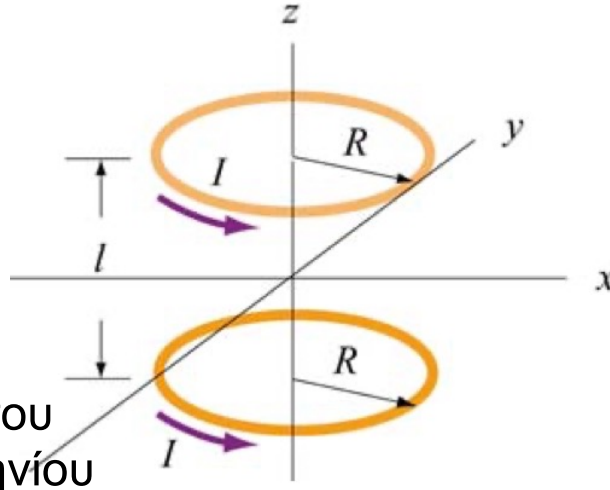
Εφαρμογές του νόμου του Ampere

Μαγνητικό πεδίο πηνίων Helmholtz- ομόρροπα ρεύματα



Θεωρήστε δύο πηνία το καθένα με *N* σπείρες ακτίνας *R* κάθετα στον άξονα συμμετρίας και με τα κέντρα τους στις θέσεις $z = -l/2$ και $z = +l/2$.

Θεωρήστε ότι τα πηνία διαρρέονται από σταθερό ρεύμα ίδιας φοράς.

Θα βρούμε το μαγνητικό πεδίο σε ένα σημείο στον άξονα του συστήματος και σε απόσταση *z* από το κέντρο του ενός πηνίου

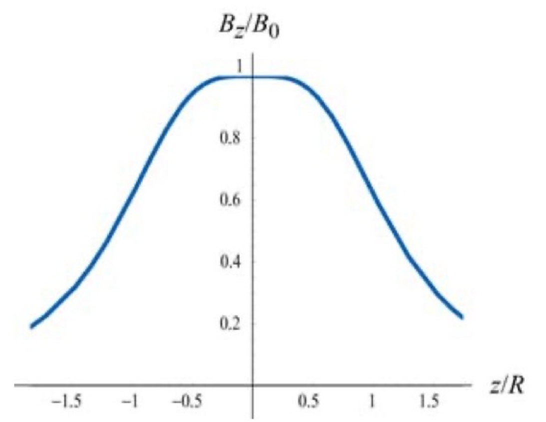
Υπολογίσαμε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ρευματοφόρος κυκλικός βρόχος σε σημείο *P* στον άξονά του και σε απόσταση *z* από το κέντρο του:

$$B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{(2[R^2 + z^2]^{3/2})}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή της επαλληλίας στο σημείο *P*(*z*,0) που βρίσκεται σε απόσταση $z - l/2$ και $z + l/2$ από το κέντρο των δύο πηνίων:

$$B_z = B_{top} + B_{\text{bottom}}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 N I R^2}{2}\left[\frac{1}{[R^2 + (z - l/2)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[R^2 + (z + l/2)^2]^{3/2}}\right]$$



Το γράφημα του B_z/B_0 όπου $B_0 = \mu_0 N I/[R(5/4)^{3/2}]$ όταν $z = 0$ και $l = R$, συναρτήσει του z/R

Μαγνητικό πεδίο πηνίων Helmholtz

Εξετάζουμε περισσότερα τα χαρακτηριστικά των πηνίων Helmholtz, έχουμε:

Παραγώγιση της σχέσης του B_z ως προς *z*, δίνει:

$$B_z' = \frac{dB_z}{dz} = \frac{\mu_0 NIR^2}{2}\left[-\frac{3(z-l/2)}{[R^2+(z-l/2)^2]^{5/2}} - \frac{3(z+l/2)}{[R^2+(z+l/2)^2]^{5/2}}\right]$$

Στο σημείο *z*=0 η παράγωγος μηδενίζεται, $\frac{dB_z}{dz} = 0$ και θα υπάρχει ακρότατο στο B_z:

Η 2η παράγωγος του B_z ως προς *z* δίνει:

$$B_z'' = \frac{d^2B_z}{dz^2} = \frac{\mu_0 NIR^2}{2}\left[-\frac{3}{[R^2+(z-l/2)^2]^{5/2}} + \frac{15(z-l/2)^2}{[R^2+(z-l/2)^2]^{7/2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{[R^2+(z+l/2)^2]^{5/2}} + \frac{15(z+l/2)^2}{[R^2+(z+l/2)^2]^{7/2}}\right]$$

Στο σημείο *z*=0 η 2η παράγωγος παίρνει τιμή:

$$B_z''(z=0) = \left.\frac{d^2B_z}{dz^2}\right|_{z=0} = \frac{\mu_0 NIR^2}{2}\left[-\frac{6}{[R^2+(l/2)^2]^{5/2}} + \frac{15l^2}{2[R^2+(l/2)^2]^{7/2}}\right] \Rightarrow$$

$$B_z''(z=0) = -\frac{\mu_0 NIR^2}{2}\left[\frac{6(R^2-l^2)}{[R^2+(l/2)^2]^{7/2}}\right]$$

Μαγνητικό πεδίο πηνίων Helmholtz

Βλέπουμε ότι στο σημείο *z*=0, η 2η παράγωγος: $B_z''(0) = -\frac{\mu_0 N I R^2}{2}\left[\frac{6(R^2 - l^2)}{[R^2 + (l/2)^2]^{7/2}}\right]$

μηδενίζεται όταν: $R = l$

δηλαδή όταν η απόσταση μεταξύ των πηνίων είναι ίση με την ακτίνα των πηνίων

- Η συνθήκη $R = l$ για δύο πηνία είναι γνωστή ως πηνία Helmholtz

Για μικρές τιμές του *z* μπορούμε να πάρουμε το ανάπτυγμα Taylor ως προς z = 0:

$$B_z(z) = B_z(0) + zB_z'(0) + \frac{1}{2!}z^2 B_z''(0) + \frac{1}{3!}z^3 B_z'''(0) + \cdots$$

Το γεγονός ότι οι πρώτες δύο παράγωγοι του B_z μηδενίζονται για *z* =0 υποδηλώνει ότι το μαγνητικό πεδίο είναι αρκετά ομογενές για μικρές τιμές του *z*. Θα μπορούσαμε να εξετάσουμε και την 3η παράγωγο του B_zότι μηδενίζεται στο *z* = 0.

Είχαμε υπολογίσει τη δύναμη που αναπτύσσεται σε ένα μαγνητικό δίπολο, $\vec{\mu}$, μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ και είχαμε δει ότι είναι: $\vec{F}_B = \vec{\nabla}(\vec{\mu}\cdot\vec{B})$

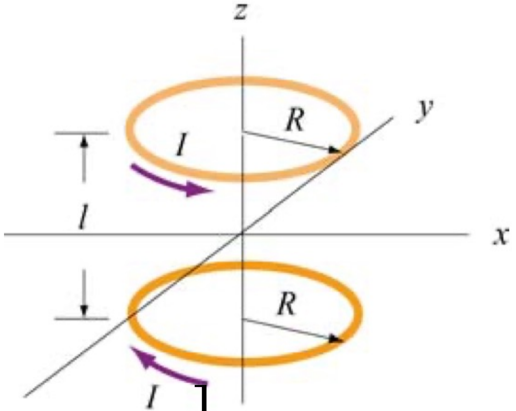
Αν θέσουμε το δίπολο στο μαγνητικό πεδίο στο *z* = 0 ώστε $\vec{\mu} = \mu_z \hat{k}$, τότε η μαγνητική δύναμη που θα ασκείται στο δίπολο θα είναι:

$$\vec{F}_B = \vec{\nabla}(\vec{\mu}\cdot\vec{\mathrm{B}}) = \vec{\nabla}(\mu_z B_z) \Rightarrow \vec{F}_B = \mu_z \frac{dB_z}{dz}\hat{k}$$

και αναμένεται να είναι πολύ μικρή εφόσον το πεδίο είναι ομοιόμορφο

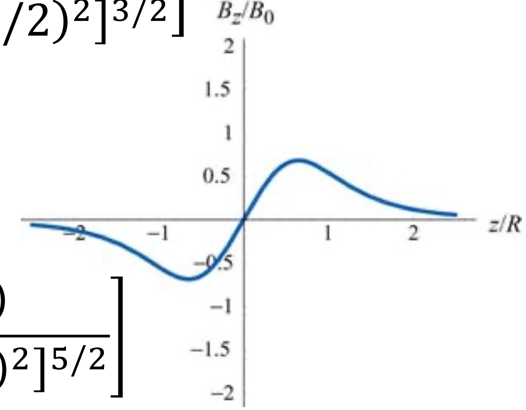
Μαγνητικό πεδίο πηνίων Helmholtz – αντίθετα ρεύματα

Θεωρήστε στην περίπτωση αυτή που τα δύο πηνία διαρρέονται από ρεύματα αντίθετης φοράς.



Εφαρμόζουμε και πάλι την αρχή της επαλληλίας για την συνεισφορά των δύο πηνίων στο μαγνητικό πεδίο σε ένα σημείο *P*(z,0):

$$B_z = B_{1z} + B_{2z} = \frac{\mu_0 NIR^2}{2}\left[\frac{1}{[R^2+(z-l/2)^2]^{3/2}} - \frac{1}{[R^2+(z+l/2)^2]^{3/2}}\right]$$



Το γράφημα B_z/B_0 με $B_0 = \mu_0 NI/2R$ και $l = R$

Παραγώγιση του B_z ως προς *z* δίνει:

$$B_z' = \frac{dB_z}{dz} = \frac{\mu_0 NIR^2}{2}\left[-\frac{3(z-l/2)}{[R^2+(z-l/2)^2]^{5/2}} + \frac{3(z+l/2)}{[R^2+(z+l/2)^2]^{5/2}}\right]$$

Στο ενδιάμεσο σημείο, *z* = 0, θα έχουμε ότι:

$$B_z'(0) = \left.\frac{dB_z}{dz}\right|_{z=0} = \frac{\mu_0 NIR^2}{2}\frac{3l}{[R^2+(l/2)^2]^{5/2}} \neq 0$$

Μαγνητικό πεδίο πηνίων Helmholtz – αντίθετα ρεύματα

Η 1η παράγωγος είναι διαφορετική από 0: $B_z'(0) = \frac{\mu_0 N I R^2}{2}\frac{3l}{[R^2+(l/2)^2]^{5/2}} \neq 0$

Η συνισταμένη δύναμη που αναπτύσσεται σε ένα μαγνητικό δίπολο, $\vec{\mu} = \mu_z \hat{k}$, που εισέρχεται στο σημείο $z = 0$, θα είναι:

$$\vec{F}_B = \vec{\nabla}\left(\vec{\mu}\cdot\vec{\mathrm{B}}\right) = \vec{\nabla}(\mu_z B_z) \Rightarrow \vec{F}_B = \mu_z \frac{dB_z(0)}{dz}\hat{k} \Rightarrow \vec{F}_B = \mu_z \frac{\mu_0 N I R^2}{2}\frac{3l}{[R^2+(l/2)^2]^{5/2}}\hat{k}$$

Για $R = l$ θα πάρουμε: $\vec{F}_B = \frac{3\mu_z\mu_0 N I}{2R^2[5/4]^{5/2}}\hat{k}$

Ρεύμα Μετατόπισης

Ρεύμα Μετατόπισης

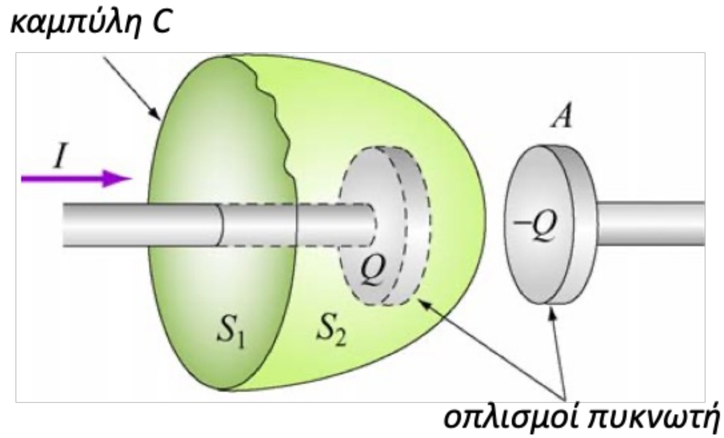
Είδαμε ότι ο νόμος του Ampere μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ που δημιουργεί ένα ρεύμα *I*, αρκεί το ρεύμα αυτό να είναι συνεχές και σταθερό

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{encl.}$$

Το ρεύμα $I_{encl.}$, εκφράζει το συνολικό ρεύμα που περικλείεται από την καμπύλη C και ονομάζεται ρεύμα αγωγιμότητας

Αν η ένταση του ρεύματος δεν είναι σταθερή, τότε ο νόμος του Ampere αποτυγχάνει.

Κάτι τέτοιο συμβαίνει κατά την φόρτιση για παράδειγμα ενός πυκνωτή, όπου το ρεύμα δεν είναι σταθερό



Σύμφωνα με τον νόμο του Ampere, το ρεύμα που περικλείεται στην καμπύλη C θα δώσει ότι υπάρχει πεδίο:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{encl.} \neq 0$$

Η καμπύλη C μπορεί να θεωρηθεί σύνορο της επιφάνειας S_1.

Αλλά θα μπορούσε να θεωρηθεί και σύνορο της επιφάνειας S_2 που βρίσκεται ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή, τότε:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{encl.} = 0$$

Ρεύμα Μετατόπισης

Ανάλογα με το ποια επιφάνεια έχουμε θεωρήσει, το συνολικό ρεύμα μπορεί ή όχι να είναι μηδέν και καταλήγουμε σε αντίφαση.

Για να εξασφαλιστεί ότι ο νόμος του Ampere ισχύει και για την περίπτωση των κυκλωμάτων ακόμα και όταν περιέχουν πυκνωτές που παρουσιάζεται κενό ανάμεσα στους οπλισμούς τους, ο Maxwell εισήγαγε ακόμα έναν όρο στον νόμο του Ampere:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (I + I_d)$$

Ο όρος I_d ονομάζεται **ρεύμα μετατόπισης**

Το ρεύμα μετατόπισης ορίζεται ως: $\boldsymbol{I_d = \frac{\varepsilon_0 d\Phi_e}{dt}}$

όπου, $\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια των οπλισμών του πυκνωτή

Ρεύμα Μετατόπισης

Αν εφαρμόσουμε τον γενικευμένο αυτό νόμο με την επιφάνεια S_1, το ρεύμα μετατόπισης είναι μηδέν και θα έχουμε:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$ όπως με τον νόμο του Ampere

Αν επιλέξουμε την επιφάνεια S_2, το ρεύμα αγωγιμότητας είναι μηδέν, $I = 0$ και το ρεύμα μετατόπισης υπολογίζεται από την ηλεκτρική ροή που διέρχεται από τους οπλισμούς του πυκνωτή.

Θα έχουμε: $\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = EA,$ όπου A το εμβαδό των οπλισμών του πυκνωτή.

Από τον νόμο του Gauss: $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 A}$

Επομένως η ροή θα είναι: $\Phi_e = EA = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

Το ρεύμα μετατόπισης προκύπτει ότι είναι: $I_d = \varepsilon_0 \dfrac{d\Phi_e}{dt} = \varepsilon_0 \dfrac{1}{\varepsilon_0} \dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{dQ}{dt} = I$

Εφόσον: $I_d = I$ καταλήγουμε στον ίδιο αποτέλεσμα με τον νόμο Ampere

Νόμος Ampere-Maxwell

Έχουμε επομένως τον τροποποιημένο νόμου του Ampere: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (I + I_d)$

όπου $I_d = \frac{\varepsilon_0 d\Phi_e}{dt}$ και $\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

Αυτός ο τροποποιημένος νόμος, ονομάζεται νόμος Ampere-Maxwell

Εκφράζει το γεγονός ότι μαγνητικά πεδία παράγονται από ρεύματα αγωγιμότητας και ρεύματα μετατόπισης. Δηλαδή και από ρεύματα που διαρρέουν αγωγούς αλλά και από χρονικά μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά πεδία

Παράδειγμα:

Στους οπλισμούς ενός πυκνωτή χωρητικότητας C=2μF εφαρμόζεται μεταβαλλόμενη διαφορά δυναμικού: $V = V_0 sin\omega t$ όπου $V_0 = 5V$ και $\omega = 10kHz$. Πόσο ρεύμα διέρχεται από τον πυκνωτή;

- Το ρεύμα αγωγιμότητας μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή είναι 0
- Το ρεύμα μετατόπισης, σύμφωνα με τα προηγούμενα, ισούται με το ρεύμα αγωγιμότητας στους αγωγούς που συνδέονται με τους οπλισμούς του πυκνωτή

$$I_d = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow I_d = \frac{d(CV)}{dt} = \mathrm{C}\frac{dV}{dt} = CV_0 \frac{d(sin\omega t)}{dt} = CV_0 \omega cos\omega t \Rightarrow I = I_0 cos\omega t$$

όπου $I_0 = CV_0\omega = 2\times10^{-6}F\times5V\times10\times10^3 Hz = 0.1A = 100mA$