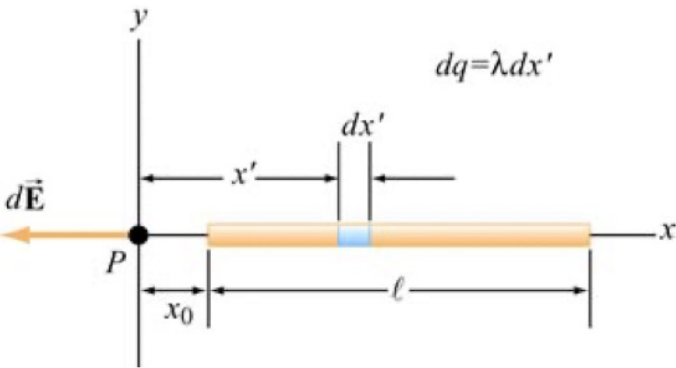


Γραμμική κατανομή κατά μήκος φορτισμένης ράβδου

Θεωρούμε μη αγώγιμη φορτισμένη ράβδο μήκους L με ομοιόμορφη γραμμική κατανομή φορτίου $+Q$. Η ράβδος είναι προσανατολισμένη κατά μήκος του x -άξονα

Θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο P που βρίσκεται στον άξονα της ράβδου και σε απόσταση x_0 από το άκρο της



Η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι: $\lambda = Q/L$

Η ποσότητα φορτίου που περιέχεται σε ένα γραμμικό τμήμα της ράβδου είναι: $dq = \lambda dx$

Εφόσον το φορτίο Q είναι θετικό, το πεδίο στο σημείο P θα έχει κατεύθυνση προς την αρνητική x -διεύθυνση.

Το μοναδιαίο διάνυσμα από την πηγή στο σημείο P είναι: $\hat{r} = -\hat{i}$

Η συνεισφορά του στοιχειώδους φορτίου dq είναι: $(k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0})$

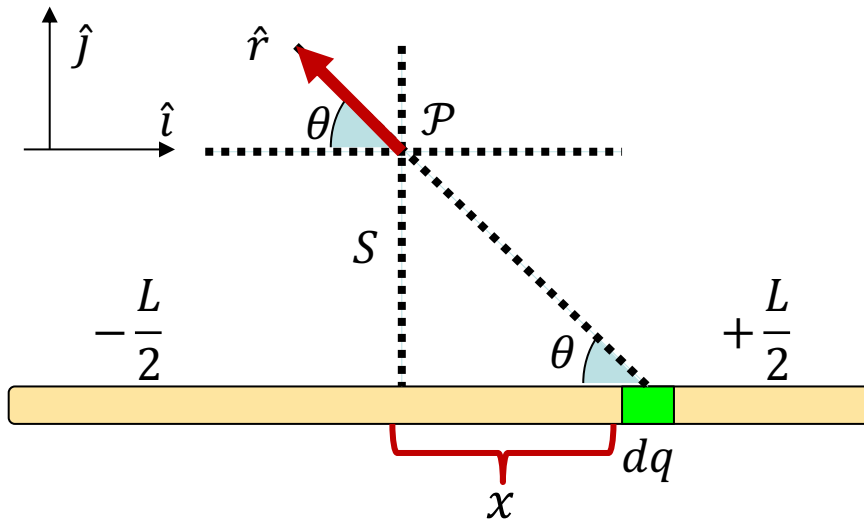
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2} \hat{i} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q dx}{L x^2} \hat{i} \quad \text{οπότε η ολοκλήρωση δίνει:}$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \int_{x_0}^{x_0+L} \frac{dx}{x^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + L} \right) \hat{i} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{Q\hat{i}}{4\pi\epsilon_0 x_0(x_0 + L)}}$$

Για $x_0 \gg L$ έχουμε: $\vec{E} = -\frac{Q\hat{i}}{4\pi\epsilon_0 x_0^2}$ πεδίο σημειακού φορτίου

Κατανομές φορτίου – γραμμική κατανομή

Έστω μια ομοιόμορφη γραμμική κατανομή φορτίου μήκους L όπως στο σχήμα. Θέλουμε να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο P που βρίσκεται στην ευθεία που περνά από το μέσο της κατανομής και σε απόσταση S



Θεωρούμε ότι η γραμμική κατανομή είναι:

$$\lambda = \frac{Q}{L} \Rightarrow Q = \lambda L \Rightarrow dq = \lambda dx$$

Η απόσταση του σημείου P από το dq είναι:

$$r = \sqrt{S^2 + x^2}$$

Έχουμε την εξίσωση: $d\vec{E} = k_e dq \frac{\hat{r}}{r^2} = k_e dq \frac{\vec{r}}{r^3}$

Λόγω συμμετρίας: $\vec{E}_x = \vec{0}$

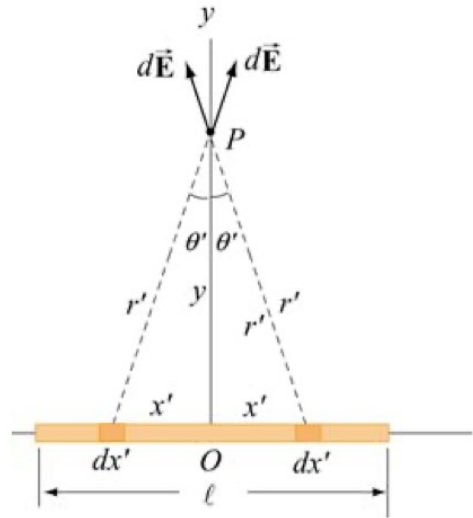
Επομένως θα έχουμε: $dE_y = k_e dq \frac{y}{r^3} = k_e \lambda dx \frac{S}{r^3} \Rightarrow dE_y = \frac{k_e \lambda S dx}{r^3}$

Ολοκληρώνουμε: $E_y = \int \frac{k_e \lambda S dx}{r^3} \Rightarrow E_y = k_e S \lambda \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dx}{(S^2 + x^2)^{3/2}} = k_e S \lambda \left. \frac{x}{S^2(S^2 + x^2)^{1/2}} \right|_{-L/2}^{L/2}$

Επομένως: $E_y = k_e \lambda S \frac{L}{S^2 \sqrt{S^2 + L^2/4}} \Rightarrow E_y = k_e Q \frac{1}{S \left(S^2 + \frac{L^2}{4} \right)^{1/2}} \Rightarrow \vec{E} = \frac{k_e Q}{S \left(S^2 + \frac{L^2}{4} \right)^{1/2}} \hat{j}$

Κατανομές φορτίου – γραμμική κατανομή

Θα μπορούσαμε να λύσουμε το ολοκλήρωμα λίγο διαφορετικά:



Η γ-συνιστώσα του πεδίου θα είναι: ($k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$)

$$dE_y = dE \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2 + y^2} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda y dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Ολοκληρώνουμε ως προς το συνολικό μήκος της κατανομής:

$$E_y = \int dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda y dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής: $x = y \tan\theta \Rightarrow dx = y \sec^2\theta d\theta$

Οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται: $\int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \int_{-\theta}^{\theta} \frac{y \sec^2\theta d\theta}{y^3 (\tan^2\theta + 1)^{3/2}} =$

$$= \frac{1}{y^2} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{\sec^2\theta d\theta}{(\tan^2\theta + 1)^{3/2}} = \frac{1}{y^2} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^3\theta} = \frac{1}{y^2} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{d\theta}{\sec\theta} = \frac{1}{y^2} \int_{-\theta}^{\theta} \cos\theta d\theta \Rightarrow E_y = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{y}$$

Οπότε καταλήγουμε όπως προηγουμένως: $E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{L/2}{y \left(y^2 + \frac{L^2}{4} \right)^{1/2}}$

Κατανομές φορτίου – γραμμική κατανομή

Το ηλεκτρικό πεδίο της γραμμικής κατανομής στον άξονα που περνά από το μέσο της και σε απόσταση S είναι επομένως:

$$\vec{E} = \frac{k_e Q}{S \left(S^2 + \frac{L^2}{4} \right)^{1/2}} \hat{j}$$

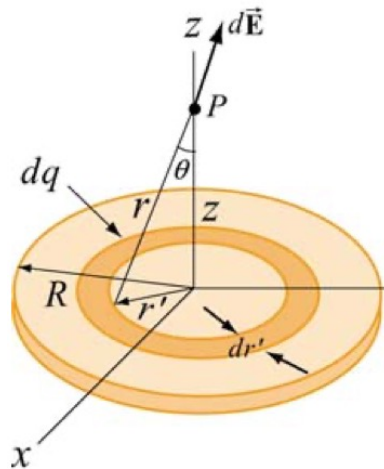
Εξετάζουμε οριακές συνθήκες:

$$S \gg L \quad \lim_{S \gg L} \vec{E} = \frac{k_e Q}{S(S^2)^{1/2}} \hat{j} \Rightarrow \lim_{S \gg L} \vec{E} = \frac{k_e Q}{S^2} \hat{j} \quad \text{ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου}$$

$$S \ll L \quad \lim_{S \ll L} \vec{E} = \frac{k_e Q}{S(L^2/4)^{1/2}} \hat{j} \Rightarrow \lim_{S \ll L} \vec{E} = \frac{2k_e Q}{SL} \hat{j} = 2k_e \frac{\lambda}{S} \hat{j} \quad \text{ηλεκτρικό πεδίο άπειρης γραμμικής κατανομής}$$

Ηλεκτρικό πεδίο ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου

Θεωρούμε ομοιόμορφα φορτισμένο δίσκο ακτίνας R με συνολικό φορτίο Q που βρίσκεται στο xy -επίπεδο. Θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P στον z -άξονα που περνά από το κέντρο του δίσκου και είναι κάθετος στον δίσκο



Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο δίσκος αποτελείται από πολλούς ομόκεντρους κυκλικούς δακτυλίους οπότε το πρόβλημα είναι ως το παράδειγμα της διάλεξης 2.

Έστω ένας δακτύλιος ακτίνας r' και πάχους dr' . Εξαιτίας της συμμετρίας το ηλεκτρικό πεδίο κάθετα στον z -άξονα θα είναι 0.

Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο θα έχει κατεύθυνση στον z -άξονα.

Το φορτίο του δακτυλίου θα είναι: $dq = \sigma(2\pi r' dr')$

Η συνεισφορά του κάθε δακτυλίου στο ηλεκτρικό πεδίο θα είναι (σύμφωνα με διαλ. 2):

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z dq}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z(2\pi\sigma r' dr')}{(r'^2 + z^2)^{3/2}}$$

Ολοκληρώνουμε από $r' = 0$ έως R και το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P γίνεται:

$$E_z = \int dE_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \int_{z^2}^{R^2+z^2} \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \left. \frac{u^{-1/2}}{(-1/2)} \right|_{z^2}^{R^2+z^2}$$

Ηλεκτρικό πεδίο ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου

Κάνοντας τις πράξεις έχουμε:

$$E_z = -\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}} \right] \Rightarrow E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]$$

Μπορούμε να γράψουμε την τελευταία σχέση με την μορφή:

$$E_z = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] & z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[-1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] & z < 0 \end{cases}$$

Εξετάζουμε οριακές συνθήκες:

$$z \gg R \quad \lim_{z \gg R} \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{z}{z \left[1 + \left(\frac{R}{z} \right)^2 \right]^{1/2}} \right]$$

$$\lim_{z \gg R} \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon^2)^{1/2}} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{Από το διωνυμικό ανάπτυγμα: } (1 + \varepsilon^2)^{-1/2} \sim 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \dots \end{aligned} \right\} \lim_{z \gg R} \vec{E} = \frac{\sigma R^2}{4z^2 \varepsilon_0}$$

Ηλεκτρικό πεδίο ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου

Επομένως για $z \gg R$ $\lim_{z \gg R} \vec{E} = \frac{\sigma R^2}{4z^2 \epsilon_0} = \frac{\sigma \pi R^2}{4\pi z^2 \epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\lim_{z \gg R} \vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 z^2}}$ πεδίο σημειακού φορτίου

Θεωρούμε την περίπτωση $z \ll R$ $E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\pm 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]$

Ο δίσκος γίνεται τώρα μια μεγάλη επίπεδη επιφάνεια ή το σημείο P είναι πολύ κοντά στην επιφάνεια του δίσκου

Στην περίπτωση αυτή, το ηλεκτρικό πεδίο γίνεται

$\lim_{z \ll R} \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{R} \right] \hat{k} \Rightarrow \boxed{\lim_{z \ll R} \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}}$ πεδίο άπειρης επιφάνειας $z > 0$

$\lim_{z \ll R} \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[-1 - \frac{z}{R} \right] \hat{k} \Rightarrow \boxed{\lim_{z \ll R} \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}}$ πεδίο άπειρης επιφάνειας $z < 0$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια ασυνέχεια στο πεδίο καθώς περνούμε μέσω της επιφάνειας του δίσκου.

Η ασυνέχεια αυτή είναι: $\Delta E_z = E_{z+} - E_{z-} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Ηλεκτρικά Πεδία κατανομών

1. Ηλεκτρικό πεδίο διπόλου: Ελαττώνεται ως: $1/r^3$
2. Ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου: Ελαττώνεται ως: $1/r^2$
3. Ηλεκτρικό πεδίο γραμμικής κατανομής φορτίου: Ελαττώνεται ως: $1/r$
4. Ηλεκτρικό πεδίο άπειρης επιφάνειας: Σταθερό

Δυναμική ενέργεια ενός δίπολου διπολικής ροπής p

Είδαμε ότι όταν ένα ηλεκτρικό δίπολο βρεθεί μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο, η διπολική του ροπή, p , τείνει να ευθυγραμμιστεί με το πεδίο εξαιτίας της ροπής που ασκείται στα φορτία του δίπολου.

Η ροπή που ασκείται είναι: $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$

Το έργο το οποίο καταναλώνεται από το πεδίο για να στρέψει το δίπολο κατά μια γωνία $d\theta$ είναι:

$$dW = -\tau d\theta = -pE \sin\theta d\theta$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η ροπή αντιτίθεται σε οποιαδήποτε αύξηση της γωνίας θ .

Το συνολικό έργο το οποίο καταναλώνεται από το ηλεκτρικό πεδίο για να περιστρέψει το δίπολο από την γωνία θ_0 στην γωνία θ είναι:..

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} -pE \sin\theta d\theta = pE(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Το έργο είναι θετικό όταν $\cos\theta - \cos\theta_0 > 0$.

Δυναμική ενέργεια ενός δίπολου διπολικής ροπής p

Η αλλαγή στη δυναμική ενέργεια, ΔU , του διπόλου είναι το $-W$ το οποίο εκτελεί το πεδίο στο δίπολο

$$\Delta U = U - U_0 = -W = -pE(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

όπου $U_0 = -pE\cos\theta_0$ η δυναμική ενέργεια σε ένα σημείο αναφοράς

Θεωρούμε ως σημείο αναφοράς αυτό για $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ έτσι ώστε η δυναμική ενέργεια $U_0 = 0$

Παρουσία επομένως ενός εξωτερικού πεδίου, το δίπολο έχει δυναμική ενέργεια:

$$U = -pE\cos\theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Ξέρουμε ότι ένα σύστημα είναι σε σταθερή ισορροπία όταν η δυναμική του ενέργεια βρίσκεται σε κάποιο ελάχιστο (τοπικό ή γενικό).

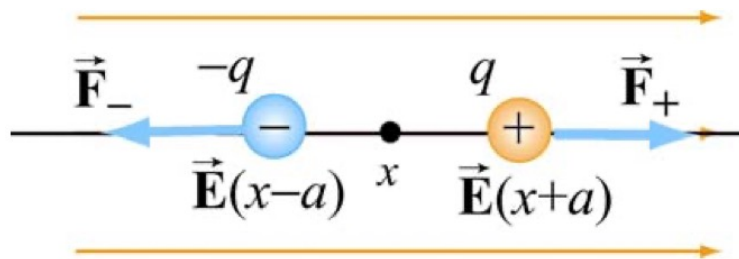
Στην περίπτωση του δίπολου αυτό συμβαίνει ότι το δίπολο ευθυγραμμίζεται με το ηλεκτρικό πεδίο οπότε η δυναμική του ενέργεια γίνεται: $U = -pE$

Στην αντίθετη περίπτωση που το δίπολο είναι αντιπαράλληλο με το ηλεκτρικό πεδίο η δυναμική του ενέργεια γίνεται μέγιστη: $U = pE$ και το σύστημα είναι ιδιαίτερα ασταθές

Δυναμική ενέργεια δίπολου

Στην περίπτωση που το δίπολο εισαχθεί σε μή-ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο, τότε πέρα από την ροπή θα ασκείται πάνω του και μια συνισταμένη δύναμη και η κίνηση του δίπολου θα είναι η συνδυαστική κίνηση μεταφορική και περιστροφική.

Για παράδειγμα έστω ότι το δίπολο είναι σε μη ομογενές ηλεκτρικό πεδίο και ότι το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E}_+ στο $+q$ διαφέρει από το ηλεκτρικό πεδίο \vec{E}_- στο $-q$.



Υποθέτουμε ότι το δίπολο είναι πολύ μικρό και αναπτύσσουμε τα πεδία ως προ το x

$$E_+(x+a) \approx E(x) + a \left(\frac{dE}{dx} \right)$$

$$E_-(x-a) \approx E(x) - a \left(\frac{dE}{dx} \right)$$

Η δύναμη στο δίπολο γίνεται τότε: $\vec{F}_e = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = 2qa \left(\frac{dE}{dx} \right) \hat{i} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_e = p \left(\frac{dE}{dx} \right) \hat{i}}$

Παράδειγμα συνισταμένης δύναμης που ασκείται σε δίπολο είναι η έλξη μεταξύ μικρών κομματιών χαρτιού και μιας κτένας που φορτίστηκε τρίβοντάς την σε μαλλί. Το χαρτί έχει επαγόμενες διπολικές ροπές ενώ το πεδίο της κτένας είναι μη ομογενές λόγω σχήματος

1^ο Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

Έτοιμοι