ΦΥΣ. 112

5ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή 14.10.2022**

1. Δύο επίπεδοι πυκνωτές χωρητικότητας $2\mu F$ ο καθένας είναι συνδεδεμένοι σε παράλληλη συνδεσμολογία. Το σύστημα το δύο πυκνωτών είναι συνδεδεμένο με τροφοδοτικό τάσης $100V$. Η μπαταρία αποσυνδέεται και η απόσταση μεταξύ των δύο οπλισμών ενός από τους πυκνωτές διπλασιάζεται. Βρείτε το φορτίο στον θετικό οπλισμό του κάθε πυκνωτή.

Το ολικό φορτίο της διάταξης παραμένει σταθερό, αλλά αναδιανέμεται όταν αποσυνδεθεί η μπαταρία και αυξηθεί η απόσταση μεταξύ των οπλισμών του ενός πυκνωτή.

Οι πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι παράλληλα μεταξύ τους, οπότε η ισοδύναμη χωρητικότητα θα είναι: $C_{ισοδ} = C_1 + C_2 = 2.0\mu F + 2\mu F \Rightarrow \underline{C_{ισοδ} = 4\mu F}$

Το ολικό φορτίο θα είναι: $Q_{ολ} = C_{ισοδ} \cdot V_{ισοδ} \Rightarrow Q_{ολ} = 4\mu F \cdot 100V = \underline{400\mu C}$

Αλλά $Q = Q_1 + Q_2 \Rightarrow$

Ακόμα: $V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2'} = \frac{Q_2}{\frac{1}{2}C_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{C_1} = \frac{2Q_2}{C_2} \Rightarrow Q_1 = \frac{2C_1Q_2}{C_2}$

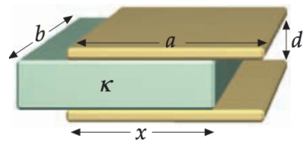
Αντικαθιστούμε την τελευταία στην εξίσωση διατήρησης του φορτίου:

$$Q = \frac{2C_1Q_2}{C_2} + Q_2 \Rightarrow Q \cdot C_2 = (2C_1 + C_2)Q_2 \Rightarrow Q_2 = \frac{\cancel{C_2}Q}{\left[2\left(\frac{C_1}{C_2}\right)+1\right]\cancel{C_2}} \Rightarrow$$

$$Q_2 = \frac{400\mu C}{2\cdot 1+1} \Rightarrow \underline{Q_2 = 133\mu C}$$

Αντικατάσταση στη $Q_1 = \frac{2C_1Q_2}{C_2} \Rightarrow \underline{Q_1 = 266\mu C}$

2. Ένας ορθογώνιος παραλληλεπίπεδος πυκνωτής, ο οποίος έχει μήκος a και πάχος b περιέχει διηλεκτρικό ανάμεσα στους οπλισμούς του το οποίο έχει πάχος b αλλά είναι μερικώς τοποθετημένο ανάμεσα στους οπλισμούς όπως φαίνεται στο σχήμα. (α) Βρείτε τη χωρητικότητα συναρτήσει της απόστασης x αγνοώντας μη ομογένεια του ηλεκτρικού πεδίου στα άκρα των οπλισμών. (β) Δείξτε ότι η απάντησή σας ταυτίζεται με αυτή που αναμένεται για $x = 0$ και $x = a$.



Μπορούμε να θεωρήσουμε τον πυκνωτή αυτό ως τον ισοδύναμο δύο πυκνωτών συνδεδεμένων παράλληλα μεταξύ τους.

Έστω ο πυκνωτής με το διηλεκτρικό είναι C_1 και αυτός χωρίς το διηλεκτρικό ο C_2.

Η ισοδύναμη χωρητικότητα δύο πυκνωτών σε παράλληλη σύνδεση:

$$C_{ισοδ} = C_1 + C_2 \quad (1)$$

Αλλά

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{k\varepsilon_0 A_1}{d} = \frac{k\varepsilon_0 bx}{d} \\ C_0 &= \frac{\varepsilon_0 A_1}{d} = \frac{\varepsilon_0 ab}{d} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{C_1}{C_0} = \frac{kx}{a} \Rightarrow \boxed{C_1 = k\frac{x}{a}C_0} \quad (2)$$

η χωρητικότητα του πυκνωτή με το διηλεκτρικό εξαρτάται του μήκους του υλικού που έχει εισχωρήσει, της διηλεκτρικής σταθεράς του υλικού και της χωρητικότητας του πυκνωτή χωρίς το διηλεκτρικό.

Ο πυκνωτής $C_2 = \frac{\varepsilon_0 A_2}{d} = \frac{\varepsilon_0 b(a-x)}{d} \Rightarrow \frac{C_2}{C_0} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{a-x}{a}C_0}$ (3)

Αντικαθιστούμε την (2) κ (3) στην (1) οπότε: $C_{ισοδ} = k\frac{x}{a}C_0 + \frac{a-x}{a}C_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow C_{ισοδ} = \frac{C_0(a+kx-x)}{a} = \frac{C_0[a+(k-1)x]}{a} \Rightarrow C_{ισοδ} = \frac{\varepsilon_0 \cancel{a} b}{\cancel{a} d}[a+(k-1)x]$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{ισοδ} = \frac{\varepsilon_0 b}{d}[a+(k-1)x]}$$ για $x=0$ τότε: $\boxed{C_{ισοδ} = \frac{\varepsilon_0 ab}{d}}$

Για $x=a$ $\quad C(a) = \frac{\varepsilon_0 b}{d}[a+(k-1)a] = \frac{k\varepsilon_0 ab}{d}$.

3. Η μπαταρία του αυτοκινήτου σας έχει ηλεκτρεργετική δύναμη $12V$ και παρουσιάζει αμελητέα εσωτερική αντίσταση. Η μπαταρία μπορεί να προσφέρει ολικό φορτίο 160 $A \cdot h$. (α) Πόση ενέργεια είναι αποθηκευμένη στη μπαταρία; (β) Μετά από μία ολονύκτια μελέτη για να τελειώσετε την κατ'οίκον εργασία σας στη ΦΥΣ112, ετοιμάζεστε να πάτε στην πρωινή διάλεξη του μαθήματος. Ωστόσο ανακαλύπτετε ότι η μπαταρία του αυτοκινήτου είναι «νεκρή» γιατί ξεχάσατε τα φώτα ανοικτά την προηγούμενη νύκτα. Υποθέτοντας ότι η μπαταρία ήταν σε θέση να παράγει ρεύμα με σταθερό ρυθμό ως τη στιγμή που αποφορτίστηκε πλήρως, υπολογίστε πόσο χρόνο ήταν ανοικτά τα φώτα του αυτοκινήτου σας. Υποθέστε ότι το ζευγάρι των φαναριών του αυτοκινήτου δουλεύουν σε ισχύ $150W$.

(α) Η ολική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στην μπαταρία μπορεί να γραφεί ως $\Delta U = P\Delta t = \mathcal{E} I \Delta t \Rightarrow \Delta U = 12 \cdot 160\,A \cdot h = 1.92\,kWh$

$$\Rightarrow \Delta U = 1.92\,kW \cdot \cancel{h} \times \frac{3.600\,s}{\cancel{h}} = 6.9 \cdot 10^6\,J \Rightarrow \Delta U = \underline{\underline{6.9\,MJ}}$$

(β) $\Delta U = P \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \dfrac{\Delta U}{P} = \dfrac{1.92 \cdot kWh}{150\,W} = \dfrac{1920\,W \cdot h}{150} = \underline{\underline{12.8h}}$

4. Ένας ηλεκτρικός καυστήρας $100W$ είναι σχεδιασμένος να δουλεύει σε τάση $240V$. (α) Ποια είναι η αντίσταση του καυστήρα και πόσο ρεύμα διαρρέει τον καυστήρα; (β) Δείξτε ότι αν η διαφορά δυναμικού V στους πόλους του καυστήρα αλλάξει κατά ένα μικρό ποσό ΔV, η ισχύς αλλάζει κατά ένα μικρό ποσό ΔP, όπου $\Delta P/P \sim 2\Delta V/V$. <u>*Υπόδειξη*</u>: Προσεγγίστε τις αλλαγές ως διαφορικές, και υποθέστε ότι η αντίσταση είναι σταθερή. (γ) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β), βρείτε την ισχύ που προσφέρθηκε στον καυστήρα αν η διαφορά δυναμικού ελαττώθηκε στα $210V$. Συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με το ακριβές αποτέλεσμα.

(α) Από την εξίσωση της ισχύος θα έχουμε: $P = IV \Rightarrow I = \dfrac{P}{V} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \frac{100W}{240V} \Rightarrow I = \frac{10}{24}A = \frac{5A}{12} \Rightarrow I = 0.417A$$

Η αντίσταση του καυστήρα θα είναι: $R = \dfrac{V}{I} = \dfrac{V}{\frac{P}{V}} = \dfrac{V^2}{P} = \dfrac{(240)^2V^2}{100W} \Rightarrow$

$$\Rightarrow R = \frac{24\cancel{0}\cdot 24\cancel{0}\,\Omega}{1\cancel{00}} \Rightarrow R = 576\Omega$$

(β) Προσεγγίζουμε το διαφορικό $\dfrac{dP}{dV} \simeq \dfrac{\Delta P}{\Delta V} \Rightarrow \Delta P = \dfrac{dP}{dV}\Delta V$

Αλλά $\dfrac{dP}{dV} = \dfrac{d}{dV}\left(\dfrac{V^2}{R}\right) = \dfrac{2V}{R} \Rightarrow \dfrac{dP}{dV} = \dfrac{2V}{R}$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta P = \frac{2V}{R}\Delta V = \frac{2V^2}{R}\frac{\Delta V}{V} = 2P\frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta P}{P} = 2\frac{\Delta V}{V}}$$

(γ) Η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα της ισχύος που χρησιμοποιείται και την αλλαγή στην ισχύ που διαχέεται στην αντίσταση όταν αλλάξει η τάση κατά ΔV:

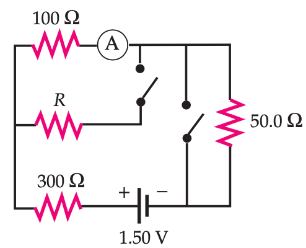
$$P \simeq P_0 + \Delta P = P_0 + 2P_0\frac{\Delta V}{V} = P_0\left(1 + 2\frac{\Delta V}{V}\right) = 100W\left(1 + \frac{2\cdot(-\cancel{30})}{\cancel{240}}\right) \Rightarrow$$

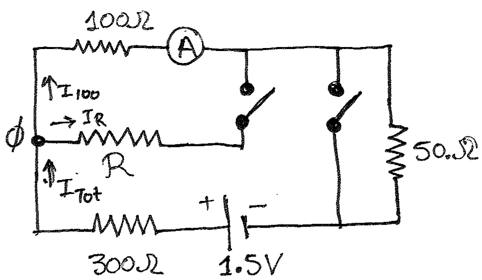
$$\Rightarrow \boxed{P = 75W}$$

Η ακριβής ισχύ που χάνεται στον καυστήρα θα είναι: $P = \dfrac{210^2V^2}{576\Omega} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{P = 76.56W}$$

5. Στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος, το αμπερόμετρο A έχει την ίδια ένδειξη όταν και οι δύο διακόπτες είναι ανοικτοί και όταν και οι δύο διακόπτες είναι κλειστοί. Βρείτε την άγνωστη αντίσταση *R*.





Ενώ οι διακόπτες είναι ανοικτοί εφαρμόζουμε το 2° νόμο του kirchhoff στον εξωτερικό βρόχο:

$$\mathcal{E} - I\cdot 300 - I\cdot 100 - I\cdot 50 = 0 \Rightarrow$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{300+100+50} = \frac{1.5V}{450\Omega} \Rightarrow \boxed{I_0 = \frac{1}{300}A}$$

Όταν και οι δύο διακόπτες είναι κλειστοί, τότε:

$$V_R = V_{100\Omega} \Rightarrow \boxed{I_{100}\cdot R_{100} = I_R\cdot R} \quad (1)$$

Ο 1ος κανόνας kirchhoff στον κόμβο φ δίνει: $I_{TOT} = I_R + I_{100} \Rightarrow I_R = I_{TOT} - I_{100}$

Αντικατάσταση, θα δώσει: $I_{100}\cdot R_{100} = I_{Tot}R - I_{100}R \Rightarrow \boxed{I_{100} = \frac{I_{TOT}R}{R+R_{100}}}$ (2)

Όταν οι δύο διακόπτες είναι κλειστοί, τότε το ρεύμα θα είναι: $I_{TOT} = \frac{\mathcal{E}}{R_{ισοδ.}}$ $\Big\} \Rightarrow$

Αλλά $R_{ισοδ} = R\|R_{100} + R_{300} \Rightarrow R_{ισοδ} = \frac{100R}{100+R} + 300$

$$\Rightarrow I_{TOT} = \frac{\mathcal{E}(100+R)}{100R+300R+3\cdot10^4} = \frac{(100+R)\mathcal{E}}{400R+3\cdot10^4} \quad (3)$$

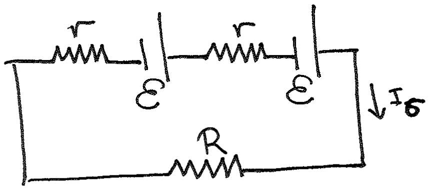
Αντικαθιστάμε στη σχέση (2) και έχουμε: $I_{100} = \dfrac{\dfrac{\cancel{(100+R)}\mathcal{E}}{400R+3\cdot10^4}R}{\cancel{R+R_{100}}} = I_0 = \frac{A}{300}$

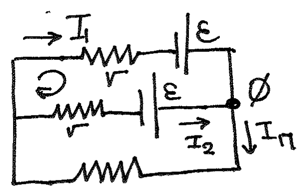
επειδή το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση 100Ω είναι ίδιο όταν οι 2 διακόπτες είναι ανοικτοί και κλειστοί. Λύνουμε επομένως προς R.

$$300\mathcal{E}R = 400R + 3\cdot10^4 \Rightarrow 400R - 450R = -3\cdot10^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50R = 30000 \Rightarrow \boxed{R = 600\Omega}$$

6. Δύο πανομοιότυπες μπαταρίες, η κάθε μία ηλεκτρεγερτικής δύναμης $\mathcal{E}$ και εσωτερικής αντίστασης *r*, μπορούν να συνδεθούν στα άκρα μιας αντίστασης *R*, με τις μπαταρίες είτε σε σειρά ή παράλληλα. Για κάθε περίπτωση συνδεσμολογίας, προσδιορίστε αν η ισχύς που προσφέρεται στην αντίσταση *R* είναι μεγαλύτερη όταν η αντίσταση *R* είναι μικρότερη από την εσωτερική αντίσταση *r*, ή όταν η αντίσταση *R* είναι μεγαλύτερη από την εσωτερική αντίσταση *r*.





Η ισχύς που παρέχεται στην αντίσταση R στην συνδεσμολογία της σειράς είναι:

$$P_σ = I_σ^2 R \qquad (Α)$$

Εφαρμογή του 2ου κανόνα kirchhoff στο βρόχο:

$$\mathcal{E} - I_σ r + \mathcal{E} - I_σ R - I_σ r = 0 \Rightarrow I_σ (r+r+R) = 2\mathcal{E} \Rightarrow I_σ = \frac{2\mathcal{E}}{2r+R} \qquad (Β)$$

Αντικατάσταση στην (Α) δίνει: $P_σ = \left(\frac{2\mathcal{E}}{2r+R}\right)^2 R \Rightarrow \boxed{P_σ = \frac{4\mathcal{E}^2}{(2r+R)^2} R}$ (Γ)

Η ισχύς που παρέχεται στο κύκλωμα της παράλληλης συνδεσμολογίας θα είναι:

$$P_Π = (I_Π)^2 R$$

Το ρεύμα στον κόμβο Φ θα είναι: $I_1 + I_2 = I_Π$ (Δ)

Εφαρμογή του 2ου κανόνα kirchhoff στον πάνω βρόχο θα δώσει:

$$\cancel{\mathcal{E}} - \cancel{\mathcal{E}} + I_2 r - I_1 r = 0 \Rightarrow I_2 \cdot r - I_1 r = 0 \Rightarrow I_1 = I_2 \qquad (Ε)$$

Από (Δ) και (Ε) έχουμε ότι $I_Π = I_1 + I_1 = 2I_1 \Rightarrow \boxed{I_1 = I_Π/2 = I_2}$ (ΣΤ)

Εφαρμογή του 2ου κανόνα kirchhoff στον εξωτερικό βρόχο:

$$\mathcal{E} - I_Π R - I_1 r = 0 \xRightarrow{(ΣΤ)} \mathcal{E} - I_Π R - \frac{I_Π}{2} r = 0 \Rightarrow \boxed{I_Π = \frac{\mathcal{E}}{\frac{r}{2} + R}}$$

Αντικατάσταση για το $I_Π$ στη σχέση της ισχύος, δίνει:

$$P_Π = \left(\frac{\mathcal{E}}{\frac{r}{2} + R}\right)^2 R \Rightarrow P_Π = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(r/2 + R)^2} \qquad (Ζ)$$

Θέλουμε να συγκρίνουμε την ισχύ στην αντίσταση R, για την παράλληλη και σε σειρά συνδεσμολογία.

$$P_\sigma = \frac{4\mathcal{E}^2 R}{(2r+R)^2} \quad \text{και} \quad P_\Pi = \frac{\mathcal{E}^2 R}{\left(\frac{r}{2}+R\right)^2}$$

Θεωρούμε τη διαφορά: $P_\sigma - P_\Pi = \dfrac{4\mathcal{E}^2 R}{(2r+R)^2} - \dfrac{\mathcal{E}^2 R}{\left(\frac{r}{2}+R\right)^2} = \Delta P \Rightarrow$

$$\Delta P = \mathcal{E}^2 R\left[\frac{4\left(\frac{r}{2}+R\right)^2 - (2r+R)^2}{(2r+R)^2\left(\frac{r}{2}+R\right)^2}\right] = \mathcal{E}^2 R\,\frac{\left[(r+2R)^2-(2r+R)^2\right]}{(2r+R)^2\left(\frac{r}{2}+R\right)^2}$$

Το πρόσημο του ΔP εξαρτάται από τον όρο στην τετραγωνική αγκύλη του αριθμητή, εφόσον όλοι οι υπόλοιποι όροι είναι θετικοί.

$$(r+2R)^2-(2r+R)^2 = (r+2R-2r-R)(r+2R+2r+R) = (R-r)(3R+3r)$$

Ο όρος $3R+3r$ είναι πάντοτε θετικός. Επομένως, όταν $R>r$ τότε $\Delta P>0$ και επομένως $P_\sigma > P_\Pi$

Αν $R<r$ τότε $\Delta P<0$ και $P_\sigma < P_\Pi$

Αν $R=r$ τότε $\Delta P=0$ οπότε $P_\sigma = P_\Pi \Rightarrow \dfrac{4\cancel{\mathcal{E}^2}\cancel{R}}{(2r+R)^2} = \dfrac{\cancel{\mathcal{E}^2}\cancel{R}}{\left(\frac{r}{2}+R\right)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{4}{(2+1)^2\cancel{R^2}} = \frac{1}{\cancel{R^2}\left(\frac{1}{2}+1\right)^2} \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{4}{9} \checkmark$$

Στην περίπτωση αυτή και οι δύο συνδεσμολογίες προσφέρουν την ίδια ισχύ.

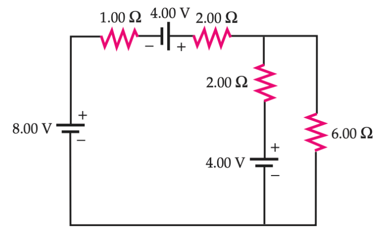
Όπως είδαμε: για $R<r$ $\quad \dfrac{4\cancel{\mathcal{E}^2}R}{(2r+R)^2} < \dfrac{\cancel{\mathcal{E}^2}R}{\left(\frac{r}{2}+R\right)^2} \Rightarrow 4\left(\frac{r}{2}+R\right)^2 < (2r+R)^2$

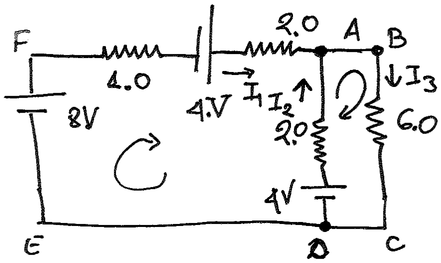
Για $R=\frac{r}{2}$ η ισχύς αυτή είναι μέγιστη γιατί τότε $\dfrac{dP_\Pi}{dR}=0$ οπότε παρουσιάζεται ακρότατο.

Αντίστοιχα για $R>r$ η ισχύς σε σειρά είναι μέγιστη και παρουσιάζει μέγιστο όταν $\dfrac{dP_\sigma}{dR}=0 \Rightarrow \dfrac{4(2r+R)^{\cancel{2}} - 4R\cancel{(2r+R)}2}{(2r+R)^{\cancel{4}\,3}} = \dfrac{8r+4R-8R}{(2r+R)^3} = \dfrac{8r-4R}{(2r+R)^3} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{R=2r}$ υπάρχει μέγιστο.

7. Για το κύκλωμα του διπλανού σχήματος βρείτε (α) το ρεύμα που διαρρέει κάθε αντιστάτη και (β) την ισχύ που προσφέρεται από κάθε πηγή ηλεκτρεγεργετικής δύναμης και (γ) την ισχύ που προσφέρεται σε κάθε αντιστάτη.





(α) Εφαρμόζουμε τον 1° κανόνα kirchhoff στον κόμβο A.

$$I_1 + I_2 = I_3$$

Εφαρμόζουμε τον 2° κανόνα kirchhoff στο βρόχο ABCD:

$$-I_3\cdot 6 + 4.0V - I_2\cdot 2 = 0 \Rightarrow I_3\cdot 6 + I_2\cdot 2 = +4.0$$

Εφαρμόζουμε τον 2° κανόνα στον βρόχο ADEF:

$$8.0V - I_1\cdot 1 + \cancel{4V} - I_1\cdot 2 + 2\cdot I_2 - \cancel{4V} = 0 \Rightarrow 3I_1 - 2I_2 = 8.0$$

Έχουμε επομένως το σύστημα:

(A) $I_3 = I_1 + I_2$

(B) $2I_2 + 6I_3 = +4.0$

(C) $3I_1 - 2I_2 = 8.0$

$\overset{+}{\Rightarrow} 3I_1 + 6I_3 = 12.0 \Rightarrow 3I_1 + 6I_1 + 6I_2 = 12.0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9I_1 + 6I_2 = 12.0$ (D)

Πολλαπλασιάζουμε την (C) με 3 και την προσθέτουμε στην (D)

(C)×3: $9I_1 - 6I_2 = 24.0 \Rightarrow 18I_1 = 36 \Rightarrow \boxed{I_1 = +2\,A}$ (1)

Αντικαθιστούμε στην (C) και έχουμε: $6 - 2I_2 = 8 \Rightarrow 6 - 2I_2 = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{I_2 = -1\,A}$ (2)

Αντικατάσταση της (1) και (2) στην (A) δίνει: $I_3 = 2 - 1 \Rightarrow \boxed{I_3 = +1\,A}$ (3)

Επομένως το ρεύμα I_2 έχει φορά προς τα κάτω, αντίθετα από αυτή που σχεδιάστηκε.

(β) Η ισχύς που προσφέρεται από την πηγή των 8.0V είναι:

$$P_{8V} = 8 \cdot 2 \Rightarrow \underline{\underline{P_{8V} = 16\,W}}$$

Η ισχύς που προσφέρεται από την πηγή των 4.0V είναι:

$$P_{4V} = 4 \cdot (-1) \Rightarrow P_{4V} = \underline{\underline{-4.0\,W}}$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι ρεύμα εισέρχεται στην πηγή και απορροφά ισχύ.

(γ) Η ισχύς που προσφέρεται στον αντίσταση του 1Ω είναι

$$P_{1\Omega} = (2A)^2 \cdot 1 \Rightarrow P_{1\Omega} = +4.0\,W$$

Η ισχύς που προσφέρεται στον αντίσταση 2-Ω στον αριστερό κλάδο:

$$P_{2\Omega} = (2 \cdot A)^2 \cdot 2\Omega \Rightarrow P_{2\Omega} = \underline{\underline{8.0\,W}}$$

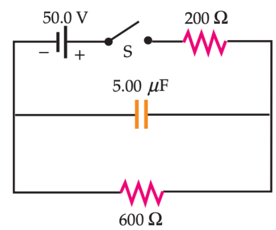
Η ισχύς στον αντίσταση των 2Ω στο κεντρικό κλάδο:

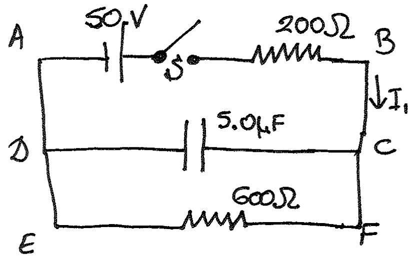
$$P_{2\Omega} = (1A)^2 \cdot 2\Omega = \underline{\underline{2.0\,W}}$$

Τέλος η ισχύς στην αντίσταση των 6Ω θα είναι:

$$P_{6\Omega} = (1A)^2 \cdot 6\Omega = \underline{6.0\,W}$$

8. Για το κύκλωμα του διπλανού σχήματος, ο διακόπτης είναι ανοικτός για πάρα πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα. Την χρονική στιγμή $t = 0$ ο διακόπτης κλείνει. (α) Βρείτε το ρεύμα στην μπαταρία αμέσως μόλις κλείσει ο διακόπτης. (β) Βρείτε το ρεύμα στην μπαταρία μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα αφότου έκλεισε ο διακόπτης. (γ) Βρείτε το ρεύμα που διαρρέει τον αντιστάτη αντίστασης 600Ω συναρτήσει του χρόνου.





(α) Από τον 2° κανόνα του kirchhoff όταν ο διακόπτης κλείνει θα έχουμε:

$\mathcal{E} = I_0 \cdot 200 - V_{C_0}$

$V_{C_0} = 0$ επειδή ο πυκνωτής είναι αρχικά αφόρτιστος

Επομένως: $I_0 = \dfrac{\mathcal{E} + V_{C_0}}{200} = \dfrac{50 + \emptyset}{200} \Rightarrow \boxed{I_0 = 0.25A}$

(β) Εφαρμόζουμε τον 2° κανόνα του kirchhoff όταν έχει περάσει μεγάλο διάστημα

Το ρεύμα κυκλοφορεί στο βρόχο της αντίστασης των 600Ω:

$\mathcal{E} - I_\infty \cdot 200\Omega - I_\infty\, 600\Omega = 0 \Rightarrow I_\infty = \dfrac{50V}{800\Omega} \Rightarrow I_\infty = 0.0625A$

$\Rightarrow I_\infty = 62.5mA$

(γ) Εφαρμόζουμε τον 1° κανόνα του kirchhoff στον κόμβο C

$I_1 = I_2 + I_3 \qquad (A)$

Από τον 2° κανόνα του kirchhoff στο βρόχο ABCΔ έχουμε:

$\mathcal{E} - I_1(200\Omega) - V_C = 0 \Rightarrow \mathcal{E} - I_1(200\Omega) - \dfrac{Q}{C} = 0 \qquad (B)$

Από τον 2° κανόνα του kirchhoff στο βρόχο CΔEF θα πάρουμε:

$\dfrac{Q}{C} - I_2\, 600\Omega = 0 \qquad (\Gamma)$

Παραγωγίζουμε την (B) οπότε: $\dfrac{d}{dt}\left(\mathcal{E} - I_1 \cdot 200 - \dfrac{Q}{C}\right) = 0 \Rightarrow 200\dfrac{dI_1}{dt} + \dfrac{dQ}{Cdt} = 0$

$\Rightarrow 200\dfrac{dI_1}{dt} + \dfrac{1}{C} I_3 = 0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{dI_1}{dt} = -\dfrac{1}{200C} I_3} \qquad (\Delta)$

Παραγωγίζουμε την (Γ) ως προς χρόνο και θα πάρουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{C} - 600\, I_2\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} - 600\frac{dI_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{C} I_3 = 600\frac{dI_2}{dt} \Rightarrow$$

$$\overset{(A)}{\Rightarrow} \boxed{\frac{1}{C}(I_1 - I_2) = 600\frac{dI_2}{dt}} \quad (E)$$

Από την εξίσωση (Β) λύνουμε ως προς I_1 οπότε: $I_1 = \dfrac{\mathcal{E} - Q/C}{200\Omega} \Rightarrow$

χρησιμοποιώντας την (Γ): $\boxed{I_1 = \dfrac{\mathcal{E} - I_2\, 600\Omega}{200\Omega}}$ (ΣΤ)

Αντικαθιστούμε στην (Ε) και έχουμε:

$$\frac{1}{C}\left(\frac{\mathcal{E} - I_2 600}{200} - I_2\right) = 600\frac{dI_2}{dt} \Rightarrow \frac{1}{C}\,\frac{\mathcal{E} - I_2 800}{200} = 600\frac{dI_2}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\mathcal{E}}{12\cdot10^4\cdot C} - \frac{800}{12\cdot10^4 C} I_2 = \frac{dI_2}{dt}} \quad (Z)$$

Υποθέτουμε λύση της μορφής: $I_2(t) = a + b e^{-t/\tau} \Rightarrow \dfrac{dI_2}{dt} = -\dfrac{b}{\tau} e^{-t/\tau}$

Αντικατάσταση στη (Ζ) θα δώσει:

$$\frac{\mathcal{E}}{12\cdot10^4 C} - \frac{800}{12\cdot10^4 C}\left(a + b e^{-t/\tau}\right) = -\frac{b}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Για $t=\infty$ ώστε να ισχύει για όλες τις περιπτώσεις: $\dfrac{\mathcal{E}}{12\cdot10^4 C} - \dfrac{800}{12\cdot10^4 C} a = 0 \Rightarrow a = \dfrac{\mathcal{E}}{800}$

Για $t=0$ $\quad \cancel{\dfrac{\mathcal{E}}{12\cdot10^4 C}} - \cancel{\dfrac{800}{12\cdot10^4 C}\dfrac{\mathcal{E}}{800}} \cancel{-} \cancel{b}\dfrac{800}{12\cdot10^4 C} = \cancel{-}\dfrac{\cancel{b}}{\tau} \Rightarrow \tau = \dfrac{12\cdot10^4}{800} C$

Αν το $I_2(t=0) = 0 \Rightarrow I_2(t=0) = a + b \Rightarrow a = -b \Rightarrow a = -b = +\dfrac{\mathcal{E}}{800}$

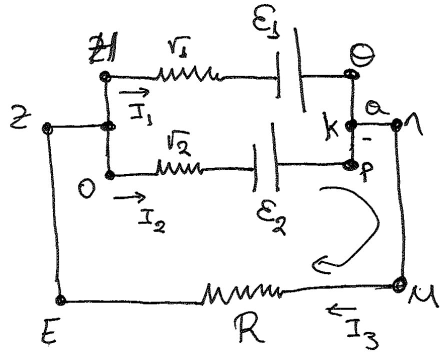
Αντικατάσταση στην $I_2(t)$ θα δώσει:

$$I_2(t) = \frac{\mathcal{E}}{800}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \frac{\mathcal{E}}{800}\left(1 - e^{-t800/12\cdot10^4 C}\right) = \frac{50}{800}\left(1 - e^{-t/0.75ms}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{I_2(t) = 62.5mA\left(1 - e^{-t/0.75ms}\right)}$$

9. Δύο μπαταρίες με ηλεκτρεργετική δύναμη $\mathcal{E}_1$ και $\mathcal{E}_2$ αντίστοιχα, έχουν εσωτερική αντίσταση r_1 και r_2. Οι μπαταρίες είναι συνδεδεμένες παράλληλα μεταξύ τους. Αποδείξτε ότι αν ένας αντιστάτης αντίστασης R συνδεθεί παράλληλα με το σύστημα των δύο μπαταριών, η βέλτιστη τιμή της αντίστασής του για μέγιστη προσφορά ισχύος, δίνεται από την σχέση: $R = r_1r_2/(r_1 + r_2)$.

Σχεδιάζουμε το κύκλωμα του συστήματος:



Από τον 1° νόμο του kirchoff στον κόμβο α θα έχουμε: $I_1 + I_2 = I_3$ (1)

Από τον 2° νόμο του kirchoff στο βρόχο: ΕΖΗΘΚΛΜΕ: $\mathcal{E}_1 - I_3R - I_1r_1 = 0$ (2)

Από τον 2° νόμο του kirchoff στο βρόχο: ΕΖΗΟΡΚΛΜΕ: $\mathcal{E}_2 - I_3R - I_2r_2 = 0$ (3)

Από την εξίσωση (1) και (2) θα πάρουμε:

$$\mathcal{E}_1 - I_3R - r_1(I_3 - I_2) = 0 \quad (4)$$

Από την (3) λύνοντας ως προς I_2 έχουμε: $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}_2 - I_3R}{r_2}$ (5)

Αντικαθιστούμε στην (4) οπότε: $\mathcal{E}_1 - I_3R - r_1\left(I_3 - \dfrac{\mathcal{E}_2 - I_3R}{r_2}\right) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_1 - I_3R - r_1\left(\frac{I_3r_2 - \mathcal{E}_2 + I_3R}{r_2}\right) = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_1r_2 + \mathcal{E}_2r_1 = I_3r_1 + I_3\left(\frac{R + Rr_1}{r_2}\right)$$

$$\Rightarrow I_3 = \frac{(\mathcal{E}_1r_2 + \mathcal{E}_2r_1)}{r_1r_2 + Rr_2 + Rr_1} \Rightarrow I_3 = \frac{\mathcal{E}_1r_2 + \mathcal{E}_2r_1}{r_1r_2 + Rr_2 + Rr_1}$$

Η ισχύς που προσφέρεται στην αντίσταση R θα είναι: $P = I_3^2R = \left(\dfrac{\mathcal{E}_1r_2 + \mathcal{E}_2r_1}{r_1r_2 + R(r_1 + r_2)}\right)^2$

Παραγωγίζουμε τη σχέση της ισχύος ως προς R και ζητούμε να παρουσιάζεται ακρότατο:

$$\frac{d}{dR}\left[\left(\frac{\mathcal{E}_1 r_1+\mathcal{E}_2 r_2}{R(r_1+r_2)+r_1 r_2}\right)^2 R\right]=\frac{d}{dR}\left[\frac{a^2 R}{(cR+b)^2}\right] \quad \text{όπου} \begin{cases} a=\mathcal{E}_1 r_1+\mathcal{E}_2 r_2 \\ b=r_1 r_2 \\ c=r_1+r_2 \end{cases}$$

$$\frac{dP}{dR}=\frac{a^2\left[(cR+b)^2-2Rc(cR+b)\right]}{(cR+b)^4}=\frac{a^2\left[\cancel{(cR+b)}\left[cR+b-2Rc\right]\right]}{(cR+b)^{\cancel{4}\,3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dP}{dR}=a^2\frac{b-Rc}{(Rc+b)^3}} \qquad (A)$$

Η 2η παράγωγος θα είναι: $\frac{d^2P}{dR^2}=a^2\left[\frac{-c(Rc+b)^{\cancel{3}\,1}-(b-Rc)3\cancel{(Rc+b)}c}{(Rc+b)^{\cancel{6}\,4}}\right]\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d^2P}{dR^2}=a^2\frac{-Rc^2-cb-3bc+3Rc^2}{(Rc+b)^4}=a^2\frac{+2Rc^2-4bc}{(Rc+b)^4}=\boxed{2a^2c\frac{Rc-2b}{(Rc+b)^4}}$$

(B)

Από την (A), για να έχουμε ακρότατο θα πρέπει $b-Rc=0\Rightarrow R=\frac{b}{c}$

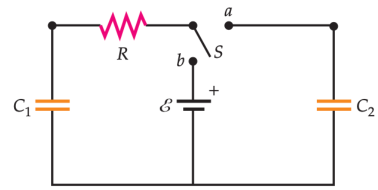
Αντικατάσταση των b και c δίνει: $\boxed{R=\frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}}$ (Γ)

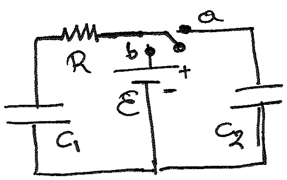
Από την (B) και για R όπως δίνεται από την (Γ) θα έχουμε:

$$Rc-2b=\frac{r_1 r_2}{\cancel{r_1+r_2}}\cancel{(r_1+r_2)}-2r_1 r_2=\underline{-r_1 r_2<0} \quad \text{επομένως } \frac{d^2P}{dR^2}<0$$

και το σημείο $R=\frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}$ αποτελεί μέγιστο.

10. Οι πυκνωτές C_1 και C_2 είναι συνδεδεμένοι με αντιστάτη αντίστασης R και μια ιδανική μπαταρία ηλεκτρεργετικής δύναμης $\mathcal{E}$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αρχικά ο διακόπτης βρίσκεται στη θέση α και οι δύο πυκνωτές είναι πλήρως αφόρτιστοι. Ο διακόπτης κατόπιν μετακινείται στη θέση b και παραμένει στη θέση αυτή για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα. Την χρονική στιγμή $t = 0$, ο διακόπτης αλλάζει και πάλι στη θέση α. (α) Συγκρίνετε ποιοτικά την ολική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στους δύο πυκνωτές τη χρονική στιγμή $t = 0$ και αφού έχει παρέλθει μεγάλο χρονικό διάστημα. (β) Βρείτε το ρεύμα που διαρρέει τον αντιστάτη αντίστασης R συναρτήσει του χρόνου t, για $t > 0$. (γ) Βρείτε την ενέργεια που αποδόθηκε στην αντίσταση R συναρτήσει του χρόνου t, για $t > 0$. (δ) Βρείτε την ολική ενέργεια που χάνεται στον αντιστάτη R μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$ και συγκρίνετε την με την απώλεια αποθηκευμένης ενέργειας που βρήκατε στο (α) ερώτημα.





(α) Οι αρχικές και τελικές ενέργειες των πυκνωτών είναι

$$U_i = \frac{1}{2} C_1 V_0^2 \qquad (1)$$

$$U_f = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} \qquad (2)$$

Από διατήρηση φορτίου θα έχουμε ότι $Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V_0$ (3)

Στην τελική κατάσταση οι δύο πυκνωτές έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \quad (4) \quad \Rightarrow Q_1 = \frac{Q_2}{C_2} C_1 \quad (5)$$

Αντικατάσταση της (5) στην (3) δίνει: $Q = \frac{Q_2}{C_2} C_1 + Q_2 = C_1 V_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q_2 \left(\frac{C_1 + C_2}{C_2}\right) = C_1 V_0 \Rightarrow \boxed{Q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} V_0} \quad (6)$$

Αντικατάσταση της (6) στην (5) δίνει: $\boxed{Q_1 = \frac{C_1^2}{C_1 + C_2} V_0}$ (7)

Αντικαθιστούμε τις (6) & (7) στην (2) οπότε θα έχουμε:

$$U_f = \frac{1}{2}\left(\frac{C_1 \cancel{C_2}}{C_1 + C_2}\right)^2 \frac{V_0^2}{\cancel{C_2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{C_1^{\cancel{2}}}{C_1 + C_2}\right)^2 \frac{V_0^2}{\cancel{C_1}} = \frac{1}{2} V_0^2 \left[\frac{C_1^2 C_2 + C_1^3}{(C_1 + C_2)^2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_f = \frac{1}{2} V_0^2 C_1^2 \left[\frac{\cancel{C_2 + C_1}}{(C_1 + C_2)^{\cancel{2}}}\right] \Rightarrow \boxed{U_f = \frac{1}{2} V_0^2 C_1^2 / (C_1 + C_2)} \quad (8)$$

Η διαφορά στην ενέργεια μεταξύ αρχικής και τελικής κατάστασης δίνει:

$$\Delta U = U_f - U_i = \frac{1}{2}\frac{C_1^2}{C_1 + C_2} V_0^2 - \frac{1}{2} C_1 V_0^2 \Rightarrow \Delta U = \frac{1}{2}\frac{\cancel{C_1^2} - \cancel{C_1^2} - C_1 C_2}{C_1 + C_2} V_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta U = -\frac{1}{2}\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} V_0^2} \quad (9)$$

Επομένως $U_i > U_f$

(β) Από τους κανόνες του kirchhoff όταν ο διακόπτης είναι στη θέση α,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{q_1}{C_1}-\frac{q_2}{C_2}-IR=0 \Rightarrow \frac{q_1}{C_1}-\frac{q_2}{C_2}-R\frac{dq_2}{dt}=0\\&\text{Από διατήρηση φορτίου: } q_1+q_2=Q \Rightarrow q_1=Q-q_2 \Rightarrow q_1=C_1V_0-q_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_0-\frac{q_2}{C_1}-\frac{q_2}{C_2}-R\frac{dq_2}{dt}=0 \Rightarrow \boxed{R\frac{dq_2}{dt}+\left(\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\right)q_2=V_0} \quad (10)$$

Η διαφορική εξίσωση στην οποία καταλήξαμε έχει λύση της μορφής:

$$q_2(t)=a+be^{-t/\tau} \Rightarrow \frac{dq_2(t)}{dt}=-\frac{b}{\tau}e^{-t/\tau} \quad (11)$$

Αντικατάσταση στην (10) δίνει:

$$-R\frac{b}{\tau}e^{-t/\tau}+\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\left(a+be^{-t/\tau}\right)=V_0 \Rightarrow \boxed{-\frac{R}{\tau}e^{-t/\tau}b+\left(\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}\right)be^{-t/\tau}+a\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}=V_0} \quad (12)$$

Η τελευταία εξίσωση θα πρέπει να ικανοποιείται για όλες τις τιμές του t.

Για $t=\infty$ θα έχουμε: $a\dfrac{C_1+C_2}{C_1C_2}=V_0 \Rightarrow \boxed{a=\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}V_0}$ (13)

Επομένως η (12) γίνεται:

$$-\frac{R}{\tau}e^{-t/\tau}b+\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}be^{-t/\tau}=0 \Rightarrow b\left[\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}-\frac{R}{\tau}\right]e^{-t/\tau}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{R}{\tau}+\frac{C_1+C_2}{C_1*C_2}=0 \Rightarrow \boxed{\tau=R\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}} \Rightarrow \underline{\tau=RC_{ισοδ.}}$$

Χρησιμοποιήσαμε για λύση της διαφορικής εξίσωσης, την $q_2(t)=a+be^{-t/\tau}$

Αλλά για $t=0$, $q_2(t=0)=0$ οπότε: $0=a+b \Rightarrow b=-a \overset{(13)}{\Rightarrow} \boxed{b=\dfrac{-C_1C_2}{C_1+C_2}V_0}$

Αντικατάσταση των a & b στην $q_2(t)=a+be^{-t/\tau}$ δίνει:

$$q_2(t)=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}V_0\left[1-e^{-t/\tau}\right] \Rightarrow \boxed{q_2(t)=C_{ισοδ.}V_0\left[1-e^{-t/\tau}\right]} \quad (14)$$

Παραγωγίζουμε την (14) και θα έχουμε:

$$I = \frac{dq_2(t)}{dt} = C_{ισοδ} V_0 \frac{d}{dt}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = C_{ισοδ} V_0 \left(e^{-t/\tau}\right)\left(-\frac{1}{\tau}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{C_{eq} V_0}{\tau} e^{-t/\tau} \Rightarrow \boxed{I = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}} \qquad (15)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\tau = R \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

(γ) Η ισχύς που καταναλώνεται πάνω στην αντίσταση θα είναι:

$$P = I^2 R = \left(\frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}\right)^2 R \Rightarrow P = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/\tau} \qquad \text{όπου } \tau = R\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

(δ) Η ολική ενέργεια που καταναλώνεται στην αντίσταση θα είναι:

$$E = \int_0^\infty P dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/RC_{ισοδ}} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{V_0^2}{R} \left.\frac{(-\tau) e^{-2t/\tau}}{2}\right|_0^\infty \Rightarrow E = \frac{V_0^2 (\cancel{R} C_{ισοδ})}{\cancel{R}\, 2}\left[0 - 1\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} V_0^2 C_{ισοδ} \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} V_0^2}$$

Παρατηρούμε ότι η ενέργεια αυτή είναι η διαφορά μεταξύ των ενεργειών των πυκνωτών μεταξύ τελικής και αρχικής κατάστασης όπως βρήκαμε στο (α) ερώτημα και η ενέργεια αυτή χάνεται λόγω θερμότητας στην αντίσταση R.