Ένας δορυφόρος κινείται σε ελλειπτική τροχιά με περίοδο τ, εκκεντρότητα e, και μεγάλο ημιάξονα α. Να δειχθεί ότι η μέγιστη ακτινική ταχύτητα του δορυφόρου είναι $2\pi\alpha/(\tau\sqrt{1-e^2})$

Η ενέργεια του δορυφόρου είναι: $E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\upsilon_{eff}(r)$ όπου θεωρώ $\mu=\frac{mM}{m+M}\sim m$

Επειδή η ενέργεια διατηρείται, $\dot{r}$ γίνεται μέγιστη όταν $\upsilon_{eff}(r)$ γίνεται ελάχιστη

Δηλαδή όταν $\frac{d\upsilon_{eff}}{dr}=0$ Αλλά $\upsilon_{eff}=\frac{\ell^2}{2\mu r^2}-\frac{GMm}{r}$ (1)

Επομένως: $\frac{d\upsilon_{eff}}{dr}=0\Rightarrow \frac{-\cancel{2}\ell^2}{\cancel{2}\mu r^{\cancel{3}}}+\frac{GMm}{\cancel{r^2}}=0\Rightarrow \frac{\ell^2}{mr}=\frac{GMm}{1}\Rightarrow$

$\Rightarrow r=\frac{\ell^2}{Gm^2M}$ (2)

Από (1) ∧ (2) $\Rightarrow \upsilon_{eff}^{min}=\frac{\ell^2}{2m\frac{\ell^4}{(Gm^2M)^2}}-\frac{GMm}{\frac{\ell^2}{Gm^2M}}\Rightarrow \upsilon_{eff}^{min}=\frac{G^2m^3M^2}{2\ell^2}-\frac{G^2M^2m^3}{\ell^2}\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\upsilon_{eff}^{min}=-\frac{G^2M^2m^3}{2\ell^2}}$

Επομένως $\dot{r}_{max}=\sqrt{\frac{2[E-\upsilon_{eff}^{min}]}{m}}=\sqrt{\frac{2}{m}\left(E+\frac{G^2M^2m^3}{2\ell^2}\right)}=\frac{GMm}{\ell}\sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{G^2M^2m^3}}$

Αλλά $\tau=\frac{2\pi abm}{\ell}$ και $e=\sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{m^3G^2M^2}}$ (θυμηθείτε ότι $e=\sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{\mu k^2}}$ και $k=GMm$)

Επομένως: $\boxed{\dot{r}_{max}=\frac{GMe\tau}{2\pi ab}}$ Αλλά $b=\alpha\sqrt{1-e^2}$ μικρός ημιάξονας

και $GM=\frac{4\pi^2a^3}{\tau^2}$ νόμος του Kepler

Οπότε: $\dot{r}_{max}=\frac{4\pi^2\alpha^3}{\tau^2}\frac{e\tau}{2\pi\alpha^2\sqrt{1-e^2}}\Rightarrow \boxed{\dot{r}_{max}=\frac{2\pi\alpha e}{\tau\sqrt{1-e^2}}}$

Θεωρήστε ένα σώμα μάζας m περιορισμένο να κινείται στην επιφάνεια ενός παραβολοειδούς η εξίσωση του οποίου (σε κυλινδρικές συντεταγμένες) είναι $r^2 = 4az$. Αν το σώμα είναι κάτω από μια βαρυτική δύναμη, να δειχθεί ότι η συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων ως προς μια κύκλική τροχιά ακτίνας $\rho = \sqrt{4az_0}$ είναι $\omega = \sqrt{\frac{2g}{a+z_0}}$

Η Lagrangian είναι: $\mathcal{L} = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \left(\frac{r\dot{r}}{2a}\right)^2\right] - \frac{mgr^2}{4a}$

Οι εξισώσεις κίνησης θα είναι:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{mr^2\dot{\theta} = \ell = \sigma\tau\alpha\theta}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \Rightarrow mr\dot{\theta}^2 + m\frac{r\dot{r}^2}{4a} - \frac{mgr}{2a} = m\ddot{r} + \frac{m}{4a}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{r}\right)$$

Αντικαθιστούμε $\dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}$ οπότε θα πάρουμε:

$$\cancel{mr}\frac{\ell^2}{m^{\cancel{2}}r^{\cancel{4}3}} + \cancel{m}\frac{r\dot{r}^2}{4a} - \frac{\cancel{m}gr}{2a} - \cancel{m}\ddot{r} - \frac{\cancel{m}}{4a}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{r}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left.\frac{\ell^2}{m^2r^3} + \underbrace{\frac{r\dot{r}^2}{4a}}_{0} - \frac{gr}{2a} - \underbrace{\ddot{r}}_{0} - \frac{1}{4a}\underbrace{\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{r}\right)}_{0} = 0\right\} \Rightarrow \frac{\ell^2}{m^2r^3} - \frac{gr}{2a} = 0 \Rightarrow$$

Για $r = \sqrt{4az_0} = \sigma\tau\alpha\theta$ θα έχουμε

$$\Rightarrow r^4 = \frac{2a\ell^2}{m^2 g} \Rightarrow \ell^2 = \frac{m^2 g \rho^4}{2a}$$

Επομένως η εξίσωση της κίνησης γράφεται:

$$\ddot{r} + \frac{1}{4a}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{r}\right) - \frac{g\rho^4}{2ar^3} - \frac{r\dot{r}^2}{4a} + \frac{gr}{2a} = 0$$

Για μικρές αποκλίσεις γύρω από το ρ έστω $r = \rho + \delta\eta$. Επομένως η ακτινική εξίσωση γίνεται: $\left(1 + \frac{\rho^2}{4a^2}\right)\ddot{\eta} + \frac{2g}{a}\eta = 0 \longrightarrow$ Αρμονικός ταλαντωτής

$$\omega^2 = \frac{2g}{a}\Big/\left(1 + \rho^2/4a^2\right) = \frac{2g}{a\left(1 + z_0/a\right)} = \frac{2g}{(a+z_0)}$$

Στο περιήγειο μιας ελλειπτικής τροχιάς ένας δορυφόρος δέχεται μια ώθηση $\Delta\vec{p} = p_0 \cdot \hat{r}$
Ποιά θα είναι η τελική τροχιά του σώματος.

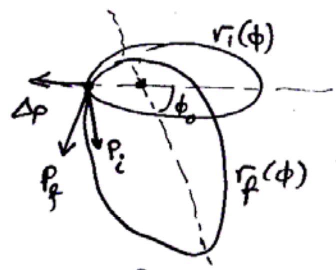
Η στροφορμή είναι: $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$

Εφόσον $\Delta\vec{p} = p_0\hat{r}$ ακτινική η στροφορμή θα διατηρηθεί $\Big\} \Rightarrow \ell = \ell'$

Ωστόσο η ενέργεια αλλάζει. Η εκκεντρότητα δίνεται από: $\Delta E = \frac{p_0^2}{2\mu}$

$$e_f^2 = 1 + \frac{2E_f\ell^2}{\mu k^2} = 1 + \frac{2(E_i+\Delta E)\ell^2}{\mu k^2} = \underbrace{1 + \frac{2E_i\ell^2}{\mu k^2}}_{e_i^2} + \frac{\cancel{2}p_0^2\ell^2}{\cancel{2}\mu^2k^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e_f^2 = e_i^2 + \left(\frac{p_0\ell}{\mu k}\right)^2 \quad (1)$$



Ο νέος ημιάξονας της έλλειψης είναι:

$$\left.\begin{aligned} a_f &= \frac{\ell^2/\mu k}{1-e_f^2} \quad (2) \\ a_i &= \frac{\ell^2/\mu k}{1-e_i^2} \quad (3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{a_f}{a_i} = \frac{1-e_i^2}{1-e_f^2} \Rightarrow a_f = a_i\,\frac{1-e_i^2}{1+e_f^2} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$a_f = a_i\,\frac{1-e_i^2}{1-e_i^2-\left(\frac{p_0\ell}{\mu k}\right)^2} = \frac{a_i(1-e_i^2)}{(1-e_i^2) - \frac{p_0^2}{\mu k}\underbrace{a_i(1-e_i^2)}_{\text{από (3)}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_f = \frac{a_i\cancel{(1-e_i^2)}}{\cancel{(1-e_i^2)}\left[1-\frac{p_0^2 a_i}{\mu k}\right]} \Rightarrow \boxed{a_f = \frac{a_i}{1-\frac{p_0^2}{\mu k}a_i}}$$

Η νέα έλλειψη πρέπει να περιγράφεται από την εξίσωση:

$$r_f(\phi) = \frac{\ell^2}{\mu k^2}\,\frac{1}{[1-e_f\cos(\phi+\delta)]}$$

Η διαφορά φάσης δ προσδιορίζεται με το να θέσουμε $r_i(\pi) = r_f(\pi) \Rightarrow$

$$\Rightarrow r_i(\pi) = r_f(\pi) = \frac{\cancel{\ell^2}}{\cancel{\mu k^2}}\,\frac{1}{1+e_i} = \frac{\cancel{\ell^2}}{\cancel{\mu k^2}}\,\frac{1}{1+e_f\cos\delta} \Rightarrow \boxed{\cos\delta = \frac{e_i}{e_f}}$$