ΦΥΣ 145 **8ο QUIZ - 30 λεπτά** **05/04/2021**

Άσκηση 1 [4μ]

Η ταχύτητα ενός σώματος περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\upsilon(t) = 2t, \quad 1 \le t \le 5$$

$$\upsilon(t) = 5t^2 + 3, \quad 5 < t \le 14$$

όπου *t* ο χρόνος μετρούμενος σε δευτερόλεπτα και *υ* δίνεται σε *m/s.* Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Τραπεζίου με 2 υποδιαστήματα για να βρείτε τη μετατόπιση του σώματος μεταξύ της χρονικής στιγμής *t* = 2 και *t* = 9 δευτερόλεπτα.

Απ.: Σύμφωνα με τον κανόνα του Τραπεζίου το ολοκλήρωμα προσεγγίζεται ως:

$$\int_a^b \upsilon(t)dt \approx \frac{b-a}{2n}\left[\upsilon(a) + 2\left\{\sum_{i=1}^{n-1} \upsilon(a+ih)\right\} + \upsilon(b)\right]$$

όπου α=2, b=9, n=2 και $h = \frac{b-a}{n} = \frac{9-2}{2} = 3.5$. Αντικατάσταση στην προηγούμενη εξίσωση δίνει

$$\int_2^9 \upsilon(t)dt \approx \frac{9-2}{2\times 2}\left[\upsilon(2) + 2\left\{\sum_{i=1}^{2-1} \upsilon(2+i\times 3.5)\right\} + \upsilon(9)\right] = \frac{7}{4}[\upsilon(2) + 2\upsilon(5.5) + \upsilon(9)]$$

Αλλά: $\upsilon(2) = 2\cdot 2 = \frac{4m}{s}$, $\upsilon(5.5) = 5\cdot 5.5^2 + 3 = \frac{154.25m}{s}$ και $\upsilon(9) = 5\cdot 9^2 + 3 = 408\frac{m}{s}$.

Αντικαθιστώντας, η μετατόπιση θα είναι: $\int_2^9 \upsilon(t)dt \approx \frac{7}{4}[4 + 2\cdot 154.25 + 408] \approx 1261m$

Άσκηση 2 [4μ]

Υπολογίστε την μετατόπιση του σώματος της άσκησης 1 χρησιμοποιώντας την μέθοδο Simpson για δύο υποδιαστήματα.

Απ.: Ο κανόνας Simpson για πολλαπλά υποδιαστήματα γράφεται με την μορφή:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4\sum_{\substack{i=1,\\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2,\\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε α=2, b=9, n=2 και επομένως $h = \frac{b-a}{n} = \frac{9-2}{2} = 3.5$

Εφαρμογή στην εξίσωση της προσέγγισης του κανόνα Simpson θα δώσει:

$$\int_2^9 \upsilon(t)dt \approx \frac{9-2}{3\cdot 2}\left[\upsilon(t_0) + 4\sum_{\substack{i=1,\\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}}}^{2-1} \upsilon(t_i) + 2\sum_{\substack{i=2,\\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o}}^{2-2} \upsilon(t_i) + \upsilon(t_2)\right]$$

$$\int_2^9 \upsilon(t)dt \approx \frac{9-2}{3\cdot 2}\left[\upsilon(t_0) + 4\sum_{\substack{i=1,\\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}}}^{1} \upsilon(t_i) + 2\sum_{\substack{i=2,\\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o}}^{0} \upsilon(t_i) + \upsilon(t_2)\right]$$

$$\int_2^9 \upsilon(t)dt \approx \frac{9-2}{3\cdot 2}[\upsilon(t_0) + 4\cdot\upsilon(t_1) + \upsilon(t_2)]$$

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε: $\upsilon(t_0) = \upsilon(2) = 2\cdot 2 = \frac{4m}{s}$.

$\upsilon(t_1) = \upsilon(2+3.5) = \upsilon(5.5) = 5\cdot 5.5^2 + 3 = 154.25\frac{m}{s}$ και $\upsilon(t_2) = \upsilon(9) = 5\cdot 9^2 + 3 = \frac{408m}{s}$

$$\int_2^9 \upsilon(t)dt \approx \frac{9-2}{3\cdot 2}[\upsilon(2) + 4\cdot\upsilon(5.5) + \upsilon(9)] = 1.1667(4 + 4\cdot 154.25 + 408) = 1200.5m$$

Άσκηση 3 [4μ]

Αναφέραμε ότι η μέθοδος Simpson είναι ακριβής για ένα πολυώνυμο 3^{ης} τάξης. Εξηγήστε γιατί ισχύει αυτό.

Απ.: Ο κανόνας Simpson είναι ακριβής για πολυώνυμα 3^{ου} ή μικρότερου βαθμού. Ο κανόνας εξάγεται προσεγγίζοντας την ολοκληρωτέα συνάρτηση με ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, εντούτοις η επιφάνεια που περικλείεται από την καμπύλη της συνάρτησης είναι ακριβής για ένα πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού. Όπως δείξαμε, το σφάλμα αποκοπής όρων από το ανάπτυγμα Taylor στην εξαγωγή του κανόνα Simpson είναι της τάξης της 4^{ης} παραγώγου, $E_t = \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\zeta)$ για τιμές $a < \zeta < b$. Από τη στιγμή που η 4^{η} παράγωγος μιας συνάρτησης 3^{ου} βαθμού είναι 0, το σφάλμα αποκοπής θα είναι 0. Επομένως ο κανόνας Simpson είναι ακριβής για ολοκλήρωση πολυωνύμων 3^{ου} και μικρότερου βαθμού.

Άσκηση 4 [**3μ**]

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει μετρήσεις της ταχύτητας ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου:

Time(s)	0	15	18	22	24
Velocity (m/s)	22	24	37	25	123

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Τραπεζίου με μη ίσα διαστήματα, να υπολογίσετε την μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα που ορίζεται μεταξύ των χρονικών στιγμών *t*=12s και *t* = 18s.

Απ.: Η χρήση της μεθόδου του Τραπεζίου με μη ίσα διαστήματα θα δώσει:

$$\int_{12}^{18} u(t)dt = \int_{12}^{15} u(t)dt + \int_{15}^{18} u(t)dt$$

Η ταχύτητα τις χρονικές στιγμές 15s και 18s είναι $u(15) = 24$m/s και $u(18) = 37$m/s. Θα χρειαστεί να υπολογίσουμε την ταχύτητα τη χρονική στιγμή 12s. Από τα δεδομένα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γραμμική παρεμβολή μεταξύ των χρονικών στιγμών 0 και 15s:

$u(t) = a_0 + a_1 t$ για $0 \leq t \leq 15$.

Τη χρονική στιγμή *t* = 0s $u(0) = a_0 + a_1 0 = 22 \Rightarrow a_0 = \frac{22m}{s}$.

Τη χρονική στιγμή *t* = 15s $u(15) = a_0 + a_1 15 = 24 \Rightarrow a_1 = \frac{\frac{24-22}{15}m}{s} \Rightarrow a_1 = 0.1333$.

Επομένως η ταχύτητα στο διάστημα $0 \leq t \leq 15$ προσεγγίζεται μέσω γραμμικής παρεμβολής ως $u(t) = 22 + 0.13333t$.

Τη χρονική στιγμή *t*=12s, η ταχύτητα θα είναι: $u(12) = 22 + 0.13333 \cdot 12 \Rightarrow u(12) = \frac{23.6m}{s}$

Επομένως η μετατόπιση του σώματος θα είναι:

$$\int_{12}^{18} u(t)dt = \int_{12}^{15} u(t)dt + \int_{15}^{18} u(t)dt \approx (15-12)\left[\frac{u(12)+u(15)}{2}\right] + (18-15)\left[\frac{u(18)+u(15)}{2}\right]$$

$$\int_{12}^{18} u(t)dt = (15-12)\left[\frac{23.6+24}{2}\right] + (18-15)\left[\frac{37+24}{2}\right] \Rightarrow \int_{12}^{18} u(t)dt = 162.9m$$

Σημείωση: Στην εκφώνηση της άσκησης εκ παραδρομής γράφηκε η χρονική στιγμή t=15s ως 5s. Επομένως οι μονάδες του ερωτήματος θα δοθούν σε όλους.