ΦΥΣ 331 – Χειμερινό Εξάμηνο 2015

Τελική Εξέταση

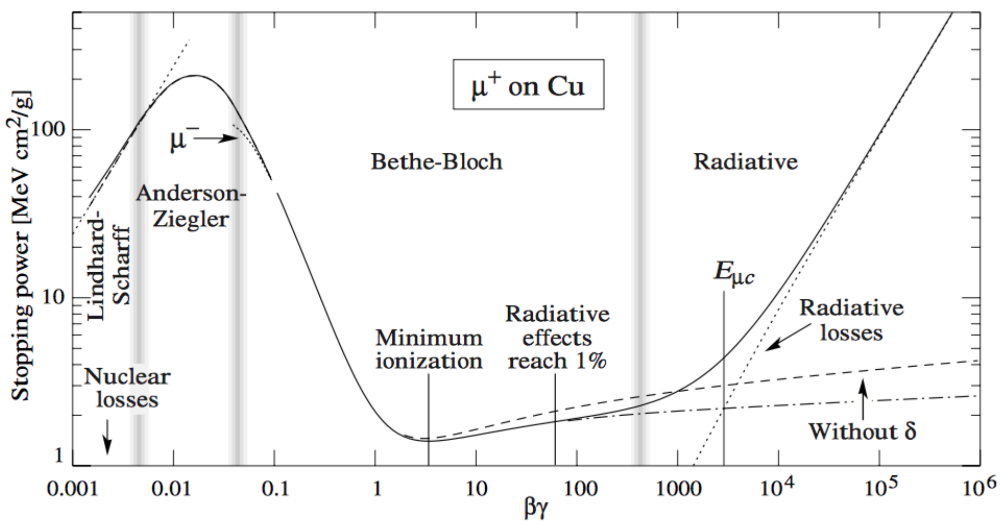
Σάββατο 12/10/2015 **Διάρκεια**: **10:00 – 13:00**

Σας δίνονται 5 ισοδύναμα προβλήματα και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλα. Σύνολο μονάδων 100.

Καλή Επιτυχία

1. **[20μ]**

Ένα πείραμα απαιτεί θετικά μιόνια (μ^+) με πολύ μικρή κινητική ενέργεια ώστε να μπορέσουν να σταματήσουν σε στόχο ώστε αυτό να βοηθήσει στην μέτρηση του χρόνου ζωής τους. Τα μιόνια παράγονται από την διάσπαση, $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$, εν πτήση των πιονίων της δέσμης. Η κινητική ενέργεια των πιονίων είναι 85 MeV. Πιόνια συγκεκριμένης ορμής και κατεύθυνσης επιλέγονται περνώντας την δέσμη μέσω ενός τσιμεντένιου εμποδίου το οποίο έχει μια τρύπα στο κέντρο του.



Σχήμα 1: Απώλεια ενέργειας σε MeV cm^2/g για φορτισμένο σωματίδιο καθώς κινείται μέσα σε υλικό, συναρτήσει του σχετικιστικού παράγοντα βγ.

(α) Υπολογίστε το μήκος διάσπασης των πιονίων στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Ο χρόνος ζωής των π^+ είναι 26ns και η μάζα τους είναι 139.6 MeV.
Η σύσταση της προσπίπτουσας στο πείραμα δέσμης βρέθηκε ότι ήταν 90% π^+ και 10% μ^+. Εκτιμήστε την απόσταση της πειράματος από το σημείο παραγωγής των πιονίων. Θεωρήστε ότι η ταχύτητα του φωτός είναι 2.998 x 10^8m/s. **[4μ]**

(β) Υπολογίστε τις ενέργειες των νετρίνο και των μιονίων στο σύστημα αναφοράς του πιονίου. Υποθέστε ότι τα νετρίνο έχουν μηδενική μάζα και ότι η μάζα των μιονίων είναι $m_\mu = 105.7\,MeV$. **[4μ]**

(γ) Υπολογίστε τη μέγιστη και ελάχιστη κινητική ενέργεια των μιονίων στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. **[4μ]**

(**δ**) Υπολογίστε τη μέγιστη γωνία (μετρούμενη ως προς τη διεύθυνση της δέσμης) των διασπώμενων μιονίων στο σύστημα αναφορας του εργαστηρίου. [**4μ**]

(**ε**) Ένα κιβώτιο από άνθρακα μήκους 30cm τοποθετείται στην διεύθυνση της προσπίπτουσας δέσμης πριν από τον ανιχνευτή του πειράματος. Το κουτί αυτό σταματά πιόνια, έτσι ώστε μια πολύ καθαρή δέσμη μιονίων να προσπίπτει στο στόχο που βρίσκεται μετά από το κιβώτιο, κατά μήκος της διεύθυνσης της δέσμης.

Χρησιμοποιήστε το σχήμα 1, υποθέτοντας ότι τα σωματίδια χάνουν ενέργεια μόνο μέσω ιονισμού, για να δείξετε ότι τα μιόνια της μέγιστης ενέργειας μπορούν να διαπεράσουν το κουτί του άνθρακα αλλά τα πιόνια σταματούν στο κιβώτιο αυτό. Θεωρείστε την πυκνότητα του άνθρακα, $d_C = 2.27 g / cm^3$. [**4μ**]

(α) $E_{\pi^+} = 85 + 139.6 \Rightarrow E_{\pi^+} = 224.6\,MeV$

Επομένως ο παράγοντας $\gamma = \frac{E_{\pi^+}}{m_{\pi^+}} = \frac{224.6}{139.6} \Rightarrow \boxed{\gamma = 1.609}$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \Rightarrow \gamma^2(1-\beta^2) = 1 \Rightarrow 1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \beta^2 = 1-\frac{1}{\gamma^2} \Rightarrow \boxed{\beta = 0.7834}$

Επομένως θα έχαμε: $\beta\gamma = 1.609 * 0.7834 \Rightarrow \boxed{\beta\gamma = 1.260} \Rightarrow$

η απόσταση που διανύει το π^+ πριν διασπαστεί είναι: $\ell_{\pi^+} = \beta\gamma c\tau \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell_{\pi^+} = 1.260 * 2.998 * 10^8 * 26 * 10^{-9} \Rightarrow \ell_{\pi^+} = 98 \cdot 10^{-1} \Rightarrow \boxed{\ell_{\pi^+} = 9.8m}$

Αλλά $N_I = N_0 e^{-t/\tau_{Lab}} \Rightarrow \frac{N_I}{N_0} = e^{-t/\tau_{Lab}} \Rightarrow \ln\left(\frac{N_I}{N_0}\right) = -\frac{t}{\tau_{Lab}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(0.9) = -\frac{t}{\tau_{Lab}} \Rightarrow \cancel{-}0.1054 = \cancel{-}\frac{t}{\tau_{Lab}} \Rightarrow 0.1054 = \frac{t\beta c}{\beta c \tau_{Lab}} \Rightarrow 0.1054 = \frac{t\beta c}{\beta c\gamma\tau} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0.1054 = \frac{D}{\ell_{\pi^+}} \Rightarrow D = 0.1054 * \ell_{\pi^+} \Rightarrow D = 0.1054 * 9.8 \Rightarrow \boxed{D = 1.035m}$

(β) $P_\pi = P_\nu + P_\mu \Rightarrow (P_\pi - P_\nu)^2 = P_\mu^2 \Rightarrow m_\pi^2 + \cancel{m_\nu^2}^{\,0} - 2\vec{P}_\pi \cdot \vec{P}_\nu = m_\mu^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m_\pi^2 - 2\left(E_\pi E_\nu - \cancel{\vec{p}_\pi} \cdot \vec{p}_\nu\right) = m_\mu^2 \Rightarrow m_\pi^2 - 2\left(E_\pi E_\nu - 0\right) = m_\mu^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_\pi^2 - 2E_\nu m_\pi = m_\mu^2 \Rightarrow E_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} = \frac{0.1396^2 - 0.1057^2}{2*0.1396} \Rightarrow \boxed{E_\nu = 29.78\,MeV}$$

Στο σύστημα αναφοράς του πιονίου, το μιόνιο και το νετρίνο έχουν την ίδια ορμή σε μέτρο και αντίθετη φορά. Από την στιγμή που το νετρίνο έχει μηδενική μάζα θα έχουμε $E_\nu = |\vec{P}_\nu|$, οπότε $|\vec{P}_\mu| = |\vec{P}_\nu| = E_\nu = 29.78\,MeV \Rightarrow E_\mu = \sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_\mu = \sqrt{29.78^2 + 105.7^2} \Rightarrow \boxed{E_\mu = 109.8\,MeV}$$

(γ) Για να έχουμε μέγιστη κινητική ενέργεια τα μιόνια θα πρέπει να είναι στην διεύθυνση του πιονίου, ενώ για την ελάχιστη κινητική ενέργεια, τα μιόνια θα πρέπει να είναι στην αντίθετη κατεύθυνση από αυτή της κίνησης των πιονίων.

$$E_\mu^{Lab} = \gamma\left(E_\mu + \beta \vec{P}_\mu\right) \Rightarrow E_\mu^{Lab-max} = \gamma\left(E_\mu + \beta P_\mu\right) = 1.609\left(109.8 + 0.7834*29.78\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_\mu^{Lab-max} = 214.2\,MeV}$$

$$E_\mu^{Lab-min} = \gamma\left(E_\mu - \beta P_\mu\right) = 1.609\left(109.8 - 0.7834*29.78\right) \Rightarrow \boxed{E_\mu^{lab-min} = 139.1\,MeV}$$

Επομένως η $KE^{min} = E^{Lab-min} - m_\mu = 139.1 - 105.7 \Rightarrow \boxed{KE^{min} = 33.4\,MeV}$

ενώ για $KE^{max} = E^{Lab-max} - m_\mu = 214.2 - 105.7 \Rightarrow \boxed{KE^{max} = 108.5\,MeV}$

(δ) Έστω Θ_{CM} και p^μ_{CM} η γωνία και το διάνυσμα της 4-ορμής του μιονίου, στο σύστημα αναφοράς του πιονίου. Έστω Θ_{Lab} και P^μ_{Lab} οι αντίστοιχες ποσότητες στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.

$P^0_{Lab} = \gamma(p^0_{CM} + \beta \vec{p}_{CM}) = \gamma p^0_{CM} + \beta\gamma p_{CM}\cos\Theta_{CM}$ ενώ $p^2_{Lab} = p^2_{CM} = p\sin\Theta$

$P^1_{Lab} = \gamma P^1_{CM} + \beta\gamma p^0_{CM} = \gamma P_{CM}\cos\Theta_{CM} + \beta\gamma p^0_{CM}$

Από τις τελευταίες αυτές σχέσεις και το γεγονός ότι $\tan\Theta_{Lab} = \frac{P^2_{Lab}}{P^1_{Lab}}$ θα έχουμε:

$$\tan\Theta_{Lab} = \frac{P_{CM}\sin\Theta}{\gamma P_{CM}\cos\Theta_{CM} + \beta\gamma P^0_{CM}} \Rightarrow \boxed{\tan\Theta_{Lab} = \frac{\sin\Theta_{CM}}{\gamma\cos\Theta_{CM} + \frac{P^0_{CM}}{P_{CM}}\beta\gamma}}$$

Για να βρούμε την μέγιστη γωνία, διαφορίζουμε την παραπάνω σχέση οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\cos\Theta_{CM}\left[\gamma\cos\Theta_{CM} + \frac{P^0_{CM}\beta\gamma}{P_{CM}}\right] - \gamma\sin\Theta_{CM}(-\sin\Theta_{CM})}{\gamma^2\left(\cos\Theta_{CM}+\frac{P^0_{CM}}{P_{CM}}\beta\right)^2} = 0 \Rightarrow \frac{\cancel{\gamma}\cos^2\Theta_{CM} + \cancel{\gamma}\sin^2\Theta_{CM} + \frac{P^0_{CM}\beta\cancel{\gamma}}{P_{CM}}\cos\Theta_{CM}}{\gamma^{\cancel{2}}\left(\cos\Theta_{CM}+\frac{P^0_{CM}}{P_{CM}}\beta\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1+\frac{P^0_{CM}}{P_{CM}}\beta\cos\Theta_{CM}}{\gamma\left(\cos\Theta_{CM}+\frac{P^0_{CM}}{P_{CM}}\beta\right)^2} = 0 \Rightarrow \frac{P^0_{CM}}{P_{CM}}\beta\cos\Theta^{max}_{CM} = -1 \Rightarrow \boxed{\cos\Theta^{max}_{CM} = -\frac{P_{CM}}{P^0_{CM}\beta}}$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση, θα πάρουμε $\cos\Theta^{max}_{CM} = -\frac{29.78}{0.7834*109.8} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\Theta^{max}_{CM} = -0.3462 \Rightarrow \boxed{\Theta^{max}_{CM} = 110.26^\circ}$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση της $\tan\Theta_{Lab}$ δίνει: $\tan\Theta^{max}_{Lab} = \frac{\sin(110.26^\circ)}{1.609*\cos(110.26^\circ)+\frac{109.8}{29.78}1.26} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \tan\Theta^{max}_{Lab} = \frac{0.9382}{4.0886} \Rightarrow \tan\Theta^{max}_{Lab} = 0.2295 \Rightarrow \Theta^{max}_{Lab} = 12.95^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Theta_{Lab} \le 12.95^\circ}$$

(ε) Η απώλεια ενέργειας εξαρτάται από το $\beta\gamma$. Επομένως χρειαζόμαστε το $\beta\gamma$ για τα πιόνια και τα μιόνια της μέγιστης ενέργειας.

Έχουμε υπολογίσει νωρίτερα ότι $(\beta\gamma)_\pi = 1.260$ ενώ $(\beta\gamma)_\mu = \frac{\sqrt{214.2^2-105.7^2}}{105.7} = 1.763$

Παρατηρώντας το σχήμα, βλέπουμε ότι σωματίδια με $\beta\gamma$ στην περιοχή $1.0 \div 5.0$ χάνουν περίπου $1.5\,MeV cm^2/g$. Σαν αποτέλεσμα η ενέργεια που χάνεται λόγω ιονισμού στον άνθρακα θα είναι: $\frac{dE}{dx} = 1.5\frac{cm^2}{g}MeV * 2.27\,g/cm^3 \Rightarrow \boxed{\frac{dE}{dx} = 3.4\,MeV/cm}$

Η απώλεια ενέργειας στο κιβώτιο πάχους 30cm θα είναι

$dE = \frac{dE}{dx} * dx = 3.4 * 30 \Rightarrow \boxed{dE = 102\,MeV}$ Άρα τα μιόνια με $KE^{max} = 108.5\,MeV$ θα περάσουν ενώ τα πιόνια έχουν $KE = 85\,MeV$ και θα σταματούν

2. **[20μ]**

Δεδομένου του περιεχομένου σε quarks των σωματιδίων που αναφέρονται $\Lambda(uds)$, $K^0(\overline{s}d)$, $K^+(u\overline{s})$ και $\pi^+(u\overline{d})$, να σχεδιάσετε τα διαγράμματα Feynman των ακόλουθων διεργασιών (θα πρέπει να δείξετε ποια η διεύθυνση του χρόνου στις γραμμές σωματιδίων):

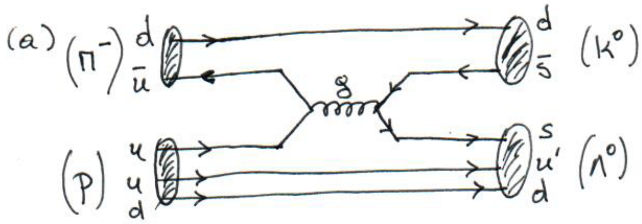
(α) Σκέδαση $\pi^- p \to \Lambda K^0$ χρησιμοποιώντας gluons αλλά όχι W's. **[4μ]**

(β) Διάσπαση $\Lambda \to n\pi^0$. **[3μ]**

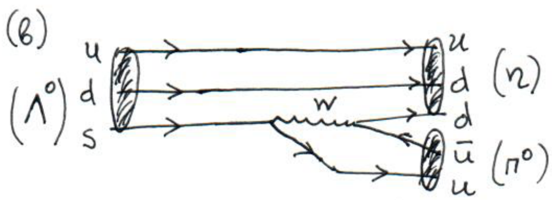
(γ) Διάσπαση $K^+ \to \pi^+\pi^0$ **[3μ]**

(δ) Διάσπαση $\tau^+ \to \pi^+\nu_\tau$ **[4μ]**

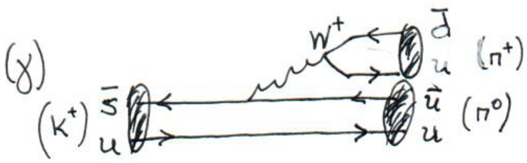
(ε) Διάσπαση $K^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0$ **[6μ]**



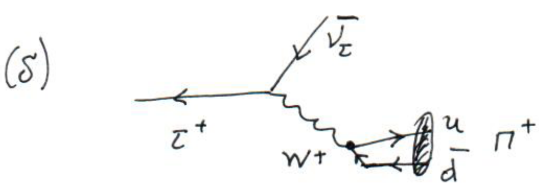
$\pi^- + p \to K^0 + \Lambda^0$



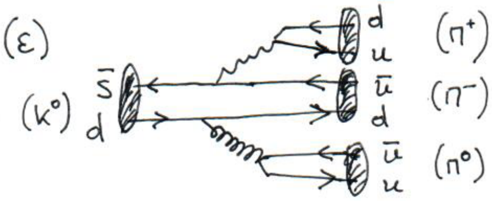
$\Lambda^0 \to n\pi^0$



$K^+ \to \pi^+\pi^0$



$\tau^+ \to \pi^+\bar{\nu}_\tau$



$K^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0$

3. [**20μ**]

(**α**) Σχεδιάστε το ή τα διάγραμματα Feynman πρώτης τάξης (leading order) για την σκέδαση $A + A \to C + C$ του μοντέλου ABC που συζητήσαμε στις διαλέξεις. Μη ξεχάσετε να σημειώσετε την διεύθυνση του χρόνου. [**5μ**]

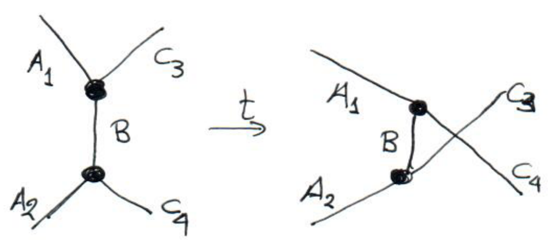
(**β**) Ποιο είναι το πλάτος μετάβασης $|M|^2$ συναρτήσει των 4-ορμών; [**4μ**]

(**γ**) Ποια είναι η διαφορική ενεργός διατομή σκέδασης, $\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$, συναρτήσει των 4-ορμών στο σύστημα κέντρου μάζας; [**3μ**]

(**δ**) Ποια είναι η διαφορική ενεργός διατομής σκέδασης, $\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$, συναρτήσει της γωνίας σκέδασης στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας, υποθέτοντας ότι το A και C έχουν μάζα M και το B έχει μηδενική μάζα; [**5μ**]

(**ε**) Σχεδιάστε το ή τα πρώτης τάξης διαγράμματα Feynman για την σκέδαση $A + A \to A + A$. [**3μ**]

(α) Θεωρώντας το χρόνο προς τα δεξιά, υπάρχουν δυό διαγράμματα Feynman 1ης τάξης



(β) Το αριστερό διάγραμμα είναι: $M_1 = i\,(ig)\,\dfrac{1}{q_1^2 - m_B^2}\,(ig) = \dfrac{g^2}{q_1^2 - m_B^2}$, $q_1 = p_1 - p_3$

Το δεξί διάγραμμα είναι: $M_2 = i\,(ig)\,\dfrac{1}{q_2^2 - m_B^2}\,(ig) = \dfrac{g^2}{q_2^2 - m_B^2}$ με $q_2 = p_1 - p_4$

Το τετράγωνο του αθροίσματος θα είναι: $|M|^2 = \left[\dfrac{g^2}{(p_1 - p_3)^2 - m_B^2} + \dfrac{g^2}{(p_1 - p_4)^2 - m_B^2}\right]^2$ (Α)

Εφόσον $(p_1 - p_3)^2 = (p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 \cdot p_3) = (m_A^2 + m_C^2 - 2p_1 \cdot p_3)$ (Β)

$(p_1 - p_4)^2 = (p_1^2 + p_4^2 - 2p_1 \cdot p_4) = (m_A^2 + m_C^2 - 2p_1 \cdot p_4)$ (Γ)

Αντικαθιστούμε το (Β) κ (Γ) στην (Α) οπότε θα πάρουμε:

$$\boxed{|M|^2 = \left[\frac{g^2}{m_A^2 + m_C^2 - 2p_1 \cdot p_3 - m_B^2} + \frac{g^2}{m_A^2 + m_C^2 - m_B^2 - 2p_1 \cdot p_4}\right]^2} \quad (\Delta)$$

(γ) Η σχέση που δίνει την διαφορική ενεργό διατομή σκέδασης στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας είναι: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{S}\left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{|M|^2}{E_1+E_2}\frac{P_F}{P_I}$

Ο παράγοντας των συνδυασμών είναι: $S=2$ γιατί τα σωματίδια της τελικής κατάστασης είναι πανομοιότυπα. Στο σύστημα του κέντρου μάζας, $E_1=E_2$ επειδή $m_1=m_2$ και $P_1=-P_2$. Ο παράγοντας $\frac{P_F}{P_I}\cong 1$ αλλά η ακριβής τιμή εξαρτάται από τις τιμές των μαζών και την ενέργεια του κέντρου μάζας.

Επομένως: $\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{|M|^2}{4E_1}\frac{P_F}{P_I}}$ (Ε)

(δ) Με βάση τις τιμές των μαζών που δίνονται, έχουμε: $m_A^2+m_C^2-m_B^2 = 2m^2-0=2m^2$

Στο κέντρο μάζας θα έχουμε επίσης: $|\vec{p}_1|=|\vec{p}_2|=|\vec{p}_3|=|\vec{p}_4| = P_I = P_F = P$.

Αφού οι μάζες και οι ορμές είναι ίσες, τότε $E_1=E_2=E_3=E_4=E=\sqrt{p^2+m^2}$

Επομένως $\underset{\rightarrow}{P_1}\cdot\underset{\rightarrow}{P_3} = E_1E_3-\vec{p}_1\cdot\vec{p}_3 = E^2-p^2\cos\Theta_{13}$

$\underset{\rightarrow}{P_1}\cdot\underset{\rightarrow}{P_4} = E_1E_4-\vec{p}_1\cdot\vec{p}_4 = E^2-p^2\cos\Theta_{14}$ αλλά στο CM $\vec{p}_4=-\vec{p}_3 \Rightarrow$ $\Rightarrow \boxed{\cos\Theta_{14}=-\cos\Theta_{13}}$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στις εξισώσεις (Β) & (Γ) από το (β) υποερώτημα έχουμε

$$\left(\underset{\rightarrow}{P_1}-\underset{\rightarrow}{P_3}\right)^2 = m_A^2+m_C^2-2\underset{\rightarrow}{P_1}\cdot\underset{\rightarrow}{P_3} = 2m^2-2E^2+2p^2\cos\Theta_{13} = -2p^2+2p^2\cos\Theta_{13}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\underset{\rightarrow}{P_1}-\underset{\rightarrow}{P_3}\right)^2 = -2p^2(1-\cos\Theta_{13})$$

$$\left(\underset{\rightarrow}{P_1}-\underset{\rightarrow}{P_4}\right)^2 = m_A^2+m_C^2-2\underset{\rightarrow}{P_1}\cdot\underset{\rightarrow}{P_4} = 2m^2-2E^2+2p^2\cos\Theta_{14} = -2p^2+2p^2\cos\Theta_{14}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\underset{\rightarrow}{P_1}-\underset{\rightarrow}{P}\right)^2 = -2p^2(1-\cos\Theta_{14}) \Rightarrow \left(\underset{\rightarrow}{P_1}-\underset{\rightarrow}{P_4}\right)^2 = -2p^2(1+\cos\Theta_{13})$$

Επομένως το πλάτος πιθανότητας γράφεται:

$$|M|^2 = \left[\frac{g^2}{(\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2 - \cancel{m_B^2}^{\,\to 0}} + \frac{g^2}{(\vec{p}_1 - \vec{p}_4)^2 - \cancel{m_B^2}^{\,\to 0}} \right]^2 = \left[\frac{g^2}{-2p^2(1-\cos\theta_{13})} + \frac{g^2}{-2p^2(1+\cos\theta_{13})} \right]^2 \Rightarrow$$

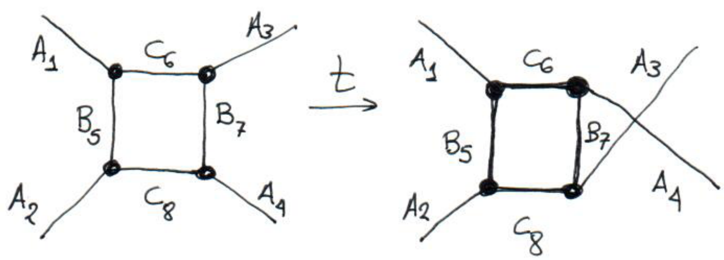
$$\Rightarrow |M|^2 = \frac{g^4}{4p^4} \left(\frac{1}{1-\cos\theta_{13}} + \frac{1}{1+\cos\theta_{13}} \right)^2 = \frac{g^4}{4p^4} \left(\frac{1+\cancel{\cos\theta_{13}}+1-\cancel{\cos\theta_{13}}}{1-\cos^2\theta_{13}} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |M|^2 = \frac{g^4}{\cancel{4} p^4} \left(\frac{\cancel{4}}{(1-\cos^2\theta_{13})^2} \right) = \frac{g^4}{p^4} \frac{1}{(1-\cos^2\theta_{13})^2} \Rightarrow \boxed{|M|^2 = \frac{g^4}{p^4} \frac{1}{\sin^4\theta_{13}}}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της διαφορικής ενεργού διατομής οπότε έχουμε από (Ε)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{g^4}{4E\, p^4 \sin^4\theta_{13}} \Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{1}{4E} \left(\frac{g}{p \sin\theta_{13}} \right)^4}$$

(ε) Τα διαγράμματα πρώτης τάξης είναι:



4. [**20μ**]

Το φορτισμένο πιόνιο, το οποίο έχει spin μηδέν και μάζα 139.6 MeV, μπορεί να διασπαστεί σε ένα ηλεκτρόνιο, μάζας 0.511MeV ή ένα μιόνιο μάζας 105.7 MeV, μέσω της διάσπασης $\pi^- \to l^- \bar{\nu}_l$, όπου l αναπαραστά το λεπτόνιο, ηλεκτρόνιο ή μιόνιο. Οι διασπάσεις αυτές έχουν ποσοστό διακλάδωσης 1.23x10^{-4} και 0.99988 σε ηλεκτρόνιο ή μιόνιο αντίστοιχα. Στα επόμενα θεωρήστε την μάζα των αντι-νετρίνο αμελητέα.

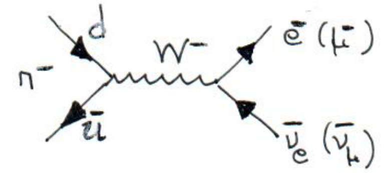
(**α**) Σχεδιάστε το διάγραμμα Feynman για την διάσπαση. [**2μ**]

(**β**) Ο χρυσός κανόνας του Fermi, δίνει ότι το μερικό εύρος, Γ_i, ενός σωματιδίου μάζας m, για να διασπαστεί στο κανάλι διάσπασης i, δίνεται από την σχέση: $\Gamma_i = \frac{|M_i|^2 \rho_i}{2m}$, όπου M_i είναι το πινακοστοιχείο της μετάβασης και ρ_i, είναι ο αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz φασικός χώρος. Εξηγήστε σύντομα την φυσική σημασία των όρων της εξίσωσης αυτής. [**4μ**]

(**γ**) Ο φασικός χώρος που είναι διαθέσιμος για την παραπάνω διάσπαση του πιονίου σε δεδομένο λεπτόνιο, δίνεται από την εξίσωση: $\rho_l = \frac{1}{8\pi} \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{m_\pi^2}$. Υπολογίστε τον λόγο των μέτρων των παραγόντων του φασικού χώρου για τις δυο διασπάσεις και σχολιάστε το αποτέλεσμα. [**4μ**]

(**δ**) Το αποτέλεσμα για το πινακοστοιχείο για την πιθανότητα των παραπάνω διασπάσεων είναι: $|M_i|^2 = 2G_F^2 f_\pi m_l^2 \left(m_\pi^2 - m_l^2\right)$ όπου G_F^2 είναι η σταθερά Fermi ενώ f_π είναι ο λεγόμενος παράγοντας μορφής του πιονίου (ηλεκτρικός/μαγνητικός). Βρείτε μια σχέση μεταξύ των επί μέρους ευρών διάσπασης για τις δυο αυτές διασπάσεις και σχολιάστε το αποτέλεσμά σας. [**3μ**]

(**ε**) Ένα αριστερόστροφο φερμιόνιο έχει συνιστώσες τόσο με αρνητική όσο και θετική ελικότητα, $\lambda = \pm 1$, με πλάτη $\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 \mp \frac{p}{E+m}\right)$ αντίστοιχα, όπου p και E είναι η ορμή και ενέργεια του φερμιονίου. Είναι γνωστό ότι το φορτισμένο ρεύμα των ασθενών αλληλεπιδράσεων συζεύγνυται μόνο με αριστερόστροφα φερμιόνια και με δεξιόστροφα αντιφερμιόνια. Χρησιμοποιείστε αυτά τα δεδομένα, καθώς και διατήρηση της στροφορμής για να σχεδιάσετε ένα διάγραμμα το οποίο να δείχνει τις ελικότητες του λεπτονίου και του νετρίνο στις διασπάσεις αυτές και εξηγήστε την επιλογή των ελικοτήτων που κάνατε. [**4μ**]

(**στ**) Από την εξίσωση του (**δ**) υποερωτήματος προκύπτει ότι ο ρυθμός διάσπασης μηδενίζεται όταν η μάζα του λεπτονίου προσεγγίζει το μηδέν. Εξηγήστε την παρατήρηση αυτή χρησιμοποιώντας το διάγραμμα που σχεδιάσατε στο υποερώτημα (**ε**) και εξηγήστε με τον τρόπο αυτό τον λόγο για τον οποίο η διάσπαση του πιονίου σε ηλεκτρόνιο είναι τόσο πολύ μικρή σε σχέση με την διάσπαση σε μιόνιο. [**3μ**] (α) 

(β) Η σχέση που δίνει το μερικό εύρος Γ_i, είναι $\Gamma_i = \dfrac{|M_i|^2 \rho_i}{2m}$

1. Το πινακοστοιχείο M_i περιγράφει την δυναμική, δηλαδή τη φυσική που περιγράφει την διεργασία, ως σταθερά σύζευξης.
2. ρ_i είναι ο φασικός χώρος που μετρά τις διαθέσιμες καταστάσεις στις οποίες μπορεί να διασπαστεί ένα σωματίδιο και εξαρτάται από την κινηματική της διάσπασης και δεν εξαρτάται από την αλληλεπίδραση.
3. Γ_i είναι μια μέτρηση της αβεβαιότητας της μάζας του ασταθούς σωματιδίου και $\Gamma_i = \dfrac{1}{\tau_i}$ όπου τ_i είναι ο χρόνος ζωής του σωματιδίου.

(γ) $\dfrac{\rho_{e^-}}{\rho_{\mu^-}} = \dfrac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2} \Rightarrow \dfrac{\rho_e}{\rho_\mu} = 2.34$. Επομένως αν η διαφορά στα ποσοστά διακλάδωσης οφειλόταν στους φασικούς παράγοντες, τότε το ποσοστό διακλάδωσης της διάσπασης σε ηλεκτρόνιο θα ήταν μεγαλύτερο από το αντίστοιχο σε μιόνιο.

Από τη στιγμή που δεν παρατηρείται αυτό το μεγάλο ποσοστό διακλάδωσης, η διαφορά πρέπει να οφείλεται στα πινακοστοιχεία.

(δ) $\dfrac{\Gamma_e}{\Gamma_\mu} = \dfrac{m_e^2 (m_\pi^2 - m_e^2)^2}{m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} \Rightarrow \dfrac{\Gamma_e}{\Gamma_\mu} = 1.28 \cdot 10^{-4}$ το οποίο είναι σε συμφωνία με τα δεδομένα.

(ε) Αν η διάσπαση περιγράφεται από ένα αριστερόστροφο ρεύμα, τότε θα είχαμε ότι:

1. Το πλάτος για ένα σωματίδιο να έχει αρνητική ελικότητα $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{P}{E+m}\right) \simeq 1$ στο ρελατιβιστικό όριο και 1 για το νετρίνο

2. Το πλάτος για ένα σωματίδιο να έχει θετική ελικότητα είναι:

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{P}{E+m}\right) \simeq 0 \quad \text{στο σχετικιστικό όριο}$$

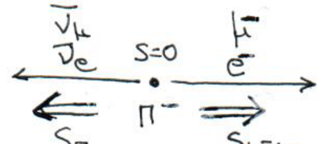
$$\equiv 0 \quad \text{για τα νετρίνο.}$$

Επομένως τα σωματίδια που συμμετέχουν στο φορτισμένο ρεύμα των ασθενών αλληλεπιδράσεων είναι αριστερόστροφα.

Σαν αποτέλεσμα, τα αντισωματίδια θα πρέπει να είναι δεξιόστροφα.

Δηλαδή ο spinor $\bar{v}$ είναι ένα δεξιόστροφο αντικείμενο.

Επομένως θα έχουμε:



Από την στιγμή που το π^- έχει spin 0 τότε θα πρέπει το λεπτόνιο το οποίο έχει μάζα να εξαναγκάζεται στην κατάσταση της λάθος ελικότητας ώστε η τελική κατάσταση να έχει $J=0=S_{\pi^-}$

(στ) Από την στιγμή που τα μ^-, e^- τίθενται στην λάθος κατάσταση ελικότητας το πλάτος αυτής θα είναι: $1-\frac{P}{E+m} \sim \frac{m}{E} \underset{m\to 0}{\to} 0$

Επομένως αν η μάζα είναι 0 τότε το πλάτος μετάβασης είναι 0.

Από την στιγμή που η μάζα του ηλεκτρονίου είναι $m_e \simeq 0.511$ MeV και η μάζα του μιονίου είναι $m_{\mu^-} \simeq 106$ MeV (200 φορές μεγαλύτερη) το κανάλι διάσπασης σε ηλεκτρόνιο είναι περισσότερο υποβαθμισμένο σε σχέση με αυτό της διάσπασης σε μιόνιο.

5. **[20μ]**

Θεωρήστε τον χειραλικό τελεστή $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ και τον τελεστή ελικότητας $\vec{\Sigma}\cdot\hat{p}$, όπου $\vec{\Sigma}$, ο τελεστής του σπιν, που δίνεται από την σχέση $\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$ ενώ $\hat{p} = \dfrac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος της διεύθυνσης της κίνησης ενός φερμιονίου με σπιν ½.

Η Hamiltonian Dirac δίνεται από την σχέση: $H = \vec{a}\cdot\vec{p} + \beta m$, όπου:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ και $\beta = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix}$ ενώ ορίζουμε τους $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$

με τις ιδιότητες: $\left\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\right\} = 2g^{\mu\nu}$ και $\left\{\gamma^\mu, \gamma_5\right\} = 0$. Οι πίνακες $\vec{\sigma}$ είναι οι πίνακες Pauli.

(**α**) Δείξτε ότι με αυτή την Hamiltonian, η ελικότητα διατηρείται πάντοτε σε κάποιο δεδομένο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. [**3μ**]

(**β**) Δείξτε ότι η χειραλικότητα διατηρείται μόνο στο σχετικιστικό όριο όταν η μάζα του φερμιονίου είναι είτε ακριβώς μηδέν ή μπορεί να αγνοηθεί. [**3μ**]

(**γ**) Θεωρήστε τις λύσεις για θετική και αρνητική ενέργεια της εξίσωσης Dirac:

$\Psi^{(1,2)}(x) = N \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \end{pmatrix} \chi^{\pm} e^{-ip^\mu x_\mu}$ (Λύσεις θετικής ενέργειας)

$\Psi^{(3,4)}(x) = N \begin{pmatrix} \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E-m} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \chi^{\pm} e^{-ip^\mu x_\mu}$ (Λύσεις αρνητικής ενέργειας)

όπου $\chi^+ = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ και $\chi^- = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Δείξτε ότι είναι ιδιοδιανύσματα του τελεστή ελικότητας $\vec{\Sigma}\cdot\hat{p}$. Δείξτε δηλαδή ότι ισχύει $\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{p}\right)\Psi = \lambda\Psi$ με ιδιοτιμές $\lambda = \pm 1$. [**6μ**]

(**δ**) Στο εξαιρετικά σχετικιστικό όριο, η εξίσωση Dirac γράφεται: $\gamma^\mu \partial_\mu \Psi(x) = 0$. Θεωρήστε την γενική λύση της εξίσωσης του Dirac $\Psi(x) = u(\vec{p})e^{-ip_\mu x^\mu}$ και δείξτε ότι στην περίπτωση αυτή, ο τελεστής χειραλικότητας είναι ίσος με τον τελεστή ελικότητας για τις λύσεις θετικής ενέργειας, $p^0 = E > 0$, δηλαδή ισχύει ότι: $\gamma_5\Psi = \left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{p}\right)\Psi$, ενώ για τις λύσεις αρνητικής ενέργειας, $p^0 = E < 0$, δείξτε ότι: $\gamma_5\Psi = -\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{p}\right)\Psi$. [**4μ**] (**ε**) Χρησιμοποιείστε την απάντηση από το προηγούμενο ερώτημα για να δείξετε ότι στο εξαιρετικά σχετικιστικό όριο, ο spinor $\Psi_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\Psi$ είναι ένας καθαρά αρνητικής ελικότητας spinor, δηλαδή $\lambda = -1$ αν ο Ψ είναι ιδιοκατάσταση θετικής ενέργειας και $\Psi_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\Psi$ είναι ένας καθαρά θετικής ελικότητας spinor, δηλαδή $\lambda = +1$ αν ο Ψ είναι ιδιοκατάσταση αρνητικής ενέργειας. [**4μ**]

<u>Υπόδειξη</u>: Γράψτε τον Ψ με την μορφή $\Psi = \Psi(\uparrow) + \Psi(\downarrow)$ όπου $\Psi(\uparrow)$ και $\Psi(\downarrow)$ είναι οι ιδιοκαταστάσεις με θετικής και αρνητικής ελικότητας.

(a) $H = \vec{\sigma}\cdot\vec{p} + m\beta = \vec{p}\cdot\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \Rightarrow H = \begin{pmatrix} m & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -m \end{pmatrix}$

Ξέρουμε ότι η ελικότητα ορίζεται από τον τελεστή: $\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\hat{\vec{p}} \end{pmatrix}$

$$[H, \vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{p}}] = \begin{pmatrix} m & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -m \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [H, \vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{p}}] = \begin{pmatrix} m\vec{\sigma}\cdot\hat{p} & (\vec{\sigma}\cdot\hat{p})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) \\ (\vec{\sigma}\cdot\hat{p})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) & -m\vec{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m\vec{\sigma}\cdot\hat{p} & (\vec{\sigma}\cdot\hat{p})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) \\ (\vec{\sigma}\cdot\hat{p})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) & -m\vec{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{[H, \vec{\Sigma}\cdot\hat{p}] = 0} \Rightarrow$ Η ελικότητα διατηρείται πάντοτε ως προς δεδομένο σύστημα αναφοράς.

(b) $[H, \gamma_5] = \begin{pmatrix} m & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -m \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow [H, \gamma_5] = \begin{pmatrix} \cancel{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}} & m \\ -m & \cancel{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cancel{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}} & -m \\ m & \cancel{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}} \end{pmatrix} \Rightarrow [H, \gamma_5] = \begin{pmatrix} 0 & 2m \\ -2m & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{[H, \gamma_5] = 2m\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow$ Η χειραλικότητα διατηρείται μόνο αν η μάζα του σωματιδίου είναι μηδέν (γ) Οι λύσεις της θετικής ενέργειας:

$$\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{p}\right)\psi = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \end{pmatrix} \chi^{\pm} e^{-ipx} \Rightarrow \text{ όπου } p^0>0$$

$$\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{p}\right)\psi = N \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\hat{p}\,\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \end{pmatrix} \chi^{\pm} e^{-ipx} \Rightarrow \left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{p}\right)\psi = N \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \end{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\hat{p}\,\chi^{\pm} e^{-ipx} \Bigg\} \Rightarrow$$

Επιλέγουμε $\hat{p}=\hat{z}_0$ οπότε $\vec{\sigma}\cdot\hat{p}\,\chi^{\pm} = \pm\chi^{\pm}$

$$\Rightarrow \left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{p}\right)\psi = \pm \underbrace{N \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \end{pmatrix} \chi^{\pm} e^{-ipx}}_{\psi} \Rightarrow \boxed{\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{p}\right)\psi = \pm\psi} \quad \underline{E>0}$$

Για τις λύσεις της αρνητικής ενέργειας θα έχουμε:

$$\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{p}\right)\psi = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E-m} \\ 1 \end{pmatrix} \chi^{\pm} e^{-ipx} \xRightarrow{p^0<0}$$

$$\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{p}\right)\psi = N \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\hat{p}\,\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E-m} \\ \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix} \chi^{\pm} e^{-ipx} \Rightarrow \left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{p}\right)\psi = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E-m} \\ 1 \end{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\hat{p}\,\chi^{\pm} e^{-ipx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\vec{\Sigma}\cdot\hat{p}\right)\psi = \pm\psi} \text{ για } E<0.$$

Αν $\hat{p}$ δεν ήταν $\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ το παραπάνω δεν θα μπορούσε να ισχύει.

(δ) Έχουμε ότι:
$$\left.\begin{array}{l} \gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi = 0 \\ \psi = u(\vec{p})e^{-ipx} \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma^{\mu}p_{\mu}\psi = 0 \Rightarrow \left(\gamma^0 p^0 - \vec{\gamma}\cdot\vec{p}\right)\psi(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma^0 p^0 \psi = \vec{\gamma}\cdot\vec{p}\,\psi \Rightarrow \gamma_5\gamma^0\gamma^0 p^0\psi = \gamma_5\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{p}\,\psi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^0\gamma_5\psi = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & 0 \end{pmatrix}\psi \Rightarrow p^0\gamma_5\psi = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & 0 \end{pmatrix}\psi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^0\gamma_5\psi = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \end{pmatrix}\psi \Rightarrow \boxed{p^0\gamma_5\psi = \left(\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\right)\psi} \quad (1)$$

Αν $p^0 > 0$ τότε $\boxed{\gamma_5 \psi = (\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}) \psi}$

Αν $p^0 < 0$ τότε $\gamma_5 \psi = \dfrac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{-|p^0|} \psi \Rightarrow \boxed{\gamma_5 \psi = -(\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}) \psi}$

(ε) Για σωματίδια έχουμε:

$$\psi_L = \frac{1-\gamma_5}{2} \psi = \frac{1-\gamma_5}{2} \left(a \psi(\uparrow) + b \psi(\downarrow) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_L = a \frac{1-\gamma_5}{2} \psi(\uparrow) + b \frac{1-\gamma_5}{2} \psi(\downarrow) \Rightarrow$$ αν η μάζα $m=0$ τότε από το προηγούμενο υποερώτημα

$$\Rightarrow \psi_L = a \frac{1 - \vec{\Sigma} \cdot \hat{p}}{2} \psi(\uparrow) + b \frac{1 - \vec{\Sigma} \cdot \hat{p}}{2} \psi(\downarrow) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_L = a \frac{1-1}{2} \psi(\uparrow) + b \frac{1-(-1)}{2} \psi(\downarrow) \Rightarrow \boxed{\psi_L = b \psi(\downarrow)}$$ καθαρά αρνητική ελικότητα

Για αντισωματίδια (λύσεις αρνητικής ενέργειας)

$$\psi_L = \frac{1-\gamma_5}{2} \psi = \frac{1-\gamma_5}{2} \left(a \psi(\downarrow) + b \psi(\uparrow) \right) = a \frac{1-\gamma_5}{2} \psi(\downarrow) + b \frac{1-\gamma_5}{2} \psi(\uparrow) \Rightarrow$$

$$\overset{m=0}{\Rightarrow} \psi_L = a \frac{1 + \vec{\Sigma} \cdot \hat{p}}{2} \psi(\downarrow) + b \frac{1 + \vec{\Sigma} \cdot \hat{p}}{2} \psi(\uparrow) = a \frac{1-1}{2} \psi(\downarrow) + b \frac{1+1}{2} \psi(\uparrow) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi_L = b \psi(\uparrow)}$$ καθαρά θετική ελικότητα