Isospin

- Είδαμε ότι το isospin αποτελεί μια συμμετρία που διατηρείται από τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις
- Το isospin συμπεριφέρεται ανάλογα με το spin
  - ✓ Το p και το n έχουν isospin I = ½ και I_3= ½ και -½ αντίστοιχα
  - ✓ Το π^+,π^0 και π^- isospin I =1 και I_3= +1, 0 και -1 αντίστοιχα
  - ✓ Το Δ βαριόνια έχουν isospin I = 3/2 και υπάρχουν 4 από αυτά:
    - Το Δ^{++} με I_3 = 3/2
    - Το Δ^{+} με I_3 = 1/2
    - Το Δ^{0} με I_3 = -1/2
    - Το Δ^{-} με I_3 = -3/2
- Η διατήρηση του isospin από τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις σημαίνει ότι στην διάσπαση ενός σωματιδίου τα αρχικα I και I_3 θα πρέπει να διατηρούνται και από τα προϊόντα της διάσπασης
- Οι συντελεστές Clebsch-Gordon των γραμμικών συνδυασμών καθορίζουν τους σχετικούς ρυθμούς διάσπασης
- Για παράδειγμα έστω ότι έχουμε την διάσπαση των Δ-βαριονίων:

$$\Delta^{++} \to \pi^+ p \qquad \Delta^{0} \to \pi^0 n$$
$$\Delta^{+} \to \pi^+ n \qquad \Delta^{0} \to \pi^- p$$
$$\Delta^{+} \to \pi^0 p \qquad \Delta^{-} \to \pi^- n$$

$1\times 1/2$

	3/2 +3/2
+1 +1/2	1

	3/2 +1/2	1/2 +1/2
+1 −1/2	1/3	2/3
0 +1/2	2/3	−1/3

	3/2 −1/2	1/2 −1/2
0 −1/2	2/3	1/3
−1 +1/2	1/3	−2/3

	3/2 −3/2
−1 −1/2	1

Isospin – Διασπάσεις Δ-βαριονίου

$1\times1/2$

$m_1\ m_2$ \ $J,\ M$	$3/2,\ +3/2$	$3/2,\ +1/2$	$1/2,\ +1/2$	$3/2,\ -1/2$	$1/2,\ -1/2$	$3/2,\ -3/2$
$+1\ +1/2$	1					
$+1\ -1/2$		$1/3$	$2/3$			
$0\ +1/2$		$2/3$	$-1/3$			
$0\ -1/2$				$2/3$	$1/3$	
$-1\ +1/2$				$1/3$	$-2/3$	
$-1\ -1/2$						1

$$\Delta^{++}\rightarrow\pi^{+}p \quad =\left|1,+1/2\right\rangle \quad =\left|3/2,+3/2\right\rangle$$

$$\Delta^{+}\rightarrow\pi^{+}n \quad =\left|1,-1/2\right\rangle \quad =\frac{\left|3/2,+1/2\right\rangle+\sqrt{2}\left|1/2,+1/2\right\rangle}{\sqrt{3}}$$

$$\Delta^{+}\rightarrow\pi^{0}p \quad =\left|0,+1/2\right\rangle \quad =\frac{\sqrt{2}\left|3/2,+1/2\right\rangle-\left|1/2,+1/2\right\rangle}{\sqrt{3}}$$

$$\Delta^{0}\rightarrow\pi^{0}n \quad =\left|0,-1/2\right\rangle \quad =\frac{\sqrt{2}\left|3/2,-1/2\right\rangle+\left|1/2,-1/2\right\rangle}{\sqrt{3}}$$

$$\Delta^{0}\rightarrow\pi^{-}p \quad =\left|-1,+1/2\right\rangle \quad =\frac{\left|3/2,-1/2\right\rangle-\sqrt{2}\left|1/2,-1/2\right\rangle}{\sqrt{3}}$$

$$\Delta^{-}\rightarrow\pi^{-}n \quad =\left|-1,-1/2\right\rangle \quad =\left|3/2,-3/2\right\rangle$$

Isospin – Διασπάσεις Δ-βαριονίου

Τα σχετικά πλάτη διάσπασης επομένως θα είναι:

$$\Delta^{++} \rightarrow \pi^{+} p \quad : \left\langle 3/2, +3/2 \middle| 3/2, +3/2 \right\rangle = 1$$

$$\Delta^{+} \rightarrow \pi^{+} n \quad : \frac{1}{\sqrt{3}} \langle 3/2, +1/2 \,|\big(|\, 3/2, +1/2\rangle + \sqrt{2} |\, 1/2, +1/2\rangle \big)\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\Delta^{+} \rightarrow \pi^{0} p \quad : \frac{1}{\sqrt{3}} \langle 3/2, +1/2 \,|\big(\sqrt{2} |\, 3/2, +1/2\rangle - |\, 1/2, +1/2\rangle \big)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Delta^{0} \rightarrow \pi^{0} n \quad : \frac{1}{\sqrt{3}} \langle 3/2, -1/2 \,|\big(\sqrt{2} |\, 3/2, -1/2\rangle + |\, 1/2, -1/2\rangle \big)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Delta^{0} \rightarrow \pi^{-} p \quad : \frac{1}{\sqrt{3}} \langle 3/2, -1/2 \,|\big(|\, 3/2, -1/2\rangle - \sqrt{2} |\, 1/2, -1/2\rangle \big)\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\Delta^{-} \rightarrow \pi^{-} n \quad : \langle 3/2, -3/2 \,|\, 3/2, -3/2\rangle = 1$$

Isospin – Διασπάσεις Δ-βαριονίου

Υψώνουμε στο τετράγωνο για να βρούμε τους σχετικούς ρυθμούς διάσπασης:

$\Delta^{++} \to \pi^+ p$ και $\Delta^- \to \pi^- n$ θα πρέπει να είναι ίσα με 1

$\Delta^{+} \to \pi^+ n$ και $\Delta^0 \to \pi^- p$ θα πρέπει να είναι ίσα με 1/3

$\Delta^{+} \to \pi^0 p$ και $\Delta^0 \to \pi^0 n$ θα πρέπει να είναι ίσα με 2/3

Οι ολικοί ρυθμοί διάσπασης για Δ^{++}, Δ^+, Δ^0 και Δ^- θα είναι ίσοι

Ο λόγος του ρυθμού διάσπασης $\Delta^+ \to \pi^0 p$ ως προς $\Delta^+ \to \pi^+ n$ είναι 2:1

Ο λόγος του ρυθμού διάσπασης $\Delta^0 \to \pi^0 n$ ως προς $\Delta^0 \to \pi^- p$ είναι 2:1

Isospin – Σκεδάσεις σωματιδίων

Η συμμετρία του isospin επιτρέπει προβλέψεις σχετικά με την σκέδαση πιονίου-νεκλεονίου σε ενέργειες αρκετά χαμηλές για την παραγωγή αρκετών πιονίων

Υποθέτουμε ότι οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις συνδέουν το isospin στην αρχική κατάσταση στις ίδιες συνιστώσες του isospin στη τελική κατάσταση

Για παράδειγμα, θέλουμε να συγκρίνουμε τις ενεργές διατομές σκέδασης στην ίδια ενέργεια δέσμης για τις παρακάτω αλληλεπιδράσεις:

$$p + p \to d + \pi^+$$

$$p + n \to d + \pi^0$$

$$n + n \to d + \pi^-$$

Στην περίπτωση αυτή τα αρχικά και τελικά isospins μπορούν να γραφούν:

$$p + p \to d + \pi^+ \qquad : \left\langle \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \right| \to \left\langle (0,0),(1,+1) \right|$$

$$p + n \to d + \pi^0 \qquad : \left\langle \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \right| \to \left\langle (0,0),(1,0) \right|$$

$$n + n \to d + \pi^- \qquad : \left\langle \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \right| \to \left\langle (0,0),(1,-1) \right|$$

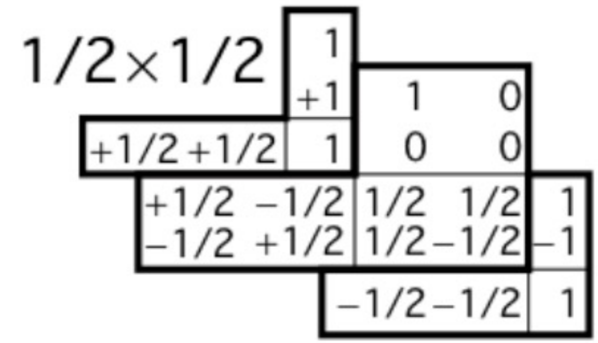
Isospin και σκεδάσεις

Χρησιμοποιούμε τους πίνακες Clebsch-Gordon για να βρούμε το “J” και “M” περιεχόμενο της αρχικής κατάστασης:

$$p+p \quad : \quad \left\langle \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right| \qquad = \left\langle (1,+1) \right|$$

$$p+n \quad : \quad \left\langle \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right| \qquad = \frac{\left\langle (1,0) \right| + \left\langle (0,0) \right|}{\sqrt{2}}$$

$$n+n \quad : \quad \left\langle \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right| \qquad = \left\langle (1,-1) \right|$$



Κάνουμε το ίδιο για την τελική κατάσταση

Το δευτέριο έχει isospin μέτρο 0, οπότε μόνο τα πιόνια συνεισφέρουν στο τελικό isospin

$$p+p \rightarrow d+\pi^{+} \quad : \quad \left\langle (0,0),(1,1) \right| \qquad = \left\langle (1,1) \right|$$

$$p+n \rightarrow d+\pi^{0} \quad : \quad \left\langle (0,0),(1,0) \right| \qquad = \left\langle (1,0) \right|$$

$$n+n \rightarrow d+\pi^{-} \quad : \quad \left\langle (0,0),(1,-1) \right| \qquad = \left\langle (1,-1) \right|$$

Isospin και σκεδάσεις

Υπολογίζουμε τα πλάτη σκέδασης χρησιμοποιώντας την συνθήκη ορθοκανονικότητας:

$$p + p \rightarrow d + \pi^+ \quad : \quad \langle (1,+1) \| (1,+1) \rangle = 1$$

$$p + n \rightarrow d + \pi^0 \quad : \quad \frac{\langle (1,0)| + \langle (0,0)|}{\sqrt{2}} | (1,0) \rangle = \frac{1+0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$n + n \rightarrow d + \pi^- \quad : \quad \langle (1,-1) \| (1,-1) \rangle = 1$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο για να βρούμε τις πιθανότητες σκέδασης.

Οι σκεδάσεις $p + p \rightarrow d + \pi^+$ και $n + n \rightarrow d + \pi^-$ έχουν διπλάσια ενεργό διατομή από αυτή της $p + n \rightarrow d + \pi^0$

- Οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις δεν διατηρούν το isospin.
- Οι ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις δεν διατηρούν το μέτρο του isospin αλλά διατηρούν την τρίτη συνιστώσα του isospin. Επειδή διατηρούν το φορτίο και την γεύση συμβαίνει να διατηρούν την τρίτη συνιστώσα του isospin

Πολλαπλασιαστικοί νόμοι διατήρησης

Κάποιοι νόμοι διατήρησης είναι πολλαπλασιαστικοί: το γινόμενο ιδιοτήτων των σωματιδίων είναι το ίδιο στην αρχική και τελική κατάσταση

Τέτοια παραδείγματα είναι η ομοτιμία (parity) P, συζυγία φορτίου (charge conjugation) C και G-ομοτιμία (G-parity)

Οι κβαντικοί αριθμοί που συνδέονται με τις συμμετρίες αυτές είναι διακριτοί και οι συμμετρίες είναι διακριτές συμμετρίες της Hamiltonian

Σε αντίθεση με συμμετρίες που είναι συνεχείς και οδηγούν σε κβαντικούς αριθμούς που είναι προσθετικοί όπως το ηλεκτρικό φορτίο, ο λεπτονικός, ο βαρυονικός αριθμός.

Οι κβαντικοί αριθμοί που συνδέονται με διακριτές συμμετρίες, παίρνουν τιμές ± 1

Η συμμετρία της ομοτιμίας (parity) P, συνδέεται με την αναστροφή του χώρου.

Αναστροφή δηλαδή και των τριων χωρικών συντεταγμένων. Αυτό είναι ισοδύναμο με μια αντικατοπτρική αναστοφή (ως προς μια μόνο συντεταγμένη) και μετά περιστροφή κατά 180^o

Η συμμετρία της συζυγίας φορτίου (charge conjugation) C, συνδέεται με την εναλλαγή ύλης και αντι-ύλης (που συνδέει μιγαδικούς συζυγούς και αρνητική ενέργεια)

Parity στην κβαντομηχανική

Η όρος της κινητικής ενέργειας στην εξίσωση του Schrödinger δεν αλλάζει πρόσημο αν αναστρέψουμε τις χωρικές συντεταγμένες γιατί είναι δευτέρου βαθμού ως προς τις χωρικές συντεταγμένες $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ή $-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2$

Αν και το δυναμικό V(r) είναι συμμετρικό κάτω από την αναστροφή των χωρικών συντεταγμένων, δηλαδή $V(-\vec{r}) = V(\vec{r})$ τότε όλη η Hamiltonian είναι συμμετρική

Στις περιπτώσεις αυτές, μια λύση της εξίσωσης Schrödinger υπακούει πάντοτε:

$\psi(\vec{x}) = \psi(-\vec{x})$ που ονομάζεται άρτια κάτω από ομοτιμία (even parity) με κβαντικό αριθμό +1

$\psi(\vec{x}) = -\psi(-\vec{x})$ που ονομάζεται περιττή κάτω από ομοτιμία (odd parity) με κβαντικό αριθμό -1

Parity και στροφορμή

Ένα σφαιρικά συμμετρικό κεντρικό δυναμικό ικανοποιεί την σχέση: $V(\vec{x}) = V(-\vec{x})$
και επομένως οι λύσεις θα πρέπει να είναι είτε περιττές ή άρτιες

Οι λύσεις είναι γινόμενα ακτινικών συναρτήσεων και σφαιρικών αρμονικών $Y_L^m(\theta,\varphi)$

Οι λύσεις με άρτια στροφορμή *L*, είναι άρτιες κάτω από parity, ενώ
η λύση με *L*=0 είναι επίσης άρτια κάτω από parity

Οι λύσεις με περιττή στροφορμή *L*, είναι περιττές κάτω από parity

Η λύση με *L*=1 είναι ανάλογη του cosθ ή του $e^{\pm i\theta}$ ή sinθ.

Και τα δυο αλλάζουν πρόσημο με αλλαγή $\vec{x} \to -\vec{x}$

Κάτω από parity θα έχουμε: $\theta \to \pi - \theta$ και $\varphi \to \pi + \varphi$

Επομένως θα πάρουμε για τις σφαιρικές αρμονικές $Y_1^{+1}(\theta,\varphi) = \sin\theta e^{+i\varphi}$ $\quad Y_1^{-1}(\theta,\varphi) = \sin\theta e^{-i\varphi}$

Κάτω από parity θα έχουμε: $PY_1^{\pm 1}(\theta,\varphi) = \sin(\pi - \theta) e^{\pm i(\varphi+\pi)}$

$$= (\sin\pi\cos\theta - \cos\pi\sin\theta) e^{\pm i\pi} e^{\pm i\varphi}$$

$$= (0 + \sin\theta)(-1) e^{\pm i\varphi} = -\sin\theta e^{\pm i\varphi} = -Y_1^{\pm 1}(\theta,\varphi)$$

Κάτω από parity, η τιμή της m δεν αλλάζει αλλά αλλάζει ο z-άξονας με αποτέλεσμα να αλλάζει η σημασία της τιμής m

Η στροφορμή ορίζεται σαν $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Κάτω από parity αλλάζουν τόσο το r όσο και το p, αλλά η στροφορμή *L* δεν αλλάζει. Αλλά το σύστημα συντεταγμένων έχει αλλάξει

Ρυθμοί μετάβασης και parity

Ο ρυθμός μετάβασης από μια κατάσταση Ψ_k σε μια κατάσταση Ψ_j είναι ανάλογος του τετραγώνου:

$$\left\langle \Psi_j \middle| \Delta H \middle| \Psi_k \right\rangle = \int d\vec{x}\, \Psi_j^*\left(\vec{x}\right) \Delta H \Psi_k\left(\vec{x}\right)$$

όπου Ψ_i είναι καταστάσεις της αδιατάρακτης Hamiltonian *H* και ΔΗ είναι κάποια εισαγώμενη διαταραχή του συστήματος και της Η

Αν η Hamiltonian μετατίθεται με τον τελεστή της αναστροφής χώρου *P,* τότε Ψ_i είναι άρτιες ή περιττές. Αν η διαταραχή ΔΗ είναι άρτια ή περιττή, τότε η ολοκληρώσιμη ποσότητα θα είναι άρτια ή περιττή.

- Αν η ολοκληρώσιμη ποσότητα είναι περιττή τότε το ολοκλήρωμα είναι 0
- Μπορούμε να ξέρουμε αν κάποια μετάβαση (αλληλεπίδραση) είναι επιτρεπτή ή απαγορευμένη ξέροντας απλά κάποια πράγματα σχετικά με την parity

Parity και φωτόνια

Ο ρυθμός απορρόφησης ενός φωτονίου από άτομο μπορεί να προσεγγιστεί θεωρώντας το ΕΜ πεδίο σαν μια διαταραχή. Για μήκος κύματος του φωτός πολύ μεγαλύτερο από ένα άτομο, το ΕΜ πεδίο είναι πρακτικά σταθερό στο εσωτερικό του ατόμου.

Το δυναμικό ενός ομοιόμορφου πεδίου είναι γραμμική συνάρτηση της θέσης: $\Delta H = qV(x) = qE_0 x$

Το ολοκλήρωμα του ρυθμού μετάβασης είναι της μορφής: $qE_0 \int dx \Psi_j^* x \Psi_k$

Το ολοκλήρωμα είναι 0 αν τόσο η αρχική και η τελική κατάσταση είναι άρτιες ή είναι περιττές

Η απορρόφηση ενός φωτονίου πάντοτε αλλάζει την parity της ατομικής κυματοσυνάρτησης

Η εκπομπή ενός φωτονίου ακολουθεί τον ίδιο κανόνα

Αν δώσουμε στα φωτόνια μια εσωτερική αρχική parity με τιμή -1, τότε έχουμε διατήρηση της parity: Η parity της τελικής κατάστασης είναι η ίδια με την parity της αρχικής κατάστασης, όπου η αρχική ή η τελική κατάσταση μπορεί να περιέχει ένα φωτόνιο καθώς και ένα άτομο

Οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις διατηρούν επίσης την parity, αν δώσουμε τις κατάλληλες τιμές parity στα σωματίδια

Οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις παραβιάζουν την parity

Parity σωματιδίων

Η εξίσωση Dirac περιέχει χωρικούς τελεστές οι οποίοι αντιστρέφονται κάτω από parity. Περιέχει επίσης κυματοσυναρτήσεις 4 συνιστωσών. Η parity ενεργεί στο spin των σωματιδίων ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που ενεργεί στην στροφορμή: Το spin επομένως δεν αναστρέφεται παρόλο που το σύστημα συντεταγμένων αναστρέφεται

Η εξίσωση Dirac απαιτεί τα αντι-φερμιόνια να έχουν αντίθετη εσωτερική parity από τα φερμιόνια

Κάθε αντιφερμιόνιο παίρνει από το τελεστή της parity ενα *i*)

Σωματίδια ύλης (λεπτόνια, νετρίνος, quarks) λαμβάνουν τιμή parity +1. Τα αντισωματίδιά τους παίρνουν τιμή -1.

Τα μεσόνια είναι δέσμιες καταστάσεις quark – antiquark και αυτό τους δίνει parity -1

Υπάρχει συνεισφορά επίσης από την τροχιακή στροφορμή: +1 για άρτια τιμή της στροφορμής και -1 για περιττή τιμή της στροφορμής.

Αλλά το σπιν των quarks δεν συνεισφέρει στην parity. Επομένως η parity εξαρτάται από την τροχιακή στροφορμή αλλά όχι από την συνολική στροφορμή

Τα πιόνια είναι ένα σύστημα quark-antiquark με αντίθετα spins και τροχιακή στροφορμή L=0
Η parity επομένως είναι P=-1. Το ρ-μεσόνιο είναι ανάλογο του πιονίου αλλά τα spins των quarks είναι παράλληλα. Έχει επίσης P = -1

Parity σωματιδίων

Όλα τα μεσόνια με τροχιακή στροφορμή L=0 και όλα τα μεσόνια με άρτια στροφορμή L έχουν parity -1

Όλα τα μεσόνια με τροχιακή στροφορμή L=1 και όλα τα μεσόνια με περιττή στροφορμή L έχουν parity +1

Τα βαρυόνια είναι δέσμιες καταστάσεις 3 quarks, στα οποία δίνουμε την τιμή P = +1.
Τα αντιβαρυόνια έχουν 3 αντι-quarks το καθένα με P=-1, δίνοντας μια εσωτερική συνεισφορά parity -1. ‘Οπως θα δούμε όλα τα βαρυόνια της οκτάδας ή δεκάδας έχουν L=0 που αντιστοιχεί σε άρτια parity

Επομένως τα συνηθισμένα βαρυονια έχουν P = +1 και τα αντισωματίδιά τους είναι P=-1