ΦΥΣ. 211
$2^{η}$ ΠΡΟΟΔΟΣ 5-Απρίλη-2014

Πριν ξεκινήσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, αριθμό ταυτότητας) στο πάνω μέρος της σελίδας αυτής.

Για τις λύσεις των ασκήσεων θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε μόνο τις σελίδες που δίνονται και <u>μην κόψετε καμιά από τις σελίδες</u>.

Προσπαθήστε να δείξετε τη σκέψη σας και να γράψετε καθαρές εξισώσεις. Για πλήρη ή μερική βαθμολόγηση θα πρέπει να φαίνεται καθαρά αυτό που προσπαθείτε να δείξετε. Αν δεν μπορώ να διαβάσω τι γράφετε αυτόματα θα υποθέσω ότι είναι λάθος.

Σας δίνονται 4 ισοδύναμες ασκήσεις με σύνολο 100 μονάδων και πρέπει να απαντήσετε σε όλες.

Η σειρά των προβλημάτων δεν είναι αντιπροσωπευτική της δυσκολίας τους. Πριν ξεκινήσετε διαβάστε όλα τα προβλήματα και σκεφτείτε τι χρειάζεται να κάνετε.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 150 λεπτά.

Καλή επιτυχία.

1. Σωματίδιο μάζας m, κινείται σε μονοδιάστατο δυναμικό $U(x) = U_0 \dfrac{x^2}{a^2} e^{-x/a}$.

(α) Κατασκευάστε το γράφημα του δυναμικού $U(x)$. Θα πρέπει να αναφέρετε όλα τα τοπικά ελάχιστα και μέγιστα. Το γράφημά σας θα πρέπει να δείχνει την σωστή συμπεριφορά για $x \to \pm\infty$. [**5μ**]

(β) Κατασκευάστε το γράφημα αντιπροσωπευτικών τροχιών του σώματος στον φασικό χώρο. Βρείτε και χαρακτηρήστε πιθανά σταθερά σημεία. Βρείτε την ενέργεια των διαχωριστικών καμπυλών. [**7μ**]

(γ) Σχεδιάσετε όλες τις φασικές καμπύλες για ενέργεια ίση με $E = 2U_0/5$. Να κάνετε το ίδιο για $E = U_0$. (Θυμηθείτε ότι η τιμή του $e = 2.71828\ldots$) [**5μ**]

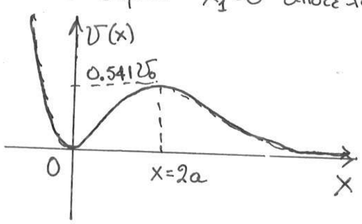
(δ) Να βρεθεί μια εξίσωση που δίνει την περίοδο, T, της κίνησης όταν $|x| \ll a$. [**8μ**]

(α) Η συνάρτηση του δυναμικού απειρίζεται για $x \to -\infty$ ενώ $U(x) \to 0$ για $x \to +\infty$.

Θέτοντας $U'(x) = \dfrac{dU}{dx} = 0$ βρίσκουμε τα ακρότατα:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{U_0}{a^2}\left(2x - \frac{x^2}{a}\right)e^{-x/a} = 0 \Rightarrow \frac{U_0}{a^2}\, x\left(2 - \frac{x}{a}\right)e^{-x/a} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2a \end{cases}$$

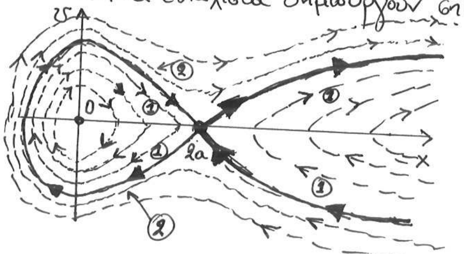
Το σημείο $x_1 = 0$ αποτελεί ελάχιστο ενώ το $x = 2a$ τοπικό μέγιστο.



Επίσης για $x=0$ έχουμε $U(0)=0$ ενώ για $x=2a$ $U(2a) = 4e^{-2}U_0 \Rightarrow U(2a) \simeq 0.541U_0$

Οι άξονες δίπλα είναι σε μονάδες a για το x και U_0 για το $U(x)$

(β) Τα τοπικά ελάχιστα του δυναμικού δημιουργούν κέντρα στο επίπεδο (x,v) ενώ τοπικά ελάχιστα δημιουργούν σημεία που διαχωρίζουν δέσμια από μη δέσμια κίνηση.



Το διάγραμμα του διπλανού σχήματος παρουσιάζει τις φασικές καμπύλες. Υπάρχει ένα σταθερό σημείο στο $(0,0)$ και ένα ασταθές στο $(2a,0)$

Υπάρχει η διαχωριστική καμπύλη (έντονη καμπύλη) με ενέργεια: $E = U(2a) = 4e^{-2}U_0 \Rightarrow E \cong 0.541U_0$

(γ) Για $E = \frac{2U_0}{5}$ αυτή η ενέργεια είναι μικρότερη από την ενέργεια του τοπικού μέγιστου: $E = 0.541 U_0$. Επομένως για την ενέργεια αυτή υπάρχουν δυο φασικές καμπύλες.

Για την 2η τιμή της ενέργειας, $E = U_0$, η καμπύλη είναι πάνω από την $U(2a)$ και άρα θα υπάρχει μόνο μια φασική καμπύλη που αντιστοιχεί στην ενέργεια αυτή.
Επομένως υπάρχουν δέσμιες κινήσεις για $x < 2a$ και $0 \leq E \leq U(2a)$.
Οι φασικές καμπύλες που αντιστοιχούν σε ολική ενέργεια $E = \frac{2}{5}U_0$ και $E = U_0$ φαίνονται στο γράφημα της προηγούμενης σελίδας, (καμπύλες 1 και 2 αντίστοιχα)

(δ) Αναπτύσουμε κατά Taylor την δυναμική ενέργεια γύρω από το σημείο ευσταθούς ισορροπίας ($x=0$). Οπότε θα έχουμε:

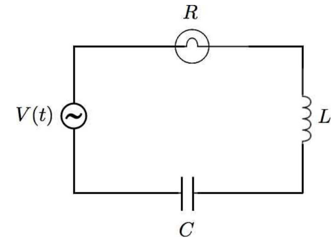
$$U(x) = \frac{U_0}{a^2}\left\{x^2 - \frac{x^3}{a} + \frac{x^4}{2a^2} + \cdots\right\}.$$

Για $|x| \ll a$ θα κρατήσουμε μόνο τον 1ο όρο αφού οι υπόλοιποι γίνονται πολύ μικροί.

Επομένως η δυναμική ενέργεια γίνεται: $U(x) \simeq U_0 x^2/a^2 = C x^2$ όμοια με αυτή ενός ελατηρίου με σταθερά $k = 2U_0/a^2$. Επομένως η περίοδος της κίνησης θα είναι:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{ma^2}{2U_0}}}$$

2. Σας δίνεται το κύκλωμα R-L-C του διπλανού σχήματος. Η μόνη αντίσταση του κυκλώματος προέρχεται από τον λαμπτήρα. Η επαγωγή του πηνίου είναι L=400μH, η χωρητικότητα του πυκνωτή, C = 1μF, και η αντίσταση του λαμπτήρα R=32Ω. Η τάση, $V(t)$, εναλλάσεται συνημιτονοειδώς, $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$, όπου V_0=4V. Ενδιαφερόμαστε για την σταθερή κατάσταση λειτουργίας του κυκλώματος (μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα). Θυμηθείτε ότι οι μονάδες μέτρησης των διαφόρων μεγεθών είναι: $1\Omega = 1V \cdot s/C$, $1F = 1C/V$ και $1H = 1V\,s^2/C$.



(α) Σχεδιάστε το μηχανικό ισοδύναμο του παραπάνω κυκλώματος. [**4μ**]

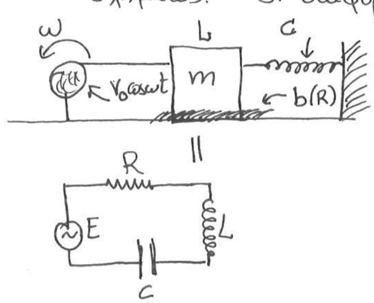
(β) Να βρεθεί το είδος της απόσβεσης του ταλαντωτή; [**2μ**]

(γ) Υποθέστε ότι ο λαμπτήρας ακτινοβολεί φως μόνο όταν η μέση ισχύς που καταναλώνει είναι μεγαλύτερη από ένα κατώφλι $P_{thr} = 2/9\,W$. Για συγκεκριμένη τιμή V_0=4V να βρεθεί το διάστημα συχνοτήτων, ω, για το οποίο ο λαμπτήρας ακτινοβολεί φως. *<u>Υπόδειξη:</u>* Η στιγμιαία ισχύς που καταναλώνεται από μια αντίσταση είναι $P_R(t) = I^2(t)R$. Η μέση ισχύς θα βρεθεί αν πάρετε την μέση τιμή της ισχύος για μια περίοδο. [**8μ**]

(δ) Συγκρίνετε τις σχέσεις που δίνουν την στιγμιαία ισχύ της πηγής, $P_V(t)$, και την ισχύ της αντίστασης $P_R(t) = I^2(t)R$. Αν $P_R(t) \neq P_V(t)$, εξηγήστε την διαφορά στην ισχύ (αιτία προέλευσης και αν χάνεται ή παράγεται). Τι μπορείτε να πείτε σχετικά με τις μέσες τιμές των $P_V(t)$ και $P_R(t)$ για μια περίοδο T; Εξηγήστε πλήρως την απάντησή σας. [**7μ**]

(ε) Ποιο είναι το μέγιστο φορτίο, Q_{max}, στον πυκνωτή αν ω=$30000 s^{-1}$. [**4μ**]

(α) Το μηχανικό ανάλογο του κυκλώματος μπορεί να θεωρηθεί αυτό του παρακάτω σχήματος. Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμα είναι:



$$\underbrace{L\frac{dI}{dt}}_{V_L} + \underbrace{RI}_{V_R} + \underbrace{\frac{Q}{C}}_{V_C} = V_0 \cos\omega t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = V_0 \cos\omega t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = \frac{V_0}{L}\cos\omega t$$

Η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη ενός αποσβένοντα αρμονικού ταλαντωτή με διεγείρουσα εξωτερική δύναμη. Μπορούμε να την γράψουμε σαν $\boxed{\ddot{Q} + b\dot{Q} + \omega_0^2 Q = F_0 \cos\omega t}$

(β) Από την παραπάνω διαφορική εξίσωση και τα χαρακτηριστικά του κυκλώματος έχουμε:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{4\cdot 10^{-4}\cdot 10^{-6}}} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 5\times 10^{4}\, s^{-1}}$$

Η διαφορική εξίσωση μοιάζει αυτή του αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση και εξωτερική διεγείρουσα δύναμη, η οποία έχει την γενική μορφή: $\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = A\cos\omega t$, όπου $2\gamma = \frac{b}{m}$

Επομένως στην περίπτωσή μας $2\gamma = \frac{b}{m} = \frac{R}{L} \Rightarrow \gamma = \frac{R}{2L} \Rightarrow \gamma = \frac{32}{2\cdot 4\cdot 10^{-4}} \Rightarrow \boxed{\gamma = 4\cdot 10^{+4}\,s^{-1}}$

Συγκρίνοντας ω_0 και γ έχουμε $Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{5}{2\cdot 4}$. Επομένως το κύκλωμα αντιστοιχεί σε αρμονικό ταλαντωτή με μικρή απόσβεση.

(γ) Το φορτίο στον πυκνωτή, ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση $\ddot{Q} + 2\gamma\dot{Q} + \omega_0^2 Q = \frac{V(t)}{L}$

Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι $Q(t) = Q_{ομογ} + Q_{ειδ}$.

Αλλά η ειδική λύση είναι της μορφής: $Q_{ειδ} = \frac{V_0}{L} A(\omega)\cos(\omega t - \delta(\omega))$

όπου $A(\omega) = \left[\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}\right]^{1/2}$ και $\delta\omega = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$

Επομένως η ισχύς που καταναλώνεται στον λαμπτήρα θα είναι: $P_R(t) = \dot{Q}^2(t) R \Rightarrow$

$$\Rightarrow P_R(t) = \omega^2 A^2(\omega) \frac{V_0^2}{L^2}\sin^2(\omega t - \delta(\omega))R = \omega^2 A^2(\omega)\frac{V_0^2 R}{L^2}\sin^2(\omega t - \delta(\omega))$$

Η μέση τιμή σε μια περίοδο T θα είναι: $\langle P_R(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \omega^2 A^2(\omega)\frac{V_0^2 R}{L^2}\sin^2(\omega t - \delta(\omega))dt$

$$\Rightarrow \langle P_R(t)\rangle = \omega^2 A^2(\omega)\frac{V_0^2 R}{L^2}\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t - \delta)\,dt = \omega^2 A^2(\omega)\frac{V_0^2 R}{2L^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle P_R(t)\rangle = \omega^2 A^2(\omega)\frac{V_0^2 R^2}{R\, 2L^2} = \omega^2 A^2(\omega)\frac{V_0^2}{2R}4\gamma^2 \Rightarrow \langle P_R(t)\rangle = \frac{V_0^2}{2R}\frac{4\gamma^2\omega^2}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]}$$

Αλλά ξέρουμε ότι: $P = \frac{V_0^2}{2R} = \frac{16}{2\cdot 32} \Rightarrow P = \frac{1}{4}$ Watts. $\Big\} \Rightarrow \frac{2}{9}\text{ Watts} = \alpha\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{8}{9}}$

Η ισχύς κατωφλίου θα είναι επομένως $P_{thr} = \alpha P$

Αλλά $P_{th} = \langle P_R(t)\rangle \Rightarrow \alpha P = \frac{V_0^2}{2R}\frac{4\gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha\cancel{P} = \cancel{P}\frac{4\gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \Rightarrow \alpha(\omega_0^2-\omega^2)^2 = (1-\alpha)4\gamma^2\omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{9}}(\omega_0^2-\omega^2)^2 = \frac{1}{\cancel{9}}\cancel{4}\gamma^2\omega^2 \Rightarrow 2(\omega_0^2-\omega^2)^2 = \gamma^2\omega^2 \Rightarrow \begin{cases} \gamma\omega - \sqrt{2}(\omega_0^2-\omega^2) = 0 \\ \gamma\omega + \sqrt{2}(\omega_0^2-\omega^2) = 0 \end{cases}$$

Οι ρίζες των 2 αυτών δευτεροβάθμιων εξισώσεων θα πρέπει να είναι θετικές πραγματικές οπότε θα έχουμε:

$$\omega_{1\pm} = \frac{\gamma}{2\sqrt{2}} \pm \frac{\gamma}{2\sqrt{2}}\sqrt{1+8\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}} \Rightarrow \boxed{\omega_{1+} = \frac{\gamma}{2\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{1+8\omega_0^2/\gamma^2}\right)}$$

$$\omega_{2\pm} = -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}} \pm \frac{\gamma}{2\sqrt{2}}\sqrt{1+8\omega_0^2/\gamma^2} \Rightarrow \boxed{\omega_{2+} = -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{1+8\omega_0^2/\gamma^2}\right)} \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_{1+} = \frac{\cancel{4}^{2}\cdot 10^4}{\cancel{2}\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{1+\cancel{8}^{2}\frac{5}{\cancel{4}}}\right) \\ \omega_{2+} = -4\cdot 10^4/2\sqrt{2}\left(1-\sqrt{1+8\,5/4}\right) \end{cases} \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} \omega_{1+} = \sqrt{2}(1+\sqrt{11})\,10^4\,s^{-1} \\ \omega_{2+} = -\sqrt{2}(1-\sqrt{11})\,10^4\,s^{-1} \end{matrix}$$

(δ) Η ισχύς που προσφέρει η πηγή είναι: $P_V(t) = I(t)V(t)$

Αλλά $\left.\begin{aligned} I(t) &= -\omega A(\omega)\frac{V_0}{L}\sin(\omega t-\delta) \\ V(t) &= V_0\cos\omega t \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_V(t) = -\omega A\frac{V_0^2}{L}\sin(\omega t-\delta)\cos\omega t$

Αλλά από τις τριγωνομετρικές ταυτότητες: $\left.\begin{aligned}\sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)\\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)\end{aligned}\right\}\xrightarrow{+}$

$\Rightarrow 2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b)+\sin(a-b) \Rightarrow \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$

Για $a=\omega t-\delta$ και $b=\omega t$ θα έχουμε: $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(2\omega t-\delta)+\sin(-\delta)\right]$

Οπότε η σχέση για την ισχύ της πηγής γίνεται:

$$P_V(t) = -\omega A\frac{V_0^2}{2L}\left[\sin(2\omega t-\delta)-\sin\delta\right] \Rightarrow \boxed{P_V(t) = \omega A\frac{V_0^2}{2L}\left[\sin\delta-\sin(2\omega t-\delta)\right]}$$

Συγκρίνοντας με την ισχύ που καταναλώνεται στον αντιστάτη: $P_R(t) = \omega^2 A^2\frac{V_0^2}{L^2}R\sin^2(\omega t-\delta)$

Βλέπουμε ότι $P_V(t) \neq P_R(t)$ αλλά η <u>μέση ισχύς</u> για μια περίοδο <u>είναι ίδια</u>

Δηλαδή $\langle P_V(t)\rangle = \langle P_R(t)\rangle$. Αυτό ισχύει γιατί αν πάρουμε την μέση ισχύ που προσφέρει η πηγή, θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \langle P_V(t)\rangle &= \omega A\frac{V_0^2}{2L}\frac{1}{T}\int_0^T\left[\sin\delta-\sin(2\omega t-\delta)\right]dt = \omega A\frac{V_0^2}{2L}\sin\delta \\ \text{Αλλά}\quad \tan\delta &= \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \Rightarrow \tan^2\delta = \frac{(2\gamma\omega)^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2} \Rightarrow \frac{\sin^2\delta}{1-\sin^2\delta} = \frac{4\gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2} \Rightarrow \sin^2\delta = \frac{4\gamma^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle P_V(t)\rangle = \omega A\frac{V_0^2}{2L}\frac{2\gamma\omega}{\underbrace{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]^{1/2}}_{A^{-1}}} \Rightarrow \langle P_V(t)\rangle = \omega^2A^2\frac{V_0^2}{2L}2\gamma \xRightarrow{L=\frac{R}{2\gamma}}$$

$\Rightarrow \boxed{\langle P_V(t)\rangle = \omega^2A^2\frac{V_0^2}{2R}4\gamma^2}$ που ισούται με $\langle P_R(t)\rangle$ όπως δείξαμε στο (γ) ερώτημα

Αυτό ήταν αναμενόμενο αφού από διατήρηση της ενέργειας έχουμε: $P_V(t) = P_R(t)+\dot{E}(t)$

όπου $E(t) = \frac{L\dot{Q}^2}{2}+\frac{Q^2}{2C} \Rightarrow \dot{E}(t) = L\dot{Q}\ddot{Q}+\frac{Q\dot{Q}}{C}$.

Επειδή όμως η συνάρτηση $Q(t)$ είναι περιοδική, η μέση τιμή της $\dot{E}$ για τον χρόνο μιας περιόδου θα μηδενίζεται αφού εμπλέκει όρους $\cos(a)\sin(a)$ για μια περίοδο.

Έτσι η μέση ισχύς που παρέχει η πηγή θα είναι $\langle P_V(t)\rangle = \langle P_R(t)\rangle$ όπως βρήκαμε.

(ε) Από την λύση της διαφορικής εξίσωσης του κυκλώματος έχουμε:

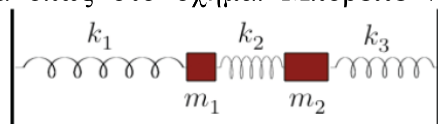
$$Q(t) = Q_{ομ\gamma} + A(\omega)\frac{V_0}{L}\cos(\omega t - \delta) \quad \text{όπου} \quad A = \frac{1}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right]^{1/2}} \Rightarrow$$

Το μέγιστο φορτίο στον πυκνωτή θα είναι: $Q_{max} = A(\omega)\frac{V_0}{L}$

$$\Rightarrow Q_{max} = \left[\frac{1}{(3^2-5^2)^2\cdot 10^8 + 4\cdot 4^2\cdot 3^2\cdot 10^8}\right]^{1/2} \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot 10^{-4}} \Rightarrow Q_{max} = \frac{\cancel{10^{+4}}\cdot \cancel{10^{-4}}}{\sqrt{16^2 + 36\cdot 16^2}} \Rightarrow$$

$$\boxed{Q_{max} = \frac{1}{16\sqrt{37}}\ \text{Coulomb.}}$$

3. Δυο μάζες και τρια ελατήρια είναι συνδεδεμένα όπως στο σχήμα. Μπορείτε να υποθέσετε ότι σε ισορροπία όλα τα ελατήρια έχουν φυσικό μήκος l_0. Οι μάζες και οι σταθερές των ελατηρίων είναι πολλαπλάσια μιας θεμελειώδους ποσότητας, π.χ. $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $k_1 = 4k$, $k_2 = k$ και $k_3 = 2k$.



(α) Να βρεθεί η Lagrangian του συστήματος. [**4μ**]

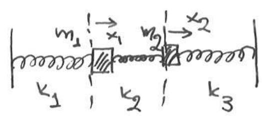
(β) Βρείτε τους πίνακες ***T*** και ***V***. [**4μ**]

(γ) Βρείτε τις ιδιοσυχνότητες. [**4μ**]

(δ) Βρείτε τον πίνακα που διαγωνοποιεί τους πίνακες ***T*** και ***V***. [**7μ**]

(ε) Γράψτε την πλέον γενική λύση που περιγράφει την κίνηση του συστήματος. Την χρονική στιγμή $t = 0$, η μάζα m_1 είναι μετατοπισμένη ως προς την θέση ισορροπίας της κατά b, δηλαδή $x_1(0) = b$. Οι άλλες αρχικές συνθήκες είναι: $x_2(t=0) = 0$ και $\dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_2(t=0) = 0$. Να βρεθεί η αμέσως επόμενη χρονική στιγμή t^*, κατά την οποία η μετατόπιση x_2 γίνεται και πάλι μηδέν, δηλαδή $x_2(t^*) = 0$. [**6μ**]

(a)



Θεωρούμε σαν γενικευμένες συντεταγμένες τις μετατοπίσεις των μαζών από τις θέσεις ισορροπίας (x_1 και x_2).

Η κινητική ενέργεια θα είναι: $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$

Η δυναμική ενέργεια θα είναι: $V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_3 x_2^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_3 x_2^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2$$

(β) Τα στοιχεία του πίνακα T θα είναι: $\{T\} = \begin{pmatrix} \partial^2 T/\partial \dot{x}_1^2 & \partial^2 T/\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2 \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2^2} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \{T\} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

Για τον πίνακα V θα έχουμε: $\{V\} = \begin{pmatrix} \partial^2 V/\partial x_1^2 & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_3 + k_2 \end{pmatrix}$

(γ) Για να βρούμε τις ιδιοσυχνότητες θα πρέπει να λύσουμε την χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\left(\{T\}\omega^2 - \{V\}\right)\{a\} = 0 \quad \text{όπου } \{a\} \text{ οι ιδιοτιμές} \Rightarrow \det\left(\{T\}\omega^2 - \{V\}\right) = 0$$

Αντικαθιστώντας από το ερώτημα (b) για τους πίνακες $\{T\}$ και $\{V\}$ καθώς και τα δεδομένα του προβλήματος $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $k_1 = 4k$, $k_2 = k$ και $k_3 = 2k$ έχουμε:

$$\det\begin{pmatrix} m_1\omega^2 - (k_1+k_2) & k_2 \\ k_2 & m_2\omega^2 - (k_3+k_2) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 2m\omega^2 - 5k & k \\ k & m\omega^2 - 3k \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k\det\begin{pmatrix} 2\frac{m}{k}\omega^2 - 5 & 1 \\ 1 & \frac{m}{k}\omega^2 - 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{θέτουμε } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ και } \lambda = \frac{m}{k}\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$

$$\Rightarrow k\det\begin{pmatrix} 2\lambda - 5 & 1 \\ 1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow k\left[(2\lambda-5)(\lambda-3) - 1\right] = 0 \Rightarrow \left(2\lambda^2 - 11\lambda + 14\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-112}}{4} = \frac{11 \pm \sqrt{9}}{4} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= \frac{7}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\boxed{\omega_1^2 = 2\omega_0^2} = \sqrt{2k/m} \\ &\boxed{\omega_2^2 = \frac{7}{2}\omega_0^2} = \sqrt{7k/2m} \end{aligned}$$

(δ) Για να βρούμε τον πίνακα που διαγωνοποιεί τους $\{T\}$ και $\{V\}$ θα πρέπει να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις προηγούμενες δυο ιδιοσυχνότητες και να χρησιμοποιήσουμε επίσης την συνθήκη ορθοκανονικότητας.

Για $\lambda_1 = 2$:
$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 - 5 & 1 \\ 1 & \lambda_1 - 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{a_{11} = a_{12}}$$

Επομένως το ιδιοδιάνυσμα για $\boxed{\lambda_1 = 2}$ είναι $\boxed{\{a_1\} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Για $\lambda_2 = \frac{7}{2}$:
$$\begin{pmatrix} 2\frac{7}{2} - 5 & 1 \\ 1 & \frac{7}{2} - 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2a_{21} + a_{22} = 0 \Rightarrow \boxed{a_{22} = -2a_{21}}$$

Επομένως το ιδιοδιάνυσμα για $\boxed{\lambda_2 = 7/2}$ είναι $\boxed{\{a_2\} = C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$

Η συνθήκη κανονικοποίησης είναι: $\{a_i^T\}\{T\}\{a_j\} = \delta_{ij} \Rightarrow$

$$\Rightarrow C_1 (1\ 1) \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow m C_1^2 (2\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow 3m C_1^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 = 1/\sqrt{3m} \quad \Rightarrow \text{για } \lambda_1 = 2 \quad \Rightarrow \{a_1\} = \frac{1}{\sqrt{3m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Για το 2° ιδιοδιάνυσμα θα έχουμε:

$$C_2 (1\ -2) \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow m C_2^2 (2\ -2) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow 6m C_2^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2 = 1/\sqrt{6m} \quad \Rightarrow \text{για } \lambda_2 = \frac{7}{2} \Rightarrow \{a_2\} = \frac{1}{\sqrt{6m}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Επομένως ο πίνακας που διαγωνοποιεί τους $\{T\}$ και $\{V\}$ θα είναι:

$$\{A\} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6m}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$$

(ε) Η γενική λύση για την κίνηση του συστήματος θα είναι:

$$\{x(t)\} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t) + B \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t) + C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin\omega_1 t + D \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \sin\omega_2 t$$

Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι $x_1(t=0) = b$ και $x_2(t=0) = \dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_2(t=0) = 0$

Από την γενική λύση για $t=0$ έχουμε:

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cancelto{1}{\cos(\omega_1 t)} + B \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cancelto{1}{\cos(\omega_2 t)} = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ -2B \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+B \\ A-2B \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} A+B = b \\ A-2B = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} A = 2B \\ 3B = b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} A = 2b/3 \\ B = b/3 \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = -\omega_1 A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t) - \omega_2 B \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t) + C\omega_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos\omega_1 t + D\omega_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cos\omega_2 t \quad \text{για } t=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\omega_1 + D\omega_2 \\ C\omega_1 - 2D\omega_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} C\omega_1 + D\omega_2 = 0 \\ C\omega_1 - 2D\omega_2 = 0 \end{matrix}\right\} \overset{(-)}{\Rightarrow} 3D\omega_2 = 0 \Rightarrow \boxed{D = 0}$$

οπότε και $\boxed{C = 0}$

Θα έχουμε επομένως: $\{x(t)\} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{3}(2\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) \\ \frac{2b}{3}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) \end{pmatrix}$

Θέλουμε την χρονική στιγμή t^* που $x_2(t^*) = 0$. Επομένως θα έχουμε:

$$x_2(t^*) = 0 \Rightarrow \frac{2b}{3}(\cos\omega_1 t^* - \cos\omega_2 t^*) = 0 \Rightarrow \cos\omega_1 t^* = \cos\omega_2 t^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi - \omega_1 t^* = \omega_2 t^* - \pi \Rightarrow t^*(\omega_2 + \omega_1) = 2\pi \Rightarrow \boxed{t^* = \frac{2\pi}{\omega_2 + \omega_1}}$$

4. Ένας κουβάς με νερό τίθεται σε περιστροφή γύρω από τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας του. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής είναι Ω.

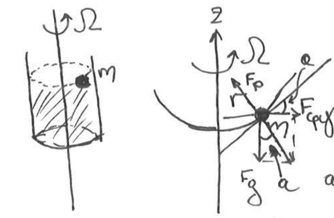
(α) Θεωρήστε ένα μικρό τμήμα όγκου του νερού μάζας *m*, το οποίο βρίσκεται στην επιφάνεια και σε απόσταση *r* από τον άξονα συμμετρίας. Ποια είναι η δρώσα δύναμη στην μάζα αυτή του νερού. [**4μ**]

(β) Μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, το σχήμα της επιφάνειας του νερού μέσα στον κουβά δεν μεταβάλλεται. Ποια είναι η δρώσα δύναμη στην στοιχειώδη μάζα, *m*, του νερού στην περίπτωση αυτή; [**3μ**]

(γ) Ποια είναι η κλίση της πίεσης η οποία ασκείται στον όγκο αυτό του νερού; Μπορείτε να εκφράσετε την απάντησή σας σε διανυσματική μορφή.[**8μ**]

(δ) Όταν το σύστημα βρεθεί στην κατάσταση ισορροπίας, ποια είναι η συνάρτηση *z*(*r*) που περιγράφει το σχήμα της επιφάνειας του νερού στον κουβά; (Θεωρήστε ότι *z* είναι η κατακόρυφη μετατόπιση ενώ *r* είναι η απόσταση από τον άξονα περιστροφής). [**10μ**]

(α)



Έστω m μια στοιχειώδης μάζα στην επιφάνεια του νερού. Η δύναμη που ασκείται πάνω στην μάζα αυτή μπορεί να γραφεί σαν:

$$\vec{F}_{\delta p} = \vec{F} - m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}) - m\vec{\Omega}\times\vec{\upsilon}_{r} \qquad (1)$$

Η δύναμη $\vec{F}$ είναι η συνισταμένη δύναμη των δυνάμεων της βαρύτητας, F_g, και πίεσης από τα κατώτερα στρώματα του νερού, $\vec{F}_p$. Η δύναμη αυτή πρέπει να είναι πάντοτε κάθετη στην επιφάνεια του νερού.

Η δύναμη Coriolis εμφανίζεται στην αρχή της περιστροφής αλλά όταν το υγρό έχει πάρει την σταθερή μορφή (κατάσταση ισορροπίας) η μάζα δεν μετακινείται και επομένως $\vec{\upsilon}_r = 0 \Rightarrow m\vec{\Omega}\times\vec{\upsilon}_r = 0$.

(β) Στο σύστημα του περιστρεφόμενου κουβά, η δρώσα δύναμη είναι μηδέν $\vec{F}_{\delta p} = 0$ εφόσον η μάζα είναι ακίνητη. Επομένως από την (1) θα έχουμε:

$$0 = \vec{F} - m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}) - 0 \Rightarrow \vec{F} = m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}) \qquad (2)$$

(γ) Αλλά $\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_p \overset{(2)}{\Rightarrow} \vec{F}_p = m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}) - m\vec{g} \qquad (3)$

(δ) Από την (3) βλέπουμε πως η συνισταμένη της φυγόκεντρου και της δύναμης της βαρύτητας θα πρέπει να εξισορροπούν την δύναμης της πίεσης, η οποία είναι κάθετη στην επιφάνεια. Επομένως; σύμφωνα με το σχήμα: $\tan a = \frac{F_{φυγ}}{F_g} = \frac{dz}{dr} \Rightarrow \frac{\cancel{m}\Omega^2 r}{\cancel{m}g} = \frac{dz}{dr} \Rightarrow$

$$\Rightarrow dz = \frac{\Omega^2}{g} r\,dr \Rightarrow z = \int_0^R \frac{\Omega^2}{g} r\,dr \Rightarrow \boxed{z = \frac{\Omega^2}{g}R^2 + C}$$