Τι είδαμε:

- Ξεκινήσαμε την συζήτηση για το θέμα κεντρικής δύναμης
  - ✓ Ανάγαμε το πρόβλημα 2 σωμάτων σε πρόβλημα κεντρικής δύναμης
  - ✓ διατήρηση ορμής CM μετατρέπει το πρόβλημα από 6 DoF σε 3 DoF
  - ✓ διατήρηση της στροφορμής (σταθερό επίπεδο τροχιάς) και διατήρηση του μέτρου της L_z ελαττώνει το πρόβλημα 1 DoF
- Το πρόβλημα περιορίζεται σε εξίσωση με 1DoF ($r = |\vec{r}|$) $m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} + F(r)$
  - ✓ Χρήση της διατήρησης στροφορμής: $V'(r) \equiv V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$
- Πρώτο βήμα: Ποιοτική συμπεριφορά κίνησης
  - ✓ Φραγμένες, μη φραγμένες και κυκλικές τροχιές
  - ✓ Συνθήκες για σταθερές κυκλικές τροχιές
- Δεύτερο βήμα: Πρέπει να λύσουμε για την τροχιά
  - ✓ διατήρηση Ενέργειας δίνει: $E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$

Ποιοτική συμπεριφορά

- Ολοκλήρωση της ακτινικής εξίσωσης δεν είναι πάντα εύκολο
  - Πολλές φορές είναι αδύνατο $\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}$
- Συμπεράσματα για την γενική συμπεριφορά βλέποντας τη σχέση

$$V'(r) \equiv V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$$

⇐ Ημί-δυναμικό το οποίο περικλύει την κεντρομόλο δύναμη

- Η ενέργεια διατηρείται και E-V' πρέπει να ναι θετική ποσότητα

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V'(r) \Rightarrow \frac{m\dot{r}^2}{2} = E - V'(r) \geq 0 \Rightarrow E \geq V'(r)$$

- Σχεδιάζουμε το $V'(r)$ και μελετούμε τις τομές με το διάγραμμα της ενέργειας E

Δύναμη ανάλογη του 1/r²

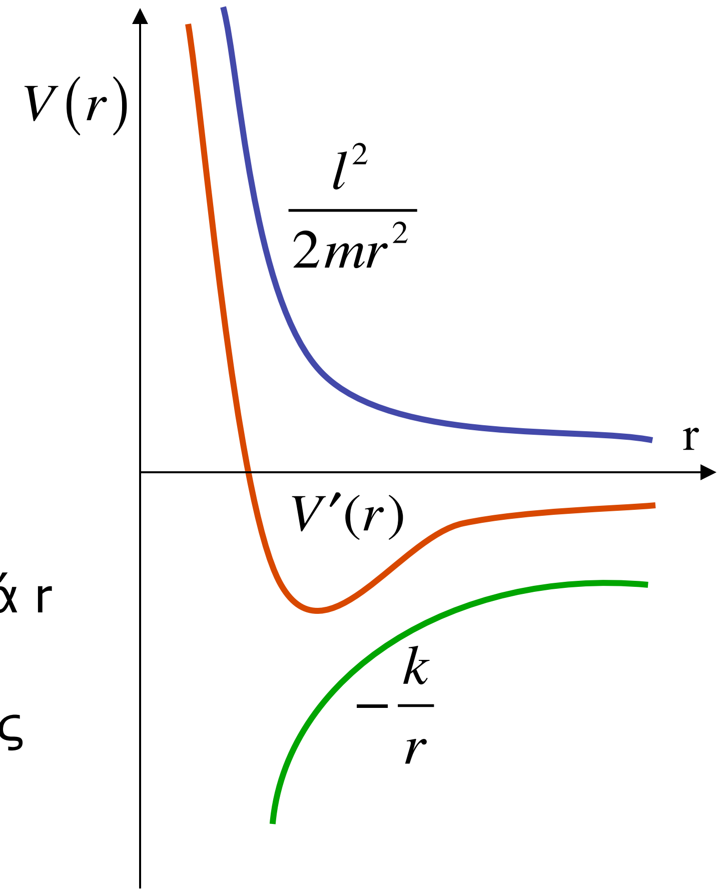
- Θεωρήστε μια ελκτική $1/r^2$ δύναμη

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} \Rightarrow V(r) = -\frac{k}{r}$$

- Βαρύτητα ή ηλεκτροστατική δύναμη

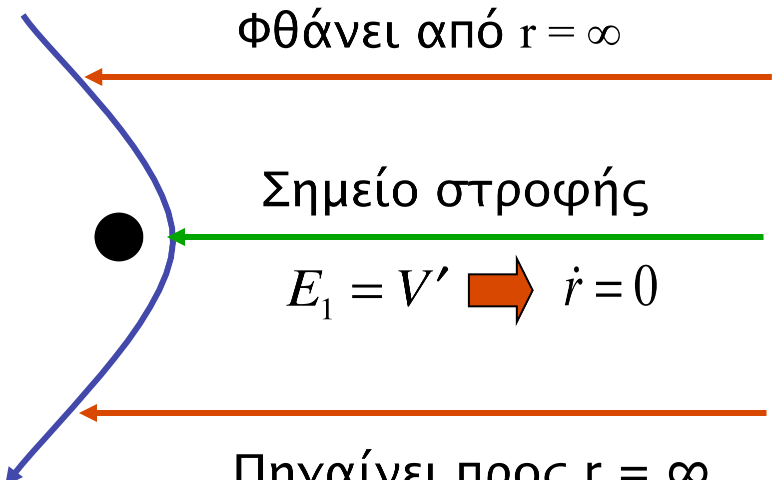
$$V'(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

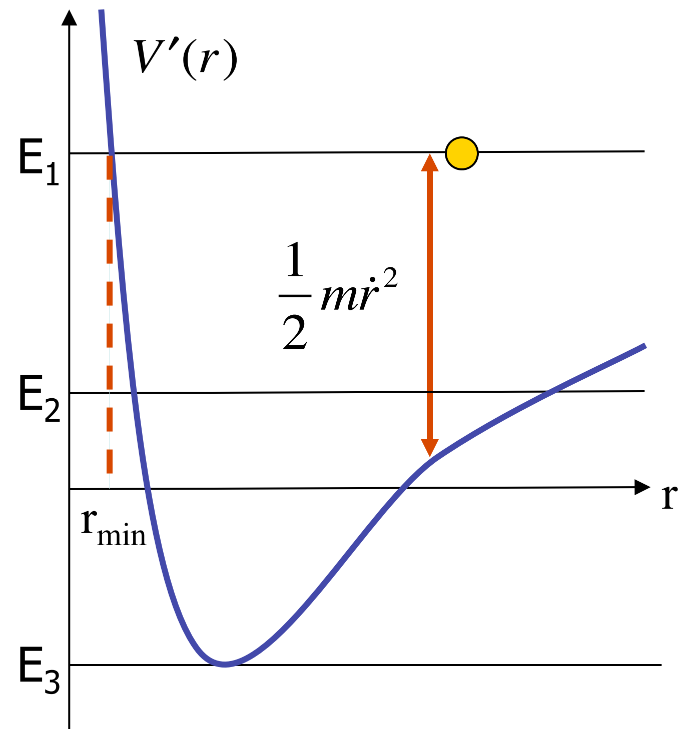
- Η $1/r^2$ δύναμη υπερισχύει σε μεγάλα r
- Η κεντρομόλος δύναμη υπερισχύει σε μικρά r
- Μια «κοιλιά» εμφανίζεται στις μέσες τιμές



Μη φραγμένη κίνηση

- Έστω V'(r) παρόμοιο με την περίπτωση 1/r^2
  - Ενδιαφέρουν μόνο τα γενικά χαρακτηριστικά
- E = E$_1$ → r > r$_{min}$
  - Σώμα μπορεί να πάει στο άπειρο
- Γενική συμπεριφορά

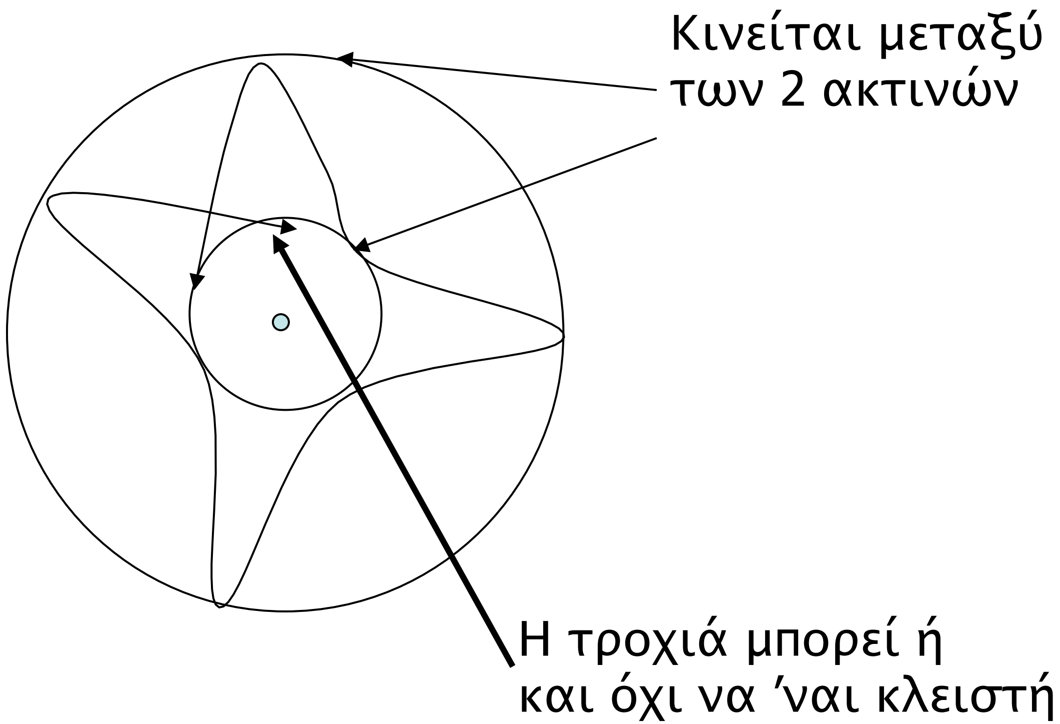


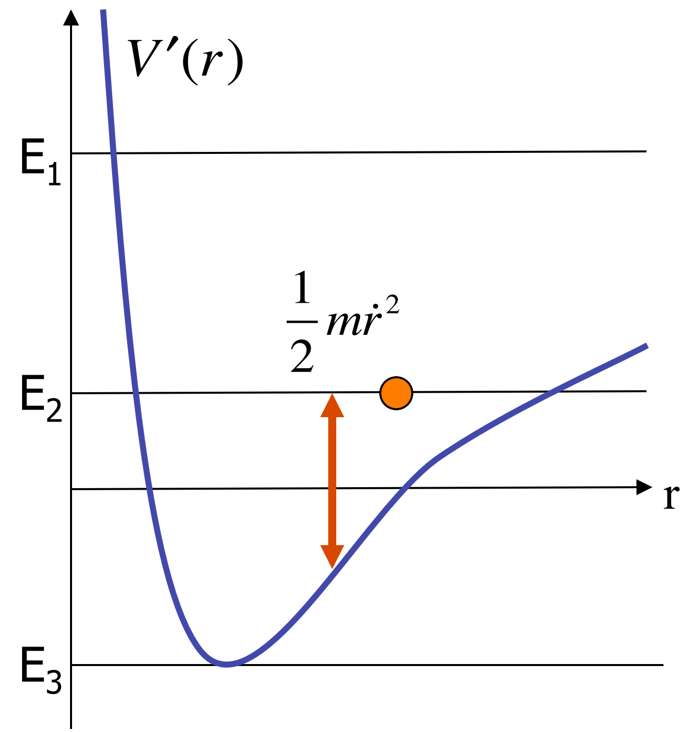


Μια δύναμη 1/r^2 θα έκανε υπερβολή

Φραγμένη κίνηση

- ❑ $E = E_2 \rightarrow r_{min} < r < r_{max}$
  - ➢ Το σώμα είναι περιορισμένο μεταξύ δύο κύκλων

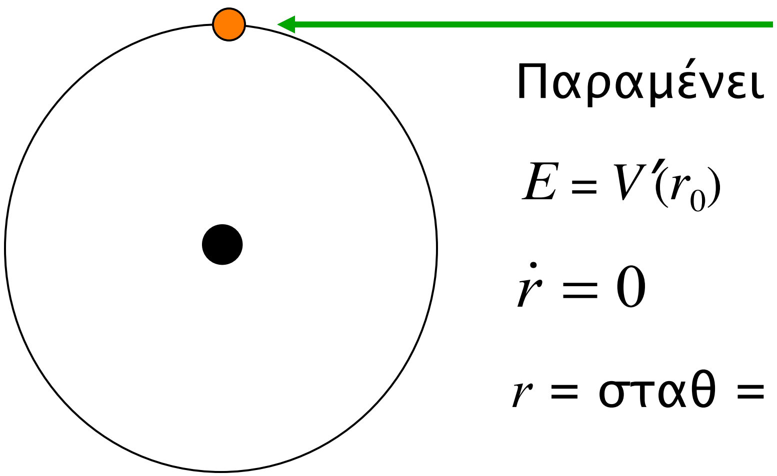




Μια δύναμη $1/r^2$ θα έκανε μια έλλειψη

Κυκλική κίνηση

- $E = E_3 \rightarrow r = r_0$
  - Μόνο μία ακτίνα επιτρέπεται

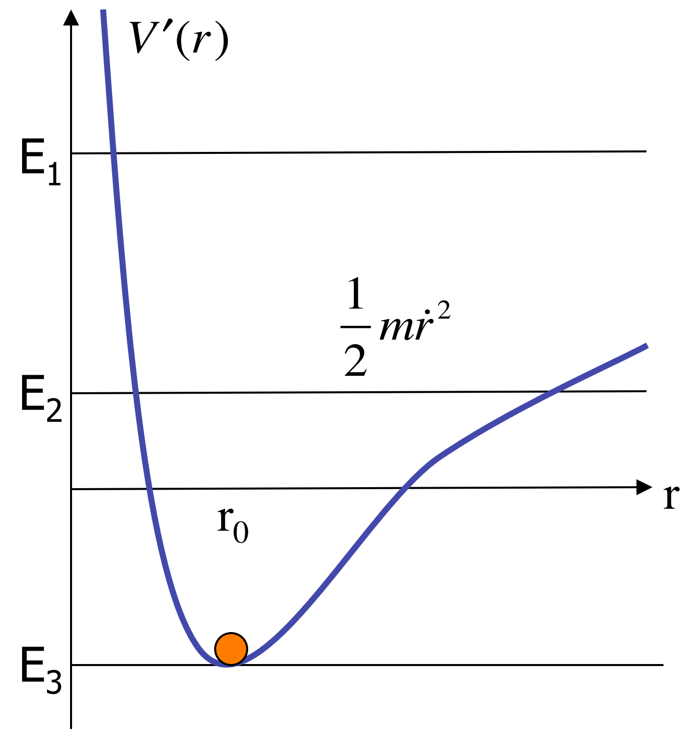


Παραμένει σε κύκλο

$$E = V'(r_0)$$

$$\dot{r} = 0$$

$$r = \sigma\tau\alpha\theta = r_0$$

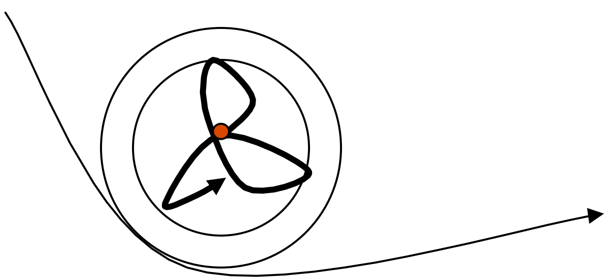


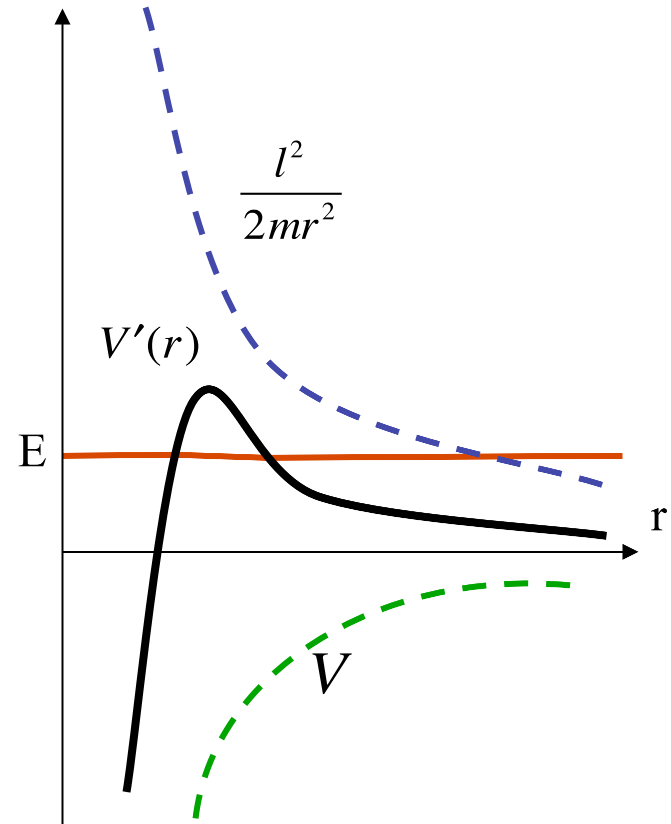
- Ο καταχωρισμός σε φραγείς, μη φραγείς και κυκλικές κινήσεις εξαρτάται από το γενικό σχήμα του V’
  - Όχι από τις λεπτομέρειες ($1/r^2$ ή διαφορετικά)

Άλλο παράδειγμα

$$V = -\frac{a}{r^3} \Leftrightarrow F = -\frac{3a}{r^4} \quad \Rightarrow \quad V'(r) = -\frac{a}{r^3} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

- Ελκτική δύναμη r^{-4}
  - $V'(r)$ έχει κάποια κορυφή
  - Σωματίδιο με ενέργεια Ε μπορεί να είναι φραγμένο ή όχι, ανάλογα από την αρχική r



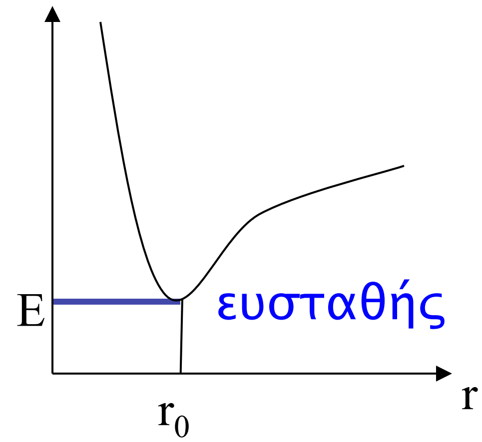


Ευσταθής κυκλική τροχιά

- Κυκλική τροχιά υπάρχει στο βάθος ενός κοίλους του V'

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - V' = 0 \quad \Rightarrow m\ddot{r} = -\frac{dV'}{dr} = 0$$

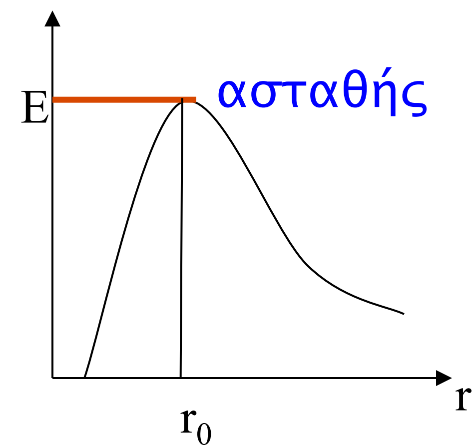
$$r = \sigma\tau\alpha\theta$$



- Στην κορυφή ενός κοίλους «δουλεύει» θεωρητικά, αλλά είναι ασταθές

- Η αρχική συνθήκη πρέπει να 'ναι ακριβής

$$\dot{r} = 0 \quad \text{και} \quad r = r_0$$



- Σταθερή κυκλική τροχιά απαιτεί: $\dfrac{d^2V'}{dr^2} > 0$

Εκθετική Δύναμη

$$V'(r) \equiv V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$$

$$\left.\frac{dV'}{dr}\right|_{r=r_0} = -F(r_0) - \frac{l^2}{mr_0^3} = 0$$ και $$\left.\frac{d^2V'}{dr^2}\right|_{r=r_0} = -\left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=r_0} + \frac{3l^2}{mr_0^4} > 0$$

$$F(r_0) = -\frac{l^2}{mr_0^3}$$

Μόνο ελκτική δύναμη

$$\Rightarrow \left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=r_0} < -\frac{3F(r_0)}{r_0}$$

- Υποθέστε ότι η δύναμη έχει τη μορφή: $F(r) = -kr^n$
  - k>0 για ελκτική δύναμη
- Συνθήκες για ευσταθή κυκλική τροχιά είναι

$$-knr_0^{n-1} < 3kr_0^{n-1} \Rightarrow n > -3$$

Εκθετικές δυνάμεις μπορούν να δημιουργήσουν ευσταθή κυκλική τροχιά όταν ο εκθέτης ικανοποιεί: $n > -3$

Εξίσωση τροχιάς $m\ddot{r}-\frac{l^2}{mr^3}+\frac{dV(r)}{dr}=0$

- Προσπαθούμε να λύσουμε την εξίσωση $r = r(t)$ και $\theta = \theta(t)$
  - Ενδιαφερόμαστε για την μορφή της τροχιάς $r = r(\theta)$
  - Αλλάζουμε μεταβλητή από $dt \rightarrow d\theta$

$$l = mr^2\dot{\theta} \;\Rightarrow\; \dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{d\theta}\Rightarrow\frac{dr}{dt}=\frac{l}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\Rightarrow\frac{dr}{dt}=\dot{\theta}r'\Rightarrow\frac{d}{dt}X=\dot{\theta}\frac{d}{d\theta}X$$

σταθ.

$$\ddot{r}=\frac{d\dot{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\boxed{\dot{\theta}r'}\right)\Rightarrow\ddot{r}=\dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\dot{\theta}r'\right)\Rightarrow\ddot{r}=\dot{\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{l}{mr^2}r'\right)$$

$$m\ddot{r}-\frac{l^2}{mr^3}+\frac{dV(r)}{dr}=0 \;\Rightarrow\; \frac{l}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\underline{\frac{l}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}}\right)-\frac{l^2}{mr^3}+\frac{dV}{dr}=0$$

- Αλλάζουμε μεταβλητή από r σε $u = 1/r$

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)=-\underline{\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}}$$

$$\underline{\frac{d}{dr}}=-u^2\frac{d}{du}$$

Εξίσωση τροχιάς

Αλλαγή μεταβλητών ⇒

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{l^2}\frac{dV\left(u^{-1}\right)}{du} = 0$$

- Λύση της εξίσωσης αυτής δίνει το σχήμα της τροχιάς
  - Όχι τόσο εύκολη η λύση της
- Θα τη λύσουμε για δύναμη αντιστρόφως ανάλογη του r^2

- Μια ακόμα χρήσιμη πληροφορία μπορεί να εξαχθεί χωρίς να λύσουμε την εξίσωση

Συμμετρία τροχιάς

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{l^2}\frac{dV\left(u^{-1}\right)}{du} = 0$$

- Η εξίσωση είναι άρτια (συμμετρική) ως προς θ
  - Αντικαθιστώντας θ με $-\theta$ δεν αλλάζει την εξίσωση
- Η λύση $u(\theta)$ πρέπει να συμμετρική αν είναι η αρχική συνθήκη

➢ Διαλέγοντας θ=0 για $t = 0$ και παίρνοντας το συμμετρικό του θ → -θ

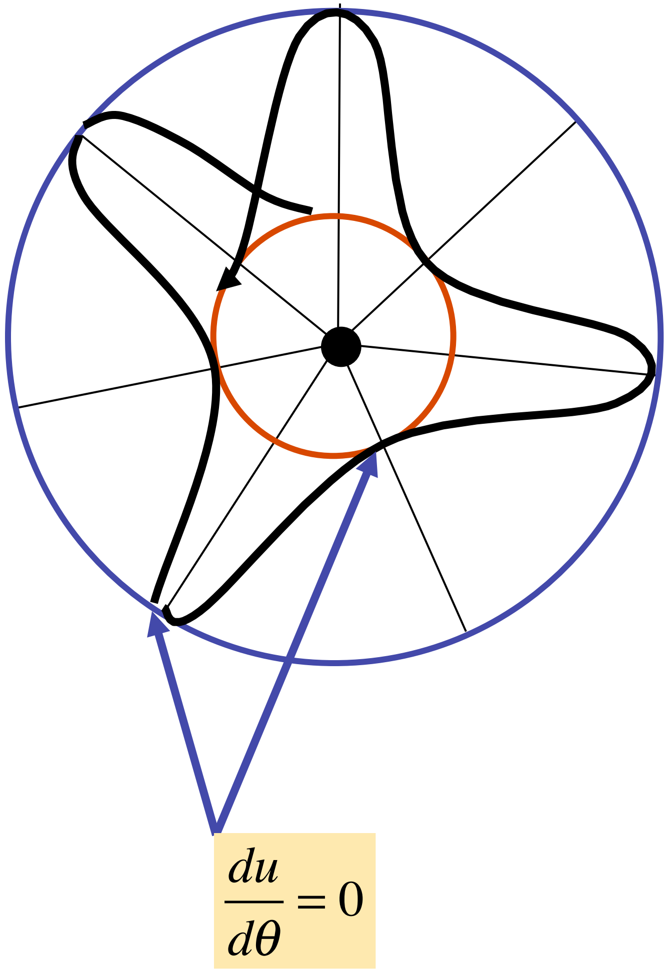
$$u(0) \to u(0)$$ ΟΚ $$\frac{du}{d\theta}(0) \to -\frac{du}{d\theta}(0)$$ Ισχύει ΑΝ $$\frac{du}{d\theta}(0) = 0$$

➢ Η τροχιά είναι συμμετρική σε γωνίες όπου $\frac{du}{d\theta} = 0$

Συμμετρία της τροχιάς

- Η τροχιά είναι συμμετρική σε κάθε σημείο στροφής = αψίδες

- Η τροχιά είναι αναλλοίωτη κάτω από αντικατοπτρισμούς ως προς τα διανύσματα των αψίδων
  - Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο δεν ενδιαφερόμαστε πολύ για το πρόσημο του $\dot{r}$
  - Λύνοντας την εξίσωση της τροχιάς μεταξύ ενός ζεύγους αψίδων → γνωρίζουμε ολόκληρη την τροχιά



- Προχωρούμε στην λύση της εξίσωσης

Λύση της εξίσωσης τροχιάς

$$\frac{d}{dt}g(r) = \frac{dg}{dr}\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{l^2}\frac{dV(u^{-1})}{du} = 0$$

- Ολοκληρώνοντας την Δ.Ε. θα πάρουμε διατήρηση της ενέργειας

$$m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} + F(r) \Rightarrow m\ddot{r}\dot{r} = \left(\frac{l^2}{mr^3} + F(r)\right)\dot{r} \Rightarrow m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2\right) = -\frac{d}{dr}\left(\frac{l^2}{2mr^2} + V\right)\dot{r}$$

$$\Rightarrow m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{l^2}{2mr^2} + V\right) \Rightarrow m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V\right) = 0 \Rightarrow E = const.$$

- Χρησιμοποιώντας διατήρηση ενέργειας διευκολύνουμε τις πράξεις

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}$$

- Αλλάζουμε μεταβλητές: $\dot{r} = -\frac{l}{m}\frac{du}{d\theta}$

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - u^2 - \frac{2mV(u^{-1})}{l^2}}$$

Ολοκλήρωση

Δύναμη ανάλογη αντιστρόφου του r²

$$F = -\frac{k}{r^2} \qquad V = -\frac{k}{r} \qquad k = GMm \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - u^2 + \frac{2mku}{l^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mku}{l^2} - u^2}} = -\int d\theta = \theta_0 - \theta$$

- Από πίνακες ολοκληρωμάτων έχουμε:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos\left(-\frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right)$$

- Επομένως αντικαθιστούμε όπου α,β,γ τις σταθερές μας

- **Διαφορετικά το λύνουμε μόνοι μας....**

Η ολοκλήρωση

$$\int d\theta = -\int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mku}{l^2} - u^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{m^2k^2}{l^4} - \left(\frac{mk}{l^2} - u\right)^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{m^2k^2}{l^4}}} \int \frac{du}{\sqrt{1 - \left(\boxed{\frac{\frac{mk}{l^2} - u}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{m^2k^2}{l^4}}}}\right)^2}}$$

Ορίζεται σαν cosω

$$= -\int \frac{\sin\omega}{\sin\omega} d\omega = -\omega$$

$$du = \sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{m^2k^2}{l^4}} \sin\omega d\omega$$

$$\cos\omega = \cos(\theta - \theta') = \frac{\frac{mk}{l^2} - u}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{m^2k^2}{l^4}}}$$

Λύνουμε ως προς $u=1/r$

Λύση

$$u = \frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}\cos(\theta - \theta')\right)$$

- Η λύση αυτή είναι όμοια με την γενική εξίσωση κωνικής τομής:

$$\frac{1}{r} = C\left(1 + e\cos(\theta - \theta')\right)$$

- **e** ονομάζεται εκκεντρότητα $\boxed{e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}}$

$$\left.\begin{aligned} r(\theta)(1 + e\cos\theta) = \frac{l^2}{mk} = P \\ (x, y) = r(\cos\theta, \sin\theta) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + ex = P \Rightarrow x^2 + y^2 = (P - ex)^2 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 = P^2 + e^2x^2 - 2ePx \end{aligned}$$

- Μια εστία είναι στην αρχή των αξόνων

$$\boxed{(1 - e^2)x^2 + 2ePx + y^2 = P^2}$$

e > 1	$E > 0$	υπερβολή
e = 1	$E = 0$	παραβολή
e < 1	$E < 0$	έλλειψη
e = 0	$E = -\frac{mk^2}{2l^2}$	κύκλος

Που συμφωνεί με την ποιοτική ταξινόμηση των τροχιών

Ενέργεια και εκκεντρότητα

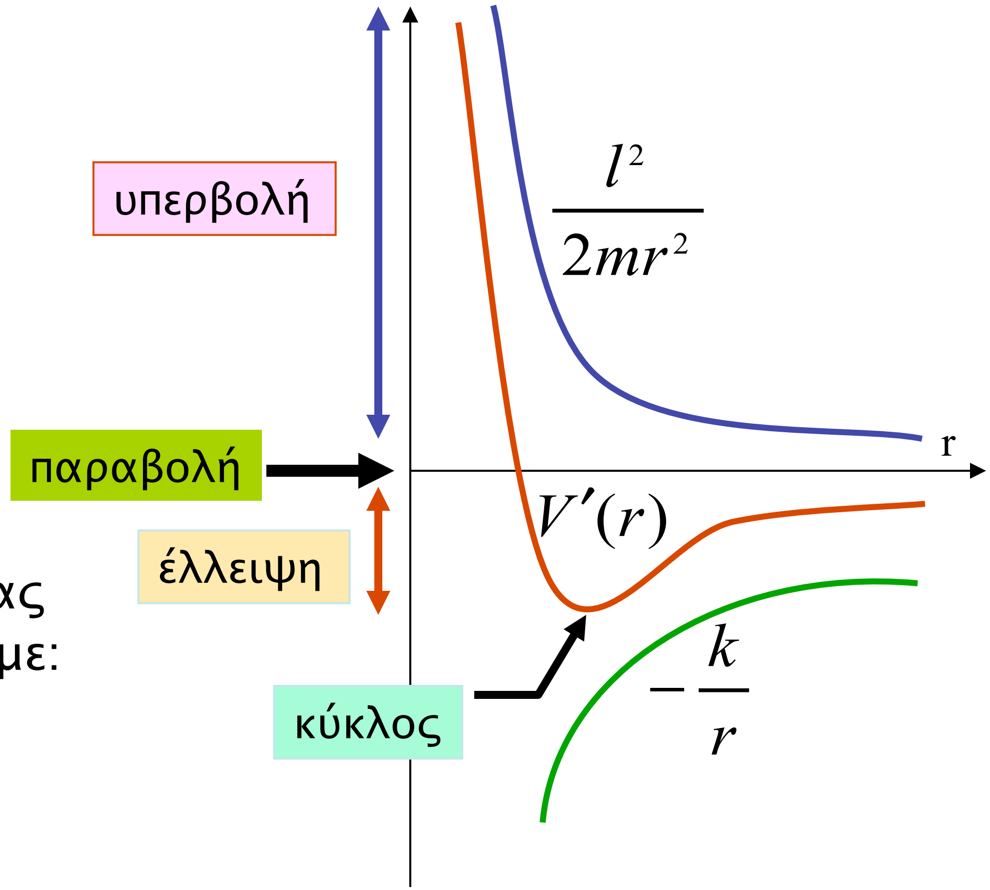
- E=0 ξεχωρίζει φραγμένες και **μή** φραγμένες τροχιές
  - Συνοριακή κατάσταση = Παραβολή
  - Κυκλική τροχιά απαιτεί:

$$V'(r_0) = -\frac{k}{r_0} + \frac{l^2}{2mr_0^2} = E$$

$$\left.\frac{dV'}{dr}\right|_{r_0} = \frac{k}{r_0^2} - \frac{l^2}{mr_0^3} = 0$$

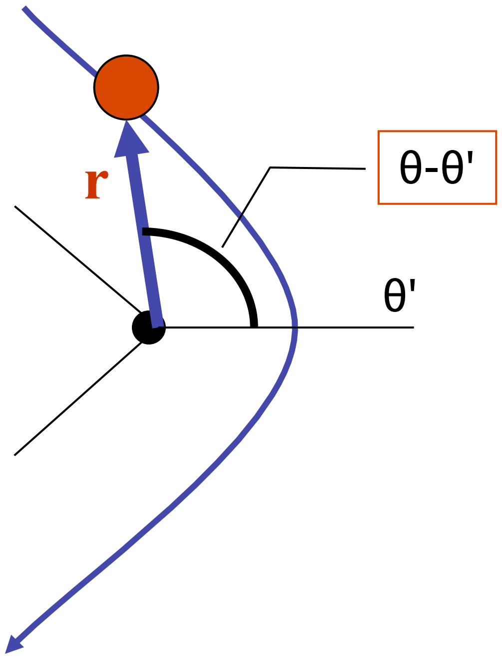
  - Λύνοντας ως προς r_0 ή από την εξίσωση της εκκεντρότητας για κυκλική τροχιά (e=0) έχουμε:

$$\Rightarrow \boxed{E = -\frac{mk^2}{2l^2}}$$

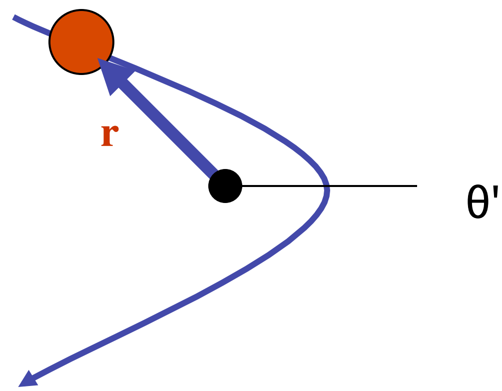


Μη φραγμένες τροχιές

$$\frac{1}{r} = C\left(1 + e\cos\left(\theta - \theta'\right)\right)$$



- e > 1 → υπερβολή
  - θ' είναι το σημείο καμπής (περιήλιο)
  - cos(θ-θ') > -1/e περιορίζει θ
- e = 1 → παραβολή



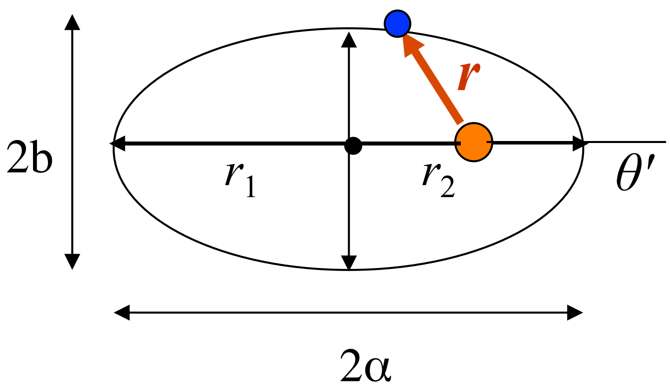
Φραγμένες τροχιές

$$\frac{1}{r} = C\left(1 + e\cos(\theta - \theta')\right) \qquad C = \frac{mk}{l^2} \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$$

- Τα άκρα του μέγιστου άξονα είναι $1/r = C(1 \pm e)$
  - Το μήκος του μέγιστου ημιάξονα είναι:

$$a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C(1+e)} + \frac{1}{C(1-e)}\right) = -\frac{k}{2E}$$

- Ο μέγιστος ημιάξονας δίνεται από την ολική ενέργεια E



- Ο μικρός ημιάξονας δίνεται από:

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = \sqrt{-\frac{l^2}{2mE}}$$

Περίοδος στροφής

$$a = -\frac{k}{2E} \qquad b = \sqrt{-\frac{l^2}{2mE}} \quad \Rightarrow \quad A = \pi ab = \pi\sqrt{-\frac{l^2k^2}{8mE^3}}$$

Εμβαδό τροχιάς

- Ξέρουμε ότι η εμβαδική ταχύτητα είναι σταθερή

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{l}{2m} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{A}{\frac{dA}{dt}} = \pi\sqrt{-\frac{mk^2}{2E^3}}$$

Περίοδος στροφής

- Εκφράζουμε **τ** σαν συνάρτηση του μέγιστου άξονα: $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}a^{3/2}$

3ος Νόμος του Kepler:
Η περίοδος στροφής είναι ανάλογη της 3/2 δύναμης του μέγιστου άξονα

Ο τρίτος νόμος του Kepler $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}a^{3/2}$

- Ο 3ος νόμος του Kepler δεν είναι πλήρης
  - Ο λόγος: η ανηγμένη μάζα → $\frac{1}{\mu} = \left(\frac{1}{M_{\mathrm{H}}} + \frac{1}{m_{\pi}}\right)$

Ήλιος Πλανήτης

  - Το k δίνεται από την βαρύτητα

$$F = -G\frac{Mm}{r^2} = -\frac{k}{r^2} \Rightarrow \boxed{k = GMm}$$

- Η περίοδος στροφής γίνεται:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}a^{3/2} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{G(\mathrm{M}+m)}}a^{3/2}$$

- Οι παράμετροι είναι όλοι ίδιοι για όλους του πλανήτες μόνο αν M>>m

Εξίσωση της τροχιάς με εξάρτηση από χρόνο

- Ασχοληθήκαμε με τη μορφή/σχήμα της τροχιάς $r=r(\theta)$
  - Δεν έχουμε τις πλήρεις λύσεις $r=r(t)$ και $\theta=\theta(t)$

- Για ποιο λόγο δεν το κάνουμε:
  - Ιδιαίτερα πολύπλοκο
    - Θα μπορούσαμε να πάρουμε $t=t(\theta)$
    - Αντιστρέφοντας στο $\theta=\theta(t)$ αδύνατο.
    - Οι φυσικοί περνάνε αιώνες υπολογίζοντας προσεγγιστικές λύσεις
  - Πήραμε ήδη ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά για την λύση

- Η πλήρης λύση αφήνεται στους υπολογιστές