

Έργο – Ενέργεια



Έργο, Κινητική Ενέργεια και Δυναμική Ενέργεια

❑ Βέλος εκτοξεύεται από ένα τόξο:

- Η δύναμη μεταβάλλεται καθώς το τόξο επανέρχεται στην αρχική του θέση
- Οι νόμοι του Newton δεν βοηθάνε να λύσουμε το πρόβλημα.

❑ Νέοι τρόποι για να λύσουμε τέτοιου είδους προβλήματα:

- Έργο και ενέργεια
- Κινητική ενέργεια και η σχέση της με το έργο
- Ισχύς
- Διατήρηση της ενέργειας

❑ Ενέργεια:

- Δύσκολη έννοια δύσκολη να οριστεί
- Κάθε φυσική διεργασία που συμβαίνει στο σύμπαν περιέχει συμμετοχή, μετατροπή ή μεταφορά ενέργειας

Ενέργεια

Η ενέργεια διατηρείται: δεν μπορεί να δημιουργηθεί ούτε να καταστραφεί

➡ Μπορεί να αλλάξει μορφή

➡ Μπορεί να μεταφερθεί

Η ολική ενέργεια δεν αλλάζει με το χρόνο

➡ Αυτό είναι πολύ σημαντικό

Μορφές Ενέργειας:

Κινητική Ενέργεια: Κίνηση

Δυναμική Ενέργεια: αποθηκευμένη

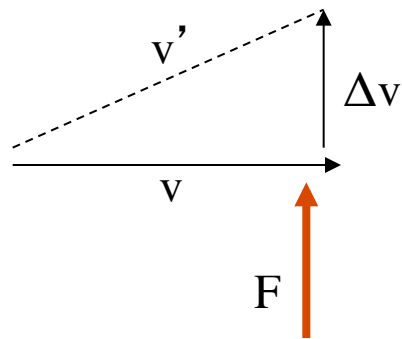
Θερμότητα:

$$E=mc^2$$

Μονάδες μέτρησης: Joules = Kg m²/s²

Έργο

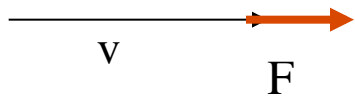
- Θεωρήστε ότι ασκείτε μια δύναμη F σε κάποιο σώμα που κινείται με ταχύτητα v .



$$\Delta v = F \frac{\Delta t}{m} \quad (\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t})$$

$|v|$ δεν αλλάζει αλλά η διεύθυνση της αλλάζει

- Θεωρήστε ότι η δύναμη F δρα στο σώμα κατά την διεύθυνση της κίνησής του (παράλληλα προς v).



$|v|$ αλλάζει αλλά όχι η διεύθυνση

Και στις 2 περιπτώσεις η δύναμη F παράγει έργο όταν ασκείται σε ένα σώμα που κινείται από μια θέση A σε μια άλλη B.

Ορισμός έργου:

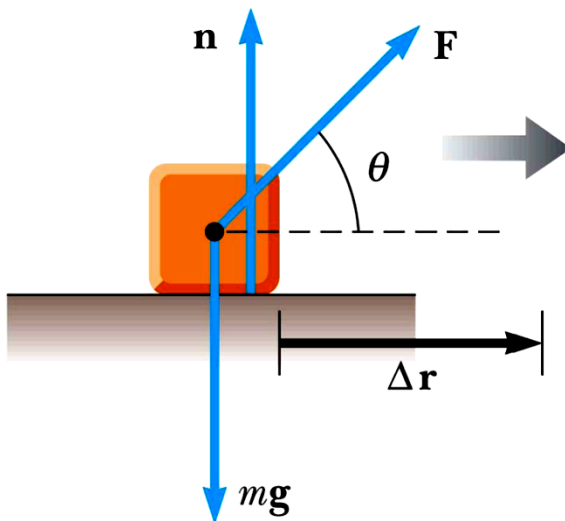
$$W \equiv \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \theta$$

Μονάδα μέτρησης
Joule = 1 Nt·m

Έργο $W \equiv \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \theta$

Η μετατόπιση d είναι αυτή του σημείου εφαρμογής της δύναμης F .

- Η δύναμη δεν παράγει έργο στο σώμα ή το **σύστημα** (σύνολο σωμάτων) αν η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της είναι κάθετη στη διεύθυνση της δύναμης.
- Η δύναμη δεν παράγει έργο στο σώμα αν το σημείο εφαρμογής της στο σώμα δεν κινείται μέσω μιας μετατόπισης



Η κάθετη αντίδραση n και η βαρυτική δύναμη δεν παράγουν έργο επειδή είναι κάθετες στη μετατόπιση του σώματος

Η δύναμη F παράγει έργο

Έργο

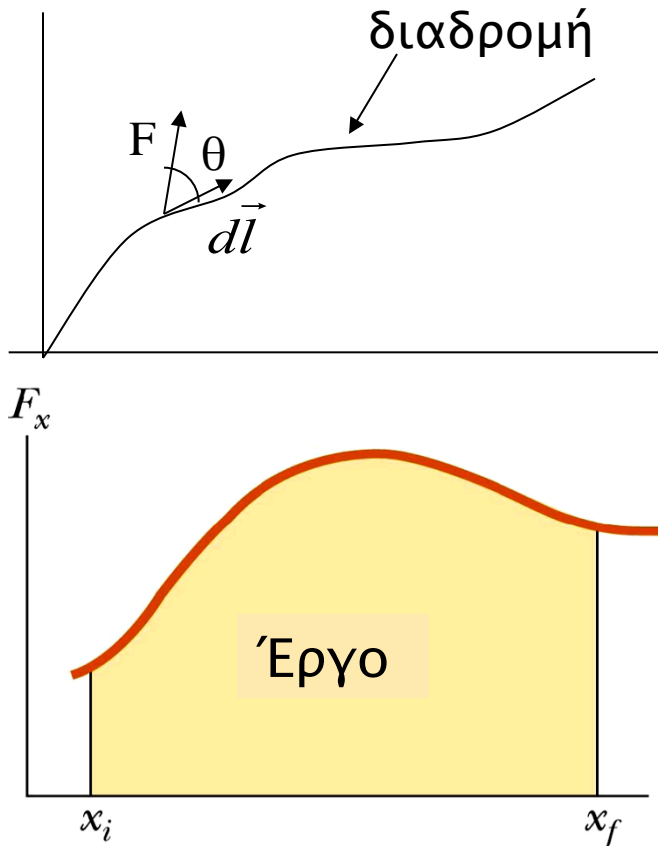
- ❑ Το σύστημα και το περιβάλλον του συστήματος (ότι βρίσκεται έξω από τις οριακές συνθήκες του συστήματος) πρέπει να προσδιορίζονται όταν δουλεύουμε με την έννοια του έργου.
 - Το περιβάλλον εκτελεί έργο στο σύστημα
- ❑ Το έργο μπορεί να 'ναι **θετικό**, **αρνητικό** ή **μηδέν**.
 - Εξαρτάται από την διεύθυνση της δύναμης ως προς την διεύθυνση κίνησης
- Το έργο είναι θετικό όταν η δύναμη έχει διεύθυνση προς τη μετατόπιση του συστήματος.
 - ❑ Αν έργο εκτελείται στο σύστημα και το έργο είναι θετικό τότε μεταφέρεται ενέργεια στο σύστημα.
- Το έργο είναι αρνητικό όταν η δύναμη έχει φορά αντίθετη προς τη μετατόπιση του συστήματος.
 - ❑ Αν έργο εκτελείται στο σύστημα και το έργο είναι αρνητικό τότε μεταφέρεται ενέργεια από το σύστημα
- ❑ Αν ένα σύστημα αλληλεπιδρά με το περιβάλλον τότε αυτή η αλληλεπίδραση μπορεί να χαρακτηριστεί σαν μεταφορά ενέργειας

Γενικός ορισμός έργου

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

a : αρχική θέση του σώματος

b : τελική θέση του σώματος

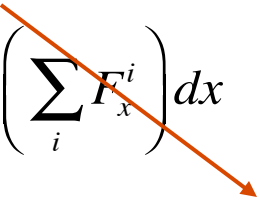


Κάθε τμήμα της διαδρομής προσθέτει στοιχειώδες έργο $F \cos\theta \, dl$

Εμβαδό = Έργο καταβαλλόμενο από την F κατά μήκους της l

Έργο από πολλές δυνάμεις

- Αν περισσότερες από μια δυνάμεις ασκούνται σε ένα σύστημα και το σύστημα μπορεί να περιγραφεί σαν υλικό σημείο τότε το ολικό έργο στο σύστημα είναι ίσο με το έργο της συνισταμένης δύναμης

$$\sum W = W_{\kappa\alpha\theta} = \int_{x_i}^{x_f} \left(\sum_i F_x^i \right) dx$$


$F_{\text{συνισταμένη}}$

- Αν το σύστημα δεν μπορεί να περιγραφεί σαν υλικό σημείο τότε το ολικό έργο είναι το αλγεβρικό άθροισμα των έργων που ασκούνται στο σύστημα από κάθε δύναμη που ασκείται στο σύστημα.

$$W_{\kappa\alpha\theta} = \sum_i W_i$$

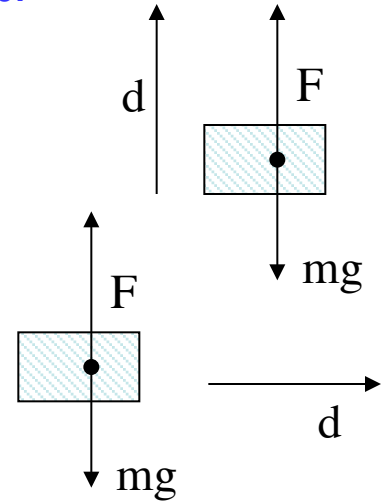
Παραδείγματα

❑ Θέλετε να σηκώσετε ένα βιβλίο με **σταθερή ταχύτητα**

- Η δύναμη F παράγει έργο $W = F \cdot d > 0 \rightarrow W = mad > 0$
- Η βαρύτητα παράγει έργο $-mgd < 0$
- Αφού $v = \text{σταθ}$, $F = mg$ και επομένως $W_{\text{tot}} = 0$

❑ Θέλετε να μεταφέρετε το βιβλίο οριζόντια

- Συνολικό έργο και πάλι μηδέν αφού $F \perp d$



❑ **Πότε καταναλώνεται περισσότερο έργο;**

$F = mg \sin \theta$

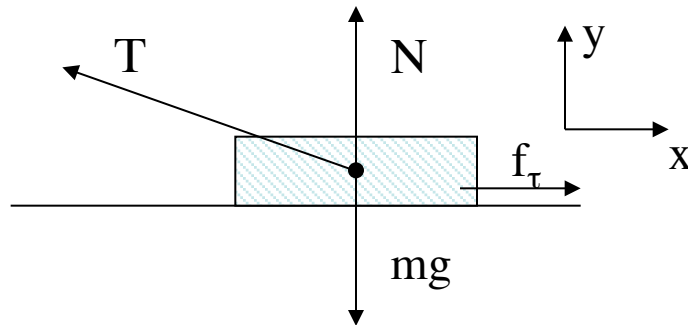
$W_a = \vec{F} \cdot \vec{d} = mg \sin \theta d = \int_0^d \vec{F} \cdot d\vec{l} = mgh$

$F = mg \sin \theta'$

$W_b = \vec{F} \cdot \vec{d}' = mg \sin \theta' d' = mgh$

$W_a = W_b$

Παραδείγματα



Πόσο έργο πρέπει να δαπανήσουμε για να μετακινήσουμε το κιβώτιο με γωνία 10° σε απόσταση 250m με σταθερή ταχύτητα

$$\sum F_y = N + T \sin \theta - mg = 0$$

$$\sum F_x = T \cos \theta - f_{\tau p} = 0$$

$$f_{\tau p} = \mu_s N \Rightarrow N = \frac{f_{\tau p}}{\mu_s} = \frac{T \cos \theta}{\mu_s}$$

$$\frac{T \cos \theta}{\mu_s} + T \sin \theta - mg = 0 \Rightarrow$$

$$T = \frac{mg \mu_s}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta}$$

Επομένως το έργο που πρέπει να δαπανήσουμε είναι

$$W = \vec{T} \cdot \vec{d} = Td \cos \theta = \frac{\mu_s mgd \cos \theta}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta}$$

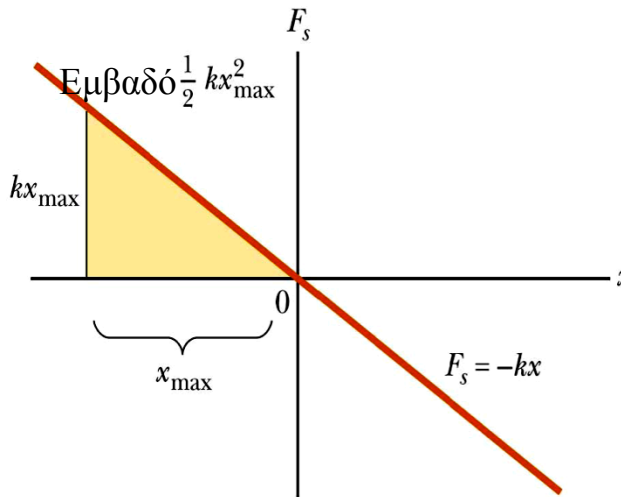
Πόσο έργο παράγει η βαρύτητα? **μηδέν**

Πόσο έργο παράγει η τριβή?

$$W = \vec{f} \cdot \vec{d} = -\mu_s N d = -\frac{\mu_s T d \cos \theta}{\mu_s} = -T d \cos \theta$$

$$\text{Ολικό έργο} = W_{\tau p} + W_o = 0$$

Ελατήρια - Έργο



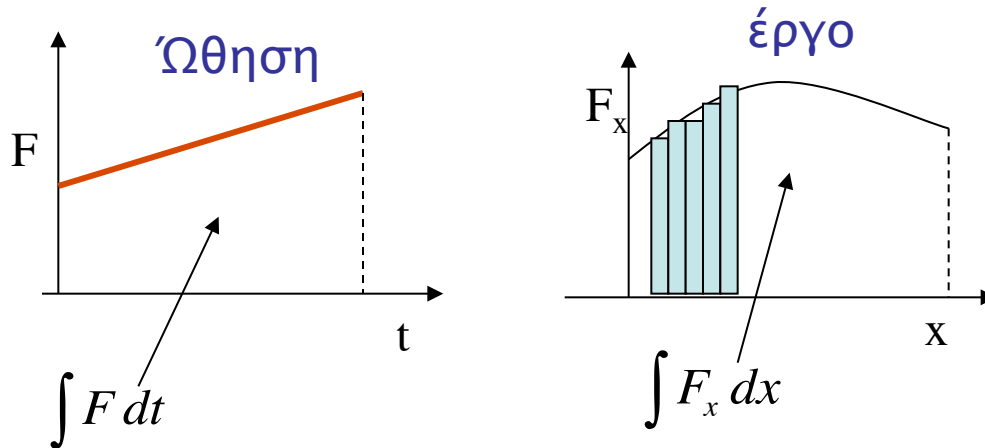
- Διαλέγουμε το σώμα που εξαρτάται από το ελατήριο σα το σύστημά μας.
- Υπολογίζουμε το έργο καθώς το σώμα κινείται από τη θέση $x_i = -x_{\max}$ στη θέση $x = 0$.

$$W_{\varepsilon\lambda} = \int_i^f F_x dx = \int_{-x_{\max}}^0 (-kx) dx \Rightarrow W_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} kx^2$$

- Το ολικό έργο που παράγεται κατά τη μετακίνηση του σώματος από τη θέση $x = -x_{\max}$ στη θέση $x = +x_{\max}$ είναι μηδέν

Έργο

Σκεφθείτε $\int F dt$ και $\int F_x dx$ ολοκληρώματα κίνησης



Για σταθερή δύναμη

$$\int F dt = Ft = mat = \textcircled{mv} \text{ ορμή}$$

$$\int F_x dx = Fx = ma \left(\frac{1}{2} at^2 \right)$$

$$\Rightarrow \int F_x dx = \frac{1}{2} m(at)^2 = \boxed{\frac{1}{2} mv^2}$$

Τι λέει: Το έργο που παράγεται από μια δύναμη σε ένα σώμα ισούται με την μεταβολή της κινητικής του ενέργειας

Η ενέργεια ενός σώματος εξαιτίας της κίνησής του

Καθαρό έργο - σταθερή επιτάχυνση

□ Υποθέστε σταθερή επιτάχυνση: $W_{\text{net}} = F_{\text{net}} \cdot d$

➤ Σε 1-διάσταση

$$W_{\text{net}} = Fd \Rightarrow W_{\text{net}} = mad = m \frac{(v_2^2 - v_1^2)}{2d} d \Rightarrow W_{\text{net}} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

$a = \frac{1}{2d} (v_2^2 - v_1^2)$

$$\Rightarrow W_{\text{net}} = E_{\text{κιν.}}^2 - E_{\text{κιν.}}^1 = \Delta E_{\text{κιν.}}$$

Θεώρημα έργου -
κινητικής ενέργειας

Τι σημαίνει: Δαπανώντας έργο σε ένα σώμα μεταβάλλεται η κινητική του ενέργεια.

Διαφορετικά: Στην περίπτωση που έργο επιδρά σε ένα σύστημα και η μόνη αλλαγή στο σύστημα είναι η ταχύτητά του τότε το έργο από τη συνισταμένη δύναμη είναι ίσο με την αλλαγή της κινητικής του ενέργειας.

$W > 0 \rightarrow$ Αύξηση της κινητικής ενέργειας

$W < 0 \rightarrow$ Ελάττωση της κινητικής ενέργειας

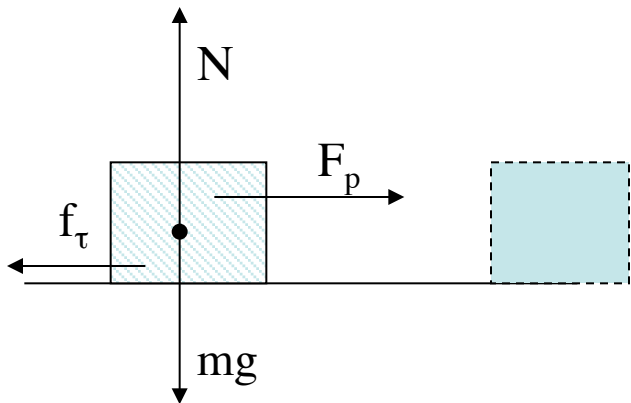
Καθαρό έργο – Μεταβαλλόμενη επιτάχυνση

Αποδείξαμε το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας
υποθέτοντας σταθερή επιτάχυνση. Ισχύει όμως γενικά ?

$$W_{\text{net}} = \int F_{\text{net}} \cos \theta dl = \int F_{//} dl$$

$$F_{//} = ma_{//} = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dl} \frac{dl}{dt} \Rightarrow F_{//} = m \frac{dv}{dl} v$$

Συνιστώσα της δύναμης // μετατόπιση



Η τριβή παράγει επίσης έργο

$$\int_i^f F_{//} dl = \int_i^f m v \frac{dv}{dl} dl = \int_i^f m v dv$$

$$W_{\text{net}} = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) = \Delta E_{\text{κιν.}}$$

Στο χρόνο $t = 0 = t_i \rightarrow v_i = 0$

Τραβάμε το κιβώτιο και παράγουμε έργο

$$W = F_p d = E_{\text{κιν.}}^f - E_{\text{κιν.}}^i = \frac{1}{2} m v_f^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2Fd}{m}}$$

Βοηθά στο να λύσουμε προβλήματα?

□ Θεωρείστε κατακόρυφη βολή σώματος προς τα πάνω

Σε ποιο ύψος θα σταματήσει να πηγαίνει προς τα πάνω?

$$\text{Στο μέγιστο ύψος: } v_{\text{hmax}} = 0 \Rightarrow E_{\text{κιν.}}^f = \frac{1}{2} m v_{\text{hmax}}^2 \Rightarrow E_{\text{κιν.}}^f = 0$$

Το έργο που παράγεται είναι:

$$W = \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \vec{F} \cdot dh \Rightarrow W = F(h_{\max} - h_{\min}) = F\Delta h$$

Η μόνη δύναμη που δρα και παράγει έργο είναι η βαρύτητα:

$$W = -mg\Delta h = E_{\text{κιν.}}^{h_{\max}} - E_{\text{κιν.}}^{h_{\min}} \Rightarrow -mg\Delta h = -E_{\text{κιν.}}^{h_{\min}} = -\frac{1}{2} m v_{h_{\min}}^2 \Rightarrow \Delta h = \frac{v_{h_{\min}}^2}{2g}$$

➡ Σχετίζει δυνάμεις με ταχύτητες

Παράδειγμα- ελατήρια

Συμπιέστε ένα ελατήριο και μετά αφήστε το να κινηθεί.

Τι συμβαίνει όταν περνά από τη θέση ηρεμίας του ($x=0$)?

➤ Οι αρχικές συνθήκες: $x = x_m$, $v = 0$

$$\left. \begin{aligned} W_{F_{\varepsilon\pi}} &= W_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} k x_m^2 \\ W_{F_{\varepsilon\pi}} &= E_{\kappa\iota\nu.}^2 - E_{\kappa\iota\nu.}^1 = \frac{1}{2} m v_2^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_2 = x_m \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Ταχύτητα όταν } x=0$$

Αν συμπεριλάβουμε και τριβή τότε το καθαρό έργο θα είναι:

$$W_{net} = \frac{1}{2} k x_m^2 - f_{\tau\rho} x_m$$