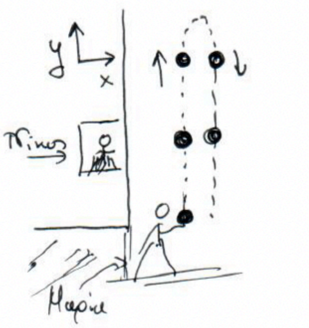
ΦΥΣ. 111

3ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή 28.09.2020**

1. Η Μαρία πετά μία μπάλα κατακόρυφα προς τα πάνω. Ο Νίκος παρατηρεί τη μπάλα από ένα παράθυρο το οποίο βρίσκεται 5m πάνω από το σημείο ρίψης της μπάλας. Η μπάλα περνά από την θέση που βρίσκεται ο Νίκος και όταν ξαναπερνά από την ίδια θέση κατά την κάθοδό της έχει ταχύτητα υ = 10m/s. Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία η Μαρία έριξε την μπάλα.



Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων με φορά θετικού άξονα y προς τα πάνω.

Το σώμα κινείται υπό την επίδραση της επιτάχυνσης της βαρύτητας

$$v = v_0 + at \Rightarrow t = (v - v_0)/a$$

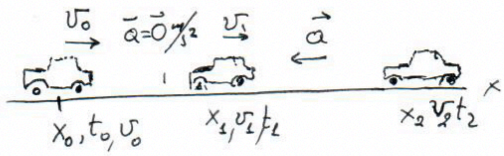
$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow y - y_0 = v_0\frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}\cancel{a}\frac{(v-v_0)^2}{a^{\cancel{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a(y - y_0) = \cancel{2v_0 v} - \cancel{2}v_0^2 + v^2 + \cancel{v_0^2} - \cancel{2v_0 v} \Rightarrow 2a(y - y_0) = v^2 - v_0^2$$

Επομένως θα έχουμε: $2\left(-9.8\frac{m}{s^2}\right)(5-0)m = v^2 - v_0^2 \Rightarrow v_0^2 = (-10m/s)^2 + 98\frac{m^2}{s^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_0^2 = 198\, m^2/s^2 \Rightarrow \boxed{v_0 = 14.07\, m/s}$$

2. Μία οδηγός οδηγεί το αυτοκίνητό της με ταχύτητα 20m/s όταν βλέπει το φανάρι της τροχαίας που βρίσκεται σε απόσταση 200m να γίνεται κόκκινο. Ξέρει ότι φανάρι παραμένει κόκκινο για 15s πριν αλλάξει και πάλι σε πράσινο. Της παίρνει 1s να αποφασίσει να πατήσει φρένο και ελαττώσει ταχύτητα. Ποιά θα είναι η ταχύτητά της όταν φθάνοντας στο φανάρι αυτό αλλάζει σε πράσινο;



Η αντίδραση της οδηγού είναι 1s, και στο διάστημα αυτό διανύει απόσταση

$$x_1 = x_0 + v_0(t_1 - t_0) = 0 + 20\frac{m}{s}\,1s = 20m$$

Μετά το χρόνο του 1sec το όχημα δέχεται μια επιτάχυνση αντίθετη με τη φορά κίνησης και το όχημα ελαττώνει ταχύτητα. Κατά τη διάρκεια αυτής της επιβράδυνσης το όχημα καλύπτει την απόσταση έως ότου φθάσει στο φανάρι της τροχαίας:

$$x(t) = x_0 + v t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2 \Rightarrow 200m = 20m + 20\frac{m}{s} t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2 \quad (A)$$

ο χρόνος κίνησης κάτω από την επιβράδυνση είναι: $t_{ολ} = t_1 + t_2 \Rightarrow t_2 = t_{ολ} - t_1 = (15-1)s \Rightarrow$

$$t_2 = 14\,sec$$

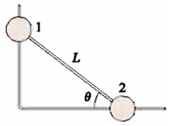
Αντικατάσταση στην (A) δίνει: $180m = 20\frac{m}{s}14s + \frac{1}{2} a\, 14^2 s^2 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{(180-280)m}{196 s^2}$

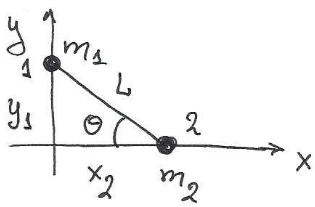
$$\Rightarrow a = -\frac{200}{196} m/s^2 \Rightarrow \underline{a = -1.02 m/s^2}$$

Η τελική ταχύτητα του αυτοκινήτου, v_2, θα είναι: $v_2 = v_1 + a t_2 = 20\frac{m}{s} - 1.02 \cdot 14 \frac{m}{s} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{v_2 = 5.7 m/s}$$

3. Δύο μάζες όπως στο διπλανό σχήμα συνδέονται μεταξύ τους με μία λεπτή ράβδο μήκους L και μπορούν να γλιστρούν κατά μήκος δύο λείων συρμάτων. Να αποδείξετε ότι η σχέση που συνδέει τις δύο ταχύτητες είναι της μορφή: $\upsilon_{2x} = -\upsilon_{1y}\tan\theta$.





Έστω x_2 και y_1 οι θέσεις των μαζών m_1 και m_2 στα δύο λεία σύρματα.

Επειδή οι μάζες είναι στερεωμένες στη ράβδο, οι θέσεις τους θα πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση: $\boxed{x_2^2 + y_1^2 = L^2}$ (A)

καθώς η ράβδος μετακινείται, οι θέσεις x_2 και y_1 αλλάζουν. Επομένως μπορούμε να παραγωγίσουμε την εξίσωση (A) ως προς τον χρόνο t. Θα έχουμε:

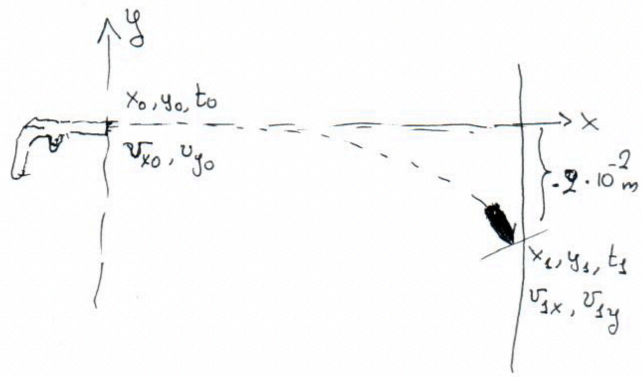
$$\frac{d}{dt}\left(x_2^2 + y_1^2\right) = \cancel{\frac{d}{dt}L^2} \xrightarrow{} 0 \quad (L = \text{στα}\theta) \Rightarrow \frac{dx_2^2}{dt} = -\frac{dy_1^2}{dt} \Rightarrow \frac{dx_2^2}{dx_2}\frac{dx_2}{dt} = -\frac{dy_1^2}{dy_1}\frac{dy_1}{dt}$$

$$\Rightarrow \cancel{2}x_2\frac{dx_2}{dt} = -\cancel{2}y_1\frac{dy_1}{dt} \Rightarrow x_2\frac{dx_2}{dt} = -y_1\frac{dy_1}{dt}$$

Αλλά ξέρουμε ότι $\frac{dx_2}{dt} = \upsilon_{2x}$ και $\frac{dy_1}{dt} = \upsilon_{1y}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x_2\upsilon_{2x} = -y_1\upsilon_{1y} \Rightarrow \upsilon_{2x} = -\frac{y_1}{x_2}\upsilon_{1y} \Rightarrow \boxed{\upsilon_{2x} = -\tan\theta\,\upsilon_{1y}}$$

4. Ένα πιστόλι σημαδεύει οριζόντια έναν στόχο που βρίσκεται 50m μακριά. Η σφαίρα χτυπά στον στόχο 2.0cm κάτω από το σημείο στόχευσης. Να βρείτε (α) τον χρόνο πτήσης της σφαίρας και (β) την αρχική ταχύτητα της σφαίρας.



(α) Η κατακόρυφη θέση της σφαίρας μετά από χρόνο t είναι:

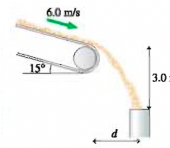
$$y = y_0 + v_{oy} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \Rightarrow -2\cdot 10^{-2}\,\text{m} = 0\,\text{m} + 0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\, t - \frac{1}{2}\, 9.8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\, t^2 \Rightarrow$$

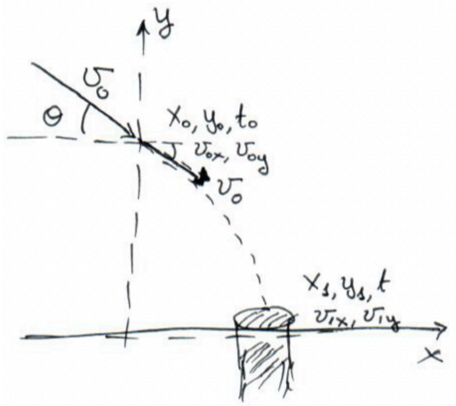
$$\Rightarrow t^2 = \frac{4\,\cancel{\text{m}}\cdot 10^{-2}}{9.8\,\cancel{\text{m}}/\text{s}^2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{0.04}{9.8}}\ \text{sec} \Rightarrow \underline{t = 0.0639\ \text{sec}}$$

(β) Στη x-διεύθυνση το βλήμα κάνει ομαλή κίνηση:

$$x = x_0 + v_{ox} t \Rightarrow x = 0\,\text{m} + v_{ox}\cdot 0.0639\,\text{s} \Rightarrow v_{ox} = \frac{50\,\text{m}}{0.0639\,\text{s}} \Rightarrow \underline{\underline{v_{ox} = 782\ \text{m/s}}}$$

5. Άμμος μεταφέρεται με την βοήθεια ενός ιμάντα μέσα σε έναν σωλήνα. Ο ιμάντας έχει κλίση 15^o ως προς τον ορίζοντα και κινείται με ταχύτητα 6.0m/s. Ο σωλήνας βρίσκεται 3.0m κάτω από το τέλος του ιμάντα όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ποια είναι η οριζόντια απόσταση μεταξύ του ιμάντα και του σωλήνα;





Χρησιμοποιώντας την εξίσωση θέσης στη x-διεύθυνση:

$$x_1 = \cancel{x_0}^{\,0} + v_{0x} t_1 + \frac{1}{2}\cancel{a_x}^{\,0} t_1^2 \Rightarrow x_1 = v_{0x} t_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = (v_0 \cos 15^\circ)\, t_1 \quad (1)$$

Από την εξίσωση θέσης στην y-διεύθυνση:

$$y_1 = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \Rightarrow 0m = 3m - t_1 v_0 \sin 15^\circ - \frac{1}{2}\, 9.8 \frac{m}{s^2} t_1^2$$

$$\Rightarrow 4.9 \frac{m}{s^2} t_1^2 + (6.0 \cdot 0.259)\frac{m}{s} t_1 - 3m = 0\, m$$

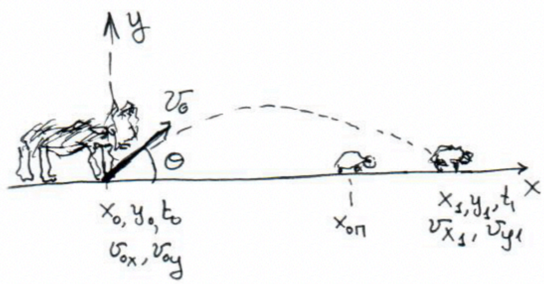
Λύνουμε την εξίσωση και έχουμε σαν λύσεις:

$$t = \frac{-1.553 \pm \sqrt{(1.553)^2 + 58.8}}{9.8} s \Rightarrow t = \frac{-1.553 \pm 7.824}{9.8} \Rightarrow t = \begin{cases} 0.640\, s \\ -0.957\, s \end{cases}$$

Η δεκτή λύση είναι αυτή $t_1 = 0.640s$.

Αντικαθιστούμε στην (1) και βρίσκουμε $x = (6.0\, m/s)\cos 15^\circ \cdot 0.640s \Rightarrow \underline{x = 3.709\, m}$

6. Μία γάτα κυνηγά ένα ποντικάκι. Το ποντικάκι τρέχει σε ευθεία γραμμή με ταχύτητα 1.5m/s. Αν η γάτα πηδά από το έδαφος σε 30^o γωνία και ταχύτητα 4.0m/s, σε ποιά απόσταση από το ποντικάκι θα πρέπει να επιχειρήσει το άλμα της ώστε να προσγειωθεί πάνω στο άτυχο ποντικάκι;



Η ταχύτητα της γάτας τη στιγμή που πηδά για να πιάσει το ποντικάκι είναι $v_0 = 4m/s$. και η γωνία του άλματος είναι 30°. Επομένως:

$$v_{0x} = v_0 \cos 30^\circ \Rightarrow v_{0x} = \cancel{4}^{2} \frac{m}{s} \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \Rightarrow v_{0x} = 2\sqrt{3}\frac{m}{s}$$

$$v_{0y} = v_0 \sin 30^\circ \Rightarrow v_{0y} = 4\frac{m}{s}\frac{1}{2} \Rightarrow v_{0y} = 2\,m/s$$

Η γάτα και το ποντικάκι κινούνται στη x-διεύθυνση με σταθερή ταχύτητα: Τη στιγμή που η γάτα πιάνει το ποντικάκι οι συντεταγμένες των θέσεων τους είναι ίδιες:

$$\left.\begin{array}{l} x_\pi = v_\pi \cdot t + x_{0\pi} \\ x_\gamma = \cancel{x_{0\gamma}}^{0} + v_{0x} t \\ x_\pi = x_\gamma = x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow v_{0x} t = v_\pi t + x_{0\pi} \Rightarrow (v_{0x} - v_\pi) t = x_{0\pi} \quad (1)$$

όπου $x_{0\pi}$ η απόσταση της γάτας από το ποντικάκι τη στιγμή που πηδά για να το πιάσει.

Στην κατακόρυφη διεύθυνση η θέση της γάτας θα είναι:

$$y_1 = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 0m = 0m + 2\frac{m}{s} t - 4.9\frac{m}{s^2} t^2 \Rightarrow 0 = 2\frac{m}{s}\cancel{t} - 4.9\frac{m}{s^2} t^{\cancel{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\frac{m}{\cancel{s}} = 4.9\frac{m}{s^{\cancel{2}}} t \Rightarrow t = \frac{2}{4.9} s \Rightarrow \underline{\underline{t = 0.408\,s}}$$

Αντικατάσταση στην (1) δίνει: $x_{0\pi} = (2\sqrt{3} - 1.5)\frac{m}{\cancel{s}} 0.408\cancel{s} \Rightarrow \underline{\underline{x_{0\pi} = 0.801m}}$

Επομένως η γάτα θα πρέπει να πηδήξει όταν βρίσκεται ~0.8m πίσω από το ποντικάκι

7. Παίζετε με ένα φίλο σας, στο διάδρομο του κτιρίου. Ο ένας ρίχνει μια μπάλα προς τον άλλο που πρέπει να την πιάσει. Η απόσταση από το δάπεδο του διαδρόμου στο ταβάνι είναι D και ρίχνετε τη μπάλα με αρχική ταχύτητα $v_o = \sqrt{6gD}$. Ποια είναι η μέγιστη οριζόντια απόσταση (συναρτήσει του ύψους D) που μπορεί να καλύψει η μπάλα χωρίς να χτυπήσει στο δάπεδο. (Υποθέστε ότι ρίχνεται τη μπάλα από το ύψος του εδάφους).

Μπορείτε να υποθέσετε ότι το μέγιστο βεληνεκές επιτυγχάνεται όταν πάρουμε ως γωνία ρίψης $\Theta = 45°$. Ωστόσο, στο συγκεκριμένο πρόβλημα το ύψος της οροφής του διαδρόμου από το δάπεδο δεν είναι αρκετό για να επιτρέψει ρίψη με γωνία 45° γιατί τότε η μπάλα θα χτυπήσει στην οροφή.

Έστω ότι ρίχνουμε τη μπάλα με γωνία $\Theta = 45°$. Τότε το μέγιστο ύψος θα είναι: $y_{max} = \cancel{y_0}^{\,0} + v_{oy} t_{αν} - \frac{1}{2} g t_{αν}^2$ $\Rightarrow$

ο χρόνος ανόδου, $t_{αν}$, δίνεται από $\cancel{v_{oy}}^{\,0}_{\,y_{max}} = v_{oy} - g t_{αν} \Rightarrow \boxed{t_{αν} = \frac{v_{oy}}{g}}$ (1)

$$\Rightarrow y_{max} = \frac{v_{oy}^2}{g} - \frac{1}{2}\cancel{g}\frac{v_{oy}^2}{g^{\cancel{2}}} \Rightarrow y_{max} = \frac{v_{oy}^2}{2g} \Rightarrow \boxed{y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\Theta}{2g}} \quad (2)$$

Για $\Theta = 45°$ η (2) δίνει: $y_{max} = \dfrac{v_0^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2g} = \dfrac{\cancel{6}^{\,3}\cancel{g}D\,\cancel{2}/\cancel{4}_{\,2}}{\cancel{2}\cancel{g}} \Rightarrow \boxed{y_{max} = \frac{3}{2}D}$

Επομένως όμως, το y_{max} θα είναι μεγαλύτερο από D

Η βολή η οποία δίνει τη μέγιστη απόσταση στη x-διεύθυνση, θα είναι αυτή στην οποία η μπάλα περνά εφαπτομενικά με την οροφή όταν βρίσκεται στο μέγιστο ύψος της τροχιάς της. Θα πρέπει δηλαδή $y_{max} = D$. Αντικατάσταση της (2)

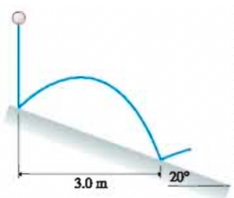
$$D = \frac{v_0^2 \sin^2\Theta}{2g} \Rightarrow v_0^2 \sin\Theta = 2gD \Rightarrow v_{oy}^2 = v_0^2 \sin\Theta = 2gD$$

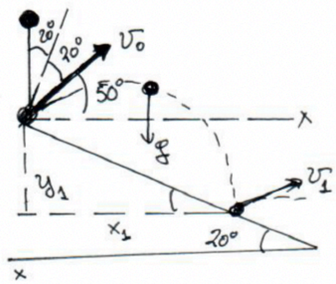
Αλλά $v^2 = v_{ox}^2 + v_{oy}^2 \Rightarrow v_{ox}^2 = v^2 - v_{oy}^2$

$$\Rightarrow v_{ox}^2 = \left(\sqrt{6gD}\right)^2 - 2gD \Rightarrow \boxed{v_{ox}^2 = 4gD}$$

Το βεληνεκές θα είναι: $x_{max} = v_{ox} t_{ολ} = v_{ox} 2 t_{αν} \overset{(1)}{=} v_{ox} 2 \frac{v_{oy}}{g} = \frac{2 v_{ox} v_{oy}}{g} \Rightarrow \boxed{x_{max} = 4\sqrt{2}D}$

8. Μία λαστιχένια μπάλα αφήνεται να πέσει πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο το οποίο σχηματίζει γωνία κλίσης 20^o με την οριζόντια διεύθυνση, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η μπάλα αναπηδά από την κεκλιμένη επιφάνεια με την ίδια γωνία με την οποία προσπίπτει στην επιφάνεια. Η επόμενη αναπήδηση της μπάλας είναι 3.0m από το σημείο της πρώτης αναπήδησης. Με ποιά ταχύτητα αναπηδά η μπάλα κατά την πρώτη πρόσκρουση - αναπήδησή της;





Μετά το πρώτο αναπήδημα, η μπάλα κινείται με ταχύτητα ~~...~~ το διάνυσμα της σχηματίζει γωνία 40° με την κατακόρυφο

Η ταχύτητα της μπάλας στη x και y διεύθυνση είναι:

$$v_{0x} = v_0 \cos 50^0$$

$$v_{0y} = v_0 \sin 50^0.$$

Όταν η μπάλα αναπηδά για δεύτερη φορά, η θέση της είναι με συντεταγμένες x_1, y_1 και η αναπήδηση γίνεται σε χρόνο t_1 μετά την πρώτη αναπήδηση:

$$x_1 = \cancel{x_0}^{\,0} + v_{0x} t_1 + \frac{1}{2} \cancel{a_x}^{\,0} t_1^2 \Rightarrow x_1 = v_{0x} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{3.0m}{v_0 \cos 50^\circ}$$

$$y_1 = \cancel{y_0}^{\,0} + v_{0y} t_1 + \frac{1}{2} a_y t_1^2 \Rightarrow y_1 = v_{0y} t_1 - 4.9 \frac{m}{s^2} t_1^2 \Rightarrow$$

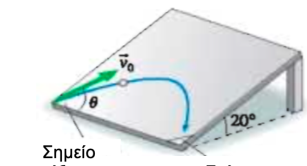
Αλλά $y_1 = -x_1 \cdot \tan 20^\circ \Rightarrow y_1 = -3.0m \cdot 0.364$

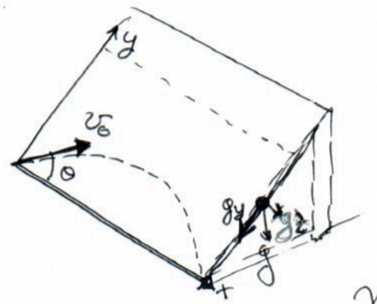
$$\Rightarrow -1.092\,m = \frac{\cancel{v_0} \sin 50}{\cancel{v_0} \cos 50} 3m - 4.9 \frac{m}{s^2} \frac{3^2 m^2}{v_0^2 (\cos 50)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1.092\,m = 3m \tan 50^\circ - \frac{106.7}{v_0^2} \frac{m^3}{s^2} \Rightarrow \frac{106.7\,m^3}{v_0^2 s^2} = 4.667\,m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0^2 = \frac{106.7}{4.667} \frac{m^2}{s^2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{106.7}{4.667}}\ m/s \Rightarrow \underline{\underline{v_0 = 4.781\ m/s}}$$

9. Ένα ελατήριο βρίσκεται στην άκρη μιας κεκλιμένης επιφάνειας που σχηματίζει γωνία 20^o με την οριζόντια διεύθυνση. Το ελατήριο χρησιμοποιείται για να εκτοξεύσει μικρές μπάλες με ταχύτητα 3.0m/s. Οι μπάλες κινούνται πάνω στην κεκλιμένη επιφάνεια όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Οι μπάλες θα πρέπει να πέσουν σε στόχο που βρίσκεται στην απέναντι από το ελατήριο κάτω γωνία της κεκλιμένης επιφάνειας και σε απόσταση 2.5m από το σημείο εκτόξευσης. Ποιά θα πρέπει να είναι η γωνία βολής θ, του εκτοξευτήρα;





Η αρχική ταχύτητα της μπάλας είναι $v_0 = 3.0 m/s$.

$v_{0x} = v_0 \cos\theta = \left(3.0 \frac{m}{s}\right)\cos\theta$

$v_{0y} = v_0 \sin\theta = \left(3.0 m/s\right)\sin\theta$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις θέσεως της μπάλας:

$$x = x_0 + v_{0x} t_1 + \frac{1}{2}\cancel{a_x}^{\,0} t_1^2 \Rightarrow 2.5m = 0m + 3.0\frac{m}{s}\cos\theta\, t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{2.5\ s}{3.0\cos\theta} \quad (1)$$

$$y = y_0 + v_{0y} t_1 + \frac{1}{2} a_y t_1^2 \Rightarrow 0m = 0m + 3.0\frac{m}{s}\sin\theta\, t_1 + \frac{1}{2}\left(-9.8\frac{m}{s^2}\cdot\sin 20^\circ\right) t_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3.0\frac{m}{s}\sin\theta = 4.9\cdot 0.342\frac{m}{s^2} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{3\sin\theta}{1.676} s \quad (2)$$

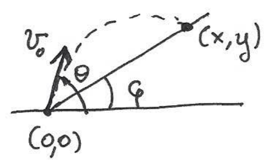
Από (1) & (2) έχουμε: $\frac{2.5}{3.0\cos\theta} = \frac{3.0\sin\theta}{1.676} \Rightarrow 9\sin\theta\cos\theta = 4.19 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin 2\theta = \frac{4.19}{4.5} \Rightarrow 2\theta = \arcsin\left(\frac{4.19}{4.5}\right) \Rightarrow 2\theta = 68.6^\circ \Rightarrow \theta = 34.3^\circ$$

10. Ένα βλήμα βάλλεται με ταχύτητα $υ_0$ και με γωνία θ (ως προς τον ορίζοντα) από τη βάση ενός κεκλιμένου επιπέδου κλίσης φ. (α) Να δείξετε ότι το βεληνεκές του βλήματος πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{2υ_0^2 cos\theta sin(\theta-\varphi)}{g cos^2\varphi}$$

(β) Για ποια γωνία θ έχουμε το μέγιστο βεληνεκές;



Οι θέσεις του βλήματος, στη x- και y- διεύθυνση δίνονται από τις εξισώσεις $\boxed{y=(υ_0\sin\theta)t-\frac{1}{2}gt^2}$ (1) και $\boxed{x=(υ_0\cos\theta)t}$ (2)

Το βλήμα χτυπά το κεκλιμένο επίπεδο όταν οι συντεταγμένες της θέσης του ικανοποιούν την εξίσωση του κεκλιμένου επιπέδου: $\boxed{\tan\varphi=\frac{y}{x}}$ (3)

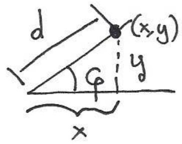
Αντικαθιστώντας τις (1) κ (2) στην (3) έχουμε:

$$\tan\varphi=\frac{υ_0\sin\theta\cancel{t}-\frac{1}{2}gt^2}{υ_0\cos\theta\cancel{t}} \Rightarrow \tan\varphi=\frac{υ_0\sin\theta-\frac{1}{2}gt}{υ_0\cos\theta} \Rightarrow t=\frac{2υ_0\left[\sin\theta-\cos\theta\tan\varphi\right]}{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{2υ_0}{g}\left(\sin\theta-\cos\theta\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)=\frac{2υ_0}{g\cos\varphi}\left(\sin\theta\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\right) \Rightarrow \boxed{t=\frac{2υ_0}{g\cos\varphi}\sin(\theta-\varphi)}$$

(A)

Όταν το βλήμα προσγειώνεται στο κεκλιμένο επίπεδο, η απόσταση του σημείου προσγείωσης από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου είναι:



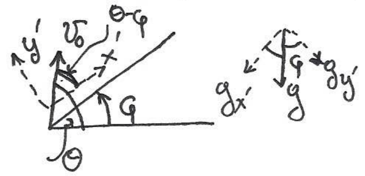
$$d=\frac{x}{\cos\varphi} \overset{(2)}{\Rightarrow} d=\frac{(υ_0\cos\theta)t}{\cos\varphi} \overset{(A)}{\Rightarrow} \boxed{d=\frac{2υ_0^2}{g\cos^2\varphi}\cos\theta\sin(\theta-\varphi)}$$

<u>Σημείωση</u>: Αν δίνονταν η γωνία φ, θα μπορούσαμε να πάρουμε την παράγωγο ως προς Θ και να δείξουμε ότι το βεληνεκές είναι μέγιστο για $\Theta=\frac{90^\circ+\varphi}{2}$

<u>Δεύτερη Λύση για το ερώτημα (α)</u>

Μπορούμε να επιλέξουμε για σύστημα συντεταγμένων, αυτό με άξονες παράλληλο και κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο. Έστω οι άξονες αυτοί είναι x' και y'.

Αναλύουμε το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας στους δύο νέους άξονες:



$$\boxed{g_{x'} = -g\sin\varphi} \quad (1)$$

$$\boxed{g_{y'} = -g\cos\varphi} \quad (2)$$

Η αρχική ταχύτητα στη y'-διεύθυνση είναι: $\boxed{v_{0y'} = v_0 \sin(\theta-\varphi)}$ (3)

και η θέση του βλήματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή: $y' = \cancel{y'_0}^{\,0} + v_{0y'}t + \frac{1}{2} g_{y'} t^2 \Rightarrow$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{y' = v_{0y'}t - \frac{1}{2} g\cos\varphi\, t^2} \quad (4)$$

Όταν το βλήμα προσγειώνεται στο κεκλιμένο επίπεδο, $y'=0$

Επομένως από την (4) μπορούμε να βρούμε τον χρόνο πτήσης: $0 = v_{0y'}\cancel{t_{πτ}} - \frac{1}{2} g\cos\varphi\, t_{πτ}^{\cancel{2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow t_{πτ} = \frac{2v_{0y'}}{g\cos\varphi} \overset{(3)}{\Rightarrow} \boxed{t_{πτ} = \frac{2\cdot v_0 \sin(\theta-\varphi)}{g\cos\varphi}} \quad (A)$$

Η x'-συντεταγμένη του σημείου προσγείωσης θα είναι: $x' = \cancel{x'_0}^{\,0} + v_{0x'}t_{πτ} + \frac{1}{2}a_{x'}t_{πτ}^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x' = v_0\cos(\theta-\varphi)\frac{2v_0\sin(\theta-\varphi)}{g\cos\varphi} - \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{g}\sin\varphi\frac{\cancel{4}^{\,2}v_0^2\sin^2(\theta-\varphi)}{g^{\cancel{2}}\cos^2\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' = \frac{2v_0^2}{g}\frac{\sin(\theta-\varphi)}{\cos^2\varphi}\left[\cos(\theta-\varphi)\cos\varphi - \sin(\theta-\varphi)\sin\varphi\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' = \frac{2v_0^2}{g}\frac{\sin(\theta-\varphi)}{\cos^2\varphi}\left[\cos\left[(\theta-\cancel{\varphi})+\cancel{\varphi}\right]\right] \Rightarrow \boxed{x' = \frac{2v_0^2}{g}\frac{\sin(\theta-\varphi)}{\cos^2\varphi}\cos\theta}$$

Το οποίο είναι το αποτέλεσμα που βρήκαμε με τον 1ο τρόπο, δουλεύοντας στο σύστημα συντεταγμένων x-y

(β) Για να βρούμε τη γωνία θ που αντιστοιχεί στο μέγιστο βεληνεκές, θα πάρουμε την παράγωγο της απόστασης x' ως προς θ. Για μέγιστο, η παράγωγος θα πρέπει να είναι μηδέν:

$$\frac{d}{d\theta}\left[\frac{2v_0^2}{g}\frac{\cos\theta\sin(\theta-\varphi)}{\cos^2\varphi}\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left[\cos\theta\sin(\theta-\varphi)\right] = 0 \Rightarrow$$

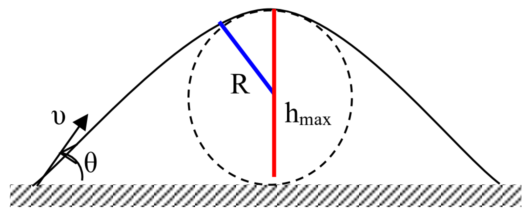
$$\Rightarrow -\sin\theta\sin(\theta-\varphi) + \cos\theta\cos(\theta-\varphi) = 0 \Rightarrow \cos\left[(\theta-\varphi)+\theta\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(2\theta-\varphi) = 0 \Rightarrow 2\theta-\varphi = 90^\circ \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{90^\circ+\varphi}{2}}$$

11. Ένα βλήμα βάλλεται με ταχύτητα υ και γωνία θ. Να βρεθεί η ακτίνα κλίσης (ακτίνα κλίσης ορίζεται σαν η ακτίνα ενός κύκλου που εφάπτεται της παραβολής σε κάθε σημείο της όπως στο παρακάτω σχήμα) της παραβολικής κίνησης για τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

(α) στο μέγιστο ύψος της τροχιάς

(β) στο σημείο βολής του βλήματος (αρχή της παραβολής)



(*<u>Υπόδειξη:</u>* Και για τα δύο υπο-ερωτήματα ξέρετε την ταχύτητα και την αντίστοιχη επιτάχυνση στην αρχή και στο μέγιστο ύψος της τροχιάς. Θεωρήστε ότι η επιτάχυνση στη διεύθυνση της ακτίνας δίνεται από τη σχέση $\alpha = \upsilon^2/R$ όπου υ η ταχύτητα κάθετη στην ακτίνα και R η ακτίνα του αντίστοιχου κύκλου).

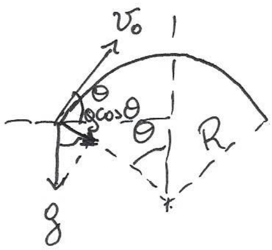
(γ) Με ποια γωνία πρέπει να εκτοξεύσουμε το βλήμα ώστε η ακτίνα κλίσης στο μέγιστο ύψος να ισούται με το μισό του μέγιστου ύψους; (δείτε το σχήμα).

(α) Στο μέγιστο ύψος $v_y = 0$ και επομένως η ολική ταχύτητα είναι μόνο η συνιστώσα στη x-διεύθυνση : $v_x = v_0 \cos\theta$

Η επιτάχυνση που είναι κάθετη στη διαδρομή, στο ψηλότερο σημείο, είναι g

Επομένως $a_\kappa = \frac{v_x^2}{R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{v_0^2 \cos^2\theta}{g}}$ (1)

(β) Στην αρχή της διαδρομής, η ταχύτητα είναι v_0 και η επιτάχυνση η οποία είναι κάθετη στη διαδρομή είναι $g\cos\theta$



Επομένως $a_\kappa = \frac{v_x^2}{R} = \frac{v_0^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v_0^2}{a_\kappa} = \frac{v_0^2}{g\cos\theta} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{R = \frac{v_0^2}{g\cos\theta}}$ (2)

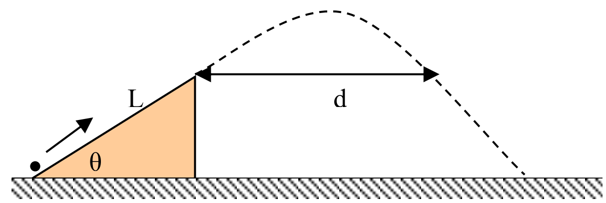
(γ) Το μέγιστο ύψος της τροχιάς είναι: $\left.\begin{array}{l} v_y = v_{0y} - gt \\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{v_{0y}^2}{2g}$

$\Rightarrow y_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} \Rightarrow \boxed{y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}}$ (3)

Θέλουμε $R = \frac{1}{2} y_{max} \overset{(1)\&(3)}{\Rightarrow} \frac{\cancel{v_0^2}\cos^2\theta}{\cancel{g}} = \frac{1}{2}\frac{\cancel{v_0^2}\sin^2\theta}{2\cancel{g}} \Rightarrow 4\cos^2\theta = \sin^2\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \tan^2\theta = 4 \Rightarrow \tan\theta = 2 \Rightarrow \boxed{\theta = 63.4^\circ}$

12. Ένα κανόνι όταν στοχεύει κατακόρυφα προς τα πάνω, παρατηρείται ότι ρίχνει μία οβίδα σε ένα μέγιστο ύψος *L*. Μια άλλη οβίδα ρίχνεται αργότερα με την ίδια ταχύτητα, αλλά αυτή τη φορά το κανόνι σημαδεύει κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου, μήκους *L*, και γωνίας κλίσης *θ*. Ποια πρέπει να είναι η γωνία ώστε η οβίδα να διανύσει την μεγαλύτερη οριζόντια απόσταση *d*, την στιγμή που επιστρέφει στο ύψος της κορυφής του κεκλιμένου επιπέδου;



Από τα δεδομένα του προβλήματος, μπορούμε να βρούμε αρχικά την ταχύτητα με την οποία εκτοξεύονται τα βλήματα.

Ξέρουμε ότι στην περίπτωση της κατακόρυφης βολής προς τα πάνω, το μέγιστο ύψος είναι $h_{max} = L$ όσο και το μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.

Έχουμε: $y_{max} = \cancel{y_0}^{\,0} + v_{0y} t_{αν} - \frac{1}{2} g t_{αν}^2 \Rightarrow h_{max} = v_0 t_{αν} - \frac{1}{2} g t_{αν}^2 \Rightarrow \boxed{L = v_0 t_{αν} - \frac{1}{2} g t_{αν}^2}$ (1)

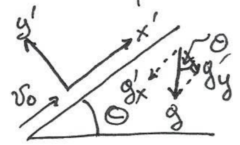
Στο μέγιστο ύψος, η ταχύτητα του βλήματος είναι μηδέν και επομένως:

$\cancel{v_{y\,max}}^{\,0} = v_0 - g t_{αν} \Rightarrow v_0 = g t_{αν} \Rightarrow \boxed{t_{αν} = \frac{v_0}{g}}$ (2)

Αντικατάσταση της (2) στην (1) $\Rightarrow L = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{2gL}}$ (A)

Στην δεύτερη περίπτωση της ρίψης της οβίδας, έχουμε πλάγια βολή. Θα πρέπει να υπολογίσουμε την ταχύτητα της οβίδας όταν φθάνει στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου.

Αναλύουμε την κίνηση σε 2 συνιστώσες: παράλληλα και κάθετα στο κεκλιμένο επίπεδο. Με τον τρόπο αυτό η $v_{0y'} = 0$ και η οβίδα κινείται μόνο στον x'-άξονα, με την



επίδραση της x'-συνιστώσας της επιτάχυνσης της βαρύτητας

$g'_x = -g\sin\theta$ (3)

Η ταχύτητα της οβίδας στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου είναι:

$v_{x'} = v_{0x'} + g_{x'} t = v_0 - g\sin\theta\, t \Rightarrow \boxed{t = \frac{v_0 - v_{x'}}{g\sin\theta}}$ (B)

Η θέση της οβίδας μετά από χρόνο t που φθάνει στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου, θα είναι: $x' = L$ και επομένως:

$$x' = \cancel{x_0}^{0} + v_{0x'} \cdot t + \frac{1}{2} a_{x'} \cdot t \Rightarrow L = v_{0x'} t - \frac{1}{2} g \sin\theta \, t^2$$ Αντικατάσταση της v_0 κ t από τις εξισώσεις (A) κ (B) οδηγεί στην: $L = v_0 \dfrac{v_0 - v_{x'}}{g \sin\theta} - \dfrac{\cancel{g} \cancel{\sin\theta}}{2} \dfrac{(v_0 - v_{x'})^2}{g^2 \sin^2\theta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow L = \frac{\cancel{2}v_0^2 - \cancel{2v_0 v_{x'}} - v_0^2 - v_{x'}^2 + \cancel{v_0 v_{x'}}}{2g\sin\theta} \Rightarrow L = \frac{v_0^2 - v_{x'}^2}{2g\sin\theta} \Rightarrow v_{x'}^2 = v_0^2 - 2gL\sin\theta \Rightarrow$$

$$\overset{(A)}{\Rightarrow} v_{x'}^2 = 2gL - 2gL\sin\theta \Rightarrow \boxed{v_{x'}^2 = 2gL(1-\sin\theta)} \quad (\Gamma)$$

Η τελευταία εξίσωση μας δίνει την ταχύτητα της οβίδας στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου.

Από την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου, η οβίδα εκτελεί πλάγια βολή με αρχική ταχύτητα $v = v_{x'}$ και γωνία βολής θ ίση με την κλίση του κεκλιμένου επιπέδου. Ο χρόνος που απαιτείται ώστε να φθάσει στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς είναι $t_{av} = \dfrac{v_y}{g}$ και επομένως ο συνολικός χρόνος για να φθάσει στο ίδιο ύψος με το ύψος της κορυφής του κεκλιμένου επιπέδου είναι: $\boxed{t_{ol} = \dfrac{2v_y}{g}}$

Στον ολικό αυτό χρόνο, t_{ol}, διανύει οριζόντια απόσταση $d = x = v_x t_{ol} \Rightarrow$

$$\Rightarrow d = (v\cos\theta)t \Rightarrow d = v\cos\theta \frac{2v_y}{g} \Rightarrow d = \frac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g} \quad (4)$$

Αλλά $v = v_{x'}$ που βρήκαμε στην εξίσωση (Γ). Αντικατάσταση στην (4) της (Γ)

$$d = \frac{2\cancel{g}L(1-\sin\theta)2\sin\theta\cos\theta}{\cancel{g}} \Rightarrow \boxed{d = 4L(1-\sin\theta)\sin\theta\cos\theta} \quad (\Delta)$$

Θέλουμε τη μέγιστη απόσταση d, συναρτήσει της γωνίας θ, οπότε θα πάρουμε την παράγωγο της (Δ) ως προς θ, και θα ζητήσουμε να μηδενίζεται:

$$\frac{d}{d\theta}\left[(1-\sin\theta)\sin\theta\cos\theta\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta\cos\theta\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\cos\theta) - \frac{d}{d\theta}(\sin^2\theta\cos\theta) = 0 \Rightarrow \underbrace{\cos^2\theta}_{(1-\sin^2\theta)} - \sin^2\theta + \sin^3\theta - 2\sin\theta\underbrace{\cos^2\theta}_{(1-\sin^2\theta)} = 0$$

$$\Rightarrow -\sin^2\theta + (1-\sin^2\theta) + \sin^3\theta - 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\sin^3\theta - 2\sin^2\theta - 2\sin\theta + 1 = 0 \Rightarrow 3\sin^3\theta - 3\sin^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 3\sin^2\theta(\sin\theta - 1) + (\sin\theta - 1)^2 = 0 \Rightarrow (\sin\theta - 1)\left[3\sin^2\theta + (\sin\theta - 1)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(\sin\theta - 1)(3\sin^2\theta + \sin\theta - 1) = 0.} \qquad (E)$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (E) είναι: $\sin\theta - 1 = 0 \Rightarrow \sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = 90^\circ$

Αυτή η λύση αντιστοιχεί σε κατακόρυφη βολή προς τα πάνω και επομένως δεν αντιστοιχεί στο πρόβλημα.

$$3\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0 \Rightarrow \sin\theta_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{6} \Rightarrow \sin\theta_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Επιλέγουμε τη λύση με το "+" πρόσημο που δίνει: $\sin\theta = \frac{-1+\sqrt{13}}{6} \simeq 0.43 \Rightarrow$ ώστε $\theta > 0$.

$$\Rightarrow \boxed{\theta = 25.7^\circ}$$

<u>Σημείωση</u>: Όταν θα κάνουμε διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, θα μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα της οβίδας στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου με τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, αλλά προς το παρόν ακολουθούμε τις εξισώσεις της κινηματικής.