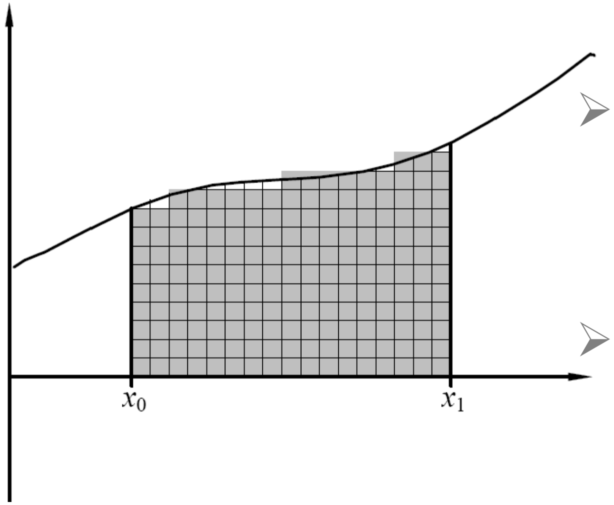
Αριθμητικές μέθοδοι ολοκλήρωσης

Αριθμητική ολοκλήρωση

- Υπάρχουν πολλοί λόγοι που κάποιος θέλει να κάνει αριθμητική ολοκλήρωση:
  - Το ολοκλήρωμα είναι δύσκολο να υπολογισθεί αναλυτικά
  - Ολοκλήρωση πίνακα δεδομένων

- Διάφοροι τρόποι ολοκλήρωσης ανάλογα με το πρόβλημα

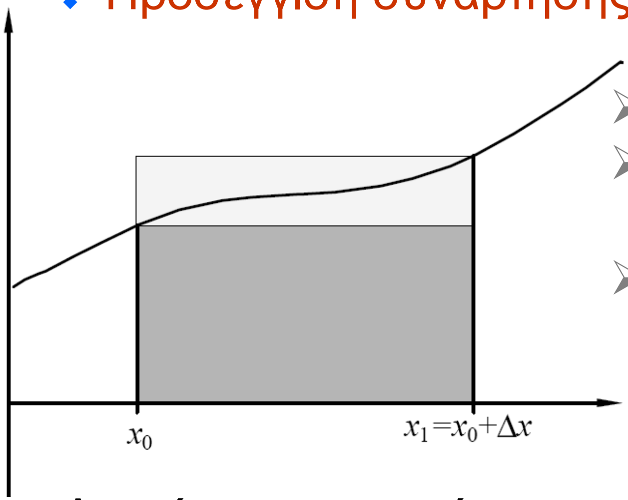
Ολοκλήρωση με το "χέρι"



- Ένας τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα πλέγμα πάνω στο γράφημα της συνάρτησης προς ολοκλήρωση και να μετρήσουμε τα τετράγωνα (μόνο αυτά που περιέχονται κατά 50% από τη συνάρτηση).
- Αν οι υποδιαιρέσεις του πλέγματος (τετράγωνα) είναι πολύ μικρές τότε μπορούμε να προσεγγίσουμε αρκετά καλά το ολοκλήρωμα της συνάρτησης.

Αριθμητική ολοκλήρωση

❖ Προσέγγιση συνάρτησης με σταθερά



- Ο πιο απλός τρόπος ολοκλήρωσης.
- Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f(x) είναι σταθερή στο διάστημα (x_0, x_1)
- Η μέθοδος δεν είναι ακριβής και οδηγεί σε αμφίβολα αποτελέσματα ανάλογα με το αν η σταθερά επιλέγεται στην αρχή ή το τέλος του διαστήματος ολοκλήρωσης.

Αν πάρουμε το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης f(x) ως προς το κατώτερο όριο:

$$\int_{x_0}^{x+\Delta x} f(x)dx = \int_{x_0}^{x+\Delta x} \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots \right] dx$$

σταθερά

$$= f(x_0)\Delta x + \frac{1}{2} f'(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{6} f''(x_0)(x-x_0)^3 + \cdots \quad = f(x_0)\Delta x + O(\Delta x^2)$$

Αν η σταθερά λαμβάνεται από το πάνω όριο ολοκλήρωσης θα είχαμε:

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x)dx = f(x_0 + \Delta x)\Delta x + O(\Delta x^2)$$

- Το σφάλμα και στις 2 περιπτώσεις είναι τάξης $O(\Delta x^2)$ με το συντελεστή να καθορίζεται από τη τιμή της 1ης παραγώγου

Αριθμητική ολοκλήρωση – Κανόνας του τραπεζίου

Θεωρήστε το ανάπτυγμα της σειράς Taylor που ολοκληρώνεται μεταξύ x_0 και $x_0+\Delta x$

$$\int_{x_0}^{x+\Delta x} f(x)dx = \int_{x_0}^{x+\Delta x} \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots \right] dx$$

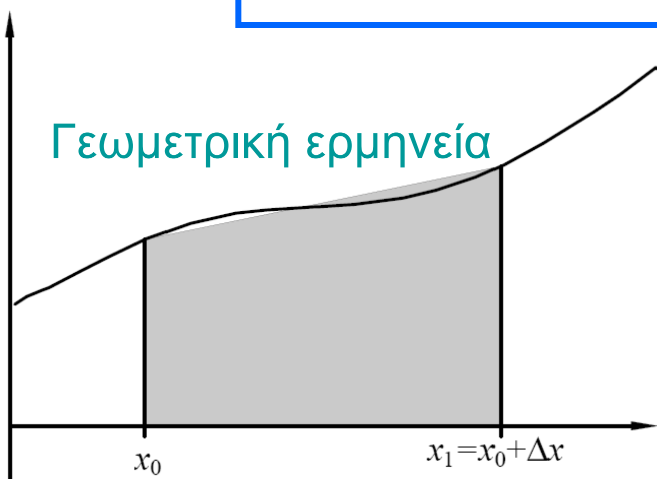
$$= f(x_0)\Delta x + \tfrac{1}{2} f'(x_0)\Delta x^2 + \tfrac{1}{6} f''(x_0)\Delta x^3 + \cdots$$

$$= \left\{ \tfrac{1}{2} f(x_0) + \tfrac{1}{2}\left[f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \tfrac{1}{2} f''(x_0)\Delta x^2 + \cdots \right] - \tfrac{1}{12} f''(x_0)\Delta x^2 + \cdots \right\} \Delta x$$

$$= \boxed{\tfrac{1}{2}\left[f(x_0) + f(x_0+\Delta x) \right] \Delta x} + O(\Delta x^3)$$

Κανόνας του τραπεζίου

Σφάλμα προσέγγισης

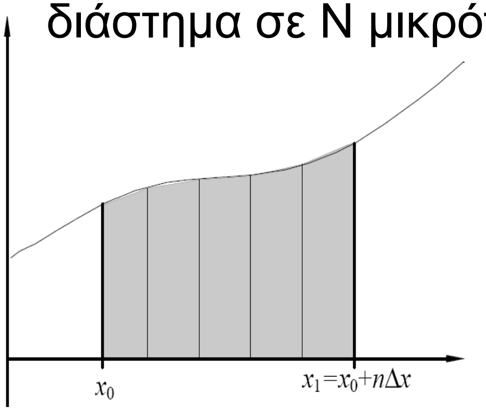


Αφού το σφάλμα ελαττώνεται κατά Δx^3 κάνοντας το διάστημα μισό, το σφάλμα θα μικραίνει κατά 8

Αλλά η περιοχή θα ελαττωθεί στο μισό και θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα 2 φορές και να αθροίσουμε.
Το σφάλμα τελικά ελαττώνεται κατά 4

Αριθμητική ολοκλήρωση – Κανόνας του τραπεζίου

Συνήθως όταν θέλουμε να ολοκληρώσουμε σε ένα διάστημα x_0, x_1 χωρίζουμε το διάστημα σε N μικρότερα διαστήματα $\Delta x=(x_1-x_0)/N$



Εφαρμόζοντας το κανόνα του τραπεζίου

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_0+i\Delta x}^{x_0+(i+1)\Delta x} f(x)dx$$

$$\approx \frac{\Delta x}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(x_0+i\Delta x\right)+f\left(x_0+(i+1)\Delta x\right)\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left[f\left(x_0\right)+2f\left(x_0+\Delta x\right)+2f\left(x_0+2\Delta x\right)+\cdots+2f\left(x_0+(n-1)\Delta x\right)+f\left(x_1\right)\right]}$$

Ενώ το σφάλμα για κάθε βήμα είναι Δx^3 το συνολικό σφάλμα είναι αθροιστικό ως προς όλα τα βήματα (N) και επομένως θα είναι N φορές $O(\Delta x^2) \sim O(N^{-2})$

Στα παραπάνω υποθέσαμε ότι το βήμα, Δx, είναι σταθερό σε όλο το διάστημα. Θα μπορούσε ωστόσο να μεταβάλλεται σε μια περιοχή (να 'ναι πιο μικρό) ώστε να έχουμε μικρότερο σφάλμα. π.χ. περιοχές με μεγάλη καμπύλωση της συνάρτησης Προσοχή το σφάλμα παραμένει και πάλι της τάξης $O(\Delta x^2)$ αλλά οι υπολογισμοί θα είναι πιο ακριβείς

Αυτό το κάνουμε γιατί σε περιοχές μεγάλης καμπύλωσης η 2η παράγωγος της συνάρτησης θα γίνει πολύ μεγάλη οπότε μικρότερο Δx θα κρατήσει τον όρο μικρό

Παράδειγμα για κανόνα του τραπεζίου

```
#!/usr/bin/python3
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def Trapezoidal(f, a, b, n):
   dx = (b-a)/float(n)       #Eyros ypodiastimatos – n arithmos ypodiastimatwn
                             # a kai b katw kai panw orio oloklirwsis
   s  = 0.5*(f(a) + f(b))    #H prwti kai teleutaia pleyra
   for i in range(1,n):
      s = s + f(a + i*dx)    # H timi tis synartisis stα endiamesa diastimata
   return dx*s

def myfunc(t):
   return np.exp(-t**4)

a = -2; b = 2                #panw kai katw orio
n = 1                        #arithmos upodiastimatwn
print(“The integral of the function exp(-x**4) in the range [-2,2]”)
print(”\t Nsteps\t Value”)
for i in range(21):
   result = Trapezoidal(myfunc, a, b, n)
   print(”\t %5d \t %7.5f ” %(n,result))
   n *=2
```

Το πρόγραμμα Integration_trapezoidal.py περιέχει το παραπάνω πρόγραμμα

Αριθμητική ολοκλήρωση – Κανόνας μέσου σημείου

Μια παραλλαγή του κανόνα του τραπεζίου είναι ο κανόνας του μέσου σημείου

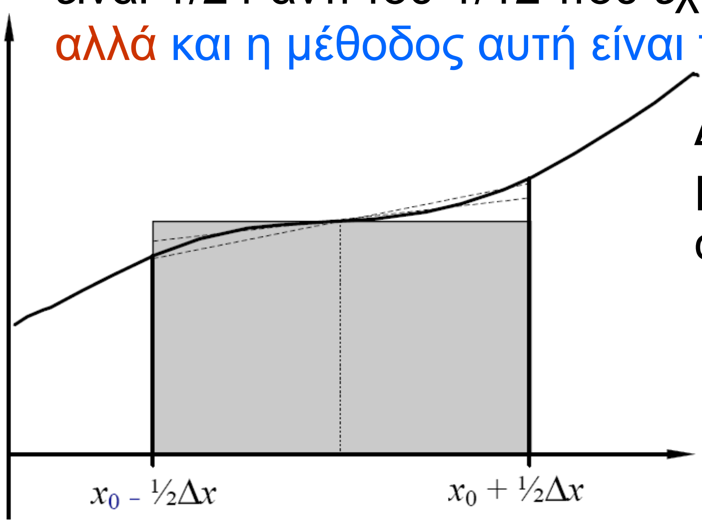
Η ολοκλήρωση του αναπτύγματος Taylor γίνεται από x_0-Δx/2 σε x_0+Δx/2 οπότε:

$$\int_{x_0-\frac{1}{2}\Delta x}^{x_0+\frac{1}{2}\Delta x} f(x)dx = \int_{x_0-\frac{1}{2}\Delta x}^{x_0+\frac{1}{2}\Delta x} \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots \right] dx \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_{x_0-\frac{1}{2}\Delta x}^{x_0+\frac{1}{2}\Delta x} f(x)dx \approx f(x_0)\Delta x + \frac{1}{24} f''(x_0)\Delta x^3 + \cdots}$$

Υπολογίζοντας τη συνάρτηση στο μέσο κάθε διαστήματος το σφάλμα μπορεί να ελαττωθεί κάπως μια και ο παράγοντας μπροστά από τον όρο της 2ης παραγώγου είναι 1/24 αντί του 1/12 που έχουμε στη μέθοδο του τραπεζίου

αλλά και η μέθοδος αυτή είναι τάξης $O(\Delta x^2)$



Διαχωρίζοντας το διάστημα σε υποδιαστήματα μπορούμε να ελαττώσουμε το σφάλμα όπως και στην περίπτωση του κανόνα του τραπεζίου:

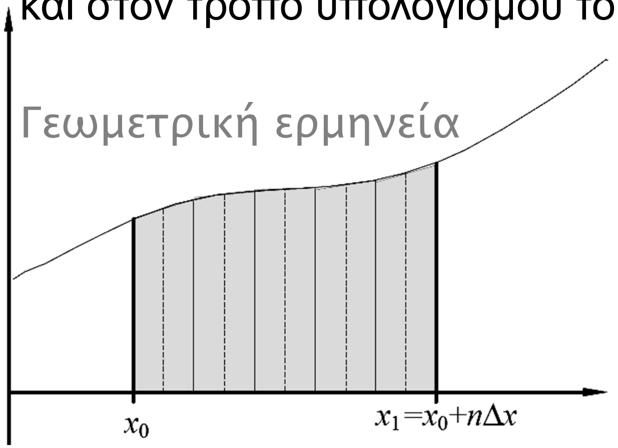
$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_0 + \left(i + \tfrac{1}{2}\right)\Delta x\right)$$

Αριθμητική ολοκλήρωση – Κανόνας μέσου σημείου

Κανόνας μέσου σημείου: $$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \Delta x \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_0 + \left(i + \tfrac{1}{2}\right)\Delta x\right)$$

Κανόνας τραπεζίου: $$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left[f\left(x_0\right) + 2f\left(x_0 + \Delta x\right) + 2f\left(x_0 + 2\Delta x\right) + \cdots + 2f\left(x_0 + (n-1)\Delta x\right) + f\left(x_1\right)\right]$$

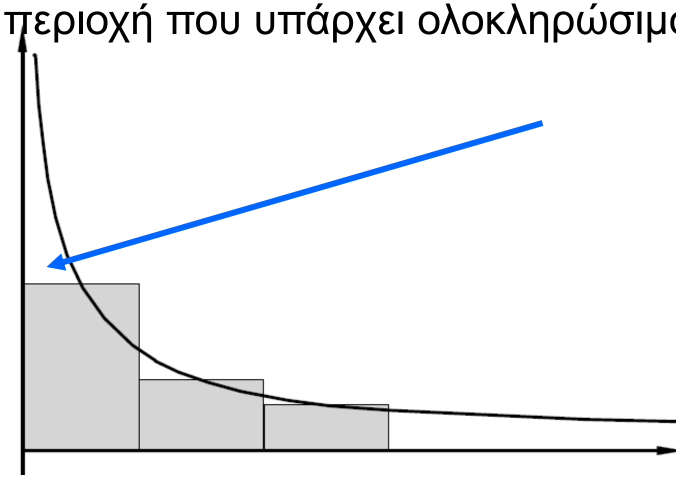
Η διαφορά τους είναι μόνο στη "φάση" των σημείων και της περιοχής υπολογισμού, και στον τρόπο υπολογισμού του πρώτου και τελευταίου διαστήματος



Ωστόσο υπάρχουν δύο πλεονεκτήματα της μεθόδου του ενδιάμεσου σημείου σε σχέση με την μέθοδο του τραπεζίου:

A) Χρειάζεται ένα υπολογισμό της f(x) λιγότερο

B) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί πιο αποτελεσματικά για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος κοντά σε μια περιοχή που υπάρχει ολοκληρώσιμο ιδιάζον σημείο



Παράδειγμα για κανόνα του ενδιάμεσου σημείου

```
#! /usr/bin/python3
import numpy as np

def midpoint(f, a, b, n):
    dx = float(b-a)/n
    result = 0
    for i in range(n):
        result += f((a + dx/2.0) + i*dx)
    result *= dx
    return result

def myfunc(t):
     return 3*(t**2)*np.exp(t**3)

n = int(input('n: ‘))
uplim = 1
lolim = 0
numerical = midpoint(myfunc, lolim, uplim, n)
Vup = np.exp(uplim**3)
Vlo = np.exp(lolim**3)
exact = Vup - Vlo
error = exact - numerical
print('n=%d: %.8f, error: %10g' % (n,
numerical, error))
```

Το πρόγραμμα Integration_midpoint.py περιέχει το παραπάνω πρόγραμμα

Δημιουργία ακολουθίας τυχαίων αριθμών σύμφωνα με συγκεκριμένη κατανομή

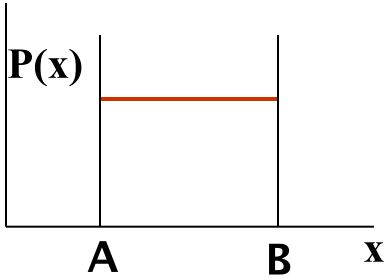
Τυχαίες κατανομές

Ομοιόμορφη (επίπεδη) Κατανομή

Αν το R είναι ένα τυχαίος πραγματικός αριθμός μεταξύ [0,1) και αν τα A και B είναι πραγματικοί αριθμοί, και M, N είναι ακέραιοι αριθμοί τότε η τιμή:

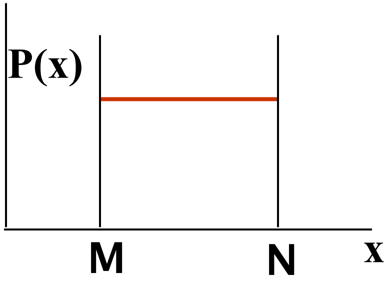
$$A + (B - A) * R$$

θα είναι ένα τυχαίος πραγματικός αριθμός στο διάστημα [A,B)



Η τιμή της $M + INT(N * R)$

θα είναι ένα τυχαίος ακέραιος αριθμός στο διάστημα [M,N)



Για παράδειγμα, για να δημιουργήσουμε την ομοιόμορφη τυχαία κατανομή που αντιστοιχεί στο ρίξιμο των ζαριών (τιμές μεταξύ [1,6]) θα γράφαμε:

$$zari = 1 + INT(6 * R)$$

Τυχαίες κατανομές – Probability Distribution Function (PDF)

- Πως μπορούμε να βρούμε μια γενική Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας (PDF)

Στις προσομοιώσεις μιας τυχαίας διεργασίας συχνά ζητάμε μια μη ομοιόμορφη (ισοπίθανη) κατανομή τυχαίων αριθμών.

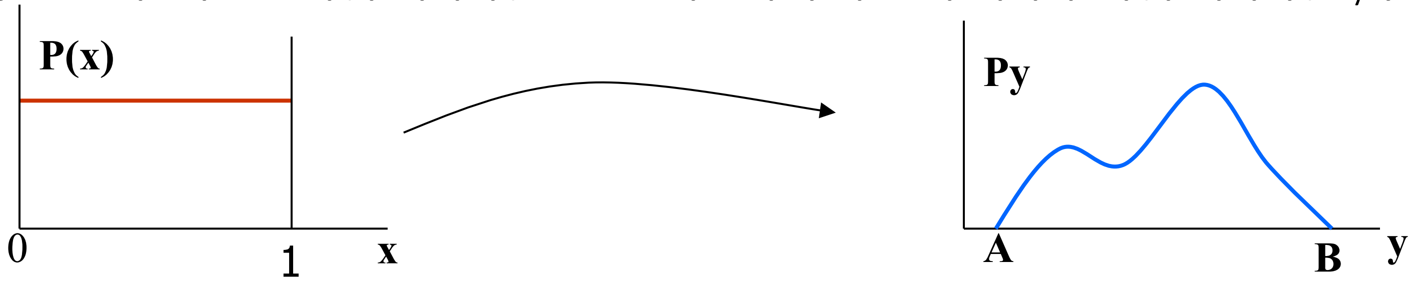
Για παράδειγμα η ραδιενεργός διάσπαση χαρακτηρίζεται από κατανομή Poisson:

$$P(n;\nu) = \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}$$

(πιθανότητα να βρούμε ακριβώς n γεγονότα όταν τα γεγονότα συμβαίνουν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο και την ανεξάρτητη μεταβλητή x και με μέσο ρυθμό ν στο διάστημα x)

- Χρησιμοποιούμε δυο μεθόδους (συνήθως)
  - Μέθοδος του μετασχηματισμού (Transformation Method)
  - Μέθοδος της απόρριψης (Rejection Method)

Σκοπός και των δυο μεθόδων είναι να μετατρέψουν μια ομοιόμορφη κατανομή τυχαίων αριθμών της μορφής $P_x(x)$ σε μια μή ομοιόμορφη της μορφής $P_y(y)$



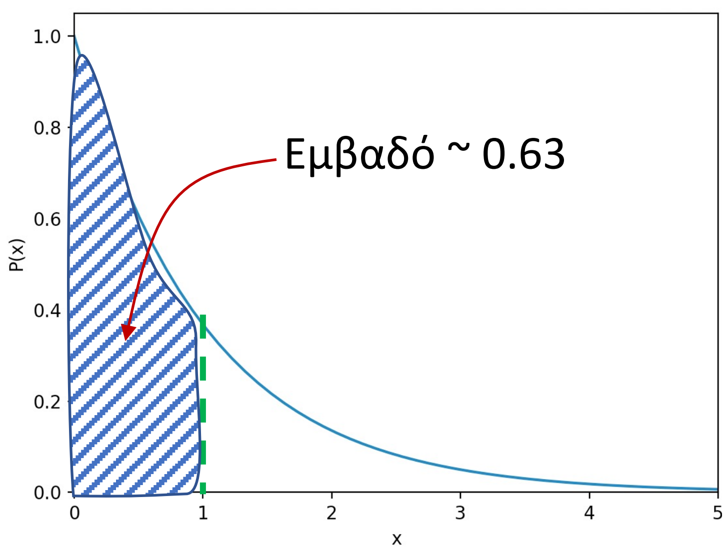
Τυχαίες κατανομές – Η μέθοδος του μετασχηματισμού

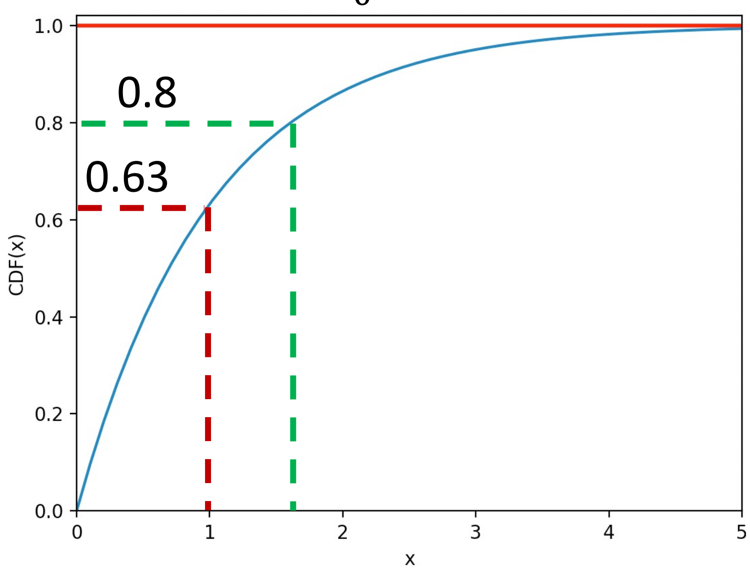
Θεωρήστε μια συλλογή από μεταβλητές $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ που κατανέμονται σύμφωνα με μια συνάρτηση $P_x(x)$. Η πιθανότητα να βρούμε μια τιμή στο διάστημα x και x+dx είναι $P_x(x)dx$. Η συνάρτηση $P_x(x)$ είναι η συνάρτηση της πυκνότητας πιθανότητας PDF

Έστω για παράδειγμα έχουμε την εκθετική **P**robability**D**ensity**F**unction.

Ορίζουμε την συνάρτηση της αθροιστικής κατανομής (CDF cumulative distribution function) που μας λέει την πιθανότητα να πάρουμε μια τιμή του x μικρότερη από x_0

Δηλαδή η τιμή της CDF για κάποιο x_0 είναι: $CDF(x_0) = \int_0^{x_0} P_x(x)dx$





Στη μέθοδο του μετασχηματισμού, αυτό που θέλουμε να κάνουμε είναι να πάρουμε την αντίστροφη CDF, δηλαδή για μια τιμή της CDF(x) να βρούμε την τιμή που αντιστοιχεί στον x-άξονα

Τυχαίες κατανομές – Η μέθοδος του μετασχηματισμού

Επομένως θα πρέπει να βρούμε πρώτα την CDF της PDF που μας δίνεται: $CDF(x) = \int_0^x P(x')dx'$

και κατόπιν να αντιστρέψουμε την συνάρτηση αυτή για να πάρουμε την $CDF^{-1}(x)$

Στην περίπτωση της εκθετικής PDF είχαμε: $P(x) = e^{-x}$

Η CDF αυτής θα είναι: $CDF(x) = \int_0^x e^{-x'}dx' = -[e^{-x}]_0^x = 1 - e^{-x}$

Στο στάδιο αυτό, θέλουμε να πάμε από μια τιμή *y* της CDF: $y = CDF(x) = 1 - e^{-x}$

και να λύσουμε την εξίσωση αυτή ως προς *x*: $e^{-x} = 1 - y \Longrightarrow -x = \ln(1-y) \Longrightarrow x = -\ln(1-y)$

Επομένως έχουμε την αντίστροφη CDF: $CDF^{-1}(x) = -\ln(1-y)$

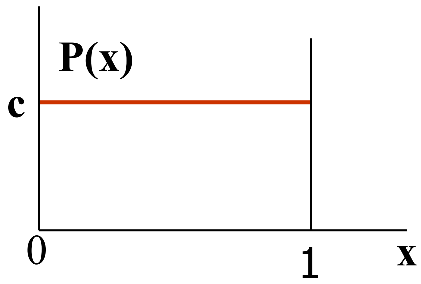
Αν θέλουμε να πάρουμε τις τιμές *x* που αντιστοιχούν σε κάποιο *y*, χρειάζεται να πάρουμε τυχαίες τιμές του *y* στο διάστημα [0,1) χρησιμοποιώντας την ομοιόμορφη κατανομή

Θυμηθείτε ότι η CDF παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1.

Τυχαίες κατανομές – Η μέθοδος του μετασχηματισμού

Αν y είναι κάποια συνάρτηση του x, τότε μπορούμε να γράψουμε: $\left|P_x(x)dx\right| = \left|P_y(y)dy\right|$

Όπου $P_y(y)$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας που περιγράφει την συλλογή $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$



$P_y(y) = c$ Ομοιόμορφη κατανομή

και επομένως: $P_x(x) = c\left|\frac{dy}{dx}\right|$

Για να βρούμε μια ακολουθία που χαρακτηρίζεται από την $P_x(x)$ θα πρέπει να βρούμε τη συνάρτηση μετασχηματισμού x=f(y) που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| = P_x(x)$$

Η σταθερά C μπορεί να αγνοηθεί αφού απλά πολλαπλασιάζει την συνάρτηση

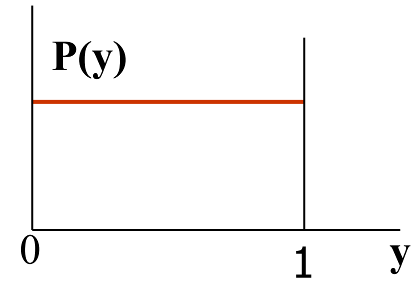
Επομένως:

- Θέλουμε την $P_x(x)$
- Βρίσκουμε την x=f(y) (συνάρτηση μετασχηματισμού) ώστε $|dy/dx| = P_x(x)$

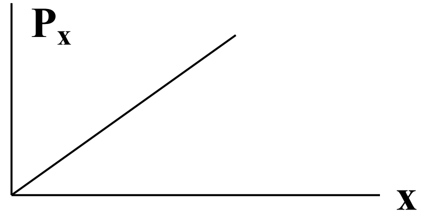
Τυχαίες κατανομές - Η μέθοδος του μετασχηματισμού

Παράδειγμα: Θεωρήστε ότι θέλετε την κατανομή $P_x(x) = x$

Η συνάρτηση μετασχηματισμού είναι τότε:



$$\frac{dy}{dx} = P_x(x) = x \Rightarrow y = \int x dx$$



Λύνοντας ως προς x έχουμε: $y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2y}$

Όπου τα y είναι τυχαίοι αριθμοί στο διάστημα [0,1)

Τυχαίες κατανομές - Η μέθοδος του μετασχηματισμού

Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων μετασχηματισμού είναι τα ακόλουθα:

Επιθυμητή κατανομή $P_x(x)$	Συνάρτηση μετασχηματισμού f(y)
k	y/k
x	$\sqrt{2y}$
x^n	$[(n+1)y]^{1/(n+1)}$
$1/x$	e^y
e^x	$-\ln(y)$
$\cos(x)$	$\arcsin(y)$
$\sqrt{x}$	$\left[\frac{3}{2}y\right]^{2/3}$

Τυχαίες κατανομές – Η μέθοδος της απόρριψης

Η μέθοδος του μετασχηματισμού είναι χρήσιμη όταν η συνάρτηση f(x) μπορεί να υπολογιστεί

Ωστόσο υπάρχουν περιπτώσεις που η επιθυμητή συνάρτηση μπορεί να μην είναι γνωστή σε αναλυτική μορφή.

Για παράδειγμα, θεωρήστε ότι θέλουμε μια Gaussian κατανομή: $P_y(y) = e^{-y^2}$

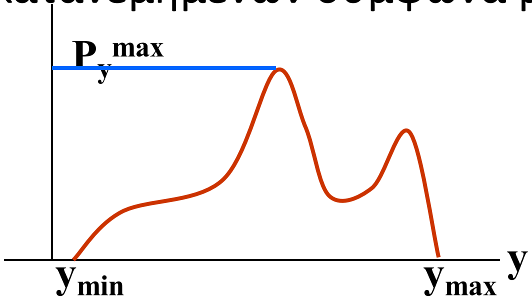
Για την περίπτωση αυτή δεν βρίσκουμε την συνάρτηση y=f(x) γιατί:

$$\frac{dx}{dy} = P_y(y) = e^{-y^2} \Rightarrow x = \int e^{-y^2} dy$$ Το ολοκλήρωμα αυτό δεν υπολογίζεται αναλυτικά

Για τέτοιου είδους προβλήματα χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της απόρριψης η οποία μπορεί να δημιουργήσει την επιθυμητή κατανομή για οποιαδήποτε συνάρτηση.

Με τη μέθοδο αυτή, η ακολουθία των τυχαίων αριθμών $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ δημιουργείται με μια ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[y_{min}, y_{max}]$ που ενδιαφερόμαστε.

Υποθέστε ότι ο σκοπός μας είναι να δημιουργήσουμε μια ακολουθία αριθμών κατανεμημένων σύμφωνα με τη συνάρτηση $P_y(y)$



Προχωρούμε με την ακολουθία των αριθμών $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$

και δεχόμαστε τιμές που είναι πολλαπλάσια της $P_y(y)$

Τυχαίες κατανομές – Η μέθοδος της απόρριψης

- Ο αλγόριθμος που ακολουθούμε είναι ο ακόλουθος:
  - Θέτουμε m = 0 (μετρητής)
  - Προσδιορίζουμε την μέγιστη τιμή της επιθυμητής κατανομής $P_y(y)$ και το διάστημα $[y_{min}, y_{max}]$ της επιθυμητής κατανομής
  - Δημιουργούμε τυχαίο ζευγάρι zran, yran από μια ομοιόμορφη κατανομή
  - Για κάθε τιμή του y θέτουμε: $y = y_{\min} + \left(y_{\max} - y_{\min}\right) * yran$
    - Δημιουργούμε ένα τυχαίο αριθμό ptest ομοιόμορφα κατανεμημένο στο $[0, P_y^{max}]$

      Py_test = Py_max * zran
    - Ελέγχουμε αν η τιμή της κατανομής P(y) > Py_test

      Αν ναι: Αυξάνουμε τον μετρητή m = m+1

      Κρατάμε τη τιμή y εφόσον δίνει επιτρεπτή τιμή: θέτουμε z(m) =y

      Αν όχι: Απορρίπτουμε την τιμή y
  - Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία N φορές:

Οι αριθμοί z(m) που απομένουν στην ακολουθία κατανέμονται επομένως σύμφωνα με την συνάρτηση $P_y(y)$

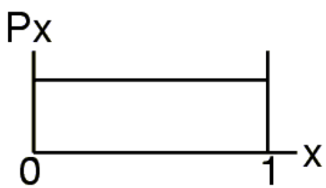
Τυχαίες κατανομές – Η μέθοδος της απόρριψης

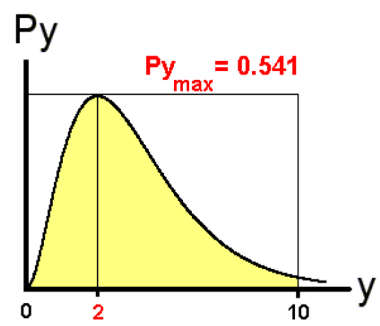
Παράδειγμα: Έστω ότι θέλουμε την κατανομή $P_y(y) = e^{-y}y^2$ στο διάστημα y=[0,10]

Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης P_y βρίσκεται ζητώντας $\frac{dP_y}{dy} = 0$

Η συνάρτηση έχει μέγιστο στο σημείο y=2 το οποίο αντιστοιχεί σε P_{max}=0.541

Επομένως οι τιμές του Py_test θα δημιουργηθούν στο διάστημα [0,0.541]





Το πρόγραμμα GenRandom_Rejection.py περιέχει το παραπάνω πρόγραμμα

Κατανομές

Αναμενόμενη τιμή

Ορισμός

Η πυκνότητα πιθανότητας, PD, εκφράζει τα πάντα τα οποία χρειάζεται να γνωρίζουμε σχετικά με την σχετιζόμενη τυχαία μεταβλητή

Αλλα η PD μπορεί να χαρακτηριστεί απλά από 2 ιδιότητές της: τη μέση τιμή και τη διασπορά της

Οι δυο αυτές χαρακτηριστικές της PD είναι ειδικές περιπτώσεις της γενικότερης έννοιας της αναμενόμενης τιμής

Έστω g(x) μια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής x.
Η αναμενόμενη τιμή της g(x) δίνεται

$$\langle g(x)\rangle = \begin{cases} \sum_i p(x_i) g(x_i) & \text{αν η X είναι διακριτή} \\ \int f(x) g(x) dx & \text{αν η X είναι συνεχής} \end{cases}$$

Η αναμενόμενη τιμή της g(x) συμπίπτει με τη μέσο όρο μεγάλου αριθμού παρατηρήσεων της g(x)

Κανόνες

Μερικοί απλοί αλλά σημαντικοί κανόνες

$$\langle g_1(x) + g_2(x)\rangle = \langle g_1(x)\rangle + \langle g_2(x)\rangle$$

Αν α είναι σταθερά ανεξάρτητη του Χ τότε: $\langle a\rangle = a$ και $\langle a g(x)\rangle = a\langle g(x)\rangle$

Αναμενόμενη τιμή

Μέση τιμή

Η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι εξ'ορισμού η αναμενόμενη τιμή της

$$\langle x \rangle = \begin{cases} \sum_i p(x_i) x_i & \text{αν η X είναι διακριτή} \\ \int dx f(x) x & \text{αν η X είναι συνεχής} \end{cases}$$

Η μέση τιμή συμπίπτει με το μέσο όρο για μεγάλες τιμές παρατηρήσεων της x

Παραδείγματα

1. Μέση τιμή μια διακριτής μεταβλητής

   Έστω X το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού. Η X πέρνει τιμές x_i=1,2,3...,6 με πιθανότητα $p(x_i)$=1/6. Η μέση τιμή (ή αναμενόμενη τιμή) της x είναι:

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^{6} p(x_i) x_i = p \sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2}$$

2. Μέση τιμή μιας συνεχούς μεταβλητής

   Έστω X μια συνεχής μεταβλητή που επιλέγεται τυχαία στο διάστημα [1,6]
   Η X έχει τότε PDF:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & 1 \leq \mathrm{x} \leq 6 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

Επομένως η μέση τιμή θα είναι: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x \, dx = \frac{1}{5} \frac{x^2}{2} \Big|_1^6 = \frac{7}{2}$

Διασπορά και τυπική απόκλιση

Η διασπορά V[x] μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι η αναμενόμενη τιμή του τετραγώνου της απόκλισής της από τη μέση τιμή:

$$V[x] = \begin{cases} \sum_i p(x_i)(\Delta x_i)^2 & \text{όπου } \Delta x_i = x_i - \langle x \rangle \quad \text{και x διακριτή} \\ \int f(x)\,dx(\Delta x)^2 & \text{όπου } \Delta x = x - \langle x \rangle \quad \text{και x συνεχής} \end{cases}$$

Μπορούμε να γράψουμε ακόμα: $V[x] = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$

Η τυπική απόκλιση μια τυχαίας μεταβλητής X είναι η τετραγωνική ρίζα της διασποράς της $\sigma(x) = \sqrt{V[x]}$

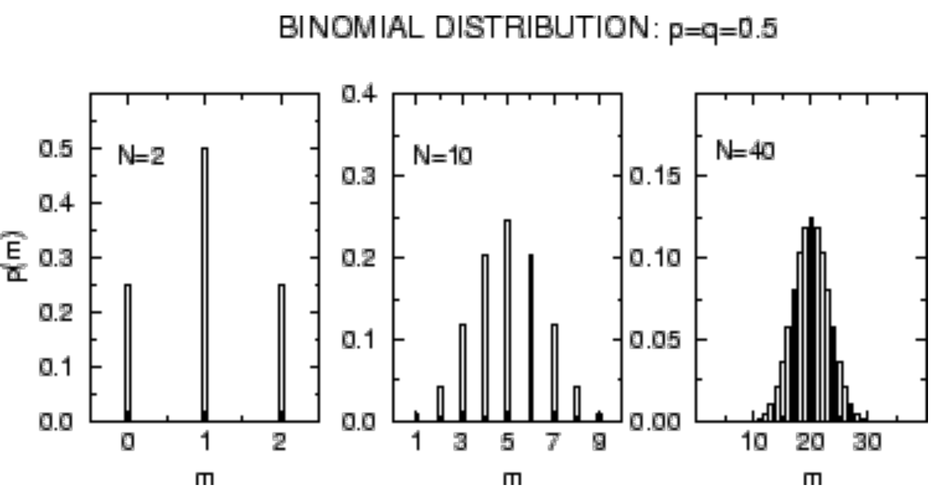
Η Διονυμική κατανομή

Έστω ότι ρίχνουμε ένα κέρμα N φορές. Ποια η πιθανότητα να πάρουμε m φορές τη μια όψη του?

Η πιθανότητα αυτή δίνεται από τη διονυμική κατανομή η οποία λέει ότι:

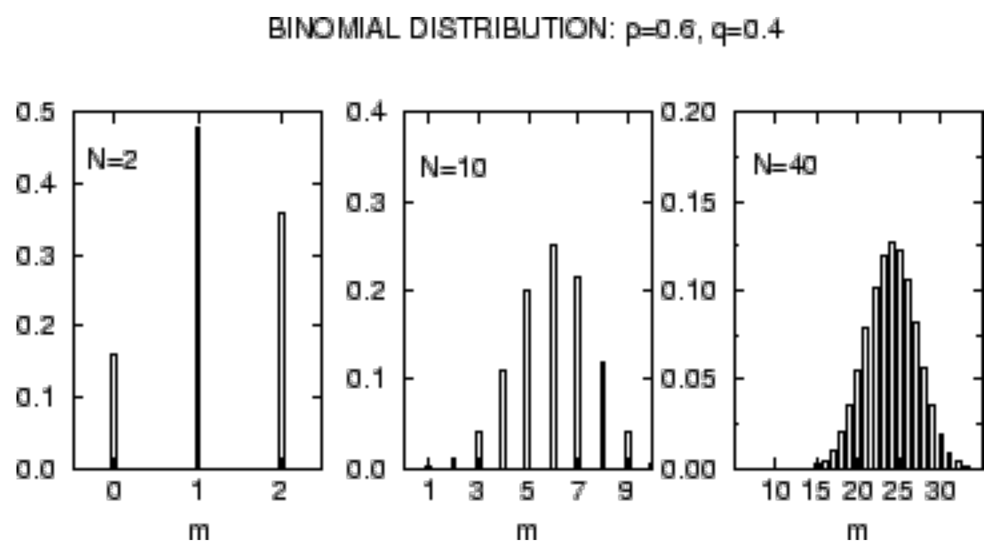
Αν μια προσπάθεια η οποία δίνει επιτυχία με πιθανότητα p, τεθεί σε δοκιμή N φορές, η πιθανότητα p(m) να βρούμε ακριβώς m επιτυχίες δίνεται από τη σχέση:

$$p(m) = {}^{N}C_{m} p^{m} (1-p)^{(N-m)} \qquad \mu\varepsilon \quad {}^{N}C_{m} = \frac{N!}{m!(N-m)!}$$



Κανονικό νόμισμα

Κάλπικο νόμισμα



Ιδιότητες της διονυμικής κατανομής

μέση τιμή: $\langle m \rangle \equiv \sum_{m=0}^{N} mp(m) = Np$

διασπορά: $V[m] \equiv \langle \Delta m^2 \rangle \equiv \sum_{m=0}^{N} \left(m - \langle m \rangle\right)^2 p(m) = Npq$

τυπική απόκλιση: $\sigma \equiv \sqrt{V[m]} = \sqrt{Npq}$

Η διονυμική κατανομή προσδιορίζεται από δυο παραμέτρους N και p.

Η μέση τιμή αυξάνει γραμμικά με τον αριθμό των προσπαθειών ενώ η τυπική απόκλιση μόνο συναρτήσει της τετραγωνικής ρίζας N

Παράδειγμα – τυχαίος περίπατος

Ένας μεθυσμένος κινείται από στύλο σε στύλο καθώς προσπαθεί να γυρίσει στο σπίτι του. Σε κάθε κολόνα σταματά για λίγο και συνεχίζει. Κάθε φορά που σταματά μπορεί να κινηθεί εξίσου προς ή μακριά από το σπίτι του. Αν οι κολόνες απέχουν απόσταση α ποια είναι η μέση τιμή και η απόκλιση της μετατόπισής του d από το σημείο εκκίνησής του μετά από Ν βήματα;

Έστω n_R ο αριθμός των βημάτων προς το σπίτι του και n_L ο αριθμός των βημάτων στη λάθος κατεύθυνση: $n_L=N-n_R$

Η μετατόπισή του d από το σημείο εκκίνησης είναι: $d=\left(n_R-n_L\right)a=\left(2n_R-N\right)a$

Θεωρούμε σα προσπάθεια ένα βήμα, ενώ σαν επιτυχία ένα βήμα το σπίτι του

Επομένως n_R είναι κατανεμημένη διονυμικά με πιθανότητα p=1/2

Η μέση τιμή και διασπορά της n_R είναι: $\langle n_R\rangle = Np=\dfrac{N}{2}$ και $V\left[n_R\right]=\left\langle\left[\Delta n_R\right]^2\right\rangle=Npq=\dfrac{N}{4}$

Η μέση τιμή της μετατόπισης είναι: $\langle d\rangle=\left\langle a\left[2n_R-N\right]\right\rangle=a\left(2\langle n_R\rangle-N\right)=a\left(N-N\right)=0$

Η διασπορά της μετατόπισης είναι: $\left\langle\Delta d^2\right\rangle=\left\langle\left(d-\langle d\rangle\right)^2\right\rangle=\left\langle\left[a\left(2n_R-N-\langle 2n_R-N\rangle\right)\right]^2\right\rangle$

$$\left\langle\Delta d^2\right\rangle=\left\langle\left[a\left(2n_R-N-2\langle n_R\rangle+N\right)\right]^2\right\rangle=\left\langle\left[2a\left(n_R-\langle n_R\rangle\right)\right]^2\right\rangle=\left\langle\left[2a\Delta n_R\right]^2\right\rangle=4a^2\left\langle\Delta n_R^2\right\rangle$$

Αλλά $V\left[n_R\right]=\left\langle\left[\Delta n_R\right]^2\right\rangle$ οπότε $\left\langle\Delta d^2\right\rangle=4a^2V\left[n_R\right]\Rightarrow V\left[d\right]=4a^2V\left[n_R\right]\Rightarrow V\left[d\right]=4a^2\dfrac{N}{4}=a^2N$

Κατανομή Poisson

Η κατανομή Poisson είναι ειδική περίπτωση της διονυμικής κατανομής όταν:

Η πιθανότητα, p, μιας προσπάθειας να δώσει επιτυχία είναι μικρή (πηγαίνει στο 0)

Ο αριθμός των προσπαθειών είναι μεγάλος (πηγαίνει στο άπειρο)

Ο μέσος αριθμός επιτυχιών, Np, είναι συγκεκριμένος αριθμός (δεν πηγαίνει στο 0 ή στο άπειρο)

Για την διονυμική κατανομή μπορούμε να γράψουμε:

$p \to 0,\ \ N \to \infty$ ενώ Np δεν είναι 0 ή άπειρο

$$p(m) = e^{-\langle m \rangle} \frac{\langle m \rangle^m}{m!}$$ Poisson κατανομή

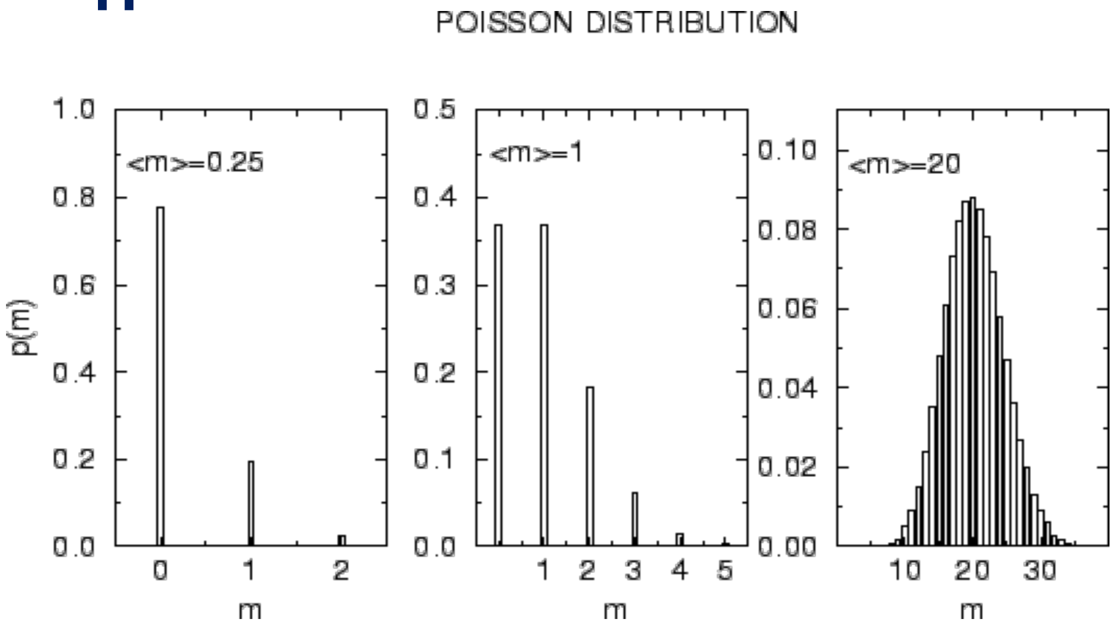
Ιδιότητες της κατανομής Poisson:

Στο Poisson όριο της διονυμικής κατανομής, η τυπική απόκλιση δίνεται από

$$\sigma[m] = \sqrt{Npq} = \sqrt{Np(1-p)} \simeq \sqrt{Np} = \sqrt{\langle m \rangle}$$

Επομένως η Poisson κατανομή προσδιορίζεται από την <m>

Παραδείγματα



Κατά τη διάρκεια μιας βροχής μετεωριτών, παρατηρούμε ότι μετεωρίτες πέφτουν με ρυθμό 12.2/h. Υπολογίστε τη πιθανότητα να παρατηρήσετε λιγότερο από 2 σε 0.5h

$$p(m) = e^{-\langle m \rangle} \frac{\langle m \rangle^m}{m!}$$

όπου <m> = 6.1/(0.5h)

Η πιθανότητα να ανιχνεύσουμε < 2 είναι:

$$p(m<2) = p(m=0) + p(m=1) = e^{-\langle m \rangle}\left(1+\langle m \rangle\right) = 0.016$$