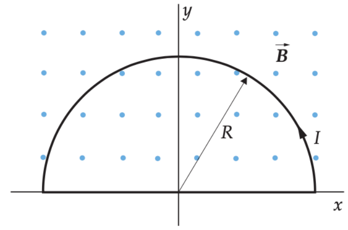
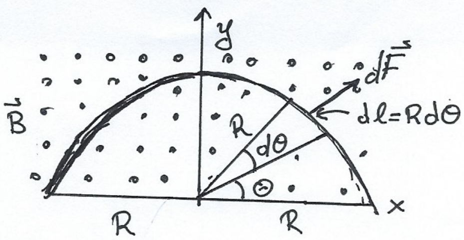
ΦΥΣ. 112

6ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή Παρασκευή**
4.11.2022

1. Ένα σύρμα που διαρρέεται από ρεύμα έντασης I είναι λυγισμένο σε μορφή ημικυκλίου ακτίνας R και βρίσκεται στο xy-επίπεδο. Το σύρμα βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο στην $+z$-διεύθυνση, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Δείξτε ότι η δύναμη που ασκείται στο βρόχο είναι μηδέν.





Η δύναμη που ασκείται στο ημικυκλικό σύρμα θα είναι:

$\vec{F} = \vec{F}_\ell + \vec{F}_s$ όπου $\vec{F}_\ell$ η δύναμη στην περιφέρεια και $\vec{F}_s$ η δύναμη στο ευθύγραμμο τμήμα.

Η δύναμη στο ευθύγραμμο τμήμα είναι: $\vec{F}_s = I\vec{\ell}\times\vec{B} = 2RI\hat{i}\times\vec{B} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{F}_s = 2RI\,\hat{i}\times B\hat{k} \Rightarrow \vec{F}_s = -2RIB\,\hat{j} \qquad (1)$$

Η δύναμη που δρα σε ένα τμήμα τόξου του ημικυκλίου θα είναι: $dF = Id\ell B \Rightarrow$

$$\Rightarrow dF = IBRd\theta \qquad (2)$$

Επομένως αναλύουμε την δύναμη αυτή σε x και y- συνιστώσες, οπότε:

$dF_x = dF\cos\theta$. Λόγω συμμετρίας η dF_x αθροιζόμενη για όλο το ημικύκλιο θα δώσει $F_x = 0$.

$dF_y = dF\sin\theta \qquad (3)$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (3) έχουμε: $dF_y = IBR\sin\theta d\theta$

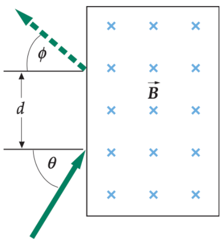
Ολοκληρώνουμε ως προς θ με όρια από 0 έως π, οπότε θα έχουμε:

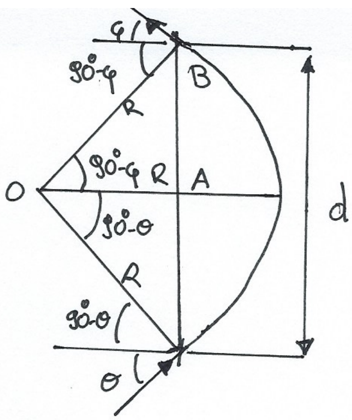
$$F_y = \int_0^\pi dF_y = \int_0^\pi IBR\sin\theta d\theta = IBR\int_0^\pi \sin\theta d\theta = -IBR(\cos\theta)\Big|_0^\pi = 2IBR$$

Επομένως $\vec{F}_y = \vec{F}_\ell = 2BIR\,\hat{j} \qquad (4)$

Επομένως $\vec{F} = \vec{F}_\ell + \vec{F}_s \overset{(1)\kappa(4)}{\Rightarrow} \vec{F} = -2RIB\hat{j} + 2BIR\hat{j} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \vec{0}}$

2. Ένα πρωτόνιο που κινείται με ταχύτητα $1.00 \times 10^6 m/s$, εισέρχεται σε περιοχή με ομογενές μαγνητικό πεδίο μέτρου $0.8T$ το οποίο έχει κατεύθυνση προς το εσωτερικό της σελίδας, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το πρωτόνιο εισέρχεται στην περιοχή με γωνία 60^o. Βρείτε την γωνία, φ, με την οποία εξέρχεται και την απόσταση d.





Απο τη συμμετρία της διάταξης έχουμε ότι:

$\varphi = 60°$

Η δύναμη που ασκείται στο πρωτόνιο εξαιτίας του μαγνητικού πεδίου είναι επίσης και κεντρομόλος δύναμη!

$$q\cancel{v}B = m\frac{v^{\cancel{2}}}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB} \quad (1)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο OAB έχουμε: $\sin(90°-\phi) = \frac{BA}{R} = \frac{d/2}{mv/qB} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin 30° = \frac{dqB}{2mv} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{dqB}{\cancel{2}mv} \Rightarrow d = \frac{mv}{qB} \quad (2)$$

Επομένως $\boxed{d = R}$

Αντικαθιστώντας θα έχουμε $d = \frac{mv}{qB} = \frac{1.673\times10^{-27} kg \cdot 1 \cdot \times 10^{6} m/s}{1.602\cdot10^{-19} C \cdot 0.8 T} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{d = 13.1 mm}$$

3. Δείξτε ότι η ακτίνα της τροχιάς ενός φορτισμένου σωματιδίου σε ένα κύκλοτρο, είναι ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας του αριθμού των περιστροφών που συμπλήρωσε.

Από την εξίσωση του $2^{ου}$ νόμου του Newton, για σωματίδιο σε μαγνητικό πεδίο έχουμε:

$$\frac{m\upsilon^2}{R} = q\upsilon B \Rightarrow R = \frac{m\upsilon}{qB} \qquad (1)$$

Η κινητική ενέργεια θα είναι: $E_{κιν} = \frac{1}{2} m\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2E_{κιν}}{m}}$ (2)

Από τη στιγμή που η αύξηση της ενέργειας ανά περιστροφή είναι σταθερή μπορούμε να γράψουμε την κινητική ενέργεια συναρτήσει του αριθμού των περιστροφών N που έχει εκτελέσει το σωματίδιο, κερδίζοντας E_0 ενέργεια ανά περιστροφή:

$$E_{κιν} = N E_0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \upsilon = \sqrt{\frac{2NE_0}{m}} \overset{(1)}{\Rightarrow} R = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2NE_0}{m}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{2NE_0 m^{\cancel{2}}}{q^2B^2 \cancel{m}}} \Rightarrow \boxed{R = A\sqrt{N}} \text{ όπου } \boxed{A = \sqrt{\frac{2E_0 m}{q^2B^2}}}$$

4. Ένα σύρμα μήκους L είναι τυλιγμένο σε μορφή ενός κυκλικού σωληνοειδούς με N περιελίξεις. Δείξτε ότι όταν το σύρμα διαρρέεται από ρεύμα I, η μαγνητική ροπή του σωληνοειδούς είναι $IL^2/(4\pi N)$.

Όπως ξέρουμε η μαγνητική ροπή ενός σωληνοειδούς είναι $\boxed{\mu = NIA}$ (1)

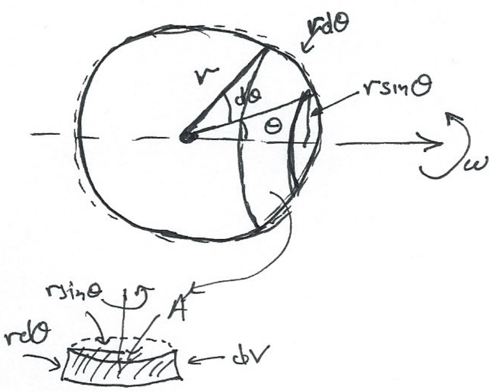
όπου N ο αριθμός των σπειρών του, I το ρεύμα που το διαρρέει και A η επιφάνεια κάθε σπείρας.

Το μήκος της περιφέρειας κάθε σπείρας είναι: $\frac{L}{N} = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{L}{2\pi N}$

Επομένως το εμβαδό της σπείρας θα είναι: $A = \pi R^2 = \cancel{\pi}\frac{L^2}{4\pi^{\cancel{2}} N^2} = \frac{L^2}{4\pi N^2}$

Άρα από την (1) θα έχουμε: $\mu = \cancel{N} I \frac{L^2}{4\pi N^{\cancel{2}}} \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{IL^2}{4\pi N}}$

5. Μία ομοιόμορφη, συμπαγής και ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα ακτίνας R έχει **χωρική** πυκνότητα φορτίου σ. Η σφαίρα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο της. Βρείτε το μέτρο της μαγνητικής ροπής της περιστρεφόμενης σφαίρας.



Η μαγνητική ροπή δίνεται από τη σχέση:

$$d\mu = dI\,A \qquad (1)$$

όπου $d\mu$ είναι η στοιχειώδης μαγνητική ροπή που δημιουργείται από το φορτίο dq, που περικλείεται σε έναν στοιχειώδη όγκο dV, το οποίο περιστρέφεται δημιουργώντας ένα στοιχειώδες ρεύμα dI. A είναι η επιφάνεια του στοιχειώδους αυτού όγκου.

Το φορτίο που περικλείεται στον όγκο αυτό θα είναι $\boxed{dq = \sigma dV = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} dV}$ (2)

Το ρεύμα θα είναι: $dI = \frac{dq}{dt} = f \cdot \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} dV \Rightarrow \boxed{dI = \frac{\omega}{2\pi} 3 \frac{Q}{4\pi R^3} dV}$ (3)

Η επιφάνεια $A = \pi r'^2 = \boxed{\pi r^2 \sin^2\theta}$ (4)

Αντικατάσταση στην (1) των (3) κ. (4) δίνει:

$$d\mu = \frac{3\omega Q}{8\pi^2 R^3} \cancel{\pi} r^2 \sin^2\theta\, dV \Rightarrow \mu = \frac{3\omega Q}{8\pi R^3} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \sin^2\theta\, r^2 \left(r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{3\omega Q}{4\cancel{8\pi} R^3} \int_0^{\pi}\int_0^{R} \cancel{2\pi} \sin^2\theta\, r^2 \left(r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr\right) = \frac{3\omega Q}{4R^3} \int_0^{\pi}\int_0^{R} r^4 \sin^3\theta\, d\theta\, dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{3\omega Q}{4R^3} \int_0^{R} dr\, r^4 \int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta) \sin\theta\, d\theta = \frac{3\omega Q}{4R^3} \int_0^{R} r^4 dr \left[\int_1^{-1} (u^2-1)\, du\right]$$ όπου $u = \cos\theta$

$$\Rightarrow \mu = \frac{3\omega Q}{4R^3} \int_0^{R} r^4 dr \left(\frac{u^3}{3} - u\right)\Big|_1^{-1} \Rightarrow \mu = \frac{3\omega Q}{4R^3} \left[-\frac{2}{3} + 2\right] \int_0^{R} r^4 dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{\cancel{3}\omega Q}{\cancel{4}R^{\cancel{3}}}\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\frac{R^{\cancel{5}}}{5} \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{\omega Q}{5}R^2} \quad (5)$$

Επομένως θεωρώντας τη ροπή αδράνειας μιας ομογενούς αγωγού σφαίρας θα έχουμε: $I_{σφ} = \frac{2}{5}mR^2$.

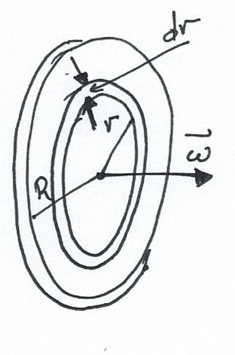
Η στροφορμή της σφαίρας θα είναι: $L = I_{σφ}\,\omega \Rightarrow \boxed{L = \frac{2}{5}mR^2\omega}$ (6)

Άρα διαιρώντας (5) με (6) θα έχουμε:

$$\frac{\mu}{L} = \frac{\frac{\cancel{\omega} Q}{\cancel{5}}\cancel{R^2}}{\frac{2}{\cancel{5}}m\cancel{R^2}\cancel{\omega}} \Rightarrow \frac{\mu}{L} = \frac{Q}{2m} \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{Q}{2m}L}$$

Εφόσον η μαγνητική ροπή έχει την ίδια διεύθυνση με την γωνιακή ταχύτητα ω θα έχουμε: $\boxed{\vec{\mu} = \frac{Q}{2m}\vec{L}}$

6. Ένας μη ομογενής, μη αγώγιμος λεπτός δίσκος μάζας m, ακτίνας R και ολικού φορτίου Q έχει επιφανειακή πυκνότητα φορτίου, σ, που μεταβάλλεται ως $\sigma = \sigma_o r/R$ και πυκνότητα μάζας σ_m, που δίνεται από την σχέση, $\sigma_m = (m/Q)\sigma$. Ο δίσκος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω ως προς άξονα που περνά από το κέντρο του. (α) Δείξτε ότι η μαγνητική ροπή του δίσκου έχει μέτρο που δίνεται από την σχέση: $\mu = \frac{1}{5}\pi\omega\sigma R^4$, η οποία μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως $\mu = \frac{3}{10}\omega Q R^2$. (β) Δείξτε ότι η μαγνητική ροπή, $\vec{\mu}$, και η στροφορμή $\vec{L}$, σχετίζονται με την σχέση: $\vec{\mu} = \frac{1}{2}(Q/m)\vec{L}$.



(α) Θα βρούμε τη μαγνητική ροπή ενός στοιχειώδους ρεύματος dI που προκαλείται από ένα δακτύλιο ακτίνας r και πάχους dr με φορτίο dq, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

$d\mu = A\,dI$ (1) όπου A είναι η επιφάνεια που περικλείεται

$A = \pi r^2$ (2) από το περιστρεφόμενο στοιχειώδες φορτίο που δημιουργεί το ρεύμα dI

Το στοιχειώδες ρεύμα $dI = \frac{dq}{dt} = \frac{\overbrace{\sigma_q}^{\text{πυκνότητα φορτίου}}\,dA}{dt} = f\sigma_q\,dA$ όπου f η συχνότητα περιστροφής

Επομένως: $dI = \frac{\omega}{2\pi}\left(\sigma_0\frac{r}{R}\right)(2\pi r\,dr) \Rightarrow dI = \frac{\omega}{\cancel{2\pi}}\frac{\sigma_0}{R}\cancel{2\pi}\,r^2 dr \Rightarrow \boxed{dI = \frac{\omega}{R}\sigma_0 r^2 dr}$ (3)

Αντικατάσταση της (3) και (2) στην (1) θα δώσει:

$d\mu = \pi r^2\frac{\omega}{R}\sigma_0 r^2 dr \Rightarrow d\mu = \pi\frac{\omega\sigma_0}{R}r^4 dr$ και ολοκληρώνουμε από $r=0$ έως R

$\mu = \int_0^R d\mu = \frac{\pi\omega\sigma_0}{R}\int_0^R r^4 dr \Rightarrow \mu = \frac{1}{5}\frac{\pi\omega\sigma_0}{\cancel{R}}R^{\cancel{5}\,4} \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{5}\pi\omega\sigma_0 R^4}$ (4)

Το φορτίο το οποίο είναι κατανεμημένο στην επιφάνεια που είναι σε απόσταση r από το κέντρο του δίσκου, είναι: $dq = (2\pi r\,dr)\sigma_q = 2\pi r\frac{r}{R}\sigma_0\,dr = 2\pi\frac{\sigma_0}{R}r^2 dr$

Ολοκλήρωση του dq από $r=0$ έως R δίνει το ολικό φορτίο: $Q = \int_0^R dq \Rightarrow Q = 2\pi\frac{\sigma_0}{R}\int_0^R r^2 dr$

$\Rightarrow Q = \frac{2\pi}{3}\frac{\sigma_0}{\cancel{R}}R^{\cancel{3}\,2} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{2\pi}{3}\sigma_0 R^2}$ (5)

Από την (4) και (5) έχουμε: $\frac{\mu}{Q} = \frac{\frac{1}{5}\pi\omega\cancel{\sigma_0}R^{4\,2}}{\frac{2\cancel{\pi}}{3}\cancel{\sigma_0}\cancel{R^2}} \Rightarrow \frac{\mu}{Q} = \frac{3}{10}\omega R^2 \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{3}{10}Q\omega R^2}$ (6)

(β) Η ροπή αδράνειας ενός στοιχειώδους τμήματος του δίσκου με μάζα dm είναι:

πυκνότητα μάζας

$$dI_\delta = r^2 dm = r^2 \sigma_m^\delta \, dA = r^2 \left(\frac{m}{Q}\sigma_q\right)(2\pi r\, dr) \Rightarrow dI_\delta = \frac{2\pi m}{Q}\frac{r^4}{R}\sigma_0\, dr$$

Θα πρέπει να ολοκληρώσουμε για r από 0 έως R οπότε:

$$I_\delta = \int_0^R dI_\delta = \frac{2\pi m \sigma_0}{QR}\int_0^R r^4 dr \Rightarrow I_\delta = \frac{2\pi m \sigma_0}{Q\cancel{R}}\frac{1}{5}R^{\cancel{5}\,4} \Rightarrow \boxed{I_\delta = \frac{2}{5}\frac{\pi m \sigma_0}{Q}R^4} \quad (8)$$

Αντικαθιστώντας την (7) με την (5) θα έχουμε:

$$I_\delta = \frac{\cancel{\frac{2}{5}}\cancel{\pi} m \cancel{\sigma_0} R^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{\frac{2\pi}{3}}\cancel{\sigma_0}\cancel{R^2}} \Rightarrow \boxed{I_\delta = \frac{3}{5}mR^2}$$

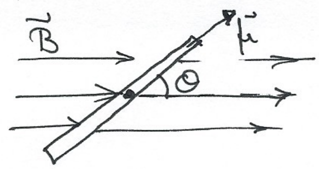
Η στροφορμή του περιστρεφόμενου δίσκου θα είναι: $L = I_\delta \omega = \frac{3}{5}m\omega R^2$

Από την (6) και την τελευταία εξίσωση θα πάρουμε:

$$\frac{\mu}{L} = \frac{\cancel{\frac{3}{10}}Q\cancel{\omega}\cancel{R^2}}{\cancel{\frac{3}{5}}m\cancel{\omega}\cancel{R^2}} \Rightarrow \frac{\mu}{L} = \frac{1}{2}\frac{Q}{m} \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{Q}{2m}L}$$

Εφόσον η μαγνητική ροπή $\vec{\mu}$ είναι στην ίδια διεύθυνση με την γωνιακή ταχύτητα γράφουμε τελικά: $\boxed{\vec{\mu} = \frac{Q}{2m}\vec{L}}$

7. Ένας λεπτός ραβδόμορφος μαγνήτης με μαγνητική ροπή $\vec{\mu}$, παράλληλη με τον μακρύτερο άξονά του, κρέμεται από το κέντρο του σαν την βελόνα μιας πυξίδας. Όταν τοποθετηθεί σε περιοχή με οριζόντιο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$, η βελόνα ευθυγραμμίζεται με το πεδίο. Ανεκτραπεί κατά μία μικρή γωνία θ, να δείξετε ότι η βελόνα θα ταλαντώνεται ως προς τη θέση ισορροπίας της με συχνότητα $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu B}{I}}$. Όπου I η ροπή αδράνειας του ραβδόμορφου μαγνήτη ως προς το σημείο στήριξής του.



Η ροπή που αναπτύσσεται στον μαγνήτη εξαιτίας του προσανατολισμού της μαγνητικής του ροπής στο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο B θα είναι:

$$\boxed{\tau = -\mu B \sin\Theta} \quad (1)$$

όπου το πρόσημο '−' δείχνει ότι η ροπή προσπαθεί να επαναφέρει τη μαγνητική ροπή ώστε να είναι παράλληλη με το μαγνητικό πεδίο.

Η ροπή σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton για την περιστροφική κίνηση είναι:

$$\boxed{\tau = I\alpha = I_p \frac{d^2\Theta}{dt^2}} \quad (2)$$

όπου I_p η ροπή αδράνειας μιας ράβδου

Από την (1) και (2) εξισώνοντας έχουμε: $-\mu B \sin\Theta = I_p \frac{d^2\Theta}{dt} \Big\} \Rightarrow$

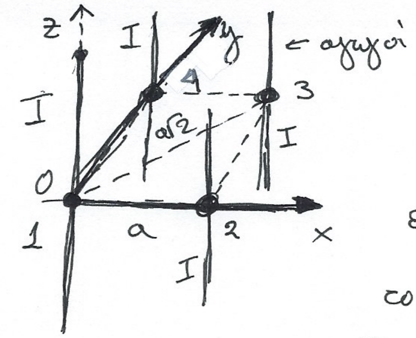
Για μικρές γωνίες Θ θα έχουμε: $\sin\Theta \simeq \Theta$

$$\Rightarrow -\mu B \Theta = I_p \frac{d^2\Theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\frac{\mu B}{I_p}\Theta \Rightarrow \frac{d^2\Theta}{dt^2} = -\omega^2\Theta \quad \text{με } \omega^2 = \frac{\mu B}{I_p}$$

Βλέπουμε ότι για μικρές αποκλίσεις Θ από τη θέση ισορροπίας, η διαφορική εξίσωση στην οποία καταλήγουμε είναι αυτή του απλού αρμονικού ταλαντωτή που ταλαντώνεται με γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{\mu B}{I_p}}$

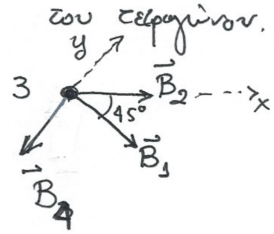
Αλλά $\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \omega / 2\pi$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{f = \sqrt{\frac{\mu B}{4\pi^2 I_p}}}$

8. Τέσσερα μακριά, ευθύγραμμα και παράλληλα σύρματα διαρρέονται από ρεύμα *I*. Σε ένα επίπεδο κάθετο στα τέσσερα σύρματα, τα σύρματα βρίσκονται στις κορυφές ενός τετραγώνου πλευράς *α*. Βρείτε το μέτρο της δύναμης ανά μονάδα μήκους που ασκείται σε ένα από τα σύρματα αν (α) όλα τα ρεύματα είναι στην ίδια κατεύθυνση και (β) τα ρεύματα στα σύρματα στις γειτονικές κορυφές έχουν αντίθετη κατεύθυνση.



Σύμφωνα με τον νόμο του Ampere, κάθε ευθύγραμμος αγωγός, δημιουργεί μαγνητικό πεδίο το μέτρο του οποίου σε απόσταση r από τον αγωγό δίνεται από τη σχέση: $B = \mu_0 I / 2\pi r$ ενώ ο κανόνας του δεξιού χεριού μας δίνει τη διεύθυνση του πεδίου, ενώ ο αντίχειρας τη φορά του ρεύματος.

(α) Έστω οι αγωγοί διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα με φορά προς την −z-διεύθυνση. και εξετάζουμε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργούν στην κορυφή 3 του τετραγώνου. Θα έχουμε ότι το μαγνητικό πεδίο από τον αγωγό 2, $\vec{B}_2$, θα είναι στην +x-διεύθυνση, το πεδίο από τον αγωγό 4, $\vec{B}_4$, θα είναι στην −y διεύθυνση, ενώ το πεδίο από τον αγωγό 1, $\vec{B}_1$ θα είναι κάθετο στην διαγώνιο του τετραγώνου, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \vec{B}_2 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha}\hat{i} \\ \vec{B}_4 &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha}\hat{j} \\ \vec{B}_1 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha\sqrt{2}}\cos 45^\circ(\hat{i}-\hat{j}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_4 \Rightarrow$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha}\left[\hat{i} - \hat{j} + \frac{1}{2}(\hat{i}-\hat{j})\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\alpha}\left(\frac{3}{2}(\hat{i}-\hat{j})\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{3\mu_0 I}{4\pi\alpha}(\hat{i}-\hat{j})}$$

Ο αγωγός στην κορυφή 3 διαρρέεται από ρεύμα I και το μαγνητικό πεδίο στον αγωγό είναι $\vec{B} = \frac{3\mu_0 I}{4\pi a}(\hat{i}-\hat{j})$

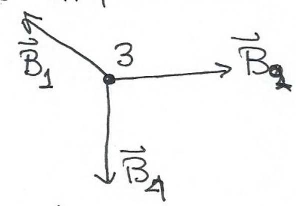
Η δύναμη στον αγωγό θα είναι: $\vec{F} = |I\vec{l}\times\vec{B}| \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\vec{F}| = I\left|-l\vec{k}\times\frac{3\mu_0 I}{4\pi a}(\hat{i}-\hat{j})\right| = I^2 l\,\frac{3\mu_0}{4\pi a}\left|(-\vec{k}\times(\hat{i}-\hat{j}))\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{F}|}{l} = \frac{3\mu_0 I^2}{4\pi a}\left|(-\hat{j}+\hat{i})\right| \Rightarrow \boxed{\frac{|\vec{F}|}{l} = \frac{3\mu_0 I^2}{4\pi a}\left|(\hat{i}-\hat{j})\right|} \quad (A)$$

(β) Όταν οι αγωγοί διαρρέονται από ρεύμα του οποίου η φορά αλλάζει στις γειτονικές κορυφές θα έχουμε:

έστω
$$\left.\begin{aligned} I_1\vec{l} &= -Il\hat{k} \\ I_2\vec{l} &= Il\hat{k} \\ I_4\vec{l} &= -Il\hat{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$
τα μαγνητικά πεδία που δημιουργούν θα είναι: όπως στο σχήμα: (κορυφή 3)



Το μαγνητικό πεδίο στην κορυφή 3 θα είναι:

$$\vec{B} = \vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{2}a}\cos45^\circ(-\hat{i}+\hat{j}) + \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{i} - \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left[\hat{i}-\hat{j}+\frac{1}{2}(-\hat{i}+\hat{j})\right] \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\hat{i}-\hat{j})}$$

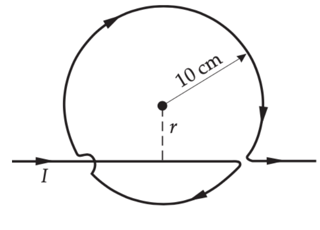
Ο αγωγός 3 διαρρέεται από ρεύμα προς τη θετική z-διεύθυνση οπότε η δύναμη θα είναι:

$$|\vec{F}| = |I\vec{l}\times\vec{B}| = \left|I.l\hat{k}\times\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\hat{i}-\hat{j})\right| = \frac{l\mu_0 I^2}{4\pi a}\left|-\hat{j}+\hat{i}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\vec{F}}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a}(\hat{i}-\hat{j})} \Rightarrow \frac{|\vec{F}|}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a}\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\frac{|\vec{F}|}{l} = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I^2}{4\pi a}}$$

Η δύναμη στην περίπτωση (α) είναι 3 φορές ισχυρότερη της (β).

9. Ένα σύρμα απείρου μήκους είναι λυγισμένο με τον τρόπο που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το κυκλικό τμήμα έχει ακτίνα 10.0*cm* και το κέντρο του είναι σε απόσταση *r* από το ευθύγραμμο τμήμα του σύρματος. Βρείτε την τιμή της απόστασης *r* τέτοια ώστε το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του κυκλικού τμήματος του σύρματος να είναι μηδέν.



Το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ στο κέντρο του κυκλικού τμήματος, δέχεται συνεισφορά από το μαγνητικό πεδίο του ευθύγραμμου τμήματος και από το μαγνητικό πεδίο του κυκλικού τμήματος:

$$\vec{B} = \vec{B}_{ευθ} + \vec{B}_{κυκλ}$$

Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού, το μαγνητικό πεδίο του άπειρου ευθύγραμμου τμήματος είναι προς το εξωτερικό της σελίδας (έστω +z)

Αντίστοιχα, για το μαγνητικό πεδίο του κυκλικού τμήματος, θα έχουμε $-\hat{z}_0$

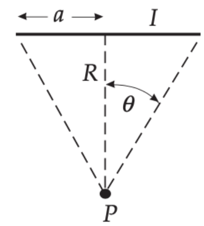
Το μαγνητικό πεδίο του ευθύγραμμου τμήματος είναι: $\vec{B}_{ευθ} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{k}$

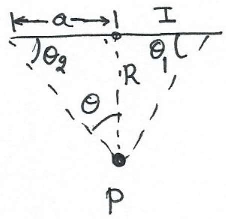
αντίστοιχα το πεδίο του κυκλικού αγωγού: $\vec{B}_{κυκ} = -\frac{\mu_0 I}{2R}\hat{k}$ όπως προκύπτει από τον νόμο των Biot-Savart για κυκλικό βρόχο σε απόσταση $z=0$ από το επίπεδο του βρόχου, (στο κέντρο του βρόχου).

Επομένως: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{k} - \frac{\mu_0 I}{2R}\hat{k} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{\pi}{R}\right)\hat{k}$.

Το μαγνητικό πεδίο θα είναι μηδέν όταν $\frac{1}{r} - \frac{\pi}{R} = 0 \Rightarrow \boxed{r = \frac{R}{\pi} = \frac{10cm}{\pi}}$

10. (α) Βρείτε το μαγνητικό πεδίο σε ένα σημείο P που βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα που διχοτομεί ένα ευθύγραμμο τμήμα σύρματος που διαρρέεται από ρεύμα I, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. (β) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμά σας από το (α) ερώτημα για να βρείτε το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο ενός ορθογώνιου πολυγώνου με N πλευρές. (γ) Δείξτε ότι όταν το N είναι πολύ μεγάλο, το αποτέλεσμά σας προσεγγίζει το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο ενός βρόχου που διαρρέεται από ρεύμα I.





(α) Το μαγνητικό πεδίο στο σημείο P εξαιτίας του ρεύματος που διαρρέει το ευθύγραμμο τμήμα είναι, όπως έχουμε δει στις διαλέξεις:

$$B_P = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\left(\sin\theta_1 + \sin\theta_2\right)$$

με φορά είτε προς το εσωτερικό ή εξωτερικό της σελίδας, ανάλογα αν το ρεύμα που το διαρρέει έχει φορά προς τα δεξιά ή αριστερά αντίστοιχα.

Επειδή το σημείο P βρίσκεται στη διάμεσο του ευθύγραμμου τμήματος $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

$$B_P = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\left(\sin\theta + \sin\theta\right) \Rightarrow \boxed{B_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\sin\theta} \qquad (1)$$

Αλλά $\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}$ οπότε η (1) γίνεται: $\boxed{B_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}}$ (A)

(β) Η γωνία θ για ένα πολύγωνο N πλευρών είναι: $2\theta = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{N}$

Κάθε πλευρά του πολυγώνου συνεισφέρει την ίδια ποσότητα μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του πεδίου, οπότε $B_{og} = N \cdot B_P \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{B_{og} = N\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)}$

(γ) Για μεγάλο αριθμό πλευρών N, π/N είναι μικρή γωνία και άρα $\sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \sim \frac{\pi}{N}$

Επομένως: $B_{og} = \lim_{N\to\infty} N \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \Rightarrow B_{og} \simeq \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\lim_{N\to\infty} N\frac{\pi}{N} \Rightarrow \boxed{B_g = \frac{\mu_0 I}{2R}}$

Η έκφραση αυτή είναι το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο ενός κυκλικού βρόχου.