Σειρά	Θέση

ΦΥΣ. 131

2η Πρόοδος: 5-Νοεμβρίου-2006

Πριν αρχίσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητας).

Ονοματεπώνυμο	Αριθμός ταυτότητας

Σας δίνονται 10 ισότιμα προβλήματα (20 βαθμοί το καθένα) και πρέπει να απαντήσετε σε όλα.

Προσπαθήστε να δείξετε την σκέψη σας και να εξηγήσετε όσο το δυνατόν πιο καθαρά για ποιό λόγο κάνετε ότι γράφετε. Γράψτε καθαρά διαγράμματα με δυνάμεις, ταχύτητες, επιταχύνσεις.

ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ ΕΙΔΟΣ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ ΟΠΩΣ ΕΠΙΣΗΣ ΧΡΗΣΗ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ, ΒΙΒΛΙΩΝ, ΚΙΝΗΤΩΝ Η ΟΤΙΔΗΠΟΤΕ ΑΛΛΟ.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. Καλή Επιτυχία

Τύποι που μπορεί να φανούν χρήσιμοι

Γραμμική κίνηση:

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Στροφική κίνηση:

1περιστροφή = 360° = 2π ακτίνια

$$\theta = \frac{s}{r}$$

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad \overline{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$\upsilon_{\varepsilon\phi} = \omega R$$

$$a_{\varepsilon\phi} = \alpha R$$

$$a_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho} = \frac{\upsilon_{\varepsilon\phi}^2}{R} = \omega^2 R$$

$$\vec{a}_{\gamma\rho\alpha\mu} = \vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} + \vec{a}_{\varepsilon\phi}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi R}{\upsilon_{\varepsilon\phi}}$$

Περιστροφή σώματος:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

$$E_{\kappa\iota\nu}^{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho o\varphi\iota\kappa\acute{\eta}} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = I\alpha$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$L = I\omega$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Απομονωμένο σύστημα: $L_i = L_f$

Έργο – Ενέργεια:

Έργο σταθερή δύναμης: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

Έργο μεταβαλλόμενης δύναμης: $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$

$$\vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}}$$

$$\Delta U = -\int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}kx^2$$

$U_g = mgh$ (h<<$R_{\gamma\eta\varsigma}$)

$$W = \Delta E_{\kappa\iota\nu.}$$

$W = -\Delta U$ (για συντηρητικές δυνάμεις)

$$E_{\mu\eta\chi.} = E_{\kappa\iota\nu.} + U$$

$$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

$W = \Delta E_{\mu\eta\chi.}$ (για μη συντηρητικές δυνάμεις)

$$\vec{F}_{\varepsilon\lambda} = -k\vec{x}$$

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$$

Ορμή – Ώθηση - Κρούσεις:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$$

Ώθηση: $\vec{I} = \int F dt = \Delta\vec{p}$

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Απομονωμένο σύστημα: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$

Ελαστική κρούση: $\Delta\vec{p} = 0, \ \Delta E = 0$

Μη ελαστική κρούση: $\Delta\vec{p} = 0, \Delta E \neq 0$

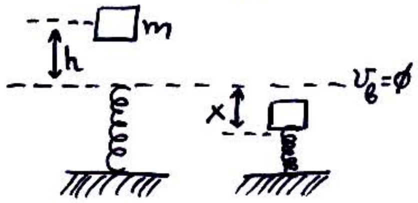
Ελαστική κρούση σε 1-Δ: $\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2 = -(\vec{\upsilon}_1' - \vec{\upsilon}_2')$

$x_{CM} = \frac{1}{M_{o\lambda}}\sum_i m x_i$ (κέντρο μάζας)

$\vec{\upsilon}_{CM} = \frac{1}{M_{o\lambda}}\sum_i m\upsilon_i$ (ταχύτητα κέντρου μάζας)

$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} = M\vec{a}_{CM}$ (δύναμη – επιτάχυνση CM)

1. Μια μάζα m αφήνεται από ύψος h πάνω από ένα κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς ελατηρίου k. Να βρεθεί το σημείο στο οποίο η μάζα φθάνει σε ηρεμία. **(20π)**



Όλες οι ασκούμενες δυνάμεις είναι συντηρητικές όποτε η μηχανική ενέργεια διατηρείται:

$$E^i_{μηχ} = E^f_{μηχ} \Rightarrow U^i_β + E^i_{κιν} + U^i_{ελ} = U^f_β + E^f_{κιν} + U^f_{ελ} \quad (1)$$

Αλλά $υ^i = 0 = υ^f \Rightarrow E^i_{κιν} = E^f_{κιν} = \emptyset$

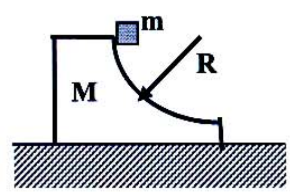
$U^i_{ελ} = \emptyset$ το ελατήριο στο φυσικό του μήκος

Οπότε $(1) \Rightarrow mgh = mg(-x) + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 - mgx - mgh = 0 \Rightarrow$

$$x_{1,2} = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 4\left(\frac{1}{2}k\right)(mgh)}}{k}$$

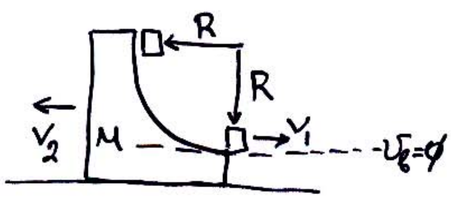
Θέλουμε τη θετική λύση οπότε $\boxed{x = \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}\right)}$

2. Ένα τούβλο σχήματος τεταρτημορίου (όπως στο διπλανό σχήμα) ακτίνας R, έχει μάζα M και βρίσκεται πάνω σε μια λεία επιφάνεια. Ένα μικρότερο τούβλο μάζας m αφήνεται από την κορυφή του μεγαλύτερου τούβλου και γλιστρά προς τα κάτω χωρίς τριβές. Να βρεθούν οι ταχύτητες των δύο τούβλων ως προς το έδαφος την στιγμή που χάνουν επαφή το ένα με το άλλο. **(20π)**



Από διατήρηση της ενέργειας έχουμε:

$$E^i_{μηχ} = E^f_{μηχ} \Rightarrow U^i_β + E^i_{κιν} = U^f_β + E^{fm}_{κιν} + E^{fM}_{κιν} \Rightarrow \boxed{mgR = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2} \quad (1)$$



Δεν υπάρχει τριβή και επομένως το σύστημα των δύο μαζών m-M είναι απομονωμένο και έχουμε διατήρηση της ορμής:

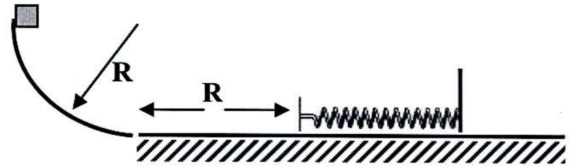
$$P^i = P^f \Rightarrow \emptyset + \emptyset = mV_1 - MV_2 \Rightarrow \boxed{V_2 = \frac{m}{M}V_1} \quad (2)$$

Αντικατάσταση της (2) στην (1) δίνει:

$$\cancel{m}gR = \frac{1}{2}\cancel{m}V_1^2 + \frac{1}{2}\cancel{M}\frac{m^{\cancel{2}}}{M^{\cancel{2}}}V_1^2 \Rightarrow gR = \frac{1}{2}V_1^2\left(1 + \frac{m}{M}\right) \Rightarrow V_1^2 = \frac{2gR}{1 + m/M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_1 = \sqrt{\frac{2gR}{1 + m/M}}} \quad \text{και από (2)} \quad \boxed{V_2 = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2gR}{1 + m/M}}}$$

3. Μια μάζα m γλιστρά από την κατάσταση της ηρεμίας προς το κάτω μέρος ενός σωλήνα εσωτερικής ακτίνας R και εισέρχεται σε μια οριζόντια επιφάνεια με συντελεστή τριβής μ=1/4. Σε απόσταση R από τη βάση του σωλήνα υπάρχει ένα ελατήριο το οποίο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Όταν η μάζα φθάνει σε ηρεμία, το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά ένα μήκος R. Ποια είναι η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στη μάζα στο σημείο αυτό; **(20 π)**



Από διατήρηση της ολικής ενέργειας έχουμε: $U_g^i + U_{ελ}^i + E_{κιν}^i = U_g^f + U_{ελ}^f + E_{κιν}^f + W_{τρ}$

Αλλά $v_i = v_f = \emptyset$ (το σώμα ξεκινά από ηρεμία κ καταλήγει σε ηρεμία)

$U_{ελ}^i = \emptyset$ κ $U_g^f = 0$. οπότε έχουμε: $W_{τρ} = F \cdot x = \mu m g \cdot 2R$

$$mg\cancel{R} = \frac{1}{2}kR^{\cancel{2}} + \mu mg(2\cancel{R}) \Rightarrow mg(1-2\mu) = \frac{1}{2}kR \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg\left(1-\cancel{2}\frac{1}{\cancel{4}_2}\right) = \frac{1}{2}kR \Rightarrow \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}mg = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}kR \Rightarrow mg = kR$$

Αλλά η δύναμη του ελατηρίου είναι σύμφωνα με το νόμο του Hook: $F = -kR$

$\Rightarrow \boxed{F_{ελ} = -mg}$ με φορά από δεξιά προς τα αριστερά.

4. Αν η ακτίνα της γης ελαττώνονταν κατά 0.5% πόσο θα άλλαζε η διάρκεια μιας ημέρας; Θεωρήστε ότι η γη είναι μια σφαίρα με ροπή αδράνειας $I = 2/5\ mR^2$. **(20π)**

Δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές στο σύστημα και επομένως $\tau = \frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow$

η στροφορμή διατηρείται: $L_{γη}^i = L_{γη}^f \Rightarrow I_{γη}^i \omega_i = I_{γη}^f \omega_f$

Αφού η ακτίνα της γης αλλάζει, τότε η ροπή αδράνειάς της αλλάζει

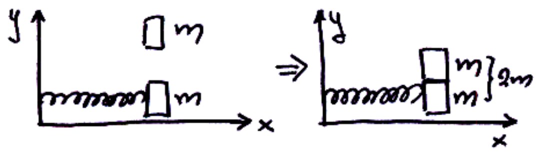
$$I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow \cancel{\frac{2}{5}}\cancel{m_{γη}}R_i^2\left(\frac{\cancel{2\pi}}{T_i}\right) = \cancel{\frac{2}{5}}\cancel{m_{γη}}R_f^2\left(\frac{\cancel{2\pi}}{T_f}\right) \Rightarrow \frac{R_i^2}{T_i} = \frac{R_f^2}{T_f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_f}{T_i} = \left(\frac{R_f}{R_i}\right)^2 \Rightarrow \frac{T_i - T_f}{T_i} = \left(\frac{R_i^2 - R_f^2}{R_i^2}\right) \Rightarrow \frac{\Delta T}{T_i} = \left(\frac{(R_i - R_f)(R_i + R_f)}{R_i^2}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta T = T_i\left(\frac{9.975\cdot 10^{-3}\cancel{R_i^2}}{\cancel{R_i^2}}\right) \Rightarrow \Delta T = T_i \cdot 9.975\cdot 10^{-3} \Rightarrow \Delta T = \underbrace{86400}_{\text{sec μιας ημέρας}} \cdot 9.975 \cdot 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta T = 861.84ec}$$

5. Μια μάζα m, η οποία είναι εξαρτημένη από ένα ελατήριο σταθεράς ελατηρίου k, ταλαντώνεται πάνω σε ένα οριζόντιο τραπέζι, με πλάτος ταλάντωσης A. Τη χρονική στιγμή που το ελατήριο έχει επιμήκυνση A/2, μια δεύτερη μάζα επίσης m πέφτει κατακόρυφα πάνω στην πρώτη μάζα και αμέσως κολλά πάνω της. Ποιο θα είναι το πλάτος της κίνησης των δύο μαζών; **(20π)**



Για τη μάζα που είναι εξαρτημένη στο ελατήριο εφαρμόζουμε διατήρηση ενέργειας στις θέσεις του μέγιστου πλάτους (A) και της θέσης $\frac{A}{2}$ για να βρούμε τη ταχύτητα της πριν ακριβώς τη κρούση: $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow \boxed{v_0^2 = \frac{3k}{4m}A^2}$ (1)

Η κρούση είναι πλαστική, και το σύστημα κινείται στη x-διεύθυνση. Διατήρηση της ορμής ⇒

$\Rightarrow P_x^i = P_x^f \Rightarrow \cancel{m}v_0 + 0 = 2\cancel{m}v' \Rightarrow \boxed{v' = \frac{v_0}{2}}$ (2)

Εφαρμόζουμε και πάλι διατήρηση της ενέργειας μεταξύ της θέσης ακριβώς μετά τη κρούση και της θέσης του νέου πλάτους ταλάντωσης (B) οπότε:

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}kB^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}(2m)v'^2 \overset{(2)}{\Rightarrow} kB^2 = \frac{kA^2}{4} + \cancel{2}m\frac{v_0^2}{\cancel{4}\,2} \overset{(1)}{\Rightarrow} \cancel{k}B^2 = \frac{\cancel{k}A^2}{4} + \cancel{m}\frac{3\cancel{k}}{8\cancel{m}}A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{3A^2}{8} \Rightarrow B^2 = \frac{5}{8}A^2 \Rightarrow \boxed{B = A\sqrt{\frac{5}{8}}}$$

6. Κάποιος διαστημικός σταθμός είναι φτιαγμένος να μοιάζει σαν μιά τεράστια ρόδα ακτίνας 100m και ροπή αδράνειας $5.00\times10^8 Kg\cdot m^2$. Το πλήρωμα αποτελούμενο από 150 άτομα ζει στο στεφάνι αυτής της τεράστιας ρόδας. Η περιστροφή του σταθμού δημιουργεί μια επιτάχυνση ίση με g. Όταν 100 άτομα μετακινούνται στο κέντρο του διαστημικού σταθμού για κάποια γιορτή, η γωνιακή ταχύτητα αλλάζει. Ποιά είναι η επιτάχυνση που αισθάνονται τά μέλη του πληρώματος που παραμένουν στο στεφάνι του σταθμού. Υποθέστε ότι η μέση μάζα κάθε μέλους του πληρώματος είναι 60Kg. (**20 π**).

Δεν υπάρχουν δυνάμεις που να προκαλούν εξωτερικές ροπές στο σύστημα. Επομένως η στροφορμή διατηρείται.

$L_i = L_f \Rightarrow I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow \boxed{\omega_f = \frac{I_i}{I_f}\omega_i}$ (1)

Αλλά $I_i = I_{ρόδας} + I_{πληρ.} = I_{ρόδας} + \sum_{i=1}^{150} m_i \cdot R^2 \Rightarrow I_i = 5\cdot10^8 + 150\cdot60\cdot100^2 = 5.9\cdot10^8$

$I_f = I_{ρόδας} + I_{πληρ} = 5\cdot10^8 + \sum_{i=1}^{50} m_i R^2 \Rightarrow I_f = 5\cdot10^8 + 50\cdot60\cdot100^2 = 5.3\cdot10^8$

Τα 100 άτομα που κινούνται στο κέντρο του διαστημόπλοιου έχουν R=0 οπότε $I_{100} = \varnothing$.

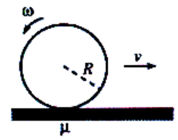
Επομένως $\boxed{\omega_f = \frac{5.9}{5.3}\omega_i}$ (2)

Ξέρουμε ότι η αρχική επιτάχυνση που αισθάνονται τα μέλη του πληρώματος είναι g. Δηλαδή $\Sigma F_r = ma_\kappa = mg \Rightarrow \cancel{m}\frac{v^2}{R} = \cancel{m}g \Rightarrow \omega_i^2 R = g \Rightarrow \boxed{\omega_i = \sqrt{g/R}}$ (3)

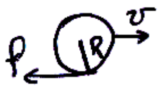
Άρα η (2) γίνεται: $\omega_f = \frac{5.9}{5.3}\sqrt{\frac{g}{R}} = \boxed{1.11\sqrt{\frac{g}{R}}}$ (4)

Επομένως η επιτάχυνση που θα αισθάνονται τα 50 μέλη είναι: $a_r^f = \omega_f^2 R \overset{(4)}{\Rightarrow} \boxed{a_r^f = 1.23g}$

7. Ένα νόμισμα ακτίνας R (με $I = (1/2)\ MR^2$) στέκεται κατακόρυφα πάνω σε ένα τραπέζι. Εκτοξεύεται προς τα δεξιά με αρχική γραμμική ταχύτητα υ και αρχική γωνιακή ταχύτητα ω με διεύθυνση αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού (ανάποδο σπιν δηλαδή). Έστω ο συντελεστής της κινητικής τριβής μεταξύ του νομίσματος και του τραπεζιού είναι μ_κ. Ποιες πρέπει να είναι οι τιμές των υ και ω ώστε το νόμισμα να έρθει σε ηρεμία τόσο μεταφορική όσο και περιστροφική σε απόσταση d από το σημείο απο το οποίο ξεκίνησε; **(20π)**



Η δύναμη που επιβραδύνει το νόμισμα είναι η δύναμη της τριβής. Θεωρώντας v θετική



$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow -f_T = ma_x \Rightarrow -\mu \cancel{m} g = \cancel{m} a_x \Rightarrow \boxed{a_x = -\mu g}$ (1)

$d = \frac{1}{2} a_x t_{ol}^2 \Rightarrow t_{ol} = \sqrt{\frac{2d}{a_x}}$ οπότε $\cancel{v_f}^{\,0} = v_0 - a_x t_{ol} \Rightarrow v_0 = a_x t_{ol} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2 d a_x}$

$\Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{2\mu g d}}$

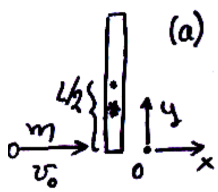
Η ροπή της f_T αλλάζει τη γωνιακή ταχύτητα

Θεωρώντας θετική τη φορά των δεικτών του ρολογιού (οπότε $\omega_0 < 0$) έχουμε:

$\tau = I\alpha \Rightarrow f_T \cdot R = I\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \mu m g R\, dt = I\, d\omega \Rightarrow \int_0^{t_{ol}} \mu m g R\, dt = I \int_{-\omega_0}^{0} d\omega \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu m g R\, t_{ol} = I(0-(-\omega_0)) \Rightarrow \mu m g R \sqrt{\frac{2d}{\mu g}} = I\omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{\sqrt{2d\mu g}\,\cancel{Rm}}{\frac{1}{2}\cancel{m}R^{\cancel{2}}} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{2\sqrt{2\mu g d}}{R}}$

8. Ένα αγόρι μάζας m τρέχει πάνω σε πάγο με ταχύτητα υ_0 και ανεβαίνει στην άκρη μιας σανίδας μήκους l και μάζας m που βρίσκεται κάθετα στη διεύθυνση της κίνησής του. Να βρεθεί η ταχύτητα και η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος μετά την κρούση. **(12π)** Ένα σημείο βρίσκεται σε ηρεμία ακριβώς μετά την σύγκρουση. Ποιό σημείο είναι αυτό; **(8π)** (Η ροπή αδράνειας ράβδου μάζας M και μήκους L ως προς CM της είναι $I = (1/12)ML^2$).



(α) Η άσκηση είναι ίδια με αυτή των διαλέξεων (γίγαντας-στύλος). Τα 2 σώματα έχουν ίδια μάζα οπότε μετά την κρούση που είναι πλαστική, το κέντρο μάζας θα είναι διαφορετικό. Άρα θα πρέπει να υπολογίσουμε το νέο κέντρο μάζας ώστε να θεωρήσουμε περιστροφές ως προς αυτό.

CM: $y_{cm} = \frac{m_{ay}\cancel{y_{ay}}^{\,0} + m_p \cdot y^p_{cm}}{m+m} = \frac{0 + \cancel{m}\frac{L}{2}}{2\cancel{m}} \Rightarrow \boxed{y_{cm} = \frac{L}{4}}$ θέση του νέου CM.

Θεώρημα παρ/λων αξόνων: $I'_{pal} = I_{CM} + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 \Rightarrow I'_{pal} = \frac{1}{12}mL^2 + m\frac{L^2}{16} \Rightarrow \boxed{I'_p = \frac{7}{48}mL^2}$

$I_{ay} = m\left(\frac{L}{4}\right)^2 \Rightarrow \boxed{I_{ay} = m\frac{L^2}{16}}$ Επομένως $I_{ol} = I'_{pal} + I_{ay} \Rightarrow \boxed{I_{ol} = \frac{5}{24}mL^2}$

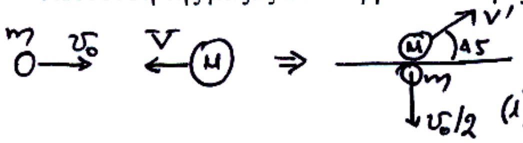
Η κρούση είναι πλαστική και δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις, οπότε η ορμή διατηρείται:

$P_i = P_f \Rightarrow \cancel{m} v_a = \overbrace{(m+m)}^{2m_a} v_\Sigma \Rightarrow \boxed{v_\Sigma = \frac{v_a}{2}}$

Από διατήρηση στροφορμής: $L_i = L_f \Rightarrow \cancel{m_a} v_a \frac{\cancel{L}}{4} = \frac{5}{24}\cancel{m}L^{\cancel{2}}\omega \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{6}{5}\frac{v_0}{L}}$

(β) Αν το ακίνητο σημείο βρίσκεται απόσταση r από το CM, τότε το CM θα έχει v_{CM} ως προς το σημείο αυτό: $v_{CM} = \omega r \Rightarrow r = \frac{v_{CM}}{\omega} = \frac{\cancel{v_0}/2}{6\cancel{v_0}/5L} \Rightarrow \boxed{r = \frac{5}{12}L}$ ως προς το CM.

9. Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται οριζόντια και προς τα δεξιά με αρχική ταχύτητα υ_0 και συγκρούεται τέλεια ελαστικά με άλλο σωματίδιο άγνωστης μάζας M το οποίο κινείται στην αντίθετη διεύθυνση. Μετά τη σύγκρουση η μάζα m έχει ταχύτητα $\upsilon_0/2$ και διεύθυνση κάθετη στην αρχική διεύθυνση κίνησης, ενώ η μάζα M κινείται με γωνία 45^o ως προς την αρχική διεύθυνση της μάζας m. Να βρεθεί ο λόγος m/M. **(20 π)**



Απο διατήρηση της ορμής στις 2 διευθύνσεις

(1) $m v_0^x - MV^x = MV'\cos 45^\circ \Rightarrow \boxed{m v_0 - MV = MV'\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(2) $P_y^i = P_y^f \Rightarrow 0 = m\frac{v_0}{2} - MV'\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{MV'\sqrt{2} = m v_0}$

Αφού έχουμε ελαστική κρούση η κινητική ενέργεια διατηρείται:

$\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} m \frac{v_0^2}{4} + \frac{1}{2} M V'^2$ (3)

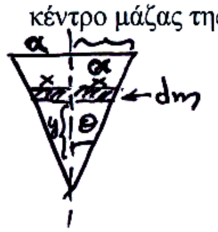
Από (1)∧(2) $\Rightarrow MV = \frac{1}{2} m v_0 \Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{2}\frac{m}{M} v_0}$ (4) ενώ η (2) $\Rightarrow \boxed{V' = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{m}{M} v_0}$

Αντικαθιστούμε στην (3) οπότε έχουμε:

$$\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m}\cancel{v_0^2} + \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{M}\frac{1}{4}\frac{m^{\cancel{2}}}{M^{\cancel{2}}}\cancel{v_0^2} = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m}\frac{\cancel{v_0^2}}{4} + \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{M}\frac{1}{2}\frac{m^{\cancel{2}}}{M^{\cancel{2}}}\cancel{v_0^2} \Rightarrow 1 + \frac{1}{4}\frac{m}{M} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{m}{M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\cancel{4}} = \frac{1}{\cancel{4}}\frac{m}{M} \Rightarrow \boxed{\frac{m}{M} = 3}$$

10. Να βρεθεί η ροπή αδράνειας ενός επίπεδου ισοσκελούς τριγώνου ως προς ένα άξονα ο οποίος διχοτομεί τη μη ίση γωνία. Το ύψος του τριγώνου είναι h, η μάζα του M και η διχοτομούμενη γωνία 2θ. Ίσως σας φανεί χρήσιμο ότι η ροπή αδράνειας μιας ράβδου μήκους L ως προς το κέντρο μάζας της είναι $I=(1/12)ML^2$. **(20π)**



Από το τρίγωνο έχουμε: $\frac{x}{y} = \tan\theta \Rightarrow \boxed{x = y\tan\theta.}$

Το τρίγωνο έχει εμβαδό $A = \frac{1}{2} h (2\alpha) = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2} h \cdot h\tan\theta \Rightarrow A = h^2\tan\theta$

Επομένως η επιφανειακή πυκνότητα θα είναι: $\sigma = \frac{M}{A} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{M}{h^2\tan\theta}}$

Θεωρούμε στοιχειώδεις οριζόντιες ράβδους πάχους dy και μήκους $2x = 2y\tan\theta$.

Η μάζα αυτής της στοιχειώδους ράβδου είναι: $dM = \sigma dA = \sigma\cdot(2x)dy \Rightarrow$

$$\Rightarrow dM = 2y\cancel{\tan\theta}\frac{M}{h^2\cancel{\tan\theta}}dy$$

Επομένως $I = \int dI = \int \frac{1}{12} dM (dl)^2 = \int \frac{1}{\cancel{12}_6}\cancel{2}y\frac{M}{h^2}dy\,(2x)^2 = \frac{M}{6h^2}\int 4x^2 y\,dy \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \frac{M}{3\cancel{6}h^2}\cancel{4}^2\int y^2\tan^2\theta\, y\,dy = \frac{2M\tan^2\theta}{3h^2}\int_0^h y^3 dy = \frac{\cancel{2}M\tan^2\theta}{3h^2}\frac{y^4}{\cancel{4}2}\Big|_0^h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{M\tan^2\theta}{6\cancel{h^2}}h^{\cancel{4}2} \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{6}Mh^2\tan\theta}$$