# Επίλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων που εμπλέκουν εναλλασσόμενα ρεύμα

# Μέθοδος των μιγαδικών μεγεθών

Αν θεωρήσουμε ότι τα μεγέθη, $I, V$ και $Z$ είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε μπορούμε να λύσουμε τα AC κυκλώματα ως κυκλώματα συνεχούς ρεύματος.

Έστω εφαρμόζουμε τάση $V_0 \sin(\omega t)$ στα άκρα ενός στοιχείου (*R*, *L*, *C*).
Τότε αυτό θα διαρρέεται από ρεύμα $I_0 \sin(\omega t + \varphi)$

Θεωρούμε την μιγαδική τάση: $\mathbb{V}(t) = V_0 e^{i\omega t}$ που γράφεται ως:

$\mathbb{V}(t) = V_0(cos\omega t + isin\omega t)$ επομένως: $\mathbb{V}(t) = V_0 sin\omega t = \mathrm{Im}(\mathbb{V})$

Το αντίστοιχο ρεύμα γράφεται: $\mathbb{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$

Η μιγαδική αντίσταση στοιχείου *X* ορίζεται ως: $\mathbb{Z} = \dfrac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}} = \dfrac{V_0 e^{i(\omega t)}}{I_0 e^{i(\omega t + \varphi)}} \Rightarrow$

$$\mathbb{Z} = \frac{V_0}{I_0} e^{-i\varphi} = Z_X e^{-i\varphi}$$

όπου $Z_X$ η εμπέδιση του στοιχείου (*X*=*R*, *L* ή *C*)

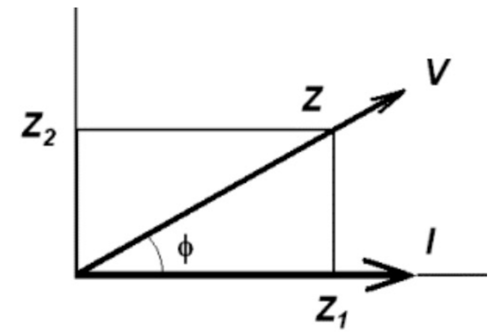
Χρησιμοποιώντας τα μιγαδικά μεγέθη σε πολική μορφή μπορούμε να κάνουμε εύκολα πράξεις κρατώντας στο τέλος το μιγαδικό μέρος μόνο.

# Μέθοδος των μιγαδικών μεγεθών

Με βάση τη διαφορά φάσης μεταξύ ρευμάτων και τάσης μπορούμε να βρούμε τις μιγαδικές αντιστάσεις των στοιχείων *R*, *L* και *C*.

- **Ωμική αντίσταση**: $\varphi = 0$ $$\mathbb{Z}_R = \frac{V_0}{I_0}e^{i0} = \frac{V_0}{I_0} = R \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}_R = R}$$
- **Χωρητική αντίσταση**: $\varphi = \pi/2$ $$\mathbb{Z}_C = \frac{V_0}{I_0}e^{-\frac{i\pi}{2}} = -\frac{i}{\omega C} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}}$$
- **Επαγωγική αντίσταση**: $\varphi = -\pi/2$ $$\mathbb{Z}_L = \frac{V_0}{I_0}e^{+\frac{i\pi}{2}} = i\omega L \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}_L = i\omega L}$$

Για την επίλυση ενός κυκλώματος AC χρησιμοποιούμε μιγαδικές αντιστάσεις για όλα τα στοιχεία του κυκλώματος και αναλύουμε το κύκλωμα ως κύκλωμα συνεχούς:




- Για στοιχεία συνδεδεμένα σε σειρά: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_3 + \cdots$
- Για στοιχεία συνδεδεμένα παράλληλα: $\frac{1}{\mathbb{Z}} = \frac{1}{\mathbb{Z}_1} + \frac{1}{\mathbb{Z}_2} + \frac{1}{\mathbb{Z}_3} + \cdots$
- Η συνολική σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι: $\mathbb{Z} = Z_0 e^{i\varphi} = Z_1 + iZ_2$
- Η ενεργός τιμή της τάσης συνδέεται με την ενεργό τιμή του ρεύματος: $V_{rms} = Z_0 I_{rms}$
- Η φάση της τάσης προηγείται της φάσης του ρεύματος κατά: $\varphi = \tan^{-1} Z_2/Z_1$
- Η συχνότητα συντονισμού είναι εκείνη που $Z_2 = 0$, δηλαδή $Im(\mathbb{Z}) = 0$

# Μέθοδος των μιγαδικών μεγεθών – Παράδειγμα

Εύρεση της συχνότητας συντονισμού ενός κυκλώματος *RLC* σε σειρά.

Η συνολική μιγαδική αντίσταση είναι: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_R + \mathbb{Z}_L + \mathbb{Z}_C = R + i(L\omega - 1/C\omega)$

Η εμπέδιση του κυκλώματος είναι: $Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

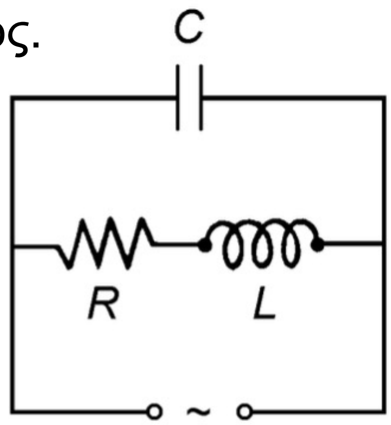
Η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος είναι: $tan\varphi = \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}$

Για σταθερή ενεργό τάση, το ενεργό ρεύμα $I = V_{rms}/Z_0$ γίνεται μέγιστο όταν η $Z_0$ γίνεται ελάχιστη, το οποίο συμβαίνει στην συχνότητα συντονισμού: $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

Στη συχνότητα συντονισμού, $Im(\mathbb{Z}) = 0$ και η συνολική σύνθετη αντίσταση είναι πραγματικός αριθμός.

# Μέθοδος των μιγαδικών μεγεθών – Παράδειγμα

Εύρεση της συχνότητας συντονισμού του κυκλώματος του σχήματος.




Η αντίσταση του κυκλώματος θα είναι:

$$\frac{1}{\mathbb{Z}} = \frac{1}{\mathbb{Z}_{RL}} + \frac{1}{\mathbb{Z}_C} \Rightarrow \frac{1}{\mathbb{Z}} = \frac{1}{\mathbb{Z}_L + \mathbb{Z}_R} + \frac{1}{\mathbb{Z}_C} \Rightarrow \frac{1}{\mathbb{Z}} = \frac{1}{iL\omega + R} + \frac{1}{-i/\omega C} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\mathbb{Z}} = \frac{i\omega C(iL\omega + R) + 1}{R + i\omega L} \Rightarrow \frac{1}{\mathbb{Z}} = \frac{-LC\omega^2 + iRC\omega + 1}{R + i\omega L} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\mathbb{Z}} = \frac{(-LC\omega^2 + iRC\omega)(R - i\omega L) + R - i\omega L}{R^2 + L^2\omega^2} = \frac{iL^2C\omega^3 + iR^2C\omega + R - i\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\mathbb{Z}} = \frac{iL^2C\omega^3 + iR^2C\omega + R - i\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \Rightarrow \frac{1}{\mathbb{Z}} = \frac{R + i\omega(R^2C + \omega^2L^2C - L)}{R^2 + (\omega L)^2}$$

Το $1/\mathbb{Z}$ και επομένως το $\mathbb{Z}$ γίνεται πραγματικός αριθμός όταν: $(R^2C + \omega^2L^2C - L) = 0$

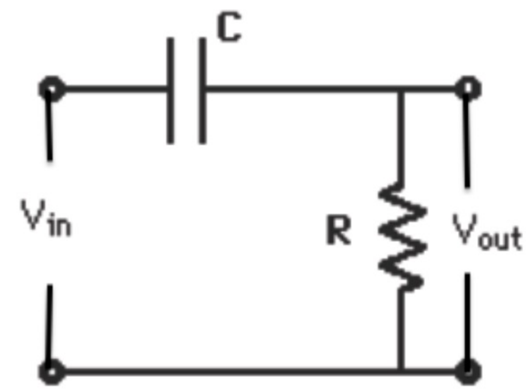
Επομένως: $\omega_0 = \sqrt{\frac{L - R^2C}{L^2C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{R^2C}{L}}$

Επιπλέον, αν στο κύκλωμα αυτό $L = R^2C$ τότε $\omega_0 = 0$ και στο κύκλωμα δεν υπάρχει συχνότητα συντονισμού

# Φίλτρα Συχνοτήτων
# σε εναλλασσόμενα κυκλώματα

# Φίλτρα Συχνοτήτων – Φίλτρο χαμηλών συχνοτήτων

Η μέθοδος των μιγαδικών μεγεθών επιτρέπει την ανάλυση κυκλωμάτων φίλτρων συχνοτήτων. Στα κυκλώματα αυτά, υπάρχει μια έξοδος που επιτρέπει τη διέλευση εναλλασσόμενων τάσεων μιας περιοχής συχνοτήτων ενώ αποκόπτει τάσεις σε άλλες περιοχές συχνοτήτων.




Θεωρούμε το *RC* κύκλωμα του διπλανού σχήματος

Η συνολική μιγαδική αντίσταση του κλειστού βρόχου είναι:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_R + \mathbb{Z}_C \Rightarrow \mathbb{Z} = R - \frac{i}{\omega C}$$

Η συνολική εμπέδιση είναι: $Z = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$

Το πλάτος της τάσης εισόδου είναι: $V_{in,0} = I_0 Z = I_0 \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$

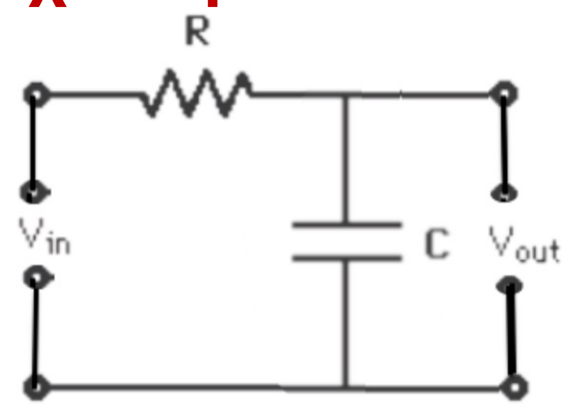
Το πλάτος της τάσης εξόδου είναι: $V_{out,0} = I_0 R$

$$\Rightarrow \frac{V_{out,0}}{V_{in,0}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

Από την τελευταία εξίσωση παρατηρούμε ότι: $\begin{cases} \dfrac{V_{out,0}}{V_{in,0}} \rightarrow 0 \ \text{για } \omega \rightarrow 0 \\ \dfrac{V_{out,0}}{V_{in,0}} \rightarrow 1 \ \text{για } \omega \rightarrow \infty \end{cases}$

Άρα το κύκλωμα επιτρέπει τη διέλευση υψηλών και αποκόπτει τις χαμηλές συχνότητες

# Φίλτρα Συχνοτήτων – Φίλτρο υψηλών συχνοτήτων




Θεωρούμε το *RC* κύκλωμα του διπλανού σχήματος

Η συνολική μιγαδική αντίσταση του κλειστού βρόχου είναι:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_R + \mathbb{Z}_C \Rightarrow \mathbb{Z} = R - \frac{i}{\omega C}$$

Η συνολική εμπέδιση είναι: $Z = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$

Το πλάτος της τάσης εισόδου είναι: $V_{in,0} = I_0 Z = I_0 \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$

Το πλάτος της τάσης εξόδου είναι: $V_{out,0} = I_0 Z_C = I_0 \frac{1}{\omega C}$

$$\frac{V_{out,0}}{V_{in,0}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

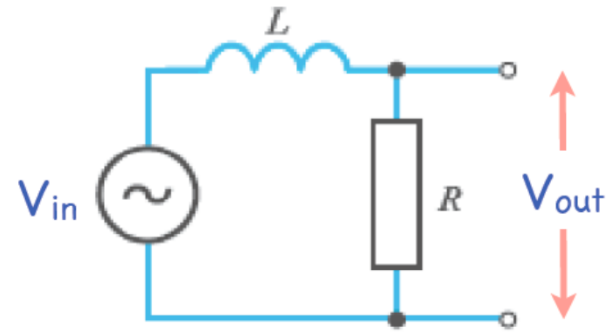
Από την τελευταία εξίσωση παρατηρούμε ότι:

$$\begin{cases} \frac{V_{out,0}}{V_{in,0}} \to 0 \text{ για } \omega \to \infty \\ \frac{V_{out,0}}{V_{in,0}} \to 1 \text{ για } \omega \to 0 \end{cases}$$

Άρα το κύκλωμα επιτρέπει τη διέλευση χαμηλών και αποκόπτει τις υψηλές συχνότητες

# Φίλτρα Συχνοτήτων – Φίλτρο υψηλών συχνοτήτων

Θεωρούμε το *RL* κύκλωμα του διπλανού σχήματος




Η συνολική μιγαδική αντίσταση του κλειστού βρόχου είναι:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_R + \mathbb{Z}_L \Rightarrow \mathbb{Z} = R + iL\omega$$

Η συνολική εμπέδιση είναι: $Z = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$

Το πλάτος της τάσης εισόδου είναι: $V_{in,0} = I_0 Z = I_0\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$

Το πλάτος της τάσης εξόδου είναι: $V_{out,0} = I_0 Z_R = I_0 R$

$$\frac{V_{out,0}}{V_{in,0}} = \frac{R}{\sqrt{(L\omega)^2 + R^2}}$$

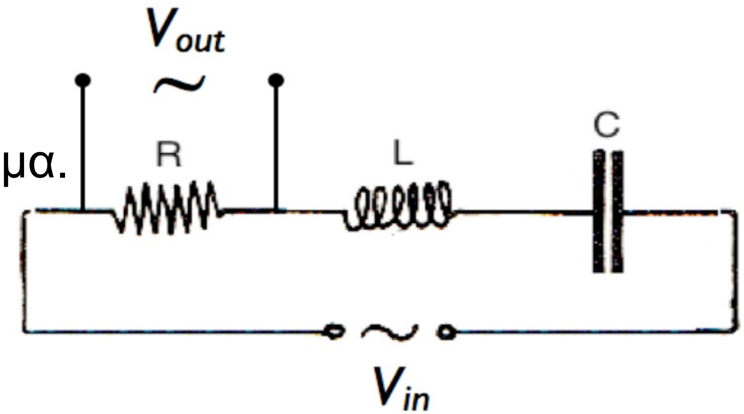
Από την τελευταία εξίσωση παρατηρούμε ότι:

$$\begin{cases} \dfrac{V_{out,0}}{V_{in,0}} \to 0 \ \text{ για } \omega \to \infty \\[2ex] \dfrac{V_{out,0}}{V_{in,0}} \to 1 \ \text{ για } \omega \to 0 \end{cases}$$

Άρα το κύκλωμα επιτρέπει τη διέλευση χαμηλών και αποκόπτει τις υψηλές συχνότητες

# Φίλτρα Συχνοτήτων – Εφαρμογή

Θεωρούμε το *RLC* κύκλωμα του διπλανού σχήματος. Παίρνουμε την έξοδο από την αντίσταση. Θα βρούμε το εύρος συχνοτήτων που επιτρέπονται από το κύκλωμα.




Η συνολική μιγαδική αντίσταση του κλειστού βρόχου είναι:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_R + \mathbb{Z}_L + \mathbb{Z}_C \Rightarrow \quad \mathbb{Z} = R + i(L\omega - 1/C\omega)$$

Η συνολική εμπέδιση είναι: $Z = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} = \sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}$

Το πλάτος της τάσης εισόδου είναι: $V_{in,0} = I_0 Z = I_0\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2} \Rightarrow$

$$V_{in,0} = I_0 R\sqrt{1 + \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\right)^2} \Rightarrow V_{in,0} = I_0 R\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}{\omega RC}\right)^2} \Rightarrow V_{in,0} = I_0 R\sqrt{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{x\omega_0 RC}\right)^2}$$

όπου: $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ και: $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$

Το πλάτος της τάσης εξόδου είναι: $V_{out,0} = I_0 Z_R = I_0 R$

# Φίλτρα Συχνοτήτων – Εφαρμογή

Βρήκαμε ότι τα πλάτη εισόδου και εξόδου είναι:

$$\left.\begin{aligned} V_{in,0} &= I_0 R\sqrt{1+\left(\frac{x^2-1}{x\omega_0 RC}\right)^2} \\ V_{out,0} &= I_0 Z_R = I_0 R \end{aligned}\right\} \quad \frac{V_{out,0}}{V_{in,0}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x^2-1}{x\omega_0 RC}\right)^2}}$$

Παρατηρούμε ότι:

- Στη συχνότητα συντονισμού, $\omega = \omega_0$, το $x \to 1$ και $\dfrac{V_{out,0}}{V_{in,0}} \to 1$
- Εκτός συντονισμού, $\omega \to 0$ ή $\omega \to \infty$, το $x \to 0$ ή $x \to \infty$ και $\dfrac{V_{out,0}}{V_{in,0}} \to 0$

Επομένως το κύκλωμα επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων σε μια περιοχή συχνοτήτων κοντά στη συχνότητα συντονισμού και αποκόπτει τη διέλευση τόσο των χαμηλών όσο και των υψηλών συχνοτήτων.