Βαρυτικό και ηλεκτρικό πεδίο

- Την προηγούμενη φορά είδαμε:

	Μάζα M	Φορτίο $\pm Q$
Δημιουργία	$\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\hat{r}$	$\vec{E} = k_e\frac{Q}{r^2}\hat{r}$
Δύναμη	$\vec{\mathrm{F}}_g = m\vec{g}$	$\vec{\mathrm{F}}_E = q\vec{E}$

Ο ευκολότερος τρόπος για να γίνει
κατανοητή η έννοια του πεδίου

Γραμμές ηλεκτρικού πεδίου

- Η σχεδίαση των γραμμών που έχουν την ίδια κατεύθυνση με το ηλεκτρικό πεδίο (**γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου ή δυναμικές γραμμές**) είναι ένας εξυπηρετικός τρόπος για την αναπαράσταση ενός ηλεκτρικού πεδίου.

  - Σχεδιασμός δυναμικών γραμμών – Κανόνες

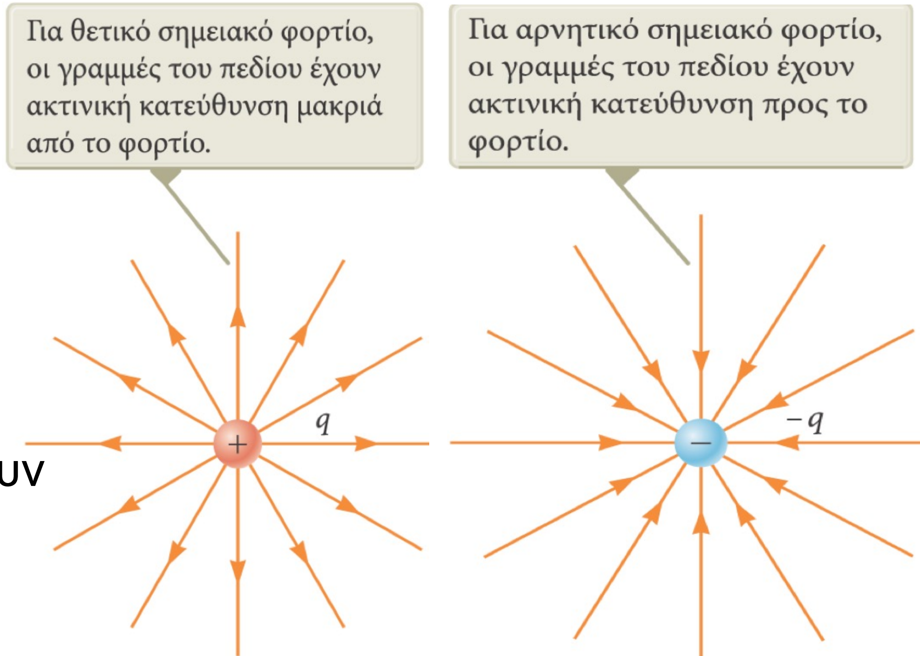
1) Ο φορέας του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου εφάπτεται στη γραμμή του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο της. Ως αποτέλεσμα:
2) Οι δυναμικές γραμμές δεν τέμνονται ποτέ.
3) Η κατεύθυνση της γραμμής είναι ίδια με εκείνη του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου. .
4) Το πλήθος των γραμμών ανά μονάδα επιφάνειας που διέρχονται από μία επιφάνεια κάθετη σε αυτές είναι ανάλογο του μέτρου του πεδίου σε αυτή την περιοχή.

Γραμμές ηλεκτρικού πεδίου – Ηλεκτρικό μονόπολο

- Οι γραμμές του πεδίου κατευθύνονται ακτινικά προς τα έξω σε κάθε διεύθυνση. (στον τριδιάστατο χώρο, έχουμε σφαιρική κατανομή)

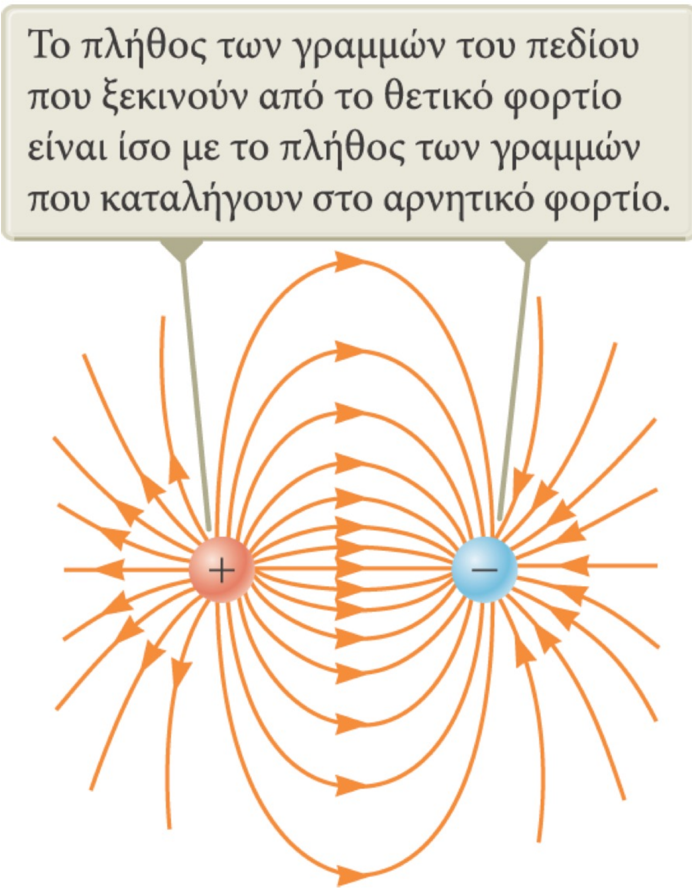
Θετικό μονόπολο: Οι γραμμές απόμακρύνονται από το φορτίο

Αρνητικό μονόπολο: Οι γραμμές συγκλίνουν προς το φορτίο

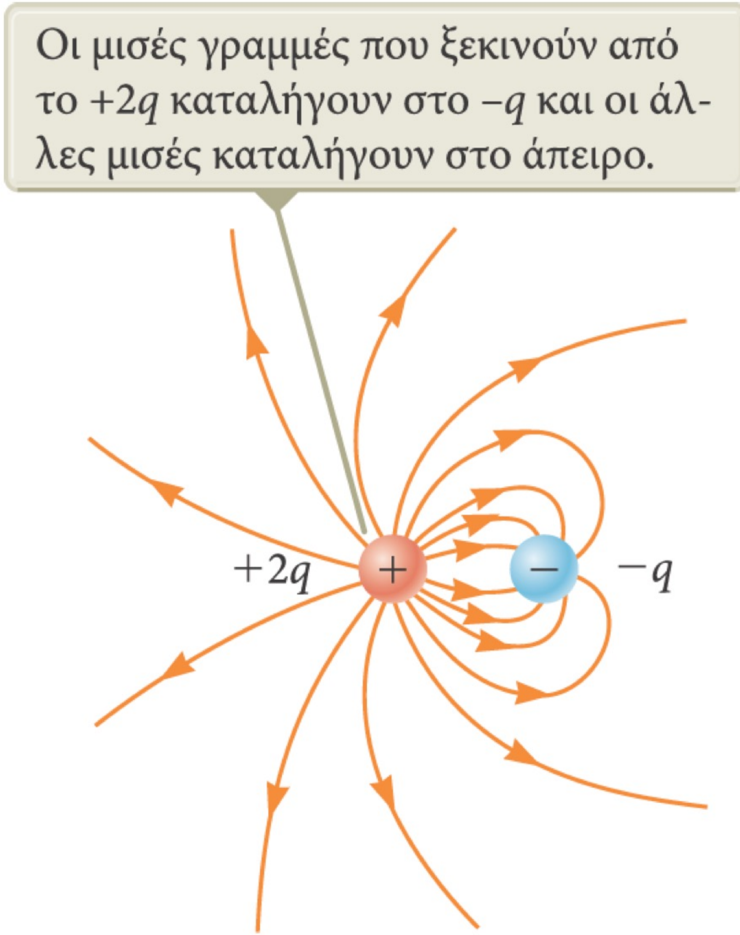


- Οι δυναμικές γραμμές ξεκινούν από θετικά φορτία και καταλήγουν σε αρνητικά (αν υπάρχουν) ή στο άπειρο (όταν υπάρχει πλεονάζον φορτίο)
- Οι δυναμικές γραμμές δεν σταματούν και δεν κόβονται ποτέ (το ηλεκτρικό πεδίο είναι συνεχές και υπάρχει σε όλο το χώρο)
- Οι δυναμικές γραμμές είναι πεπερασμένες σε αριθμό (αναγκαστικά) αλλά το πεδίο **ΔΕΝ** είναι κβαντισμένο. Ο αριθμός των γραμμών ανά επιφάνεια (κάθετη σε αυτές) είναι ενδεικτικός του μέτρου της έντασης του πεδίου, που εν γένει, μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή σε κάθε σημείο του χώρου.

Γραμμές ηλεκτρικού πεδίου – Ηλεκτρικό δίπολο



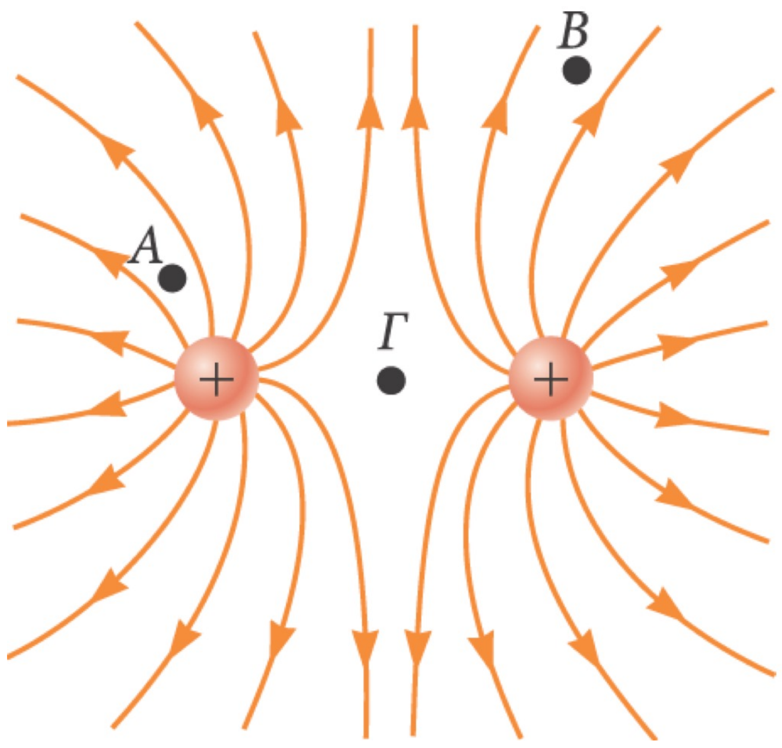
Τα φορτία είναι ίσα και ετερόσημα



Το θετικό φορτίο έχει διπλάσια τιμή από το αρνητικό φορτίο. Σε μεγάλη απόσταση το πεδίο είναι περίπου ίσο με εκείνο σημειακού φορτίου με τιμή $+q$

Ομόσημα φορτία

Επειδή τα φορτία είναι ίσα, από το καθένα ξεκινά το ίδιο πλήθος δυναμικών γραμμών.

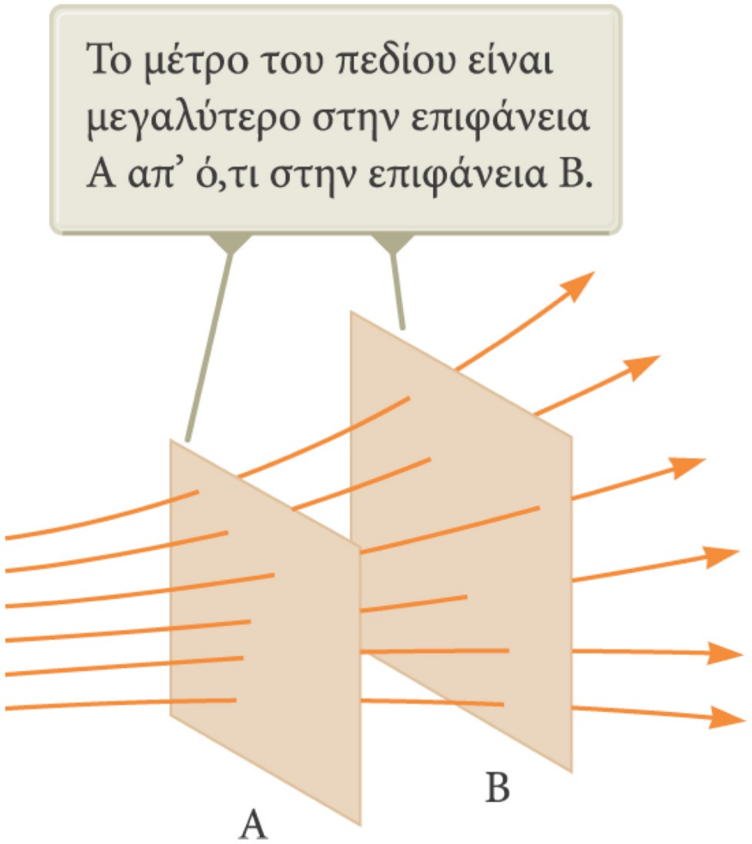


Επειδή δεν υπάρχουν αρνητικά φορτία οι δυναμικές γραμμές εκτείνονται έως το άπειρο.

Σε μεγάλη απόσταση, το πεδίο είναι περίπου ίσο με εκείνο ενός σημειακού φορτίου με τιμή 1/2q

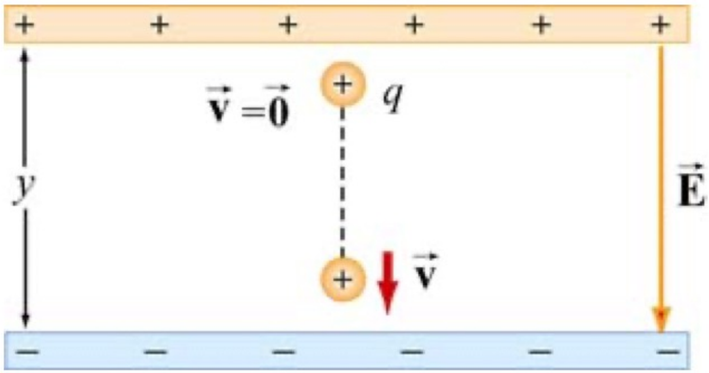
Γενική περίπτωση

Η πυκνότητα των γραμμών του πεδίου που διέρχονται από την επιφάνεια A, είναι μεγαλύτερη από την πυκνότητα των γραμμών του πεδίου που διέρχονται από την επιφάνεια B.



- Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια A είναι μεγαλύτερο από το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια B
- Σε κάθε σημείο, οι γραμμές του πεδίου δείχνουν προς διαφορετική κατεύθυνση
- Το πεδίο δεν είναι ομογενές

Δύναμη σε ηλεκτρικό φορτίο μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο



Θεωρούμε ένα φορτίο +q μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = -E_y\hat{j}$, όπου $E_y > 0$, πουδημιουργείται από δύο επίπεδες μεταλλικές πλάκες με φορτίο +Q (επάνω πλάκα) και -Q (κάτω πλάκα).

Στο φορτίο +q ασκείται δύναμη: $\vec{F} = q\vec{E}$

Προσοχή στη διαφοροποίηση του φορτίου q στο οποίο ασκείται η δύναμη και των φορτίων Q που δημιουργούν το πεδίο.

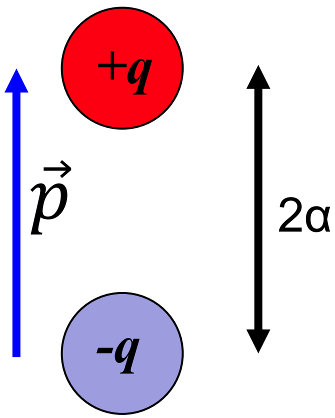
Παρόλο που το φορτίο +q δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο, ωστόσο, από τον 3ο νόμο του Newton το φορτίο αυτό δεν μπορεί να ασκήσει δύναμη στον εαυτό του. Επομένως, το ηλεκτρικό πεδίο, $\vec{E}$, είναι αυτό που προκαλείται από το φορτίο των πλακών.

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton: $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}_e}{m} = \dfrac{q\vec{E}}{m} = -\dfrac{qE_y}{m}\hat{j}$

Υποθέτοντας ότι το φορτισμένο σωματίδιο είναι αρχικά σε ηρεμία όταν αφήνεται από την θετικά φορτισμένη πλάκα, η τελική κινητική ενέργεια που έχει αποκτήσει καθώς φθάνει στην αρνητικά φορτισμένη πλάκα είναι: $E_{kin} = \dfrac{1}{2}mv_y^2 = \dfrac{1}{2}m(2ay) = qE_y y$

Ηλεκτρικό δίπολο

Η κατανομή δύο ίσων φορτίων με αντίθετο πρόσημο **+*q*** και **–*q*** τα οποία απέχουν μεταξύ τους απόσταση 2α αποτελούν ένα ηλεκτρικό δίπολο



Περιγράφουμε ένα ηλεκτρικό δίπολο με την διπολική ροπή

Διπολική ροπή:

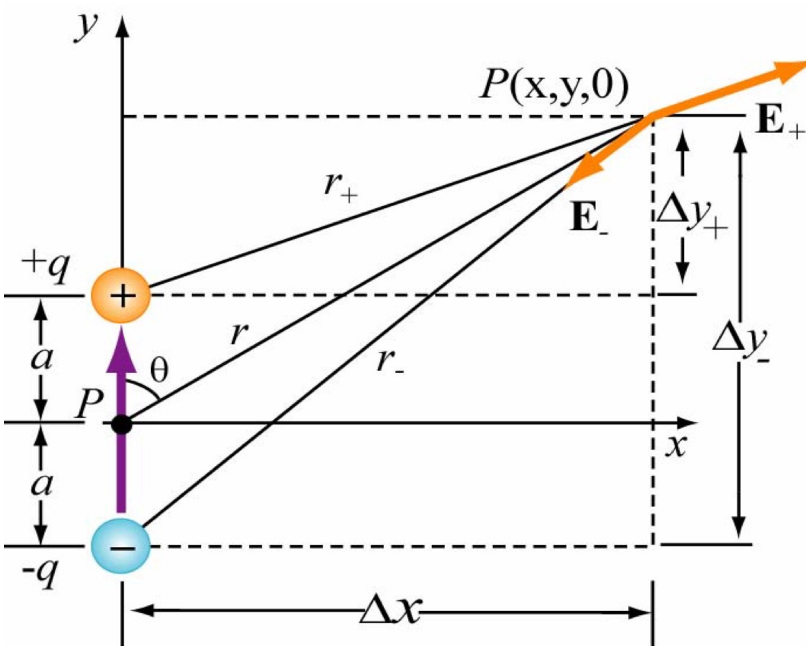
$$\vec{p} \equiv \text{φορτίο} \times \text{μετατόπιση} \Longrightarrow \vec{p} \equiv q \times 2a\hat{j}$$

$$\Longrightarrow \vec{p} \equiv 2qa\hat{j}$$

Το διάνυσμα της διπολικής ροπής έχει κατεύθυνση από αρνητικό φορτίο προς θετικό φορτίο.

Ηλεκτρικό πεδίο διπόλου

Το ηλεκτρικά δίπολα δημιουργούν πεδία



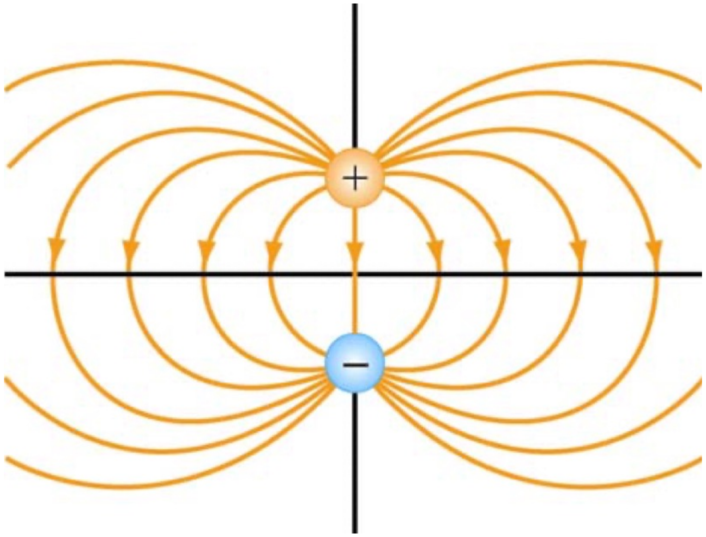
$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{όπου} \quad r = |\vec{r}|$$

$$\frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\Delta x}{r^3}\hat{\imath} + \frac{\Delta y}{r^3}\hat{\jmath}$$

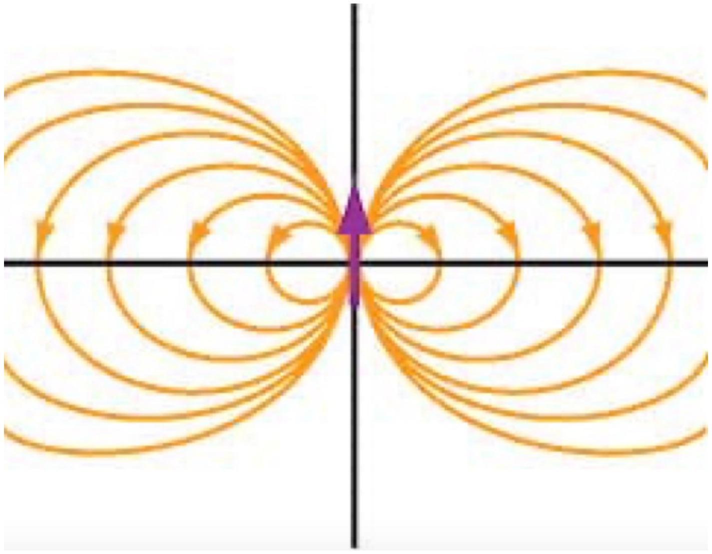
$$E_x = k_e q\left(\frac{\Delta x}{r_+^3} - \frac{\Delta x}{r_-^3}\right) \Rightarrow E_x = k_e q\left(\frac{x}{[x^2 + (y-a)^2]^{3/2}} - \frac{x}{[x^2 + (y+a)^2]^{3/2}}\right)$$

$$E_y = k_e q\left(\frac{\Delta y}{r_+^3} - \frac{\Delta y}{r_-^3}\right) \Rightarrow E_y = k_e q\left(\frac{y-a}{[x^2 + (y-a)^2]^{3/2}} - \frac{y+a}{[x^2 + (y+a)^2]^{3/2}}\right)$$

Προσέγγιση σημειακού διπόλου



Πεπερασμένο δίπολο



Σημειακό δίπολο

- Έστω θεωρούμε το όριο $r \gg a$

Μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$E_x \rightarrow \frac{3p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} sin\theta cos\theta$$

$$E_y \rightarrow \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1)$$

όπου $sin\theta = x/r$
και $cos\theta = y/r$

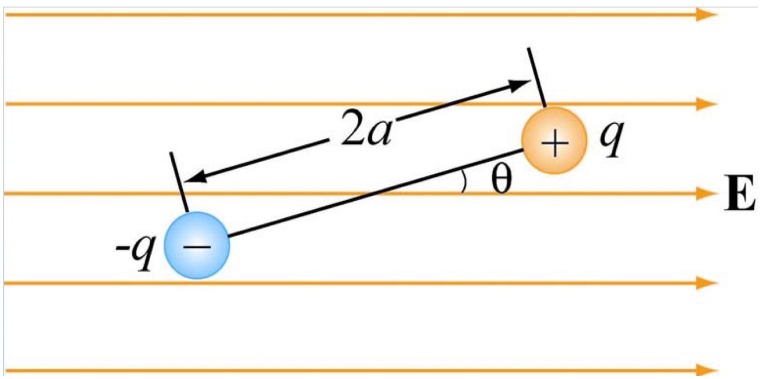
Από την σχέση $3prcos\theta = 3\vec{p}\cdot\vec{r}$ και μετά από πράξεις μπορούμε να βρούμε ότι

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{(3\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}\right)$$

Το πεδίο ενός ηλεκτρικού διπόλου ελαττώνεται με το *r* ως $1/r^3$ σε αντίθεση με την $1/r^2$ συμπεριφορά ενός σημειακού φορτίου

Δίπολο σε ομοιόμορφο πεδίο

Έστω ότι το δίπολο βρίσκεται μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$



$$\vec{E} = E\hat{\imath}$$

$$\vec{p} = 2qa(cos\theta\hat{\imath} + sin\theta\hat{\jmath})$$

Η συνισταμένη δύναμη θα είναι:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = (+q)\vec{E} + (-q)\vec{E} = \vec{0}$$

Η ροπή που αναπτύσσεται στο δίπολο είναι: $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$ $\Longrightarrow \vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}$

$$\tau = rF_+ \sin(\theta) = (2\alpha)(qE)\sin(\theta) = pEsin(\theta)$$

Η διπολική ροπή $\vec{p}$ τείνει να ευθυγραμμιστεί με το ηλεκτρικό πεδίο

Πυκνότητα φορτίου

- Χωρική πυκνότητα φορτίου, ρ = πυκνότητα ανά μονάδα όγκου με μονάδες ***C/m³***

- Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου, σ = πυκνότητα ανά μονάδα επιφάνειας με μονάδες ***C/m²***

- Γραμμική πυκνότητα φορτίου, λ = πυκνότητα ανά μονάδα μήκους με μονάδες ***C/m***

- Αν το φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σε όγκο *V*, επιφάνεια *A*, μήκος l, τότε:

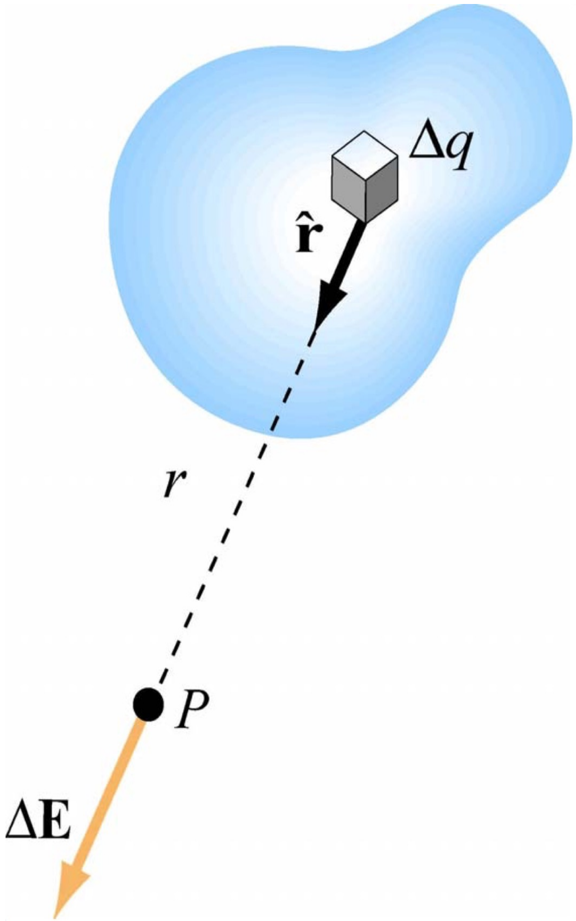
$$\rho = Q/V \qquad \sigma = Q/\mathrm{A} \qquad \lambda = Q/l$$

- Αν το φορτίο **ΔΕΝ** είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στον όγκο, την επιφάνεια, ή κατά το μήκος του σώματος, τότε:

$$\rho(x,y,z) = dQ/dV \qquad \sigma(x,y) = dQ/d\mathrm{A} \qquad \lambda(x) = dQ/dl$$

- Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ποσότητες μπορούμε να υπολογίσουμε την ποσότητα του στοιχειώδους φορτίου, *dq*, σε οποιοδήποτε φορτισμένο σώμα, είτε έχει ομοιόμορφη κατανομή φορτίου είτε όχι

Συνεχείς κατανομές φορτίου



Χωρισμός της κατανομής σε τμήματα: $Q = \sum_i \Delta q_i \rightarrow \int_V dq$

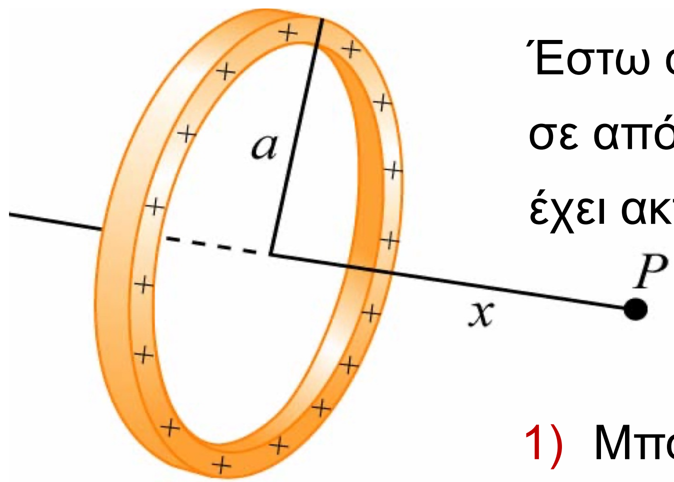
Το ηλεκτρικό πεδίο *E* στο σημείο *P* εξαιτίας του *Δq* είναι:

$$\Delta\vec{E} = k_e \frac{\Delta q}{r^2}\hat{r} \rightarrow d\vec{E} = k_e \frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

Από την αρχή της επαλληλίας θα έχουμε:

$$\boxed{\vec{E} = \sum \Delta\vec{E} \Longrightarrow \vec{E} = \int d\vec{E}}$$

Συνεχής κατανομή φορτίου: Δακτυλίδι φορτίου



Έστω σημείο *P* στον άξονα του δακτυλίου του φορτίου και σε απόσταση *x* από το κέντρο του δακτυλίου, ο οποίος έχει ακτίνα *R* και γραμμική πυκνότητα φορτίου *λ*.

Θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο *P*

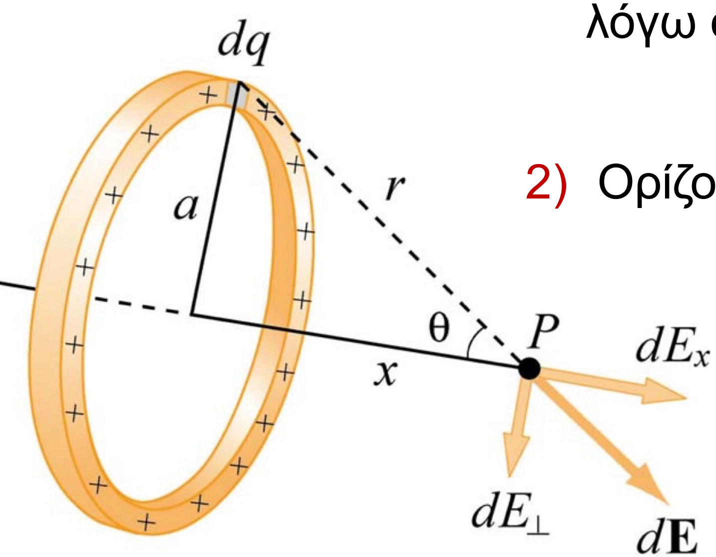
1) Μπορούμε να θεωρήσουμε τη γεωμετρία του προβλήματος:

Το ηλεκτρικό πεδίο στην κάθετη διεύθυνση είναι 0 λόγω συμμετρίας $\vec{E}_{\perp} = \vec{0}$

2) Ορίζουμε τις μεταβλητές:

$$dq = \lambda dl \quad \Longrightarrow dq = \lambda(a d\varphi)$$

$$r = \sqrt{a^2 + x^2}$$



Συνεχής κατανομή φορτίου: Δακτυλίδι φορτίου

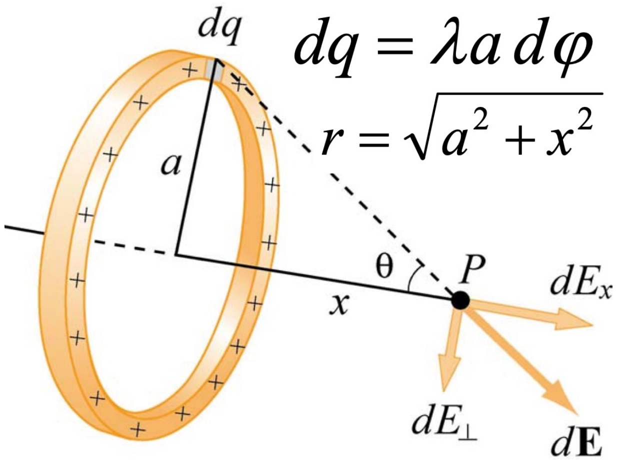
3) Γράφουμε την εξίσωση:

$$d\vec{E} = k_e dq\,\frac{\hat{r}}{r^2} = k_e dq\,\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Μπορούμε να γράψουμε: $dE_x = k_e dq\,\dfrac{x}{r^3}$

ή θα μπορούσαμε να εκφράσουμε το E_x ως:

$$dE_x = \left|d\vec{E}\right|\cos(\theta) = k_e dq\,\frac{1}{r^2}\frac{x}{r} = k_e dq\,\frac{x}{r^3}$$



4) Ολοκληρώνουμε: $E_x = \int dE_x = \int k_e dq\,\dfrac{x}{r^3} = k_e\dfrac{x}{r^3}\int dq$

Ειδική περίπτωση! Όλα εκτός από το *dq* είναι σταθερά!

$$\int dq = \int_0^{2\pi} \lambda a d\varphi = \lambda a \int_0^{2\pi} d\varphi = \lambda a 2\pi = Q$$

5) Πράξεις: $E_x = k_e\dfrac{x}{r^3}Q \Longrightarrow E_x = k_e\dfrac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}Q$ $\boxed{\Longrightarrow \vec{E} = \vec{E}_x = k_e\dfrac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}Q\hat{\imath}}$

6) Εξέταση οριακής περίπτωσης: α → 0 $E_x = k_e\dfrac{x}{(x^2)^{3/2}}Q \Longrightarrow E_x = k_e\dfrac{Q}{x^2}$