Σημαντικά ψηφία

Κάθε πείραμα όπως είδαμε περιέχει ένα βαθμό αβεβαιότητας.
Ας υποθέσουμε ότι τρεις παρατηρητές μετρούν το μήκος ενός φύλου χαρτιού με ένα χάρακα με μικρότερη υποδιαίρεση το mm και βρίσκουν 27.92cm, 27.96cm και 27.90cm

Παρατηρήστε ότι όλοι συμφωνούν στα τρία πρώτα ψηφία. Προφανώς το 4^{ο} ψηφίο (το οποίο υπολογίστηκε από τον καθένα) είναι ένα αβέβαιο ψηφίο. (Ακόμα και το 3^{ο} ψηφίο μπορεί να είναι αβέβαιο ανάλογα με τις συνθήκες)

Ορισμός

Τα ψηφία που θεωρούνται σωστά και το πρώτο αβέβαιο ψηφίο ονομάζονται σημαντικά ψηφία

Ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων σε μια μέτρηση εξαρτάται από την ακρίβεια του οργάνου της μέτρησης και σε ένα βαθμό από την ικανότητα του παρατηρητή και θα πρέπει να προσπαθούμε να πάρουμε τόσα ψηφία όσα μας επιτρέπει το όργανο μέτρησης.

Ανάλογα θα πρέπει να καταγράφουμε μετρήσεις μόνο με τα σωστά σημαντικά ψηφία και όχι με περισσότερα ψηφία που υποδηλώνουν μεγαλύτερη ακρίβεια από αυτή που καθορίζεται από το όργανο ή τη μέθοδο μέτρησης

Σημαντικά ψηφία

Για παράδειγμα έστω ότι μετρήσαμε τη μάζα ενός σώματος να είναι 12.743509 Kgr και προσδιορίσαμε την αβεβαιότητα της μέτρησης σαν ± 0.3.

Ο αριθμός 12.743509 αποτελείται από 8 σημαντικά ψηφία ενώ η αβεβαιότητα μας λέει ότι τα 5 τελευταία ψηφία (43509) δεν έχουν καμιά σημαντική βαρύτητα εφόσον αντιπροσωπεύουν ποσότητα μικρότερη από την αβεβαιότητα.
Τα ψηφία αυτά ονομάζονται μή σημαντικά.

Οι υπολογιστικές μηχανές δείχνουν μη σημαντικά ψηφία και μπορούμε να πάρουμε μη σημαντικά ψηφία απλά και μόνο από απλές υπολογιστικές πράξεις.

Για παράδειγμα έστω ότι μετρήσαμε το μήκος μιας ράβδου και το βρήκαμε 12 ίντσες. Μια ίντσα είναι 2.54cm και επομένως το μήκος της ράβδου θα είναι l = 12 x 2.54 = 30.48cm. Ξεκινώντας δηλαδή από μια μέτρηση με 2 σημαντικά ψηφία (12) καταλήξαμε στο προσδιορισμό του μήκους με 4 σημαντικά ψηφία (μεγαλύτερη ακρίβεια) που δεν μπορεί να ισχύει. Επομένως θα έπρεπε να γράψουμε ότι το ύψος είναι 30.cm και όχι 30.48cm

Σημαντικά ψηφία - Κανόνες γραφής - μέτρησης

(1α) Γράφουμε τις τιμές των φυσικών μεγεθών ώστε το τελευταίο μετρούμενο ψηφίο πέφτει στα δεξιά της υποδιαστολής. Αυτό μπορούμε να το επιτύχουμε είτε χρησιμοποιώντας επιστημονική σήμανση (π.χ. $3.45 = 0.345 \times 10^1$) ή χρησιμοποιούμε μεγαλύτερες μονάδες.

(1β) Το ψηφίο που αντιπροσωπεύει την μικρότερη μετρούμενη υποδιαίρεση κλίμακος πρέπει να γραφεί ακριβώς ακόμα και αν είναι μηδέν (π.χ. 3.430 m με κλίμακα mm)

(1γ) Στρογγυλοποίηση. Όταν διώχνουμε τα μη σημαντικά ψηφία συνήθως αν το πρώτο μη σημαντικό ψηφίο είναι ≥5 τότε το στρογγυλοποιούμε το τελευταίο σημαντικό ψηφίο προς τα πάνω ένω αν είναι το πρώτο σημαντικό ψηφίο < 5 η στρογγυλοποίηση γίνεται προς τα κάτω. (π.χ. 4.7664 -> 4.77 ενώ 4.7644->4.76

(2) Αν το πρώτο μη σημαντικό ψηφίο είναι 5 τότε μπορείτε να το στρογγυλοποιήσετε όπως επιθυμήτε προς τα πάνω ή κάτω αλλά θα πρέπει να χρησιμοποείται πάντα τον ίδιο τρόπο

(3) Ακέραιοι αριθμοί (1…9) είναι πάντοτε σημαντικοί.

(4) Ψηφία που βρίσκονται στα δεξιά της υποδιαστολής είναι σημαντικά.
π.χ. 12.456 έχει 5 σημαντικά ψηφία.
Ο αριθμός 0.45932 έχει 5 σημαντικά ψηφία.

Σημαντικά ψηφία - κανόνες μέτρησης

(5) Προσοχή χρειάζεται στα μηδενικά:

(α) Μηδενικά αμέσως μετά την υποδιαστολή δεν υπολογίζονται στα σημαντικά ψηφία αν μετά ακολουθεί στα δεξιά τους κάποιος ακέραιος και δεν υπάρχει ακέραιος στα αριστερά της υποδιαστολή

Ο αριθμός 0.00003 έχει 1 σημαντικό ψηφίο

Ο αριθμός 1.0003 έχει 5 σημαντικά ψηφία

(β) Μηδενικά που ακολουθούν την υποδιαστολή και δεν έχουν κάποιο ψηφίο στα δεξιά τους θεωρούνται σημαντικά ψηφία

Ο αριθμός 234.00 έχει 5 σημαντικά ψηφία

(γ) Μηδενικά που ακολουθούν ακέραιους αριθμός και δεν έχουν υποδιαστολή στα δεξιά τους δεν θεωρούνται σημαντικά

Ο αριθμός 11900 έχει 3 σημαντικά ψηφία

Σημαντικά ψηφία - Πράξεις

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των πειραματικών δεδομένων είναι ότι τα σφάλματα συνδυάζονται στους υπολογισμούς και παράγουν νέα σφάλματα στα υπολογιζόμενα αποτελέσματα

Επομένως υπολογισμοί μεταξύ αριθμών με διαφορετικά σημαντικά ψηφία οδηγούν σε αποτελέσματα με διαφορετικά σημαντικά σημεία

Οι κανόνες είναι:

Για πολλαπλασιασμό και διαίρεση: Τα αποτελέσματα πολ/σμού και διαίρεσης στρογγυλοποιούνται στο ίδιο αριθμό σημαντικών ψηφίων με αυτό του αριθμού με την χειρότερη ακρίβεια

Για πρόσθεση και αφαίρεση: Βρίσκουμε τον αριθμό του οποίου το τελευταίο σημαντικό ψηφίο καταλαμβάνει τη θέση πιο κοντά στην υποδιαστολή. Αυτή είναι η θέση του τελευταίου σημαντικού ψηφίου του αποτελέσματος

Παράδειγμα πολ/σμου

(το σύμβολο - πάνω από τον αριθμό δηλώνει Το τελευταίο σημαντικό ψηφίο)

$$
\begin{array}{r}
39.5\overline{4} \\
\times\ 2.8\overline{6} \\
\hline
\overline{23724} \\
3163\overline{2} \\
790\overline{8} \\
\hline
1\overline{13.9844}
\end{array}
$$

Πολ/σμός με το αβέβαιο ψηφίο δίνει αβέβαιο αποτέλεσμα

Το τελικό αποτέλεσμα έχει 2 βέβαια ψηφία. Το ψηφίο 3 είναι αβέβαιο και τα υπόλοιπα δεν έχουν σημασία

Το αποτέλεσμα θα είναι 114

Παράδειγμα πρόσθεσης

$$
\begin{array}{r}
0.5286\overline{5} \\
+\ 39.4\overline{2} \\
+\ 15.\overline{1} \\
+\ 0.0289\overline{6} \\
\hline
55.\overline{07761}
\end{array}
$$

Το αποτέλεσμα επομένως θα είναι 55.1

Διάδοση σφαλμάτων - Στατιστικά σφάλματα

Χρησιμοποιώντας τους κανόνες για πράξεις μεταξύ μετρούμενων τιμών με διαφορετικό αριθμό σημαντικών ψηφίων μπορούμε να υπολογήσουμε την αβεβαιότητα ενός αποτελέσματος.

Υπάρχουν ωστόσο καλύτεροι και περισσότεροι ακριβείς τρόποι

Θεωρήστε ότι υπολογίζετε μια ποσότητα *Q* η οποία εξαρτάται από 3 μετρούμενα μεγέθη *x, y, z*. Η *Q* είναι επομένως συνάρτηση 3 μεταβλητών

$$Q = f(x, y, z)$$

Κάθε μια από τα μετρούμενα μεγέθη συνοδεύονται με κάποια αβεβαιότητα $x \pm \Delta x$ $(y \pm \Delta y)$ $(z \pm \Delta z)$. Η αβεβαιότητα στο αποτέλεσμα *Q* δίνεται από

$$\Delta Q = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right)^2\right)}$$

Η έκφραση $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ παριστάνει τη μερική παράγωγο της *f* ως προς τη μεταβλητή *x*

Είναι εύκολο να υπολογισθεί σαν η παράγωγος της συνάρτησης ως προς την εκάστοτε μεταβλητή, κρατώντας τα *y* και *z* σταθερά (άρα η παράγωγός τους ως προς *x* είναι 0).

Προσοχή: Η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για ανεξάρτητες μεταβλητές
οι αβεβαιότητες των οποίων είναι τυχαίες (στατιστικές).
Η κατανομή των μεταβλητών περιγράφεται από τη Gaussian κατανομή

Παράδειγμα υπολογισμού σφάλματος

Έστω ότι η συναρτησιακή εξάρτηση της Q από τα *x*, *y* και *z* δίνεται από τη σχέση

$$Q = f(x,y,z) = k\frac{xy}{z^2}$$

Όπου k σταθερά με k = 0.3872

Υποθέτουμε ακόμα ότι

$$x = 21.7 \pm 0.2$$
$$y = 83.9 \pm 0.3$$
$$z = 2.51 \pm 0.04$$

Υπολογίζουμε πρώτα τη τιμή της Q :

$$Q = k\frac{xy}{z^2} = 0.3872\frac{21.2\times 83.9}{2.51^2} = 111.8947217$$

(Από σημαντικά ψηφία θα έπρεπε να γράψουμε ότι Q = 112±5)

Θα κάνουμε στρογγυλοποίηση αφού πρώτα υπολογήσουμε την αβεβαιότητα

Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = k\frac{y}{z^2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = k\frac{x}{z^2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = -2k\frac{xy}{z^3}$$

Και χρησιμοποιώντας την εξίσωση της αβεβαιότητας έχουμε:

$$\Delta Q = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right)^2\right)} \Rightarrow \Delta Q = \sqrt{\left(\left(k\frac{y}{z^2}\Delta x\right)^2 + \left(k\frac{x}{z^2}\Delta y\right)^2 + \left(-2k\frac{xy}{z^3}\Delta z\right)^2\right)}$$

$$\Rightarrow \Delta Q = \sqrt{k\left(\left(\frac{83.9}{2.51^2}0.2\right)^2 + \left(\frac{21.7}{2.51^2}0.3\right)^2 + \left(-2\frac{83.9\times 21.7}{2.51^3}0.04\right)^2\right)} = \sqrt{(1.0313)^2 + (0.4001)^2 + (-3.5664)^2} \Rightarrow \Delta Q = 3.734$$

Επομένως *ΔQ* = 4 (1 σημαντικό ψηφίο) . Το τελικό αποτέλεσμα είναι: $Q = 112 \pm 4$

Διάδοση σφαλμάτων - Πράξεις

Σαν εφαρμογές του ορισμού της αβεβαιότητας μπορούμε να έχουμε:

(1) $Q = f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2$ με α_1 και α_2 σταθερές

Από το γενικό τύπο της απόκλισης θα έχουμε:

$$\Delta Q = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2} = \sqrt{(a_1 \Delta x_1)^2 + (a_2 \Delta x_2)^2}$$

Για $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ έχουμε: $\Delta Q = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}$

Για άθροισμα ή διαφορά η απόκλιση είναι το άθροισμα των τετράγωνων

(2) $Q = f(x_1, x_2) = a_1 x_1 \times a_2 x_2$ με α_1 και α_2 σταθερές

$$\Delta Q = \sqrt{(a_1 a_2 x_2 \Delta x_1)^2 + (a_1 a_2 x_1 \Delta x_2)^2} \Rightarrow \Delta Q = a_1 a_2 \sqrt{(x_2 \Delta x_1)^2 + (x_1 \Delta x_2)^2}$$

Αν προσπαθήσουμε να βρούμε το σχετικό σφάλμα $\frac{\Delta Q}{Q}$ τότε παίρνουμε:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{a_1 a_2}{a_1 a_2 x_1 x_2}\sqrt{x_2^2 \Delta x_1^2 + x_1^2 \Delta x_2^2} \Rightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = \sqrt{\frac{\Delta x_1^2}{x_1^2} + \frac{\Delta x_2^2}{x_2^2}}$$

(3) $Q = f(x_1, x_2) = a_1 x_1 / a_2 x_2$ με α_1 και α_2 σταθερές

$$\Delta Q = \sqrt{\left(\frac{a_1}{a_2}\frac{\Delta x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{a_2}\frac{x_1}{x_2^2}\Delta x_2\right)^2} \Rightarrow \Delta Q = \frac{a_1}{a_2}\sqrt{\frac{\Delta x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_1^2 \Delta x_2^2}{x_2^4}}$$

με σχετικό σφάλμα

$$\Rightarrow \frac{\Delta Q}{Q} = \sqrt{\frac{\Delta x_1^2}{x_1^2} + \frac{\Delta x_2^2}{x_2^2}}$$

Διάδοση σφαλμάτων - πράξεις

(4) $Q = f(x) = ax^m$ με α και m σταθερές

$$\Delta Q = \sqrt{\left(amx^{(m-1)}\Delta x\right)^2} \Rightarrow \Delta Q = amx^{(m-1)}\Delta x$$ με σχετικό σφάλμα $$\frac{\Delta Q}{Q} = m\frac{\Delta x}{x}$$

(5) $Q = f(x) = ae^{mx}$ με α και m σταθερές

$$\Delta Q = \sqrt{\left(ame^{mx}\Delta x\right)^2} \Rightarrow \Delta Q = ame^{mx}\Delta x$$ με σχετικό σφάλμα $$\frac{\Delta Q}{Q} = m\Delta x$$

(6) $Q = f(x) = a\ln(mx)$ με α και m σταθερές

$$\Delta Q = \sqrt{\left(am\frac{\Delta x}{x}\right)^2} \Rightarrow \Delta Q = am\frac{\Delta x}{x}$$

Προσοχή: Ένα συνηθισμένο λάθος στον υπολογισμό σφαλμάτων προέρχεται από πράξεις μεταξύ των μεταβλητών που ορίζουν μια ποσότητα

Παράδειγμα: Έστω ότι μετράτε 2 αντιστάσεις, R_1 και R_2 οι οποίες είναι συνδεδεμένες παράλληλα και έχουν αβεβαιότητα ΔR_1 και ΔR_2. Θέλετε την αβεβαιότητα της ολικής αντίστασης R_{tot}.

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{tot} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Αν προσπαθήσετε να εφαρμόσετε τους παραπάνω κανόνες ξεχωριστά για τον αριθμητή και παρονομαστή, η αβεβαιότητα της R_{tot} θα είναι λάθος αφού αριθμητής και παρονομαστής δεν είναι ανεξάρτητοι.

Μετάδοση συστηματικών σφαλμάτων

Τα σφάλματα αυτά έχουν πάντοτε το ίδιο πρόσημο στην απόκλιση από την πραγματική τιμή

Έστω ότι μετρούμε 2 ποσότητες x και y με σφάλμα Δx και Δy των οποίων το πρόσημο είναι προσδιορισμένο.

Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης των x και y δίνει μια ποσότητα R :

$$R + \Delta R = (x + \Delta x) + (y + \Delta y) = (x + y) + (\Delta x + \Delta y)$$

Το σφάλμα είναι $\Delta R = \Delta x + \Delta y$

Το συστηματικό σφάλμα του αθροίσματος μεταβλητών που περιέχουν συστηματικό σφάλμα είναι το άθροισμα των επιμέρους σφαλμάτων

Το συστηματικό σφάλμα της διαφοράς μεταβλητών που περιέχουν συστηματικό σφάλμα είναι η διαφορά των επιμέρους σφαλμάτων

Το σφάλμα του γινομένου 2 μεταβλητών με επιμέρους συστηματικά σφάλματα

$$R + \Delta R = (x + \Delta x) \times (y + \Delta y) = xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$$

Αν θεωρήσουμε τα σχετικά σφάλματα και υποθέσουμε ότι Δx/x και Δy/y είναι μικρές ποσότητες, τότε και ΔxΔy/xy θα είναι πολύ μικρή ποσότητα και μπορούμε να την αγνοήσουμε:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y}{xy} \approx \frac{y\Delta x + x\Delta y}{xy} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

Μετάδοση συστηματικών σφαλμάτων

Άν είχαμε τη διαίρεση δύο ποσοτήτων x και y

$$\frac{\Delta R}{R}=\frac{\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}-\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}}=\frac{\frac{(x+\Delta x)y}{(y+\Delta y)y}-\frac{x(y+\Delta y)}{y(y+\Delta y)}}{\frac{x}{y}}\Rightarrow\frac{\Delta R}{R}=\frac{(x+\Delta x)y-x(y+\Delta y)}{x(y+\Delta y)}\approx\frac{y\Delta x-x\Delta y}{xy}=\frac{\Delta x}{x}-\frac{\Delta y}{y}$$

Επομένως όταν δύο ποσότητες διαιρούνται το σχετικό συστηματικό σφάλμα του αποτελέσματος δίνεται από το σχετικό συστηματικό σφάλμα του αριθμητή μείον το σχετικό συστηματικό σφάλμα του παρονομαστή

Ανάλογες σχέσεις ισχύουν και για υπολογιζόμενες ποσότητες που περιέχουν εκθέτες. Όταν μια ποσότητα x είναι υψωμένη σε δύναμη P τότε το σχετικό συστηματικό σφάλμα του αποτελέσματος είναι το σχετικό συστηματικό σφάλμα του x πολ/σμένο με P. Αυτό ισχύει και για αρνητικούς εκθέτες

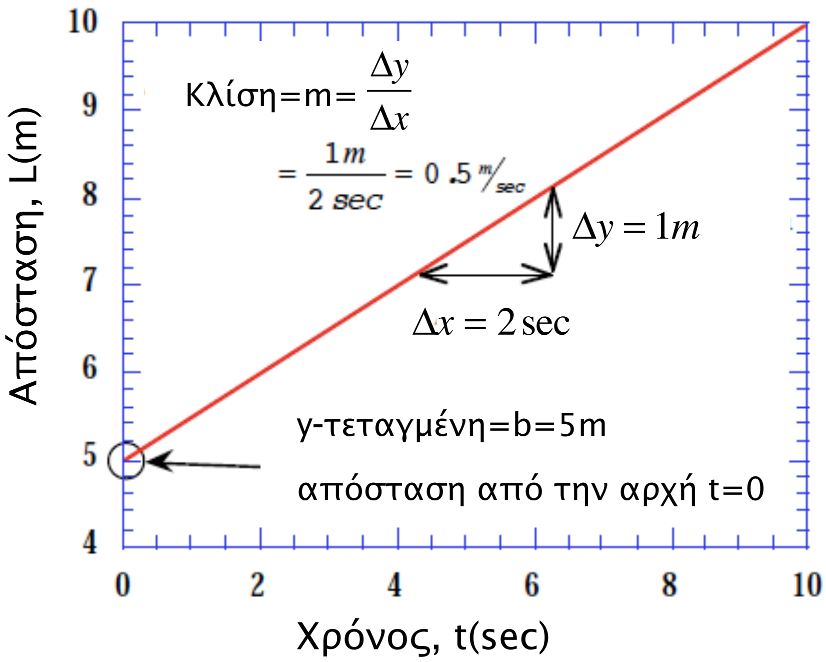
Προσαρμογή σε ευθεία γραμμή

Μια από τις περισσότερες χρήσιμες τεχνικές είναι αυτή της περιγραφής των πειραματικών δεδομένων με μια ευθεία γραμμή.

Υποθέστε ότι έχετε μια σειρά μετρήσεων σε μια γραφική παράσταση y ως προς x και από τη γραφική παράσταση βλέπουμε ότι αντιστοιχεί σε μια ευθεία γραμμή

Για την περιγραφή αυτής της ευθείας χρειάζονται 2 παράμετροι: η κλίση της, m, και η τετμημένη της ευθείας με τον άξονα των y, b

Τη στιγμή που θα προσδιορίσουμε τις δύο αυτές παραμέτρους μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή y που αντιστοιχεί σε οποιαδήποτε τιμή του x.



$$y = ax + b$$

Προσέξτε ότι είναι ακριβώς η κλίση και η τεταγμένη b που παίζουν σημαντικό ρόλο στη θεωρία

Η κλίση είναι η ταχύτητα ενώ η τεταγμένη μας δίνει την αρχική θέση του σώματος

Επομένως το πρόβλημά μας ανάγεται στην εύρεση των παραμέτρων της ευθείας καθώς και των αβεβαιοτήτων που συνοδεύουν τις εκτιμήσεις αυτών

Εύρεση της ευθείας

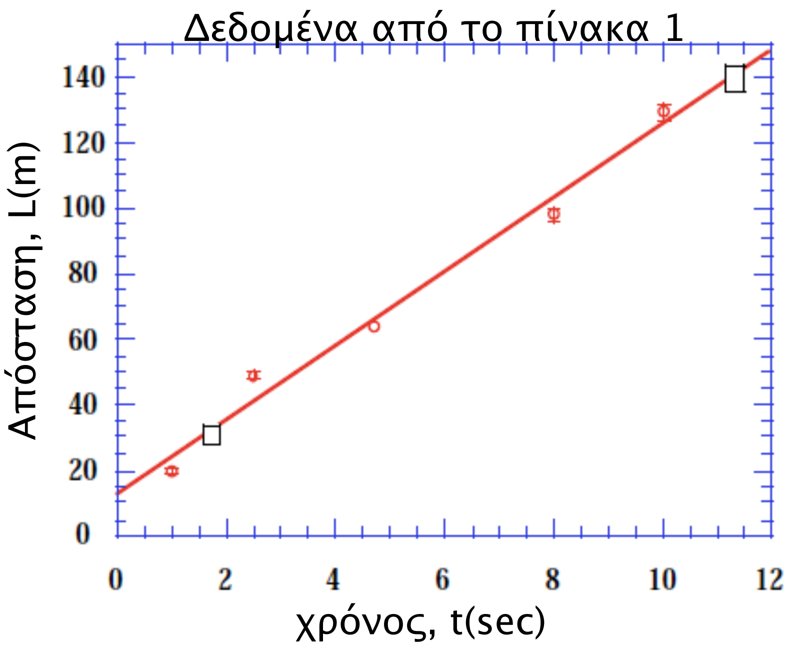
Έστω ότι έχουμε τις μετρήσεις που δίνονται στο παρακάτω πίνακα

Πίνακας 1

Χρόνος (sec)	Απόσταση (m)	Αβεβαιότητα, Δy (m)
1.0	20	1
2.5	59	1
4.7	64	(δεν χρειάζεται να υπολογισθεί)
8.0	98	2
10	129	3

Χρειάζεται να υπολογίσουμε τις αβεβαιότητες για 4 τιμές Τις 2 που βρίσκονται στο κατώτερο όριο τιμών και τις δύο στο υψηλότερο όριο τιμών

Σα 1ο βήμα κάνουμε τη γραφική παράσταση των δεδομένων του πίνακα 1



Χρησιμοποιώντας ένα χάρακα μπορούμε να σχεδιάσουμε τη καλύτερη ευθεία που διέρχεται από όλα τα σημεία

Αυτή η ευθεία λέγεται ευθεία “καλύτερης προσαρμογής (best fit)

Αν οι αβεβαιότητες όλων των σημείων είναι ίσες ή πολύ μικρές τότε η διαδικασία είναι πολύ απλή

Αν οι αβεβαιότητες παρουσιάζουν μεγάλες διακυμάνσεις τότε η διαδικασία είναι πιο πολύπλοκη

Ευθεία γραμμή καλύτερης προσαρμογής

Σημεία με μεγάλες αβεβαιότητες περιέχουν και τη λιγότερο σημαντικότητας πληροφορία και επομένως θα πρέπει να δώσουμε τη λιγότερο σημασία

Η τεταγμένη με το y-άξονα μπορεί να βρεθεί διαβάζοντας απλά τη τιμή από τη γραφική παράσταση. Στη περίπτωσή μας είναι περίπου 13m

Για να βρούμε τη κλίση χρησιμοποιούμε το ορθογώνιο τρίγωνο της διαφ. 17 και υπολογίζουμε κάποιο διάστημα Δx και το αντίστοιχο Δy

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Όπου τα σημεία x_1, x_2, y_1 και y_2 είναι κάποια σημεία της ευθείας γραμμής και όχι απαραίτητα πειραματικά σημεία

Αυτό είναι σημαντικό γιατί από τη στιγμή που σχεδιάσατε τη καλύτερη ευθεία δεν ενδιαφερόμαστε πλέον για τα πειραματικά σημεία αλλά για την κλίση και την τεταγμένη της ευθείας

Προσέξτε ότι για τη περίπτωσή μας κανένα από τα σημεία δεν βρίσκεται ακριβώς πάνω στην ευθεία

Χρησιμοποιούμε επομένως τα δεδομένα για να βρούμε τη καμπύλη και τη καμπύλη για να βρούμε τη θεωρία

Για το παράδειγμά μας έχουμε:

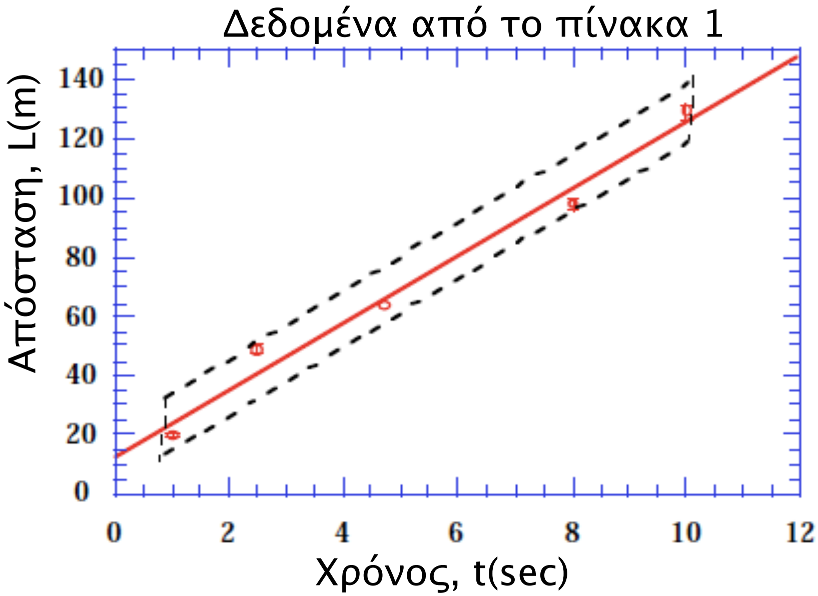
$$m = \frac{32m - 140m}{1.7s - 11.3s} = 11.25m/s \rightarrow 11m/s$$

Στο τελευταίο βήμα γράφουμε το αποτέλεσμα σύμφωνα με τα σημαντικά ψηφία που επιτρέπονται από τις μετρήσεις μας στο πίνακα 1 (δύο σημαντικά ψηφία)

Εύρεση της αβεβαιότητας της κλίσης και τεταγμένης

Ξεκινάμε σχεδιάζοντας ένα παραλληλόγραμμο το οποίο περικλείει όλα τα πειραματικά σημεία συμπεριλαμβανομένης της αβεβαιότητάς τους

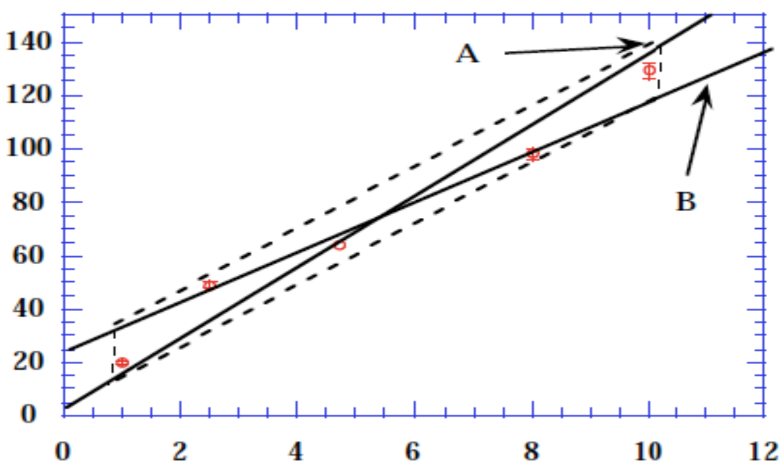
Το παραλληλόγραμμα της αβεβαιότητας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Η πάνω και κάτω γραμμή αυτού του παρ/μου σχεδιάζονται παράλληλα προς την ευθεία της καλύτερης προσαρμογής

Τα άκρα σχεδιάζονται παρ/λα προς τον y-άξονα

Οποιαδήποτε εκτίμηση της αβεβαιότητας της κλίσης και τεταγμένης της ευθείας θα πρέπει να έχει σαν αποτέλεσμα μια ευθεία η οποία περνά από τα άκρα του παρ/μου και δεν τέμνει τις πλάγιες πλευρές



Μπορούμε επομένως να χαράξουμε τις 2 διαγωνίους του παρ/μου και οι κλίσεις και τεταγμένες των 2 αυτών ευθειών δίνουν την αβεβαιότητα στη κλίση και τεταγμένη της ευθείας της καλύτερης προσαρμογής

Εύρεση της αβεβαιότητας της κλίσης και τετμημένης

Όπως και στην περίπτωση της καλύτερης ευθείας προσαρμογής υπολογίζουμε τη κλίση και τεταγμένη των 2 διαγωνίων του παρ/μου

Έχουμε $m_A = \frac{10-140}{0.86-10} = 14m/s$ και $m_B = \frac{31-122}{0.86-10} = 10m/s$

Επομένως η αβεβαιότητα της κλίσης της καλύτερης ευθείας είναι:

$$m_A - m_B = 4m/s$$

Επειδή εκφράζουμε την αβεβαιότητα συνήθως συμμετρικά θα έχουμε ότι η αβεβαιότητα του πειράματος είναι

$$\Delta m = \frac{m_A - m_B}{2} = 2m/s$$

Βλέποντας τις 2 ευθείες της αβεβαιότητας καταλαβαίνουμε ότι είναι αρκετά απίθανο να επιλέξουμε είτε την ευθεία Α ή την ευθεία Β σαν την ευθεία της καλύτερης προσαρμογής. Επομένως έχουμε υπερεκτιμήσει την αβεβαιότητα

Μια προσεκτικότερη ανάλυση δείχνει ότι θα πάρουμε μια πιο καλή εκτίμηση της αβεβαιότητας αν διαιρέσουμε την προηγούμενη εκτίμησή μας με τη τετραγωνική ρίζα του αριθμού των μετρήσεών μας

Γράφουμε: $\Delta m = \frac{m_A - m_B}{2} \frac{1}{\sqrt{N-1}}$

$$\Delta m = \frac{m_A - m_B}{2}\frac{1}{\sqrt{N-1}}$$

Η εξίσωση αυτή δίνει την εκτίμηση της πιο πιθανής αβεβαιότητας.

Στο παρονομαστή, για N=1, Δm=∞ και αυτό είναι λογικό μια και από ένα σημείο μπορούμε να έχουμε οποιαδήποτε ευθεία

Για N=2 μια γραμμή μόνο μπορεί να χαραχθεί από 2 σημεία. Στην περίπτωση αυτή το παρ/μο της αβεβαιότητας προέρχεται μόνο από τις αβεβαιότητες των δύο αυτών σημείων και επομένως είναι λογικό $\Delta m = (m_A - m_B)/2$

Για N>>2 η αβεβαιότητα ελλατώνεται σύμφωνα με τη ρίζα του αριθμού των μετρήσεων N και αυτό είναι το αποτέλεσμα που βρήκαμε όταν υπολογίσαμε το σφάλμα της μέσης τιμής

Αυτό δεν αποτελεί τη λύση του προβλήματος αλλά είναι κάποια πολύ λογική και καλή προσέγγιση

Η εύρεση της αβεβαιότητας της τεταγμένης προχωρά σύμφωνα με τα όσα αναπτύξαμε για την αβεβαιότητα της κλίσης της ευθείας.

Κάνοντας τις πράξεις έχουμε ότι $m \pm \Delta m = (11 \pm 1)\, m/s$ και $b \pm \Delta b = (13 \pm 6)\, m$

Η αβεβαιότητα της κλίσης είναι ίδιας τάξης με τα δεδομένα αλλά η αβεβαιότητα της τεταγμένης είναι περίπου 50%

Εύρεση καλύτερης ευθείας προσαρμογής

Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων (μέθοδος χ^2)

Όπως είδαμε στη γραφική εύρεση της καλύτερης ευθείας προσαρμογής, αυτό που ενδιαφερόμαστε είναι ο καθορισμός των παραμέτρων της συνάρτησης (π.χ. μιας ευθείας) που περιγράφει τα δεδομένα

Δύο μεθόδοι: Ελαχίστων τετραγώνων ή χ^2

Μέγιστης πιθανότητας - maximum likelihood

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση *y* μιας μεταβλητής *x* και μια σειρά παραμέτρων $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N)$

$$y = y(x; \vec{\theta})$$

Έστω ότι μετρήσαμε διάφορες τιμές του y για κάποιες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x.

Επομένως θα έχουμε N ζεύγη τιμών $\left(x_i, y_i \pm \sigma_{y_i}\right)$ όπου *i* =1,…,N

Ορίζουμε σαν "χ^2" τη ποσότητα: $$\boxed{\chi^2\left(x;\vec{\theta}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{y_i - y(x_i;\vec{\theta})}{\sigma_i}\right]^2}$$

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων δηλώνει ότι η καλύτερη εκτίμηση των παραμέτρων θ_i επιτυγχάνεται όταν βρεθεί μια ομάδα τιμών θ_i για τις οποίες η συνάρτηση χ^2 είναι ελάχιστη

Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων - χ^2

Αν οι αποκλίσεις κάθε μέτρησης, σ_i, είναι ίσες τότε η σχέση απλουστεύεται

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - y\left(x_i;\vec{\theta}\right)\right]^2$$

Είναι σημαντικό να προσέξετε ότι η μέθοδος όπως ορίστηκε χρειάζεται τη γνώση των αβεβαιοτήτων σ_i και ότι υποθέτει ότι δεν υπάρχουν αβεβαιότητες στη γνώση της ανεξάρτητης μεταβλητής x.

Αβεβαιότητες στις τιμές x_i μπορούν να αγνοηθούν εφόσον:

$$\frac{\sigma_{x_i}}{x_i} << \frac{\sigma_{y_k}}{y_k} \quad \mu\varepsilon \;\; i = 1,2,\ldots,N, \;\; k = 1,2,\ldots,N$$

Αγνοώντας τις αβεβαιότητες, η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων είναι απλά το άθροισμα των αποστάσεων κάθε μέτρησης y_i από τα σημεία της θεωρητικής καμπύλης $(x_i, y_i(x_i))$. Ελαχιστοποιώντας τη συνάρτηση ψάχνουμε τα σημεία της καλύτερης καμπύλης για τα οποία αυτή η απόσταση ελαχιστοποιείται

Η εισαγωγή των αβεβαιοτήτων είναι απαραίτητη αν θέλουμε να κάνουμε στατιστική ανάλυση των αποτελεσμάτων διαφορετικά είναι απλό γεωμετρικό πρόβλημα

Εφαρμογή χ^2 - εύρεση παραμέτρων ευθείας

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση την οποία θέλουμε να προσαρμόσουμε στα σημεία των μετρήσεων μας είναι της μορφής

$$y(x) = ax + b$$

Θα υποθέσουμε ακόμα ότι οι αβεβαιότητες σ_i των y_i είναι όλες ίσες μεταξύ τους

Επομένως το πρόβλημα εύρεσης των παραμέτρων α και b έγγυται στην ελαχιστοποίησης της συνάρτησης χ^2 ως προς *α* και *b*

Η ελαχιστοποίηση γίνεται πέρνοντας τη μερική παράγωγο της χ^2 ως προς *α* και *b* και εξισώνοντας με μηδέν:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 0 \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0$$

και λύνοντας το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων που προκύπτει προς *α* και *b*

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a}\left[\sum_{i=1}^{N}(y_i - ax_i - b)^2\right] &= -2\sum_{i=1}^{N}(y_i - ax_i - b)x_i = 0 \\
\frac{\partial}{\partial b}\left[\sum_{i=1}^{N}(y_i - ax_i - b)^2\right] &= -2\sum_{i=1}^{N}(y_i - ax_i - b) = 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} y_i x_i &= a\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{N} x_i \\
\sum_{i=1}^{N} y_i &= a\sum_{i=1}^{N} x_i + Nb
\end{aligned}\right\} \Rightarrow b = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N} - a\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Αντικαθιστούμε στην 1η εξίσωση και λύνουμε ως προς *α*:

$$\sum_{i=1}^{N} y_i x_i = a\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \sum_{i=1}^{N} x_i - \frac{a}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} x_i \Rightarrow a\left[N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right] = N\sum_{i=1}^{N} y_i x_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i$$

Εύρεση παραμέτρων ευθείας με μέθοδο χ^2

Από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε το a και αντικαθιστώντας στην εξίσωση του b παίρνουμε το b

$$\boxed{a = \frac{N\sum_{i=1}^{N} y_i x_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{\left[N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right]} = \frac{N\sum xy - \sum x \sum y}{\Delta}}$$

και

$$\boxed{b = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i x_i}{\left[N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right]} = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\Delta}}$$

Αν διαιρέσουμε με N^2 τον αριθμητή και παρονομαστή στις παραπάνω σχέσεις

$$\boxed{a = \frac{\overline{yx} - \overline{x}\ \overline{y}}{\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right)}}$$

και

$$\boxed{b = \frac{\overline{y}\,\overline{x^2} - \overline{x}\ \overline{xy}}{\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right)}}$$

όπου $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$

Παράδειγμα

Έστω ότι κάποιος φοιτητής θέλει να μετρήσει τις μάζες διαφόρων σωμάτων με μια ζυγαριά ελατηρίου. Θα πρέπει πριν μετρήσει τις μάζες να βαθμονομήσει τη ζυγαριά. Για να το κάνει αυτό χρησιμοποιεί 5 γνωστές μάζες των 2kgr τις οποίες τοποθετεί διαδοχικά πάνω στη ζυγαριά και μετρά κάθε φορά το αντίστοιχο μήκος του ελατηρίου l_k. Υποθέτοντας ότι το ελατήριο υπακούει στο νόμο του Hooke, περιμένει ότι $l = A + Bm$

➡ Η σταθερά A είναι το φυσικό μήκος τους εκκρεμούς και B είναι B=g/k, k η σταθερά ελατηρίου

Χρησιμοποιόντας την γραμμική σχέση $l = A + Bm$ μπορεί μετρώντας το μήκος του ελατηρίου για μια άγνωστη μάζα m να βρει τη μάζα. Χρειάζεται επομένως τις τιμές A και B.

Μέτρηση	Μάζα m	Μήκος, l	m²	$m_i l_i$
1	2	42.0	4	84
2	4	48.4	16	194
3	6	51.3	36	308
4	8	56.3	64	450
5	10	58.6	100	586
N=5	$\sum m_i = 30$	$\sum l_i = 256.6$	$\sum m_i^2 = 220$	$\sum m_i l_i = 1622$

Επομένως:

$$\Delta = N\sum m^2 - \left(\sum m\right)^2$$

$$\Rightarrow \Delta = 5 \times 220 - 30^2 = 200$$

Η σταθερά A είναι:

$$A = \frac{\sum m^2 \sum l - \sum m \sum l}{\Delta}$$

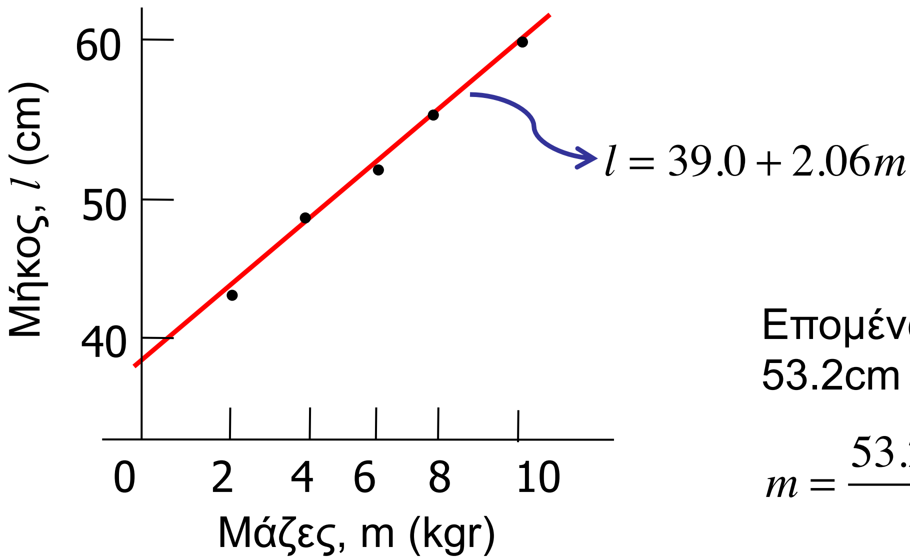
$$A = \frac{220 \times 256.6 - 30 \times 1622}{200}$$

$$A = 39.0cm$$

Η σταθερά B θα είναι $\mathrm{B} = \dfrac{N\sum ml - \sum m \sum l}{\Delta} = \dfrac{5 \times 1622 - 30 \times 256.6}{200} \Rightarrow B = 2.06cm / kgr$

Γραφική παράσταση

Το γράφημα των προηγούμενων μετρήσεων θα είναι:



Επομένως αν κάποια μάζα επιμηκύνει το ελατήριο κατά 53.2cm τότε σύμφωνα με την εξίσωση της χ^2 ευθείας:

$$m = \frac{53.2 - 39.0}{2.06} = 6.9kg$$

Χρειάζεται να υπολογίσουμε τις αβεβαιότητες των Α και Β.

Αρχικά όμως ποια είναι η αβεβαιότητα των μετρήσεων y?

Έχουμε 5 μετρήσεις αλλά η διασπορά τους δεν μας δίνει την αβεβαιότητα τους. Ωστόσο κάθε μέτρηση περιμένουμε να κατανέμεται σύμφωνα με την Gaussian κατανομή γύρω από την αληθινή τιμή $y=A + Bx_i$ με εύρος σ_i

Επομένως όλες οι αποκλίσεις $y_i - A - Bx_i$ θα είναι κατανεμημένες Gaussian με κεντρική τιμή 0 και το ίδιο εύρος σ_y.

Το εύρος σ_y δίνεται από την σχέση $$\boxed{\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - A - Bx\right)^2}}$$

Εύρεση αβεβαιότητας παραμέτρων ευθείας

Οι αβεβαιότητες των *a* και *b* βρίσκονται από εφαρμογή διάδοσης σφαλμάτων και …πολύ άλγεβρα

$$a = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{(x_i - \bar{x})y_i}{\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)}\right] \Rightarrow \sigma_a^2 = \sum_{i=1}^{N}\sigma_{y_i}^2\left(\frac{\partial a}{\partial y_i}\right)^2 \Rightarrow \sigma_a^2 = \sigma_y^2\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{x_i - \bar{x}}{N\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)}\right]^2 \Rightarrow \sigma_a^2 = \sigma_y^2\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}x_i}{N^2\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)^2}\right]$$

Αλλά $$\sum_{i}^{N}\left(x_i^2 + \bar{x}^2 - 2\bar{x}x_i\right) = \sum_{i=1}^{N}x_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\bar{x}^2 - 2\bar{x}\boxed{\sum_{i=1}^{N}x_i} = \sum_{i=1}^{N}x_i^2 + N\bar{x}^2 - 2\bar{x}\boxed{N\bar{x}} = \sum_{i=1}^{N}x_i^2 - N\bar{x}^2$$

Αντικαταστούμε την τελευταία σχέση στον αριθμητή της εξίσωσης για σ_a^2 οπότε

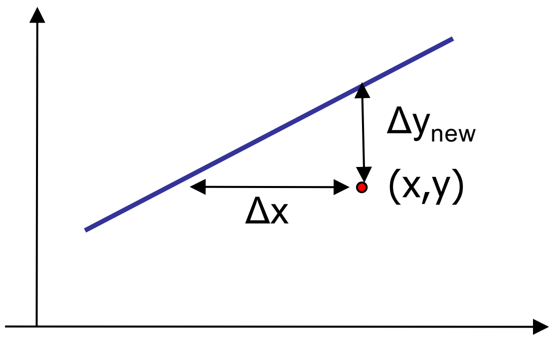
$$\sigma_a^2 = \sigma_y^2\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i^2 - N\bar{x}}{N^2\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)^2} = \sigma_y^2\frac{\left(N\overline{x^2} - N\bar{x}\right)}{N^2\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)^2} = \sigma_y^2\frac{N\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)}{N^2\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)^2} \Rightarrow \sigma_a^2 = \sigma_y^2\frac{1}{N\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)}$$

Ανάλογα βρίσκουμε και την αβεβαιότητα του *b* $$\sigma_b^2 = \sigma_y^2\frac{\overline{x^2}}{N\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - A - Bx\right)^2}$$

Περίπτωση με σφάλμα σε x και y

Αν οι μετρήσεις έχουν σφάλμα σε x, σ_x και y, σ_y, τότε μπορούμε να βρούμε ένα ισοδύναμο σφάλμα στην διεύθυνση y που προκαλεί το ίδιο αποτέλεσμα



Υποθέτοντας αρχικά ότι $\sigma_y = 0$

$$\Delta y_{new} = \frac{dy}{dx}\Delta x \quad \Rightarrow \sigma y_{new} = \frac{dy}{dx}\sigma_x$$

Αν σ_y δεν είναι 0 τότε το νέο σφάλμα μπορεί να γραφεί

$$\sigma y_{new} = \sqrt{\sigma_y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\sigma_x\right)^2}$$

αφού οι δυο αβεβαιότητες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους

Περίληψη – Μέθοδος χ^2

Οπότε συνοψίζοντας τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για την περίπτωση της ευθείας και υποθέτοντας ότι τα σφάλματα των N επιμέρους μετρήσεων, y_i, είναι ίσα μεταξύ τους ότι :

κλίση

$$a = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{\Delta}$$

$$\sigma_a^2 = \sigma_y^2 \frac{N}{\Delta}$$

όπου:

$$\Delta = N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$$

τεταγμένη

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{\Delta}$$

$$\sigma_b^2 = \sigma_y^2 \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{\Delta}$$

αβεβαιότητα μετρήσεων:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - A - Bx\right)^2}$$

Η συσχέτιση μεταξύ των x και y:

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - N\bar{x}\,\bar{y}\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\bar{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - N\bar{y}^2\right)}$$

Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων - σ_{y_i} άνισα

Αν τα σφάλματα των μετρήσεων είναι διαφορετικά μεταξύ τους τότε η συνάρτηση που θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε είναι

$$\boxed{\chi^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{y_i - a x_i^2 - b}{\sigma_i}\right]^2}$$

Η ελαχιστοποιήση δίνει τις ίδιες εξισώσεις μόνο που στη περιπτώση αυτή οι μέσες τιμές των μεγεθών αντιστοιχούν σε αυτές που προκύπτουν με το να ζυγίσουμε τις τιμές με τα ανάλογα βάρη ($1/\sigma_i^2$) και η κανονικοποίηση δεν γίνεται ως προς N αλλά ως προς το συνολικό βάρος $\sum_{i=1}^{N} 1/\sigma_i^2$

Οι σχέσεις που δίνουν τις παραμέτρους α και b γίνονται (y = αx + b):

$$b = \frac{\sum wx^2 \sum wy - \sum wx \sum wxy}{\Delta} \qquad \sigma_b = \sqrt{\frac{\sum wx^2}{\Delta}}$$

$$a = \frac{\sum w \sum wxy - \sum wx \sum wy}{\Delta} \qquad \sigma_a = \sqrt{\frac{\sum w}{\Delta}}$$

$$\Delta = \sum w \sum wx^2 - \left(\sum wx\right)^2$$

Μετρήσεις ίδιου μεγέθους με διαφορετικά σφάλματα

Θεωρούμε κάποιο μέγεθος *x* το οποίο μετρήθηκε από διαφορετικούς παρατηρητές ή από τον ίδιο παρατηρητή κάνοντας διαφορετικά set μετρήσεων

Οι μετρήσεις οι οποίες βρέθηκαν ήταν : $x = x_A \pm \sigma_A$ και $x = x_B \pm \sigma_B$

Αφού έχουμε 2 πληροφορίες για το μέγεθος αυτό, θέλουμε να εξάγουμε από αυτές τις μετρήσεις το καλύτερο αποτέλεσμα για το μέγεθος *x*. Αλλά πως?

Αν η διαφορά των 2 τιμών $|x_A - x_B|$ είναι περισσότερο από $\pm 1\max(\sigma_A, \sigma_B)$ τότε κάποια από τις μετρήσεις υποφέρει από κάποιο σφάλμα (συνήθως συστηματικό) το οποίο και θα πρέπει να απαλοίψουμε πριν συγκριθούν και συνδυαστούν

Από τη στιγμή που οι δύο μετρήσεις έχουν διαφορετικό σφάλματα δεν μπορούν να συνδυαστούν απευθείας για την εύρεση της μέσης τιμής. Θα δίναμε την ίδια βαρύτητα και στις δυο μετρήσεις.

Η λογική λύση είναι να συνδυαστούν με τέτοιο τρόπο ώστε η τιμή με την καλύτερη ακρίβεια συνεισφέρει περισσότερο από τη λιγότερο ακριβή μέτρηση

Θεωρώντας ότι οι δυό μετρήσεις προκύπτουν από κατανομές Gauss και με με εύρος σ_A και σ_B αντίστοιχα και οι κατανομές έχουν αναμενόμενη μέση τιμή την άνωστη τιμή X του μεγέθους που θέλουμε να μετρήσουμε τότε οι πιθανότητα να μετρήσουμε x_A και x_B είναι

$$P(x_A) \propto \frac{1}{\sigma_A} e^{-\frac{(x_A - X)^2}{2\sigma_A^2}} \quad \text{και} \quad P(x_B) \propto \frac{1}{\sigma_B} e^{-\frac{(x_B - X)^2}{2\sigma_B^2}}$$

Μετρήσεις ίδιου μεγέθους με διαφορετικά σφάλματα

Η πιθανότητα για τα δυό αποτελέσματα ταυτόχρονα είναι

$$P(x_A, x_B) = P(x_A)P(x_B) \propto \frac{1}{\sigma_A} e^{-\frac{(x_A - X)^2}{2\sigma_A^2}} \frac{1}{\sigma_B} e^{-\frac{(x_B - X)^2}{2\sigma_B^2}} = \frac{1}{\sigma_A \sigma_B} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_A - X)^2}{\sigma_A^2} + \frac{(x_B - X)^2}{\sigma_B^2}\right]} = \frac{1}{\sigma_A \sigma_B} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

Αυτή η πιθανότητα θέλουμε να είναι μέγιστη $\Rightarrow$ y^2 πρέπει να είναι ελάχιστο

Αλλά y^2 ελάχιστο όταν $\dfrac{dy^2}{dX} = 0$

Επομένως παραγωγίζοντας και εξισώνοντας με 0 έχουμε:

$$\frac{d}{dX}\left[\frac{(x_A - X)^2}{\sigma_A^2} + \frac{(x_B - X)^2}{\sigma_B^2}\right] = \frac{-2(x_A - X)}{\sigma_A^2} + \frac{-2(x_B - X)}{\sigma_B^2} = -2\left[\frac{x_A}{\sigma_A^2} + \frac{x_B}{\sigma_B^2} - X\left(\frac{1}{\sigma_A^2} + \frac{1}{\sigma_B^2}\right)\right] = 0 \Rightarrow \boxed{X = \frac{\dfrac{x_A}{\sigma_A^2} + \dfrac{x_B}{\sigma_B^2}}{\dfrac{1}{\sigma_A^2} + \dfrac{1}{\sigma_B^2}}}$$

Θέτοντας $w_A = \dfrac{1}{\sigma_A^2}$ και $w_B = \dfrac{1}{\sigma_B^2}$ σημαντικότητα ή βάρος της κάθε μέτρησης

$$\boxed{X = \frac{x_A w_A + x_B w_B}{w_A + w_B}}$$

Με το τρόπο αυτό η συμβολή της πιο ακριβής μέτρησης είναι μεγαλύτερη από της λιγότερο ακριβής

Για πολλές διαφορετικές μετρήσεις γράφουμε: $\boxed{X = \dfrac{\sum x_i w_i}{\sum w_i}}$ όπου $\boxed{w_i = \dfrac{1}{\sigma_i^2}}$

Αβεβαιότητα της τιμής Χ συνδυασμού μετρήσεων

Χρησιμοποιώντας το γενικό τύπο διάδοσης σφαλμάτων για τις μετρήσεις x_i έχουμε

$$\sigma_X = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial X}{\partial x_N}\right)^2 \sigma_N^2}$$ αλλά $$X = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i}$$ οπότε θα έχουμε:

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{w_1^2\sigma_1^2}{\left(\sum w_i\right)^2} + \frac{w_2^2\sigma_2^2}{\left(\sum w_i\right)^2} + \cdots + \frac{w_N^2\sigma_N^2}{\left(\sum w_i\right)^2}}$$ αλλά $$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \Rightarrow w_i^2 = \frac{1}{\sigma_i^4} \Rightarrow \boxed{w_i^2\sigma_i^2 = \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2\left(\sum w_i\right)^2} + \frac{1}{\sigma_2^2\left(\sum w_i\right)^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_N^2\left(\sum w_i\right)^2}} \Rightarrow \sigma_X = \frac{1}{\sum w_i}\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_N^2}}$$

$$\Rightarrow \sigma_X = \frac{1}{\sum w_i}\sqrt{w_1 + w_2 + \cdots + w_N} \Rightarrow \sigma_X = \frac{\left(\sum w_i\right)^{1/2}}{\sum w_i} \quad \boxed{\Rightarrow \sigma_X = \left(\sum w_i\right)^{-\frac{1}{2}}}$$

Επομένως έχουμε: $\boxed{X = \sigma_X^2 \sum x_i w_i}$ με αβεβαιότητα $\boxed{\sigma_X^2 = \frac{1}{\sum w_i} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_N^2}}}$

Θα μπορούσαμε να γράψουμε: $\boxed{\frac{1}{\sigma_X^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_N^2}}$

Η αβεβαιότητα της συνυσασμένης τιμής Χ μοιάζει σα τον τύπο της ολικής αντίστασης Ν αντιστάσεων συνδεδεμένων παράλληλα