ΦΥΣ. 111

1η Πρόοδος: 14-Οκτωβρίου-2017

Πριν αρχίσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητας).

Ονοματεπώνυμο	Αριθμός Ταυτότητας

Απενεργοποιήστε τα κινητά σας.

Η εξέταση αποτελείται από 7 προβλήματα. **Γράψτε καθαρά τον τρόπο με τον οποίο δουλεύετε τις απαντήσεις σας.**

Η συνολική βαθμολογία της εξέτασης είναι 100 μονάδες.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μόνο το τυπολόγιο που σας δίνεται και απαγορεύται η χρήση οποιοδήποτε σημειώσεων, βιβλίων, κινητών.

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΣΤΕ ΜΟΝΟ ΤΙΣ ΣΕΛΙΔΕΣ ΠΟΥ ΣΑΣ ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΜΗΝ ΚΟΨΕΤΕ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΣΕΛΙΔΑ

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 120 λεπτά. Καλή Επιτυχία !

Άσκηση	Βαθμός
1η (10μ)	
2η (10μ)	
3η (10μ)	
4η (15μ)	
5η (15μ)	
6η (20μ)	
7η (20μ)	
Σύνολο	

Τύποι που μπορούν να φανούν χρήσιμοι

Γραμμική κίνηση:

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 + \int_{t_i}^{t_f} a(t)dt$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_i}^{t_f} \upsilon(t)dt$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_o^2 + 2a(x - x_o)$$ για α=σταθ.

$$x = x_o + \frac{1}{2}(\upsilon + \upsilon_o)t$$ για α = σταθ.

$$x_{\max} = \frac{\upsilon_o^2 \sin 2\theta}{g}$$ βεληνεκές

g = 9.8m/s^2

Κυκλική κίνηση

$$\theta = \frac{s}{R}$$ s=μήκος τόξου κύκλου ακτίνας R

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

$$a_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} = \frac{\upsilon_{\varepsilon\varphi.}^2}{R} \qquad \vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho,} = \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi.}$$

$$\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi.} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \upsilon_{\varepsilon\varphi.} = \omega R$$

$$\vec{\text{a}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad \vec{a}_{\varepsilon\varphi.} = \vec{\text{a}} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{\varepsilon\varphi.} + \vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau.} = \vec{\text{a}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}$$

Τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a - b) + \cos(a + b) = 2\cos(a)\cos(b)$$

$$\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2\sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a - b) + \sin(a + b) = 2\sin(a)\cos(b)$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{1 + \tan^2 a} \qquad \sin^2 a = \frac{\tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$$

Άσκηση 1 [10μ]

Η συχνότητα δόνησης f ενός παλλόμενου άστρου εξαρτάται από την ακτίνα του R, την πυκνότητα μάζας του ρ, (η πυκνότητα ορίζεται ως η μάζα ανά μονάδα όγκου) και την παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας G. Η σταθερά αυτή προκύπτει από τον νόμο της παγκόσμιας βαρυτικής έλξης του Newton σύμφωνα με τον οποίο η δύναμη F που αναπτύσεται μεταξύ δύο μαζών m_1 και m_2 που βρίσκονται σε απόσταση r μεταξύ τους περιγράφεται από την εξίσωση: $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$. Να βρεθεί η εξάρτηση της συχνότητας f από τα R, ρ και G;

Από τα μεγέθη που δίνονται στο πρόβλημα, βρίσκουμε τις διαστάσεις τους:

<u>πυκνότητα</u> $\rho = \frac{m}{V} \rightarrow [\rho] = \frac{[M]}{[L]^3}$

<u>ακτίνα R</u> διαστάσεις μήκους $[R] = [L]$

<u>σταθερά G</u> : από τον νόμο της παγκόσμιας έλξης: $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \Rightarrow G = \frac{F \cdot r^2}{m_1 m_2}$

οι διαστάσεις της δύναμης θα είναι από το 2ο νόμο του Newton $[F] = m \cdot a \Rightarrow [M]\frac{[L]}{[T]^2}$

οπότε η σταθερά G: $\frac{\cancel{[M]}\frac{[L]}{[T]^2}[L]^2}{[M]^{\cancel{2}}} \Rightarrow [G] = \frac{[L]^3}{[M][T]^2}$

Ζητούμε τη συχνότητα δόνησης οπότε $f = \frac{1}{T} \Rightarrow [f] = [T]^{-1}$.

Θα πρέπει επομένως η εξίσωση που συνδέει τη συχνότητα με την πυκνότητα, ακτίνα και σταθερά G να είναι διαστατικά σωστή με διαστάσεις $[T]^{-1}$ και στα δύο μέλη της:

Θα έχουμε: $f = \frac{1}{T} = k R^{\alpha} \rho^{\beta} G^{\gamma}$ όπου k σταθερά αναλογίας

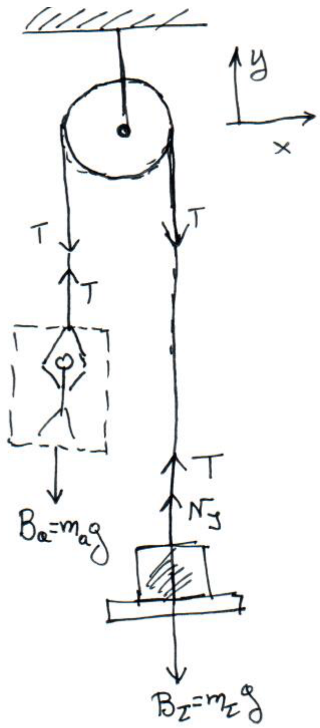
$$\frac{1}{[T]} = [L]^{\alpha}\frac{[M]^{\beta}}{[L]^{3\beta}}\frac{[L]^{3\gamma}}{[M]^{\gamma}[T]^{2\gamma}} \Rightarrow [T]^{-1} = [L]^{\alpha-3\beta+3\gamma}[M]^{\beta-\gamma}[T]^{-2\gamma}$$

Άρα
$$-1 = -2\gamma \Rightarrow \gamma = 1/2$$
$$0 = \alpha - 3\beta + 3\gamma \Rightarrow \alpha = 3\beta - 3\gamma = 3(\beta-\gamma) \Rightarrow \alpha = 0$$
$$0 = \beta - \gamma \Rightarrow \beta = \gamma = 1/2$$

Η εξίσωση επομένως θα έχει τη μορφή: $\boxed{f = \frac{1}{T} = k\sqrt{G\rho}}$

Άσκηση 2 [10μ]

Ένας γυμναστής μάζας 50kg κρέμεται από την άκρη ενός σχοινιού το οποίο περνά από μια λεία και αβαρή τροχαλία. Το άλλο άκρο του σχοινιού είναι δεμένο σε μία μάζα 75kg που βρίσκεται σε ηρεμία πάνω σε ζυγαριά στο έδαφος. Ποιό είναι το μέγεθος της ελάχιστης αναρριχητικής επιτάχυνσης που πρέπει να έχει ο γυμναστής ώστε η ζυγαριά να έχει μηδενική ένδειξη;



Η άσκηση μας ζητά την επιτάχυνση με την οποία θα πρέπει να αναρριχάται ο αθλητής ώστε το τούβλο να χάσει επαφή με την ζυγαριά. Στην περίπτωση αυτή $N_y = \emptyset$ N.

Από το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το τούβλο, και με εφαρμογή του $2^{ου}$ νόμου του Newton, θα έχουμε:

$$\Sigma F_y^{\tau} = \cancel{N}^{0} + T - B_Z = 0 \Rightarrow T - B_Z = 0 \Rightarrow \boxed{T = B_Z = m_Z g} \quad (1)$$

Η ίδια τάση T όμως ασκείται και στον αθλητή, αφού το σχοινί και η τροχαλία είναι αβαρή. Δεν έχει σημασία που ο αθλητής αναρριχάται. Μπορείτε να το σκεφθείτε θεωρώντας ότι ο αθλητής βρίσκεται σε ένα πλαίσιο και ότι το πλαίσιο αυτό ανεβαίνει προς τα πάνω.

Το πλαίσιο ασκεί μία δύναμη στο σχοινί και αυτό με τη σειρά του ασκεί μία δύναμη, (τάση), στο πλαίσιο.

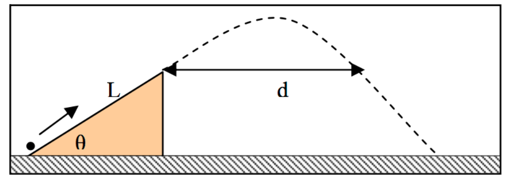
Εφαρμόζουμε τον $2^{ο}$ νόμο του Newton στο πλαίσιο οπότε έχουμε:

$$\Sigma F^{a} = m_a a = T - B_a \Rightarrow T - m_a g = m_a a \overset{(1)}{\Rightarrow} m_Z g - m_a g = m_a a \Rightarrow a = \frac{g(m_Z - m_a)}{m_a}$$

Αριθμητική αντικατάσταση θα δώσει: $a = g\,\dfrac{75kg - 50kg}{50kg} = \dfrac{25\cancel{kg}}{50\cancel{kg}}\,g \Rightarrow \boxed{a = g/2}$

Άσκηση 3 [10μ]

Ένα κανόνι όταν στοχεύει κατακόρυφα προς τα πάνω, ρίχνει μία οβίδα που φθάνει σε μέγιστο ύψος L. Μία άλλη οβίδα ρίχνεται αργότερα με την ίδια σε μέτρο αρχική ταχύτητα κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου μήκους L και γωνίας κλίσης θ. Ποιά πρέπει να είναι η γωνία ώστε η οβίδα να διανύσει την μεγαλύτερη οριζόντια απόσταση d, τη στιγμή που επιστρέφει στο ύψος της κορυφής του κεκλιμένου επιπέδου (όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα).

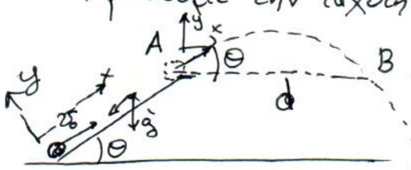


Χρησιμοποιούμε την αρχική κατακόρυφη βολή για να βρούμε το μέτρο της ταχύτητας εκτόξευσης των οβίδων από το κανόνι.

Ξέρουμε ότι $h_{max} = L$ αλλά $h_{max} = v_0 t_{av} - \frac{1}{2} g t_{av}^2 = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} \cancel{g} \frac{v_0^2}{g^{\cancel{2}}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h_{max} = L = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow \boxed{L = \frac{v_0^2}{2g}} \quad (1)$$

Βρίσκουμε την ταχύτητα που θα έχει η οβίδα στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου



Στην διεύθυνση x (κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου) το σώμα κινείται με επιτάχυνση $\boxed{g\sin\theta}$ προς τα κάτω.
Η συνολική μετατόπιση στην x-διεύθυνση είναι L.

Από την εξίσωση της κινηματικής: $v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v_f^2 - v_0^2 = -2g\sin\theta L \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_f^2 = v_0^2 - 2g\sin\theta L \overset{(1)}{\Rightarrow} v_f^2 = v_0^2 - \cancel{2g}\sin\theta \frac{v_0^2}{\cancel{2g}} \Rightarrow \boxed{v_f^2 = v_0^2(1-\sin\theta)} \quad (2)$$

Να σημειωθεί ότι δεν υπάρχει ταχύτητα στην y-διεύθυνση εφόσον η εκτόξευση της οβίδας είναι κατά μήκος της κεκλιμένης επιφάνειας.

Από την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου έχουμε πλάγια βολή με αρχική ταχύτητα v_f και γωνία θ.

Ο χρόνος για το μέγιστο ύψος είναι: $t_{av} = \frac{v_f^y}{g} \Rightarrow t_{ol} = 2t_{av} = 2\frac{v_f^y}{g} = \frac{2v_f\sin\theta}{g}$ (3)

Σαν ολικός χρόνος θεωρείται ο χρόνος για να φθάσει η οβίδα στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με αυτό της κορυφής του κεκλιμένου επιπέδου (σημείο B)

Η απόσταση d επομένως θα είναι: $d = AB = t_{ol} \cdot v_f^x = \frac{2v_f\sin\theta}{g} v_f\cos\theta \Rightarrow$

$$d = \frac{v_f^2}{g} 2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \boxed{d = \frac{v_f^2}{g}\sin 2\theta} \quad (4)$$

Αντικαθιστούμε την (2) στην (4) οπότε:

$$\boxed{d = \left[v_0^{2}(1-\sin\theta)\sin 2\theta\right]/g} \qquad (5)$$

Θέλουμε η απόσταση αυτή να είναι μέγιστη για κάποια γωνία Θ του κεκλιμένου επιπέδου. Επομένως θα πρέπει η παράγωγος της απόστασης ως προς τη γωνία Θ να γίνει μηδέν ώστε να παρουσιαστεί ακρότατο.

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{v_0^2}{g}(1-\sin\theta)\sin 2\theta\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\theta}2\left(\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta\cos\theta\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin^3\theta - 2\sin\theta\cos^2\theta = 0 \Rightarrow -\sin^2\theta + (1-\sin^2\theta) + \sin^3\theta - 2\sin\theta\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow 1 - 2\sin^2\theta + \sin^3\theta - 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) = 0 \Rightarrow 3\sin^3\theta - 2\sin^2\theta - 2\sin\theta + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\sin^3\theta - 3\sin^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta + 1 = 0 \Rightarrow 3\sin^2\theta(\sin\theta - 1) + (\sin\theta - 1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sin\theta - 1)(3\sin^2\theta + \sin\theta - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = 90^\circ \\ 3\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0 \Rightarrow \sin\theta_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin\theta_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6} \Rightarrow \sin\theta_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{6} \text{ απορ.}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{6} \simeq 0.43$$

Η λύση $\sin\theta_1$ απορρίπτεται γιατί αντιστοιχεί σε γωνίες βολής κάτω από το οριζόντιο επίπεδο. Επομένως η $\sin\theta_2$ είναι δεκτή λύση.

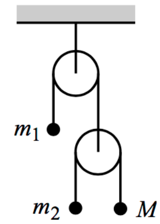
Επίσης η γωνία $\theta = 90^\circ$ απορρίπτεται γιατί αντιστοιχεί σε κατακόρυφη βολή ή η κεκλιμένη επιφάνεια είναι κατακόρυφη.

Επομένως η γωνία της κεκλιμένης επιφάνειας που μεγιστοποιεί την απόσταση d είναι:

$$\sin\theta = 0.43 \Rightarrow \boxed{\theta = 25.7^\circ}$$

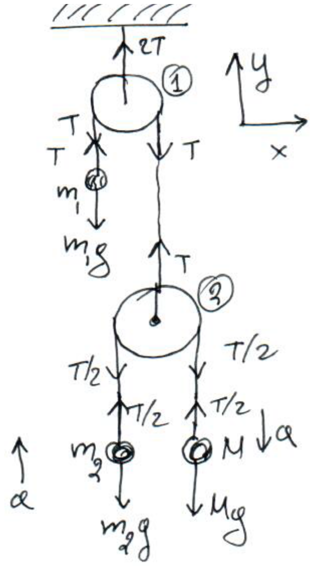
Άσκηση 4 [15μ]

Θεωρήστε την μηχανή Atwood του διπλανού σχήματος. Όλες οι τροχαλίες είναι λείες και αβαρείς και τα νήματα αβαρή. Οι μάζες κρατούνται αρχικά σε ηρεμία και κατόπιν αφήνονται ελεύθερες να κινηθούν.



(α) Να βρείτε τη μάζα M που απαιτείται ώστε η μάζα m_1 να μην κινείται. Να εκφράσετε την απάντησή σας συναρτήσει των μαζών m_1 και m_2. [**10μ**]

(β) Να βρείτε τη σχέση που πρέπει να συνδέει τις μάζες m_1 και m_2 ώστε να είναι δυνατή η ύπαρξη μίας τέτοιας μάζας M. [**5μ**]



Η τάση στο σχοινί που συγκρατεί την μάζα m_1 είναι T
Η ίδια τάση εμφανίζεται στο πάνω μέρος της κινητής τροχαλίας (2). Επειδή οι τροχαλίες είναι λείες και αβαρείς η συνισταμένη των δυνάμεων θα πρέπει να είναι μηδέν.

Επομένως θα πρέπει $\Sigma F_{\tau\rho}^{(2)} = 0 \Rightarrow T - T_M - T_2 = 0$.
αλλά $T_M = T_2$ στο ίδιο σχοινί της κατώτερης τροχαλίας. Επομένως $T = 2T_2 \Rightarrow T_2 = T/2$ $\Big\} \Rightarrow$
Εφόσον η μάζα m_1 είναι ακίνητη τότε: $T = m_1 g$

$$\Rightarrow T_2 = T/2 = \frac{m_1 g}{2}$$

Επειδή η τροχαλία (2) είναι ακίνητη εφόσον συνδέεται με την μάζα m_1 οι επιταχύνσεις των μαζών m_2 και M θα είναι ίδιες.
Εφαρμόζοντας τον 2ο νόμο του Νεύτωνα στις μάζες m_2 και M έχουμε:

$$m_2: \quad \frac{T}{2} - m_2 g = m_2 a \Rightarrow \frac{m_1 g}{2} - m_2 g = m_2 a \Rightarrow a = \left(\frac{m_1}{2m_2} - 1\right) g$$

$$M: \quad \frac{T}{2} - Mg = -Ma \Rightarrow \frac{m_1 g}{2} - Mg = -Ma \Rightarrow a = \left(-\frac{m_1}{2M} + 1\right) g$$

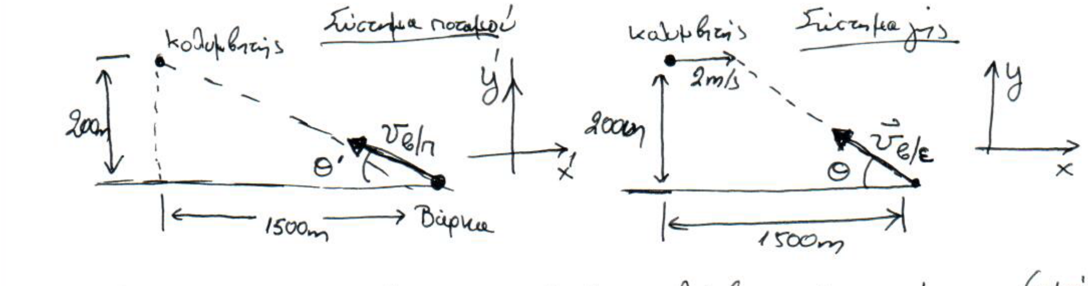
$$\Rightarrow \left(\frac{m_1 - 2m_2}{2m_2}\right)\cancel{g} = \left(-\frac{m_1}{2M} + 1\right)\cancel{g} \Rightarrow \frac{m_1}{\cancel{2}M} = 1 - \frac{m_1 - 2m_2}{2m_2} = \frac{4m_2 - m_1}{\cancel{2}m_2} \Rightarrow$$

$$\boxed{M = \frac{m_1 m_2}{4m_2 - m_1}}$$

Για να υπάρχει η M θα πρέπει ο παρονομαστής να είναι θετικός. Οπότε: $4m_2 - m_1 > 0 \Rightarrow \boxed{m_2 > \frac{m_1}{4}}$

Άσκηση 5 [15μ]

Ένας κολυμβητής που κολυμπούσε σε ένα ποτάμι έχασε τις δυνάμεις του με αποτέλεσμα να παρασύρεται από τα νερά του ποταμού και καλεί απεγνωσμένα σε βοήθεια. Τα νερά του ποταμού ρέουν με ταχύτητα 2m/s με κατεύθυνση από την δύση προς την ανατολή. Ο κολυμβητής βρίσκεται σε απόσταση 200m από την πιο κοντινή όχθη και 1500m δυτικά από την προβλήτα στην οποία ομάδα ναυαγωσωστών ετοιμάζεται να ξεκινήσει με την βάρκα διάσωσης. Αν το μέτρο της ταχύτητας της βάρκας ως προς τα νερά του ποταμού είναι 8m/s, σε ποια γωνία ως προς την όχθη θα πρέπει να κατευθύνουν τη βάρκα ώστε να φθάσουν κατευθείαν στο παιδί;



Στο σύστημα αναφοράς του ποταμού, ο κολυμβητής είναι ακίνητος (αφού παρασύρεται από τα νερά). Η βάρκα θα μπορεί να πάει απευθείας στον κολυμβητή αν θέσει κατεύθυνση κίνησης ώστε $\tan\theta' = \frac{d}{x} = \frac{200}{1500} = \frac{1}{7.5} \Rightarrow \tan\theta' = 0.13 \Rightarrow$

$\theta' = 7.59^\circ$

Η ταχύτητα της βάρκας σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος είναι $v_{\beta/\pi} = 8m/s$. Επομένως οι συνιστώσες της ταχύτητας αυτής στο x'-y' είναι:

$$v_{\beta/\pi}^{x'} = v_{\beta/\pi}\cdot\cos\theta' \Rightarrow v_{\beta/\pi}^{x'} = -8\tfrac{m}{s}\cos(7.59^\circ) \Rightarrow \boxed{v_{\beta/\pi}^{x'} = -7.93\,m/s} \quad (1)$$

$$v_{\beta/\pi}^{y'} = v_{\beta/\pi}\cdot\sin\theta' \Rightarrow v_{\beta/\pi}^{y'} = 8\tfrac{m}{s}\sin(7.59^\circ) \Rightarrow \boxed{v_{\beta/\pi}^{y'} = 1.06\,m/s} \quad (2)$$

Το ποτάμι ρέει με ταχύτητα $v_{\pi/\varepsilon} = 2m/s$ ως προς το έδαφος. Στο σύστημα αναφοράς της γης λοιπόν, η ταχύτητα της βάρκας θα είναι:

$$\vec{v}_{\beta/\varepsilon} = \vec{v}_{\beta/\pi} + \vec{v}_{\pi/\varepsilon} \Rightarrow \begin{cases} v_{\beta/\varepsilon}^{x} = v_{\beta/\pi}^{x} + v_{\pi/\varepsilon}^{x} \overset{(1)}{\Rightarrow} v_{\beta/\varepsilon}^{x} = -7.93\frac{m}{s} + 2\frac{m}{s} \Rightarrow v_{\beta/\varepsilon}^{x} = -5.93\frac{m}{s} \\ v_{\beta/\varepsilon}^{y} = v_{\beta/\pi}^{y} + \cancelto{0}{v_{\pi/\varepsilon}^{y}} \Rightarrow v_{\beta/\varepsilon}^{y} = v_{\beta/\pi}^{y} \overset{(2)}{\Longrightarrow} v_{\beta/\varepsilon}^{y} = 1.06m/s \end{cases}$$

Επομένως η ταχύτητα της βάρκας ως προς το έδαφος θα είναι: $v = \sqrt{{v_{\beta/\varepsilon}^{x}}^2 + {v_{\beta/\varepsilon}^{y}}^2} \Rightarrow$

$v = \sqrt{(5.93\frac{m}{s})^2 + (1.06m/s)^2} \Rightarrow \boxed{v = 6.02\,m/s}$ Η γωνία θ θα είναι:

$$\tan\theta = \frac{v_y^{\beta/\varepsilon}}{v_x^{\beta/\varepsilon}} = \frac{1.06}{-5.93} \Rightarrow \theta = \arctan(-0.179)$$

$\Rightarrow \boxed{\theta = 10^\circ.13}$ ή $\theta = 169.87^\circ$ ως προς +x

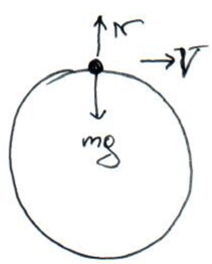
Άσκηση 6 [20μ]

Ένας τροχός ακτίνας R κυλά κατά μήκος μιας οριζόντιας επιφάνειας με ταχύτητα V. Μία χάντρα τοποθετείται πολύ προσεκτικά στο υψηλότερο σημείο του τροχού. Μπορείτε να υποθέσετε ότι τη στιγμή που την τοποθετείται η χάντρα βρίσκεται σε ηρεμία πάνω στον τροχό.

(α) Δείξτε ότι εάν η ταχύτητα του τροχού είναι $V > \sqrt{gR}$ τότε η χάντρα θα εκτιναχθεί αμέσως από τον τροχό. [**8μ**]

(β) Δείξτε ότι εάν η ταχύτητα του τροχού είναι $V < \sqrt{gR}$ και ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ της χάντρας και της επιφάνειας του τροχού είναι μ_s=1, τότε η χάντρα θα χάσει επαφή με τον τροχό όταν έχει περιστραφεί κατά μία γωνία $\theta = \arccos\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{V^2}{Rg}\right] - \frac{\pi}{4}$. [**12μ**]

(α)



Ο τροχός κινείται με $\vec{V}$ οπότε το σημείο περιστρέφεται με $\vec{V}$ ως προς τον τροχό

Όταν αφήνουμε το σώμα πάνω στον τροχό, το σώμα αποκτά την ταχύτητα του τροχού στο σημείο επαφής

Από τη στιγμή που το σώμα είναι ακίνητο στον τροχό

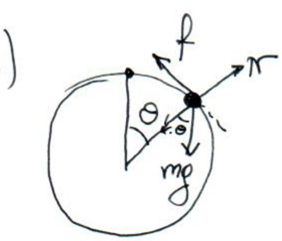
$$\Sigma F = -\frac{m v^2}{R} \Rightarrow N - mg = -\frac{m v^2}{R} \Rightarrow$$

$$N \geq 0 \Rightarrow mg - m v^2/R \geq 0 \Rightarrow \cancel{m}g \geq \cancel{m} v^2/R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow gR \geq v^2 \Rightarrow \boxed{\sqrt{gR} \geq v}$$

Δηλαδή αν η ταχύτητα είναι μεγαλύτερη από $\sqrt{gR}$ το σώμα δεν παραμένει στον τροχό.

(β)



Όσο τα σώματα βρίσκονται σε επαφή θα έχουμε:

$$N - mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{R} \Bigg\} \Rightarrow$$

Τη στιγμή που χάνεται η επαφή, $N = 0$

$$\cancel{m}g\cos\theta_{max} = \cancel{m}\frac{v^2}{R} \Rightarrow \cos\theta_{max} = \frac{v^2}{gR}$$

Το σώμα παραμένει στον τροχό εξαιτίας της δύναμης της στατικής τριβής η οποία είναι $f \le \mu_s N$

Εφόσον το σώμα είναι ακίνητο στον τροχό: $f - mg\sin\theta = 0 \Rightarrow$

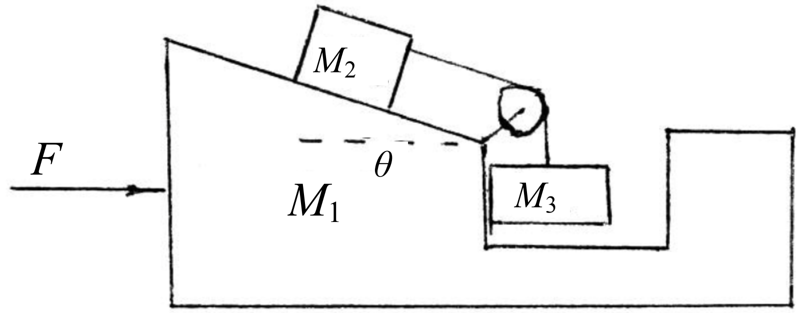
$$\Rightarrow f = mg\sin\theta \Rightarrow \mu_s N \ge mg\sin\theta \Rightarrow \mu_s\left(\cancel{m}g\cos\theta - \cancel{m}\frac{v^2}{R}\right) \ge \cancel{m}g\sin\theta$$

$\Rightarrow \boxed{\sin\theta \le \mu_s\cos\theta - \mu_s v^2/gR}$ Για $\mu = 1$ έχουμε: $\sin\theta \le \cos\theta - \frac{v^2}{gR} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{gR} = \cos(\theta_{max}) - \sin(\theta_{max}) = \sqrt{2}\cos\left(\theta_{max} + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \boxed{\cos\left(\theta_{max} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{v^2}{\sqrt{2}\,gR}}$$

Άσκηση 7 [20μ]

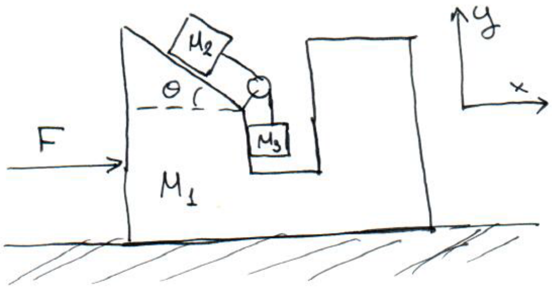
Θεωρήστε τη διάταξη του διπλανού σχήματος. Θεωρήστε ότι όλες οι επιφάνειες είναι λείες και οι τροχαλίες είναι λείες και αβαρείς όπως και το σχοινί που συνδέει τα σώματα M_2 και M_3.



(α) Να κάνετε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για όλα τα σώματα. [**8μ**]

(β) Να γράψετε τις εξισώσεις του 2ου νόμου του Newton. [**4μ**]

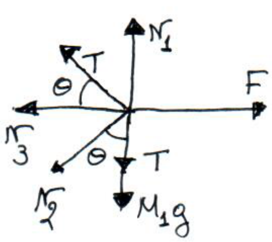
(γ) Να βρείτε την δύναμη που θα πρέπει να ασκηθεί στο σώμα μάζας M_1 ώστε το σώμα μάζας M_3 να παραμείνει ακίνητο στην κατακόρυφη διεύθυνση. [**8μ**]



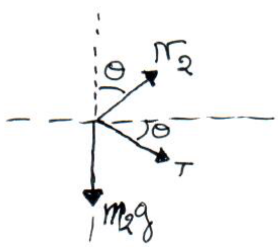
Θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων όπως στο διπλανό σχήμα

Τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος για τις 3 μάζες του συστήματος θα είναι:

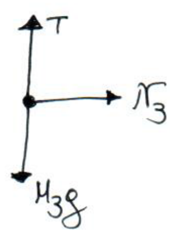
Σώμα M_1



Σώμα M_2



Σώμα M_3



Να σημειώσετε ότι λόγω της τροχαλίας οι δύο τάσεις των νημάτων εκατέρωθεν της τροχαλίας εμφανίζονται και στο σώμα μάζας M_1

Η δύναμη N_3 εμφανίζεται λόγω της επαφής του σώματος μάζας M_3 με την

Εφαρμόζουμε το νόμο του Newton στα 3 σώματα:

Σώμα M_1: $\Sigma F_x = M_1 a \Rightarrow F - N_3 - T\cos\theta - N_2 \sin\theta = M_1 a$

$\Sigma F_y = M_1 a = 0 \Rightarrow N_1 - T - M_1 g - T\sin\theta - N_2\cos\theta = 0$

Εφαρμόζουμε το 2^{o} νόμο του Newton για κάθε σώμα. Όλα έχουν την ίδια επιτάχυνση α.

Σώμα 1: $\begin{cases} \Sigma F_x = M_1 \alpha \Rightarrow F - N_3 - N_2 \sin\theta - T\cos\theta = M_1 \alpha & (1) \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 - T - M_1 g - T\sin\theta - N_2 \cos\theta = 0 & (2) \end{cases}$

Σώμα 2: $\begin{cases} \Sigma F_x = M_2 \alpha \Rightarrow N_2 \sin\theta + T\cos\theta = M_2 \alpha & (3) \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 \cos\theta - T\sin\theta - M_2 g = 0 & (4) \end{cases}$

Σώμα 3: $\begin{cases} \Sigma F_x = M_3 \alpha \Rightarrow N_3 = M_3 \alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{N_3}{M_3} & (5) \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T - M_3 g = 0 \Rightarrow T = M_3 g & (6) \end{cases}$

Αντικαθιστούμε τις (5) κ (6) στις (1), (3) κ (4)

$$F = M_1 \frac{N_3}{M_3} + N_3 + N_2 \sin\theta + T\cos\theta = M_1 \frac{N_3}{M_3} + N_3 + N_2 \sin\theta + M_3 g \cos\theta \quad (1')$$

$$N_2 \sin\theta + M_3 g \cos\theta = M_2 \frac{N_3}{M_3} \quad (3')$$

$$N_2 \cos\theta - M_3 g \sin\theta = M_2 g \quad (4') \Rightarrow N_2 = M_3 g \tan\theta + \frac{M_2}{\cos\theta} g$$

Αντικαθιστούμε την (4') στην (1') και (3')

$$F = N_3 \left(\frac{M_1 + M_3}{M_3}\right) + M_3 g \tan\theta \sin\theta + M_2 g \tan\theta + M_3 g \cos\theta \quad (1'')$$

$$M_2 \frac{N_3}{M_3} = M_3 g \tan\theta \sin\theta + M_2 g \tan\theta + M_3 g \cos\theta \quad (3'') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_3 = \frac{M_3}{M_2} g \left[M_3 \tan\theta \sin\theta + M_2 \tan\theta + M_3 \cos\theta \right] \quad (3''')$$

Αντικαθιστούμε την (3''') στην (1'')

$$F = \frac{(M_1+M_3)}{M_2} g\left[M_3 \tan\Theta \sin\Theta + M_2 \tan\Theta + M_3 \cos\Theta\right] + g\left(M_3 \tan\Theta \sin\Theta + M_3\cos\Theta + M_2 \tan\Theta\right)$$

$$\Rightarrow F = \frac{(M_1+M_3)}{M_2} g \left(M_3 \tan\Theta \sin\Theta + M_3 \cos\Theta\right) + (M_1+M_3) g \tan\Theta +$$

$$+ g\left[M_3 (\tan\Theta \sin\Theta + \cos\Theta)\right] + M_2 g \tan\Theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = (M_1+M_2+M_3) g \tan\Theta + g\left[M_3 \tan\Theta \sin\Theta \left(\frac{M_1+M_3}{M_2}+1\right) + M_3 \cos\Theta\left(\frac{M_1+M_3}{M_2}+1\right)\right]$$

$$\Rightarrow F = (M_1+M_2+M_3) g \tan\Theta + g\left[\left(\frac{M_1+M_3}{M_2}+1\right)(\tan\Theta\sin\Theta + \cos\Theta) M_3\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = (M_1+M_2+M_3) g\left[\tan\Theta + \frac{M_3}{M_2}(\cos\Theta + \tan\Theta \sin\Theta)\right] \Rightarrow$$

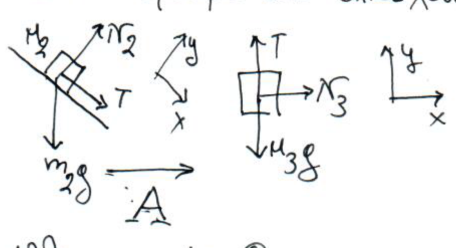
$$\Rightarrow \boxed{F = (M_1+M_2+M_3) g \left[\tan\Theta + \frac{M_3}{M_2}\sec\Theta\right]}$$

Β' Τρόπος - πολύ εύκολος

Από τη στιγμή που δεν υπάρχει κίνηση των μαζών ως προς τις άλλες, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το σύστημα σαν 1 σώμα με μάζα $M = M_1+M_2+M_3$

Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε: $F = (M_1+M_2+M_3)A = M_{ολ} A$

Για να βρούμε την επιτάχυνση A μπορούμε να θεωρήσουμε τις M_2 & M_3



Για την μάζα M_3: $T = M_3 g$

Για την μάζα M_2: $T + M_2 g \sin\Theta = M_2 a_x$

$$\Rightarrow M_3 g + M_2 g \sin\Theta = M_2 a_x \Rightarrow g(M_3 + M_2 \sin\Theta) = M_2 a_x$$

Αλλά $a_x = A\cos\Theta$. Οπότε: $A = g\left(\frac{M_3}{M_2}\frac{1}{\cos\Theta} + \tan\Theta\right) \Rightarrow A = g\left(\frac{M_3}{M_2}\sec\Theta + \tan\Theta\right)$

Άρα $\boxed{F = (M_1+M_2+M_3) g \left(\frac{M_3}{M_2}\sec\Theta + \tan\Theta\right)}$