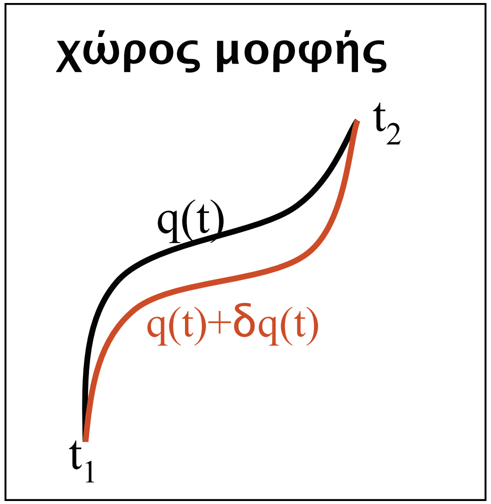
Στάσιμο ή στατικό ολοκλήρωμα

- Φανταστείτε δύο διαδρομές οι οποίες είναι πολύ κοντά μεταξύ τους

  Η διαφορά τους είναι απειροελάχιστη

- Στάσιμο ολοκλήρωμα σημαίνει ότι η διαφορά των ολοκληρωμάτων δράσης είναι μηδέν κατά πρώτη προσέγγιση ως προς $\delta q(t)$
  - Ανάλογο του «πρώτη παράγωγος = 0»
    - Σχεδόν ίδιο σα να λέμε «ελάχιστο»

      Θα μπορούσε να 'ναι και μέγιστο



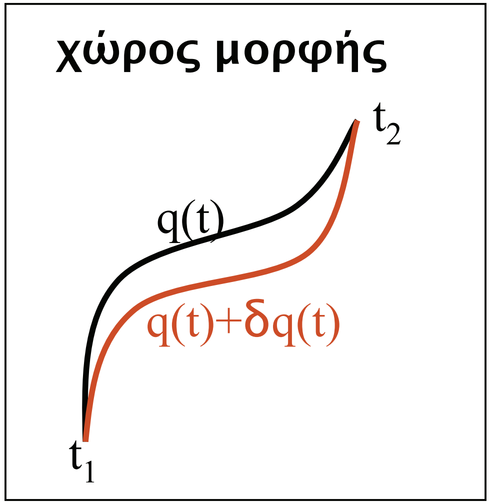
$\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q, \dot{q}+\delta \dot{q}, t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt = 0$$

Απειροελάχιστη μεταβολή τροχιάς

- Τι είναι $\delta q(t)$;
  - Είναι αυθαίρετη... Σχεδόν
  - Πρέπει να είναι μηδέν στα t_1 και t_2
  - Συμπεριφέρεται πολύ καλά

Συνεχής, μη απειριζόμενη συνεχείς 1ες και 2ες παράγωγοι



- Πρέπει να τη συρρικνώσουμε σε μηδέν
  - Το τέχνασμα είναι: γράψτε την ως $\delta q(t) = \alpha\eta(t)$
  - α είναι μια παράμετρος, την οποία θα κάνουμε να πηγαίνει στο 0
  - $\eta(t)$ είναι μια καλώς συμπεριφερόμενη αυθαίρετη συνάρτηση
  - $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$

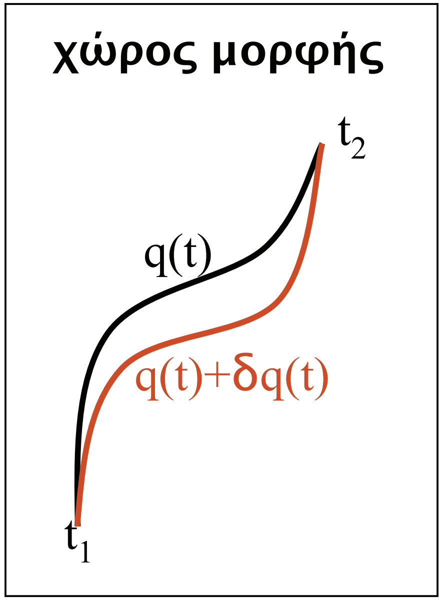
Από την αρχή Hamilton στην Lagrange

- Λάβετε υπ' όψη μια γενικευμένη συντεταγμένη q
  - Προσθέστε $\delta q(t)$ σε $q(t)$, και ζητείστε $\delta q(t) \to 0$
  - Κάντε το αυτό με $\delta q(t) = \alpha\eta(t)$ ⇨ $q(t,\alpha) = q(t)+\alpha\eta(t)$
  - α είναι μια παράμετρος →0
  - $\eta(t)$ μια αυθαίρετη καλώς συμπεριφερόμενη συνάρτηση
  - $n(t_1) = n(t_2) = 0$

Το ολοκλήρωμα δράσης θα 'ναι

$$S(a) \equiv \int_{t_1}^{t_2} L\big(q(t,a),\dot{q}(t,a),t\big)\,dt$$

Εξαρτάται από το $\eta(t)$



Λογισμός μεταβολών

- Ορίσαμε $S(a) \equiv \int_{t_1}^{t_2} L\big(q(t,a), \dot{q}(t,a), t\big)\,dt$

Για οποιοδήποτε η(t)

- Αν η δράση είναι στάσιμη $\Rightarrow \left(\dfrac{dS(a)}{da}\right)_{a=0} = 0$

$$\frac{dS(a)}{da} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\frac{dq}{da} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d\dot{q}}{da} \right) dt$$

πράξεις

$$q(t,a) = q(t) + a\eta(t)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \boxed{\frac{dq}{da}}\,dt$$

=η(t)

Αυθαίρετη συνάρτηση

Ο 2ος όρος με ολοκλήρωση ανά τμήματα δίνει:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d\dot{q}}{da}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{da}\right) dt =$$

$$\cancel{\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{dq}{da}\right|_{t_1}^{t_2}} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\frac{dq}{da}\,dt$$

0 Επειδή $\dfrac{dq}{da} = \eta(t)$ και

$$\eta(t_1) = \eta(t_1) = 0$$

Εξίσωση Lagrange

Θεμελιώδες Λήμμα:

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x)dx = 0 \quad \text{για κάθε } \eta(x) \Rightarrow M(x) = 0 \ \text{για} \ x_1 < x < x_2$$

- Παίρνουμε:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\eta(t)dt = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

Πήραμε την εξίσωση Lagrange

Συμβολισμοί των μεταβολών

- Για συντομία χρησιμοποιούμε το συμβολισμό δ για τις απειροελάχιστες μεταβολές

π.χ. α-παράγωγος στο α=0

$$\delta S \equiv \left(\frac{dS}{da}\right)_{a=0} da = \frac{d}{da}\left(\int_{t_1}^{t_2} L(q(t,a),\dot{q}(t,a),t)dt\right)da$$

$$\delta q \equiv \left(\frac{dq}{da}\right)_{a=0} da = \eta(t)da$$

Η αρχή του Hamilton μπορεί να γραφεί

$$\delta S \equiv \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt$$

Δουλεύοντας με n-συντεταγμένες

- Είναι εύκολο να αναπτύξουμε την προηγούμενη μεθοδολογία για περισσότερες συντεταγμένες $q \rightarrow q_1,\ldots,q_n$

$$\delta S \equiv \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)}_{=0 \text{ για κάθε } i} \delta q_i dt$$

Υπόθεση: $\delta q_1, \delta q_2, \ldots$ είναι αυθαίρετα και ανεξάρτητα

- Δεν ισχύει για x-y-z συντεταγμένες αν υπάρχουν δεσμοί
- Ισχύει για γενικευμένες συντεταγμένες αν το σύστημα είναι ολόνομο

Η αρχή του Hamilton

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0$$

- Η δράση S, περιγράφει όλη την κίνηση του συστήματος

  Είναι αρκετό να εξαγάγουμε τις εξισώσεις κίνησης

- Η δράση S, δεν εξαρτάται από την εκλογή των συντεταγμένων

  Ο φορμαλισμός Lagrange είναι αναλλοίωτος από εκλογή συντεταγμένων

Ο λογισμός των μεταβολών

Η τεχνική έχει ευρύτερες εφαρμογές

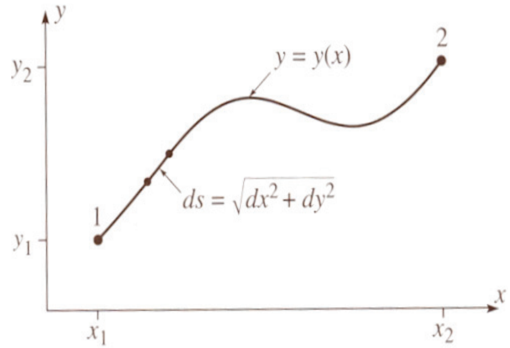
Γενικά για

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x)dx \qquad y' \equiv \frac{dy}{dx}$$

$$\delta J = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

Παραδείγματα

- Η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων είναι η ευθεία:



Είδαμε ότι το μήκος της διαδρομής που συνδέει 2 σημεία είναι:

$$D = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1+y'^2}$$

Η εξίσωση αυτή έχει τη μορφή: $S = \int_{x_1}^{x_2} f\left[y(x), y'(x), x\right] dx$

όπου $f\left(y, y', x\right) = \sqrt{\left(1+y'^2\right)}$

Από την εξίσωση Euler-Lagrange έχουμε:

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (1)$$

Αλλά $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$

Αντικαθιστώντας στην (1) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y'} = C \Rightarrow \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C \Rightarrow y'^2 = C^2\left(1+y'^2\right)$

$$\Rightarrow y'^2 = \frac{-C^2}{\left(C^2-1\right)} \Rightarrow y'(x) = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow dy = kdx \Rightarrow \int dy = k\int dx \Rightarrow y = kx + b$$

Γεωδεσιακή σφαιρικής επιφάνειας

- Η γραμμή η οποία δίνει τη μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων πάνω σε μια οποιαδήποτε επιφάνεια ονομάζεται γεωδεσιακή (geodesics) της επιφάνειας
- Είδαμε ότι η γραμμή που ενώνει δύο σημεία στο επίπεδο είναι η ευθεία. Ποια είναι η γραμμή που δίνει την μικρότερη απόσταση δύο σημείων πάνω σε σφαιρική επιφάνεια?

Χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες (ρ, θ, φ).

Έστω δύο σημεία της επιφάνειας είναι τα $\Sigma_1(\theta_1,\varphi_1)$ και $\Sigma_2(\theta_2,\varphi_2)$

Η στοιχειώδης απόσταση σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta d\phi^2 \Rightarrow ds^2 = \rho^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

Στην περίπτωση αυτή $d\rho=0$

Άρα η απόσταση μεταξύ των σημείων είναι:

$$s = \rho\int_1^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow s = \rho\int_1^2 \left(\frac{d\theta^2}{d\phi^2} + \sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}} d\phi$$

Αναγνωρίζοντας: $f = \left(\frac{d\theta^2}{d\phi^2} + \sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\theta'^2 + \sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$ όπου $\theta' = \frac{d\theta}{d\phi}$

θέλουμε την ελάχιστη απόσταση, τότε το ολοκλήρωμα πρέπει να 'χει ακρότατο

Γεωδεσιακή σφαιρικής επιφάνειας

Παρατηρούμε ότι $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}=0$ (1)

Αλλά για μια συνάρτηση $f=f\left(y,y',x\right)$ έχουμε $\dfrac{df}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial f}{\partial y'}\dfrac{dy'}{dx}+\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (2)

οπότε $\dfrac{df}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial y}y'+\dfrac{\partial f}{\partial y'}y''+\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (3)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ακόμα ισχύει ότι: } \dfrac{d}{dx}\left(y'\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right)=y''\dfrac{\partial f}{\partial y'}+y'\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial y'} \\ \text{Από την (3) όμως: } \dfrac{\partial f}{\partial y'}y''=\dfrac{df}{dx}-\dfrac{\partial f}{\partial y}y'-\dfrac{\partial f}{\partial x}\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(y'\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right)=\dfrac{df}{dx}-\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y}y'+y'\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial y'}$$

Οι δύο τελευταίοι όροι γράφονται: $-y'\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}-\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right]=0$ (Εξίσωση E-L)

Οπότε καταλήγουμε: $\dfrac{d}{dx}\left(y'\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right)=\dfrac{df}{dx}-\dfrac{\partial f}{\partial x}\Rightarrow\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{df}{dx}-\dfrac{d}{dx}\left(y'\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right)\Rightarrow\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{d}{dx}\left(f-y'\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right)$

Από την (1) όμως (υποθέσαμε ότι f ανεξάρτητη της x) έχουμε $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$

Άρα καταλήγουμε στην εξίσωση: $\dfrac{d}{dx}\left(f-y'\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$ $\Rightarrow f-y'\dfrac{\partial f}{\partial y'}\equiv\sigma\tau\alpha\theta.$ όταν $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$

2^{η} μορφή εξισώσεων E-L

Γεωδεσιακή σφαιρικής επιφάνειας

Από τις εξισώσεις Euler-Lagrange έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{d}{d\phi}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta'}\right) = 0 \Rightarrow \left(\theta'^2 + \sin^2\theta\right)^{1/2} - \theta' \cdot \frac{\partial}{\partial \theta'}\left(\theta'^2 + \sin^2\theta\right)^{1/2} = const \equiv a$$

Διαφορίζοντας και πολ/ζοντας με f έχουμε τελικά $\sin^2\theta = \alpha\left(\theta'^2 + \sin^2\theta\right)^{1/2}$

Θέτοντας $\dfrac{d\phi}{d\theta} = \theta'^{-1}$ η προηγούμενη διαφορική εξίσωση δίνει:

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{\alpha \csc^2\theta}{(1-\alpha^2\csc^2\theta)^{1/2}} \Rightarrow \phi = \sin^{-1}\left(\frac{\cot\theta}{\beta}\right) + \alpha \qquad \beta^2 \equiv (1-\alpha^2)/\alpha^2$$

Η τελευταία εξίσωση για το φ παίρνει τη μορφή: $\cot\theta = \beta\sin(\phi - \alpha)$

$$\cot\theta = \beta\sin(\phi-\alpha) = \beta\sin\phi\cos\alpha - \beta\cos\phi\sin\alpha$$

Πολ/ζω με $\rho\sin\theta$

$$\rho\cos\theta = \beta\rho\sin\theta\sin\phi\cos\alpha - \beta\rho\sin\theta\cos\phi\sin\alpha$$

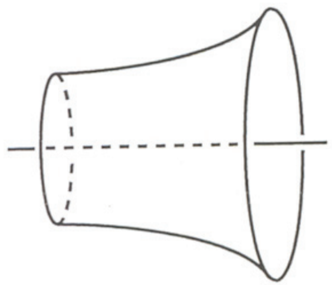
Θέτω: $A = \beta\cos\alpha$ $\quad B = \beta\sin\alpha$

$$(\rho\cos\theta) = A(\rho\sin\theta\sin\phi) - B(\rho\sin\theta\cos\phi)$$

Αλλά οι σχέσεις στις παρενθέσεις είναι τα z, y, x

$\Rightarrow$ $z = Ay - Bx$ Εξίσωση επιπέδου

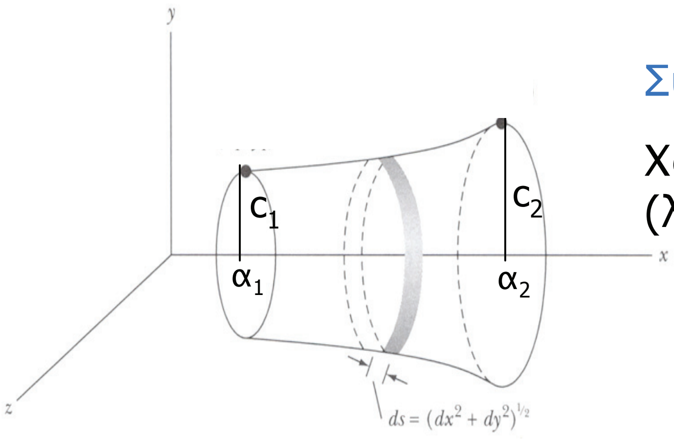
Ελάχιστη επιφάνεια περιστροφής



Έστω ότι μια επιφάνεια περιστροφής έχει 2 στεφάνια σαν τα όρια της. Ποια πρέπει να είναι η μορφή της επιφάνειας ώστε να έχει το ελάχιστο δυνατό εμβαδό

Λύση

Έστω η επιφάνεια δημιουργείται από την περιστροφή της καμπύλης $y=y(x)$ γύρω από τον x-άξονα.



Συνοριακές συνθήκες: $y(a_1) = c_1 \qquad y(a_2) = c_2$

Χωρίζοντας την επιφάνεια σε στοιχειώδη δακτυλίδια, (λωρίδα επιφάνειας) το εμβαδό της δίνεται από:

$$A = \int L_c ds \Rightarrow A = \int_{a_1}^{a_2} 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

περιφέρεια δακτυλίου

Στοιχειώδες μήκος

Άρα χρειάζεται να βρούμε τη συνάρτηση που ελαχιστοποιεί το ολοκλήρωμα A

Η συνάρτησή μας είναι: $f(x) = y\sqrt{1 + y'^2}$

Ελαχιστοποίηση του ολοκληρώματος σημαίνει ικανοποίηση της εξίσωσης E-L

Ελάχιστη επιφάνεια περιστροφής

Λήμμα:

" Η συνάρτηση $y(x)$ που δίνει ακρότατες τιμές στο ολοκλήρωμα:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$ όπου $f(y)$ δεδομένη συνάρτηση του y

ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $1+y'^2 = Bf(y)^2$ όπου B σταθερά ολοκλήρωσης"

Θεωρώντας $f(y) = y$ έχουμε: $1+y'^2 = By^2$

Λύνοντας τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{By^2-1} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{By^2-1}} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{By^2-1}} = \int dx$$

Το ολοκλήρωμα: $$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \cosh^{-1} z$$

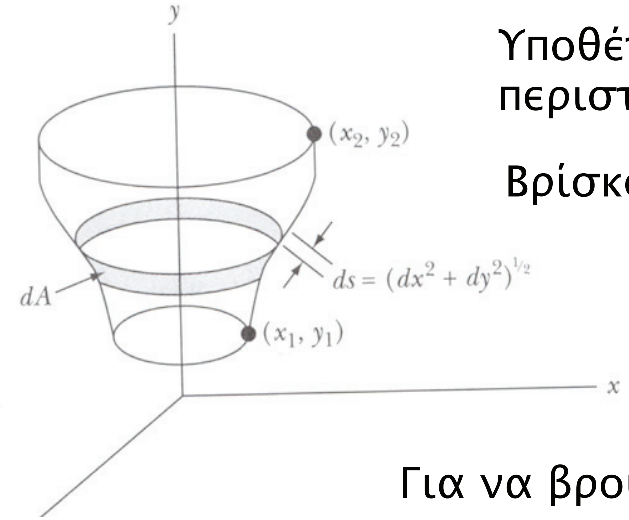
Επομένως η λύσης είναι: $y(x) = \frac{1}{\sqrt{B}}\cosh\left[\sqrt{B}\left(x+d\right)\right]$ όπου d σταθερά ολοκλ.

Οι σταθερές B και d καθορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες:

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{B}}\cosh\left[\sqrt{B}\left(a_1+d\right)\right] \quad \text{και} \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{B}}\cosh\left[\sqrt{B}\left(a_2+d\right)\right]$$

Επιφάνεια περιστροφής γύρω από y-άξονα

Επιφάνεια δημιουργείται από την περιστροφή μιας καμπύλης που συνδέει 2 σταθερά σημεία (x_1,y_1) και (x_2,y_2) γύρω από άξονα ομοεπίπεδο με τα 2 σημεία.
Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης που συνδέει τα 2 σημεία και δίνει επιφάνεια περιστροφής με το ελάχιστο εμβαδό.



Υποθέτουμε ότι η καμπύλη που περνά από τα σημεία 1 και 2 περιστρέφεται γύρω από τον άξονα y.

Βρίσκουμε το εμβαδό dA μιας λωρίδας όπως στο σχήμα.

$$dA = 2\pi x ds = 2\pi x\left(dx^2 + dy^2\right)^{1/2} \Rightarrow$$
$$A = 2\pi\int_{x_1}^{x_2} x\left(1+y'^2\right)^{1/2} dx$$

Για να βρούμε το ακρότατο του A θεωρούμε την: $f = x\left(1+y'^2\right)^{1/2}$

και την αντικαθιστούμε στη εξίσωση E-L

$$\delta A = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow 0 - \frac{d}{dx}\left(\frac{xy'}{\left(1+y'^2\right)^{1/2}}\right) = 0$$

Επομένως: $$\frac{xy'}{\left(1+y'^2\right)^{1/2}} = const. \equiv a \Rightarrow x^2y'^2 = a^2\left(1+y'^2\right) \Rightarrow y' = \frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

Επιφάνεια περιστροφής γύρω από y-άξονα

Ολοκληρώνουμε την: $y' = \dfrac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} \Rightarrow \int dy = \int \frac{adx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \Rightarrow y(x) = a\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + b$$

Οι σταθερές α και b βρίσκονται από τη συνθήκη ότι η y(x) περνά από τα σημεία 1,2

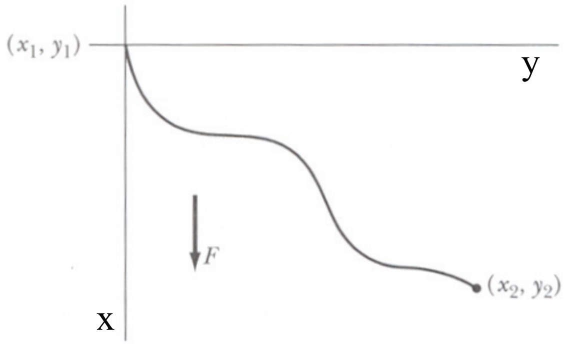
Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί επίσης και ως:

$$\boxed{x = a\cosh\left(\frac{y-b}{a}\right)}$$

Η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση της "σαπουνόφουσκας" που κρέμεται ελεύθερα από δύο σημεία στήριξης

Βραχυστόχρονο – κλασσικό πρόβλημα φυσικής

Θεωρήστε ένα σωματίδιο που ξεκινά από ηρεμία από ένα σημείο (x_1,y_1) και πηγαίνει σε ένα σημείο (x_2,y_2). Να βρεθεί η διαδρομή που επιτρέπει το σώμα να εκτελέσει τη διαδρομή στο μικρότερο χρονικό διάστημα



Θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων ώστε το αρχικό σημείο συμπίπτει με την αρχή των αξόνων

Θεωρούμε ότι η δύναμη του πεδίου δρα στη x-διεύθυνση και είναι σταθερή και δεν υπάρχει τριβή - συντηρητικό

Η ολική μηχανική ενέργεια διατηρείται: $E = T + V = const.$

Επειδή το σώμα ξεκινά από ηρεμία: $E = T + V = 0$ (θεωρώντας ότι V=0 για y=0)

Σε κάθε σημείο της τροχιάς: $T = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2$ και $V = -Fx \Rightarrow V = -mgx$

Αφού $E = T + V = 0 \Rightarrow \mathrm{v}^2 = 2gx \Rightarrow \mathrm{v} = \sqrt{2gx}$

Ο χρόνος που απαιτείται για το σωματίδιο να εκτελέσει τη διαδρομή είναι:

$$t = \int_1^2 \frac{ds}{\mathrm{v}} = \int \frac{\left(dx^2 + dy^2\right)^{1/2}}{(2gx)^{1/2}} \Rightarrow t = \int_{x_1=0}^{x_2} \left(\frac{1 + y'^2}{2gx}\right)^{1/2} dx$$

Θέλουμε ο χρόνος αυτός να είναι ελάχιστος

Βραχυστόχρονο

Από τη σχέση: $t=\int_{x_1=0}^{x_2}\left(\frac{1+y'^2}{2gx}\right)^{1/2}dx$ αναγνωρίζουμε τη συνάρτηση: $f=\left(\frac{1+y'^2}{2gx}\right)^{1/2}$

Από την εξίσωση E-L έχουμε:

$$\delta t=0\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0\Rightarrow 0-\frac{d}{dx}\left(\frac{2y'}{\left[x\left(1+y'^2\right)\right]^{1/2}}\right)=0\Rightarrow$$

$$\frac{y'}{\left[x\left(1+y'^2\right)\right]^{1/2}}\equiv\frac{1}{\sqrt{2a}}\Rightarrow\frac{y'^2}{\left[x\left(1+y'^2\right)\right]}=\frac{1}{2a}\Rightarrow y=\int\frac{xdx}{\left(2ax-x^2\right)^{1/2}}$$

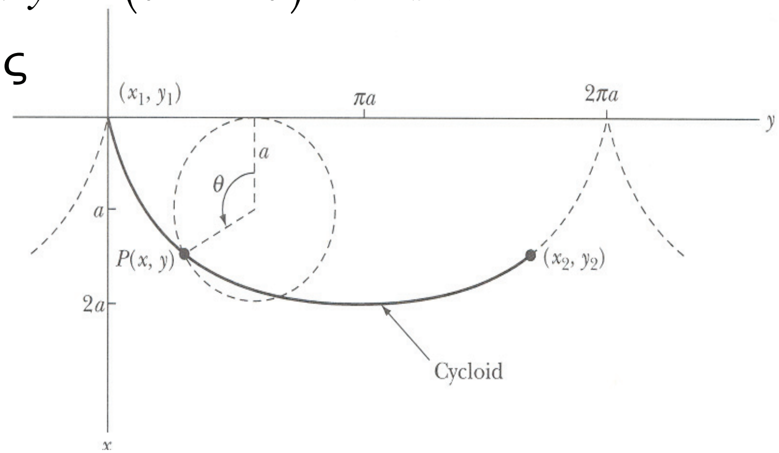
Πραγματοποιούμε την ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητών:

$$x=a\left(1-\cos\theta\right)\qquad dx=a\sin\theta d\theta$$

Το ολοκλήρωμα γίνεται: $y=\int a\left(1-\cos\theta\right)d\theta\Rightarrow y=a\left(\theta-\sin\theta\right)+const.$

Οι παραμετρικές εξισώσεις ενός κυκλοειδούς που περνά από την αρχή των αξόνων είναι:

$$x=a\left(1-\cos\theta\right)$$
$$y=a\left(\theta-\sin\theta\right)$$



Η σταθερά α πρέπει να ρυθμιστεί ώστε το σώμα να περνά από το σημείο (x_2,y_2)