**ΦΥΣ 140** **LAB10 - QUIZ - 20 λεπτά**

**Άσκηση 1** [7.5μ]

Έστω ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ αποτελεί τη λύση της διαφορικής εξίσωσης: $\frac{dy}{dx} = y - 10x^2$. Έστω ότι η αρχική συνθήκη του προβλήματος είναι $f(x = 0) = 3$. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Euler με βήμα $dx = 0.2$, βρείτε την προσεγγιστική τιμή της συνάρτησης $f(x = 0.4)$ όταν δηλαδή το $x = 0.4$.

Σύμφωνα με τη μέθοδο Euler, θα έχουμε: $y_{i+1} = y_i + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i} \Delta x$. Επομένως:

$y_1 = y_0 + (y_0 - 10x_0^2)\Delta x = 3 + (3 - 10 \times 0) \times 0.2 = 3.6$ $1^o \beta ή\mu\alpha\ Euler - f(x = 0.2)$

$y_2 = y_1 + (y_1 - 10x_1^2)\Delta x = 3.6 + (3.6 - 10 \times 0.2^2) \times 0.2 = 3.04$ $2^o \beta ή\mu\alpha\ Euler$

Επομένως για $x = 0.4$ η προσεγγιστική λύση τιμή του $f(x = 0.4) = y = 4.24$

**Άσκηση 2 [7.5μ]**

Ένα σώμα που κινείται έχει ταχύτητα (m/s) που αλλάζει με τον χρόνο σύμφωνα με την σχέση: $\upsilon(t) = 200\ln(1 + t) - t$ με $t > 0$. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Euler και χρονικό βήμα $dt = 5s$ υπολογίστε την απόσταση που κάλυψε το σώμα στο χρονικό διάστημα από τη χρονική στιγμή $t = 2s$ έως τη χρονική στιγμή $t = 12s$.

Η μέθοδος Euler θα δώσει $\upsilon_i = 200\ln(1 + t_i) - t_i$ και $x_{i+1} = x_i + \upsilon_i \times \Delta t$

Στο 1ο βήμα ξεκινώντας τη χρονική στιγμή $t$=2s θα έχουμε:

$\upsilon_{t=2} = 200\ln(1 + 2) - 2 \Rightarrow \upsilon_{t=2} = 217.72$ και $x_{t=7} = x_{t=2} + \upsilon_{t=2} \times 5 = x_{t=2} + 1088.61$

Στο 1ο βήμα ξεκινώντας τη χρονική στιγμή $t$=7s θα έχουμε:

$\upsilon_{t=7} = 200\ln(1 + 7) - 7 \Rightarrow \upsilon_{t=7} = 408.89$ και

$x_{t=12} = x_{t=7} + \upsilon_{t=7} \times 5 = x_{t=2} + 1088.61 + 408.89 \times 5 = x_{t=2} + 3133.05$

Επομένως η απόσταση που κάλυψε το σώμα είναι: $x_{t=12} - x_{t=2} = x_{t=2} + 3133.05 - x_{t=2}$

$$\Rightarrow x_{t=12} - x_{t=2} = \Delta x = 3133.05$$

**Άσκηση 3 [Bonus-5]**

Φανταστείτε ότι θέλετε να λύσετε τη διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dt} = -3x + 2$ με $x(t = 0) = 1$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Euler. Ποιο θα είναι το μεγαλύτερο χρονικό βήμα, *dt*, που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε για να λύσετε την εξίσωση χωρίς να γίνει η αριθμητική λύση ασταθής;

Έχουμε την συνάρτηση $y = f(t, x)$ και σύμφωνα με την μέθοδο του Euler θα πάρουμε:

$y_{i+1} = y_i + hf'(t, x)$ όπου $h$ το βήμα της ανεξάρτητης μεταβλητής. Θεωρώντας ότι

$f'(t, x) = \lambda y$ η προηγούμενη σχέση γράφεται: $y_{i+1} = y_i + h\lambda y_i \Rightarrow y_{i+1} = (1 + h\lambda)y_i$.

Η συνθήκη για σταθερότητα είναι $|1 + h\lambda| < 1$. Επομένως $-1 < 1 + h\lambda < 1$.

Για τη συγκεκριμένη περίπτωση της ερώτησης: $\frac{dy}{dt} = -3x + 2$ με $x(t = 0) = 1$.

Επομένως $y = f(t, x)$ και $f'(t, x) = -3x + 2$. Η μέθοδος του Euler θα δώσει:

$x_{i+1} = x_i + hf'(t_i, x_i) = x_i + h(2 - 3x_i) = (1 - 3h)x_i + 2h$

Θα πρέπει επομένως για ευστάθεια να έχουμε ότι: $|1 - 3h| < 1 \Rightarrow -1 < 1 - 3h < 1 \Rightarrow$
$-2 < -3h < 0 \Rightarrow 0 < 3h < 2 \Rightarrow 0 < h < 2/3$.

Το μέγιστο βήμα για ευστάθεια θα είναι επομένως $h < \frac{2}{3} \sim 0.67$.