Παραδείγματα

Κίνηση ενός και μόνο σωματιδίου, χρησιμοποιώντας Καρτεσιανές συντεταγμένες και συντηρητικές δυνάμεις.

Οι εξισώσεις Lagrange θα πρέπει να επιστρέφουν τα ίδια αποτελέσματα με αυτά που δίνει ο 2ος νόμος του Newton: $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$

- σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Έχουμε: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \Rightarrow \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\hat{i} + x\cancelto{0}{\dfrac{d\hat{i}}{dt}} + \dot{y}\hat{j} + y\cancelto{0}{\dfrac{d\hat{j}}{dt}} + \dot{z}\hat{k} + z\cancelto{0}{\dfrac{d\hat{k}}{dt}}$

Και επομένως: $\vec{\mathrm{v}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \Rightarrow \mathrm{v}^2 = \left(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}\right)\cdot\left(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}\right)$

$$\Rightarrow \mathrm{v}^2 = \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Άρα έχουμε: $T = \dfrac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$

Η δυναμική ενέργεια θα είναι: $V = V(x,y,z)$

Η Lagrangian θα έχει τη μορφή: $L = T - V = \dfrac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(x,y,z)$

Κίνηση σωματιδίου – καρτεσιανές συντεταγμένες

Έχουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial (T-V)}{\partial x} = \cancelto{0}{\frac{\partial T}{\partial x}} - \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x$$

Επομένως η εξίσωση Lagrange για $q = x$ γίνεται:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} - F_x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = F_x$$

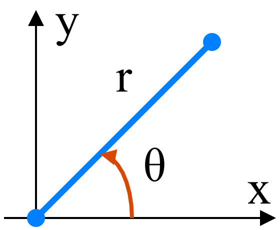
Κατά τον ίδιο τρόπο έχουμε για τις διευθύνσεις y και z:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow m\ddot{y} - F_y = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = F_y$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow m\ddot{z} - F_z = 0 \Rightarrow m\ddot{z} = F_z$$

Κίνηση σωματιδίου – πολικές συντεταγμένες

Ξεκινώντας από Καρτεσιανές συντεταγμένες:



$$x = r\cos\theta \quad ; \quad y = r\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

Προσέξτε ότι: $\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{r}} = \cos\theta = \dfrac{\partial x}{\partial r}$ και $\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\theta}} = -r\sin\theta = \dfrac{\partial x}{\partial \theta}$

εκφράζουν τη γενική σχέση $\dfrac{\partial \vec{\mathrm{v}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ για τη συγκεκριμένη περίπτωση

Μπορούμε επομένως να γράψουμε τη κινητική ενέργεια:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2\cos^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta - 2\dot{r}\cancel{r\dot{\theta}\sin}\theta\cos\theta\right) +$$

$$+\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2\sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2\dot{r}\cancel{r\dot{\theta}\sin}\theta\cos\theta\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right)$$

Κίνηση σωματιδίου – πολικές συντεταγμένες

Η δυναμική ενέργεια είναι: $V(x,y)=V(r,\theta)$

Επομένως η Lagrangian θα είναι: $L=\frac{m}{2}\left[\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right]-V(r,\theta)$

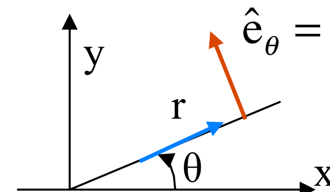
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m\dot{r} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)=m\ddot{r} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial r}=mr\dot{\theta}^2-\frac{\partial V}{\partial r}$$

$(\cos\theta,\sin\theta)$

$$\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\Rightarrow\frac{\partial V}{\partial r}=-F_x\cos\theta-F_y\sin\theta\Rightarrow-\frac{\partial V}{\partial r}=F_x\cos\theta+F_y\sin\theta=\vec{F}\cdot\hat{e}_r=F_r$$

Επομένως η 1η εξίσωση κίνησης είναι: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0\Rightarrow m\ddot{r}\ -mr\dot{\theta}^2\ =\ F_r$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=mr^2\ddot{\theta}+2mr\dot{r}\dot{\theta}$$



$\hat{e}_\theta=(-\sin\theta,\cos\theta)$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=-\frac{\partial V}{\partial \theta}=-\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}-\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=F_x(-r\sin\theta)+F_y r\cos\theta=\vec{F}\cdot r\hat{e}_\theta=rF_\theta$$

$\frac{\partial(r\hat{e}_r)}{\partial \theta}$

Η 2η εξίσωση κίνησης είναι: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0\Rightarrow mr^2\ddot{\theta}\ +2mr\dot{r}\dot{\theta}\ =\ rF_\theta$

Κίνηση σωματιδίου – πολικές συντεταγμένες

Καταλήξαμε στις δύο εξισώσεις κίνησης από τις εξισώσεις Lagrange

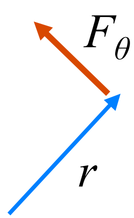
$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r \qquad (1) \\ mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = rF_\theta \qquad (2) \end{aligned}$$

ΦΥΣΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ?

- Ο 2ος όρος της εξίσωσης (1) είναι η κεντρομόλος δύναμη
- Το αριστερό σκέλος της εξίσωσης (2) είναι η παράγωγος

  της στροφορμής, $l = mr\mathrm{v} = mr\left(r\dot{\theta}\right) = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{dl}{dt} = \frac{d\left(mr^2\dot{\theta}\right)}{dt} = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}$

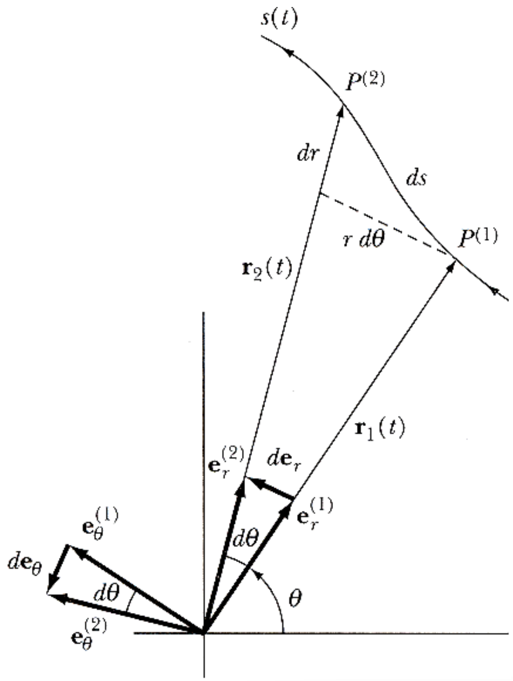
- Το δεξί μέλος της εξίσωσης (2) είναι απλά η ροπή της δύναμης



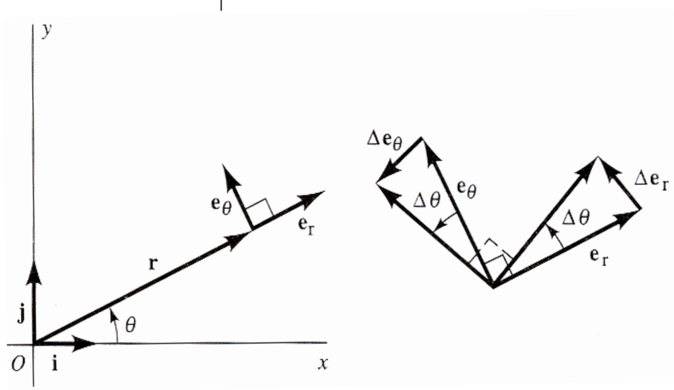
Δηλαδή η δεύτερη εξίσωση μας έδωσε και πάλι την εξίσωση της ροπής

Κίνηση σωματιδίου – πολικές συντεταγμένες

Θεωρούμε την κίνηση του σωματιδίου αλλά τώρα στο επίπεδο. Επομένως υπάρχει ένας δεσμός, και χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες



Αντίθετα με τις καρτεσιανές συντεταγμένες που τα μοναδιαία διανύσματα δεν παρουσιάζουν χρονική εξάρτηση, τα μοναδιαία διανύσματα σε άλλες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες παρ' όλο που είναι ορθογώνια μεταξύ τους, παρουσιάζουν χρονική εξάρτηση μια και η διεύθυνσή τους μπορεί να αλλάζει με το χρόνο.



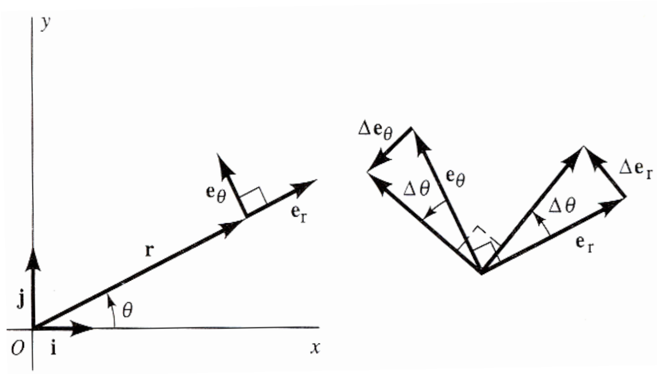
Ένα σημείο P το οποίο κινείται στην καμπύλη $s(t)$ στο χρονικό διάστημα dt κινείται από το P^1 στο P^2
Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_r$ και $\hat{e}_\theta$ τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους, μετακινούνται από $\hat{e}_r^1$ σε $\hat{e}_r^2$
$\hat{e}_\theta^1$ σε $\hat{e}_\theta^2$

Επομένως η μεταβολή θα είναι: $d\hat{e}_r = \hat{e}_r^1 - \hat{e}_r^2$

Αλλά $d\hat{e}_r \perp \hat{e}_r$ για χρονικές μεταβολές dt

και επομένως $d\hat{e}_r \,//\, \hat{e}_\theta$ και στην ίδια διεύθυνση

Κίνηση σωματιδίου – πολικές συντεταγμένες



Επομένως μπορούμε να γράψουμε: $d\hat{e}_r = d\theta\hat{e}_\theta$

Με το ίδιο σκεπτικό βλέπουμε ότι $d\hat{e}_\theta = \hat{e}_\theta^1 - \hat{e}_\theta^2$

Το διάνυσμα $d\hat{e}_\theta \perp \hat{e}_\theta$ και επομένως $d\hat{e}_\theta // \hat{e}_r$

αλλά αντίθετης φοράς με το $\hat{e}_r$

Άρα θα έχουμε: $d\hat{e}_\theta = -d\theta\hat{e}_r$

Παραγωγίζοντας ως προς t παίρνουμε:

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\theta = \dot{\theta}\hat{e}_\theta \quad \text{και} \quad \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_r = -\dot{\theta}\hat{e}_r$$

Θεωρώντας το διάνυσμα θέσης σε πολικές συντεταγμένες, γράφουμε:

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

ακτινική συνιστώσα

γωνιακή συνιστώσα

Επομένως $\quad v^2 = \left(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta\right)\cdot\left(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta\right) \Rightarrow v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$

Κίνηση σωματιδίου – πολικές συντεταγμένες

Σε πολικές συντεταγμένες επομένως $\mathrm{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$

Η κινητική ενέργεια του σωματιδίου θα είναι $T = \frac{1}{2}\mathrm{m}\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$

- Τ είναι συνάρτηση γενικευμένων ταχυτήτων αλλά και συντεταγμένων κάτι που δεν συμβαίνει ποτέ σε καρτεσιανές συντεταγμένες όπου έχουμε πάντοτε τετράγωνα ταχυτήτων και όχι εξάρτηση από τις συντεταγμένες

Η δυναμική ενέργεια θα είναι: $V = V(r,\theta)$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r} \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2$$

Η γενικευμένη δύναμη δίνεται από: $Q_r = F\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = F\cdot\frac{\partial\left(r\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{r}\right)}{\partial r} = F\cdot\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{r} = F_r$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\left(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}\right) \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

Η γενικευμένη δύναμη δίνεται από: $Q_\theta = F\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = F\cdot\frac{\partial\left(r\hat{\mathrm{e}}_\mathrm{r}\right)}{\partial \theta} = F\cdot r\hat{\mathrm{e}}_\theta = rF_\theta$

Κίνηση σωματιδίου – πολικές συντεταγμένες

Καταλήξαμε στις δύο εξισώσεις κίνησης από τις εξισώσεις Lagrange

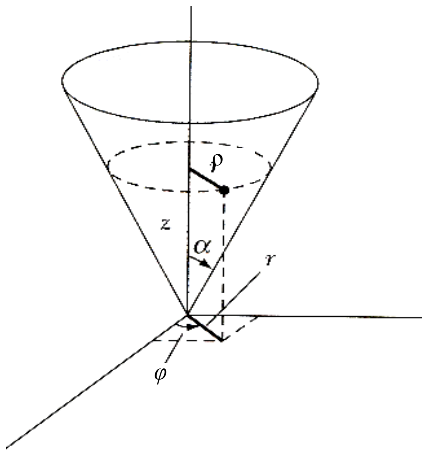
$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} &= Q_r \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= Q_\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r \qquad (1)$$

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = rF_\theta \qquad (2)$$

Κίνηση σώματος σε κωνική επιφάνεια

Σώμα μάζας m περιορίζεται στο να κινείται στο εσωτερικό μιας λείας κωνικής επιφάνειας γωνίας α. Το σώμα δέχεται την επίδραση της βαρύτητας. (α) Ποιές γενικευμένες συντεταγμένες μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και (β) ποιοί οι δεσμοί που τυχόν υπάρχουν.
(γ) Ποιες οι εξισώσεις κίνησης Lagrange.



Για το πρόβλημα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες (ϱ,ϕ,z). Έστω ότι άξονας του κώνου συμπίπτει με τον z-άξονα, και ότι η κορυφή του κώνου βρίσκεται στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων.

Δεσμός: Το σώμα περιορισμένο στην επιφάνεια κώνου

Η εξίσωση δεσμού: $z = \rho \cot a$

Επομένως έχουμε 2 ανεξάρτητες γενικευμένες συντεταγμένες (ϱ,ϕ)

Το διάνυσμα θέσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες: $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$

$\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dfrac{d\hat{\rho}}{dt} + \dot{z}\hat{z} \Rightarrow \vec{\mathrm{v}} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \dot{z}\hat{z}$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Επομένως: $\mathrm{v}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \Rightarrow \mathrm{v}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2\cot^2 a$

$$\mathrm{v}^2 = \dot{\rho}^2(1+\cot^2 a) + \rho^2\dot{\varphi}^2 \Rightarrow \boxed{\mathrm{v}^2 = \dot{\rho}^2\csc^2 a + \rho^2\dot{\varphi}^2}$$

Η δυναμική ενέργεια θεωρώντας V=0 για z=0 είναι: $V = mgz \Rightarrow \boxed{V = mg\rho\cot a}$

Κίνηση σώματος σε κωνική επιφάνεια

Επομένως η Lagrangian του σώματος θα είναι:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 \csc^2 a + \rho^2\dot{\varphi}^2\right) - mg\rho\cot a$$

- Η Lagrangian δεν εξαρτάται από την συντεταγμένη φ και επομένως

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{οπότε} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \sigma\tau\alpha\vartheta. \Rightarrow m\rho^2\dot{\varphi} = \sigma\tau\alpha\vartheta.$$

Αλλά: $m\rho^2\dot{\varphi} = \sigma\tau\alpha\vartheta. \Rightarrow m\rho^2\dot{\varphi} = l = \sigma\tau\alpha\vartheta.$ (1)

- Διατήρηση στροφορμής ως προς τον άξονα συμμετρίας του συστήματος

Η Lagrangian εξίσωση κίνησης ως προς τη συντεταγμένη ρ είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}\csc^2 a \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) = m\ddot{\rho}\csc^2 a \quad \text{και} \quad \frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho\dot{\varphi}^2 - mg\cot a$$

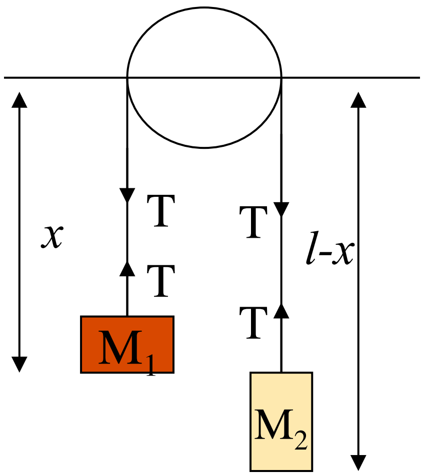
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 \Rightarrow m\ddot{\rho}\csc^2 a - m\rho\dot{\varphi}^2 + mg\cot a = 0 \Rightarrow \ddot{\rho}\csc^2 a - \rho\dot{\varphi}^2 + g\cot a = 0 \quad (2)$$

Προσέξτε ότι από την (1) έχουμε:

$$\rho\dot{\varphi}^2 = \frac{l^2}{m^2\rho^3} \quad \text{οπότε η (2) δίνει:} \quad \ddot{\rho}\csc^2 a - \frac{l^2}{m^2\rho^3} = -g\cot a$$

Μηχανή Atwood

Η μηχανή Atwood είναι παράδειγμα ενός συστήματος με ολόνομο, σκληρόνομο δεσμό (η τροχαλία θεωρείται λεία και αμελητέας μάζας)



$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}; \dot{y} = \frac{d(l-x)}{dt} = -\dot{x}$$

Υπάρχει μόνο μια ανεξάρτητη συντεταγμένη, x. Η θέση της μάζας M_2 προσδιορίζεται από το δεσμό ότι το μήκος του σχοινιού είναι σταθερό, *l*.

Η κινητική ενέργεια είναι: $T = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2$

ενώ η δυναμική ενέργεια: $V(x) = -M_1 g x - M_2 g(l-x)$

Επομένως η Lagrangian του συστήματος είναι:

$$L = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2 - g\left[(M_2 - M_1)x - M_2 l\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M_1 + M_2)\dot{x} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (M_1 + M_2)\ddot{x} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = g(M_2 - M_1)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του Lagrange παίρνουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow (M_1 + M_2)\ddot{x} - g(M_2 - M_1) = 0 \Rightarrow \ddot{x} = \frac{g(M_2 - M_1)}{(M_1 + M_2)}$$

Μηχανή Atwood

- Είναι χαρακτηριστικό ότι δεν υπάρχει δύναμη δεσμού !

- Στην περίπτωση αυτού του προβλήματος, η δύναμη του δεσμού είναι η τάση, T, του σχοινιού και δεν εμφανίζεται πουθενά στην Lagrangian

- Για τον ίδιο λόγο και η δύναμη του δεσμού δεν μπορεί να βρεθεί από το φορμαλισμό της Lagrangian

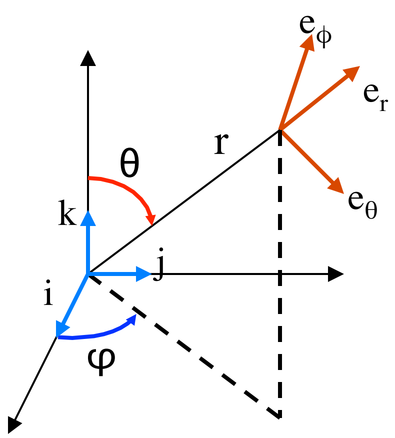
- Η τάση βρίσκεται από την εξίσωση: $T - M_1 g = M_1 \ddot{x}$

Η λύση του προβλήματος με απλή Newtonian μηχανική, ζητά τις εξισώσεις του Newton για κάθε μάζα:

$$\left.\begin{aligned} T - M_1 g &= M_1 \ddot{x} \\ T - M_2 g &= -M_2 \ddot{x} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{αφαίρεση}} \begin{aligned} -M_1 g - \left(-M_2 g\right) &= M_1 \ddot{x} - \left(-M_2 \ddot{x}\right) \\ \left(M_2 - M_1\right) g &= \left(M_1 + M_2\right) \ddot{x} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\ddot{x} = g \frac{\left(M_2 - M_1\right)}{\left(M_1 + M_2\right)}$$

Σφαιρικές συντεταγμένες



Σε σφαιρικές συντεταγμένες θα έχουμε: $\vec{r} = r\hat{e}_r$

Η διεύθυνση του $\hat{e}_r$ προσδιορίζεται από τις φ και θ

Εισάγουμε 2 ακόμα μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_\theta$ και $\hat{e}_\varphi$

Η ταχύτητα θα είναι: $\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dfrac{d\hat{e}_r}{dt}$

Αλλά $\hat{e}_r = \hat{i}(\hat{e}_r \cdot \hat{i}) + \hat{j}(\hat{e}_r \cdot \hat{j}) + \hat{k}(\hat{e}_r \cdot \hat{k})$

Όμως $(\hat{e}_r \cdot \hat{i}) = \cos a$ ενώ θέλουμε το εσωτερικό γινόμενο συναρτήσει των θ και φ

Διαδοχικές προβολές του e_r επίπεδο x-y και κατόπιν στον x–άξονα δίνει:

$$(\hat{e}_r \cdot \hat{i}) = \sin\theta\cos\varphi \quad \text{και ανάλογα} \quad (\hat{e}_r \cdot \hat{j}) = \sin\theta\sin\varphi \quad (\hat{e}_r \cdot \hat{k}) = \cos\theta$$

Οι σχέσεις για τα $\hat{e}_\theta$ και $\hat{e}_\varphi$ βρίσκονται με τον ίδιο τρόπο οπότε έχουμε:

$$\hat{e}_r = \hat{i}\sin\theta\cos\varphi + \hat{j}\sin\theta\sin\varphi + \hat{k}\cos\theta \quad \hat{e}_\theta = \hat{i}\cos\theta\cos\varphi + \hat{j}\cos\theta\sin\varphi - \hat{k}\sin\theta \quad \hat{e}_\varphi = -\hat{i}\sin\varphi + \hat{j}\cos\varphi$$

Άρα $$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \hat{i}(\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi) + \hat{j}(\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi) - \hat{k}\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \hat{e}_\varphi\dot{\varphi}\sin\theta + \hat{e}_\theta\dot{\theta} \Rightarrow \vec{\mathrm{v}} = \hat{e}_r\dot{r} + \hat{e}_\varphi r\dot{\varphi}\sin\theta + \hat{e}_\theta r\dot{\theta}$$