ΦΥΣ. 111
$2^η$ Πρόοδος: 18-Νοεμβρίου-2017

Πριν αρχίσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητας).

Ονοματεπώνυμο	**Αριθμός Ταυτότητας**

Απενεργοποιήστε τα κινητά σας.

Η εξέταση αποτελείται από 7 προβλήματα. **Γράψτε καθαρά τον τρόπο με τον οποίο δουλεύετε τις απαντήσεις σας.**

Η συνολική βαθμολογία της εξέτασης είναι 100 μονάδες.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μόνο το τυπολόγιο που σας δίνεται και απαγορεύται η χρήση οποιοδήποτε σημειώσεων, βιβλίων, κινητών.

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΣΤΕ ΜΟΝΟ ΤΙΣ ΣΕΛΙΔΕΣ ΠΟΥ ΣΑΣ ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΜΗΝ ΚΟΨΕΤΕ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΣΕΛΙΔΑ

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 150 λεπτά. Καλή Επιτυχία !

Άσκηση	**Βαθμός**
$1^η$ (10μ)	
$2^η$ (10μ)	
$3^η$ (10μ)	
$4^η$ (15μ)	
$5^η$ (15μ)	
$6^η$ (20μ)	
$7^η$ (20μ)	
Σύνολο (100μ)	

Τύποι που μπορεί να φανούν χρήσιμοι

Γραμμική κίνηση:

$\upsilon = \upsilon_0 + at$

$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$

$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a\left(x - x_0\right)$

Στροφική κίνηση:

1περιστροφή = 360° = 2π ακτίνια

$\theta = \frac{s}{r} \quad \bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

$\omega = \omega_0 + \alpha t$

$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\left(\theta - \theta_0\right)$

$\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \upsilon_{\varepsilon\varphi} = \omega r$

$\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad \vec{a}_{\varepsilon\varphi} = \vec{\alpha} \times \vec{r} \Rightarrow \left|\vec{a}_{\varepsilon\varphi}\right| = \left|\alpha\right|\left|r\right|$

$\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho} = \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow \left|\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}\right| = \frac{\upsilon_{\varepsilon\varphi}^2}{r} = \omega^2 r$

$\vec{a}_{\gamma\rho\alpha\mu} = \vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} + \vec{a}_{\varepsilon\varphi} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}$

$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\upsilon_{\varepsilon\varphi}}$

Κέντρο μάζας:

$x_{CM} = \frac{1}{M_{o\lambda}} \sum_i m x_i$

$\vec{\upsilon}_{CM} = \frac{1}{M_{o\lambda}} \sum_i m \vec{\upsilon}_i$

$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} = M\vec{a}_{CM}$

Νόμος Παγκόσμιας Έλξης:

$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad G = 6.67 \times 10^{-11}\, N \cdot m^2 / kg^2$

$U_g = -G\frac{m_1 m_2}{r} \qquad T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G\mathrm{M}_{\mathrm{H}}}\right) r^3$

$R_{\gamma\eta} = 6.4 \times 10^3\, km \quad M_{\gamma\eta} = 5.97 \times 10^{24}\, kg$

$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr} - G\frac{Mm}{r}$

Έργο – Ενέργεια:

Έργο σταθερής δύναμης: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

Έργο μεταβαλλόμενης δύναμης: $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$

$\vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}}$

$\Delta U = -\int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}kx^2$

$U_g = mgh \quad (h << R_{\gamma\eta\varsigma})$

$W = \Delta E_{\kappa\iota\nu.}$

$W = -\Delta U$ (για συντηρητικές δυνάμεις)

$E_{\mu\eta\chi.} = E_{\kappa\iota\nu.} + U$

$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$

$W = \Delta E_{\mu\eta\chi.}$ (για μη συντηρητικές δυνάμεις)

$\vec{F}_{\varepsilon\lambda} = -k\vec{x}$

$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$

$P = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$

Ορμή – Ώθηση - Κρούσεις:

$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$

Ώθηση: $\vec{I} = \int F\, dt = \Delta\vec{p}$

$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$

Απομονωμένο σύστημα: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$

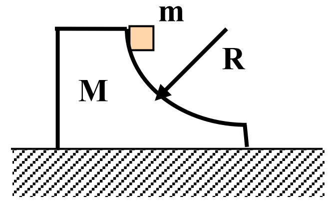
Ελαστική κρούση: $\Delta\vec{p} = \vec{0}, \; \Delta E = 0$

Μη ελαστική κρούση: $\Delta\vec{p} = \vec{0}, \; \Delta E \neq 0$

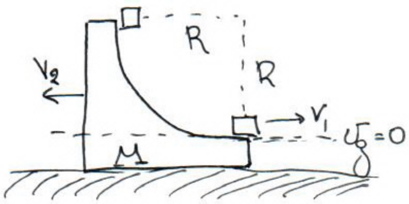
Ελαστική κρούση σε 1-Δ: $\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2 = -\left(\vec{\upsilon}_1' - \vec{\upsilon}_2'\right)$

Άσκηση 1 [10μ]

Ένα τούβλο σχήματος τεταρτημορίου (όπως στο διπλανό σχήμα) ακτίνας *R*, έχει μάζα *M* και βρίσκεται πάνω σε μια λεία επιφάνεια. Ένα μικρότερο τούβλο μάζας m αφήνεται από την κορυφή του μεγαλύτερου τούβλου και γλιστρά προς τα κάτω χωρίς τριβές. Να βρεθούν οι ταχύτητες των δύο τούβλων ως προς το έδαφος την στιγμή που χάνουν επαφή το ένα με το άλλο.



Θεωρούμε μηδενικό επίπεδο δυναμικής ενέργειας στη βάση του τούβλου μάζας M όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο σύστημα των δύο τούβλων-γης δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις και επομένως η μηχανική ενέργεια διατηρείται:



$$E^{i}_{\mu\eta\chi} = E^{f}_{\mu\eta\chi} \Rightarrow U^{i}_{\beta\alpha\rho} + E^{i}_{\kappa\iota\nu} = U^{f}_{\beta\alpha\rho} + E^{f}_{\kappa\iota\nu} \quad (1)$$

Η αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι:

$$U_g^{i/m} = mgR \qquad (B)$$

$U_g^{i/M} = Mgh$ όπου h η θέση του κέντρου μάζας του μεγάλου τούβλου, η οποία ωστόσο δεν χρειάζεται.

Στην τελική θέση που το μικρό τούβλο αποχωρίζεται του μεγάλου τούβλου, η U_g^{f} θα είναι

$$U_g^{f/m} = \emptyset \qquad (\Gamma)$$

$U_g^{f/M} = Mgh$ ίδια αφού το μεγάλο τούβλο δεν κινείται στην κατακόρυφη θέση

Επίσης, η αρχική κινητική ενέργεια των δύο τούβλων είναι μηδέν ενώ η τελική ταχύτητα των δύο τούβλων βρίσκεται από διατήρηση της ορμής εφόσον το σύστημα των δύο τούβλων είναι απομονωμένο:

$$P_f = P_i \Rightarrow \cancel{M\vec{v}_i^{M}} + \cancel{m\vec{v}_i^{m}} = M\vec{v}_f^{M} + m\vec{v}_f^{m} \Rightarrow Mv_f^{M} = -mv_f^{m} \Rightarrow \boxed{v_f^{M} = V_2 = -\frac{m}{M}V_1} \quad (2)$$

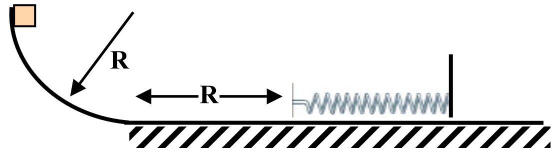
Αντικατάσταση των (A), (B), (2) στην (1) δίνει:

$$mgR + \cancel{Mgh} = \emptyset + \cancel{Mgh} + \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}M\frac{m^2}{M^2}V_1^2 \Rightarrow \cancel{m}gR = \frac{1}{2}V_1^2\left(\cancel{m} + \frac{m^{\cancel{2}}\cancel{M}}{M^{\cancel{2}}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1^2 = 2gR/\left((M+m)/M\right) \Rightarrow V_1^2 = 2gR/\left(1+\frac{m}{M}\right) \Rightarrow \boxed{V_1 = \sqrt{2gR/\left(1+\frac{m}{M}\right)}} \Rightarrow \boxed{V_2 = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2gR}{1+\frac{m}{M}}}}$$

Άσκηση 2 [10μ]

Μια μάζα m γλιστρά από την κατάσταση της ηρεμίας προς το κάτω μέρος ενός σωλήνα εσωτερικής ακτίνας R και εισέρχεται σε μια οριζόντια επιφάνεια με συντελεστή τριβής μ = 1/4. Σε απόσταση R από τη βάση του σωλήνα υπάρχει ένα ελατήριο το οποίο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Όταν η μάζα φθάνει σε ηρεμία, το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά ένα μήκος R. Ποια είναι η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στη μάζα στο σημείο αυτό;



Από διατήρηση της ολικής ενέργειας θα έχουμε: $U_g^i + U_{ελ}^i + E_{κιν}^i = U_g^f + U_{ελ}^f + E_{κιν}^f + W_{τριβ}$

Δηλαδή η μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος σώματος-ελατηρίου-γης ισούται με το έργο της τριβής.

Αλλά $v_i = v_f = 0$ (1) το σώμα ξεκινά και καταλήγει σε ηρεμία

$U_{ελ}^i = 0$ Joule (το ελατήριο είναι στο φυσικό του μήκος)

$U_{ελ}^f = \frac{1}{2} kR^2$ (το ελατήριο συσπειρώνεται κατά R) (2)

$U_g^i = mgR$ (θεωρούμε μηδενική δυναμική ενέργεια στο επίπεδο που περνά από τη βάση του τεταρτημορίου)

$U_g^f = 0$ Joule

Το έργο της τριβής θα είναι: $W_{τρ} = F_{τριβ} \cdot x = \mu mg \cdot 2R$ (3)

Αντικατάσταση στην εξίσωση της ενέργειας θα δώσει:

$$mg\cancel{R} = \frac{1}{2}kR^{\cancel{2}} + \mu mg 2\cancel{R} \Rightarrow mg(1-2\mu) = \frac{1}{2}kR \Rightarrow mg\left(1-\cancel{2}\frac{1}{\cancel{4}_2}\right) = \frac{1}{2}kR \Rightarrow$$

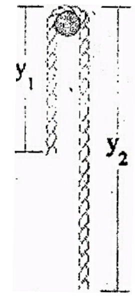
$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}mg = \cancel{\frac{1}{2}}kR \Rightarrow mg = kR$$

Η δύναμη του ελατηρίου σύμφωνα με το νόμο του Hooke είναι: $F_{ελ} = -kR$ με φορά από δεξιά στα αριστερά

$$\Rightarrow \boxed{F_{ελ} = -mg}$$

Άσκηση 3 [10μ]

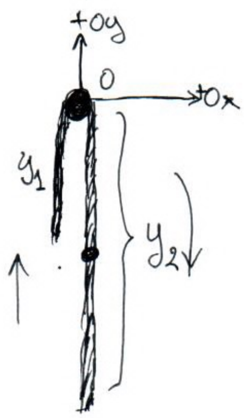
Ένα σχοινί μάζας $2kg$ και συνολικού μήκους $l = 1m$ βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία διπλωμένο πάνω σε πολύ μικρό λείο καρφί. Το ένα τμήμα του σχοινιού, μήκους $y_1 = 1/3m$, κρέμετα στα αριστερά και το υπόλοιπο τμήμα, μήκους $y_2 = 2/3m$, κρέμεται στα δεξιά του καρφιού, όπως στο σχήμα. Το σχοινί αρχίζει να γλυστρά πάνω στο καρφί και να πέφτει προς τα κάτω. Ποια είναι η ταχύτητα του σχοινιού τη στιγμή που το αριστερό άκρο του αφήνει το καρφί;



Έστω $\lambda = \frac{m}{l}$ η γραμμική πυκνότητα του σχοινιού.

Κατά την κίνηση του σχοινιού, η δυναμική του ενέργεια (του ΚΜ) μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια λόγω της κίνησης του ΚΜ από ένα ύψος σε άλλο.

Θεωρούμε σαν αρχή του συστήματος συντεταγμένων το καρφί και με φορά προς τα πάνω για τον θετικό άξονα-y και δεξιά προς το x-άξονα.



Αρχικά το κέντρο μάζας βρίσκεται σε ύψος:

$$y^i_{cm} = \frac{\frac{1}{2}y_1 m_1 + \frac{1}{2}y_2 m_2}{m_1+m_2} = \frac{+\frac{1}{2}(y_1)\cancel{\lambda} y_1 + \frac{1}{2}(y_2)\cancel{\lambda} y_2}{\cancel{\lambda} y_1 + \cancel{\lambda} y_2} = \frac{-y_1^2-y_2^2}{2(y_1+y_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^i_{cm} = -\frac{y_1^2+y_2^2}{2(y_1+y_2)}$$ αλλά $y_1+y_2 = l$ οπότε:

$$\boxed{y^i_{cm} = -\frac{y_1^2+y_2^2}{2l}} \quad (1)$$

Όταν το σχοινί έχει περάσει από το καρφί, το μήκος του βρίσκεται όλο δεξιά του καρφιού. Το κέντρο μάζας του σχοινιού βρίσκεται σε ύψος $\boxed{y^f_{cm} = -\frac{l}{2}}$ (2)

Θεωρούμε μηδενικό επίπεδο βαρυτικής δυναμικής ενέργειας αυτό που περνά από το καρφί. Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας θα έχουμε:

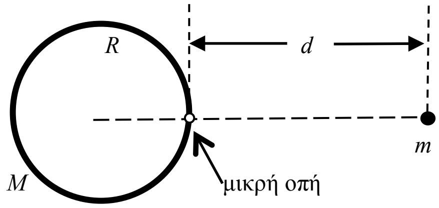
$$E^i_{μηχ} = E^f_{μηχ.} \Rightarrow E^i_{κιν} + U^i_{cm} = E^f_{κιν} + U^f_{cm} \Rightarrow 0 + mg\,y^i_{cm} = \frac{1}{2}m v^{f\,2}_{cm} + mg\,y^f_{cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m} v^{f\,2}_{cm} = \cancel{m}g\,y^i_{cm} - \cancel{m}g\,y^f_{cm} \Rightarrow v^f_{cm} = \sqrt{2g\left[y^i_{cm} - y^f_{cm}\right]} \xRightarrow{(1)\,κ\,(2)}$$

$$v^f_{cm} = \sqrt{\cancel{2}g\left[\frac{l}{\cancel{2}} - \frac{y_1^2+y_2^2}{\cancel{2}l}\right]} \Rightarrow v^f_{cm} = \sqrt{g\left(\frac{l^2-y_1^2-y_2^2}{l}\right)} = \sqrt{g\,\frac{1-\frac{1}{9}-\frac{4}{9}}{1}} = \sqrt{\frac{4}{9}g} \Rightarrow \boxed{v^f_{cm} = \frac{2}{3}\sqrt{g}}$$

Άσκηση 4 [15μ]

Θεωρήστε το ακόλουθο πείραμα το οποίο θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί στα βάθη του διαστήματος: Μία πολύ μικρή μάζα *m* (test μάζα) αφήνεται από την κατάσταση ηρεμίας και απόσταση *d* από την περιφέρεια ενός λεπτού σφαιρικού κελύφους μάζας *M* (*M* >> m) και ακτίνας *R*. Η βαρύτητα έλκει τη μάζα *m* προς το μέρος του σφαιρικού κελύφους, και διαμέσου μιας μικρής τρύπας στην εξωτερική επιφάνεια του κελύφους εισέρχεται στο εσωτερικό του. Ποια είναι η ταχύτητα της μάζας *m* καθώς περνά από το κέντρο του κελύφους;



Όταν η μικρή μάζα βρίσκεται μέσα στο κέλυφος τότε δεν ασκείται πάνω της καμία δύναμη. Η έλξη λόγω βαρύτητας πάνω της είναι μηδέν.

Η μάζα M του σφαιρικού κελύφους παράγει έργο στη μάζα m :

$$W = \int_{R+d}^{R} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{R+d}^{R}\left(-\frac{GMm}{r^2}\right)dr = \frac{GMm}{r}\Big|_{R+dr}^{R} \Rightarrow W = \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{R+d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{W = G\frac{Mmd}{(R+d)R}} \quad (1)$$

Το έργο αυτό αλλάζει την κινητική ενέργεια της μάζας m: $\frac{1}{2}mv^2 = W \Rightarrow$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2W}{m} \overset{(1)}{\Rightarrow} v^2 = 2\frac{GM\cancel{m}d}{\cancel{m}(R+d)R} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2\frac{GMd}{R(R+d)}}}$$

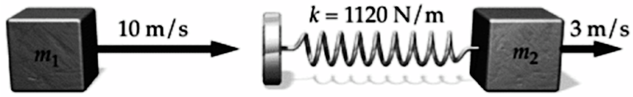
Διαφορετικά κάποιος θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει διατήρηση της μηχανικής ενέργειας εφόσον δεν δρουν εξωτερικές δυνάμεις πέρα του βάρους:

$$E^{i}_{\mu\eta\chi} = E^{f}_{\mu\eta\chi} \Rightarrow 0 - G\frac{M\cancel{m}}{R+d} = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - G\frac{M\cancel{m}}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GMd}{R(R+d)}}$$

Καθώς η μάζα περνά την οπή στο εσωτερικό του κελύφους δεν ασκείται πάνω της καμία δύναμη και επομένως σύμφωνα με τον 1° νόμο του Newton διατηρεί την κινητική της κατάσταση.

΄Ασκηση 5 [15μ]

Ένα κιβώτιο 1 μάζας $m_1 = 2kg$ γλυστρά κατά μήκος μιας λείας επιφάνειας με ταχύτητα $10m/s$. Ακριβώς μπροστά από αυτό βρίσκεται ένα δεύτερο κιβώτιο 2 μάζας $m_2 = 5kg$ το οποίο κινείται στην ίδια κατεύθυνση με το κιβώτιο 1 και ταχύτητα $3m/s$. Στο πίσω μέρος του κιβωτίου 2 είναι στερεωμένο ένα ελατήριο αμελητέας μάζας και σταθεράς $k = 1120\ N/m$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



(α) Ποια η ταχύτητα του κέντρου μάζας του συ3στήματος πριν το κιβώτιο 1 χτυπήσει το 2; [**4μ**]
(β) Μετά τη σύγκρουση το ελατήριο αποκτά μία μέγιστη συσπείρωση, Δx. Ποια είναι αυτή η συσπείρωση Δx; [**6μ**]
(γ) Τα κιβώτια αποχωρίζονται και πάλι. Ποια θα είναι η τελική ταχύτητα των κιβωτίων όταν έχουν αποχωριστεί στο σύστημα αναφοράς της λείας επιφάνειας; [**5μ**]

(α) Από τον ορισμό του διανύσματος θέσης του κέντρου μάζας ενός συστήματος σωματίων θα έχουμε:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \Rightarrow \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt}}{m_1+m_2} \Rightarrow \vec{\upsilon}_{CM} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1+m_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\upsilon}_{CM} = \frac{2kg\cdot 10m/s + 5kg\cdot 3m/s}{(5+2)kg} = \frac{35\cancel{kg}m/s}{7\cancel{kg}} \Rightarrow \boxed{\upsilon_{CM} = 5m/s} \quad (1)$$

(β) Στη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι η κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας.

Θυμηθείτε ότι η κινητική ενέργεια στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας γράφεται:

$$E_{κιν}^{CM} = \frac{d'}{2}\left(\frac{r_1'^{CM} + r_{CM}}{dt}\right)^2 m_1 + \frac{d'}{2}\left(\frac{r_2'^{CM} + r_{CM}}{dt}\right)^2 m_2 \Rightarrow \boxed{E_{κιν}^{CM} = \frac{1}{2}M_{ολ}\upsilon_{CM}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i(\upsilon_i^{CM})^2} \quad (2)$$

Στο σύστημα αναφοράς, στη μέγιστη συσπείρωση οι δύο μάζες έχουν ταχύτητα μηδέν $u_1 = u_2 = 0$ οπότε η κινητική ενέργεια θα είναι

$$E_{κιν}^{CM} = \frac{1}{2}M_{ολ}\upsilon_{CM}^2 = \frac{1}{2}7\cdot 5^2\ Joule \Rightarrow \boxed{E_{κιν}^{CM} = 87.5\ Joule} \quad (3)$$

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται εφόσον δεν δρουν εξωτερικές δυνάμεις.

Οι ταχύτητες των σωμάτων m_1 και m_2 στο σύστημα αναφοράς του CM πριν την κρούση με το ελατήριο είναι:

$$m_1: \quad \upsilon_{1i}^{CM} = \upsilon_{1i} - \upsilon_{CM} \Rightarrow \upsilon_{1i}^{CM} = 10\,m/s - 5\,m/s \Rightarrow \upsilon_{1i}^{CM} = 5\,m/s \quad (4)$$

$$m_2: \quad \upsilon_{2i}^{CM} = \upsilon_{2i} - \upsilon_{CM} \Rightarrow \upsilon_{2i}^{CM} = 3\,m/s - 5\,m/s \Rightarrow \upsilon_{2}^{CM} = -2\,m/s \quad (5)$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος των 2 σωμάτων στο σύστημα αναφοράς του KM

$$E_{\kappa\iota\nu}^{i} = \frac{1}{2} M_{o\lambda} \upsilon_{CM}^{2} + \frac{1}{2} m_1 \upsilon_{1i}^{CM^2} + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_{2i}^{CM^2} \quad (6)$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος στη μέγιστη συσπείρωση στο κέντρο μάζας

$$E_{\kappa\iota\nu}^{f} = \frac{1}{2} M_{o\lambda} \upsilon_{CM}^{2} + \frac{1}{2} m_1 \upsilon_{1f}^{CM^2} + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_{2f}^{CM^2} \quad (7)$$

Αλλά στη μέγιστη συσπείρωση $\upsilon_{1f}^{CM} = \upsilon_{2f}^{CM} = 0\,m/s \quad (8)$

Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας θα έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi}^{i} = E_{\mu\eta\chi}^{f} \Rightarrow E_{\kappa\iota\nu}^{i} + \cancel{E_{\varepsilon\lambda}^{i}}^{\,0} = E_{\kappa\iota\nu}^{f} + E_{\varepsilon\lambda}^{f} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 \upsilon_{1i}^{CM^2} + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_{2i}^{CM^2} + \cancel{\frac{1}{2} M_{o\lambda} \upsilon_{CM}^{2}} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2} M_{o\lambda} \upsilon_{CM}^{2}} + \cancel{\frac{1}{2} m_1 \upsilon_{1f}^{CM^2}}^{\,0} + \cancel{\frac{1}{2} m_2 \upsilon_{2f}^{CM^2}}^{\,0} + \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}} m_1 \left(\upsilon_{1i}^{CM}\right)^2 + \cancel{\frac{1}{2}} m_2 \left(\upsilon_{2i}^{CM}\right)^2 = \cancel{\frac{1}{2}} k (\Delta x)^2 \Rightarrow \Delta x^2 = \frac{m_1 \left(\upsilon_{1i}^{CM}\right)^2 + m_2 \left(\upsilon_{2i}^{CM}\right)^2}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta x^2 = \frac{2\cdot kg\,(5\,m/s)^2 + 5\,kg\,(-2\,m/s)^2}{1120\,N/m} = \frac{50\,\frac{kg\,m^2}{s^2} + 20\,kg\,m^2/s^2}{1120\,N/m} \Rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{70\,kg\,m^2/s^2}{1120\,N/m}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta x = \sqrt{0.0625\,m^2} \Rightarrow \boxed{\Delta x = 0.25\,m}$$

(γ) Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας θα έχουμε:

$$\vec{P}_{o\lambda} = 0 \Rightarrow m_1 \vec{\upsilon}_{1i}^{CM} + m_2 \vec{\upsilon}_{2i}^{CM} = 0 \Rightarrow m_1 \upsilon_{1i}^{CM} + m_2 \upsilon_{2i}^{CM} = m_1 \upsilon_{1f}^{CM} + m_2 \upsilon_{2f}^{CM} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 \upsilon_{1f}^{CM} + m_2 \upsilon_{2f}^{CM} = 0 \Rightarrow \upsilon_{1f}^{CM} = -\frac{m_2}{m_1} \upsilon_{2f}^{CM}$$

Ξέρουμε επίσης ότι η κρούση είναι ελαστική και η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Επομένως θα ισχύει:

$$v_{1i}^{CM} - v_{2i}^{CM} = -\left(v_{1f}^{CM} - v_{2f}^{CM}\right) \Rightarrow v_{2f}^{CM} = v_{1i}^{CM} - v_{2i}^{CM} + v_{1f}^{CM} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{2f}^{CM} = v_{1i}^{CM} - v_{2i}^{CM} + \left(-\frac{m_2}{m_1}\right) v_{2f}^{CM} \Rightarrow v_{2f}^{CM}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = v_{1i}^{CM} - v_{2i}^{CM} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{2f}^{CM} = \frac{m_1\left(v_{1i}^{CM} - v_{2i}^{CM}\right)}{m_1 + m_2} = \frac{2\cancel{kg}\left(5-(-2)\right)m/s}{(5+2)\cancel{kg}} \Rightarrow v_{2f}^{CM} = \frac{2\cdot\cancel{7}}{\cancel{7}} \Rightarrow \boxed{v_{2f} = 2\frac{m}{s}}$$

Αντικατάσταση στην $v_{1f}^{CM} = -\frac{m_2}{m_1} v_{2f}^{CM} \Rightarrow v_{1f}^{CM} = -\frac{5\cancel{kg}}{\cancel{2kg}} \cancel{2} m/s \Rightarrow \boxed{v_{1f} = -5 m/s}$

Μετατρέπουμε τις ταχύτητες από το σύστημα αναφοράς του CM στο σύστημα του εργαστηρίου (της επιφάνειας):

$$v_{1f}^{\varepsilon\pi} = v_{1f}^{CM} + v_{CM} = -5\frac{m}{s} + 5 m/s \Rightarrow \boxed{v_{1f}^{\varepsilon\pi} = 0 \ m/s}$$

$$v_{2f}^{\varepsilon\pi} = v_{2f}^{CM} + v_{CM} = +2 m/s + 5 m/s \Rightarrow \boxed{v_{2f}^{\varepsilon\pi} = 7 m/s}$$

Άσκηση 6 [20μ]

Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος μάζας $m = 4kg$ δίνεται από τη σχέση $U(x) = 3x^2 - x^3$, όπου $U(x)$ μετριέται σε *Joules.*

(α) Σε ποιές θέσεις το σώμα βρίσκεται σε ισορροπία; [**4μ**]

(β) Σχεδιάστε το γράφημα της δυναμικής ενέργειας $U(x)$ συναρτήσει της θέσης x. [**6μ**]

(γ) Χαρακτηρίστε την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας που βρήκατε στο (α) ερώτημα. [**4μ**]

(δ) Αν η ολική ενέργεια μηχανική ενέργεια του σώματος είναι E=3*J,* περιγράψτε την κίνηση του σώματος και βρείτε την ταχύτητά στη θέση $x = 0m$ και $x = 3m$. [**6μ**]

(α) Στα σημεία στα οποία το σώμα βρίσκεται σε ισορροπία, η δύναμη είναι μηδέν.
Αλλά για συντηρητική δύναμη $F_x = -\frac{dU}{dx}$ και για ισορροπία $\frac{dU}{dx} = 0$.
Επομένως θα έχουμε:

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3x^2 - x^3\right) = 6x - 3x^2 = 3x(2-x) = 0 \Rightarrow$$

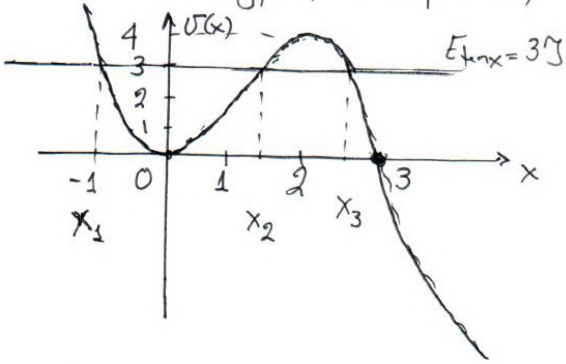
$\Rightarrow$ Τα σημεία ισορροπίας θα είναι: $x=0$ και $2-x=0 \Rightarrow x=2$.

(β) Από τη μορφή της συνάρτησης της δυναμικής ενέργειας παρατηρούμε ότι η συνάρτηση για $x \to +\infty$ τότε $U(x) \to -\infty$ επειδή ο όρος $-x^3$ υπερισχύει.
Για $x \to -\infty$ $U(x) \to +\infty$ γιατί και πάλι ο όρος $-x^3$ υπερισχύει του x^2. Αλλά τώρα το $x^2>0$ και το $x^3<0 \Rightarrow -x^3>0$. Οπότε $U(x) \to +\infty$

Έχουμε ακόμα ότι η συνάρτηση $3x^2 - x^3 = x^2(3-x) = 0$ τέμνει τον άξονα x στα σημεία $x=0$ και $x=3$ όπου $U(x)=0$.

Επομένως η συνάρτηση $U(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$ όπου παίρνει επίσης την τιμή $U(x=0)=0$ γιατί μετά τείνει στο $+\infty$ καθώς το $x \to -\infty$.
Το σημείο $x=2$ αποτελεί μέγιστο γιατί στο σημείο $x=3$ μηδενίζεται και πηγαίνει στο ∞. για $x \to +\infty$.

Επομένως η γραφική παράσταση της $U(x) = 3x^2 - x^3$ θα είναι:



Για $x = 2$, $U(x) = 4$ J

(γ) Όπως είπαμε και στο ερώτημα (β) τα σημεία $x=0$ κ $x=2$ η συνάρτηση του $U(x)$ παρουσιάζει ακρότατα. Το $x=0$ είναι ελάχιστο και το $x=2$ μέγιστο. Αυτό μπορούμε να το υπολογίσουμε επίσης από τη 2η παράγωγο

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(6x - 3x^2\right) = 6 - 6x$$

Στο σημείο $x=0$ $\quad \frac{d^2U}{dx^2} = 6 > 0 \Rightarrow$ ελάχιστο

ενώ στο σημείο $x=2$ $\quad \frac{d^2U}{dx^2} = 6 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow$ μέγιστο.

Επομένως το σημείο $x=0$ αποτελεί σημείο ευσταθούς ισορροπίας και το σημείο $x=2$ σημείο ασταθούς ισορροπίας.

(δ) Σχεδιάζουμε στο παραπάνω σχήμα την ευθεία της σταθερούς μηχανικής ενέργειας. Παρατηρούμε ότι για $E_{μηχ} = U \Rightarrow 3 = 3x^2 - x^3 \Rightarrow$ υπάρχουν τρεις χαρακτηριστικές αποστάσεις, ή σημεία καμπής που αναφέραμε.

Αν οι αρχικές συνθήκες είναι τέτοιες ώστε το σώμα να βρίσκεται σε $x \geq x_3$ η κίνηση του σώματος δεν είναι φραγμένη. Το σώμα έρχεται από το $+\infty$ μέχρι το x_3 και μετά γυρνά πάλι στο $+\infty$.

Η κίνηση μεταξύ x_2 και x_3 είναι απαγορευμένη. Όπως και για $x < x_1$.

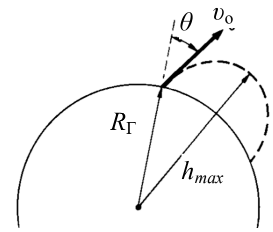
Τέλος μεταξύ $x_1 - x_2$ το σώμα έχει φραγμένη κίνηση η οποία αντιστοιχεί σε ελλειπτική τροχιά.

Στη θέση $x=0$ η δυναμική ενέργεια είναι $\emptyset$ όπως και στη θέση $x=3$.

Επομένως $E_{μηχ} = E_{κιν} + \cancel{E_{δυν}}^{\,0} \Rightarrow E_{κιν} = E_{μηχ} \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = 3J \Rightarrow v^2 = \frac{6J}{m} \Rightarrow$

$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{6}{4}}\, m/s \Rightarrow \quad v = \frac{\sqrt{6}}{2}\, m/s \Rightarrow \quad \boxed{v = 1.22\ m/s}$

Άσκηση 7 [20μ]



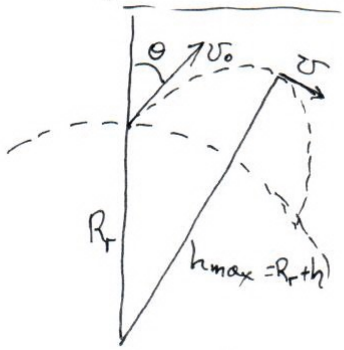
Ένα βλήμα μάζας m εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης και γωνία θ ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση. Η αρχική ταχύτητα του βλήματος είναι $\upsilon_0 = \sqrt{GM_\Gamma / R_\Gamma}$. Ποιο το μέγιστο ύψος h_{max} στο οποίο φθάνει το βλήμα; Αγνοήστε αντίσταση του αέρα και φαινόμενα λόγω της περιστροφής της Γης. <u>*Υπόδειξη:*</u> Θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε αρχή διατήρησης της στροφορμής του σώματος όπου η στροφορμή δίνεται από τη σχέση $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης και $\vec{p}$ η ορμή του σώματος.

Η στροφορμή του βλήματος θα είναι: $|\vec{L}| = |\vec{r}\times\vec{p}| = |\vec{p}||\vec{r}|\cdot\sin\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{L}| = m\upsilon_0 R_\Gamma \cdot \sin\theta} \quad (1)$$

Η μηχανική ενέργεια του βλήματος θα είναι: $E^i_{\text{μηχ}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mR_\Gamma} - \frac{GMm}{R_\Gamma} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{E^i_{\text{μηχ}} = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \frac{GMm}{R_\Gamma}} \quad (2)$$



Όταν το βλήμα φθάνει στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας είναι $\dot{r} = \emptyset$

Η μηχανική ενέργεια στη θέση αυτή έχει τη μορφή:

$$E^f_{\text{μηχ}} = \cancel{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}^{\,0} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{r} + \frac{(m\upsilon_0 R_\Gamma \sin\theta)^2}{2mr^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E^f_{\text{μηχ}} = -\frac{GMm}{r} + \frac{m^{\cancel{2}}\upsilon_0^2\sin^2\theta}{2\cancel{m}}\left(\frac{R_\Gamma}{r}\right)^2 \Rightarrow \boxed{E^f_{\text{μηχ}} = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}m\upsilon_0^2\sin^2\theta\left(\frac{R_\Gamma}{r}\right)^2} \quad (3)$$

Αλλά η μηχανική ενέργεια διατηρείται οπότε $E^i_{\text{μηχ}} = E^f_{\text{μηχ}} \overset{(2)\&(3)}{\Rightarrow}$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon_0^2 - \frac{GM\cancel{m}}{R_\Gamma} = -\frac{GM\cancel{m}}{(R_\Gamma+h)} + \frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon_0^2\sin^2\theta\left(\frac{R_\Gamma}{R_\Gamma+h}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon_0^2 - \frac{GM}{R_\Gamma} = -\frac{GM}{R_\Gamma+h} + \frac{1}{2}\upsilon_0^2\sin^2\theta\left(\frac{R_\Gamma}{R_\Gamma+h}\right)^2$$

Ξέραμε ότι η αρχική ταχύτητα του βλήματος είναι $\upsilon_0 = \sqrt{GM_\Gamma R_\Gamma}$ οπότε αντικατάσταση στην τελευταία εξίσωση δίνει:

$$\frac{1}{2}\frac{GM}{R_r} - \frac{GM}{R_r} = -\frac{GM}{R_r+h} + \frac{1}{2}\frac{GM}{R_r}\sin^2\theta\left(\frac{R_r}{R_r+h}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{-}\frac{1}{2}\cancel{\frac{GM}{R_r}} = \cancel{-}\cancel{\frac{GM}{R_r}}\left[\frac{1}{\frac{R_r+h}{R_r}} - \sin^2\theta\left(\frac{R_r}{R_r+h}\right)^2\right] \Rightarrow \qquad \frac{R_r+h}{R_r} = x$$

$$\Rightarrow +\frac{1}{2} = \frac{1}{x} - \sin^2\theta\,\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = 2(x - \sin^2\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 2\sin^2\theta = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\sin^2\theta}}{2} = \frac{\cancel{2} \pm \cancel{2}\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\cancel{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \cos\theta \Rightarrow \left(\frac{R_r+h}{R_r}\right)_{1,2} = 1 \pm \cos\theta \Rightarrow$$

Κρατάμε τη λύση με το "+" οπότε: $\frac{R_r+h}{R_r} = 1 + \cos\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow R_r + h = R_r + R_r\cos\theta \Rightarrow \boxed{h = R_r\cos\theta}$$

το ύψος στο οποίο φτάνει το βλήμα.