Hamiltonian φορμαλισμός

Οι εξισώσεις Hamilton είναι: $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad -\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q}$

- (p,q) ονομάζονται κανονικές μεταβλητές
- ***H*** είναι συνάρτηση που ονομάζεται Hamiltonian $H = p\dot{q} - L(q,\dot{q})$
- Κανονικές μεταβλητές ~ θέση και ορμή
- Δεν συνδέονται με την σχέση p = mv ?

- Θέση και ορμή σαν ανεξάρτητες μεταβλητές
  - Επιτρέπει μεγαλύτερο εύρος μετασχηματισμών μεταβλητών σε σχέση με τον Lagrangian φορμαλισμό
  - Ο φορμαλισμός είναι πιο καθαρός και βοηθά στην ανεύρεση και αποδοτική χρήση διατηρούμενων ποσοτήτων – επομένως συμμετριών
  - Υπάρχουν πολλές ομοιότητες με το τι ακολουθεί η QM

Επιτυχία μέσα από την αποτυχία…

Η αναζήτηση εργαλείων για την επίλυση του προβλήματος 3-σωμάτων απέτυχε

Εκτός βέβαια και αν κάποιος θεωρήσει επιτυχία την ανάπτυξη των super computers

Αποτέλεσμα αυτής της αναζήτησης είχε σαν επακόλουθο την ανάπτυξη μεθόδων (Lagrangians και Hamiltonians) που αποτελούν τις βάσεις της Κβαντομηχανικής

Η ανάπτυξη της QM οδηγήθηκε από αναλογίες στους φορμαλισμούς Lagrange και Hamilton

Οι θεμελιωτές της QM μεγάλωσαν με κλασική μηχανική

Η Κλασική μηχανική είναι ο συνδετικός κρίκος μεταξύ Newton και Schröndinger

Τι θα μελετήσουμε λοιπόν

- Σύντομη αναδρομή Νευτώνιας Μηχανικής
- Εξισώσεις Lagrange και αρχή Hamilton
  - Πρόβλημα κεντρικής δύναμης
  - Κίνηση στερεού σώματος
  - Ταλαντώσεις
- Εξισώσεις Hamilton και κανονικοί μετασχηματισμοί
- Συμμετρίες
- Χάος

Στόχος για σήμερα

- Ανακεφαλαίωση των βασικών αρχών της Newtonian μηχανικής
  - Σύντομα ώστε να μην κοιμηθείτε
- Συζήτηση της κίνησης ενός σωματιδίου
  - Ορισμός των συμβόλων και τη χρησιμοποίησή τους
  - Ορμές, νόμοι διατήρησης, κινητική και δυναμική ενέργεια
- Συζήτηση της κίνησης πολλών σωματιδίων
- Όλα αυτά πρέπει να σας είναι ήδη γνωστά

Υλικό σημείο

- Υλικό σημείο = το αντικείμενο με αμελητέο μέγεθος
  - Ηλεκτρόνιο μέσα σε ένα καθοδικό σωλήνα
  - Η μπάλα του baseball που ρίχνει ένας pitcher
  - Η γη που περιστρέφεται γύρω από τον ήλιο

- Έχει μάζα **m** και θέση **r**
  - Ταχύτητα $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$
  - Γραμμική ορμή $\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$

- Ο 2ος νόμος του Newton για την κίνηση $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{r}}$

Αδρανειακό σύστημα

- Η αρχή ***O*** του **r** είναι κάπως αφηρημένη
  - Εκλογή σημείου αρχής μέτρησης → σύστημα αναφοράς

- Αδρανειακό σύστημα = σύστημα αναφοράς στο οποίο ισχύει

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$$

  - Ακριβέστερη διατύπωση του 2ου νόμου του Newton:

    Υπάρχουν συστήματα αναφοράς για τα οποία η παράγωγος της γραμμικής ορμής ως προς το χρόνο ισούται με την δύναμη

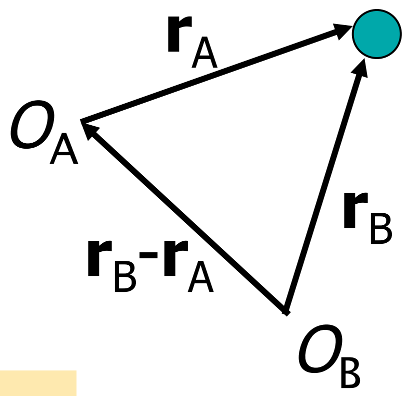
  - Και υπάρχει άπειρος αριθμός τέτοιων συστημάτων

Αδρανειακά συστήματα

Έστω 2 αδρανειακά συστήματα Α κα Β

Ένα υλικό σημείο έχει $\mathbf{r}_A$ ως προς το Α και $\mathbf{r}_B$ ως προς το Β

Αρχή συντεταγμένων του Α είναι στη θέση $r_B - r_A$ του Β



$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}_A = m\ddot{\mathbf{r}}_B \rightarrow \ddot{\mathbf{r}}_B - \ddot{\mathbf{r}}_A = 0 \rightarrow \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{B} - \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{A} = \sigma\tau\alpha\vartheta\varepsilon\rho o$$

Οποιαδήποτε 2 αδρανειακά συστήματα κινούνται
με σταθερή σχετική ταχύτητα

Ο Γαλιλαίος έδειξε την ισοδυναμία αυτών των συστημάτων

Στροφορμή

Ορίζουμε:

- Στροφορμή $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
- Ροπή $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

Η σειρά έχει σημασία

- Από τη σχέση $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ εξάγουμε: $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$

- Οι ορισμοί εξαρτώνται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων O
  - αφού r εξαρτάται από το O
  - Η εξίσωση $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$ ισχύει για οποιαδήποτε O

Διατήρηση της Ορμών

Δυο θεωρήματα διατήρησης:

- Από: $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$

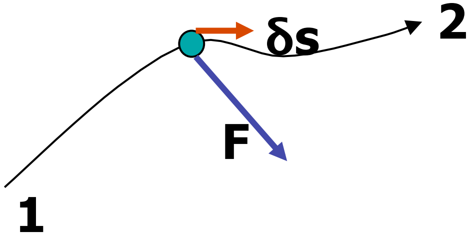
  Αν η ολική δύναμη είναι μηδέν τότε η ορμή διατηρείται

- Από: $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$

  Αν η ολική ροπή είναι μηδέν τότε η στροφορμή διατηρείται

Έργο από εξωτερική Δύναμη

Υλικό σημείο κινείται από τη θέση 1 στη θέση 2 κάτω από την επίδραση της δύναμης **F**



- Το έργο $\mathbf{W_{12}}$ που παράγει η δύναμη **F** ορίζεται ως $W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s}$

- Η κινητική ενέργεια ορίζεται ως $T \equiv \frac{m\text{v}^2}{2}$

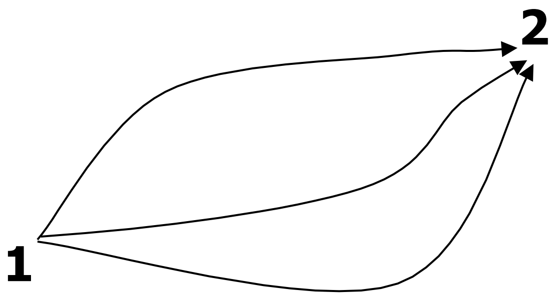
- Έχουμε τότε: $W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 m\, d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{1}{2} m v^2 \Big|_1^2 \Rightarrow W_{12} = T_2 - T_1$

v

Το έργο που παράγεται ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας

Συντηρητική δύναμη

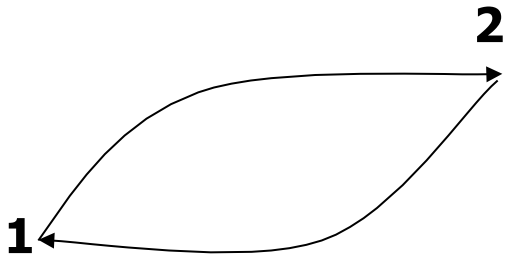
- Αν $\mathbf{W_{12}}$ είναι το ίδιο για κάθε δυνατή διαδρομή από το 1 στο 2, τότε η **F** είναι συντηρητική



- $\mathbf{W_{12}}$ εξαρτάται μόνο από τις 2 θέσεις και όχι από τη διαδρομή

- Ισοδύναμα άν εκτελέσει μια κλειστή διαδρομή, τότε το έργο είναι μηδέν

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_2^1 \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$



Δυναμική Ενέργεια

- Αν η **F** είναι συντηρητική <-> η F εκφράζεται ως $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$
  - V είναι η δυναμική ενέργεια και $\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$
- Το έργο $\mathbf{W_{12}}$ εκφράζεται τότε από

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 \vec{\nabla} V \cdot d\vec{s} = -\int_1^2 dV \Rightarrow W_{12} = V_1 - V_2$$

  - αλλά βρήκαμε πριν ότι είναι ίσο με T_2-T_1

επομένως: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

Αν η δύναμη είναι συντηρητική τότε
η ολική ενέργεια $E = T + V$ διατηρείται

Θεώρημα διατήρησης Ενέργειας

Σύστημα πολλών υλικών σημείων

- Περισσότερο από ένα σημεία → περισσότεροι δείκτες στις εξισώσεις!!

$$\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i \qquad \vec{\tau}_i = \dot{\vec{L}}_i$$

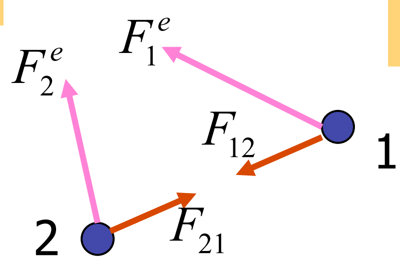
- Υπάρχει μια ιδιαιτερότητα: Η F μπορεί να υπάρχει επίσης λόγω της αλληλεπίδρασης μεταξύ των υλικών σημείων του συστήματος
- Ξεχωρίζουμε μεταξύ εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων

$$\vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(e)}$$

Εξωτερική δύναμη

Δύναμη δρούσα στο σημείο i

Δύναμη από το σημείο j



Αθροίζοντας ως προς όλα τα σημεία

- Η ολική δύναμη που ασκείται στο σύστημα βρίσκεται αν αθροίσουμε τη προηγούμενη δύναμη ως προς όλα τα σημεία

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \vec{F}_{ji} + \sum_i \vec{F}_i^{(e)} = \sum_{i<j} \boxed{\left(\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij}\right)} + \sum_i \vec{F}_i^{(e)}$$

Αυτός ο όρος μηδενίζεται όταν $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \Rightarrow \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(e)}$

Ασθενής νόμος δράσης-αντίδρασης

- Δυνάμεις που 2 σημεία αναπτύσσουν το ένα στο άλλο είναι ίσες και αντίθετες

- **Ο ισχυρός νόμος της δράσης – αντίδρασης:**

Δυνάμεις που 2 σημεία αναπτύσσουν το ένα στο άλλο είναι **ίσες, αντίθετες και κατά μήκος της ευθείας που τα ενώνει**

Αθροίζοντας ως προς όλα τα σημεία

- Ας δούμε πως γράφονται οι εξισώσεις κίνησης

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

- Ορίζουμε σαν κέντρο μάζας $\vec{R} \equiv \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M\ddot{\vec{R}} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \equiv \vec{F}^{(e)}}$$

Το κέντρο μάζας κινείται σαν ένα σημείο με μάζα M υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης $F^{(e)}$

Ολική γραμμική ορμή

- Το άθροισμα των γραμμικών ορμών είναι

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = M\dot{\vec{R}}$$

- Παραγώγηση ως προς τον χρόνο δίνει:

$$\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(e)}$$

Η εξίσωση κίνησης του Newton για το κέντρο μάζας (CM)

- Διατήρηση της ολικής γραμμικής ορμής

Αν η ολική εξωτερική δύναμη $\mathbf{F}^{(e)}$ είναι μηδέν τότε η ολική γραμμική ορμή **P** διατηρείται

- Υποθέσαμε ασθενή νόμο δράσης - αντίδρασης

Ολική στροφορμή

- Το άθροισμα των στροφορμών είναι: $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

- Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο και από τη σχέση:

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i = \sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(e)}$$

$$\dot{\vec{L}} = \boxed{\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}} + \boxed{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}}$$

Ολική εξωτερική ροπή

Αυτός ο όρος μηδενίζεται **αν και μόνο αν η δύναμη F_{ij} ικανοποιεί τον ισχυρό νόμο δράσης αντίδρασης**

Ολική στροφορμή

- Υποθέτοντας ισχυρό νόμο δράσης – αντίδρασης

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} = \sum_i \vec{\tau}_i^{(e)} = \vec{\tau}^{(e)}$$

⇒ **Διατήρηση της ολικής στροφορμής**

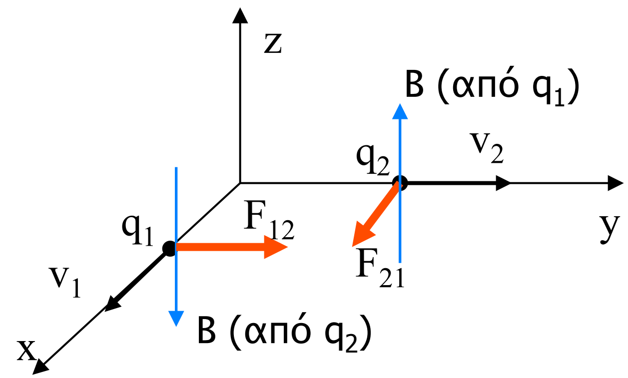
Αν η ολική εξωτερική ροπή **τ**$^{(e)}$ είναι μηδέν,
η ολική στροφορμή διατηρείται

⇓

Ένα σύστημα πολλών σημείων (= εκτενές σώμα) μπορεί να θεωρηθεί σαν υλικό σημείο **αν** οι εσωτερικές δυνάμεις υπακούν στον ισχυρό νόμο της δράσης – αντίδρασης

Νόμοι δράσης - αντίδρασης

- Οι περισσότερες δυνάμεις που ξέρουμε υπακούν στον ισχυρό νόμο δράσης – αντίδρασης
  - Βαρύτητα
  - Ηλεκτροστατική δύναμη



- Υπάρχουν εξαιρέσεις:
  - Η δύναμη Lorentz που εμφανίζεται σε κινούμενα φορτία
  - Η γραμμική ορμή και στροφορμή δεν διατηρούνται
- Αν όμως πάρουμε υπ' όψη το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο
  - Τα σωματίδια ανταλλάσουν δυνάμεις με το πεδίο
  - Το πεδίο από μόνο του έχει γραμμική ορμή και στροφορμή
  - Για ταχύτητες $v \ll c$ η μαγνητική δύναμη μεταξύ q_1 και q_2 είναι πολύ μικρή σε σχέση με τη δύναμη Coulomb.

Οι νόμοι διατήρησης επανήλθαν

Νόμοι διατήρησης

Ασθενής νόμος δράσης – αντίδρασης ⟺ Διατήρηση της $\vec{P}$

Ισχυρός νόμος δράσης – αντίδρασης ⟺ Διατήρηση της $\vec{L}$

- Θα δούμε αργότερα ότι $\boldsymbol{P}$ και $\boldsymbol{L}$ πρέπει να διατηρούνται αν οι νόμοι της φυσικής είναι ισοτροπικοί στο χώρο
  - Δεν υπάρχει κάποια προτιμητέα αρχή
  - Δεν υπάρχει προτιμητέα κατεύθυνση ή προσανατολισμός

Αν δεχθούμε αυτές τις συμμετρίες σα θεμελιώδεις αρχές τότε όλες οι δυνάμεις πρέπει να ικανοποιούν το νόμο της δράσης - αντίδρασης

⟹ «Απόδειξη» του 3ου νόμου του Newton

Ολική στροφορμή

- Ορίζουμε την θέση ενός σημείου Ι από το κέντρο μάζας: $\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R}$
- Ορίζουμε επίσης τις ταχύτητες: $\vec{v}_i' = \dot{\vec{r}}_i'$ και $\vec{v} = \dot{\vec{R}}$
  - Υπολογίζουμε την ολική στροφορμή

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \left(\vec{r}_i' + \vec{R}\right) \times m_i \left(\vec{v}_i' + \vec{v}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \boxed{\vec{R} \times M\vec{v}} + \boxed{\sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'}$$

Η στροφορμή της κίνησης συγκεντρωμένη στο CM

Στροφορμή της κίνησης γύρω από το CM

Ολική στροφορμή

- Θεωρήστε τη κίνηση ενός πλανήτη γύρω από τον ήλιο (υποθέτουμε ότι εξαιτίας της μάζας του είναι ακίνητος).

$$\vec{L}_{\pi\lambda\alpha\nu.} = \vec{L}_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho.} + \vec{L}_{\text{spin}}$$

- Ο διαχωρισμός είναι χρήσιμος γιατί πολύ συχνά τα 2 τμήματα διατηρούνται το καθένα ξεχωριστά:

$$\vec{L}_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho.} = \vec{R}\times\vec{P} \Rightarrow \dot{\vec{L}}_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho.} = \dot{\vec{R}}\times\vec{P} + \vec{R}\times\dot{\vec{P}} = \vec{R}\times\vec{F}^{(e)} \qquad (1)$$

$$0 = \dot{\vec{R}}\times M\dot{\vec{R}}$$

$L_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho.}$ μεταβάλλεται σαν ο πλανήτης να ήταν υλικό σημείο με όλη τη μάζα του συγκεντρωμένη στο CM.

Αν η δύναμη του ήλιου στο πλανήτη ήταν ακριβώς κεντρική τότε η $F^{(e)}//R$ και η στροφορμή θα ήταν σταθερή.
Πολύ κοντά στην πραγματικότητα

- Η μεταβολή της ιδιο-στροφορμής (spin) βρίσκεται αν γράψουμε:

$$\vec{L}_{\text{spin}} = \vec{L}_{\pi\lambda\alpha\nu.} - \vec{L}_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho.} \Rightarrow \dot{\vec{L}}_{\text{spin}} = \dot{\vec{L}}_{\pi\lambda\alpha\nu.} - \dot{\vec{L}}_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho.} \qquad (2)$$

$$\dot{\vec{L}}_{\pi\lambda\alpha\nu.} = \sum \dot{\vec{r}}_i \times \vec{F}_i^{(e)} = \sum\left(\vec{r}_i' + \vec{R}\right)\times\vec{F}_i^{(e)} = \sum \vec{r}_i'\times\vec{F}_i^{(e)} + \vec{R}\times\vec{F}_i^{(e)} \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας (1) και (3) στη (2) έχουμε: $\boxed{\dot{\vec{L}}_{\text{spin}} = \sum \vec{r}_i'\times\vec{F}_i^{(e)} = \vec{\tau}^{(e)}_{\omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ \text{CM}}}$

Ολική στροφορμή

- Η μεταβολή της ιδιοστροφορμής ισούται με την εξωτερική ροπή μετρούμενη ως προς το CM

$$\dot{\vec{L}}_{\text{spin}} = \sum \vec{r}_i{}' \times \vec{F}_i^{(e)} = \vec{\tau}^{(e)}_{\omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ \text{CM}}$$

- Είναι λίγο απρόσμενο μια και ένα σύστημα αναφοράς συνδεδεμένο με το CM δεν είναι αδρανειακό.

- Από τη στιγμή που η ροπή που ασκεί ο ήλιος ως προς το CM ενός οποιουδήποτε πλανήτη είναι πολύ μικρή, L_{spin} είναι σχεδόν σταθερή

- Στην πραγματικότητα υπάρχει μια μικρή ροπή (π.χ. για τη γη, η εξόγκωση του ισημερινού) και L_{spin} δεν είναι σταθερή

  Σαν αποτέλεσμα προκαλείται περιστροφή του άξονα περιστροφής της γης ως προς τους αστέρες κατά 50 δεύτερα ακτινίου το χρόνο

Κινητική ενέργεια

- Το έργο που παράγεται από δύναμη είναι $W_{12} = \sum_i \int_1^2 F_i \cdot ds_i$
  - Οι θέσεις 1 και 2 είναι τώρα καταστάσεις του συστήματος (σύνολο θέσεων)
- Χρησιμοποιώντας την εξίσωση της κίνησης βρίσκουμε την κινητική ενέργεια

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \cdot d\mathbf{s}_i = \sum_i \int_1^2 m_i d\mathbf{v}_i \cdot \underbrace{\frac{d\mathbf{s}_i}{dt}}_{\mathrm{v}_i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathrm{v}_i^2 \Big|_1^2$$

$$W_{12} = T_2 - T_1 \quad \text{όπου} \quad T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathrm{v}_i^2$$

- Χωρίζουμε την T σε 2 μέρη (θυμηθείτε $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i' + \mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i' + \mathbf{v}$)

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i') \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}_i') = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathrm{v}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathrm{v}_i'^2 + \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \underbrace{\cancel{\left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i' \right)}}_{0}$$

Η κίνηση επικεντρώνεται στο CM

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M \mathrm{v}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathrm{v}_i'^2}$$

Η κίνηση γύρω από το CM

Δυναμική ενέργεια

$$\nabla_i \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right)$$

Υποθέτουμε συντηρητική εξωτερική δύναμη $\vec{F}_i^{(e)} = -\vec{\nabla}_i V_i$

$$\sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{S}_i = -\sum_i \int_1^2 \vec{\nabla}_i V_i \cdot d\vec{S}_i = -\sum_i V_i \Big|_1^2$$

Υποθέτουμε ακόμα συντηρητικές εσωτερικές δυνάμεις $F_{ji} = -\nabla_i V_{ij}$

Για να ικανοποιεί τον ισχυρό νόμο δράσης-αντίδρασης:

$$V_{ij} = V_{ij}\left(\left| \vec{r}_i - \vec{r}_j \right| \right)$$

Δυναμικό εξαρτάται μόνο από την απόσταση

$$\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{S}_i = -\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \vec{\nabla}_i V_{ij} \cdot d\vec{S}_i$$

πράξεις

$$-\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij} \Big|_1^2$$

Διατήρηση της ενέργειας

- Αν όλες οι δυνάμεις είναι συντηρητικές, μπορούμε να ορίσουμε την ολική δυναμική ενέργεια

$$V = \sum_i V_i + \boxed{\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij}}$$

Εσωτερική δυναμική ενέργεια

Και έπεται ότι η ολική ενέργεια T+ V διατηρείται

Εξαρτάται από την ενδο-ατομική απόσταση όλων των υλικών σημείων του συστήματος

Είναι σταθερή αν η σχετική ενδοατομική κατάσταση των σημείων είναι καθορισμένη και αμετάβλητη → Στερεό σώμα