ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

Τμήμα Φυσικής

ΦΥΣ 133 – 8η Σειρά Ασκήσεων

3 Μαΐου 2006

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΜΙΚΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

VII ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΙΚΡΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ

Κοντά στο σημείο ισορροπίας ($V'(x_0)=0$) έχουμε ότι:

$$V(x) \simeq V(x_0) + (x-x_0)\cdot \underbrace{V'(x_0)}_{0} + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 V''(x_0) + \dots$$

Άρα $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x_0) - \frac{1}{2}k(x-x_0)^2$ όπου $k = V''(x_0) > 0$ γιατί οδηγεί σε ημιτονοειδείς λύσεις.

Ορίζω $\xi = x - x_0$

$$\Rightarrow L = \frac{m\dot{\xi}^2}{2} - V(x_0) - \frac{1}{2}k\xi^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \xi} \Rightarrow m\ddot{\xi} = -\boxed{k}\xi \Rightarrow \xi = A\cos(\omega t - \phi_0)$$

όπου $\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{V''(x_0)}{m}$

Συχνότητα ταλάντωσης: ω

$x = x_0 + A\cos(\omega t - \phi_0)$ για 1-D. προβλήματα

Ταλαντώσεις ενός φυσικού συστήματος γύρω από σταθερή τροχιά

Έστω ένα σύστημα κινούμενο σε κάποια τροχιά $q_i(t)$. Διαταράσσουμε την τροχιά, οπότε η νέα τροχιά είναι $q_i'(t) = q_i(t) + x_i(t)$

$x_i(t) \ll q_i(t)$

Οι οι $q_i(t)$ είναι γνωστές και ψάχνουμε για τα $x_i(t)$

Βάζουμε στην Λαγκρανζιανή το $q_i'(t) = q_i(t) + x_i(t)$ και κρατάμε όρους μέχρι δεύτερης τάξης για το $x_i(t)$. Αν οι εξισώσεις που προκύπτουν δέχονται ταλαντούμενες λύσεις, η τροχιά είναι σταθερή. Αν οι εξισώσεις που προκύπτουν έχουν εκθετικές λύσεις $\Rightarrow$ η τροχιά είναι ασταθής

1) Παράδειγμα: Κίνηση σε κεντρικό δυναμικό $V(\rho)$. Έστω μια κυκλική τροχιά. Την διαταράσσουμε. Είναι ευσταθής ή ασταθής;

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\phi}^2 - V(\rho)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow m\ddot{\rho} = m\rho\dot{\phi}^2 - \frac{dV}{d\rho} \\ m\rho^2\dot{\phi} = J \end{array}\right\} \quad m\ddot{\rho} = \frac{J^2}{m\rho^3} - \frac{dV}{d\rho}$$

Θέλω λύσεις που να επαληθεύουν το $J = m\rho^2\dot{\phi}$ ⇒ Μπορώ να αντικαταστήσω το $\dot{\phi}$ στην L. Όμως επειδή δεν είναι ολονομικός δεσμός, αλλά το φ συνδέεται με το ρ, τότε πρέπει να χρησιμοποιήσω την φυσική εξίσωση για να βρω την L, και όχι απλά να αντικαταστήσω.

$$L_{\lambda\acute{\alpha}\theta o\varsigma} = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\frac{J^2}{m\rho^2} - V(\rho)$$

↳ φυγόκεντρο δυναμικό ⇒ πρέπει να αλλάξω το πρόσημο

$$L_{\sigma\omega\sigma\tau\acute{o}} = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 - \frac{J^2}{2m\rho^2} - V(\rho) \Rightarrow m\ddot{\rho} = -\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{J^2}{m\rho^3}$$

Κυκλική τροχιά $\rho = \rho_0 = const$: $\left.\frac{\partial V}{\partial \rho}\right|_{\rho_0} = \frac{J^2}{m\rho^3}$ (1)

Τώρα διαταράσσω το σύστημα $\rho = \rho_0 + x(t)$

Τρόπος : Αντικατάσταση στην L : κρατώ όρους μέχρι x^2.

$$L = \frac{1}{2}m(\cancel{\dot{\rho}_0} + \dot{x})^2 - \underbrace{V(\rho_0 + x)}_{Taylor} - \frac{J^2}{2m(\rho_0 + x)^2} =$$

$$= \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(\rho_0) - V'(\rho_0)\cdot x - \frac{1}{2}V''(\rho_0)x^2 - \frac{J^2}{2m\rho_0^2\underbrace{\left(1+\frac{x}{\rho_0}\right)^2}_{Taylor}}$$

$$= \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(\rho_0) - xV'(\rho_0) - \frac{x^2}{2}V''(\rho_0) - \frac{J^2}{2m\rho_0^2}\left(1 - \frac{2x}{\rho_0} + 3\frac{x^2}{\rho_0^2}\right)$$

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(\rho_0) - \boxed{xV'(\rho_0)} - \frac{x^2}{2}V''(\rho_0) - \frac{J^2}{2m\rho_0^2} + \boxed{\frac{J^2 x}{m\rho_0^3}} - \frac{3J^2x^2}{2m\rho_0^4}$$

$\overset{(1)}{=}$

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(\rho_0) - \frac{x^2}{2}V''(\rho_0) - \frac{J^2}{2m\rho_0^2} - \frac{3}{2}\frac{J^2x^2}{m\rho_0^4}$$

Αν οι πράξεις έγιναν σωστά δεν πρέπει να υπάρχει όρος με x^1

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -xV''(\rho_0) - \frac{3J^2x}{m\rho_0^4}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \lambda^2 x = 0 \quad \text{όπου} \quad \lambda^2 = \frac{V''(\rho_0)}{m} - \frac{3J^2}{m^2\rho_0^4}$$

Αν $\lambda^2 > 0$ ⇒ $x = A\cos(\lambda t + \phi_0)$ ⇒ $\rho = \rho_0 + A\cos(\lambda t + \phi_0)$

⇒ Ευσταθής τροχιά

Εδώ υποθέσαμε πως η στροφορμή δεν διαταράχθηκε, π.χ. με το να διαταράξαμε το σύστημα κατά μήκος της διεύθυνσης της ακτίνας, $\hat{\rho}$. Αν το J δεν διαταραχθεί ⇒

$$m\rho^2\dot{\phi} = J \Rightarrow \underbrace{m\rho_0^2\omega}_{\text{πριν την διαταραχή}} = \underbrace{m(\rho_0+x)^2\dot{\phi}}_{\text{μετά την διαταραχή}}$$

$$\omega = \left(1+\frac{A}{\rho_0}\cos(\lambda t+\phi_0)\right)^2\dot{\phi}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\omega}{\left(1+\frac{A}{\rho_0}\cos(\lambda t+\phi_0)\right)^2} \simeq \omega\left(1-2\frac{A}{\rho_0}\cos(\lambda t+\phi_0)\right)$$

$$\cancel{\phi=\omega t} \quad \phi = \omega t - \frac{2A\omega}{\lambda\rho_0}\sin(\lambda t+\phi_0) + C$$

Αν $V(\rho) = \sigma\rho^n$ $(\sigma>0) \Rightarrow \sigma n\rho_0^{n-1} = \frac{J^2}{m\rho_0^3} \Rightarrow \rho_0 = \left(\frac{J^2}{mn\sigma}\right)^{\frac{1}{n+2}}$ Από την (1)

και $\lambda^2 = \frac{1}{m}\sigma n(n-1)\rho_0^{\overset{n+2}{\boxed{n-2}}}\frac{\cancel{\rho_0^4}}{\rho_0^4}\,\frac{3J^2}{m^2\rho_0^4}$

$$= \frac{1}{m}\sigma n(n-1)\frac{J^2}{mn\sigma}\frac{1}{\rho_0^4} + \frac{3J^2}{m^2\rho_0^4} = (n+2)\frac{J^2}{m^2\rho_0^4}$$

Αν $n>-2 \Rightarrow$ ευσταθής τροχιά

Αν $n<-2 \Rightarrow$ τότε η τροχιά είναι ασταθής.

(2) Παράδειγμα: Ένα απλό εκκρεμές μάζας m και μήκους ℓ έχει το σημείο στήριξης του O πάνω σε κατακόρυφο άξονα, ο οποίος περιστρέφεται γύρω από τον εαυτό του με σταθερή ω.

$$\left.\begin{aligned} x &= \ell\sin\theta\cos\phi \\ y &= \ell\sin\theta\sin\phi \\ z &= \ell\cos\theta \\ \phi &= \omega t \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad T = \frac{m\ell^2}{2}\left(\omega^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right)$$

$$L = \frac{m\ell^2}{2}\left(\omega^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2\right) - mg\ell\cos\theta$$

Εξίσωση Euler-Lagrange: $\ell^2\ddot{\theta} = \ell^2\omega^2\sin\theta\cos\theta + g\ell\sin\theta$

Λύσεις: $\theta=0$ (προφανώς ασταθής τροχιά)

$\theta=\pi$ (η μάζα να κρέμεται κατακόρυφα)

$\theta=\theta_0=const$

Ας εξετάσουμε την ευστάθειά τους :

i) $\theta = \pi$. Διαταράσσουμε : $\theta = \pi + \varepsilon$ (ε: πολύ μικρό)

$$\Rightarrow \ddot{\varepsilon} = \omega^2 (\sin(\pi+\varepsilon)\cdot\cos(\pi+\varepsilon) + \frac{g}{l}\sin(\pi+\varepsilon))$$

$$\Rightarrow \ddot{\varepsilon} = \omega^2 \cdot \sin\varepsilon \cdot \cos\varepsilon - \frac{g}{l}\sin\varepsilon \simeq \omega^2\varepsilon - \left(\frac{g}{l}\right)\varepsilon$$

Αν $\omega^2 - \frac{g}{l} < 0 \Rightarrow$ ταλάντωση (ευσταθής τροχιά)

$\omega^2 < \frac{g}{l}$

Αν $\omega^2 > \frac{g}{l}$ εκθετικές λύσεις

ii) $\theta = \theta_0 \Rightarrow l\omega^2\cos\theta + g = 0$ (1)

$$\ddot{\varepsilon} = \omega^2[\sin\theta_0\cdot\cos\varepsilon + \cos\theta_0\sin\varepsilon][\cos\theta_0\cos\varepsilon - \sin\theta_0\sin\varepsilon] + \frac{g}{l}\sin\theta_0\cos\varepsilon + \frac{g}{l}\cos\theta_0\cdot\sin\varepsilon$$

$$\Rightarrow \ddot{\varepsilon} = \omega^2[\sin\theta_0 + \varepsilon\cos\theta_0][\cos\theta_0 - \varepsilon\sin\theta_0] + \frac{g}{l}\cdot\sin\theta_0 + \frac{g}{l}\varepsilon\cdot\cos\theta_0$$

(1)

$$\ddot{\varepsilon} = \boxed{\omega^2\sin\theta_0\cdot\cos\theta_0} - \omega^2\sin^2\theta_0\cdot\varepsilon + \varepsilon\omega^2\cos^2\theta_0 - \omega^2\underbrace{\varepsilon^2}_{\to 0}\cos\theta_0\sin\theta_0 + \boxed{\frac{g}{l}\sin\theta_0} + \frac{g}{l}\varepsilon\cos\theta_0$$

$$\ddot{\varepsilon} = \varepsilon\omega^2\cdot\cos 2\theta_0 + \frac{\varepsilon g}{l}\cos\theta_0$$

(1)

$$\ddot{\varepsilon} = \varepsilon\left[\omega^2(2\cdot\cos^2\theta_0 - 1) + \frac{g}{l}\left(-\frac{g}{l\omega^2}\right)\right] = \varepsilon\left[\omega^2\cdot\frac{2g^2}{l^2\omega^4} - \omega^2 - \frac{g^2}{l^2\omega^2}\right]$$

$$\ddot{\varepsilon} = \varepsilon\left[-\omega^2 + \frac{g^2}{l^2\omega^2}\right]$$

Αν $\frac{g^2}{l^2\omega^2} > \omega^2 \Rightarrow \frac{g}{l} > \omega^2 \Rightarrow$ εκθετικές λύσεις

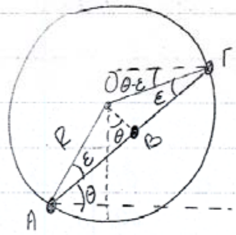
$\frac{g}{l} < \omega^2 \Rightarrow$ ταλαντωτικές λύσεις

iii) $\theta = 0 \Rightarrow$ Διαταράσσουμε $\theta = 0 + \varepsilon$

$$l^2\ddot{\varepsilon} = \underbrace{l^2\omega^2}_{>0}\varepsilon + \underbrace{gl}_{>0}\varepsilon \Rightarrow$$ πάντοτε εκθετικές λύσεις.

104

(3) Παράδειγμα: Ένα άκαμπτο σύρμα αμελητέου βάρους και μήκους $l<2R$ φέρνει στα 2 του άκρα και στη μέση του τρεις μάζες, m η κάθε μια. Ισορροπεί το σύρμα σε οριζόντια θέση στο εσωτερικό κατακόρυφου κυκλικού στεφανιού ακτίνας R. Εκτρέπουμε το σύστημα από τη θέση ισορροπίας. Ποια η περίοδος ταλάντωσης;



$$x_A = -R\cdot\cos(\theta+\varepsilon)$$
$$z_A = -R\sin(\theta+\varepsilon)$$
$$x_B = \sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}\cdot\sin\theta$$
$$z_B = -\cos\theta\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}$$

$$x_\Gamma = R\cdot\cos(\theta-\varepsilon)$$
$$z_\Gamma = R\sin(\theta-\varepsilon)$$

ε=σταθερή γωνία

$$T=\frac{1}{2}m\left[R^2\dot\theta^2+\left(R^2-\frac{l^2}{4}\right)\dot\theta^2+R^2\dot\theta^2\right]$$

$$T=\frac{m}{2}\dot\theta^2\left[3R^2-\frac{l^2}{4}\right]$$

$$L=\frac{m\dot\theta^2}{2}\left[3R^2-\frac{l^2}{4}\right]+mgR\cancel{\sin\theta\cdot\cos\varepsilon}+mgR\sin\varepsilon\cdot\cos\theta+mg\cos\theta\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}$$
$$-Rmg\cdot\cancel{\sin\theta\cdot\cos\varepsilon}+mgR\sin\varepsilon\cdot\cos\theta$$

$$L=\frac{m\dot\theta^2}{2}\left[3R^2-\frac{l^2}{4}\right]+2mgR\sin\varepsilon\cdot\cos\theta+mg\cos\theta\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right)=\frac{\partial L}{\partial\theta}\Rightarrow \cancel{m}\ddot\theta\left(3R^2-\frac{l^2}{4}\right)=\left(2\cancel{m}gR\boxed{\sin\varepsilon}+\cancel{m}g\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}\right)(-\sin\theta)$$
$$\boxed{\sin\varepsilon}\to=\sqrt{1-\frac{l^2}{4R^2}}$$

$$\ddot\theta\left(3R^2-\frac{l^2}{4}\right)=-\sin\theta\cdot3g\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}$$

Άρα $\theta=0$ είναι θέση ισορροπίας

Οι ταλαντώσεις για μικρό θ είναι $\ddot\theta\left(3R^2-\frac{l^2}{4}\right)=-\theta\cdot3g\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}$

$$\omega^2=\frac{1}{3R^2-\frac{l^2}{4}}\cdot3g\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}\qquad T=\frac{2\pi}{\omega}\qquad \omega^2>0 \text{ γιατί } l>2R$$

ευσταθής ισορροπία

Ταλαντώσεις συστημάτων με πολλούς βαθμούς ελευθερίας.

Έστω ότι το σημείο ευσταθούς ισορροπίας είναι το $q_1 = q_2 = \cdots = q_\ell = 0$
Θα εξετάσουμε την κίνηση για μικρές απομακρύνσεις από το παραπάνω σημείο.

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ij}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_j M_{ij}(q)\, \dot{q}_j \right] = \frac{1}{2} \sum_{\ell m} \frac{\partial M_{\ell m}}{\partial q_i} \dot{q}_\ell \dot{q}_m - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

Θέλουμε $q_i = 0$ Αυτό είναι λύση μόνο αν $\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_0 = 0$

Διαταράσσουμε τη λύση $q_i = 0$

$q_i = 0 + \varepsilon_i$: κρατάμε ~~πρώτο~~ μόνο όρους της τάξης ως προς ε_i

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_j M_{ij}(\varepsilon_i)\, \dot{\varepsilon}_j \right] \simeq \frac{1}{2} \sum_{\ell m} \cancel{\left.\frac{\partial M_{\ell m}}{\partial q_i}\right|_{q_i = \varepsilon_i}} \overbrace{\dot{\varepsilon}_\ell \dot{\varepsilon}_m}^{\to 0} - \left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{\varepsilon_i}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_j M_{ij}(0)\, \dot{\varepsilon}_j \right] \simeq -\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{\varepsilon_i} \cong -\cancel{\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_0}^{0} - \sum_j \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_0 \varepsilon_j$$

$$\Rightarrow \sum_j M_{ij}(0)\, \ddot{\varepsilon}_j = -\sum_j \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_0 \varepsilon_j$$

$$\sum_j \left[M_{ij} \ddot{\varepsilon}_j + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_0 \varepsilon_j \right] = 0$$

Ζητάμε λύσεις της μορφής $\boxed{\varepsilon_j = A_j e^{i\omega t}}$ Κανονική Ταλάντωση
Όπου τελικά θα πάρουμε το πραγματικό μέρος

$$\sum_j \left[-M_{ij}(0)\, \omega^2 + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_0 \right] \underbrace{\boxed{A_j}}_{\text{ιδιοδιάνυσμα}} = 0$$

Άρα $\det\left[-\omega^2 M_{ij}(0) + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_0 \right] = 0$ Χαρακτηριστική εξίσωση
Δίνει ιδιοσυχνότητες ω_λ

Γενική λύση : $\varepsilon_i(t) = \sum_\lambda C_\lambda \boxed{(A_i)_\lambda} e^{i\omega_\lambda t}$ → Το ιδιοδιάνυσμα της ω_λ

1α

① Παράδειγμα:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - \frac{k_1}{2}x^2 - \frac{k_2}{2}y^2 - \frac{k_3}{2}z^2$$

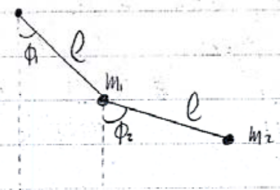
Το σημείο ισορροπίας είναι το $(0,0,0)$ [Ελάχιστο του V]
Διαταράσσουμε τη κατάσταση ισορροπίας: $x_i = 0+\varepsilon_i$
Άρα:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\varepsilon}_1^2+\dot{\varepsilon}_2^2+\dot{\varepsilon}_3^2) - \frac{k_1\varepsilon_1^2}{2} - \frac{k_2\varepsilon_2^2}{2} - \frac{k_3\varepsilon_3^2}{2}$$

$m\ddot{\varepsilon}_1 = -k_1\varepsilon_1$
$m\ddot{\varepsilon}_2 = -k_2\varepsilon_2$
$m\ddot{\varepsilon}_3 = -k_3\varepsilon_3$

Κάθε βαθμός ελευθερίας ταλαντούται με τη δική του ιδιοσυχνότητα, ανεξάρτητα από τους άλλους.

② Παράδειγμα:
Διπλό συνεπίπεδο εκκρεμές με $m_1 << m_2$, $l_1 = l_2 = l$



$x_1 = l\sin\phi_1$ $\quad$ $x_2 = l\sin\phi_1 + l\sin\phi_2$
$z_1 = -l\cos\phi_1$ $\quad$ $z_2 = -l\cos\phi_1 - l\cos\phi_2$

$$L = \frac{m_1 l^2\dot{\phi}_1^2}{2} + \frac{m_2 l^2}{2}\left(\dot{\phi}_1^2+\dot{\phi}_2^2+2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\cos(\phi_1-\phi_2)\right) + m_1 g l\cos\phi_1 + m_2 g l\cos\phi_1 + m_2 g l\cos\phi_2$$

Ελάχιστο στο $\phi_1 = \phi_2 = 0$ $\left(\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0\right)$ Σημείο ισορροπίας

$\phi_1' = 0 + \varepsilon_1 \qquad \varepsilon_1 \equiv \phi_1$
$\phi_2' = 0 + \varepsilon_2 \qquad \varepsilon_2 \equiv \phi_2$

$$L = \frac{(m_1+m_2)}{2}l^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{m_2}{2}l^2\dot{\phi}_2^2 + m_2 l^2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 + (m_1+m_2)gl\overbrace{\left(1-\frac{\phi_1^2}{2}\right)}^{\cos\phi_1} + m_2 gl\overbrace{\left(1-\frac{\phi_2^2}{2}\right)}^{\cos\phi_2}$$

① $(m_1+m_2)l^2\ddot{\phi}_1 + m_2 l^2\ddot{\phi}_2 = -(m_1+m_2)gl\phi_1$

② $m_2 l^2\ddot{\phi}_2 + m_2 l^2\ddot{\phi}_1 = -m_2 g l\phi_2$

$\phi_1 = A_1 e^{i\omega t}$
$\phi_2 = A_2 e^{i\omega t}$

[Χρησιμοποιώ το πραγματικό μέρος, δηλαδή τος $\cos\omega t$]

$$① \rightarrow -(m_1+m_2)\omega^2 A_1 - m_2\omega^2 A_2 + (m_1+m_2)\frac{g}{\ell}A_1 = 0$$

$$② \rightarrow m_2\omega^2 A_2 - m_2\omega^2 A_1 + m_2\frac{g}{\ell}A_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} (m_1+m_2)\left(\frac{g}{\ell}-\omega^2\right) & -m_2\omega^2 \\ -m_2\omega^2 & m_2\left(\omega^2 + \frac{g}{\ell}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(m_1+m_2)m_2\left(\frac{g}{\ell}-\omega^2\right)^2 = m_2^2\omega^4$$

$$\omega^4 m_1 m_2 - 2m_2\frac{g}{\ell}\omega^2(m_1+m_2) + (m_1+m_2)m_2\frac{g^2}{\ell^2} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{\frac{2g}{\ell} \pm \sqrt{\frac{4g^2}{\ell^2} - \frac{4m_1}{m_1+m_2}\frac{g^2}{\ell^2}}}{\frac{2m_1}{m_1+m_2}} = \frac{g}{\ell}\frac{(m_1+m_2)}{m_1}\left[1 \pm \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}\right]$$

$$\frac{g}{\ell} = \frac{\omega^2 \cancel{m_1}}{(\cancel{m_1}+m_2)}\frac{\left(1 \mp \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}\right)}{\cancel{\left(1-\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)}}$$

$$\frac{g}{\ell} = \omega^2\left(1 \mp \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}\right)$$

Εξισώσεις: $(m_1+m_2)\left(\frac{g}{\ell}-\omega^2\right)A_1 = m_2 A_2\omega^2$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{(m_1+m_2)}{m_2}\frac{g}{\ell}\frac{\left[1-\frac{m_1+m_2}{m_1}\left(1 \pm \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}\right)\right]\cdot\left[1 \mp \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}\right]}{\underbrace{\frac{g}{\ell}\left(\frac{m_1+m_2}{m_2}\right)\left[1 \pm \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}\right]\cdot\left[1 \mp \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}\right]}}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{(m_1+m_2)}{m_2}\left[\cancel{1} \mp \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}} - \frac{(m_1+m_2)\overset{\shortparallel}{m_1}\cancel{1}}{m_1(\cancel{m_1}+m_2)}\right]$$

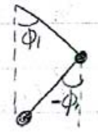
$$\frac{A_2}{A_1} = \mp\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_2}}$$

$m_2 \gg m_1$

$$(1)\ \omega^2 = \frac{g}{\ell}\left(1 + \underbrace{\sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}}_{\simeq 1}\right)\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right) \Rightarrow \omega^2 = \frac{2g}{\ell}\frac{m_2}{m_1}$$

ω πολύ μεγάλο
⇒ γρήγορη ταλάντωση

$\frac{A_2}{A_1} = -\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_2}} \simeq -1$ Αντίθετη φάση $\phi_1=-\phi_2 \Rightarrow$ η μάζα m_2 είναι σαν να είναι στερεωμένη και η m_1 να κινείται πολύ γρήγορα



Αρμονική λύση : $\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}$

(2) $\omega^2 = \frac{g}{\ell}\frac{m_1+m_2}{m_1}\left[1-\sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}\right] = \frac{\frac{g}{\ell}\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)\left[1-\sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}\right]\left[1+\sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}\right]}{\left[1+\underbrace{\sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}}_{1}\right]}$

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell}\frac{1}{2}\left(\frac{m_1+\cancel{m_2}-\cancel{m_2}}{\cancel{m_1+m_2}}\right)\left(\frac{\cancel{m_1+m_2}}{\cancel{m_1}}\right)$$

$$\omega^2 = \frac{g}{2\ell}$$

$\frac{A_1}{A_2} = +\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_2}} \simeq 1 \Rightarrow$ Το σύστημα κινείται σαν ένα εκκρεμές

Αρμονική λύση : $\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = C_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} e^{i\omega_2 t}$

Παρατήρηση : οι δύο βαθμοί ελευθερίας δεν ταλαντώνονται ανεξάρτητα ένας από τον άλλο.

* Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η Λαγκρανζιανή έχει συμμετρία εναλλαγής ως προς ϕ_1, ϕ_2, δηλαδή αν όπου $\phi_1 \to \phi_2$ και όπου $\phi_2 \to \phi_1$, τότε δεν αλλάζει η L. Αυτό συνεπάγεται ότι $\phi_1 = \phi_2$, ή $\phi_1 = -\phi_2$.

$$L = \frac{m_2}{2}\ell^2\dot\phi_1^2\underbrace{\boxed{\frac{(m_1+m_2)}{m_2}}}_{\simeq 1} + \frac{m_2\ell^2\dot\phi_2^2}{2} + \overbrace{\cancel{m_2\ell^2\dot\phi_1\dot\phi_2}}^{\simeq 0} + \underbrace{\boxed{\frac{(m_1+m_2)}{m_2}}}_{\simeq 1} g\ell\, m_2\left(1-\frac{\phi_1^2}{2}\right)$$
$$+ m_2 g\ell\left(1-\frac{\phi_2^2}{2}\right)$$

Ορίζω νέες μεταβλητές $\zeta_1 \equiv \phi_1+\phi_2$
$\zeta_2 \equiv \phi_1-\phi_2$

$$L = \frac{m_2}{2}\ell^2\left(\dot\phi_1^2+\dot\phi_2^2\right) + m_2 g\ell\,(2) - \frac{m_2 g\ell}{2}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)$$

$$L = \frac{m_2 l^2}{2}\dot{\zeta}_1^2 + \frac{0\, l^2 m_2}{2}\dot{\zeta}_2^2 - \frac{m_2 g l}{2}\left(\frac{\zeta_1^2+\zeta_2^2}{2}\right) + 2m_2 g l$$

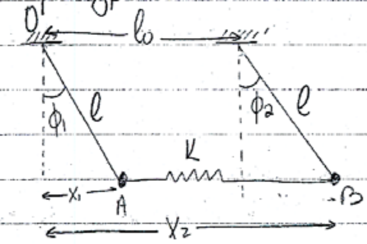
$$\Rightarrow m_2 l^2 \ddot{\zeta}_1 = -\frac{m_2 g l}{2}\zeta_1 \qquad \omega_1 = \frac{g}{2l} \quad \begin{pmatrix} \phi_1=\phi_2 \\ \zeta_2 = 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 0\cdot m_2 l^2 \ddot{\zeta}_2 = -\frac{m_2 g l}{2}\zeta_2 \qquad \omega_2 \to \infty \quad \begin{pmatrix} \phi_1=-\phi_2 \\ \zeta_1 = 0 \end{pmatrix}$$

επειδή αγνοούσα την m_2

Οι ίδιες οι ιδιοσυχνότητες όπως πριν.

③ Παράδειγμα:



$$x_1 = l\sin\phi_1 \qquad x_2 = l_0 + l\sin\phi_2$$
$$y_1 = 0 \qquad y_2 = 0$$
$$z_1 = -l\cos\phi_1 \qquad z_2 = -l\cos\phi_2$$

Όμως επειδή μελετώ μικρές ταλαντώσεις γύρω από την ισορροπία, μπορώ να γράψω τα:

$$x_1 = l\phi_1 \qquad x_2 = l\phi_2 + l_0$$
$$z_1 = \left(\frac{\phi_1^2}{2}-1\right)l \qquad z_2 = \left(\frac{\phi_2^2}{2}-1\right)l$$

$$V = \frac{1}{2}k\left[-l_0 + \sqrt{(x_1-x_2)^2+(z_1-z_2)^2}\right]^2 + mgz_1 + mgz_2$$

$$= \frac{k}{2}\left[-l_0 + \sqrt{(l\phi_1 - l_0 - l\phi_2)^2 + \underbrace{\left(-l + \frac{l\phi_1^2}{2} + l - \frac{l\phi_2^2}{2}\right)^2}_{4\text{ης τάξης} \Rightarrow \text{αγνοείται}}}\right]^2 + \frac{mgl}{2}(\phi_1^2+\phi_2^2) - 2mgl$$

δεν μπορώ να τα διώξω μεταξύ τους γιατί δεν ξέρω αν θα πάρω + ή −

$$= \frac{k}{2}\left[-l_0 + \sqrt{l_0^2 + l^2(\phi_1-\phi_2)^2 - 2ll_0(\phi_1-\phi_2)}\right]^2 + \frac{mgl}{2}(\phi_1^2+\phi_2^2) - 2mgl$$

$$= \frac{k}{2}\left[-\cancel{l_0} + \cancel{l_0}\left(\cancel{1} + \frac{l^2}{l_0^2}\frac{(\phi_1-\phi_2)^2}{2} - \frac{l}{\cancel{l_0}}(\phi_1-\phi_2)\right)\right]^2 + \frac{mgl}{2}(\phi_1^2+\phi_2^2) - 2mgl$$

$$= \frac{k}{2}\left[\cancel{\frac{l^4}{l_0^2}\frac{(\phi_1-\phi_2)^4}{4}}^{\,\to 0} + l^2(\phi_1-\phi_2)^2 - \cancel{\frac{l^3}{l_0}(\phi_1-\phi_2)^3}^{\,\to 0}\right] + \frac{mgl}{2}(\phi_1^2+\phi_2^2) - 2mgl$$

$$= \frac{k}{2}\left[l^2(\phi_1-\phi_2)^2\right] - \frac{mgl}{2}(\phi_1^2+\phi_2^2) - 2mgl = \frac{k}{2}(x_1-x_2)^2 - \frac{mg}{2l}(x_1^2+x_2^2) + 2mgl$$

επανερχόμαστε στις μεταβλητές x_1, x_2.

110

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{z}_1^2+\dot{z}_2^2\right)=\frac{ml^2}{2}\left(\dot{\phi}_1^2(\cos^2\phi_1+\sin^2\phi_1)+\dot{\phi}_2^2(\sin^2\phi_2+\cos^2\phi_2)\right)$$

$$T=\frac{ml^2}{2}\left(\dot{\phi}_1^2+\dot{\phi}_2^2\right)=\frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right)$$

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right)-\frac{k}{2}(x_1-x_2)^2-\frac{mg}{2l}\left(x_1^2+x_2^2\right)+2mgl$$

$$L=\frac{ml^2}{2}\left(\dot{\phi}_1^2+\dot{\phi}_2^2\right)-\frac{k}{2}l^2(\phi_1-\phi_2)^2-\frac{mgl}{2}\left(\phi_1^2+\phi_2^2\right)+2mgl$$

1ος Τρόπος $\left.\begin{array}{l}\phi_1=Q_1+Q_2\\ \phi_2=Q_1-Q_2\end{array}\right\} \Rightarrow L=\frac{ml^2}{2}\left(2\dot{Q}_1^2+2\dot{Q}_2^2\right)+2mgl-\frac{kl^2 4Q_2^2}{2}-\frac{mgl}{2}(2Q_1^2+2Q_2^2$

$$\omega_1^2=\frac{2mgl}{2ml^2}=\frac{g}{l}$$

$=a\dot{Q}^2-bQ^2$

$\omega^2=\frac{b}{a}$

Δεν εμπλέκεται η σταθερά του ελατηρίου k ⇒ η ράβδος με το ελατήριο είναι σαν να μην υπάρχει $(\phi_1=\phi_2)$

$$\omega_2^2=\frac{2kl^2+mgl}{ml^2}=\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}$$

$\left.\begin{array}{l}Q_1=A\cdot\cos\omega_1 t\\ Q_2=B\cdot\cos\omega_2 t\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}\phi_1=A\cdot\cos\omega_1 t+B\cdot\cos\omega_2 t\\ \phi_2=A\cdot\cos\omega_1 t-B\cdot\cos\omega_2 t\end{array}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\cos\omega_1 t+B\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\cos\omega_2 t$$

2ος Τρόπος: Γενικευμένες Συντεταγμένες:

$$ml^2\ddot{\phi}_1=-kl^2(\phi_1-\phi_2)-mgl\,\phi_1$$
$$ml^2\ddot{\phi}_2=-kl^2(\phi_2-\phi_1)-mgl\,\phi_2$$

Ορίζω $\phi_1=D_1\cos\omega t$

$\phi_2=D_2\cos\omega t$

$$-ml^2\omega^2 D_1+kl^2(D_1-D_2)+mglD_1=0$$
$$-ml^2\omega^2 D_2+kl^2(D_2-D_1)+mglD_2=0$$

$$\begin{pmatrix} -ml^2\omega^2 + kl^2 + mgl & -kl^2 \\ -kl^2 & -ml^2\omega^2 + kl^2 + mgl \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(-ml^2\omega^2 + kl^2 + mgl)^2 = (kl^2)^2$$

$$\Rightarrow -ml^2\omega^2 + kl^2 + mgl = \pm kl^2$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{g}{l} \\ \omega_2^2 &= \frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow D_1 = D_2 \\ &\Rightarrow D_1 = -D_2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = D_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos\omega_1 t + D_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos\omega_2 t$$

* Όταν το σύστημα ταλαντώνεται με $\omega = \omega_1$ τότε τα δύο εκκρεμή είναι σε φάση και το ελατήριο δεν συμπιέζεται ούτε ταλαντώνεται. Γι' αυτό $\frac{d\omega_1}{dk} = 0$. Όταν το σύστημα ταλαντώνεται με $\omega = \omega_2$, είτε τα δύο εκκρεμή πλησιάζουν και τα δύο προς τα μέσα, είτε απομακρύνονται και τα δύο προς τα έξω. Γι' αυτό, αφού το ελατήριο συμπιέζεται και τεντώνεται $\Rightarrow \frac{d\omega_2}{dk} \neq 0$ ..

Αν κάποιες ιδιοτιμές είναι εκφυλισμένες $(\omega_1 = \omega_2) \Rightarrow \frac{A_1}{A_2}$ απροσδιόριστο.
Επίσης για ευσταθή λύση, πάντα $\omega_i^2 \geq 0$.

Γ' τρόπος: $L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}(x_1 - x_2)^2 - \frac{mg}{2l}(x_1^2 + x_2^2) + 2mgl$

$$s = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \qquad t = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}$$

$$s^2 + t^2 = x_1^2 + x_2^2$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 + \dot{t}^2) - \frac{k}{2} \cdot 2t^2 - \frac{mg}{2l}(s^2 + t^2) + 2mgl$$

$$\dot{s}^2 + \dot{t}^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2$$

$$L = \frac{m}{2}\dot{s}^2 - \frac{mg}{2l} s^2 + \frac{m}{2}\dot{t}^2 - \frac{t^2}{2}\left(2k + \frac{mg}{l}\right) + 2mgl$$

Άρα έχουμε τώρα 2 ανεξάρτητους ταλαντωτές, με συχνότητες $\omega_1^2 = \frac{g}{l}$ για το s και $\omega_2^2 = \frac{2k}{m} + \frac{mg}{l}$ για το t.

$$\Rightarrow s = A_1 e^{i\omega_1 t} \qquad t = A_2 \cdot e^{i\omega_2 t}$$

$$x_1 = \frac{A_1}{\sqrt{2}} e^{i\omega_1 t} + \frac{A_2}{\sqrt{2}} e^{i\omega_2 t} \qquad x_2 = \frac{A_1}{\sqrt{2}} e^{i\omega_1 t} - \frac{A_2}{\sqrt{2}} e^{i\omega_2 t}$$

Κανονικές Συντεταγμένες

Για να βρεθούν οι συχνότητες ταλάντωσης γύρω από την ισορροπία, πρέπει να λύσουμε τις εξισώσεις:

$$\sum_j \left[-\omega_\lambda^2 M_{ij}(0) + \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\bigg|_0 \right] A_j^{(\lambda)} = 0$$

όπου $A_j^{(\lambda)}$ το ιδιοδιάνυσμα της ω_λ^2 ιδιοτιμής.

Έστω $\quad \varepsilon_i \equiv \sum_\lambda A_i^{(\lambda)} Q_\lambda$

Τότε $\quad 0 = \sum_j \left[M_{ij}(0)\ddot{\varepsilon}_j + \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\bigg|_0 \varepsilon_j \right] =$

$= \dots = \sum_{j\lambda} M_{ij}(0) A_j^{(\lambda)} \left[\ddot{Q}_\lambda + \omega_\lambda^2 Q_\lambda \right] \Rightarrow 0 = \tilde{M}(0) \cdot \tilde{A} \cdot \left[\ddot{Q} + \omega^2 Q \right]$

$$\Rightarrow 0 = \ddot{Q}_\lambda + \omega_\lambda^2 Q_\lambda$$

Άρα οι εξισώσεις κίνησης γίνονται ανεξάρτητες διαφορικές εξισώσεις αν γραφτούν συναρτήσει των Q_λ. Τα Q_λ λέγονται κανονικές συντεταγμένες. Στις κανονικές ταλαντώσεις τα σωματίδια, οι κανονικές συντεταγμένες έχουν την ίδια φάση. Η κινητική και δυναμική ενέργεια δεν περιέχουν ενδιάμεσους όρους αν γραφούν συναρτήσει των Q_i. Αν κάποιες ιδιοσυχνότητες είναι ίδιες, τότε η επιλογή των κανονικών συντεταγμένων δεν είναι μοναδική.

Παράδειγμα:
Διπλό συνεπίπεδο εκκρεμές με ϕ_1, ϕ_2 = μικρά. Σελ 106.

$$\phi_1 = A_1^{(1)} Q_1 + A_1^{(2)} Q_2$$
$$\phi_2 = A_2^{(1)} Q_1 + A_2^{(2)} Q_2 = \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_2}} \left(A_1^{(1)} Q_1 - A_1^{(2)} Q_2 \right)$$

Αν θέσουμε $\phi_1 = Q_1 + Q_2$
$$\phi_2 = \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_2}} \left(Q_1 - Q_2 \right) \quad \text{τότε:}$$

$$L \simeq \frac{m_1+m_2}{2} \ell^2 \dot\phi_1^2 + \frac{m_2 \ell^2 \dot\phi_2^2}{2} + m_2 \ell^2 \dot\phi_1 \dot\phi_2 \underbrace{\cos(\phi_1-\phi_2)}_{\simeq 0} + m_1 g \ell \left(1 - \frac{\phi_1^2}{2}\right) +$$
$$+ m_2 g \ell \left(1 - \frac{\phi_1^2}{2}\right) + m_2 g \ell \left(1 - \frac{\phi_2^2}{2}\right) =$$
$$= \frac{\cancel{2} \cancel{m_2} \ell^2}{\cancel{2}} \frac{(m_1+m_2)}{\cancel{m_2}} \left(\dot Q_1^2 + \dot Q_2^2 - \cancel{2 \dot Q_1 \dot Q_2} \right) + \frac{m_1 \cancel{m_2}}{\cancel{2}} \ell^2 \left(\dot Q_1^2 + \dot Q_2^2 + \cancel{2 \dot Q_1 \dot Q_2} \right) +$$
$$m_2 \ell^2 (\dot Q_1 + \dot Q_2) \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_2}} (\dot Q_1 - \dot Q_2) + m_1 g \ell + 2 m_2 g \ell - \frac{2(m_1+m_2)}{2} g \ell \left(Q_1^2 + Q_2^2 + \cancel{2 Q_1 Q_2} \right)$$
$$- \frac{\cancel{m_2} g \ell}{2} \cancel{\frac{(m_1+m_2)}{m_2}} \left(\cancel{Q_1^2} + \cancel{Q_2^2} - \cancel{2 Q_1 Q_2} \right) \Rightarrow$$

$$L = (m_1+m_2) \ell^2 \left(\dot Q_1^2 + \dot Q_2^2 \right) + \sqrt{m_2} \cdot \sqrt{m_1+m_2} \cdot \ell^2 \left(\dot Q_1^2 - \dot Q_2^2 \right) + m_1 \ell g$$
$$+ 2 m_2 g \ell - (m_1+m_2) g \ell \left(Q_1^2 + Q_2^2 \right)$$

Άρα έχουμε δύο ανεξάρτητους ταλαντωτές, αφού δεν υπάρχουν πια ενδιάμεσοι όροι.

$$\omega_1^2 = \frac{(m_1+m_2) g \ell}{(m_1+m_2)\ell^2 + \sqrt{m_2(m_1+m_2)} \cdot \ell^2} = \frac{g/\ell}{1 + \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}}$$

$$\omega_2^2 = \frac{(m_1+m_2) g \ell}{(m_1+m_2)\ell^2 - \sqrt{m_2} \cdot \sqrt{m_1+m_2} \cdot \ell^2} = \frac{g/\ell}{1 - \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}}}$$

Φυσική σημασία κανονικών συντεταγμένων

Έστω ότι οι αρχικές συνθήκες είναι τέτοιες ώστε όλες οι κανονικές συντεταγμένες πλην της Q_s είναι σταθερές. Τότε όλες οι γενικευμένες συντεταγμένες ταλαντώνονται με την συχνότητα ω_s, αφού το Q_i είναι γραμμικός συνδυασμός των q_i. Συνεπώς η γενική ταλάντωση μπορεί να αναλυθεί σε κάποιες πρωτεύουσες ταλαντώσεις, τις λεγόμενες κανονικές. Αν οι κανονικές ταλαντώσεις δεν απομακρύνουν το σώμα από την Θ.Ι. για πάντα, τότε και η γενική ταλάντωση δεν θα το απομακρύνει.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ότι στην κανονική ταλάντωση, κάθε γενικευμένη συντεταγμένη ταλαντώνεται με την ίδια συχνότητα.

i) Γράφουμε την L συνάρτηση των μικρών απομακρύνσεων q_i από την Θ.Ι.

ii) Θέτουμε $q_i(t) = \rho_i u(t)$ (όπου ρ_i = σταθερά) στην L. Βρίσκουμε την εξίσωση για το $u(t)$ από την L που προέκυψε:

$$\ddot{u} + \omega^2(\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_e) \cdot u(t) = 0$$

Οι κανονικές ταλαντώσεις είναι σταθερές καταστάσεις, δηλαδή μικρές εκτροπές τους, επηρεάζουν πολύ λίγο.
Συνεπώς η $\omega^2(\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_e)$ πρέπει να παίρνει μια ακρότατη τιμή σαν συνάρτηση των $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_e$, έτσι ώστε μια μικρή μεταβολή στα ρ_i να μην την επηρεάζει.

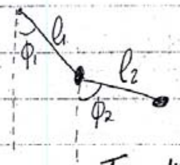
$$\omega^2(\rho_i + \delta\rho_i) \simeq \omega^2(\rho_i) + \sum_e \frac{d\omega^2}{d\rho_e} \cdot \delta\rho_e + \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\omega}{d\rho_i} = 0 \quad \text{για κάθε } \rho_i$$

Έτσι θα βρεθούν οι ίδιο συχνότητες.

Παράδειγμα :

(1) Γενικευμένο διπλό συνεπίπεδο εκκρεμές.



$x_1 = l_1 \sin\phi_1 \qquad x_2 = l_1 \sin\phi_1 + l_2 \sin\phi_2$

$z_1 = -l_1 \cos\phi_1 \qquad z_2 = -l_1\cos\phi_1 - l_2 \cos\phi_2$

$$T = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2\right)$$

$$T = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left[l_1^2\dot{\phi}_1^2 + l_2^2\dot{\phi}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)\right]$$

$$V = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 = -m_1 g l_1 \cos\phi_1 - m_2 g l_1 \cos\phi_1 - m_2 g l_2 \cos\phi_2$$

Θέση ισορροπίας : $\phi_1 = \phi_2 = 0$

Για μικρές ταλαντώσεις : $\phi_1 \to 0 + \phi_1$ (ϕ_1 μικρό)

$\phi_2 \to 0 + \phi_2$ (ϕ_2 μικρό)

$$L = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cdot \cos(0)$$
$$+ m_1 g l_1 - \frac{m_1 g l_1 \phi_1^2}{2} - \frac{m_2 g l_1 \phi_1^2}{2} - \frac{m_2 g l_2 \phi_2^2}{2} + m_2 g l_1 + m_2 g l_2$$

Θέλουμε $\phi_1 = \rho_1 u(t)$

$\phi_2 = \rho_2 u(t)$

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \rho_1^2 \dot{u}^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \rho_2^2 \dot{u}^2 + m_2 l_1 l_2 \rho_1 \rho_2 \dot{u}^2 + m_1 g l_1 + m_2 g l_1 +$$
$$+ m_2 g l_2 - \frac{m_1 + m_2}{2} g l_1 \rho_1^2 u^2 - \frac{m_2}{2} g l_2 \rho_2^2 u^2.$$

Άρα : εξισώσεις Euler - Lagrange :

$$\ddot{u}\left[(m_1+m_2) l_1^2 \rho_1^2 + m_2 l_2^2 \rho_2^2 + 2 m_2 l_1 l_2 \rho_1 \rho_2\right] = -u\left[(m_1 + m_2) g l_1 \rho_1^2 + m_2 g l_2 \rho_2^2\right]$$

$$\omega^2 = \frac{(m_1 + m_2) g l_1 \rho_1^2 + m_2 g l_2 \rho_2^2}{(m_1 + m_2) l_1^2 \rho_1^2 + m_2 l_2^2 \rho_2^2 + 2 m_2 l_1 l_2 \rho_1 \rho_2}$$

116

$$\omega^2 = \frac{m_1 g l_1 \rho_1^2 + m_2 g (l_1 \rho_1^2 + l_2 \rho_2^2)}{m_1 l_1^2 \rho_1^2 + m_2 (l_1 \rho_1 + l_2 \rho_2)^2}$$

$$\frac{d\omega^2}{d\rho_1} = 0 \Rightarrow \frac{[m_1 l_1^2 \rho_1^2 + m_2 (l_1\rho_1 + l_2\rho_2)^2][2 m_1 g l_1 \rho_1 + 2 m_2 g l_1 \rho_1]}{[m_1 g l_1 \rho_1^2 + m_2 g (l_1 \rho_1^2 + l_2 \rho_2^2)][2 m_1 l_1^2 \rho_1 + 2 m_2 l_1 (l_1\rho_1 + l_2\rho_2)]} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{d\omega^2}{d\rho_2} = 0 \Rightarrow \frac{[m_1 l_1^2 \rho_1^2 + m_2 (l_1\rho_1 + l_2\rho_2)^2] \cdot [2 m_2 g l_2 \rho_2]}{[m_1 g l_1 \rho_1^2 + m_2 g (l_1 \rho_1^2 + l_2 \rho_2^2)][2 m_2 l_2 (\rho_1 l_1 + l_2 \rho_2)]} = 1 \quad (2)$$

Για κάθε μία από τις (1), (2) πολλαπλασιάζω με τον αντίστοιχο παρονομαστή και τις διαιρώ κατά μέλη.

$$\frac{(m_1+m_2)\, \cancel{g} l_1 \rho_1}{m_2 \cancel{g} l_2 \rho_2} = \frac{m_1 l_1^2 \rho_1 + m_2 l_1 (l_1\rho_1 + l_2\rho_2)}{m_2 l_2 (l_1\rho_1 + l_2\rho_2)}$$

$$(m_1+m_2)\rho_1 (l_1\rho_1 + l_2\rho_2) = \rho_2 [m_1 l_1 \rho_1 + m_2 (l_1\rho_1 + l_2\rho_2)]$$

$$\Rightarrow [m_1\rho_1 + m_2\rho_1 - m_2\rho_2][l_1\rho_1 + l_2\rho_2] = m_1 l_1 \rho_1 \rho_2$$

Αν $m_1 \ll m_2$ $(m_1 \to 0)$ τότε

$m_2(\rho_1 - \rho_2)(l_1\rho_1 + l_2\rho_2) = 0$

$\rho_1 \simeq \rho_2$ ή $\boxed{l_1\rho_1 + l_2\rho_2 \simeq 0}$

$\hookrightarrow$ δεν είναι αλληλοσυμβατό για $l_1 \neq l_2$

Γενικά $\rho_1 - \rho_2 = O(m_1) = \eta$ $\quad l_1\rho_1 + l_2\rho_2 = O(m_1)$

1. $\rho_1 - \rho_2 = \eta$

$$\omega^2 = \frac{\frac{m_1}{m_2} g l_1 \rho_1^2 + g(l_1\rho_1^2 + l_2\rho_2^2)}{\frac{m_1}{m_2} l_1^2 \rho_1^2 + (l_1\rho_1 + l_2\rho_2)^2} = \frac{\frac{m_1}{m_2} g l_1 \rho_1^2 + g(l_1\rho_1^2 + l_2(\rho_1^2 - 2\eta\rho_1))}{\frac{m_1}{m_2} l_1^2 \rho_1^2 + (l_1\rho_1 + l_2\rho_1 - l_2\eta)^2} =$$

$$(m_1 \to 0) = g\,\frac{l_1\rho_1^2 + l_2\rho_1^2}{(l_1+l_2)^2 \rho_1^2} = \frac{g}{l_1+l_2} \qquad \omega^2 \simeq \frac{g}{l_1+l_2}$$

ii) $l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 = O(m_1)$

$$\omega^2 = \frac{m_1 g l_1 \rho_1^2 + m_2 g l_1 \rho_1^2 + m_2 g l_2 \rho_2^2}{m_1 l_1^2\rho_1^2 + m_2(l_1\varphi_1 + l_2\rho_2)^2} = \frac{\frac{m_1}{m_2} g l_1\rho_1^2 + g l_1 \rho_1^2 + g l_2\rho_2^2}{\frac{m_1}{m_2} l_1^2\rho_1^2 + \cancelto{0}{O(m_1^2)}} \simeq$$

$$\simeq \frac{g l_1\rho_1^2 + g l_2\left(-\frac{l_1\varphi_1}{l_2}\right)^2 + O(m_1)}{\frac{m_1}{m_2} l_1\rho_1^2} \simeq \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{l_1^2\rho_1^2}\left[l_1\rho_1^2 + \frac{l_1^2\rho_1^2}{l^2}\right] =$$

$$= \frac{m_2}{m_1} g \frac{l_2+l_1}{l_1 l_2} \Rightarrow \omega^2 \simeq \frac{m_2}{m_1} g\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}\right) \quad (*)$$

2) Να βρεθούν οι ιδιοσυχνότητες της παρακάτω Λαγκρανζιανής:

$$L = \frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2) - \frac{m\rho^2}{2}(x^2+y^2) - m\alpha z(x+y) - \frac{mq^2z^2}{2}$$

1ος Τρόπος: $\frac{d}{dt}[m\dot x] = -m\rho^2 x - m\alpha z$

$$\frac{d}{dt}[m\dot z] = -m\alpha x - m\alpha y - 2\frac{mq^2z}{2}$$

$$\frac{d}{dt}[m\dot y] = -m\rho^2 y - m\alpha z$$

$$V = \frac{m\rho^2}{2}(x^2+y^2) + m\alpha z(x+y) + \frac{mq^2}{2}z^2$$

Σημείο ισορροπίας : (0,0,0)

Μικρές ταλαντώσεις γύρω από την Θ.Ι. ⇒ x, y, z = μικρά

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = m\rho^2 x + m\alpha z$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = m\rho^2 y + m\alpha z$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = m\alpha(x+y) + mq^2 z$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_i \partial q_j} = \begin{pmatrix} m\rho^2 & 0 & m\alpha \\ 0 & m\rho^2 & m\alpha \\ m\alpha & m\alpha & mq^2 \end{pmatrix}$$

(118) Άρα $\left[-\omega^2 \tilde{\mathcal{U}} + \frac{d^2 V}{d\tilde{q}_i d\tilde{q}_j}\right]\vec{A} = 0$

$$\Rightarrow \det \begin{bmatrix} -m\omega^2 + mp^2 & 0 & m\alpha \\ 0 & -m\omega^2 + mp^2 & m\alpha \\ m\alpha & m\alpha & -m\omega^2 + mq^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$0 = (mp^2 - m\omega^2)\left[(mp^2 - m\omega^2)(mq^2 - m\omega^2) - m^2\alpha^2\right] + m\alpha[-m\alpha][mp^2 - m\omega^2]$$

$$\Rightarrow p^2 = \omega^2 \quad \text{ή} \quad 0 = (\cancel{m}p^2 - \cancel{m}\omega^2)(\cancel{m}q^2 - \cancel{m}\omega^2) - 2\cancel{m^2}\alpha^2$$

$$\Rightarrow p = \omega \quad \text{ή} \quad 0 = p^2q^2 - \omega^2 q^2 - \omega^2 p^2 + \omega^4 - 2\alpha^2 \; *$$

$$* \quad \omega^2 = \frac{q^2 + p^2 \pm \sqrt{q^4 + p^4 + 2p^2q^2 - 4p^2q^2 + 8\alpha^2}}{2}$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{q^2 + p^2 \pm \sqrt{(q^2 - p^2)^2 + 8\alpha^2}}{2}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\omega = p}$$

2ος Τρόπος: Έχουμε συμμετρία εναλλαγής για τα x και y. Άρα:

$x = Q_1 + Q_2$

$y = Q_1 - Q_2$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2}\left[2\dot{Q}_1^2 + 2\dot{Q}_2^2 + \dot{z}^2\right] - \frac{mp^2}{2}\left[2Q_1^2 + 2Q_2^2\right] - m\alpha z(2Q_1) - \frac{mq^2 z^2}{2}$$

Q_2 = αποσυζευγμένο από τα Q_1, z $\Rightarrow$ παίρνω το ω_2^2:

$$\omega_2^2 = \frac{mp^2}{m} = p^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = p$$

Υπόλοιπο L:

$$L = m\dot{Q}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{z}^2 \underbrace{- mp^2 Q_1^2 - 2m\alpha z Q_1 - \frac{mq^2}{2}z^2}_{-V}$$

Σημείο ισορροπίας: $\frac{\partial V}{\partial Q_1} = 0$ και $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = 2mp^2 Q_1 + 2m\alpha z \quad , \quad 0 = 2m\alpha Q_1 + mq^2 z$$

Σημείο ισορροπίας $(Q_1, z) = (0,0)$ $\Rightarrow$ Κάνω ταλαντώσεις γύρω από τη Θ.Ι μικρές, $\Rightarrow$ Q_1, z μικρά

Εξισώσεις Euler - Lagrange: $2m\ddot{Q}_1 = -2mp^2 Q_1 - 2m\alpha z$
$m\ddot{z} = -2m\alpha Q_1 - mq^2 z$

Κανονικές ταλαντώσεις: $Q_1 = A \cdot \cos\omega t$
$z = B \cdot \cos\omega t$

$$\Rightarrow -\omega^2 Q_1 + p^2 Q_1 + \alpha z = 0$$
$$-\omega^2 z + 2\alpha Q_1 + q^2 z = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\omega^2+p^2 & \alpha \\ 2\alpha & -\omega^2+q^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (-\omega^2+p^2)(-\omega^2+q^2) = 2\alpha^2$$

$$\Rightarrow \omega = p \quad (\text{απο } (Ι_2))$$

και $$\omega^2 = \frac{q^2+p^2 \pm \sqrt{(q^2-p^2)+8\alpha^2}}{2}$$

(*) Η L έχει συμμετρία εναλλαγής $\Rightarrow$ οι κανονικές διατάξεις είναι συμμετρικές και αντισυμμετρικές.

Θεωρώ ότι $m_1 << m_2$, και $l_1 = l_2 = l$

$$L \simeq \frac{m_1+m_2}{2} l^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\phi}_2^2 + m_2 l^2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 - gl(m_1+m_2)\frac{\phi_1^2}{2} - m_2 gl \frac{\phi_2^2}{2}$$

Εδώ $\phi_1 = x_1$ και $\phi_2 \simeq \gamma x_2$ με $\underbrace{(m_1+m_2) l^2 = l^2 m_2 \gamma^2}$

Θέλω οι συντελεστές των $\dot{\phi}_1^2$ και $\dot{\phi}_2^2$ να είναι ίδιοι για να έχω συμμετρία εναλλαγής.

$$\Rightarrow L = \frac{m_1+m_2}{2} l^2 \dot{x}_1^2 + (m_1+m_2) l^2 \frac{\dot{x}_2^2}{2} + \sqrt{m_2} l^2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 \sqrt{m_1+m_2} - gl\frac{(m_1+m_2)}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

Θέτω $\left.\begin{aligned} x_1 &= Q_1 + Q_2 \\ x_2 &= Q_1 - Q_2 \end{aligned}\right\}$ Τότε η L γίνεται:

120

$$L = \frac{m_1+m_2}{2}\ell^2\left[2\dot{Q}_1^2+2\dot{Q}_2^2\right]+\ell^2\sqrt{m_2(m_1+m_2)}\left[\dot{Q}_1^2-\dot{Q}_2^2\right]-g\ell(m_1+m_2)(Q_1^2+Q_2^2)$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \frac{g\ell(m_1+m_2)}{(m_1+m_2)\ell^2 \pm \sqrt{m_2(m_1+m_2)}\,\ell^2} = \frac{g/\ell}{1 \pm \sqrt{m_2(m_1+m_2)}}$$

3)

Θεωρώ ότι δεν υπάρχει δυναμικό λόγω βαρύτητας. Επίπεδο εξ-ηρίων = επίπεδο δυναμικής - λόγω βαρύτητας - μηδέν.

$$L = \frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2} - \frac{k}{2}x_1^2 - \frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)^2 - \frac{kx_2^2}{2}$$

Υποθέτουμε λειψές ταλαντώσεις και ψάχνουμε για τις ιδιοτιμές.

$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + \lambda(x_2-x_1)$

$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - \lambda(x_2-x_1)$

Μέθοδος: Έστω $x_1 = \rho_1 u(t)$

$x_2 = \rho_2 u(t)$

$\left.\begin{array}{l} x_1 = Ae^{i\omega t} \\ x_2 = Be^{+i\omega t} \end{array}\right\}$

$$L = \frac{m}{2}\rho_1^2\dot{u}^2 + \frac{m\rho_2^2}{2}\dot{u}^2 - \frac{k}{2}\rho_1^2u^2 - \frac{\lambda}{2}u^2(\rho_2-\rho_1)^2 - \frac{k}{2}\rho_2^2u^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{\text{συντελεστής του } -u^2}{\text{συντελεστής του } \dot{u}^2} = \frac{\frac{k}{2}\rho_1^2 + \frac{\lambda}{2}(\rho_2-\rho_1)^2 + \frac{k}{2}\rho_2^2}{\frac{m}{2}(\rho_1^2+\rho_2^2)}$$

Ελαχιστοποιούμε και μεγιστοποιούμε ως προς ρ_1 και ρ_2:

Ως προς ρ_1:

$$m(\rho_1^2+\rho_2^2)\left[2k\rho_1 + 2\lambda(\rho_1-\rho_2)\right] = \left[k\rho_1^2 + \lambda(\rho_2-\rho_1)^2 + k\rho_2^2\right]m\cdot 2\rho_1$$

Ως προς ρ_2:

$$m(\rho_1^2+\rho_2^2)\left[2\lambda(\rho_2-\rho_1) + 2k\rho_2\right] = \left[k\rho_1^2 + \lambda(\rho_2-\rho_1)^2 + k\rho_2^2\right]\cdot 2m\rho_2$$

Διαιρούμε τις δύο σχέσεις:

$$\frac{k\rho_1 + \lambda(\rho_1-\rho_2)}{\lambda(\rho_2-\rho_1) + k\rho_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \Rightarrow$$

$$\cancel{k\rho_1\rho_2} + \cancel{\lambda}\rho_2(\rho_1-\rho_2) = \cancel{\lambda}\rho_1(\rho_2-\rho_1) + \cancel{k\rho_1\rho_2}$$

$$\rho_2(\rho_1-\rho_2) - \rho_1(\rho_2-\rho_1) = 0$$

$$(\rho_2+\rho_1)(\rho_1-\rho_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = \pm\rho_2$$

$\rho_1=\rho_2$ συμμετρική διάταξη : $\omega^2 = \dfrac{2k\rho_1^2}{2m\rho_1^2} = \dfrac{k}{m}$

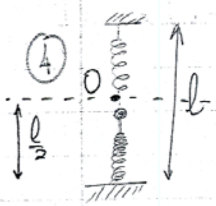
$\rho_1=-\rho_2$ αντισυμμετρική διάταξη : $\omega^2 = \dfrac{2k\rho_1^2+4\lambda\rho_1^2}{2m\rho_1^2} = \dfrac{k}{m} + 2\dfrac{\lambda}{m}$

Μέθοδος: $\left.\begin{aligned} x_1 &= Q_1+Q_2 \\ x_2 &= Q_1-Q_2 \end{aligned}\right\}$ $\quad \begin{aligned} x_1^2+x_2^2 &= 2Q_1^2+2Q_2^2 \\ \dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2 &= 2\dot{Q}_1^2+2\dot{Q}_2^2 \end{aligned}$

$$L = \frac{m}{2}\left(2\dot{Q}_1^2+2\dot{Q}_2^2\right) - \frac{k}{2}\left(2Q_1^2+2Q_2^2\right) - \frac{\lambda}{2}\left(4Q_2^2\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{k}{m} \\ \omega_2^2 &= \frac{2\lambda+k}{m} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1 &= A_1\cos\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t \\ x_2 &= A_1\cos\omega_1 t - A_2\cos\omega_2 t \end{aligned}$$

4



Κανονικό μήκος ελατηρίων $l_0 < \frac{l}{2}$ $\Rightarrow$ τεντωμένα ελατήρια

→ <0 γιατί είναι κάτω από το O λόγω βάρους.

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - mg(-x) - \frac{k}{2}\left(x+\frac{l}{2}-l_0\right)^2 - \frac{k}{2}\left(\frac{l}{2}-x-l_0\right)^2$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = mg - k\left(x+\frac{l}{2}-l_0\right) + k\left(\frac{l}{2}-x-l_0\right)$$

$$m\ddot{x} = mg - kx - \frac{kl}{2} + kl_0 + \frac{kl}{2} - kx - kl_0$$

$$m\ddot{x} = mg - 2kx$$

Ισορροπία: $2kx = mg \Rightarrow x = \dfrac{mg}{2k}$

Μικρές ταλαντώσεις: $x = \varepsilon + \dfrac{mg}{2k}$ $\quad \varepsilon$ μικρό

$$m\ddot{\varepsilon} = \cancel{mg} - 2k\left(\varepsilon + \cancel{\frac{mg}{2k}}\right) = -2k\varepsilon$$

Το $\varepsilon=0$ πρέπει να είναι λύση γιατί τότε $x=x_0$ που είναι λύση

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{2k}{m}}$$