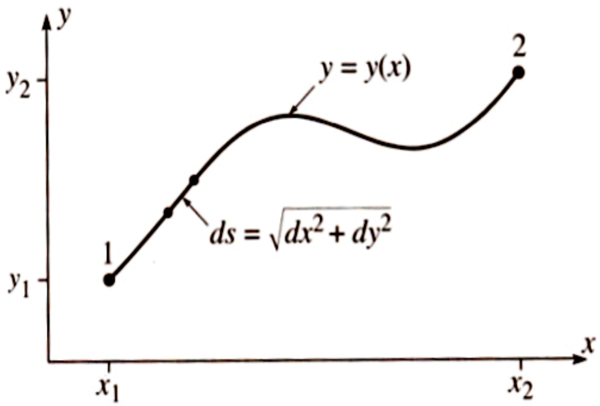
Σήμερα...?

- Λογισμό μεταβολών (calculus of variations)

Λογισμός μεταβολών - εισαγωγικά

- Εύρεση του ελάχιστου ή μέγιστου μιας ποσότητας που εκφράζεται με τη μορφή ενός ολοκληρώματος
- Τι εννοούμε με αυτό?
  - Παράδειγμα: Έστω δυο σημεία 1 (x_1,y_1) και 2 (x_2,y_2)
    Ποια η ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση.



Το στοιχειώδες μήκος ds είναι: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

Αλλά $dy = \dfrac{dy}{dx}dx = y'dx$

$$ds = \sqrt{dx^2 + y'^2 dx^2} \Rightarrow ds = dx\sqrt{1+y'^2}$$

Επομένως το ολικό μήκος της διαδρομής είναι:

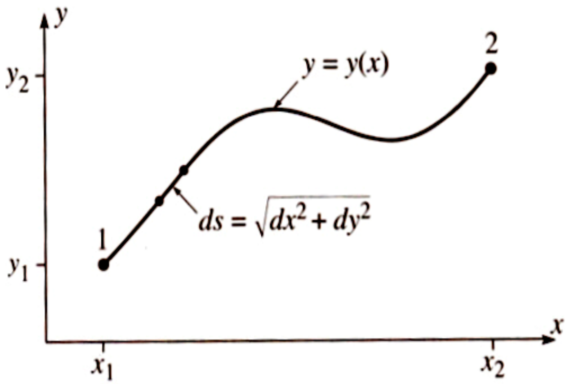
$$\boxed{D = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1+y'^2}}$$

Το πρόβλημα είναι να βρεθεί η y(x) (όλα τα σημεία και όχι ένα σημείο) ώστε η D (το ολοκλήρωμα δηλαδή) γίνεται ελάχιστη

- Το πρόβλημα είναι πιο πολύπλοκο από το συνηθισμένο του να βρεθεί το x_0 που η $f(x)=\min$ στο x_0

Λογισμός μεταβολών - εισαγωγικά

Δεύτερο παράδειγμα: Η αρχή του Fermat: Η διαδρομή που ακολουθεί το φως καθώς περνά από μέσα με διαφορετικούς δείκτες διάθλασης είναι αυτή που ελαχιστοποιεί το χρόνο που απαιτείται για να πάει από το ένα σημείο στο άλλο.



Το πρόβλημα είναι παρόμοιο με αυτό της ελάχιστης απόστασης

Ο χρόνος που απαιτείται να διασχίσει την απόσταση ds:

$$dt = ds / \mathrm{v} = ds / (c / n) \Rightarrow dt = nds / c$$

Άρα ο συνολικός χρόνος είναι:

δείκτης διάθλασης

$$Time = \int_1^2 dt = \int_1^2 \frac{nds}{c} = \frac{1}{c}\int_1^2 nds$$

Προφανώς αν n σταθερό τότε το πρόβλημα είναι ίδιο με το προηγούμενο.

Ωστόσο συνήθως n είναι της μορφής: n(x,y)

$$Time = \frac{1}{c}\int_1^2 n(x,y)ds \Rightarrow Time = \frac{1}{c}\int_1^2 n(x,y)dx\sqrt{1+y'^2}$$

Θέλουμε το ολοκλήρωμα να είναι ελάχιστο για να ικανοποιεί την αρχή του Fermat

Εν γένει σε προβλήματα μπορεί να θέλουμε το ολοκλήρωμα να είναι μέγιστο ή ελάχιστο

Λογισμός μεταβολών

Έστω μια συνάρτηση f(x) και εξετάζουμε αν παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο σε x_0

Εξετάζουμε αν η παράγωγος $df/dx = 0$ στο x_0

Η συνθήκη δεν είναι ικανή να εξασφαλίσει μέγιστο ή ελάχιστο

Αν df/dx = 0 σε κάποιο σημείο x_0, τότε το x_0 είναι μέγιστο ή ελάχιστο ή αν τότε τίποτα από τα δύο (σαμάρι ή saddle σημείο) $\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$

- Σταθερό ή Στάσιμο σημείο (stationary point) το σημείο x_0 για το οποίο $\frac{df}{dx} = 0$ αλλά δεν ξέρουμε σε ποια περίπτωση ανήκει (ελάχιστο,μέγιστο ή saddle)

- Απειροστή μεταβολή του x ως προς το x_0 αφήνει την f(x) αμετάβλητη

Στην περίπτωση των ολοκληρωμάτων χρειάζεται να βρούμε το σύνολο των σημείων, τη συνάρτηση δηλαδή y(x), ή τη διαδρομή, ώστε το ολοκλήρωμα να είναι στάσιμο (stationary), δηλαδή να μην αλλάζει όταν θεωρούμε οποιαδήποτε απειροστή μεταβολή της σωστής διαδρομής

Λογισμός μεταβολών

Εξίσωση Euler - Lagrange

Το πρόβλημα των μεταβολών: έχουμε ένα ολοκλήρωμα:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f\left[y(x), y'(x), x\right] dx$$

όπου $y(x)$ άγνωστη συνάρτηση σημείων x, που ενώνει τα σημεία x_1 και x_2
και για την οποία ισχύει: $y(x_1) = y_1$ και $y(x_2) = y_2$

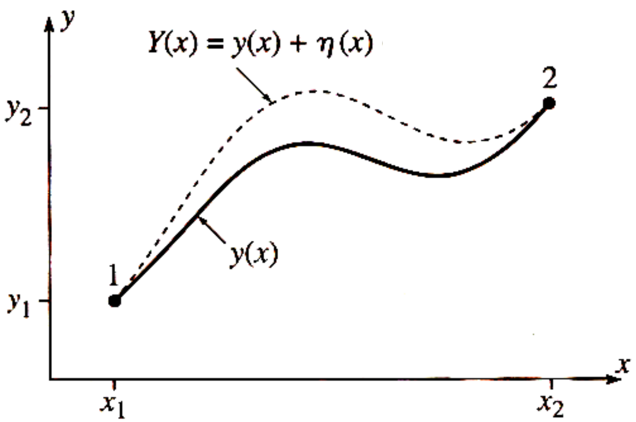
Ανάμεσα σε όλες τις δυνατές καμπύλες που ενώνουν τα σημεία 1 και 2
πρέπει να βρούμε αυτή που ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί το ολοκλήρωμα S

Προσέξτε ότι ενώ η συνάρτηση f εξαρτάται από 3 μεταβλητές $f\left[y(x), y'(x), x\right]$
το ολοκλήρωμα ακολουθεί τη διαδρομή $y = y(x)$ οπότε η ολοκληρώσιμη
ποσότητα είναι συνάρτηση μιας μόνο μεταβλητής x

Έστω ότι θεωρούμε την $y(x)$ σαν την καμπύλη που δίνει
την ελάχιστη τιμή στο ολοκλήρωμα S για $y=y(x)$

Οποιαδήποτε άλλη καμπύλη $Y(x)$ θα δίνει τιμή για το ολοκλήρωμα S
μεγαλύτερη από αυτή που παίρνει όταν χρησιμοποιούμε την $y=y(x)$

Εξίσωση Euler – Lagrange



Γράφουμε τη ‘λάθος’ καμπύλη Y(x) με τη μορφή:

$$Y(x) = y(x) + n(x)$$

Όπου η(x) η διαφορά μεταξύ της λάθος Y(x) και της σωστής καμπύλης y(x)

Αφού όλες οι δυνατές καμπύλες πρέπει να περνούν από τα σημεία 1 και 2 τότε:

$$n(x_1) = 0 = n(x_2)$$

Επειδή η S κατά μήκος μιας οποιασδήποτε καμπύλης Y(x) θα παίρνει τιμές πάντα μεγαλύτερες από αυτή όταν S υπολογίζεται με την σωστή y(x) ανεξάρτητα από το πόσο μικρή η διαφορά τους τότε γράφουμε:

$$Y(x) = y(x) + \alpha n(x) \qquad (1)$$

Τώρα η S υπολογιζόμενη με την Y(x) εξαρτάται από την α, S(α)

Για a=0 παίρνουμε από την (1) τη σωστή καμπύλη και επομένως S(a) είναι ελάχιστο για a=0. (dS/dα =0 για a=0)

Δηλαδή μετατρέψαμε το πρόβλημα, σε υπολογισμό της παραγώγου μιας συνηθισμένης συνάρτησης, S(a), στο σημείο a

Εξίσωση Euler – Lagrange

$$\left(\frac{dS}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} \overset{?}{=} 0$$

$$S(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(Y, Y', x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(y + \alpha n, y' + \alpha n', x)dx \Rightarrow$$

$$\frac{dS(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{d\alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx = 0 \qquad (2)$$

Η συνθήκη αυτή πρέπει να ισχύει για οποιοδήποτε n για το οποίο ισχύει:

$$n(x_1) = 0 = n(x_2) \qquad (3)$$

Ολοκλήρωση κατά μέλη της (2) $\left(\int u dv = uv - \int v du \right)$

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} dx = \left[\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx$$

Λόγω της (3) το α′ μέλος είναι μηδέν οπότε:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} dx = -\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx$$

Αντικαθιστώντας στη (2)

Εξίσωση Euler – Lagrange

$$\frac{dS(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} - \eta \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = 0 = \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

Θεμελιώδες Λήμμα:

$\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x)dx = 0$ για κάθε $\eta(x)$ $\Rightarrow$ $M(x) = 0 \;\; \gamma\iota\alpha \;\; x_1 < x < x_2$

Επομένως η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad \forall \mathrm{x} \quad \mathrm{x}_1 < \mathrm{x} < \mathrm{x}_2 \qquad \text{Euler-Lagrange}$$

Η μεθοδολογία για τη λύση τέτοιου προβλήματος είναι:

(1) Γράφουμε το πρόβλημα ώστε η ποσότητα, της οποίας ζητήται η στάσιμη διαδρομή, εκφράζεται σαν ολοκλήρωμα στη καθιερωμένη μορφή:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f\left[y(x), y'(x), x\right] dx$$

(2) Γράφουμε τις εξισώσεις Euler - Lagrange

(3) Προσπαθούμε να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση Euler-Lagrange για την y(x)

Λογισμός μεταβολών

Είδαμε ότι ένα ολοκλήρωμα της μορφής: $S = \int_{x_1}^{x_2} f\left[y(x), y'(x), x\right]dx$

υπολογισμένο κατά μήκος της διαδρομής y(x) είναι στάσιμο ως προς τις μεταβολές της τροχιάς αν και μόνο αν η y(x) ικανοποιεί την εξίσωση Euler-Lagrange

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \quad \forall \mathrm{x} \quad \mathrm{x}_1 < \mathrm{x} < \mathrm{x}_2$$

Καταλήξαμε σε αυτή τη σχέση γράφοντας μια τυχαία “λάθος” διαδρομή με τη μορφή

$$Y(x) = y(x) + \alpha n(x)$$

όπου n(x) μια τυχαία καλώς συμπεριφερόμενη συνάρτηση με $n(x_1) = 0 = n(x_2)$

Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα S πάνω στην καμπύλη Y, αυτό εξαρτάται από το a.

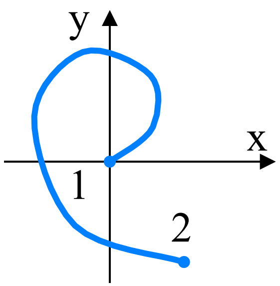
Αλλά για a=0 έχουμε τη διαδρομή y(x) για την οποία το ολοκλήρωμα είναι στάσιμο που οδηγεί στη συνθήκη:

$$\left(\frac{dS(Y(x))}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = 0$$

Euler – Lagrange (περισσότερες μεταβλητές)

Τα περισσότερα προβλήματα στη φυσική έχουν περισσότερες από 2 μεταβλητές από τις οποίες υπάρχει μόνο μια ανεξάρτητη, ο χρόνος t.

Όταν προσπαθήσαμε να βρούμε τη πιο σύντομη διαδρομή μεταξύ 2 σημείων υποθέσαμε ότι αυτή γράφεται y=y(x).



Όπως φαίνεται στο σχήμα αυτό δεν ισχύει πάντα.

Μπορούμε όμως να γράψουμε: $x = x(u) \qquad y = y(u)$

όπου u οποιαδήποτε μεταβλητή που “βολεύει”

Το στοιχειώδες μήκος κατά μήκος της διαδρομής είναι:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = du\sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2} \quad οπου \quad x'(u) = \frac{dx}{du} \quad y'(u) = \frac{dy}{du}$$

Το μήκος της διαδρομής είναι: $S = \int_{u_1}^{u_2} du\sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}$

και πρέπει να βρούμε τις συναρτήσεις x(u) και y(u) για να γίνει στάσιμο το S

Το γενικό πρόβλημα που έχουμε να λύσουμε είναι:

$$S = \int_{u_1}^{u_2} f\left[x(u), x'(u), y(u), y'(u), u\right] du$$

Να βρεθούν οι διαδρομές x(u) και y(u) ώστε το S να είναι στάσιμο

Euler – Lagrange (περισσότερες μεταβλητές)

Το πρόβλημα είναι παρόμοιο με αυτό της μιας μεταβλητής:

Έστω ότι η σωστή διαδρομή είναι: $x = x(u) \qquad y = y(u)$

Τότε κάθε λάθος διαδρομή θα μπορεί να γραφεί:

$$x = x(u) + \alpha\xi(u) \qquad y = y(u) + \beta\eta(u)$$

Η απαίτηση το ολοκλήρωμα S να 'ναι στάσιμο για τη σωστή διαδρομή ισοδυναμεί με την απαίτηση το ολοκλήρωμα S(a,β) υπολογιζόμενο στη λάθος διαδρομή

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 0 \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial \beta}\right)_{\beta=0} = 0$$

Όπως και για την περίπτωση της μιας μεταβλητής οι δυο αυτές εξισώσεις οδηγούν στις εξισώσεις Euler - Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{du}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{du}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

Ο λογισμός των μεταβολών

Η τεχνική έχει ευρύτερες εφαρμογές

Γενικά για

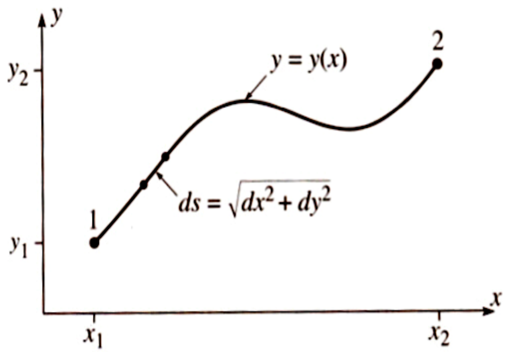
$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x)\,dx \qquad y' \equiv \frac{dy}{dx}$$

$$\delta J = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

Παραδείγματα

- Η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων είναι η ευθεία:

Είδαμε ότι το μήκος της διαδρομής που συνδέει 2 σημεία είναι:



$$D = \int_1^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1+y'^2}$$

Η εξίσωση αυτή έχει τη μορφή: $S = \int_{x_1}^{x_2} f\left[y(x), y'(x), x\right]dx$

όπου $f\left(y, y', x\right) = \sqrt{\left(1+y'^2\right)}$

Από την εξίσωση Euler-Lagrange έχουμε:

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (1)$$

Αλλά $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ και $\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$

Αντικαθιστώντας στην (1) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y'} = C \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C \Rightarrow y'^2 = C^2\left(1+y'^2\right)$

$$\Rightarrow y'^2 = \frac{-C^2}{\left(C^2-1\right)} \Rightarrow y'(x) = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow dy = kdx \Rightarrow \int dy = k\int dx \Rightarrow y = kx + b$$

Γεωδεσιακή σφαιρικής επιφάνειας

- Η γραμμή η οποία δίνει τη μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων πάνω σε μια οποιαδήποτε επιφάνεια ονομάζεται γεωδεσιακή (geodesics) της επιφάνειας
- Είδαμε ότι η γραμμή που ενώνει δύο σημεία στο επίπεδο είναι η ευθεία. Ποια είναι η γραμμή που δίνει την μικρότερη απόσταση δύο σημείων πάνω σε σφαιρική επιφάνεια?

Χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες (ρ, θ, φ).

Έστω δύο σημεία της επιφάνειας είναι τα $\Sigma_1(\theta_1,\varphi_1)$ και $\Sigma_2(\theta_2,\varphi_2)$

Η στοιχειώδης απόσταση σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2\theta d\phi^2 \Rightarrow ds^2 = \rho^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

Στην περίπτωση αυτή $d\rho=0$

Άρα η απόσταση μεταξύ των σημείων είναι:

$$s = \rho\int_1^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow s = \rho\int_1^2 \left(\frac{d\theta^2}{d\phi^2} + \sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}} d\phi$$

Αναγνωρίζοντας: $f = \left(\frac{d\theta^2}{d\phi^2} + \sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\theta'^2 + \sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$ όπου $\theta' = \frac{d\theta}{d\phi}$

θέλουμε την ελάχιστη απόσταση, τότε το ολοκλήρωμα πρέπει να έχει ακρότατο

Γεωδεσιακή σφαιρικής επιφάνειας

Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$ (1)

Αλλά για μια συνάρτηση $f = f(y, y', x)$ έχουμε $\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x}$ (2)

οπότε $\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \frac{\partial f}{\partial x}$ (3)

$$\left.\begin{aligned} &\text{Ακόμα ισχύει ότι:} \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = y''\frac{\partial f}{\partial y'} + y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \\ &\text{Από την (3) όμως:} \frac{\partial f}{\partial y'} y'' = \frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial y} y' - \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} y' + y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}$$

Οι δυο τελευταίοι όροι γράφονται: $-y'\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right] = 0$ (Εξίσωση E-L)

Οπότε καταλήγουμε: $\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{df}{dx} - \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dx} - \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$

Από την (1) όμως (υποθέσαμε ότι f ανεξάρτητη της x) έχουμε $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

Άρα καταλήγουμε στην εξίσωση: $\frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} \equiv \sigma\tau\alpha\theta.$ όταν $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

2η μορφή εξισώσεων E-L

Γεωδεσιακή σφαιρικής επιφάνειας

Από τις εξισώσεις Euler-Lagrange έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{d}{d\phi}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta'}\right) = 0 \Rightarrow \left(\theta'^2 + \sin^2\theta\right)^{1/2} - \theta' \cdot \frac{\partial}{\partial \theta'}\left(\theta'^2 + \sin^2\theta\right)^{1/2} = const \equiv a$$

Διαφορίζοντας και πολ/ζοντας με f έχουμε τελικά $\sin^2\theta = \alpha\left(\theta'^2 + \sin^2\theta\right)^{1/2}$

Θέτοντας $\dfrac{d\phi}{d\theta} = \theta'^{-1}$ η προηγούμενη διαφορική εξίσωση δίνει:

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{\alpha \csc^2\theta}{(1-\alpha^2\csc^2\theta)^{1/2}} \Rightarrow \phi = \sin^{-1}\left(\frac{\cot\theta}{\beta}\right) + \alpha \qquad \beta^2 \equiv (1-\alpha^2)/\alpha^2$$

Η τελευταία εξίσωση για το φ παίρνει τη μορφή: $\cot\theta = \beta\sin(\phi - \alpha)$

$\cot\theta = \beta\sin(\phi-\alpha) = \beta\sin\phi\cos\alpha - \beta\cos\phi\sin\alpha$ Πολ/ζω με $\rho\sin\theta$

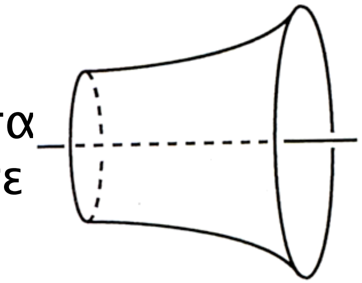
$$\rho\cos\theta = \beta\rho\sin\theta\sin\phi\cos\alpha - \beta\rho\sin\theta\cos\phi\sin\alpha$$

Θέτω: $A = \beta\cos\alpha \qquad B = \beta\sin\alpha$

$$\left.\begin{array}{l}(\rho\cos\theta) = A(\rho\sin\theta\sin\phi) - B(\rho\sin\theta\cos\phi) \\ \text{Αλλά οι σχέσεις στις παρενθέσεις είναι τα z, y, x}\end{array}\right\} \Rightarrow z = Ay - Bx$$

Εξίσωση επιπέδου

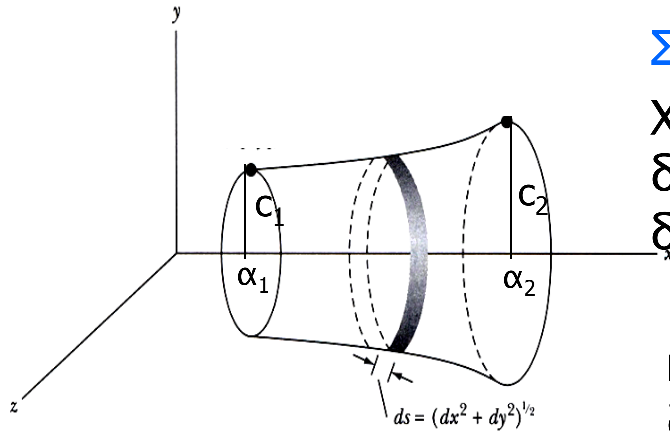
Ελάχιστη επιφάνεια περιστροφής



Έστω ότι μια επιφάνεια περιστροφής έχει 2 στεφάνια σαν τα όρια της. Ποια πρέπει να είναι η μορφή της επιφάνειας ώστε να έχει το ελάχιστο δυνατό εμβαδό

Λύση

Έστω η επιφάνεια δημιουργείται από την περιστροφή της καμπύλης y=y(x) γύρω από τον x-άξονα.



Συνοριακές συνθήκες: $y(a_1) = c_1 \qquad y(a_2) = c_2$

Χωρίζοντας την επιφάνεια σε στοιχειώδη δακτυλίδια, (λωρίδα επιφάνειας) το εμβαδό της δίνεται από:

$$A = \int L_c ds \Rightarrow A = \int_{a_1}^{a_2} 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

περιφέρεια δακτυλίου

Στοιχειώδες μήκος

Άρα χρειάζεται να βρούμε τη συνάρτηση που ελαχιστοποιεί το ολοκλήρωμα A

Η συνάρτησή μας είναι: $f(x) = y\sqrt{1 + y'^2}$

Ελαχιστοποίηση του ολοκληρώματος σημαίνει ικανοποίηση της εξίσωσης E-L

Ελάχιστη επιφάνεια περιστροφής

Λήμμα:

“ Η συνάρτηση y(x) που δίνει ακρότατες τιμές στο ολοκλήρωμα:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$ όπου $f(y)$ δεδομένη συνάρτηση του y

ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $1+y'^2 = Bf(y)^2$ B σταθερά ολοκλήρωσης”

Θεωρώντας f(y) =y έχουμε: $1+y'^2 = By^2$

Λύνοντας τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{By^2-1} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{By^2-1}} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{By^2-1}} = \int dx$$

Το ολοκλήρωμα: $$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \cosh^{-1} z$$

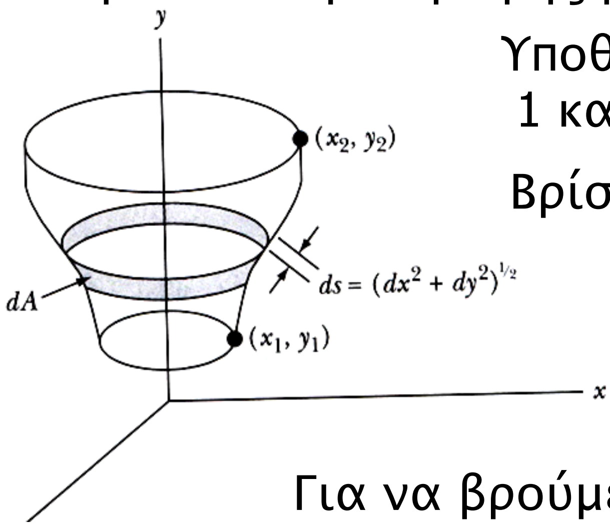
Επομένως η λύσης είναι: $y(x) = \frac{1}{\sqrt{B}}\cosh\left[\sqrt{B}\left(x+d\right)\right]$ όπου d σταθερά ολοκλ.

Οι σταθερές B και d καθορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες:

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{B}}\cosh\left[\sqrt{B}\left(a_1+d\right)\right] \quad \text{και} \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{B}}\cosh\left[\sqrt{B}\left(a_2+d\right)\right]$$

Επιφάνεια περιστροφής γύρω από y-άξονα

Επιφάνεια δημιουργείται από την περιστροφή μιας καμπύλης που συνδέει 2 σταθερά σημεία (x_1,y_1) και (x_2,y_2) γύρω από άξονα ομοεπίπεδο με τα 2 σημεία. Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης που συνδέει τα 2 σημεία και δίνει επιφάνεια περιστροφής με το ελάχιστο εμβαδό.



Υποθέτουμε ότι η καμπύλη που περνά από τα σημεία 1 και 2 περιστρέφεται γύρω από τον άξονα y.

Βρίσκουμε το εμβαδό dA μιας λωρίδας όπως στο σχήμα.

$$dA = 2\pi x ds = 2\pi x\left(dx^2 + dy^2\right)^{1/2} \Rightarrow$$

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x\left(1 + y'^2\right)^{1/2} dx$$

Για να βρούμε το ακρότατο του A θεωρούμε την: $f = x\left(1 + y'^2\right)^{1/2}$

και την αντικαθιστούμε στη εξίσωση E-L

$$\delta A = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \Rightarrow 0 - \frac{d}{dx}\left(\frac{xy'}{\left(1 + y'^2\right)^{1/2}}\right) = 0$$

Επομένως: $\dfrac{xy'}{\left(1 + y'^2\right)^{1/2}} = const. \equiv a \Rightarrow x^2 y'^2 = a^2\left(1 + y'^2\right) \Rightarrow y' = \dfrac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

Επιφάνεια περιστροφής γύρω από y-άξονα

Ολοκληρώνουμε την: $y' = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} \Rightarrow \int dy = \int \frac{adx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \Rightarrow y(x) = a\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + b$$

Οι σταθερές α και b βρίσκονται από τη συνθήκη ότι η y(x) περνά από τα σημεία 1,2

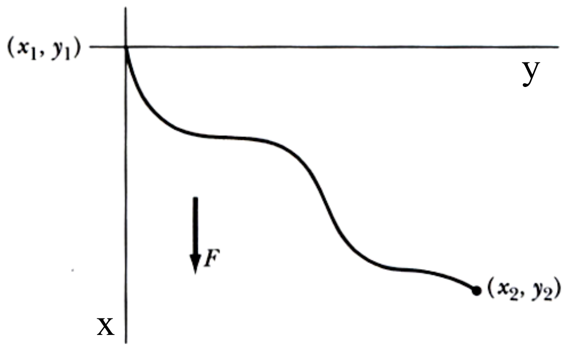
Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί επίσης και ως:

$$\boxed{x = a\cosh\left(\frac{y - b}{a}\right)}$$

Η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση της “σαπουνόφουσκας” που κρέμεται ελεύθερα από δύο σημεία στήριξης

Βραχυστόχρονο – κλασικό πρόβλημα φυσικής

Θεωρήστε ένα σωματίδιο που ξεκινά από ηρεμία από ένα σημείο (x_1,y_1) και πηγαίνει σε ένα σημείο (x_2,y_2). Να βρεθεί η διαδρομή που επιτρέπει το σώμα να εκτελέσει τη διαδρομή στο μικρότερο χρονικό διάστημα



Θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων ώστε το αρχικό σημείο συμπίπτει με την αρχή των αξόνων

Θεωρούμε ότι η δύναμη του πεδίου δρα στη x-διεύθυνση και είναι σταθερή και δεν υπάρχει τριβή - συντηρητικό

Η ολική μηχανική ενέργεια διατηρείται: $E = T + V = const.$

Επειδή το σώμα ξεκινά από ηρεμία: $E = T + V = 0$ (θεωρώντας ότι V=0 για y=0)

Σε κάθε σημείο της τροχιάς: $T = \frac{1}{2}m\text{v}^2$ και $V = -Fx \Rightarrow V = -mgx$

Αφού $E = T + V = 0 \Rightarrow \text{v}^2 = 2gx \Rightarrow \text{v} = \sqrt{2gx}$

Ο χρόνος που απαιτείται για το σωματίδιο να εκτελέσει τη διαδρομή είναι:

$$t = \int_1^2 \frac{ds}{\text{v}} = \int \frac{\left(dx^2 + dy^2\right)^{1/2}}{(2gx)^{1/2}} \Rightarrow t = \int_{x_1=0}^{x_2} \left(\frac{1 + y'^2}{2gx}\right)^{1/2} dx$$

Θέλουμε ο χρόνος αυτός να είναι ελάχιστος

Βραχυστόχρονο

Από τη σχέση: $t=\int_{x_1=0}^{x_2}\left(\frac{1+y'^2}{2gx}\right)^{1/2}dx$ αναγνωρίζουμε τη συνάρτηση: $f=\left(\frac{1+y'^2}{2gx}\right)^{1/2}$

Από την εξίσωση E-L έχουμε:

$$\delta t=0\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0\Rightarrow 0-\frac{d}{dx}\left(\frac{2y'}{\left[x\left(1+y'^2\right)\right]^{1/2}}\right)=0\Rightarrow$$

$$\frac{y'}{\left[x\left(1+y'^2\right)\right]^{1/2}}\equiv\frac{1}{\sqrt{2a}}\Rightarrow\frac{y'^2}{\left[x\left(1+y'^2\right)\right]}=\frac{1}{2a}\Rightarrow y=\int\frac{xdx}{\left(2ax-x^2\right)^{1/2}}$$

Πραγματοποιούμε την ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητών:

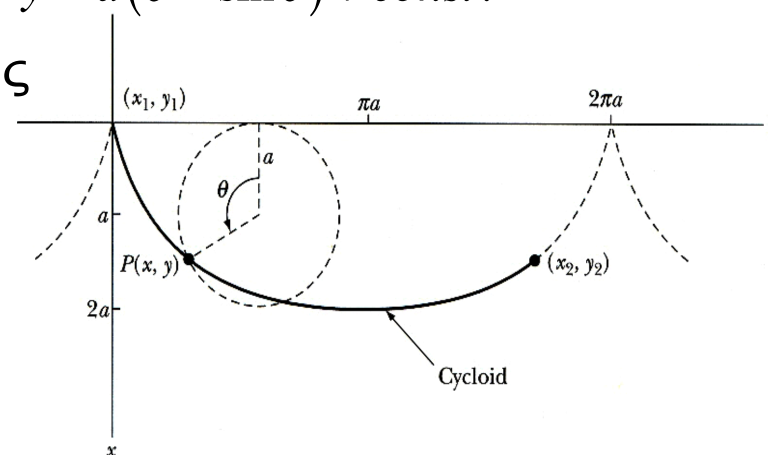
$$x=a\left(1-\cos\theta\right)\qquad dx=a\sin\theta d\theta$$

Το ολοκλήρωμα γίνεται: $y=\int a\left(1-\cos\theta\right)d\theta\Rightarrow y=a\left(\theta-\sin\theta\right)+const.$

Οι παραμετρικές εξισώσεις ενός κυκλοειδούς που περνά από την αρχή των αξόνων είναι:

$$x=a\left(1-\cos\theta\right)$$

$$y=a\left(\theta-\sin\theta\right)$$



Η σταθερά α πρέπει να ρυθμιστεί ώστε το σώμα να περνά από το σημείο (x_2,y_2)