ΦΥΣ. 211
ΕΡΓΑΣΙΑ # 10 – Προαιρετική
Επιστροφή το αργότερο μέχρι τα μεσάνυχτα της Κυριακής 15/5/2016

1. Ένας περιστροφέας αποτελείται από μια ράβδο αμελητέας μάζας και μήκους $2l$ στα άκρα της οποίας είναι στερεωμένες δυο μάζες m. Η διεύθυνση της ράβδου σχηματίζει γωνία a, με την κατακόρυφο και περιστρέφεται γύρω από τον z-άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Την χρονική στιγμή $t = 0$, βρίσκεται στο xz-επίπεδο. Οι συντεταγμένες των μαζών σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή δίνονται από τις σχέσεις:

Σώμα 1	Σώμα 2
$x_1 = \rho\cos(\omega t)$	$x_2 = -\rho\cos(\omega t)$
$y_1 = \rho\sin(\omega t)$	$y_2 = -\rho\sin(\omega t)$
$z_1 = -h$	$z_2 = h$

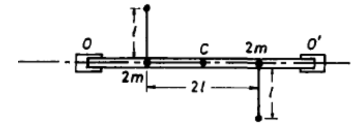
όπου $\rho = l\cos a$ και $h = l\sin a$. Να υπολογιστεί ο τανυστής της ροπής αδράνειας ως προς το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το μέσο της ράβδου. Να υπολογιστούν οι συνιστώσες της στροφορμής στους 3-άξονες και οι συνιστώσες της ροπής που ασκείται στο σύστημα ώστε να εκτελεί την κίνησή του.

2. Ένα νόμισμα σε οριζόντιο επίπεδο, ρίχνεται στον αέρα με γωνιακή ταχύτητα ω_1 ως προς μια διάμετρό του και ω_3 ως προς τον κύριο άξονα που είναι κάθετος στο νόμισμα. Αν η ω_3 είναι μηδέν τότε το νόμισμα θα περιστρέφονταν ως προς την διάμετρό του. Για μη μηδενική ω_3, το νόμισμα μεταπίπτει. Ποια η ελάχιστη τιμή του λόγου ω_3/ω_1 ώστε η μεταπτωτική κίνηση είναι τέτοια ώστε πάντοτε η μια όψη του νομίσματος είναι ορατή από παρατηρητή που κοιτά το νόμισμα από την πάνω πλευρά.

3. Αποδείξτε το θεώρημα παράλληλων αξόνων. Αποδείξτε δηλαδή ότι αν ξέρουμε τον τανυστή της ροπής αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας ενός σώματος (I_{CM}), και θέλουμε να βρούμε τον τανυστή αδράνειας ως προς σημείο μετατοπισμένο κατά ένα σταθερό διάνυσμα $\vec{a}$, αυτός δίνεται από την σχέση: $I_{\vec{a}} = I_{cm} + M\left(a^2\delta_{ij} - a_i a_j\right)$

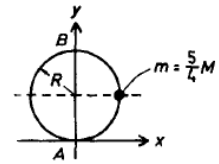
4. Ένα ομοιογενές κομάτι μετάλλου σε σχήμα ορθογωνίου, έχει μάζα M και πλευρές 2α και 2β αντίστοιχα. Να βρεθούν οι κύριοι άξονες και κύριες ροπές αδράνειας ως προς μια κορυφή του ορθογωνίου.

5. Το διπλανό σχήμα παρουσιάζει μια ράβδο αμελητέας μάζας στην οποία βρίσκονται δυο σημειακές μάζες m και $2m$. Το σύστημα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, ως προς τον άξονα ΟΟ'. (α) Ποια είναι η ροπή ως προ το μέσο της ράβδου που εξασκούν τα σημεία Ο και Ο' που περιστρέφουν την ράβδο; Να δώσετε μέτρο και διεύθυνση. (β) Να προσδιορίσετε ένα άξονα στο επίπεδο των μαζών ως προς τον οποίο, το σύστημα μπορεί να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα χωρίς την εφαρμογή ροπής.



6. Ένας λεπτός δίσκος ακτίνας R και μάζας M, βρίσκεται στο xy-επίπεδο και έχει μια σημειακή μάζα, m=5M/4 προσκολλημένη στην περιφέρειά του. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς το κέντρο μάζας του είναι:

$$I = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



(α) Να βρεθεί ο τανυστής της ροπής αδράνειας του συνδυασμού του δίσκου και της μάζας ως προς το σημείο A στο σύστημα συντεταγμένων που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

(β) Να βρεθούν οι κύριοι άξονες και ροπές αδράνειας ως προς το σημείο A.

(γ) Ο δίσκος είναι περιορισμένος να περιστρέφεται ως προς τον y-άξονα, με γωνιακή ταχύτητα ω με την βοήθεια κατάλληλων διατάξεων στα σημεία A και B. Περιγράψτε την στροφορμή ως προς το σημείο A συναρτήσει του χρόνου και βρείτε το διάνυσμα της δύναμης που εφαρμόζεται στο σημείο B. Αγνοήστε την βαρύτητα.

7. Μια συμπαγής ρόδα έχει κύριες τιμές του τανυστή αδράνειας $I_1 = I_2 \neq I_3$ ως προς τους κύριους άξονες του σώματος $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ που φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Η ρόδα είναι προσαρτημένη σε άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της που επιτρέπει περιστροφή χωρίς τριβές ως προς έναν κύριο άξονά της. Η ρόδα είναι δυναμικά ζυγοσταθμισμένη, δηλαδή μπορεί να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα χωρίς να εξασκεί ροπή στον άξονα περιστροφής της. Ποιες συνθήκες θα πρέπει να ικανοποιούν οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας; Σχεδιάστε τις επιτρεπτές κινήσεις.