ΦΥΣ 331 – Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων

Εργασία 7η **Επιστροφή: Παρασκευή 02.12.22**

1. Είδαμε ότι χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση δ του Dirac είναι ένας καλό τρόπος για να εφαρμόσουμε περιορισμούς (διατήρηση ενέργειας και ορμής). Χρησιμοποιήστε το ακόλουθο παράδειγμα για να δουλέψετε. Η ποσότητα x κατανέμεται σύμφωνα με $f(x) = 1$ για τιμές του x στο διάστημα $0 < x < 1$ ενώ είναι 0 οπουδήποτε αλλού. Θεωρήστε ότι η ποσότητα y είναι κατανεμημένη σύμφωνα με τη σχέση $g(y) = 2y$ για y στο διάστημα $0 < y < 1$ και είναι 0 για οποιαδήποτε άλλη τιμή του y. Βρείτε πως κατανέμεται η ποσότητα $z = x + y$. Μπορείτε να το προσδιορίσετε λύνοντας την εξίσωση:

$$h(z) = \int dx f(x) \int dy g(y) \delta\big(z - (x + y)\big)$$

όπου τα ολοκληρώματα είναι ως όλες τις τιμές του x και του y και η δ-συνάρτηση εφαρμόζει την σχέση μεταξύ των x, y και z.

$$h(z) = \int dx f(x) \int dy g(y) \delta(z-(x+y))$$

$$= \int dx f(x) g(z-x)$$

$$= \int dx (1)[2(z-x)] \quad \text{άν } 0<x<1 \text{ και } 0<z-x<1$$

Επομένως $\max(0, z-1) < x < \min(1, z)$

Αν $0 < z < 1$, τότε:

$$h(z) = \int_0^z dx\, 2(z-x) = 2zx - z^2 \Big|_0^z = z^2$$

Αν $1 < z < 2$ τότε

$$h(z) = \int_{z-1}^1 dx\, 2(z-x) = 2zx - x^2 \Big|_{z-1}^1 = 2z - z^2$$

Επομένως: $h(z) = \begin{cases} z^2 & \text{όταν } 0<z<1 \\ 2z - z^2 & \text{όταν } 1<z<2 \\ 0 & \text{σε άλλη περίπτωση} \end{cases}$

2. Θεωρήστε την ελαστική σκέδαση $A + B \to A + B$ στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου (το σωματίδιο B είναι αρχικά ακίνητο) και υποθέστε ότι η αρχική ενέργεια E_1 του εισερχόμενου σωματιδίου A ικανοποιεί την εξίσωση $E_1 \ll m_B$ έτσι ώστε η ανάκρουση του στόχου μπορεί να αγνοηθεί. Θεωρήστε το μοντέλο ABC για τα παρακάτω.

(α) Χρησιμοποιήστε τον χρυσό κανόνα Fermi για σκέδαση, για να δείξετε ότι η διαφορική ενεργός διατομή δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(8\pi m_B)^2}$$

(β) Σχεδιάστε τα διαγράμματα χαμηλότερης τάξης για τη σκέδαση αυτή.

(γ) Υπολογίστε το πλάτος διάσπασης χρησιμοποιώντας τα κανόνες Feynman για το απλό μοντέλο ABC. Εκφράστε τα αποτελέσματά σας συναρτήσει των μεταβλητών Mandelstam *s, t* και *u,* όπου $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2$ και $u = (p_1 - p_4)^2$.

(δ) Συνδυάστε τα αποτελέσματά σας από τα προηγούμενα τρία ερωτήματα για να βρείτε την διαφορική ενεργό διατομή (στο όριο $E_1 \ll m_B$ και υποθέτοντας ότι m_A και m_C είναι πάρα πολύ μικρές σε σχέση με την μάζα του B, m_B.

(ε) Δείξτε ότι η ολική ενεργός διατομή με την συνθήκη που τέθηκε στο υπο-ερώτημα (δ) είναι:

$$\sigma = \frac{g^4}{4\pi m_B^6}$$

(α) Για σκέδαση $2 \to 2$ (δύο σωματίδια σε δύο σωματίδια) είδαμε στις διαλέξεις ότι:

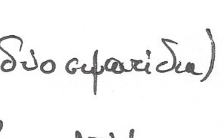
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2} \frac{S|\mathcal{M}|^2}{(E_1+E_2)^2} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|}$$ στο σύστημα αναφοράς του ΚΜ.

Στο σύστημα αναφοράς του ΚΜ, εφόσον $m_B \gg E_1$, τότε το σωματίδιο B κινείται πολύ αργά πριν και μετά τη σκέδαση. Σαν αποτέλεσμα, η παραπάνω έκφραση για την $d\sigma/d\Omega$ ισχύει για το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.

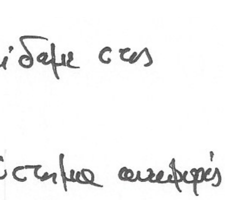
Στην περίπτωσή μας $S=1$, $E_1 \ll m_B$ οπότε $E_1 + E_2 \simeq m_B$ και $|\vec{p}_f| = |\vec{p}_i|$

Επομένως η παραπάνω έκφραση παίρνει τη μορφή: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(8\pi m_B)^2}$

(β) Τα διαγράμματα χαμηλότερης τάξης είναι:

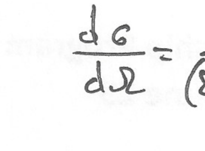


s-channel



t-channel

Το ~~t~~u-channel



είναι ίδιο

με το t-channel εφόσον τα σωματίδια εισαγωγής ή τελικής κατάστασης είναι διαφορετικά, και επομένως δεν χρειάζεται να το συμπεριλάβουμε. Μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει p_3 για το εξερχόμενο A και άρα είναι το u-channel, αλλά αυτό είναι καθαρά θέμα σύμβασης και δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα

(γ) Για το s-channel, το πλάτος βρίσκεται από:

$$(-ig)^2\int \frac{i}{q^2-m_c^2}(2\pi)^{\cancel{8}\,4}\delta^{(4)}(p_1+p_2-q)\,\delta^{(4)}(q-p_3-p_4)\,\frac{d^4q}{\cancel{(2\pi)^4}} =$$

$$= \frac{-ig^2}{(p_1+p_2)^2-m_c^2}(2\pi)^4\delta^{(4)}(q-(p_1+p_2))$$

Θεωρώντας $s=(p_1+p_2)^2$ και απαλείφοντας τον επιπλέον όρο της δέλτα συνάρτησης έχουμε:

$$\boxed{\mathcal{M} = \frac{g^2}{s-m_c^2}} \quad \text{s-channel}$$

Για το t-channel, κάνουμε την αντικατάσταση $p_2=-p_3$ οπότε θα έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα με προηγουμένως, αλλάζοντας επίσης $s \to t$

Το πλάτος επομένως γίνεται: $\boxed{\mathcal{M} = \frac{g^2}{t-m_c^2}}$ t-channel

Το ολικό πλάτος είναι επομένως: $\boxed{\frac{g^2}{s-m_c^2}+\frac{g^2}{t-m_c^2}}$

(δ) Στα όρια $E_1 \ll m_B$ και $m_A, m_c \ll m_B$ έχουμε:

$$s=(p_1+p_2)^2=(E_1+m_B)^2-|\vec{p}_1|^2=m_A^2+m_B^2+2E_1m_B \simeq m_B^2$$

$$t=(p_1-p_3)^2=(E_1-m_B)^2-|\vec{p}_1|^2=m_A^2+m_B^2-2E_1m_B \simeq m_B^2$$

Επομένως το συνολικό πλάτος είναι (αντικαθιστώντας στη σχέση του γ-ερωτήματος)

$$\mathcal{M} = \frac{2g^2 m_B^2}{m_B^4} \Rightarrow \mathcal{M} = \frac{2g^2}{m_B^2}.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του υποερωτήματος (α) θα πάρουμε:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(8\pi m_B)^2} = \frac{\cancel{4} g^4}{\cancel{64}^{16}\pi^2 m_B^6} \Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{g^4}{16\pi^2 m_B^6}}$$

(ε) $$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega = \cancel{4\pi} \frac{g^4}{{}_{4}\cancel{16}\pi^{\cancel{2}} m_B^6} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{g^4}{4\pi m_B^6}}$$

3. Ένα σωματίδιο σε 3-διαστάσεις, με μάζα m, ορμή p και φορτίο q, σκεδάζεται από ένα δυναμικό της μορφής $V(r) = Zqe^{-\frac{r^2}{2a^2}}$. Ποια η διαφορική ενεργός διατομή $\frac{d\sigma}{d\Omega}$; (Μπορείτε να αφήσετε το αποτέλεσμά σας στο δύσκολο ολοκλήρωμα που καταλήγετε μετά τις πράξεις σας).

Από τις διαλέξεις, έχουμε ότι: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{\pi\hbar^4}\left|V_{\vec{k}\vec{k}'}\right|^2$ όπου $V_{\vec{k}\vec{k}'} = \int e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} V(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{x}$

Συνδυάζοντας τα εκθετικά θα έχουμε: $V_{\vec{k}\vec{k}'} = \int e^{+i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{x}} V(\vec{x})\, d^3\vec{x}$

Για το δυναμικό αυτό, είναι καλύτερα να χρησιμοποιήσουμε καρτεσιανές συντεταγμέν
Υποθέτουμε ότι η αρχική ορμή είναι στην z-διεύθυνση, και η τελική ορμή είναι στη
γωνία Θ στο xz επίπεδο. Το μέτρο της ορμής δεν αλλάζει, οπότε:

$$V_{\vec{k}\vec{k}'} = \int Zq\, e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{2a^2}} e^{ik(x\sin\Theta + z(\cos\Theta-1))} dx\,dy\,dz = Zq\int e^{-\frac{x^2}{2a}+ikx\sin\Theta} e^{-\frac{y^2}{2a^2}} e^{-\frac{z^2}{2a^2}+ikz} dxdy$$

Οι τρεις ολοκληρώσεις ως προς x, y και z μπορούν να γίνουν ξεχωριστά. Το y-ολοκλήρωμα θα δώσει:

$$\int e^{-y^2/2a} dy = \sqrt{2\pi}\,a$$

Για το x-ολοκλήρωμα θα έχουμε: $\frac{x^2}{2a^2} - bx = \left(\frac{x}{\sqrt{2}a} - \frac{ab}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{(ab)^2}{2}$

Επομένως: $\int e^{-\frac{x^2}{2a^2}+\sin\Theta(ikx)} dx = \int e^{-\left[\left(\frac{x}{\sqrt{2}a} - \frac{ika\sin\Theta}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{(ika\sin\Theta)^2}{2}\right]} dx \Rightarrow$

$$\int e^{-\frac{x^2}{2a^2}+ikx\sin\Theta} dx = \int e^{-\left[\left(\frac{x}{\sqrt{2}a} - \frac{ika\sin\Theta}{\sqrt{2}}\right)^2\right]} e^{-\frac{(ka\sin\Theta)^2}{2}} dx = e^{-\frac{(ka\sin\Theta)^2}{2}} \int e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}a} - \frac{ika\sin\Theta}{\sqrt{2}}\right)^2} dx$$

Ο εναπομείναν όρος του ολοκληρώματος είναι και πάλι Gaussian, μετατοπισμένος στο x, και επομένως θα δώσει απλά ένα παράγοντα $\sqrt{2\pi}a$

Για το Ζ ολοκλήρωμα, το αποτέλεσμα είναι το ίδιο μόνο που το $\sin\theta \to \cos\theta - 1$

Επομένως το αποτέλεσμα θα είναι:

$$V_{\vec{k}'\vec{k}} = Zq(2\pi)^{3/2} a^3 e^{\left(\frac{ka}{2}\right)^2(\sin^2\theta + 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)} = Zq(2\pi)^{3/2} a^3 e^{-(ka)^2(1-\cos\theta)}$$

Επομένως η ενεργός διατομή θα είναι:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{\pi\hbar^4}\left|V_{\vec{k}'\vec{k}}\right|^2 = \frac{m^2}{\pi\hbar^4}(Zq)^2(2\pi)^3 a^6 e^{-2(ka)^2(1-\cos\theta)}$$

<u>Σε σφαιρικές συντεταγμένες</u>, το σωματίδιο σκεδάζεται σε κάποια γωνία α, αλλά το μέτρο της ορμής δεν αλλάζει, και άρα $\vec{k}$ κ $\vec{k}'$ είναι ίσες πλευρές ενός τριγώνου με γωνία α μεταξύ τους, και $|\vec{k}' - \vec{k}| = 2k\sin\frac{\alpha}{2}$.

Αλλάζοντας σε σφαιρικές συντεταγμένες με την θ μετρούμενη ~~ως~~ πάνω στην $\vec{K}-\vec{k}$ διεύθυνση (η γωνία σκέδασης είναι α και όχι θ) και γράφοντας το εσωτερικό γινόμενο συναρτήσει των μέτρων και γωνιών, σημειώνουμε ότι το δυναμικό εξαρτάται μόνο από r

$$V_{\vec{k}'\vec{k}} = \int V(\vec{r}) e^{+i|\vec{k}'-\vec{k}||\vec{r}|\cos\theta} r^2 \sin\theta \, dr \, d\phi \, d\theta$$

Το ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από την γωνία ϕ και το ολοκλήρωμα θα δίνει 2π

$$V_{\vec{k}'\vec{k}} = 2\pi \int V(r) e^{(2ikr\sin\alpha/2)\cos\theta} \sin\theta \, d\theta \, r^2 dr$$

Για να κάνουμε την ολοκλήρωση κατά θ, προσέχουμε ότι:

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} e^{ib\cos\theta}\sin\theta \, d\theta = -\frac{1}{ib}\int_{\cos\theta=1}^{\cos\theta=-1} e^{ib\cos\theta} d(ib\cos\theta) = -\frac{1}{ib}\left[e^{ib\cos\theta}\right]_{\cos\theta=1}^{\cos\theta=-1} = \frac{e^{ib}-e^{-ib}}{ib} \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} e^{ib\cos\theta}\sin\theta \, d\theta = \frac{2\sin\theta}{b}}$$

Με $b = 2kr\sin\alpha/2$ θα πάρουμε: $V_{\vec{k}'\vec{k}} = 2\pi\int V(r)\frac{2\sin(2kr\sin\frac{\alpha}{2})}{2kr\sin\alpha/2} r^2 dr$

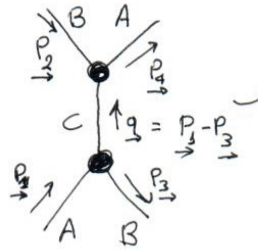
Θέτοντας $c = 2k\sin\alpha/2$, θα έχουμε: $V_{\vec{k}'\vec{k}} = 4\pi\int V(r)\frac{\sin(cr)}{cr} r^2 dr$ που είναι αληθές για οποιοδήποτε σφαιρικό δυναμικό.

Εισάγουμε $V(r) = Zq e^{-r^2/2a^2}$ έχουμε: $V_{\vec{k}'\vec{k}} = 4\pi\int Zq e^{-r^2/2a^2}\frac{\sin(cr)}{cr} r^2 dr \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_{\vec{k}'\vec{k}} = \frac{4\pi Zq}{c}\int_{r=0}^{r=\infty} e^{-r^2/2a^2} r\sin(cr) \, dr$$ που είναι ένα δύσκολο ολοκλήρωμα

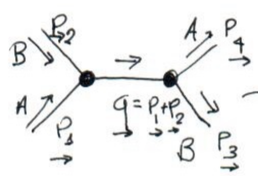
4. Υπολογίστε την διαφορική ενεργό διατομή $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ συναρτήσει της γωνίας θ, στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας στο μοντέλο ABC για την περίπτωση της διεργασίας σκέδασης $A + B \rightarrow A + B$, υποθέτοντας ότι $m_B = m_C$.

Έχουμε δύο διαγράμματα:



$$\mathcal{M} = i(-ig)\frac{i}{(p_1-p_3)^2 - m_C^2c^2}(-ig) = \frac{g^2}{(p_1-p_3)^2 - m_C^2c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{M} = \frac{g^2}{p_1^2 + p_3^2 - 2p_1\cdot p_3 - m_C^2c^2} = \frac{g^2}{m_A^2c^2 + m_B^2c^2 - 2p_1\cdot p_3 - m_C^2c^2}$$



$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{(p_1+p_2)^2 - m_C^2c^2} = \frac{g^2}{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1\cdot p_2 - m_C^2c^2} = \frac{g^2}{m_A^2c^2 + m_B^2c^2 + 2p_1\cdot p_2 -}$$

Υποθέτοντας ότι $m_B = m_C = 0$ και προσθέτοντας την συνεισφορά των δύο διαγραμμάτω

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{m_A^2c^2 - 2p_1\cdot p_3} + \frac{g^2}{m_A^2c^2 + 2p_1\cdot p_2} \qquad (A)$$

Αλλά στο κέντρο μάζας, $p_1\cdot p_2 = \frac{E_1E_2}{c^2} - \vec{p}_1\cdot\vec{p}_2 = \frac{E_AE_B}{c^2} - \vec{p}_1\cdot(-\vec{p}_1) = \boxed{\frac{E_AE_B}{c^2} + p_{CM}^2}$ (B)

Επίσης θα έχουμε: $p_1\cdot p_3 = \frac{E_AE_B}{c^2} - \vec{p}_1\cdot\vec{p}_3 = \frac{E_AE_B}{c^2} - p_{CM}p_{CM}\cos\theta_{13} \Rightarrow p_1\cdot p_3 = \frac{E_AE_B}{c^2} - p_{CM}^2\cos$

Από την στιγμή που $m_B = 0 \Rightarrow E_B = p_Bc = p_{CM}c$ οπότε $\boxed{p_1\cdot p_3 = \frac{E_Ap_{CM}}{c} - p_{CM}^2\cos\theta_{13}}$ (

Αντικατάσταση των (B) κ (Γ) στην (A) δίνει:

$$\mathcal{M} = g^2 \frac{\left[m_A^2c^2 - 2\left(\frac{E_A P_{CM}}{c} - P_{CM}^2\cos\theta_{13}\right)\right] + \left[m_A^2c^2 + 2\left(\frac{E_A P_{CM}}{c} + P_{CM}^2\right)\right]}{\left[m_A^2c^2 - 2\left(\frac{E_A P_{CM}}{c} - P_{CM}^2\cos\theta_{13}\right)\right] \times \left[m_A^2c^2 + 2\left(\frac{E_A P_{CM}}{c} + P_{CM}^2\right)\right]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{M} = 2g^2 \frac{m_A^2c^2 + P_{CM}^2(1+\cos\theta_{13})}{\left[m_A^2c^2 - 2\frac{E_A P_{CM}}{c} + 2P_{CM}^2\cos\theta_{13}\right]\left[m_A^2c^2 + 2\frac{E_A P_{CM}}{c} + 2P_{CM}^2\right]}$$

Αυτή είναι η μορφή στην οποία μπορούμε να καταλήξουμε.

Αν $m_A = 0$ και επομένως $E_A = P_{CM}c$ τότε θα έχουμε:

$$\mathcal{M} = 2g^2 \frac{P_{CM}^2(1+\cos\theta_{13})}{\left[-2P_{CM}^2 + 2P_{CM}^2\cos\theta_{13}\right]\left[2P_{CM}^2 + 2P_{CM}^2\right]} = -\frac{g^2}{4P_{CM}^2}\frac{1+\cos\theta_{13}}{1-\cos\theta_{13}}$$

Η ενεργός διατομή σκέδασης για σκέδαση 2 σωματίων στο σύστημα του CM είναι:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{S(E_1+E_2)^2}\frac{P_{final}}{P_{initial}}\left|\mathcal{M}(\vec{p}_{final}(\theta))\right|^2$$

Από την στιγμή που δεν υπάρχει αλλαγή μάζας $p_{final} = p_{initial} = P_{CM}$ και επειδή τα σωματίδια είναι διαφορετικά μεταξύ τους $S = 1$. Άρα:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{(E_A + P_{cm}c)^2}|\mathcal{M}|^2 = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{4g^2}{(E_A+P_{CM}c)^2}\frac{\left[m_A^2c^2 + P_{CM}^2(1+\cos\theta_{13})\right]^2}{\left[m_A^2c^2 - 2\frac{E_A P_{CM}}{c} + 2P_{CM}^2\cos\theta_{13}\right]^2 * \left[m_A^2c^2 + 2\frac{E_A P_{CM}}{c} + 2P_{CM}^2\right]^2}$$

Η σχέση απλουστεύεται αρκετά, όπως είδαμε, αν $m_A = 0$, οπότε:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{g^4}{16 P_{CM}^6 c^2}\left(\frac{1+\cos\theta_{13}}{1-\cos\theta_{13}}\right)^2$$