ΦΥΣ 140 – Εισαγωγή στην Επιστημονική Χρήση Υπολογιστών

8η Εργασία (Τελευταία) **Επιστροφή: 01/12/2023**

<u>Υπενθύμιση:</u> Οι εργασίες πρέπει να επιστρέφονται με e-mail στο fotis@ucy.ac.cy που θα στέλνετε από το πανεπιστημιακό σας λογαριασμό το αργότερο μέχρι την ημερομηνία που αναγράφεται.

Ως subject του e-mail θα πρέπει να αναγράφεται την εργασία (username_phy140_hmX όπου X ο αριθμός της εργασίας)

Κάθε αρχείο που επισυνάπτετε (attach) στο e-mail σας θα πρέπει να έχει το όνομα στη μορφή username_hmX.tgz όπου username είναι το username του e-mail σας και X ο αριθμός της εργασίας. Επίσης σαν πρώτο σχόλιο μέσα σε κάθε file που περιέχει το πρόγραμμά σας θα πρέπει να αναφέρεται το ονοματεπώνυμό σας. Οι εργασίες είναι ατομικές και πανομοιότυπες εργασίες δε θα βαθμολογούνται. Για να κάνετε ένα tgz file (ουσιαστικά tar zipped file) θα πρέπει να δώσετε στο terminal την εντολή tar -czvf username_hmX.tgz *.py όπου py είναι όλα τα py files των προγραμμάτων σας.

1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi \cos(x)\,dx$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Euler και την μέθοδο του τραπεζίου. Χρησιμοποιήστε βήμα 0.1 για κάθε μέθοδο.

2. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ολοκλήρωσης Monte Carlo για να υπολογίσετε το εμβαδό ενός τριγώνου με κορυφές (-1,0), (1,0) και (0,3).

3. Θεωρήστε ένα ομοιόμορφο και ομογενή δίσκο, D, μάζας M = 1kg και πυκνότητας, d, ο οποίος έχει ακτίνα R =1 και το κέντρο του οποίου βρίσκεται στο (0,0). Θέλουμε να υπολογίσουμε την ροπή αδράνειας του δίσκου για περιστροφή του ως προς ένα σημείο $r_0 = (x_0, y_0)$. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς το σημείο αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$I(r_0) = \int_D d^2r(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} dy[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$$

Υπολογίστε το παραπάνω ολοκλήρωμα ως ακολούθως:

(α) Θεωρήστε έναν ακέραιο μετρητή N και έναν πραγματικό μετρητή S και του δυο ίσους με μηδέν.

(β) Θεωρήστε δυο τυχαίους αριθμούς x και y που ανήκουν στο διάστημα [-1, 1]. Προσέξτε ότι η συνάρτηση *rand*() επιστρέφει τυχαίους αριθμούς στο διάστημα [0,1) και επομένως θα πρέπει να μετατρέψετε τους τυχαίους αριθμούς x και y ώστε το εύρος τους να είναι στο διάστημα [-1,1].

(γ) Αν $x^2 + y^2 < 1$, το σημείο βρίσκεται στο δίσκο και επομένως μπορείτε να αυξήσετε το μετρητή N κατά μια μονάδα ενώ ο μετρητής S αυξάνει κατά $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$.

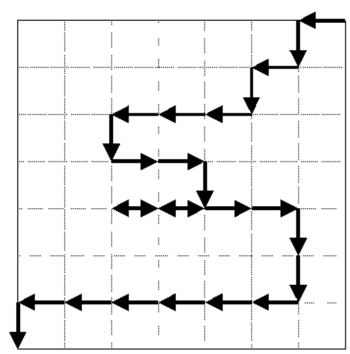
(δ) Επαναλάβετε τα βήματα (β) και (γ) έως ότου ο μετρητής N είναι 5×10^7.

(ε) Το αποτέλεσμα θα είναι $I(r_0) = S/N$.

Μπορείτε να επαληθεύσετε τους υπολογισμούς σας για τις περιπτώσεις $r_0 = (0,0), I = 0.500$ ενώ για $r_0 = (0.5,0.0), I = 0.750$. Ποια είναι η ροπή αδράνειας για $r_0 = (0.25,0.25)$;

4. **Monte Carlo Μέθοδος απόρριψης**. Στην άσκηση αυτή θα πρέπει να εφαρμόσετε την μέθοδο της απόρριψης που στηρίζεται στη χρήση τυχαίων αριθμών ώστε να κατασκευάσετε τυχαίους αριθμούς με πυκνότητα πιθανότητας που δίνεται από τη σχέση: $P(y) = e^{-y^2}$. Θα πρέπει να δημιουργήσετε 10,000 τυχαίους αριθμούς και να κάνετε το ιστόγραμμα της κατανομής τους στο διάστημα [-10,10] και να το συγκρίνετε με την συνάρτηση που σας δόθηκε.
5. **Monte Carlo Μέθοδος μετασχηματισμού:** Στην άσκηση αυτή θα πρέπει να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο εφαρμόζει την μέθοδο του μετασχηματισμού που είδαμε στις διαλέξεις. Θα πρέπει να εφαρμόσετε τη μέθοδο αυτή ώστε να κατασκευάσετε 10^6 τυχαίους αριθμούς κατανεμημένους σύμφωνα με την πυκνότητα πιθανότητας $(y) = e^y$. Οι τυχαίοι αριθμοί που κατασκευάζετε θα πρέπει να έχουν τιμές στο διάστημα 1 έως 2.

   Όπως και στην προηγούμενη άσκηση, θα πρέπει να κάνετε το ιστόγραμμα των τυχαίων αριθμών που επιλέξατε και να το συγκρίνετε με την συνάρτηση που σας δόθηκε.
6. Μια σειρά από προβλήματα διάχυσης αερίων μπορούν να προσομοιωθούν με μια προσομοίωση τυχαίας διαδρομής που μπορεί να απλουστευθεί ως ακολούθως: Ένας μεθυσμένος φυσικός ξεκινά από το υψηλότερο δεξί άκρο (π.χ. συντεταγμένες 8,8) του τετραγωνικού πλέγματος των δρόμων που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα και προσπαθεί να φθάσει στο σπίτι του που είναι στη θέση με συντεταγμένες (1,1) περπατώντας τυχαία στους δρόμους. Κάθε φορά που φθάνει σε μια γωνία αποφασίζει τυχαία ποια κατεύθυνση θα ακολουθήσει. Ωστόσο ποτέ δεν βγαίνει έξω από τα όρια του τετραγώνου του πλέγματος των δρόμων.

   Μια πιθανή διαδρομή φαίνεται στο σχήμα. Όπως βλέπετε αρκετές φορές χρειάζεται να πισωγυρίσει στον ίδιο δρόμο γιατί όλες οι διευθύνσεις (4 στα εσωτερικά σημεία, μείον 1 στα όρια του πλεγματικού τετραγώνου) έχουν την ίδια πιθανότητα. Η διαδρομή που φαίνεται στο σχήμα έχει μήκος $26m$ γιατί αποτελείται από 26 βήματα και η πλευρά του μικρού τετραγώνου είναι $1m$.

   Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει το μέγιστο, ελάχιστο και αναμενόμενο μήκος της διαδρομής. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να προσομοιώνει 5000 επιτυχείς διαδρομές (επιτυχής είναι η διαδρομή στην οποία ο φυσικός μας φθάνει τελικά στο σπίτι του) και υπολογίζει τις τρεις παραπάνω ποσότητες. Πρέπει να προσέξετε τα βήματα στα όρια του πλέγματος. Βήματα τα οποία οδηγούν στην υπέρβαση των ορίων δεν θα πρέπει να επιτρέπονται και δεν θα πρέπει να επηρεάζουν το μήκος της διαδρομής.

   Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει τον αριθμό της διαδρομής, τον αριθμό των βημάτων που εκτελέστηκαν, την αναμενόμενη τιμή βημάτων, τον μέγιστο και ελάχιστο αριθμό βημάτων που έχουν βρεθεί και τέλος το αναμενόμενο μήκος της διαδρομής με βάση όλες τις επιτυχείς διαδρομές.
7. Ένας φοιτητής βγαίνοντας από την εξέταση του μαθήματος ΦΥΣ140 είναι τόσο ζαλισμένος που δεν ξέρει προς πια κατεύθυνση να κινηθεί. Ωστόσο αυτό που επιθυμεί είναι να βρεθεί σε ένα από τα 2 bars που είναι κοντά στο Πανεπιστήμιο και να ξεχάσει για το βράδυ την εμπειρία

της εξέτασης. Του δίνονται 4 δυνατές διευθύνσεις με την ίδια πιθανότητα. Σε κάθε εξωτερική θέση του χάρτη ο φοιτητής θα βρεθεί σε μια εκδήλωση από την οποία δεν μπορεί να φύγει. Οι θέσεις στις οποίες βρίσκονται τα bars είναι η 10 και η 11, ενώ το εργαστήριο Η/Υ που είχε την εξέταση βρίσκεται στη θέση 4. Στις θέσεις 5, 8 και 9 μπορεί να κινηθεί προς οποιαδήποτε κατεύθυνση.

Να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει την πιθανότητα ο φοιτητής να καταλήξει σε ένα από τα δυο bars που φαίνονται στο παρακάτω χάρτη.