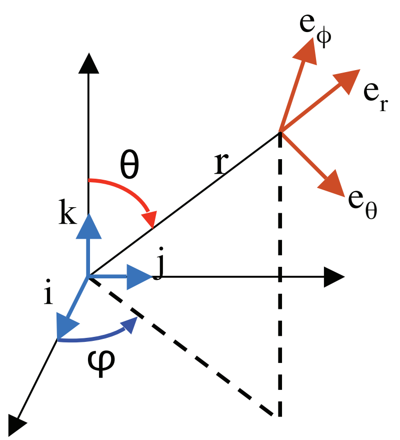
Σφαιρικές συντεταγμένες



Σε σφαιρικές συντεταγμένες θα έχουμε: $\vec{r} = r\hat{e}_r$

Η διεύθυνση του $\hat{e}_r$ προσδιορίζεται από τις φ και θ

Εισάγουμε 2 ακόμα μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_\theta$ και $\hat{e}_\varphi$

Η ταχύτητα θα είναι: $\vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt}$

Αλλά $\hat{e}_r = \hat{i}(\hat{e}_r \cdot \hat{i}) + \hat{j}(\hat{e}_r \cdot \hat{j}) + \hat{k}(\hat{e}_r \cdot \hat{k})$

Όμως $(\hat{e}_r \cdot \hat{i}) = \cos a$ ενώ θέλουμε το εσωτερικό γινόμενο συναρτήσει των θ και φ

Διαδοχικές προβολές του $\mathrm{e_r}$ επίπεδο x-y και κατόπιν στον x–άξονα δίνει:

$(\hat{e}_r \cdot \hat{i}) = \sin\theta\cos\varphi$ και ανάλογα $(\hat{e}_r \cdot \hat{j}) = \sin\theta\sin\varphi$ $(\hat{e}_r \cdot \hat{k}) = \cos\theta$

Οι σχέσεις για τα $\hat{e}_\theta$ και $\hat{e}_\varphi$ βρίσκονται με τον ίδιο τρόπο οπότε έχουμε:

$\hat{e}_r = \hat{i}\sin\theta\cos\varphi + \hat{j}\sin\theta\sin\varphi + \hat{k}\cos\theta$ $\hat{e}_\theta = \hat{i}\cos\theta\cos\varphi + \hat{j}\cos\theta\sin\varphi - \hat{k}\sin\theta$ $\hat{e}_\varphi = -\hat{i}\sin\varphi + \hat{j}\cos\varphi$

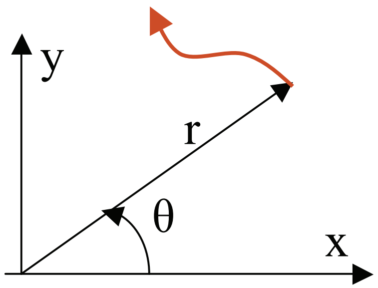
Άρα $\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \hat{i}(\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi) + \hat{j}(\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi) - \hat{k}\dot{\theta}\sin\theta$

$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \hat{e}_\varphi\dot{\varphi}\sin\theta + \hat{e}_\theta\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathrm{v}} = \hat{e}_r\dot{r} + \hat{e}_\varphi r\dot{\varphi}\sin\theta + \hat{e}_\theta r\dot{\theta}$

6. Κίνηση σωματιδίου κάτω από επίδραση δύναμης

Έστω ένα σωματίδιο κινείται κάτω από την επίδραση μιας δύναμης $F=-Ar^{\alpha-1}$ η οποία έχει διεύθυνση προς την αρχή των αξόνων. Οι A και α είναι σταθερές..

Επιλέξτε κατάλληλες γενικευμένες συντεταγμένες και θεωρήστε την δυναμική ενέργεια ίση με 0 στην αρχή των αξόνων. Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης. Διατηρείται η στροφορμή; Διατηρείται η ολική ενέργεια;



Διαλέγουμε (r,θ) σα τις γενικευμένες συντεταγμένες.

Είδαμε στο παράδειγμα 2 ότι η κινητική ενέργεια στην περίπτωση αυτή δίνεται από:

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)$$

Αφού η δύναμη σχετίζεται με την δυναμική ενέργεια μέσω:

$$F=-\frac{\partial V}{\partial r}\Rightarrow V=-\int_0^r F dr=\int_0^r Ar^{a-1}dr\Rightarrow V=\frac{A}{a}r^a+C$$

Εφόσον V(r=0)=0, τότε C=0 και η δυναμική ενέργεια γράφεται: $V=\frac{A}{a}r^a$

H Lagrangian γράφεται: $L=T-V=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-\frac{A}{a}r^a$

6. Κίνηση σωματιδίου κάτω από επίδραση δύναμης

Η εξίσωση Lagrange για την γενικευμένη συντεταγμένη r είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - Ar^{a-1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + Ar^{a-1} = 0 \qquad (1)$$

Η εξίσωση Lagrange για την γενικευμένη συντεταγμένη θ είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow mr^2\ddot{\theta} + 2\, mr\dot{r}\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0 \qquad (2)$$

Αφού η ποσότητα $l = mr^2\dot{\theta}$ θεωρείται η στροφορμή του σωματιδίου, η (2) δηλώνει ότι η στροφορμή διατηρείται.

6. Κίνηση σωματιδίου κάτω από επίδραση δύναμης

Χρησιμοποιώντας την στροφορμή, l, γράφουμε την (1) ως εξής:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + Ar^{a-1} = 0 \Rightarrow m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + Ar^{a-1} = 0 \Rightarrow$$

Ο λόγος?

$$\frac{d}{dt}g(r) = \frac{dg}{dr}\frac{dr}{dt}$$

$$m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} - Ar^{a-1} \Rightarrow m\ddot{r} = -\boxed{\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + \frac{A}{a}r^a\right)}$$ (πολ/ζω με $\dot{r}$)

$$m\ddot{r}\dot{r} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{l^2}{2mr^2} + \frac{A}{a}r^a\right)\frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow m\ddot{r}\dot{r} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{l^2}{2mr^2} + \frac{A}{a}r^a\right) = 0$$

Αλλά $m\frac{d\dot{r}}{dt}\dot{r} = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\dot{r}^2$ και η τελευταία αυτή σχέση μπορεί να γραφεί ως:

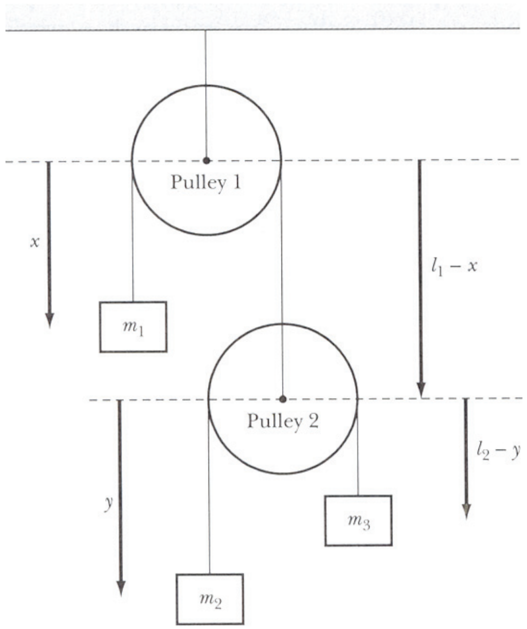
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{l^2}{2mr^2} + \frac{A}{a}r^a\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{A}{a}r^a\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(T+V) = 0$$

Η τελευταία σχέση δηλώνει ότι η ολική ενέργεια διατηρείται

7. Μηχανή Atwood – 2η περίπτωση

Θεωρούμε τη μηχανή Atwood του παρακάτω σχήματος. Χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες που δίνονται να προσδιοριστούν οι εξισώσεις κίνησης. Υποθέτουμε ότι οι τροχαλίες είναι αβαρείς και ότι τα 2 σχοινιά έχουν σταθερό μήκος l_1 και l_2 ενώ οι αποστάσεις x και y μετρούνται από το κέντρο της κάθε τροχαλίας.



Για τη μάζα m_1: $\quad \mathrm{v}_1 = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow \mathrm{v}_1 = \dot{x}$

Για τη μάζα m_2: $\quad \mathrm{v}_2 = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(l_1 - x + y\right) \Rightarrow \mathrm{v}_2 = -\dot{x} + \dot{y}$

Για τη μάζα m_3: $\quad \mathrm{v}_3 = \dfrac{d(l_1 - x + l_2 - y)}{dt} \Rightarrow \mathrm{v}_3 = -\dot{x} - \dot{y}$

Επομένως η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

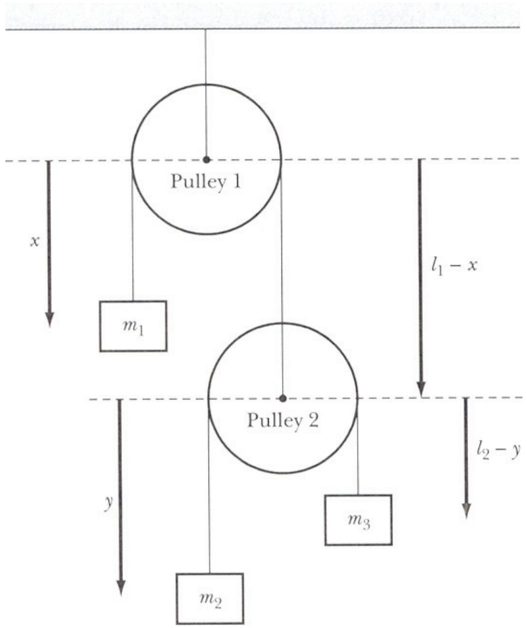
$$T = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{x}^2 + m_2(-\dot{x}+\dot{y})^2 + m_3\left(-\dot{x}-\dot{y}\right)^2\right) \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{x}^2 + m_2\dot{x}^2 + m_2\dot{y}^2 - 2m_2\dot{x}\dot{y} + m_3\dot{x}^2 + m_3\dot{y}^2 + 2m_3\dot{x}\dot{y}\right) \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}\left((m_1 + m_2 + m_3)\dot{x}^2 + (m_2 + m_3)\dot{y}^2 - 2(m_2 - m_3)\dot{x}\dot{y}\right)$$

7. Μηχανή Atwood – 2η περίπτωση

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών



Για τη μάζα m_1: $V_1 = -m_1 g x$

Για τη μάζα m_2: $V_2 = -m_2 g\left(l_1 - x + y\right)$

Για τη μάζα m_3: $V_3 = -m_3 g\left(l_1 - x + l_2 - y\right)$

$$V = -m_1 g x - m_2 g(l_1 - x + y) - m_3 g\left(l_1 - x + l_2 - y\right) \Rightarrow$$

$$V = g(m_2 + m_3 - m_1)x - g(m_2 + m_3)y - m_2 g l_1 - m_3 g l_2$$

Η Lagrangian είναι: $L = T - V$

Οι εξισώσεις κίνησης για τις συντεταγμένες x και y είναι:

x:
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2 + m_3)\dot{x} - (m_2 - m_3)\dot{y} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} - (m_2 - m_3)\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -g(m_2 + m_3 - m_1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} - (m_2 - m_3)\ddot{y} + g(m_2 + m_3 - m_1) = 0$$

$$\Rightarrow m_1\ddot{x} + m_2(\ddot{x} - \ddot{y}) + m_3(\ddot{x} + \ddot{y}) = -g(m_2 + m_3 - m_1)$$

7. Μηχανή Atwood – 2η περίπτωση

y: $$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = (m_2 + m_3)\dot{y} - (m_2 - m_3)\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = (m_2 + m_3)\ddot{y} - (m_2 - m_3)\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = g(m_2 + m_3)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow (m_2 + m_3)\ddot{y} - (m_2 - m_3)\ddot{x} - g(m_2 + m_3) = 0$$

$$\Rightarrow m_2(\ddot{y} - \ddot{x}) + m_3(\ddot{y} + \ddot{x}) = g(m_2 + m_3)$$

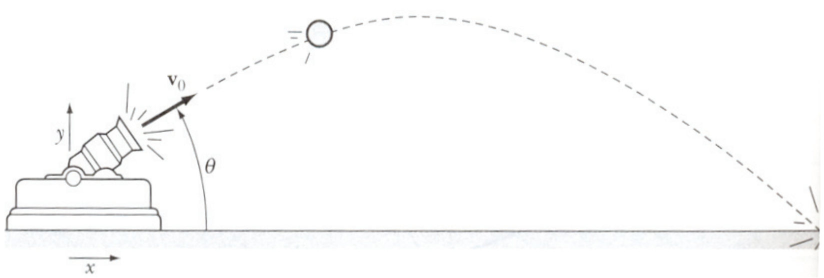
Επομένως οι 2 εξισώσεις κίνησης που έχουμε είναι:

$$m_1\ddot{x} + m_2(\ddot{x} - \ddot{y}) + m_3(\ddot{x} + \ddot{y}) = -g(m_2 + m_3 - m_1)$$

$$m_2(\ddot{y} - \ddot{x}) + m_3(\ddot{y} + \ddot{x}) = g(m_2 + m_3)$$

8. Κίνηση βλήματος σε 2 - Διαστάσεις

Θεωρήστε την κίνηση ενός βλήματος υπό την επίδραση της βαρύτητας (σε 2-Δ) χωρίς την επίδραση αντίστασης του αέρα. Έστω ότι η αρχική ταχύτητα του βλήματος είναι v_0 και η γωνία βολής θ. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης σε καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες.



Α. Καρτεσιανές συντεταγμένες

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$$

$V = mgy$ θεωρώντας $V = 0$ για $y = 0$

Η Lagrangian θα έχει τη μορφή: $L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - mgy$

Από τις εξισώσεις Lagrange για συντεταγμένες x,y έχουμε: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

x-συντεταγμένη:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \ ; \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \ ; \ \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 0$$

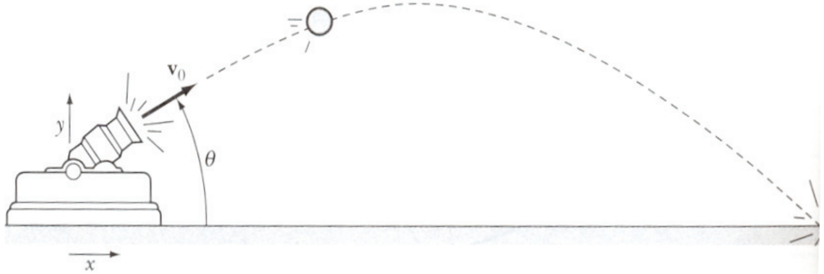
y-συντεταγμένη:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \ ; \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y} \ ; \ \frac{\partial L}{\partial y} = -mg$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = -mg \Rightarrow \ddot{y} = -g$$

8. Κίνηση βλήματος

Β. Πολικές συντεταγμένες



Για τις πολικές συντεταγμένες θεωρούμε την r (ακτινική διεύθυνση) και θ (γωνία με την οριζόντια διεύθυνση)

$$T = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

$V = mgr\sin\theta$ θεωρώντας $V=0$ για $\theta=0$

Η Lagrangian θα έχει τη μορφή:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgr\sin\theta$$

Από τις εξισώσεις Lagrange για συντεταγμένες x,y έχουμε: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

r-συντεταγμένη:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + g\sin\theta = 0$$

θ-συντεταγμένη:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta}$$

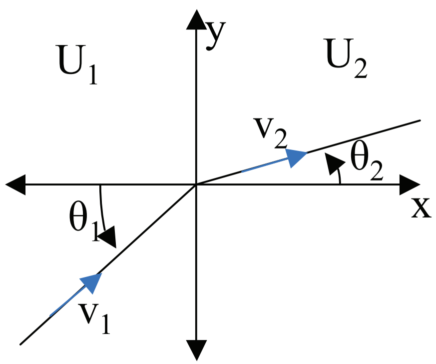
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} + gr\cos\theta = 0$$

9. “Ο νόμος του Snell”

Θεωρούμε μια περιοχή του χώρου η οποία διαχωρίζεται με ένα επίπεδο. Η δυναμική ενέργεια ενός σωματιδίου στην περιοχή 1 είναι U_1 και στην περιοχή 2 είναι U_2. Αν ένα σωματίδιο μάζας m το οποίο κινείται με ταχύτητα v_1 στη περιοχή 1 περάσει από την περιοχή 1 στη περιοχή 2 έτσι ώστε η πορεία του στην περιοχή 1 σχηματίζει γωνία θ_1 με την κάθετη στο διαχωριστικό επίπεδο και μια γωνία θ_2 με τη κάθετο όταν είναι στη περιοχή 2, δείξτε ότι:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \sqrt{1+\frac{U_1-U_2}{T_1}} \qquad \text{όπου} \qquad T_1 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_1^2$$



Διαλέγουμε τις συντεταγμένες x,y ώστε ο άξονας y διαχωρίζει τις 2 περιοχές:

$$U = \begin{cases} U_1 & x<0 \\ U_2 & x>0 \end{cases}$$

Επομένως η Lagrangian του σωματιδίου θα γραφεί ως:

$$L = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_1^2 - U(x) \Rightarrow L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) - U(x)$$

9. “Ο νόμος του Snell”

Επομένως οι εξισώσεις Lagrange για τις δύο γενικευμένες συντεταγμένες

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

Για την συντεταγμένη y:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = 0 \qquad (2)$$

Γράφοντας: $m\ddot{x} = \frac{d}{dt}m\dot{x} = \frac{dp_x}{dt} = \frac{dp_x}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{p_x}{m}\frac{dp_x}{dx}$ και αντικαθιστώντας στην (1)

$$m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{p_x}{m}\frac{dp_x}{dx} + \frac{dU}{dx} = 0$$

Την οποία και ολοκληρώνουμε από ένα οποιοδήποτε σημείο της περιοχής 1 σε ένα οποιοδήποτε σημείο της περιοχής 2

9. "Ο νόμος του Snell"

Έχουμε:

$$\int_1^2 \left(\frac{p_x}{m}\frac{dp_x}{dx} + \frac{dU}{dx} \right) dx = 0 \Rightarrow \int_1^2 \frac{p_x}{m}\frac{dp_x}{dx} dx + \int_1^2 \frac{dU}{dx} dx = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{p_x^{2(2)}}{2m} - \frac{p_x^{2(1)}}{2m} + U_{(2)} - U_{(1)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m\dot{x}_{(2)}^2 + U_{(2)} = \frac{1}{2} m\dot{x}_{(1)}^2 + U_{(1)} \qquad (3)$$

Από τη 2η εξίσωση κίνησης έχουμε: $m\ddot{y} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = 0 \Rightarrow m\dot{y} = \sigma\tau\alpha\vartheta.$ (4)

Επομένως $m\dot{y}_{(1)} = m\dot{y}_{(2)} \Rightarrow \frac{1}{2} m\dot{y}_{(1)}^2 = \frac{1}{2} m\dot{y}_{(2)}^2$ (5)

Από τις εξισώσεις (3) και (5) έχουμε:

$$\frac{1}{2} m\mathrm{v}_{(1)}^2 + U_{(1)} = \frac{1}{2} m\mathrm{v}_{(2)}^2 + U_{(2)} \qquad (6)$$

Από την (4) έχουμε ακόμα: $m\dot{y} = \sigma\tau\alpha\vartheta. \Rightarrow m\mathrm{v}_1 \sin\theta_1 = m\mathrm{v}_2 \sin\theta_2$ (7)

Αντικαθιστώντας την (6) στην (7) έχουμε: $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{\mathrm{v}_2}{\mathrm{v}_1} = \sqrt{1 + \frac{U_1 - U_2}{T_1}}$

Το πρόβλημα αυτό είναι το μηχανικό ανάλογο της διάθλασης του φωτός