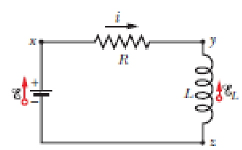
Φροντιστήριο 9 ΦΥΣ112

22/11/2023

30.65) Στο κύκλωμα του πιο κάτω σχήματος υποθέτουμε ότι $\mathcal{E} = 10.0\,V$, $R = 6.70\,\Omega$ και $L = 5.50\,H$. Η ιδανική μπαταρία συνδέεται την χρονική στιγμή $t = 0$. (a) Πόση ενέργεια μεταφέρεται από την μπαταρία τα πρώτα $2.00\,s$; (b) Πόση από αυτή την ενέργεια μαζεύεται στο μαγνητικό πεδίο της επαγωγής; (c) Πόση από την ενέργεια χάνεται στον αντιστάτη;



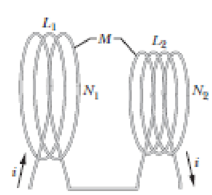
30.71) Κατά μήκος χάλκινου σύρματος ρέει ρεύμα $10\,A$ το οποίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο εμβαδό διατομής του. Υπολογίστε την πυκνότητα ενέργειας (a) του μαγνητικού πεδίου και (b) του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια του σύρματος. Η διάμετρός του είναι $2.5\,mm$ και η αντίστασή του ανά μήκος $3.3\,\Omega/km$.

30.77) Δύο πηνία είναι συνδεδεμένα όπως φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα, και έχουν επαγωγές L_1 και L_2. Η αμοιβαία επαγωγή τους είναι M. (a) Δείξτε ότι αυτός ο συνδυασμός μπορεί να αντικατασταθεί με ένα μοναδικό πηνίο με ισοδύναμη επαγωγή:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M \tag{1}$$

(b) Πώς θα μπορούσαν τα δύο πηνία να ενωθούν ώστε η ισοδύναμη επαγωγή να είναι:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M \tag{2}$$



31.14) Για να φτιάξετε ένα εναλασσόμενο LC κύκλωμα μπορείτε να επιλέξετε επαγωγή $10\,mH$, πυκνωτή $5.0\,\mu F$ και ακόμα ένα πυκνωτή $2.0\,\mu F$. Ποια είναι (a) η μικρότερη, (b) δεύτερη μικρότερη, (c) δεύτερη μεγαλύτερη και (d) μεγαλύτερη συχνότητα ταλάντωσης που μπορείτε να καταγράψετε με διάφορους συνδυασμούς των πιο πάνω εξαρτημάτων;

31.19) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα των βρόγχων, αναπαράγετε την διαφορική εξίσωση για ένα κύκλωμα LC:

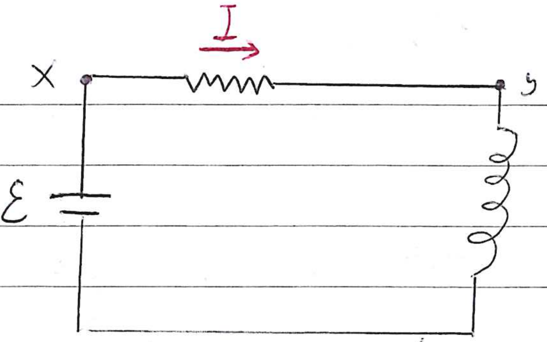
$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \tag{3}$$

31.26) Σε ένα εναλασσόμενο κύκλωμα RLC σε σειρά βρείτε τον χρόνο που χρειάζεται για την μέγιστη ενέργεια που υπάρχει στον πυκνωτή κατά την διάρκεια μιας ταλάντωσης ώστε να πέσει στο μισό της αρχικής της τιμής. Υποθέστε ότι $q = Q$ την χρονική στιγμή $t = 0$.

(1)

Ευτύχιος Καϊμακάμης

<u>Problem</u> 30.65)



$\mathcal{E} = 10{,}0\,V$

$R = 6{,}70\,\Omega$

$L = 5{,}50\,H$

(a) $I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$, $\tau = \frac{L}{R}$

$\rightarrow P = \frac{dE}{dt} = \mathcal{E}.I \Rightarrow E(t_0 = 2{,}00\,s) = \int_0^{t_0} P\,dt = \int_0^{t_0} \frac{\mathcal{E}^2}{R}\left(1 - e^{-tR/L}\right)$

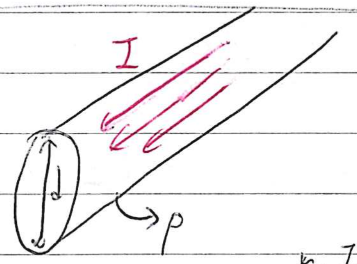
$= \frac{\mathcal{E}^2}{R}\left[t_0 + \frac{L}{R}\left(e^{-t_0 R/L} - 1\right)\right]$

$= \boxed{18{,}7\,J}$

(b) $U_B = \frac{1}{2} L I^2_{(t_0)} = \frac{1}{2} L \frac{\mathcal{E}^2}{R^2}\left(1 - e^{-t_0 R/L}\right)^2 = \boxed{5{,}10\,J}$

(c) <u>Διατήρηση ενέργειας</u>: $\boxed{E_R = E - U_B = 13{,}6\,J}$

<u>Problem</u> 30.71)



$I = 10\,A$

$d = 2{,}5\,mm$

$\rho = 3{,}3\,\Omega/km$

<u>Ampére</u>: <u>$r > R$</u>: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{\pi d}$

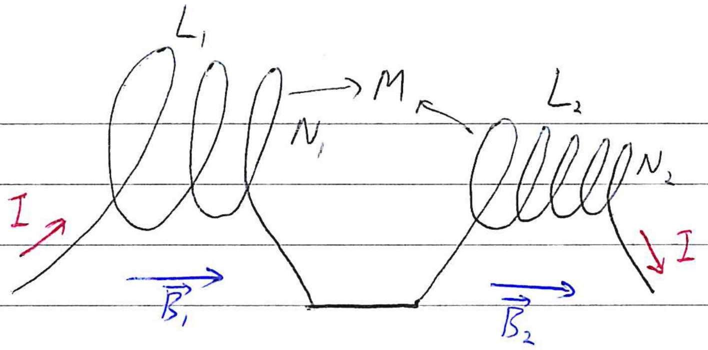
↳ όλη την επιφάνεια

(a) $u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2(R) = \frac{1}{2\mu_0} \frac{\mu_0^2 I^2}{\pi^2 d^2} = \boxed{1{,}0\,J/m^3}$

(b) $\left.\begin{aligned} & u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \\ & E = \rho J \\ & J = I.A^{-1} = I(\pi R^2)^{-1} = \frac{4I}{\pi d^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{4I\rho}{\pi d^2}\right)^2 = \boxed{4{,}8 . 10^{-15}\,J/m^3}$

↳ <u>ομοιόμορφο ρεύμα</u>

Problem 30.77) (a)



Λόγω σύνδεσης τα $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$ λόγω του ρεύματος είναι ομόρροπα (προς τα δεξιά).

$$\Rightarrow \mathcal{E} = -(L+M)\frac{dI}{dt}$$ $\longrightarrow$ για κάθε πηνίο

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \mathcal{E}_1 = -(L_1+M)\frac{dI}{dt} \\ &\Rightarrow \mathcal{E}_2 = -(L_2+M)\frac{dI}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{E}_{eq} = -(L_1+L_2+2M)\frac{dI}{dt}$$

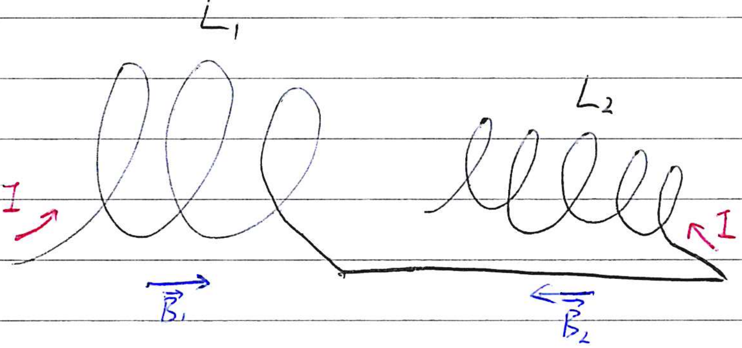
$\rightarrow$ Αν είχαμε μόνο ένα πηνίο: $\mathcal{E}_{eq} = -L_{eq}\frac{dI}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M}$$

(b) Για να έχουμε $L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$:

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{eq} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = -(L_1+L_2-2M)\frac{dI}{dt}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \mathcal{E}_1 = -(L_1-M)\frac{dI}{dt} \\ &\Rightarrow \mathcal{E}_2 = -(L_2-M)\frac{dI}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ $\vec{B}_1, \vec{B}_2$ αντίρροπα



Problem

31.14) $L = 10\,mH$, $C_1 = 5{,}0\,\mu F$, $C_2 = 2{,}0\,\mu F$ } 4 διατάξεις: (i) $C_1 - C_2$ σε σειρά
(ii) $C_1 - C_2$ παράλληλα
(iii) C_1 μόνο
(iv) C_2 μόνο

(i) $C_{eq} = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$, (ii) $C_{eq} = C_1 + C_2$, (iii) $C_{eq} = C_1$, (iv) $C_{eq} = C_2$

$\rightarrow f = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_{eq}}} \Rightarrow$ μεγαλύτερο C_{eq}, μικρότερη f

(a) $f_{min} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_{eq}^{(ii)}}} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L(C_1+C_2)}} = \boxed{600\ Hz}$

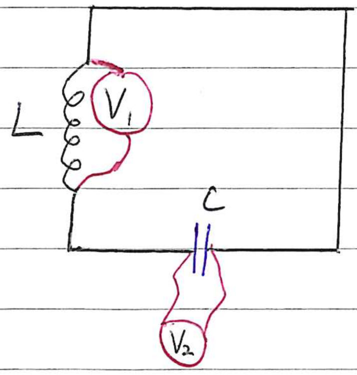
(b) $f'_{min} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_{eq}^{(iii)}}} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}} = \boxed{710\ Hz}$

(c) $f'_{max} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_{eq}^{(iv)}}} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_2}} = \boxed{1{,}1\ kHz}$

(d) $f_{max} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_{eq}^{(i)}}} = \dfrac{\sqrt{C_1+C_2}}{2\pi\sqrt{LC_1C_2}} = \boxed{1{,}3\ kHz}$

Problem

31.19) $\rightarrow L\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{q}{C} = 0$



Kirchhoff: $V_1 + V_2 = 0$

$\rightarrow V_1 = -L\left(\pm\dfrac{dI}{dt}\right)$
$\rightarrow I = \dfrac{dq}{dt}$
$\Rightarrow V_1 = \mp L\dfrac{d^2q}{dt^2}$

$\rightarrow V_2 = \mp\dfrac{q}{C}$

→ Ο ρυθμός μεταβολής του I είναι αντίθετα πρόσημου με το φορτίο που υπάρχει στους οπλισμούς του πυκνωτή. Αυτό γιατί καθώς το $|q|$ αυξάνεται, τότε το ρεύμα τείνει να μειωθεί έως ότου γίνει 0 (και το αντίστροφο).

Άρα:

$$\boxed{L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0}\ ✓$$

Problem 31.26) $\rightarrow q(t=0) = Q$

$$\hookrightarrow q(t) = Q e^{-tR/2L} \cos(\omega' t + \overset{\text{φάση}}{\varphi}) \quad , \quad \omega' \equiv \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$\rightarrow E = \frac{q^2}{2C} \Rightarrow E_{max} = \frac{q_{max}^2}{2C} \quad (\text{για μία ταλάντωση})$$

$$\left.\begin{aligned} &\rightarrow E_i = \frac{Q^2}{2C} \\ &\rightarrow E_{max} = \frac{E_i}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{q_{max}^2}{2C} = \frac{Q^2}{4C} \Rightarrow \underline{q_{max} = \frac{Q}{\sqrt{2}}}$$

$$\rightarrow \underline{q_{max} \Rightarrow \cos(\omega' t + \varphi) = 1} \quad \Rightarrow q_{max} = q(t_0) = Q e^{-\frac{t_0 R}{2L}}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{t_0 R}{2L}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{t_0 R}{2L} = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\Rightarrow \boxed{t_0 = \frac{L}{R} \ln 2}$$