

ΦΥΣ 145 – Υπολογιστικές Μέθοδοι στη Φυσική

3^η Εργασία

Επιστροφή: 28/2/13

Υπενθύμιση: Οι εργασίες πρέπει να επιστρέφονται με e-mail που θα στέλνετε από το πανεπιστημιακό σας λογαριασμό το αργότερο μέχρι την ημερομηνία που αναγράφεται. Σα θέμα (subject) του e-mail θα πρέπει να αναγράφεται την εργασία (Homework 3). Κάθε αρχείο που επισυνάπτετε (attach) στο e-mail σας θα πρέπει να έχει το όνομα στη μορφή *username_hm3.tgz* όπου username είναι το *username* του e-mail σας. Επίσης σε πρώτο σχόλιο μέσα σε κάθε file θα πρέπει να αναφέρεται το ονοματεπώνυμό σας. Η εντολή tar είναι: `tar -czvf username_hm3.tgz *.f`

1. Γράψτε μια συνάρτηση η οποία υπολογίζει τη μεσαία τιμή 10 πραγματικών αριθμών (**προσοχή: όχι το μέσο όρο**). Η συνάρτηση είναι μέρος ενός προγράμματος που διαβάζει τους 10 αριθμούς και τυπώνει στην οθόνη τη μεσαία τιμή των αριθμών αυτών. Η μεσαία τιμή βρίσκεται αν ταξινομήσουμε τους αριθμούς κατά φθίνουσα ή αύξουσα σειρά και διαλέγοντας τη μεσαία τιμή αν το πλήθος των αριθμών είναι περιττός ή αν το πλήθος των αριθμών είναι άρτιος επιλέγουμε το μέσο όρο των 2 αριθμών που είναι πιο κοντά στην μεσαία τιμή.
2. Τρία σημεία P, Q και R ξεκινούν από την αρχή των αξόνων (0,0,0) και κινούνται με ρυθμό $2 \times \hat{i}$, $\sqrt{5} \times \hat{j}$ και $4 \times \hat{k}$ το δευτερόλεπτο στις διευθύνσεις x, y και z αντίστοιχα (τα \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} είναι τα μοναδιαία διανύσματα στους άξονες x, y και z αντίστοιχα). Έστω G το κέντρο μάζας του τριγώνου PQR. Να γραφεί ένα υποπρόγραμμα συνάρτησης το οποίο θα υπολογίζει τις συντεταγμένες του κέντρου μάζας G καθώς και το μέτρο του διανύσματος θέσης του για κάθε δευτερόλεπτο. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να υπολογίσει το χρόνο που χρειάζεται ώστε το μέγεθος του διανύσματος θέσης του G γίνει 100.
3. Υποθέστε ότι τα X και Y είναι μονοδιάστατοι πίνακες με N στοιχεία. Να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει:

$$\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}}{\sqrt{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}}$$

Χρησιμοποιώντας ένα υποπρόγραμμα συνάρτησης INNPRO το οποίο υπολογίζει $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$.

4. Να γραφεί ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει το παραγοντικό ενός τυχαίου ακέραιου αριθμού. Ο υπολογισμός θα πρέπει να γίνεται με την βοήθεια ενός υποπρογράμματος συνάρτησης. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να ελέγχει αν το παραγοντικό μπορεί να ορισθεί όπως επίσης αν υπάρχει περίπτωση υπερχείλισης (overflow). Για παράδειγμα αν χρησιμοποιήσετε INTEGER απεικόνιση ο μεγαλύτερος ακέραιος του οποίου το παραγοντικό μπορείτε να υπολογίσετε είναι ο 16, αν χρησιμοποιήσετε REAL απεικόνιση ο μεγαλύτερος ακέραιος του οποίου το παραγοντικό μπορείτε να υπολογίσετε είναι ο 34 ενώ τέλος για DOUBLE PRECISION απεικόνιση ο μεγαλύτερος ακέραιος είναι ο 170. Ένας τρόπος με τον οποίο μπορείτε να υπολογίσετε το παραγοντικό μεγάλων αριθμών είναι να

χρησιμοποιήσετε λογαρίθμους. Αφού το παραγοντικό είναι γινόμενο, ο λογάριθμος θα είναι άθροισμα. Προσπαθήστε να χρησιμοποιήσετε τον τρόπο αυτό για να υπολογίσετε το παραγοντικό ενός αριθμού. Υπάρχει επίσης και ένας άλλος τρόπος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Stirling σύμφωνα με την οποία για $N > 30$ μπορούμε να έχουμε τη προσέγγιση

$$N! = \sqrt{2N\pi} N^N e^{-N} \left(1 + \frac{1}{12N} + \frac{1}{288N^2} + \dots \right)$$

Στην περίπτωση αυτή μπορείτε να υπολογίσετε και πάλι τους λογαρίθμους. Το πρόβλημα που υπάρχει είναι πως θα μπορέσετε να γράψετε το αποτέλεσμα του υπολογισμού μια και θα προκαλέσει υπερχειλίση. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να εκφράσουμε τον αριθμό ως εξής: $N! = (\text{mantissa}) \times 10^{(\text{exponent})}$ όπου ο εκθέτης (exponent) είναι το ακέραιο μέρος του $\log_{10}(N!)$ και η mantissa είναι 10^a , όπου a είναι το δεκαδικό μέρος του $\log_{10}(N!)$. Θυμηθείτε ότι η μετατροπή μεταξύ φυσικού λογαρίθμου και λογαρίθμου βάσης 10 είναι: $\log_{10}(x) = \log_{10}(e) \ln(x)$ [οι αντίστοιχες συναρτήσεις βιβλιοθήκης της FORTRAN είναι LOG10(x) και LOG(x)].

5. Τα πολυώνυμα Legendre ικανοποιούν την αναγωγική σχέση:

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x)$$

με $P_0(x) = 1$ και $P_n(x) = 0$ για $n < 0$. Να γραφεί μια συνάρτηση υποπρογράμματος που να υπολογίζει το $P_n(x)$ για δεδομένα n και x . Σαν εφαρμογή να υπολογισθούν τα P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 για $x = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1.0$.

6. Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει τη σειρά:

$$f_N = \sum_{n=1}^N \frac{2}{\pi} \left[1 - (-1)^n \right] \frac{\sin(nx)}{n}$$

η οποία δίνει την αναπαράσταση Fourier της συνάρτησης βήματος:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να υπολογίζει τις $f(x)$, $f_1(x)$, $f_5(x)$, $f_{10}(x)$ και $f_{100}(x)$ για $0 \leq x < \pi$ με βήμα $\Delta x = \pi/500$. Τα αποτελέσματα θα πρέπει να τα γράψετε σε ένα αρχείο με όνομα *fourier.dat* σε μορφή 6 στηλών όπου η 1^η στήλη περιέχει την τιμή του x , η 2^η στήλη την τιμή της $f(x)$, η 3^η στήλη την τιμή της $f_1(x)$, η 4^η στήλη την τιμή της $f_5(x)$, η 5^η στήλη την τιμή της $f_{10}(x)$ και η 6^η στήλη την τιμή της $f_{100}(x)$. Χρησιμοποιώντας το file αυτό και με την βοήθεια του λογισμικού gnuplot κάνετε τη γραφική παράσταση όλων των f συναρτήσεων του x στο ίδιο γράφημα. Θα πρέπει μαζί με το πρόγραμμά σας να επιστρέψετε και το γράφημα αυτό.

7. Να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει το σημείο τομής του γραφήματος της συνάρτησης $y_1(x) = 4e^{-2x}$ και της συνάρτησης $y_2(x) = 0.5x^2$. Αν κάνετε τη γραφική παράσταση των δύο συναρτήσεων με το λογισμικό πακέτο gnuplot μπορείτε

να δείτε ότι το σημείο τομής των δυο συναρτήσεων. Θα πρέπει να βρείτε το σημείο τομής με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων. Το αποτέλεσμα των υπολογισμών σας θα πρέπει να τυπωθεί με το σωστό format σε ένα file askisi7.dat το οποίο θα στείλετε μαζί με το πρόγραμμά σας.

8. Η έλλειψη που δίνεται από την εξίσωση $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ έχει μια εφαπτόμενη σε κάποιο σημείο με συντεταγμένες (x_0, y_0) , όπου $x_0 < 0$ και $y_0 > 0$. Η εφαπτόμενη αυτή περνά και από το σημείο A με συντεταγμένες $(-8, -1)$. Το σημείο A δεν ανήκει στην έλλειψη. **(α)** Να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο βρίσκει αριθμητικά τις συντεταγμένες (x_0, y_0) με ακρίβεια 10^{00} δεκαδικού ψηφίου. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει στην οθόνη με κατάλληλο *Format* τις συντεταγμένες. **(β)** Να κάνετε την γραφική αναπαράσταση της έλλειψης και της εφαπτομένης στο σημείο που βρήκατε και να την αποθηκεύσετε στο file askisi8_plot.pdf το οποίο θα πρέπει να στείλετε με το πρόγραμμά σας.