ΦΥΣ. 112

3ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή: Παρασκευή 04.10.2024**

1. Ένας ακίνητος κυκλικός δακτύλιος ακτίνας *a* βρίσκεται στο *yz*-επίπεδο και είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με φορτίο *Q*. Ένα μικρό σωματίδιο μάζας *m* με αρνητικό φορτίο -*q* είναι τοποθετημένο στο κέντρο του δακτυλίου. (α) Δείξτε ότι αν *x*<<*a*, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος του άξονα του δακτυλίου είναι ανάλογο του *x*. (β) Βρείτε την δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο συναρτήσει της απόστασης *x*. (γ) Δείξτε ότι αν δοθεί στο σωματίδιο μια μικρή απόκλιση στην *x*-διεύθυνση, τότε το σωματίδιο θα αρχίσει να εκτελεί απλή αρμονική κίνηση. (δ) Βρείτε τη συχνότητα της κίνησης αυτής.

(α) Το ηλεκτρικό πεδίο στον άξονα-x που είναι κάθετος στο επίπεδο της κατανομής φορτίου

$$E_x = \frac{k_e Q x}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{k_e Q x}{\left\{a^2\left[1+\frac{x^2}{a^2}\right]\right\}^{3/2}} = \frac{k_e Q x}{a^3\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}}$$

Αλλά $x << a$ οπότε $\frac{x}{a} << 1$. Αναπτύσσουμε διωνυμικά τον παρονομαστή: $\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2} = (1+\varepsilon^2)^{3/2} \simeq 1 + \frac{3}{2}\varepsilon^2 + \ldots \simeq 1 +$ δεδομένου $\varepsilon \simeq 0$

Επομένως: $E_x = \frac{k_e Q x}{a^3\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}} \simeq \frac{k_e Q x}{a^3 \, 1} \Rightarrow \boxed{E_x \simeq \frac{k_e Q x}{a^3}}$ για $x << a$

(β) Η δύναμη που αναπτύσσεται στο σωματίδιο συναρτήσει του φορτίου του και του ηλεκτρικού πεδίου E θα είναι:

$$F_x = q E_x \Rightarrow \boxed{F_x = \frac{k_e q Q x}{a^3}}$$

(γ) Από την προηγούμενη σχέση για τον 2ο νόμο του Newton θα έχουμε:

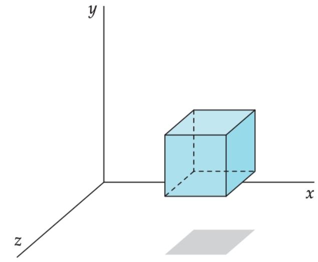
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k_e e Q x}{a^3} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_e e Q x}{a^3} = 0$$ που έχει τη μορφή της εξίσωσης του αρμονικού ταλαντωτή:

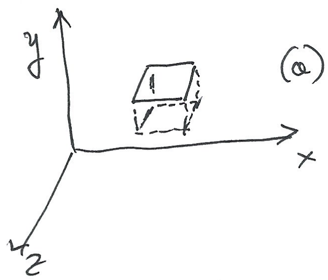
↳ για αρνητικό φορτίο

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_e e Q}{m a^3} x = 0$$ οπότε $\omega^2 = \frac{k_e e Q}{m a^3} \Rightarrow 4\pi^2 f^2 = \frac{k_e e Q}{m a^3} \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_e e Q}{m a^3}}}$

Να σημειωθεί ότι η αρμονική κίνηση εμφανίζεται για αρνητικά φορτία. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η θεώρηση είναι για ηλεκτρόνια αλλά μπορεί να είναι για οποιοδήποτε φορτίο

2. Μια μικρή επιφάνεια Gauss έχει το σχήμα ενός κύβου του οποίοι οι έδρες είναι παράλληλες προς τα επίπεδα *xy*, *xz* και *yz* όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η επιφάνεια βρίσκεται σε μια περιοχή στην οποία το ηλεκτρικό πεδίο έχει ένταση με κατεύθυνση στον +*x*-άξονα. (α) Χρησιμοποιώντας την διαφορική προσέγγιση, δείξτε ότι η συνολική ροή Φ_E που εξέρχεται από την επιφάνεια Gauss δίνεται από τη σχέση $\Phi_E \approx \frac{\partial E}{\partial x}\Delta V$, όπου ΔV είναι ο όγκος που περικλείεται από την επιφάνεια Gauss. (β) Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Gauss και το αποτέλεσμα από το υπο-ερώτημα (α) δείξτε ότι $\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ όπου ρ η χωρική πυκνότητα φορτίου στο εσωτερικό του κύβου. (Η εξίσωση είναι η μονοδιάστατη μορφή του σημειακού φορτίο του νόμου του Gauss).





(α) Θεωρούμε τον κύβο ως την κλειστή επιφάνεια Gauss.
Θεωρούμε ακόμα ότι οι ακμές του κύβου είναι $\Delta x, \Delta y, \Delta z$
και μια κορυφή του έχει συντεταγμένες (x, y, z).

Η συνισταμένη ροή που εξέρχεται του κύβου θα είναι: $\phi_E = \phi(x+\Delta x) - \phi(x)$
όπου $x+\Delta x$ η επίπεδη έδρα του κύβου και $\phi(x)$ ~~η~~ ροή στην έδρα στη θέση x

Χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα Taylor της ροής ϕ_E: θα έχουμε:

$$\phi_E = \overbrace{\cancel{\phi(x)} + \Delta x\,\phi'(x) + \frac{1}{2}(\Delta x)^2\phi''(x) + \ldots}^{\phi(x+\Delta x)} - \cancel{\phi(x)} \simeq \Delta x\,\phi'(x) + \frac{1}{2}(\Delta x)^2\phi''(x) + \ldots$$

$$\Rightarrow \quad \phi_E \cong \Delta x\,\phi'(x) \qquad (A)$$

Ωστόσο το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ είναι παράλληλο προς τον x-άξονα και επομένως η ροή θα είναι: $\phi(x) = E_x \Delta y \Delta z \Rightarrow \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = \phi'(x) = \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta y \Delta z \quad (B)$

Αντικατάσταση της (B) στην (A) δίνει: $\phi_E \cong \Delta x \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta y \Delta z = \frac{\partial E_x}{\partial x}(\Delta x \Delta y \Delta z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_E \simeq \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta V_{\text{όγκος}}}$$

(β) Από τον νόμο του Gauss: $\phi_E = \frac{q_{\pi\varepsilon\rho}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}V \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x}\cancel{V} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\cancel{V} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

3. Ένα ηλεκτρικό δίπολο ηλεκτρικής διπολικής ροπής, $\vec{p}$, είναι τοποθετημένο σε κάθετη απόσταση R από άπειρη γραμμική κατανομή φορτίου Q, το οποίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο δίνοντας γραμμική πυκνότητα φορτίου λ. Υποθέστε ότι το διάνυσμα της διπολικής ροπής είναι προσανατολισμένο ώστε να είναι παράλληλο και στην ίδια κατεύθυνση με την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από την γραμμική κατανομή φορτίου. Βρείτε μια εξίσωση για την ηλεκτρική δύναμη που ασκείται στο δίπολο.

Το πεδίο που δημιουργεί μια γραμμική κατανομή απείρου μήκους, δίνεται από τη σχέση: $E = \frac{2k_e\lambda}{r}$

Η δύναμη που ενεργεί στο δίπολο θα είναι: $F = p\frac{dE}{dr}$ *

$$\Rightarrow F = 2k_e p\lambda \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{2k_e p\lambda}{r^2}.$$

με το αρνητικό πρόσημο να δηλώνει ότι το δίπολο έλκεται από την γραμμική κατανομή του φορτίου.

* Από τις διαλέξεις (διαλ. 4 – σελ 3) είχαμε δει ότι όταν ένα δίπολο βρίσκεται μέσα σε μη ομογενές ηλεκτρικό πεδίο τότε η ένταση του πεδίου μπορεί να γραφεί:

$$E_+(r+a) \simeq E(r) + \left(\frac{dE}{dr}\right)a$$

$$E_-(r-a) \simeq E(r) - \left(\frac{dE}{dr}\right)a$$

όπου a η απόσταση των φορτίων του διπόλου

$$\Rightarrow \vec{F}_e = q\left(\vec{E}_+ - \vec{E}_-\right) = q\left(\frac{dE}{dr}\right)a\hat{r} = p\frac{dE}{dr}\hat{r}$$

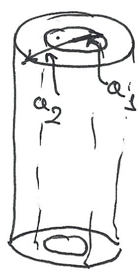
4. Μια μονωμένη, επίπεδη επιφάνεια πολύ μεγάλων διαστάσεων έχει μη ομοιόμορφη κατανομή φορτίου και είναι τοποθετημένη στο $x = 0$ επίπεδο. Στο κέντρο της επιφάνειας, η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι ίση με $+3.10\mu C/m^2$. Σε πολύ μικρή απόσταση από την επιφάνεια και στον θετικό x-άξονα, η x-συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι $4.65 \times 10^5 N/C$. Ποια είναι η τιμή της E_x σε μικρή απόσταση από την επιφάνεια αλλά στον αρνητικό x-άξονα;

Η διαφορά του ηλεκτρικού πεδίου δεξιά της επιφάνειας, E_+, και του ηλεκτρικού πεδίου αριστερά της επιφάνειας, E_- οφείλεται στο πεδίο της μη ομογενούς επιφανειακής πυκνότητας φορτίου.

Επομένως $E_- = E_+ - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_- = 4.65 \cdot 10^5 \frac{N}{C} - \frac{3.10 \cdot 10^{-6} \cancel{C}/\cancel{m^2}}{8.854 \cdot 10^{-12} C^{\cancel{2}}/\cancel{N \cdot m^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow E_- = 4.65 \cdot 10^5 \frac{N}{C} - \frac{3.10}{8.854} \cdot 10^6 \frac{N}{C} \Rightarrow \boxed{E_- = 1.15 \cdot 10^5 \frac{N}{C}}$

5. Ένας μονωμένος κυλινδρικός φλοιός απείρων διαστάσεων έχει εσωτερική ακτίνα α_1 και εξωτερική ακτίνα α_2 και ομοιόμορφη χωρική πυκνότητα φορτίου ρ. Βρείτε μια έκφραση για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου.



Εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss σε μια κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας r και μήκους L η οποία είναι ομόκεντρη με τον μονωμένο κυλινδρικό φλοιό απείρου μήκους:

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\pi\varepsilon\rho} \Rightarrow 2\pi r L E = \frac{Q_{\pi\varepsilon\rho}}{\varepsilon_0}$$

όπου E το πεδίο κάθετο στην παράπλευρη κυλινδρική επιφάνεια Gauss.

Η ροή στις βάσεις της κυλινδρικής επιφάνειας Gauss θα είναι μηδέν.

Το πεδίο E είναι επομένως στην ακτινική διεύθυνση λόγω συμμετρίας:

$$E = E_r = \frac{Q_{\pi\varepsilon\rho}}{2\pi r L \varepsilon_0}$$

Για $r < \alpha_1$ $Q_{\pi\varepsilon\rho} = 0$ και επομένως $\boxed{E_{r<\alpha_1} = 0}$

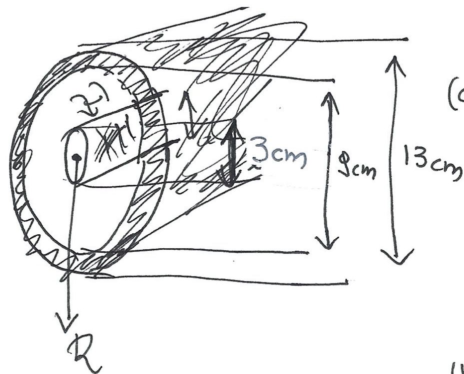
Το φορτίο $Q_{\pi\varepsilon\rho}$ στην περιοχή $\alpha_1 < r < \alpha_2$ είναι: $Q_{\pi\varepsilon\rho} = \rho V = \rho(\pi r^2 L - \pi \alpha_1^2 L)$

$\Rightarrow Q_{\pi\varepsilon\rho} = \rho \pi L (r^2 - \alpha_1^2)$. Επομένως $E_r = \frac{\cancel{\pi}\cancel{L}\rho(r^2-\alpha_1^2)}{2\cancel{\pi} r \cancel{L}\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_{\alpha_1<r<\alpha_2} = \frac{\rho(r^2-\alpha_1^2)}{2r\varepsilon_0}}$

Το φορτίο $Q_{\pi\varepsilon\rho}$ για $r > \alpha_2$ είναι: $Q_{\pi\varepsilon\rho} = \rho V = \rho\pi\alpha_2^2 L - \rho\pi\alpha_1^2 L = \rho\pi L(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)$

Επομένως $E_{r>\alpha_2} = \frac{Q_{\pi\varepsilon\rho}}{2\pi r L \varepsilon_0} = \frac{\rho\cancel{\pi}\cancel{L}(\alpha_2^2-\alpha_1^2)}{2\cancel{\pi} r\cancel{L}\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_{r>\alpha_2} = \frac{\rho(\alpha_2^2-\alpha_1^2)}{2\varepsilon_0 r}}$

6. Ο εσωτερικός κύλινδρος του διπλανού σχήματος αποτελείται από μη αγώγιμο υλικό και έχει χωρική πυκνότητα φορτίου που δίνεται από τη σχέση $\rho(R) = C/R$ όπου $C = 200nC/m^2$. Ο εξωτερικός κύλινδρος είναι μεταλλικός και οι δύο θεωρούνται ότι έχουν πάρα πολύ μεγάλο μήκος. (α) Βρείτε τη γραμμική πυκνότητα φορτίου στον εσωτερικό κύλινδρο. (β) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο για τυχαία τιμή του R.



(α) Το φορτίο στον εσωτερικό κύλινδρο είναι:

$$Q_1 = \int_0^R \rho(r)\,dV = \int_0^R \frac{C}{\cancel{r}} 2\pi \cancel{r} L\,dr \Rightarrow$$

$$Q_1 = 2\pi C L \int_0^R dr \Rightarrow \boxed{Q_1 = 2\pi C L R}$$

Η γραμμική πυκνότητα θα είναι:

$$\lambda = \frac{Q_1}{L} = \frac{2\pi C \cancel{L} R}{\cancel{L}} \Rightarrow \boxed{\lambda = 2\pi C R}$$

Αντικατάσταση δεδομένων θα δώσει: $\lambda = 2\pi \left(200 \frac{nC}{m}\right)(0.015m) \Rightarrow$

$$\lambda = 18.8\, nC/m$$

(β) Εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss σε μια κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας r και μήκους L ομόκεντρη με τον κύλινδρο απείρου μήκους:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\pi\varepsilon\rho} \Rightarrow 2\pi r L E = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\pi\varepsilon\rho}$$

με το πεδίο E κάθετο στην παράπλευρη κυλινδρική επιφάνεια Gauss, ενώ η ροή που περνά από τις βάσεις είναι 0.

Λόγω συμμετρίας $E = E_r$ ακτινικό κάθετο στην κυλινδρική επιφάνεια

$$E_r = E = \frac{Q_{\pi\varepsilon\rho}}{2\pi r L \varepsilon_0} \Rightarrow E_{r<1.5cm} = \frac{\cancel{2\pi} C \cancel{L} \cancel{r}}{\cancel{2\pi} \varepsilon_0 \cancel{L} \cancel{r}} \Rightarrow \boxed{E_{r<1.5cm} = \frac{C}{\varepsilon_0}}$$

Το φορτίο για $1.5cm < r < 4.5cm$: $Q_{\pi\varepsilon\rho} = 2\pi C L R$ οπότε:

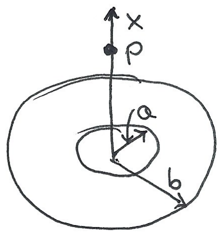
$$E_{1.5<r<4.5} = \frac{\cancel{2\pi} C \cancel{L} R}{\cancel{2\pi} \varepsilon_0 \cancel{L} r} \Rightarrow \boxed{E_{1.5<r<4.5cm} = \frac{CR}{\varepsilon_0 r}}$$ όπου $R = 1.5cm$

Ο εξωτερικός κυλινδρικός φλοιός είναι αγωγός. Επομένως $\vec{E} = \vec{0}$

Τέλος για $r > 6.5cm$ $Q_{περ} = 2\pi C L R$ όπου $R = 1.5cm \Rightarrow E_{r>6.5} = \frac{2\pi C \cancel{L} R}{2\pi \varepsilon_0 r \cancel{L}} \Rightarrow$

$\boxed{E_{r>6.5cm} = \frac{CR}{\varepsilon_0 r}}$, και πάλι το φορτίο έρχεται από τον εσωτερικό κύλινδρο.

7. Ένας κύκλος ακτίνας a αφαιρείται από το κέντρο ενός ομοιόμορφα φορτισμένου λεπτού κυκλικού δίσκου ακτίνας b με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ. (α) Βρείτε μια σχέση για το δυναμικό στον x-άξονα σε απόσταση x από το κέντρο του δίσκου. (β) Δείξτε ότι για $x>>b$, το ηλεκτρικό δυναμικό στον άξονα του ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου χωρίς το κυκλικό τμήμα, προσεγγίζει την τιμή kQ/x, όπου $Q = \sigma\pi(b^2 - a^2)$ είναι το ολικό φορτίο του δίσκου.



Το δυναμικό στο σημείο P που βρίσκεται σε απόσταση x από το επίπεδο του δίσκου είναι το άθροισμα του δυναμικού εξαιτίας του δίσκου μειωμένο κατά το δυναμικό του τμήματος που έχει αφαιρεθεί και για το οποίο υποθέτουμε ότι έχει αρνητική πυκνότητα φορτίου, σε σχέση με την πυκνότητα φορτίου του δίσκου.

$$V_p(x) = V_\delta(x) + V_\kappa(x) = 2\pi k_e \sigma\left[(x^2+b^2)^{1/2} - x\right] - 2\pi k_e \sigma\left[(x^2+a^2)^{1/2} - x\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_p(x) = 2\pi k_e \sigma\left[(x^2+b^2)^{1/2} - \cancel{x} - (x^2+a^2)^{1/2} + \cancel{x}\right] = \underline{2\pi k_e \sigma\left(\sqrt{x^2+b^2} - \sqrt{x^2+a^2}\right)}$$

(β) Από το διωνυμικό ανάπτυγμα: $\left(1+\frac{b^2}{x^2}\right)^{1/2} \simeq 1 + \frac{b^2}{2x^2} + \dots$

Αντίστοιχα: $\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)^{1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2} + \dots$

Επομένως η τελική εξίσωση από το (α) ερώτημα γράφεται:

$$V_p(x) \simeq 2\pi k_e \sigma\left[x\left(1+\frac{b^2}{2x^2}\right) - x\left(1+\frac{a^2}{2x^2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$V_p(x) \simeq \cancel{2}\pi k_e \sigma \cancel{x}\left[\frac{b^2}{\cancel{2x^2}} - \frac{a^2}{\cancel{2x^2}}\right] \Rightarrow V_p(x) = \pi k_e \sigma \frac{b^2-a^2}{x}$$

Αλλά το ολικό φορτίο στον δίσκο θα είναι: $Q = \sigma\pi(b^2-a^2) \Rightarrow \sigma = \frac{Q}{\pi(b^2-a^2)}$

$$\Rightarrow V_p(x) \simeq \cancel{\pi} k_e \frac{Q}{\cancel{\pi(b^2-a^2)}} \frac{\cancel{b^2-a^2}}{x} \Rightarrow \boxed{V_p(x) \simeq \frac{k_e Q}{x}}$$

8. Θεωρήστε ένα ηλεκτρόνιο και ένα πρωτόνιο τα οποία αρχικά βρίσκονται σε ηρεμία και σε απόσταση 2.00*nm* μεταξύ τους. Αγνοώντας οποιαδήποτε κίνηση του πολύ βαρύτερου πρωτονίου βρείτε (α) την ελάχιστη κινητική ενέργεια και (β) την ταχύτητα με την οποία θα πρέπει να εκτοξευθεί το ηλεκτρόνιο ώστε να φθάσει σε ένα σημείο το οποίο βρίσκεται σε απόσταση 12.00*nm* από το πρωτόνιο. Υποθέστε ότι η ταχύτητα του ηλεκτρονίου έχει ακτινική διεύθυνση και απομακρυνόμενη από το πρωτόνιο. (γ) Βρείτε την απόσταση που διανύσει το ηλεκτρόνιο αν η κινητική του ενέργεια είναι διπλάσια αυτής στα προηγούμενα δύο ερωτήματα.

(α) Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας θα έχουμε:

$$\Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow \cancel{K_f}^{\,0} - K_i + U_f - U_i = 0 \Rightarrow +K_i = U_f - U_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_i = -\frac{ke^2}{r_f} - \left(-\frac{ke^2}{r_i}\right) \Rightarrow K_i = ke^2\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right)$$

Αριθμητική αντικατάσταση: $K_i = \left(8.988\cdot 10^{9}\,\frac{N\cdot m^2}{C^2}\right)\left(1.602\cdot 10^{-19}\,C\right)^2\left(\frac{1}{2\cdot 10^{-9}} - \frac{1}{12\cdot 10^{-9}}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{K_i = 9.61\cdot 10^{-20}\,J}$$

(β) $K_i = \frac{1}{2} m_e v_i^2 \Rightarrow v_i = \sqrt{\frac{2K_i}{m}} \Rightarrow v_i = \sqrt{\frac{2\cdot 9.61\cdot 10^{-20}\,J}{9.1\cdot 10^{-31}\,kg}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{v_i = 4.59\cdot 10^{5}\,m/s}$$

(γ) Διατήρηση ενέργειας στο σύστημα ηλεκτρονίου-πρωτονίου δίνει:

$$\Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow K_f - K_i + U_f - U_i = 0 \Rightarrow 2K_i + U_f - U_i = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2K_i + \frac{ke^2}{r_i} - \frac{ke^2}{r_f} = 0 \Rightarrow r_f = \frac{r_i}{1 - \frac{2r_i K_i}{ke^2}}.$$

Το αποτέλεσμα με βάση τα αριθμητικά δεδομένα είναι μη φυσικό αφού $r_f < 0$.

Επομένως αντίθετα με την υπόθεσή μας $K_f \neq 0$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το ηλεκτρόνιο ξεφεύγει από την ηλεκτροστατική έλξη του πρωτονίου, οπότε $U_f = 0$. Η αρχική κινητική ενέργεια για να συμβεί αυτό θα είναι: $K_i^{\delta\iota\alpha\varphi} = -U_i \Rightarrow K_i^{\delta\iota\alpha\varphi} = -\left(-\frac{ke^2}{r_i}\right) \Rightarrow K_i^{\delta\iota\alpha\varphi} = \frac{ke^2}{r_i}$

Αριθμητική αντικατάσταση: $K_i^{\delta\iota\alpha\varphi} = \frac{\left(8.988\cdot 10^{9}\,Nm^2/C^2\right)\left(1.602\cdot 10^{-19}\,C\right)^2}{2\cdot 10^{-9}\,m} \Rightarrow K_i^{\delta\iota\alpha\varphi} = 1.15\cdot 10^{-19}\,J$

Επειδή $2\cdot K_i > K_i^{\delta\iota\alpha\varphi}$ το ηλεκτρόνιο διαφεύγει από το πρωτόνιο με κινητική ενέργεια

9. Τρεις ομόκεντροι αγώγιμοι και λεπτοί σφαιρικοί φλοιοί έχουν ακτίνες *a, b* και *c* και $a < b < c$. Αρχικά ο εσωτερικός φλοιός είναι αφόρτιστος, ο μεσαίος φλοιός έχει θετικό φορτίο $+Q$ ενώ ο εξωτερικός φλοιός έχει αρνητικό φορτίο $-Q$. Υποθέστε ότι το δυναμικό πολύ μακριά από τους φλοιούς είναι μηδέν. (α) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό για κάθε έναν από τους σφαιρικούς φλοιούς. (β) Θεωρήστε τώρα ότι ο εσωτερικός και ο εξωτερικός φλοιός ενώνονται με αγώγιμο σύρμα το οποίο είναι εξωτερικά μονωμένο και περνά μέσω μικρής τρύπας από τον μεσαίο φλοιό. Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό των τριών σφαιρικών φλοιών καθώς και το τελικό φορτίο στον καθέναν από αυτούς.

(α) Θα εφαρμόσουμε τον νόμο του Gauss για να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο στις περιοχές που οριοθετούνται από τους τρείς σφαιρικούς φλοιούς.

Θεωρούμε αρχικά $r \geq c$ οπότε: $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{περ}}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow E = 0$.

Επειδή $E(r=c) = 0 \Rightarrow \boxed{V(r=c) = 0}$

το φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια Gauss ακτίνας $r > c$ είναι $\emptyset$.

Εφαρμόζουμε τον νόμο Gauss για την περιοχή $b < r < c$ οπότε:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{περ}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow E_{b<r<c} = \frac{k_e Q}{r^2}$$

Το δυναμικό μεταξύ b και c είναι: $V_b = -\cancel{\int_\infty^c \vec{E}_1 \cdot d\vec{r}}^{\,0} - \int_c^b \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = -k_e Q \int_c^b \frac{1}{r^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_b = k_e Q \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \Rightarrow \boxed{V(b) = k_e Q \left(\frac{c-b}{bc}\right)}$$

Ο εσωτερικός σφαιρικός φλοιός δεν είναι φορτισμένος και επομένως το πεδίο για την περιοχή μεταξύ $r=a$ και $r=b$ είναι $\emptyset$. Επομένως:

$$V(a) = -\cancel{\int_\infty^c \vec{E}_1 \cdot d\vec{r}}^{\,0} - \int_c^b \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} - \cancel{\int_b^a \vec{E}_3 \cdot d\vec{r}}^{\,0} = V(b) \Rightarrow \boxed{V(a) = k_e Q \frac{c-b}{bc}}$$

(β) Όταν συνδέσουμε τον εσωτερικό με τον εξωτερικό φλοιό, τα δυναμικά τους εξισώνονται εξαιτίας της ανακατανομής των φορτίων. Τα φορτία στις επιφάνειες a και c σχετίζονται: $Q_a + Q_c = -Q$ ενώ η επιφάνεια b έχει φορτίο $Q_b = Q$

Το δυναμικό στις επιφάνειες a και c είναι: $V(a) = V(c) = 0$.

Ο εσωτερικός φλοιός έχει αποκτήσει φορτίο Q_a. Επομένως τώρα στην περιοχή $a < r < b$ το ηλεκτρικό πεδίο είναι: $E_{a<r<b} = k_e \frac{Q_a}{r^2}$

Στην περιοχή μεταξύ των επιφανειών b και c υπάρχει φορτίο $Q_a + Q$

Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι: $E_{b<r<c} = k_e \frac{Q_a + Q}{r^2}$

Το δυναμικό στην επιφάνεια C είναι ∅ αφού για $r \geq c$ $Q_{περ} = 0$ κ επομένως $E = 0$. Επομένως η διαφορά δυναμικού μεταξύ της επιφάνειας b και c θα είναι:

$$V_b = -\cancel{\int_\infty^c \vec{E}_1 \cdot d\vec{r}}^{\,0} - \int_c^b \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = -k_e (Q_a + Q) \int_c^b \frac{1}{r^2} dr \Rightarrow \underline{V_b = k_e (Q_a + Q)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)}$$

$$V_a = -\cancel{\int_\infty^c \vec{E}_1 \cdot d\vec{r}}^{\,0} - \int_c^b \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} - \int_b^a \vec{E}_3 \cdot d\vec{r} = k_e (Q_a + Q)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + k_e Q_a \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 0$$

επειδή $V(a) = 0$.

Επομένως: $k_e (Q_a + Q)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + k_e Q_a \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{k_e} Q_a \left[\cancel{\frac{1}{b}} - \frac{1}{c} + \frac{1}{a} - \cancel{\frac{1}{b}}\right] = -\cancel{k_e} Q \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \Rightarrow Q_a = \frac{-Q\left(\frac{c-b}{bc}\right)}{\left(\frac{c-a}{ca}\right)} = \frac{-Q(c-b)\cancel{c}a}{(c-a)b\cancel{c}}$$

Επομένως: $\boxed{Q_a = -\frac{Q(c-b)a}{(c-a)b}}$ $\boxed{Q_b = Q}$ και $Q_c = -Q - Q_a \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q_c = -Q\left(\frac{bc - \cancel{ab} - ca + \cancel{ba}}{(c-a)b}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_c = -Q\frac{(b-a)c}{(c-a)b}}$$

Το δυναμικό στην επιφάνεια b θα είναι: $V_b = k_e Q\left(1 - \frac{ca - ba}{cb - ab}\right)\left(\frac{c-b}{bc}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_b = k_e Q \frac{\cancel{c}(b-a)}{(c-a)b} \frac{(c-b)}{b\cancel{c}} \Rightarrow \boxed{V_b = k_e Q \frac{(b-a)(c-b)}{b^2(c-a)}}$$

10. Θεωρήστε δύο ομόκεντρους λεπτούς σφαιρικούς μεταλλικούς φλοιούς ακτίνας a και b όπου $a \leq b$. Ο εξωτερικός φλοιός έχει φορτίο Q ενώ ο εσωτερικός φλοιός είναι γειωμένος. Αυτό σημαίνει ότι το δυναμικό στον εσωτερικό φλοιό είναι ίδιο με αυτό που έχουν σημεία πολύ μακριά από τους σφαιρικούς φλοιούς. Βρείτε το φορτίο στον εσωτερικό φλοιό.

Από τον νόμο του Gauss σε ένα σφαιρικό φλοιό με ακτίνα $r > b$ έχουμε:

$$\oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\pi\varepsilon\rho}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\pi\varepsilon\rho}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{(Q+q)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow E = k_e \frac{(Q+q)}{r^2}$$

Εφόσον ξέρουμε το πεδίο μπορούμε να βρούμε το δυναμικό στον φλοιό ακτίνας b.

$$V_b = -\int_\infty^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = -(Q+q)k_e \int_\infty^b \frac{dr}{r^2} \Rightarrow V_b = (Q+q)k_e \frac{1}{b}$$

Η εσωτερική σφαιρική επιφάνεια είναι γειωμένη. Επομένως το δυναμικό $V_a = 0$.

$$\text{Αλλά } V_a = -\int_\infty^b \vec{E}_1\cdot d\vec{r} - \int_b^a \vec{E}_2\cdot d\vec{r} = \frac{k_e(Q+q)}{b} - \int_b^a \vec{E}_2\cdot d\vec{r}.$$

Η ένταση του πεδίου ανάμεσα στην περιοχή $a < r < b$ είναι:

$$E_2 = E_{a<r<b} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{k_e q}{r^2} \Rightarrow E_2 = E_{a<r<b} = \frac{k_e q}{r^2}$$

$$\Rightarrow V_a \overset{\text{γειωμένος}}{=} 0 = \frac{k_e(Q+q)}{b} + k_e q\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{k_e(Q+q)}{b} + \frac{k_e q(b-a)}{ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{k_e} Q a}{\cancel{ab}} = \frac{-\cancel{k_e} a q - \cancel{k_e} q b + \cancel{k_e q a}}{\cancel{ab}} \Rightarrow \boxed{q = -\frac{a}{b} Q}$$