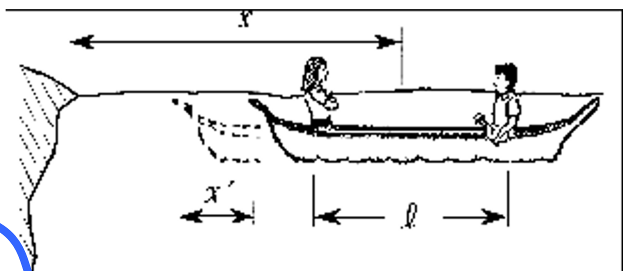
Κέντρο Μάζας - Παράδειγμα

Ο Ρωμαίο (m_R=77kg) διασκεδάζει την Ιουλιέτα (m_I=55kg) παίζοντας την κιθάρα του καθισμένος στην πρύμνη της βάρκας τους (μήκους 2.7 m) που είναι ακίνητη στα ήσυχα νερά της λίμνης. Η Ιουλιέτα κάθεται στην πλώρη της βάρκας. Στο τέλος της καντάδας η Ιουλιέτα σηκώνεται και προσεκτικά πηγαίνει στο πρύμνη για να του δώσει ένα φιλί…

Αν η κατεύθυνση της πλώρης της βάρκας ήταν προς τη στεριά πόσο μετακινήθηκε η βάρκα τους (μάζας 80 kg) προς τη στεριά ?

Λύση

Έστω x η απόσταση του ΚΜ της βάρκας από τη στεριά, *l* το μήκος της βάρκας και x' η απόσταση που κινήθηκε η βάρκα. Το ΚΜ παραμένει σταθερό (**ΓΙΑΤΙ ?**).



$$P_{CM} = MV_{CM} = 0$$

Κατά την καντάδα: $$x_{CM} = \frac{xM_\beta + (x - l/2)M_I + (x + l/2)M_R}{M_\beta + M_R + M_I}$$

Μετά την καντάδα: $$x'_{CM} = \frac{(x - x')M_\beta + (x + l/2 - x')M_R + (x + l/2 - x')M_I}{M_\beta + M_R + M_I}$$

Αλλά $x'_{CM} = x_{CM}$ οπότε εξισώνοντας τις 2 σχέσεις παίρνουμε $x' = 0.70m$

Κέντρο Μάζας - Παράδειγμα

Έστω απομονωμένο σύστημα 2 μαζών m_1 και m_2 αρχικά σε ηρεμία (π.χ. 2 μάζες στις άκρες ενός ελατηρίου, ένα σώμα που διασπάται σε 2 άλλα).

Όταν τα 2 σώματα φεύγουν μακριά το ένα από το άλλο με ταχύτητες υ_1 και υ_2 κάποια ποσότητα ενέργειας μοιράζεται μεταξύ τους:

$$Q = E^1_{\kappa\iota\nu} + E^2_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \qquad (1)$$

Αφού το σύστημα είναι απομονωμένο, η ολική ορμή διατηρείται

$$P^i = P^f \Rightarrow 0 = m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 \Rightarrow m_2\upsilon_2 = -m_1\upsilon_1$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και διαιρούμε με το 2

$$m_2^2\upsilon_2^2 = m_1^2\upsilon_1^2 \Rightarrow \frac{1}{2}m_2^2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1^2\upsilon_1^2 \Rightarrow m_2E^2_{\kappa\iota\nu} = m_1E^1_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow \frac{E^1_{\kappa\iota\nu}}{E^2_{\kappa\iota\nu}} = \frac{m_2}{m_1}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε:

$$Q = \frac{m_1}{m_2}E^1_{\kappa\iota\nu} + E^1_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow m_2Q = \left(m_1 + m_2\right)E^1_{\kappa\iota\nu} \quad \Rightarrow \quad E^1_{\kappa\iota\nu} = \frac{m_2}{\left(m_1 + m_2\right)}Q$$

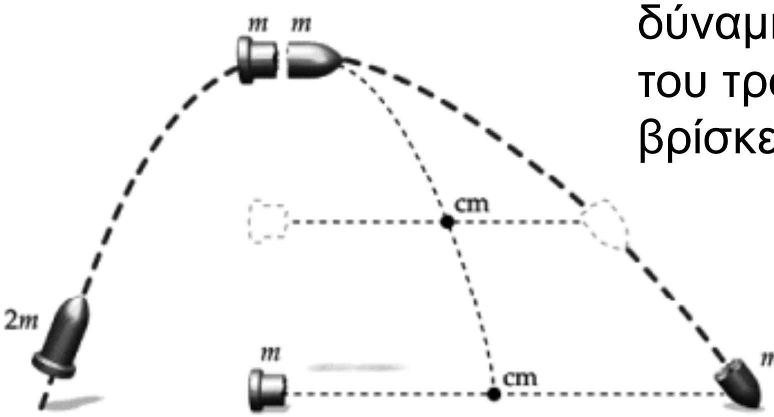
και ανάλογα $\quad \Rightarrow \quad E^2_{\kappa\iota\nu} = \dfrac{m_1}{\left(m_1 + m_2\right)}Q$

Όταν υπάρχουν 2 μόνο σωματίδια η υπάρχουσα ενέργεια μοιράζεται πάντοτε με τον ίδιο τρόπο.

Το ελαφρύτερο σωματίδιο παίρνει το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας

Κέντρο μάζας - Παράδειγμα

Ένα βλήμα εκτοξεύεται στον αέρα με ταχύτητα 24.5m/s και γωνία 36.9° ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του εκρήγνυται σε δυο θραύσματα ίσης μάζας. Το ένα θραύσμα πέφτει ακριβώς κατακόρυφα. Που πέφτει το δεύτερο θραύσμα.



Η μόνη εξωτερική δύναμη που ενεργεί είναι η βαρυτική δύναμη και επομένως το CM θα συνεχίσει την παραβολική του τροχιά σαν να μην υπήρχε η έκρηξη. Το CM θα βρίσκεται ανάμεσα στα δυο θραύσματα.

Έστω m η μάζα των θραυσμάτων

Το ένα θραύσμα πέφτει κατακόρυφα και επομένως η θέση του θα είναι $x_1 = R/2$

Το CM θα πέσει στην θέση: $x_{cm} = R$

Η θέση του κέντρου μάζας είναι: $x_{cm} = \dfrac{mx_1 + mx_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow x_{cm} = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow x_2 = 2x_{cm} - x_1$

Το σημείο στο οποίο πέφτει το 2° θραύσμα είναι: $x_2 = 2R - \dfrac{R}{2} = \dfrac{3R}{2}$

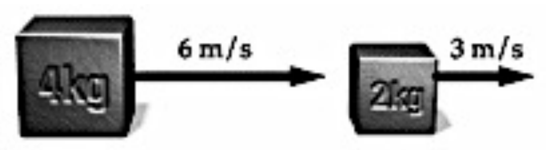
Το βεληνεκές του CM βρίσκεται στην θέση:

$$R = \frac{\upsilon_o^2}{g}\sin^2\theta \Rightarrow R = \frac{(24.5m/s)^2}{9.81m/s^2}\sin^2(73.8^o) = 58.8m$$

Επομένως x_2 θα είναι: $x_2 = \dfrac{3}{2}R = 88.2m$

Παράδειγμα

Ένα κιβώτιο μάζας 4kg κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα 6m/s και συγκρούεται με ένα άλλο κιβώτιο μάζας 2kg που κινείται επίσης προς τα δεξιά με ταχύτητα 3m/s. Να βρεθούν οι τελικές τους ταχύτητες.



Από διατήρηση της ορμής έχουμε:

$$p_i = m_1\upsilon_1^i + m_2\upsilon_2^i = p_f = m_1\upsilon_1^f + m_2\upsilon_2^f$$

Αντικατάσταση θα δώσει:

$$p_i = 4kg\times 6\frac{m}{s} + 3kg\times 2\frac{m}{s} = 30kg\frac{m}{s} = \left(4kg\right)\upsilon_1^f + \left(2kg\right)\upsilon_2^f \;\Rightarrow 15\frac{m}{s} = 2\upsilon_1^f + \upsilon_2^f \qquad (1)$$

Αντί να χρησιμοποιήσουμε διατήρηση κινητικής ενέργειας απευθείας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι στις ελαστικές συγκρούσεις η σχετική ταχύτητα των σωμάτων πριν και μετά την κρούση είναι σταθερή.
Αυτό είναι αποτέλεσμα της διατήρησης της κινητικής ενέργειας

$$\left(\upsilon_1^i - \upsilon_2^i\right) = -\left(\upsilon_1^f - \upsilon_2^f\right) \Rightarrow \left(6-3\right)\frac{m}{s} = -\left(\upsilon_1^f - \upsilon_2^f\right) \;\Rightarrow \left(\upsilon_1^f - \upsilon_2^f\right) = -3m/s$$

Δυο εξισώσεις με 2 αγνώστους:

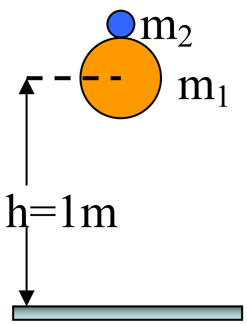
$$\left(\upsilon_1^f - \upsilon_2^f\right) = -3m/s \Rightarrow \upsilon_1^f = \upsilon_2^f - 3m/s$$

Αντικατάσταση στην (1): $15\frac{m}{s} = 2\left(\upsilon_2^f - 3\frac{m}{s}\right) + \upsilon_2^f \Rightarrow 15\frac{m}{s} = 3\upsilon_2^f - 6\frac{m}{s} \;\Rightarrow \upsilon_2^f = 7m/s$

και ανάλογα: $\upsilon_1^f = \upsilon_2^f - 3 \Rightarrow \upsilon_1^f = 4m/s$

Διατήρηση Ορμής - Κρούσεις - Παράδειγμα

Υποθέστε ότι κρατάτε μια μικρή μπάλα μάζας m_2 ακριβώς πάνω σε μια άλλη μπάλα μάζας m_1 (όπου $m_1 >> m_2$). Οι μπάλες είναι σε επαφή και βρίσκονται σε ύψος h=1m πάνω από το δάπεδο. Αφήστε τις δυο μπάλες ταυτόχρονα να πέσουν στο πάτωμα.
Βρείτε το ύψος στο οποίο θα αναπηδήσει η μικρή μπάλα;
Υποθέστε ότι όλες οι κρούσεις είναι τελείως ελαστικές και ακόμα ότι πρώτα χτυπά η μεγάλη μπάλα και αναπηδώντας συναντά τη μικρή που έρχεται ακριβώς πίσω της.



Λύση

Από διατήρηση της ενέργειας για την μεγάλη μπάλα έχουμε:

$$E_1^i = E_2^f \Rightarrow m_1 gh + 0 = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + 0 \Rightarrow \boxed{\upsilon_1 = -\sqrt{2gh}}$$ (θετική φορά προς τα πάνω)

Η μπάλα συγκρούεται με το έδαφος και αναπηδά με

Η μάζα m_1 αναπηδά και συγκρούεται με την μικρή $V_1 = -\upsilon_1$

που έχει ταχύτητα $\upsilon_2 = \sqrt{2gh}$

Η μπάλα m_1 κινείται με αντίθετη ταχύτητα από την m_2. Η σχετική ταχύτητα της m_2 ως προς την m_1 θα είναι: $\upsilon_2^{\sigma\chi} = -\upsilon_2 + V_1 = -\upsilon_2 + (-\upsilon_2) = -2\upsilon_2$

Αφού $m_1 >> m_2$, μετά τη κρούση (m_1 με m_2) η m_2 έχει $V_2^{\sigma\chi} = -\upsilon_2^{\sigma\chi}$ ως προς τη m_1

Η m_1 όμως έχει ταχύτητα V_1 ως προς το έδαφος

και άρα η ταχύτητα της m_2 ως προς το έδαφος είναι: $V_2^{\varepsilon\delta} = V_2^{\sigma\chi} + V_1 \Rightarrow V_2^{\varepsilon\delta} = 3\upsilon_2$

Διατήρηση της ενέργειας: $\frac{1}{2} m_2 (V_2^{\varepsilon\delta})^2 + 0 = m_2 g h' \Rightarrow h' = \frac{(V_2^{\varepsilon\delta})^2}{2g} \Rightarrow h' = \frac{(3\sqrt{2gh})^2}{2g} \Rightarrow h' = 9h = 9m$

Διαφορετικά…

Από τις εξισώσεις των ταχυτήτων για ελαστική κρούση σε 1-Δ

$$\mathrm{v}_1 = \upsilon_1\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) + \upsilon_2\left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

$$\mathrm{v}_2 = \upsilon_1\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) + \upsilon_2\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

Οι εξισώσεις αυτές αναφέρονται στην κρούση της μπάλας m_1 με την m_2. Πριν την κρούση η ταχύτητα της m_1 είναι $\upsilon_1 = V_1$ και της m_2 είναι $\upsilon_2 = -V_1$ Αντικαθιστώντας στην 2η εξίσωση βρίσκουμε ότι μετά την κρούση η μπάλα 2 έχει ταχύτητα ($m_1 >> m_2$):

$$\mathrm{v}_2 = \upsilon_1\left(\frac{2m_1}{m_1 + \underbrace{m_2}_{\sim 0}}\right) + \upsilon_2\left(\frac{\underbrace{m_2}_{\sim 0} - m_1}{m_1 + m_2}\right) \approx 2\upsilon_1 - \upsilon_2 \Rightarrow \mathrm{v}_2 = 2\upsilon_1 - (-\upsilon_1) = 3\upsilon_1$$

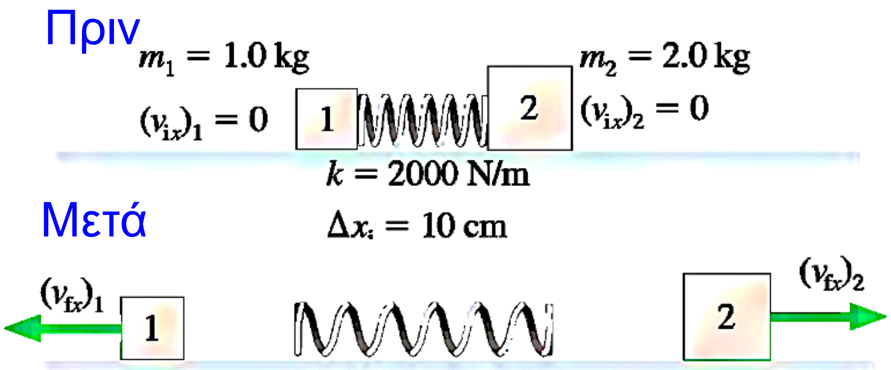
Αν είχαμε 3 μπάλες με μάζες η μια μικρότερη της άλλης (basketball, tennis, ping-pong)

- Το πρόβλημα είναι ίδιο, χρειάζεται να εξετάσουμε τις σχετικές ταχύτητες της 2 με την 1, της 3 με τη 2 και τέλος της 3 με το έδαφος.
- ✓ Βρήκαμε πριν ότι η μπάλα 2 κινείται με ταχύτητα $3\upsilon_1$ ως προς το έδαφος.
- ✓ Η μπάλα 3 πριν τη κρούση με την 2 έχει ταχύτητα $\upsilon_3 = -\upsilon_1$ ως προς το έδαφος και επομένως ταχύτητα $\upsilon_3^{\sigma\chi} = 4\upsilon_1$ ως προς τη μπάλα 2.
- ✓ Μετά την κρούση θα κινείται με ταχύτητα $V_3^{\sigma\chi} = -4\upsilon_1$ ως προς τη μπάλα 2.
- ➢ Η μπάλα 2 όμως έχει ταχύτητα $3\upsilon_1$ ως προς το έδαφος και επομένως η μπάλα 3 θα έχει ταχύτητα $V_3 = 3\upsilon_1 - (-4\upsilon_1) = 7\upsilon_1$ ως προς το έδαφος !!!
- ➢ Αντικαθιστώντας στην εξίσωση διατήρησης ενέργειας:

$$h' = \frac{(V_3^{\varepsilon\delta})^2}{2g} = \frac{(7\upsilon_1)^2}{2g} = \frac{49(2gh)}{2g} \Rightarrow h' = 49h \;\; !!!$$

Μάζες - Ελατήριο

Ένα ελατήριο σταθεράς k=2000 N/m βρίσκεται ανάμεσα σε δύο σώματα μάζας 1kg και 2kg αντίστοιχα. Το σύστημα βρίσκεται πάνω σε λεία επιφάνεια. Τα σώματα σπρώχνονται το ένα ως προς το άλλο συσπειρώνοντας το ελατήριο κατά 10cm και κατόπιν αφήνονται ελεύθερα. Ποιες οι ταχύτητες των σωμάτων καθώς αποχωρίζονται;



Δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις και άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται:

Αρχικά μόνο δυναμική ενέργεια ελατηρίου

Τελικά μόνο κινητική ενέργεια των μαζών

$$E^i_{\mu\eta\chi} = E^f_{\mu\eta\chi} \Rightarrow \frac{1}{2}k\left(\Delta x\right)^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon^2_{1f} + \frac{1}{2}m_2\upsilon^2_{2f}$$

Η ορμή του συστήματος διατηρείται:

$$\vec{p}^{\,i}_{o\lambda} = \vec{p}^{\,f}_{o\lambda} \Rightarrow \vec{0} = \vec{p}^{\,f}_1 + \vec{p}^{\,f}_2 \Rightarrow 0 = p^f_1 + p^f_2$$

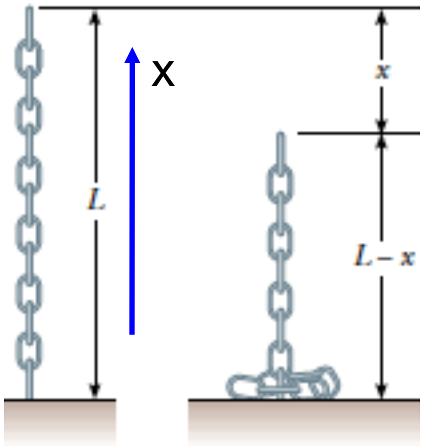
$$\Rightarrow p^f_1 = -p^f_2 \Rightarrow m_1\upsilon^f_1 = -m_2\upsilon^f_2 \Rightarrow \upsilon^f_1 = -\frac{m_2}{m_1}\upsilon^f_2$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση διατήρησης της ενέργειας:

$$\frac{1}{2}k\left(\Delta x\right)^2 = \frac{1}{2}m_1\frac{m_2^2\upsilon^2_{2f}}{m_1^2} + \frac{1}{2}m_2\upsilon^2_{2f} \Rightarrow k\left(\Delta x\right)^2 = \frac{m_2^2\upsilon^2_{2f}}{m_1} + m_2\upsilon^2_{2f} \Rightarrow k\left(\Delta x\right)^2 = \left(\frac{m_2}{m_1}+1\right)m_2\upsilon^2_{2f}$$

$$\Rightarrow k\left(\Delta x\right)^2 = \left(\frac{m_2}{m_1}+1\right)m_2\upsilon^2_{2f} \Rightarrow \upsilon_{2f} = \Delta x\sqrt{k\Big/\left[m_2\left(\frac{m_2}{m_1}+1\right)\right]} \qquad \Rightarrow \upsilon_{1f} = -\frac{m_2}{m_1}\upsilon_{2f}$$

Παράδειγμα ορμής και αλυσίδας - ζυγαριάς



Αλυσίδα μήκους L και μάζας M αφήνεται από ηρεμία να πέσει σε μια ζυγαριά. Να βρεθεί η ένδειξη της ζυγαριάς (η δύναμη που ασκεί η ζυγαριά στην αλυσίδα) καθώς η αλυσίδα πέφτει. Αρχικά το κατώτερο άκρο της αλυσίδας μόλις ακουμπά την ζυγαριά

Λύση

Έστω η αλυσίδα έχει πέσει κατά μια απόσταση x.

Πάνω στη ζυγαριά υπάρχει μάζα $m = \sigma x$ και η ένδειξη της ζυγαριάς προέρχεται από το βάρος της μάζας αυτής $F_g = (\sigma x) g$

Στη δύναμη αυτή θα πρέπει να προσθέσουμε τη δύναμη που αναπτύσετε στη ζυγαριά για να σταματήσει κάθε τμήμα της αλυσίδας, μάζας dm που πέφτει πάνω της:

$dm = \sigma dx$

Αλλά $dx = |\upsilon| dt = -\upsilon dt$

$\Big\} dm = -\sigma \upsilon_x dt$

η ταχύτητα έχει αρνητική φορά

$$F_p = \frac{dp}{dt} = \frac{0 - \upsilon_x dm}{dt} = \frac{-\upsilon_x(-\sigma \upsilon_x dt)}{dt}$$

$$\Rightarrow F_p = \sigma \upsilon_x^2$$

Η μάζα dm που έχει πέσει κατά ύψος x έχει ταχύτητα: $\frac{1}{2} dm_x \upsilon_x^2 = dm_x g x \Rightarrow \upsilon_x = \sqrt{2gx}$

Η συνολική ένδειξη της ζυγαριάς θα είναι: $F_{tot} = F_g + F_p \Rightarrow F_{tot} = \sigma x g + 2\sigma x g$

$\Rightarrow F_{tot} = 3\sigma x g$ παρατηρούμε ακόμα ότι: $F_p = 2F_g$

16ο Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας
- Θα στείλετε τη φωτογραφία της απάντησής σας στο fotis@ucy.ac.cy

Έτοιμοι