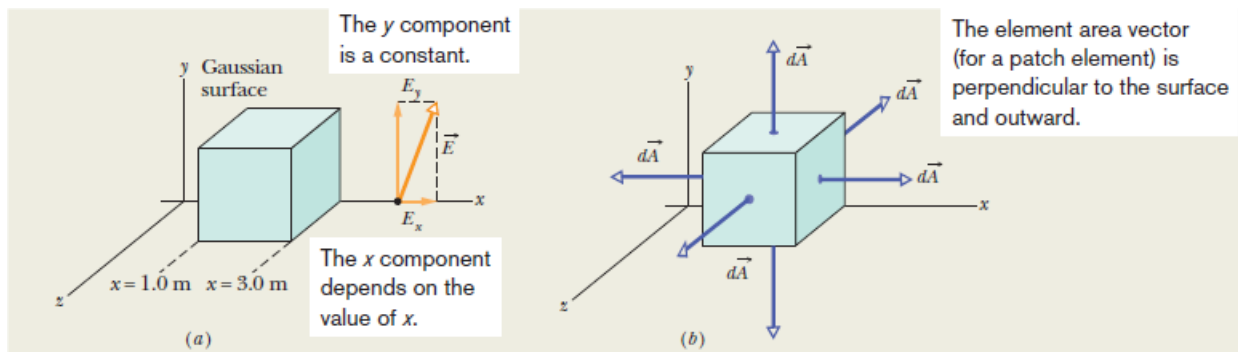


Φροντιστήριο 3 ΦΥΣ112

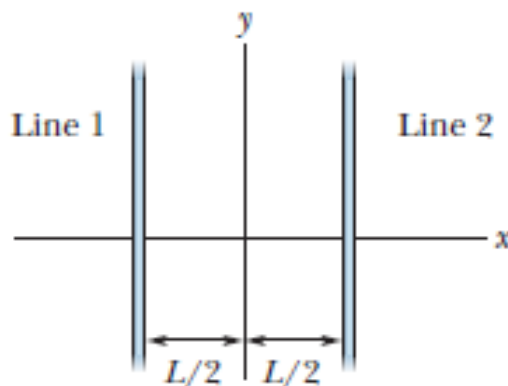
25/9/2024

23.2) Ένα ηλεκτρικό πεδίο δίνεται να είναι $\vec{E} = 4.0\hat{i} - 3.0(y^2 + 2.0)\hat{j}$ και διαπερνά Γκαουσιανό κύβο ακμής 2.0 m όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Ποια είναι η ηλεκτρική ροή στην (a) πάνω επιφάνεια, (b) κάτω επιφάνεια, (c) αριστερή επιφάνεια και (d) πίσω επιφάνεια; (e) Ποια είναι η συνολική ροή που διαπερνά ολόκληρο τον κύβο;

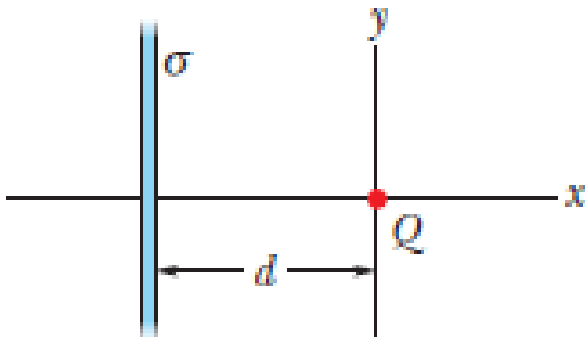


23.21) Ένας απομονωμένος αγωγός έχει συνολικό φορτίο $+10 \times 10^{-6}\text{ C}$ και μία κοιλότητα που περιέχει σημειακό φορτίο $q = +3.0 \times 10^{-6}\text{ C}$. Ποιο είναι το επαγόμενο φορτίο (a) στο τοίχωμα της κοιλότητας και (b) στην εξωτερική επιφάνεια;

22.30) Στο κάτωθι σχήμα φαίνονται μικρά τμήματα δύο πολύ μακρών παράλληλων γραμμών τοποθετημένων σε απόσταση $L = 8.0\text{ cm}$ μεταξύ τους. Οι ομοιόμορφες γραμμικές πυκνότητες φορτίου είναι $+6.0\mu\text{C/m}$ για την γραμμή 1 και $-2.0\mu\text{C/m}$ για την γραμμή 2. Σε ποιο σημείο στον άξονα x το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο από τις δύο γραμμές γίνεται 0;

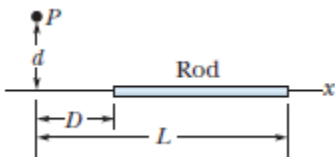


22.40) Το πιο κάτω σχήμα δείχνει μια πολύ μεγάλη μη αγώγιμη πλάκα με ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma = -2.00 \mu\text{C}/\text{m}^2$, καθώς και ένα σημειακό φορτίο $Q = 6.00 \mu\text{C}$ σε απόσταση d από την πλάκα. Αν $d = 0.200 \text{ m}$, σε ποια (a) θετική και (b) αρνητική θέση στον άξονα x (πέραν του απείρου) το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο από την πλάκα και το σωματίδιο γίνεται 0; (c) Αν τώρα $d = 0.800 \text{ m}$, σε ποια θέση στον άξονα x έχουμε μηδενικό συνολικό ηλεκτρικό πεδίο;

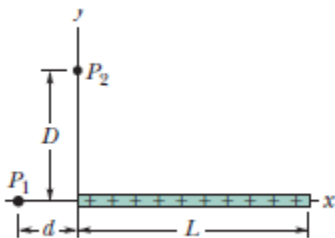


22.55) Μία κατανομή φορτίου με σφαιρική συμμετρία αλλά όχι ομοιόμορφη παράγει ηλεκτρικό πεδίο μεγέθους $E = Kr^4$, κατευθυνόμενη ακτινικά προς τα έξω από το κέντρο της σφαίρας. Εδώ r είναι η ακτινική απόσταση από το κέντρο και K κάποια σταθερά. Ποια είναι η χωρική πυκνότητα φορτίου ρ της κατανομής;

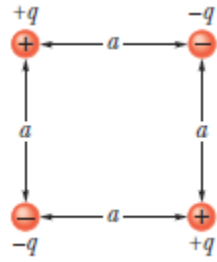
24.26) Το πιο κάτω σχήμα δείχνει μία λεπτή ράβδο με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου $2.00 \mu\text{C}/\text{m}$. Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P αν $d = D = L/4.00$. Υποθέστε ότι το δυναμικό στο άπειρο είναι 0.



24.38) Στο σχήμα φαίνεται μια λεπτή πλαστική ράβδος μήκους $L = 13.5 \text{ cm}$ και ομοιόμορφα κατανομημένο φορτίο 43.6 fC . (a) Βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P_1 συναρτήσει της απόστασης d . (b) Έπειτα αντικαταστήστε το d στην σχέση αυτή με την μεταβλητή x και εξάγετε μια σχέση για το μέγεθος της συνιστώσας E_x του ηλεκτρικού πεδίου στο P_1 . (c) Ποια είναι η κατεύθυνση του E_x σε σχέση με την θετική φορά του άξονα x ; (d) Ποια είναι η τιμή του E_x στο P_1 για $d = 6.20 \text{ cm}$; (e) Εκμεταλλευόμενοι την συμμετρία του σχήματος, βρείτε το E_y στο P_1 .



24.43) Πόσο έργο απαιτείται ώστε να κατασκευάσουμε την διάταξη του σχήματος που φαίνεται πιο κάτω αν $q = 2.30 \text{ pC}$, $a = 64.0 \text{ cm}$ και τα σωματίδια ξεκινούν από την ηρεμία πολύ μακριά το ένα από το άλλο;

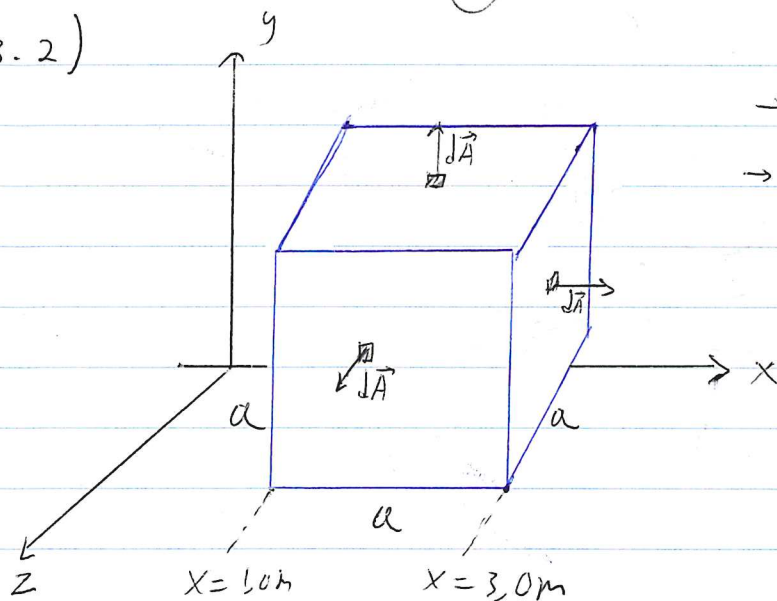


Πρόβλημα: Δύο λεπτά ομόκεντρα σφαιρικά κελύφη ακτίνας r_1 και r_2 ($r_1 < r_2$) είναι φορτισμένα και περιέχουν ίδιου πρόσημου ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ_1 και σ_2 αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο (α) $0 < r < r_1$ (β) $r_1 < r < r_2$ και (γ) $r > r_2$. (δ) Βρείτε την συνθήκη για την οποία $E = 0$ για $r > r_2$. (ε) Βρείτε την συνθήκη για την οποία $E = 0$ για $r_1 < r < r_2$. Θεωρήστε αμελητέο το πάχος των σφαιρικών κελυφών.

(1)

Problem

23.2)



$$\rightarrow a = 2.0 \text{ m}$$

$$\rightarrow \vec{E} = [4, 0 \hat{i} - 3, 0(y^2 + 2, 0) \hat{j}] \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$\rightarrow \Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

(a) Πάνω επιφάνεια: $\Phi_1 = -3, 0 \left(\frac{\text{N}}{\text{C}} \right) \int_0^a dx \int_0^a (a^2 + 2, 0) dy$
 στην επιφάνεια είναι σταθερό $\Rightarrow y = a$

$$= -6, 0 \left(\frac{\text{N.m}}{\text{C}} \right) \left[a^3 + 2, 0 \cdot y \right]_0^a = \boxed{-72, 0 \left(\frac{\text{N.m}^2}{\text{C}} \right)}$$

(b) Κάτω επιφάνεια: $\Phi_2 = -3, 0 \left(\frac{\text{N}}{\text{C}} \right) \int_0^a dx \int_0^a (0^2 + 2, 0) (-dy)$

$$= \boxed{24, 0 \left(\frac{\text{N.m}^2}{\text{C}} \right)}$$

(c) Αριστερή επιφάνεια: $\Phi_3 = 4, 0 \left(\frac{\text{N}}{\text{C}} \right) \int_0^a (-dx) \int_0^a dy = \boxed{-16, 0 \left(\frac{\text{N.m}^2}{\text{C}} \right)}$

(d) Πίσω επιφάνεια: $\Phi_4 = 0$ (\vec{E} δεν έχει z συνιστώσα)

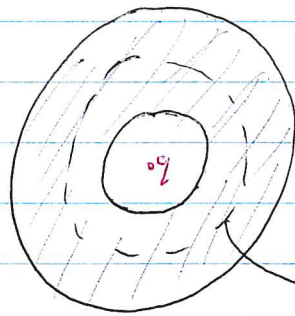
(e) $\Phi_{\text{ολ}} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \text{Δεξιά} & \text{Μόρφορτα} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \Phi_6 = 0 \quad (\text{ομοίως με } \Phi_4)$$

$$\rightarrow \Phi_5 = 4, 0 \left(\frac{\text{N}}{\text{C}} \right) \int_0^a dx \int_0^a dy = 16, 0 \left(\frac{\text{N.m}^2}{\text{C}} \right) \quad \left. \vphantom{\int_0^a dx \int_0^a dy} \right\} \Rightarrow \Phi_{\text{ολ}} = -48, 0 \left(\frac{\text{N.m}^2}{\text{C}} \right)$$

(2)

Problem 23.21) Q_{ext}

$$\rightarrow Q_{\text{ext}} = 10 \cdot 10^{-6} \text{ C} = 10^{-5} \text{ C}$$

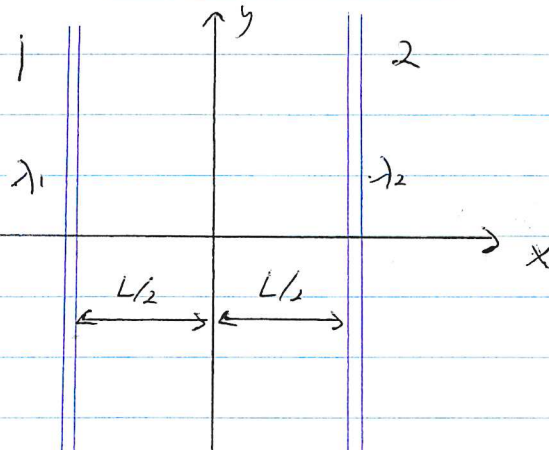
$$\rightarrow q = 3,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

 $\vec{E} = 0$ (αγωγός)

(a) Φορτίο ταχυφωλίου: $q_u = -q = -3,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$

$$\Rightarrow q_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow \Phi = 0 \text{ (Gauss)}$$

(b) Φορτίο εξωτερικής επιφάνειας: $q_{\text{ext}} = Q_{\text{ext}} - q_u = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ C}$

Problem 23.30)

$$\rightarrow L = 8,0 \text{ cm}$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 6,0 \mu\text{C/m}$$

$$\rightarrow \lambda_2 = -2,0 \mu\text{C/m}$$

Gauss: (1) $E_1 \cdot 2\pi x_1 \ell = \frac{\lambda_1 \ell}{\epsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_1}{x_1} = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x + \frac{L}{2}}$

(2) $E_2 \cdot 2\pi x_2 \ell = \frac{\lambda_2 \ell}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_2}{x_2} = \frac{\lambda_2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x - \frac{L}{2}}$

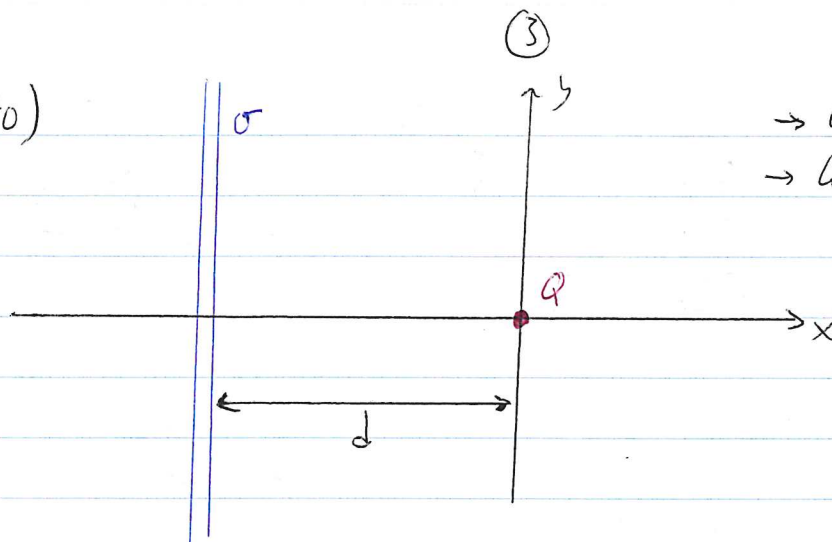
$$\rightarrow E_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow E_1 + E_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\lambda_1}{x + \frac{L}{2}} + \frac{\lambda_2}{x - \frac{L}{2}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{L}{2} \right) \lambda_2 = -\lambda_1 \left(x - \frac{L}{2} \right)$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right) \frac{L}{2} = L = 8,0 \text{ cm}$$

Problem

23.40)



$$\rightarrow \sigma = -2,00 \mu\text{C}/\text{m}^2$$

$$\rightarrow Q = 6,00 \mu\text{C}$$

$$d = 0,200 \text{ m} \rightarrow (a) x > 0 \Rightarrow \vec{E}_q = 0$$

$$(b) x < 0 \Rightarrow \vec{E}_q = 0$$

} ωέρνται να αμεληθούν

$$\vec{E}_q = k_e \frac{Q}{r^2} \hat{r} \xrightarrow[\text{από την } x]{\text{συμπίεση στον } x} \vec{E}_q = k_e \frac{Q}{x^2} \hat{i}$$

$$\text{Gauss. } E \cdot 2A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_\sigma = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}, & x > -d \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}, & x < -d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2\pi} \frac{Q}{\sigma} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2\pi} \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \text{ m} \Rightarrow (a) x = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \text{ m}$$

$$(b) x = -\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \text{ m}$$

$$(c) d = 0,800 \text{ m}$$

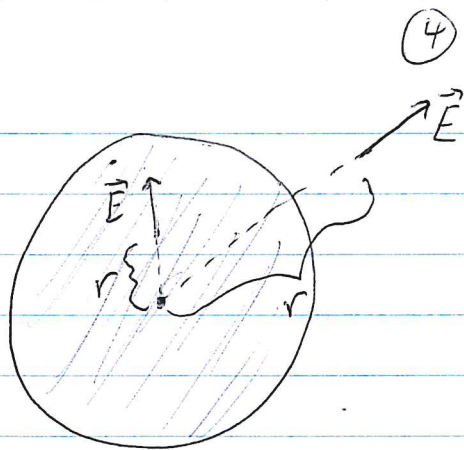
$$\Rightarrow \text{Η αμελησις δεν αγγίζει αλλά η θέση } x = -\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \text{ m}$$

θρίσκειν μελαζή ογάνως και συμπέδιον \Rightarrow Απογορεύεται

$$\Rightarrow x = +\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \text{ m}$$

Γορλ χυρίο $-d < x < 0$ γόρλ ανλίβειλιν γορλίλιν, λα \vec{E}_q και \vec{E}_σ γίνονταί ορόρροθα και δέν ανιμεξούνται ούμωδω.

Problem 23.55)



$\rightarrow \vec{E} = (K r^4) \hat{r}$ (peval)
 $\rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{\text{enc}}}{r^2} \hat{r}$ (Egen)

Gauss: $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{\iiint \rho dV}{\epsilon_0} = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_0^r \rho r'^2 dr'$

$\Rightarrow r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho r'^2 dr' = (K r^4) r^2 = K r^6$

$\Rightarrow \rho r^2 = \epsilon_0 K \frac{d}{dr} (r^6)$

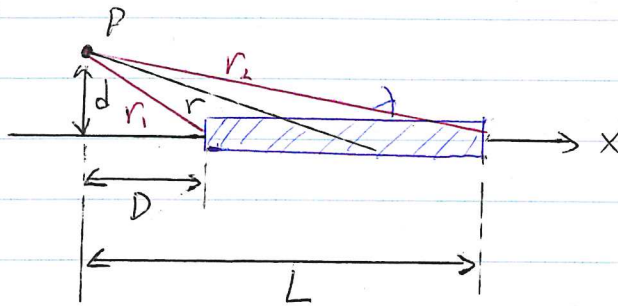
$\Rightarrow \rho r^2 = 6 \epsilon_0 K r^5$

$\Rightarrow \boxed{\rho = 6 \epsilon_0 K r^3}$

(1)

Ενός Κρίσιμης

Problem 24.26)



$$\rightarrow dq = \lambda dx$$

$$\rightarrow \lambda = 2.00 \mu\text{C/m}$$

$$\rightarrow d = D = \frac{L}{4.00}$$

$$\rightarrow r_1 = \sqrt{d^2 + D^2} = \sqrt{2} d$$

$$\rightarrow r_2 = \sqrt{d^2 + L^2} = \sqrt{17} d$$

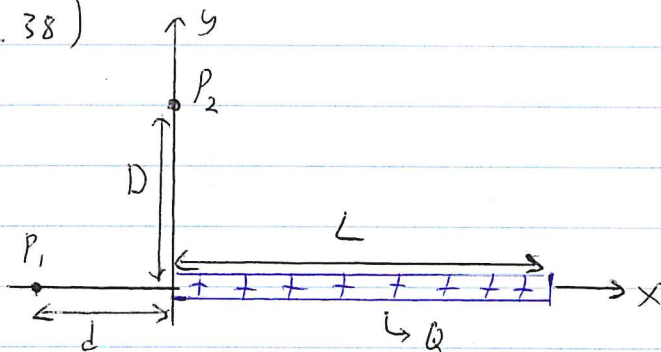
$$\rightarrow r = \sqrt{d^2 + x^2}$$

$$\rightarrow V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_D^L \frac{dx}{\sqrt{d^2 + x^2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln(x + \sqrt{x^2 + d^2}) \right]_D^L = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{4 + \sqrt{17}}{1 + \sqrt{2}}\right)$$

$$= \boxed{2.18 \cdot 10^4 \text{ V}}$$

Problem 24.38)



$$\rightarrow L = 13.5 \text{ cm}$$

$$\rightarrow Q = 43.6 \text{ fC} \quad \lambda = \frac{Q}{L}$$

$$\Rightarrow dq = \lambda dx$$

$$(a) V(P_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{Q}{L} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dx}{d+x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \left[\ln(x+d) \right]_0^L$$

$$= \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \ln\left(\frac{L+d}{d}\right)}$$

$$(b) d \rightarrow -x \Rightarrow V(P_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \ln\left(\frac{-L+x}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(P_1) = -\vec{\nabla} V|_{x=-d} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \left(\frac{1}{x-L} - \frac{1}{x} \right) \Big|_{x=-d} \hat{i}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \left[\frac{x - x + L}{x(x-L)} \right] \Big|_{x=-d} \hat{i}$$

$$= \boxed{-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d(d+L)} \hat{i}}$$

$$(c) E_x < 0 \Rightarrow \left[\text{Το ρεύμα 180° στρέφεται} \right]$$

$$\left[\text{αλλάζει φορά} \right]$$

(2)

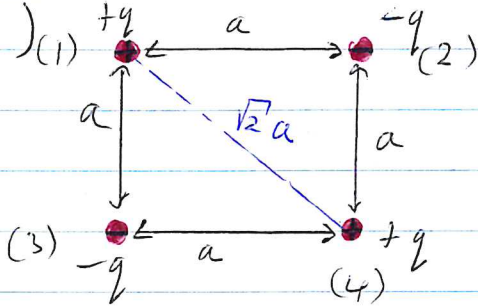
$$(d) d = 6,20 \text{ cm} \Rightarrow E_x(P_1) = 0,0321 \text{ N/C}$$

(e) $E_y(P_1) = 0 \rightarrow$ Από συμμετρία πλάτους, σημεία πάνω στο άξονα x έχουν συμμετρικά εξισωμένο πόνο από z_0 x

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \Rightarrow E_y = 0$$

Problem

24.43



$$\rightarrow q = 2,30 \text{ } \mu\text{C}$$

$$\rightarrow a = 64,0 \text{ cm}$$

$$\rightarrow U_i = 0 \text{ (υαθόζον σνμμετρία)}$$

$$\rightarrow U_{1-2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}$$

$$\rightarrow U_{1-4} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}a}$$

$$\rightarrow U_{1-3} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}$$

$$\rightarrow U_{2-4} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}$$

$$\rightarrow U_{2-3} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}a}$$

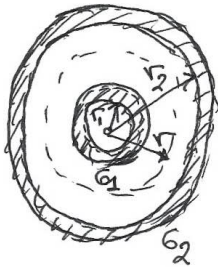
$$\rightarrow U_{3-4} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow U_f = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \left(-1 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 - 1 \right)$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \right)$$

$$\Rightarrow W = U_f - U_i = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \right) = \boxed{-1,92 \cdot 10^{-13} \text{ J}}$$

6. Δύο λεπτά ομόκεντρα σφαιρικά κελύφη ακτίνας r_1 και r_2 ($r_1 < r_2$) είναι φορτισμένα και περιέχουν ίδιου πρόσημου ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ_1 και σ_2 αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο (α) $0 < r < r_1$ (β) $r_1 < r < r_2$ και (γ) $r > r_2$. (δ) Βρείτε την συνθήκη για την οποία $E = 0$ για $r > r_2$. (ε) Βρείτε την συνθήκη για την οποία $E = 0$ για $r_1 < r < r_2$. Θεωρήστε αμελητέο το πάχος των σφαιρικών κελυφών.



Από τη συμμετρία του προβλήματος, θα μπορούσαμε αμέσως να υπερασπίσουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι σφαιρική διεύθυνση, και ότι είναι ανεξάρτητο μόνο του r .

Θεωρούμε ως επιφάνεια Γαουss έναν σφαιρικό φλοιό ομόκεντρο με τα σφαιρικά φλοιούς, και με ακτίνα r στην περιοχή όπου θα θέλαμε να προσδιορίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο. Σύμφωνα με τον νόμο του Γαουss, θα έχουμε:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q_{\text{enc}} / \epsilon_0 \Rightarrow 4\pi r^2 E = Q_{\text{enc}} / \epsilon_0$$

(α) Στην περιοχή όπου $r < r_1$, $Q_{\text{enc}} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$.

(β) Στην περιοχή όπου $r_1 < r < r_2$, $Q_{\text{enc}} = 4\pi r_1^2 \sigma_1 \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 \hat{r}$

(γ) Στην περιοχή όπου $r > r_2$, $Q_{\text{enc}} = 4\pi (r_1^2 \sigma_1 + r_2^2 \sigma_2) \Rightarrow \vec{E} = \frac{(r_1^2 \sigma_1 + r_2^2 \sigma_2)}{\epsilon_0 r^2} \hat{r}$

(δ) Το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι $\vec{E} = \vec{0}$ αν $r_1^2 \sigma_1 = -r_2^2 \sigma_2$. Αυτό ισοδυναμεί με το να έχουμε τους δύο σφαιρικούς φλοιούς με ίσα και αντίθετα φορτία

(ε) $\vec{E} = \vec{0}$ για $r_1 < r < r_2$ είναι δυνατόν μόνο αν $\sigma_1 = 0$, ανεξάρτητα της τιμής της σ_2 .