ΦΥΣ 145 – Μαθηματικές Μέθοδοι στη Φυσική

12 Μαΐου 2011

Συμπληρώστε τα στοιχεία σας στο παρακάτω πίνακα τώρα

Ονοματεπώνυμο	
Αρ. Ταυτότητας	
Username	
Password	

Δημιουργήστε ένα φάκελο στο home directory σας με το όνομα **Final** (όχι άλλα ονομάτα). Θα πρέπει να δουλέψετε όλα τα προβλήματα της εξέτασης στο φάκελο αυτό και πουθενά αλλού. Στο τέλος της εξέτασης τα αρχεία σας θα παρθούν από το φάκελο αυτό.

Σας δίνονται 5 προβλήματα και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλα. Συνολική βαθμολογία 100 μονάδες.

Ο χρόνος εξέτασης είναι 240 λεπτά.

Επιτρέπεται: η χρήση του υλικού των ιστοσελίδων και μόνο του μαθήματος, καθώς και οι ασκήσεις/λύσεις των εργαστηρίων και homeworks που έχετε δώσει και σας έχουν δοθεί. ***Απαγορεύονται:*** η συνεργασία/συζήτηση και οποιαδήποτε ανταλλαγή αρχείων, η χρήση e-mail καθώς και η χρήση κινητών τηλεφώνων τα οποία θα πρέπει να απενεργοποιηθούν τώρα.

Καλή επιτυχία
Καλό καλοκαίρι και
Καλή συνέχεια στα επόμενα χρόνια σας στο φυσικό

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογισθεί η τιμή του ολοκληρώματος $\int_5^8 6x^3 dx$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Euler και βήμα dx=0.15. [**10μ**] Συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με αυτό που λαμβάνετε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Simpson και το ίδιο βήμα dx. [**10μ**]

2. Μια σφαίρα βρίσκεται σε θερμοκρασία 1200^{o}K και την αφήνουμε να κρυώσει μέχρι τη θερμοκρασία δωματίου (300^{o}K). Υποθέστε ότι θερμότητα χάνεται μόνο μέσω ακτινοβολίας και επομένως η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη μεταβολή της θερμοκρασίας της σφαίρας δίνεται από:

$$\frac{d\theta}{dt} = -2.2067\times10^{-12}(\theta^4 - 81\times10^8),$$

όπου θ η θερμοκρασία του σώματος σε βαθμούς Kelvin (K) και ο χρόνος t σε sec.

(α) Να βρεθεί η θερμοκρασία της σφαίρας τη χρονική στιγμή $t = 480$ sec χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ης} τάξης. Υποθέστε χρονικό βήμα 30sec. [**10μ**]

(β) Να βρεθεί η χρονική στιγμή στην οποία η θερμοκρασία της σφαίρας είναι 320^{o}K. [**5μ**]

(γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της θερμοκρασίας που υπολογίζετε για τη χρονική στιγμή $t = 480$sec συναρτήσει του χρονικού βήματος που χρησιμοποιείται για βήματα dt = 15, 30, 60, 120, 240 και 480 sec. [**5μ**]

3. Σε πολλές κλιματολογικές μελέτες όπου χρειάζεται να υπολογιστεί το γενικό κλίμα του πλανήτη, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της προσομοίωσης Monte Carlo. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο αυτή για να προσδιορίσουμε την γενική μέση θερμοκρασία του πλανήτη και τη ποσότητα ηλιακού φωτός το οποίο πέφτει σε ζώνες που περικλείονται μεταξύ δυο διαδοχικών γραμμών γεωγραφικού πλάτους (το γεωγραφικό πλάτος είναι η γωνιακή απόσταση ενός τόπου από τον ισημερινό. Ο ισημερινός έχει γεωγραφικό πλάτος 0^o και ο βόρειος πόλος 90^o. Κάθε γραμμή γεωγραφικού πλάτους είναι ένας κύκλος παράλληλος προς τον κύκλο που περνά από τον ισημερινό).

Για να υπολογίσουμε τη παγκόσμια μέση τιμή της θερμοκρασίας, θα χρειαστεί να βρούμε τη μέση της θερμοκρασίας ως προς κάθε ζώνη γεωγραφικού πλάτους. Ωστόσο αυτό θα ήταν λάθος αφού το εμβαδό γης που περικλείεται σε κάθε γεωγραφική ζώνη δεν είναι σταθερό και ελαττώνεται καθώς κινούμαστε σε ζώνες πιο κοντά στους δυο πόλους της γης. Επομένως για να βρούμε τη παγκόσμια μέση τιμή της θερμοκρασίας θα πρέπει να σταθμίσουμε (ζυγίσουμε) τη μέση θερμοκρασία κάθε γεωγραφικής ζώνης με το εμβαδό της γης που περικλείεται στη ζώνη αυτή. Αυτό μπορεί να γίνει ολοκληρώνοντας αναλυτικά, αλλά μπορεί να γίνει και με τη χρήση μεθόδων ολοκλήρωσης Monte Carlo.

Για απλούστευση του προβλήματος, θεωρήστε τη γη σε μορφή σφαίρας με ακτίνα $R = 6400km$. (*Υπενθύμιση:* η εξίσωση της σφαίρας δίνεται από τη σχέση $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$). Θεωρήστε ακόμα ότι υπάρχουν 9 ζώνες γεωγραφικού πλάτους 10^o η κάθε μια. Η $1^η$ ζώνη των 10 μοιρών ορίζεται από τον Ισημερινό και τη πρώτη γεωγραφική γραμμή (γεωγραφικό πλάτος 10^o), ενώ η $9^η$ ζώνη ορίζεται μεταξύ του βόρειου πόλου και της γραμμής γεωγραφικού πλάτους 80^o.

(α) Θα πρέπει να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει με τη μέθοδο ολοκλήρωσης Monte Carlo, το ποσοστό εμβαδού της επιφάνειας της γης που περικλείεται σε κάθε μια από τις 9 γεωγραφικές ζώνες. Θα πρέπει το πρόγραμμά σας να υπολογίζει (χρησιμοποιώντας απλή τριγωνομετρία) σε ποια γεωγραφική ζώνη αντιστοιχεί το κάθε τυχαίο σημείο που εξετάζετε. Για τον υπολογισμό σας θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε 10^6 συνολικά προσπάθειες. [**10μ**]

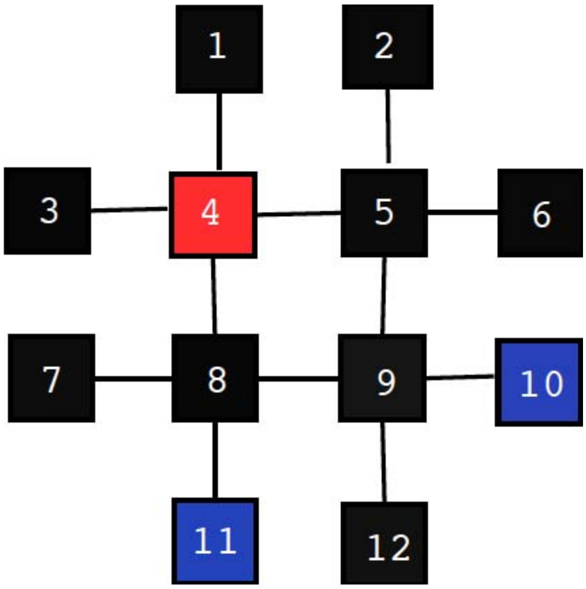
(β) Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει στο τέλος των υπολογισμών τα αποτελέσματά σας σε μορφή πίνακα (χρησιμοποιώντας κατάλληλο format) ως ακολούθως:

Total generated Points: xxxxx
bbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbb *Summary for Zones*
Low angle bbbbb *Upper angle* bbbbb *Sim. Fractional Area* bbbbb *Sfalma* bbbbb *Theor. Fraction*
xxxx *xxxxx* *xxxxx* *xxxx* *xxxxxx*

όπου xxxx αντιπροσωπεύει κάποια τιμή, και bbbbb αντιπροσωπεύουν τον αριθμό των κενών θέσεων μεταξύ αυτών που γράφετε. Η θεωρητικά αναμενόμενη τιμή του ποσοστού εμβαδού κάθε ζώνης δίνεται από τη σχέση: $\sin(\theta_{i+1} \times \pi/180) - \sin(\theta_i \times \pi/180)$ όπου θ_{i+1} και θ_i τα γεωγραφικά πλάτη των γραμμών που ορίζουν κάθε ζώνη. [**7μ**]

(γ) Αν οι μέσες θερμοκρασίες κάθε ζώνης είναι 30^oC, 28^oC, 23^oC, 25^oC, 20^oC, 16^oC, 11^oC, 5^oC και -5^oC (από την $1^η$ έως την $9^η$) να βρεθεί η μέση θερμοκρασία της γης. [**3μ**]

4. Ένας φοιτητής βγαίνοντας από την εξέταση του μαθήματος ΦΥΣ145 είναι τόσο ζαλισμένος που δεν ξέρει προς πια κατεύθυνση να κινηθεί. Ωστόσο αυτό που επιθυμεί είναι να βρεθεί σε ένα από τα 2 bars που είναι κοντά στο Πανεπιστήμιο και να ξεχάσει για το βράδυ την εμπειρία της εξέτασης. Του δίνονται 4 δυνατές διευθύνσεις με την ίδια πιθανότητα. Σε κάθε εξωτερική θέση του χάρτη ο φοιτητής θα βρεθεί σε μια εκδήλωση από την οποία δεν μπορεί να φύγει. Οι θέσεις στις οποίες βρίσκονται τα bars είναι η 10 και η 11, ενώ το εργαστήριο της Πληροφορικής που είχε την εξέταση βρίσκεται στη θέση 4. Στις θέσεις 5, 8 και 9 μπορεί να κινηθεί προς οποιαδήποτε κατεύθυνση.



Να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει την πιθανότητα ο φοιτητής να καταλήξει σε ένα από τα δυο bars που φαίνονται στο παραπάνω χάρτη.[**20μ**]

5. Σχεδιάστε το μικρότερο κωνικό δοχείο (αμελητέου πάχους τοιχωμάτων) το οποίο θα πρέπει να αποθηκεύει 48cm^3 νερού. Θα πρέπει να βρείτε τις τιμές της ακτίνας, r, της βάσης και το ύψος, h, του κώνου για τις οποίες ελαχιστοποιούνται οι επιφάνειες της βάσης και πλευράς του.

(α) Βρείτε τις τιμές αναλυτικά [**8μ**]

(β) Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει τις τιμές αυτές αριθμητικά. [**12μ**]

<u>Υπενθύμιση:</u> Ο όγκος, V, και η παράπλευρη επιφάνεια, S, ενός κώνου δίνονται από τις σχέσεις: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ και $S = \pi r l$