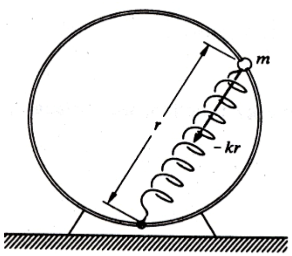
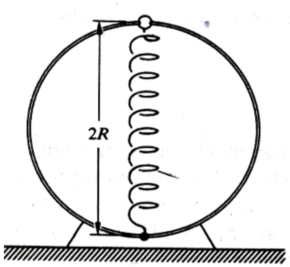
Παράδειγμα 1ο

Μια χάντρα μάζας m γλιστρά χωρίς τριβές σε ένα κατακόρυφο στεφάνι ακτίνας R. Η χάντρα κινείται κάτω από την συνδιασμένη επιρροή της βαρύτητας και ενός ελατηρίου το ένα άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο κατώτερο μέρος του στεφανιού. Για απλούστευση, θεωρείστε ότι το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι μηδέν και επομένως η δύναμη του ελατηρίου είναι -kr, όπου r το στιγμιαίο μήκος του ελατηρίου. Η χάντρα αφήνεται από την κορυφή του στεφανιού με αμελητέα ταχύτητα. Πόσο γρήγορα κινείται στο κατώτερο μέρος του στεφανιού;





Λύση

Στο ψηλότερο σημείο του στεφανιού έχουμε

$$E_{\mu\eta\chi} = U_{\beta\alpha\rho.} + U_{\varepsilon\lambda} = mg(2R) + \frac{1}{2}k(2R)^2 \Rightarrow E_{\mu\eta\chi} = 2mgR + 2kR^2$$

Στο χαμηλότερο σημείο του στεφανιού έχουμε

$U_{\beta\alpha\rho.} = 0$ (επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας βαρύτητας)

$U_{\varepsilon\lambda.} = 0$ (δεν υπάρχει επιμήκυνση)

Όλες οι δυνάμεις είναι συντηρητικές και επομένως η μηχανική ενέργεια είναι σταθερή

$$E^i_{\mu\eta\chi} = E^f_{\mu\eta\chi} \Rightarrow K^i + U^i = K^f + U^f \Rightarrow U^i = K^f \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_f^2 = 2mgR + 2kR^2$$

$$\Rightarrow \upsilon_f = 2\sqrt{\left(gR + \frac{kR^2}{m}\right)}$$

Παράδειγμα 2ο

Ένας ακροβάτης τσίρκου μάζας M πηδά κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα υ_0 από ένα τραμπολίνο. Καθώς ανεβαίνει προς τα πάνω πιάνει ένα εκπαιδευμένο πίθηκο μάζας m από ένα βατήρα σε ύψος h πάνω από το τραμπολίνο. Ποιό είναι το μέγιστο ύψος στο οποίο φθάνουν;

Λύση

Η ταχύτητά του σε κάθε χρονική στιγμή είναι: $\upsilon(t) = \upsilon_0 - gt$ (1)

Ενώ η θέση του ως προς το τραμπολίνο είναι: $y(t) = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}gt^2$

Ο χρόνος που χρειάστηκε για να βρεθεί σε ύψος h όπου πιάνει τον πίθηκο

$$h = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-\upsilon_0 \pm \sqrt{\upsilon_0^2 - 4(-g/2)(-h)}}{-g} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{\upsilon_0}{g} \mp \frac{1}{g}\sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh}$$

Μας ενδιαφέρει η πρώτη χρονική στιγμή στην οποία ο ακροβάτης φθάνει στο h

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε την ταχύτητα την στιγμή που πιάνει το πίθηκο

$$\upsilon = \upsilon_0 - g\frac{\upsilon_0}{g} + g\frac{1}{g}\sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh} = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh}$$

Τη στιγμή αυτή έχουμε μια πλαστική κρούση μεταξύ ακροβάτη και πιθήκου και αφού δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις η ορμή διατηρείται:

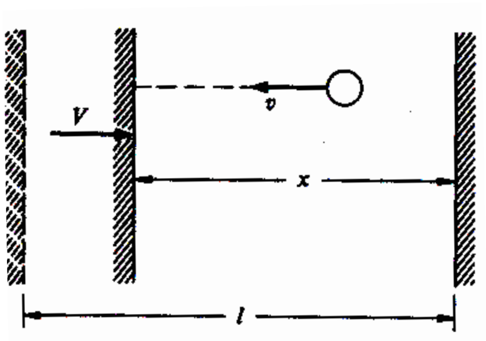
$$p_i = p_f \Rightarrow M\upsilon = (M+m)v \Rightarrow v = \frac{M}{M+m}\sqrt{\upsilon_0^2 - 2hg}$$

Με αυτή σαν αρχική ταχύτητα θα κινηθούν χρόνο t_{max} $\Rightarrow t_{max} = \frac{v}{g}$

Επομένως το αντίστοιχο ύψος θα είναι: $y_{max}(t) = \frac{v^2}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v^2}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g} \Rightarrow y_{max}(t) = h + \frac{1}{2}\frac{v^2}{g}$

Παράδειγμα 3ο

Μια super-μπάλα μάζας m αναπηδά συνεχώς μεταξύ 2 επιφανειών με ταχύτητα υ_0. Η βαρύτητα θεωρείται αμελητέα και οι κρούσεις είναι τέλεια ελαστικές. (α) Να βρεθεί η μέση δύναμη σε κάθε επιφάνεια. (β) Αν η μια επιφάνεια μετακινείται σιγά σιγά προς την άλλη με ταχύτητα $V \ll \upsilon_0$ ο ρυθμός των συγκρούσεων θα αυξηθεί εξαιτίας της μικρότερης απόστασης και γιατί η ταχύτητα της μπάλας αυξάνει μετά την σύγκρουση με την επιφάνεια. Να βρεθεί η δύναμη F συναρτήσει της απόστασης x των δύο επιφανειών. (γ) Δείξτε ότι το έργο που απαιτείται για να μετακινηθεί η επιφάνεια από l σε x είναι ίσο με την αύξηση της κινητικής ενέργειας της μπάλας



Λύση

(α) Σε χρόνο $\Delta t = \dfrac{2l}{\upsilon_0}$ κάθε επιφάνεια θα έχει μια κρούση

Επομένως η μέση δύναμη θα είναι $F = \dfrac{\Delta p_{\kappa\rho}}{\Delta t}$

Η μεταβολή της ορμής κατά την κρούση είναι

$$\Delta p_{\kappa\rho} = m\upsilon_0 - m(-\upsilon_0) = 2m\upsilon_0$$

Επομένως: $F = \dfrac{\Delta p_{\kappa\rho}}{\Delta t} = \dfrac{2m\upsilon_0}{2l/\upsilon_0} \Rightarrow F = \dfrac{m}{l}\upsilon_0^2$

(β) Η αριστερή επιφάνεια πλησιάζει με ταχύτητα: $V \ll \upsilon_0$

Αν η τελική απόσταση των 2 επιφανειών είναι x, η διαδικασία διαρκεί $T = \dfrac{l - x}{V}$

Σε κάθε κρούση η μπάλα θα αποκτήσει περισσότερη ταχύτητα κατά 2V

Οι σκεδάσεις συμβαίνουν τώρα σε διάστημα $\Delta t = \dfrac{2x}{\upsilon}$

Επομένως ο ρυθμός αύξησης της ταχύτητας της μπάλας είναι

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{2V}{2x/\upsilon} = \frac{\upsilon V}{x} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon} = \frac{V}{x}dt \Rightarrow \int \frac{d\upsilon}{\upsilon} = \int \frac{V}{x}dt = \int \frac{V}{l-Vt}dt \Rightarrow \ln\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right) = -\ln\left(\frac{l-Vt}{l}\right)$$

$$\Rightarrow \upsilon(t) = \upsilon_0\left(\frac{l}{l-Vt}\right) \Rightarrow \upsilon(t) = \upsilon_0\left(\frac{l}{x}\right)$$

Η δύναμη θα είναι:

$$F = \frac{m\upsilon^2}{x} = \frac{m}{x}\upsilon_0^2\frac{l^2}{x^2} \Rightarrow F = \frac{m\upsilon_0^2}{l}\left(\frac{l}{x}\right)^3 \Rightarrow F = F_0\left(\frac{l}{x}\right)^3$$

(γ) Η μεταβολή στην κινητική ενέργεια είναι:

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{m}{2}\left[\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2\right] \Rightarrow \Delta K = \frac{m}{2}\left[\upsilon_0^2\left(\frac{l}{x}\right)^2 - \upsilon_0^2\right] \Rightarrow \Delta K = \frac{m\upsilon_0^2}{2}\left[\left(\frac{l}{x}\right)^2 - 1\right]$$

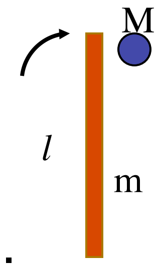
Το έργο για την μετακίνηση της επιφάνειας είναι:

$$W = \int F \cdot dx = -\int_l^x \frac{m\upsilon_0^2}{l}\left(\frac{l}{x}\right)^3 dx \Rightarrow W = -\frac{m\upsilon_0^2}{l}l^3\int_l^x\left(\frac{1}{x}\right)^3 dx = -m\upsilon_0^2 l^2\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_l^x$$

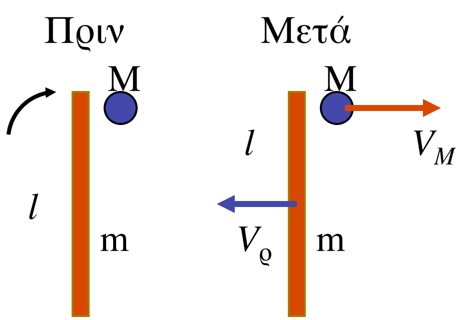
$$\Rightarrow W = \frac{m}{2}\upsilon_0^2 l^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{l^2}\right) \Rightarrow W = \frac{m}{2}\upsilon_0^2\left[\left(\frac{l}{x}\right)^2 - 1\right]$$

Παράδειγμα 4ο

Μια ομοιόμορφη ράβδος μάζας m και μήκους l ($I=1/12\ ml^2$) περιστρέφεται πάνω σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια με το CM σταθερό. Μια μάζα M τοποθετείται στο επίπεδο και ένα άκρο της ράβδου συγκρούεται ελαστικά με την μάζα M. Ποια πρέπει να είναι η τιμή της μάζας M ώστε η ράβδος μετά τη σύγκρουση να έκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση και όχι περιστοφική.



Λύση



Στην άσκηση αυτή συνδυάζονται κρούση και περιστροφή

Η ράβδος περιστρέφεται ελεύθερα πριν την κρούση και δεν υπάρχει κάποια δύναμη που να προκαλεί ροπή ως προς το CM. Το ίδιο και μετά την κρούση δεν υπάρχουν δυνάμεις που να εφαρμόζουν ροπές.

Επομένως η στροφορμή του συστήματος διατηρείται

Η κρούση είναι ελαστική και επομένως θα διατηρείται η ορμή του συστήματος πριν και μετά την κρούση καθώς και η μηχανική ενέργεια.

Διατήρηση στροφορμής:

Η ράβδος δεν περιστρέφεται και το CM μεταφέρεται στην ευθεία που περνούσε από το αρχικό σημείο περιστροφής

ως προς το αρχικό σημείο περιστροφής

$$L_i = L_f \Rightarrow \vec{L}_\rho^i + \vec{L}_M^i = \vec{L}_\rho^f + \vec{L}_M^f$$

$$L_\rho^i = I_\rho \omega = \frac{1}{12} ml^2\omega$$

$$L_\rho^f = 0$$

$$L_M^i = 0 \qquad \text{(η μπάλα ακίνητη)}$$

$$L_M^f = \vec{r} \times \vec{p} = MV_M \frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12} ml^2\omega = MV_M \frac{l}{2} \qquad (1)$$

Διατήρηση της ορμής:

(Θετική η φορά της M) →

$$\left.\begin{aligned} & p_i = p_f \Rightarrow \vec{p}_\rho^{\,i} + \vec{p}_M^{\,i} = \vec{p}_\rho^{\,f} + \vec{p}_M^{\,f} \\ & p_\rho^i = 0 \\ & p_\rho^f = m(-V_\rho) \\ & p_M^i = 0 \\ & p_M^f = MV_M \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 = \vec{p}_\rho^{\,f} + \vec{p}_M^{\,f} \Rightarrow mV_\rho = MV_M$$

$$\Rightarrow p = mV_\rho = MV_M \qquad (2)$$

Διατήρηση ενέργειας:

$$\left.\begin{aligned} & E_i = E_f \Rightarrow E_\rho^i + E_M^i = E_\rho^f + E_M^f \\ & E_\rho^i = \frac{1}{2} I\omega^2 \\ & E_\rho^f = \frac{1}{2} mV_\rho^2 \\ & E_M^i = 0 \\ & E_M^i = \frac{1}{2} MV_M^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} mV_\rho^2 + \frac{1}{2} MV_M^2 \Rightarrow$$

$$I\omega^2 = mV_\rho^2 + MV_M^2 \qquad (3)$$

Τρεις εξισώσεις με τρεις αγνώστους (M, V_M, V_ρ)

Από (2) η (3) δίνει: $I\omega^2 = \frac{p^2}{m} + \frac{p^2}{M} \Rightarrow I\omega^2 = p^2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)$

Από (2) η (1) δίνει: $I\omega = p\frac{l}{2} \Rightarrow I\omega = p = \frac{2I\omega}{l}$

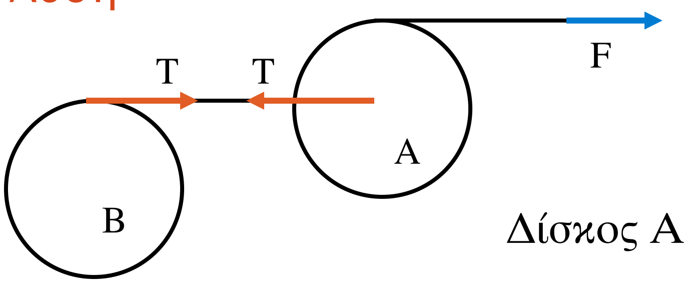
$$\Rightarrow I\omega^2 = \left(\frac{2I\omega}{l}\right)^2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{4I}{l^2}\right)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \Rightarrow 1 = \frac{4\left(ml^2/12\right)}{l^2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \Rightarrow 1 = \frac{m}{3}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \Rightarrow 3 = 1 + \frac{m}{M} \; \boxed{\Rightarrow M = \frac{m}{2}}$$

Παράδειγμα 5ο

Δύο δίσκοι μάζας M και ακτίνας R είναι σε ηρεμία πάνω σε λεία επιφάνεια. Ο δίσκος A έχει μια λεπτή ταινία τυλιγμένη γύρω του όπως και ο δίσκος B. Η ταινία από το δίσκο B έχει το άκρο της στερεωμένο πάνω στον άξονα του δίσκου A. Οι δύο ταινίες είναι παράλληλες. Μιά δύναμη F εφαρμόζεται στο ελεύθερο άκρο της ταινίας που είναι τυλιγμένη γύρω από το δίσκο A. Να βρεθεί η επιτάχυνση του δίσκου A. (Η ροπή αδράνειας δίσκου είναι $I=1/2MR^2$)

Λύση



Μεταξύ του δίσκου A και B αναπτύσεται η τάση της ταινίας στο δίσκο A και B.

Η δύναμη που εφαρμόζεται στο δίσκο A είναι:

Δίσκος A: 2ος νόμος Newton: $\sum F_x^A = F - T = Ma_A$ (1)

Η δύναμη που εφαρμόζεται στο δίσκο B είναι:

Δίσκος B: 2ος νόμος Newton: $\sum F_x^B = T = Ma_B$ (2)

Η τάση, T, προκαλεί ροπή στον δίσκο B (ως προς το κέντρο του) $\tau_B = TR = I\alpha_B$ (3)

Αλλά η ταινία έχει επιτάχυνση: $a_A = a_B^{CM} + R\alpha_B = a_B + R\alpha_B \Rightarrow a_B = a_A - R\alpha_B$ (4)

Από (4) η (2) δίνει: $T = M(a_A - R\alpha_B) = Ma_A - MR\alpha_B$

Λύνοντας την (3) ως προς α_B: $\alpha_B = \dfrac{TR}{I}$

$\Rightarrow T = Ma_A - MR\dfrac{TR}{I}$ (5)

(5) $\Rightarrow T = Ma_A - MR\dfrac{TR}{MR^2/2} \Rightarrow T = Ma_A - 2T \Rightarrow 3T = Ma_A$

Αντικαθιστώντας στην (1) $F - \dfrac{Ma_A}{3} = Ma_A \Rightarrow a_A = \dfrac{3F}{4M}$