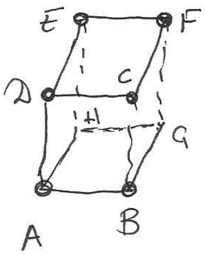
ΦΥΣ. 112

2ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή 06.10.2023**

1. Βρείτε το έργο που απαιτείται για να δημιουργηθεί μια διάταξη αποτελούμενη από 8 φορτία τα οποία βρίσκονται στις κορυφές ενός κύβου ακμής *α*.



Η πλευρά του κύβου είναι α για τα φορτία q σε κάθε κορυφή. $AB = BC = CD = DA = AH = HG = GB = GF = FE = EH$

$EH = FC = DE = \alpha$.

$AC = BD = CG = BF = CE = DF = HB = GA = GE = HF = DH = AE$

$AE = \alpha\sqrt{2}$

$AF = BE = GD = HC = \alpha\sqrt{3}$

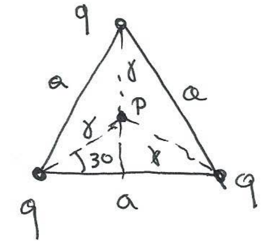
Η ηλεκτροστατική ενέργεια είναι: $U = kq_1q_2 / r_{12}$ = έργο που προσφέρεται

Επομένως στην περίπτωσή μας: $U = \dfrac{12kq^2}{\alpha} + \dfrac{12kq^2}{\alpha\sqrt{2}} + \dfrac{4kq^2}{\alpha\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow U = \dfrac{4kq^2}{\alpha}\left[3 + \dfrac{3}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right] = \dfrac{4kq^2}{\alpha\sqrt{6}}\left[3\sqrt{6} + 3\sqrt{3} + \sqrt{2}\right]$ Joule

Το έργο που θα δαπανηθεί θα είναι: $\boxed{W = \dfrac{4kq^2}{\alpha\sqrt{6}}\left[3\sqrt{6} + 3\sqrt{3} + \sqrt{2}\right]}$

2. Τρία όμοια φορτία q σχηματίζουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α. Βρείτε το δυναμικό, σχετικά με το άπειρο, στο κέντρο του τριγώνου



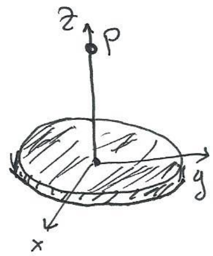
Η απόσταση όλων των φορτίων από το κέντρο P του τριγώνου είναι: $\gamma = \frac{a/2}{\cos 30^\circ} = \frac{a/\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Επομένως το δυναμικό στο σημείο P θα είναι:

$$V = 3 \times \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \gamma} = \frac{3q\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

3. Το δυναμικό στον άξονα ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου σε απόσταση 5.5cm από το κέντρο του δίσκου είναι 140*V*. Το δυναμικό σε απόσταση 15cm από το κέντρο του δίσκου είναι 110*V*. Βρείτε την ακτίνα του δίσκου και το συνολικό του φορτίο.

Όπως έχουμε δει στις διαλέξεις (διάλεξη 5), το δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου σε απόσταση z από την επιφάνεια του δίσκου στην κατακόρυφο στο κέντρο του δίσκου, δίνεται από την εξίσωση:



$$V=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2}-|z|\right] \qquad \sigma=\frac{Q}{\pi R^2}$$

Στην περίπτωση του προβλήματος έχουμε ότι $z=5.5cm$ και $z=15\,cm$.

Επομένως: $140V=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left[\sqrt{R^2+(5cm)^2}-5.0cm\right]\Rightarrow$

$$\Rightarrow 110V=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left[\sqrt{R^2+15^2_{cm}}-15.cm\right]$$

Από τον λόγο των 2 εξισώσεων έχουμε: $\frac{140}{110}=\frac{\sqrt{1+(R/5)^2}-1}{\sqrt{9+(R/5)^2}-3}\Rightarrow$

$$140\left(\sqrt{9+\left(\frac{R}{5}\right)^2}\right)-420=110\left(\sqrt{1+\left(\frac{R}{5}\right)^2}\right)-110\Rightarrow 30\sqrt{9+\left(\frac{R}{5}\right)^2}=310\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9+\left(\frac{R}{5}\right)^2=\left(\frac{31\cancel{0}}{3\cancel{0}}\right)^2\Rightarrow \left(\frac{R}{5}\right)^2=\frac{31}{3}-9\Rightarrow R^2=25(4)/3\Rightarrow \boxed{R=10/\sqrt{3}\,cm}$$

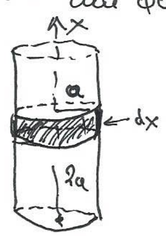
Αντικαθιστώντας το R για μία από τις αρχικές εξισώσεις βρίσκουμε το φορτίο:

$$Q=\frac{110\cdot(2\pi\varepsilon_0)R^2}{\sqrt{R^2+15^2_{cm}}-15cm}=\frac{110\cdot 100/3\cdot}{2(9\cdot 10^9\,Nm^2/C^2)\left(\sqrt{\frac{100}{3}+15^2}-15\right)}\Rightarrow Q=\frac{11\cdot 10^3\ Cb}{6\cdot 9\cdot 10^9\cdot 1.07}$$

$$\Rightarrow Q=\frac{11}{54}\frac{10^{-6}}{1.07}\Rightarrow Q=0.1898\cdot 10^{-6}\Rightarrow \boxed{Q=189\,nC}$$

4. Ένας ανοικτός κύλινδρος ακτίνας *α* και ύψους *2α* είναι φορτισμένος με φορτίο *q* το οποίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνειά του. Βρείτε το δυναμικό στο κέντρο του κυλίνδρου. *Υπόδειξη*: Θεωρήστε τον κύλινδρο ως ένα σύνολο από φορτισμένους κυλινδρικούς δακτυλίου και ολοκληρώστε.

Θεωρούμε ότι ο κύλινδρος αποτελείται από δακτυλίους ακτίνας α με πάχος dx και φορτίο $dq = \sigma \cdot dA = \frac{q}{2\pi r h} dx\, 2\pi r = \frac{q}{\cancel{2\pi\alpha}(2a)} dx\, \cancel{2\pi\alpha} \Rightarrow dq = \frac{q}{2a} dx$



Το δυναμικό στο κέντρο του κυλίνδρου (θεωρώντας ότι το μέσο είναι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων) που δημιουργεί ένας δακτύλιος στη θέση x $(-a \le x \le a)$:

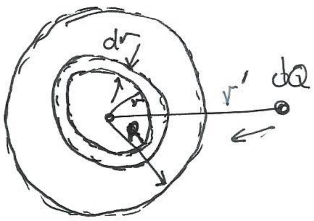
$$dV_{κυλ} = \frac{k\,dq}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{kq\,dx}{2a\sqrt{x^2+a^2}}$$

Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση μπορούμε να βρούμε το δυναμικό στο κέντρο του κυλίνδρου:

$$V_{κυλ} = \int_{-a}^{a} \left(\frac{kq}{2a}\right) \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{kq}{2a} \ln\left(\frac{a+\sqrt{2}a}{-a+\sqrt{2}a}\right) = \frac{kq}{a} \ln\left(1+\sqrt{2}\right) = 0.88\frac{kq}{a}$$

Συγκρίνουμε το αποτέλεσμα με αυτό στο κέντρο ενός δακτυλίου ακτίνας α: $V_{δακ} = k\frac{q}{a}$. Τα στοιχειώδη φορτία στην περίπτωση του κυλίνδρου είναι περισσότερο απομακρυσμένα από το κέντρο του σε σχέση με την περίπτωση του δακτυλίου, οπότε και το δυναμικό είναι μικρότερο.

5. Δείξτε ότι το ολικό έργο που απαιτείται για να κατασκευαστεί μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα με ολικό φορτίο Q και ακτίνα R δίνεται από την σχέση: $3Q^2/(20\pi\varepsilon_0 R)$. Διατήρηση της ενέργειας μας λέει ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι το ίδιο με την ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια της σφαίρας. σφαιρική



Μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια της ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας θεωρώντας ότι έχει δημιουργηθεί από διαδοχικούς σφαιρικούς φλοιούς που έχουν μεταφερθεί από το άπειρο ώστε να κατασκευαστεί η σφαίρα.

Θεωρούμε σφαιρικούς φλοιούς στοιχειώδους πάχους dr.

Σε κάθε στάδιο της διαδικασίας παίρνουμε ένα μικρό ποσό φορτίου dQ και το κατανέμουμε σε ένα λεπτό σφαίριο r με r+dr. Συνεχίζουμε την διαδικασία μέχρι να καταλήξουμε στην τελική ακτίνα R. Όταν το φορτίο της σφαίρας είναι Q_r καθώς έχει ακτίνα r, το έργο που απαιτείται για να φέρουμε επιπλέον φορτίο dQ στη σφαίρα θα είναι: $dU = \dfrac{Q_r\, dQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Αν η χωρική πυκνότητα είναι $\rho = \dfrac{Q}{V}$ τότε το φορτίο $Q_r = \rho\dfrac{4}{3}\pi r^3$ και το στοιχειώδες φορτίο $dQ = \dfrac{4}{\cancel{3}}\pi\rho\cancel{3}r^2 dr \Rightarrow dQ = 4\pi\rho r^2 dr$

Επομένως το στοιχειώδες έργο που απαιτείται είναι: $dU = \dfrac{4\pi\rho^2 r^4 dr}{3\varepsilon_0}$ (1)

Η ολική ενέργεια που απαιτείται για να δημιουργήσουμε το φορτίο της σφαίρας, βρίσκεται με το να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα (1) για $r=0$ έως $r=R$

Θα έχουμε: $U = \displaystyle\int_0^R dU\,dr = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\frac{1}{5}R^5 \Rightarrow \boxed{U = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0}}$

Επομένως εκφράζοντας την σχέση συναρτήσει του φορτίου της σφαίρας θα έχουμε: $U = \dfrac{\cancel{4\pi} R^{\cancel{5}}\, \cancel{9}^{3} Q^2}{\cancel{15}_{5}\varepsilon_0\, \cancel{16}_{4}\pi^{\cancel{2}} R^{\cancel{6}}} \Rightarrow \boxed{U = \dfrac{3}{5}\dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}}$

Δηλαδή ανάλογη του τετραγώνου του φορτίου και αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας

6. Μια σφαίρα ακτίνας *R* περιέχει φορτίο *Q* το οποίο κατανέμεται ομοιόμορφα στον όγκο της σφαίρας. Βρείτε μια εξίσωση που περιγράφει την ηλεκτροστατική ενέργεια που περιέχεται στο εσωτερικό της σφαίρας.

Από τον νόμο του Gauss, ξέρουμε ότι το πεδίο στο εσωτερικό μιας ομοιόμορφα φορτισμένης μονωμένης σφαίρας δίνεται από τη σχέση:

$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{Q_0 r}{\cancel{3}\frac{4}{\cancel{3}}\pi R^3\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_0 r}{4\pi R^3\varepsilon_0}$$

όπου r η ακτίνα της σφαιρικής επιφάνειας Gauss $r<R$ και R η ακτίνα της σφαίρας.

Η πυκνότητα ενέργειας θα είναι: $u(r) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_r^2 = \frac{1}{2}\cancel{\varepsilon_0}\frac{Q_0^2 r^2}{16\pi^2 R^6\varepsilon_0^2} \Rightarrow$

$$\boxed{u(r) = \frac{Q_0^2 r^2}{32\pi^2 R^6\varepsilon_0}}$$

Η ενέργεια στο εσωτερικό της σφαίρας μπορεί να υπολογιστεί ολοκληρώνοντας την πυκνότητα ενέργειας ως προς τον όγκο της σφαίρας:

$$U = \int_{V_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma}} u\,dV = \int_0^R \frac{Q_0^2 r^2}{32\pi^2 R^6\varepsilon_0}4\pi r^2\,dr \Rightarrow U = \frac{Q_0^2}{\cancel{32}_{8}\pi^2\varepsilon_0 R^6}\cancel{4\pi}\frac{1}{5}\cancel{R^5} \Rightarrow$$

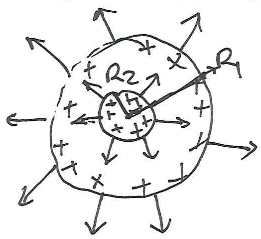
$$\Rightarrow U = \frac{Q_0^2}{40\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow U = \frac{kQ_0^2}{10R}$$

Το αποτέλεσμα λέει ουσιαστικά ότι η ενέργεια U είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης R. Δηλαδή η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη ελαττώνεται αν το ίδιο φορτίο είναι κατανεμημένο σε μεγαλύτερο όγκο.

7. Μια συμπαγής σφαίρα περιέχει ομοιόμορφη χωρική πυκνότητα φορτίου. Ποιο ποσοστό της ολικής ηλεκτροστατικής ενέργειας της διάταξης αυτής περιέχεται μέσα στην σφαίρα;

Είδαμε ότι η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο εσωτερικό της σφαίρας είναι: $\boxed{U_{εσ} = \frac{Q_0^2}{40\pi\varepsilon_0 R}}$

Στο εξωτερικό της σφαίρας το πεδίο είναι σταθερό και δεν αλλάζει επίσης τη ενέργεια. Ωστόσο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η σφαίρα δημιουργήθηκε έχοντας το φορτίο κατανεμημένο σε μιά σφαίρα αρχικά άπειρης ακτίνας που συμπιέσαμε στην ακτίνα R. Πρέπει επομένως να βρούμε την ενέργεια που αποθηκεύτηκε στη σφαίρα καθώς αυτή συμπιέσαμε από $R_1=\infty \to R_2=R$



Το πεδίο αλλάζει με την θέση και επομένως η ενέργεια θα είναι:

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V E^2 dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R_2=\infty}^{R_1=R} \left(\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 r^2\, 4\pi\, dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{Q_0^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2}\int_{R_2=\infty}^{R_1=R} 4\pi\frac{1}{r^2}dr = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\Big|_{\infty}^{R} \Rightarrow \boxed{U_{εξ} = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R}}$$

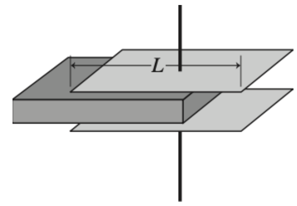
Η αποθηκευμένη ενέργεια είναι θετική και δηλώνει το έργο που χρειάζεται να δαπανηθεί ώστε να συμπιεστεί η σφαίρα, από το ∞ στην ακτίνα R άρα ουσιαστικά για να δημιουργηθεί το φορτίο στη θέση της σφαίρας. Κατά το ίδιο σκεπτικό, η ενέργεια για R=0 είναι άπειρη που σημαίνει ότι η έννοια του σημειακού φορτίου είναι μια ιδεατή κατάσταση και αδύνατο να συμβεί.

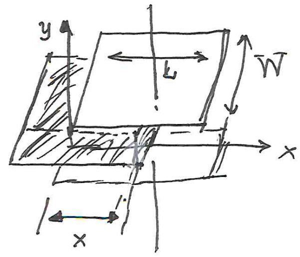
Επομένως το ποσοστό της ενέργειας που είναι αποθηκευμένη στο εσωτερικό της σφαίρας είναι:

$$f = \frac{U_{εσ}}{U_{εσ}+U_{εξ}} = \frac{\cancel{Q_0^2}/(5\cdot\cancel{8\pi\varepsilon_0 R})}{\frac{\cancel{Q_0^2}}{5\cdot\cancel{8\pi\varepsilon_0 R}} + \frac{\cancel{Q_0^2}}{\cancel{8\pi\varepsilon_0 R}}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+1} = \frac{1}{6}$$

Το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο της ακτίνας της σφαίρας!!

8. Ένας πυκνωτής με αέρα ανάμεσα στους οπλισμούς του παρουσιάζει χωρητικότητα C_0 και είναι φορτισμένος σε δυναμικό V_o με την βοήθεια μιας μπαταρίας. Κατόπιν η μπαταρία αποσυνδέεται από τους οπλισμούς του. Ένα κομμάτι διηλεκτρικού υλικού, διηλεκτρικής σταθεράς κ και πάχους ίσο με την απόσταση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή τους οπλισμούς τοποθετείται στο εσωτερικό του πυκνωτή ώστε να καταλαμβάνει το μισό της επιφάνειας των οπλισμών όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Προσδιορίστε (α) την νέα χωρητικότητα, (β) την αποθηκευμένη ενέργεια και (γ) την δύναμη στο τμήμα αυτό του διηλεκτρικού συναρτήσει των μεγεθών C_o, V_o, κ και το μήκος L του επίπεδου οπλισμού.





Το πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή είναι ομογενές και δίνεται από τη σχέση $E=\frac{V}{d}$

Αλλά όταν εισέρχεται το διηλεκτρικό, $V \neq V_0$ και το πεδίο εξαρτάται από το x που έχει καλύψει το διηλεκτρικό. Ξέρουμε ακόμα από τον νόμο του Gauss ότι το πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς ενός επίπεδου πυκνωτή ότι είναι: $E=\frac{\sigma}{\varepsilon}$ όπου σ η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου και $\varepsilon = \kappa\varepsilon_0$ η διηλεκτρική διαπερατότητα.

Το δυναμικό στους οπλισμούς του πυκνωτή θα είναι το ίδιο τόσο στο τμήμα του πυκνωτή στο οποίο έχει εισέλθει το διηλεκτρικό όσο και στο τμήμα στο οποίο υπάρχει κενό ανάμεσα στους οπλισμούς. Αυτό γιατί οι οπλισμοί είναι αγωγοί και επομένως αποτελούν ισοδυναμικές επιφάνειες. Επομένως η σχέση $E=\frac{V}{d}$ ισχύει παντού ανάμεσα στους οπλισμούς.

Ξέρουμε ότι όταν διηλεκτρικό εισέρχεται ανάμεσα στους οπλισμούς ενός πυκνωτή το δυναμικό ελαττώνεται: $V=\frac{V_0}{k}=\frac{E_0 \cancel{d}}{k}=E\cancel{d} \Rightarrow E=\frac{E_0}{k}$ (χωρίς μπαταρία)

Χρησιμοποιώντας τη σχέση: $\sigma = E\varepsilon$ μπορούμε να γράψουμε την πυκνότητα φορτίου για το τμήμα του πυκνωτή με το διηλεκτρικό και το τμήμα του πυκνωτή χωρίς το διηλεκτρικό (Αριστερά και Δεξιά αντίστοιχα στο σχήμα)

$$\sigma_A = E_A \varepsilon_A = E_A k_A \varepsilon_0$$
$$\sigma_\Delta = E_\Delta \varepsilon_\Delta = E_\Delta k_\Delta \varepsilon_0$$

Αλλά $E_A = E_\Delta = \frac{V_A}{d} = \frac{V_\Delta}{d} = E$ και επομένως: $\boxed{\frac{\sigma_A}{\sigma_\Delta} = \frac{k_A}{k_\Delta}}$

Αλλά $k_\Delta = 1$ (κενό ανάμεσα στους οπλισμούς) οπότε: $\boxed{\sigma_A = k_A \sigma_\Delta}$ **(1)**

Το φορτίο θα είναι: $Q_{ολ} = \sigma_A A_A + \sigma_\Delta A_\Delta = k_A \sigma_\Delta \cdot W \cdot x + \sigma_\Delta W \cdot (L - x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q_{ολ} = W\sigma_\Delta \left[k_A x + L - x\right] = W(E_\Delta \varepsilon_0)\left[k_A x + L - x\right] = \boxed{W\left(\frac{V_0}{d}\varepsilon_0\right)\left[k_A x + L - x\right]}$$

Έχουμε ότι το φορτίο είναι $\boxed{Q = W\left(\frac{V_0}{d}\varepsilon_0\right)(k_r x + L - x)}$ **(2)**

Η χωρητικότητα επομένως του συστήματος θα είναι: $C = \frac{Q}{V} \Rightarrow$

$$\Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 W}{d}(kx + L - x) = \underbrace{\frac{\varepsilon_0 W \cdot L}{d\,L}}_{C_0}(kx + L - x) = \frac{\varepsilon_0 A}{d\,L}(kx + L - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C = C_0\left(\frac{kx + L - x}{L}\right)} \ \textbf{(3)}$$ όπου C_0 η χωρητικότητα του πυκνωτή χωρίς το διηλεκτρικό.

Να σημειωθεί ότι το σύστημα μοιάζει με δύο πυκνωτές συνδεδεμένους παράλληλα εφόσον το δυναμικό τους είναι το ίδιο (στους δύο οπλισμούς)

$$C_{ολ} = C_A + C_Δ = \frac{k\varepsilon_0(xW)}{d} + \frac{\varepsilon_0 W(L - x)}{d} \Rightarrow C_{ολ} = \frac{(kx + L - x)\varepsilon_0 W}{d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{ολ} = \frac{\varepsilon_0 W L}{d}\frac{(kx + L - x)}{L} \Rightarrow \boxed{C_{ολ} = C_0\frac{kx + L - x}{L}}$$ όπως πριν στην εξίσωση (3)

Θεωρώντας ότι $x = L/2$ αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ολικής χωρητικότητας θα δώσει: $C_{ολ} = C_0\frac{\left(\frac{1}{2}k + 1 - \frac{1}{2}\right)\cancel{L}}{\cancel{L}} \Rightarrow \boxed{C_{ολ} = \frac{1}{2}C_0(k+1)}$

Η ενέργεια που έχει αποθηκευτεί είναι: $U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C_0\frac{(kx + L - x)}{L}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow U = \frac{\overbrace{Q_0^2}^{\to U_0} L}{2C_0(kx + L - x)} = \boxed{\frac{U_0 L}{(kx + L - x)}} \ \textbf{(4)}$$ για $x = \frac{L}{2}$ $U = \frac{U_0 \cancel{L}}{k\frac{\cancel{L}}{2} + \cancel{L} - \frac{\cancel{L}}{2}} \Rightarrow \boxed{U = \frac{2U_0}{(k+1)}}$

Η δύναμη θα είναι: $F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{U_0 L}{kx + L - x}\right) \Rightarrow \boxed{F_x = \frac{U_0 L(k-1)}{(kx + L - x)^2}}$ **(5)**

Για $x = \frac{L}{2}$ η δύναμη είναι: $F_x = \frac{U_0 \cancel{L}(k-1)}{L^{\cancel{2}}(k+1)^2} = \frac{U_0(k-1)}{L(k+1)^2}$

9. Ένας επίπεδος πυκνωτής έχει τους οπλισμούς του σε απόσταση *d*. *Η* χωρητικότητα του πυκνωτή όταν δεν υπάρχει διηλεκτρικό υλικό ανάμεσα στους δύο οπλισμούς του είναι C_o Ωστόσο ο χώρος ανάμεσα στους οπλισμούς είναι γεμάτος με δύο διαφορετικά διηλεκτρικά υλικά. Ένα από τα διηλεκτρικά έχει πάχος $d/4$ και διηλεκτρική σταθερά κ_1 ενώ το άλλο διηλεκτρικό έχει πάχος $3d/4$ και διηλεκτρική σταθερά κ_2. Βρείτε την χωρητικότητα αυτού του πυκνωτή.

(α) Το ηλεκτρικό πεδίο E παρουσία διηλεκτρικού υλικού, διηλεκτρικής σταθεράς κ συναρτήσει του ηλεκτρικού πεδίου E_o απουσία του διηλεκτρικού δίνεται από τη σχέση: $E = \frac{E_o}{\kappa}$

Για επίπεδο πυκνωτή ξέρουμε ότι $E_o = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} = \frac{Q}{\varepsilon_o A}$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{Q}{\kappa \varepsilon_o A}}$$

Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο σε υλικά με διηλεκτρική σταθερά k_1 και k_2 θα είναι: $\boxed{E_1 = \frac{Q}{k_1 \varepsilon_o A}}$ και $\boxed{E_2 = \frac{Q}{k_2 \varepsilon_o A}}$

(β) Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών ισούται με το άθροισμα των διαφορών δυναμικού στις περιοχές των δύο διηλεκτρικών:

Μπορούμε να συσχετίσουμε τις διαφορές δυναμικού με το πάχος των δύο διηλεκτρικών και τα πεδία που δημιουργούνται:

$$V_1 = E_1 d_1 = E_1 \frac{d}{2} = \frac{Qd}{2k_1\varepsilon_o A} \quad \& \quad V_2 = E_2 \frac{d}{2} = \frac{Qd}{2k_2\varepsilon_o A}$$

Αλλά $V = V_1 + V_2 \Rightarrow V = \frac{Qd}{2k_1\varepsilon_o A} + \frac{Qd}{2k_2\varepsilon_o A} \Rightarrow \boxed{V = \frac{Qd}{2\varepsilon_o A}\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)}$

(γ) Από τον ορισμό της χωρητικότητας έχουμε: $C = \frac{Q}{V} = \frac{\cancel{Q}}{\frac{\cancel{Q}d}{2\varepsilon_o A}\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow C = 2\overbrace{\frac{\varepsilon_o A}{d}}^{C_o}\frac{k_1 k_2}{(k_1+k_2)} \Rightarrow \boxed{C = 2C_o\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}}$$

(δ) Η τελευταία εξίσωση ουσιαστικά εκφράζει την χωρητικότητα δύο πυκνωτών συνδεδεμένων σε σειρά. Μπορούμε να το δείξουμε θεωρώντας την ισοδύναμη χωρητικότητα των πυκνωτών C_1 & C_2: $C_{ολ} = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2} = \frac{\cancel{4}^{2}k_1k_2C_o^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\cancel{C_o}(k_1+k_2)} \Rightarrow$

$\boxed{C_1 = \frac{2k_1\varepsilon_o A}{d} = 2k_1C_o}$ & $\boxed{C_2 = \frac{2k_2\varepsilon_o A}{d} = 2k_2C_o}$

$\Rightarrow \boxed{C_{ολ} = \frac{2k_1k_2C_o}{(k_1+k_2)}}$ όπως και στο ερώτημα (γ)

Εξάγαμε τις προηγούμενες σχέσεις για την περίπτωση που τα δύο διηλεκτρικά είχαν το ίδιο πάχος.

Αν το πάχος είναι $d_1 = d/4$ και $d_2 = 3d/4$ τότε το δυναμικό στο σύστημα θα είναι:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{Qd}{4k_1\varepsilon_0 A} + \frac{3Qd}{4k_2\varepsilon_0 A} \Rightarrow V = \frac{Qd}{4\varepsilon_0 A}\left(\frac{1}{k_1} + \frac{3}{k_2}\right) \Rightarrow$$

$$V = \frac{Qd}{4\varepsilon_0 A}\left(\frac{3k_1 + k_2}{k_1 k_2}\right)$$

και από τον ορισμό της χωρητικότητας:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\cancel{Q}}{\frac{\cancel{Q}d}{4\varepsilon_0 A}\left(\frac{1}{k_1} + \frac{3}{k_2}\right)} \Rightarrow C = 4\underbrace{\frac{\varepsilon_0 A}{d}}_{C_0}\frac{k_1 k_2}{(3k_1 + k_2)}$$

οπότε $\boxed{C = 4\,C_0\,\frac{k_1 k_2}{(3k_1 + k_2)}}$

Θεωρώντας τις χωρητικότητες

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{4k_1\varepsilon_0 A}{d} = 4k_1 C_0 \\ C_2 &= \frac{4k_2\varepsilon_0 A}{3d} = \frac{4}{3}k_2 C_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_{o\lambda} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{o\lambda} = \frac{\cancel{4}k_1 C_0\,\frac{4}{\cancel{3}}k_2\cancel{C_0}}{3\cancel{4}k_1\cancel{C_0} + \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}k_2\cancel{C_0}} \Rightarrow \boxed{C_{o\lambda} = \frac{4k_1k_2}{3k_1 + k_2}C_0}$$

όπως και πιο πάνω

10. Ένας σφαιρικός πυκνωτής αποτελείται από μία συμπαγή αγώγιμη σφαίρα ακτίνας a και φορτίο $+Q$ και έναν ομόκεντρο, αγώγιμο σφαιρικό φλοιό εσωτερικής ακτίνας β και ηλεκτρικού φορτίου $-Q$. Ο χώρος ανάμεσα στους δύο οπλισμούς είναι γεμάτος με δύο είδη διηλεκτρικού υλικού διηλεκτρικής σταθεράς κ_1 και κ_2. Τα όρια μεταξύ των δύο διηλεκτρικών συμβαίνει σε απόσταση $\frac{1}{2}(a+b)$ από το κέντρο. (α) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στις περιοχές $a < r < \frac{1}{2}(a+b)$ και $\frac{1}{2}(a+b) < r < b$. (β) Ολοκληρώστε την έκφραση $\delta V = -\vec{E}\cdot d\vec{l}$ για να βρείτε την διαφορά δυναμικού V, μεταξύ των δύο αγωγών. (γ) Χρησιμοποιήστε την σχέση $C = \frac{Q}{V}$, για να βρείτε την χωρητικότητα του συστήματος. (δ) Δείξτε ότι το αποτέλεσμά σας από το ερώτημα (C) απλοποιείται στο αναμενόμενο αποτέλεσμα αν κ_1 και κ_2 είναι ίσα μεταξύ τους.

(α) Σύμφωνα με τον νόμο του Gauss, απουσία διηλεκτρικού υλικού, το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στους δύο οπλισμούς θα είναι: $E = k\frac{Q}{r^2}$

Παρουσία διηλεκτρικού, το ηλεκτρικό πεδίο ελαττώνεται κατά τον παράγοντα της διηλεκτρικής σταθεράς.

Το πεδίο στις περιοχές:

$$\left.\begin{array}{l} a < r < (a+b)/2 \\ (a+b)/2 < r < b \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{E_1 = \frac{kQ}{k_1 r^2}} \text{ και } \boxed{E_2 = \frac{kQ}{k_2 r^2}}$$

(β) Το ηλεκτρικό πεδίο είναι ακτινικό με κατεύθυνση από το εσωτερικό της διάταξης προς το εξωτερικό. Σαν αποτέλεσμα το δυναμικό στον εξωτερικό φλοιό είναι μικρότερο από το δυναμικό στον εσωτερικό φλοιό. Επομένως η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σφαιρών θα είναι:

$$|V| = |V_1 - V_2| = \left| -\int_a^{1/2(a+b)} E_1\,dr - \int_{1/2(a+b)}^{b} E_2\,dr \right| = \left| -\frac{kQ}{k_1}\int_a^{1/2(a+b)} r^{-2}\,dr + \frac{kQ}{k_2}\int_{\frac{1}{2}(a+b)}^{b} r^{-2}\,dr \right|$$

$$\Rightarrow |V| = \left| \frac{kQ}{k_1}\frac{1}{r}\Big|_a^{\frac{1}{2}(a+b)} + \frac{kQ}{k_2}\frac{1}{r}\Big|_{\frac{1}{2}(a+b)}^{b} \right| \Rightarrow |V| = \left| \frac{kQ}{k_1}\left(\frac{2}{a+b} - \frac{1}{a}\right) + \frac{kQ}{k_2}\left(\frac{1}{b} - \frac{2}{a+b}\right) \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |V| = \left| \frac{kQ(a-b)k_1 a + k_2 b}{(a+b)\ (k_1 k_2 ab)} \right| \Rightarrow \boxed{|V| = \frac{kQ(b-a)(k_1 a + k_2 b)}{(a+b)\ (k_1 k_2 ab)}}$$

(γ) Από τον ορισμό της χωρητικότητας: $C = \frac{Q}{|V|} = \frac{\cancel{Q}}{\frac{k\cancel{Q}(b-a)(k_1 a + k_2 b)}{(a+b)(k_1 k_2 ab)}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{(a+b)k_1 k_2 ab}{k(b-a)(k_1 a + k_2 b)}}$$

(δ) Αν $k_1 = k_2 = k$ το προηγούμενο αποτέλεσμα δίνει: $\boxed{C = \frac{k^2\cancel{(a+b)}ab}{k(b-a)\cancel{k(a+b)}} = \frac{\cancel{k}ab}{\cancel{k}(b-a)}}$