Τυπολόγιο

Στροφορμή:

$$\vec{L} = \sum_i^n \vec{L}_i = \sum_i^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = I\vec{\omega}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{\omega\varsigma,CM} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i^n \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\varepsilon\xi}\right]$$

Κέντρο μάζας:

$$R_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1} m_i \vec{r}_i,\ M = \sum_{i=1} m_i \text{ ή } R_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

Γενικευμένη ορμή:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

Αγνοήσιμη ή κυκλική συντεταγμένη:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Hamiltonian:

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

Εξισώσεις Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad [i = 1, \cdots, n]$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad [i = 1, \cdots, n]$$

Ανηγμένη μάζα:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Ενεργό δυναμικό:

$$U_{eff}(r) = U(r) + U_{cf}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

Μετασχηματισμένη ακτινική Δ.Ε. τροχιάς:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u + \frac{\mu}{l^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) = 0, \quad \text{όπου } u = \frac{1}{r}$$

Ενέργεια τροχιάς:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)$$

Τροχιές Kepler:

$F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2} = \dfrac{k}{r^2}$ λύση ακτινικής εξίσωσης είναι: $r(\varphi) = \dfrac{c}{1 + e\cos\varphi}$, με $c = \dfrac{l^2}{k\mu}$

Εκκεντρότητα (*e*): $E = \dfrac{k^2\mu}{2l^2}\left(e^2 - 1\right)$ όπου E = Ενέργεια

Εκκεντρότητα	Ενέργεια	Είδος Τροχιάς
$e = 0$	$E < 0$	κυκλική
$0 < e < 1$	$E < 0$	ελλειπτική
$e = 1$	$E = 0$	παραβολική
$e > 1$	$E > 0$	υπερβολική

Περιήλιο: $r_{\min} = \dfrac{c}{1+e}$

Αφήλιο: $r_{\max} = \dfrac{c}{1-e}$

Μεγάλος ημιάξονας: $a = \dfrac{c}{1-e^2}$

Μικρός ημιάξονας: $b = \dfrac{c}{\sqrt{1-e^2}}$

Νόμοι Kepler:

1$^{\text{ος}}$ νόμος: τροχιές πλανητών είναι ελλείψεις με τον ήλιο σε μια από τις εστίες της έλλειψης

2$^{\text{ος}}$ νόμος: $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{l}{2\mu}$ 3$^{\text{ος}}$ νόμος: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM_H}a^3$

<u>ΦΥΣ 133 – 3η Πρόοδος</u> **16-4-2007**

1η Ομάδα	

1. (α) Εξετάζοντας το ενεργό δυναμικό $U_{eff}(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}$ να βρεθεί η ακτίνα στην οποία ένας πλανήτης ή ένας κομήτης με στροφορμή l μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον ήλιο σε τροχιά σταθερής ακτίνας. (**5μ**)
(β) Δείξτε ότι η κυκλική αυτή ακτίνα είναι σταθερή με την έννοια ότι μικρές μόνο διαταραχές στην ακτινική διεύθυνση προκαλούν μόνο μικρές ακτινικές ταλαντώσεις. (**8μ**)
(γ) Δείξτε ότι η περίοδος των ταλαντώσεων αυτών είναι ίση με την περίοδο περιφοράς του πλανήτη γύρω από τον ήλιο. (**7μ**)

2. Τι θα συμβεί στην τροχιά της γης (την οποία μπορείτε να θεωρήσετε κυκλική) αν η μισή από την μάζα του ήλιου εξαφανιστεί ξαφνικά. (**20μ**)

Τυπολόγιο

Στροφορμή:

$$\vec{L} = \sum_i^n \vec{L}_i = \sum_i^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = I\vec{\omega}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{\omega\varsigma,CM} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i^n \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\varepsilon\xi}\right]$$

Κέντρο μάζας:

$$R_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1} m_i \vec{r}_i, \; M = \sum_{i=1} m_i \text{ ή } R_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

Γενικευμένη ορμή:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

Αγνοήσιμη ή κυκλική συντεταγμένη:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Hamiltonian:

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

Εξισώσεις Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad [i = 1, \cdots, n]$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad [i = 1, \cdots, n]$$

Ανηγμένη μάζα:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Ενεργό δυναμικό:

$$U_{eff}(r) = U(r) + U_{cf}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

Μετασχηματισμένη ακτινική Δ.Ε. τροχιάς:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u + \frac{\mu}{l^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) = 0, \text{ όπου } u = \frac{1}{r}$$

Ενέργεια τροχιάς:

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)$$

Τροχιές Kepler:

$F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2} = \dfrac{k}{r^2}$ λύση ακτινικής εξίσωσης είναι: $r(\varphi) = \dfrac{c}{1 + e\cos\varphi}$, με $c = \dfrac{l^2}{k\mu}$

Εκκεντρότητα (*e*): $E = \dfrac{k^2 \mu}{2l^2}\left(e^2 - 1\right)$ όπου Ε = Ενέργεια

Εκκεντρότητα	Ενέργεια	Είδος Τροχιάς
$e = 0$	Ε < 0	κυκλική
$0 < e < 1$	Ε < 0	ελλειπτική
$e = 1$	Ε = 0	παραβολική
$e > 1$	Ε > 0	υπερβολική

Περιήλιο: $r_{\min} = \dfrac{c}{1+e}$

Αφήλιο: $r_{\max} = \dfrac{c}{1-e}$

Μεγάλος ημιάξονας: $a = \dfrac{c}{1-e^2}$

Μικρός ημιάξονας: $b = \dfrac{c}{\sqrt{1-e^2}}$

Νόμοι Kepler:

1ος νόμος: τροχιές πλανητών είναι ελλείψεις με τον ήλιο σε μια από τις εστίες της έλλειψης

2ος νόμος: $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{l}{2\mu}$ 3ος νόμος: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM_H} a^3$

ΦΥΣ 133 – 2η Πρόοδος **16-4-2007**

2η Ομάδα	

1. Να βρεθούν οι Hamiltonians που αντιστοιχεί στις ακόλουθες Lagrangians:

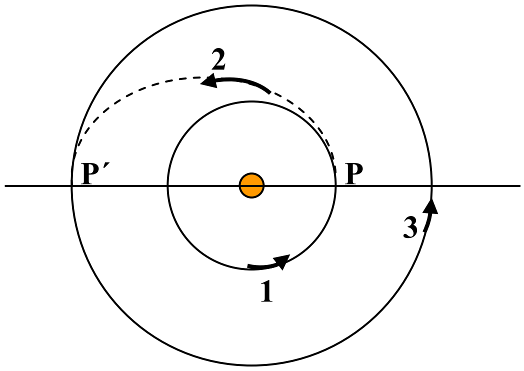
(α) $L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \lambda\dot{x}_1 x_2^2 - a\left(x_1 - x_2\right)^4$ όπου m_1, m_2, λ και α είναι σταθερές. (**5μ**)

(β) $L = \frac{1}{2}m_1 R^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) - mgR\cos\theta$ (**5μ**)

(γ) $L = x\dot{x}$ (**5μ**)

Στην τελευταία αυτή περίπτωση τι νομίζετε ότι σημαίνει το αποτέλεσμα που βρήκατε; Σας δίνει ανάλογο αποτέλεσμα η Lagrangian; (**5μ**)

2. Το πλήρωμα ενός δορυφόρου που βρίσκεται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R_1 γύρω από την γη θέλει να μεταφερθεί σε μια άλλη κυκλική τροχιά ακτίνας $R_2 = 2R_1$. Την μεταφορά αυτή την επιτυγχάνουν με δύο διαδοχικές ωθήσεις των ρουκετών του δορυφόρου όπως στο παρακάτω σχήμα. Αρχικά ο δορυφόρος ωθείται από το σημείο P σε μια ελλειπτική τροχιά 2, αρκετά μεγάλη ώστε να τον μεταφέρει στην επιθυμητή ακτίνα R_2. Κατόπιν, τη στιγμή που βρίσκεται στην επιθυμητή ακτίνα (στο σημείο P΄ το οποίο είναι το απόγειο της ελλειπτικής τροχιάς μεταφοράς) ωθείται με τη βοήθεια των ρουκετών στη κυκλική τροχιά 3.



(α) Κατά πόσο θα πρέπει να αυξήσει τη ταχύτητά του σε κάθε μια από τις δυο ωθήσεις; (**12μ**)

(β) Κατά πόσο αυξάνει η ταχύτητα του δορυφόρου σαν αποτέλεσμα της όλης διαδικασίας; (**8μ**)

<u>Υπόδειξη:</u> Οι ωθήσεις γίνονται και στις δυο περιπτώσεις εφαπτομενικά της τροχιάς. Σε κάθε περίπτωση η νέα τροχιά έχει ένα κοινό σημείο με την προηγούμενη τροχιά του δορυφόρου το σημείο στο οποίο πυροδοτήθηκαν οι ρουκέτες