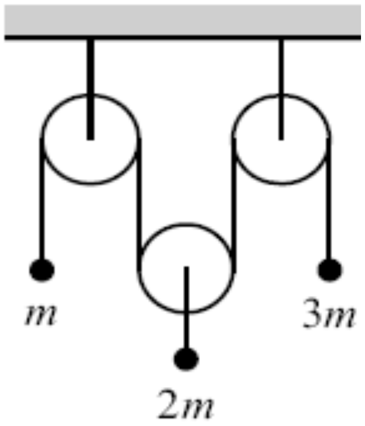
Μηχανή Atwood με κινούμενη τροχαλία

Θεωρείστε τη μηχανή Atwood του σχήματος.

(α) Να γραφούν οι τρεις εξισώσεις F=ma.
Θεωρείστε θετική τη φορά προς τα πάνω.

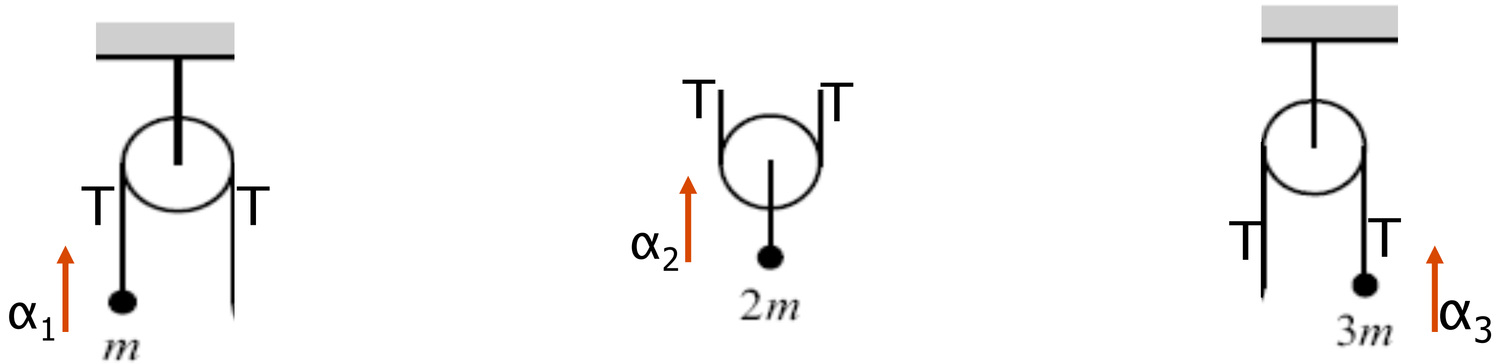
(β) Να βρεθεί η επιτάχυνση της μεσαίας μάζας (2m) συναρτήσει των επιταχύνσεων των δύο άλλων μαζών.

(γ) Να βρεθούν και οι τρεις επιταχύνσεις



Μηχανή Atwood με κινούμενη τροχαλία

(α) Να γραφούν οι τρεις εξισώσεις F=mα.



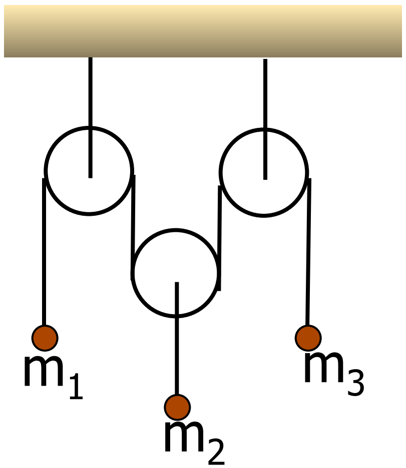
$$\sum F = m_1 a_1 = T - m_1 g \qquad \sum F = m_2 a_2 = T + T - m_2 g \qquad \sum F = m_3 a_3 = T - m_3 g$$

$$\Rightarrow \boxed{m_1 a_1 = T - m_1 g} \qquad \Rightarrow \boxed{m_2 a_2 = 2T - m_2 g} \qquad \Rightarrow \boxed{m_3 a_3 = T - m_3 g}$$

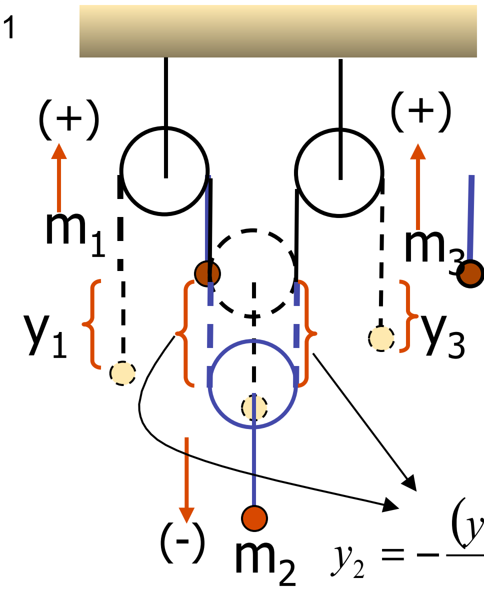
Τρεις εξισώσεις αλλά
με 4 αγνώστους: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,T
⇨ 1 ακόμα εξίσωση

Μηχανή Atwood με κινούμενη τροχαλία

(β) "Αρχή διατήρησης του νήματος" και η επιτάχυνση της μάζας m_2



- ✓ Έστω η μάζα m_1 κινείται κατά y_1 προς τα πάνω και η μάζα m_3 κινείται κατά y_3 προς τα πάνω.
- ➢ Το νήμα όμως δεν "χάνεται", άρα μήκος νήματος ίσο με y_1+y_3 πρέπει να εμφανιστεί στη μεσαία περιοχή.
- ✓ Αφού υπάρχουν 2 τμήματα νήματος, το καθένα θα πρέπει να επιμηκυνθεί κατά $(y_1+y_3)/2$.



$$y_2 = -\frac{(y_1 + y_3)}{2}$$

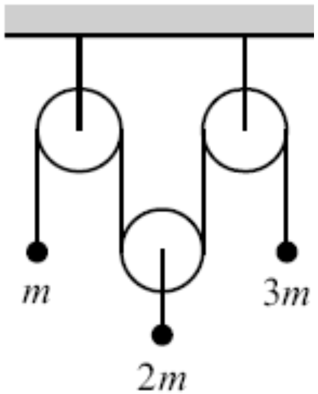
Η μάζα m_2 πηγαίνει προς τα κάτω κατά το ίδιο διάστημα y_2. Επομένως μπορούμε να βρούμε την επιτάχυνσή της.

$$a_2 = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy_2}{dt}\right) \Rightarrow a_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\left[-(y_1 + y_3)/2\right]}{dt}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{dy_1}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{dy_3}{dt}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{a_2 = -\frac{(a_1 + a_3)}{2}}$$

Μηχανή Atwood με κινούμενη τροχαλία

(γ) Οι επιταχύνσεις των τριών μαζών και η τάση T του νήματος



Τώρα έχουμε 4 εξισώσεις με 4 αγνώστους:

$$a_1 = \frac{T - mg}{m} \quad (1)$$

$$a_2 = \frac{2T - 2mg}{2m} = \frac{T - mg}{m} \quad (2)$$

$$\Rightarrow a_2 = a_1 \quad (5)$$

$$a_3 = \frac{T - 3mg}{3m} \quad (3)$$

$$a_2 = -\frac{a_1 + a_3}{2} \quad (4)$$

$$\Rightarrow a_3 = -3a_1 \quad (6)$$

Από τις (6) και (3) έχουμε: $T = 3m(-3a_1) + 3mg \Rightarrow T = -m(9a_1 - 3g)$ (7)

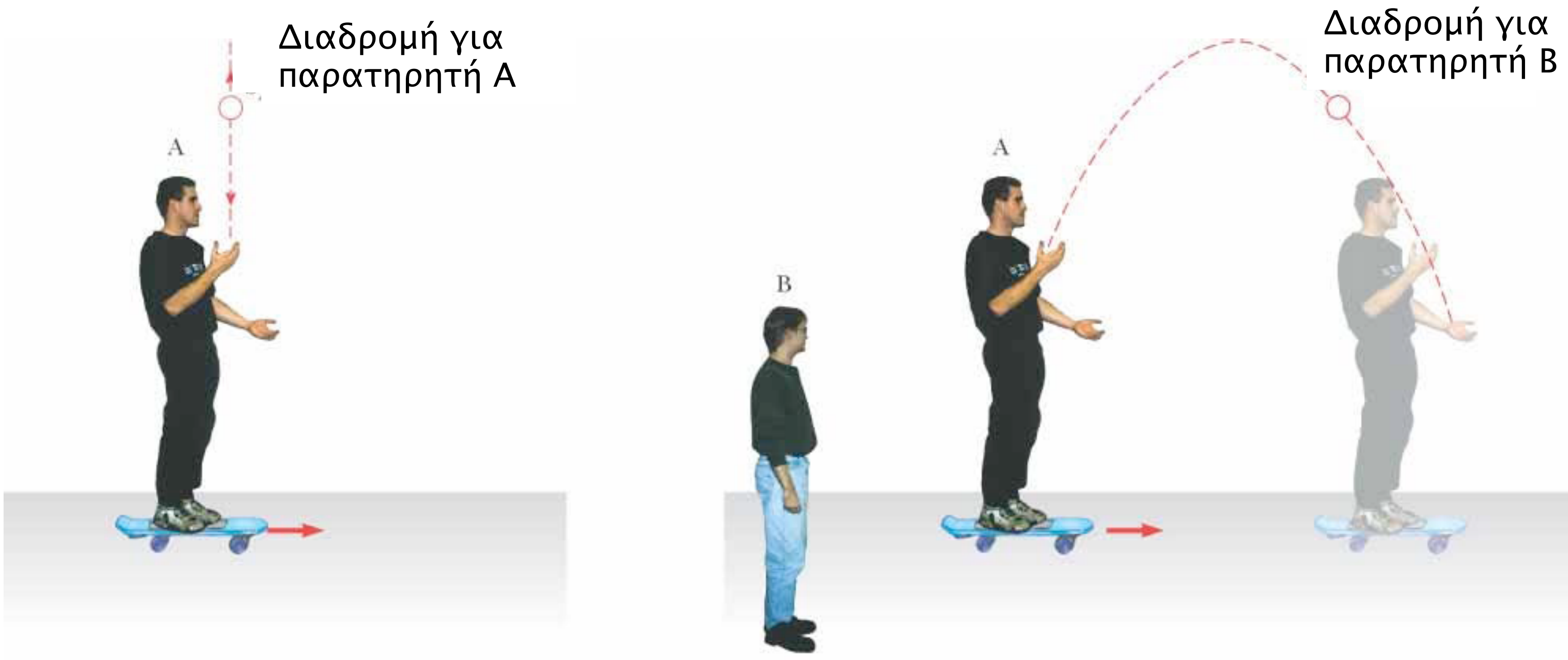
Από τις (1) και (7) έχουμε: $a_1 = \dfrac{-m(9a_1 - 3g) - mg}{m} \Rightarrow 10ma_1 = 2mg \Rightarrow \boxed{a_1 = \dfrac{g}{5}}$

Αντικαθιστώντας στις (5),(6) και (7) $a_2 = \dfrac{g}{5}$ $\quad a_3 = -\dfrac{3g}{5}$ $\quad T = +\dfrac{6}{5}mg$

Σχετική ταχύτητα

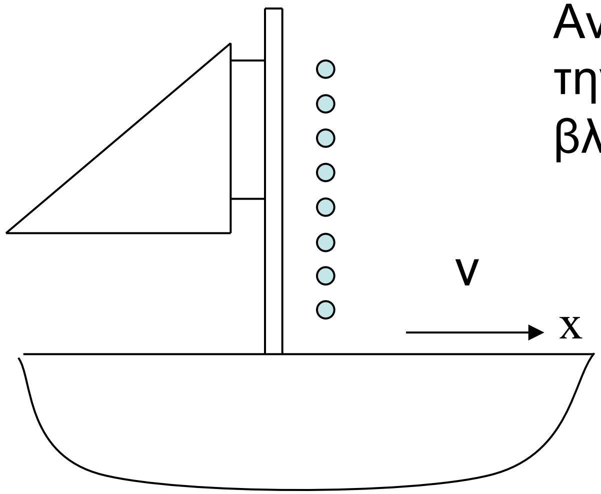
Σχετική ταχύτητα

Δύο παρατηρητές που κινούνται σχετικά ο ένας ως προς τον άλλο δεν συμφωνούν γενικά για το αποτέλεσμα ενός πειράματος

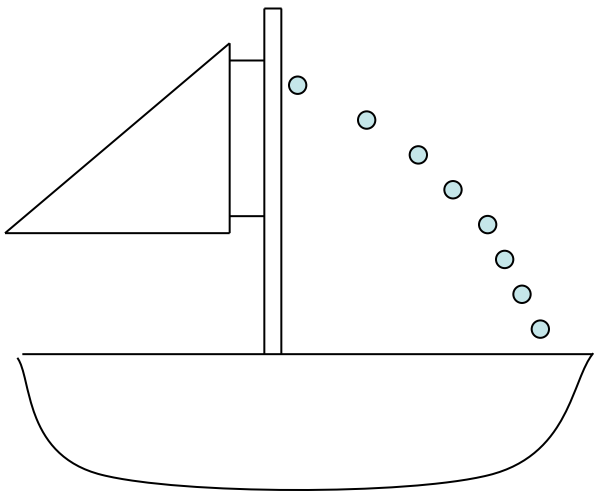


Οι δύο παρατηρητές A και B βλέπουν διαφορετική διαδρομή για την μπάλα

Σκύλος-μπισκότο-βάρκα



Αν κοιτάζατε από την στεριά τι θα βλέπατε? (ακίνητοι)



Ο σκύλος ανεβαίνει στο κατάρτι και ρίχνει ένα μπισκότο.

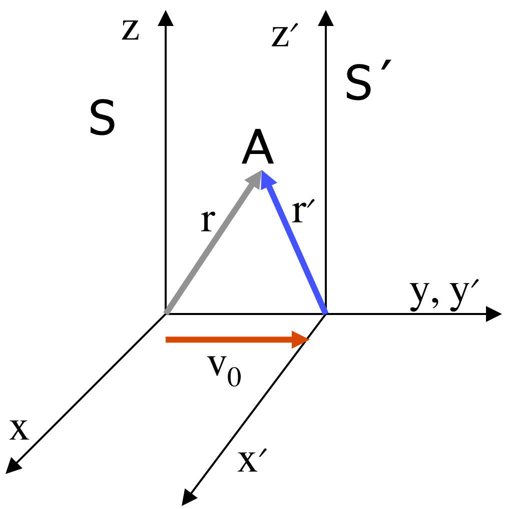
Για όλους που είναι στη βάρκα το μπισκότο δεν έχει καμιά κίνηση στην x-διεύθυνση

Δηλαδή σα να υπήρχε μιά αρχική ταχύτητα στη x-διεύθυνση

Το μπισκότο ξεκινά με v_y=0 και καταλήγει με v_y=v

Αδρανειακά συστήματα

Έστω δύο συστήματα αναφοράς S (αδρανειακό) και S΄(κινούμενο με σταθερή ταχύτητα v_0 ως προς το αδρανειακό σύστημα)

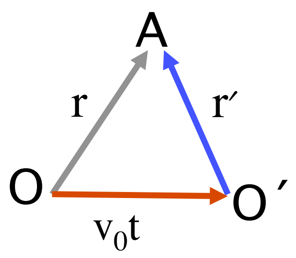


Το σύστημα S κινείται με ταχύτητα $-v_0$ ως προς το S΄

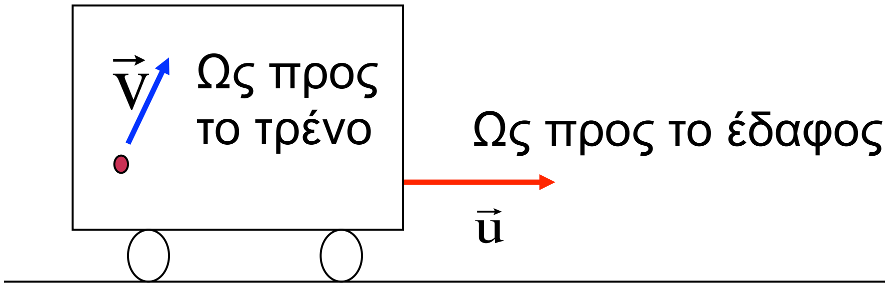
Τα διανύσματα θέσης ενός σώματος όπως μετρούνται από παρατηρητές στα 2 συστήματα είναι r και r΄

Μπορούμε να περιγράψουμε τη θέση του σώματος A στο σύστημα S΄ συναρτήσει της θέσης του στο S:

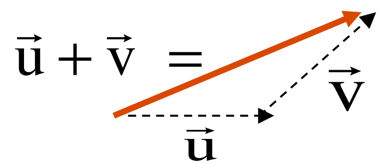
$$\vec{r}_A = \vec{r}\,'_A + \vec{v}_0 t \Rightarrow \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'_A}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_0 t\right) \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}\,'_A + \vec{v}_0$$



Σχετική ταχύτητα – Παράδειγμα



Η ταχύτητα της μπάλας ως προς το έδαφος θα είναι



Αν η ταχύτητα $\vec{u}$ είναι σταθερή τότε η επιτάχυνση ως προς το έδαφος είναι η ίδια ως προς το τρένο, επειδή

$$\vec{\alpha}_{\varepsilon\delta\alpha\phi o\varsigma} = \frac{d(\vec{u}+\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 + \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_{\tau\rho\varepsilon\nu o}$$

> Η επιτάχυνση που μετρούν 2 παρατηρητές που κινούνται με σταθερή σχετική ταχύτητα είναι η ίδια και για τους 2 παρατηρητές

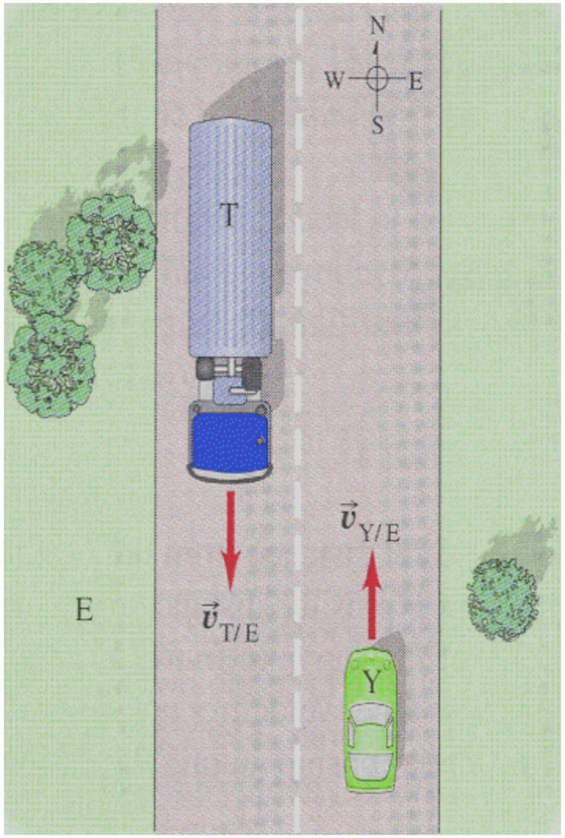
Άρα μετρούν και την ίδια δύναμη πάνω στο σώμα

$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}'$ όπως θα έπρεπε για δύναμη

Υποθέσεις:
- Ίδιος χρόνος και για τους 2 παρατηρητές
- Ίδια μονάδα μέτρησης αποστάσεων
- Ίδια μάζα

Σχετική ταχύτητα – Παράδειγμα

Οδηγείτε βόρεια σε ένα δρόμο με σταθερή ταχύτητα 88km/h και ένα φορτηγό κινείται με σταθερή ταχύτητα 104km/h στο αντίθετο ρεύμα και σας πλησιάζει. (α) Ποια η ταχύτητα του φορτηγού ως προς εσάς. (β) Ποια η ταχύτητά σας ως προς το φορτηγό. (γ) Πως αλλάζουν οι σχετικές σας ταχύτητες αφού προσπεράσετε;



Υποθέστε ότι το όχημά σας συμβολίζεται με Υ και το φορτηγό με Τ. Σαν ακίνητο σύστημα αναφοράς παίρνουμε τη γη και τη συμβολίζουμε με Ε. Επομένως η ταχύτητά σας σχετικά με τη γη είναι

$$\upsilon_{Y/E} = 88km/h$$

α) Το φορτηγό σας πλησιάζει και επομένως έχει ταχύτητα $\upsilon_{T/E} = -104km/h$

Θέλουμε την ταχύτητα $\upsilon_{T/Y}$

Αλλά $\upsilon_{T/E} = \upsilon_{T/Y} + \upsilon_{Y/E} \Rightarrow \upsilon_{T/Y} = \upsilon_{T/E} - \upsilon_{Y/E} =$
$= -104-88 = -192$km/h

β) Η ταχύτητα $\upsilon_{Y/T} = -\upsilon_{T/Y}$

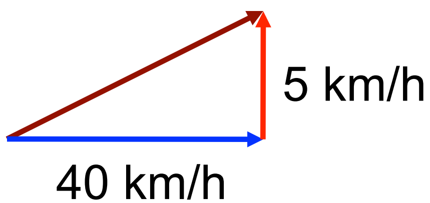
γ) Η σχετική ταχύτητα δεν αλλάζει όταν προσπεράσετε το φορτηγό. Οι σχετικές θέσεις των σωμάτων δεν παίζουν ρόλο. Η $\upsilon_{T/E}$ εξακολουθεί να είναι -192km/h

Σχετική ταχύτητα – Παράδειγμα

Είστε σε ένα τρένο το οποίο κινείται με ταχύτητα 40km/h προς τα δυτικά. Περπατάτε με ταχύτητα 5km κάθετα προς το μήκος του βαγονιού.

- Ποια η σχετική σας ταχύτητα ως προς το έδαφος;

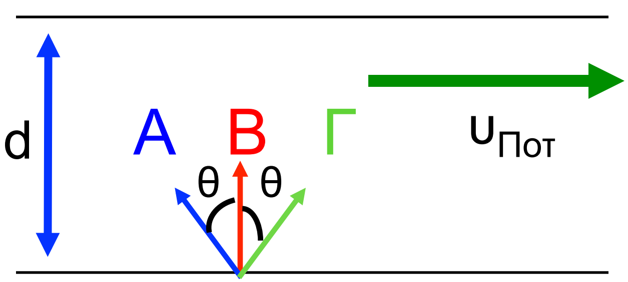
(Α) 40 km/h (Β) < 40 km/h (Γ) > 40 km/h



$$|\vec{V}| = \sqrt{40^2 + 5^2} \Rightarrow |\vec{V}| \sim 41 > 40 km/h$$

Τρεις κολυμβήτριες, η Άντρη, η Βάσω και η Γεωργία είναι σε ένα αγώνα για να διασχύσουν ένα ποτάμι από τη μια όχθη στην απέναντι στο μικρότερο χρόνο. Οι τρεις κολυμβήτριες κολυμβούν με την ίδια ταχύτητα ως προς τη ροή του ποταμού. Στον αγώνα, η Άντρη κολυμπά αντίθετα προς τη ροή του ποταμού, η Βάσω κάθετα και η Γεωργία κολυμπά προς τη ροή του ποταμού.

- Ποια απο τις Αντρη ή Γεωργία φθάνει απέναντι στη δεύτερη θέση;



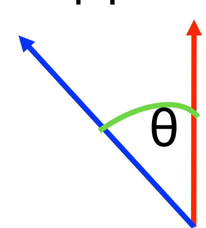
(Α) Η Άντρη (Β) Μαζί (Γ) Η Γεωργία

Άντρη: $\upsilon_y = V\cos\theta$

Βάσω: $\upsilon_y = V$

Γεωργία: $\upsilon_y = V\cos\theta$

$$t = \frac{d}{\upsilon_y}$$

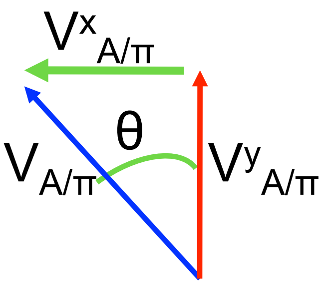


Σχετική ταχύτητα – Παράδειγμα

Τρεις κολυμβήτριες, η Άντρη, η Βάσω και η Γεωργία είναι σε ένα αγώνα για να διασχύσουν ένα ποτάμι από τη μια όχθη στην απέναντι στο μικρότερο χρόνο. Οι τρεις κολυμβήτριες κολυμβούν με την ίδια ταχύτητα 5km/h ως προς τη ροή του ποταμού τα νερά του οποίου κινούνται με ταχύτητα 3km/h.

- Με ποια γωνία θα πρέπει να κολυμπά η Άντρη ώστε να φθάσει στο ακριβώς απέναντι σημείο της απέναντι όχθης;

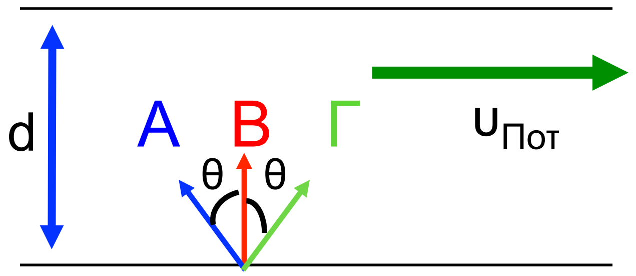
$$\vec{V}_{A/E\delta} = \vec{V}_{A/\Pi} + \vec{V}_{\Pi/E\delta}$$



Για να φθάσει στο ακριβώς απέναντι σημείο, θα πρέπει η ταχύτητα της Άντρης ως προς το έδαφος στη x-διεύθυνση να είναι μηδέν ($x = V_x t$)

x-διεύθυνση

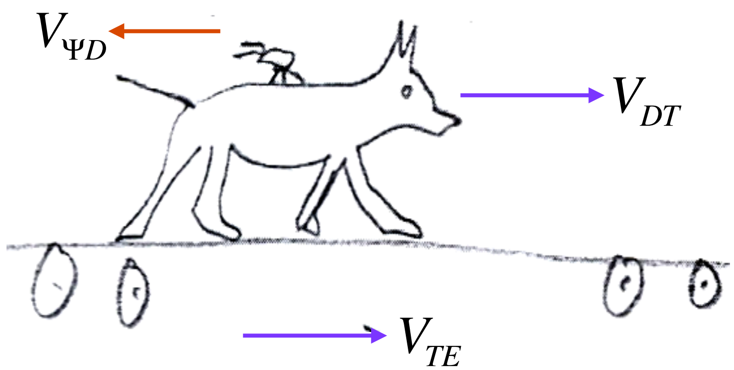
$$V^x_{A/E\delta} = V^x_{A/\Pi} + V^x_{\Pi/E\delta} \Rightarrow 0 = V^x_{A/\Pi} + V^x_{\Pi/E\delta} \Rightarrow 0 = -5\sin\theta + 3 \Rightarrow 5\sin\theta = 3$$



$$\Rightarrow \sin\theta = 3/5$$

Σχετική ταχύτητα - Παράδειγμα

Ένας μεγάλος σκύλος περπατά κατά μήκος ενός βαγονιού με ταχύτητα 5.0Km/h – (ανατολικά ως προς το βαγόνι). Το βαγόνι έχει ταχύτητα 10Km/h ανατολικά. Μια ψείρα κινείται στην ράχη του σκυλιού με φορά δυτικά ως προς το σκύλο και ταχύτητα 0.01Km/h. Να βρεθεί η ταχύτητα της ψείρας ως προς το έδαφος



$\vec{V}_{\Psi D} = 0.01 Km/h -$ δυτικά — ψείρα ως προς σκύλο

$\vec{V}_{DT} = 5.0 Km/h -$ ανατολικά — σκύλος ως προς τρένο

$\vec{V}_{TE} = 10.0 Km/h -$ ανατολικά — τρένο ως προς έδαφος

$$\vec{V}_{\Psi E} = \vec{V}_{\Psi D} + \vec{V}_{DT} + \vec{V}_{TE}$$

Όπως παρατηρούμε τα D και T απολοίφονται οπότε θα έχουμε:

$$\vec{V}_{\Psi E} = -0.01 + 5 + 10 = 14.99 Km/h$$

(Το “-” επειδή η ψείρα κινείται με φορά προς δυτικά)