ΦΥΣ 331 – Χειμερινό Εξάμηνο 2017

Τελική Εξέταση

Πέμπτη 14/12/2017 **Διάρκεια**: **17:00 – 20:00**

Σας δίνονται 9 προβλήματα και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλα.
Σύνολο μονάδων 120.

Καλή Επιτυχία

Μερικοί τύποι που ίσως φανούν χρήσιμοι:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ και $\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$, $\gamma^\mu = (\beta, \beta\vec{\alpha})$ οπότε $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ $\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$

$\gamma^0 = \beta$ $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ $(\gamma^0)^2 = I$. Για $k = 1,2,3$ $(\gamma^k)^2 = -I$ $\gamma^{k\dagger} = -\gamma^k$ και $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^k\gamma^0$ $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$

$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ και $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. Ισχύει ότι $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$ $(\gamma^5)^2 = I$ και $\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0$

1. **[10μ]**

Για ένα σωματίδιο με spinor u, ικανοποιείται η εξίσωση του Dirac $\left(\not{p}-m\right)u=0$. Να δείξετε ότι ικανοποιείται επίσης η σχέση $\bar{u}\left(\not{p}-m\right)=0$. Όπου $\not{p}=p_\mu\gamma^\mu$ και $\bar{u}=u^\dagger\gamma^0$

$$\left(P_\mu\gamma^\mu - m\right)u = 0 =$$

Παίρνουμε τον συζυγή ερμιτιανό οπότε: $u^\dagger\left(P_\mu\gamma^{\mu\dagger}-m\right)=0$

Πολλαπλασιάζουμε με γ^0 από δεξιά οπότε:

$$u^\dagger\left(P_\mu\gamma^{\mu\dagger}-m\right)\gamma^0=0 \Rightarrow u^\dagger\left(P_\mu\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0-m\gamma^0\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u^\dagger\left(P_\mu\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0\right)-\bar{u}m=0 \quad (1)$$

Εξετάζουμε τον όρο $\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0$.

Αν $\mu=0$ τότε θα έχουμε $\gamma^{0\dagger}\gamma^0=\gamma^0\gamma^0$ εφόσον $\gamma^{0\dagger}=\gamma^0$

Αν $\mu\neq 0$ τότε θα έχουμε $\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0=-\gamma^\mu\gamma^0=\gamma^0\gamma^\mu$ → χρησιμοποιούμε την $\gamma^i\gamma^0+\gamma^0\gamma^i=0$ και $\gamma^i=-\gamma^{i\dagger}$

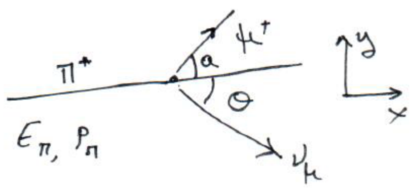
Επομένως $\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0\equiv\gamma^0\gamma^\mu$ για κάθε μ

Έτσι αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε: $\bar{u}P_\mu\gamma^\mu-\bar{u}m=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{u}\left(\not{p}-m\right)=0.$$

2. **[10μ]**

Θεωρήστε ένα φορτισμένο πιόνιο, π⁺, ενέργειας E_π μετρούμενη στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Δουλεύοντας στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου βρείτε την ενέργεια E_ν του νετρίνο, που παράγεται από τη διάσπαση του πιονίου $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$ συναρτήσει της γωνίας θ που σχηματίζει το εκπεμπόμενο νετρίνο με την διεύθυνση κίνησης του διασπώμενου π⁺ στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.



Για το π⁺ θα έχουμε το 4-διάνυσμα $(E_\pi, 0, 0, P_\pi)$ & $E_\pi = \sqrt{p_\pi^2 + m_\pi^2}$

Αντίστοιχα για το μ⁺ θα έχουμε: $(E_\mu, P_\mu \sin a, 0, P_\mu \cos a)$ $E_\mu = \sqrt{p_\mu^2 + m_\mu^2}$

και για το ν_μ θα έχουμε: $(E_{\nu_\mu}, -P_{\nu_\mu}\sin\theta, 0, P_{\nu_\mu}\cos\theta)$ $m_{\nu_\mu} = 0$. $P_{\nu_\mu} = E_{\nu_\mu}$

Από διατήρηση της ενέργειας και ορμής:

$$E_\pi = E_\mu + E_{\nu_\mu} \quad (1)$$

$$P_\mu \sin a = E_\nu \sin\theta \quad (2)$$

$$P_\mu \cos a = P_\pi - P_\nu^z = P_\pi - E_{\nu_\mu}\cos\theta \quad (3)$$

Από την (1) & (2) υψώνοντας στο τετράγωνο και αθροίζοντας: (4)

$$P_\mu^2 = E_\nu^2 \sin^2\theta + P_\pi^2 + E_{\nu_\mu}^2\cos^2\theta - 2P_\pi E_{\nu_\mu}\cos\theta \Rightarrow \boxed{P_\mu^2 = E_\nu^2 + P_\pi^2 - 2P_\pi E_{\nu_\mu}\cos\theta}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1): $E_\mu = E_\pi - E_\nu \Rightarrow E_\mu^2 = E_\pi^2 + E_\nu^2 - 2E_\pi E_\nu \Rightarrow$

$\Rightarrow P_\mu^2 + m_\mu^2 = E_\pi^2 + E_\nu^2 - 2E_\pi E_\nu$ αντικατάσταση του P_μ^2 από την (4)

$$\cancel{E_\nu^2} + P_\pi^2 - 2P_\pi E_{\nu_\mu}\cos\theta + m_\mu^2 = E_\pi^2 + \cancel{E_\nu^2} - 2E_\pi E_\nu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2E_{\nu_\mu}(E_\pi - P_\pi\cos\theta) = E_\pi^2 - P_\pi^2 - m_\mu^2 = m_\pi^2 - m_\mu^2 \Rightarrow \boxed{E_{\nu_\mu} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2(E_\pi - P_\pi\cos\theta)}}$$

3. [10μ]

(α) Δείξτε ότι οι τελεστές $P_R \equiv \frac{1}{2}\left(1+\gamma^5\right)$ και $P_L \equiv \frac{1}{2}\left(1-\gamma^5\right)$, όπου γ^5 ο χειραλικός τελεστής, έχουν τις ιδιότητες να είναι δεξιόστροφος και αριστερόστροφος τελεστές προβολής. Δηλαδή ικανοποιούν τις σχέσεις: $P_i^2 = P_i \qquad P_L + P_R = 1$ και $P_L P_R = 0$. **[4μ]**

(β) Χρησιμοποιώντας την Dirac – Pauli αναπαράσταση των γ-πινάκων, δείξτε ότι σε υψηλές ενέργειες $\gamma^5 u^{(s)} \simeq \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix} u^{(s)}$ όπου $u^{(s)}$ είναι ο spinor του ηλεκτρονίου $u^{(s)} = N\begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix}$, $E>0$ όπου $\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ και $\chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Θα πρέπει να δείξετε δηλαδή ότι στο σχετικιστικό όριο ο τελεστής χειραλικότητας γ^5 και ο τελεστής ελικότητας ταυτίζονται και ως παράδειγμα αυτό σημαίνει ότι $\frac{1}{2}\left(1-\gamma^5\right)u = u_L$ αντιπροσωπεύει ένα ηλεκτρόνιο με αρνητική ελικότητα. **[6μ]**

(α) $P_L + P_R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5) + \frac{1}{2}(1-\gamma^5) = 1.$

$P_L P_R = \frac{1}{4}(1+\gamma^5)(1-\gamma^5) = \frac{1}{4}\left(1-\overset{\to 1}{\cancel{\gamma^5\gamma^5}}\cancel{+\gamma^5-\gamma^5}\right) = 0.$

$(P_i)^2 = \frac{1}{4}(1\pm\gamma^5)^2 = \frac{1}{4}\left(1+(\gamma^5)^2 \pm 2\gamma^5\right) = \frac{1}{4}\left(1+\gamma^5\gamma^5 \pm 2\gamma^5\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(i)^2 = \frac{1}{4}\left(1+1\pm 2\gamma^5\right) \Rightarrow P(i)^2 = \frac{1}{2}(1\pm\gamma^5) = P_i$

(β) Σε αναπαράσταση Dirac-Pauli $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$

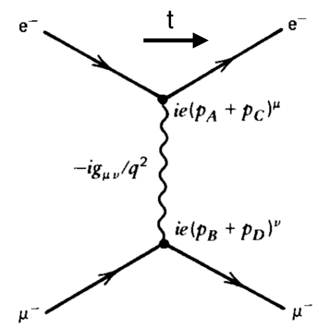
Επομένως $\gamma^5 u^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix}$

$$\gamma^5 u^{(s)} \simeq \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\hat{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \vec{\sigma}\cdot\hat{p}\,\chi^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\hat{p} \end{pmatrix} u^{(s)}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $(\vec{\sigma}\cdot\hat{p})(\vec{\sigma}\cdot\hat{p}) = |\hat{p}|^2 = 1.$

4. **[10μ]**

Θεωρήστε την σκέδαση ηλεκτρονίου-μιονίου σε μία θεωρία που τα σωματίδια αυτά δεν έχουν spin και οι μάζες τους είναι μηδενικές. Τα σωματίδια σχεδάζονται σε υψηλές ενέργειες και στην περίπτωση αυτή το πλάτος σκέδασης δίνεται από τη σχέση:

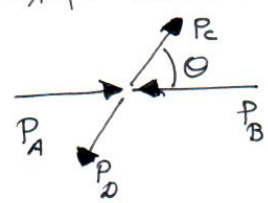


$$-iM = \left(ie\left(p_A + p_C\right)^\mu\right)\left(-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right)\left(ie\left(p_B + p_D\right)^\nu\right)$$

όπου $q = p_C - p_A$. Δείξτε ότι στην περίπτωση αυτή:

$\left.\dfrac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{CM} = \dfrac{a^2}{4s}\left(\dfrac{3+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)^2$ όπου θ η γωνία σκέδασης και $a = \dfrac{e^2}{4\pi}$.

Έχουμε σκέδαση σε υψηλές ενέργειες:



Σύστημα αναφοράς CM

Τα 4-διανύσματα των σωματιδίων που συμμετέχουν στη σκέδαση θα είναι: (CM).

$P_A = (P, P, 0, 0) \qquad P_B = (P, -P, 0, 0)$

$P_C = (p, p\cos\theta, p\sin\theta, 0) \qquad P_D = (P, -P\cos\theta, -P\sin\theta, 0)$

$$\left.\begin{aligned}(P_A + P_C) &= (2P,\ p(1+\cos\theta),\ p\sin\theta,\ 0)\\ (P_B + P_D) &= (2P,\ -p(1+\cos\theta),\ -p\sin\theta,\ 0)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (P_A + P_C)_\mu (P_B + P_D)^\mu = 4p^2 + p^2(1+\cos\theta)^2 + p^2\sin^2\theta$$

$$= 4p^2 + p^2 + p^2\cos^2\theta + 2p^2\cos\theta + p^2\sin^2\theta =$$

$$= 6p^2 + 2p^2\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(P_A + P_C)_\mu (P_B + P_D)^\mu = 2p^2(3+\cos\theta)} \quad (1)$$

$$q = p_C - p_A = \left(0,\ p(\cos\theta - 1),\ p\sin\theta,\ 0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^2 = -p^2(\cos\theta - 1)^2 - p^2\sin^2\theta = -p^2\cos^2\theta - p^2 + 2p^2\cos\theta - p^2\sin^2\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^2 = -2p^2 + 2p^2\cos\theta \Rightarrow \boxed{q^2 = +2p^2\left(-1+\cos\theta\right)} \quad (2)$$

Χρησιμοποιούμε τη σχέση του πινακοστοιχείου: $-i\mathcal{M} = ie^2 (p_A + p_C)^{\mu} \dfrac{1}{q^2} (p_B + p_D)_{\mu}$

οπότε $$|\mathcal{M}|^2 = e^4 \frac{\left[(p_A+p_C)^{\mu}(p_B+p_D)_{\mu}\right]^2}{q^4} \xrightarrow{(1)\ \kappa\ (2)} |\mathcal{M}|^2 = e^4 \frac{(3+\cos\theta)^2\, \cancel{4p^2}}{(1-\cos\theta)^2\, \cancel{4p^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\mathcal{M}|^2 = e^4 \left(\frac{3+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)^2$$

Η διαφορική ενεργός διατομή θα είναι:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s}\, \cancelto{1}{\frac{p_f}{p_i}}\, |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{64\pi^2 s}\left(\frac{3+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)^2$$

Αλλά $e^4 = 16\pi^2\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 = \dfrac{e^4}{16\pi^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s}\left(\frac{3+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)^2}$$

5. **[10μ]**

Υπολογίστε την ελάχιστη ενέργεια που θα πρέπει να έχει μία δέσμη π^- η οποία προσπίπτοντας σε στόχο πρωτονίων μπορεί να παράξει αντιπρωτόνια. Οι μάζες των πρωτονίων, νετρονίων, πιονίων είναι $m_p = m_{\bar{p}} = 938.3\, MeV/c^2$ $m_n = 939.6\, MeV/c^2$ και $m_{\pi^-} = 139.6\, MeV/c^2$ αντίστοιχα. ***Υπόδειξη:*** Σκεφτείτε τα σωματίδια που μπορεί να παρουσιάζονται στην τελική κατάσταση της διεργασίας αυτής.

Για να παράξουμε τα αντιπρωτόνια θα πρέπει να παράξουμε ζεύγος p-$\bar{p}$, ενώ το αρχικό πιόνιο και πρωτόνιο θα πρέπει να δώσουν ένα νετρόνιο.

Η διάσπαση επομένως θα είναι της μορφής: $\pi^- + p \rightarrow n\, p\, \bar{p}$

Η ελάχιστη ενέργεια της δέσμης π^- επιτυγχάνεται όταν τα τελικά προϊόντα είναι σε ηρεμία στο σύστημα αναφοράς του CM.

Επομένως θα έχουμε:

$$\left(P_{\pi^-} + P_p\right)^2 = \left(P_n + P_p + P_{\bar{p}}\right)^2 \Rightarrow P_{\pi^-}^2 + P_p^2 + 2P_{\pi^-}\cdot P_p = P_n^2 + P_p^2 + P_{\bar{p}}^2 + 2\left(P_n\cdot P_p + P_n P_{\bar{p}} + P_p P_{\bar{p}}\right)$$

$$\Rightarrow m_{\pi^-}^2 + m_p^2 + 2E_\pi E_p - 2\vec{p}_p\cdot\vec{p}_\pi = m_n^2 + m_p^2 + m_{\bar{p}}^2 + 2\left(E_n E_p - \vec{p}_n\cdot\vec{p}_p + E_n E_{\bar{p}} - \vec{p}_n\cdot\vec{p}_{\bar{p}} + E_p E_{\bar{p}} - \vec{p}_p\cdot\vec{p}_{\bar{p}}\right)$$

Αλλά τα πρωτόνια του στόχου είναι ακίνητα οπότε $\vec{p}_p$ αρχικά είναι $\emptyset$.

Στο CM τα προϊόντα διάσπασης είναι επίσης ακίνητα για ελάχιστη ενέργεια δέσμης οπότε θα έχουμε:

$$m_{\pi^-}^2 + \cancel{m_p^2} + 2E_\pi m_p = m_n^2 + \cancel{m_p^2} + m_{\bar{p}}^2 + 2\left(m_p m_n + m_n m_{\bar{p}} + m_p m_{\bar{p}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2E_\pi m_p = m_n^2 + 3m_p^2 + 4m_p m_n - m_{\pi^-}^2 \Rightarrow E_{\pi^-} = \frac{m_n^2 + 3m_p^2 + 4m_p m_n - m_{\pi^-}^2}{2m_p}$$

Αριθμητική αντικατάσταση δίνει: $E_{\pi^-} \cong 2{,}808.4$ MeV

Ωστόσο για να πάρουμε αυτή τη δέσμη των πιονίων θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε πρωτόνια μεγαλύτερης ενέργειας.

6. [**15μ**]

Θεωρήστε τη διάσπαση του ουδέτερου ψευδοβαθμωτού πιονίου $\pi^0 \to \gamma\gamma$ σε δύο φωτόνια με διανύσματα πόλωσης $\vec{\varepsilon}_1$ και $\vec{\varepsilon}_2$ αντίστοιχα.

(**α**) Ποια η parity και στροφορμή της τελικής κατάστασης; Γιατί; [**3μ**]

(**β**) Ποια είναι η ενέργεια και ορμή για κάθε φωτόνιο στο κέντρο μάζας του πιονίου; [**3μ**]

(**γ**) Δείξτε ότι το τετράγωνο του πλάτους μετάβασης για τη διεργασία αυτή στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας του διασπώμενου πιονίου δίνεται από την σχέση $|M|^2 = A_0^2 |\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2|^2 E^2$. Τι αντιπροσωπεύει η ποσότητα E στην προηγούμενη σχέση; [**4μ**]

<u>Υπόδειξη</u>: Είναι χρήσιμο να θεωρήσετε ότι η κυματοσυνάρτηση της τελικής κατάστασης μπορεί να γραφεί ως: $\Psi_{\tau\varepsilon\lambda} = |\gamma_1\gamma_2\rangle = D(\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2) + F(\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{\varepsilon}_2) \cdot \hat{k}$ όπου D και F είναι συναρτήσεις της ενέργειας του φωτονίου.

(**δ**) Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα υπολογίστε το ρυθμό διάσπασης στο σύστημα αναφοράς του CM του διασπώμενου πιονίου. Πότε ο ρυθμός αυτός γίνεται μέγιστος; Ποια θα ήταν η απάντησή σας αν η ολική ενέργεια του πιονίου είναι 900 MeV; [**3μ**]

(**ε**) Μπορεί το πιόνιο να διασπαστεί σε 5 φωτόνια, $\pi^0 \to 5\gamma$; Γιατί ναί ή γιατί όχι [**2μ**].

(a) Η parity του πιονίου είναι αρνητική και επομένως η parity της τελικής κατάστασης θα πρέπει να είναι επίσης αρνητική από τη στιγμή που οι ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις διατηρούν parity.
Για τον ίδιο λόγο, η στροφορμή της τελικής κατάστασης θα πρέπει να είναι μηδέν αφού το πιόνιο είναι μποζόνιο μηδενικού spin, και η στροφορμή διατηρείται.

(β) Έχουμε

$$\left.\begin{aligned} &(p_1+p_2)^\mu = p_\pi^\mu = (m_\pi, \vec{0}) \\ &\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p} \quad \text{ενώ} \quad E_1 + E_2 = m_\pi \\ &\text{Αλλά} \quad E_1 = |\vec{p}| = |\vec{p}| = E_2 = E \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow 2E_\gamma = m_\pi = 135\,MeV \\ &\Rightarrow E_\gamma = \frac{m_\pi}{2} = 67.5\,MeV \end{aligned}$$

(γ) Η κυματοσυνάρτηση της τελικής κατάστασης είναι

$$\psi_{τελ} = |\gamma_1\gamma_2\rangle = A(\vec{\varepsilon}_1\cdot\vec{\varepsilon}_2) + B(\vec{\varepsilon}_1\times\vec{\varepsilon}_2)\cdot\hat{k}$$

Αυτή η κατάσταση θα πρέπει να έχει αρνητική parity. Τα A, B είναι συναρτήσεις της E. Από τη στιγμή που $\mathbb{P}(\vec{\varepsilon}_1\cdot\vec{\varepsilon}_2) = +(\vec{\varepsilon}_1\cdot\vec{\varepsilon}_2)$ και $\mathbb{P}[(\vec{\varepsilon}_1\times\vec{\varepsilon}_2)\cdot\hat{k}] = -((\vec{\varepsilon}_1\times\vec{\varepsilon}_2)\cdot\hat{k})$ θα πρέπει αναγκαστικά να έχουμε $A=0$ ώστε να διατηρείται η parity. Επομένως το τετράγωνο του πλάτους μετάβασης για τη διάσπαση θα πρέπει να είναι:

$$|M|^2 = C_0^2|\psi_{τελ}|^2 = C_0^2|B(\vec{\varepsilon}_1\times\vec{\varepsilon}_2)\cdot\vec{p}|^2 = A_0^2|\vec{\varepsilon}_1\times\vec{\varepsilon}_2|^2E^2$$

όπου C_0 είναι μια σταθερά ενώ η ορμή του κάθε φωτονίου θα πρέπει να είναι ορθογώνια στα διανύσματα της πόλωσης $\vec{\varepsilon}_1$ και $\vec{\varepsilon}_2$.
Η ποσότητα E είναι η ενέργεια των φωτονίων. Ας σημειωθεί ότι $B(E) = A_0$ είναι μια σταθερά αφού η ενέργεια είναι σταθερή και ίση 67.5MeV

(δ) Ο ρυθμός διάσπασης υπολογίζεται από τον χρυσό κανόνα Fermi:

$$\Gamma_0 = \frac{|\vec{p}|c}{S\, 8\pi\hbar(Mc)^2}|M|^2 = \frac{(Ec)A_0^2|\vec{\varepsilon}_1\times\vec{\varepsilon}_2|^2E^2}{2!\,(8\pi\hbar\,(m_\pi c)^2)} = \frac{m_\pi A_0^2|\vec{\varepsilon}_1\times\vec{\varepsilon}_2|^2}{128\pi\hbar c}$$

Αυτό γίνεται μέγιστο όταν τα δύο διανύσματα πόλωσης γίνουν ορθογώνια μεταξύ τους. Αν η ενέργεια του πιονίου γίνει $E_\pi = 900MeV$ τότε

$$E_\pi = \frac{m_\pi c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \Gamma(E_\pi = 900GeV) = \Gamma_0\sqrt{1-\beta^2} = \Gamma_0\frac{135}{900} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Gamma(E_\pi = 900) = (0.15)\,\Gamma_0}$$

που είναι μικρότερος ρυθμό οδηγώντας σε μεγαλύτερο χρόνο ζωής για το κινούμενο πιόνιο.

(ε) Το π^0 δεν μπορεί να διασπαστεί σε 5γ. Ξέρουμε ότι η ομοτιμία φορτίου για τα φωτόνια είναι -1 και ότι η ομοτιμία διατηρείται. Επομένως τα πιόνια μπορούν να διασπαστούν μόνο σε άρτιο αριθμό φωτονίων και σαν αποτέλεσμα η διεργασία σε 5γ είναι απαγορευμένη

7. [**20μ**]

Πρωτόνια τα οποία προέρχονται από μακρινά σημεία του σύμπαντος φθάνουν στη Γη και συγκρούονται με τα άτομα της ανώτερης ατμόσφαιρας και δημιουργούν κυρίως φορτισμένα και ουδέτερα πιόνια και σε μικρότερα ποσοστά καόνια και περισσότερο βαριά σωματίδια. Ωστόσο τα σωματίδια αυτής της κοσμικής καταιγίδας που φθάνουν στην επιφάνεια της θάλασσας αποτελείται κυρίως από υψηλής ενέργειας μιόνια ενώ το τμήμα της καταιγίδας με μικρότερη ενέργεια αντιστοιχεί σε ηλεκτρόνια και φωτόνια.

(**α**) Περιγράψτε τον μηχανισμό παραγωγής των μιονίων, φωτονίων και ηλεκτρονίων στην επιφάνεια της θάλασσας και σχεδιάστε τα σχετικά διαγράμματα Feynman. Εξηγήστε γιατί τα μιόνια είναι περισσότερο ενεργειακά σε σχέση με τα ηλεκτρόνια που έχουν χαμηλή ενέργεια. [**5μ**]

(**β**) Εξηγήστε γιατί στην επιφάνεια της θάλασσας, ο αριθμός των νετρίνο και αντι-νετρίνο μιονίων είναι διπλάσιος από τον αντίστοιχο αριθμό των νετρίνο και αντι-νετρίνο ηλεκτρονίων. [**1μ**]

(**γ**) Υποθέστε ότι το κεντρικό τμήμα της καταιγίδας, στην επιφάνεια της θάλασσας, περιέχει μια πολύ στενή, κατακόρυφη δέσμη μιονίων ενέργειας 1000 GeV η οποία διεισδύει στο υπέδαφος. Υποθέστε επίσης ότι οι απώλειες ενέργειας λόγω ιονισμού στα πετρώματα του υπεδάφους είναι σταθερή και ίση με 2 MeV $g^{-1}cm^{-2}$. Υπολογίστε το βάθος στο οποίο η δέσμη αυτή των μιονίων σταματά. Υποθέστε ότι η πυκνότητα των πετρωμάτων είναι σταθερή και ίση με 3 g cm^{-3}. [**2μ**]

(**δ**) Εξηγήστε βασιζόμενοι στη θεωρία της απώλειας ενέργειας των φορτισμένων σωματιδίων λόγω ιονισμού για το κατά πόσο αναμένεται τα μιόνια να χάνουν ενέργεια ανά μονάδα μήκους να αυξάνεται, να ελαττώνεται ή να παραμένει σταθερή καθώς η ταχύτητα των μιονίων ελαττώνεται και πλησιάζει στο να σταμτήσουν. [**2μ**]

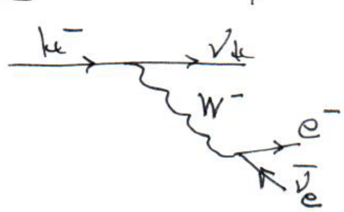
(**ε**) Ποιος ο ορισμός του μήκους ακτινοβολίας; [**3μ**]

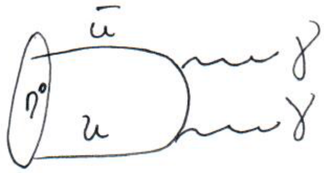
(**στ**) Το τετράγωνο της γωνιακής απόκλισης που υφίσταται ένα σωματίδιο φορτίου z εξαιτίας της πολλαπλής σκέδασης Coulomb στην αλληλεπίδρασή του με υλικό πάχους *dx*, δίνεται από την εξίσωση: $\left(\theta_{RMS}\right)^2 = \left(\frac{zE_s}{p\beta}\right)^2 \times \frac{dx}{X_0}$ όπου $E_s = 21 MeV$ και *p*, *β*, X_0 είναι η ορμή, ταχύτητα του σωματιδίου και μήκος ακτινοβολίας του υλικού αντίστοιχα. Υπολογίστε το ακτινική *RMS* διασπορά που έχουν υποστεί τα μιόνια ενέργειας 1000 GeV της κοσμικής ακτινοβολίας πριν σταματήσουν στα πετρώματα του υπεδάφους. Λάβετε υπόψη ότι η ορμή των σωματιδίων δεν είναι σταθερή αλλά ελαττώνεται γραμμικά όπως περιγράφηκε στο προηγούμενο ερώτημα (γ). Θεωρήστε ότι το μήκος ακτινοβολίας των πετρωμάτων είναι $X_0 = 25 g\ cm^{-2}$. [**4μ**]

(ζ) Τα ηλεκτρόνια χάνουν ενέργεια μέσω ακτινοβολίας φωτονίων με ρυθμό που είναι $\sim(200)^2$ μεγαλύτερος από τον ρυθμό με τον οποίο χάνουν ενέργεια μιόνια της ίδιας ενέργειας. Σχεδιάστε τα διαγράμματα Feynman για την διεργασία Bremsstrahlung και δώστε προσεγγιστικούς τύπους για την ενέργεια που χάνεται από τα μιόνια και ηλεκτρόνια λόγω της ακτινοβολίας αυτής χρησιμοποιώντας διαστατική ανάλυση. Εξηγήστε γιατί τα μιόνια χάνουν μικρότερη ενέργεια με την διεργασία αυτή. [**3μ**]

(a) Τα μιόνια παράγονται από διασπάσεις φορτισμένων πιονίων. Αυτή είναι μια ασθενής διάσπαση που περιγράφεται από το διάγραμμα Feynman

Τα ηλεκτρόνια παράγονται από τις διασπάσεις των μιονίων. Η διεργασία είναι επίσης μια ασθενής διάσπαση που περιγράφεται από τα διαγράμματα. Η διάσπαση του μιονίου σε ηλεκτρόνιο, είναι μια διεργασία που εμπεριέχει τρία σωματίδια και το ηλεκτρόνιο μεταφέρει περίπου το 1/3 της ενέργειας του μιονίου. Επομένως η ενέργειά τους είναι χαμηλότερη από αυτή των μιονίων.





Τα φωτόνια προέρχονται από διασπάσεις των π^0, που διέπεται από τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις

(b) Δύο διαφορετικά είδη νετρίνο παράγονται από τις διεργασίες της διάσπασης των πιονίων και των μιονίων. Από διατήρηση του λεπτονικού αριθμού θα πρέπει να υπάρχουν διπλάσια σε αριθμό νετρίνο μιονίων από αυτά των νετρίνο ηλεκτρονίων.

(γ) Η ενέργεια ιονισμού θα είναι: $\frac{dE}{dx} = 2\,MeV\,g^{-1}cm^2 \times 3\,g\,cm^{-3} = 6\,MeV\,cm^{-1}$

$$L = \frac{E_\mu}{dE/dx} = \frac{1000\cdot 10^3\,MeV}{6\cdot MeV\cdot cm^{-1}} \Rightarrow \underline{L = 1.7\,km}$$

(δ) Αναμέναμε ότι η ενέργεια που χάνεται ανά μονάδα μήκους να αυξηθεί δραματικά καθώς τα μιόνια έχουν ελαττώσει την ταχύτητά τους και θα σταματήσουν.
Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η απώλεια ενέργειας λόγω ιονισμού που περιγράφεται από την εξίσωση Beth-Block αυξάνεται κατά $1/\beta^2$ καθώς η ταχύτητα του σωματιδίου ελαττώνεται. Το σωματίδιο αλληλεπιδρά πολύ περισσότερο χρόνο με τα ηλεκτρόνια του μέσου.

(ε) Το μήκος ακτινοβολίας, X_0, είναι μια χαρακτηριστική σταθερά για κάθε υλικό η οποία περιγράφει την απώλεια ενέργειας των ηλεκτρονίων και φωτονίων στο υλικό. Για τα ηλεκτρόνια, το μήκος ακτινοβολίας είναι το πάχος του υλικού το οποίο όταν διαπερνάται από ηλεκτρόνια ενέργεια E_0 έχει σαν αποτέλεσμα η ενέργειά τους να πέφτει στο E_0/e.
Ουσιαστικά αυτό που έχουμε για την απώλεια ενέργειας στο υλικό είναι $E(x) = E_0\, e^{-x/X_0}$ όπου $E(x)$ η ενέργεια με την οποία εξέρχεται το ηλεκτρόνιο από το υλικό μετά από πάχος x.

(στ) Η ακτινική διασπορά των ηλεκτρονίων λόγω πολλαπλής σκέδασης Coulomb δίνεται από τη σχέση:

$$(\Delta R)^2 = \frac{(21\,MeV)^2}{X_0}\int_0^L \frac{(L-x)^2}{p^2(x)}\,dx =$$

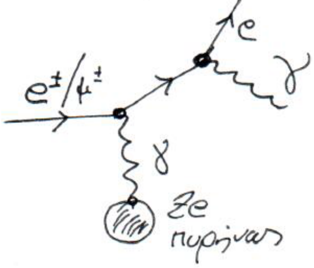
Θεωρούμε γραμμική απώλεια ενέργειας λόγω ιονισμού:
Είδαμε ότι χάνουν $a=6MeV/cm$ οπότε θεωρούμε ότι
η ενέργεια ελαττώνεται: $p(x) = p_0 - ax$ και $p_0 = 1000GeV$ $\Rightarrow$

$$(\Delta R)^2 = \frac{(21\,MeV)^2}{X_0}\int_0^L \frac{(L-x)^2}{(p_0-ax)^2}\,dx \underset{z=p_0-ax}{\Longrightarrow} (\Delta R)^2 = \frac{(21\,MeV)^2}{X_0}\int_{p_0}^{0} \frac{\left(L-\frac{p_0-z}{a}\right)^2}{z^2}\,\frac{-dz}{a}$$

$$\Rightarrow (\Delta R)^2 = \frac{(21\,MeV)^2}{X_0\, a^3}\int_0^{P_0} dz \quad \Bigg\} \Rightarrow (\Delta R)^2 = \frac{(21\,MeV)^2}{X_0\, a^3} P_0 = \frac{21^2 \times 10^6}{8.33 \times 6^3} \Rightarrow$$

Αλλά $X_0 = \frac{25\, g\, cm^{-2}}{3\, g\, cm^3} = 8.33\, cm$ $\quad \Rightarrow \Delta R^2 = 245098\, cm^2 \Rightarrow \boxed{\Delta R = 4.96\, m}$

(γ) Το διάγραμμα Feynman για τη διεργασία Bremsstrahlung είναι



Το πλάτος θα πρέπει να είναι ανάλογο των συζεύξεων των φορτίων στις 3 QED κορυφές:

$$A \propto Ze^3 \Rightarrow A^2 \propto Z^2 e^6 \Rightarrow |A|^2 \propto Z^2 a_{QED}^3$$

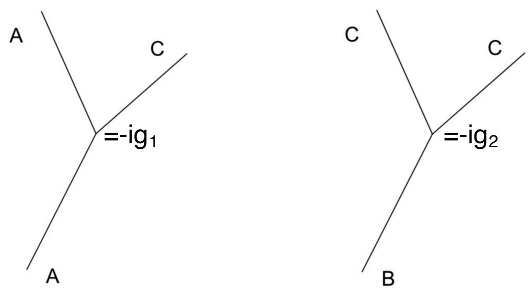
Για να είναι σωστές οι μονάδες $\boxed{\sigma \sim \frac{Z^2 a_{QED}^3}{m^2}}$

Οι κορυφές QED δίνουν τη σωστή εξάρτηση από το Z του πυρήνα και τη σταθερά σύζευξης της λεπτής υφής, a_{QED}. Για να πάρουμε όμως την ενεργό διατομή χρειάζεται να λάβουμε και άλλες μεταβλητές υπόψη στον υπολογισμό. Στην απλή αυτή μορφή οι μόνες μεταβλητές που είναι διαθέσιμες είναι η μάζα του ηλεκτρονίου ή του μιονίου και θα πρέπει να υψωθεί στο τετράγωνο στον παρονομαστή ώστε να πάρουμε τις σωστές μονάδες. Επομένως η διεργασία Bremstrahlung είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της μάζας του σωματιδίου που προσπίπτει και διαπερνά το υλικό.

Η μάζα του μιονίου είναι περίπου 200 φορές μεγαλύτερη από τη μάζα του ηλεκτρονίου και επομένως θα ακτινοβολεί με ρυθμό $(200)^2$ μικρότερο απ' ότι τα ηλεκτρόνια.

8. [**25μ**]

Θεωρήστε μία θεωρία με τρία σωματίδια A, B και C όλα χωρίς spin. Κάθε ένα από τα σωματίδια αυτά είναι επίσης και το αντισωματίδιό του. Το σωματίδιο C έχει μηδενική μάζα, $m_C = 0$, ενώ η μάζα του A είναι μεγαλύτερη από τη μάζα του B, $m_A > m_B$. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή υπάρχουν οι ακόλουθοι κανόνες Feynman:



(**α**) Ποια είναι η πιθανή τιμή της parity για κάθε σωματίδιο αν η θεωρία διατηρεί την parity; [**2μ**]

(**β**) Με ποιες προϋποθέσεις θα μπορούσε η τιμή της C συζυγίας φορτίου του σωματιδίου C να έχει τιμή -1; [**1μ**]

(**γ**) Ποια σωματίδια μπορούν να είναι ασταθή στη θεωρία αυτή και κάτω από ποιές συνθήκες; [**3μ**]

(**δ**) Υπολογίστε τον ρυθμό διάσπασης συναρτήσει των μαζών και των σταθερών σύζευξης για καθένα από τα ασταθή σωματίδια που ικανοποιούν τις συνθήκες που περιγράψατε στο προηγούμενο ερώτημα. Θεωρήστε μόνο χαμηλότερης τάξης ως προς τις σταθερές σύζευξης διεργασίες. [**5μ**]

(**ε**) Σχεδιάστε τα διαγράμματα της επόμενης τάξης ως προς τις σταθερές σύζευξης, τα οποία διορθώνουν την διεργασία στο (**γ**) ερώτημα. Θα πρέπει να δείξετε στα διαγράμματά σας ποια σωματίδια υπάρχουν στις αντίστοιχες γραμμές που σχεδιάζετε. [**4μ**]

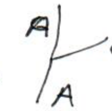
(**στ**) Θεωρήστε ότι το σωματίδιο B σκεδάζεται με το σωματίδιο A. Θεωρώντας μόνο διαγράμματα χαμηλότερης τάξης ως προς τις σταθερές σύζευξης ποια σωματίδια μπορούν να παραχθούν στο τελικό στάδιο της σκέδασης αυτής; [**2μ**]

(**ζ**) Σχεδιάστε και τοποθετήστε τα κατάλληλα σωματίδια στις αντίστοιχες γραμμές για την διεργασία της σκέδασης του προηγούμενου ερωτήματος. [**2μ**]

(**η**) Υπολογίστε το πλάτος μετάβασης σε χαμηλότερης τάξης διεργασίες ως προς τις σταθερές σύζευξης g_1 και g_2 για την διεργασία της σκέδασης που θεωρήσατε στα προηγούμενα δύο ερωτήματα. Απλουστεύστε την απάντησή σας στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου όπου το σωματίδιο A είναι σε ηρεμία. Πως αλλάζει η απάντησή σας στο όριο που η ενέργεια του προσπίπτοντος σωματιδίου B γίνεται μεγάλη; [**6μ**] (α) Με βάση τα διαγράμματα της θεωρίας θα έχουμε:

$\mathbb{P}_C = \mathbb{P}_A^2$ και $\mathbb{P}_B = \mathbb{P}_C^2 \Rightarrow \boxed{\mathbb{P}_B = \mathbb{P}_C = +1}$

Επομένως $\boxed{\mathbb{P}_A = \pm 1}$

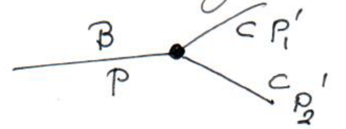
(β) Για την συζυγία φορτίου θεωρούμε και πάλι το διάγραμμα 

Θα έχουμε $C_C = C_A^2 = +1$

Επομένως και οι δύο τιμές της $\mathbb{C}$ μόνο αν η συζυγία φορτίου δεν είναι συμμετρία της θεωρίας.

(γ) Το σωματίδιο A είναι το βαρύτερο σωματίδιο. Ωστόσο δεν μπορεί να διασπαστεί γιατί η κορυφή στο διάγραμμα υποχρεώνει σύζευξη με το C και σε άρτιο αριθμό σωματιδίων A. Η διάσπαση του A εμπεριέχει ένα περιττό αριθμό σωματιδίων A στην αρχή της διεργασίας και ένα άρτιο αριθμό (στην πραγματικότητα $\emptyset$) στο τέλος της διεργασίας. Αυτό σημαίνει ότι το A δεν μπορεί να διασπαστεί.

Το σωματίδιο B ωστόσο μπορεί να διασπαστεί σε δύο ή περισσότερα σωματίδια C, γιατί συζεύγνυται με ένα ζεύγος σωματιδίων C.
Το C δεν μπορεί να διασπαστεί γιατί δεν έχει μάζα.

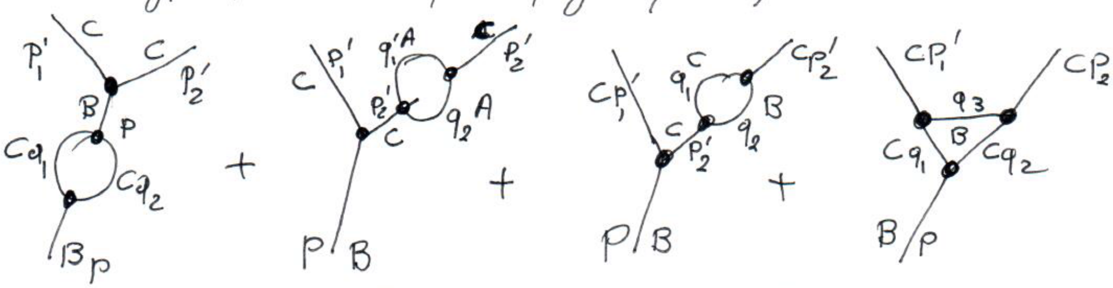
(δ) Το διάγραμμα χαμηλότερης τάξης είναι 

Επομένως θα έχουμε $\mathcal{M} = -i g_2$.

Από τον χρυσό κανόνα Fermi θα έχουμε: $\Gamma = \frac{|\vec{p}|c}{S\, 8\pi\hbar (Mc)^2} |\mathcal{M}|^2 \Rightarrow$

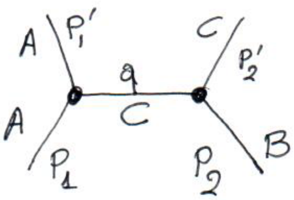
$\Gamma = \frac{g_2^2 E'c}{2!\, 8\pi\hbar (m_B c)^2} \Rightarrow \boxed{\Gamma = \frac{g_2^2}{32\pi\hbar (m_B c)}}$ αφού από διατήρηση ενέργειας $2E' = m_B =$

(ε) Τα διαγράμματα της αμέσως μεγαλύτερης τάξης θα είναι:



καθώς και διαγράμματα διασταύρωσης C με C

(στ) & (ζ)



Αυτό είναι και το μοναδικό διάγραμμα για την τάξη αυτή της σκέδασης.

Επομένως θα έχουμε $B + A \rightarrow A + C$

(η) Το πλάτος μετάβασης είναι: $\mathcal{M} = (ig_1)(ig_2)\dfrac{i}{q^2 - \underbrace{m_C^2}_{0}} = \dfrac{-ig_1 g_2}{q^2}$

Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου έχουμε:

$p_1^\mu = (m_A, \vec{0})$ $\quad p_2^\mu = (E, \vec{p})$ ενώ $p_2'^\mu = (E', \vec{p}')$

και επομένως: $q^2 = (p_2' - p_2)^2 = p_2'^2 + p_2^2 - 2p_2 \cdot p_2' \Rightarrow$

$$\Rightarrow q^2 = 0 + m_B^2 - 2\left(E'E - |\vec{p}||\vec{p}'|\cos\theta\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{q^2 = m_B^2 - 2E'\left(E - |\vec{p}|\cos\theta\right)}$$

Όταν η ενέργεια του σωματιδίου B είναι μεγάλη $E \gg m_B$ και $|\vec{p}| \simeq E$

επομένως η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$q^2 = m_B^2 - 2E'\left(E - |\vec{p}|\cos\theta\right) \simeq -2E'\left(E - E\cos\theta\right) = -2EE'\sin^2\theta/2$$

Τότε $\mathcal{M} = \dfrac{ig_1 g_2}{2EE'\sin^2\theta/2}$

9. [**10μ**]

Πρόσφατα αποτελέσματα από τον επιταχυντή Tevatron και τα πειράματα CDF και D0 έδειξαν ότι στις σκεδάσεις $p\overline{p} \to t\overline{t}$ εμφανίζεται μια μη αναμενόμενη ασυμμετρία. Συγκεκριμένα το top quark κινείται στη διεύθυνση κίνησης του p ενώ το $\overline{t}$ στη διεύθυνση κίνησης του $\overline{p}$. Σημειώστε ότι στο Tevatron η παραγωγή των ζευγών $t\overline{t}$ γίνεται κυρίως μέσω της σκέδασης $q\overline{q} \to t\overline{t}$, όπου το q προέρχεται από το πρωτόνιο και το $\overline{q}$ από το αντιπρωτόνιο. Επομένως η ασυμμετρία μπορεί να συσχετιτεί με τις διευθύνσεις των q και $\overline{q}$. Η ασυμμετρία αυτή δεν μπορεί να εξηγηθεί εύκολα στα πλαίσια του Καθιερωμένου Προτύπου.

Προφανώς είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον να μελετηθεί αυτή η διεργασία στα πειράματα του LHC. Στην περίπτωση αυτή ωστόσο η διεργασία είναι περισσότερο πολύπλοκη για δύο λόγους. Πρωταρχικά η ενεργός διατομή σκέδασης $gg \to t\overline{t}$ είναι πολύ μεγαλύτερη από την $q\overline{q} \to t\overline{t}$ και η ασυμμετρία της $q\overline{q}$ διεργασίας «χάνεται» λόγω της συνεισφοράς των *gg.* Ο δεύτερος λόγος οφείλεται στο γεγονός ότι στη διεργασία $q\overline{q} \to t\overline{t}$ στο LHC (*p-p* επιταχυντής) δεν ξέρουμε ποιο από τα δύο πρωτόνια είναι η πηγή του q και ποιο είναι η πηγή του $\overline{q}$. Σαν αποτέλεσμα δεν μπορεί κάποιος να προσδιορίσει τον ορισμό της ασυμμετρίας.

(α) Εξηγήστε το λόγο που η διεργασία $gg \to t\overline{t}$ γίνεται πολύ πιο σημαντική ως προς τη διεργασία $q\overline{q} \to t\overline{t}$ καθώς πηγαίνουμε από τις ενέργειες του Tevatron στις ενέργειες του LHC. [**7μ**]

(β) Προτείνετε ένα κινηματικό κριτήριο επιλογής γεγονότων $t\overline{t}$ στο LHC έτσι ώστε κάποια πληροφορία της αρχικής διεύθυνσης κίνησης του q και $\overline{q}$ μπορεί να χρησιμοποποιηθεί ώστε να οριστεί η ασυμμετρία. [**3μ**]

(α) Η τιμή του x-Bjorken scaling είναι πολύ μικρότερη για τις ενέργειες του LHC από ότι στο Tevatron.

Για χαμηλές όμως τιμές του x, η συνάρτηση δομής του πρωτονίου δείχνει πολύ μεγάλες τιμές για gluons, επομένως είναι πολύ πιθανότερο να συμμετέχουν σε αλληλεπιδράσεις/σκεδάσεις τα gluons του πρωτονίου απ' ότι τα quarks.

Σαν αποτέλεσμα είναι πιθανότερο να έχουμε $gg \to t\overline{t}$ απ' ότι $q\overline{q} \to t\overline{t}$

Στο Tevatron που η ενέργεια του κέντρου μάζας της δέσμης ήταν ~2TeV για να παραχθεί ζεύγος $t\bar{t}$ η μάζα του οποίου είναι ~350 GeV/c^2 απαιτούσε παρτόνια με μεγάλη ενέργεια και επομένως υψηλές τιμές στο ποσοστό της ενέργειας του πρωτονίου και επομένως X.

(b) Σε ένα πρωτόνιο υπάρχουν quarks και anti-quarks. Στα quarks συμμετέχουν τα quarks σθένους αλλά και της θάλασσας. Τα αντι-quarks έχουν συμμετοχή μόνο από αυτά της θάλασσας. Από τη συνεισφορά των quarks σθένους είναι αναμενόμενο ότι $X(q) > X(\bar{q})$ δηλαδή τα quarks έχουν μεγαλύτερη ενέργεια. Αν επιλέγαμε ζεύγος $t\bar{t}$ τότε η ορμή του θα ήταν $P(t\bar{t}) = P_{πρωτονίο}\left(X(q) - X(\bar{q})\right)$ κατά τη διεύθυνση του p. Δηλαδή όταν η ορμή του ζεύγους $t\bar{t}$ είναι μεγάλη, $|P(t\bar{t})|$ μεγάλη, τότε η διεύθυνση του $t\bar{t}$ συστήματος είναι στην διεύθυνση των quark που σχημάτισαν