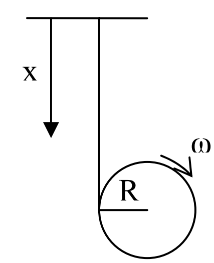
ΦΥΣ. 133

ΕΡΓΑΣΙΑ # 2 **Επιστροφή 16-2-2006**

1. Θεωρήστε σώμα μάζας m το οποίο κινείται πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο, γωνίας κλίσης θ με την οριζόντια διεύθυνση. Να γραφεί η Lagrangian συναρτήσει των συντεταγμένων x και y που ανήκουν στους άξονες x, κάθετο προς την επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου και φορά προς τα πάνω, και y, παράλληλο προς το κεκλιμένο επίπεδο και φορά προς τη βάση του. Θεωρήστε ότι η κίνηση γίνεται υπό την επίδραση της δύναμης της βαρύτητας. Βρείτε τις δύο εξισώσεις κίνησης και δείξτε ότι είναι αυτή που περιμένατε με βάση την Newtonian μηχανική.

2. (α) Γράψτε τη Lagrangian $L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$ για δύο σωματίδια ίσης μάζας, $m_1=m_2=m$, περιορισμένα στον x-άξονα και συνδεδεμένα με ένα ελατήριο δυναμικής ενέργειας ελατηρίου $V = \frac{1}{2}Kx^2$.Στην περίπτωση αυτή, x αναπαριστά την επιμήκυνση του ελατηρίου, $x = (x_1 - x_2 - l)$, και l είναι το φυσικό μήκος του ελατηρίου. Υποθέστε επίσης ότι η μάζα 1 βρίσκεται πάντοτε στα δεξιά της μάζας 2. (β) Γράψτε επίσης την Lagrangian συναρτήσει δύο νέων μεταβλητών $X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, το κέντρο μάζας του συστήματος, και x, την επιμήκυνση του ελατηρίου. Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης των X και x. (γ) Λύστε τις δύο εξισώσεις X(t) και x(t) και περιγράψτε την κίνηση.

3. Το παρακάτω σχήμα δείχνει ένα yo-yo. Ένα νήμα αμελητέας μάζας κρέμεται κατακόρυφα από ένα σταθερό σημείο ενώ το άλλο άκρο του είναι τυλιγμένο πολλές φορές γύρω από ένα ομοιόμορφο καρούλι, μάζας m και ακτίνας R. Όταν το καρούλι αφήνεται, κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω, περιστρεφόμενος καθώς το νήμα ξετυλίγεται. Γράψτε τη Lagrangian χρησιμοποιώντας την απόσταση x σαν γενικευμένη συντεταγμένη (δείτε το σχήμα). Βρείτε την εξίσωση κίνησης Lagrange και δείξτε ότι ο κύλινδρος επιταχύνει προς τα κάτω με επιτάχυνση $\ddot{x} = 2g/3$. [<u>*Υπόδειξη*</u>: Χρειάζεται να θυμηθείτε ότι η ολική κινητική ενέργεια ενός σώματος όπως το yo-yo δίνεται από $T = \frac{1}{2}m\text{v}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$, όπου v είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας, I είναι η ροπή αδράνειας (για ένα κύλινδρο, $I = \frac{1}{2}m\text{R}^2$) και ω είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας. Μπορείτε να εκφράσετε το ω συναρτήσει της γενικευμένης ταχύτητας $\dot{x}$].



4. Ένα λείο σύρμα είναι λυγισμένο σε σχήμα ελικοειδές, με κυλινδρικές συντεταγμένες ρ=R kai z=λφ, όπου R και λ είναι σταθερές και ο άξονας z είναι κατακόρυφος και με φορά προς τα πάνω (και η βαρύτητα έχει φορά προς τα κάτω). Χρησιμοποιώντας το z σα τη γενικευμένη συντεταγμένη, γράψτε την Lagrangian που περιγράφει την κατάσταση μιας χάντρας μάζας m που είναι περασμένη στο σύρμα και κινείται καθ' όλο το μήκος του. Βρείτε την Lagrangian εξίσωση κίνησης και επομένως την κατακόρυφη επιτάχυνση, $\ddot{z}$,της χάντρας. Στο όριο που η ακτίνα R της έλικας τείνει στο μηδέν ποια είναι η $\ddot{z}$; Νομίζετε ότι έχει νόημα αυτό που βρίσκετε;

5. Ένα βαγόνι μάζας m εξαρτάται από ένα ελατήριο (σταθερής ελατηρίου K). Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι συνδεδεμένο με ακλόνητο σημείο. Αν αγνοήσουμε τη μάζα του ελατηρίου (όπως κάνουμε σχεδόν πάντοτε) τότε ξέρουμε από την εισαγωγική φυσική, ότι το βαγόνι εκτελεί απλή αρμονική κίνηση με γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\mathrm{K}/m}$. Χρησιμοποιώντας το Lagrangian φορμαλισμό, μπορείτε να βρείτε την επίδραση της μάζας του ελατηρίου M, ως εξής: (α) Υποθέτοντας ότι το ελατήριο είναι ομοιόμορφο και επιμηκύνεται ή συσπειρώνεται ομοιόμορφα, δείξτε ότι η κινητική ενέργεια είναι $\frac{1}{6}M\dot{x}$. Ως συνήθως x είναι η απομάκρυνση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος. Γράψτε τη Lagrangian για το σύστημα ελατήριο-βαγόνι (Σημειωτέων ότι η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι $\frac{1}{2}Kx^2$. (β) Γράψτε τη Lagrangian εξίσωση κίνησης και δείξτε ότι το βαγόνι εξακολουθεί να εκτελεί αρμονική κίνηση αλλά με γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\mathrm{K}/(m + M/3)}$; Δηλαδή η επίδραση της μάζας M ενός ελατηρίου στην γωνιακή συχνότητα του σώματος είναι να προσθέσουμε M/3 στη μάζα του βαγονιού.