\vec{\tau} = \left(\frac{IabB}{2} + \frac{IabB}{2}\right)\hat{\jmath} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\vec{\tau} = IabB\hat{\jmath} \\ A = ab\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = IAB\hat{\jmath}}$$

περιστροφή με τη φορά των δεικτών του ρολογιού

- Εισάγουμε το διάνυσμα του εμβαδού του βρόχου $\vec{A} = A\hat{n}$ όπου $\hat{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια του βρόχου. Η διεύθυνση της θετικής φοράς του $\hat{n}$ καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.
  - Στην περίπτωσή μας έχουμε: $\hat{n} = \hat{k}$
  - Η εξίσωση της ροπής γράφεται επομένως ως: $\boxed{\vec{\tau} = I\vec{A}\times\vec{B}}$
  - Μέγιστη ροπή εμφανίζεται ότι το μαγνητικό πεδίο είναι παράλληλο προς την επιφάνεια του βρόχου

Ροπές σε βρόχους ρεύματος και μαγνήτες

- Θεωρούμε την περίπτωση που το διάνυσμα της επιφάνειας $\hat{n}$ σχηματίζει γωνία θ με την διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου



- Με βάση το σχήμα, μπορούμε να γράψουμε τα διανύσματα θέσης των σημείων εφαρμογής των δυνάμεων ως:

$$\vec{r}_2 = \frac{b}{2}\left(-sin\theta\hat{\imath} + cos\theta\hat{k}\right) = -\vec{r}_4$$

- Η συνισταμένη ροπή θα είναι:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_2\times\vec{F}_2 + \vec{r}_4\times\vec{F}_4 = 2\vec{r}_2\times\vec{F}_2 \Rightarrow \vec{\tau} = \frac{2b}{2}\left(-sin\theta\hat{\imath} + cos\theta\hat{k}\right)\times\left(IaB\hat{k}\right)$$

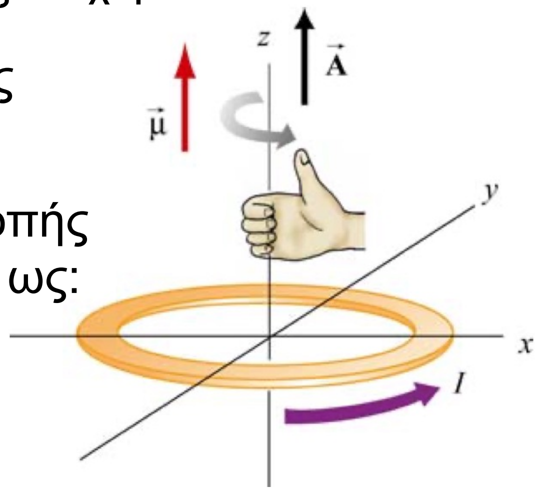
$$\Rightarrow \vec{\tau} = IabBsin\theta\hat{\jmath} \Rightarrow \vec{\tau} = I\vec{A}\times\vec{B}$$

- Για βρόχο που αποτελείται από N περιελίξεις, η ροπή θα είναι: $\boxed{\vec{\tau} = NI\vec{A}\times\vec{B}}$

- Η ποσότητα $NI\vec{A}$ ονομάζεται **μαγνητική διπολική ροπή $\vec{\mu}$**: $\boxed{\vec{\mu} = NI\vec{A}}$

Μαγνητική διπολική ροπή

- Η διεύθυνση της μαγνητικής διπολικής ροπής $\vec{\mu}$ ταυτίζεται με αυτή του διανύσματος της επιφάνειας $\vec{A}$ και προσδιορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού.
- Στο SI, μονάδες μέτρησης της μαγνητικής διπολικής ροπής είναι $A \cdot m^2$
- Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μαγνητικής διπολικής ροπής η ροπή σε ένα βρόχο που διαρρέεται από ρεύμα γράφεται ως:



$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}}$$

- Η εξίσωση αυτή είναι ανάλογη της εξίσωσης $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ που εκφράζει την ροπή που ασκείται από ένα ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ σε ηλεκτρική διπολική ροπή $\vec{p}$

Δυναμική ενέργεια μαγνητικού δίπολου σε μαγνητικό πεδίο

- Όταν ροπή ασκείται σε ένα περιστρεφόμενο σώμα, παράγεται έργο.
- Όταν ένα μαγνητικό δίπολο περιστρέφεται κατά γωνία *dθ* το έργο που παράγεται:

$$dW = -\tau d\theta = -\mu B sin\theta d\theta$$

όπου *θ* η γωνία ανάμεσα στη μαγνητική διπολική ροπή $\vec{\mu}$ και το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$

- Το αρνητικό πρόσημο προέρχεται από το γεγονός ότι η μαγνητική ροπή τείνει να περιστρέψει το μαγνητικό δίπολο ώστε να ελαττώσει την γωνία *θ.*
- Θέτοντας το έργο ίσο με την ελάττωση στη δυναμική ενέργεια *U,* έχουμε:

$$dU = -dW = +\mu B sin\theta d\theta$$

- Ολοκληρώνοντας: $W_{\varepsilon\xi.} = \int_{\theta_0}^{\theta} dW = \mu B(cos\theta_0 - cos\theta) \Rightarrow W_{\varepsilon\xi.} = \Delta U = U - U_0$

όπου θεωρούμε όπως και πριν ότι: $W_{\varepsilon\xi.} = -W_{\pi\varepsilon\delta\acute{\iota}o\upsilon}$

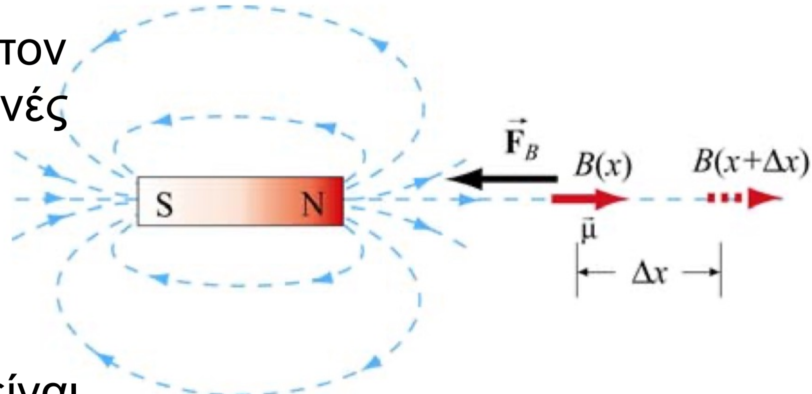
- Για $\theta=0$ και $\theta_0=\pi/2$, η δυναμική ενέργεια ενός δίπολου σε παρουσία μαγνητικού πεδίου είναι:

$$U = -\mu B cos\theta = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

- Η κατάσταση είναι σε σταθερή ισορροπία όταν $\vec{\mu} \parallel \vec{B}$ και *U* σε ελάχιστο. Όταν είναι αντιπαράλληλα τότε *U* μέγιστο και η κατάσταση είναι ασταθής

Μαγνητική δύναμη σε μαγνητικό δίπολο

- Όταν ένα μαγνητικό δίπολο εισέλθει σε μη ομογενές μαγνητικό πεδίο, τότε πάνω του ασκείται δύναμη, κάτι που όπως είδαμε δεν ισχύει για ομογενές μαγνητικό πεδίο όπου η συνισταμένη δύναμη είναι 0.
- Θεωρούμε την περίπτωση όπου ένα μικρό μαγνητικό δίπολο βρίσκεται στο μαγνητικό πεδίο ενός ραβδόμορφου μαγνήτη και κατά μήκος του άξονα συμμετρίας
- Στο δίπολο ασκείται μια ελκτική δύναμη από τον μαγνήτη το πεδίο του οποίου δεν είναι ομογενές



- Εξωτερική δύναμη θα πρέπει να ασκηθεί ώστε το δίπολο να κινηθεί προς τα δεξιά
- Η δύναμη που θα ασκηθεί εξωτερικά για να κινηθεί το δίπολο κατά μια απόσταση Δx θα είναι

$$F_{\varepsilon\xi.}\Delta x = W_{\varepsilon\xi.} = \Delta U = -\mu B(x+\delta x) + \mu B(x) = -\mu[B(x+\delta x) - B(x)]$$

- Για μικρό Δx θα έχουμε: $F_{\varepsilon\xi.} = -\dfrac{\mu[B(x+\delta x) - B(x)]}{\delta x} = -\mu\dfrac{dB}{dx} > 0$ γιατί B ελαττώνεται
- Αυτή είναι η δύναμη που απαιτείται για να ξεπεραστεί η δύναμη του μαγνήτη.

Άρα : $F_B = \mu\dfrac{dB}{dx} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_B = \dfrac{d(\vec{\mu}\cdot\vec{B})}{dx}}$ Σε γενική μορφή γράφεται: $\boxed{\vec{F}_B = \vec{\nabla}(\vec{\mu}\cdot\vec{B})}$