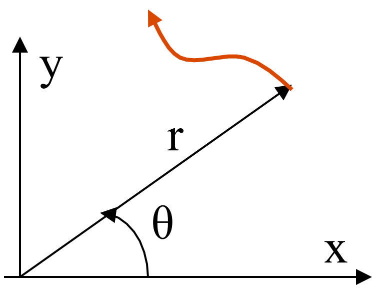
Κίνηση σωματιδίου κάτω από επίδραση δύναμης

Έστω ένα σωματίδιο κινείται κάτω από την επίδραση μιας δύναμης $F = -Ar^{\alpha-1}$ που έχει διεύθυνση προς την αρχή των αξόνων. Τα Α και α είναι σταθερές.

Επιλέξτε κατάλληλες γενικευμένες συντεταγμένες και θεωρήστε την $U = 0$ στην αρχή των αξόνων. Βρείτε (α) τις εξισώσεις κίνησης και (β) τα μεγέθη που διατηρούνται



Διαλέγουμε (r,θ) σα τις γενικευμένες συντεταγμένες.

Όπως είδαμε η κινητική ενέργεια σε πολικές συντεταγμένες:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

Η δύναμη σχετίζεται με την δυναμική ενέργεια μέσω:

$$F = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow V = -\int_0^r F dr = \int_0^r A r^{a-1} dr \Rightarrow V = \frac{A}{a} r^a + C$$

Εφόσον $V(r=0)=0$, τότε $C=0$ και η δυναμική ενέργεια γράφεται: $V = \frac{A}{a} r^a$

Η Lagrangian γράφεται: $L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{A}{a} r^a$

Κίνηση σωματιδίου κάτω από επίδραση δύναμης

Η εξίσωση Lagrange για την γενικευμένη συντεταγμένη r είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - Ar^{a-1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + Ar^{a-1} = 0 \qquad (1)$$

Η εξίσωση Lagrange για την γενικευμένη συντεταγμένη θ είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow mr^2\ddot{\theta} + 2\,mr\dot{r}\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0 \qquad (2)$$

Αφού η ποσότητα $l = mr^2\dot{\theta}$ θεωρείται η στροφορμή του σωματιδίου,

η (2) δηλώνει ότι η στροφορμή διατηρείται.

Κίνηση σωματιδίου κάτω από επίδραση δύναμης

Χρησιμοποιώντας την στροφορμή, l, γράφουμε την (1) ως εξής:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + Ar^{a-1} = 0 \Rightarrow m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + Ar^{a-1} = 0 \Rightarrow$$

Ο λόγος?

$$m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} - Ar^{a-1} \Rightarrow m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\boxed{\left(\frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + \frac{A}{a}r^a\right)}$$

(πολ/ζω με $\dot{r}$)

$$\frac{d}{dt}g(r) = \frac{dg}{dr}\frac{dr}{dt}$$

$$m\ddot{r}\dot{r} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{l^2}{2mr^2} + \frac{A}{a}r^a\right)\frac{dr}{dt} \Rightarrow m\ddot{r}\dot{r} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{l^2}{2mr^2} + \frac{A}{a}r^a\right)$$

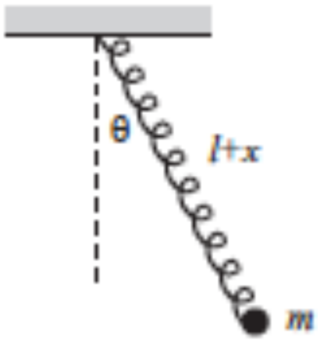
Αλλά $m\frac{d\dot{r}}{dt}\dot{r} = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\dot{r}^2$ και η τελευταία αυτή σχέση μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{l^2}{2mr^2} + \frac{A}{a}r^a\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{A}{a}r^a\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(T+V) = 0$$

Η τελευταία σχέση δηλώνει ότι η ολική ενέργεια διατηρείται

Εκκρεμές με ελατήριο



Θεωρήστε ένα εκκρεμές το οποίο αποτελείται από ένα ελατήριο στην άκρη του οποίου είναι κρεμασμένη μια μάζα m. Το ελατήριο είναι σε ευθεία και το μήκος ισορροπίας του είναι l. Έστω ότι το σύστημα κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο και το μήκος του εκκρεμούς είναι $l+x(t)$ και η γωνία με την κατακόρυφο είναι $\theta(t)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης.

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, η ταχύτητα γράφεται:

$$\vec{\mathrm{v}} = \dot{r}\hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}} + r\dot{\theta}\hat{\mathrm{e}}_{\theta} \Rightarrow \vec{\mathrm{v}} = \frac{d\big(l + x(t)\big)}{dt}\hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}} + \big(l + x(x)\big)\dot{\theta}\hat{\mathrm{e}}_{\theta} \Rightarrow \vec{\mathrm{v}} = \dot{x}(t)\hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}} + \big(l + x(x)\big)\dot{\theta}\hat{\mathrm{e}}_{\theta}$$

Η κινητική ενέργεια θα είναι: $T = \frac{m}{2}(\vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{\mathrm{v}}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + (l+x)^2\dot{\theta}^2\right)$

Η δυναμική ενέργεια προέρχεται από την βαρύτητα και το ελατήριο:

$$V(x,\theta) = -mg(l+x)\cos\theta + \frac{k}{2}x^2$$

Επομένως η lagrangian του συστήματος:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + (l+x)^2\dot{\theta}^2\right) + mg(l+x)\cos\theta - \frac{k}{2}x^2$$

Εκκρεμές με ελατήριο

Οι εξισώσεις κίνησης επομένως θα είναι:

x - συντεταγμένη

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m(l+x)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - kx$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow$$

Η ακτινική δύναμη F=ma συμπεριλαμβανομένης της κεντρομόλου

$$\Rightarrow m\ddot{x} = m(l+x)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - kx$$

θ - συντεταγμένη

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(l+x)^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2m(l+x)\dot{x}\dot{\theta} + m(l+x)^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg(l+x)\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow$$

ροπή

$$\Rightarrow \boxed{2m(l+x)\dot{x}\dot{\theta} + m(l+x)^2\ddot{\theta}} = -mg(l+x)\sin\theta \Rightarrow 2m\dot{x}\dot{\theta} + m(l+x)\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

στροφορμή

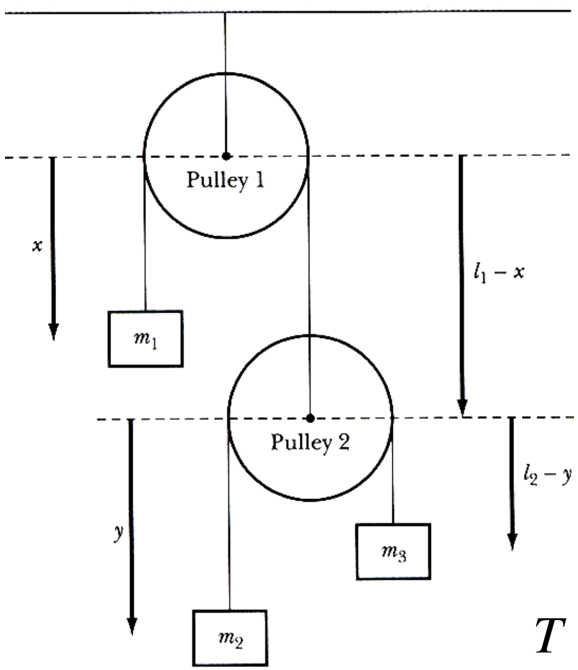
$$\boxed{\Rightarrow m(l+x)\ddot{\theta} = -2m\dot{x}\dot{\theta} - mg\sin\theta}$$

εφαπτομενική δύναμη

δύναμη coriolis

Μηχανή Atwood – 2η περίπτωση

Θεωρούμε τη μηχανή Atwood του παρακάτω σχήματος. Χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες που δίνονται να προσδιοριστούν οι εξισώσεις κίνησης. Υποθέτουμε ότι οι τροχαλίες είναι αβαρείς και ότι τα 2 σχοινιά έχουν σταθερό μήκος l_1 και l_2 ενώ οι αποστάσεις x και y μετρούνται από το κέντρο της κάθε τροχαλίας.



Για τη μάζα m_1: $\mathrm{v}_1 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \mathrm{v}_1 = \dot{x}$

Για τη μάζα m_2: $\mathrm{v}_2 = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(l_1 - x + y\right) \Rightarrow \mathrm{v}_2 = -\dot{x} + \dot{y}$

Για τη μάζα m_3: $\mathrm{v}_3 = \frac{d(l_1 - x + l_2 - y)}{dt} \Rightarrow \mathrm{v}_3 = -\dot{x} - \dot{y}$

Άρα η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

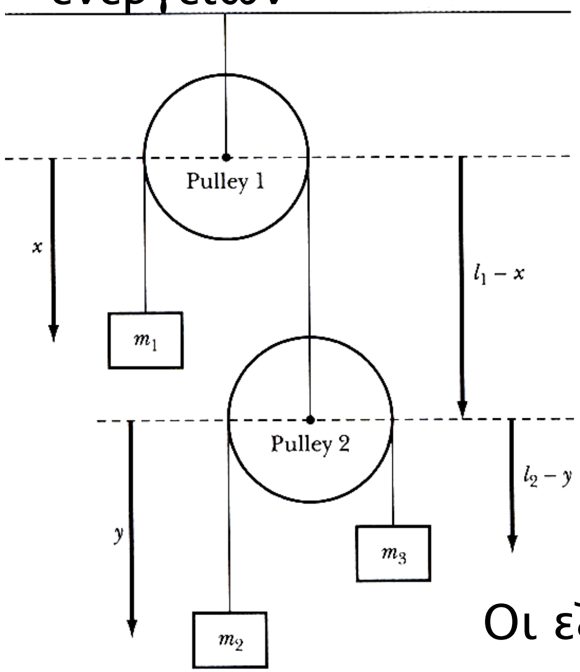
$$T = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{x}^2 + m_2(-\dot{x} + \dot{y})^2 + m_3\left(-\dot{x} - \dot{y}\right)^2\right) \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{x}^2 + m_2\dot{x}^2 + m_2\dot{y}^2 - 2m_2\dot{x}\dot{y} + m_3\dot{x}^2 + m_3\dot{y}^2 + 2m_3\dot{x}\dot{y}\right) \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}\left((m_1 + m_2 + m_3)\dot{x}^2 + (m_2 + m_3)\dot{y}^2 - 2(m_2 - m_3)\dot{x}\dot{y}\right)$$

7. Μηχανή Atwood – 2η περίπτωση

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών



Για τη μάζα m_1: $V_1 = -m_1 g x$

Για τη μάζα m_2: $V_2 = -m_2 g\left(l_1 - x + y\right)$

Για τη μάζα m_3: $V_3 = -m_3 g\left(l_1 - x + l_2 - y\right)$

$$V = -m_1 g x - m_2 g(l_1 - x + y) - m_3 g\left(l_1 - x + l_2 - y\right) \Rightarrow$$

$$V = g(m_2 + m_3 - m_1)x - g(m_2 + m_3)y - m_2 g l_1 - m_3 g l_2$$

Η Lagrangian είναι: $L = T - V$

Οι εξισώσεις κίνησης για τις συντεταγμένες x και y είναι:

x: $$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2 + m_3)\dot{x} - (m_2 - m_3)\dot{y} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} - (m_2 - m_3)\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -g(m_2 + m_3 - m_1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{x} - (m_2 - m_3)\ddot{y} + g(m_2 + m_3 - m_1) = 0$$

$$\Rightarrow m_1\ddot{x} + m_2(\ddot{x} - \ddot{y}) + m_3(\ddot{x} + \ddot{y}) = -g(m_2 + m_3 - m_1)$$

Μηχανή Atwood – 2η περίπτωση

y: $$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = (m_2 + m_3)\dot{y} - (m_2 - m_3)\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = (m_2 + m_3)\ddot{y} - (m_2 - m_3)\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = g(m_2 + m_3)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow (m_2 + m_3)\ddot{y} - (m_2 - m_3)\ddot{x} - g(m_2 + m_3) = 0$$

$$\Rightarrow m_2(\ddot{y} - \ddot{x}) + m_3(\ddot{y} + \ddot{x}) = g(m_2 + m_3)$$

Άρα οι 2 εξισώσεις κίνησης που έχουμε είναι:

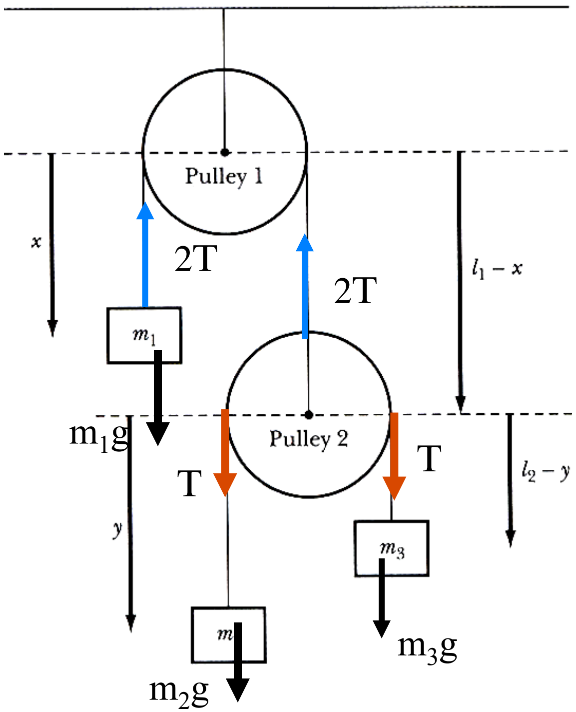
$$m_1\ddot{x} + m_2(\ddot{x} - \ddot{y}) + m_3(\ddot{x} + \ddot{y}) = -g(m_2 + m_3 - m_1)$$

$$m_2(\ddot{y} - \ddot{x}) + m_3(\ddot{y} + \ddot{x}) = g(m_2 + m_3)$$

Η διπλή μηχανή Atwood – Με Newtonian μηχανική

Είδαμε τη λύση του προβλήματος με τις εξισώσεις Lagrange.

Πως θα το λύναμε με καθαρά Newtonian μηχανική



Πρέπει να βρούμε τις δυνάμεις:

T η τάση στο σκοινί της χαμηλότερης τροχαλίας

Η τάση στο σχοινί της πάνω τροχαλίας θα είναι 2T

Σε κάθε μάζα m_1, m_2, m_3 ενεργεί το βάρος του και η αντίστοιχη τάση του νήματος.

Γράφουμε 3 εξισώσεις από το 2^o νόμο του Newton:

$$2T - m_1 g = m_1 a_1$$

$$T - m_2 g = m_2 a_2$$

$$T - m_3 g = m_3 a_3$$

Θεωρώντας $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ θετικά προς τα πάνω

Έχουμε 3 εξισώσεις με 4 αγνώστους $T, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

Η 4^η εξίσωση βγαίνει από την “αρχή διατήρησης του σχοινιού”:

Η μέση θέση των 2 μαζών m_2 και m_3 μετατοπίζεται κατά την ίδια απόσταση όπως και η κατώτερη τροχαλία. Αυτή με τη σειρά της μετατοπίζεται ίση και αντίθετη απόσταση με αυτή της m_1

Η διπλή μηχανή Atwood – Με Newtonian μηχανική

Μαθηματικά αυτό εκφράζεται ως: $a_1 = -\left(\frac{a_2 + a_3}{2}\right)$

Επομένως από τις 4 εξισώσεις μπορούμε να λύσουμε το σύστημα και να βρούμε τις 3 επιταχύνσεις:

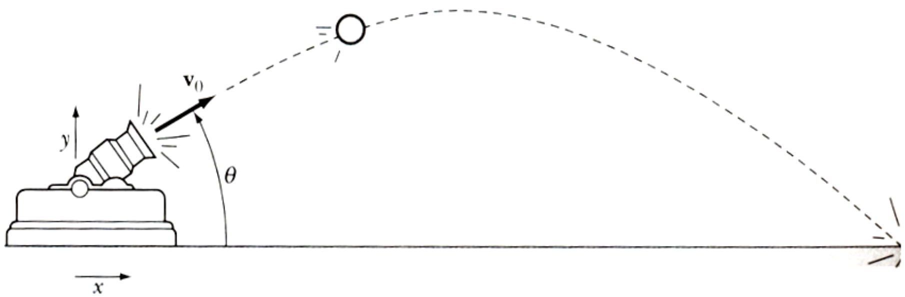
$$a_1 = g\frac{4m_2m_3 - m_1\left(m_2 + m_3\right)}{4m_2m_3 + m_1\left(m_2 + m_3\right)}$$

$$a_2 = -g\frac{4m_2m_3 + m_1\left(m_2 - 3m_3\right)}{4m_2m_3 + m_1\left(m_2 + m_3\right)}$$

$$a_3 = -g\frac{4m_2m_3 + m_1\left(m_3 - 3m_2\right)}{4m_2m_3 + m_1\left(m_2 + m_3\right)}$$

Κίνηση βλήματος σε 2 - Διαστάσεις

Θεωρήστε την κίνηση ενός βλήματος υπό την επίδραση της βαρύτητας (σε 2-Δ) χωρίς την επίδραση αντίστασης του αέρα. Έστω ότι η αρχική ταχύτητα του βλήματος είναι v_0 και η γωνία βολής θ. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης σε καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες.



A. Καρτεσιανές συντεταγμένες

$$T = \frac{1}{2} m \mathrm{v}^2 = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$$

$V = mgy$ θεωρώντας $V = 0$ για $y = 0$

Η Lagrangian θα έχει τη μορφή: $L = T - V = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - mgy$

Από τις εξισώσεις Lagrange για συντεταγμένες x,y έχουμε: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

x-συντεταγμένη:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \;\; ; \;\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \;\; ; \;\; \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 0$$

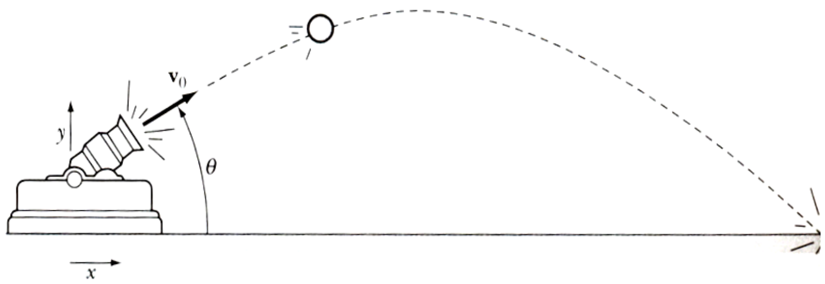
y-συντεταγμένη:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \;\; ; \;\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y} \;\; ; \;\; \frac{\partial L}{\partial y} = -mg$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = -mg \Rightarrow \ddot{y} = -g$$

Κίνηση βλήματος

Β. Πολικές συντεταγμένες



Για τις πολικές συντεταγμένες θεωρούμε την r (ακτινική διεύθυνση) και θ (γωνία με την οριζόντια διεύθυνση)

$$T = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

$V = mgr\sin\theta$ θεωρώντας $V = 0$ για $\theta = 0$

Η Lagrangian θα έχει τη μορφή: $L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgr\sin\theta$

Οι εξισώσεις Lagrange είναι: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

r-συντεταγμένη:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + g\sin\theta = 0$$

θ-συντεταγμένη:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta}$$

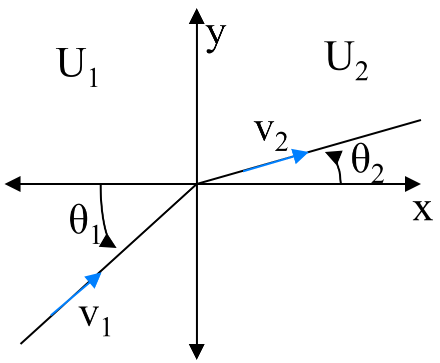
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} + gr\cos\theta = 0$$

"Ο νόμος του Snell"

Θεωρούμε μια περιοχή του χώρου η οποία διαχωρίζεται με ένα επίπεδο. Η δυναμική ενέργεια ενός σωματιδίου στην περιοχή 1 είναι U_1 και στην περιοχή 2 είναι U_2. Αν ένα σωματίδιο μάζας m το οποίο κινείται με ταχύτητα v_1 στη περιοχή 1 περάσει από την περιοχή 1 στη περιοχή 2 έτσι ώστε η πορεία του στην περιοχή 1 σχηματίζει γωνία θ_1 με την κάθετη στο διαχωριστικό επίπεδο και μια γωνία θ_2 με τη κάθετο όταν είναι στη περιοχή 2, δείξτε ότι:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \sqrt{1 + \frac{U_1 - U_2}{T_1}} \quad \text{όπου} \quad T_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$$



Διαλέγουμε τις συντεταγμένες x,y ώστε ο άξονας y διαχωρίζει τις 2 περιοχές:

$$U = \begin{cases} U_1 & x < 0 \\ U_2 & x > 0 \end{cases}$$

Επομένως η Lagrangian του σωματιδίου θα γραφεί ως:

$$L = \frac{1}{2} m v_1^2 - U(x) \Rightarrow L = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - U(x)$$

“Ο νόμος του Snell”

Επομένως οι εξισώσεις Lagrange για τις δύο γενικευμένες συντεταγμένες

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

Για την συντεταγμένη y:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = 0 \qquad (2)$$

Γράφοντας: $m\ddot{x} = \frac{d}{dt}m\dot{x} = \frac{dp_x}{dt} = \frac{dp_x}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{p_x}{m}\frac{dp_x}{dx}$ και αντικατάσταση στην (1)

$$m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{p_x}{m}\frac{dp_x}{dx} + \frac{dU}{dx} = 0$$

Την οποία και ολοκληρώνουμε από ένα οποιοδήποτε σημείο της περιοχής 1 σε ένα οποιοδήποτε σημείο της περιοχής 2

”Ο νόμος του Snell”

Έχουμε:

$$\int_1^2\left(\frac{p_x}{m}\frac{dp_x}{dx}+\frac{dU}{dx}\right)dx=0\Rightarrow\int_1^2\frac{p_x}{m}\frac{dp_x}{dx}dx+\int_1^2\frac{dU}{dx}dx=0\Rightarrow$$

$$\frac{p_x^{2(2)}}{2m}-\frac{p_x^{2(1)}}{2m}+U_{(2)}-U_{(1)}=0\Rightarrow\frac{1}{2}m\dot{x}_{(2)}^2+U_{(2)}=\frac{1}{2}m\dot{x}_{(1)}^2+U_{(1)} \qquad (3)$$

Από τη 2η εξίσωση κίνησης έχουμε: $m\ddot{y}=0\Rightarrow\frac{d}{dt}(m\dot{y})=0\Rightarrow m\dot{y}=\sigma\tau\alpha\vartheta.$ (4)

Επομένως $m\dot{y}_{(1)}=m\dot{y}_{(2)}\Rightarrow\frac{1}{2}m\dot{y}_{(1)}^2=\frac{1}{2}m\dot{y}_{(2)}^2$ (5)

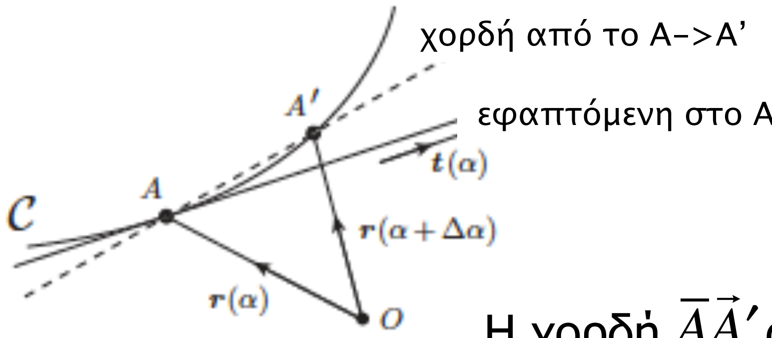
Από τις εξισώσεις (3) και (5) έχουμε: $\frac{1}{2}m\mathrm{v}_{(1)}^2+U_{(1)}=\frac{1}{2}m\mathrm{v}_{(2)}^2+U_{(2)}$ (6)

Από την (4) έχουμε ακόμα: $m\dot{y}=\sigma\tau\alpha\vartheta.\Rightarrow m\mathrm{v}_1\sin\theta_1=m\mathrm{v}_2\sin\theta_2$ (7)

Αντικαθιστώντας την (6) στην (7) έχουμε: $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{\mathrm{v}_2}{\mathrm{v}_1}=\sqrt{1+\frac{U_1-U_2}{T_1}}$

Το πρόβλημα αυτό είναι το μηχανικό ανάλογο της διάθλασης του φωτός

Εφαπτόμενο διάνυσμα σε καμπύλη



Έστω η καμπύλη C: $\vec{r}=\vec{r}(\alpha)$

Έστω A σημείο της C που αντιστοιχεί στην παράμετρο α και A′ ένα κοντινό σημείο που αντιστοιχεί στην παράμετρο $\alpha+\Delta\alpha$.

Η χορδή $\overline{AA'}$ αντιπροσωπεύει το διάνυσμα: $\Delta\vec{r}=\vec{r}(\alpha+\Delta\alpha)-\vec{r}(\alpha)$

Άρα το διάνυσμα: $\dfrac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα παρ/λο στην χορδή $\overline{AA'}$

Το μοναδιαίο διάνυσμα εφαπτόμενο της καμπύλης στο A ορίζεται: $\hat{t}(\alpha)=\lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|}$

Το εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{t}$ σχετίζεται με την παράγωνο $\dfrac{d\vec{r}}{d\alpha}$:

$$\frac{d\hat{t}}{d\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta\alpha}=\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|}\times\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta\alpha}=\hat{t}(\alpha)\times\left|\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta\alpha}\right|=\hat{t}(\alpha)\times\left|\frac{d\vec{r}}{d\alpha}\right|\boxed{\Rightarrow\frac{d\vec{r}}{d\alpha}=\left|\frac{d\vec{r}}{d\alpha}\right|\hat{t}(\alpha)}$$

Αν θεωρήσουμε ότι η παράμετρος α είναι η απόσταση s κατά μήκος της καμπύλης C όπως μετράται από κάποιο σταθερό σημείο, τότε:

$\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right|=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta s}=1$ και επομένως: $\boxed{\hat{t}=\dfrac{d\vec{r}}{ds}}$

Κάθετο διάνυσμα σε καμπύλη

Έστω το εφαπτόμενο δίανυσμα στην C: $\hat{t} = \hat{t}(s)$

Επομένως το διάνυσμα t θα έχει παράγωγο ως προς s που είναι ένα άλλο διάνυσμα.

Εφόσον το t είναι μοναδιαίο διάνυσμα: $\hat{t}(s)\cdot\hat{t}(s) = 1$

Παραγωγίζοντας ως προς s: $0 = \frac{d}{ds}\left(\hat{t}\cdot\hat{t}\right) = \frac{d\hat{t}}{ds}\cdot\hat{t} + \hat{t}\cdot\frac{d\hat{t}}{ds} = 2\left(\frac{d\hat{t}}{ds}\cdot\hat{t}\right)$ $\Rightarrow \frac{dt}{ds} \perp \hat{t}$

Είναι χρήσιμο να γράφουμε την παράγωγο του t ως προς s: $\frac{d\hat{t}}{ds} = k\hat{\eta}$

καμπυλότητα: $k = \left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right|$ κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα: $\hat{\eta}$

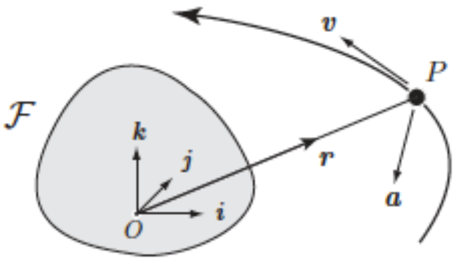
Γεωμετρική ερμηνεία:

Έστω s μετρούμενο από κάποιο σημείο A πάνω στην καμπύλη C.

Το ανάπτυγμα Taylor της C γύρω από το A δίνει: $\vec{r}(s) = \vec{r}(0) + s\left[\frac{d\vec{r}}{ds}\right]_{s=0} + \frac{1}{2}s^2\left[\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right]_{s=0} + O\left(s^3\right)$

$\Rightarrow \vec{r}(s) = \vec{a} + s\vec{t} + \left(\frac{1}{2}ks^2\right)\hat{n} + O\left(s^3\right)$ Η καμπύλη C κοντά στο A βρίσκεται στο επίπεδο που περνά από το A και είναι παρ/λο στα διανύσματα t και n

Ταχύτητα και επιτάχυνση – γενική κίνηση σημείου



Η ταχύτητα ορίζεται: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

Η επιτάχυνση ορίζεται: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

Έστω s το μήκος του τόξου που καλύπτεται στο P, μετρούμενο ως προς κάποιο σταθερό σημείο στην καμπύλη και το s αυξάνει με τον χρόνο t

Με τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}}{ds} \times \dfrac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \vec{v} = v\dfrac{d\vec{r}}{ds} = v\hat{t}$

όπου t το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα και v η ταχύτητα του P

Η επιτάχυνση θα είναι: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d\left(v\hat{t}\right)}{dt} = \dfrac{dv}{dt}\hat{t} + v\dfrac{d\hat{t}}{dt} = \left(\dfrac{dv}{dt}\right)\hat{t} + v\left(\dfrac{d\hat{t}}{ds} \times \dfrac{ds}{dt}\right)$

$$\Rightarrow \vec{a} = \left(\frac{dv}{dt}\right)\hat{t} + \left(kv^2\right)\hat{n}$$

Η επιτάχυνση επομένως δεν έχει την διεύθυνση κατά μήκος της διαδρομής αλλά περιέχει και μια συνιστώσα κάθετη στην τοπική διεύθυνση της διαδρομής