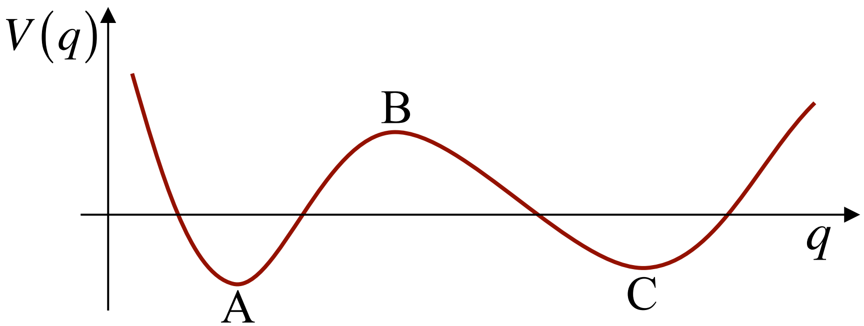
Ταλαντώσεις

- Για μονοδιάστατο σύστημα το οποίο βρίσκεται σε ισορροπία στο q_0:

$$\left.\frac{dV}{dq}\right|_{q=q_0} = 0$$



- Αναπτύσσοντας γύρω από το q_0, η δυναμική του συστήματος είναι αυτή του αρμονικού ταλαντωτή
- Αν q_0=0, τότε $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ όπου ω: συχνότητα ταλάντωσης
- Οι λύσεις της εξίσωσης κίνησης είναι:
  - ω μιγαδικό: $q(t) = Ae^{+|\omega|t} + Be^{-|\omega|t}$ ασταθές σημείο ισορροπίας
  - ω πραγματικό: $q(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ ευσταθής ισορροπία

Φθίνουσες ταλαντώσεις

- Ταλαντωτής κάτω από επίδραση δύναμης τριβής
  - Μηχανικό σύστημα που δεν περιγράφεται από φορμαλισμό Lagrange
  - Απλούστερο πρόβλημα: $F \propto \dot{q}$
- Πρέπει να τροποποιήσουμε την εξίσωση κίνησης για την τριβή

$$\ddot{q}+\omega^2 q+\frac{\omega}{Q}\dot{q}=0$$

Q: συντελεστής ποιότητας – αδιάστατο μέγεθος

- Οι λύσεις της εξ. κίνησης μπορούν να βρεθούν θεωρώντας: $q = Ae^{iat}$
  - Αντικατάσταση στην εξ. κίνησης: $\underbrace{\left(-a^2+\omega^2+i\frac{a\omega}{Q}\right)}_{\text{δευτεροβάθμια ως προς } a}q=0$

δευτεροβάθμια ως προς a:

  - Οι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι:

$$a=a_{\pm}=\frac{i\omega}{2Q}\pm\sqrt{\omega^2\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)}$$

δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξ. κίνησης

Φθίνουσες ταλαντώσεις $a = a_{\pm} = \dfrac{i\omega}{2Q} \pm \sqrt{\omega^2\left(1 - \dfrac{1}{4Q^2}\right)}$

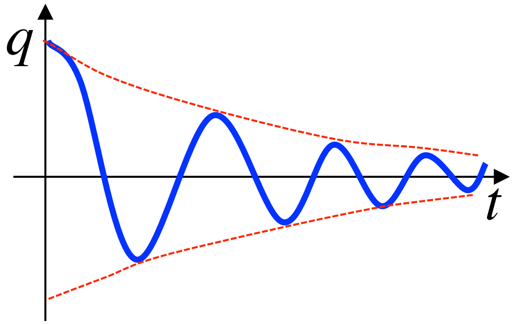
Τρεις διαφορετικές περιπτώσεις:

- Q < ½ ➡ α μιγαδικός
  - Οι λύσεις της εξ. κίνησης θα είναι: $q = Ae^{-|a_+|t} + Be^{-|a_-|t}$
  - Οι λύσεις αποσβένουν με το χρόνο χωρίς ταλάντωση
    - Η δύναμη της αντίστασης (1/Q) είναι πολύ ισχυρή
      Το σύστημα δεν μπορεί να ταλαντωθεί
      - Ταλαντωτής με μεγάλη απόσβεση
- Q > ½ ➡ α περιέχει πραγματικό και μιγαδικό μέρος
  - Οι λύσεις της εξ. κίνησης θα είναι: $q = A\underbrace{e^{-\omega t/(2Q)}}_{\text{πραγματικό}}\underbrace{e^{i\omega\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\,t}}_{\text{μιγαδικό – ταλαντώνει}}$
  - Το πραγματικό μέρος αποτελεί ένα γενικό παράγοντα απόσβεσης
  - Το μιγαδικό μέρος αναπαριστά ταλάντωση που συμβαίνει επιπλέον της εκθετικής απόσβεσης
  - Η ταλάντωση έχει συχνότητα: $\Omega = \omega\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}} \Rightarrow \Omega < \omega$

Φθίνουσες ταλαντώσεις

$$a = a_{\pm} = \frac{i\omega}{2Q} \pm \sqrt{\omega^2\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)}$$

- Q > ½ ➡ ταλαντωτής με μικρή απόσβεση

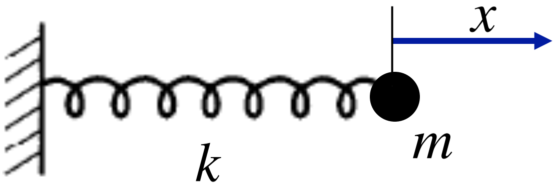


- Q = ½ ➡ εκφυλισμένη κατάσταση $a = a_+ = a_-$
  - Οι λύσεις της εξ. κίνησης θα είναι: $q = Ae^{-\omega t} + Bte^{-\omega t}$
  - Ταλαντωτής με κριτική απόσβεση
  - Ιδανική περίπτωση αποσβένουσας ταλάντωσης

- Τα συστήματα των ταλαντωτών με απόσβεση δεν διατηρούν ενέργεια

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

- Θεωρήστε το σύστημα ελατήριου με μια μάζα m στο άκρο του



$$F = -kx = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{συχνότητα ταλάντωσης}$$

- Εφαρμόζουμε μια εξωτερική δύναμη, $mF(t)$, στο σύστημα
  - Ποια θα είναι η μορφή της Lagrangian που περιγράφει το σύστημα?
  - Οδηγούσα δύναμη ➡ οδηγόν δυναμικό $V = -mF(t)x$
  - Η Lagrangian του συστήματος θα είναι: $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + mF(t)x$
  - ✓ Το απλούστερο παράδειγμα χρονοεξαρτημένης Lagrangian
    - ✓ Η Hamiltonian – επομένως η ενέργεια δεν διατηρείται
- Η εξ. κίνησης του συστήματος θα είναι:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx - mF(t) = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = F(t)$$

- Η εξ. κίνησης για γενικό σύστημα αρμονικού ταλαντωτή

  υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης είναι: $\ddot{q} + \omega^2 q = F(t)$

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις – λύσεις εξ. κίνησης

- Βρήκαμε ότι η εξ. κίνησης είναι: $\ddot{q}+\omega^2 q = F(t)$
  - Μη ομογενής διαφορική εξίσωση
- Η λύση είναι το άθροισμα της ομογενούς γραμμικής Δ.Ε. (θέτοντας F=0) και μια ειδική λύση της μη ομογενούς Δ.Ε. $q = q_{ομογ.} + q_{ειδ.}$
  - Στην περίπτωσή μας: $\ddot{q}_{ομογ.} + \omega^2 q_{ομογ.} = 0$
  - Οποιαδήποτε λύση της μη ομογενούς Δ.Ε. $\ddot{q}_{ειδ.} + \omega^2 q_{ειδ.} = F(t)$
- Εύρεση της ειδικής λύσης της μη ομογενούς Δ.Ε.
  - Μαντεύουμε την λύση
  - Χρήση συναρτήσεων Green
- Η συνάρτηση Green, $G(t,t')$, είναι συνάρτηση δυο παραμέτρων t και t' η οποία λύνει την μη ομογενή Δ.Ε. για μια πηγή που είναι συνάρτηση δ για t=t'

  $\ddot{G}+\omega^2 G = \delta(t-t')$ η παραγώγιση ως προς t και όχι t'

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις – λύσεις εξ. κίνησης

- Συνάρτηση Green για την ειδική λύση: $\ddot{G}+\omega^2 G=\delta(t-t')$
- Φυσική σημασία της συνάρτησης Green, $G(t,t')$
  - Περιγράφει την απόκριση του συστήματος σε ένα χτύπημα μοναδιαίας ώθησης που προσδόθηκε την χρονική στιγμή t’
- Η λύση για την Δ.Ε. της συνάρτησης Green:
  - Η $G(t,t')$ αποτελεί λύση της ομογενούς Δ.Ε. παντού εκτός από $t=t'$

$$G(t,t')=\begin{cases} A_1\sin\left(\omega\left(t-\varphi_1\right)\right) & t<t' \\ A_2\sin\left(\omega\left(t-\varphi_2\right)\right) & t>t' \end{cases}$$

  - Η συνάρτηση δ της οδηγούσας δύναμης, μηδενίζεται όταν $t\neq t'$

- Θέλουμε ωστόσο να μελετήσουμε την απόκριση του ταλαντωτή από την στιγμή που εφαρμόζουμε το χτύπημα
  - Επομένως $A_1=0$

$$G(t,t')=\begin{cases} 0 & t<t' \\ A_2\sin\left(\omega\left(t-\varphi_2\right)\right) & t>t' \end{cases}$$

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις – λύσεις εξ. κίνησης

- Λύση της εξίσωσης τηε συνάρτησης: $\ddot{G}+\omega^2 G=\delta(t-t')$
- Απαιτούμε:

(1) $G(t,t')$ να είναι συνεχής για $t=t'$ ➡ $\varphi_2=t'$

το τμήμα της συνάρτησης Green για t>t' θα είναι 0 για t=t'

(2) $\ddot{G}=\delta$ για $t=t'$ (λύση της Δ.Ε.)

δηλαδή η $\dot{G}$ αυξάνει ασυνεχώς από το 0 στο 1 για t=t'

$$G(t,t')=\begin{cases} 0 & t<t' \\ A\sin(\omega(t-t')) & t>t' \end{cases}$$

$$\dot{G}(t,t')=\begin{cases} 0 & t<t' \\ A\omega\cos(\omega(t-t')) & t>t' \end{cases} = \begin{cases} 0 & t_- \to t' \quad (t_-<t') \\ A\omega & t_+ \to t' \quad (t_+>t') \end{cases}$$

Ζητάμε η συνάρτηση αυτή να «πηδά» κατά 1 ώστε η παράγωγός της να είναι δ-συνάρτηση ➡ $A=\dfrac{1}{\omega}$

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις – λύσεις εξ. κίνησης

- Λύση της εξίσωσης τηε συνάρτησης: $\ddot{G}+\omega^2 G=\delta(t-t')$
- Καταλήγουμε ότι η συνάρτηση Green που λύνει την εξίσωση:

$$G(t,t')=\begin{cases} 0 & t<t' \\ \dfrac{1}{\omega}\sin(\omega(t-t')) & t>t' \end{cases}$$

- Γιατί τα κάναμε όλα αυτά:
  - Οι συναρτήσεις Green είναι χρήσιμες γιατί λύνει $\ddot{G}+\omega^2 G=\delta(t-t')$
  - Οι Δ.Ε. που εξετάζουμε είναι γραμμικές ➡ γραμμικό συνδυασμό λύσεων
  - Αν έχουμε μια οδηγούσα δύναμη $F(t)$ αρκετά πολύπλοκη τότε η λύση:

$$q(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} dt' F(t') G(t,t')$$

  - Δηλαδή σκεφτόμαστε την οδηγούσα δύναμη σαν ένα άθροισμα δ–συναρτήσεων και ολοκληρώνουμε όλες τις δ–συναρτήσεις για να βρούμε την γενική λύση για την πολύπλοκη οδηγούσα δύναμη $F(t)$

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις – λύσεις εξ. κίνησης

- Ελέγχουμε αν η $q(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} dt' F(t') G(t,t')$ είναι όντως λύση

$$\ddot{q}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} dt' F(t')\left[\delta(t-t')-\omega^2 G(t,t')\right] = F(t)-\omega^2 q$$

- Δηλαδή η q υπακούει στην εξ. κίνησης ενός ταλαντωτή με εξωτερική οδηγούσα δύναμη

- Χρησιμοποιώντας επομένως την συνάρτηση Green, βρίσκουμε την ειδική λύση ενός ταλαντωτή κάτω από εξωτερική δύναμη

$$q_{\varepsilon\iota\delta.}(t)=\int_{-\infty}^{t} dt' F(t')\frac{1}{\omega}\sin\omega(t-t')$$

- Δηλαδή:η απόκριση του ταλαντωτή σε μια οδηγούσα δύναμη $F(t)$, μπορεί να βρεθεί ολοκληρώνοντας ως προς όλους τους προηγούμενους χρόνους, t', (πριν το χρόνο που εξετάζω) της δύναμης επί την συνάρτηση Green, G(t) που περιγράφει την απόκριση του ταλαντωτή στην δύναμη

- Το γεγονός ότι μπορώ να διαιρέσω την δύναμη σε μικρά τμήματα αποτελούμενα από δ-συναρτήσεις οφείλεται στην γραμμική Δ.Ε.

Εξαναγκασμένες αποσβένουσες ταλαντώσεις

- Η διαφορική εξίσωση είναι $\ddot{q}(t)+\omega^2 q+\frac{\omega}{q}\dot{q}=F(t)$
- Η ομογενής λύση είναι π.χ.: $q=Ae^{-\omega t/(2Q)}e^{i\omega\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t}$ αποσβαίνουν χρονικά
- Αν θέλαμε να μελετήσουμε την συμπεριφορά στην σταθερή κατάσταση η λύση δίνεται από την ειδική λύση:

$$q_{\varepsilon\iota\delta.}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}dt' F(t')G(t,t')$$

με την συνάρτηση Green να είναι η λύση της $\ddot{G}+\omega^2 G+\frac{\omega}{Q}\dot{G}=\delta(t-t')$

- Όπως προηγουμένως μελετούμε για t<t’ και t>t’
- Η συνάρτηση Green είναι η λύση της ομογενούς εξίσωσης (t>t’)

$$G=Ae^{-\omega(t-t')/(2Q)}e^{i\omega'(t-t')}+Be^{-\omega(t-t')/(2Q)}e^{-i\omega'(t-t')} \quad \text{όπου} \quad \omega'=\omega\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

- Αρχικές συνθήκες: $G=0$ για $t'<t$
- G συνεχής και $\dot{G}$ ασυνεχής για $t'=t$ «πηδά» από 0 σε 1

Εξαναγκασμένες αποσβένουσες ταλαντώσεις

- Η συνθήκη συνέχειας σημαίνει $A+B=0$
- Η 2η συνθήκη σημαίνει ότι: $\dot{G}=A\left(-\frac{\omega}{2Q}+i\omega'\right)+B\left(-\frac{\omega}{2Q}-i\omega'\right)=1$

$$\Rightarrow i\omega'(\mathrm{A}-\mathrm{B})=1$$

- Λύνοντας το σύστημα έχουμε: $A=-\frac{i}{2\omega'}$ και $B=\frac{i}{2\omega'}$
- Επομένως η συνάρτηση Green θα είναι:

$$G(t,t')=\begin{cases} 0 & t<t' \\ \frac{1}{\omega'}e^{-\omega(t-t')/2Q}\sin\left(\omega'(t-t')\right) & t>t' \end{cases}$$