ΦΥΣ. 131

ΕΡΓΑΣΙΑ # 1

Να διαβαστούν τα κεφάλαια 1,2,3,4 του βιβλίου του Serway “physics for scientist and engineers”

1. Χρησιμοποιώντας διαστασιακή ανάλυση, να προσδιορίσετε την περίοδο ενός εκκρεμούς στο πλανήτη Πλούτωνα όταν ξέρετε ότι η περίοδος του εκκρεμούς στην επιφάνεια της γης είναι 1sec. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $g_{\Pi}/g_{\Gamma} \sim 1/20$.

Από τις διαλέξεις έχουμε: (1η διάλεξη)

$T^{-1} \propto m^a g^b \ell^c$ οπότε: $T^{-1} \propto [M]^a \dfrac{[L]^b}{[T^2]^b} L^c \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} a=0 \\ b+c=0 \\ -2b=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=0 \\ b=-c \\ b=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow c=-\frac{1}{2}$$

Επομένως $T^{-1} \propto \dfrac{g^{1/2}}{\ell^{1/2}} \Rightarrow \boxed{T = f(\theta)\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}}$

σταθερά αναλογίας

Άρα $\dfrac{T_{\pi\lambda}}{T_{\gamma\eta}} = \dfrac{\sqrt{\cancel{\ell}/g_{\pi\lambda}}}{\sqrt{\cancel{\ell}/g_{\gamma\eta}}} = \sqrt{\dfrac{g_{\gamma\eta}}{g_{\pi\lambda}}} \Rightarrow T_{\pi\lambda} = T_{\gamma\eta}\sqrt{\dfrac{g_{\gamma\eta}}{g_{\pi\lambda}}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow T_{\pi\lambda} = T_{\gamma\eta}\sqrt{20} = (1\,\text{sec})\sqrt{20} \Rightarrow \boxed{T_{\pi\lambda} \simeq 4.5\,\text{s}}$$

2. Χρησιμοποιώντας διαστασιακή ανάλυση, να προσδιορίστε την ταχύτητα των κυμάτων σε μια χορδή συναρτήσει της μάζας M, μήκους L και τάσης T της χορδής (η δύναμη που τεντώνουμε τη χορδή και επομένως είναι της μορφής T=ma)

Χρησιμοποιούμε διαστασιακή ανάλυση. Θα πρέπει οι μονάδες των μεγεθών που δίνονται υψωμένες σε κάποιους εκθέτες να μας δώσουν μονάδες ταχύτητας m/sec δηλαδή $[L][T]^{-1}$.

Έχουμε τη μάζα m με μονάδες $[M]$ (kgr)

το μήκος της χορδής L με μονάδες $[L]$ (m)

και τέλος την τάση T που είναι δύναμη και έχει μονάδες N

Αλλά η δύναμη γράφεται σα $T = \underset{M}{m} \cdot \underset{m/sec^2}{\gamma}$ άρα $N \to [M][L][T]^{-2}$

Έχουμε $$[L][T]^{-1} = [M]^a [L]^b \left([M][L][T]^{-2}\right)^c \Rightarrow$$

$$[L][T]^{-1} = [M]^{a+c}[L]^{b+c}[T]^{-2c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -2c = -1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}$$

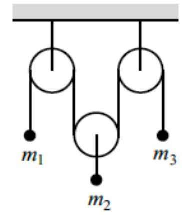
$$b + c = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1 - c = \frac{1}{2}$$

$$a + c = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -c = -\frac{1}{2}$$

Άρα $\upsilon = m^a L^b T^c \Rightarrow \quad \upsilon \propto \sqrt{\frac{L\,T}{m}} \Rightarrow \boxed{\upsilon = k\sqrt{\frac{LT}{m}}}$

όπου k σταθερά αναλογίας

3. Θεωρήστε την ακόλουθη μηχανή τροχαλιών (μηχανή Atwood). Οι τροχαλίες είναι όλες λείες (δεν υπάρχουν τριβές) και η μάζα τους μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Οι μάζες των σωμάτων είναι αντίστοιχα m_1, m_2 και m_3. Θα δείξουμε σε μετέπειτα διαλέξεις ότι η επιτάχυνση της μάζας m_1 δίνεται από τη σχέση



$$a_1 = g\,\frac{3m_2m_3 - m_1\left(4m_3 + m_2\right)}{m_2m_3 + m_1\left(4m_3 + m_2\right)}$$

με θετική φορά προς τα πάνω. Να βρεθεί η επιτάχυνση α_1 για τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(a) $m_2 = 2m_1 = 2m_3$
(b) $m_1 >> (m_2$ και $m_3)$
(c) $m_1 << (m_2$ και $m_3)$
(d) $m_2 >> m_1 = m_3$
(e) $m_1 = m_2 = m_3$

(α) Έχουμε $m_1 = m_3 \equiv m$ και $m_2 = 2m \Rightarrow a_1 = g\,\frac{3(2m)m - m(4m+2m)}{(2m)m + m(4m+2m)} = \boxed{\emptyset}$

Φανταστείτε ότι χωρίζετε την m_2 σε 2 μισά. Κάθε μισό ισορροπεί την m_1 ή m_2.

(β) Μπορούμε να αγνοήσουμε τους όρους m_2m_3 στην περίπτωση αυτή

$$a_1 \cong g\,\frac{0 - m_1(4m_3+m_2)}{0 + m_1(4m_3+m_2)} = \boxed{-g}$$

Δηλαδή η m_1 κάνει ουσιαστικά ελεύθερη πτώση από τη στιγμή που m_2 και m_3 είναι αμελητέες.

(γ) Μπορούμε να αγνοήσουμε όρους που περιλαμβάνουν m_1 στην περίπτωση αυτή

$$a_1 \cong g\,\frac{3m_2m_3 - \emptyset}{m_2m_3 + 0} = \boxed{3g}$$

(δ) Μπορούμε να αγνοήσουμε τους όρους m_1m_3. Υποθέτουμε $m_1 = m_3 = m$

$$a_1 \cong g\,\frac{3m_2m - m_2m}{m_2m + m_2m} = \boxed{g}$$

Η m_2 κάνει ελεύθερη πτώση $\Rightarrow$ m_1 και m_3 τραβιούνται προς τα πάνω με επιτάχυνση g

(ε). $m_1 = m_2 = m_3 = m$ $\quad a_1 = g\,\frac{3m^2 - m(5m)}{m^2 + m(5m)} = \boxed{-\frac{g}{3}}$

4. Ο Γιάννης σκαρφαλώνει σε ένα δέντρο για να παρακολουθήσει καλύτερα μια υπαίθρια συναυλία. Δυστυχώς ό μως έχει ξεχάσει τα κυάλια του και η φίλη του η Μαρία που βρίσκεται στο έδαφος αποφασίζει να του τα πετάξει ώστε να μη χρειαστεί να κατέβει και πάλι από το δέντρο. Η Μαρία πετά τα κυάλια κατακόρυφα προς τα πάνω με αρκετή δύναμη αλλά δεν είναι ιδιαίτερα ακριβής στη προσπάθειά της. Τα κυάλια προσπερνούν τα χέρια του Γιάννη μετά από 0.69sec και συνεχίζουν τη πορεία τους προς τα πάνω. Κατά τη κάθοδό τους ξαναπερνούν από το Γιάννη 1.68sec μετά τη πρώτη φορά και ο Γιάννης καταφέρνει να τα πιάσει. Σε τι ύψος βρίσκεται ο Γιάννης;

Γράφουμε τις εξισώσεις για το ύψος h στο οποίο βρίσκεται ο Γιάννης για τις δύο χρονικές στιγμές t_1 και t_2 που τα κυάλια περνούν από τη θέση του:

$$h = \upsilon_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \quad (1) \quad \text{καθώς ανεβαίνουν}$$

$$h = \upsilon_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \quad (2) \quad \text{καθώς κατεβαίνουν}$$

όπου υ_0 η ταχύτητα με την οποία η Μαρία ρίχνει τα κυάλια. Προσέξτε ότι έχουμε θεωρήσει τα θετική, τη φορά κίνησης προς τα πάνω

Απαλοιφή του h στις (1) και (2) δίνει την ταχύτητα υ_0

$$\upsilon_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = \upsilon_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \Rightarrow \upsilon_0 (t_2 - t_1) = \frac{1}{2} g (t_2^2 - t_1^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_0 = \frac{g \cancel{(t_2 - t_1)} (t_2 + t_1)}{2 \cancel{(t_2 - t_1)}} \Rightarrow \boxed{\upsilon_0 = \frac{1}{2} g (t_2 + t_1)} \quad (3)$$

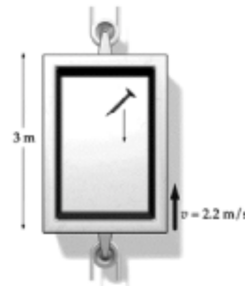
Αντικατάσταση του αποτελέσματος (3) σε μια από τις (1) ή (2) θα δώσει:

$$h = \frac{1}{2} g (t_2 + t_1) t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{1}{2} g t_1 t_2 + \cancel{\frac{1}{2} g t_1^2} - \cancel{\frac{1}{2} g t_1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{1}{2} g t_1 t_2}$$

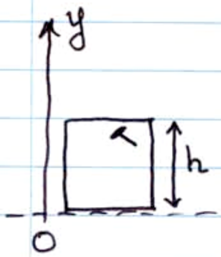
Για $t_1 = 0.69$, $t_2 = t_1 + 1.68 \Rightarrow t_2 = 2.37s$ $\Bigg\} \Rightarrow \underline{h = 8.02m}$

5. Ενώ βρίσκεστε μέσα σε ένα ανελκυστήρα βλέπετε μια βίδα να πέφτει από την οροφή του. Η οροφή του ανελκυστήρα βρίσκεται σε ύψος 3m από το δάπεδο. (α) Αν ο ανελκυστήρας κινείται προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα 2.2m/s, όπως στο διπλανό σχήμα, πόσος χρόνος χρειάζεται ώστε η βίδα να πέσει στο έδαφος; (β) Πόσο χρόνο η βίδα βρίσκεται στον αέρα αν ο ανελκυστήρας ξεκινά από την ηρεμία τη στιγμή που πέφτει η βίδα και αρχίζει να επιταχύνεται προς τα πάνω με σταθερή επιτάχυνση α = 4.0m/s^2;



Γράφουμε τις εξισώσεις θέσης της βίδας, $y_β$, και του δαπέδου του ανελκυστήρα, $y_{αν}$, συναρτήσει του χρόνου t. Αν θεωρήσουμε ότι οι αρχικές τους θέσεις ($t=0$) ήταν $y_0^{αν}$ και $y_0^{β}$, τότε η βίδα θα χτυπήσει στο δάπεδο του ανελκυστήρα όταν $y_{αν} = y_β$. (A)

Διαλέγουμε σαν αρχή του συστήματος συντεταγμένων την αρχική θέση του δαπέδου του ανελκυστήρα και θεωρούμε σα θετική φορά κίνησης αυτή προς τα πάνω:



Οι 2 εξισώσεις θέσης (ανελκυστήρα-βίδας) είναι:

$$y_{αν} = y_0^{αν} + υ_0^{αν} t + \frac{1}{2} a_{αν} t^2 \qquad (1)$$

$$y_β = y_0^{β} + υ_0^{β} t + \frac{1}{2} a_β t^2 \qquad (2)$$

(α) Από τα δεδομένα του προβλήματος, οι αρχικές συνθήκες που δίνονται είναι:

$$y_0^{αν} = 0\,m \qquad υ_0^{αν} = 2.2\,m/s \qquad a_{αν} = 0\,m/s^2$$

$$y_0^{β} = 3\,m \qquad υ_0^{β} = 2.2\,m/s \qquad a_β = -g$$

Εφόσον η βίδα βρίσκεται στον ανελκυστήρα έχει τη στιγμή που αρχίζει να πέφτει την ίδια ταχύτητα όπως και ο ανελκυστήρας.

Αντικατάσταση στις εξισώσεις (1) και (2) δίνει:

$$\left.\begin{aligned} y_{αν} &= 2.2t \\ y_β &= 3 + 2.2t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\} \xRightarrow{(A)} y_{αν} = y_β \Rightarrow \cancel{2.2t} = 3 + \cancel{2.2t} - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g t^2 = 6 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{6}{g}} \Rightarrow \boxed{t = 0.78s}$$

<u>Σημειώστε</u> ότι το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από την ταχύτητα του ανελκυστήρα!!

(β) Στην περίπτωση αυτή ο ανελκυστήρας είναι αρχικά ακίνητος και αρχίζει να κινείται με επιτάχυνση $a_{αν}$ = σταθ. προς τα πάνω.
Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι:

$$y_0^{αν} = 0m \qquad v_0^{αν} = 0m/s \qquad a_{αν} = 4m/s^2$$

$$y_0^{β} = 3m \qquad v_0^{β} = 0m/s \qquad a_{β} = -g$$

Επομένως οι εξισώσεις (1) και (2) θα δώσουν:

$$\left.\begin{aligned} y_{αν} &= \frac{1}{2}a_{αν}t^2 = \frac{1}{2}4t^2 \\ y_{β} &= 3 - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}\right\} \overset{(A)}{\Longrightarrow} y_β = y_{αν} \Rightarrow \frac{1}{2}4t^2 = 3 - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow$$

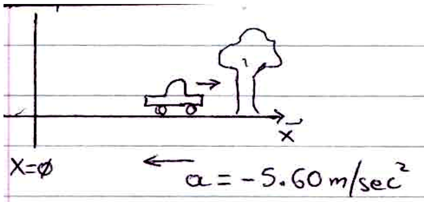
$$\Rightarrow 4t^2 + gt^2 = 6 \Rightarrow t^2 = \frac{6}{4+g} \Rightarrow$$

$$(B) \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{6}{4+g}}} \Rightarrow \boxed{t = 0.66\,s}$$

Παρατηρούμε ότι ο χρόνος που η βίδα βρίσκεται στον αέρα είναι ανεξάρτητος της ταχύτητας του ανελκυστήρα αρκεί ο ανελκυστήρας να μην επιταχύνεται. Αν ο ανελκυστήρας επιταχύνεται, τότε η βίδα (αλλά και εσείς που είστε μέσα στον ανελκυστήρα) αισθάνεστε μια επιτάχυνση η οποία είναι: $g' = g + a_{αν}$. (παρατηρήστε τα 2 αποτελέσματα από το ερώτημα (α) και (β).

Αν υποθέσετε ότι ο ανελκυστήρας κινείται προς τα κάτω με επιτάχυνση $-g$ τότε $g' = g - g = 0$ και αντικατάσταση στη σχέση (B) θα δώσει $t \to \infty$. Δηλαδή η βίδα φαίνεται σα να μην έχει βάρος

6. Ο οδηγός ενός αυτοκινήτου πατά το φρένο καθώς βλέπει ένα δέντρο να καλύπτει το δρόμο. Το αυτοκίνητο επιβραδύνει ομοιόμορφα με επιτάχυνση $-5.60 m/s^2$ για 4.2s αφήνοντας σημάδια τροχών στο οδόστρωμα τα οποία είναι ευθύγραμμα και έχουν μήκος 62.4m και σταματούν στο δέντρο. Με τι ταχύτητα χτύπησε το αυτοκίνητο στο δέντρο;



Το πρόβλημα μας δίνει:

$x_0 = \emptyset\ m$

$t = 4.2\ sec$

$x_f = 62.5 m$

$a = -5.60\ m/sec^2$

Από την εξίσωση κίνησης $x_f = x_i + v_{x_i} t + \frac{1}{2} a t^2$ λύνουμε ως προς v_{x_i}:

$$v_{x_i} = \frac{x_f - x_i - \frac{1}{2} a t^2}{t}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε: $v_{x_i} = \dfrac{62.5\,m - \emptyset - \frac{1}{2}(-5.6 \frac{m}{\cancel{sec^2}})(4.2)^2 \cancel{sec^2}}{4.2\,sec} \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_{x_i} = \frac{62.5 + \frac{1}{2}\, 5.6 \cdot 17.64}{4.2} \frac{m}{sec} = \frac{111.892}{4.2} \Rightarrow \boxed{v_{x_i} = 26.64\ m/sec}$$

Η τελική ταχύτητα θα βρεθεί από την εξίσωση:

$$v_{x_f} = v_{x_i} + at \Rightarrow v_{x_f} = 26.64 - 4.2 \cdot 5.6 \Rightarrow \boxed{v_{x_f} = 3.12\ m/sec}$$

7. Αν ρίξετε μια μπάλα με ταχύτητα v_0 και γωνία θ ως προς τον ορίζοντα, πόσο ποσοστό του συνολικού χρόνου πτήσης της περνά πάνω από το μισό του μέγιστου ύψους της;

Το μέγιστο ύψος βρίσκεται από τη σχέση: $\boxed{h_{max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\theta}{2g}}$ (A)

Ο χρόνος που χρειάζεται να φθάσει στο μέγιστο ύψος είναι:

$$\boxed{t_{av} = \frac{\upsilon_0 \sin\theta}{g}} \quad (B)$$

Στο $h = \frac{h_{max}}{2}$ το βλήμα έχει ταχύτητα: $\upsilon^2 = \upsilon_{oy}^2 - 2g(h - h_0)$

όπου $\upsilon_{oy} = \upsilon_0 \sin\theta$, $h_0 = 0$ και $h = \frac{h_{max}}{2}$ $\Rightarrow$

$$\overset{(A)}{\Rightarrow} \upsilon^2 = \upsilon_0^2 \sin^2\theta - \cancel{2g}\frac{\upsilon_0^2 \sin^2\theta}{2 \cdot \cancel{2g}} \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\theta}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon = \frac{\upsilon_0 \sin\theta}{\sqrt{2}}} \quad (\Gamma)$$ Ταχύτητα στη θέση $h_{max}/2$

Για να αποκτήσει την ταχύτητα κινούμενο από κάτω προς τα πάνω απαιτείται χρόνος:

$$\upsilon = \upsilon_{oy} - gt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\upsilon_{oy} - \upsilon}{g} = \frac{\upsilon_0 \sin\theta - \frac{\upsilon_0 \sin\theta}{\sqrt{2}}}{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{\upsilon_0 \sin\theta}{g}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{\upsilon_0 \sin\theta}{g}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)}$$

Από το $\frac{h_{max}}{2}$ σε h_{max} απαιτείται χρόνος:

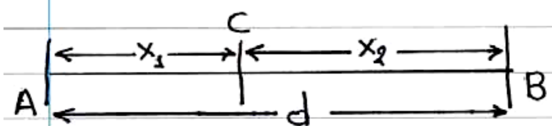
$$\upsilon_{h_{max}} = \upsilon_{h_{max}/2} - gt \Rightarrow 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\upsilon_0 \sin\theta - gt_2 \Rightarrow \boxed{t_2 = \frac{\upsilon_0 \sin\theta}{\sqrt{2}\, g}}$$

Επομένως το ποσοστό του χρόνου πάνω από το $h_{max}/2$ είναι

$$\frac{t_2}{t_{av}} = \frac{\cancel{\upsilon_0 \sin\theta}/(\sqrt{2}\cancel{g})}{\cancel{\upsilon_0 \sin\theta}/\cancel{g}} \Rightarrow \frac{t_2}{t_{av}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.7$$

8. Ένα τρένο κινείται μεταξύ 2 σταθμών. Επειδή η απόσταση μεταξύ των δυο σταθμών είναι μόλις 1km, το τρένο ποτέ δεν αποκτά τη μέγιστη ταχύτητά του. Ο μηχανικός ελαχιστοποιεί το χρόνο κίνησης μεταξύ των 2 σταθμών επιταχύνοντας αρχικά με ρυθμό α_1=0.100m/s^2 για χρόνο t_1 και κατόπιν επιβραδύνει με επιτάχυνση α_2=-0.500m/s^2 για χρόνο t_2. Να βρεθεί ο συνολικός χρόνος κίνησης t και ο χρόνος t_1.

Έστω ότι τρένο καλύπτει απόσταση x_1 επιταχυνόμενο με επιτάχυνση a_1 κινούμενο χρόνο t_1, και απόσταση x_2 επιβραδυνόμενο με επιτάχυνση a_2 κινούμενο χρόνο t_2



Α' Επιταχυνόμενη κίνηση (A→C)

$$v_f = \cancel{v_i}^{\,0} + a_1 t_1 \Rightarrow \boxed{v_f = a_1 t_1} \quad (1)$$

$$x_1 = \cancel{x_A}^{\,0} + \cancel{v_i}^{\,0} t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2} \quad (2)$$

Β' Επιβράδυνση (C→B)

$$\left.\begin{array}{l} v_f' = v_i' - a_2 t_2 \\ v_i' = v_f \overset{(1)}{=} a_1 t_1 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = a_1 t_1 - a_2 t_2 \Rightarrow a_1 t_1 = a_2 t_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t_2 = \frac{a_1}{a_2} t_1} \quad (3)$$

$$x_2 = x_c + v_i' t_2 - \frac{1}{2} a_2 t_2^2$$

Θεωρώ ότι $x_c = 0$ μιας και μετρώ το χρόνο t_2 από το C→B

$$\Rightarrow x_2 \overset{(1)}{=} a_1 t_1 t_2 - \frac{1}{2} a_2 t_2^2 \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow x_2 = a_1 t_1 \frac{a_1}{a_2} t_1 - \frac{1}{2} \cancel{a_2} \frac{a_1^2}{a_2^{\cancel{2}}} t_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{a_1^2}{a_2} t_1^2 - \frac{1}{2} \frac{a_1^2}{a_2} t_1^2 \Rightarrow$$

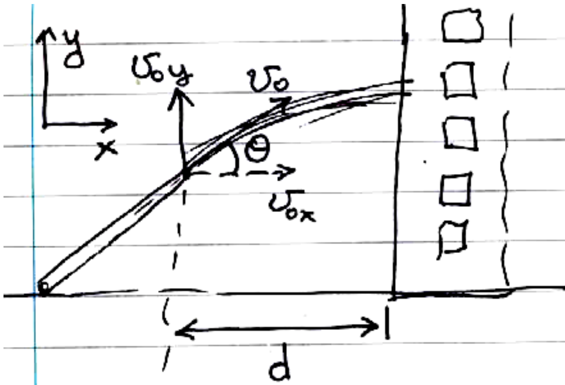
$$\Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{1}{2} \frac{a_1^2}{a_2} t_1^2} \quad (4)$$

Αλλά $d = x_1 + x_2 \overset{(2),(4)}{\Longrightarrow} d = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + \frac{1}{2} \frac{a_1^2}{a_2} t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2d}{\left(a_1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right)}}$

$$\Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000}{\left(0.1 + \frac{0.01}{0.5}\right)}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2000}{0.12}} \Rightarrow \boxed{t_1 = 129.1 \text{ sec}} \quad (5)$$

Από (3) $\Rightarrow t_2 = \frac{0.1}{0.5} 129.1 \Rightarrow \boxed{t_2 = 25.8 \text{sec}}$ $\boxed{t_{ολ} = t_1 + t_2 = 154.9}$

9. Ένας πυροσβέστης που βρίσκεται σε απόσταση d από ένα φλεγόμενο κτίριο στρέφει το νερό από πυροσβεστική σωλήνα σε γωνία θ_i πάνω από τον οριζόντια διεύθυνση. Το νερό φεύγει με ταχύτητα υ_i. Σε ποιό ύψος χτυπά το νερό το κτίριο;



Η οριζόντια μετατόπιση του νερού είναι:

$$\boxed{x_f = \upsilon_{0x} \cdot t = (\upsilon_0 \cos\theta)\, t} \quad (1)$$

Το κτίριο βρίσκεται σε απόσταση d επομένως $x_f = d$ και από (1) λύνοντας ως προς t έχουμε:

$$d = (\upsilon_0 \cos\theta)\, t \Rightarrow \boxed{t = \frac{d}{\upsilon_0 \cos\theta}} \quad (2)$$

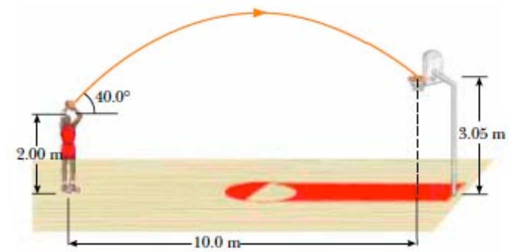
Κατά τη διάρκεια του χρόνου αυτού, το νερό κινείται επίσης κατακόρυφα και φθάνει σε ύψος y_f:

$$y_f = y_i + \upsilon_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow y_f = 0 + \upsilon_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} y_f = \cancel{\upsilon_0} \sin\theta \frac{d}{\cancel{\upsilon_0} \cos\theta} - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{\upsilon_0^2 \cos^2\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y_f = d \tan\theta - \frac{1}{2} g \frac{d^2}{\upsilon_0^2 \cos^2\theta}}$$

10. Ένας παίκτης του basketball ύψους 2m στέκεται απόσταση 10m από τη μπασκέτα. Αν ρίχνει τη μπάλα με γωνία 40^o ως προς την οριζόντια διεύθυνση ποια θα πρέπει να είναι η αρχική ταχύτητα που δίνει στην μπάλα ώστε αυτή να περάσει τ η στεφάνη χωρίς να χτυπήσει στο κατακόρυφο τμήμα της μπασκέτας; Το στεφάνι βρίσκεται σε ύψος 3.05m.



Η οριζόντια μετατόπιση της μπάλας είναι:

$$x_f = v_{0x}\cdot t \Rightarrow x_f = v_0 \cos\theta\cdot t \quad \Bigg\} \Rightarrow$$

Η μπασκέτα βρίσκεται σε απόσταση $x_f = 10m$

$$\Rightarrow t = \frac{x_f}{v_0\cos\theta} = \frac{10}{v_0\cos\theta} \qquad (1)$$

Το ύψος της μπάλας στο χρονικό διάστημα t θα είναι:

$$y_f = y_{μπας} - y_{παικτη} = 3.05 - 2.0 \Rightarrow y_f = 1.05 m$$

Θεωρώντας το ύψος στο οποίο βρίσκεται ο παίκτης σαν την αρχή των αξόνων ($y=0$) θα έχουμε:

$$y_f = \cancel{y_0}^{\,0} + v_{0y}\cdot t - \frac{1}{2}g t^2 \Rightarrow y_f = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

Αντικαθιστούμε το χρόνο t από την εξίσωση (1) οπότε:

$$y_f = \cancel{v_0}\sin\theta\cdot\frac{x_f}{\cancel{v_0}\cos\theta} - \frac{1}{2} g \frac{x_f^2}{v_0^2\cos^2\theta} = x_f \tan\theta - \frac{g}{2}\frac{x_f^2}{v_0^2\cos^2\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g}{2}\frac{x_f^2}{v_0^2\cos^2\theta} = x_f\tan\theta - y_f \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{g\, x_f^2}{2\cos^2\theta\,[x_f\tan\theta - y_f]}}$$

Αντικατάσταση δίνει: $v_0 = \sqrt{\dfrac{9.8\cdot 100}{2\cdot(0.77)^2(10*0.84 - 1.05)}} \Rightarrow$

$$v_0 = \sqrt{\frac{980}{8.7}} \Rightarrow \boxed{v_0 = 10.6 m/s}$$

11. Ένα αγόρι ρίχνει μια μπάλα σε μέγιστη οριζόντια απόσταση 40m όταν είναι σε οριζόντιο επίπεδο. Πόσο ψηλά μπορεί να ρίξει την ίδια μπάλα; Υποθέστε ότι ρίχνει τη μπάλα με την ίδια ταχύτητα και στις 2 περιπτώσεις.

Ξέρουμε ότι το βεληνεκές, R, ενός βλήματος δίνεται από

$$R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

Το βεληνεκές γίνεται μέγιστο όταν $\sin(2\theta) = 1 \Rightarrow 2\theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$

Για $\theta = 45^\circ \Rightarrow \quad R = \frac{v_0^2}{g} \quad (1)$

Ξέροντας την οριζόντια απόσταση μπορούμε να λύσουμε ως προς v_0 και να βρούμε την αρχική ταχύτητα:

$$(1) \Rightarrow v_0^2 = Rg \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{Rg}} \quad (2)$$

Αν το παιδί πετά τη μπάλα κατακόρυφα προς τα πάνω με την ίδια αρχική ταχύτητα, τότε η μπάλα θα φθάσει στο μέγιστο ύψος σε χρόνο:

$$v_f = v_0 - g t_{av} \Rightarrow 0 = v_0 - gt \Rightarrow \boxed{t = \frac{v_0}{g}} \quad (3)$$

Το μέγιστο ύψος στο οποίο φθάνει θα είναι:

$$h_{max} = h_0 + v_0 \cdot t_{av} - \frac{g}{2} t_{av}^2 \overset{(3)}{\Rightarrow} h_{max} = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{\cancel{g}}{2} \frac{v_0^2}{g^{\cancel{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow \quad h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

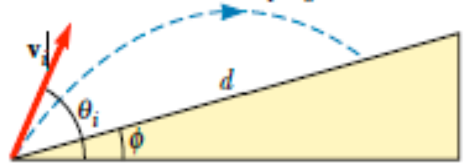
Αντικαθιστώντας την (2) θα πάρουμε: $h_{max} = \frac{R\cancel{g}}{2\cancel{g}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{h_{max} = \frac{R}{2}}$$

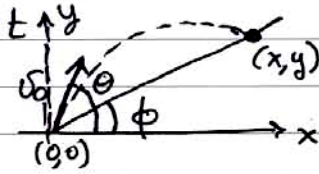
δηλαδή το μέγιστο ύψος είναι το μισό του βεληνεκούς όταν $\theta = 45^\circ$.

Αντικαθιστώντας $R = 40.0m$ έχουμε $\boxed{h_{max} = 20m}$

12. Ένα βλήμα βάλεται με ταχύτητα υ_i και γωνία θ_i ως προς τον ορίζοντα πρός ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ ($\theta_i>\varphi$) όπως στο σχήμα. (α) Δείξτε ότι το βλήμα κτυπά στο κεκλιμένο επίπεδο σε απόσταση d που δίνεται από τη σχέση $d=\dfrac{2\upsilon_i^2\cos\theta_i\sin(\theta_i-\varphi)}{g\cos^2\varphi}$. (β) Για ποια τιμή της γωνίας θ, η απόσταση d είναι μέγιστη και ποια είναι η μέγιστη αυτή τιμή της d;



$y=(\upsilon_0\sin\Theta)t-\frac{1}{2}gt^2$ και $x=(\upsilon_0\cos\Theta)t$



Οι παραπάνω δυο εξισώσεις δίνουν την οριζόντια και κατακόρυφο συνιστώσα του διανύσματος θέσης στους άξονες x και y

Το βλήμα χτυπά στο κεκλιμένο επίπεδο όταν $\tan\phi=\frac{y}{x}\Rightarrow$

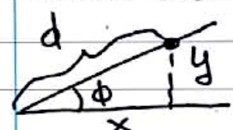
$$\Rightarrow \tan\phi=\frac{(\upsilon_0\sin\Theta)\cancel{t}-\frac{1}{2}gt^{\cancel{2}}}{\upsilon_0\cos\Theta\,\cancel{t}}\Rightarrow \upsilon_0\sin\Theta-\frac{1}{2}gt=\upsilon_0\cos\Theta\tan\phi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{-2\upsilon_0\cos\Theta\tan\phi+2\upsilon_0\sin\Theta}{g}=\frac{2\upsilon_0}{g}\left(\sin\Theta-\cos\Theta\tan\phi\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{2\upsilon_0}{g}\left(\sin\Theta-\cos\Theta\frac{\sin\phi}{\cos\phi}\right)=\frac{2\upsilon_0}{g\cos\phi}\left(\overbrace{\sin\Theta\cos\phi-\cos\Theta\sin\phi}^{\sin(\Theta-\phi)}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t=\frac{2\upsilon_0}{g\cos\phi}\sin(\Theta-\phi)}\quad (A)$$

Όταν το βλήμα χτυπήσει στο κεκλιμένο επίπεδο, η απόσταση πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο είναι:



$$d=\frac{x}{\cos\phi}\Rightarrow d=\frac{\upsilon_0\cos\Theta\, t}{\cos\phi}\overset{(A)}{\Longrightarrow}\boxed{d=\frac{2\upsilon_0^2\cos\Theta\sin(\Theta-\phi)}{g\cos^2\phi}}$$

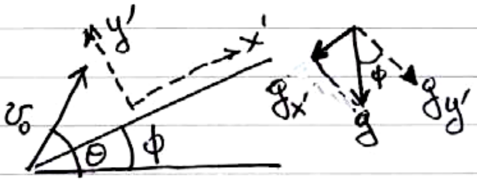
Σημείωση: Αν σας δίνονταν η γωνία φ θα μπορούσατε να πάρετε την παράγωγο ως προς Θ για να δείξετε ότι το βεληνεκές είναι μέγιστο όταν $\Theta=\frac{90^\circ+\phi}{2}$

(δείτε παρακάτω)

→ (δεύτερη λύση)

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε άξονες x' κ y' παράλληλο κ κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο.

Στην περίπτωση αυτή αναλύουμε το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας στους 2 νέους άξονες



$$g_{x'} = -g\sin\phi$$
$$g_{y'} = -g\cos\phi$$

Η αρχική ταχύτητα στη y'-διεύθυνση είναι: $v_{0y} = v_0 \sin(\theta-\phi)$

και η μετατόπιση y' είναι: $y' = \underbrace{y_0}_{0} + v_{0y}t - \frac{1}{2}g\cos\phi\, t^2$

Όταν χτυπά στο κεκλιμένο επίπεδο $y'=0$

Επομένως ο χρόνος πτήσης είναι: $0 = v_0\sin(\theta-\phi)t - \frac{1}{2}g\cos\phi\, t^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{t = \frac{2v_0\sin(\theta-\phi)}{g\cos\phi}} \quad (1)$$

Η x' θέση του θα είναι:

$$x' = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow x' = v_0\cos(\theta-\phi)t - \frac{1}{2}g\sin\phi\, t^2 \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow x' = v_0\cos(\theta-\phi)\frac{2v_0\sin(\theta-\phi)}{g\cos\phi} - \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{g}\frac{^{2}\cancel{4}v_0^2\sin^2(\theta-\phi)}{g^{\cancel{2}}\cos^2\phi}\sin\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' = \frac{2v_0^2}{g}\sin(\theta-\phi)\left[\frac{\cos(\theta-\phi)}{\cos\phi} - \frac{\sin(\theta-\phi)\sin\phi}{\cos^2\phi}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' = \frac{2v_0^2}{g}\frac{\sin(\theta-\phi)}{\cos^2\phi}\left(\cos(\theta-\phi)\cos\phi - \sin(\theta-\phi)\sin\phi\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x' = \frac{2v_0^2}{g}\frac{\sin(\theta-\phi)}{\cos^2\phi}\cos(\theta-\cancel{\phi}+\cancel{\phi})}$$

συνέχεια $\longrightarrow$

(β) Για να βρούμε τη γωνία θ για την οποία έχουμε το μέγιστο βεληνεκές παίρνουμε τη παράγωγο της απόστασης x' ως προς θ και για μέγιστο θα πρέπει να είναι μηδέν:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{2v_0^2}{g}\frac{\cos\theta\sin(\theta-\phi)}{\cos^2\phi}\right)=0 \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left(\cos\theta\sin(\theta-\phi)\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sin\theta\sin(\theta-\phi)+\cos\theta\cos(\theta-\phi)=0 \Rightarrow \cos\left((\theta-\phi)+\theta\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(2\theta-\phi)=0 \Rightarrow 2\theta-\phi=90^\circ \Rightarrow \boxed{\theta=\frac{90^\circ+\phi}{2}}$$