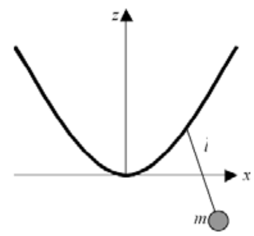
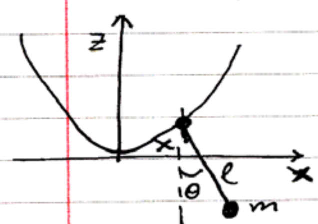
ΦΥΣ. 133 - Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Το σημείο εξάρτησης ενός απλού εκκρεμούς μήκους l και μάζας m είναι περιορισμένο να κινείται σε μια παραβολή $z = \alpha x^2$ στο κατακόρυφο επίπεδο. Το εκκρεμές αφήνεται να αιωρείται στο ίδιο x-z επίπεδο. Να βρεθεί μια Hamiltonian η οποία περιγράφει την κίνηση του εκκρεμούς και του σημείου εξάρτησής του. Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης του Hamilton.(Υπόδειξη: Είναι ευκολότερο να χρησιμοποιήσετε την x-συντεταγμένη του σημείου στήριξης και την γωνία που σχηματίζει το εκκρεμές με την κατακόρυφο).



Όπως υποδεικνύεται στο πρόβλημα επιλέγουμε σαν ανεξάρτητες συντεταγμένες τη γωνία θ του εκκρεμούς με τη κατακόρυφο και τη συντεταγμένη x του σημείου στήριξης.



Η θέση της μάζας m θα περιγράφεται από τις συντεταγμένες:

$$\left.\begin{aligned} x_m &= x + l\sin\theta \\ z_m &= ax^2 - l\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_m &= \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z}_m &= 2ax\dot{x} + l\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned}$$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε την κινητική ενέργεια T και δυναμική ενέργεια του συστήματος:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_m^2 + \dot{z}_m^2\right) = \frac{m}{2}\left[(1+4a^2x^2)\dot{x}^2 + 2l(\cos\theta + 2ax\sin\theta)\dot{x}\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2\right]$$

$$V = mg\left(ax^2 - l\cos\theta\right)$$

Επομένως οι συζυγείς ορμές θα είναι: $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow p_x = m(1+4a^2x^2)\dot{x} + ml(\cos\theta + 2ax\sin\theta)\dot{\theta}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ml(\cos\theta + 2ax\sin\theta)\dot{x} + ml^2\dot{\theta}$$

Λύνουμε τις 2 αυτές εξισώσεις ως προς $\dot{x}$ και $\dot{\theta}$ οπότε παίρνουμε:

$$\dot{x} = \frac{l p_x - (\cos\theta + 2ax\sin\theta)p_\theta}{ml(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{-l(\cos\theta + 2ax\sin\theta)p_x + (1+4a^2x^2)p_\theta}{ml^2(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2}$$

Στο σημείο αυτό είμαστε έτοιμοι να βρούμε τη Hamiltonian του συστήματος. Θα μπορούσαμε να γράψουμε: $H = \sum p\dot{q} - L$ αλλά αφού δεν υπάρχει ακριβής εξάρτηση από το χρόνο θα έχουμε: $H = T + V$

Αντικαθιστούμε τα $\dot{x}$ και $\dot{\theta}$ με τις προηγούμενες εξισώσεις και κάνουμε πολλές πράξεις για να καταλήξουμε:

$$H = \frac{l^2 p_x^2 - 2l(\cos\theta + 2ax\sin\theta) p_x p_\theta + (1+4a^2x^2) p_\theta^2}{2ml^2(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2}$$

Οι εξισώσεις κίνησης του Hamilton θα είναι:

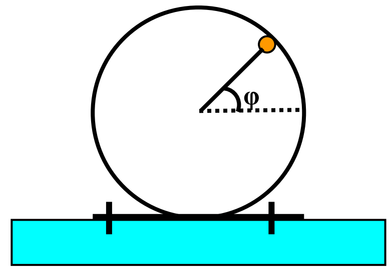
$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{2l^2 p_x - 2l(\cos\theta + 2ax\sin\theta) p_\theta}{2ml^2(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{-2l(\cos\theta + 2ax\sin\theta) p_x + 2(1+4a^2x^2) p_\theta}{2ml^2(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^2}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{-2a\cos\theta\, l^2 p_x^2 + 2al(1+\cos^2\theta + 2ax\sin\theta\cos\theta) p_x p_\theta - 2a(\cos\theta + 2ax\sin\theta) p_\theta^2}{ml^2(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^3}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{4ax\sin\theta\, l^2 p_x^2 - 2l\left(4a^2x^2 + \sin^2\theta(1+4a^2x^2)\right) p_x p_\theta + 4ax\sin\theta(1+4a^2x^2) p_\theta^2}{ml^2(\sin\theta - 2ax\cos\theta)^3}$$

2. Ένα κατακόρυφο λείο στεφάνι ακτίνας R είναι κολλημένο σε μια λεπτή οριζόντια βάση. Η μάζα του στεφανιού και της βάσης είναι M. Μια μπάλα μάζας m και αμελητέας ακτίνας γλιστρά χωρίς τριβές στο εσωτερικό του στεφανιού (ένα κοίλωμα στο εσωτερικό κρατά την μπάλα πάντοτε σε επαφή με το στεφάνι οπότε η μπάλα δεν πέφτει κατά την κίνησή της). Η γωνία της ακτίνας που παρακολουθεί τη μπάλα με την οριζόντια διεύθυνση είναι φ. Για τα ερωτήματα (α) και (β) θα θεωρήσετε ότι η διάταξη στεφανιού-βάσης είναι βιδωμένα σε οριζόντια επιφάνεια. Πρέπει να βρείτε την κάθετη δύναμη που ασκείται στην μπάλα χρησιμοποιώντας την τροποποιημένη μορφή των εξισώσεων Lagrange που περιέχουν δυνάμεις δεσμών.



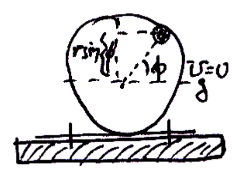
(α) Προσδιορίστε μια κατάλληλη εξίσωση δεσμού για την εύρεση της κάθετης δύναμης. Χρησιμοποιώντας κατάλληλες συντεταγμένες να γράψετε τη Lagrangian του συστήματος.
(β) Βρείτε την δύναμη της αντίδρασης στη μπάλα. Εκφράστε την δύναμη συναρτήσει της ταχύτητας της μπάλας.
(γ) Θεωρήστε τώρα ότι απομακρύνετε τις βίδες που κρατούν το στεφάνι-βάση και το σύστημα μπορεί να γλιστρά πάνω στην οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές καθώς η μπάλα κινείται στο εσωτερικό του στεφανιού. Να βρεθεί η Lagrangian που περιγράφει την κίνηση του συστήματος.

(α) Θεωρούμε τις συντεταγμένες r, ϕ (θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε x, y εξίσου το ίδιο) για τη περιγραφή της θέσης της μάζας m.

Η εξίσωση του δεσμού είναι $r = R$ (το στεφάνι έχει σταθερή ακτίνα R)

Από την οποία έχουμε: $f(r,\phi) = r - R = 0$ (1)

Αν χρησιμοποιούσαμε συντεταγμένες x, y τότε θα γράφαμε: $x^2 + y^2 = R^2$



Η Lagrangian του συστήματος είναι $L = T - V$

Η ταχύτητα της μάζας σε πολικές συντεταγμένες θα είναι: $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$ οπότε:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2\right) \quad (2)$$

Η δυναμική ενέργεια, θεωρώντας το κέντρο του στεφανιού σαν επίπεδο αναφοράς $V = 0$ θα είναι: $V = mgr\sin\phi$ (3)

Επομένως η Lagrangian του συστήματος όταν το στεφάνι είναι βιδωμένο, είναι:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - mgr\sin\phi \quad (4)$$

(β) Χρησιμοποιώντας τις τροποποιημένες εξισώσεις E-L με πολλαπλασιαστές Lagrange έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda \frac{\partial f}{\partial r} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) = \frac{\partial L}{\partial r} + \lambda \overset{1 \text{ από } (1)}{\cancel{\frac{\partial f}{\partial r}}} \Rightarrow m\ddot r = \lambda - mg\sin\phi + mr\dot\phi^2 \quad (5)$$

Ο δεσμός όμως είναι: $r-R=0 \Rightarrow r=R \Rightarrow \dot r = \ddot r = 0$ οπότε η εξίσωση (5) δίνει:

$$0 = \lambda - mg\sin\phi + mR\dot\phi^2 \Rightarrow \boxed{\lambda = -mR\dot\phi^2 + mg\sin\phi} \quad (6)$$

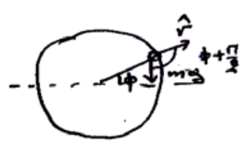
Η δύναμη του δεσμού είναι η κάθετη δύναμη, η οποία πρέπει να είναι ακτινική

Άρα $\vec N = \hat r \lambda \frac{\partial f}{\partial r} \Rightarrow \vec N = \hat r\left(mg\sin\phi - mR\dot\phi^2\right)$ ⇒

Η ταχύτητα $\vec v = \cancel{\dot r \hat r}^{\,0} + r\dot\phi\hat\phi \Rightarrow \vec v = R\dot\phi\hat\phi \Rightarrow v^2 = R^2\dot\phi^2 \Rightarrow \dot\phi^2 = \frac{v^2}{R^2}$

$$\Rightarrow \vec N = \hat r\left(mg\sin\phi - m\cancel{R}\frac{v^2}{R^{\cancel{2}}}\right) \Rightarrow \boxed{\vec N = \hat r\left(mg\sin\phi - m\frac{v^2}{R}\right)}$$

Μπορούμε να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα με Νευτώνεια μηχανική



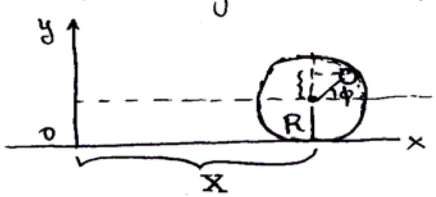
$\vec F_{κεν} = \vec B_r + \vec N$

Αλλά $|F_{κεν}| = m\frac{v^2}{R}$ με φορά προς το κέντρο (αντίθετη του $\hat r$)

$\vec B_r = \vec B \cdot \hat r = -mg\sin\phi$

Επομένως: $-\frac{mv^2}{R} = N - mg\sin\phi \Rightarrow N = mg\sin\phi - m\frac{v^2}{R}$

(γ) Θεωρούμε σαν αρχή του συστήματος συντεταγμένων το σημείο επαφής του στεφανιού με την οριζόντια επιφάνεια, πριν αρχίσει να γλιστρά η μπάλα.



Χρησιμοποιούμε καρτεσιανές συντεταγμένες x κ y

Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, το στεφάνι-βάση βρίσκονται στη θέση X

Οι συντεταγμένες της μπάλας θα είναι:

$x_{μπ} = X + R\cos\phi$ και $y_{μπ} = R + R\sin\phi$

Επομένως $\vec v_{μπ} = \hat x\left(\dot X - R\dot\phi\sin\phi\right) + \left(R\dot\phi\cos\phi\right)\hat y$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος θα είναι: $T = \frac{1}{2}M\dot X^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(\dot X - R\dot\phi\sin\phi\right)^2 + \left(R\dot\phi\cos\phi\right)^2\right]$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}M\dot X^2 + \frac{m}{2}\left(\dot X^2 + R^2\dot\phi^2\sin^2\phi - 2R\dot X\dot\phi\sin\phi + R^2\dot\phi^2\cos^2\phi\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}(M+m)\dot x^2 + \frac{m}{2}\left(R^2\dot\phi^2 - 2R\dot x\dot\phi\sin\phi\right)$$

Θεωρώντας και πάλι μηδενικό επίπεδο αναφοράς αυτό που περνά από το κέντρο του στεφανιού $U = mgR\sin\phi$

Οπότε: $L = \frac{1}{2}(M+m)\dot x^2 + \frac{m}{2}R\left(R\dot\phi^2 - 2\dot x\dot\phi\sin\phi\right) - mgR\sin\phi$