# Lab04: Νόμοι του Kirchhoff – Wheatson Bridge – Μέθοδος Μετατροπής Δ-κυκλωμάτων σε Y-κυκλώματα και αντίστροφα

## Νόμοι του Kirchhoff

Απλά κυκλώματα είναι αυτά που μπορούν να μειωθούν σε άλλα ισοδύναμα κυκλώματα που περιέχουν μία μόνο αντίσταση και μία μόνο πηγή τάσης. Πολλά κυκλώματα δεν είναι απλά και απαιτούν τη χρήση των Νόμων του Kirchhoff για να προσδιοριστούν οι τιμές της τάσης, του ρεύματος ή της αντίστασης. Οι Νόμοι του Kirchhoff για το ρεύμα και την τάση είναι :

*Νόμος Κόμβων/Ρευμάτων*: $\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$, **εξ. 4.1**

όπου ο δείκτης *i* αναφέρεται σε όλου τα ρεύματα που εισέρχονται και εξέρχονται από έναν κόμβο του κυκλώματος. Ρεύματα που εισέρχονται έχουν θετικό πρόσημο ενώ αυτά που εξέρχονται έχουν αρνητικό πρόσημο.

*Νόμος Τάσεων/Βρόχων*: $\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = 0$, **εξ. 4.2**

όπου ο δείκτης *i* αναφέρεται σε όλα τα στοιχεία (αντιστάσεις, μπαταρίες, πυκνωτές) που υπάρχουν σε ένα κλειστό βρόχο κυκλώματος. $\Delta V_i$ είναι η διαφορά δυναμικού στα άκρα του *i*-στοιχείου του κυκλώματος.

Στη σημερινή εργαστηριακή δραστηριότητα, θα κατασκευάσετε δύο κυκλώματα με 4 αντιστάτες και μία πηγή τάσης. Τα κυκλώματα αυτά δεν θα είναι απλά και επομένως θα πρέπει να εφαρμόσετε τους κανόνες του Kirchhoff για να προσδιορίσετε τις εντάσεις των ρευμάτων σε κάθε αντιστάτη. Θα χρησιμοποιήσετε κατόπιν ένα ψηφιακό πολύμετρο για να βρείτε την πτώση τάση στα άκρα κάθε αντιστάτη στα κυκλώματα. Οι κανόνες του Kirchhoff θα εφαρμοστούν κατόπιν στα κυκλώματα για να βρείτε τις θεωρητικές τιμές των ρευμάτων που διαρρέουν κάθε αντιστάτη. Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Ohm θα μπορέσετε να βρείτε τις θεωρητικές τιμές της διαφοράς δυναμικού σε κάθε αντιστάτη. Στο τέλος θα μπορέσετε να συγκρίνετε τις θεωρητικές και πειραματικές τιμές και να βρείτε το % σφάλμα.

**Δραστηριότητα 1**

**Στοιχεία που θα χρησιμοποιηθούν**

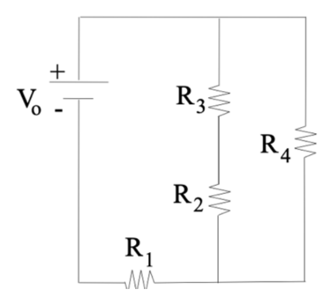
Τροφοδοτικό χαμηλής τάσης

5 αντιστάτες ($R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 50\Omega$, $R_3 = 100\Omega$, $R_4 = 390\Omega$, $R_5 = 1.0k\Omega$)

2 Πολύμετρα

**Διαδικασία**

1. Κατασκευάστε το κύκλωμα του Σχήματος 4.1.
2. Ανοίξτε την πηγή χαμηλής τάσης και έχοντας συνδεδεμένο το πολύμετρο στα άκρα του τροφοδοτικού, ρυθμίστε την τάση στα 6.0Volts.




**Σχήμα 4.1**: Κύκλωμα 1

3. Συνδέστε το πολύμετρο στα άκρα κάθε αντιστάτη. Καταγράψτε τις μετρήσεις σας στον Πίνακα 4.1 που δίνεται παρακάτω.
4. Σβήστε το τροφοδοτικό και αποσυνδέστε το κύκλωμα.

**Ανάλυση**

**1.** Χρησιμοποιείστε τις εξισώσεις 1 και 2 και γράψτε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων οι οποίες όταν τις λύσετε θα σας βοηθήσουν να βρείτε το ρεύμα σε κάθε κλάδο του κυκλώματος.

**2.** Λύστε το σύστημα και βρείτε το κάθε ρεύμα. Θα πρέπει στην αναφορά σας να δείξετε τι ακριβώς κάνατε.

Θα μπορούσατε να βρείτε επίσης πρώτα την ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος και κατόπιν το συνολικό ρεύμα και κατόπιν να κάνετε χρήση του $1^{ου}$ και $2^{ου}$ κανόνα Kirchhoff για να βρείτε το ρεύμα σε κάθε κλάδο. Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με τις δύο μεθόδους.

**3.** Χρησιμοποιώντας τα ρεύματα που προσδιορίσατε στο προηγούμενο βήμα και τον νόμο του Ohm προσδιορίστε τις θεωρητικές τιμές των τάσεων στα άκρα κάθε αντιστάτη.

**4.** Συγκρίνετε τις θεωρητικές τιμές τάσεων που βρήκατε στο προηγούμενο βήμα με τις τιμές των τάσεων που μετρήσατε.

**Αποτελέσματα**

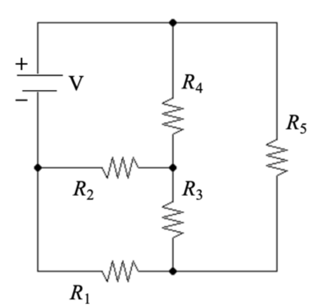
| | **V (Θεωρητική)** | **V (πειραματική)** | **% σφάλμα** |
|---|---|---|---|
| $R_1$ = | | | |
| $R_2$ = | | | |
| $R_3$ = | | | |
| $R_4$ = | | | |

**Πίνακας 4.1**: Μετρήσεις της Δραστηριότητας 1.

**Δραστηριότητα 2**

**Διαδικασία**

1. Κατασκευάστε το κύκλωμα του Σχήματος 4.2. Ο αντιστάτης $R_5$ έχει τιμή $1.0k\Omega$.
2. Ανοίξτε την πηγή χαμηλής τάσης και έχοντας συνδεδεμένο το πολύμετρο στα άκρα του τροφοδοτικού, ρυθμίστε την τάση στα $5.0 Volts$.
3. Συνδέστε το πολύμετρο στα άκρα κάθε αντιστάτη. Καταγράψτε τις μετρήσεις σας στο Πίνακα 4.2 που δίνεται παρακάτω.
4. Συνδέστε το $2^{ο}$ πολύμετρο ως αμπερόμετρο μεταξύ του θετικού ακροδέκτη του τροφοδοτικού και του κοινού σημείου των αντιστατών $R_4$ και $R_5$. Συνδέστε το $1^{ο}$ πολύμετρο ως βολτόμετρο στα άκρα του τροφοδοτικού.




**Σχήμα 4.2**: Κύκλωμα 2

5. Μεταβάλλοντας την τάση με βήμα 2.0*Volts*, πάρτε μετρήσεις της τάσης και έντασης ξεκινώντας από την τιμή των 4.0*Volts* έως 16*Volts*. Καταγράψτε τις μετρήσεις σας στον Πίνακα 4.3.
6. Σβήστε το τροφοδοτικό και αποσυνδέστε το κύκλωμα.

**Ανάλυση**

1. Χρησιμοποιείστε τις εξισώσεις 1 και 2 και γράψτε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων οι οποίες όταν τις λύσετε θα σας βοηθήσουν να βρείτε το ρεύμα σε κάθε κλάδο του κυκλώματος.
2. Λύστε το σύστημα και βρείτε το κάθε ρεύμα. Θα πρέπει στην αναφορά σας να δείξετε τι ακριβώς κάνατε.

   Θα μπορούσατε να βρείτε επίσης πρώτα την ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος και κατόπιν το συνολικό ρεύμα και κατόπιν να κάνετε χρήση του 1$^{ου}$ και 2$^{ου}$ κανόνα Kirchhoff για να βρείτε το ρεύμα σε κάθε κλάδο. Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με τις δύο μεθόδους.
3. Χρησιμοποιώντας τα ρεύματα που προσδιορίσατε στο προηγούμενο βήμα και τον νόμο του Ohm προσδιορίστε τις θεωρητικές τιμές των τάσεων στα άκρα κάθε αντιστάτη.
4. Συγκρίνετε τις θεωρητικές τιμές τάσεων που βρήκατε στο προηγούμενο βήμα με τις τιμές των τάσεων που μετρήσατε.
5. Κατασκευάστε το γράφημα της $\Delta V$ ως προς την ένταση του ρεύματος $I$ με τις μετρήσεις που καταγράψατε στον Πίνακα 4.3.
6. Προσδιορίστε με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων την καλύτερη ευθεία και βρείτε την κλίση και τεταγμένη της ευθείας και τις αντίστοιχες αβεβαιότητες.
7. Συγκρίνετε την κλίση με την ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος του Σχήματος 4.2 που υπολογίσατε θεωρητικά. Πως συγκρίνονται οι δύο τιμές; Ποιο το σφάλμα της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της ισοδύναμης αντίστασης;

Η ανάλυση του κυκλώματος απλουστεύεται αρκετά θεωρώντας αυτά που αναγράφρονται στο Παράρτημα.

**Αποτελέσματα**

| | **V (Θεωρητική)** | **V (πειραματική)** | **% σφάλμα** |
|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{R_1}$ **=** | | | |
| $\boldsymbol{R_2}$ **=** | | | |
| $\boldsymbol{R_3}$ **=** | | | |
| $\boldsymbol{R_4}$ **=** | | | |
| $\boldsymbol{R_5}$ **=** | | | |

**Πίνακας 4.2**: Μετρήσεις της Δραστηριότητας 2.

| V (*Volts*) | *I* (mA) |
|---|---|
| 4.0 | |
| 6.0 | |
| 8.0 | |
| 10.0 | |
| 12.0 | |

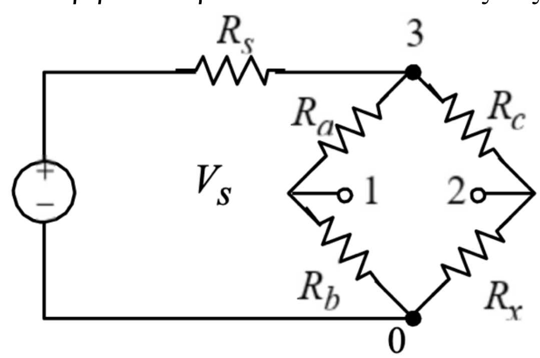
**Πίνακας 4.3**: Μετρήσεις Τάσης - Ρεύματος από την Δραστηριότητα 2.

## Δραστηριότητα 3

### Γέφυρα Wheatstone - Εισαγωγή

Η γέφυρα Wheatstone είναι μια ιδιαίτερη κατηγορία κυκλωμάτων που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση αντίστασης, χωρητικότητας ή επαγωγής πηνίου. Μια γέφυρα αντιστάσεων είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν απαιτείται ιδιαίτερα ακριβής προσδιορισμός της τιμής μιας αντίστασης. Η γέφυρα Wheatstone ή γέφυρα των 4 βραχιόνων, ανακαλύφθηκε από τον C. Wheatstone το 1843 και αποτελεί την πιο προσφιλή μέθοδο για μέτρηση αντιστάσεων πάνω από 1.0*Ω*. Η γέφυρες Wheatstone που βρίσκονται στο εμπόριο προσφέρουν ακρίβεια περίπου 0.1% κάνοντας τις διατάξεις αυτές πολύ πιο ακριβείς από τα συνηθισμένα πολύμετρα.

Μια γέφυρα Wheatstone αποτελείται από μια πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης και δύο παράλληλους διαιρέτες τάσης όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.3. Η γέφυρα αποκαλείται ότι ισορροπεί όταν η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων 1 και 2 είναι μηδέν, $\Delta V_{12} = 0.0 Volts$. Για την συνθήκη ισορροπίας το δυναμικό $V_3$ μοιράζεται στον κλάδο που περιέχει τους αντιστάτες $R_a$ και $R_b$ με τον ίδια αναλογία όπως και στον κλάδο που περιέχει τους αντιστάτες $R_c$ και $R_X$. Αυτό επιτρέπει τον προσδιορισμό της άγνωστης αντίστασης $R_X$ συναρτήσει των $R_a$, $R_b$ και $R_c$.




**Σχήμα 4.3**: Κύκλωμα γέφυρας Wheatstone

Η τιμή της $R_X$ μπορεί να προσδιοριστεί ως ακολούθως. Χρησιμοποιώντας τη σχέση του διαιρέτη τάσης,

$$V_1 = \frac{R_b}{R_b + R_a} V_3 \qquad \text{και} \qquad V_2 = \frac{R_X}{R_X + R_c} V_3$$

Για την κατάσταση ισορροπίας της γέφυρας, $V_{12} = 0.0V$ ή $V_1 = V_2$. Εξισώνοντας τις δύο προηγούμενες εξισώσεις για $V_1$ και $V_2$ παίρνουμε:

$$\frac{R_b}{R_b + R_a} = \frac{R_X}{R_X + R_c} \Rightarrow R_b(R_X + R_c) = R_X(R_b + R_a) \Rightarrow R_X = \frac{R_b R_c}{R_a}$$

Για να καταφέρουμε ισορροπία για συγκεκριμένη άγνωστη αντίσταση $R_X$, έστω ότι οι αντιστάτες $R_a$ και $R_c$ έχουν γνωστές σταθερές τιμές ενώ ο $R_b$ είναι ένας βαθμονομημένος αντιστάτης. Η διαδικασία είναι να ρυθμίσουμε την τιμή του αντιστάτη $R_b$ έως ότου $V_{12} = 0.0V$ και κατόπιν να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω εξίσωση για να βρούμε την τιμή της άγνωστης αντίστασης $R_X$.

**Διαδικασία**

1. Κατασκευάστε τη γέφυρα Wheatstone του Σχήματος 4.3, χρησιμοποιώντας τιμές αντιστάσεων $R_a = 390\Omega$, $R_C = 50\Omega$ και $R_S = 50\Omega$. Χρησιμοποιείστε δύο μικρά ποτενσιόμετρα, το ένα με εύρος τιμών $0 - 100\Omega$ και το δεύτερο με εύρος τιμών $0 - 50\Omega$. Τα δύο ποτενσιόμετρα έχουν ακρίβεια 10% και 20 στροφές για το συνολικό εύρος.
2. Ρυθμίστε την τάση εξόδου του τροφοδοτικού σας στα 10.0*Volts*.
3. Χρησιμοποιείστε ως άγνωστη αντίσταση τον μικρό λαμπτήρα που χρησιμοποιήσατε στο εργαστήριο 3.
4. Ξεκινήστε αρχικά να μεταβάλλετε το ποτενσιόμετρο με το μεγαλύτερο εύρος και καθώς συγκλίνετε προς μηδενική διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων 1 και 2 αρχίστε να χρησιμοποιείτε το ποτενσιόμετρο με το μικρότερο εύρος.
5. Υπολογίστε την άγνωστη αντίσταση.
6. Επαναλάβετε την μέτρηση για διαφορετικές τιμές της τάσης του τροφοδοτικού. Δοκιμάστε τιμές τάσης $6.0V$, $8.0V$, $12V$, $14V$, $16V$ και καταγράψτε τις μετρήσεις της αντίστασης του λαμπτήρα όπως την προσδιορίζετε με τη χρήση της γέφυρας Wheatstone στον Πίνακα 4.4.
7. Στην συνθήκη ισορροπίας της γέφυρας για κάθε περίπτωση τάσης του τροφοδοτικού, μετρήστε την τάση στα άκρα του λαμπτήρα και το ρεύμα που τον διαρρέει και από τον νόμο του Ohm υπολογίστε την αντίστασή του και το σφάλμα της.
8. Κλείστε το τροφοδοτικό και αποσυνδέστε το κύκλωμά σας.

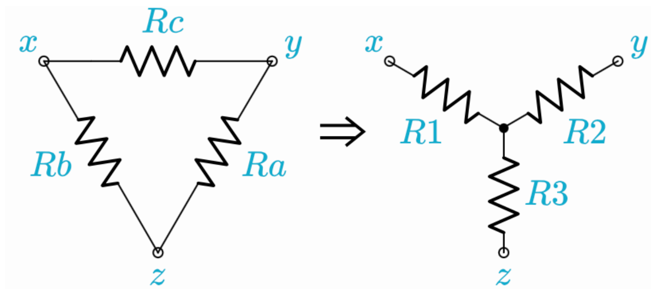
**Αποτελέσματα**

| **V πηγής (*Volts*)** | **$R_b$ ($\Omega$)** | **V στα άκρα της $R_X$ (*Volts*)** | ***I μέσω της $R_X$* (*mA*)** | **$R_X$ από τον νόμο του Ohm** |
|---|---|---|---|---|
| 6 | | | | |
| 8 | | | | |
| 9 | | | | |
| 10 | | | | |
| 12 | | | | |

**Πίνακας 4.4**: Πίνακας αποτελεσμάτων της δραστηριότητας της γέφυρας Wheatstone.

# Παράρτημα
## Μέθοδος μετασχηματισμού από Δ-κυκλώματα σε Y-κυκλώματα και αντίστροφα

Σε αρκετές περιπτώσεις εμφανίζεται μια χαρακτηριστική συνδεσμολογία σε τμήματα κυκλωμάτων. Η συνδεσμολογία αυτή φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα Α1. Η χρήση του ισοδύναμου κυκλώματος βοηθά σε αρκετές περιπτώσεις στην ευκολότερη ανάλυση κυκλωμάτων που περιέχουν τέτοιου είδους συνδεσμολογίες



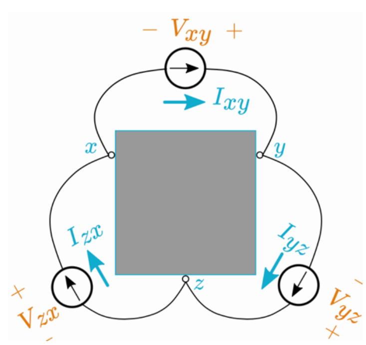

**Σχήμα Α1**: Συνδεσμολογία αντιστάσεων Δ και η Y-ισοδύναμή της.

Σκοπός του παραρτήματος αυτού είναι να παρουσιάσει τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των τριών αντιστάσεων της Δ-συνδεσμολογίας και των τριών αγνώστων αντιστάσεων της Y-συνδεσμολογίας. Θα πρέπει στον μετασχηματισμό αυτό η ισοδύναμη αντίσταση ανάμεσα στα ζεύγη των ακροδεκτών ($R_{xy}$, $R_{yz}$, $R_{zx}$) να παραμένει ίδια και για τα δύο κυκλώματα. Δηλαδή θέλουμε η ισοδύναμη αντίσταση $R_{xy}$ για τα δύο κυκλώματα να είναι ίδια τόσο στο Δ- όσο και στο Y- κύκλωμα.

**Η αρχή της υπέρθεσης**

Ένας τρόπος για τον υπολογισμό της ισοδύναμης αντίστασης ενός τυχαίου δικτύου αντιστατών είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα βολτόμετρο και ένα αμπερόμετρο και να υπολογίσουμε τον λόγο $V/I$ που θα δώσει σύμφωνα με τον νόμο του Ohm τη συνολική αντίσταση του δικτύου.

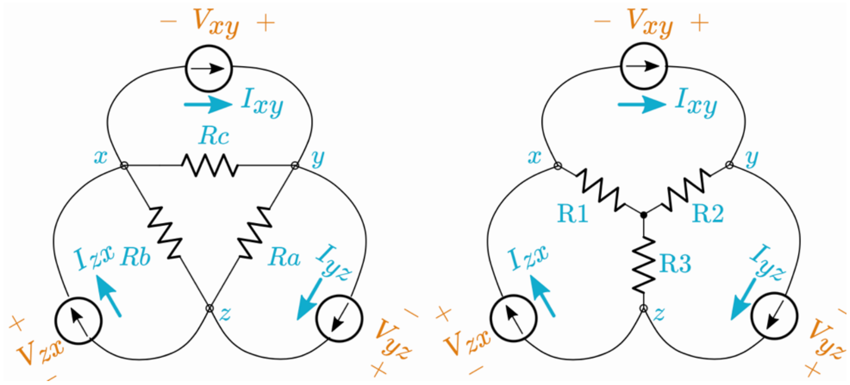
Θα μπορούσαμε ωστόσο να θεωρήσουμε ένα μαύρο κουτί μέσα στο οποίο υπάρχουν τρεις αντιστάτες. Οι αντιστάτες αυτοί μπορεί να είναι συνδεδεμένοι είτε σε Δ- ή σε Y- συνδεσμολογία αλλά δεν ξέρουμε ποια ακριβώς. Για να βρούμε την αντίσταση μεταξύ δύο ακροδεκτών του μαύρου κουτιού, θεωρούμε μια υποθετική πειραματική διάταξη η οποία χρησιμοποιεί τρία αμπερόμετρα ανάμεσα στα τρία ζεύγη ακροδεκτών του μαύρου κουτιού όπως στο Σχήμα Α2.




**Σχήμα Α2**: Με την πειραματική αυτή διάταξη ρυθμίζουμε τα ρεύματα και μετρούμε διαφορές δυναμικού. Υπολογίζουμε τους λόγους διαφοράς δυναμικού προς ρεύμα ώστε να υπολογίσουμε τις αντιστάσεις μεταξύ των ακροδεκτών, όπως για παράδειγμα $R_{xy} = V_{xy}/I_{xy}$.

Θέλουμε επομένως μια σχέση μεταξύ της $R_{\Delta_{abc}}$ και της $R_{Y_{123}}$ τέτοια ώστε οι διαφορές δυναμικού και οι εντάσεις των ρευμάτων και ως αποτέλεσμα οι αντίστοιχες αντιστάσεις να είναι πανομοιότυπες μεταξύ του Y και Δ κυκλωμάτων. Αν βρούμε ένα set από τέτοιους μετασχηματισμούς τότε τα δύο κυκλώματα είναι ισοδύναμα. Αυτό σημαίνει ότι αν διαλέξουμε τις σωστές τιμές αντιστατών τότε δεν θα μπορούμε να ξεχωρίσουμε το ένα από το άλλο κύκλωμα.

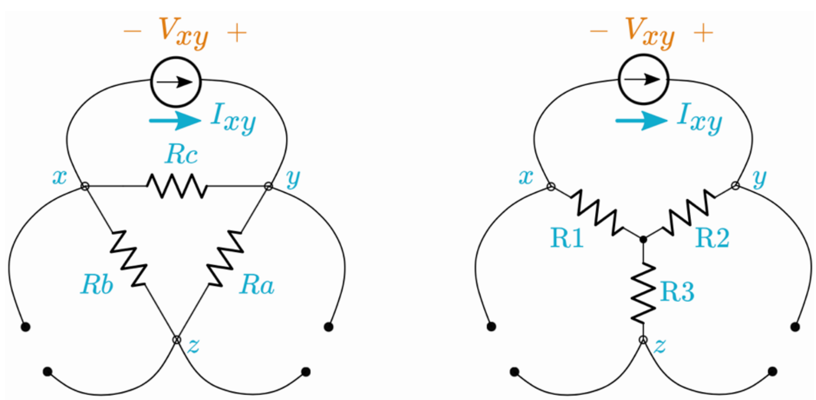
Αν ανοίξουμε το μαύρο κουτί, τότε θα βρούμε δύο δυνατά κυκλώματα στο εσωτερικό του όπως αυτά του Σχήματος Α3.




**Σχήμα Α3**: Πιθανές διατάξεις στο εσωτερικό του κουτιού.

Θα πρέπει να εφαρμόσουμε τον νόμο του Ohm για εύρεση των αντιστάσεων και για τις δύο περιπτώσεις. Ωστόσο όταν εμφανίζονται πολλές πηγές δυναμικού που συνδέονται με γραμμικά στοιχεία είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να εφαρμόσουμε την **μέθοδο της επαλληλίας**.

Το Σχήμα Α4 παρουσιάζει μια από τις τρεις συνεισφορές στην επαλληλία των τριών μερικών κυκλωμάτων, θεωρώντας τις δύο άλλες πηγές ρεύματος στα 2 υποκυκλώματα ως ανοικτοί διακόπτες και επομένως δεν διαρρέονται οι κλάδοι αυτοί από ρεύμα.




**Σχήμα 4**: Η επαλληλία των τριών υπο-κυκλωμάτων με τις πηγές ρεύματος αντικατεστημένες με ανοικτούς διακόπτες.

Στην περίπτωση του Δ-κυκλώματος, η συνολική αντίσταση μεταξύ των ακροδεκτών *xy* είναι η $R_c$ σε παράλληλη συνδεσμολογία με τις $R_b$ και $R_a$. Επομένως θα έχουμε ότι:

$$R_{xy} = R_c//(R_a + R_b) = \frac{R_c(R_a + R_b)}{R_a + R_b + R_c}$$

Στην περίπτωση του Y-κυκλώματος, η αντίσταση μεταξύ των ακροδεκτών *xy* είναι: $R_{xy} = R_1 + R_2$. Ο αντιστάτης $R_3$ δεν διαρρέεται από ρεύμα εφόσον είναι συνδεδεμένος με ανοικτά κυκλώματα και επομένως δεν συμμετέχει στην ολική αντίσταση $R_{xy}$.

Θέλουμε οι αντιστάσεις $R_{xy}$ και στις δύο περιπτώσεις κυκλωμάτων να είναι ίσες μεταξύ τους. Επομένως θα έχουμε:

$$R_1 + R_2 = \frac{R_c(R_a + R_b)}{R_a + R_b + R_c}$$

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία για τα άλλα δύο ζεύγη ακροδεκτών, *yz* και *zx*. Σε κάθε περίπτωση, θα έχουμε μια πηγη ρεύματος ενώ οι άλλες δύο πηγές θα αντικατασταθούν από διακόπτες. Θα καταλήξουμε στα ακόλουθα αποτελέσματα.

$$R_{xy}: \qquad R_1 + R_2 = \frac{R_c(R_a + R_b)}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_{yz}: \qquad R_2 + R_3 = \frac{R_a(R_b + R_c)}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_{zx}: \qquad R_1 + R_3 = \frac{R_b(R_a + R_c)}{R_a + R_b + R_c}$$

Έχουμε ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να το λύσουμε σχετικά εύκολα προσθέτοντας τις $R_{xy}$ και $R_{zx}$ και αφαιρώντας την $R_{yz}$ και διαιρώντας το αποτέλεσμα με 2. Αυτό γιατί: $(R_{xy} + R_{zx} - R_{yz})/2 = (R_1 + R_2 + R_1 + R_3 - R_2 - R_3)/2 = R_1$.

Εκτελούμε τις πράξεις στο δεξί μέλος των εξισώσεων που περιέχουν $R_c$, $R_a$ και $R_b$. Θα πάρουμε:

$$R_1 = \frac{\left[\frac{R_c(R_a + R_b)}{R_a + R_b + R_c} + \frac{R_b(R_a + R_c)}{R_a + R_b + R_c} - \frac{R_a(R_b + R_c)}{R_a + R_b + R_c}\right]}{2} \Rightarrow$$

$$R_1 = \frac{R_aR_c + R_bR_c + R_aR_b + R_bR_c - R_aR_b - R_aR_c}{2(R_a + R_b + R_c)} \Rightarrow$$

$$R_1 = \frac{R_bR_c + R_bR_c}{2(R_a + R_b + R_c)} \Rightarrow R_1 = \frac{R_bR_c}{(R_a + R_b + R_c)}$$

Με παρόμοιο τρόπο, θεωρώντας $(R_{xy} + R_{yz} - R_{xz})/2$ παίρνουμε την αντίσταση $R_2$ ενώ από τη σχέση $(R_{xz} + R_{yz} - R_{xy})/2$ παίρνουμε την $R_3$.

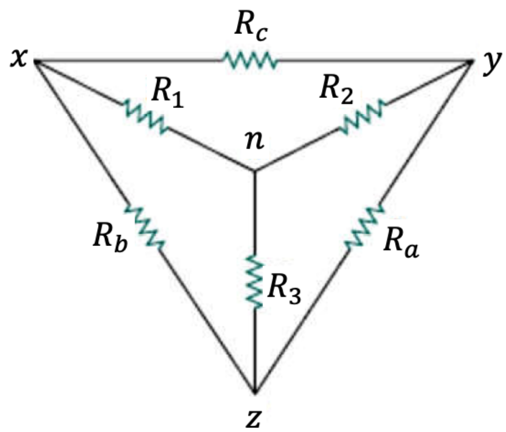
Συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα, οι αντιστάσεις μετασχηματισμού για μετατροπή ενός Δ-κυκλώματος τριών αντιστατών σε ένα ισοδύναμο Y-κύκλωμα είναι:

$$R_1 = \frac{R_bR_c}{(R_a + R_b + R_c)}$$

$$R_2 = \frac{R_aR_c}{(R_a + R_b + R_c)}$$

$$R_3 = \frac{R_aR_b}{(R_a + R_b + R_c)}$$

Ένας απλός μνημονικός κανόνας για την εύρεση των αντιστάσεων είναι να θεωρήσουμε το Δ-κύκλωμα και να σχεδιάσουμε στο εσωτερικό του το ισοδύναμο Y-κύκλωμα. Παρατηρούμε, όπως φαίνεται και στο Σχήμα Α5, ότι οι αντιστάσεις $R_1$, $R_2$ και $R_3$ του Y-κυκλώματος προκύπτουν από το γινόμενο των αντιστάσεων του Δ-κυκλώματος που περιέχουν κάθε αντίσταση του Δ-κυκλώματος δια το άθροισμα των τριών αντιστάσεων του Δ-κυκλώματος.




**Σχήμα Α5:** Δ- και Y- ισοδύναμα κυκλώματα το ένα μέσα στο άλλο για εξαγωγή μνημονικού κανόνα για την εύρεση των σχέσεων μετατροπής από το Δ- στο Y-κύκλωμα. Κάθε αντίσταση του Y-κυκλώματος προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τις δύο αντιστάσεις του Δ-κυκλώματος που περιέχουν την ζητούμενη αντίσταση του Y-κυκλώματος και διαιρώντας με το άθροισμα των τριών αντιστάσεων του Y-κυκλώματος.

**Μετατροπή από Y- σε Δ- κύκλωμα**

Όπως και στην περίπτωση της μετατροπής από Δ- σε Y-κύκλωμα, έτσι και για την αντίστροφη μετατροπή μπορούμε να ξεκινήσουμε με τα αποτελέσματα της μετατροπής του Δ- σε Y- κύκλωμα και χρησιμοποιώντας άλγεβρα να καταλήξουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε αγωγιμότητα αντί της αντίστασης και να καταλήξουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα πολύ πιο εύκολα.

**Εύρεση των σχέσεων μετατροπής μεταξύ Y- και Δ- κυκλώματος με άλγεβρα**

Ξεκινάμε από τις εξισώσεις μετατροπής του Δ- σε Y- κύκλωμα.

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{(R_a + R_b + R_c)}$$

$$R_2 = \frac{R_a R_c}{(R_a + R_b + R_c)}$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b}{(R_a + R_b + R_c)}$$

Διαιρούμε την $R_3$ με την $R_1$ οπότε θα πάρουμε:

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{\frac{R_a R_b}{(R_a + R_b + R_c)}}{\frac{R_b R_c}{(R_a + R_b + R_c)}} = \frac{R_a R_b}{R_b R_c} \Rightarrow \frac{R_3}{R_1} = \frac{R_a}{R_c} \Rightarrow R_a = \frac{R_3}{R_1} R_c$$

Με τον ίδιο τρόπο, διαιρούμε την $R_3$ με την $R_2$ και καταλήγουμε στην $R_b$ και τέλος διαιρώντας την $R_2$ με την $R_1$ βρίσκουμε την $R_c$. Έχουμε:

$$\frac{R_3}{R_2} = \frac{\frac{R_a R_b}{(R_a + R_b + R_c)}}{\frac{R_a R_c}{(R_a + R_b + R_c)}} = \frac{R_a R_b}{R_a R_c} \Rightarrow \frac{R_3}{R_2} = \frac{R_b}{R_c} \Rightarrow R_b = \frac{R_3}{R_2} R_c$$

Αντικαθιστούμε τις εκφράσεις των $R_\alpha$ και $R_b$ στην εξίσωση της $R_2$:

$$R_2 = \frac{R_a R_c}{(R_a + R_b + R_c)} = \frac{\frac{R_3}{R_1} R_c R_c}{\left(\frac{R_3}{R_1} R_c + \frac{R_3}{R_2} R_c + R_c\right)} = \frac{\frac{R_3}{R_1} R_c}{\left(\frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2} + 1\right)} = \frac{\frac{R_3 R_c}{R_1}}{\left(\frac{R_2 R_3}{R_1 R_2} + \frac{R_1 R_3}{R_1 R_2} + \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2}\right)} \Rightarrow$$

$$R_2 = \frac{R_3 R_c}{\left(\frac{R_2 R_3}{R_2} + \frac{R_1 R_3}{R_2} + \frac{R_1 R_2}{R_2}\right)} \Rightarrow 1 = \frac{R_3 R_c}{(R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2)} \Rightarrow R_c = \frac{(R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2)}{R_3}$$

Με ανάλογο τρόπο καταλήγουμε στις σχέσεις μετασχηματισμών για τις δύο άλλες αντιστάσεις $R_a$ και $R_b$ και έχουμε τελικά τις ακόλουθες σχέσεις μετασχηματισμού:

$$R_a = \frac{(R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2)}{R_1}$$

$$R_b = \frac{(R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2)}{R_2}$$

$$R_c = \frac{(R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2)}{R_3}$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής σε όλες τις σχέσεις είναι ο ίδιος και περιέχει το γινόμενο των ζευγών των αντιστάσεων του Y-κυκλώματος. Ο παρονομαστής για κάθε αντιστάτη του Δ-κυκλώματος είναι η αντίσταση του Y-κυκλώματος που βρίσκεται απέναντι από την Δ-αντίσταση που θέλουμε να υπολογίσουμε όπως φαίνεται και στο Σχήμα Α5.