ΦΥΣ. 131
ΕΡΓΑΣΙΑ # 12 – ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Ένας πίθηκος μάζας m σκαρφαλώνει ένα αβαρές σχοινί το οποίο περνά πάνω από ένα λείο κλαδί δέντρου. Το άλλο άκρο του σχοινιού είναι δεμένο σε ένα πακέτο μάζας M που βρίσκεται στο έδαφος. Έστω g είναι η επιτάχυνση εξαιτίας της βαρύτητας. (α) Συναρτήσει των M, m και g ποιο είναι το μέγεθος της ελάχιστης επιτάχυνσης που πρέπει να έχει ο πίθηκος ώστε να σηκώσει το πακέτο από το έδαφος; (β) Υποθέστε ότι αφού έχει σηκωθεί το πακέτο, ο πίθηκος σταματά να σκαρφαλώνει και απλά κρατιέται από το σχοινί. Την χρονική αυτή στιγμή ποια είναι η επιτάχυνση του πιθήκου και η τάση T του σχοινιού; Αφήστε τις απαντήσεις σας συναρτήσει των M, m και g.

(α) Θεωρούμε την μέγιστη επιτάχυνση του πίθηκου ώστε το πακέτο να μην σηκώνεται. Έστω ότι η επιτάχυνση αυτή είναι a. Η δύναμη που ασκεί ο πίθηκος στο σχοινί έχει μέγεθος $F = ma$ προς τα κάτω, έτσι ώστε να κινηθεί προς τα πάνω.

Επομένως οι δυνάμεις που ασκούνται στο σχοινί από την πλευρά του πίθηκου είναι; η τάση του σχοινιού T, το βάρος του πίθηκου mg και η δύναμη που ασκεί ο πίθηκος προς τα κάτω ma. Απο τη στιγμή που το πακέτο δεν κινείται, το σχοινί δεν κινείται θα έχουμε:

$$T = m(g+a) \qquad (1)$$

Απο την πλευρά του πακέτου τώρα, οι δυνάμεις που ασκούνται είναι το βάρος του πακέτου Mg και η τάση του νήματος. Δηλαδή

$$T = Mg \qquad (2)$$

Από (1) ∧ (2) έχουμε: $Mg = m(g+a) \Rightarrow \boxed{a = \frac{(M-m)g}{m}}$

(β) Τη στιγμή που το πακέτο έχει σηκωθεί, ο πίθηκος δεν ασκεί πλέον καμιά δύναμη στο σχοινί και επομένως το σύστημα σχοινί/πίθηκος/πακέτο όλα επιταχύνονται με επιτάχυνση a. Ορίζοντας σαν θετική επιτάχυνση να αντιστοιχεί στο πακέτο να επιταχύνεται προς τα κάτω και ο πίθηκος προς τα πάνω, έχουμε ότι η καθαρή δύναμη που ασκείται στον πίθηκο είναι:

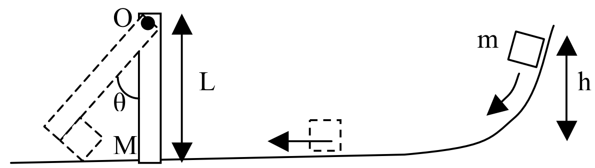
$$F_{πίθηκο} = ma = T - mg \Rightarrow T = m(a+g)$$

Η δύναμη που ασκείται στο πακέτο είναι: $F_{πακέτο} = Ma = Mg - T \Rightarrow T = M(g-a)$

$$\Rightarrow m(a+g) = M(g-a) \Rightarrow \boxed{a = \frac{g(M-m)}{M+m}}$$

Επομένως η τάση του σχοινιού θα είναι: $\boxed{T = g\frac{2Mm}{M+m}}$

2. Ένα τούβλο μάζας m, βρίσκεται αρχικά σε ύψος h και σε ηρεμία. Αρχίζει κατόπιν να γλυστρά προς τα κάτω πάνω σε ένα λείο επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα. Συγκρούεται κατόπιν πλαστικά με μια ομοιόμορφη κατακόρυφο ράβδο μάζας M και μήκους L. Από την στιγμή που η ράβδος είναι στερεωμένη από ένα σημείο O, το σύστημα ράβδος/τούβλο, αιωρείται γύρω από το σημείο αυτό μετά την σύγκρουση. Απαντήστε στα ακόλουθα, εκφράζοντας τις απαντήσεις σας συναρτήσει των M, m, L, h.



(α) Ποια είναι η στροφορμή του τούβλου σχετικά με το σημείο O ακριβώς πριν την σύγκρουσή του με την ράβδο.

(β) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδος/τούβλο την στιγμή μετά την σύγκρουση. Μπορεί να βρείτε το ακόλουθο αρκετά χρήσιμο: Η ροπή αδράνειας μιας λεπτής ομοιόμορφης ράβδου γύρω από ένα άξονα κάθετο στο μήκος της και που περνά από το κέντρο μάζας της είναι $I = ML^2/12$, όπου M και L η μάζα και το μήκος της αντίστοιχα.

(γ) Μετά τη σύγκρουση, το σύστημα ράβδου/τούβλου αιωρείται γύρω από το σημείο O πριν έλθει στιγμιαία σε κατάσταση ηρεμίας σε μιά γωνία θ ως προς την κατακόρυφο διεύθυνση. Δείξτε ότι cosθ δίνεται από την σχέση:

$$\cos\theta = 1 - \frac{6hm^2}{(3m+M)(2m+M)L}$$

(α) Η στροφορμή του τούβλου γύρω από το σημείο O είναι απλά

$l = m v L$, όπου v η ταχύτητα του τούβλου.

Την ταχύτητα μπορούμε να την βρούμε βάσει της αρχής διατήρησης της ενέργειας:

$$\cancel{m} g h = \frac{1}{2} \cancel{m} v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \Rightarrow \boxed{l = mL\sqrt{2gh}} \quad (1)$$

(β) Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής για κλειστά συστήματα θα έχουμε:

$$L_i = L_f \overset{(1)}{\Rightarrow} mL\sqrt{2gh} = I_{\text{τούβλο/ράβδος ως προς O}} \times \omega \quad (2)$$

Για να βρούμε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το σημείο O χρησιμοποιούμε τη ροπή αδράνειας ως προς το CM και το θεώρημα των παράλληλων αξόνων:

$$I_{\text{ράβδου},O} = \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

Η ροπή αδράνειας του τούβλου ως προς το σημείο O είναι $I_{\text{τούβλου}} = mL^2$ $\Rightarrow$

Η ολική ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδου/τούβλου είναι $\boxed{I = \frac{1}{3}ML^2 + mL^2}$ (3)

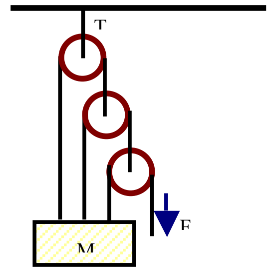
$$\text{Από } (2) \wedge (3) \Rightarrow m\cancel{L}\sqrt{2gh} = \left(\frac{1}{3}ML^{\cancel{2}} + mL^{\cancel{2}}\right)\omega \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{m\sqrt{2gh}}{\left(m + \frac{M}{3}\right)L}} \quad (4)$$

(γ) Χρησιμοποιούμε διατήρηση της ενέργειας.
Όταν το τούβλο/ράβδος έχουν κινηθεί κατά γωνία θ, το ύψος του τούβλου πάνω από το έδαφος είναι $L(1-\cos\theta)$ ενώ το ύψος του κέντρου μάζας της ράβδου είναι $\frac{L}{2}(1-\cos\theta)$ πάνω από το έδαφος.

Από διατήρηση ενέργειας έχουμε: $\frac{1}{2} I_{0\lambda} \omega^2 = mgL(1-\cos\theta) + Mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta) \Rightarrow$

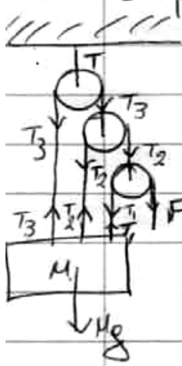
$$\Rightarrow 1-\cos\theta = \frac{\frac{1}{2} I\omega^2}{mgL + Mg\frac{L}{2}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^{\cancel{2}} + mL^{\cancel{2}}\right)\left(\frac{m^2 2gh}{L^2(m+M/3)^2}\right)}{mg\cancel{L} + Mg\frac{L}{2}} \Rightarrow \boxed{\cos\theta = 1 - \frac{6m^2 h}{(3m+M)(2m+M)L}}$$

3. Θεωρήστε το σύστημα των τροχαλιών που φαίνεται δίπλα. Η άγνωστη δύναμη F που ασκείται είναι ακριβώς αυτή που χρειάζεται ώστε να κρατά το σύστημα σε ισορροπία. Το τούβλο έχει μάζα M, ενώ οι τροχαλίες και τα σ χοινιά θεωρούνται αμελητέας μάζας. Ποια είναι η τάση T στο υψηλότερο σχοινί (π.χ. το σχοινί που συνδέει την πιο πάνω τροχαλία με την οροφή), συναρτήσει της μάζας M και της επιτάχυνσης εξαιτίας της βαρύτητας g.



Έστω T_1 είναι η τάση του σχοινιού στην χαμηλότερη τροχαλία, T_2 η τάση του σχοινιού στην μεσαία τροχαλία, και T_3 η τάση του σχοινιού στην υψηλότερη τροχαλία

Επομένως θα έχουμε:

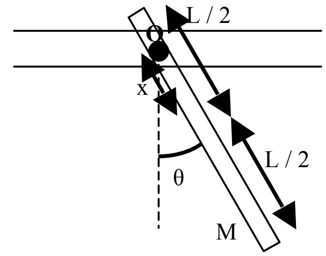


$$\left.\begin{aligned} T_2 &= 2T_1 \\ T_3 &= 2T_2 \\ T &= 2T_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} T_3 &= \frac{T}{2} \\ T_2 &= T/4 \\ T_1 &= \frac{T}{8} \\ T_1 + T_2 + T_3 &= Mg \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)T = Mg \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{7}{8}T = Mg \Rightarrow \boxed{T = \frac{8Mg}{7}}$$

4. Μια ράβδος μάζας M και μήκους L, είναι στερεωμένη σε ένα σημείο O, το οποίο έχει απόσταση x από το κέντρο μάζας της ράβδου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Εκφράστε όλες τις απαντήσεις σας συναρτήσει των M, g, x, L και θ.

(α) Υποθέστε ότι η ράβδος περιστρέφεται κατά μιά γωνία θ ως προς την κατακόρυφο (όπως φαίνεται στο σχήμα). Ποιο είναι το μέγεθος της ροπής στην ράβδο ως προς το σημείο O εξαιτίας της δύναμης της βαρύτητας.



(β) Ποιά είναι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το σημείο O ; *<u>Υπόδειξη:</u>* Η ροπή αδράνειας μιας λεπτής ομοιόμορφης ράβδου μήκους L και μάζας M ως προς ένα άξονα κάθετο στο μήκος της ράβδου και που περνά από το κέντρο μάζας της ράβδου είναι $I=1/12\ ML^2$.

(γ) Υποθέστε τώρα ότι η ράβδος μετατοπίζεται κατά μιά δεδομένη σταθερή γωνία θ και αφήνεται ελεύθερη. Βρείτε μια εξίσωση για το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης, α, της ράβδου όταν σχηματίζει γωνία θ ως προς την κατακόρυφο συναρτήσει των g, M, x, L και θ.

(δ) Αυτή η ράβδος είναι ένα καλό παράδειγμα ενός φυσικού εκκρεμούς. Συναρτήσει και πάλι των g, M, x, και L, ποιά είναι η συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων της ράβδου γύρω από την θέση ισορροπίας; Χρησιμοποιήστε την προσέγγιση sinθ~θ.

(α) Η ροπή στη ράβδο γύρω από το σημείο O εξαιτίας της βαρύτητας είναι το γινόμενο της απόστασης από το σημείο O στο κέντρο μάζας της ράβδου και της συνιστώσας της βαρυτικής δύναμης κάθετης στην ράβδο. Επομένως

$$\boxed{\tau = Mgx\sin\theta.}$$

(β) Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το σημείο O θα είναι σύμφωνα με το θεώρημα των παράλληλων αξόνων $\boxed{I=\frac{1}{12}ML^2+Mx^2}$

(γ) Η σχέση που συνδέει τη ροπή και την γωνιακή επιτάχυνση είναι:

$$\tau = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Mgx\sin\theta}{\frac{1}{12}\cancel{M}L^2+\cancel{M}x^2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{12gx\sin\theta}{L^2+12x^2}}$$

(δ) Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση $\sin\theta \simeq \theta$ και το γεγονός ότι $\alpha=\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{12gx}{L^2+12x^2}\right)\theta .$$

Όπου το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στο γεγονός ότι η γωνιακή μετατόπιση θ, είναι αντίθετη αυτής του διανύσματος της γωνιακής επιτάχυνσης α.

Η εξίσωση έχει τη μορφή της εξίσωσης του απλού αρμονικού ταλαντωτή $\ddot{x}=-\omega^2 x$

με $\omega=\sqrt{\frac{12gx}{L^2+12x^2}} \Rightarrow 2\pi f=\sqrt{\frac{12xg}{L^2+12x^2}} \Rightarrow \boxed{f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{12gx}{L^2+12x^2}}}$

5. Θεωρήστε ένα σύστημα τριων αστέρων, αποτελούμενο από 2 αστέρες μάζας m περιστρεφόμενοι γύρω από ένα κεντρικό άστρο μάζας M στην ίδια κυκλική τροχιά ακτίνας r. Καθ'όλη τη διάρκεια της κίνησής τους, οι δύο αστέρες βρίσκονται πάντοτε στα αντίθετα άκρα της διαμέτρου της κυκλικής τους τροχιάς. Συναρτήσει των r, M και m και της παγκόσμιας σταθεράς της βαρύτητας G, βρείτε την περίοδο περιστροφής ενός από τους δυο περιστρεφόμενους αστέρες.

Η βαρυτική δύναμη που αισθάνεται ένα από τα άστρα μάζας m είναι το άθροισμα της δύναμης από το άλλο άστρο μάζας m και της βαρυτικής δύναμης από το άστρο μάζας M. Αυτή η συνισταμένη δύναμη κατευθύνεται προς το εσωτερικό και έχει μέτρο :

$$F_g = \frac{GMm}{r^2} + \frac{Gm^2}{(2r)^2}.$$

Η συνθήκη της κυκλικής κίνησης επιβάλλει : $F_k = F_g \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{m}v^2}{\cancel{r}} = \frac{GM\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} + \frac{Gm^{\cancel{2}}}{4r^{\cancel{2}}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G(4M+m)}{4r}}.$$

Η περίοδος T σχετίζεται με την ταχύτητα : $v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi r\sqrt{\frac{4r}{G(4M+m)}}}$

6. Μια χορδή μήκους 75cm είναι τεντωμένη μεταξύ 2 σταθερών στηριγμάτων. Μιά γεννήτρια συχνοτήτων είναι συνδεδεμένη με μια συσκευή που μπορεί να παράγει στάσιμα κύματα. Έχει βρεθεί ότι στάσιμα κύματα μπορούν να παραχθούν στις συχνότητες 315Hz και 420Hz και σε καμιά άλλη συχνότητα μεταξύ των δύο.

(α) Ποιά είναι η χαμηλότερη συχνότητα στην οποία ένα στάσιμο κύμα μπορεί να προκληθεί στην χορδή;

(β) Με ποια ταχύτητα μπορούν διαμήκη κύματα να μεταδωθούν στην χορδή;

(γ) Δύο ηχεία σε απόσταση d βρίσκονται σε φάση μεταξύ τους. Ένας ακροατής στέκεται σε απόσταση 4d/3 ακριβώς μπροστά από ένα από τα ηχεία. Το σήμα το οποίο εκπέμπεται από τα ηχία καλύπτει μια ευρεία ζώνη συχνοτήτων. Σε ποιές συχνότητες ο ακροατής θα ακούσει μέγιστο σήμα εξαιτίας της μέγιστης ενισχυτικής συμβολής; Η απάντησή σας θα πρέπει να εκφραστεί συναρτήσει της απόστασης d. (δ) Σε ποιές συχνότητες ο ακροατής θα ακούσει ένα ελάχιστο σήμα εξαιτίας της καταστρεπτικής συμβολής; Εκφράστε την απάντησή σας συναρτήσει του d.

(α) Όλες οι αρμονικές που παράγονται σε μιά χορδή που έχει και τα 2 άκρα της ακίνητα δίνονται από τη σχέση $f_n = n f_0$, όπου f_0 είναι η θεμελειώδης συχνότητα και n είναι ακέραιος. Οι συχνότητες f_n δηλαδή είναι κατανεμημένες ομοιόμορφα και ο χωρισμός τους είναι ακριβώς f_0. Στην προκειμένη περίπτωση επομένως $f_0 = 420 - 315 \Rightarrow$ $f_0 = 105\,Hz$. Επομένως η χαμηλότερη δυνατή συχνότητα είναι **105Hz**

(β) Το μήκος κύματος του στάσιμου κύματος με συχνότητα $f_0 = 105\,Hz$ δίνεται από τη σχέση: $L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2L \Rightarrow \frac{v}{f_0} = 2L \Rightarrow v = 2 f_0 L \Rightarrow \boxed{v = 157.5\,\frac{m}{s}}$

(γ) Για να προσδιορίσουμε τη συχνότητα στην οποία θα ακουστούν μέγιστο και ελάχιστο σήμα, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τη διαφορά των διαδρομών που διανύθηκαν από τα κύματα που εκπέμπονται από τα δύο ηχεία. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, η διαφορά των διαδρομών είναι: $\Delta L = \sqrt{d^2 + \left(\frac{4d}{3}\right)^2} - \frac{4d}{3} = \frac{5d}{3} - \frac{4d}{3} \Rightarrow \Delta L = \frac{d}{3}$

Θα έχουμε μέγιστη ενισχυτική συμβολή όταν $\Delta L = n\lambda$ όπου

n: ακέραιος. Χρησιμοποιώντας $v = \lambda f$, θα έχουμε: $\Delta L = n\dfrac{v}{f} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_n = n\left(\frac{3v}{d}\right)$$

(δ) Οι συχνότητες στις οποίες θα έχουμε μέγιστη καταστροφική συμβολή είναι αυτές για τις οποίες η διαφορά της διαδρομής ΔL είναι περιττά πολλαπλάσια μισού μήκους κύματος. Δηλαδή:

$$\Delta L = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \frac{d}{3} = (2n+1)\frac{v}{2f} \Rightarrow f_n = \frac{(2n+1)}{2}\frac{3v}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{3v}{d} \Rightarrow \boxed{f_n = m\,\frac{3v}{d}}$$ όπου m: μισός ακέραιος

Δηλαδή τα αποτελέσματα από (γ) και (δ) έχουν την ίδια μορφή με διαφορά που για ενισχυτική συμβολή έχουμε ακέραιο και στην καταστροφική μισό ακέραιο

7. Μια σιδηροδρομική τροχιά ενός παιδικού τρένου είναι τοποθετημένη σε μιά μεγάλη ρόδα η οποία είναι ελεύθερη να περιστρέφεται χωρίς τριβή γύρω από ένα κατακόρυφο άξονα. Το παιδικό τρένο μάζας m, βρίσκεται πάνω στην τροχιά και όταν η τροφοδοτείται με ρεύμα, φθάνει σε μια σταθερή ταχύτητα υ σχετικά με τις σιδηροδρομική ράγα. Αν η ρόδα έχει μάζα M, ακτίνα R, και ροπή αδράνειας $I=MR^2$ γύρω από τον άξονα περιστροφής, ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα, ω, της ρόδας; Εκφράστε την απάντησή σας συναρτήσει των m, M, υ, α και R. *<u>Υπόδειξη:</u>* Η ισχύς που χρησιμοποιείται για να επιταχύνει το τρένο προσθέτει εξωτερική ενέργεια στο σύστημα, αλλά δεν δημιουργεί κάποια εξωτερική ροπή στο σύστημα.

Χρησιμοποιούμε διατήρηση της στροφορμής. Η ολική στροφορμή του συστήματος (κατά μήκος του άξονα-$\hat{z}$) πριν ξεκινήσει το τρένο, είναι μηδέν, και επομένως η ολική στροφορμή του συστήματος σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα μετά από το ξεκίνημα του τρένου θα είναι επίσης μηδέν.
Απο τη στιγμή που η ταχύτητα του τρένου ως προς τη ρόδα είναι υ, η γωνιακή του ταχύτητα ως πρός τη ρόδα θα είναι υR.
Απο τη στιγμή που η ρόδα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_{ρόδα}$ με φορά αντίθετη αυτής του τρένου, αυτό σημαίνει ότι το τρένο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_{τρένο} = R\upsilon - \omega_{ρόδα}$.
Διατήρηση της στροφορμής επιβάλει:

$$I_{ρόδα}\,\omega_{ρόδα} = I_{τρένου}\,\omega_{τρένου} \Rightarrow MR^2\omega_{ρόδα} = mR^2(R\upsilon - \omega_{ρόδα}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{ρόδα} = \left(\frac{m}{M+m}\right)R\upsilon.}$$

8. Δύο γεννήτριες συχνοτήτων συνδέονται στα αντίθετα άκρα μιας πολυ μακριάς χορδής. Το κύμα που προκαλείται από την γεννήτρια στο ένα άκρο της χορδής περιγράφεται από την εξίσωση $y_1(x,t) = (6.0cm)\cos(\frac{\pi}{2}[(2.0m^{-1})x + (8.0s^{-1})t])$. Το κύμα που προκαλείται από την γεννήτρια στο άλλο άκρο της χορδής περιγράφεται από την εξίσωση $y_2(x,t) = (6.0cm)\cos(\frac{\pi}{2}[(2.0m^{-1})x - (8.0s^{-1})t])$

(α) Προσδιορίστε την συχνότητα, μήκος κύματος και ταχύτητα κάθε κύματος.

(β) Γράψτε μιά σχέση που να περιγράφει την υπέρθεση των δύο κυμάτων (π.χ. τι είναι το $y_1(x,t) + y_2(x,t)$). Μπορεί η ακόλουθη ταυτότητα να σας φανεί χρήσιμη: $2\sin A \sin B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$.

(γ) Όπως θα σας είναι προφανές από το αποτέλεσμα του υποερωτήματος (β), η υπέρθεση των y_1 και y_2 είναι ένα στάσιμο κύμα. Αν υπάρχουν ακριβώς 5 δεσμοί εξαιρουμένων των 2 άκρων της χορδής ποιο είναι το μήκος της χορδής;

(α) Τα δύο κύματα έχουν τη μορφή:

$$y_i(x,t) = A\cos(kx \pm \omega t).$$

Και στις 2 περιπτώσεις η συχνότητα του κύματος είναι $f = \frac{\omega}{2\pi}$ και το μήκος κύματος $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ και ταχύτητα $v = f\lambda$

Αντικαθιστώντας έχουμε: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} \Rightarrow \boxed{f = 2Hz}$

$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{1\pi} \Rightarrow \boxed{\lambda = 2m}$

Τέλος $v = f\lambda = 2 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{v = 4\, m/m}$

Το ένα κύμα y_1 κινείται δεξιά και το άλλο αριστερά.

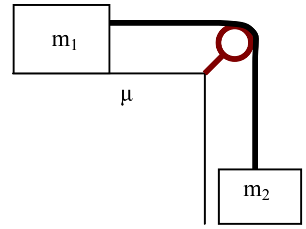
(β) Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα, γράφουμε:

$$y_1(x,t) + y_2(x,t) = 12.0[\cos(\pi 1 x)\cos(\pi 4 t)]$$

(γ) Η συμβολή των κυμάτων που γράψαμε στο (β) αντιστοιχεί σε στάσιμο κύμα μήκους κύματος $\lambda = 1m$ (από το (α) υποερώτημα). Αν είναι υπάρχουν 5 δεσμοί χωρίς να προσμετρούμε τα άκρα της χορδής τότε θα υπάρχουν 6 αντιδεσμοί και επομένως $6\frac{\lambda}{2}$.

Επομένως $L = 6\lambda/2 = 3\lambda \Rightarrow \boxed{L = 3m}$

9. Δύο τούβλα μάζας m_1 και m_2 συνδέονται με μια χορδή αμελητέας μάζας όπως φαίνεται στο σχήμα. Η τροχαλία έχει αμελητέα μάζα και δεν παρουσιάζει οποιαδήποτε τριβή, αλλά ο συντελεστής τριβής, μ, μεταξύ του τραπεζιού και της μιας μάζας δεν είναι μηδέν. Αν τα δύο τούβλα αφήνονται από την κατάσταση της ηρεμίας, δείξτε ότι η κοινή τους ταχύτητα, αφού έχουν διανύσει μια απόσταση L, δίνεται από την σχέση:



$$\upsilon = \sqrt{\frac{2(m_2 - \mu m_1)gL}{m_1 + m_2}}$$

Θεωρούμε 2 περιπτώσεις. Μία, την αρχική θέση, όπου τα 2 τούβλα είναι σε ηρεμία, και την τελική θέση όπου τα 2 τούβλα έχουν κινηθεί απόσταση L. Η μεταβολή στην ενέργεια μεταξύ των 2 αυτών καταστάσεων είναι ισοδύναμη με το έργο που καταναλώθηκε από την τριβή και το οποίο είναι αρνητικό. Δηλαδή θα έχουμε:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon^2 - m_2 g L = -\mu m_1 g L \Rightarrow$$

$$(m_1+m_2)\upsilon^2 = 2gL(m_2 - m_1\mu) \Rightarrow \boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{2gL(m_2-m_1\mu)}{m_1+m_2}}}$$

10. Θεωρήστε ένα σύστημα αποτελούμενο από δύο σωματίδια μάζας M και m αρχικά σε ηρεμία σχετικά το ένα με το άλλο ενώ χωρίζονται από τεράστια απόσταση. Παρά το γεγονός ότι τα σώματα έχουν τόσο μεγάλη απόσταση μεταξύ τους, αλληλεπιδρούν εξαιτίας της βαρυτικής έλξης και επομένως αφού έχουν αφεθεί ελεύθερα να κινηθούν θα ξεκινήσουν να κινούνται το ένα προς το άλλο.

(α) Έστω ότι οι ταχύτητες των σωματιδίων σε κάποια ορισμένη χρονική στιγμή είναι υ_M και υ_m. Βρείτε μια σχέση για την ταχύτητα υ_M συναρτήσει των m, M και υ_m. <u>*Υπόδειξη:*</u> 1) Δεν υπάρχουν δυνάμεις εξωτερικές στο σύστημα. Προσέξτε ότι το σωματίδια κινούνται προς το μέρος του άλλου. Σαν αποτέλεσμα οι ταχύτητες, υ_M και υ_m έχουν αντίθετα πρόσημα.

(β) Έστω d παριστάνει την απόσταση μεταξύ των δυο μαζών σε κάποια δεδομένη χρονική στιγμή. Γράψτε μια εξίσωση που να σχετίζει τις μάζες των σωματιδίων, m και M, τις ταχύτητες των σωματιδίων, υ_M και υ_m, την δεδομένη χρονική στιγμή και την απόσταση d. <u>*Υπόδειξη:*</u> Από την στιγμή που τα σωματίδια έχουν αρχικά μεγάλη απόσταση, μπορείτε να υποθέσετε ότι η ολική αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι ίση με μηδέν.

(γ) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από τα υποερωτήματα (α) και (β) δείξτε ότι η ταχύτητα οποιουδήποτε των δύο σωματιδίων σχετικά με το άλλο σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή δίνεται από την ακόλουθη ισότητα, όπου d η απόστασή τους την δεδομένη χρονική στιγμή:

$$\upsilon_{\sigma\chi\varepsilon\tau.} = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{d}}$$

(α) Απο τη στιγμή που δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις ασκούμενες στο σύστημα, η γραμμική ορμή διατηρείται. Αυτό σημαίνει ότι:

$$m\upsilon_m + M\upsilon_M = 0 \Rightarrow \boxed{\upsilon_M = -\frac{m}{M}\upsilon_m} \qquad (A)$$

(β) Αρχικά η κινητική και βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι μηδέν. Επομένως από την αρχή διατήρησης ενέργειας θα έχουμε ότι η ολική ενέργεια του συστήματος των 2 σωματιδίων θα είναι πάντοτε μηδέν. Σε μιά τυχαία χρονική στιγμή, η κινητική ενέργεια δίνεται από τη σχέση:

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon_m^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_M^2$$ όπου υ_m, υ_M οι ταχύτητες των 2 σωμάτων τη τυχαία χρονική στιγμή

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια δίνεται από $U = -G\frac{Mm}{d}$ όπου d η απόσταση των 2 σωμάτων τη τυχαία αυτή χρονική στιγμή.
Επομένως η ολική ενέργεια θα είναι:

$$\boxed{E_{ολ} = \frac{1}{2}m\upsilon_m^2 + \frac{1}{2}M\upsilon_M^2 - G\frac{Mm}{d} = 0} \qquad (B)$$

(γ) Η σχετική ταχύτητα των 2 σωμάτων είναι $\upsilon_{σχ} = \upsilon_m - \upsilon_M$

αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα από το υποερώτημα (α) έχουμε:

$$\upsilon_{σχ} = \upsilon_m + \frac{m}{M}\upsilon_m = \upsilon_m\left(\frac{M+m}{M}\right) \qquad (\Gamma)$$

Χρησιμοποιώντας το (Β) από το υποερώτημα (β) και το (Α) από το (α) έχουμε:

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon_m^2 + \frac{1}{2}\cancel{M}\frac{m^{\cancel{2}}}{M^{\cancel{2}}}\upsilon_m^2 = \frac{GM\cancel{m}}{d} \Rightarrow (M+m)\upsilon_m^2 = \frac{2GM^2}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_m = M\sqrt{\frac{2G}{d(M+m)}}$$

Αντικαθιστώντας στην (Γ) έχουμε:

$$\upsilon_{σχ} = \cancel{M}\frac{M+m}{\cancel{M}}\sqrt{\frac{2G}{d(M+m)}} \Rightarrow \boxed{\upsilon_{σχ} = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{d}}}$$

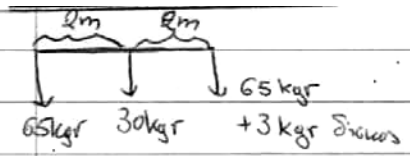
11. Δυο φοιτητές (ο καθένας με μάζα m=65Kg) κάθονται στις αντίθετες άκρες ενός έλκυθρου (4 μέτρα μακρύ και μάζας 30Kg), αρχικά σε ηρεμία σε λείο πάγο. Ένας φοιτητής κρατά ένα μολυβδένιο δίσκο μάζας 3Kg. Σπρώχνει το δίσκο πάνω στο λείο έλκυθρο στον άλλο φοιτητή με ταχύτητα 6m/sec σχετικά με το έλκυθρο.

(α) Ποια είναι η ταχύτητα του έλκυθρου σχετικά με τον πάγο πριν ο δεύτερος φοιτητής πιάσει το δίσκο;

(β) Ποια είναι η ταχύτητα του έλκυθρου αφού ο δεύτερος φοιτητής πιάσει το δίσκο;

(γ) Πόση απόσταση καλύπτει το έλκυθρο;

(δ) Πόση απόσταση μετακινείται το κέντρο μάζας;



(α) Ποιά η ταχύτητα του έλκυθρου σχετικά με τον πάγο πριν ο δεύτερος φοιτητής πιάσει το δίσκο?

Απο διατήρηση της ορμής θα έχουμε: $P_{\Sigma i} = P_{\Sigma f}$ όπου το σύστημα αποτελείται από τους 2 φοιτητές, έλκυθρο και δίσκο. Αρχικά όλα ήταν σε ηρεμία όποτε $P_{\Sigma i} = \emptyset$. Το ίδιο θα συμβαίνει και μετά και σε οποιαδήποτε άλλη στιγμή. Άρα:

$$0 = m_\delta \upsilon_\delta + (m_{\varepsilon\lambda\kappa} + m_1 + m_2)\upsilon_{\varepsilon\lambda\kappa} = m_\delta(\upsilon_{\varepsilon\lambda\kappa} - 6) + (30+65+65)\upsilon_{\varepsilon\lambda\kappa} = 0 \Rightarrow$$

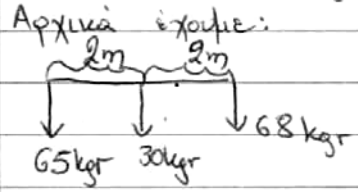
$$\Rightarrow (3+160)\upsilon_{\varepsilon\lambda\kappa} - 18 = 0 \Rightarrow \upsilon_{\varepsilon\lambda} = \frac{18}{163} \Rightarrow \boxed{\upsilon_{\varepsilon\lambda} = 0.11\, m/sec}$$

αντίθετη στη διεύθυνση που κινείται ο δίσκος.

(β) Όταν ο δεύτερος φοιτητής πιάσει το δίσκο, η ταχύτητα του δίσκου είναι μηδέν. Από αρχή διατήρησης της ορμής, η ταχύτητα του έλκυθρου θα'ναι μηδέν αφού όπως είδαμε από το υποερώτημα (α) η ολική ορμή του συστήματος είναι μηδέν.

(γ) Έστω ότι x η απόσταση που κινείται το έλκυθρο.
Το κέντρο μάζας δεν κινείται επειδή δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις.

Αρχικά έχουμε:

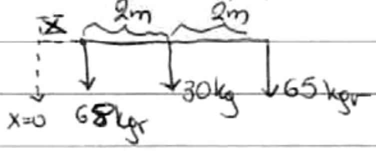


$x = \emptyset$

$$x_{cm} = \frac{65\cdot 0 + 65\cdot 4 + 30\cdot 2 + 3\cdot 4}{163} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{cm} = 2.04\, m$$

Τελικά θα έχουμε:



Αφού το κέντρο μάζας δεν μετακινείται θα έχουμε, (ο δίσκος τώρα βρίσκεται στο 2° φοιτητή)

$$2.04 = \frac{65 \cdot x + 3x + 30(2+x) + 65(4+x)}{163} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.04 = \frac{163x + 320}{163} \Rightarrow \boxed{x = 0.07m.}$$

(δ) Το κέντρο μάζας δεν μετακινείται και επομένως $d = 0$.

12. Μια ομοιόμορφη κυκλική πέτρα μάζας M και ακτίνας R περιστρέφεται γύρω από ένα κατακόρυφο άξονα, που περνά από το κέντρο της, με μια γωνιακή ταχύτητα ω_0 την χρονική στιγμή 0. Η πέτρα έχει μια βαθιά αυλακιά κατά μήκος της περιφέρειάς της. Άμμος χύνεται μέσα στην αυλακιά με ένα σταθερό ρυθμό q (όπου q μετριέται σε Kg/sec). Η άμμος δεν φεύγει έξω από την αυλακιά ή γλυστρά σχετικά με την πέτρα από την στιγμή που έπεσε μέσα στην αυλακιά.

(α) Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει εξωτερική ροπή, δώστε την γωνιακή ταχύτητα της πέτρας συναρτήσει του χρόνου t.

(β) Πόση εξωτερική ροπή χρειάζεται να εφαρμοστεί ώστε να κρατηθεί η πέτρα σε σταθερή γωνιακή ταχύτητα;

(α) Από τη στιγμή που δεν υπάρχει εξωτερική ροπή, η στροφορμή του συστήματος διατηρείται.

Η στροφορμή τη στιγμή $t=0$ είναι: $L = I\omega = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega_0$

Η άμμος που πέφτει στη ~~ρόδα~~ πέτρα έχει σαν αποτέλεσμα να αυξάνει τη ροπή αδράνειας της περιστρεφόμενης ρόδας με το χρόνο. Αλλά η στροφορμή πάντοτε διατηρείται και επομένως το γινόμενο της ροπής αδράνειας $I(t)$ επί τη γωνιακή ταχύτητα $\omega(t)$ είναι σταθερό.

Μπορούμε να γράψουμε επομένως:

$$\omega(t) = \frac{L}{I(t)} = \frac{\frac{1}{2}M\omega_0 R^2}{I(t)} \qquad (A)$$

Χρειάζεται τώρα να υπολογίσουμε το $I(t)$. Στο χρονικό διάστημα t η ποσότητα της άμμου που έχει πέσει στη ρόδα είναι $qt = m_{άμμου}$

Από τη στιγμή που η άμμος πέφτει κατά μήκος της περιφέρειας της ρόδας, η ροπή αδράνειας της ρόδας αυξάνει κατά την ποσότητα:

$m_{άμμου} R^2 = qtR^2$. Επομένως τη στιγμή t η ροπή αδράνειας της ρόδας είναι: $I(t) = \frac{1}{2}MR^2 + qtR^2 = \left(\frac{1}{2}M + qt\right)R^2$

Αντικαθιστώντας στην (A) έχουμε: $\omega(t) = \dfrac{\frac{1}{2}M\omega_0 R^2}{\left(\frac{1}{2}M+qt\right)R^2} \Rightarrow \boxed{\omega(t) = \dfrac{\omega_0}{1+\frac{2q}{M}t}}$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Είναι εύκολο να γράψει κάποιος ότι η ροπή αδράνειας είναι $I(t) = \frac{1}{2}(M+qt)R^2$. Να προσθέσει δηλαδή στη μάζα της πέτρινης ρόδας, τη μάζα της άμμου. Αυτό είναι λάθος γιατί υποθέτει ότι η άμμος κατανέμεται ομοιόμορφα σ' όλη την επιφάνεια της ρόδας. Αλλά το πρόβλημα μας λέει ότι κατανέμεται μόνο στην αυλακιά που είναι στην περιφέρεια της ρόδας και άρα σε απόσταση R από τον άξονα περιστροφής.

(β) Στην περίπτωση αυτή η στροφορμή δεν διατηρείται αφού η γωνιακή ταχύτητα, ω, είναι σταθερή και η ροπή αδράνειας αυξάνει με το χρόνο t. Η στροφορμή σα συνάρτηση του χρόνου γράφεται: $L(t) = I(t)\omega_0 = (\frac{1}{2}M+qt)R^2\omega_0$

Η συνισταμένη ροπή βρίσκεται όπως ότι γράφεται σαν:

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d(\frac{1}{2}M+qt)R^2\omega_0}{dt} \Rightarrow \boxed{\tau = qR^2\omega_0}$$

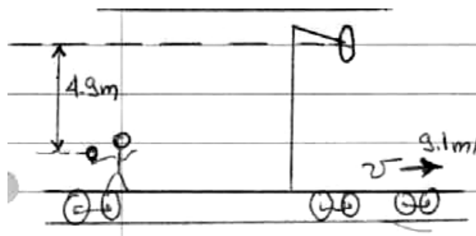
13. Ένας άνδρας επιβαίνει σε ένα επίπεδο βαγόνι το οποίο κινείται με ταχύτητα 9.10m/sec. Επιθυμεί να ρίξει μιά μπάλα μέσα από ένα σταθερό στεφάνι 4.90 m πάνω από το ύψος των χεριών του με τέτοιο τρόπο ώστε η μπάλλα να κινείται οριζόντια καθώς περνά μέσα από το στεφάνι. Ρίχνει την μπάλα με ταχύτητα 10.8m/s ως προς αυτόν. (*Υπόδειξη:* Θυμηθήτε ότι οι x και y κινήσεις είναι ανεξάρτητες).

(α) Ποιά πρέπει να είναι η κατακόρυφη συνιστώσα της αρχικής ταχύτητας της μπάλας;

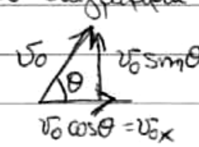
(β) Πόσα δευτερόλεπτα αφού έχει αφήσει την μπάλα, αυτή θα περάσει μέσα από το στεφάνι;

(γ) Σε ποιά οριζόντια απόσταση πρίν το στεφάνι θα πρέπει να αφήσει την μπάλα;

(δ) Όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια του άνδρα, ποια είναι η διεύθυνση της ταχύτητάς της σχετικά με το σύστημα αναφοράς του επίπεδου βαγονιού;



Το διάγραμμα των ταχυτήτων είναι:



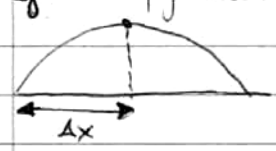
Η μπάλα κινείται οριζόντια καθώς περνά μέσα από το στεφάνι και επομένως βρίσκεται στην κορυφή της τροχιάς της.

(α) Στην κορυφή της τροχιάς της μπάλας

$$v_{0y} = 0 \Rightarrow v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a\Delta y \Rightarrow 0 = v_{0y}^2 - 2g\Delta y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{0y} = \sqrt{2g\Delta y} \Rightarrow v_{0y} = \sqrt{2\cdot 9.8\cdot 4.9} \Rightarrow \boxed{v_{0y} = 9.8 m/sec}$$

(γ) Η οριζόντια απόσταση για να φθάσει στην κορυφή της τροχιάς:



Σχετικά με το τρένο:

$$v_{0x} = \sqrt{v_0^2 - v_{0y}^2} = \sqrt{(10.8)^2 - (9.8)^2} \Rightarrow \boxed{v_{0x} = 4.54 m/s}$$

Σχετικά με το έδαφος, η οριζόντια ταχύτητα της μπάλας είναι:

$$V_x = v_{0x} + V_{τρένου} = 4.54 + 9.1 \Rightarrow \boxed{V_x = 13.64 m/sec}$$

Η ταχύτητα όμως είναι: $V_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = V_x \cdot \Delta t = 13.64 \cdot 1 \Rightarrow \boxed{\Delta x = 13.64 m}$

(β) Ο χρόνος που χρειάζεται για να φθάσει στο μέγιστο ύψος (κορυφή της τροχιάς)

$$v_y = v_{0y} + at \Rightarrow 0 = v_{0y} - gt \Rightarrow t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{9.8}{9.8} \Rightarrow \boxed{t = 1 sec}$$

(δ) Έχουμε προσδιορίσει v_{0y} και v_{0x}, ξέρουμε ακόμα $v_0 = 10.8 m/sec$

Επομένως: $v_{0y} = v_0 \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{9.8}{10.8} \Rightarrow \theta = \arcsin\frac{9.8}{10.8} \Rightarrow \boxed{\theta = 65^\circ}$

14. Κάποιος μοτοσυκλετιστής θέλει να πηδήξει πάνω από μιά χαράδρα με την μοτοσυκλέτα του. Το πλάτος της χαράδρας είναι w. Η ταχύτητα της μοτοσυκλέτας την στιγμή του άλματος είναι ορισμένη σε υ, αλλά οποιοσδήποτε μπορεί να αλλάξει την διεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας φτιάχνοντας ένα κεκλιμένο επίπεδο μεταβαλόμενης γωνίας κλίσης θ , ως προς τον ορίζοντα. Το ύψος του κεκλιμένου επιπέδου είναι αμελητέο σχετικά με το πλάτος της χαράδρας. Θεωρήστε ότι η επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας είναι g ενώ η μάζα του ριψοκίνδυνου μοτοσυκλετιστή είναι M.

(α) Η ελάχιστη ταχύτητα υ επιτυγχάνεται όταν το διάνυσμα της ταχύτητας της μοτοσυκλέτας και ο οδηγός σχηματίζουν 45^o γωνία ως προς την οριζόντια διεύθυνση (έδαφος). Ποια είναι η ελάχιστη ταχύτητα; Εκφράστε την απάντησή σας συναρτήσει των υπόλοιπων μεταβλητών που σας δίνονται.

(β) Υποθέτοντας ότι ο μοτοσυκλετιστής επιτυγχάνει ταχύτητα μεγαλύτερη από αυτή την ελάχιστη ταχύτητα, ποιά είναι η μικρότερη και η μεγαλύτερη γωνία που μπορεί να έχει το κεκλιμένο επίπεδο ώστε ο μοτοσυκλετιστής να περάσει πάνω από την χαράδρα; Εκφράστε και πάλι την απάντησή σας συναρτήσει των δεδομένων του προβλήματος.

(γ) Ευτυχώς, κατά την διάρκεια του πραγματικού άλματος, το κεκλιμένο επίπεδο τέθηκε με γωνία κλίσης 45^o. Δυστυχώς όμως, η ταχύτητα της μοτοσυκλέτας ήταν ελάχιστα ανεπαρκής για να περάσει την χαράδρα και ο οδηγός προφανώς είχε πρόβλημα. Κατάλαβε όμως την αποτυχία του εγχειρήματός του και στην κορυφή της τροχιάς πηδά κατακόρυφα προς τα πάνω, πάνω από την μοτοσυκλέτα, χάνοντας επαφή με το όχημα. Γενικά, νομίζετε ότι αυτό το τέχνασμα τον έσωσε; (αν όχι την μοτοσυκλέτα). Εξηγήστε ποιοτικά γιατί ή γιατί όχι.

(α) Το βεληνεκές όπως ξέρουμε δίνεται από τη σχέση:

$$R = \frac{\upsilon^2 \sin 2\theta}{g}$$ όπου υ η αρχική ταχύτητα και θ η γωνία σε σχέση με την οριζόντια διεύθυνση.

Για την ελάχιστη ταχύτητα, το βεληνεκές θα είναι: $R = W$

Επομένως $\upsilon_{min} = \sqrt{\frac{gW}{\sin 2\theta}}$

Προφανώς έχουμε ελάχιστη ταχύτητα όταν $\sin 2\theta$ μέγιστο $\Rightarrow \theta = 45^\circ$

$$\boxed{\upsilon_{min} = \sqrt{gW}}$$

(β) Αν η ταχύτητα $\upsilon > \upsilon_{min}$ τότε η γωνία θα είναι:

$$\sin 2\theta = \frac{gW}{\upsilon^2} < 1$$ και θα έχουμε δύο λύσεις για $0 < \theta < 90^\circ$

Έχουμε δει στη θεωρία ότι το βεληνεκές είναι ίδιο για γωνίες $\theta = 45 + a$ και $\theta = 45^\circ - a$.

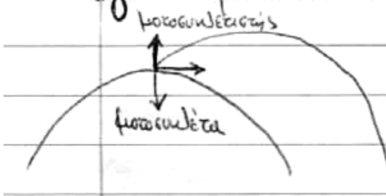
Επομένως $\Theta_{max} = 45^\circ + a$ και $\Theta_{min} = 45^\circ - a$ με $0^\circ < a < 45^\circ$
και χρειάζεται να βρούμε το a.

Αλλά $\sin 2(45 \pm a) = \sin(90 \pm 2a) = \cos 2a = \frac{gW}{v^2}$

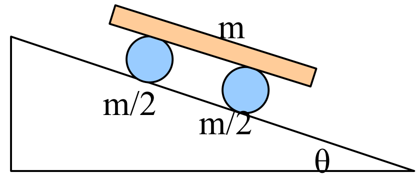
Επομένως : $\Theta_{max} = 45^\circ + \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{gW}{v^2}\right)$

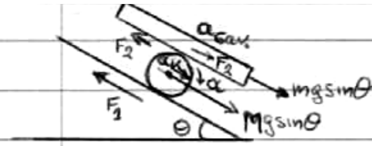
$\Theta_{min} = 45^\circ - \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{gW}{v^2}\right)$.

(γ) Ο μοτοσυκλεταστής θα σωθεί. Στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς, η ταχύτητα του είναι οριζόντια μόνο. Πηδώντας κατακόρυφα προς τα πάνω, πάνω από τη μοτοσυκλέτα, αποκτά επίσης μια κατακόρυφη συνιστώσα ταχύτητας. Η κατακόρυφη αυτή συνιστώσα, θα αυξήσει το χρονικό διάστημα που είναι στον αέρα και επομένως θα κινηθεί περισσότερο οριζόντια.



15. Μια σανίδα βρίσκεται πάνω σε 2 ομοιόμορφους κυλίνδρους (με ροπή αδράνειας $I=MR^2/2$) που βρίσκονται πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης θ όπως φαίνεται στο σχήμα. Η σανίδα έχει μάζα m και κάθε ένας από τους κυλίνδρους έχει μάζα m/2. Αν δεν υπάρχει ολίσθηση μεταξύ των διαφόρων επιφανειών, ποια είναι η επιτάχυνση της σανίδας;





Και οι 2 κύλινδροι θα κινηθούν ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, (από τη στιγμή που δεν γλιστρούν σχετικά με τη σανίδα) επομένως θα μπορούσαμε να τους θεωρήσουμε σαν ένα κύλινδρο με μάζα ίση με m.

Το διάγραμμα ελευθέρου σώματος είναι όπως στο διπλανό σχήμα:

$$F_{κεντρ} = m a_{κυλ} \Rightarrow mg\sin\theta - F_1 - F_2 = m a_{κυλ} \quad (1)$$

($a_{κυλ}$ = η γραμμική επιτάχυνση του κυλίνδρου)

$$F_{σαν} = m a_{σαν} \Rightarrow mg\sin\theta + F_2 = m a_{σαν} \quad (2)$$

$$\tau_{κεντρ} = I a_{κυλ} \Rightarrow F_1 \cancel{R} - F_2 \cancel{R} = \left(\tfrac{1}{2} m R^2\right)\alpha = \left(\tfrac{1}{2} m \cancel{R^2}\right)\frac{a_{κυλ}}{\cancel{R}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_1 - F_2 = \tfrac{1}{2} m a_{κυλ} \quad (3)$$

Επομένως έχουμε 3 εξισώσεις με 4 αγνώστους: $F_1, F_2, a_{κυλ}, a_{σαν}$ και χρειαζόμαστε ακόμα μιά εξίσωση.

Αλλά ξέρουμε ότι το πάνω μέρος του κυλίνδρου κινείται με διπλάσια ταχύτητα από ότι το κέντρο του; αφού $a_{σαν} = a_{κυλ} + \alpha R = a_{κυλ} + \frac{a_{κυλ}}{\cancel{R}}\cancel{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_{σαν} = 2a_{κυλ} \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας στις 3 πρώτες εξισώσεις έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}(1) &\Rightarrow mg\sin\theta - F_1 - F_2 = m a_{κυλ}\\ (2) &\Rightarrow mg\sin\theta + F_2 = 2m a_{κυλ}\\ (3) &\Rightarrow F_1 - F_2 = \tfrac{1}{2} m a_{κυλ}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}(1)+(2) &\Rightarrow 2mg\sin\theta - F_1 = 3m a_{κυλ}\\ (2)+(3) &\Rightarrow mg\sin\theta + F_1 = \tfrac{5}{2} m a_{κυλ}\end{aligned}\right\} \overset{+}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 3\cancel{m}g\sin\theta = \frac{11}{2}\cancel{m}a_{κυλ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{κυλ} = \frac{6}{11} g\sin\theta \overset{(4)}{\Rightarrow} a_{σαν} = 2a_{κυλ} \Rightarrow \boxed{a_{σαν} = \frac{12}{11} g\sin\theta}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ #15 (δεύτερη λύση)

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας διατήρηση της ενέργειας.

Όπως και στην πρώτη λύση έχουμε ότι:

$$a_{σαν.} = a_{κυλ} + \alpha R = a_{κυλ} + \frac{a_{κυλ}}{\cancel{R}}\cancel{R} \Rightarrow a_{σαν.} = 2a_{κυλ}.$$

Επομένως, αν v και x είναι η ταχύτητα της σανίδας και η απόσταση που έκανε πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, τότε $\frac{v}{2}$ και $\frac{x}{2}$ θα είναι η ταχύτητα του κυλίνδρου και η απόσταση που διένυσε πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.

Από διατήρηση της ενέργειας θα έχουμε:

$$\overbrace{mg\left(\frac{x}{2}\sin\theta\right)}^{U_{κυλ}} + \overbrace{mg(x\sin\theta)}^{U_{σαν}} = \left[\overbrace{\frac{1}{2}I\left(\frac{v}{2R}\right)^2}^{K_{κυλ}^{περιστ.}} + \overbrace{\frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2}^{K_{κυλ}^{μεταφ}}\right] + \overbrace{\frac{1}{2}mv^2}^{K_{σαν}}$$

$$\omega = \frac{v/2}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\cancel{m}g\,x\sin\theta = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\cancel{m}\cancel{R^2}\frac{v^2}{4\cancel{R^2}} + \frac{1}{2}\cancel{m}\frac{v^2}{4} + \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\cancel{2}}g\,x\sin\theta = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{11}{8}v^2\right) \Rightarrow v^2 = \frac{24}{11}g\,x\sin\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2\left(\frac{12}{11}\right)g\,x\sin\theta} \qquad (A)$$

Αλλά από τις εξισώσεις κίνησης σε μία διάσταση έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{a}} \\ v &= at \end{aligned}\right\} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2xa^{\cancel{2}}}{\cancel{a}}} \Rightarrow v = \sqrt{2ax} \qquad (B)$$

Συγκρίνοντας (A) & (B) έχουμε: $\boxed{a_{σαν} = \frac{12}{11}g\sin\theta.}$