# Ταλαντωτές

- Εξετάσαμε τον απλό αρμονικό ταλαντωτή

$$\ddot{q}+\omega^2 q=0$$

- Εξετάσαμε δυο διαφοροποιήσεις: ταλαντωτή με απόσβεση και διεγείρουσα δύναμη

$$\underbrace{\ddot{q}+\omega^2 q+\frac{\omega}{Q}\dot{q}}_{q=q_{\text{ομογ.}}+q_{\text{ειδ.}}}=F(t)$$

- Μεθοδική λύση με χρήση της συνάρτησης Green:

$$\ddot{G}+\omega^2 G+\frac{\omega}{Q}\dot{G}=\delta(t-t')$$

- Γενική λύση $q(t)=\int_{-\infty}^{t} dt' G(t,t')F(t')=\delta(t-t')$

- Αυτό επιτυγχάνεται γιατί η Δ.Ε. είναι γραμμική

- Δεν ισχύει για μη γραμμικές εξισώσεις

# Ταλαντωτές – εξαναγκασμένη φθίνουσα ταλάντωση

- Έστω η περίπτωση ενός ταλαντωτή με απόσβεση στον οποίο εφαρμόζεται μια εξωτερική δύναμη της μορφής:

  $F(t) = F_0 \sin at$ $\alpha$: συχνότητα διεγείρουσας δύναμης

- Τρεις συχνότητες στο πρόβλημα: $\ddot{q} + \omega^2 q + \frac{\omega}{Q}\dot{q} = F \sin at$

  $\omega$ : φυσική συχνότητα του ταλαντωτή

  $\omega'$ : συχνότητα του αποσβένοντα ταλαντωτή $\omega' = \omega\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

  $a$ : συχνότητα διεγείρουσας δύναμης

- Η συμπεριφορά της γενική λύσης της ομογενούς Δ.Ε. δηλώνει ότι το πλάτος της ταλάντωσης ελαττώνεται με τον χρόνο
- Θέλουμε την ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης
  - Αντιστοιχεί στην σταθερή κατάσταση του συστήματος όταν οι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης έχουν παύσει να υπάρχουν
- Δυο τρόποι να συνεχίσουμε στην λύση της Δ.Ε.
  - Χρησιμοποίηση της μεθοδολογίας των συναρτήσεων Green
    - Πολύπλοκο ολοκλήρωμα στο τέλος :–(
  - Μαντεύουμε την λύση

# Εξαναγκασμένη φθίνουσα ταλάντωση

- Ένα νέο trick ωστόσο:
  - Χρήση μιας μιγαδικής δύναμης αντί της $F(t) = F_0 \sin at$

    $F = F_0 e^{iat}$ μιγαδική δύναμη
- Με την μορφή αυτή της δύναμης, η Δ.Ε. γίνεται: $\ddot{q} + \omega^2 q + \frac{\omega}{Q}\dot{q} = F_0 e^{iat}$
  - Οι λύσεις της εξίσωσης αυτής θα είναι μιγαδικές
  - Το πραγματικό μέρος των λύσεων περιγράφει την απόκριση του ταλαντωτή στην δύναμη $F(t) = F_0 \cos at$
  - Το μιγαδικό μέρος των λύσεων περιγράφει την απόκριση του ταλαντωτή στην δύναμη $F(t) = F_0 \sin at$
- Υποθέτουμε τώρα ότι η λύση είναι της μορφής: $q = q_0 e^{iat}$ ($q_0$ μιγαδική σταθερά)
- Αντικατάσταση στην Δ.Ε. θα δώσει: $\left(-a^2 + \omega^2 + i\frac{\omega}{Q}a\right) q_0 e^{iat} = F_0 e^{iat}$

$$\Rightarrow q_0 = \frac{F_0}{\left(-a^2 + \omega^2 + i\frac{\omega}{Q}a\right)}$$ Μιγαδικό πλάτος ταλάντωσης

# Εξαναγκασμένη φθίνουσα ταλάντωση

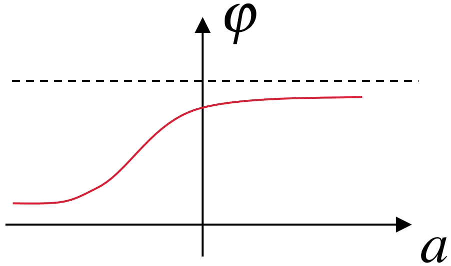
- Η λύση της σταθερής κατάστασης (μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα)
  - Ταλαντώνεται με συχνότητα $\alpha$
  - και μιγαδικό πλάτος $q_0$
- Συνήθως εξετάζουμε το μέτρο του πλάτους και την φάση:

$$q_0 = \frac{F_0}{\left(-a^2 + \omega^2 + i\frac{\omega}{Q}a\right)} \Rightarrow q_0 = \frac{F_0}{\left(-a^2+\omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2 a^2}{Q^2}}\left(-a^2+\omega^2 - i\omega\frac{a}{Q}\right)$$

- Η φάση του ταλαντωτή θα είναι: $q_0 = Ae^{i\varphi t}$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\Im(q_0)}{\Re(q_0)}\right) \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{a\omega}{Q\left(\omega^2 - a^2\right)}\right)$$

# Εξαναγκασμένη φθίνουσα ταλάντωση

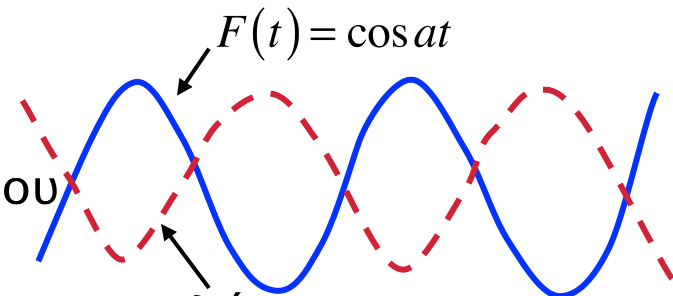



- Το γράφημα φάσης θα μοιάζει με:
  - Διαφορά φάσης του ταλαντωτή ως προς F

$a \to 0 \quad \varphi \to 0$ σε φάση ταλαντωτής–δύναμη

$a \to \omega \quad \varphi \to \pi/2$ διαφορά φάσης ¼

$a \to \infty \quad \varphi \to \pi$ διαφορά φάσης ½ περιόδου

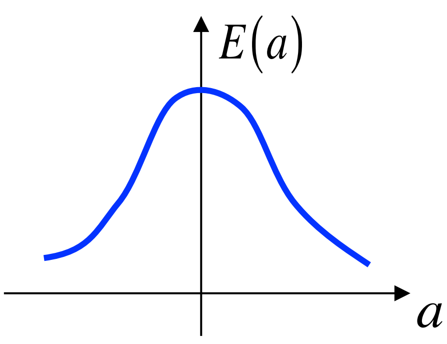



- Το πλάτος της ταλάντωσης:

$$A = \sqrt{\frac{F_0}{\left(\omega^2 - a^2\right)^2 + \dfrac{a^2}{\omega^2 Q^2}}}$$

- Η ενέργεια της ταλάντωσης: $E \approx A^2$
  - Μεγιστοποιείται όταν: $\dfrac{dA}{da} = 0$

$$a = \omega\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$ Συντονισμός



# Μονοδιάστατα συστήματα

- Όλα τα μονοδιάστατα συστήματα είναι επιλύσιμα:
- Θεωρήστε ένα μονοδιάστατο σύστημα που περιγράφεται $L = L(q, \dot{q})$
  - Η lagrangian είναι ανεξάρτητη του χρόνου
  - Η ενέργεια $E = H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L$ σταθερή
  - Η εξίσωση κίνησης $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \dot{E} = 0$
  - Αυτό γιατί $L = T - V$ και $E = T + V$ ενώ $\frac{dL}{dt} = 0$
  - Βοηθά να βρούμε την λύση του προβλήματος
- Θεωρήστε σύστημα που περιγράφεται από την $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$
- Η ενέργεια επομένως θα είναι: $E = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + V(q) \Rightarrow \dot{q} = \pm\sqrt{2(E - V(q))}$
  - Η εξίσωση αυτή προσδιορίζει πλήρως την λύση

$$\frac{dq}{dt} = \pm\sqrt{2(E-V)} \Rightarrow dt = \pm\frac{dq}{\sqrt{2(E-V)}} \Rightarrow t = \pm\int\frac{dq}{\sqrt{2(E-V)}}$$

# Μονοδιάστατα συστήματα

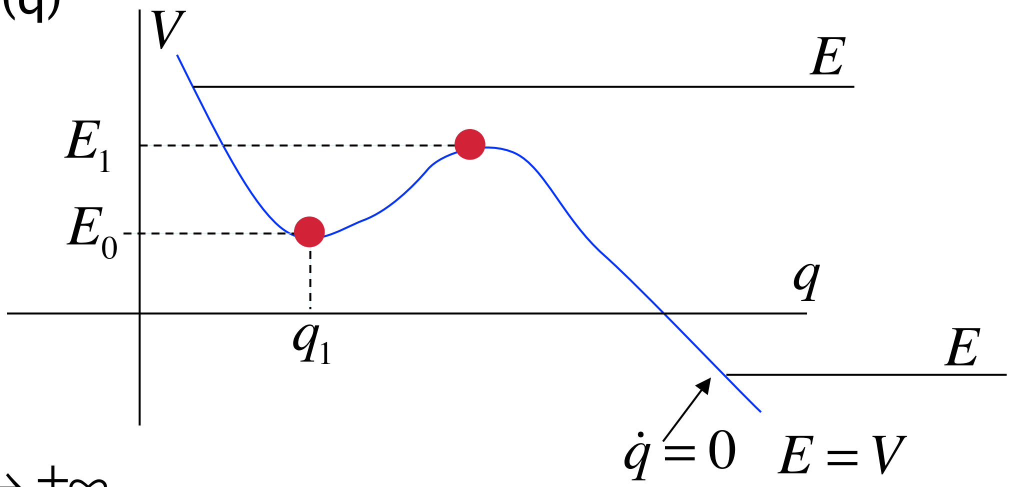
$$t = \pm\int_{q_0}^{q_1} \frac{dq}{\sqrt{2\left(E - V(q)\right)}}$$

Όχι πάντοτε επιλύσιμο

Μερικές φορές δεν μπορούμε να βρουμε την q(t) απο την t(q)

- Μπορούμε να μαντέψουμε την δυναμική του συστηματος από

$$\dot{q} = \pm\sqrt{2\left(E - V(q)\right)}$$




$E < E_0$ $\quad q \to \infty$ όταν $t \to \pm\infty$

$E_1 > E > E_0$ $\quad$ είτε $q \to \infty$ όταν $t \to \pm\infty$

ή ταλαντώνεται ως προς το $q_1$

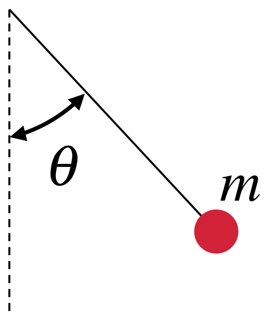
Το πλάτος της ταλάντωσης εξαρτάται από την ενέργεια $E_1$

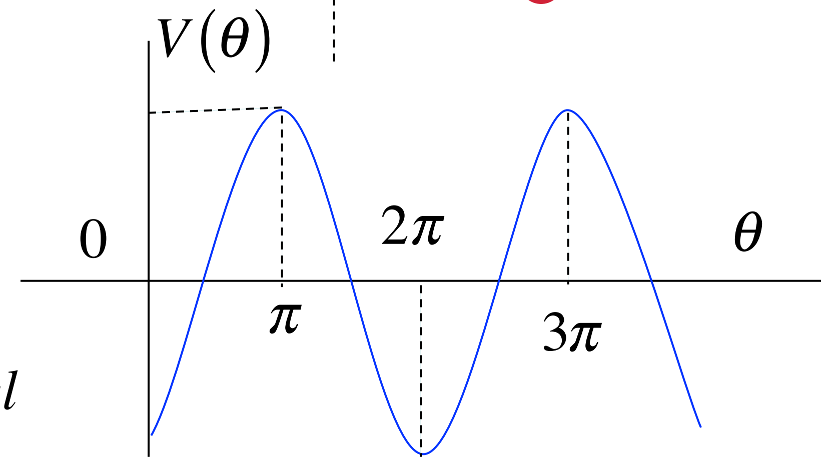
$E > E_1$ $\quad q \to \infty \quad t \to \pm\infty$

# Μονοδιάστατα συστήματα

- Ας θεωρήσουμε το εκκρεμές

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$




- Ευσταθή σημεία ισορροπίας

$$\theta = 2n\pi$$

- Ασταθή σημεία ισορροπίας

$$\theta = (2n+1)\pi$$

- Αν η ενέργεια έχει τιμές $mgl > E > -mgl$
  - Ταλάντωση ως προς ευσταθές σημείο
- Αν η ενέργεια έχει τιμές $E > mgl$
  - Θ θα είναι μονότονη: θα αυξάνει ή θα ελαττώνεται

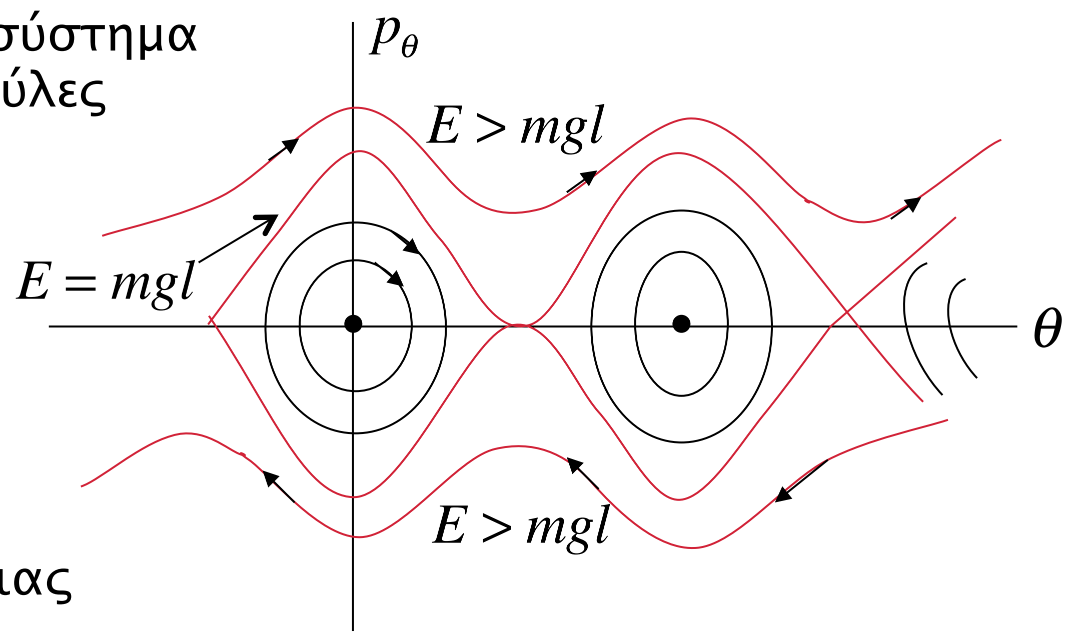
  το εκκρεμές θα περιστρέφεται πάντοτε

# Φασικός χώρος

- Χρήσιμο να περιγράψουμε την δυναμική στο φασικό χώρο
- Για το εκκρεμές αυτό θα είναι ένα επίπεδο θ, $p_\theta$
- Η ενέργεια είναι σταθερή, το σύστημα θα κινείται σε σταθερές καμπύλες
- Για το εκκρεμές:

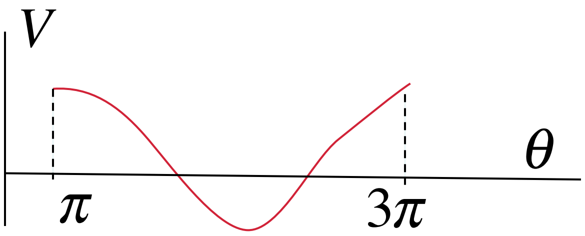
$$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$$

$$\Rightarrow E = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta$$




- Φασικός χώρος ($\theta$,$p_\theta$):
  - καμπύλες σταθερής ενέργειας
  - Όταν $E < mgl$ κλειστές καμπύλες $-\pi<\theta<\pi$
  - Όταν $E = -mgl$ σημείο $p_\theta=0,\theta=0$ δεν υπάρχει ταλάντωση
  - Όταν $E > mgl$ ανοικτές καμπύλες
    $p_\theta>0$ περιστροφή δεξιόστροφα
    $p_\theta<0$ περιστροφή αριστερόστροφα
  - Για $E = mgl$ μια καμπύλη διαχωριστική

# Φασικός χώρος




- Στην διαχωριστική καμπύλη

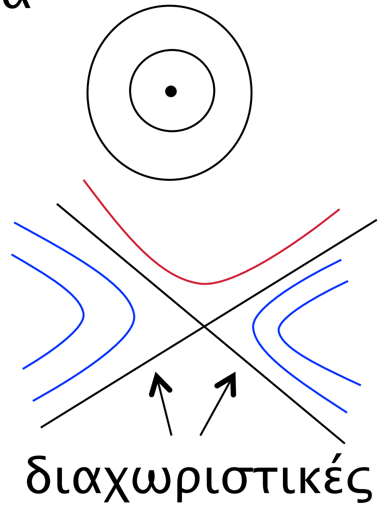
  Το εκκρεμές είναι ανάποδα

  θα κυλήσει προς τα κάτω και θα πάρει άπειρο χρόνο για να ανέβει

  Μπορείτε από το ολοκλήρωμα του χρόνου να δείτε ότι απειρίζεται για να βρεθεί και πάλι στην θέση ανάποδα

- Κοντά σε σημείο ευσταθούς ισορροπίας
  - Ελλείψεις

- Κοντά σε σημεία ασταθούς ισορροπίας
  - Υπερβολές



# Λύση του ολοκληρώματος

- Μπορούμε να βρούμε τον χρόνο για να πάει από ένα σημείο σε άλλο

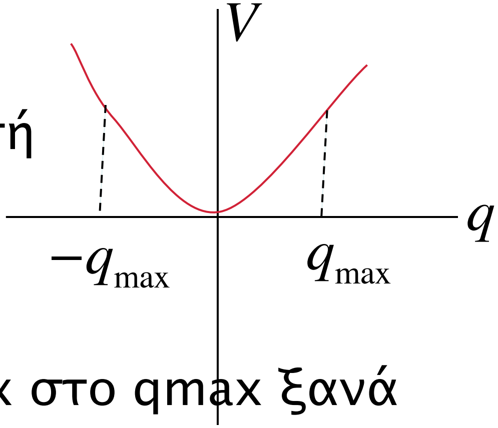
$$t(q_0, q_1) = \pm \int_{q_0}^{q_1} \frac{dq}{\sqrt{2(E-V)}}$$

- Για απλό αρμονικό ταλαντωτή ο χρόνος για μια ταλάντωση ο χρόνος είναι ανεξάρτητος του πλάτους
- Για το εκκρεμές η περίοδος εξαρτάται από το πλάτος
  - Πολύ κοντά στο σημείο ευσταθούς ισορροπίας μοιάζει με αρμονικό ταλαντωτή

## Λύση του ολοκληρώματος $t(q_0, q_1) = \pm\int_{q_0}^{q_1} \frac{dq}{\sqrt{2(E-V)}}$

- Θεωρούμε την Lagrangian $L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$
- Αναπτύσουμε το cosθ $\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 + \cdots$
- Οι 3 αυτοί όροι ορίζουν τον αναρμονικό ταλαντωτή

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q) \qquad V(q) = \frac{1}{2}q^2 + \frac{\varepsilon}{4}q^4$$




- Ο χρόνος που απαιτείται για να πάει από το qmax στο qmax ξανά

$$T = 4\int_0^{q_{max}} \frac{dq}{\sqrt{2\left(E - \frac{1}{2}q^2 - \frac{\varepsilon}{4}q^4\right)}} \quad \text{όπου} \quad E = \frac{1}{2}q_{max}^2 + \frac{\varepsilon}{4}q_{max}^4$$

Η περίοδος εξαρτάται από το $q_{max}$

- Το ολοκλήρωμα: $x = \frac{q}{q_{max}} \quad \Rightarrow T = 4\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left((1-x^2) + \frac{\varepsilon q_{max}^2}{2}(1-x^4)\right)}}$

# Αναρμονικός ταλαντωτής

- Για μικρά ε αναπτύσουμε κατά Taylor:

$$T = 4\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\left(1-\frac{\varepsilon'}{2}(1+x^2)+\cdots\right) \quad \text{όπου} \quad \varepsilon' = \varepsilon\frac{q^2_{\max}}{2}$$

- Θέτουμε $x = \sin u$

$$T = 4\int_0^{\pi/2} du\left(1-\frac{\varepsilon'}{2}(1+\sin u^2)+\cdots\right)$$

$$\Rightarrow T = 2\pi - 2\varepsilon'\left(\frac{3}{2}\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi\left(1-\frac{3}{4}\varepsilon'+\cdots\right)$$

- Αν ε>0 η περίοδος γίνεται μικρότερη του απλού αρμονικου ταλαντωτή
- Αν ε<0 η περίοδος γίνεται μεγαλύτερη
- Για το εκκρεμές $\varepsilon = -1/6$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\left(1+\frac{\theta^2_{\max}}{16}+\cdots\right)$$