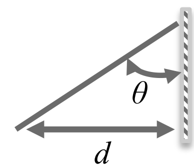
ΦΥΣ. 211
ΕΡΓΑΣΙΑ # 4
Επιστροφή την Δευτέρα 22/2/2016 στο τέλος της διάλεξης

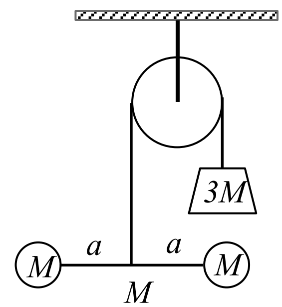
1. Θέλουμε να αφήσουμε να γλυστρήσουν σώματα προς την βάση μιας λείας επιφάνειας που ξεκινά από ένα σημείο στον τοίχο και τελειώνει σε σημείο που βρίσκεται σε απόσταση *d*, από τον τοίχο. Με ποια γωνία, θ, θα πρέπει να ακουμπά η επιφάνεια στον τοίχο ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο χρόνος κατάβασης των σωμάτων;



2. Βρείτε μια σχέση που εμπεριέχει την συνάρτηση $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ της οποίας η μέση τιμή του τετραγώνου της κλίσης της, $(\nabla\varphi)^2$, ως προς συγκεκριμένο όγκο *V*, έχει ελάχιστο.

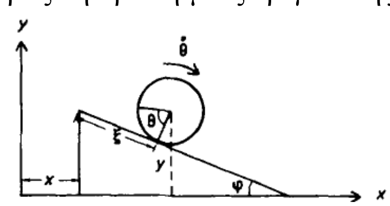
3. Να βρείτε το λόγο της ακτίνας *R* ως προς το ύψος *H*, ενός ορθού κυκλικού κυλίνδρου συγκεκριμένου όγκου *V*, που ελαχιστοποιεί το εμβαδό της κυλινδρικής επιφάνειας *A* (πλευρά και βάσεις).

4. Μια ράβδος μάζας *M*, και μήκους 2α, έχει δύο σφαίρες μάζας *M*, εξαρτημένες στα δύο άκρα της. Ένα νήμα είναι δεμένο στο μέσο της ράβδου και περνά μέσω μιας αβαρούς και λείας τροχαλίας, ενώ το άλλο άκρο του είναι δεμένο σε σώμα μάζας 3*M*. Την χρονική στιγμή $t = 0$, μια από τις δύο σφαίρες αποκολάται από την ράβδο. Δείξτε ότι η ράβδος περιστρέφεται με αρχική γωνιακή επιτάχυνση $\ddot{\theta} = (18g)/(17a)$ και ότι η τάση του νήματος είναι αρχικά $30mg/17$.



5. Δείξτε ότι η διαδρομή $y = y(x)$ για την οποία το ολοκλήρωμα $\int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1-y'^2}\,dx$ είναι στάσιμο είναι η συνάρτηση $\sinh$.

6. Μια σφαίρα μάζας *M* και ακτίνας *R*, κυλά χωρίς να ολισθαίνει προς την βάση μιας τριγωνικής επιφάνειας μάζας *m*, η οποία είναι ελεύθερη να κινείται πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. (α) Βρείτε την συνάρτηση Lagrange και τις εξισώσεις Lagrange του συστήματος που υπόκειται στην βαρυτική δύναμη. (β) Βρείτε την κίνηση του συστήματος, ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις Lagrange, δεδομένου ότι όλα τα σώματα αρχικά είναι σε ηρεμία και ότι το κέντρο της σφαίρας είναι σε ύψος *H* από την οριζόντια επιφάνεια.



7. Δύο σημειακές μάζες m_1 και m_2 ($m_1 \neq m_2$) συνδέονται μεταξύ τους με νήμα μήκους *l* το οποίο περνά από μια τρύπα σε οριζόντιο τραπέζι. Το νήμα και η μάζα στο τραπέζι κινούνται χωρίς τριβές, ενώ η κρεμασμένη μάζας m_2 κινείται κατά μήκος της κατακορύφου (όπως στο σχήμα). (α) Ποια πρέπει να είναι η αρχική ταχύτητα της μάζας m_1 ώστε η μάζα m_2 να παραμένει ακίνητη σε απόσταση *d*, κάτω από την επιφάνεια του τραπεζιού. (β) Αν η m_2 διαταραχθεί λίγο στην κατακόρυφη διεύθυνση, τότε το σύστημα εκτελεί ταλαντώσεις μικρού πλάτους. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Lagrange, βρείτε την περίοδο των μικρών ταλαντώσεων του συστήματος.