ΦΥΣ 331 – Φροντιστήριο 1

Τρίτη 21/09/2022

1. Ένα σωματίδιο το οποίο κινείται με ταχύτητα *u*, προσεγγίζει ένα πανομοιότυπο σωματίδιο σε ηρεμία (στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου).

(α) Δείξτε ότι η ταχύτητα κάθε σωματιδίου στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας δίνεται από την σχέση $\frac{c^2}{u}\left(1-\sqrt{1-u^2/c^2}\right)$.

(β) Βρείτε την αντίστοιχη έκφραση για το μη σχετικιστικό όριο.

(a)

Σύστημα αναφοράς εργαστηρίου   Σύστημα αναφοράς ΚΜ

Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου η ενέργεια του σώματος είναι: $\boxed{E^{tot}_{Lab} = (1+\gamma)mc^2}$

και η ορμή $\boxed{p^{tot}_{Lab} = \gamma m u}$

Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας: $\boxed{E^{tot}_{CM} = 2\gamma' mc^2}$ και $\boxed{p^{tot}_{CM} = 0}$

Από τα διανύσματα των τετραορμών έχουμε: $\left(p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2\right)$

$$p_\mu p^\mu = (\gamma+1)^2 \cancel{m^2 c^4} - \gamma^2 \cancel{m^2} \frac{u^2 \cancel{c^2}}{c^2} = 4\gamma'^2 \cancel{m^2 c^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma'^2 = \frac{(\gamma+1)^2 - \gamma^2 \frac{u^2}{c^2}}{4} \Rightarrow \gamma'^2 = \frac{1+2\gamma+\gamma^2-\gamma^2\beta^2}{4} = \frac{1+2\gamma+\gamma^2\overset{1/\gamma^2}{\cancel{(1-\beta^2)}}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma'^2 = \frac{1+2\gamma+\cancel{\gamma^2}\frac{1}{\cancel{\gamma^2}}}{4} \Rightarrow \gamma'^2 = \frac{\cancel{2}(\gamma+1)}{\cancel{4}\,2} \Rightarrow \gamma'^2 = \frac{\gamma+1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma'^2} = \frac{2}{\gamma+1} \Rightarrow 1-\beta'^2 = \frac{2}{1+\gamma} \Rightarrow 1-\left(\frac{u'}{c}\right)^2 = \frac{2}{1+\gamma} \Rightarrow \left(\frac{u'}{c}\right)^2 = 1-\frac{2}{1+\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{u'}{c}\right)^2 = \frac{\gamma-1}{1+\gamma} \Rightarrow \frac{u'}{c} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \Rightarrow u' = c\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} = c\sqrt{\frac{(\gamma-1)^2}{\gamma^2-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u' = c\,\frac{\gamma-1}{\sqrt{\gamma^2-1}} \Rightarrow u' = c\,\frac{\gamma-1}{\sqrt{\gamma^2\beta^2}} = c\,\frac{\gamma-1}{\gamma\beta} = \frac{c}{\beta}\,\frac{\gamma-1}{\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u' = \frac{c}{\beta}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right) \Rightarrow u' = \frac{c}{\beta}\left(1-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}}\right) = \frac{c}{\beta}\left(1-\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{u' = \frac{c^2}{u}\left(1-\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right)}$$

(β) Για $u \ll c$ μπορούμε να γράψουμε: $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \simeq 1-\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}$

Από το αποτέλεσμα που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα θα έχουμε:

$$u' = \frac{c^2}{u}\left(1-\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\right) \xrightarrow[\text{όριο}]{\text{κλασικό}} u' \simeq \frac{c^2}{u}\left[1-\left(1-\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}\right)\right] = \frac{\cancel{c^2}}{\cancel{u}}\,\frac{1}{2}\,\frac{u^{\cancel{2}}}{\cancel{c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{u' = \frac{u}{2}}$$ η ταχύτητα στο κέντρο μάζας για το κλασικό όριο

2. (α) Αποδείξτε τις σχέσεις που δίνουν την ενέργεια κέντρου μάζας για τις περιπτώσεις ενός επιταχυντή και δέσμης-σταθερού στόχου. Θα πρέπει να λάβετε υπόψην σας τις μάζες των συγκρουόμενων σωματιδίων.

(α) Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας των δύο σωματιδίων μάζας m_1 και m_2 (Θεωρώ σωστό να το κάνετε με τις ίδιες μάζες) και ενέργειες E_1 και E_2, η ενέργεια είναι:

$$s = E_{cm}^2 = (P_1 + P_2)^2$$

όπου P_1 και P_2 οι τετραορμές των σωματιδίων της δέσμης: $P_1 = (E_1, \vec{p}_1)$ και $P_2 = (E_2, \vec{p}_2)$

$$\Rightarrow s = E_{cm}^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 - \vec{p}_1^{\,2} - \vec{p}_2^{\,2} - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{s = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2} \quad (A)$$

Θεωρούμε ότι τα σωματίδια συγκρούονται μετωπικά οπότε οι διευθύνσεις των ορμών τους είναι αντίθετες. Θα έχουμε από την (A): $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = |p_1||p_2| \overset{-1}{\cancel{\cos\pi}}$

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2\left[1 + \sqrt{\left(1 - \frac{m_1^2}{E_1^2}\right)\left(1 - \frac{m_2^2}{E_2^2}\right)}\right] \qquad |p_1| = \sqrt{E_1^2 - m_1^2}$$

Αν οι μάζες των σωματιδίων είναι μικρές σε σύγκριση με τις ενέργειές τους μπορούμε να αναπτύξουμε

Παίρνουμε: $s = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2\left[1 + \left(1 - \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{E_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{m_2^2}{E_2^2}\right)\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow s = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2\left(2 + \frac{1}{4}\frac{m_1^2}{E_1^2}\frac{m_2^2}{E_2^2} - \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{E_1^2} - \frac{1}{2}\frac{m_2^2}{E_2^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2\left(2 + \frac{1}{4}\frac{m_1^2 m_2^2}{E_1^2E_2^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{m_1^2}{E_1^2} + \frac{m_2^2}{E_2^2}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = 4E_1E_2 + m_1^2 + m_2^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2 m_2^2}{E_1E_2} - \frac{m_1^2E_2}{E_1} - \frac{m_2^2E_1}{E_2} \Rightarrow \cancel{\frac{m_1^2m_2^2}{E_1^2E_2^2}} \to 0$$

$$\Rightarrow \boxed{s \simeq 4E_1E_2 + m_1^2\left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right) + m_2^2\left(1 - \frac{E_1}{E_2}\right)}$$

Αν στην τελευταία αυτή σχέση αγνοήσουμε τελείως τις μάζες:

$$s = 4E_1E_2 + m_1^2\left[1 - \frac{E_2}{E_1} + 1 - \frac{E_1}{E_2}\right] = 4E_1E_2 + m^2\left[2 - \frac{E_1^2 + E_2^2}{E_1E_2}\right]$$ ίσες μάζες

Για $m \simeq 0$ σε σχέση με την ενέργειά τους θα έχουμε:

$s = 4E_1E_2 \Rightarrow E_{cm}^2 = 4E_1E_2 \Rightarrow \boxed{E_{cm} = \sqrt{4E_1E_2}}$ όπως βρήκαμε στις διαλέξεις.

Για την περίπτωση δέσμης σε σταθερό στόχο, έχουμε:

$$s = E_{cm}^2 = (E_\delta + E_{\sigma\tau})^2 - (\vec{p}_\delta + \vec{p}_{\sigma\tau})^2 = E_\delta^2 + E_{\sigma\tau}^2 + 2E_\delta E_{\sigma\tau} - \vec{p}_\delta^{\,2} - \vec{p}_{\sigma\tau}^{\,2} - 2\vec{p}_\delta \cdot \vec{p}_{\sigma\tau} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = E_{cm}^2 = m_{\sigma\tau}^2 + m_\delta^2 + 2E_\delta E_{\sigma\tau} - 2\vec{p}_\delta \cdot \vec{p}_{\sigma\tau}$$

Από τη στιγμή που ο στόχος είναι ακίνητος, θα έχουμε $E_{\sigma\tau} = m_{\sigma\tau}$ και $\vec{p}_{\sigma\tau} = 0$

Επομένως η προηγούμενη σχέση γίνεται: $s = E_{cm}^2 = m_{\sigma\tau}^2 + m_\delta^2 + 2E_\delta m_{\sigma\tau} \Rightarrow$

$\Rightarrow E_{cm} = \sqrt{2E_\delta m_{\sigma\tau} + m_{\sigma\tau}^2 + m_\delta^2}$ αν θεωρήσουμε ότι $E_\delta \gg m_{\sigma\tau}, m_\delta$ η προηγούμενη σχέση παίρνει την μορφή: $\boxed{E_{cm} = \sqrt{2E_\delta m_{\sigma\tau}}}$

3. Υπολογίστε το μέγεθος ενός υποθετικού ατόμου υδρογόνου του οποίου το ηλεκτρόνιο και πρωτόνιο συγκρατούνται με δύναμη βαρύτητας.

Η δύναμη Coulomb που δρα ανάμεσα στο ηλεκτρόνιο και το πρωτόνιο στο άτομο του υδρογόνου είναι: $F_{em} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$ (1)

Η αντίστοιχη δύναμη λόγω βαρύτητας θα είναι: $F_g = G\frac{m_e m_p}{r^2}$ (2)

Από (1) κ (2) θα έχουμε επομένως: $\frac{F_g}{F_{em}} = \frac{G m_e m_p}{e^2/4\pi\varepsilon_0} = 4\pi\varepsilon_0 G \frac{m_e m_p}{e^2}$

Αντικατάσταση τιμών για τις μάζες και σταθερές δίνει:

$$\frac{F_g}{F_{em}} = \frac{m_e m_p G_N}{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}\hbar c} = \frac{0.511\,\text{GeV}\ 0.938\cdot 10^{-3}\,\text{GeV}\cdot 6.7\cdot 10^{-39}\,\hbar c\,\text{GeV}^{-2}}{\frac{1}{137}\hbar c} \Rightarrow \frac{F_g}{F_{em}} = 439.86\cdot 10^{-42} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{F_g}{F_{em}} = 4.4\cdot 10^{-40}} \qquad (A)$$

Η ακτίνα ενός ατόμου που δημιουργήθηκε σαν δέσμια κατάσταση λόγω της βαρυτικής δύναμης θα είναι:

$$m_e v r = \hbar \quad \text{(κβαντική συνθήκη στροφορμής)}$$
$$m_e v^2/r = F_g \quad \text{(σταθερή κυκλική τροχιά Bohr)}$$
$$\Rightarrow m_e v = \hbar/r \Rightarrow \frac{\hbar^2}{m_e r^3} = F_g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r^3 = \frac{\hbar^2}{F_g m_e}} \Rightarrow \boxed{r = \left(\frac{\hbar^2}{F_g m_e}\right)^{1/3}} \qquad (B)$$

Συγκρίνοντας την ακτίνα του ατόμου του υδρογόνου όπου $a_{EM} = 0.5\ 10^{-10}$ m με αυτή του ατόμου που συγκρατείται το ηλεκτρόνιο λόγω της βαρυτικής έλξης είναι:

$$\frac{r}{a_{EM}} = \frac{\left(\hbar^2/F_g m_e\right)^{1/3}}{0.5\cdot 10^{-10}} \overset{(B)}{=} \frac{\left(\hbar^2/F_g m_e\right)^{1/3}}{\left(\hbar^2/F_{em} m_e\right)} \Rightarrow \frac{r}{a_{EH}} = \left(\frac{F_{em}}{F_g}\right)^{1/3} \overset{(A)}{\Rightarrow}$$

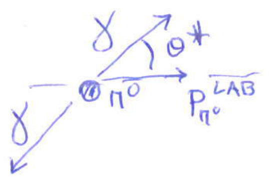
$$\Rightarrow \frac{r}{a_{EH}} = \left(\frac{1}{4.4}\cdot 10^{40}\right)^{1/3} = \left(\frac{10}{4.4}\right)^{1/3} 10^{13} \Rightarrow \boxed{\frac{r}{a_{EH}} = 1.3\cdot 10^{13}}$$

Δηλαδή η ακτίνα θα είναι 13 τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη του ατόμου του H

4. Το μεσόνιο π^0 έχει σπιν 0 και μάζα $m_\pi = 135$ MeV/c^2 και διασπάται σε δυο φωτόνια. Η μέτρηση των χαρακτηριστικών της φωτονίων της τελικής κατάστασης δίνει πληροφορίες για τους κβαντικούς αριθμούς Parity και σπιν του πιονίου. Με βάση αυτό προσδιορίστε:
(α) Την γωνιακή κατανομή των εκπεμπόμενων φωτονίων στο σύστημα αναφοράς του p^0 (σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας).
(β) Το σχήμα του ενεργειακού φάσματος των εκπεμπόμενων φωτονίων στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.
(γ) Την μέγιστη και ελάχιστη ενέργεια των εκπεμπόμενων φωτονίων όταν το π^0 έχει ενέργεια 0.8 *GeV*.

(α) Έστω η διάσπαση N_0 αριθμού π^0. Εφόσον το π^0 έχει spin μηδέν, η γωνιακή κατανομή των εκπεμπόμενων φωτονίων στο σύστημα αναφοράς του Κ.Μ. θα πρέπει να είναι ομοιόμορφη προς όλες τις κατευθύνσεις εφόσον δεν υπάρχει κάποια προτιμητέα διεύθυνση που θα επέβαλε η περίπτωση ύπαρξης spin του διασπώμενου σωματιδίου.

Επομένως θα έχουμε: $\frac{dN}{d\Omega} = \frac{N_0}{4\pi}$ αφού $\Omega_0 =$ ολική στερεά γωνία $= 4\pi$ και $N_0 =$ αριθμός π^0



Η στερεά γωνία είναι σύμφωνα με το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας.

Αν θεωρήσουμε ως Θ^* την γωνία που σχηματίζει το φωτόνιο με την διεύθυνση της ορμής του π^0 όπως μετράται στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, $P_{\pi^0}^{LAB}$, τότε η στερεά γωνία μπορεί να γραφεί: $\frac{dN}{d\Omega} = \frac{N_0}{4\pi} \Rightarrow$

$$\Rightarrow dN = \frac{N_0}{4\pi} d\Omega = \frac{N_0}{4\pi} 2\pi\, d(\cos\Theta^*) \Rightarrow \boxed{\frac{dN}{d(\cos\Theta^*)} = \frac{N_0}{2}} \quad (1)$$

(β) Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας (το π^0 σε ηρεμία) τα 2 φωτόνια έχουν ακριβώς την ίδια ενέργεια $E_\gamma^* = \frac{m_{\pi^0}}{2}$ ενώ οι ορμές τους $\vec{P}_\gamma^*$ είναι ίσες και αντίθετες. Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, τα π^0 έχουν ενέργεια E_π και ορμή $\vec{P}_\pi$ επομένως το τετραδιάνυσμα των π^0 είναι $(E, \vec{p})$.

Θα πρέπει να εκφράσουμε ανάλογα τα φωτόνια στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, αφού κάνουμε τον κατάλληλο μετασχηματισμό Lorentz, από το σύστημα της μάζας ηρεμίας του π^0 στο σύστημα του εργαστηρίου.

Η ώθηση θα είναι: $\beta = \frac{|p_\pi|}{E_\pi}$ ενώ ο παράγοντας Lorentz $\gamma = \frac{E_\pi}{m_\pi} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Επομένως αν τα β και γ είναι γνωστά μπορούμε να προσδιορίσουμε την ενέργεια των φωτονίων στο εργαστήριο, το οποίο γίνεται αντιληπτό από το σύστημα αναφοράς που τα π^0 είναι ακίνητα σα να έχει αρνητική ταχύτητα (κινείται δηλαδή προς τα ακίνητα π^0).

Από τον μετασχηματισμό Lorentz θα έχουμε επομένως:

$$E_\gamma = \gamma E_\gamma^* + \beta\gamma \underbrace{p_\gamma^*}_{E_\gamma^*} \cos\theta^* \Rightarrow E_\gamma = \frac{E_\pi}{\cancel{m_\pi}} \frac{\cancel{m_\pi}}{2}\left(1+\beta\cos\theta^*\right) \Rightarrow \boxed{E_\gamma = \frac{E_\pi}{2}\left(1+\beta\cos\theta^*\right)} \quad (2)$$

Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι η ενέργεια των φωτονίων στο εργαστήριο εξαρτάται από την γωνία εκπομπής στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας του πιονίου, και οι τιμές της ενέργειας κυμαίνονται ανάμεσα στις τιμές:

$$\boxed{E_\gamma^{min} = \frac{E_\pi}{2}\left(1-\beta\right)} \ (3) \quad \text{και} \quad \boxed{E_\gamma^{max} = \frac{E_\pi}{2}\left(1+\beta\right)} \ (4)$$ για $\theta^* = \frac{\pi}{2}$ και 0 αντίστοιχα

Το σχήμα της ενεργειακής κατανομής των φωτονίων θα είναι:

$$dE_\gamma = d\left[\gamma E_\gamma^* + \beta\gamma E_\gamma^* \cos\theta^*\right] = \beta\gamma E_\gamma^* d(\cos\theta^*) \Rightarrow \frac{d(\cos\theta^*)}{dE_\gamma} = \left(\beta\gamma E_\gamma^*\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d(\cos\theta^*)}{dN}\frac{dN}{dE_\gamma} = \left(\beta\gamma E_\gamma^*\right)^{-1} \xrightarrow{(1)} \frac{dN}{dE_\gamma}\frac{2}{N_0} = \left(\beta\gamma E_\gamma^*\right)^{-1} \Rightarrow \boxed{\frac{dN}{dE_\gamma} = \frac{N_0}{2}\frac{1}{\beta\gamma E_\gamma^*}}$$

Εφόσον όλες οι ποσότητες στο δεξί μέλος της εξίσωσης είναι σταθερές, η κατανομή του αριθμού των φωτονίων είναι σταθερή μεταξύ των δύο ακραίων τιμών E_γ^{max} και E_γ^{min}

(γ) Αν η ενέργεια του π^0 είναι 0.8GeV τότε $\beta = \frac{P_\pi}{E_\pi} = \frac{\sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2}}{E_\pi} \rightarrow \boxed{\beta = 0.9856}$

Από την εξίσωση (3) και (4) βρίσκουμε ότι:

$$E_\gamma^{min} = \frac{0.8}{2}\left(1-0.9856\right) \Rightarrow E_\gamma^{min} = 0.00576\,\text{GeV} \Rightarrow \boxed{E_\gamma^{min} = 5.76\,\text{MeV}}$$

$$E_\gamma^{max} = \frac{0.8}{2}\left(1+0.9856\right) \Rightarrow E_\gamma^{max} = 0.794\,\text{GeV} \Rightarrow \boxed{E_\gamma^{max} = 794\,\text{MeV}}$$