ΦΥΣ 133 – 6º ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

1. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης του Hamilton για σφαιρικό εκκρεμές μήκους b και μάζας m.

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(b^2 \dot{\theta}^2 + b^2 \sin^2\theta \, \dot{\phi}^2 \right)$$

$$V = - mgb \cos\theta$$

$$L = \frac{1}{2} m \left(b^2 \dot{\theta}^2 + b^2 \sin^2\theta \, \dot{\phi}^2 \right) + mgb\cos\theta$$

Επομένως οι κανονικοποιημένες ορμές:

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m b^2 \dot{\theta} \qquad \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m b^2}$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m b^2 \sin^2\theta \, \dot{\phi} \qquad \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m b^2 \sin^2\theta}$$

$$H = \dot{\theta} p_\theta + \dot{\phi} p_\phi - L = \frac{p_\theta^2}{m b^2} + \frac{p_\phi^2}{m b^2 \sin^2\theta} - \frac{1}{2} m b^2 \left(\frac{p_\theta^2}{m^2 b^4} + \sin^2\theta \frac{p_\phi^2}{m^2 b^4 \sin^4\theta} \right) - mgb\cos\theta$$

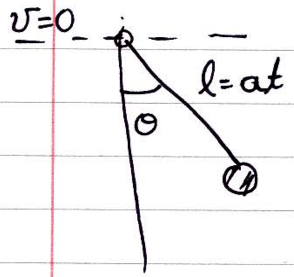
$$\Rightarrow H = \frac{p_\theta^2}{2 m b^2} + \frac{p_\phi^2}{2 m b^2 \sin^2\theta} - mgb\cos\theta$$

Εξισώσεις κίνησης:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{m b^2} \qquad \dot{\phi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\phi} = \dfrac{p_\phi}{m b^2 \sin^2\theta} \\ \dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = \dfrac{p_\phi^2 \cos\theta}{m b^2 \sin^3\theta} - mgb\sin\theta \end{cases}$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \qquad \phi : \text{κυκλική}$$

2. Να βρεθεί η Hamiltonian για εκκρεμές το μήκος του οποίου μεταβάλλεται χρονικά σύμφωνα με συνάρτηση $l=at$. Είναι H = E;



$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{l}^2 + (l\dot{\theta})^2\right) + mgl\cos\theta =$$

$$= \frac{1}{2}m\left(a^2t^2\dot{\theta}^2 + a^2\right) + mgl\cos\theta$$

Η Lagrangian εξαρτάται ακριβώς από το χρόνο οπότε Η δεν διατηρείται

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ma^2t^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ma^2t^2}$$

$$H = \frac{p_\theta^2}{ma^2t^2} - \frac{1}{2}m\left(a^2t^2\frac{p_\theta^2}{m^2a^4t^4} + a^2\right) - mgl\cos\theta \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} H = \dfrac{p_\theta^2}{2ml^2} - \dfrac{1}{2}ma^2 - mgl\cos\theta. \\[2ex] \text{Αλλά} \quad E = T + V = \dfrac{1}{2}m\left(a^2t^2\dot{\theta}^2 + a^2\right) - mgl\cos\theta \end{array}\right\} H \neq E$$

Ο μετασχηματισμός μεταξύ x, y και θ δεν είναι ανεξάρτητος του χρόνου

$$x = l\sin\theta = at\sin\theta$$

$$y = -l\cos\theta = -at\cos\theta$$

3. Σωματίδιο μάζας m κινείται κάτω από την επίδραση της βαρύτητας σε έλικα z=kθ σταθερής ακτίνας r, όπου k είναι σταθερά και η z διεύθυνση είναι κατακόρυφη. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης του Hamilton.

Η εξίσωση της έλικας: $\begin{cases} z = k\theta \Rightarrow \theta = \dfrac{z}{k} \\ r = const \end{cases}$

Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες (r, θ, z)

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(r^2 \dot{\theta}^2 + \cancelto{0}{\dot{r}^2} + \dot{z}^2 \right) = \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{r}{k}\right)^2 \dot{z}^2 + \dot{z}^2 \right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow T = \dfrac{1}{2} m \left[\left(\dfrac{r}{k}\right)^2 + 1 \right] \dot{z}^2 \\ V = mgz \end{array}\right\} \Rightarrow L = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{r}{k}\right)^2 + 1 \right] \dot{z}^2 - mgz$$

Η αντίστοιχη ορμή είναι $p_z = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \left[\left(\dfrac{r}{k}\right)^2 + 1 \right] \dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \dfrac{p_z}{m\left[\left(\frac{r}{k}\right)^2 + 1 \right]}$

Η Hamiltonian: $H = p_z \dot{z} - L = p_z \dot{z} - \dfrac{1}{2} m \left[\left(\dfrac{r}{k}\right)^2 + 1 \right] \dot{z}^2 + mgz \Rightarrow$

$$\Rightarrow H = \frac{p_z^2}{m\left[\left(\frac{r}{k}\right)^2+1\right]} - \frac{1}{2} \frac{p_z^2}{m\left[\left(\frac{r}{k}\right)^2+1\right]} + mgz \Rightarrow$$

$$\boxed{H = \frac{p_z^2}{2m\left[\left(\frac{r}{k}\right)^2+1\right]} + mgz}$$

Οι εξισώσεις κίνησης Hamilton:

$$\left.\begin{cases} \dot{z} = \dfrac{\partial H}{\partial p_z} \Rightarrow \dot{z} = \dfrac{p_z}{m\left[\left(\frac{r}{k}\right)^2+1\right]} \\ \dot{p}_z = -\dfrac{\partial H}{\partial z} \Rightarrow \dot{p}_z = -mg \end{cases}\right\} \Rightarrow \ddot{z} = \frac{\dot{p}_z}{m\left[\left(\frac{r}{k}\right)^2+1\right]}$$

$$\ddot{z}\, m\left(\left(\frac{r}{k}\right)^2+1\right) = -mg \Rightarrow \boxed{\ddot{z} = -\frac{\cancel{m} g}{\cancel{m}\left[\left(\frac{r}{k}\right)^2+1\right]}}$$

4. (α) Η Lagrangian ενός συστήματος με ένα βαθμό ελευθερίας μπορεί να γραφεί με τη μορφή: $L=\frac{m}{2}\left(\dot{q}^2\sin^2\omega t+\dot{q}q\omega\sin 2\omega t+q^2\omega^2\right)$. Ποια είναι η αντίστοιχη Hamiltonian; Διατηρείται;

(β) Εισάγετε μια νέα συντεταγμένη η οποία ορίζεται από τη σχέση $Q=q\sin\omega t$. Να βρεθεί η Lagrangian του συστήματος συναρτήσει της νέας συντεταγμένης και η νέα Hamiltonian. Διατηρείται η νέα Hamiltonian;

(α) Η συζυγής ορμή δίνεται από

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=m\dot{q}\sin^2\omega t+\frac{m}{2}q\omega\sin 2\omega t=m\dot{q}\sin^2\omega t+mq\omega\sin\omega t\cos\omega t$$

Λύνοντας ως προς $\dot{q}$ έχουμε: $\dot{q}=\dfrac{p-mq\omega\sin\omega t\cos\omega t}{m\sin^2\omega t}$

Υπολογίζουμε τη Hamiltonian

$$H=p\dot{q}-L=m\dot{q}^2\sin^2\omega t+mq\dot{q}\omega\sin\omega t\cos\omega t-\frac{m}{2}\dot{q}^2\sin^2\omega t-\frac{m}{2}q\dot{q}\omega\sin 2\omega t-\frac{m}{2}q^2\omega^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow H=\frac{m}{2}\dot{q}^2\sin^2\omega t-\frac{m}{2}q^2\omega^2=\frac{m}{2}\left[\frac{(p-mq\omega\sin\omega t\cos\omega t)^2}{m^2\sin^2\omega t}-q^2\omega^2\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow H=\frac{m}{2}\left[\frac{p^2}{m^2\sin^2\omega t}-\frac{2pq\omega\cos\omega t}{m\sin\omega t}-q^2\omega^2\sin^2\omega t\right]$$

Αυτή η Hamiltonian δεν διατηρείται εξαιτίας της ακριβής εξάρτησής της από το χρόνο.

(β) Η νέα συντεταγμένη και η χρονική της παράγωγος είναι:

$$Q=q\sin\omega t\Rightarrow\dot{Q}=\dot{q}\sin\omega t+q\omega\cos\omega t\Rightarrow\dot{Q}^2=\dot{q}^2\sin^2\omega t+q^2\omega^2\cos^2\omega t+2q\dot{q}\omega\sin\omega t\cos\omega t.$$

Ο 1ος και τρίτος όρος είναι ίδιοι με αυτούς της προηγούμενης Lagrangian.

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{q}^2\sin^2\omega t+2q\dot{q}\omega\sin\omega t\cos\omega t+q^2\omega^2\right)=\frac{m}{2}\left(\dot{Q}^2-q^2\omega^2\cos^2\omega t+q^2\omega^2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L=\frac{m}{2}\left(\dot{Q}^2+q^2\omega^2\sin^2\omega t\right)\Rightarrow\boxed{L=\frac{m}{2}\left(\dot{Q}^2+Q^2\omega^2\right)}$$

Αυτή η εξίσωση μοιάζει με την εξίσωση ενός αρμονικού ταλαντωτή.

Η συζυγής ορμή θα είναι: $P=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{Q}}=m\dot{Q}$

Επομένως η Hamiltonian θα δίνεται από:

$$\mathcal{H} = P\dot{Q} - \mathcal{L} = m\dot{Q}^2 - \frac{m}{2}\dot{Q}^2 - \frac{m}{2}Q^2\omega^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{Q}^2 - Q^2\omega^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \frac{m}{2}\frac{P^2}{m^2} - Q^2\omega^2 \Rightarrow \boxed{\mathcal{H} = \frac{P^2}{2m} - Q^2\omega^2}$$

Από τη στιγμή που δεν υπάρχει ακριβής χρονική εξάρτηση, η Hamiltonian διατηρείται.

Οι λύσεις στο πρόβλημα αυτό είναι εκθετικές της μορφής: $Q = e^{\pm\omega t}$

Η γενική λύση στο αρχικό πρόβλημα ήταν επομένως:

$$q = \frac{Ae^{\omega t} + Be^{\omega t}}{\sin\omega t}$$ με A κ B προσδιοριζόμενα από τις αρχικές συνθήκες.