

ΦΥΣ. 133 – Δεκέμβριος 2004
Τελική Γραπτή Εξέταση

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις σημειώσεις σας, το βιβλίο του μαθήματος, καθώς και ότι σημειώσεις σας δόθηκαν κατά τη διάρκεια του εξαμήνου (διαλέξεις, ασκήσεις, λύσεις). **Οτιδήποτε άλλο απαιτεί έγκριση.**

Από τη στιγμή αυτή απαγορεύεται οποιαδήποτε συζήτηση, συνομιλία, ή ανταλλαγή πληροφορίας με άλλους συναδέλφους σας. **Τα κινητά κλειστά και μακριά σας.**

Έχετε 5 ασκήσεις που πρέπει να απαντήσετε. Σύνολο 100 μονάδες.

Γράψτε το ονοματεπώνυμο σας στην πρώτη σελίδα.

Έχετε απεριόριστο χρόνο για την εξέταση.

Καλή επιτυχία.

Πρόβλημα 1 (16 β)

Απαντήστε τις ακόλουθες ερωτήσεις διαλέγοντας όσες απαντήσεις χρειάζονται. Δηλαδή για κάθε ερώτηση μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μια σωστές απαντήσεις.

(1) Δύο σωματίδια ασκούν δυνάμεις το ένα στο άλλο. Αν οι δυνάμεις ικανοποιούν τον ισχυρό νόμο δράσης-αντίδρασης, έχουν το ίδιο μέγεθος και είναι:

- (α) Κάθετες μεταξύ τους
- (β) Αντίθετης κατεύθυνσης
- (γ) Έχουν διεύθυνση προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων
- (δ) Παράλληλες προς την γραμμή που συνδέει τα δύο σωματίδια

(2) Ποιές από τις ακόλουθες ποσότητες διατηρούνται εν γένει για σωματίδια που κινούνται κάτω από την επίδραση μιας κεντρικής συντηρητικής δύναμης;

- (α) Εμβαδική ταχύτητα
- (β) Κινητική ενέργεια
- (γ) Γραμμική ορμή
- (δ) Προσανατολισμός του επιπέδου στο οποίο κινούνται τα σωματίδια

(3) Ποιές είναι οι συνθήκες για ένα σωματίδιο που κινείται υπό την επίδραση κεντρικής συντηρητικής δύναμης ώστε να έχει σταθερή κυκλική τροχιά ακτίνας r_0 ;

- (α) Η δύναμη πρέπει να είναι ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης
- (β) Το ενεργό δυναμικό, $V_{\text{eff}}(r) = V(r) + l^2/2mr^2$ πρέπει να έχει ελάχιστο στο r_0
- (γ) Η ολική ενέργεια E πρέπει να είναι ίση με $V_{\text{eff}}(r_0)$
- (δ) Το δυναμικό πρέπει να πλησιάζει προς το μηδέν όταν το r τείνει στο άπειρο

(4) Τι απέδειξε το πείραμα σκέδασης του Rutherford, το οποίο χρησιμοποίησε φύλλο χρυσού ($Z=79$, $A=197$) σα στόχο;

- (α) Υπάρχει ένας πυρήνας με ηλεκτρικό φορτίο $+79e$ σε κάθε άτομο χρυσού
- (β) Υπάρχουν 118 νετρόνια σε κάθε πυρήνα χρυσού
- (γ) Ο πυρήνας χρυσού είναι πολύ βαρύτερος από άλφα σωματίδια
- (δ) Άλφα σωματίδια από ραδιενεργές πηγές μπορούν να διαπεράσουν μόνο ένα πολύ λεπτό φύλλο χρυσού

Πρόβλημα 2 (17 β)

Ένα Frisbee ρίχνεται οριζόντια από το νότιο πόλο σε ύψος 1m πάνω από το έδαφος με πολύ μεγάλη ταχύτητα u . Πιστέψτε το ή όχι κατορθώνει να φθάσει στο βόρειο πόλο πετώντας πάνω απ' αυτόν με ταχύτητα $u/2$.

(α) Σε τι ύψος πάνω από το έδαφος περνά πάνω από το βόρειο πόλο; **(5 β)**

(β) Όταν επιστρέφει στο νότιο πόλο, σε τι ύψος πάνω από το έδαφος φθάνει; **(4 β)**

(γ) Ποιά είναι η εκκεντρότητα της τροχιάς; **(5 β)**

(δ) Ποιός ο μικρός ημιάξονας; **(3 β)**

Αγνοήστε την τριβή λόγω του αέρα. Η ακτίνα της γής είναι $R=6370\text{km}$.

Θεωρήστε $1\text{m} \ll R$. Δικαιολογήστε λεπτομερώς όλες τις απαντήσεις σας.

Πρόβλημα 3 (17 β)

Ένα μηχανικό σύστημα περιγράφεται από τις γενικευμένες συντεταγμένες q_1 και q_2 , και την Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 - r \dot{q}_1 q_2 + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2$$

όπου r είναι σταθερά.

(α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης για q_1 και q_2 και βρείτε μιά σταθερά της κίνησης. (4 β)

(β) Ολοκληρώστε τις εξισώσεις κίνησης (χρησιμοποιώντας την σταθερά της κίνησης για το σκοπό αυτό βοηθά!) για να βρείτε την γενική λύση $q_1(t)$, $q_2(t)$, συναρτήσει 4 σταθερών ολοκλήρωσης, μια από τις οποίες πρέπει να είναι η σταθερά της κίνησης. (5 β)

(γ) Βρείτε την συγκεκριμένη λύση που ικανοποιεί τις συνθήκες

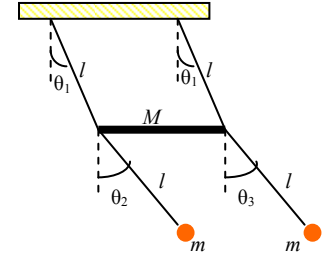
$$q_1(t=0) = 0, \quad \dot{q}_1(t=0) = 0, \quad q_2(t=0) = 0, \quad \dot{q}_2(t=0) = 3$$

και υπολογίστε την τιμή της σταθεράς της κίνησης που βρήκατε στο (α) υποερώτημα για την συγκεκριμένη αυτή λύση. (4 β)

(δ) Βρείτε την Hamiltonian του συστήματος. Εξηγήστε γιατί είναι σταθερά της κίνησης και βρείτε την τιμή της για την συγκεκριμένη λύση που βρέθηκε στο υποερώτημα (γ). (4 β)

Πρόβλημα 4 (25 β)

Δύο βάρη ίδιας μάζας m , και μιά ράβδος μάζας M συνδέονται με αβαρή νήματα ίδιου μήκους l και σχηματίζουν συζευγμένο εκκρεμές, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύστημα είναι περιορισμένο να κινείται σε ένα κατακόρυφο επίπεδο κάτω από την επίδραση ομοιογενούς βαρυτικού πεδίου.



(α) Για μικρές μετατοπίσεις από την θέση ισορροπίας εκφράστε την

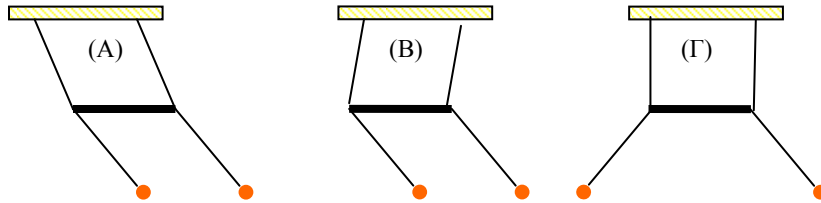
κινητική ενέργεια T και την δυναμική ενέργεια V στην μορφή $T = \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T T \dot{\theta}$ και

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T V \theta \quad \text{όπου,}$$

$$\theta \equiv \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{\theta} \equiv \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\theta} \equiv [\theta_1, \theta_2, \theta_3], \quad \tilde{\theta} \equiv [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3] \quad (8 \beta)$$

(β) Βρείτε τις γωνιακές συχνότητες των τριών φυσικών τρόπων ταλάντωσης. (7 β)

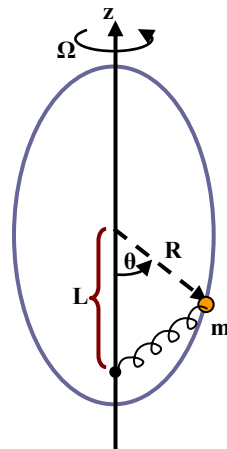
(γ) Οι φυσικοί τρόποι ταλάντωσης μοιάζουν όπως στα παρακάτω σχήματα. Συσχετίστε κάθε τρόπο ταλάντωσης με μια από τις συχνότητες που βρέθηκαν στο υποερώτημα (β). (5 β)



(δ) Δείξτε πως αν κάνουμε την ράβδο πολύ ελαφριά (π.χ. $M \ll m$) μια από τις κανονικές συχνότητες αυξάνει σύμφωνα με το $2\sqrt{gm / lM}$. Ποιά φυσικός τρόπος ταλάντωσης είναι αυτός (A, B ή Γ); (5 β)

Πρόβλημα 5 (25 β)

Θεωρήστε ένα κατακόρυφο κυκλικό στεφάνι ακτίνας R στον τρισδιάστατο χώρο. Το στεφάνι αυτό περιστρέφεται γύρω από ένα σταθερό άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω όπως φαίνεται στο σχήμα. Μια (σημειακή) χάντρα μάζας m είναι περασμένη στο στεφάνι έτσι ώστε να κινείται πάνω του χωρίς τριβές χωρίς όμως να μπορεί να φύγει από το στεφάνι. Υπάρχει επίσης και ένα ελατήριο σταθεράς k το ένα άκρο του οποίου είναι εξαρτημένο πάνω στην χάντρα ενώ το άλλο άκρο του είναι εξαρτημένο σε ένα σταθερό σημείο πάνω στον άξονα περιστροφής το οποίο απέχει απόσταση L από το κέντρο του στεφανιού. Ο μόνος ρόλος που παίζει το ελατήριο είναι να προσδίδει στην χάντρα μια γραμμική δύναμη που ενεργεί κατά την διεύθυνση του ελατηρίου. Δεν υπάρχουν άλλες δυνάμεις ασκούμενες πάνω στην χάντρα (ειδικά, **δεν** υπάρχει βαρυτική δύναμη).



(α) Πόσους βαθμούς ελευθερίας έχουμε στο πρόβλημα αυτό; Βρείτε την Lagrangian και γράψτε τις εξισώσεις κίνησης της χάντρας. (7 β)

(β) Βρείτε την Hamiltonian H και την ενέργεια E του συστήματος. Είναι η Hamiltonian σταθερά της κίνησης; Διατηρείται η ενέργεια E του συστήματος; Αν βρείτε κάποιο νόμο διατήρησης, προσδιορίστε την συμμετρία που είναι υπεύθυνη για το νόμο αυτό της διατήρησης. (5 β)

(γ) Βρείτε όλα τα σημεία στατικής ισορροπίας για την Lagrangian που βρήκατε. Για κάθε σημείο στατικής ισορροπίας, προσδιορίστε αν είναι σταθερή ή ασταθής ισορροπία αναπτύσσοντας την Lagrangian γύρω από το σημείο ισορροπίας και κρατώντας μόνο το δευτεροβάθμιο όρο του αναπτύγματος. Περιγράψτε πως οι ποιοτικές ιδιότητες των σημείων ισορροπίας αλλάζουν συναρτήσει της γωνιακής ταχύτητας Ω , ακτίνας R και σταθεράς ελατηρίου k . Βρείτε την συχνότητα ω των γραμμικών ταλαντώσεων γύρω από κάθε σημείο σταθερής στατικής ισορροπίας συναρτήσει των k , R και Ω . (8 β)

(δ) Θεωρήστε το ίδιο σύστημα όπως και στα υποερωτήματα (α)-(γ), με την διαφορά όμως ότι στην περίπτωση αυτή το σταθερό άκρο του ελατηρίου έχει μετατοπισθεί κάποια σταθερή απόσταση D μακριά από τον άξονα περιστροφής (διπλανό σχήμα). Αυτή η νέα θέση του σταθερού άκρου του ελατηρίου είναι σταθερή ως προς χρόνο, δηλαδή **δεν περιστρέφεται** με το στεφάνι. Επαναλάβεται την ανάλυση του υποερωτήματος (β) για το τροποποιημένο σύστημα και προσδιορίστε αν κάποια από τα συμπεράσματα του υποερωτήματος (β) έχουν αλλάξει. (5 β)

