

ΦΥΣ 145 – Μαθηματικές Μέθοδοι στη Φυσική

Πρόοδος

3 Μαρτίου 2013

Γράψτε το ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητάς σας στο πάνω μέρος της αυτής της σελίδας.

Πρέπει να απαντήσετε στα 5 προβλήματα που σας δίνονται. Όλες τα προβλήματα θα πρέπει λυθούν στον υπολογιστή.

Ο χρόνος εξέτασης είναι 150 λεπτά.

Από τη στιγμή αυτή δεν υπάρχει συνεργασία/συζήτηση ανταλλαγή αρχείων και e-mails με κανέναν. Σημειώσεις, χαρτάκια κλπ απαγορεύονται όπως και επισκέψεις σε ιστοσελίδες ή accounts που δεν αναφέρονται στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

Απαγορεύεται επίσης η χρήση του e-mail σας καθόλη τη διάρκεια της εξέτασης.

Καλή επιτυχία

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

USERNAME

PASSWORD:

Ασκήσεις για τον υπολογιστή

Δημιουργήστε ένα subdirectory με όνομα **midterm** στον οποίο θα δουλέψετε τις παρακάτω 5 ασκήσεις. Θα πρέπει στο τέλος της εξέτασης να δημιουργήσετε ένα tar file με όλα τα f, pdf και dat files τα οποία δημιουργήσατε ή χρησιμοποιήσατε. Το tar file θα πρέπει να βρίσκεται στο subdirectory midterm και να έχει όνομα με τη μορφή `<username>_groupX.tgz` και X η ομάδα σας (A ή B). Το file αυτό θα το πάρουμε από τους directories σας.

Θα πρέπει να γράψετε το κωδικό εισόδου σας στο πάνω μέρος της σελίδας αυτής. Αν το password σας είναι διαφορετικό από αυτό που σας δώθηκε αρχικά και ξεχάσετε να το δώσετε δε θα βαθμολογηθείτε στις ασκήσεις

Μην ξεχάσετε να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας σαν σχόλιο στην αρχή του κάθε file που αντιστοιχεί στο πρόγραμμα της αντίστοιχης άσκησης.

1. [15μ] Να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει την ακόλουθη σειρά $\sum_{k=1}^{200} (-1)^k \frac{5k}{k+1}$. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει το αποτέλεσμα στην οθόνη με κατάλληλο format.
2. [15μ] Έστω J και K θετικοί ακέραιοι όπου $J \leq K$. Η γενικευμένη ακολουθία Fibonacci προσδιορίζεται αν υποθέσουμε ότι το J είναι ο πρώτος όρος της σειράς, και K ο δεύτερος της σειράς και όλοι οι υπόλοιποι όροι προκύπτουν από το άθροισμα των δυο προηγούμενων όρων. Να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο διαβάζει από το πληκτρολόγιο το J και το K και τυπώνει σε ένα αρχείο με όνομα *fibonacci.dat* τους πρώτους 50 όρους της γενικευμένης ακολουθίας με κατάλληλο Format ώστε να εμφανίζονται 5 αριθμοί σε κάθε γραμμή και να υπάρχουν 3 κενά ανάμεσα σε κάθε αριθμό. Δοκιμάστε το πρόγραμμά σας για $J = 5$ και $K = 7$.
3. [20μ] Σε μια πειραματική άσκηση στην οποία θέλετε να προσδιορίσετε την ταχύτητα του ήχου στον αέρα χρησιμοποιείτε ένα χρονόμετρο χειρός και μετράτε τον χρόνο που περνά από την στιγμή που ακούτε τον πυροβολισμό ενός πιστολιού μέχρι να ακούσετε τον αντίλαλο από την ανάκλαση του ήχου σε ένα υψηλό εμπόδιο σε κάποια απόσταση d από το σημείο του πυροβολισμού. Τα αποτελέσματά σας έχουν καταγραφεί σε ένα αρχείο με το όνομα *sound.dat* το οποίο βρίσκεται στο home directory του χρήστη *fofis*. Χρησιμοποιώντας το αρχείο αυτό (χωρίς να το αντιγράψετε σε δικό σας directory) να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο διαβάζει τις τιμές του αρχείου και τις αποθηκεύει σε κάποιο πίνακα. Θεωρήστε ότι το εύρος των μετρήσεών σας είναι από 0.200 έως 0.850 sec. Κατόπιν το πρόγραμμα σας θα πρέπει να περιέχει το υποπρόγραμμα μιας SUBROUTINE το οποίο υπολογίζει την συχνότητα εμφάνισης των χρόνων των διαφόρων μετρήσεων ομαδοποιημένους σε διαστήματα εύρους $dt = 0.05\text{sec}$. Δηλαδή θα πρέπει να υπολογίσετε το πλήθος των μετρήσεων χρόνου, t, που βρίσκονται σε κάποιο διάστημα $t_i \leq t < t_i + dt$. Η υπορουτίνα σας θα πρέπει να επιστρέφει τον χρόνο που αντιστοιχεί στο μέσο του εκάστοτε χρονικού διαστήματος και την αντίστοιχη συχνότητά εμφάνισής του σε δυο διαφορετικούς πίνακες *TIME* και *FREQ*. Θα πρέπει να γράψετε τους δυο αυτούς πίνακες σε ένα αρχείο *sound_out1.dat* και χρησιμοποιώντας το

γραφικό πακέτο *gnuplot* να κάνετε το αντίστοιχο γράφημα σε κατάλληλους ονοματισμένους άξονες. Κάντε το ίδιο για χρονικά διαστήματα εύρους $dt = 0.1\text{sec}$ και αποθηκεύστε τα αποτελέσματά σας σε ένα νέο αρχείο *sound_out2.dat* και κάντε την αντίστοιχη γραφική παράσταση στο ίδιο γράφημα με αυτή που πήρατε για την 1^η περίπτωση χρονικού βήματος. Σχολιάστε τις διαφορές στα δυο γραφήματα.

4. [25μ] Η μέθοδος Horner μας βοηθά να υπολογίσουμε ένα πολυώνυμο πολύ πιο γρήγορα από το να κάνουμε τις πράξεις ακριβώς. Θεωρήστε το πολυώνυμο $y = f(x) = A_1x^N + A_2x^{N-1} + \dots + A_Nx + A_{N+1}$. Ο υπολογισμός του πολυωνύμου απαιτεί $N + (N-1) + (N-2) + \dots + 2 + 1 = N(N+1)/2$ πολ/σμούς και N προσθέσεις. Ωστόσο χρησιμοποιώντας την μέθοδο Horner, το πολυώνυμο μπορεί να γραφεί ως εξής: $y = f(x) = (((\dots((A_1x + A_2)x + A_3)x + \dots)x + A_N)x + A_{N+1})$ και στην προκειμένη περίπτωση ο υπολογισμός του απαιτεί N πολ/σμούς και N προσθέσεις. Επομένως είναι πολύ πιο αποδοτική μέθοδος υπολογισμού.

Για παράδειγμα αν είχαμε το πολυώνυμο $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 8x - 9$ θα χρειαζόμασταν $4+3+2+1=10$ πολ/σμούς και 4 προσθέσεις για να το υπολογίσουμε. Ωστόσο βγάζοντας συνεχώς το x σαν κοινό παράγοντα μπορούμε να το γράψουμε με την μορφή:

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x^3 - 5x^2 + 6x + 8)x - 9 = \\ &= ((3x^2 - 5x + 6)x + 8)x - 9 = \\ &= (((3x - 5)x + 6)x + 8)x - 9 \end{aligned}$$

που απαιτεί 4 πολ/σμούς και 4 προσθέσεις.

Έστω τώρα ότι $B_1 = A_1$, $B_2 = B_1x + A_2$, ..., $B_{N+1} = B_Nx + A_{N+1}$ τα επιμέρους αποτελέσματα της μεθόδου Horner (δηλαδή οι όροι στις εσωτερικές παρενθέσεις) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους όρους αυτούς για να υπολογίσουμε την 1^η παράγωγο του πολυωνύμου $f'(x)$ ως εξής:

$$f'(x) = B_1x^{N-1} + B_2x^{N-2} + \dots + B_{N-1}x + B_N \text{ η οποία μπορεί και πάλι να γραφεί με την μέθοδο Horner.}$$

Συνδυάζοντας τον τρόπο γραφής του πολυωνύμου και της 1^{ης} του παραγώγου με την μέθοδο Newton-Raphson μπορούμε να βρούμε τις ρίζες του πολυωνύμου.

Να γραφεί ένα πρόγραμμα το οποίο χρησιμοποιεί την μέθοδο Horner για τον υπολογισμό της τιμής ενός πολυωνύμου N βαθμού και της 1^{ης} του παραγώγου και να χρησιμοποιεί την μέθοδο Newton για τον υπολογισμό των ριζών του. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να δέχεται απο ένα αρχείο *polynomial.dat*, τον βαθμό N του πολυωνύμου, τους σταθερούς συντελεστές της μεταβλητής x , μια αρχική τιμή για την ρίζα του πολυωνύμου καθώς και την επιθυμητή ακρίβεια για την ζητούμενη λύση. Το πρόγραμμα θα πρέπει να τυπώνει σε ένα αρχείο *roots.dat* την λύση που βρέθηκε καθώς και τον αριθμό των επαναλήψεων για την εύρεση της ρίζας. Δοκιμάστε το πρόγραμμά σας για το πολυώνυμο $6x^3 - 4x^2 + 7x - 19$ και να βρείτε μια ρίζα του με ακρίβεια 5^{ου} δεκαδικού ψηφίου.

5. [25μ] Υποθέστε ότι έχετε ένα βλήμα το οποίο εκτοξεύεται με κάποια γωνία θ_0 , ως προς την οριζόντια διεύθυνση με αρχική ταχύτητα v_0 . Υποθέστε επίσης ότι το βλήμα κινείται κάτω από την επίδραση της δύναμης λόγω της αντίστασης του αέρα η οποία είναι ανάλογη της ταχύτητας του βλήματος. Σύμφωνα με τις συνθήκες αυτές, οι εξισώσεις κίνησης περιγράφονται από:

$$y = f(t) = (Cv_y + gC^2)(1 - e^{-t/C}) - gCt \text{ και}$$

$$x = r(t) = C v_x (1 - e^{-t/C}) \text{ όπου}$$

$C = m/k$ με k τον συντελεστή αντίστασης του αέρα, και m τη μάζα του βλήματος. g η επιτάχυνση της βαρύτητας ($g = 9.8\text{m/s}^2$), ενώ $v_x = v_0 \cos(\theta_0)$ και $v_y = v_0 \sin(\theta_0)$. Μια μεγάλη τιμή του C θα είχε σαν αποτέλεσμα μεγαλύτερο μέγιστο ύψος και μεγαλύτερο βεληνεκές. Θεωρήστε ότι η αρχική ταχύτητα του βλήματος είναι $v_0=49\text{m/s}$ και η σταθερά $C = 10$ ενώ η αρχική γωνία του βλήματος είναι $\theta_0=45^\circ$. Να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο:

(α) Υπολογίζει τον χρόνο πτήσης του βλήματος (δηλαδή τον χρόνο μέχρι να επιστρέψει στο έδαφος) καθώς και το βεληνεκές του με ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων. [7μ]

(β) Για την ίδια ταχύτητα εκτόξευσης να βρεθούν τα αντίστοιχα βεληνεκή για γωνίες από 10° έως 80° με βήμα 10° . Τα αποτελέσματά σας θα πρέπει να τα γράψετε σε ένα αρχείο *ranges.dat* το οποίο θα πρέπει να περιέχει την γωνία και το αντίστοιχο βεληνεκές που βρίσκετε [5μ].

(γ) Χρησιμοποιώντας τις δυο παραπάνω εξισώσεις κίνησης και το αποτέλεσμα του (α) ερωτήματος θα πρέπει το πρόγραμμά σας να υπολογίσει τις συντεταγμένες κάθε σημείου της τροχιάς του βλήματος από το σημείο εκτόξευσης μέχρι το σημείο που επιστρέφει στο έδαφος χρησιμοποιώντας σαν χρονικό βήμα $dt = 0.1\text{sec}$. Τα αποτελέσματά σας θα πρέπει να τα γράψετε σε ένα αρχείο με όνομα *projectile.dat*. [8μ]

(δ) Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του αρχείου *projectile.dat* να κάνετε την γραφική παράσταση της τροχιάς του βλήματος την οποία θα πρέπει να αποθηκεύσετε σε ένα αρχείο με όνομα *projectile.ps*. Θα πρέπει επίσης να κάνετε την γραφική παράσταση που αντιστοιχεί στο αρχείο *ranges.dat* το οποίο δημιουργήσατε στο (β) ερώτημα και να την αποθηκεύσετε στο αρχείο *ranges.ps*. [5μ]