Πολλαπλασιαστές Lagrange – Δυνάμεις δεσμών

- Το μεγάλο πλεονέκτημα του Lagrangian φορμαλισμού είναι ότι δεν χρειάζεται να υπολογισθούν οι δυνάμεις των δεσμών
  - Υπάρχουν περιπτώσεις που χρειαζόμαστε τις δυνάμεις των δεσμών
- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις Lagrange αλλά με λίγο διαφορετική συνταγή

Η συνταγή:

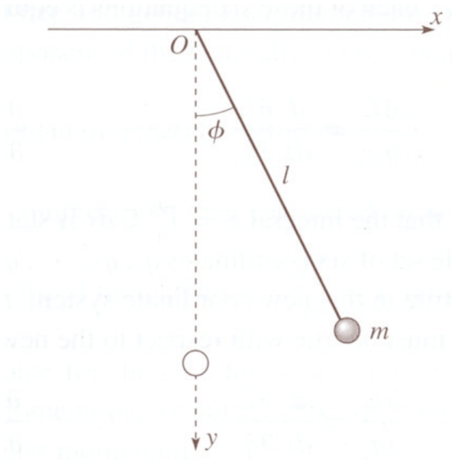
Αντί να χρησιμοποιήσουμε γενικευμένες συντεταγμένες από τις οποίες όλες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους

Αυτό που κάναμε μέχρι τώρα ήταν να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση του δεσμού για να βρούμε κάποια σχέση μεταξύ των συντεταγμένων και να εκφράσουμε κάποια συντεταγμένη συναρτήσει των άλλων

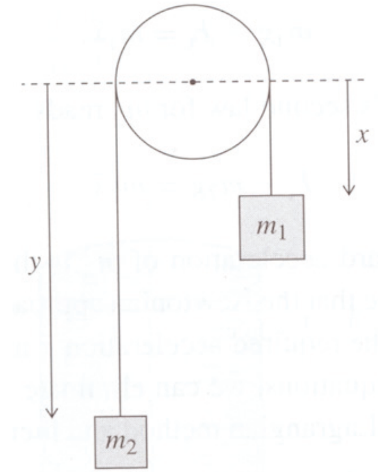
Χρησιμοποιούμε μεγαλύτερο αριθμό συντεταγμένων και για να συμπεριλάβουμε τους δεσμούς χρησιμοποιούμε τους πολλαπλασιαστές Lagrange

Τι σημαίνουν όλα αυτά

Απλό εκκρεμές



Μηχανή Atwood



- Αν χρησιμοποιήσουμε τη συντεταγμένη φ τότε περιγράφουμε πλήρως την κίνηση
- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε x και y αλλά $\sqrt{x^2 + y^2} = l$ και τα x και y δεν είναι ανεξάρτητα
- Θα δούμε με την μέθοδο των πολ/στων Lagrange πώς να βρούμε τη χρονική εξάρτηση των x και y και να βρούμε την τάση του σχοινιού

- Χρησιμοποιήσαμε μόνο τη x (θέση) της m_1.
- Θα μπορούσαμε να κάνουμε χρήση και της συντεταγμένης y της m_2 αρκεί να θυμόμασταν ότι το μήκος του σχοινιού επιβάλει το δεσμό: $x + y = l$
- Η μέθοδος των πολ/στων Lagrange οδηγεί στην εύρεση της χρονικής εξάρτησης των x και y και της τάσης

Πολλαπλασιαστές Lagrange

Το σύστημα περιγράφεται από μια Lagrangian $L = L(x, \dot{x}, y, \dot{y}, t)$

Η εξάρτηση δεν είναι απαραίτητη

Από την αρχή του Hamilton, έχουμε: $S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, y, \dot{y}) dt$

όπου S στάσιμο για τη διαδρομή που ακολουθήθηκε

Έστω x(t) και y(t) η "σωστή" διαδρομή, τότε μια μικρή απόκλιση σε μια γειτονική "λάθος" διαδρομή θα είναι:

$$x(t) \rightarrow x(t) + \delta x(t)$$

$$y(t) \rightarrow y(t) + \delta y(t)$$

Αν οι εξισώσεις αυτές ικανοποιούν την εξίσωση του δεσμού τότε το ολοκλήρωμα δράσης S είναι στάσιμο. Δηλαδή:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} \right) dt$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη το 2ο και 4ο όρο έχουμε:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) \delta y \, dt$$

Για τυχαίες μετατοπίσεις δx και δy

Πολλαπλασιαστές Lagrange

Αν το ολοκλήρωμα: $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) \delta y \, dt = 0$

για κάθε δυνατή μετατόπιση δx και δy $\Rightarrow$ 2 εξισώσεις Lagrange
το οποίο είναι το συμπέρασμα αν δεν είχαμε δεσμό

Αφού υπάρχουν δεσμοί, το ολοκλήρωμα είναι μηδέν μόνο για δx και δy που ικανοποιούν την εξίσωση του δεσμού (δx, δy μη ανεξάρτητα)

Όλα τα σημεία που ενδιαφέρουν ικανοποιούν τον δεσμό: $f(x,y) = const$

επομένως η μικρή απόκλιση $x \longrightarrow x + \delta x$ και $y \longrightarrow y + \delta y$
θα αφήνει ίδια την $f(x,y)$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y = 0$$

για $\delta x, \delta y$ που ικανοποιούν το δεσμό

Λύνοντας για δy έχουμε: $\delta y = -\left(\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} \right) \delta x$ και αντικαθιστούμε στο δS:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) \left(\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} \right) \right] \delta x \, dt = 0$$

αυτό ισχύει για κάθε δx οπότε ο όρος [...] θα πρέπει να είναι 0

Πολλαπλασιαστές Lagrange

Άρα: $\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)\left(\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}\right)=0\Rightarrow\frac{\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)}{\partial f/\partial x}=\frac{\left(\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)}{\partial f/\partial y}$

Για να ισχύει η τελευταία εξίσωση για κάθε χρονική στιγμή της κίνησης θα πρέπει να ισούνται με κάποια συνάρτηση του χρόνου $-\lambda(t)$

Επομένως θα έχουμε: $\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}+\lambda(t)\frac{\partial f}{\partial x}=0$ και $\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}+\lambda(t)\frac{\partial f}{\partial y}=0$

Εν γένει θα μπορούσαμε να γράψουμε: $\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)\frac{\partial f_j}{\partial q_i}=0$

Όπου έχουμε n-γενικευμένες συντεταγμένες και m εξισώσεις δεσμών

$Q_i=\lambda(t)\frac{\partial f}{\partial q_i}$ γενικευμένες δυνάμεις δεσμών

Το πρόβλημα ανάγεται στην λύση ενός συστήματος n-τροποποιημένων εξισώσεων Lagrange με m-εξισώσεις δεσμών της μορφής:

$f_j(q_i,t)=0$ ή $\sum_i\frac{\partial f_j}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial f_j}{\partial t}dt=0$ ή συνδυασμό τους

Μαθηματικό τέχνασμα ?

Έστω ότι η Lagrangian περιγράφει την κίνηση της μάζας του εκκρεμούς:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - U(x,y)$$

Αντικαθιστώντας στη 1η τροποποιημένη εξίσωση Lagrange έχουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Rightarrow -\frac{\partial U}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = m\ddot{x} \qquad \text{(A)}$$

Εξετάζοντας κάθε όρο της εξίσωσης:

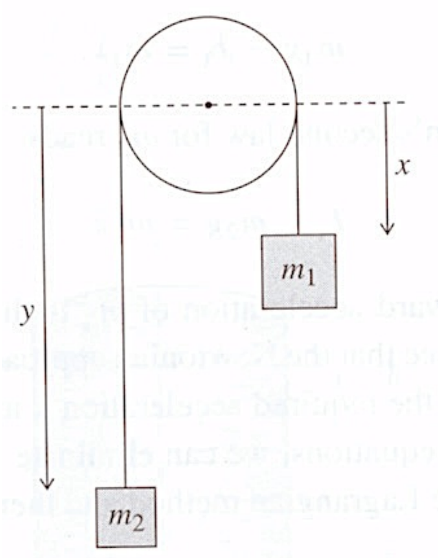
$$-\frac{\partial U}{\partial x} = \sum F_x^{\varepsilon\xi}$$ Όλες οι δυνάμεις εκτός δεσμών

$$m\ddot{x} = F_x = \sum\left(F_x^{\varepsilon\xi} + F_x^{\delta\varepsilon\sigma\mu.}\right)$$ ολική δύναμη

Επομένως η (Α) δίνει: $$\boxed{\lambda\frac{\partial f}{\partial x} = \sum F_x^{\delta\varepsilon\sigma\mu.}}$$ Δυνάμεις δεσμών

Ο πολ/στής Lagrange πολ/ζοντας την μερική παράγωγο της εξίσωσης του δεσμού δίνει την αντίστοιχη συνιστώσα της δύναμης του δεσμού

Παράδειγμα – Μηχανή Atwood



m_1 με συντεταγμένη x m_2 με συντεταγμένη y

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 + m_1 g x + m_2 g y$$

Η εξίσωση του δεσμού: $f(x,y) = x + y = l$ (1)

Από την τροποποιημένη εξίσωση Lagrange έχουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Rightarrow m_1 g + \lambda = m_1\ddot{x} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \Rightarrow m_2 g + \lambda = m_2\ddot{y} \qquad (3)$$

Έχουμε σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους x(t), y(t), λ(t)

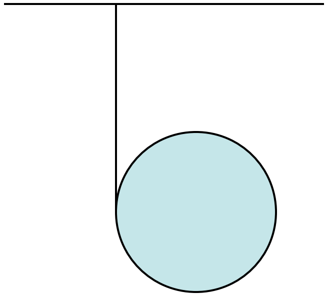
Η (1) δίνει: $x + y = l \Rightarrow \ddot{x} = -\ddot{y}$

Οπότε: $\ddot{x} = (m_1 - m_2)g/(m_1 + m_2)$

Συγκρίνοντας τις (2) και (3) με τις εξισώσεις του Newton: $m_1 g - T = m_1\ddot{x}$

οπότε: $\lambda = -T$ επειδή στην περίπτωση αυτή $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1$

Παράδειγμα – Yoyo



Θεωρήστε ένα δίσκο που έχει κάποιο σχοινί τυλιγμένο γύρω του, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο. Ο δίσκος αφήνεται να πέσει και το σχοινί ξετυλίγεται καθώς ο δίσκος πέφτει. Ποιες οι δυνάμεις των δεσμών

T: $T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\varphi}^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\varphi}^2 \qquad \left(I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2\right)$

V: $V = -mgy$

εξίσωση δεσμού: $y = R\varphi \ \Rightarrow f = y - R\varphi = 0$ κύληση χωρίς ολίσθηση

Από τις τροποποιημένες εξισώσεις Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} - \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow m\ddot{y} - mg - \lambda = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \lambda\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{2}mR^2\ddot{\varphi} + \lambda R = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mR\ddot{\varphi} + \lambda = 0$$

Από την εξίσωση του δεσμού έχουμε ακόμα: $\ddot{y} = R\ddot{\varphi}$

$$\lambda = -\frac{1}{2}m\ddot{y}$$

$$\Rightarrow -2\lambda - mg - \lambda = 0 \Rightarrow -3\lambda = mg \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}mg$$

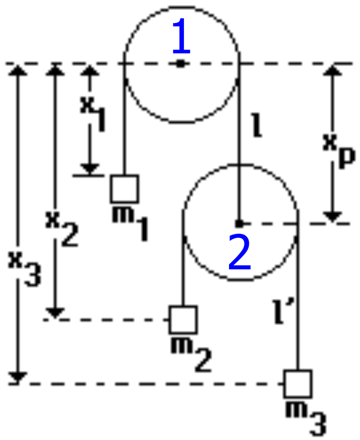
οπότε

$$Q_y = \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda = -\frac{1}{3}mg$$

$$Q_\varphi = \lambda\frac{\partial f}{\partial \varphi} = -\lambda R = \frac{1}{3}mgR$$

Παράδειγμα – Μηχανή Atwood

Η μηχανή Atwood του διπλανού σχήματος. Ποιες οι δυνάμεις των δεσμών



2 εξισώσεις δεσμών:

Σχοινί μεταξύ της m_1 και τροχαλίας 2: $f_1 = x_1 + x_p = l_1$

Σχοινί μεταξύ της m_2 και m_3: $f_2 = \left(x_2 - x_p\right) + \left(x_3 - x_p\right) = l_2$

$$\Rightarrow f_2 = x_2 + x_3 - 2x_p = l_2$$

Επομένως: $L = \left(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2 + m_3\dot{x}_3^2\right)/2 - g\left(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3\right)$

και οι τροποποιημένες εξισώσεις Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} - \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow m_1\ddot{x}_1 + m_1 g - \lambda_1 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} - \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow m_2\ddot{x}_2 + m_2 g - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} - \frac{\partial L}{\partial x_3} - \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow m_3\ddot{x}_3 + m_3 g - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_p} - \frac{\partial L}{\partial x_p} - \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_p} - \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_p} = 0 \Rightarrow -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$

$$f_1 = x_1 + x_p = l_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 + \ddot{x}_p = 0 \qquad \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\ddot{x}_p$$

$$f_1 = x_2 + x_3 - 2x_p = l_2 \Rightarrow x_2 + x_3 - 2x_p = l_2 \Rightarrow \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 = 2\ddot{x}_p$$

Παράδειγμα – Μηχανή Atwood

$$\left.\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1 + m_1 g - \lambda_1 = 0 \\ &\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_p \end{aligned}\right\} \Rightarrow -m_1\ddot{x}_p + m_1 g = \lambda_1 \;\Rightarrow \ddot{x}_p = -\lambda_1/m_1 + g$$

$$\left.\begin{aligned} &m_2\ddot{x}_2 + m_2 g - \lambda_2 = 0 \\ &m_3\ddot{x}_3 + m_3 g - \lambda_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow m_2 m_3\left(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_3\right) + 2m_2 m_3 g = \lambda_2\left(m_2 + m_3\right)$$

$$\ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 = 2\ddot{x}_p \qquad \Rightarrow 2m_2 m_3 \ddot{x}_p + 2m_2 m_3 g = \lambda_2\left(m_2 + m_3\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_p = \lambda_2\left(m_2 + m_3\right)/2m_2 m_3 - g$$

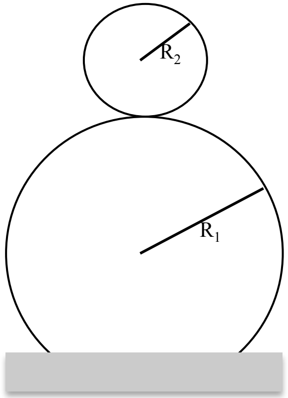
$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 = 2\lambda_2 \\ &-\lambda_1/m_1 + g = \lambda_2\left(m_2 + m_3\right)/2m_2 m_3 - g \end{aligned}\right\} \Rightarrow -2\lambda_2/m_1 + g = \lambda_2\left(m_2 + m_3\right)/2m_2 m_3 - g$$

$$\Rightarrow \lambda_2\left[m_1\left(m_2 + m_3\right) + 4m_2 m_3\right] = 4m_1 m_2 m_3 g$$

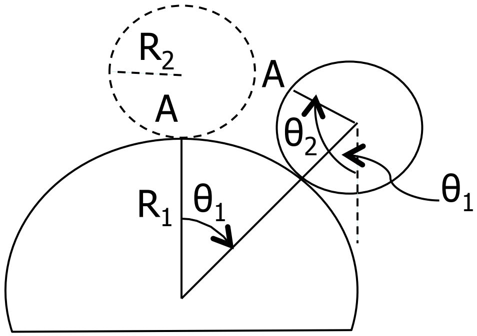
$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{g}{\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right) + \frac{1}{m_1}\right]}$$

$$\lambda_1 = 2\lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2g}{\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right) + \frac{1}{m_1}\right]}$$

Παράδειγμα – Κύλινδροι



Κύλινδρος μάζας m και ακτίνας R_2, ξεκινώντας από την κατάσταση ηρεμίας, κυλά χωρίς να ολισθαίνει στην επιφάνεια ακίνητου κυλίνδρου ακτίνας R_1. Στο σύστημα ασκείται μόνο η δύναμη της βαρύτητας. Χρησιμοποιώντας πολ/στες Lagrange να βρεθεί το σημείο που ο μικρός κύλινδρος χάνει επαφή με τον μεγάλο κύλινδρο. $I_{CM} = mR^2/2$



Το ΚΜ του μικρού κυλίνδρου έχει συντεταγμένες: (r,θ_1)

Οι κύλινδροι είναι σε επαφή, και άρα η εξίσωση του δεσμού:

$r-(R_1+R_2)=0$ (1) με συνάρτηση: $f_1 = r-(R_1+R_2)$ (2)

Θεωρούμε την γωνία θ_2 που διαγράφει ένα σημείο, Α, της περιφέρειας του μικρού κυλίνδρου με την κατακόρυφο.

Το τόξο που έχει διαγράψει το σημείο Α ως προς το σημείο επαφής, Α′, καθώς ο κύλινδρος κυλά είναι:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{AA'} = R_2(\theta_2-\theta_1) \\ \text{Αλλά} \quad \overset{\frown}{AA'} = R_1\theta_1 \end{array}\right\}$$ Για κύληση χωρίς ολίσθηση: $R_1\theta_1 = R_2(\theta_2-\theta_1)$

Η τελευταία εξίσωση είναι η εξίσωση του 2ου δεσμού: $(R_1+R_2)\theta_1 - R_2\theta_2 = 0$ (3)

Επομένως η συνάρτηση του δεσμού θα είναι: $f_2 = (R_1+R_2)\theta_1 - R_2\theta_2$ (4)

Για τις εξισώσεις (2) και (3) χρησιμοποιούμε τους πολ/στες λ_1 και λ_2 αντίστοιχα

Παράδειγμα – Κύλινδροι

Για την περιγραφή της κινητικής ενέργειας του μικρού κυλίνδρου, αναλύουμε την κίνηση σε μεταφορική για το ΚΜ και περιστροφική των σημείων του κυλίνρου ως προς το ΚΜ. Χρησιμοποιούμε επίσης πολικές συντεταγμένες ως προς το κέντρο του ακίνητου κυλίνδρου για να περιγράψουμε την μεταφορική κινητική ενέργεια:

$$T = T_{\pi\varepsilon\rho} + T_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{1}{2} I_{CM} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}_1^2\right) \Rightarrow T = \frac{1}{2}\frac{1}{2} m R_2^2 \theta_2^2 + \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}_1^2\right) \qquad (5)$$

Θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που περνά από κέντρο του ακίνητου κυλίνδρου, η $E_{\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\kappa\acute{\eta}}$ του μικρού κυλίνδρου είναι: $U = mgr\cos\theta_1$

Από (5) και (6) η Lagrangian του συστήματος είναι:

$$L = \frac{1}{4} m R_2^2 \theta_2^2 + \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}_1^2\right) - mgr\cos\theta_1 \qquad (7)$$

Χρησιμοποιούμε τις τροποποιημένες εξισώσεις E-L με πολ/στες Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} = 0 \Rightarrow mr^2\ddot{\theta}_1 + 2mr\dot{r}\dot{\theta}_1 - mgr\sin\theta_1 - \lambda_2\left(R_1 + R_2\right) = 0 \qquad (8)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m R_2^2 \ddot{\theta}_2 + \lambda_2 R_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{mR_2}{2}\ddot{\theta}_2 \qquad (9)$$

λ_2 έχει χρονική εξάρτηση

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial r} = 0 \Rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}_1^2 + mg\cos\theta_1 - \lambda_1 = 0 \qquad (10)$$

Παράδειγμα – Κύλινδροι

Αντικατάσταση της (9) στην (8) δίνει: $mr^2\ddot{\theta}_1 + 2mr\dot{r}\dot{\theta}_1 - mgr\sin\theta_1 = -\frac{mR_2}{2}\ddot{\theta}_2(R_1+R_2)$

Από την εξίσωση (3) του 2ου δεσμού, παραγωγίζοντας έχουμε: $(R_1+R_2)\ddot{\theta}_1 = R_2\ddot{\theta}_2$

$$\cancel{m}r^2\ddot{\theta}_1 + 2\cancel{m}r\dot{r}\dot{\theta}_1 - \cancel{m}gr\sin\theta_1 = -\frac{\cancel{mR_2}}{2}\frac{(R_1+R_2)}{\cancel{R_2}}\ddot{\theta}_1(R_1+R_2)$$

Από την εξίσωση (1) του 1ου δεσμού: $r = (R_1+R_2) \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$ (11)

$$(R_1+R_2)^{\cancel{2}}\ddot{\theta}_1 - g\cancel{(R_1+R_2)}\sin\theta_1 = -\frac{\cancel{(R_1+R_2)}}{2}\ddot{\theta}_1(R_1+R_2) \Rightarrow \frac{3}{2}(R_1+R_2)\ddot{\theta}_1 - g\sin\theta_1 = 0 \quad (12)$$

Από την εξίσωση (10) και την εξίσωση (11) έχουμε: $-m(R_1+R_2)\dot{\theta}_1^2 + mg\cos\theta_1 = \lambda_1$ (13)

Πολ/ζω την εξίσωση (12) με $\dot{\theta}_1$ ώστε να ολοκληρώσουμε:

$$\frac{3}{2}(R_1+R_2)\ddot{\theta}_1\dot{\theta}_1 = g\sin\theta_1\dot{\theta}_1$$

Αλλά: $\frac{d}{dt}(\dot{\theta}_1^2) = 2\ddot{\theta}_1\dot{\theta}_1 \Rightarrow \ddot{\theta}_1\dot{\theta}_1 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\theta}_1^2)$

$$\frac{3}{4}(R_1+R_2)\frac{d}{dt}(\dot{\theta}_1^2) = g\sin\theta_1\frac{d\theta_1}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}(R_1+R_2)\dot{\theta}_1^2 = -g\cos\theta_1\Big|_0^{\theta_1}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}(R_1+R_2)\dot{\theta}_1^2 = g(1-\cos\theta_1) \quad \Rightarrow (R_1+R_2)\dot{\theta}_1^2 = \frac{4}{3}g(1-\cos\theta_1) \quad (14)$$

Αντικατάσταση της (14) στην (13) δίνει: $\lambda_1 = -m\frac{4}{3}g(1-\cos\theta_1) + mg\cos\theta_1$

$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{3}mg(7\cos\theta_1 - 4)$ Για λ_1=0 χάνουν επαφή. Δηλαδή $(7\cos\theta_1 - 4) = 0 \Rightarrow \theta_1 = 55.8^o$