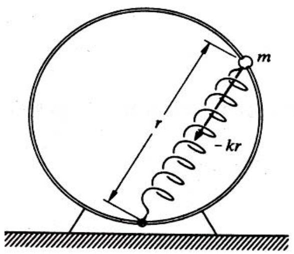
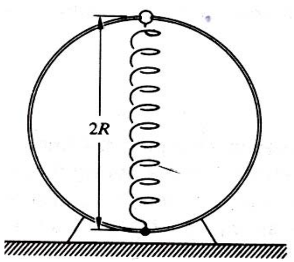
Παράδειγμα 1ο

Μια χάντρα μάζας m γλιστρά χωρίς τριβές σε ένα κατακόρυφο στεφάνι ακτίνας R. Η χάντρα κινείται κάτω από την συνδιασμένη επιρροή της βαρύτητας και ενός ελατηρίου το ένα άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο κατώτερο μέρος του στεφανιού. Για απλούστευση, θεωρείστε ότι το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι μηδέν και επομένως η δύναμη του ελατηρίου είναι -kr, όπου r το στιγμιαίο μήκος του ελατηρίου. Η χάντρα αφήνεται από την κορυφή του στεφανιού με αμελητέα ταχύτητα. Πόσο γρήγορα κινείται στο κατώτερο μέρος του στεφανιού;





Λύση

Στο ψηλότερο σημείο του στεφανιού έχουμε

$$E_{\mu\eta\chi} = U_{\beta\alpha\rho.} + U_{\varepsilon\lambda} = mg(2R) + \frac{1}{2}k(2R)^2 \Rightarrow E_{\mu\eta\chi} = 2mgR + 2kR^2$$

Στο χαμηλότερο σημείο του στεφανιού έχουμε

$U_{\beta\alpha\rho.} = 0$ (επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας βαρύτητας)

$U_{\varepsilon\lambda.} = 0$ (δεν υπάρχει επιμήκυνση)

Όλες οι δυνάμεις είναι συντηρητικές και επομένως η μηχανική ενέργεια είναι σταθερή

$$E^i_{\mu\eta\chi} = E^f_{\mu\eta\chi} \Rightarrow K^i + U^i = K^f + U^f \Rightarrow U^i = K^f \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_f^2 = 2mgR + 2kR^2$$

$$\Rightarrow \upsilon_f = 2\sqrt{\left(gR + \frac{kR^2}{m}\right)}$$

Παράδειγμα 2ο

Ένας ακροβάτης τσίρκου μάζας M πηδά κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα υ_0 από ένα τραμπολίνο. Καθώς ανεβαίνει προς τα πάνω πιάνει ένα εκπαιδευμένο πίθηκο μάζας m από ένα βατήρα σε ύψος h πάνω από το τραμπολίνο. Ποιό είναι το μέγιστο ύψος στο οποίο φθάνουν;

Λύση

Η ταχύτητά του σε κάθε χρονική στιγμή είναι: $\upsilon(t) = \upsilon_0 - gt$ (1)

Ενώ η θέση του ως προς το τραμπολίνο είναι: $y(t) = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}gt^2$

Ο χρόνος που χρειάστηκε για να βρεθεί σε ύψος h όπου πιάνει τον πίθηκο

$$h = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-\upsilon_0 \pm \sqrt{\upsilon_0^2 - 4(-g/2)(-h)}}{-g} \Rightarrow t_{1,2} = \frac{\upsilon_0}{g} \mp \frac{1}{g}\sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh}$$

Μας ενδιαφέρει η πρώτη χρονική στιγμή στην οποία ο ακροβάτης φθάνει στο h

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε την ταχύτητα την στιγμή που πιάνει το πίθηκο

$$\upsilon = \upsilon_0 - g\frac{\upsilon_0}{g} + g\frac{1}{g}\sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh} = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh}$$

Τη στιγμή αυτή έχουμε μια πλαστική κρούση μεταξύ ακροβάτη και πιθήκου και αφού δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις η ορμή διατηρείται:

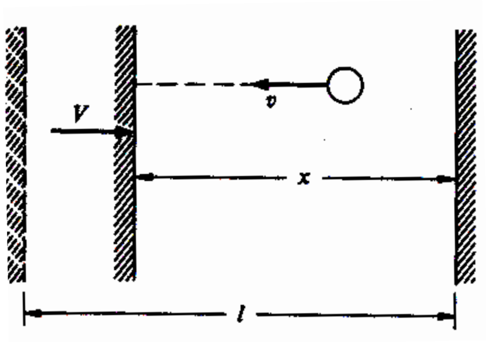
$$p_i = p_f \Rightarrow M\upsilon = (M+m)v \Rightarrow v = \frac{M}{M+m}\sqrt{\upsilon_0^2 - 2hg}$$

Με αυτή σαν αρχική ταχύτητα θα κινηθούν χρόνο t_{max} $\Rightarrow t_{max} = \frac{v}{g}$

Επομένως το αντίστοιχο ύψος θα είναι: $y_{max}(t) = \frac{v^2}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v^2}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g} \Rightarrow y_{max}(t) = h + \frac{1}{2}\frac{v^2}{g}$

Παράδειγμα 3ο

Μια super–μπάλα μάζας m αναπηδά συνεχώς μεταξύ 2 επιφανειών με ταχύτητα υ_0. Η βαρύτητα θεωρείται αμελητέα και οι κρούσεις είναι τέλεια ελαστικές. (α) Να βρεθεί η μέση δύναμη σε κάθε επιφάνεια. (β) Αν η μια επιφάνεια μετακινείται σιγά σιγά προς την άλλη με ταχύτητα $V \ll \upsilon_0$ ο ρυθμός των συγκρούσεων θα αυξηθεί εξαιτίας της μικρότερης απόστασης και γιατί η ταχύτητα της μπάλας αυξάνει μετά την σύγκρουση με την επιφάνεια. Να βρεθεί η δύναμη F συναρτήσει της απόστασης x των δύο επιφανειών. (γ) Δείξτε ότι το έργο που απαιτείται για να μετακινηθεί η επιφάνεια από l σε x είναι ίσο με την αύξηση της κινητικής ενέργειας της μπάλας



Λύση

(α) Σε χρόνο $\Delta t = \dfrac{2l}{\upsilon_0}$ κάθε επιφάνεια θα έχει μια κρούση

Επομένως η μέση δύναμη θα είναι $F = \dfrac{\Delta p_{\kappa\rho}}{\Delta t}$

Η μεταβολή της ορμής κατά την κρούση είναι

$$\Delta p_{\kappa\rho} = m\upsilon_0 - m(-\upsilon_0) = 2m\upsilon_0$$

Επομένως: $F = \dfrac{\Delta p_{\kappa\rho}}{\Delta t} = \dfrac{2m\upsilon_0}{2l/\upsilon_0} \Rightarrow F = \dfrac{m}{l}\upsilon_0^2$

(β) Η αριστερή επιφάνεια πλησιάζει με ταχύτητα: $V \ll \upsilon_0$

Αν η τελική απόσταση των 2 επιφανειών είναι x, η διαδικασία διαρκεί $T = \dfrac{l-x}{V}$

Σε κάθε κρούση η μπάλα θα αποκτήσει περισσότερη ταχύτητα κατά 2V

Οι σκεδάσεις συμβαίνουν τώρα σε διάστημα $\Delta t = \dfrac{2x}{\upsilon}$

Επομένως ο ρυθμός αύξησης της ταχύτητας της μπάλας είναι

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{2V}{2x/\upsilon} = \frac{\upsilon V}{x} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon} = \frac{V}{x}dt \Rightarrow \int \frac{d\upsilon}{\upsilon} = \int \frac{V}{x}dt = \int \frac{V}{l-Vt}dt \Rightarrow \ln\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right) = -\ln\left(\frac{l-Vt}{l}\right)$$

$$\Rightarrow \upsilon(t) = \upsilon_0\left(\frac{l}{l-Vt}\right) \Rightarrow \upsilon(t) = \upsilon_0\left(\frac{l}{x}\right)$$

Η δύναμη θα είναι:

$$F = \frac{m\upsilon^2}{x} = \frac{m}{x}\upsilon_0^2\frac{l^2}{x^2} \Rightarrow F = \frac{m\upsilon_0^2}{l}\left(\frac{l}{x}\right)^3 \Rightarrow F = F_0\left(\frac{l}{x}\right)^3$$

(γ) Η μεταβολή στην κινητική ενέργεια είναι:

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{m}{2}\left[\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2\right] \Rightarrow \Delta K = \frac{m}{2}\left[\upsilon_0^2\left(\frac{l}{x}\right)^2 - \upsilon_0^2\right] \Rightarrow \Delta K = \frac{m\upsilon_0^2}{2}\left[\left(\frac{l}{x}\right)^2 - 1\right]$$

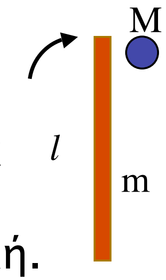
Το έργο για την μετακίνηση της επιφάνειας είναι:

$$W = \int F\cdot dx = -\int_l^x \frac{m\upsilon_0^2}{l}\left(\frac{l}{x}\right)^3 dx \Rightarrow W = -\frac{m\upsilon_0^2}{l}l^3\int_l^x\left(\frac{1}{x}\right)^3 dx = -m\upsilon_0^2 l^2\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_l^x$$

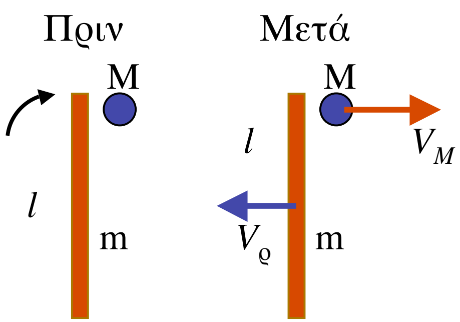
$$\Rightarrow W = \frac{m}{2}\upsilon_0^2 l^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{l^2}\right) \Rightarrow W = \frac{m}{2}\upsilon_0^2\left[\left(\frac{l}{x}\right)^2 - 1\right]$$

Παράδειγμα 4ο

Μια ομοιόμορφη ράβδος μάζας m και μήκους l ($I=1/12\ ml^2$) περιστρέφεται πάνω σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια με το CM σταθερό. Μια μάζα M τοποθετείται στο επίπεδο και ένα άκρο της ράβδου συγκρούεται ελαστικά με την μάζα M. Ποια πρέπει να είναι η τιμή της μάζας M ώστε η ράβδος μετά τη σύγκρουση να εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση και όχι περιστοφική.



Λύση



Στην άσκηση αυτή συνδυάζονται κρούση και περιστροφή

Η ράβδος περιστρέφεται ελεύθερα πριν την κρούση και δεν υπάρχει κάποια δύναμη που να προκαλεί ροπή ως προς το CM. Το ίδιο και μετά την κρούση δεν υπάρχουν δυνάμεις που να εφαρμόζουν ροπές.
Επομένως η στροφορμή του συστήματος διατηρείται

Η κρούση είναι ελαστική και επομένως θα διατηρείται η ορμή του συστήματος πριν και μετά την κρούση καθώς και η μηχανική ενέργεια.

Διατήρηση στροφορμής:

Η ράβδος δεν περιστρέφεται και το CM μεταφέρεται στην ευθεία που περνούσε από το αρχικό σημείο περιστροφής

$$L_i = L_f \Rightarrow \vec{L}_\rho^{\,i} + \vec{L}_M^{\,i} = \vec{L}_\rho^{\,f} + \vec{L}_M^{\,f}$$

$$L_\rho^i = I_\rho \omega = \frac{1}{12} ml^2 \omega$$

$$L_\rho^f = 0$$

$$L_M^i = 0 \qquad \text{(η μπάλα ακίνητη)}$$

ως προς το αρχικό σημείο περιστροφής

$$L_M^f = \vec{r} \times \vec{p} = MV_M \frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{12} ml^2 \omega = MV_M \frac{l}{2} \qquad (1)$$

Διατήρηση της ορμής:

(Θετική η φορά της M) →

$$\left.\begin{aligned} &p_i = p_f \Rightarrow \vec{p}_\rho^{\,i} + \vec{p}_M^{\,i} = \vec{p}_\rho^{\,f} + \vec{p}_M^{\,f} \\ &p_\rho^i = 0 \\ &p_\rho^f = m(-V_\rho) \\ &p_M^i = 0 \\ &p_M^f = MV_M \end{aligned}\right\} \Rightarrow 0 = \vec{p}_\rho^{\,f} + \vec{p}_M^{\,f} \Rightarrow mV_\rho = MV_M$$

$$\Rightarrow p = mV_\rho = MV_M \qquad (2)$$

Διατήρηση ενέργειας:

$$\left.\begin{aligned} &E_i = E_f \Rightarrow E_\rho^i + E_M^i = E_\rho^f + E_M^f \\ &E_\rho^i = \frac{1}{2} I\omega^2 \\ &E_\rho^f = \frac{1}{2} mV_\rho^2 \\ &E_M^i = 0 \\ &E_M^i = \frac{1}{2} MV_M^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} mV_\rho^2 + \frac{1}{2} MV_M^2 \Rightarrow$$

$$I\omega^2 = mV_\rho^2 + MV_M^2 \qquad (3)$$

Τρεις εξισώσεις με τρεις αγνώστους (M, V_M, V_ρ)

Από (2) η (3) δίνει: $I\omega^2 = \frac{p^2}{m} + \frac{p^2}{M} \Rightarrow I\omega^2 = p^2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)$

Από (2) η (1) δίνει: $I\omega = p\frac{l}{2} \Rightarrow I\omega = p = \frac{2I\omega}{l}$

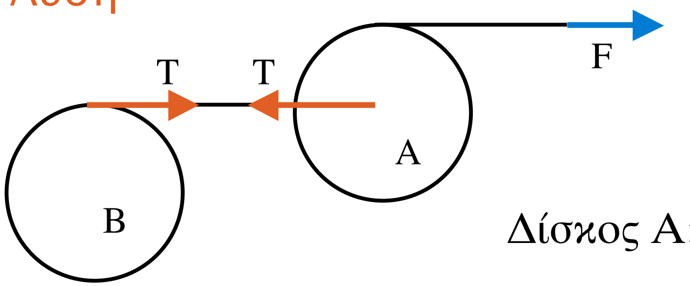
$$\Rightarrow I\omega^2 = \left(\frac{2I\omega}{l}\right)^2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{4I}{l^2}\right)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \Rightarrow 1 = \frac{4\left(ml^2/12\right)}{l^2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \Rightarrow 1 = \frac{m}{3}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \Rightarrow 3 = 1 + \frac{m}{M} \boxed{\Rightarrow M = \frac{m}{2}}$$

Παράδειγμα 5ο

Δύο δίσκοι μάζας M και ακτίνας R είναι σε ηρεμία πάνω σε λεία επιφάνεια. Ο δίσκος A έχει μια λεπτή ταινία τυλιγμένη γύρω του όπως και ο δίσκος B. Η ταινία από το δίσκο B έχει το άκρο της στερεωμένο πάνω στον άξονα του δίσκου A. Οι δύο ταινίες είναι παράλληλες. Μιά δύναμη F εφαρμόζεται στο ελεύθερο άκρο της ταινίας που είναι τυλιγμένη γύρω από το δίσκο A. Να βρεθεί η επιτάχυνση του δίσκου A. (Η ροπή αδράνειας δίσκου είναι $I=1/2MR^2$)

Λύση



Μεταξύ του δίσκου A και B αναπτύσεται η τάση της ταινίας στο δίσκο A και B.

Η δύναμη που εφαρμόζεται στο δίσκο A είναι:

Δίσκος A: 2ος νόμος Newton: $\sum F_x^A = F - T = Ma_A$ (1)

Η δύναμη που εφαρμόζεται στο δίσκο B είναι:

Δίσκος B: 2ος νόμος Newton: $\sum F_x^B = T = Ma_B$ (2)

Η τάση, T, προκαλεί ροπή στον δίσκο B (ως προς το κέντρο του) $\tau_B = TR = I\alpha_B$ (3)

Αλλά η ταινία έχει επιτάχυνση: $a_A = a_B^{CM} + R\alpha_B = a_B + R\alpha_B \Rightarrow a_B = a_A - R\alpha_B$ (4)

Από (4) η (2) δίνει: $T = M(a_A - R\alpha_B) = Ma_A - MR\alpha_B$

Λύνοντας την (3) ως προς α_B: $\alpha_B = \frac{TR}{I}$

$$\Rightarrow T = Ma_A - MR\frac{TR}{I} \quad (5)$$

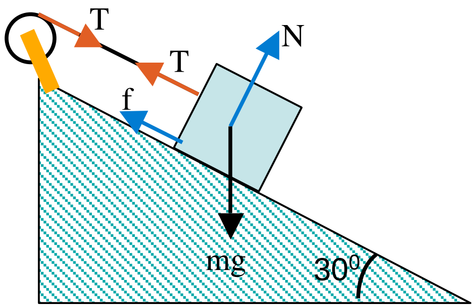
$$(5) \Rightarrow T = Ma_A - MR\frac{TR}{MR^2/2} \Rightarrow T = Ma_A - 2T \Rightarrow 3T = Ma_A$$

Αντικαθιστώντας στην (1) $F - \frac{Ma_A}{3} = Ma_A \Rightarrow a_A = \frac{3F}{4M}$

Παράδειγμα 6ο

Ένα τούβλο μάζας 18.0kg γλιστρά προς το χαμηλότερο σημείο ενός κεκλιμένου επιπέδου. Το τούβλο εξαρτάται από ένα αβαρές σχοινί το οποίο είναι τυλιγμένο γύρω από μια τροχαλία ακτίνας R=0.25m και μάζας 6.0kg. Ο συντελεστής Κινητικής τριβής μεταξύ του τούβλου και του επιπέδου είναι μ_κ=0.24.
Ποιο είναι το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας;

Λύση



Οι δυνάμεις που ενεργούν στο σύστημα είναι:

Τούβλο:

$$\left.\begin{aligned}&\sum F_x = mg\sin\theta - T - f_k = ma\\&\sum F_y = N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta\\&f_k = \mu_k N = \mu_k mg\cos\theta\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg\sin\theta - T - \mu_k mg\cos\theta = ma \qquad (1)$$

Τροχαλία: Η τάση, T, προκαλεί ροπή ως προς το κέντρο της

$$TR = I\alpha = \left(\frac{MR^2}{2}\right)\alpha \Rightarrow T = \left(\frac{MR}{2}\right)\alpha \qquad (2)$$

Συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση: $a = R\alpha$ (3)

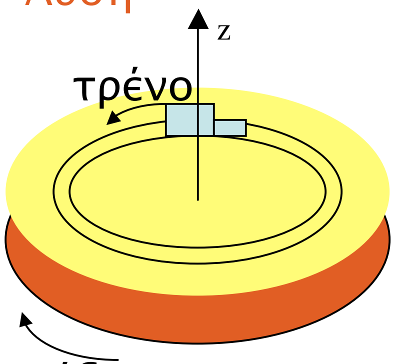
Αντικαθιστώντας (2) και (3) στην (1) έχουμε: $mg\sin\theta - \frac{MR}{2}\alpha - \mu_k mg\cos\theta = mR\alpha$

Λύνουμε ως προς α: $\alpha = \frac{\sin\theta - \mu_k\cos\theta}{m + \frac{M}{2}}\left(\frac{mg}{R}\right) \Rightarrow \alpha = (\sin\theta - \mu_k\cos\theta)\left(\frac{1}{1 + \frac{M}{2m}}\right)\left(\frac{g}{R}\right)$

Παράδειγμα 7ο

Μια σιδηροδρομική τροχιά ενός παιδικού τρένου είναι τοποθετημένη στην εξωτερική περιφέρεια μιας μεγάλης ρόδας η οποία είναι ελεύθερη να περιστρέφεται χωρίς τριβή γύρω από ένα κατακόρυφο άξονα. Το παιδικό τρένο μάζας m, τοποθετείται πάνω στην τροχιά κι' όταν τροφοδοτείται με ρεύμα φθάνει σε μια σταθερή ταχύτητα υ ως προς τη ράγα. Αν η ρόδα έχει μάζα M, ακτίνα R, και ροπή αδράνειας $I=MR^2$ γύρω από τον άξονα περιστροφής της, να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα ω της ρόδας συναρτήσει των M, m, υ και R.

Λύση



Η ισχύς που χρησιμοποιείται για να επιταχύνει το τρένο προσθέτει εξωτερική ενέργεια στο σύστημα αλλά δεν δημιουργεί κάποια εξωτερική ροπή.

Η ολική στροφορμή στον z–άξονα διατηρείται. $L_i = L_f$

Πριν ξεκινήσει το τρένο: $L_i = L_\tau + L_\rho = 0$

Η σχετική ταχύτητα του τρένου ως προς τη ρόδα είναι υ

Επομένως η σχετική γωνιακή ταχύτητα θα είναι: $\omega = \dfrac{\upsilon}{R}$

Η ρόδα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα αντίθετη αυτής του τρένου:

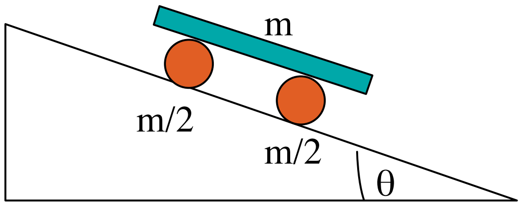
Επομένως η γωνιακή ταχύτητα τρένου (ως προς ακίνητο παρατηρητή) θα είναι:

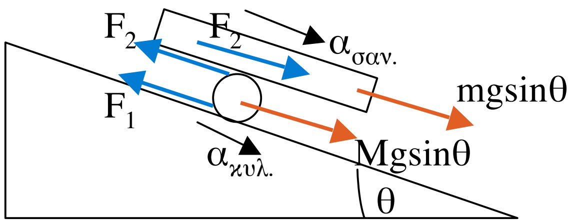
$$\left.\begin{array}{l} \omega_\tau = \omega_{\sigma\chi} - \omega_\rho \Rightarrow \omega_\tau = \dfrac{\upsilon}{R} - \omega_\rho \\ \text{Από διατήρηση της στροφορμής έχουμε } \; 0 = I_\rho\omega_\rho - I_\tau\omega_\tau \Rightarrow I_\rho\omega_\rho = I_\tau\omega_\tau \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$I_\rho\omega_\rho = I_\tau\left(\frac{\upsilon}{R} - \omega_\rho\right) \Rightarrow MR^2\omega_\rho = mR^2\left(\frac{\upsilon}{R} - \omega_\rho\right) \Rightarrow M\omega_\rho = m\left(\frac{\upsilon}{R} - \omega_\rho\right) \Rightarrow (M+m)\omega_\rho = m\frac{\upsilon}{R} \Rightarrow \omega_\rho = \left(\frac{m}{M+m}\right)\frac{\upsilon}{R}$$

Παράδειγμα 8ο

Μια σανίδα βρίσκεται πάνω σε 2 ομοιόμορφους κυλίνδρους (με ροπή αδράνειας $I=MR^2/2$) που βρίσκονται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης θ όπως στο σχήμα. Η σανίδα έχει μάζα m και κάθε ένας από τους κυλίνδρους έχει μάζα $m/2$. Αν δεν υπάρχει ολίσθηση μεταξύ των διαφόρων επιφανειών ποιά είναι η επιτάχυνση της σανίδας;





Λύση

Αφού δεν υπάρχει ολίσθηση τότε οι κύλινδροι θα κινηθούν με τον ίδιο τρόπο και θα μπορούσαμε να τους αντικαταστήσουμε με ένα κύλινδρο με μάζα m

Τα διαγράμματα απελευθερωμένου σώματος για την σανίδα και το κύλινδρο φαίνονται στο σχήμα.

Κύλινδρος: $\sum F = ma_{\kappa\upsilon\lambda.} \Rightarrow mg\sin\theta - F_1 - F_2 = ma_{\kappa\upsilon\lambda.}$ (1)

(όπου $\alpha_{\kappa\upsilon\lambda.}$ είναι η γραμμική επιτάχυνση του κυλίνδρου)

Σανίδα: $\sum F = ma_{\sigma\alpha\nu.} \Rightarrow mg\sin\theta + F_2 = ma_{\sigma\alpha\nu.}$ (2)

Οι δυνάμεις των τριβών F_1 και F_2 προκαλούν την περιστροφή του κυλίνδρου

Ροπή: $\tau = F_1R - F_2R = I\alpha_{\kappa\upsilon\lambda.} \Rightarrow F_1R - F_2R = \frac{mR^2}{2}\alpha_{\kappa\upsilon\lambda.} \Rightarrow F_1 - F_2 = \frac{mR}{2}\frac{a_{\kappa\upsilon\lambda.}}{R} \Rightarrow F_1 - F_2 = \frac{m}{2}a_{\kappa\upsilon\lambda.}$ (3)

Τρείς εξισώσεις με 4 αγνώστους (F_1, F_2, $\alpha_{\kappa\upsilon\lambda.}$ και $\alpha_{\sigma\alpha\nu.}$) Μια ακόμα εξίσωση

Το σημείο επαφής κυλίνδρου - σανίδας έχει γραμμική επιτάχυνση $a_{\varepsilon\pi} = a_{\sigma\alpha\nu.}$

$$a_{\varepsilon\pi} = a_{\kappa\upsilon\lambda.} + \alpha R \Rightarrow a_{\varepsilon\pi} = a_{\kappa\upsilon\lambda.} + \frac{a_{\kappa\upsilon\lambda.}}{R}R \Rightarrow a_{\varepsilon\pi} = 2a_{\kappa\upsilon\lambda.} = a_{\sigma\alpha\nu.} \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας στις τρεις πρώτες εξισώσεις έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\quad \text{mgsin}\theta - F_1 - F_2 = ma_{\kappa\upsilon\lambda.}\\ (2)\quad \text{mgsin}\theta + F_2 = 2ma_{\kappa\upsilon\lambda.}\\ (3)\quad F_1 - F_2 = \frac{1}{2}ma_{\kappa\upsilon\lambda.}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}(1)+(2) \Rightarrow \quad 2\text{mgsin}\theta - F_1 = 3ma_{\kappa\upsilon\lambda.}\\ (2)+(3) \Rightarrow \quad \text{mgsin}\theta + F_1 = \frac{5}{2}ma_{\kappa\upsilon\lambda.}\end{array}\right\} \Rightarrow 3\text{mgsin}\theta = \frac{11}{2}ma_{\kappa\upsilon\lambda.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow 3\text{gsin}\theta = \frac{11}{2}a_{\kappa\upsilon\lambda.} \Rightarrow a_{\kappa\upsilon\lambda.} = \frac{6}{11}g\sin\theta\\ \text{Από την (4) όμως έχουμε} \quad a_{\sigma\alpha\nu.} = 2a_{\kappa\upsilon\lambda.}\end{array}\right\} \Rightarrow a_{\sigma\alpha\nu.} = \frac{12}{11}g\sin\theta$$