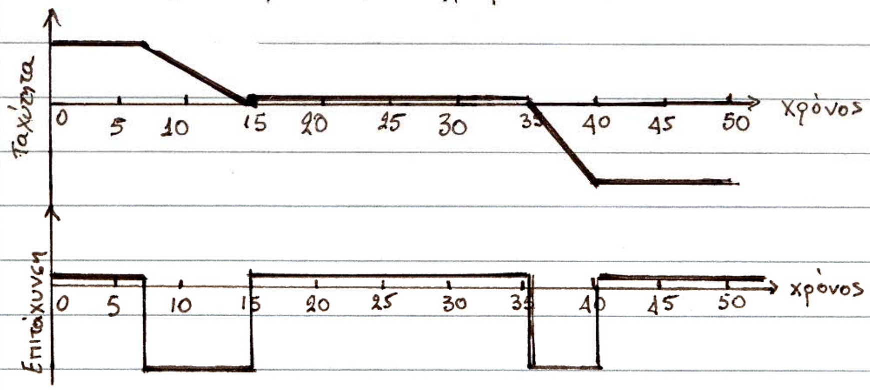
ΠΡΟΒΛΗΜΑ # 1

Η ταχύτητα είναι η πρώτη παράγωγος της καμπύλης που δίνεται στο σχήμα (διάγραμμα θέσης ως πρός χρόνο)

Η επιτάχυνση είναι η πρώτη παράγωγος της καμπύλης της ταχύτητας ως προς χρόνο και επομένως η δεύτερη παράγωγος της καμπύλης θέσης - χρόνου.

Με βάση το πρόβλημα έχουμε:



Επομένως στο ερώτημα σε ποιό χρονικό διάστημα η επιτάχυνση είναι αντίθετη της ταχύτητας κοιτάμε σε ποιό διάστημα η επιτάχυνση έχει αντίθετο πρόσημο από την ταχύτητα.

Η απάντηση είναι η (β) διάστημα 7-15 sec μιά και η ταχύτητα είναι (+) και ελαττώνεται ενώ η επιτάχυνση είναι (-)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ # 2

Στο ερώτημα σε ποιο διάστημα το σώμα επιβραδύνεται η απάντηση είναι (β) 7-15 sec. Στο διάστημα αυτό η ταχύτητα ελαττώνεται και τελικά γίνεται μηδέν. Η επιτάχυνση είναι αρνητική.

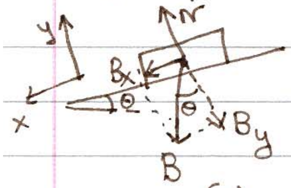
Στο διάστημα 33-37 sec η επιτάχυνση είναι αρνητική και η ταχύτητα επίσης αρνητική αλλά το μέτρο της αυξάνει.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ # 3

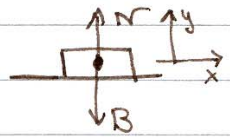
Έργο είναι $\vec{F} \cdot \vec{s}$. Στο πρόβλημά μας η μετατόπιση είναι μηδέν, αφού το σώμα κρατιέται πάνω από το τραπέζι. Επομένως το έργο που παράγεται είναι μηδέν και η απάντηση είναι (α)

Πρόβλημα # 4

Η τριβή είναι ανάλογη της κάθετης δύναμης. N. Επομένως αναλύουμε τις δυνάμεις που δρούν στο σώμα και στις 2 περιπτώσεις:



(α)



(β)

Στην περίπτωση (α) αφού το κιβώτιο και η σιδερένια επιφάνεια είναι πάντα σε επαφή, δεν υπάρχει κίνηση στη διεύθυνση y και επομένως η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν. Δηλαδή $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - B_y = 0 \Rightarrow \boxed{N = B_y = mg \cdot \cos\theta.}$

Στην περίπτωση (β) και πάλι η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν στην διεύθυνση y και άρα $N - B = \emptyset \Rightarrow \boxed{N = mg}$

Η τριβή επομένως στην περίπτωση (α) είναι μικρότερη από (β) αφού η κάθετη δύναμη είναι $N_a = N_\beta \cdot \cos\theta. \Rightarrow \cos\theta = \frac{N_a}{N_\beta} \leq 1$

Η σωστή απάντηση είναι η (γ). "Τριβή στο Β μεγαλύτερη από (Α)."

ΠΡΟΒΛΗΜΑ # 5

Τα τούβλα όπως λέει η άσκηση είναι ακίνητα πάνω στο τραπέζι. Σύμφωνα με το 1° νόμο του Newton ένα σώμα διατηρεί την κατάσταση ηρεμίας του ή κινείται με σταθερή ταχύτητα όταν η συνισταμένη όλων των δυνάμεων είναι $\emptyset$. Επομένως η καθαρή δύναμη που ασκείται στο τούβλο Y είναι μηδέν και η σωστή απάντηση είναι η (δ)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ # 6

Το πρόβλημα λύνεται με ~~διαστατική~~ ανάλυση:

Μας ζητάνε τη συχνότητα ν που έχει διαστάσεις: $\nu \propto \frac{1}{T} = sec^{-1}$

Επομένως τα δεδομένα του προβλήματος θα πρέπει να καταλήγουν σε διάσταση χρόνου^{-1} $\frac{1}{[T]} = \frac{1}{sec}$.

Έχουμε λοιπόν $\frac{1}{[T]} = R^{a} \rho^{\beta} G^{\gamma} = [L]^{a} \left(\frac{[M]}{L^3}\right)^{\beta} \left(\frac{\overset{[M]\frac{[L]}{[T]^2}}{Nt} [L]^2}{[M]^2}\right)^{\gamma} = [L]^{a} \frac{[M]^{\beta}}{[L]^{3\beta}} \left(\frac{\cancel{[M]}[L]^3}{[M]^{\cancel{2}}[T]^2}\right)^{\gamma} \Rightarrow$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{[M]}{[L]^3}$$

$$G = \frac{F \cdot r^2}{M \cdot m} = \frac{\cancel{m} \cdot a \cdot r}{M \cdot \cancel{m}} = \frac{[L]/[T]^2 \cdot [L]^2}{[M]}$$

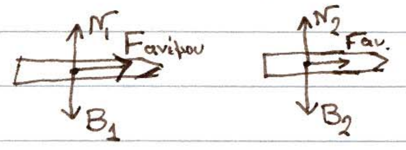
$\Rightarrow \frac{1}{[T]} = [L]^{a-3\beta+3\gamma} [M]^{\beta-\gamma} [T]^{-2\gamma} \Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma = 1/2, \ \beta - \gamma = 0 \Rightarrow \beta = 1/2 \quad a = 3\beta - 3\gamma = \frac{-3}{2} + \frac{3}{2} = 0$

$\boxed{\nu = k \cdot \sqrt{G\rho}}$ όπου k: σταθερά αναλογίας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ # 7

Το πρόβλημα μας λέει ότι και στις 2 βάρκες (στα πανιά) πνέει ο ίδιος άνεμος ώστε η δύναμη F είναι σταθερή. Οι βάρκες κινούνται πάνω σε λεία παγωμένη λίμνη και επομένως δεν υπάρχουν τριβές. Οι βάρκες κινούνται μόνο στην οριζόντια διεύθυνση (επίπεδο λίμνης). Οι δυνάμεις που δρουν σε κάθε βάρκα είναι:

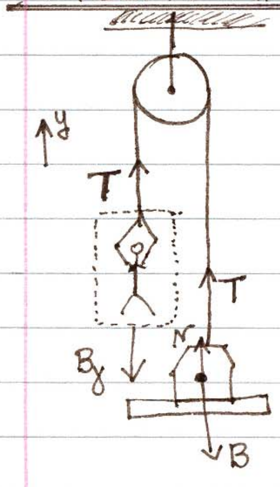


Αφού η κάθετη δύναμη N_1 κ N_2 και το βάρος B_1 κ B_2 είναι κάθετα στην διεύθυνση της κίνησης τότε το έργο που παράγουν είναι μηδέν. Η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι η F που είναι σταθερή και ίδια για κάθε βάρκα. Το έργο θα είναι $\vec{F}\cdot\vec{S} = FS$ όπου S η απόσταση από την αφετηρία στο τερματισμό.

Αλλά ξέρουμε ότι το έργο που παράγεται από τη συνισταμένη των δυνάμεων είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος. Επομένως το έργο είναι ίδιο και για τις 2 βάρκες και επομένως και οι δυό θα έχουν την ίδια κινητική ενέργεια περνώντας τον τερματισμό.

Φυσικά οι ταχύτητές τους θα 'ναι διαφορετικές ή ο χρόνος τερματισμού διαφορετικός αλλά οι κινητικές τους ενέργειες θα είναι ακριβώς ίδιες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ # 8



Από τη στιγμή που το βάρος στην άλλη άκρη του σχοινιού μόλις και ακουμπά στη ζυγαριά, η κάθετη δύναμη $N = \emptyset$.

Αυτό σημαίνει ότι αφού το βάρος δεν κινείται:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -B + T = \emptyset \Rightarrow \boxed{T = B = mg} \quad (1)$$

Η ίδια τάση όμως ασκείται και στον γυμναστή. Δεν έχει σημασία που ο αθλητής αναρριχάτε. Θα μπορούσατε να σκεφθείτε ότι υπάρχει ένα κουτί γύρω από τον αθλητή και ότι το σχοινί κινείται πρός τα πάνω. Αυτό που βγαίνει πάνω από το κουτί είναι η Τάση (T) και αυτή θέλουμε να ξέρουμε. Τώρα στην πλευρά του γυμναστή $\Sigma F_y = m\cdot a \Rightarrow$

$$\Rightarrow m_\gamma a = T - B_\gamma \overset{(1)}{\Rightarrow} m_\gamma a = mg - m_\gamma g \Rightarrow a = \frac{m - m_\gamma}{m_\gamma} g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{\overset{15}{\cancel{75}} - \overset{10}{\cancel{50}}}{10\cancel{5}\cancel{0}} g = \frac{5}{10} g \Rightarrow \boxed{a_\gamma = \frac{g}{2}}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ # 9

(α) Ξέρουμε ότι $F=-\frac{\partial U}{\partial x}$ άρα $F=-\frac{d}{dx}(-x^3+2x^2+4x)=-(-3x^2+4x+4) \Rightarrow$

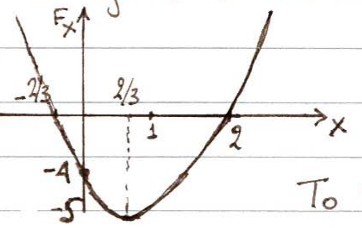
$$\boxed{\vec{F}_x=(3x^2-4x-4)\,\hat{i}}$$

(β) Για να βρούμε που μηδενίζεται η δύναμη πρέπει $3x^2-4x-4=0 \Rightarrow$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+48}}{6} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{64}}{6} \Rightarrow \boxed{x_{1,2}=\begin{cases}-\frac{2}{3}\\ +2\end{cases}}$$

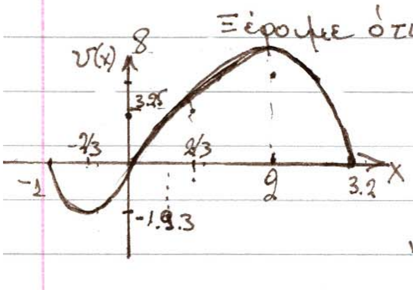
(γ) Ξέρουμε ότι στα σημεία ισορροπίας η παράγωγος του δυναμικού μηδενίζεται δηλαδή σύμφωνα με (α) η $F_x=0$. Αλλά από το (β) βρήκαμε ότι $F_x=\phi$ όταν $x=-\frac{2}{3}$ και $x=+2$. Τα σημεία είναι τα σημεία ισορροπίας. Το $x=-\frac{2}{3}$ είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας επειδή $U(x_1)<0$ άρα είναι ελάχιστο, ενώ το $x=+2$ είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας αφού $U(x_2)>0$ και άρα έχουμε μέγιστο της δυναμικής ενέργειας.

Η δύναμη είναι δευτεροβάθμια ως πρός x άρα παραβολή που τέμνει τον άξονα x στα σημεία x_1 & x_2 και κορυφή στο σημείο $x=+\frac{2}{3}$ που βρίσκεται ζητώντας η παράγωγος της F_x να'ναι μηδέν, δηλαδή



$$\frac{dF_x}{dx}=6x-4=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

Το δυναμικό είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού ως προς x. Ξέρουμε ότι παρουσιάζει μέγιστο στό +2 και ελάχιστο στο $-\frac{2}{3}$. Η τιμή της στό +2 είναι $U(2)=+8$ και στό $-\frac{2}{3}$ είναι $U(-\frac{2}{3})=-1.93$.



Τέλος η τιμή της U μηδενίζεται για $x=\phi$ και $+x^2-2x-4=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{+2\pm\sqrt{4+16}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\begin{cases}1+\sqrt{5}=3.24\\ 1-\sqrt{5}=-1.24\end{cases}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ #10

(α) Στο μέγιστο ύψος της τροχιάς $v_y = \phi$ και επομένως η ολική ταχύτητα είναι μόνο στη διεύθυνση - x και ίση με $v_x = v_0 \cos\theta$.

Η επιτάχυνση κάθετη στη τροχιά, στό μέγιστο ύψος είναι η βαρυτική επιτάχυνση g.

Αυτή η επιτάχυνση θα ισούται με την κεντρομόλο επιτάχυνση της αντίστοιχης κυκλικής κίνησης με κυκλική περιφέρεια εφαπτόμενη στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του βλήματος:

$$g = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v_0^2 \cos^2\theta}{g} \quad (a)$$

(για $\theta = 90° \Rightarrow R = 0$ δεν υπάρχει εφαπτόμενος κύκλος για κατακόρυφη βολή).

(β) Στην αρχή της τροχιάς του βλήματος (σημείο βολής), η ταχύτητα είναι v_0 ενώ η επιτάχυνση κάθετη στην τροχιά στο σημείο βολής θα είναι η $g\cos\theta$.

Επομένως: $$g\cos\theta = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v_0^2}{g\cos\theta} \quad (b)$$

(για $\theta = 90° \Rightarrow R \to \infty$ που σημαίνει πως σε κατακόρυφη βολή ο κύκλος έχει άπειρη ακτίνα).

Αυτή η ακτίνα είναι μεγαλύτερη από αυτή που βρήκαμε στο (α) κατά

$$\frac{R_B}{R_a} = \frac{\frac{\cancel{v_0^2}}{\cancel{g}\cos\theta}}{\frac{\cancel{v_0^2}\cos^2\theta}{\cancel{g}}} = \frac{1}{\cos^3\theta}.$$

(είναι μεγαλύτερη αφού $\cos\theta < 1$).

Αν

(γ) Το μέγιστο ύψος της βολής είναι: $$h_{max} = \frac{v_y^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}. \quad (3)$$

Θέλουμε η ακτίνα του κύκλου νά'ναι $r = \frac{1}{2} h_{max} \xRightarrow{(3)(a)} \frac{\cancel{v_0^2}\cos^2\theta}{\cancel{g}} = \frac{1}{2}\frac{\cancel{v_0^2}\sin^2\theta}{\cancel{2g}} \Rightarrow$

$$4\cos^2\theta = \sin^2\theta \Rightarrow \tan^2\theta = 4 \Rightarrow \tan\theta = 2 \Rightarrow \boxed{\theta = 63.4}$$