# ΦΥΣ. 211
## $2^η$ ΠΡΟΟΔΟΣ 25-Απρίλη-2015

Πριν ξεκινήσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, αριθμό ταυτότητας) στο πάνω μέρος της σελίδας αυτής.

Για τις λύσεις των ασκήσεων θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε μόνο τις σελίδες που δίνονται και μην κόψετε καμιά από τις σελίδες.

Προσπαθήστε να δείξετε τη σκέψη σας και να γράψετε καθαρές εξισώσεις. Για πλήρη ή μερική βαθμολόγηση θα πρέπει να φαίνεται καθαρά αυτό που προσπαθείτε να δείξετε. Αν δεν μπορώ να διαβάσω τι γράφετε αυτόματα θα υποθέσω ότι είναι λάθος.

Σας δίνονται 4 ισοδύναμες ασκήσεις με σύνολο 100 μονάδων και πρέπει να απαντήσετε σε όλες.

Η σειρά των προβλημάτων δεν είναι αντιπροσωπευτική της δυσκολίας τους. Πριν ξεκινήσετε διαβάστε όλα τα προβλήματα και σκεφτείτε τι χρειάζεται να κάνετε.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 150 λεπτά.

**Καλή επιτυχία**.

**1.** (i) Να βρεθεί η συχνότητα των ταλαντώσεων μικρού πλάτους για το δυναμικό της μορφής: $U(x)=V\cos(ax)-Fx$. [**12.5μ**]

Είδαμε στις διαλέξεις (19 - σελ. 2-5) ότι στην θέση ισορροπίας $\ddot{q}=\dot{q}=0 \Rightarrow \left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q=q_0}=0$

Θεωρώντας μια μικρή διαταραχή ως προς την θέση ισορροπίας μπορούμε να αναπτύξουμε την Lagrangian ως προς $q_0$, οπότε θα έχουμε: (διαταραχή $q$ όταν $q_0=0$)

$$\left.L(q,\dot{q})\right|_{q=q_0} = L(q_0,\dot{q}_0=0) + q\frac{\partial L}{\partial q}L(q_0,\dot{q}) + \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}L(q_0,\dot{q}) + \mathcal{D}q^2 + Eq\dot{q} + F\dot{q}^2 + \dots$$

Αγνοώντας όλους τους όρους που είναι ολικά διαφορικά ως προς χρόνο καταλήξαμε σε μια μορφή:

$$\left.L(q,\dot{q})\right|_{q=q_0} = \mathcal{D}q^2 + F\dot{q}^2 = 2F\left(\frac{\mathcal{D}}{2F}q^2+\frac{1}{2}\dot{q}^2\right) \xRightarrow{\times 2F} \left.L(q,\dot{q})\right|_{q=q_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{D}}{F}q^2+\dot{q}^2\right)$$

Ορίσαμε τον όρο $\frac{\mathcal{D}}{F}=-\omega^2$. Αλλά $\mathcal{D}$ αναπαριστάνει την 2η παράγωγο της $L$ ως τις συντεταγμένες, επομένως $\mathcal{D}=\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}$ ενώ ο όρος $F$ είναι η 2η παράγωγος ως προς τις ταχύτητες: $F=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}=\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^2} \Rightarrow F=m$ για μηχανικά συστήματα.

Επομένως θα έχουμε: $\omega^2=-\frac{\partial^2 V/\partial x^2}{\partial^2 T/\partial \dot{x}^2}$ (1)

$\frac{\partial V}{\partial x}=0$ : θέση ισορροπίας $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left[V\cos(ax)-Fx\right]=0 \Rightarrow -Va\sin(ax_0)-F=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\sin(ax_0)=-\frac{F}{Va}}$ (2) θέση ισορροπία

Από την 2η παράγωγο: $\boxed{\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x=x_0}=-a^2V\cos ax_0}$ (3)

Από την (2) θα πάρουμε: $\sqrt{1-\cos^2(ax_0)}=-\frac{F}{Va} \Rightarrow \cos^2(ax_0)=1-\left(\frac{F}{aV}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(ax_0)=\sqrt{1-\left(\frac{F}{aV}\right)^2}$ (4)

Επομένως αντικατάσταση στην (1) θα δώσει: $-\omega^2=\frac{1}{m}\left(-a^2V\right)\sqrt{1-\left(\frac{F}{aV}\right)^2} \Rightarrow$

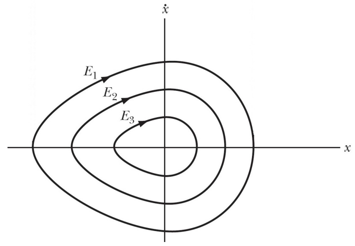
$$\Rightarrow \boxed{\omega^2=\frac{a^2V}{m}\sqrt{1-\left(\frac{F}{aV}\right)^2}}$$

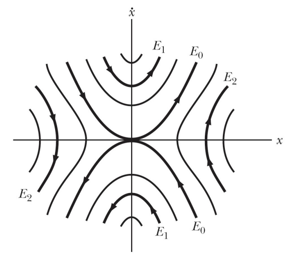
(ii) Θεωρήστε τα παρακάτω δυο διαγράμματα φάσης τα οποία περιγράφουν κίνηση σε μια διάσταση ενός σώματος μάζας *m*. Για κάθε διάγραμμα απαντήστε τις ακόλουθες ερωτήσεις:

(α) Ποια η θέση της ισορροπίας; Δώστε μια καλά δικαιολογημένη απάντηση. [**3μ**]

(β) Η ισορροπία των παραπάνω σημείων είναι ευσταθής ή ασταθής; Δώστε μια καλά δικαιολογημένη απάντηση. [**3.5μ**]

(γ) Σχεδιάστε την συνάρτηση του δυναμικού που σχετίζεται με κάθε διάγραμμα φάσης. Δώστε ιδιαίτερη σημασία στην συμμετρία του δυναμικού ως προς την θέση ισορροπίας. [**6μ**]

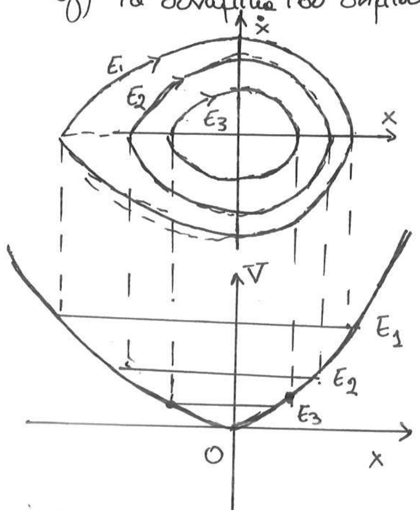


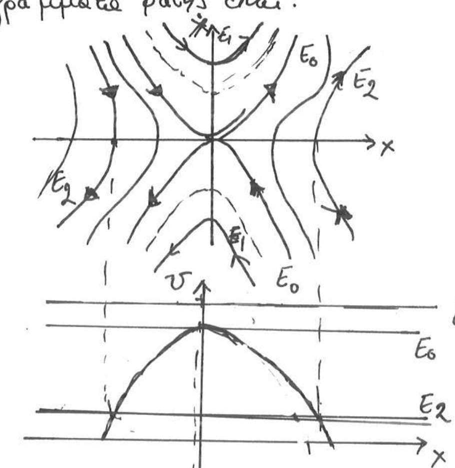




(α) Στην θέση ισορροπίας η δύναμη πρέπει να είναι μηδέν και η δυναμική ενέργεια θα έχει επομένως ακρότατο (ελάχιστο ή μέγιστο). Αν θεωρήσαμε μια φασική καμπύλη, θα περιμέναμε ότι η ταχύτητα θα παρουσιάζει επίσης μια ακρότατη ή ακρότατες τιμές στην θέση ισορροπίας. Επομένως και για τα δυο διαγράμματα φάσης, η θέση ισορροπίας βρίσκεται στην θέση $x=0$

(β) Για να βρούμε αν η θέση ισορροπίας είναι ευσταθής ή ασταθής, θα πρέπει να θεωρήσουμε ποιά είναι η διεύθυνση της δύναμης που ασκείται στο σύστημα όταν το μετακινήσουμε από την θέση ισορροπίας. Στο διάγραμμα φάσης στα αριστερά, βλέπουμε ότι όταν το $x$ αυξάνει, ξεκινώντας από το $x=0$, η ταχύτητα ελαττώνεται και μετέπειτα γίνεται αρνητική. Το σύστημα επομένως θα επιστρέψει στην θέση ισορροπίας και άρα το σύστημα έχει ευσταθή ισορροπία στο $x=0$. Στο διάγραμμα φάσης στα δεξιά, βλέπουμε ότι όταν το $x$ αυξάνει, η ταχύτητα αυξάνει επίσης, και επομένως το σύστημα δεν θα επιστρέψει στην θέση $x=0$. Το σύστημα επομένως έχει ασταθή ισορροπία στο $x=0$.

(γ) Τα δυναμικά που δημιουργούν τα διαγράμματα φάσης είναι:



**2.** Θεωρήστε σύστημα που αποτελείται από δυο συζευγμένους αρμονικούς ταλαντωτές. Για το σύστημα δίνεται: $T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$ και $V=\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2x_2^2+2\lambda x_1x_2$ όπου λ μια σταθερά μικρής τιμής.

(α) Ποιο εύρος τιμών μπορεί να πάρει η σταθερά λ για να υπάρχει ευσταθής ισορροπία; [**7μ**]

(β) Βρείτε την συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων ως προς το σημείο ισορροπίας. [**5μ**]

(γ) Βρείτε τα διανύσματα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. [**5μ**]

(δ) Δείξτε ότι τα ιδιοδιανύσματα είναι ορθογώνια ως προς τον πίνακα του δυναμικού. [**4μ**]

(ε) Δείξτε ότι τα ιδιοδιανύσματα είναι ορθογώνια ως προς τον πίνακα του κινητικής ενέργειας. [**4μ**]

Στην άσκηση μας δίνεται η δυναμική ενέργεια του συστήματος $V=\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2x_2^2+2\lambda x_1x_2$ καθώς και η κινητική ενέργεια $T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$

Έχουμε δει ότι αν εισάγουμε συμβολισμό πινάκων, τότε μπορούμε να γράψουμε ένα διάνυσμα στήλης που περιέχει τις γενικευμένες συντεταγμένες $[x(t)]=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}$ και $[x(t)]^T=(x_1(t),x_2(t))$

Για την δυναμική ενέργεια μπορούμε να γράψουμε: $V=[x(t)]^T[V][x] \Rightarrow$

$$\Rightarrow V=(x_1,x_2)\cdot[V]\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \Rightarrow V=\sum_{ij}x_iV_{ij}x_j$$

Ο συμμετρικός πίνακας $[V]$ είναι με στοιχεία όπως είδαμε: $V_{ij}=\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2V}{\partial x_i\partial x_j}\right|_{x_i,x_j=0}$

όπου θεωρήσαμε ότι η ισορροπία είναι στο σημείο $x_i=x_j=0$

Προφανώς για να αποτελεί το σημείο ισορροπίας σημείο ευσταθούς ισορροπίας, κάθε απόκλιση από την θέση αυτή θα πρέπει να οδηγεί σε αύξηση της ενέργειας της δυναμικής.

Δηλαδή: $[x]^T[V][x]>0$ για κάθε διάνυσμα κατασκευών $[x]$ απομακρύνσεων

Για να δείξουμε ότι $[V]$ είναι πραγματικά θετικός πίνακας, θα πρέπει οι ιδιοτιμές του να είναι όλες θετικές.

Επομένως για το (α) μέρος της άσκησης θα πρέπει να δείξουμε ότι οι ιδιοτιμές του $[V]$ είναι θετικές:

$$[V]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2V}{\partial x_1\partial x_2}\\ \frac{\partial^2V}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2V}{\partial x_2^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1 & 2\lambda\\ 2\lambda & k_2\end{pmatrix}$$

Από $\frac{\partial V}{\partial x_i}=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}k_1x_1+2\lambda x_2=0\\k_2x_2+2\lambda x_1=0\end{array}\right\} \Rightarrow$ Τα σημεία ισορροπίας είναι προφανώς $x_1=x_2=0$

Ελέγχουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $[V]$ $\Rightarrow$ $[V][a]=n[a]$ $\Rightarrow$
Από την χαρακτηριστική εξίσωση ιδιοτιμών θα $\Rightarrow ([V]-n)[a]=0$
πρέπει για να μην έχουμε τετριμμένες λύσεις: $\det([V]-n)=0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \det([V]-n)=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} k_1-n & 2\lambda \\ 2\lambda & k_2-n \end{pmatrix}=0 \Rightarrow k_1k_2-n(k_1+k_2)+n^2=+4\lambda^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_\pm=\frac{1}{2}\left[(k_1+k_2)\pm\sqrt{(k_1+k_2)^2-4(4\lambda^2+k_1k_2)}\right]=\frac{1}{2}\left[(k_1+k_2)\pm(k_1+k_2)\sqrt{1-4\frac{k_1k_2-4\lambda^2}{(k_1+k_2)^2}}\right]$$

Οι ιδιοτιμές $n_\pm$ θα είναι και οι δυό θετικές (ευσταθής ισορροπία) αν:

$$n_\pm\geq 0 \Rightarrow \frac{k_1+k_2}{2}\left[1\pm\sqrt{1-4\frac{k_1k_2-4\lambda^2}{(k_1+k_2)^2}}\right]\geq 0 \Rightarrow 1\pm\sqrt{1-4\frac{k_1k_2-4\lambda^2}{(k_1+k_2)^2}}\geq 0 \Rightarrow$$

$$n_\pm\geq 0 \text{ αν } \quad 1\geq\sqrt{1-4\frac{k_1k_2-4\lambda^2}{(k_1+k_2)^2}}\geq 0 \Rightarrow 1\geq 1-4\frac{k_1k_2-4\lambda^2}{(k_1+k_2)^2}\geq 0 \Rightarrow$$

$$n_\pm\geq 0 \text{ αν } \quad 0\geq -4\frac{k_1k_2-4\lambda^2}{(k_1+k_2)^2}\geq -1 \Rightarrow \boxed{n_\pm\geq 0 \text{ αν } 0\leq 4\frac{k_1k_2-4\lambda^2}{(k_1+k_2)^2}\leq 1}$$

$$\Rightarrow 0\leq 4k_1k_2-16\lambda^2\leq(k_1+k_2)^2 \Rightarrow -4k_1k_2\leq -16\lambda^2\leq(k_1-k_2)^2 \Rightarrow k_1k_2\geq 4\lambda^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2\leq\frac{k_1k_2}{4} \Rightarrow \boxed{|\lambda|\leq\frac{\sqrt{k_1k_2}}{2}}$$ είναι η συνθήκη για να υπάρχει ευσταθής ισορροπία για το σύστημα

(β) Ανάλογα με τον πίνακα της δυναμικής ενέργειας μπορούμε να ορίσουμε τον πίνακα της κινητικής ενέργειας $T=[\dot{x}]^T[T][\dot{x}]$ όπου $T_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{x}_i\partial\dot{x}_j}\Big|_{\dot{x}_i,\dot{x}_j=0}$
Ο πίνακας αυτός είναι πάντοτε συμμετρικός και θετικός αφού η κινητική ενέργεια είναι πάντοτε θετική.
Η Lagrangian επομένως θα πάρει την μορφή: $L=[\dot{x}]^T[T][\dot{x}]-[x]^T[V][x]$
Από την εξίσωση αυτή μπορούμε να πάρουμε μέσω της εξίσωσης Euler-Lagrange την εξίσωση κίνησης: $[T][\ddot{x}]+[V][x]=0$
Είδαμε ότι οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης περιγράφουν ταλαντώσεις του συστήματος όλες με την ίδια συχνότητα. Το διάνυσμα που περιέχει έναν κανονικό τρόπο, (μια συλλογή δηλαδή συντεταγμένων όλων των του συστήματος που ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα) μπορεί να γραφεί με την μορφή:

$[y] = [a] e^{i(\omega t - \delta)}$ όπου $[a]$ είναι το διάνυσμα που περιέχει τους λόγους των απομακρύνσεων των τμημάτων του συστήματος για τον κανονικό τρόπο ταλάντωσης και $\delta$ είναι μια φάση του συστήματος που προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες.

Το πραγματικό μέρος της παραπάνω λύσης είναι η φυσική λύση.

Αντικατάσταση στην εξίσωση κίνησης θα δώσει:

$$\left(-[T][a]\omega^2 + [V][a]\right) e^{i(\omega t - \delta)} = 0 \Rightarrow \left(-[T]\omega^2 + [V]\right)[a] = 0$$

Επομένως καταλήγουμε στην εύρεση των $\omega^2$'s και αντίστοιχων συνιστωσών του $[a]$ από την λύση του παραπάνω συστήματος εξισώσεων το οποίο θα πρέπει να έχει λύση πέρα της τετριμμένης $[a]=0$. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει η χαρακτηριστική εξίσωση: $\det\left|[V] - \omega^2[T]\right| = 0 \Rightarrow$

$$[T] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial T^2}{\partial \dot{x}_1^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\begin{vmatrix} k_1 - m_1\omega^2 & 2\lambda \\ 2\lambda & k_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (k_1 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - 4\lambda^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 k_2 - (m_1 k_2 + m_2 k_1)\omega^2 + m_1 m_2 \omega^4 - 4\lambda^2 = 0 \Rightarrow m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_2 + m_2 k_1)\omega^2 + k_1 \cdot k_2 - 4\lambda^2 = 0$$

$$\left.\Rightarrow \omega_\pm^2 = \frac{m_1 k_2 + m_2 k_1}{2 m_1 m_2} \pm \sqrt{\frac{(m_1 k_2 + m_2 k_1)^2}{4 m_1^2 m_2^2} - \frac{\cancel{4 m_1 m_2}(k_1 k_2 - 4\lambda^2)}{\cancel{4} m_1^2 m_2^2}}\right\} \Rightarrow$$

Έστω $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}$ και $\omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}$

$$\Rightarrow \omega_\pm^2 = \frac{1}{2}(\omega_2^2 + \omega_1^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\omega_2^2 + \omega_1^2)^2 - \omega_1^2\omega_2^2 + 4\frac{\lambda^2}{m_1 m_2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_\pm^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\omega_2^4 + \frac{1}{4}\omega_1^4 - \frac{1}{2}\omega_1^2\omega_2^2 + 4\frac{\lambda^2}{m_1 m_2}} \Rightarrow \omega_\pm^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\frac{\lambda^2}{m_1 m_2}}$$

καταλήγουμε επομένως ότι οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος είναι:

$$\boxed{\omega_\pm^2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\frac{\lambda^2}{m_1 m_2}}}$$

(γ) Για κάθε μια από τις ιδιοτιμές μπορούμε να βρούμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα

Θα έχουμε επομένως:

$$\begin{pmatrix} k_1 - m_1\omega_\pm^2 & 2\lambda \\ 2\lambda & k_2 - m_2\omega_\pm^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1\pm} \\ a_{2\pm} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left(k_1 - m_1\omega_\pm^2\right)a_{1\pm} + 2\lambda a_{2\pm} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_{1\pm}}{a_{2\pm}} = -\frac{2\lambda}{k_1 - m_1\omega_\pm^2} = \frac{2\lambda}{m_1\omega_\pm^2 - k_1} = \frac{2\lambda}{m_1\left(\omega_\pm^2 - \frac{k_1}{m_1}\right)} \Rightarrow \frac{a_{1\pm}}{a_{2\pm}} = \frac{2\lambda/m_1}{\omega_\pm^2 - \omega_1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_{1\pm}}{a_{2\pm}} = \frac{2\lambda/m_1}{\frac{1}{2}\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)^2 + \frac{4\lambda^2}{m_1m_2}} - \omega_1^2} = \frac{2\lambda/m_1}{\frac{1}{2}\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)^2 + \frac{4\lambda^2}{m_1m_2}}}$$

Επομένως έχουμε τους λόγους των απομακρύνσεων των σφαιρών του συστήματος για κάθε συχνότητα του κανονικών τρόπων ταλάντωσης. Τα ιδιοδιανύσματα θα είναι επομένως (με μια σταθερά αναλογίας που δεν ενδιαφέρει να βρούμε στο παρόν πρόβλημα):

$$n_\pm = \begin{pmatrix} 2\lambda/m_1 \\ \omega_\pm^2 - \omega_1^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{n_\pm = \begin{pmatrix} 2\lambda/m_1 \\ \frac{1}{2}\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)^2 + \frac{4\lambda^2}{m_1m_2}} \end{pmatrix}}$$

(δ) Εφόσον έχουμε τα ιδιοδιανύσματα μπορούμε να δούμε για την ικανοποίηση της συνθήκης ορθοκανονικότητας. Αρχικά με τον πίνακα του δυναμικού

$n_+^T [V] n_- = 0$ αυτό πρέπει να αποδειχθεί:

$$\left(2\lambda/m_1\,,\ \frac{1}{2}\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)^2 + \frac{4\lambda^2}{m_1m_2}}\right)\begin{pmatrix} k_1 & 2\lambda \\ 2\lambda & k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\lambda/m_1 \\ \frac{1}{2}\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)^2 + \frac{4\lambda^2}{m_1m_2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(2\lambda \overbrace{\cancel{\frac{k_1}{m_1}}}^{\omega_1^2} + \lambda\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right) + 2\lambda\sqrt{\frac{1}{4}\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)^2 + \frac{4\lambda^2}{m_1m_2}}\,,\ 4\lambda^2/m_1 + \frac{k_2}{2}\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right) + k_2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)^2 + 4\lambda^2/m_1m_2}\right) \times$$

$$\begin{pmatrix} 2\lambda/m_1 \\ \frac{1}{2}\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)^2 + 4\lambda^2/m_1m_2} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow n_+^T[V]n_- = \frac{4\lambda^2}{m_1}\omega_1^2 + \frac{2\lambda^2}{m_1}(\omega_2^2-\omega_1^2) + \cancel{\frac{4\lambda^2}{m_1}\sqrt{\frac{1}{4}(\omega_1^2-\omega_2^2)^2+\frac{4\lambda^2}{m_1m_2}}} \; +$$

$$+ \frac{4\lambda^2}{2m_1}(\omega_2^2-\omega_1^2) + \frac{k_2}{4}(\omega_2^2-\omega_1^2)^2 - k_2\left(\frac{1}{4}(\omega_1^2-\omega_2^2)^2+\frac{4\lambda^2}{m_1m_2}\right) -$$

$$- \cancel{\frac{4\lambda^2}{m_1}\sqrt{\frac{1}{4}(\omega_1^2-\omega_2^2)^2+\frac{4\lambda^2}{m_1m_2}}} - \cancel{\frac{k_2}{2}(\omega_2^2-\omega_1^2)\sqrt{\frac{1}{4}(\omega_1^2-\omega_2^2)^2+\frac{4\lambda^2}{m_1m_2}}} \; +$$

$$+ \cancel{\frac{k_2}{2}(\omega_2^2-\omega_1^2)\sqrt{\frac{1}{4}(\omega_1^2-\omega_2^2)^2+\frac{4\lambda^2}{m_1m_2}}} \; =$$

$$= 4\frac{\lambda^2\omega_1^2}{m_1} + \frac{2\lambda^2}{m_1}\omega_2^2 - \frac{2\lambda^2}{m_1}\omega_1^2 + \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\lambda^2}{\cancel{2}m_1}\omega_2^2 - \frac{2\lambda^2}{m_1}\omega_1^2 - \frac{4\lambda^2\cancelto{\omega_2^2}{k_2}}{m_1\cancel{m_2}} =$$

$$= 4\frac{\lambda^2}{m_1}\omega_1^2 - 4\frac{\lambda^2}{m_1}\omega_1^2 + 4\frac{\lambda^2}{m_1}\omega_2^2 - 4\frac{\lambda^2}{m_1}\omega_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{n_+^T[V]n_- = 0}$$ $n_\pm$ ορθοκανονικά ως προς $[V]$

(ε) Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για τον πίνακα $[T]$.

$$n_+^T[T]n_- = \left(\frac{2\lambda}{m_1},\ \frac{1}{2}(\omega_2^2-\omega_1^2)+\sqrt{\frac{1}{4}(\omega_1^2-\omega_2^2)^2+\frac{4\lambda^2}{m_1m_2}}\right)\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\lambda/m_1 \\ \frac{1}{2}(\omega_2^2-\omega_1^2)-\sqrt{\frac{1}{4}(\omega_1^2-\omega_2^2)^2+\frac{4\lambda^2}{m_1m_2}} \end{pmatrix}$$

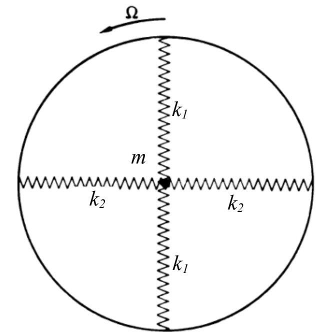
$$\Rightarrow n_+^T[T]n_- = \left(2\lambda,\ \frac{m_2}{2}(\omega_2^2-\omega_1^2)+m_2\sqrt{\frac{1}{4}(\omega_1^2-\omega_2^2)^2+\frac{4\lambda^2}{m_1m_2}}\right)\begin{pmatrix} 2\lambda/m_1 \\ \frac{1}{2}(\omega_2^2-\omega_1^2)-\sqrt{\frac{1}{4}(\omega_1^2-\omega_2^2)^2+\frac{4\lambda^2}{m_1m_2}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow n_+^T[T]n_- = 4\frac{\lambda^2}{m_1} + \frac{m_2}{4}(\omega_2^2-\omega_1^2)^2 - m_2\left(\frac{1}{4}(\omega_1^2-\omega_2^2)^2+\frac{4\lambda^2}{m_1m_2}\right) + \cancel{\frac{m_2}{2}(\omega_2^2-\omega_1^2)\sqrt{\frac{1}{4}(\omega_1^2-\omega_2^2)^2+\frac{4\lambda^2}{m_1m_2}}}$$

$$- \cancel{\frac{m_2}{2}(\omega_2^2-\omega_1^2)\sqrt{\frac{1}{4}(\omega_1^2-\omega_2^2)^2+4\lambda^2/m_1m_2}} = 4\frac{\lambda^2}{m_1} - 4\cancel{m_2}\frac{\lambda^2}{m_1\cancel{m_2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{n_+^T[T]n_- = 0}$$ $n_\pm$ ορθοκανονικά ως προς $[T]$

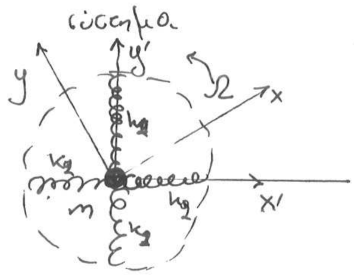
**3.** Θεωρήστε μια μάζα *m*, η οποία είναι στερεωμένη σε ένα δίσκο με την βοήθεια ελατηρίων, οι σταθερές των οποίων είναι $k_1$ και $k_2$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο δίσκος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα Ω. Η μάζα κινείται στο επίπεδο του δίσκου. Δείξτε ότι το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο με ένα 2-Δ αρμονικό ταλαντωτή φορτίου *e*, που κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ μέσα σε μαγνητικό δυναμικό $\vec{A}$.




<u>*Υποδείξεις:*</u> Θα σας βοηθήσει να ορίσετε το μαγνητικό δυναμικό να είναι $\vec{A} = \frac{1}{2}B\left(-y, x, 0\right)$ και να θυμηθείτε ότι η δυναμική ενέργεια $U = -e\vec{A}\cdot\vec{\upsilon}$ δίνει την δύναμη Lorentz απουσία ηλεκτρικού πεδίου.

Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων Oxy με κέντρο το κέντρο του δίσκου και στερεωμένο πάνω στο δίσκο. Το σύστημα αυτό είναι μη αδρανειακό καθώς ο δίσκος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα Ω.

Θεωρούμε επίσης το σύστημα Ox'y' με σταθερούς άξονες το οποίο είναι αδρανειακό σύστημα.




Μπορούμε να γράψουμε την ταχύτητα του σώματος σαν:

$$\left.\begin{aligned} \vec{V}_{\alpha\delta\rho} &= \vec{V}_{\sigma\chi\varepsilon\tau} + \vec{\omega}\times\vec{r} \\ \vec{V}_{\sigma\chi\varepsilon\tau} &= \dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y \\ \vec{\omega} &= \vec{\Omega} = \Omega\hat{e}_z \\ \vec{r} &= x\hat{e}_x + y\hat{e}_y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\vec{V}_{\alpha\delta} = (\dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y) + \vec{\Omega}\times\vec{r} \Rightarrow \\ &\Rightarrow V^2 = \vec{V}_{\alpha\delta\rho}\cdot\vec{V}_{\alpha\delta\rho} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v^2 = \left[(\dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y) + \vec{\Omega}\times\vec{r}\right]\cdot\left[(\dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y) + \vec{\Omega}\times\vec{r}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2(\dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y)\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{r}) + (\vec{\Omega}\times\vec{r})^2 \qquad (1)$$

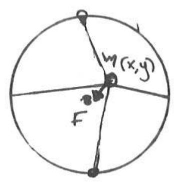
Εξετάζουμε τα εσωτερικά γινόμενα:

$$\vec{\Omega}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 0 & 0 & \Omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = -\Omega y\hat{e}_x + \Omega x\hat{e}_y \qquad (2)$$

$$(\vec{\Omega}\times\vec{r})^2 = (\vec{\Omega}\times\vec{r})\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{r}) = (-\Omega y\hat{e}_x + \Omega x\hat{e}_y)\cdot(-\Omega y\hat{e}_x + \Omega x\hat{e}_y) = \Omega^2 y^2 + \Omega^2 x^2 \quad (3)$$

$$(\vec{\Omega}\times\vec{r})\cdot(\dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y) = (-\Omega y\hat{e}_x + \Omega x\hat{e}_y)\cdot(\dot{x}\hat{e}_x + \dot{y}\hat{e}_y) = -\Omega(\dot{x}y - \dot{y}x) \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας τις (2), (3), (4) στην (1): $\boxed{v^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2\Omega(\dot{x}y - \dot{y}x) + \Omega^2(x^2 + y^2)}$




Η δύναμη επαναφοράς που ασκείται στην μάζα m όταν αυτή βρίσκεται σε μια θέση με διάνυσμα $\vec{r} = (x, y)$ θα είναι: $\vec{F} = -k'\vec{r} = -F_x \hat{e}_x - F_y \hat{e}_y$

$$\left.\begin{array}{l} F_x = -k_2 x \\ F_y = -k_1 y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} U_x = \frac{1}{2} k_2 x^2 \\ U_y = \frac{1}{2} k_1 y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow U_{ελ} = \frac{1}{2} k_2 x^2 + \frac{1}{2} k_1 y^2$$

Η Lagrangian του συστήματος θα είναι:

$$\mathcal{L}_{μηχ} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2}\left(k_2 x^2 + k_1 y^2\right) = \frac{m}{2} v^2 - \frac{m}{2}\left(\frac{k_2}{m} x^2 + \frac{k_1}{m} y^2\right)$$ ορίζουμε $\boxed{\omega_{01}^2 = \frac{k_1}{m}}$ και $\boxed{\omega_{02}^2 = \frac{k_2}{m}}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{μηχ} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - m\Omega\left(\dot{x} y - \dot{y} x\right) + \frac{m}{2}\Omega^2\left(x^2 + y^2\right) - \frac{m}{2}\left(\omega_{02}^2 x^2 + \omega_{01}^2 y^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{μηχ} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - m\Omega\left(\dot{x} y - \dot{y} x\right) - \frac{m}{2}\left[\left(\omega_{02}^2 - \Omega^2\right) x^2 + \left(\omega_{01}^2 - \Omega^2\right) y^2\right]$$

Θέτουμε $\boxed{\omega_1^2 = \omega_{01}^2 - \Omega^2}$ και $\boxed{\omega_2^2 = \omega_{02}^2 - \Omega^2}$ οπότε καταλήγουμε:

$$\boxed{\mathcal{L}_{μηχ} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - m\Omega\left(\dot{x} y - \dot{y} x\right) - \frac{m}{2}\left(\omega_2^2 x^2 + \omega_1^2 y^2\right)} \quad (A)$$

Για την περίπτωση του 2-Δ φορτισμένου αρμονικού ταλαντωτή σε μαγνητικό πεδίο, θα έχουμε:

$$\mathcal{L}_{em} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2}\left(k_2 x^2 + k_1 y^2\right) + e\vec{A}\cdot\vec{v}$$ όπου χρησιμοποιήσαμε τον όρο της $U_{ελ}$

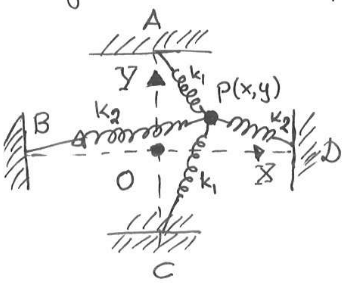
$$\left.\begin{array}{l} \text{Αλλά } \vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} \\ \text{και } \vec{A} = -\frac{B}{2} y \hat{i} + \frac{B}{2} x \hat{j} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{A} = -\frac{B}{2}\dot{x} y + \frac{B}{2} x \dot{y}$$

Επομένως η Lagrangian γράφεται: $\mathcal{L}_{em} = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}\left(k_2 x^2 + k_1 y^2\right) - \frac{eB}{2}\left(\dot{x} y - \dot{y} x\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}_{em} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{m}{2}\left(\omega_{02}^2 x^2 + \omega_{01}^2 y^2\right) - m\Omega\left(\dot{x} y - \dot{y} x\right)}$$ όπου $\boxed{m\Omega = \frac{eB}{2}}$

Από τη σύγκριση των δύο Lagrangian φαίνεται ότι είναι ίδιες με μια μικρή διαφορά στις συχνότητες ταλάντωσης.

Μερικά σχόλια σχετικά με την δυναμική ενέργεια των ελατηρίων που ωστόσο δεν χρειάζονται για την λύση του προβλήματος.




Όπως και πριν για χάρη ευκολίας θα θεωρήσουμε ότι τα ελατήρια έχουν το ίδιο φυσικό μήκος $l_0$, και ότι η μάζα βρίσκεται στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων για θέση ισορροπίας.

Θεωρώ ότι σε κάποια τυχαία χρονική στιγμή η μάζα βρίσκεται στη θέση P.(x,y)

Εξετάζουμε αρχικά στην οριζόντια διεύθυνση:

$$BP=\sqrt{(BO+x)^2+y^2}=\sqrt{(l_0+x)^2+y^2}=l_0\sqrt{\left(1+\frac{x}{l_0}\right)^2+\left(\frac{y}{l_0}\right)^2} \Rightarrow BP=l_0\sqrt{1+\underbrace{2\frac{x}{l_0}+\frac{x^2+y^2}{l_0^2}}_{\varepsilon}} \Rightarrow$$

Αναπτύσσω $\left(1+\frac{x}{l_0}\right)^2=\left(1+2\frac{x}{l_0}+\frac{x^2}{l_0^2}\right)$

$\Rightarrow$ Ανάπτυγμα Taylor της τελευταίας θα δώσει: $BP\simeq l_0\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{l_0}+\frac{x^2+y^2}{l_0^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{2x}{l_0}\right)^2\cdots\right]$

Αγνοούμε όρους υψηλότερης τάξης της $2^{ης}$ ως προς x,y. Επομένως θα πάρουμε:

ο όρος $\frac{1}{8}\left(\frac{2x}{l_0}\right)^2$ αναιρείται με τον όρο $\frac{1}{2}\frac{x^2}{l_0^2}$

$$BP\simeq l_0\left[1+\frac{x}{l_0}+\frac{y^2}{2l_0^2}\right] \Rightarrow \boxed{BP\simeq l_0+x+\frac{y^2}{2l_0}} \quad (A)$$

Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε την $\boxed{PD\simeq l_0-x+\frac{y^2}{2l_0}}$ (B)

Για την y-διεύθυνση αντικαθιστούμε στον υπολογισμό AP το $x\leftrightarrow y$ οπότε θα πάρουμε:

$\boxed{AP\simeq l_0-y+\frac{x^2}{2l_0}}$ (C) και ανάλογα $\boxed{PC\simeq l_0+y+\frac{x^2}{2l_0}}$ (D)

Με βάση τις σχέσεις (A), (B), (C) και (D) η δυναμική ενέργεια του συστήματος

$$U_{ολ}=U_1+U_2+U_3+U_4=\frac{1}{2}k_2(BP-l_0)^2+\frac{1}{2}k_2(PD-l_0)^2+\frac{1}{2}k_1(AP-l_0)^2+\frac{1}{2}k_1(PC-l_0)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{ολ}=\frac{1}{2}k_2\left[x+\frac{y^2}{2l_0}\right]^2+\frac{1}{2}k_2\left[-x+\frac{y^2}{2l_0}\right]^2+\frac{1}{2}k_1\left[-y+\frac{x^2}{2l_0}\right]^2+\frac{1}{2}k_1\left[+y+\frac{x^2}{2l_0}\right]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_{ολ}=\frac{1}{2}k_2\left(x^2+y^4/4l_0^2+\frac{2xy^2}{2l_0}\right)+\frac{1}{2}k_2\left(x^2+\frac{y^4}{4l_0^2}-\frac{2xy^2}{2l_0}\right)+\frac{1}{2}k_1\left(y^2+\frac{x^4}{4l_0^2}-\frac{2x^2y}{2l_0}\right)+\frac{1}{2}k_1\left[y^2+\frac{x^4}{4l_0^2}+\frac{2x^2y}{2l_0}\right]$$

Αγνοώντας και πάλι όρους σε x y μεγαλύτερης της $3^{ης}$ τάξης θα έχουμε:

$$U_{ολ}\simeq\frac{1}{2}k_2x^2+\frac{1}{2}k_2x^2+\frac{1}{2}k_1y^2+\frac{1}{2}k_1y^2 \Rightarrow \boxed{U_{ολ}\simeq\frac{1}{2}\left(2k_2x^2+2k_1y^2\right)}$$

**4.** Το κέντρο μιας μικρής σφαίρας ακτίνας $R$, βρίσκεται στο μέσο του ακόλουθου δυναμικού: $U(r) = -\frac{a}{r^n}$, όπου $n > 2$ και $a > 0$.

(α) Βρείτε το ενεργό δυναμικό. [**2μ**]

(β) Σχεδιάσετε το ενεργό δυναμικό και πως αλλάζει για διάφορες τιμές της στροφορμής. [**3μ**]

(γ) Για δεδομένη ενέργεια *E,* βρείτε το μέγιστο του ενεργού δυναμικού. Προσέξτε ότι δίνεται η ενέργεια και όχι η τιμή της στροφορμής. [**6μ**]

(δ) Βρείτε τη συνθήκη για την τιμή της παραμέτρου κρούσης για κάθε περίπτωση κίνησης που εξετάζετε. [**4μ**]

(ε) Υπολογίστε την ολική ενεργό διατομή σκέδασης της σφαίρας για δυο περιπτώσεις:

(i) $R < r_m$ [**4μ**] και (ii) $R > r_m$ [**6μ**], όπου $r_m$ η τιμή που το ενεργό δυναμικό είναι μέγιστο.

(a) Μας δίνεται το δυναμικό $U(r) = -\frac{a}{r^n}$ όπου $n>2$

Επομένως το ενεργό δυναμικό θα είναι: $U_{eff}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{a}{r^n}$

(b) Εφόσον $n>2$ αυτό σημαίνει ότι καθώς $r\to 0$ ο όρος $\frac{a}{r^n} \to -\infty$ πολύ πιο γρήγορα από τον όρο $\frac{\ell^2}{2mr^2} \to +\infty$. Επομένως για $r\to 0$ $U_{eff}(r) \to -\infty$

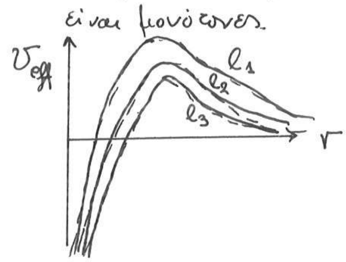
Η συμπεριφορά του δυναμικού $\frac{a}{r^n}$ καθώς $r\to\infty$ είναι να πλησιάσει στο 0

Αυτή την φορά όμως ο όρος $\ell^2/2mr^2 \to 0$ πολύ πιο αργά από τον $\frac{a}{r^n}$

Το φυγοκεντρικό δυναμικό είναι θετικό $\frac{\ell^2}{2mr^2}$ επομένως για $r\to\infty$ το ενεργό δυναμικό τείνει στο $\emptyset$ με θετικές τιμές.

Στην ενδιάμεση περιοχή καθώς το $r$ μεταβάλλεται από $0\to\infty$, το ενεργό δυναμικό αλλάζει από αρνητικές τιμές σε θετικές για να ελαττωθεί σε $r\to\infty$ στο $\emptyset$.

Επομένως θα πρέπει να παρουσιάζει ένα μέγιστο μόνο, αφού οι δυο επιμέρους συναρτήσεις είναι μονότονες.




Για διαφορετικές τιμές της στροφορμής $\ell$, θα έχουμε και διαφορετικές καμπύλες του ενεργού δυναμικού

(γ) Για να βρούμε το μέγιστο του $U_{eff}$ χρειάζεται να βρούμε αρχικά την θέση, $r$, στην οποία παρουσιάζεται το μέγιστο. Αυτό γιατί δεν γνωρίζουμε την τιμή της στροφορμής η οποία καθορίζει το ύψος της καμπύλης του $U_{eff}$. Η στροφορμή $\vec{\ell} = \vec{r}\times\vec{p}$ εξαρτάται από την ενέργεια του σώματος και την παράμετρο πρόσκρουσης $b$ ($\ell = r\cdot\sin\theta p = bp$)

Η μηχανική ενέργεια διατηρείται και επομένως $E_{κιν} = E_{μηχ}$ για $r=\infty$. Επομένως θα έχουμε:

$$l = m v b \Rightarrow l^2 = m^2 v^2 b^2 \Rightarrow l^2 = 2E_{κιν} m b^2 \Rightarrow \boxed{l^2 = 2Emb^2} \quad (1)$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση του ενεργού δυναμικού δίνει: $V_{eff} = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{a}{r^n} \Rightarrow \boxed{V_{eff} = \frac{Eb^2}{r^2} - \frac{a}{r^n}}$ (2)

Το μέγιστο του ενεργού δυναμικού θα είναι στην θέση όπου $\frac{dV_{eff}}{dr} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dV_{eff}(r)}{dr} = -\frac{2Eb^2}{r^3} + \frac{na}{r^{n+1}} = 0 \Rightarrow \frac{na r_{max}^3 - r_{max}^{n+1} 2Eb^2}{r_{max}^{n+4}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow na r_{max}^3 - r_{max}^{n+1} 2Eb^2 = 0 \Rightarrow \boxed{na r_{max}^3 = r_{max}^{n+1} 2Eb^2} \ (3) \Rightarrow \boxed{r_{max} = \left(\frac{na}{2Eb^2}\right)^{1/n-2}} \ (4)$$

Αντικατάσταση της (4) στην (2) θα δώσει:

$$V_{eff}(r=r_{max}) = V_{eff}^{max} = \frac{Eb^2}{r_{max}^2} - \frac{a}{r_{max}^n} = \frac{Eb^2 r_{max}^n - a r_{max}^2}{r_{max}^{n+2}} \Bigg\} \Rightarrow V_{eff}^{max} = \frac{\frac{1}{2} na r_{max}^2 - a r_{max}^2}{r_{max}^{n+2}} \Rightarrow$$

Από την (3) έχουμε: $\frac{1}{2} na r_{max}^2 = Eb^2 r_{max}^n$

$$\Rightarrow V_{eff}^{max} = \frac{\left(\frac{1}{2}n - 1\right)a}{r_{max}^n} \Rightarrow V_{eff}^{max} = \frac{1}{2}(n-2)a \frac{1}{\left(\frac{na}{2Eb^2}\right)^{n/n-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{eff}^{max} = \frac{1}{2}(n-2)a \left(\frac{2Eb^2}{na}\right)^{n/n-2}} \quad (5)$$

(δ) Η μορφή του ενεργού δυναμικού σε συνδυασμό με την ενέργεια ενός σώματος, επιτρέπει δυο είδη κίνησης. Συγκεκριμένα:

(1) Αν $E < V_{eff}^{max}$ τότε οποιοδήποτε σώμα που προσπίπτει θα σκεδαστεί από το δυναμικό

(2) Αν $E > V_{eff}^{max}$ τότε οποιοδήποτε σώμα που πλησιάζει το δυναμικό μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση, $r$, και επομένως το προσπίπτον σώμα θα περάσει από το κέντρο του δυναμικού. Επομένως για να συμβεί αυτό, θα πρέπει $E > V_{eff}^{max}$

Σύμφωνα με την (5), αυτό βάζει περιορισμούς στην τιμή της παραμέτρου πρόσκρουσης.

Θα έχουμε: $E > \frac{1}{2} a(n-2)\left(\frac{2Eb^2}{na}\right)^{n/n-2} \Rightarrow \frac{2E}{a(n-2)} > \left(\frac{2Eb^2}{na}\right)^{n/n-2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{2E}{a(n-2)}\right)^{n-2/n} > \frac{2Eb^2}{na} \Rightarrow b^2 < \left(\frac{na}{2E}\right)\left(\frac{2E}{a(n-2)}\right)^{n-2/n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 < n(n-2)^{-\left(\frac{n-2}{n}\right)}\left(\frac{a}{2E}\right)\left(\frac{2E}{a}\right)^{\frac{n-2}{n}} \Rightarrow b^2 < n(n-2)^{-\left(\frac{n-2}{n}\right)}\left(\frac{a}{2E}\right)\left(\frac{2E}{a}\right)^{1-2/n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 < n(n-2)^{-(n-2)/n}\left(\frac{2E}{a}\right)^{-2/n} \Rightarrow \boxed{b^2 < n(n-2)^{-(n-2)/n}\left(\frac{a}{2E}\right)^{2/n} = b_0^2} \quad (6)$$

Η συνθήκη επομένως για κάποιο προσπίπτον σωματίδιο ενέργειας $E > V_{eff}^{max}$ για να πέσει στο κέντρο του δυναμικού είναι η παράμετρος πρόσκρουσης $\boxed{b^2 < b_0^2}$

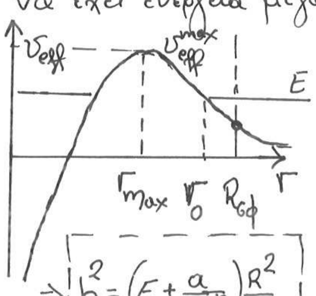
(ε) Για να συγκρουστούν προσπίπτοντα σωματίδια με την σφαίρα που βρίσκεται στο κέντρο του δυναμικού ($r=0$) υπάρχουν δύο περιπτώσεις που θα πρέπει να εξετάσουμε

(1) Αν η ακτίνα της σφαίρας είναι μικρότερη από την ακτίνα που παρουσιάζεται η μέγιστη τιμή του ενεργού δυναμικού, $R_{σφ} < r_{max}$, τα προσπίπτοντα σωματίδια θα πρέπει να έχουν $E > V_{eff}^{max}$ και $b^2 < b_0^2$ ώστε να περάσουν από το κέντρο του δυναμικού.

Στην προκειμένη περίπτωση η ολική ενεργός διατομή σκέδασης θα είναι:

$$σ_{TOT} = \int_0^{b_0} 2\pi b\,db = 2\pi \left.\frac{b^2}{2}\right|_0^{b_0} \Rightarrow \boxed{σ_{TOT} = \pi b_0^2}$$

(2) Αν η ακτίνα της σφαίρας είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα που παρουσιάζεται το μέγιστο του ενεργού δυναμικού, τότε το προσπίπτον σωματίδιο δεν είναι απαραίτητο να έχει ενέργεια μεγαλύτερη από το μέγιστο του ενεργού δυναμικού $V_{eff}^{max}$.




Στην περίπτωση αυτή για να χτυπήσουμε την σφαίρα, θα πρέπει η ενέργεια του σωματιδίου να είναι αρκετά μεγάλη ώστε να τέμνει την καμπύλη του ενεργού δυναμικού σε ακτίνα $r_0 \leq R_{σφ}$ (όπως φαίνεται στο σχήμα). Στην οριακή περίπτωση $r_0 = R_{σφ} \Rightarrow E = V_{eff}(r=R_{σφ}) \Rightarrow E = \frac{Eb^2}{R_{σφ}^2} - \frac{a}{R_{σφ}^n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{b^2 = \left(E + \frac{a}{R_{σφ}^n}\right)\frac{R^2}{E}}$$

Για παράμετρο πρόσκρουσης μικρότερη αυτής θα έχουμε σκέδαση.

Όπως και πριν, η ολική ενεργός διατομή σκέδασης θα είναι: $σ_{TOT} = \int_0^{b_0} 2\pi b\,db = \pi b\Big|_0^{b_0} \Rightarrow \boxed{σ_{TOT} = \pi R_{σφ}^2\left(1 + \frac{a}{E R_{σφ}^n}\right)}$