ΦΥΣ 133 – 3η Πρόοδος 16-4-2007

1η Ομάδα	

1. (α) Εξετάζοντας το ενεργό δυναμικό $U_{eff}(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$ να βρεθεί η ακτίνα στην οποία ένας πλανήτης ή ένας κομήτης με στροφορμή l μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον ήλιο σε τροχιά σταθερής ακτίνας. (**5μ**)

(β) Δείξτε ότι η κυκλική αυτή ακτίνα είναι σταθερή με την έννοια ότι μικρές μόνο διαταραχές στην ακτινική διεύθυνση προκαλούν μόνο μικρές ακτινικές ταλαντώσεις. (**8μ**)

(γ) Δείξτε ότι η περίοδος των ταλαντώσεων αυτών είναι ίση με την περίοδο περιφοράς του πλανήτη γύρω από τον ήλιο. (**7μ**)

(α) Το ενεργό δυναμικό είναι: $U_{eff} = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$

Για να έχουμε κυκλική τροχιά θα πρέπει $\frac{dU_{eff}}{dr} = 0$

Αυτό σημαίνει ότι: $\frac{dU_{eff}}{dr} = \frac{Gm_1m_2}{r^2} - \frac{\cancel{2}l^2}{\cancel{2}\mu r^3} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{r_{\text{κυκλικής τροχιάς}} = \frac{l^2}{Gm_1m_2\mu}}$$

(β) Για να είναι η τροχιά σταθερή πρέπει $\left.\frac{d^2U_{eff}}{dr^2}\right|_{r=r_{\text{κυκλ. τροχιάς}}} > 0$

Βρίσκουμε επομένως τη 2η παράγωγο του ενεργού δυναμικού στο $r=r_{κυκλ}$

$$\frac{d^2U_{eff}}{dr^2} = -\frac{2Gm_1m_2}{r^3} + \frac{3l^2}{\mu r^4} = \frac{1}{r^4}\left(-2Gm_1m_2 r + \frac{3l^2}{\mu}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d^2U_{eff}}{dr^2}\right|_{r=r_{κυκλ}} = \frac{1}{r_0^4}\left[-2\cancel{Gm_1m_2}\frac{l^2}{\cancel{Gm_1m_2}\mu} + \frac{3l^2}{\mu}\right] = \frac{1}{r_0^4}\left[-\frac{2l^2}{\mu} + \frac{3l^2}{\mu}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d^2U_{eff}}{dr^2}\right|_{r=r_0} = \frac{1}{r_0^4}\frac{l^2}{\mu} > 0 \quad \underline{\text{άρα σταθερή}}$$

(γ) Αν αναπτύξουμε κατά Taylor το U_{eff} γύρω από τη θέση $r=r_0$

έχουμε: $$U_{eff}(r_0+\delta r) = \overset{σταθ}{\cancel{U_{eff}(r_0)}} + \overset{0}{\cancel{\frac{dU_{eff}}{dr}}}(\delta r) + \frac{1}{2}\frac{d^2U_{eff}}{dr^2}(\delta r)^2 + \dots$$

Επομένως η εξίσωση κίνησης στην ακτινική διεύθυνση θα είναι:

$$\mu(\underset{0}{\cancel{\ddot{r}_0}} + \delta\ddot{r}) = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial \delta r} \Rightarrow \mu\,\delta\ddot{r} = -\frac{\partial^2 U_{eff}}{\partial r^2}\delta r \Rightarrow \boxed{\delta\ddot{r} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 U_{eff}}{\partial r^2}\Big|_{r=r_0}\delta r}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή

με συχνότητα $$\omega^2 = \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 U_{eff}}{\partial r^2}\Big|_{r=r_0} = \frac{1}{\mu}\frac{\ell^2}{r_0^4\mu} = \frac{\ell^2}{r_0^4\mu^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0 = \frac{\ell}{\mu r_0^2}} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\mu r_0^2}{\ell}}$$

Από τη στιγμή που ο ήλιος είναι πολύ πιο μεγάλος σε μάζα

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \simeq m_1$ = μάζα του πλανήτη ή κομήτη.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της περιόδου:

$$T_{ταλ} = \frac{2\pi \cancel{m_1} r_0^{\cancel{2}}}{\cancel{m_1}\cancel{r_0}\cdot v} = \frac{2\pi r_0}{v} = T_{περιστροφής} \Rightarrow \boxed{T_{ταλ} = T_{περ}}$$

2. Τι θα συμβεί στην τροχιά της γης (την οποία μπορείτε να θεωρήσετε κυκλική) αν η μισή από την μάζα του ήλιου εξαφανιστεί ξαφνικά. (**20μ**)

Αρχικά η γη βρίσκεται σε σταθερή κυκλική τροχιά ακτίνας R_o

Το ενεργό δυναμικό είναι: $U_{eff} = -\frac{Gm_1m_2}{R_o} + \frac{\ell^2}{2\mu R_o^2} = -\frac{k_o}{R_o} + \frac{\ell^2}{2\mu R_o^2}$

όπου $k_o = Gm_1m_2$ και m_1 = μάζα ήλιου ενώ m_2 = μάζα γης

Αφού βρίσκεται σε κυκλική τροχιά τότε $\left.\frac{dU_{eff}}{dr}\right|_{r=R_o} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{k_o}{R_o^2} - \frac{\cancel{2}\ell^2}{\cancel{2}\mu R_o^3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{R_o^3}\left[k_o R_o - \frac{\ell^2}{\mu}\right] = 0 \Rightarrow \boxed{R_o = \frac{\ell^2}{k_o\mu}} \quad (1)$$

Το δυναμικό επομένως στη θέση αυτή θα είναι:

$$U_{eff}^{min}(R_o) = -\frac{k_o}{R_o} + \frac{\ell^2}{2\mu R_o^2} = -\frac{k_o^2\mu}{\ell^2} + \frac{\cancel{\ell^4}}{2\cancel{\mu}\frac{\ell^{\cancel{4}}}{k^2\mu^{\cancel{2}}}} = -\frac{k_o^2\mu}{\ell^2} + \frac{k_o^2\mu}{2\ell^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{eff}^{min}(R_o) = -\frac{k_o^2\mu}{2\ell^2}$$

Στο σημείο αυτό η ενέργεια $E = U_{eff}(R_o) \Rightarrow U_o + T_o = -\frac{k_o^2\mu}{2\ell^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{k_o}{R_o} + \frac{1}{2}\mu v_o^2 = -\frac{k_o^2\mu}{2\ell^2} \Rightarrow \frac{k_o^2\mu}{2\ell^2} - \frac{k_o}{R_o} + \frac{1}{2}\mu R_o^2\dot{\theta}^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k_o^2\mu}{2\ell^2} - \frac{k_o}{R_o} + \frac{1}{2}\frac{\ell^2}{\mu R_o^2} = 0 \Rightarrow \frac{\mu}{2\ell^2}\left(k_o^2 - \frac{2k_o\ell^2}{\mu R_o} + \frac{\ell^4}{\mu^2 R_o^2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{2\ell^2}\left(k_o - \frac{\ell^2}{\mu R_o}\right)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{k_o = \frac{\ell^2}{\mu R_o}}$$

αυτό προκύπτει και από την (1)

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και αν θεωρήσουμε:

$$F_{gr} = F_{κεν} \Rightarrow \frac{k_o}{R_o^{\cancel{2}}} = \frac{\mu v^2}{\cancel{R_o}} \Rightarrow k_o = \mu v^2 R_o = \frac{(\mu v R_o)^2}{\mu R_o} = \frac{\ell^2}{\mu R_o}$$

Αν η μάζα του ήλιου γίνει ξαφνικά η μισή τότε $k=\frac{1}{2}k_0$

Η στροφορμή διατηρείται και επομένως το νέο δυναμικό θα είναι:

$$U_1(R_0)=\frac{1}{2}U_0(R_0)=-\frac{k_0}{2R_0}=-\frac{\ell^2}{2\mu R_0}$$

Η κινητική ενέργεια παραμένει αμετάβλητη αφού $\ell_0=\ell_1 \Rightarrow v_0=v_1$ και επομένως:

$$T_1=T_0=\frac{1}{2}\mu v_0^2=\frac{\ell^2}{2\mu R_0}$$

Άρα η συνολική ενέργεια θα είναι: $E=T_1+U_1=\frac{\ell^2}{2\mu R_0}-\frac{\ell^2}{2\mu R_0}=0$.

Επομένως η γη θα φύγει από το ηλιακό σύστημα ακολουθώντας παραβολική τροχιά αφού: $e=\sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{k^2\mu}} \Rightarrow \boxed{e=1}$

Αυτό μπορούμε να το βρούμε και από την εξίσωση της τροχιάς

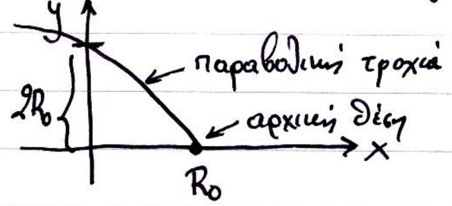
$$r(\varphi)=\frac{c}{1+e\cos\varphi}\Rightarrow 1+e\cos\varphi=\frac{c}{r}\Rightarrow 1+e\cos\varphi=\frac{\frac{\ell^2}{k\mu}}{r}\Rightarrow$$

$$\overset{e=1}{\Rightarrow} 1+\cos\varphi=\frac{\ell^2}{k_1\mu r}=\frac{2\ell^2}{k_0\mu r}\overset{(1)}{\Rightarrow} 1+\cos\varphi=\frac{2R_0}{r}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2R_0=r(1+\cos\varphi)$$

Για $r=\sqrt{x^2+y^2}$ και $\cos\varphi=\frac{x}{r}$ έχουμε: $x=R_0-\frac{y^2}{4R_0}$

που αντιστοιχεί σε εξίσωση παραβολής ($\theta=0$ όταν χάνεται η μισή μάζα του ήλιου)



Πολύ πιο εύκολα:

$$F_{gr} = F_{κεν} \Rightarrow \frac{\overset{Gm_1m_2}{k_0}}{R_0^2} = \frac{m v^2}{R_0} \Rightarrow v^2 = \frac{k_0}{m R_0}$$

Επομένως η αρχική ενέργεια της γης είναι:

$$E_0 = \frac{1}{2} m v^2 + U_0 = \frac{1}{2} \cancel{m} \frac{k_0}{\cancel{m} R_0} - \frac{k_0}{R_0} = -\frac{1}{2}\frac{k_0}{R_0}$$

Όταν γίνεται η έκρηξη η στροφορμή του συστήματος δεν αλλάζει ενώ $k = \frac{1}{2} k_0$ αφού η μάζα του ήλιου γίνεται μισή

Αφού η στροφορμή είναι σταθερή $\ell_1 = \ell_0 \Rightarrow \cancel{m} v_1 \cancel{R_0} = \cancel{m} v_2 \cancel{R_0} \Rightarrow v_1 = v_2$

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{k_1}{R_0} = \frac{1}{2} \cancel{m} \frac{k_0}{\cancel{m} R_0} - \frac{k_0}{2R_0} \Rightarrow E = 0.$$

Αφού η ενέργεια είναι μηδέν → η τροχιά που θα ακολουθήσει η γη θα έχει εκκεντρότητα $e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{k^2\mu}} = 1$ <u>παραβολή</u>

ΦΥΣ 133 – 2η Πρόοδος **16-4-2007**

2η Ομάδα	

1. Να βρεθούν οι Hamiltonians που αντιστοιχεί στις ακόλουθες Lagrangians:

(α) $L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \lambda\dot{x}_1x_2^2 - a(x_1 - x_2)^4$ όπου m_1, m_2, λ και α είναι σταθερές. **(5μ)**

(β) $L = \frac{1}{2}m_1R^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) - mgR\cos\theta$ **(5μ)**

(γ) $L = x\dot{x}$ **(5μ)**

Στην τελευταία αυτή περίπτωση τι νομίζετε ότι σημαίνει το αποτέλεσμα που βρήκατε; Σας δίνει ανάλογο αποτέλεσμα η Lagrangian; **(5μ)**

(α) $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \lambda\dot{x}_1x_2^2 - a(x_1-x_2)^4$

Οι κανονικοποιημένες ορμές είναι:

$p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 + \lambda x_2^2$, $p_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2$

Λύνοντας ως προς $\dot{x}_1$ και $\dot{x}_2$ έχουμε:

$\dot{x}_1 = \frac{p - \lambda x_2^2}{m_1}$ και $\dot{x}_2 = \frac{p_2}{m_2}$

Η Hamiltonian επομένως θα είναι:

$$\mathcal{H} = p_1\dot{x}_1 + p_2\dot{x}_2 - \mathcal{L} = (m_1\dot{x}_1 + \lambda x_2^2)\dot{x}_1 + (m_2\dot{x}_2)\dot{x}_2 - \left[\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \lambda\dot{x}_1x_2^2 - a(x_1-x_2)^4\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathcal{H} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + a(x_1-x_2)^4 \Rightarrow$ Αντικαθιστώντας $\dot{x}_1$ & $\dot{x}_2$

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{(p_1 - \lambda x_2^2)^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + a(x_1-x_2)^4}$$

(β) $p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}$ $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mR^2\dot{\phi}\sin^2\theta$

Επομένως $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}$ και $\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{mR^2\sin^2\theta}$

$$\mathcal{H} = p_\theta\dot{\theta} + p_\phi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + mgR\cos\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_\phi^2}{2mR^2\sin^2\theta} + mgR\cos\theta}$$

(γ) $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = x$

Επομένως $H = p\dot{x} - L = x\dot{x} - x\dot{x} = 0 \Rightarrow \boxed{H = 0}$

(δ) Μπορεί να σας φανεί περίεργο ότι $H=0$. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν εξισώσεις κίνησης.

Παρόλο που μετατρέψαμε τη Lagrangian σε Hamiltonian η Lagrangian του συστήματος που περιγράφεται στο ερώτημα (γ) δεν περιγράφει κάτι χρήσιμο ή φυσικό.

Μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα με το φορμαλισμό Lagrange.

Προσέξτε ότι η αρχική Lagrangian είναι το ολικό διαφορικό ως προς το χρόνο:

$$L = x\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

Αυτό σημαίνει ότι η δράση είναι σταθερή δεδομένων κάποιων συνοριακών συνθηκών $x(t_1) = x_1$ και $x(t_2) = x_2$ έχουμε:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2 = \text{σταθ.}$$

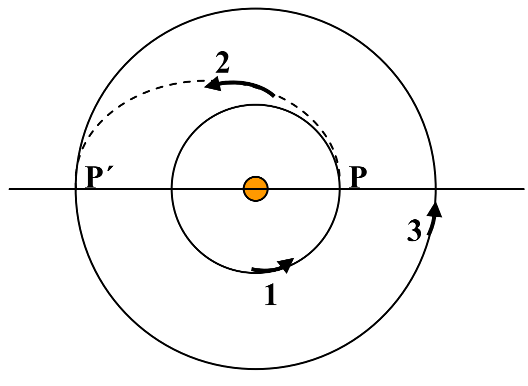
Ζητώντας ακρότατο για τη δράση είναι το ίδιο με το να ζητήσουμε ακρότατο για $S=0$ και επομένως αυτή η Lagrangian δεν έχει εξισώσεις κίνησης.

Το ίδιο μπορούμε να δούμε με το να αντικαταστήσουμε τη Lagrangian στις εξισώσεις κίνησης οπότε θα έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \dot{x} \quad \text{που ισοδυναμεί με } 0=0$$

Δηλαδή δεν υπάρχει πληροφορία στις εξισώσεις κίνησης

2. Το πλήρωμα ενός δορυφόρου που βρίσκεται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R_1 γύρω από την γη θέλει να μεταφερθεί σε μια άλλη κυκλική τροχιά ακτίνας $R_2 = 2R_1$. Την μεταφορά αυτή την επιτυγχάνουν με δύο διαδοχικές ωθήσεις των ρουκετών του δορυφόρου όπως στο παρακάτω σχήμα. Αρχικά ο δορυφόρος ωθείται από το σημείο P σε μια ελλειπτική τροχιά 2, αρκετά μεγάλη ώστε να τον μεταφέρει στην επιθυμητή ακτίνα R_2. Κατόπιν, τη στιγμή που βρίσκεται στην επιθυμητή ακτίνα (στο σημείο P΄ το οποίο είναι το απόγειο της ελλειπτικής τροχιάς μεταφοράς) ωθείται με τη βοήθεια των ρουκετών στη κυκλική τροχιά 3.



(α) Κατά πόσο θα πρέπει να αυξήσει τη ταχύτητά του σε κάθε μια από τις δυο ωθήσεις; (**12μ**)

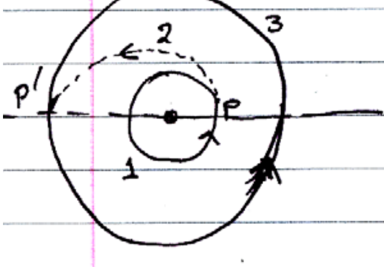
(β) Κατά πόσο αυξάνει η ταχύτητα του δορυφόρου σαν αποτέλεσμα της όλης διαδικασίας; (**8μ**)

<u>Υπόδειξη:</u> Οι ωθήσεις γίνονται και στις δυο περιπτώσεις εφαπτομενικά της τροχιάς. Σε κάθε περίπτωση η νέα τροχιά έχει ένα κοινό σημείο με την προηγούμενη τροχιά του δορυφόρου το σημείο στο οποίο πυροδοτήθηκαν οι ρουκέτες

Αρχικά ο δορυφόρος βρίσκεται σε κυκλική τροχιά $C_1 = R_1$ και επομένως η εκκεντρότητα είναι $\varepsilon_1 = 0$. (σύμφωνα με την (1))
Η τροχιά στην οποία το πλήρωμα θέλει να μεταφερθεί έχει ακτίνα $R_3 = 2R_1$
Η μεταφορά από τη μια κυκλική τροχιά στην άλλη γίνεται μέσω μιας ελλειπτικής τροχιάς. Το σημείο στο οποίο πυροδοτούνται οι ρουκέτες, P, αποτελεί το περιήγειο της ελλειπτικής τροχιάς, με τη γη να βρίσκεται στην εστία της έλλειψης.

Από τη στιγμή που η πυροδότηση γίνεται στην εφαπτομενική διεύθυνση η ταχύτητα είναι στην ίδια διεύθυνση με την αρχική και κάθετη στην ακτίνα από τη γή στο δορυφόρο.

Η εξίσωση της τροχιάς είναι: $r(\phi) = \dfrac{C}{1+e_1\cos(\phi)}$ (1)



όπου $C = \dfrac{\ell^2}{k\mu}$ και $k = G m_\gamma m_\delta$

Στο σημείο πυροδότησης η νέα και η παλιά τροχιά πρέπει να συμπίπτουν και επομένως:

$$\frac{C_1}{1+e_1\cos\phi} = \frac{C_2}{1+e_2\cos\phi}$$ (θεωρώντας ότι $\phi = 0$) $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{C_1}{1+e_1} = \frac{C_2}{1+e_2}} \quad (2)$$

Η ταχύτητα του δορυφόρου αμέσως μετά τη πυροδότηση θα είναι:
$\boxed{v_P = \lambda v_1}$ (3) όπου λ είναι ο συντελεστής που δείχνει την αύξηση της ταχύτητας που αρχικά είχε ο δορυφόρος, v_1,

Στο σημείο P, η στροφορμή είναι: $\ell_1 = \mu R_1 v_1$
Ακριβώς μετά την πυροδότηση η θέση δεν αλλάζει και επομένως

$$\ell_2 = \mu R_1 v_P \Rightarrow \ell_2 = \mu R_1 \lambda v \Rightarrow \boxed{\ell_2 = \lambda \ell_1} \; (4)$$

Ξέρουμε όμως ότι C είναι ανάλογο του ℓ^2 και άρα $\boxed{C_2 = \lambda^2 C_1}$ (5)

Αντικαθιστώντας την (5) στη (2) θα έχουμε:

$$\frac{\cancel{C_1}}{1+e_1} = \frac{\lambda^2 \cancel{C_1}}{1+e_2} \Rightarrow e_2 = \lambda^2(1+e_1) - 1.$$

Αλλά αφού $e_1 = \phi$ τότε $\boxed{e_2 = \lambda^2 - 1.}$ Αυτή είναι η εκκεντρότητα της ελλειπτικής τροχιάς μεταφοράς.

Τη στιγμή που ο δορυφόρος φθάνει στο σημείο P' η ακτίνα πρέπει να γίνει $2R_1 = R_3$. Το σημείο αυτό είναι το απόγειο της ελλειπτικής τροχιάς και επομένως:

$$R_3 = \frac{C_2}{1-e_2} = \frac{\lambda^2 R_1}{1-(\lambda^2-1)} = \frac{\lambda^2 R_1}{2-\lambda^2}$$

Λύνουμε ως προς λ και έχουμε: $\lambda = \sqrt{\dfrac{2R_3}{R_1+R_3}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot 2\cancel{R_1}}{\cancel{R_1}+2\cancel{R_1}}} = \sqrt{\dfrac{4}{3}}$

Δηλαδή ο δορυφόρος θα πρέπει να αυξήσει τη ταχύτητά του κατά $\lambda = \sqrt{\frac{4}{3}} = 1.15 \Rightarrow 15\%$ για να φθάσει στην κυκλική τροχιά R_3

Στο σημείο P' πυροδοτεί και πάλι τις ρουκέτες: $v_3 = \lambda' v_{P'}$
και επομένως η $\ell_3 = \lambda' \ell_2$
και πάλι από την εξίσωση (5) και εφόσον το P' είναι το απόγειο της ελλειπτικής τροχιάς θα έχουμε:

$$\frac{C_2}{1-e_2} = \frac{C_3}{1+\cancel{e_3}^{\,0}} \Rightarrow \frac{\cancel{C_2}}{1-e_2} = \lambda'^2 \cancel{C_2} \Rightarrow \lambda' = \sqrt{\frac{1}{1-e_2}} \;\; e_2 \to \lambda^2-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda' = \sqrt{\frac{1}{1-\lambda^2+1}} = \sqrt{\frac{1}{2-\lambda^2}} \Rightarrow \lambda' = \sqrt{\frac{1}{2-\frac{2R_3}{R_1+R_3}}} = \sqrt{\frac{R_1+R_3}{2R_1+\cancel{2R_3}-\cancel{2R_3}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda' = \sqrt{\frac{R_1+R_3}{2R_1}} \Rightarrow \lambda' = \sqrt{\frac{\cancel{R_1}+2\cancel{R_1}}{2\cancel{R_1}}} \Rightarrow \boxed{\lambda' = \sqrt{\frac{3}{2}} \cong 1.22} \Rightarrow$$

Η στροφορμή της κάθε τροχιάς διατηρείται. Επομένως η στροφορμή στο περίγειο, P, της ελλειπτικής τροχιάς, θα είναι ίση με τη στροφορμή στο απόγειο, P', της τροχιάς.

$$\ell_P = \ell_{P'} \Rightarrow \cancel{m} v_P R_1 = \cancel{m} v_{P'} R_3 \Rightarrow v_P \cancel{R_1} = v_{P'} 2\cancel{R_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_P}{v_{P'}} = 2.$$

Η συνολική αλλαγή της ταχύτητας για την όλη κίνηση θα είναι:

$$v_3 = \lambda' v_{P'} = \lambda' \frac{v_P}{2} = \lambda' \frac{1}{2} \lambda v_1 = \sqrt{\frac{R_1+R_3}{2R_1}}\, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2R_3}{R_1+R_3}}\, v_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_3 = \sqrt{\frac{3\cancel{R_1}}{2\cancel{R_1}}}\, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\cancel{R_1}}{3\cancel{R_1}}}\, v_1 \Rightarrow v_3 = \sqrt{\frac{\cancel{12}\,2}{\cancel{6}}}\, \frac{1}{2} v_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_3 = \sqrt{\frac{2}{\cancel{4}\,2}}\, v_1 \Rightarrow v_3 = \frac{v_1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{v_3 = \frac{\sqrt{2}\, v_1}{2}}$$

Η τελική ταχύτητα είναι μικρότερη της αρχικής κατά $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Αυτό αναμένονταν αφού για μια κυκλική τροχιά $v \propto \frac{1}{\sqrt{R}}$
Διπλασιάζοντας την ακτίνα περιμένουμε ότι η ταχύτητα θα πρέπει να ελαττωθεί κατά ένα ποσοστό $\sqrt{2}$

Προσοχή ότι η αλλαγή δεν είναι το γινόμενο των 2 αλλαγών λ, λ' αφού η ταχύτητα του δορυφόρου κατά την ελλειπτική τροχιά αλλάζει