ΦΥΣ. 133
$2^{η}$ ΠΡΟΟΔΟΣ 10-Απρίλη-2006

Πριν ξεκινήσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, αριθμό ταυτότητας) στο πάνω μέρος της σελίδας αυτής.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις σημειώσεις από τις διαλέξεις καθώς και τις λύσεις των ασκήσεων από τα homeworks και τα φροντιστήρια και μόνο αυτά.
Ανταλλαγή σημειώσεων, ιδεών και οποιαδήποτε μορφή συζήτησης απαγορεύεται. Για τις λύσεις των ασκήσεων θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε μόνο τις σελίδες που σας δίνονται.

Προσπαθήστε να δείξετε τη σκέψη σας και να γράψετε καθαρές εξισώσεις. Για πλήρη ή μερική βαθμολόγηση θα πρέπει να φαίνεται καθαρά το τι προσπαθείτε να δείξετε.

Σας δίνονται 3 ασκήσεις και πρέπει να απαντήσετε σε όλες. Σύνολο μονάδων 40.
Διαβάστε πρώτα όλες τις ασκήσεις και προσπαθήστε να σκεφτείτε τι περίπου χρειάζεται να κάνετε. Η σειρά των προβλημάτων είναι ενδεικτική και δεν αντικατοπτρίζει τη δυσκολία τους.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι ακριβώς 90 λεπτά.

Καλή επιτυχία.

1. (α) Ξεκινώντας από τις ακόλουθες συναρτήσεις Hamilton να βρεθούν οι αντίστοιχες συναρτήσεις Lagrange $\mathcal{L}$:

(i) $H = \dfrac{p^2}{2m} + \lambda qp + \dfrac{1}{2}kq^2$, όπου λ και k είναι σταθερές. (**2β**)

(ii) $H = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$, όπου c είναι σταθερά. (**3β**)

(iii) $H = \dfrac{p_1^2}{2m} + \lambda p_1 p_2 + a x_2^4$, όπου m, λ και α είναι σταθερές. (**2β**)

(β) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης του Hamilton και για τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις. (**3β**)

(α) Σε όλες τις περιπτώσεις θα πρέπει να λύσουμε ως προς p ξεκινώντας από την $\dot{q}$ την οποία παίρνουμε από την εξίσωση κίνησης του Hamilton.

Χρησιμοποιώντας το γενικό ορισμό της συνάρτησης Hamilton: $H = \Sigma p\dot{q} - \mathcal{L}$, μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση Lagrange

Θα έχουμε:

(i) $H = \dfrac{p^2}{2m} + \lambda pq + \dfrac{1}{2}kq^2$ και επομένως $\dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m} + \lambda q$

Λύνουμε ως προς p και παίρνουμε: $p = m\dot{q} - \lambda q m \Rightarrow p = m(\dot{q} - \lambda q)$

Η Lagrangian θα είναι:

$$\mathcal{L} = p\dot{q} - H = p\left(\frac{p}{m} + \lambda q\right) - \left[\frac{p^2}{2m} + \lambda pq + \frac{1}{2}kq^2\right] = \frac{p^2}{m} + \cancel{\lambda pq} - \frac{p^2}{2m} - \cancel{\lambda pq} - \frac{1}{2}kq^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}kq^2 \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2\cancel{m}} m^{\cancel{2}}(\dot{q} - \lambda q)^2 - \frac{1}{2}kq^2 \Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{q} - \lambda q)^2 - \frac{k}{2}q^2}$$

(ii) $H = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$ άρα $\dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{pc^2}{\left[(pc)^2 + (mc^2)^2\right]^{1/2}}$

Λύνοντας προς p θα έχουμε: $\dot{q}^2 = \dfrac{(pc^2)^2}{(pc)^2 + (mc^2)^2} \Rightarrow \dot{q}^2(pc)^2 + \dot{q}^2(mc^2)^2 = (pc^2)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dot{q}^2(pc)^2 - (pc^2)^2 = -\dot{q}^2(mc^2)^2 \Rightarrow \dot{q}^2 m^2 \cancel{c^4} = -\dot{q}^2 p^2 \cancel{c^2} + p^2 c^{\cancel{4}\,2} \Rightarrow \dot{q}^2 m^2 c^2 = p^2(-\dot{q}^2 + c^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{\dot{q}^2 m^2 \cancel{c^2}}{\cancel{c^2}\left[1 - \frac{\dot{q}^2}{c^2}\right]} \Rightarrow p = \frac{\dot{q}m}{\left[1 - \left(\frac{\dot{q}}{c}\right)^2\right]^{1/2}}$$

Η Lagrangian θα είναι:

$$\mathcal{L} = p\dot{q} - \mathcal{H} = p\dot{q} - \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} = \frac{(pc)^2}{[(pc)^2+(mc^2)^2]^{1/2}} - \sqrt{(pc)^2+(mc^2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{(pc)^2}{[(pc)^2+(mc^2)^2]^{1/2}} - \frac{(pc)^2+(mc^2)^2}{[(pc)^2+(mc^2)^2]^{1/2}} = -\frac{(mc^2)^2}{[(pc)^2+(mc^2)^2]^{1/2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{-(mc^2)^2}{\left[\frac{\dot{q}^2 m^2 c^2}{1-\left(\frac{\dot{q}}{c}\right)^2} + (mc^2)^2\right]^{1/2}} = -\frac{(mc^2)^2\left(1-\left(\frac{\dot{q}}{c}\right)^2\right)^{1/2}}{\left[c^2\dot{q}^2 m^2 + (mc^2)^2 - m^2 c^4 \frac{\dot{q}^2}{c^2}\right]^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = -\frac{(mc^2)^2\left[1-\left(\frac{\dot{q}}{c}\right)^2\right]^{1/2}}{\left[\cancel{\dot{q}^2 m^2 c^2} + (mc^2)^2 - \cancel{\dot{q}^2 m^2 c^2}\right]^{1/2}} = \frac{(mc^2)^{\cancel{2}}\left[1-\left(\frac{\dot{q}}{c}\right)^2\right]^{1/2}}{\cancel{mc^2}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = mc^2\sqrt{1-\left(\frac{\dot{q}}{c}\right)^2}}$$

(iii) $\mathcal{H} = \frac{P_1^2}{2m} + \lambda P_1 P_2 + \alpha x_2^4$

Εδώ έχουμε 2 ορμές P_1 και P_2 οπότε χρειαζόμαστε 2 εξισώσεις Hamilton:

$$\dot{x}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_1} = \frac{P_1}{m} + \lambda P_2 \qquad \text{και} \qquad \dot{x}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_2} = \lambda P_1$$

Λύνουμε προς P_1 και P_2 οπότε έχουμε: $P_1 = \frac{\dot{x}_2}{\lambda}$

$$P_2 = \frac{1}{\lambda}\left[\dot{x}_1 - \frac{\dot{x}_2}{\lambda m}\right] \Rightarrow P_2 = \frac{\dot{x}_1}{\lambda} - \frac{\dot{x}_2}{\lambda^2 m}$$

Η Lagrangian θα είναι:

$$\mathcal{L} = P_1\dot{x}_1 + P_2\dot{x}_2 - \mathcal{H} = P_1\left(\frac{P_1}{m} + \lambda P_2\right) + P_2(\lambda P_1) - \left[\frac{P_1^2}{2m} + \lambda P_1 P_2 + \alpha x_2^4\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{P_1^2}{2m} + \lambda P_1 P_2 - \alpha x_2^4 \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{\dot{x}_2^2}{\lambda^2 2m} + \lambda\left[\frac{\dot{x}_2}{\lambda}\frac{\dot{x}_1}{\lambda} - \frac{\dot{x}_2^2}{\lambda^3 m}\right] - \alpha x_2^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{\dot{x}_2^2}{2\lambda^2 m} + \frac{\dot{x}_2\dot{x}_1}{\lambda} - \frac{\dot{x}_2^2}{m\lambda^2} - \alpha x_2^4 \Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = -\frac{\dot{x}_2^2}{2\lambda^2 m} + \frac{\dot{x}_1\dot{x}_2}{\lambda} - \alpha x_2^4}$$

(β) Οι εξισώσεις κίνησης του Hamilton ανά περίπτωση:

(i) $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} + \lambda q \qquad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -(\lambda p + kq)$

(ii) $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{pc^2}{[(pc)^2+(mc^2)^2]^{1/2}} \qquad \dot{p} = \emptyset = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}$

(iii) $\dot{x}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_1} = \frac{P_1}{m} + \lambda P_2 \qquad \dot{x}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_2} = \lambda P_1$

$\dot{P}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = \emptyset \qquad \dot{P}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = -4\alpha x_2^3$

2. Ένας πλανήτης μάζας m περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R, γύρω από ένα αστέρα μάζας M. Θεωρείστε ότι M>>m. Ξαφνικά σαν αποτέλεσμα μιας έκρηξης supernova, ο αστέρας χάνει ακριβώς το 20% της αρχικής του μάζας. Η έκρηξη είναι σφαιρικά συμμετρική οπότε το δυναμικό εξακολουθεί να είναι κεντρικό δυναμικό Kepler και τα εκτοξευόμενα τμήματα της μάζας του αστέρα δεν επηρεάζουν την κίνηση του πλανήτη τη στιγμή της έκρηξης (δηλαδή δεν έρχονται σε σύγκρουση με τον πλανήτη). Θεωρείστε ότι τόσο η έκρηξη όσο και η απώλεια της μάζας του αστέρα γίνονται στιγμιαία.

(α) Να βρεθούν η ενέργεια και η στροφορμή του συστήματος πριν και μετά την έκρηξη. (**7β**)
(β) Να βρεθεί η εκκεντρότητα της τροχιάς του πλανήτη μετά την έκρηξη.(**3β**)
(γ) Να βρεθούν πόσα και ποια είναι τα σημεία καμπής της νέας τροχιάς συναρτήσει της ακτίνας, R, της αρχικής τροχιάς. (**2β**)
(δ) Κάντε ένα καθαρό σχήμα στο οποίο να φαίνονται η αρχική τροχιά του πλανήτη, η θέση του πλανήτη τη στιγμή της έκρηξης και η νέα τροχιά του πλανήτη, αυτή δηλαδή που θα ακολουθήσει ο πλανήτης μετά την έκρηξη. Στο σχήμα σας θα πρέπει να φαίνονται όλα τα σχετικά μεγέθη που περιγράφουν το είδος της τροχιάς του πλανήτη.(**3β**)

(α) Απο τη στιγμή που η έκρηξη είναι σφαιρικά συμμετρική, η κίνηση του πλανήτη θα εξακολουθεί να είναι κάτω από ένα δυναμικό όπως του Kepler, βαρυτικό δυναμικό : $V = -\frac{GMm}{r}$

Έτσι θα έχουμε :

<u>Πριν την έκρηξη</u> $\quad$ <u>Μετά την έκρηξη</u>

$$V = -\frac{k}{r} = -\frac{GMm}{r}, \; k = GMm \qquad V' = -\frac{k'}{r} = -\frac{GM'm}{r} = -\frac{4}{5}\frac{GMm}{r}, \; k' = \frac{4}{5}GMm = \frac{4}{5}k$$

όπου M' η μάζα του αστέρα μετά την έκρηξη $M' = \frac{4}{5}M \quad \left(1-\frac{1}{5} = \frac{4}{5}M\right)$.

Η μόνη ποσότητα που διατηρείται είναι η στροφορμή, αφού V και V' είναι κεντρικά δυναμικά, και δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις που να ασκούνται στο σύστημα, οπότε να παράγουν ροπές. Επομένως $\ell' = \ell$

Η ενέργεια του συστήματος δεν διατηρείται αφού έχουμε απώλειες μάζας.

Αφού $M >> m \Rightarrow \mu = \frac{Mm}{M+m} \simeq m$ και επομένως το κέντρο μάζας μπορούμε να πούμε ότι συμπίπτει με τη θέση του αστέρα, ο οποίος λαμβάνεται ότι είναι σε ηρεμία.

Επομένως η κίνηση του συστήματος μπορεί να προσεγγισθεί με την κίνηση ενός σώματος μάζας m (ο πλανήτης) γύρω από το κέντρο μάζας (το αστέρας)

Έστω R η ακτίνα της αρχικής κυκλικής τροχιάς:

$$E = T+V = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{GmM}{R} \simeq \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{R} \quad (1)$$ (ενέργεια πριν την έκρηξη)

$$E' = T'+V' = \frac{1}{2}\mu v'^2 - \frac{GmM'}{R} \simeq \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{4}{5}\frac{GmM}{R} \quad (2)$$ (ενέργεια μετά την έκρηξη - η θέση R του πλανήτη είναι ίδια)

Εκφράζουμε τις ταχύτητες του πλανήτη πριν και μετά την έκρηξη (v και v') συναρτήσει της σταθερής ποσότητας ℓ

$$\left.\begin{array}{l} \ell = \mu v R \\ \ell' = \mu v' R \\ \ell = \ell' \end{array}\right\} \Rightarrow \ell = \mu v R = \mu v' R \Rightarrow \boxed{v = v' \simeq \frac{\ell}{mR}} \quad (3)$$

Αφού αρχικά ο πλανήτης εκτελούσε κυκλική τροχιά, τότε $\left.\frac{dV_{eff}}{dr}\right|_{r=R} = 0$

Επομένως: $$\left.\frac{d}{dr}\left(\frac{\ell^2}{2\mu r^2} + \left(-\frac{GmM}{r}\right)\right)\right|_{r=R} = 0 \Rightarrow -\frac{\cancel{2}\ell^2}{\cancel{2}\mu R^3} + \frac{GmM}{R^2} = 0 \Rightarrow \frac{\ell^2}{mR^3} = \frac{GmM}{\cancel{R^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell^2 = m^2 GMR \Rightarrow \boxed{\ell = m\sqrt{GMR}} \quad (4)$$ (αυτό βγαίνει και από $F_g = F_\kappa \Rightarrow \frac{GmM}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$)

Αντικαθιστώντας την (4) στην (3) $\Rightarrow v = v' = \frac{\cancel{m}\sqrt{GMR}}{\cancel{m}R} \Rightarrow \boxed{v = v' = \frac{\sqrt{GMR}}{R}}$

Επομένως μπορούμε να βρούμε τις ενέργειες πριν και μετά την έκρηξη, από (1) και (2)

$$E = \frac{1}{2}m\frac{GM\cancel{R}}{R^{\cancel{2}}} - \frac{GMm}{R} \Rightarrow E = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{R} \Rightarrow \boxed{E = -\frac{1}{2}\frac{k}{R}}$$

$$E' = \frac{1}{2}m\frac{GM\cancel{R}}{R^{\cancel{2}}} - \frac{4}{5}\frac{GMm}{R} \Rightarrow E' = -\frac{3}{10}\frac{GMm}{R} \Rightarrow \boxed{E' = -\frac{3}{10}\frac{k}{R}}$$

Η ενέργεια E' είναι αρνητική και επομένως η τροχιά θα είναι ελλειπτική

Η εκκεντρότητά της δίνεται από τη σχέση: $e' = 1 + \frac{2E'\ell'}{\mu k'^2} \simeq 1 + \frac{2E'\ell'}{mk'^2}$

Αντικαθιστώντας τα E', ℓ', k' έχουμε:

$$e'^2 = 1 + \frac{2\ell^2\left(-\frac{3}{10}\frac{k}{R}\right)}{m\left(\frac{4}{5}\right)^2 k^2} = 1 - \frac{\ell^2\frac{3}{5}\frac{\cancel{k}}{R}}{m\frac{16}{25}k^{\cancel{2}}} \Rightarrow e'^2 = 1 - \frac{15\ell^2}{16\,mkR} \overset{(4)}{\Rightarrow} e'^2 = 1 - \frac{15\cancel{m^2 GMR}}{16\cancel{mGMmR}}$$

$$\Rightarrow e'^2 = 1 - \frac{15}{16} \Rightarrow \boxed{e'^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow e' = \frac{1}{4}}$$

Επομένως η τροχιά μετά την έκρηξη είναι όντως μια έλλειψη.

Μπορούμε να βρούμε το περιήλιο και αφήλιο της τροχιάς, δηλαδή τα r_{min} και r_{max}. Ξέρουμε ότι

$$r_{min} = \alpha'(1-e')$$
$$r_{max} = \alpha'(1+e')$$

όπου α' το μήκος του μεγάλου ημιάξονα της έλλειψης

Αλλά $\alpha' = \frac{-k'}{2E'} = -\frac{\frac{4}{\cancel{5}}\cancel{k}}{\cancel{2}\left(-\frac{3}{\cancel{10}_{\cancel{5}}}\frac{\cancel{k}}{R}\right)} \Rightarrow \boxed{\alpha' = \frac{4}{3}R}$

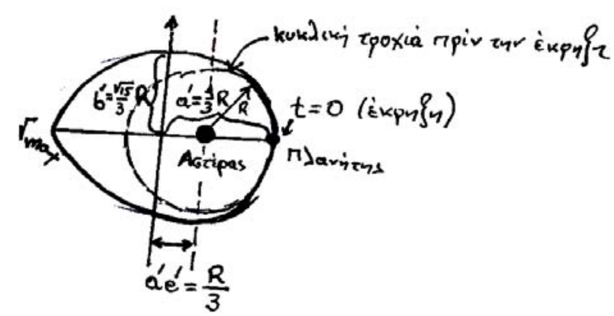
Επομένως: $r_{min} = \frac{4}{3}R\left(1-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \boxed{r_{min} = R}$ όπως αναμενόταν

$$r_{max} = \frac{4}{3}R\left(1+\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \boxed{r_{max} = \frac{5}{3}R}$$

Το μήκος του μικρού ημιάξονα της έλλειψης θα είναι: $b'^2 = \alpha'^2(1-e'^2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow b' = \frac{4}{3}R\left(1-\frac{1}{16}\right)^{1/2} \Rightarrow \boxed{b' = \frac{\sqrt{15}}{3}R}$$

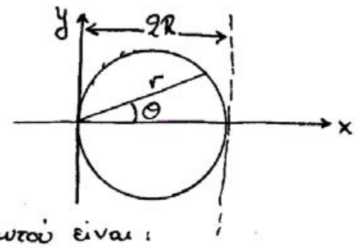
Επομένως το σχήμα της τροχιάς πρίν και μετά την έκρηξη θα είναι:



3. Ένα σώμα κινείται κάτω από την επίδραση μιας κεντρικής δύναμης που δίνεται από την εξίσωση $F(r) = -\frac{k}{r^n}$. Αν η τροχιά του σώματος περνά από κέντρο της δύναμης, δείξτε ότι n = 5. (**15β**) (*Υπόδειξη στην τάξη*: Η τροχιά είναι κυκλική. Έπρεπε να σας το είχα δώσει σαν δεδομένο στην εκφώνηση).

Το σώμα κινείται κάτω από την επίδραση του πεδίου δύναμης $\vec{F} = -\frac{k}{r^n}\hat{r}$

και η τροχιά του είναι κυκλική, έστω ακτίνας R, και η οποία περνά από το κέντρο της δύναμης



Η εξίσωση του κύκλου αυτού είναι:

$$(x-R)^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow (r\cos\theta - R)^2 + r^2\sin^2\theta = R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2\cos^2\theta + \cancel{R^2} - 2rR\cos\theta + r^2\sin^2\theta = \cancel{R^2} \Rightarrow r^2 - 2rR\cos\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(r - 2R\cos\theta) = 0$$

Προφανώς υπάρχει μια τετριμμένη λύση $r=0$ και επίσης η: $r - 2R\cos\theta = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{r = 2R\cos\theta}$$

Επομένως έχουμε την εξίσωση της τροχιάς συναρτήσει της θ και μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση της μορφής της τροχιάς:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{\mu r^2}{\ell^2}F(r) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\theta}\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2R\cos\theta}\right)\right] + \frac{1}{2R\cos\theta} = -\frac{\mu r^2}{\ell^2}\left(-\frac{k}{(2R)^{n-2}\cos^{n-2}\theta}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{d\theta}\left[\frac{\sin\theta}{2R\cos^2\theta}\right] + \frac{1}{2R\cos\theta} = +\frac{\mu}{\ell^2}\left(\frac{k}{(2R)^{n-2}\cos^{n-2}\theta}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\cancel{2R}}\left[\frac{\cos^2\theta - \sin\theta(-2)\sin\theta\cancel{\cos\theta}}{\cos^3\theta}\right] + \frac{1}{\cancel{2R}\cos\theta} = \frac{\mu}{\ell^2}\frac{k}{(2R)^{n-3}\cos^{n-2}\theta} \Rightarrow$$

$$\frac{\cos^2\theta + 2\sin^2\theta}{\cos^3\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\mu}{\ell^2}\frac{k}{(2R)^{n-3}\cos^{n-2}\theta} \Rightarrow \frac{1+\sin^2\theta}{\cos^3\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\mu}{\ell^2}\frac{k}{2^{n-3}R^{n-3}\cos^{n-2}\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos\theta}\left[\frac{1+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1\right]=\frac{\mu}{\ell^2}\frac{k}{2^{n-3}R^{n-3}\cos^{n-2}\theta} \Rightarrow \frac{1}{\cos\theta}\left[\frac{1+\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right]=\frac{\mu}{\ell^2}\frac{k}{2^{n-3}R^{n-3}\cos^{n-2}\theta}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\cos^3\theta}=\frac{\mu}{\ell^2}\frac{k}{2^{n-3}R^{n-3}\cos^{n-2}\theta}\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\cos^3\theta}=\frac{\mu}{\ell^2}\frac{k}{2^{n-2}R^{n-3}\cos^{n-2}\theta}} \text{ γιά όλα τα } \theta$$

Αυτή η τελευταία σχέση για να ισχύει θα πρέπει οι δυνάμεις των συνημιτόνων να είναι ίδιες, δηλαδή $\cos^3\theta=\cos^{n-2}\theta \Rightarrow n-2=3 \Rightarrow \boxed{n=5}$

Επομένως θα πάρουμε για $n=5$: $1=\frac{\mu}{\ell^2}\frac{k}{2^3R^2} \Rightarrow \boxed{k=\frac{8R^2\ell^2}{\mu}}$