

## ΦΥΣ 347 – Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Ενδιάμεση Εξέταση – Σάββατο 20/10/2018

Διάρκεια εξέτασης: 15:00 – 19:00

Θα πρέπει να δουλέψετε όλες τις ασκήσεις μόνοι σας χωρίς να συζητήσετε τα αποτελέσματα και τον κώδικά σας παρά μόνο με τον εαυτό σας και ίσως εμένα αν έχετε απορίες.

Θα πρέπει ο κώδικάς σας να είναι ευανάγνωστος και να περιέχει απαραίτητα σχόλια που εξηγούν τι κάνετε. Θα βαθμολογηθείτε για την ύπαρξη ή μή σχολίων.

Θα πρέπει στο τέλος της εξέτασης να μου στείλετε με e-mail ένα αρχείο με όνομα `midterm_<username>.tgz` το οποίο περιέχει τα files των προγραμμάτων σας και οποιαδήποτε αρχεία σας ζητούν οι ασκήσεις να δημιουργήσετε. Προσοχή είναι δική σας ευθύνη να επιστρέψετε με το τέλος της εξέτασης τα files που πρέπει. Μετά το τέλος της εξέτασης δεν θα γίνει δεκτή οποιαδήποτε αλλαγή ή διόρθωση λαθών στα αρχεία που στείλατε.

### Καλή Επιτυχία

1. (α) Θεωρήστε την Gaussian κατανομή  $P_y(y) = \frac{\exp\left[-(y-\bar{y})^2/(2\sigma^2)\right]}{\sigma\sqrt{2\pi}}$  όπου  $\bar{y}$  είναι η

μέση τιμή του  $y$  και  $\sigma$  είναι η τυπική απόκλιση. Έστω  $y_{\min} = \bar{y} - 4\sigma$  και  $y_{\max} = \bar{y} + 4\sigma$ .

Το μέγιστο της κατανομής είναι  $P_y^{\max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$  για  $y = \bar{y}$ . Να γράψετε ένα πρόγραμμα το

οποίο χρησιμοποιεί τη μέθοδο της απόρριψης για να επιστρέψει τυχαίους αριθμούς που κατανέμονται σύμφωνα με την Gaussian κατανομή με μέση τιμή *mean* και τυπική απόκλιση  $\sigma$ . Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να χρησιμοποιεί το λογισμικό *ROOT* για να κάνει την κατανομή 1000000 τέτοιων τυχαίων αριθμών που έχουν  $\bar{y} = 5$  και  $\sigma = 1.25$ . Η κατανομή θα πρέπει να είναι σε *histogram* το οποίο έχει 100 bins εύρους 0.1. Θα πρέπει να αποθηκεύσετε το *histogram* σε ένα αρχείο με όνομα *prob01\_gauss.root* το οποίο θα επιστρέψετε μαζί με το πρόγραμμά σας. [10μ]

(β) Να υπολογίσετε την  $\sqrt{19}$  με ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων χωρίς να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση *sqrt*. [10μ]

2. Οι ραδιενεργείς διασπάσεις αποτελούν χαρακτηριστικά παραδείγματα χρήσης της μεθόδου Monte Carlo προσομοίωσης. Υποθέστε ότι τη χρονική στιγμή  $t = 0$  έχουμε  $N(0)$  πυρήνες ενός ραδιενεργού στοιχείου  $X$  το οποίο μπορεί να διασπαστεί. Σε μια χρονική στιγμή  $t > 0$  θα έχουμε  $N(t)$  πυρήνες. Με πιθανότητα διάσπασης  $\omega = 1/\tau$ , η οποία αντιπροσωπεύει τη πιθανότητα το σύστημα να κάνει μετάβαση σε μια νέα κατάσταση κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος ενός 1 sec, έχουμε όπως είδαμε τη διαφορική εξίσωση:

$$dN(t) = -\omega N(t) dt \quad \text{με λύση } N(t) = N(0)e^{-\omega t}.$$

Αν οι πυρήνες του στοιχείου  $X$  διασπώνται σε κάποιους άλλους πυρήνες τύπου  $Y$  που και αυτοί μπορούν να διασπαστούν έχουμε το σύστημα των συζευγμένων εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \frac{dN_X(t)}{dt} &= -\omega_X N_X(t) \quad \text{και} \\ \frac{dN_Y(t)}{dt} &= -\omega_Y N_Y(t) + \omega_X N_X(t) \end{aligned}$$

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο χρησιμοποιεί τη μέθοδο Monte Carlo για να προσομοιώσετε την αλυσίδα διασπάσεων των πυρήνων  $X$  και  $Y$ . Να κάνετε τη γραφική παράσταση των πυρήνων  $X$  και  $Y$  συναρτήσει του χρόνου χρησιμοποιώντας το λογισμικό *ROOT* και να αποθηκεύσετε τα histograms στο αρχείο *midterm\_prob02.root* το οποίο και θα πρέπει να επιστρέψετε μαζί με τον κώδικά σας. [20μ]

3. Η μέθοδος της τέμνουσας είναι μια παραλλαγή της μεθόδου του Newton για την εύρεση της ρίζας μιας μη γραμμικής εξίσωσης. Η μέθοδος χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις που η εύρεση της παραγώγου μιας συνάρτησης δεν είναι εύκολη. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης σε κάποιο σημείο  $x_n$ ,

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \quad \text{μπορούμε να αντικαταστήσουμε στη μέθοδο του Newton}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{και να υπολογίσουμε τη λύση της } f(x). \text{ Γραφικά αυτό που κάνει η}$$

μέθοδος αυτή είναι να λαμβάνει την ευθεία γραμμή που ενώνει τα σημεία  $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$  και  $(x_n, f(x_n))$  και να βρίσκει που τέμνει η ευθεία αυτή τον  $x$ -άξονα. Προφανώς για να ξεκινήσει η μέθοδος χρειάζεται να δώσουμε 2 σημεία. Γράψτε ένα πρόγραμμα σε C++ το οποίο εφαρμόζει τη μέθοδο της τέμνουσας. Εφαρμόστε τη μέθοδο για να βρείτε την τιμή της μεταβλητής  $x$  με ακρίβεια 8 δεκαδικών ψηφίων, όπου η συνάρτηση  $f(x) = 1 - e^{-2x} - x^2$  παρουσιάζει μέγιστο [15μ]. Συγκρίνετε τον αριθμό των επαναλήψεων που κάνατε για να φθάσετε στην επιθυμητή ακρίβεια της λύσης με το αριθμό που απαιτούνται για τη μέθοδο Newton. Θα πρέπει το πρόγραμμά σας να περιέχει και τις δύο μεθόδους [5μ].

4. Μια έλλειψη ορίζεται από την εξίσωση  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , όπου  $a$  και  $b$  ο μεγάλος και μικρός άξονάς της. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Monte Carlo να βρεθεί το εμβαδό της έλλειψης του διπλανού σχήματος που έχει  $a = 3$  και  $b = 2$ . Χρησιμοποιείστε 10, 100, 1000,

10000, 100000 και 1000000 προσπάθειες και τυπώστε τα αποτελέσματα κάθε διαφορετικής περίπτωσης σε ένα αρχείο το οποίο ονομάστε *area.dat* με τη μορφή 3 στηλών <Αριθμός προσπαθειών> <Εμβαδό> <Αναλυτική – Αριθμητική> όπου η αναλυτική τιμή είναι το εμβαδό της έλλειψης υπολογιζόμενο θεωρητικά και που είναι ίσο με  $A_{ελ.} = \pi \cdot a \cdot b$  [20μ]

5. Στο πρόβλημα αυτό θα πρέπει να κάνετε τη κατανομή της μάζας του σωματιδίου  $Z^0$  που είναι ένα από τους φορείς των ασθενών αλληλεπιδράσεων και μπορεί να παραχθεί σε υψηλές ενέργειας συγκρούσεις δεσμών πρωτονίου – αντιπρωτονίου ή πρωτονίου-πρωτονίου στους επιταχυντές Tevatron και LHC αντίστοιχα. Το σωματίδιο αυτό διασπάται σε χρόνο  $10^{-23}$ s και επομένως δεν μπορούμε να το ανιχνεύσουμε απ' ευθείας. Μπορούμε όμως να το δούμε ανιχνεύοντας τα τελικά προϊόντα της διάσπασής του τα οποία είναι είτε σταθερά είτε ζουν μεγάλο χρονικό διάστημα. Ένας από τους τρόπους διάσπασής του είναι σε ζεύγος ηλεκτρονίου ποζιτρονίου (το αντισωματίδιο του ηλεκτρονίου), δηλαδή  $Z^0 \rightarrow e^+e^-$ . Με κατάλληλους ανιχνευτές μετρούμε την ορμή και ενέργεια των ηλεκτρονίων και ποζιτρονίων και τις αποθηκεύουμε σε κάποιο αρχείο. Κάθε γραμμή των δεδομένων του αρχείου περιέχει τις τιμές της ενέργειας,  $E$ , και των τριών συνιστωσών της ορμής,  $p_x, p_y, p_z$ , του ηλεκτρονίου και ποζιτρονίου αντίστοιχα. Συνολικά σε κάθε γραμμή του file υπάρχουν 8 δεδομένα και αντιστοιχούν στη παραγωγή και διάσπαση ενός σωματιδίου  $Z^0$ , ένα γεγονός σύγκρουσης δηλαδή στο οποίο παράχθηκε το συγκεκριμένο σωματίδιο. Από τα δεδομένα της κάθε γραμμής μπορούμε να υπολογίσουμε την μάζα του σωματιδίου  $Z^0$  με βάση τη θεωρία της ειδικής σχετικότητας ως εξής:  $M_{Z^0} = \sqrt{E_{Z^0}^2 - |\vec{p}_{Z^0}|^2}$  (1), όπου θεωρούμε μονάδες τέτοιες ώστε η ταχύτητα του φωτός,  $c$ , να είναι  $c=1$ . Εφόσον η ενέργεια και ορμή διατηρούνται, μπορούμε να γράψουμε την ενέργεια και ορμή του σωματιδίου  $Z^0$  βάση την ενέργεια και ορμή των προϊόντων διάσπασής του οπότε πέρνουμε τη σχέση:

$$M_{Z^0} = \sqrt{(E_{e^-} + E_{e^+})^2 - (p_{e^-}^x + p_{e^+}^x)^2 - (p_{e^-}^y + p_{e^+}^y)^2 - (p_{e^-}^z + p_{e^+}^z)^2} \quad (2)$$

Η μάζα των σωματιδίων  $Z^0$  είναι  $91.0 \text{ GeV}/c^2$ .

Τι θα πρέπει να κάνετε στο πρόγραμμά σας:

(A) Κατεβάστε το αρχείο <http://www2.ucy.ac.cy/~fotis/phy347/Exams/Zres.dat>. Το αρχείο αυτό περιέχει τα δεδομένα της ενέργειας και ορμής των ηλεκτρονίων και ποζιτρονίων στη μορφή που περιγράφηκε παραπάνω. Το αρχείο δεν έχει περισσότερο από 10,000 γεγονότα (γραμμές).

(B) Θα πρέπει το πρόγραμμά σας να ανοίγει το αρχείο αυτό και να διαβάζει τα δεδομένα της ενέργειας και τριών συνιστωσών της ορμής για το ηλεκτρόνιο και ποζιτρόνιο και να τα αποθηκεύει σε κατάλληλα *collections* των σωματιδίων. Κάθε δομή θα πρέπει να περιέχει σαν μέλη της την ενέργεια  $E$ , τις 3 συνιστώσες της ορμής και το φορτίο του λεπτονίου (-1

για το ηλεκτρόνιο και +1 για το ποζιτρόνιο). Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να διαβάζει τα δεδομένα από το file και να σταματά αν το file έχει εξαντληθεί. [4μ]

(Γ) Για κάθε γεγονός, δηλαδή ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου της ίδιας γραμμής, το πρόγραμμά σας θα πρέπει να υπολογίζει την εγκάρσια ορμή,  $p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ , και των δύο σωματιδίων ξεχωριστά (ηλεκτρονίου ή ποζιτρονίου). Λόγω πειραματικών σφαλμάτων η ορμή των σωματιδίων δεν μετريέται σωστά. Θεωρήστε ότι το σφάλμα της μέτρησης είναι  $\frac{\sigma p_T}{p_T} = 5\%$ . Χρησιμοποιήστε την κλάση *TRandom3* (περιέχεται στο *TRandom.h* του

λογισμικού *ROOT*) και τη μέθοδο της κλάσης *Gaus(mean,sigma)* η οποία επιστρέφει μια τυχαία τιμή κατανομημένη Gaussian με μέση τιμή *mean* και  $\sigma = \text{sigma}$ , θα πρέπει να τροποποιήσετε την εγκάρσια ορμή των σωματιδίων κάθε γεγονότος σύμφωνα με τη μετρούμενη αβεβαιότητα. Ανάλογα θα πρέπει να τροποποιήσετε και την z-συνιστώσα της ορμής και επομένως θα πρέπει να ξανα υπολογίσετε την ολική ορμή και ενέργεια των σωματιδίων. Κάντε το histogram της κατανομής της εγκάρσιας ορμής των ηλεκτρονίων και ποζιτρονίων να είναι το ίδιο σωματίδιο. [8μ]

(Δ) Θα πρέπει να επιλέξετε κατόπιν τα γεγονότα στα οποία τα ηλεκτρόνια και ποζιτρόνια έχουν εγκάρσια ορμή μεγαλύτερη από 20 GeV/c. Για κάθε επιτυχές ζευγάρι θα πρέπει να συνεχίσετε στον υπολογισμό της μάζας του  $Z^0$ , διαφορετικά να απορρίπτεται το ζεύγος από περεταίρω υπολογισμούς. [1μ]

(Ε) Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να περιέχει μία συνάρτηση, *GET\_MASS*, η οποία να καλείται για κάθε ζεύγος  $e^+e^-$  που ικανοποιεί την επιλογή του βήματος (Γ) και επιστρέφει τη μάζα του  $Z^0$  σύμφωνα με την εξίσωση (2). [3μ]

(Ζ) Στο τέλος των υπολογισμών σας το πρόγραμμα θα πρέπει να τυπώνει στην οθόνη τον αριθμό των γεγονότων που διάβασε και τον αριθμό των  $Z^0$  γεγονότων που επιλέχθηκαν με βάση το αποτέλεσμα του ερωτήματος (Γ). Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να γεμίζει ένα histogram με τη μάζα του κάθε ζεύγους. Το histogram θα πρέπει να έχει εύρος υποδιαστημάτων ίσο με 2 GeV/c<sup>2</sup>. Θα πρέπει να κάνετε επίσης ένα histogram της εγκάρσιας ορμής των  $Z^0$  σωματιδίων που επιλέξατε. Θα πρέπει να αποθηκεύσετε τα δύο histograms στο αρχείο *midterm\_prob05.root* το οποίο θα πρέπει να επιστρέψετε με το πρόγραμμά σας. [4μ]