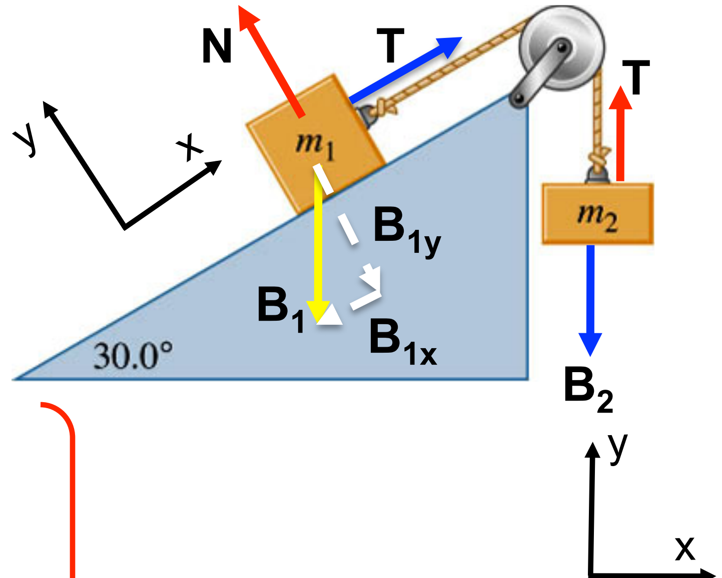
Παράδειγμα

Τούβλο μάζας m_1=2.6kg βρίσκεται πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο όπως στο σχήμα. Συνδέεται με άλλο τούβλο μάζας m_2=2.0kg με ένα σχοινί μέσω αβαρούς τροχαλίας

- Να βρεθεί η επιτάχυνση του m_1



x-διεύθυνση:

Μάζα 1: $\sum F_x = m_1 a_{1x} \Rightarrow T - B_{1x} = m_1 a_{1x}$

$$\Rightarrow T - m_1 g \sin\theta = m_1 a_{1x}$$

$$\Rightarrow T = m_1\left(g\sin\theta + a_{1x}\right)$$

y-διεύθυνση:

Μάζα 2: $\sum F_y = m_2 a_{2y} \Rightarrow T - B_2 = -m_2 a_{2y}$

$$\Rightarrow T - m_2 g = -m_2 a_{2y}$$

$$\Rightarrow m_1\left(g\sin\theta + a_{1x}\right) - m_2 g = -m_2 a_{2y}$$

Υποθέσαμε ότι το σώμα 1 κινείται προς τα πάνω, και επομένως το σώμα 2 κινείται προς τα κάτω. Τα 2 σώματα έχουν ίδια επιτάχυνση εφόσον ανήκουν στο ίδιο σύστημα:

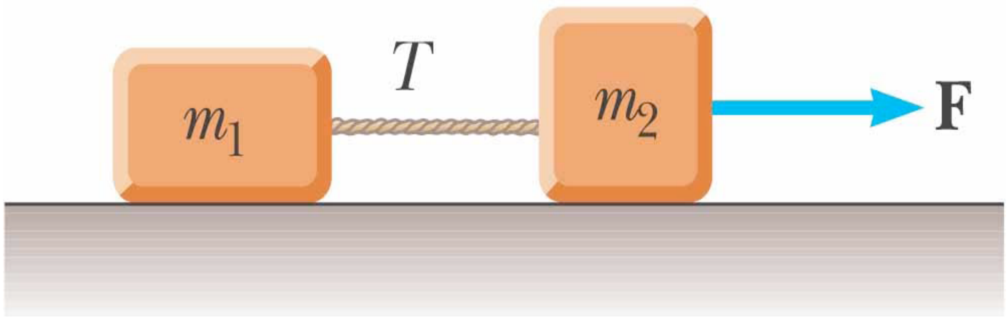
$$\Rightarrow a_{1x} = a_{2y}$$

$$\Rightarrow m_1\left(g\sin\theta + a_{1x}\right) - m_2 g = -m_2 a_{1x}$$

$$\Rightarrow g\left(m_1 \sin\theta - m_2\right) = -\left(m_1 + m_2\right) a_{1x}$$

$$\Rightarrow a_{1x} = -\frac{g\left(m_1\sin\theta - m_2\right)}{\left(m_1 + m_2\right)} = \frac{g\left(m_2 - m_1\sin\theta\right)}{\left(m_1 + m_2\right)}$$

Τριβή - Παράδειγμα

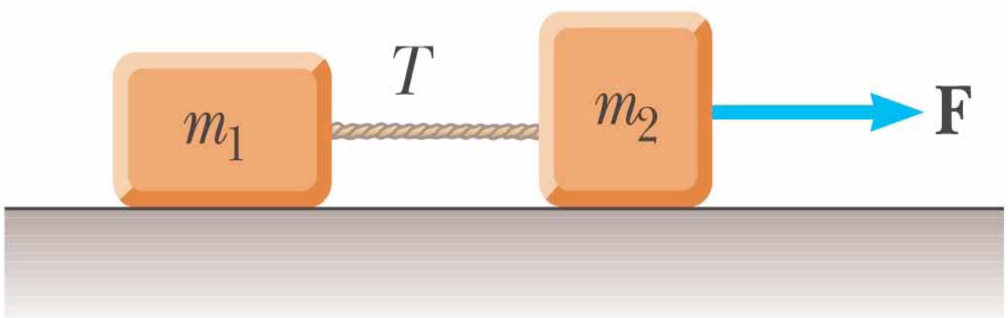


Δύο τούβλα συνδέονται μεταξύ τους με ένα σχοινί αμελητέας μάζας και σύρονται με μια οριζόντια δύναμη F. Υποθέστε ότι F=68.0N, m_1=12.0kg και m_2=18.0kg. Ο συντελεστής κινητικής τριβής, μ_κ, μεταξύ των τούβλων και της επιφάνειας είναι $\mu_\kappa = 0.1$

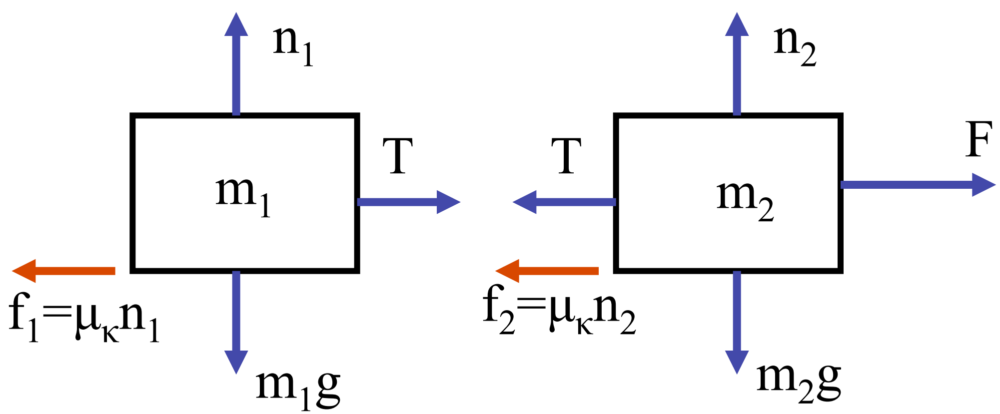
(α) Σχεδιάστε τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος για κάθε τούβλο.

(β) Προσδιορίστε την τάση T και το μέγεθος της επιτάχυνσης του συστήματος

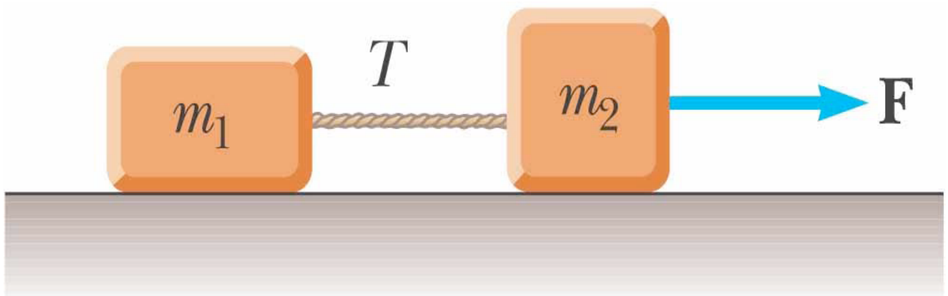
Τριβή - Παράδειγμα



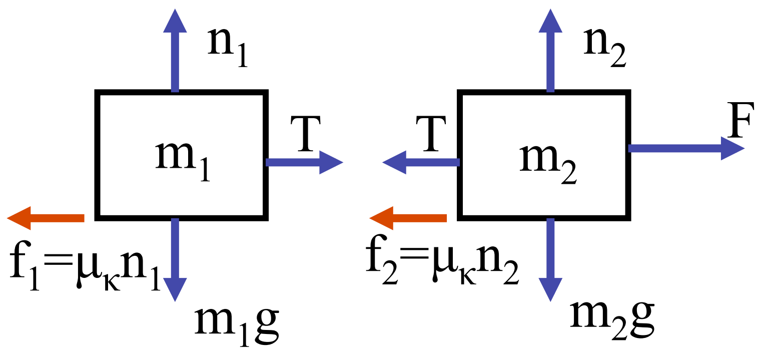
(α) Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για κάθε τούβλο:



Τριβή - Παράδειγμα



(β) Προσδιορισμός της τάσης T και της επιτάχυνσης α



Τούβλο 2: $\sum F_x^2 = F - T - f_2 = m_2 a \Rightarrow 68 - T - \mu_\kappa m_2 g = m_2 a$

Τούβλο 1: $\sum F_x^1 = \quad +T - f_1 = m_1 a \Rightarrow \quad +T - \mu_\kappa m_1 g = m_1 a$

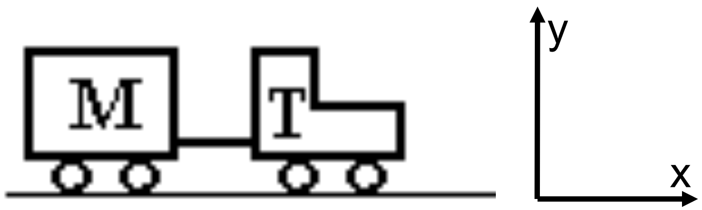
$$68 - \mu_\kappa (m_1 + m_2) g = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = \frac{68 - \mu_\kappa (m_1 + m_2) g}{(m_1 + m_2)} \Rightarrow a = 1.29 m/s^2$$

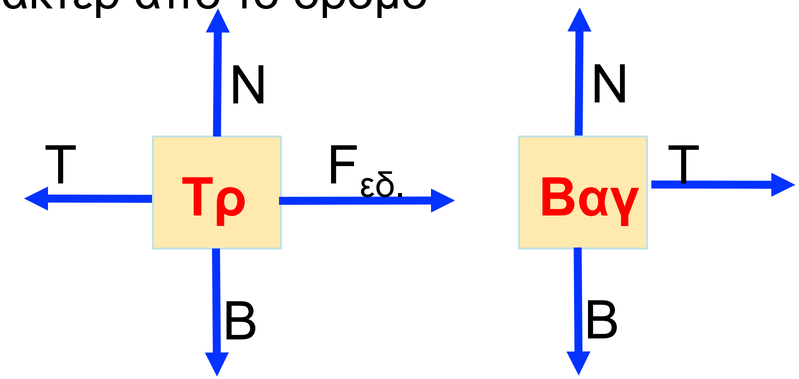
$$T = m_1 a + \mu_\kappa m_1 g \Rightarrow T = 27.2N$$

Παράδειγμα επιταχυνόμενης κίνησης

Ένα τρακτέρ T μάζας m_T=300Kg τραβά ένα βαγονάκι μάζας m_B=400kg με σταθερή δύναμη σε οριζόντιο δρόμο. Το σύστημα κινείται με σταθερή επιτάχυνση 1.5m/s^2.

- Να βρεθεί η οριζόντια δύναμη στο τρακτέρ από το δρόμο





x-διεύθυνση: Τρακτέρ

$$\sum F_x = m_T a \Rightarrow F_{\varepsilon\delta} - T = m_T a$$

$$\Rightarrow F_{\varepsilon\delta} = T + m_T a$$

x-διεύθυνση: Βαγονάκι

$$\sum F_x = m_B a \Rightarrow T = m_B a$$

$$\Rightarrow F_{\varepsilon\delta} = m_B a + m_T a \Rightarrow F_{\varepsilon\delta} = \left(m_B + m_T\right) a$$

- Να βρεθεί η καθαρή δύναμη που ασκείται στο τρακτέρ και στο βαγονάκι

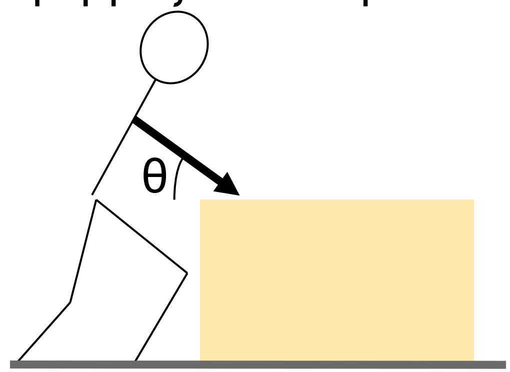
$$F_{\tau\rho.} = m_T a \Rightarrow F_{\tau\rho} = 300 \times 1.5 = 450\text{N}$$

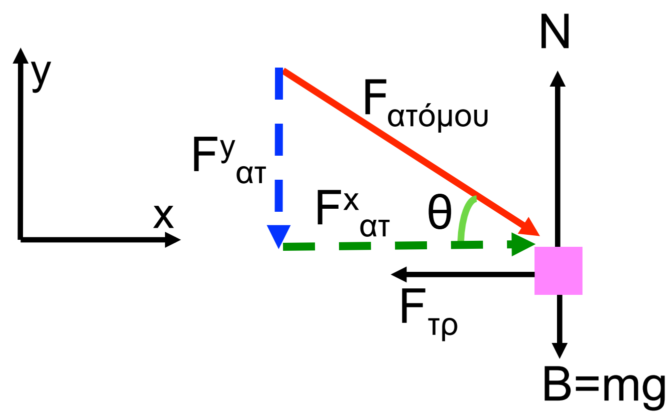
$$F_{\beta\alpha\gamma.} = m_B a \Rightarrow F_{\beta\alpha\gamma.} = 400 \times 1.5 = 600\text{N}$$

Παράδειγμα δύναμης με γωνία

Ένα άτομο σπρώχνει ένα κιβώτιο μάζας 15kg με σταθερή ταχύτητα κατά μήκος ενός δαπέδου. Ο συντελεστής κινητικής τριβής δαπέδου-κιβωτίου είναι $\eta_\kappa=0.4$. Το άτομο σπρώχνει το κιβώτιο με γωνία 25^o.

- Να βρεθεί η δύναμη που εφαρμόζει το άτομο





x-διεύθυνση:

$$\sum F_x = ma_x = 0 \quad \text{(υ=σταθ.)}$$

$$\Rightarrow F^x_{\alpha\tau} - F_{\tau\rho} = 0$$

$$F^x_{\alpha\tau} = F_{\alpha\tau}\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow F_{\alpha\tau}\cos(\theta) = F_{\tau\rho}$$

$$F_{\tau\rho.} = \eta_\kappa N$$

y-διεύθυνση:

$$\sum F_y = ma_y = 0$$

$$\Rightarrow N - B - F^y_{\alpha\tau} = 0$$

$$\Rightarrow N = B + F_{\alpha\tau}\sin(\theta)$$

$$\Rightarrow F_{\tau\rho.} = \eta_\kappa\left(B + F_{\alpha\tau}\sin(\theta)\right)$$

$$\Rightarrow F_{\alpha\tau}\left[\cos(\theta) - \eta_\kappa \sin(\theta)\right] = \eta_\kappa mg$$

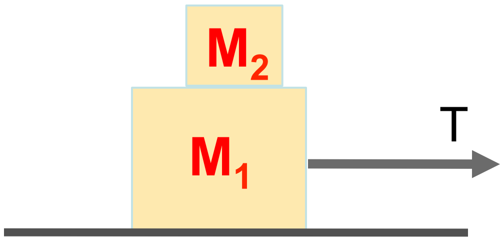
$$\Rightarrow F_{\alpha\tau} = \frac{\eta_\kappa mg}{\left[\cos(\theta) - \eta_\kappa \sin(\theta)\right]}$$

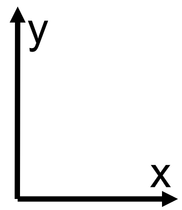
Η κάθετη δύναμη είναι μεγαλύτερη από το βάρος

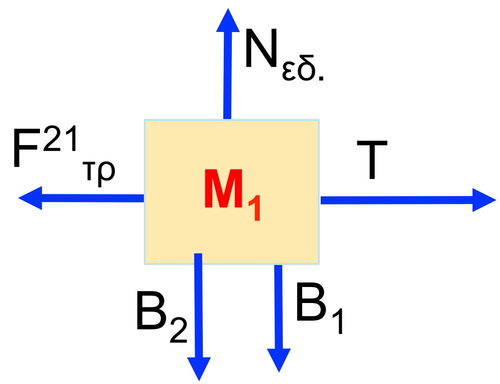
Παράδειγμα

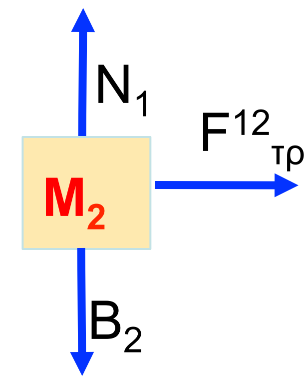
Μια δύναμη Τ εφαρμόζεται σε σχοινί που είναι εξαρτημένο σε σώμα 1 προκαλώντας επιτάχυνση $\alpha = 3 m/s^2$. Η τριβή κρατά το σώμα 2 πάνω στο σώμα 1 χωρίς να γλυστρά.

- Να βρεθεί η δύναμη Τ









x-διεύθυνση: Μάζα 2

$$\sum F_x = m_2 a \Rightarrow F_{12}^{\tau\rho} = m_2 a$$

x-διεύθυνση: Μάζα 1

$$\sum F_x = m_1 a \Rightarrow T - F_{21}^{\tau\rho} = m_1 a$$

$3^{ος}$ Νόμος:

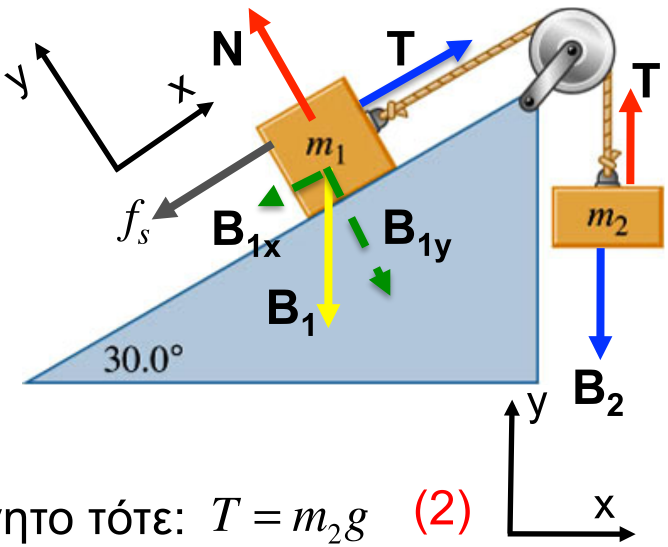
$$\left|F_{21}^{\tau\rho}\right| = \left|F_{12}^{\tau\rho}\right|$$

$$\Rightarrow T = m_1 a + m_2 a \Rightarrow T = (m_1 + m_2) a$$

Ίδιο αποτέλεσμα σα να είχαμε ένα και μόνο σώμα με μάζα $M = M_1 + M_2$

Παράδειγμα – Παρουσία τριβής

Τούβλο μάζας m_1=1.0kg βρίσκεται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο όπως στο σχήμα. Συνδέεται με άλλο τούβλο μάζας m_2=2.0kg με ένα σχοινί μέσω αβαρούς τροχαλίας. Οι συντελεστές στατικής και κινητικής τριβής μεταξύ m_1 και επιπέδου είναι μ_s=0.5 και μ_κ=0.4. Ποια η επιτάχυνση του συστήματος



Τρεις πιθανές περιπτώσεις (ανεξάρτητες):

(1) Το σώμα θα παραμείνει ακίνητο

(2) Το σώμα θα επιταχυνθεί προς τα πάνω

(3) Το σώμα θα επιταχυνθεί προς τα κάτω

Δεν ξέρουμε που θέλει να κινηθεί το σώμα και η κίνηση εξαρτάται από τη τριβή

Ξέρουμε όμως τη μέγιστη τιμή της στατικής τριβής: $f_s^{max} = \mu_s N = \mu_s m_1 g \cos\theta$ (1)

Ξέρουμε ακόμα πως αν το σύστημα είναι ακίνητο τότε: $T = m_2 g$ (2)

(A) Υποθέτουμε ότι m_1 είναι σχεδόν έτοιμη να κινηθεί προς τα πάνω:

Η f_s θα έχει φορά προς τα κάτω με μέτρο: $f_s = \mu_s m_1 g \cos\theta$

Από το 2ο νόμο του Newton στη x-διεύθυνση θα έχουμε:

$$T - B_{1x} - f_s^{max} = 0 \Rightarrow T - m_1 g \sin\theta - f_s^{max} = 0$$ (η m_1 είναι ακόμα ακίνητη!)

$$\Rightarrow T = m_1 g \sin\theta + f_s^{max} \Rightarrow m_2 g = m_1 g \sin\theta + f_s^{max}$$

Αν η m_2 γίνει ελάχιστα μεγαλύτερη τότε το σύστημα θα επιταχυνθεί προς τα πάνω

Επομένως η ικανή συνθήκη για να συμβεί είναι: $\boxed{m_2 g \geq m_1 g \sin\theta + f_s^{max}}$

Παράδειγμα – Παρουσία τριβής

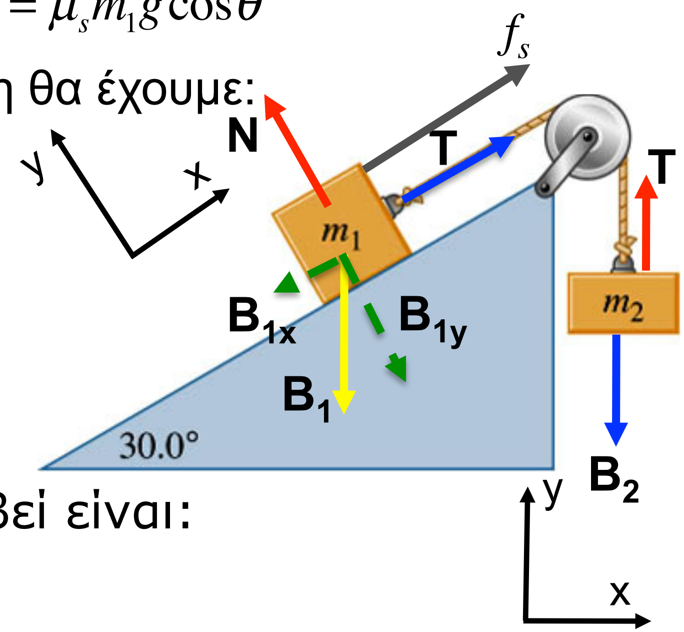
(Β) Υποθέτουμε ότι m_1 είναι σχεδόν έτοιμη να κινηθεί προς τα κάτω:

Η f_s θα έχει φορά προς τα πάνω με μέτρο: $f_s = \mu_s m_1 g \cos\theta$

Από το 2ο νόμο του Newton στη x-διεύθυνση θα έχουμε:

$$T - B_{1x} + f_s^{\max} = 0 \Rightarrow T - m_1 g \sin\theta + f_s^{\max} = 0$$

$$\Rightarrow T = m_1 g \sin\theta - f_s^{\max} \Rightarrow m_2 g = m_1 g \sin\theta - f_s^{\max}$$



Αν η m_2 γίνει ελάχιστα μικρότερη τότε το σύστημα θα επιταχυνθεί προς τα κάτω

Επομένως η ικανή συνθήκη για να συμβεί είναι:

$$\boxed{m_2 g \leq m_1 g \sin\theta - f_s^{\max}}$$

(Γ) Αν οι συνθήκες (Α) και (Β) δεν ικανοποιηθούν και οι δυο τότε:

το σύστημα θα παραμείνει ακίνητο

Παράδειγμα – Παρουσία τριβής

Αντικατάσταση στα δεδομένα του προβλήματος:

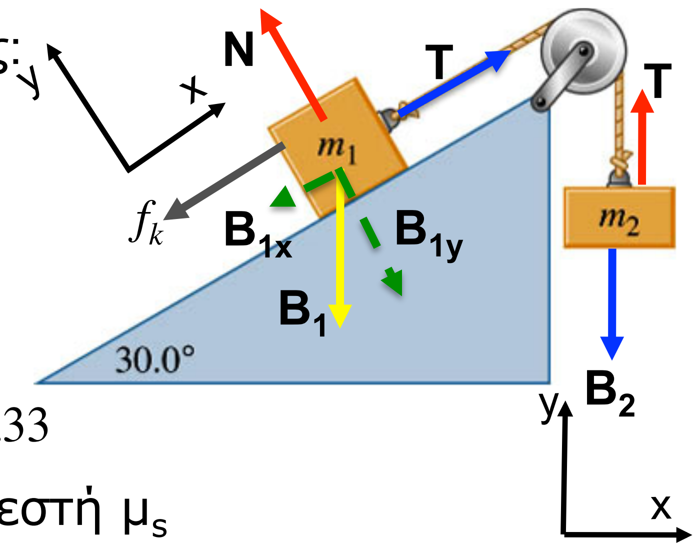
m_2=2Kg, m_1=1kg, θ=30^0 και μ_s=0.5

Επομένως θα έχουμε:

$$m_1 g\sin\theta = 1\times 10\times {}^1\!/_2 = 5$$

$$m_2 g = 2\times 10 = 20$$

$$f_s^{max} = \mu_s N = \mu_s m_1 g\cos\theta = 0.5\times 1\times 10\times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4.33$$



Προσοχή ότι χρησιμοποιήσαμε το συντελεστή μ_s

Εξετάζουμε τις 3 συνθήκες για να βρούμε πως θα κινηθεί το σύστημα:

$\boxed{(A)\ \ m_2 g \geq m_1 g\sin\theta + f_s^{max}}$ Αντικατάσταση: $20 \geq 5 + 4.33$ Ισχύει

Επομένως το σύστημα θα κινηθεί προς τα πάνω

➡ Ποια είναι η επιτάχυνση και ποια η τάση του νήματος;

Από τη στιγμή που το σύστημα αρχίζει να κινείται η τριβή γίνεται κινητική τριβή, έχει φορά προς τα κάτω και μέτρο $f_k=\mu_\kappa m_1 g\cos\theta$

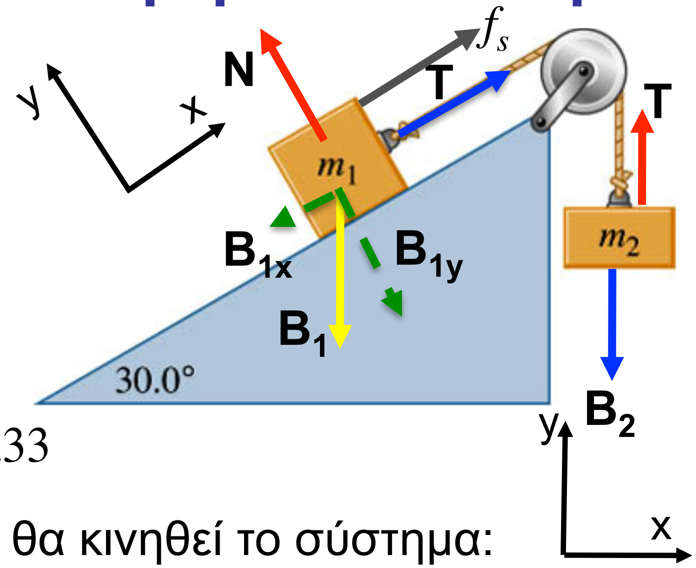
Από το 2^o νόμο του Newton στη x-διεύθυνση θα έχουμε:

$$T - f_k - m_1 g\sin\theta = m_1 a \Rightarrow T - \mu_k m_1 g\cos\theta - m_1 g\sin\theta = m_1 a$$

$$\Rightarrow T - m_1 g\left(\mu_k \cos\theta - \sin\theta\right) = m_1 a$$ Μια εξίσωση με 2 αγνώστους (Τ και α)

Αλλά το m_2 επιταχύνεται με α: $T - m_2 g = -m_2 a \ \Rightarrow T = m_2\left(g - a\right)$ Η $T<m_2 g=20$

Παράδειγμα – Παρουσία τριβής – Διαφορετικά δεδομένα



Έστω τα δεδομένα του προβλήματος είναι:

m_2=0.4Kg, m_1=1kg, θ=30^0 και μ_s=0.5

Επομένως θα έχουμε:

$$m_1 g \sin\theta = 1\times 10\times {}^1\!/_2 = 5$$

$$m_2 g = 0.4\times 10 = 4$$

$$f_s^{\max} = \mu_s N = \mu_s m_1 g\cos\theta = 0.5\times 1\times 10\times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4.33$$

Εξετάζουμε τις 3 συνθήκες για να βρούμε πως θα κινηθεί το σύστημα:

$\boxed{\text{(A)}\ \ m_2 g \geq m_1 g\sin\theta + f_s^{\max}}$ Αντικατάσταση: $4 \geq 5 + 4.33$ Δεν Ισχύει

$\boxed{\text{(B)}\ \ m_2 g \leq m_1 g\sin\theta - f_s^{\max}}$ Αντικατάσταση: $4 \leq 5 - 4.33$ Δεν Ισχύει

Οι συνθήκες (Α) και (Β) δεν ικανοποιούνται και επομένως το σύστημα θα παραμείνει ακίνητο

Από το 2^{o} νόμο του Newton θα έχουμε τώρα:

$$T - m_1 g\sin\theta + \vec{f}_s = 0 \ \Rightarrow \vec{f}_s = T - m_1 g\sin\theta = 5 - 4 \ \Rightarrow \vec{f}_s = +1$$

Δηλαδή η στατική τριβή έχει φορά προς τα πάνω και μέτρο 1< f_s^{max}

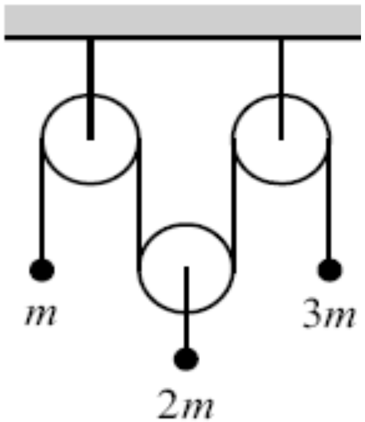
Μηχανή Atwood με κινούμενη τροχαλία

Θεωρείστε τη μηχανή Atwood του σχήματος.

(α) Να γραφούν οι τρεις εξισώσεις F=ma.
Θεωρείστε θετική τη φορά προς τα πάνω.

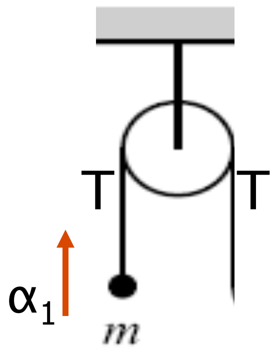
(β) Να βρεθεί η επιτάχυνση της μεσαίας μάζας (2m) συναρτήσει των επιταχύνσεων των δύο άλλων μαζών.

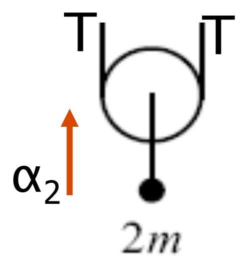
(γ) Να βρεθούν και οι τρεις επιταχύνσεις

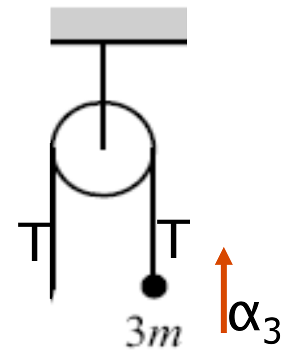


Μηχανή Atwood με κινούμενη τροχαλία

(α) Να γραφούν οι τρεις εξισώσεις F=mα.







$$\sum F = m_1 a_1 = T - m_1 g \Rightarrow \boxed{m_1 a_1 = T - m_1 g}$$

$$\sum F = m_2 a_2 = T + T - m_2 g \Rightarrow \boxed{m_2 a_2 = 2T - m_2 g}$$

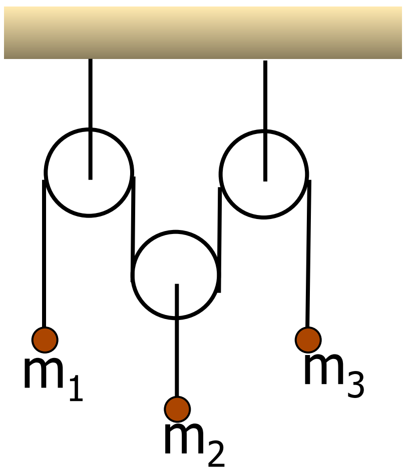
$$\sum F = m_3 a_3 = T - m_3 g \Rightarrow \boxed{m_3 a_3 = T - m_3 g}$$

Τρεις εξισώσεις αλλά
με 4 αγνώστους: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, T$
⇨ 1 ακόμα εξίσωση

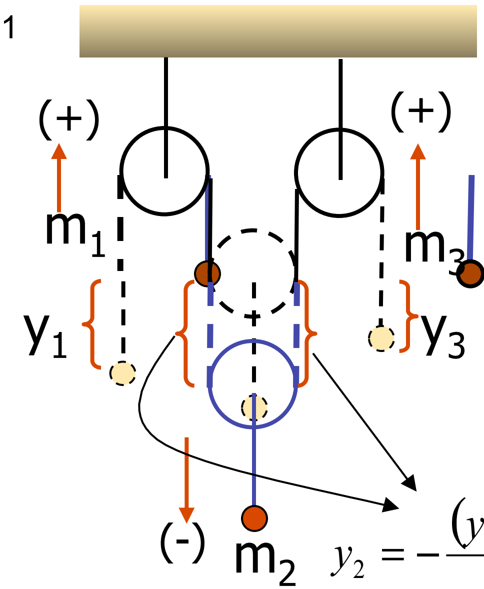
?

Μηχανή Atwood με κινούμενη τροχαλία

(β) "Αρχή διατήρησης του νήματος" και η επιτάχυνση της μάζας m_2



- Έστω η μάζα m_1 κινείται κατά y_1 προς τα πάνω και η μάζα m_3 κινείται κατά y_3 προς τα πάνω.
- Το νήμα όμως δεν "χάνεται", άρα μήκος νήματος ίσο με y_1+y_3 πρέπει να εμφανιστεί στη μεσαία περιοχή.
- Αφού υπάρχουν 2 τμήματα νήματος, το καθένα θα πρέπει να επιμηκυνθεί κατά $(y_1+y_3)/2$.



$$y_2 = -\frac{(y_1 + y_3)}{2}$$

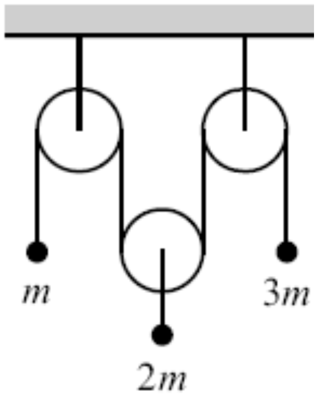
Η μάζα m_2 πηγαίνει προς τα κάτω κατά το ίδιο διάστημα y_2. Επομένως μπορούμε να βρούμε την επιτάχυνσή της.

$$a_2 = \frac{d\text{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy_2}{dt}\right) \Rightarrow a_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{d[-(y_1+y_3)/2]}{dt}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{dy_1}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{dy_3}{dt}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{a_2 = -\frac{(a_1 + a_3)}{2}}$$

Μηχανή Atwood με κινούμενη τροχαλία

(γ) Οι επιταχύνσεις των τριών μαζών και η τάση T του νήματος



Τώρα έχουμε 4 εξισώσεις με 4 αγνώστους:

$$a_1 = \frac{T - mg}{m} \quad (1)$$

$$a_2 = \frac{2T - 2mg}{2m} = \frac{T - mg}{m} \quad (2)$$

$$a_3 = \frac{T - 3mg}{3m} \quad (3)$$

$$a_2 = -\frac{a_1 + a_3}{2} \quad (4)$$

(1),(2) $\Rightarrow$ $a_2 = a_1$ (5)

(4),(5) $\Rightarrow$ $a_3 = -3a_1$ (6)

Από τις (6) και (3) έχουμε: $T = 3m(-3a_1) + 3mg \Rightarrow T = -m(9a_1 - 3g)$ (7)

Από τις (1) και (7) έχουμε: $a_1 = \dfrac{-m(9a_1 - 3g) - mg}{m} \Rightarrow 10ma_1 = 2mg \Rightarrow \boxed{a_1 = \dfrac{g}{5}}$

Αντικαθιστώντας στις (5),(6) και (7) $a_2 = \dfrac{g}{5}$ $\quad a_3 = -\dfrac{3g}{5}$ $\quad T = +\dfrac{6}{5}mg$