Άσκηση 1

Θεωρούμε το διάνυσμα $A = 3\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}$.

Βρείτε (α) το μήκος του Α

(β)Το μήκος της προβολής του Α το επίπεδο xy

(γ) Ένα διάνυσμα Β πάνω στο επίπεδο xy κάθετο στο Α

(δ)Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{B}$

(ε) το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $C = 2\hat{x}$ με το διάνυσμα Α

(στ) Τις συνιστώσες των διανυσμάτων Α και C στο σύστημα συντεταγμένων (x', y', z') αν το αρχικό σύστημα περιστραφεί γύρω από τον άξονα z κατά γωνιά π/2, και σε φορά αντίθετη από αυτή των δεικτών του ρολογιού.

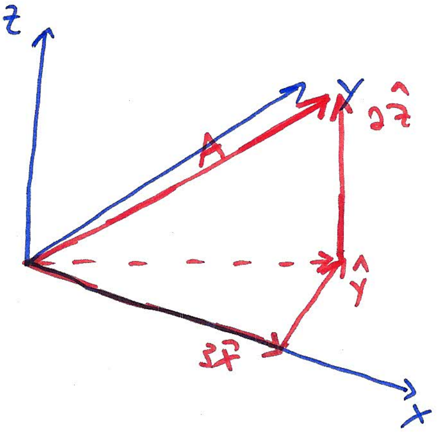
(ζ) Το εσωτερικό γινόμενο $A \cdot C$ στο σύστημα (x', y', z').

(η) Το εξωτερικό γινόμενο $A \times C$

(θ) Το διάνυσμα $A - C$

(α) $A = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$

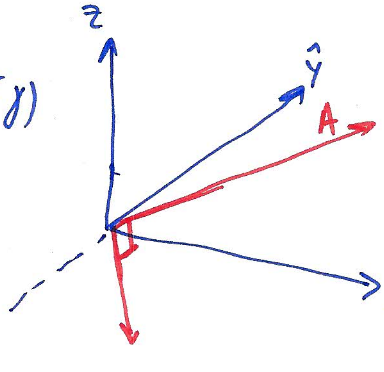
(β)



$\rightarrow$ προβολή: $3\hat{x} + \hat{y}$

$\Rightarrow$ μήκος: $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

(γ)



$\vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y}$ όπου $A \cdot B = 0$

$\Rightarrow (3\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}) \cdot (B_x \hat{x} + B_y \hat{y}) = 0$

$\Rightarrow 3B_x + B_y = 0 \Rightarrow \frac{B_y}{B_x} = -3$

$\Rightarrow \vec{B} = K(\hat{x} - 3\hat{y})$ όπου k σταθερά

(δ) $\hat{B}_x^2 + \hat{B}_y^2 = 1 \Rightarrow \hat{B}_x^2 (1^2 + 3^2) = 10\hat{B}_x^2 = 1$

$\Rightarrow \hat{B} = \sqrt{\frac{1}{10}}\,\hat{x} - \sqrt{\frac{9}{10}}\,\hat{y} = \frac{\hat{x} - 3\hat{y}}{\sqrt{10}} = \frac{\vec{B}}{B}$

(ε) $\vec{A} \cdot \vec{C} = (3\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}) \cdot 2\hat{x} = 2 \cdot 3 = 6$

(στ) $\hat{x}' = \hat{y}$, $\hat{y}' = -\hat{x}$, $\hat{z}' = \hat{z}$ ή $x = -y'$, $y = x'$

$\Rightarrow \boxed{\vec{A} = -3\hat{y}' + \hat{x}' + 2\hat{z}'}$, $\boxed{\vec{C} = -2\hat{y}'}$

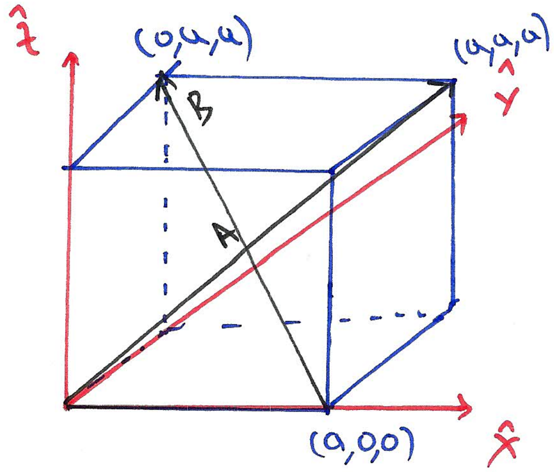
(ζ) $\vec{A}' \cdot \vec{C}' = (1 \cdot 0) + (-3 \cdot (-2)) + (2 \cdot 0) = 6$

(η) $A \times C = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\hat{y} - 2\hat{z}$

(θ) $\vec{A} - \vec{C} = (3-2)\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z} = \boxed{\hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}}$

Άσκηση 2

Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν οι εσωτερικές διαγώνιοι ενός κύβου.



Εσ. διαγώνιοι: A: $(0,0,0) \to (a,a,a)$

B: $(a,0,0) \to (0,a,a)$

$$\Rightarrow \vec{A} = a\hat{x} + a\hat{y} + a\hat{z}$$

$$\vec{B} = -a\hat{x} + a\hat{y} + a\hat{z}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\theta$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -a^2 + a^2 + a^2 = a^2$$

$$\left.\begin{aligned} |\vec{A}| &= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3} \cdot a \\ |\vec{B}| &= \sqrt{(-a)^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3} \cdot a \end{aligned}\right\} \quad |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| = \sqrt{3} \cdot a \cdot \sqrt{3} \cdot a = 3a^2$$

$$\Rightarrow \cancel{a^2} = 3\cancel{a^2} \cdot \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\theta = 70.5^\circ}$$

Άσκηση 3

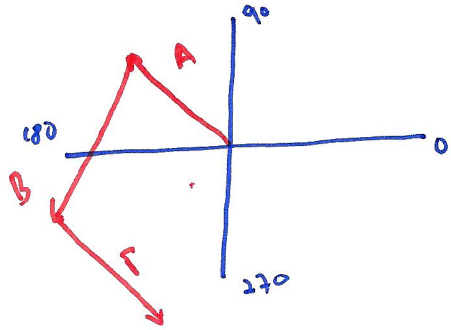
Ένας πεζοπόρος κάνει τις εξής συνεχόμενες διαδρομές:

α) κινείται 2.65km στις 140°,

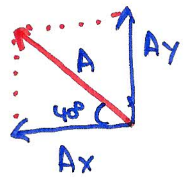
β) 4.77km στις 252°,

γ) 3.18km στις 332°

Βρείτε το διάνυσμα μεταξύ αρχικού, τελικού σημείου, την απόσταση που μετακινήθηκε, και την κατεύθυνση του.

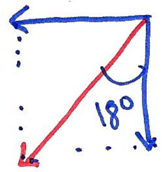


Αναλύουμε το κάθε διάνυσμα σε συνιστώσες:

A: 

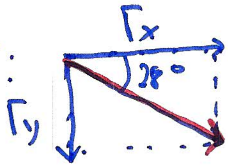
$A_x = -2.65 \cdot \cos 40 = -2.03$ km

$A_y = 2.65 \cdot \sin 40 = 1.70$ km

B: 

$B_x = -4.77 \cdot \sin 18^\circ = -1.47$ km

$B_y = -4.77 \cdot \cos 18^\circ = -4.53$ km

Γ: 

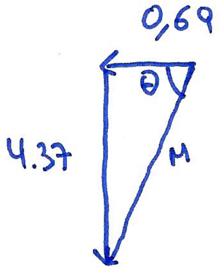
$\Gamma_x : 3.18 \cdot \cos 28^\circ = 2.81$ km

$\Gamma_y = -3.18 \cdot \sin 28^\circ = -1.44$ km

- Διάνυσμα μετατόπισης: $\vec{M} = (A_x + B_x + \Gamma_x)\,\hat{x} + (A_y + B_y + \Gamma_y)\,\hat{y}$

$$\boxed{\vec{M} = -0{,}69\,\hat{x} - 4.32\,\hat{y}}$$

- $|\vec{M}| = \sqrt{(-0{,}69)^2 + (-4.32)^2} = 4.37$ km

- 

$\tan\theta = \dfrac{4.37}{0{,}69} \Rightarrow \theta = 81^\circ$

$\Rightarrow$ ολική γωνία : $\varphi = 81^\circ + 180^\circ = 261^\circ$

Άσκηση 4

Η θέση ενός δορυφόρου καθορίζεται από τη σχέση $x = x_o + At^3$, όπου A μια σταθερά. Ποια η ταχύτητα και η επιτάχυνση του δορυφόρου.

- $V = \frac{dx}{dt} = 0 + 3At^2$

- $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 3 \cdot 2 \cdot A \cdot t = 6At$

Άσκηση 5

Ένα αεροπλάνο επιταχύνετε με ρυθμό $3m/s^2$ και για να απογειωθεί χρειάζεται να αναπτύξει ταχύτητα 65 m/s. Ποιο είναι το ελάχιστο μήκος διαύλου που χρειάζεται για να καταφέρει να απογειωθεί;

$$X_f = X_i + v_i t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \Rightarrow a t^2 = 2D - 2V_i t \ , \ D = X_f - X_i$$

$$\frac{dx}{dt} = v \Rightarrow v_f = v_i + at$$

$$\Rightarrow v_f^2 = v_i^2 + 2v_i a t + a^2 t^2$$

$$\Rightarrow v_f^2 = v_i^2 + \cancel{2v_i a t} + 2 \cdot a \cdot D - \cancel{2a v_i t}$$

$$\Rightarrow V_f^2 = V_i^2 + 2aD$$

$$\Rightarrow \left(65 \frac{m}{s}\right)^2 = 0 + 2 \cdot 3 \frac{m}{s^2} \cdot D$$

$$\Rightarrow 4225 \frac{m^2}{s^2} = 6 \frac{m}{s^2} \cdot D \Rightarrow \boxed{D = 704m}$$