ΦΥΣ 115

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ ΙΙ
Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός

Φθινόπωρο 2024

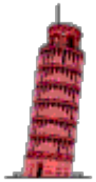
Διδάσκοντες/Υπεύθυνοι: Φώτης Πτωχός & Jehad Mousa

e-mail: Ptochos.Fotios@ucy.ac.cy και Mousa.Jehad@ucy.ac.cy

Τηλ: 22.89.2835 και 22.89.2842

Γραφείο: B235, B233

web-page: http://ptohos.github.io/phy115/phy115.html



Γενικές Πληροφορίες

- **Ώρες/Χώρος εργαστηρίου**: B202 ΘΕΕ02
  - Δευτέρα 14:00 – 18:00 group A
    Πέμπτη 14:00 – 18:00 group B

Θα χωριστείτε σε ομάδες 2 ατόμων

Οι ομάδες θα ανακοινωθούν την επόμενη εβδομάδα.

Κάθε ομάδα θα εκτελεί μια άσκηση/βδομάδα.

Όλες οι ομάδες θα εκτελέσουν τις ίδιες εργαστηριακές ασκήσεις

Τι περιμένουμε από εσάς

- Η παρουσία και συμμετοχή σας στα εργαστήρια είναι **υποχρεωτική**

  Δεν επιτρέπονται απουσίες πέρα από σοβαρούς λόγους και μετά από συννενόησή σας μαζί μας.

  Οποιαδήποτε εργαστηριακή άσκηση δεν είστε σε θέση να συμμετάσχετε κάποια μέρα θα πρέπει να την αναπληρώσετε με την πρώτη ευκαιρία και μετά από συννενόηση μαζί μας

  - Πέρα της μιας αδικαιολόγητης απουσίας ισοδυναμεί με αυτόματη αποτυχία

- Η προετοιμασία σας για κάθε άσκηση (θεωρία - διατάξεις όργανα που θα χρησιμοποιηθούν) πριν έρθετε στο εργαστήριο θεωρείται απαραίτητη

- Ο καθένας από σας θα πρέπει να έχει το προσωπικό του log-book στο οποίο θα πρέπει να σημειώνετε σχολαστικά οτιδήποτε μετρήσεις κάνετε καθώς και σχόλια για τις συνθήκες της εργαστηριακής άσκησης που εκτελείτε - Περισσότερα αργότερα

Βαθμολογία

- Η βαθμολογία θα βασιστεί στα ακόλουθα:
  - **40% Αξιολόγηση/συμμετοχή στις εργαστηριακές ασκήσεις**
    - 15% 10-λεπτα quizzes σχετικά με την προετοιμασία σας πριν κάθε εργαστήριο
    - 10% Αξιολόγηση γραπτής έκθεσης που περιέχει την επεξεργασία των μετρήσεων και συμπεράσματά σας
    - 15% Συνοπτική παρουσίαση (10-λεπτά) της ανάλυσης των αποτελεσμάτων σας από τη προηγούμενο εργαστήριο και πριν το επόμενο

  Θα δούμε ποια θα είναι η σωστή μορφή και περιεχόμενο της γραπτής έκθεσης και παρουσίασης

  Οι εκθέσεις και παρουσιάσεις θα είναι συλλογική προσπάθεια της κάθε ομάδας. Κάποιο άτομο της ομάδας θα επιλέγεται τυχαία να παρουσιάσει τα αποτελέσματα ενώ τα υπόλοιπα μέλη θα πρέπει να είναι σε θέση να βοηθήσουν ή να απαντήσουν σε ερωτήσεις.
  Η βαθμολογία της παρουσίασης και έκθεσης θα είναι συλλογική

  - **60% 4-ωρη τελική εξέταση**

    Πρακτική εξέταση με την εκτέλεση μέρους μιας εργαστηριακής άσκησης όχι απαραίτητα με τον τρόπο που θα τις εκτελέσετε και ανάλυση αποτελεσμάτων

Θεωρία - Πείραμα – Μετρήσεις - Σφάλματα

- **Θεωρία:** Η απάντηση που ζητάτε είναι αποτέλεσμα μαθηματικών πράξεων και εφαρμογή τύπων. Το αποτέλεσμα είναι συγκεκριμένο

- **Πείραμα:** Στηρίζεται σε μετρήσεις. Κάθε μέτρηση όσο προσεκτικά και αν έχει πραγματοποιηθεί περιέχει μια αβεβαιότητα

- Όλη η δομή και εφαρμογή των επιστημών στηρίζονται σε πείραμα και επομένως μετρήσεις. Η ικανότητα να υπολογίσουμε την αβεβαιότητα των μετρήσεων και να περιορίσουμε το μέγεθός τους είναι ιδιαίτερα σημαντικό αν θέλουμε να εξάγουμε σημαντικά συμπεράσματα

- Η μεθοδολογία, τα όργανα που χρησιμοποιούνται αλλά και μεις οι ίδιοι δεν είμαστε αλάνθαστοι με αποτέλεσμα οι μετρήσεις που παίρνουμε συνοδεύονται πάντοτε με κάποια αβεβαιότητα που ονομάζεται πειραματικό σφάλμα της μέτρησης

- Το σφάλμα αντιπροσωπεύει την διαφορά της μετρούμενης ή υπολογιζόμενης τιμής ενός μεγέθους από την αληθινή τιμή του μεγέθους αυτού

Σφάλματα μετρήσεων

- Είναι σημαντικό σε όλες τις επιστήμες:
  - να σχεδιάσουμε και να πραγματοποιήσουμε κάποιο πείραμα

Αλλά είναι περισσότερο σημαντικό

  - να κατανοήσουμε τους περιορισμούς που επιβάλει ο σχεδιασμός του και οι συσκευές που χρησιμοποιούνται για την μέτρηση διαφόρων φυσικών μεγεθών

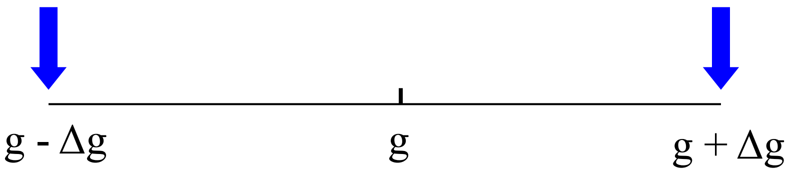
- Είναι απαραίτητο να καταλάβουμε τα πειραματικά σφάλματα και πως μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε αν θέλουμε να συγκρίνουμε θεωρητικά και πειραματικά αποτελέσματα και να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα

Σφάλματα

Από πειραματική άποψη η προηγούμενη πρόταση θα ήταν σωστή ως:

“Μια μπάλα 5gr που αφήνεται ελεύθερη να πέσει υπό την επίδραση της δύναμης της βαρύτητας από ύψος $1.0 \pm 0.1m$ από την επιφάνεια του εδάφους μετρήθηκε ότι κινείται με σταθερή επιτάχυνση $g = 9.81 \pm 0.03 m/s^2$ “

Ο αριθμός που εμφανίζεται στα δεξιά του συμβόλου ± προσδιορίζει το σφάλμα της μέτρησης. Την αβεβαιότητα (ή βεβαιότητα) της μέτρησης. Σημαίνει ότι η πραγματική τιμή του μεγέθους που μετρούμε βρίσκεται μεταξύ των τιμών g-Δg και g+Δg



Προσοχή: Το σωστό πείραμα είναι αυτό που έχει εκτελεσθεί σωστά και επομένως

Το σφάλμα σε μια πειραματικά μετρούμενη ποσότητα δεν μπορεί ποτέ να βρεθεί σε κάποιο βιβλίο ή σε κάποια ιστοσελίδα

Αβεβαιότητα – (uncertainty)

Μιλήσαμε για σφάλματα (errors), δηλώνοντας ότι δείχνουν ασυμφωνία μεταξύ της μετρούμενης τιμής ενός φυσικού μεγέθους και της πραγματικής τιμής του.

Συχνά δεν μπορούμε να κάνουμε αναφορά σε πραγματική τιμή ενός μεγέθους και έτσι ο ορισμός του σφάλματος δεν ισχύει.

Επαναλαμβάνοντας μια μέτρηση μπορεί να ανακαλυφθεί κάποιο σφάλμα αλλά αρχικά δεν υπάρχει κάποιος οδηγός για σύγκριση με την πραγματική τιμή.

Αβεβαιότητα μιας μετρούμενης τιμής είναι το διάστημα γύρω από την μετρούμενη τιμή τέτοιο ώστε η επανάλειψη της μέτρησης θα δώσει ένα αποτέλεσμα το οποίο περικλείεται στο διάστημα αυτό

Το διάστημα αυτό δηλώνεται από τον ερευνητή σύμφωνα με προκαθορισμένες αρχές υπολογισμού της αβεβαιότητας. Η αβεβαιότητα είναι ο σημαντικός όρος που επιτρέπει τους επιστήμονες να κάνουν πλήρως βέβαια συμπεράσματα

Αβεβαιότητα

Έστω ότι κάποιος συνάδελφός σας μέτρησε ότι το πάχος ενός βιβλίου είναι 8.53 ± 0.08cm. Δηλώνοντας την αβεβαιότητα (0.08) πιστοποιεί ότι οποιαδήποτε μέτρηση του πάχους του βιβλίου θα δώσει μια τιμή στο διάστημα 8.45 - 8.61 cm

Αν σας έλεγε ότι το βιβλίο έχει πάχος 8.53 cm τότε η πληροφορία αυτή είναι ελλειπής αφού δεν έχετε γνώση των περιορισμών του οργάνου μέτρησης. Δεν μπορείτε να συζητήσετε για σφάλμα στην περίπτωση αυτή και δεν θα μιλήσετε με σιγουριά για το αποτέλεσμα.

Χρειάζεται πάντοτε να ορίσετε το διάστημα εμπιστοσύνης (confidence interval) και τότε μπορείτε να εκφράσετε οτιδήποτε με εμπιστοσύνη που κάποιος επιστήμονας θα πρέπει να συμφωνήσει μαζί σας. Ο απώτερος σκοπός είναι να κάνετε το διάστημα αυτό όσο το δυνατό μικρότερο και αυτό επιτυγχάνεται με εμπειρία.

Αβεβαιότητα επομένως μιας αναφερόμενης μέτρησης είναι το διάστημα εμπιστοσύνης γύρω από την μετρούμενη τιμή τέτοιο ώστε η μετρούμενη τιμή δεν μπορεί να βρίσκεται έξω από αυτό

Η αβεβαιότητα μπορεί να δοθεί και σα πιθανότητα. Στη περίπτωση αυτή η μετρούμενη τιμή έχει τη δηλώμενη πιθανότητα να βρίσκεται στο διάστημα εμπιστοσύνης.

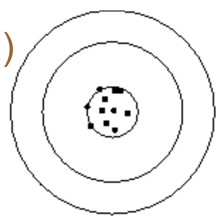
Ακρίβεια και πιστότητα μέτρησης

- Πιστότητα (accuracy) ενός πειράματος μέτρησης μιας ποσότητας είναι το μέτρο του πόσο κοντά στην αληθινή τιμή της φυσικής ποσότητας βρίσκεται το αποτέλεσμα

- Ακρίβεια (precision) ενός πειράματος μέτρησης μιας ποσότητας υποδηλώνει κατά πόσο διαδοχικές μετρήσεις συμπίπτουν ή επαναλαμβάνονται και αναφέρεται στη διακριτική ικανότητα (resolution) της μέτρησης.

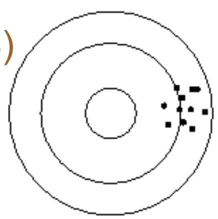
  Η διακριτική ικανότητα δείχνει πόσο στενά είναι τα όρια στα οποία προσδιορίζεται το μετρούμενο μέγεθος

(α)



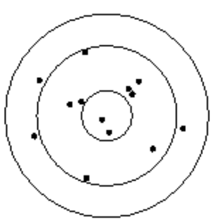
Πιστό και ακριβές

(β)



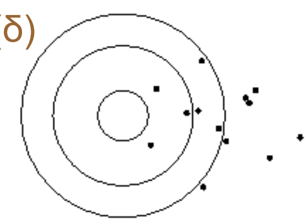
Ακριβές αλλά όχι πιστό

(γ)



Πιστό αλλά όχι ακριβές

(δ)



Ούτε ακριβές και ούτε πιστό

Είδη σφαλμάτων

- Ακούσια ή απαράδεκτα σφάλματα

  Έλλειψη προσοχής

  Λανθασμένη ανάγνωση ή καταγραφή μετρήσεων

  Λάθη πράξεων

  Ανώμαλες πειραματικές συνθήκες

➢ Στην περίπτωση αυτή, οι μετρήσεις πρέπει να επαναληφθούν ή αν είναι μέρος μιας σειράς μετρήσεων τότε η συγκεκριμένη μέτρηση παραλείπεται

- Συστηματικά σφάλματα

  Σφάλματα οργάνων μέτρησης (π.χ. λάθος βαθμονόμηση οργάνου μέτρησης)

  Σφάλματα περιβάλλοντος (π.χ. Θερμοκρασία, πίεση, μαγνητικό πεδίο της γης, μη ακριβές θεωρητικό μοντέλο)

  Σφάλματα θεωρητικής φύσης

- Στατιστικά ή τυχαία σφάλματα

  Σφάλματα που εισέρχονται κατά τη διάρκεια μιας μέτρησης και έχουν σαν αποτέλεσμα να μετρούμε είτε μεγαλύτερη ή μικρότερη τιμή από τη πραγματική.

  π.χ. ο χρόνος αντίδρασής μας στη μέτρηση χρόνου με ένα χρονόμετρο

  Τα υπολογίζουμε και ελαττώνουμε με πολλαπλές μετρήσεις αλλά δεν μπορούμε να αποφύγουμε – υπάρχουν πάντα

Στατιστικά ή τυχαία σφάλματα

Τα σφάλματα αυτά εμφανίζονται ακόμα και όταν έχουν απαλοιφεί τα συστηματικά και ακούσια σφάλματα ή έχουν ληφθεί υπόψη

Προέρχονται από συνδυασμό διαφόρων αιτιών όπως και τα συστηματικά σφάλματα αλλά ο τρόπος με τον οποίο επηδρούν σε μια μέτρηση είναι τυχαίος

Τα σφάλματα αυτά δεν είναι ή δεν φαίνονται να είναι συνδεδεμένα με κάποια αιτία και δεν επαναλαμβάνονται αλλά είναι τυχαία

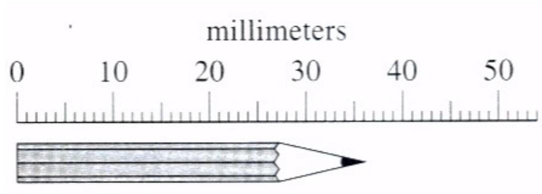
Τα στατιστικά σφάλματα επηρεάζουν την ακρίβεια (precision) ενός πειράματος και ελαττώνονται με αρκετές επαναλήψεις της μέτρησης

Σφάλμα ανάγνωσης οργάνου

Το σφάλμα αυτό αναφέρεται σε αβεβαιότητες στη μέτρηση που προκαλούνται από τις πεπερασμένες ιδιότητες του οργάνου μέτρησης και/ή από τις δικές μας πεπερασμένες ικανότητες τη στιγμή της μέτρησης (π.χ. χρόνος αντίδρασης)

Το σφάλμα αυτό δεν αναφέρεται σε άλλα σφάλματα που μπορούν να γίνουν κατά τη διάρκεια ενός πειράματος

- Το σφάλμα ανάγνωσης επηρεάζει την ακρίβεια ενός πειράματος
  - Μήκος ενός μολυβιού: Τοποθετούμε τη μια πλευρά στο 0 του χάρακα και πρέπει να αποφασίσουμε σε ποια υποδιαίρεση φθάνει η αιχμηρή πλευρά του

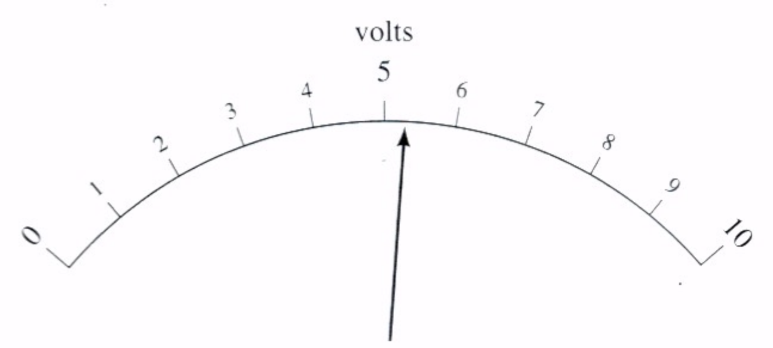


Για να υπολογήσουμε το σφάλμα ανάγνωσης πρέπει να απαντήσουμε στην ερώτηση: ποια είναι η μέγιστη και ελάχιστη τιμή που μπορεί να είχε η θέση για την οποία δεν θα δούμε καμιά διαφορά

- Η πιθανότερη τιμή του σφάλματος ανάγνωσης είναι ± 0.5mm και η μέτρηση του μήκους είναι 36.0 ± 0.5 mm.

Σφάλμα ανάγνωσης οργάνου

- Μέτρηση διαφοράς ηλεκτρικού δυναμικού στο άκρα μιας αντίστασης



Οι υποδιαιρέσεις στην περίπτωση αυτή έχουν μεγαλύτερη απόσταση. Μπορούμε ωστόσο να υπολογίσουμε τη θέση του δείκτη μεταξύ δυο υποδιαιρέσεων

Μια πιθανή (λογική) τιμή για την τάση θα ήταν 5.3V με πιθανό εύρος 5.2-5.4V

Για άλλους παρατηρητές το σφάλμα να ήταν $\pm$0.2V ή μικρότερο π.χ. 0.05V αλλά κανείς δεν θα αμφισβητούσε ότι το εύρος που δόθηκε αρχικά (0.1V) δεν αποτελεί μια λογική εκτίμηση του σφάλματος

Συχνά αναφέρεται στην βιβλιογραφία ότι το σφάλμα ανάγνωσης είναι $\pm$ μισό της μικρότερης υποδιαίρεσης.

Αυτό είναι λάθος! Το σφάλμα ανάγνωσης τέτοιων οργάνων μπορούν να προσδιοριστούν μόνο από το παρατηρητή που διαβάζει την ένδειξη του οργάνου και μπορεί να είναι διαφορετική για διαφορετικά άτομα

Σφάλμα ανάγνωσης οργάνου

Για ένα ψηφιακό όργανο το σφάλμα ανάγνωσης είναι συνήθως είναι ±το μισό του τελευταίου ψηφίου

Η έκφραση "± το μισό του τελευταίου ψηφίου" είναι η "γλώσσα" που χρησιμοποιείται στους οδηγούς των κατασκευαστών του οργάνου

Δεν σημαίνει το μισό της τιμής του τελευταίου ψηφίου ("0.8" στη περίπτωσή μας) αλλά το μισό της δύναμης του 10 που αντιπροσωπεύει το τελευταίο ψηφίο.

Δηλαδή για την περίπτωσή μας: $\frac{1}{2}\times 0.1 = 0.05$

Είναι σα να λέμε ότι η τιμή είναι πιο κοντά στο 12.8 από το 12.7 ή

Η τελική μας απάντηση επομένως θα ήταν 12.80 ±0.05 ^{0}C

Προσοχή: Το σφάλμα του οργάνου καθορίζεται από τους κατασκευαστές και θα πρέπει να ανατρέχουμε στο αντίστοιχο οδηγό χρήσης του οργάνου

Σφάλμα σε επαναλβανόμενες μετρήσεις

Έστω ότι μετρούμε σε ένα πείραμα το χρόνο που χρειάζεται μια μπάλα να φθάσει στο έδαφος όταν την αφήσουμε από ένα συγκεκριμένο ύψος

Οι μετρήσεις μας εξαρτώνται από τις διαφοροποιήσεις στο χρόνο αντίδρασής μας για να ξεκινήσουμε ή να σταματήσουμε το χρονόμετρο, τυχαίες διακυμάνσεις της κίνησης του αέρα, διακυμάνσεις στις αρχικές συνθήκες. Όλες αυτές οι διακυμάνσεις οδηγούν σε μια σειρά μετρήσεων που μπορεί να παρουσιάζουν σημαντική διασπορά.

Η αληθινή τιμή βρίσκεται κάπου μεταξύ της μικρότερης και μεγαλύτερης τιμής που έχουμε μετρήσει ενώ η διασπορά (το διάστημα που βρίσκονται οι τιμές) δίνει το πιο πιθανό διάστημα τιμών.

Υποθέτουμε ότι η καλύτερη εκτίμηση των μετρήσεών μας δίνεται από την αριθμητική μέση τιμή των μετρήσεων αυτών

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Πάντοτε ζητούμε και μια μέτρηση της διασποράς των τιμών x_i

Η διασπορά σχετίζεται με την αβεβαιότητα της υπολόγιζόμενης τιμής από την αληθινή τιμή του μεγέθους *x*. Ο καλύτερος υπολογισμός της διασποράς δίνεται από την τυπική απόκλιση, σ, του *x* και δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

Για n>30

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

Τυπικό σφάλμα ή σφάλμα μέσης τιμής

Η τυπική απόκλιση σχετίζεται με το σφάλμα κάθε ξεχωριστής μέτρησης x_i

Ωστόσο αυτό που συνήθως θέλουμε είναι το σφάλμα στη καλύτερη εκτίμηση της τιμής του *x*, που είναι η μέση τιμή $\bar{x}$

Το σφάλμα αυτό είναι μικρότερο από την τυπική απόκλιση, σ, γιατί διαφορετικά θα μπορούσαμε να υπολογήσουμε την αληθινή τιμή του *x* το ίδιο καλά με μια και μόνο μέτρηση όπως θα κάναμε με πολλές μετρήσεις.

Το σφάλμα της μέσης τιμής ή τυπικό σφάλμα ορίζεται σαν η τυπική απόκλιση, σ, όλων των μετρήσεων διαιρούμενη με την τετραγωνική ρίζα του αριθμού των μετρήσεων:

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

Επομένως η απάντησή μας στην ερώτηση “ποιά είναι η αληθινή μετρούμενη τιμή της φυσικής ποσότητας *x*? “ είναι:

$$x = \bar{x} \pm \sigma_x = \bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Το σφάλμα έχει τις ίδιες διαστάσεις με τη μετρούμενη ποσότητα

Θα πρέπει επομένως να πάρουμε αρκετές μετρήσεις ώστε να ελαττώσουμε το σφάλμα αλλά όχι περισσότερες από όσες οδηγούν σε σφάλμα μικρότερο από το σφάλμα ανάγνωσης του οργάνου.

Μερικοί ακόμα ορισμοί …

Μέγιστο σφάλμα: $\Delta x_{\max} = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$ Όπου x_{max} και x_{min} είναι οι ακρότατες τιμές που μετρήθηκαν και δεν μπορεί να βρεθεί τιμή έξω από το διάστημα $\bar{x} \pm \Delta x_{\max}$

Πιθανό σφάλμα: Το σφάλμα αυτό προσδιορίζει το διάστημα $\bar{x} \pm \Delta x_{\pi\iota\theta.}$ που περικλύει το 50% των μετρούμενων τιμών

Απόλυτο σφάλμα: Το τυπικό σφάλμα μιας μέτρησης ονομάζεται και απόλυτο

Σχετικό σφάλμα: $\Delta x_{\sigma\chi\varepsilon\tau.} = \dfrac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}} \times 100\%$ Είναι αδιάστατος αριθμός

Η δίκαιη τράπουλα

Εφαρμογή των προηγούμενων για να εξετάσουμε αν μία τράπουλα είναι δίκαιη

Πως μπορούμε να ξέρουμε αν μία τράπουλα είναι δίκαιη αν δεν δούμε όλα τα χαρτιά;

- Έστω σε ένα παιχνίδι poker υπάρχουν 4 τράπουλες ανακατεμένες.
  Κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού μοιράζονται 10 χαρτιά και επιστρέφονται στη τράπουλα την οποία ανακατεύουμε και πάλι.
- Πώς μπορούμε να ξέρουμε αν η τράπουλα είναι δίκαιη βλέποντας μόνο 10 χαρτιά;

Κατηγοριοποιώντας τα τραπουλόχαρτα και δίνοντας τιμή στο καθένα ανάλογα με τον αριθμό που είναι στο χαρτί και θεωρώντας ότι:

Ace =1, Jack = 11, Queen=12 και King = 13

Σε μια κανονική τράπουλα, υπάρχει ίδιος αριθμός κάθε τύπου χαρτιού. Μετά από αρκετά μοιράσματα χαρτιών, η μέση τιμή των καρτών θα είναι: 7

Μέση τιμή για ένα μόνο είδος φύλλου από τα 4 (spades, hearts, diamonds, clubs)

$$\bar{x}_{είδους} = \bar{x}_{τράπουλας} = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13} i = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13}{13} = 7$$

Μή δίκαιη τράπουλα

- Ας υποθέσουμε ότι κάποιος αφαίρεσε όλους τους άσσους από την τράπουλα

  Υπάρχουν μόνο τα φύλλα 2,….,13 για κάθε τύπο οπότε η μέση τιμή θα είναι:

$$\bar{x} = \bar{x}_{\mu\acute{\eta}\ \delta\acute{\iota}\kappa\alpha\iota\eta\ \tau\rho\acute{\alpha}\pi o\upsilon\lambda\alpha} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{13} i = \frac{2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13}{12} = 7.5$$

  Εξετάζοντας τη μέση τιμή πολλών χαρτιών που εμφανίζονται μπορούμε να καταλάβουμε ότι κάτι δεν είναι σωστό χωρίς να δούμε όλα τα χαρτιά της τράπουλας

  - Θα πρέπει να πάρουμε αρκετές μετρήσεις ώστε να ανιχνεύσουμε τη διαφορά στη μέση τιμή μεταξύ της τιμής 7 και 7.5
  - Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να πάρουμε αρκετές μετρήσεις ώστε η τυπική απόκλιση της μέσης τιμής τους να είναι μικρότερη από 0.5. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι θα χρειαστεί να πάρουμε 50 με 70 χαρτιά της τράπουλας

- Κάποιος θα μπορούσε να διορθώσει το πρόβλημα αυτό αφαιρώντας τόσο το χαρτί Ace όσο και το King ούτως ώστε η μέση τιμή να είναι και πάλι 7.

Μη δίκαιη τράπουλα

- Κάποιος θα μπορούσε να διορθώσει το πρόβλημα αυτό αφαιρώντας τόσο το χαρτί Ace όσο και το King ούτως ώστε η μέση τιμή να είναι και πάλι 7.

  Η ανίχνευση της μέσης τιμής δεν θα βοηθήσει

  Μπορούμε να μελετήσουμε την περίπτωση μέσω μιας προσομοίωσης, όπου 10 χαρτιά τραβιούνται από μια συλλογή χαρτιών 4 τραπουλών (52 χαρτιά η κάθε μία) επανατοποθετούνται στην τράπουλα που ανακατεύεται και η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου έχουμε 150 χαρτιά.

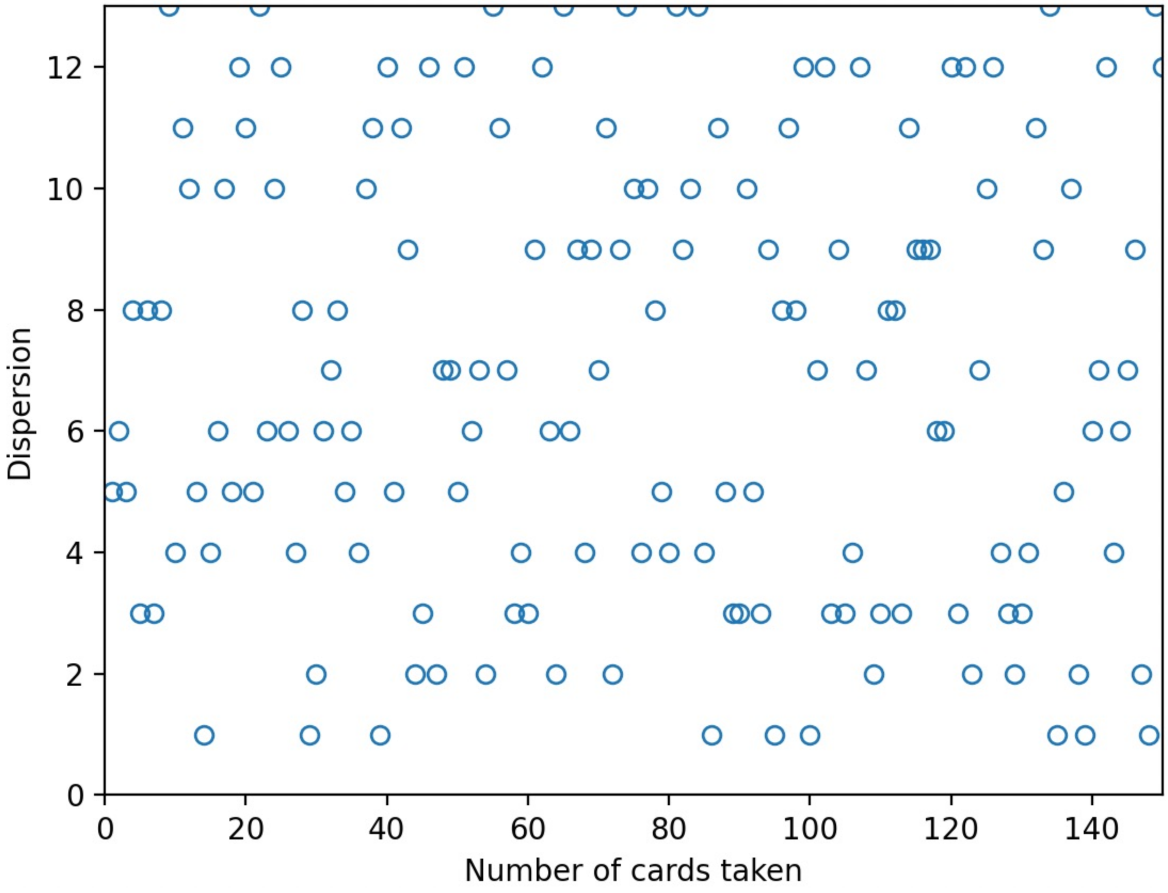
  Το γράφημα δείχνει τη τρέχουσα μέση τιμή των καρτών συναρτήσει του αριθμού των καρτών που τραβήχτηκαν.

  - Η μέση τιμή σταθεροποιείται περίπου στη τιμή 7 τόσο για την δίκαιη όσο και για την τράπουλα από την οποία έχουν αφαιρεθεί τα 2 χαρτιά.

  - Η δυσκολία ανίχνευσης διαφοράς από την μέση τιμή γίνεται πιο σημαντική αν θεωρήσουμε τη τυπική απόκλιση της μέσης τιμής

Μή δίκαιη τράπουλα

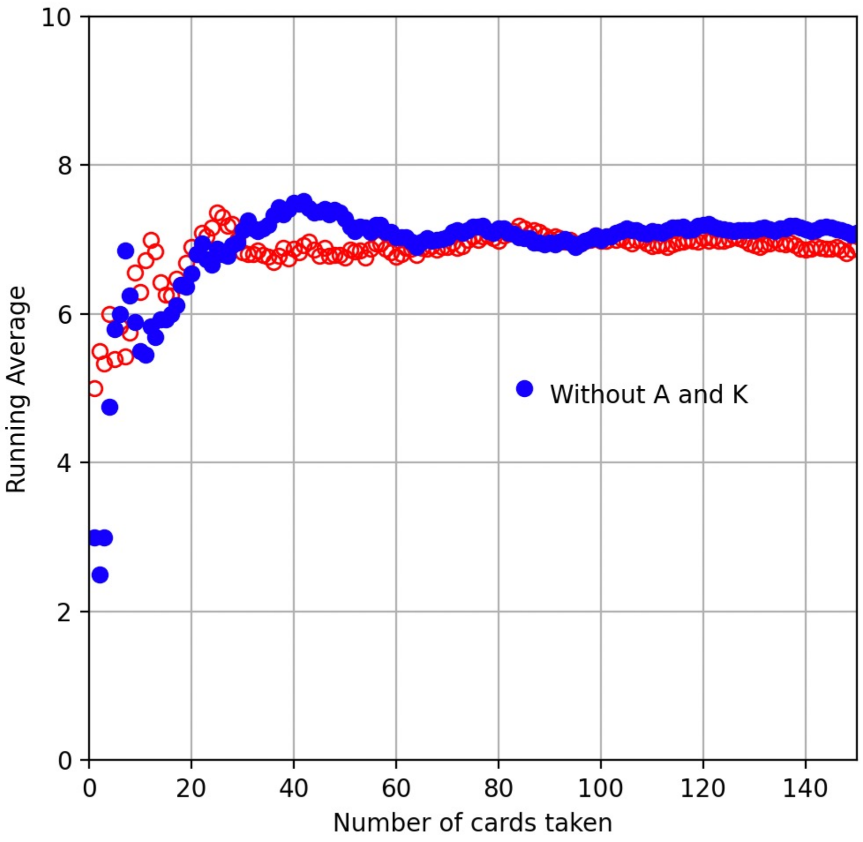
Διασπορά των τιμών των καρτών που εμφανίστηκαν όταν τραβήξαμε 150 κάρτες από μια τράπουλα με 208 κάρτες



Μή δίκαιη τράπουλα

Τρέχουσα μέση τιμή υπολογιζόμενη με βάση τα φύλλα που έχουν τραβηχτεί και η τυπική απόκλιση της αντίστοιχης μέσης τιμής.

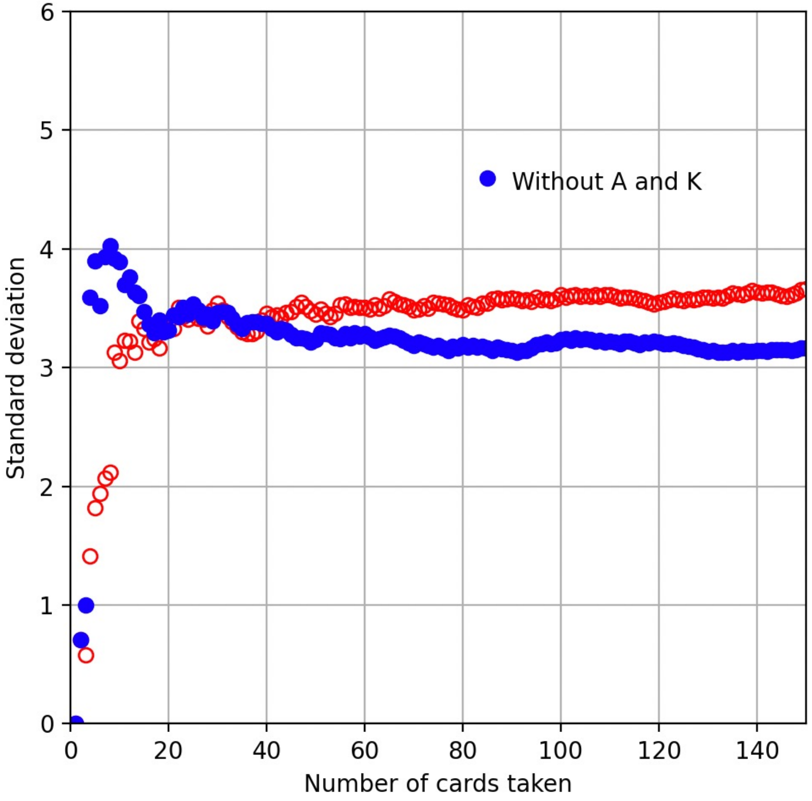
Παρατηρούμε ότι μετά από κάποια αρχική διαφορετικότητα, δεν μπορούμε να διαχωρίσουμε τις δύο τράπουλες (δίκαιη και μη) με βάση την μέση τιμή.



Μή δίκαιη τράπουλα

Ωστόσο, ενώ η κατανομή της μέσης τιμής δεν έχει αλλάξει αφαιρώντας τις δύο ακραίες τιμές (Ace και King) αλλάζει η κατανομή της τυπικής απόκλισης!

Λιγότερες τιμές βρίσκονται μακριά από την μέση τιμή και επομένως η τυπική απόκλιση των καρτών της μη δίκαιης τράπουλας θα είναι μικρότερη από αυτή της περίπτωσης της δίκαιης τράπουλας



Από την τυπική απόκλιση και δεδομένου ότι η μέση τιμή παραμένει η ίδια μπορούμε να βρούμε ότι τα χαρτιά που λείπουν πρέπει να έχουν μέση τιμή όσο και η μέση τιμή των καρτών της τράπουλας και θα πρέπει να είναι στα άκρα της κατανομής των τιμών των καρτών της τράπουλας