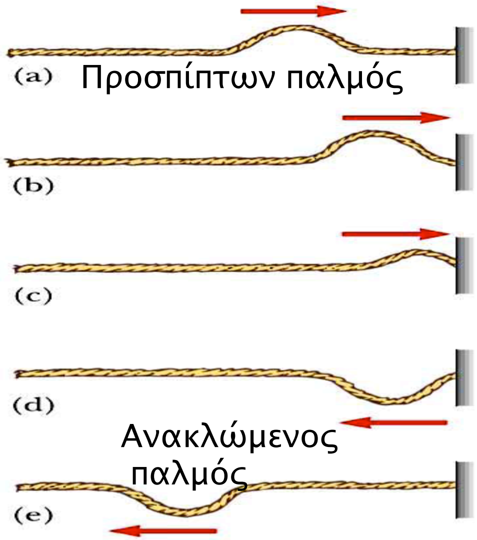
ΚΥΜΑΤΑ – Ανάκλαση - Μετάδοση

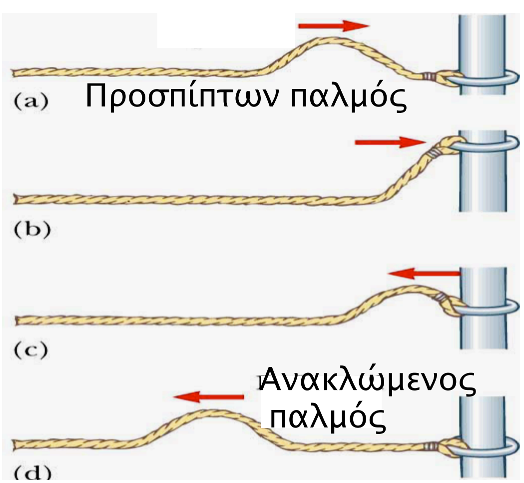
- Παλμός πάνω σε χορδή: Ένα άκρο της σταθερό (δεμένο)



Ο παλμός ασκεί μια δύναμη προς τα πάνω στον τοίχο ο οποίος ασκεί μια δύναμη προς τα κάτω στην χορδή

Αποτέλεσμα: Ο παλμός αναστρέφεται

- Παλμός πάνω σε χορδή: Το άκρο της δεν είναι σταθερό (π.χ. αβαρής θηλιά)

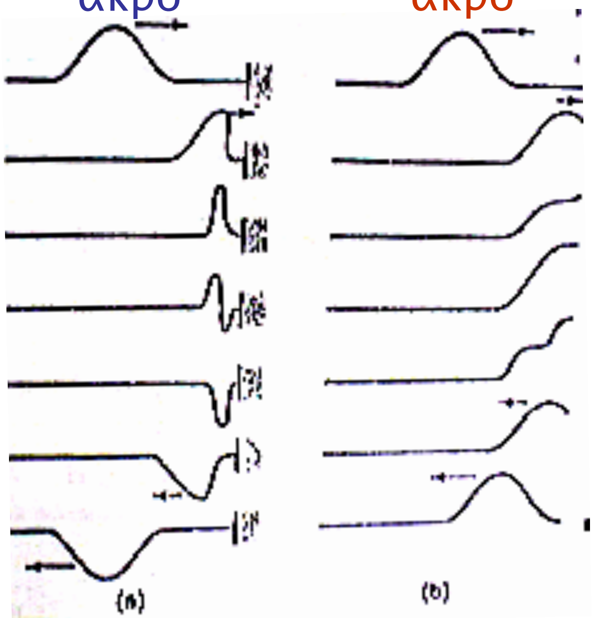


Φανταστείτε μια θηλιά σε ένα στύλο να μπορεί να ανεβοκατεβαίνει ελεύθερα.

Αποτέλεσμα: Ο παλμός δεν αναστρέφεται

Κύματα - Υπέρθεση

σταθερό άκρο   ελεύθερο άκρο



Για να καταλάβουμε την ανάκλαση και μετάδοση, εισάγουμε την έννοια της υπέρθεσης των κυμάτων

Παράδειγμα: Δύο ημιτονοειδή κύματα οδεύουν κατά την ίδια διεύθυνση αλλά με διαφορετική φάση

$$y_1(x,t) = A\sin\left(kx - \omega t\right)$$

$$y_2(x,t) = A\sin\left(kx - \omega t - \varphi\right)$$

Ποια είναι η υπέρθεση των κυμάτων: $y = y_1 + y_2$

$$\left.\begin{aligned} y(x,t) &= A\left[\sin\left(kx - \omega\, t\right) + \sin\left(kx - \omega\, t - \varphi\right)\right] \\ \sin\alpha + \sin b &= 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} & a = kx - \omega t, \quad b = kx - \omega t - \varphi \\ & a + b = 2(kx - \omega t) - \varphi \\ & a - b = \varphi \end{aligned}$$

Αρμονικό πλάτος

$$2A\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Υπέρθεση: $\boxed{y(x,t) = 2A\cos\frac{\varphi}{2}\sin\left(kx - \omega t - \frac{\varphi}{2}\right)}$

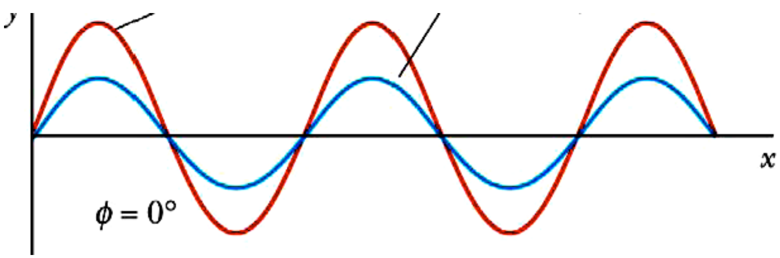
Υπέρθεση – Συμβολή

Συμβολή: $$\boxed{y(x,t) = 2A\cos\frac{\varphi}{2}\sin\left(kx - \omega t - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

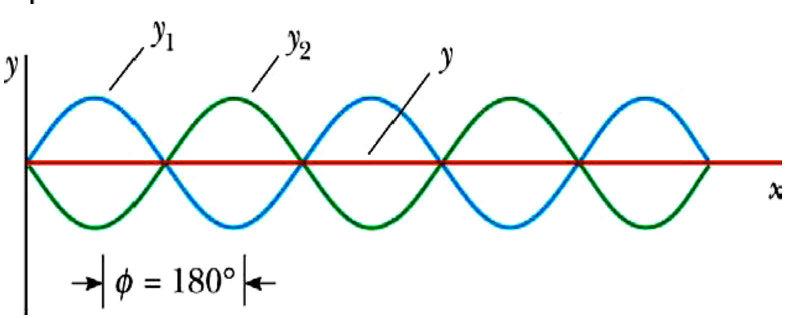
- Ανάλογα με τη τιμή της διαφοράς φάσης, φ, μπορούμε να έχουμε ενισχυτική ή καταστροφική συμβολή

- Αν $\varphi = \pi,\ 3\pi,\ \cdots,(2n+1)\pi \Rightarrow 2A\cos\frac{\varphi}{2} = 0$ καταστροφική

  $\varphi = 0,\ 2\pi,\ \cdots,2n\pi \Rightarrow 2A\cos\frac{\varphi}{2} = \pm 2A$ ενισχυτική



$$\varphi = 0,\ 2\pi,\ \cdots,2n\pi \Rightarrow 2A\cos\frac{\varphi}{2} = \pm 2A$$

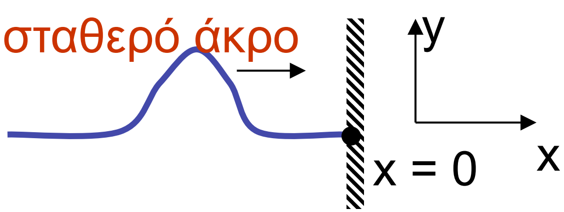


$$\varphi = \pi,\ 3\pi,\ \cdots,(2n+1)\pi \Rightarrow 2A\cos\frac{\varphi}{2} = 0$$

Υπέρθεση κυμάτων

- **Το Τρικ της φυσικής:** (αρχή υπέρθεσης) Όλες οι λύσεις σ' αυτά τα προβλήματα είναι υπερθέσεις των λύσεων

Θεωρήστε μια λύση στο ακόλουθο πρόβλημα είναι η:



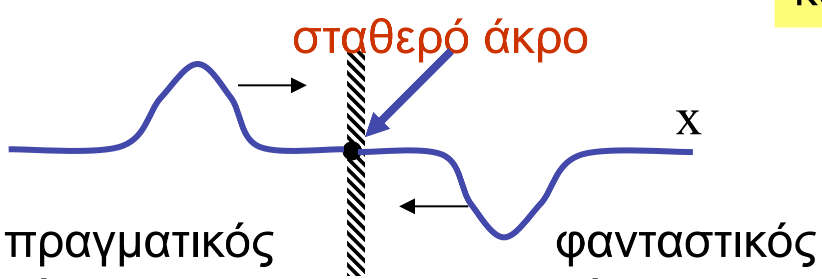
$$y(x,t) = f(x+\mathrm{v}t) + g(x-\mathrm{v}t)$$

Όλοι ξέρουμε ότι στη θέση x=0, y(0,t) = 0

Άρα y(0,t) = 0 ⇐ **Συνοριακές συνθήκες**

$$y(0,t) = f(\mathrm{v}t) + g(-\mathrm{v}t) = 0 \Rightarrow$$ *f* είναι το ανάστροφο της g

διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις και ανάστροφα



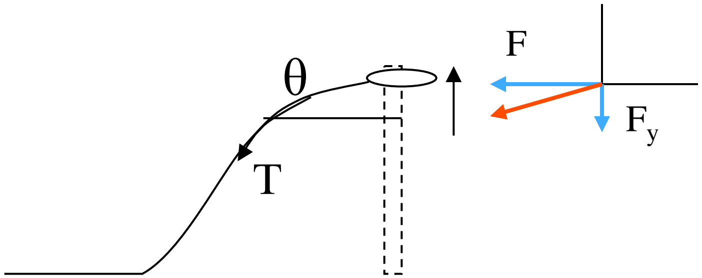
Το τρικ είναι να χρησιμοποιηθούν δύο παλμοί, ένας πραγματικός και ένας φανταστικός που να ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες

Ανάκλαση σε ελεύθερο άκρο

Η συνοριακή συνθήκη στην περίπτωση αυτή είναι: $F_y = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad x = 0$

Από τη στιγμή που τη θηλιά έχει θεωρηθεί αμελητέας μάζας, m=0

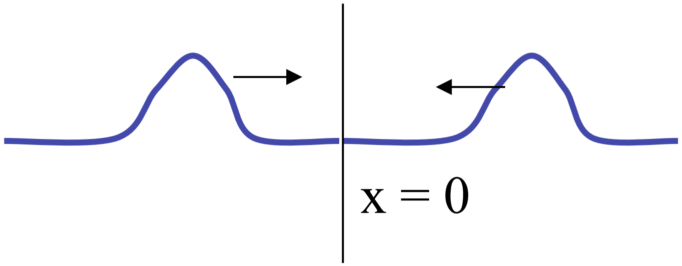
$$F_y = -F\sin\theta \approx F\tan\theta = -\mathrm{T}\frac{\partial y}{\partial x}$$



Επομένως:

$$-\mathrm{T}\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

Για ελεύθερο άκρο



Αν η λύση είναι της μορφής:

$$y(x,t) = f(x + \mathrm{v}t) + g(x - \mathrm{v}t)$$

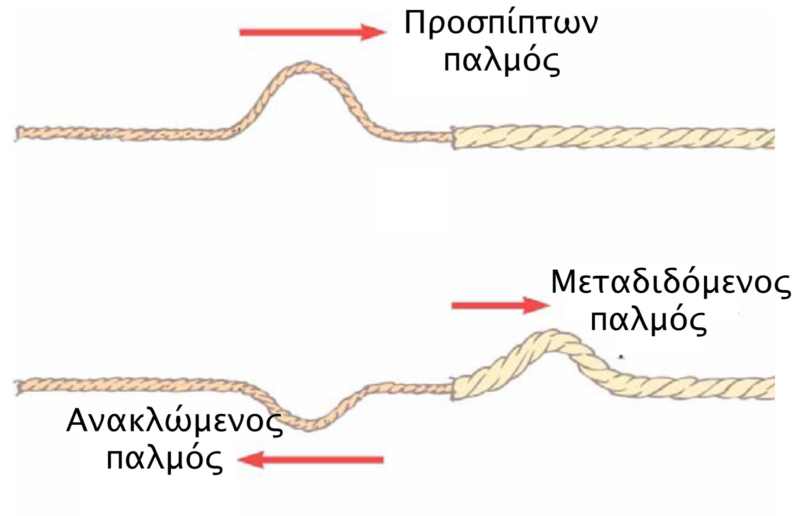
τότε οι κλίσεις είναι ίσες και αντίθετες στο x=0

$$\left.\frac{\partial f(x+\mathrm{v}t)}{\partial x}\right|_{x=0} + \left.\frac{\partial g(x-\mathrm{v}t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

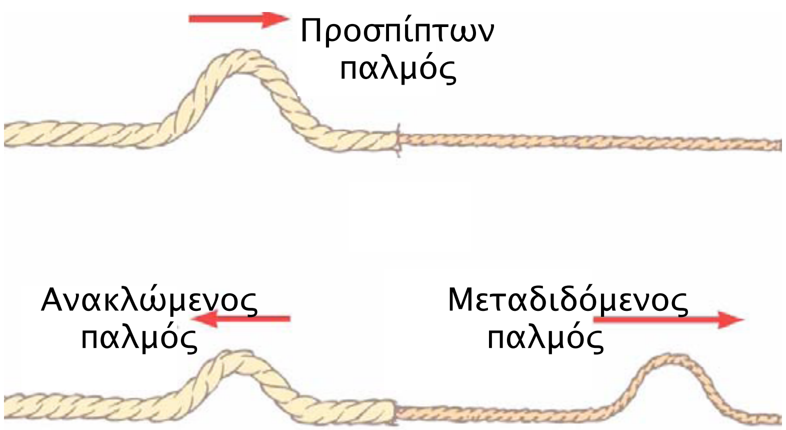
Μερική μετάδοση

Όταν το όριο είναι ενδιάμεσο των δύο προηγούμενων καταστάσεων τότε ένα μέρος του παλμού μεταδίδεται στο επόμενο μέσο ενώ ένα τμήμα του παλμού ανακλάται

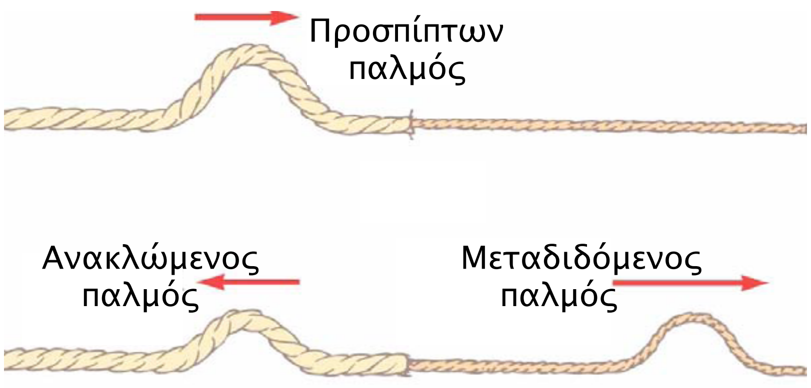
Στην περίπτωση αυτή ένα μέρος της ενέργειας περνά το όριο.



Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα βαρύτερο σχοινί είναι συνδεδεμένο σε ελαφρύτερο τότε το ανακλώμενο τμήμα δεν αναστρέφεται



Μερική μετάδοση



$y_{\mathrm{i}} = A_{\mathrm{i}} \cos\left(k_{\mathrm{i}} x - \omega_{\mathrm{i}} t\right)$ Προσπίπτον κύμα κινείται δεξιά

$y_{\mathrm{r}} = A_{\mathrm{r}} \cos\left(k_{\mathrm{r}} x + \omega_{\mathrm{r}} t\right)$ Ανακλώμενο κύμα κινείται αριστερά

$y_{\mathrm{T}} = A_{\mathrm{T}} \cos\left(k_{\mathrm{T}} x - \omega_{\mathrm{T}} t\right)$ Διαδιδόμενο κύμα κινείται δεξιά

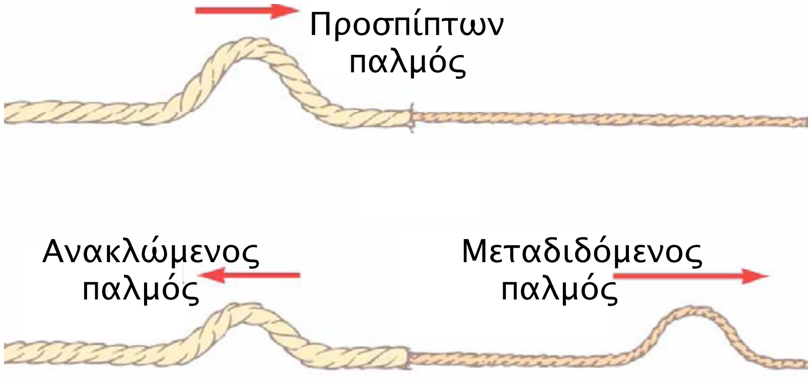
Δεξί τέλος αριστερού σχοινιού $y_{\mathrm{j}} = y_{\mathrm{i}}(0,t) + y_{\mathrm{r}}(0,t)$

Αριστερό τέλος δεξιού σχοινιού $y_{\mathrm{j}} = y_{\mathrm{T}}(0,t)$

$$A_{\mathrm{i}} \cos\left(-\omega_{\mathrm{i}} t\right) + A_{\mathrm{r}} \cos\left(\omega_{\mathrm{r}} t\right) = A_{\mathrm{T}} \cos\left(-\omega_{\mathrm{T}} t\right)$$

$\omega_{\mathrm{i}} = \omega_{\mathrm{r}} = \omega_{\mathrm{T}} = \omega$ $A_i + A_r = A_{\mathrm{T}}$

Μερική μετάδοση



Δεξί τέλος αριστερού σχοινιού $$\frac{\partial y_j}{\partial x} = \frac{\partial y_i}{\partial x} + \frac{\partial y_r}{\partial x}$$

Αριστερό τέλος δεξιού σχοινιού $$\frac{\partial y_j}{\partial x} = \frac{\partial y_T}{\partial x}$$

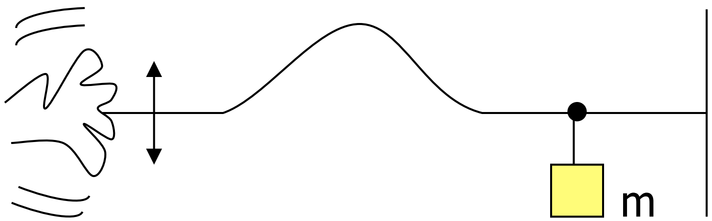
$$-k_i A_i \sin(-\omega t) - k_i A_r \sin(\omega t) = -k_T A_T \sin(-\omega t)$$

$$k_i A_i - k_i A_r = k_T A_T \qquad A_i + A_r = A_T$$

$$A_T = \frac{2k_i}{k_i + k_T} A_i \qquad A_r = \frac{k_i - k_T}{k_i + k_T} A_i$$

Ενέργεια κυμάτων

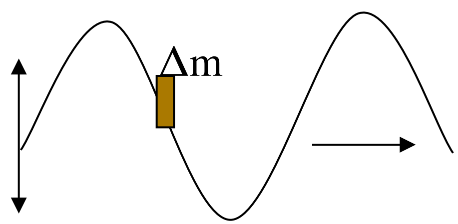
Ενέργεια διαδίδεται σε ένα οδεύον κύμα



Κινώντας το χέρι μου θα κάνω τη μάζα m να κινηθεί και επομένως η ενέργεια μεταδίδεται

Θεωρήστε ένα τμήμα μιας χορδής:

Αυτό το μικρό κομμάτι είναι αρμονικός ταλαντωτής



$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta x}$$ γραμμική πυκνότητα

$$\left.\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{2}ky^2 \\ \omega^2 &= k/m \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta U = \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 \Rightarrow \Delta U = \frac{1}{2}\mu\omega^2\Delta x y^2$$

για $\Delta x \to 0$ $\quad dU = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y^2 dx$ $\quad$ αλλά $\quad y^2 = \mathrm{A}^2\sin^2(kx-\omega t)$

$$dU = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\sin^2(kx-\omega\, t)dx \Rightarrow dU = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\sin^2(kx)dx$$

για οποιοδήποτε χρονική στιγμή

Ενέργεια κυμάτων

Η ολική δυναμική ενέργεια σε ένα τμήμα χορδής ίσο με ένα μήκος κύματος είναι:

$$U_\lambda = \int_0^\lambda dU = \int_0^\lambda \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \sin^2(kx)\,dx = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \int_0^\lambda \sin^2(kx)\,dx \Rightarrow$$

$$U_\lambda = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2kx}{4k}\right]_0^\lambda = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\sin 2\frac{2\pi}{\lambda}\lambda}{4k}\right) \Rightarrow$$

$$U_\lambda = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \left(\frac{\lambda}{2}\right) \Rightarrow U_\lambda = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

Ολική δυναμική ενέργεια σε ένα μήκος κύματος

Ισοδύναμα η κινητική ενέργεια σε ένα μήκος κύματος θα είναι:

$$\mathrm{K}_\lambda = \int_0^\lambda d\mathrm{K} = \int_0^\lambda \frac{1}{2}\mu\underbrace{\omega^2 A^2 \cos^2(kx)}_{v^2}\,dx = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \int_0^\lambda \cos^2(kx)\,dx \Rightarrow$$

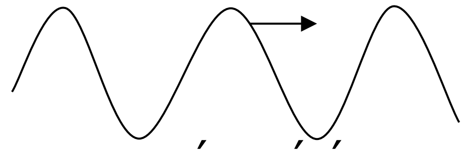
$$K_\lambda = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2kx}{4k}\right]_0^\lambda \Rightarrow K_\lambda = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

Ολική κινητική ενέργεια σε ένα μήκος κύματος

Ενέργεια κυμάτων

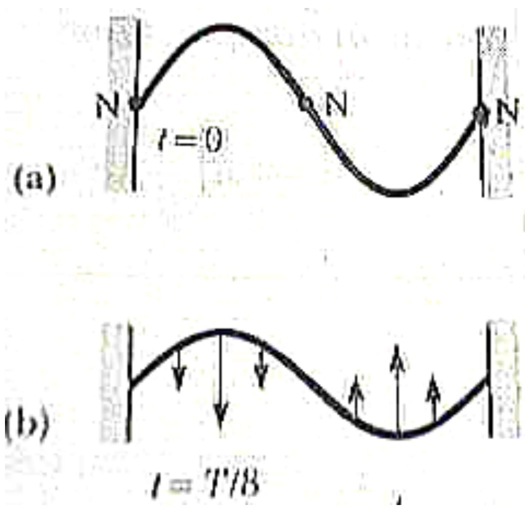
Επομένως η συνολική ενέργεια σε ένα μήκος κύματος θα είναι:

$$E_\lambda = U_\lambda + \mathrm{K}_\lambda = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2\lambda$$



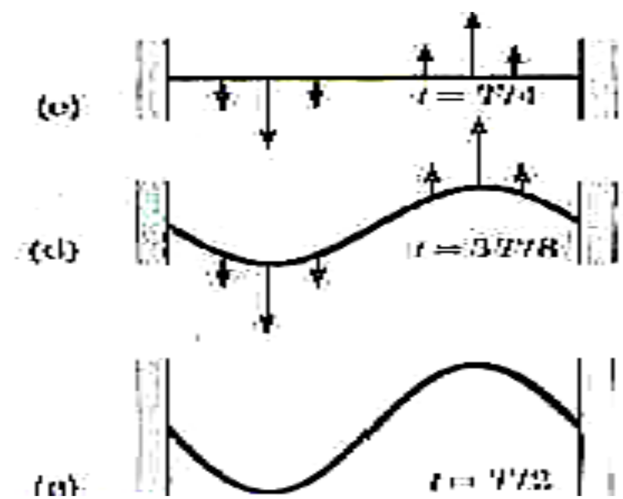
- Καθώς το κύμα οδεύει E_λ ενέργεια περνά από ένα σημείο της χορδής στην διάρκεια μιας περιόδου.

- Στα στάσιμα κύματα δεν υπάρχει μετάδοση κύματος και επομένως δεν υπάρχει μετάδοση ενέργειας. Η ενέργεια που έχει αποθηκευθεί είναι η ενέργεια του αρχικού κύματος που προξένησε τα στάσιμα κύματα. Η ενέργεια αυτή συνεχώς μεταβάλλεται από δυναμική σε κινητική.



t=0
U=E
K=0

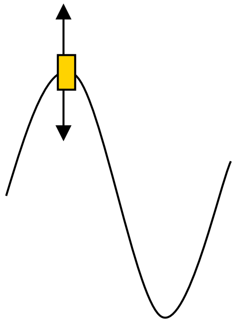
t=T/8
U=1/2E
K=1/2E



t=T/4
U=0
K=E

Ισχύς – Ένταση κυμάτων

Η ισχύς ορίζεται από τη σχέση $Power = \dfrac{\mathrm{E}_\lambda}{\Delta t} = \dfrac{E_\lambda}{\mathrm{T}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mu A^2\omega^2\lambda}{\mathrm{T}} \Rightarrow$



$$P = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2\upsilon$$

Η χορδή στα αριστερά καταναλώνει έργο στη χορδή στα δεξιά

$$P = \vec{F}\cdot\vec{\upsilon} = F_y\upsilon_y = F_y\frac{\partial y}{\partial t} = -T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t} \Rightarrow P \propto A, f$$

Ένταση ενός κύματος είναι η μέση ισχύς που διαδίδεται με το κύμα διαμέσου ενός τετραγωνικού μέτρου το οποίο είναι κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος

$$I = \frac{\bar{P}}{E\mu\beta\alpha\delta o}$$

Για κύματα που κινούνται ισοτροπικά (ίδια προς όλες τις κατευθύνσεις) σε 3 διευθύνσεις, η ισχύς διανέμεται ίδια ως προς το εμβαδό της σφαίρας που περικλείει την κυματική πηγή

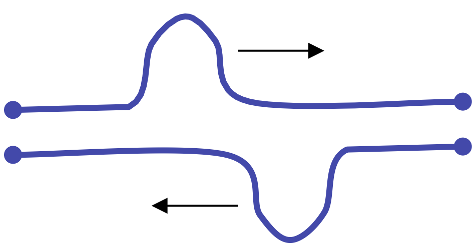
$$I = \bar{P}/4\pi r^2$$

Ένταση μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα του τετραγώνου της ακτίνας

Στάσιμα κύματα

Θεωρήστε μια χορδή, μήκους L με τα άκρα της ακλόνητα.

Χτυπήσετε την ! Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα θα έχετε προσπίπτοντα κύματα και ανακλώμενα κύματα.



Τα κύματα αυτά συμβάλλουν.

$$y(x,t) = A\left[\cos\left(kx - \omega t + \varphi\right) + \cos\left(kx + \omega t + \varphi + \pi\right)\right]$$

αντίθετη κατεύθυνση αναστροφή

Συνοριακές συνθήκες: Ακλόνητα άκρα $\boxed{y(0,t) = y(L,t) = 0}$

$$y(0,t) = A\left[\cos\left(-\omega t + \varphi\right) + \cos\left(\omega t + \varphi + \pi\right)\right] = 0$$

$$y(0,t) = A\left[\cos\left(-\omega t + \varphi\right) - \cos\left(\omega t + \varphi\right)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0$$

Επομένως $y(x,t) = A\left[\cos\left(kx - \omega t\right) - \cos\left(kx + \omega t\right)\right]$

Στάσιμα κύματα

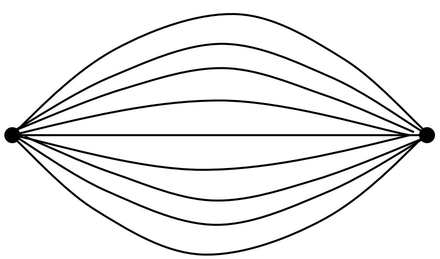
Μπορούμε να γράψουμε την τελευταία σχέση καλύτερα:

$$y(x,t) = A\left[\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t)\right]$$

αλλά $\cos a - \cos b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)$ $\quad a = kx - \omega t$, $b = kx + \omega t$

Επομένως η πρώτη εξίσωση γίνεται $\boxed{y(x,t) = 2A\sin kx \sin \omega t}$

Το κύμα αυτό δεν διαδίδεται αλλά στέκεται!!!



Η χορδή ταλαντώνεται πάνω και κάτω.
Το πλάτος ταλάντωσης κάθε σημείου είναι $2A\sin kx$

Μέγιστο πλάτος είναι 2Α και αυτό για ορισμένα σημεία

Όταν $\sin kx = 0$ έχουμε δεσμό - το πλάτος ταλάντωσης είναι 0

Όταν $\sin kx = \pm 1$ έχουμε αντι-δεσμό - το πλάτος ταλάντωσης είναι Α

Δεσμούς έχουμε για $kx = n\pi$, $n = 0,1,2...$

Αντιδεσμούς έχουμε για $kx = (2n+1)\pi/2$, $n = 0,1,2,\ldots$

Στάσιμα κύματα

$$\boxed{y(x,t) = 2A\sin kx \sin\omega t}$$

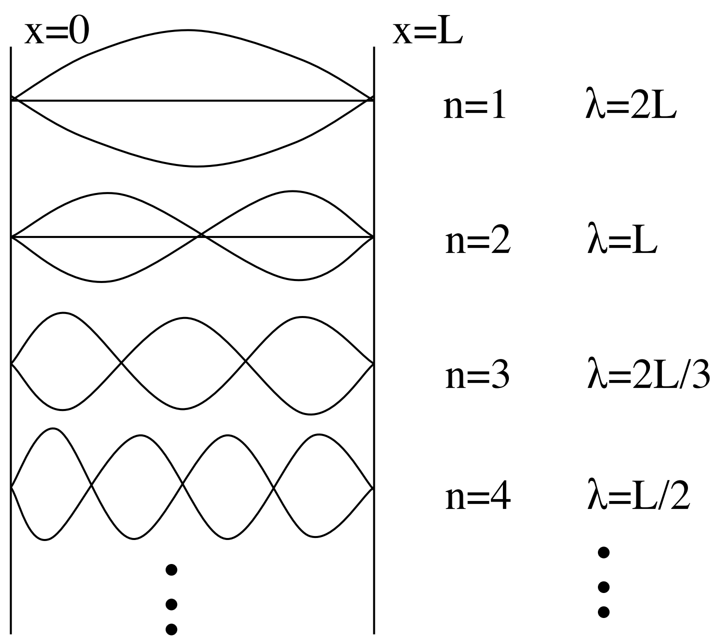
Στην περίπτωση της χορδής οι συνοριακές συνθήκες είναι δύο μια και τα δύο άκρα της είναι ακλόνητα. Είπαμε ότι $y(L,t) = 0$

Αντικαθιστώντας στην κυματοσυνάρτηση των στάσιμων κυμάτων έχουμε:

$$y(L,t) = 2A\sin kL \sin\omega t = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}L = n\pi$$

Άρα υπάρχουν συνθήκες για το σχηματισμό στάσιμων κυμάτων: $\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$

Επομένως μόνο συγκεκριμένα μήκη κύματος επιτρέπονται



Παράδειγμα στάσιμου κύματος

Χορδή με ακλόνητα σημεία. Χορδή κιθάρας

$$\frac{\omega}{k} = \mathrm{v} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Μια χορδή έχει συχνότητες: $f_n = \frac{\mathrm{v}}{\lambda_n} = \mathrm{v}\left(\frac{n}{2L}\right) = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$

Η θεμελιώδης συχνότητα είναι $n = 1 \quad f_1 = \frac{\mathrm{v}}{2L}$

Οι υπόλοιπες αρμονικές n>1

$\mathrm{T} \nearrow \qquad f \nearrow$

$\mu \nearrow \qquad f \searrow$

Θεώρημα Fourier – Σύνθετα κύματα

- Κάθε περιοδική κυματομορφή μπορεί να αναλυθεί σαν συμβολή πολλών ημιτονοειδών και συνημιτονοειδών κυματοσυναρτήσεων που αποτελούν αρμονική σειρά

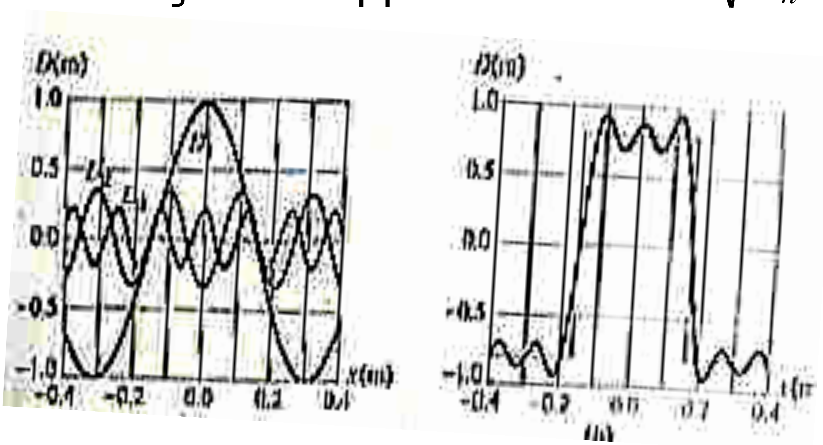
Οι συχνότητές τους είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους συχνότητας

$$y(t) = \sum_n \left(A_n \sin 2\pi f_n t + B_n \cos 2\pi f_n t\right)$$

όπου $f_n = nf_1$ και f_1= θεμελιώδης συχνότητα

Οι συντελεστές A_n και B_n παριστάνουν τα πλάτη των διαφόρων κυμάτων

Το πλάτος του n-αρμονικού είναι $\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$



Ανάλυση τετραγωνικής κυματομορφής σε σειρά από ημιτονοειδείς αρμονικές με συχνότητες περιττά πολ/σια της θεμελιώδους συχνότητας

Διακροτήματα

Συμβολή δύο αρμονικών κυμάτων με διαφορετικές συχνότητες διαδιδόμενα στην ίδια διεύθυνση

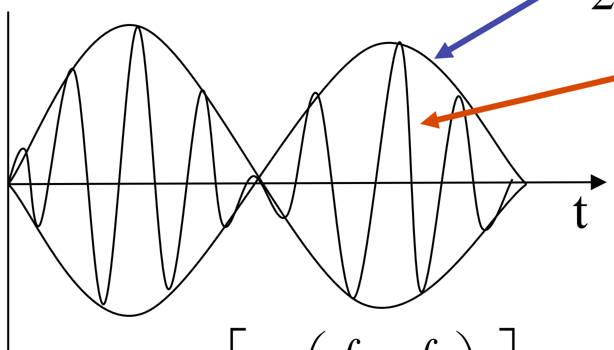
Εξετάζουμε ένα σημείο x,

$$y_1(t) = A\cos 2\pi f_1 t$$

$$y_2(t) = A\cos 2\pi f_2 t$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos\left[2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right]\cos\left[2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t\right]$$

Έχει δύο συχνότητες: $\frac{f_1 - f_2}{2}$ μικρή αργή $\frac{f_1 + f_2}{2}$ μεγάλη γρήγορη



Περιοδική μεταβολή στην ένταση του κύματος με συχνότητα $(f_1 + f_2)/2$

Όταν $\cos\left[2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right] = \pm 1$ τότε υπάρχει μέγιστο - **Διακρότημα**

Υπάρχουν 2 μέγιστα/περίοδο Διακροτήματα/sec $f_\delta = |f_1 - f_2|$