ΦΥΣ 145 –Υπολογιστικές Μέθοδοι στη Φυσική

8η Εργασία **Επιστροφή: 12/04/21 πριν τις 14:30**

<u>Υπενθύμιση:</u> Οι εργασίες πρέπει να επιστρέφονται με e-mail στο fotis@ucy.ac.cy που θα στέλνετε από το πανεπιστημιακό σας λογαριασμό το αργότερο μέχρι την ημερομηνία που αναγράφεται και πριν το εργαστήριο της συγκεκριμένης ημέρας.
Ως subject του e-mail θα πρέπει να αναγράφεται την εργασία (username_phy145_hmX όπου X ο αριθμός της εργασίας)
Κάθε αρχείο που επισυνάπτετε (attach) στο e-mail σας θα πρέπει να έχει το όνομα στη μορφή username_hmX.tgz όπου username είναι το username του e-mail σας και X ο αριθμός της εργασίας. Επίσης σαν πρώτο σχόλιο μέσα σε κάθε file που περιέχει το πρόγραμμά σας θα πρέπει να αναφέρεται το ονοματεπώνυμό σας. Οι εργασίες είναι ατομικές και πανομοιότυπες εργασίες δε θα βαθμολογούνται. Για να κάνετε ένα tgz file (ουσιαστικά tar zipped file) θα πρέπει να δώσετε στο terminal την εντολή tar -czvf username_hmX.tgz *.py όπου py είναι όλα τα py files των προγραμμάτων σας

1. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ολοκλήρωσης Monte Carlo για να υπολογίσετε το εμβαδό ενός τριγώνου με κορυφές (-1,0), (1,0) και (0,3).

2. Θεωρήστε ένα ομοιόμορφο και ομογενή δίσκο, D, μάζας $M = 1kg$ και πυκνότητας, d, ο οποίος έχει ακτίνα $R = 1$ και το κέντρο του οποίου βρίσκεται στο (0,0). Θέλουμε να υπολογίσουμε την ροπή αδράνειας του δίσκου για περιστροφή του ως προς ένα σημείο $r_0 = (x_0, y_0)$. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς το σημείο αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$I(r_0) = \int_D d^2r(\vec{r} - \vec{r}_0)^2 = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1+x^2}} dy[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]$$

   Υπολογίστε το παραπάνω ολοκλήρωμα ως ακολούθως:

   (**α**) Θεωρήστε έναν ακέραιο μετρητή N και έναν πραγματικό μετρητή S και του δυο ίσους με μηδέν.

   (**β**) Θεωρήστε δυο τυχαίους αριθμούς x και y που ανήκουν στο διάστημα [-1, 1]. Προσέξτε ότι η συνάρτηση *rand*() επιστρέφει τυχαίους αριθμούς στο διάστημα $[0,1)$ και επομένως θα πρέπει να μετατρέψετε τους τυχαίους αριθμούς x και y ώστε το εύρος τους να είναι στο διάστημα $[-1, 1]$.

   (**γ**) Αν $x^2 + y^2 < 1$, το σημείο βρίσκεται στο δίσκο και επομένως μπορείτε να αυξήσετε το μετρητή N κατά μια μονάδα ενώ ο μετρητής S αυξάνει κατά $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$.

   (**δ**) Επαναλάβετε τα βήματα (**β**) και (**γ**) έως ότου ο μετρητής N είναι 5×10^7

   (**ε**) Το αποτέλεσμα θα είναι $I(r_0) = {}^{S}/_{N}$.

   Μπορείτε να επαληθεύσετε τους υπολογισμούς σας για τις περιπτώσεις $r_0 = (0,0)$, $I = 0.500$ ενώ για $r_0 = (0.5,0.0)$ $I = 0.750$. Ποια είναι η ροπή αδράνειας για $r_0 = (0.25, 0.25)$;

3. Υποθέστε ότι θέλετε να χρησιμοποιήσετε την μέθοδο του τραπεζίου ή μέσου σημείου για να υπολογίσετε ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int_a^b f(x)dx$ με σφάλμα λιγότερο από μία προκαθορισμένη τιμή ϵ. Ποιο θα πρέπει να είναι το κατάλληλο μέγεθος του αριθμού των υποδιαστημάτων που θα πρέπει να επιλέξουμε; Για να απαντήσουμε στην ερώτηση αυτή θα

πρέπει να εισαγάγουμε μια επαναληπτική διαδικασία όπου θα χρειαστεί να συγκρίνουμε το αποτέλεσμα που λαμβάνουμε από την αριθμητική ολοκλήρωση για έναν αριθμό υποδιαστημάτων n και $2n$. Αν η διαφορά είναι μικρότερη από την επιθυμητή ακρίβεια ϵ, η τιμή του ολοκληρώματος για $2n$ υποδιαστήματα, επιστρέφεται ως το επιθυμητό αποτέλεσμα. Διαφορετικά, διαιρούμε το n με 2 και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία. (α) Να γράψετε μια συνάρτηση η οποία δέχεται ως ορίσματα την συνάρτηση προς ολοκλήρωση, τα όρια ολοκλήρωσης, την επιθυμητή ακρίβεια καθώς και τη μέθοδο που θα χρησιμοποιηθεί για την ολοκλήρωση (τραπεζίου ή μέσου σημείου) και η οποία θα πρέπει να επιστρέφει το επιθυμητό αποτέλεσμα με βάση τις ιδέες που δόθηκαν παραπάνω. Θα πρέπει να δοκιμάσετε τον κώδικά σας με τα ολοκληρώματα $\int_0^2 x^2 dx$ και $\int_0^2 \sqrt{x} dx$ για ακρίβεια $\epsilon = 10^{-1}$ και 10^{-10}. (β) Θα πρέπει να τυπώσετε το ακριβές σφάλμα του υπολογισμού σας. (γ) Να κάνετε το γράφημα του αριθμού των υποδιαστημάτων που χρησιμοποιείται για την επίτευξη της επιθυμητής ακρίβειας συναρτήσει της ακρίβειας για τιμές ακρίβειας στο διάστημα $[10^{-1}, 10^{-10}]$ για την περίπτωση του ολοκληρώματος $\int_0^2 \sqrt{x} dx$. Χρησιμοποιήστε λογαριθμική κλίμακα για την ακρίβεια. Επομένως οι τιμές της ακρίβειας θα πρέπει να αλλάζουν σύμφωνα με τον εκθέτη του 10, $(10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-10})$.

4. Η αρχή του Fermat αναφέρεται στην διάδοση των ακτίνων φωτός (τουλάχιστον στο τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε καθημερινά τη διάδοση του φωτός σε διάφορα μέσα). Σύμφωνα με την αρχή αυτή μια ακτίνα φωτός διαδίδεται από ένα σημείο Α σε ένα σημείο Β ακολουθώντας τη διαδρομή που απαιτεί το λιγότερο χρόνο. Η αρχή αυτή αποτελεί τη βάση της γεωμετρικής οπτικής. Για ένα ομογενές μέσο το φως διαδίδεται από ένα σημείο Α σε ένα σημείο Β ακολουθώντας ευθεία γραμμή. Επειδή η ταχύτητα του φωτός είναι σταθερή σε ένα μέσο η διαδρομή του ελαχίστου χρόνου είναι αυτή της ελάχιστης απόστασης, δηλαδή η ευθεία γραμμή από το Α στο Β. Η ταχύτητα του φωτός σε ένα μέσο περιγράφρεται συναρτήσει της ταχύτητας του φωτός στο κενό, c, σύμφωνα με τη σχέση $\upsilon = \frac{c}{n}$, όπου n είναι ο δείκτης διάθλασης του μέσου. Υποθέτουμε τώρα ότι το φως διαδίδεται από ένα μέσο με συντελεστή διάθλασης n_1 σε ένα άλλο μέσο με συντελεστή διάθλασης n_2. Τα δυο μέσα χωρίζονται με επίπεδη επιφάνεια. Μπορούμε χρησιμοποιώντας την αρχή του Fermat και μια μέθοδο Monte Carlo να βρούμε τη διαδρομή που θα ακολουθήσει το φως πηγαίνοντας από ένα σημείο Α του ενός μέσου, σε ένα σημείο Β του άλλου μέσου.

Η στρατηγική που θα ακολουθήσουμε είναι να ξεκινήσουμε με μια τυχαία διαδρομή και να κάνουμε αλλαγές στη διαδρομή αυτή με τυχαίο τρόπο. Οι αλλαγές αυτές θα γίνονται αποδεκτές μόνο αν ελαττώνουν το χρόνο διάδοσης του φωτός από το Α στο Β.

Θα πρέπει να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο κάνει τα ακόλουθα. (**α**) Υποθέστε ότι υπάρχουν N διαφορετικά μέσα όλα του ίδιου πάχους (επομένως η x-συντεταγμένη τους διαφέρει κατά μια μονάδα) και το φως διαδίδεται από τα αριστερά προς τα δεξιά. Επομένως υπάρχουν και N-1 διαχωριστικές επιφάνειες. (**β**) Ο δείκτης διάθλασης είναι σταθερός σε κάθε μέσο και αυξάνει πηγαίνοντας από το ένα μέσο στο άλλο (αριστερά προς τα δεξιά). Επομένως η ταχύτητα του φωτός ελαττώνεται από τα αριστερά προς τα δεξιά. (**γ**) Επειδή το φως διαδίδεται ευθύγραμμα σε ένα μέσο, η διαδρομή του φωτός ουσιαστικά δίνεται από τις συντεταγμένες $y(i)$ πάνω σε κάθε διαχωριστική επιφάνεια. (**δ**) Οι συντεταγμένες της πηγής του φωτός και του φωτοανιχνευτή είναι $(0, y(1))$ και $(N, y(N))$ αντίστοιχα όπου $y(1)$ και $y(N)$ είναι σταθερά σημεία. (**ε**) Η αρχική διαδρομή διαγράφεται από τη συλλογή τυχαίων σημείων πάνω σε κάθε διαχωριστική επιφάνεια. (**στ**) Η διαδρομή του φωτός βρίσκεται διαλέγοντας τυχαία μια διαχωριστική επιφάνεια, *i*, και δημιουργώντας ένα δοκιμαστικό σημείο με συντεταγμένη $y(i)$ που διαφέρει από την προηγούμενη τιμή της κατά μια τυχαία ποσότητα στο διάστημα -δ και δ. Αν η δοκιμαστική αυτή συντεταγμένη οδηγεί σε μικρότερη χρονικά διαδρομή τότε η συντεταγμένη αυτή αποτελεί τη νέα συντεταγμένη $y(i)$ από την οποία περνά το φως στην επιφάνεια αυτή. (**ζ**) Η διαδρομή επαναπροσδιορίζεται κάθε φορά που επιφέρεται κάποια αλλαγή.

Εφαρμόστε τη παραπάνω μέθοδο σε ένα πρόγραμμα. Θεωρήστε ότι το φως διαδίδεται από ένα υλικό (αέρα) με δείκτη διάθλασης n_1=1 σε άλλο υλικό με δείκτη διάθλασης n_2=1.5 (γυαλί). Θεωρήστε ότι οι δυο αυτές περιοχές μπορούν να χωριστούν σε 10 διαφορετικά μέσα. Επομένως η διαχωριστική επιφάνεια 5 αποτελεί και τη διαχωριστική επιφάνεια των 2 περιοχών. Θεωρήστε ότι το επιτρεπτό διάστημα δ για αλλαγή της συντεταγμένης είναι δ=0.5. Τέλος θεωρήστε ότι οι *y*-συντεταγμένες της πηγής του φωτός και του φωτο-ανιχνευτή είναι αντίστοιχα 2 και 8. Θα πρέπει να επαναλάβετε τη διαδικασία για κάποιο αριθμό προσπαθειών αλλαγής συντεταγμένων. Στο τέλος θα πρέπει να κάνετε το γράφημα της αρχικής διαδρομής του φωτός και της διαδρομής που βρίσκετε μετά την διαδικασία της παραπάνω προσομοίωσης στην οποία θα φαίνεται ότι το φως όντως διαθλάται καθώς περνά από το ένα υλικό στο άλλο. Θα πρέπει επίσης να βρείτε το χρόνο για να καλύψει τη διαδρομή αυτή.