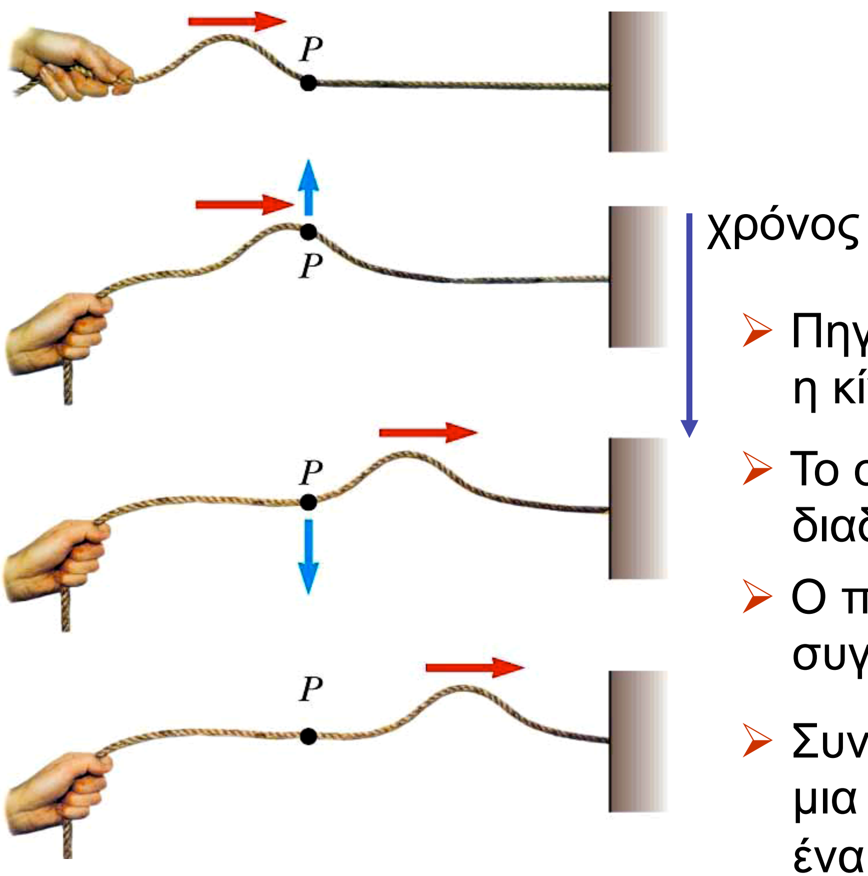
ΚΥΜΑΤΑ

- Κύματα εμφανίζονται σε συστήματα με καταστάσεις ισορροπίας. Τα κύματα είναι διαταραχές από τη θέση ισορροπίας.
- Τα κύματα προκαλούν κίνηση σε πολλά διαφορετικά σημεία σε ένα διαταραγμένο σύστημα
  - Η κίνηση είναι συζευγμένη και η έτσι μπορεί να διαδοθεί ενέργεια σε μια απόσταση αλλά όχι ύλη.
- Απορροφώντας και ανακλώντας κύματα τα όρια του συστήματος έχουν μια πολύ σημαντική επιρροή στην συμπεριφορά του συστήματος
- Ένα σύστημα μπορεί να υποστηρίξει περισσότερες από μία διαταραχές την ίδια χρονική στιγμή. Αυτές μπορούν να περάσουν ενδιαμέσου των υπόλοιπων άλλων διαταραχών διατηρώντας την ταυτότητά τους

Κύματα

Ένας κυματικός παλμός είναι μια διαταραχή πεπερασμένου μεγέθους χωρικά (αρχίζει σε ένα σημείο x_1 και τελειώνει σε ένα σημείο x_2 ενώ είναι μηδέν έξω απ’ αυτό) και ο οποίος οδεύει μέσω ενός συστήματος



- Πηγή του κυματικού αυτού παλμού είναι η κίνηση του χεριού.
- Το σχοινί είναι το μέσο μέσω του οποίου διαδίδεται ο παλμός.
- Ο παλμός έχει συγκεκριμένο ύψος και συγκεκριμένη ταχύτητα διάδοσης στο μέσο.
- Συνεχή διέγερση του σχοινιού θα δημιουργήσει μια περιοδική διαταραχή που θα δημιουργήσει ένα κύμα

Είδη κυμάτων

- Μηχανικά κύματα – Διαδίδονται σε κάποιο μέσο
  - εν αντιθέσει των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων τα οποία δεν χρειάζονται κάποιο μέσο (π.χ. φως, ραδιοφωνικά κύματα, ακτίνες-x)
- Ανάλογα με τον τρόπο διάδοσης τα χαρακτηρίζουμε

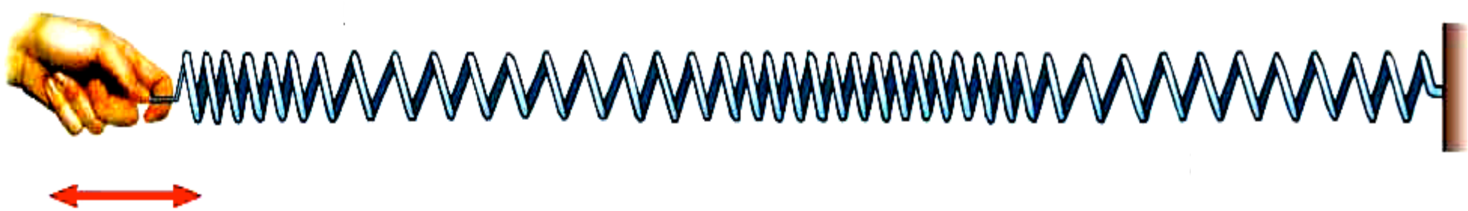
εγκάρσια (μέσο κινείται κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης)

διεύθυνση διάδοσης

ταλάντωση

διαμήκη

Μέσο κινείται παρ/λα της διάδοσης



Ένας ακόμα διαχωρισμός:

Οδεύοντα Στάσιμα

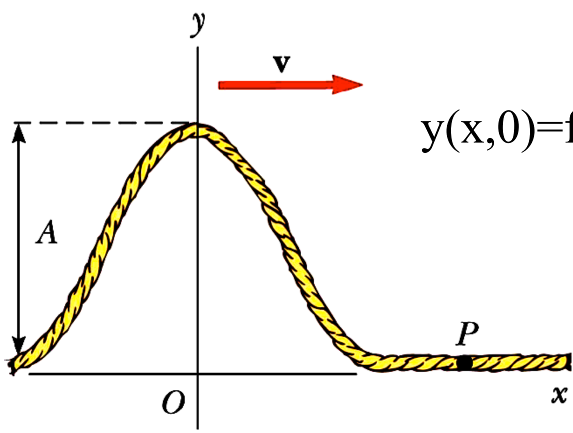
Κύματα

Έστω ένα σχοινί και ένας παλμός να διαδίδεται διαμέσου του σχοινιού με ταχύτητα v

Μετά από χρόνο t ο παλμός έχει κινηθεί κατά μια απόσταση vt

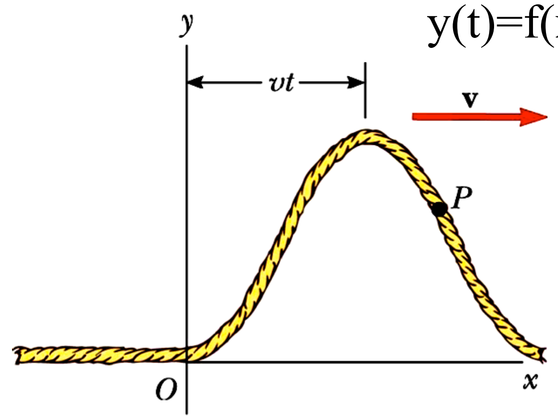
Το σχήμα του παλμού δεν αλλάζει

Η θέση του είναι y=f(x-vt)



y(x,0)=f(x)

Μορφή παλμού τη στιγμή t = 0



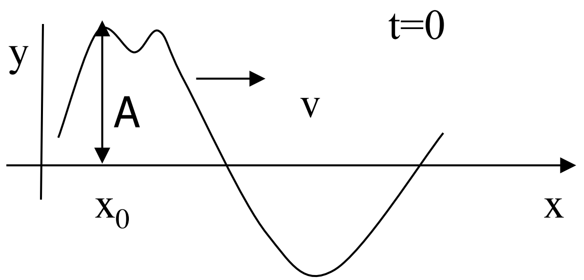
y(t)=f(x-vt)

Μορφή παλμού τη στιγμή t

Η συνάρτηση y(x) περιγράφει τη κατακόρυφη θέση ενός σημείου του σχοινιού σε κάθε x τη στιγμή t=0

Συναρτησιακή μορφή κύματος

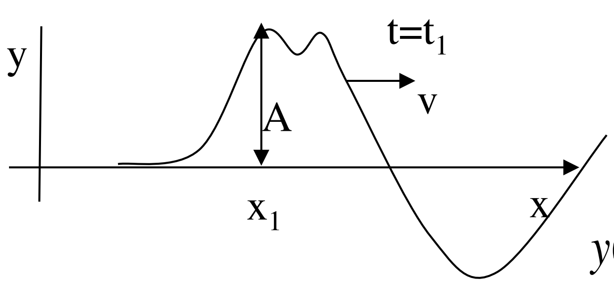
Ποια είναι η συναρτησιακή μορφή ενός «γενικού» κύματος?



Την χρονική στιγμή t=0

$$y(x_0) = A = f(x_0)$$

Αργότερα, τη χρονική στιγμή $t=t_1$,



$$x_1 = x_0 + \mathrm{v}t_1 \Rightarrow y(x_1) = A$$

Στην θέση $x=x_1$ και χρονική στιγμή $t=t_1$
η απομάκρυνση είναι $y(x_1) = A$

$$\left.\begin{aligned} &y(x_1,t_1) = A = y(x_{0,}t_0) = f(x_0) \\ &x_0 = x_1 - \mathrm{v}t_1 \end{aligned}\right\} \boxed{\Rightarrow y(x_1,t_1) = f(x_1 - \mathrm{v}t_1)}$$

Κύμα που οδεύει δεξιά

$$\boxed{y(x_1,t_1) = f(x_1 + \mathrm{v}t_1)}$$

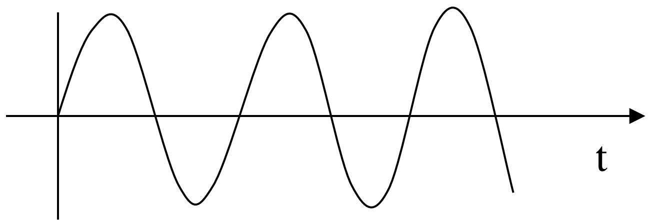
Κύμα που οδεύει αριστερά

y(x,t): ονομάζεται κυματοσυνάρτηση

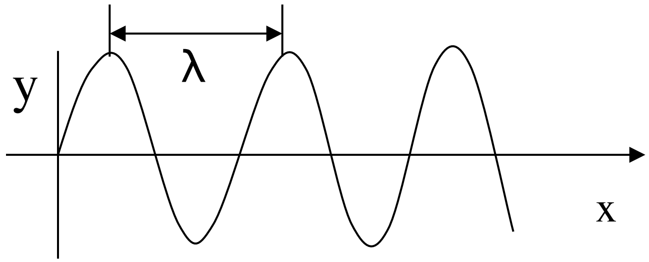
Η μορφή του κύματος σε μια ορισμένη χρονική στιγμή

Κύματα και απλός αρμονικός ταλαντωτής

Από τον απλό αρμονικό ταλαντωτή

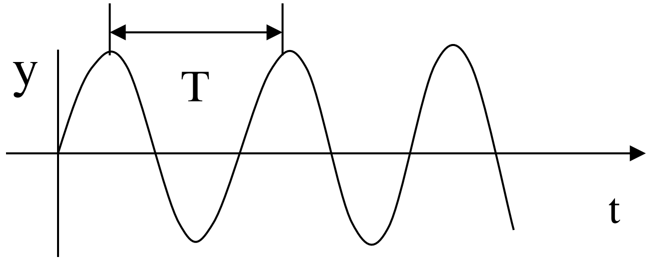


Σ' αυτή την περίπτωση θέλουμε y(t) και y(x)



σε χρόνο t

λ-μήκος κύματος: η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών

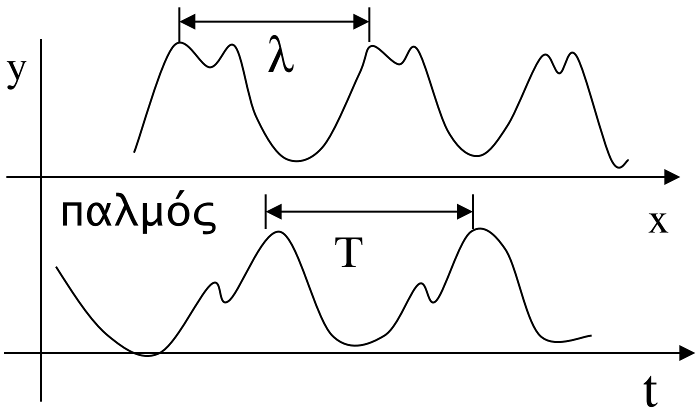


σε θέση x

T-περίοδος: το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών

Μορφή κυμάτων

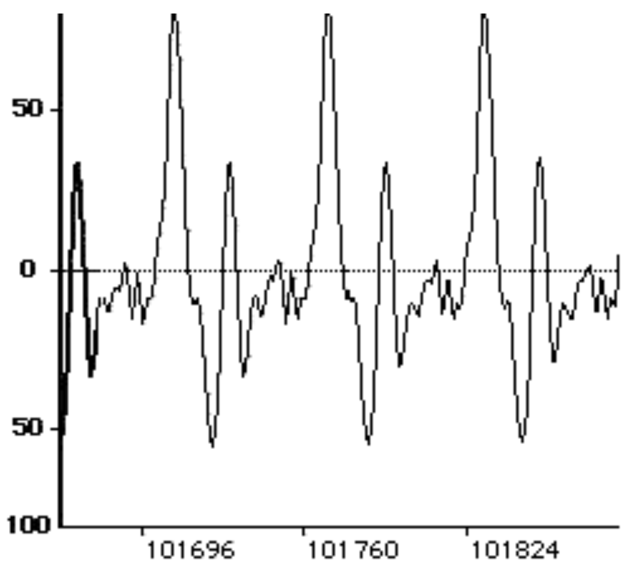
Εν γένει τα κύματα δεν είναι ημιτονοειδούς μορφής

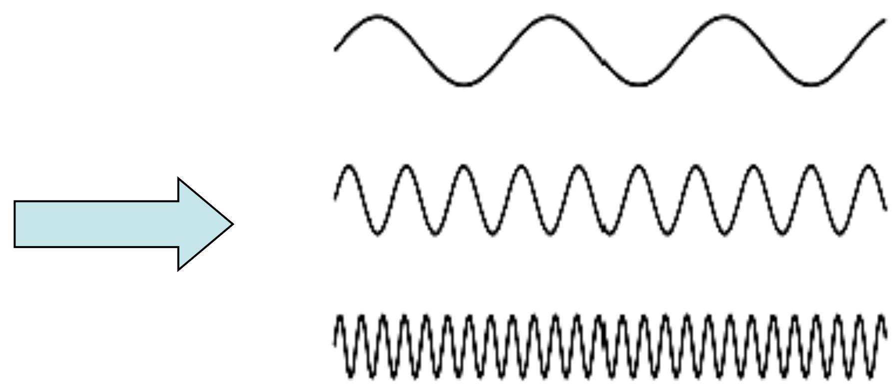


Συχνότητα κύματος:

αριθμός των παλμών που περνούν από ένα ορισμένο σημείο σε 1 sec:

f=1/T





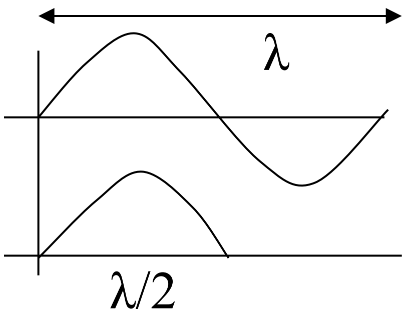
Οποιαδήποτε μορφή μπορεί να αναλυθεί σε επιμέρους ημιτονοειδείς ή συνημιτονοειδείς συνιστώσες

Ταχύτητα κύματος

Ένα κύμα διανύει απόσταση λ με ταχύτητα v σε χρόνο t=λ/v

Επομένως:

$$T = \frac{\lambda}{\mathrm{v}} = \frac{1}{f} \Rightarrow \mathrm{v} = \lambda f$$



Για παράδειγμα: μια χορδή κιθάρας

f=440Hz, λ=1.2m.   Η ταχύτητα του κύματος είναι v=λ*f*=530m/s!

Η ταχύτητα ενός εγκάρσιου κύματος σε χορδή εξαρτάται από την τάση και την πυκνότητα μάζας της χορδής

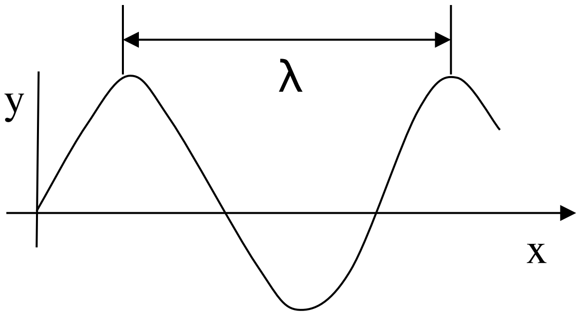
$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Εξάρτηση από πυκνότητα κατανοητή – αδρανειακή μάζα

Η ταχύτητα αυξάνει για ίδια λ, *f* αυξάνοντας την τάση

Αρμονικά κύματα

Θεωρούμε την ιδιαίτερη περίπτωση που τα κύματα είναι αρμονικά:



$$y(x) = A\sin\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)x\right]$$

Η εξίσωση είναι περιοδική σε x

Όταν x=nλ τότε sin[(2π/λ)nλ]=sin2πn

n=0 $\sin 2\pi n = 0$

n=1 $\sin 2\pi n = 0$

n=2 $\sin 2\pi n = 0$

Προσθέτουμε τώρα χρονική εξάρτηση:

$$y(x,t) = A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - \mathrm{v}t)\right] \Rightarrow \boxed{y(x,t) = A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]}$$

v=λ/T

Ακριβής έκφραση της περιοδικότητας και σε x και σε t.

Όταν $x \to x+\lambda$, $t \to t + T$ επαναλαμβάνετε

Αρμονικά κύματα

Ορίζουμε ως κυματικό αριθμό: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

Ορίζουμε ως κυματική συχνότητα: $\omega = 2\pi f$

και ταχύτητα κύματος: $\mathrm{v} = \dfrac{\omega}{k}$ $\qquad \mathrm{v} = \lambda f = \dfrac{2\pi}{k}\dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{\omega}{k}$

Επομένως η κυματοσυνάρτηση: $y(x,t) = A\sin\left(kx - \omega t\right)$

Όλα τα παραπάνω αντιστοιχούν σε αρμονικό κύμα διαδιδόμενο στα δεξιά

Οι περισσότερες γενικές περιγραφές ενός κύματος θα περιέχουν και φάση που προκύπτει γιατί για t=0, x≠0

Γενική εξίσωση κυματοσυνάρτησης $y(x,t) = A\sin\left(kx - \omega t + \varphi_0\right)$

Ταχύτητα και επιτάχυνση

Ποια είναι η ταχύτητα και επιτάχυνση κάθε σημείου της χορδής?

$$\mathrm{v}_y = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{o\rho\iota\sigma\mu\varepsilon\nu o\ \ x} = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -\omega \mathrm{A}\cos(kx-\omega t)$$

v_y έχει διαφορετική φάση από το y

$$a_y = \frac{\partial \mathrm{v}_y(x,t)}{\partial t} = -\omega^2 \mathrm{A}\sin(kx-\omega t) = -\omega^2 y$$

$$\mathrm{v}_y^{\max} = \omega \mathrm{A} \quad o\tau\alpha\nu \quad y=0$$

$$a_y^{\max} = \omega^2 \mathrm{A} \quad o\tau\alpha\nu \quad y=-A$$

Γραμμική Κυματική Εξίσωση

- Όλα τα μονοδιάστατα κλασσικά κύματα που διαδίδονται με σταθερή ταχύτητα ικανοποιούν μια και μόνο εξίσωση που ονομάζεται κλασσική κυματική εξίσωση
- Είδαμε ότι 1-D κύματα που διαδίδονται με σταθερή ταχύτητα προς τα δεξιά (αυξανόμενο x) περιγράφονται από την κυματοσυνάρτηση

  $\Psi(x-vt)$ (συνάρτηση 2 μεταβλητών: x και t)
- Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να πάρουμε τις παραγώγους της Ψ και ως προς τις δύο μεταβλητές.

  Αλλά όταν παίρνουμε τη παράγωγο ως προς τη μια μεταβλητή, η άλλη κρατείται σταθερή

  Αυτές οι παράγωγοι καλούνται μερικές παράγωγοι

  Γράφουμε τη μερική παράγωγο ως: $\frac{d}{dx} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}$

  Έτσι για τη μερική παράγωγο της Ψ ως προς x γράφουμε $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$

  όπου χρησιμοποιούμε το t σα σταθερό. Ανάλογα έχουμε τη μερική παράγωγο του Ψ ως προς t, θεωρώντας το t σταθερό

Γραμμική Κυματική Εξίσωση

Για κύμα που κινείται δεξιά, έχουμε $\Psi(x-\mathrm{v}t)$

Ορίζουμε μια νέα μεταβλητή $u = x - \mathrm{v}t$

Η μερική παράγωγος της Ψ ως προς x γράφεται: $$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial u}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{1} \quad (\alpha)$$

Η δεύτερη μερική παράγωγος της Ψ ως προς x γράφεται:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\right]\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{1} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial u^2} \quad (\beta)$$

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω ως προς t έχουμε: $$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\partial\Psi}{\partial u}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{-\mathrm{v}} \quad (\gamma)$$

Από (α) και (γ) θα μπορούσαμε να πούμε ότι $$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\mathrm{v}\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

Αυτό θα ήταν αρκετό αλλά δυστυχώς έχουμε διαφορετική εξίσωση αν πάρουμε κύματα που κινούνται αριστερά : Ψ(x+vt)

Επομένως συνεχίζουμε με την δεύτερη μερική παράγωγο:

Γραμμική Κυματική Εξίσωση

Παίρνοντας τη δεύτερη μερική παράγωγο της Ψ ως προς t έχουμε:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial u}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(-\mathrm{v}\frac{\partial \Psi}{\partial u}\right)\right](-\mathrm{v}) = \mathrm{v}^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2}$$

Χρησιμοποιώντας την (β) έχουμε:

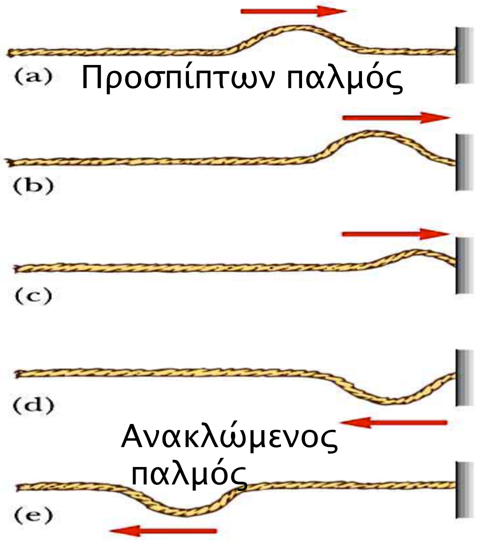
$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \mathrm{v}^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0}$$

Κλασσική κυματική εξίσωση για 1-D κύματα

Κύματα στην κβαντομηχανική δεν ικανοποιούν την εξίσωση αυτή αλλά μια άλλη κυματική εξίσωση που ονομάζεται εξίσωση Schrödinger

ΚΥΜΑΤΑ – Ανάκλαση - Μετάδοση

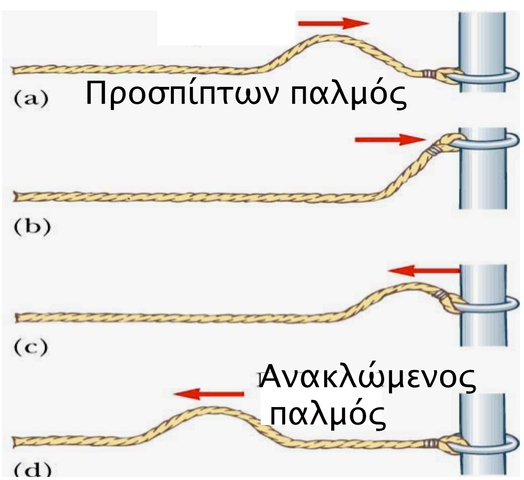
- Παλμός πάνω σε χορδή: Ένα άκρο της σταθερό (δεμένο)



Ο παλμός ασκεί μια δύναμη προς τα πάνω στον τοίχο ο οποίος ασκεί μια δύναμη προς τα κάτω στην χορδή

Αποτέλεσμα: Ο παλμός αναστρέφεται

- Παλμός πάνω σε χορδή: Το άκρο της δεν είναι σταθερό (π.χ. αβαρής θηλιά)



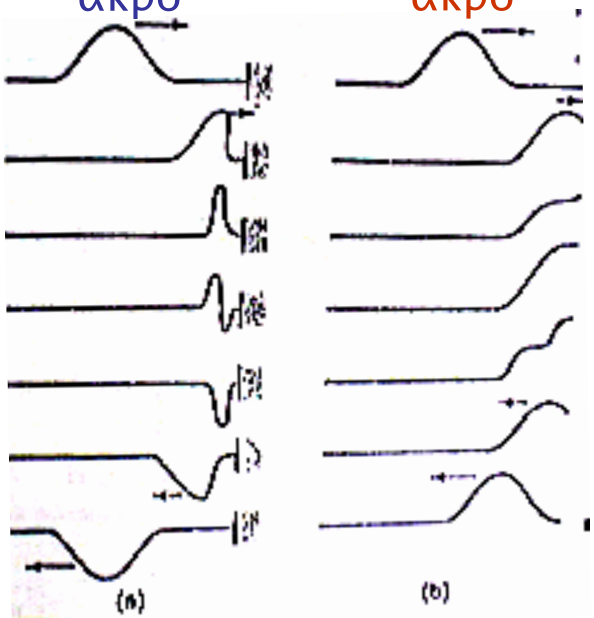
Φανταστείτε μια θηλιά σε ένα στύλο να μπορεί να ανεβοκατεβαίνει ελεύθερα.

Αποτέλεσμα: Ο παλμός δεν αναστρέφεται

Κύματα - Υπέρθεση

σταθερό άκρο

ελεύθερο άκρο



Για να καταλάβουμε την ανάκλαση και μετάδοση, εισάγουμε την έννοια της υπέρθεσης των κυμάτων

Παράδειγμα: Δύο ημιτονοειδή κύματα οδεύουν κατά την ίδια διεύθυνση αλλά με διαφορετική φάση

$$y_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$

$$y_2(x,t) = A\sin(kx - \omega t - \varphi)$$

Ποια είναι η υπέρθεση των κυμάτων: $y = y_1 + y_2$

$$y(x,t) = A\left[\sin(kx - \omega\ t) + \sin(kx - \omega\ t - \varphi)\right]$$

$$\sin\alpha + \sin b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$a = kx - \omega t, \quad b = kx - \omega t - \varphi$$

$$a + b = 2(kx - \omega t) - \varphi$$

$$a - b = \varphi$$

Υπέρθεση:

$$\boxed{y(x,t) = 2A\cos\frac{\varphi}{2}\sin\left(kx - \omega t - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

Αρμονικό πλάτος

$$2A\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

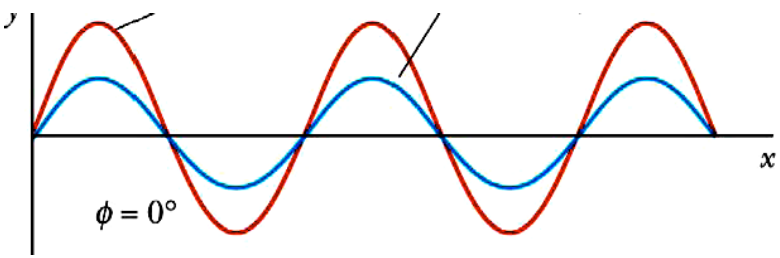
Υπέρθεση – Συμβολή

Συμβολή:

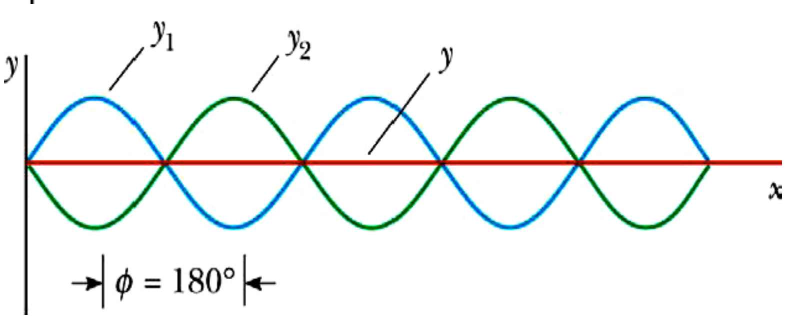
$$\boxed{y(x,t) = 2A\cos\frac{\varphi}{2}\sin\left(kx - \omega t - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

- Ανάλογα με τη τιμή της διαφοράς φάσης, φ, μπορούμε να έχουμε ενισχυτική ή καταστροφική συμβολή
- Αν $\varphi = \pi,\ 3\pi,\ \cdots,(2n+1)\pi \Rightarrow 2A\cos\frac{\varphi}{2} = 0$ καταστροφική

  $\varphi = 0,\ 2\pi,\ \cdots,2n\pi \Rightarrow 2A\cos\frac{\varphi}{2} = \pm 2A$ ενισχυτική



$$\varphi = 0,\ 2\pi,\ \cdots,2n\pi \Rightarrow 2A\cos\frac{\varphi}{2} = \pm 2A$$

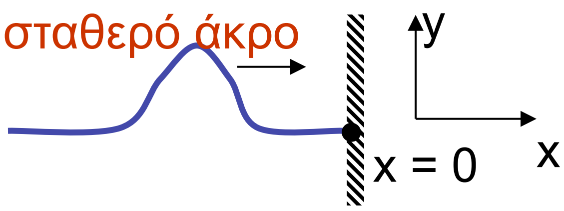


$$\varphi = \pi,\ 3\pi,\ \cdots,(2n+1)\pi \Rightarrow 2A\cos\frac{\varphi}{2} = 0$$

Υπέρθεση κυμάτων

- **Το Τρικ της φυσικής:** Όλες οι λύσεις σ' αυτά τα προβλήματα
  (αρχή υπέρθεσης) είναι υπερθέσεις των λύσεων

Θεωρήστε μια λύση στο ακόλουθο πρόβλημα είναι η:

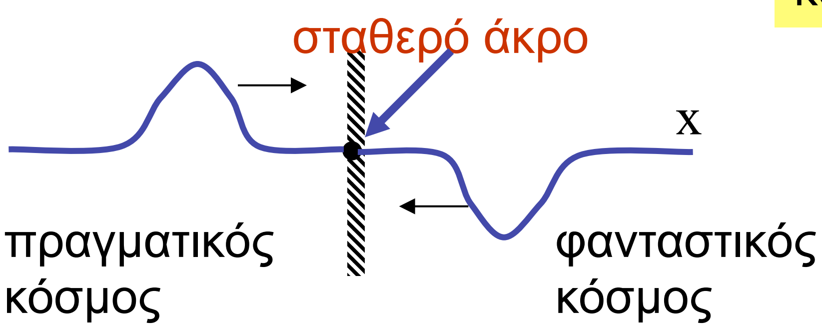


$$y(x,t) = f(x + \mathrm{v}t) + g(x - \mathrm{v}t)$$

Όλοι ξέρουμε ότι στη θέση x=0, y(0,t) = 0
Άρα y(0,t) = 0 ⇐ **Συνοριακές συνθήκες**

$y(0,t) = f(\mathrm{v}t) + g(-\mathrm{v}t) = 0 \Rightarrow$ *f* είναι το ανάστροφο της g

διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις και ανάστροφα



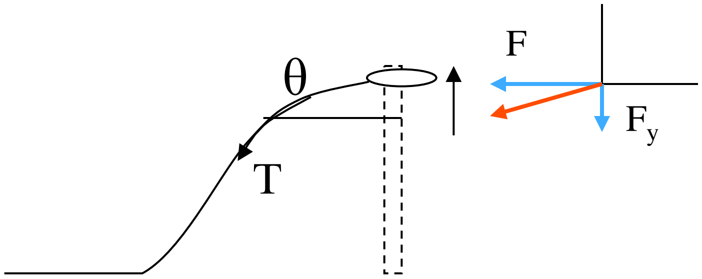
Το τρικ είναι να χρησιμοποιηθούν δύο παλμοί, ένας πραγματικός και ένας φανταστικός που να ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες

Ανάκλαση σε ελεύθερο άκρο

Η συνοριακή συνθήκη στην περίπτωση αυτή είναι: $F_y = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad x = 0$

Από τη στιγμή που τη θηλιά έχει θεωρηθεί αμελητέας μάζας, m=0

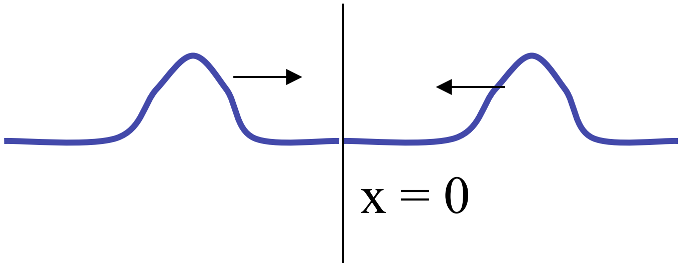
$$F_y = -F\sin\theta \approx F\tan\theta = -\mathrm{T}\frac{\partial y}{\partial x}$$



Επομένως:

$$-\mathrm{T}\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

Για ελεύθερο άκρο



Αν η λύση είναι της μορφής:

$$y(x,t) = f(x+\mathrm{v}t) + g(x-\mathrm{v}t)$$

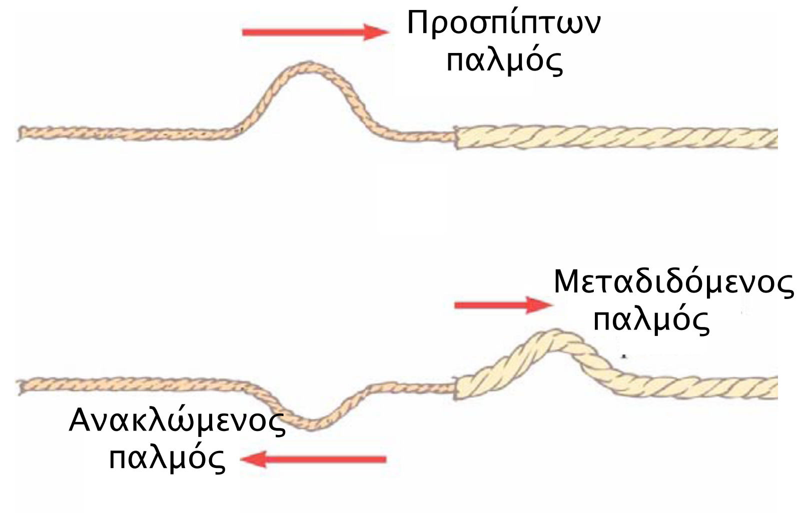
τότε οι κλίσεις είναι ίσες και αντίθετες στο x=0

$$\left.\frac{\partial f(x+\mathrm{v}t)}{\partial x}\right|_{x=0} + \left.\frac{\partial g(x-\mathrm{v}t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

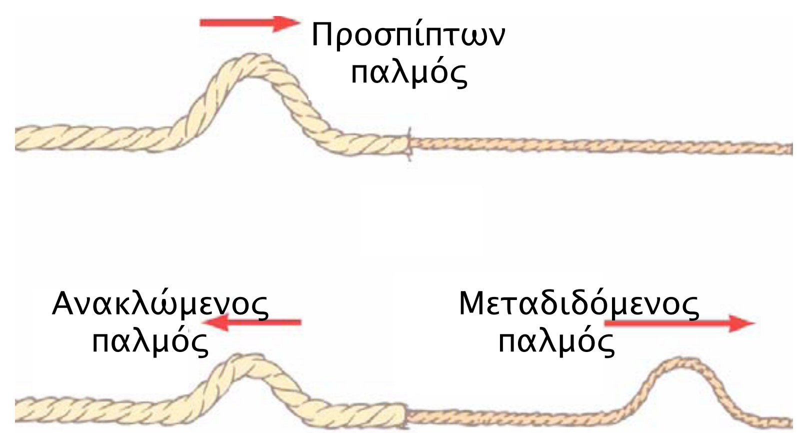
Μερική μετάδοση

Όταν το όριο είναι ενδιάμεσο των δύο προηγούμενων καταστάσεων τότε ένα μέρος του παλμού μεταδίδεται στο επόμενο μέσο ενώ ένα τμήμα του παλμού ανακλάται

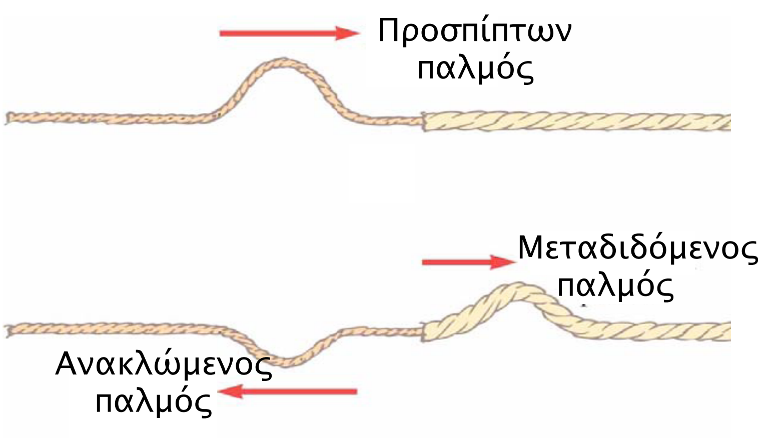
Στην περίπτωση αυτή ένα μέρος της ενέργειας περνά το όριο.



Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα βαρύτερο σχοινί είναι συνδεδεμένο σε ελαφρύτερο τότε το ανακλώμενο τμήμα δεν αναστρέφεται



Μερική μετάδοση



$$y_{\mathrm{i}} = A_{\mathrm{i}} \cos\left(k_{\mathrm{i}} x - \omega_{\mathrm{i}} t\right)$$ Προσπίπτον κύμα κινείται δεξιά

$$y_{\mathrm{r}} = A_{\mathrm{r}} \cos\left(k_{\mathrm{r}} x + \omega_{\mathrm{r}} t\right)$$ Ανακλώμενο κύμα κινείται αριστερά

$$y_{\mathrm{T}} = A_{\mathrm{T}} \cos\left(k_{\mathrm{T}} x - \omega_{\mathrm{T}} t\right)$$ Διαδιδόμενο κύμα κινείται δεξιά

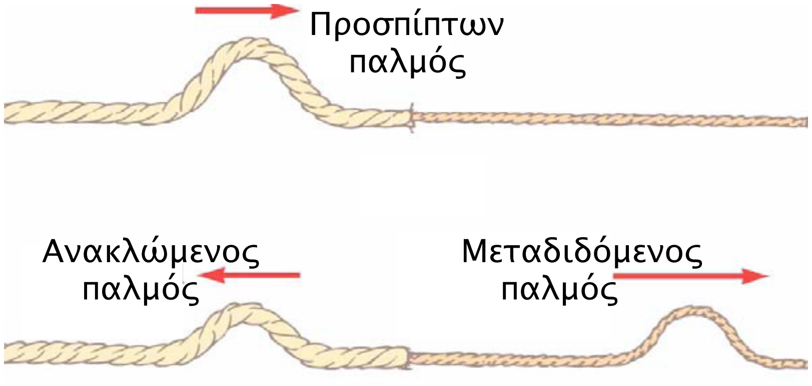
Δεξί τέλος αριστερού σχοινιού $y_{\mathrm{j}} = y_{\mathrm{i}}(0,t) + y_{\mathrm{r}}(0,t)$

Αριστερό τέλος δεξιού σχοινιού $y_{\mathrm{j}} = y_{\mathrm{T}}(0,t)$

$$A_{\mathrm{i}} \cos\left(-\omega_{\mathrm{i}} t\right) + A_{\mathrm{r}} \cos\left(\omega_{\mathrm{r}} t\right) = A_{\mathrm{T}} \cos\left(-\omega_{\mathrm{T}} t\right)$$

$$\omega_{\mathrm{i}} = \omega_{\mathrm{r}} = \omega_{\mathrm{T}} = \omega \qquad A_{\mathrm{i}} - A_{\mathrm{r}} = A_{\mathrm{T}}$$

Μερική μετάδοση



Δεξί τέλος αριστερού σχοινιού $$\frac{\partial y_j}{\partial x} = \frac{\partial y_i}{\partial x} + \frac{\partial y_r}{\partial x}$$

Αριστερό τέλος δεξιού σχοινιού $$\frac{\partial y_j}{\partial x} = \frac{\partial y_T}{\partial x}$$

$$-k_i A_i \sin(-\omega t) - k_i A_r \sin(\omega t) = -k_T A_T \sin(-\omega t)$$

$$-k_i A_i - k_i A_r = -k_T A_T \qquad A_i - A_r = A_T$$

$$A_T = \frac{2k_i}{k_i + k_T} A_i \qquad A_r = \frac{k_i - k_T}{k_i + k_T} A_i$$

18^o Mini Exam

Έτοιμοι?