Διάδοση σφαλμάτων – Στατιστικά σφάλματα

Χρησιμοποιώντας τους κανόνες για πράξεις μεταξύ μετρούμενων τιμών με διαφορετικό αριθμό σημαντικών ψηφίων μπορούμε να υπολογήσουμε την αβεβαιότητα ενός αποτελέσματος.

Υπάρχουν ωστόσο καλύτεροι και περισσότεροι ακριβείς τρόποι

Θεωρήστε ότι υπολογίζετε μια ποσότητα Q η οποία εξαρτάται από 3 μετρούμενα μεγέθη x, y, z. Η Q είναι επομένως συνάρτηση 3 μεταβλητών

$$Q = f(x,y,z)$$

Κάθε μια από τα μετρούμενα μεγέθη συνοδεύονται με κάποια αβεβαιότητα $x \pm \Delta x$ $(y \pm \Delta y)$ $(z \pm \Delta z)$. Η αβεβαιότητα στο αποτέλεσμα Q δίνεται από

$$\Delta Q = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right)^2\right)}$$

Η έκφραση $\frac{\partial f}{\partial x}$ παριστάνει τη μερική παράγωγο της f ως προς τη μεταβλητή x

Είναι εύκολο να υπολογισθεί σαν η παράγωγος της συνάρτησης ως προς την εκάστοτε μεταβλητή, κρατώντας τα y και z σταθερά (άρα η παράγωγός τους ως προς x είναι 0).

Προσοχή: Η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για ανεξάρτητες μεταβλητές οι αβεβαιότητες των οποίων είναι τυχαίες (στατιστικές).
Η κατανομή των μεταβλητών περιγράφεται από τη Gaussian κατανομή

Παράδειγμα υπολογισμού σφάλματος

Έστω ότι η συναρτησιακή εξάρτηση της Q από τα x, y και z δίνεται από τη σχέση

$$Q = f(x,y,z) = k\frac{xy}{z^2}$$

Όπου k σταθερά με k = 0.3872

Υποθέτουμε ακόμα ότι

$$x = 21.7 \pm 0.2$$
$$y = 83.9 \pm 0.3$$
$$z = 2.51 \pm 0.04$$

Υπολογίζουμε πρώτα τη τιμή της Q :

$$Q = k\frac{xy}{z^2} = 0.3872\frac{21.2 \times 83.9}{2.51^2} = 111.8947217$$

(Από σημαντικά ψηφία θα έπρεπε να γράψουμε ότι Q = 112±5)

Θα κάνουμε στρογγυλοποίηση αφού πρώτα υπολογήσουμε την αβεβαιότητα

Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = k\frac{y}{z^2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = k\frac{x}{z^2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = -2k\frac{xy}{z^3}$$

Και χρησιμοποιώντας την εξίσωση της αβεβαιότητας έχουμε:

$$\Delta Q = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right)^2\right)} \Rightarrow \Delta Q = \sqrt{\left(\left(k\frac{y}{z^2}\Delta x\right)^2 + \left(k\frac{x}{z^2}\Delta y\right)^2 + \left(-2k\frac{xy}{z^3}\Delta z\right)^2\right)}$$

$$\Rightarrow \Delta Q = \sqrt{k\left(\left(\frac{83.9}{2.51^2}0.2\right)^2 + \left(\frac{21.7}{2.51^2}0.3\right)^2 + \left(-2\frac{83.9 \times 21.7}{2.51^3}0.04\right)^2\right)} = \sqrt{(1.0313)^2 + (0.4001)^2 + (-3.5664)^2} \Rightarrow \Delta Q = 3.734$$

Επομένως ΔQ = 4 (1 σημαντικό ψηφίο) . Το τελικό αποτέλεσμα είναι: $Q = 112 \pm 4$

Διάδοση σφαλμάτων – Πράξεις

Σαν εφαρμογές του ορισμού της αβεβαιότητας μπορούμε να έχουμε:

(1) $Q = f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2$ με α_1 και α_2 σταθερές

Από το γενικό τύπο της απόκλισης θα έχουμε:

$$\Delta Q = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2} = \sqrt{(a_1 \Delta x_1)^2 + (a_2 \Delta x_2)^2}$$

Για $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ έχουμε: $\Delta Q = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}$

Για άθροισμα ή διαφορά η απόκλιση είναι το άθροισμα των τετράγωνων

(2) $Q = f(x_1, x_2) = a_1 x_1 \times a_2 x_2$ με α_1 και α_2 σταθερές

$$\Delta Q = \sqrt{(a_1 a_2 x_2 \Delta x_1)^2 + (a_1 a_2 x_1 \Delta x_2)^2} \Rightarrow \Delta Q = a_1 a_2 \sqrt{(x_2 \Delta x_1)^2 + (x_1 \Delta x_2)^2}$$

Αν προσπαθήσουμε να βρούμε το σχετικό σφάλμα $\frac{\Delta Q}{Q}$ τότε παίρνουμε:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{a_1 a_2}{a_1 a_2 x_1 x_2}\sqrt{x_2^2 \Delta x_1^2 + x_1^2 \Delta x_2^2} \Rightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = \sqrt{\frac{\Delta x_1^2}{x_1^2} + \frac{\Delta x_2^2}{x_2^2}}$$

(3) $Q = f(x_1, x_2) = a_1 x_1 / a_2 x_2$ με α_1 και α_2 σταθερές

$$\Delta Q = \sqrt{\left(\frac{a_1}{a_2}\frac{\Delta x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{a_2}\frac{x_1}{x_2^2}\Delta x_2\right)^2} \Rightarrow \Delta Q = \frac{a_1}{a_2}\sqrt{\frac{\Delta x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_1^2 \Delta x_2^2}{x_2^4}}$$ με σχετικό σφάλμα $$\Rightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = \sqrt{\frac{\Delta x_1^2}{x_1^2} + \frac{\Delta x_2^2}{x_2^2}}$$

Διάδοση σφαλμάτων – πράξεις

(4) $Q = f(x) = ax^m$ με α και m σταθερές

$$\Delta Q = \sqrt{\left(amx^{(m-1)}\Delta x\right)^2} \Rightarrow \Delta Q = amx^{(m-1)}\Delta x$$ με σχετικό σφάλμα $\dfrac{\Delta Q}{Q} = m\dfrac{\Delta x}{x}$

(5) $Q = f(x) = ae^{mx}$ με α και m σταθερές

$$\Delta Q = \sqrt{\left(ame^{mx}\Delta x\right)^2} \Rightarrow \Delta Q = ame^{mx}\Delta x$$ με σχετικό σφάλμα $\dfrac{\Delta Q}{Q} = m\Delta x$

(6) $Q = f(x) = a\ln(mx)$ με α και m σταθερές

$$\Delta Q = \sqrt{\left(am\frac{\Delta x}{x}\right)^2} \Rightarrow \Delta Q = am\frac{\Delta x}{x}$$

Προσοχή: Ένα συνηθισμένο λάθος στον υπολογισμό σφαλμάτων προέρχεται από πράξεις μεταξύ των μεταβλητών που ορίζουν μια ποσότητα

Παράδειγμα: Έστω ότι μετράτε 2 αντιστάσεις, R_1 και R_2 οι οποίες είναι συνδεδεμένες παράλληλα και έχουν αβεβαιότητα ΔR_1 και ΔR_2. Θέλετε την αβεβαιότητα της ολικής αντίστασης R_{tot}.

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{tot} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Αν προσπαθήσετε να εφαρμόσετε τους παραπάνω κανόνες ξεχωριστά για τον αριθμητή και παρονομαστή, η αβεβαιότητα της R_{tot} θα είναι λάθος αφού αριθμητής και παρονομαστής δεν είναι ανεξάρτητοι.

Μετάδοση συστηματικών σφαλμάτων

Τα σφάλματα αυτά έχουν πάντοτε το ίδιο πρόσημο στην απόκλιση από την πραγματική τιμή

Έστω ότι μετρούμε 2 ποσότητες x και y με σφάλμα Δx και Δy των οποίων το πρόσημο είναι προσδιορισμένο.

Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης των x και y δίνει μια ποσότητα R :

$R + \Delta R = (x + \Delta x) + (y + \Delta y) = (x + y) + (\Delta x + \Delta y)$ Το σφάλμα είναι $\Delta R = \Delta x + \Delta y$

Το συστηματικό σφάλμα του αθροίσματος μεταβλητών που περιέχουν συστηματικό σφάλμα είναι το άθροισμα των επιμέρους σφαλμάτων

Το συστηματικό σφάλμα της διαφοράς μεταβλητών που περιέχουν συστηματικό σφάλμα είναι η διαφορά των επιμέρους σφαλμάτων

Το σφάλμα του γινομένου 2 μεταβλητών με επιμέρους συστηματικά σφάλματα

$$R + \Delta R = (x + \Delta x) \times (y + \Delta y) = xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \Delta y$$

Αν θεωρήσουμε τα σχετικά σφάλματα και υποθέσουμε ότι $\Delta x/x$ και $\Delta y/y$ είναι μικρές ποσότητες, τότε και $\Delta x \Delta y/xy$ θα είναι πολύ μικρή ποσότητα και μπορούμε να την αγνοήσουμε:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \Delta y}{xy} \approx \frac{y\Delta x + x\Delta y}{xy} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

Μετάδοση συστηματικών σφαλμάτων

Άν είχαμε τη διαίρεση δύο ποσοτήτων x και y

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y} - \frac{x}{y}}{\frac{x}{y}} = \frac{\frac{(x+\Delta x)y}{(y+\Delta y)y} - \frac{x(y+\Delta y)}{y(y+\Delta y)}}{\frac{x}{y}} \Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = \frac{(x+\Delta x)y - x(y+\Delta y)}{x(y+\Delta y)} \approx \frac{y\Delta x - x\Delta y}{xy} = \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y}$$

Επομένως όταν δύο ποσότητες διαιρούνται το σχετικό συστηματικό σφάλμα του αποτελέσματος δίνεται από το σχετικό συστηματικό σφάλμα του αριθμητή μείον το σχετικό συστηματικό σφάλμα του παρονομαστή

Ανάλογες σχέσεις ισχύουν και για υπολογιζόμενες ποσότητες που περιέχουν εκθέτες. Όταν μια ποσότητα x είναι υψωμένη σε δύναμη P τότε το σχετικό συστηματικό σφάλμα του αποτελέσματος είναι το σχετικό συστηματικό σφάλμα του x πολ/σμένο με P. Αυτό ισχύει και για αρνητικούς εκθέτες

Γραφικές παραστάσεις

Μια γραφική παράσταση αποτελεί μια ακριβή γραφική αναπαράσταση των πειραματικών δεδομένων.

Η γραφική παράσταση είναι ένας ιδιαίτερα αποδοτικός τρόπος για να παρουσιαστούν οι μετρήσεις και υπολογισμοί που έχουμε κάνει.

Με το τρόπο αυτό μπορεί οποιοσδήποτε να δει το συσχετισμό μεταξύ διαφόρων μεγεθών αλλά και τη διασπορά (ακρίβεια) των συλλεγμένων μετρήσεων καθώς και οποιαδήποτε προτιμήσεις των μεγεθών (π.χ.περιγράφονται τα δεδομένα από ευθεία γραμμή; ποια η κλίση της κλπ).

Όπως και σε μια φωτογραφία, πρέπει να λάβουμε υπόψη το τρόπο με τον οποίο αντιπροσωπεύουμε τα δεδομένα. Όπως σε μια φωτογραφία, η γωνία λήψης της μπορεί να ενισχύσει ή να κρύψει κάποια χαρακτηριστικά του θέματός της έτσι και στην γραφική αναπαράσταση δεδομένων έχει σημασία η επιλογή των αξόνων αφού μπορούν να κρύψουν ή να διαφοροποιήσουν χαρακτηριστικά των δεδομένων

Θεωρήστε ένα πείραμα στο οποίο θέλετε να εξετάσετε το ενδοχόμενο συσχέτισης μεταξύ των φάσεων της σελήνης και του μήκους μιας σανίδας ξύλου

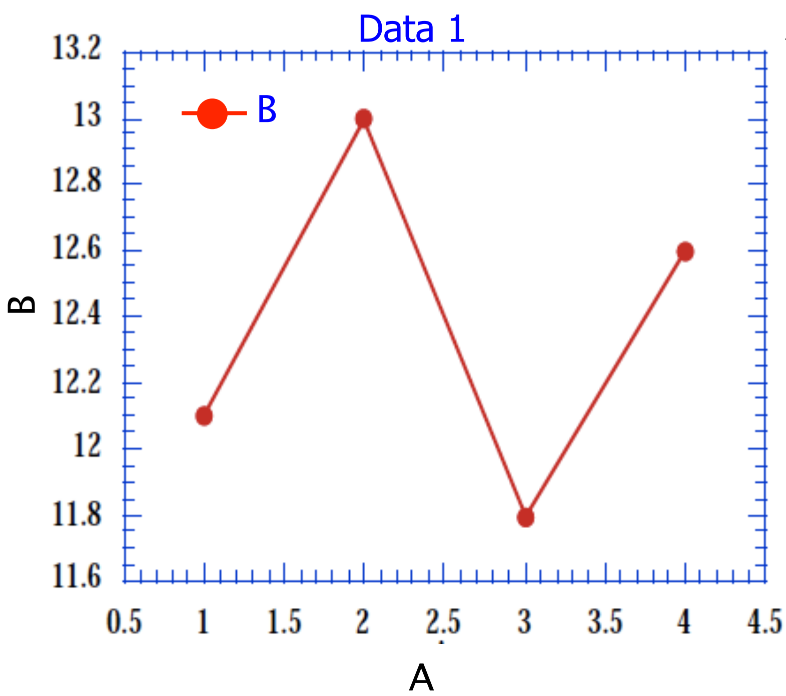
Έστω ότι πήρατε τις ακόλουθες μετρήσεις

Φάσεις σελήνης	Μήκος σανίδας (cm)
1^0 τέταρτο	12.1±0.5
2^0 τέταρτο	13.0±0.8
3^0 τέταρτο	11.8±0.5
4^0 τέταρτο	12.6±0.5

Γραφικές παραστάσεις – Πρώτο γράφημα

Σχεδιάζοντας το μήκος της σανίδας συναρτήσει των φάσεων της σελήνης μπορείτε να δείτε αν υπάρχει κάποιος συσχετισμός μεταξύ των μεγεθών.

Ο συνήθης τρόπος γραφικής παράστασης είναι να διαλέξετε αρχικά την ανεξάρτητη μεταβλητή σας (στη προκειμένη περίπτωση οι φάσεις της σελήνης) και να την τοποθετήσετε στον οριζόντιο άξονα, ενώ στο κατακόρυφο άξονα τοποθετείτε την εξαρτημένη μεταβλητή (το μήκος της σανίδας)



Αν χρησιμοποιήσουμε κάποιο γραφικό λογισμικό ενός υπολογιστή και κάνουμε το γράφημα θα μοιάζει όπως στο σχήμα.

Υπάρχουν ωστόσο πολλά λάθη στο τρόπο που σχεδιάσαμε τη γραφική αυτή παράσταση.

Αρχικά κάθε παράσταση θα πρέπει να έχει ένα σωστό τίτλο και οι άξονες να έχουν Ονομασίες αντιπροσωπευτικές των μεγεθών που αντιπροσωπεύουν

Ο τίτλος θα μπορούσε να είναι “ συσχετισμός φάσεων σελήνης και μήκους σανίδας”

Με το τρόπο αυτό ο αναγνώστης ξέρει τι να περιμένει να δει στη παράσταση.

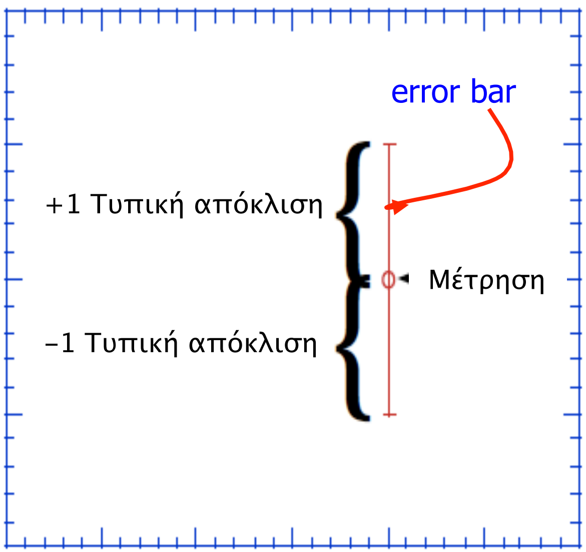
Ο οριζόντιος άξονας θα πρέπει να έχει το τίτλο “φάσεις σελήνης (τέταρτα)” ενώ ο κατακόρυφος άξονας θα είχε το τίτλο “Μήκος σανίδας (cm)”

Γραφικές παραστάσεις – Υποδιαιρέσεις αξόνων

Ο x–άξονας μπορεί να αναπαρασταθεί μόνο με ακέραιες (οι φάσεις της σελήνης) επομένως δεν χρειαζόμαστε πολλές υποδιαιρέσεις)

Πόσες όμως υποδιαιρέσεις; Αρκετές ώστε ο x–άξονας να περιέχει όλα τα δεδομένα και τουλάχιστον μια επιπλέον σαν ανώτερο και κατώτερο όριο ώστε να δίνουν τη σιγουριά στον αναγνώστη ότι δεν υπάρχουν άλλα σημεία.

Ποιά η κλίμακα του y– άξονα και το εύρος της; Δε θέλουμε μια κλίμακα στην οποία τα ακρώτατα σημεία να μοιάζουν ότι συμπίπτουν. Ένας πρακτικός Κανόνας είναι να συμπεριλαμβάνουμε πάντοτε τη τιμή 0 εφόσον η τιμή αυτή μπορεί να ληφθεί σε μια μέτρηση. Παρόλο το μήκος της σανίδας δεν είναι 0 για πολύ μικρές σανίδες μπορεί να πάρουμε τέτοια τιμή.



Δεν θα πρέπει το εύρος της υποδιαίρεσης της κλίμακας να είναι πολύ μεγάλο ώστε όλες οι μετρήσεις τεχνικά να πέφτουν σε μια υποδιαίρεση.

Στα περισσότερα γραφήματα που θα έχετε να κάνετε στο εργαστήριο θα πρέπει να ξεκινάτε τον y–άξονα από το 0.

Τα δεδομένα στο προηγούμενο γράφημα φαίνονται να μην έχουν κάποια συσχέτιση και ότι είναι τυχαία. Αυτό γιατί οι τυχαίες διακυμάνσεις στις μετρήσεις δημιουργεί την αβεβαιότητα της κάθε μέτρησης.

Αν σχεδιάζαμε μια κατακόρυφη γραμμή με μήκος όσο το μέγεθος της ±1 τυπικής απόκλισης κάθε μέτρησης θα μπορούσαμε να δείξουμε γραφικά την ακρίβεια του πειράματος

Γραφικές παραστάσεις – error bars

Αν οι μετρήσεις που έχουμε είναι πάρα πολλές τότε ο υπολογισμός όλων των αβεβαιοτήτων είναι επίπονος και χρονοβόρος.

Παρατηρούμε όμως ότι οι περισσότερες μετρήσεις έχουν παρόμοια αβεβαιότητα και οι τιμές των μετρήσεων που βρίσκονται στο μέσο του εύρους των τιμών που καλύπτουν οι μετρήσεις έχουν παρόμοια αβεβαιότητα.

Μεγαλύτερη αβεβαιότητα παρουσιάζουν οι μετρήσεις που βρίσκονται στα άκρα του εύρους των μετρήσεων (από κατασκευή) μια και εκεί θα παρουσιάζεται η μεγαλύτερη διακύμανση.

Ακολουθούμε τον εξής κανόνα για το σχεδιασμό των error bars: Παίρνουμε τις 2 πρώτες και 2 τελευταίες μετρήσεις που καλύπτουν τα άκρα του εύρους τιμών των μετρήσεών μας και υπολογίζουμε την αβεβαιότητά μας.

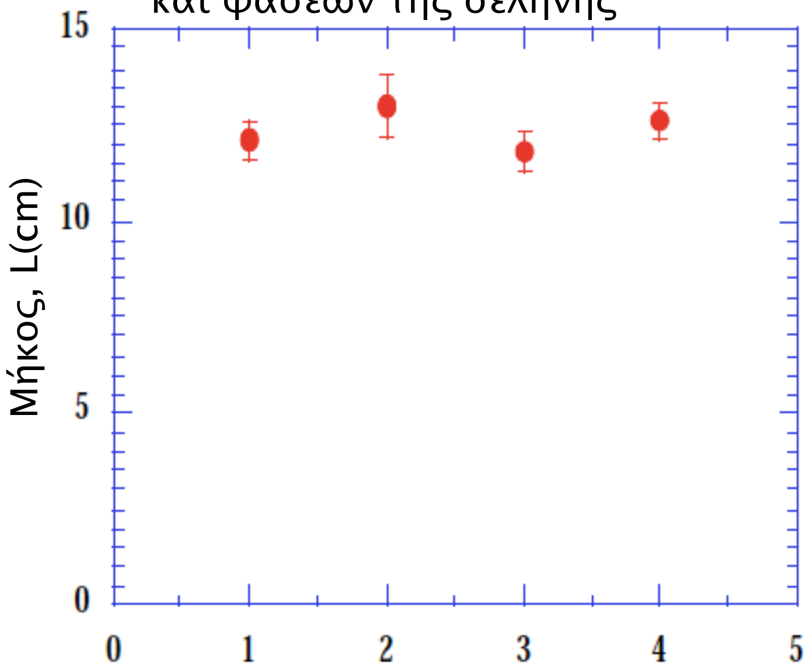
Με το τρόπο αυτό έχουμε μια καλή και συντηρητική ένδειξη της αβεβαιότητας των μετρήσεών μας χωρίς να χάνουμε σημαντική πληροφορία.

Με τη μέθοδο αυτή πάντοτε υπολογίζουμε την αβεβαιότητα 4 το πολύ μετρήσεων
Πειράματα που έχουν λιγότερες των 4 μετρήσεων θα έχουν όλα τα σημεία τους με error bars.

Υπάρχει ακόμα ένα πλεονέκτημα στην επιλογή του y-άξονα να ξεκινά από το 0. Η τιμή κάθε μέτρησης είναι ανάλογη της απόστασης από το y=0. Επομένως οι διακυμάνσεις της απόστασης δίνουν οπτικά εύκολα την διασπορά μεταξύ των μετρήσεων.

Γραφικές παραστάσεις – Διορθωμένο γράφημα

Σχέση μεταξύ μήκους σανίδας
και φάσεων της σελήνης



Φάση σελήνης (τέταρτο)

Η γραφική παράσταση στη τελικής της μορφή δείχνει ότι οι διακυμάνσεις στις μετρούμενες τιμές του μήκους της σανίδας δεν είναι σημαντικά μεγαλύτερες από την αβεβαιότητα της κάθε μέτρησης.

Δηλαδή το μήκος της σανίδας είναι ανεξάρτητο των φάσεων της σελήνης όπως και περιμέναμε

Αν όλα τα δεδομένα μας έχουν τιμές οι οποίες είναι μέσα στο εύρος της ±1 τυπικής απόκλισης γύρω από την ίδια κεντρική τιμή δεν έχουμε κάποιο λόγο να ισχυριζόμαστε ότι οι μετρήσεις μας είναι διαφορετικές.

Βλέπουμε επομένως ότι η σωστή εκτίμηση προκύπτει με το να βρούμε τη μέση τιμή όλων των μετρήσεων του μήκους της σανίδας.

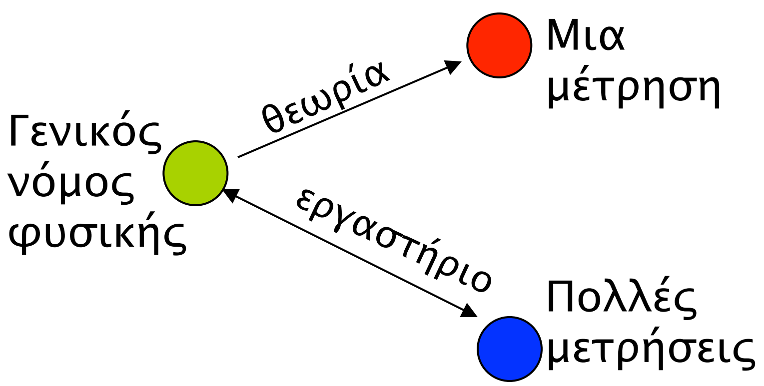
Πάντοτε όταν κάνετε μια γραφική παράσταση σκεφθείτε τις αβεβαιότητες των μετρήσεων και σχεδιάστε την λογικά. Η αρχική γραφική παράσταση μπορεί να σας οδηγούσε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει όντως συσχέτιση μεταξύ του μήκους της σανίδας και των φάσεων της σελήνης.

Κανόνες για τη δημιουργία γραφικών παραστάσεων

- Όταν σας ζητείτε να κάνετε τη γραφική παράσταση του Μεγέθους 1 ως προς το Μέγεθος 2 σημαίνει ότι το Μέγεθος 2 είναι στον άξονα x και το Μέγεθος 1 στο y–άξονα
- Ποτέ μη χαράζετε καμπύλες οι οποίες συνδέουν τα σημεία των μετρήσεών σας. Κάθε καμπύλη έχει μια φυσική ερμηνεία.
- Κάθε γραφική παράσταση θα πρέπει να έχει κάποιο τίτλο περιγραφής που εξηγεί σύντομα τη σημασία της παράστασης.
- Κάθε γραφική παράσταση θα πρέπει να έχει επιγραφές στους άξονες ανάλογα με το μέγεθος που αντιστοιχείτε καθώς και τις απαραίτητες μονάδες μέτρησης.
- Ο οριζόντιος άξονας θα πρέπει να έχει υποδιαιρέσεις πέρα από το εύρος των μετρήσεων (αριστερά και δεξιά του διαστήματος) ώστε να διασφαλίσετε τη μη ύπαρξη σημείων έξω από το εύρος που ορίζετε. Εξαίρεση σε αυτό υπάρχει όταν η επιπλέον υποδιαίρεση αντιστοιχεί σε αρνητική τιμή χωρίς φυσική σημασία οπότε σταματούμε στη τιμή $x=0$.
- Ο κατακόρυφος άξονας θα πρέπει να περιέχει τη τιμή 0 και να εκτείνεται πέρα της μεγαλύτερης τιμής που έχετε μετρήσει. Οι άξονες δε θα πρέπει να κρύβουν κάποιο σημείο μέτρησης. Η απόσταση από το $y=0$ είναι ανάλογη των τιμών των μετρήσεων και δίνει οπτικό έλεγχο της διακύμανσης των μετρήσεων.
- Σχεδιάστε τις αβεβαιότητες δίνοντας ± 1 τυπική απόκλιση σε 4 σημεία. Για μεγάλα δείγματα σχεδιάστε μόνο τις αβεβαιότητες για τα 2 πρώτα και 2 τελευταία σημεία του εύρους. Αυτό προσφέρει οπτικό έλεγχο των αβεβαιοτήτων

Ανάλυση δεδομένων

Σχέση μεταξύ μετρήσεων και θεωρίας:



Μια και μόνο μέτρηση, για παράδειγμα η θέση του βλήματος που κάνει πλάγια βολή μια χρονική στιγμή δεν είναι αρκετή για να περιγράψει το γενικό φαινόμενο

Για να συνδέσουμε το πείραμα με θεωρία θα πρέπει να έχουμε πολλές μετρήσεις και από το τρόπο κατανομής των δεδομένων να ανακαλύψουμε την θεωρία που κρύβεται πίσω από τα δεδομένα

Στο παράδειγμα του βλήματος, η μελέτη του βεληνεκούς για διάφορες γωνίες ρίψης και διαφορετικές ταχύτητες μπορούν να βοηθήσουν να κατανοήσουμε το φυσικό νόμο που περιγράφει το φαινόμενο αυτό

Όταν πραγματοποιούμε κάποιο πείραμα δεν ενδιαφερόμαστε απλά και μόνο για τις τιμές κάποιων μεγεθών που μετράμε αλλά και για την συσχέτιση που υπάρχει μεταξύ των μεγεθών αυτών

Η συσχέτιση μεταξύ των μεγεθών είναι αυτή που εκδηλώνει την ύπαρξη κάποιου φυσικού νόμου

Το βασικό εργαλείο που χρησιμοποιούμε για να βρούμε κάποιο συσχετισμό είναι οι γραφικές παραστάσεις. Το ερώτημα που γεννάται όμως είναι πως μπορούμε να μειώσουμε το μεγάλο αριθμό μετρήσεων σε ποσότητες που μπορούν να συγκριθούν με τις θεωρητικές προβλέψεις

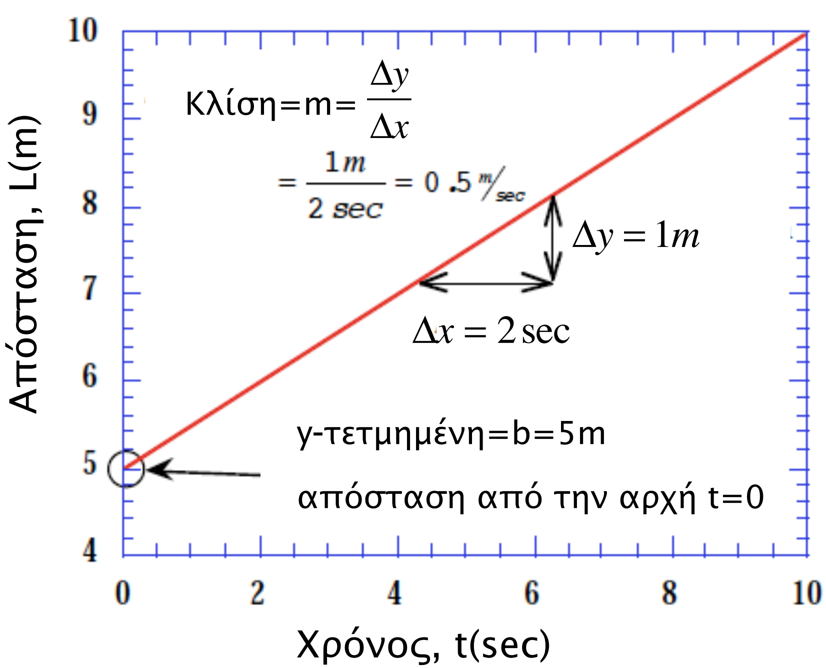
Προσαρμογή σε ευθεία γραμμή

Μια από τις περισσότερες χρήσιμες τεχνικές είναι αυτή της περιγραφής των πειραματικών δεδομένων με μια ευθεία γραμμή.

Υποθέστε ότι έχετε μια σειρά μετρήσεων σε μια γραφική παράσταση y ως προς x και από τη γραφική παράσταση βλέπουμε ότι αντιστοιχεί σε μια ευθεία γραμμή

Για την περιγραφή αυτής της ευθείας χρειάζονται 2 παράμετροι: η κλίση της, m, και η τετμημένη της ευθείας με τον άξονα των y, b

Τη στιγμή που θα προσδιορίσουμε τις δύο αυτές παραμέτρους μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή y που αντιστοιχεί σε οποιαδήποτε τιμή του x.



$$y = ax + b$$

Προσέξτε ότι είναι ακριβώς η κλίση και η τετμημένη b που παίζουν σημαντικό ρόλο στη θεωρία

Η κλίση είναι η ταχύτητα ενώ η τετμημένη μας δίνει την αρχική θέση του σώματος

Επομένως το πρόβλημά μας ανάγεται στην εύρεση των παραμέτρων της ευθείας καθώς και των αβεβαιοτήτων που συνοδεύουν τις εκτιμήσεις αυτών

Εύρεση της ευθείας

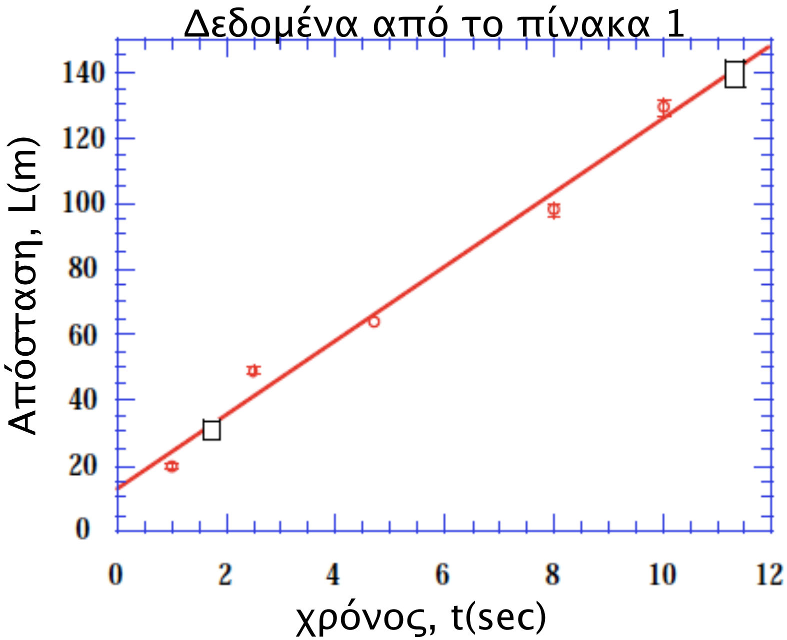
Έστω ότι έχουμε τις μετρήσεις που δίνονται στο παρακάτω πίνακα

Πίνακας 1

Χρόνος (sec)	Απόσταση (m)	Αβεβαιότητα, Δy (m)
1.0	20	1
2.5	59	1
4.7	64	(δεν χρειάζεται να υπολογισθεί)
8.0	98	2
10	129	3

Χρειάζεται να υπολογίσουμε τις αβεβαιότητες για 4 τιμές Τις 2 που βρίσκονται στο κατώτερο όριο τιμών και τις δύο στο υψηλότερο όριο τιμών

Σα 1ο βήμα κάνουμε τη γραφική παράσταση των δεδομένων του πίνακα 1



Χρησιμοποιώντας ένα χάρακα μπορούμε να σχεδιάσουμε τη καλύτερη ευθεία που διέρχεται από όλα τα σημεία

Αυτή η ευθεία λέγεται ευθεία "καλύτερης προσαρμογής (best fit)

Αν οι αβεβαιότητες όλων των σημείων είναι ίσες ή πολύ μικρές τότε η διαδικασία είναι πολύ απλή

Αν οι αβεβαιότητες παρουσιάζουν μεγάλες διακυμάνσεις τότε η διαδικασία είναι πιο πολύπλοκη

Ευθεία γραμμή καλύτερης προσαρμογής

Σημεία με μεγάλες αβεβαιότητες περιέχουν και τη λιγότερο σημαντικότητας πληροφορία και επομένως θα πρέπει να δώσουμε τη λιγότερο σημασία

Η τετμημένη με το y–άξονα μπορεί να βρεθεί διαβάζοντας απλά τη τιμή από τη γραφική παράσταση. Στη περίπτωσή μας είναι περίπου 13m

Για να βρούμε τη κλίση χρησιμοποιούμε το ορθογώνιο τρίγωνο της διαφ. 8 και υπολογίζουμε κάποιο διάστημα Δx και το αντίστοιχο Δy

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Όπου τα σημεία x_1, x_2, y_1 και y_2 είναι κάποια σημεία της ευθείας γραμμής και όχι απαραίτητα πειραματικά σημεία

Αυτό είναι σημαντικό γιατί από τη στιγμή που σχεδιάσατε τη καλύτερη ευθεία δεν ενδιαφερόμαστε πλέον για τα πειραματικά σημεία αλλά για την κλίση και τη τετμημένη της ευθείας

Προσέξτε ότι για τη περίπτωσή μας κανένα από τα σημεία δεν βρίσκεται ακριβώς πάνω στην ευθεία

Χρησιμοποιούμε επομένως τα δεδομένα για να βρούμε τη καμπύλη και τη καμπύλη για να βρούμε τη θεωρία

Για το παράδειγμά μας έχουμε: $m = \frac{32m - 140m}{1.7s - 11.3s} = 11.25m/s \rightarrow 11m/s$

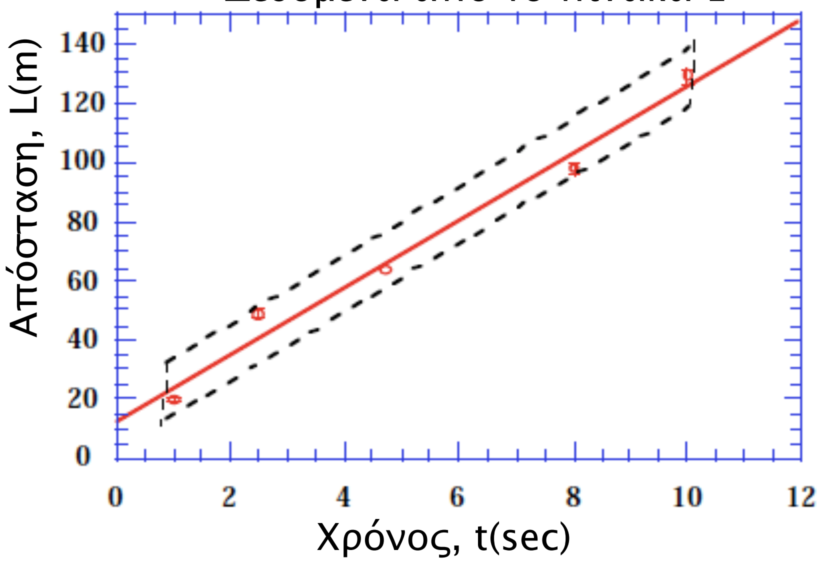
Στο τελευταίο βήμα γράφουμε το αποτέλεσμα σύμφωνα με τα σημαντικά ψηφία που επιτρέπονται από τις μετρήσεις μας στο πίνακα 1 (δύο σημαντικά ψηφία)

Εύρεση της αβεβαιότητας της κλίσης και τετμημένης

Ξεκινάμε σχεδιάζοντας ένα παραλληλόγραμμο το οποίο περικλείει όλα τα πειραματικά σημεία συμπεριλαμβανομένης της αβεβαιότητάς τους

Το παραλληλόγραμμα της αβεβαιότητας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

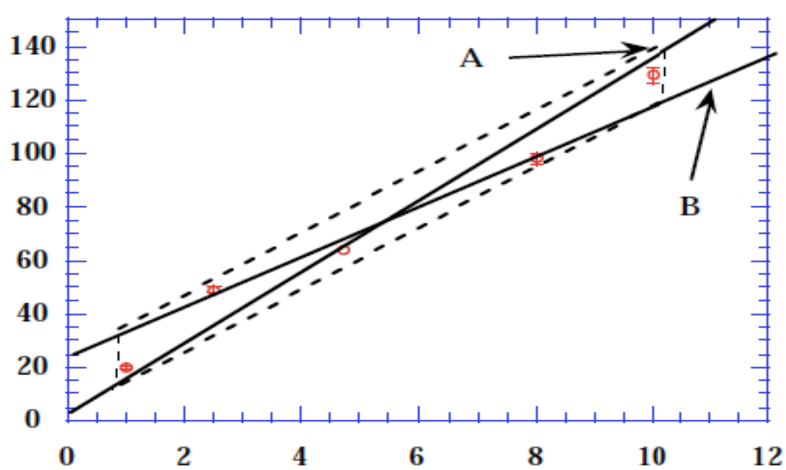
Δεδομένα από το πίνακα 1



Η πάνω και κάτω γραμμή αυτού του παρ/μου σχεδιάζονται παράλληλα προς την ευθεία της καλύτερης προσαρμογής

Τα άκρα σχεδιάζονται παρ/λα προς τον y-άξονα

Οποιαδήποτε εκτίμηση της αβεβαιότητας της κλίσης και τετμημένης της ευθείας θα πρέπει να έχει σαν αποτέλεσμα μια ευθεία η οποία περνά από τα άκρα του παρ/μου και δεν τέμνει τις πλάγιες πλευρές



Μπορούμε επομένως να χαράξουμε τις 2 διαγωνίους του παρ/μου και οι κλίσεις και τετμημένες των 2 αυτών ευθειών δίνουν την αβεβαιότητα στη κλίση και τετμημένη της ευθείας της καλύτερης προσαρμογής

Εύρεση της αβεβαιότητας της κλίσης και τετμημένης

Όπως και στην περίπτωση της καλύτερης ευθείας προσαρμογής υπολογίζουμε τη κλίση και τετμημένη των 2 διαγωνίων του παρ/μου

Έχουμε $m_A = \frac{10-140}{0.86-10} = 14m/s$ και $m_B = \frac{31-122}{0.86-10} = 10m/s$

Επομένως η αβεβαιότητα της κλίσης της καλύτερης ευθείας είναι:

$$m_A - m_B = 4m/s$$

Επειδή εκφράζουμε την αβεβαιότητα συνήθως συμμετρικά θα έχουμε ότι η αβεβαιότητα του πειράματος είναι

$$\Delta m = \frac{m_A - m_B}{2} = 2m/s$$

Βλέποντας τις 2 ευθείες της αβεβαιότητας καταλαβαίνουμε ότι είναι αρκετά απίθανο να επιλέξουμε είτε την ευθεία A ή την ευθεία B σαν την ευθεία της καλύτερης προσαρμογής. Επομένως έχουμε υπερεκτιμήσει την αβεβαιότητα

Μια προσεκτικότερη ανάλυση δείχνει ότι θα πάρουμε μια πιο καλή εκτίμηση της αβεβαιότητας αν διαιρέσουμε την προηγούμενη εκτίμησή μας με τη τετραγωνική ρίζα του αριθμού των μετρήσεών μας

Γράφουμε: $\Delta m = \frac{m_A - m_B}{2}\frac{1}{\sqrt{N-1}}$

$$\Delta m = \frac{m_A - m_B}{2}\frac{1}{\sqrt{N-1}}$$

Η εξίσωση αυτή δίνει την εκτίμηση της πιο πιθανής αβεβαιότητας.

Στο παρονομαστή, για N=1, Δm=∞ και αυτό είναι λογικό μια και από ένα σημείο μπορούμε να έχουμε οποιαδήποτε ευθεία

Για N=2 μια γραμμή μόνο μπορεί να χαραχθεί από 2 σημεία. Στην περίπτωση αυτή το παρ/μο της αβεβαιότητας προέρχεται μόνο από τις αβεβαιότητες των δύο αυτών σημείων και επομένως είναι λογικό $\Delta m = (m_A - m_B)/2$

Για N>>2 η αβεβαιότητα ελλατώνεται σύμφωνα με τη ρίζα του αριθμού των μετρήσεων N και αυτό είναι το αποτέλεσμα που βρήκαμε όταν υπολογίσαμε του σφάλματος της μέσης τιμής

Αυτό δεν αποτελεί τη λύση του προβλήματος αλλά είναι κάποια πολύ λογική και καλή προσέγγιση

Η εύρεση της αβεβαιότητας της τετμημένης προχωρά σύμφωνα με τα όσα αναπτύξαμε για την αβεβαιότητα της κλίσης της ευθείας.

Κάνοντας τις πράξεις έχουμε ότι $m \pm \Delta m = (11 \pm 1)\, m/s$ και $b \pm \Delta b = (13 \pm 6)\, m$

Η αβεβαιότητα της κλίσης είναι ίδιας τάξης με τα δεδομένα αλλά η αβεβαιότητα της τετμημένης είναι περίπου 50%

Στη περίπτωση της κλίσης παίρνουμε μια μέση τιμή ενώ για τη τετμημένη προεκτείνουμε σε περιοχή μακριά από τα δεδομένα και σε χρόνους που δεν έχουμε πειραματικές μετρήσεις και είναι επόμενο να έχουμε μεγαλύτερη αβεβαιότητα

Σε κάποιο σημείο όχι πολύ μακριά από τα δεδομένα η αβεβαιότητα σχετικά με τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t=0 μπορεί να γίνει ίση με 100% και μεγαλύτερη ακόμα.
Αυτό σημαίνει ότι το πείραμά μας είναι πολύ δύσκολο να προσδιορίσει το τι κάνει το σώμα σε μια προγενέστερη χρονική στιγμή στην οποία δεν υπάρχουν μετρήσεις

Μπορούμε δηλαδή να εκφράσουμε άποψη μόνο σχετικά με τη κίνηση στο διάστημα που μετρήσαμε αλλά όχι πέρα από αυτό

Μπορεί να προσπαθήσει κάποιος να επιχειρηματολογήσει ότι αν το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα κατά τη διάρκεια του διαστήματος ότι κινείται με τον ίδιο τρόπο έξω από το χρονικό διάστημα της μέτρησής μας.
Αυτό μπορεί να είναι σωστό αλλά δεν έχουμε μετρήσεις οι οποίες μπορούν να δείξουν ότι αυτό συμβαίνει. Για να ελαττώσουμε την αβεβαιότητα χρειαζόμαστε περισσότερες μετρήσεις.

Ένα τελευταίο σημείο. Ακόμα και αν υπήρχε πειραματικό σημείο στον y-άξονα αυτό δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχει αβεβαιότητα στη τιμή της τετμημένης. Αυτό γιατί η ευθεία καλύτερης προσαρμογής δεν είναι απαραίτητο να περνά από όλα τα πειραματικά σημεία όπως συμβαίνει και στο παράδειγμά μας

Ημιλογαριθμικό χαρτί

Πολλές φορές τα δεδομένα μας δεν περιγράφονται από μια απλή ευθεία αλλά ο νόμος της φυσικής που περιγράφει το φαινόμενο έχει μια εκθετική μορφή

Για παράδειγμα η ραδιενεργός διάσπαση κάποιων ραδιοισοτόπων. Η διάσπαση ακολουθεί εκθετική μορφή σύμφωνα με τη σχέση

$$A(t) = A_0 e^{-t/\tau}$$

Όπου A_0 είναι η ενεργότητα τη στιγμή t=0 και τ η σταθερά διάσπασης

Μπορούμε και πάλι να χρησιμοποιήσουμε την ίδια τεχνική για να βρούμε τη σταθερά διάσπασης και την αρχική ενεργότητα του δείγματος. Αρκεί να γράψουμε την παραπάνω εξίσωση σε γραμμική μορφή

Η μετατροπή της εκθετικής εξίσωσης σε γραμμική γίνεται εύκολα λογαριθμίζοντας την εξίσωση

$$\ln[A(t)] = \ln[A_0 e^{-t/\tau}] = \ln[A_0] - \frac{t}{\tau} = \ln[A_0] + \lambda t$$

Ο όρος $\ln[A_0]$ αντιπροσωπεύει το σταθερό όρο της εξίσωσης της ευθείας ενώ ο όρος $\lambda=-1/\tau$ την κλίση της. Ο όρος t αποτελεί την ανεξάρτητη μεταβλητή ενώ ο λογάριθμος της ενεργότητας, $\ln[A(t)]$, την εξαρτόμενη μεταβλητή

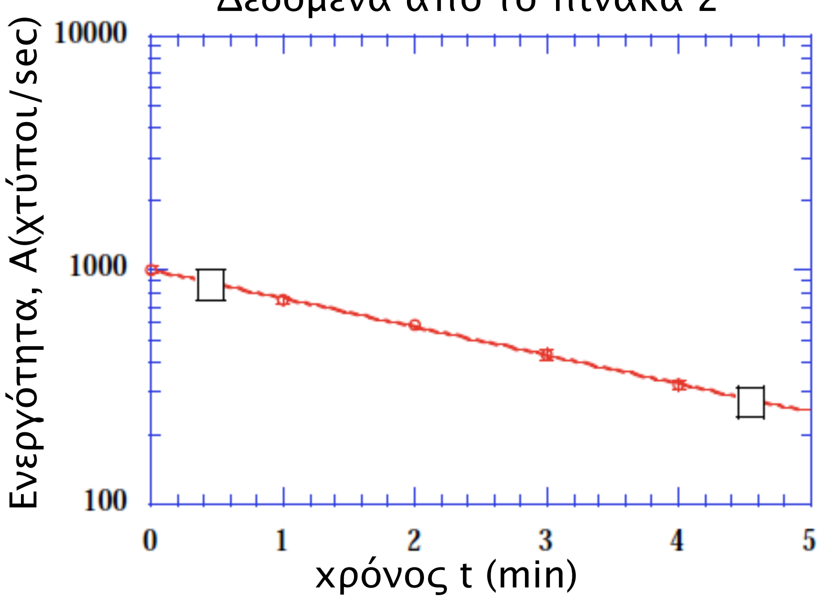
Για την γραφική παράσταση θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τους λογαρίθμους και να χρησιμοποιήσουμε χιλιοστομετρικό χαρτί ή να χρησιμοποιήσουμε το λεγόμενο ημιλογαριθμικό χαρτί

Ημιλογαριθμικό χαρτί

Η χρήση του λογαριθμικού χαρτιού διευκολύνει στη περίπτωση αυτή γιατί μπορούμε να θέσουμε τις μετρήσεις μας απευθείας στο γράφημα χωρίς επιπλέον υπολογισμούς. Το χαρτί περιέχει το κάθετο άξονα με τέτοιο τρόπο ώστε οι Κατακόρυφες αποστάσεις να είναι ανάλογες των επιθυμητών λογαρίθμων

Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τα δεδομένα της ραδιενεργούς διάσπασης

Δεδομένα από το πίνακα 2

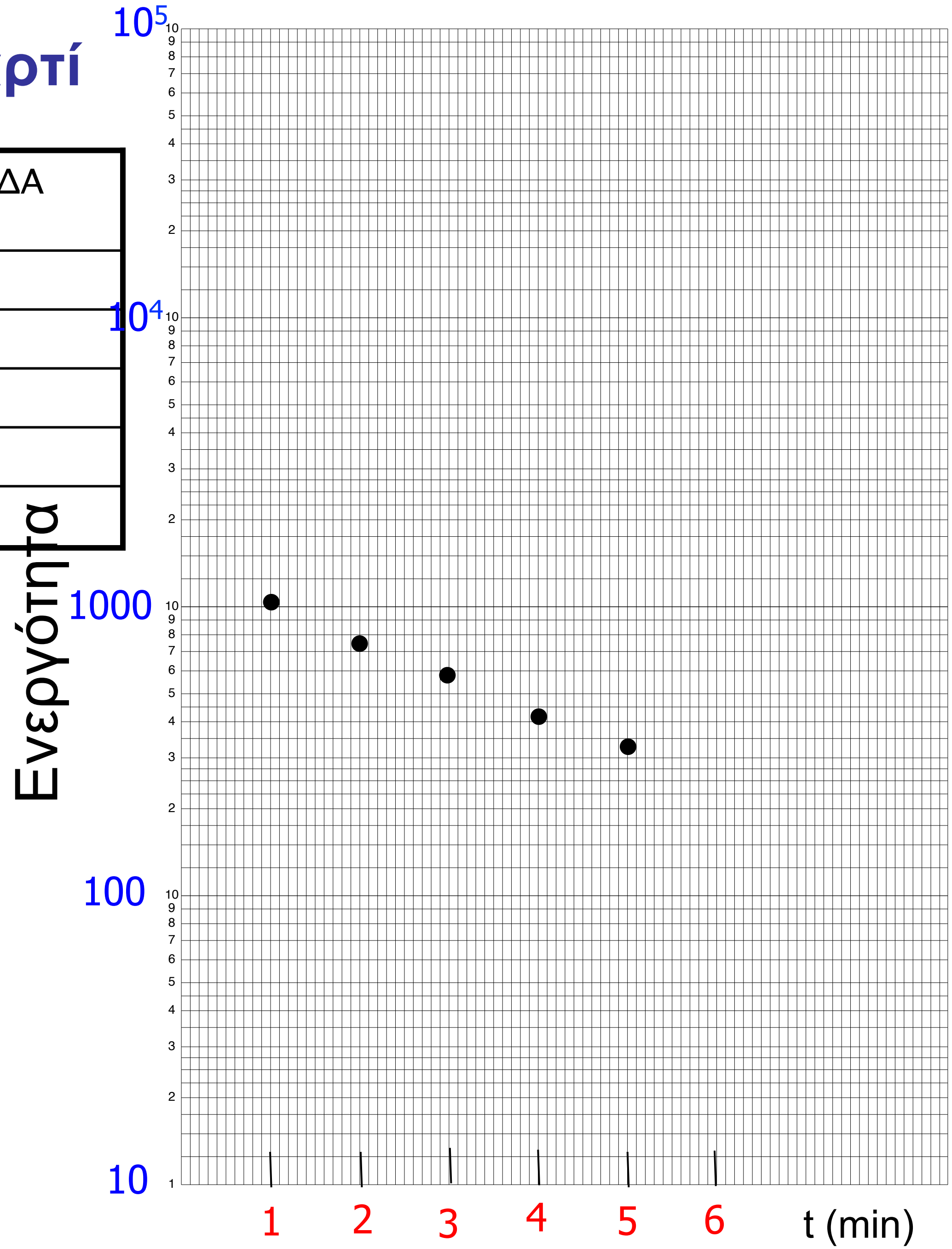


Πίνακας 2. Ενεργότητα ως προς χρόνο για το ραδιενεργό δείγμα μας

Χρόνος (min)	Ενεργότητα Α και ΔΑ (χτύποι/s)
1	1010±31
2	740±28
3	585±24
4	435±21
5	325±18

Ημιλογαριθμικό χαρτί

Χρόνος (min)	Ενεργότητα Α και ΔΑ (χτύποι/s)
1	1010±31
2	740±28
3	585±24
4	435±21
5	325±18



Ημιλογαριθμικό χαρτί

Χρειάζεται ωστόσο κάποια προσοχή, γιατί τα δεδομένα μας δίνονται αυτόματα σε λογαριθμική κλίμακα, αλλά οι λογάριθμοι δεν υπολόγιστηκαν. Απλά το χαρτί παρέχει το κατάλληλο μετασχηματισμό. Όταν όμως πρέπει να υπολογίσουμε τη κλίση στο λογαριθμικό χαρτί θα πρέπει να υπολογίσουμε τους λογαρίθμους.

Για παράδειγμα :

$$\lambda = \frac{\ln(860\,/\,\mathrm{sec}) - \ln(282\,/\,\mathrm{sec})}{0.5\,\mathrm{min} - 4.5\,\mathrm{min}} = -0.27\,/\,\mathrm{min} = -\frac{1}{\tau} \quad \Rightarrow \tau = 3.70\,\mathrm{min}$$

Η τετμημένη θα δίνεται από

$$A_0 = \frac{1.00 \times 10^3}{\mathrm{sec}} \times \frac{60\,\mathrm{sec}}{1\,\mathrm{min}} = 6.00 \times 10^4\ /\,\mathrm{min}$$

Όπως βλέπουμε χρειάζεται να υπολογίσουμε ένα λογάριθμο για να βρούμε την κλίση ενώ η τετμημένη δίνεται απευθείας από το χαρτί

Ο τρόπος υπολογισμού της αβεβαιότητας της κλίσης και τετμημένης είναι ακριβώς ίδιος όπως και στην περίπτωση της γραμμικής περίπτωσης. Θα πρέπει να σχεδιάσουμε το παρ/μο αβεβαιότητας και να υπολογίσουμε τις κλίσεις των δύο διαγωνίων και τις αντίστοιχες τετμημένες τους.

Log-Log χαρτί (λογαριθμικό – λογαριθμικό)

Πολλές φορές μπορούμε να βρούμε την συναρτησιακή εξάρτηση ενός φυσικού μεγέθους y από το ανεξάρτητο μέγεθος x, θεωρώντας το λογάριθμο των δεδομένων που μετράμε.

Αν το εξαρτόμενο μέγεθος y ειναι ανάλογο κάποιας δύναμης του ανεξάρτητου μεγέθους x, τότε το γράφημα του y ως προς x, σχεδιαζόμενο σε ένα λογαριθμικό-λογαριθμικό χαρτί θα είναι ευθεία η κλίση της οποίας θα είναι ίση με τον εκθέτη στον οποίο είναι υψωμένο το ανεξάρτητο μέγεθος.

Για παράδειγμα, έστω ότι μετρούμε κάποια δεδομένα τα οποία κατανέμονται σύμφωνα με την εξίσωση $y = x^n$

Θεωρώντας το λογάριθμο θα έχουμε: $\log(y) = \log(x^n) \Rightarrow \log(y) = n\log(x)$

Προφανώς από ένα γράφημα με λογαριθμικούς άξονες μπορούμε να βρούμε αμέσως τη κλίση

Αν είχαμε περισσότερο πολύπλοκη μορφή:

$$y = Ax^n \Rightarrow \log(y) = \log(Ax^n) = \log(A) + n\log(x)$$

Έχει διαφορά στο γράφημα αν θεωρήσουμε Log_{10} ή ln ($\log_e$) σχέσεις?

Log-Log χαρτί (λογαριθμικό – λογαριθμικό)

X	Y
5	10
15	90
30	360
50	1000
95	3610