Παράδειγμα – roller coaster

Ποια πρέπει να είναι η ελάχιστη ταχύτητα που θα πρέπει να έχει το τρενάκι ώστε να μη χάσει επαφή με τη τροχιά στο υψηλότερο σημείο της κίνησης;

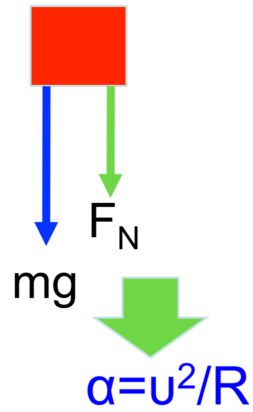
y-διεύθυνση:

$$\sum F = ma = -m\frac{\upsilon^2}{R}$$

$$\Rightarrow -F_N - mg = -m\frac{\upsilon^2}{R}$$

Όταν είναι να χάσει επαφή $F_N = 0$:

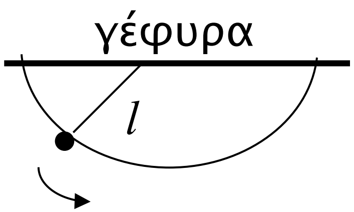
$$\Rightarrow -mg = -m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow g = \frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{gR}$$



Παράδειγμα – Μετακίνηση αλά Tarzan

Κάποιοι ριψοκίνδυνοι είχαν μια καταπληκτική ιδέα:

Να δέσουν το ένα άκρο ενός σχοινιού σε μια γέφυρα, και κρατώντας το άλλο άκρο να προσπαθήσουν να περάσουν απέναντι



Το σχοινί ήταν περίπου 50m και υπήρχαν περίπου 5-6 άτομα που ήθελαν να περάσουν όλοι μαζί (~500Kgr).

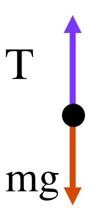
Πήραν ένα σχοινί το οποίο άντεχε 2 φορές το βάρος τους.

Τι έγινε?

Η διατήρηση της ενέργειας λέει ότι: ταχύτητα στο χαμηλότερο σημείο είναι $\mathrm{v} = \sqrt{2gl}$ (περισσότερα την άλλη βδομάδα)

Άρα η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι

$$a = \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{r}} = \frac{2gl}{l} = 2\mathrm{g} \Rightarrow F = ma$$ και στο χαμηλότερο σημείο έχουμε τις δυνάμεις:



$$T - mg = ma \Rightarrow T - mg = m(2g) \Rightarrow T = 3mg!!!$$

Στο χαμηλότερο σημείο, η τάση είναι 3 φορές μεγαλύτερη του βάρους!!

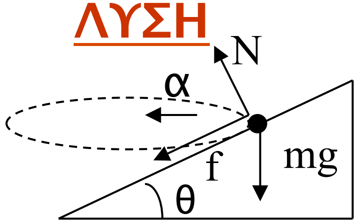
Αποτέλεσμα; Το σχοινί έσπασε.

Αυτοκίνητο σε δρόμο με κλίση προς ορίζοντα

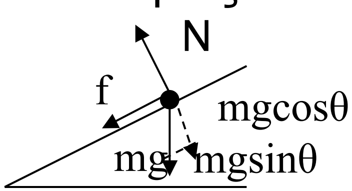
Αυτοκίνητο παίρνει στροφή σε δρόμο που σχηματίζει γωνία με τον ορίζοντα.
Η στροφή αντιστοιχεί σε κυκλική τροχιά ακτίνας R. και ο συντελεστής τριβής είναι μ

Ποια η μέγιστη ταχύτητα του αυτοκινήτου για την οποία το αυτοκίνητο παραμένει στο δρόμο χωρίς να γλυστρήσει;

ΛΥΣΗ



Δυνάμεις



Οι δυνάμεις που ενεργούν είναι mg, f και N

Βρίσκουμε πρώτα την f με την προϋπόθεση $f \leq \mu N$

Ποιους άξονες θα πρέπει να διαλέξουμε?

Τους αρχικούς x και y? Αυτούς που είναι κάθετος και παράλληλος προς το επίπεδο? Και τα 2 συστήματα είναι κατάλληλα.

Διαλέγω το δεύτερο σύστημα για το πρόβλημα.

Η επιτάχυνση είναι: $a = \dfrac{v^2}{R}$

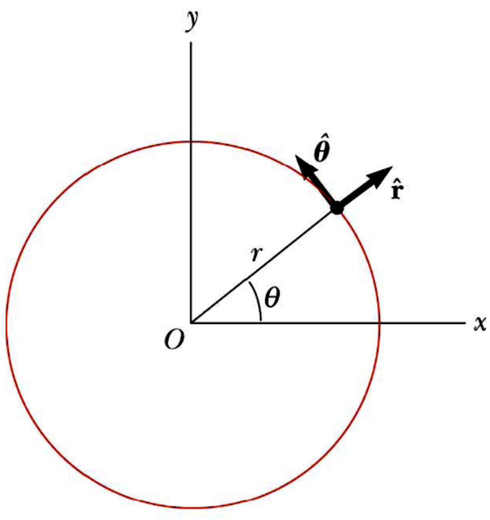
$$// F = ma: \quad f + mg\sin\theta = ma\cos\theta = \frac{mv^2}{R}\cos\theta \quad \Rightarrow f = \frac{mv^2}{R}\cos\theta - mg\sin\theta$$

$$\perp F = ma: \quad N - mg\cos\theta = ma\sin\theta = \frac{mv^2}{R}\sin\theta \quad \Rightarrow N = \frac{mv^2}{R}\sin\theta + mg\cos\theta$$

Η συνθήκη $f \leq \mu N$ γίνεται: $\dfrac{v^2}{R}\cos\theta - g\sin\theta \leq \mu\left(\dfrac{v^2}{R}\sin\theta + g\cos\theta\right) \Rightarrow v^2 \leq \dfrac{gR(\sin\theta + \mu\cos\theta)}{(\cos\theta - \mu\sin\theta)}$

Δεν υπάρχει άνω όριο στην ταχύτητα αν cosθ<μsinθ

Κυκλική κίνηση



Ορίζουμε τα ακόλουθα 2 μοναδιαία διανύσματα:

$\hat{r}$ βρίσκεται κατά μήκος του διανύσματος της ακτίνας

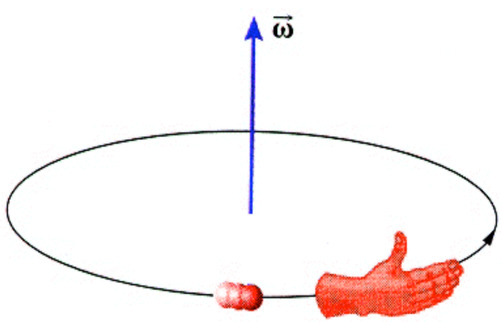
$\hat{\theta}$ είναι εφαπτόμενο του κύκλου

Μετρούμε την γωνιακή θέση σε ακτίνια (rad): 2π (rad) = 360^0

Χρησιμοποιώντας rad, το μήκος τόξου είναι: θR

Ορίζουμε σα γωνιακή ταχύτητα ω, ένα διάνυσμα το μέτρο του οποίου είναι ίσο με το ρυθμό μεταβολής της γωνιακής συντεταγμένης του σώματος.

$$\left|\vec{\omega}(t)\right| = \frac{d\theta(t)}{dt}$$



Η φορά του διανύσματος ω ορίζεται σύμφωνα με το κανόνα δεξιόχειρης κυκλικής κίνησης:

Ο αντίχειρας δείχνει τη διεύθυνση του διανύσματος ω. Είναι κάθετο στο επίπεδο της κίνησης και κατά μήκος του άξονα που περνά από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.

$$\vec{\omega} = \omega_z \hat{k} \Rightarrow \omega_z = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Κυκλική κίνηση - ταχύτητα

Μπορούμε να γράψουμε το διάνυσμα της θέσης

$$\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} = \left[R\cos\theta(t)\right]\hat{i} + \left[R\sin\theta(t)\right]\hat{j}$$

Προσοχή:
η θ μεταβάλλεται με χρόνο

Άρα η ταχύτητα του σώματος θα είναι:

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[R\cos\theta(t)\hat{i} + R\sin\theta(t)\hat{j}\right]$$

Από παραγώγους: $\frac{d}{dt}\cos(\theta(t)) = \frac{d\cos(\theta)}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$

$$\Rightarrow \vec{\mathrm{v}} = R\left[-\sin\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\hat{i} + \cos\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\hat{j}\right]$$

Το μέτρο της ταχύτητας δίνεται από τη σχέση:

$$\left|\vec{\mathrm{v}}\right|^2 = \vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 = R^2\left[\sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \cos^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = R^2\left|\frac{d\theta(t)}{dt}\right|^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{v}^2 = R^2\left|\frac{d\theta(t)}{dt}\right|^2 \Rightarrow \left|\vec{\mathrm{v}}\right| = R\left|\frac{d\theta(t)}{dt}\right| \quad \boxed{\Rightarrow \left|\vec{\mathrm{v}}\right| = R\left|\vec{\omega}(t)\right|}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{\mathrm{v}} = \vec{\omega}(t)\times\vec{R}}$$

Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας, ω, είναι κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς και επομένως στην ακτίνα R

Το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας, v, είναι κάθετο στην ακτίνα R

Κυκλική κίνηση - επιτάχυνση

Μπορούμε να βρούμε την επιτάχυνση από τη σχέση: $\vec{\mathrm{v}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\vec{\alpha} = \left(\frac{d\vec{\mathrm{v}}(t)}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\mathrm{v}} \qquad (1)$$

Ορίζουμε σα γωνιακή επιτάχυνση a, το διάνυσμα που δίνει το ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας ω.

$$\vec{\mathrm{a}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$ Η διεύθυνση του είναι παράλληλη με αυτή του $\vec{\omega}$

Η (1) γράφεται $$\vec{\alpha} = \vec{\mathrm{a}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\mathrm{v}}$$

Εφαπτομενική επιτάχυνση Κεντρομόλος επιτάχυνση

Για ομαλή κυκλική κίνηση ω=σταθ. και a=0

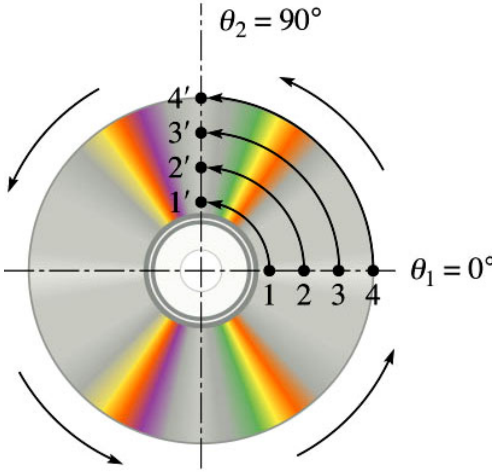
$$\vec{\alpha} = \vec{\omega} \times \vec{\mathrm{v}}$$

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

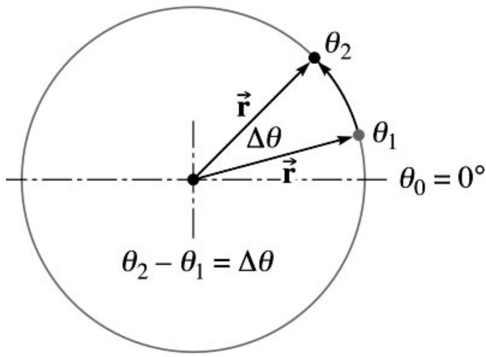
$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$

$$\vec{\alpha} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha} = -\omega^2 \vec{r}$$ κεντρομόλος επιτάχυνση



Κυκλική κίνηση



- Γωνιακή μετατόπιση: $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$
  - Πόσο έχει περιστραφεί
- Γωνιακή ταχύτητα: $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$
  - Πόσο γρήγορα περιστρέφεται
  - Μονάδες μέτρησης rad/sec - 2π rad = 1 περιστροφή
- Γωνιακή επιτάχυνση: $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$
  - Ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας
- Περίοδος = 1/συχνότητα $\mathrm{T} = 1/f = \dfrac{2\pi}{\omega}$
  - Χρόνος για να συμπληρώσει μια περιστροφή

Από κυκλική κίνηση σε γραμμική

- Μετατόπιση: $S = R\Delta\theta$ (η γωνία μετράται σε ακτίνια)
- Γραμμική ταχύτητα: $\mathrm{v} = \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{dR\theta}{dt} \Rightarrow \mathrm{v} = R\dfrac{d\theta}{dt} = \omega R$
- Διεύθυνση της ταχύτητας εφαπτόμενη στη τροχιά

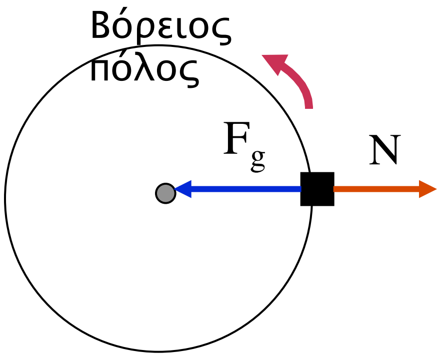
Αναλογία γραμμικής και κυκλικής κίνησης

Κυκλική	Γραμμική
α =σταθ.	a=σταθ.
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$\mathrm{v} = v_0 + \alpha t$
$\theta = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x = x_0 + \mathrm{v}_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Όλα τα σημεία σε ένα σώμα που περιστρέφεται έχουν την ίδια γωνιακή επιτάχυνση

Παράδειγμα

Πόσο λιγότερο ζυγίζει ένα άτομο 70kg στον ισημερινό εξαιτίας της περιστροφής της γης;



Η ένδειξη της ζυγαριάς είναι η δύναμη που ασκεί η ζυγαριά ⇒ η κάθετη δύναμη N

Στο σώμα ασκείται η βαρυτική έλξη ⇒ βάρος, F_g

Το σώμα περιστρέφεται μαζί με τη γη ⇒ Κεντρομόλος δύναμη

Η κεντρομόλος είναι η συνισταμένη των άλλων δυνάμεων

$$F = ma \Rightarrow F_g - N = \frac{m\mathrm{v}^2}{\mathrm{r}} \Rightarrow N = F_g - \frac{m\mathrm{v}^2}{\mathrm{r}} \Rightarrow N = F_g - m\omega^2 r$$

Αλλά $\omega^2 r = (\frac{2\pi}{86400})^2 (6.37 \cdot 10^6) = 0.033 m/s^2 \qquad \Rightarrow N = F_g - 70 \times 0.033$

Το μετρούμενο g στον ισημερινό είναι $g_{ι\sigma}$=9.78m/s^2 $\Rightarrow N = mg_{ι\sigma}$ Περιέχει περιστροφή

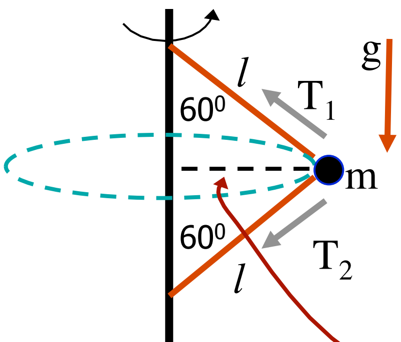
$$F_g = N + \frac{m\mathrm{v}^2}{r} \Rightarrow F_g = m(g_{ι\sigma} + \frac{\mathrm{v}^2}{r}) = m(9.78 + 0.03) \Rightarrow F_g = m(9.81 m/s^2)$$

Τιμή του g αν η γη δεν γύριζε και είχε το ίδιο σχήμα

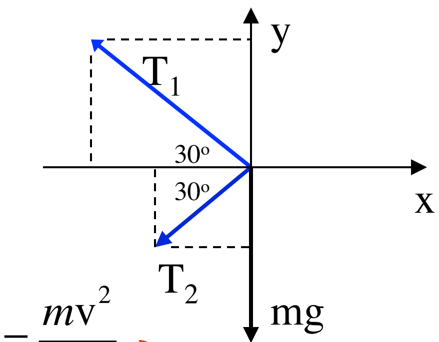
Παράδειγμα

Δύο ράβδοι συνδέουν την μάζα m σε ένα στύλο. Η μάζα m περιστρέφεται κυκλικά σε ένα οριζόντιο κύκλο με σταθερή ταχύτητα v.

Ποιες είναι οι τάσεις T_1 και T_2?



Αναλύουμε τις δυνάμεις σε άξονες



$$F_x: \quad \sum F_x = (T_1 + T_2)\cos 30^0 = ma$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l\cos 30^0}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}(T_1 + T_2) = \frac{mv^2}{l}$$

$$F_y: \quad T_1 \sin 30^0 = T_2 \sin 30^0 + mg \Rightarrow T_1 = T_2 + 2mg$$

$$\frac{3}{4}(2T_2 + 2mg) = \frac{mv^2}{l} \quad \boxed{\Rightarrow T_2 = \frac{2}{3}\frac{mv^2}{l} - mg} \quad \boxed{T_1 = \frac{2}{3}\frac{mv^2}{l} + mg}$$

Παρατηρήσεις

- Η $T_1 > 0$ πάντα ➔ Η πάνω ράβδος είναι πάντα τεντωμένη
- Η T_2
  - > 0 ➔ τεντωμένη μόνο όταν $v > \sqrt{\frac{3}{2}gl}$
  - $= 0$ ➔ δεν παίζει ρόλο, δηλαδή δεν χρειάζεται όταν $v = \sqrt{\frac{3}{2}gl}$
  - < 0 ➔ συμπεσμένη, η ταχύτητα μικρή και η μάζα στηρίζεται