Πηγές Μαγνητικών Πεδίων

Μαγνητικό πεδίο εξαιτίας κινούμενου φορτίου

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα απειροστό στοιχείο ρεύματος σε μορφή κυλίνδρου, μήκους *ds* και επιφάνειας διατομής *A*. Το ρεύμα αυτό που περιέχει *n* φορείς φορτίου ανά μονάδα όγκου, κινούμενοι όλοι με ταχύτητα $\vec{v}$ κατά μήκος του άξονα του κυλίνδρου.

Έστω *I* το ρεύμα που δημιουργείται εξαιτίας της διέλευσης φορτίου από την διατομή του κυλίνδρου ανά μονάδα χρόνου. Όπως ξέρουμε το ρεύμα γράφεται: $I = nAq|\vec{v}|$.

Ο συνολικός αριθμός φορέων φορτίου στο στοιχειώδες τμήμα του ρεύματος θα είναι:

$$dN = ndV = nAds$$

Το μαγνητικό πεδίο εξαιτίας των φορέων στο στοιχειώδες τμήμα ρεύματος θα είναι:

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} nAq|\vec{v}| \frac{d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} nAq \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}(nAds)q\frac{\vec{v}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} dNq\frac{\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}$$

όπου *r* είναι η απόσταση του σημείου *P* του μαγνητικό πεδίο από το φορτίο.

$\hat{r} = \vec{r}/r$ είναι το μοναδιαίο διανύσμα από την πηγή στο σημείο *P*.

Το στοιχειώδες διαφορικό μήκος $d\vec{s}$ είναι παράλληλο με το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{v}$

Για ένα μόνο φορτίο, $dN = 1$ και η προηγούμενη εξίσωση γίνεται: $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}}$

Μαγνητικό πεδίο εξαιτίας κινούμενου φορτίου

Προσοχή: το σημειακό φορτίο δεν αποτελεί σταθερό ρεύμα και επομένως η σχέση που έχουμε γράψει ισχύει στο μη σχετικιστικό όριο όπου υ<<c,

Για περιπτώσεις όπου έχουμε μεγάλο αριθμό φορέων φορτίου, N, κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες, υ. Έστω έχουμε το i-th φορτίο q_i το οποίο αρχικά βρίσκεται στο σημείο (x_i, y_i, z_i) και κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$. Από την αρχή της επαλληλίας, το μαγνητικό πεδό που λαμβάνεται:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}_i \times \hat{r}_i}{r_i^2} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_0}{4\pi} q\vec{v}_i \times \left[\frac{(x - x_i)\hat{\imath} + (y - y_i)\hat{\jmath} + (z - z_i)\hat{k}}{\{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2\}^{3/2}}\right]}$$

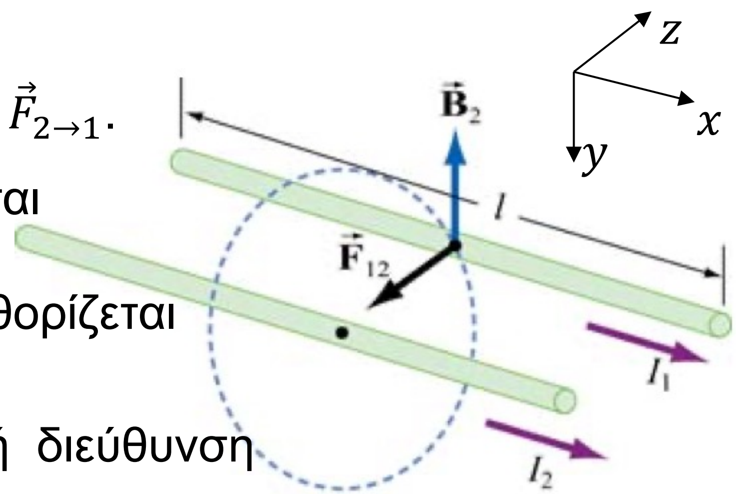
Δύναμη μεταξύ δύο παράλληλων συρμάτων

Είδαμε ότι ένα σύρμα που διαρρέεται από ρεύμα παράγει μαγνητικό πεδίο.

Επιπλέον όταν ένα σύρμα που διαρρέεται από ρεύμα τοποθετηθεί σε περιοχή που υπάρχει μαγνητικό πεδίο τότε θα αναπτυχθεί πάνω του μία δύναμη από το πεδίο

- Αναμένεται επομένως ότι δύο σύρματα που διαρρέονται από ρεύμα να ασκούν δύναμη το ένα στο άλλο.

Θεωρήστε δύο παράλληλα σύρματα με απόσταση μεταξύ τους *α*, που διαρρέονται από ρεύμα I_1 και I_2 αντίστοιχα στην +x διεύθυνση.



Ο αγωγός 2 ασκεί μαγνητική δύναμη στον αγωγό 1, $\vec{F}_{2\to1}$.

Είδαμε ότι οι μαγνητικές γραμμές που δημιουργούνται από το ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό 2 στην +x διεύθυνση, είναι κύκλοι ομόκεντροι με φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_2$ θα δείχνει στην εφαπτομενική διεύθυνση στην κυκλική μαγνητική γραμμή.

Επομένως, σε ένα τυχαίο σημείο *P* στον αγωγό 1 θα έχουμε μαγνητικό πεδίο που είναι κάθετο στο σύρμα και θα έχει μέτρο που δίνεται από: $\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\hat{j}$

Η δύναμη θα είναι: $\vec{F}_{2\to1} = I\vec{l}\times\vec{B}_2 \Rightarrow \vec{F}_{2\to1} = I_1 l\hat{\imath}\times\left(-\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\hat{j}\right) \Rightarrow$ $\boxed{\frac{\vec{F}_{2\to1}}{l} = \left(-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}\hat{k}\right)}$

Δύναμη μεταξύ δύο παράλληλων συρμάτων

Με παρόμοιο τρόπο, η δύναμη που δέχεται ένα μήκος l τους σύρματος 2 εξαιτίας του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί το ρεύμα που διαρρέει το σύρμα 1 θα είναι:

$$\boxed{\frac{\vec{F}_{1\to 2}}{l} = \left(\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}\hat{k}\right)}$$

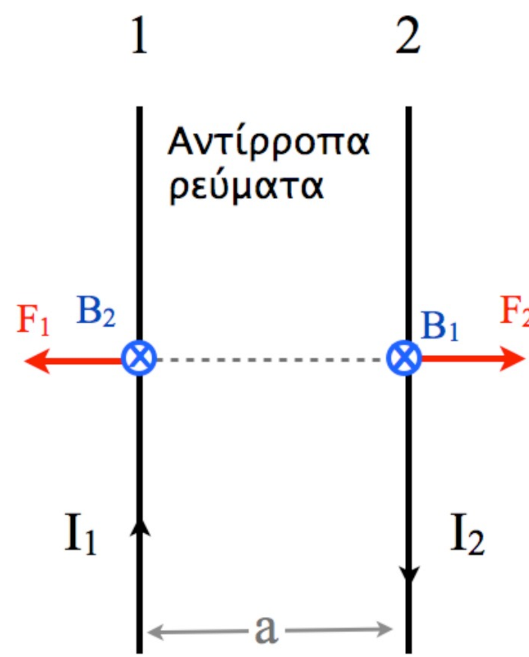
τα δύο σύρματα έλκονται με ίσες δυνάμεις ανά μονάδα μήκους.

Θεωρούμε τώρα ότι οι αγωγοί διαρρέονται από ρεύματα αντίθετης κατεύθυνσης:

Στην περίπτωση αυτή βρίσκεται εύκολα ότι οι αγωγοί απωθούνται με ίσες δυνάμεις ανά μονάδα μήκους

Εάν οι αγωγοί βρίσκονται σε απόσταση α και διαρρέονται από ίσα ρεύματα $I_1 = I_2 = I$, τότε η δύναμη αλληλεπίδρασης ανά μονάδα μήκους είναι:

$$\boxed{\frac{F}{l} = \left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi a}\right)}$$



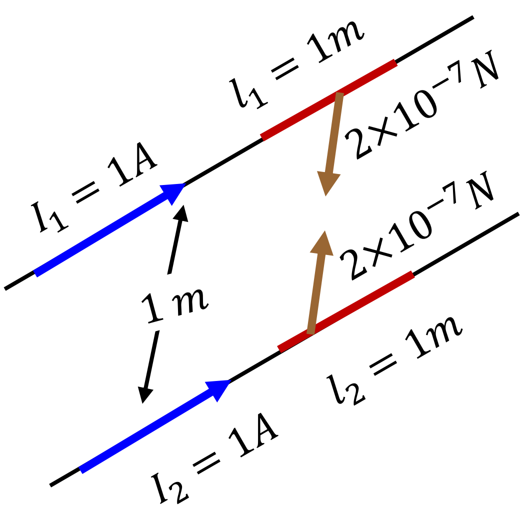
Ορισμός της μονάδας Ampere

Εφόσον $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\frac{N}{A^2}$ μπορούμε να ορίσουμε την μονάδα Ampere, με βάση την εξίσωση της δύναμης αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο αγωγών που διαρρέονται από ρεύμα

1 Ampere είναι η ένταση του συνεχούς και σταθερού ρεύματος το οποίο όταν διαρρέει δύο ευθύγραμμους παράλληλους αγωγούς, απείρου μήκους και αμελητέας διατομής που βρίσκονται σε απόσταση 1m, προκαλεί μαγνητική δύναμη μεταξύ τους η οποία είναι ίση με $2\times10^{-7}N$ ανά μέτρο μήκους.

Με βάση τον ορισμό του 1 Ampere, μπορούμε να ορίσουμε το φορτίο 1 Coulomb μέσω της σχέσης $Q = It$

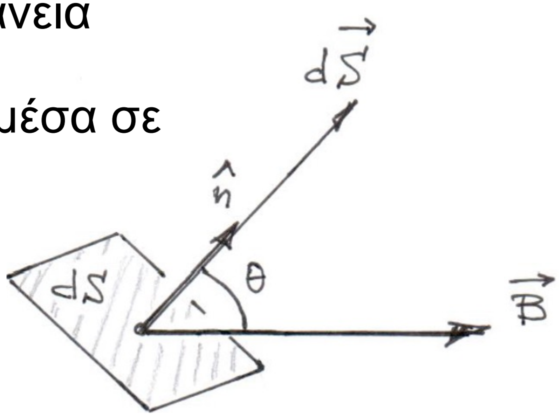
1 Coulomb είναι το ηλεκτρικό φορτίο το οποίο διέρχεται από μία διατομή ενός αγωγού που διαρρέεται από ρεύμα έντασης 1 Ampere σε χρόνο 1 sec.



Μαγνητική ροή

Το φυσικό μέγεθος της μαγνητικής ροής περιγράφει ποσοτικά το πλήθος των δυναμικών γραμμών οι οποίες διέρχονται από μια επιφάνεια

Έστω μια στοιχειώδης επιφάνεια $d\vec{S} = dS \cdot \hat{n}$ τοποθετημένη μέσα σε ομογενές, ή τοπικά ομογενές, μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$.



Ορίζουμε ως *στοιχειώδη μαγνητική ροή* $d\Phi_m$ που διέρχεται από τη στοιχειώδη επιφάνεια $d\vec{S}$, το εσωτερικό γινόμενο:

$$\boxed{d\Phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S} = BdScos\theta}$$

Η μαγνητική ροή $d\Phi_m$ γίνεται μέγιστη όταν η επιφάνεια είναι τοποθετημένη κάθετη στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου :

Η $d\Phi_m$ που διέρχεται από μια μοναδιαία επιφάνεια τοποθετημένη κάθετα στη διεύθυνση του πεδίου ισούται με το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου.

Ως αποτέλεσμα εκφράζει ποσοτικά τον αριθμό των μαγνητικών γραμμών που διέρχονται από την επιφάνεια $d\vec{S}$.

Μαγνητική ροή

Η συνολική μαγνητική ροή που διέρχεται από μια τυχαία ανοικτή επιφάνεια υπολογίζεται χωρίζοντάς την σε στοιχειώδεις επιφάνειες και ολοκληρώνοντας:

$$\boxed{\Phi_m = \int d\Phi_m = \int_S BdScos\theta}$$

Εάν το πεδίο είναι ομογενές και η επιφάνεια επίπεδη με εμβαδό S

$$\Phi_m = B\int_S dScos\theta = BScos\theta$$

Μονάδα μαγνητικής ροής είναι το 1 Wb (Weber). Το 1Wb ορίζεται ως η μαγνητική ροή που διέρχεται από επίπεδη επιφάνεια εμβαδού $1m^2$ τοποθετημένης σε μαγνητικό πεδίο 1T: $1Wb = 1T \cdot m^2$

Νόμος του Gauss για τον μαγνητισμό

Οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές δεν έχουν αρχή και τέλος, δηλαδή, είναι κλειστές. Αυτό συμβαίνει διότι δεν υπάρχουν μεμονωμένοι μαγνητικοί πόλοι.

Άρα, για κάθε κλειστή επιφάνεια S στο εσωτερικό ενός μαγνητικού πεδίου ο αριθμός των εισερχομένων δυναμικών γραμμών ισούται με τον αριθμό των εξερχομένων.

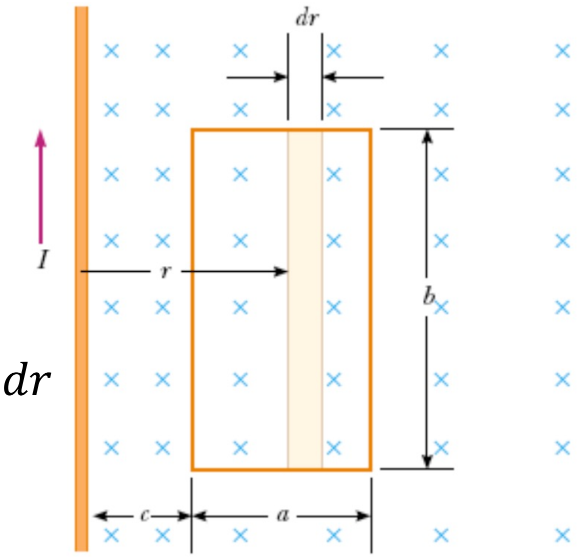
Επομένως: $$\boxed{\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0}$$

νόμος του Gauss για τον μαγνητισμό ή
θεμελιώδης νόμος μαγνητικής ροής

Ο νόμος εκφράζει την μη-ύπαρξη μεμονωμένων μαγνητικών πόλων

Παράδειγμα

Ένας ευθύγραμμος αγωγός διαρρέεται από συνεχές σταθερό ρεύμα έντασης I. Ποια η μαγνητική ροή που διέρχεται από ένα ορθογώνιο πλαίσιο πλάτους α και μήκους b σε απόσταση c από τον αγωγό. Ο αγωγός βρίσκεται στο επίπεδο του πλαισίου.



Το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ είναι συνάρτηση της απόστασης r από τον αγωγό:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

Χωρίζουμε το περίγραμμα σε στοιχειώδη εμβαδά: $dS = bdr$

Η στοιχειώδης ροή που περνά από κάθε στοιχειώδη επιφάνεια dS είναι:

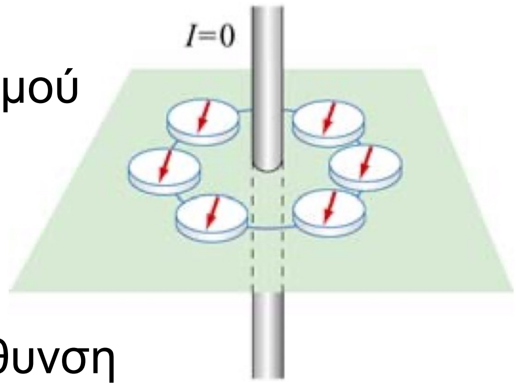
$$d\Phi_m = BdS = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}bdr = \frac{\mu_0}{2\pi}Ib\frac{dr}{r}$$

Επομένως, η συνολική μαγνητική ροή είναι:

$$\Phi_m = \int d\Phi_m = \frac{\mu_0}{2\pi}Ib\int_c^{c+a}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi}Ib\,ln\left(\frac{a+c}{c}\right)$$

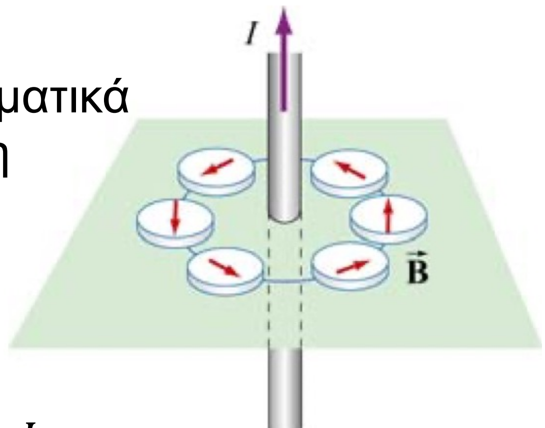
Νόμος του Ampere

Κινούμενα φορτία ή ρεύματα αποτελούν πηγές του μαγνητισμού

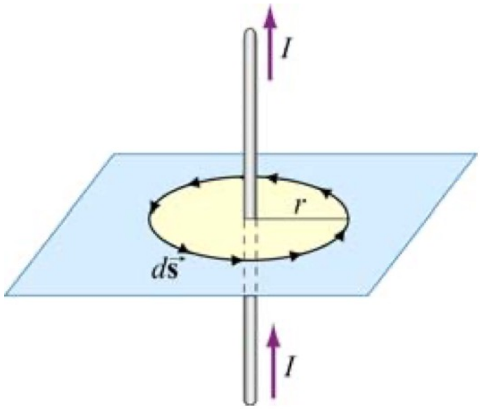


Απουσία ρεύματος όλες οι πυξίδες είναι ευθυγραμμισμένες προς την ίδια κατεύθυνση

Όταν ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα τότε οι πυξίδες μετατοπίζονται ώστε να αποκτήσουν την εφαπτομενική διεύθυνση της κυκλικής διαδρομής



Χωρίζουμε την κυκλική διαδρομή ακτίνας *r*, σε μικρά διανυσματικά τμήματα $d\vec{s} = \Delta s\vec{\varphi}$ που έχουν την εφαπτομενική κατεύθυνση και έχουν μέτρο Δs



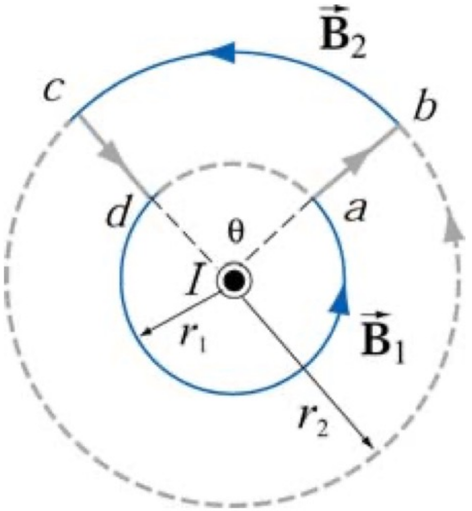
Στο όριο $\Delta\vec{s} \to \vec{0}$ θα πάρουμε ότι:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = B\oint ds = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)(2\pi r) = \mu_0 I$$

Το προηγούμενο αποτέλεσμα προκύπτει θεωρώντας μια κλειστή διαδρομή (Amperian βρόχος) που ακολουθεί μια συγκεκριμένη μαγνητική δυναμική γραμμή.

Νόμος του Ampere

Θεωρούμε έναν λίγο πιο περίπλοκο Amperian βρόχο ο οποίος περιέχει δύο μαγνητικές δυναμικές γραμμές και το ρεύμα *I*.



Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του μαγνητικού πεδίου στην καμπύλη abcda γράφεται ως:

$$\oint_{abcda} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_{ab} \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_{bc} \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_{cd} \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_{da} \vec{B}\cdot d\vec{s} \Rightarrow$$

$$\oint_{abcda} \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0 + B_2(r_2\theta) + 0 + B_1\left[r_1(2\pi-\theta)\right]$$

με το μήκος του τόξου $bc = r_2\theta$, ενώ το μήκος του τόξου $da = r_1 2\pi(\pi-\theta)$

Το πρώτο και 3ο ολοκλήρωμα μηδενίζονται γιατί το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στις διαδρομές ολοκλήρωσης.

Με το μαγνητικό πεδίο $B_1 = \mu_0 I/2\pi r_1$ και $B_2 = \mu_0 I/2\pi \mathrm{r}_2$ η προηγούμενη σχέση δίνει:

$$\oint_{abcda} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}(r_2\theta) + \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}\left[r_1(2\pi-\theta)\right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}(2\pi-\theta) = \mu_0 I$$

ίδιο αποτέλεσμα όπως πριν που η κλειστή διαδρομή ήταν σε μια δυναμική γραμμή

Νόμος του Ampere

Είδαμε ότι το μαγνητικό πεδίο από έναν ευθύγραμμο αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα κατά μήκος του z-άξονα μπορεί να γραφεί σε κυλινδρικές συντεταγμένες (*r*, *φ*, *z*) με τη μορφή:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\varphi}$$

Το τυχαίο στοιχειώδες μήκος τμήματα σε κυλινδρικές συντεταγμένες γράφεται ως:

$$d\vec{s} = dr\hat{r} + rd\varphi\hat{\varphi} + dz\hat{z}$$

Επομένως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s}$ μπορεί να γραφεί ως:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\varphi} \cdot (dr\hat{r} + rd\varphi\hat{\varphi} + dz\hat{z}) = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi r} rd\varphi \Rightarrow \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I$$

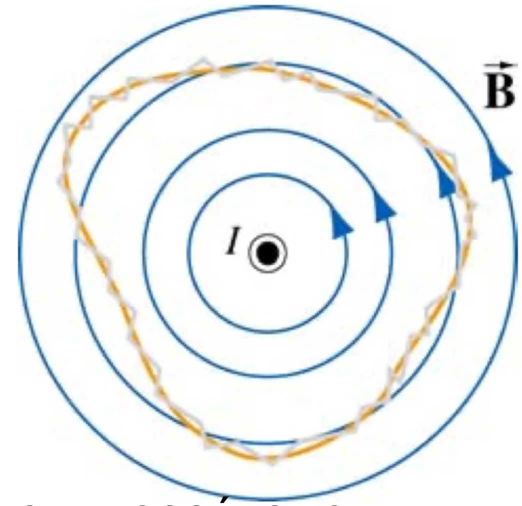
Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s}$ κατά μήκος ενός τυχαίου βρόχου Ampere

είναι ανάλογο του ρεύματος που περικλείεται από τον βρόχο

Νόμος του Ampere

Γενικεύοντας το προηγούμενο για ένα τυχαίο κλειστό βρόχο τυχαίου σχήματος που περιλαμβάνει τυχαίο αριθμό μαγνητικών δυναμικών γραμμών αποτελεί τον νόμο του Ampere:

Νόμος του Ampere: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{encl.}$



Ο νόμος του Ampere στον μαγνητισμό είναι ανάλογος του νόμου του Gauss στην ηλεκτροστατική

Για να τους χρησιμοποιήσουμε, το σύστημα θα πρέπει να εμπεριέχει κάποια συμμετρία.

- Αγωγός άπειρου μήκους εμπεριέχει κυλινδρική συμμετρία και μπορούμε να εφαρμόσουμε εύκολα το νόμο του Ampere

- Για αγωγό πεπερασμένου μήκους πρέπει να χρησιμοποιηθεί ο νόμος Biot-Savart

Ο νόμος του Ampere ισχύει αν και εφόσον τα περιεχόμενα ρεύματα είναι συνεχή και σταθερά. Θα πρέπει δηλαδή τα ρεύματα να μην αλλάζουν με τον χρόνο και ότι δεν υπάρχει κάπου συσσώρευση φορτίων.

Νόμος του Ampere

- Νόμος Biot-Savart $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2}$ Τυχαία πηγή ρεύματος π.χ. πεπερασμένου μήκους αγωγός

- Νόμος Ampere: $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{encl.}$ Πηγή ρεύματος εμπεριέχει συμμετρία π.χ. άπειρου μήκους αγωγός

Ο νόμος του Ampere είναι εφαρμόσιμος στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- ✓ Απείρου μήκους αγωγοί που διαρρέονται από σταθερά ρεύματα
- ✓ Επίπεδος αγωγός απείρων διαστάσεων πάχους *b* με πυκνότητα ρεύματος *J*
- ✓ Απείρου μήκους σωληνοειδές
- ✓ Τοροειδές