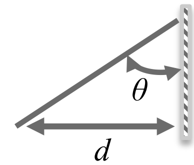
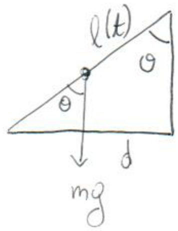
ΦΥΣ. 211
ΕΡΓΑΣΙΑ # 4
Επιστροφή την Δευτέρα 22/2/2016 στο τέλος της διάλεξης

1. Θέλουμε να αφήσουμε να γλυστρήσουν σώματα προς την βάση μιας λείας επιφάνειας που ξεκινά από ένα σημείο στον τοίχο και τελειώνει σε σημείο που βρίσκεται σε απόσταση *d*, από τον τοίχο. Με ποια γωνία, θ, θα πρέπει να ακουμπά η επιφάνεια στον τοίχο ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο χρόνος κατάβασης των σωμάτων;





Από το διπλανό σχήμα έχουμε ότι: τα σώματα θα κινηθούν κατά απόσταση $l = \frac{d}{\sin\theta}$

Η κίνηση προσδιορίζεται από την εξίσωση: $m\frac{d^2}{dt^2}l(t) = mg\cos\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow l(t) = \frac{1}{2}gt^2\cos\theta$ υποθέτοντας ότι για $t=0$ $\dot{l}(t)=0$.

Επομένως ο χρόνος καθόδου είναι: $\frac{d}{\sin\theta} = \frac{1}{2}gt_k^2\cos\theta \Rightarrow t_k^2 = \frac{2d}{g\cos\theta\sin\theta} \Rightarrow$

$\Rightarrow t_k = \sqrt{\frac{2d}{g\cos\theta\sin\theta}}$ Θέλουμε ο χρόνος να είναι ελάχιστος, οπότε $\frac{dt_k}{d\theta}=0$

Αντικαθιστούμε και έχουμε: $\frac{dt_k}{d\theta} = \sqrt{\frac{2d}{g}\left[\frac{+\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}\right]}=0$

$\Rightarrow \frac{dt_k}{d\theta} = 0 \Rightarrow \sin^2\theta = \cos^2\theta \Rightarrow \tan^2\theta = 1 \Rightarrow \boxed{\theta = 45^\circ}$

2. Βρείτε μια σχέση που εμπεριέχει την συνάρτηση $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ της οποίας η μέση τιμή του τετραγώνου της κλίσης της, $(\nabla\varphi)^2$, ως προς συγκεκριμένο όγκο V, έχει ελάχιστο.

Η μέση τιμή του τετραγώνου της κλίσης της συνάρτησης $\phi(x_1, x_2, x_3)$ ως προς συγκεκριμένο όγκο μπορεί να γραφεί:

$$\langle(\nabla\phi)^2\rangle = \frac{1}{V}\iiint(\nabla\phi)^2 dx_1\, dx_2\, dx_3 = \frac{1}{V}\iiint\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)^2\right]dx_1\, dx_2\, dx_3$$

Για να κάνουμε το ολοκλήρωμα αυτό ελάχιστο θα πρέπει: η συνάρτηση του ολοκληρώματος να ικανοποιεί την εξίσωση Euler-Lagrange.
Δηλαδή θα πρέπει η συνάρτηση $F = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)^2$ να ικανοποιεί την εξίσωση: $\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi_i'}\right) - \frac{\partial F}{\partial\phi} = 0$ όπου $\phi_i' = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}$

Αλλά $\frac{\partial F}{\partial\phi} = 0$ ενώ $\frac{\partial F}{\partial\phi_i'} = \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)} = 2\frac{\partial\phi}{\partial x_i}$

Επομένως η εξίσωση Euler-Lagrange θα δώσει:

$$2\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2\phi = 0}$$ που είναι η εξίσωση Laplace

3. Να βρείτε το λόγο της ακτίνας *R* ως προς το ύψος *H*, ενός ορθού κυκλικού κυλίνδρου συγκεκριμένου όγκου *V*, που ελαχιστοποιεί το εμβαδό της κυλινδρικής επιφάνειας *A* (πλευρά και βάσεις).

Ο όγκος του κυλίνδρου είναι $V_{κυλ} = \pi R^2 h \Rightarrow f = V_{κυλ} - \pi R^2 h = 0$.

Η ολική κυλινδρική επιφάνεια θα είναι: $S_{κυλ} = S_β + S_π = 2\pi R^2 + 2\pi R h$

Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την $S_{κυλ}$ κρατώντας τον σταθερό τον όγκο.

Επομένως θα πρέπει να έχουμε:

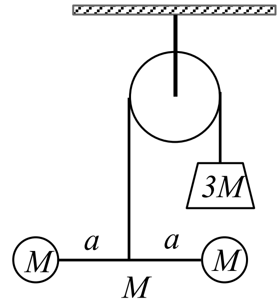
$$\frac{\partial S_{κυλ}}{\partial R} + \lambda \frac{\partial f}{\partial R} = 0 \Rightarrow \overset{2}{\cancel{4}}\pi R + \cancel{2}\pi h - \cancel{2}\pi R h \lambda = 0 \Rightarrow 2R + h - \lambda R h = 0$$

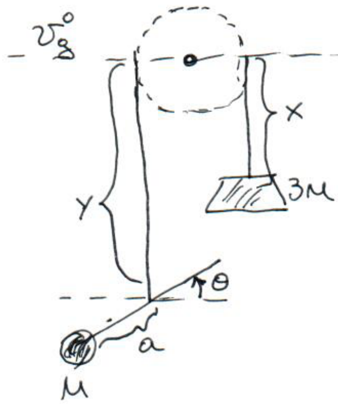
$$\frac{\partial S_{κυλ}}{\partial h} + \lambda \frac{\partial f}{\partial h} = 0 \Rightarrow 2\cancel{\pi}\cancel{R} - \lambda\cancel{\pi}R^{\cancel{2}} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{R}$$

Αντικατάσταση στην 1η εξίσωση δίνει: $2R + h - \frac{2}{\cancel{R}}\cancel{R}h = 0 \Rightarrow 2R - h = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{R = h/2}$$

4. Μια ράβδος μάζας M, και μήκους 2α, έχει δύο σφαίρες μάζας M, εξαρτημένες στα δύο άκρα της. Ένα νήμα είναι δεμένο στο μέσο της ράβδου και περνά μέσω μιας αβαρούς και λείας τροχαλίας, ενώ το άλλο άκρο του είναι δεμένο σε σώμα μάζας $3M$. Την χρονική στιγμή $t = 0$, μια από τις δύο σφαίρες αποκολάται από την ράβδο. Δείξτε ότι η ράβδος περιστρέφεται με αρχική γωνιακή επιτάχυνση $\ddot{\theta} = (18g)/(17a)$ και ότι η τάση του νήματος είναι αρχικά $30mg/17$.





Χρησιμοποιούμε το σύστημα συντεταγμένων του διπλανού σχήματος

Οι συντεταγμένες της μάζας 3M είναι απλά x

Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας της ράβδου είναι y

Υπάρχει επίσης ο δεσμός λόγω του νήματος:

$$x+y=\ell \Rightarrow \dot{x}+\dot{y}=0 \Rightarrow \dot{x}=-\dot{y} \Rightarrow \ddot{x}=-\ddot{y}$$

Οι συντεταγμένες της μάζας M στο άκρο της ράβδου είναι:

$a\cos\theta$ και $y+a\sin\theta$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι: $T=T_{3M}+T_{\rho}+T_{M}$

Αλλά $T_{3M}=\frac{1}{2}3M\dot{x}^2$

$$T_{\rho}=T^{\mu}_{\rho_{cm}}+T_{\rho_{\pi\epsilon\rho}}=\frac{1}{2}M\dot{y}^2+\frac{1}{2}I_{\rho}^{cm}\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}M\dot{y}^2+\frac{1}{2}\frac{1}{12}M(2a)^2\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}M\dot{y}^2+\frac{1}{2}\frac{1}{3}Ma^2\dot{\theta}^2$$

$$T_M=\frac{1}{2}M\left(a^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta+a^2\dot{\theta}\cos^2\theta+\dot{y}^2+2a\dot{y}\dot{\theta}\cos\theta\right)\Rightarrow T_M=\frac{1}{2}M\left(a^2\dot{\theta}^2+2a\dot{y}\dot{\theta}\cos\theta+\dot{y}^2\right)$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος θα είναι $V_g=V_g^{3M}+V_g^{\rho}+V_g^{M}$

Θεωρώντας μηδενικό επίπεδο δυναμικής ενέργειας αυτό που περνά από το κέντρο της τροχαλίας θα έχουμε: $V_g=-3Mgx-Mgy-Mgy-Mga\sin\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_g=-3Mgx-2Mgy-Mga\sin\theta$$

Η συνάρτηση του δεσμού είναι: $f=x+y-\ell$.

Η Lagrangian του συστήματος θα είναι:

$$L = \frac{1}{2}3M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\left(\dot{y}^2 + \frac{1}{3}a^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}M\left(a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{y}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{y}^2\right) + 3Mgx + 2Mgy + Mga\sin\theta + \lambda(x+y-l)$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange για τις συντεταγμένες θ, x και y θα είναι:

$$\theta:\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}Ma^2\dot{\theta} + Ma^2\dot{\theta} + Ma\dot{y}\cos\theta\right) = -Ma\dot{y}\dot{\theta}\sin\theta + Mga\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\cancel{M}a^{\cancel{2}}\ddot{\theta} + \cancel{M}a^{\cancel{2}}\ddot{\theta} + \cancel{Ma}\ddot{y}\cos\theta \cancel{- Ma\dot{y}\dot{\theta}\sin\theta} = \cancel{-Ma\dot{y}\dot{\theta}\sin\theta} + \cancel{M}g\cancel{a}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}a\ddot{\theta} + a\ddot{\theta} + \ddot{y}\cos\theta = g\cos\theta \Rightarrow \boxed{4a\ddot{\theta} + 3\ddot{y}\cos\theta = 3g\cos\theta} \quad (1)$$

$$x:\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow 3M\ddot{x} = 3Mg + \lambda \Rightarrow \boxed{3M\ddot{x} - 3Mg = \lambda} \quad (2)$$

$$y:\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} \Rightarrow M\ddot{y} + Ma\ddot{\theta}\cos\theta - Ma\dot{\theta}^2\sin\theta + M\ddot{y} = 2Mg + \lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{2M\ddot{y} + Ma\ddot{\theta}\cos\theta - Ma\dot{\theta}^2\sin\theta = 2Mg + \lambda} \quad (3)$$

Από την εξίσωση του δεσμού έχουμε $\dot{x} = -\dot{y} \Rightarrow \ddot{x} = -\ddot{y}$

Η άσκηση αναφέρεται ακριβώς στην στιγμή που αποκολλάται η μία μάζα από το άκρο της ράβδου, οπότε $\theta = 0$ και $\dot{\theta} = \dot{x} = \dot{y} = 0$.

Επομένως οι εξισώσεις κίνησης που έχουμε βρει, γίνονται:

$$(1) \Rightarrow 4a\ddot{\theta} + 3\ddot{y} = 3g \Rightarrow 4a\ddot{\theta} - 3\ddot{x} = 3g \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}(2) &\Rightarrow 3M\ddot{x} - 3Mg = \lambda \\ (3) &\Rightarrow 2M\ddot{y} + Ma\ddot{\theta} = 2Mg + \lambda\end{aligned}\right\} \Rightarrow 3\cancel{M}\ddot{x} - 3\cancel{M}g = -2\cancel{M}\ddot{x} + \cancel{M}a\ddot{\theta} - 2\cancel{M}g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\ddot{x} - g = a\ddot{\theta} \quad (5)$$

Αντικαθιστούμε την (5) στην (4) οπότε: $20\ddot{x} - 4g - 3\ddot{x} = 3g \Rightarrow 17\ddot{x} = 7g \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = \frac{7}{17}g}$

Αντικατάσταση στην (5) δίνει: $\frac{35g - 17g}{17} = a\ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{18}{17}g/a}$

Από την εξίσωση (2) θα πάρουμε:

$$\lambda = 3M(\ddot{x} - g) = 3M\left(\frac{7}{17}g - g\right) \Rightarrow \boxed{\lambda = -3M\frac{10}{17}g} \Rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{30}{17}Mg}$$

Επομένως η τάση του νήματος θα είναι:

$$\boxed{T = -\lambda = \frac{30}{17}Mg}$$

5. Δείξτε ότι η διαδρομή $y = y(x)$ για την οποία το ολοκλήρωμα $\int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1-y'^2}\,dx$ είναι στάσιμο είναι η συνάρτηση $\sinh$.

Το συναρτησιακό ολοκλήρωμα που θέλαμε να ελαχιστοποιήσουμε είναι:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} dx\, L(x, y, y') = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1-y'^2}\, x$$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Euler-Lagrange χρησιμοποιώντας σαν συνάρτηση της $L = x\sqrt{1-y'^2}$. Θα έχουμε:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\, x\,(1-y'^2)^{-1/2}(-2y')\right) - 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{2y'x}{\sqrt{1-y'^2}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{xy'}{\sqrt{1-y'^2}} = C = \text{σταθ.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 y'^2 = C^2(1-y'^2) \Rightarrow y'^2(C^2+x^2) = C^2 \Rightarrow y'^2 = \frac{C^2}{C^2+x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{C}{\sqrt{C^2+x^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{C}{\sqrt{C^2+x^2}}}$$

κάποιος θα μπορούσε να ανησυχεί για τον αν $\frac{dy}{dx} \lessgtr 0$ όταν παίρνουμε την τετραγωνική ρίζα. Η αβεβαιότητα για το πρόσημο όμως μπορεί να απορροφηθεί μέσα στη σταθερά C.

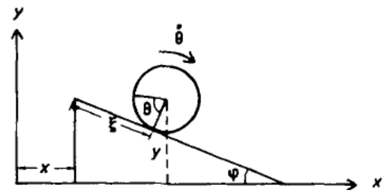
$$dy = \frac{C\,dx}{\sqrt{C^2+x^2}} \Rightarrow \text{αλλάζουμε μεταβλητή } x = C\sinh(\theta) \Rightarrow dx = C\cosh(\theta)\,d\theta$$

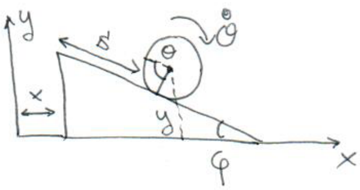
$$C^2+x^2 = C^2\left(1+\sinh^2(\theta)\right) \Rightarrow C^2+x^2 = C^2\cosh^2\theta$$

Αντικατάσταση στο ολοκλήρωμα δίνει: $\int dy = \int d\theta \frac{C^2\cosh\theta}{\sqrt{C^2\cosh^2\theta}} \Rightarrow \int dy = C\int d\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = C\theta + D \Rightarrow \boxed{y = C\sinh^{-1}\left(\frac{x}{C}\right) + D}$$

6. Μια σφαίρα μάζας *M* και ακτίνας *R*, κυλά χωρίς να ολισθαίνει προς την βάση μιας τριγωνικής επιφάνειας μάζας *m*, η οποία είναι ελεύθερη να κινείται πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. (α) Βρείτε την συνάρτηση Lagrange και τις εξισώσεις Lagrange του συστήματος που υπόκειται στην βαρυτική δύναμη. (β) Βρείτε την κίνηση του συστήματος, ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις Lagrange, δεδομένου ότι όλα τα σώματα αρχικά είναι σε ηρεμία και ότι το κέντρο της σφαίρας είναι σε ύψος *H* από την οριζόντια επιφάνεια.





(α) Χρησιμοποιούμε το σύστημα συντεταγμένων όπως στο διπλανό σχήμα.

Η σφαίρα κυλά στην κεκλιμένη επιφάνεια χωρίς να γλιστρά και το κέντρο μάζας της θα έχει συντεταγμένες:

$$\vec{r}^{\,CM}_{σφ} = \left[x + (s_0 + s)\cos\phi\right]\hat{i} + (H - s\sin\varphi)\hat{j}$$

Επομένως $\dot{\vec{r}}^{\,CM}_{σφ} = (\dot{x} + \dot{s}\cos\varphi)\hat{i} - \dot{s}\sin\varphi\,\hat{j}$

Εξαιτίας της κύλισης χωρίς ολίσθηση έχουμε τον δεσμό $s = R\theta \Rightarrow \dot{s} = R\dot{\theta}$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}^{\,CM}_{σφ} = (\dot{x} + R\dot{\theta}\cos\varphi)\hat{i} - R\dot{\theta}\sin\varphi\,\hat{j}$$

$$\vec{r}_{σφ} = \left[x + (s_0 + R\theta)\cos\phi\right]\hat{i} + (H - R\theta\sin\varphi)\hat{j}$$

Θεωρούμε ότι για $t=0$, $s_0=0$, $x=0$, $\theta=0$, $\dot{x}=\dot{\theta}=0$ και $y=H$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}^{\,CM}_{σφ} = (\dot{x} + R\dot{\theta}\cos\varphi)\hat{i} - R\dot{\theta}\sin\varphi\,\hat{j}$$

$$\vec{r}^{\,CM}_{σφ} = (x + R\theta\cos\varphi)\hat{i} + (H - R\theta\sin\varphi)\hat{j}$$

Επομένως $|\dot{\vec{r}}|^2 = \dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2\cos^2\phi + 2R\dot{\theta}\dot{x}\cos\phi + R^2\dot{\theta}^2\sin^2\varphi \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\dot{\vec{r}}|^2 = \dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{x}\cos\phi$$

Επομένως η εξίσωση της συνάρτησης Lagrange γίνεται:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{x}\cos\varphi\right) + \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_{\varepsilon\pi}\dot{x}^2 -$$
$$- Mg\left(H - R\theta\sin\varphi\right)$$

Όπως παρατηρούμε στην κινητική ενέργεια λόγω της μεταφοράς του κέντρου μάζας, προσθέτουμε την κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής των σημείων της σφαίρας ως προς το κέντρο μάζας $\left(\frac{1}{2}I_{cm}\dot{\theta}^2\right)$ και την κινητική ενέργεια λόγω της κίνησης της τριγωνικής επιφάνειας.

Αντικαθιστώντας τη ροπή αδράνειας της σφαίρας, θα έχουμε:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{x}\cos\phi\right) + \frac{1}{2}\frac{2}{5}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_{\varepsilon\pi}\dot{x}^2 - Mg\left(H - R\theta\sin\phi\right)$$

Οι εξισώσεις Lagrange ως προς τις γενικευμένες συντεταγμένες θ και x

$$x: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(M\dot{x} + MR\dot{\theta}\cos\phi + m_{\varepsilon\pi}\dot{x}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(M + m_{\varepsilon\pi}\right)\ddot{x} + MR\ddot{\theta}\cos\phi = 0}$$

$$\theta: \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(MR^2\dot{\theta} + MR\dot{x}\cos\varphi + \frac{2}{5}MR^2\dot{\theta}\right) = MgR\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \cancel{M}R^{\cancel{2}}\ddot{\theta} + \cancel{M}\cancel{R}\ddot{x}\cos\varphi + \frac{2}{5}\cancel{M}R^{\cancel{2}}\ddot{\theta} = \cancel{M}g\cancel{R}\sin\varphi \Rightarrow \boxed{\frac{7}{5}R\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\varphi = g\sin\varphi}$$

(β) Απαλείφουμε το $\ddot{x}$ από τις προηγούμενες δύο εξισώσεις:

$$\ddot{x} = -\frac{MR}{M + m_{\varepsilon\pi}}\ddot{\theta}\cos\phi$$

$$\frac{7}{5}R\ddot{\theta} - \frac{MR}{M + m_{\varepsilon\pi}}\ddot{\theta}\cos^2\phi = g\sin\varphi \Rightarrow \left[\frac{7}{5} - \frac{M\cos^2\phi}{M + m_{\varepsilon\pi}}\right]R\ddot{\theta} = g\sin\varphi$$

Ολοκλήρωση της τελευταίας δίνει: $\left(A = \left(\frac{7}{5} - \frac{M\cos^2\phi}{M+m_{επ}}\right)R\right)$

$$\ddot{\Theta} = \frac{g}{A}\sin\Theta \Rightarrow \Theta = \frac{1}{2}\frac{g}{A}\sin\Theta\, t^2 + C_1 t + C_2$$

Με βάση τις αρχικές συνθήκες $\dot{\Theta} = 0 = \Theta$ έχουμε $C_1 = 0$ και $C_2 = 0$

Οπότε θα πάρουμε τελικά:

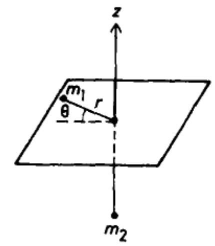
$$\Theta = \frac{1}{2}\frac{g(M+m_{επ})5\sin\theta}{(7(M+m_{επ})-5M\cos^2\varphi)R}t^2 \Rightarrow \Theta = \frac{5(M+m_{επ})\sin\theta}{2[7(M+m_{επ})-5M\cos^2\varphi]}\frac{g}{R}t^2$$

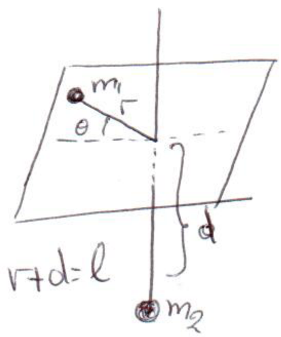
Αντικατάσταση στην εξίσωση για x θα δώσει:

$$x = -\frac{MR}{M+m_{επ}}\Theta\cos\phi \Rightarrow x = -\frac{5M\sin\varphi\cos\varphi}{2[7(M+m_{επ})-5M\cos^2\varphi]}g t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -\frac{5M\sin(2\varphi)}{4[7(M+m_{επ})-5M\cos^2\varphi]}g t^2}$$

7. Δύο σημειακές μάζες m_1 και m_2 ($m_1 \neq m_2$) συνδέονται μεταξύ τους με νήμα μήκους l το οποίο περνά από μια τρύπα σε οριζόντιο τραπέζι. Το νήμα και η μάζα στο τραπέζι κινούνται χωρίς τριβές, ενώ η κρεμασμένη μάζας m_2 κινείται κατά μήκος της κατακορύφου (όπως στο σχήμα). (α) Ποια πρέπει να είναι η αρχική ταχύτητα της μάζας m_1 ώστε η μάζα m_2 να παραμένει ακίνητη σε απόσταση d, κάτω από την επιφάνεια του τραπεζιού. (β) Αν η m_2 διαταραχθεί λίγο στην κατακόρυφη διεύθυνση, τότε το σύστημα εκτελεί ταλαντώσεις μικρού πλάτους. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Lagrange, βρείτε την περίοδο των μικρών ταλαντώσεων του συστήματος.





(α) Η μάζα m_1 θα πρέπει να έχει μια ταχύτητα υ η οποία είναι κάθετη στο νήμα έτσι ώστε η κεντρομόλος δύναμη να ισούται με την δύναμη της βαρύτητας στη μάζα m_2.

Θα έχουμε λοιπόν: $\dfrac{m_1 \upsilon^2}{l-d} = m_2 g \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\dfrac{m_2 (l-d) g}{m_1}}$

(β) Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες σύμφωνα με το σχήμα:

Η μάζα m_2 έχει μόνο z-συντεταγμένη $z = -d = -(l-r) \Rightarrow \dot{z} = \dot{r}$

Η μάζα m_1 έχει $\vec{r}_1 = r\cos\theta\,\hat{i} + r\sin\theta\,\hat{j} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_1 = (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)\hat{i} + (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)\hat{j} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\dot{\vec{r}}_1|^2 = \dot{r}^2\cos^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta - \cancel{2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta} + \dot{r}^2\sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \cancel{2r\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta} \Rightarrow |\dot{\vec{r}}_1|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

Επομένως η συνάρτηση Lagrange θα είναι:

$$\boxed{L = \frac{1}{2} m_1 (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}^2 + m_2 g (l-r)}$$

Μπορούμε να γράψουμε επομένως τις εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$r: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial L}{\partial r} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m_1 \dot{r} + m_2 \dot{r}\right) = m_1 r \dot{\theta}^2 - m_2 g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{r} = m_1 r \dot{\theta}^2 - m_2 g$$

$$\theta: \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m_1 r^2 \dot{\theta}\right) = 0 \Rightarrow m_1 r^2 \dot{\theta} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Για $t=0$ έχουμε $r = l-d$ και $v = \sqrt{\frac{m_2 (l-d) g}{m_1}} = v_0$

Αλλά $\dot{\theta}_0 (l-d) = v_0 \Rightarrow \dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{m_2 \cancel{(l-d)} g}{m_1 (l-d)^{\cancel{2}}}} \Rightarrow \dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{m_2 g}{m_1 (l-d)}}$

Επομένως $\cancel{m_1} r^2 \dot{\theta} = \sigma\tau\alpha\theta = m_1 (l-d)^2 \dot{\theta}_0 = \cancel{m_1} (l-d)^2 \sqrt{\frac{m_2 g}{m_1 (l-d)}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow r^2 \dot{\theta} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1} g (l-d)^3} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1} g (l-d)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{m_2}{m_1} g \left(\frac{l-d}{r}\right)^3 \frac{1}{r} \Rightarrow \boxed{r \dot{\theta}^2 = \frac{m_2}{m_1} g \left(\frac{l-d}{r}\right)^3}$$

Αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση ως προς r δίνει:

$$\boxed{(m_1 + m_2)\ddot{r} = m_2 g \left[\left(\frac{l-d}{r}\right)^3 - 1\right]} \qquad (A)$$

Θεωρούμε μικρή διαταραχή της τροχιάς $r = (l-d) + \rho$ όπου $\rho \ll l-d$

Θα έχουμε ότι: $\ddot{r} = \ddot{\rho}$ και $r^{-3} = (l-d)^{-3}\left(1 + \frac{\rho}{l-d}\right)^{-3} \simeq (l-d)^{-3}\left(1 - \frac{3\rho}{l-d}\right)$

Αντικατάσταση στην (A) $\Rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{\rho} = m_2 g \left[\cancel{1} - \frac{3\rho}{l-d} - \cancel{1}\right] \Rightarrow \ddot{\rho} = -\frac{3 m_2 g \rho}{(m_1 + m_2)(l-d)}$

Η τελευταία διαφορική εξίσωση είναι αυτή του αρμονικού ταλαντωτή με γωνιακή συχνότητα $\omega^2 = \frac{3m_2 g}{(m_1+m_2)(\ell-d)} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3m_2 g}{(m_1+m_2)(\ell-d)}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{(m_1+m_2)(\ell-d)}{3m_2 g}}}$$

έχουμε λοιπόν ταλάντωση του ρ ως προς την τροχιά $\ell-d$