Κλασική Μηχανική

ΦΥΣ 211

Άνοιξη 2016

Διδάσκων: **Φώτης Πτωχός**

e-mail: fotis@ucy.ac.cy
Τηλ: 22.89.2837
Γραφείο: B235 – ΘΕΕ02 – Τμήμα Φυσικής

Γενικές Πληροφορίες

- Ώρες/Αίθουσα διδασκαλίας:
  - Δευτέρα/Πέμπτη 10:30 – 12:00 & Τετάρτη 08:00 -09:00
  - Αίθουσα: B229
- Φροντιστήρια/Απορίες
  - Οι συναντήσεις της Τετάρτης θα είναι ένας συνδυασμός για λύσεις ασκήσεων και παραδόσεων
  - **Επιπλέον** ώρες φροντιστηρίων κάθε Δευτέρα 16:30 – 18:00 B229
  - Διακόπτετε για να ρωτήσετε τυχόν απορίες σας οποιαδήποτε στιγμή κατά την διάρκεια των διαλέξεων.
  - Περάστε από το γραφείο μου: Πέμπτη 13:00-16:00μμ
  - Πείτε μου αν κάτι στο μάθημα δεν δουλεύει για σας

- Ιστοσελίδα του μαθήματος:

  http://www2.ucy.ac.cy/~fotis/phy211/phy211.html

«Προαπαιτούμενα»

- ΦΥΣ111 & ΦΥΣ221
  ΦΥΣ I και Μαθηματικές Μέθοδοι I
- ΜΑΣ04, ΜΑΣ05 (ΜΑΣ018/ΜΑΣ019)
  Ολοκληρωτικός λογισμός, γραμμική άλγεβρα

Θεωρήστε σοβαρά τα προαπαιτούμενα αυτά

- Χωρίς το απαραίτητο υπόβαθρο θα χαθείτε εύκολα και θα είναι δύσκολο να παρακολουθήσετε.

Βιβλιογραφία

Βιβλία σε αγγλική έκδοση:

Classical Dynamics of particles and Systems" J.B. Marion και S.T. Thornton

Classical Mechanics J. R. Taylor

Analytical Mechanics L.N. Hand και J.D. Fitch

An Introduction to Mechanics" Kleppner και Kolenkow, (ορισμένα μόνο κεφάλαια).

Βιβλία σε ελληνική έκδοση:

Κλασική Μηχανική T.W.B. Keeble και F.H. Bershire

Θεωρητική Μηχανική Ι. Χατζηδημητρίου, τόμος 1 και τόμος 2.

Εισαγωγή στη Θεωρητική Μηχανική Κ.Χ. Τσίγκανος

Μαθήματα Αναλυτικής Μηχανικής Γ.Α. Κατσιάρης

Θεωρητική Μηχανική Π. Ιωάννου και Θ. Αποστολάτου

Βιβλία με αρκετά λυμένα παραδείγματα και ασκήσεις

Θεωρητική Μηχανική M. R. Spiegel (σειρά Schaum's)

Θεωρητική Μηχανική - Θεωρία και λυμένες ασκήσεις Α. Κυριάκη

Ασκήσεις Νευτώνιας Μηχανικής Μ. Μιχαλοδημητράκη (στην ιστοσελίδα)

Ασκήσεις Αναλυτικής Μηχανικής Μ. Μιχαλοδημητράκη (στην ιστοσελίδα)

Βιβλία προχωρημένου επιπέδου

Classical Mechanics H. Goldstein και Mechanics" L. D. Landau και E.M. Lifshitz

Βαθμολογία

Η αξιολόγησή σας θα βασιστεί στα ακόλουθα:

- **15% :** ασκήσεις κατ'οίκον
- **50% :** 2 πρόοδοι (120 λεπτών)

  Ημερομηνίες: 5–Μάρτη, 2–Απρίλη } Σάββατο, 13:00-15:00 108 ΧΩΔ01

- **35% :** τελική εξέταση – 3-ωρη εξέταση

Κατ'οίκον εργασίες

- Εργασίες για το σπίτι θα σας δίνονται κάθε βδομάδα (Παρασκευή)
- Επιστροφή την μεθεπόμενη Δευτέρα στο τέλος της διάλεξης
- Καθυστερημένες λύσεις δεν θα γίνονται δεκτές
- Συνεργασία μεταξύ σας επιτρέπεται και ενθαρύνεται αλλά ο καθένας επιστρέφει την δική του οργανωμένη λύση
  - Πανομοιότυπες λύσεις δεν θα βαθμολογούνται

- Το μάθημα χρησιμοποιεί αρκετά μαθηματικά και περισσότερο δύσκολες έννοιες από τη μέχρι τώρα φυσική σας και λύνοντας ασκήσεις θα σας βοηθήσει να εμπεδώσετε την ύλη

Ύλη του μαθήματος

- Κλασσική Μηχανική
- Συστήματα αναφοράς αδράνειας και γενικευμένες συντεταγμένες
- Νευτώνεια Μηχανική
- Ταλαντώσεις γραμμικών και μη γραμμικών συστημάτων
- Εισαγωγή στις εξισώσεις Lagrange
- Λογισμό μεταβολών
- Νόμοι διατήρησης, κίνηση σε κεντρικό δυναμικό, πεδία βαρύτητας
- Ταλαντώσεις μικρού μεγέθους
- Μηχανική στερεού σώματος
- Εξισώσεις Hamilton
- Χάος
- Θεώρημα Noether - Συμμετρίες

ΦΥΣ 211 - Κλασική Μηχανική

Μικρή Εισαγωγή

Μηχανική

Ο κλάδος των φυσικών επιστημών που ασχολείται με ενέργεια και δυνάμεις και την επίδραση τους σε σώματα

Η μηχανική ασχολείται με:

- Την κίνηση σωμάτων → Ταχύτητα και επιτάχυνση
- Αιτία της κίνησης → Δύναμη και ενέργεια

- Τα σώματα κινούνται **αλλά** δεν αλλάζουν ιδιότητες:
  - Ιδανικά υλικά σημεία και στερεά σώματα
  - Μάζα και ροπή αδράνειας είναι ότι ενδιαφέρει άμεσα

- Τρεις Νόμοι του Newton για την κίνηση: Principia (1867)

1ος : Ένα σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα (μπορεί και μηδέν) εκτός και αν ενεργήσει πάνω του μια δύναμη

2ος : Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος ισούται με την δύναμη που ασκείται στο σώμα

3ος : Για κάθε δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα υπάρχει μια ίση και αντίθετη δύναμη σε κάποιο άλλο σώμα

Κλασική έναντι Μοντέρνας Φυσικής

- Μοντέρνα στη φυσική ισοδυναμεί με τον 20ο αιώνα:

  Κβαντομηχανική (QM)

  Σχετικότητα

- Κλασσική Μηχανική = Πριν την κβαντομηχανική

  Συμπεριλαμβάνουμε ειδική θεωρία σχετικότητας και Ηλεκτρομαγνητισμό (E&M)

- Τι συνέβη μεταξύ του 17ου και 20ου αιώνα?

Μας ενδιαφέρει?

- Ξέρουμε ότι η Σχετικότητα και η QM δίνουν τις σωστές απαντήσεις
  - Η Newtonian μηχανική είναι μια προσέγγιση στην κλίμακα του ανθρώπου και της καθημερινής ζωής
- Δεν είναι αρκετά ότι ξέρουμε μέχρι τώρα?
  - Γιατί θα πρέπει να ασχολούμαστε ακόμα με μια θεωρία που είναι ξεπερασμένη?

Γιατί λοιπόν επιμονή με την Κλασική Μηχανική?

Τρεις βασικοί καλοί λόγοι:

- Στενή σχέση με την Μοντέρνα φυσική
  - Καλή κατανόηση κλασικής μηχανικής κάνει πιο εύκολη την κατανόηση της QM
- Πολύ χρήσιμα και ευέλικτα «εργαλεία»/tricks μαθηματικών
- Επαναπροσδιορισμός γνωστών νόμων της φυσικής με διαφορετική τελείως προσέγγιση
  - Πιο καθαρός και γενικός φορμαλισμός
  - It is cool!!

- Ας κάνουμε όμως μια αναδρομή στο $17^{ο}$ αιώνα....

Newtonian Μηχανική

- Θεωρητικά, η εξίσωση κίνησης του Newton προέβλεψε την κίνηση οποιαδήποτε σώματος (σωμάτων) υπό την δύναμη:
  - Για την λύση χρειαζόμαστε ένα μεγάλο και γρήγορο υπολογιστή
- Στην πραγματικότητα όμως η ζωή δεν ήταν τόσο απλή
  - Η εταιρία Intel δεν υπήρχε μέχρι το 1968
  - Πιο σημαντικά ωστόσο, η δύναμη μπορεί να είναι άγνωστη
    - Μπορεί να εξαρτάται από το χρόνο, τη θέση, ακόμα και την ταχύτητα
      - Σκεφτείτε την περίπτωση όπου ≥2 σώματα έλκονται μεταξύ τους λόγω βαρύτητας:

        Επίλυση ενός συστήματος 3-σωμάτων είναι αδύνατο!!!
- Ανάγκη για εύρεση πιο ευέλικτων μαθηματικών μεθόδων

Γενικεύοντας την εξίσωση κίνησης

- Η Newtonian μηχανική ασχολείται με την θέση του σώματος:
  - **Στόχος:** να βρεθούν x=x(t), y=y(t), z=z(t)
  - 3 συντεταγμένες για κάθε σώμα → 3N για N σώματα
- Υπάρχουν όμως άπειροι άλλοι τρόποι για να περιγράψουμε την κίνηση
  - Για παράδειγμα, ένας πιο φυσικός τρόπος για την περιγραφή της κίνησης ενός εκκρεμούς είναι:

$$x = L\cos\theta,\ y = L\sin\theta,\ z = 0,\ \theta = \theta(t)$$

  - Ο αριθμός των ελεύθερων μεταβλητών μπορεί να μην είναι 3N
  - Καλούμε τις νέες μεταβλητές γενικευμένες συντεταγμένες

- Ποιες θα είναι οι εξισώσεις κίνησης χρησιμοποιώντας γενικευμένες συντεταγμένες?

Φορμαλισμός Lagrange

- Η εξίσωση του Newton αναφέρεται στην δύναμη: $\vec{F} = m\vec{a}$

  Ξεκινάμε με $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x,t)$ για όλα τα υλικά σημεία

  3N συναρτήσεις αντιστοιχούν σε 3N συντεταγμένες

- Ξεχάστε τη δύναμη! Εισάγουμε κάτι εντελώς διαφορετικό

  Lagrangian: $L = L(q, \dot{q}) \quad L = T - V$

  T: κινητική ενέργεια, V:δυναμική ενέργεια

  Συντεταγμένη q και η χρονική της παράγωγος

  Εξίσωση Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

γενικευμένη ορμή γενικευμένη δύναμη

Τα πάντα για το σύστημα αυτό περιέχονται μέσα στη βαθμωτή συνάρτηση L

$$\frac{dp}{dt} = F$$

- Η Lagrangian δεν εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων
  - Είναι πολύ εύκολο να αλλάξουμε συστήματα συντεταγμένων

Αρχή του Hamilton

Η εξίσωση του Lagrange απορρέει από την ΑΡΧΗ του HAMILTON σύμφωνα με ένα απλό κανόνα:

Το ολοκλήρωμα της ***L*** ως προς χρόνο $\int_1^2 L\,dt$ (δράση/action) είναι στάσιμο για την διαδρομή που ακολούθησε το φυσικό σύστημα (διαδρομή από τη θέση την t_1 στη θέση την t_2

$$\delta \int_1^2 L\,dt = 0$$

το ολοκλήρωμα έχει ελάχιστο και σε 1^{η} προσέγγιση μένει αμετάβλητο για μικρές μεταβολές της συνάρτησης L

- Οι Νόμοι του Newton βρέθηκαν εξ' επαγωγής
  - «Είναι έτσι επειδή συμφωνεί με τόσες παρατηρήσεις»
  - Το να τους εξαγάγουμε από μια αρχή σημαίνει ότι γνωρίζουμε την αιτία που είναι έτσι
  - Βέβαια δεν είναι τόσο δραματικό όσο ακούγεται, ωστόσο υπονοεί κάποια βαθύτερη αιτία
- Όλα αυτά στηρίζονται στο λογισμό των μεταβολών όπως θα δούμε σύντομα στις επόμενες διαλέξεις και είναι μια πολύ χρήσιμη τεχνική

Hamiltonian φορμαλισμός

Οι εξισώσεις Hamilton είναι: $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad -\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q}$

- (p,q) ονομάζονται κανονικές μεταβλητές
- ***H*** είναι συνάρτηση που ονομάζεται Hamiltonian $H = p\dot{q} - L(q,\dot{q})$
- Κανονικές μεταβλητές ~ θέση και ορμή
- Δεν συνδέονται με την σχέση p = mv ?

❑ Θέση και ορμή σαν ανεξάρτητες μεταβλητές

- Επιτρέπει μεγαλύτερο εύρος μετασχηματισμών μεταβλητών σε σχέση με τον Lagrangian φορμαλισμό
- Ο φορμαλισμός είναι πιο καθαρός και βοηθά στην ανεύρεση και αποδοτική χρήση διατηρούμενων ποσοτήτων – επομένως συμμετριών
- Υπάρχουν πολλές ομοιότητες με το τι ακολουθεί η QM

Επιτυχία μέσα από την αποτυχία…

Η αναζήτηση εργαλείων για την επίλυση του προβλήματος 3-σωμάτων απέτυχε

Εκτός βέβαια και αν κάποιος θεωρήσει επιτυχία την ανάπτυξη των super computers

Αποτέλεσμα αυτής της αναζήτησης είχε σαν επακόλουθο την ανάπτυξη μεθόδων (Lagrangians και Hamiltonians) που αποτελούν τις βάσεις της Κβαντομηχανικής

Η ανάπτυξη της QM οδηγήθηκε από αναλογίες στους φορμαλισμούς Lagrange και Hamilton

Οι θεμελιωτές της QM μεγάλωσαν με κλασική μηχανική

Η Κλασική μηχανική είναι ο συνδετικός κρίκος μεταξύ Newton και Schröndinger

Τι θα μελετήσουμε λοιπόν

- Σύντομη αναδρομή Νευτώνιας Μηχανικής
- Εξισώσεις Lagrange και αρχή Hamilton
  - Πρόβλημα κεντρικής δύναμης
  - Κίνηση στερεού σώματος
  - Ταλαντώσεις
- Εξισώσεις Hamilton και κανονικοί μετασχηματισμοί
- Συμμετρίες
- Χάος

Στόχος για σήμερα

- Ανακεφαλαίωση των βασικών αρχών της Newtonian μηχανικής
  - Σύντομα ώστε να μην κοιμηθείτε
- Συζήτηση της κίνησης ενός σωματιδίου
  - Ορισμός των συμβόλων και τη χρησιμοποίησή τους
  - Ορμές, νόμοι διατήρησης, κινητική και δυναμική ενέργεια
- Όλα αυτά πρέπει να σας είναι ήδη γνωστά

Υλικό σημείο

- Υλικό σημείο = το αντικείμενο με αμελητέο μέγεθος
  - Ηλεκτρόνιο μέσα σε ένα καθοδικό σωλήνα
  - Η μπάλα του baseball που ρίχνει ένας pitcher
  - Η γη που περιστρέφεται γύρω από τον ήλιο

- Έχει μάζα **m** και θέση **r**
  - Ταχύτητα $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$
  - Γραμμική ορμή $\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$

- Ο 2ος νόμος του Newton για την κίνηση $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{r}}$

Αδρανειακό σύστημα

- Η αρχή ***O*** του **r** είναι κάπως αφηρημένη
  - Εκλογή σημείου αρχής μέτρησης → σύστημα αναφοράς
- Αδρανειακό σύστημα = σύστημα αναφοράς στο οποίο ισχύει

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$$

  - Ακριβέστερη διατύπωση του 2^ου^ νόμου του Newton:

    Υπάρχουν συστήματα αναφοράς για τα οποία η παράγωγος της γραμμικής ορμής ως προς το χρόνο ισούται με την δύναμη

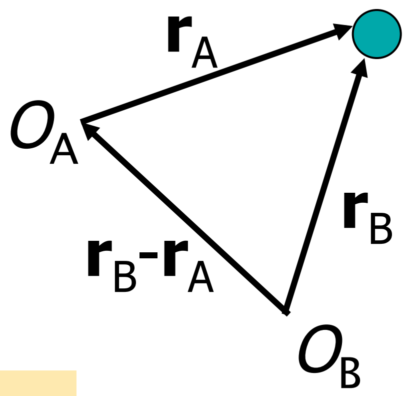
  - Και υπάρχει άπειρος αριθμός τέτοιων συστημάτων

Αδρανειακά συστήματα

Έστω 2 αδρανειακά συστήματα A κα B

Ένα υλικό σημείο έχει $\mathbf{r}_A$ ως προς το A και $\mathbf{r}_B$ ως προς το B

Αρχή συντεταγμένων του A είναι στη θέση $r_B - r_A$ του B



$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}_A = m\ddot{\mathbf{r}}_B \rightarrow \ddot{\mathbf{r}}_B - \ddot{\mathbf{r}}_A = 0 \quad \rightarrow \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{B} - \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{A} = \sigma\tau\alpha\vartheta\varepsilon\rho o$$

Οποιαδήποτε 2 αδρανειακά συστήματα κινούνται
με σταθερή σχετική ταχύτητα

Ο Γαλιλαίος έδειξε την ισοδυναμία αυτών των συστημάτων

Στροφορμή

Ορίζουμε:

- Στροφορμή $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
- Ροπή $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

Η σειρά έχει σημασία

- Από τη σχέση $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ εξάγουμε: $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$

- Οι ορισμοί εξαρτώνται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων O
  - αφού r εξαρτάται από το O
  - Η εξίσωση $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$ ισχύει για οποιαδήποτε O

Διατήρηση της Ορμών

Δυο θεωρήματα διατήρησης:

- Από: $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$

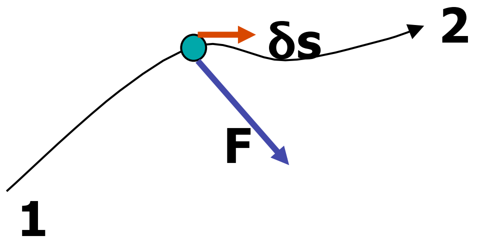
  Αν η ολική δύναμη είναι μηδέν τότε η ορμή διατηρείται

- Από: $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$

  Αν η ολική ροπή είναι μηδέν τότε η στροφορμή διατηρείται

Έργο από εξωτερική Δύναμη

Υλικό σημείο κινείται από τη θέση 1 στη θέση 2 κάτω από την επίδραση της δύναμης **F**



- Το έργο $\mathbf{W_{12}}$ που παράγει η δύναμη **F** ορίζεται ως $W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot ds$

- Η κινητική ενέργεια ορίζεται ως $T \equiv \frac{m\text{v}^2}{2}$

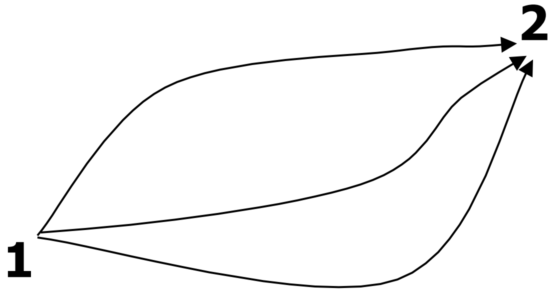
- Και αποδεικνύεται ότι $W_{12} = T_2 - T_1$

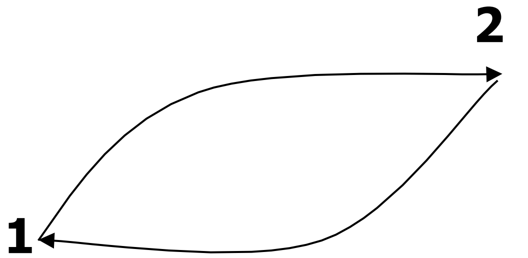
Το έργο που παράγεται ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας

Συντηρητική δύναμη

- Αν $\mathbf{W_{12}}$ είναι το ίδιο για κάθε δυνατή διαδρομή από το 1 στο 2, τότε η **F** είναι συντηρητική
- W_{12} εξαρτάται μόνο από τις 2 θέσεις και όχι από τη διαδρομή
- Ισοδύναμα άν εκτελέσει μια κλειστή διαδρομή, τότε το έργο είναι μηδέν

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_1^2 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_2^1 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0$$





Δυναμική Ενέργεια

- Αν η **F** είναι συντηρητική <-> η F εκφράζεται ως $\vec{F} = -\nabla V(\vec{r})$
  - V είναι η δυναμική ενέργεια
- Το έργο $\mathbf{W_{12}}$ εκφράζεται τότε από $W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot ds = V_1 - V_2$
  - αλλά βρήκαμε πριν ότι είναι ίσο με $T_2 - T_1$

επομένως: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Αν η δύναμη είναι συντηρητική τότε
η ολική ενέργεια $E = T + V$ διατηρείται

Θεώρημα διατήρησης Ενέργειας

Περίληψη

- Ανακεφαλαιώσαμε τις βασικές αρχές της Newtonian Μηχανικής
  - Ορισμούς συμβόλων και χρησιμοποίηση
  - Γραμμική ορμή, στροφορμή, νόμοι διατήρησης
    κινητική και δυναμική ενέργεια

Ελπίζω πως όλα είναι κατανοητά και γνώριμα, αν όχι βαρετά

Επόμενη διάλεξη θα ξαναθυμηθούμε πώς λύνονται μερικά προβλήματα που βασίζονται σ’ ότι είπαμε σήμερα