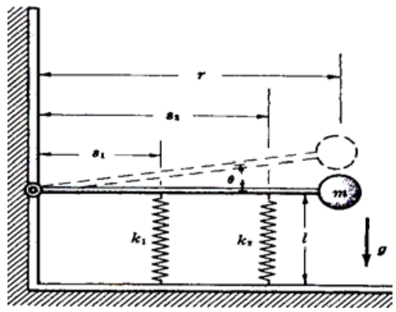
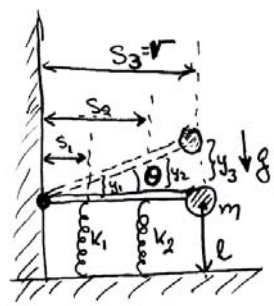
ΦΥΣ. 133

ΕΡΓΑΣΙΑ # 3 **Επιστροφή 23-2-2006**

1. Ένα σώμα μάζας m είναι εξαρτημένο από το άκρο μιας αβαρούς ράβδου, το άλλο άκρο της οποίας είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Στο σημείο στήριξης, η ράβδος μπορεί να κινείται. Η ράβδος στηρίζεται σε 2 ελατήρια σταθερής ελατηρίου k1 και k2 αντίστοιχα. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος και το είδος της κίνησης.





Υποθέτοντας κίνηση μόνο στο κατακόρυφο επίπεδο, χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες σα γενικευμένες συντεταγμένες: r και θ

Επομένως η ταχύτητα του σώματος θα είναι $\vec{v} = \dot{r}\hat{\rho} + r\dot{\theta}\hat{\phi}$

και η κινητική ενέργεια γίνεται: $T = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)}$ $\Rightarrow$

Επειδή όμως το μήκος της ράβδου είναι σταθερό τότε $\boxed{\dot{r} = 0}$ δεσμός

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2}$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών των 2 ελατηρίων και της δυναμικής ενέργειας βαρύτητας της μάζας m.

$$V = \frac{1}{2} k_1 \left(l + y_1 - l_1\right)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(l + y_2 - l_2\right)^2 + m g y_3$$

όπου l_1 και l_2 είναι το φυσικό μήκος του ελατηρίου k_1 και k_2 αντίστοιχα, το μήκος δηλαδή πριν τοποθετήσουμε τη ράβδο με τη μάζα. Τα y_1 και y_2 είναι οι μετατοπίσεις από τη θέση ισορροπίας: $y_1 = s_1 \sin\theta$, $y_2 = s_2 \sin\theta$, ενώ το $y_3 = r \cdot \sin\theta$.

Για μικρές μετατοπίσεις θα μπορούσαμε να κρατήσουμε μόνο τους μ' όρους α' τάξης ως προς θ, στο ανάπτυγμα Taylor του $\sin\theta$ $\left(\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)$ οπότε έχουμε:

$$\boxed{V = \frac{1}{2}k_1\left(\ell + s_1\theta - \ell_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(\ell + s_2\theta - \ell_2\right)^2 + mgr\theta}$$ για μικρά θ.

Επομένως η Lagrangian του συστήματος είναι:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k_1\left(\ell + s_1\theta - \ell_1\right)^2 - \frac{1}{2}k_2\left(\ell + s_2\theta - \ell_2\right)^2 - mgr\theta$$

Αφού έχουμε 1 βαθμό ελευθερίας, θ, έχουμε και μια εξίσωση κίνησης:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\theta} = \phi \Rightarrow \underbrace{2mr\dot{r}\dot{\theta}}_{0 \text{ αφού } \dot{r}=0,\ r=\text{σταθ.}} + mr^2\ddot{\theta} + k_1s_1\left(\ell + s_1\theta - \ell_1\right) + k_2s_2\left(\ell + s_2\theta - \ell_2\right) + mgr = \phi$$

$$\Rightarrow \boxed{mr^2\ddot{\theta} + k_1s_1\left(\ell + s_1\theta - \ell_2\right) + k_2s_2\left(\ell + s_2\theta - \ell_2\right) + mgr = \phi}$$

Αν υποθέσουμε ότι για $\theta = \phi$ τα ελατήρια και η ράβδος είναι σε στατική ισορροπία.

Τότε $$k_1s_1\left(\ell + \underbrace{s_1\theta}_{0} - \ell_1\right) + k_2s_2\left(\ell + \underbrace{s_2\theta}_{0} - \ell_2\right) + mgr = \phi \qquad \left(\ =\phi,\ \theta = 0\right)$$

$$\Rightarrow k_1s_1\left(\ell - \ell_1\right) + k_2s_2\left(\ell - \ell_2\right) + mgr = \phi$$ $\Rightarrow$ η εξίσωση κίνησης γίνεται:

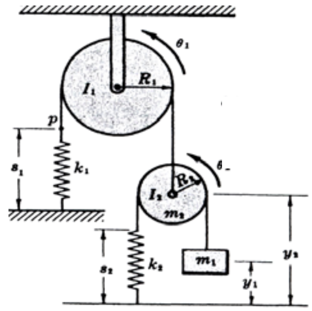
$$\Rightarrow \quad mr^2\ddot{\theta} + k_1s_1(\ell - \ell_1) + k_1s_1^2\theta + k_2s_2(\ell - \ell_2) + k_2s_2^2\theta + mgr = 0 \Rightarrow$$

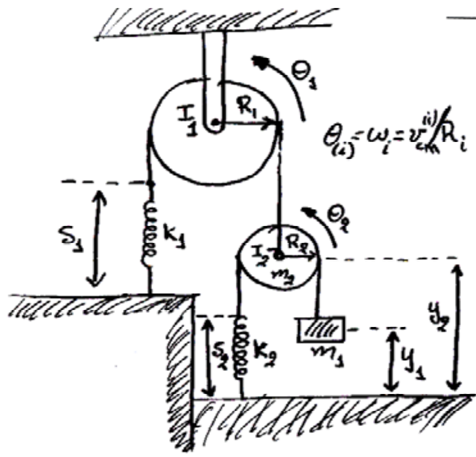
$$\Rightarrow \boxed{mr^2\ddot{\theta} + \left(k_1s_1^2 + k_2s_2^2\right)\theta = \phi} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\theta = \phi}$$

Θεωρώντας $$\omega^2 = \frac{\left(k_1s_1^2 + k_2s_2^2\right)}{mr^2}$$

εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή με $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{mr^2 4\pi^2}{\left(k_1s_1^2 + k_2s_2^2\right)}}$

2. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης για το σύστημα των τροχαλιών του σχήματος. Οι τροχαλίες έχουν μάζα και επομένως θεωρήστε ότι η ροπή αδράνειάς τους είναι I_1 και I_2 αντίστοιχα.





$\theta_{(i)} = \omega_i = v_{cm}^{(i)}/R_i$

Υποθέτουμε κατακόρυφη κίνηση μόνο.

Η ακλόνητη τροχαλία (I_1) αφού έχει μάζα παρουσιάζει κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής:

$$\boxed{T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} \frac{I_1}{R_1^2} v_{cm}^{(1)\,2}}$$

Η δεύτερη τροχαλία περιστρέφεται, αλλά και παρουσιάζει κατακόρυφη κίνηση, άρα:

$$\boxed{T_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{I_2}{R_2^2} v_{cm}^{(2)\,2} + m_2 v_2^2\right)}$$

Τέλος το τούβλο μάζας m_1 έχει κινητική ενέργεια

$$\boxed{T_3 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2}$$

Χρησιμοποιώντας σαν ανεξάρτητες συντεταγμένες τα y_1 και y_2 έχουμε:

$$\boxed{v_1 = \dot{y}_1} \qquad \boxed{v_2 = \dot{y}_2}$$

$v_{cm}^{(1)}$: η εφαπτομενική ταχύτητα της τροχαλίας 1 είναι η ταχύτητα με την οποία κινείται η τροχαλία (2) δηλαδή $\boxed{v_{cm}^{(1)} = \dot{y}_2}$

$v_{cm}^{(2)}$: η εφαπτομενική ταχύτητα της τροχαλίας 2 είναι η σχετική ταχύτητα του m_1 ως προς τη τροχαλία, δηλαδή $\boxed{\dot{y}_2 - \dot{y}_1 = v_{cm}^{(2)}}$

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις για T_1, T_2, T_3 έχουμε:

$$T_{ολ} = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{I_1}{R_1^2}\dot{y}_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{I_2}{R_2^2}(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + m_2 \dot{y}_2^2\right) + \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 \Rightarrow$$

$$T_{ολ} = \frac{1}{2}\frac{I_1}{R_1^2}\dot{y}_2^2 + \frac{1}{2}\frac{I_2}{R_2^2}\dot{y}_2^2 + \frac{1}{2}\frac{I_2}{R_2^2}\dot{y}_1^2 - \frac{I_2}{R_2^2}\dot{y}_2\dot{y}_1 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{T_{ολ} = \frac{1}{2}\left(\frac{I_2}{R_2^2} + m_1\right)\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{I_1}{R_1^2} + \frac{I_2}{R_2^2} + m_2\right)\dot{y}_2^2 - \frac{I_2}{R_2^2}\dot{y}_1\dot{y}_2}$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών των δύο ελατηρίων k_1 και k_2 καθώς και η δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας των σωμάτων.

Θεωρώντας ότι τα δύο ελατήρια έχουν φυσικό μήκος ℓ_1 και ℓ_2 αντίστοιχα:

$$V_{ελ} = \frac{1}{2} k_1 (s_1 - \ell_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (s_2 - \ell_2)^2$$

Αλλά $\quad s_1 + y_2 = C_1 \Rightarrow \boxed{s_1 = C_1 - y_2}$

$$(y_2 - s_2) + (y_2 - y_1) = C_2 \Rightarrow \boxed{s_2 = 2y_2 - y_1 - C_2}$$

$$\Rightarrow$$

$$V_{ελ} = \frac{1}{2} k_1 (c_1 - y_2 - \ell_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (2y_2 - y_1 - c_2 - \ell_2)^2$$

Η δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας θα είναι:

$$V_g = m_1 g y_1 + m_2 g y_2$$

Θεωρώντας μηδενική δυναμική ενέργεια το χαμηλότερο σημείο από το οποίο μετράμε τα y_1 και y_2

Επομένως $\quad V_{ολ} = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \frac{1}{2} k_1 (c_1 - y_2 - \ell_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (2y_2 - y_1 - c_2 - \ell_2)^2$

Η Lagrangian του συστήματος θα είναι:

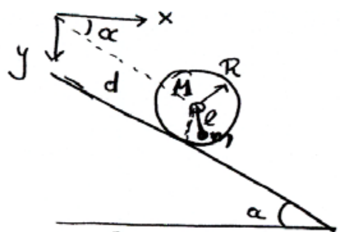
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{I_2}{R_2^2} + m_1\right)\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{I_1}{R_1^2} + \frac{I_2}{R_2^2} + m_2\right)\dot{y}_2^2 - \frac{I_2}{R_2^2}\dot{y}_1\dot{y}_2 - m_1 g y_1 - m_2 g y_2 - \frac{k_1}{2}(c_1 - y_2 - \ell_1)^2 - \frac{k_2}{2}(2y_2 - y_1 - c_2 - \ell_2)$$

Οι εξισώσεις κίνησης προκύπτουν από τις εξισώσεις Lagrange για y_1 και y_2

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} = 0 \Rightarrow \left(\frac{I_2}{R_2^2} + m_1\right)\ddot{y}_1 - \frac{I_2}{R_2^2}\ddot{y}_2 + m_1 g - \frac{k_2}{\cancel{2}}\cancel{2}(2y_2 - y_1 - c_2 - \ell_2) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{I_1}{R_1^2} + \frac{I_2}{R_2^2} + m_2\right)\ddot{y}_2 - \frac{I_2}{R_2^2}\ddot{y}_1 + m_2 g - \frac{k_1}{\cancel{2}}\cancel{2}(c_1 - y_2 - \ell_1) - \frac{k_2}{\cancel{2}}\cancel{2}^{2}(2y_2 - y_1 - c_2 - \ell_2) = 0$$

3. Ένας δίσκος μάζας M και ακτίνας R κυλά χωρίς ολίσθηση προς το κατώτερο μέρος ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης α με την οριζόντια διεύθυνση. Ο δίσκος έχει ένα μικρό αβαρή άξονα αμελητέας ακτίνας. Από τον άξονα αυτό κρέμεται ένα εκκρεμές μήκους *l*<R στο ελεύθερο άκρο του οποίου είναι εξαρτημένη μια μάζα m. Θεωρήστε ότι η κίνηση του εκκρεμούς λαμβάνει χώρα στο επίπεδο του δίσκου. Να βρεθούν η Lagrangian και οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος.



$x_{cm}^{δίσκου} = d\cos\alpha$

$y_{cm}^{δίσκ} = d\sin\alpha$

Η κινητική ενέργεια του δίσκου είναι $T_d = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$

όπου I είναι η ροπή αδράνειας του δίσκου, $I = MR^2$

Από τη στιγμή που κυλά χωρίς ολίσθηση $v_{cm} = R\omega$

Άρα $T_d = \frac{1}{2} MR^2\omega^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \Rightarrow T_d = \frac{1}{2} Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2} M\cancel{R^2}\frac{v_{cm}^2}{\cancel{R^2}}$

$\Rightarrow T_d = \frac{1}{\cancel{2}} M \cdot \cancel{2} v_{cm}^2 \Rightarrow \boxed{T_d = M v_{cm}^2}$

Αλλά $v_{cm} = \dot{d}$ επομένως γράφω: $\boxed{T_d = M\dot{d}^2}$

Η δυναμική ενέργεια του δίσκου είναι: $\boxed{V_d = -Mgy = -Mgd\sin\alpha}$ ($V=0$ στη κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου)

Η κινητική ενέργεια του εκκρεμούς θα είναι:

$$T_{εκρ} = \frac{1}{2} m v_{εκ}^2 = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}_{εκρ}^2 + \dot{y}_{εκρ}^2\right) = \frac{1}{2} m\left[\left(\dot{d}\cos a + l\cos\phi\right)^2 + \left(\dot{d}\sin a - l\sin\phi\,\dot{\phi}\right)^2\right] \Rightarrow$$

$x_{εκρ} = x_{cm} + l\sin\phi$
$= d\cos a + l\sin\phi$
$y_{εκρ} = y_{cm} + l\cos\phi$
$= d\sin\alpha + l\cos\phi$

$$\Rightarrow T_{εκρ} = \frac{1}{2} m\left[\dot{d}^2\cancel{\cos^2\alpha} + \dot{\phi}^2 l^2\cancel{\cos^2\phi} + 2l\dot{d}\cos a\cos\phi\,\dot{\phi} + \dot{d}^2\cancel{\sin^2\alpha} + l^2\dot{\phi}^2\cancel{\sin^2\phi} - 2l\dot{\phi}\dot{d}\sin\phi\sin a\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{T_{εκρ} = \frac{1}{2} m\left[\dot{d}^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2\dot{d}\dot{\phi}\,l\cos(a+\phi)\right]}$$

Η δυναμική ενέργεια του εκκρεμούς: $V_{εκρ} = -mg\,y_{εκρ} \Rightarrow \boxed{V_{εκρ} = -mg(d\sin a + l\cos\phi)}$

Επομένως $L = T_d + T_{εκ} - V_d - V_{εκ} \Rightarrow$

$$L = \frac{1}{2} m\left[\dot{d}^2 + l^2\dot{\phi}^2 + 2\dot{d}\dot{\phi}\,l\cos(a+\phi)\right] + M\dot{d}^2 + Mgd\sin a + mg(d\sin a + l\cos\phi) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Οι εξισώσεις Lagrange θα είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{d}}\right) - \frac{\partial L}{\partial d} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

Αντικαθιστώντας τη Lagrangian έχουμε :

$$\frac{\partial L}{\partial d} = (M+m) g \sin a$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{d}} = 2\left(M+\frac{m}{2}\right)\dot{d} + m l \dot{\phi} \cos(a+\phi)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{d}}\right) = (2M+m)\ddot{d} + m l \ddot{\phi}\left(\cos(a+\phi\right) - m l \dot{\phi}^2 \sin(a+\phi)$$

Έτσι η εξίσωση κίνησης γίνεται: $\underline{(2M+m)\ddot{d} + m l \ddot{\phi} \cos(a+\phi) - m l \dot{\phi}^2 \sin(a+\phi) = (M+m) g \sin a}$

Για τό ϕ έχουμε :

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -m l \dot{d} \dot{\phi} \sin(a+\phi) - m g l \sin\phi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m l^2 \dot{\phi} + m l \dot{d} \cos(a+\phi)$$

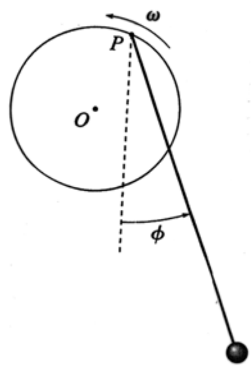
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = m l^2 \ddot{\phi} + m l \ddot{d} \cos(a+\phi) - m l \dot{d} \dot{\phi} \sin(a+\phi)$$

Επομένως

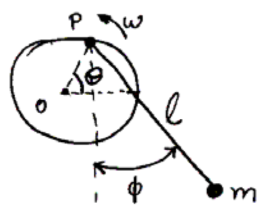
$$\underline{\cancel{m} l^{\cancel{2}} \ddot{\phi} + \cancel{m l} \ddot{d} \cos(a+\phi) \cancel{- m l \dot{d} \dot{\phi} \sin(a+\phi)} = \cancel{- m l \dot{d} \dot{\phi} \sin(a+\phi)} - \cancel{m} g \cancel{l} \sin\phi}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\phi} + \frac{\ddot{d}}{l} \cos(a+\phi) + \frac{g}{l} \sin\phi = 0.}$$

4. Το παρακάτω σχήμα δείχνει ένα απλό εκκρεμές (μάζας m, μήκους *l*) του οποίου το σημείο στήριξης P βρίσκεται στην περιφέρεια ενός τροχού (κέντρο O, ακτίνα R) ο οποίος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Τη χρονική στιγμή t=0, το σημείο P είναι στην ίδια οριζόντια θέση με το κέντρο, O, του τροχού και στα δεξιά του. Να γραφεί η Lagrangian και η εξίσωση κίνησης για την γωνία φ. [*Υπόδειξη*: Θα πρέπει να είστε προσεκτικοί όταν γράψετε την κινητική ενέργεια. Ένας ασφαλής τρόπος είναι να γράψετε την θέση της μάζας του εκκρεμούς τη στιγμή t

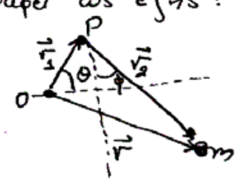


και να παραγωγίσετε]. Ελέγξτε ότι τα αποτελέσματά σας έχουν νόημα για την ειδική περίπτωση που ω=0.



$$\boxed{\Theta = \omega t \Rightarrow \dot\Theta = \omega}$$

Το διάνυσμα θέσης της μάζας m, $\vec r$, μπορεί να γραφεί ως εξής:



$$\vec r = \vec r_1 + \vec r_2$$
$$\vec r_1 = (\hat x\cos\Theta + \hat y\sin\Theta)R$$
$$\vec r_2 = (\hat x\sin\phi + \hat y\cos(-\phi))\ell$$

Επομένως $\vec r = \vec r_1 + \vec r_2 = \hat x(R\cos\ + \ell\sin\phi) + \hat y(R\sin\Theta - \ell\cos\phi) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dot{\vec r} = \vec v = \hat x(-R\dot\Theta\sin\Theta + \ell\dot\phi\cos\phi) + \hat y(R\dot\Theta\cos\Theta + \ell\dot\phi\sin\phi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec v = \hat x(-R\omega\sin\omega t + \ell\dot\phi\cos\phi) + \hat y(R\omega\cos\omega t + \ell\dot\phi\sin\phi)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\Big[(R\omega)^2\sin^2\omega t + (\ell\dot\phi)^2\cos^2\phi - 2R\ell\omega\dot\phi\cos\phi\sin\omega t +$$
$$+ (R\omega)^2\cos^2\omega t + (\ell\dot\phi)^2\sin^2\phi + 2R\ell\omega\dot\phi\sin\phi\cos\omega t\Big] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}m\left[(R\omega)^2 + (\ell\dot\phi)^2 + 2R\ell\omega\dot\phi\sin(\phi - \omega t)\right]}$$

Η δυναμική ενέργεια θα είναι:

$$\boxed{U = mgy = mg(-\ell\cos\phi + R\sin\omega t)}$$

Επομένως η Lagrangian είναι:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\left[(R\omega)^2 + (l\dot{\phi})^2 + 2Rl\omega\dot{\phi}\sin(\phi-\omega t)\right] - mg\left(R\sin\omega t - l\cos\phi\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{1}{\cancel{2}} m \cancel{2} Rl\omega\dot{\phi}\cos(\phi-\omega t) - mgl\sin\phi = mRl\omega\dot{\phi}\cos(\phi-\omega t) - mgl\sin\phi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = ml^2\dot{\phi} + mRl\omega\sin(\phi-\omega t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) = ml^2\ddot{\phi} + \left[mRl\omega(\dot{\phi}-\omega)\cos(\omega t-\phi)\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow ml\left[l\ddot{\phi} + R\omega(\dot{\phi}-\omega)\cos(\phi-\omega t)\right] - ml\left[R\omega\dot{\phi}\cos(\phi-\omega t) - g\sin\phi\right] = 0$$

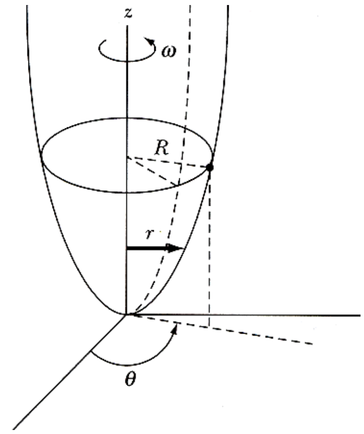
$$\Rightarrow l\ddot{\phi} - R\omega^2\cos(\phi-\omega t) + g\sin\phi = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\phi} = -\frac{g}{l}\sin\phi + \frac{\omega^2 R}{l}\cos(\phi-\omega t)}$$

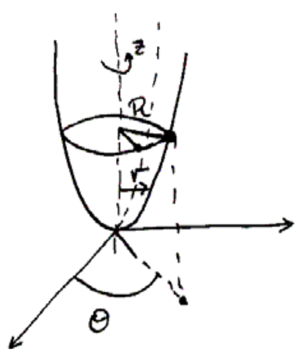
Βρήκαμε τη διαφορική εξίσωση κίνησης:

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l}\sin\phi + \frac{\omega^2 R}{l}\cos(\phi-\omega t)$$

Για $\omega=0 \Rightarrow \ddot{\phi} = -\frac{g}{l}\sin\phi$ η οποία εξίσωση είναι η εξίσωση κίνησης ενός εκκρεμούς

5. Μια χάντρα γλιστρά κατά μήκος ενός λείου σύρματος το οποίο είναι λυγισμένο στο σχήμα παραβολής $z=cr^2$ (όπως στο σχήμα). Η χάντρα περιστρέφεται σε ένα κύκλο ακτίνας R όταν το σύρμα περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας του με γωνιακή ταχύτητα ω. Βρείτε τη τιμή του c.





Από τη στιγμή που έχουμε κυλινδρική συμμετρία, διαλέγουμε r, θ, και z σαν τις γενικευμένες συντεταγμένες.

Η κινητική ενέργεια της χάντρας θα είναι:

$$\boxed{T=\frac{m}{2}\left[\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2\right]} \qquad (1)$$

Θεωρούμε σα μηδενικό επίπεδο δυναμικής ενέργειας βαρύτητας, το επίπεδο $z=0$ και επομένως

$$\boxed{V=mgz} \qquad (2)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ισχύουν σε περίπτωση που δεν υπάρχουν δεσμοί. Στην περίπτωσή μας όμως, το σχήμα του σύρματος είναι παραβολικό με αποτέλεσμα $\boxed{z=cr^2}$ επομένως αυτό μας δίνει την εξίσωση ενός δεσμού. Ο δεύτερος δεσμός προέρχεται από το γεγονός ότι το σύρμα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω.

Επομένως η γωνία $\boxed{\theta=\omega t}$ (ακριβής εξάρτηση από t)

Άρα: $z=cr^2 \Rightarrow \boxed{\dot{z}=2cr\dot{r}}$ (3)

$\theta=\omega t \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}=\omega}$ (4)

Από (1), (2), (3) κ (4) μπορούμε να γράψουμε τη Lagrangian ως εξής:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\omega^2 + 4c^2\dot{r}^2 r^2\right] - mgcr^2$$

Άρα: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \phi \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[m\dot{r} + 4mc^2 r^2 \dot{r}\right] - mr\omega^2 - 4mc^2\dot{r}^2 r + 2mgcr = 0$

$$\Rightarrow m\ddot{r} + 4mc^2 2r\dot{r}^2 + 4mc^2 r^2 \ddot{r} - mr\omega^2 - 4mc^2\dot{r}^2 r + 2mgcr = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{r}(1+4c^2r^2) + 4mc^2 r\dot{r}^2 - mr\omega^2 + 2mgcr = \phi$$ απλοποιώντας τη μάζα ⇒

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{r}(1+4c^2r^2) + (4c^2 r)\dot{r}^2 + r(2gc - \omega^2) = \phi}$$

Αφού όμως η χάντρα περιστρέφεται σε κύκλο $r = R = σταθ \Rightarrow \dot{r} = 0 = \ddot{r}$ $\Big\} \Rightarrow R(2gc - \omega^2) = \phi \Rightarrow$

$$\Rightarrow c = \frac{\omega^2}{2g}$$