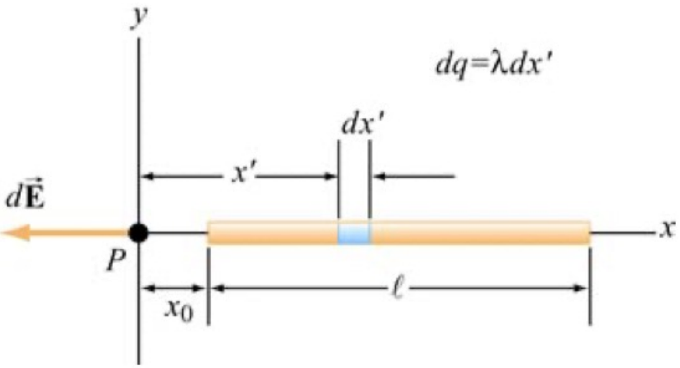
Γραμμική κατανομή κατά μήκος φορτισμένης ράβδου

Θεωρούμε μη αγώγιμη φορτισμένη ράβδο μήκους *L* και ομοιόμορφη γραμμική κατανομή φορτίου Q. Η ράβδρος είναι προσανατολισμένη κατά μήκος του x-άξονα

Θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο *P* που βρίσκεται στον άξονα της ράβδου και σε απόσταση x_0 από το άκρο της



Η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι: $\lambda = Q/L$

Η ποσότητα φορτίου που περιέχεται σε ένα γραμμικό τμήμα της ράβδου είναι: $dq = \lambda dx$

Εφόσον το φορτίο Q είναι θετικό, το πεδίο στο σημείο P θα έχει κατεύθυνση προς την αρνητική *x*-διεύθυνση.

Το μοναδιαίο διάνυσμα από την πηγή στο σημείο P είναι: $\hat{r} = -\hat{\imath}$

Η συνεισφορά του στοιχειώδους φορτίου *dq* είναι:

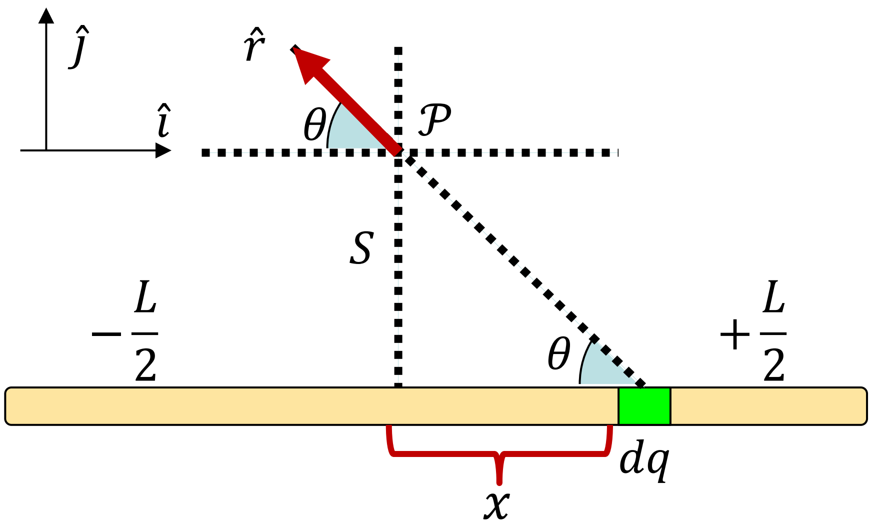
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{x^2}\hat{\imath} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qdx}{Lx^2}\hat{\imath}$$ οπότε η ολοκλήρωση δίνει:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\int_{x_0}^{x_0+L}\frac{dx}{x^2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0+L}\right)\hat{\imath} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{Q\hat{\imath}}{4\pi\varepsilon_0 x_0(x_0+L)}}$$

Για $x_0 \gg L$ έχουμε: $\vec{E} = -\dfrac{Q\hat{\imath}}{4\pi\varepsilon_0 x_0^2}$ πεδίο σημειακού φορτίου

Κατανομές φορτίου – γραμμική κατανομή

Έστω μια ομοιόμορφη γραμμική κατανομή φορτίου μήκους *L* όπως στο σχήμα. Θέλουμε να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο P που βρίσκεται στην ευθεία που περνά από το μέσο της κατανομής και σε απόσταση *S*



Θεωρούμε ότι η γραμμική κατανομή είναι:

$$\lambda = \frac{Q}{L} \Rightarrow Q = \lambda L \Rightarrow dq = \lambda dx$$

Η απόσταση του σημείου $\mathcal{P}$ από το dq είναι:

$$r = \sqrt{S^2 + x^2}$$

Έχουμε την εξίσωση: $d\vec{\mathrm{E}} = k_e dq \dfrac{\hat{r}}{r^2} = k_e dq \dfrac{\vec{r}}{r^3}$

Λόγω συμμετρίας: $\vec{E}_x = \vec{0}$

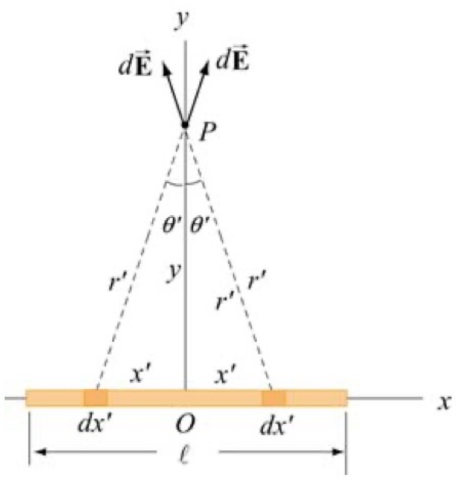
Επομένως θα έχουμε: $dE_y = k_e dq \dfrac{y}{r^3} = k_e \lambda dx \dfrac{S}{r^3} \Rightarrow dE_y = \dfrac{k_e \lambda S dx}{r^3}$

Ολοκληρώνουμε: $E_y = \displaystyle\int \frac{k_e \lambda S dx}{r^3} \Rightarrow E_y = k_e S \lambda \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dx}{(S^2+x^2)^{3/2}} = k_e S \lambda \left. \frac{x}{S^2 (S^2+x^2)^{1/2}} \right|_{-L/2}^{L/2}$

Επομένως: $E_y = k_e \lambda S \dfrac{L}{S^2 \sqrt{S^2 + L^2/4}} \Rightarrow E_y = k_e Q \dfrac{1}{S\left(S^2 + \frac{L^2}{4}\right)^{1/2}}$ $\boxed{\Rightarrow \vec{E} = \dfrac{k_e Q}{S\left(S^2 + \frac{L^2}{4}\right)^{1/2}} \hat{\jmath}}$

Κατανομές φορτίου – γραμμική κατανομή

Θα μπορούσαμε να λύσουμε το ολοκλήρωμα λίγο διαφορετικά:



Η y-συνιστώσα του πεδίου θα είναι:

$$dE_y = dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{x^2+y^2}\frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda y dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Ολοκληρώνουμε ως προς το συνολικό μήκους της κατανομής:

$$E_y = \int dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\lambda y dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής: $x = y\tan\theta \Rightarrow dx = y\sec^2\theta d\theta$

Οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται: $\displaystyle\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \int_{-\theta}^{\theta}\frac{y\sec^2\theta d\theta}{y^3(\sec^2\theta+1)^{3/2}} =$

$$= \frac{1}{y^2}\int_{-\theta}^{\theta}\frac{\sec^2\theta d\theta}{(\tan^2\theta+1)^{3/2}} = \frac{1}{y^2}\int_{-\theta}^{\theta}\frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^3\theta} = \frac{1}{y^2}\int_{-\theta}^{\theta}\frac{d\theta}{\sec\theta} = \frac{1}{y^2}\int_{-\theta}^{\theta}\cos\theta d\theta \Rightarrow E_y = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{y}$$

Οπότε καταλήγουμε όπως προηγουμένως: $E_y = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{L/2}{y\left(y^2+\dfrac{L^2}{4}\right)^{1/2}}$

Κατανομές φορτίου – γραμμική κατανομή

Το ηλεκτρικό πεδίο της γραμμικής κατανομής στον άξονα που περνά από το μέσο της και σε απόσταση S είναι επομένως:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{k_e Q}{S\left(S^2 + \frac{L^2}{4}\right)^{1/2}}\hat{j}}$$

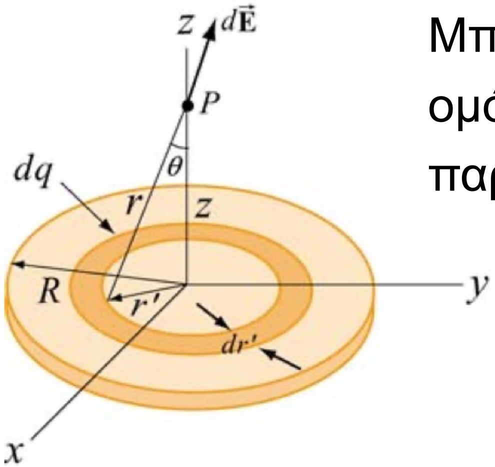
Εξετάζουμε οριακές συνθήκες:

$$S \gg L \quad \lim_{S \gg L} \vec{E} = \frac{k_e Q}{S(S^2)^{1/2}}\hat{j} \Rightarrow \lim_{S \gg L} \vec{E} = \frac{k_e Q}{S^2}\hat{j}$$ ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου

$$S \ll L \quad \lim_{S \ll L} \vec{E} = \frac{k_e Q}{S(\mathrm{L}^2/4)^{1/2}}\hat{j} \Rightarrow \lim_{S \ll L} \vec{E} = \frac{2k_e Q}{SL}\hat{j} = 2k_e \frac{\lambda}{S}\hat{j}$$ ηλεκτρικό πεδίο άπειρης γραμμικής κατανομής

Ηλεκτρικό πεδίο ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου

Θεωρούμε ομοιόμορφα φορτισμένο δίσκο ακτίνας *R* με συνολικό φορτίο *Q* που βρίσκεται στο *xy* επίπεδο. Θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο *P* στον z-άξονα που περνά από το κέντρο του δίσκου και είναι κάθετος στον δίσκο



Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο δίσκος αποτελείται από πολλούς ομόκεντρους κυκλικούς δακτυλίους οπότε το πρόβλημα είναι ως το παράδειγμα της διάλεξης 2.

Έστω ένας δακτύλιος ακτίνας *r'* και πάχους *dr'*. Εξαιτίας της συμμετρίας το ηλεκτρικό πεδίο κάθετα στον z-άξονα θα είναι 0.

Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο θα έχει κατεύθυνση στον *z-άξονα*.

Το φορτίο του δακτυλίου θα είναι: $dq = \sigma(2\pi r' dr')$

Η συνεισφορά του κάθε δακτυλίου στο ηλεκτρικό πεδίο θα είναι (σύμφωνα με διαλ. 2):

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z dq}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z(2\pi\sigma r' dr')}{(r'^2 + z^2)^{3/2}}$$

Ολοκληρώνουμε από r' =0 έως *R* και το ηλεκτρικό φορτίο στο σημείο P γίνεται

$$E_z = \int dE_z = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\int_{z^2}^{R^2+z^2} \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\frac{u^{-1/2}}{(-1/2)}\Bigg|_{z^2}^{R^2+z^2}$$

Ηλεκτρικό πεδίο ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου

Κάνοντας τις πράξεις έχουμε:

$$E_z = -\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}}\right] \Rightarrow E_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]$$

Μπορούμε να γράψουμε την τελευταία σχέση με την μορφή:

$$E_z = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] & z > 0 \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[-1 - \dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right] & z < 0 \end{cases}$$

Εξετάζουμε οριακές συνθήκες:

$z \gg R$ $$\lim_{z \gg R} \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{z\left[1+\left(\frac{R}{z}\right)^2\right]^{1/2}}\right]$$

$$\lim_{z \gg R} \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{1}{(1+\varepsilon^2)^{1/2}}\right]$$

Από το διονυμικό ανάπτυγμα: $(1+\varepsilon^2)^{-1/2} \sim 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \cdots$

$$\left.\right\} \lim_{x \gg R} \vec{E} = \frac{\sigma R^2}{4z^2\varepsilon_0}$$

Ηλεκτρικό πεδίο ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου

Επομένως για $z \gg R$ $\lim_{z \gg R} \vec{E} = \frac{\sigma R^2}{4z^2\varepsilon_0} = \frac{\sigma\pi R^2}{4\pi z^2\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\lim_{z \gg R} \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}}$ πεδίο σημειακού φορτίου

Θεωρούμε την περίπτωση $z \ll R$

Ο δίσκος γίνεται τώρα μια μεγάλη επίπεδη επιφάνεια ή το σημείο *P* είναι πολύ κοντά στην επιφάνεια του δίσκου

Στην περίπτωση αυτή, το ηλεκτρικό πεδίο γίνεται

$$\lim_{z \ll R} \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{R}\right]\hat{k} \Rightarrow \boxed{\lim_{z \ll R} \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}}$$

πεδίο άπειρης επιφάνειας z > 0

$$\lim_{z \ll R} \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[-1 - \frac{z}{R}\right]\hat{k} \Rightarrow \boxed{\lim_{z \ll R} \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}}$$

πεδίο άπειρης επιφάνειας z < 0

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια ασυνέχεια στο πεδίο καθώς περνούμε μέσω της επιφάνειας του δίσκου.

Η ασυνέχεια αυτή είναι: $\Delta E_z = E_{z+} - E_{z-} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Ηλεκτρικά Πεδία κατανομών

1. Ηλεκτρικό πεδίο διπόλου: Ελαττώνεται ως: $1/r^3$
2. Ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου: Ελαττώνεται ως: $1/r^2$
3. Ηλεκτρικό πεδίο γραμμικής κατανομής φορτίου: Ελαττώνεται ως: $1/r$
4. Ηλεκτρικό πεδίο άπειρης επιφάνειας: Σταθερό

Δυναμική ενέργεια ενός διπόλου διπολικής ροπής p

Είδαμε ότι όταν ένα ηλεκτρικό δίπολο βρεθεί μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο, η διπολική του ροπή, *p*, τείνει να ευθυγραμμιστεί με το πεδίο εξαιτίας της ροπής που ασκείται στα φορτία του διπόλου.

Η ροπή που ασκείται είναι: $\vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}$

Το έργο το οποίο καταναλώνεται από το πεδίο για να στρέψει το δίπολο κατά μια γωνία $d\theta$ είναι:

$$dW = -\tau d\theta = -pEsin\theta d\theta$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η ροπή αντιτίθεται σε οποιαδήποτε αύξηση της γωνίας θ.

Το συνολικό έργο το οποίο καταναλώνεται από το ηλεκτρικό πεδίο για να περιστρέψει το δίπολο από την γωνία θ_0 στην γωνία θ είναι:.

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} -pEsin\theta d\theta = pE(cos\theta - cos\theta_0)$$

Το έργο είναι θετικό όταν $cos\theta - cos\theta_0 > 0$.

Δυναμική ενέργεια ενός διπόλου διπολικής ροπής p

Η αλλαγή στη δυναμική ενέργεια, *ΔU*, *του* διπόλου είναι το -W το οποίο εκτελεί το πεδίο στο δίπολο

$$\Delta U = U - U_0 = -W = -pE(cos\theta - cos\theta_0)$$

όπου $U_0 = -pEcos\theta_0$ η δυναμική ενέργεια σε ένα σημείο αναφοράς

Θεωρούμε ως σημείο αναφοράς αυτό για $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ έτσι ώστε η δυναμική ενέργεια $U_0 = 0$

Παρουσία επομένως ενός εξωτερικού πεδίου, το δίπολο έχει δυναμική ενέργεια:

$$U = -pEcos\theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Ξέρουμε ότι ένα σύστημα είναι σε σταθερή ισορροπία όταν η δυναμική του ενέργεια βρίσκεται σε κάποιο ελάχιστο (τοπικό ή γενικό).

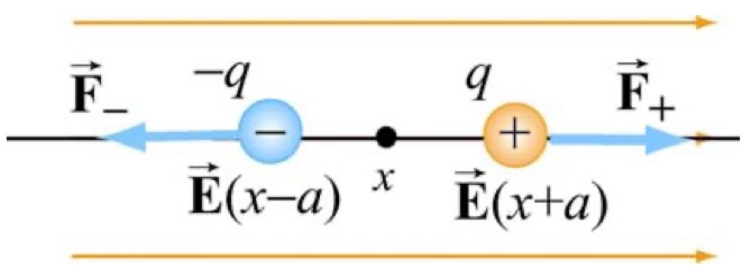
Στην περίπτωση του διπόλου αυτό συμβαίνει ότι το δίπολο ευθυγραμμίζεται με το ηλεκτρικό πεδίο οπότε η δυναμική του ενέργεια γίνεται: $U = -pE$

Στην αντίθετη περίπτωση που το δίπολο είναι αντιπαράλληλο με το ηλεκτρικό πεδίο η δυναμική του ενέργεια γίνεται μέγιστη: $U = pE$ και το σύστημα είναι ιδιαίτερα ασταθές

Δυναμική ενέργεια διπόλου

Στην περίπτωση που το δίπολο εισαχθεί σε μή-ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο, τότε πέρα από την ροπή θα ασκείται πάνω του και μια συνισταμένη δύναμη και η κίνηση του διπόλου θα είναι η συνδυαστική κίνηση μεταφορική και περιστροφική.

Για παράδειγμα έστω ότι το δίπολο είναι σε μη ομογενές ηλεκτρικό πεδίο και ότι το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_+$ στο +q διαφέρει από το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_-$ στο -q .



Υποθέτουμε ότι το δίπολο είναι πολύ μικρό και αναπτύσσουμε τα πεδία ως προς το x

$$E_+(x+a) \approx E(x) + a\left(\frac{dE}{dx}\right)$$

$$E_-(x-a) \approx E(x) - a\left(\frac{dE}{dx}\right)$$

Η δύναμη στο δίπολο γίνεται τότε: $\vec{F}_e = q\left(\vec{E}_+ - \vec{E}_-\right) = 2qa\left(\frac{dE}{dx}\right)\hat{\imath} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_e = p\left(\frac{dE}{dx}\right)\hat{\imath}}$

Παράδειγμα συνισταμένης δύναμης που ασκείται σε δίπολο είναι η έλξη μεταξύ μικρών κομματιών χαρτιού και μιας κτένας που φορτίστηκε τρίβοντάς σε μαλλί. Το χαρτί έχει επαγόμενες διπολικές ροπές ενώ το πεδίο της κτένας είναι μη ομογενές λόγω σχήματος