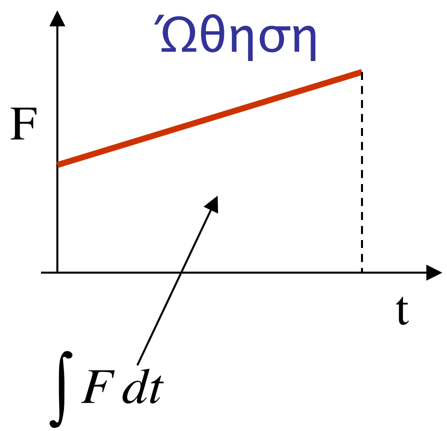
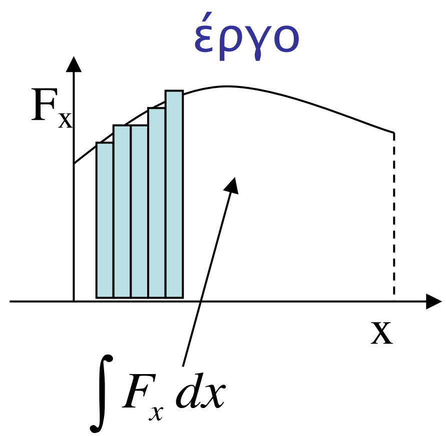
Έργο – Κινητική Ενέργεια

Έργο

Σκεφθείτε $\int F\,dt$ και $\int F_x\,dx$ ολοκληρώματα κίνησης





Για σταθερή δύναμη

$$\int F\,dt = Ft = mat = m\mathrm{v}$$

ορμή

$$\int F_x\,dx = Fx = ma\left(\frac{1}{2}at^2\right)$$

$$\Rightarrow \int F_x\,dx = \frac{1}{2}m(at)^2 = \boxed{\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2}$$

Τι λέει: Το έργο που παράγεται από μια δύναμη σε ένα σώμα ισούται με την μεταβολή της κινητικής του ενέργειας

Η ενέργεια ενός σώματος εξαιτίας της κίνησής του

Έργο συνισταμένης δύναμης - σταθερή επιτάχυνση

- Υποθέστε σταθερή επιτάχυνση: $W_{net} = F_{net} \cdot d$
  - Σε 1-διάσταση

$$a = \frac{1}{2d}\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

$$W_{\text{net}} = Fd \Rightarrow W_{net} = mad = m\frac{\left(v_2^2 - v_1^2\right)}{2d}d \Rightarrow W_{\text{net}} = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

$$\Rightarrow W_{net} = E^2_{\kappa\iota\nu.} - E^1_{\kappa\iota\nu.} = \Delta E_{\kappa\iota\nu.}$$

Θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας

Τι σημαίνει: Δαπανώντας έργο σε ένα σώμα μεταβάλλεται η κινητική του ενέργεια.

Διαφορετικά: Στην περίπτωση που έργο επιδρά σε ένα σύστημα και η μόνη αλλαγή στο σύστημα είναι η ταχύτητά του τότε το έργο από τη συνισταμένη δύναμη είναι ίσο με την αλλαγή της κινητικής του ενέργειας.

$W > 0$ ➔ Αύξηση της κινητικής ενέργειας

$W < 0$ ➔ Ελάττωση της κινητικής ενέργειας

Έργο συνισταμένης δύναμης – Μεταβαλλόμενη επιτάχυνση

Αποδείξαμε το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας υποθέτοντας σταθερή επιτάχυνση.

Ισχύει όμως γενικά ?

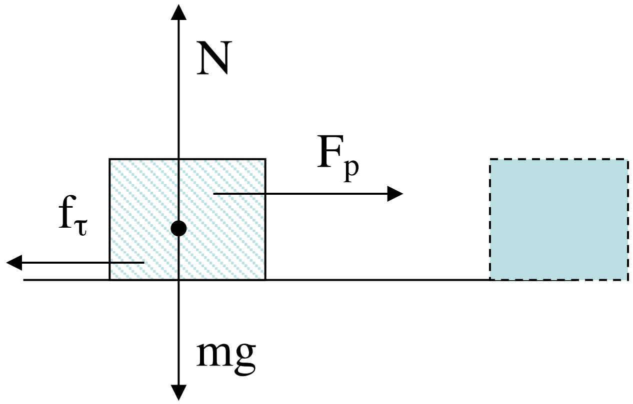
$$W_{\text{net}} = \int F_{\text{net}} \cos\theta \, dl = \int F_{//} \, dl$$

$$F_{//} = ma_{//} = m\frac{d\text{v}}{dt} = m\frac{d\text{v}}{dl}\frac{dl}{dt} \Rightarrow F_{//} = m\frac{d\text{v}}{dl}\text{v}$$

$$\Rightarrow \int_i^f F_{//} \, dl = \int_i^f m\text{v}\frac{d\text{v}}{dl} dl = \int_i^f m\text{v} \, d\text{v}$$

Συνιστώσα της δύναμης // μετατόπιση

$$W_{\text{net}} = \frac{1}{2}m\left(\text{v}_{\text{f}}^2 - \text{v}_{\text{i}}^2\right) = \Delta E_{\kappa\iota\nu.}$$



Στο χρόνο $t = 0 = t_i \rightarrow v_i = 0$

Τραβάμε το κιβώτιο και παράγουμε έργο

$$W = F_p d = E^f_{\kappa\iota\nu.} - E^i_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2}m\text{v}_{\text{f}}^2 \Rightarrow \text{v}_{\text{f}} = \sqrt{\frac{2Fd}{m}}$$

Η τριβή παράγει επίσης έργο

11ο Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας
- Θα στείλετε τη φωτογραφία της απάντησής σας στο fotis@ucy.ac.cy

Έτοιμοι

Βοηθά στο να λύσουμε προβλήματα?

- Θεωρείστε κατακόρυφη βολή σώματος προς τα πάνω

  Σε ποιο ύψος θα σταματήσει να πηγαίνει προς τα πάνω?

Στο μέγιστο ύψος: $\mathrm{v}_{\mathrm{hmax}} = 0 \Rightarrow E^{f}_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2} m\, \mathrm{v}^2_{\mathrm{hmax}} \Rightarrow E^{f}_{\kappa\iota\nu.} = 0$

Το έργο που παράγεται είναι:

$$W = \int_{\mathrm{h_{min}}}^{\mathrm{h_{max}}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\mathrm{h_{min}}}^{\mathrm{h_{max}}} \vec{F} \cdot dh \Rightarrow W = F(h_{\max} - h_{\min}) = F\Delta h$$

Η μόνη δύναμη που δρα και παράγει έργο είναι η βαρύτητα:

$$W = -mg\Delta h = E^{\mathrm{h_{max}}}_{\kappa\iota\nu.} - E^{\mathrm{h_{min}}}_{\kappa\iota\nu.} \Rightarrow -mg\Delta h = -E^{\mathrm{h_{min}}}_{\kappa\iota\nu.} = -\frac{1}{2} m\mathrm{v}^2_{\mathrm{h_{min}}} \Rightarrow \Delta h = \frac{\mathrm{v}^2_{\mathrm{h_{min}}}}{2g}$$

➡ Συσχετίζει δυνάμεις με ταχύτητες

Παράδειγμα- ελατήρια

Συμπιέστε ένα ελατήριο και μετά αφήστε το να κινηθεί.

Τι συμβαίνει όταν περνά από τη θέση ηρεμίας του ($x=0$)?

$$F_{\varepsilon\lambda.} = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dx} = -k\left(x - x_{\iota\sigma o\rho.}\right) \Rightarrow mvdv = -k\left(x - x_{\iota\sigma o\rho.}\right)dx = W_{F_{\varepsilon\lambda.}}$$

$$\Rightarrow \int_{v_i}^{v_f} mv\,dv = \int_{x_i}^{x_f} -k\left(x - x_{\iota\sigma o\rho.}\right)dx \qquad \Rightarrow W_{F_{\varepsilon\lambda}} = \int_{v_i}^{v_f} mv\,dv = \int_{x_i}^{x_f} -k\left(x - x_{\iota\sigma o\rho.}\right)dx$$

Εξετάζουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης:

$$\left.\begin{aligned} W_{F_{\varepsilon\lambda.}} &= \int_{x_i}^{x_f} -k\left(x - x_{\iota\sigma o\rho.}\right) = -\frac{1}{2}k\left(\Delta x_f\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\Delta x_i\right)^2 \\ W_{F_{\varepsilon\lambda.}} &= \int_{v_i}^{v_f} mv\,dv = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = E_{\kappa\iota\nu.}^{f} - E_{\kappa\iota\nu.}^{i} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \\ &-\frac{1}{2}k\left(\Delta x_f\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\Delta x_i\right)^2 \end{aligned}$$

- Οι αρχικές συνθήκες: $x_{\iota\sigma o\rho.}=0$, $x_I = x_m$, $v_I = 0$m/s, $x_f = 0$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}k\left(x_m - x_{\iota\sigma o\rho.}\right)^2 \Rightarrow v_2 = x_m\sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Αν συμπεριλάβουμε και τριβή τότε το καθαρό έργο θα είναι:

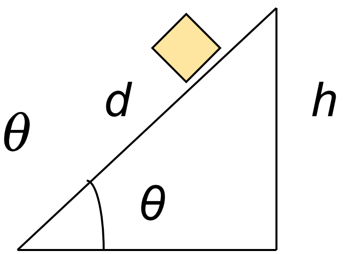
$$W_{net} = \frac{1}{2}kx_m^2 - f_{\tau\rho}x_m$$

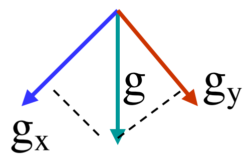
Είδη δυνάμεων

- Δύο είδη δυνάμεων:
  - Συντηρητικές ή διατηρητικές δυνάμεις και **<u>μή</u>** συντηρητικές
    - ✓ Μια δύναμη είναι συντηρητική όταν το έργο που παράγει ασκούμενη σε κάποιο υλικό σημείο εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση του σωματιδίου

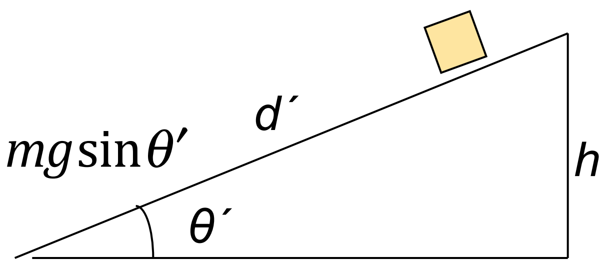
Θυμηθείτε το παράδειγμα με το κεκλιμένο επίπεδο:

$$F = mg\sin\theta$$





$$F = mg\sin\theta'$$



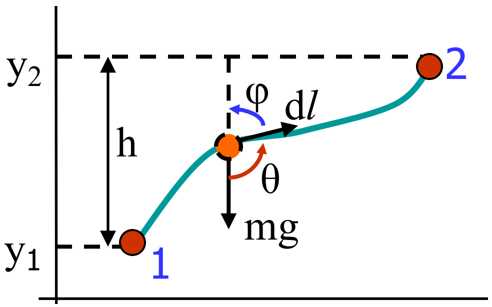
$$W_a = \vec{F}\cdot\vec{d} = mg\sin\theta\ d = mgh$$

$$W_b = \vec{F}\cdot\vec{d}' = mg\sin\theta'\ d' = mgh$$

- ✓ Μεταφέροντας ένα κιβώτιο πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο παράγεται το ίδιο έργο.
- ✓ Το έργο εξαρτάται μόνο από την διαφορά ύψους $h=y_2-y_1$ δηλαδή την αρχική και τελική θέση (y) του κιβωτίου.

Γενικά για τη βαρυτική δύναμη....

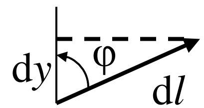
Έστω μια τυχαία διαδρομή:



Το έργο που παράγεται από την δύναμη της βαρύτητα πηγαίνοντας από το 1 στο 2 είναι:

$$W_g = \int_1^2 \vec{F}_g \cdot d\vec{l} = \int_1^2 mg\cos\theta \, dl$$

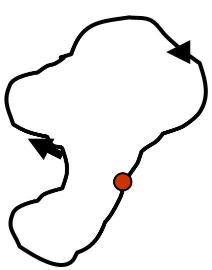
$$\left|d\vec{y}\right| = dl \cos\phi \Rightarrow \left|d\vec{y}\right| = -dl\cos\theta$$



$$\Rightarrow W_g = -\int_{y_1}^{y_2} mg\,dy$$

$$W_g = -mg\left(y_2 - y_1\right)$$

Για μια κλειστή διαδρομή: Το έργο που παράγεται από μια συντηρητική δύναμη κατά μήκος αυτής της κλειστής διαδρομής είναι μηδέν



Βαρύτητα: συντηρητική δύναμη $W_g = \oint \vec{F}_g \cdot d\vec{s} = 0$

Τριβή: μη συντηρητική

πάντα αντιτίθεται στην κίνηση ενός σώματος και άρα παράγει πάντα έργο σε μια κλειστή διαδρομή.

Μετατρέπει έργο σε θερμότητα

"Αποθηκευμένη" Ενέργεια

- Αν σηκώσω ένα τούβλο (αργά ώστε η ταχύτητα να 'ναι σταθερή)

$$W_{tot} = W_g + W_m = 0 \Rightarrow W_m = \vec{F}_m \cdot \vec{d} = mgh = mg\left(y_2 - y_1\right) = -W_g$$

- Αν αφήσω το τούβλο να πέσει, τότε η βαρύτητα εκτελεί έργο:

$$W_g = +mg\left(y_2 - y_1\right) = mgh$$

- Από κινηματική: $v_f^2 - v_i^2 = -2gh \Rightarrow v_f^2 = 2g\left(y_i - y_f\right) \Rightarrow v_f = \sqrt{2gh}$
- Το έργο επομένως είναι: $W = \Delta E_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow E_{\kappa\iota\nu}^f = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}m2gh = mgh$

Αφού $E_{\kappa\iota\nu}^i = 0$ και $W_{net} = E_{\kappa\iota\nu}^f - E_{\kappa\iota\nu}^i \Rightarrow W_{net} = E_{\kappa\iota\nu}^f = mgh$ το τούβλο παράγει έργο

Το σώμα βρισκόμενο στο συγκεκριμένο ύψος h αποκτά ενέργεια που προέρχεται από το έργο που δαπανάται για να μεταφερθεί στη θέση αυτή

Αυτή η ενέργεια λόγω της θέσης του σώματος ονομάζεται:

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ $\boxed{U = mgh}$

- Η δυναμική ενέργεια σχετίζεται μόνο με συντηρητικές δυνάμεις.
- Η δυναμική ενέργεια σχετίζεται πάντοτε με συστήματα ≥2 αλληλεπιδρόντων σωμάτων

Δυναμική ενέργεια

- Η δυναμική ενέργεια σχετίζεται με την κατάσταση ενός συστήματος του οποίου τα επιμέρους σώματα αλληλεπιδρούν με δυνάμεις.

  (ελαστική δυναμική ενέργεια, ηλεκτρική δυναμική ενέργεια, βαρυτική).

- Στη βαρύτητα, η δυναμική ενέργεια ορίζεται ως προς τη θέση των μαζών

  Αν πούμε $\Delta U = U_f - U_i = W_m = mg\left(y_2 - y_1\right) = -W_g$ τότε $U = mgy$

  Η βαρυτική δυναμική ενέργεια ορίζεται $U = mgy + C$ όπου C=σταθερά

- Η σταθερά C μπορεί να ’χει οποιαδήποτε τιμή μια και μετρούμε πάντα διαφορές δυναμικής ενέργειας και όχι απόλυτες τιμές

  - ✓ Σε προβλήματα διαλέγουμε μια κατάσταση αναφοράς (π.χ. κάποιο ύψος όπου η δυναμική ενέργεια είναι γνωστή ή μηδέν)
  - ✓ Εξαρτάται πάντα από το ύψος του σώματος από την επιφάνεια της γης

Επομένως $\Delta U = -W_g = -\int_1^2 \vec{F}_g \cdot d\vec{l}$

Προσοχή στο ‘-’

- Γενικά, για συντηρητικές δυνάμεις: $\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = -W_F$

Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας

Ορίζουμε σαν μηχανική ενέργεια ενός συστήματος:

$$E_{\mu\eta\chi} = E_{\kappa\iota\nu.} + U$$

Για συντηρητικά συστήματα μόνο:

$$E^{f}_{\kappa\iota\nu.} - E^{i}_{\kappa\iota\nu.} + U_{f} - U_{i} = 0$$

$$\Downarrow$$

Πανίσχυρος νόμος διατήρησης της μηχανικής ενέργειας

- Η μηχανική ενέργεια ενός συστήματος διατηρείται όταν δεν υπάρχει μεταφορά ενέργειας με το περιβάλλον (απομονωμένο σύστημα).
- Αν υπάρχει αντίσταση ενός μέσου ή δύναμη τριβής η μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται

Δυναμική ενέργεια

Σκεφτείτε τι συμβαίνει σε μια διάσταση:

$$U_f = -\int_i^f F(x)dx + U_i \qquad \textbf{(A)}$$

Ας υποθέσουμε $U_i = 0$ και $U_f = U_f(\mathrm{x})$

Αν αντιστρέψουμε την (A) (δηλαδή παραγωγίσουμε) τότε θα πάρουμε

$$\frac{dU_f}{dx} = -\frac{d}{dx}\int_i^f F(x)dx = -F(x) \Rightarrow \begin{cases} \boxed{F(x) = -\dfrac{dU_f}{dx}} \\ \boxed{U_f(x) = -\int F(x)dx} \end{cases}$$

Αν ξέρουμε τη *U* βρίσκουμε την *F*

Αν ξέρουμε την *F* βρίσκουμε την *U*

Σε 3 διαστάσεις (χρησιμοποιούμε μερικές παραγώγους αφού U=U(x,y,z))

$$F_x = -\frac{\partial U_f}{\partial x},\quad F_y = -\frac{\partial U_f}{\partial y},\quad F_z = -\frac{\partial U_f}{\partial z} \Rightarrow \quad \boxed{-F(x,y,z) = \hat{i}\frac{\partial U_f}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial U_f}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial U_f}{\partial z}}$$

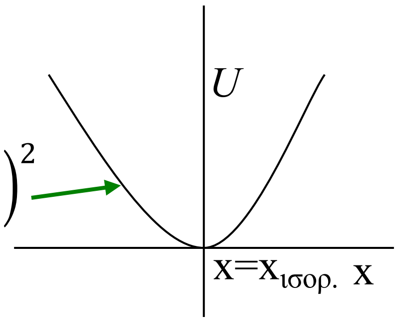
Αν μπορούμε να μετρήσουμε *U*(*r*) τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την *F*

Ελατήρια

Η δύναμη ελατηρίου $F = -k\Delta x$, είναι μια συντηρητική δύναμη.

Ξεκινάμε με ελατήριο στο φυσικό του μήκος και μετά το συμπιέζουμε κατά μια ποσότητα x.

$$U_f - U_i = U(x) - U\left(x_{\iota\sigma o\rho.}\right) = -\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{l} = -\int_{x_{\iota\sigma o\rho}}^{x} \left(-k\Delta x\right)dx = \frac{1}{2}k\left(\Delta x\right)^2$$



Αν διαλέξουμε την ποσότητα $U(x_{\iota\sigma o\rho.}) = 0$ τότε:

$$U_f(\Delta x) = \frac{1}{2}k\left(\Delta x\right)^2$$

Ελαστική δυναμική ενέργεια

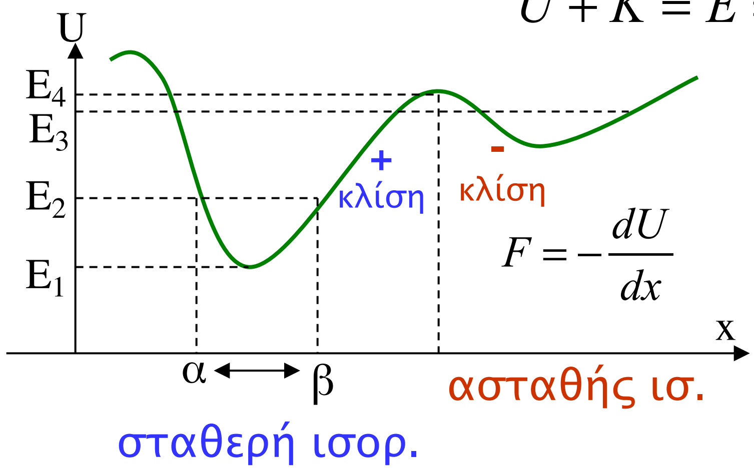
$E_{\kappa\iota\nu}$ και U θεωρούνται και τα δύο μορφές μηχανικής ενέργειας

$$\left.\begin{aligned} W_{\text{net}} &= \Delta\left(E_{\kappa\iota\nu.}\right) \\ \Delta U &= -\int_1^2 \vec{F}_{\text{net}}\cdot d\vec{l} = -W_{\text{net}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta E_{\kappa\iota\nu.} + \Delta U = 0$$

Διάγραμμα ενέργειας

Η γενική κίνηση ενός σώματος μπορεί να βρεθεί αν κάνουμε το διάγραμμα της δυναμικής ενέργειας:

$$U + K = E \Rightarrow U(x) + \frac{1}{2}mv^2 = E \Rightarrow v = \pm\sqrt{\frac{2}{\mathrm{m}}\left(E - U(x)\right)}$$



Πρέπει E ≥ U(x) ώστε η ταχύτητα, *v*, να έχει πραγματική τιμή

Αν E = E_2 τότε το σώμα ταλαντώνεται μεταξύ των σημείων α και β

Επομένως η γενική λύση για τα x(t)

$$v = \pm\sqrt{\frac{2}{\mathrm{m}}\left(E - U(x)\right)} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mathrm{m}}\left(E - U(x)\right)} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}} = \pm\int_0^t dt$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε το χρόνο t συναρτήσει της x
Κατόπιν αν αναστρέψουμε θα πάρουμε την x συναρτήσει του t.

Γενικά αυτό δεν είναι πάντα πραγματοποιήσιμο αναλυτικά και χρειάζεται να λύσουμε το πρόβλημα αριθμητικά (υπολογιστές) .

Παράδειγμα

Μια μπάλα πέφτει από ύψος h, με u_0=0. Δείξτε ότι y(t) = h-1/2gt^2

ΛΥΣΗ

Μετρούμε την U σχετικά με το έδαφος.

$$E = mgh \quad \text{και} \quad U(y) = mgy \qquad E^{i}_{\kappa\iota\nu} = 0$$

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι $E = mgh$

Στο ύψος y(t) η δυναμική του ενέργεια είναι $U(y) = mgy$

Αλλά

$$E_{o\lambda} = E_{\kappa\iota\nu} + U \Rightarrow E_{\kappa\iota\nu} = E_{o\lambda} - U \Rightarrow \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 = mgh - mgy \Rightarrow$$

$$\mathrm{v} = \pm\sqrt{2g(h-y)} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \pm\sqrt{2g(h-y)} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{2g(h-y)}} = \pm dt \Rightarrow$$

$$\int_h^y \frac{dy}{\sqrt{2g(h-y)}} = -\int_0^t dt \Rightarrow -\int_h^y \frac{dy}{\sqrt{2g}\sqrt{h-y}} = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2g}} 2\sqrt{h-y}\Big|_h^y \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{(h-y)} \Rightarrow y = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το έργο που παράγεται σε 2 διαφορετικά αδρανειακά συστήματα για σώμα που επιταχύνεται με επιτάχυνση “α” από τη θέση ηρεμίας ως προς (α) Ακίνητο σύστημα (β) Κάποιο που κινείται με ταχύτητα v.

(α) Ακίνητο σύστημα

$$F = ma \qquad d = \frac{1}{2}at^2 \quad \left(\mathrm{v_i} = 0,\ \mathrm{v_f} = at\right)$$

$$\Rightarrow W = Fd = (ma)\left(\frac{1}{2}at^2\right) = \frac{1}{2}m(at)^2 = \frac{1}{2}m\left(\mathrm{v_f^2} - \cancelto{0}{\mathrm{v_i^2}}\right) = \frac{1}{2}m\mathrm{v_f^2} = \Delta E_{\kappa\iota\nu}$$

(β) Κινούμενο σύστημα

$$d = \mathrm{v}t + \frac{1}{2}at^2, \quad F = ma \quad \left(\mathrm{v_i} = \mathrm{v},\ \mathrm{v_f} = \mathrm{v} + at\right)$$

$$\Rightarrow W = Fd = (ma)\left(\mathrm{v}t + \frac{1}{2}at^2\right) = ma\mathrm{v}t + \frac{1}{2}m(at)^2 \qquad (1)$$

Αλλά $\Delta E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}m\left(\mathrm{v_f^2} - \mathrm{v_i^2}\right) = \frac{1}{2}m(\mathrm{v} + at)^2 - \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}m\left[\mathrm{v}^2 + (at)^2 + 2\mathrm{v}at\right] - \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2$

$$\Rightarrow \Delta E_{\kappa\iota\nu} = m\mathrm{v}at + \frac{1}{2}m(at)^2 \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε $\boldsymbol{W = \Delta E_{\kappa\iota\nu}}$

- W και $\Delta E_{\kappa\iota\nu}$ δεν έχουν την ίδια μορφή όπως στο ακίνητο σύστημα αλλά είναι και πάλι ίσα μεταξύ τους.

Ισχύς

- Ισχύς ορίζεται σαν ο ρυθμός παραγωγής έργου: $\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{x}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \boxed{\Rightarrow P = \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{v}}}$$

Μονάδα μέτρησης ισχύος
Watt = Joule/sec