

Προέλευση των Κανόνων Feynman

Χρυσοί κανόνες

Αρχικός Fermi: $\Gamma = \frac{dP}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{kS}|^2 \rho(E_S)$

Διάσπαση σωματιδίου: $\Gamma = \frac{1}{S} \frac{1}{2\hbar m_1} \times I$

Σκέδαση: $\sigma = \frac{\Gamma}{\Phi} = \frac{1}{S} \frac{\hbar^2}{4\sqrt{(\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \times I$

Ολοκλήρωμα:

$$I = \int |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4(\underline{p}_{initial} - \underline{p}_{final}) \times \prod_{final} 2\pi \delta(\underline{p}_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(E_j) \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4}$$

$$I = \int |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4(\underline{p}_{initial} - \underline{p}_{final}) \times \prod_{final} \frac{1}{\sqrt{\vec{p}_j^2 + m_j^2 c^2}} \frac{d^3 \vec{p}_j}{(2\pi)^3}$$

Διάσπαση σωματιδίου σε 2 σώματα στο σύστημα CM

Για σωματίδιο το οποίο διασπάται σε σωματίδια 2 και 3 έχουμε:

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{S} \frac{1}{8\pi\hbar m_1^2 c} p_F \left| M(p_F) \right|^2$$

Όπου

$$p_F = c \sqrt{\left(\frac{m_1^2 - m_2^2 - m_3^2}{2m_1} \right)^2 - m_2^2} = c \frac{\sqrt{m_1^4 + m_2^4 + m_3^4 - 2m_1^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_3^2 - 2m_2^2 m_3^2}}{2m_1}$$

Σκέδαση $2 \rightarrow 2$ σώματα στο σύστημα CM

Για σωματίδια 1 και 2 με αρχικό μέτρο ορμής p_I στο σύστημα αναφοράς του CM, σκεδάζονται για να παράγουν σωματίδια 3 και 4 με ορμή μέτρου p_F :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{S} \left(\frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{1}{(E_1 + E_2)^2} \frac{p_F}{p_I} \left| M(\vec{p}_F) \right|^2$$

Η τιμή της p_I καθορίζεται από τις συνθήκες της δέσμης.

Η τιμή της p_F είναι η ίδια αν οι μάζες των τελικών σωματιδίων είναι ίδιες με αυτές των αρχικών σωματιδίων, αλλά διαφορετική αν οι μάζες των τελικών προϊόντων είναι διαφορετικές από αυτές των αρχικών προϊόντων.

Η εξάρτηση από την γωνία είναι κρυμμένη μέσα στον υπολογισμό του πινακοστοιχείου $M(\vec{p}_F)$

Διαστασιακή Ανάλυση

Οι διαστάσεις του $|M|^2$ μπορεί να βρεθεί με διαστασιακή ανάλυση σε αναλογία με τον φασικό χώρο. Αυτό αρκετές φορές μας βοηθά να κάνουμε εκτιμήσεις τάξης μεγέθους για το M .

Ωστόσο χρειάζεται προσοχή εξαιτίας των δ-συναρτήσεων που δεν είναι αδιάστατες

Θεωρήστε έστω ότι:
$$\int f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

Είναι φανερό ότι η δ-συνάρτηση θα πρέπει να έχει διαστάσεις $1/x$ για να ισχύει

Έστω τώρα ότι:
$$\int f(x) \delta(g(x)) dx = f(x) / (g'(x)) \Big|_{g(x)=0}$$

Για να ισχύει το προηγούμενο θα πρέπει η δ-συνάρτηση να έχει διαστάσεις $1/g$

➤ Οι διαστάσεις της δ-συνάρτησης Dirac είναι επομένως οι διαστάσεις του 1/όρισμά της

Διαστασιακή Ανάλυση

$$\Gamma = \frac{1}{S} \frac{1}{2\hbar m_1} \int |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4(\underline{p}_1 - \underline{p}_2 - \underline{p}_3 - \dots - \underline{p}_n) \times \prod_{j=2}^n 2\pi \delta(\underline{p}_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(E_j) \frac{d^4 \underline{p}_j (E^2/c^2)}{(2\pi)^4}$$

Ο ρυθμός διάσπασης, Γ , έχει διαστάσεις $1/T$, οι διαστάσεις του \hbar είναι $p \times L$ ενώ η συνάρτηση $\delta^4(\underline{p})$ δίνει p^{-4} και ο όρος $\delta^4(\underline{p}_j^2 - m_j^2 c^2) d^4 \underline{p}_j$ δίνει $p^{-2} p^4 = p^2$ για κάθε σωματίδιο της τελικής κατάστασης.

Επομένως για K σωματίδια στην τελική κατάσταση θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &\propto \frac{1}{\hbar} \frac{1}{m} |M|^2 p^{-4} p^{2k} \Rightarrow \frac{1}{T} \propto \frac{1}{pL} \frac{1}{m} |M|^2 p^{2k-4} \\ \Rightarrow |M|^2 &\propto p \left(m \frac{L}{T} \right) p^{4-2k} \Rightarrow |M|^2 \propto p(mv) p^{4-2k} \Rightarrow |M|^2 \propto p^{6-2k} \end{aligned}$$

Για διάσπαση σε 2 σωματίδια: $|M|^2 \propto p^{6-4} = p^2 \Rightarrow M \propto p$

Για διάσπαση σε 3 σωματίδια: $|M|^2 \propto p^{6-6} = p^0 \Rightarrow M \propto p^0$

Διαστασιακή Ανάλυση

Οι διαστάσεις για σκέδασης σε τελική κατάσταση k -σωματιδίων είναι:

$$L^2 \propto \frac{\hbar^2}{p^2} |M|^2 p^{-4} p^{2k} \propto \frac{p^2 L^2}{p^2} |M|^2 p^{2k-4} \Rightarrow |M|^2 \propto p^{4-2k}$$

Για διασπάσεις είχαμε βρει ότι: $|M|^2 \propto p^{6-2k}$

Μπορούμε να θέσουμε ένα κανόνα και για τις δυο περιπτώσεις, αν θεωρήσουμε ότι n είναι ο αριθμός των σωματιδίων της τελικής κατάστασης + τα σωματίδια της αρχικής

Για τις διασπάσεις θα έχουμε: $k = n - 1$ και επομένως: $|M|^2 \propto p^{6-2(n-1)} = p^{8-2n}$

Για τις σκεδάσεις θα έχουμε: $k = n - 2$ και επομένως: $|M|^2 \propto p^{4-2(n-2)} = p^{8-2n}$

➤ Άρα τόσο για διάσπαση όσο και για σκέδαση ισχύει: $|M| \propto p^{4-n} = p^4 / p^n$

Υπολογισμός πινακοστοιχείων

Οι υπολογισμοί των πινακοστοιχείων στην πραγματικότητα είναι περισσότερο πολύπλοκοι κυρίως για δυο λόγους:

- Τα λεπτόνια (ηλεκτρόνια, μίονια, ταυ και αντίστοιχα νετρίνο) υπακούουν επακριβώς στην εξίσωση Dirac. Αλλά το σπιν τους κάνει τους υπολογισμούς ιδιαίτερα επίπονους
- Υπάρχουν πολλά σωματίδια με μηδενικό σπιν, όπως τα πιόνια, όπου δεν υπάρχουν προβλήματα στους υπολογισμούς των πινακοστοιχείων εξαιτίας του σπιν, αλλά δεν είναι στοιχειώδη σωματίδια και επομένως οι αλληλεπιδράσεις γίνονται πολύπλοκες και οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις γίνονται πολύ ισχυρές ώστε η θεωρία των διαταραχών να είναι χρήσιμη για τους υπολογισμούς
- Ιστορικά, όταν ο φορμαλισμός ήταν καινούργιος, λίγοι επιστήμονες μπορούσαν να εκτελέσουν τους υπολογισμούς. Ο διαχωρισμός μεταξύ των όρων του φασικού χώρου και των πινακοστοιχείων δεν ήταν ξεκάθαρος και η διατήρηση του αναλλοίωτου κάτω από Lorentz μετασχηματισμούς δεν ήταν ιδιαίτερα προφανές και εύκολο
 - ✧ Το γεγονός ότι υπάρχουν πολλοί παράμετροι ελευθερίας για διάφορες προσεγγίσεις οδηγούν αρκετές φορές σε αδιέξοδα υπολογισμών
- Η συνεισφορά του Feynman ήταν το γεγονός ότι μπόρεσε να διακρίνει ότι για τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις, το ανάπτυγμα της θεωρίας των διαταραχών οδηγούσε σε όρους που μπορούσαν να χαρτογραφηθούν σε διαγράμματα τα οποία με την σειρά τους μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για θέσπιση κανόνων για την γραφή παραγαγόντων στον υπολογισμό των πινακοστοιχείων

Κλασική σκέδαση φορτισμένου σωματιδίου

Υπολογίζουμε αρχικά το EM πεδίο το οποίο παράγεται από ένα σωματίδιο.

Κατόπιν υπολογίζουμε το αποτέλεσμα αυτού του πεδίου στη κίνηση ενός άλλου σωματιδίου

Ο 3^{ος} νόμος του Newton εγγυάται ότι η αλλαγή στην ορμή του σωματιδίου που δημιουργεί το EM πεδίο είναι ίση και αντίθετη με την αλλαγή στην ορμή του σωματιδίου που επιρεάζεται από το EM πεδίο

Επομένως θα μπορούσαμε να χωρίσουμε την αλληλεπίδραση σε αρκετά μικρότερα τμήματα και να ολοκληρώσουμε.

Το σημαντικό σημείο ωστόσο είναι ότι υπάρχουν 2 στάδια σε κάθε βήμα:

παραγωγή πεδίου και δράση πεδίου

➤ Τα σωματίδια δεν αλληλεπιδρούν απευθείας μεταξύ τους, αλλά μέσω του EM πεδίου

Είδαμε ότι στην χρονοεξάρτητη θεωρία διαταραχών, το πλάτος για μια διαταραχή V η οποία προκαλεί μεταβάσεις σε μια τελική κατάσταση f ξεκινώντας από μια αρχική κατάσταση i και η οποία περνά από κάποια ενδιάμεση κατάσταση j περιγράφεται από την:

$$T_{fi} = \langle f|V|i \rangle + \sum_{i \neq j} \frac{\langle f|V|j \rangle \langle j|V|i \rangle}{E_i - E_j} + \dots$$

Ο 1^{ος} όρος εκφράζει τις απευθείας μεταβάσεις, ενώ ο δεύτερος είναι το άθροισμα ως προς εμμεσες μεταβάσεις μέσω μιας ενδιάμεσης κατάστασης j .

Για σκέδαση από σταθερό δυναμικό V (Rutherford σκέδαση) ο πρώτος όρος κυριαρχεί. Ο 2^{ος} όρος αντιπροσωπεύει προσπίπτοντα σωματίδια να σκεδάζονται στο δυναμικό και τα τελικά σωματίδια να σκεδάζονται και πάλι στο δυναμικό

Προέλευση του διαδότη Feynman

Για σκέδαση δυο πραγματικών ηλεκτρονίων μεταξύ τους, δεν υπάρχει σταθερό δυναμικό (ακόμα και στο αρχικό σύστημα ηρεμίας ενός εκ των δυο ηλεκτρονίων, το ηλεκτρόνιο αυτό καταλήγει να κινείται).

Τα δυο ηλεκτρόνια δεν αλληλεπιδρούν απευθείας μεταξύ τους αλλά μέσω του EM πεδίου

Σαν αποτέλεσμα, ο πρώτος όρος του αναπτύγματος της σειράς των διαταραχών δεν υπάρχει και δεν μπορεί να εφαρμοστεί για την σκέδαση των δυο ηλεκτρονίων. Υπάρχουν όμως όπως έχουμε δει οι υπόλοιποι όροι:

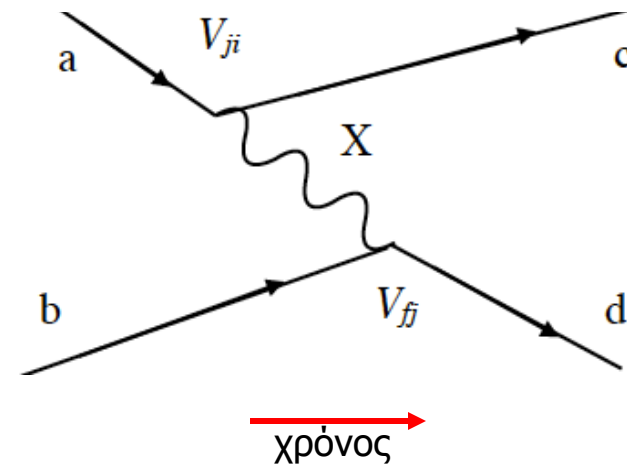
$$T_{fi} = \sum_{i \neq j} \frac{\langle f|V|j \rangle \langle j|V|i \rangle}{E_i - E_j} + \dots$$

Η σύμβαση που ακολουθείται είναι ότι το εισερχόμενο σωματίδιο a, μετατρέπεται σε εξερχόμενο σωματίδιο c, εκπέμποντας ένα φωτόνιο το οποίο μεταφέρει την διαφορά στην ορμή των δυο σωματιδίων (a και c).

Το εισερχόμενο σωματίδιο b, απορροφά το φωτόνιο αυτό με αποτέλεσμα να αλλάξει η ορμή του και να μετραπεί σε εξερχόμενο σωματίδιο d.

Η ενδιάμεση κατάσταση j περιέχει τα σωματίδια c, X και b.

Το πλάτος είναι:
$$T_{fi}^{ab} = \frac{V_{fi} V_{ji}}{E_i - E_j} = \frac{\langle d|V|X+b \rangle \langle c+X|V|a \rangle}{(E_a + E_b) - (E_c + E_X + E_b)}$$

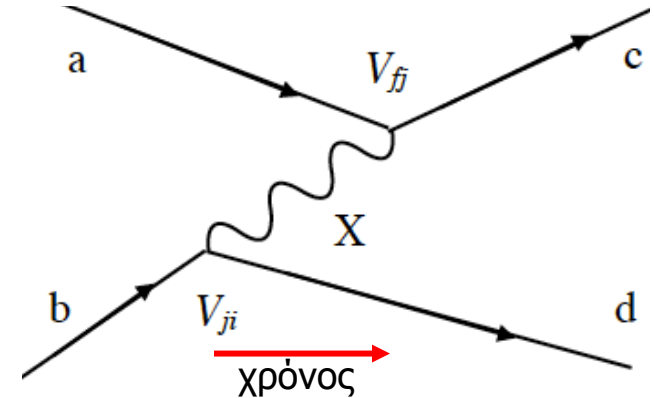


Προέλευση του διαδότη Feynman

Η διεργασία ωστόσο μπορεί να γίνει με το σωματίδιο b να εκπέμπει το φωτόνιο X και το σωματίδιο a να το απορροφά. Στην περίπτωση αυτή η ενδιάμεση κατάσταση περιέχει τα σωματίδια a , X και d :

Το πλάτος είναι:

$$T_{fi}^{ba} = \frac{V_{fi} V_{ji}}{E_i - E_j} = \frac{\langle c | V | X + a \rangle \langle d + X | V | b \rangle}{(E_a + E_b) - (E_a + E_X + E_d)}$$



Χρειάζεται να αθροίσουμε ως προς τις δυνατές ενδιάμεσες καταστάσεις:

Η απλούστερη περίπτωση είναι αν ο παράγοντας του πλάτους σε κάθε κορυφή είναι μια σταθερά g , ανεξάρτητη από οτιδήποτε. Στη περίπτωση αυτή θα πάρουμε:

$$T_{fi} = \frac{g^2}{(E_a + E_b) - (E_c + E_X + E_b)} + \frac{g^2}{(E_a + E_b) - (E_a + E_X + E_d)}$$

Απαλοΐφουμε το E_b στον 1^ο όρο και χρησιμοποιούμε διατήρηση ενέργειας: $E_a + E_b = E_c + E_d$ για να απαλοΐφουμε το E_d στον 2^ο όρο, οπότε καταλήγουμε:

$$T_{fi} = \frac{g^2}{E_a - E_c - E_X} + \frac{g^2}{E_c - E_a - E_X} \Rightarrow T_{fi} = \frac{g^2}{E_a - E_c - E_X} - \frac{g^2}{E_a - E_c + E_X}$$

Προέλευση του διαδότη Feynman

Από τον κοινό παρονομαστή και απλοποιώντας θα έχουμε:

$$T_{fi} = \frac{g^2(E_a - E_c + E_X) - g^2(E_a - E_c - E_X)}{(E_a - E_c - E_X)(E_a - E_c + E_X)} \Rightarrow T_{fi} = \frac{2g^2 E_X}{(E_a - E_c)^2 - E_X^2}$$

Αλλά: $E_X^2 = \vec{P}_X^2 + M_X^2 = (\vec{p}_a - \vec{p}_c)^2 + M_X^2$

Αντικατάσταση θα δώσει: $T_{fi} = \frac{2g^2 E_X}{(E_a - E_c)^2 - (\vec{p}_a - \vec{p}_c)^2 - M_X^2} \Rightarrow T_{fi} = \frac{2g^2 E_X}{(\underline{p}_a - \underline{p}_c)^2 - M_X^2}$

Έχουμε επομένως κάτι που μοιάζει με πλάτος Feynman

Ο παρονομαστής έρχεται από 2^{ης} τάξης θεωρία διαταραχών, η οποία θα έπρεπε να είναι γραμμική ως προς την ενέργεια αλλά πρέπει να προσθέσουμε τις δυο διαφορετικές χρονικές ταξινομήσεις (τα δυο διαγράμματα) τα οποία έχουν αντίθετο πρόσημο, και σχεδόν αλληλοαναιρούνται αφήνοντας κάτι το οποίο είναι 2^{ης} τάξης ως προς το χρόνο.

Ο παράγοντας E_X στον αριθμητή απαλοίφεται από την κανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης στην περίπτωση της σχετικότητας

Προέλευση των Κανόνων Feynman

Απλό Μοντέλο ABC

Απλό θεωρητικό μοντέλο για εξάσκηση

Για καλύτερη κατανόηση και εξάσκηση θα χρησιμοποιήσουμε ένα απλό μοντέλο

Τα σωματίδια όλα έχουν σπιν 0, και επομένως οι κυματοσυναρτήσεις των ελεύθερων σωματιδίων είναι απλά επίπεδα κύματα μιας συνιστώσας.

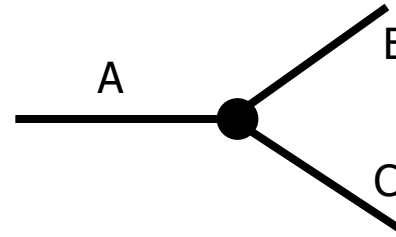
Δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ σωματιδίου και αντισωματιδίου και επομένως δεν υπάρχουν κατευθύνσεις στο χρόνο στα διαγράμματα Feynman

Υπάρχουν 3 τύποι σωματιδίου: A, B και C

Οι κανόνες για να κάνουμε τα διαγράμματα και να γράψουμε τα πινακοστοιχεία του πίνακα μετάβασης είναι αρκετά απλοί

Το Μοντέλο ABC

Υπάρχει μια και μόνο κορυφή του τύπου:



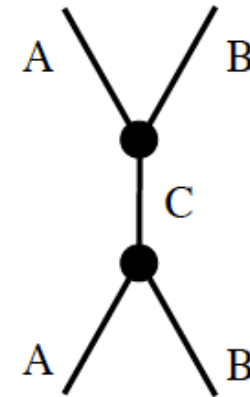
Για κάθε κορυφή, υπάρχει ένας παράγοντας $-ig$ για την σταθερά σύζευξης στο πλάτος M

Για κάθε εσωτερική γραμμή, με τετραδιάνυσμα της ορμής q_j το πλάτος έχει παράγοντα διαδότη ίσο με:

$$\frac{i}{q_j^2 - m_j^2 c^2}$$

Το πλάτος M είναι i φορές το γινόμενο:

$$M = i(-ig) \frac{i}{q_C^2 - m_C^2 c^2} (-ig)$$



Το Μοντέλο ABC

Γνωρίζουμε τις ορμές των εξωτερικών γραμμών

Αν δεν υπάρχουν εσωτερικοί βρόχοι, τότε οι ορμές των εσωτερικών γραμμών προσδιορίζονται πλήρως από τις εξωτερικές γραμμές

Αν όμως υπάρχουν βρόχοι, τότε η ορμή του σωματιδίου που κινείται στον βρόχο μπορεί να είναι οτιδήποτε. Ο κανόνας είναι να ολοκληρώσουμε ως προς όλες τις δυνατές εσωτερικές ορμές σύμφωνα με τα παρακάτω:

Γράφουμε έναν παράγοντα: $(2\pi)^4 \delta^4(\underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \underline{k}_3)$ για κάθε κορυφή

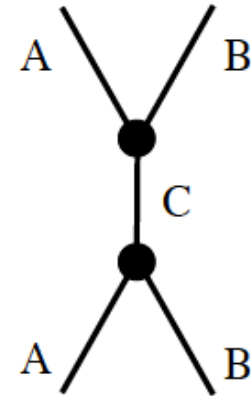
Ολοκληρώνουμε με: $\frac{d^4 q_j}{(2\pi)^4}$ για κάθε εσωτερική ορμή

Αγνοούμε τον εναπομείνοντα παράγοντα: $(2\pi)^4 \delta^4(\underline{p}_1 + \underline{p}_2 + \dots - \underline{p}_n)$

Μη εσωτερικό ολοκλήρωμα για διαγράμματα δένδρων

Σύμφωνα με τους κανόνες, εισάγουμε μια δ-συνάρτηση για κάθε κορυφή και ολοκληρώνουμε ως προς όλες τις ορμές των εσωτερικών γραμμών αγνοώντας την εναπομείνουσα δ-συνάρτηση

Για το διπλανό διάγραμμα, η εσωτερική γραμμή είναι η C. Βάζουμε 2 δ-συναρτήσεις, εκτελούμε ένα ολοκλήρωμα απαλοίφοντας μια δ-συνάρτηση, και αγνοούμε την άλλη δ-συνάρτηση.



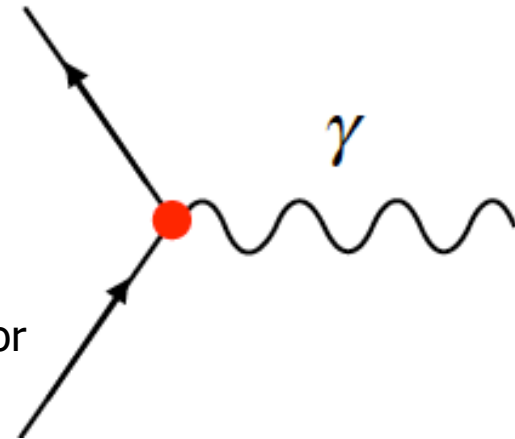
Αυτό είναι ισοδύναμο με το να θέσουμε απλά $C = A + B$ αγνοώντας τις δ-συναρτήσεις και τα ολοκληρώματα

➤ Συγκρίνοντας με την **κβαντική ηλεκτροδυναμική (QED)**:

Ο παράγοντας της κορυφής είναι: $g = \sqrt{1/137.035}$

και υπάρχει επίσης ένας 4x4 γ-πίνακας

Οι γραμμές των φορτισμένων φερμιονίων έχουν κατευθύνσεις για να διαχωρίζουμε ύλη από αντι-ύλη και παράγοντες 4-στοιχείων spinor από την εξίσωση του Dirac



Η εσωτερική γραμμή του διαδότη φωτονίου, είναι ίδια όπως και στο μοντέλο ABC αλλά η μάζα του διαδότη είναι 0. Η εσωτερική γραμμή διαδότη φερμιονίου είναι αρκετά πιο πολύπλοκη στην QED και αλλάζει ανάλογα με $1/q$ αντί $1/q^2$

Το Μοντέλο $A + A \rightarrow B + B$

Θα χρησιμοποιήσουμε το χρόνο να αλλάζει στην οριζόντια διεύθυνση, την ορμή εσωτερικών γραμμών θα τις συμβολίσουμε με q ενώ αυτές των εξωτερικών γραμμών με p .

Όταν μπορεί να είναι είτε εσωτερική ή εξωτερική θα συμβολίζουμε την ορμή με k .

Το απλούστερο διάγραμμα για σκέδαση: $A + A \rightarrow B + B$

είναι αυτό του διπλανού σχήματος:

Έχουμε ένα παράγοντα σταθεράς σύζευξης $-ig$ για κάθε κορυφή

και ένα παράγοντα για τον διαδότη $\frac{i}{q^2 - m_c^2 c^2}$ επί i

Το πλάτος M είναι i φορές το γινόμενο:

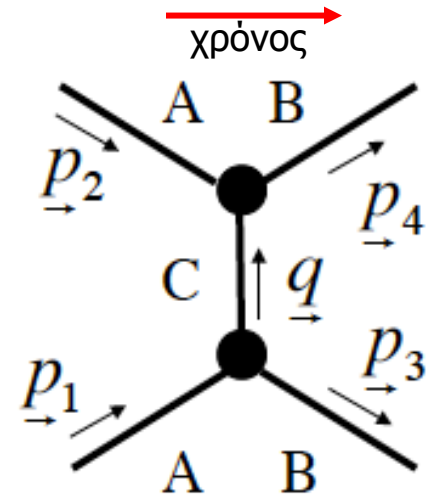
$$M = i(-ig) \frac{i}{q_c^2 - m_c^2 c^2} (-ig) \Rightarrow M = \frac{g^2}{q_c^2 - m_c^2 c^2}$$

Προσθέτοντας δ-συναρτήσεις, την ολοκλήρωση ως προς την εσωτερική ορμή και τελικά αγνοώντας την δ-συνάρτηση, οδηγεί στην σχέση: $\underline{p}_2 + \underline{q} = \underline{p}_4 \Rightarrow \underline{q} = \underline{p}_4 - \underline{p}_2$

Αντικαθιστούμε στην έκφραση για το πλάτος: $M = \frac{g^2}{(\underline{p}_4 - \underline{p}_2)^2 - m_c^2 c^2}$

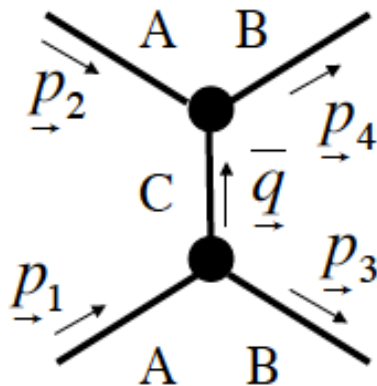
Υψώνουμε στο τετράγωνο και αντικαθιστούμε στον κανόνα σκέδασης δυο σωμάτων

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{|M(\vec{p}_{Final}(\theta))|^2}{S(E_1 + E_2)^2} \frac{p_{Final}}{p_{Initial}}$$



Το Μοντέλο $A + A \rightarrow B + B$

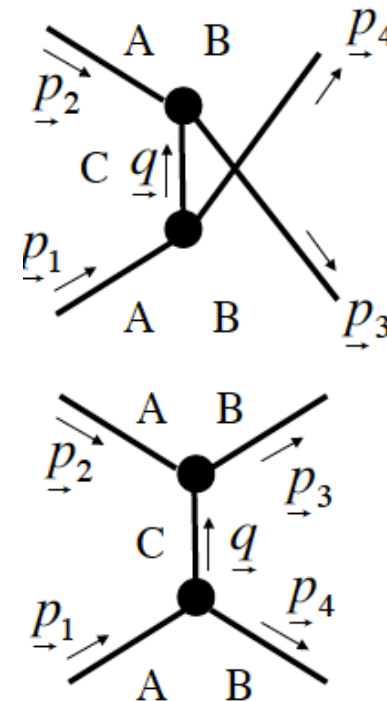
Αλλά, υπάρχουν δυο διαγράμματα με τον ίδιο αριθμό κορυφών
Το 2^ο διάγραμμα έχει τις εξωτερικές του γραμμές εναλλαγμένες



Δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε κάτι το ιδιαίτερο, αφού
το 2^ο διάγραμμα είναι το ίδιο με το πρώτο αλλά θα πρέπει
να αλλάξουμε μόνο

$$\underline{p}_4 \Leftrightarrow \underline{p}_3$$

Προσθέτουμε την συνεισφορά του στο M



Το Μοντέλο $A + A \rightarrow B + B$

$$M = \frac{g^2}{(\underline{p}_4 - \underline{p}_2)^2 - m_C^2 c^2} + \frac{g^2}{(\underline{p}_3 - \underline{p}_2)^2 - m_C^2 c^2}$$

Θεωρώντας για απλούστευση πράξεων ότι $m_A = m_B = m$

κάνει επίσης τα μέτρα των εισερχόμενων και εξερχόμενων ορμών πανομοιότυπα.

Θεωρούμε τέλος ότι $m_C = 0$

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} (\underline{p}_4 - \underline{p}_2)^2 - m_C^2 c^2 &= (mc)^2 - 2(\underline{p}_4 \cdot \underline{p}_2) + (mc)^2 = 2(mc)^2 - 2(p_4^0 p_2^0 - |\vec{p}|^2 \cos \theta_{42}) \\ &= 2(mc)^2 - 2\left(\sqrt{(mc)^2 + |\vec{p}|^2} \sqrt{(mc)^2 + |\vec{p}|^2} - |\vec{p}|^2 \cos \theta_{42}\right) \\ &= 2(mc)^2 - 2\left((mc)^2 + |\vec{p}|^2 - |\vec{p}|^2 \cos \theta_{42}\right) = -2|\vec{p}|^2 (1 - \cos \theta_{42}) \end{aligned}$$

Ο άλλος όρος θα δώσει: $(\underline{p}_3 - \underline{p}_2)^2 - m_C^2 c^2 = -2|\vec{p}|^2 (1 - \cos \theta_{32})$

Αν μετρήσουμε τις γωνίες από την \vec{p}_1 διεύθυνση και παρατηρήσουμε ότι $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$

$$(\underline{p}_3 - \underline{p}_2)^2 - m_C^2 c^2 = -2|\vec{p}|^2 (1 - \cos \theta_{32}) = -2|\vec{p}|^2 (1 + \cos \theta_{31}) = -2|\vec{p}|^2 (1 + \cos \theta_3)$$

Αν προσέξουμε ακόμα ότι $\vec{p}_4 = -\vec{p}_3$ έχουμε ακόμα μια αλλαγή πρόσημου, οπότε:

$$(\underline{p}_4 - \underline{p}_2)^2 - m_C^2 c^2 = -2|\vec{p}|^2 (1 - \cos \theta_3)$$

Το Μοντέλο $A + A \rightarrow B + B$

$$M = \frac{g^2}{-2|\vec{p}|^2(1 - \cos\theta)} + \frac{g^2}{-2|\vec{p}|^2(1 + \cos\theta)}$$

$$\Rightarrow M = \frac{g^2[(1 + \cos\theta) + (1 - \cos\theta)]}{-2|\vec{p}|^2(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)} \Rightarrow M = \frac{g^2 2}{-2|\vec{p}|^2(1 - \cos^2\theta)} \Rightarrow M = -\frac{g^2}{|\vec{p}|^2 \sin^2\theta}$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και αντικαθιστούμε στον κανόνα σκέδασης 2 – σωμάτων οπότε:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{|M(\vec{p}_{Final}(\theta))|^2}{S(E_1 + E_2)^2} \frac{p_{Final}}{p_{Initial}} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{S(E_1 + E_2)^2} \frac{p_{Final}}{p_{Initial}} \left(-\frac{g^2}{|\vec{p}|^2 \sin^2\theta}\right)^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{S} \frac{p_{Final}}{p_{Initial}} \left(\frac{\hbar c g^2}{8\pi 2E |\vec{p}|^2 \sin^2\theta}\right)^2 \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar c g^2}{16\pi E |\vec{p}|^2 \sin^2\theta}\right)^2$$

Ο παράγοντας S είναι 2 γιατί είναι 2 πανομοιότυπα σωματίδια στην τελική κατάσταση.

Με ίσες μάζες $p_{Final} = p_{Initial} = |\vec{p}|$

Ολική ενεργός διατομή για $A + A \rightarrow B + B$

Για να βρούμε την ολική ενεργό διατομή θα πρέπει να ολοκληρώσουμε την διαφορική ενεργό διατομή σκέδασης ως προς την στερεά γωνία $d\Omega$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar c g^2}{16\pi E |\vec{p}|^2 \sin^2 \theta} \right)^2$$

Θα πάρουμε: $\sigma_T = \int d\varphi \sin \theta d\theta \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar c g^2}{16\pi E |\vec{p}|^2} \right)^2 \int d\varphi \frac{1}{\sin^2 \theta} \sin \theta d\theta$

$$\Rightarrow \sigma_T = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar c g^2}{16\pi E |\vec{p}|^2} \right)^2 \int d\varphi \frac{1}{\sin^3 \theta} d\theta$$

Το ολοκλήρωμα: $\int d\varphi \frac{1}{\sin^3 \theta} d\theta = 2\pi \int \frac{d\theta}{\sin^3 \theta}$ και για μικρές γωνίες: $\sin \theta \rightarrow \theta$

οπότε θα έχουμε: $2\pi \int \frac{d\theta}{\theta^3}$ το οποίο για $\theta \rightarrow 0$ απειρίζεται

Αυτή είναι και η σωστή απάντηση αφού υποθέσαμε ότι $m_C=0$ και επομένως η δύναμη η οποία μεταφέρεται από το σωματίδιο C θα έχει άπειρη εμβέλεια.

Ανεξάρτητα δηλαδή από το πόσο μεγάλη είναι η παράμετρος πρόσκρουσης, υπάρχει πάντοτε, μικρή έστω, πιθανότητα να υπάρξει αλλαγή στην διεύθυνση του σωματιδίου και επομένως η ενεργός διατομή είναι άπειρη.

Ολική ενεργός διατομή για $A + A \rightarrow B + B$

Αν δεν είχαμε πάρει την περίπτωση $m_C=0$, τότε το πλάτος μετάβασης θα ήταν:

$$\left(\underline{p}_4 - \underline{p}_2\right)^2 - m_C^2 c^2 = -2|\vec{p}|^2 (1 + \cos \theta) - m_C^2 c^2$$

$$\left(\underline{p}_3 - \underline{p}_2\right)^2 - m_C^2 c^2 = -2|\vec{p}|^2 (1 - \cos \theta) - m_C^2 c^2$$

Οπότε:
$$M = -\frac{g^2}{2|\vec{p}|^2 (1 - \cos \theta) + m_C^2 c^2} - \frac{g^2}{2|\vec{p}|^2 (1 + \cos \theta) + m_C^2 c^2}$$

Ο 1^{ος} όρος, ο οποίος απειρίζονταν για $\theta=0$ προηγουμένως, τώρα είναι πεπερασμένος.

Ο 2^{ος} όρος, απειρίζονταν για $\theta=\pi$ προηγουμένως, τώρα είναι και αυτός πεπερασμένος.

Και οι δυο παρονομαστές είναι πεπερασμένοι στο εύρος τιμών: $0 \leq \theta \leq \pi$

Ολική ενεργός διατομή για $A + A \rightarrow B + B$

Στο όριο που $m_c c \gg |\vec{p}|$ έχουμε $M = -\frac{2g^2}{m_c^2 c^2}$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι ανεξάρτητο τόσο από το μέτρο της ορμής όσο και της γωνίας.

Η διαφορική ενεργός διατομή γίνεται:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{S(E_1 + E_2)^2} \frac{p_{Final}}{p_{initial}} \left(-\frac{2g^2}{m_c^2 c^2}\right)^2 \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar c g^2}{8\pi E m_c^2 c^2}\right)^2$$

Παρατηρούμε ότι ελαττώνεται με την αύξηση της ενέργειας E , εξαιτίας του παράγοντα ροής αλλά είναι ομοιόμορφη.

Η ολική ενεργός διατομή είναι πεπαρασμένη και ελαττώνεται σύμφωνα με $1/E_{CM}^2$

$$\sigma_T = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar c g^2}{8\pi E m_c^2 c^2}\right)^2 \int d\varphi \sin\theta d\theta = \frac{4\pi}{2} \left(\frac{\hbar c g^2}{8\pi E m_c^2 c^2}\right)^2$$

Ολική ενεργός διατομή για $A + A \rightarrow B + B$

Η πιο γενική περίπτωση είναι: $M = -\frac{g^2}{2|\vec{p}|^2(1-\cos\theta) + m_c^2 c^2} - \frac{g^2}{2|\vec{p}|^2(1+\cos\theta) + m_c^2 c^2}$

$$\Rightarrow M = -\frac{g^2}{2|\vec{p}|^2} \left[\frac{1}{(1-\cos\theta) + \frac{m_c^2 c^2}{|\vec{p}|^2}} + \frac{1}{(1+\cos\theta) + \frac{m_c^2 c^2}{|\vec{p}|^2}} \right]$$

και θέτουμε ότι: $r = \frac{m_c^2 c^2}{|\vec{p}|^2}$

$$\Rightarrow M = -\frac{g^2}{2|\vec{p}|^2} \left[\frac{1}{(1-\cos\theta) + r} + \frac{1}{(1+\cos\theta) + r} \right]$$

$$\Rightarrow M = -\frac{g^2}{2|\vec{p}|^2} \frac{[(1+\cos\theta) + r] + [(1-\cos\theta) + r]}{[(1-\cos\theta) + r][(1+\cos\theta) + r]} \Rightarrow M = -\frac{g^2}{2|\vec{p}|^2} \frac{2(1+r)}{(1-\cos^2\theta) + 2r + r^2}$$

$$\Rightarrow M = -\frac{g^2}{|\vec{p}|^2} \frac{(1+r)}{\sin^2\theta + 2r + r^2}$$

που είναι πάντοτε πεπερασμένο

Ολική ενεργός διατομή για $A + A \rightarrow B + B$

Η διαφορική ενεργός διατομή θα είναι:
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar c g^2}{8\pi E |\vec{p}|^2} \frac{1+r}{(\sin\theta + r)^2} \right)^2$$

Η ολική ενεργός διατομή θα είναι:
$$\sigma_T = \frac{2\pi}{2} \left(\frac{\hbar c g^2 (1+r)}{16\pi E |\vec{p}|^2} \right)^2 \int \frac{\sin\theta d\theta}{(\sin^2\theta + 2r + r^2)^2}$$

Το τελευταίο αυτό ολοκλήρωμα μπορεί να λυθεί είτε αριθμητικά ή με το Mathematica

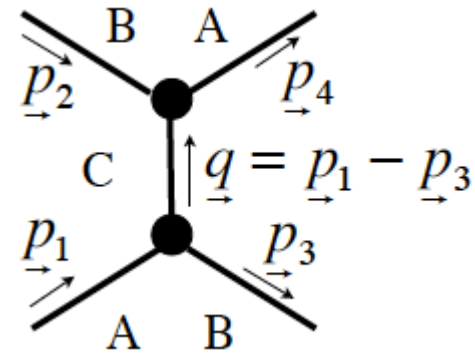
$$\int \frac{\sin\theta d\theta}{(\sin^2\theta + 2r + r^2)^2} = \frac{1}{4(1+r)^3} \left[\frac{4(1+r)}{r(2+r)} + 2 \log \frac{2+r}{r} \right]$$

Σκέδαση $A + B \rightarrow A + B$

Υπάρχουν δυο διαγράμματα για την σκέδαση: $A + B \rightarrow A + B$

Το διάγραμμα στο οποίο **υπάρχει ανταλλαγή** ενός σωματιδίου C

$$M = i(-ig) \frac{i}{(\underline{p}_1 - \underline{p}_3)^2 - m_C^2 c^2} (-ig) = \frac{g^2}{(\underline{p}_1 - \underline{p}_3)^2 - m_C^2 c^2}$$

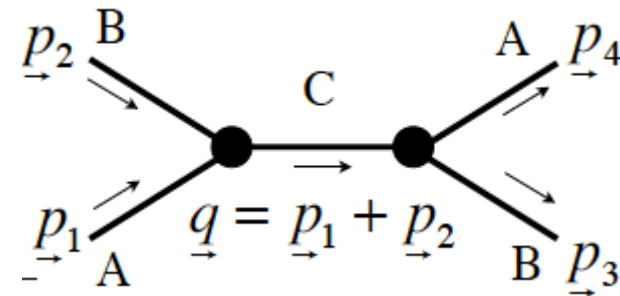


Από την στιγμή που τα A και B δεν είναι πανομοιότυπα, δεν υπάρχει η δυνατότητα εναλλαγής μεταξύ των εξωτερικών γραμμών $\underline{p}_4 \Leftrightarrow \underline{p}_3$

χρόνος →

Υπάρχει ωστόσο το διάγραμμα της **εξαύλωσης**

$$M = \frac{g^2}{(\underline{p}_1 + \underline{p}_3)^2 - m_C^2 c^2}$$

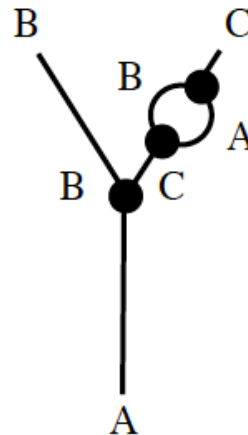
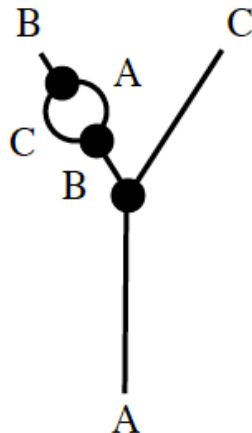
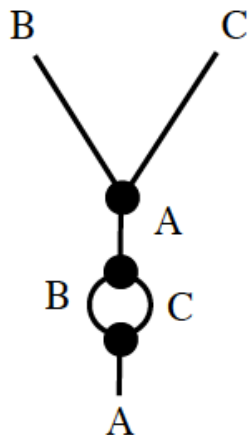
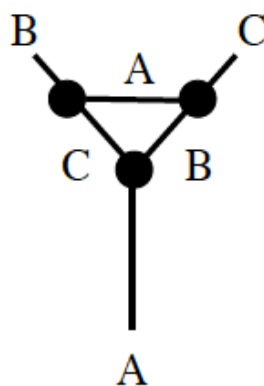
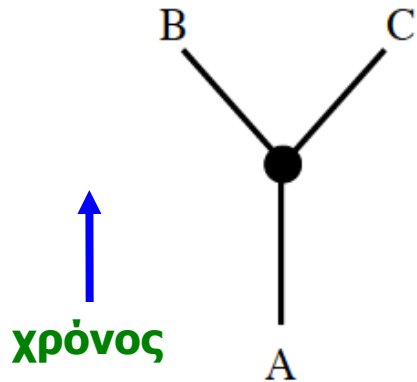


Αθροίζοντας τις δυο συνεισφορές θα έχουμε:

$$M = \frac{g^2}{(\underline{p}_1 - \underline{p}_3)^2 - m_C^2 c^2} + \frac{g^2}{(\underline{p}_1 + \underline{p}_2)^2 - m_C^2 c^2}$$

Διαγράμματα δένδρου και βρόχου για $A \rightarrow BC$

Μέχρι τώρα είδαμε διαγράμματα χαμηλής τάξης, ωστόσο μπορούμε να προσθέσουμε είτε βρόχους ή επιπλέον εσωτερικές ή εξωτερικές γραμμές:



➤ Το διάγραμμα δένδρου δεν έχει εσωτερικές γραμμές αλλά μόνο μια κορυφή.

□ Το πλάτος είναι: $M = i(-ig) = g$

➤ Όλα τα διαγράμματα βρόχου έχουν δυο επιπλέον κορυφές και άρα επιπλέον παράγοντες $(-ig)^2 = -g^2$

□ Αν $g^2 \ll 1$ τα διαγράμματα αυτά έχουν μικρότερα πλάτη από ότι τα διαγράμματα δένδρου

➤ Θα πρέπει να προσθέσουμε τα πλάτη από όλα τα διαγράμματα πριν το τετράγωνο του M , και άρα αν $g \ll 1$ δεν θα αλλάξουν την αρχική τιμή του M^2 κατά πολύ

➤ Όλα τα διαγράμματα βρόχου έχουν 3 εσωτερικές γραμμές και άρα έχουν 3 παράγοντες διαδότη και θα πρέπει να κάνουμε ένα ολοκλήρωμα

Ολοκλήρωμα διαγράμματος βρόχου

Για το διάγραμμα αυτό θα έχουμε:

$$(-ig) \frac{i}{\underline{q}_C^2 - m_C^2 c^2} (-ig) \frac{i}{\underline{q}_B^2 - m_B^2 c^2} (-ig) \frac{i}{\underline{q}_A^2 - m_A^2 c^2}$$

Αλλά: $\underline{p}_B = \underline{q}_C + \underline{q}_A \Rightarrow \underline{q}_C = \underline{p}_B - \underline{q}_A$

καί ανάλογα: $\underline{p}_C = \underline{q}_B - \underline{q}_A \Rightarrow \underline{q}_B = \underline{p}_C + \underline{q}_A$

Αντικαθιστώντας στους παρονομαστές παραπάνω θα πάρουμε:

$$\frac{g}{(\underline{p}_C + \underline{q}_A)^2 - m_B^2 c^2} \frac{g}{(\underline{p}_B - \underline{q}_A)^2 - m_C^2 c^2} \frac{g}{\underline{q}_A^2 - m_A^2 c^2}$$

Και το ολοκλήρωμα γίνεται:
$$\int \frac{d^4 q_A}{(2\pi)^4} \frac{g}{(\underline{p}_C + \underline{q}_A)^2 - m_B^2 c^2} \frac{g}{(\underline{p}_B - \underline{q}_A)^2 - m_C^2 c^2} \frac{g}{\underline{q}_A^2 - m_A^2 c^2}$$

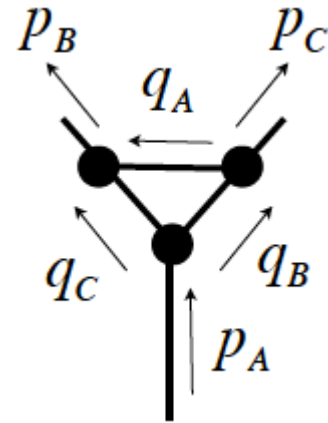
Για μεγάλες τιμές του q_A , ο παρονομαστής δίνει ουσιαστικά ένα παράγοντα q_A^{-6}

και μπορούμε να γράψουμε το διαφορικό με την μορφή: $d^4 q_A = q_A^3 dq_A d\Omega_4$

όπου $d\Omega_4$ είναι μια αδιάστατη ποσότητα κάτι σαν 4-διάστατη στερεά γωνία («[περιστροφή Wick](#)»)

Επομένως για μεγάλες τιμές του q_A το ολοκλήρωμα γίνεται:
$$\int \frac{q_A^3 dq_A d\Omega_4}{q_A^6} = \int \frac{dq_A d\Omega_4}{q_A^3}$$

το οποίο είναι πεπερασμένο καθώς το πάνω όριο στο q_A πηγαίνει στο άπειρο



Ολοκλήρωμα διαγράμματος βρόχου

Θα πρέπει ωστόσο να ανησυχούμε για εμφάνιση μηδενικών τιμών στον παρονομαστή:

Από τον αρχικό παρονομαστή είχαμε:
$$\left(-ig\right)\frac{i}{\underline{q}_C^2 - m_C^2 c^2} \left(-ig\right)\frac{i}{\underline{q}_B^2 - m_B^2 c^2} \left(-ig\right)\frac{i}{\underline{q}_A^2 - m_A^2 c^2}$$

Αν η τετρα-ορμή μιας εσωτερικής γραμμής δώσει: $\underline{q}^2 = m^2 c^2$

ο παρονομαστής μηδενίζεται και το ολοκλήρωμα απειρίζεται

Κοιτώντας ξανά τα βήματα που οδήγησαν στην εισαγωγή των κανόνων Feynman ο παράγοντας που σχετίζεται με τον διαδότη στην πραγματικότητα έχει την μορφή:

$$\frac{i}{\underline{q}^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} \quad \text{με } \varepsilon \rightarrow 0$$

Η μορφή αυτή κάνει το ολοκλήρωμα πεπερασμένο και ανεξάρτητα του ε