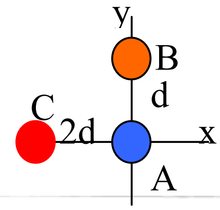
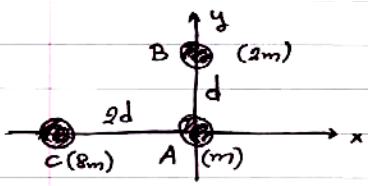
ΦΥΣ. 131
ΕΡΓΑΣΙΑ # 10

1. Τρια αντικείμενα A, B και C με μάζα m, 2m και 8m αντίστοιχα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και στις θέσεις που φαίνονται στο σχήμα. Σε ποια θέση (x,y) πρέπει να τοποθετεί ένα τέταρτο σώμα D, μάζας 8m ώστε η συνολική βαρυτική δύναμη στο σώμα A να είναι μηδέν;





$m_A = m$ στη θέση $(0,0)$

$m_B = 2m$ στη θέση $(0,d)$

$m_C = 8m$ στη θέση $(-2d,0)$

$m_D = 8m$ στη θέση (x,y)

Η δύναμη από το B που εφαρμόζει στο A είναι: $\vec{F}_{BA} = \frac{G m_B m_A}{d^2}\hat{y}$

Η δύναμη από το C στο A είναι: $\vec{F}_{CA} = \frac{G m_C m_A}{(2d)^2}(-\hat{x})$

Αν η ολική βαρυτική δύναμη στο σημείο A είναι μηδέν τότε:

$F_{DA}^{x} = -F_{CA}$ (η συνισταμένη δύναμη στη x-διεύθυνση είναι μηδέν)

$F_{DA}^{y} = -F_{BA}$ (η συνισταμένη δύναμη στη y-διεύθυνση είναι μηδέν)

Επομένως $\tan\Theta = \frac{F_{DA}^{y}}{F_{DA}^{x}} = \frac{F_{BA}}{F_{CA}} = \frac{4m_B}{m_C} = \frac{4(2m)}{8m} = 1 \Rightarrow \boxed{\Theta = 45^\circ}$

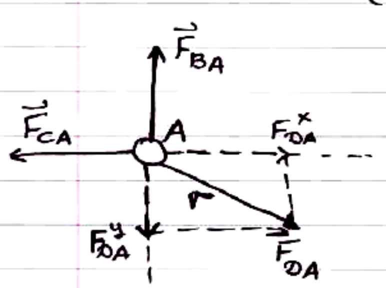
$$F_{DA}^{x} = \frac{\cancel{G}\cancel{m_A}\cancel{m_D}}{r^2}\cos\Theta = F_{CA}^{x} = \frac{\cancel{G}\cancel{m_A}\cancel{m_C}}{(2d)^2} \Rightarrow r^2 = (2d)^2\cos\Theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = 2d\sqrt{\cos\Theta} = 2d\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \boxed{r = 2^{3/4}d}$$

Αλλά οι συντεταγμένες (x,y) μπορούν να γραφούν:

$$(x,y) = (r\cos\Theta, -r\sin\Theta) = \left(\frac{2d}{2^{1/4}}\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{2d}{2^{1/4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(x,y) = (2^{1/4}d, -2^{1/4}d)}$$



2. Αστέρες νετρονίων είναι αστέρες με υπερβολικά μεγάλη πυκνότητα μάζας και δημιουργούνται μετά την έκρηξη ενός supernova. Πολλοί από τους αστέρες αυτούς περιστρέφονται πολύ γρήγορα. Υποθέστε ότι η μάζα ενός συγκεκριμένου σφαιρικού άστρου νετρονίων είναι διπλάσια από τη μάζα του ήλιου και η ακτίνα του μόλις 10Km. Υπολογίστε την μεγαλύτερη δυνατή γωνιακή ταχύτητα που μπορεί να έχει έτσι ώστε η ύλη στην επιφάνεια του αστέρα στον ισημερινό του να κρατιέται σε τροχιά από την βαρυτική δύναμη

Η βαρυτική δύναμη σε ένα μικρό κομμάτι μάζας στην επιφάνεια του αστέρα στον ισημερινό του, δημιουργεί την απαραίτητη κεντρομόλο δύναμη και επιτάχυνση επομένως, σύμφωνα με την σχέση

$$\frac{GM_s m}{R_s^2} = \frac{mv^2}{R_s} = mR_s\omega^2$$

όπου R_s = η ακτίνα του αστέρα

M_s = η μάζα του αστέρα

m = η μάζα στη επιφάνεια

v = η ταχύτητα

$M_{ήλιου} = 1.99 \cdot 10^{30}$ kgr

$$\omega^2 = \sqrt{\frac{GM_s}{R_s^3}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 1.99 \cdot 10^{30}}{(10 \cdot 10^3)^3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = 1.63 \cdot 10^4 \text{ rad/s}}$$

3. Θεωρήστε ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από δύο σωματίδια μάζας M και m και τα οποία βρίσκονται σε μια τεράστια απόσταση το ένα από το άλλο. Παρ' όλο που τα σώματα έχουν πολύ μεγάλη απόσταση μεταξύ τους αλληλεπιδρούν εξαιτίας της βαρυτικής δύναμης και επομένως όταν αφήνονται ελεύθερα έλκονται και κινούνται το ένα προς το άλλο. (α) Έστω οι ταχύτητες των σωματιδίων σε κάποια ορισμένη χρονική στιγμή είναι υM και υm. Βρείτε μια σχέση για την ταχύτητα υM συναρτήσει των M, m και υm. <u>*Υπόδειξη:*</u> Δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα. Προσέξτε ότι τα σωματίδια κινούνται προς το μέρος του άλλου και επομένως οι ταχύτητες έχουν αντίθετες διευθύνσεις. (β) Έστω d παριστάνει τιν απόσταση μεταξύ των δύο μαζών σε κάποια δεδομένη χρονική στιγμή. Γράψτε μια εξίσωση που να σχετίζει τις μάζες των σωματιδίων, m και M, τις ταχύτητες τους, υm και υM, τη δεδομένη χρονική στιγμή και την απόσταση d. <u>*Υπόδειξη:*</u> Από τη στιγμή που τα σωματίδια έχουν αρχικά μεγάλη απόσταση, μπορείτε να υποθέσετε ότι η ολική αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι ίση με μηδέν. (γ) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από τα ερωτήματα (α) και (β) δείξτε ότι η ταχύτητα οποιουδήποτε από τα σωματίδια σχετικά με το άλλο σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση (d η απόστασή τους την δεδομένη χρονική στιγμή)

(α) Δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις που να ασκούνται στο σύστημα
Επομένως η ορμή διατηρείται :

$$m\upsilon_m + M\upsilon_M = 0 \Rightarrow \boxed{\upsilon_M = -\frac{m}{M}\upsilon_m} \quad (A)$$

(β) Στην αρχική τους απόσταση η κινητική και βαρυτική ενέργεια είναι μηδέν. Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, η ολική ενέργεια του συστήματος θα είναι πάντοτε μηδέν.

Σε τυχαία χρονική στιγμή, t, η κινητική ενέργεια δίνεται από :

$$K^{ολ} = \frac{1}{2}m\upsilon_m^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_M^2$$ όπου υ_m & υ_M οι ταχύτητες των 2 σωμάτων τη στιγμή t

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας θα είναι :

$$U_g = -\frac{GmM}{d}$$ όπου d η απόσταση των 2 σωμάτων τη στιγμή t.

$$\text{Άρα} \quad E_{μηχ}^{ολ} = E_{κιν}^{ολ} + U_g = \boxed{\frac{1}{2}m\upsilon_m^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_M^2 - \frac{GmM}{d} = 0} \quad (B)$$

(γ) Η σχετική ταχύτητα των 2 σωμάτων θα είναι: $\upsilon_{σχ} = \upsilon_m - \upsilon_M$

Αντικαθιστώντας την (Α) έχουμε: $\upsilon_{σχ} = \upsilon_m - \left(-\frac{m}{M}\upsilon_m\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon_{σχ} = \upsilon_m \left(\frac{M+m}{M}\right)} \quad (Γ)$$

Από την εξίσωση της ενέργειας (Β) έχουμε:

$$\frac{1}{2} m \upsilon_m^2 + \frac{1}{2} M \upsilon_M^2 = \frac{GmM}{d} \overset{(A)}{\Rightarrow} \frac{1}{2} \cancel{m} \upsilon_m^2 + \frac{1}{2} \cancel{M} \frac{m^{\cancel{2}}}{M^{\cancel{2}}} \upsilon_m^2 = \frac{GM\cancel{m}}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (M+m)\upsilon_m^2 = \frac{2GM^2}{d} \Rightarrow \boxed{\upsilon_m = M\sqrt{\frac{2G}{d(M+m)}}}$$

Αντικατάσταση στη (Γ) δίνει:

$$\upsilon_{σχ} = \cancel{M}\sqrt{\frac{2G}{d(M+m)}}\,\frac{(M+m)}{\cancel{M}} \Rightarrow \boxed{\upsilon_{σχ} = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{d}}}$$

4. Το διαστημόπλοιο Ήλιος Β, το οποίο σχεδιάστηκε για να τεθεί σε τροχιά γύρω από τον ήλιο είχε ταχύτητα υ=71.0km/s όταν η απόστασή του από τον ήλιο ήταν 43 εκατομύρια χιλιόμετρα. (α) Αποδείξτε ότι η τροχιά του διαστημόπλοιου δεν ήταν κυκλική. (β) Αποδείξτε ότι η τροχιά του διαστημόπλοιου ήταν ελλειπτική.

(α) Έχουμε $a = \frac{F}{m} = \frac{1}{\cancel{m}} \frac{GM\cancel{m}}{r^2} \Rightarrow a = \frac{GM}{r^2}$ στην ακτινική διεύθυνση

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα: $a = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \, 1.99 \cdot 10^{30}}{(43 \cdot 10^9)^2} \Rightarrow \boxed{a = 0.072 \, m/s^2}$

Αν η τροχιά ήταν κυκλική τότε η ταχύτητα $\vec{v}$ θα ήταν κάθετη

και η $a_r = \frac{v^2}{R} = \frac{(71 \cdot 10^3)^2}{43 \cdot 10^9} \Rightarrow \boxed{a_r = 0.12 \, m/sec^2}$

Όπως βλέπουμε $a \neq a_r$ και επομένως η τροχιά δεν είναι κυκλική.

(β) Ξέρουμε ότι $E^{\mu\eta\chi} = E^{\kappa\iota\nu} + U_g \Rightarrow \begin{cases} >0 & \text{υπερβολική τροχιά} \\ =0 & \text{κυκλική τροχιά} \\ <0 & \text{ελλειπτική τροχιά} \end{cases}$

Βρήκαμε ότι η τροχιά δεν είναι κυκλική.
Υπολογίζουμε την ολική ενέργεια:

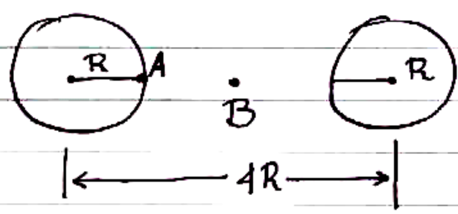
$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r} = m\left(\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r}\right) \Rightarrow \frac{E}{m} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{E}{m} = \frac{(7.1 \cdot 10^4)^2}{2} - \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.99 \cdot 10^{30}}{4.3 \cdot 10^{10}} \Rightarrow \frac{E}{m} = -5.66 \cdot 10^8 \, m^2 s^{-2}$$

$\Rightarrow \underline{E < 0}$ και άρα η τροχιά είναι ελλειπτική

5. Δυο πλανήτες μάζας M και ακτίνας R και οι δυο βρίσκονται στο διάστημα ακίνητοι και τα κέντρα τους απέχουν απόσταση 4R. Θέλετε να εκτοξεύσετε ένα βλήμα από την επιφάνεια του ενός πλανήτη προς τον άλλο πλανήτη. Ποια είναι η ελάχιστη αρχική ταχύτητα που πρέπει να δώσετε ώστε να πραγματοποιηθεί το εγχείρημα αυτό;

Από τη στιγμή που το βλήμα φθάσει στο μέσο της απόστασης τότε ουσιαστικά μπορεί να φθάσει στον άλλο πλανήτη.
Η ερώτηση επομένως είναι ποιά η ελάχιστη ταχύτητα υ_0 ώστε να φθάσει στο μέσο της απόστασης



Το δυναμικό στο σημείο A εξαιτίας της βαρύτητας και των 2 πλανητών θα είναι:

$$V_A = -\frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{3R}$$

Το δυναμικό στο σημείο B (μέσο των 2 πλανητών) είναι:

$$V_B = -\frac{GMm}{2R} - \frac{GMm}{2R} \Rightarrow V_B = -2\frac{GMm}{2R}$$

Η ελάχιστη ταχύτητα δίνεται από διατήρηση της ενέργειας

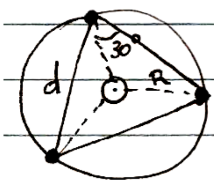
$$E_A^i = E_B^f \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon_0^2 - \frac{GM\cancel{m}}{R} - \frac{GM\cancel{m}}{3R} = -\cancel{2}\frac{GM\cancel{m}}{\cancel{2}R} + 0$$

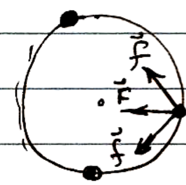
(Η κινητική ενέργεια του βλήματος στο σημείο B θα είναι μηδέν, σχεδόν)

Επομένως : $\frac{1}{2}\upsilon_0^2 = -\cancel{\frac{GM}{R}} + \cancel{\frac{GM}{R}} + \frac{GM}{3R} \Rightarrow \upsilon_0^2 = \frac{2}{3}\frac{GM}{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon_0 = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{GM}{R}}}$$

6. Κάποια συστοιχία αστέρων αποτελείται από 4 αστέρες. Τρεις από τους αστέρες, ο καθένας με μάζα m, κινούνται στην ίδια κυκλική τροχιά ακτίνας R γύρω από κάποιον κεντρικό αστέρα μάζας Μ. Οι 3 αστέρες περιστρέφονται με την ίδια φορά και βρίσκονται σε θέσεις που απέχουν 1/3 περιστροφής το ένα από το άλλο. Δείξτε ότι η περίοδος κάθε αστέρα δίνεται από την σχέση: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{G(M + m/\sqrt{3})}}$.





Η απόσταση μεταξύ των περιστρεφόμενων άστρων είναι $d = 2R\cos 30° = \sqrt{3}R$

Σε κάθε άστρο ασκούνται 3 δυνάμεις. 2 δυνάμεις από τα 2 άλλα περιστρεφόμενα άστρα, f, και μιά κεντρομόλος δύναμη F από την έλξη του κεντρικού άστρου μάζας Μ.

Η συνισταμένη δύναμη που έχει φορά προς τα μέσα είναι:

$$F + 2f\cos 30° = \frac{GM\cancel{m}}{R^2} + 2\frac{m\cancel{m}G}{d^2}\cos 30° = \frac{\cancel{m}\upsilon^2}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G\left(\frac{M}{R^2} + \cancel{2}\frac{m}{R^2\sqrt{3}\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) = \frac{\upsilon^2}{\cancel{R}} \Rightarrow G\left(\frac{M}{R} + \frac{m}{\sqrt{3}R}\right) = \upsilon^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 R^2 = G\left(\frac{M}{R} + \frac{m}{\sqrt{3}R}\right) \Rightarrow 4\pi^2 T^{-2} R^3 = G\left(\frac{M}{R} + \frac{m}{\sqrt{3}R}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{G\left(M + \frac{m}{\sqrt{3}}\right)} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G\left(M + \frac{m}{\sqrt{3}}\right)}}}$$

7. Ένα αντικείμενο μάζας 2.00kgr εξαρτάται από ένα ελατήριο και βρίσκεται πάνω σε οριζόντια λεία επιφάνεια. Μια οριζόντια δύναμη 20.0N απαιτείται ώστε να κρατά το σώμα σε ηρεμία όταν τραβιέται κατά 0.200m από την θέση ισορροπίας του (αρχή του x-άξονα συντεταγμένων). Το αντικείμενο κατόπιν αφήνεται από την θέση ηρεμίας του (αρχική απομάκρυνση xi=0.200m) και αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. (α) Βρείτε τη σταθερά του ελατηρίου. (β) Βρείτε την συχνότητα ταλαντώσεων και (γ) βρείτε την μέγιστη ταχύτητα του αντικειμένου. Που παρουσιάζεται η μέγιστη ταχύτητα; (δ) Βρείτε τη μέγιστη επιτάχυνση του αντικειμένου και τη θέση στην οποία παρουσιάζεται. (ε) Βρείτε την ολική ενέργεια του ταλαντευόμενου συστήματος. Τέλος (στ) να βρεθούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος όταν η θέση του είναι ίση με το 1/3 της μέγιστης τιμής.

(α) Το σώμα αρχικά βρίσκεται σε ηρεμία με απομάκρυνση 0.2m.
Επομένως από το 2° νόμο του Newton:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_0 - kx_0 = 0 \Rightarrow k = \frac{F_0}{x_0} = \frac{20}{0.2} \Rightarrow \boxed{k = 100\,Nm^{-1}}$$

(β) Το σώμα αρχίζει να εκτελεί αρμονική ταλάντωση:

$$ma = -kx \Rightarrow a = -\frac{kx}{m} \Rightarrow a = -\frac{F_0 x}{x_0 m} = -\omega^2 x$$

Η γωνιακή συχνότητα είναι: $\omega = \sqrt{\frac{F_0}{x_0 m}} \Rightarrow \boxed{\omega = 7.07\,s^{-1}}$

Η συχνότητα θα είναι: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{7.07}{2\pi} \Rightarrow \boxed{f = 1.12\,Hz}$

(γ) $x = x_0 \cos\omega t \Rightarrow \upsilon = \frac{dx}{dt} = -\omega x_0 \sin\omega t = -\omega x_0\sqrt{1-\cos^2\omega t} = -\omega\sqrt{x_0^2 - x^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon = \pm\omega\sqrt{x_0^2 - x^2}}$$

Επομένως η μέγιστη ταχύτητα θα συμβεί γιά $x=0 \Rightarrow \upsilon_{max} = \pm\omega x_0 \Rightarrow$

$$\upsilon_{max} = \sqrt{\frac{F_0}{x_0 m}}\,x_0 \Rightarrow \upsilon_{max} = \sqrt{\frac{F_0 x_0}{m}} \Rightarrow \boxed{\upsilon_{max} = 1.41\,ms^{-1}}$$

(δ) $a_{max} = \frac{F_0}{m x_0}\,x_0 = \frac{F_0}{m} = 10.0\,ms^{-2}$

Αυτό γιατί $a = -\frac{F_0}{x_0 m}x \Rightarrow a_{max} = -\frac{F_0}{x_0 m}x_{min}$ αλλά $x_{min} = -x_0$

οπότε $a_{max} = \frac{F_0}{\cancel{x_0} m}\cancel{x_0} \Rightarrow \boxed{a_{max} = \frac{F_0}{m} = 10.0\,ms^{-2}}$

(ε) $E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2$ Τη στιγμή $t=0$, $\upsilon=0$ και $x = x_0$

οπότε $E = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}\frac{F_0}{\cancel{x_0}}x_0^{\cancel{2}} = \frac{F_0 x_0}{2} \Rightarrow \boxed{E = 2\,J}$

(στ) $\upsilon = \pm\omega\sqrt{x_0^2 - x^2} = \pm\sqrt{\frac{F_0}{m x_0}}\sqrt{x_0^2 - \left(\frac{x_0}{3}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{8}{9}\frac{F_0 x_0}{m}} = \pm 1.33\,m/s$

(ζ) $a = -\frac{F_0}{m x_0}\frac{x_0}{3} = -\frac{F_0}{3m} = -3.33\,m/s^2$

8. (α) Ένα ελατήριο κρέμεται από μιά οροφή. Το ελατήριο επιμηκύνεται κατά 35cm όταν ένα σώμα μάζας 450g εξαρτηθεί από το ελεύθερο άκρο του όταν βρίσκεται σε ηρεμία. Στην κατάσταση αυτή ορίζουμε την θέση του σαν x=0. Το σώμα τραβιέται προς τα κάτω 18.0cm επιπλέον και αφήνεται από την ηρεμία να εκτελέσει ταλάντωση χωρίς αντίσταση. Ποια είναι η θέση του x, 84.4sec αργότερα.

(β) Τι θα συμβεί; Ένα κρεμάμενο ελατήριο επιμηκύνεται κατά 35.5cm όταν ένα σώμα μάζας 440g εξαρτηθεί από το ελεύθερο άκρο του σε ηρεμία. Ορίζουμε τη νέα θέση του σαν x=0. Το σώμα αυτό τραβιέται προς τα κάτω ακόμα 18.0cm και αφήνεται από την κατάσταση ηρεμίας να εκτελέσει ταλάντωση χωρίς αντίσταση. Βρείτε τη θέση του 84.4sec αργότερα.

(γ) Γιατί οι απαντήσεις (α) και (β) διαφέρουν τόσο πολύ όταν τα δεδομένα είναι τόσο παρόμοια; Μήπως αυτή η κατάσταση αποκαλύπτει μια θεμελειώδη δυσκολία στο να υπολογίζουμε το μέλον;

(δ) Βρείτε την απόσταση που κάλυψε το ταλαντευόμενο σώμα στο (α) υποερώτημα.

(ε) Βρείτε την απόσταση που κάλυψε το ταλαντευόμενο σώμα στο (β) υποερώτημα

(α) Η σταθερά ελατηρίου για το ελατήριο είναι:

$$k = \frac{F}{x} = \frac{0.45 \cdot 9.8}{0.35} \Rightarrow \boxed{k = 12.6 N/m}$$

Λαμβάνουμε τον x-άξονα να έχει διεύθυνση προς τα κάτω, επομένως

$\phi = \phi$ $\quad x = A\cos\omega t = 18.0 \cos\sqrt{\frac{12.6}{0.45}}\, 84.4 = 18\cos(446.6\,rad) = \boxed{15.8 cm}$

(β) Με τον ίδιο τρόπο:

$$k = \frac{0.44 \cdot 9.8}{0.355} = \boxed{12.1 N/m}$$

$$x = A\cos\omega t = 18\cos\overbrace{\sqrt{\frac{12.1}{0.44}}\,84.4}^{443.5\,rad} \Rightarrow \boxed{x = -15.9 cm}$$

(δ) Οπως είδαμε στο (α) $\omega t = 446.6\,rad = 71 \times 2\pi + 0.497\ rad$

Σε κάθε περίοδο το σώμα κινείται $4 \times 18 = 72cm$.

Επομένως έχει μετακινηθεί $\quad 71 \times 72cm + 18 - 15.8\ cm = \boxed{51.1 m}$

(ε) Οπως και στο (δ) κοιτώντας το ωt για το δεύτερο ταλαντευόμενο σύστημα έχουμε:

$443.5 = 70 \times 2\pi + 3.62 \Rightarrow$ Η απόσταση που μετακινήθηκε

$$70 \times 72 + (18 - (-)15.9) = \boxed{50.7 m}$$

(γ) Οι απαντήσεις στο (δ) και (ε) δεν είναι ιδιαίτερα διαφορετικές δεδομένες τις διαφορές στα δεδομένα για τα δύο ταλαντευόμενα συστήματα. Οταν όμως ζητούμε για λεπτομέρειες μελλοντικές η έλειψη ακρίβειας στη γνώση μας για το παρών κάνει αδύνατο οποιαδήποτε πρόβλεψη ακρίβειας. Οι δύο ταλαντωτές (ελατήρια) στο παράδειγμα αυτό ξεκινούν βρισκόμενοι σε φάση και καταλήγουν τελείως εκτός φάσης.

9. Μια bungee jumper μάζας 65 Kgr πηδά από μια γέφυρα με ένα ελαφρύ bungee σχοινί στερεωμένο πάνω της ενώ το άλλο άκρο του είναι στερεωμένο στην γέφυρα. Το φυσικό μήκος του σχοινιού είναι 11.0m. Η κοπέλα φθάνει στο κατώτερο σημείο της κίνησής της 36.0m κάτω από το ύψος της γέφυρας πριν αναπηδήσει προς τα πάνω. Η κίνησή της μπορεί να αναλυθεί σε μια ελεύθερη πτώση ύψους 11.0m και σε ένα τμήμα 25m μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης.

(α) Για πόσο χρονικό διάστημα εκτελεί ελεύθερη πτώση;

(β) Χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας βρείτε την σταθερά ελατηρίου του σχοινιού bungee.

(γ) Ποια είναι η θέση του σημείου ισορροπίας όπου η δύναμη του ελατηρίου αντισταθμίζει την βαρυτική δύναμη που ενεργεί στην κοπέλα? Σημειώστε ότι το σημείο αυτό λαμβάνεται σαν η αρχή του συστήματος συντεταγμένων στη μαθηματική περιγραφή της απλής αρμονικής ταλάντωσης.

(δ) Ποια είναι η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης;

(ε) Τι χρονικό διάστημα χρειάζεται ώστε το σχοινί να επιμηκυνθεί 25.0m;

(α) Η κοπέλα εκτελεί ελεύθερη πτώση όσο χρόνο το σχοινί ξετυλίγεται δηλαδή μέχρι να διανύσει 11m οπότε και τότε αρχίζει και δρά η ελαστικότητα του σχοινιού. Επομένως θεωρώντας την διεύθυνση προς τα κάτω σαν τον αρνητικό y-άξονα θα έχουμε:

$$y_f = y_i + v_{y_i} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \Rightarrow -11 = \phi + \phi - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{22}{g}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{22}{9.8}} \Rightarrow \boxed{t = 1.5 s}$$

(β) Λαμβάνουμε διατήρηση μηχανικής ενέργειας μεταξύ 2 σημείων: σημείο που πηδά από τη γέφυρα, και στο χαμηλότερο σημείο της πτώσης της:

$$(K + U_\beta + U_{\varepsilon\lambda})_i = (K + U_\beta + U_{\varepsilon\lambda})_f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0 + mgy + 0)_i = (0 + 0 + \frac{1}{2} k x^2)_f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 65 \cdot 9.8 \cdot 36 = \frac{1}{2} k\, 25^2 \Rightarrow \quad \text{όπου } x = \underbrace{36}_{\text{ολική διαδρομή}} - \underbrace{11}_{\text{μήκος σχοινιού}} = 25m$$

$$\Rightarrow \boxed{k = 73.4 N/m}$$

(γ) Η επιμήκυνση του σχοινιού (ουσιαστικά είναι σαν ελατήριο) στην κατάσταση ισορροπίας είναι:

$$x = \frac{F}{k} = \frac{mg}{k} = \frac{65 \cdot 9.8}{73.4} \Rightarrow \boxed{x = 8.68 m}$$

Αυτό το σημείο όμως βρίσκεται σε απόσταση: $11 + 8.68 = \boxed{19.68 m}$ κάτω από τη γέφυρα.

Το πλάτος της ταλάντωσής της είναι: $A = 36 - 19.68 = 16.32 m$

(δ) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{73.4}{65}} \Rightarrow \boxed{\omega = 1.06 \, rad/s}$

(ε) Λαμβάνουμε την φάση να είναι ϕ στο μέγιστο κατώτερο σημείο της ταλάντωσης. Βρίσκουμε ποιά ήταν η φάση στο σημείο το οποίο είναι 25m ψηλότερα, δηλαδή στο σημείο $x = A - 25 = 16.32 - 25 \Rightarrow$
$x = -8.68 m$ της ταλάντωσής της.

Έχουμε δηλαδή ότι $x = A\cos\omega t \Rightarrow$ για μέγιστο πλάτος: $16.32 = 16.32\cos\phi \Rightarrow$
για $x = -8.68$ έχουμε:

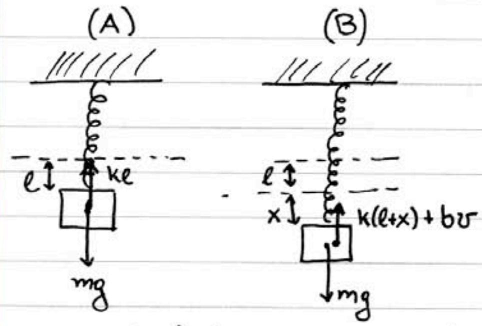
$$-8.68 = 16.32\cos\omega t \Rightarrow \cos(1.06)t = \frac{-8.68}{16.32} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.06 t = \cos^{-1}\left(-\frac{8.68}{16.32}\right) = -122^\circ = -2.13 rad \Rightarrow \boxed{t = -2.01 s}.$$

Επομένως ο χρόνος που χρειάζεται το σχοινί να επιμηκυνθεί είναι $\boxed{t = 2.01}$

(στ) Ο ολικός χρόνος θα είναι: 1.5s (από το (α)) και 2.01 από το (ε). Επομένως: $t_{ολ} = 1.5 + 2.01 \Rightarrow \boxed{t_{ολ} = 3.51 s}$

10. Ένα αντικείμενο 10.6kgr ταλαντώνεται στο άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου το οποίο έχει σταθερά k = 2.05x104 N/m. Το αποτέλεσμα της αντίστασης του αέρα αντιπροσωπεύεται από την σταθερά απόσβεσης β=3.00 N·sec/m. (α) Υπολογίστε την συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης, (β) Κατά ποιο ποσοστό το πλάτος της ταλάντωσης ελαττώνεται σε κάθε πλήρη ταλάντωση; (γ) Βρείτε τα χρονικό διάστημα που απαιτείται ώστε η ενέργεια του συστήματος να γίνει 5% της αρχικής ενέργειας



κατακόρυφο ελατήριο σε ισορροπία — κατακόρυφο ελατήριο επιμηκυμένο.

Στην περίπτωση (A) έχουμε $kl = mg$

Στην περίπτωση (B) έχουμε $ma = mg - k(l+x) - bv \Rightarrow$

$$\Rightarrow ma = \underbrace{mg - kl}_{0\ (A)} - kx - bv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ma = -kx - bv \Rightarrow ma + kx + bv = 0$$

$$\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Η λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι: $\boxed{x = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \phi_0)}$ (1)

όπου $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}}$ (2) και A_0, ϕ_0 είναι σταθερές που καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

(α) Απλή αντικατάσταση των τιμών που δίνονται στη (2) δίνει:

$$\omega = \sqrt{\frac{2.05\cdot10^4}{10.6} - \left(\frac{3}{2\cdot10.6}\right)^2} \Rightarrow \boxed{\omega = 43.0\ s^{-1}} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \boxed{f = 7.0\ Hz}$$

(β) Το πλάτος είναι $A = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}$ και το ποσοστό αλλαγής είναι:

$$\frac{A(0) - A(T)}{A(0)} = \frac{\cancel{A_0} e^{-\frac{b}{2m}0} - \cancel{A_0} e^{-\frac{b}{2m}T}}{\cancel{A_0} e^{-\frac{b}{2m}0}} = 1 - e^{-\frac{b}{2m}T} = 1 - e^{-\frac{b}{2m}2\pi/\omega}$$

Αφού $e^{-\frac{b}{2m}\frac{2\pi}{\omega}}$ είναι αρκετά μικρό ($\sim 10^{-2}$) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

$e^{x} \cong 1+x$ και επομένως:

$$\frac{A(0)-A(T)}{A(0)} \cong \frac{b}{2m}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi b}{2m}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{b}{2m}\right)^2}} = \frac{2\pi \cancel{b}}{\cancel{2m}\frac{\cancel{b}}{\cancel{2m}}\sqrt{\frac{2km}{b^2}-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A(0)-A(T)}{A(0)} \cong \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2km}{b^2}-1}} = 0.0202.$$

Η προσέγγιση που κάναμε ήταν: $1-e^{-\frac{b}{2m}\frac{2\pi}{\omega}} = 0.0200$ $\Bigg\} \Rightarrow$

Η αλλαγή επομένως του πλάτους σε μια περίοδο είναι 2%

(γ) Έστω $\phi = \omega t + \phi_0$

$$E = \frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}kx^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-\frac{b}{m}t}\cos^2\phi \overset{v=\frac{dx}{dt}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}m\left[-\omega A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\sin\phi - \frac{b}{2m}A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\cos\phi\right]^2 + \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-\frac{b}{m}t}\cos^2\phi =$$

$$= \frac{1}{2}m A_0^2 e^{-\frac{b}{m}t}\left(\overset{\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{b}{2m}\right)^2}\right)^2}{\omega^2}\sin^2\phi + \frac{\omega b}{m}\sin\phi\cos\phi + \left(\frac{b}{2m}\right)^2\cos^2\phi\right) + \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-\frac{b}{m}t}\cos^2\phi =$$

$$= \frac{1}{2}mA_0^2 e^{-\frac{b}{m}t}\left(\frac{k}{m}\sin^2\phi + \frac{\omega b}{m}\sin\phi\cos\phi + \frac{b^2}{4m^2}(\cos^2\phi - \sin^2\phi)\right) + \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-\frac{b}{m}t}\cos^2\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{A_0^2}{2}e^{-\frac{b}{m}t}\left(k\,\overset{1}{(\sin^2\phi + \cos^2\phi)} + \omega b\,\overset{\sin 2\phi/2}{\sin\phi\cos\phi} + \frac{b^2}{4m}\overset{\cos 2\phi}{(\cos^2\phi - \sin^2\phi)}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{A_0^2}{2}e^{-\frac{b}{m}t}\left(k + \frac{\omega b}{2}\sin 2\phi + \frac{b^2}{4m}\cos 2\phi\right)} \quad (3)$$

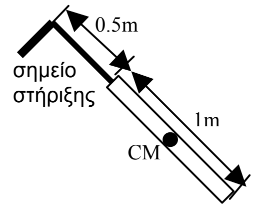
Αλλά $k = 10^4 Nm^{-1}$, $\frac{\omega b}{2} \simeq 10^2 Nm^{-1}$ και $\frac{b^2}{4m} \simeq 10^{-2} Nm^{-1}$

Επομένως ο πρώτος όρος της (3) υπερισχύει των υπολοίπων. Άρα:

$$\boxed{E \cong \frac{A_0^2}{2}ke^{-\frac{b}{m}t}} \qquad \frac{E(t)}{E(0)} = e^{-\frac{b}{m}t} = 0.05 \Rightarrow -\frac{b}{m}t = \ln(0.05) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = -\frac{m}{b}\ln(0.05) \Rightarrow \boxed{t = 10.6s}$$

11. Μια πολύ ελαφριά συμπαγής ράβδος μήκους 0.500m προεκτείνει μια ράβδο μήκους 1.0m. Η ράβδος των 0.5m κρέμεται από το άλλο άκρο της από ένα καρφί και τίθεται σε ταλάντωση. (α) Προσδιορίστε την περίοδο των ταλαντώσεων. (β) Πόσο τοις εκατό διαφέρει η περίοδος της ταλάντωσης από ένα φυσικό εκκρεμές μήκους 1.00m;



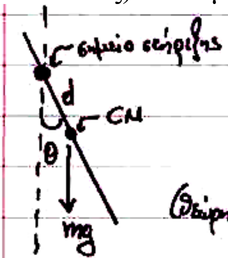
Σύμφωνα με το θεώρημα των παράλληλων αξόνων:

$$I = I_{cm} + MD^2 = \frac{1}{12}ML^2 + MD^2 = \frac{1}{12}M(1)^2 + M(1)^2 = \frac{13}{12}M$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{13\cancel{M}}{12\cancel{M}gd}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{13}{12gd}} \Rightarrow T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{13}{12\cdot 9.8\cdot 1}} \Rightarrow \boxed{T = 2.09s}$$

Για απλό εκκρεμές: $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9.8}} \Rightarrow T_2 = 2.01\,\text{sec} \Rightarrow$ διαφορά $= \frac{2.09-2.01}{2.01} = 4.08\%$

12. Μια ξύλινη ράβδος μάζας m και μήκους L μπορεί να περιστραφεί γύρω από ένα σημείο το οποίο βρίσκεται απόσταση d από το κέντρο της και είναι ελεύθερη να κινηθεί μόνο στο κατακόρυφο επίπεδο. Για ποια τιμή της απόστασης d η περίοδος των ταλαντώσεων που αντιστοιχούν σε πολύ μικρή γωνία απόκλισης από τη θέση ισορροπίας (μικρές ταλαντώσεις) είναι μέγιστη.



Η ροπή αδράνειας ως προς το σημείο στήριξης είναι:

(Θεώρημα παράλληλων αξόνων) $I = \frac{1}{12}mL^2 + md^2$

Η ροπή ως προς το σημείο στήριξης είναι: $\tau = mgd\sin\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \tau = I\alpha \Rightarrow -mgd\sin\theta = I\alpha$ (το πρόσημο είναι − γιατί η βαρύτητα "προσπαθεί" να μειώσει το θ όταν $\theta > 0$)

$\Rightarrow -mgd\sin\theta = \left(\frac{1}{12}mL^2 + md^2\right)\ddot{\theta}$ $\left(\ddot{\theta} = \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$

Για μικρά θ έχουμε ότι $\sin\theta \simeq \theta$ οπότε:

$$-\cancel{m}gd\theta = \left(\frac{1}{12}\cancel{m}L^2 + \cancel{m}d^2\right)\ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\left(\frac{gd}{\frac{L^2}{12} + d^2}\right)\theta}$$

Αυτή είναι εξίσωση απλού αρμονικού ταλαντωτή με περίοδο:

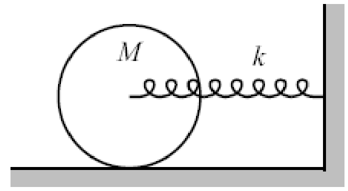
$$\omega = \sqrt{\frac{gd}{\frac{L^2}{12} + d^2}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{L^2}{12} + d^2}{gd}}$$

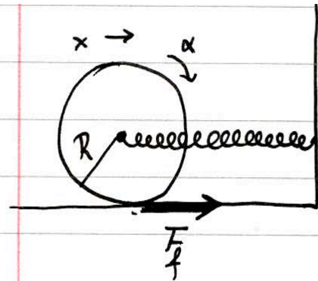
Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τη σχέση αυτή οπότε παίρνουμε τη παράγωγο της ποσότητας $\frac{\frac{L^2}{12} + d^2}{gd} \Rightarrow 2d(gd) - \left(\frac{L^2}{12} + d^2\right)g = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2gd^2 - gd^2 = \frac{L^2 g}{12} \Rightarrow \cancel{g}d^2 = \frac{L^2\cancel{g}}{12} \Rightarrow d = \frac{L}{\sqrt{12}} \Rightarrow \boxed{d \simeq \frac{L}{3.5}}$$

Επομένως $\boxed{\omega_{max} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}g}{L}}}$

13. Ο άξονας ενός κυλίνδρου μάζας M και ακτίνας R συνδέεται σε ένα ελατήριο σταθεράς k, όπως στο παρακάτω σχήμα. Αν ο κύλινδρος κυλά χωρίς ολίσθηση ποια είναι η συχνότητα των ταλαντώσεων.





Έστω ότι θετικά x είναι προς τα δεξιά ενώ θετική γωνιακή επιτάχυνση είναι αυτή της φοράς των δεικτών του ρολογιού:

$$F = ma \Rightarrow F_f - kx = m\ddot{x} \quad (1)$$

$$\tau = I\alpha \Rightarrow -F_f R = I\alpha = \left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{\ddot{x}}{R}\right) \qquad \alpha = \frac{a}{R} \text{ για κύλιση χωρίς ολίσθηση}$$

$$\Rightarrow F_f = -\frac{1}{2}m\ddot{x} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) έχουμε: $-\frac{1}{2}m\ddot{x} - kx = m\ddot{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -kx = \frac{3}{2}m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{2}{3}\frac{k}{m}x \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{m}}}$$

Επομένως ο κύλινδρος συμπεριφέρεται σα μια μάζα $\frac{3}{2}m$ που γλιστρά στο έδαφος. Ο κύλινδρος φαίνεται μεγαλύτερος απ' ότι είναι, γιατί υπάρχει ενέργεια που εμπεριέχεται στην περιστροφική του κίνηση, και επομένως χρειάζεται περισσότερη προσπάθεια για να τεθεί σε κίνηση σε συγκεκριμένη ταχύτητα.