Παραδείγματα

1. Κίνηση ενός και μόνο σωματιδίου, χρησιμοποιώντας Καρτεσιανές συντεταγμένες και συντηρητικές δυνάμεις.

Οι εξισώσεις Lagrange θα πρέπει να επιστρέφουν τα ίδια αποτελέσματα με αυτά που δίνει ο 2ος νόμος του Newton: $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Έχουμε: $$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\hat{i} + x\underbrace{\cancel{\frac{d\hat{i}}{dt}}}_{0} + \dot{y}\hat{j} + y\underbrace{\cancel{\frac{d\hat{j}}{dt}}}_{0} + \dot{z}\hat{k} + z\underbrace{\cancel{\frac{d\hat{k}}{dt}}}_{0}$$

Και επομένως: $$\vec{\mathrm{v}} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \Rightarrow \mathrm{v}^2 = \left(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}\right)\cdot\left(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}\right)$$
$$\Rightarrow \mathrm{v}^2 = \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Άρα έχουμε: $$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Η δυναμική ενέργεια θα είναι: $$V = V(x,y,z)$$

Η Lagrangian θα έχει τη μορφή: $$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(x,y,z)$$

Κίνηση σωματιδίου – καρτεσιανές συντεταγμένες

Έχουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \;\; ; \;\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial (T-V)}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial x}}_{0} - \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x$$

Επομένως η εξίσωση Lagrange για $q = x$ γίνεται:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} - F_x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = F_x$$

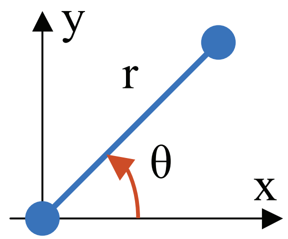
Κατά τον ίδιο τρόπο έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow m\ddot{y} - F_y = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = F_y$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow m\ddot{z} - F_z = 0 \Rightarrow m\ddot{z} = F_z$$

2. Κίνηση σωματιδίου – πολικές συντεταγμένες

Ξεκινώντας από Καρτεσιανές συντεταγμένες:



$$x = r\cos\theta \quad ; \quad y = r\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

Προσέξτε ότι $\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{r}} = \cos\theta = \dfrac{\partial x}{\partial r}$ και $\dfrac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\theta}} = -r\sin\theta = \dfrac{\partial x}{\partial \theta}$

που εκφράζουν τη γενική σχέση $\dfrac{\partial \vec{\mathrm{v}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ για τη συγκεκριμένη περίπτωση

Μπορούμε επομένως να γράψουμε τη κινητική ενέργεια:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2\cos^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta - 2\dot{r}r\dot{\theta}\cancel{\sin\theta\cos}\theta\right) +$$

$$+\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2\sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2\dot{r}r\dot{\theta}\cancel{\sin\theta}\cos\theta\right) \Rightarrow T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right)$$

Η δυναμική ενέργεια είναι: $V(x,y) = V(r,\theta)$

2. Κίνηση σωματιδίου – πολικές συντεταγμένες

Επομένως η Lagrangian θα είναι: $L = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] - V(r,\theta)$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}$$

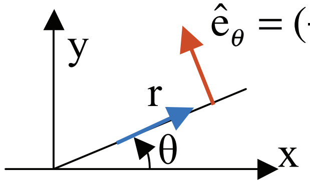
$(\cos\theta, \sin\theta)$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = -F_x\cos\theta - F_y\sin\theta \Rightarrow -\frac{\partial V}{\partial r} = F_x\cos\theta + F_y\sin\theta = \vec{F}\cdot\hat{e}_r = F_r$$

Και επομένως παίρνουμε την 1η εξίσωση κίνησης:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}$$



$\hat{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} - \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = F_x(-r\sin\theta) + F_y r\cos\theta = rF_\theta$$

Οπότε η 2η εξίσωση κίνησης είναι: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = rF_\theta$

2. Κίνηση σωματιδίου – πολικές συντεταγμένες

Καταλήξαμε στις δύο εξισώσεις κίνησης από τις εξισώσεις Lagrange

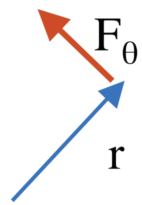
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial r}=0 \\[2em] \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial \theta}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} m\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2=F_r & (1) \\[2em] mr^2\ddot{\theta}+2mr\dot{r}\dot{\theta}=rF_\theta & (2) \end{array}$$

ΦΥΣΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ?

- Ο 2ος όρος της εξίσωσης (1) είναι η κεντρομόλος δύναμη
- Το αριστερό σκέλος της εξίσωσης (2) είναι η παράγωγος

  της στροφορμής, $l = mr\text{v} = mr\left(r\dot{\theta}\right) = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \dfrac{dl}{dt} = \dfrac{d\left(mr^2\dot{\theta}\right)}{dt} = mr^2\ddot{\theta}+2mr\dot{r}\dot{\theta}$

- Το δεξί μέλος της εξίσωσης (2) είναι απλά η ροπή της δύναμης



Δηλαδή η δεύτερη εξίσωση μας έδωσε και πάλι την εξίσωση της ροπής