ΦΥΣ. 331

2η Εργασία **Επιστροφή: Παρασκευή 06/10/23**

1. Το J/ψ μεσόνιο αποτελεί δέσμια κατάσταση ενός $c\bar{c}$ quark – antiquark ζεύγους. Η μάζα του μεσονίου είναι 3.096 MeV/c^2. Το μεσόνιο αυτό μπορεί να παραχθεί είτε σε σκεδάσεις πρωτονίου-πρωτονίου ή σε σκεδάσεις ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου.
(α) Μια δέσμη πρωτονίου συγκρούεται με ένα στόχο πρωτονίων σε ηρεμία. Υπολογίστε την ενέργεια της προσπίπτουσας δέσμης πρωτονίων για την αντίδραση $pp \to pp\,J/\psi$
(β) Στην περίπτωση των ηλεκτρονίων, το J/ψ ανακαλύφθηκε σε ένα επιταχυντή όπου τα σωματίδια των δυο δεσμών είχαν ίσες και αντίθετες ορμές. Υπολογίστε την απαραίτητη ενέργεια για την σκέδαση $e^+e^- \to J/\psi$.
Ο χρόνος ζωής του σωματιδίου J/ψ είναι τ~10^{-20}sec.

Η αντίδραση $pp \to pp\,J/\psi$ αποτελεί παράδειγμα παραγωγής σωματιδίων στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, εφόσον έχουμε σύγκρουση δέσμης με ακίνητο στόχο.

Ας θεωρήσουμε ότι το πρωτόνιο της δέσμης περιγράφεται από το τετραδιάνυσμα $(E,\vec{p})$ όπου E η ενέργεια των πρωτονίων της δέσμης και $\vec{p}$ η ορμή τους.

Το τετραδιάνυσμα των πρωτονίων της δέσμης θα είναι: $(E_{\sigma\tau},\vec{p}_{\sigma\tau}) \to (m_p, 0)$

Η ενέργεια επομένως του συστήματος θα είναι: $S=(E+E_{\sigma})^2-(\vec{p}+\cancel{\vec{p}_{\sigma\tau}})^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow S = E^2+m_p^2+2Em_p-\vec{p}^{\,2} = E^2+m_p^2+2Em_p-(E^2-m_p^2) \Rightarrow \boxed{S=2m_p^2+2Em_p}$$

Για να βρούμε την ενέργεια S χρειάζεται να εξετάσουμε την ενέργεια των τελικών προϊόντων της σκέδασης. Η ελάχιστη ενέργεια αντιστοιχεί στην παραγωγή των σωματιδίων σε ηρεμία:

$$\boxed{S=(m_p+m_p+m_{J/\psi})^2=4m_p^2+m_{J/\psi}^2+4m_pm_{J/\psi}} = \left((E_1+E_2+E_{J/\psi}),(\vec{p}_p+\vec{p}_p+\vec{p}_{J/\psi})\right)$$

Από διατήρηση της ενέργειας, θα έχουμε:

$$\cancel{2}m_p^2+2Em_p=\overset{2}{\cancel{4}}m_p^2+m_{J/\psi}^2+4m_pm_{J/\psi} \Rightarrow E=\frac{2m_p(m_p+2m_{J/\psi})+m_{J/\psi}^2}{2m_p}=\frac{22.961}{2\cdot 0.938} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E=12.239\ \mathrm{GeV}}$$

Για την περίπτωση $e^+e^- \to J/\psi$ έχουμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα παραγωγής σωματιδίου στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας.

Ας θεωρήσουμε ότι το τετραδιάνυσμα του e^+ της δέσμης 1 είναι $(E_1, \vec{p}_1)$. Το τετραδιάνυσμα του e^- της δέσμης 2 θα είναι: $(E_2, -\vec{p}_2)$ αφού κινείται σε αντίθετη κατεύθυνση. Οπότε θα έχουμε: $S = ((E_1+E_2), (\vec{p}_1 - \vec{p}_2))$

Αλλά $|p_1| = |p_2|$ οπότε: $S = (E_1+E_2)^2 - (\vec{p}_1 - \vec{p}_1)^2 = (2E_1)^2$

Και πάλι θεωρούμε παραγωγή σωματιδίων σε ηρεμία, $p_{J/\psi} = 0$, το οποίο ισχύει για το κέντρο μάζας, οπότε: $S = (2E)^2 = m_{J/\psi}^2 \Rightarrow E = m_{J/\psi}/2 \Rightarrow \boxed{E = \frac{3.096}{2} = 1.548\,\text{GeV}}$

2. Υπολογίστε το μέγεθος ενός υποθετικού ατόμου υδρογόνου του οποίου το ηλεκτρόνιο και πρωτόνιο συγκρατούνται με δύναμη βαρύτητας.

Η δύναμη Coulomb που δρα ανάμεσα στο ηλεκτρόνιο και το πρωτόνιο στο άτομο του υδρογόνου είναι: $F_{em} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$ (1)

Η αντίστοιχη δύναμη λόγω βαρύτητας θα είναι: $F_g = G\frac{m_e m_p}{r^2}$ (2)

Από (1) κ (2) θα έχουμε επομένως: $\frac{F_g}{F_{em}} = \frac{G m_e m_p}{e^2/4\pi\varepsilon_0} = 4\pi\varepsilon_0 G \frac{m_e m_p}{e^2}$

Αντικατάσταση τιμών για τις μάζες και σταθερές δίνει:

$$\frac{F_g}{F_{em}} = \frac{m_e m_p G_N}{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}\hbar c} = \frac{0.511\,\text{GeV}\cdot 0.938\,\text{GeV}\cdot 10^{-3}\cdot 6.7\cdot 10^{-39}\,\hbar c\,\text{GeV}^{-2}}{\frac{1}{137}\hbar c} \Rightarrow \frac{F_g}{F_{em}} = 439.86\cdot 10^{-42} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{F_g}{F_{e\text{-}m}} = 4.4\cdot 10^{-40}} \quad (A)$$

Η ακτίνα ενός ατόμου που δημιουργήθηκε σαν δέσμια κατάσταση λόγω της βαρυτικής δύναμης θα είναι:

$m_e v r = \hbar$ (κβαντική συνθήκη στροφορμής)

$m_e v^2/r = F_g$ (σταθερή κυκλική τροχιά Bohr)

$\Rightarrow m_e v = \hbar/r \Rightarrow \frac{\hbar^2}{m_e r^3} = F_g \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{r^3 = \frac{\hbar^2}{F_g m_e}} \Rightarrow \boxed{r = \left(\frac{\hbar^2}{F_g m_e}\right)^{1/3}} \quad (B)$$

Συγκρίνοντας την ακτίνα του ατόμου του υδρογόνου όπου $a_{EM} = 0.5\,10^{-10}\,m$ με αυτή του ατόμου που συγκρατείται το ηλεκτρόνιο λόγω της βαρυτικής έλξης είναι:

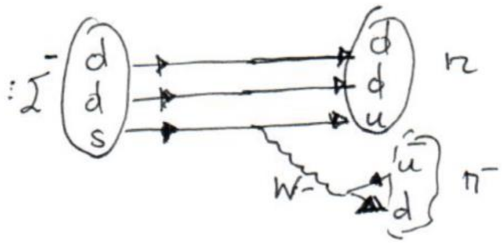
$$\frac{r}{a_{EM}} = \frac{\left(\hbar^2/F_g m_e\right)^{1/3}}{0.5\cdot 10^{-10}} \overset{(B)}{=} \frac{\left(\hbar^2/F_g m_e\right)^{1/3}}{\left(\hbar^2/F_{em} m_e\right)} \Rightarrow \frac{r}{a_{EM}} = \left(\frac{F_{em}}{F_g}\right)^{1/3} \overset{(A)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{a_{EM}} = \left(\frac{1}{4.4}\cdot 10^{40}\right)^{1/3} = \left(\frac{10}{4.4}\right)^{1/3} 10^{13} \Rightarrow \boxed{\frac{r}{a_{EM}} = 1.3\cdot 10^{13}}$$

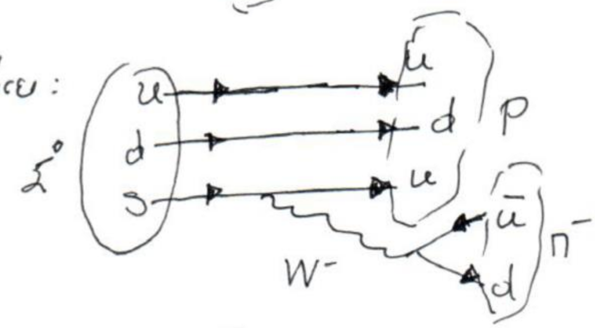
Δηλαδή η ακτίνα θα είναι 13 τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη του ατόμου του H

3. Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα Feynman των διασπάσεων $\Sigma^- \to n\pi^-$, $\Sigma^0 \to p\pi^-$, $\Sigma^0 \to \Lambda^0\gamma$. Να εξηγήσετε τον λόγο για τον οποίο στο βιβλίο των σωματιδίων (ParticleDataGroup) που μπορείτε να βρείτε στην ηλεκτρονική διεύθυνση *http://pdg.lbl.gov* η διάσπαση $\Sigma^0 \to \Lambda^0\gamma$ έχει τιμή 100% ενώ δεν εμφανίζεται τιμή για την διάσπαση $\Sigma^0 \to p\pi^-$. Μπορείτε να βρείτε την πληροφορία αυτή κάτω από την κατάλληλη κατηγορία των κατηγοριών που εμφανίζονται στο *Particle Listings.* Να σχεδιάσετε το Feynman διάγραμμα για τη διάσπαση $\Sigma^+ \to n\pi^+$.

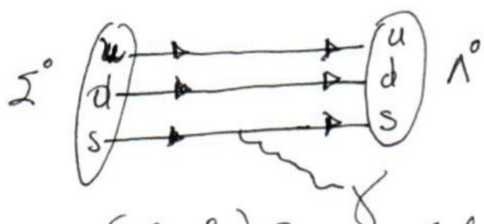
Η διάσπαση $\Sigma^- \to n\pi^-$:



Η διάσπαση $\Sigma^0 \to p\pi^-$ μπορεί να προχωρήσει:



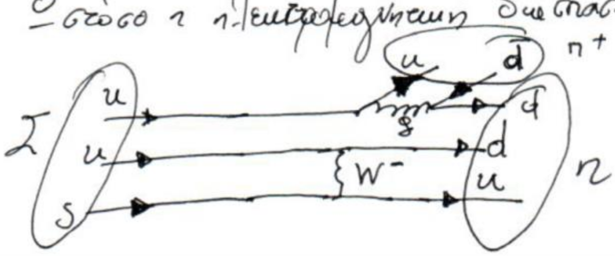
Η διάσπαση $\Sigma^0 \to \Lambda^0\gamma$:



Η τελευταία αυτή διάσπαση ($\Sigma^0 \to \Lambda^0\gamma$) δεν παραβιάζει παραδοξότητα και το Σ^0 διασπάται μέσω ηλεκτρομαγνητικής δύναμης.

Η διάσπαση $\Sigma^0 \to p\pi$ παραβιάζει παραξενιά S και επομένως δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω ηλεκτρομαγνητικών ή ισχυρών αλληλεπιδράσεων παρά μόνο μέσω ασθενών αλληλεπιδράσεων.

Ωστόσο η ηλεκτρομαγνητική διάσπαση $\Sigma^0 \to \Lambda^0\gamma$ κυριαρχεί.



$\Sigma^+ \to n\pi^+$

4. Να δείξετε γιατί το διανυσματικό μεσόνιο φ (1020) δεν μπορεί να διασπαστεί σε δύο π^0.

Το διανυσματικό μεσόνιο ϕ έχει spin 1, ενώ το π^0 έχει spin 0.

Διατήρηση της ορμής σε μια υποθετική διάσπαση του $\phi \to \pi^0\pi^0$ θα σήμαινε ότι η τροχιακή στροφορμή του συστήματος των δύο π^0 θα ήταν $L=1$, δηλαδή ένα P-κύμα

Ωστόσο για τα π^0 είναι μποζόνια και επομένως θα πρέπει να υπακούουν στη στατιστική Bose-Einstein. Η κυματοσυνάρτηση δύο πανομοιότυπων μποζονίων θα πρέπει να είναι συμμετρική με αντιμετάθεση των δύο μποζονίων. Αλλά κυματοσυνάρτηση με $l=1$ δεν είναι συμμετρική. και επομένως η διάσπαση σε P-κύμα είναι απαγορευμένη.

5. Για τη διάσπαση $\Lambda^0 \rightarrow p\pi^-$ όπου το Λ^0 διασπάται σε ηρεμία, να υπολογίσετε την ορμή και ενέργεια των προϊόντων διάσπασης.

Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας του Λ^0 οι ορμές των δύο προϊόντων της διάσπασης του είναι ίσες και αντίθετες. Επομένως $|\vec{p}_\pi| = |\vec{p}_p|$

Αλλά η ενέργεια του κέντρου μάζας θα είναι: $s = \left(E_\pi + E_p, \vec{p}_p + \vec{p}_\pi\right)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow s = E_\pi^2 + E_p^2 + 2E_\pi E_p - |\vec{p}_p|^2 - |\vec{p}_\pi|^2 - 2\vec{p}_\pi \cdot \vec{p}_p = m_\pi^2 + m_p^2 + 2\left(E_p E_\pi - \vec{p}_\pi \cdot \vec{p}_p\right)$$

$\vec{p}_\pi \cdot (-\vec{p}_\pi)$

$$\Rightarrow s = m_p^2 + m_\pi^2 + 2\left(E_\pi E_p + p_\pi^2\right) \Rightarrow p_\pi^2 = \frac{s - m_\pi^2 - m_p^2 - 2E_\pi E_p}{2}$$

Αλλά η $\sqrt{s}$ αποτελεί την ολική ενέργεια του συστήματος, οπότε $\boxed{E_p = \sqrt{s} - E_\pi}$

Αντικατάσταση θα δώσει: $p_\pi^2 = \dfrac{s - m_\pi^2 - m_p^2 - 2E_\pi\left(\sqrt{s} - E_\pi\right)}{2}$

Από την τελευταία σχέση έχουμε:

$$p_\pi^2 = \frac{s - m_\pi^2 - m_p^2 - 2E_\pi\sqrt{s} + 2E_\pi^2}{2} = \frac{s - m_\pi^2 - m_p^2 - 2E_\pi\sqrt{s}}{2} + E_\pi^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_\pi\sqrt{s} = \frac{s - m_\pi^2 - m_p^2 + 2m_\pi^2}{2} \Rightarrow \boxed{E_\pi = \frac{s - m_p^2 + m_\pi^2}{2\sqrt{s}}}$$

Επομένως: $E_p = \sqrt{s} - E_\pi = \dfrac{2s - s + m_p^2 - m_\pi^2}{2\sqrt{s}} \Rightarrow \boxed{E_p = \dfrac{s - m_\pi^2 + m_p^2}{2\sqrt{s}}}$

Αριθμητική αντικατάσταση δίνει:

$\sqrt{s} = m_{\Lambda^0} = 1115$ MeV, $m_\pi = 140$ MeV, $m_p = 938$ MeV και $E_\pi = 170$ MeV, $E_p = 943$ MeV

Η ορμή του πιονίου θα είναι: $p_\pi = \sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2} = 97$ MeV και $p_p = \sqrt{943^2 - 938^2} = 97$ MeV

6. Αν υπήρχαν 4 χρώματα αντί για 3, τότε τα βαρυόνια θα αποτελούνταν από 4 quarks αντί για 3 quark. (α) Εξηγήστε ποιά θα μπορούσαν να είναι τότε οι δυνατές τιμές spin για τα βαρυόνια (για κατάσταση με L=0). (β) Χρησιμοποιώντας μόνο up και/ή down quarks εξηγήστε ποιες θα ήταν οι πιθανές τιμές του isospin των βαρυονίων αυτών. (γ) Για τέτοιου είδους βαρυόνια με το μεγαλύτερο spin τα οποία θα αποτελούνται από up και down quarks ποια θα ήταν το ηλεκτρικό φορτίο και η τρίτη συνιστώσα του isospin.

(α) Αν όλα τα quarks έχουν το spin τους ευθυγραμμισμένα τότε το ολικό spin θα είναι $J_{ολ} = 2$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούν να υπάρξουν και καταστάσεις με spin +1 και 0.

Η περίπτωση με $J=2$ θα έχει $M=-2,-1,0,1,2$, ενώ για την περίπτωση καταστάσεων με $J=1$ θα έχουμε $M=-1,0,1$ ενώ οι καταστάσεις με $J=0$ θα έχουν μόνο $M=0$.

(β) Θεωρώντας ότι τα βαρυόνια αποτελούνται μόνο από u και d quarks θα έχουμε:

i) uuuu βαρυόνια των οποίων το isospin θα είναι $I_3=+2$ $Q=+8/3$

ii) uuud βαρυόνια των οποίων το isospin θα είναι $I_3=+1$ $Q=+5/3$

iii) uudd βαρυόνια των οποίων το isospin θα είναι $I_3=0$ $Q=+2/3$

iv) uddd βαρυόνια των οποίων το isospin θα είναι $I_3=-1$ $Q=-\frac{1}{3}$

v) dddd βαρυόνια των οποίων το isospin θα είναι: $I_3=-2$ $Q=-4/3$

Η i) και v) κατηγορία θα αντιστοιχούσαν σε $I=2$ ενώ οι υπόλοιπες θα εμφανίζονταν με $I=0$ ή 1.

7. Ένα ηλεκτρόνιο υψηλής ενέργειας συγκρούεται με ένα ατομικό ηλεκτρόνιο το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι σε ηρεμία. Ποιό είναι το κατώφλι ενέργειας (η ελάχιστη κινητική ενέργεια της προσπίπτουσας δέσμης ηλεκτρονίων) ώστε να δημιουργηθεί ένα ζεύγος ηλεκτρονίου – ποζιτρονίου;

Για την παραγωγή ζεύγους e^+e^- υπεύθυνη είναι η διεργασία:

$$e^- + e^- \longrightarrow e^- + e^- + e^- + e^+$$

Χρειάζεται να υπολογίσουμε την ελάχιστη ενέργεια που θα πρέπει να έχει η προσπίπτουσα δέσμη των ηλεκτρονίων. Για ελάχιστη ενέργεια, σημαίνει ότι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα τελικά προϊόντα της σκέδασης εξέρχονται με μηδενική ορμή. Επομένως η ενέργειά τους είναι μόνο η ενέργεια της μάζας ηρεμίας τους.

Επομένως στην τελική κατάσταση των 4 λεπτονίων, η ολική ενέργεια θα είναι:

$$P_f^2 = \sum_{i=1}^{4} (E_f^i)^2 - \sum_{i=1}^{4} (\vec{p}_f^{\,i})^2 = (4m_e)^2 = 16m_e^2$$

Η αρχική κατάσταση έχει συνολική ενέργεια:

$$P_i^2 = \sum_{i=1}^{2} (E_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{2} p_i^i\right)^2 = 2m_e^2 + 2m_e E = 2m_e(m_e + E)$$

Από διατήρηση της ενέργειας, θα έχουμε: $16m_e^2 = 2m_e(m_e + E) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 8m_e^2 = m_e^2 + E \cdot m_e \Rightarrow E = \frac{7m_e^2}{\cancel{m_e}} \Rightarrow \boxed{E = 7m_e}$$

8. Ένα σωματίδιο με μάζα ηρεμίας $500 MeV/c^2$ έχει ορμή 5 GeV/c ως προς το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Το σωματίδιο διασπάται σε δύο άλλα σωματίδια μάζας 150 MeV/c^2 το καθένα. Σε μία τέτοια διάσπαση, παρατηρήθηκε ότι ως προς το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, τα σωματίδια εκπέμπονται ακριβώς στη διεύθυνση και φορά κίνησης του αρχικού σωματιδίου. Να βρεθεί η ορμή των σωματιδίων προϊόντων της διάσπασης ως προς το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.

Το διασπαζόμενο σωματίδιο έχει μάζα ηρεμίας $500 MeV/c^2$. Στο σύστημα αναφοράς του KM το βρίσκεται σε ηρεμία και έχει ενέργεια $500 MeV/c^2$. Τα προϊόντα διάσπασης θα έχουν την ίδια ενέργεια ίση με $500/2 = 250\ MeV/c^2$.

Από την σχέση $E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2 \Rightarrow |\vec{p}|^2 = \sqrt{E^2 - m^2} = \sqrt{(250)^2 - (150)^2} \Rightarrow \underline{|\vec{p}| = 200 MeV}$

Υπολογίζουμε την ώθηση Lorentz από την ορμή του σωματιδίου στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου: $P = \beta\gamma M \Rightarrow \beta\gamma = \frac{P}{M} = \frac{5000}{500} \Rightarrow \beta\gamma = 10$

Αλλά $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \beta\gamma = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\beta^2} - 1}} = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{\beta^2} - 1} = 100 \Rightarrow \frac{100}{\beta^2} = 101 \Rightarrow \beta^2 = \frac{100}{101} \Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{100}{101}} \Rightarrow \beta = 0.99504$

Τα σωματίδια, προϊόντα της διάσπασης του σωματιδίου 500MeV, κινούνται σε κάθε περίπτωση κατά τη διεύθυνση του αρχικού σωματιδίου. Επομένως τα σωματίδια στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας θα πρέπει να ήταν συγγραμμικά με τη διεύθυνση αυτή και αντίθετης ορμής. Έτσι αν θεωρήσουμε την τετραορμή τους θα έχουμε στο κέντρο μάζας: $P_1 = (250, \vec{P}_1)$ και $P_2 = (250, -\vec{P})$ οπότε:

$P_1 = (250, 200)$ και $P_2 = (250, -200)$.

Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου $P_1 = \gamma \vec{P}_1^{CM} + \gamma\beta E_1^{CM} = \frac{1}{\sqrt{1-0.99504^2}}(200) + 10 * 250$

$\Rightarrow |\vec{P}_1| = 4510 MeV/c$. Η ενέργεια είναι $E_1^{LAB} = \gamma E_1^{CM} + \beta\gamma |\vec{P}_1|^{CM} = \frac{1}{\sqrt{1-0.99504^2}}(250) + 10 \cdot 200 \Rightarrow$

$|E_1^{LAB} = 4512.5\ MeV/c^2$. Για το δεύτερο σωματίδιο

$E_2^{LAB} = \gamma E_2^{CM} + \beta\gamma |\vec{P}_2|^{CM} = \frac{1}{\sqrt{1-0.99504^2}}(250) - 10.200 \Rightarrow E_2^{LAB} = 512.5\ MeV/c^2$

$|\vec{P}_2| = \gamma \vec{P}_2^{CM} + \gamma\beta E_2^{CM} = \frac{1}{\sqrt{1-0.99504^2}}(-200) + 10 \cdot 250 \Rightarrow |\vec{P}_2| = 490\ MeV/c$

$P^{ολ} = \vec{P}_1^{l.} + \vec{P}_2 = 4510 + 490 \Rightarrow P_{ολ} = 5000\ MeV/c$, $E_{ολ} = 4512.5 + 512.5 = \underline{5025 MeV/c^2}$

9. Ποια είναι η ελάχιστη ορμή μιας δέσμης πρωτονίων που απαιτείται ώστε όταν προσπέσει σε στόχο υγρού υδρογόνου να μπορεί να προκαλέσει τις ακόλουθες δύο διασπάσεις: $pp \rightarrow np\pi^+$ και $pp \rightarrow p\bar{p}pp$. Δίνεται ότι η μάζα ηρεμίας του νετρονίου είναι 939.6 MeV/c^2 και η μάζα του πιονίου, π^+, είναι 139.6 MeV/c^2.

(α) Στο σύστημα κέντρου μάζας η ολική ορμή είναι μηδέν.
Επομένως η ελάχιστη ενέργεια στο κέντρο μάζας θα είναι όταν τα π, p και n παραχθούν σε ηρεμία. Δηλαδή $E_{CM} = m_\pi + m_p + m_n$

Χρησιμοποιώντας τετρα-ορμές:

$$(P_p + P_n + P_\pi)^2 = E_{CM}^2 - \vec{P}_{CM}^2 = (m_\pi + m_p + m_n)^2 - 0^2 = (938.3 + 939.6 + 139.6)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (P_p + P_n + P_\pi)^2 = (2017.5)^2 \qquad (1)$$

Εξετάζοντας το σύστημα στόχου-πρωτονίου έχουμε:

$$(P_p + P_\Sigma)^2 = P_p^2 + P_\Sigma^2 + 2P_p \cdot P_\Sigma = m_p^2 + m_\Sigma^2 + 2(E_p E_\Sigma - \cancel{\vec{P}_p \cdot \vec{P}_\Sigma})^0 = m_p^2 + m_\Sigma^2 + 2E_p E_\Sigma$$

$$\Rightarrow (P_p + P_\Sigma)^2 = m_p^2 + m_\Sigma^2 + 2E_p m_\Sigma$$ αλλά $m_\Sigma = m_p$ για το υδρογόνο.

$$(P_p + P_\Sigma)^2 = m_p^2 + m_p^2 + 2E_p m_p \Rightarrow E_p = \frac{(P_p + P_\Sigma)^2 - 2m_p^2}{2m_p} \qquad (2)$$

Αλλά $(P_p + P_\Sigma)^2 = (P_p + P_n + P_\pi)^2 \overset{(1)}{\Longrightarrow} (P_p + P_\Sigma)^2 = (m_p + m_n + m_\pi)^2$ $\Rightarrow$

$$E_p = \frac{(2017.5)^2 - 2(938.3)^2}{2 \cdot 938.3} = \frac{2309492.5}{2 \cdot 938.3} \Rightarrow \underline{E_p = 1230.7\,MeV}$$

Επομένως $E_p^2 = \vec{P}_p^2 + m_p^2 \Rightarrow P_p^2 = E_p^2 - m_p^2 = 1230.7^2 - (938.3)^2 \Rightarrow \boxed{P_p = 796.3\,MeV/c}$

(β) Για την αντίδραση $pp \rightarrow pp\bar{p}p$, η ελάχιστη ενέργεια κέντρου μάζας είναι όταν τα προϊόντα της αντίδρασης είναι σε ηρεμία στο κέντρο μάζας. Όπως προηγουμένως αυτό αντιστοιχεί σε $E_{CM}^2 = (m_p + m_p + m_{\bar{p}} + m_p)^2 \Rightarrow E_{CM} = 4m_p = 4 \cdot 938.3 = 3753.2\,MeV/c$

Όπως και προηγουμένως η ενέργεια της προσπίπτουσας δέσμης θα είναι:

$$E_p = \frac{(4M_p)^2 - 2m_p^2}{2m_p} = \frac{\cancel{14}^{7} M_p}{\cancel{2}m_p} \Rightarrow \underline{E_p = 7m_p} \quad \text{και} \quad P_p = \sqrt{E^2 - m_p^2} = \sqrt{(7m_p)^2 - m_p^2} = \sqrt{48 m_p^2}$$

$$\Rightarrow P_p = m_p\sqrt{48} = 6.93\,M_p \Rightarrow P_p = 6502.8\,MeV/c$$

10. (α) Αποδείξτε τις σχέσεις που δίνουν την ενέργεια κέντρου μάζας για τις περιπτώσεις ενός επιταχυντή και δέσμης-σταθερού στόχου. Θα πρέπει να λάβετε υπόψιν σας τις μάζες των συγκρουόμενων σωματιδίων.

(β) Δυο σχετικά πρόσφατα πειράματα, το BaBar στο SLAC των ΗΠΑ και το Belle στο KEK της Ιαπωνίας, μελετούσαν B^0-μεσόνια ($m_{B^0} = 5.28\ GeV/c^2$) που παράγονταν σε διασπάσεις $Y(4S)$ μέσω της διαδικασίας $e^+e^- \to Y(4S) \to B^0\overline{B}^0$. Οι δυο επιταχυντές λειτουργούσαν σε ενέργεια κέντρου μάζας $E_{CM} = M_{Y(4S)} = 10.58\ GeV/c^2$. Το κέντρο μάζας είναι προωθημένο ώστε να κάνει τους χρόνους ζωής μετρήσιμους.

(i) Για μια ώθηση $bg = 0.56$, προσδιορίστε τις απαιτούμενες ενέργειες των e^+ και e^- των δυο δεσμών.

(ii) Προσδιορίστε την μέση απόσταση μεταξύ του σημείου παραγωγής του B-μεσονίου και του σημείου διάσπασής του στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Δίνεται ότι ο ιδιόχρονος του B^0-μεσονίου είναι $t = 1.52 ps$.

(iii) Για την διάσπαση $B^0 \to p^+p^-$ προσδιορίστε το εύρος των τιμών των ορμών των δύο πιονίων στο σύστημα του εργαστηρίου.

(α) Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας των δυό σωματιδίων μάζας m_1 και m_2 (θεωρώ σωστό να το κάνετε με τις ίδιες μάζες) και ενέργειες E_1 και E_2, η ενέργεια είναι:

$s = E_{CM}^2 = (P_1 + P_2)^2$ όπου P_1 και P_2 οι τετραορμές των σωματιδίων της δέσμης: $P_1 = (E_1, \vec{p}_1)$ και $P_2 = (E_2, \vec{p}_2)$

$$\Rightarrow s = E_{CM}^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 - \vec{p}_1^{\,2} - \vec{p}_2^{\,2} - 2\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{s = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2} \quad (A)$$

Θεωρούμε ότι τα σωματίδια συγκρούονται μετωπικά οπότε οι διευθύνσεις των ορμών τους είναι αντίθετες. Θα έχουμε από την (A): $\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2 = |p_1||p_2|\overset{-1}{\cancel{\cos\pi}}$

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2\left[1 + \sqrt{\left(1 - \frac{m_1^2}{E_1^2}\right)\left(1 - \frac{m_2^2}{E_2^2}\right)}\right] \qquad |p_1| = \sqrt{E_1^2 - m_1^2}$$

Αν οι μάζες των σωματιδίων είναι μικρές σε σύγκριση με τις ενέργειές τους μπορούμε να αναπτύξουμε

Παίρνουμε: $S = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2\left[1 + \left(1 - \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{E_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{m_2^2}{E_2^2}\right)\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow S = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2\left(2 + \frac{1}{4}\frac{m_1^2}{E_1^2}\frac{m_2^2}{E_2^2} - \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{E_1^2} - \frac{1}{2}\frac{m_2^2}{E_2^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2\left(2 + \frac{1}{4}\frac{m_1^2 m_2^2}{E_1^2E_2^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{m_1^2}{E_1^2} + \frac{m_2^2}{E_2^2}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 4E_1E_2 + m_1^2 + m_2^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2 m_2^2}{E_1E_2} - \frac{m_1^2 E_2}{E_1} - \frac{m_2^2 E_1}{E_2} \quad \Rightarrow \cancel{\frac{m_1^2 m_2^2}{E_1^2E_2^2}} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \boxed{S \simeq 4E_1E_2 + m_1^2\left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right) + m_2^2\left(1 - \frac{E_1}{E_2}\right)}$$

Αν στην τελευταία αυτή σχέση αγνοήσουμε τελείως τις μάζες:

$$S = 4E_1E_2 + m_1^2\left[1 - \frac{E_2}{E_1} + 1 - \frac{E_1}{E_2}\right] = 4E_1E_2 + m^2\left[2 - \frac{E_1^2 + E_2^2}{E_1E_2}\right]$$ ίσες μάζες

Για $m \simeq 0$ σε σχέση με την ενέργειά τους θα έχουμε:

$$S = 4E_1E_2 \Rightarrow E_{cm}^2 = 4E_1E_2 \Rightarrow \boxed{E_{CM} = \sqrt{4E_1E_2}}$$ όπως βρήκαμε στις διαλέξεις.

Για την περίπτωση δέσμης σε σταθερό στόχο, έχουμε:

$$S = E_{CM}^2 = (E_\delta + E_{\sigma\tau})^2 - (\vec{p}_\delta + \vec{p}_{\sigma\tau})^2 = E_\delta^2 + E_{\sigma\tau}^2 + 2E_\delta E_{\sigma\tau} - \vec{p}_\delta^{\,2} - \vec{p}_{\sigma\tau}^{\,2} - 2\vec{p}_\delta \cdot \vec{p}_{\sigma\tau} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = E_{CM}^2 = m_{\sigma\tau}^2 + m_\delta^2 + 2E_\delta E_{\sigma\tau} - 2\vec{p}_\delta \cdot \vec{p}_{\sigma\tau}$$

Από τη στιγμή που ο στόχος είναι ακίνητος, θα έχουμε $E_{\sigma\tau} = m_{\sigma\tau}$ και $\vec{p}_{\sigma\tau} = \emptyset$

Επομένως η προηγούμενη σχέση γίνεται: $S = E_{CM}^2 = m_{\sigma\tau}^2 + m_\delta^2 + 2E_\delta m_{\sigma\tau} \Rightarrow$

$\Rightarrow E_{CM} = \sqrt{2E_\delta m_{\sigma\tau} + m_{\sigma\tau}^2 + m_\delta^2}$ αν θεωρήσουμε ότι $E_\delta \gg m_{\sigma\tau}, m_\delta$ η προηγούμενη σχέση παίρνει την μορφή: $\boxed{E_{CM} = \sqrt{2E_\delta m_{\sigma\tau}}}$

(B)(ii) Αν αγνοήσουμε τις μάζες του ηλεκτρονίου και ποζιτρονίου, σχετικά με τις ενέργειές τους, το κέντρο μάζας θα έχει ένα boost το οποίο βρίσκεται από:

$$\text{(A)} \quad \boxed{\beta = \frac{P_{o\lambda}}{E_{o\lambda}} = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2}}$$

όπου E_1 και E_2 είναι οι ενέργειες του e^- και e^+ στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου

Η ενέργεια του κέντρου μάζας είναι η μάζα του $Y(4S)$ που παράγεται:

Επομένως θα έχουμε: $\boxed{4E_1E_2 = M^2_{Y(4S)}}$ (B)

Από (A) και (B) μπορούμε να γράψουμε: $\boxed{\beta\gamma = \frac{P_{TOT}}{E_{CM}} = \frac{E_1 - E_2}{M_{Y(4S)}}}$ (Γ)

Από την (B) και (Γ) θα έχουμε:

$$E_1 - E_2 = \beta\gamma M_Y \Rightarrow \boxed{E_2 = E_1 - \beta\gamma M_Y} \ (1)$$

αντικαθιστούμε στην (B)

$$4E_1E_2 = M_Y^2 \Rightarrow 4E_1^2 - 4\beta\gamma E_1 M_Y - M_Y^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_1^2 - \beta\gamma E_1 M_Y - \frac{M_Y^2}{4} = 0 \Rightarrow E_1 = \frac{\beta\gamma M_Y \pm \sqrt{\beta^2\gamma^2 M_Y^2 + M_Y^2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{\beta\gamma M_Y \pm M_Y\sqrt{\beta^2\gamma^2 + 1}}{2} \Rightarrow \boxed{E_1 = \frac{M_Y}{2}\left(\beta\gamma + \sqrt{\beta^2\gamma^2 + 1}\right)} \ (\Delta)$$

Αντικατάσταση στην (1) δίνει: $\boxed{E_2 = \frac{M_Y}{2}\left(-\beta\gamma + \sqrt{\beta^2\gamma^2 + 1}\right)}$ (E)

Πιο πάνω απορρίψαμε την περίπτωση της "−" ρίζας για την ενέργεια

Από τις 2 εξισώσεις έχουμε τις ενέργειες των δεσμών e^+ και e^-

$$E_1 = \frac{10.58}{2}\left[0.56 + \sqrt{(0.56)^2 + 1}\right] \Rightarrow \boxed{E_1 = 9.03 \text{ GeV}}$$

$$E_2 = \frac{10.58}{2}\left[-0.56 + \sqrt{(0.56)^2 + 1}\right] \Rightarrow \boxed{E_2 = 3.1 \text{ GeV}}$$

Όπου οι δυο παραπάνω ενέργειες μπορεί να αναφέρονται είτε στο e^+ ή στο e^-. Οι τιμές είναι επιτρεπτές και επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν παράμετρος για βελτιστοποίηση του σχεδιαζόμενου επιταχυντή. Στις περιπτώσεις του SLAC και του KEK, η δέσμη των ηλεκτρονίων ήταν περισσότερο ενεργειακή.

(β)(ii) Η μέση απόσταση που διανύουν τα B^0 πριν διασπαστούν, εξαρτάται από την διεύθυνσή τους στο $\Upsilon(4S)$ σύστημα αναφοράς. Αλλά στο $\Upsilon(4S)$ έχουν ταχύτητα είναι:

$$\gamma = \frac{E_B^{CM}}{m_B} = \frac{M_Y/2}{m_B} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \frac{M_Y}{2m_B} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow$$

$$1-\beta^2 = \frac{4m_B^2}{M_Y^2} \Rightarrow \beta^2 = 1 - \frac{4m_B^2}{M_Y^2} \Rightarrow \beta = \sqrt{1-\frac{4m_B^2}{M_Y^2}} \Rightarrow \beta = \sqrt{1-\frac{4\cdot 5.28^2}{10.58^2}} \Rightarrow \boxed{\beta = 0.06} \quad (2)$$

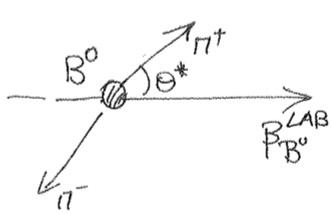
Η τιμή αυτή της ώθησης ωστόσο είναι πολύ μικρή σχετικά με την ώθηση του κέντρου μάζας η οποία είναι περίπου 10 φορές μεγαλύτερη. Επομένως η απόσταση που θα διανύσει κατά μήκος της διεύθυνσης της δέσμης θα είναι:

$$\langle l \rangle = \beta\gamma c\tau_0 \cong 0.56\cdot 3\cdot 10^8 \cdot 1.52\cdot 10^{-12} \Rightarrow \boxed{\langle l \rangle = 255\cdot 10^{-6}\,m = 255\,\mu m} \quad (3)$$

(β)(iii) Στο κέντρο μάζας των B^0, τα πιόνια έχουν την ίδια αλλά αντίθετη ορμή και ενέργεια ίση με το μισό της ενέργειας του κέντρου μάζας, δηλαδή

$$E_{\pi^\pm}^{CM} = \frac{m_{B^0}}{2} \quad \text{και} \quad P_{\pi^+}^{CM} = -P_{\pi^-}^{CM}.$$

Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, η ορμή του κάθε πιονίου εξαρτάται από την γωνία θ^* της διεύθυνσης κίνησής του και της διεύθυνσης της ώθησης



Θεωρούμε για απλούστευση ότι η μάζα των πιονίων είναι πολύ μικρότερη της ενέργειάς του, οπότε μπορούμε να την αγνοήσουμε.

Από το μετασχηματισμό Lorentz από το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας του B^0 στο εργαστήριο θα έχουμε:

$$P_{z_{\pi^\pm}}^{lab} = \gamma_{B^0}\left(P_{z_{\pi^\pm}}^{B^0} + \beta_{B^0} E_{\pi^\pm}\right) \Rightarrow \boxed{P_{z_{\pi^\pm}}^{lab} \simeq \gamma_B E_{\pi^\pm}\left(\beta\cos\theta^* + 1\right)} \qquad (4)$$

Η ώθηση γίνεται μέγιστη όταν τα $\pi^\pm$ κινούνται στην διεύθυνση της ώθησης, δηλαδή στην διεύθυνση του B^0 μεσονίου. Η ώθηση γίνεται μέγιστη όταν και το B^0 κινείται κατά την διεύθυνση κίνησης του $Y(4S)$.

Η μέγιστη ώθηση επομένως θα είναι σύμφωνα με τον κανόνα άθροισης ταχυτήτων

$$\beta_{max} = \frac{\beta_{Y(4S)} + \beta_{B^0}}{1 - \beta_{Y(4S)}\beta_{B^0}} = \frac{0.56 \pm 0.061}{1 - 0.56 * 0.061} \Rightarrow \beta_{max} = 0.57$$

Η ελάχιστη ώθηση θα είναι:

$$\beta_{min} = \frac{\beta_{Y(4S)} - \beta_{B^0}}{1 + \beta_{Y(4S)}\beta_{B^0}} = \frac{0.56 - 0.061}{1 + 0.56 * 0.061} \Rightarrow \beta_{min} = 0.41$$

Αντικαθιστώντας στην (4) τις 2 τιμές του β_{min} και β_{max}, τις αντίστοιχες τιμές για τον παράγοντα Lorentz γ_{min} και γ_{max} αντίστοιχα, την τιμή της $E = m_{B^0}/2$ και τις δύο περιπτώσεις $\cos\theta^* = \pm 1$ θα έχουμε:

$$P_{max} = \frac{m_{B^0}}{2}\gamma_{max}\left(1 + \beta_{max}\right) \simeq \frac{5.28}{2}\frac{1}{\sqrt{1-0.57^2}}\left(1+0.57\right) \Rightarrow \boxed{P_{max} \simeq 5.04\,\text{GeV}}$$

$$P_{min} = \frac{m_{B^0}}{2}\gamma_{min}\left(1 + \beta_{min}\right) \simeq \frac{5.28}{2}\frac{1}{\sqrt{1-0.41^2}}\left(1-0.41\right) \Rightarrow \boxed{P_{min} \simeq 1.71\,\text{GeV}}$$