Θεωρήστε την κίνηση ενός σώματος μάζας m σε ένα ελκτικό δυναμικό της μορφής:

$$V(r) = -k e^{-r/a} \qquad (k>0,\ a>0)$$

(α) Σχεδιάστε το ενεργό δυναμικό για στροφορμή ℓ και περιγράψτε τα είδη των κινήσεων που μπορούν να συμβούν. Θεωρήστε μικρές κ μεγάλες τιμές της στροφορμής

(β) Βρείτε την συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα k, α, m και ℓ ώστε να υπάρχει σταθερή κυκλική τροχιά για το δυναμικό αυτό

(γ) Βρείτε τη συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων για το κυκλική αυτή τροχιά ακτίνας R και συγκρίνετε με την συχνότητα περιστροφής της κυκλικής τροχιάς. Μπορεί αυτή η διαταραγμένη τροχιά να είναι κλειστή? (περιοδική)

<u>Λύση</u>

(α) Από τη στιγμή που έχουμε κεντρικό δυναμικό, η στροφορμή διατηρείται

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} - k e^{-r/a} = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

Για να σχεδιάσουμε το δυναμικό παίρνουμε διάφορες οριακές συνθήκες, $r\to 0$, $r\to\infty$

$$r\to 0 \qquad V_{eff} \cong \frac{\ell^2}{2mr^2} \to \infty$$

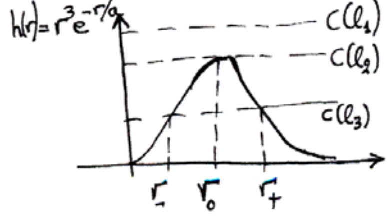
$$r\to \infty \qquad V_{eff} \sim \frac{\ell^2}{2mr^2} \to 0$$ αφού $e^{-r/a}$ ελαττώνεται πολύ πιο γρήγορα από r^{-2}

Για τη συμπεριφορά του V_{eff} ανάμεσα στα 2 αυτά όρια:

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = 0 \Rightarrow -\frac{\ell^2}{mr^3} + \frac{k}{a} e^{-r/a} = 0 \Rightarrow r^3 e^{-r/a} = \frac{a\ell^2}{mk} \Rightarrow r^3 e^{-r/a} = C(\ell)$$

όπου $C(\ell) = \frac{a\ell^2}{mk}$

Εξετάζουμε τη συμπεριφορά του $C(\ell)$



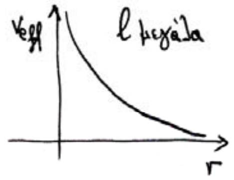
$$\frac{dh(r)}{dr} = e^{-r/a}\left(3r^2 - \frac{r^3}{a}\right) = 0 \Rightarrow r=0,\ \boxed{r = 3a = r_0}$$

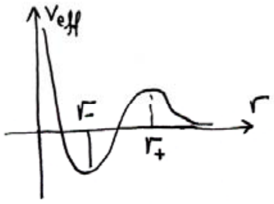
Για $\ell=\ell_1>\ell_2>\ell_3$ $\;V_{eff}(r) \neq 0$ για κάθε r

Για $\ell=\ell_2$ υπάρχει 1 μόνο σημείο τομής και $\frac{dV_{eff}}{dr}(r_0=3a)=0$

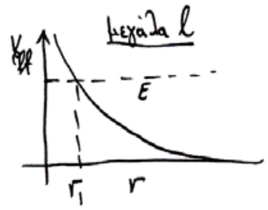
Για $\ell=\ell_3$ υπάρχουν 2 σημεία τομής και $\frac{dV_{eff}}{dr}(r=r_\pm)=0$

Επομένως για μεγάλα ℓ, $V_{eff}(r)$ δεν έχει μέγιστο ή ελάχιστο. Για μικρές τιμές της στροφορμής ℓ η γενική συμπεριφορά του $V_{eff}(r)$ είναι ότι έχει ένα ελάχιστο για $r=r_-$ και ένα μέγιστο για $r=r_+$. Αυτά βγαίνουν από την ποιοτική εξέταση της συμπεριφοράς του $V_{eff}(r)$.

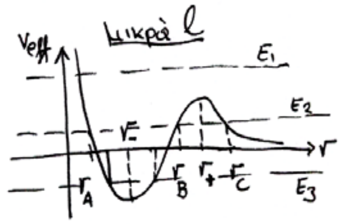




Ανάλογα με την ενέργεια E και πιθανόν τις αρχικές συνθήκες έχουμε διαφορετικά είδη κίνησης:



$r > r_1$ μη φραγμένη



(i) $E=E_1>0>V_{eff}$

μη φραγμένη κίνηση για $r>r_1$

(ii) $0<E<V_{eff}$

Αν $r(t=0)>r_C$ μη φραγμένη

Αν $r_A \le r(t=0) \le r_B$ φραγμένη

(iii) $V_{eff}<E<0$: φραγμένη

(iv) $E=V_{eff}(r_-)$: σταθερή κυκλική

$E=V_{eff}(r_+)$: ασταθής κυκλική

Οι τροχιές δεν είναι κωνικές τομές όπως για κίνηση Kepler.

(β) Για κυκλική τροχιά ακτίνας $r=r^*$ πρέπει να έχουμε $\frac{dV_{eff}}{dr}(r=r^*)=0$ κ $E=V_{eff}(r^*)$

Για σταθερή κυκλική τροχιά θα πρέπει $V''_{eff}(r^*)>0$

$$V'_{eff}(r^*)=0 \Rightarrow r^{*3}e^{-r/a}=\frac{a\ell^2}{mk} \quad (1)$$

$$V''_{eff}(r^*)>0 \Rightarrow \frac{3\ell^2}{mr^{*4}}-\frac{k}{a^2}e^{-r^*/a}>0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{\ell^2}{mr^3}=\frac{k}{a}e^{-r^*/a}$$

$$3\frac{\cancel{k}}{\cancel{a}}\cancel{e^{-r^*/a}}-\frac{\cancel{k}}{\cancel{a^2}}r^*\cancel{e^{-r^*/a}}>0$$

$$\Rightarrow 3a-r^*>0 \Rightarrow \boxed{r^*<3a}$$

(γ) Η περίοδος περιστροφής είναι :

$$\ell = mR^2\dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{\ell}{mR^2} \Rightarrow \boxed{T_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{2\pi m R^2}{\ell}}$$

Αν αυτή η κυκλική τροχιά διαταραχθεί τότε $r(t) = R + \delta r(t)$

Η Lagrangian θα γίνει :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\delta\dot{r}^2 - V_{eff}(R+\delta r) = \frac{1}{2}m\delta\dot{r}^2 - \Big[\overbrace{V_{eff}(R) + \underbrace{V'_{eff}(R)}_{0\ (\text{σταθερή τροχιά})}\delta r + \frac{1}{2}\underbrace{V''_{eff}(R)}_{>0}\delta r^2 + O(\delta r^3)}^{\text{ανάπτυγμα Taylor}}\Big]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\delta\dot{r}^2 - \frac{1}{2}V''_{eff}(R)\,\delta r^2$$

$V_{eff}(R) = \text{σταθ} = E$ δεν παίζει ρόλο στη δυναμική

Επομένως η εξίσωση κίνησης γίνεται :

$$m\delta\ddot{r} + V''_{eff}(R)\,\delta r = 0 \Rightarrow \delta r = \delta r_0 \cos\left[\sqrt{\frac{V''_{eff}(R)}{m}}\,t + \alpha\right]$$

όπου $\delta r_0 = \delta r(t=0)$ και $\alpha = \text{σταθ.}$

Η περίοδος μικρών ταλαντώσεων θα είναι: $\omega = \sqrt{\frac{V''_{eff}(R)}{m}} \Rightarrow T_{\tau\alpha\lambda} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{V''_{eff}(R)}}$

Αλλά $V''_{eff}(R) = \frac{3\ell^2}{mR^4} - \frac{\cancel{k}}{a^{\cancel{2}}}\,\frac{\cancel{a}\,\ell^2}{m\cancel{k}R^3} = \frac{\ell}{mR^4}\left(3 - \frac{R}{a}\right)$

οπότε $T_{\tau\alpha\lambda} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{\ell}{mR^4}\left(3-\frac{R}{a}\right)}} = \frac{2\pi m R^2}{\ell}\sqrt{\frac{1}{3-R/a}} = T_{\pi\varepsilon\rho}\Big/\sqrt{3-\frac{R}{a}}$

Η διαταραγμένη τροχιά είναι κλειστή (~~..~~ αν για 2 ακεραίους n_1 και n_2

$$n_1 T_{\tau\alpha\lambda} = n_2 T_{\pi\varepsilon\rho} \Rightarrow n_1 \frac{\cancel{T_{\pi\varepsilon\rho}}}{\sqrt{3-\frac{R}{a}}} = n_2 \cancel{T_{\pi\varepsilon\rho}} \Rightarrow 3 - \frac{R}{a} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2$$

για παράδειγμα $n_1 = 1,\ n_2 = 2 \Rightarrow 3 - \frac{R}{a} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{R}{a} = \frac{11}{4}$