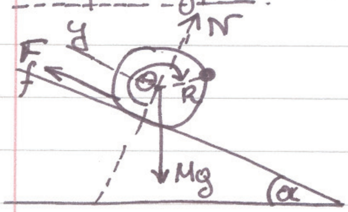
Παράδειγμα



Δίσκος κυλά, χωρίς ολίσθηση προς το κατώτερο σημείο ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης α με την οριζόντια διεύθυνση. Να βρεθούν οι εξισώσεις των δυνάμεων των δεσμών.

Οι συντεταγμένες:

y: δίνει τη μετατόπιση του κέντρου μάζας του δίσκου από το υψηλότερο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου.

θ: είναι η γωνία περιστροφής του δίσκου.

Έστω ότι λύνω αρχικά το πρόβλημα με Newtonian μηχανική και κατόπιν με Lagrangian δυναμική. Θα δούμε έτσι τις αναπτυσσόμενες δυνάμεις αλλά και θα συγκρίνουμε τις μεθόδους.

Newtonian Μηχανική

Κατά μήκος της y-διεύθυνσης η συνισταμένη δύναμη είναι:

(1) $M\ddot{y} = Mg\sin\alpha - F_f$ όπου F_f η τριβή

Κατά τη διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια:

(2) $0 = -Mg\cos\alpha + N$ όπου N η κάθετη αντίδραση

Η ροπή ως προς το κέντρο του δίσκου θα είναι: (προκαλείται από F_f)

(3) $\tau = F_f R = I\ddot{\theta}$ όπου I η ροπή αδράνειας

Τέλος η κύλιση χωρίς ολίσθηση δίνει: F_R

(4) $y = R\theta \Rightarrow \ddot{y} = R\ddot{\theta}$

Αντικατάσταση στη (3) $\Rightarrow \tau = F_f R = I\dfrac{\ddot{y}}{R} \Rightarrow \boxed{F_f = \dfrac{I}{R^2}\ddot{y}}$

Αντικατάσταση στην (1) θα δώσει :

$$M\ddot{y} = Mg\sin\alpha - \frac{I}{R^2}\ddot{y} \Rightarrow \left(M+\frac{I}{R^2}\right)\ddot{y} = Mg\sin\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = \frac{Mg\sin\alpha}{M+\frac{I}{R^2}} \Rightarrow \ddot{y} = \frac{g\sin\alpha}{1+\frac{I}{MR^2}}$$

Για συμπαγή δίσκο $I = \frac{1}{2}MR^2$ οπότε $\ddot{y} = \frac{g\sin\alpha}{1+\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{\ddot{y} = \frac{2}{3}g\sin\alpha}$

Οπότε η δύναμη τριβής θα είναι: $F_f = \frac{I}{R^2}\ddot{y} = \frac{Mg\sin\alpha}{1+\frac{MR^2}{I}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{F_f = \frac{1}{3}Mg\sin\alpha}$$

Lagrangian Μηχανική

Η κινητική ενέργεια του δίσκου είναι: $T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$

Η δυναμική ενέργεια είναι: $V = -Mgy\sin\alpha$ (θεωρώντας την αρχή των αξόνων στη κορυφή του επιπέδου)

Η εξίσωση του δεσμού είναι: $f(y,\theta) = y - R\theta = 0$

Άρα $L = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + Mgy\sin\alpha =$

Από τις τροποποιημένες εξίσωσεις Lagrange με πολ/στές :

$\boxed{y:}$ $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = \lambda\frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow M\ddot{y} - Mg\sin\alpha = \lambda$ αφού $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$

$\boxed{\theta:}$ $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda\frac{\partial f}{\partial \theta} \Rightarrow I\ddot{\theta} = -\lambda R$ αφού $\frac{\partial f}{\partial \theta} = -R$

Επομένως καταλήγουμε στο σύστημα :

(Α) $M\ddot{y} - Mg\sin\alpha = \lambda$

(Β) $I\ddot{\theta} = -\lambda R$

(Γ) $y = R\theta$

$\Rightarrow$ από (Ε): $\Rightarrow M\ddot{y} - Mg\sin\alpha = -I\ddot{y}/R^2$

από (Δ) $\Rightarrow \frac{I}{R}\ddot{y} = -\lambda R$ (Ε)

$\ddot{y} = R\ddot{\theta}$ (Δ)

Οπότε : $\left(M + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{y} = Mg\sin\alpha \Rightarrow \boxed{\ddot{y} = \frac{g\sin\alpha}{1 + I/MR^2}}$ ίδια με Newton

Επομένως από (Ε) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{-I\ddot{y}}{R} = \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{-I}{R^2}\frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{I}{MR^2}} = -\frac{g\sin\alpha}{\frac{R^2}{I} + M^{-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{y} = -\frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{MR^2}{I}}}$$ Γενικευμένη δύναμη του δεσμού

Στη διεύθυνση y : $Q_y = F_y = \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda = -\frac{Mg\sin\alpha}{1 + MR^2/I}$

Ίδια με τη Newtonian μεθοδολογία

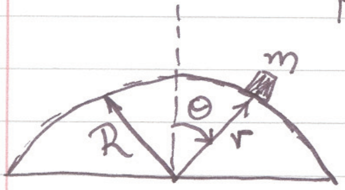
Το (−) πρόσημο υπάρχει γιατί η F_f έχει διεύθυνση προς τα y.

Στη διεύθυνση θ : η ροπή $Q_\theta = \tau = \lambda\frac{\partial f}{\partial\theta} = -\lambda R$

Αλλά $\tau = -F_f R = R|F_f|$ η ροπή ως προς το κέντρο του δίσκου εξαιτίας της δύναμης της τριβής

Παράδειγμα

Μάζα γλιστρά σε λεία ημισφαιρική επιφάνεια
Να βρεθούν οι δυνάμεις των δεσμών



Οι συντεταγμένες που έχουμε είναι r και θ
Ενώ ο δεσμός ο οποίος υπάρχει είναι $f(r,\theta)=r-R=0$
(σταθερής ακτίνας ημισφαίριο)

$$T=\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\theta^2)$$

Το πρόβλημα έχει πολλές ομοιότητες με το εκκρεμές

$$V=mgr\cos\theta$$

$$L=\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\theta^2)-mgr\cos\theta$$

Επομένως οι τροποποιημένες εξισώσεις Lagrange θα είναι:

$\boxed{r:}$ $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r}-\frac{\partial L}{\partial r}=\lambda\frac{\partial f}{\partial r}\Rightarrow \boxed{m\ddot r-mr\dot\theta^2+mg\cos\theta=\lambda}$$ αφού $\lambda\frac{\partial f}{\partial r}=1$

$\boxed{\dot\theta}$ $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}-\frac{\partial L}{\partial \theta}=\lambda\frac{\partial f}{\partial \theta}\Rightarrow \boxed{mr^2\ddot\theta+2mr\dot r\dot\theta-mgr\sin\theta=0}$$ $\lambda\frac{\partial f}{\partial r}=0$

Ο δεσμός είναι $r=R\Rightarrow \dot r=0\ ,\ \ddot r=0$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του r έχουμε:

$$mR\dot\theta^2+mg\cos\theta=\lambda$$

και για θ $$\cancel{m}R^2\ddot\theta-\cancel{m}gR\sin\theta=0\Rightarrow\ddot\theta=\frac{g}{R}\sin\theta$$

Μπορούμε να ολοκληρώσουμε την τελευταία χρησιμοποιώντας:

$$\ddot\theta=\frac{d\dot\theta}{dt}=\frac{d\dot\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\dot\theta\frac{d\dot\theta}{d\theta}$$ οπότε $$\ddot\theta=\frac{g}{R}\sin\theta\Rightarrow\dot\theta\frac{d\dot\theta}{d\theta}=\frac{g}{R}\sin\theta\Rightarrow$$

$\Rightarrow \int \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \int \frac{g}{R} \sin\theta\, d\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}(1-\cos\theta)$

Η σταθερά της ολοκλήρωσης τίθεται $\emptyset$ υποθέτοντας ότι

$\dot{\theta}=0$ όταν $\theta=0$ (δηλαδή η μάζα ξεκινά από ηρεμία στην κορυφή του ημισφαιρίου)

Επομένως $\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)}$

Από την εξίσωση ως προς R έχουμε:

$$\lambda = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - m\cancel{R}\frac{2g}{\cancel{R}}(1-\cos\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = mg(\cos\theta - 2 + 2\cos\theta) = mg(3\cos\theta - 2)$$

Η δύναμη του δεσμού είναι ~~σε~~ ακτινική διεύθυνση και είναι απλά η κάθετη δύναμη από την επιφάνεια

$$N = \lambda\frac{\partial f}{\partial r} = \lambda = mg(3\cos\theta - 2)$$

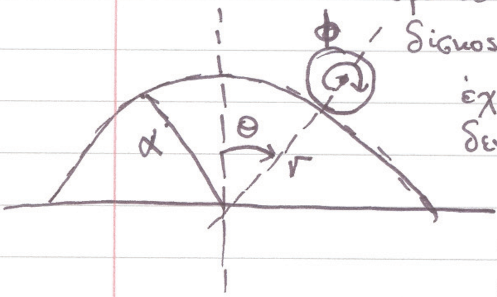
Μπορούμε να βρούμε κάτι ενδιαφέρον: Εξ ορισμού η κάθετη δύναμη πρέπει να είναι θετική. Δηλαδή να δείχνει προς τα έξω από την επιφάνεια.

Βρήκαμε όμως $N = mg(3\cos\theta - 2)$ η οποία γίνεται αρνητική

όταν $3\cos\theta - 2 < 0 \Rightarrow \cos < \frac{2}{3}$ δηλαδή $\boxed{\theta > 48.2^\circ}$

Δηλαδή για $\theta > 48.2^\circ$ η μάζα θα φύγει από το κεκλιμένο
Η κάθετη δύναμη δεν μπορεί να δώσει ότι χρειάζεται για να συντηρήσει το δεσμό και έτσι η μάζα φεύγει από την επιφάνεια

Παράδειγμα: Δίσκος κυλά σε ημισφαιρική επιφάνεια. Να βρεθούν οι δυνάμεις των δεσμών και πότε ο δίσκος φεύγει από την επιφάνεια. Ο δίσκος έχει ακτίνα R και το ημισφαίριο α και δεν ολισθαίνει.



Οι συντεταγμένες θ, r δίνουν τη θέση του κέντρου μάζας του δίσκου. Η γωνία φ δίνει τη περιστροφή του δίσκου γύρω από το κέντρο μάζας

Ο δεσμός θα είναι: $f_1(r,\theta,\phi) = r-(R+\alpha) = 0$

Υπάρχει και 2ος δεσμός: ο δίσκος κυλά χωρίς ολίσθηση

$$f_2(r,\theta,\phi) = R(\phi-\theta)-\alpha\theta = 0$$ (το πρόβλημα του 3ου φροντιστηρίου)

Επομένως:
$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 \\ V &= mgr\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 - mgr\cos\theta$$

Οι τροποποιημένες εξισώσεις Lagrange:

$\boxed{r}$ $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial r} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial r}$ (2 δεσμοί υπάρχουν)

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta \\ &\frac{\partial f_1}{\partial r} = 1 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f_2}{\partial r} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = \lambda_1} \quad (1)$$

$\boxed{\theta}$ $\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mr^2\dot\theta$, $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mr^2\ddot\theta + 2mr\dot r\dot\theta$

$\dfrac{\partial L}{\partial \theta} = mgr\sin\theta$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial \theta} = 0$ και $\dfrac{\partial f_2}{\partial \theta} = -(R+\alpha)$

Επομένως η τροποποιημένη εξίσωση Lagrange με πολ/στές είναι:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial \theta} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial \theta} \Rightarrow \boxed{mr^2\ddot\theta + 2mr\dot r\dot\theta - mgr\sin\theta = -\lambda_2(R+\alpha)} \quad (2)$$

Τέλος ως προς ϕ θα έχουμε:

$\boxed{\phi}$ $\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial \dot\phi} = I\dot\phi \quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\phi} = I\ddot\phi \quad \text{και} \quad \dfrac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial \phi} = 0 \quad \text{και} \quad \dfrac{\partial f_2}{\partial \phi} = R \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial \phi} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial \phi} \Rightarrow \boxed{I\ddot\phi = \lambda_2 R} \quad (3)$$

Απο την εξίσωση του 1ου δεσμού έχουμε: $f_1(r,\theta,\phi) = r - (R+\alpha) \Rightarrow$

$$\Rightarrow r = R+\alpha \Rightarrow \dot r = \ddot r = 0$$

Επομένως η (1) γίνεται: $\boxed{-m(R+\alpha)\dot\theta^2 + mg\cos\theta = \lambda_1}$ (4)

Η (2) γίνεται: $m(R+\alpha)^2\ddot\theta - mg\cancel{(R+\alpha)}\sin\theta = -\lambda_2\cancel{(R+\alpha)}$

$$\Rightarrow \boxed{m(R+\alpha)\ddot\theta - mg\sin\theta = -\lambda_2} \quad (5)$$

Απο την εξίσωση του 2ου δεσμού έχουμε

$$f_2(r,\theta,\phi) = R(\phi-\theta) - \alpha\theta = 0 \Rightarrow \phi = \frac{(R+\alpha)}{R}\theta \Rightarrow \boxed{\ddot\phi = \frac{(R+\alpha)}{R}\ddot\theta}$$

Αντικατάσταση στην (3) δίνει: $\ddot{\theta} = \dfrac{\lambda_2 R^2}{I(R+\alpha)}$ (6)

Αυτή την τελευταία σχέση μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην (5) οπότε:

$$m(R+a)\frac{\lambda_2 R^2}{I(R+\alpha)} - mg\sin\theta = -\lambda_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_2\left(1+\frac{mR^2}{I}\right) = mg\sin\theta \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = \frac{mg\sin\theta}{1+\frac{mR^2}{I}}}$$

Για κυλιόμενο δίσκο $I = \frac{1}{2}mR^2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{3}mg\sin\theta$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό για λ_2 στην (6)

έχουμε: $$\ddot{\theta} = \frac{mgR^2\sin\theta}{\left(1+\frac{mR^2}{I}\right)(R+a)I} = \frac{g\sin\theta}{\left(1+\frac{I}{mR^2}\right)}\frac{1}{(R+\alpha)}$$

Γράφουμε πάλι: $\ddot{\theta} = \dfrac{d\dot{\theta}}{dt} = \dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} \Rightarrow \ddot{\theta} = \dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ οπότε

$$\int \dot{\theta}\, d\theta = \frac{g}{\left(1+\frac{I}{mR^2}\right)(R+a)}\int \sin\theta\, d\theta \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\left(1+\frac{I}{mR^2}\right)(R+\alpha)}(1-\cos\theta)}$$

όπου υποθέσαμε ότι για $\theta=0$ $\dot{\theta}=0$ (ξεκινά από ηρεμία)

Αντικαθιστώντας στην (4) δίνει: $-m(R+\alpha)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = \lambda_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -\frac{m(R+\alpha)2g(1-\cos\theta)}{\left(1+\frac{I}{mR^2}\right)(R+a)} + mg\cos\theta \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \frac{-2mg(1-\cos\theta)}{\left(1+\frac{I}{mR^2}\right)} + mg\cos\theta}$$

Για κυλιόμενο δίσκο $I=\frac{1}{2}mR^2$ οπότε :

$$\lambda_1 = -\frac{4}{3}mg(1-\cos\theta) + mg\cos\theta \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \frac{mg}{3}(7\cos\theta - 4)}$$

Οι γενικευμένες δυνάμεις :

Στην διεύθυνση r παίρνουμε την κάθετη δύναμη:

$$N = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial r} = \lambda_1$$

Η N γίνεται αρνητική όταν $\cos\theta = \frac{4}{7} \Rightarrow \boxed{\theta > 55.15^\circ}$

Η γωνία αυτή είναι μεγαλύτερη από αυτή που βρήκαμε στο προηγούμενο πρόβλημα που δεν υπήρχε περιστροφή

Ο δίσκος θα αποκοπεί από την επιφάνεια για $\theta = 55.15^\circ$.

Αλλά κάτι άλλο συμβαίνει πριν χάσει επαφή με την επιφάνεια

Στη ϕ διεύθυνση η γενικευμένη δύναμη είναι η ροπή της τριβής

$$\tau_\phi = F_f R = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \phi} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \phi} = \lambda_2 R \Rightarrow F_f R = \frac{1}{3} mgR\sin\theta$$

$$\Rightarrow F_f = \frac{1}{3} mg\sin\theta$$

Στη θ διεύθυνση παίρνουμε την ίδια ροπή της τριβής

$$\tau_\theta = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = -\lambda_2 (R+\alpha)$$

Το έργο που καταναλώνει η τ_θ καθώς ο δίσκος κινείται κατά $\delta\theta$ πρέπει να είναι ίδιο με αυτό της τ_ϕ όταν κινείται κατά $\delta\phi$

$$\tau_\phi \delta\phi = \tau_\theta \delta_\theta \Rightarrow \lambda_2 (R+\alpha)\delta\theta = \lambda_2 R \delta\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (R+\alpha)\delta\theta = \delta\phi$$ Αλλά αυτό ισχύει λόγω του δεσμού f_2

Από τη στιγμή που ο δίσκος κυλά χωρίς ολίσθηση, η δύναμη της τριβής F_f είναι εξαιτίας της στατικής τριβής

Αν θεωρήσουμε ότι ο λόγος $\mu \equiv \frac{F_f}{N}$

ξέρουμε ότι $\mu \leq \mu_s$ ο συντελεστής της στατικής τριβής

$$F_f^{max} = \mu_s N$$

Οπότε: $$\mu = \frac{F_f}{N} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\frac{1}{3}mg\sin\theta}{\frac{mg}{3}(7\cos\theta - 4)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{\sin\theta}{7\cos\theta - 4}$$

Αν η γωνία θ αυξάνει, μ αυξάνει μέχρι να φθάσει την τιμή μ_s. Για μεγαλύτερες τιμές του θ, η δύναμη της τριβής δεν μπορεί να είναι αρκετά μεγάλη για να διατηρήσει το δεσμό της κύλισης χωρίς ολίσθηση. Ο δίσκος αρχίζει να γλιστρά προς τα κάτω.

Η κατάσταση της ολίσθησης πάντοτε συμβαίνει πριν εξαφανιστεί η κάθετη δύναμη η οποία αναγκάζει το δίσκο να αποχωρίζεται την επιφάνεια

Αυτό γιατί $\mu_s = \frac{F_f}{N}$ πρέπει πάντα να ισχύει πριν $N \to 0$ υποθέτοντας ότι μ_s είναι συγκεκριμένο