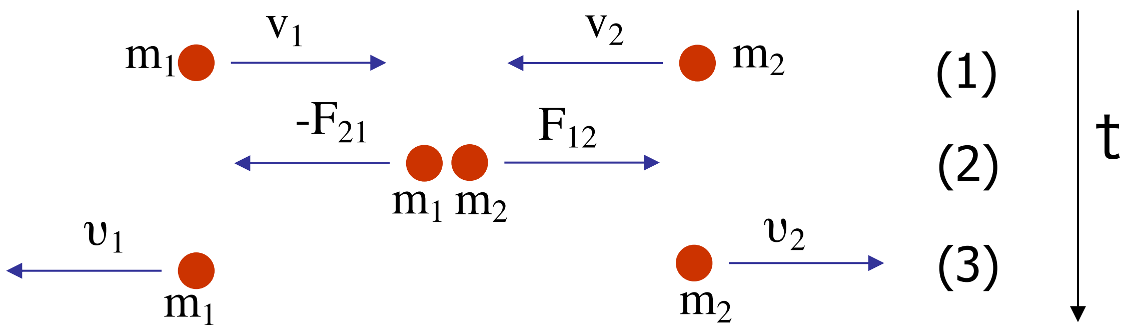
Ορμή - Κρούσεις

Κρούσεις

- Αν δύο σώματα συγκρουστούν τότε:
  - Υπάρχει ώθηση (ο χρόνος αλλαγής ορμής είναι μικρός)
  - Οι δυνάμεις είναι ίσες και αντίθετες και πολύ μεγαλύτερες από οποιαδήποτε εξωτερική δύναμη (σύστημα απομονωμένο)



- Ξέρουμε ότι $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow d\vec{p} = \vec{F}dt \Rightarrow \int d\vec{p} = \int \vec{F}dt$

Εξετάζουμε τη μάζα m_2: $\vec{p}_2' - \vec{p}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt = \Delta\vec{p}_2$

Εξετάζουμε τη μάζα m_1: $\vec{p}_1' - \vec{p}_1 = \int_{t_i}^{t_f} -\vec{F}dt = \Delta\vec{p}_1$

Από τη στιγμή που οι δυνάμεις είναι ίσες και αντίθετες $\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$

$$\Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

Ελαστική κρούση – 1 διάσταση

- Σε ελαστικές κρούσεις διατηρούνται η κινητική ενέργεια και η ορμή

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

Διατήρηση ορμής

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$$

Διατήρηση κινητικής ενέργειας

Έχουμε 2 εξισώσεις και 2 αγνώστους: v'_1 και v'_2. Λύνουμε για v'_1 και v'_2

Μετά από πράξεις μπορούμε να δείξουμε ότι για κρούσεις σε 1-διάσταση:

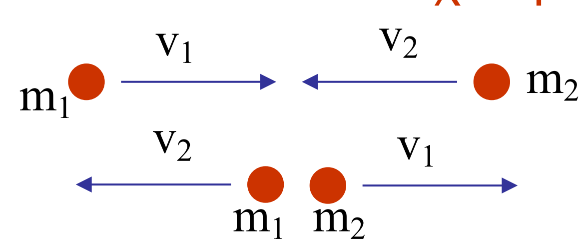
$$\vec{v}_1' = v_1\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) + v_2\left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

$$\vec{v}_2' = v_1\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) + v_2\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

Αν $m_1 = m_2$ τότε:

$v'_2 = v_1$ και $v'_1 = v_2$

τα σώματα ανταλλάσουν ταχύτητες



Ελαστική κρούση

- Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\boxed{\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_2' - \vec{v}_1'}$$

Δηλαδή οι σχετικές τους ταχύτητες είναι ίδιες πριν και μετά την κρούση ακόμα και αν οι μάζες τους είναι διαφορετικές

Μή Ελαστικές και Πλαστικές κρούσεις

- Σε μή ελαστικές κρούσεις ΔΕΝ ΔΙΑΤΗΡΕΙΤΑΙ η μηχανική ενέργεια
- Επομένως υπάρχει μόνο μια εξίσωση, αυτή της διατήρησης της ορμής

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

- Σε πλαστικές κρούσεις τα σώματα μένουν κολλημένα μετά την κρούση

Κρούση σε 1-διάσταση - Παράδειγμα

Μια σφαίρα 7gr όταν φεύγει από ένα πιστόλι προς ένα ακλόνητο ξύλινο τούβλο μάζας 1kg διεισδύει στο τούβλο σε βάθος 8cm. Το τούβλο κατόπιν τοποθετείται πάνω σε λεία επιφάνεια και είναι ελεύθερο να κινηθεί. Μια δεύτερη όμοια σφαίρα πυροβολείται με την ίδια ταχύτητα και ίδια απόσταση από το όπλο προς το τούβλο. Σε πόσο βάθος θα εισχωρήσει η σφαίρα μέσα στο τούβλο στην δεύτερη περίπτωση;

Λύση

Υποθέτουμε ότι οι ταχύτητες των 2 σφαιρών είναι ίσες και ότι η ίδια δύναμη απαιτείται ώστε οι σφαίρες να διεισδύσουν μέσα στο τούβλο. Αυτή η δύναμη δρα στη σφαίρα αντίθετα με τη φορά της κίνησής της

- Για την 1η σφαίρα, από το θεώρημα έργου-ενέργειας έχουμε:

$$W = E^{\mathrm{f}}_{\kappa\iota\nu.} - E^{\mathrm{i}}_{\kappa\iota\nu.} = -E^{\mathrm{i}}_{\kappa\iota\nu.} \Rightarrow -Fd_1 = -\frac{1}{2}m_{\sigma\varphi.}\upsilon_{\mathrm{i}}^2 \Rightarrow F = \frac{m_{\sigma\varphi.}\upsilon_{\mathrm{i}}^2}{2d_1} \quad (1)$$

- Όμοια για τη 2η σφαίρα: (το τούβλο μπορεί να κινηθεί τώρα)

$$W = E^{\mathrm{f}}_{\kappa\iota\nu.} - E^{\mathrm{i}}_{\kappa\iota\nu.} \Rightarrow -Fd_2 = \frac{1}{2}\left(m^2_{\sigma\varphi} + m^1_{\sigma\varphi} + M_{\tau o\upsilon\beta.}\right)\upsilon_{\mathrm{f}}^2 - \frac{1}{2}m_{\sigma\varphi}\upsilon_{\mathrm{i}}^2 \quad (2)$$

- Από διατήρηση της ορμής στη 2η περίπτωση παίρνουμε:

$$p_{\mathrm{i}} = p_{\mathrm{f}} \Rightarrow m_{\sigma\varphi}\upsilon_{\mathrm{i}} = (2m_{\sigma\varphi} + M_{\tau o\upsilon\beta.})\upsilon_{\mathrm{f}} \quad \Rightarrow \upsilon_{\mathrm{f}} = \frac{m_{\sigma\varphi}\upsilon_{\mathrm{i}}}{(2m_{\sigma\varphi} + M_{\tau o\upsilon\beta.})} \quad (3)$$

Αντικαθιστούμε την (1) και (3) στη (2)

$$-\frac{m_{\sigma\varphi.}\upsilon_{\mathrm{i}}^2}{2d_1}d_2 = \frac{1}{2}\left(2m_{\sigma\varphi.} + M_{\tau o\upsilon\beta.}\right)\frac{m^2_{\sigma\varphi.}\upsilon_{\mathrm{i}}^2}{\left(2m_{\sigma\varphi.} + M_{\tau o\upsilon\beta.}\right)^2} - \frac{1}{2}m_{\sigma\varphi.}\upsilon_{\mathrm{i}}^2 \Rightarrow d_2 = \frac{m_{\sigma\varphi.} + M_{\tau o\upsilon\beta.}}{\left(2m_{\sigma\varphi.} + M_{\tau o\upsilon\beta.}\right)}d_1$$

Κρούσεις σε 2 διαστάσεις

- Για ελαστικές κρούσεις

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$ όπου $p = (p_x, p_y)$

Δηλαδή είναι 2 εξισώσεις, μια για κάθε διεύθυνση (x,y) και υπάρχει και μια τρίτη εξίσωση λόγω διατήρησης της κινητικής ενέργειας

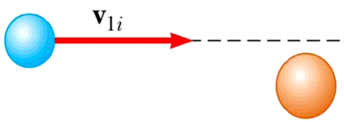
Αν m_1, m_2, v_1, v_2 είναι γνωστά τότε έχουμε 3 εξισώσεις με 4 αγνώστους p'_{1x}, p'_{1y}, p'_{2x}, p'_{2y}

- Επομένως χρειαζόμαστε κάτι ακόμα για τη τελική κατάσταση

Κρούσεις σε 2 διαστάσεις - Παράδειγμα

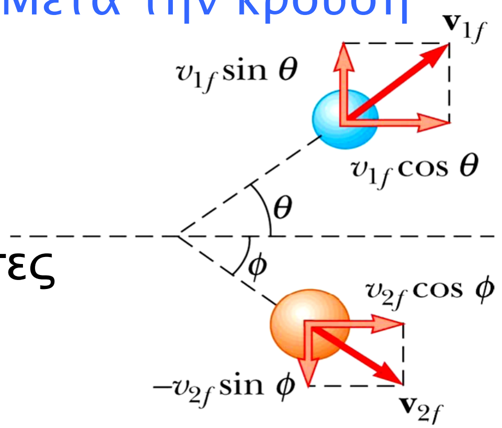
- Το σώμα 1 πριν την κρούση κινείται με ταχύτητα v_{1i} ενώ το σώμα 2 είναι σε ηρεμία v_{2i}=0
- Στη x-διεύθυνση η αρχική ορμή είναι $m_1 v_{1i}$
- Στη y-διεύθυνση η αρχική ορμή είναι μηδέν

Πριν τη κρούση



- Μετά την κρούση τα σώματα κινούνται με κάποιες γωνίες θ και φ ως προς την x-διεύθυνση

Μετά την κρούση



Το σώμα 1 έχει ταχύτητα: $\upsilon_{1x}^f = \upsilon_1^f \cos\theta$

$\upsilon_{2x}^f = \upsilon_2^f \cos\phi$

- Μετά την κρούση τα σώματα έχουν συνιστώσες ταχύτητας στη y-διεύθυνση.

Το σώμα 1 έχει ταχύτητα: $\upsilon_{1y}^f = \upsilon_1^f \sin\theta$

ενώ το σώμα 2 έχει ταχύτητα: $\upsilon_{2y}^f = \upsilon_2^f \sin\phi$ (κανονικά $\upsilon_{2y}^f = \upsilon_2^f \sin(-\phi)$)

Η ορμή στην x-διεύθυνση είναι: $m_1 v_1^f cos\theta + m_2 v_2^f cos(-\varphi) = m_1 v_1^f cos\theta + m_2 v_2^f cos\varphi$

Η ορμή στην y-διεύθυνση είναι: $m_1 v_1^f sin\theta + m_2 v_2^f sin(-\varphi) = m_1 \, v_1^f sin\theta - m_2 v_2^f sin\varphi$

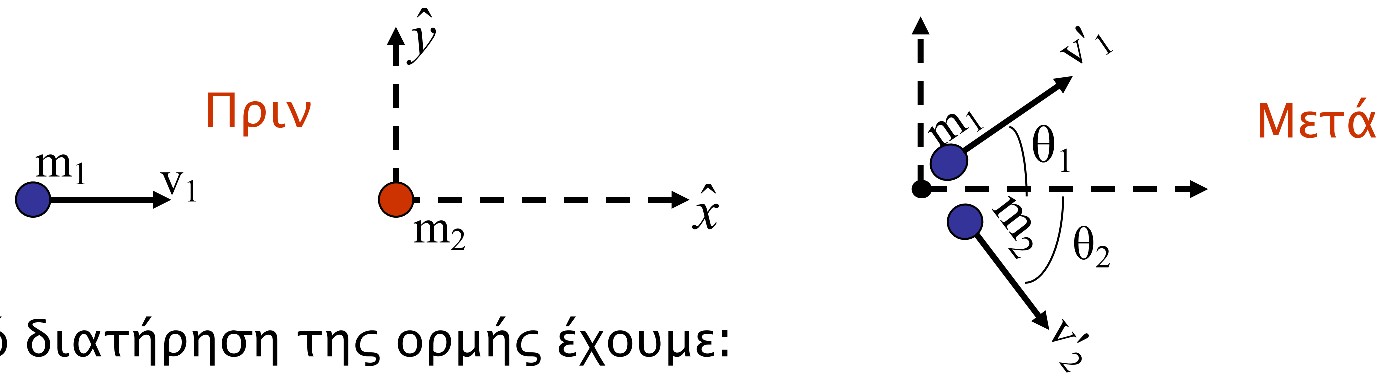
Μεθοδολογία λύσης ασκήσεων

- Προσδιορίστε ένα σύστημα συντεταγμένων και ορίστε τις ταχύτητες των σωμάτων του συστήματος ως προς τους άξονες αυτού του συστήματος
- Σχεδιάστε και προσδιορίστε όλα τα διανύσματα των ταχυτήτων και ότι άλλη πληροφορία σας δίνεται στο πρόβλημα
- Γράψτε τις εξισώσεις για την x- και y- συνιστώσα της ορμής κάθε σώματος πριν και μετά την κρούση.
  Μην ξεχνάτε τα απαραίτητα πρόσημα ανάλογα με τη διεύθυνση
- Γράψτε τις εξισώσεις για την ολική ορμή του συστήματος στην x-διεύθυνση πριν και μετά την κρούση και εξισώστε

  Επαναλάβετε και για την ολική ορμή στην y-διεύθυνση
- Εξετάστε το είδος της κρούσης:
  - Για μη ελαστική κρούση, η μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται και θα χρειάζεστε και άλλες πληροφορίες από το πρόβλημα.
  - Για πλαστική κρούση, τα σώματα έχουν την ίδια ταχύτητα μετά την κρούση. Λύστε τις εξισώσεις των ορμών ως προς τους αγνώστους.
  - Για ελαστική κρούση, η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Εξισώστε την κινητική ενέργεια πριν και μετά την κρούση για να βρείτε επιπλέον σχέσεις μεταξύ των ταχυτήτων

Κρούσεις – Παραδείγματα

- Θα αποδείξουμε ότι σε ελαστική μη κεντρική κρούση δύο σωμάτων ίδιας μάζας, ένα εκ των οποίων αρχικά είναι ακίνητο, η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων των τελικών ταχυτήτων είναι πάντοτε 90°



- Από διατήρηση της ορμής έχουμε:

$$(1)\hat{x} \quad m\mathrm{v}_1 + 0 = m\mathrm{v}'_1\cos\theta_1 + m\mathrm{v}'_2\cos\theta_2 \Rightarrow \mathrm{v}_1 = \mathrm{v}'_1\cos\theta_1 + \mathrm{v}'_2\cos\theta_2$$

$$(2)\hat{y} \quad 0 + 0 = m\mathrm{v}'_1\sin\theta_1 - m\mathrm{v}'_2\sin\theta_2 \quad \Rightarrow 0 = \mathrm{v}'_1\sin\theta_1 - \mathrm{v}'_2\sin\theta_2$$

- Από διατήρηση της ενέργειας έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m\mathrm{v}_2'^2$$

$$(3) \Rightarrow \mathrm{v}_1^2 = \mathrm{v}_1'^2 + \mathrm{v}_2'^2 \Rightarrow \mathrm{v}_1^2 - \mathrm{v}_1'^2 - \mathrm{v}_2'^2 = 0$$

Έχουμε 3 εξισώσεις και θέλουμε να ξέρουμε $\theta_1+\theta_2$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Υψώνουμε στο τετράγωνο τις σχέσεις (1) και (2) οπότε και παίρνουμε

$$(1)' \quad v_1 = v_1'\cos\theta_1 + v_2'\cos\theta_2 \Rightarrow v_1^2 = v_1'^2\cos^2\theta_1 + v_2'^2\cos^2\theta_2 + 2v_1'v_2'\cos\theta_1\cos\theta_2$$

$$(2)' \quad 0 = v_1'\sin\theta_1 - v_2'\sin\theta_2 \Rightarrow 0 = v_1'^2\sin^2\theta_1 + v_2'^2\sin^2\theta_2 - 2v_1'v_2'\sin\theta_1\sin\theta_2$$

Προσθέτοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2v_1'v_2'\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\right)$$

$$\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$$

Άρα καταλήγουμε με την σχέση:

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2v_1'v_2'\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) \Rightarrow$$

$$(3)' \qquad v_1^2 - v_1'^2 - v_2'^2 = 2v_1'v_2'\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right)$$

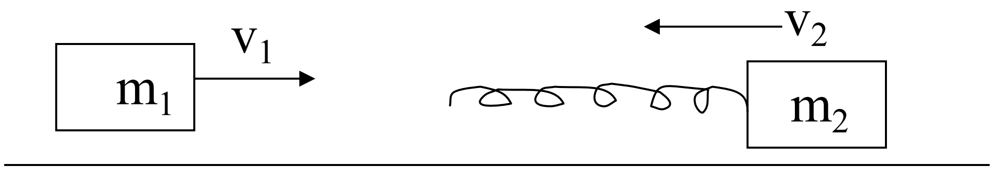
Το αριστερό μέλος όμως είναι η (3) και επομένως

$$2v_1'v_2'\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_1 + \theta_2 = 90^0}$$

Σε 2-D τα σώματα είναι 90^o μακριά. Για 1-D η θ_1 δεν ορίζεται

Παράδειγμα

Ελαστική κρούση που περιέχει μάζες και ελατήρια.



Τη χρονική στιγμή t', η μάζα m_1 έχει ταχύτητα v'_1 και το ελατήριο συσπειρώνεται. Ποιά είναι η ταχύτητα v'_2 τη στιγμή t' ?

- Από διατήρηση της ορμής:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$

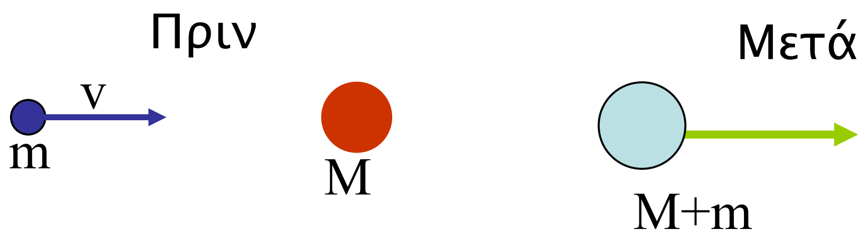
Μόνο η v'_2 είναι άγνωστη

- Από διατήρηση της ενέργειας:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^1 + \frac{1}{2}kx^2$$

Αυτή η σχέση δίνει την συσπείρωση του ελατηρίου τη στιγμή t'

Παράδειγμα - Πλαστική κρούση 1-D



Από διατήρηση της ορμής:

$$m\vec{v} + 0 = (m + M)\vec{v}' \Rightarrow \vec{v}' = \vec{v}\frac{m}{M+m}$$

Αν οι μάζες ήταν ίδιες τότε M=m και η παραπάνω σχέση δίνει: $\vec{v}' = \dfrac{\vec{v}}{2}$

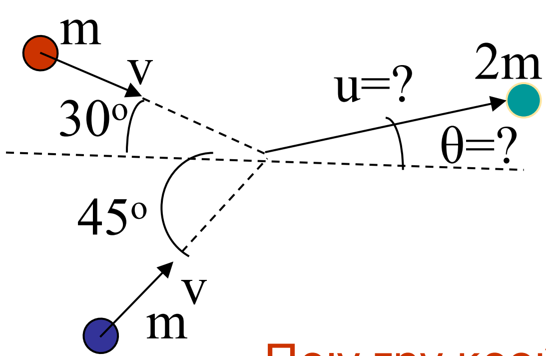
Παρατηρούμε ότι η κινητική ενέργεια πριν και μετά την κρούση είναι:

$$K_i = \frac{1}{2}mv^2 \qquad K_f = \frac{1}{2}(2m)v'^2 = m\frac{v^2}{4} = \frac{K_i}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta K = K_f - K_i = -m\frac{v^2}{4}}$$

Ένα μέρος της ενέργειας έχει χαθεί σε μορφή θερμότητας.

Παράδειγμα – Πλαστική κρούση 2-D



Ποια είναι η τελική ταχύτητα u και η γωνία θ?

Η ορμή p είναι ένα διάνυσμα. Επομένως όπως έχουμε δει αυτό σημαίνει διατήρηση ως προς κάθε κατεύθυνση (αν ήμασταν στο χώρο 3-d)

Πριν την κρούση

$$p_x = m\mathrm{v}\cos 30^0 + m\mathrm{v}\cos 45^0$$

$$p_y = -m\mathrm{v}\sin 30^0 + m\mathrm{v}\sin 45^0$$

Μετά την κρούση

$$p'_x = 2m\upsilon\cos\theta$$

$$p'_y = 2m\upsilon\sin\theta$$

Σύμφωνα με τη διατήρηση της ορμής:

$$p_x = p'_x \quad (1)$$

$$p_y = p'_y \quad (2)$$

Δηλαδή 2 εξισώσεις με 2 αγνώστους (υ και θ)

Διαιρώντας την (1) με την (2) έχουμε: $\dfrac{1/\sqrt{2} - 1/2}{\sqrt{3}/2 + 1/\sqrt{2}} = \tan\theta \Rightarrow \theta = 7.5^\circ$

Από την εξίσωση: $p_x = p'_x \Rightarrow m\mathrm{v}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2m\upsilon\cos 7.5^0 \Rightarrow \upsilon = 0.79\mathrm{v}$

14ο Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας
- Θα στείλετε τη φωτογραφία της απάντησής σας στο fotis@ucy.ac.cy

Έτοιμοι