ΦΥΣ 347 – Χειμερινό Εξάμηνο 2015

Τελική Εξέταση

Κυριακή, 6 Δεκέμβρη Διάρκεια εξέτασης: **10:00– 16:00**

Θα πρέπει να δουλέψετε όλες τις ασκήσεις μόνοι σας χωρίς να συζητήσετε τα αποτελέσματα και τον κώδικά σας παρά μόνο με τον εαυτό σας και ίσως εμένα αν έχετε απορίες.
Θα πρέπει ο κώδικάς σας να είναι ευανάγνωστος και να περιέχει απαραίτητα σχόλια που εξηγούν τι κάνετε.
Θα πρέπει να κάνετε τις γραφικές που ζητούνται χρησιμοποιώντας το λογισμικό ROOT και να τις αποθηκεύσετε σε pdf μορφή.
Στο τέλος της εξέτασης θα πρέπει να επιστρέψετε μέσω e-mail (fotis@ucy.ac.cy), το κώδικα που αντιστοιχεί σε κάθε άσκηση, τα σχετικά γραφήματα και dat ή text files που ζητούνται σε ένα tar zipped της μορφής *username_final.tgz,* όπου username είναι το username σας στο e-mail του πανεπιστημίου.
Σημειώστε ότι είναι δική σας ευθύνη να μου στείλετε το tgz file. Σε περίπτωση λάθους και μετά το τέλος της εξέτασης δεν θα γίνουν δεκτές μεταγενέστερες αποστολές ανάλογων αρχείων όπως και οποιεσδήποτε προσθήκες, ή αλλαγές στο tgz file.

Καλή Επιτυχία

1. Δημιουργήστε το πρόγραμμα μιας κλάσης που ονομάζεται *Rectangle* (ορθογώνιο). Η κλάση αυτή αποθηκεύει μόνο τις καρτεσιανές συντεταγμένες των τεσσάρων κορυφών του ορθογωνίου. Ο *constructor* καλεί μια συνάρτηση *set* η οποία δέχεται 4 sets συντεταγμένων και επαληθεύει ότι κάθε μια από αυτές ανήκουν στο $1^{ο}$ τεταρτημόριο χωρίς καμιά από τις x και y συντεταγμένες να μην είναι μεγαλύτερη από 20.0. Η συνάρτηση *set* επιβεβαιώνει επίσης ότι οι συντεταγμένες που εισάγονται ορίζουν όντως ένα ορθογώνιο. Συναρτήσεις μέλη της κλάσης αυτής υπολογίζουν το *length* (μήκος)*, width* (πλάτος)*, perimeter* (περίμετρο) και *area* (εμβαδό) του ορθογωνίου. Σαν μήκος θεωρείται η μεγαλύτερη από τις δυο διαστάσεις του ορθογωνίου. Συμπεριλάβετε ακόμα μια συνάρτηση με το όνομα *square* η οποία προσδιορίζει αν το ορθογώνιο είναι τετράγωνο. Γράψτε κατόπιν ένα πρόγραμμα το οποίο χρησιμοποιεί την κλάση αυτή και τα ακόλουθα σημεία με τις συντεταγμένες τους: *X*=(5.0,1.0), *Y*=(5.0,3.0), *Z*=(1.0, 3.0), *W*=(1.0,1.0), *J*=(0.0,0.0), *K*=(1.0,0.0), *M*=(1.0,1.0), *N*=(0.0,1.0) και *V*=(99.0,-2.3) και τα παραλληλόγραμμα με κορυφές (*Z, Y, X, W*), (*J, K, M, N*), (*W, X, M, N*) και (*V, X, Y, Z*).

2. Τα προβλήματα των τυχαίων περιπάτων είναι ιδιαίτερα σημαντικά στην στατιστική φυσική. Στο πρόβλημα αυτό θα πρέπει να προσομοιώσετε την περίπτωση που δυο άτομα εκτελούν ένα τυχαίο περίπατο σε μια διάσταση. Οι ιδιότητες των δυο τυχαίων περιπάτων και περιπατητών είναι ακριβώς ίδιες. Ο κάθε περιπατητής μετατοπίζεται κατά μια θέση προς τα δεξιά με πιθανότητα p και κατά μια θέση προς τα αριστερά με πιθανότητα 1-p. Τα βήματα που κάνει ο καθένας είναι του ίδιου μεγέθους και ξεκινούν ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο.

Να βρεθεί η πιθανότητα να συναντηθούν και πάλι στο ίδιο σημείο αφού ο καθένας έχει κάνει N βήματα. Υποθέστε ότι η πιθανότητα για κίνηση στα αριστερά ή δεξιά είναι 0.5 και ότι ο αριθμός των βημάτων N που πήρε ο καθένας είναι N=50. Να γράψετε το πρόγραμμα που προσομοιώνει την παραπάνω περίπτωση και υπολογίζει την πιθανότητα συνάντησής τους στο σημείο που ξεκίνησαν μετά από N βήματα [**15μ**]. Συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με την θεωρητικά αναμενόμενη πιθανότητα $p=\left[\frac{N!}{2^N\left(\left(N/2\right)!\right)^2}\right]^2$. [**5μ**]

3. Η κατανομή Gauss δίνεται από την σχέση $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-x^2/2\right)$. Το ολοκλήρωμα της συνάρτησης αυτής είναι ίσο με την μονάδα. Δηλαδή $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-x^2/2\right)=1$. Να βρεθεί η τιμή του α με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων τέτοια ώστε το διάστημα [-α, α] να περιέχει το 0.5 του ολικού ολοκληρώματος της Gaussians, δηλαδή $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{+a}\exp\left(-x^2/2\right)=\frac{1}{2}$.

Εκ πρώτης όψεως, αυτό που ζητά η άσκηση ίσως είναι λίγο περίεργο. Ωστόσο αυτό που χρειάζεται να κάνετε είναι να βρείτε την λύση της εξίσωσης $A-\frac{1}{2}=0$. Επομένως αυτό που χρειάζεται να κάνετε είναι να χρησιμοποιήσετε μια μέθοδο ολοκλήρωσης (τραπεζίου ή Simpson για απλούστευση) που υπολογίζει το ολοκλήρωμα συναρτήσει διαφόρων τιμών του α, F(α), και η οποία καλείται κατόπιν από μια μέθοδο εύρεσης λύσης εξίσωσης όπως η μέθοδος της διχοτόμησης. Σαν επιλέον βοήθημα, η τιμή του α βρίσκεται στο διάστημα 0.5-1.0 όπως μπορείτε να βρείτε υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα A για τις δύο αυτές τιμές του α. Σημειώστε ότι εφόσον η συνάρτηση είναι συμμετρική, αρκεί να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα με κάτω όριο το 0 και να το διπλασιάσετε. Θα πρέπει να γυρίσετε με το κώδικά σας τη τιμή του α που βρήκατε σα σχόλιο.

<u>Υπενθύμιση:</u> (i) η μέθοδος ολοκλήρωσης του τραπεζίου προσεγγίζει το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης με την σχέση:

$$\int_{x_0}^{x_1} f\left(x\right)dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left[f\left(x_0\right)+2f\left(x_0+\Delta x\right)+2f\left(x_0+2\Delta x\right)+\cdots 2f\left(x_0+\left(n-1\right)\Delta x\right)+f\left(x_1\right)\right]$$ ενώ

με την μέθοδο Simpson προσεγγίζεται με την σχέση:

$$\int_{x_0}^{x_1} f\left(x\right)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left[f\left(x_0\right)+4f\left(x_0+\Delta x\right)+2f\left(x_0+2\Delta x\right)+\cdots 4f\left(x_0+\left(N-1\right)\Delta x\right)+f\left(x_1\right)\right]$$

Και στις δυο περιπτώσεις Δx αντιπροσωπεύει το εύρος των υποδιαστημάτων στα οποία έχουμε χωρίσει το διάστημα ολοκλήρωσης ενώ N είναι ο αριθμός των υποδιαστημάτων. Να σημειωθεί ότι στην περίπτωση Simpson ο αριθμός N θα πρέπει να είναι πάντοτε άρτιος.

(ii) Η μέθοδος διχοτόμησης για την εύρεση ριζών στηρίζεται στο γεγονός ότι μια μονότονη συνάρτηση, $f\left(x\right)$, η οποία έχει ρίζα $f\left(x_0\right)=0$ σε ένα διάστημα τιμών [α,β], αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν της ρίζας x_0, δηλαδή $f\left(x_{Left}\right)\times f\left(x_{Right}\right)<0$. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το μέσο του διαστήματος [α,β] και να εξετάσουμε αν $f\left(x_{Left}\right)\times f\left(x_{\mu}\right)>0$ ή $f\left(x_{Left}\right)\times f\left(x_{\mu}\right)<0$. Αν ισχύει το πρώτο, σημαίνει ότι στο μέσο του διαστήματος και στο αριστερό όριο του διαστήματος η συνάρτηση έχει το ίδιο πρόσημο και επομένως η ρίζα θα πρέπει να είναι μεταξύ του x_{μ} και του x_{Right}. Επομένως μπορούμε να θέσουμε σαν νέο αριστερό όριο το x_{μ} και να βρούμε το μέσο του νέου διαστήματος $[x_{\mu},x_{Right}]$και να επαναλάβουμε την διαδικασία. Αν ισχύει η 2^{η} συνθήκη, τότε η συνάρτηση έχει αλλάξει πρόσημο και επομένως η ρίζα της συνάρτησης βρίσκεται στο διάστημα $[x_{Left},x_{\mu}]$. Οπότε μπορούμε να θέσουμε σαν νέο δεξιό όριο το x_{μ} και να επαναλάβουμε την διαδικασία με το μέσο του νέου διαστήματος $[x_{Left},x_{\mu}]$.

4. Θεωρήστε την εξίσωση Schrödinger για σωματίδιο σε ένα άπειρο πηγάδι δυναμικού εύρους L, όπως αυτό του διπλανού σχήματος, όπου $V\left(x\right)=\begin{cases}0 & \left(0<x<L\right)\\ \infty & x\notin\left(0,L\right)\end{cases}$. Η συνοριακή συνθήκη είναι $\psi\left(0\right)=\psi\left(L\right)=0$. Θεωρώντας ότι $L=m=\hbar=1$ χρησιμοποιήστε την μέθοδο 4^{ου} βαθμού Runge-Kutta, για να ολοκληρώσετε την συνάρτηση από το x = 0 (όπου $\psi(0)$=0 και $\psi'(0)$=1) στο x = 1 και δείξτε ότι $\psi(1)$~0 (η αναλυτική τιμή είναι προφανώς ακριβώς 0) αν χρησιμοποιήσετε την μικρότερη ιδιοτιμή της ενέργειας. <u>*Υπόδειξη:*</u> Θα ήταν καλό να χρησιμοποιήσετε διάφορες τιμές για το βήμα h, για παράδειγμα h=0.2, 0.1, 0.05 και να ελέγξετε για σύγκλιση των τιμών του $\psi(1)$.