Ολική στροφορμή

- Ορίζουμε την θέση ενός σημείου I από το κέντρο μάζας: $\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R}$
- Ορίζουμε επίσης τις ταχύτητες: $\vec{v}_i' = \dot{\vec{r}}_i'$ και $\vec{v} = \dot{\vec{R}}$
  - Υπολογίζουμε την ολική στροφορμή

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \left(\vec{r}_i' + \vec{R}\right) \times m_i \left(\vec{v}_i' + \vec{v}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \boxed{\vec{R} \times M\vec{v}} + \boxed{\sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'}$$

Η στροφορμή της κίνησης συγκεντρωμένη στο CM

Στροφορμή της κίνησης γύρω από το CM

Ολική στροφορμή

- Θεωρήστε τη κίνηση ενός πλανήτη γύρω από τον ήλιο (υποθέτουμε ότι εξαιτίας της μάζας του είναι ακίνητος).

$$\vec{L}_{\pi\lambda\alpha\nu.} = \vec{L}_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho.} + \vec{L}_{\text{spin}}$$

- Ο διαχωρισμός είναι χρήσιμος γιατί πολύ συχνά τα 2 τμήματα διατηρούνται το καθένα ξεχωριστά:

$$\vec{L}_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho.} = \vec{R}\times\vec{P} \Rightarrow \dot{\vec{L}}_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho.} = \dot{\vec{R}}\times\vec{P} + \vec{R}\times\dot{\vec{P}} = \vec{R}\times\vec{F}^{(e)} \qquad (1)$$

$$0 = \dot{\vec{R}}\times M\dot{\vec{R}}$$

$L_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho.}$ μεταβάλλεται σαν ο πλανήτης να ήταν υλικό σημείο με όλη τη μάζα του συγκεντρωμένη στο CM.

Αν η δύναμη του ήλιου στο πλανήτη ήταν ακριβώς κεντρική τότε η $F^{(e)}//R$ και η στροφορμή θα ήταν σταθερή.
Πολύ κοντά στην πραγματικότητα

- Η μεταβολή της ιδιο-στροφορμής (spin) βρίσκεται αν γράψουμε:

$$\vec{L}_{\text{spin}} = \vec{L}_{\pi\lambda\alpha\nu.} - \vec{L}_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho.} \Rightarrow \dot{\vec{L}}_{\text{spin}} = \dot{\vec{L}}_{\pi\lambda\alpha\nu.} - \dot{\vec{L}}_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho.} \qquad (2)$$

$$\dot{\vec{L}}_{\pi\lambda\alpha\nu.} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} = \sum\left(\vec{r}_i' + \vec{R}\right)\times\vec{F}_i^{(e)} = \sum \vec{r}_i'\times\vec{F}_i^{(e)} + \vec{R}\times\vec{F}_i^{(e)} \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας (1) και (3) στη (2) έχουμε: $\boxed{\dot{\vec{L}}_{\text{spin}} = \sum \vec{r}_i'\times\vec{F}_i^{(e)} = \vec{\tau}^{(e)}_{\omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ \text{CM}}}$

Ολική στροφορμή

- Η μεταβολή της ιδιοστροφορμής ισούται με την εξωτερική ροπή μετρούμενη ως προς το CM

$$\dot{\vec{L}}_{\text{spin}} = \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(e)} = \vec{\tau}^{(e)}_{\omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ \text{CM}}$$

- Είναι λίγο απρόσμενο μια και ένα σύστημα αναφοράς συνδεδεμένο με το CM δεν είναι αδρανειακό.

- Από τη στιγμή που η ροπή που ασκεί ο ήλιος ως προς το CM ενός οποιουδήποτε πλανήτη είναι πολύ μικρή, L_{spin} είναι σχεδόν σταθερή

- Στην πραγματικότητα υπάρχει μια μικρή ροπή
  (π.χ. για τη γη, η εξόγκωση του ισημερινού)
  και L_{spin} δεν είναι σταθερή

  Σαν αποτέλεσμα προκαλείται περιστροφή του άξονα περιστροφής της γης ως προς τους αστέρες κατά 50 δεύτερα ακτινίου το χρόνο

Κινητική ενέργεια

- Το έργο που παράγεται από δύναμη είναι $W_{12} = \sum_i \int_1^2 F_i \cdot ds_i$
  - Οι θέσεις 1 και 2 είναι τώρα καταστάσεις του συστήματος (σύνολο θέσεων)
- Χρησιμοποιώντας την εξίσωση της κίνησης βρίσκουμε την κινητική ενέργεια

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = \sum_i \int_1^2 m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{s}_i = \sum_i \int_1^2 m_i \, d\vec{v}_i \cdot \underbrace{\frac{d\vec{s}_i}{dt}}_{\mathrm{v}_i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathrm{v}_i^2 \Big|_1^2$$

$$W_{12} = T_2 - T_1 \quad \text{όπου} \quad T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathrm{v}_i^2$$

- Χωρίζουμε την T σε 2 μέρη (θυμηθείτε $\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{R} \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}$)

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v} + \vec{v}_i') \cdot (v + \vec{v}_i') = \frac{1}{2} \sum_\mathrm{i} m_i \mathrm{v}^2 + \frac{1}{2} \sum_\mathrm{i} m_i \mathrm{v}_i'^2 + \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\sum_\mathrm{i} m_i \vec{r}_i' \right)}_{0}$$

Η κίνηση επικεντρώνεται στο CM

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M\mathrm{v}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathrm{v}_i'^2}$$

Η κίνηση γύρω από το CM

Δυναμική ενέργεια

$$\nabla_i \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right)$$

Υποθέτουμε συντηρητική εξωτερική δύναμη $\vec{F}_i^{(e)} = -\vec{\nabla}_i V_i$

$$\sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{S}_i = -\sum_i \int_1^2 \vec{\nabla}_i V_i \cdot d\vec{S}_i = -\sum_i V_i \Big|_1^2$$

Υποθέτουμε ακόμα συντηρητικές εσωτερικές δυνάμεις $F_{ji} = -\nabla_i V_{ij}$

Για να ικανοποιεί τον ισχυρό νόμο δράσης-αντίδρασης:

$$V_{ij} = V_{ij}\left(\left| \vec{r}_i - \vec{r}_j \right| \right)$$

Δυναμικό εξαρτάται μόνο από την απόσταση

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{S}_i = -\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \vec{\nabla}_i V_{ij} \cdot d\vec{S}_i \xrightarrow{\text{πράξεις}} -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij} \Big|_1^2$$

Διατήρηση της ενέργειας

- Αν όλες οι δυνάμεις είναι συντηρητικές, μπορούμε να ορίσουμε την ολική δυναμική ενέργεια

$$V = \sum_i V_i + \boxed{\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} V_{ij}}$$

Εσωτερική δυναμική ενέργεια

Και έπεται ότι η ολική ενέργεια T+ V διατηρείται

Εξαρτάται από την ενδο-ατομική απόσταση όλων των υλικών σημείων του συστήματος

Είναι σταθερή αν η σχετική ενδοατομική κατάσταση των σημείων είναι καθορισμένη και αμετάβλητη $\Rightarrow$ Στερεό σώμα

Δεσμοί

- Η εξίσωση της κίνησης $m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ji}$ υποθέτει ότι σημεία μπορούν να κινηθούν οπουδήποτε στο χώρο

- Αυτό δεν είναι γενικά αληθινό
  - Στην πραγματικότητα δεν ισχύει ποτέ !
    Ελεύθερος χώρος είναι μια κατάσταση ιδανική
  - ✓ Οι μπάλες του μπιλιάρδου είναι περιορισμένες σε ένα τραπέζι

- Πως μπορούμε να πάρουμε όμως υπ' όψη τους διάφορους περιορισμούς στην εξίσωση της κίνησης?

- Εξαρτάται από το είδος του περιορισμού

Ολόνομοι Δεσμοί

- Οι δεσμοί μπορούν να εκφραστούν από

$$f(r_1, r_2, r_3, \ldots, t) = 0$$

Ολόνομος δεσμός

Συναρτησιακές σχέσεις μεταξύ των συντεταγμένων και του χρόνου.

Οι ολόνομοι δεσμοί δεν έχουν ταχύτητες

- Υλικό σημείο στο επίπεδο x-y, **z=0**
- Στερεό σώμα $(r_i - r_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$

- Όλες οι υπόλοιπες κατηγορίες ονομάζονται **μη ολόνομοι δεσμοί**
  - Σημαίνει ότι δεν θέλουμε να «ξέρουμε γι' αυτούς»
  - Μπορεί να υπάρχουν ανισότητες όπως z>0
  - Μπορεί να εξαρτώνται από ταχύτητες όπως $\dot{\vec{r}}_i$

- Θα ασχοληθούμε μόνο με ολόνομους δεσμούς

Ανεξάρτητες μεταβλητές

Ένας ολόνομος δεσμός ελαττώνει τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών κατά 1 – Οι βαθμοί ελευθερίας ελαττώνονται κατά 1

Αν z=0, τότε απομένουν μόνο τα x, y

Ίσως να μπορούμε να λύσουμε τον περιορισμό του δεσμού για τη μια μεταβλητή

$$f(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3,....,t)=0 \Rightarrow x_1 = g(y_1,z_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3,...,t)$$

και επομένως να αποφύγουμε την μια μεταβλητή

Ίσως χρειαστεί να αλλάξουμε σε μια τελείως διαφορετική ομάδα μεταβλητών

Έστω σημείο στην επιφάνεια μιας σφαίρας $x^2+y^2+z^2=c^2$

μπορούμε να ορίσουμε μια διαφορετική ομάδα μεταβλητών: (θ,φ)

Νέο set των μεταβλητών → γενικευμένες συντεταγμένες

Γενικευμένες συντεταγμένες (generalized coordinates)

- N υλικά σημεία έχουν 3N βαθμούς ελευθερίας
  - Εισάγουμε K ολόνομους δεσμούς και μειώνουμε τους βαθμούς ελευθερίας σε 3N-K
  - Χρησιμοποιώντας γενικευμένες συντεταγμένες $q_1, q_2, .., q_{3N-K}$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q_1, q_2, q_3, \ldots, t\right)$$

Εξισώσεις μετασχηματισμού από r_l σε q_l

Παράδειγμα:

$$x = c\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = c\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = c\cos\theta$$

Μετασχηματισμός από το (x,y,z) στο (θ,φ)

Παράδειγμα

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε ένα set από γενικευμένες συντεταγμένες για ένα υλικό σημείο που κινείται πάνω σε ημισφαίριο ακτίνας R του οποίου το κέντρο είναι στην αρχή των αξόνων O.

Λύση:

Εφόσον η κίνηση συμβαίνει πάνω στη σφαιρική επιφάνεια έχουμε:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \qquad z \geq 0$$

Θεωρώ σαν γενικευμένες συντεταγμένες τα συνημίτονα των γωνιών μεταξύ των x, y και z αξόνων με τη γραμμή που συνδέει την αρχή των αξόνων με το υλικό σημείο.

Επομένως θα πάρω: $q_1 = \frac{x}{R}, \quad q_2 = \frac{y}{R}, \quad q_3 = \frac{z}{R}$

Αλλά για τα συνημίτονα κατεύθυνσης μιας ευθείας ισχύει: $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$

Το σύνολο των q_j δεν αποτελεί κανονικό σύνολο γενικευμένων συντεταγμένων αφού μπορούμε να γράψουμε π.χ. το q_3 συναρτήσει των q_1 και q_2

$$q_3 = \sqrt{1 - q_1^2 - q_2^2} \Rightarrow z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Το αποτέλεσμα είναι προφανές αλλά δείχνει ότι η εξίσωση του δεσμού μπορεί πάντα να δώσει το σωστό σύνολο γενικευμένων συντεταγμένων

Είδη δεσμών

- Είδαμε ότι δεσμοί που περιγράφονται από τη συναρτησιακή σχέση

$$f(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_N, t) = 0$$

ονομάζονται ολόνομοι δεσμοί όταν δεν εξαρτώνται από ταχύτητες

- Όταν εξαρτώνται ρητά από τον χρόνο, όπως στην παραπάνω σχέση, ονομάζονται ρεόνομοι
- Όταν δεν υπάρχει χρονική εξάρτηση τότε λέγονται σκληρόνομοι

$$f(r_1, r_2, r_3, \ldots, r_N) = 0$$

- Δεσμοί που δεν πληρούν την παραπάνω εξίσωση ή εξαρτώνται από ταχύτητες ονομάζονται μη-ολόνομοι.

Παραδείγματα μή ολόνομων δεσμών:

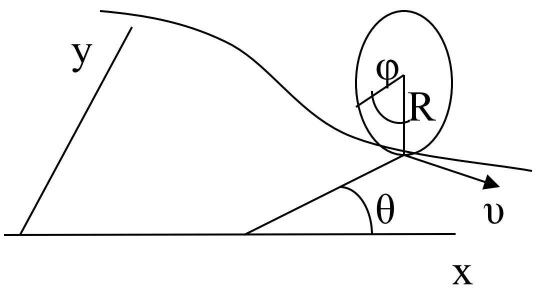
(α) Σώμα κινείται στην επιφάνεια σφαίρας υπό την επίδραση της βαρύτητας. Σε κάποιο σημείο χάνει επαφή με την επιφάνεια

(β) Τα μόρια ενός αερίου μέσα σε ένα δοχείο

(γ) Κύλιση χωρίς ολίσθηση ενός δίσκου πάνω σε μια επιφάνεια

Κύλιση χωρίς ολίσθηση δίσκου σε επιφάνεια

Παράδειγμα μη – ολόνομου περιορισμού



Η θέση του δίσκου μπορεί να προσδιοριστεί από τις συντεταγμένες φ,θ

Η θέση του κέντρου του δίσκου όταν προβάλεται στο xy επίπεδο είναι ίδια με τη θέση του σημείου που στιγμιαία είναι ακίνητο (σημείο επαφής) και έχει συντεταγμένες (x,y).

Οι εξισώσεις που ισχύουν είναι: $\upsilon = R\dot{\varphi}$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \upsilon \sin\theta = R\dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{y} &= -\upsilon\cos\theta = -R\dot{\varphi}\cos\theta \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\times dt}$$

$$dx = R\sin\theta d\varphi$$

$$dy = -R\cos\theta d\varphi$$

Αν οι 2 σχέσεις μπορούσαν να ολοκληρωθούν τότε θα είχαμε 2 εξισώσεις

$$f_1(x,\theta,\varphi) = 0, \qquad f_2(y,\theta,\varphi) = 0$$

Μπορεί να υποθέτατε ότι οι εξισώσεις μπορούν να λυθούν και να δώσουν $x(\theta,\varphi)$, $y(\theta,\varphi)$ Αλλά δεν ισχύει

Μαθηματική απόδειξη

- Αν για παράδειγμα η σχέση $dy = -R\cos\theta d\varphi$

 ήταν το διαφορικό μιας συνάρτησης $f_2(y,\theta,\varphi) = 0$ τότε θα είχαμε:

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}dy + \frac{\partial f_2}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}d\varphi = 0 \qquad (1)$$

Από την αρχική εξίσωση $dy = -R\cos\theta d\varphi \Rightarrow dy + R\cos\theta d\varphi = 0$

συμπεραίνουμε ότι $\frac{\partial f_2}{\partial \theta} = 0$ και ότι $\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = R\cos\theta$ (2)

Αλλά εν γένει για καλά ορισμένη συνάρτηση δεν παίζει ρόλο η σειρά με την οποία εφαρμόζουμε διαφορικά, δηλαδή θα πρέπει να ισχύει:

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial\theta\,\partial\varphi} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial\varphi\,\partial\theta}$$

Ωστόσο από την (2) έχουμε ότι $\frac{\partial^2 f_2}{\partial\varphi\partial\theta} = 0 \neq \frac{\partial^2 f_2}{\partial\theta\partial\varphi} = -R\sin\theta$

και επομένως δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση f_2

Γιατί όμως δεσμοί?

- Οι δεσμοί είναι μια ιδεατή κλασική έννοια
  - Στην QM τίποτα δεν είναι τέλεια περιορισμένο

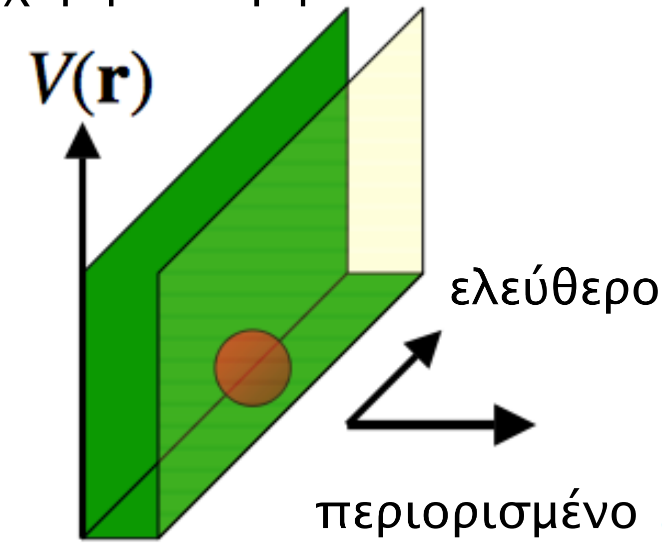
Αβεβαιότητα

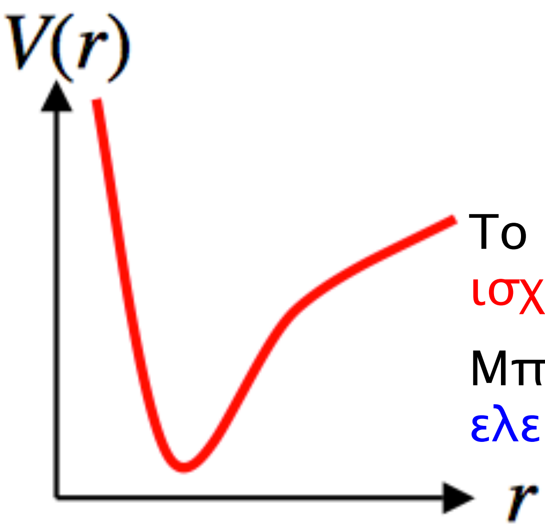
- Πόσο χρήσιμο είναι να εναλλάσουμε μεταξύ συντεταγμένων?

Περισσότερο
απ'ότι φαίνεται

Δεσμοί και δύναμη

- Ένας ολόνομος δεσμός είναι μια άπειρα ισχυρή δύναμη
  - ή ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού
- Η πραγματικότητα είναι κάτι ενδιάμεσο
  - Ηλεκτρόνιο του ατόμου του υδρογόνου





Το ηλεκτρόνιο υπόκειται σε μια ισχυρή ακτινική (δέσμια) δύναμη

Μπορεί ωστόσο να κινείται ελεύθερα γύρω από τον πυρήνα

Η δέσμια δύναμη κάνει την ακτινική διεύθυνση,r, ιδιαίτερη

Συμμετρία και δύναμη

- Χωρίς δυνάμεις, όλα τα συστήματα συντεταγμένων είναι ισοδύναμα
  - x–y–z είναι το απλούστερο
- Η παρουσία της δύναμης σπάει την συμμετρία
  - κάποια συστήματα συντεταγμένων «δουλεύουν» καλύτερα από άλλα
- Οι γενικευμένες συντεταγμένες προσφέρουν ένα φυσικό τρόπο για να περιγράψουν συστήματα με δυνάμεις
- Οι δεσμοί είναι ιδιαίτερες ιδιάζουσες τραβηγμένες περιπτώσεις
  - Ωστόσο ο φορμαλισμός που θα χρησιμοποιήσουμε περιέχει τρόπο για να τους λάβουμε υπ΄όψην

Εξισώσεις Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$$

Συνταγή

Κινητική ενέργεια

$$L(q,\dot{q},t)\equiv T-V$$

Δυναμική ενέργεια

Lagrangian

- Εκφράζουμε $\mathrm{L} = \mathrm{T} - \mathrm{V}$ ως προς τις γενικευμένες συντεταγμένες $\{q_j\}$, τις παραγώγους τους ως προς το χρόνο $\{\dot{q}_j\}$ και χρόνο t
- Το δυναμικό $\mathrm{V} = \mathrm{V(q,t)}$ πρέπει να υπάρχει
  - Όλες οι δυνάμεις πρέπει να 'ναι συντηρητικές

- Ένα γρήγορο παράδειγμα

Μονοδιάστατη κίνηση υλικού σημείου

- Το υλικό σημείο κινείται στον x-άξονα $x = x(t), \quad y = 0, \quad z = 0$
- Κινητική και δυναμική ενέργεια

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \qquad V = V(x) \qquad \Rightarrow \qquad L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{\partial\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)\right)}{\partial \dot{x}}\right] = \dfrac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} \\ \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = \dfrac{\partial\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)\right)}{\partial x} = -\dfrac{\partial V(x)}{\partial x} \end{array} \right\} \quad m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Ισοδύναμη με την εξίσωση του Newton δεδομένου ότι $F_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x}$