ΣΤΑΤΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

Κύλιση και περιστροφή

Είδαμε τις εξισώσεις για την περιστροφή γύρω από σταθερό άξονα

Τι ισχύει για συνδυασμένη κίνηση? μεταφορά και περιστροφή

- Αν $\sum \vec{F} = 0$ και $\sum \vec{\tau} = 0$

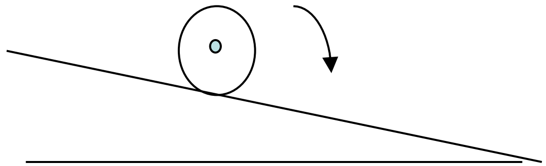
  Τότε υπάρχει ισορροπία. Ούτε μεταφορά ούτε περιστροφή

- Αν $\sum \vec{F} = 0$ και $\sum \vec{\tau} \neq 0$

  Τότε υπάρχει περιστροφή αλλά **όχι μεταφορά**

- Αν $\sum \vec{F} \neq 0$ και $\sum \vec{\tau} \neq 0$

  Τότε υπάρχει περιστροφή και μεταφορά



Μια μπάλα που κυλά προς τα κάτω σε κεκλιμένο επίπεδο

Στατική ισορροπία

- Ισορροπία υπάρχει όταν $\sum \vec{F} = 0 \quad \& \quad \sum \vec{\tau} = 0$

- Οι παραπάνω συνθήκες δηλώνουν ότι η γραμμική και γωνιακή ταχύτητα του συστήματος θα είναι σταθερές ή μηδέν
  - Στην περίπτωση που ω = v = 0 έχουμε «στατική» ισορροπία
  - Μπορούμε να αντιστρέψουμε το επιχείρημα και να πούμε πως αν ω = v = 0 τότε η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών και δυνάμεων είναι μηδέν

- Θα ασχοληθούμε μόνο με περιπτώσεις επίπεδης κίνησης και επομένως μόνο η z-συνιστώσα της ροπής παίζει ρόλο
  - Πρέπει να είμαστε ευρηματικοί και προσεκτικοί για να βρούμε το σύστημα στο οποίο θα εφαρμόσουμε τις παραπάνω σχέσεις

- Οι 2 εξισώσεις είναι ουσιαστικά 6 εξισώσεις για 3-d περιπτώσεις.

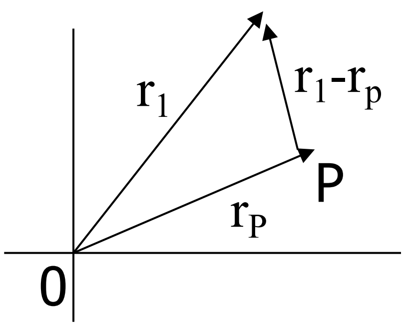
  Σε 2 διαστάσεις έχουμε 3 (2 για δυνάμεις και μία 1 για ροπές)

Ένα θεώρημα

Για ένα στερεό στο οποίο $\sum \vec{F} = 0$,αν η $\sum \vec{\tau} = 0$ γύρω από ένα σημείο, τότε $\sum \vec{\tau} = 0$ γύρω από οποιαδήποτε άλλο σημείο.

Επομένως είμαστε ελεύθεροι να διαλέξουμε το πιο κατάλληλο σημείο για υπολογισμό ροπής.

Απόδειξη



Υποθέτουμε ότι $\sum \vec{\tau} = 0$ γύρω από το σημείο Ο(0,0)

$$0 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \cdots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n$$

Η ροπή των δυνάμεων ως προς το σημείο P είναι:

$$\vec{\tau}_P = (\vec{r}_1 - \vec{r}_p) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_P) \times \vec{F}_2 + \cdots + (\vec{r}_n - \vec{r}_P) \times \vec{F}_n$$

$$\vec{\tau}_P = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \cdots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n - \vec{r}_p \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n)$$

$$\vec{\tau}_P = \vec{\tau}_O - \vec{r}_p \times \left(\sum \vec{F}\right)$$

αλλά εξ' υποθέσεως $\vec{\tau}_O = \left(\sum \vec{F}\right) = 0$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_P = 0 - 0 = 0$$

Κάτι ακόμα από θεωρία – Κέντρο βάρους

- Η δύναμη της βαρύτητας δεν προκαλεί καμιά ροπή γύρω από το κέντρου βάρους ➔ Δέν υπάρχει περιστροφή.

- Κέντρο βάρους είναι το σημείο όπου το ολικό βάρος ενός συστήματος ή σώματος μπορεί να θεωρηθεί ότι ενεργεί:

$$X_{\mathrm{KB}} = \frac{\sum_i F_g^i x_i}{\sum_i F_g^i}$$

- Που είναι το δικό σας?

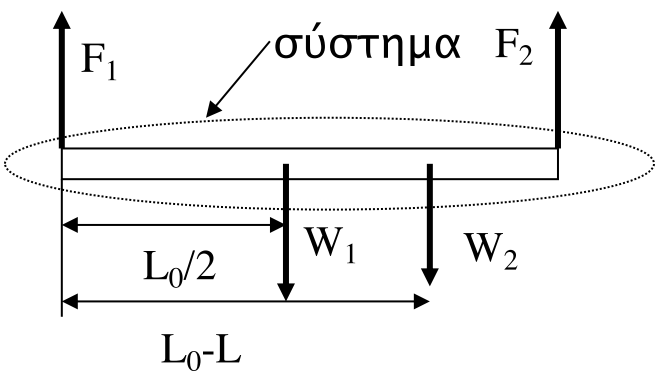
- Μπορείτε να σηκωθείτε από μια καρέκλα χωρίς να περιστρέφεστε/μετακινήστε?

Παράδειγμα

Δύο ζυγαριές στηρίζουν τα άκρα μιας ομοιόμορφης σανίδας μήκους L_0 και μάζας M. Ένα άτομο μάζας m βρίσκεται πάνω στη σανίδα σε απόσταση L στην απόσταση των 2 ζυγαριών. Η σανίδα και το άτομο είναι σε ηρεμία. Ποιο το μέγεθος της δύναμης που ασκεί κάθε ζυγαριά στη σανίδα.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι η σανίδα είναι το σύστημά μας. Οι δυνάμεις είναι:



Το βάρος της σανίδας W_1, το βάρος του ατόμου W_2, οι δυνάμεις των ζυγαριών F_1 και F_2.

$$F_1 + F_2 - W_1 - W_2 = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 = (m+M)g$$

Η δεύτερη συνθήκη ισορροπίας είναι ότι η ολική ροπή ως προς ένα σημείο να είναι μηδέν.

Διαλέγουμε σα σημείο το ένα άκρο της ράβδου ώστε να μηδενίσουμε την ροπή μιας δύναμης. Έστω το F_1.

$$\left.\begin{aligned}
\vec{\tau}_{\alpha\tau} &= (L_0 - L)(-mg) = -(L_0 - L)(mg) \\
\vec{\tau}_{\sigma\alpha\nu} &= \frac{L_0}{2}(-\mathrm{M}g) = -\frac{L_0}{2}\mathrm{M}g \\
\vec{\tau}_{\zeta\upsilon\gamma} &= F_2 L_0
\end{aligned}\right\}$$

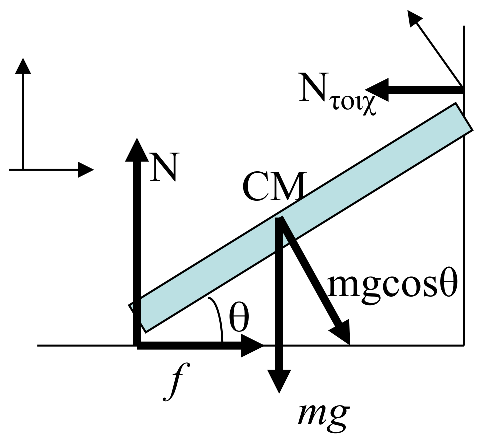
$$\vec{\tau}_{\alpha\tau} + \vec{\tau}_{\sigma\alpha\nu} + \vec{\tau}_{\zeta\upsilon\gamma} = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{\tau}_{o\lambda} = -(L_0 - L)(mg) - \frac{L_0}{2}Mg + F_2 L_0 = 0$$

Στατική ισορροπία

- Γενικά αυτό που θα προσπαθούμε να κάνουμε είναι να διαλέγουμε σα σημείο αναφοράς, το σημείο στο οποίο ενεργούν οι περισσότερες δυνάμεις, γιατί τότε δεν υπάρχει μοχλοβραχίονας και επομένως οι ροπές είναι μηδέν.
  Αυτή η συνθήκη κάνει τις εξισώσεις πολύ πιο απλές.

- Παράδειγμα: Σκάλα μήκους *l* ακουμπά σε λείο τοίχο.
  Ποια η θ_{min} πριν γλιστρήσει



$$(\alpha)\quad \sum F_x = f - N_t = 0$$

$$(\beta)\quad \sum F_y = N - Mg = 0$$

Ροπές ως προς το σημείο επαφής σκάλας εδάφους

$$(\gamma)\quad \sum I_z = N_{\tau o\iota\chi o\upsilon}\, l \sin\theta - Mg\frac{l}{2}\cos\theta = 0$$

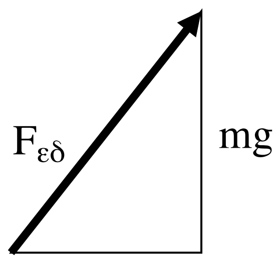
Από (γ): $N_{\tau o\iota\chi}\, l\sin\theta = Mg\frac{l}{2}\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = Mg\frac{l}{2}\frac{1}{N_{\tau o\iota\chi}\, l}$

Από (α): $N_{\tau o\iota\chi} = f_{\max} = \mu_s Mg$

Επομένως $\tan\theta_{\min} = \frac{Mg}{2}\frac{1}{\mu_s Mg} \Rightarrow \tan\theta_{\min} = \frac{1}{2\mu_s}$

Σκάλα σε τοίχο - σχόλια

Η αντίδραση του εδάφους στην σκάλα είναι: $\Rightarrow \tan\phi = \dfrac{mg}{\dfrac{mg}{2\tan\theta}} = 2\tan\theta$

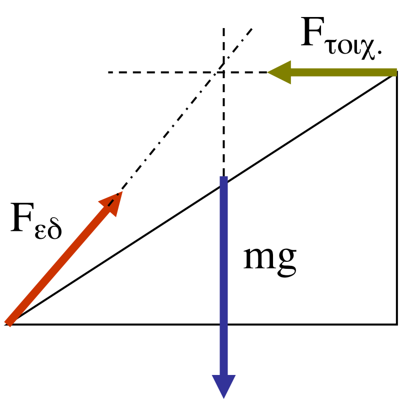


Δηλαδή η δύναμη δεν έχει κατεύθυνση κατά μήκος της σκάλας

Αντίθετα, έχει διεύθυνση προς τα πάνω με κλίση διπλάσια από την κλίση της σκάλας.

Υπάρχει ένας cool τρόπος να δούμε γιατί αυτό ισχύει

Σχεδιάζουμε τις γραμμές όλων των δυνάμεων.



Το γεγονός ότι tanφ=2tanθ υποδηλώνει ότι και οι 3 γραμμές των δυνάμεων περνούν από το ίδιο σημείο!!

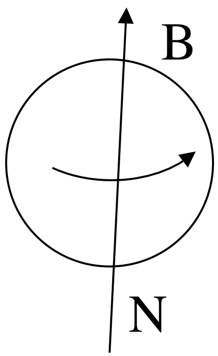
Η τομή των γραμμών πρέπει να ισχύει για όλες τις περιπτώσεις που περιλαμβάνουν 3 δυνάμεις, γιατί αν δεν ήταν αληθινό, τότε μια δύναμη θα προκαλούσε ροπή ως προς το σημείο τομής των άλλων δύο.

Αλλά τότε θα είχαμε $\sum \vec{\tau} \neq 0$

Επομένως 3 δυνάμεις ➔ οι γραμμές τους τέμνονται σε ένα σημείο

Παραδείγματα:

Η γη είναι μια ομοιόμορφη σφαίρα με ακτίνα R=6.4x10^{6}m και M=5.98x10^{24} kg. Ποια είναι η στροφορμή της?

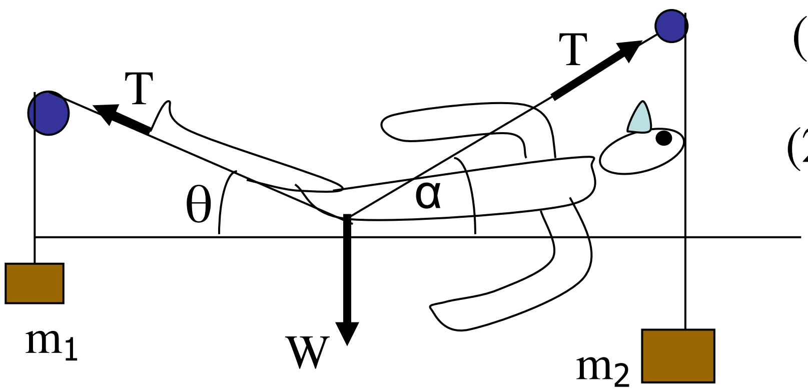


$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

$$L = I\omega = 7.1\times10^{33}\,kgm^2/s$$

Διεύθυνση? Η γη γυρνά αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Παράδειγμα νοσοκομείου



$$(1)\quad \sum F_x = 0 = -m_1 g\cos\theta + m_2 g\cos a$$

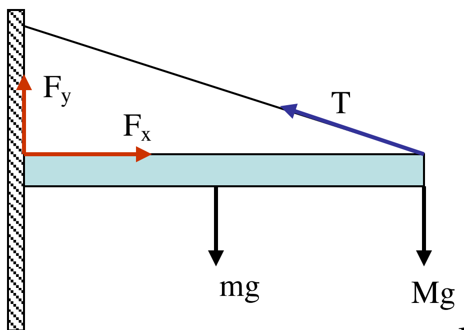
$$(2)\quad \sum F_y = 0 = m_1 g\sin\theta + m_2 g\sin a - W$$

Οι ροπές ως προς τη λεκάνη? 0

Επομένως διαιρούμε (1)/(2) και συνεχίζουμε ανάλογα με τι δίνεται $m_1,\theta \rightarrow m_2,\ \alpha$

Παράδειγμα

Μια οριζόντια δοκός μάζας m είναι στερεωμένη στο αριστερό της άκρο σε σημείο ώστε να μπορεί να περιστρέφεται. Το δεξί της άκρο κρατά μια μεγάλη μάζα M, και στο σημείο αυτό στηρίζεται με τη βοήθεια ενός χοντρού σύρματος το οποίο σχηματίζει γωνία 30° με την οριζόντια διεύθυνση. Το σύρμα είναι στερεωμένο στο τοίχο. Να βρεθεί η τάση στο σύρμα καθώς και η οριζόντια και κατακόρυφη δύναμη στο σημείο στήριξης της δοκού στο τοίχο.



Λύση

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι:

T, Mg, mg, F_x και F_y

Θεωρώντας τις ροπές ως προς το σημείο στήριξης της δοκού θα έχουμε:

$$\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow Mgl + mg\frac{l}{2} - Tl\sin 30^o = 0 \Rightarrow \frac{T}{2} = Mg + \frac{mg}{2} \Rightarrow T = g(2M + m)$$

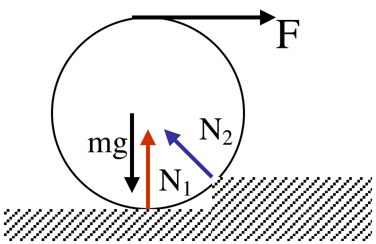
Η δεύτερη συνθήκη ισορροπίας στερεού είναι:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} F_x - T_x = 0 \Rightarrow F_x = T\cos 30^o \Rightarrow F_x = \frac{\sqrt{3}}{2} g(2M + m) \\ F_y + T_y - mg - Mg = 0 \Rightarrow F_y = g(M + m) - T\sin 30^o \end{array}$$

$$\Rightarrow F_y = g(M + m) - \frac{g}{2}(2M + m) \Rightarrow F_y = mg$$

Παράδειγμα - ισορροπία στερεού

Μια συμπαγής σφαίρα μάζας M και ακτίνας R είναι ακίνητη στηριζόμενη σε ένα σκαλοπάτι ύψους h (h<<R). Ποια μέγιστη οριζόντια δύναμη F μπορούμε να ασκήσουμε στο ανώτερο σημείο της σφαίρας χωρίς να ανεβάσουμε τη σφαίρα στο σκαλοπάτι;



Λύση

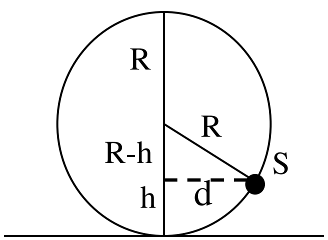
Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα είναι: $\mathrm{F}, \mathrm{mg}, \mathrm{N}_1$ και N_2

Για τη μέγιστη δύναμη F η αντίδραση $N_1 = 0$
(η σφαίρα είναι έτοιμη να ανέβει το σκαλοπάτι)

Αφού η σφαίρα είναι σε ισορροπία (στο σκαλοπάτι) τότε:

$\sum \vec{\tau} = 0$ (ως προς το σκαλοπάτι για να μηδενίσουμε την ροπή της άγνωστης δύναμης N_2)

Οπότε: $\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \tau_{mg} - \tau_F = 0 \Rightarrow mgd - Fl = 0 \Rightarrow mgd = Fl$



Αλλά $l = 2R - h$

$d = \sqrt{R^2 - (R-h)^2}$

$$mg\sqrt{2Rh - h^2} = F(2R-h) \Rightarrow F = mg\frac{\sqrt{h(2R-h)}}{(2R-h)} \Rightarrow F = mg\sqrt{\frac{h}{(2R-h)}}$$

Στατική ισορροπία σε επιταχυνόμενο σύστημα

Σε επιταχυνόμενα συστήματα η συνισταμένη δύναμη δεν είναι μηδέν

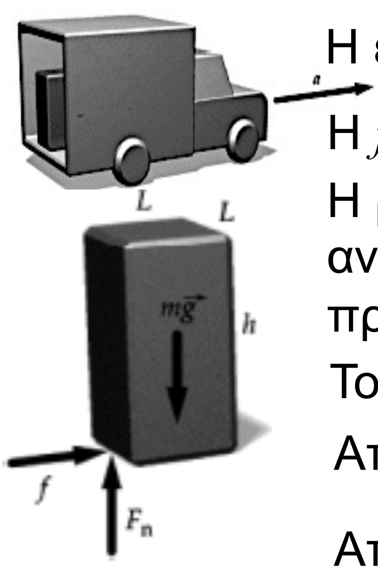
Αν ένα σώμα είναι σε ισορροπία ως προς ένα επιταχυνόμενο σύστημα τότε το σώμα πρέπει να έχει την ίδια επιτάχυνση με το σύστημα

Στην περίπτωση αυτή οι συνθήκες ισορροπίας θα είναι: $\left\{ \begin{array}{l} \sum F = ma_{cm} \\ \sum \vec{\tau}_{cm} = 0 \Rightarrow I_{cm}\vec{\alpha} = 0 \end{array} \right.$

όπου $\alpha_{cm} = \alpha_{\sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma}$ και οι ροπές υπολογίζονται ως προς το ΚΜ

Παράδειγμα

Ένα φορτηγό κουβαλά ένα κιβώτιο μάζας m, ύψους h, και μήκους βάσης, L. Ποια μπορεί να είναι η μέγιστη επιτάχυνση του φορτηγού πριν το κιβώτιο αναποδογυρίσει. Υποθέστε ότι το κιβώτιο αναποδογυρίζει πριν γλυστρήσει



Η επιτάχυνση του φορτηγού προκαλείται από την δύναμη της τριβής, f

Η f προκαλεί ροπή ως προς το ΚΜ του κιβωτίου.

Η ροπή αυτή εξισορροπείται από την ροπή που προκαλεί η κάθετη αντίδραση, F_N, η οποία καθώς το σύστημα επιταχύνεται, μετακινείται προς τα αριστερά και την άκρη του κιβωτίου (τότε έχουμε μέγιστη ροπή).

Το βάρος δεν παράγει ροπή ενώ όταν α=0m/s² η F_N περνά από το ΚΜ.

Από το 2ο νόμο του Newton: $\sum F_x = f = ma_{cm}$ και $\sum F_y = 0 \Rightarrow F_N = mg$

Από τις ροπές: $\tau_f - \tau_{F_N} = 0 \Rightarrow f\dfrac{h}{2} = F_N \dfrac{L}{2} \Rightarrow ma_{cm}h = mgL \Rightarrow a_{cm} = \dfrac{L}{h}g$

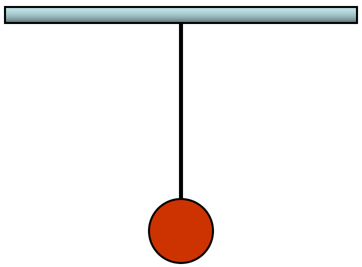
Ευσταθής – Ασταθής ισορροπία

Έστω ένα σώμα σε ισορροπία. Του δίνουμε μια μικρή ώθηση

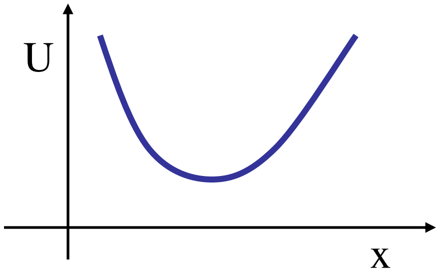
Αν το σώμα κινηθεί προς τη θέση ισορροπίας τότε η ισορροπία είναι ευσταθής.

Αν το σώμα απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας τότε η ισορροπία είναι ασταθής.

Για παράδειγμα

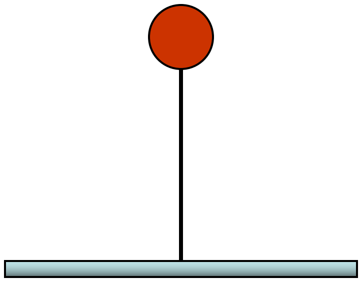


Ευσταθής

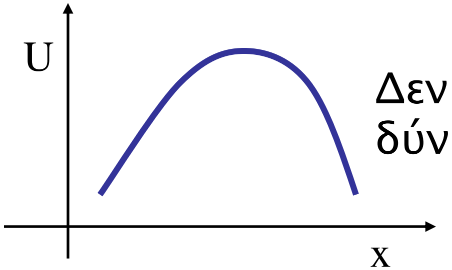


$$F = -\frac{dU}{dx}$$

Δύναμη επαναφοράς



Ασταθής

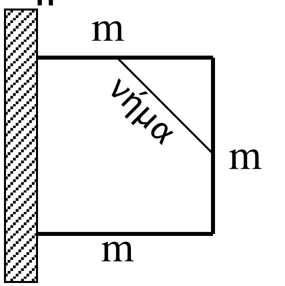


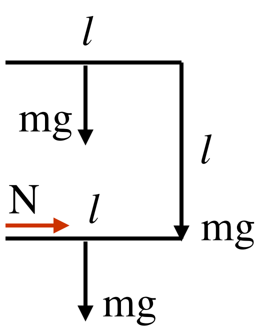
Δεν υπάρχει δύναμη επαναφοράς

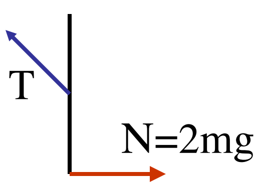
Αν η μετακίνηση αυξάνει τη δυναμική ενέργεια έχουμε ευσταθή ισορροπία

Παράδειγμα στατικής ισορροπίας

Τρεις ράβδοι μάζας m σχηματίζουν τις τρεις πλευρές ενός τετραγώνου όπως στο σχήμα. Τα σημεία σύνδεσης μεταξύ των ραβδών με το τοίχο είναι λεία. Τα μέσα της υψηλότερης και κατακόρυφης ράβδου συνδέονται με ένα αβαρές νήμα. Ποια είναι η τάση στο νήμα.







Λύση

Κοιτάζουμε τις ροπές όλου του συστήματος ως προς το σημείο στήριξης της πάνω ράβδου

Οι εξωτερικές δυνάμεις και ροπές τους που ενδιαφέρουν είναι

$$mg\frac{l}{2} + mgl + mg\frac{l}{2} - Nl = 0 \Rightarrow Nl = 2mgl \;\Rightarrow N = 2mg$$

Εξετάζουμε τη συνισταμένη των δυνάμεων στη κατώτερη ράβδο

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N - R_x = 0 \Rightarrow N = R_x = 2mg$$

Η δύναμη R_x εξασκείται από την κατακόρυφο ράβδο

Σύμφωνα με το 3^o νόμο του Newton και η κατώτερη ράβδος ασκεί ίση και αντίθετη δύναμη στην κατακόρυφο ράβδο R_x=2mg

Κοιτάζουμε τις ροπές στην κατακόρυφο ράβδο ως προς το ανώτερο άκρο της.

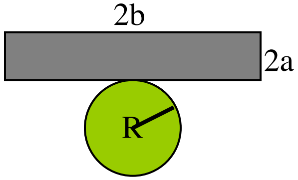
Οι ενδιαφέρουσες ροπές είναι:

$$T\frac{l}{2}\cos 45^o = Nl \Rightarrow T\frac{\sqrt{2}}{4} = N \Rightarrow T = \frac{4\sqrt{2}}{2}2mg \Rightarrow T = 4\sqrt{2}mg$$

Παράδειγμα

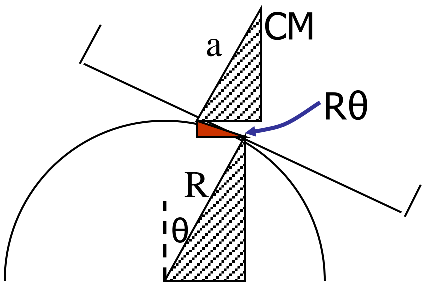
Ο κύλινδρος είναι σταθερός και το δοκάρι ταλαντώνεται χωρίς να γλιστρά

Ποια η συνθήκη σταθερής ισορροπίας;



Λύση

Εξετάζουμε αν το CM ανεβαίνει προς τα πάνω ή κατεβαίνει όταν το δοκάρι μετακινείται από τη θέση ισορροπίας.



Έστω ότι το δοκάρι γέρνει κατά γωνία θ

Τα τρία τρίγωνα είναι όμοια (ίδια γωνία θ)

Οι τρεις υποτίνουσες είναι: R, a και $R\theta$

Αθροίζουμε τις κάθετες πλευρές στα τρία τρίγωνα

$$h_{CM} = R\cos\theta + R\theta\sin\theta + a\cos\theta$$

Αλλά αφού θ μικρή τότε (ανάπτυγμα Taylor) $\sin\theta \approx \theta \quad \cos\theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$

Επομένως έχουμε: $$h_{CM} = R\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + R\theta^2 + a\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow h_{CM} = R + a + (R - a)\frac{\theta^2}{2}$$

Αν $a<R$ το CM ανεβαίνει προς τα πάνω ➡ ευσταθής

Αν $a>R$ το CM κατεβαίνει προς τα κάτω ➡ ασταθής

Διαφορετικά: Η οριζόντια απόσταση του CM ως προς το σημείο επαφής

$x_{CM} = -R\theta\cos\theta + a\sin\theta \approx -(R-a)\theta$ Για $a<R$ το CM αριστερά σημείου επαφής

Η βαρύτητα δίνει μια ροπή επαναφοράς ως προς το σημείο επαφής

Στοιβαγμένα τούβλα

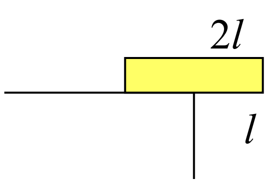
Πόσο ψηλά μπορεί να φθάσει μια στοίβα από N τούβλα τα οποία βρίσκονται στην άκρη ενός τραπεζιού? (καθένα έχει μάζα m και μήκος *2l*)

Λύση

Το κύριο της άσκησης είναι ότι χρειαζόμαστε το CM των **n** επάνω τούβλων να τοποθετηθούν σωστά (στην περίπτωση της μέγιστης απόστασης από την άκρη του τραπεζιού) ακριβώς πάνω από την άκρη του **(n+1)** τούβλου (έτσι ώστε η βαρύτητα να μην παράγει ροπή). και το CM όλων να βρίσκεται πέρα από την άκρη του τραπεζιού.

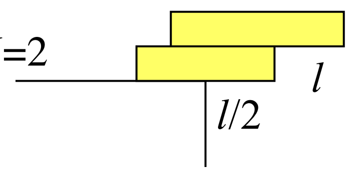
Ας δούμε μερικές περιπτώσεις μικρού αριθμού τούβλων:

N=1



Απόσταση = l

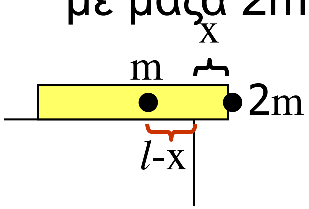
N=2



Απόσταση = $l(1+1/2)$

N=3

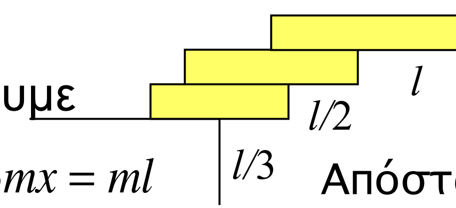
Τα 2 πρώτα τούβλα είναι πρακτικά 1 τούβλο με μάζα 2m βρισκόμενη στο CM. Δηλαδή έχουμε



$$\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow m(l-x) - 2mx = 0 \Rightarrow 3mx = ml$$

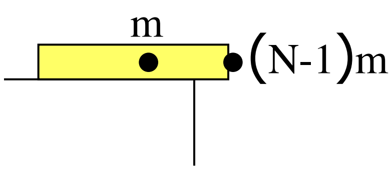
$$\Rightarrow x = \frac{l}{3}$$

Η θέση του CM είναι *l*/3 από άκρη



Απόσταση$= l\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$

Τούβλα (συνέχεια)



Το κέντρο μάζας του N και (N-1)m μαζών είναι *l*/N από το άκρο. Με επαγωγή παίρνουμε:

$$\text{Απόσταση} \ = l\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\right)$$

Ουσιαστικά, η άκρη του τραπεζιού στην περίπτωση των N-τούβλων θα είναι η θέση του τέλους του κατώτερου τούβλου στην περίπτωση (N+1) τούβλων. Κατόπιν απλά αντικαθιστούμε τα πάνω N τούβλα σα σημειακή μάζα Nm, όταν βρίσκουμε το CM των (N+1) τούβλων.

Σημειώστε ότι $l\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\right)$ συμπεριφέρεται όπως *l* lnN καθώς $N \to \infty$

Αφού το lnN αποκλίνει, μπορούμε να έχουμε την στοίβα αρκετά πέρα από την άκρη. Αλλά θα χρειαστεί ένας μεγάλος αριθμός τούβλων.

$$l \ln N = d \Rightarrow N = e^{d/l}$$

Αν $d/l =$ 5 ➡ N = 149

Αν $d/l =$10 ➡ N = 22000

Αν θέλετε να βάλετε ένα ακόμα τούβλο, το βάζετε από κάτω.

Γι' αυτή την τελευταία περίπτωση, το CM όλων των τούβλων είναι πέρα από τη άκρη του τραπεζιού επειδή ένας μεγάλος αριθμός είναι στημένα στα αριστερά της στοίβας