

# Κινηματική



## Σύνοψη εννοιών

- Κινηματική: Περιγραφή της κίνησης ενός σώματος

⇒ Θέση και μετατόπιση

⇒ Ταχύτητα

- ◆ Μέση

- ◆ Στιγμιαία

⇒ Επιτάχυνση

- ◆ Μέση

- ◆ Στιγμιαία

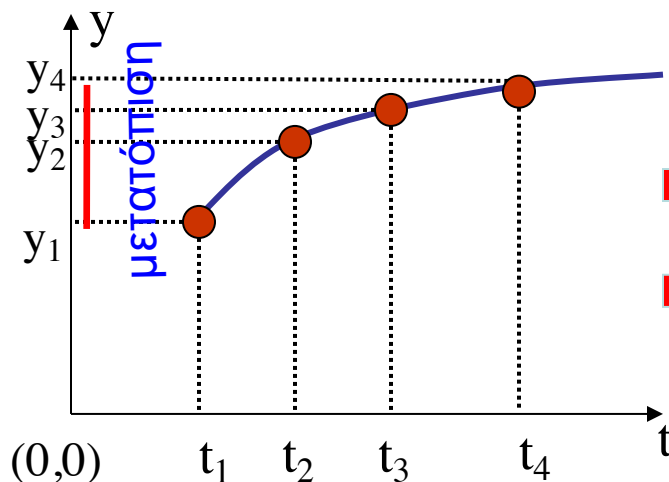
# Κίνηση - Τροχιές

- ❑ Πετάξετε ένα αντικείμενο στον αέρα και μετρήστε την θέση του σε πολλές διαδοχικές χρονικές στιγμές

Θέλουμε ένα ρολόι για μέτρηση χρόνου και μια μονάδα μήκους για μέτρηση του  $x$

Σύστημα συντεταγμένων – άξονας  $x$  (χρόνος) - άξονας  $y$  (θέση)

## Γράφημα θέσης-χρόνου



Αρχικός χρόνος:  $t_i$       Αρχική θέση:  $y_i$

Τελικός χρόνος:  $t_f$       Τελική θέση:  $y_f$

➡ Το γράφημα δίνει τη θέση συναρτήσει του χρόνου

➡ Μετατόπιση = αλλαγή στη θέση του σώματος

◆ Ανεξάρτητη της διαδρομής       $\Delta y = y_f - y_i$

Διαφορετική από το διάστημα,  $d$ ,  
που κάλυψε το σώμα

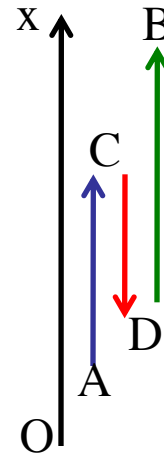
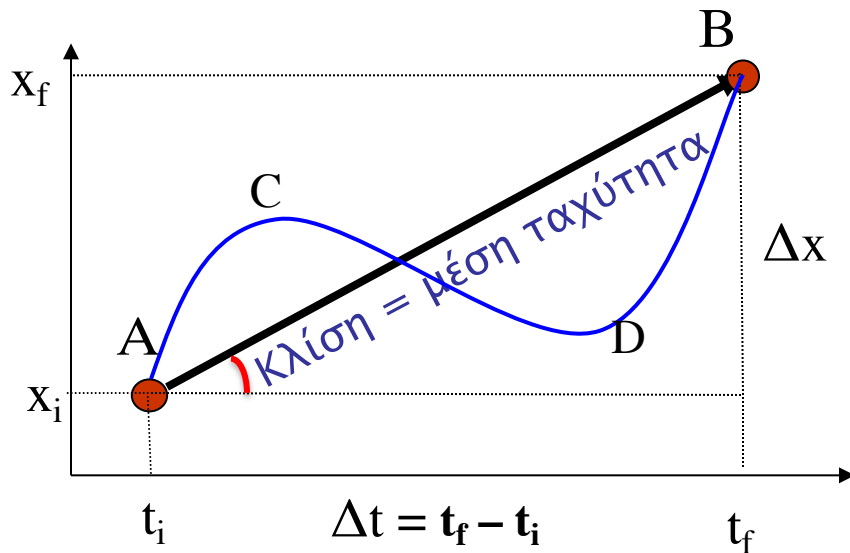
# Μέση ταχύτητα

Η **κλίση** του τμήματος AB δίνει τη μέση ταχύτητα

**Μέση ταχύτητα** πηγαίνοντας από το  $t_f \rightarrow t_i$ :

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

Μονάδες μέτρησης  $\frac{[L]}{[T]} = m / s$



➤ **διανυσματικό** μέγεθος

➤ Σε αντίθεση με

$$\langle v \rangle = \frac{\text{διαδρομή}}{\Delta t}$$

που είναι βαθμωτό

Η καμπύλη πρέπει να'ναι συνεχής, ομαλή και μονότιμη

Η μετατόπιση και η μέση ταχύτητα μπορεί να είναι θετικές ή αρνητικές

Θετική τιμή συνεπάγεται ότι το σώμα κινείται στη θετική διεύθυνση του  $x$

## Μετατόπιση και Μέση ταχύτητα

Στο αγώνισμα των 100m, καλύπτετε την απόσταση των 50m με μέση διανυσματική ταχύτητα 10m/s και τα επόμενα 50m με μέση διανυσματική ταχύτητα 8m/s.

Ποια η μέση διανυσματική ταχύτητά σας στο αγώνισμα αυτό;

Η ολική μετατόπιση είναι:  $\Delta x = x_2 - x_1 = 100m$

Χρειάζεται να βρούμε τον ολικό χρόνο κίνησης  $t_{ολ}$ :

είναι ο χρόνος  $\Delta t_1$  για τα πρώτα 50m και ο  $\Delta t_2$  για τα τελευταία 50m:  $\Delta t_{ολ} = \Delta t_1 + \Delta t_2$

Για να βρούμε τον χρόνο  $\Delta t_1$  και  $\Delta t_2$  χρησιμοποιούμε τον ορισμό της μέσης διανυσματικής ταχύτητας:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{\bar{v}}$$

Αντικαθιστώντας την ταχύτητα για τα πρώτα 50m και αυτή για τα τελευταία 50m έχουμε:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{\bar{v}_1} = \frac{50m}{10m/s} \Rightarrow \Delta t_1 = 5 \text{ sec} \quad \text{και αντίστοιχα:} \quad \Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{\bar{v}_2} = \frac{50m}{8m/s} = 6.25 \text{ sec}$$

Ο ολικός χρόνος κίνησης είναι:  $\Delta t_{ολ} = 5 + 6.25 = 11.25 \text{ sec}$

Η μέση διανυσματική ταχύτητα για το αγώνισμα αυτό ήταν:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{100\hat{x}}{11.25} \Rightarrow \vec{v} = (8.89m/sec)\hat{x}$$

## Μετατόπιση και Μέση ταχύτητα

Δυο τρένα που βρίσκονται σε απόσταση 75km κινούνται σε αντίθετη κατεύθυνση με μέση ταχύτητα 15km/h. Ένα πουλί πετά με μέση ταχύτητα 20km/h μεταξύ των 2 τρένων από το ένα στο άλλο και μετά επιστρέφει και πάλι προς το άλλο τρένο. Ποιά η απόσταση που θα έχει διανύσει το πουλί όταν τα 2 τρένα συναντηθούν;

Σύμφωνα με την σχέση που δίνει τη μέση ταχύτητα:  $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta s = \bar{v} \Delta t = (20 \text{ km} / \text{h}) \Delta t$

Ο συνολικός χρόνος που πετά το πουλί είναι ο χρόνος που περνά μέχρι τα 2 τρένα συναντηθούν

Τα 2 τρένα κινούνται αντίθετα με ταχύτητα 15km/h και επομένως η απόστασή τους ελαττώνεται με ρυθμό 30km ανά ώρα.

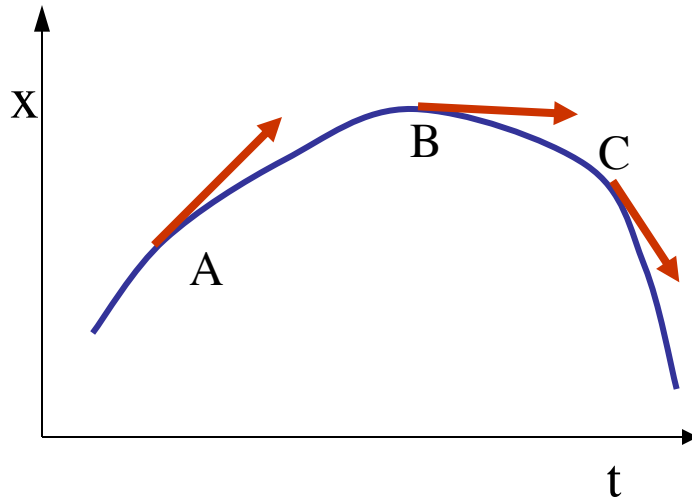
Άρα τα τρένα θα καλύψουν την αρχική τους απόσταση σε χρόνο:  $\Delta t = \frac{75 \text{ km}}{30 \text{ km} / \text{h}} = 2.5 \text{ h}$

Στο χρόνο αυτό το πουλί θα έχει καλύψει απόσταση:  $\Delta s = (20 \text{ km} / \text{h}) 2.5 \text{ h} = 50 \text{ km}$

# Στιγμιαία ταχύτητα

Ορίζεται ως  $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$  ← Διαφορικός λογισμός

$\vec{v}$  είναι η κλίση της εφαπτομένης του γραφήματος θέση-χρόνος στα διάφορα σημεία.



Στο A  $\frac{d\vec{x}}{dt} > 0 \Rightarrow \vec{v}_A > 0$

Στο B  $\frac{d\vec{x}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v}_B = 0$

Στο C  $\frac{d\vec{x}}{dt} < 0 \Rightarrow \vec{v}_C < 0$

➤ Η στιγμιαία ταχύτητα έχει ίδιο πρόσημο με το πρόσημο του  $\Delta x$

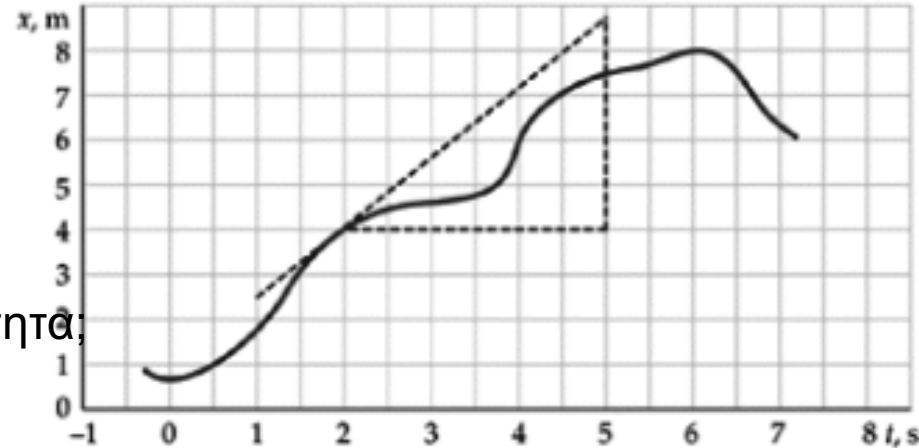
## Στιγμιαία ταχύτητα

Η θέση ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου δίνεται από το διπλανό γράφημα.

(α) Ποιά η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος τη στιγμή  $t = 2\text{sec}$ .

(β) Πότε το σώμα αποκτά την μέγιστη ταχύτητα;

(γ) Πότε η ταχύτητά του είναι 0;



Σχηματίζουμε την εφαπτομένη του γραφήματος θέσης-χρόνου για τη στιγμή  $t = 2\text{sec}$ .

Υπολογίζουμε την κλίση της ευθείας αυτής θεωρώντας 2 χρονικές στιγμές και βρίσκοντας τις αντίστοιχες τιμές του  $x$  που βρίσκονται πάνω στην εφαπτομένη

Έστω  $t_1=2\text{sec}$  και  $t_2=5\text{sec}$ . Οι θέσεις που αντιστοιχούν είναι  $x_1=4\text{m}$  και  $x_2=8.5\text{m}$

Η κλίση της ευθείας της εφαπτομένης ισούται με την στιγμιαία ταχύτητα οπότε:

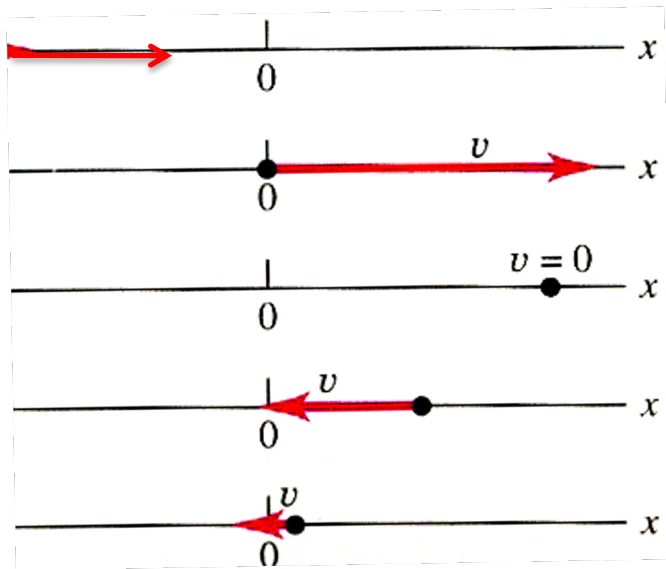
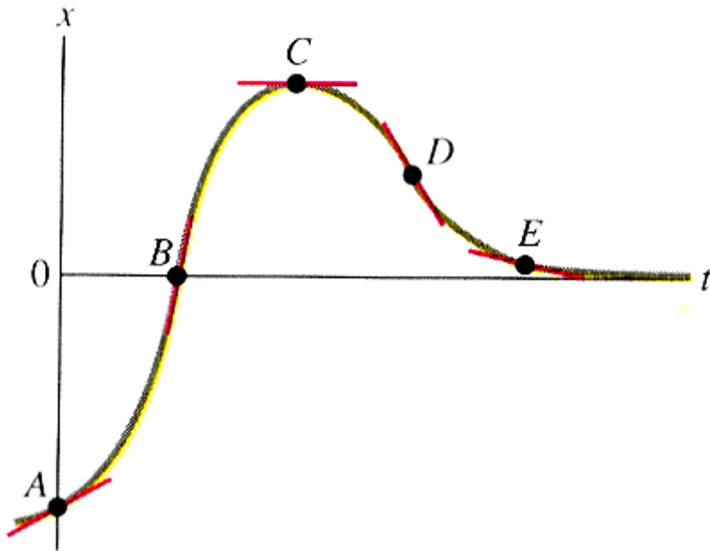
$$v(t=2) = \tan \varphi = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(8.5 - 4)\text{m}}{(5 - 2)\text{sec}} = 1.5\text{m/sec}$$

Από το γράφημα παρατηρούμε ότι η μέγιστη κλίση (επομένως και στιγμιαία ταχύτητα) εμφανίζεται για  $t=4\text{sec}$

Από το γράφημα παρατηρούμε ότι η κλίση (επομένως και στιγμιαία ταχύτητα) είναι 0 για  $t = 0$  και  $t = 6\text{sec}$

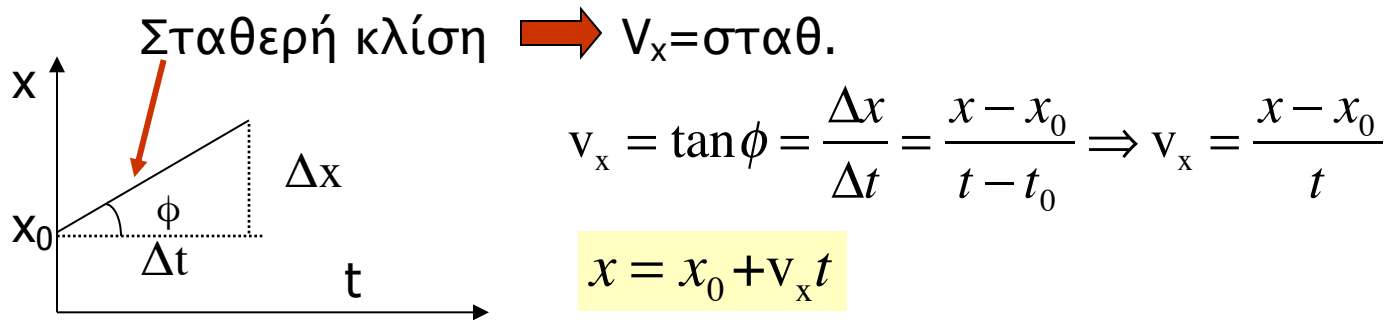


# Εύρεση της ταχύτητας σε ένα x-t γράφημα



- Μεταξύ των σημείων A και B  $x < 0$  αλλά αυξάνει
- Η κλίση αυξάνει συνεχώς και άρα το σώμα κινείται με αύξουσα ταχύτητα προς τα θετικά  $x$
- Στο B η κλίση και επομένως η ταχύτητα έχουν τις μέγιστες τιμές
- Μεταξύ B και C η κλίση και ταχύτητα ελαττώνονται αλλά εξακολουθεί να κινείται στην  $+x$  διεύθυνση
- Στο σημείο C η κλίση και ταχύτητα είναι μηδέν
- Από το σημείο C μέχρι το E,  $x > 0$  αλλά ελαττώνεται και επομένως η κλίση και ταχύτητα είναι αρνητικές
- Στο σημείο E, η κλίση και ταχύτητα  $\rightarrow 0$  καθώς το  $x \rightarrow 0$

# Μέση επιτάχυνση



- Στην πραγματικότητα  $x(t)$  μπορεί να μην είναι γραμμική:  $x(t) = f(t) = at^2 + bt + c$   
Τότε  $v_x$  δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται από το χρόνο  $t$

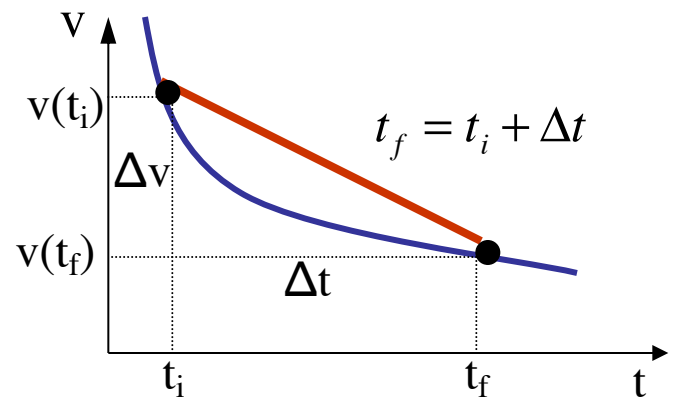
➤ Πόσο γρήγορα όμως μεταβάλλεται η ταχύτητα με το χρόνο?

Η μέση τιμή της μεταβολής από  $t_i \rightarrow t_f$

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

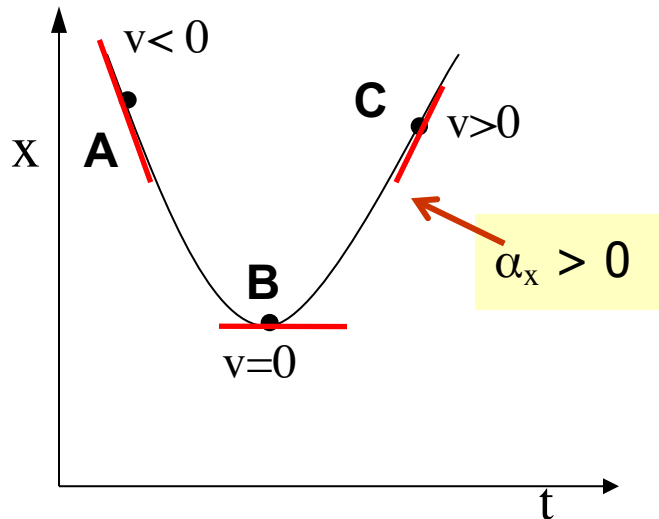
Η κλίση είναι η μέση επιτάχυνση

Η μέση επιτάχυνση είναι διάνυσμα



# Στιγμιαία επιτάχυνση

Όταν  $\Delta t \rightarrow 0$   $\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$  με μονάδες:  $\frac{[L]}{[T]^2} = m/s^2$

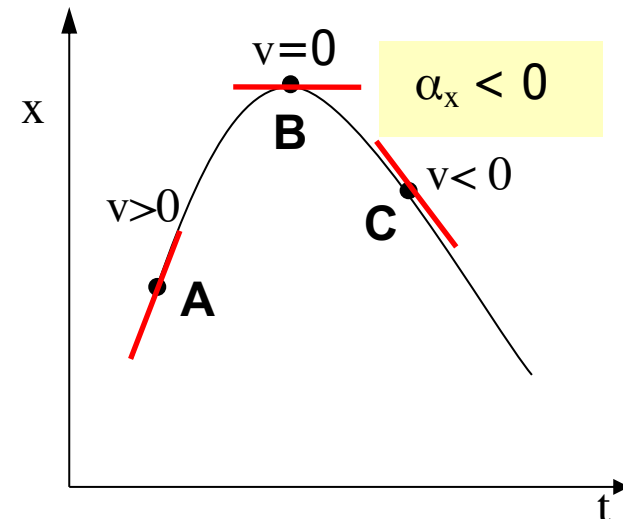


Από το A στο B το σώμα κινείται προς  $-x$   
 Το μέτρο της ταχύτητας ελαττώνεται  
 $\Delta \vec{v} > 0$  και  $\vec{a} > 0$

Άρα  $\vec{v}$  και  $\vec{a}$  έχουν αντίθετη κατεύθυνση

Από το B στο C το σώμα κινείται προς  $+x$   
 Το μέτρο της ταχύτητας αυξάνει  
 $\Delta \vec{v} > 0$  και  $\vec{a} > 0$

Άρα  $\vec{v}$  και  $\vec{a}$  έχουν ίδια κατεύθυνση



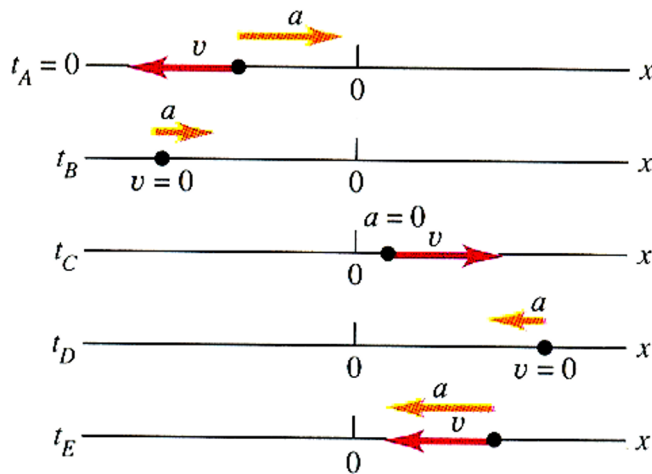
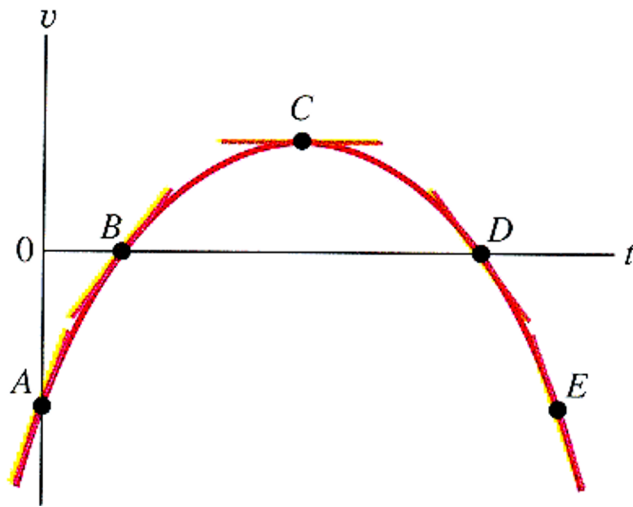
Από το A στο B το σώμα κινείται προς  $+x$   
 Το μέτρο της ταχύτητας ελαττώνεται  
 $\Delta \vec{v} > 0$  και  $\vec{a} < 0$

Άρα  $\vec{v}$  και  $\vec{a}$  έχουν αντίθετη κατεύθυνση

Από το B στο C το σώμα κινείται προς  $-x$   
 Το μέτρο της ταχύτητας αυξάνει  
 $\Delta \vec{v} < 0$  και  $\vec{a} < 0$

Άρα  $\vec{v}$  και  $\vec{a}$  έχουν ίδια κατεύθυνση

# Εύρεση της επιτάχυνσης σε ένα $v$ - $t$ γράφημα



- Από το A στο B,  $v < 0$  αλλά αυξάνει και η κλίση άρα και επιτάχυνση είναι θετικές
- Το σωματίδιο “φρενάρει” μέχρι το B οπότε  $v = 0$  (σταματά στιγμιαία) αλλά εξακολουθεί να επιταχύνεται αφού η κλίση είναι μη μηδενική
- Από το B στο C,  $v > 0$  και αυξάνει, η κλίση και επιτάχυνση είναι θετικές
- Στο C,  $v = \max$  αλλά η επιτάχυνση είναι 0
- Από το C στο D,  $v > 0$  αλλά ελαττώνεται και η επιτάχυνση είναι αρνητική. Το σώμα επιβραδύνει
- Στο D,  $v = 0$  και σταματά αλλά δέχεται επιτάχυνση
- Από το D στο E,  $v < 0$  και συνεχίζει να ελαττώνεται και η επιτάχυνση είναι αρνητική. Το σώμα επιταχύνεται

## 2<sup>ο</sup> Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας
- Θα στείλετε τη φωτογραφία της απάντησής σας στο [fotis@ucy.ac.cy](mailto:fotis@ucy.ac.cy)

Έτοιμοι