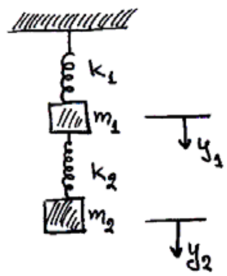
ΦΥΣ. 133

ΕΡΓΑΣΙΑ # 7 **Επιστροφή 7-4-2006**

1. Ένα ελατήριο αμελητέας μάζας και σταθεράς k_1, κρέμεται από ένα σταθερό σημείο, ενώ μια μάζα m κρέμεται από το ελεύθερο άκρο του. Ένα δεύτερο ελατήριο σταθεράς k_2 κρέμεται από τη μάζα m_1 και μια δεύτερη μάζα m_2 κρέμεται από το ελεύθερο άκρο του δεύτερου αυτού ελατηρίου. Υποθέτοντας ότι οι μάζες μπορούν να κινούνται μόνο στην κατακόρυφη διεύθυνση και χρησιμοποιώντας συντεταγμένες y_1 και y_2 μετρούμενες από τις θέσεις ισορροπίας των μαζών, δείξτε ότι οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να γραφούν σε μορφή εξίσωσης πινάκων: $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} = -\mathbf{K}\mathbf{y}$ όπου $\mathbf{y}$ είναι η 2x1 στήλη που αποτελείται από τα y_1 και y_2. Βρείτε τους πίνακες **M** και **K**.



Για να λυθεί το πρόβλημα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ή το 2ο νόμο του Newton ή το φορμαλισμό Lagrange για να πάρουμε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης.

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - V \\ T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 \\ V &= -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 + \frac{1}{2} k_1 y_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - y_1)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

όπου y_1 & y_2 οι απομακρύνσεις ως προς σημείο ισορροπίας

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + m_1 g y_1 + m_2 g y_2 - \frac{1}{2} k_1 y_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (y_2 - y_1)^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_1}\right) \Rightarrow m_1 \ddot{y}_1 = m_1 g - k_1 y_1 + k_2 (y_2 - y_1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_2}\right) \Rightarrow m_2 \ddot{y}_2 = m_2 g - k_2 (y_2 - y_1)$$

Στο πρόβλημα, μας ζητάνε να συσχετίσουμε τις εξισώσεις πινάκων με τις θέσεις ισορροπίας

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= m_1 g - k_1 y_1 + k_2 (y_2 - y_1) = 0 \\ F_2 &= m_2 g - k_2 (y_2 - y_1) = 0 \end{aligned}\right\}$$

Θέση ισορροπίας. Τα αντίστοιχα y_1 και y_2 θα είναι y_{1_0} και y_{2_0}

Επομένως θα πάρουμε: $y_{10} = \dfrac{m_1 + m_2}{k_1} g$ και $y_{2_0} = \left(\dfrac{m_1 + m_2}{k_1} + \dfrac{m_2}{k_2}\right) g$

Μπορούμε να γράψουμε επομένως: $y_1' = y_1 + y_{10}$

$y_2' = y_2 + y_{20}$

Οι εξισώσεις κίνησης γίνονται επομένως:

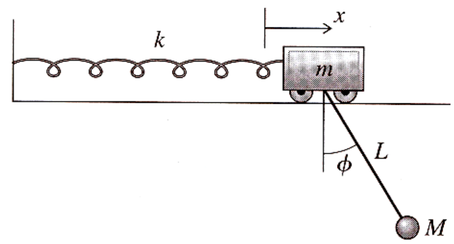
$$m_1 \ddot{y}_1' = -k_1 y_1' + k_2 (y_2' - y_1')$$

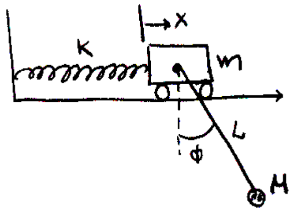
$$m_2 \ddot{y}_2' = -k_2 (y_2' - y_1')$$

Έχουμε τους πίνακες $\{M\} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$ και $\{K\} = \begin{pmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}$

και οι προηγούμενες εξισώσεις γράφονται: $\{M\}\{\ddot{y}'\} = -\{K\} y'$

2. Ένα απλό εκκρεμές μάζας M και μήκους L κρέμεται από ένα καρότσι μάζας m το οποίο μπορεί να ταλαντώνεται στην οριζόντια διεύθυνση εξαρτώμενο από το ένα άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς k, το άλλο άκρο του οποίου είναι εξαρτημένο από ακλόνητο σημείο (δείτε το σχήμα). (α) Υποθέτοντας ότι η γωνία φ παραμένει μικρή, γράψτε τη Lagrangian του συστήματος και τις εξισώσεις κίνησης για x και φ. (β) Υποθέτοντας ότι m = M = L = g = 1 και k = 2 (όλα με τις κατάλληλες μονάδες) να βρεθούν οι φυσικές συχνότητες ταλάντωσης και για κάθε φυσική συχνότητα να βρεθεί και να περιγραφεί η κίνηση του αντίστοιχου φυσικού τρόπου ταλάντωσης (normal mode).





(α) Υποθέτοντας μικρές γωνίες για την φ γράφουμε τη Lagrangian συναρτήσει των x και φ.

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + MgL(1-\cos\phi) \Rightarrow \left(\cos\phi \cong 1 - \frac{\phi^2}{2}\right)$$

$$V \cong \frac{1}{2}kx^2 + MgL\left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{\phi^2}{2}\right) \Rightarrow V = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{MgL}{2}\phi^2$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M(\dot{x} + L\dot{\phi})^2$$ όπου υποθέτουμε $x_{εκ} = x + L\sin\theta \cong x + L\theta$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + L^2\dot{\phi}^2 + 2L\dot{x}\dot{\phi}) \Rightarrow T = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + ML\dot{x}\dot{\phi} + \frac{1}{2}ML^2\dot{\phi}^2$$

$$\mathcal{L} = T - V \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + ML\dot{x}\dot{\phi} + \frac{1}{2}ML^2\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{MgL}{2}\phi^2$$

Οι εξισώσεις κίνησης θα είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} \Rightarrow (m+M)\ddot{x} + ML\ddot{\phi} = -kx$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \Rightarrow ML\ddot{x} + ML^2\ddot{\phi} = -MgL\phi$$

(β) Υποθέτουμε ότι M = L = g = m = 1 και k = 2, θα πρέπει να γράψουμε:

$\{M\}\{\ddot{q}\} = -\{K\}\{q\}$ όπου $\{M\}, \{K\}$ και $\{q\}$ οι αντίστοιχοι πίνακες

Θα έχουμε: $\{M\} = \begin{pmatrix} (m+M) & ML \\ ML & ML^2 \end{pmatrix}$, $\{\ddot{q}\} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix}$ και $\{q\} = \begin{pmatrix} x \\ \phi \end{pmatrix}$, $\{K\} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & MgL \end{pmatrix}$

Επομένως η εξίσωση γίνεται:

$$\{k\}-\omega^2\{M\} = \begin{bmatrix} k-\omega^2(m+M) & -ML\omega^2 \\ -ML\omega^2 & MgL-ML^2\omega^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & 1-\omega^2 \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα πρέπει να είναι μηδέν για να μην έχουμε τετριμμένη λύση

$$\det\left(k^2-\omega^2 M\right) = (2-2\omega^2)(1-\omega^2)-\omega^4 = 0 \Rightarrow 2-2\omega^2-2\omega^2+2\omega^4-\omega^4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^4-4\omega^2+2=0 \Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2} \Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \frac{\cancel{4}^{2}\pm\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2}^2 = 2\pm\sqrt{2} \quad \text{οπότε} \quad \boxed{\omega_1 \cong 0.77} \quad \text{και} \quad \boxed{\omega_2 \simeq 1.85}$$

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα:

$$\left(k-\omega_1^2 M\right)\alpha_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-2(2+\sqrt{2}) & -2-\sqrt{2} \\ -2-\sqrt{2} & 1-2-\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 2-2\cdot 0.77\,a_{11} - 0.77\,a_{21} = 0 \\ -0.77\,a_{11} + (1-0.77)\,a_{21} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{a_{21} = \sqrt{2}\,a_{11}}$$

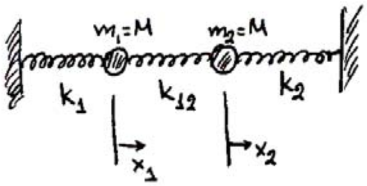
Και τα δύο σώματα κινούνται σε φάση στα αριστερά και μετά στα δεξιά

Το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα βρίσκεται αντικαθιστώντας για ω_2, οπότε:

$$\begin{bmatrix} 2-2(1.85) & -(1.85)^2 \\ -(1.85)^2 & 1-1.85 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\alpha_{22} = -\sqrt{2}\,a_{12}}$$

Στην περίπτωση αυτή, τα δύο σώματα ταλαντώνονται εκτός φάσης και μάλιστα με αντίθετη φάση.

3. Θεωρήστε το πρόβλημα των δύο συζευγμένων ταλαντωτών αποτελούμενων από 2 μάζες και 3 ελατήρια που είδαμε στη διάλεξη 25 (σελ. 9) και υποθέστε ότι τα τρία ελατήρια έχουν διαφορετικές σταθερές. Να βρεθούν οι δύο χαρακτηριστικές συχνότητες και να συγκριθούν τα μεγέθη τους με τις φυσικές συχνότητες των δύο ταλαντωτών σε απουσία σύζευξης.



Η εξίσωση κίνησης για το m_1:

$$m_1\ddot{x}_1 = m\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_{12}(x_2-x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}_1 + k_1x_1 - k_{12}(x_2-x_1) = 0$$

Για το σώμα m_2: $\quad m_2\ddot{x}_2 = M\ddot{x}_2 = -k_2x_2 - k_{12}(x_2-x_1) \Rightarrow m\ddot{x}_2 + (k_2+k_{12})x_2 - k_{12}x_1 = 0$

Δοκιμάζουμε μια λύση της μορφής:

$$x_1 = B_1 e^{i\omega t} \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\omega^2 B_1 e^{i\omega t} = -\omega^2 x_1$$

$$x_2 = B_2 e^{i\omega t} \Rightarrow \ddot{x}_2 = -\omega^2 B_2 e^{i\omega t} = -\omega^2 x_2$$

Αντικαταστούμε στις εξισώσεις κίνησης:

$$\left.\begin{array}{l} (k_1 + k_{12} - m\omega^2)B_1 - k_{12}B_2 = 0 \\ -k_{12}B_1 + (k_2+k_{12} - m\omega^2)B_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} k_1+k_{12}-m\omega^2 & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2+k_{12}-m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = 0$$

Μη τετριμμένη λύση υπάρχει αν $\det\left((k_1+k_{12}-m\omega^2)\cdot(k_2+k_{12}-m\omega^2) - k_{12}^2\right) = 0$

$$\Rightarrow k_1k_2 + k_{12}^2 + m^2\omega^4 + k_{12}(k_1+k_2) - k_1m\omega^2 - k_{12}m\omega^2 - k_2m\omega^2 - k_{12}m\omega^2 - k_{12}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(k_{12} - m\omega^2)^2}_{x^2} + (k_1+k_2)\underbrace{(k_{12} - m\omega^2)}_{x} + k_1k_2 - k_{12}^2 = 0$$

Δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς $k_{12}-m\omega^2$
$x^2 + (k_1+k_2)x + k_1k_2 - k_{12}^2 = 0$

Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι: $k_{12} - m\omega^2 = \dfrac{-k_1+k_2}{2} \pm \sqrt{\dfrac{(k_1+k_2)^2}{4} - (k_1k_2 - k_{12}^2)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow k_{12} - m\omega^2 = -\frac{1}{2}\left[(k_1+k_2) \pm \sqrt{(k_1-k_2)^2 + 4k_{12}^2}\right. \Rightarrow$$

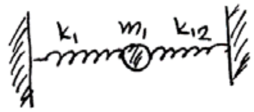
$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{2m}\left[k_1 + k_2 + 2k_{12} \pm \sqrt{(k_1-k_2)^2 + 4k_{12}^2}\right.$$

Όταν η σύζευξη είναι μηδενική ($k_{12}=0$) τότε η προηγούμενη σχέση δίνει:

$\omega^2 = \frac{k_1}{m}$ ή $\frac{k_2}{m}$ δηλαδή παίρνουμε τις φυσικές συχνότητες των 2 ελατηρίων ξεχωριστά.

Αν κρατήσουμε σταθερή την m_2 τότε η m_1 ταλαντώνεται με συχνότητα

$$\omega_1^{o\,2} = \frac{k_1+k_{12}}{M}$$



Αν κρατήσουμε σταθερή την m_1, τότε η m_2 ταλαντώνεται με συχνότητα:

$$\omega_2^{o\,2} = \frac{k_2+k_{12}}{\mu}$$

Έστω ότι εξετάζουμε την 1η ιδιοσυχνότητα: $\omega_1^2 = \frac{1}{2m}\left[k_1+k_2+2k_{12}+\sqrt{(k_1-k_2)^2+4k_{12}^2}\right]$

Βάζοντας $k_1 \geq k_2$ θα έχουμε:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2M}\left[k_1+k_2+2k_{12}+\sqrt{(k_1-k_2)^2+4k_{12}^2}\right] \geq \frac{1}{2M}\left[k_1+k_2+2k_1k_2+k_1-k_2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 \geq \frac{1}{2M}\left[2k_1+2k_{12}\right] = \cancel{2}\frac{[k_1+k_{12}]}{\cancel{2}M} = \omega_1^{o\,2} \Rightarrow \omega_1^2 \geq \omega_1^{o\,2}$$

Για την $\omega_2^2 = \frac{1}{2m}\left[k_1+k_2+2k_{12}-\sqrt{(k_1-k_2)^2+k_{12}^2}\right] \leq \frac{1}{2m}\left[k_1+k_2+2k_{12}-(k_1-k_2)\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega_2^2 \leq \frac{1}{2m}\left[2k_2+2k_{12}\right] = \frac{k_2+k_{12}}{m} \Rightarrow \omega_2^2 \leq \omega_2^{o\,2}$$

Επομένως $\quad \omega_2^2 \leq \omega_2^{o\,2} \leq \omega_1^{o\,2} \leq \omega_1^2$

Η ω_1^2 ιδιοσυχνότητα αντιστοιχεί στον φυσικό τρόπο ταλάντωσης, όπου οι μάζες ταλαντώνονται σε αντίθετες κατευθύνσεις.

Η ω_2^2 ιδιοσυχνότητα αντιστοιχεί στον φυσικό τρόπο ταλάντωσης, όπου οι μάζες ταλαντώνονται παράλληλα

Τα πλάτη ταλάντωσης των x_1 και x_2 διαφέρουν εκτός και αν $k_1=k_2$

4. Θεωρήστε και πάλι το πρόβλημα των συζευγμένων ταλαντωτών της προηγούμενης άσκησης. Δείξτε ότι η ολική ενέργεια του συστήματος είναι σταθερή.(Αθροίστε τις κινητικές ενέργειες των δύο ταλαντωτών και τις δυναμικές ενέργειες των ελατηρίων). Προσέξτε ότι οι όροι της κινητικής και η δυναμικής ενέργεια που περιέχουν σα συντελεστή την σταθερά του ελατηρίου σύζευξης εξαρτώνται από το πλάτος ταλάντωσης A_1 και τη συχνότητα ω_1 και όχι από το πλάτος ταλάντωσης A_2 και τη συχνότητα ω_2. Γιατί θα περιμέναμε ένα τέτοιο αποτέλεσμα;

Στην προηγούμενη άσκηση βρήκαμε ότι:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \\ U &= \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_{12} (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = T + U = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_{12} (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2$$

Η παράγωγός της ως προς χρόνο είναι:

$$\frac{dE}{dt} = m_1 \dot{x}_1 \ddot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 \ddot{x}_2 + k_1 x_1 \dot{x}_1 + k_{12} (x_2 - x_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 x_2 \dot{x}_2 \Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x}_1 \Big[\underbrace{m \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_{12}(x_2 - x_1)}_{\text{εξίσωση κίνησης του } x_1} \Big] + \dot{x}_2 \Big[\underbrace{m \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + k_{12}(x_2 - x_1)}_{\text{εξίσωση κίνησης του } x_2} \Big]$$

Άρα $\dfrac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E$ διατηρείται

Εκφράζουμε την ενέργεια συναρτήσει των κανονικών συντεταγμένων η_1, η_2

$\eta_1 \equiv x_1 - x_2$ και $\eta_2 \equiv x_1 + x_2$ Άρα $x_1 = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2)$, $x_2 = \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_1)$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} M \left[\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 \right] + \frac{1}{2} k \left[x_1^2 + x_2^2 \right] + \frac{1}{2} k_{12} \left[x_2 - x_1 \right]^2 \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} M \Big[\frac{1}{4} \dot{\eta}_1^2 + \cancel{\frac{1}{2} \dot{\eta}_1 \dot{\eta}_2} + \frac{1}{4} \dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{4} \dot{\eta}_1^2 - \cancel{\frac{1}{2} \dot{\eta}_1 \dot{\eta}_2} + \frac{1}{4} \dot{\eta}_2^2 \Big] +$$

$$+ \frac{1}{2} k \Big[\frac{1}{4} \eta_1^2 + \cancel{\frac{1}{2} \eta_1 \eta_2} + \frac{1}{4} \eta_2^2 + \frac{1}{4} \eta_1^2 - \cancel{\frac{1}{2} \eta_1 \eta_2} + \frac{1}{4} \eta_2^2 \Big] + \frac{1}{2} k_{12} \eta_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{4} m \left[\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 \right] + \frac{1}{4} k \left[\eta_1^2 + \eta_2^2 \right] + \frac{1}{2} k_{12} \eta_1^2$$

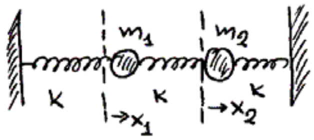
Ο μόνος όρος που εξαρτάται από τη σταθερά k_{12} είναι: $\frac{1}{2} k_{12} \eta_1^2$

Ο όρος αυτός αντιστοιχεί στη δυναμική ενέργεια του ενδιάμεσου ελατηρίου και εξαρτάται από τη κανονική συντεταγμένη η_1 με ιδιοσυχνότητα:

$$\omega_1^2 = \frac{k+2k_{12}}{m} \quad (\text{ταλάντωση αντισυμμετρική})$$

Αυτό γιατί η άλλη φυσική συντεταγμένη δεν περιέχει καμιά συμπίεση ή επιμήκυνση του μεσαίου ελατηρίου και επομένως περιμένουμε πλήρη εξάρτηση από τον αντισυμμετρικό τρόπο ταλάντωσης. (η_1)

5. Θεωρήστε και πάλι το πρόβλημα των ασκήσεων 3 και 4. Αυτή τη φορά τα ελατήρια έχουν την ίδια σταθερά k, αλλά οι μάζες των σωμάτων είναι διαφορετικές $m_1 \neq m_2$. Να βρεθούν οι κανονικές συντεταγμένες η_1 και η_2.



Η εξίσωση κίνησης της m_1 είναι:

$$m_1\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2-x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0$$

Για τη μάζα m_2: $\quad m_2\ddot{x}_2 = -kx_2 - k(x_2-x_1) \Rightarrow m_2\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0$

Οι λύσεις θα είναι της μορφής $x_1 = B_1 e^{i\omega t}$ και $x_2 = B_2 e^{i\omega t}$ οπότε:

$$\left.\begin{array}{l} (-m_1\omega^2 + 2k)B_1 - kB_2 = 0 \\ -kB_2 \quad (-m_2\omega^2 + 2k)B_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \det\left[(-m_1\omega^2+2k)(-m_2\omega^2+2k) - k^2\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m_1 m_2\omega^4 - 2k(m_1+m_2)\omega^2 + 3k^2 = 0. \quad \text{με λύσεις:}$$

$$\omega^2 = \frac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2} \pm \sqrt{\frac{k^2(m_1+m_2)^2}{m_1^2 m_2^2} - \frac{3k^2}{m_1 m_2}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{\mu} \pm \sqrt{\frac{k^2}{\mu^2} - \frac{3k^2}{m_1 m_2}}$$

Ορίζοντας σαν ανηγμένη μάζα $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{k}{\mu}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{3\mu}{m_1+m_2}}\right]$$

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα βρίσκονται αντικαθιστώντας το $\omega_{1,2}$ στην εξίσωση του πίνακα:

$$(-m_1\omega_1^2 + 2k)a_{11} - ka_{21} = 0 \Rightarrow a_{11}\left[-m_1\frac{k}{\mu}\left(1+\sqrt{1-\lambda}\right) + 2k\right] - ka_{21} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{21} = \left[2 - \frac{m_1}{\mu}\left(1+\sqrt{1-\lambda}\right)\right]a_{11} \qquad \text{όπου } \lambda = \frac{3\mu}{M_1+M_2}$$

Για την δεύτερη ιδιοσυχνότητα παίρνουμε:

$$a_{12}\left[-m_1\frac{k}{\mu}\left[1-\sqrt{1-\lambda} + 2k\right] - ka_{22} = 0 \Rightarrow a_{22} = \left[2 - \frac{m_1}{\mu}\left(1-\sqrt{1-\lambda}\right)\right]a_{21}\right.$$

Τα ιδιοδιανύσματα πρέπει να ικανοποιούν την απαίτηση ορθοκανονικότητας.

$$\sum_{j,k} m_{kj}\, a_{jr}\, a_{ks} = \delta_{rs}$$

Στην περίπτωση αυτή: $T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} M_{jk} \dot{x}_j \dot{x}_k = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$

Επομένως:

$$m_{11} = m, \quad m_{12} = m_{21} = 0, \quad m_{22} = m_2$$

Από αυτά καταλήγουμε:

$$m_1 a_{1r} a_{1s} + m_2 a_{2r} a_{2s} = \delta_{rs}$$

Επιβεβαιώνουμε πρώτα ότι τα στοιχεία που είναι έξω από τη διαγώνιο είναι $\emptyset$

$r = 1, \; s = 2$ (και ανάποδα $r = 2, s = 1$)

$$m_1 a_{11} a_{12} + m_2 a_{21} a_{22} = a_{11} a_{12} \left\{ m_1 + m_2 \left[2 - \frac{m_1}{\mu} - \frac{m_1}{\mu} \sqrt{1 - \frac{3\mu}{m_1+m_2}} \right] * \left[2 - \frac{m_1}{\mu} + \frac{m_1}{\mu} \sqrt{1 - \frac{3\mu}{m_1+m_2}} \right] \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{11} a_{12} \left\{ m_1 + m_2 \left[4 - 4 \frac{m_1}{\mu} + \frac{m_1^2}{\mu^2} - \frac{m_1^2}{\mu^2} \left(1 - \frac{3\mu}{m_1+m_2} \right) \right] \right\} =$$

$$= a_{11} a_{12} \left\{ \cancel{m_1} + 4\cancel{m_2} - 4(\cancel{m_2} + m_1) + 3\cancel{m_1} \right\} = 0$$

Επομένως για $r \neq s$ ισχύει η ορθοκανονικότητα.

Για την περίπτωση που $r = s$ θα πάρουμε:

$$m_1 a_{11} a_{21} + m_2 a_{21} a_{21} = 1 \Rightarrow m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{21}^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{11}^2 \left\{ m_1 + m_2 \left(2 - \frac{m_1}{\mu} \left(1 - \sqrt{1 - \lambda} \right) \right)^2 \right\} = 1 \Rightarrow a_{11}^2 \left\{ m_1 + m_2 \left[2 - \frac{m_1+m_2}{m_2} - \frac{(m_1+m_2)}{m_2} \sqrt{1 - \frac{3\mu}{m_1+m_2}} \right]^2 \right\} = 1$$

$$\Rightarrow a_{11}^2 \left\{ m_1 + m_2 \left(1 - \frac{m_1}{m_2} - \left(\frac{m_1+m_2}{m_2} \right) \sqrt{1 - \frac{3\mu}{m_1+m_2}} \right)^2 \right\} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{11}^2 \left\{ m_1 + m_2 \left[1 - \frac{2m_1}{m_2} + \frac{m_1^2}{m_2^2} + \frac{(m_1+m_2)^2}{m_2^2} \left(1 - \frac{3m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2} \right) - 2 \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \right) \left(\frac{m_1+m_2}{m_2} \right) \sqrt{1 - \frac{3m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}} \right.\right.$$

$$\Rightarrow a_{11}^2 \left\{ m_1 + m_2 - 2m_1 + \frac{m_1^2}{m_2} + \frac{(m_1+m_2)^2}{m_2} - 3m_1 - 2m_2 \left(1 - \frac{m_1^2}{m_2^2} \right) \sqrt{1 - \frac{3m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}} \right\} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{11}^2\left\{m_1+m_2-2m_1+\frac{m_1^2}{m_2}+\frac{m_1^2}{m_2}+2m_1+m_2-3m_1+\frac{2}{m_2}(m_1^2-m_2^2)\sqrt{1-\frac{3m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}}\right\}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_{11}=\frac{1}{\sqrt{D_1}}$$

όπου $D_1=2(m_2-m_1)-2\frac{m_1^2}{m_2}+\frac{2}{m_2}(m_1^2-m_2^2)\sqrt{1-\frac{3m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_{21}=\frac{1}{\sqrt{D_1}}\left[2-\frac{m_1+m_2}{m_2}\left(1+\sqrt{1-\frac{3m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}}\right)\right]$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε τα a_{22} και a_{12} του ιδιοδιανύσματος της ω_2

$r=s=2$ οπότε: $\quad m_1a_{12}^2+m_2a_{22}^2=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_{12}^2\left\{m_1+m_2\left(2-\frac{m_1}{\mu}\left(1-\sqrt{1-\lambda}\right)\right)^2\right\}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{12}^2\left\{m_1+m_2\left(2-\frac{m_1+m_2}{m_2}+\frac{m_1+m_2}{m}\sqrt{1-\frac{3\mu}{m_1+m_2}}\right)^2\right\}=1 \Rightarrow$$

Καταλήγουμε ότι:

$$a_{12}=\sqrt{\frac{1}{D_2}} \quad \text{όπου } D_2=2(m_2-m_1)+2\frac{m_1^2}{m_2}-\frac{2}{m_2}(m_1^2-m_2^2)\sqrt{1-\frac{3m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}}$$

$$a_{22}=\frac{1}{\sqrt{D_2}}\left[2-\frac{m_1+m_2}{m_2}\left(1-\sqrt{1-\frac{3m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}}\right)\right]$$

Οι κανονικές συντεταγμένες n_i δίνονται από τη σχέση:

$$x_j(t)=\sum_r a_{jr}n_r(t) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=a_{11}n_1+a_{12}n_2 \\ x_2=a_{21}n_1+a_{22}n_2 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_1=\frac{a_{22}x-a_{12}x}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \qquad n_2=\frac{a_{21}x_1-a_{11}x_2}{a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}}$$

Ανάλογες εκφράσεις ισχύουν για τα $\dot{n}_1(t)$ και $\dot{n}_2(t)$

Οι αρχικές μας συνθήκες είναι: $x_1(0) = x_{10} \quad x_2(0) = x_{20}$

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0.$$

Επομένως καταλήγουμε ότι:

$$n_1(0) = \frac{a_{22}x_{10} - a_{12}x_{20}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \dot{n}_1(0)=0, n_2(0) = \frac{a_{21}x_{10} - a_{11}x_{20}}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}, \dot{n}_2(0)=0$$

και επομένως για $n = n_{i_0}\cos(\omega_i t - \phi_i)$ θα πρέπει να έχουμε:

$$\underline{n_{i_0} = n_i(0)} \quad \text{και} \quad \underline{\phi_i = 0.}$$