ΦΥΣ 331 – Χειμερινό Εξάμηνο 2019

Τελική Εξέταση

Τρίτη 07/12/2019 **Διάρκεια**: **10:00 – 14:00**

Σας δίνονται 10 ισοδύναμα προβλήματα και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλα.
Σύνολο μονάδων 100.

Καλή Επιτυχία

Μερικές χρήσιμες σχέσεις:

$$u_1(p) = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{p_z}{E+m} \\ \dfrac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_2(p) = N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \dfrac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \quad \upsilon_1(p) = N\begin{pmatrix} \dfrac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \dfrac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \upsilon_2(p) = N\begin{pmatrix} \dfrac{p_z}{E+m} \\ \dfrac{p_x+ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$N = \sqrt{E+m}$$

$$u_\uparrow(\theta,\varphi) = N\begin{pmatrix} c \\ se^{i\varphi} \\ \dfrac{p}{E+m}c \\ \dfrac{pe^{i\varphi}}{E+m}s \end{pmatrix} u_\downarrow(\theta,\varphi) = N\begin{pmatrix} -s \\ ce^{i\varphi} \\ \dfrac{p}{E+m}s \\ \dfrac{-pe^{i\varphi}}{E+m}c \end{pmatrix} \upsilon_\uparrow(\theta,\varphi) = N\begin{pmatrix} \dfrac{p}{E+m}s \\ \dfrac{-pe^{i\varphi}}{E+m}c \\ -s \\ ce^{i\varphi} \end{pmatrix} \upsilon_\downarrow(\theta,\varphi) = N\begin{pmatrix} \dfrac{p}{E+m}c \\ \dfrac{pe^{i\varphi}}{E+m}s \\ c \\ se^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

$c = \cos(\theta/2)$ και $s = \sin(\theta/2)$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \ \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ -\sigma_\mu & 0 \end{pmatrix}, \ \{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \ (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^\mu)^\dagger = -\gamma^\mu$$

1. [**10μ**]

Για τις ακόλουθες αλληλεπιδράσεις να αναφέρετε τον νόμο διατήρησης ή οποιαδήποτε άλλον μηχανισμό υπεύθυνο ώστε οι ακόλουθες διεργασίες είτε να μην παρατηρούνται ή να να έχουν πολύ μικρή ενεργό διατομή:

(i) $n \to \pi^+ + e^-$

(ii) $n \to p + e^-$

(iii) $\pi^+ \to e^+ + \nu_e$ (ως προς την διεργασία $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$)

(iv) $\Lambda^0 \to K^+ + K^-$

(v) $K_L^0 \to \pi^+ + \pi^-$

2. [**10μ**]

(**α**) Εξηγήστε τους λόγους για τους οποίους οι ακόλουθες διεργασίες επιτρέπονται ή απαγορεύονται: [**3μ**]

(i) $p + \pi^- \to K^- + \Sigma^+$

(ii) $d + d \to {}^4He + \pi^0$

(iii) $K^- + p \to \Xi^- + K^+$

(**β**) Ποιος είναι ο λόγος των ενεργών διατομών των διεργασιών: $\sigma\left(p + p \to \pi^+ + d\right) / \sigma\left(n + p \to \pi^0 + d\right)$ στην ίδια ενέργεια κέντρου μάζας; [**7μ**]

3. [**10μ**]

Ένα σωματίδιο *X* έχει δύο κανάλια διάσπασης με μερικά πλάτη διάσπασης γ_1 (sec^{-1}) και γ_2 (sec^{-1}).

(**α**) Ποιά η ενδογενής αβεβαιότητα στη μάζα του σωματιδίου *X*; [**4μ**]

(**β**) Μία από τις διασπάσεις του *X* είναι η διεργασία $X \to \pi^+ + \pi^+$ που πραγματοποιείται μέσω των ισχυρών αλληλεπιδράσεων. Τι μπορείτε να συμπεράνετε για το ισοτοπικό σπιν του σωματιδίου *X*; [**6μ**]

4. [**10μ**]

Οι καταστάσεις $\left|K^0\right\rangle$ και $\left|\bar{K}^0\right\rangle$ των ουδέτερων *K*-μεσονίων, μπορούν να γραφούν ως γραμμικός συνδυασμός των καταστάσεων $\left|K_L\right\rangle$ και $\left|K_s\right\rangle$: $\left|K^0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|K_L\right\rangle + \left|K_s\right\rangle\right)$ και $\left|\bar{K}^0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|K_L\right\rangle - \left|K_s\right\rangle\right)$. Οι καταστάσεις $\left|K_L\right\rangle$ και $\left|K_s\right\rangle$ να αντιστοιχούν σε συγκεκριμένους χρόνους ζωής $\tau_{K_L} = \frac{1}{\gamma_{K_L}}$ και $\tau_{K_s} = \frac{1}{\gamma_{K_s}}$ και συγκεκριμένες αλλά διαφορετικές μάζες

$m_{K_L}c^2 \neq m_{K_s}c^2$. Έστω ότι τη χρονική στιγμή t = 0, παράγεται ένα μεσόνιο στην κατάσταση $\left|\psi\left(t=0\right)\right\rangle = \left|K^0\right\rangle$. Έστω ότι μετά από χρόνο t, η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση $\left|K^0\right\rangle$ είναι $P_0\left(t\right)$ και η πιθανότητα να βρεθεί στην κατάσταση $\left|\bar{K}^0\right\rangle$ είναι $\bar{P}_0\left(t\right)$. Βρείτε μία σχέση για την διαφορά $P_0\left(t\right) - \bar{P}_0\left(t\right)$ συναρτήσει των γ_{K_L}, γ_{K_s}, $m_{K_L}c^2$ και $m_{K_s}c^2$. Θεωρήστε ότι η CP διατηρείται.

5. [**10μ**]

(**α**) Προσδιορίστε την μικρότερη και μεγαλύτερη γωνία μεταξύ δύο σωματιδίων μηδενικής μάζας τα οποία παράγονται κατά τη διάσπαση ενός σωματιδίου μάζας m και ορμής $\vec{p}$. [**8μ**]

(**β**) Ένα ηλεκτρομαγνητικό καλορίμετρο μπορεί να ξεχωρίσει ηλεκτρομαγνητικές καταιγίδες που προκαλούνται από φωτόνια μεγάλης ενέργειας, όταν η γωνιακή απόσταση των δύο καταιγίδων είναι μεγαλύτερη από 5^o. Το καλορίμετρο χρησιμοποιείται για την ανίχνευση π^0. Ποια είναι η μέγιστη ενέργεια που μπορεί να έχουν τα π^0, ώστε οποιαδήποτε π^0 διάσπαση να μπορεί να ανακατασκευαστεί ως ζεύγος φωτονίων. [**2μ**]

6. [**10μ**]

(**α**) Το μποζόνιο Higgs ανακαλύφθηκε στον LHC του CERN το 2012.

(i) Σχεδιάστε τα δύο βασικά διαγράμματα παραγωγής του. [**2μ**]

(ii) Αναφέρετε τρεις βασικές διεργασίες διάσπασής του εκτός αυτής μέσω ζεύγους φωτονίων και ζεύγους Z μποζονίων και περιγράψτε τη σημασία τους στη φυσική του Higgs μποζονίου και τους λόγους που κατά τη γνώμη σας είναι περισσότερο δύσκολη ανίχνευσή τους. [**3μ**]

(**β**) Ο ρυθμός διάσπασης ενός Higgs μποζονίου σε ζεύγος φερμιονίων μπορεί να γραφεί: $\Gamma = \frac{p^*}{8\pi m_H^2}\left\langle M_{fi}\right\rangle^2$, όπου p^* είναι η ορμή στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας, m_H είναι η μάζα του Higgs και $\left\langle M_{fi}\right\rangle$ είναι το πινακοστοιχείο που περιγράφει τη διεργασία και δίνεται από τη σχέση: $\left\langle M_{fi}\right\rangle = \frac{g_W m_f p^*}{m_W}$, όπου m_W είναι η μάζα του W, m_f είναι η μάζα του φερμιονίου και g_W είναι η σταθερά σύζευξης των ασθενών αλληλεπιδράσεων.

Να δείξετε ότι ο ρυθμός διάσπασης $H \to f\bar{f}$ δίνεται από τη σχέση: $\Gamma = N_c\left(\frac{G_F m_f^2 m_H}{4\sqrt{2}\pi}\right)\left(1 - \frac{4m_f^2}{m_H^2}\right)^{\frac{3}{2}}$, όπου $G_F = 1.2\times10^{-3}GeV^{-2} = \sqrt{2}\,g_W^2/8m_W^2$ η σταθερά Fermi και N_c ο αριθμός των χρωμάτων. Εξηγήστε τι θα πρέπει να θεωρήσετε ώστε να λάβετε υπόψη στον υπολογισμό σας το spin και το χρώμα. Δίνεται ότι $\hbar = 6.6\times10^{-23}GeV\sec$. [**5μ**]

7. [**10μ**]

Αν δράσουμε στην εξίσωση Dirac $\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\psi=0$ με $\gamma^{\nu}\partial_{\nu}$, δείξτε ότι οι συνιστώσες της ψ ικανοποιούν την εξίσωση Klein-Gordon: $\left(\partial^{\mu}\partial_{\mu}+m^{2}\right)\psi=0$.

8. [**10μ**]

Δείξτε ότι αν $\hat{P}$ είναι ο τελεστής της parity, τότε $\hat{P}u_{\uparrow}\left(\theta,\varphi\right)=u_{\downarrow}\left(\pi-\theta,\pi+\varphi\right)$. Σχολιάστε το αποτέλεσμα σχετικά με το αποτέλεσμα της δράσης του τελεστή της parity σε ένα LH ή RH σωματίδιο.

9. [**10μ**]

(**α**) Δείξτε ότι ο τελεστής της helicity μπορεί να γραφεί στη μορφή: $\hat{h}=-\frac{1}{2}\frac{\gamma^{0}\gamma^{5}\vec{\gamma}\cdot\vec{p}}{\left|\vec{p}\right|}$. [**5μ**]

(**β**) Δείξτε ότι οι χειραλικοί τελεστές προβολής: $P_{R}=\frac{1}{2}\left(1+\gamma^{5}\right)$ και $P_{L}=\frac{1}{2}\left(1-\gamma^{5}\right)$ ικανοποιούν τις σχέσεις: $P_{R}+P_{L}=1$, $P_{R}P_{R}=P_{R}$, $P_{L}P_{L}=P_{L}$ και $P_{L}P_{R}=0$. [**5μ**]

10. [**10μ**]

Θεωρήστε το απλό μοντέλο ABC και την ελαστική σκέδαση $\mathrm{A}+\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{A}+\mathrm{B}$ στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου (το σωματίδιο B είναι αρχικά ακίνητο) και υποθέστε ακόμα ότι η αρχική ενέργεια E_1 του προσπίπτοντος σωματιδίου A ικανοποιεί τη σχέση $E_{1}\ll m_{\mathrm{B}}$, έτσι ώστε η ανάκρουση του στόχου μπορεί να αγνοηθεί.

(**α**) Χρησιμοποιήστε τον χρυσό κανόνα Fermi για σκέδαση για να δείξετε ότι η ενεργός διατομή σκέδασης δίνεται από τη σχέση: $\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\left|M\right|^{2}}{\left(8\pi m_{\mathrm{B}}\right)^{2}}$. [**2μ**]

(**β**) Γράψτε τα διαγράμματα χαμηλότερης τάξης για την διεργασία σκέδασης στο ABC μοντέλο. [**2μ**]

(**γ**) Υπολογίστε το πλάτος της σκέδασης χρησιμοποιώντας τους κανόνες Feynman στο ABC μοντέλο. Να εκφράσετε το αποτέλεσμά σας χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές Mandelstam s, t και/ή u ανάλογα αν είναι σχετικές στο πρόβλημα. [**2μ**]

(**δ**) Συνδυάστε τα αποτελέσματά σας από τα ερωτήματα (**α**) έως (**γ**) για να βρείτε την διαφορική ενεργό διατομή (στο όριο $E_{1}\ll m_{\mathrm{B}}$ και υποθέτοντας ότι m_{A} και m_{C} είναι πολύ μικρές ως προς την m_{B}). [**2μ**]

(**ε**) Δείξτε ότι η ολική ενεργός διατομή δίνεται από τη σχέση $\sigma=g^{4}/\left(4\pi m_{\mathrm{B}}^{6}\right)$ κάτω από τις συνθήκες που τέθηκαν στο ερώτημα (**δ**). [**2μ**]

For $I = 1$ (π, b, ρ, a): $u\overline{d}$, $(u\overline{u} - d\overline{d})/\sqrt{2}$, $d\overline{u}$;
for $I = 0$ (η, η', h, h', ω, ϕ, f, f'): $c_1(u\overline{u} + d\overline{d}) + c_2(s\overline{s})$

$\boxed{\pi^\pm}$ $I^G(J^P) = 1^-(0^-)$

Mass $m = 139.57061 \pm 0.00024$ MeV (S = 1.6)
Mean life $\tau = (2.6033 \pm 0.0005) \times 10^{-8}$ s (S = 1.2)
$c\tau = 7.8045$ m

$\boxed{\pi^0}$ $I^G(J^{PC}) = 1^-(0^{-+})$

Mass $m = 134.9770 \pm 0.0005$ MeV (S = 1.1)
$m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0} = 4.5936 \pm 0.0005$ MeV
Mean life $\tau = (8.52 \pm 0.18) \times 10^{-17}$ s (S = 1.2)
$c\tau = 25.5$ nm

$K^+ = u\overline{s}$, $K^0 = d\overline{s}$, $\overline{K}^0 = \overline{d}s$, $K^- = \overline{u}s$, similarly for K^*'s

$\boxed{K^\pm}$ $I(J^P) = \frac{1}{2}(0^-)$

Mass $m = 493.677 \pm 0.016$ MeV [u] (S = 2.8)
Mean life $\tau = (1.2380 \pm 0.0020) \times 10^{-8}$ s (S = 1.8)
$c\tau = 3.711$ m

$\boxed{K^0_S}$ $I(J^P) = \frac{1}{2}(0^-)$

Mean life $\tau = (0.8954 \pm 0.0004) \times 10^{-10}$ s (S = 1.1) Assu ing CPT
Mean life $\tau = (0.89564 \pm 0.00033) \times 10^{-10}$ s Not assuming CPT
$c\tau = 2.6844$ cm Assuming CPT

$\boxed{K^0_L}$ $I(J^P) = \frac{1}{2}(0^-)$

$m_{K_L} - m_{K_S}$
$= (0.5293 \pm 0.0009) \times 10^{10}\ \hbar\ \text{s}^{-1}$ (S = 1.3) Assuming CPT
$= (3.484 \pm 0.006) \times 10^{-12}$ MeV Assuming CPT
$= (0.5289 \pm 0.0010) \times 10^{10}\ \hbar\ \text{s}^{-1}$ Not assuming CPT
Mean life $\tau = (5.116 \pm 0.021) \times 10^{-8}$ s (S = 1.1)
$c\tau = 15.34$ m

$$p,\ N^{+} = uud; \quad n,\ N^{0} = udd$$

$\boxed{p}$ $\quad I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^{+})$

$\boxed{n}$ $\quad I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^{+})$

$$\Lambda^{0} = uds$$

$\boxed{\Lambda}$ $\quad I(J^P) = 0(\frac{1}{2}^{+})$

$$\Sigma^{+} = uus, \quad \Sigma^{0} = uds, \quad \Sigma^{-} = dds$$

$\boxed{\Sigma^{+}}$ $\quad I(J^P) = 1(\frac{1}{2}^{+})$

$\boxed{\Sigma^{0}}$ $\quad I(J^P) = 1(\frac{1}{2}^{+})$

$\boxed{\Sigma^{-}}$ $\quad I(J^P) = 1(\frac{1}{2}^{+})$

$$\Xi^{0} = uss, \quad \Xi^{-} = dss$$

$\boxed{\Xi^{0}}$ $\quad I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^{+})$

$\boxed{\Xi^{-}}$ $\quad I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^{+})$

43. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

	J	J	…
	M	M	…
m_1 m_2			
m_1 m_2	Coefficients		
⋮ ⋮			

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^\ell_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\,Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

1/2×1/2

m_1	m_2	$J=1$, $M=+1$
+1/2	+1/2	1

m_1	m_2	$J=1$, $M=0$	$J=0$, $M=0$
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=1$, $M=-1$
−1/2	−1/2	1

1×1/2

m_1	m_2	$J=3/2$, $M=+3/2$
+1	+1/2	1

m_1	m_2	$J=3/2$, $M=+1/2$	$J=1/2$, $M=+1/2$
+1	−1/2	1/3	2/3
0	+1/2	2/3	−1/3

m_1	m_2	$J=3/2$, $M=-1/2$	$J=1/2$, $M=-1/2$
0	−1/2	2/3	1/3
−1	+1/2	1/3	−2/3

m_1	m_2	$J=3/2$, $M=-3/2$
−1	−1/2	1

2×1/2

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+5/2$
+2	+1/2	1

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+3/2$	$J=3/2$, $M=+3/2$
+2	−1/2	1/5	4/5
+1	+1/2	4/5	−1/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+1/2$	$J=3/2$, $M=+1/2$
+1	−1/2	2/5	3/5
0	+1/2	3/5	−2/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-1/2$	$J=3/2$, $M=-1/2$
0	−1/2	3/5	2/5
−1	+1/2	2/5	−3/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-3/2$	$J=3/2$, $M=-3/2$
−1	−1/2	4/5	1/5
−2	+1/2	1/5	−4/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-5/2$
−2	−1/2	1

3/2×1/2

m_1	m_2	$J=2$, $M=+2$
+3/2	+1/2	1

m_1	m_2	$J=2$, $M=+1$	$J=1$, $M=+1$
+3/2	−1/2	1/4	3/4
+1/2	+1/2	3/4	−1/4

m_1	m_2	$J=2$, $M=0$	$J=1$, $M=0$
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=2$, $M=-1$	$J=1$, $M=-1$
−1/2	−1/2	3/4	1/4
−3/2	+1/2	1/4	−3/4

m_1	m_2	$J=2$, $M=-2$
−3/2	−1/2	1

2×1

m_1	m_2	$J=3$, $M=+3$
+2	+1	1

m_1	m_2	$J=3$, $M=+2$	$J=2$, $M=+2$
+2	0	1/3	2/3
+1	+1	2/3	−1/3

m_1	m_2	$J=3$, $M=+1$	$J=2$, $M=+1$	$J=1$, $M=+1$
+2	−1	1/15	1/3	3/5
+1	0	8/15	1/6	−3/10
0	+1	2/5	−1/2	1/10

m_1	m_2	$J=3$, $M=0$	$J=2$, $M=0$	$J=1$, $M=0$
+1	−1	1/5	1/2	3/10
0	0	3/5	0	−2/5
−1	+1	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	$J=3$, $M=-1$	$J=2$, $M=-1$	$J=1$, $M=-1$
0	−1	2/5	1/2	1/10
−1	0	8/15	−1/6	−3/10
−2	+1	1/15	−1/3	3/5

m_1	m_2	$J=3$, $M=-2$	$J=2$, $M=-2$
−1	−1	2/3	1/3
−2	0	1/3	−2/3

m_1	m_2	$J=3$, $M=-3$
−2	−1	1

1×1

m_1	m_2	$J=2$, $M=+2$
+1	+1	1

m_1	m_2	$J=2$, $M=+1$	$J=1$, $M=+1$
+1	0	1/2	1/2
0	+1	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=2$, $M=0$	$J=1$, $M=0$	$J=0$, $M=0$
+1	−1	1/6	1/2	1/3
0	0	2/3	0	−1/3
−1	+1	1/6	−1/2	1/3

m_1	m_2	$J=2$, $M=-1$	$J=1$, $M=-1$
0	−1	1/2	1/2
−1	0	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=2$, $M=-2$
−1	−1	1

3/2×1

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+5/2$
+3/2	+1	1

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+3/2$	$J=3/2$, $M=+3/2$
+3/2	0	2/5	3/5
+1/2	+1	3/5	−2/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+1/2$	$J=3/2$, $M=+1/2$	$J=1/2$, $M=+1/2$
+3/2	−1	1/10	2/5	1/2
+1/2	0	3/5	1/15	−1/3
−1/2	+1	3/10	−8/15	1/6

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-1/2$	$J=3/2$, $M=-1/2$	$J=1/2$, $M=-1/2$
+1/2	−1	3/10	8/15	1/6
−1/2	0	3/5	−1/15	−1/3
−3/2	+1	1/10	−2/5	1/2

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-3/2$	$J=3/2$, $M=-3/2$
−1/2	−1	3/5	2/5
−3/2	0	2/5	−3/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-5/2$
−3/2	−1	1

$$d^j_{m',m} = (-1)^{m-m'} d^j_{m,m'} = d^j_{-m,-m'}$$

3/2×3/2

m_1	m_2	$J=3$, $M=+3$
+3/2	+3/2	1

m_1	m_2	$J=3$, $M=+2$	$J=2$, $M=+2$
+3/2	+1/2	1/2	1/2
+1/2	+3/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=3$, $M=+1$	$J=2$, $M=+1$	$J=1$, $M=+1$
+3/2	−1/2	1/5	1/2	3/10
+1/2	+1/2	3/5	0	−2/5
−1/2	+3/2	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	$J=3$, $M=0$	$J=2$, $M=0$	$J=1$, $M=0$	$J=0$, $M=0$
+3/2	−3/2	1/20	1/4	9/20	1/4
+1/2	−1/2	9/20	1/4	−1/20	−1/4
−1/2	+1/2	9/20	−1/4	−1/20	1/4
−3/2	+3/2	1/20	−1/4	9/20	−1/4

m_1	m_2	$J=3$, $M=-1$	$J=2$, $M=-1$	$J=1$, $M=-1$
+1/2	−3/2	1/5	1/2	3/10
−1/2	−1/2	3/5	0	−2/5
−3/2	+1/2	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	$J=3$, $M=-2$	$J=2$, $M=-2$
−1/2	−3/2	1/2	1/2
−3/2	−1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=3$, $M=-3$
−3/2	−3/2	1

2×3/2

m_1	m_2	$J=7/2$, $M=+7/2$
+2	+3/2	1

m_1	m_2	$J=7/2$, $M=+5/2$	$J=5/2$, $M=+5/2$
+2	+1/2	3/7	4/7
+1	+3/2	4/7	−3/7

m_1	m_2	$J=7/2$, $M=+3/2$	$J=5/2$, $M=+3/2$	$J=3/2$, $M=+3/2$
+2	−1/2	1/7	16/35	2/5
+1	+1/2	4/7	1/35	−2/5
0	+3/2	2/7	−18/35	1/5

m_1	m_2	$J=7/2$, $M=+1/2$	$J=5/2$, $M=+1/2$	$J=3/2$, $M=+1/2$	$J=1/2$, $M=+1/2$
+2	−3/2	1/35	6/35	2/5	2/5
+1	−1/2	12/35	5/14	0	−3/10
0	+1/2	18/35	−3/35	−1/5	1/5
−1	+3/2	4/35	−27/70	2/5	−1/10

m_1	m_2	$J=7/2$, $M=-1/2$	$J=5/2$, $M=-1/2$	$J=3/2$, $M=-1/2$	$J=1/2$, $M=-1/2$
+1	−3/2	4/35	27/70	2/5	1/10
0	−1/2	18/35	3/35	−1/5	−1/5
−1	+1/2	12/35	−5/14	0	3/10
−2	+3/2	1/35	−6/35	2/5	−2/5

m_1	m_2	$J=7/2$, $M=-3/2$	$J=5/2$, $M=-3/2$	$J=3/2$, $M=-3/2$
0	−3/2	2/7	18/35	1/5
−1	−1/2	4/7	−1/35	−2/5
−2	+1/2	1/7	−16/35	2/5

m_1	m_2	$J=7/2$, $M=-5/2$	$J=5/2$, $M=-5/2$
−1	−3/2	4/7	3/7
−2	−1/2	3/7	−4/7

m_1	m_2	$J=7/2$, $M=-7/2$
−2	−3/2	1

2×2

m_1	m_2	$J=4$, $M=+4$
+2	+2	1

m_1	m_2	$J=4$, $M=+3$	$J=3$, $M=+3$
+2	+1	1/2	1/2
+1	+2	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=4$, $M=+2$	$J=3$, $M=+2$	$J=2$, $M=+2$
+2	0	3/14	1/2	2/7
+1	+1	4/7	0	−3/7
0	+2	3/14	−1/2	2/7

m_1	m_2	$J=4$, $M=+1$	$J=3$, $M=+1$	$J=2$, $M=+1$	$J=1$, $M=+1$
+2	−1	1/14	3/10	3/7	1/5
+1	0	3/7	1/5	−1/14	−3/10
0	+1	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−1	+2	1/14	−3/10	3/7	−1/5

m_1	m_2	$J=4$, $M=0$	$J=3$, $M=0$	$J=2$, $M=0$	$J=1$, $M=0$	$J=0$, $M=0$
+2	−2	1/70	1/10	2/7	2/5	1/5
+1	−1	8/35	2/5	1/14	−1/10	−1/5
0	0	18/35	0	−2/7	0	1/5
−1	+1	8/35	−2/5	1/14	1/10	−1/5
−2	+2	1/70	−1/10	2/7	−2/5	1/5

m_1	m_2	$J=4$, $M=-1$	$J=3$, $M=-1$	$J=2$, $M=-1$	$J=1$, $M=-1$
+1	−2	1/14	3/10	3/7	1/5
0	−1	3/7	1/5	−1/14	−3/10
−1	0	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−2	+1	1/14	−3/10	3/7	−1/5

m_1	m_2	$J=4$, $M=-2$	$J=3$, $M=-2$	$J=2$, $M=-2$
0	−2	3/14	1/2	2/7
−1	−1	4/7	0	−3/7
−2	0	3/14	−1/2	2/7

m_1	m_2	$J=4$, $M=-3$	$J=3$, $M=-3$
−1	−2	1/2	1/2
−2	−1	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=4$, $M=-4$
−2	−2	1

$$d^1_{0,0} = \cos\theta \qquad d^{1/2}_{1/2,1/2} = \cos\frac{\theta}{2} \qquad d^1_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$d^{1/2}_{1/2,-1/2} = -\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^1_{1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}$$

$$d^1_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,3/2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,1/2} = -\sqrt{3}\,\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,2} = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2$$

$$d^{3/2}_{3/2,-1/2} = \sqrt{3}\,\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,1} = -\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{3/2}_{3/2,-3/2} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,0} = \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta \qquad d^2_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta-1)$$

$$d^{3/2}_{1/2,1/2} = \frac{3\cos\theta-1}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,-1} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta \qquad d^2_{1,0} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta$$

$$d^{3/2}_{1/2,-1/2} = -\frac{3\cos\theta+1}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,-2} = \left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2 \qquad d^2_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta+1) \qquad d^2_{0,0} = \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

Figure 43.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974).