ΦΥΣ 331 – Χειμερινό Εξάμηνο 2022

Ενδιάμεση Εξέταση

Τρίτη 25/10/2022 **Διάρκεια: 09:00 – 11:00**

Σας δίνονται 10 ισοδύναμες ασκήσεις και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλες. Σύνολο μονάδων 100.

Καλή Επιτυχία

1. [**10μ**]

Αποδείξτε ότι οι τελεστές του φορτίου, Q, και της συζυγίας φορτίου, C, δεν μετατίθενται. Για την ακρίβεια δείξτε ότι $[C,Q] = 2CQ$. _Υπόδειξη_: Θεωρήστε το αποτέλεσμα της ενέργειας των δύο αυτών τελεστών σε μία κατάσταση $|q\rangle$.

2. [**10μ**]

Ένα αντι-πρωτόνιο με κινητική ενέργεια 1 GeV χτυπά ένα πρωτόνιο σε ηρεμία στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Το πρωτόνιο και το αντι-πρωτόνιο έχουν ίδια μάζα και ίση με $938 MeV/c^2$. Τα δύο σωματίδια εξαϋλώνονται και δύο φωτόνια παράγονται κατά την διεργασία αυτή. Ένα από το φωτόνια κινείται στην διεύθυνση του προσπίπτοντος αντι-πρωτονίου ενώ το άλλο πρωτόνιο στην αντίθετη κατεύθυνση.

(α) Ποια είναι η ενέργεια του κάθε φωτονίου;

(β) Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας του αντι-πρωτονίου, τι ενέργεια έχει το κάθε φωτόνιο;

3. [**10μ**]

Βρείτε το λόγο των ενεργών διατομών για τις ακόλουθες διεργασίες όταν η ενέργεια του κέντρου μάζας είναι 1232 MeV:

(α) $\pi^- + p \to K^0\Sigma^0$

(β) $\pi^- + p \to K^+\Sigma^-$

(γ) $\pi^+ + p \to K^+\Sigma^+$

Δίνεται ότι το isospin του K^0 είναι (1/2, -1/2) του K^+ είναι (1/2,1/2) του Σ^0είναι (1,0) και του Σ^+ είναι (1,1)

4. [**10μ**]

Θεωρήστε τις ακόλουθες διεργασίες:

(α) $n \to p + \pi^-$ (β) $n \to p + \gamma$ (γ) $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$

(δ) $\Lambda^0 \to K^+ + K^-$ (ε) $p \to n + e^+ + \nu_e$

Για κάθε περίπτωση, αναφέρετε δίνοντας την ερμηνεία σας:

(i) επιτρεπτή ή μη επιτρεπτή διεργασία

(ii) αιτιολογία για μη επιτρεπτή διεργασία

(iii) είδος της αλληλεπίδρασης αν είναι επιτρεπτή.

5. [**10μ**]

Σχεδιάστε τα διαγράμματα Feynman για τις παρακάτω διεργασίες ονοματίζοντας καθαρά κάθε σωματίδιο που συμμετέχει. Για κάθε περίπτωση πρέπει να γράψετε ποια είναι η θεμελιώδης δύναμη που προκαλεί την αλληλεπίδραση.

(α) $\Delta^{++} \to p + \pi^{+}$ (β) $e^{+} + e^{-} \to \mu^{-} + \mu^{+}$ (γ) $B^{+} \to D^{0} + \mu^{+} + \nu_{\mu}$

(δ) $\omega^{0} \to \pi^{+} + \pi^{-} + \pi^{0}$ (ε) $B^{0} \to K^{+} + \pi^{-}$

Δίνεται το περιεχόμενο σε quarks για τα διάφορα σωματίδια: $\Delta^{++} = (uuu)$, $p = (uud)$, $\omega^{0} = \frac{u\bar{u}+d\bar{d}}{\sqrt{2}}$, $\pi^{+} = (u\bar{d})$, $\pi^{-} = (d\bar{u})$, $\pi^{-} = (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$, $B^{+} = (u\bar{b})$, $D^{0} = (c\bar{u})$.

6. [**10μ**]

Ο επιταχυντής SuperKEKB σχεδιάζεται ώστε να έρχονται σε μετωπική σκέδαση ηλεκτρόνια ενέργειας 7 TeV και ποζιτρόνια ενέργειας 4 TeV. Υπολογίστε την ενέργεια του κέντρου μάζας αυτού του συστήματος καθώς επίσης και την Lorentz προώθηση $\beta\gamma$ στην περίπτωση που το μεσόνιο $\Upsilon(4s)$ με μάζα 10.578 GeV είναι το σωματίδιο που παράγεται στην σκέδαση.

7. [**10 μ**]

Ένα πιόνιο εγκλωβίζεται από έναν πυρήνα δευτερίου σε P τροχιά, στην διεργασία:

$$\pi^{-} + d \to n + n$$

Δείξτε ότι τα δύο ουδέτερα νετρόνια πρέπει να βρίσκονται σε μονήρη κατάσταση (singlet). Δίνονται ότι το pion είναι $J^{P} = 0^{-}$, το νετρόνιο είναι $\frac{1}{2}^{+}$, ενώ το δευτέριο d είναι 1^{+}.

8. [**10μ**]

Το σωματίδιο $N^{*}(1440)$ με $J^{P} = \frac{1}{2}^{+}$ και $I = \frac{1}{2}$ διασπάται σε $N^{*} \to N + \pi$, όπου $N = p, n$.

Προσδιορίστε:

(α) Αν η διάσπαση συμβαίνει μέσω ισχυρών αλληλεπιδράσεων δίνοντας πλήρη εξήγηση. [**4μ**]

(β) Την γωνιακή στροφορμή της τελικής κατάστασης. [**6μ**]

9. [**10μ**]

Διεξάγεται ένα πείραμα για να διερευνηθεί κατά πόσο η διάσπαση $p + p \to Y + K^{+} + K^{-}$ μπορεί να παρατηρηθεί. Δίνεται ότι η μάζα του καονίου είναι 0.494GeV.

(α) Προσδιορίστε τις τιμές του ηλεκτρικού φορτίου, παραδοξότητας και βαρυονικού αριθμού του σωματιδίου Y που παράγεται. Προσδιορίστε τον αριθμό των quarks σθένους που μπορεί να έχει το Y. [**3μ**]

(β) Ένας θεωρητικός προσδιορισμός της μάζας του σωματιδίου Y οδηγεί στην πρόβλεψη ότι η αναλλοιώτη μάζα του σωματιδίου Y είναι 2150 MeV. Υπολογίστε την ελάχιστη ενέργεια που μπορεί να έχουν τα πρωτόνια της δέσμης ώστε να παραχθεί το συγκεκριμένο σωματίδιο. Θεωρήστε ότι τα πρωτόνια του στόχου είναι ακίνητα. [**4μ**]

(γ) Υποθέστε ότι η πρόβλεψη της μάζας είναι σωστή. Εξηγήστε τους πιθανούς τρόπους διάσπασης του σωματιδίου θεωρώντας τόσο διεργασίες μέσω ισχυρών και ασθενών αλληλεπιδράσεων. [**3μ**]

10. [**10μ**]
Δείξτε ότι η διάσπαση $\omega \rightarrow \pi^{+}\pi^{-}\pi^{0}$ διατηρεί το isospin ενώ η διάσπαση $\omega \rightarrow \pi^{0}\pi^{0}\pi^{0}$ δεν το διατηρεί.

43. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

		J	J	...
		M	M	...
m_1	m_2	Coefficients		
m_1	m_2			
.	.			

$1/2\times 1/2$

		1
		+1
+1/2	+1/2	1

		1	0
		0	0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

		1
		−1
−1/2	−1/2	1

$1\times 1/2$

		3/2
		+3/2
+1	+1/2	1

		3/2	1/2
		+1/2	+1/2
+1	−1/2	1/3	2/3
0	+1/2	2/3	−1/3

		3/2	1/2
		−1/2	−1/2
0	−1/2	2/3	1/3
−1	+1/2	1/3	−2/3

		3/2
		−3/2
−1	−1/2	1

$2\times 1/2$

		5/2
		+5/2
+2	+1/2	1

		5/2	3/2
		+3/2	+3/2
+2	−1/2	1/5	4/5
+1	+1/2	4/5	−1/5

		5/2	3/2
		+1/2	+1/2
+1	−1/2	2/5	3/5
0	+1/2	3/5	−2/5

		5/2	3/2
		−1/2	−1/2
0	−1/2	3/5	2/5
−1	+1/2	2/5	−3/5

		5/2	3/2
		−3/2	−3/2
−1	−1/2	4/5	1/5
−2	+1/2	1/5	−4/5

		5/2
		−5/2
−2	−1/2	1

$3/2\times 1/2$

		2
		+2
+3/2	+1/2	1

		2	1
		+1	+1
+3/2	−1/2	1/4	3/4
+1/2	+1/2	3/4	−1/4

		2	1
		0	0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

		2	1
		−1	−1
−1/2	−1/2	3/4	1/4
−3/2	+1/2	1/4	−3/4

		2
		−2
−3/2	−1/2	1

2×1

		3
		+3
+2	+1	1

		3	2
		+2	+2
+2	0	1/3	2/3
+1	+1	2/3	−1/3

		3	2	1
		+1	+1	+1
+2	−1	1/15	1/3	3/5
+1	0	8/15	1/6	−3/10
0	+1	2/5	−1/2	1/10

		3	2	1
		0	0	0
+1	−1	1/5	1/2	3/10
0	0	3/5	0	−2/5
−1	+1	1/5	−1/2	3/10

		3	2	1
		−1	−1	−1
0	−1	2/5	1/2	1/10
−1	0	8/15	−1/6	−3/10
−2	+1	1/15	−1/3	3/5

		3	2
		−2	−2
−1	−1	2/3	1/3
−2	0	1/3	−2/3

		3
		−3
−2	−1	1

1×1

		2
		+2
+1	+1	1

		2	1
		+1	+1
+1	0	1/2	1/2
0	+1	1/2	−1/2

		2	1	0
		0	0	0
+1	−1	1/6	1/2	1/3
0	0	2/3	0	−1/3
−1	+1	1/6	−1/2	1/3

		2	1
		−1	−1
0	−1	1/2	1/2
−1	0	1/2	−1/2

		2
		−2
−1	−1	1

$3/2\times 1$

		5/2
		+5/2
+3/2	+1	1

		5/2	3/2
		+3/2	+3/2
+3/2	0	2/5	3/5
+1/2	+1	3/5	−2/5

		5/2	3/2	1/2
		+1/2	+1/2	+1/2
+3/2	−1	1/10	2/5	1/2
+1/2	0	3/5	1/15	−1/3
−1/2	+1	3/10	−8/15	1/6

		5/2	3/2	1/2
		−1/2	−1/2	−1/2
+1/2	−1	3/10	8/15	1/6
−1/2	0	3/5	−1/15	−1/3
−3/2	+1	1/10	−2/5	1/2

		5/2	3/2
		−3/2	−3/2
−1/2	−1	3/5	2/5
−3/2	0	2/5	−3/5

		5/2
		−5/2
−3/2	−1	1

$$Y_1^0=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\Big)$$

$$Y_2^1=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_\ell^{-m}=(-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^\ell_{m,0}=\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\,Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2|j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1|j_2 j_1 J M\rangle$$

$$d^j_{m',m}=(-1)^{m-m'}d^j_{m,m'}=d^j_{-m,-m'}$$

$3/2\times 3/2$

		3
		+3
+3/2	+3/2	1

		3	2
		+2	+2
+3/2	+1/2	1/2	1/2
+1/2	+3/2	1/2	−1/2

		3	2	1
		+1	+1	+1
+3/2	−1/2	1/5	1/2	3/10
+1/2	+1/2	3/5	0	−2/5
−1/2	+3/2	1/5	−1/2	3/10

		3	2	1	0
		0	0	0	0
+3/2	−3/2	1/20	1/4	9/20	1/4
+1/2	−1/2	9/20	1/4	−1/20	−1/4
−1/2	+1/2	9/20	−1/4	−1/20	1/4
−3/2	+3/2	1/20	−1/4	9/20	−1/4

		3	2	1
		−1	−1	−1
+1/2	−3/2	1/5	1/2	3/10
−1/2	−1/2	3/5	0	−2/5
−3/2	+1/2	1/5	−1/2	3/10

		3	2
		−2	−2
−1/2	−3/2	1/2	1/2
−3/2	−1/2	1/2	−1/2

		3
		−3
−3/2	−3/2	1

$2\times 3/2$

		7/2
		+7/2
+2	+3/2	1

		7/2	5/2
		+5/2	+5/2
+2	+1/2	3/7	4/7
+1	+3/2	4/7	−3/7

		7/2	5/2	3/2
		+3/2	+3/2	+3/2
+2	−1/2	1/7	16/35	2/5
+1	+1/2	4/7	1/35	−2/5
0	+3/2	2/7	−18/35	1/5

		7/2	5/2	3/2	1/2
		+1/2	+1/2	+1/2	+1/2
+2	−3/2	1/35	6/35	2/5	2/5
+1	−1/2	12/35	5/14	0	−3/10
0	+1/2	18/35	−3/35	−1/5	1/5
−1	+3/2	4/35	−27/70	2/5	−1/10

		7/2	5/2	3/2	1/2
		−1/2	−1/2	−1/2	−1/2
+1	−3/2	4/35	27/70	2/5	1/10
0	−1/2	18/35	3/35	−1/5	−1/5
−1	+1/2	12/35	−5/14	0	3/10
−2	+3/2	1/35	−6/35	2/5	−2/5

		7/2	5/2	3/2
		−3/2	−3/2	−3/2
0	−3/2	2/7	18/35	1/5
−1	−1/2	4/7	−1/35	−2/5
−2	+1/2	1/7	−16/35	2/5

		7/2	5/2
		−5/2	−5/2
−1	−3/2	4/7	3/7
−2	−1/2	3/7	−4/7

		7/2
		−7/2
−2	−3/2	1

2×2

		4
		+4
+2	+2	1

		4	3
		+3	+3
+2	+1	1/2	1/2
+1	+2	1/2	−1/2

		4	3	2
		+2	+2	+2
+2	0	3/14	1/2	2/7
+1	+1	4/7	0	−3/7
0	+2	3/14	−1/2	2/7

		4	3	2	1
		+1	+1	+1	+1
+2	−1	1/14	3/10	3/7	1/5
+1	0	3/7	1/5	−1/14	−3/10
0	+1	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−1	+2	1/14	−3/10	3/7	−1/5

		4	3	2	1	0
		0	0	0	0	0
+2	−2	1/70	1/10	2/7	2/5	1/5
+1	−1	8/35	2/5	1/14	−1/10	−1/5
0	0	18/35	0	−2/7	0	1/5
−1	+1	8/35	−2/5	1/14	1/10	−1/5
−2	+2	1/70	−1/10	2/7	−2/5	1/5

		4	3	2	1
		−1	−1	−1	−1
+1	−2	1/14	3/10	3/7	1/5
0	−1	3/7	1/5	−1/14	−3/10
−1	0	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−2	+1	1/14	−3/10	3/7	−1/5

		4	3	2
		−2	−2	−2
0	−2	3/14	1/2	2/7
−1	−1	4/7	0	−3/7
−2	0	3/14	−1/2	2/7

		4	3
		−3	−3
−1	−2	1/2	1/2
−2	−1	1/2	−1/2

		4
		−4
−2	−2	1

$$d^1_{0,0}=\cos\theta \qquad d^{1/2}_{1/2,1/2}=\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^1_{1,1}=\frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$d^{1/2}_{1/2,-1/2}=-\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^1_{1,0}=-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}$$

$$d^1_{1,-1}=\frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,3/2}=\frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,1/2}=-\sqrt{3}\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,2}=\Big(\frac{1+\cos\theta}{2}\Big)^2$$

$$d^{3/2}_{3/2,-1/2}=\sqrt{3}\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,1}=-\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{3/2}_{3/2,-3/2}=-\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,0}=\frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta \qquad d^2_{1,1}=\frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta-1)$$

$$d^{3/2}_{1/2,1/2}=\frac{3\cos\theta-1}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,-1}=-\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta \qquad d^2_{1,0}=-\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta$$

$$d^{3/2}_{1/2,-1/2}=-\frac{3\cos\theta+1}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,-2}=\Big(\frac{1-\cos\theta}{2}\Big)^2 \qquad d^2_{1,-1}=\frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta+1) \qquad d^2_{0,0}=\Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\Big)$$

Figure 43.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974).

For $I = 1$ (π, b, ρ, a): $u\overline{d}$, $(u\overline{u}-d\overline{d})/\sqrt{2}$, $d\overline{u}$;
for $I = 0$ (η, η', h, h', ω, ϕ, f, f'): $c_1(u\overline{u} + d\overline{d}) + c_2(s\overline{s})$

$\boxed{\pi^{\pm}}$ $I^G(J^P) = 1^-(0^-)$

$\boxed{\pi^0}$ $I^G(J^{PC}) = 1^-(0^{-+})$

$\boxed{\eta}$ $I^G(J^{PC}) = 0^+(0^{-+})$

$\boxed{\rho(770)}$ $I^G(J^{PC}) = 1^+(1^{--})$

$\boxed{\omega(782)}$ $I^G(J^{PC}) = 0^-(1^{--})$

$\boxed{\phi(1020)}$ $I^G(J^{PC}) = 0^-(1^{--})$

$\boxed{\phi(1680)}$ $I^G(J^{PC}) = 0^-(1^{--})$

$K^+ = u\overline{s}$, $K^0 = d\overline{s}$, $\overline{K}^0 = \overline{d}\,s$, $K^- = \overline{u}\,s$, similarly for K^*'s

$\boxed{K^{\pm}}$ $I(J^P) = \frac{1}{2}(0^-)$

$\boxed{K^0}$ $I(J^P) = \frac{1}{2}(0^-)$

$\boxed{K^*(892)}$ $I(J^P) = \frac{1}{2}(1^-)$

$B^+ = u\overline{b}$, $B^0 = d\overline{b}$, $\overline{B}^0 = \overline{d}\,b$, $B^- = \overline{u}\,b$, similarly for B^*'s

$\boxed{B^{\pm}}$ $I(J^P) = \frac{1}{2}(0^-)$

$\boxed{B^0}$ $I(J^P) = \frac{1}{2}(0^-)$