

Φωτόνια

Σύζευξη φωτονίων ηλεκτρονίων

Κανόνες Feynman στην QED

Τελεστής σπιν

Για μή σχετικιστικό σπιν $1/2$, ο (διανυσματικός) τελεστής σπιν S τριων συνιστωσών, είναι το διάνυσμα των 2×2 Pauli πινάκων με ένα παράγοντα $1/2$ στην αρχή:

$$\vec{S}\psi = \frac{1}{2}\vec{\sigma}\psi = \frac{1}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)\psi$$

Για Dirac σωματίδια, ορίζουμε Σ σαν ένα διάνυσμα 3 συνιστωσών με 4×4 πίνακες, που δημιουργούνται από 2×2 Pauli πίνακες

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

Στην περίπτωση αυτή, ο διανυσματικός τελεστής σπιν 3-συνιστωσών είναι: $\vec{S}\psi = \frac{1}{2}\vec{\Sigma}\psi$

Ελικότητα

Ελικότητα είναι η συνιστώσα του σπιν στην διεύθυνση της ορμής.

Είναι επομένως το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων του spin και της ορμής, διαιρούμενο δια το μέτρο της ορμής.

Η ελικότητα Dirac είναι επομένως:

$$h_{\text{τελ}} = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{1}{2} \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{1}{2|\vec{p}|} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix}$$

Αν το σπιν είναι κατά μήκος ή αντίθετα με την διεύθυνση της ορμής, το σωματίδιο βρίσκεται σε κατάσταση συγκεκριμένης ελικότητας.

Αν μετασχηματίσουμε κατά Lorentz κατά μήκος της διεύθυνσης της ορμής, τότε το spin παραμένει ίδιο

Σε περιπτώσεις πολύ μεγάλης ώθησης, η ορμή του σωματιδίου μπορεί να αλλάξει διεύθυνση και επομένως η ελικότητα αλλάζει πρόσημο.

Spinors Ελικότητας

Τα spinors ελικότητας είναι: (όπου $N = \sqrt{\frac{E + mc^2}{c}}$)

$$\begin{aligned}
 u_{\uparrow}(\underline{p}) &= N \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \\ \frac{pc}{E + mc^2} \cos(\theta/2) \\ \frac{pc}{E + mc^2} e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} & u_{\downarrow}(\underline{p}) &= N \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \\ \frac{pc}{E + mc^2} \sin(\theta/2) \\ \frac{-pc}{E + mc^2} e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \\
 v_{\uparrow}(\underline{p}) &= N \begin{pmatrix} \frac{pc}{E + mc^2} \sin(\theta/2) \\ \frac{-pc}{E + mc^2} e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} & v_{\downarrow}(\underline{p}) &= +N \begin{pmatrix} \frac{pc}{E + mc^2} \cos(\theta/2) \\ \frac{pc}{E + mc^2} e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Εισαγωγή ΕΜ πεδίων

Στη Lagrangian κλασική μηχανική, μπορούμε να εισάξουμε τον νόμο της δύναμης Lorentz μετασχηματίζοντας το ηλεκτρικό πεδίο E και ορμή ως:

$$E \rightarrow E - q\phi \quad \text{και} \quad \vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A}$$

όπου ϕ και \vec{A} το βαθμωτό και διανυσματικό δυναμικό αντίστοιχα.

Ο μετασχηματισμός σε 4-διανύσματα είναι: $p_\mu \rightarrow p_\mu - qA_\mu$

και η σχετικιστική κβαντική μορφή θα γραφεί: $\frac{\hbar}{i}\partial_\mu \rightarrow \frac{\hbar}{i}\partial_\mu - qA_\mu$

που μπορούμε να γράψουμε στην μορφή: $\hbar\partial_\mu \rightarrow \hbar\partial_\mu + iqA_\mu$

Για σωματίδιο φορτίου $q=-e$ έχουμε: $\hbar\partial_\mu \rightarrow \hbar\partial_\mu - i|e|A_\mu$

Κυματοσυνάρτηση φωτονίου

Η κυματοσυνάρτηση του φωτονίου είναι το δυανυσματικό δυναμικό:

$$A^\mu(\underline{x}) = e^{-\frac{i}{\hbar} p \cdot x} \varepsilon^\mu = e^{-\frac{i}{\hbar} (\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \varepsilon^\mu \quad \text{όπου } \vec{p} = \hbar \vec{k} \text{ και } E = \hbar \omega$$

το ε^μ είναι ένα 4-διάνυσμα που προσδιορίζει την διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου, E

Για ελεύθερα EM κύματα, το E πεδίο θα πρέπει να είναι κάθετο στην διεύθυνση της ορμής και δεν μπορεί να δείχνει στην χρονοειδή διεύθυνση.

Αυτό σημαίνει ότι έχουμε τις απαιτήσεις: $\varepsilon^0 = 0$ και $\vec{\varepsilon} \cdot \vec{p} = 0$

Για δυνητικά φωτόνια, οι απαιτήσεις αυτές δεν είναι τόσο ισχυρές

Η εξίσωση Dirac με EM πεδία

Η εξίσωση Dirac για ελεύθερο σωματίδιο είναι: $\hbar \gamma^\mu \partial_\mu \psi + imc\psi = 0$

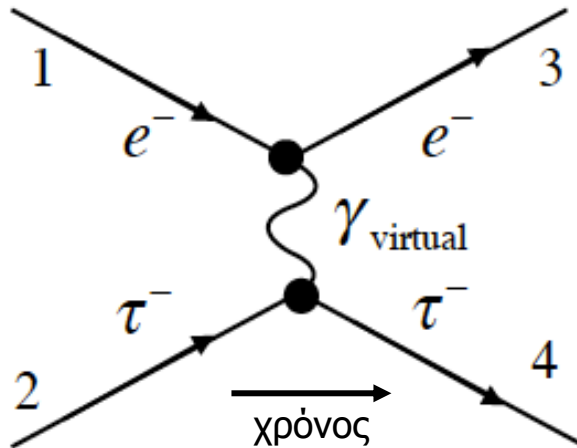
Εισάγουμε EM πεδία αντικαθιστώντας απλά: $\gamma^\mu (\hbar \partial_\mu + iqA_\mu) \psi + imc\psi = 0$

Αν προ-πολλαπλασιάσουμε με γ^0 , θα πάρουμε την Dirac Hamiltonian για ελεύθερο σωματίδιο καθώς και ένα όρο διαταραχής που γράφεται:

$$\Delta V = q\gamma^0\gamma^\mu A_\mu$$

Επειδή: $\gamma^0\gamma^0 = I$ ο όρος για $\mu=0$ είναι απλά: $qA^0 = q\phi$ που είναι η αλλαγή της ενέργειας λόγω του δυναμικού ϕ

Σκέδαση ηλεκτρονίου – τ-λεπτονίου



Όπως και για την περίπτωση της σκέδασης ηλεκτρονίου-ηλεκτρονίου, το διάγραμμα αυτό δηλώνει και τις δυο πιθανές διατάξεις χρόνου

Τα σωματίδια δεν είναι πανομοιότυπα και επομένως δεν υπάρχει διάγραμμα με τις γραμμές εναλλαγμένες

Δεν υπάρχει διάγραμμα εξαύλωσης

Το πλάτος πιθανότητας για ένα ηλεκτρόνιο με 4-ορμή p_1 να μετραπεί σε ηλεκτρόνιο με 4-ορμή p_3 και ένα φωτόνιο με διάνυσμα πόλωσης ϵ_μ είναι:

$$\langle \psi(p_3) | \Delta V | \psi(p_1) \rangle = [u^\dagger(p_3)] [q_e \gamma^0 \gamma^\mu \epsilon_\mu] [u(p_1)]$$

Χρησιμοποιώντας ότι: $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$ και βάζοντας τους δείκτες των ορμών απευθείας στους spinors

$$\langle \psi(p_3) | \Delta V | \psi(p_1) \rangle = q_e [\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1] \epsilon_\mu$$

Ο όρος στην τετραγωνική αγκύλη [...] είναι γινόμενο διανύσματος γραμμής επί 4x4 πίνακα επί διάνυσμα στήλης για $\mu=0,1,2,3$ και επομένως είναι ένα 4-διάνυσμα.

Το αποτέλεσμα αυτό πολλαπλασιάζεται εσωτερικά με την πολωση του 4-διανύσματος του δυναμικού του φωτονίου και επομένως το αποτέλεσμα είναι ένας μιγαδικός αριθμός χωρίς δείκτες spinor ή Lorentz

Σκέδαση ηλεκτρονίου – τ-λεπτονίου

Γράψαμε το τμήμα που αναφέρεται στο διάνυσμα πόλωσης του φωτονίου χωρίς συζυγή μιγαδικό που σημαίνει ότι βρίσκονταν στην αρχική κατάσταση (απορροφάται από το ηλεκτρόνιο και δεν εκπέμπεται από αυτό)

Επομένως για την κορυφή ταυ-ταυ-φωτονίου, θα πρέπει να γράψουμε το φωτόνιο σαν να βρίσκεται στην τελική κατάσταση με ένα συζυγή μιγαδικό.

Σαν αποτέλεσμα, το πλάτος πιθανότητας στην κορυφή αυτή θα είναι: $q_\tau [\bar{u}_4 \gamma^\nu u_2] \epsilon_\nu^*$

Χρησιμοποιούμε τον δείκτη ν, αντί του δείκτη μ γιατί υπάρχουν ξεχωριστά αθροίσματα για τις δυο κορυφές

Το γινόμενο των δυο αυτών πλατών θα πρέπει να αθροιστεί ως προς τις πολώσεις του φωτονίου. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε ένα επιπλέον δείκτη, (λ), στο διάνυσμα της πόλωσης, ε, για να δείξουμε διαφορετικές πολώσεις και αθροίζουμε ως προς λ

$$\sum_{\lambda} \left(q_e [\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1] \epsilon_\mu^\lambda \right) \left(q_\tau [\bar{u}_4 \gamma^\nu u_2] \epsilon_\nu^{*\lambda} \right) = q_e q_\tau [\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1] [\bar{u}_4 \gamma^\nu u_2] \sum_{\lambda} \epsilon_\mu^\lambda \epsilon_\nu^{*\lambda}$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι: $\sum_{\lambda} \epsilon_\mu^\lambda \epsilon_\nu^{*\lambda} = -g_{\mu\nu}$

Θα πρέπει να αθροίσουμε και ως τις δυο χρονικές ταξινομήσεις. Η διαφορά τους είναι κατά πόσο το φωτόνιο εκπέμπεται ή απορροφάται. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μεταφέρει την συζυγή μιγαδικό πράξη από το ένα ε στο άλλο και το θεώρημα του αθροίσματος ισχύει

Εισάγωντας και την ενεργειακή εξάρτηση στον παρονομαστή ($1/q^2$) το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$M = -q_e q_\tau [\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1] \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} [\bar{u}_4 \gamma^\nu u_2] \quad \text{και} \quad \underline{q} = \underline{p}_3 - \underline{p}_1 = \underline{p}_4 - \underline{p}_2$$

Κάποια σχόλια

Βρήκαμε ότι: $M = -\left(q_e \left[\bar{u}_3 \gamma^\mu u_1\right]\right) \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \left(q_\tau \left[\bar{u}_4 \gamma^\nu u_2\right]\right)$ και $\underline{q} = \underline{p}_3 - \underline{p}_1 = \underline{p}_4 - \underline{p}_2$

Κάθε παράγοντας στην παρένθεση μοιάζει σαν το 4-διάνυσμα πυκνότητας ρεύματος, με την διαφορά ότι υπολογίζεται από ένα μείγμα αρχικής και τελικής κατάστασης του σωματιδίου (ηλεκτρόνιο ή ταυ).

Ο όρος $g_{\mu\nu}$ ανάμεσά τους κάνει το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των δυο ρευμάτων

Το 4-διάνυσμα q είναι η 4-ορμή που μεταφέρεται και αποτελεί το 4-διάνυσμα του virtual φωτονίου. Ο παράγοντας $1/q^2$ κάνει το πλάτος μικρό αν η μάζα του δυνητικού φωτονίου είναι πολύ μακριά από την τιμή 0.

Διαγράμματα QED

Λεπτές γραμμές είναι διανύσματα ορμής ενώ παχές γραμμές αντιπροσωπεύουν σωματίδια.

Τα φωτόνια αναπαριστώνται με κυματοειδείς γραμμές ενώ τα φερμιόνια (λεπτόνια και quarks) είναι ευθείς γραμμές.

Οι γραμμές φερμιονίων έχουν ένα βέλος στο εσωτερικό της γραμμής και τα βέλη αυτά δημιουργούν μια τοπολογικά συνεχή διαδρομή.

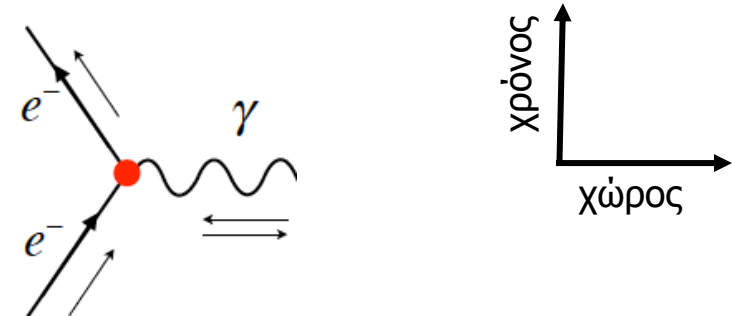
Για αντισωματίδια (e^+ , μ^+) τα βέλη έχουν φορά προς τα πίσω στον χρόνο

Σε κάθε κορυφή έχουμε διατήρηση ενέργειας και ορμής

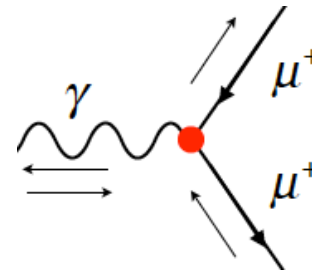
Στις εσωτερικές γραμμές των διαγραμμάτων, η ενέργεια και ορμή πιθανόν να μην ταιριάζουν με την μάζα του σωματιδίου.

Βασικές κορυφές στην QED

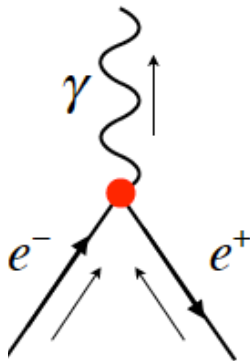
Η γραμμή ενός φορτισμένου φερμιονίου εκπέμπει ή απορροφά ένα φωτόνιο



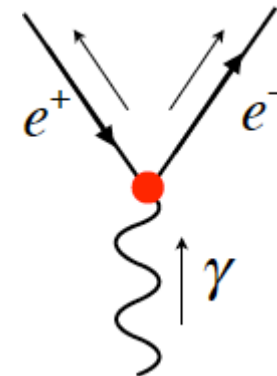
Η γραμμή ενός φορτισμένου αντι-φερμιονίου εκπέμπει ή απορροφά ένα φωτόνιο



Εξαϋλωση ενός e^+ και ενός e^- σε φωτόνιο



Διάσπαση φωτονίου σε ζεύγος φερμιονίου αντι-φερμιονίου



Βασικοί όροι κορυφής στην QED

Για κάθε εισερχόμενη γραμμή φερμιονίου, υπάρχει όρος $u^s(p)$

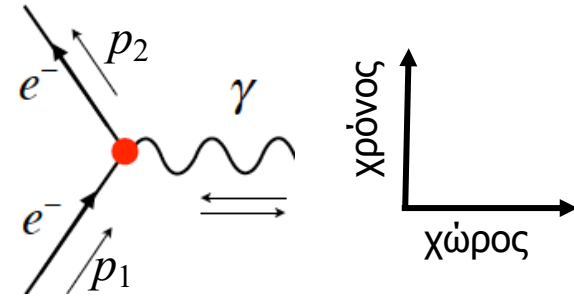
Για κάθε εξερχόμενη γραμμή φερμιονίου, υπάρχει όρος $\bar{u}^s(p)$

Για κάθε κορυφή υπάρχει ο παράγοντας: $ig_{\text{φορτ}}\gamma^\mu$

Οι παράγοντες των φερμιονίων είναι spinors ενώ ο παράγοντας της κορυφής είναι ένα 4-διάνυσμα πινάκων. Πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους με ένα τρόπο ώστε να απαλοίφει τον χαρακτήρα του spinor αλλά αφήνει ένα 4-διάνυσμα το οποίο είναι συνάρτηση των ορμών και των spins των φερμιονίων.

Ανατρέχουμε την κατεύθυνση των βελών στις γραμμές για να βρούμε την σωστή χρονική σειρά

Στο παραπάνω διάγραμμα, ο όρος είναι: $\bar{u}^{s_2}(p_2)[ig_{\text{φορτ}}\gamma^\mu]u^{s_1}(p_1)$



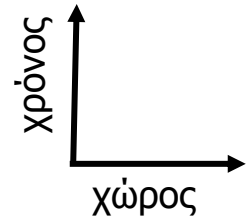
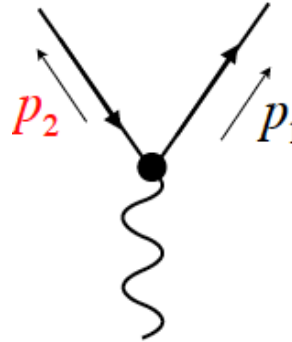
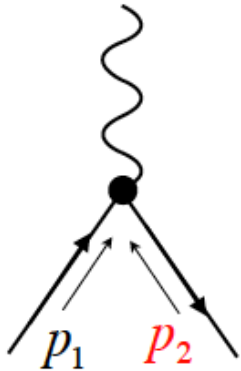
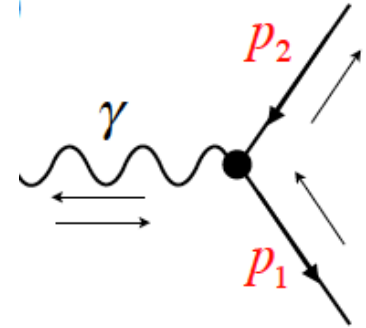
Βασικοί όροι κορυφής στην QED

Για κάθε εισερχόμενη γραμμή αντι-φερμιονίου, υπάρχει όρος $\bar{v}_s(p)$

Για κάθε εξερχόμενη γραμμή αντι-φερμιονίου, υπάρχει όρος $v_s(p)$

Για κάθε κορυφή υπάρχει ο παράγοντας: $ig_{\text{φορτ}}\gamma^\mu$

Σειρά: Ανάποδη ως προς τα βέλη στις γραμμές: $\bar{v}^{s1}(p_1)[ig_{\text{φορτ}}\gamma^\mu]v^{s2}(p_2)$



$$\bar{v}^{s2}(p_2)[ig_{\text{φορτ}}\gamma^\mu]u^{s1}(p_1)$$

$$\bar{u}^{s1}(p_1)[ig_{\text{φορτ}}\gamma^\mu]v^{s2}(p_2)$$

Βασικοί όροι κορυφής στην QED και ο g παράγοντας

Για κάθε βασική κορυφή, υπάρχει ένας όρος $[\bar{u} \text{ ή } \bar{\nu}][ig_{\text{φορτ.}}\gamma^\mu][u \text{ ή } \nu]$

που μετατρέπεται σε 4-διάνυσμα

Υπάρχει πάντοτε ένας συζυγής (adjoint) spinor στα αριστερά, ένας παράγοντας $ig_{\text{φορτ.}}\gamma^\mu$ στο κέντρο και ένας κανονικός spinor στα δεξιά

Τα φερμιόνια δίνουν u ενώ τα αντιφερμιόνια δίνουν \bar{u}

Ανατρέχουμε στα βέλη των φερμιονίων για να δούμε ποια ορμή πηγαίνει σε ποιο u ή \bar{u} .

Ο παράγοντας g σχετίζεται με το φορτίο του φερμιονίου. Για ένα ηλεκτρόνιο:

$$g_{e^-} = \sqrt{4\pi\alpha} = \sqrt{\frac{4\pi}{137.036}} = \sqrt{\frac{1}{10.93}} = \frac{1}{3.306} = 0.3024$$

Για ένα ποζιτρόνιο έχει το αντίθετο πρόσημο: $g_{e^+} = -0.3024$

Για ένα quark φορτίου $-1/3$ έχει τιμή: $g_{q^-} = 0.3024/3 = 0.1008$

Για ένα quark φορτίου $+2/3$ έχει τιμή: $g_{q^+} = -2 \times 0.3024/3 = -0.2016$

Ο g παράγοντας

Ένα διάγραμμα με μια επιπλέον εσωτερική γραμμή θα έχει 2 επιπλέον κορυφές και επομένως το πλάτος μετάβασης, M , θα περιέχει έναν επιπλέον παράγοντα g^2 .

Σαν αποτέλεσμα το πλάτος μετάβασης M , θα είναι μικρότερο κατά ένα παράγοντα $1/g^2 = 10.93$. Αν το διάγραμμα υψηλότερης τάξης είναι η μόνη συνεισφορά στην διεργασία τότε ο ρυθμός μετάβασης για την διεργασία αυτή θα είναι $10.93^2 \sim 100$ φορές μικρότερη από το διάγραμμα της χαμηλότερης τάξης.

Αν υπάρχουν συνεισφορές και από τις δυο διεργασίες, τότε η συνεισφορά της υψηλότερης τάξης διαγράμματος θα αλλάξει το ρυθμό μετάβασης κατά 10% περίπου συγκρινόμενη με την συνεισφορά του διαγράμματος χαμηλότερης τάξης.

Τα διαγράμματα θα μπορούσαν να προστίθονται, συμβάλουν ή να είναι 90° εκτός φάσης μεταξύ τους.

Η σταθερά της λεπτής υφής, α_{em} , είναι μια αδιάστατη σταθερά που εμφανίζεται σε πολλές σχέσεις στην κβαντομηχανική.

Η τιμή της ισούται ως γνωστό με $\alpha = \alpha_{em} = 1/137.036 = 0.00729735$

Η σχέση της με άλλες σταθερές είναι: $\alpha = e_{SI}^2 / (4\pi\epsilon_0 \hbar c) = e_{cgs}^2 / (\hbar c)$

Κανόνες Feynman για το φωτόνιο

Υπάρχει ένας παράγοντας $\varepsilon_{\mu}^{1,2}$ για εισερχόμενα εξωτερικά φωτόνια

Υπάρχει ένας παράγοντας $\varepsilon_{\mu}^{1,2*}$ για εξερχόμενα εξωτερικά φωτόνια

Ο παράγοντας του διαδότη για εσωτερικά φωτόνια με ορμή q είναι: $-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}$

Ο παράγοντας $g_{\mu\nu}$ είναι ο μετρικός τανυστής και όχι η σταθερά σύζευξης

Χρησιμοποιούμε συνήθως μ για την βασική κορυφή στην μια άκρη του εσωτερικού φωτονίου και ν στην βασική κορυφή στην άλλη άκρη του φωτονίου.

Αφού αθροίσουμε ως προς ν , αυτό θα μετατρέψει τον ν πάνω δείκτη σε ένα μ κάτω δείκτη.

Περισσότεροι κανόνες φερμιονίων

Ο παράγοντας διαδότη για εσωτερική γραμμή φερμιονίου με ορμή q είναι:

$$\frac{i}{\gamma^\mu q_\mu - mc} = \frac{i(\gamma^\mu q_\mu + mc)}{q^2 - m^2 c^2} = \frac{i(\not{q} + mc)}{q^2 - m^2 c^2}$$

Η διεύθυνση της ορμής ταυτίζεται με την διεύθυνση του βέλους της γραμμής του φερμιονίου

Ο συμβολισμός με την πλάγια δηλώνει: $\not{q} = \gamma^\mu q_\mu$ και χρησιμοποιείται για λιγότερα σύμβολα

Μια μεταβλητή με «πλάγια» έχει δείκτες spinor αλλά όχι Lorentz δείκτες.

Αν δυο διαγράμματα που χρειάζεται να προστεθούν, διαφέρουν μόνο από την εναλλαγή δυο πανομοιότυπων φερμιονίων, δίνουμε στο ένα από αυτά αρνητικό πρόσημο.

Αυτό θα κάνει το άθροισμα να μηδενιστεί, εκτός και αν υπάρχει άρτιος αριθμός ζευγών για εναλλαγή.

Κανόνες για ολοκληρώματα και δ-συναρτήσεις

Σε ένα διάγραμμα δένδρου, όλες οι εσωτερικές ορμές προσδιορίζονται από τις εισερχόμενες και εξερχόμενες ορμές και δεν χρειάζεται ο υπολογισμός κάποιου ολοκληρώματος.

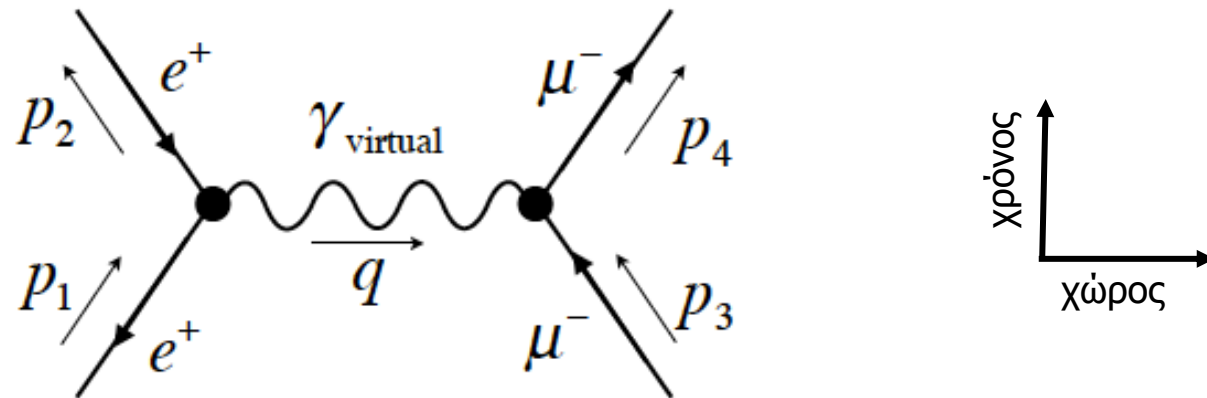
Ολοκληρώνουμε ως προς άγνωστες εσωτερικές ορμές με: $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$

Σε πολύπλοκες καταστάσεις, γράφουμε σε κάθε κορυφή: $(2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 + q_3)$

και ολοκληρώνουμε όπως προηγουμένως ως προς όλες τις εσωτερικές ορμές, και απαλοΐφουμε τον εναπομείναντα παράγοντα $(2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 + q_3)$

Τέλος υπάρχει ένας γενικός παράγοντας i στο πλάτος μετάβασης M

Σκέδαση $e^+ \mu^- \rightarrow e^+ \mu^-$



$$\bar{v}^{s1}(p_1) [-ig\gamma^\mu] v^{s2}(p_2) \quad -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \quad \bar{u}^{s4}(p_4) [ig\gamma^\nu] u^{s3}(p_3)$$

Για ποζιτρόνιο, ανατρέχοντας στο βέλος σημαίνει πηγαίνουμε μπροστά στο χρόνο.

Για το μιονίο, ανατρέχοντας στο βέλος σημαίνει πηγαίνουμε προς τα πίσω στο χρόνο.

Αλλάζουμε το πρόσημο του g εξαιτίας του φορτίου

Χρησιμοποιούμε μ για το Lorentz δείκτη του ποζιτρονίου και ν για τον Lorentz δείκτη του μιονίου

$$p_1 = p_2 + q \Rightarrow q = p_1 - p_2$$

Σκέδαση $e^+ \mu^- \rightarrow e^+ \mu^-$

$$i[\bar{\nu}^{s_1}(p_1)(-ig\gamma^\mu)\nu^{s_2}(p_2)]\left(-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)[\bar{u}^{s_4}(p_4)(ig\gamma^\nu)u^{s_3}(p_3)]$$

$$i[\bar{\nu}(1)(-ig\gamma^\mu)\nu(2)]\left(-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)[\bar{u}(4)(ig\gamma^\nu)u(3)]$$

$$i[\bar{\nu}(1)\gamma^\mu\nu(2)]\left[-\frac{ig^2}{(p_1-p_2)^2}\right][\bar{u}(4)\gamma_\mu u(3)]$$

$$M = \frac{g^2}{(p_1-p_2)^2} [\bar{\nu}(1)\gamma^\mu\nu(2)][\bar{u}(4)\gamma_\mu u(3)]$$

Αν κάναμε την σκέδαση $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ θα είχαμε παντού u^s και όχι v^s (για το ποζιτρόνιο) καθώς επίσης το πρόσημο θα ήταν αντίθετο στο τέλος αλλά αυτό δεν επηρεάζει αφού το M θα πρέπει να υψωθεί στο τετράγωνο.

Το πλάτος μετάβασης

Βρήκαμε ότι:
$$M = \frac{g^2}{(p_1 - p_2)^2} [\bar{v}(1) \gamma^\mu v(2)] [\bar{u}(4) \gamma_\mu u(3)]$$

$\bar{v}(1) = \bar{v}^{s_1}(p_1)$ είναι ένα διάνυσμα γραμμής με 4 στοιχεία. Είναι 4 νούμερα που μπορούμε να υπολογίσουμε από την ορμή και spin του εισερχόμενου ποζιτρονίου 1

$v(2) = v^{s_2}(p_2)$ είναι ένα διάνυσμα στήλης με 4 στοιχεία. Είναι 4 νούμερα που μπορούμε να υπολογίσουμε από την ορμή και spin του εξερχόμενου ποζιτρονίου 2

γ^μ Αντιπροσωπεύει τους 4 γ-πίνακες. Κάνουμε ένα γινόμενο γραμμή-πίνακα-στήλης $\bar{v}(1) \gamma^\mu v(2)$ μια φορά για κάθε γ-πίνακα (4 φορές)
Αυτό δίνει 4 μιγαδικούς αριθμούς

γ_μ Αντιπροσωπεύει τους 4 γ-πίνακες τώρα με ένα «-» πρόσημο για όλους εκτός του γ_0 .

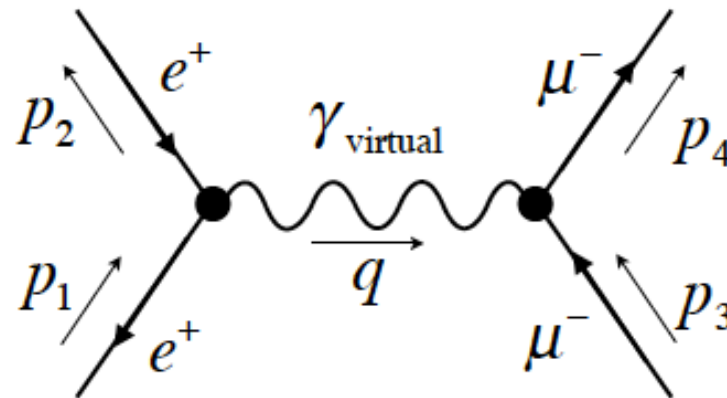
$\bar{u}(4) \gamma_\mu u(3)$ Κάνουμε ένα γινόμενο γραμμή-πίνακα-στήλης δίνοντας 4 μιγαδικούς αριθμούς

Υπάρχει ένα άθροισμα ως προς τον επαναλαμβανόμενο δείκτη. Κάνουμε επομένως ένα εσωτερικό γινόμενο των δυο 4-διανυσμάτων (το γ_μ έκανε την αντιστροφή του πρόσημου των χωρικών συνιστωσών οπότε δεν χρειάζεται να το κάνουμε εδώ ξανά)

Σαν αποτέλεσμα παίρνουμε ένα και μοναδικό μιγαδικό αριθμό, επί τον παράγοντα $\frac{g^2}{(p_1 - p_2)^2}$

Κανόνες Feynman στην QED και πραγματικές QED ενεργές διατομές

Σκέδαση $e^+ \mu^- \rightarrow e^+ \mu^-$



$$\bar{v}^{s1}(p_1) [-ig\gamma^\mu] v^{s2}(p_2) \quad -\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \quad \bar{u}^{s4}(p_4) [ig\gamma^\nu] u^{s3}(p_3)$$

Για ποζιτρόνιο, ανατρέχοντας στο βέλος σημαίνει πηγαίνουμε μπροστά στο χρόνο.

Για το μιονίο, ανατρέχοντας στο βέλος σημαίνει πηγαίνουμε προς τα πίσω στο χρόνο.

Αλλάζουμε το πρόσημο του g εξαιτίας του φορτίου

Χρησιμοποιούμε μ για το Lorentz δείκτη του ποζιτρονίου και ν για τον Lorentz δείκτη του μιονίου

$$p_1 = p_2 + q \Rightarrow q = p_1 - p_2$$

Σκέδαση $e^+ \mu^- \rightarrow e^+ \mu^-$

$$i[\bar{\nu}^{s_1}(p_1)(-ig\gamma^\mu)\nu^{s_2}(p_2)]\left(-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)[\bar{u}^{s_4}(p_4)(ig\gamma^\nu)u^{s_3}(p_3)]$$

$$i[\bar{\nu}(1)(-ig\gamma^\mu)\nu(2)]\left(-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)[\bar{u}(4)(ig\gamma^\nu)u(3)]$$

$$i[\bar{\nu}(1)\gamma^\mu\nu(2)]\left[-\frac{ig^2}{(p_1-p_2)^2}\right][\bar{u}(4)\gamma_\mu u(3)]$$

$$M = \frac{g^2}{(p_1-p_2)^2} [\bar{\nu}(1)\gamma^\mu\nu(2)][\bar{u}(4)\gamma_\mu u(3)]$$

Αν κάναμε την σκέδαση $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ θα είχαμε παντού u 'ς και όχι v 'ς (για το ποζιτρόνιο) καθώς επίσης το πρόσημο θα ήταν αντίθετο στο τέλος αλλά αυτό δεν επηρεάζει αφού το M θα πρέπει να υψωθεί στο τετράγωνο.

Το πλάτος μετάβασης

Βρήκαμε ότι:
$$M = \frac{g^2}{(p_1 - p_2)^2} [\bar{v}(1) \gamma^\mu v(2)] [\bar{u}(4) \gamma_\mu u(3)]$$

$\bar{v}(1) = \bar{v}^{s_1}(p_1)$ είναι ένα διάνυσμα γραμμής με 4 στοιχεία. Είναι 4 νούμερα που μπορούμε να υπολογίσουμε από την ορμή και spin του εισερχόμενου ποζιτρονίου 1

$v(2) = v^{s_2}(p_2)$ είναι ένα διάνυσμα στήλης με 4 στοιχεία. Είναι 4 νούμερα που μπορούμε να υπολογίσουμε από την ορμή και spin του εξερχόμενου ποζιτρονίου 2

γ^μ Αντιπροσωπεύει τους 4 γ-πίνακες. Κάνουμε ένα γινόμενο γραμμή-πίνακα-στήλης $\bar{v}(1) \gamma^\mu v(2)$ μια φορά για κάθε γ-πίνακα (4 φορές)
Αυτό δίνει 4 μιγαδικούς αριθμούς

γ_μ Αντιπροσωπεύει τους 4 γ-πίνακες τώρα με ένα «-» πρόσημο για όλους εκτός του γ_0 .

$\bar{u}(4) \gamma_\mu u(3)$ Κάνουμε ένα γινόμενο γραμμή-πίνακα-στήλης δίνοντας 4 μιγαδικούς αριθμούς

Υπάρχει ένα άθροισμα ως προς τον επαναλαμβανόμενο δείκτη. Κάνουμε επομένως ένα εσωτερικό γινόμενο των δυο 4-διανυσμάτων (το γ_μ έκανε την αντιστροφή του πρόσημου των χωρικών συνιστωσών οπότε δεν χρειάζεται να το κάνουμε εδώ ξανά)

Σαν αποτέλεσμα παίρνουμε ένα και μοναδικό μιγαδικό αριθμό, επί τον παράγοντα $\frac{g^2}{(p_1 - p_2)^2}$

Σκέδαση $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Για σκέδαση $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ υπάρχει 1 μόνο διάγραμμα

Ανατρέχουμε τα βέλη των γραμμών των σωματιδίων για να γράψουμε τους παράγοντες των spinors και συζυγή spinors

Σύμφωνα με την συνθήκη: το πρώτο σωματίδιο που συναντάται όταν ακολουθούμε την γραμμή που αντιπροσωπεύει ένα ρεύμα φερμιονίου από το τέλος προς την αρχή στην διεύθυνση ανάποδα από αυτή που δείχνουν τα βέλη, πάντοτε εμφανίζεται σαν συζυγές spinor

Στην προκειμένη περίπτωση: το εισερχόμενο e^+ και το εξερχόμενο μ^- γράφονται σαν συζυγές spinors

Επομένως γράφουμε για τους όρους:

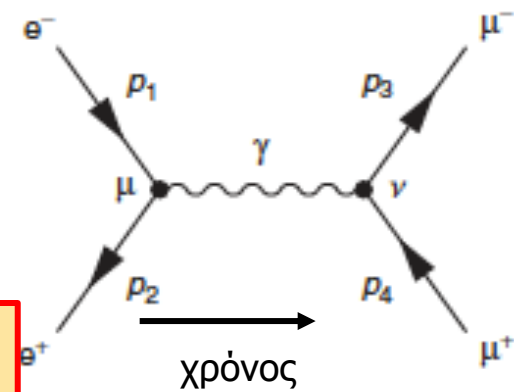
κορυφή e^+e^- : $\bar{v}(2)[ig\gamma^\mu]u(1)$

γ -διαδότης: $-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}$

κορυφή $\mu^+\mu^-$: $\bar{u}(3)[ig\gamma^\nu]v(4)$

πολ/ζουμε και βάζουμε μπροστά έναν όρο i

$$M = \frac{g^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{u}(3)\gamma_\mu v(4)] [\bar{v}(2)\gamma^\mu u(1)]$$



Πολύ πληροφορία για spin

Συνήθως δεν ξέρουμε τη διεύθυνση των αρχικών spins.

Αυτό συνήθως σημαίνει ότι υπάρχουν $2^2=4$ δυνατοί συνδυασμοί των spin καταστάσεων.

Αλλά όλες είναι το ίδιο πιθανές και επομένως θα πρέπει να πάρουμε μια μέση τιμή.

Συνήθως δεν μετρούμε την διεύθυνση του spin των τελικών προϊόντων και επομένως υπάρχουν $2^2=4$ δυνατές καταστάσεις spin

Οι τελικές καταστάσεις του δεν έχουν όμως την ίδια πιθανότητα να εμφανιστούν και εξαρτάται από την τιμή της M^2 . Επομένως θα πρέπει να αθροίσουμε ως προς τις καταστάσεις αυτές.

Χρειάζεται επομένως να κάνουμε όλους τους $16M^2$ υπολογισμούς να τους προσθέσουμε και να διαιρέσουμε με 4 (για να πάρουμε την μέση τιμή ως προς τις αρχικές καταστάσεις).

Υπάρχει όμως ένα καλό trick για να ελαττώσουμε κατά πολύ τους υπολογισμούς αυτούς

Το trick αυτό έχει να κάνει με το άθροισμα ως προς τους γ-πίνακες, και ονομάζεται **Casimir trick** και θα το δούμε παρακάτω.

Spinors Ελικότητας

Τα spinors ελικότητας είναι: (όπου $N = \sqrt{\frac{E + mc^2}{c}}$)

$$\begin{aligned}
 u_{\uparrow}(\underline{p}) &= N \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \\ \frac{pc}{E + mc^2} \cos(\theta/2) \\ \frac{pc}{E + mc^2} e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} & u_{\downarrow}(\underline{p}) &= N \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \\ \frac{pc}{E + mc^2} \sin(\theta/2) \\ \frac{-pc}{E + mc^2} e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \\
 v_{\uparrow}(\underline{p}) &= N \begin{pmatrix} \frac{pc}{E + mc^2} \sin(\theta/2) \\ \frac{-pc}{E + mc^2} e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} & v_{\downarrow}(\underline{p}) &= +N \begin{pmatrix} \frac{pc}{E + mc^2} \cos(\theta/2) \\ \frac{pc}{E + mc^2} e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Μάζες σωματιδίων

Για σκέδαση $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ η ενέργεια του ηλεκτρονίου στο σύστημα αναφοράς του CM θα πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με την μάζα του μιονίου $105.7\text{MeV}/c^2$

Άρα το ηλεκτρόνιο έχει ένα παράγοντα $\gamma \sim 200$ και είναι ασφαλές να αγνοήσουμε την μάζα του

Αν η ενέργεια CM είναι π.χ. 2 GeV τότε κάθε μιονίο θα έχει 1 GeV ενέργεια και επομένως ο παράγοντας $\gamma \sim 10$.

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να αγνοήσουμε την μάζα των μιονίων

Το να αγνοήσουμε μάζες, σημαίνει ότι: $E = pc$ και $m = 0$

Spinors Ελικότητας - αγνοώντας τις μάζες

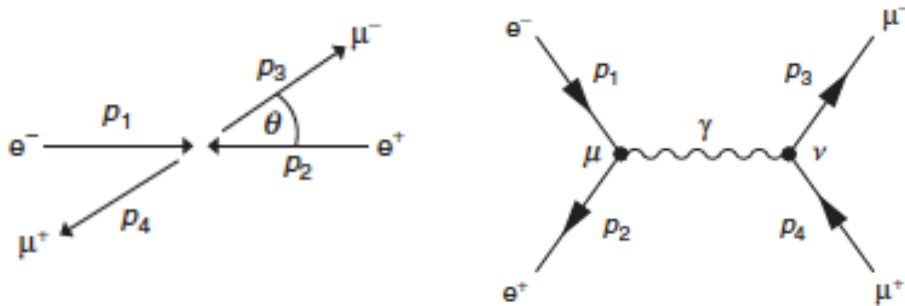
Τα spinors ελικότητας είναι στην περίπτωση αυτή απλουστεύονται στην μορφή:

$$u_{\uparrow}(\underline{p}) \approx \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \quad u_{\downarrow}(\underline{p}) \approx \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \\ -e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$v_{\uparrow}(\underline{p}) \approx \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad v_{\downarrow}(\underline{p}) \approx \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

Spinors Ελικότητας – $\theta_{e^-} = \varphi_{e^-} = 0, \theta_{e^+} = \varphi_{e^+} = \pi$

Τα spinors ελικότητας στην περίπτωση αυτή απλουστεύονται στην μορφή:



$$u_{\uparrow}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{\uparrow}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_{\downarrow}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$v_{\downarrow}(\vec{p}) = \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Spinors Ελικότητας – τελικά προϊόντα – $\phi=0,\pi$

Τα spinors ελικότητας στην περίπτωση αυτή απλουστεύονται στην μορφή:

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε για το μ^- τις γωνίες $(\theta, 0)$ και για το μ^+ τις γωνίες $(\pi-\theta, \pi)$

Ξέρουμε ακόμα ότι: $\sin\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ και $\cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ενώ $e^{i\pi} = -1$

$$u_{\uparrow}(\underline{p}) = \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} +\cos(\theta/2) \\ +\sin(\theta/2) \\ +\cos(\theta/2) \\ +\sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$u_{\downarrow}(\underline{p}) = \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ +\cos(\theta/2) \\ +\sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$v_{\uparrow}(\underline{p}) = +\sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} +\cos(\theta/2) \\ +\sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$v_{\downarrow}(\underline{p}) = \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} +\sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \\ +\sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

Υπολογισμός της ποσότητας $\bar{\psi}\gamma^\mu\phi$

Χρησιμοποιώντας τους γ-πίνακες μπορούμε να υπολογίσουμε τις ποσότητες:

$$\bar{\psi}\gamma^0\phi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\phi = \psi_1^*\phi_1 + \psi_2^*\phi_2 + \psi_3^*\phi_3 + \psi_4^*\phi_4$$

$$\bar{\psi}\gamma^1\phi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^1\phi = \psi_1^*\phi_4 + \psi_2^*\phi_3 + \psi_3^*\phi_2 + \psi_4^*\phi_1$$

$$\bar{\psi}\gamma^2\phi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^2\phi = -i[\psi_1^*\phi_4 - \psi_2^*\phi_3 + \psi_3^*\phi_2 - \psi_4^*\phi_1]$$

$$\bar{\psi}\gamma^3\phi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^3\phi = \psi_1^*\phi_3 - \psi_2^*\phi_4 + \psi_3^*\phi_1 - \psi_4^*\phi_2$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Υπολογισμός της ποσότητας $\bar{\psi}\gamma^\mu\phi$

$$\gamma^0\gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & +i & 0 \\ 0 & +i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma^0\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & +i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ +i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \gamma^0\gamma^2\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & +i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ +i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma^0\gamma^2\phi = \begin{pmatrix} -i\phi_4 \\ +i\phi_3 \\ -i\phi_2 \\ +i\phi_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \psi^\dagger\gamma^0\gamma^2\phi = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\phi_4 \\ +i\phi_3 \\ -i\phi_2 \\ +i\phi_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \psi^\dagger\gamma^0\gamma^2\phi = -i(\psi_1^*\phi_4 - \psi_2^*\phi_3 + \psi_3^*\phi_2 - \psi_4^*\phi_1)$$

Υπολογισμός της αρχικής κατάστασης $\bar{v}_\downarrow \gamma^\mu u_\downarrow$ και $\bar{v}_\downarrow \gamma^\mu u_\uparrow$

$$\bar{v}_\downarrow \gamma^0 u_\downarrow = (0)(0) + (-1)(+1) + (0)(0) + (-1)(-1) = 0$$

$$\bar{v}_\downarrow \gamma^1 u_\downarrow = (0)(-1) + (-1)(0) + (0)(+1) + (-1)(0) = 0$$

$$\bar{v}_\downarrow \gamma^2 u_\downarrow = -i[(0)(-1) - (-1)(0) + (0)(+1) - (-1)(0)] = 0$$

$$\bar{v}_\downarrow \gamma^3 u_\downarrow = (0)(0) - (-1)(-1) + (0)(+0) - (-1)(+1) = 0$$

$$\bar{v}_\downarrow \gamma^0 u_\uparrow = (0)(+1) + (-1)(0) + (0)(+1) + (-1)(0) = 0$$

$$\bar{v}_\downarrow \gamma^1 u_\uparrow = (0)(0) + (-1)(+1) + (0)(0) + (-1)(+1) = -2$$

$$\bar{v}_\downarrow \gamma^2 u_\uparrow = -i[(0)(0) - (-1)(+1) + (0)(0) - (-1)(+1)] = -2i$$

$$\bar{v}_\downarrow \gamma^3 u_\uparrow = (0)(+1) - (-1)(0) + (0)(+1) - (-1)(0) = 0$$

$$v_\downarrow(\underline{p}) = \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_\downarrow(\underline{p}) = \sqrt{\frac{E}{c}} \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\psi} \gamma^0 \phi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \phi = \psi_1^* \phi_1 + \psi_2^* \phi_2 + \psi_3^* \phi_3 + \psi_4^* \phi_4$$

$$\bar{\psi} \gamma^1 \phi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^1 \phi = \psi_1^* \phi_4 + \psi_2^* \phi_3 + \psi_3^* \phi_2 + \psi_4^* \phi_1$$

$$\bar{\psi} \gamma^2 \phi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^2 \phi = -i[\psi_1^* \phi_4 - \psi_2^* \phi_3 + \psi_3^* \phi_2 - \psi_4^* \phi_1]$$

$$\bar{\psi} \gamma^3 \phi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^3 \phi = \psi_1^* \phi_3 - \psi_2^* \phi_4 + \psi_3^* \phi_1 - \psi_4^* \phi_2$$

Όπου αγνοήσαμε τον παράγοντα N των spinors

Υπολογισμός της αρχικής κατάστασης $\bar{v}_{\uparrow}\gamma^{\mu}u_{\downarrow}$ και $\bar{v}_{\uparrow}\gamma^{\mu}u_{\uparrow}$

$$\bar{v}_{\uparrow}\gamma^0u_{\downarrow} = (+1)(0) + (0)(+1) + (-1)(0) + (0)(-1) = 0$$

$$\bar{v}_{\uparrow}\gamma^1u_{\downarrow} = (+1)(-1) + (0)(0) + (-1)(+1) + (0)(0) = -2$$

$$\bar{v}_{\uparrow}\gamma^2u_{\downarrow} = -i[(+1)(-1) - (0)(0) + (-1)(+1) - (0)(0)] = +2i$$

$$\bar{v}_{\uparrow}\gamma^3u_{\downarrow} = (+1)(0) + (0)(-1) + (-1)(0) - (0)(+1) = 0$$

$$\bar{v}_{\uparrow}\gamma^0u_{\uparrow} = (+1)(+1) + (0)(0) + (-1)(+1) + (0)(0) = 0$$

$$\bar{v}_{\uparrow}\gamma^1u_{\uparrow} = (+1)(0) + (0)(+1) + (-1)(0) + (0)(+1) = 0$$

$$\bar{v}_{\uparrow}\gamma^2u_{\uparrow} = -i[(+1)(0) - (0)(+1) + (-1)(0) - (0)(+1)] = 0$$

$$\bar{v}_{\uparrow}\gamma^3u_{\uparrow} = (+1)(+1) - (0)(0) + (-1)(+1) - (0)(0) = 0$$

Υπολογισμός της τετραγωνικής αγκύλης αρχικής κατάστασης

$$\left[\bar{v}_{\downarrow} \gamma^{\mu} u_{\downarrow} \right] = 0$$

$$\left[\bar{v}_{\downarrow} \gamma^{\mu} u_{\uparrow} \right] = \sqrt{\frac{E}{c}} (0, -2, -2i, 0) \sqrt{\frac{E}{c}} = \frac{2E}{c} (0, -1, -i, 0)$$

$$\left[\bar{v}_{\uparrow} \gamma^{\mu} u_{\downarrow} \right] = \sqrt{\frac{E}{c}} (0, -2, +2i, 0) \sqrt{\frac{E}{c}} = \frac{2E}{c} (0, -1, +i, 0)$$

$$\left[\bar{v}_{\uparrow} \gamma^{\mu} u_{\uparrow} \right] = 0$$

Υπολογισμός της τελικής κατάστασης $\bar{u}_{\uparrow}\gamma^{\mu}v_{\downarrow}$ και $\bar{u}_{\uparrow}\gamma^{\mu}v_{\uparrow}$

$$\bar{u}_{\uparrow}\gamma^0v_{\downarrow} = (+c)(+s) + (+s)(-c) + (+c)(+s) + (+s)(-c) = 0$$

$$\bar{u}_{\uparrow}\gamma^1v_{\downarrow} = (+c)(-c) + (+s)(+s) + (+c)(-c) + (+s)(+s) = -2\left[\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right] = 2\cos\theta$$

$$\bar{u}_{\uparrow}\gamma^2v_{\downarrow} = -i\left[(+c)(-c) - (+s)(+s) + (+c)(-c) - (+s)(+s)\right] = -i\left[-2\cos^2\frac{\theta}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right] = 2i$$

$$\bar{u}_{\uparrow}\gamma^3v_{\downarrow} = (+c)(+s) - (+s)(-c) + (+c)(+s) - (+s)(-c) = 4\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = 2\sin\theta$$

$$\bar{u}_{\uparrow}\gamma^0v_{\uparrow} = (+c)(+c) + (+s)(+s) + (+c)(-c) + (+s)(-s) = 0$$

$$\bar{u}_{\uparrow}\gamma^1v_{\uparrow} = (+c)(+s) + (+s)(+c) + (+c)(-s) + (+s)(-c) = 0$$

$$\bar{u}_{\uparrow}\gamma^2v_{\uparrow} = -i\left[(+c)(+s) - (+s)(+c) + (+c)(-s) - (+s)(-c)\right] = 0$$

$$\bar{u}_{\uparrow}\gamma^3v_{\uparrow} = (+c)(+c) - (+s)(+s) + (+c)(-c) - (+s)(-s) = 0$$

Όπου αγνοήσαμε τον παράγοντα N των spinors ενώ ο συμβολισμός: $c = \cos\frac{\theta}{2}$ και $s = \sin\frac{\theta}{2}$

Υπολογισμός της αρχικής κατάστασης $\bar{u}_{\downarrow}\gamma^{\mu}v_{\uparrow}$ και $\bar{u}_{\downarrow}\gamma^{\mu}v_{\downarrow}$

$$\bar{u}_{\downarrow}\gamma^0v_{\downarrow} = (-s)(+s) + (+c)(-c) + (+s)(+s) + (-c)(-c) = 0$$

$$\bar{u}_{\downarrow}\gamma^1v_{\downarrow} = (-s)(-c) + (+c)(+s) + (+s)(-c) + (-c)(+s) = 0$$

$$\bar{u}_{\downarrow}\gamma^2v_{\downarrow} = -i[(-s)(-c) - (+c)(+s) + (+s)(-c) - (-c)(+s)] = 0$$

$$\bar{u}_{\downarrow}\gamma^3v_{\downarrow} = (-s)(+s) - (+c)(-c) + (+s)(+s) - (-c)(-c) = 0$$

$$\bar{u}_{\downarrow}\gamma^0v_{\uparrow} = (-s)(+c) + (+c)(+s) + (+s)(-c) + (-c)(-s) = 0$$

$$\bar{u}_{\downarrow}\gamma^1v_{\uparrow} = (-s)(+s) + (+c)(+c) + (+s)(-s) + (-c)(-c) = 2\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = +2\cos\theta$$

$$\bar{u}_{\downarrow}\gamma^2v_{\uparrow} = -i[(-s)(+s) - (+c)(+c) + (+s)(-s) - (-c)(-c)] = -i\left[-2\sin^2\frac{\theta}{2} - 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right] = +2i$$

$$\bar{u}_{\downarrow}\gamma^3v_{\uparrow} = (-s)(+c) - (+c)(+s) + (+s)(-c) - (-c)(-s) = -4\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = -2\sin\theta$$

Υπολογισμός της τετραγωνικής αγκύλης τελικής κατάστασης

$$\left[\bar{u}_{\downarrow} \gamma^{\mu} v_{\downarrow} \right] = 0$$

$$\left[\bar{u}_{\downarrow} \gamma^{\mu} v_{\uparrow} \right] = \sqrt{\frac{E}{c}} (0, +2 \cos \theta, +2i, -2 \sin \theta) \left(-\sqrt{\frac{E}{c}} \right) = \frac{2E}{c} (0, -\cos \theta, -i, \sin \theta)$$

$$\left[\bar{u}_{\uparrow} \gamma^{\mu} v_{\downarrow} \right] = \sqrt{\frac{E}{c}} (0, -2 \cos \theta, +2i, 2 \sin \theta) \sqrt{\frac{E}{c}} = \frac{2E}{c} (0, -\cos \theta, +i, \sin \theta)$$

$$\left[\bar{u}_{\uparrow} \gamma^{\mu} v_{\uparrow} \right] = 0$$

Σκέδαση $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

$$M = \frac{g^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{u}(3)\gamma_\mu v(4)] [\bar{v}(2)\gamma^\mu u(1)]$$

Χρησιμοποιώντας τους spinors ελικότητας και στην προσέγγιση $m \sim 0$ και υπολογίζοντας δυνατές περιπτώσεις προσανατολισμού του spin των σωματιδίων της αρχικής και τελικής κατάστασης καταλήξαμε:

$$[\bar{v}_\downarrow \gamma^\mu u_\downarrow] = 0$$

$$[\bar{v}_\downarrow \gamma^\mu u_\uparrow] = \frac{2E}{c} (0, -1, -i, 0)$$

$$[\bar{v}_\uparrow \gamma^\mu u_\downarrow] = \frac{2E}{c} (0, -1, +i, 0)$$

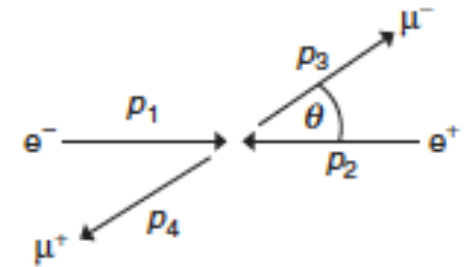
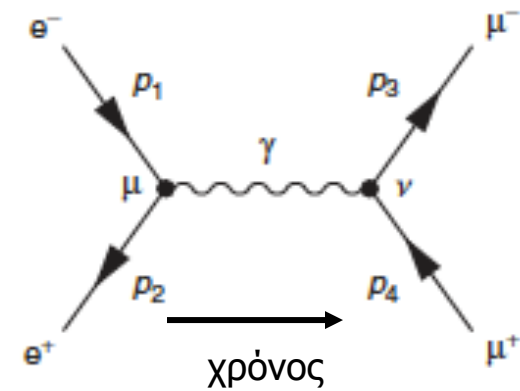
$$[\bar{v}_\uparrow \gamma^\mu u_\uparrow] = 0$$

$$[\bar{u}_\downarrow \gamma^\mu v_\downarrow] = 0$$

$$[\bar{u}_\downarrow \gamma^\mu v_\uparrow] = \frac{2E}{c} (0, -\cos\theta, -i, \sin\theta)$$

$$[\bar{u}_\uparrow \gamma^\mu v_\downarrow] = \frac{2E}{c} (0, -\cos\theta, +i, \sin\theta)$$

$$[\bar{u}_\uparrow \gamma^\mu v_\uparrow] = 0$$



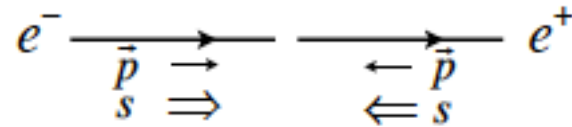
Διατήρηση ελικιότητας - $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Για την αρχική κατάσταση $e^+ e^- \rightarrow \gamma^*$ βρήκαμε:

$$[\bar{v}_\downarrow \gamma^\mu u_\downarrow] = j_{e,LL}^\mu = 0$$

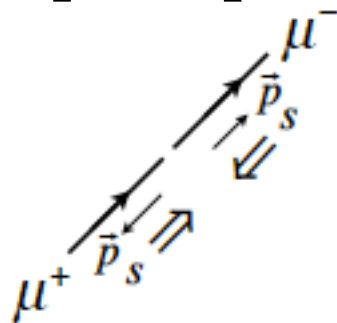


$$[\bar{v}_\uparrow \gamma^\mu u_\uparrow] = j_{e,RR}^\mu = 0$$

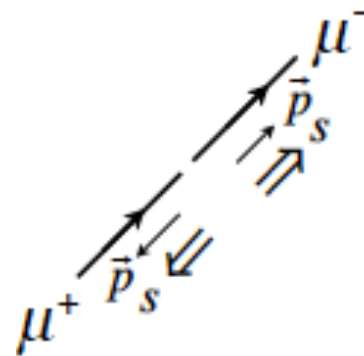


Για την τελική κατάσταση $\gamma^* \rightarrow \mu^+ \mu^-$ βρήκαμε:

$$[\bar{u}_\downarrow \gamma^\mu v_\downarrow] = j_{\mu,LL}^\mu = 0$$



$$[\bar{u}_\uparrow \gamma^\mu v_\uparrow] = j_{\mu,RR}^\mu = 0$$



Αν τα spins είναι αντίθετα σε οποιαδήποτε διεύθυνση, τότε το ρεύμα είναι μηδέν

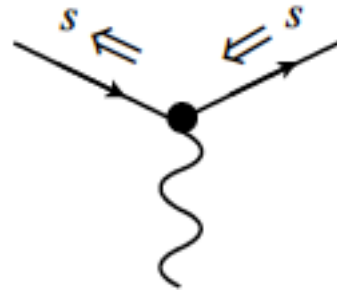
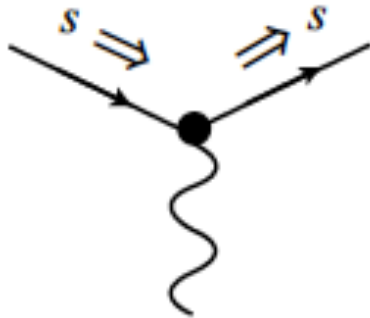
Διατήρηση ελικιότητας - $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Είδαμε ότι το «ρεύμα» εξαύλωσης όπου συμμετέχει ένα u και ένα \bar{u} είναι μηδέν

Αλλά αυτό ισχύει για «ρεύμα σκέδασης» όπου έχουμε 2 u 'ς ή 2 \bar{u} 'ς για τα οποία

$$[\bar{u}_{\downarrow} \gamma^{\mu} u_{\downarrow}] = [\bar{u}_{\uparrow} \gamma^{\mu} u_{\uparrow}] = [\bar{v}_{\uparrow} \gamma^{\mu} v_{\uparrow}] = [\bar{v}_{\downarrow} \gamma^{\mu} v_{\downarrow}] = 0$$

Τα μόνα ρεύματα (τετραγωνικές αγκύλες) που δεν έχουν μηδενική συνεισφορά είναι αυτά στα οποία τα spins είναι «συνεχή» ανεξάρτητα από τον τρόπο προσανατολισμού του διαγράμματος

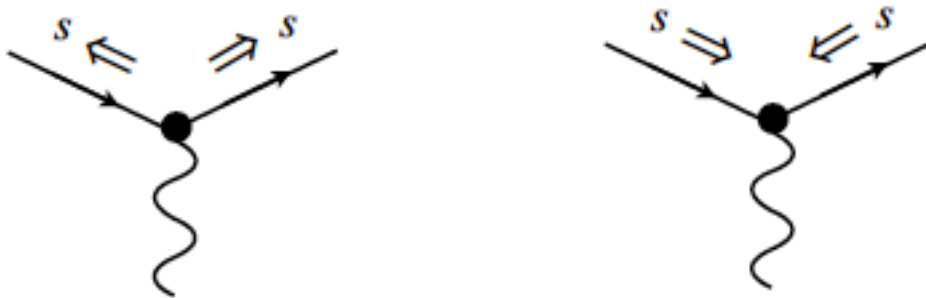


Διατήρηση ελικότητας

Η ελικότητα διατηρείται στο όριο των υψηλών ενεργειών όπου μπορούμε να αγνοήσουμε την μάζα των σκεδαζόμενων σωματιδίων

Σε πολλά πειράματα, αυτό αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση

Ωστόσο σε μικρές σχετικά ενέργειες, οι τετραγωνικές αγκύλες (ρεύματα) όπου τα spins είναι αντίθετα, δίνουν συνεισφορά που είναι ανάλογη του λόγου m/E



Η συνεισφορά των διαγραμμάτων αυτών δεν είναι μηδενική αν ο λόγος m/E είναι σημαντικός

Ελικότητα και Μετασχηματισμοί Lorentz

Αν τα spins των σωματιδίων είναι προσανατολισμένα στην διεύθυνση της ορμής τους, τότε αν δώσουμε ώθηση στην διεύθυνση της ορμής, το spin δεν αλλάζει.

Αλλάζει το μέτρο της ορμής των σωματιδίων αλλά αυτό με την σειρά του ακυρώνεται στον ορισμό της ελικότητας οπότε η ελικότητα του σωματιδίου παραμένει ίδια.

Αν όμως δώσουμε ώθηση αντίθετα με την διεύθυνση κίνησης του σωματιδίου, τόση όση χρειάζεται για να αλλάξει η διεύθυνση της ορμής, το πρόσημο της ελικότητας θα αλλάξει

Για σωματίδια που η μάζα τους είναι μηδενική, πάντοτε κινούνται με την ταχύτητα του φωτός
Για τα σωματίδια αυτά, είναι αδύνατο να δώσουμε τόση μεγάλη ώθηση για να αλλάξει το πρόσημο της ορμής

Για σωματίδια με μηδενική μάζα, η ελικότητα είναι ένα Lorentz αναλλοίωτο μέγεθος αλλά αυτό δεν ισχύει ακριβώς για σωματίδια με μή μηδενική μάζα