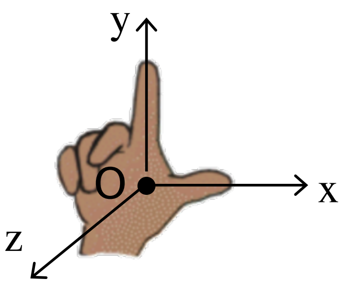
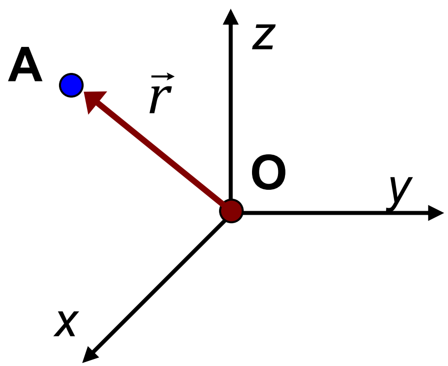
Διανύσματα

- Ο απλούστερος ορισμός διανύσματος είναι ότι μετρά μετατοπίσεις
- Διανύσματα περιγράφουν μέτρο αλλά και κατεύθυνση
- Αντίθετα, βαθμωτά μεγέθη περιγράφονται μόνο από το μέτρο τους
- Περιγραφή της θέσης ενός αντικειμένου στο χώρο γίνεται βάσει ενός συστήματος συντεταγμένων



  - Ένα σημείο για την αρχή μέτρησης
  - Σύστημα αξόνων που ορίζουν κατευθύνσεις στο χώρο
  - Δεξιόστροφο σύστημα
  - Κανόνες μέτρησης (μονάδες, υποδιαιρέσεις)
- Σύνηθες σύστημα συντεταγμένων: ορθογώνιο ή καρτεσιανό

Εύρεση της θέσης ενός σώματος



- Η θέση ενός σώματος, Α, γίνεται ως προς σημείο αναφοράς:
  - αρχή του συστήματος συντεταγμένων
- Χρησιμοποιούμε ένα διάνυσμα (βέλος) η αρχή του οποίου συμπίπτει με την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και η άκρη του βέλους συμπίπτει με τη θέση του σώματος
- Το διάνυσμα $\vec{r}$ γράφεται συναρτήσει των συνιστωσών του ή συντεταγμένων του τέλους του:

$$\vec{r} = \left\langle r_x, r_y, r_z \right\rangle$$

- Η προηγούμενη σχέση μας λέει ότι αν θέλουμε να περιγράψουμε τη θέση του σώματος Α θα πρέπει να κινηθούμε:

  r_x μέτρα (m) στη *x*-διεύθυνση

  r_y μέτρα (m) στη *y*-διεύθυνση

  r_z μέτρα (m) στη *z*-διεύθυνση

- Η προηγούμενη έκφραση ωστόσο δεν μας λέει πόσο μακριά είναι το σώμα Α από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων Ο:
  - Μέτρο διανύσματος: $\left|\vec{r}\right| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$
- **Προσοχή**: Το διάνυσμα περιγράφεται από 3 συνιστώσες ενώ το μέτρο από ένα νούμερο με κάποιες μονάδες. Το μέτρο είναι βαθμωτό μέγεθος.

Σμίκρυνση – Μεγένθυση διανύσματος – αλλαγή διεύθυνσης

- Έστω ότι θέλουμε να βρούμε ένα διάνυσμα το οποίο είναι παράλληλο προς το αρχικό μας διάνυσμα αλλά διπλάσιου μήκους:
- Πολλαπλασιασμός διανύσματος με βαθμωτό μέγεθος μεγενθύνει ή ελαττώνει το διάνυσμα:

$$\vec{r}' = a\vec{r} = a\left\langle r_x, r_y, r_z \right\rangle = \left\langle ar_x, ar_y, ar_z \right\rangle$$

- Έλεγχος του μέτρου του διανύσματος

$$\left|\vec{r}'\right| = \sqrt{\left(ar_x\right)^2 + \left(ar_y\right)^2 + \left(ar_z\right)^2} = \sqrt{a^2\left(r_x^{\ 2} + r_y^{\ 2} + r_z^{\ 2}\right)} = \left|a\right|\sqrt{r_x^{\ 2} + r_y^{\ 2} + r_z^{\ 2}} = \left|a\right|\left|\vec{r}\right|$$

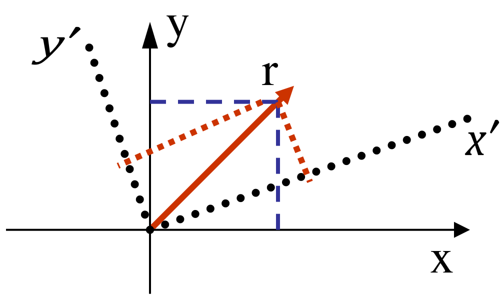
- Αλλαγή της διεύθυνση του διανύσματος:

  $\vec{r}' = a\vec{r}$ όπου α είναι αρνητικός αριθμός

- Πολλαπλασιασμός διανύσματος $\vec{r}'$ με βαθμωτό μέγεθος αλλάζει το μέτρο και τη φορά του διανύσματος **αλλά δεν μπορεί να στρέψει** το διάνυσμα να αλλάξει δηλαδή την διεύθυνσή του.
  - Το διάνυσμα που προκύπτει είναι συγγραμμικό με το αρχικό διάνυσμα

Διανύσματα

Ένα διάνυσμα είναι αυτό που είναι, ανεξάρτητα από το πώς προσπαθούμε να το περιγράψουμε



Κάποιος μπορεί να διαλέξει τους διακεκομμένους άξονες και να δώσει νέες συντεταγμένες.
Ως προς τους διακεκομμένους άξονες,
οι συντεταγμένες $\langle x', y' \rangle$
είναι διαφορετικές από τις συντεταγμένες $\langle x, y \rangle$

Ορισμός: Μοναδιαία διανύσματα είναι τα διανύσματα χωρίς διαστάσεις (αδιάστατα) με μέτρο ίσο με τη μονάδα

$$\hat{a} \equiv \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \rightarrow |\hat{a}| = 1$$

$$\hat{a} \equiv \langle \hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z \rangle = \left\langle \frac{r_x}{|\vec{r}|}, \frac{r_y}{|\vec{r}|}, \frac{r_z}{|\vec{r}|} \right\rangle$$

Σκοπός των μοναδιαίων διανυσμάτων είναι να δηλώσουν κατεύθυνση

Ισότητα διανυσμάτων

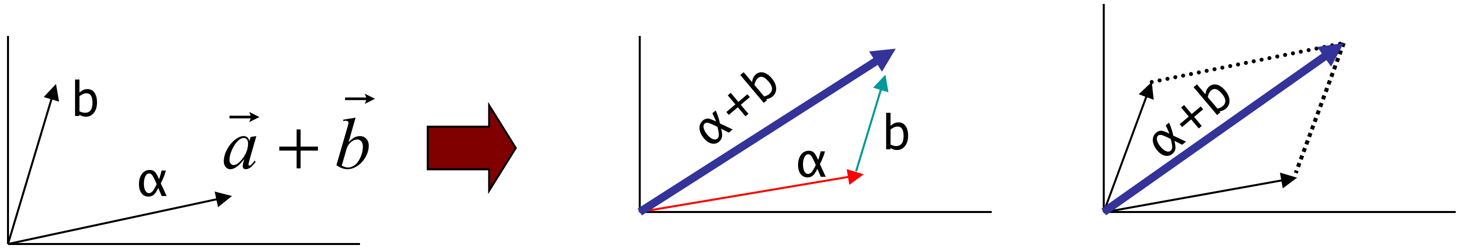
Δύο διανύσματα είναι ίσα μεταξύ τους όταν έχουν το ίδιο μέτρο και την ίδια κατεύθυνση

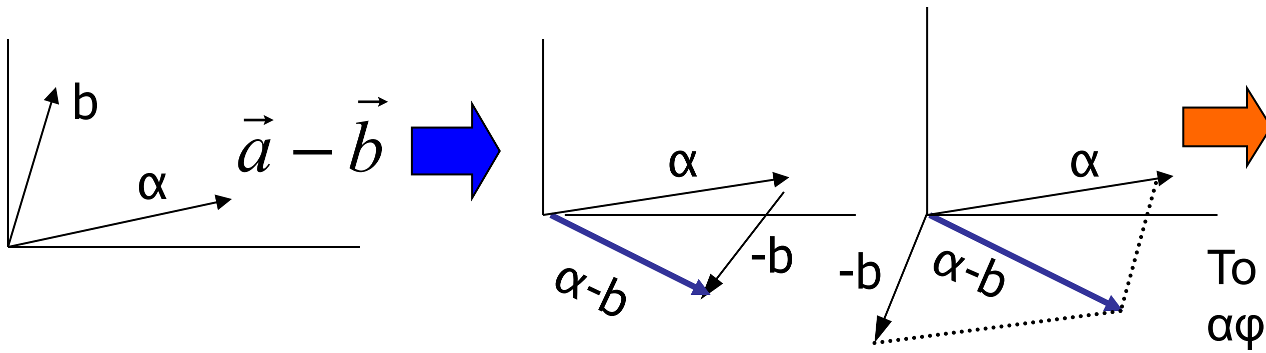
$$\vec{r} = \vec{w} \Rightarrow \left\langle r_x, r_y, r_z \right\rangle = \vec{r} = \vec{w} = \left\langle w_x, w_y, w_z \right\rangle$$

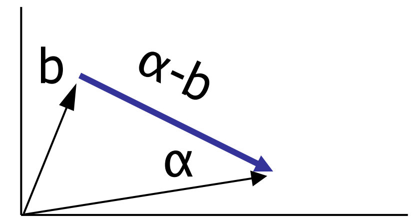
$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} r_x &= w_x \\ r_y &= w_y \\ r_z &= w_z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \left|\vec{r}\right| &= \left|\vec{w}\right| \\ \hat{r} &= \hat{w} \end{aligned}$$

Πράξεις με διανύσματα: Πρόσθεση/αφαίρεση



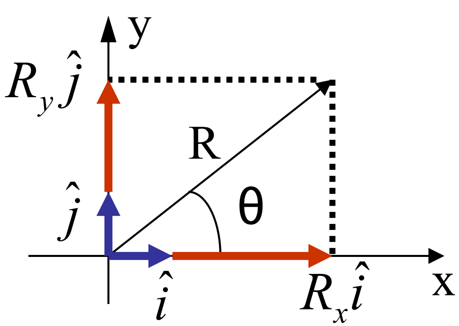




Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης είναι διάνυσμα σχετικής θέσης

Συνιστώσες διανυσμάτων:

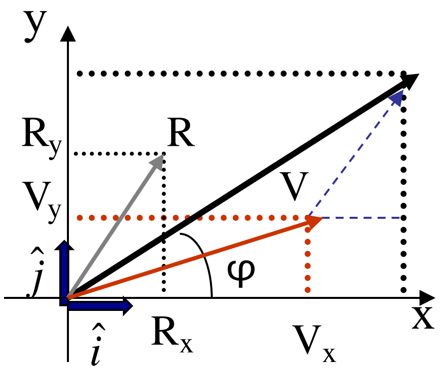
Κάθε διάνυσμα μπορεί να αναλυθεί σε συνιστώσες προβάλλοντάς το στους άξονες ενός οποιουδήποτε συστήματος συντεταγμένων



$$R_x = R\cos\theta$$
$$R_y = R\sin\theta$$
$$\hat{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j}$$

Η πρόσθεση διανυσμάτων απλουστεύεται προσθέτοντας τις συνιστώσες τους σε κάθε άξονα ξεχωριστά

Διανύσματα



$$\hat{i} = \langle 1,0,0 \rangle \qquad \hat{j} = \langle 0,1,0 \rangle$$

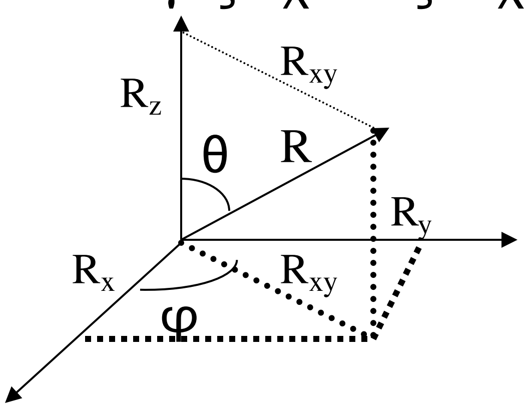
$$\vec{R}+\vec{V} = \left(R_x + V_x\right)\hat{i} + \left(R_y + V_y\right)\hat{j}$$

$$\left|\vec{R}+\vec{V}\right| = \sqrt{\left(\left(R_x+V_x\right)^2 + \left(R_y+V_y\right)^2\right)}$$

Η κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{R}+\vec{V}$ θα δίνεται από την γωνία φ

$$\varphi = arc(\tan\varphi) = arc\left(\frac{\left(R_y+V_y\right)}{\left(R_x+V_x\right)}\right)$$

Ανάλογες σχέσεις ισχύουν και για 3 διαστάσεις



$$R_x = R_{xy}\cos\phi = R\sin\theta\cos\varphi$$

$$R_y = R_{xy}\sin\phi = R\sin\theta\sin\varphi$$

$$R_z = R\cos\theta$$

$$R = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}$$