

ΦΥΣ 145 – Μαθηματικές Μέθοδοι στη Φυσική

Τελική Εξέταση

24 – Μάη – 2005

Group: A

Γράψτε το ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητάς σας στο πάνω μέρος της αυτής της σελίδας.

Πρέπει να απαντήσετε και στα 5 προβλήματα που σας δίνονται. Όλα τα προβλήματα είναι ισοδύναμα και το καθένα αντιστοιχεί σε 16 μονάδες για σύνολο 80 μονάδων.

Τα προγράμματα θα πρέπει να τα στείλετε σαν attachments σε ένα και μόνο e-mail στο phy145@ucy.ac.cy και με τίτλο το group των ασκήσεων που λύνετε (στην προκειμένη περίπτωση groupA). Κάθε πρόγραμμα θα πρέπει να ονομάζεται σύμφωνα με τον αριθμό της άσκησης που αντιστοιχεί, π.χ. program askisi1 και το αντίστοιχο αρχείο επίσης ανάλογα π.χ. askisi1.f

Ο χρόνος εξέτασης είναι 4 ώρες.

Από τη στιγμή αυτή δεν υπάρχει συνεργασία/συζήτηση ανταλλαγή αρχείων και e-mails με κανένα και φυσικά κουδούνισμα κινητού που πρέπει να κλείσουν. Σημειώσεις, χαρτάκια κλπ απαγορεύονται όπως και επισκέψεις σε ιστοσελίδες που δεν αναφέρονται στην ιστοσελίδα του μαθήματος. Απαγορεύεται επίσης η χρήση account άλλου συναδέλφου σας.

Καλή επιτυχία

1. Η κατανομή Poisson δίνεται από τη σχέση:

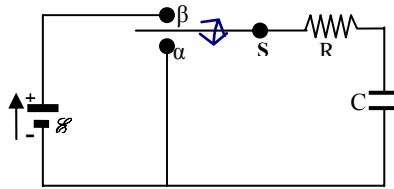
$$P[n;a] = \frac{a^n e^{-a}}{n!}$$

και δίνει τη πιθανότητα για την ύπαρξη n “γεγονότων” (π.χ. ραδιενεργές διασπάσεις) όταν γνωρίζουμε ότι ο μέσος αριθμός γεγονότων είναι a και τα γεγονότα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, δηλαδή μπορούν να συμβούν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο να υπολογίζει και να επιστρέφει $P[n;a]$ (πρέπει να σκεφθείτε πως να αποφύγετε το σφάλμα μεγάλων αριθμών). Τί είναι πιο πιθανό να συμβεί, να μην έχουμε κανένα γεγονός όταν $a = 10$ ή να έχουμε ακριβώς 10^6 γεγονότα να συμβούν όταν $a = 10^6$.

2. (α) Δημιουργήστε 2 διανύσματα α και β τα οποία περιέχουν τους ακέραιους 1-5 και 7-3 (φθίνουσα σειρά) αντίστοιχα. Υπολογίστε το εσωτερικό τους γινόμενο.
- (β) Αφαιρέστε κάθε στοιχείο του διανύσματος α από το αντίστοιχο του β και σχηματίστε ένα καινούριο διάνυσμα c .
- (γ) Υπολογίστε το εξωτερικό γινόμενο του c με τον εαυτό του και δημιουργήστε ένα 5x5 πίνακα τον οποίο ονομάστε D .
- (δ) Μετατρέψτε τα στοιχεία του πίνακα D προσθέτοντας κάποιο “θόρυβο”. Αυτό κάντε το προσθέτοντας σε κάθε στοιχείο ένα τυχαίο αριθμό. Δηλαδή $D_{ij}=D_{ij}+\text{rand}()$. (Για να ξεκινήσετε τη σειρά των τυχαίων αριθμών πληκτρολογήστε την εντολή $y = \text{rand}(5)$ στην αρχή του προγράμματός σας ώστε όλοι να έχετε τους ίδιους τυχαίους αριθμούς). Βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα D (προσέξτε αν είναι αντιστρέψιμος) καθώς επίσης και το διάνυσμα x , λύση της εξίσωσης $Dx = \alpha$.
- (ε) Ορίστε 2 νέους πίνακες, $E=DD=D^2$ και F τα στοιχεία του οποίου είναι τα τετράγωνα των στοιχείων του πίνακα D .

3. Σχεδιάστε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + x^2 - 37x + 33$ μεταξύ $x = -10$ και $x = 10$. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της διχοτόμησης βρείτε τις τρεις πραγματικές ρίζες της συνάρτησης (θα πρέπει να βρείτε διαστήματα που περιέχουν τις ρίζες)

4. Στο μάθημα της Φυσικής II έχετε μάθει για πυκνωτές, αντιστάσεις και RC κυκλώματα. Θεωρήστε το παρακάτω κύκλωμα:



Όταν ο διακόπτης κλείνει στο σημείο β , ρεύμα κινείται στο κύκλωμα και φορτίζει το πυκνωτή C . Όταν ο διακόπτης κινείται στο σημείο α , φορτίο το οποίο είχε αποθηκευτεί στο πυκνωτή κινείται στο κύκλωμα και ο πυκνωτής αποφορτίζεται σε μικρό χρονικό διάστημα.

Γράφοντας την εξίσωση του κυκλώματος έχουμε: $Ri + \frac{q}{C} = 0$, όπου $i = \frac{dq}{dt}$. Ο λόγος που γράφουμε το ρεύμα με αυτό το τρόπο είναι επειδή δεν είναι σταθερό με το χρόνο και τελικά σταματά να ρέει. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί επομένως:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} \text{ που είναι μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης ως προς } q(t).$$

(α) Βρείτε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης (αναλυτικά) υποθέτοντας ότι τη χρονική στιγμή $t = t_0$, το φορτίο είναι q_0 (αυτό είναι το φορτίο που είχε αρχικά ο πυκνωτής).

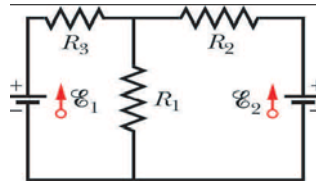
(β) Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο χρησιμοποιεί τη μέθοδο του Euler για να λύσετε τη διαφορική εξίσωση. Χρησιμοποιήστε $RC = \tau = 1 \text{ sec}$, $q_0 = 5Cb$ και $t_{\text{final}} = 4\tau$.

(γ) Κάντε τη γραφική παράσταση της αναλυτικής λύσης και αριθμητικής λύσης στο ίδιο plot.

(δ) Κάντε τη γραφική παράσταση του σχετικού σφάλματος συναρτήσει του χρόνου. Σχολιάστε σχετικά με το αν το σφάλμα αυξάνει ή ελαττώνεται με το χρόνο. Νομίζετε ότι η συμπεριφορά αυτή είναι σωστή; Αν το χρονικό βήμα Δt , γίνει μισό του αρχικού, τι συμβαίνει στο σφάλμα; Πόσο ελαττώνεται το σφάλμα; Νομίζετε ότι είναι σωστό; Εξηγήστε.

(Όλες οι απαντήσεις να δωθούν στο παρακάτω χώρο).

5. Θυμηθείτε από την Φυσική II ότι το ρεύμα σε κάθε κλάδο ενός κυκλώματος μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας τους κανόνες του Kirchhoff. Το άθροισμα όλων των διαφορών δυναμικού καθώς κινούμαστε μέσα σε ένα κλειστό βρόγχο του κυκλώματος πρέπει να είναι μηδέν. Επίσης ξέρουμε ότι το φορτίο διατηρείται και επομένως το ρεύμα που εισέρχεται σε ένα κόμβο θα πρέπει να είναι ίδιο με το ρεύμα που εξέρχεται από το κόμβο. Επομένως το άθροισμα όλων των ρευμάτων (εισερχομένων και εξερχομένων) πρέπει να είναι μηδέν.



Θεωρήστε το κύκλωμα του παραπάνω σχήματος. Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει τα ρεύματα σε κάθε κλάδο του κυκλώματος. Σας δίνεται ότι $\mathcal{E}_1=3.0\text{V}$, $\mathcal{E}_2=1.0\text{V}$ και $R_1=5.0\Omega$, $R_2=2.0\Omega$ και $R_3=4.0\Omega$ αντίστοιχα. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει τον κλάδο και το αντίστοιχο ρεύμα. Χρησιμοποιήστε το παρακάτω χώρο για να λύσετε αρχικά το πρόβλημα.