Εναλλασσόμενα ρεύματα

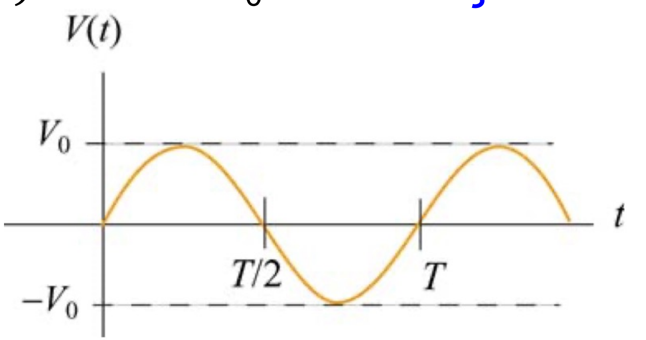
Πηγές Εναλλασσόμενων ρευμάτων

Έχουμε δει ότι μεταβολές στη μαγνητική ροή που περνά από κάποια επιφάνεια μπορεί να προκαλέσει μια επαγόμενη ΗΕΔ σύμφωνα με τον νόμο του Faraday

Συγκεκριμένα αν ένα πηνίο περιστρέφεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο, η επαγόμενη ΗΕΔ μεταβάλλεται ημιτονοειδώς συναρτήσει του χρόνου και το ρεύμα που δημιουργείται έχει την ίδια εναλλασσόμενη συμπεριφορά (AlternatingCurrent) και δημιουργεί μια πηγή AC ισχύος.

Συμβολίζουμε την AC πηγή με το σύμβολο:

Μια εναλλασσόμενη τάση έχει τη μορφή: $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$ όπου V_0 το πλάτος



Εξαιτίας της περιοδικότητας του ημιτόνου, η τάση V σε κάποια χρονική στιγμή θα είναι ίση με τη τάση την χρονική στιγμή ($t+T$), όπου T η περίοδος

Η συχνότητα ορίζεται ως $1/T$ με μονάδες (s^{-1}) ή Hz, ενώ η γωνιακή συχνότητα $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$

Πηγές Εναλλασσόμενων ρευμάτων

Όταν μια πηγή δυναμικού συνδεθεί σε ένα κύκλωμα RLC, πρόσφερει ενέργεια στο σύστημα ώστε να αντισταθμίσει την απώλεια ενέργειας στην αντίσταση και ως αποτέλεσμα η ταλάντωση του κυκλώματος δεν θα φθίνει. Οι ταλαντώσεις του ρεύματος, φορτίου, διαφοράς δυναμικού οδηγούνται ή εξαναγκάζονται από την πηγή.

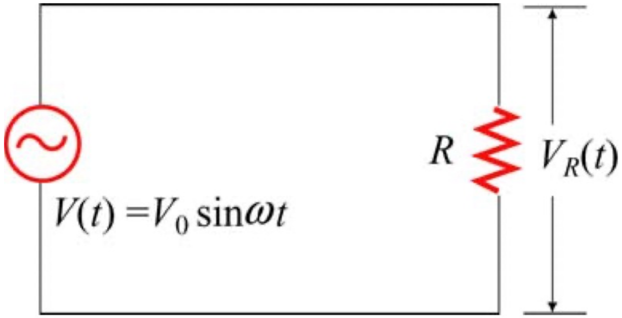
Μετά από ένα αρχικό χρονικό διάστημα, ένα AC ρεύμα θα διαρρέει το κύκλωμα ως αποτέλεσμα της πηγής δυναμικού. Το ρεύμα μπορεί να γραφεί με την μορφή:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

και ταλαντώνεται με την ίδια γωνιακή συχνότητα όπως και η πηγή δυναμικού, με πλάτος I_0 και διαφορά φάσης φ που εξαρτάται από την συχνότητα εξαναγκασμού.

Απλά AC κυκλώματα

Εξετάζουμε μερικές απλές περιπτώσεις κυκλωμάτων με ένα μόνο στοιχείο (πυκνωτή, πηνίο ή αντίσταση).



➢ Ωμικό κύκλωμα

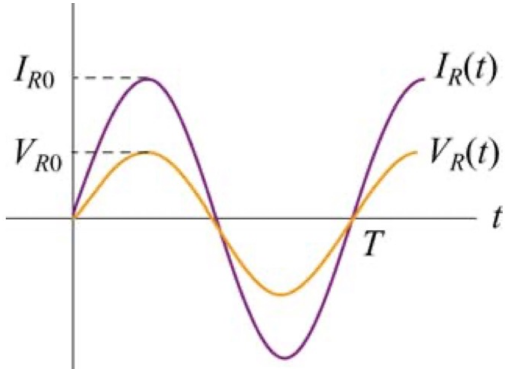
Εφαρμογή του νόμου του Kirchhoff:

$$V(t) - V_R(t) = V(t) - I_R(t)R$$

όπου $V_R(t) = I_R(t)R$ η στιγμιαία πτώση δυναμικού στην αντίσταση *R*.

Το στιγμιαίο ρεύμα στην αντίσταση θα είναι:

$$\boxed{I_R(t) = \frac{V_R(t)}{R} = \frac{V_{R0}\sin(\omega t)}{R} = I_{R0} sin\omega t}$$



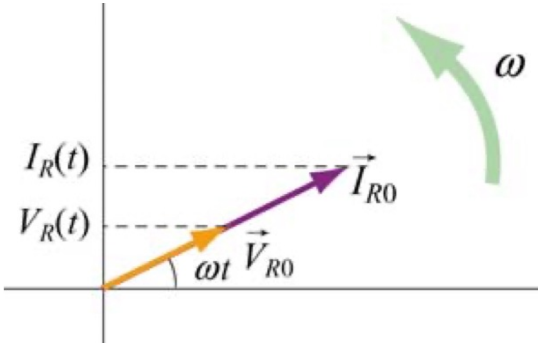
Συγκρίνοντας με τη γενική σχέση: $I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$

Παρατηρούμε ότι φ = 0 και επομένως το ρεύμα με την πηγή δυναμικού για το ωμικό καθαρά κύκλωμα βρίσκονται στην ίδια φάση.

Ωμικό κύκλωμα

Χρησιμοποιούμε τα διανυσματικό διάγραμμα (phasors), για να αναπαραστήσουμε το πλάτος του ρεύματος και της τάσης ως διανύσματα με όρισμα την αντίστοιχη φάση

διανυσματικό διάγραμμα (phasor)



Η προβολή στον κατακόρυφο άξονα δίνει το στιγμιαίο ρεύμα ή τάση τη χρονική στιγμή *t*.

Η μέση τιμή του ρεύματος κατά την διάρκεια μιας περιόδου μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$\langle I_R(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T I_R(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T I_{R0}sin(\omega t)dt = \frac{I_{R0}}{T}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}\right)dt = 0$$

Η μέση τιμή μηδενίζεται γιατί $\langle \sin(\omega t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T sin(\omega t)dt = 0$

Παρόμοια έχουμε:

$$\langle \cos(\omega t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T cos(\omega t)dt = 0$$

$$\langle \sin^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt = \frac{1}{2}$$

$$\langle \sin(\omega t)\cos(\omega t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T cos(\omega t)sin(\omega t)dt = 0$$

$$\langle \cos^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\,dt = \frac{1}{2}$$

Ωμικό κύκλωμα

Παρατηρούμε από τα προηγούμενα ότι η μέση τιμή του τετραγώνου του ρεύματος δεν μηδενίζεται:

$$\left\langle I_R^2(t)\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T I_R^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T I_{R0}^2 \sin^2(\omega t)\, dt = \frac{I_{R0}^2}{T}\int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}\right) dt = \frac{I_{R0}^2}{2}$$

Ορίζουμε ως ενεργό ρεύμα την τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής του τετραγώνου του ρεύματος:

$$I_{rms} = \sqrt{\langle I_R^2(t)\rangle} = \frac{I_{R0}}{\sqrt{2}}$$

Παρόμοια ορίζουμε την ενεργό τάση:

$$V_{rms} = \sqrt{\langle V_R^2(t)\rangle} = \frac{V_{R0}}{\sqrt{2}}$$

Η ενεργός τάση που έχουμε στους διακόπτες στη καθημερινή ζωή μας είναι 220V με συχνότητα 50Hz

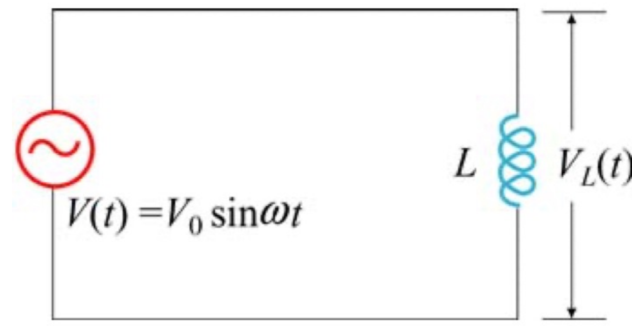
Η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση είναι: $P_R(t) = I_R(t)V_R(t) = I_R^2(t)R$

Η μέση τιμή της ισχύος σε μια περίοδο θα είναι: $\langle P_R(t)\rangle = R\left\langle I_R^2(t)\right\rangle \Rightarrow$

$$\langle P_R(t)\rangle = \frac{1}{2}I_{R0}^2 R = I_{rms}^2 R = I_{rms}V_{rms} = \frac{V_{rms}^2}{R}$$

Κύκλωμα μόνο με πηνίο

Θεωρούμε τώρα το κύκλωμα το οποίο αποτελείται από μια AC πηγή και ένα πηνίο.



Εφαρμόζουμε τον τροποποιημένο 2° νόμο του Kirchhoff:

$$V(t) - V_L(t) = V(t) - L\frac{dI_L(t)}{dt} = 0$$

Από τη σχέση αυτή έχουμε: $\frac{dI_L(t)}{dt} = \frac{V(t)}{L} = \frac{V_{L0}}{L} sin(\omega t)$

Ολοκληρώνουμε και παίρνουμε: $I_L(t) = \int dI_L = \frac{V_{L0}}{L}\int sin(\omega t)dt = -\left(\frac{V_{L0}}{\omega L}\right) cos(\omega t)$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση: $-cos(\omega t) = sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{I_L(t) = \left(\frac{V_{L0}}{\omega L}\right) sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$

Συγκρίνοντας με την γενική μορφή της εξίσωσης του ρεύματος: $I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$

Βλέπουμε: $\boxed{I_{L0} = \frac{V_{L0}}{\omega L} = \frac{V_{L0}}{X}}$ όπου $\boxed{X = \omega L}$ επαγωγική αντίσταση [μονάδες Ω]

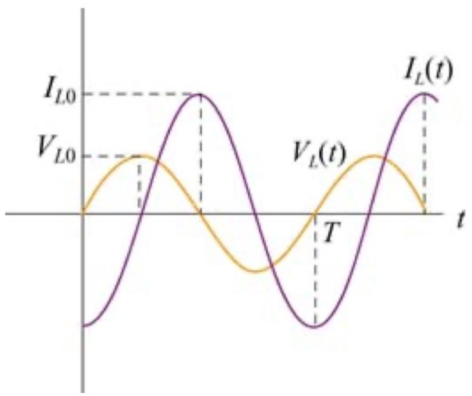
Αντίθετα με την αντίσταση, η επαγωγική αντίσταση X, εξαρτάται από την γωνιακή συχνότητα ω. Η αντίσταση στην ροή του ρεύματος αυξάνει με την συχνότητα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι σε υψηλές συχνότητες το ρεύμα αλλάζει πιο γρήγορα απ' ότι στις χαμηλές συχνότητες. Για ω=0, η επαγωγική αντίσταση μηδενίζεται $X = 0$

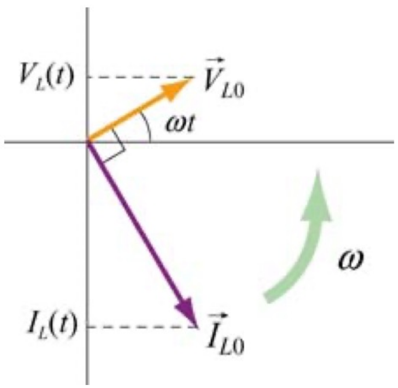
Κύκλωμα μόνο με πηνίο

Συγκρίνοντας με την γενική μορφή της εξίσωσης του ρεύματος: $I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$

και την: $I_L(t) = \left(\frac{V_{L0}}{\omega L}\right) sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ βλέπουμε ότι: $\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}}$

Τα γραφήματα του ρεύματος και της τάσης και τα διανυσματικά διαγράμματα είναι:

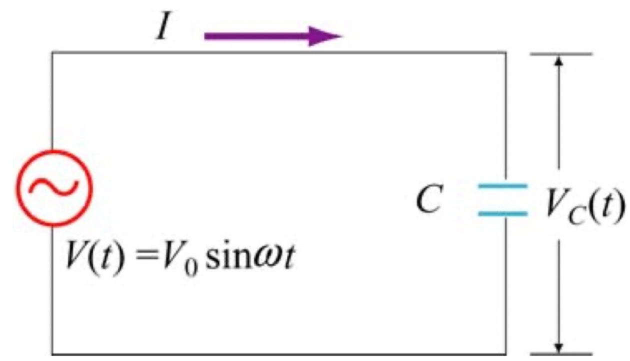




Το ρεύμα I_L είναι εκτός φάσης με την τάση V_L κατά μια γωνία $\varphi = +\pi/2$. Φθάνει στη μέγιστη τιμή κατά ¼ κύκλου αφού η V_L φθάσει στη μέγιστη τιμή της.

Στο κύκλωμα με μόνο επαγωγική αντίσταση το ρεύμα I_L υπολείπεται της τάσης V_L κατά μια γωνία $\varphi = \pi/2$.

Κύκλωμα μόνο με πυκνωτή



Θεωρούμε τώρα το κύκλωμα το οποίο αποτελείται από μια AC πηγή και έναν πυκνωτή χωρητικότητας C.

Από τον 2ο νόμο του Kirkhhoff έχουμε:

$$V(t) - V_C(t) = V(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0$$

Από την εξίσωση αυτή παίρνουμε: $Q(t) = CV(t) = CV_C(t) = CV_{C0}sin(\omega t)$

Το ρεύμα θα είναι: $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \omega CV_{C0}cos(\omega t) \Rightarrow \boxed{I(t) = \omega CV_{C0}sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$

όπου χρησιμοποιήσαμε την τριγωνομετρική σχέση: $cos(\omega t) = sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

Συγκρίνοντας με την γενική μορφή της εξίσωσης του ρεύματος: $I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$

Βλέπουμε: $\boxed{I_{C0} = C\omega V_{C0} = \frac{V_{C0}}{X_C}}$ όπου $\boxed{X_C = \frac{1}{C\omega}}$ χωρητική αντίσταση [μονάδες Ω]

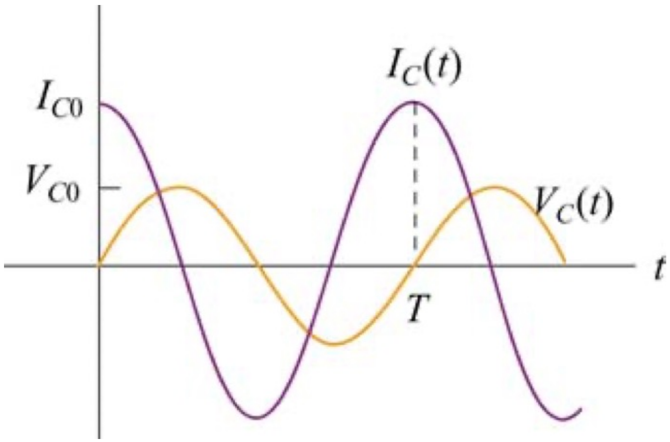
Αντίθετα με την αντίσταση, η χωρητική αντίσταση X_C, εξαρτάται από την γωνιακή συχνότητα ω. Η αντίσταση γίνεται άπειρη καθώς το $\omega \to 0$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι σε χαμηλές συχνότητες το ρεύμα αλλάζει πολύ αργά και γίνεται συνεχές οπότε ο πυκνωτής φορτίζεται και κατόπιν ενεργεί ως ανοικτός διακόπτης.

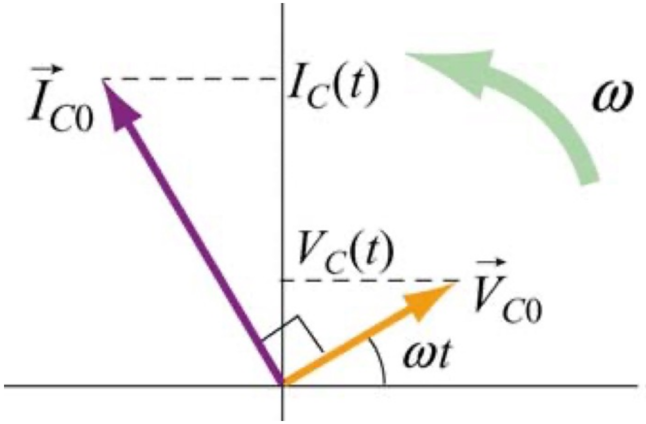
Κύκλωμα μόνο με πυκνωτή

Συγκρίνοντας με την γενική μορφή της εξίσωσης του ρεύματος: $I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$

και την: $I_C(t) = \left(\frac{V_{C0}}{X_C}\right) sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ βλέπουμε ότι: $\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2}}$

Τα γραφήματα του ρεύματος και της τάσης και τα διανυσματικά διαγράμματα είναι:

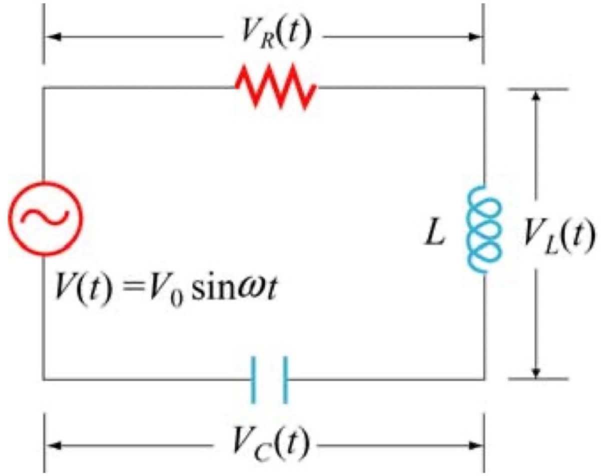




Τη χρονική στιγμή *t*=0, η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή είναι 0 αλλά το ρεύμα βρίσκεται στο μέγιστο. Το ρεύμα φθάνει τη μέγιστη τιμή του κατά ¼ του κύκλου πριν την τάση ($\varphi = \pi/2$).

Στο κύκλωμα με μόνο χωρητική αντίσταση το ρεύμα I_C προηγείται της τάσης V_C κατά μια γωνία $\varphi = \pi/2$.

Κύκλωμα RLC σε σειρά



Θεωρούμε τώρα το κύκλωμα το οποίο αποτελείται από μια AC πηγή, έναν πυκνωτή χωρητικότητας C, ένα πηνίο αυτεπαγωγής *L* και μια αντίσταση *R* συνδεδεμένα σε σειρά

Εφαρμόζουμε τον τροποποιημένο 2ο νόμο του Kirkhhoff:

$$V(t) - V_R(t) - V_L(t) - V_C(t) = V(t) - IR - L\frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

που οδηγεί στην διαφορική εξίσωση:

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = V_0 sin(\omega t)$$

Υποθέτοντας ότι ο πυκνωτής είναι αρχικά αφόρτιστος ώστε $I = +dQ/dt$ είναι ανάλογο της αύξησης του φορτίου στον πυκνωτή, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση ως:

$$\boxed{L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 sin(\omega t)}$$

Μια δυνατή λύση στην παραπάνω εξίσωση είναι: $\boxed{Q(t) = Q_0 cos(\omega t - \varphi)}$

όπου το πλάτος είναι: $Q_0 = \dfrac{V_0/L}{\sqrt{\left(\frac{R\omega}{L}\right)^2 + \left(\omega^2 - \frac{1}{LC}\right)^2}} = \dfrac{V_0}{\omega\sqrt{(R)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$

Κύκλωμα RLC σε σειρά

Θεωρώντας την χωρητική, $X_C = 1/C\omega$, και επαγωγική αντίσταση $X_L = L\omega$, το πλάτος γράφεται:

$$\boxed{Q_0 = \frac{V_0}{\omega\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}}$$

Η διαφορά τάσης μπορεί να γραφεί: $\boxed{tan\varphi = \frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{C\omega}\right) = \frac{X_L - X_C}{R}}$

Το αντίστοιχο ρεύμα μπορεί να γραφεί ως:

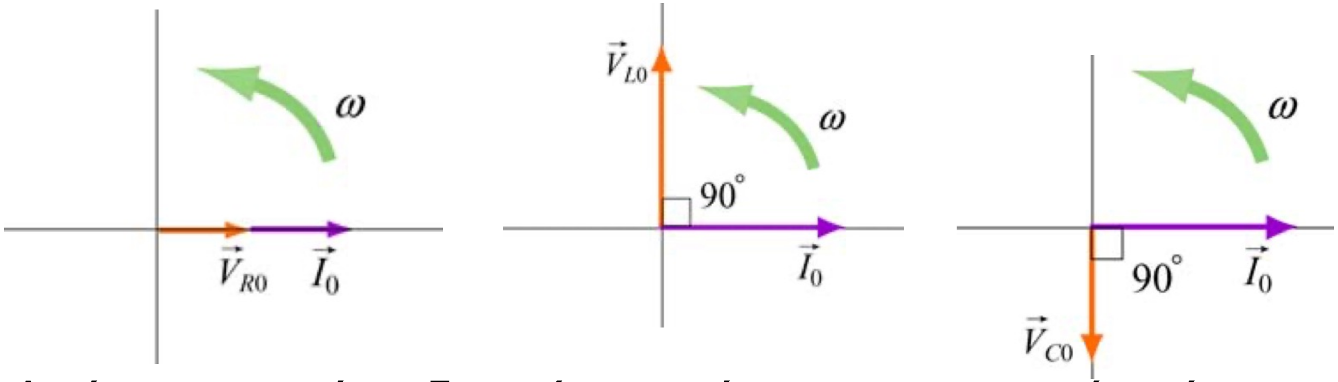
$\boxed{I(t) = +\frac{dQ}{dt} = I_0 sin(\omega t - \varphi)}$ με πλάτος: $\boxed{I_0 = -Q_0\omega = -\frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}}$

Το ρεύμα έχει το ίδιο πλάτος και φάση σε όλα τα σημεία σε ένα κύκλωμα RLC σε σειρά.

Σε αντίθεση, η στιγμιαία διαφορά δυναμικού σε κάθε στοιχείο του κυκλώματος *R, L,* και *C*, έχει πλάτος και διαφορετική σχέση φάσης με το ρεύμα.

Κύκλωμα RLC σε σειρά

Τα διανυσματικά διαγράμματα δείχνουν:



Από τα παραπάνω διαγράμματα έχουμε τις στιγμιαίες τάσεις:

$$V_R(t) = I_0 R sin(\omega t) = V_{R0} sin(\omega t)$$

$$V_L(t) = I_0 X_L sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = V_{L0} cos(\omega t)$$

$$V_C(t) = I_0 X_C sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -V_{C0} cos(\omega t)$$

Το άθροισμα των τριών διαφορών δυναμικού ισούται με την στιγμιαία τάση που δίνει η πηγή δυναμικού:

$$V(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$$

Το ίδιο θα μπορούσε να γραφεί με τα διανύσματα από το διανυσματικά διαγράμματα:

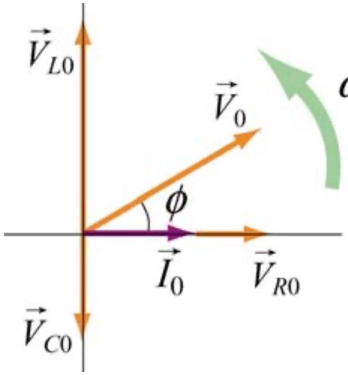
$$\vec{V}_0 = \vec{V}_{R0} + \vec{V}_{L0} + \vec{V}_{C0}$$

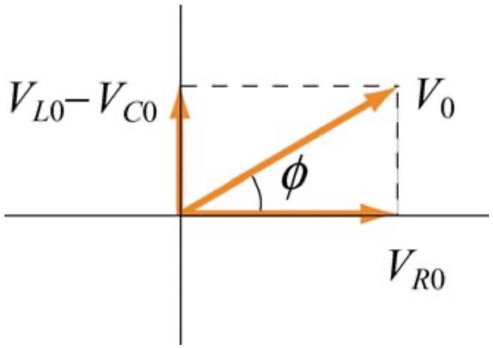
Κύκλωμα RLC σε σειρά

Από τα διανυσματικά διαγράμματα βλέπουμε ότι το ρεύμα $\vec{I}_0$ προηγείται της διαφοράς δυναμικού στον πυκνωτή κατά $\pi/2$ αλλά έπεται της επαγωγικής διαφοράς δυναμικού κατά $\pi/2$.

Τα τρία διανύσματα της διαφοράς δυναμικού περιστρέφονται αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού με τις σχετικές τους θέσεις συγκεκριμένες.

Η σχέση μεταξύ των διαφόρων πλατών διαφοράς δυναμικού δίνεται από τα δύο παρακάτω διανυσματικά διαγράμματα:





Προκύπτει ότι:

$$V_0 = |\vec{V}_0| = |\vec{V}_{R0} + \vec{V}_{L0} + \vec{V}_{C0}| \Rightarrow$$

$$V_0 = \sqrt{V_{R0}^2 + (V_{L0} - V_{C0})^2} \Rightarrow$$

$$V_0 = \sqrt{(I_0 R)^2 + (I_0 X_L - I_0 X_C)^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{V_0 = I_0\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Θα πρέπει να τονιστεί ότι το μέγιστο πλάτος της AC διαφοράς δυναμικού V_0 δεν ισούται με το άθροισμα των πλατών της διαφοράς δυναμικού στα επιμέρους στοιχεία:

$$\boxed{V_0 \neq V_{R0} + V_{L0} + V_{C0}}$$

Αυτό συμβαίνει γιατί οι τάσεις έχουν διαφορά φάσης μεταξύ τους και δεν φθάνουν στις μέγιστες τιμές τους ταυτόχρονα

Εμπέδιση (γενικευμένη αντίσταση – impedence)

Έχουμε ορίσει την χωρητική αντίσταση $X_C = 1/\omega C$ και την επαγωγική αντίσταση, $X_L = L\omega$ και είδαμε ότι η κάθε μία παίζει το ρόλο της αντίστασης στα κυκλώματα με τα μεμονωμένα στοιχεία.

Στο κύκλωμα *RLC* η δρώσα αντίσταση ονομάζεται εμπέδιση (impedence) και ορίζεται

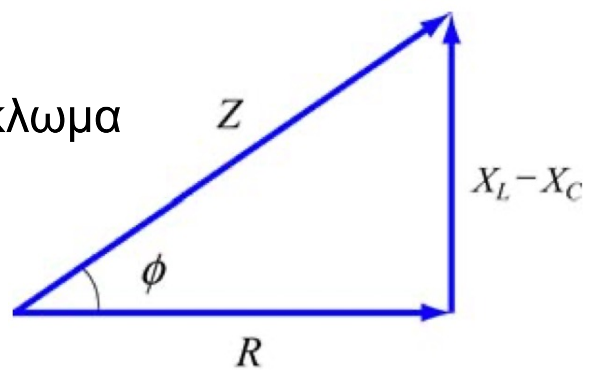
$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

Η σχέση μεταξύ των R, X_L και X_C μπορεί να αναπαρασταθεί με το διάγραμμα:

Η εμπέδιση έχει επίσης μονάδες Ohm Ω:

Μπορούμε να γράψουμε το ρεύμα που διαρρέει ένα κύκλωμα συναρτήσει της εμπέδισης και της τάσης:

$$\boxed{I = \frac{V_0}{Z} sin(\omega t - \varphi)}$$



Η εμπέδιση εξαρτάται από την γωνιακή συχνότητα όπως η χωρητική και επαγωγική αντίσταση

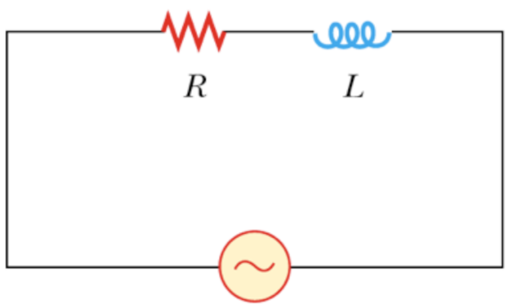
Εν γένει, η εμπέδιση ορίζεται ως ο λόγος του πλάτους της τάσης ως προς το πλάτος του ρεύματος:

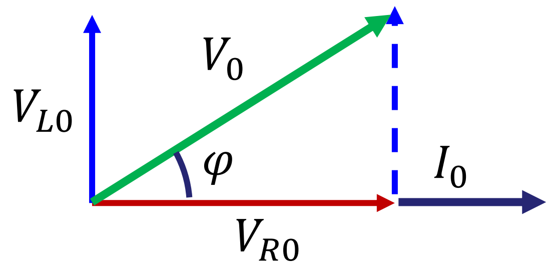
$$\boxed{Z = \frac{V_0}{I_0}}$$

Παράδειγμα – Υπολογισμός Εμπέδισης

Για να βρούμε την εμπέδιση μιας σύνθετης συνδεσμολογίας, κατασκευάζουμε το διανυσματικό διάγραμμα και υπολογίζουμε την *Z* με βάση τον ορισμό.

- Θα υπολογίσουμε την εμπέδιση ενός *RL* κυκλώματος σε σειρά





Εφόσον τα στοιχεία *R* και *L* είναι συνδεδεμένα σε σειρά, διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα οπότε θα έχουμε το διανυσματικό διάγραμμα του παραπάνω σχήματος.

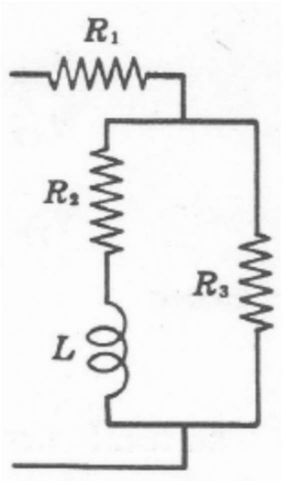
Από τον ορισμό θα έχουμε:

$$Z = \frac{V_0}{I_0} = \frac{\sqrt{V_{R0}^2 + V_{L0}^2}}{I_0} = \frac{\sqrt{(I_0 Z_R)^2 + (I_0 Z_L)^2}}{I_0} = \sqrt{Z_R^2 + Z_L^2}$$ Οπότε: $Z = Z\sqrt{R^2 + (\omega R)^2}$

Η γωνία *φ* είναι η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος. Άρα

$$tan\varphi = \frac{\mathrm{V}_{L0}}{\mathrm{V}_{\mathrm{R}0}} = \frac{I_0 Z_L}{I_0 Z_R} = \frac{\omega L}{R}$$

Παράδειγμα – Υπολογισμός Εμπέδισης



- Θα υπολογίσουμε την εμπέδιση του διπλανού κυκλώματος, το οποίο είναι πιο πολύπλοκο από το προηγούμενο.

  Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των μιγαδικών αριθμών

  Το κύκλωμα έχει δύο κλάδους συνδεδεμένους παράλληλα, R_2 και L σε σειρά και παράλληλα με την R_3. Ο συνδυασμός αυτός είναι συνδεδεμένος σε σειρά με την R_1.

  - Σε σειρά R_2 και L: $Z_{R_2L} = R_2 + jL\omega$
  - Παράλληλα $Z_{R_2L}R_3$: $\dfrac{1}{Z_{R_2LR_3}} = \dfrac{1}{Z_{R_2L}} + \dfrac{1}{R_3} = \dfrac{R_3 + Z_{R_2L}}{R_3 Z_{R_2L}} \Rightarrow Z_{R_2LR_3} = \dfrac{R_3 Z_{R_2L}}{R_3 + Z_{R_2L}}$
  - Σε σειρά R_1και $Z_{R_2L}R_3$: $Z = R_1 + Z_{R_2LR_3} = R_1 + \dfrac{R_3(R_2 + jL\omega)}{R_3 + (R_2 + jL\omega)} \Rightarrow$

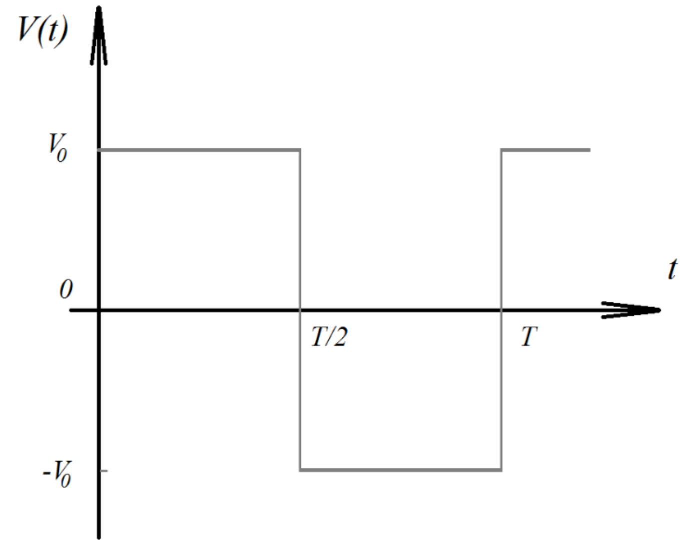
$$Z = R_1 + \frac{R_3(R_2 + jL\omega)[R_3 + R_2 - jL\omega]}{[R_3 + R_2 + jL\omega][R_3 + R_2 - jL\omega]} \Rightarrow$$

$$Z = R_1 + \frac{R_2R_3(R_2 + R_3) + R_3L^2\omega^2 + jL\omega R_3(R_2 + R_3) - jL\omega R_3R_2}{(R_3 + R_2)^2 + L^2\omega^2} \Rightarrow$$

$$Z = \left[R_1 + \frac{R_3(R_2^2 + R_2R_3 + \omega^2L^2)}{(R_3 + R_2)^2 + L^2\omega^2}\right] + j\left[\frac{\omega L R_3^2}{(R_3 + R_2)^2 + L^2\omega^2}\right] \Rightarrow Z = R_{eq} + j\omega L_{eq}$$

Παράδειγμα – Υπολογισμός μέσης και ενεργού τιμής ρεύματος

- Θα υπολογίσουμε την μέση και ενεργό τιμή του τετραγωνικού παλμού τάσης του σχήματος.



Για τη μέση τιμή θα έχουμε:

$$\langle V\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)dt = \frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2} V(t)dt + \int_{T/2}^{T} V(t)dt\right] \Rightarrow$$

$$\langle V\rangle = \frac{1}{T}\left[\frac{V_0T}{2} + \frac{(-V_0)T}{2}\right] \Rightarrow \langle V\rangle = 0$$

$$\langle V^2\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)^2dt = \frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2} V(t)^2dt + \int_{T/2}^{T} V(t)^2dt\right] \Rightarrow$$

$$\langle V^2\rangle = \frac{1}{T}\left[\frac{V_0^2T}{2} + \frac{(-V_0)^2T}{2}\right] \Rightarrow \langle V^2\rangle = V_0^2 \Rightarrow V_{rms} = V_0$$