Εξίσωση κίνησης συζευγμένων ταλαντωτών – γενική περίπτωση

Επιστρέφοντας στην απλοποιημένη μορφή των T και U, η Lagrangian γίνεται:

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = T(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n) - U(q_1,q_2,\cdots,q_n)$$

και θα έχουμε n-εξισώσεις κίνησης της μορφής:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial (T-U)}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Αντικαθιστώντας τα T και U και παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j M_{ij}\dot{q}_j \qquad \frac{\partial U}{\partial q_i} = \sum_j V_j q_j$$

Η εξίσωση κίνησης γίνεται:

$$\sum_j M_{ji}\ddot{q}_j + \sum_j V_{ji}q_j = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_j \left(M_{ji}\ddot{q}_j + V_{ji}q_j\right) = 0}$$

γραμμικό σύστημα n-Δ.Ε. δεύτερης τάξης ομογενών

Η παραπάνω εξίσωση γράφεται σε μορφή πίνακα: $\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{V}\mathbf{q}}$ με $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$

και οι πίνακες M και V είναι οι ανάλογοι πίνακες “Μαζών” και “σταθερών” ελατηρίων

Συζευγμένοι ταλαντωτές – Γενική λύση συστήματος

Αναμένουμε λύσεις της μορφής: $q_j(t) = a_j e^{i(\omega t - \delta)}$

όπου α_j είναι πραγματικοί αριθμοί (πλάτος) και δ η φάση,
ενώ ω είναι επίσης πραγματικός αριθμός.
(δεν μπορεί να είναι μιγαδικός γιατί τότε δεν θα είχαμε διατήρηση ενέργειας)

Αντικαθιστώντας τη παραπάνω λύση στην εξίσωση της κίνησης έχουμε:

$$\sum_j \left(V_{ji} - \omega^2 M_{ji}\right) a_j = 0$$

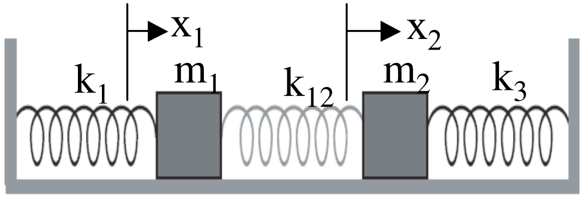
Για ύπαρξη μη τετριμένης λύσης για α_j θα πρέπει η ορίζουσα να μηδενίζεται:

$$\begin{vmatrix} V_{11} - \omega^2 M_{11} & V_{12} - \omega^2 M_{12} & V_{13} - \omega^2 M_{13} & \cdots \\ V_{12} - \omega^2 M_{12} & V_{22} - \omega^2 M_{22} & V_{23} - \omega^2 M_{23} & \cdots \\ V_{13} - \omega^2 M_{13} & V_{23} - \omega^2 M_{23} & V_{33} - \omega^2 M_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0$$

Εξίσωση βαθμού n ως προς ω^2 και επομένως n-λύσεις ω_i^2.
Τα ω_i ονομάζονται φυσικές ή χαρακτηριστικές συχνότητες.
Όταν μια ή περισσότερες συχνότητες είναι ίσες έχουμε εκφυλισμό.
Αντικαθιστώντας τιμές των ω_i προκύπτουν τα ιδιοδιανύσματα a_i
Η γενική λύση είναι υπέρθεση των λύσεων για κάθε n-τιμή της i

Εφαρμογή της γενικής λύσης

Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές συχνότητες του συστήματος



Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$U = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k_{12}\left(x_2 - x_1\right)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \Rightarrow$$

$$U = \frac{1}{2}\left(k + k_{12}\right)x_1^2 + \frac{1}{2}\left(k + k_{12}\right)x_2^2 - k_{12}x_1x_2$$

Υπολογίζουμε τα V_{jk}:

$$V_{11} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}\right|_0 = k + k_{12} \qquad V_{22} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}\right|_0 = k + k_{12} \qquad V_{12} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_0 = -k_{12} = V_{21}$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι: $T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$

Αλλά είδαμε ότι: $T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} M_{jk}\dot{x}_j\dot{x}_k$

$$\left.\begin{aligned} m_{11} &= m_{22} = M \\ m_{12} &= m_{21} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Από την χαρακτηριστική εξίσωση παίρνουμε:

$$\begin{vmatrix} k + k_{12} - M\omega^2 & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} - M\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k + k_{12} \pm k_{12}}{M}} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k + 2k_{12}}{M}} \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{k}{M}} \end{cases}$$

Κανονικές συντεταγμένες

- Η γενική λύση για την κίνηση της συντεταγμένης q_j είναι ένας γραμμικός συνδυασμός διαφόρων όρων καθένας από τους οποίους εξαρτάται από μια ξεχωριστή συχνότητα.

- Τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{a}_r$ είναι επίσης ορθοκανονικά μεταξύ τους:

$$\sum_{j,k} M_{jk} a_{jr} a_{ks} = \delta_{rs} = \begin{cases} 0 & r \neq s \\ 1 & r = s \end{cases}$$

- Για να αποφύγουμε το περιορισμό από την αυθαίρετη κανονικοποίηση χρησιμοποιούμε κάποιο συντελεστή κλίμακας που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες και μπορούμε να γράψουμε την κίνηση της $q_j(t)$:

$$q_j(t) = \sum_r \alpha_r a_{jr} e^{i(\omega_r t - \delta_r)} = \sum_r \beta_r a_{jr} e^{i\omega_r t}$$

όπου β_r είναι ο συντελεστής κλίμακας

- Ορίζουμε τώρα την ποσότητα η_r: $\boxed{\eta_r = \beta_r e^{i\omega_r t}}$

έτσι ώστε: $\boxed{q_j(t) = \sum_r a_{jr} \eta_r(t)}$

κανονικές συντεταγμένες

Τα η_r ικανοποιούν εξισώσεις της μορφής: $\ddot{\eta}_r + \omega_r \eta_r = 0$

- Υπάρχουν n ανεξάρτητες τέτοιες εξισώσεις, και οι εξισώσεις κίνησης εκφρασμένες σε κανονικές συντεταγμένες γίνονται διαχωρίσιμες

Μεθοδολογία

- Επιλογή γενικευμένων συντεταγμένων και εύρεση των T και U σύμφωνα με το συνηθισμένο τρόπο των προβλημάτων με Lagrangian.

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j,k} V_{jk} q_j q_k \qquad V_{jk} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}\right|_0$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \qquad M_{jk} = m_{jk}(q_{l0})$$

- Αντικαταστήσατε τα V_{jk} και M_{jk} σα πίνακες n x n και χρησιμοποιήστε την εξίσωση $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{V}\mathbf{q}$ για να βρείτε τις n τιμές των ιδιοσυχνοτήτων ω_r

- Για κάθε τιμή ιδιοσυχνότητας ω_r, προσδιορίστε τους λόγους $\alpha_{1r}:\alpha_{2ri}:\alpha_{3r}:\ldots:\alpha_{nr}$ αντικαθιστώντας στην εξίσωση:

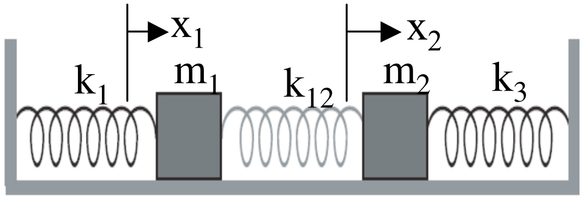
$$\sum_j \left(V_{ji} - \omega_r^2 M_{ji}\right) a_{jr} = 0$$

- Αν χρειάζεται προσδιορίστε τις σταθερές κλίμακας β_i από αρχικές συνθήκες

- Προσδιορίστε τις κανονικές συντεταγμένες η_i με κατάλληλους γραμμικούς συνδυασμούς των q_j συντεταγμένων που φαίνονται να ταλαντώνουν στην συγκεκριμένη ιδιοσυχνότητα ω_i. Η κίνηση για τη συγκεκριμένη κανονική συντεταγμένη ονομάζεται normal mode. Η γενική κίνηση του συστήματος είναι υπέρθεση όλων των normal modes.

Παράδειγμα

Εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων, ιδιοδιανυσμάτων και κανονικών συντεταγμένων του συστήματος που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Υποθέτουμε ότι $k_{12} \approx k$



Στο παράδειγμα της σελ. 3 στο 1ο βήμα βρήκαμε τα T και U και τους πίνακες M και V:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} k+k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k+k_{12} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$ όπου $m_{11}=m_{22}=m$

Ιδιοσυχνότητες:

Χρησιμοποιώντας την χαρακτηριστική εξίσωση βρίσκουμε τις ιδιοσυχνότητες:

$$\begin{vmatrix} k+k_{12}-m\omega^2 & -k_{12} \\ -k_{12} & k+k_{12}-m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k+k_{12} \pm k_{12}}{m}} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{k+2k_{12}}{m}} = \sqrt{\dfrac{3k}{m}} \end{cases}$$

Ιδιοδιανύσματα

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα χρησιμοποιούμε την εξίσωση:

$$\sum_j \left(V_{ji} - \omega_r^2 M_{ji}\right) a_{jr} = 0$$

όπου α_{jr} οι συνιστώσες j του ιδιοδιανύσματος $\mathbf{a_r}$ το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοσυχνότητα ω_r.

$$\begin{pmatrix} V_{11} - \omega_r^2 M_{11} & V_{12} - M_{12} \\ V_{12} - M_{12} & V_{22} - \omega_r^2 M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \end{pmatrix} = \begin{matrix} \left(V_{11} - \omega_r^2 M_{11}\right) a_{1r} + \left(V_{12} - M_{12}\right) a_{2r} = 0 \\ \left(V_{12} - M_{12}\right) a_{1r} + \left(V_{22} - \omega_r^2 M_{22}\right) a_{2r} = 0 \end{matrix}$$

2 εξισώσεις για κάθε τιμή του r, αλλά μπορούμε να βρούμε μόνο το α_{1r}/α_{2r} επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο τη μια εξίσωση.

Για r=1, δηλαδή την 1η ιδιοσυχνότητα: $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ αντικαθιστώντας τα V_{ij}, M_{ij} έχουμε (χρησιμοποιούμε $k_{12} \approx k$) :

$$\left(\underbrace{2k}_{k+k_{12}=V_{11}} - \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_1}\underbrace{m}_{M_{11}}\right) a_{11} + \underbrace{k}_{V_{12}} a_{21} = 0 \Rightarrow \; k a_{11} - k a_{21} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{a_{11}}{a_{21}} = 1} \quad \text{άρα: } \boxed{\mathbf{a}_1 = a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad (1)$$

Ανάλογα για τη 2η ιδιοσυχνότητα $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k+2k_{12}}{m}} \approx \sqrt{\dfrac{3k}{m}}$

$$\left(2k - \frac{3k}{m} m\right) a_{12} + k a_{22} = 0 \Rightarrow -k a_{12} - k a_{22} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{a_{12}}{a_{22}} = -1} \quad \text{άρα: } \boxed{\mathbf{a}_2 = a_{22}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \qquad (2)$$

Ιδιοδιανύσματα - ορθοκανονικότητα

Αφού τα a_1 και a_2 είναι ορθοκανονικά θα έχουμε:

$$\sum_{j,k} M_{jk} a_{jr} a_{ks} = \delta_{rs} = \begin{cases} M_{11}a_{1r}a_{1s} + M_{12}a_{1r}a_{2s} + M_{12}a_{2r}a_{1s} + M_{22}a_{2r}a_{2s} = 0 & r \neq s \\ M_{11}a_{1r}a_{1r} + M_{12}a_{1r}a_{2r} + M_{12}a_{2r}a_{1r} + M_{22}a_{2r}a_{2r} = 1 & r = s \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας α_{jr} στην εξίσωση και αφού M_{12}=0 και M_{11}=M_{22}=m:

$$M_{11}a_{1r}a_{1r} + M_{12}a_{1r}a_{2r} + M_{12}a_{2r}a_{1r} + M_{22}a_{2r}a_{2r} = 1 \Rightarrow r = 1, \quad ma_{11}^2 + ma_{21}^2 = 1$$

Αλλά $\alpha_{11}=\alpha_{21}$ οπότε: $2ma_{11}^2 = 1 \Rightarrow a_{11} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \Rightarrow \mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Κατά τον ίδιο τρόπο βάζοντας για $r = 2$ έχουμε: $a_{22} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \Rightarrow \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Κανονικές συντεταγμένες

Η γενική λύση θα είναι της μορφής:

$$q_j(t) = \sum_r a_{jr}\eta_r(t) \qquad \text{όπου} \qquad \eta_r(t) \equiv \beta_r e^{i\omega_r t}$$

Επομένως θα έχουμε:

μάζα 1: $x_1 = a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 = a_{11}\eta_1 - a_{22}\eta_2$

μάζα 2: $x_2 = a_{21}\eta_1 + a_{22}\eta_2 = a_{11}\eta_1 + a_{22}\eta_2$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας τα x_1 και x_2 έχουμε:

$$\eta_1 = \frac{1}{2a_{11}}(x_1 + x_2) \qquad \eta_2 = \frac{1}{2a_{22}}(x_1 - x_2)$$

Όταν το σύστημα κινείται κάτω από ένα από τα 2 normal modes έχουμε:

$$\eta_1 = \frac{1}{2a_{11}}(x_1 + x_2) \ \text{και} \ \eta_2 = 0 \qquad \text{ή} \qquad \eta_2 = \frac{1}{2a_{22}}(x_1 - x_2) \ \text{και} \ \eta_1 = 0$$

Όταν $\eta_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

Άρα για mode 1 x_1 και x_2 σε φάση

Όταν $\eta_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$

Άρα για mode 2 x_1 και x_2 έχουν αντίθετη φάση

Σημειωτέον ότι στο πρόβλημα δεν μας δίνονται αρχικές συνθήκες
Και επομένως δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε το β_r ούτε την πλήρη λύση