Ορμή - Κρούσεις

Κρούσεις σε 2 διαστάσεις

- Για ελαστικές κρούσεις

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$ όπου $p = (p_x, p_y)$

Δηλαδή είναι 2 εξισώσεις, μια για κάθε διεύθυνση (x,y) και υπάρχει και μια τρίτη εξίσωση λόγω διατήρησης της μηχανικής ενέργειας

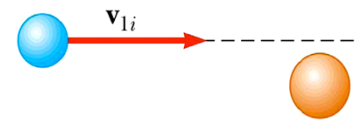
Αν m_1, m_2, v_1, v_2 είναι γνωστά τότε έχουμε 3 εξισώσεις με 4 αγνώστους p'_{1x}, p'_{1y}, p'_{2x}, p'_{2y}

- Επομένως χρειαζόμαστε κάτι ακόμα για τη τελική κατάσταση

Κρούσεις σε 2 διαστάσεις - Παράδειγμα

- Το σώμα 1 πριν την κρούση κινείται με ταχύτητα v_{1i} ενώ το σώμα 2 είναι σε ηρεμία $v_{2i}=0$

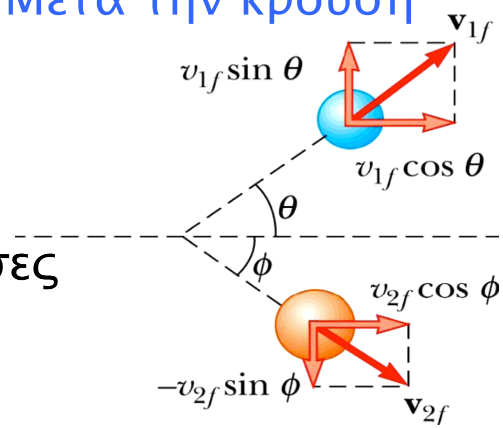
Πριν τη κρούση



- Στη x-διεύθυνση η αρχική ορμή είναι $m_1 v_{1i}$
- Στη y-διεύθυνση η αρχική ορμή είναι μηδέν

- Μετά την κρούση τα σώματα κινούνται με κάποιες γωνίες θ και φ ως προς την x-διεύθυνση

Μετά την κρούση



Το σώμα 1 έχει ταχύτητα: $\upsilon_{1x}^f = \upsilon_1^f \cos\theta$

$\upsilon_{2x}^f = \upsilon_2^f \cos\phi$

- Μετά την κρούση τα σώματα έχουν συνιστώσες ταχύτητας στη y-διεύθυνση.

Το σώμα 1 έχει ταχύτητα: $\upsilon_{1y}^f = \upsilon_1^f \sin\theta$

ενώ το σώμα 2 έχει ταχύτητα: $\upsilon_{2y}^f = \upsilon_2^f \sin\phi$ (κανονικά $\upsilon_{2y}^{f} = \upsilon_2^{f}\sin(-\phi)$)

Η ορμή στην x-διεύθυνση είναι $m_1\upsilon_1^f \cos\theta + m_2\upsilon_2^f \cos\phi$

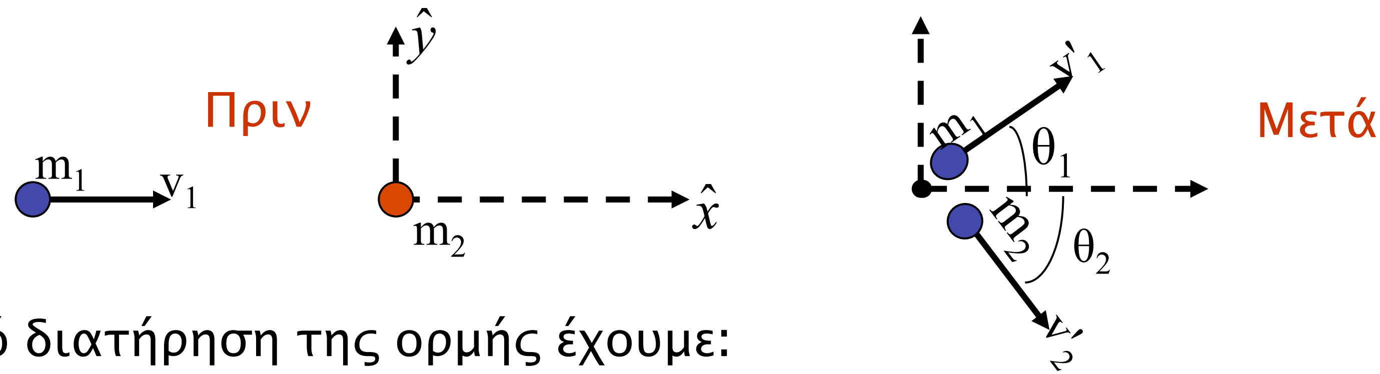
Η ορμή στην y-διεύθυνση είναι $m_1\upsilon_2^f \sin\theta + m_2\upsilon_2^f \sin(-\phi) \Rightarrow m_1\upsilon_2^f \sin\theta - m_2\upsilon_2^f \sin\phi$

Μεθοδολογία λύσης ασκήσεων

- Προσδιορίστε ένα σύστημα συντεταγμένων και ορίστε τις ταχύτητες των σωμάτων του συστήματος ως προς τους άξονες αυτού του συστήματος
- Σχεδιάστε και προσδιορίστε όλα τα διανύσματα των ταχυτήτων και ότι άλλη πληροφορία σας δίνεται στο πρόβλημα
- Γράψτε τις εξισώσεις για την x- και y- συνιστώσα της ορμής κάθε σώματος πριν και μετά την κρούση.
  Μην ξεχνάτε τα απαραίτητα πρόσημα ανάλογα με τη διεύθυνση
- Γράψτε τις εξισώσεις για την ολική ορμή του συστήματος στην x-διεύθυνση πριν και μετά την κρούση και εξισώστε
  Επαναλάβετε και για την ολική ορμή στην y-διεύθυνση
- Εξετάστε το είδος της κρούσης:
  - Για μη ελαστική κρούση, η μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται και θα χρειάζεστε και άλλες πληροφορίες από το πρόβλημα.
  - Για πλαστική κρούση, τα σώματα έχουν την ίδια ταχύτητα μετά την κρούση. Λύστε τις εξισώσεις των ορμών ως προς τους αγνώστους.
  - Για ελαστική κρούση, η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Εξισώστε την μηχανική ενέργεια πριν και μετά την κρούση για να βρείτε επιπλέον σχέσεις μεταξύ των ταχυτήτων

Κρούσεις – Παραδείγματα

- Θα αποδείξουμε ότι σε ελαστική μη κεντρική κρούση δύο σωμάτων ίδιας μάζας, ένα εκ των οποίων αρχικά είναι ακίνητο, η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων των τελικών ταχυτήτων είναι πάντοτε 90°



- Από διατήρηση της ορμής έχουμε:

$$(1)\hat{x} \quad m\mathrm{v}_1 + 0 = m\mathrm{v}_1' \cos\theta_1 + m\mathrm{v}_2' \cos\theta_2 \Rightarrow \mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_1' \cos\theta_1 + \mathrm{v}_2' \cos\theta_2$$

$$(2)\hat{y} \quad 0 + 0 = m\mathrm{v}_1' \sin\theta_1 - m\mathrm{v}_2' \sin\theta_2 \quad \Rightarrow 0 = \mathrm{v}_1' \sin\theta_1 - \mathrm{v}_2' \sin\theta_2$$

- Από διατήρηση της ενέργειας έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m\mathrm{v}_2'^2$$

$$(3) \;\Rightarrow\; \mathrm{v}_1^2 = \mathrm{v}_1'^2 + \mathrm{v}_2'^2 \Rightarrow \mathrm{v}_1^2 - \mathrm{v}_1'^2 - \mathrm{v}_2'^2 = 0$$

Έχουμε 3 εξισώσεις και θέλουμε να ξέρουμε $\theta_1+\theta_2$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Υψώνουμε στο τετράγωνο τις σχέσεις (1) και (2) οπότε και παίρνουμε

$$(1)' \quad v_1 = v_1' \cos\theta_1 + v_2' \cos\theta_2 \Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 \cos^2\theta_1 + v_2'^2 \cos^2\theta_2 + 2v_1'v_2' \cos\theta_1 \cos\theta_2$$

$$(2)' \quad 0 = v_1' \sin\theta_1 - v_2' \sin\theta_2 \Rightarrow 0 = v_1'^2 \sin^2\theta_1 + v_2'^2 \sin^2\theta_2 - 2v_1'v_2' \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

Προσθέτοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2v_1'v_2'(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2)$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

Άρα καταλήγουμε με την σχέση:

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2v_1'v_2' \cos(\theta_1 + \theta_2) \Rightarrow$$

$$(3)' \qquad v_1^2 - v_1'^2 - v_2'^2 = 2v_1'v_2' \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

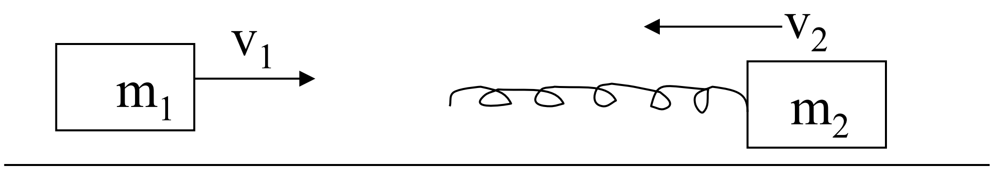
Το αριστερό μέλος όμως είναι η (3) και επομένως

$$2v_1'v_2' \cos(\theta_1 + \theta_2) = 0 \Rightarrow \cos(\theta_1 + \theta_2) = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_1 + \theta_2 = 90^0}$$

Σε 2-D τα σώματα είναι 90^{o} μακριά. Για 1-D η θ_1 δεν ορίζεται

Παράδειγμα

Ελαστική κρούση που περιέχει μάζες και ελατήρια.



Τη χρονική στιγμή t', η μάζα m_1 έχει ταχύτητα v'_1 και το ελατήριο συσπειρώνεται. Ποια είναι η ταχύτητα v'_2τη στιγμή t' ?

- Από διατήρηση της ορμής:

$$m_1\vec{\mathrm{v}}_1 + m_2\vec{\mathrm{v}}_2 = m_1\vec{\mathrm{v}}_1' + m_2\vec{\mathrm{v}}_2'$$

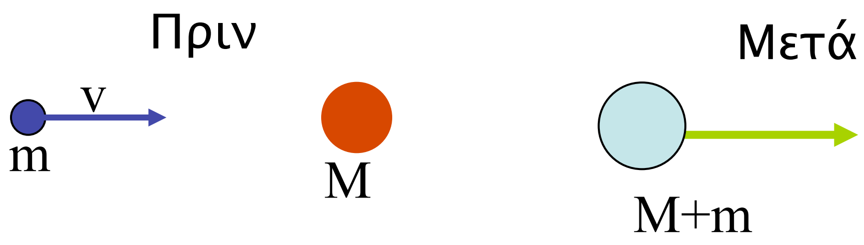
Μόνο η v'_2 είναι άγνωστη

- Από διατήρηση της ενέργειας:

$$\frac{1}{2}m_1\mathrm{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathrm{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\mathrm{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\mathrm{v}_2'^1 + \frac{1}{2}kx^2$$

Αυτή η σχέση δίνει την συσπείρωση του ελατηρίου την χρονική στιγμή t'

Παράδειγμα - Πλαστική κρούση 1-D



Από διατήρηση της ορμής:

$$m\vec{\mathrm{v}} + 0 = (m + \mathrm{M})\vec{\mathrm{v}}' \Rightarrow \vec{\mathrm{v}}' = \vec{\mathrm{v}}\frac{m}{M+m}$$

Αν οι μάζες ήταν ίδιες τότε M=m και η παραπάνω σχέση δίνει: $\vec{\mathrm{v}}' = \frac{\vec{\mathrm{v}}}{2}$

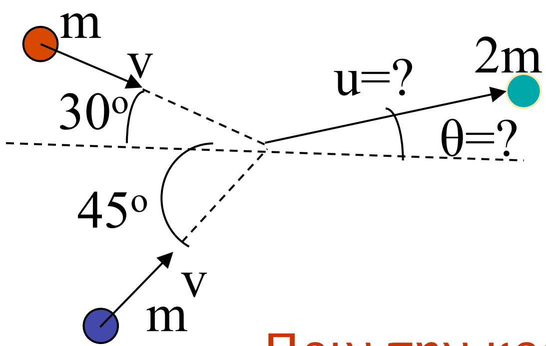
Παρατηρούμε ότι η κινητική ενέργεια πριν και μετά την κρούση είναι:

$$K_{\mathrm{i}} = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 \qquad K_{\mathrm{f}} = \frac{1}{2}(2m)\mathrm{v}'^2 = m\frac{\mathrm{v}^2}{4} = \frac{K_i}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta K = K_f - K_i = -m\frac{\mathrm{v}^2}{4}}$$

Ένα μέρος της ενέργειας έχει χαθεί σε μορφή θερμότητας.

Παράδειγμα – Πλαστική κρούση 2-D



Ποια είναι η τελική ταχύτητα u και η γωνία θ?

Η ορμή p είναι ένα διάνυσμα. Επομένως όπως έχουμε δει αυτό σημαίνει διατήρηση ως προς κάθε κατεύθυνση (αν ήμασταν στο χώρο 3-d)

Πριν την κρούση

$$p_x = m\mathrm{v}\cos 30^0 + m\mathrm{v}\cos 45^0$$

$$p_y = -m\mathrm{v}\sin 30^0 + m\mathrm{v}\sin 45^0$$

Μετά την κρούση

$$p'_x = 2m\upsilon\cos\theta$$

$$p'_y = 2m\upsilon\sin\theta$$

Σύμφωνα με τη διατήρηση της ορμής:

$$p_x = p'_x \quad (1)$$

$$p_y = p'_y \quad (2)$$

Δηλαδή 2 εξισώσεις με 2 αγνώστους (υ και θ)

Διαιρώντας την (1) με την (2) έχουμε: $\dfrac{1/\sqrt{2} - 1/2}{\sqrt{3}/2 + 1/\sqrt{2}} = \tan\theta \Rightarrow \theta = 7.5°$

Από την εξίσωση: $p_x = p'_x \Rightarrow m\mathrm{v}(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}) = 2m\upsilon\cos 7.5^0 \Rightarrow \upsilon = 0.79\mathrm{v}$

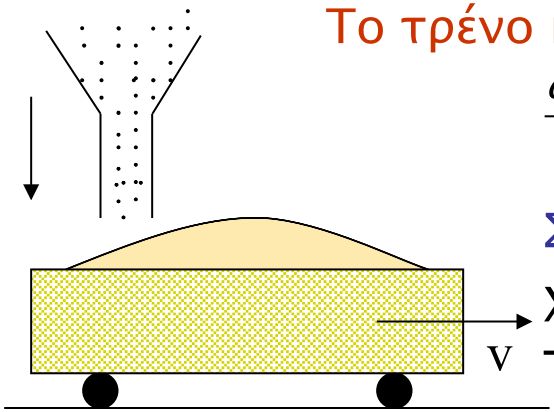
Προβλήματα ορμής/ώθησης με μεταβαλλόμενη μάζα

Τρένο κινείται με σταθερή ταχύτητα, $v=1m/sec$, κάτω από ένα σιλό το οποίο αποθέτει σιτάρι με ρυθμό $1kgr/sec$.

Τι δύναμη χρειάζεται για να συνεχίσει να κινείται το τρένο?

Λύση Ποιο είναι το σύστημά μας?

Το τρένο και το σιτάρι στο τρένο



$$\frac{dm}{dt} = 1kgr/\sec$$ ρυθμός αύξησης του σιταριού

Σιτάρι που πέφτει: $p_x = 0$ αλλά υπάρχει p_y.

Χτυπά στο τρένο, οπότε $p'_y = 0$, ενώ αναπτύσσει p'_x

Το τρένο πρέπει να προσφέρει τη δύναμη για την αλλαγή αυτή της ορμής

Το τρένο έχει σαν «εργαλεία» την κάθετη δύναμη και την τριβή

Το σιτάρι ασκεί στο τρένο ίση και αντίθετη δύναμη και το τρένο επιβραδύνεται

Η μηχανή είναι αυτή που πρέπει να δώσει την ώθηση που χρειάζεται

Τρένο (συνέχεια)

Θεωρείστε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt

$$M_f = M_i + \frac{dm}{dt}\Delta t$$ Αλλαγή της μάζας του τρένου

$$p_x^i = M_i \mathrm{v} \quad p_x^f = \left(M_i + \frac{dm}{dt}\Delta t\right)\mathrm{v}$$ αφού θέλουμε $\mathrm{v}_{τρένου}$ =σταθ.

$$I_x = \Delta p_x = F_x \Delta t = p_x^f - p_x^i = \mathrm{v}\frac{dm}{dt}\Delta t \Rightarrow$$

$$F_x = \frac{dm}{dt}\mathrm{v} = 1\frac{m}{\sec}\cdot 1\frac{kgr}{\sec} = 1N$$

Αυτή είναι η δύναμη που πρέπει να αναπτυχθεί από την μηχανή του τρένου ώστε το τρένο να εξακολουθεί να κινείται με σταθερή ταχύτητα

2ο Παράδειγμα - Πύραυλοι, αεροπλάνα κλπ

- Κίνηση πυραύλων – Κλασσικό πρόβλημα

  Πύραυλος με αρχική μάζα $M_Π$

  Εκτοξεύει μάζα με ταχύτητα $V_{εκτ}$ (σχετικά με τον πύραυλο).

  Ποια είναι η ταχύτητα όταν η μάζα του είναι m

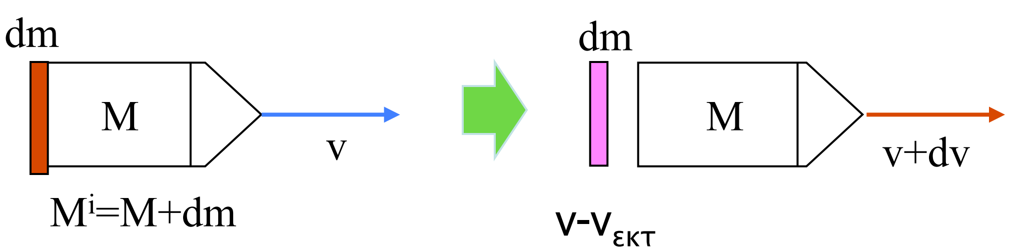
Λύση

Για ένα απομονωμένο σύστημα (πύραυλος-εξάτμιση) ξέρουμε ότι

$$\frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow p = \sigma\tau\alpha\vartheta.$$

Ας υποθέσουμε ότι η μάζα του πυραύλου αλλάζει από M+dm σε M

και η ταχύτητά του από v σε v+dv



Πύραυλος

Εφαρμόζοντας διατήρηση της ορμής έχουμε:

$$p_i = p_f \Rightarrow (M + \Delta m)\mathrm{v} = M(\mathrm{v} + \Delta \mathrm{v}) + \Delta m(\mathrm{v} - \mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau})$$
$$\Rightarrow M\mathrm{v} + \mathrm{v}\Delta m = (M\mathrm{v} + M\Delta \mathrm{v} + \mathrm{v}\Delta m - \mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}\Delta m)$$
$$\Rightarrow M\Delta \mathrm{v} = \mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}\Delta m$$

Έστω τώρα ότι $\Delta t \rightarrow 0$ τότε $\Delta m \rightarrow dm$ και $\Delta M \rightarrow dM$ ενώ $dm = -dM$.

$\Delta t \rightarrow 0$

$$\Rightarrow Md\mathrm{v} = -\mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}dM \Rightarrow d\mathrm{v} = -\mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}\frac{dM}{M}$$
$$\Rightarrow \int_{\mathrm{v}_i}^{\mathrm{v}_f} d\mathrm{v} = -\mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}\int_{M_i}^{M_f}\frac{dM}{M} \Rightarrow \mathrm{v}_f - \mathrm{v}_i = -\mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}\ln(M)\Big|_{M_i}^{M_f}$$
$$\Rightarrow \mathrm{v}_f = \mathrm{v}_i - \mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}(\ln M_f - \ln M_i)$$
$$\boxed{\Rightarrow \mathrm{v}_f = \mathrm{v}_i + \mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}\left(\ln\frac{M_i}{M_f}\right)}$$

Απειρίζεται καθώς το $M_f \rightarrow 0$

Αν η αρχική μάζα του πυραύλου είναι M = 10 x m ➔ v = 2.3$\mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}$

Αν η μάζα είναι M = 100 x m ➔ v = 4.6$\mathrm{v}_{\varepsilon\kappa\tau}$

Το κέρδος σε ταχύτητα πολύ μικρό μεγαλώνοντας την μάζα του πυραύλου