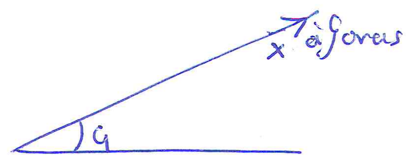
ΦΥΣ 111: ΓΕΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ 1

23/09/20 2ο Φροντιστήριο

Προβλήματα:

1. Ένα αυτοκίνητο που κινείται με σταθερή ταχύτητα 30m/s σβήνει ξαφνικά τη μηχανή του, ενώ βρίσκεται στους πρόποδες ενός λόφου. Το αυτοκίνητο κινείται με σταθερή επιτάχυνση -2m/s^2. Θεωρήστε την αντίσταση του αέρα και τις τριβές αμελητέες. (a) Γράψτε τις εξισώσεις θέσης - χρόνου και ταχύτητας – χρόνου του αυτοκινήτου, θεωρώντας ότι x=0 στους πρόποδες του λόφου, όπου $v_0 = 30m/s$. (β) Προσδιορίστε τη μέγιστη απόσταση που διάνυσε το αυτοκίνητο πάνω στο λόφο από τη στιγμή που έσβησε τη μηχανή του. (γ) Ποια είναι η ταχύτητα του αυτοκινήτου σε km/h τη χρονική στιγμή t=5s; (d) Ποια είναι η κλίση του λόφου;

1) a) Επιλέγαμε ως άξονα x τον άξονα που συμπίπτει με το κεκλιμένο επίπεδο.



Σημ: Ξέραμε ότι ο λόφος είναι ευθεία αφού η επιτάχυνση του είναι σταθερή.

$$x = x_0 + U_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + 30t - \frac{2}{2}t^2$$

$$U = U_0 + at = 30 - 2t$$

Για μέγιστη απόσταση $U=0$ (αφού μετά η ταχύτητα γίνεται αρνητική και το αυτοκίνητο επιστρέφει πίσω).

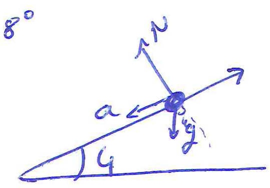
$\Rightarrow t = 15s$

$\Rightarrow x = 30 \cdot 15 - 15^2 = 450 - 225 = 225\ m$

) $U = 30 - 2t = 30 - 2\cdot 5 = 20\ m/s = 20\ \frac{m}{s} \cdot \frac{3600\ s}{1\ h} \cdot \frac{1\ Km}{1000\ m} = 72\ Km/h$

) $|a| = |g|\sin\varphi \Rightarrow \varphi = \sin^{-1}\left(\frac{|a|}{|g|}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{2}{9{,}81}\right) = 11{,}8^\circ$

κλίση $= \tan\varphi = 0{,}21$



2. Ένας πύραυλος εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα επάνω με αρχική ταχύτητα 80m/s. Ο πύραυλος κινείται προς τα επάνω με επιτάχυνση 4m/s^2 μέχρις ότου φτάσει σε ύψος 1000m. Σε αυτό το σημείο οι μηχανές του χαλούν και ο πύραυλος συνεχίζει την πορεία του κάνοντας ελεύθερη πτώση με επιτάχυνση -9.80m/s^2. (α) Πόσο χρόνο θα κινείται ο πύραυλος; (β) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος της κίνησής του; (γ) Ποια είναι η ταχύτητά του ακριβώς πριν συγκρουστεί με τη Γη;

2) Η κίνηση του πυραύλου χωρίζεται σε 2 μέρη:

1° Μέρος: Πριν σταματήσουν οι μηχανές.
2° Μέρος: Αφού έχουν σταματήσει οι μηχανές.

1°: $a(t) = 4\,m/s^2$
$u(t) = (80 + 4t)\,m/s$
$\psi(t) = (80t + \frac{1}{2}at^2)m = (80t + 2t^2)\,m$

2°: $a(t) = -g = -9{,}80\,m/s^2$
$u(t) = \upsilon_0 - gt = (\upsilon_0 - 9{,}80\,t)\frac{m}{s}$
$\psi(t) = (\psi_0 + \upsilon_0 t - \frac{1}{2}gt^2)m = (\psi_0 + \psi_0 t - 4{,}90\,t^2)\,m$

υ_0 η ταχύτητα του πυραύλου όταν χαλάν οι μηχανές.
ψ_0 το ύψος στο οποίο βρίσκεται ο πύραυλος όταν χαλάν οι μηχανές.

α) Αρχικά υπολογίζουμε τον χρόνο που χρειάζεται για να φτάσει στα 1000m.
$\psi(t) = 80t + 2t^2 \Rightarrow 1000 = 80t + 2t^2 \Rightarrow t^2 + 40t - 500 = 0$
$\Rightarrow t_\pm = \dfrac{-40 \pm \sqrt{40^2 + (4\cdot 500)}}{2} \Rightarrow$ $t_+ = 10{,}0\,s$ Αποδεκτή λύση
$t_- = -50\,s$ Μη αποδεκτή λύση.

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τον χρόνο για να φτάσει στο έδαφος.
$\left.\begin{array}{l}\psi(t) = 1000 + \upsilon_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \\ \upsilon_0 = (80 + 4\cdot 10)\frac{m}{2} = 120\frac{m}{s}\end{array}\right\} \Rightarrow \psi(t) = 1000 + 120t - 4{,}9t^2$

Έδαφος $\Rightarrow \psi = 0 \Rightarrow 0 = 1000 + 120t - 4{,}9t^2 \Rightarrow t_\pm = \dfrac{120 \pm \sqrt{120^2 + (4\cdot 4{,}9\cdot 1000)}}{9{,}8}$

$\Rightarrow t_+ = 31.0\,s$ Αποδεκτή λύση
$t_- = -6.57\,s$ Μη αποδεκτή λύση

$t_{ολ} = 10{,}0\,s + 31{,}0\,s = 41{,}0\,s$

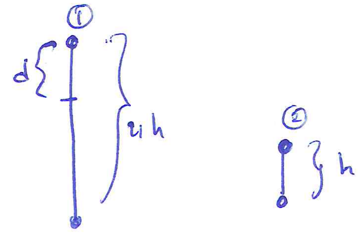
Αφού το μέγιστο ύψος ανήκει στο 2° Μέρος της κίνησης.

β) Για μέγιστο ύψος $\upsilon(t) = 0 \Rightarrow 120 - gt = 0 \Rightarrow 9.8\,t = 120 \Rightarrow t = 12.2\,s$
$\psi(t) = 1000 + 120t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \psi_{max} = \psi(12.2) = 1000 + 120\cdot 12{,}2 - 4.9\cdot(12{,}2)^2 = 1730\,m$

γ) $\upsilon(t) = 120 - gt$, $\upsilon(31{,}0) = 120 - (9.8\cdot 31) = -184\,m/s$

3. Μια μπάλα αφήνεται να πέσει στο έδαφος από ύψος $4h$. Όταν η μπάλα έχει καλύψει μία απόσταση d, μία δεύτερη μπάλα αφήνεται να πέσει στο έδαφος από ύψος h. Ποια πρέπει να είναι η απόσταση d (εκφρασμένη σε h) έτσι ώστε οι δύο μπάλες να φθάσουν στο έδαφος ταυτόχρονα;

)



Εξίσωση $1^{ης}$ μπάλας: $y_1 = \frac{1}{2} g t^2$

$\Rightarrow t_{4h} = \sqrt{\frac{2y_1}{g}} = \sqrt{\frac{8h}{g}}$ Χρόνος για να πέσει από ύψος 4h.

$= \sqrt{\frac{2d}{g}}$ Είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να διανύσει απόσταση d επομένως ο χρόνος για να πάει από αυτό το σημείο στο έδαφος είναι: $t_{4h} - t_d = \sqrt{\frac{8h}{g}} - \sqrt{\frac{2d}{g}} = \Delta t_1$

$t_h = \sqrt{\frac{2y_2}{g}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ είναι ο χρόνος που χρειάζεται να φτάσει στο έδαφος η $2^η$ μπάλα.

ια να φτάσουν ταυτόχρονα οι 2 μπάλες στο έδαφος πρέπει:

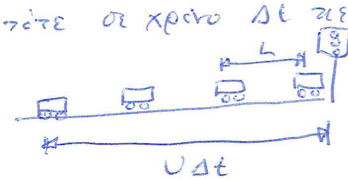
$\Delta t_1 = t_h \Rightarrow \sqrt{\frac{8h}{g}} - \sqrt{\frac{2d}{g}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \cancel{2}\sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{2d}{g}} = \cancel{\sqrt{\frac{2h}{g}}} \Rightarrow \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2d}{g}} \Rightarrow d = h$

4. Πώς εξαρτάται η κυκλοφοριακή συμφόρηση σε φώτα τροχαίας από την απόσταση μεταξύ των αυτοκινήτων την ώρα που περνούν από τα φώτα τροχαίας;

4) Για να υπάρχει κυκλοφοριακή συμφώρηση πρέπει ο ρυθμός των αυτοκινήτων που εισέρχονται στα φώτα τροχαίας να είναι μεγαλύτερος από τον ρυθμό των αυτοκινήτων που εξέρχονται. Επομένως η κυκλοφοριακή συμφώρηση εξαρτάται από το ρυθμό των αυτοκινήτων που περνούν από τα φώτα.

Ρυθμός εξερχόμενων αυτοκινήτων: $\dfrac{N_{\text{αυτοκινήτων}}}{\Delta t}$ → αριθμός αυτοκινήτων → αντίστοιχος χρόνος

Αν τα αυτοκίνητα που περνούν από τα φώτα κινούνται με ταχύτητα υ και έχουν απόσταση L μεταξύ τους τότε σε χρόνο Δt περνούν $\dfrac{\upsilon \Delta t}{L}$ αυτοκίνητα.



Ο ρυθμός εξερχόμενων αυτοκινήτων δίνεται από την έκφραση $\dfrac{\upsilon \Delta t}{L}\dfrac{1}{\Delta t} = \dfrac{\upsilon}{L}$

Επομένως με μικρότερη απόσταση μεταξύ των αυτοκινήτων όταν περνούν από τα φώτα η κυκλοφοριακή συμφώριση μειώνεται.

5. Ένα τρενάκι του Luna park στην βάση ενός ανηφορικού λόφου αφήνεται να κινηθεί ελεύθερο υπό την επίδραση μόνο της βαρύτητας. Η αρχική του ταχύτητα είναι 30m/s και η επιτάχυνσή του συνάρτησει του χρόνου δίνεται από την έκφραση: a=2t-12 όπου t ο χρόνος και a η επιτάχυνση σε μονάδες SI. Ο τύπος της επιτάχυνσης ισχύει για θετικές μόνο ταχύτητες του τρένου. (α) Σε ποια χρονική στιγμή το τρενάκι φτάνει στην μέγιστη απόσταση από το σημείο στο οποίο ήταν τη χρονική στιγμή t=0; (β) Ποια είναι η μέγιστη απόσταση; (γ) Περιγράψτε ποιοτικά (χωρίς να γίνουν οι πράξεις πλήρως) πώς θα βρίσκατε την ελάχιστη αρχική ταχύτητα που πρέπει να έχει το τρενάκι ώστε να καταφέρει να τερματίσει. (δ) Γιατί αυτό το τρενάκι δεν μπορεί να είναι στην επιφάνεια της γης;

<u>Υπόδειξη:</u> Για να μπορέσει να τερματίσει το τρενάκι πρέπει να φτάσει στο σημείο όπου η επιτάχυνση γίνεται θετική.

α) Μέγιστη απόσταση ⇒ $U = 0$

$$U = U_0 + \int_0^t a(t')\,dt' = U_0 + \int_0^t (2t' - 12)\,dt = t^2 - 12t + 30$$

$$U(t_m) = 0 \Rightarrow t_m^2 - 12t_m + 30 = 0 \Rightarrow t = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 30}}{2} = 6 \pm \sqrt{6}$$

Η ταχύτητα μηδενίζεται σε χρόνο $6 - \sqrt{6} = 3{,}55\,s$

β) $$x(t) = x_0 + \int_0^t dt'\,U(t') = 0 + \int_0^{t_m} dt'\,(t'^2 - 12t' + 30) = \frac{t_m^3}{3} - \frac{12 t_m^2}{2} + 30 t_m$$

$$= 45{,}8\,m$$

γ) Από τον τύπο για την επιτάχυνση $a = (2t - 12)$ μπορούμε να βρούμε την κλίση του λόφου συναρτήσει της απόστασης. Από την κλίση μπορούμε να βρούμε την νέα επιτάχυνση $a'(t)$ για ένα τρενάκι με αρχική ταχύτητα U_0 (η επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου εξαρτάται από την αρχική ταχύτητα ενώ η επιτάχυνση συναρτήσει της θέσης εξαρτάται μόνο από την κλίση του λόφου). Αφού βρούμε την νέα $a'(t)$ επιβάλλουμε η ταχύτητα του τρένου να μηδενίζεται την χρονική στιγμή που μηδενίζεται η επιτάχυνση (αλλάζει πρόσημο) και έτσι βρίσκουμε την τιμή της U_0.

δ) Στην γη η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει μέτρο $9{,}8\,m/s^2$ επομένως σε ένα λόφο η επιτάχυνση μπορεί να φτάσει μέχρι $9{,}8\,m/s^2$ (όταν ο λόφος είναι κατακόρυφος). Για $t=0$ η επιτάχυνση του τρένου είναι $-12\,m/s^2$ που είναι μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή από την επιτάχυνση της βαρύτητας.

6. Χρησιμοποιώντας τη διανυσματική μορφή του 2ου νόμου του Νεύτωνα στις 2 διαστάσεις (x,y) δείξτε ότι στην περίπτωση που η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα είναι ανεξάρτητη των συντεταγμένων x,y και των ταχυτήτων u_x , u_y του σώματος η κίνηση του σώματος στην κάθε διεύθυνση είναι ανεξάρτητη από την κίνηση του στην άλλη διεύθυνση. Τι γίνεται στην περίπτωση που η δύναμη εξαρτάται από τις συντεταγμένες x,y ή τις αντίστοιχες ταχύτητες;

<u>Υπόδειξη:</u> Για να δείξετε ότι η κίνηση στην μια διεύθυνση είναι ανεξάρτητη από την άλλη αρκεί να βρείτε την έκφραση για την θέση και την ταχύτητα.

6) $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F_x = ma_x$

$F_\psi = ma_\psi$

Για την x διεύθυνση.

$$a_x = \frac{dU_x}{dt} \Rightarrow dU_x = a_x\,dt \Rightarrow \int_{U_{0x}}^{U_x} dU_x = \int_{t_0}^{t} a_x\,dt \Rightarrow U_x - U_{0x} = \int_{t_0}^{t} a_x\,dt$$

$$\Rightarrow U_x = U_{0x} + \int_{t_0}^{t} \frac{F_x}{m}\,dt$$

Αν F_x δεν εξαρτάται από το ψ, U_ψ τότε ούτε η U_x εξαρτάται από τα ψ, U_ψ.

$$U_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = U_x\,dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} U_x\,dt \Rightarrow x - x_0 = \int_{t_0}^{t} U_x\,dt$$

$$U_x = U_{0x} + \int_{t_0}^{t} \frac{F_x}{m}\,dt \quad (1)$$

$$\Rightarrow x = x_0 + \int_{t_0}^{t} dt \left(\int_{t_0}^{t} dt' \frac{F_x}{m} + U_{0x} \right) \quad (2)$$

Όπως πριν αν F_x δεν εξαρτάται από ψ, U_ψ τότε ούτε το x εξαρτάται από $\psi\ U_\psi$.

Αφού x, U_x δεν εξαρτώνται από το $\psi\ U_\psi$ τότε η κίνηση στην διεύθυνση x είναι ανεξάρτητη από την κίνηση στην διεύθυνση ψ. Με όμοιο τρόπο μπορεί να δειχτεί ότι η κίνηση στην διεύθυνση είναι ανεξάρτητη από την κίνηση στην διεύθυνση x.

Αν η $\vec{F}$ εξαρτάται από x, U_x, ψ, U_ψ τότε η κίνηση στις 2 διευθύνσεις (x, ψ) δεν είναι ανεξάρτητη, όπως φαίνεται από τους τύπους (1), (2).