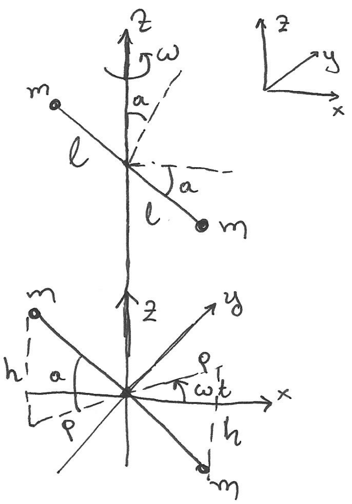
ΦΥΣ. 211
ΕΡΓΑΣΙΑ # 10 – Προαιρετική
Επιστροφή το αργότερο μέχρι τα μεσάνυχτα της Κυριακής 15/5/2016

1. Ένας περιστροφέας αποτελείται από μια ράβδο αμελητέας μάζας και μήκους $2l$ στα άκρα της οποίας είναι στερεωμένες δυο μάζες m. Η διεύθυνση της ράβδου σχηματίζει γωνία a, με την κατακόρυφο και περιστρέφεται γύρω από τον z-άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Την χρονική στιγμή $t = 0$, βρίσκεται στο xz-επίπεδο. Οι συντεταγμένες των μαζών σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή δίνονται από τις σχέσεις:

Σώμα 1	Σώμα 2
$x_1 = \rho\cos(\omega t)$	$x_2 = -\rho\cos(\omega t)$
$y_1 = \rho\sin(\omega t)$	$y_2 = -\rho\sin(\omega t)$
$z_1 = -h$	$z_2 = h$

όπου $\rho = l\cos a$ και $h = l\sin a$. Να υπολογιστεί ο τανυστής της ροπής αδράνειας ως προς το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το μέσο της ράβδου. Να υπολογιστούν οι συνιστώσες της στροφορμής στους 3-άξονες και οι συνιστώσες της ροπής που ασκείται στο σύστημα ώστε να εκτελεί την κίνησή του.



Μπορούμε να υπολογίσουμε τις συνιστώσες του τανυστή αδράνειας I σύμφωνα με τον τύπο: $I_{ij} = \sum_{a=1}^{2} m_a \left(r_a^2 \delta_{ij} - r_i^a r_j^a\right)$

$$I_{xx} = m_1\left(y_1^2 + z_1^2\right) + m_2\left(y_2^2 + z_2^2\right) = 2m\left(\rho^2 \sin^2\omega t + h^2\right)$$

$$I_{xy} = I_{yz} = -m_1 y_1 z_1 - m_2 y_2 z_2 = 2m\rho h \sin\omega t$$

Ανάλογα υπολογίζουμε τους υπόλοιπους όρους:

$$I = 2m\begin{pmatrix} \rho^2\sin^2\omega t + h^2 & -\rho^2\sin\omega t\cos\omega t & \rho h\cos\omega t \\ -\rho^2\sin\omega t\cos\omega t & \rho^2\cos^2\omega t + h^2 & \rho h\sin\omega t \\ \rho h\cos\omega t & \rho h\sin\omega t & \rho^2 \end{pmatrix}$$

Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας είναι $\omega = (0, 0, \omega)$

και επομένως: $L_i = \sum_j I_{ij}\omega_j$

$$L_x = \bar{I}\cdot\bar{\omega} = 2m\rho h\omega\cos\omega t$$
$$L_y = \bar{I}\cdot\bar{\omega} = 2m\rho h\omega\sin\omega t$$
$$L_z = \bar{I}\cdot\bar{\omega} = 2m\rho^2\omega$$

διαφόριση $\Rightarrow$

$$\tau_x = \frac{dL_x}{dt} = -2m\rho h\omega^2\sin\omega t$$
$$\tau_y = \frac{dL_y}{dt} = 2m\rho h\omega^2\cos\omega t$$
$$\tau_z = 0.$$

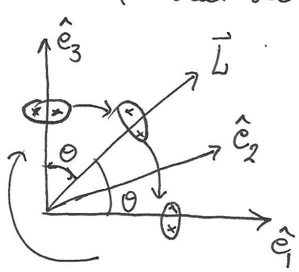
2. Ένα νόμισμα σε οριζόντιο επίπεδο, ρίχνεται στον αέρα με γωνιακή ταχύτητα ω_1 ως προς μια διάμετρό του και ω_3 ως προς τον κύριο άξονα που είναι κάθετος στο νόμισμα. Αν η ω_3 είναι μηδέν τότε το νόμισμα θα περιστρέφονταν ως προς την διάμετρό του. Για μη μηδενική ω_3, το νόμισμα μεταπίπτει. Ποια η ελάχιστη τιμή του λόγου ω_3/ω_1 ώστε η μεταπτωτική κίνηση είναι τέτοια ώστε πάντοτε η μια όψη του νομίσματος είναι ορατή από παρατηρητή που κοιτά το νόμισμα από την πάνω πλευρά.

Μετά την αρχική ώθηση που δόθηκε στο νόμισμα, η στροφορμή πρέπει να διατηρείται αφού δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές.

Η αρχική στροφορμή είναι: $\vec{L} = \bar{I}\cdot\vec{\omega} = \frac{1}{4}ma^2\left(2\omega_3\hat{e}_3 + \omega_1\hat{e}_1\right)$

όπου χρησιμοποιούμε ότι ο τανυστής αδράνειας ενός δίσκου ως προς τους κύριους άξονές του είναι $I = \frac{1}{4}ma^2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ με a: ακτίνα και m: μάζα του δίσκου.

Η κίνηση που εκτελεί είναι μετάπτωση ως προς την διεύθυνση της στροφορμής L όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Η γωνία μεταξύ του άξονα $\hat{e}_3$ και της στροφορμής L είναι λιγότερο από 45° και η ίδια όψη του νομίσματος προβάλλεται πάντοτε στον παρατηρητή. Επομένως:

$$\frac{2\omega_3}{\omega_1} > \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{\omega_3}{\omega} > \frac{1}{2}}$$

3. Αποδείξτε το θεώρημα παράλληλων αξόνων. Αποδείξτε δηλαδή ότι αν ξέρουμε τον τανυστή της ροπής αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας ενός σώματος (I_{CM}), και θέλουμε να βρούμε τον τανυστή αδράνειας ως προς σημείο μετατοπισμένο κατά ένα σταθερό διάνυσμα $\vec{a}$, αυτός δίνεται από την σχέση: $I_{\vec{a}} = I_{cm} + M\left(a^2\delta_{ij} - a_i a_j\right)$

Ξέρουμε ότι η ροπή αδράνειας δίνεται από $I_{ab} = \sum_i m_i \left(r_i^2 \delta_{ab} - r_{ia} r_{ib}\right)$

Γράφουμε ότι $\vec{r}_i = \vec{s}_i + \vec{a}$ όπου $\vec{s}_i$ το διάνυσμα του CM και $\vec{a}$ το διάνυσμα της μετατόπισης από το κέντρο μάζας.

$$I_{ab} = \sum_i m_i \left[(\vec{s}_i + \vec{a})^2 \delta_{ab} - (s_{ia} + a_a)(s_{ib} + a_b) \right] = \overbrace{\sum_i m_i \left(s_i^2 \delta_{ab} - s_{ia} s_{ib}\right)}^{I_{CM}} +$$

$$+ \underbrace{\sum_i m_i \left(a^2 \delta_{ab} - a_a a_b\right)}_{M\cdot\left(a^2\delta_{ab} - a_a a_b\right)} +$$

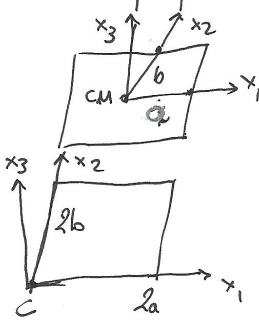
$$+ \sum_i m_i \left(2\vec{s}_i \cdot \vec{a}\, \delta_{ab} - s_{ia} a_b - s_{ib} a_a\right)$$

ο όρος αυτός μηδενίζεται γιατί $\sum_i m_i s_{ia} = 0$

Επομένως $I_{ab} = I_{CM} + M\left(a^2 \delta_{ab} - a_a a_b\right)$

4. Ένα ομοιογενές κομάτι μετάλλου σε σχήμα ορθογωνίου, έχει μάζα *M* και πλευρές 2α και 2β αντίστοιχα. Να βρεθούν οι κύριοι άξονες και κύριες ροπές αδράνειας ως προς μια κορυφή του ορθογωνίου.

Θεωρούμε το ορθογώνιο με πλευρές $2a$ και $2b$ (στην περίπτωσή μας $b=2a$)



Υπολογίζουμε τον τανυστή αδράνειας ως προς το ΚΜ οπότε:

$$I_{CM} = \frac{1}{3} M \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε τον τανυστή αδράνειας ως προς μια κορυφή

Σύμφωνα με το θεώρημα παράλληλων αξόνων, έχουμε μεταφέρει τον άξονα περιστροφής κατά ένα διάνυσμα $\vec{a} = -a\hat{x}_1 - b\hat{x}_2$

Επομένως $I_C = I_{CM} + M\left(\vec{a}^2 \delta_{ab} - a_a a_b\right) \Rightarrow$

$$I_C = \frac{M}{3}\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2+b^2) \end{pmatrix} - M \begin{pmatrix} a^2 & ab & 0 \\ ab & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{M}{3}\begin{pmatrix} b^2 + \cancel{3a^2} + 3b^2 - \cancel{3a^2} & -3ab & 0 \\ -3ab & a^2 + 3a^2 + \cancel{3b^2} - \cancel{3b^2} & 0 \\ 0 & 0 & (a^2+b^2)+3(a^2+b^2) \end{pmatrix} \Rightarrow I_C = \frac{M}{3}\begin{pmatrix} 4b^2 & -3ab & 0 \\ -3ab & 4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

Αντικαθιστούμε για $b=2a$ οπότε η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$I_C = \frac{M}{3}\begin{pmatrix} 16a^2 & -6a^2 & 0 \\ -6a^2 & 4a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 20a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow I_C = \frac{2a^2}{3} M \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Διαγωνοποιούμε τον τανυστή για να βρούμε τις ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Αγνοούμε τον σταθερό όρο $\frac{2a^2}{3}M$ οπότε έχουμε:

$$\left[\begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

για να ισχύει θα πρέπει η ορίζουσα να είναι 0 οπότε

$$\det \begin{pmatrix} 8-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 10-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (10-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 7) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 5+3\sqrt{2} \\ \lambda_2 = 5-3\sqrt{2} \\ \lambda_3 = 10. \end{array}\right\} \Rightarrow \text{κύριες ροπές αδράνειας} \quad \begin{array}{l} \frac{2}{3}(5+3\sqrt{2})Ma^2 \\ \frac{2}{3}(5-3\sqrt{2})Ma^2 \\ \frac{20}{3}Ma^2 \end{array}$$

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα αντικαθιστούμε κάθε ιδιοτιμή στην χαρακτηριστική εξίσωση οπότε έχουμε:

$$\lambda_1 = 5+3\sqrt{2} \qquad \begin{pmatrix} 8-5-3\sqrt{2} & -3 & 0 \\ -3 & 2-5-3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5-3\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -3(-1+\sqrt{2}) & -3 & 0 \\ -3 & -3(1+\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 5-3\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} (\sqrt{2}-1)v_1 + v_2 = 0 \\ +v_1 + (\sqrt{2}+1)v_2 = 0 \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} -\sqrt{2}v_1 = (\sqrt{2}+2)v_2 \Rightarrow v_2 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}v_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2 = -\frac{\cancel{2}\sqrt{2}-\cancel{2}}{\cancel{2}}v_1 \Rightarrow v_2 = -(\sqrt{2}-1)v_1$$

$$(5-3\sqrt{2})v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = 0$$

Επομένως το ιδιοδιάνυσμα για $\lambda_1 = 5+3\sqrt{2}$ είναι $\boxed{\xi = \begin{pmatrix} k \\ -(\sqrt{2}-1)k \\ 0 \end{pmatrix}}$

Το ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 5-3\sqrt{2}$ θα είναι:

$$\begin{pmatrix} 8-5+3\sqrt{2} & -3 & 0 \\ -3 & 2-5+3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5+3\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3+3\sqrt{2} & -3 & 0 \\ -3 & -3+3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5+3\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} (\sqrt{2}+1)v_1 - v_2 = 0 \\ (\sqrt{2}-1)v_2 - v_1 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sqrt{2}\, v_1 = (2-\sqrt{2})v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{\sqrt{2}}{(2-\sqrt{2})} v_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}+\cancel{2}}{\cancel{2}} v_1 \Rightarrow v_2 = (\sqrt{2}+1)v_1$$

$$(5+3\sqrt{2})v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = 0$$

Επομένως το ιδιοδιάνυσμα θα είναι: $\boxed{e_2 = \begin{pmatrix} k \\ (\sqrt{2}+1)k \\ 0 \end{pmatrix}}$

Τέλος για $\lambda_3 = 10$ έχουμε: $\begin{pmatrix} 8-10 & -3 & 0 \\ -3 & 2-10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -2v_1 - 3v_2 = 0 \\ -3v_1 - 8v_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_1 = v_2 = 0$$

$0\, v_3 = 0 \Rightarrow v_3$ μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή, έστω 1

Οπότε το ιδιοδιάνυσμα για $\lambda = 10$ είναι $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

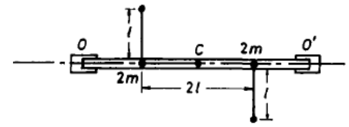
Τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα θα είναι:

$$e_1^T \cdot e_1 = 1 \Rightarrow k_1^2 \begin{pmatrix} 1 & -(\sqrt{2}-1) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -(\sqrt{2}-1) \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow k_1^2(4-2\sqrt{2}) = 1 \Rightarrow k_1 = \left(\frac{1}{4-2\sqrt{2}}\right)^{1/2}$$

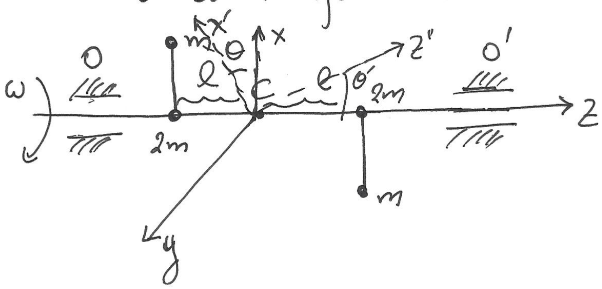
$$e_2^T \cdot e_2 = 1 \Rightarrow k_2^2 \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}+1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}+1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow k_2^2(4+2\sqrt{2}) = 1 \Rightarrow k_2 = \left(\frac{1}{4+2\sqrt{2}}\right)^{1/2}$$

$e_3^T \cdot e_3 = 1 \Rightarrow k_3 = 1$ Τα διανύσματα αυτά ορίζουν τους κύριους άξονες του ορθογωνίου ως προς την κορυφή του $\mathbb{C}$

5. Το διπλανό σχήμα παρουσιάζει μια ράβδο αμελητέας μάζας στην οποία βρίσκονται δυο σημειακές μάζες m και $2m$. Το σύστημα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, ως προς τον άξονα ΟΟ'. (α) Ποια είναι η ροπή ως προ το μέσο της ράβδου που εξασκούν τα σημεία Ο και Ο' που περιστρέφουν την ράβδο; Να δώσετε μέτρο και διεύθυνση. (β) Να προσδιορίσετε ένα άξονα στο επίπεδο των μαζών ως προς τον οποίο, το σύστημα μπορεί να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα χωρίς την εφαρμογή ροπής.



Διαλέγουμε ένα σύστημα συντεταγμένων προσαρτημένο στον άξονα ΟΟ' με αρχή το μέσο C του ΟΟ' και τον άξονα z προσανατολισμένο παράλληλα προς τον ΟΟ' και τον x-άξονα στο επίπεδο που περιέχει τις σημειακές μάζες.



Ο τανυστής αδράνειας ως προς το C δίνεται από την εξίσωση $I_{ij} = \sum_a m_a (r_a^2 \delta_{ij} - x_{a_i} x_{a_j})$ όπου $r_a^2 = x_a^2 + y_a^2 + z_a^2$

Επομένως θα έχουμε: $2m: (0,0,l)$ $\quad m: (l,0,-l)$

$2m: (0,0,-l)$ $\quad m: (-l,0,l)$

Έτσι ο τανυστής θα είναι:
$$\begin{pmatrix} 6ml^2 & 0 & 2ml^2 \\ 0 & 8ml^2 & 0 \\ 2ml^2 & 0 & 2ml^2 \end{pmatrix}$$

Από την σχέση της ροπής και στροφορμής έχουμε: $\vec{\tau} = \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{αδ} = \cancel{\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{περ}}^{\,0} + \vec{\omega}\times\vec{L} = \vec{\omega}\times\vec{L}$

$$\vec{L} = \bar{I}\vec{\omega} = I\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = 2ml^2\omega\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις έχουμε : $\vec{\tau} = \vec{\omega}\times\vec{L} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 2ml^2\omega & 0 & 2ml^2\omega \end{vmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{\tau} = 2ml\omega^2\hat{j}$ Η ροπή επομένως ως προς το μέσο του άξονα έχει μέτρο $2ml\omega^2$ και είναι στην y-διεύθυνση

(β) Έστω ότι ο άξονας αυτός στο επίπεδο x-z είναι ο z' όπως φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα. Ως προς τον άξονα αυτό η ροπή είναι $\emptyset$.
Έστω ο άξονας z' σχηματίζει γωνία θ ως προς την αρχική διεύθυνση του z-άξονα
Σύμφωνα με το σύστημα συντεταγμένων $x'y'z'$, η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ είναι:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega\sin\theta \\ 0 \\ \omega\cos\theta \end{pmatrix} \text{ και η στροφορμή } L = I\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 6ml^2\omega\sin\theta + 2ml^2\omega\cos\theta \\ 0 \\ 2ml^2\omega\sin\theta + 2ml^2\omega\cos\theta \end{pmatrix}$$

Επομένως $\vec{\tau} = \vec{\omega}\times\vec{L} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega\sin\theta & 0 & \omega\cos\theta \\ 6ml^2\omega\sin\theta+2ml^2\omega\cos\theta & 0 & 2ml^2\omega\sin\theta+2ml^2\omega\cos\theta \end{vmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = 2ml^2\omega^2(\sin 2\theta + \cos 2\theta)\hat{j}$$

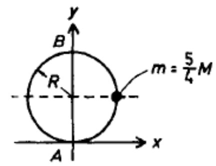
Για να έχουμε $\vec{\tau}=0$ σημαίνει ότι $\sin 2\theta + \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \tan 2\theta = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta = -22.5^\circ$ ή $\theta = 67.5^\circ$.

Ο άξονας z' ως προς τον οποίο η ροπή μηδενίζεται είναι κύριος άξονας αδράνειας και επομένως θα μπορούσε να βρεθεί με διαγωνοποίηση του τανυστή αδράνειας και εύρεση των ιδιοδιανυσμάτων του.

6. Ένας λεπτός δίσκος ακτίνας *R* και μάζας *M,* βρίσκεται στο *xy*-επίπεδο και έχει μια σημειακή μάζα, *m*=5*M*/4 προσκολλημένη στην περιφέρειά του. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς το κέντρο μάζας του είναι:

$$I = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



(α) Να βρεθεί ο τανυστής της ροπής αδράνειας του συνδυασμού του δίσκου και της μάζας ως προς το σημείο Α στο σύστημα συντεταγμένων που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

(β) Να βρεθούν οι κύριοι άξονες και ροπές αδράνειας ως προς το σημείο Α.

(γ) Ο δίσκος είναι περιορισμένος να περιστρέφεται ως προς τον *y*-άξονα, με γωνιακή ταχύτητα ω με την βοήθεια κατάλληλων διατάξεων στα σημεία Α και Β. Περιγράψτε την στροφορμή ως προς το σημείο Α συναρτήσει του χρόνου και βρείτε το διάνυσμα της δύναμης που εφαρμόζεται στο σημείο Β. Αγνοήστε την βαρύτητα.

(α) Η συνεισφορά ενός στοιχειώδους τμήματος μάζας Δm σε ακτίνα $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ στα στοιχεία του τανυστή αδράνειας είναι: $I_{ij} = \Delta m \left(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right)$ υπολογισμένος ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων.

Επομένως ο τανυστής αδράνειας μιας σημειακής μάζας ως προς το σημείο Α θα είναι:

$$I = \frac{5MR^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

όπου οι συντεταγμένες της μάζας είναι $(R, R, 0)$

Σύμφωνα με το θεώρημα παραλλήλων αξόνων, η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς το σημείο Α θα είναι:

$$I_A = I_{cm} + M\left(r_a^2 \delta_{ij} - x_i^a x_j^a \right)$$

Ο τανυστής της ροπής αδράνειας ενός δίσκου ως προς το κέντρο μάζας είναι: $I_{cm} = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Επομένως

$$I_A^\delta = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{4MR^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{4MR^2}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$I_A^\delta = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Προσθέτοντας και τον τανυστή αδράνειας της μάζας έχουμε: $I = I_A^\delta + I_A^M \Rightarrow$

$$I_A = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

(β) Βρίσκουμε τους κύριους άξονες και κύριες τιμές του τανυστή αδράνειας λύνοντας την χαρακτηριστική εξίσωση ιδιοδιανυσμάτων - ιδιοτιμών. Και απαιτώντας η ορίζουσα να είναι μηδέν ώστε να υπάρχει μη τετριμμένη λύση.

$$\left(I_A - \lambda 1\right)\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{MR^2}{4}\det\begin{pmatrix}10-\lambda & -5 & 0\\ -5 & 6-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 16-\lambda\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (16-\lambda)(\lambda^2-16\lambda+35)=0.$$ Οι λύσεις είναι: $$\begin{cases}\lambda_1 = 16\\ \lambda_2 = 8-\sqrt{29}\\ \lambda_3 = 8+\sqrt{29}\end{cases}$$

Και επομένως οι κύριες τιμές ροπής αδράνειας ως προς το σημείο A είναι:

$$I_1 = 4MR^2, \quad I_2 = \left(2-\frac{\sqrt{29}}{4}\right)MR^2 \quad \text{και} \quad I_3 = \left(2+\frac{\sqrt{29}}{4}\right)MR^2$$

Τα ιδιοδιανύσματα βρίσκονται αντικαθιστώντας για κάθε ιδιοτιμή στην χαρακτηριστική εξίσωση. Θα έχουμε:

$$\lambda_1 = 16 : \quad \begin{pmatrix}10-\lambda & -5 & 0\\ -5 & 6-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 16-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}-6 & -5 & 0\\ -5 & -10 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned}-6v_1 - 5v_2 &= 0\\ -5v_1 - 10v_2 &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow v_1 = v_2 = 0$$

$0\, v_3 = 0$ ισχύει για κάθε v_3 οπότε θεωρούμε $v_3 = 1$

Το ιδιοδιάνυσμα για την $\lambda_1 = 16$ είναι: $\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

Για τα ιδιοδιανύσματα των άλλων δύο κύριων ροπών αδράνειας θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 2\pm\sqrt{29} & -5 & 0 \\ -5 & -2\pm\sqrt{29} & 0 \\ 0 & 0 & 8\pm\sqrt{29} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (2\pm\sqrt{29})\,v_1 - 5v_2 = 0 \\ -5v_1 + (-2\pm\sqrt{29})\,v_2 = 0 \\ (8\pm\sqrt{29})\,v_3 = 0 \end{cases}$$

όπου το πάνω πρόσημο αναφέρεται στην ιδιοτιμή λ_2 και το κάτω στη I_3

Οι λύσεις του παραπάνω συστήματος είναι: $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{-2\pm\sqrt{29}}{5} = \begin{cases} 0.677 \\ -1.477 \end{cases}$, $v_3 = 0$

Από την συνθήκη ορθοκανονικότητας των ιδιοδιανυσμάτων έχουμε ότι:

$$v_1^2 + v_2^2 + \cancel{v_3^2}^{\,0} = 1 \Rightarrow v_1^2 + v_2^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{v_1^2}{v_2^2} + 1\right) v_2^2 = 1 \Rightarrow$$

$$|v_2| = \left(\frac{v_1^2}{v_2^2} + 1\right)^{-1/2} \Rightarrow |v_2| = \begin{cases} 0.828 \\ 0.561 \end{cases} \Rightarrow |v_1| = \left(1 - v_2^2\right)^{1/2} = \begin{cases} 0.561 \\ 0.828 \end{cases}$$

Απαιτούμε ακόμα τα ιδιοδιανύσματα να είναι ορθοκανονικά. Οπότε έχουμε

$$\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = 0 \Rightarrow v_{12}\cdot v_{13} + v_{22}v_{23} + v_{32}v_{33} = 0 \quad \text{όπου} \quad \hat{e}_2 = (v_{12}, v_{22}, v_{32}),\ \hat{e}_3 = (v_{13}, v_{23}, v_{33})$$

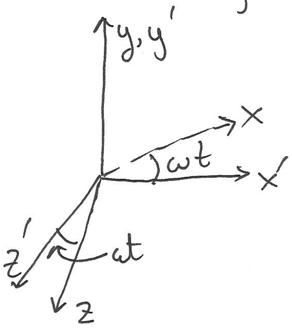
Για να ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη θεωρούμε ότι το ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ_2 είναι $\hat{e}_2 = (0.561,\ 0.828,\ 0)$ και το αντίστοιχο της λ_3 είναι $\hat{e}_3 = (-0.828,\ 0.561,\ 0)$

ενώ το ιδιοδιάνυσμα για λ_1 είναι $\hat{e}_1 = (0, 0, 1)$

(γ) Ο τανυστής αδράνειας I του συστήματος του δίσκου και της μάζας m ως προς το σημείο A αναφέρεται σε ένα σύστημα συντεταγμένων (x, y, z) προσαρτημένο στον δίσκο. Στο σύστημα αυτό, η στροφορμή του συστήματος που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω είναι $L = I\omega$ ή διαφορετικά

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \frac{MR^2\omega}{4}\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε ένα σύστημα αδρανειακό $x'y'z'$ του οποίου ο y'-άξονας συμπίπτει με αυτόν του περιστρεφόμενου συστήματος (x, y, z) και έστω ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ οι άξονες των δύο συστημάτων συμπίπτουν.



Η σχέση μετασχηματισμού μεταξύ των δύο συστημάτων είναι:

$$x' = x\cos(\omega t) + z\sin(\omega t) \qquad y' = y$$
$$z' = -x\sin(\omega t) + z\cos(\omega t)$$

Ορίζουμε τον τανυστή μετασχηματισμού $S = \begin{pmatrix} \cos\omega t & 0 & \sin\omega t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\omega t & 0 & \cos\omega t \end{pmatrix}$

και το διάνυσμα V μετασχηματίζεται: $V' = SV$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό στο διάνυσμα της στροφορμής, βρίσκουμε την στροφορμή ως προς το A στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου:

$$\begin{pmatrix} L'_x \\ L'_y \\ L'_z \end{pmatrix} = SL = \frac{MR^2\omega}{4}\begin{pmatrix} -5\cos(\omega t) \\ 6 \\ 5\sin(\omega t) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} L'_x &= -\frac{5MR^2\omega}{4}\cos(\omega t) \\ L'_y &= \frac{3MR^2\omega}{2} \\ L'_z &= \frac{5MR^2\omega}{4}\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Θεωρώντας το δίσκο

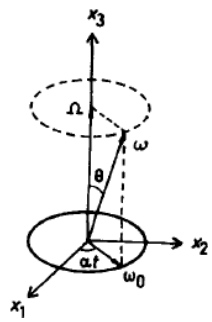
Ο y-άξονας είναι κύριος άξονας του τανυστή της ροπής αδράνειας και περιστροφές ως προς αυτόν δεν θα προκαλέσουν δυνάμεις ή ροπές στο σημείο περιστροφής. Επομένως οι δυνάμεις στο σημείο περιστροφής προκαλούνται από την μάζα στην περιφέρεια.

Στο περιστρεφόμενο σύστημα, η σημειακή μάζα δέχεται την φυγοκεντρική δύναμη μεγέθους $\frac{5MR\omega^2}{4}$ η οποία εξισορροπείται από δυνάμεις που αναπτύσσονται στον δίσκο από τα σημεία περιστροφής.

Οι δυνάμεις στα σημεία περιστροφής είναι αντιδράσεις στις δυνάμεις πάνω στο δίσκο.

Σαν αποτέλεσμα, το σημείο περιστροφής B δέχεται μια δύναμη μεγέθους $\frac{5MR\omega^2}{8}$ στην ίδια διεύθυνση με την φυγόκεντρο δύναμη στην σημειακή μάζα. Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, η δύναμη αυτή περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω.

7. Μια συμπαγής ρόδα έχει κύριες τιμές του τανυστή αδράνειας $I_1 = I_2 \neq I_3$ ως προς τους κύριους άξονες του σώματος $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ που φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Η ρόδα είναι προσαρτημένη σε άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της που επιτρέπει περιστροφή χωρίς τριβές ως προς έναν κύριο άξονά της. Η ρόδα είναι δυναμικά ζυγοσταθμισμένη, δηλαδή μπορεί να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα χωρίς να εξασκεί ροπή στον άξονα περιστροφής της. Ποιες συνθήκες θα πρέπει να ικανοποιούν οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας; Σχεδιάστε τις επιτρεπτές κινήσεις.



Θεωρούμε $I_1 = I_2 = I$ και χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις Euler:

$$\left.\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_3 \omega_2 &= 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_1 \omega_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -\left(\frac{I_3 - I}{I}\right)\omega_2 \Omega \\ \dot{\omega}_2 &= +\left(\frac{I_3 - I}{I}\right)\omega_1 \Omega \end{aligned}\right\} \text{Παραγώγιση}$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + \cancel{(I_2 - I_1)}^{\,0} \omega_1 \omega_2 = 0 \Rightarrow I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \omega_3 = \text{σταθ} = \Omega$$

$$\ddot{\omega}_1 = -\left(\frac{I_3 - I}{I}\right)\Omega \dot{\omega}_2 = -\left(\frac{I_3 - I}{I}\right)^2 \Omega^2 \omega_1 = -k^2 \omega_1$$

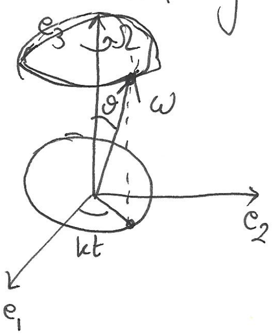
$$\ddot{\omega}_2 = \left(\frac{I_3 - I}{I}\right)\Omega \dot{\omega}_1 = -\left(\frac{I_3 - I}{I}\right)^2 \Omega^2 \omega_2 = -k^2 \omega_2$$

όπου $k = \left(\frac{I_3 - I}{I}\right)\Omega$. Οι δυό προηγούμενες εξισώσεις είναι αυτές αρμονικού ταλαντωτή με λύσεις της μορφής:

$$\omega_1 = \omega_0 \cos(kt + \varphi) \qquad \omega_2 = \omega_0 \sin(kt + \varphi)$$

Η ολική γωνιακή ταχύτητα έχει μέτρο $\omega = \sqrt{\Omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{\Omega^2 + \omega_0^2} = \text{σταθ}$

Αν $\omega_3 = \Omega = \sigma\tau\alpha\theta$, η συνολική γωνιακή ταχύτητα είναι ένα διάνυσμα το οποίο σχηματίζει σταθερή γωνία Θ με τον $\hat{e}_3$-άξονα όπως στο σχήμα



Το επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα ω και ο $\hat{e}_3$-άξονας περιστρέφεται ως προς τον $\hat{e}_3$-άξονα με γωνιακή ταχύτητα k ή διαφορετικά περίοδο $T = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow$

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi I}{(I_3 - I)\Omega}$$

Οι μόνες κινήσεις που επιτρέπονται είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα και είναι μόνο μιά.