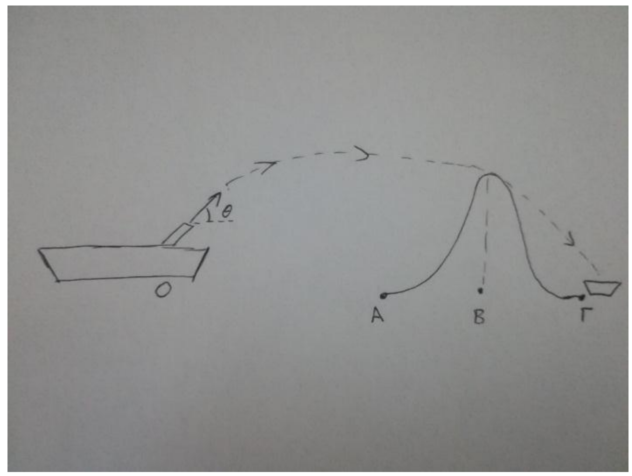
ΦΥΣ 111: ΓΕΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ 1

30/09/20 3^o Φροντιστήριο

Προβλήματα:

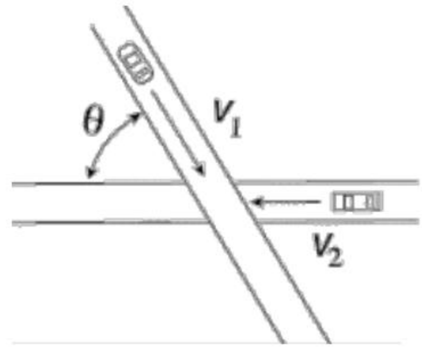
1. Ένα εχθρικό πλοίο βρίσκεται στην ανατολική ακτή (Γ) ενός ορεινού νησιού μήκους (ΑΓ = 2L). Το δικό μας πλοίο βρίσκεται σε ένα σημείο (Ο) που απέχει απόσταση (L) από την δυτική ακτή (Α) του νησιού. Το πλοίο μας εκτοξεύει ένα βλήμα σε γωνία (θ) από την οριζόντιο, όπου $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$, και κατορθώνει να βυθίσει το εχθρικό πλοίο, με το βλήμα του να περνάει ξυστά πάνω από την κορυφή του βουνού. Βρείτε: α) την αρχική ταχύτητα του βλήματος και β) το ύψος του βουνού.



2. Τη χρονική στιγμή t = 0s, στο πλανήτη Valcan, ένα βλήμα εκτοξεύεται με ταχύτητα v0 και γωνία θ πάνω από την οριζόντιο. Ο πλανήτης αυτός είναι αρκετά περίεργος γιατί η επιτάχυνση εξαιτίας της βαρύτητας αυξάνει γραμμικά συναρτήσει του χρόνου. Δηλαδή, $g(t)$ = bt, όπου b είναι μία γνωστή σταθερά. Ποια είναι η οριζόντια απόσταση που διανύει το βλήμα; Ποια πρέπει να είναι η γωνία θ ώστε η απόσταση αυτή να είναι μέγιστη; (Υπόδειξη: Για να παρουσιαστεί μέγιστο ή ελάχιστο σε μία ποσότητα θα πρέπει η παράγωγος της ποσότητας ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή να είναι μηδέν).

3. Ένα βλήμα εκτοξεύεται από το έδαφος με γωνία 12° πάνω από την οριζόντια διεύθυνση. Το βλήμα επιστρέφει και πάλι στο έδαφος. Ποιά θα πρέπει να είναι η γωνία βολής ώστε το βεληνεκές του βλήματος να διπλασιαστεί χωρίς να αλλάξει η ταχύτητα εκτόξευσης;

4. Δύο αυτοκίνητα πλησιάζουν σε μια διασταύρωση όπως στο σχήμα. Η ταχύτητα του ενός αυτοκινήτου είναι υ1 = 15m/s ενώ η ταχύτητα του δεύτερου αυτοκινήτου είναι υ2 = 25m/s. Η γωνία θ μεταξύ των δυο δρόμων είναι 54°. Ποιά είναι η σχετική ταχύτητα των δύο αυτοκινήτων;



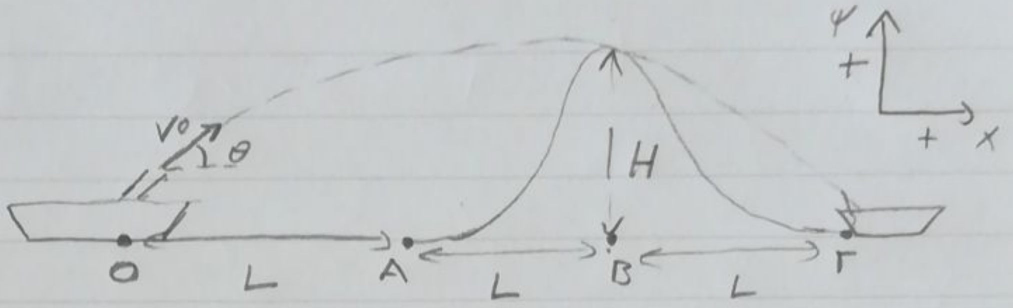
5. Δύο πλοία απομακρύνονται από την ακτή. Το ένα πλοίο κινείται βόρεια με ταχύτητα 3.0m/s ως προς την ακτή ενώ το δεύτερο πλοίο κινείται σχετικά με το πρώτο πλοίο με ταχύτητα 1.60m/s και διεύθυνση 300 βόρειο-ανατολικά. Ένα άτομο περπατά στο κατάστρωμα του δεύτερου πλοίου με διεύθυνση ανατολικά και με ταχύτητα 1.20m/s ως προς το δεύτερο πλοίο. Ποιά η ταχύτητα του ατόμου ως προς την ακτή;

6. Θεωρήστε ότι χιόνι πέφτει κατακόρυφα με σταθερή ταχύτητα υs. Ένα αυτοκίνητο κινείται στην οριζόντια διεύθυνση με σταθερή ταχύτητα υ. Δείξτε ότι σύμφωνα με τον οδηγό του αυτοκινήτου, οι νιφάδες του χιονιού εμφανίζονται να πέφτουν με γωνία θ ως προς τον κατακόρυφο άξονα που δίνεται από την εξίσωση tanθ = υ /υs .

Πρόβλημα 1

$\sin\theta = \frac{3}{5}$

$\cos\theta = \frac{4}{5}$



$\vec{\alpha} = -g\hat{\psi}$

$\vec{V} = v_0\cos\theta\,\hat{x} + v_0\sin\theta\,\hat{\psi} - gt\,\hat{\psi} = \frac{4}{5}v_0\hat{x} + \frac{3}{5}v_0\hat{\psi} - gt\hat{\psi}$

$\vec{S} = \frac{4}{5}v_0 t\,\hat{x} + \frac{3}{5}v_0 t\,\hat{\psi} - \frac{1}{2}gt^2\,\hat{\psi}$

α) $x = 3L \quad \psi = 0 \quad t = t_n$

$3L\hat{x} = \frac{4}{5}v_0 t_n\,\hat{x} + \frac{3}{5}v_0 t_n\,\hat{\psi} - \frac{1}{2}g t_n^2\,\hat{\psi} \Rightarrow$

• $\hat{x}$: $3L = \frac{4}{5}v_0 t_n \Rightarrow 3L = \frac{4}{5}v_0 \cdot \frac{6}{5}\frac{v_0}{g} \Rightarrow \boxed{v_0 = \frac{5}{\sqrt{8}}\sqrt{gL}}$

• $\hat{\psi}$: $\frac{3}{5}v_0 t_n - \frac{1}{2}g t_n^2 = 0 \Rightarrow t_n\left(\frac{3}{5}v_0 - \frac{1}{2}g t_n\right) = 0$

$\Rightarrow t_n = 0 \qquad \boxed{t_n = \frac{6}{5}\frac{v_0}{g}}$

β) $x = 2L \quad \psi = H \quad t = t_1$

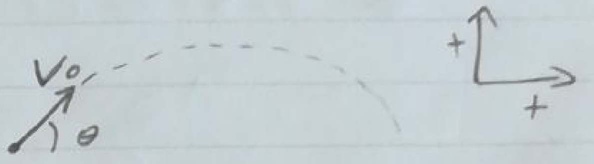
$2L\hat{x} + H\hat{\psi} = \frac{4}{5}v_0 t_1\,\hat{x} + \frac{3}{5}v_0 t_1\,\hat{\psi} - \frac{1}{2}g t_1^2\,\hat{\psi}$

• $\hat{x}$: $2L = \frac{4}{5}v_0 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{5L}{2v_0} = \frac{5L}{2}\cdot\frac{\sqrt{8}}{5\sqrt{gL}} \Rightarrow \boxed{t_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}}$

• $\hat{\psi}$: $H = \frac{3}{5}v_0 t_1 - \frac{1}{2}g t_1^2 \Rightarrow H = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{8}}\sqrt{gL}\cdot\sqrt{\frac{2L}{g}} - \frac{1}{2}g\cdot\frac{2L}{g}$

$\Rightarrow H = \frac{3L}{2} - L \Rightarrow \boxed{H = \frac{L}{2}}$

Πρόβλημα 2



$$g(t) = -\lambda t$$

- $g = \dfrac{dV_\psi}{dt} \Rightarrow dV_\psi = g\,dt \Rightarrow \displaystyle\int_{V_i}^{V_f} dV_\psi = -\lambda \int_{t_i=0}^{t_f} t\,dt$

$$\Rightarrow V_f^\psi - V_i^\psi = -\frac{\lambda t^2}{2}\Bigg|_{t_i=0}^{t_f=t} \Rightarrow V_f^\psi = V_i^\psi - \frac{1}{2}\lambda t^2$$

$$\Rightarrow \boxed{V_\psi = V_0 \sin\theta - \frac{1}{2}\lambda t^2}$$

- $V_\psi = \dfrac{d\psi}{dt} \Rightarrow V_\psi\,dt = d\psi \Rightarrow \displaystyle\int_{t_i}^{t_f} V_\psi\,dt = \int_{\psi_i}^{\psi_f} d\psi$

$$\Rightarrow \int_{t_i}^{t_f} v_0 \sin\theta\,dt - \frac{1}{2}\lambda \int_{t_i}^{t_f} t^2\,dt = \psi_f - \cancel{\psi_i}^{\,0}$$

$$\Rightarrow v_0 \sin\theta\, t\Big|_{t_i=0}^{t_f=t} - \frac{1}{2}\lambda \frac{t^3}{3}\Bigg|_{t_i=0}^{t_f=t} = \psi_f$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{6}\lambda t^3}$$

$$\boxed{V_x = v_0 \cos\theta} \qquad \boxed{x = v_0 \cos\theta\, t}$$

Για $\psi = 0$ και $t = t_\pi$

$$\Rightarrow v_0 \sin\theta\, t_\pi - \frac{\lambda}{6} t_\pi^3 = 0 \Rightarrow t_\pi\left(v_0 \sin\theta - \frac{\lambda}{6} t_\pi^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{t_\pi = \sqrt{\frac{6\, v_0 \sin\theta}{\lambda}}}$$

$$\Rightarrow \quad x_f = v_0 \cos\theta \sqrt{\frac{6 v_0 \sin\theta}{\lambda}}$$

$$A =$$

$$\Rightarrow \quad x_f = \left(v_0 \sqrt{\frac{6 v_0}{\lambda}} \right) \cos\theta \sqrt{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_f = A \cos\theta (\sin\theta)^{1/2}}$$

θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την απόσταση x_f ως προς την γωνία θ

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial x_f}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}\left[A \cos\theta (\sin\theta)^{1/2} \right] = 0$$

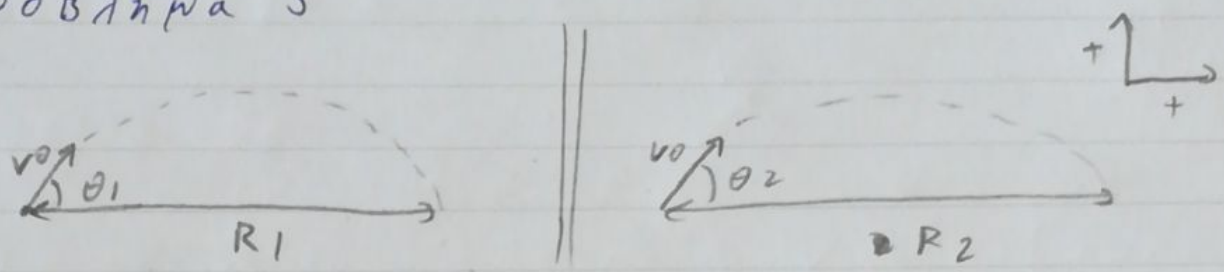
$$\Rightarrow A \left[-\sin\theta (\sin\theta)^{1/2} + \cos\theta \left(\frac{1}{2}\right)(\sin\theta)^{-1/2}(\cos\theta) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{A}{2 \cdot \sin\theta} \left[-2\sin^2\theta + \cos^2\theta \right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin^2\theta = \cos^2\theta \Rightarrow \tan^2\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta = 35,3^{\circ}}$$

Πρόβλημα 3



$$\vec{a} = -g\,\hat{\psi}$$

$$\vec{v} = v_0 \cos\theta_1\,\hat{x} + v_0 \sin\theta_1\,\hat{\psi} - g t\,\hat{\psi}$$

$$\vec{s} = v_0 \cos\theta_1\, t\,\hat{x} + v_0 \sin\theta_1\, t\,\hat{\psi} - \frac{1}{2} g t^2\,\hat{\psi}$$

- $x = R_1, \quad \psi = 0, \quad t = t_\pi$

$\hat{x}$: $\quad v_0 \cos\theta_1\, t_\pi = R_1 \Rightarrow R_1 = v_0 \cos\theta_1 \cdot \dfrac{2 v_0 \sin\theta_1}{g}$ *

$\hat{\psi}$: $\quad v_0 \sin\theta_1\, t_\pi - \frac{1}{2} g t_\pi^2 = 0 \Rightarrow t_\pi\left(v_0 \sin\theta_1 - \frac{1}{2} g t_\pi\right) = 0$

$$\Rightarrow t_\pi = 0 \quad , \quad \boxed{t_\pi = \frac{2 v_0 \sin\theta_1}{g}}$$

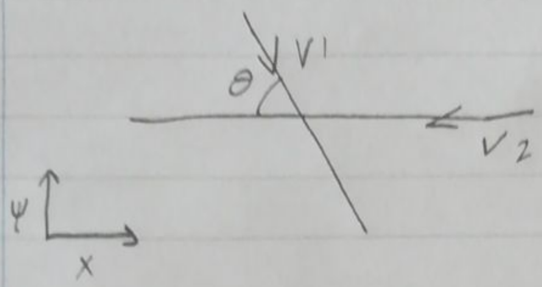
$$* \Rightarrow \boxed{R_1 = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_1)}{g}}$$

$$\Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{\sin(2\theta_2)}{\sin(2\theta_1)} = 2 \quad \Rightarrow \sin(2\theta_2) = 2\sin(2\theta_1)$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(2\sin(2\theta_1)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_2 = 27{,}2^\circ}$$

Πρόβλημα 4



$V1 = 8,82\hat{x} - 12,14\hat{\psi}$

$V2 = -25\hat{x}$

Σύστημα αναφοράς V2

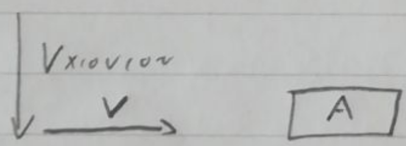
$\Rightarrow V2 = 0\ m/s$

$\Rightarrow V1 = 8,82\hat{x} + 25\hat{x} - 12,14\hat{\psi}$

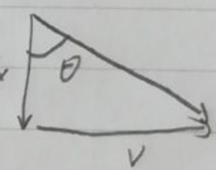
$\Rightarrow V1 = 33,82\hat{x} - 12,14\hat{\psi} \Rightarrow \boxed{|V1| = 35,93\ m/s}$

Πρόβλημα 6

Στο σύστημα αναφοράς του αυτοκινήτου έχουμε την παρακάτω εικόνα:



$\Rightarrow$



$$\Rightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{V}{V_x}}$$

Πρόβλημα 5

Β

Δ Α

Ν

\+ \+

Σύστημα Αναφοράς Ακτής

$v_1 = 3\,m/s$

$v_2 = ;$

Ακτή

$v = 0$

$$v_2 = v_2' + 3\,m/s\,\hat{\psi}$$

$$= 1{,}39\,m/s\,\hat{x} + 3{,}8\,m/s\,\hat{\psi}$$

Σύστημα αναφοράς 1

$v_2' = 1{,}6\,m/s$

θ

$v_1 = 0$

Ακτή

$v_a' = 3\,m/s$

$$\Rightarrow v_2' = 1{,}39\,m/s\,\hat{x} + 0{,}8\,m/s\,\hat{\psi}$$

Σύστημα αναφοράς 2

$v_1 = \ldots$

$v_2 = 0 \quad v_n' = 1{,}20\,m/s$

Ακτή

$V = \ldots$

Σύστημα αναφοράς Ακτής

$$\Rightarrow v_n = v_2 + v_n' = 2{,}59\,m/s\,\hat{x} + 3{,}8\,m/s\,\hat{\psi}$$

$$\Rightarrow \boxed{|v_n| = 4{,}6\,m/s}$$