

Κυκλώματα που περιέχουν Πηνία RL, LC, RLC

Κυκλώματα RL

Το γεγονός ότι εισάγουμε ένα χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο σε κάποιο απλό κύκλωμα, έχει σαν αποτέλεσμα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{s} \neq 0$ κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής να μην είναι μηδέν.

Εν αντιθέσει έχουμε ότι:
$$\oint \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Είδαμε ακόμα ότι ένα οποιοδήποτε κύκλωμα που διαρρέεται από χρονικά μεταβαλλόμενο ρεύμα, προκαλεί χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο και επομένως επάγεται ηλεκτρικό πεδίο.

Θα συζητήσουμε τεχνικές που χρησιμοποιούμε για να λάβουμε υπόψιν χρονικά μεταβαλλόμενα μαγνητικά πεδία σε κυκλώματα.

Τη στιγμή που εισαγάγουμε μεταβολές στο μαγνητικό πεδίο εξαιτίας χρονικά μεταβαλλόμενου ρεύματος, η διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού ανάμεσα σε δύο σημεία του κυκλώματος δεν ορίζεται επακριβώς. Ο λόγος οφείλεται στο γεγονός ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του ηλεκτρικού πεδίου δεν είναι μηδέν κατά μήκος μια κλειστής διαδρομής αλλά εξαρτάται από το διαδρομή που θεωρούμε.

Το ηλεκτρικό πεδίο δεν είναι πλέον ένα συντηρητικό πεδίο, και το ηλεκτρικό δυναμικό δεν είναι πλέον η κατάλληλη έννοια, αφού δεν μπορούμε να γράψουμε το ηλεκτρικό πεδίο ως την αρνητική κλίση της βαθμωτής δυναμικής ενέργειας. Ωστόσο μπορούμε να εξηγήσουμε ακριβώς πως συμπεριφέρεται το κύκλωμα κάτω από αυτές τις συνθήκες.

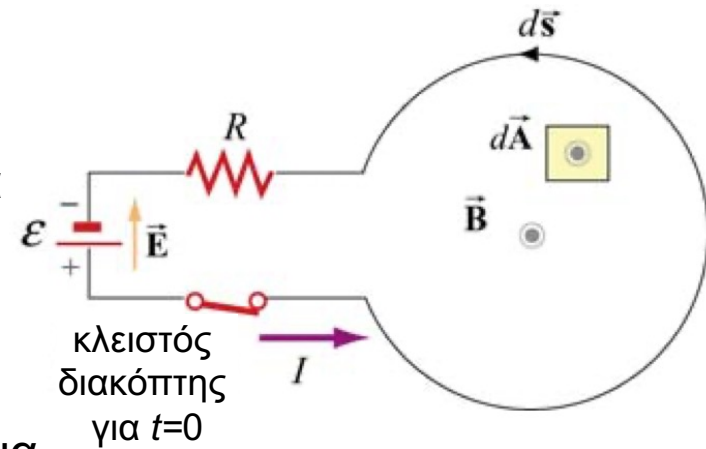
Κυκλώματα RL

Θεωρούμε το κύκλωμα του σχήματος.

Για $t > 0$ το ρεύμα θα διαρρέει το κύκλωμα σύμφωνα με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα.

Θα μελετήσουμε την εξίσωση που περιγράφει την συμπεριφορά του ρεύματος $I(t)$ για $t > 0$.

Εφαρμόζουμε τον νόμο του Faraday, για την επιφάνεια που οριοθετείται από το κύκλωμα και θεωρούμε ότι η θετική φορά του διανύσματος της επιφάνειας $d\vec{A}$ είναι προς το εξωτερικό της σελίδας, ενώ το διάνυσμα $d\vec{s}$ έχει φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού.



Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος της καμπύλης του κυκλώματος.

Υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο στη μπαταρία το οποίο έχει φορά από τον θετικό προς τον αρνητικό πόλο της μπαταρίας. Όταν όμως πηγαίνουμε μέσω της μπαταρίας διασχίζοντάς την σύμφωνα με τη φορά του ρεύματος που σχεδιάσαμε, κινούμαστε αντίθετα με το ηλεκτρικό πεδίο και άρα:

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} < 0. \text{ Συνεισφορά της μπαταρίας στο κύκλωμα είναι } -\varepsilon.$$

Υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο πάνω στην αντίσταση και αυτό έχει τη φορά του ρεύματος. Επομένως κινούμενοι με την φορά του $d\vec{s}$ θα έχουμε $\vec{E} \cdot d\vec{s} > 0$ και $+\varepsilon$ οπότε IR

Κυκλώματα RL

Καθώς κινούμαστε μέσω του πηνίου, δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του πεδίου αν έχει μηδενική αντίσταση σύρματος από το οποίο είναι κατασκευασμένο το πηνίο.

Κινούμενοι επομένως κατά μήκος της καμπύλης του κυκλώματος και αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού θα έχουμε:

$$\oint \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{s} = -\mathcal{E} + IR$$

Ποια είναι ωστόσο η μαγνητική ροή που διαρρέει την ανοικτή επιφάνεια του κυκλώματος;

Θεωρούμε την πηγή, αντίσταση και διακόπτη να συνεισφέρουν ελάχιστα στη μαγνητική ροή, εν αντιθέσει με την πολύ μεγαλύτερη συνεισφορά της ανοικτής επιφάνειας που περιλαμβάνει το βρόχο.

Ξέρουμε επίσης ότι η ροή είναι θετική στο τμήμα αυτό του κυκλώματος γιατί το ρεύμα κινείται αντίθετα με την φορά των δεικτών του ρολογιού, και παράγει μαγνητικό πεδίο \vec{B} το οποίο είναι ομόρροπο με το διάνυσμα της επιφάνειας.

Επομένως $\vec{B} \cdot d\vec{A} > 0$. Προσέξτε ότι το \vec{B} είναι το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα και όχι από κάποια εξωτερική πηγή.

Κυκλώματα RL

Ξέρουμε ότι η μαγνητική ροή είναι ανάλογη του ρεύματος και μπορούμε να την εκφράσουμε με την μορφή: $\Phi_m = LI$, όπου L ο συντελεστής αυτεπαγωγής που εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πηνίου/βρόχου.

Η χρονική μεταβολή της μαγνητικής ροής θα είναι: $\frac{d\Phi_m}{dt} = L \frac{dI}{dt}$

και από τον νόμο του Faraday θα έχουμε: $\oint \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{s} = -\mathcal{E} + IR = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$

Μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση για το χρονικά μεταβαλλόμενο ρεύμα $I(t)$:

$$\Delta V = \mathcal{E} - IR - L \frac{dI}{dt} = 0$$

Η εξίσωση έχει γραφεί με τρόπο ώστε να θυμίζει τον 2^ο νόμο του Kirchhoff για την τάση κατά μήκος ενός κλειστού βρόχου.

Για να διατηρήσουμε τον 2^ο νόμο του Kirchhoff θα πρέπει να προσδιορίσουμε την πτώση δυναμικού κατά μήκος του πηνίου.

Κυκλώματα RL – Τροποποιημένος 2^{ος} νόμος Kirchhoff

Ο τροποποιημένος νόμος του *Kirchhoff* μπορεί να εξαχθεί ως εξής:

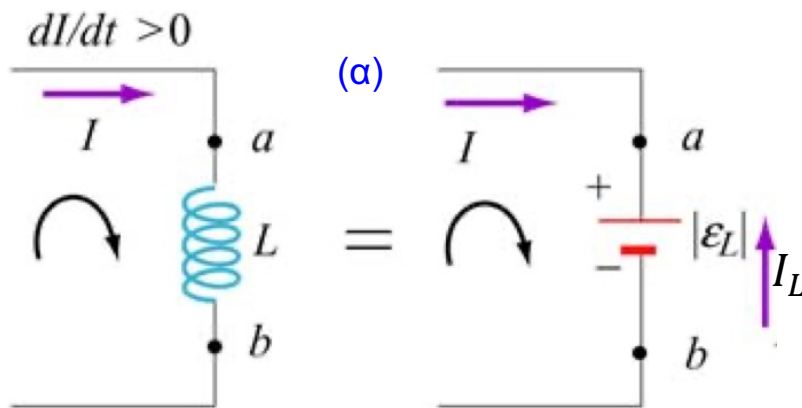
Η πολικότητα της επαγόμενης ΗΕΔ είναι τέτοια ώστε να υπάρχει αντίσταση στην αλλαγή της μαγνητικής ροής λόγω της αλλαγής του ρεύματος.

Η ΗΕΔ αυτεπαγωγής, \mathcal{E}_L , επάγει ένα ρεύμα, I_L , το οποίο έχει αντίθετη φορά με αυτό που διαρρέει το κύκλωμα λόγω της μπαταρίας.

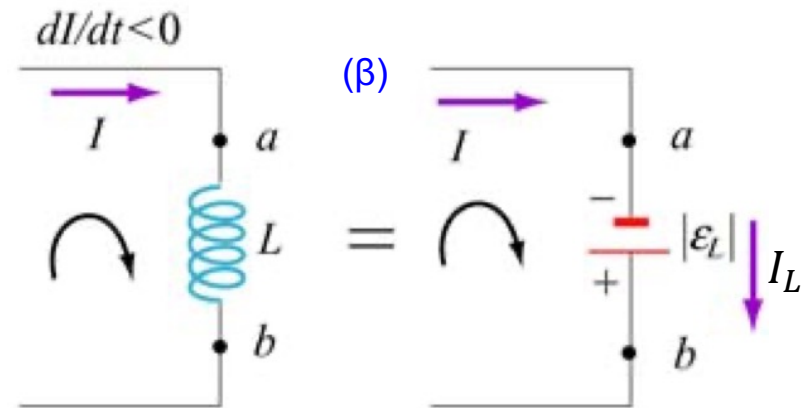
Το πηνίο θα μπορούσε να αντικατασταθεί με μια πηγή ΗΕΔ $|\mathcal{E}_L|$ και θα έχουμε:

$$|\mathcal{E}_L| = L \left| \frac{dI}{dt} \right| = +L \frac{dI}{dt} \quad \text{και πολικότητα όπως στο σχήμα (α).}$$

Ωστόσο αν η πολικότητα είναι όπως στο σχήμα (β) τότε $dI/dt < 0$ και το επαγόμενο ρεύμα έχει την ίδια φορά με το ρεύμα της μπαταρίας και τα ρεύματα προστίθενται.



$$\mathcal{E}_L = V_b - V_a = -L(dI/dt) < 0$$



$$\mathcal{E}_L = V_b - V_a = -L(dI/dt) > 0$$

Κυκλώματα RL – Τροποποιημένος 2^{ος} νόμος Kirchhoff

Παρατηρούμε επομένως ότι ανεξάρτητα από το αν το ρεύμα της μπαταρίας αυξάνει ή ελαττώνεται, η διαφορά δυναμικού καθώς κινούμαστε σύμφωνα με την φορά του ρεύματος της μπαταρίας, από το σημείο α στο σημείο β, παραμένει πάντοτε ίση με:

$$V_a - V_b = -L \frac{dI}{dt}$$

Άρα **ο τροποποιημένος 2^{ος} νόμος του Kirchhoff για κυκλώματα με πηνίο** είναι:

Αν διασχίζουμε ένα πηνίο με φορά ίδια με την φορά του ρεύματος της πηγής, η μεταβολή στο δυναμικό στα άκρα του θα είναι $-LdI/dt$. Αν το πηνίο διασχίζεται με φορά αντίθετη του ρεύματος, τότε η μεταβολή στο δυναμικό στα άκρα του είναι $+LdI/dt$.

Η χρήση του παραπάνω τροποποιημένου νόμου σε κυκλώματα με πηνίο θα δώσει τις σωστές εξισώσεις. Ωστόσο, πρέπει να τονιστεί ότι **από άποψη φυσικής δεν είναι σωστός** και δίνει την λάθος εντύπωση.

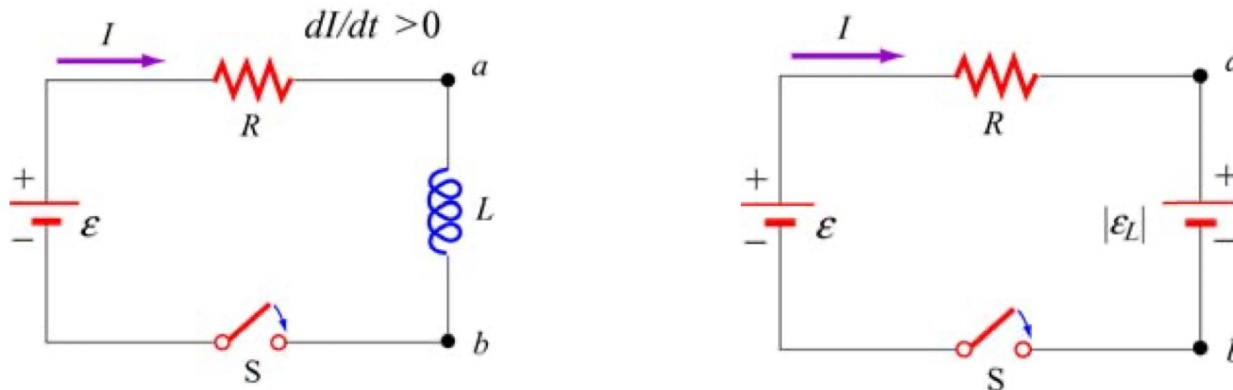
Ως υπενθύμιση, ο 2^{ος} νόμος του Kirchhoff εξάγεται από το γεγονός ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής είναι μηδέν.

Με την θεώρηση του χρονικά μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου αυτό παύει να ισχύει, και επομένως το άθροισμα των διαφορών δυναμικού κατά μήκος όλων των συστατικών κυκλώματος, αν θεωρήσουμε ότι είναι το αρνητικό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος του ηλεκτρικού πεδίου, δεν είναι πλέον μηδέν, αλλά $+L(dI/dt)$.

Κυκλώματα RL – Ανοδικό Ρεύμα

Έστω το RL κύκλωμα του παρακάτω σχήματος. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ο διακόπτης είναι κλειστός και το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα.

Βρίσκουμε ότι το ρεύμα δεν αυξάνει αμέσως στη μέγιστη τιμή του που είναι \mathcal{E}/R . Αυτό οφείλεται στην παρουσία του πηνίου, το οποίο επάγει μια ΗΕΔ αυτεπαγωγής που αντιτίθεται στην αλλαγή του ρεύματος.



Χρησιμοποιώντας τον τροποποιημένο 2^ο νόμο του Kirchhoff για αυξανόμενο ρεύμα: $dI/dt > 0$, το κύκλωμα RL περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\mathcal{E} - IR - |\mathcal{E}_L| = \mathcal{E} - IR - L \frac{dI}{dt} = 0$$

Ιδιαίτερη προσοχή: υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ της συμπεριφοράς μια ωμικής αντίστασης και ενός πηνίου. Ενώ η στην ωμική αντίσταση, η διαφορά δυναμικού στα άκρα της, εξαρτάται από το ρεύμα I , σε ένα πηνίο, η διαφορά δυναμικού εξαρτάται από τον ρυθμό μεταβολής του ρεύματος dI/dt αφού η επαγόμενη ΗΕΔ αντιτίθεται στο dI/dt

Κυκλώματα RL – Ανοδικό Ρεύμα

Η προηγούμενη διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφεί με την μορφή: $\frac{dI}{\left(I - \frac{\varepsilon}{R}\right)} = -\frac{dt}{L/R}$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη και θέτοντας την συνθήκη $I(t = 0) = 0$ η λύση της διαφορικής εξίσωσης θα είναι:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

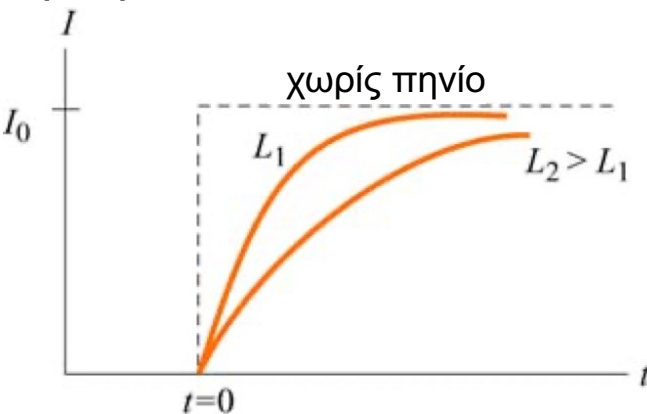
όπου $\tau = L/R$ είναι η **χρονική σταθερά** του RL κυκλώματος

Η συμπεριφορά του ρεύματος συναρτήσει του χρόνου φαίνεται στο σχήμα:

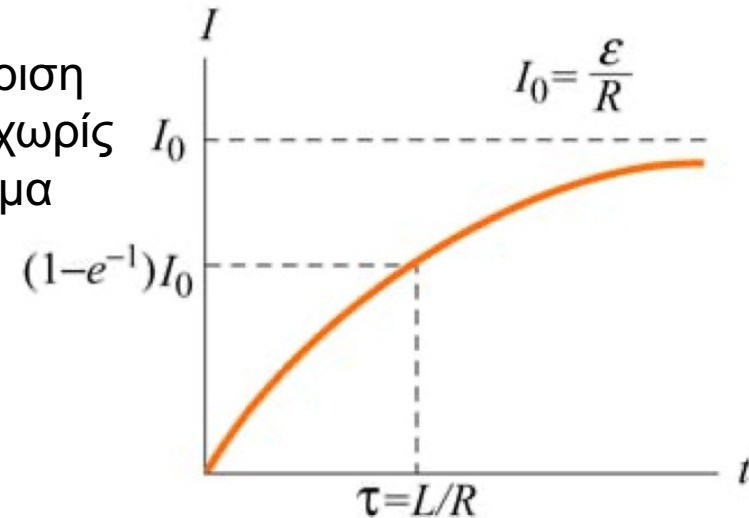
Παρατηρούμε ότι το ρεύμα φθάνει στην κανονική του τιμή, $\frac{\varepsilon}{R}$, μετά από αρκετό χρόνο.

Η χρονική σταθερά, τ , εκφράζει πόσο γρήγορα φθάνει στην κατάσταση της ισορροπίας.

Όσο μεγαλύτερη η τιμή της L τόσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος για να επιτευχθεί το ρεύμα



Σύγκριση για την απόκριση ενός κυκλώματος με ή χωρίς πηνίο φαίνεται στο σχήμα



Κυκλώματα RL – Ανοδικό Ρεύμα

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να πάρουμε την ΗΕΔ αυτεπαγωγής:

$$|\mathcal{E}_L(t)| = \left| -L \frac{dI}{dt} \right| = \mathcal{E} e^{-t/\tau}$$

Παρατηρούμε ότι η $|\mathcal{E}_L(t)|$ βρίσκεται σε μέγιστο όταν $t = 0$ και μηδενίζεται καθώς $t \rightarrow \infty$

Αυτό δηλώνει ότι μετά από αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα, η ΗΕΔ αυτεπαγωγής εξαφανίζεται και το πηνίο συμπεριφέρεται σαν ένας αγωγός που συνδέει δύο άκρα του κυκλώματος.

Μπορούμε να δούμε ότι η ενέργεια διατηρείται.

Από την εξίσωση του ρεύματος: $I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \Rightarrow IR = \mathcal{E} - \mathcal{E} e^{-t/\tau} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{E} + IR - \mathcal{E} e^{-t/\tau} = 0$ Πολλαπλασιάζουμε με I οπότε:

$$\Rightarrow \mathcal{E}I = \mathcal{E}I e^{-t/\tau} + I^2 R$$

Το αριστερό σκέλος αντιπροσωπεύει τον ρυθμό με τον οποίο η μπαταρία αποδίδει ενέργεια στο κύκλωμα. Το δεξί μέλος δηλώνει τον ρυθμό με τον οποίο μαγνητική ενέργεια αποθηκεύεται στο πηνίο (1^{ος} όρος) και το ρυθμό με τον οποίο ενέργεια χάνεται στην ωμική αντίσταση.

Κυκλώματα RL – Καθοδικό Ρεύμα

Έστω το RL κύκλωμα του παρακάτω σχήματος. Υποθέτουμε ότι ο διακόπτης S_1 είναι κλειστός για μεγάλο διάστημα και έτσι το σύστημα είναι σε ισορροπία και το ρεύμα που το διαρρέει είναι \mathcal{E}/R .

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνουμε τον διακόπτη S_2 .

Από τον τροποποιημένο 2^ο νόμο του Kirchhoff θα πάρουμε για το κύκλωμα στα δεξιά όπου $dI/dt < 0$ θα δώσει:

$$-IR + |\mathcal{E}_L| = -IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow -L \frac{dI}{dt} = IR \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt$$

Η λύση στην παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau}$$

Το γράφημα του ρεύματος συναρτήσει του χρόνου

