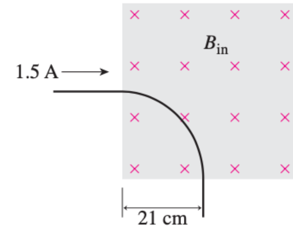
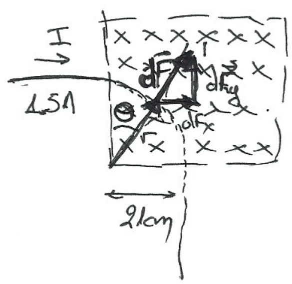
ΦΥΣ. 112

7° ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή Παρασκευή 11.11.2022**

1. Ένα σύρμα διαρρέεται από ρεύμα 1.5A. Το σύρμα περνά από ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο $B = 48mT$ και είναι κάθετο στο πεδίο ενώ στην περιοχή του πεδίου σχηματίζει ημικύκλιο με ακτίνα R=21cm, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Βρείτε το μέτρο και διεύθυνση της μαγνητικής δύναμης στο τμήμα του ημικυκλίου.





Θέλαμε να βρούμε τη δύναμη στο 4ημικύκλιο ενός σύρματος το οποίο διαρρέεται από ρεύμα έντασης I που βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο.

Η δύναμη σε ένα τμήμα του σύρματος που διαρρέεται από ρεύμα I σε μαγνητικό πεδίο B, δίνεται από τη σχέση:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow dF = IBdl$$

Η δύναμη είναι ακτινική και με διεύθυνση από το κέντρο προς την περιφέρεια

Η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης στο τμήμα dl δίνεται από τη σχέση

$dF_x = dF\sin\theta = BIdl\sin\theta$, όπου θ η γωνία της κατακορύφου και της γραμμής από το κέντρο του ημικυκλίου στο τμήμα του σύρματος, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Η κατακόρυφος συνιστώσα της δύναμης δε είναι: $dF_y = F\cos\theta = BIdl\cos\theta$

Η ολική οριζόντια δύναμη στο τμήμα του σύρματος είναι:

$$\vec{F} = \hat{i}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} BI\sin\theta\, dl + \hat{j}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} BI\cos\theta\, dl$$

Αλλά $dl = r d\theta$. Το ρεύμα είναι σταθερό μέτρου $I = 1.5A$ και το B είναι ίσο με $B = 48\times10^{-3}T$. Η ακτίνα καμπυλότητας είναι: $r = 0.21cm$.

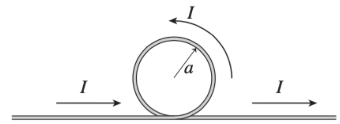
$$\vec{F} = \hat{i}\int_0^{\pi/2} BI\sin\theta\, r d\theta + \hat{j}\int rIB\cos\theta\, d\theta \Rightarrow \vec{F} = BIr\left[\hat{i}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\, r d\theta + \hat{j}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, r d\theta\right]$$

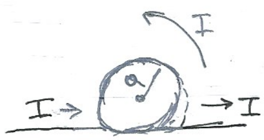
$$\Rightarrow \vec{F} = BIr(\hat{i}+\hat{j}).$$

Αριθμητική αντικατάσταση δίνει: $\vec{F} = (1.5A)(48\times10^{-3}T)(0.21m)(\hat{i}+\hat{j}) = 0.015N(\hat{i}+\hat{j})$

Το μέτρο της δύναμης είναι $F = \sqrt{2}(0.015) \Rightarrow F = 0.021N$ και η διεύθυνση $45°$

2. Ένα σύρμα είναι λυγισμένο ώστε να περιέχει ένα βρόχο ακτίνας a, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το σύρμα διαρρέεται από ρεύμα I. Βρείτε την εξίσωση που δίνει το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του σύρματος.





Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύρμα αποτελείται από ένα ευθύγραμμο τμήμα και ένα τμήμα σε σχήμα βρόχου. Το ρεύμα στο κέντρο του βρόχου αποτελεί το άθροισμα των ρευμάτων από τα μαγνητικά πεδία από τις δύο αυτές συνιστώσες.

Το μαγνητικό πεδίο από το ευθύγραμμο τμήμα είναι:

$B_{ευθ} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ όπου a η ακτίνα του βρόχου.

Η συνεισφορά του βρόχου στο μαγνητικό πεδίο είναι $B_{βρόχ.} = \frac{\mu_0 I}{2a}$

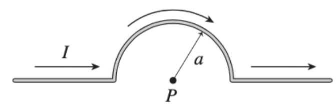
θεωρώντας ότι η απόσταση από το κέντρο του βρόχου είναι $\emptyset$.

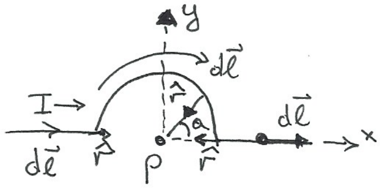
Με βάση τον κανόνα του δεξιού χεριού, βλέπουμε ότι και τα δύο πεδία έχουν φορά προς το εξωτερικό της σελίδας που θεωρούμε ως την $\hat{k}$-διεύθυνση.

Προσθέτοντας τις δύο συνεισφορές: $\vec{B} = \vec{B}_{ευθ} + \vec{B}_{βρχ} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{k} + \frac{\mu_0 I}{2a}\hat{k} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = (1+\pi)\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{k}}$$

3. Τμήμα ενός μακρύ σύρματος το οποίο διαρρέεται από ρεύμα I είναι λυγισμένο ώστε να σχηματίζει ημικύκλιο ακτίνας a, όπως φαίνεται στο σχήμα. Χρησιμοποιώντας τον νόμο των Biot-Savart βρείτε το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του ημικυκλίου.





Θα βρούμε το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του ημικυκλικού σύρματος χρησιμοποιώντας τον νόμο των Biot-Savart.

Χρησιμοποιούμε το σύστημα συντεταγμένων όπως στο παραπάνω σχήμα. Στο σύστημα αυτό των συντεταγμένων, μπορούμε να γράψουμε τον νόμο Biot-Savart

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{σύρμα}} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

όπου $\hat{r}$ το μοναδιαίο διάνυσμα από το στοιχειώδες τμήμα του αγωγού $d\vec{l}$, στο κέντρο του βρόχου P.

Στα ευθύγραμμα τμήματα αριστερά και δεξιά του ημικυκλίου, $d\vec{l}$ είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\hat{r}$ και $-\hat{r}$ και επομένως $d\vec{l} \times \hat{r} = 0$.

Στο ημικύκλιο, $d\vec{l}$ είναι κάθετο στο $\hat{r}$ και η ακτίνα του ημικυκλίου είναι σταθερή $|\vec{r}| = a$.

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα: $B(P) = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \displaystyle\int_{\text{ημικ.}} \dfrac{d\vec{l} \times \hat{r}}{a^2} = \int_0^{\pi} \dfrac{r\,d\theta}{a^2}\hat{k} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\dfrac{\pi a}{a^2}\right)\hat{k}$

$\Rightarrow \boxed{B(P) = \dfrac{\mu_0 I}{4a}\hat{k}}$ με $\hat{k}$ στο εσωτερικό της σελίδας.

4. Μια μακριά αγώγιμη ράβδος ακτίνας διατομής R, έχει μη ομοιόμορφη πυκνότητας ρεύματος J που δίνεται από τη σχέση $J = J_0 r/R$, όπου J_0 είναι σταθερά και r η ακτινική απόσταση από τον άξονα της ράβδου. Βρείτε τις εξισώσεις που περιγράφουν το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό και εξωτερικό της ράβδου.

Το μαγνητικό πεδίο μιάς μακριάς αγώγιμης ράβδου παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία.

Βρίσκουμε το μαγνητικό πεδίο με το νόμο του Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{περ.}$$

(α) Στο εσωτερικό της ράβδου, ολοκληρώνουμε την πυκνότητα ρεύματος ως προς μια μικρότερης διατομής επιφάνεια που περικλείει το ρεύμα $I_{περ}$ για ένα βρόχο Ampere $r \leq R$. Θα έχουμε επομένως:

$$I_{περ} = \int_0^r J_0 \frac{r}{R}(2\pi r dr) \Rightarrow I_{περ.} = \frac{2\pi J_0 r^3}{3R}$$

Όπου όλα τα στοιχεία εμβαδού έχουν ληφθεί να είναι κυκλικοί δακτύλιοι, ακτίνας r, πάχους dr, και εμβαδού $dA = 2\pi r dr$.

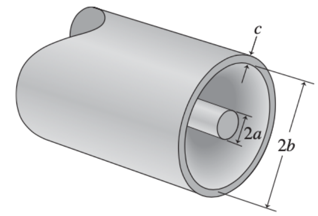
Επομένως από τον νόμο του Ampère έχουμε: $2\pi r B = \mu_0 I_{περ} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 J_0 r^2}{3R}}$

(β) Το πεδίο στην περιοχή που $r \geq R$ έχει διεύθυνση που περικλείει τη ράβδο σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Το ολικό ρεύμα σχετίζεται με την ολική πυκνότητα, ολοκληρώνοντας ως προς την επιφάνεια διατομής της ράβδου

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad \int_0^R J_0 \frac{r}{R}(2\pi R dr) \Rightarrow I = \frac{2\pi J_0 R^2}{3}$$

Επομένως το μαγνητικό πεδίο εκτός του σύρματος είναι $\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 J_0 R^3}{3r}}$

5. Το καλώδιο του διπλανού σχήματος αποτελείται από ένα εσωτερικό συμπαγές αγώγιμο καλώδιο ακτίνας a και ένα εξωτερικό κοίλο αγώγιμο κυλινδρικό καλώδιο ακτίνας b και πάχους c. Τα δύο καλώδιο διαρρέονται από ρεύμα ίσης έντασης αλλά αντίθετης φοράς τα οποία κατανέμονται ομοιόμορφα. Βρείτε το μαγνητικό πεδίο συναρτήσει της ακτινικής απόστασης από τον άξονα των δύο καλωδίων: (α) στο εσωτερικό του εσωτερικού καλωδίου, (β) στο χώρο ανάμεσα στα δύο καλώδια και (γ) στο χώρο έξω από το εξωτερικό καλώδιο.



Χρησιμοποιούμε τον νόμο του Ampere για να βρούμε το μαγνητικό πεδίο ενός ομοαξονικού καλωδίου το οποίο διαρρέεται από ρεύματα αντίθετης έντασης, σε εσωτερικό και εξωτερικό αγωγό. του καλωδίου.

Αρχικά υπολογίζουμε το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του εσωτερικού αγωγού:

$$B = \mu_0 Ir/(2\pi a^2) \quad \text{για } r \le a$$

Μεταξύ του εσωτερικού και εξωτερικού αγωγού θα έχουμε:

$$B = \mu_0 I/(2\pi r) \quad a < r \le b$$

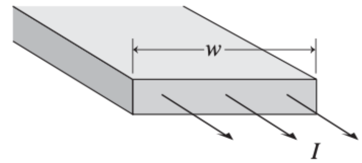
Έξω από τον εξωτερικό αγωγό θα έχουμε: ότι το συνολικό ρεύμα που περικλείεται θα είναι ϕ αφού τα ρεύματα στους αγωγούς είναι αντίθετα, επομένως

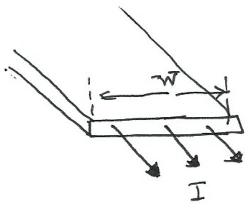
$$B = 0 \quad \text{για } r > b$$

Στο εσωτερικό του εξωτερικού αγωγού θα είναι:

$$B(2\pi r) = \mu_0 I\left(1-\pi r^2+\pi b^2\right) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I\left(1-\pi r^2+\pi b^2\right)}{2\pi r}$$

6. Μια μεγάλου μήκους επιφάνεια έχει πλάτος *w* και διαρρέεται από ρεύμα *I* το οποίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο όπως φαίνεται στο σχήμα. Κάνοντας κατάλληλες προσεγγίσεις, βρείτε το μαγνητικό πεδίο (α) στην περιοχή κοντά στην επιφάνεια ($r \ll w$) αλλά όχι κοντά στις άκρες της και (β) μακριά από την επιφάνεια ($r \gg w$).



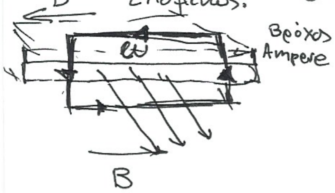


Κοντά στον αγωγό, αλλά μακριά από τις άκρες, το πεδίο είναι όμοιο με αυτό που δημιουργεί ένα φύλλο (επίπεδη επιφάνεια) απείρων διαστάσεων.

Πολύ μακριά από τον αγωγό, το πεδίο μοιάζει αυτό που δημιουργεί ένα μακρύ απείρου μήκους, ευθύγραμμο σύρμα.

(α) Για την επίπεδη επιφάνεια θεωρούμε ότι $J = \frac{I}{w}$ η πυκνότητα ρεύματος

Επομένως: $B = \frac{\mu_0 I}{2w}$



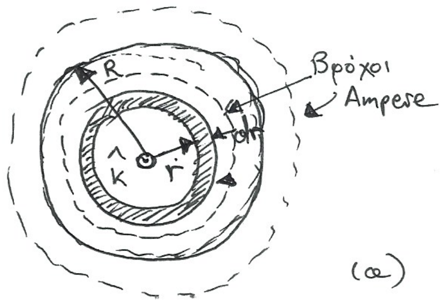
$$\left.\begin{aligned}\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} &= 2Bw = \mu_0 I_{\pi\varepsilon\rho} \\ I_{\pi\varepsilon\rho} &= J_s \cdot w\end{aligned}\right\} \Rightarrow 2Bw = \mu_0 J_s w = \mu_0 \frac{I}{\cancel{w}}\cancel{w}$$

$$\Rightarrow 2Bw = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2w}}$$

(β) Προσεγγίζοντας το φύλλο ως ένα απείρου μήκους ευθύγραμμο αγωγό,

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I \Rightarrow B\cdot 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

7. Ένα συμπαγές αγώγιμο σύρμα ακτίνας R έχει την διεύθυνση του z-άξονα και έχει πυκνότητα ρεύματος που δίνεται από τη σχέση: $\vec{J} = J_0(1 - r/R)\hat{k}$ όπου J_0 είναι σταθερά και r η απόσταση από τον άξονα του σύρματος. (α) Βρείτε το ολικό ρεύμα στο σύρμα και (β) το μαγνητικό πεδίο για $r < R$ και για $r > R$.



Για να βρούμε το ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό θα πρέπει να ολοκληρώσουμε την πυκνότητα ρεύματος:

(α) Χρησιμοποιώντας λεπτούς δακτυλίους ως στοιχειώδη εμβαδά: $dA = 2\pi r dr$:

$$I = \int_0^R J dA = \int_0^R J_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)(2\pi r dr) = 2\pi J_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R}\right)\Big|_0^R$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{3}\pi R^2 J_0}$$

(β) Εφαρμόζουμε τον νόμο του Ampere έξω από τον αγωγό με τους βρόχους Ampere όπως στο σχήμα:

$$2\pi r B = \mu_0 I \Rightarrow 2\pi r B = \mu_0 \frac{1}{3}\pi R^2 J_0 \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 J R^2}{6}}$$

(γ) Μέσα στον αγωγό, θα έχουμε: $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\pi\varepsilon\rho}$

Από το (α) έχουμε: $I_{\pi\varepsilon\rho} = \int_0^r J\, dA = J_0 \int_0^r \left(1 - \frac{r}{R}\right)(2\pi r dr) \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_{\pi\varepsilon\rho} = 2\pi J_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R}\right)\Big|_0^r \Rightarrow I_{\pi\varepsilon\rho} = \pi J_0 r^2 \left(1 - \frac{2r}{3R}\right) \Bigg\} \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 \cancel{\pi} J_0 r^2 \left(1 - \frac{2r}{3R}\right)}{2\cancel{\pi}} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 J_0 r}{2}\left(1 - \frac{2r}{3R}\right)}$$

8. Ένα μαγνητικό δίπολο μαγνητικής διπολικής ροπής $\vec{\mu} = \mu\hat{\imath}$, βρίσκεται στον άξονα ενός κυκλικού βρόχου ακτίνας a που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I και σε απόσταση x από το κέντρο. Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο δίπολο και προσδιορίστε αν η δύναμη αυτή είναι ελκτική ή απωστική.

Η δυναμική ενέργεια ενός διπόλου μέσα σε μαγνητικό πεδίο δίνεται από την εξίσωση: $U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$

Στην περίπτωσή μας, $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I a^2}{2(x^2+a^2)^{3/2}}\hat{\imath}$

Επίσης η διπολική ροπή $\vec{\mu} = \mu\hat{\imath}$. Η δύναμη δίνεται από $F_x = -\dfrac{dU}{dx}$

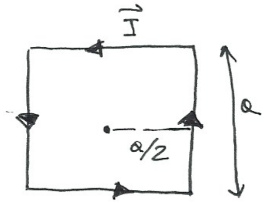
Επομένως:
$$U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\mu\hat{\imath}\cdot\frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2+a^2)^{3/2}}\hat{\imath} \Rightarrow U = -\frac{\mu_0 I a^2 \mu}{2(x^2+a^2)^{3/2}}$$

Η δύναμη θα είναι:
$$F_x = -\frac{dU}{dx} \Rightarrow F_x = \frac{\mu_0 I a^2 \mu}{2}\left[\frac{-3x}{(x^2+a^2)^{5/2}}\right]$$

Για $x=a$, έχουμε:
$$F_{x=a} = \frac{\mu_0 I a^2 \mu}{2}\left[\frac{-3a}{(2a^2)^{5/2}}\right] = -\frac{3\mu_0 I \mu}{2}\left(\frac{a^3}{4\sqrt{2}a^5}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{F_{x=a} = -\frac{3\mu_0 I \mu}{8\sqrt{2}a^2}}$$

Η δύναμη είναι αντίθετης διεύθυνσης του x-άξονα, και επομένως είναι μια ελκτική δύναμη, για την συγκεκριμένη περίπτωση.

9. Βρείτε το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του τετραγωνικού βρόχου πλευράς *a* που διαρρέεται από ρεύμα *I*.



Χρησιμοποιήσαμε το νόμο Biot-Savart για να βρούμε το μαγνητικό πεδίο ενός ευθύγραμμου αγωγού με άπειρο μήκος ή συγκεκριμένο πεπερασμένο μήκος.
Στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε 4 ευθύγραμμους αγωγούς πεπερασμένου μήκους, οι οποίοι ωστόσο είναι ίδιου μήκους.
Θεωρούμε ότι το ρεύμα ρέει όπως φαίνεται στο σχήμα. Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού, το ρεύμα στους 4 αγωγούς θα δημιουργήσει μαγνητικό πεδίο θα έχει φορά προς το εσωτερικό της σελίδας, και από συμμετρία, τα πεδία αυτά θα είναι ισομέτρου.
Από τον νόμο του Biot-Savart : $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I d\vec{l}\times\vec{r}}{r^2}$ θα έχουμε ότι το μαγνητικό πεδίο ενός αγωγού που εκτείνεται από $-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}$ και σε απόσταση $a/2$ από τον αγωγό θα είναι:

$$B = \frac{\mu_0 I (a/2)}{4\pi}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{dx}{\left(x^2+(a/2)^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I (a/2)}{4\pi}\left[\frac{x}{\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{x^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}\right]_{-a/2}^{a/2} \Rightarrow$$

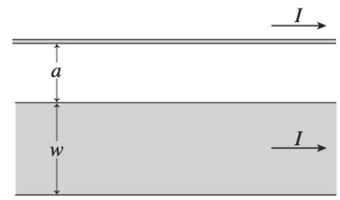
$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{\sqrt{2}\,\pi a}}$$

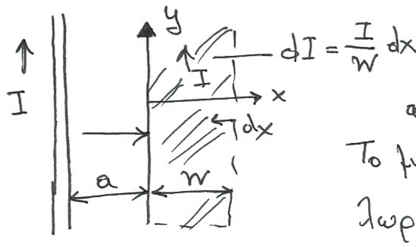
αυτό είναι το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το ρεύμα που διαρρέει ένα από τα 4 τμήματα.

Το ολικό πεδίο επομένως θα είναι: $\boxed{B_{ολ} = 4B = 4\frac{\mu_0 I}{\sqrt{2}\,\pi a}}$

Έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι το μαγνητικό πεδίο από ένα τμήμα είναι $1/\sqrt{2}$ μικρότερο από το αντίστοιχο πεδίο ενός αγωγού απείρου μήκους, στην ίδια απόσταση. Το άθροισμα των 4 αγωγών είναι μεγαλύτερο αυτού του ενός απείρου μήκους αγωγού. Συγκρίνοντας με το μαγνητικό πεδίο ενός κυκλικού βρόχου ίσου εμβαδού a^2. Το πεδίο στο κέντρο του κυκλικού βρόχου ακτίνας $a/\sqrt{\pi}$ είναι: $B = \frac{\sqrt{\pi}\mu_0 I}{2a}$
Δηλαδή το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του τετραγώνου πλαισίου είναι $1\% > B_{βρόχου}$

10. Ένα μακρύ επίπεδο και πολύ λεπτό αγώγιμο φύλο βρίσκεται σε απόσταση a από έναν ευθύγραμμο αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα I, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το φύλο διαρρέεται επίσης από ρεύμα ίδιας έντασης με αυτό του ευθύγραμμου αγωγού, το οποίο κατανέμεται ομοιόμορφα στην επιφάνεια του φύλου. Δείξτε ότι το μέτρη της δύναμης ανα μονάδα μήκους που αναπτύσσεται μεταξύ των δύο αγωγών δίνεται από την σχέση: $\frac{\mu_0 I^2}{2\pi w}\ln\left(\frac{a+w}{a}\right)$.





$dI = \frac{I}{w}dx$

Χρησιμοποιούμε τη σχέση της δύναμης που αναπτύσσεται μεταξύ δύο αγωγών σε απόσταση d, όταν έχουν ρεύματα I_1, I_2.

Το μέτρο της δύναμης ανά μονάδα μήκους, σε ένα λεπτή λωρίδα πλάτους dx, που διαρρέεται από ρεύμα $I\frac{dx}{w}$ θα είναι:

$$dF = \frac{\mu_0 I (I dx/w) L}{2\pi(a+x)} \Rightarrow \frac{dF}{L} = \frac{\mu_0 I (I dx/w)}{2\pi(a+x)}$$

Ολοκληρώνουμε την έκφραση από $x=0$ έως $x=w$ δίνει την ολική δύναμη:

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi w}\int_0^w \frac{dx}{a+x} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi w}\ln\left(\frac{a+w}{a}\right)$$

Εφόσον τα ρεύματα είναι παράλληλα τότε η δύναμη που αναπτύσσεται είναι ελκτική.

Όταν $w \to 0$ τότε θα έχουμε: $\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi w}\ln(\underbrace{1+\varepsilon}_{\sim\varepsilon}) \Rightarrow \frac{F}{L} \simeq \frac{\mu_0 I^2}{2\pi \cancel{w}}\frac{\cancel{w}}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\frac{F}{L} \simeq \frac{\mu_0 I^2}{2\pi a}}$ που είναι η εξίσωση της δύναμης μεταξύ δύο παράλληλων αγωγών σε απόσταση a και διαρρέονται από ρεύματα έντασης I.