ΦΥΣ. 111
Τελική Εξέταση: 17-Δεκεμβρίου-2017

Πριν αρχίσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητας).

Ονοματεπώνυμο	Αριθμός ταυτότητας

Απενεργοποιήστε τα κινητά σας.

Σας δίνονται 12 ισοδύναμες ασκήσεις και θα πρέπει να απαντήσετε σε 10 από αυτές. Θα πρέπει να σημειώσετε τις ασκήσεις που θέλετε να βαθμολογηθούν

Προσπαθήστε να σημειώσετε καθαρά τις απαντήσεις σας σε κάθε ερώτηση και να αναφέρετε καθαρά σε ποιά σελίδα πιθανόν να συνεχίζεται η απάντησή σας.

Η μέγιστη συνολική βαθμολογία είναι 100 μονάδες.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μόνο το τυπολόγιο που σας δίνεται και απαγορεύται η χρήση οποιοδήποτε σημειώσεων, βιβλίων, κινητών.

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΣΤΕ ΜΟΝΟ ΤΙΣ ΣΕΛΙΔΕΣ ΠΟΥ ΣΑΣ ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΜΗΝ ΚΟΨΕΤΕ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΣΕΛΙΔΑ

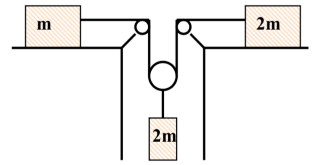
Η διάρκεια της εξέτασης είναι 200 λεπτά. Καλή Επιτυχία!

<u>Βαθμολογία ερωτήσεων</u>

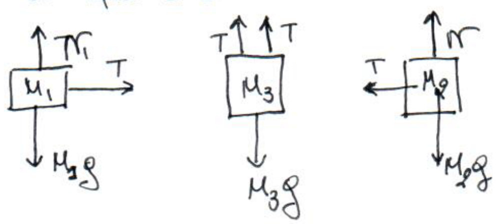
Άσκηση	Βαθμός	Άσκηση	Βαθμός
1 (10μ)		6 (10μ)	
2 (10μ)		7 (10μ)	
3 (10μ)		8 (10μ)	
4 (10μ)		9 (10μ)	
5 (10μ)		10 (10μ)	
Σύνολο 50		Σύνολο 50	
Βαθμός			

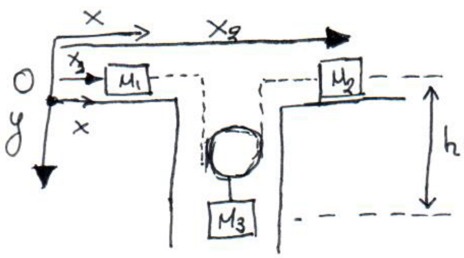
Άσκηση 1 [10μ]

Το σύστημα των τροχαλιών του διπλανού σχήματος αφήνεται να κινηθεί από την κατάσταση της ηρεμίας. Αν το νήμα που συνδέει τα δύο σώματα είναι αβαρές και οι τροχαλίες λείες και αβαρείς και δεν υπάρχουν τριβές μεταξύ των επιφανειών που έρχονται σε επαφή, να βρεθούν οι επιταχύνσεις των μαζών καθώς και η τάση του νήματος. Να εκφράσετε τις απαντήσεις σας συναρτήσει των μεγεθών *m* και *g*.



Τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος για τα τρία σώματα που συμμετέχουν στο σύστημα είναι:





Μετράμε μετατοπίσεις ξεκινώντας από την αριστερή πλευρά (μάζα M_1) και το ύψος ως προς την επιφάνεια που βρίσκονται οι μάζες m_1 και m_2 · με θετική φορά προς τα κάτω και προς τα δεξιά

Θα έχουμε: $x_2 - x_1 + 2y = $ μήκος σχοινιού $=$ σταθ $\Rightarrow \dfrac{d^2}{dt^2}(x_2 - x_1 + 2y) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d^2x_2}{dt^2} - \frac{d^2x_1}{dt^2} + 2\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 - a_1 + 2a_3 = 0} \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε τον 2^{o} νόμο του Newton για κάθε μάζα οπότε παίρνουμε:

Σώμα (1) : $T = M_1 a_1$ (3)

Σώμα (2) : $-T = M_2 a_2$ (4)

$$\Rightarrow M_1 a_1 = -M_2 a_2 \Rightarrow \cancel{m} a_1 = -2\cancel{m} a_2 \Rightarrow \boxed{a_1 = -2a_2} \quad (5)$$

Σώμα (3) : $M_3 g - 2T = M_3 a_3 \Rightarrow \cancel{2}Mg - \cancel{2}T = \cancel{2}Ma_3 \Rightarrow \boxed{Mg - T = Ma_3} \quad (6)$

Από την (1) κ (5) έχουμε: $a_2 - (-2a_2) + 2a_3 = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = -\frac{3}{2}a_2} \quad (7)$

Αντικατάσταση της (7) στην (6) δίνει: $T = M(g - a_3) \Rightarrow T = M\left(g + \frac{3}{2}a_2\right) \overset{(4)}{\Rightarrow}$

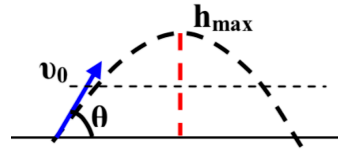
$$\Rightarrow -2\cancel{m} a_2 = \cancel{m}\left(g + \frac{3}{2}a_2\right) \Rightarrow -2a_2 - \frac{3}{2}a_2 = g \Rightarrow \boxed{a_2 = -\frac{2}{7}g}$$

Αντικατάσταση στην (5) δίνει $\boxed{a_1 = +\frac{4}{7}g}$ και από την (7) $\Rightarrow \boxed{a_3 = +\frac{3}{7}g}$

Τέλος από την (3) $\boxed{T = \frac{4}{7}mg}$

Άσκηση 2 [10μ]

Αν ρίξετε ένα βλήμα με ταχύτητα υ_0 και γωνία θ ως προς τον ορίζοντα, πόσο ποσοστό του συνολικού χρόνου πτήσης του βρίσκεται σε ύψος πάνω από το μισό του μέγιστου ύψους του;



Ξέρουμε ότι το μέγιστο ύψος δίνεται από τη σχέση: $\upsilon_y = \upsilon_{0y} - g t_{\alpha\nu} \Rightarrow \boxed{t_{\alpha\nu} = \frac{\upsilon_{0y}}{g}}$ (1)

οπότε $y = h_{max} = \cancel{y_0}^{\,0} + \upsilon_{0y} t_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} g t_{\alpha\nu}^2 \Rightarrow h_{max} = \upsilon_{0y}\frac{\upsilon_{0y}}{g} - \frac{1}{2} \cancel{g} \frac{\upsilon_{0y}^2}{g^2} \Rightarrow h_{max} = \frac{\upsilon_{0y}^2}{2g}$

Επειδή $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\theta$ η τελευταία εξίσωση δίνει: $\boxed{h_{max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\theta}{2g}}$ (2)

Στο μισό του μέγιστου ύψους, το βλήμα έχει ταχύτητα:

$$\upsilon_y^2 - \upsilon_{y_0}^2 = -2g\Delta h \Rightarrow \upsilon_y^2 = \upsilon_{y_0}^2 - 2g\left(\frac{h_{max}}{2} - 0\right) \Rightarrow \upsilon_y^2 = \upsilon_{y_0}^2 - g h_{max} \Rightarrow$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \upsilon_y^2 = \upsilon_0^2\sin^2\theta - \cancel{g}\frac{\upsilon_0^2\sin^2\theta}{2\cancel{g}} \Rightarrow \upsilon_y^2 = \frac{\upsilon_0^2\sin^2\theta}{2} \Rightarrow \boxed{\upsilon_{y=\frac{h_{max}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\upsilon_0\sin\theta} \quad (3)$$

Ο χρόνος που χρειάζεται για να αποκτήσει την ταχύτητα αυτή κινούμενο από κάτω προς τα πάνω θα είναι: $\upsilon_{y=\frac{h_{max}}{2}} = \upsilon_{0y} - g t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\upsilon_{0y} - \upsilon_{y=h_{max}/2}}{g} \Rightarrow$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{\upsilon_0\sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\upsilon_0\sin\theta}{g} \Rightarrow \boxed{t_1 = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\upsilon_0\sin\theta}{g}} \quad (4)$$

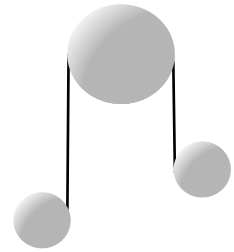
Ο χρόνος που χρειάζεται για να κινηθεί από το $\frac{h_{max}}{2}$ στο h_{max} είναι:

$$t_2 = t_{\alpha\nu} - t_1 \xRightarrow{(1)\kappa(4)} t_2 = \frac{\upsilon_0\sin\theta}{g} - \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\upsilon_0\sin\theta}{g} \Rightarrow \boxed{t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\upsilon_0\sin\theta}{g}} \quad (5)$$

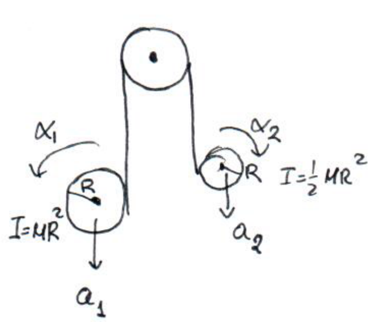
Επομένως το ποσοστό χρόνου από το $\frac{h_{max}}{2} \to h_{max}$ είναι $\frac{t_2}{t_{\alpha\nu}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cancel{\frac{\upsilon_0\sin\theta}{g}}}{\cancel{\frac{\upsilon_0\sin\theta}{g}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{t_2}{t_{\alpha\nu}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{t_2}{t_{\alpha\nu}} \simeq 70\%$$

Άσκηση 3 [10μ]



Αβαρές νήμα είναι τυλιγμένο γύρω από δύο μικρές τροχαλίες μάζας *M* και ακτίνας *R*. Η μία τροχαλία είναι κοίλη (θεωρήστε την ως στεφάνι) ενώ η άλλη είναι συμπαγής (θεωρήστε την ως δίσκο). Το σχοινί περνά από μία άλλη τρίτη τροχαλία που είναι λεία και αβαρής ούτως ώστε οι μικρές τροχαλίες να βρίσκονται εκατέρωθεν της μεγάλης αυτής τροχαλίας όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύστημα κρατιέται αρχικά ακίνητο και κατόπιν αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί. Οι δύο τροχαλίες αρχίζουν να κατεβαίνουν και το σχοινί ξετυλίγεται. Να βρεθούν η μεταφορική και γωνιακή επιτάχυνση των δύο μικρών τροχαλιών και η τάση του νήματος.



Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα για την μεταφορική και περιστροφική κίνηση των δύο τροχαλιών.

Μεταφορική κίνηση: $Mg - T = Ma_1$, $Mg - T = Ma_2$ $\Rightarrow \boxed{a_1 = a_2}$ (1)

Περιστροφική κίνηση: $T\cancel{R} = MR^{\cancel{2}}\alpha_1$, $T\cancel{R} = \frac{1}{2}MR^{\cancel{2}}\alpha_2$ $\Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_2}$ (2)

Αλλά η γραμμική επιτάχυνση είναι: $a_1 = R\alpha_1$, $a_2 = R\alpha_2$ $\Rightarrow \boxed{(a_1 + a_2) = R(\alpha_1 + \alpha_2)}$ (3)

που εκφράζει την αρχή διατήρησης του νήματος

Αντικαθιστούμε τις (1) και (2) στην (3) οπότε έχουμε:

$$2a_1 = R\left(\frac{1}{2}\alpha_2 + \alpha_2\right) \Rightarrow 2a_1 = \frac{3}{2}R\alpha_2 \Rightarrow \boxed{\cancel{2}a_1 = \frac{3}{\cancel{2}}R\,\cancel{2}\alpha_1 = 3R\alpha_1}$$

Επομένως η τάση θα είναι: $T = MR\alpha_1 \Rightarrow T = M\cancel{R}\frac{2a_1}{3\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{T = M\frac{2}{3}a_1}$

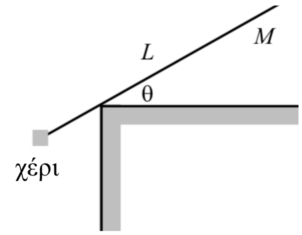
Αντικατάσταση της T στην $Mg - T = Ma_1 \Rightarrow Mg - \frac{2}{3}Ma_1 = Ma_1 \Rightarrow Mg = \frac{5}{3}Ma_1$

$\Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{3}{5}g = a_2}$ Επομένως $2a_1 = 3R\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{2}{3}\frac{a_1}{R} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{2}{\cancel{3}}\frac{\cancel{3}}{5}g \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \frac{2}{5}g}$ και $\alpha_2 = 2\alpha_1 \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = \frac{4}{5}g}$

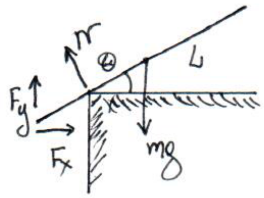
Άσκηση 4 [10μ]

Θεωρήστε ότι κρατάτε με το χέρι σας το ένα άκρο μιας ράβδου μήκους L και μάζας M όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Σε απόσταση $L/4$ από το άκρο που κρατάτε, η ράβδος ακουμπά στη λεία γωνία ενός τραπεζιού. Η ράβδος σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση.



(α) Ποια δύναμη θα πρέπει να ασκήσετε στη ράβδο ώστε να παραμείνει στη θέση αυτή; [**7μ**]

(β) Σε ποια γωνία θ η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που ασκεί το χέρι είναι μηδέν; [**3μ**]



Η γωνία του τραπεζιού είναι λεία, οπότε η αντίδραση είναι κάθετη στη ράβδο. Θεωρούμε τις ροπές των δυνάμεων ως προς το άκρο της ράβδου που εφαρμόζουμε τη δύναμη του χεριού μας.

$$\Sigma\vec{\tau}=\vec{0} \Rightarrow mg\frac{L}{2}\cos\Theta = N\frac{L}{4} \Rightarrow \boxed{N=2mg\cos\Theta} \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε τον 2^o νόμο του Newton στις x και y-διευθύνσεις:

$$\Sigma F_x=0 \Rightarrow F_x-N_x=0 \Rightarrow F_x=N_x \Rightarrow F_x=N\sin\Theta \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{F_x=2mg\cos\Theta\sin\Theta}$$

$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow F_y+N_y-mg=0 \Rightarrow F_y=mg-N_y=mg-N\cos\Theta \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{F_y=mg-2mg\cos^2\Theta}$$

Το μέτρο της δύναμης που εφαρμόζουμε θα είναι:

$$|F|^2=F_x^2+F_y^2=m^2g^2\left[4\cos^2\Theta\sin^2\Theta+(1-2\cos^2\Theta)^2\right]=m^2g^2\left[4\cos^2\Theta\sin^2\Theta+(1+4\cos^4\Theta-4\cos^2\Theta)\right]$$

$$\Rightarrow |F|^2=m^2g^2\left[4\cos^2\Theta(1-\cos^2\Theta)+(1+4\cos^4\Theta-4\cos^2\Theta)\right]=m^2g^2\left[\cancel{4\cos^2\Theta}-\cancel{4\cos^4\Theta}+1+\cancel{4\cos^4\Theta}-\cancel{4\cos^2\Theta}\right]$$

$$\Rightarrow |F|^2=m^2g^2 \Rightarrow \boxed{|F|=mg}$$ που είναι ανεξάρτητη της γωνίας Θ

Η $F_y=0$ όταν $mg-2mg\cos^2\Theta=0 \Rightarrow 1-2\cos^2\Theta=0 \Rightarrow \cos^2\Theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\Theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

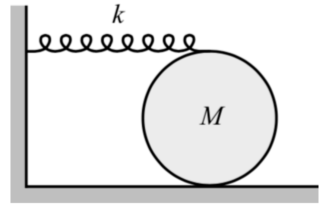
$$\Rightarrow \boxed{\Theta=45^\circ}$$

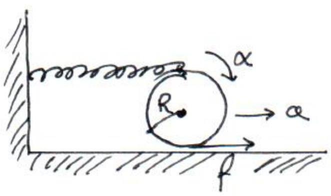
Για γωνία μεγαλύτερη των $45^\circ \rightsquigarrow F_y>0$ οπότε σπρώχνουμε προς τα πάνω.

Για γωνία μικρότερη των $45^\circ \rightsquigarrow F_y<0$ οπότε σπρώχνουμε προς τα κάτω.

Άσκηση 5 [10μ]

Ένας συμπαγής κύλινδρος μάζας *m* και ακτίνας *R* συνδέεται με ελατήριο σταθεράς *k* όπως στο διπλανό σχήμα. Αν ο κύλινδρος εκτελεί κύληση χωρίς ολίσθηση ποια είναι η συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων του κυλίνδρου; <u>*Υπόδειξη:*</u> το πάνω τμήμα του κυλίνδρου κινείται διπλάσια απόσταση από αυτή του κέντρου του κυλίνδρου.





Αν το κέντρο του κυλίνδρου κινηθεί κατά μία απόσταση X τότε το πάνω μέρος του κυλίνδρου θα κινηθεί κατά μια απόσταση 2x. Αυτό γίνεται εύκολα κατανοητό αν θεωρήσουμε ότι βρισκόμαστε στο κέντρο του κυλίνδρου και βλέπουμε ότι όταν το πάνω τμήμα του κυλίνδρου κινηθεί κατά X τότε το κάτω μέρος του θα κινηθεί επίσης κατά X αλλά στην αντίθετη κατεύθυνση.

Θεωρούμε τις δυνάμεις που δρουν στον κύλινδρο, στην οριζόντια διεύθυνση της κίνησής του. Αυτές θα είναι η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου $F_{ελ} = -k(2x)$ που εφαρμόζεται στο πάνω τμήμα του κυλίνδρου και η δύναμη της τριβής $f_{τρ}$ η οποία μπορεί να έχει είτε θετική ή αρνητική φορά.

Από τον 2ο νόμο του Newton θα έχουμε: $\boxed{\Sigma F_x = ma \Rightarrow f - k(2x) = ma}$ (1)

2ος νόμος του Newton για περιστροφική κίνηση (θεωρούμε ροπές ως προς το κέντρο του κυλίνδρου):

$$\Sigma \vec{\tau} = I\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\tau}_{F_{ελ}} + \vec{\tau}_f = I\vec{\alpha} \Rightarrow -f\cdot\cancel{R} - 2kx\cancel{R} = \frac{1}{2} m R^{\cancel{2}} \frac{a}{\cancel{R}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{-2f - 4kx = ma} \quad (2)$$

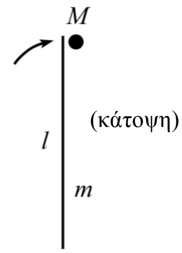
Λύνουμε την (1) ως προς f και αντικαθιστούμε στην (2): $f = ma + 2kx$

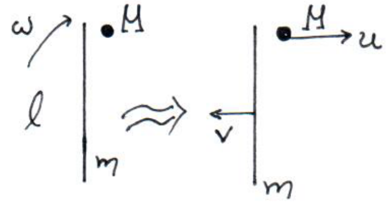
$$-2ma - 4kx - 4kx = ma \Rightarrow 3ma = -8kx \Rightarrow a = -\frac{8}{3}\frac{k}{m}x \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = -\frac{8}{3}\frac{k}{m}x}$$

Επομένως η γωνιακή συχνότητα θα είναι: $\omega^2 = \frac{8}{3}\frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{k}{m}}}$

Άσκηση 6 [10μ]

Μία ομογενής ράβδος μάζας *m* και μήκους *l* περιστρέφεται ως προς το κέντρο μάζας της πάνω στη λεία οριζόντια επιφάνεια ενός τραπεζιού. Η ράβδος <u>δεν</u> είναι στερεωμένη σε κάποιο σημείο ή άξονα. Θεωρήστε ότι τοποθετείτε πάνω στην επιφάνεια του τραπεζιού μία μάζα *M* και σε τέτοια θέση ώστε το άκρο της ράβδου να συγκρουστεί με τη μάζα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η σύγκρουση είναι ελαστική. Ποια θα πρέπει να είναι η τιμή της μάζας *M* ώστε μετά τη σύγκρουση η κίνηση της ράβδου να είναι <u>μόνο</u> μεταφορική και όχι περιστροφική;





Έχουμε ελαστική σκέδαση των σωμάτων, και στο σύστημά μας δεν δρουν εξωτερικές δυνάμεις ή ροπές. Επομένως διατηρούνται η ορμή, κινητική ενέργεια και στροφορμή.

Από διατήρηση της ορμής θα έχουμε: $\vec{P}^{i}_{ολ} = \vec{P}^{f}_{ολ} \Rightarrow 0 = Mu - mv$ (1)

Από διατήρηση της κινητικής ενέργειας: $E^{i}_{κιν} = E^{f}_{κιν} \Rightarrow \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M u^2 + \frac{1}{2} m v^2$ (2)

Από διατήρηση της στροφορμής: $L^{i} = L^{f} \Rightarrow I_p \omega = M u \frac{l}{2} + \emptyset$ (3)

Η στροφορμή της ράβδου είναι Ø στο τέλος μετά τη σύγκρουση, γιατί δεν περιστρέφεται και η ταχύτητα του Κέντρου Μάζας περνά από το σημείο ως προς το οποίο θεωρούμε τις περιστροφές (το κέντρο της ράβδου).

Από την (3) θα έχουμε: $u = 2 \frac{I_p}{M} \frac{\omega}{l} \xRightarrow{I_p = \frac{ml^2}{12}} u = \cancel{2} \frac{m l^{\cancel{2}}}{{}_{6}\cancel{12} M \cancel{l}} \omega \Rightarrow \boxed{u = \frac{m l \omega}{6M}}$ (4)

Αντικατάσταση στην εξίσωση (1) $\Rightarrow v = \frac{M}{m} u = \frac{\cancel{M}}{\cancel{m}} \frac{\cancel{m} l}{6 \cancel{M}} \omega \Rightarrow \boxed{v = \frac{\omega l}{6}}$ (5)

Τέλος αντικατάσταση των u και v στην εξίσωση (2) θα δώσει:

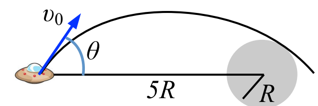
$$\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \frac{1}{\cancel{12}} \cancel{m} \cancel{l^2} \cancel{\omega^2} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \cancel{M} \frac{m^{\cancel{2}} \cancel{l^2}}{3\cancel{36} M^{\cancel{2}}} \cancel{\omega^2} + \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \cancel{m} \frac{\cancel{l^2}}{\cancel{36}_{3}} \cancel{\omega^2} \Rightarrow 1 = \frac{1}{3} + \frac{m}{3M} \Rightarrow 2 = \frac{m}{M} \Rightarrow \boxed{M = \frac{m}{2}}$$

Άσκηση 7 [10μ]

Φανταστείτε ένα διαστημόπλοιο ακίνητο κοντά σε ένα πλανήτη μάζας M και ακτίνας R. Το διαστημόπλοιο βρίσκεται σε απόσταση $5R$ από το κέντρο του πλανήτη.

(α) Κάποια στιγμή αφήνει ένα πακέτο με μηδενική αρχική ταχύτητα να πέσει στον πλανήτη. Ποια η ταχύτητα με την οποία θα φθάσει το πακέτο στην επιφάνεια του πλανήτη; [**3μ**]

(β) Φανταστείτε τώρα ότι το πακέτο εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα υ_0 και γωνία θ ως προς την ευθεία που ενώνει το κέντρο του πλανήτη με τη θέση του διαστημόπλοιου. Ποια θα πρέπει να είναι η τιμή της ταχύτητας υ_0 ώστε το πακέτο να περάσει εφαπτομενικά της επιφάνειας του πλανήτη; [**7μ**]



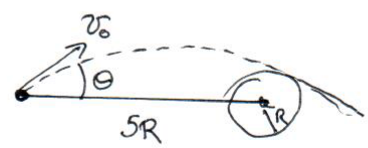
(α) Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας έχουμε ότι:

$$E^i_{\mu\eta\chi} = E^f_{\mu\eta\chi} \Rightarrow -G\frac{Mm}{r_\delta} = \frac{1}{2}m\upsilon_\pi^2 - G\frac{Mm}{r_\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -G\frac{M\cancel{m}}{5R_\pi} = \frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon_\pi^2 - G\frac{M\cancel{m}}{R_\pi} \Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon_\pi^2 = GM\left(\frac{1}{R_\pi}-\frac{1}{5R_\pi}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon_\pi^2 = GM\frac{4}{5R_\pi} \Rightarrow \boxed{\upsilon_\pi = \sqrt{\frac{8}{5R_\pi}GM}}$$

(β) Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε πάλι διατήρηση ενέργειας αλλά η στροφορμή του συστήματος διατηρείται:



$$E^i_{\mu\eta\chi} = E^f_{\mu\eta\chi} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - G\frac{Mm}{5R_\pi} = \frac{1}{2}m\upsilon'^2 - \frac{GMm}{R_\pi}$$

Η στροφορμή του σώματος αρχικά είναι:

$$\begin{cases} L^i = m\upsilon_0\sin\theta \cdot 5R_\pi & \text{και καθώς περνά από τον πλανήτη} \\ L^f = m\upsilon' R_\pi & \text{(η ταχύτητα θα είναι κάθετη στην ακτίνα)} \end{cases}$$

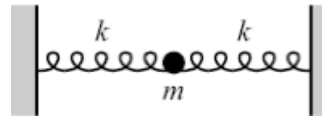
$$\cancel{m}\upsilon_0\sin\theta\, 5\cancel{R_\pi} = \cancel{m}\upsilon'\cancel{R_\pi} \Rightarrow \boxed{\upsilon' = 5\upsilon_0\sin\theta} \quad (A)$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση της ενέργειας δίνει:

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon_0^2 - G\frac{M\cancel{m}}{5R_\pi} = \frac{1}{2}\cancel{m}\left(25\upsilon_0^2\sin^2\theta\right) - G\frac{M\cancel{m}}{R_\pi} \Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon_0^2\left(1-25\sin^2\theta\right) = GM\left(\frac{1}{5R_\pi}-\frac{1}{R_\pi}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon_0^2\left(25\sin^2\theta-1\right) = GM\frac{4}{5R_\pi} \Rightarrow \upsilon_0^2 = \frac{8}{5R_\pi}\frac{GM}{\left(25\sin^2\theta-1\right)} \Rightarrow \boxed{\upsilon_0 = \sqrt{\frac{8}{5R_\pi}\frac{GM}{(25\sin^2\theta-1)}}}$$

Άσκηση 8 [10μ]



Τα ελατήρια του διπλανού σχήματος βρίσκονται στα φυσικά τους μήκη (μήκος ηρεμίας). Η μάζα ταλαντώνεται κατά μήκος των ελατηρίων (δηλαδή παράλληλα προς τη διεύθυνση των ελατηρίων) με πλάτος ταλάντωσης d. Κάποια στιγμή (υποθέστε αυτή είναι η $t = 0$) η μάζα βρίσκεται στη θέση $x = d/2$ κινούμενη προς τα δεξιά, αφαιρούμε το δεξιό ελατήριο.

(α) Υπολογίστε τη συχνότητα ταλάντωσης της μάζας στο σύστημα των δύο ελατηρίων και την εξίσωση της θέσης της μάζας. [**3μ**]

(β) Ποια είναι η εξίσωση $x(t)$ που περιγράφει τη θέση της μάζας όταν αφαιρεθεί το δεξιό ελατήριο; Θα πρέπει να βρείτε όλους τους όρους που καθορίζουν την εξίσωση αυτή συναρτήσει των δεδομένων του προβλήματος και να μην γράψετε απλά μία εξίσωση. [**6μ**]

(γ) Ποιο είναι το πλάτος της νέας ταλάντωσης; [**1μ**]

(α)

Όταν η μάζα m κινείται, το ένα ελατήριο συσπειρώνεται ενώ το άλλο επιμηκύνεται, κατά το ίδιο μήκος x.
Επομένως $\Delta x_1 = -\Delta x_2$ όπου Δx_1 και Δx_2 οι επιμηκύνσεις των δύο ελατηρίων.

Θέτοντας ότι $\Delta x_1 = -\Delta x_2 = \Delta x$ θα έχουμε: $F = -k\Delta x_1 - (-k \cdot \Delta x_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow F = -k\Delta x_1 + k\Delta x_2 \Rightarrow F = -k\Delta x_1 + k(-\Delta x_1) \Rightarrow F = -2k\Delta x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -2kx \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{2k}{m}x \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}} \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}}$$

Αρμονική ταλάντωση με $k' = 2k$

(β) Χρειάζεται να υπολογίσουμε τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος για να προσδιορίσουμε την λύση της αρμονικής ταλάντωσης.
Η εξίσωση της θέσης της μάζας όταν ταλαντώνεται με τα δύο ελατήρια είναι:

$$\boxed{x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t} \quad (1).$$

Τη στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $\frac{d}{2}$.
Το σώμα στη θέση αυτή $\frac{d}{2}$ έχει ταχύτητα υ. Η ενέργεια του σώματος στη θέση $x = \frac{d}{2}$ είναι το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής ενέργειας του συστήματος και αυτή ισούται με την ολική ενέργεια στο μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης αφού η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Άρα θα γράψουμε:

$E_{ολ}^{max} = \frac{1}{2}k'd^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2$ όπου $k'=2k$ όπως είδαμε στο (α) ερώτημα

$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}(2k)d^2 = \cancel{\frac{1}{2}}2k\frac{d^2}{4} + \cancel{\frac{1}{2}}m\upsilon^2 \Rightarrow m\upsilon^2 = d^2\left(2k-\frac{k}{2}\right) \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{d^2}{m}\frac{3k}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\upsilon = d\sqrt{\frac{3}{2}\frac{k}{m}}}$ (2)

Όταν αφαιρέσουμε το δεξί ελατήριο, η εξίσωση (1), θα δώσει:

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ εφόσον υπάρχει μόνο ένα ελατήριο

Επίσης παραγωγίζοντας την (1) θα πάρουμε την ταχύτητα:

$\boxed{\upsilon(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t}$ (3)

Αλλά για $x(t=0) = x_0 \Rightarrow A\cos(\cancel{\omega t})^{0} + B\sin(\cancel{\omega t})^{0} = \frac{d}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{d}{2}}$ (4)

Από την (2) και (3) έχουμε:

$\upsilon(t=0) = -A\omega\cancel{\sin(0)}^{0} + B\omega\cancel{\cos(0)}^{1} = d\sqrt{\frac{3}{2}\frac{k}{m}} \Rightarrow B\cancel{\sqrt{\frac{k}{m}}} = d\sqrt{\frac{3}{2}}\cancel{\sqrt{\frac{k}{m}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{B = d\sqrt{\frac{3}{2}}}$ (5)

Επομένως από την (4) κ (5) αντικαθιστώντας στην (1) θα πάρουμε την εξίσωση κίνησης:

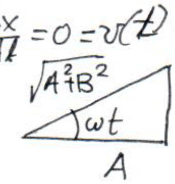
$$\boxed{x(t) = \frac{d}{2}\cos\omega t + d\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\omega t}$$

(γ) Το πλάτος της νέας ταλάντωσης μπορούμε να το βρούμε με δύο τρόπους.

(1) Από την εξίσωση της ταχύτητας $\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$ $\Rightarrow$

Ζητούμε να έχουμε μέγιστο ή ελάχιστο της θέσης δηλαδή $\frac{dx}{dt} = 0 = \upsilon(t)$

$-\omega A\sin\omega t + B\omega\cos\omega t = 0 \Rightarrow \frac{\sin\omega t}{\cos\omega t} = \tan\omega t = \frac{B}{A}$



Το πλάτος δηλαδή θα είναι: $C = \sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{\frac{d^2}{4} + d^2\frac{3}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{C = d\sqrt{\frac{7}{2}}}$ πλάτος

(2) Ένας άλλος τρόπος είναι να θεωρήσουμε μια άλλη μορφή της λύσης:

$x(t) = C\cos(\omega t+\varphi) = C\left[\cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi\right] = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

Επομένως για να είναι ίσες θα πρέπει:

$$\left.\begin{array}{l} C\cos\phi = A \\ C\sin\phi = -B \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A^2 = C^2\cos^2\phi \\ B^2 = C^2\sin^2\phi \end{array}\right\} \Rightarrow A^2 + B^2 = C^2 \Rightarrow C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

και όπως πριν

$$\boxed{C = d\sqrt{\frac{7}{2}}}$$

Άσκηση 9 [10μ]

Ένας ανελκυστήρας χωρίς οροφή ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα υ_α = 10.0m/s. Μέσα στον ανελκυστήρα στέκεται ένα παιδί σε ύψος 2.0m από το δάπεδο του ανελκυστήρα. Το παιδί εκτοξεύει κατακόρυφα προς τα πάνω μια μπάλα με ταχύτητα $\upsilon_{\mu\pi}$ = 20m/s ως προς τον ανελκυστήρα. Την στιγμή που εκτοξεύει την μπάλα, ο ανελκυστήρας βρίσκεται σε ύψος 28.0m από το έδαφος. (**α**) Ποιο το μέγιστος ύψος ως προς το έδαφος στο οποίο φθάνει η μπάλα; [**3μ**]

(**β**) Πόσος χρόνος από την στιγμή της εκτόξευσής της χρειάζεται ώστε η μπάλα να πέσει στο δάπεδο του ανελκυστήρα; [**4μ**].

(**γ**) Σε ποιο ύψος ως προς το έδαφος βρίσκεται ο ανελκυστήρας όταν η μπάλα πέφτει στο δάπεδο του ανελκυστήρα. **[3μ**]

(*Σημείωση*: Θεωρήστε αμελητέα την αντίσταση του αέρα).

(α) Θεωρούμε θετική φορά κίνησης προς τα πάνω. Έστω ότι η αρχική ταχύτητα εκτόξευσης είναι υ_0 ως προς το έδαφος.

Θα έχουμε $\upsilon_0 = \upsilon_{0\,\mu\pi/\varepsilon} = \upsilon_{0\,\mu\pi/\alpha} + \upsilon_{\alpha/\varepsilon} \Rightarrow \upsilon_0 = 10\,m/s + 20\,m/s \Rightarrow \boxed{\upsilon_0 = 30\,m/s}$

Στο μέγιστο ύψος η ταχύτητα της μπάλας θα είναι 0m/s. Εφαρμόζοντας την εξίσωση της κινηματικής: $\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2 = 2a\Delta s \Rightarrow 0 - \upsilon_0^2 = -2g\Delta s \Rightarrow \Delta s = \frac{\upsilon_0^2}{2g} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta s = h_{max} = \frac{30^2}{2\cdot 9.81} \Rightarrow h_{max} = 45.9\,m$$

Το μέγιστο ύψος της μπάλας ως προς το έδαφος θα είναι: $H_{max} = h_{max} + h_{\alpha\nu} + h_{\pi\alpha\iota\delta}$

$$\Rightarrow H_{max} = 45.9\,m + 28\,m + 2\,m \Rightarrow \boxed{H_{max} = 75.9\,m}$$

(β) Για να βρούμε το χρόνο που απαιτείται για την πτήση της μπάλας μέχρι να πέσει και πάλι στον ανελκυστήρα θα δουλέψουμε με δύο διαφορετικούς τρόπους:

<u>1ος Τρόπος</u>

Δουλεύουμε στο σύστημα αναφοράς του ανελκυστήρα, το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα και επομένως είναι αδρανειακό. Στο σύστημα αυτό, η θέση της μπάλας σε μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή είναι:

$y = y_0 + \upsilon_{\mu\pi/\alpha\nu} t - \frac{1}{2} g t^2$ όπου $\upsilon_{\mu\pi/\alpha\nu}$ η αρχική ταχύτητα της μπάλας ως προς τον ανελκυστήρα.

Όταν η μπάλα επιστρέφει στο δάπεδο του ανελκυστήρα $y_{μπ} = 0m$

Επομένως χρειάζεται να λύσουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση: $(t = t_{πτώσης})$

$$0 = 2m + 20t_{πτ} - \frac{1}{2}gt_{πτ}^2 \Rightarrow t_{πτ} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 9.81}}{9.81} \Rightarrow t_{πτ} = \begin{cases} 4.18s \\ -0.10s \end{cases}$$

Θεωρούμε δεκτή τη λύση $\boxed{t_{πτ} = 4.18s.}$ Η άλλη λύση αντιστοιχεί στο χρόνο που απαιτείται ώστε η μπάλα να καλύψει την απόσταση των 2m από το δάπεδο του ανελκυστήρα στη θέση που βρίσκεται το παιδί για να αποκτήσει ταχύτητα 20m/s ως προς τον ανελκυστήρα.

<u>2ος Τρόπος</u>

Χρησιμοποιούμε σαν σύστημα αναφοράς το έδαφος. Στην περίπτωση αυτή όμως θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση θέσης του ανελκυστήρα και την εξίσωση θέσης της μπάλας. Θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων για το οποίο τα δύο σώματα βρίσκονται στην ίδια θέση την ίδια χρονική στιγμή.

$$\left.\begin{aligned} y_{αν} &= y_{0αν} + v_{0αν}t \\ y_{μπ} &= y_{0μπ} + v_{0μπ/ε}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_{0αν} + v_{0αν}t = y_{0μπ} + v_{0μπ/ε}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Αλλά $y_{0αν} - y_{0μπ} = -2m$ και $v_{0μπ/ε} = 30m/s$

$$\Rightarrow y_{0μπ} - y_{0αν} + (v_{0μπ} - v_{0αν})t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow 2m + (30-10)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow$$

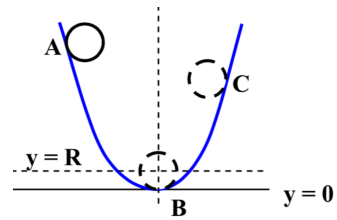
$$\Rightarrow 2m + 20m/s\, t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$ η οποία είναι η ίδια εξίσωση που βρήκαμε πριν.

(γ) Ο ανελκυστήρας κινείται τον ίδιο χρόνο που κινείται και η μπάλα.

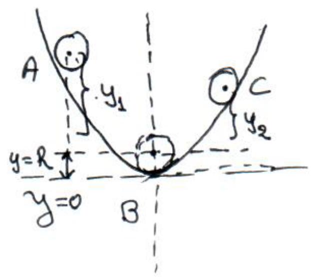
Επομένως $y_{αν}^f = y_{0αν} + v_{0αν} \cdot t_{πτ} = 28m + 10\frac{m}{s} \cdot 4.18s \Rightarrow \boxed{y_{αν}^f = 69.8m}$

Άσκηση 10 [10μ]

Ένας ομοιόμορφος και ομοιογενής κύλινδρος ακτίνας R κυλά από την κατάσταση της ηρεμίας προς το κατώτερο μέρος ενός παραβολικού σωλήνα όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η εξίσωση επιφάνειας του σωλήνα είναι $y = \frac{1}{2}Dx^2$. Ο κύλινδρος δεν ολισθαίνει από το σημείο A στο σημείο B αλλά η επιφάνεια του σωλήνα μεταξύ των σημείων B και C είναι λεία.



Σε ποιο ύψος από την πλευρά του σημείου C θα ανέβει ο κύλινδρος; Φανταστείτε ότι αντί του κυλίνδρου χρησιμοποιείτε μία ομοιόμορφη και ομοιογενή σφαίρα ακτίνας ίσης με την ακτίνα του κυλίνδρου. Σε ποιο ύψος θα ανέβει η σφαίρα αν αφαιθεί από το ίδιο ύψος A που αφέθηκε ο κύλινδρος και οι υπόλοιπες συνθήκες του προβλήματος είναι ακριβώς ίδιες;



Από τη στιγμή που δεν ξέρουμε τον συντελεστή τριβής, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τη δύναμη τριβής που δρα στον κύλινδρο. Επομένως θα πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας μεθόδους ενέργειας για να συσχετίσουμε την ενέργεια του σε διάφορα σημεία ενδιαφέροντος.

Η τριβή δρα στο τμήμα της διαδρομής από το $A \to B$. Ωστόσο είναι στατική τριβή αφού ο κύλινδρος εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση, και επομένως δεν παράγει έργο.
Στο τμήμα της διαδρομής από το B στο C δεν υπάρχει τριβή. και ο κύλινδρος ολισθαίνει πηγαίνοντας από το B στο C αλλά συνεχίζει να περιστρέφεται μια και δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές για να προκαλέσουν αλλαγή της στροφορμής του η οποία διατηρείται
Εφαρμόζουμε επομένως διατήρηση της ενέργειας σε 2 βήματα. Πρώτα από το $A \to B$ και κατόπιν από το $B \to C$.
Θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το σημείο B (κορυφή της παραβολής) όπου $y = R$. Θα έχουμε επομένως $\boxed{E_A = mgy_1}$ (1)
Όταν ο κύλινδρος φθάνει στο σημείο B έχει αποκτήσει κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς και κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής:

$$E_{κιν}^{B} = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{κυλ}\omega_{κ}^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{κυλ}\frac{\upsilon_{κυλ}^2}{R^2} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{R^2}\right)\upsilon_{κυλ}^2 \quad (2)$$

Πηγαίνοντας από το $B \rightarrow C$ δεν υπάρχει τριβή, και επομένως ο κύλινδρος δεν μπορεί να κυλίσει. Ανεβαίνει στο C περιστρεφόμενος γύρω από το κέντρο μάζας του. Στο σημείο C η γραμμική ταχύτητά του μηδενίζεται αλλά εξακολουθεί να περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω.

Κατά τη διαδρομή BC η κινητική ενέργεια περιστροφής παραμένει σταθερή και επομένως φθάνοντας στο σημείο C η ενέργεια του κυλίνδρου είναι:

$$\boxed{E_C = mgy_2 + \frac{1}{2} I\omega^2} \quad (3)$$

Εφαρμόζουμε διατήρηση ενέργειας

$$\left.\begin{array}{l} E_A = E_B \\ E_B = E_C \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} mgy_1 = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \\ \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = mgy_2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \end{array}$$

Από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε: $mgy_1 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{R^2}\right) v_{CM}^2 \Rightarrow \boxed{v_{CM}^2 = \frac{2mgy_1}{m + I/R^2}}$ (4)

Από την δεύτερη εξίσωση παίρνουμε: $\cancel{m}gy_2 + \cancel{\frac{1}{2} I\omega^2} = \frac{1}{2}\cancel{m} v_{CM}^2 + \cancel{\frac{1}{2} I\omega^2} \Rightarrow \boxed{y_2 = \frac{v_{CM}^2}{2g}}$ (5)

Από την (4) κ (5) θα πάρουμε: $y_2 = \frac{1}{\cancel{2g}} \frac{\cancel{2g} m y_1}{m + I/R^2} \Rightarrow \boxed{y_2 = y_1 \frac{1}{1 + I/mR^2}}$ (6)

Αλλά η ροπή αδράνειας του σώματος έχει τη μορφή: $I = kmR^2$ όπου k = μια σταθερά που εξαρτάται από το σχήμα του σώματος και αν είναι συμπαγές ή όχι. Αντικαθιστώντας επομένως θα πάρουμε:

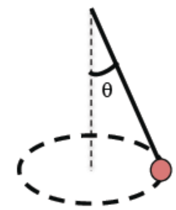
$$y_2 = y_1 \frac{1}{1 + k\cancel{mR^2}/\cancel{mR^2}} \Rightarrow \boxed{y_2 = y_1 \frac{1}{1+k}}$$

Για τον κύλινδρο $k = \frac{1}{2}$ οπότε θα πάρουμε: $\boxed{y_2 = y_1 \frac{2}{3}}$

(b) Για την σφαίρα $k = \frac{2}{5}$ οπότε θα έχουμε: $y_2 = y_1 \frac{1}{1 + \frac{2}{5}} \Rightarrow \boxed{y_2 = y_1 \frac{5}{7}}$

Η σφαίρα δηλαδή θα φθάσει σε μεγαλύτερο ύψος.

Άσκηση 11 [10μ]



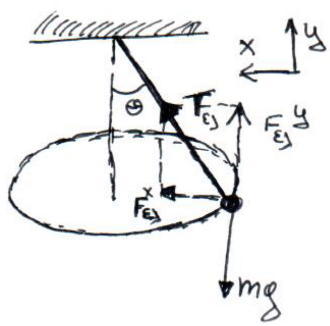
Υποθέστε ότι έχετε ένα <u>ελαστικό</u> νήμα μήκους l = 30cm στο ένα άκρο του οποίου είναι δεμένη μία μικρή σφαίρα. Το άλλο άκρο του νήματος είναι στερεωμένο σε κάποιο μηχανισμό ο οποίος μπορεί να το περιστρέφει. Αρχικά το σύστημα νήμα-σφαίρα είναι κατακόρυφο και δεν περιστρέφεται. Στη θέση αυτή το νήμα επιμηκύνεται κατά 2.0cm ως προς το φυσικό του μήκος. Ο μηχανισμός τίθεται σε λειτουργία και η σφαίρα αρχίζει να κινείται σε σταθερό οριζόντιο κύκλο ενώ το νήμα σχηματίζει γωνία 60^o με την κατακόρυφο διεύθυνση. Η διάταξη αυτή συμπεριφέρεται σαν κωνικό εκκρεμές.

(**α**) Να βρεθεί η περίοδος περιστροφής της σφαίρας. [**6μ**]

(**β**) Υποθέστε τώρα ότι η περίοδος περιστροφής γίνεται μισή αυτής που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο σ΄αυτή την περίπτωση. [**1μ**]

(**γ**) Ποια είναι η ελάχιστη και ποια η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα με την οποία μπορεί να κινηθεί η σφαίρα ώστε το σύστημα να συνεχίσει να συμπεριφέρεται σαν κωνικό εκκρεμές; [**2μ**]

(**δ**) Σχολιάστε πως αλλάζουν τα χαρακτηριστικά της κίνησης καθώς η γωνιακή ταχύτητα τείνει στην μέγιστη τιμή της. [**1μ**]



Εφόσον το νήμα είναι ελαστικό υπακούει στο νόμο του Hooke: $F_{ελ} = -k\Delta l$ όπου Δl η επιμήκυνση του νήματος καθώς περιστρέφεται

Στη γωνία περιστροφής $\Theta = 60^o$, το μήκος του νήματος θα είναι l (φυσικό μήκος) και μία επιπλέον επιμήκυνση ίση με Δl_2.

Επομένως η δύναμη που θα ασκείται στο σώμα θα είναι: $\boxed{F_{ελ} = -k\Delta l_2}$ (1)

Για αρνητική επιμήκυνση θα έχουμε επομένως: $F_{ελ} = -k(-\Delta l_2) \Rightarrow F_{ελ} = +k\Delta l_2$

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton στο σώμα:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_x = F_{ελ}^x = F_{ελ}\cdot\sin\Theta \Rightarrow \Sigma F_x = k\Delta l_2\sin\Theta \Rightarrow ma = k\Delta l_2\sin\Theta \\ \text{αλλά η } \Sigma F_x \text{ παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης: } \Sigma F_x = m\frac{v^2}{R}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\frac{v^2}{R} = k\Delta l_2\sin\Theta \Rightarrow \boxed{k\Delta l_2\sin\Theta = m\omega^2 R} \quad (2)$$

$$\Sigma F_y = F_{ελ}^y - mg = 0 \Rightarrow \boxed{k\Delta l_2\cos\Theta = mg} \quad (3)$$

Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς θα είναι: $\boxed{R=(l+\Delta l_2)\cdot\sin\Theta}$ (4)

Από την (2) κ (4) $\Rightarrow$ $k\Delta l_2 \cancel{\sin\Theta} = m\omega^2(l+\Delta l_2)\cancel{\sin\Theta} \Rightarrow \boxed{k\Delta l_2 = m\omega^2(l+\Delta l_2)}$ (5)

Αντικατάσταση της (5) στην (3) θα δώσει: $m\omega^2(l+\Delta l_2)\cos\Theta = mg \Rightarrow$

$$\Rightarrow m\omega^2(l+\Delta l_2) = mg/\cos\Theta \Rightarrow \omega^2 = \cancel{m}g/[\cancel{m}(l+\Delta l_2)\cos\Theta] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = g/[(l+\Delta l_2)\cos\Theta]} \qquad (6)$$

Από την (1) κ (3) έχουμε: $k\Delta l_2 = \dfrac{mg}{\cos\Theta} \Rightarrow \boxed{\Delta l_2 = \dfrac{mg}{k\cos\Theta}}$ (7)

Αντικαθιστούμε την (7) στην (6) και έχουμε:

$$\omega^2 = \frac{g}{l\cos\Theta + \Delta l_2\cos\Theta} = \frac{g}{l\cos\Theta + \frac{mg}{k\cancel{\cos\Theta}}\cancel{\cos\Theta}} \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{g}{l\cos\Theta + \frac{m}{k}g}} \quad (8)$$

Όταν το σύστημα δεν περιστρέφεται τότε ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση και η επιμήκυνση του νήματος είναι: $k\Delta l_1 = mg \Rightarrow \boxed{\Delta l_1 = \dfrac{mg}{k}}$ (9)

Αντικατάσταση της (9) στην (8) θα δώσει τελικά:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{g}{l\cos\Theta + \Delta l_1}} \qquad (10).$$

(α) Από την εξίσωση $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ και την εξίσωση (10) έχουμε: $\dfrac{4\pi^2}{T^2} = \dfrac{g}{l\cos\Theta+\Delta l_1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{T^2 = \frac{4\pi^2(l\cos\Theta+\Delta l_1)}{g}} \; (11) \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2(0.3\cos(60^\circ)+0.02)}{9.81} = \frac{4\pi^2 0.17}{9.81} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^2 = 0.6841\, s^2 \Rightarrow \boxed{T = 0.827 s}$$

(β) Αν η περίοδος γίνει η μισή της προηγούμενης $T_2 = T_1/2 \overset{(11)}{\Rightarrow} \dfrac{T_1^2}{4} = \dfrac{4\pi^2(l\cos\Theta_2+\Delta l_1)}{g}$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{l\cos\Theta_2 + \Delta l_1}{l\cos\Theta_1 + \Delta l_1} \Rightarrow l(\cos\Theta_1 - 4\cos\Theta_2) = 3\Delta l_1 \Rightarrow \qquad T_1^2 = \frac{4\pi^2(l\cos\Theta_1+\Delta l_1)}{g}$$

$$\Rightarrow \cos\Theta_2 = \frac{l\cos\Theta_1 - 3\Delta l_1}{4l} \Rightarrow \cos\Theta_2 = \frac{0.3\cdot\cos(60^\circ) - 3\cdot 0.02}{4\cdot 0.3} = 0.075 \Rightarrow$$

$$\boxed{\Theta_2 = 85.7^\circ}$$

(γ) Εξετάζουμε και πάλι την εξίσωση (10) όπου $\omega^2 = \frac{g}{l\cos\Theta + \Delta l_1}$.
Η ελάχιστη τιμή της γωνιακής ταχύτητας επιτυγχάνεται όταν ο παρονομαστής γίνεται μέγιστος που συμβαίνει όταν $\Theta = 0^\circ \Rightarrow \cos\Theta = 1$.
Η μέγιστη τιμή επιτυγχάνεται όταν ο παρονομαστής γίνεται ελάχιστος που συμβαίνει όταν $\cos\Theta = 0 \Rightarrow \Theta = 90^\circ$

Οι δύο τιμές της γωνιακής ταχύτητας θα είναι:

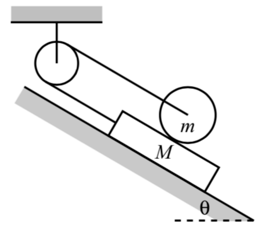
$$\omega^2_{min} = \frac{g}{l + \Delta l_1} \overset{(9)}{\Longrightarrow} \omega^2_{min} = \frac{g}{l + \frac{mg}{k}} \quad \text{για } \Theta = 0^\circ$$

$$\omega^2_{max} = \frac{g}{\Delta l_1} \overset{(9)}{\Longrightarrow} \omega^2_{max} = \frac{\cancel{g}}{\frac{m\cancel{g}}{k}} \Rightarrow \omega^2_{max} = \frac{k}{m} \quad \text{για } \Theta = 90^\circ$$

(δ) Από την εξίσωση (7) $\Delta l_2 = \frac{mg}{k\cos\Theta}$ παρατηρούμε ότι όταν η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής τείνει στην μέγιστη τιμή της, το σώμα περιστρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο, όπου $\Theta = 90^\circ$. Στην περίπτωση αυτή, το νήμα τείνει να αποκτήσει άπειρη επιμήκυνση γιατί $\Delta l_2 = \frac{mg}{k\cos\Theta} \to \infty$
Στην περίπτωση αυτή, η γωνιακή ταχύτητα συμπίπτει με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος $\frac{k}{m}$ και έχουμε συντονισμό,

Άσκηση 12 [10μ]

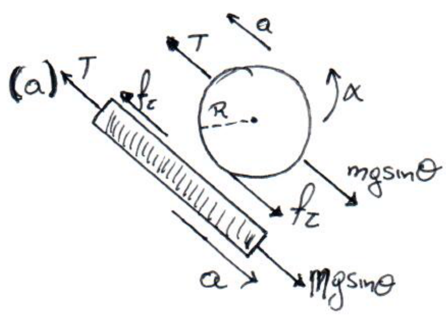
Μια ρόδα μάζας m (και ροπής αδράνειας $I = mR^2/2$) βρίσκεται πάνω σε μία σανίδα μάζας M. Υποθέστε ότι $M >> m$. Η σανίδα βρίσκεται πάνω σε λεία κεκλιμένη επιφάνεια γωνίας κλίσης θ με την οριζόντια διεύθυνση. Ένα αβαρές νήμα περνά από λεία και αβαρή τροχαλία και έχει τα άκρα του δεμένα στη σανίδα και στον άξονα της ρόδας που περνά από το κέντρο της ρόδας και είναι κάθετος στην επιφάνειά της. Θεωρήστε ότι η ρόδα εκτελεί κύληση χωρίς ολίσθηση πάνω στη σανίδα και ότι τα δύο τμήματα του νήματος από τη τροχαλία στα δύο σώματα, είναι και τα δύο παράλληλα προς την κεκλιμένη επιφάνεια.



(α) Να κάνετε το διάγραμμα του ελεύθερου σώματος για τη σανίδα και τη ρόδα (χρειάζεται να δείξετε μόνο τις δυνάμεις παράλληλες προς τη κεκλιμένη επιφάνεια). [**3μ**]

(β) Ποια είναι η επιτάχυνση της σανίδας; [**7μ**]

(α)



Κατά μήκος της κεκλιμένης επιφάνειας, κάθε σώμα δέχεται την επίδραση της τάσης του νήματος, της δύναμης της τριβής μεταξύ τους, και της συνιστώσας του βάρους παράλληλα προς το κεκλιμένο επίπεδο.

(β) Τα δύο σώματα συνδέονται με αβαρές νήμα το οποίο περνά από λεία και αβαρή τροχαλίας Τα δύο σώματα θα έχουν την ίδια μέτρου γραμμική επιτάχυνση, "α", λόγω "διατήρησης του νήματος". Θεωρούμε τη φορά της επιτάχυνσης της σανίδας προς τα κάτω και επομένως η ρόδα θα κινηθεί προς τα πάνω.

Έστω ακόμα α η γωνιακή επιτάχυνση της ρόδας, θεωρώντας τη φορά αντίθετης των δεικτών του ρολογιού ως θετική.

Καθώς η σανίδα κινείται κατά μια απόσταση d προς τα κάτω, η ρόδα κινείται κατά μια απόσταση d προς τα πάνω, και επομένως η μετατόπιση της ρόδας ως προς τη σανίδα είναι 2d. Αυτό σημαίνει ότι το τόξο που διαγράφει η ρόδα ως προς τη σανίδα θα είναι $s = 2d = R\Theta \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}s = \frac{d^2}{dt^2}(R\Theta) \Rightarrow R\ddot{\Theta} = 2a \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2}{R}a}$

Γράφουμε τις εξισώσεις του 2ου νόμου του Newton για τη μεταφορική και περιστροφική κίνηση:

Για τη σανίδα:

$$F = ma \Rightarrow Mg\sin\Theta - T - f = Ma$$

Για τη ρόδα:

$$F = ma \Rightarrow -mg\sin\Theta + T - f = ma$$

$$\overset{+}{\Rightarrow} -2f + g\sin\Theta(M-m) = (M+m)a$$

Περιστροφή ρόδας - Ροπές ως προς το κέντρο

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \Rightarrow f\cdot\cancel{R} = \frac{1}{2}mR^{\cancel{2}}\alpha \Rightarrow f = \frac{1}{\cancel{2}}m\cancel{R}\frac{\cancel{2}}{\cancel{R}}a \Rightarrow f = ma$$

$$\Rightarrow -2ma + g\sin\Theta(M-m) = (M+m)a \Rightarrow g\sin\Theta(M-m) = (M+3m)a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{M-m}{M+3m}g\sin\Theta}$$

Β' τρόπος - Διατήρηση Ενέργειας

Αν η σανίδα μετακινηθεί προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου κατά μία απόσταση d και η ρόδα κινηθεί προς τα πάνω μία απόσταση d, τότε η μεταβολή στη δυναμική ενέργεια του συστήματος θα είναι:

$$\Delta U_g = (M-m)g\,d\sin\Theta \Rightarrow (M-m)g\,d\sin\Theta = \Delta E_k = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

παράγοντας 2 όπως για την επιτάχυνση

$$\Rightarrow (M-m)g\,d\sin\Theta = \frac{1}{2}(M+m)v^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{2v}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mv^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (M-m)g\,d\sin\Theta = \frac{1}{2}(M+3m)v^2 \Rightarrow v^2 = 2\frac{(M-m)g\,d\sin\Theta}{(M+3m)} \Rightarrow v^2 = 2\frac{(M-m)g\sin\Theta}{M+3m}d$$

Αυτό το τελευταίο αποτέλεσμα είναι της ίδιας μορφής της εξίσωσης για κίνηση με σταθερή επιτάχυνση: $v_f^2 - \cancel{v_i^2} = 2a\Delta x \Rightarrow v_f^2 = 2a\Delta x$

Επομένως συγκρίνοντας τις δύο εξισώσεις θα έχουμε: $\boxed{a = \frac{(M-m)}{(M+3m)}g\sin\Theta}$