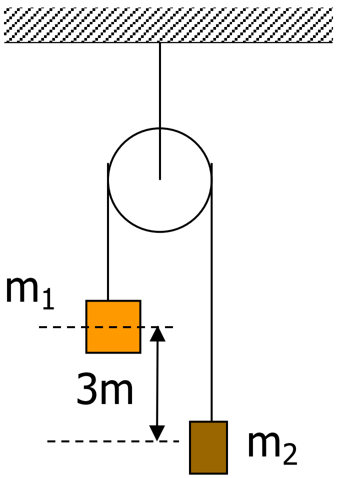
Παράδειγμα - τροχαλία με μάζα

Ένα σώμα 15kg και ένα σώμα 10kg κρέμονται συνδεδεμένα μεταξύ τους με σχοινί που περνά από μια τροχαλία ακτίνας 10cm και μάζας 3kg. Το σχοινί έχει αμελητέα μάζα και δεν γλιστρά στην τροχαλία. Η τροχαλία περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της χωρίς τριβές. Τα σώματα ξεκινούν έχοντας μεταξύ τους απόσταση 3m. Θεωρήστε την τροχαλία σαν ένα ομοιογενή δίσκο. Προσδιορίστε τις ταχύτητες των δύο σωμάτων καθώς συναντιόνται και προσπερνά το ένα το άλλο με αντίθετη κατεύθυνση.



Δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα που να καταναλώνουν έργο και δεν υπάρχουν δυνάμεις τριβής όπου χάνεται ενέργεια.

Επομένως η μηχανική ενέργεια διατηρείται: $E^f_{\kappa\iota\nu} + U^f_g = E^i_{\kappa\iota\nu} + U^i_g$

Θεωρούμε σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το σημείο στο οποίο συναντιόνται οι δύο μάζες. Άρα:

$U^f_g = 0$

$E^i_{\kappa\iota\nu} = 0$ (τα σώματα αρχικά είναι ακίνητα)

$U^i_g = U^i_{g1} + U^i_{g2} = m_1 g h_1 + m_2 g h_2$

$h_1 = 1.5m, \quad h_2 = -1.5m$ (ως προς το σημείο συνάντησης)

$$E^{\mathrm{f}}_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \longleftarrow$$ περιστροφή τροχαλίας

Το σύστημα των δύο μαζών έχει την ίδια επιτάχυνση και άρα οι 2 μάζες κινούνται με την ίδια ταχύτητα: $\upsilon_1=\upsilon_2=\upsilon$

Αφού το σκοινί δεν γλιστρά στην τροχαλία και αυτή περιστρέφεται τα σημεία επαφής της τροχαλίας με το σκοινί θα έχουν επίσης ταχύτητα υ. Άρα:

$$\omega = \frac{\upsilon}{R}$$

Η κινητική ενέργεια των σωμάτων τη στιγμή που συναντιόνται είναι:

$$E^{\mathrm{f}}_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{\upsilon^2}{R^2} \qquad \text{όπου} \qquad I = \frac{1}{2}MR^2$$

Από εξίσωση διατήρησης της μηχανικής ενέργειας έχουμε:

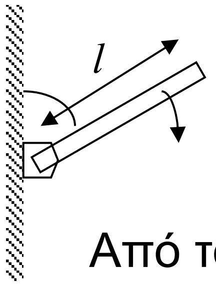
$$E^f_{\kappa\iota\nu} + U^f_g = E^i_{\kappa\iota\nu} + U^i_g \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon^2 + \frac{1}{4}M\upsilon^2 + 0 = 0 + m_1gh_1 + m_2gh_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M\right)\upsilon^2 = m_1g(1.5m) + m_2g(-1.5m) \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{2\times 1.5m\times(m_1-m_2)\times g}{m_1+m_2+M/2}$$

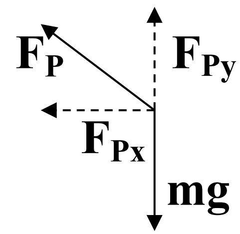
$$\upsilon^2 = \frac{3m\times 5kg\times 10m/s^2}{10kg+15kg+1.5kg} \Rightarrow \boxed{\upsilon = 2.36m/s}$$

Παράδειγμα περιστροφής

Μια λεπτή σανίδα μάζας Μ και μήκους *l* μπορεί να περιστρέφεται γύρω από ένα άκρο της όπως στο σχήμα. Η σανίδα αφήνεται με γωνία 60° ως προς την κατακόρυφο. Ποιο είναι το μέτρο και η διεύθυνση της δύναμης στο σημείο περιστροφής όταν η σανίδα είναι οριζόντια.



Οι δυνάμεις που ασκούνται στην σανίδα στην οριζόντια θέση είναι η δύναμη από το σημείο περιστροφής και η βαρύτητα



Από το 2° νόμο του Newton: $\sum F_x = F_{px} = ma_x$

Το ΚΜ κινείται σε κύκλο $a_x = \dfrac{\upsilon^2}{r} = \dfrac{\upsilon^2}{l/2}$ Άρα: $F_{px} = m\dfrac{2\upsilon^2}{l}$

Χρησιμοποιώντας διατήρηση της ενέργειας βρίσκουμε το υ, $\left(\omega = \dfrac{\upsilon}{R} = \dfrac{\upsilon}{l/2}\right)$

$$E^i = E^f \Rightarrow mg\frac{l}{2}\cos\theta = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow mg\frac{l}{2}\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\frac{\upsilon^2}{l^2/4} \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{3}{4}gl\cos\theta$$

ροπή αδράνειας ράβδου ως προς το άκρο της

Οπότε $F_{px} = m\dfrac{2}{l}\dfrac{3}{4}gl\cos\theta \Rightarrow F_{px} = \dfrac{3}{4}mg$

$$\sum F_y = F_{py} - mg = ma_y$$

Για να βρούμε τη επιτάχυνση α_y μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ροπή ως προς το σημείο περιστροφής

Η ροπή του βάρους ως προς το σημείο περιστροφής είναι: $\tau = mg\frac{l}{2}$

αλλά $\tau = I\alpha \Rightarrow I\alpha = mg\frac{l}{2}$ (1) ενώ $a_y = \alpha R = \alpha\frac{l}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2a_y}{l}$ (2)

Ξέρουμε ότι η ροπή αδράνειας ράβδου (σανίδα) ως προς το ΚΜ είναι $I_{CM} = \frac{1}{12}ml^2$

Εφόσον περιστρέφεται ως προς το άκρο της, από το θεώρημα παρ/λων αξόνων:

$$I = I_{CM} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\frac{l^2}{4} \Rightarrow I = \frac{1}{3}ml^2 \qquad (3)$$

Αντικατάσταση της (2) και (3) στην (1) δίνει:

$$\frac{1}{3}ml^2\frac{2a_y}{l} = mg\frac{l}{2} \Rightarrow a_y = \frac{3}{4}g$$

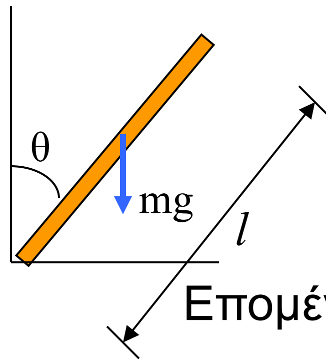
Η εξίσωση του 2ου νόμου του Newton στη y-διεύθυνση δίνει:

$$F_{py} - mg = m\frac{3}{4}g$$

Η αντίδραση από το σημείο στήριξης θα είναι: $F_p = \sqrt{F_{px}^2 + F_{py}^2}$

Καμινάδα που πέφτει

Όταν η καμινάδα πέφτει, το πάνω τμήμα της δεν μπορεί να συνεχίσει με το χαμηλότερο και η καμινάδα σπάει. Βρείτε πόσο είναι το τμήμα της καμινάδας (σχετικά με το ολικό της μήκος) το οποίο έχει εφαπτομενική επιτάχυνση μεγαλύτερη από gsinθ όπου θ η γωνία της καμινάδας με την κατακόρυφο. Υποθέστε ότι η καμινάδα είναι ράβδος με ροπή αδράνειας $I_{CM}=ML^2/12$



Η ροπή είναι $\tau = I\alpha$ (1)

και προκαλείται από το βάρος της καμινάδας που βρίσκεται $l/2$ από τη βάση της.

Επομένως $\tau = mg\frac{l}{2}\sin\theta$ (2)

Ξέρουμε επίσης ότι $I_{CM} = \frac{ml^2}{12}$

Θεώρημα παρ/λων αξόνων έχουμε: $I = I_{CM} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$ (3)

Από (1),(2) και (3): $\cancel{m}g\frac{\cancel{l}}{2}\sin\theta = \frac{\cancel{m}l^{\cancel{2}}}{3}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\theta$

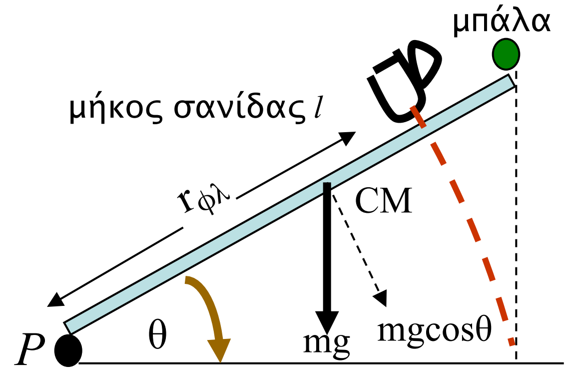
Αυτή είναι η επιτάχυνση κάθε τμήματος της καμινάδας

Αλλά $a_{εφ.} = \alpha r \Rightarrow a_{εφ.} = \left(\frac{3}{2}\frac{\cancel{g}}{l}\cancel{\sin\theta}\right) r > \cancel{g}\,\cancel{\sin\theta} \Rightarrow r > \frac{2}{3}l$

Δηλαδή περίπου 1/3 της καμινάδας θα επιταχύνεται γρηγορότερα από gsinθ

Μπάλα σε φλιτζάνι (ίδιο με καμινάδα)

Τα αφήνουμε να πέσουν. Η μπάλα πέφτει με επιτάχυνση $\alpha=g$. Το φλιτζάνι και η σανίδα πέφτουν μαζί και πιο γρήγορα από την μπάλα έτσι ώστε η μπάλα να πέσει μέσα στο φλιτζάνι.



Ποια πρέπει να 'ναι η γωνία θ ώστε αυτό να ισχύει?

$$\left.\begin{aligned}&\sum\vec{\tau}=I\vec{\alpha}=\vec{r}\times\vec{F}\\&I_P=\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\\&\vec{r}\times\vec{F}=\frac{l}{2}mg\cos\theta\end{aligned}\right\} \Rightarrow mg\frac{l}{2}\cos\theta=\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{3g}{2l}\cos\theta$$

Η εφαπτομενική επιτάχυνση του φλιτζανιού είναι: $a_{\varepsilon\varphi.}^{\varphi\lambda.}=\alpha r_{\varphi\lambda.}=\frac{3}{2}g\cos\theta\frac{r_{\varphi\lambda.}}{l}$

Για να πέσει η μπάλα στο φλιτζάνι πρέπει $\alpha_y>g$ $\quad a_y^{\varphi\lambda.}=a_{\varepsilon\varphi.}^{\varphi\lambda.}\cos\theta=\frac{3}{2}\cancel{g}\cos^2\theta\frac{r_{\varphi\lambda.}}{l}>\cancel{g}$

$$\Rightarrow\cos^2\theta\geq\frac{2}{3}\frac{l}{r_{\varphi\lambda}}\quad \text{για} \quad r_{\varphi\lambda.}=l\Rightarrow\cos\theta_{\max}\geq\sqrt{\frac{2}{3}}\Rightarrow\theta_{\max}\leq 35.3^\circ$$

Όταν η μπάλα μπαίνει στο φλιτζάνι τα 2 σώματα έχουν τις ίδιες συντεταγμένες. Η μπάλα όμως βρίσκεται πάντοτε στη θέση $x=l\cos\theta$ ενώ το φλιτζάνι σε κύκλο ακτίνας $r_{\varphi\lambda}$.

Επομένως $r_{\varphi\lambda.}=l\cos\theta$

19ο Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας
- Θα στείλετε τη φωτογραφία της απάντησής σας στο fotis@ucy.ac.cy

Έτοιμοι