

**ΦΥΣ. 211**  
**1<sup>η</sup> ΠΡΟΟΔΟΣ 5-Μάρτη-2016**

Πριν ξεκινήσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, αριθμό ταυτότητας) στο πάνω μέρος της σελίδας αυτής.

Για τις λύσεις των ασκήσεων θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε μόνο τις σελίδες που σας δίνονται. Μην κόψετε καμιά από τις σελίδες που σας δίνονται.

Προσπαθήστε να δείξετε τη σκέψη σας και να γράψετε καθαρές εξισώσεις. Για πλήρη ή μερική βαθμολόγηση θα πρέπει να φαίνεται καθαρά το τι προσπαθείτε να δείξετε.

Σας δίνονται 6 ασκήσεις και πρέπει να απαντήσετε σε όλες. Σύνολο μονάδων 100.

Διαβάστε πρώτα όλες τις ασκήσεις και προσπαθήστε να σκεφτείτε τι περίπου χρειάζεται να κάνετε. Η σειρά των προβλημάτων δεν είναι ενδεικτική της δυσκολία τους.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 180 λεπτά.

**Καλή επιτυχία.**

### Ενεργό δυναμικό

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + U_{\text{cf}}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

### Μετασχηματισμένη ακτινική Δ.Ε. τροχιάς:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u + \frac{\mu}{l^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) = 0, \text{ όπου } u = \frac{1}{r}$$

### Ενέργεια τροχιάς:

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)$$

### Τροχιές Kepler:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{\gamma}{r^2} \text{ λύση ακτινικής εξίσωσης είναι: } r(\theta) = \frac{c}{1 + e \cos \theta}, \text{ με } c = \frac{l^2}{\gamma \mu}$$

$$\text{Εκκεντρότητα (e): } E = \frac{\gamma^2 \mu}{2l^2} (e^2 - 1) \text{ όπου } E = \text{Ενέργεια}$$

Εκκεντρότητα	Ενέργεια	Είδος Τροχιάς
$0 < e < 1$	$E < 0$	ελλειπτική
$e = 1$	$E = 0$	παραβολική
$e > 1$	$E > 0$	υπερβολική

$$\text{Περιήλιο: } r_{\min} = \frac{c}{1 + e}$$

$$\text{Αφήλιο: } r_{\max} = \frac{c}{1 - e}$$

$$\text{Μεγάλος ημιάξονας: } a = \frac{c}{1 - e^2}$$

$$\text{Μικρός ημιάξονας: } b = \frac{c}{\sqrt{1 - e^2}}$$

### Νόμοι Kepler:

1<sup>ος</sup> νόμος: τροχιές πλανητών είναι ελλείψεις με τον ήλιο σε μια από τις εστίες της έλλειψης

$$2^{\text{ος}} \text{ νόμος: } \frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu}$$

$$3^{\text{ος}} \text{ νόμος: } T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_H} a^3$$

1. Ένα στεφάνι ακτίνας  $R$  και μάζας  $M$  κυλά χωρίς να ολισθαίνει προς την βάση ενός κεκλιμένου επιπέδου. Να βρεθεί η δύναμη της τριβής χάρη στην οποία το στεφάνι εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση. [10μ]

2. Ένα δυναμικό σύστημα με γενικευμένες συντεταγμένες  $r$  και  $\theta$  περιγράφεται από την συνάντηση Lagrange  $L = \frac{1}{2}m(\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) - \cos\theta$ .

(α) Βρείτε την Hamiltonian του συστήματος. [5μ]

(β) Βρείτε τις εξισώσεις Hamilton. [3μ]

(γ) Εξηγήστε αναλυτικά αν η Hamiltonian διατηρείται ή όχι. [2μ]

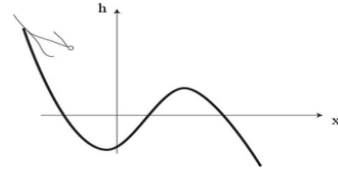
3. Στη θεωρία των χορδών της σωματιδιακής φυσικής, έχει προταθεί πως κάποιες από τις χορδές έχουν μακροσκοπικές διαστάσεις και έχουν μεγάλη μάζα. Στο πρόβλημα αυτό θα θεωρήσετε μια τέτοια βαρυτική χορδή η οποία είναι ευθύγραμμη και άπειρου μήκους. Η χορδή έχει γραμμική πυκνότητα μάζας ίση με  $\lambda$ . Θεωρήστε ότι γύρω από την χορδή αυτή περιστρέφεται σε σταθερή κυκλική τροχιά ένας αστέρας μάζας  $M$ . Ο αστέρας έχει στροφορμή  $L$ .

(α) Ποιό είναι το ενεργό δυναμικό στο οποίο κινείται ο αστέρας; (*Υπόδειξη: την ίδια διαδικασία θα μπορούσατε να ακολουθήσετε αν είχατε αγωγό και φορτίο*) [8μ]

(β) Ποιά είναι η ακτίνα της σταθερής κυκλικής τροχιάς; [6μ]

(γ) Αν διαταραχθεί η κυκλική τροχιά, ποια θα είναι η συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων γύρω από την κλειστή κυκλική τροχιά; [6μ]

4. Ένας σκιέρ κατεβαίνει μια πλαγιά που μπορεί να προσεγγιστεί με μια εξίσωση της μορφής  $y = f(x)$ . Η κίνηση του σκιέρ μπορεί να θεωρηθεί ότι δεν υπόκειται σε τριβές και προκαλείται από την δύναμη της βαρύτητας.



(α) Γράψτε την Lagrangian του προβλήματος και τον δεσμό. [5μ]

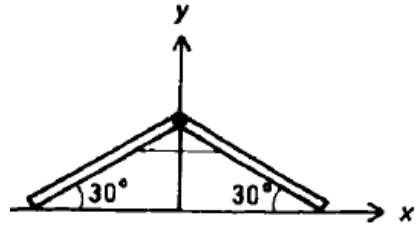
(β) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης. [5μ]

(γ) Βρείτε τη δύναμη που περιορίζει την κίνηση του σκιέρ. [5μ]

(δ) Ο σκιέρ σε κάποιο σημείο απογειώνεται από την πλαγιά όταν η κάθετη δύναμη του δεσμού,  $F_y$ , γίνεται μηδέν ή αρνητική, γιατί η καμπύλη της πλαγιάς μπορεί να δώσει μόνο θετική κάθετη δύναμη. Υποθέτοντας ότι ο σκιέρ ξεκινά από την ηρεμία και ύψος  $y_0$ , προσδιορίστε το σημείο  $x$ , στο οποίο αποχωρίζεται από την καμπύλη. Υπόδειξη: από την στιγμή που η συνάρτηση της καμπύλης της πλαγιάς δεν δίνεται, θα πρέπει το αποτέλεσμά σας να το εκφράσετε συναρτήσει της  $f(x)$  και παραγώγων της.

[5μ]

5. Δύο λεπτές ξύλινες ράβδοι μάζας  $m$  και μήκους  $l$  η κάθε μια συνδέονται με ένα λείο μεντεσέ και μια μη εκτατή και αβαρή κλωστή. Το σύστημα είναι ακίνητο πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια όπως φαίνεται στο σχήμα. Την χρονική στιγμή  $t=0$ , το νήμα κόβεται. Υπόδειξη: Ίσως φανεί χρήσιμο ότι η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σε αυτή δίνεται από την σχέση  $I_{\rho}^{CM} = ML^2/12$ .



- (α) Βρείτε τη συνάρτηση Lagrange του συστήματος. [7μ]  
(β) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης. [3μ]  
(γ) Βρείτε την ταχύτητα των ραβδών όταν χτυπούν στο έδαφος. [5μ]  
(δ) Βρείτε το χρόνο που χρειάζεται οι ράβδοι να φθάσουν στο έδαφος. Τον χρόνο αυτό θα πρέπει να τον βρείτε με βάση ενός σωστά διατυπωμένου ολοκληρώματος, το οποίο ωστόσο δεν χρειάζεται να λύσετε. [5μ]

6. Ένα σώμα μάζας  $m$  κινείται στο πεδίο ενός δυσδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή:

$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2.$$

(α) Δείξτε ότι οι τροχιές του σώματος είναι ελλείψεις με το κέντρο τους στο  $r = 0$ , αντίθετα με τις Keplerian ελλείψεις που το κέντρο τους δεν είναι στο 0. [10μ]

(β) Γράψτε τις παραμέτρους που καθορίζουν την έλλειψη συναρτήσει ποσοτήτων που διατηρούνται, δηλαδή ενέργειας  $E$ , και στροφορμής,  $l$ . [10μ]