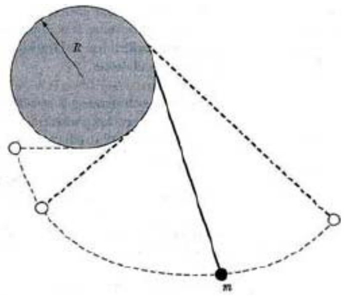
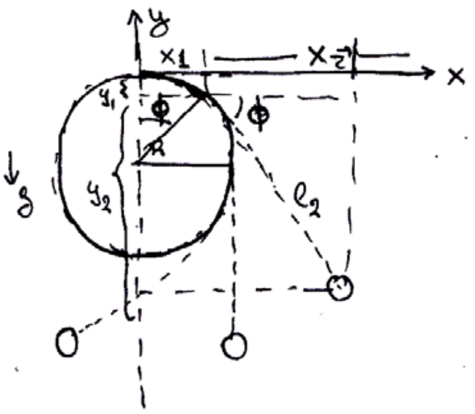
ΦΥΣ 133 – Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Ένα εκκρεμές αποτελείται από μια μάζα m η οποία εξαρτάται από ένα αβαρές νήμα σταθερού μήκους *l*. Το άλλο άκρο του νήματος είναι εξαρτημένο από το υψηλότερο σημείο ενός κατακόρυφου δίσκου ακτίνας R (R < *l*/π). Προσδιορίστε ένα κατάλληλο σύστημα ανεξάρτητων συντεταγμένων και προσδιορίστε τη Lagrangian του συστήματος. Βρείτε κατόπιν τις εξισώσεις κίνησης του εκκρεμούς. Ξαναγράψτε τις εξισώσεις κίνησης σε μορφή απλού αρμονικού ταλαντωτή για μικρές ταλαντώσεις και βρείτε τη συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων.





Χρησιμοποιούμε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\ell_1 = R\phi$$
$$\ell_2 = \ell - \ell_1 = \ell - R\phi$$
$$x_1 = R\sin\phi$$
$$y_1 = R - R\cos\phi = R(1-\cos\phi)$$
$$x_2 = \ell_2\cos\phi$$
$$y_2 = -\ell_2\sin\phi$$

$$\left.\begin{array}{l} x_m = x_1 + x_2 \\ y_m = y_1 + y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_m = R\sin\phi + \ell_2\cos\phi \\ y_m = -\left(R(1-\cos\phi) + \ell_2\sin\phi\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_m = R\sin\phi + (\ell - R\phi)\cos\phi \\ y_m = -\left(R(1-\cos\phi) + (\ell - R\phi)\sin\phi\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{x}_m = \cancel{R\dot\phi\cos\phi} - (\ell - R\phi)\dot\phi\sin\phi - \cancel{R\dot\phi\cos\phi} \\ \dot{y}_m = \cancel{R\dot\phi\sin\phi} + (\ell - R\phi)\dot\phi\cos\phi - \cancel{R\dot\phi\sin\phi} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{x}_m = -(\ell - R\phi)\dot\phi\sin\phi \\ \dot{y}_m = (\ell - R\phi)\dot\phi\cos\phi \end{array}\right\} \Rightarrow \upsilon^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\ell - R\phi)^2\dot\phi^2\sin^2\phi + (\ell - R\phi)^2\dot\phi^2\cos^2\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon^2 = (\ell - R\phi)^2\dot\phi^2}$$

Επομένως $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \Rightarrow \boxed{T = \frac{m}{2}(\ell - R\phi)^2\dot\phi^2}$ (1)

Η δυναμική ενέργεια θα είναι: $U = -mg\,y_m = -mg\left[R(1-\cos\phi) + \ell_2\sin\phi\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{U = -mg\left[R(1-\cos\phi) + (\ell - R\phi)\sin\phi\right]}$$

'−' πρόσημο γιατί πήρα θετική τη φορά προς τα πάνω

Επομένως $\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\ell - R\phi)^2\dot\phi^2 + mg\left[R(1-\cos\phi) + (\ell - R\phi)\sin\phi\right]$

Εχουμε επομένως ένα βαθμό ελευθερίας, τη γωνία ϕ

(β) Η εξίσωση κίνησης θα βρεθεί από $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\phi}\right)-\frac{\partial L}{\partial \phi}=0$.

$$L=\frac{m}{2}\left[\ell^2+R^2\phi^2-2\ell R\phi\right]\dot\phi^2+mg\left[R-R\cos\phi+\ell\sin\phi-R\phi\sin\phi\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi}=\frac{m}{\cancel{2}}\left[\cancel{2}R^2\phi-\cancel{2}\ell R\right]\dot\phi^2+mg\left[\cancel{R\sin\phi}+\ell\cos\phi-\cancel{R\sin\phi}-R\phi\cos\phi\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \phi}=mR\left[R\phi-\ell\right]\dot\phi^2+mg\left[\ell-R\phi\right]\cos\phi=mR\left[R\phi-\ell\right]\dot\phi^2-mg\left[R\phi-\ell\right]\cos\phi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\phi}=m\left[\ell^2+R^2\phi^2-2\ell R\phi\right]\dot\phi \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\phi}\right)=m\left[2R^2\phi\dot\phi-2\ell R\dot\phi\right]\dot\phi+$$

$$+m\left[\ell^2+R^2\phi^2-2\ell R\phi\right]\ddot\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\phi}\right)=2mR\left[R\phi-\ell\right]\dot\phi^2+m\left[R\phi-\ell\right]^2\ddot\phi$$

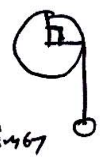
Επομένως η εξίσωση κίνησης θα είναι:

$$2\cancel{m}R\cancel{\left[R\phi-\ell\right]}\dot\phi^2+\cancel{m}\left[R\phi-\ell\right]^{\cancel{2}}\ddot\phi-\cancel{m}R\cancel{\left[R\phi-\ell\right]}\dot\phi^2+\cancel{m}g\cos\phi\cancel{\left[R\phi-\ell\right]}=0$$

$$\Rightarrow \left[R\phi-\ell\right]\ddot\phi+R\dot\phi^2+g\cos\phi=0 \Rightarrow \left[\ell-R\phi\right]\ddot\phi-R\dot\phi^2-g\cos\phi=0$$

(γ) Η θέση ισορροπίας του συστήματος είναι στη γωνία ϕ_0 όπου $\ddot\phi=\dot\phi=0$

Από την εξίσωση κίνησης θα έχουμε: $g\cos\phi_0=0 \Rightarrow \phi_0=\pi/2$



Για να βρούμε τη συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων ελέγχουμε τη κίνηση γύρω από το σημείο ισορροπίας (ανάπτυγμα γύρω από τη θέση ϕ_0)

Έστω ότι ορίζουμε το ϕ να είναι: $\phi=\phi_0+\theta$ όπου θ μικρό

Η εξίσωση της κίνησης γίνεται τότε:

$$\ddot\theta\left[\ell-R\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]-R\dot\theta^2-g\,\overset{-\sin\theta}{\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\Theta}\left[\ell - \frac{R\pi}{2} - R\Theta\right] - R\dot{\Theta}^2 + g\sin\Theta = 0$$ Για Θ μικρό $\sin\Theta \simeq \Theta$

Κρατώντας μόνο όρους α' τάξης σε Θ (όπως για το $\sin\Theta$) θα έχουμε:

$$\ddot{\Theta}\left[\ell - \frac{R\pi}{2}\right] + g\Theta = 0 \Rightarrow \ddot{\Theta} + \frac{g}{\ell - \frac{R\pi}{2}}\Theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\Theta} + \omega^2\Theta = 0}$$

Η συχνότητα επομένως των ταλαντώσεων θα είναι $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell - R\pi/2}}}$ $\left(\ell - \frac{R\pi}{2}\right) > 0$ πάντα

- Αν θεωρήσουμε περισσότερο γενικά, μικρές ταλαντώσεις γύρω από κάποια τυχαία θέση ϕ_0 τότε $\phi = \phi_0 + \Theta$. Παίρνοντας το ανάπτυγμα Taylor του $\cos\phi$ γύρω από τη θέση ϕ_0 θα έχουμε: (ανάπτυγμα Taylor: $f(x)\big|_{x=x_0} = f(x_0) + f'(x)\big|_{x=x_0}(x-x_0) + \dots$)

$$\cos\phi \cong \cos\phi_0 + (\phi-\phi_0)\left[\cos\phi\right]'\Big|_{\phi=\phi_0} + \frac{(\phi-\phi_0)^2}{2!}\left[\cos\phi\right]''\Big|_{\phi=\phi_0} + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\phi \simeq \cos\phi_0 - \Theta\sin\phi_0$$

Η εξίσωση κίνησης γράφεται ως εξής: (κρατώντας όπως πριν μόνο όρους 1ης τάξης)

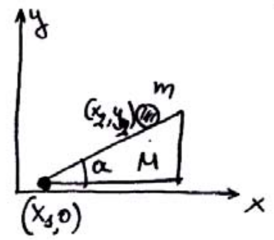
$$\ddot{\Theta}\left(\ell - R(\phi_0+\Theta)\right) - R\dot{\Theta}^2 - g\cos(\phi_0+\Theta) = 0 \Rightarrow \ddot{\Theta}(\ell - R\phi_0) - g(\cos\phi_0 - \Theta\sin\phi_0) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\Theta}(\ell - R\phi_0) + g\Theta\sin\phi_0 - g\cos\phi_0 = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\Theta} + \frac{g\sin\phi_0}{\ell - R\phi_0}\Theta = \frac{g\cos\phi_0}{\ell - R\phi_0}}$$

Αυτή είναι η εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή με $\omega_0 = \sqrt{\frac{g\sin\phi_0}{\ell - R\phi_0}}$ κάτω από την επίδραση σταθερής δύναμης με λύση: $\Theta = A\cos(\omega_0 t + \delta) + \frac{\cos\phi_0}{\sin\phi_0}$. Για $\cos\phi_0 = 0 \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2}$ η απλή περίπτω

2. Σώμα μάζας m γλιστρά χωρίς τριβές σε κεκλιμένο επίπεδο μάζας M και γωνίας κλίσης α το οποίο μπορεί να γλιστρά επίσης χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Χρησιμοποιώντας τους πολλαπλασιαστές Lagrange, να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης του σώματος και του κεκλιμένου επιπέδου. Να βρεθούν επίσης οι εξισώσεις για τις δυνάμεις των δεσμών. Υπολογίστε το έργο συναρτήσει του χρόνου, t, το οποίο παράγεται από τις δυνάμεις των δεσμών που ασκούνται στο σώμα και το κεκλιμένο επίπεδο. Ποιες είναι οι σταθερές κίνησης του συστήματος; Αντιπαραθέστε τα αποτελέσματά σας με την περίπτωση που το κεκλιμένο επίπεδο κρατείται σταθερό.

Χρησιμοποιούμε τις γενικευμένες συντεταγμένες x_1, x_2, y_2 όπως στο σχήμα. Ο δεσμός που έχουμε



είναι ότι η μάζα m πρέπει να βρίσκεται σε επαφή με το κεκλιμένο επίπεδο. Επομένως η εξίσωση του δεσμού γράφεται:

$$\frac{y_2}{x_2-x_1}=\tan a \Rightarrow \boxed{y_2-(x_2-x_1)\tan a=0} \quad (1)$$

Στην πραγματικότητα υπάρχει ακόμα ένας δεσμός, αυτός από το γεγονός ότι το κεκλιμένο επίπεδο κινείται πάνω στο έδαφος, δηλαδή $y_1=0$ αλλά δε θα το χρησιμοποιήσουμε. Θα δούμε στο τέλος τη σημασία αυτού του δεσμού.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος θα είναι: $T=\frac{1}{2}M\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2\right)$

ενώ η δυναμική ενέργεια: $V=mgy_2$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{L}=T-V=\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}m\dot{y}_2^2+\frac{1}{2}M\dot{x}_1^2-mgy_2$$

Χρησιμοποιούμε τις τροποποιημένες εξισώσεις Lagrange με πολλαπλασιαστές:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}=\lambda\frac{\partial f(x_1,x_2,y_2)}{\partial x_2} \Rightarrow m\ddot{x}_2=-\lambda\tan a \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_2=-\frac{\lambda}{m}\tan a} \quad (1)$$

Παρόμοια για τα x_1 και y_2 θα πάρουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}=\lambda\frac{\partial f}{\partial x_1} \Rightarrow M\ddot{x}_1=\lambda\tan a \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_1=\frac{\lambda}{M}\tan a} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_2}-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2}=\lambda\frac{\partial f}{\partial y_2} \Rightarrow m\ddot{y}_2+mg=\lambda \Rightarrow \boxed{\ddot{y}_2=-g+\frac{\lambda}{m}} \quad (3)$$

Από την εξίσωση του δεσμού $y_2-(x_2-x_1)\tan a=0 \Rightarrow \boxed{\ddot{y}_2=(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1)\tan a}$ (4)

Αντικαθιστούμε τις (1), (2), (3) στην (4) οπότε έχουμε:

$$\left(-g+\frac{\lambda}{m}\right)=-\lambda\tan^2 a\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\Rightarrow \lambda\left(\frac{1}{m}\sec^2 a+\tan^2 a\,\frac{1}{M}\right)=g\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{Mm\cos^2 a}{M+m\sin^2 a}g} \quad (5)$$

Χρησιμοποιώντας το πολλαπλασιαστή λ, η δύναμη του δεσμού υπολογίζεται:

$$Q_k=\lambda\frac{\partial f}{\partial q_k}\Rightarrow \qquad Q_{x_1}=\frac{Mm\cos^2 a}{M+m\sin^2 a}g\tan a=\frac{Mm\sin a\cos a}{M+m\sin^2 a}g$$

$$Q_{x_2}=\frac{Mm\cos^2 a}{M+m\sin^2 a}g(-\tan a)=-\frac{Mm\sin a\cos a}{M+m\sin^2 a}g$$

$$Q_{y_2}=\frac{Mm\cos^2 a}{M+m\sin^2 a}g$$

Προσέξτε ότι οι δυνάμεις του δεσμού δεν είναι ίσες και αντίθετες όπως θα περιμέναμε. Αυτό γιατί δεν χρησιμοποιήσαμε πολλαπλασιαστές Lagrange για το δεύτερο δεσμό που υπάρχει, ότι $y_1=0$. Ωστόσο φαίνεται ότι οι δυνάμεις στη x-διεύθυνση είναι ίσες και αντίθετες. (Θα έχουμε διατήρηση της γραμμικής ορμής στη x-διεύθυνση)
Η δύναμη κατά μήκος του y-άξονα θα εξισορροπούσε την κάθετη αντίδραση από το έδαφος. Κανονικά λοιπόν το πρόβλημα θα έπρεπε να λυθεί χρησιμοποιώντας (x_1,y_1) και (x_2,y_2) σαν συντεταγμένες και με δεσμούς: $y_1=0$ & $y_2-(x_2-x_1)\tan a=0$

Αντικαθιστώντας το λ από την (5) στις (1), (2) και (3) θα πάρουμε:

$$\boxed{\ddot{x}_1=\frac{m\sin a\cos a}{M+m\sin^2 a}g} \quad (6)$$

$$\boxed{\ddot{x}_2=-\frac{M\sin a\cos a}{M+m\sin^2 a}g} \quad (7)$$

$$\ddot{y}_2=-g+\frac{M\cos^2 a}{M+m\sin^2 a}g=g\left[\frac{M\cos^2 a-M(\sin^2 a+\cos^2 a)-m\sin^2 a}{M+m\sin^2 a}\right]\Rightarrow \boxed{\ddot{y}_2=-\frac{\sin^2 a(M+m)}{M+m\sin^2 a}g} \quad (8)$$

Το έργο που παράγεται από τη δύναμη του δεσμού πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο M ισούται με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κεκλιμένου επιπέδου.

$$\dot{x}_1(t) = \frac{m\sin a\cos a}{M+m\sin^2 a}\, g\, t \qquad \text{(ολοκληρώνοντας την (6))}$$

Οπότε το έργο θα είναι:

$$W = \frac{1}{2} M \dot{x}_1^2(t) - 0 = \frac{1}{2}\frac{m^2 M \sin^2 a \cos^2 a}{(M+m\sin^2 a)^2} g^2 t^2$$

Το έργο που παράγεται από τη δύναμη του δεσμού πάνω στη μάζα m είναι $-W$.
Αυτό γιατί το ολικό έργο της δύναμης του δεσμού στα δύο σώματα πρέπει να είναι Ø.
Από την εξίσωση της κίνησης έχουμε:

$$M\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 = 0 \Rightarrow M\dot{x}_1 + m\dot{x}_2 = \text{σταθ} \Rightarrow$$

Η ολική ορμή στη x-διεύθυνση διατηρείται, αφού η συνολική δύναμη είναι μηδέν.

Από τη στιγμή που δεν υπάρχουν χρονο-εξαρτώμενα δυναμικά, η ενέργεια είναι επίσης μια σταθερά της κίνησης.
Όταν το κεκλιμένο επίπεδο κρατιέται σταθερό, η μάζα m κατεβαίνει προς τα κάτω με σταθερή επιτάχυνση $g\sin a$. Το έργο που παράγεται από τις δυνάμεις των δεσμών είναι μηδέν.
Η μόνη σταθερά της κίνησης είναι η ενέργεια.