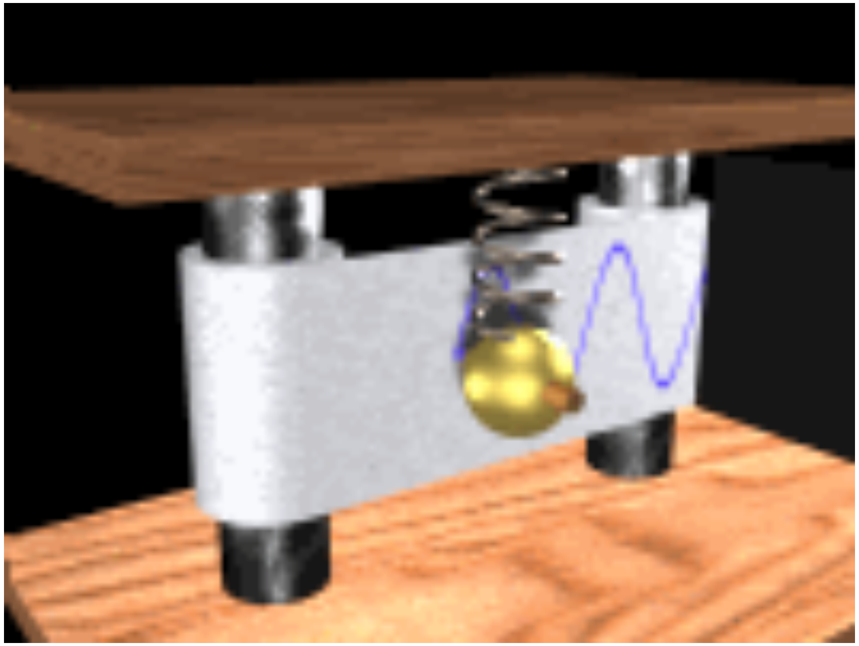
Αρμονικοί ταλαντωτές

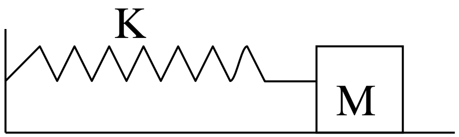


Αρμονικοί ταλαντωτές

- Μερικά από τα θέματα που θα καλύψουμε:
- Μάζες σε ελατήρια, εκκρεμή
- Διαφορικές εξισώσεις: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$
  - Με λύση της μορφής: $x = x_{\max}\cos(\omega t + \varphi)$ όπου $\omega^2 = \frac{K}{m}$
- Φθίνουσες ταλαντώσεις
- Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

Ελατήρια

- Θεωρήστε το γνωστό σας ελατήριο



Το σύστημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας

Η εξίσωση της κίνησης γράφεται σύμφωνα με το 2ο νόμο του Newton

$F = ma = -Kx$ σε συνδυασμό με το νόμο του Hooke

Ξέρουμε όμως ότι η επιτάχυνση $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

Η εξίσωση της κίνησης γράφεται λοιπόν σαν:

$$F = m\ddot{x} = -Kx \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + Kx = 0}$$

Δευτέρας τάξης (δεύτερη παράγωγος), ομογενής (=0), γραμμική (οι παράγωγοι εμφανίζονται σε πρώτη δύναμη) διαφορική εξίσωση

Oooops τι κάνουμε ?

Λύση της Δ.Ε. του απλού αρμονικού ταλαντωτή

Ένας τρόπος για να λύσουμε την εξίσωση είναι με τη μέθοδο διαχωρισμού των μεταβλητών.

Ορίζω: $\boxed{\omega^2 = \frac{K}{m}}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = -\omega^2 x \Rightarrow \upsilon\frac{d\upsilon}{dx} = -\omega^2 x \Rightarrow \upsilon d\upsilon = -\omega^2 x dx$$

$$\Rightarrow \int \upsilon\, d\upsilon = \int -\omega^2 x\, dx \Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 \Rightarrow \upsilon^2 = -\omega^2 x^2 \Rightarrow \upsilon = \pm\sqrt{-\omega^2}\, x$$

Παύση... Είμαστε στη μέση !!

Αυτή τη στιγμή έχουμε τη ταχύτητα συναρτήσει της θέσης.

Θέλουμε όμως την θέση συναρτήσει του χρόνου ! Δηλαδή x(t) = …

$$\upsilon = \sqrt{-\omega^2}\, x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{-\omega^2}\, x \Rightarrow \frac{dx}{x} = \sqrt{-\omega^2}\, dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \sqrt{-\omega^2}\, dt \Rightarrow$$

$$\ln x + C = \sqrt{-\omega^2}\, t \Rightarrow x = Ae^{\pm\sqrt{-\omega^2}\, t}$$

Λύση της διαφορικής εξίσωσης

Λύση της Δ.Ε. απλού αρμονικού ταλαντωτή

- Yeaks !!! Η μέθοδος είναι μακρόσυρτη και καθόλου ευχάριστη

  Το αποτέλεσμα είναι όμως ενδιαφέρον: $x(t) = Ae^{\pm\sqrt{-\omega^2}t}$

  Τη λύση αυτή μπορούσαμε να την δοκιμάσουμε από την αρχή!!

  Δηλαδή για να λύσουμε την Δ.Ε. δοκιμάζουμε διάφορες λύσεις.

  Αν την επαληθεύουν τότε το τι δοκιμάσαμε είναι όντως λύση !!!

- Η λύση που βρήκαμε είναι η μοναδική? Υπάρχουν άλλες λύσεις?

  Από θεωρία Δ.Ε.: Για κάθε Δ.Ε. εξίσωση n-τάξης υπάρχουν n-ανεξάρτητες μεταξύ τους λύσεις.

  (γραμμικές μόνο): Αν n-λύσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους τότε και ο γραμμικός τους συνδυασμός είναι λύση

  Δηλαδή $x(t) = Ae^{+\sqrt{-\omega^2}t} + Be^{-\sqrt{-\omega^2}t}$ είναι λύση και μάλιστα καλείται γενική λύση ή πλήρης λύση της εξίσωσης

➢ Ένα ακόμα προβληματικό σημείο:

  Τι συμβαίνει με το ω? Είναι θετικό ? αρνητικό?

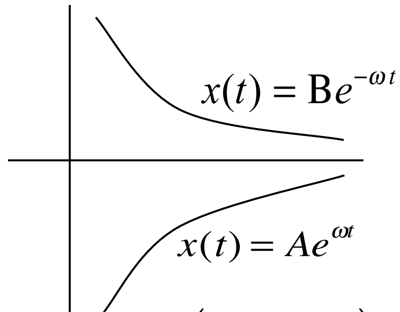
Λύση Δ.Ε. απλού αρμονικού ταλαντωτή

- Αν K < 0 ή m < 0 (δεν έχουμε φυσικό σύστημα) $-\omega^2 = -K/m > 0$
  - Οι λύσεις είναι της μορφής $x(t) = Ae^{\omega t}$ και $x(t) = Be^{-\omega t}$

    Ο γραμμικός τους συνδυασμός είναι επίσης λύση $x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

Η εξίσωση αυτή δεν αντιστοιχεί σε αρμονική κίνηση.

Εν αντιθέσει αντιστοιχεί σε εκθετικά αυξανόμενη ή φθίνουσα κίνηση



$$\cosh x = \tfrac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

$$\sinh x = \tfrac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\frac{d\cosh x}{dx} = \sinh x$$

$$\frac{d\sinh x}{dx} = \cosh x$$

Χρησιμοποιώντας την: $e^{\omega t} = \cosh\omega\, t + \sinh\omega\, t$

Μπορούμε να γράψουμε τις λύσεις με τις ακόλουθες ισοδύναμες μορφές:

$$x(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

$$x(t) = C\cosh\omega t + D\sinh\omega t$$

$$x(t) = \mathrm{E}\cosh\left(\omega t + \varphi_1\right)$$

$$x(t) = F\sinh\left(\omega t + \varphi_2\right)$$

Λύση Δ.Ε. Απλού αρμονικού ταλαντωτή

- Αν $K > 0$ και $m > 0$ (φυσικό σύστημα) τότε $\omega > 0 \Rightarrow -\omega^2 < 0$

  Οι λύσεις είναι της μορφής $x(t) = Ae^{i\omega t}$ και $x(t) = Be^{-i\omega t}$

  με πλήρη λύση: $x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$

  Χρησιμοποιώντας $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ έχουμε

$$x(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$$

$$x(t) = E\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x(t) = F\sin(\omega t + \varphi_2)$$

Όλες οι μορφές είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης του αρμονικού ταλαντωτή

Οι σταθερές A,B, ή C και D, E,F και φ_1,φ_2 καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Δηλαδή την κατάσταση του συστήματος μια χρονική στιγμή $t=t_0$ συνήθως $t_0 = 0$.

Αν $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ τότε

$x(0) = A$ αρχική θέση

$\frac{dx(0)}{dt} = \omega B$ αρχική ταχύτητα

Απλός αρμονικός ταλαντωτής

Η γενική μορφή της λύσης του αρμονικού ταλαντωτή είναι

$$x(t) = A\cos\omega\, t + B\sin\omega\, t$$

- Εν γένει αν x(t) = x(t+T) η κίνηση είναι περιοδική με περίοδο T

$$\cos\omega\, t = \cos\left(\omega\left(t+T\right)\right) = \cos(\omega\, t + 2\pi)$$

αν $\boxed{\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}}$ ⇐ Περίοδος ταλάντωσης ή συχνότητα

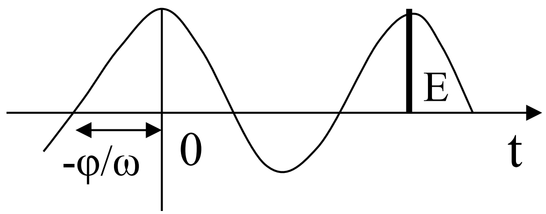
Οι μορφές που γράψαμε πριν βγαίνουν από την γενική με την βοήθεια τριγωνομετρικών σχέσεων και οι σταθερές συνδέονται μεταξύ τους

Χρησιμοποιώντας $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

$$x(t) = E\cos\left(\omega\, t + \varphi_1\right) = E\cos\left(\omega t\right)\cos\varphi_1 - E\sin\left(\omega t\right)\sin\varphi_1$$

Επομένως για $A = E\cos\varphi_1$ και $B = -E\sin\varphi_1$ γίνεται:

$$x(t) = E\cos\left(\omega t + \varphi_1\right) = A\cos\left(\omega t\right) + B\sin\left(\omega t\right)$$



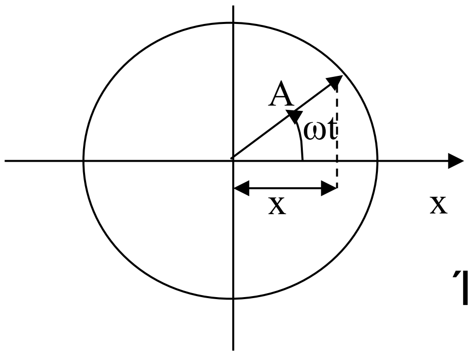
Απλός αρμονικός ταλαντωτής και κυκλική κίνηση

- Επομένως η εξίσωση $x(t) = A\cos(\omega\, t + \varphi)$ παριστάνει μια περιοδική, συνημιτονοειδή κίνηση με απομάκρυνση ή πλάτος A και η γωνία φ προσδιορίζει την φάση της κίνησης.

  Το πλάτος και η φάση είναι σταθερές της κίνησης που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του συστήματος.

  Η φάση εν γένει χρησιμοποιείται για την σύγκριση της κίνησης δύο συστημάτων.

- Χαρακτηριστικά, η κίνηση που περιγράφεται από την εξίσωση είναι όμοια με την κίνηση που εκτελεί η προβολή μιας κυκλικής κίνησης στον x-άξονα

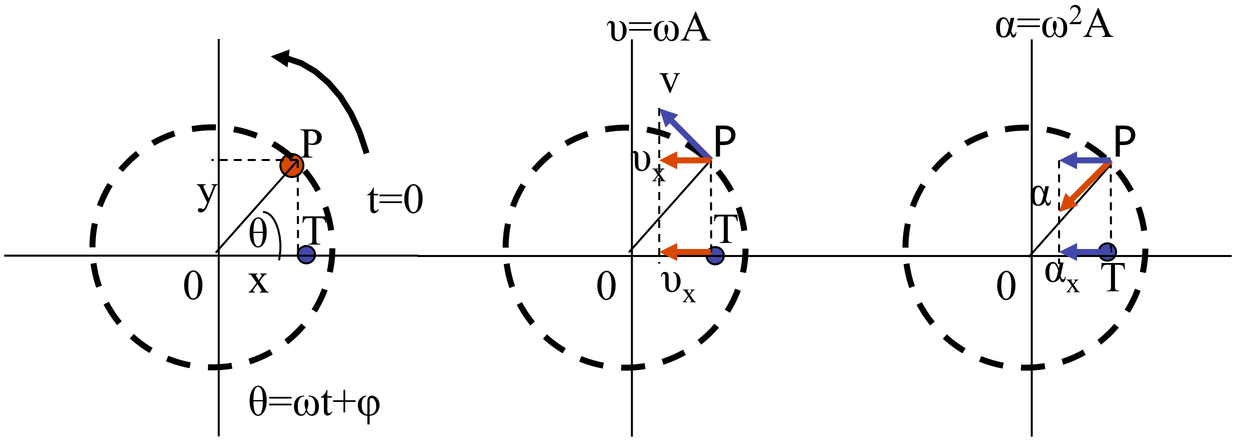


Ομοιόμορφη κυκλική κίνηση χαρακτηρίζεται από

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r} \Rightarrow a_x = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x \;\Rightarrow\; \ddot{x} = -\omega^2 x$$

Ίδια διαφορική εξίσωση με αυτή μάζας εξαρτημένης σε ελατήριο

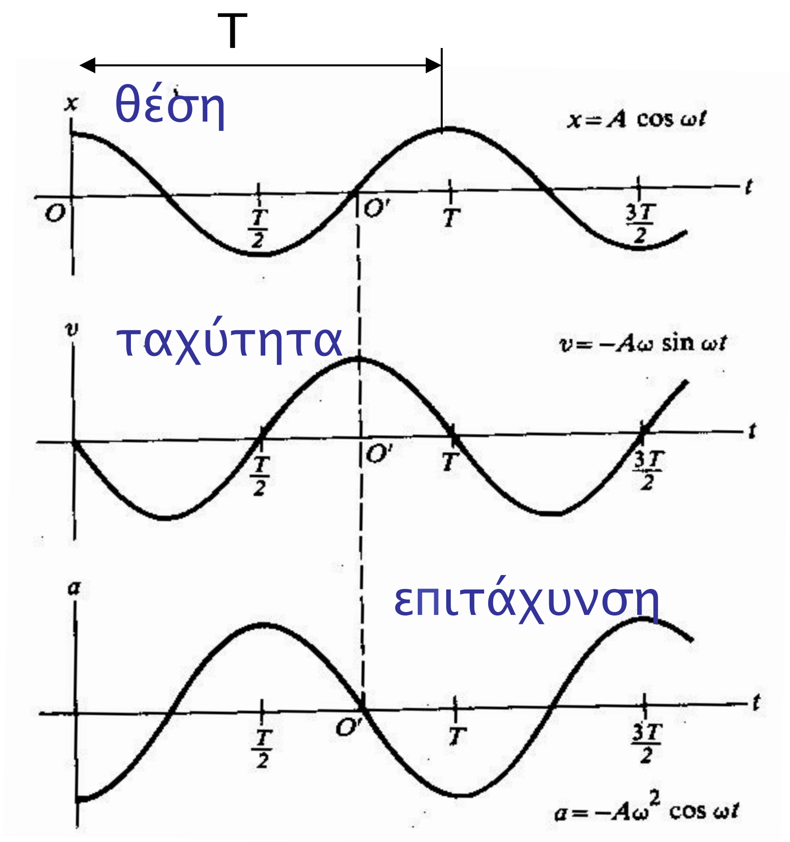
Απλός αρμονικός ταλαντωτής και κυκλική κίνηση



- Για t=0, θ=φ η γωνία που διαγράφει η OP με τον x-άξονα
- Συναρτήσει του t, το P περιστρέφεται πάνω στο κύκλο ακτίνας R=A ενώ το T κινείται παλινδρομικά στο x-άξονα ανάμεσα σε +A και –A

  Τα σημεία P και T έχουν την ίδια συντεταγμένη x ➔ $x=A\cos(\omega t+\varphi)$
- Ο χρόνος για μια πλήρη περιστροφή είναι ίσος με την περίοδο κίνησης ➔ γωνιακή ταχύτητα περιστροφής = γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης
- Η γραμμική ταχύτητα του P, $\upsilon=\omega R=\omega A$ ενώ του T, $\upsilon_x=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$ από dx/dt
- Η γραμμική επιτάχυνση του P έχει φορά προς το κέντρο, $\alpha=\omega^2 A$
- Η επιτάχυνση του T: $\alpha_x=-\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi)$=x-συνιστώσα της α του P

Απλή Αρμονική ταλάντωση – Εξισώσεις κίνησης



Από την εξίσωση-λύσης της ΔΕ του αρμονικού ταλαντωτή μπορούμε να εξαγάγουμε τις υπόλοιπες εξισώσεις κίνησης:

$$x(t) = A\cos(\omega\, t + \varphi)$$

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega\, t + \varphi)$$

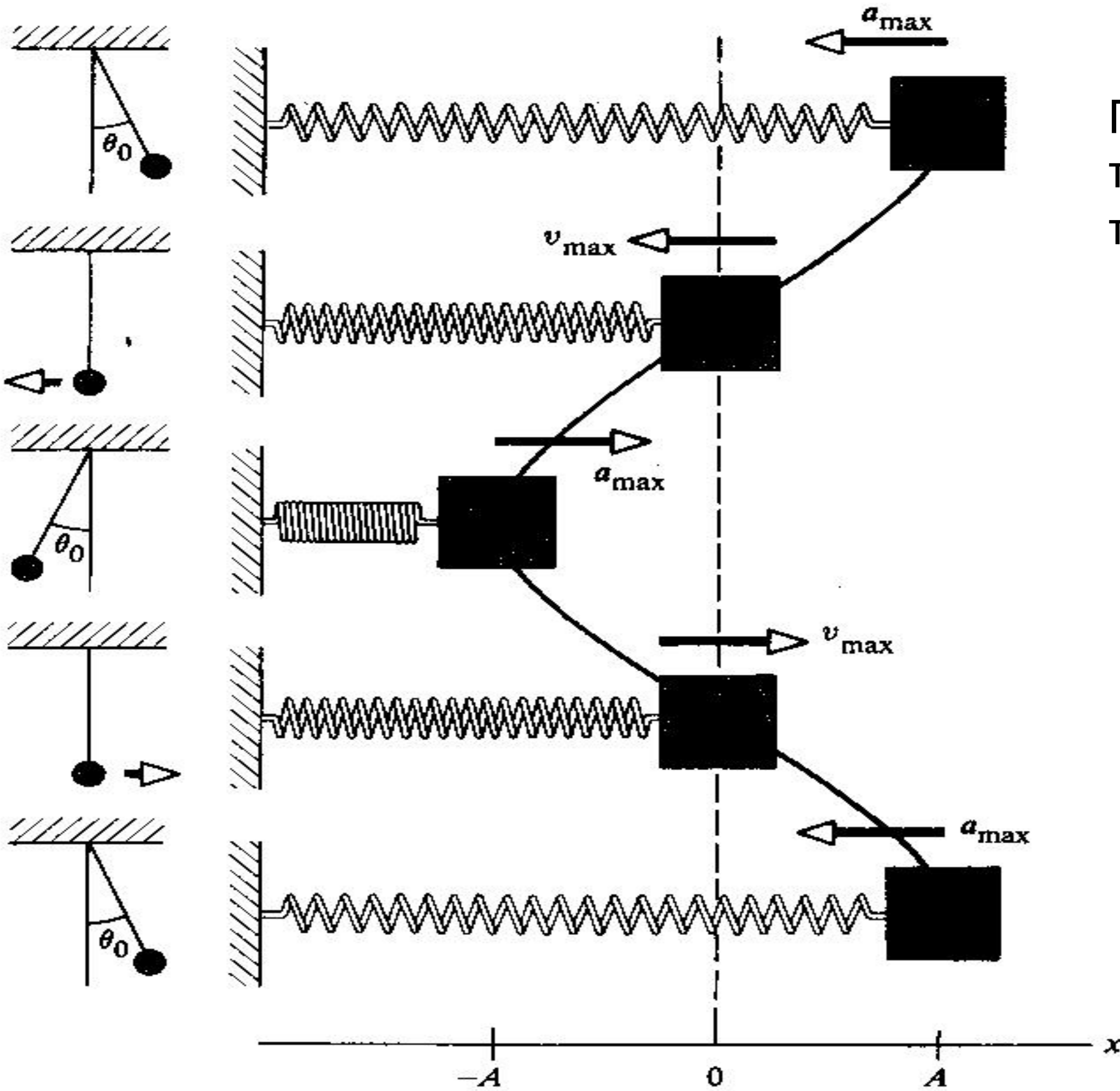
$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\upsilon}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega\, t + \varphi) \Rightarrow \; a(t) = -\omega^2 x$$

Οι ακραίες τιμές είναι επομένως:

$$\upsilon(t)_{\max} = -A\omega \qquad\qquad a(t)_{\max} = -A\omega^2$$

- Η φάση της ταχύτητας διαφέρει από αυτή της θέσης κατά 90° ή π/2
- Η φάση της ταχύτητας διαφέρει από αυτή της επιτάχυνσης κατά 90° ή π/2
- Η φάση της επιτάχυνσης διαφέρει από αυτή της θέσης κατά 180° ή π

Μάζα σε ελατήριο



$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

Για t=0, x(0)=0
το σύστημα περνά από
τη θέση ισορροπίας

Απλή αρμονική ταλάντωση

- Τι έχουμε δει μέχρι τώρα

$$F = m\ddot{x} = -Kx \Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0$$ Εξίσωση κίνησης αρμονικού ταλαντωτή

Διάφορες μορφές λύσεις της εξίσωσης:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

$$x(t) = B\sin(\omega\, t + \varphi)$$

$$x(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$$

$$x(t) = Ee^{i\omega t} + Fe^{-i\omega t}$$

A: πλάτος ταλάντωσης
φ: φάση

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} = 2\pi\nu$$ γωνιακή συχνότητα

Άλλες εξισώσεις κίνησης:

$$\upsilon_x = -(A\omega)\sin(\omega\, t + \varphi)$$

$$a(t) = \ddot{x} = -\left(A\omega^2\right)\cos(\omega t + \varphi)$$

Ταχύτητα: $|\upsilon_{\max}| = A\omega$

Επιτάχυνση: $|a_{\max}| = A\omega^2$

- Κίνηση παρόμοια με την κίνηση της προβολής στον x-άξονα ενός σώματος που εκτελεί κυκλική κίνηση

- Η ταχύτητα μικρότερη κοντά στο A ➔ περνά περισσότερη ώρα εκεί

Ενέργεια απλού αρμονικού ταλαντωτή

✓ Στις διαλέξεις για έργο και ενέργεια είχαμε συζητήσει την δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται σε ένα ελατήριο κατά την συμπίεση ή επιμήκυνσή του καθώς και την σχέση μεταξύ δυναμικής και κινητικής ενέργειας για μια μάζα m εξαρτημένη από το ελατήριο.

❑ Ξέρουμε ότι το ελατήριο με μια μάζα εξαρτώμενη από το ένα άκρο του αποτελούν σύστημα απλού αρμονικού ταλαντωτή: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

❑ Η μηχανική ενέργεια είναι: $E = K + U$ και διατηρείται

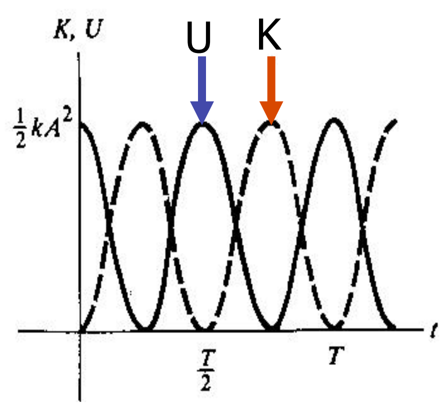
$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad \text{αφού} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

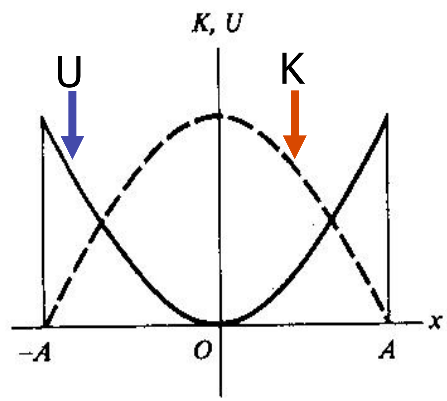
$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$U_{\max} = K_{\max}$ E ανάλογη πλάτους

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow$$

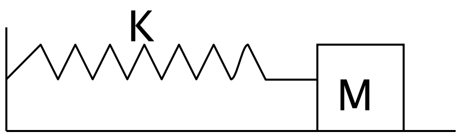
$$\upsilon = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)} = \pm\omega\sqrt{\left(A^2 - x^2\right)}$$





Παράδειγμα

- Μάζα 12Kg είναι εξαρτημένη σε ελατήριο με K=1.3x10^4. Το σύστημα ξεκινά με επιμήκυνση +55cm. Ποια η υ_{max}.



$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\upsilon(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\upsilon(t=0) = -A\omega\sin(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \ \eta \ \varphi = \pi$$

Διαλέγουμε την περίπτωση με φ=0 μια και η αρχική επιμήκυνση >0

$$x(t=0) = A\cos(\varphi) = 0.55$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 33rad/s$$

$$x(t) = 0.55\cos(33t)$$

$$\upsilon_{\max} = A\omega = 18m/s$$

$$\upsilon(t) = -\upsilon_{\max}\sin(33t)$$

Συνθήκες για να έχουμε απλή αρμονική ταλάντωση

- Μια κίνηση είναι απλή αρμονική ταλάντωση μόνο όταν μια από τις 2 παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες ισχύουν:

(α) Αν υπάρχει μια συνισταμένη δύναμη σε ένα σύστημα η οποία είναι ανάλογη της θέσης του συστήματος όπως μετριέται από τη θέση ισορροπίας του με μια σταθερά αναλογίας του τύπου του ελατηρίου

$$\boxed{\vec{F}_{tot} = -kx\hat{i}}$$

ανεξάρτητα από το αν η δύναμη είναι από ελατήριο ή όχι και αν η δύναμη αυτή, ή η δύναμη μαζί με μια σταθερή δύναμη που ασκείται κατά μήκος του ίδιου άξονα, είναι οι μόνες δυνάμεις του συστήματος ενεργούσες στην x-διεύθυνση

(β) Αν εφαρμόζοντας το νόμο του Newton καταλήξουμε σε Δ.Ε. πανομοιότυπη της Δ.Ε. του απλού αρμονικού ταλαντωτή.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0\ m/s^2$$

Απλή αρμονική ταλάντωση - Αρχικές συνθήκες

- Αν δίνονται τα K και m, και οι αρχικές συνθήκες $x(0)=x_0$ και $\upsilon(0) = \upsilon_0$, να βρεθεί η εξίσωση τροχιάς x(t).

Λύση:

- Κάθε μορφή της λύσης της εξίσωσης κίνησης περιέχει ΔΥΟ άγνωστες ποσότητες.

  Αυτές δεν μπορούν να υπολογισθούν από την F=ma.

- Προσδιορίζονται από τις 2 αρχικές τιμές της θέσης (x) και ταχύτητας (υ)

- Αν γράψουμε το x σαν $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \quad \mu\varepsilon \quad \omega = \sqrt{\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}}$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &\equiv x(t=0) = A\cos\ \varphi \\ \upsilon_0 &\equiv \upsilon(t=0) = A\omega\sin\ \varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan\varphi = -\frac{\upsilon_0}{\omega x_0} \qquad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega^2}}$$

Διατήρηση ενέργειας

$$\frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}Kx_0^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_0^2$$

$$A^2 = x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega^2} = x_0^2 + \frac{m}{K}\upsilon_0^2$$

- Αν χρησιμοποιούσαμε $x(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$

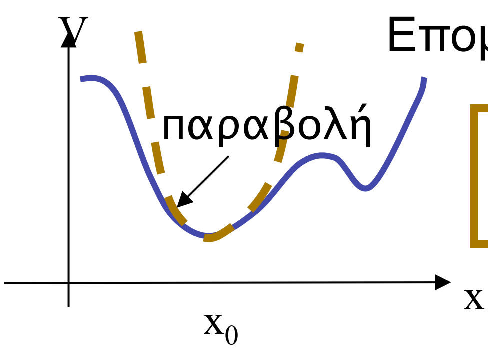
$$\left.\begin{aligned} x_0 &\equiv x(t=0) = C \\ \upsilon_0 &\equiv \upsilon(t=0) = \omega D \end{aligned}\right\} \Rightarrow x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{\upsilon_0}{\omega}\sin\omega t$$

Έτσι φαίνονται περισσότερο οι αρχικές συνθήκες

Γιατί τα κοιτάζουμε όλα αυτά?

- Διαλέγουμε να μελετήσουμε την F=-kx για δύο βασικούς λόγους:
  - Τέτοιες δυνάμεις συναντάμε πολύ συχνά στη φύση
  - Μπορούμε εύκολα να λύσουμε την εξίσωση κίνησης
- Σχετικά με το πρώτο λόγο, φανταστείτε ένα δυναμικό της μορφής V(x).
- Επικεντρώνουμε την προσοχή μας σε ένα τοπικό ελάχιστο.
- Έστω ότι το V(x) έχει ένα ελάχιστο στη θέση x_0. Μπορούμε να πάρουμε το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor του V(x) της μορφής:

$$V(x)=\underbrace{V(x_0)}_{\text{σταθ.}}+\underbrace{V'(x_0)}_{\text{εξ'ορισμού}=0}(x-x_0)+\frac{1}{2!}V''(x_0)(x-x_0)^2+\underbrace{\frac{1}{3!}V'''(x_0)(x-x_0)^3+\cdots}_{\text{αρκετά μικρό για x κοντά στο } x_0}$$



Επομένως μπορούμε να γράψουμε: $\boxed{V(x)\approx\frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2}$

Δηλαδή **κάθε** δυναμικό μοιάζει με μια παραβολή αν πάμε αρκετά κοντά σε ένα ελάχιστο.

Δηλαδή π.χ. $V''(x_0)="K"$ τότε: $\frac{1}{2}V''(x_0)(x-x_0)^2\leftrightarrow\frac{1}{2}K(ax)^2$