ΦΥΣ. 112

10ο (και τελευταίο) ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή Τρίτη 03.12.2024**

1. Σε ένα κύκλωμα *LC*, το μέγιστο φορτίο στον πυκνωτή είναι $Q_{max} = 2\text{x}10^{-6}C$ ενώ το μέγιστο ρεύμα που περνά τον επαγωγό είναι 8.0*mA*. (α) Ποια η περίοδος των ταλαντώσεων και (β) πόσος χρόνος περνά μεταξύ της στιγμής που ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος και της επόμενης χρονικής στιγμής που ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος;

(α) Σε ένα κύκλωμα LC η περίοδος των ταλαντώσεων προσδιορίζεται από τη σχέση $T=2\pi\sqrt{LC}$ (1)

Το μέγιστο φορτίο είναι $Q_{max}=2\cdot10^{-6}C$ και αυτό συμβαίνει όταν η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή είναι μέγιστη:

$$Q_{max}=CV_{max} \Rightarrow C=\frac{Q_{max}}{V_{max}} = \quad (2)$$

Το μέγιστο ρεύμα που περνά από το πηνίο είναι: I_{max} συνδέεται με την μέγιστη τάση στα άκρα του πηνίου μέσω της σχέσης:

$$V_{max}=-L\left(\frac{dI}{dt}\right)_{max} \quad (3)$$

όπου $(dI/dt)_{max}$ η μέγιστη μεταβολή ρεύματος που συμβαίνει όταν το ρεύμα είναι μηδέν και η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πηνίου μέγιστη.

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμα αυτό είναι:

$$\frac{Q}{C}+L\frac{d^2Q}{dt}=0 \quad \text{με λύση} \quad Q=Q_{max}\cos(\omega_0 t+\phi)$$

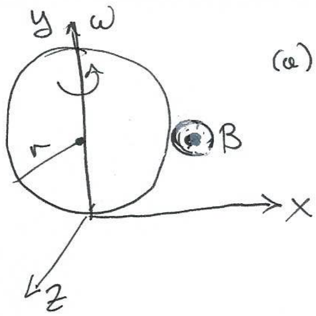
Επομένως το πηνίο έχει ρεύμα που είναι: $-\frac{dQ}{dt}=+Q_{max}\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi) \Rightarrow$

$\Rightarrow i=I_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$ όπου $I_0=I_{max}=\omega_0 Q_{max} \Rightarrow \omega_0=\frac{I_0}{Q_0}$

$$\Rightarrow 2\pi/T=\frac{I_0}{Q_0} \Rightarrow T=\frac{2\pi Q_0}{I_0} \Rightarrow T=\frac{\cancel{2}\pi\cdot\cancel{2}\cdot10^{-6}C}{2\,\cancel{4}\,\cancel{8}\cdot10^{-3}A} \Rightarrow T=\frac{\pi}{2}10^{-3}=\underline{1.7ms}$$

(β) Ο πυκνωτής μεταβαίνει από τη κατάσταση απουσίας φορτίου σε πλήρη φόρτιση στο χρονικό διάστημα $T/4$. Οπότε θα απαιτηθεί χρόνος $t=1.7/4=\underline{0.425ms}$

2. Ένας κυκλικός αγώγιμος βρόχος έχει ακτίνα a και αντίσταση R και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω κάθετα σε εξωτερικό ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B\hat{k}$. Ο άξονας περιστροφής είναι μια διάμετρος του βρόχου που συμπίπτει με τον y-άξονα. (α) Βρείτε τη θέση ή τις θέσεις στις οποίες η ηλεκτρεγερτική δύναμη επαγωγής είναι μηδέν. (β) Ποια η κατεύθυνση του επαγωγικού ρεύματος τη χρονική στιγμή που το διάνυσμα της επιφάνειας του βρόχου συμπίπτει με τον x-άξονα, το πάνω τμήμα του βρόχου συμπίπτει με τον z-άξονα.



(α) Η μαγνητική ροή που διέρχεται από το βρόχο είναι:

$$\left.\begin{array}{l}\phi_m = \vec{B}\cdot\vec{A} = BA\cos\phi \\ A = \pi r^2 \\ \phi = \omega t\end{array}\right\} \Rightarrow \phi_m = B\pi r^2 \cos\omega t$$

Η ηλεκτρεγερτική δύναμη επαγωγής θα είναι σύμφωνα με τον νόμο του Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(B\pi r^2\cos\omega t\right) \Rightarrow \mathcal{E} = \pi r^2 B\omega \sin\omega t$$

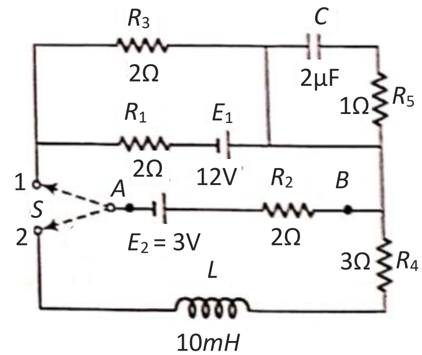
Η ηλεκτρεγερτική δύναμη θα είναι μηδέν όταν $\sin(\omega t) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega t = n\pi$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$

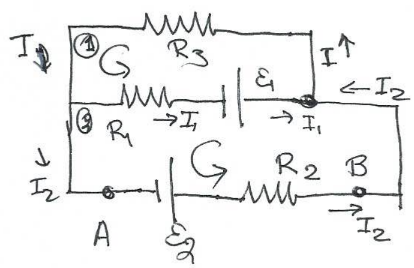
Επομένως $\omega t = n\pi \Rightarrow t = \frac{n\pi}{\omega}$

(β) Όταν ο βρόχος βρεθεί στη θέση που το διάνυσμα της επιφάνειας είναι στην κατεύθυνση του x-άξονα, η ροή θα είναι μηδέν και θα έχει ελαττωθεί από τη μέγιστη θετική τιμή της. Η ηλεκτρεγερτική δύναμη θα έχει τέτοια πολικότητα ώστε το επαγωγικό ρεύμα να έχει φορά αντίθετη με τη φορά των δεικτών του ρολογιού που τείνει να προκαλέσει μαγνητικό πεδίο που αυξάνει τη ροή (στην +x- διεύθυνση). Επομένως το ρεύμα θα έχει φορά προς τον +z-άξονα.

3. Ένα κύκλωμα περιέχει έναν διακόπτη δύο θέσεων όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. (α) Ο διακόπτης βρίσκεται στη θέση 1. Βρείτε τη διαφορά δυναμικού V_A-V_B και την ισχύ που αναπτύσσεται στην αντίσταση R_1. (β) Ο διακόπτης μετακινείται στη θέση 2 τη χρονική στιγμή $t = 0$. Βρείτε (*i*) το ρεύμα στην αντίσταση R_4 μετά την πάροδο μεγάλου χρονικού διαστήματος και (*ii*) το χρονικό διάστημα το οποίο απαιτείται ώστε το ρεύμα στην R_4 να γίνει το μισό της σταθερής τιμής του. Υπολογίστε επίσης την ενέργεια που έχει αποθηκευθεί στο πηνίο την χρονική αυτή στιγμή.



(α) Η δεξιά πάνω πλευρά του κυκλώματος είναι βραχυκυκλωμένη και επομένως το κύκλωμα απλουστεύεται σε:



$$I = I_1 + I_2 \quad (1)$$

$$\varepsilon_1 - I R_3 - I_1 R_1 = 0 \quad (2) \quad \text{βρόχος } 1$$

$$\varepsilon_2 - I_2 R_2 - \varepsilon_1 + I_1 R_1 = 0 \quad (3) \quad \text{βρόχος } 2$$

Από την (3) με αντικατάσταση έχουμε:

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = I_2 R_2 - I_1 R_1 \Rightarrow (3-12)V = (2\Omega)(I_2 - I_1) \Rightarrow I_2 - I_1 = -\frac{9V}{2\Omega} = -4.5A \quad (4)$$

Από την (2): $\varepsilon_1 - (I + I_1)R = 0 \Rightarrow I + I_1 = \frac{\varepsilon_1}{R} = \frac{12}{2} \Rightarrow I_1 + I = 6A \quad (5)$

Από (1), (4) κ (5) έχουμε: $I + I_1 = 6 \Rightarrow I_1 + I_2 + I_1 = 6 \Rightarrow 2I_1 + I_2 = 6 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2I_1 + I_1 - 4.5A = 6A \Rightarrow 3I_1 = 10.5A \Rightarrow \boxed{I_1 = 3.5A}$$

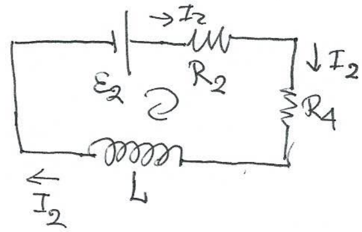
Επομένως $I_2 = -4.5 + I_1 \Rightarrow \boxed{I_2 = -1\,A}$ Τέλος $\boxed{I = I_1 + I_2 = 2.5A}$

Το δυναμικό στο σημείο Α θα είναι: $V_A + \varepsilon_2 - I_2 R_2 - V_B = 0 \Rightarrow$

$$V_A - V_B = -\varepsilon_2 + I_2 R_2 \Rightarrow \Delta V_{AB} = (-1A)(2\Omega) - 3V \Rightarrow \boxed{\Delta V_{AB} = -5V}$$

Η ισχύς θα είναι: $P_1 = I_1^2 R_1 = (3.5)^2 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{P_1 = 24.5W}$

(β) Στην περίπτωση αυτή ο διακόπτης μετακινείται στη θέση 2 οπότε έχουμε το κύκλωμα:



(i) Όταν έχει περάσει μεγάλο χρονικό διάστημα ο πυκνωτής δεν παίζει κανέναν ρόλο, οπότε εφαρμόζουμε τον 2^o κανόνα του Kirchhoff και έχουμε:

$$\mathcal{E}_2 - I_2 R_2 - I_2 R_4 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R_2 + R_4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{3V}{5\Omega} \Rightarrow \boxed{I_2 = 0.6A}$$

(ii) Η χρονική εξέλιξη του ρεύματος σε ένα κύκλωμα R-L όπως έχουμε δει στις διαλέξεις δίνεται από τη σχέση:

$$I = I_0\left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right) \Rightarrow \frac{I}{I_0} = \left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right)$$

Θέλουμε το χρονικό διάστημα ώστε $I = \frac{I_0}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right)$$

$$\Rightarrow \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{R}{L}t = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{R}{L}t = \cancel{\ln(1)}^{=0} - \ln(2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{-}\frac{R}{L}t = \cancel{-}\ln(2) \Rightarrow t = \frac{L}{R}\ln(2) \Rightarrow t = \frac{10^{-2}H}{5\Omega}\,0.69 \Rightarrow \boxed{t = 1.39ms}$$

Η ενέργεια στο πηνίο θα είναι: $U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}(0.01)\left(\frac{I_0}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}(0.01)\left(\frac{0.6}{2}\right)^2 \Rightarrow U = \frac{1}{8}36 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \boxed{U = 4.5 \cdot 10^{-4} J}$$

4. Στον διαστημικό χώρο του γαλαξία μας υπάρχει ένα μαγνητικό πεδίο. Υπάρχει ένδειξη για την ύπαρξη του πεδίου αυτού και ότι η έντασή του είναι μεταξύ 10^{-6} και 10^{-5} gauss. Θεωρήστε ότι η μέση τιμή του είναι $3x10^{-6}$ gauss βρείτε την ολική ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στο μαγνητικό πεδίο του γαλαξία. Θεωρήστε ότι ο γαλαξίας είναι ένας δίσκος διαμέτρου 10^{21} μέτρα και πάχους 10^{19} μέτρα. Για να έχετε ένα μέτρο σύγκρισης της ενέργειας αυτής, θεωρείστε ότι η ενέργεια που ακτινοβολείται από όλους τους αστέρες του γαλαξία είναι της τάξης των 10^{37} *Joules/s*. Σε πόσα έτη φως αστέρων αντιστοιχεί η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του γαλαξία;

Η πυκνότητα ενέργειας δίνεται από τη σχέση: $u_M = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{(3\cdot 10^{-10}T)^2}{2(4\pi\cdot 10^{-7}\frac{kg\,m}{C^2})} \Rightarrow$

$\Rightarrow u_M = 3.6\cdot 10^{-14} J/m^3$

Ο όγκος του γαλαξία είναι: $V_{γαλαξ} = \pi r^2 h = \pi(5\cdot 10^{20}m)^2(10^{19}m) \Rightarrow$

$V_{γαλαξ} \simeq 8\cdot 10^{60} m^3$

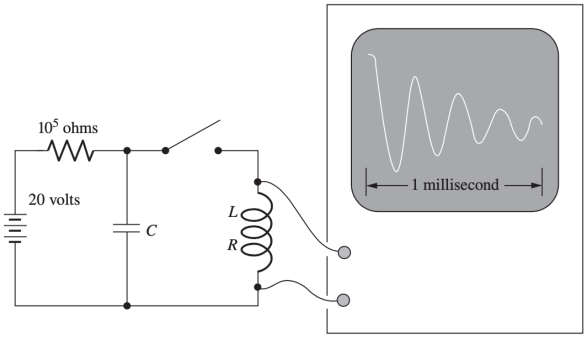
Επομένως η ολική ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του γαλαξία θα είναι:

$E_{γαλαξ} = u_M \cdot V_{γαλαξ} = 3.6\cdot 10^{-14}\frac{J}{\cancel{m^3}}\, 8\cdot 10^{60}\cancel{m^3} \Rightarrow E_{γαλαξ} = 3.0\cdot 10^{+47} J$

Η ισχύς ακτινοβολίας των αστέρων είναι $10^{37} J/s$ και επομένως η μαγνητική ενέργεια είναι $\frac{3\cdot 10^{47} J}{10^{37} J/s} = 3\cdot 10^{10} s$ Ένα έτος έχει 365·86400 sec ή $31.5\cdot 10^{6}$ sec/y.

Επομένως η μαγνητική ενέργεια είναι αυτή περίπου 1000 ετών.

5. Θεωρήστε το κύκλωμα του διπλανού σχήματος. Η εμπέδηση της αντίστασης των $10^5\Omega$ ενώ το πηνίο έχει αυτεπαγωγή $L = 0.01H$. Όταν κλείσει ο διακόπτης, ενεργοποιείται το trigger του παλμογράφου. Ο αντιστάτης των $10^5\Omega$ είναι αρκετά μεγάλος (όπως θα διαπιστώσετε) ώστε να θεωρηθεί ουσιαστικά άπειρης αντίστασης για τα ερωτήματα (α) και (β) του προβλήματος.



(α) Προσδιορίστε όσο καλύτερα μπορείτε την χωρητικότητα C.

(β)) Εκτιμήστε την τιμή της αντίστασης R του πηνίου.

(γ) Ποια είναι τιμή της διαφοράς δυναμικού που μετρά ο παλμογράφος μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα (έστω 1*sec*) αφότου έχει κλείσει ο διακόπτης;

(α) Η εμπέδηση του αντιστάτη των $10^5\Omega$ είναι πολύ μεγαλύτερη από τις αντίστοιχες των άλλων στοιχείων του κυκλώματος, και επομένως μπορούμε να αγνοήσουμε το ρεύμα που διαρρέει τον αντιστάτη των $10^5\Omega$, τουλάχιστον όταν κλείνει ο διακόπτης. Τη χρονική αυτή περίοδο έχουμε ένα RLC κύκλωμα σε σειρά. (δεξί βρόχο).

Από το γράφημα που μας δίνεται μπορούμε να υπολογίσουμε την συχνότητα των ταλαντώσεων και τον ρυθμό απόσβεσης του πλάτους των ταλαντώσεων.

Από τα δύο αυτά μεγέθη μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίσταση R και την χωρητικότητα C.

Για τις φθίνουσες ταλαντώσεις έχουμε ότι: $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$

Όταν η απόσβεση είναι μικρή $\left(a = \frac{R}{2L}\right)$ τότε ο όρος $\frac{1}{LC}$ κυριαρχεί και το πλάτος των ταλαντώσεων ~~παραμένει~~ σημαντικό. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συχνότητα είναι: $\omega \simeq \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Στο γράφημα της άσκησης, 4 κύκλοι ταλαντώσεων συμπληρώνονται σε 1ms οπότε: $\omega = 2\pi\, 4/10^{-3}s \Rightarrow \omega = 2.5\cdot 10^4 s^{-1}$

Επομένως η χωρητικότητα είναι: $\omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{(0.01H)(2.5\cdot10^4)^2}$

$\Rightarrow C = 1.6\cdot 10^{-7} F \Rightarrow \boxed{C = 160nF}$

(β) Η σταθερά απόσβεσης είναι: $\alpha = \frac{R}{2L}$, και ο χρόνος που απαιτείται για το πλάτος της τάσης να ελαττωθεί στο $1/e$ θα είναι: $t = \frac{2L}{R}$ $\left(e^{-\alpha t}\right)$

Από το σχήμα του γραφήματος αυτό συμβαίνει για $t \simeq 0.5 \cdot 10^{-3} s$

Οπότε: $0.5 \cdot 10^{-3} s = \frac{2 \cdot (0.1 H)}{R} \Rightarrow R = \frac{2 \cdot 0.01}{0.5 \cdot 10^{-3}} = \frac{2}{5} 10^{2} \Rightarrow \boxed{R = 40 \Omega}$

Η αντίσταση αυτή είναι αμελητέα σε σχέση με την $10^5 \Omega$ αντίσταση

Η χωρητική και επαγωγική αντίσταση είναι $X_L = X_C = L\omega = \frac{1}{C\omega} = 250\Omega$ επίσης αμελητέες

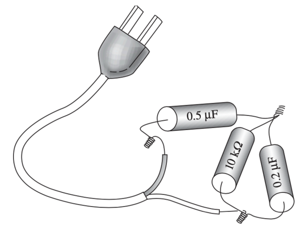
(γ) Μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα θα έχουμε δύο αντιστάσεις, αυτές των $10^5 \Omega$ και 40Ω συνδεδεμένες σε σειρά. Ο πυκνωτής έχει φορτιστεί και αποτελεί ανοικτό διακόπτη για τον κλάδο του.

Επίσης δεν υπάρχει αλλαγή στο ρεύμα και επομένως δεν υπάρχει διαφορά δυναμικού στα άκρα του πηνίου.

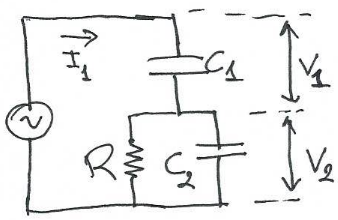
Έτσι θα έχουμε ότι: $V_{40\Omega} = I \cdot R_{40} = \frac{E}{R_{ολ}} R_{40} = \frac{20V}{(10^5 + 40)\Omega} 40\Omega \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{V_{40\Omega} = 0.008 V}$ η αντίσταση των 40Ω δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα για την τιμή του ρεύματος στο κύκλωμα και αυτό επηρεάζεται καθαρά από την αντίσταση των $10^5 \Omega$

6. Θεωρήστε το κύκλωμα του διπλανού σχήματος. Η αντίσταση είναι $R = 10k\Omega$ και μπορεί να αντέξει μέχρι $1W$ πριν καεί και είναι συνδεδεμένη με δυο πυκνωτές χωρητικότητας $0.2\mu F$ και $0.5\mu F$ αντίστοιχα. Εισάγουμε το κύκλωμα αυτό σε μία πρίζα $220V$ και συχνότητας $50Hz$. Προσδιορίστε αν η αντίσταση θα υπερθερμανθεί με αποτέλεσμα να καταστραφεί.



Το κύκλωμα μπορούμε να το αναπαραστήσουμε όπως στο παρακάτω σχήμα



Έχουμε μια αντίσταση $R = 10k\Omega$ η οποία μπορεί να αντέξει μέχρι $P = 1W$ και δύο πυκνωτές με χωρητικότητα $0.2\mu F$ και $0.5\mu F$

Το σύστημα συνδέεται με πηγή $220V$ & συχνότητα $50Hz$.

Η εμπέδηση του πυκνωτή C_2 είναι $Z_{C_2} = \frac{1}{i\omega C_2} = \frac{1}{i(2\pi \cdot 50)2\cdot 10^{-7}F} = \frac{1}{i\, 6.28 \cdot 10^{-5}}\Omega$

Ο κλάδος της αντίστασης R και Z_{C_2} έχει εμπέδηση:

$R // Z_C$ οπότε: $\frac{1}{Z_{ολ}} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_{C_2}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{i\,6.28\cdot 10^{-5}}}$

$$\Rightarrow Z_{ολ} = \frac{Z_R Z_{C_2}}{Z_R + Z_{C_2}} = \frac{10^4 \cdot \frac{1}{i\,6.28\cdot 10^{-5}}}{10^4 + \frac{1}{i\,6.28\cdot 10^{-5}}} \Rightarrow Z_{ολ} = \frac{10^9 / i\,6.28}{10^4 - i\,1.5\cdot 10^4} \Rightarrow$$

$$Z_{ολ}^2 = \frac{\frac{10^5}{i\,6.28}}{1 - i\,1.5} = \frac{-i\cdot 1.59\cdot 10^4}{1 - 1.59i} \Rightarrow Z_{ολ}^2 = \frac{(-i\,1.59\cdot 10^4)(1 + 1.59i)}{(1 - 1.5i)(1 + 1.59i)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z_{ολ}^2 = \frac{(1.59)^2 \cdot 10^4 - 1.59\cdot 10^4 i}{1 + (1.59)^2} = (0.717\cdot 10^4 - i\,0.45\cdot 10^4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z_{ολ}^2 = (7.2 - i\,4.5)\,10^3\,\Omega$$

Η εμπέδηση του πυκνωτή C_1 είναι $Z_{C_1} = \frac{1}{iC\omega} = -\frac{i}{5\cdot 10^{-7}\cdot 3.14\cdot 10^2} = -i\,6.3\cdot 10^3\,\Omega$

Επομένως η ολική εμπέδηση του κυκλώματος θα είναι:

$Z_{ολ} = (7.2 - i\,10.8)\cdot 10^3\,\Omega$ ($Z_{ολ}^2$ σε σειρά με την Z_{C_1}).

Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα θα είναι: $I = \frac{V}{Z} = \frac{220\,V}{(7.2 - i\,10.8)\,10^3\,\Omega} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \frac{220(7.2 + i\,10.8)\,10^3}{[(7.2)^2 + (10.8)^2]\,10^6} = \frac{220}{168.5}\cdot(7.2 + i\cdot 10.8)\,10^{-3}A \Rightarrow I = 1.31 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{I = (9.4 + i\,14.1)\,10^{-3}A}$$

Το rms ρεύμα, θα είναι το μέτρο του ρεύματος I, δηλαδή:

$$I_{rms} = \sqrt{(9.4)^2+(14.1)^2}\cdot 10^{-3} A \Rightarrow I_{rm} = 16.95\, 10^{-3} \Rightarrow \boxed{I_{rms} \simeq 16.95 mA}$$

Το ρεύμα αυτό έχει διαφορά φάσης: $\tan^{-1}\left(\frac{14.1}{9.4}\right) = \underline{0.98 \text{ rad}}$ με την τάση

Η μέση ισχύς που προσφέρεται στο κύκλωμα είναι:

$$<P> = V_{rms} I_{rms} \cdot \cos\phi = 220 \cdot 16.95 \cdot 10^{-3} \cdot \cos(0.98) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow <P> = 3.728 \cdot 0.557 \Rightarrow <P> = 2.076 W$$

Στο κύκλωμα αυτό, το μόνο στοιχείο που καταναλώνει ισχύ είναι η ωμική αντίσταση και αυτή είναι η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση. Από την τιμή της ισχύος βλέπουμε ότι ξεπεράσαμε τις προδιαγραφές ισχύος της αντίστασης και αυτή θα καταστραφεί, αφού $<P> = 1.75 W > 1W$

Μπορούμε να βρούμε την τάση στα άκρα της αντίστασης. Έστω V_2 η τάση αυτή. Τότε $V_2 = V_{0s} - V_{C_1} = 220 - I_1 \cdot \left(\frac{-i}{\omega C}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_2 = 220 - (9.4 + i\,14.1)\cdot 10^{-3}\left(-i\,6.3\cdot 10^{3}\Omega\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2 = 220 - 88.83 + i\,59.22 \Rightarrow V_2 = (131.17 + i\,59.22) \text{ Volts}$$

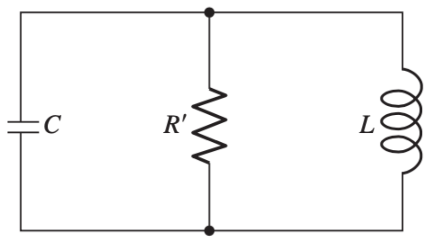
Το ρεύμα στην R_2 θα είναι σε φάση με την V_2. οπότε $\cos\phi_2 = 1$.

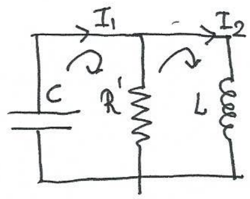
Η μέση ισχύς θα είναι: $<P> = V_2^2/R = \frac{(131.17)^2 + (59.22)^2}{10^4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow <P> = 2.07 W.$$

Τα αποτελέσματα για την ισχύ που καταναλώνεται στην αντίσταση όπως βλέπουμε συμφωνούν.

7. Θεωρήστε το κύκλωμα του διπλανού σχήματος, στο οποίο ο αντιστάτης R' είναι συνδεδεμένος παράλληλα με ένα πηνίο αυτεπαγωγής L και έναν πυκνωτή χωρητικότητας C. (α) Βρείτε τη διαφορική εξίσωση ως προς την τάση στα άκρα του πυκνωτή που περιγράφει το κύκλωμα. (β) Βρείτε τις συνθήκες της λύσης της διαφορικής αυτής εξίσωσης για την τάση, όπως προσδιορίστηκαν για το RLC κύκλωμα σε σειρά. (<u>*Υπόδειξη*</u>: Η λύση είναι της μορφής $V(t) = Ae^{-at}\cos(\omega t)$). (γ) Αν το RLC κύκλωμα με την παράλληλη συνδεσμολογία των στοιχείων έχει πηνίο αυτεπαγωγής L και πυκνωτή χωρητικότητας C ίδια με το αντίστοιχο κύκλωμα RLC με τα στοιχεία συνδεδεμένα σε σειρά, και τα δύο κυκλώματα έχουν τον ίδιο παράγοντα ποιότητας Q, βρείτε τη σχέση που συνδέει την τιμή του αντιστάτη R' στο παράλληλο RLC κύκλωμα με την τιμή του αντιστάτη R στο αντίστοιχο RLC σε σειρά κύκλωμα.





Έστω ότι I_1 είναι το ρεύμα που διαρρέει τον αριστερό βρόχο και I_2 το ρεύμα που διαρρέει τον δεξί βρόχο. Θεωρούμε τη φορά που κινούμαστε στους βρόχους όπως στο σχήμα.

Έστω ότι η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή είναι V_c με θετική όταν ο πάνω οπλισμός του πυκνωτή είναι θετικός.

Στα τρία στοιχεία του κυκλώματος θα έχουμε διαφορά δυναμικού ίδια και ίση με:

$$V_c = \frac{Q}{C} \quad (1) \qquad V_{R'} = (I_1 - I_2)R' \quad (2) \qquad V_L = L\frac{dI_2}{dt} \quad (3)$$

$$V_L = V_{R'} = V_L = V \qquad (4)$$

Αλλά $I_1 = -\frac{dQ}{dt}$ (- γιατί το φορτίο ελαττώνεται)

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς χρόνο, οπότε: $\frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{C} I_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d^2V_c}{dt^2} = -\frac{1}{C}\frac{dI_1}{dt} \qquad (1')$$

Αντίστοιχα η (2) θα δώσει: $\frac{dV_R}{dt} = R'\left(\frac{dI_1}{dt} - \frac{dI_2}{dt}\right) \quad (2')$

Αντικαθιστούμε την (1') κ (3) στην (2') οπότε θα έχουμε:

$$\frac{dV_R}{dt} = R'\left(-C\frac{d^2V_C}{dt^2} - \frac{V_L}{L}\right) \overset{(4)}{\Rightarrow} \frac{dV}{dt} = R'\left(C\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{V}{L}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2V}{dt^2} + \left(\frac{1}{R'C}\right)\frac{dV}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right)V = 0$$

Δοκιμάζουμε λύση της μορφής: $V(t) = Ae^{-at}\cos\omega t$

Η διαφορική εξίσωση γράφεται επομένως:

$$\frac{dV}{dt} = -aAe^{-at}\cos\omega t - \omega Ae^{-at}\sin\omega t$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = +a^2Ae^{-at}\cos\omega t + a\omega Ae^{-at}\sin\omega t + \omega a Ae^{-at}\sin\omega t - \omega^2Ae^{-at}\cos\omega t \Rightarrow$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \left(a^2-\omega^2\right)Ae^{-at}\cos\omega t + 2a\omega Ae^{-at}\sin\omega t$$

Αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση δίνει:

$$\left(a^2-\omega^2\right)Ae^{-at}\cos\omega t + 2a\omega Ae^{-at}\sin\omega t - \frac{1}{R'C}\left(a\cos\omega t + \omega\sin\omega t\right)Ae^{-at} + \frac{Ae^{-at}}{LC}\cos\omega t$$

Οπότε απαλείφοντας τον όρο Ae^{-at} έχουμε:

$$\left(a^2-\omega^2\right)\cos\omega t + 2a\omega\sin\omega t - \frac{1}{R'C}\left(a\cos\omega t + \omega\sin\omega t\right) + \frac{\cos\omega t}{LC} = 0$$

Η εξίσωση αυτή ικανοποιείται για οποιοδήποτε t μόνο αν:

$$\left(a^2-\omega^2-\frac{a}{R'C}+\frac{1}{LC}\right)\cos\omega t + \left(2a\omega - \frac{\omega}{R'C}\right)\sin\omega t = 0$$ οι όροι εμπρός από το $\cos\omega t$ & $\sin\omega t$ είναι μηδέν.

$$\boxed{a^2-\omega^2-\frac{a}{R'C}+\frac{1}{LC}=0}\ (A) \text{ και } \boxed{2a\omega - \frac{\omega}{R'C} = 0.}\ (B)$$

Η (B) δίνει: $2a\omega - \frac{\omega}{R'C} = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2R'C}}$ (Γ)

και η (A) δίνει: $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{2R'^2C^2} + \frac{1}{4R'^2C^2} \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{4R'^2C^2}}$ (Δ)

Βρίσκουμε ότι για το παράλληλο RLC κύκλωμα:

$$a_{παρ} = \frac{1}{2R'C} \quad \text{και} \quad \omega_{παρ}^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{4R'^2C^2} = \frac{1}{LC} - a_{παρ}^2$$

Για το RLC σε σειρά είχαμε από τις διαλέξεις ότι:

$$a_{σειρ} = \frac{R}{2L} \quad \text{και} \quad \omega_{σειρά}^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC} - a_{σειρά}^2$$

Ο παράγοντας ποιότητας $Q = \frac{\omega}{2a}$. και θέλουμε $Q_{σειρά} = Q_{παραλ}$

Για να είναι ίσα θα πρέπει $a_{παρ}^2 = a_{σειρ}^2 \Rightarrow a_{παρ} = a_{σειρά} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}R'C} = \frac{R}{\cancel{2}L} \Rightarrow \boxed{R' = \frac{L}{RC}}$$

8. Προσδιορίστε την αυτεπαγωγή ενός πηνίου που θα πρέπει να συνδεθεί σε σειρά με έναν λαμπτήρα με τα χαρακτηριστικά 60*W* και *120V rms,* ώστε να λειτουργεί κανονικά όταν ο συνδυασμός των δύο αυτών στοιχείων συνδεθεί σε κύκλωμα 240*V* και 60*Hz* συχνότητας. Μπορείτε να θεωρήσετε ότι η ωμική αντίσταση του πηνίου είναι αμελητέα καθώς και την αυτεπαγωγή του λαμπτήρα.

Για έναν λαμπτήρα με προδιαγραφές 60W και 120V rms δίνει ότι το ρεύμα που θα τον διαρρέει θα έχει: $I_{rms} = \frac{P}{V_{rms}} = \frac{60W}{120V} \Rightarrow I_{rms} = 0.5A$

Η αντίσταση του λαμπτήρα θα είναι: $R = \frac{V}{I} = \frac{120V}{0.5A} \Rightarrow R = 240\,\Omega$

Θα μπορούσαμε να βρούμε την αντίσταση από την ισχύ: $P = V^2/R \Rightarrow$

$$\Rightarrow R = \frac{V^2}{P} = \frac{(120)^2}{60} = \frac{144\cancel{0}}{6\cancel{0}} = 240\,\Omega.$$

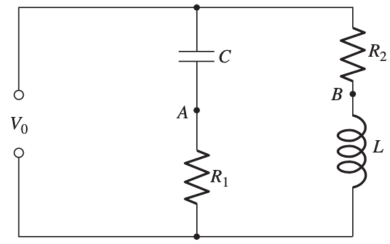
Θέλουμε να έχουμε το ίδιο ρεύμα να διαρρέει τον λαμπτήρα όταν συνδεθεί σε σειρά με ένα πηνίο αμελητέας ωμικής αντίστασης

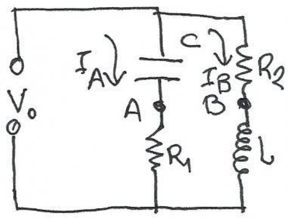
Επομένως: $V_{rms} = I_{rms}\left(R^2_{λαμπ.} + (\omega L)^2\right)^{1/2} \Rightarrow \frac{V_{rms}}{I_{rms}} = \sqrt{R^2_{λαμ} + \omega^2 L^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega^2 L^2 = \left(\frac{V_{rms}}{I_{rm}}\right)^2 - R^2 \Rightarrow L = \sqrt{\left(\frac{240}{0.5}\right)^2 - (240)^2} \Big/ (2\pi \cdot 60) \Rightarrow L = \frac{240}{2\pi 60}\sqrt{\frac{1}{0.25} - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \frac{\cancel{240}^{\,2}}{\pi \cdot \cancel{60}}\sqrt{4-1} \Rightarrow L = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\pi} \Rightarrow \underline{L = 1.103\ H}$$

9. Αποδείξτε ότι αν η συνθήκη $R_1R_2 = L/C$ ικανοποιείται για το κύκλωμα του διπλανού σχήματος, τότε η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων A και B θα είναι μηδέν για οποιαδήποτε τιμή συχνότητας της πηγής τάσης. Αναπτύξτε την άποψή σας για το κατά πόσο ένα τέτοιο κύκλωμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως "γέφυρα Wheatstone" για την μέτρηση μιας άγνωστης αυτεπαγωγής, L, θεωρώντας ότι γνωρίζετε την χωρητικότητα του πυκνωτή και τις τιμές των αντιστάσεων R_1 και R_2.





Οι δύο κλάδοι του κυκλώματος έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού V_0.
Επομένως το μιγαδικό ρεύμα σε κάθε κλάδο είναι:

$$I_A = \frac{V_0}{Z_A} = \frac{V_0}{R_1 + \frac{1}{i\omega C}} \quad \text{και} \quad I_B = \frac{V_0}{Z_B} = \frac{V_0}{R_2 + iL\omega}$$

Το δυναμικό στο σημείο A είναι: $V_A = V_0 - I_A Z_C = V_0 - I_A(1/i\omega C)$
Το δυναμικό στο σημείο B είναι: $V_B = V_0 - I_B Z_{R_2} = V_0 - I_B R_2$ $\Rightarrow$

$$\Delta V = V_B - V_A = \cancel{V_0} - I_B R_2 - \cancel{V_0} + I_A\left(\frac{1}{i\omega C}\right) = -I_B R_2 + I_A \frac{1}{i\omega C}$$

Αντικαθιστούμε τα ρεύματα I_A και I_B οπότε έχουμε:

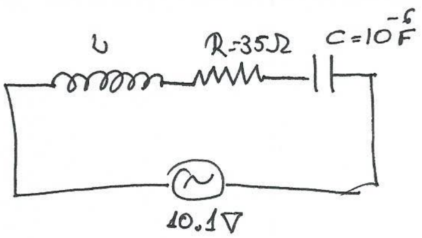
$$\Delta V = -\frac{V_0}{R_2 + iL\omega} R_2 + \frac{V_0}{R_1 + \frac{1}{i\omega C}} \frac{1}{i\omega C} = -\frac{V_0 R_2}{R_2 + i\omega L} + \frac{V_0}{i\omega R_1 C + 1}$$

Η διαφορά δυναμικού γίνεται ϕ όταν $\cancel{\frac{V_0 R_2}{R_2 + i\omega L}} = \cancel{\frac{V_0}{i\omega R_1 C + 1}} \Rightarrow$

$$\cancel{R_2} + i\cancel{\omega} R_1 R_2 C = \cancel{R_2} + i\cancel{\omega} L \Rightarrow L = R_1 R_2 C \Rightarrow \boxed{R_1 R_2 = \frac{L}{C}}$$

Επομένως αν δοθεί πυκνωτής γνωστής χωρητικότητας και δύο γνωστές αντιστάσεις R_1 και R_2 μπορούμε να προσδιορίσουμε μια άγνωστη επαγωγή L ρυθμίζοντας είτε την χωρητικότητα C ή τις αντιστάσεις R_1 και R_2 ώστε $\Delta V = 0$. Το γεγονός ότι τα πραγματικά πηνία έχουν ωμική αντίσταση δυσκολεύει τη μέθοδο γιατί η αντίσταση του πηνίου θα προστεθεί σε σειρά με την R_2 και την L.

10. Στο εργαστήριο της Γενικής ΙΙ σας δόθηκε ένα πηνίο άγνωστης αυτεπαγωγής L και ωμικής αντίστασης R. Σας ζητήθηκε να προσδιορίσετε τις άγνωστες τιμές R και L χρησιμοποιώντας ένα πολύμετρο με τον διακόπτη ρυθμισμένο για μέτρηση ωμικής αντίστασης, ένα πολύμετρο ρυθμισμένο για μέτρηση V_{AC} έχοντας μεγάλη εμπέδηση, έναν πυκνωτή χωρητικότητας $1\mu F$ και μια γεννήτρια συχνοτήτων ρυθμισμένη ώστε να παρέχει σήμα συχνότητας $1000 Hz$. Μετρήσατε την ωμική αντίσταση και την βρήκατε ότι είναι $R = 35\Omega$. Συνδέσατε τον πυκνωτή σε σειρά με το πηνίο και την γεννήτρια συχνοτήτων και βρήκατε ότι η διαφορά δυναμικού στα άκρα της συνδεσμολογίας των δύο στοιχείων είναι $10.1V$. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή μόνο μετρήθηκε ότι είναι $15.5V$. Για να επαληθεύσετε την μέτρησή σας, μετρήσατε την διαφορά δυναμικού στα άκρα του πηνίου και τη βρήκατε ότι είναι $25.4V$. Ποια είναι η τιμή της αυτεπαγωγής L; Το τεστ επαλήθευσης που κάνατε συνάδει με το αποτέλεσμα;



Μπορούμε να βρούμε το πλάτος του ρεύματος ή την τιμή του rms. Είτε το ένα μέγεθος ή το άλλο μέγεθος η τιμή του L δεν θα εξαρτάται από αυτό.

Η συχνότητα είναι: $\omega = 2\pi(1000 s^{-1}) = 6283 s^{-1}$

Επομένως από τη διαφορά δυναμικού στον πυκνωτή: $V_{0C} = I_0 Z_C = \frac{I_0}{\omega C} \Rightarrow$

$$I_0 = V_{0C}\,\omega C \Rightarrow I_0 = (15.5V)(6283 s^{-1})(10^{-6}F) \Rightarrow \underline{I_0 = 0.0974 A}$$

Από τη στιγμή που το κύκλωμα είναι ένα RLC σε σειρά, όλα τα στοιχεία διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα.

Επομένως: $$I_0 = \frac{V_{0\lambda}}{|Z|} = \frac{10.1V}{\sqrt{(35)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \Rightarrow 0.0974 = \frac{10.1V}{\sqrt{(35)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = \left(\frac{10.1}{0.0974}\right)^2 - (35)^2 \Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} = \sqrt{9527.88} \Rightarrow$$

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm 97.6\Omega$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν 2 λύσεις. Επομένως: $L = \frac{1}{\omega^2 C} \pm \frac{97.6}{\omega} \Rightarrow$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{(6283)^2 \cdot 10^{-6}} \pm \frac{97.6}{6283} = 0.0253 \pm 0.0155 \Rightarrow \boxed{L = \begin{cases} 0.041\,H \\ 0.0098\,H \end{cases}}$$

Το πλάτος της διαφοράς δυναμικού στα άκρα του πηνίου θα είναι:

$$V_0 = I_0 \omega L = (0.0974A)(6283 s^{-1})\left(\begin{cases} 0.041 \\ 0.0098 \end{cases}\right) \rightarrow V_0 = \begin{cases} 25.09V & L = 0.041H \\ 5.985V & L = 0.0098H \end{cases}$$

Αν μετρήσουμε τη διαφορά δυναμικού στα άκρα του πηνίου και βρούμε 25.4V, η 2η λύση απορρίπτεται και έχουμε καλή συμφωνία με την υπολογισμένη τιμή των 25.1V