ΦΥΣ. 211
ΕΡΓΑΣΙΑ # 6
Επιστροφή την Τετάρτη 9/3/2016 στο τέλος της διάλεξης

1. Ένα σώμα μάζας m, κινείται σε υπερβολική τροχιά που περνά από ένα σώμα μάζας M, η θέση του οποίου θεωρείται σταθερή. Η ταχύτητα του σώματος m στο άπειρο είναι υ_0, και η παράμετρος πρόσκρουσης b. (α) Δείξτε ότι η γωνία απόκλισης του σώματος m, είναι: $\varphi = \pi - 2\tan^{-1}(\gamma b)$, όπου $\gamma = \upsilon_0^2/GM$. (β) Έστω ότι $d\sigma$ είναι η ενεργός διατομή (μετρούμενη όταν το σώμα m είναι αρχικά στο άπειρο) η οποία σκεδάζεται σε στερεά γωνία $d\Omega$ στη γωνία φ. Δείξτε ότι $\dfrac{d\sigma}{d\Omega} = \dfrac{1}{4\gamma^2 \sin^4(\varphi/2)}$

Όπως έχουμε δει, η εξίσωση κίνησης για την περίπτωση κίνησης ενός σώματος σε κεντρικό δυναμικό δύναμης r^{-2}, δίνεται από την σχέση:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -m\frac{F}{\ell^2 u^2}$$ όπου $F = kQqu^2$ για δύναμη Coulomb ή $F = GMmu^2$

Η φύση της αλληλεπίδρασης (ελκτική ή απωστική) εξαρτάται από το πρόσημο του γινομένου των φορτίων για την περίπτωση του ηλεκτροστατικού δυναμικού

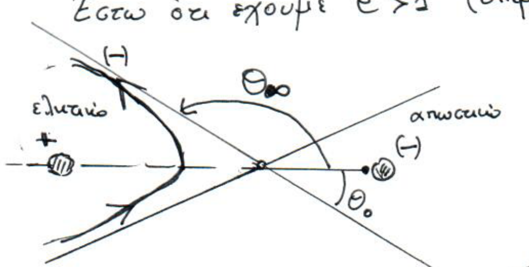
Θεωρούμε ότι $\Gamma = -kQq$ οπότε η εξίσωση κίνησης είναι: $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = \Gamma m/\ell^2$

Η σχέση είναι ίδια για βαρυτικό πεδίο όπου $\Gamma < 0$

Όπως είδαμε η εξίσωση της τροχιάς είναι: $r = \dfrac{\ell^2}{m\Gamma}\Big/(1+e\cos\theta)$

ενώ η ενέργεια δίνεται από τη σχέση: $E = \dfrac{m\Gamma}{2\ell^2}(e^2-1)$.

Έστω ότι έχουμε $e>1$ (υπερβολική τροχιά) και η αλληλεπίδραση είναι ελκτική



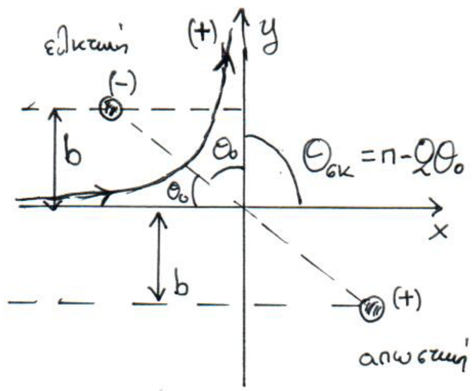
Οι ασύμπτωτες ευθείες της εξίσωσης της τροχιάς βρίσκονται αν θεωρήσουμε ότι $r\to\infty$ οπότε έχουμε:

$$r\to\infty \Rightarrow 1+e\cos\theta_\infty = 0 \Rightarrow \boxed{\cos\theta_\infty = -\frac{1}{e}}$$

Στο διπλανό σχήμα, η γωνία $\theta_0 = \pi - \theta_\infty$ και άρα:

$$\cos\theta_0 = -\cos\theta_\infty \Rightarrow \boxed{\cos\theta_0 = \frac{1}{e}}$$

Στη μικρότερη τιμή της (αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη τιμή της εκκεντρότητας e), $\theta_\infty \simeq \frac{\pi}{2}$ οπότε $\theta_0 \simeq \frac{\pi}{2}$ και οι δυο ασύμπτωτες είναι σχεδόν κάθετες μεταξύ τους και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μια από αυτές είναι παράλληλη προς τον x- άξονα.



Για συγκεκριμένη ενέργεια E, η τιμή της Θ_0 είναι συνάρτηση της στροφορμής:

$$E = \frac{m\Gamma^2}{2\ell^2}\left(e^2-1\right) = \frac{m\Gamma^2}{2\ell^2}\left(\frac{1}{\cos^2\Theta_0}-1\right) = \frac{m\Gamma^2}{2\ell^2}\frac{\sin^2\Theta_0}{\cos^2\Theta_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan^2\Theta_0 = \frac{2E\ell^2}{m\Gamma^2} \Rightarrow \boxed{\tan\Theta_0 = \frac{\ell}{\Gamma}\sqrt{\frac{2E}{m}}}$$

Η σχέση που συνδέει την παράμετρο κρούσης b με την στροφορμή είναι:

$$\ell = mvb \Rightarrow vb = \frac{\ell}{m}.$$

Όταν το σώμα βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση από το κέντρο της δύναμης $v \to v_0$

$$\Rightarrow v_0 b = \frac{\ell}{m}$$

Αλλά στην θέση αυτή $(r \sim \infty)$ $E = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow m v_0^2 = 2E$

Έτσι θα έχουμε: $\tan\Theta_0 = \frac{m v_0 b}{\Gamma}\sqrt{\frac{\cancel{m} v_0^2}{\cancel{m}}} \Rightarrow \boxed{\tan\Theta_0 = \frac{v_0^2 b m}{\Gamma}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \tan\Theta_0 = \frac{v_0^2 b}{GM\cancel{m}}\cancel{m} \Rightarrow \boxed{\tan\Theta_0 = \gamma b \quad \text{όπου} \quad \gamma = \frac{v_0^2}{GM}}$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί συναρτήσει της ενέργειας ως:

$\boxed{\tan\Theta_0 = \frac{2Eb}{\Gamma}}$ οπότε έχουμε δύο σχέσεις για την παράμετρο κρούσης b και την γωνία σκέδασης. Θα έχουμε ότι:

$$\Theta_{\sigma\kappa} = \pi - 2\Theta_0 \Rightarrow \Theta_{\sigma\kappa} = \pi - 2\tan^{-1}\Theta_0 = \pi - 2\tan^{-1}\left(\gamma b\right)$$

Αν έχουμε μετωπική σύγκρουση, τότε $b \to 0$ οπότε $\tan\Theta_0 \simeq 0$ και άρα $\Theta_{\sigma\kappa} = \pi$

Δηλαδή το σώμα οπισθοσκεδάζεται.

(β) Θέλουμε να καταλήξουμε στην εξίσωση της ενεργού διατομής σκέδασης:

Είδαμε ότι: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\Theta_{\sigma\kappa}}\left|\frac{db}{d\Theta_{\sigma\kappa}}\right|$ όπου η απόλυτη τιμή χρειάζεται για να λάβουμε υπόψη ότι η ενεργός διατομή σκέδασης αυξάνει όταν η παράμετρος πρόσκρουσης ελαττώνεται

Είδαμε ότι: $\tan\Theta_0 = \frac{2Eb}{\Gamma} \Rightarrow b = \frac{\Gamma}{2E}\tan\Theta_0$

Επομένως $\frac{db}{d\Theta_{\sigma\kappa}} = \left(\frac{d\Theta_0}{d\Theta_{\sigma\kappa}}\right)\left(\frac{db}{d\Theta_0}\right) = \left[\frac{d}{d\Theta_{\sigma\kappa}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\Theta_{\sigma\kappa}}{2}\right)\right]\left[\frac{db}{d\Theta_0}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\Gamma}{2E}\frac{d\tan\Theta_0}{d\Theta_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{db}{d\Theta_{\sigma\kappa}} = -\frac{1}{2}\frac{\Gamma}{2E}\frac{d(\sin\Theta_0/\cos\Theta_0)}{d\Theta_0} = -\frac{1}{2}\frac{\Gamma}{2E}\frac{\sin^2\Theta_0+\cos^2\Theta_0}{\cos^2\Theta_0} \Rightarrow \frac{db}{d\Theta_{\sigma\kappa}} = -\frac{1}{2}\frac{\Gamma}{2E}\frac{1}{\cos^2\Theta_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{db}{d\Theta_{\sigma\kappa}}\right| = \frac{1}{4}\frac{\Gamma}{E}\frac{1}{\cos^2\Theta_0}$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση της ενεργού διατομής: $\frac{d\sigma(\Theta_{\sigma\kappa})}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\Theta_{\sigma\kappa}}\left|\frac{db}{d\Theta_{\sigma\kappa}}\right| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\Gamma}{2E}\frac{\sin\Theta_0}{\cos\Theta_0}\frac{1}{\sin\Theta_{\sigma\kappa}}\frac{1}{4}\frac{\Gamma}{E}\frac{1}{\cos^2\Theta_0} \Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\Gamma^2}{8E^2}\frac{1}{\cos^3\Theta_0}\frac{\sin\Theta_0}{\sin\Theta_{\sigma\kappa}}}$$

Αλλά $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\Theta_{\sigma\kappa}}{2}\right) = \cos\left(\frac{\Theta_{\sigma\kappa}}{2}\right)$ και $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\Theta_{\sigma\kappa}}{2}\right) = \sin\frac{\Theta_{\sigma\kappa}}{2}$

Αλλά έχουμε ακόμα ότι $\Theta_{\sigma\kappa} = \pi - 2\Theta_0 \Rightarrow \Theta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\Theta_{\sigma\kappa}}{2}$

Αντικαθιστούμε όλες τις σχέσεις με Θ_0 στην $d\sigma/d\Omega$ εξίσωση οπότε θα έχουμε:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\Gamma^2}{8E^2}\frac{1}{\sin^3\frac{\Theta_{\sigma\kappa}}{2}}\frac{\cos\frac{\Theta_{\sigma\kappa}}{2}}{\sin\Theta_{\sigma\kappa}} = \frac{\Gamma^2}{8E^2}\frac{\cancel{\cos\frac{\Theta_{\sigma\kappa}}{2}}}{\sin^3\frac{\Theta_{\sigma\kappa}}{2}\,2\sin\frac{\Theta_{\sigma\kappa}}{2}\cancel{\cos\frac{\Theta_{\sigma\kappa}}{2}}} \Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\Gamma^2}{16E^2\sin^4\frac{\Theta_{\sigma\kappa}}{2}}}$$

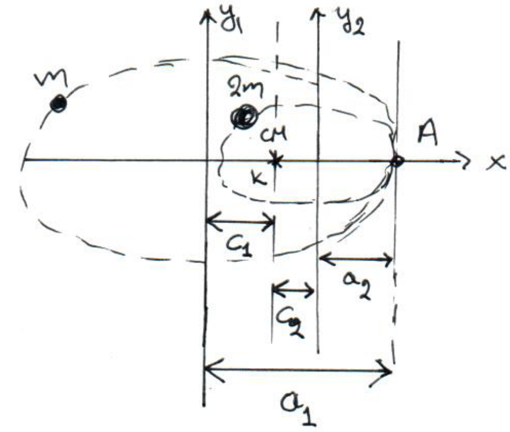
Εφόσον για την περίπτωση του βαρυτικού δυναμικού $\Gamma = GMm$ και είδαμε ότι $2E = mv_0^2 \Rightarrow 4E^2 = m^2v_0^4$ & $\Gamma^2 = G^2M^2m^2$ οπότε

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\left(\frac{2E}{\Gamma}\right)^2 4\sin^4\frac{\Theta_{\sigma\kappa}}{2}} \Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma(\Theta_{\sigma\kappa})}{d\Omega} \quad \frac{1}{4\gamma^2\sin^4\Theta_{\sigma\kappa}/2}}$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{d\sigma(0)}{d\Omega} = \infty$ και $\frac{d\sigma(\pi)}{d\Omega} = 0$.

Ακόμα η σχέση αυτή ισχύει ίδια για ελκτική ή απωστική αλληλεπίδραση αφού Γ είναι υψωμένο στο τετράγωνο. Όμως δεν μπορούμε να ξέρουμε αν είναι ελκτική ή απωστική αλληλεπίδραση με τα αποτελέσματα της σκέδασης αυτής.

2. Δύο μάζες *m* και 2*m*, κινούνται σε τροχιές ως προς το κέντρο μάζας τους, *CM*. Αν οι τροχιές είναι κυκλικές τότε δεν τέμνονται, αλλά αν είναι ελλειπτικές τότε τέμνονται. Ποια είναι η μικρότερη τιμή της εκκεντρότητας για την οποία οι τροχιές τέμνονται;



Τα σώματα στρέφονται γύρω από το κέντρο μάζας τους. Για να τέμνονται οι δύο ελλειπτικές τροχιές θα πρέπει η απόσταση της μάζας m από το ΚΜ στο σημείο εγγύτερης προσέγγισης να ισούται με την απόσταση της μάζας $2m$ στο σημείο της μέγιστης απόστασης από το ΚΜ.

Δηλαδή θα πρέπει το περιήλιο της m να συμπίπτει με το αφήλιο της $2m$. Από το σχήμα φαίνεται ότι:

$KA = a_1 - C_1$ (1) όπου C_1 είναι η εστιακή απόσταση της έλλειψης της m

$KA = a_2 + C_2$ (2) όπου C_2 είναι η εστιακή απόσταση της έλλειψης της $2m$

Εφόσον τα σώματα στρέφονται ως προς το ΚΜ, θα έχουμε:

και ξέρουμε ότι:
$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}_1 = -\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\vec{r}_1}{\vec{r}_2} = -\frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \frac{\vec{r}_1}{\vec{r}_2} = -2$$

Δηλαδή οι αποστάσεις που αντιστοιχούν στη δεύτερη έλλειψη (αυτή της μάζας m) είναι όλες διπλάσιες της έλλειψης που αντιστοιχεί στην τροχιά του σώματος $2m$.
Εφόσον όλα τα χαρακτηριστικά της μιας έλλειψης είναι διπλάσια, αντικαθιστούμε στις (1) κ (2):
$$a_1 - c_1 = a_2 + c_2 \Rightarrow 2a_2 - 2c_2 = a_2 + c_2 \Rightarrow a_2 = 3c_2$$

$\Rightarrow \dfrac{c_2}{a_2} = \dfrac{1}{3}$ Αλλά η εστιακή απόσταση είναι: $c = ae$ οπότε από την τελευταία σχέση έχουμε: $e = \dfrac{1}{3}$

Αυτή είναι η ελάχιστη τιμή εκκεντρότητας για να έχουμε ένα σημείο τομής. Για μεγαλύτερη τιμή εκκεντρότητας, θα υπάρχουν 2 σημεία τομής για τις δύο τροχιές.

3. Ένας σώμα κινείται με ταχύτητα υ_0 και παράμετρο πρόσκρουσης b, ξεκινά πολύ μακριά από ένα πλανήτη μάζας M. Να βρεθεί η απόσταση εγγύτερης προσέγγισης στον πλανήτη.

Έστω το σώμα έχει ταχύτητα υ και στροφορμή ℓ στο σημείο της εγγύτερης απόστασης.

Από διατήρηση της στροφορμής θα έχουμε ότι η στροφορμή του στο σημείο από το οποίο ξεκινά θα είναι: $\ell_\infty = m\upsilon_0 b = \ell_f = m\upsilon r_{min} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \upsilon_0 b = \upsilon r_{min} \Rightarrow r_{min} = \frac{\upsilon_0}{\upsilon} b \Rightarrow \boxed{\upsilon = \frac{\upsilon_0}{r_{min}} b} \quad (1)$$

Από διατήρηση της ενέργειας θα έχουμε: $E_\infty = E_{r_{min}} \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon^2 - \frac{GM}{r_{min}}$

$$\Rightarrow \upsilon_0^2 = \upsilon^2 - \frac{2GM}{r_{min}} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \upsilon_0^2 = \frac{\upsilon_0^2}{r_{min}^2} b^2 - \frac{2GM}{r_{min}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_0^2 r_{min}^2 + 2GM r_{min} - \upsilon_0^2 b^2 = 0 \Rightarrow r_{min} = \frac{2GM}{2\upsilon_0^2} \pm \frac{\sqrt{4G^2M^2 + 4\upsilon_0^4 b^2}}{2\upsilon_0^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{min} = -\frac{GM}{\upsilon_0^2} + \sqrt{\left(\frac{GM}{\upsilon_0^2}\right)^2 + b^2}}$$ όπου απορρίπτεται η "−" λύση.

Προφανώς για $\upsilon_0 \Rightarrow \infty$ έχουμε δει ότι $r_{min} \simeq b$, ενώ για $\upsilon_0 \to 0$, $r_{min} \to 0$