

ΦΥΣ 145 – Υπολογιστικές Μέθοδοι στη Φυσική

Τελική εξέταση

19 Μάη 2008

Ομάδα 1^η

Γράψτε το ονοματεπώνυμο, αριθμό ταυτότητάς **και το password** σας στο πάνω μέρος της αυτής της σελίδας.

Πρέπει να απαντήσετε σε όλα τα προβλήματα που σας δίνονται. Η βαθμολογία του κάθε προβλήματος αναγράφεται όπως και η βαθμολογία των επιμέρους ερωτημάτων. Η βαθμολογία δεν είναι αντιπροσωπευτική της δυσκολίας τους. Συνολική βαθμολογία της εξέτασης 80 μονάδες.

Πριν ξεκινήσετε διαβάστε προσεκτικά όλα τα προβλήματα. Ξεκινήστε από αυτό που νομίζετε ευκολότερο και συνεχίστε στα υπόλοιπα. Τα προγράμματά σας θα πρέπει να κάνουν compilation και να περιέχουν κάποια σχόλια για την κατανόηση του τι κάνετε.

ΟΔΗΓΙΕΣ – ΚΑΝΟΝΕΣ

Όλα τα προγράμματά σας θα πρέπει να τα γράψετε μέσα στο **directory final_groupA**. Τα προγράμματά σας δεν θα τα στείλετε με e-mail αλλά θα τα αφήσετε μέσα στο **directory** που δημιουργήσατε.

Μην ξεχάσετε να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας και αριθμό ταυτότητας σε κάθε **file** που αντιστοιχεί σε άσκηση.

Ο χρόνος εξέτασης είναι 3 ώρες.

Από τη στιγμή αυτή δεν υπάρχει συνεργασία/συζήτηση, ανταλλαγή αρχείων και e-mails με κανένα. Όλα τα κινητά θα πρέπει να παραμείνουν κλειστά. Σημειώσεις, χαρτάκια κλπ απαγορεύονται. Περίεργα logins από/προς accounts, windows κλπ θεωρούνται σοβαρές και άμεσες παραβάσεις των κανόνων των εξετάσεων.

Directories με files που δεν σας ανήκουν (labs ή homeworks) και δεν είναι από τις λύσεις ή παραδείγματα των διαλέξεων (δηλαδή τα πήρατε για εξάσκηση, για διάβασμα ή οτιδήποτε άλλο) θα πρέπει να τα σβήσετε πριν αρχίσει η εξέταση. Κατά τη διάρκεια της εξέτασης θα ελεγχθούν όλοι οι directories και όσοι βρεθούν με περίεργα files στα directories τους θα αποκλειστούν αυτόματα. Επομένως για αποφυγή παρεξηγήσεων σας παρακαλώ να σβήσετε οτιδήποτε δεν πρέπει να υπάρχει τώρα!

Με τον web browser μπορείτε να επισκεφθείτε **μόνο** την ιστοσελίδα του μαθήματος και ιστοσελίδες που είναι linked μέσω του μαθήματος.

Καλή επιτυχία

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ

1. [10β] Η δεύτερη παράγωγος μπορεί να υπολογιστεί προσεγγιστικά σύμφωνα με την σχέση $F''(x) = \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2}$, όπου h είναι μια μικρή μη μηδενική ποσότητα.

(α) Γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $F(x) = \frac{1}{x}$ στο $x=1$ και για $h=0.1$. Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με τη αναλυτική τιμή. [2β]

(β) Επαναλάβετε τη διαδικασία αυτή ελαττώνοντας το βήμα h κατά 0.1 κάθε φορά έως ότου $h=10^{-4}$. Κάνετε τη γραφική παράσταση του απόλυτου σφάλματος συναρτήσει του βήματος h και κάνοντας προσαρμογή (fit) με τη βοήθεια του gnuplot βρείτε τη συναρτησιακή σχέση που τα συνδέει. Εξηγήστε το θεωρητικό σφάλμα που περιμένετε για την συγκεκριμένη προσέγγιση και δείξτε ότι η συναρτησιακή σχέση που βρίσκετε είναι ίδια με αυτή που περιμένετε θεωρητικά. Τι παρατηρείτε για τιμές του βήματος μικρότερες από 10^{-4} ;

Θα πρέπει να στείλετε μαζί με το πρόγραμμά σας, τις τιμές τις οποίες πήρατε τρέχοντας το πρόγραμμα καθώς και την γραφική παράσταση του μαζί με tsυνάρτηση της προσαρμογής. [8β]

Υπενθύμιση για την προσαρμογή με το gnuplot

gnuplot > f(x) = a*x+b

gnuplot> fit f(x) 'filename' via a,b

Οι δύο αυτές εντολές κάνουν προσαρμογή ευθείας γραμμής σε δεδομένα που βρίσκονται στο αρχείο 'filename'

2. [20β] Στη άσκηση αυτή θα πρέπει να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο διαβάζει το file <http://www.ucy.ac.cy/~phy145/exams/grades.dat> (θα πρέπει να σώσετε το file σε ένα δικό σας directory). Το file αυτό περιέχει τους βαθμούς των φοιτητών (οι οποίοι δεν είναι περισσότεροι από 100) σε κάποιο μάθημα. Η πρώτη γραμμή του file περιέχει 2 γραμματοσειρές που προσδιορίζουν το κωδικό του μαθήματος (6 χαρακτήρες) και το εξάμηνο (4 χαρακτήρες). Κάθε γραμμή μετά την πρώτη γραμμή περιέχει 5 στήλες. Από την 1^η προς την 5^η στήλη τα στοιχεία που δίνονται είναι (i) ο 4-ψήφιος αριθμός ταυτότητας του φοιτητή, (ii) ο συνολικός βαθμός από τα labs, (iii) ο συνολικός βαθμός από τα quizzes (iv) ο βαθμός της ενδιάμεσης και (v) ο βαθμός της τελικής εξέτασης. Κάθε επιμέρους τμήμα της βαθμολογίας είναι στο διάστημα από 0 μέχρι 100 αλλά το ποσοστό που συνεισφέρει στη τελική βαθμολογία του μαθήματος είναι labs 15%, quiz 15%, ενδιάμεση εξέταση 30% και τελική εξέταση 40%. Ανάλογα με το συνολικό τελικό βαθμό απονέμεται μια επιγραμματική βαθμολογία ως ακολούθως: A για βαθμό 88 – 100, B 74 – 88, C 55 – 74, D 45 – 55 και F για βαθμολογία 0 – 45. Θα πρέπει να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο κάνει τα ακόλουθα:
- (α) Ταξινομεί τα δεδομένα ώστε οι κωδικοί των φοιτητών είναι σε αύξουσα σειρά. Τα ταξινομημένα δεδομένα θα πρέπει να τα γράψετε σε ένα αρχείο report_grades.dat στο τέλος του προγράμματος. Το file αυτό θα πρέπει να το στείλετε μαζί με το κώδικα του προγράμματος. Σημείωση η ταξινόμηση θα πρέπει να γίνει σε όλα τα σχετικά δεδομένα του αρχικού file. [3β]
 - (b) Μετρά το συνολικό αριθμό των φοιτητών. [1β]
 - (c) Υπολογίζει το τελικό βαθμό του κάθε φοιτητή χρησιμοποιώντας τα παραπάνω ποσοστά. [2β]
 - (d) Βρίσκει το μέγιστο και ελάχιστο βαθμό και υπολογίζει τη μέση τιμή και απόκλιση χρησιμοποιώντας τις παρακάτω σχέσεις:
- $$\text{Μέση τιμή} = \sum x / n \text{ και μέση απόκλιση} = \sqrt{\sum (x^2) / n - (\sum x / n)^2}$$
- όπου $\sum x$ είναι το άθροισμα των βαθμών, $\sum x^2$ είναι το άθροισμα των τετραγώνων των βαθμών και n ο αριθμός των φοιτητών στο μάθημα. [5β]
- (e) Δίνει σε κάθε φοιτητή τη αντίστοιχη επιγραμματική βαθμολογία (A, B, C, D, F) σύμφωνα με την παραπάνω σύμβαση. [2β]
 - (f) Μετρά τον συνολικό αριθμό των A, B, C, D και F. [2β]
 - (g) Δημιουργεί ένα output file report_grades.dat το οποίο έχει το παρακάτω format. (δείτε την επόμενη σελίδα) [5β]

COURSE: XXXXXX SEMESTER:XXXX (5 κενά μετά το κωδικό ξεκινά το SEMESTER)

NUMBER OF STUDENTS IN THE CLASS: XX

Class high grade: XX.X

Class low grade: XX.X

Class mean: XX.X

Apoklisi: XX.X

Number of A: XX

Number of B: XX

Number of C: XX

Number of D: XX

Number of F: XX

GRADES

Student ID	LAB	QUIZ	MIDTERM	FINAL	LETTER GRADE
XXXX	XXX	XXX	XXX	XXX	X
XXXX	XXX	XXX	XXX	XXX	X
XXXX	XXX	XXX	XXX	XXX	X
XXXX	XXX	XXX	XXX	XXX	X

Κλπ . Το X αντιπροσωπεύει ένα χαρακτήρα ή ένα ψηφίο. Μπορείτε να αποφασίσετε τον αριθμό των κενών θέσεων όπως θέλετε.

3. [20β] Ένα βλήμα βάλεται από την επιφάνεια της γης με αρχική ταχύτητα 1000m/s και γωνία 35° ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Υποθέτουμε ότι η πυκνότητα του αέρα μεταβάλλεται συναρτήσει του ύψους στο οποίο βρίσκεται το βλήμα σύμφωνα με τη σχέση $\rho(y) = \rho(y=0)e^{-y/h}$, όπου h είναι μια σταθερά που δείχνει το ύψος στο οποίο η πυκνότητα έχει ελαττωθεί κατά e^{-1} . Ο συντελεστής της αντίστασης του αέρα είναι $B/m=4 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ (όπου ο όρος m στο B/m παριστά τη μάζα του σώματος)

Η δύναμη της αντίστασης του αέρα υποθέτουμε ότι έχει τη μορφή $F_d = -B \frac{\rho}{\rho_0} v^2$. Η επιτάχυνση της

βαρύτητας, g , έχει την τιμή $g=9.8 \text{ m/s}^2$ στην επιφάνεια της γής αλλά μεταβάλλεται με το ύψος στο οποίο βρίσκεται το βλήμα σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης. Το πρόβλημα αυτό δεν έχει αναλυτική λύση. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Euler

(α) Να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο λύνει αριθμητικά το παραπάνω πρόβλημα.

(β) Να βρεθεί η διαφορά στο μέγιστο ύψος και στο βεληνεκές που υπολογίζετε όταν η πυκνότητα του αέρα και η επιτάχυνση της βαρύτητας παραμένουν σταθερές και ανεξάρτητες της θέσης του σώματος.

(γ) Να γίνουν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις του ύψους συναρτήσει του χρόνου, της οριζόντιας απόστασης συναρτήσει του χρόνου καθώς και της τροχιάς του βλήματος και να συγκριθούν στο ίδιο plot και για τις δύο περιπτώσεις.

Το βλήμα υποτίθεται ότι επιστρέφει και πάλι στη γή. Επομένως θα πρέπει να κάνετε τόσα βήματα ώστε το βλήμα να χτυπήσει στο έδαφος.

Σας δίνονται:

Χρονικό βήμα $dt = 0.1 \text{ sec}$

Η σταθερά του Newton $G = 6.67259 \times 10^{-11}$

Η μάζα της γης είναι $M_{\text{γης}} = 5.972 \times 10^{24}$

Η ακτίνα της γης $R_{\text{γης}} = 6.37815 \times 10^6$

Η σταθερά h στη μεταβολή της πυκνότητας του αέρα $h = 1 \times 10^4$

Η πυκνότητα του αέρα στην επιφάνεια της γής $\rho(y=0) = 1.2$

Όλες οι μονάδες δίνονται στο σύστημα MKS.

4. **[10β]** Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ολοκλήρωσης Monte Carlo υπολογίστε το ακόλουθο ολοκλήρωμα:

$$f = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \int_0^1 dx_4 \int_0^1 dx_5 \int_0^1 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)^2 dx_6$$

Θα πρέπει να επιστρέψετε το πρόγραμμά σας μαζί με τα αποτελέσματα της τιμής που υπολογίζετε για διαφορετικές τιμές δοκιμών οι οποίες αυξάνουν γεωμετρικά από 2 ως 2^{21} . Τα αποτελέσματα αυτά θα πρέπει να είναι στο file askisi5.dat το οποίο και θα επιστρέψετε μαζί με το κώδικά σας.

5. **[20β]** Στα εργαστήρια είδαμε ένα παράδειγμα τυχαίας διαδρομής σε μια διάσταση. Στην άσκηση αυτή θα μελετήσουμε την τυχαία διαδρομή ενός παρατηρητή σε δύο διαστάσεις (σύστημα συντεταγμένων x-y). Σε κάθε δευτερόλεπτο ο παρατηρητής μπορεί να κινείται 1m βόρεια ή νότια, ανατολικά ή δυτικά με την ίδια πιθανότητα. Έτσι μετά από 1 sec θα βρίσκεται 1m μακριά από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Μετά από 2 secs μπορεί να ξαναέρθει στην αρχική του θέση (4 πιθανές διαδρομές) ή να βρεθεί 2m μακριά (4 πιθανές διαδρομές) ή $\sqrt{2}$ m μακριά (8 πιθανές διαδρομές) οι οποίες οδηγούν σε μια μέση απόσταση $\langle d \rangle = (4 \times 0 + 4 \times 2 + 8\sqrt{2}) / 16 = 1.207m$.

Θέλουμε να προσδιορίσουμε την μέση απόσταση συναρτήσει του επιτρεπτού χρόνου κίνησης.

Καθώς ο επιτρεπτός χρόνος αυξάνει, ο αριθμός των πιθανών κινήσεων αυξάνει υπερβολικά και δεν μπορούμε εύκολα να κρατήσουμε όλες τις πιθανές κινήσεις. Επομένως χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Monte Carlo για να επιλέξουμε ένα αριθμό τυχαίων διαδρομών σαν αντιπροσωπευτικό δείγμα.

(α) Γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει την μέση απόσταση για επιτρεπτούς χρόνους κίνησης από 1 έως 100 secs χρησιμοποιώντας ένα δείγμα 10,000 διαδρομών για κάθε χρόνο. Το αποτέλεσμα του προγράμματός σας τα οποία γράφονται σε κάποιο file, συνίσταται από τον χρόνο ακολουθούμενο από την υπολογιζόμενη μέση απόσταση. (Θα πρέπει να επιστρέψετε το πρόγραμμά σας και το file με τα αποτελέσματά σας). **[13β]**

(β) Κάντε τη γραφική παράσταση της μέσης απόστασης (y-axis) ως προς τον επιτρεπτό χρόνο κίνησης (x-axis). **[2β]**

(γ) Μπορείτε να μαντέψετε τη συναρτησιακή σχέση που συνδέει τις δύο ποσότητες; Αν ναι κάντε τη γραφική παράσταση και συγκρίνεται με τα αποτελέσματα των Monte Carlo πειραμάτων σας. **[5β]** Ίσως χρειαστείτε να κάνετε κάποια προσαρμογή των δεδομένων σας στη συναρτησιακή σχέση που υποθέσατε για να βρείτε τη σταθερά αναλογίας. Θυμηθείτε ότι για να κάνετε προσαρμογή στο gnuplot χρειάζεται να δηλώσετε τη συνάρτησή σας π.χ. $f(x) = a*x + b$ με a και b τις παραμέτρους που βρίσκει η προσαρμογή. Κατόπιν γράφεται `fit f(x) 'datafile' via a,b`.