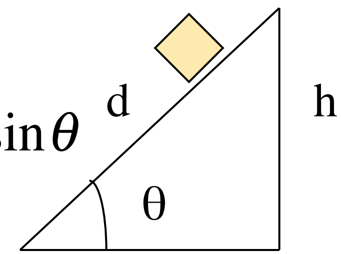
Έργο – Κινητική Ενέργεια

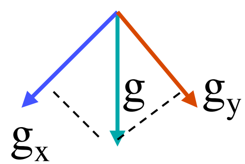
Είδη δυνάμεων

- Δύο είδη δυνάμεων:
  - Συντηρητικές ή διατηρητικές δυνάμεις και **<u>μή</u>** συντηρητικές
    - ✓ Μια δύναμη είναι συντηρητική όταν το έργο που παράγει ασκούμενη σε κάποιο υλικό σημείο εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση του σωματιδίου

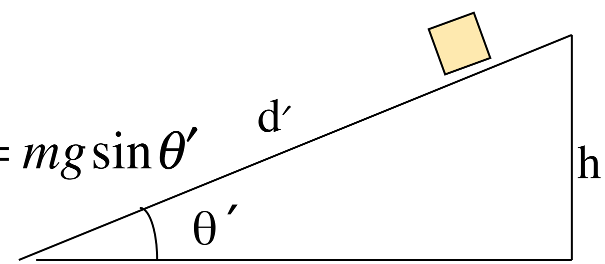
Θυμηθείτε το παράδειγμα με το κεκλιμένο επίπεδο:

$F = mg\sin\theta$





$F = mg\sin\theta'$



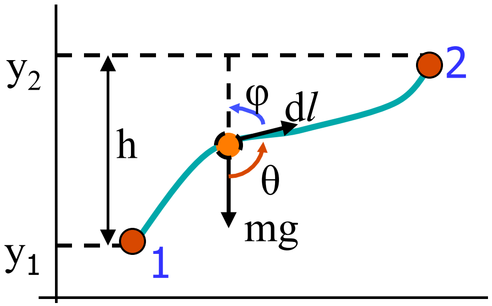
$$W_a = \vec{F}\cdot\vec{d} = mg\sin\theta\, d = mgh$$

$$W_b = \vec{F}\cdot\vec{d}' = mg\sin\theta'\, d' = mgh$$

- ✓ Μεταφέροντας ένα κιβώτιο πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο παράγεται το ίδιο έργο.
- ✓ Το έργο εξαρτάται μόνο από την διαφορά ύψους $h=y_2-y_1$ δηλαδή την αρχική και τελική θέση (y) του κιβωτίου.

Γενικά για τη βαρυτική δύναμη....

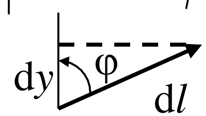
Έστω μια τυχαία διαδρομή:



Το έργο που παράγεται από την δύναμη της βαρύτητα πηγαίνοντας από το 1 στο 2 είναι:

$$W_g = \int_1^2 \vec{F}_g \cdot d\vec{l} = \int_1^2 mg\cos\theta\, dl$$

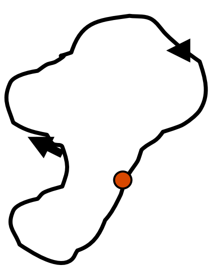
$$|d\vec{y}| = dl\,\cos\phi \Rightarrow |d\vec{y}| = -dl\cos\theta$$



$$W_g = -\int_{y_1}^{y_2} mgdy$$

$$W_g = -mg(y_2 - y_1)$$

Για μια κλειστή διαδρομή: Το έργο που παράγεται από μια συντηρητική δύναμη κατά μήκος αυτής της κλειστής διαδρομής είναι μηδέν



Βαρύτητα: συντηρητική δύναμη $W_g = \oint \vec{F}_g \cdot d\vec{s} = 0$

Τριβή: μη συντηρητική

πάντα αντιτίθεται στην κίνηση ενός σώματος και άρα παράγει πάντα έργο σε μια κλειστή διαδρομή. Μετατρέπει έργο σε θερμότητα

Αποθηκευμένη Ενέργεια

- Αν σηκώσω ένα τούβλο (αργά ώστε η ταχύτητα να 'ναι σταθερή)

$$W_{tot} = W_g + W_m = 0 \Rightarrow W_m = \vec{F}_m \cdot \vec{d} = mgh = mg(y_2 - y_1) = -W_g$$

- Αν αφήσω το τούβλο να πέσει, τότε η βαρύτητα εκτελεί έργο:

$$W_g = +mg(y_2 - y_1) = mgh$$

$$\mathrm{v} = \sqrt{2\mathrm{gh}} \Rightarrow E_{\kappa\iota\nu}^{f} = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}m2gh = mgh$$

Αφού $E_{\kappa\iota\nu}^{i} = 0$ και $W_{net} = E_{\kappa\iota\nu}^{f} - E_{\kappa\iota\nu}^{i} \Rightarrow W_{net} = E_{\kappa\iota\nu}^{f} = mgh$ το τούβλο παράγει έργο

Λέμε ότι μια ποσότητα ενέργειας mgh αποθηκεύεται καθώς σηκώνουμε το τούβλο σε ένα ύψος h.

Αυτή η αποθηκευμένη ενέργεια ονομάζεται:

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ $U = mgh$

- Η δυναμική ενέργεια σχετίζεται μόνο με συντηρητικές δυνάμεις.
- Η δυναμική ενέργεια σχετίζεται πάντοτε με συστήματα ≥2 σωμάτων που αλληλεπιδρούν

Δυναμική ενέργεια

- Η δυναμική ενέργεια σχετίζεται με την κατάσταση ενός συστήματος του οποίου τα επιμέρους σώματα αλληλεπιδρούν με δυνάμεις. (ελαστική δυναμική ενέργεια, ηλεκτρική δυναμική ενέργεια, βαρυτική).

➢ Στη βαρύτητα, η δυναμική ενέργεια ορίζεται ως προς τη θέση των μαζών

Αν πούμε $\Delta U = U_f - U_i = W_m = mg(y_2 - y_1) = -W_g$ τότε $U = mgy$

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια ορίζεται $U = mgy + C$ όπου C=σταθερά

➢ Η σταθερά C μπορεί να 'χει οποιαδήποτε τιμή μια και μετρούμε πάντα διαφορές δυναμικής ενέργειας και όχι απόλυτες τιμές

✓ Σε προβλήματα διαλέγουμε μια κατάσταση αναφοράς (π.χ. κάποιο ύψος όπου η δυναμική ενέργεια είναι γνωστή ή μηδέν)

✓ Εξαρτάται πάντα από το ύψος του σώματος από την επιφάνεια της γης

Επομένως $\Delta U = -W_g = -\int_1^2 \vec{F}_g \cdot d\vec{l}$

Προσοχή στο '-'

- Γενικά, για συντηρητικές δυνάμεις: $\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = -W_F$

Δυναμική ενέργεια

Σκεφτείτε τι συμβαίνει σε μια διάσταση:

$$U_f = -\int_i^f F(x)dx + U_i \qquad \textbf{(A)}$$

Ας υποθέσουμε $U_i = 0$ και $U_f = U_f(\mathrm{x})$

Αν αντιστρέψουμε την (A) (δηλαδή παραγωγίσουμε) τότε θα πάρουμε

$$\frac{dU_f}{dx} = -\frac{d}{dx}\int_i^f F(x)dx = -F(x) \Rightarrow \begin{cases} \boxed{F(x) = -\dfrac{dU_f}{dx}} \\ \boxed{U_f(x) = -\displaystyle\int F(x)dx} \end{cases}$$

Αν ξέρουμε τη U βρίσκουμε την F

Αν ξέρουμε την F βρίσκουμε την U

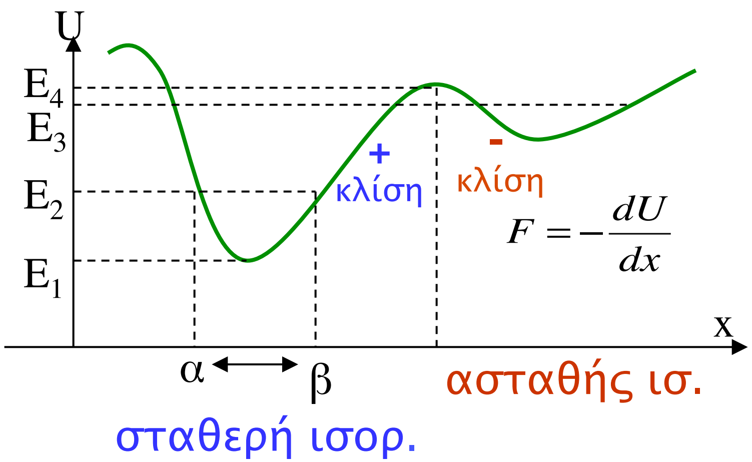
Σε 3 διαστάσεις (χρησιμοποιούμε μερικές παραγώγους αφού $\mathrm{U=U(x,y,z)}$)

$$F_x = -\frac{\partial U_f}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U_f}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U_f}{\partial z} \Rightarrow \quad \boxed{-F(x,y,z) = \hat{i}\frac{\partial U_f}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial U_f}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial U_f}{\partial z}}$$

Αν μπορούμε να μετρήσουμε $U(r)$ τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την F

Διάγραμμα ενέργειας

Η γενική κίνηση ενός σώματος μπορεί να βρεθεί αν κάνουμε το διάγραμμα της δυναμικής ενέργειας:



$$U + K = E \Rightarrow U(x) + \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 = E \quad \Rightarrow \mathrm{v} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mathrm{m}}\left(E - U(x)\right)}$$

Πρέπει $E \geq U(x)$ ώστε η ταχύτητα v να έχει πραγματική τιμή

Αν $E = E_2$ τότε το σώμα ταλαντώνεται μεταξύ των σημείων α και β

Επομένως η γενική λύση για τα $x(t)$

$$\mathrm{v} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mathrm{m}}\left(E - U(x)\right)} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mathrm{m}}\left(E - U(x)\right)} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}} = \pm\int_0^t dt$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε το χρόνο t συναρτήσει της x
Κατόπιν αν αναστρέψουμε θα πάρουμε την x συναρτήσει του t.

Γενικά αυτό δεν είναι πάντα πραγματοποιήσιμο αναλυτικά και χρειάζεται να λύσουμε το πρόβλημα αριθμητικά (υπολογιστές) .

Παράδειγμα

Μια μπάλα πέφτει από ύψος h, με υ_0=0. Δείξτε ότι $y(t) = h-1/2gt^2$

ΛΥΣΗ

Μετρούμε την U σχετικά με το έδαφος.

$$E = mgh \quad \text{και} \quad U(y) = mgy \qquad E^{i}_{\kappa\iota\nu} = 0$$

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι $E = mgh$

Στο ύψος y(t) η δυναμική του ενέργεια είναι $U(y) = mgy$

Αλλά

$$E_{o\lambda} = E_{\kappa\iota\nu} + U \Rightarrow E_{\kappa\iota\nu} = E_{o\lambda} - U \Rightarrow \frac{1}{2}m\text{v}^2 = mgh - mgy \Rightarrow$$

$$\text{v} = \pm\sqrt{2g(h\text{-}y)} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \pm\sqrt{2g(h\text{-}y)} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{2g(h\text{-}y)}} = \pm dt \Rightarrow$$

$$\int_h^y \frac{dy}{\sqrt{2g(h-y)}} = -\int_0^t dt \Rightarrow -\int_h^y \frac{dy}{\sqrt{2g}\sqrt{h-y}} = t \Rightarrow$$

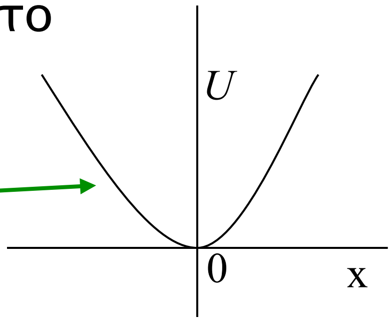
$$\Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2g}} 2\sqrt{h-y}\Big|_h^y \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{(h-y)} \Rightarrow y = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Πίσω στα ελατήρια

Η δύναμη ελατηρίου F=-kx, είναι μια συντηρητική δύναμη.

Ξεκινάμε με ελατήριο στο φυσικό του μήκος και μετά το συμπιέζουμε κατά μια ποσότητα x.

$$U_f - U_i = U(x) - U(0) = -\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{l} = -\int_0^x (-kx)\, dx = \frac{1}{2}kx^2$$



Αν διαλέξουμε την ποσότητα U(0) = 0 τότε:

$$\boxed{U_f(x) = \frac{1}{2}kx^2}$$

Ελαστική δυναμική ενέργεια

$E_{κιν}$ και U θεωρούνται και τα δύο μορφές μηχανικής ενέργειας

$$\left.\begin{aligned} W_{\text{net}} &= \Delta(E_{κιν.}) \\ \Delta U &= -\int_1^2 \vec{F}_{\text{net}}\cdot d\vec{l} = -W_{\text{net}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta E_{κιν.} + \Delta U = 0$$

Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας

Ορίζουμε σαν μηχανική ενέργεια ενός συστήματος:

$$E_{\mu\eta\chi} = E_{\kappa\iota\nu.} + U$$

Για συντηρητικά συστήματα μόνο:

$$E^{f}_{\kappa\iota\nu.} - E^{i}_{\kappa\iota\nu.} + U_f - U_i = 0$$

$$\Downarrow$$

$\boxed{\text{Πανίσχυρος νόμος διατήρησης της μηχανικής ενέργειας}}$

- Η μηχανική ενέργεια ενός συστήματος διατηρείται όταν δεν υπάρχει μεταφορά ενέργειας με το περιβάλλον (απομονωμένο σύστημα).
- Αν υπάρχει αντίσταση ενός μέσου ή δύναμη τριβής η μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται

Παράδειγμα

Να βρεθεί το έργο που παράγεται σε 2 διαφορετικά αδρανειακά συστήματα για σώμα που επιταχύνεται με επιτάχυνση "α" από τη θέση ηρεμίας ως προς (α) Ακίνητο σύστημα (β) Κάποιο που κινείται με ταχύτητα v.

(α) Ακίνητο σύστημα

$$F = ma \qquad d = \frac{1}{2}at^2 \qquad (\mathrm{v_i} = 0,\ \mathrm{v_f} = at)$$

$$\Rightarrow W = Fd = (ma)\left(\frac{1}{2}at^2\right) = \frac{1}{2}m(at)^2 = \frac{1}{2}m(\mathrm{v_f^2} - \cancelto{0}{\mathrm{v_i^2}}) = \frac{1}{2}m\mathrm{v_f^2} = \Delta E_{\kappa\iota\nu}$$

(β) Κινούμενο σύστημα

$$d = \mathrm{v}t + \frac{1}{2}at^2, \quad F = ma \qquad (\mathrm{v_i} = \mathrm{v},\ \mathrm{v_f} = \mathrm{v} + at)$$

$$\Rightarrow W = Fd = (ma)\left(\mathrm{v}t + \frac{1}{2}at^2\right) = ma\mathrm{v}t + \frac{1}{2}m(at)^2 \qquad (1)$$

Αλλά $\Delta E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}m(\mathrm{v_f^2} - \mathrm{v_i^2}) = \frac{1}{2}m(\mathrm{v} + at)^2 - \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}m(\mathrm{v}^2 + (at)^2 + 2\mathrm{v}at) - \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2$

$$\Rightarrow \Delta E_{\kappa\iota\nu} = m\mathrm{v}at + \frac{1}{2}m(at)^2 \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε $W = \Delta E_{\kappa\iota\nu}$

- W και $\Delta E_{\kappa\iota\nu}$ δεν έχουν την ίδια μορφή όπως στο ακίνητο σύστημα αλλά είναι και πάλι ίσα μεταξύ τους.

Ισχύς

- Ισχύς ορίζεται σαν ο ρυθμός παραγωγής έργου: $\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{x}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \boxed{\Rightarrow P = \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{v}}}$$

Μονάδα μέτρησης ισχύος
Watt = Joule/sec