ΦΥΣ 331 – Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων

Παραδείγματα **Δευτέρα 09.10.23**

1. Γιατί είναι δυνατό χρησιμοποιώντας ζεύγος quark και antiquark, να δημιουργηθούν τόσο βαθμωτά $\left(J^P = 0^+\right)$ όσο και ψευδο-βαθμωτά μεσόνια $\left(J^P = 0^-\right)$.

(a) Τα μεσόνια σχηματίζονται από ζεύγη quark-αντιquark. Τα quarks είναι φερμιόνια με σπιν 1/2 και επομένως υπάρχουν δύο τρόποι με τον οποίο μπορούν να συνδυαστούν για να έχουν ένα μεσόνιο με $J=0$: είτε τα spins των quarks είναι αντι-παράλληλα και έχουν τροχιακή στροφορμή $L=0$, ή τα spins των quarks είναι παράλληλα και η τροχιακή τους στροφορμή είναι $L=1$ και αντίθετη με τη διεύθυνση των spins με αποτέλεσμα να αλληλο αναιρούνται και $J=0$.

Από τη στιγμή που τα φερμιόνια και τα αντιφερμιόνια έχουν αντίθετες τιμές ομοτιμίας, η ομοτιμία του συστήματος quark-αντι-quark είναι $(-1)^{L+1}$. Έτσι, όταν $L=0$ η ομοτιμία του συστήματος είναι $P=-1$ (ψευδο-βαθμωτό μεσόνιο) και όταν $L=1$ μας δίνει $P=+1$ (βαθμωτό μεσόνιο).

2. Ένα ηλεκτρόνιο υψηλής ενέργειας συγκρούεται με ένα ατομικό ηλεκτρόνιο το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ακίνητο. Να υπολογίσετε την ενέργεια κατωφλίου που χρειάζεται ώστε από τη σύγκρουση να παραχθεί ένα ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου.

Για την παραγωγή ζεύγους e^+e^- υπεύθυνη είναι η διεργασία:

$$e^- + e^- \longrightarrow e^- + e^- + e^- + e^+$$

Χρειάζεται να υπολογίσουμε την ελάχιστη ενέργεια που θα πρέπει να έχει η προσπίπτουσα δέσμη των ηλεκτρονίων. Για ελάχιστη ενέργεια, σημαίνει ότι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα τελικά προϊόντα της σκέδασης εξέρχονται με μηδενική ορμή. Επομένως η ενέργειά τους είναι μόνο η ενέργεια της μάζας ηρεμίας τους.

Επομένως στην τελική κατάσταση των 4 λεπτονίων, η ολική ενέργεια θα είναι:

$$P_f^2 = \sum_{i=1}^{4} (E_f^i)^2 - \sum_{i=1}^{4} (\vec{p}_f^{\,i})^2 = (4m_e)^2 = 16m_e^2$$

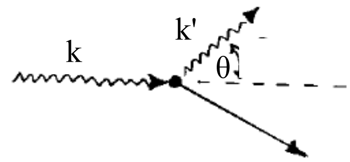
Η αρχική κατάσταση έχει συνολική ενέργεια:

$$P_i^2 = \sum_{i=1}^{2} (E_i^i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{2} P_i^i\right)^2 = 2m_e^2 + 2m_e E = 2m_e(m_e + E)$$

Από διατήρηση της ενέργειας, θα έχουμε: $16m_e^2 = 2m_e(m_e+E) \Rightarrow$

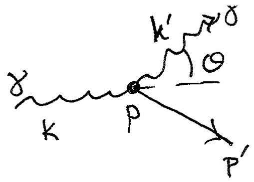
$$\Rightarrow 8m_e^2 = m_e^2 + E \cdot m_e \Rightarrow E = \frac{7m_e^2}{\cancel{m_e}} \Rightarrow \boxed{E = 7m_e}$$

3. Η σκέδαση Compton είναι η σκέδαση φωτονίων από ηλεκτρόνια. Αποδείξτε την εξίσωση της σκέδασης Compton σχετίζοντας την μετατόπιση του μήκους κύματος του φωτονίου με τη γωνία σκέδασης θ.



$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

Η σκέδαση Compton



Έστω οι τετρα-ορμές του φωτονίου και του ηλεκτρονίου πριν και μετά τη σκέδαση είναι k, p, k', p'.

Θα έχουμε επομένως $\vec{k}+\vec{p} = \vec{k}'+\vec{p}' \Rightarrow p' = (k-k')+p \Rightarrow$

$$p'^2 = (k-k')^2 + p^2 + 2p\cdot(k-k') \Rightarrow \boxed{m^2c^2 = p^2 + k^2 + k'^2 - 2k\cdot k' + 2p\cdot(k-k')} \ (A)$$

Αλλά $k^2 = k'^2 = 0$ και $k\cdot k' = EE'/c^2\,(1-\cos\theta)$

$p^2 = m^2c^2$

Αντικατάσταση στην (A) θα δίνει:

$$\cancel{m^2c^2} = \cancel{m^2c^2} + 0 + 0 - \cancel{2}\frac{EE'}{c^2}(1-\cos\theta) + \cancel{2}m\cancel{c}(E-E')/\cancel{c} \Rightarrow \frac{EE'}{c^2}(1-\cos\theta) = (E-E')$$

$$\Rightarrow EE'(1-\cos\theta) = mc^2(E-E')$$

Αλλά $E = h\nu = hc/\lambda$

$$\Rightarrow (1-\cos\theta) = mc^2\left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E}\right) \Rightarrow$$

$$(1-\cos\theta) = mc^2\left(\frac{\lambda'}{h\cancel{c}} - \frac{\lambda}{h\cancel{c}}\right) \Rightarrow \boxed{(\lambda'-\lambda) = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)}$$

4. (α) Θεωρήστε την διάσπαση $D^0 \to K^-\pi^+$. Οι μάζες των σωματιδίων είναι $1864.6 MeV/c^2$, $493.7 MeV/c^2$ και $139.6 MeV/c^2$ αντίστοιχα. Ποια είναι η ορμή του π^+ στο σύστημα αναφοράς του D^0;

(β) Ποια είναι η ελάχιστη ενέργεια μιας δέσμης πρωτονίων που προσπίπτει σε σταθερό στόχο ώστε να είναι δυνατή η αντίδραση $pp \to p\Lambda_C^+\bar{D}^0$. Η μάζα του Λ_C^+ είναι $2285.1 MeV/c^2$ και το περιεχόμενό σε quarks είναι $\Lambda_C^+ = udc$. Η μάζα του πρωτονίου είναι $938.3 MeV/c^2$ και η μάζα του $\bar{D}^0$ είναι $1864.6 MeV/c^2$ και το περιεχόμενό του σε quarks είναι $\bar{D}^0 = u\bar{c}$.

(γ) Ποια είναι η μέγιστη ενέργεια του ηλεκτρονίου στη διάσπαση: $\tau \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau$; Η μάζα του τ -λεπτονίου είναι $1776.86 MeV/c^2$.

(α) Έχουμε τη διάσπαση $D^0 \to K^-\pi^+$

Γράφουμε τα τετραδιανύσματα των σωματιδίων:

$$\underline{P}_{D^0} = \underline{P}_{K^-} + \underline{P}_{\pi^+} \Rightarrow (\underline{P}_D - \underline{P}_{\pi^+})^2 = \underline{P}_{K^-}^2 \Rightarrow \underline{P}_{D^0}^2 + \underline{P}_{\pi^+}^2 - 2\underline{P}_D\cdot\underline{P}_{\pi^+} = m_{K^-}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{D^0}^2 + m_{\pi^+}^2 - 2\underline{P}_D\cdot\underline{P}_{\pi^+} = m_{K^-}^2 \Rightarrow m_{D^0}^2 + m_{\pi^+}^2 - 2\underbrace{(m_D,\vec{0})}_{\text{CM του } D^0}\cdot(E_{\pi^+},\vec{P}_{\pi^+}) = m_{K^-}^2$$

$$\Rightarrow m_{D^0}^2 + m_{\pi^+}^2 - 2E_{\pi^+}m_D = m_{K^-}^2 \Rightarrow E_{\pi^+} = \frac{m_{D^0}^2 + m_{\pi^+}^2 - m_{K^-}^2}{2m_{D^0}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{\pi^+} = \frac{1864.6^2 + 139.6^2 - 493.7^2}{2\cdot 1864.6} \Rightarrow \boxed{E_{\pi^+} = 872.2\ MeV}$$

$$E_{\pi^+} = \sqrt{\vec{P}_{\pi^+}^2 + m_{\pi^+}^2} \Rightarrow |\vec{P}_{\pi^+}|^2 = E_{\pi^+}^2 - m_{\pi^+}^2 \Rightarrow |\underline{P}_{\pi^+}| = \sqrt{872.2^2 - 139.6^2} = 860\ MeV/c$$

(β) Για την ελάχιστη ενέργεια δέσμης, θα πρέπει τα σωματίδια που παράγονται να βρίσκονται σε ηρεμία στο ΚΜ του συστήματος, οπότε

$$\underline{P}_\delta + \underline{P}_\sigma = \underline{P}_p + \underline{P}_{\Lambda_c} + \underline{P}_D \Rightarrow (\underline{P}_\delta + \underline{P}_\sigma)^2 = (m_p + m_{\Lambda_c} + m_D)^2$$

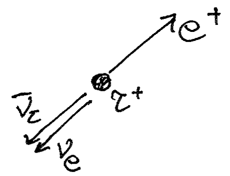
όπου $\underline{P}_\delta$ και $\underline{P}_\sigma$ τα 4-διανύσματα δέσμης και στόχου

$$m_p^2 + 2\underline{P}_\delta\cdot\underline{P}_\sigma + m_p^2 = (m_p + m_{\Lambda_c} + m_D)^2 - 0^2 \Rightarrow$$

$$m_p^2 + 2(E_\delta, \vec{P}_\delta)(\cancelto{m_p}{E_\sigma}, \cancelto{0}{\vec{P}_\sigma}) + m_p^2 = (m_p + m_{\Lambda_c} + m_D)^2 \Rightarrow 2m_p^2 + 2E_\delta m_p = (m_p + m_{\Lambda_c} + m_D)^2$$

$$\Rightarrow E_\delta = \frac{(m_p + m_{\Lambda_c} + m_D)^2 - 2m_p^2}{2m_p} = \frac{(938.3 + 2285.1 + 1864.6)^2 - 2\cdot 938.6^2}{2\cdot 938.6} \Rightarrow \boxed{E_\delta = 12856.7\,Me}$$

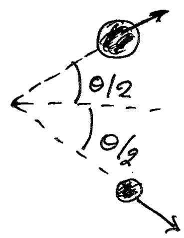
(γ) Η μέγιστη ενέργεια του e^+ θα συμβεί όταν τα 2 νετρίνο κινούνται στην ίδια διεύθυνση και το e^+ κινείται ακριβώς αντίθετα προς αυτά. Έτσι, στο κέντρο μάζας του διασπώμενου τ^+, το e^+ θα πάρει σαν ενέργεια τη μισή μάζα ηρεμίας του τ^+ και τα 2 νετρίνο την άλλη μισή. Επομένως η μέγιστη ορμή θα είναι (θεωρώντας ότι $m_e \cong 0 = m_\nu$)



$$E_{e^+} = |\vec{p}_{e^+}| = m_\tau/2$$

$$E_{\bar{\nu}_\tau} = E_{\nu_e} = |\vec{p}_{\bar{\nu}_\tau}| = |\vec{p}_{\nu_e}| = m_\tau/4$$

5. Ένα πρωτόνιο με παράγοντα Lorentz $\gamma = 1\Big/\sqrt{1-\left(\upsilon^2/c^2\right)}$ συγκρούεται ελαστικά με πρωτόνιο σε ηρεμία. Μετά τη σκέδαση τα πρωτόνια εξέρχονται με ίσες ενέργειες. Ποια η γωνία θ που σχηματίζεται μεταξύ των διευθύνσεων πτήσης τους;



Από τη στιγμή που η ενέργεια των πρωτονίων είναι η ίδια μετά την σύγκρουση, σημαίνει ότι τα πρωτόνια εξέρχονται σχηματίζοντας την ίδια γωνία $\Theta/2$ με την διεύθυνση της προσπίπτουσας ορμής των πρωτονίων.

Θα έχουμε επομένως πριν την σκέδαση: $p = m\beta\gamma$ και $E = m\gamma$ (1)

Από διατήρηση ορμής έχουμε: $\cancel{m}\beta\gamma = 2\cancel{m}\beta'\gamma'\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\beta\gamma = 2\beta'\gamma'\cos\frac{\Theta}{2}}$

όπου β' και γ' είναι οι παράγοντες Lorentz μετά τη σκέδαση.

Διατήρηση ενέργειας θα δώσει: $m + m\gamma = 2m\gamma' \Rightarrow \boxed{\gamma + 1 = 2\gamma'}$ (2)

Έχουμε ότι $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \Rightarrow \gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\beta\gamma = \sqrt{\gamma^2 - 1}}$ (3)

Επομένως $\beta'\gamma' = \sqrt{\gamma'^2 - 1} \xRightarrow{(2)} \boxed{\beta'\gamma' = \sqrt{\frac{(\gamma+1)^2}{4} - 1}}$ (4)

Αντικαθιστούμε την (4) στην (1) και έχουμε:

$$\beta\gamma = 2\sqrt{\frac{(\gamma+1)^2}{4} - 1}\,\cos\frac{\Theta}{2} \xRightarrow{(3)} \sqrt{\gamma^2 - 1} = 2\sqrt{\frac{(\gamma+1)^2}{4} - 1}\,\cos\frac{\Theta}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma^2 - 1 = 4\left(\frac{(\gamma+1)^2}{4} - 1\right)\cos^2\frac{\Theta}{2} \Rightarrow \gamma^2 - 1 = \left[(\gamma+1)^2 - 4\right]\cos^2\frac{\Theta}{2} \Rightarrow$$

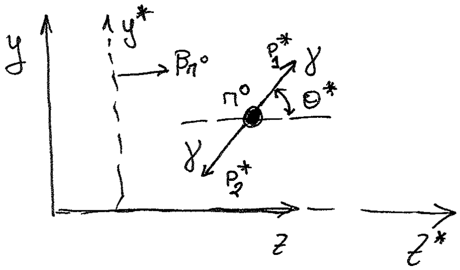
$$\Rightarrow \gamma^2 - 1 = \left(\gamma^2 + 1 + 2\gamma - 4\right)\cos^2\frac{\Theta}{2} = \left(\gamma^2 + 2\gamma - 3\right)\cos^2\frac{\Theta}{2} \Rightarrow (\gamma-1)(\gamma+1) = \left(\gamma^2 + 3\gamma - \gamma - 3\right)\cos^2\frac{\Theta}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\gamma-1)(\gamma+1) = \left[\gamma(\gamma-1) + 3(\gamma-1)\right]\cos^2\frac{\Theta}{2} = (\gamma+3)(\gamma-1)\cos^2\frac{\Theta}{2} \Rightarrow \boxed{\cos^2\frac{\Theta}{2} = \frac{\gamma+1}{\gamma+3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + \cos\Theta)/2 = \frac{\gamma+1}{\gamma+3} \Rightarrow \cos\Theta = \frac{2(\gamma+1)}{\gamma+3} - 1 \Rightarrow \boxed{\cos\Theta = \frac{\gamma-1}{\gamma+3}}$$

Για $\gamma \simeq 1$ έχουμε κλασικό όριο οπότε $\cos\Theta \simeq 0 \Rightarrow \Theta = 90^\circ$ όπως ξέραμε για κρούσεις δύο σφαιρικών σωματιδίων. Για $\gamma >> 1$ τότε $\cos\Theta \simeq 1 \Rightarrow \Theta \simeq 0$.

6. Να βρεθεί η μέγιστη γωνία μεταξύ των δύο φωτονίων που παράγονται κατά τη διάσπαση $\pi^0 \to \gamma\gamma$ όταν η ενέργεια του π^0 είναι 10 *GeV*. Η μάζα του π^0 είναι 135 *MeV*.



Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας του π^0, τα δύο φωτόνια εκπέμπονται με ίσες και αντίθετες ορμές, ενώ η ορμή και ενέργεια των φωτονίων είναι ίση με το μισό της μάζας ηρεμίας του π^0.

Επομένως τα τετραδιανύσματα των φωτονίων θα είναι: $E = m_{\pi^0}/2$.

$$\vec{P}_1^* = \left(E,\ 0,\ E\sin\theta^*,\ E\cos\theta^*\right) \quad \text{και} \quad \vec{P}_2^* = \left(E,\ 0,\ -E\sin\theta^*,\ -E\cos\theta^*\right)$$

Τα τετραδιανύσματα των φωτονίων στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου προκύπτει από τον μετασχηματισμό Lorentz, όπου θεωρούμε όπως στο σχήμα: $P_x = P_x^* = 0$, $P_y = P_y^* = \pm E\sin\theta^*$ και:

$$E_1 = \gamma E_1^* + \gamma\beta P_{z_1}^* = \gamma E\left(1 + \beta\cos\theta^*\right) \quad \text{και} \quad P_{z_1} = \gamma P_{z_1}^* + \gamma\beta E = \gamma E\left(\cos\theta^* + \beta\right)$$

$$E_2 = \gamma E_2^* + \gamma\beta P_{z_2}^* = \gamma E\left(1 - \beta\cos\theta^*\right) \quad \text{και} \quad P_{z_2} = \gamma P_{z_2}^* + \gamma\beta E = \gamma E\left(-\cos\theta^* + \beta\right)$$

Η γωνία μεταξύ των δύο φωτονίων στο εργαστήριο μπορεί να βρεθεί:

$$\cos\Theta_{12} = \frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2}{|\vec{P}_1||\vec{P}_2|} = \frac{P_{1x}\cdot P_{2x} + P_{1y}P_{2y} + P_{1z}P_{2z}}{E_1 E_2} = \frac{0 - \cancel{E^2}\sin^2\theta^* + \gamma^2\cancel{E^2}\left(\beta^2 - \cos^2\theta^*\right)}{\gamma^2\cancel{E^2}\left(1 - \beta^2\cos^2\theta^*\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\Theta_{12} = \frac{-\frac{\sin^2\theta}{\gamma^2} + \beta^2 - \cos^2\theta^*}{1 - \beta^2\cos^2\theta^*} \Rightarrow \cos\Theta_{12} = \frac{-\frac{\sin^2\theta^*}{\gamma^2} + \beta^2 - 1 + \sin^2\theta^*}{1 - \beta^2\cos^2\theta^*} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\Theta_{12} = \frac{\sin^2\theta^*\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) + \beta^2 - 1}{1 - \beta^2\cos^2\theta^*} = \frac{\sin^2\theta^*\left(\cancel{1} - \cancel{1} + \beta^2\right) + \beta^2 - 1}{1 - \beta^2\cos^2\theta^*} \Rightarrow \boxed{\cos\Theta_{12} = \frac{\beta^2\left(1 + \sin^2\theta^*\right) - 1}{1 - \beta^2\cos^2\theta^*}}$$

Η τελευταία σχέση έχει ακρότατες τιμές για $\theta^* = 0$ και $\theta^* = \frac{\pi}{2}$ με $\cos\Theta_{12} = -1$ και $\cos\Theta = 2\beta^2 - 1$ αντίστοιχα.

Στην περίπτωσή μας $\gamma = E_\pi/m_\pi = 74.1$ και άρα $\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \beta^2 = 0.99982$

η γωνία θα είναι ελάχιστη όταν $\cos\Theta_{min} = 2\beta^2 - 1 = 0.9963 \Rightarrow \underline{\Theta_{min} = 1.5^\circ}$

7. Κάποιες προτάσεις για παραγωγή δεσμών νετρίνο ηλεκτρονίων ή αντι-νετρίνο ηλεκτρονίων στηρίζονται στην ιδέα της επιτάχυνσης δέσμης ασταθών ιόντων σε σχετικιστικές ταχύτητες, τα οποία αργότερα διασπώνται σε μία μακριά ευθύγραμμη περιοχή του επιταχυντή. Ένα ασταθές ιόν μάζας M το οποίο έχει επιταχυνθεί σε ενέργεια E και περιγράφεται από ένα παράγοντα Lorentz $\gamma = E/Mc^2$, διασπάται εκπέμποντας ένα νετρίνο ενέργειας E_ν σε γωνία θ ως προς τη διεύθυνση της δέσμης.

(α) Βρείτε μία εξίσωση για την ενέργεια του νετρίνο, E_ν^*, στο σύστημα αναφοράς του ιόντος συναρτήσει της ενέργειας E_ν, της γωνίας θ, και της ταχύτητας του ιόντος βc.

(β) Δείξτε ότι στο σύστημα αναφοράς του ιόντος, η διεύθυνση πτήσης του νετρίνο σχηματίζει γωνία θ^* με τη διεύθυνση της δέσμης η οποία ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\cos\theta^* = \frac{(\cos\theta - \beta)}{(1-\beta\cos\theta)}$$

Τα ιόντα επιταχύνονται σε $\gamma = 100$ και κατόπιν διασπώνται σε ένα ευθύγραμμο τμήμα του επιταχυντή. Ένας κυλινδρικός και ομόκεντρος στη δέσμη ανιχνευτής ακτίνας $r = 30m$ τοποθετείται σε απόσταση D = 300km από την περιοχή διάσπασης των ιόντων.

(γ) Δείξτε ότι η γωνία ανάμεσα στη διεύθυνση της δέσμης και αυτής των νετρίνο που θα χτυπήσουν στην εξωτερική ακτίνα του ανιχνευτή, μετρούμενη στο σύστημα αναφοράς των ιόντων της δέσμης, δίνεται από την σχέση:

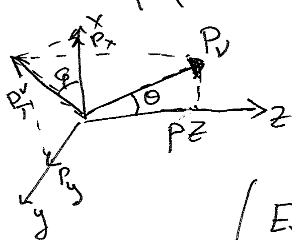
$$\cos\theta^* = \frac{1-\gamma^2\theta^2}{1+\gamma^2\theta^2 - \theta^2/2}$$

όπου $\theta \simeq r/D$.

(δ) Δεδομένου ότι η εκπομπή των νετρίνο είναι ισοτροπική στο σύστημα αναφοράς των ιόντων της δέσμης, να βρείτε το ποσοστό των νετρίνο που περνούν από τον ανιχνευτή.

(a) Θεωρούμε ότι τα νετρίνο δεν έχουν μάζα, οπότε $|\vec{p}_\nu| = |E_\nu|$ (1) $(c=1)$

Θεωρούμε ότι η διεύθυνση της δέσμης των ιόντων είναι κατά μήκος του z-άξονα



$$p_z^\nu = |\vec{p}_\nu| \cos\theta, \quad p_x^\nu = |\vec{p}_T^\nu| \cos\phi, \quad p_y^\nu = |\vec{p}_T^\nu| \sin\phi \qquad (A)$$

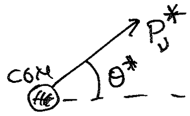
Από τους μετασχηματισμούς Lorentz θα έχουμε: (* σύστημα CoM των ιόντων)

$$\begin{pmatrix} E_\nu^* \\ p_z^* \\ p_x^* \\ p_y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_\nu \\ p_z \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} E_\nu^* &= \gamma E_\nu - \beta\gamma p_z \quad (2) \\ p_z^* &= -\beta\gamma E_\nu + \gamma p_z \quad (3) \\ p_x^* &= p_x \\ p_y^* &= p_y \end{aligned}$$

Από την (2) $\Rightarrow$ $E_\nu^* = \gamma(E_\nu - \beta p_z) \overset{(A)}{\Rightarrow} E_\nu^* = \gamma(E_\nu - \beta |\vec{p}_\nu| \cos\theta) \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \boxed{E_\nu^* = \gamma E_\nu (1 - \beta\cos\theta)} \qquad (B)$$

(b) Στο σύστημα αναφοράς του COM των ιόντων



$$p_z^* = |\vec{p}_\nu^*| \cos\theta^* \overset{(1)}{\Rightarrow} p_z^* = E_\nu^* \cos\theta^* \overset{(B)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow p_z^* = \gamma E_\nu (1 - \beta\cos\theta) \cos\theta^* \qquad (4)$$

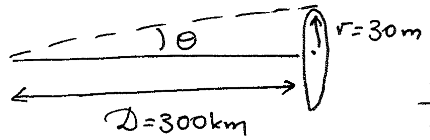
Από την εξίσωση (3) των μετασχηματισμών Lorentz θα πάρουμε:

$$p_z^* = -\beta\gamma E_\nu + \gamma p_z \overset{(A)}{=} -\beta\gamma E_\nu + \gamma |\vec{p}_\nu| \cos\theta \overset{(1)}{=} -\beta\gamma E_\nu + \gamma E_\nu \cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_z^* = E_\nu \gamma (-\beta + \cos\theta) \qquad (5)$$

Από την (4) κ (5) θα πάρουμε:

$$\cancel{\gamma E_\nu} (1 - \beta\cos\theta) \cos\theta^* = \cancel{\gamma E_\nu} (-\beta + \cos\theta) \Rightarrow \boxed{\cos\theta^* = \frac{-\beta + \cos\theta}{1 - \beta\cos\theta}} \quad (\Gamma)$$

(γ) 

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{r}{D} \Rightarrow \tan\theta = \frac{r}{D} = \frac{30}{300\cdot 10^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta \simeq \tan\theta = 10^{-4} << 1.$$

Αναπτύσσουμε κατά Taylor $\cos\theta$ κρατώντας τους 2 πρώτους όρους:

$$\cos\theta \simeq 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 \Rightarrow \cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2} \qquad (6)$$

Ξέρουμε ότι $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \Rightarrow 1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \beta^2 = \left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)$

$$\Rightarrow \beta = \Big(1 - \underbrace{\frac{1}{\gamma^2}}_{\text{πολύ μικρό}}\Big)^{1/2} \xRightarrow{\text{Διωνυμικό ανάπτυγμα}} \beta \simeq 1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2} \qquad (7)$$

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση (Γ) από το προηγούμενο ερώτημα και τις (6), (7)

$$\cos\theta^* = \frac{-\cancel{1} + \frac{1}{2}\gamma^{-2} + \cancel{1} - \theta^2/2}{1 - \left(1 - \frac{\gamma^{-2}}{2}\right)\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^2} - \theta^2\right)}{\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{\theta^2}{4\gamma^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta^* = \frac{1 - \gamma^2\theta^2}{1 + \gamma^2\theta^2 - \frac{\theta^2}{2}}} \qquad (\Delta)$$

(δ) Ο ανιχνευτής μπορεί να ανιχνεύσει σωματίδια που εκπέμπονται σε γωνίες το πολύ $\theta = \frac{r}{D} = 10^{-4}$. Έχουμε ακόμα ότι $\gamma \simeq 100$.

Οπότε: $$\cos\theta^* = \frac{1 - (100 * 10^{-4})^2}{1 + (100 \times 10^{-4})^2 - \left(\frac{10^{-4}}{2}\right)^2} = \frac{1 - 10^{-4}}{1 + 10^{-4} - 10^{-8}/2} \Rightarrow$$

$$\cos\theta^* \simeq (1 - 10^{-4})\cdot(1 - 10^{-4}) \Rightarrow \cos\theta^* \simeq 1 - 2\cdot 10^{-4} \Rightarrow \cos\theta^* \simeq 1 - \frac{\theta^{*2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{1} - 2\cdot 10^{-4} = \cancel{1} - \frac{\theta^{*2}}{2} \Rightarrow \boxed{\theta^* \simeq 2\cdot 10^{-2}}$$

Η στερεά γωνία που αντιστοιχεί είναι: $\frac{\cancel{\pi}\theta^{*2}}{4\cancel{\pi}} = \frac{\theta^{*2}}{4} = \frac{10^{-4}}{1} \Rightarrow$ το ποσοστό είναι $\underline{\underline{10^{-4}}}$