

ΦΥΣ 133
Τελική Εξέταση 6-Μάη-2007

Πριν ξεκινήσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, αριθμό ταυτότητας) στο πάνω μέρος της σελίδας αυτής.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το τυπολόγιο που σας δίνεται στην τελευταία σελίδα το οποίο μπορείτε να βγάλετε. Για τις λύσεις των ασκήσεων θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε μόνο τις σελίδες που σας δίνονται.

Προσπαθήστε να δείξετε τη σκέψη σας και να γράψετε καθαρές εξισώσεις. Για πλήρη ή μερική βαθμολόγηση θα πρέπει να φαίνεται καθαρά το τι προσπαθείτε να δείξετε. Αν δεν μπορώ να διαβάσω τι γράφετε θα θεωρηθεί λάθος οπότε προσπαθήστε να γράψετε ευανάγνωστα.

Διαβάστε πρώτα όλες τις ασκήσεις και προσπαθήστε να σκεφτείτε τι περίπου χρειάζεται να κάνετε. Η σειρά των προβλημάτων ή το σύνολο των μονάδων τους δεν αντικατοπτρίζει τη δυσκολία τους.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 4 ώρες.

Σας δίνονται 6 προβλήματα και πρέπει να απαντήσετε σε όλα. Σύνολο μονάδων 100. Υπάρχει επίσης ένα extra bonus πρόβλημα για 20 επιπλέον μονάδες για όσους θα ήθελαν δοκιμάσουν αλλά δεν είστε υποχρεωμένοι να το λύσετε.

Καλή επιτυχία.

1. **Lagrangian (15π συνολικά)**

Σα γενικός κανόνας, όπως είδαμε, δεν μπορούμε να περιγράψουμε με τη μέθοδο του Lagrange συστήματα όπου εμφανίζονται τριβές. Υπάρχουν ωστόσο μερικές εξαιρέσεις συστημάτων ενός σώματος όπως αυτό που περιγράφεται στο πρόβλημα. Εν γένει δεν μπορούμε να σχηματίσουμε την Lagrangian σα “τη κινητική ενέργεια μείον την δυναμική ενέργεια”. Αλλά θεωρήστε την

ακόλουθη Lagrangian: $L = e^{\gamma/m} [\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)]$. Να βρεθούν:

(α) Η εξίσωση κίνησης και να γραφεί με τη μορφή του νόμου του Newton, $\ddot{q} = \dots$. [10π]

(β) Εξηγήστε τι είδους φυσικό σύστημα περιγράφει η εξίσωση κίνησης. [5π]

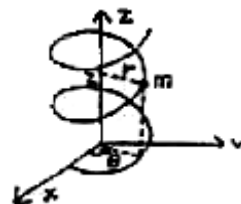
2. **Hamiltonian (15π συνολικά)**

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται κάτω από την επίδραση της βαρύτητας κατά μήκος μιας ελικοειδούς τροχιάς της μορφής $z = k\theta$, σταθερής ακτίνας $r = \text{σταθερά}$, k είναι μια σταθερά και z η κατακόρυφος διεύθυνση, όπως στο σχήμα. Να βρεθούν:

(α) Η Lagrangian του συστήματος. [5π]

(β) Η Hamiltonian του συστήματος. [5π]

(γ) Οι εξισώσεις κίνησης του Hamilton. [5π]



3. **Κεντρικές δυνάμεις (15π συνολικά)**

Θεωρήστε τη κεντρική δύναμη της μορφής:

$$F(r) = -F_0 e^{-r^2/a^2}$$

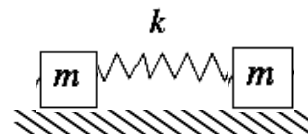
Όπου a και F_0 είναι σταθερές παράμετροι.

(α) Βρείτε την μέγιστη R_{\max} στο εύρος τιμών της ακτινικής απόστασης r , για την οποία αντιστοιχεί μια σταθερή κυκλική τροχιά. [9π]

(β) Για την κυκλική τροχιά ακτίνας $r = \frac{1}{\sqrt{2}} R_{\max}$, να βρεθεί μια εξίσωση για την κινητική ενέργεια συναρτήσει των σταθερών F_0 και a , και κάποιων αδιάστατων σταθερών. [6π]

4. **Συζευγμένες ταλαντώσεις (20π συνολικά)**

Δύο όμοια τούβλα μάζας m είναι περιορισμένα να εκτελούν μονοδιάστατη κίνηση πάνω σε μια λεία παγωμένη λίμνη. Τα δύο τούβλα συνδέονται μεταξύ τους μέσω ενός ελατηρίου σταθεράς K όπως στο σχήμα.



(α) Ορίστε σα x_1 και x_2 τις οριζόντιες μετατοπίσεις των μαζών από την θέση ισορροπίας τους όταν το κέντρο μάζας του συστήματος είναι σε ηρεμία. Γράψτε τη Lagrangian του συστήματος αυτού [4π].

(β) Χρησιμοποιήστε τη Lagrangian για να εξάγετε τις εξισώσεις κίνησης. [4π]

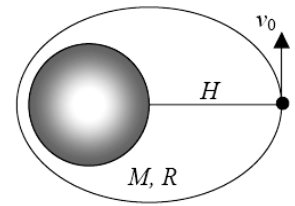
(γ) Βρείτε τις ιδιοσυχνότητες του συζευγμένου αυτού συστήματος. [4π]

(δ) Περιγράψτε ποιοτικά τους φυσικούς τρόπους ταλάντωσης του συστήματος. [4π]

(ε) Συγκρίνετε τις ιδιοσυχνότητες με τις τιμές που παίρνετε για κάθε μάζα όταν η άλλη μάζα κρατείται σταθερή. [4π]

5. **Τροχιές Kepler (15π συνολικά)**

Ένας δορυφόρος εκτοξεύεται από ένα ύψος H πάνω από την επιφάνεια ενός σφαιρικού πλανήτη ακτίνας R και μάζας M . Να βρεθεί το εύρος των τιμών που μπορεί να έχει η αρχική ταχύτητα εκτόξευσης, v_0 , (η v_0 είναι κάθετη στην ακτίνα) ώστε η τροχιά που διαγράφει ο δορυφόρος πάνω από την επιφάνεια του πλανήτη είναι πάντοτε κλειστή.



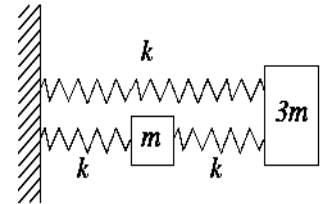
6. **Συζευγμένες ταλαντώσεις (20π συνολικά)**

Θεωρήστε το σύστημα μαζών και ελατηρίων του σχήματος, το οποίο εκτελεί μονοδιάστατη κίνηση στην οριζόντια διεύθυνση.

(α) Να βρεθούν οι ιδιοσυχνότητες. (10π)

(β) Να βρεθούν και να περιγραφούν οι φυσικοί τρόποι ταλάντωσης.

Θα πρέπει να βρείτε ακριβώς τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στους φυσικούς τρόπους ταλάντωσης (10π)



7. **Bonus πρόβλημα για επιπλέον μονάδες (20π συνολικά)**

Θεωρήστε το ακόλουθο κύκλωμα αποτελούμενο από δύο πηνία επαγωγής L_1 και L_2 αντίστοιχα, ένα πυκνωτή χωρητικότητας C_1 και δύο ωμικές αντιστάσεις R_1 και R_2 . Το κύκλωμα τροφοδοτείται από μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης $V(t) = V_0 \cos \omega t$. Να κατασκευάσετε το μηχανικό ανάλογό του κυκλώματος αυτού εξηγώντας το ρόλο κάθε μηχανικού τμήματος που εισάγετε και την αντιστοιχία του στο ηλεκτρικό κύκλωμα.

Υπόδειξη: Θα βοηθήσει αν γράψετε τις “εξισώσεις κίνησης” που αντιστοιχούν στο κύκλωμα. τα μηχανικά ανάλογα που σχεδιάζετε.

