Εξίσωση τροχιάς

- Προσπαθούμε να λύσουμε την εξίσωση r=r(t) και θ=θ(t)
  - Ενδιαφερόμαστε για την μορφή της τροχιάς r=r(θ)
  - Αλλάζουμε από dt→dθ

$$l = mr^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} = \frac{l}{mr^2}\frac{d}{d\theta}$$

Σταθ.

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{dV(r)}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{l}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{l}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{dV}{dr} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right)$$

- Αλλάζουμε μεταβλητή από r σε u=1/r

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{du}{dr} = -u^2\frac{d}{du}$$

Εξίσωση τροχιάς

Αλλάζοντας μεταβλητές

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{l^2}\frac{dV(1/u)}{du} = 0$$

- Λύση της εξίσωσης αυτής δίνει το σχήμα της τροχιάς
  - Όχι τόσο εύκολη η λύση της
  - Θα τη λύσουμε για δύναμη αντιστρόφως ανάλογη του r^2
- Μια ακόμα χρήσιμη πληροφορία μπορεί να εξαχθεί χωρίς να λύσουμε την εξίσωση

Συμμετρία τροχιάς

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{l^2}\frac{dV(1/u)}{du} = 0$$

- Η εξίσωση είναι άρτια (δηλαδή συμμετρική) ως προς θ
  - Αντικαθιστώντας θ με $-\theta$ δεν αλλάζει την εξίσωση
  - Η λύση $u(\theta)$ πρέπει να συμμετρική αν είναι η αρχική συνθήκη
  - Διαλέγοντας θ=0 για t=0, παίρνοντας το συμμετρικό του θ → -θ

$$u(0) \rightarrow u(0)$$ ← OK

$$\frac{du}{d\theta}(0) \rightarrow -\frac{du}{d\theta}(0)$$

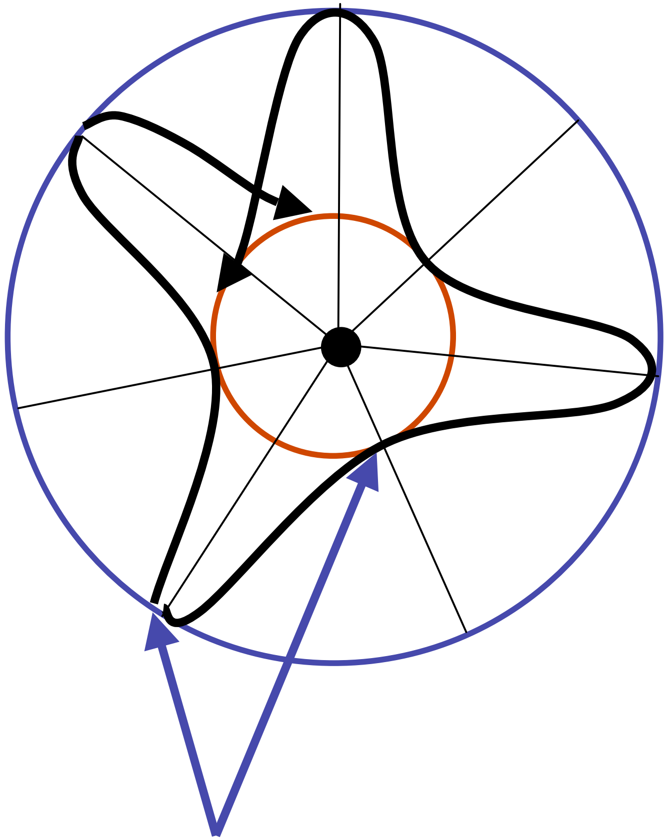
Ισχύει ΑΝ $\frac{du}{d\theta}(0) = 0$

Η τροχιά είναι συμμετρική σε γωνίες όπου $\frac{du}{d\theta} = 0$

Συμμετρία της τροχιάς

- Η τροχιά είναι συμμετρική σε κάθε σημείο στροφής = αψίδες

  Η τροχιά είναι αναλλοίωτη κάτω από αντικατοπτρισμούς ως προς τα διανύσματα των αψίδων
  - Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο δεν ενδιαφερόμαστε πολύ για το πρόσημο του $\dot{r}$
  - Λύνοντας την εξίσωση της τροχιάς μεταξύ ενός ζεύγους αψίδων → γνωρίζουμε ολόκληρη την τροχιά
- Αυτή τη στιγμή θα προχωρήσουμε στην λύση της εξίσωσης



$$\frac{du}{d\theta} = 0$$

Λύση της εξίσωσης τροχιάς

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{l^2}\frac{dV(1/u)}{du} = 0$$

- Ολοκληρώνοντας την διαφ. εξισ. θα πάρουμε διατήρηση της ενέργειας
- Χρησιμοποιώντας διατήρηση ενέργειας μπορούμε να γλυτώσουμε περισσότερη κόπο.

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = 0 \;\Rightarrow\; \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}$$

Αλλάζουμε μεταβλητές: $\dot{r} = -\frac{l}{m}\frac{du}{d\theta}$

$$\frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2m\mathrm{E}}{l^2} - u^2 - \frac{2mV(1/u)}{l^2}} \;\Rightarrow\; \text{Ολοκληρώνουμε}$$

Δύναμη ανάλογη αντιστρόφου του r^2

$$f = -\frac{k}{r^2} \qquad V = -\frac{k}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\theta} = -\sqrt{\frac{2m\mathrm{E}}{l^2} - u^2 + \frac{2mku}{l^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2m\mathrm{E}}{l^2} + \frac{2mku}{l^2} - u^2}} = -\int d\theta$$

Από πίνακες ολοκληρωμάτων έχουμε:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{2}{\gamma} \arccos\left(-\frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right)$$

Επομένως αντικαθιστούμε όπου α,β,γ τις σταθερές μας

Διαφορετικά το λύνουμε μόνοι μας....

Η ολοκλήρωση

$$\int d\theta = -\int \frac{du}{\sqrt{\frac{2m\mathrm{E}}{l^2} + \frac{2mku}{l^2} - u^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{\frac{2m\mathrm{E}}{l^2} + \frac{m^2k^2}{l^4} - \left(\frac{mk}{l^2} - u\right)^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{m^2k^2}{l^4}}} \int \frac{du}{\sqrt{1 - \left(\boxed{\frac{\frac{mk}{l^2} - u}{\sqrt{\frac{2m\mathrm{E}}{l^2} + \frac{m^2k^2}{l^4}}}}\right)^2}}$$

Ορίζεται σαν cosω

$$= -\int \frac{\sin\omega}{\sin\omega} d\omega = -\omega$$

$$du = \sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{m^2k^2}{l^4}} \sin\omega d\omega$$

$$\cos\omega = \cos(\theta - \theta') = \frac{\frac{mk}{l^2} - u}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{m^2k^2}{l^4}}}$$

Λύνουμε ως προς u=1/r

Λύση

$$u = \frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}\cos(\theta - \theta')\right)$$

Η λύση αυτή είναι όμοια με την γενική κωνική εξίσωση $\frac{1}{r} = C\left(1 + e\cos(\theta - \theta')\right)$

Μια εστία είναι στην αρχή των αξόνων

e ονομάζεται εκκεντρότητα $\boxed{e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}}$

e > 1	$E > 0$	υπερβολή
e = 1	$E = 0$	παραβολή
e < 1	$E < 0$	έλλειψη
e = 0	$E = -\frac{mk^2}{2l^2}$	κύκλος

Που συμφωνεί με την ποιοτική ταξινόμηση των τροχιών