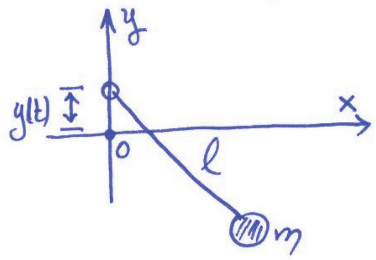
Ένα εκκρεμές αποτελείται από μια αβαρή, στερεά ράβδο μήκους l στο ένα άκρο της οποίας είναι στερεωμένη μια μάζα m, και μπορεί να κινείται σε ομοιόμορφο βαρυτικό πεδίο g. Το άλλο σημείο στήριξης της ράβδου δεν είναι ακλόνητο αλλά κινείται κατακόρυφα με απομάκρυνση $y(t)$ που είναι συνάρτηση του χρόνου. (α) Να βρεθεί η Lagrangian και οι εξισώσεις κίνησης και (β) Δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης είναι ίδια με αυτή ενός εκκρεμούς που εξαρτάται από ακλόνητο σημείο, και σε g ίσο με $g_{eff}(t)$. Τι είναι το $g_{eff}(t)$?



Η Lagrangian δίνεται από :

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2 \right) - m g y_m$$

όπου

$$\left.\begin{aligned} x_m(t) &= l \sin\theta(t) \\ y_m(t) &= y(t) - l\cos\theta(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_m &= l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_m &= \dot{y} + l\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(l^2\dot{\theta}^2 + \dot{y}^2 + 2l\dot{y}\dot{\theta}\sin\theta \right) - mgy + mgl\cos\theta$$

Επομένως έχουμε μια γενικευμένη συντεταγμένη θ για να αναπαραστήσουμε x_m, y_m τα οποία συνδέονται μέσω του δεσμού (μήκος της ράβδου)

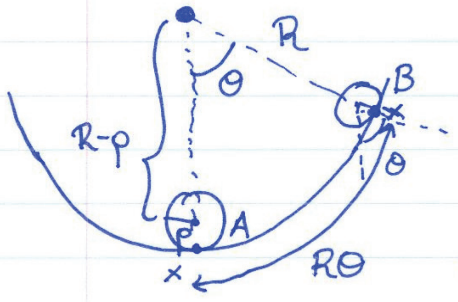
Να σημειωθεί επίσης ότι η $y(t)$ (η κίνηση του στηρίγματος του εκκρεμούς) Δεν είναι ανεξάρτητη μεταβλητή αφού είναι η γνωστή συνάρτηση του χρόνου κίνηση του στηρίγματος

Επομένως η μόνη εξίσωση κίνησης είναι ως προς θ

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[ml^2\dot{\theta} + ml\dot{y}\sin\theta\right] - ml\dot{y}\dot{\theta}\cos\theta + mgl\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow l\ddot{\theta} + \ddot{y}\sin\theta + g\sin\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g_{eff}}{l}\sin\theta = 0 \quad \text{όπου} \quad \boxed{g_{eff} = g\left(1 + \frac{\ddot{y}}{g}\right)}$$



Σφαίρα ακτίνας ρ κυλά σε κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας R, χωρίς να γλιστρά. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης.

<u>Οι δεσμοί</u> : η σφαίρα κυλά στο εσωτερικό της επιφάνειας οπότε $r = (R-\rho)$ 1ος δεσμός

κύλιση χωρίς ολίσθηση 2ος δεσμός

Αν θεωρήσουμε ένα σημείο X της σφαίρας το οποίο εφάπτεται με την κυλινδρική επιφάνεια στο σημείο A τότε θα βρίσκεται και πάλι σε επαφή με την επιφάνεια στο σημείο B

Η απόσταση που η σφαίρα έχει κυλήσει είναι το τόξο $AB = R\Theta$

Αλλά η απόσταση αυτή είναι ίση με την περιφέρεια της σφαίρας αφού το σημείο X έχει κάνει μια πλήρη περιστροφή

Οπότε θα έχουμε :

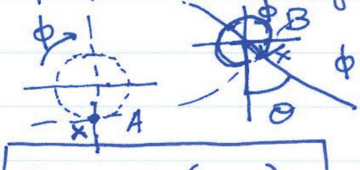
$$R\Theta = 2\pi\rho$$

Η γωνία που έχει περιστραφεί η σφαίρα κατά το διάστημα αυτό είναι $2\pi - \Theta = \phi$

Γενικά αν η απόσταση κύλισης είναι κάποιο τμήμα S της περιφέρειας $2\pi\rho$

π.χ. $R\Theta = 2\pi S\rho$, τότε η σφαίρα έχει περιστραφεί κατά μια γωνία

$$2\pi S - \Theta = \phi \Rightarrow \phi + \Theta = 2\pi S$$



$\phi + \Theta = 2\pi$

Από τις 2 τελευταίες σχέσεις έχουμε : $\boxed{R\Theta = 2\pi(\phi+\Theta)\rho}$ (A)

Η σχέση αυτή αποτελεί ένα δεσμό που συσχετίζει τη γωνία Θ με την γωνία φ περιστροφής της σφαίρας γύρω από το κέντρο της.

Διαλέγουμε τη γωνία Θ σα τη γενικευμένη συντεταγμένη για να λύσουμε το πρόβλημα. Από την (A) ⇒ $\boxed{\phi = \frac{(R-\rho)\Theta}{\rho}}$ <u>Δεσμός</u>

Η κινητική ενέργεια θα είναι: $T = \frac{1}{2}m(\cancel{\dot{r}^2}^{\,0} + \underbrace{r^2}_{(R-\rho)}\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2$ (πολικές συντεταγμένες)

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}m(R-\rho)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2$$

Δηλαδή η κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας της σφαίρας (1ος όρος) και η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής της σφαίρας (2ος όρος)

Αντικαθιστούμε το ϕ από την εξίσωση του δεσμού $\dot{\phi} = \frac{(R-\rho)\dot{\theta}}{\rho}$ οπότε

$$T = \frac{1}{2}m(R-\rho)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\frac{(R-\rho)^2\dot{\theta}^2}{\rho^2} \qquad \left(I_{\sigma\phi} = \frac{2}{5}m\rho^2\right) \text{ οπότε}$$

$$T = \frac{1}{2}m(R-\rho)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{5}m\cancel{\rho^2}\frac{(R-\rho)^2}{\cancel{\rho^2}}\dot{\theta}^2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}m(R-\rho)^2\frac{7}{5}\dot{\theta}^2} \quad (1)$$

Αν θεωρήσουμε την αρχή του συστήματος συντεταγμένων στο κέντρο του κυλίνδρου τότε η δυναμική ενέργεια της σφαίρας θα είναι:

$$\boxed{V = -mg(R-\rho)\cos\theta} \quad (2)$$

Επομένως η Lagrangian θα είναι: (από (1) & (2)

$$L = \frac{1}{2}\frac{7}{5}m(R-\rho)^2\dot{\theta}^2 + mg(R-\rho)\cos\theta.$$

Η εξίσωση κίνησης για τη συντεταγμένη θ θα είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{7}{5}\cancel{m}(R-\rho)^{\cancel{2}}\ddot{\theta} + \cancel{m}g\cancel{(R-\rho)}\sin\theta = 0. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{5}{7}\frac{g\sin\theta}{(R-\rho)}} \Bigg\} \Rightarrow \ddot{\theta} \simeq -\frac{5}{7}\frac{g\theta}{(R-\rho)}$$

Για μικρές ταλαντώσεις $\sin\theta \simeq \theta$

Η γωνιακή συχνότητα των ταλαντώσεων είναι: $\omega = \sqrt{\frac{5}{7}\frac{g}{(R-\rho)}}$