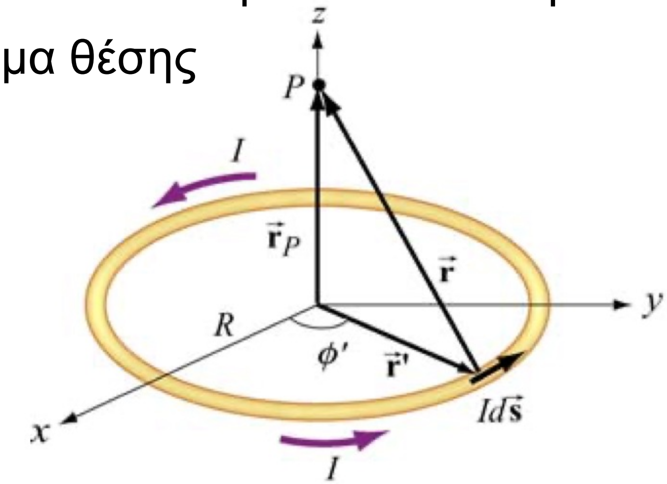
Πηγές Μαγνητικών Πεδίων

Μαγνητικό πεδίο κυκλικού βρόχου

Θεωρούμε κυκλικό βρόχο ακτίνας *R* που διαρρέεται από ρεύμα *I*. Θα βρούμε το μαγνητικό πεδίο σε σημείο *P* στον άξονα συμμετρίας σε απόσταση *z* από το κέντρο



Όπως πριν, το στοιχειώδες ρεύμα βρίσκεται σε διάνυσμα θέσης

$$\vec{r}' = R(cos\varphi\hat{\imath} + sin\varphi\hat{\jmath})$$

και μπορεί να γραφεί ως:

$$Id\vec{s} = I\frac{d\vec{r}'}{d\varphi'}d\varphi' = IRd\varphi'(-sin\varphi'\hat{\imath} + cos\varphi'\hat{\jmath})$$

Το διάνυσμα θέσης του σημείου *P* είναι: $\vec{r}_P = z\hat{k}$

Το διάνυσμα της σχετικής θέσης του σημείου *P* είναι ως προς την πηγή είναι:

$$\vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}' = -Rcos\varphi'\hat{\imath} - Rsin\varphi'\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

Το μέτρο του είναι: $|\vec{r}| = \sqrt{R^2 + z^2}$

και το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα είναι: $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}_P - \vec{r}'}{|\vec{r}_P - \vec{r}'|}$

Μπορούμε να γράψουμε το εξωτερικό γινόμενο $d\vec{s}\times(\vec{r}_P - \vec{r}')$ με τη μορφή:

$$d\vec{s}\times(\vec{r}_P - \vec{r}') = Rd\varphi'(-sin\varphi'\hat{\imath} + cos\varphi'\hat{\jmath})\times\left[-Rcos\varphi'\hat{\imath} - Rsin\varphi'\hat{\jmath} + z\hat{k}\right] \Rightarrow$$

$$d\vec{s}\times(\vec{r}_P - \vec{r}') = Rd\varphi'\left[zcos\varphi'\hat{\imath} + zsin\varphi'\hat{\jmath} + Rsin^2\varphi'\hat{k} + Rcos^2\varphi'\hat{k}\right] \Rightarrow$$

Μαγνητικό πεδίο κυκλικού βρόχου

Επομένως: $d\vec{s}\times(\vec{r}_P-\vec{r}\,')= Rd\varphi'\left[zcos\varphi'\hat{\imath}+zsin\varphi'\hat{\jmath}+R\hat{k}\right]$

Η συνεισφορά του στοιχειώδους ρεύματος στο μαγνητικό πεδίο στο σημείο *P*, σύμφωνα με τον νόμο του Biot-Savart:

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\vec{r}}{r^3}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times(\vec{r}_P-\vec{r}\,')}{[\vec{r}_P-\vec{r}\,']^3}\Rightarrow$$

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0 IR}{4\pi}\frac{\left[zcos\varphi'\hat{\imath}+zsin\varphi'\hat{\jmath}+R\hat{k}\right]}{(R^2+z^2)^{3/2}}d\varphi'$$

Η ολοκλήρωση της προηγούμενης σχέσης για όλο το μήκος του κυκλικού βρόχου:

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left[zcos\varphi'\hat{\imath}+zsin\varphi'\hat{\jmath}+R\hat{k}\right]}{(R^2+z^2)^{3/2}}d\varphi'$$

Οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου στη *x* και *y* διεύθυνση είναι:

$$\vec{B}_x=\frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{zcos\varphi'\hat{\imath}}{(R^2+z^2)^{3/2}}d\varphi'\Rightarrow\vec{B}_x=\frac{\mu_0 IR}{4\pi}\frac{z\hat{\imath}}{(R^2+z^2)^{3/2}}\;sin\varphi'\Big|_0^{2\pi}\Rightarrow\qquad\vec{B}_x=\vec{0}$$

$$\vec{B}_y=\frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{zsin\varphi'\hat{\jmath}}{(R^2+z^2)^{3/2}}d\varphi'\Rightarrow\vec{B}_x=-\frac{\mu_0 IR}{4\pi}\frac{z\hat{\jmath}}{(R^2+z^2)^{3/2}}\;cos\varphi'\Big|_0^{2\pi}\Rightarrow\quad\vec{B}_y=\vec{0}$$

Μαγνητικό πεδίο κυκλικού βρόχου

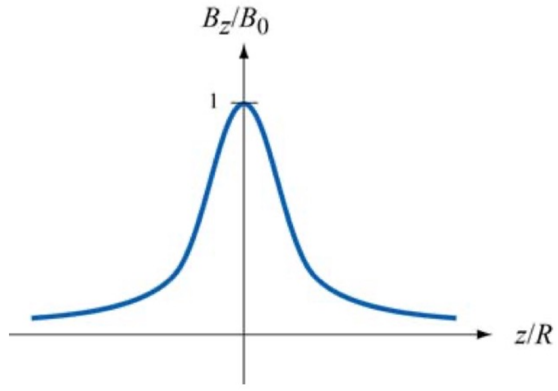
Η z-συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου θα είναι:

$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0 I R}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R\hat{k}}{(R^2+z^2)^{3/2}} d\varphi' \Rightarrow \vec{B}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} \hat{k} d\varphi' \Rightarrow \boxed{\vec{B}_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}}$$

Κατά μήκος του άξονα συμμετρίας, η z-συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου, είναι η μόνη συνιστώσα που δεν μηδενίζεται.

Αν θεωρήσουμε το μαγνητικό πεδίο για $z = 0$ τότε θα έχουμε: $B_0 = \mu_0 I/(2R)$.

Μπορούμε να κάνουμε το γράφημα B_z/B_0 συναρτήσει του λόγου R/z



Μαγνητικό Δίπολο Μαγνητικό πεδίο κυκλικού βρόχου

Θεωρούμε ότι ένα μαγνητικό δίπολο, $\vec{\mu} = \mu_z \hat{k}$, εισάγεται στο μαγνητικό πεδίο στο σημείο *P.*

Εξαιτίας της ανομοιογένειας του μαγνητικού πεδίου, στο μαγνητικό δίπολο θα εξασκείται δύναμη, που είναι:

$$\vec{F}_B = \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \Rightarrow \vec{F}_B = \vec{\nabla}(\mu_z B_z) \Rightarrow \vec{F}_B = \mu_z \left(\frac{dB_z}{dz}\right) \hat{k}$$

Παραγώγιση της $\vec{B}_z = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{k}$ ως προς z

$$\Rightarrow \vec{F}_B = -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 \mu_z I R^2 z}{(R^2 + z^2)^{5/2}} \hat{k}$$

Παρατηρούμε, ότι το μαγνητικό δίπολο έλκεται προς τον βρόχο που διαρρέεται από ρεύμα

Αν αντιστρέψουμε τη διεύθυνση του μαγνητικού δίπολου ($\vec{\mu} = -\mu_z \hat{k}$) τότε η δύναμη που ασκείται από το βρόχο γίνεται απωστική

Μαγνητικό πεδίο εξαιτίας κινούμενου φορτίου

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα απειροστό στοιχείο ρεύματος σε μορφή κυλίνδρου, μήκους *ds* και επιφάνειας διατομής *A*. Το ρεύμα αυτό που περιέχει *n* φορείς φορτίου ανά μονάδα όγκου, κινούμενοι όλοι με ταχύτητα $\vec{v}$ κατά μήκος του άξονα του κυλίνδρου.

Έστω *I* το ρεύμα που δημιουργείται εξαιτίας της διέλευσης φορτίου από την διατομή του κυλίνδρου ανά μονάδα χρόνου. Όπως ξέρουμε το ρεύμα γράφεται: $I = nAq|\vec{v}|$.

Ο συνολικός αριθμός φορέων φορτίου στο στοιχειώδες τμήμα του ρεύματος θα είναι:

$$dN = ndV = nAds$$

Το μαγνητικό πεδίο εξαιτίας των φορέων στο στοιχειώδες τμήμα ρεύματος θα είναι:

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} nAq|\vec{v}| \frac{d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} nAq \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}(nAds)q\frac{\vec{v}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} dNq \frac{\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}$$

όπου *r* είναι η απόσταση του σημείου *P* του μαγνητικό πεδίο από το φορτίο.

$\hat{r} = \vec{r}/r$ είναι η διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος από την πηγή στο σημείο *P*.

Το στοιχειώδες διαφορικό μήκος $d\vec{s}$ είναι παράλληλο με το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{v}$

Για ένα μόνο φορτίο, $dN = 1$ και η προηγούμενη εξίσωση γίνεται: $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}}$

Μαγνητικό πεδίο εξαιτίας κινούμενου φορτίου

Προσοχή: το σημειακό φορτίο δεν αποτελεί σταθερό ρεύμα και επομένως η σχέση που έχουμε γράψει ισχύει στο μη σχετικιστικό όριο όπου υ<<c,

Για περιπτώσεις όπου έχουμε μεγάλο αριθμό φορέων φορτίου, N, κινούνται με διαφορετικές ταχύτητες, υ. Έστω έχουμε το i-th φορτίο q_i το οποίο αρχικά βρίσκεται στο σημείο (v_x v_y v_z) και κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$. Από την αρχή της επαλληλίας, το μαγνητικό πεδό που λαμβάνεται:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_0}{4\pi} q\vec{v}\times\left[\frac{(x-x_i)\hat{\imath} + (y-y_i)\hat{\jmath} + (z-z_i)\hat{k}}{\{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2\}^{3/2}}\right]}$$

Δύναμη μεταξύ δύο παράλληλων συρμάτων

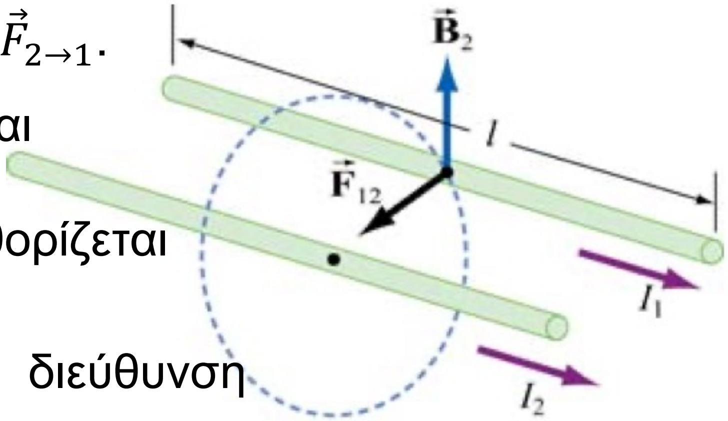
Είδαμε ότι ένα σύρμα που διαρρέεται από ρεύμα παράγει μαγνητικό πεδίο.

Επιπλέον όταν ένα σύρμα που διαρρέεται από ρεύμα τοποθετηθεί σε περιοχή που υπάρχει μαγνητικό πεδίο τότε θα αναπτυχθεί πάνω του μία δύναμη από το πεδίο

- Αναμένεται επομένως ότι δύο σύρματα που διαρρέονται από ρεύμα να ασκούν δύναμη το ένα στο άλλο.

Θεωρήστε δύο παράλληλα σύρματα με απόσταση μεταξύ τους *α*, που διαρρέονται από ρεύμα I_1 και I_2 αντίστοιχα στην +x διεύθυνση.

Ο αγωγός 2 ασκεί μαγνητική δύναμη στον αγωγό 1, $\vec{F}_{2\rightarrow 1}$.



Είδαμε ότι οι μαγνητικές γραμμές που δημιουργούνται από το ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό 2 στην +x διεύθυνση, είναι κύκλοι ομόκεντροι με φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_2$ θα δείχνει στην εφαπτομενική διεύθυνση στην κυκλική μαγνητική γραμμή.

Επομένως, σε ένα τυχαίο σημείο *P* στον αγωγό 1 θα έχουμε μαγνητικό πεδίο που είναι κάθετο στο σύρμα και θα έχει μέτρο που δίνεται από: $\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\hat{j}$

Η δύναμη θα είναι: $\vec{F}_{2\rightarrow 1} = I\vec{l}\times\vec{B}_2 \;\Rightarrow \vec{F}_{2\rightarrow 1} = I_1 l\hat{\imath}\times\left(-\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\hat{j}\right) \Rightarrow$ $\boxed{\frac{\vec{F}_{2\rightarrow 1}}{l} = \left(-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}\hat{k}\right)}$

Δύναμη μεταξύ δύο παράλληλων συρμάτων

Με παρόμοιο τρόπο, η δύναμη που δέχεται ένα μήκος l τους σύρματος 2 εξαιτίας του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί το ρεύμα που διαρρέει το σύρμα 1 θα είναι:

$$\boxed{\frac{\vec{F}_{1\to 2}}{l} = \left(\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}\hat{k}\right)}$$

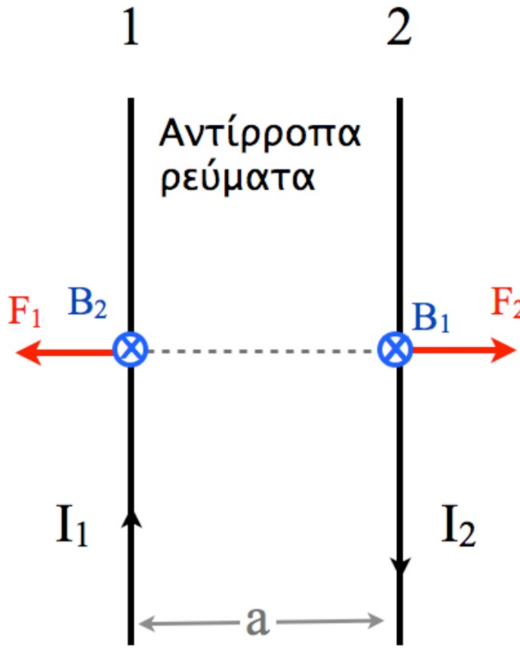
τα δύο σύρματα έλκονται με ίσες δυνάμεις ανά μονάδα μήκους.

Θεωρούμε τώρα ότι οι αγωγοί διαρρέονται από ρεύματα αντίθετης κατεύθυνσης:

Στην περίπτωση αυτή βρίσκεται εύκολα ότι οι αγωγοί απωθούνται με ίσες δυνάμεις ανά μονάδα μήκους

Εάν οι αγωγοί βρίσκονται σε απόσταση α και διαρρέονται από ίσα ρεύματα $I_1 = I_2 = I$, τότε η δύναμη αλληλεπίδρασης ανά μονάδα μήκους είναι:

$$\boxed{\frac{F}{l} = \left(\frac{\mu_0 I^2}{2\pi a}\right)}$$



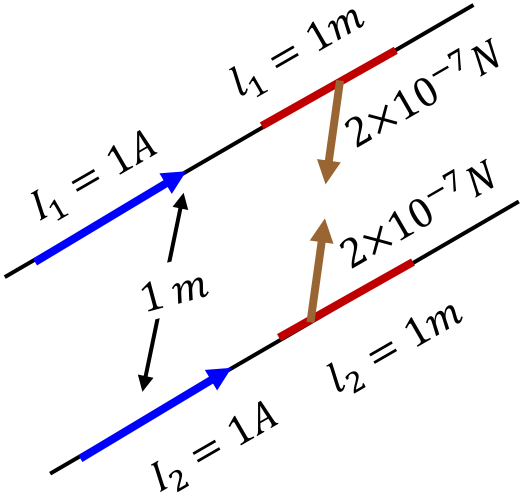
Ορισμός της μονάδας Ampere

Εφόσον $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\frac{N}{A^2}$ μπορούμε να ορίσουμε την μονάδα Ampere, με βάση την εξίσωση της δύναμης αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο αγωγών που διαρρέονται από ρεύμα

1 Ampere είναι η ένταση του συνεχούς και σταθερού ρεύματος το οποίο όταν διαρρέει δύο ευθύγραμμους παράλληλους αγωγούς, απείρου μήκους και αμελητέας διατομής που βρίσκονται σε απόσταση 1m, προκαλεί μαγνητική δύναμη μεταξύ τους η οποία είναι ίση με $2\times10^{-7}N$ ανά μέτρο μήκους.

Με βάση τον ορισμό του 1 Ampere, μπορούμε να ορίσουμε το φορτίο 1 Coulomb μέσω της σχέσης $Q = It$

1 Coulomb είναι το ηλεκτρικό φορτίο το οποίο διέρχεται από μία διατομή ενός αγωγού που διαρρέεται από ρεύμα έντασης 1 Ampere σε χρόνο 1 sec.



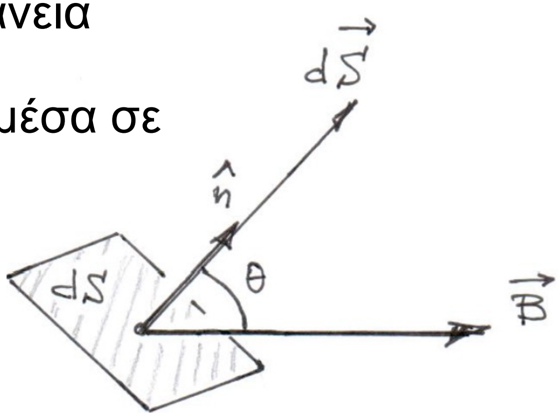
11ο Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

Έτοιμοι

Μαγνητική ροή

Το φυσικό μέγεθος της μαγνητικής ροής περιγράφει ποσοτικά το πλήθος των δυναμικών γραμμών οι οποίες διέρχονται από μια επιφάνεια



Έστω μια στοιχειώδης επιφάνεια $d\vec{S} = dS \cdot \hat{n}$ τοποθετημένη μέσα σε ομογενές, ή τοπικά ομογενές, μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$.

Ορίζουμε ως *στοιχειώδη μαγνητική ροή* $d\Phi_m$ που διέρχεται από τη στοιχειώδη επιφάνεια $d\vec{S}$, το εσωτερικό γινόμενο:

$$\boxed{d\Phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S} = BdScos\theta}$$

Η μαγνητική ροή $d\Phi_m$ γίνεται μέγιστη όταν η επιφάνεια είναι τοποθετημένη κάθετη στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου :

Η $d\Phi_m$ που διέρχεται από μια μοναδιαία επιφάνεια τοποθετημένη κάθετα στη διεύθυνση του πεδίου ισούται με το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου.

Ως αποτέλεσμα εκφράζει ποσοτικά τον αριθμό των μαγνητικών γραμμών που διέρχονται από την επιφάνεια $d\vec{S}$.

Μαγνητική ροή

Η συνολική μαγνητική ροή που διέρχεται από μια τυχαία ανοικτή επιφάνεια υπολογίζεται χωρίζοντάς την σε στοιχειώδεις επιφάνειες και ολοκληρώνοντας:

$$\boxed{\Phi_m = \int d\Phi_m = \int_S B dS cos\theta}$$

Εάν το πεδίο είναι ομογενές και η επιφάνεια επίπεδη με εμβαδό S

$$\Phi_m = B \int_S dS cos\theta = BS cos\theta$$

Μονάδα μαγνητικής ροής είναι το 1 Wb (Weber). Το 1Wb ορίζεται ως η μαγνητική ροή που διέρχεται από επίπεδη επιφάνεια εμβαδού 1m^2 τοποθετημένης σε μαγνητικό πεδίο 1T: $1Wb = 1T \cdot m^2$

Νόμος του Gauss για τον μαγνητισμό

Οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές δεν έχουν αρχή και τέλος, δηλαδή, είναι κλειστές. Αυτό συμβαίνει διότι δεν υπάρχουν μεμονωμένοι μαγνητικοί πόλοι.

Άρα, για κάθε κλειστή επιφάνεια S στο εσωτερικό ενός μαγνητικού πεδίου ο αριθμός των εισερχομένων δυναμικών γραμμών ισούται με τον αριθμό των εξερχομένων.

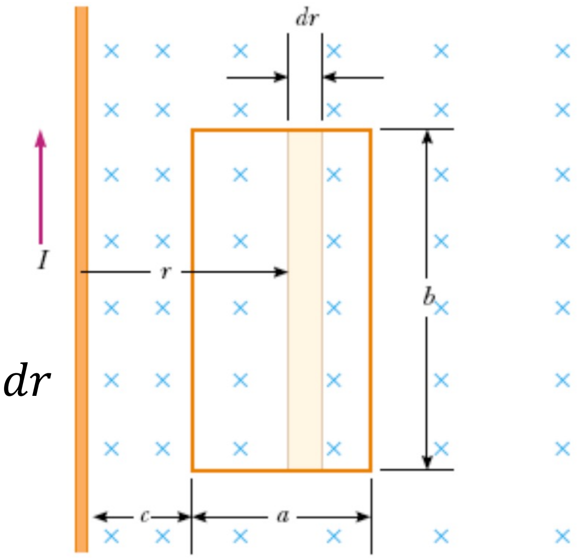
Επομένως: $$\boxed{\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0}$$

νόμος του Gauss για τον μαγνητισμό ή
θεμελιώδης νόμος μαγνητικής ροής

Ο νόμος εκφράζει την μη-ύπαρξη μεμονωμένων μαγνητικών πόλων

Παράδειγμα

Ένας ευθύγραμμος αγωγός διαρρέεται από συνεχές σταθερό ρεύμα έντασης I. Ποια η μαγνητική ροή που διέρχεται από ένα ορθογώνιο πλαίσιο πλάτους α και μήκους b σε απόσταση c από τον αγωγό. Ο αγωγός βρίσκεται στο επίπεδο του πλαισίου.



Το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ είναι συνάρτηση της απόστασης r από τον αγωγό:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

Χωρίζουμε το περίγραμμα σε στοιχειώδη εμβαδά: $dS = bdr$

Η στοιχειώδης ροή που περνά από κάθε στοιχειώδη επιφάνεια dS είναι:

$$d\Phi_m = BdS = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}bdr = \frac{\mu_0}{2\pi}Ib\frac{dr}{r}$$

Επομένως, η συνολική μαγνητική ροή είναι:

$$\Phi_m = \int d\Phi_m = \frac{\mu_0}{2\pi}Ib\int_c^{c+a}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi}Ib\,ln\left(\frac{a+c}{c}\right)$$