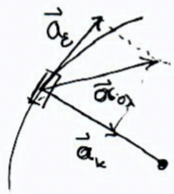
ΦΥΣ. 111

6ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή 19.10.2020**

1. Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την ηρεμία σε μία στροφή ακτίνας 120m και επιταχύνει με 1.0m/s^2. Ποιά είναι η γωνία που έχει καλύψει το αυτοκίνητο όταν το μέτρο της συνισταμένης επιτάχυνσής του είναι 2.0m/s^2;



Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, το αυτοκίνητο επιταχύνει με σταθερή επιτάχυνση $1m/s^2$ και επομένως η εφαπτομενική του επιτάχυνση είναι σταθερή.

Καθώς αυξάνει η εφαπτομενική του ταχύτητα αυξάνει και η ακτινική του επιτάχυνση. Μετά από χρόνο t_1, το αυτοκίνητο θα έχει διαγράψει γωνία $\theta_1-\theta_0$ και η ολική του επιτάχυνση θα είναι: $2m/s^2$.

Η γραμμική ταχύτητα του αυτοκινήτου μετά από χρόνο t_1 θα είναι:

$$v = \cancel{v_0}^{0} + a_\varepsilon \cdot t \Rightarrow v = (1m/s^2)t.$$

Την χρονική στιγμή t η ακτινική επιτάχυνση του αυτοκινήτου θα είναι: $a_k = \frac{v^2}{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_k = \frac{a_\varepsilon^2 t^2}{R}$ όπου R η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς

Η συνολική επιτάχυνση του αυτοκινήτου θα είναι: $a_{ol} = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_k^2} = \sqrt{a_\varepsilon^2 + \frac{a_\varepsilon^4 t^4}{R^2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{a_{ol} = a_\varepsilon \sqrt{1 + \frac{a_\varepsilon^2 t^4}{R^2}}} \Rightarrow \frac{a_{ol}^2}{a_\varepsilon^2} = 1 + \frac{a_\varepsilon^2 t^4}{R^2} \Rightarrow t^2 = \sqrt{\frac{R^2\left[\left(\frac{a_{ol}^2}{a_\varepsilon^2}\right)-1\right]}{a_\varepsilon^2}} \Rightarrow$$

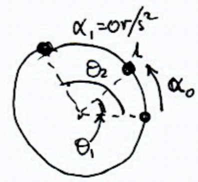
$$\Rightarrow t^2 = \sqrt{\frac{(120)^2 \cancel{m^2}(4-1)}{1^2 \cancel{m^2}/s^4}} = \sqrt{120^2 \cdot 3 (s^4)} = 120\sqrt{3}\, s^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{120\sqrt{3}}\, s \Rightarrow \underline{t = 14.4 s}$$

Η γωνιακή μετατόπιση θα είναι: $\theta_1 - \cancel{\theta_0}^{0} = \cancel{\omega_0 t}^{0} + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_\varepsilon}{R}\right)t^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1 \cancel{m}/\cancel{s^2}}{\cancel{120}\, \cancel{m}}\right)(\cancel{120}\sqrt{3})\cancel{s^2} \Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \underline{\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ rad}} \text{ ή } \underline{49.6^\circ}$$

2. Ένας μαγνητικός δίσκος υπολογιστή έχει διάμετρο 8.0cm και βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία. Μια μικρή κουκκίδα είναι σημειωμένη στην περιφέρεια του δίσκου. Ο δίσκος επιταχύνει με 600rad/s^2 για 0.5s και στη συνέχεια περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα για ακόμα 0.5s. Ποιά είναι η ταχύτητα της κουκκίδας τη χρονική στιγμή t = 1.0s; Πόσες περιστροφές έχει κάνει ο δίσκος;



Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις της γωνιακής ταχύτητας:

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha t = \cancel{0}\ rad/s + 600\left(\frac{rad}{s^2}\right) 0.5\cancel{s} = 300\ rad/s$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \alpha t = 300\ rad/s + 0\ \frac{rad}{s^2}(1-0.5)\cancel{s} = 300\ rad/s$$

Η ταχύτητα της κουκκίδας θα είναι: $v_2 = \omega_2 \cdot r = (0.04m)(300\ rad/s) = 12 m/s$

Ο αριθμός των περιστροφών του δίσκου κατά το χρονικό διάστημα από $t_0 \to t_2 = 1 sec$ θα είναι:

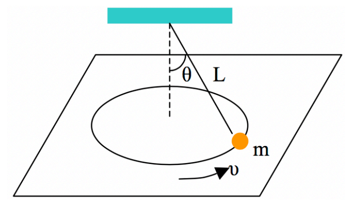
$$\theta_1 = \cancelto{0}{\theta_0} + \cancelto{0}{\omega_0 t_1} + \frac{1}{2}\alpha t_1^2 = \frac{1}{2}\alpha t_1^2 = \frac{1}{2}\, 600\left(\frac{rad}{\cancel{s^2}}\right)\cdot 0.5^2\, \cancel{s^2} \Rightarrow \underline{\theta_1 = 75\ rad}$$

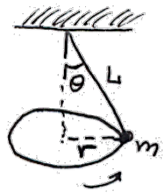
$$\theta_2 = \theta_1 + \omega_1(t_2 - t_1) = 75 + 300\ \frac{rad}{\cancel{s}}\cdot 0.5\cancel{s} \Rightarrow \theta_2 = \underline{\underline{225\ rad}}$$

Αλλά 1 περιστροφή είναι 2π rad επομένως ο δίσκος έχει εκτελέσει $225\cancel{rad}\,\frac{1\pi}{2\pi(\cancel{rad})} \Rightarrow$

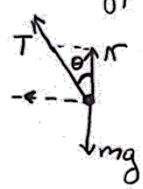
$\Rightarrow$ ο αριθμός περιστροφών: $\frac{225}{2\cdot 3.14} = \underline{35.8\ \text{περιστροφές}}$

3. Μία μάζα *m* εξαρτάται από την άκρη ενός νήματος μήκους *L* και διαγράφει κυκλική τροχιά πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, όπως στο διπλανό σχήμα. Αν το νήμα σχηματίζει γωνία *θ* με την κατακόρυφο διεύθυνση και η μάζα *m* κινείται με ταχύτητα *υ*, ποιά είναι η αντίδραση του επιπέδου στην μπάλα; Για ποιά ταχύτητα η δύναμη αυτή μηδενίζεται;





Το διάγραμμα ελευθέρου σώματος είναι:



$$\Sigma F_x = m a_x \Rightarrow T\sin\theta = m a_x \quad (1)$$

Η καθαρή δύναμη ΣF_x παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης αφού το σώμα κινείται πάνω σε κυκλική τροχιά. Άρα

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_x = m\dfrac{\upsilon^2}{r} \\ \text{αλλά } r = L\sin\theta\end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma F_x = m\frac{\upsilon^2}{L\sin\theta} = m a_x$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} m\frac{\upsilon^2}{L\sin\theta} = T\sin\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{m\upsilon^2}{L\sin^2\theta}} \quad (A)$$

Η συνισταμένη στη διεύθυνση y είναι:

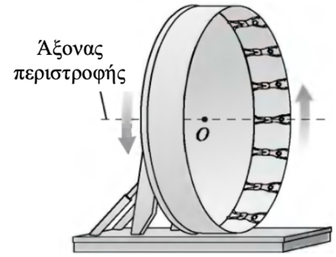
$$\Sigma F_y = m a_y \Rightarrow T\cos\theta + N - mg = 0 \Rightarrow N = mg - T\cos\theta \stackrel{(A)}{\Rightarrow}$$

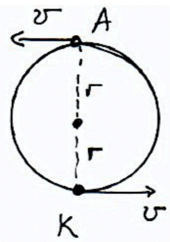
$$\Rightarrow \boxed{N = mg - \frac{m\upsilon^2}{L\sin^2\theta}\cos\theta} \quad (B)$$

Όταν $N = 0 \stackrel{(B)}{\Rightarrow} \cancel{m}g = \dfrac{\cancel{m}\upsilon^2}{L\sin^2\theta}\cos\theta \Rightarrow \upsilon^2 = \sqrt{\dfrac{gL\sin^2\theta}{\cos\theta}} \Rightarrow$

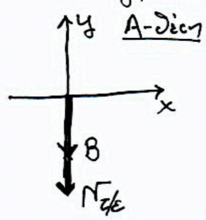
$$\Rightarrow \boxed{\upsilon = \sqrt{gL\sin\theta\tan\theta}}$$

4. Σε ένα λούνα-πάρκ υπάρχει ένα παιχνίδι στο οποίο οι επιβάτες στέκονται σε ένα περιστρεφόμενο δακτυλίδι ακτίνας 8m. Το δακτυλίδι αρχικά περιστρέφεται σε οριζόντιο κύκλο και όταν έχει αποκτήσει αρκετή ταχύτητα τότε γυρνά ώστε να περιστρέφεται σε κατακόρυφο κύκλο όπως στο σχήμα. (α) Υποθέστε ότι το δακτυλίδι περιστρέφεται εκτελώντας 1 περιστροφή κάθε 4.5s και ότι η μάζα του κάθε επιβάτη είναι 55kg. Με τη δύναμη πιέζει το δακτυλίδι τον επιβάτη στα τοιχώματα του δακτυλιδιού όταν ο επιβάτης βρίσκεται στο μέγιστο ύψος του κύκλου; Ποιά είναι η δύναμη αυτή στο κάτω μέρος του κύκλου; (β) Ποιά είναι η μεγαλύτερη περίοδος περιστροφής την οποία μπορεί να έχει το δακτυλίδι ώστε να μη πέσει ο επιβάτης όταν βρίσκεται στο υψηλότερο σημείο της περιστροφής;

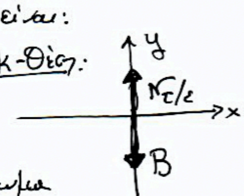




(α) Όταν ο επιβάτης είναι στο πάνω μέρος του κατακόρυφου κύκλου το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος είναι:



Στο χαμηλότερο σημείο, K-θέση:



$N_{T/E}$ = η δύναμη από το τοίχωμα του δακτυλιδιού στον επιβάτη

Εφαρμόζουμε τον 2° νόμο του Newton στη θέση A: $\Sigma F_y = m a_r \Rightarrow B + N_{T/E} = m a_r \Rightarrow$

$$\Rightarrow mg + N_{T/E} = m\frac{\upsilon^2}{r}$$

Αλλά η ταχύτητα είναι: $\upsilon = \frac{2\pi r}{T}$

$$\Rightarrow mg + N_{T/E} = m\frac{4\pi^2 r^{\cancel{2}}}{T^2 \cancel{r}} \Rightarrow$$

$$N_{T/E} = m\left(\frac{4\pi^2 r}{T^2} - g\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{T/E} = (55\,kg)\left(\frac{4\cdot(3.14)^2\cdot(8m)}{(4.5s)^2} - 9.8\,m/s^2\right) \Rightarrow \boxed{N_{T/E} = 319\,N}$$

Το δακτυλίδι πιέζει τον επιβάτη με δύναμη ~320N στην κορυφή του κύκλου.

(β) Στο κατώτερο σημείο της κυκλικής τροχιάς έχουμε

$$\Sigma F_y = m a_r \Rightarrow N_{T/E} - mg = m a_r = m\frac{\upsilon^2}{r} = m\frac{\omega^2 r^{\cancel{2}}}{\cancel{r}} = m\omega^2 r = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{T/E} = mg + m\frac{4\pi^2 r}{T^2} \Rightarrow N_{T/E} = m\left(g + \frac{4\pi^2 r}{T^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{T/E} = (55\,kg)\left(9.8\,m/s^2 + \frac{4\cdot(3.14)^2\cdot(8\,m)}{(4.5\,s)^2}\right) \Rightarrow \boxed{N_{T/E} = 1397\,N}$$

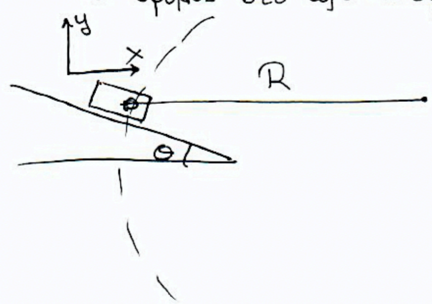
(γ) Για να παραμείνει μόλις στο στεφάνι στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς,
σημαίνει ότι η δύναμη που ασκεί το τοίχωμα στον επιβάτη γίνεται μηδέν.
Επομένως η μόνη ακτινική δύναμη που μπορεί να ενεργήσει σαν κεντρομόλος
δύναμη είναι το βάρος του επιβάτη:

$$\Sigma F_y = m a_r \Rightarrow \cancel{m} g = \cancel{m} a_r \Rightarrow a_r = g \Rightarrow \omega^2 r = g \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} r = g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{g} r \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{8.0\,\cancel{m}}{9.8\,\cancel{m}/s^2}} \Rightarrow \boxed{T = 5.7\,s}$$

5. Μία στροφή στον αυτοκινητόδρομο έχει ακτίνα 70m και κλίση 15° ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των ελαστικών των αυτοκινήτου και του οδοστρώματος είναι $\mu_s = 1.0$. Ποιά είναι η μέγιστη ταχύτητα με την οποία ένα αυτοκίνητο μάζας 1500kg μπορεί να πάρει την στροφή χωρίς να γλιστρήσει στο οδόστρωμα;

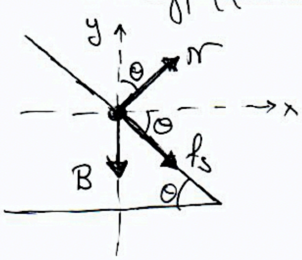
Ο δρόμος στο τόξο της στροφής παρουσιάζει κλίση Θ όπως δείχνει το σχήμα



και το αυτοκίνητο βρίσκεται πάνω σε κυκλική τροχιά ακτίνας R όση η ακτίνα της στροφής.

Χρησιμοποιούμε σύστημα συντεταγμένων όπως στο σχήμα με τον x-άξονα παράλληλο στην ακτίνα της κυκλικής τροχιάς και με θετική φορά προς το κέντρο του κύκλου

Το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος για το αυτοκίνητο θα είναι:



Η δύναμη της τριβής, f_s, είναι στατική τριβή και έχει φορά προς τη βάση του δρόμου. Η δύναμη δεν επιτρέπει τα ελαστικά να γλιστρήσουν στο οδόστρωμα προς το πάνω μέρος (εξωτερικό) της στροφής.

Εφαρμόζουμε το 2° νόμο του Newton στις 2 διευθύνσεις x και y.

$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow N_x + f_s^x = ma_x \Rightarrow N\sin\Theta + f_s\cos\Theta = ma_x = F_{κεντρ}$

$\Sigma F_y = ma_y = 0 \Rightarrow N_y - B - f_s^y = 0 \Rightarrow N\cos\Theta - mg - f_s\sin\Theta = 0$

Προσοχή: Η $F_{κεντ.}$ είναι η συνισταμένη δύναμη και προκύπτει από άλλες δυνάμεις

Ξέρουμε ακόμα ότι η μέγιστη στατική τριβή είναι: $f_s = \mu_s N$

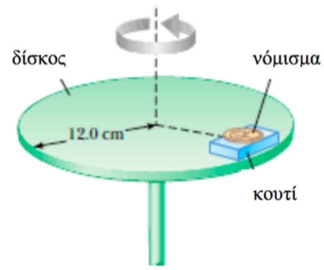
Αντικατάσταση της τελευταίας στις 2 εξισώσεις του 2ου νόμου του Newton θα δώσει:

$$\left.\begin{aligned} N\sin\Theta + \mu_s N\cos\Theta &= m\upsilon^2/R \\ N\cos\Theta - \mu_s N\sin\Theta &= mg \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{διαίρεση}} \frac{\sin\Theta + \mu_s\cos\Theta}{\cos\Theta - \mu_s\sin\Theta} = \frac{\upsilon^2/R}{g} \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{R} = g\frac{\sin\Theta + \mu_s\cos\Theta}{\cos\Theta - \mu_s\sin\Theta} \Rightarrow$$

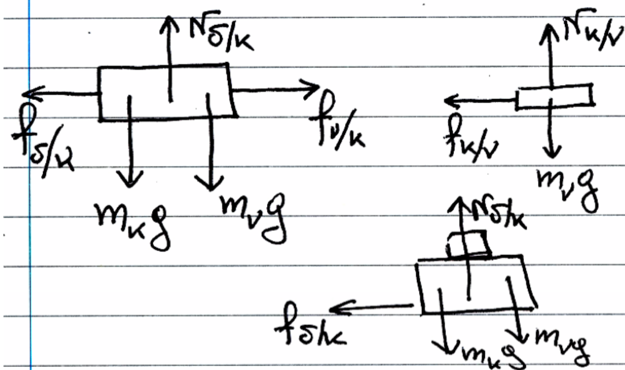
$$\upsilon^2 = gR\frac{\sin\Theta + \mu_s\cos\Theta}{\cos\Theta - \mu_s\sin\Theta} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{gR\frac{\sin\Theta + \mu_s\cos\Theta}{\cos\Theta - \mu_s\sin\Theta}} \Rightarrow \boxed{\upsilon = \sqrt{gR\frac{\tan\Theta + \mu_s}{1 - \mu_s\tan\Theta}}}$$

$\upsilon = 34\ m/s.$

6. Ένα νόμισμα μάζας 3.10gr βρίσκεται πάνω σε σπιρτόκουτο μάζας 20.0gr το οποίο με τη σειρά του βρίσκεται πάνω σε περιστρεφόμενο δίσκο όπως στο σχήμα. Οι συντελεστές στατικής και κινητικής τριβής μεταξύ του σπιρτόκουτου και του δίσκου είναι 0.75 και 0.64 αντίστοιχα, ενώ οι συντελεστές στατικής και κινητικής τριβής μεταξύ του νομίσματος και του σπιρτόκουτου είναι 0.52 και 0.45 αντίστοιχα. Ποιά είναι η μέγιστη συχνότητα περιστροφής που μπορεί να έχει ο δίσκος (σε περιστροφές/λεπτό) ώστε τόσο το νόμισμα όσο και το σπιρτόκουτο να μην γλιστρούν πάνω στο δίσκο;



Κάνουμε τα διαγράμματα απελευθερωμένου σώματος για το νόμισμα και το σπιρτοκουτί.



$f_{\delta/\kappa}$: τριβή από το έδαφος στο κουτί

$f_{\nu/\kappa}$: τριβή από το νόμισμα στο κουτί

$f_{\kappa/\nu}$: τριβή από το κουτί στο νόμισμα

<u>Για το σπιρτοκουτί – νόμισμα σύστημα</u>

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{\delta/\kappa} - m_\kappa g - m_\nu g = 0 \Rightarrow N_{\delta/\kappa} = (m_\kappa + m_\nu) g$$

Για να παραμένει το σπιρτοκουτί ακίνητο χωρίς να γλυστρά θα πρέπει η τριβή μεταξύ δίσκου κ σπιρτοκουτί να είναι :

$$f_{\delta/\kappa} \leq \mu_{s1} N_{\delta/\kappa} = \mu_{s1}(m_\kappa + m_\nu) g$$

Τη στιγμή που το σπιρτοκουτί-νόμισμα γλυστρά $f_{\delta/\kappa} = \mu_{s1}(m_\kappa + m_\nu) g$

Η δύναμη αυτή της μέγιστης τριβής παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης για το σύστημα: Η κεντρομόλος γίνεται μέγιστη για μέγιστη τιμή στατικής τριβής:

$$\Sigma F_r = m\frac{v^2}{R} = f_{\delta/\kappa} \Rightarrow \frac{m_{\kappa+\nu} v^2}{R} = \mu_{s1}(m_\kappa + m_\nu) g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{(m_\kappa+m_\nu)} v^2 = \mu_{s1}\cancel{(m_\kappa+m_\nu)} g R \Rightarrow v = \sqrt{\mu_{s1} g R} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{0.75\cdot 9.8\cdot 0.12} \Rightarrow \boxed{v = 0.939\ m/s}$$

Για να παραμένει ακίνητο το νόμισμα πάνω στο σπιρτοκούτι θα έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{\kappa/\nu} - m_\nu g = 0 \Rightarrow N_{\kappa/\nu} = m_\nu g$$

$$\Sigma F_r = m_\nu \frac{v^2}{R} = f_{\kappa/\nu} = \mu_{s2}\cdot N_{\kappa/\nu} \Rightarrow \cancel{m_\nu}\frac{v^2}{R} = \mu_{s2}\cancel{m_\nu} g$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{R} = \mu_{s2} g \Rightarrow v^2 = \mu_{s2} g R \Rightarrow v = \sqrt{\mu_{s2} g R} = \sqrt{0.52\cdot 9.8\cdot 0.120}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = 0.782 m/s}$$

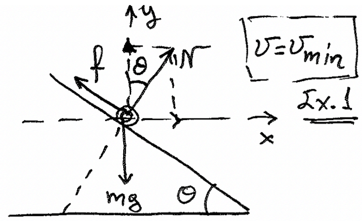
Η ταχύτητα αυτή είναι μικρότερη από τη μέγιστη ταχύτητα που βρήκαμε για το σπιρτοκούτι. Επομένως το νόμισμα γλιστράει πιο γρήγορα από το σπιρτοκούτι.

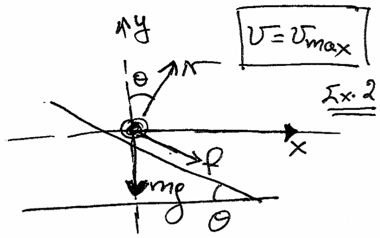
Η μέγιστη συχνότητα περιστροφής για το ~~σπιρτοκούτι~~ νόμισμα να γλιστρήσει είναι:

$$v = 2\pi R \nu \Rightarrow \nu = \frac{v}{2\pi R} = \frac{0.782}{2\pi\cdot 0.12} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi}\frac{0.782}{0.12}\frac{60s}{1min} \Rightarrow$$

$$\boxed{\nu = 62.2\ \text{περιστροφές/λεπτό}}$$

7. Μία στροφή δρόμου έχει ακτίνα 30*m* και έχει κατασκευαστεί ώστε η κλίση του οδοστρώματος να μπορεί να κρατήσει ένα αυτοκίνητο μάζας 950*kg* το οποίο κινείται με ταχύτητα μέτρου 40*km/h* χωρίς αυτό να γλιστρά καθώς κινείται στην στροφή ακόμα και όταν σε συνθήκες παγετώνα το οδόστρωμα γίνεται πολύ λείο και ο συντελεστής στατικής τριβής είναι σχεδόν μηδέν. Βρείτε το εύρος των τιμών του μέτρου της ταχύτητας που μπορεί να έχουν τα αυτοκίνητα τα οποία κινούνται στη στροφή χωρίς να γλιστρούν αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του δρόμου και των ελαστικών είναι 0.3





Όταν το όχημα κινείται με την ελάχιστη ταχύτητα πάνω στη στροφή, η στατική τριβή f έχει φορά προς το πάνω μέρος του κεκλιμένου ώστε να εξισορροπήσει τη συνιστώσα του βάρους που θέλει να κινήσει το όχημα προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Στην περίπτωση που το όχημα κινείται με τη μέγιστη ταχύτητα, η δύναμη της τριβής f έχει φορά προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, γιατί το όχημα τείνει να γλυστρήσει προς το εξωτερικό (πάνω) μέρος του κεκλιμένου επιπέδου.

Εφαρμόζουμε το νόμο του Newton στις 2 παραπάνω περιπτώσεις: Αρχικά όταν το αυτοκίνητο κινείται πάνω στο δρόμο με μηδενικό συντελεστή στατικής τριβής.

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_x &= N\sin\theta = m\frac{\upsilon_{min}^2}{r} \\ \Sigma F_y &= N\cos\theta - mg = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\upsilon_{min}^2}{rg} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\upsilon_{min}^2}{rg}\right) \Rightarrow$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{(40km/h)^2(1000m/km)^2(1h/3600)^2}{(30m)(9.81\,m/s^2)}\right) = 22.8^\circ$$

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση που το αυτοκίνητο κινείται στη στροφή με την ελάχιστη ταχύτητα και υπάρχει τριβή:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_x &= N\sin\theta - f_s\cos\theta = m\frac{\upsilon_{min}^2}{r} \\ \Sigma F_y &= N\cos\theta + f_s\sin\theta - mg = 0 \\ \text{Για } & f = \mu_s N \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} N\sin\theta - \mu_s N\cos\theta &= m\frac{\upsilon_{min}^2}{r} \\ N\cos\theta + \mu_s N\sin\theta &= mg \end{aligned}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta} = \frac{\upsilon_{min}^2}{gr}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\cos\Theta}(\tan\Theta - \mu_s)}{\cancel{\cos\Theta}(1+\mu_s\tan\Theta)} = \frac{v_{min}^2}{gr} \Rightarrow \boxed{v_{min}^2 = gr\,\frac{\tan\Theta - \mu_s}{1+\mu_s\tan\Theta}}$$

Αντικαθιστούμε αριθμητικά δεδομένα $\mu_s = 0.3$ και $\Theta = 22.8°$ οπότε θα έχουμε!

$$v_{min}^2 = 9.81\,\frac{m}{s^2}\cdot 30\,m\,\frac{0.42-0.3}{1+0.42\cdot 0.3} \Rightarrow v_{min}^2 = 31.36\,\frac{m^2}{s^2} \Rightarrow \boxed{v_{min} = 5.6\,m/s}$$

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση που το αυτοκίνητο κινείται στην στροφή με τη μέγιστη ταχύτητα, και εφαρμόζουμε τον 2^o νόμο του Newton στο σχήμα (2)

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_x &= N\sin\Theta + f_s\cos\Theta = \frac{m v_{max}^2}{r} \\ \Sigma F_y &= N\cos\Theta - f_s\sin\Theta - mg = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \mu_s\cancel{N}\cos\Theta + \cancel{N}\sin\Theta &= \frac{\cancel{m}v_{max}^2}{r} \\ \cancel{N}\cos\Theta - \mu_s\cancel{N}\sin\Theta &= \cancel{m}g \end{aligned}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow}$$

και $f_s = \mu_s N$

$$\Rightarrow \frac{\mu_s\cos\Theta + \sin\Theta}{\cos\Theta - \mu_s\sin\Theta} = \frac{v_{max}^2}{gr} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_s + \tan\Theta}{1 - \mu_s\tan\Theta} = \frac{v_{max}^2}{gr} \Rightarrow v_{max}^2 = gr\,\frac{\mu_s + \tan\Theta}{1-\mu_s\tan\Theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{max}^2 = 9.81\,\frac{m}{s^2}\,30\,m\,\frac{0.30+0.42}{1-0.42\cdot 0.30} \Rightarrow \boxed{v_{max} = 15.6\,\frac{m}{s}}$$

8. Ένα αντικείμενο κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R. Την χρονική στιγμή $t = 0$, έχει ταχύτητα $υ_0$. Από εκείνη τη στιγμή και μετά οι τιμές του μέτρου της κεντρομόλου και της εφαπτομενικής επιτάχυνσης είναι ίσες. (α) Να βρεθεί η ταχύτητα και η απόσταση που διανύει συναρτήσει του χρόνου. (β) Αν βρήκατε την απάντηση στο ερώτημα (α) θα παρατηρήσετε ότι υπάρχει ένας χαρακτηριστικός χρόνος t στο πρόβλημα αυτό. Ποιος είναι ο χρόνος αυτός και γιατί είναι κατά τη γνώμη σας χαρακτηριστικός;

(α) Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι: $a_κ = \frac{υ^2}{R}$ και η εφαπτομενική επιτάχυνση είναι: $a_{εφ} = \frac{dυ}{dt}$

Ξέρουμε ότι την χρονική στιγμή $t=0s$ το μέτρο της κεντρομόλου και εφαπτομενικής επιτάχυνσης είναι ίδιο: $|a_κ| = |a_{εφ}| \Rightarrow a_ε = \frac{dυ}{dt} = \frac{υ^2}{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dυ}{υ^2} = \frac{1}{R} dt \Rightarrow \int_{V_0}^{V} \frac{1}{υ^2} dυ = \frac{1}{R}\int_0^t dt \Rightarrow \left(-\frac{1}{υ}\right)\Big|_{V_0}^{V} = \frac{1}{R} t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{υ} + \frac{1}{υ_0} = \frac{1}{R} t \Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{\frac{1}{V_0} - \frac{t}{R}}}$$

Για να βρούμε το x: $dx = v\,dt \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \frac{dt}{\left(\frac{1}{V_0} - \frac{t}{R}\right)} \Rightarrow$

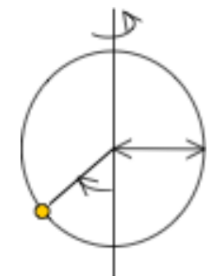
$$\Rightarrow x = -R\ln\left(\frac{1}{V_0} - \frac{t}{R}\right)\Big|_0^t \Rightarrow x = -R\left[\ln\left(\frac{1}{V_0} - \frac{t}{R}\right) - \ln\left(\frac{1}{V_0}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -R\ln\left(\frac{\frac{1}{V_0} - \frac{t}{R}}{\frac{1}{V_0}}\right) \Rightarrow \boxed{x = -R\ln\left(1 - \frac{V_0 t}{R}\right)}$$

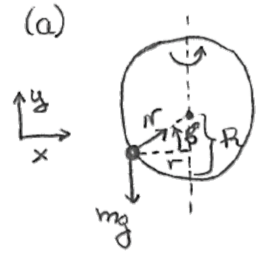
(β) Για τη χρονική στιγμή $t = \frac{R}{V_0}$, ο όρος του λογαρίθμου γίνεται $\emptyset$

Για την τιμή αυτή τόσο το x όσο και η ταχύτητα V απειρίζονται και η κίνηση είναι αδύνατη.

9. Μία μικρή χάντρα μπορεί να γλιστρά χωρίς τριβές πάνω σε ένα κυκλικό κατακόρυφο στεφάνι ακτίνας 0.1m. Το στεφάνι περιστρέφεται με σταθερό ρυθμό 3.00 περιστροφών/sec γύρω από την κατακόρυφο διάμετρό του. Βρείτε τη γωνία β στην οποία η χάντρα είναι σε κατακόρυφο ισορροπία (ασφαλώς δέχεται και ακτινική επιτάχυνση προς τον άξονα). (β) Είναι δυνατόν η χάντρα να κινείται στο ίδιο ύψος με αυτό του κέντρου του στεφανιού; (γ) Τι θα συμβεί αν το στεφάνι περιστρέφεται με ρυθμό 1περιστροφή/sec;



(a)



Χρησιμοποιούμε το σύστημα συντεταγμένων με άξονες x και y όπως στο σχήμα.

Αναλύουμε την δύναμη της αντίδρασης του στεφανιού N στη x και y διεύθυνση:

$$y \Rightarrow N_y - mg = 0 \Rightarrow N\sin\beta = mg \Rightarrow \sin\beta = \frac{mg}{N} \quad (1)$$

$$x \Rightarrow m a_x = N\cos\beta \Rightarrow N = \frac{m a_x}{\cos\beta} \quad (2)$$

Η χάντρα όμως εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από τη διάμετρο του στεφανιού αφού το στεφάνι περιστρέφεται, και επομένως ενεργεί πάνω της κεντρομόλος επιτάχυνση η οποία είναι στη διεύθυνση x (η ακτίνα της κυκλικής αυτής κίνησης είναι r). Η κεντρομόλος επιτάχυνση δίνεται από: $a_x = \frac{\upsilon^2}{r} = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$ (3)

Αλλά $r = R\cos\beta$ (4)

Από (3) ∧ (4) $\Rightarrow a_x = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\cos\beta$ (5)

Από (2) ∧ (5) $\Rightarrow N = \frac{m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\cancel{\cos\beta}}{\cancel{\cos\beta}}$ (6) Αντικαθιστούμε στην (1)

$$\sin\beta = \frac{\cancel{m}g}{\cancel{m}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R} \Rightarrow \boxed{\sin\beta = \frac{g\,T^2}{(2\pi)^2 R}} = \frac{9.8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2}{4\pi^2\cdot 0.1} \Rightarrow \sin\beta = 0.276 \Rightarrow \boxed{\beta = 16^\circ}$$

* Σημειωτέον ότι κατά λάθος πήρα το β τη γωνία της ακτίνας της χάντρας και της οριζόντιας διεύθυνσης και όχι αυτή που έχω σχεδιάσει στην διατύπωση της άσκησης. Οι γωνίες είναι συμπληρωματικές και άρα η γωνία είναι

$$\boxed{\beta = 74^\circ}$$

(β) Η χάντρα δεν μπορεί να κινείται στο ίδιο ύψος με αυτό του κέντρου του στεφανιού, γιατί τότε το βάρος της mg που βρίσκεται στην κατακόρυφο διεύθυνση δεν θα έχει καμιά δύναμη να το αντισταθμίσει. Αυτό γιατί η αντίδραση του στεφανιού στη χάντρα N θα είναι στην περίπτωση αυτή οριζόντια (χωρίς κατακόρυφο συνιστώσα)

(γ) Αν η συχνότητα περιστροφής του στεφανιού γίνει $f = \frac{1}{T} = 1$ περ/sec τότε η εξίσωση $\sin\theta = \frac{g T^2}{(2\pi)^2 R}$ θα δώσει: $\sin\theta = \frac{9.8 \cdot 1^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot 0.1} = \underline{2.48}$

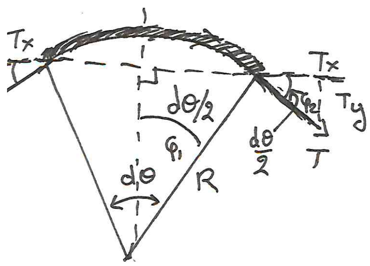
Αλλά $\sin\theta$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο της μονάδας και επομένως δεν υπάρχει λύση για το θ.

Ωστόσο αν δείτε ξανά την εξίσωση (2) από το (a) σκέλος της άσκησης, εκεί διαιρούμε με $\cos\theta$. Επομένως για $\theta = 90^\circ \Rightarrow \cos\theta = \phi$ η οποία είναι πάντοτε λύση της εξίσωσης. Στην περίπτωση αυτή η χάντρα βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο του στεφανιού σε ρ, μία

Εν γένει, η χάντρα βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο του στεφανιού όταν $\sin\theta = \frac{g T^2}{4\pi^2 R} \geq 1 \Rightarrow T \geq \sqrt{\frac{4\pi^2 R}{g}} \Rightarrow \boxed{T \geq 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}}$

Αυτή είναι η περίοδος ενός εκκρεμούς μήκους R.

10. Ένα κυκλικός βρόχος ακτίνας R, είναι φτιαγμένος από σχοινί γραμμικής πυκνότητας λ (*kg/m*) και βρίσκεται πάνω στη λεία επιφάνεια ενός τραπεζιού. Το σχοινί περιστρέφεται ως προς το κέντρο του με όλα τα σημεία της περιφέρειας να κινούνται με σταθερή ταχύτητα υ. Να βρείτε την τάση στο σχοινί. Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνισταμένη δύναμη σε ένα μικρό τμήμα του σχοινιού που αντιστοιχεί σε μια στοιχειώδη γωνία $d\theta$. Θα σας φανεί επίσης χρήσιμο να κάνετε την προσέγγιση $\sin x \approx x$ για μικρές τιμές (σε ακτίνια) της γωνίας x.



Οι δυνάμεις που εμφανίζονται σε ένα μικρό τμήμα του σχοινιού που αντιστοιχεί σε γωνία $d\Theta$, είναι οι δύο τάσεις στα άκρα του, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα

Η γωνία που σχηματίζουν με την οριζόντια διεύθυνση που είναι η χορδή του τόξου που σχηματίζει το σχοινί, είναι $d\Theta/2$ (οι πλευρές είναι κάθετες μεταξύ τους για τις γωνίες φ_1 και φ_2).

Έστω T η τάση στο σχοινί. Επομένως για το τμήμα του σχοινιού που φαίνεται στο σχήμα, η τάση θα είναι $2T_y = 2T\sin\varphi_2 = 2T\sin\left(\frac{d\Theta}{2}\right)$. (1)

Οι οριζόντιες συνιστώσες είναι ίσες και αντίθετες.

Η συνισταμένη δύναμη στην y-διεύθυνση, έχει φορά ακτινική (για μικρό $d\theta$) και προς το κέντρο του βρόχου.

Θεωρώντας το ανάπτυγμα Taylor για το $\sin\Theta = \Theta - \frac{1}{3!}\Theta^3 + \frac{1}{5!}\Theta^5 - \dots$ για $\Theta \simeq 0$ και κρατώντας μόνο τον 1° όρο, θα έχουμε $\sin\Theta \simeq \Theta$ οπότε στην περίπτωσή μας:

η (1) γίνεται: $\Sigma F_y = 2T\sin\left(\frac{d\Theta}{2}\right) \Rightarrow \Sigma F_y \simeq \cancel{2}T\frac{d\Theta}{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{\Sigma F_y \simeq T d\Theta}$ (2)

Η δύναμη αυτή προκαλεί την κεντρομόλο επιτάχυνση για το στοιχειώδες τμήμα του σχοινιού. Το σχοινί έχει μήκος $R d\Theta$ και επομένως η μάζα του είναι $m_\Sigma = \lambda R d\Theta$

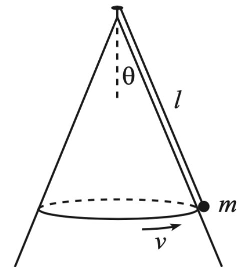
Επομένως από τον 2° νόμο του Νεύτωνα στην ακτινική διεύθυνση θα έχουμε:

$$F = \frac{m\upsilon^2}{R} \overset{(2)}{\Rightarrow} T\cancel{d\Theta} = \frac{\lambda \cancel{R} \cancel{d\Theta} \upsilon^2}{\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{T = \lambda \upsilon^2}$$

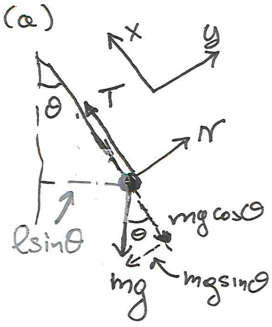
Παρατηρήστε ότι η τάση είναι ανεξάρτητη της ακτίνας του βρόχου. Αυτό σημαίνει ότι αν είχαμε ένα σχοινί τυχαίου σχήματος (η τοπική καμπυλότητα διαφέρει) και το σχοινί περιστρέφεται ως προς τον εαυτό του (δηλαδή δεν μπορεί να πει κανείς ότι περιστρέφεται), με σταθερή ταχύτητα, τότε η τάση θα ήταν παντού $\lambda\upsilon^2$.

Το φαινόμενο αυτό εμφανίζεται στα κύματα, σε χορδή. Αυτή είναι η τάση σε χορδή αν το κύμα διαδίδεται με ταχύτητα υ.

11. Μία μάζα είναι στερεωμένη στην άκρη ενός νήματος αμελητέας μάζας και μήκους l. Η άλλη άκρη του νήματος είναι στερεωμένη στην κορυφή ενός λείου κώνου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η γωνία της κορυφής του κώνου είναι 2θ. Η μάζα περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα υ στην επιφάνεια του κώνου διαγράφοντας οριζόντιο κύκλο. Να βρείτε (α) την τάση του νήματος, (β) την κάθετη δύναμη από τον κώνο, (γ) την μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να έχει η μάζα ώστε να παραμείνει σε επαφή με την επιφάνεια του κώνου.



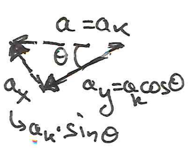
(α)



Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος είναι όπως το σχήμα. Διαλέγαμε άξονες παράλληλα προς την κωνική επιφάνεια και κάθετη σε αυτή.

Η συνισταμένη των δυνάμεων, δημιουργεί την κεντρομόλο δύναμη για την περιστροφή του σώματος. Η κεντρομόλος δύναμη θα έχει ακτινική διεύθυνση και με φορά προς το εσωτερικό του κώνου στην οριζόντια διεύθυνση.

Επομένως, θα πρέπει να υπάρχουν συνιστώσες της δύναμης στην x και y-διεύθυνση που δίνουν ως συνισταμένη την κεντρομόλο δύναμη.



Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι $l\sin\theta$ και η κεντρομόλος επιτάχυνση θα είναι: $a_k = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l\sin\theta}$.

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton στη x και y-διεύθυνση:

x-διεύθυνση: $\Sigma F_x = T - mg\cos\theta = ma_x = ma_k\sin\theta = m\frac{v^2}{l\cancel{\sin\theta}}\cancel{\sin\theta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Sigma F_x = T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{l} \Rightarrow \boxed{T = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{l}} \quad (1)$$

Αν η γωνία $\theta\to 0$ τότε $T \to mg + m\frac{v^2}{l}$., επομένως για να υπάρχει επαφή με τον κώνο, $v\to 0$ οπότε $T\to mg$. Αν $\theta\to\frac{\pi}{2}$ τότε $T\to m\frac{v^2}{l}$, η μάζα κινείται σε κυκλική τροχιά πάνω σε οριζόντια επιφάνεια.

(β) Η συνισταμένη δύναμη στην y-διεύθυνση δίνει: $\Sigma F_y = N - mg\sin\theta = ma_y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Sigma F_y = N - mg\sin\theta = ma_k\cos\theta = m\frac{v^2}{l\sin\theta}\cos\theta \Rightarrow \boxed{N = mg\sin\theta - m\frac{v^2}{l\tan\theta}} \quad (2)$$

Αν $\theta\to 0$ τότε $N \to 0 - \frac{mv^2}{l\tan\theta}$. Θα πρέπει επομένως η $v\to 0$ οπότε $N\to 0$.

Για $\theta\to\pi/2$ τότε $N = mg$ που είναι αναμενόμενο για σώμα που εκτελεί κυκλική τροχιά σε οριζόντια επιφάνεια.

(γ) Η μάζα παραμένει σε επαφή με τον κώνο, όσο η αντίδραση $N \geq 0$.

Από την (2) έχουμε ότι $\cancel{m}g\sin\theta - \cancel{m}\frac{v^2}{\ell\tan\theta} \geq 0 \Rightarrow \boxed{v \leq \sqrt{g\ell\sin\theta\tan\theta}}$

Αυτή είναι η μέγιστη ταχύτητα $v_{max} = \sqrt{g\ell\sin\theta\tan\theta}$ που μπορεί να έχει η μάζα ώστε μόλις να είναι σε επαφή με την κωνική επιφάνεια.

Αν αφαιρούσαμε τον κώνο, η μάζα θα συνέχιζε να εκτελεί κυκλική κίνηση σε οριζόντια τροχιά.

Αν $\theta \to 0$ τότε $v_{max} \to 0$ και αν $\theta \to \frac{\pi}{2}$ τότε $v_{max} \to \infty$, όπου οι δύο περιπτώσεις είναι λογικές.

12. Ένα κιβώτιο μάζας 2kg κρέμεται από μία ζυγαριά ελατηρίου η οποία με τη σειρά της κρέμεται από την οροφή ενός ανελκυστήρα όπως στο διπλανό σχήμα. Ποιά είναι η ένδειξη της ζυγαριάς όταν (α) ο ανελκυστήρας κινείται προς το πάνω με σταθερή ταχύτητα 30m/s; (β) ο ανελκυστήρας κινείται προς τα κάτω με σταθερή ταχύτητα 30m/s; (γ) ο ανελκυστήρας κινείται προς τα πάνω με ταχύτητα 20m/s και κερδίζει ταχύτητα με ρυθμό 10m/s^2; (δ) Κατά το χρονικό διάστημα από t = 0 έως t = 2s ο ανελκυστήρας ανεβαίνει με ταχύτητα 10m/s. Η ταχύτητά του κατόπιν ελαττώνεται ομοιόμορφα στο μηδέν τα επόμενα δύο (2) δευτερόλεπτα, έτσι ώστε έρχεται σε ηρεμία την χρονική στιγμή t = 4s. Περιγράψτε την ένδειξη της ζυγαριάς κατά το χρονικό διάστημα 0 < t < 4s.

(α) Όταν ο ανελκυστήρας κινείται με σταθερή ταχύτητα η επιτάχυνση του σώματος είναι μηδέν οπότε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T - mg = 0 \Rightarrow T = mg \Rightarrow T = (2kg)(9.8\,m/s^2) = 19.6N$$

(β) Το ίδιο θα ισχύει όπως και προηγουμένως όταν ο ανελκυστήρας κινείται προς τα κάτω με σταθερή ταχύτητα: $T = mg = (2kg)(9.8\,\frac{m}{s^2}) \Rightarrow T = 19.6N$

(γ) Από την εφαρμογή του 2ου νόμου του Newton θα έχουμε:

$$\Sigma F_y = ma = T - mg \Rightarrow T = ma + mg = m(a+g) \qquad (1)$$

Επειδή ο ανελκυστήρας ανεβαίνει και η ταχύτητά του αυξάνει έχουμε $a_y = 3\,m/s^2$

Από την (1) θα έχουμε: $T = (2kg)(9.8\,\frac{m}{s^2} + 10\,\frac{m}{s^2}) \Rightarrow T = 38.6N$

(δ) Για το χρονικό διάστημα $0 < t < 2s$ $a_y = 0$ $T_{0-2s} = 19.6N$

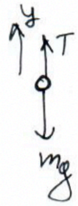
Για το διάστημα αυτό $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 10m/s}{2s} \Rightarrow \bar{a} = -5.0\,m/s^2$

Επομένως αντικαθιστώντας στην (1) θα έχουμε: $T = m(-5.0\,\frac{m}{s^2} + 9.8\,\frac{m}{s^2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow T = 9.6N$

13. Ένα άτομο στέκεται σε ζυγαριά μέσα σε έναν ανελκυστήρα που ανεβαίνει με επιτάχυνση α προς τα πάνω. Η ένδειξη της ζυγαριάς είναι $960N$. Όταν κρατά ένα κιβώτιο μάζας 20kg, η ένδειξη της ζυγαριάς είναι $1200N$. Να βρείτε τη μάζα του ατόμου, το βάρος του και την επιτάχυνση α.

Σύμφωνα με τον 2° νόμο του Νεύτωνα έχουμε: όπου T = η ένδειξη της ζυγαριάς



$$\Sigma F = ma = T - mg \Rightarrow T = m(a+g) \quad (1)$$

Όταν κρατάει το κιβώτιο θα έχουμε $\Sigma F' = m'a = T' - m'g \Rightarrow$

$$\Rightarrow (m+m_\kappa)a = T' - (m+m_\kappa)g \Rightarrow T' = (m+m_\kappa)(a+g) \quad (2)$$

Επομένως από την (1) κ (2) έχουμε: $T' - T = (m+m_\kappa)(a+g) - m(a+g) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta T = m_\kappa(a+g) \Rightarrow a = \frac{\Delta T - m_\kappa g}{m_\kappa} = \frac{(1200N - 960N) - 20kg \cdot 9.8\, m/s^2}{20kg}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\cancel{240}^{12}N - \cancel{20}kg\, 9.8\, m/s^2}{\cancel{20}kg} \Rightarrow \boxed{a = 2.2\, m/s^2}$$

Η μάζα του ατόμου θα είναι επομένως από την (1): $960N = m_a(2.2\, m/s^2 + 9.8\, m/s^2)$

$$\Rightarrow m_a = \frac{960N}{12\, m/s^2} \Rightarrow \boxed{m_a = 80kg}$$ και το βάρος του θα είναι

$$B_a = 80kg \cdot 9.8\, m/s^2 = 786N$$

14. Ένα αλεξίπτωτο δημιουργεί αρκετή αντίσταση αέρα ώστε να κρατά την ταχύτητα πτώσης ενός αλεξιπτωτιστή μάζας 80kg σε σταθερή τιμή ίση με 6m/s. Υποθέστε ότι η δύναμη της αντίστασης του αέρα δίνεται από τη σχέση $F = bv^2$ όπου v η ταχύτητα του αλεξιπτωτιστή. (α) Να υπολογισθεί η σταθερά b για την περίπτωση αυτή. (β) Ένας αλεξιπτωτιστής κάνει ελεύθερη πτώση έως ότου η ταχύτητά του γίνει 60m/s οπότε ανοίγει και το αλεξίπτωτό του. Αν το αλεξίπτωτο ανοίξει αμέσως, να υπολογίσετε την αρχική δύναμη προς τα πάνω που ασκεί το αλεξίπτωτο στον αλεξιπτωτιστή που κινείται με ταχύτητα 60m/s. Εξηγήστε γιατί είναι σημαντικό το αλεξίπτωτο να ανοίξει σε μερικά δευτερόλεπτα.

(α) Εφόσον το αλεξίπτωτο έχει προσδώσει στον αλεξιπτωτιστή σταθερή οριακή ταχύτητα. Επομένως: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow mg = F_d \Rightarrow mg = bv^2 \Rightarrow$

$$b = \frac{mg}{v^2} = \frac{80\,kg\ 9.8\,m/s^2}{36\,m^2/s^2} \Rightarrow b = 21.78\ \frac{kg\,s^2}{m}.$$

(β) Εφόσον ο αλεξιπτωτιστής κινείται με ταχύτητα $v = 60m/s$ η δύναμη που αναπτύσσεται πάνω του καθώς το αλεξίπτωτο ανοίγει θα είναι

$$F_d = b\,v^2 = 21.78\,\frac{kg\,s^2}{m^2}\,60^2\,\frac{m^2}{s^2} \Rightarrow \underline{F_b = 78408\ N}$$

Η δύναμη αυτή είναι $F_b/mg = \dfrac{78408\,N}{80 \cdot 9.8\,N} = \underline{100}$ φορές μεγαλύτερη του βάρους του

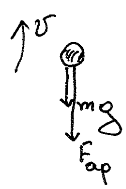
Επομένως η επιτάχυνση που ασκείται πάνω του είναι περίπου 100g που είναι πάρα πολύ μεγάλη και θα πρέπει να ασκηθεί σταδιακά σε μεγαλύτερο χρονικό διάστημα ώστε η ταχύτητά του να ελαττωθεί σταδιακά.

15. Ρίχνετε μια μπάλα κατακόρυφα προς τα πάνω. Η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας, $υ^2$. Ποια είναι η τιμή της y-συνιστώσας της επιτάχυνσης της μπάλας όταν η ταχύτητά της είναι η μισή της οριακής της ταχύτητας (α) καθώς η μπάλα ανεβαίνει προς τα πάνω και (β) όταν η μπάλα κατεβαίνει προς τα κάτω. <u>*Υπόδειξη*</u>: θα πρέπει να εκφράσετε το αποτέλεσμά σας συναρτήσει της επιτάχυνσης της βαρύτητας.

Εφόσον η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας:

$F_a = -Dv^2$, ξέρουμε ότι στην περίπτωση αυτή η οριακή περίπτωση δίνεται από τη σχέση $v_{op} = \sqrt{\frac{mg}{D}} \Rightarrow v = \frac{v_{op}}{2} \Rightarrow \boxed{v^2 = \frac{v_{op}^2}{4} = \frac{mg}{4D}}$ (1)

(α) Όταν η μπάλα ανεβαίνει προς τα πάνω οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω της είναι:

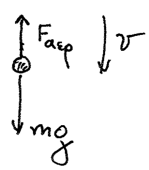


$$\Sigma F_y = -F_a - mg = -ma \Rightarrow -\cancel{D}\cdot\frac{\cancel{m}g}{4\cancel{D}} - \cancel{m}g = -\cancel{m}a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{-}\frac{g}{4}\cancel{-}g = \cancel{-}a \Rightarrow \boxed{a = \frac{5}{4}g}$$

το μέτρο της επιτάχυνσης είναι $\frac{5}{4}g$ με φορά προς τα κάτω.

(β)



Όταν η μπάλα κατεβαίνει προς τα κάτω:

$$\Sigma F_y = F_a - mg = ma \Rightarrow \cancel{D}\frac{\cancel{m}g}{4\cancel{D}} - \cancel{m}g = \cancel{m}a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g}{4} - g = a \Rightarrow \boxed{a = -\frac{3g}{4}}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι $\frac{3g}{4}$ με φορά προς το κάτω.