ΦΥΣ. 331

3η Εργασία **Επιστροφή: Παρασκευή 13/10/23**

1. Το μεσόνιο π^0 έχει σπιν 0 και μάζα $m_\pi = 135\ MeV/c^2$ και διασπάται σε δυο φωτόνια. Η μέτρηση των χαρακτηριστικών της φωτονίων της τελικής κατάστασης δίνει πληροφορίες για τους κβαντικούς αριθμούς Parity και σπιν του πιονίου. Με βάση αυτό προσδιορίστε:

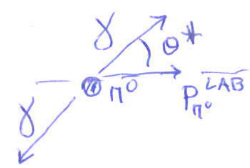
(α) Την γωνιακή κατανομή των εκπεμπόμενων φωτονίων στο σύστημα αναφοράς του π^0 (σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας).

(β) Το σχήμα του ενεργειακού φάσματος των εκπεμπόμενων φωτονίων στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.

(γ) Την μέγιστη και ελάχιστη ενέργεια των εκπεμπόμενων φωτονίων όταν το π^0 έχει ενέργεια 0.8 *GeV*.

(α) Έστω η διάσπαση N_0 αριθμού π^0. Εφόσον το π^0 έχει spin μηδέν, η γωνιακή κατανομή των εκπεμπόμενων φωτονίων στο σύστημα αναφοράς του Κ.Μ. θα πρέπει να είναι ομοιόμορφη προς όλες τις κατευθύνσεις εφόσον δεν υπάρχει κάποια προτιμητέα διεύθυνση που θα επέβαλε η περίπτωση ύπαρξης spin του διασπώμενου σωματιδίου.

Επομένως θα έχουμε: $\dfrac{dN}{d\Omega} = \dfrac{N_0}{4\pi}$ αφού Ω_0 = ολική στερεά γωνία $= 4\pi$ και N_0 = αριθμός π^0



Η στερεά γωνία είναι σύμφωνα με το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας.

Αν θεωρήσουμε ως Θ^* την γωνία που σχηματίζει το φωτόνιο με την διεύθυνση της ορμής του π^0 όπως μετράται στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, $P_{\pi^0}^{LAB}$, τότε η στερεά γωνία μπορεί να γραφεί: $\dfrac{dN}{d\Omega} = \dfrac{N_0}{4\pi} \Rightarrow$

$$\Rightarrow dN = \frac{N_0}{4\pi} d\Omega = \frac{N_0}{4\pi} 2\pi\, d(\cos\Theta^*) \Rightarrow \boxed{\frac{dN}{d(\cos\Theta^*)} = \frac{N_0}{2}} \quad (1)$$

(β) Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας (το π^0 σε ηρεμία) τα 2 φωτόνια έχουν ακριβώς την ίδια ενέργεια $E_\gamma^* = \dfrac{m_{\pi^0}}{2}$ ενώ οι ορμές τους $\vec{P}_\gamma^*$ είναι ίσες και αντίθετες. Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, τα π^0 έχουν ενέργεια E_π και ορμή $\vec{P}_\pi$ επομένως το τετραδιάνυσμα των π^0 είναι $(E, \vec{P})$.

Θα πρέπει να εκφράσουμε ανάλογα τα φωτόνια στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, αφού κάνουμε τον κατάλληλο μετασχηματισμό Lorentz, από το σύστημα της μάζας ηρεμίας του π^0 στο σύστημα του εργαστηρίου.

Η ώθηση θα είναι: $\beta = \frac{|p_\pi|}{E_\pi}$ ενώ ο παράγοντας Lorentz $\gamma = \frac{E_\pi}{m_\pi} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Επομένως αν τα β και γ είναι γνωστά μπορούμε να προσδιορίσουμε την ενέργεια των φωτονίων στο εργαστήριο, το οποίο γίνεται αντιληπτό από το σύστημα αναφοράς που το π^0 είναι ακίνητο σα να έχει αρνητική ταχύτητα. (κινείται δηλαδή προς τα ακίνητα π^0).

Από τον μετασχηματισμό Lorentz θα έχουμε επομένως:

$$E_\gamma = \gamma E_\gamma^* + \beta\gamma \underbrace{p_\gamma^*}_{E_\gamma^*} \cos\Theta^* \Rightarrow E_\gamma = \frac{E_\pi}{\cancel{m_\pi}}\frac{\cancel{m_\pi}}{2}\left(1+\beta\cos\Theta^*\right) \Rightarrow \boxed{E_\gamma = \frac{E_\pi}{2}\left(1+\beta\cos\Theta^*\right)} \quad (2)$$

Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι η ενέργεια των φωτονίων στο εργαστήριο εξαρτάται από την γωνία εκπομπής στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας του πιονίου, και οι τιμές της ενέργειας κυμαίνονται ανάμεσα στις τιμές:

$$\boxed{E_\gamma^{min} = \frac{E_\pi}{2}\left(1-\beta\right)} \; (3) \quad \text{και} \quad \boxed{E_\gamma^{max} = \frac{E_\pi}{2}\left(1+\beta\right)} \; (4)$$ για $\Theta^* = \frac{\pi}{2}$ και 0 αντίστοιχα

Το σχήμα της ενεργειακής κατανομής των φωτονίων θα είναι:

$$dE_\gamma = d\left[\gamma E_\gamma^* + \beta\gamma E_\gamma^* \cos\Theta^*\right] = \beta\gamma E_\gamma^* d(\cos\Theta^*) \Rightarrow \frac{d(\cos\Theta^*)}{dE_\gamma} = \left(\beta\gamma E_\gamma^*\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d(\cos\Theta^*)}{dN}\frac{dN}{dE_\gamma} = \left(\beta\gamma E_\gamma^*\right)^{-1} \xRightarrow{(1)} \frac{dN}{dE_\gamma}\frac{2}{N_0} = \left(\beta\gamma E_\gamma^*\right)^{-1} \Rightarrow \boxed{\frac{dN}{dE_\gamma} = \frac{N_0}{2}\frac{1}{\beta\gamma E_\gamma^*}}$$

Εφόσον όλες οι ποσότητες στο δεξί μέλος της εξίσωσης είναι σταθερές, η κατανομή του αριθμού των φωτονίων είναι σταθερή μεταξύ των δύο ακραίων τιμών E_γ^{max} και E_γ^{min}

(γ) Αν η ενέργεια του π^0 είναι 0.8GeV τότε $\beta = \frac{p_\pi}{E_\pi} = \frac{\sqrt{E_\pi^2 - m_\pi^2}}{E_\pi} \Rightarrow \boxed{\beta = 0.9856}$

Από την εξίσωση (3) και (4) βρίσκουμε ότι:

$$E_\gamma^{min} = \frac{0.8}{2}\left(1-0.9856\right) \Rightarrow E_\gamma^{min} = 0.00576\,\text{GeV} \Rightarrow \boxed{E_\gamma^{min} = 5.76\,\text{MeV}}$$

$$E_\gamma^{max} = \frac{0.8}{2}\left(1+0.9856\right) \Rightarrow E_\gamma^{max} = 0.794\,\text{GeV} \Rightarrow \boxed{E_\gamma^{max} = 794\,\text{MeV}}$$

2. Υπολογίστε την ενεργό διατομή για τις σκεδάσεις: $pd \rightarrow {}^{3}He\,\pi^{0}$, $pd \rightarrow {}^{3}H\,\pi^{+}$ για συγκεκριμένη ενέργεια δέσμης στο κέντρο μάζας ίδια και στις δύο περιπτώσεις.

Εξετάζουμε την περίπτωση $pd \longrightarrow {}^{3}He + \pi^{0}$

Η αρχική κατάσταση αποτελείται από p που είναι isospin κατάσταση $\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right>$ και δευτέριο, d, που είναι isospin singlet με κατάσταση $|0,0>$

Επομένως η αρχική κατάσταση είναι: $<0,0| \oplus <\frac{1}{2},\frac{1}{2}| = <\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}|$.

Η τελική κατάσταση περιέχει π^{0} που είναι isospin κατάσταση $|1,0>$ και ${}^{3}He$ το οποίο με βάση την αρχική κατάσταση και εφόσον γίνεται η αντίδραση θα είναι isospin κατάσταση $\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right>$.

Ο συνδυασμός των 2 αυτών καταστάσεων με βάση τους πίνακες CG για $1\times 1/2$ θα δώσει:

	$1 \times \frac{1}{2}$		3/2	
			3/2	
	1	1/2	1	
			3/2	1/2
			1/2	1/2
${}^{3}H\pi^{+} \rightarrow$	1	-1/2	1/3	2/3
$\pi^{0} \rightarrow$	0	+1/2	2/3	-1/3
			3/2	1/2
			-1/2	-1/2
	0	-1/2	2/3	1/3
	-1	+1/2	1/3	-2/3
			3/2	
			-3/2	
	-1	-1/2	1	

$$\pi^{0}\,{}^{3}He\ |1,0> \oplus \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right> \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right> - \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{9}\right>$$

Η περίπτωση ${}^{3}H\,\pi^{+}$ αποτελείται από συνδυασμό των $\pi^{+} \rightarrow |1,1>$ και επομένως ${}^{3}H \rightarrow \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right>$. Έτσι θα έχουμε:

$$|1,1> \oplus \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right> \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\right> + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right>$$

Επομένως θα έχουμε: $pd \rightarrow {}^{3}He\,\pi^{0} \rightsquigarrow <\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}|\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right> - \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right>\right) =$

$$pd \rightarrow {}^{3}He\,\pi^{0} = \frac{1}{3}\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right|$$

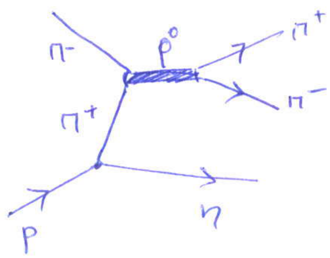
$$pd \rightarrow {}^{3}H\,\pi^{+} \rightsquigarrow <\frac{1}{2}\ \frac{1}{9}|\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left|\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\right> + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right>\right) \Rightarrow pd \rightarrow {}^{3}H\pi^{+} \rightarrow \frac{2}{B}\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right|$$

Επομένως ο λόγος των ρυθμών σκέδασης είναι: $\frac{6(pd \rightarrow {}^{3}He\,\pi^{0})}{6(pd \rightarrow {}^{3}H\,\pi^{+})} = \frac{1}{2}$

αφού οι σκεδάσεις μπορούν να γίνουν μόνο μέσω

3. Προσδιορίστε τους κβαντικούς αριθμούς σπιν-ομοτιμίας για το μεσόνιο ρ^0 (το μεσόνιο ρ συναντάται σε τρεις καταστάσεις: ρ^+, ρ^0 και ρ^-) το οποίο παράγεται στην σκέδαση: $\pi^- p \rightarrow \rho^0 n$ με την διάσπαση του ρ^0 σε δύο πιόνια: $\rho^0 \rightarrow \pi^-\pi^+$. Στην παραπάνω διάσπαση, κάνοντας την κατανομή της αμετάβλητης μάζας των δυο πιονίων, $m_{\pi^+\pi^-}$, παρατηρείται μια κορυφή στην τιμή $m_{\pi^+\pi^-} = 775MeV$, με εύρος $\Gamma = 149\ MeV$. Εξηγήστε γιατί δεν εμφανίζεται κορυφή συντονισμού στην ίδια τιμή μάζας για την περίπτωση διάσπασης σε $\pi^0\pi^0$.

Η σκέδαση που έχουμε είναι όπως αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Τα προϊόντα της διάσπασης είναι $\pi^-\pi^+$ με κβαντικούς αριθμούς $J^P = 0^-$ δηλαδή είναι ψευδοβαθμωτά μεσόνια.

Το ρ^0 μπορεί να θεωρηθεί σαν δέσμια κατάσταση $\pi^+\pi^-$ (spin μηδέν) αλλά με στροφορμή $l=1$ ως προς το κέντρο μάζας τους. Η τελική τιμή της parity θα είναι: $P_{\tau\varepsilon\lambda} = P_{\pi^+} \times P_{\pi^-} \times (-1)^l = (-1)\times(-1)\times(-1) \Rightarrow P_{\tau\varepsilon\lambda} = -1$.

Για την αρχική κατάσταση επομένως θα έχουμε $J=1$ και parity $-$: $J_\rho^P = 1^-$

Το isospin του ρ μπορεί να βρεθεί εξετάζοντας και πάλι τα τελικά προϊόντα. Διασπάται σε δυο π τα οποία είναι μποζόνια και επομένως η κυματοσυνάρτησή τους θα πρέπει να είναι συμμετρική κάτω από εναλλαγή τους, συμπεριλαμβανομένου του isospin. Από την στιγμή που η τελική στροφορμή του συστήματος $J_\rho = 1$, η κυματοσυνάρτηση έχει το τμήμα που αναφέρεται στην στροφορμή αντισυμμετρικό. Για να κατασκευάσουμε συμμετρική κυματοσυνάρτηση θα πρέπει το τμήμα της κυματοσυνάρτησης που περιγράφει το isospin να είναι επίσης αντισυμμετρικό, κάτω από εναλλαγή των πιονίων, και μόνο περιττές τιμές του isospin είναι δυνατές. Θεωρώντας επίσης τις τιμές του isospin των σωματιδίων που συγκρούονται $p\pi^- \sim |\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle\,|1\,{-1}\rangle$, συμπεραίνουμε ότι μόνο η τιμή $I=1$ για το ρ-μεσό

Το ρ δημιουργεί isospin triplet: ρ^+, ρ^0, ρ^- με $I_3 = +1, 0$ και -1 αντίστοιχα

Η G-parity είναι: $-1^{l+1} \Longrightarrow (-1)^2 \rightarrow I_\rho^G = 1^+$

Το ρ^0 μεσόνιο αποτελεί ιδιοκατάσταση της C-parity με ιδιοτιμή $C=-1$.
Ενεργώντας με τον τελεστή C στα τελικά προϊόντα έχουμε: $C\,\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^-\pi^+$
και η ενέργεια αυτή ισοδυναμεί με αυτή της parity, αναστρέφοντας τις χωρικές συντεταγμένες. $C|\pi^-\pi^+\rangle = (-1)^l|\pi^-\pi^+\rangle = -|\pi^-\pi^+\rangle$
Επομένως μπορούμε να γράψουμε ότι το ρ είναι: $I^G(J^{PC}) = 1^+(1^{--})$

Ο λόγος για τον οποίο δεν παρατηρείται συντονισμός για $\rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$ μπορεί να εξηγηθεί απλά ως ακολούθως:

Το ρ είναι spin 1 σωματίδιο ενώ το π^0 έχει spin 0. Επομένως για να έχουμε διατήρηση της στροφορμής θα πρέπει να υπάρχει τροχιακή στροφορμή για τα δυο π^0, $l=1$. Τα δυο πιόνια είναι μποζόνια και μάλιστα πανομοιότυπα. Η κυματοσυνάρτησή τους είναι συμμετρική κάτω από εναλλαγή των δυο πιονίων. Επομένως και θα πρέπει και το σήμα της κυματοσυνάρτησης που αναφέρεται στην στροφορμή να είναι συμμετρικό, αλλά για $l=1$ αυτό είναι αντισυμμετρικό.

4. Να βρεθούν οι λόγοι των ενεργών διατομών για $\pi^- p \rightarrow K^0\, \Sigma^0$, $\pi^- p \rightarrow K^+\, \Sigma^-$ και $\pi^+ p \rightarrow K^+\, \Sigma^+$ για τις περιπτώσεις που (α) Η αντίδραση κυριαρχείται από ισοσπίν 3/2 και (β) η αντίδραση κυριαρχείται από ισοσπίν ½.

Τα Σ's είναι όλα $I=1$ με $I_3 = -1, 0$ και $+1$ για Σ^-, Σ^0 και Σ^+

Τα π's είναι επίσης $I=1$ με $I_3 = -1, 0$ και $+1$ για π^-, π^0 και π^+

Τέλος τα K's έχουν $I=1/2$ με $I_3 = -1/2$ και $1/2$ για το K^0 και K^+

Οι συνδυασμοί ισοσπίν που έχουμε να καταγράψουμε είναι $1 \times 1/2$ οπότε από τον πίνακα των CG συντελεστών έχουμε:

$1 \times 1/2$			J = 3/2, M = 3/2	J = 3/2, M = 1/2	J = 1/2, M = 1/2	J = 3/2, M = −1/2	J = 1/2, M = −1/2	J = 3/2, M = −3/2
$\pi^+ p$, $\Sigma^+ K^+$	+1	+1/2	1					
	+1	−1/2		1/3	2/3			
	0	+1/2		2/3	−1/3			
$\Sigma^0 K^0 \rightarrow$	0	−1/2				2/3	1/3	
$\Sigma^- K^+$ & $\pi^- p \rightarrow$	−1	1/2				1/3	−2/3	
	−1	−1/2						1

Η περίπτωση του $\pi^- p$ είναι:

$$\langle (1,-1),(1/2,1/2)| = \frac{1}{\sqrt{3}}\langle \tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}| - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\langle \tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}|$$

Η περίπτωση $\Sigma^0 K^0$ είναι:

$$|(1,0),(1/2,-1/2)\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle$$

Επομένως γράφουμε την μετάβαση με τη μορφή:

$$\langle (1,-1),(1/2,1/2)||(1,0),(1/2,-1/2)\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3}\left|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\right| - \frac{\sqrt{2}}{3}\left|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right| \quad (A)$$

όπου συμβολίζουμε $\left|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\right| = \langle \tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle$ & $\left|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right| = \langle \tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle$

Η κατάσταση $\Sigma^- K^+$ θα είναι: $|(1,-1),(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3}|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle$

Επομένως η μετάβαση $\pi^- p \rightarrow \Sigma^- K^+$ είναι:

$$\langle (1,-1),(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})|(1,-1),(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\langle \tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}| - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\langle \tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi^- p \rightarrow \Sigma^- K^+ \; : \; \frac{1}{3}\left|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\right| + \frac{2}{3}\left|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right|} \quad (B)$$

Τέλος η περίπτωση της διάσπασης $\pi^+ p \to \Sigma^+ K^+$ είναι:

$$\left.\begin{aligned} \pi^+ p &: \ \langle (1,1),(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})| = 1\langle \tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}| \\ \Sigma^+ K^+ &: \ |(1,1),(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\rangle = 1|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow \pi^+ p \to \Sigma^+ K^+ : \langle \tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle \Rightarrow \boxed{\pi^+ p \to K^+\Sigma^+ : \left|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\right|} \ (\Gamma)$$

Εξετάζουμε την περίπτωση που υπερισχύει η $I=\frac{3}{2}$ οπότε έχουμε από τις (A), (B), (Γ)

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{\sqrt{2}}{3} \text{ για } \pi^- p \to \Sigma^0 K^0 \ (A) \\ &\tfrac{1}{3} \text{ για } \pi^- p \to \Sigma^- K^+ \ (B) \\ &1 \text{ για } \pi^+ p \to \Sigma^+ K^+ \ (\Gamma) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &2/1 \quad (A)/(B) \\ &2/9 \quad (A)/(\Gamma) \\ &1/9 \quad (B)/(\Gamma) \end{aligned}$$

Για την περίπτωση του $I=1/2$ να υπερισχύει, τότε θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{\sqrt{2}}{3} \text{ για } \pi^- p \to \Sigma^0 K^0 \ (A) \\ &\tfrac{2}{3} \text{ για } \pi^- p \to \Sigma^- K^- \ (B) \\ &0 \text{ για } \pi^+ p \to \Sigma^+ K^+ \ (\Gamma) \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1/2 \text{ για } (A)/(B)$$

5. Το Σ^{*0} μπορεί να διασπαστεί σε $\Sigma^+\pi^-$, $\Sigma^0\pi^0$, $\Sigma^-\pi^+$. Αν παρατηρήσετε 10000 συνολικά διασπάσεις στα τελικά αυτά προϊόντα, πόσα γεγονότα για κάθε περίπτωση θα περιμένατε;

Το isospin του Σ^{*0} είναι $I=1$ και ανήκει στην ίδια τριπλέτα των Σ^{*+}, Σ^{*-} που αντιστοιχεί στην τριπλέτα των αποδιεγερμένων Σ.

Το πιόνιο έχει επίσης isospin 1 και τα μέλη της τριπλέτας είναι π^+ με $I_3=1$, $I_3=0$ το π^0 και τέλος $I_3=-1$ για το π^-.

Η τελική κατάσταση είναι επομένως isospin συνδυασμός 1 και 1 και χρησιμοποιούμε τους πίνακες CG για 1×1.

1×1		$J=2$, $M=+2$
+1	+1	1

		$J=2$, $M=+1$	$J=1$, $M=+1$
+1	0	1/2	1/2
0	+1	1/2	−1/2

			$J=2$, $M=0$	$J=1$, $M=0$	$J=0$, $M=0$
$\Sigma^+\pi^-$ →	+1	−1	1/6	1/2	1/3
$\Sigma^0\pi^0$ →	0	0	2/3	0	−1/3
$\Sigma^-\pi^+$ →	−1	+1	1/6	−1/2	1/3

		$J=2$, $M=-1$	$J=1$, $M=-1$
0	−1	1/2	1/2
−1	0	1/2	−1/2

		$J=2$, $M=-2$
−1	−1	1

Εφόσον το Σ^{*0} έχει $I=1$ και $I_3=0$ χρησιμοποιούμε την στήλη 1 0 που δείχνει το βέλος.

Η τελική κατάσταση $\Sigma^+\pi^-$ είναι η κατάσταση $+1,-1$ ενώ οι τελικές καταστάσεις $\Sigma^0\pi^0$ και $\Sigma^-\pi^+$ αντιστοιχούν στις $0,0$ και $-1,1$ όπως δείχνεται.

Επομένως μπορούμε να διαβάσουμε τους συντελεστές για τις αντίστοιχες καταστάσεις $1/2$ για $\Sigma^+\pi^-$ και $\Sigma^-\pi^+$ ενώ η κατάσταση $\Sigma^0\pi^0$ έχει πιθανότητα $\emptyset$.
Επομένως περιμένουμε 5000 γεγονότα διάσπασης $\Sigma^{*0}\to\Sigma^+\pi^-$ και 5000 $\Sigma^{*0}\to\Sigma^-\pi^+$

6. Μια δέσμη K^0 παράγεται από την σκέδαση $\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda^0$ και διαδίδεται στο κενό και μπορεί να διασπαστεί. Σε απόσταση d που αντιστοιχεί σε 20 φορές τον χρόνο ζωής του K_1 ($d = 20c\tau_{K_1}$) υπάρχει ένας στόχος που απορροφά το 10% της προσπίπτουσας δέσμης των K^0. Αν η ενεργός διατομή σκέδασης των $\bar{K}^0$ είναι τρεις φορές μεγαλύτερη από αυτή των K^0, υπολογίστε το σχετικό ποσοστό των K_1 και K_2 στην δέσμη:

(α) Ακριβώς στο σημείο παραγωγής της δέσμης.

(β) Ακριβώς πριν τον στόχο.

(γ) Ακριβώς μετά τον στόχο.

Υποθέστε ότι τα καόνια είναι χαμηλής ενέργειας και αγνοήστε σχετικιστικές επιδράσεις. Σας δίνεται ότι ο χρόνος ζωής των K_2 είναι $\tau_{K_2} \approx 600\tau_{K_1}$.

(α) Η παραγωγή της δέσμης των K^0 προκύπτει από σκέδαση $\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda$.
Όπως έχουμε συζητήσει στις διαλέξεις το K^0 και $\bar{K}^0$ δεν είναι ιδιοκαταστάσεις της CP αλλά μόνο των ισχυρών αλληλεπιδράσεων και μπορούμε να γράψουμε ότι οι ιδιοκαταστάσεις της CP μπορούν να γραφούν:

$$\left.\begin{array}{l} |K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle\right) \\ |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} |K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K_1\rangle + |K_2\rangle\right) & (1) \\ |\bar{K}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K_1\rangle - |K_2\rangle\right) & (2) \end{array}$$

Από την (1) βλέπουμε πως εφόσον η δέσμη με την οποία ξεκινάμε είναι K^0, η σύσταση της θα είναι 50% $|K_1\rangle$ και 50% $|K_2\rangle$

(β) Ο στόχος βρίσκεται σε απόσταση $d = 20c\tau_{K_1} \simeq 20 \cdot 3 \cdot 10^{8} \cdot 90 \cdot 10^{-12} \Rightarrow$
$\Rightarrow d = 54 \cdot 10^{-2} m \Rightarrow d = 54 cm$.
Σύμφωνα με το νόμο της εκθετικής διάσπασης, η συνιστώσα K_1 της δέσμης εξασθενεί κατά ένα παράγοντα: $\frac{N(t)}{N_0} = e^{-t/\tau} = e^{-20\tau/\tau} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{N_{K_1}(t)}{N_{0K_1}} = e^{-20} \simeq 2 \cdot 10^{-9}$. Επομένως μετά από 20 χρόνους ζωής, η συνιστώσα K_1 έχει εξαφανιστεί. Η συνιστώσα K_2 έχει χρόνο ζωής

που είναι 600 φορές μεγαλύτερος από αυτόν της K_1 ($\tau_{K_2} \cong 600\tau_{K_1}$)

και επομένως $\dfrac{N_{K_2}(t)}{N_{0K_2}} = e^{-20\cancel{\tau_1}/60\cancel{0\tau_1}} = e^{-1/30}$ Ουσιαστικά δεν

υπάρχει καθόλου εξασθένιση της συνιστώσας. Επομένως πριν τον στόχο, η δέσμη θα είναι "καθαρή" σε K_2.

(γ) Όπως είδαμε από τις (1) και (2) στο ερώτημα (α), η δέσμη $|K_2\rangle$ που φτάνει στο στόχο, αποτελείται: 50% από K^0 και 50% $\overline{K^0}$.

Οι συνιστώσες αυτές (K^0 και $\overline{K^0}$) αλληλεπιδρούν μέσω των ισχυρών αλληλεπιδράσεων (είναι ιδιοκαταστάσεις) με το υλικό του στόχου.

Οι πιθανότητες αλληλεπίδρασης είναι 10% για τα K^0 και 30% για $\overline{K^0}$

Από την στιγμή που η δέσμη που φτάνει στον στόχο είναι απλά το 50% της αρχικής δέσμης των K^0 που παρήχθηκε, και εφόσον η δέσμη περνά διαμέσου του στόχου σε χρόνο t_c, βγαίνοντας από τον στόχο, η σύσταση της δέσμης θα είναι:

$$P_{K^0} = \frac{P_{K^0/6} * P_{K^0/K_2} * \cancel{N_{K_2}}}{\left[P_{K^0/6} * P_{K^0/K_2} + P_{\overline{K^0}/6} * P_{\overline{K^0}/6}\right] \cancel{N_{K_2}}} = \frac{P_{K^0/6} * P_{K^0/K_2}}{\left[P_{K^0/6} * P_{K^0/K_2} + P_{\overline{K^0}/6} * P_{\overline{K^0}/6}\right]}$$

όπου $P_{K^0/6}$ είναι το ποσοστό της δέσμης των K^0 που δεν εξασθενεί, δηλαδή 0.9. Ενώ P_{K^0/K_2} αντιστοιχεί στο ποσοστό των K^0 στη δέσμη των K_2

Αντίστοιχα, $P_{\overline{K}^0/6}$ είναι το ποσοστό των $\overline{K}^0$ της δέσμης των K_2 που δεν αλληλεπιδρούν με το στόχο, δηλαδή $P_{\overline{K}^0/6} \simeq 0.7$, ενώ το ποσοστό $P_{\overline{K}^0/K_2}^{=0.5}$ αφού η δέσμη ξεκινά 50%

Επομένως μετά από χρόνο t_c θα έχουμε: $\dfrac{0.9*0.5}{0.9*0.5+0.7*0.5} = 0.56 \Rightarrow$ το ποσοστό των K^0 είναι 56% και το ποσοστό των $\overline{K}^0$ θα είναι:

$$\frac{0.7\cdot 0.5}{0.9*0.5+0.7*0.5} = 0.437 \rightsquigarrow \underline{43.7\%} \text{ σε } \overline{K}^0.$$

Συναρτήσει όμως των K_1 και K_2 θα έχουμε μετά από χρόνο t_c

$$K_1(t_c) = \left(K^0(t_c) + \overline{K}^0(t)\right)/\sqrt{2} = (56+44)/\sqrt{2} \Rightarrow K_1(t_c) = 70.7$$

$$K_2(t_c) = \left(K^0(t_c) - \overline{K}^0(t)\right)/\sqrt{2} = (56-44)/\sqrt{2} \Rightarrow K_2(t) = 8.5$$

Οι σχετικοί λόγοι των 2 συνιστωσών είναι: $K_1(t_c)/(K_1(t_c)+K_2(t_c)) = 89.3\%$ και

για το $K_2(t)$: $K_2(t_c)/\left(K_1(t_c)+K_2(t_c)\right) = 10.7\%$ σε K_2

Επομένως ο στόχος ουσιαστικά έχει προκαλέσει επαναγέννηση των K_1

7. Δεδομένου του περιεχομένου σε quarks των σωματιδίων που αναφέρονται $\Lambda(uds)$, $K^0(d\bar{s})$, $K^+(u\bar{s})$και $\pi^+(u\bar{d})$, να σχεδιάσετε τα διαγράμματα Feynman των ακόλουθων διεργασιών (θα πρέπει να δείξετε ποια η διεύθυνση του χρόνου στις γραμμές σωματιδίων):

(α) Σκέδαση $\pi^- p \to \Lambda K^0$ χρησιμοποιώντας gluons αλλά όχι W's.

(β) Διάσπαση $\Lambda \to n\pi^0$.

(γ) Διάσπαση $K^+ \to \pi^0\pi^+$

(δ) Διάσπαση $\tau^+ \to \nu_\tau\, \pi^+$

(ε) Διάσπαση $K^0 \to \pi^0\pi^-\pi^+$