

**ΦΥΣ. 211**  
**Τελική Εξέταση 11-Μάη-2015**

Πριν ξεκινήσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, αριθμό ταυτότητας) στο πάνω μέρος της σελίδας αυτής.

Για τις λύσεις των ασκήσεων θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε μόνο τις σελίδες που δίνονται και μην κόψετε καμιά από τις σελίδες.

Προσπαθήστε να δείξετε τη σκέψη σας και να γράψετε καθαρές εξισώσεις. Για πλήρη ή μερική βαθμολόγηση θα πρέπει να φαίνεται καθαρά αυτό που προσπαθείτε να δείξετε. Αν δεν μπορώ να διαβάσω τι γράφετε αυτόματα θα υποθέσω ότι είναι λάθος.

Σας δίνονται 10 ισοδύναμες ασκήσεις με σύνολο 100 μονάδων και πρέπει να απαντήσετε σε όλες.

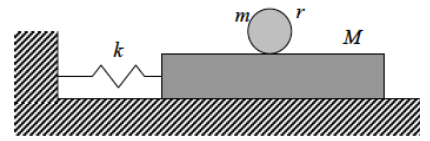
Η σειρά των ασκήσεων δεν είναι αντιπροσωπευτική της δυσκολίας τους. Πριν ξεκινήσετε διαβάστε όλες τις ασκήσεις και σκεφτείτε τι χρειάζεται να κάνετε.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 180 λεπτά.

**Καλή επιτυχία.**

**1. (10μ συνολικά)**

Ένας ομογενής κύλινδρος ακτίνας  $r$  και μάζας  $m$ , κυλά χωρίς να ολισθαίνει στην επιφάνεια ενός κιβωτίου μάζας  $M$ . Το κιβώτιο με την σειρά του μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε λεία επιφάνεια με την βοήθεια ενός ελατηρίου σταθεράς  $k$ , το ένα άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο και το άλλο άκρο του στο κιβώτιο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύστημα εκτρέπεται από την θέση ισορροπίας του και αφήνεται να κινηθεί. Θεωρήστε ότι η ροπή αδράνειας ενός κυλίνδρου μάζας  $M$  και ακτίνας  $R$  ως προς άξονα κάθετο στην βάση του και περνά από το κέντρο μάζας του είναι  $I = MR^2/2$ .



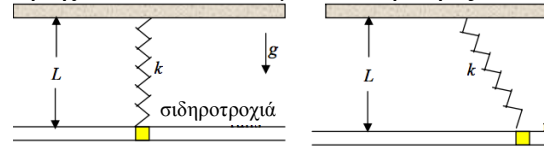
(α) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος και τα ολοκληρώματα κίνησης. [6μ]

(β) Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα να βρεθεί η συχνότητα των μικρών γραμμικών ταλαντώσεων του συστήματος. [2μ]

(γ) Σχεδιάστε τον κανονικό τρόπο ταλάντωσης όταν  $m = M$ . [2μ]

2. (10μ συνολικά)

Ένα κουτί μάζας  $M$  είναι προσαρτημένο σε κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς  $k$  και φυσικού μήκους  $L$ . Η μάζα είναι περιορισμένη μέσω δυο σιδηροτροχιών να κινείται μόνο στην οριζόντια διεύθυνση η οποία είναι σε απόσταση  $L$  από το σημείο εξάρτησης του ελατηρίου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Επομένως όταν το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία το ελατήριο είναι στο φυσικό του μήκος. Θεωρήστε τη θετική  $y$ -διεύθυνση προς τα πάνω και τη θετική  $x$ -διεύθυνση προς τα δεξιά.

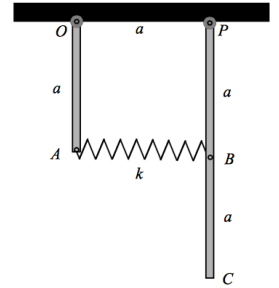


(α) Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange, προσδιορίστε την δύναμη του δεσμού,  $f$ , που προσδίδει η σιδηροτροχιά. Θα πρέπει να προσδιορίσετε τις διευθύνσεις των δυνάμεων των δεσμών. [6μ]

(β) Προσδιορίστε αν το σύστημα αυτό εκτελεί αρμονική κίνηση για μικρές μετατοπίσεις από την θέση ισορροπίας. Θα πρέπει να δώσετε την σχετική διαφορική εξίσωση. [4μ]

**3. (10μ συνολικά)**

Δυο ράβδοι ΟΑ και ΡC μήκους  $a$  και  $2a$  και μάζας  $m$  και  $2m$  αντίστοιχα, κρέμονται από κατάλληλα σημεία στην οροφή τα οποία επιτρέπουν τις ράβδους να ταλαντώνονται ως προς την κατακόρυφο χωρίς να υπάρχουν τριβές. Ένα ελατήριο φυσικού μήκους  $a$  και σταθεράς  $k$ , συνδέει το ελεύθερο άκρο της μιας ράβδου με το μέσο της άλλης ράβδου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η απόσταση ΟΡ μεταξύ των δυο ραβδών είναι  $a$  έτσι ώστε οι ράβδοι να είναι κατακόρυφοι στην θέση ισορροπίας. Υποθέστε ότι το σύστημα διαταράσσεται από την κατάσταση ισορροπίας και εκτελεί μικρού πλάτους ταλάντωση. Να βρεθούν:

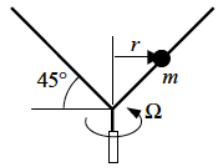


(α) Οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος. [5μ]

(β) Τα ιδιοδιανύσματα. [5μ]

**4. (10μ συνολικά)**

Ένα σύρμα αμελητέας μάζας έχει σχήμα Y, όπου οι δυο βραχίονές του βρίσκονται σε γωνία  $45^\circ$ . Το σύρμα μπορεί να περιστρέφεται ως προς τον κατακόρυφο άξονα όπως στο σχήμα. Μια μάζα  $m$ , είναι ελεύθερη να κινείται πάνω σε έναν από τους βραχίονες του σύρματος.



(α) Να γραφεί η Hamiltonian του συστήματος. [3μ]

(β) Να προσδιοριστεί μια διατηρήσιμη ποσότητα. [2μ]

(γ) Δείξτε ότι το πρόβλημα μπορεί να αναχθεί σε πρόβλημα κεντρικού δυναμικού και βρείτε το ενεργό δυναμικό. [2μ]

(δ) Βρείτε την θέση ισορροπίας της μάζας όταν το σύρμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$ . [3μ]

**5. (10μ συνολικά)**

Ένας πλανήτης μάζας  $m$  περιστρέφεται γύρω από τον ήλιο μάζας  $M$ , σε ελλειπτική τροχιά εκκεντρότητας  $e$  της οποίας ο μεγάλος ημιάξονας είναι  $a$ . Στο περιήλιο της τροχιάς, το μέτρο της στροφορμής  $L$  του πλανήτη είναι  $mv(1-e)a$  ενώ στο αφήλιο είναι  $mv'(1+e)a$ . Στο περιήλιο η

ενέργεια του πλανήτη είναι  $E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{a(1-e)}$  ενώ στο αφήλιο είναι  $E = \frac{mv'^2}{2} - \frac{GMm}{a(1+e)}$ .

(α) Χρησιμοποιώντας διατήρηση της στροφορμής αποδείξτε ότι: [3μ]

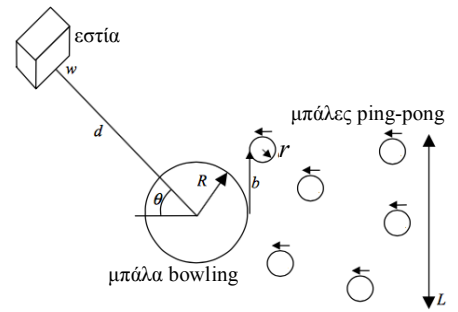
$$v = \frac{L}{m(1-e)a} \text{ και } v' = \frac{L}{m(1+e)a}$$

(β) Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στους τύπους της ενέργειας  $E$  και χρησιμοποιώντας διατήρηση της ενέργειας αποδείξτε ότι:  $L^2 = GMm^2a(1-e^2)$ . [2μ]

(γ) Αντικαθιστώντας την εξίσωση για  $v$  στον τύπο για την ενέργεια  $E$ , και χρησιμοποιώντας την εξίσωση για  $L^2$  αποδείξτε ότι:  $E = -\frac{GMm}{2a}$ . [5μ]

**6. (10π συνολικά)**

Θεωρήστε μπαλάκια του ring-pong ακτίνας  $r$  και μάζας  $m$ , τα οποία σκεδάζονται τέλεια ελαστικά πάνω σε μια μπάλα του bowling ακτίνας  $R$  και μάζας  $M \gg m$ . Η μπάλα του bowling παραμένει ακίνητη μετά την κρούση. Τα μπαλάκια του ring-pong εκτοξεύονται από ένα μηχάνημα πολλά μαζί έτσι ώστε να κατανέμονται ομοιόμορφα σε όλο το μήκος  $L$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ο συνολικός αριθμός των μπαλών  $N$  είναι πολύ μεγάλος. Μια εστία βρίσκεται σε απόσταση  $d$  και έχει πλάτος  $w$ . Θεωρήστε ότι η απόσταση της εστίας  $d$  είναι πολύ μεγαλύτερη από τις διαστάσεις της μπάλας του bowling και της μπάλας του ring-pong  $d \gg R$ ,  $d \gg r$ , και ότι  $d \gg w$ , το εύρος δηλαδή της εστίας είναι πολύ μικρότερο από την απόσταση.



(α) Ποια η σχέση μεταξύ της παραμέτρου κρούσης και της γωνίας σκέδασης  $\theta$ , της μπάλας του ring-pong. [3μ]

(β) Ορίστε μια ενεργό διατομή σκέδασης σε δυο διαστάσεις έτσι ώστε η ποσότητα  $(N/L)\sigma(\theta)d\theta$  να δίνει τον αριθμό των μπαλών του ring-pong που σκεδάζονται σε γωνία  $d\theta$ .

Ποια είναι η ενεργός διατομή σκέδασης στην περίπτωση αυτή; [4μ]

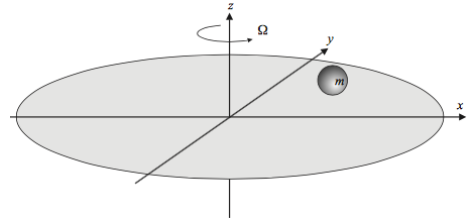
(γ) Πόσες μπάλες από τις  $N$  συνολικά θα βρεθούν στην εστία; [2μ]

(δ) Πόσες μπάλες από τις  $N$  συνολικά θα χτυπήσουν την μπάλα του bowling; [1μ]

7. (10μ συνολικά)

Θεωρήστε ένα δίσκο που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$  ως προς ακλόνητο άξονα κάθετο στη επιφάνεια που περνά από το κέντρο του. Μια μπάλα μάζας  $m$  και ακτίνας  $R$ , κυλά χωρίς να ολισθαίνει πάνω στην επιφάνεια. Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης του κέντρου μάζας της μπάλας.

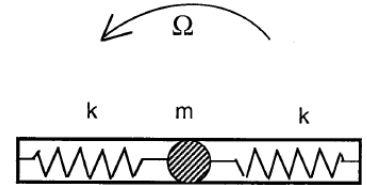
Υπόδειξη: Θα πρέπει να βρείτε την συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθησης για την μπάλα. Χρησιμοποιείτε τις διανυσματικές εξισώσεις κίνησης  $m\ddot{\vec{r}}_G = \vec{F}$  και  $\dot{\vec{L}}_G = -R\hat{e}_z \times \vec{F}$  και την ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς το κέντρο μάζας της  $I = 2mR^2/5$ .





**8. (10μ συνολικά)**

Ένα σώμα μάζας  $m$  είναι περιορισμένο να κινείται κατά μήκος ενός λείου σωλήνα όπως στο σχήμα. Εκατέρωθεν της μάζας υπάρχουν δυο ελατήρια αμελητέας μάζας και σταθεράς  $k$ , τα άλλα άκρα των οποίων είναι προσαρτημένα στα άκρα του σωλήνα. Ο σωλήνας είναι τοποθετημένος σε οριζόντια κυκλική πλατφόρμα η οποία μπορεί να περιστρέφεται ως προς κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο της.



(α) Υποθέστε ότι αρχικά η πλατφόρμα δεν περιστρέφεται. Αν την χρονική στιγμή  $t = 0$ , η μάζα έχει μετατόπιση  $x_0$  προς τα δεξιά από το κέντρο του σωλήνα και αφαιρεί να κινηθεί, να βρεθεί η περίοδος των ταλαντώσεων της μάζας. [2μ]

(β) Υποθέστε τώρα ότι η πλατφόρμα περιστρέφεται αντίθετα των δεικτών του ρολογιού με γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$ . Ποια θα είναι η περίοδος των ταλαντώσεων; [3μ]

(γ) Αν η πλατφόρμα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$  αντίθετα των δεικτών του ρολογιού και η μάζα την χρονική στιγμή  $t = 0$  έχει απομάκρυνση  $x_0$  προς τα δεξιά του κέντρου του σωλήνα, και αφαιρεί να κινηθεί, ποια θα είναι η κάθετη δύναμη που ασκούν τα τοιχώματα του σωλήνα στην μάζα όταν αυτή βρίσκεται (i) στη μέγιστη απομάκρυνσή της από το κέντρο του σωλήνα και (ii) περνά από το κέντρο του σωλήνα. [5μ]

**9. (10μ συνολικά)**

Ένα στερεό σώμα αποτελείται από τρεις ίσες διακριτές μάζες  $m$ , στις θέσεις  $(a,0,0)$ ,  $(0,a,2a)$  και  $(0,2a,a)$ .

(α) Βρείτε τον τανυστή αδράνειας  $\mathbf{I}$ , ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $x,y$ , και  $z$  στο οποίο οι θέσεις των μαζών δίνονται όπως παραπάνω. [3μ]

(β) Βρείτε τις κύριες ροπές αδράνειας του σώματος αυτού. [3μ]

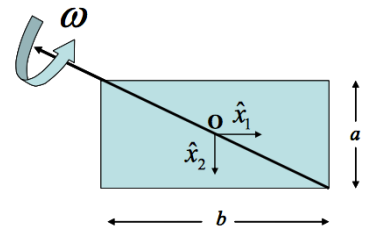
(γ) Βρείτε τις διευθύνσεις τριων κυρίων αξόνων του συστήματος αυτού. [4μ]

**10. (10μ συνολικά)**

Μια λεπτή μεταλική επιφάνεια έχει το σχήμα ενός ορθογωνίου παραλληλογράμου με πλευρές  $a$  και  $b$ . Η επιφάνεια έχει μάζα  $M$  και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  όπως στο σχήμα. Οι κύριες ροπές αδράνειας

της επιφάνειας ως προς το κέντρο  $O$ , είναι:  $I_1 = \frac{1}{12} Ma^2$ ,

$$I_2 = \frac{1}{12} Mb^2 \text{ και } I_3 = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2).$$



(α) Να βρεθεί το μέτρο και η διεύθυνση της στροφορμής του σώματος συναρτήσει των  $a$ ,  $b$ ,  $M$  και  $\omega$ . Μπορείτε να προσδιορίσετε την διεύθυνση ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $(x_1, x_2, x_3)$  του σώματος. Βρείτε επίσης τη κινητική ενέργεια του σώματος. [6μ]

(β) Να βρεθεί το μέτρο και η διεύθυνση της ροπής ως προς το  $O$  που είναι απαραίτητη ώστε το σώμα να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ . Μπορείτε να προσδιορίσετε την διεύθυνση ως προς το σύστημα συντεταγμένων  $(x_1, x_2, x_3)$  του σώματος. [3μ]

(γ) Η ροπή που υπολογίζετε στο ερώτημα (β) μηδενίζεται για μια συγκεκριμένη τιμή του λόγου  $a/b$  των πλευρών του ορθογωνίου. Βρείτε την τιμή του λόγου  $a/b$  για την οποία η ροπή μηδενίζεται και δώστε την φυσική ερμηνεία. [1μ]