ΦΥΣ 111

Ενδιάμεση Εξέταση: 17-Οκτωβρίου-2019

Πριν αρχίσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητας).

Ονοματεπώνυμο	Αριθμός Ταυτότητας

Απενεργοποιήστε τα κινητά σας.

Η εξέταση αποτελείται από 2 μέρη. Το πρώτο μέρος έχει 5 προβλήματα πολλαπλής επιλογής και το δεύτερο μέρος έχει 5 κανονικά προβλήματα. Η μέγιστη συνολική βαθμολογία της εξέτασης είναι 100 μονάδες.

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΣΤΕ ΜΟΝΟ ΤΙΣ ΣΕΛΙΔΕΣ ΠΟΥ ΣΑΣ ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΜΗΝ ΚΟΨΕΤΕ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΣΕΛΙΔΑ

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 120 λεπτά. Καλή Επιτυχία !

Άσκηση	Βαθμός
1^{η} (5μ)	
2^{η} (5μ)	
3^{η} (5μ)	
4^{η} (5μ)	
5^{η} (5μ)	
6^{η} (10μ)	
7^{η} (10μ)	
8^{η} (15μ)	
9^{η} (20μ)	
10^{η} (20μ)	
Σύνολο	

Τύποι που μπορούν να φανούν χρήσιμοι

Γραμμική κίνηση:

$$\upsilon(t)=\upsilon_0+\int_{t_i}^{t_f}a(t)dt$$

$$x(t)=x_0+\int_{t_i}^{t_f}\upsilon(t)dt$$

$\upsilon^2=\upsilon_o^2+2a(x-x_o)$ για α=σταθ.

$x=x_o+\frac{1}{2}(\upsilon+\upsilon_o)t$ για α = σταθ

$x_{\max}=\frac{\upsilon_o^2\sin 2\theta}{g}$ βεληνεκές

g = 9.8m/s^2

Κυκλική κίνηση:

$\theta=\frac{s}{R}$ s =μήκος τόξου κύκλου ακτίνας R

$$\bar{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t},\quad \omega=\frac{d\theta}{dt},\quad \omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f,\ f=\frac{1}{T}$$

$$\omega=\omega_0+\alpha_{\gamma\omega\nu}t \qquad \alpha_{\gamma\omega\nu}=\sigma\tau\alpha\theta.$$

$$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2 \qquad \alpha_{\gamma\omega\nu}=\sigma\tau\alpha\theta.$$

$$\omega_f^2-\omega_i^2=2\alpha_{\gamma\omega\nu}\left(\theta_f-\theta_i\right) \qquad \alpha_{\gamma\omega\nu}=\sigma\tau\alpha\theta.$$

$$\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho,}=\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi.} \qquad \left|\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.}\right|=\frac{\left|\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi}\right|^2}{R}=\left|\vec{\omega}\right|^2 R$$

$$\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi.}=\vec{\omega}\times\vec{r} \qquad \left|\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi.}\right|=\left|\vec{\omega}\right|R$$

$$\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}=\frac{d\vec{\omega}}{dt},\ \vec{a}_{\varepsilon\varphi.}=\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.}\times\vec{r}\Rightarrow\left|\vec{a}_{\varepsilon\varphi.}\right|=\left|\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.}\right|\left|\vec{r}\right|$$

$$\vec{a}=\vec{a}_{\varepsilon\varphi.}+\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau.}=\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi.}$$

Τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\cos(a\pm b)=\cos(a)\cos(b)\mp\sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a\pm b)=\sin(a)\cos(b)\pm\cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b)+\cos(a+b)=2\cos(a)\cos(b)$$

$$\cos(a-b)-\cos(a+b)=2\sin(a)\sin(b)$$

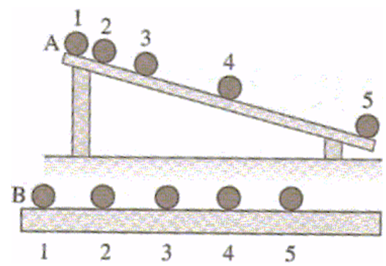
$$\sin(a-b)+\sin(a+b)=2\sin(a)\cos(b)$$

$$\cos^2(a)=\frac{1}{1+\tan^2(a)} \qquad \sin^2(a)=\frac{\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}$$

ΜΕΡΟΣ Α

Άσκηση 1 [5μ]

Τη χρονική στιγμή t = 0, η μπάλα Α ελευθερώνεται και κυλά προς τη βάση ενός κεκλιμένου επιπέδου ενώ η μπάλα Β κυλά στην οριζόντια διεύθυνση με σταθερή ταχύτητα. Στο διπλανό διάγραμμα, φαίνονται οι θέσεις των δύο μπαλών κάθε δευτερόλεπτο της κίνησής τους. Οι αριθμοί δίπλα στις θέσεις δείχνουν τη χρονική στιγμή που οι μπάλες είχαν την αντίστοιχη θέση. Σε ποιά χρονική στιγμή η μπάλα Α έχει την ίδια ταχύτητα με την μπάλα Β; (Εξηγήστε την απάντησή σας).



- **I.** 1 s.
- **II.** 2 s.
- **III.** 3 s.
- **IV.** 4 s.
- **V.** 5 s.

Η μέση ταχύτητα είναι: $\vec{v} = \dfrac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$ (1)

Ο καλύτερος τρόπος για να βρούμε την ταχύτητα σε μία χρονική στιγμή t είναι να χρησιμοποιήσουμε την μετατόπιση μεταξύ της προηγούμενης και επόμενης χρονικής στιγμής και να διαιρέσουμε με το χρονικό διάστημα:

Δηλαδή: $\left.\begin{array}{l}\Delta x = x(t+1sec) - x(t-1sec) \\ \Delta t = t+1-(t-1) = 2sec\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}_\mu = \dfrac{\vec{x}(t+1sec) - \vec{x}(t-1sec)}{2sec}$

Αλλά $\left.\begin{array}{l} x(t+1s) = \frac{1}{2}a(t+1sec)^2 = \frac{1}{2}a(t^2+1+2t) \\ x(t-1s) = \frac{1}{2}a(t-1sec)^2 = \frac{1}{2}a(t^2+1-2t)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta x = x(t+1s) - x(t-$

$\Rightarrow \Delta x = \frac{1}{\cancel{2}} a \cancel{4}^{2} t \Rightarrow$

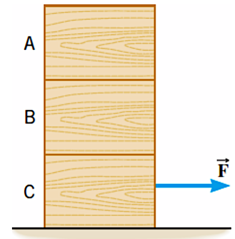
$\Rightarrow \Delta x = 2at$

Επομένως: $v_\mu = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{2at}{2sec} \Rightarrow \boxed{v_\mu = at = v}$

Την χρονική στιγμή $t = 3sec$ οι δύο μπάλες έχουν την ίδια ταχύτητα επειδή $\Delta x_A (2 \to 4\ sec) = \Delta x_B (2 \to 4s)$. Επομένως η απάντηση είναι το III

Άσκηση 2 [5μ]

Στο σύστημα του διπλανού σχήματος, τρία κιβώτια ίδιας μάζας βρίσκονται το ένα πάνω στο άλλο. Στο χαμηλότερο κιβώτιο C το οποίο βρίσκεται πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια, ασκείται μία δύναμη $\vec{F}$ με διεύθυνση παράλληλη προς την οριζόντια επιφάνεια στην οποία βρίσκονται τα κιβώτια. Οι επιφάνειες επαφής των κιβωτίων έχουν τον ίδιο συντελεστή στατικής τριβής. Ποιό από τα ακόλουθα περιγράφει καλύτερα το μέτρο της συνισταμένης δύναμης τριβής που ασκείται σε κάθε κιβώτιο; (<u>Εξηγήστε την απάντησή σας</u>).



I. $f_{s,A} = f_{s,B} = f_{s,C}$

II. $f_{s,A} = f_{s,B} = \frac{1}{2} f_{s,C}$

III. $f_{s,A} = 0$ και $f_{s,B} = \frac{1}{2} f_{s,C}$

IV. $f_{s,C} = 0$ και $f_{s,A} = \frac{1}{2} f_{s,B}$

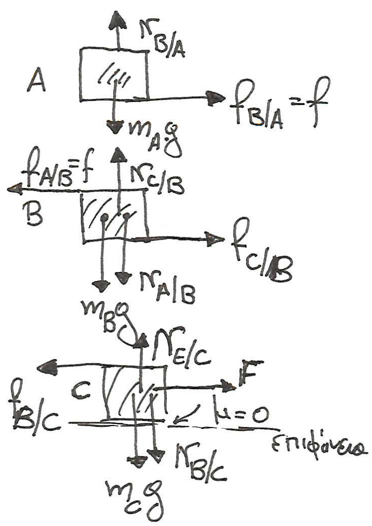
V. $f_{s,A} = f_{s,C} = \frac{1}{2} f_{s,B}$

Το κιβώτιο Β ασκεί μία δύναμη τριβής μέτρου f στο κιβώτιο Α και αυτό λόγω δράσης-αντίδρασης ασκεί μία δύναμη τριβής ίσου μέτρου αλλά αντίθετης φοράς στο κιβώτιο Β.

Η δύναμη τριβής από το Β στο Α έχει φορά προς τα δεξιά ώστε το κιβώτιο Α να κινηθεί μαζί με το υπόλοιπο σύστημα.

Μεταξύ των κιβωτίων Β και C εμφανίζεται μία δύναμη τριβής, το μέτρο της οποίας όμως είναι $2f$, γιατί η κάθετη δύναμη από το Β στο C είναι διπλάσια της κάθετης δύναμης από το Α στο Β.

Η δύναμη της τριβής από το C στο Β είναι προς τα δεξιά, ενώ η δύναμη από το Β στο C έχει φορά προς τα αριστερά.



Κιβώτιο A: $\begin{cases} \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{B/A} = m_A g = mg \\ \boxed{f_{B/A} = f = \mu mg} \quad (1) \end{cases}$

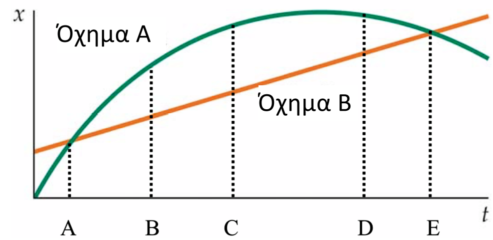
Κιβώτιο B: $\begin{cases} \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{C/B} = m_B g + N_{A/B} = 2mg \\ f_{C/B} = \mu N_{C/B} = \mu 2mg = 2\mu mg \Rightarrow \\ \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{f_{C/B} = 2f} \quad (2) \\ \Sigma F_x = f_{C/B} - f_{A/B} = 2f - f \Rightarrow \boxed{\Sigma F_x = f} \end{cases}$

Κιβώτιο C: $\boxed{f_{B/C} = -2f} \quad (3)$

Επομένως $\boxed{f_{S/A} = f_{S/B} = f = f_{S/C}/2}$, Η σωστή απάντηση είναι η ΙΙ

Άσκηση 3 [5μ]

Δύο οχήματα κινούνται σε παράλληλες τροχιές σε ένα ευθύγραμμο τμήμα του αυτοκινητοδρόμου. Το διπλανό γράφημα παρουσιάζει την θέση κάθε οχήματος συναρτήσει του χρόνου. Σε ποιές χρονικές στιγμές τα δύο οχήματα κινούνται σε αντίθετες διευθύνσεις; (<u>Εξηγήστε την απάντησή σας</u>).



I. A

II. A ή B

III. C

IV. D

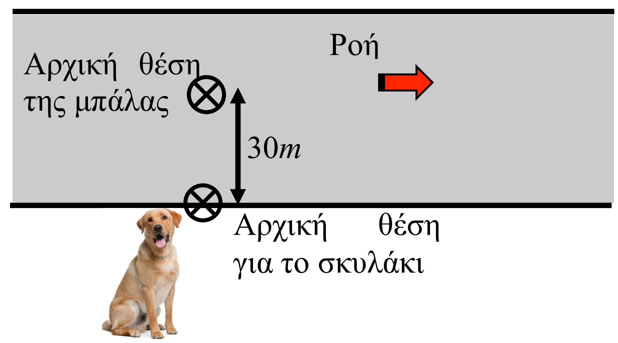
V. D ή E

VI. Σε καμία

Τα δύο οχήματα κινούνται σε αντίθετες διευθύνσεις όταν η ταχύτητά τους είναι αντίθετη. Στην περίπτωση αυτή, το όχημα B κινείται με σταθερή θετική ταχύτητα καθ'όλη τη διάρκεια της κίνησής του που παρουσιάζεται στο γράφημα. Αντίθετα, το κινητό A έχει θετική ταχύτητα η οποία ελαττώνεται μέχρι να μηδενιστεί σε κάποια χρονική στιγμή μεταξύ του διαστήματος CD και κατόπιν αρχίζει να κινείται με αρνητική ταχύτητα όπως φαίνεται στη χρονικές στιγμές D και E.

Άσκηση 4 [5μ]

Ένα σκυλάκι είναι εκπαιδευμένο να φέρνει μπάλες που ρίχνουν σε ένα ποτάμι. Το ποτάμι κυλά με ταχύτητα 4*km/h* με φορά από αριστερά προς τα δεξιά. Το σκυλάκι μπορεί να κολυμπά με ταχύτητα 6*km/h* σε ακίνητο νερό. Μία μπάλα ρίχνεται σε απόσταση 30*m* από την όχθη και κάθετα προς αυτή και αρχίζει να παρασύρεται από το ποτάμι. Τη στιγμή που η μπάλα πέφτει στο νερό το σκυλάκι αρχίζει να κολυμπά για να την πιάσει. Σε ποια διεύθυνση ως προς τα νερά του ποταμού θα πρέπει να κολυμπά το σκυλάκι ώστε να πιάσει τη μπάλα; (<u>Εξηγήστε την απάντησή σας</u>).



I. ↑ **II.** ↖ **III.** ↗ **IV.** ← **V.** Σε όποια διεύθυνση και αν κολυμπήσει θα φθάσει πάντοτε τη μπάλα.

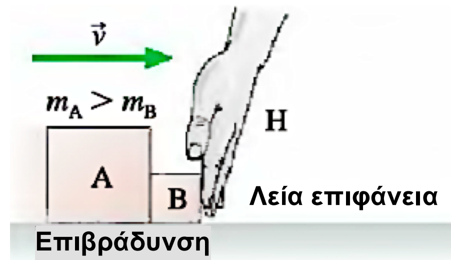
Όταν η μπάλα πέσει στο νερό, παραμένει ακίνητη ως προς τα νερά του ποταμού και κινείται ως προς την όχθη με την ταχύτητα των νερών του ποταμού. Δηλαδή θα έχουμε $\boxed{\vec{\upsilon}_{\mu/o} = \cancel{\vec{\upsilon}_{\mu/\pi}}^{\,0} + \vec{\upsilon}_{\pi/o} = \vec{\upsilon}_{\pi/o}}$

όπου $\vec{\upsilon}_{\mu/o}$ η ταχύτητα της μπάλας ως προς την όχθη, $\vec{\upsilon}_{\mu/\pi}$: η ταχύτητα της μπάλας ως προς τα νερά του ποταμού και $\vec{\upsilon}_{\pi/o}$: η ταχύτητα των νερών του ποταμού ως προς την όχθη.

Όσο η οριζόντια ταχύτητα του σκυλακιού είναι ίδια με την ταχύτητα της μπάλας (εφόσον το σκυλάκι αρχίζει να κολυμπά μόλις η μπάλα πέσει στο νερό) και το σκυλάκι έχει κάποια ταχύτητα προς την μπάλα, τότε θα πιάσει την μπάλα: $\vec{\upsilon}_{\sigma/o} = \vec{\upsilon}_{\sigma/\pi} + \vec{\upsilon}_{\pi/o}$.

Για να έχει την ίδια οριζόντια ταχύτητα με την μπάλα θα πρέπει το σκυλάκι να μην έχει ταχύτητα ως προς το ποτάμι στη x-διεύθυνση και επομένως θα παρασύρεται από το ποτάμι όπως και η μπάλα. Θα πρέπει επομένως $\vec{\upsilon}_{\sigma/\pi} \perp \vec{\upsilon}_{\pi/o}$. Επομένως η σωστή απάντηση είναι η (α)

Άσκηση 5 [5μ]



Δύο κιβώτια βρίσκοντα στη διάταξη του διπλανού σχήματος. Τα κιβώτια γλιστρούν πάνω σε λεία επιφάνεια με κατεύθυνση προς τα δεξιά. Εφαρμόζοντας το χέρι σας Η, επιβραδύνετε την κίνησή τους. Η μάζα Α είναι μεγαλύτερη από τη μάζα Β. Ταξινομήστε κατά φθίνουσα σειρά τις δυνάμεις στα Α, Β και Η. (Εξηγήστε την απάντησή σας).

I. $F_{A\to B} = F_{B\to A} = F_{H\to B} = F_{B\to H}$

II. $F_{H\to B} = F_{B\to H} > F_{A\to B} = F_{B\to A}$

III. $F_{H\to B} = F_{B\to H} < F_{A\to B} = F_{B\to A}$

IV. $F_{H\to B} = F_{H\to A} > F_{A\to B}$

Οι δυνάμεις $F_{H\to B} = F_{B\to H}$ και $F_{A\to B} = F_{B\to A}$ ως δυνάμεις δράσης - αντίδρασης. και επομένως έχουν το ίδιο μέτρο αλλά αντίθετη φορά.

Το κιβώτιο Β επιβραδύνεται εξαιτίας της συνισταμένης δύναμης που δρα πάνω του με διεύθυνση από τα δεξιά προς τα αριστερά.

Εφαρμόζοντας τον Β' νόμο του Newton στο σώμα Β θα έχουμε:

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{F}_{A\to B} + \vec{F}_{H\to B} = m_B \vec{a} \Rightarrow F^x_{A\to B} - F^x_{H\to B} = -m_B a \Rightarrow F^x_{H\to B} = F^x_{A\to B} + m_B a$$

$$\Rightarrow \boxed{F^x_{H\to B} > F^x_{A\to B}}$$

ΜΕΡΟΣ Β

Άσκηση 6 [10μ]

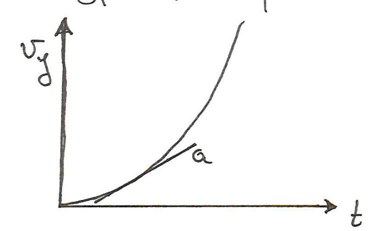
Θεωρήστε το διαστημικό λεωφορείο το οποίο απογειώνεται και καθώς καίει τα καύσιμά του και η μάζα του ελαττώνεται, η επιτάχυνσή του συνεχώς αυξάνει.

(α) Σχεδιάστε το διάγραμμα της κατακόρυφης ταχύτητας υ_y, του διαστημικού λεωφορείου συναρτήσει του χρόνου. [**3μ**]

(β) Πως συγκρίνεται η μέση ταχύτητα του διαστημικού λεωφορείου από τη στιγμή της απογείωσής του μέχρι την στιγμή που έχει αποκτήσει την μέγιστη ταχύτητά του και έχει καύσει όλα τα καύσιμά του, με το μισό της τελικής του ταχύτητας. Θα πρέπει δηλαδή να εξηγήσετε αν $\upsilon_\mu < \upsilon_f/2$, ή $\upsilon_\mu > \upsilon_f/2$ ή $\upsilon_\mu = \upsilon_f/2$. [**7μ**]

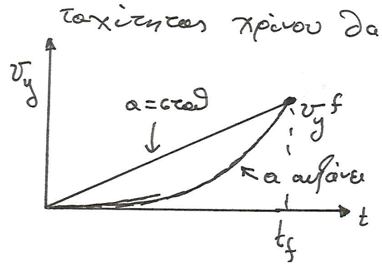
(α) Η επιτάχυνση του διαστημικού λεωφορείου συνεχώς αυξάνει. Αυτό σημαίνει ότι η κλίση του διαγράμματος της ταχύτητας υ συναρτήσει του χρόνου t, θα πρέπει να αυξάνει συνεχώς αφού $a = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$ και η επιτάχυνση a αυξάνει.

Το γράφημα επομένως θα είναι:



(β) Μπορούμε να εξηγήσουμε τη σύγκριση της μέσης ταχύτητας υ_μ με το μισό της ταχύτητας $\upsilon_f/2$ με διάφορους τρόπους.

1. Θεωρήστε ότι η ταχύτητα $\upsilon_f(t)$ είναι ανάλογη του χρόνου, δηλαδή ότι η ταχύτητα αυξάνει με σταθερή επιτάχυνση a. Το διάγραμμα της ταχύτητας χρόνου θα είναι:



Στην περίπτωση της κίνησης με σταθερή επιτάχυνση, η μέση ταχύτητα του λεωφορείου μεταξύ της χρονικής στιγμής t_0 και t_f είναι:

$$\bar{\upsilon} = (\cancelto{0}{\upsilon_0} + \upsilon_f)/2 = \upsilon_f/2.$$

Αν τώρα η ταχύτητα αυξάνει μη γραμμικά με το χρόνο (π.χ. $\upsilon \propto t^2$) τότε φαίνεται ότι η μέση τιμή της ταχύτητας είναι μικρότερη από την αντίστοιχη στην περίπτωση της κίνησης με σταθερή επιτάχυνση.

2. Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι όταν το διαστημικό λεωφορείο κινείται με μεταβαλλόμενη επιτάχυνση, περνά περισσότερο χρόνο κινούμενο με μικρότερες τιμές ταχύτητας, απ' ότι όταν κινείται με σταθερή επιτάχυνση, οπότε και αποκτά μέγιστη ταχύτητα αρκετά γρήγορα όπως φαίνεται και στο γράφημα.

3. Χρησιμοποιώντας ολοκληρωτικό λογισμό έχουμε:

$$x = x_0 + \int_{t=t_0}^{t=t_f} \upsilon(t)\,dt \Rightarrow x - x_0 = \int_{t_0}^{t_f} \upsilon(t)\,dt \Rightarrow \frac{x-x_0}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_f} \upsilon(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\upsilon} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t} \upsilon(t)\,dt} \qquad (A)$$

Έστω ότι το λεωφορείο κινείται με σταθερή επιτάχυνση: $\upsilon = a t$

Από την (2) $\Rightarrow$ $\bar{\upsilon} = \frac{1}{2}\frac{a t^2}{\Delta t}\Big|_{t_0}^{t_f} = \frac{a(t_f^2 - t_0^2)}{2\,\Delta t} = \frac{a\cancel{(t_f - t_0)}(t_f + t_0)}{2\cancel{(t_f - t_0)}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{\upsilon} = \frac{a}{2}(t_f + \cancel{t_0}^{\,0}) \Rightarrow \bar{\upsilon} = \frac{a t_f}{2} = \upsilon_f/2.$$

Αλλά αν $\upsilon(t) \propto t^2$ τότε θα έχουμε από την (A):

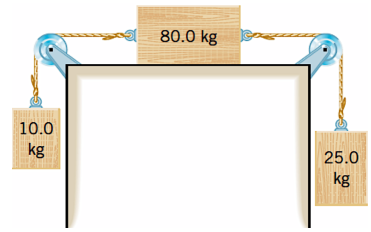
$$\bar{\upsilon} = \frac{1}{3}\frac{a t^3}{\Delta t}\Big|_{\cancel{t_0}^{0}}^{t_f} = \frac{1}{3} a \frac{t_f^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{t_f}} \Rightarrow \boxed{\bar{\upsilon} = \frac{1}{3} a t^2} = \boxed{\frac{1}{3}\upsilon_f}\ !$$

Επομένως η μέση ταχύτητα είναι μικρότερη πάντοτε της μέσης τιμής της τελικής ταχύτητας.

4. Από την εξίσωση (A) είναι φανερό ότι η μέση τιμή της ταχύτητας είναι ανάλογη του εμβαδού της καμπύλης του διαγράμματος ταχύτητας-χρόνου. Από το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου για κίνηση με σταθερή επιτάχυνση και για κίνηση με μεταβαλλόμενη επιτάχυνση, η μέση ταχύτητα στις δύο περιπτώσεις είναι διαφορετική, και άρα $\bar{\upsilon}_\mu < \upsilon_f/2$.

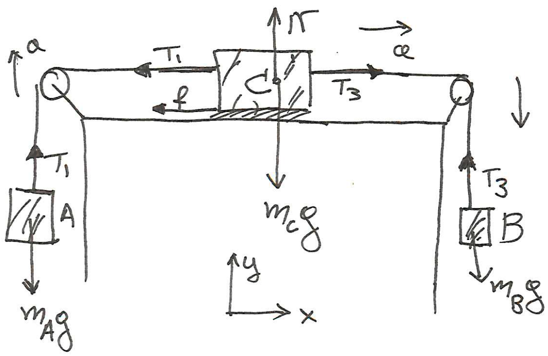
Άσκηση 7 [10μ]

Τρία κιβώτια είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους στη διάταξη που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Οι τροχαλίες είναι λείες και αβαρείς ενώ τα τμήματα των σχοινιών που συνδέουν τα διάφορα σώματα έχουν αμελητέο βάρος. Τα κιβώτια κινούνται και ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ του μεσαίου κιβωτίου και της επιφάνειας του τραπεζιού είναι $\mu_k = 0.100$.



(α) Να βρεθεί η επιτάχυνση των τριών κιβωτίων; [**7μ**]

(β) Να βρεθεί η τάση στα δύο σχοινιά; [**3μ**]



Το σύστημα κινείται με την ίδια επιτάχυνση $a_1 = a_A = a_B = a_C$

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton στα διαγράμματα ελεύθερου σώματος για τα σώματα A, B και C.

Έχουμε για το κιβώτιο A: $\Sigma F_y = m_A a = T_1 - m_A g \Rightarrow \boxed{T_1 = m_A(g+a)}$ (1)

κιβώτιο B: $\Sigma F_y = -m_B a = T_3 - m_B g \Rightarrow \boxed{T_3 = m_B(g-a)}$ (2)

κιβώτιο C: $\begin{cases} \Sigma F_x = m_C a = T_3 - T_1 - f \\ \Sigma F_y = N - m_C g = 0 \Rightarrow N = m_C g \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} N = m_C g \\ f = \mu_k N \end{matrix}\right\} \Rightarrow f = \mu_k m_C g$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow T_3 - T_1 = f_C + m_C a \overset{(2)\,\&\,(1)}{\Rightarrow} m_B(g-a) - m_A(g+a) = \mu_k m_C g + m_C a \Rightarrow$

$\Rightarrow a(m_A + m_B + m_C) = (m_B - m_A - \mu_k m_C)g \Rightarrow \boxed{a = \frac{m_B - m_A - \mu_k m_C}{m_A + m_B + m_C} g} \Rightarrow$

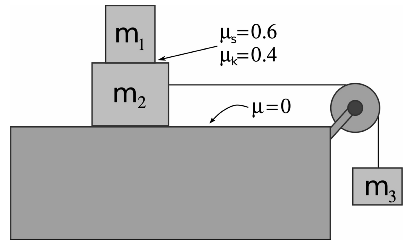
$\Rightarrow a = \frac{25\,kg - 10\,kg - 0.1 \cdot 80\,kg}{(25+10+80)\,kg} 9.8\,m/s^2 \Rightarrow \boxed{a = 0.65\,m/s^2}$

(β) Αντικατάσταση στην (1) $\Rightarrow T_1 = 10\,kg\left(9.8\frac{m}{s^2} + 0.65\,m/s^2\right) \Rightarrow \boxed{T_1 = 104.5\,N}$

αντικατάσταση στην (2) $\Rightarrow T_2 = 25\,kg(9.8 - 0.65)\frac{m}{s^2} \Rightarrow \boxed{T_2 = 228.8\,N}$

Άσκηση 8 [15μ]

Ένα κιβώτιο μάζας m_1 = 5.0kg βρίσκεται ακίνητο πάνω σε κιβώτιο μάζας m_2 = 10kg το οποίο μπορεί να κινηθεί σε λείο οριζόντιο τραπέζι. Οι συντελεστές στατικής και κινητικής τριβής μεταξύ των επιφανειών των δύο κιβωτίων είναι μ_s = 0.6 και μ_k = 0.4 αντίστοιχα. Το κιβώτιο μάζας m_2 είναι συνδεδεμένο μέσω αβαρούς νήματος που περνά από λεία και αβαρή τροχαλία με ένα τρίτο κιβώτιο μάζας m_3, που κρέμεται από την άκρη του τραπεζιού, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

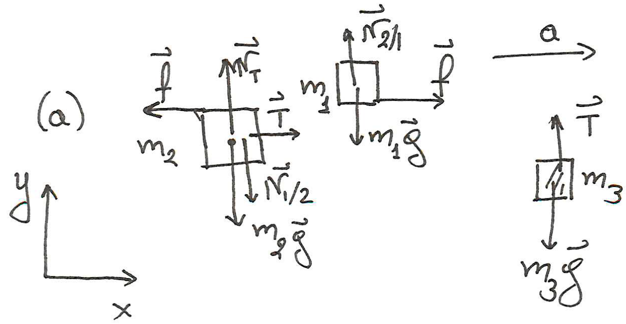


(α) Να κάνετε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για τα σώματα της διάταξης. [**3μ**]

(β) Ποιά είναι η μέγιστη επιτάχυνση της μάζας m_1 που μπορεί να επιτευχθεί με την διάταξη του σχήματος; [**3μ**]

(γ) Ποιά είναι η μέγιστη τιμή της μάζας m_3 ώστε η μάζα m_1 να κινείται μαζί με την μάζα m_2 χωρίς να γλιστρά; [**4μ**]

(δ) Υποθέστε τώρα ότι το κιβώτιο 3 έχει μάζα m_3 = 30kg. Να βρεθούν οι επιταχύνσεις των μαζών και η τάση του νήματος. [**5μ**];



(β) Η μέγιστη επιτάχυνση που μπορεί να αποκτήσει η μάζα m_1 θα συμβεί όταν η μάζα m_1 κινείται εξαιτίας της μέγιστης στατικής τριβής f, δηλαδή ακριβώς πριν αρχίσει να γλιστρά πάνω στη μάζα m_2.

Θα πρέπει δηλαδή $f = \mu_s N_{2/1} = m_1 a \Rightarrow a = \frac{\mu_s N_{2/1}}{m_1}$

Αλλά από τον 2ο νόμο του Newton στη y-διεύθυνση: $N_{2/1} = m_1 g$

$$a = \frac{\mu_s \cancel{m_1} g}{\cancel{m_1}} \Rightarrow a = \mu_s g \Rightarrow a = 0.6 \cdot 9.8 m/s^2 \Rightarrow \boxed{a = 5.88\, m/s^2}$$

(γ) Εφόσον η μάζα m_1 μπορεί να κινείται με μέγιστη επιτάχυνση $a=\mu_s g$ σύμφωνα με το (β) ερώτημα, αυτή θα είναι και η επιτάχυνση της μάζας m_2. Το σύστημα των δύο μαζών m_1+m_2 κινείται με επιτάχυνση a, και η μόνη εξωτερική δύναμη που δρά στο σύστημα στη x-διεύθυνση είναι η τάση T. Επομένως $T=(m_1+m_2)a$.

Από τον 2^o νόμο του Newton για το σώμα μάζας m_3 έχουμε: $\Sigma F_y = T - m_3 g = -m_3 a$

$$\Rightarrow (m_1+m_2)a - m_3 g = -m_3 a \Rightarrow m_3 = \frac{\mu_s g (m_1+m_2)}{g-\mu_s g} \Rightarrow \boxed{m_3 = \frac{\mu_s}{1-\mu_s}(m_1+m_2)}$$

Αντικατάσταση θα δώσει: $m_3 = \frac{0.6}{1-0.6}(5+10)\,kg = \frac{0.6}{0.4}15\,kg \Rightarrow \boxed{m_3 = 22.5\,kg}$

(δ) Όταν η μάζα $m_3 = 30kg$ η μάζα m_1 γλιστρά πάνω στην m_2.

Η τριβή που εμφανίζεται είναι κινητική τριβή και για την μάζα m_1 θα έχουμε $f_k = m_1 a_1 \Rightarrow \mu_k \cancel{m_1} g = \cancel{m_1} a_1 \Rightarrow \boxed{a_1 = \mu_k g}$ (A)

Στην μάζα m_2 ασκείται η τάση και η δύναμη της τριβής:

$$\Sigma F_x = T' - f_k = m_2 a_2 \Rightarrow T' - \mu_k m_1 g = m_2 a_2 \Rightarrow \boxed{T' = m_2 a_2 + \mu_k m_1 g} \quad (B)$$

Επίσης την ίδια τάση T' και επιτάχυνση έχουν η μάζα m_3:

$$\Sigma F_y = \boxed{T' - m_3 g = -m_3 a_2} \; (\Gamma) \Rightarrow m_2 a_2 + \mu_k m_1 g - m_3 g = -m_3 a_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m_2+m_3)a_2 = m_3 g - \mu_k m_1 g \Rightarrow a_2 = \frac{m_3 - \mu_k m_1}{(m_2+m_3)} g = \frac{30-0.4\cdot5}{30+10} 9.8\frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{\cancel{28}^{7}}{\cancel{40}_{10}} 9.8\,m/s^2 \Rightarrow a_2 = \frac{7}{10} 9.8\,m/s^2 \Rightarrow \boxed{a_2 = 6.86\,m/s^2} \quad (\Delta)$$

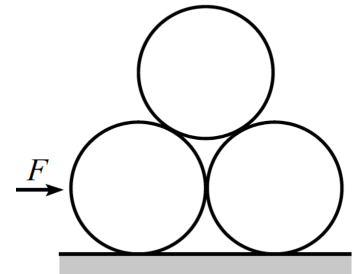
Επομένως η τάση $T' = m_3(g - a_2) = 30kg\left(1 - \frac{7}{10}\right)g = \cancel{30}^{3}\frac{3}{\cancel{10}}g \Rightarrow$

$\Rightarrow T' = 9g \Rightarrow \boxed{T' = 88.2N}$ (E)

Από την (A) έχουμε ότι $a_1 = 0.4 \cdot 9.8\, m/s^2 \Rightarrow \boxed{a_1 = 3.92\, m/s^2}$

Άσκηση 9 [20μ]

Τρεις πανομοιότυποι κύλινδροι είναι τοποθετημένοι με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίζουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο, όπου δύο από τους κυλίνδρους είναι τοποθετημένοι στο έδαφος. Μεταξύ του εδάφους και των επιφανειών των κυλίνδρων δεν υπάρχουν τριβές όπως και μεταξύ των επιφανειών των κυλίνδρων. Υποθέστε ότι εφαρμόζεται μία σταθερή οριζόντια δύναμη F στον αριστερό κύλινδρο με φορά προς τα δεξιά, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω α η επιτάχυνση που προκαλείται στο σύστημα. Να βρεθεί το εύρος των τιμών της επιτάχυνση α για το οποίο όλοι οι κύλινδροι παραμένουν σε επαφή μεταξύ τους. <u>*Υπόδειξη*</u>: Θα πρέπει να σκεφθείτε τι σημαίνει (σχετικά με τις δυνάμεις) ότι οι κύλινδροι χάνουν επαφή μεταξύ τους.

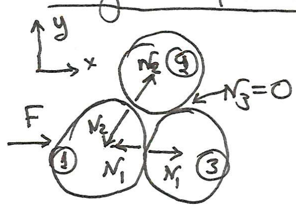


Αν η επιτάχυνση α είναι πολύ μικρή, τότε ο πάνω κύλινδρος θα γλιστρήσει ανάμεσα στους δύο κατώτερους κυλίνδρους και θα χάσουν επαφή.

Αν η επιτάχυνση είναι πολύ μεγάλη, τότε ο πάνω κύλινδρος θα "ανέβει" στο πάνω μέρος του αριστερού κυλίνδρου και πιθανόν τελικά να πέσει αριστερά του αριστερού κυλίνδρου. Στην περίπτωση αυτή χάνει επαφή με τον δεξί κύλινδρο.

Το γεγονός ότι το τρίγωνο που σχηματίζουν τα κέντρα των τριών κυλίνδρων είναι ισόπλευρο σημαίνει ότι όλες οι γωνίες θα είναι 60°.

<u>Μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης α.</u>



Στην περίπτωση αυτή, ο πάνω και δεξιός κύλινδρος μόλις και βρίσκονται σε επαφή. Επομένως η κάθετη δύναμη $N_3 \simeq 0$.

Από τον 2ο νόμο του Newton θα έχουμε:

κύλινδρος 1: $\Sigma F_x^{(1)} = m\alpha \Rightarrow F - N_1 - N_2 \cos 60° = m\alpha \Rightarrow F - N_1 \frac{1}{2} N_2 = m\alpha$

κύλινδρος 2: $\Sigma F_x^{(2)} = m\alpha \Rightarrow N_2 \cos 60° = m\alpha \Rightarrow \frac{1}{2} N_2 = m\alpha$

$\Sigma F_y^{(2)} = 0 \Rightarrow N_2 \sin 60° - mg = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} N_2 = mg$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{g}{\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{g}{\sqrt{3}}}$

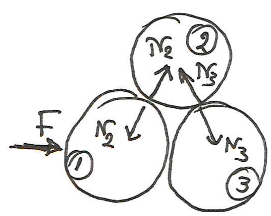
μέγιστο α.

κύλινδρος 3: $\Sigma F_x^{(3)} = m\alpha \Rightarrow N_1 = m\alpha$

Ελάχιστη τιμή της επιτάχυνσης α

Στην περίπτωση αυτή οι δύο κατώτεροι κύλινδροι μόλις και βρίσκονται σε επαφή οπότε $N_1 = 0$.

Θα έχουμε:



κύλινδρος 1: $\Sigma F_x^{(1)} = ma \Rightarrow F - N_2\cos 60^\circ = ma \Rightarrow F - \frac{1}{2}N_2 = ma$

κύλινδρος 2: $\Sigma F_x^{(2)} = ma \Rightarrow N_2\cos 60^\circ - N_3\cos 60^\circ = ma \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}N_2 - \frac{1}{2}N_3 = ma \Rightarrow \boxed{N_2 - N_3 = 2ma} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y^{(2)} = 0 \Rightarrow N_2\sin 60^\circ + N_3\sin 60^\circ - mg = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}N_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}N_3 = mg \Rightarrow \boxed{N_2 + N_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}mg} \quad (2)$$

κύλινδρος 3:

$$\Sigma F_x^{(3)} = N_3\cos 60^\circ = ma \Rightarrow \frac{1}{2}N_3 = ma \Rightarrow \boxed{N_3 = 2ma} \quad (3)$$

Από (1)+(3) έχουμε $\boxed{N_2 = 4ma}$ (4)

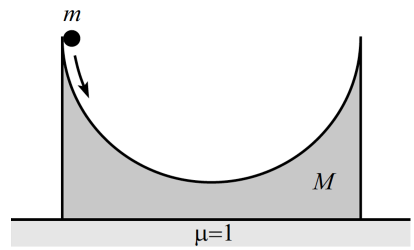
Από (2),(4) και (3) έχουμε: $4ma + 2ma = \frac{2}{\sqrt{3}}mg \Rightarrow \cancel{6}^{\,3}\cancel{m}a = \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\cancel{m}g \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_{min} = \frac{1}{3\sqrt{3}}g$$

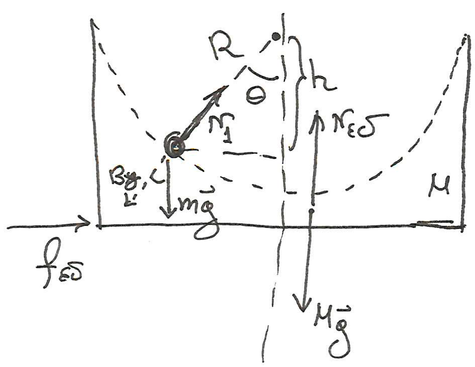
Επομένως το εύρος των τιμών της επιτάχυνσης για να μη χαθεί επαφή μεταξύ των κυλίνδρων είναι: $\frac{g}{3\sqrt{3}} \le a \le \frac{g}{\sqrt{3}}$

Άσκηση 10 [20μ]

Ένα τούβλο σε σχήμα ημισφαιρίου ακτίνας *R,* έχει μάζα *M* και βρίσκεται πάνω σε ένα οριζόντιο τραπέζι. Η εσωτερική επιφάνεια του τούβλου είναι λεία αλλά η εξωτερική του επιφάνεια που βρίσκεται σε επαφή με την επιφάνεια του τραπεζιού έχει συντελεστή στατικής τριβής ίσο με $\mu_s = 1$. Ένα σώμα μάζας *m* (θεωρήστε αμελητέες τις διαστάσεις του) αφήνεται ελεύθερο από την κορυφή του τούβλου να γλιστρήσει στην εσωτερική επιφάνεια του τούβλου προς το κάτω μέρος του τούβλου. Η ταχύτητα ενός σώματος μάζας *m* που έχει πέσει κατά ένα ύψος *h* ενώ έχει ξεκινήσει από την κατάσταση της ηρεμίας δίνεται από την σχέση $\upsilon = \sqrt{2gh}$.



Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του λόγου των μαζών m/M για την οποία το τούβλο δεν θα γλιστρήσει ποτέ πάνω στην επιφάνεια του τραπεζιού.



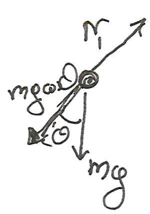
Η ταχύτητα της μάζας m σε μια τυχαία θέση δίνεται από τη σχέση $\upsilon=\sqrt{2gh}$

Το ύψος h που έχει κατέβει η μάζα m είναι

$h = R\cos\theta$.

Επομένως $\boxed{\upsilon=\sqrt{2gR\cos\theta}}$ (1)

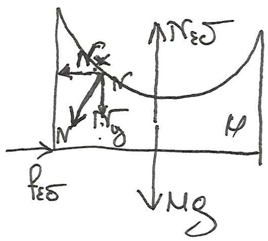
Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στη μάζα m στην ακτινική διεύθυνση παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης:



$$\Sigma F_r = N - mg\cos\theta = m a_r \Rightarrow N = mg\cos\theta + m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} N = mg\cos\theta + m\frac{2g\cancel{R}\cos\theta}{\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{N = 3mg\cos\theta} \ (2)$$

Οι κατακόρυφες δυνάμεις στο ημισφαιρικό τούβλο είναι:



$$\Sigma F_y^{(M)} = N_{\varepsilon\delta} - Mg - N\cos\theta = 0 \Rightarrow N_{\varepsilon\delta} = Mg + N\cos\theta \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \boxed{N_{\varepsilon\delta} = Mg + 3mg\cos^2\theta} \quad (3)$$

Η δύναμη που ασκείται στο τούβλο στην οριζόντια διεύθυνση είναι η δύναμη της τριβής. Υποθέτοντας ότι δεν γλιστρά, τότε η μέγιστη δύναμη είναι η δύναμη της μέγιστης στατικής τριβής που είναι: $\boxed{f_{max} = \mu N_{\varepsilon\delta}}$ (4)

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton στο ημισφαιρικό τούβλο στη x-διεύθυνση, θεωρώντας ότι δεν γλιστρά ως προς το έδαφος, που δηλώνει ότι η δύναμη της τριβής είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με την μέγιστη τιμή της στατικής τριβής:

$$\Sigma F_x^{(M)} = N_x - f = 0 \Rightarrow N_x = f \le f_{max} \Rightarrow N\sin\theta \le \mu N_{\varepsilon\delta} \overset{(2)(3)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 3m\cancel{g}\cos\theta\sin\theta \le \mu M\cancel{g} + \mu 3m\cancel{g}\cos^2\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3m\cos\theta\sin\theta \le \mu M + 3\mu m\cos^2\theta \overset{\mu=1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 3m\cos\theta\sin\theta \le M + 3m\cos^2\theta \Rightarrow \boxed{3m\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)\le M} \quad (5)$$

Η τελευταία εξίσωση θα πρέπει να ισχύει για όλες τις τιμές της γωνίας θ. Επομένως θα πρέπει να βρούμε την μέγιστη τιμή της $3\cos\theta\sin\theta - 3\cos^2\theta$ γιατί αυτή θα δώσει την μικρότερη τιμή για την m.
Παραγωγίζουμε ζητώντας η παράγωγος να είναι 0. Θα έχουμε:

$$0 = 3(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta) \Rightarrow \cos2\theta = -\sin2\theta \Rightarrow \tan2\theta = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{3\pi}{8}}$$

Επομένως $\sin 2\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$\cos 2\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2\cos^2\theta - 1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Η εξίσωση (5) γίνεται: $m\left(3\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right) \le M \Rightarrow m\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2}\right) \le M \Rightarrow$

$$\Rightarrow m \le \frac{2}{3}\frac{M}{\sqrt{2} - 1} \Rightarrow \frac{m}{M} \le \frac{2}{3}(\sqrt{2}+1) \Rightarrow \boxed{\frac{m}{M} \le 1.61}$$