ΦΥΣ. 111

Τελική Εξέταση: 22-Δεκεμβρίου-2020

Πριν αρχίσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητας).

Ονοματεπώνυμο	**Αριθμός Ταυτότητας**

Απενεργοποιήστε τα κινητά σας.

Η εξέταση περιέχει 10 ισότιμες ασκήσεις και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλες από αυτές. Η μέγιστη συνολική βαθμολογία της εξέτασης είναι 100 μονάδες.

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΣΤΕ ΜΟΝΟ ΤΙΣ ΣΕΛΙΔΕΣ ΠΟΥ ΣΑΣ ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΜΗΝ ΚΟΨΕΤΕ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΣΕΛΙΔΑ

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 180 λεπτά. Καλή Επιτυχία !

Άσκηση	**Βαθμός**
$1^η$ (10μ)	
$2^η$ (10μ)	
$3^η$ (10μ)	
$4^η$ (10μ)	
$5^η$ (10μ)	
$6^η$ (10μ)	
$7^η$ (10μ)	
$8^η$ (10μ)	
$9^η$ (10μ)	
$10^η$ (10μ)	
Σύνολο	

Τύποι που μπορεί να φανούν χρήσιμοι

Γραμμική κίνηση:

$$\upsilon(t)=\upsilon_0+\int_{t_i}^{t_f}a(t)dt$$

$$x(t)=x_0+\int_{t_i}^{t_f}\upsilon(t)dt$$

$\upsilon^2=\upsilon_0^2+2a(x-x_0)$ για α=σταθ.

$x=x_o+\frac{1}{2}(\upsilon+\upsilon_o)t$ για α=σταθ.

$x_{\max}=\frac{\upsilon_o^2\sin 2\theta}{g}$ βεληνεκές

g = 9.8m/s^2

Στροφική κίνηση:

1περιστροφή = 360° = 2π ακτίνια

$$\theta=\frac{s}{r}$$

$$\bar{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t},\quad \bar{\alpha}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\omega=\omega_0+\alpha_{\gamma\omega\nu.}t$$

$$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu.}t^2$$

$$\omega_f^2=\omega_i^2+2\alpha_{\gamma\omega\nu.}\left(\theta_f-\theta_i\right)$$

$$\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi}=\vec{\omega}\times\vec{r}\qquad \left|\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi}\right|=\left|\vec{\omega}\right|r$$

$$\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\quad \vec{a}_{\varepsilon\varphi}=\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.}\times\vec{r}\Rightarrow\left|\vec{a}_{\varepsilon\varphi}\right|=\left|\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.}\right|\left|\vec{r}\right|$$

$$\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}=\vec{\omega}\times\vec{r}\Rightarrow\left|\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}\right|=\frac{\left|\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi}\right|^2}{r}=\left|\vec{\omega}\right|^2 r$$

$$\vec{a}_{\gamma\rho\alpha\mu}=\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.}+\vec{a}_{\varepsilon\varphi}=\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}$$

$$T=\frac{1}{f}=\frac{2\pi r}{\upsilon_{\varepsilon\varphi}}$$

Βαρυτική έλξη:

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$$

$$G=6.67\times10^{-11}\,N\cdot m^2/kg^2$$

$$U_g=-G\frac{m_1m_2}{r}$$

$$E=\frac{1}{2}m\upsilon^2-G\frac{m_1m}{r}$$

Έργο – Ενέργεια:

Έργο σταθερής δύναμης: $W=\vec{F}\cdot\vec{s}$

Έργο μεταβαλλόμενης δύναμης: $W=\int\vec{F}\cdot d\vec{s}$

$$\vec{F}=-\frac{dU}{d\vec{r}}$$

$$\Delta U=-\int_{r_i}^{r_f}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$U_{\varepsilon\lambda}=\frac{1}{2}kx^2$$

$U_g=mgh$ (h<<R$_{\gamma\eta\varsigma}$)

$$W=\Delta E_{\kappa\iota\nu.}$$

$W=-\Delta U$ (για συντηρητικές δυνάμεις)

$$E_{\mu\eta\chi.}=E_{\kappa\iota\nu.}+U$$

$$E_{\kappa\iota\nu.}=\frac{1}{2}m\upsilon^2$$

$W=\Delta E_{\mu\eta\chi.}$ (για μη συντηρητικές δυνάμεις)

$$\vec{F}_{\varepsilon\lambda}=-k\vec{x}$$

$$P=\frac{\Delta W}{\Delta t}=\frac{\Delta E}{\Delta t}$$

$$P=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}$$

Ορμή – Ώθηση - Κρούσεις:

$$\vec{p}=m\vec{\upsilon}$$

Ώθηση: $\vec{I}=\int F\,dt=\Delta\vec{p}$

$$\vec{F}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Απομονωμένο σύστημα: $\vec{p}_i=\vec{p}_f$

Ελαστική κρούση: $\Delta\vec{p}=0,\ \ \Delta E=0$

Μη ελαστική κρούση: $\Delta\vec{p}=0,\ \Delta E\neq0$

Ελαστική κρούση: $\vec{\upsilon}_1-\vec{\upsilon}_2=-\left(\vec{\upsilon}_1'-\vec{\upsilon}_2'\right)$

$$\vec{r}_{CM}=\frac{1}{M_{o\lambda}}\sum_i m\vec{r}_i\qquad r_{CM}=\frac{1}{M_{o\lambda}}\int r\,dm$$

$$\upsilon_{\delta\iota\alpha\varphi\upsilon\gamma\eta\varsigma.} = \sqrt{\frac{2GM_{\gamma\eta}}{R_{\gamma\eta}}}$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G\mathrm{M}_{\mathrm{H}}}\right) r^3$$

$R_{\gamma\eta} = 6.4 \times 10^3 km \quad M_{\gamma\eta} = 5.97 \times 10^{24} kg$

Περιστροφή σώματος:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

$$E_{\kappa\iota\nu}^{\pi\varepsilon\rho.} = \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = I\alpha$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I\vec{\omega}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Απομονωμένο σύστημα: $L_i = L_f$

μετάπτωση γυροσκοπίου $\omega_\mu = \dfrac{\tau}{I\omega_{\pi\varepsilon\rho}}$

Συνθήκες στατικής ισορροπίας:

$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} = 0$ και $\sum \vec{\tau}_{\varepsilon\xi} = 0$

$$\vec{\upsilon}_{CM} = \frac{1}{M_{o\lambda}} \sum_i m\upsilon_i$$

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} = M\vec{a}_{CM}$$

Ταλαντώσεις:

$m\ddot{x} + kx = 0$ Δ.Ε. αρμονικού ταλαντωτή

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = B\sin(\omega t + \theta)$$

$$x(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$$

$$x(t) = Ee^{i\omega t} + Fe^{-i\omega t}$$

$$\upsilon(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi), \quad \upsilon = \pm\omega\sqrt{(A^2 - x^2)}$$

$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$$E = U + E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

Τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) + \cos(a+b) = 2\cos(a)\cos(b)$$

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) + \sin(a+b) = 2\sin(a)\cos(b)$$

$$\cos^2(a) = \frac{1}{1+\tan^2(a)} \qquad \sin^2(a) = \frac{\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}$$

Ροπές αδράνειας:

Συμπαγής σφαίρα: $I_{CM} = 2MR^2/5$

Κοίλη σφαίρα: $I_{CM} = 2MR^2/3$

Συμπαγής κύλινδρος/δίσκος: $I_{CM} = MR^2/2$

Κυλινδρικός φλοιός/στεφάνι: $I_{CM} = MR^2$

Ράβδος: $I_{CM} = ML^2/12$

Ανάπτυγμα Taylor:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(x)|_{x=a} + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(x)|_{x=a} + \frac{1}{3!}(x-a)^3 f'''(x)|_{x=a} + \cdots$$

Διονυμικό Ανάπτυγμα:

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$ όπου $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ για n θετικό ακέραιο εκθέτη

$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}x^{r-k}y^k$ όπου $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}$ για r πραγματικό εκθέτη

$(1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \cdots$ για $|x| << 1$

$(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \cdots$ για $|x| << 1$

$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$ για $|x| << 1$

Άσκηση 1 [10μ]

Υπάρχουν τρεις θεμελιώδεις σταθερές, η σταθερά του Planck $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34} kg\, m^2/s$, η σταθερά της παγκόσμιας έλξης που ισούται με $\mathrm{G} = 6.67 \cdot 10^{-11} m^3/(kg\, s^2)$, και η ταχύτητα του φωτός $c = 3.0 \cdot 10^8 m/s$. Οι σταθερές αυτές μπορούν να συνδυαστούν και να δώσουν μεγέθη με διαστάσεις μήκους, χρόνου και μάζας. Τα μεγέθη αυτά είναι γνωστά ως *μήκος Planck, χρόνος Planck* και *μάζα Planck.* Να βρείτε τα τρία αυτά μεγέθη και τις αντίστοιχες τιμές τους.

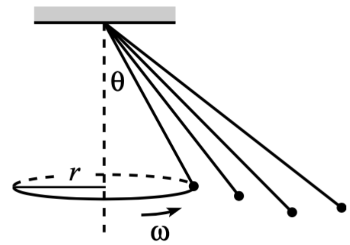
Άσκηση 2 [10μ]

Ένα άτομο ρίχνει μια μπάλα με ταχύτητα υ_0 και γωνία 45^o ως προς την οριζόντια διεύθυνση και χτυπά έναν στόχο. Κατόπιν το άτομο ρίχνει την μπάλα με την ίδια ταχύτητα αλλά με μια τέτοια γωνία ώστε η μπάλα να χτυπήσει στο έδαφος να αναπηδήσει και να φθάσει στον

ίδιο στόχο. Οι τροχιές της μπάλας πριν και μετά την αναπήδησή της είναι πανομοιότυπες. Σε ποια από τις δύο περιπτώσεις ρίψης η μπάλα φθάνει πιο γρήγορα στον στόχο και ποια η χρονική διαφορά στις δύο περιπτώσεις. Θεωρήστε ότι η κρούση με το έδαφος είναι τέλεια ελαστική και αγνοήστε την αντίσταση από τον αέρα.

Άσκηση 3 [10μ]

Ένας μεγάλος αριθμός από μάζες είναι προσαρτημένος μέσω νημάτων διαφορετικών μηκών από ένα κοινό ακλόνητο σημείο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Όλες οι μάζες περιστρέφονται σε οριζόντιους κύκλους (ένας τέτοιος κύκλος φαίνεται στο σχήμα) διαφορετικών ακτίνων με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω.



(α) Βρείτε την ακτίνα r μιας τέτοιας κυκλικής τροχιάς συναρτήσει της γωνίας θ που σχηματίζει το νήμα που συγκρατεί τη μάζα με την κατακόρυφο διεύθυνση. [**4μ**]

(β) Αν πάρετε μια φωτογραφία της διάταξης κάποια τυχαία χρονική στιγμή όταν όλες οι μάζες βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο (όπως φαίνεται στο σχήμα για 4 μάζες), ποια θα είναι η μορφή της καμπύλης που περνά από τις μάζες; [**6μ**]

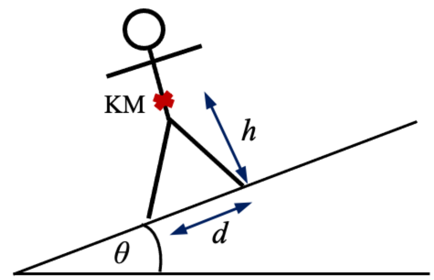
Άσκηση 4 [10μ]

Σώμα μάζας $3m$ κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα υ και σώμα μάζας m κινείται προς τα αριστερά επίσης με ταχύτητα υ. Τα σώματα συγκρούονται ελαστικά. Να βρείτε τις ταχύτητές τους μετά την σύγκρουση στο σύστημα αναφοράς του ακίνητου παρατηρητή. Θα πρέπει να λύσετε το πρόβλημα δουλεύοντας στο:

(α) Στο σύστημα αναφοράς του ακίνητου παρατηρητή. [**5μ**]

(β) Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας. [**5μ**]

Άσκηση 5 [10μ]



Ένα άτομο στέκεται σε μια κεκλιμένη επιφάνεια κλίσης θ με την οριζόντια διεύθυνση, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το άτομο έχει τα πόδια του ανοικτά με τέτοιο τρόπο ώστε το ένα πόδι να βρίσκεται χαμηλότερα στην κεκλιμένη επιφάνεια ενώ το άλλο πόδι να βρίσκεται σε υψηλότερη θέση. Η απόσταση μεταξύ των ποδιών είναι d. Το κέντρο μάζας, ΚΜ, του ατόμου είναι σε ύψος h από την κεκλιμένη επιφάνεια στην κάθετο από την κεκλιμένη επιφάνεια και στο μέσο μεταξύ του ανοίγματος των ποδιών του. Υποθέστε ότι ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των ποδιών του ατόμου και της κεκλιμένης επιφάνειας είναι αρκετά μεγάλος ώστε το άτομο να μη γλιστρήσει πάνω στην επιφάνεια.

(α) Να κάνετε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος. [**2μ**]

(α) Ποιο είναι το μέτρο της κάθετης δύναμης σε κάθε πόδι; [**6μ**]

(β) Ποια πρέπει να είναι η απόσταση μεταξύ των ποδιών του ατόμου ώστε η κάθετη αντίδραση από την κεκλιμένη επιφάνεια στο πόδι που βρίσκεται στην υψηλότερη θέση να είναι σχεδόν 0. Αυτή είναι η στιγμή που το άτομο αρχίζει να στρέφεται και πέφτει. [**2μ**]

Άσκηση 6 [10μ]

Δύο μπάλες του basket, κάθε μία μάζας m και ακτίνας R βρίσκονται σε επαφή.

(α) Να βρείτε τη βαρυτική δύναμη f που ασκεί κάθε μπάλα στην άλλη. [**1μ**]

(β) Οι δύο μπάλες, η μία ακριβώς πάνω από την άλλη και σε επαφή, αφήνονται να κινηθούν κάτω από την βαρυτική έλξη ενός μακρινού πλανήτη μάζας M. Υποθέστε ότι δεν υπάρχει οποιαδήποτε άλλο ουράνιο σώμα που να επηρεάζει την κίνηση των δύο μπαλών. Ποιο το μέτρο της διαφοράς της ελκτικής δύναμης, ΔF, που ασκεί ο πλανήτης στις δύο μπάλες συναρτήσει της απόστασης r όπως μετριέται από το κέντρο του πλανήτη στο σημείο επαφής των δύο μπαλών; [**2μ**]

(γ) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η ακτίνα των μπαλών είναι πολύ μικρότερη από την απόστασή τους από τον πλανήτη ($R << r$) να γράψετε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος σε μια απλούστερη προσεγγιστική μορφή. [**2μ**]

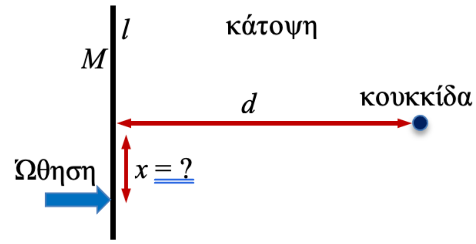
(δ) Βρείτε συναρτήσει των μεγεθών m, M, και R την απόσταση r_o στην οποία οι δύο μπάλες χάνουν επαφή. [**4μ**]

(ε) Θεωρήστε ότι οι μπάλες και ο πλανήτης έχουν την ίδια πυκνότητα μάζας ($\rho = M/V$). Δείξτε ότι στην περίπτωση αυτή $r_o = 2R_{\pi\lambda.}$, όπου $R_{\pi\lambda.}$ είναι η ακτίνα του πλανήτη.

<u>*Πληροφοριακά:*</u> ο υπολογισμός αυτός σχετίζεται με έναν περισσότερο πολύπλοκο υπολογισμό του *ορίου Roche*. Ένας δορυφόρος που συγκρατείται από εσωτερική βαρύτητα της ύλης του, θα καταστραφεί αν πλησιάσει περισσότερο από $2.44R$ της ακτίνας του πλανήτη ως προς τον οποίο περιστρέφεται γιατί τότε η βαρυτική έλξη του πλανήτη στα διάφορα τμήματα μάζας του δορυφόρου γίνεται πολύ διαφορετική με αποτέλεσμα να αποκολλιούνται. Τα δακτυλίδια του πλανήτη Κρόνου αποτελούνται από κοσμική σκόνη και μικρά αντικείμενα, και δεν συγκρατούνται από την βαρύτητα, βρίσκονται σε απόσταση περίπου του ορίου *Roche*, σε αντίθεση με τα πολλά φεγγάρια του που βρίσκονται σε μεγαλύτερες αποστάσεις από το όριο *Roche*. [**1μ**]

Άσκηση 7 [10μ]

Μία ράβδος μήκους l και μάζας M βρίσκεται ακίνητη πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Για πολύ μικρό χρονικό διάστημα ασκείται στη ράβδο μια ώθηση κάθετη στο μήκος της και σε απόσταση x από το κέντρο μάζας της. Πάνω στο τραπέζι είναι βαμμένη μια κουκκίδα που βρίσκεται σε απόσταση d από το κέντρο της ράβδου πριν δοθεί η ώθηση.

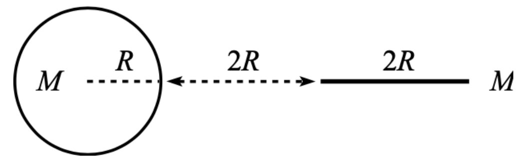


(α) Βρείτε την απόσταση x (συναρτήσει του l και d) στην οποία θα πρέπει να ασκηθεί η ώθηση ώστε η ράβδος να κάνει μια πλήρη περιστροφή όταν το κέντρο της περνά από την κουκκίδα. [**7μ**]

(β) Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση d της κουκκίδας από το κέντρο της ράβδου ώστε να υπάρχει μια τιμή του x που να ικανοποιεί τη συνθήκη του προβλήματος; [**3μ**]

Άσκηση 8 [10μ]

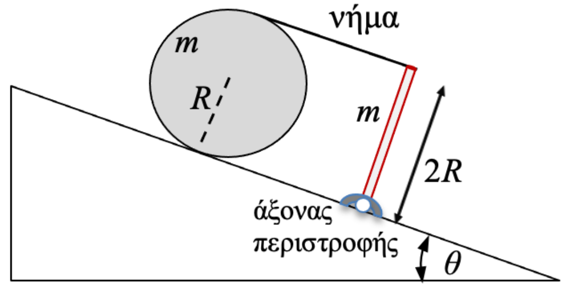
Μία ομογενής σφαίρα μάζας M και ακτίνας R είναι τοποθετημένη σε απόσταση $2R$ από μια ομοιόμορφη ράβδο μάζας M και μήκους $2R$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα αντικείμενα αφήνονται από την κατάσταση της ηρεμίας να κινηθούν ελεύθερα. Εξαιτίας της βαρυτικής έλξης που ασκεί το ένα στο άλλο τα σώματα πλησιάζουν μεταξύ τους.



(α) Να βρεθεί η βαρυτική δυναμική ενέργεια μεταξύ της σφαίρας και της ράβδου. [**5μ**]

(β) Έστω ότι η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα είναι: $U = -\frac{GM^2}{2R}\ln\left(1+\frac{l}{d}\right)$, όπου l το μήκος της ράβδου και d η απόσταση μεταξύ της σφαίρας και της ράβδου. Να βρεθεί η ταχύτητά τους ακριβώς πριν συγκρουστούν. [**5μ**]

Άσκηση 9 [10μ]



Ένας ομογενής συμπαγής κύλινδρος μάζας m και ακτίνας R και μια ομογενής ράβδος μήκους $2R$ και μάζας m βρίσκονται πάνω σε κεκλιμένη επιφάνεια γωνίας κλίσης θ. Η ράβδος είναι τοποθετημένη κάθετα στην κεκλιμένη επιφάνεια και μπορεί να στραφεί ως προς σταθερό άξονα που περνά από το κατώτερο άκρο της και είναι στερεωμένος στην κεκλιμένη επιφάνεια. Η διάταξη φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ο κύλινδρος μπορεί να κυλήσει χωρίς ολίσθηση πάνω στην κεκλιμένη επιφάνεια. Ένα νήμα αμελητέας μάζας συνδέει το πάνω μέρος του κυλίνδρου με το πάνω άκρο της ράβδου όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα δύο σώματα κρατιούνται αρχικά ακίνητα. Να βρεθεί η επιτάχυνση του κέντρου του κυλίνδρου όταν τα σώματα αφεθούν ελεύθερα να κινηθούν.

Άσκηση 10 [10μ]

Δύο μάζες m και M βρίσκονται στις άκρες ενός ιδανικού ελατηρίου αμελητέας μάζας, φυσικού μήκους l και σταθεράς ελαστικότητας k. Το σύστημα ελατηρίου-μαζών βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Οι δύο μάζες απομακρύνονται μεταξύ τους και το ελατήριο επιμηκύνεται κατά μία απόσταση A. Οι μάζες αφήνονται ελεύθερες να κινηθούν από την κατάσταση ηρεμίας. Να βρείτε τη θέση της μάζας m συναρτήσει του χρόνου t. Θεωρήστε ότι $x = 0$ στο μέσο της διαδρομής της μάζας. *Υπόδειξη:* Μπορείτε να σκεφθείτε την κίνηση του κέντρου μάζας.