ΦΥΣ. 211
ΕΡΓΑΣΙΑ # 7
Επιστροφή την Τετάρτη 23/3/2016 στο τέλος της διάλεξης

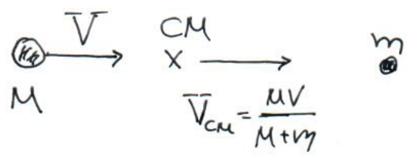
1. Ένα σώμα μάζας *M*, συγκρούεται με ένα σώμα μάζας *m* το οποίο είναι αρχικά ακίνητο. Αν $M < m$, τότε είναι πιθανόν ότι το σώμα μάζας *M* θα σκεδαστεί ακριβώς προς τα πίσω. Αν $M > m$, τότε υπάρχει μια μέγιστη γωνία σκέδασης για το σώμα μάζας *M*. Βρείτε την γωνία αυτή συναρτήσει των δυο μαζών.

Θα μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα δουλεύοντας είτε στο σύστημα του εργαστηρίου ή στο σύστημα του κέντρου μάζας.

Στα παρακάτω δίνονται και οι δυο λύσεις.

Δουλεύοντας στο σύστημα του CM

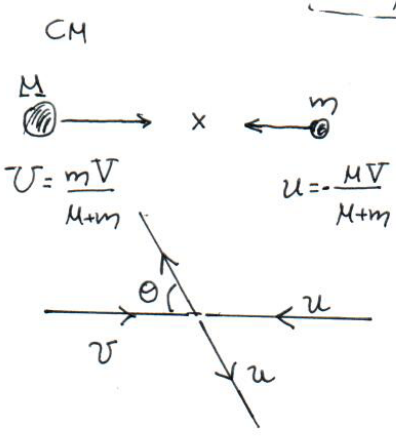
Έστω ότι η μάζα M έχει αρχική ταχύτητα V στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Σαν αποτέλεσμα το CM θα κινείται με ταχύτητα: $V_{CM} = \dfrac{MV}{M+m}$



Δουλεύοντας στο σύστημα αναφοράς του CM, τα σώματα θα έχουν ταχύτητες:

$$M:\ \upsilon = V - V_{CM} = V - \frac{MV}{M+m} \Rightarrow \boxed{\upsilon = \frac{mV}{M+m}}$$

$$m:\ u = 0 - V_{CM} \Rightarrow \boxed{u = -\frac{MV}{M+m}}$$



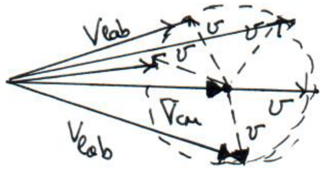
Στο σύστημα αναφοράς του CM η σκέδαση των δύο σφαιρών είναι αρκετά απλή: Τα σώματα διατηρούν το ίδιο μέτρο της ταχύτητάς τους αλλά απλά αλλάζουν διεύθυνση κινούμενα και πάλι σε αντίθετες διευθύνσεις.

Η γωνία σκέδασης θ μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή.

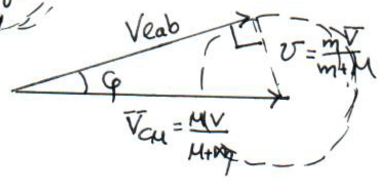
Η μορφή της σκέδασης αυτής ικανοποιεί διατήρηση ενέργειας και ορμής.

Αυτό που θα πρέπει να υπολογίσουμε ωστόσο είναι το γεγονός ότι, αφού η γωνία θ μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή, το βέλος του διανύσματος της ταχύτητας υ μπορεί να βρίσκεται σε οποιοδήποτε σημείο της περιφέρειας του κύκλου ακτίνας υ.

Αν κινηθούμε και πάλι στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, η τελική ταχύτητα της μάζας M, $\bar{V}_{lab}$, προκύπτει προσθέτοντας στο διάνυσμα της ταχύτητας του CM, V_{CM} την ταχύτητα της M στο σύστημα του CM, $\bar{v}$, το οποίο μπορεί να έχει οποιαδήποτε διεύθυνση στον κύκλο. Μερικές δυνατές περιπτώσεις για της $\bar{V}_{lab}$ είναι αυτές που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Η μεγαλύτερη γωνία σκέδασης συμβαίνει όταν η $\bar{V}_{lab}$ είναι εφαπτόμενη του κύκλου αυτού, οπότε θα έχουμε την περίπτωση



Η μέγιστη γωνία σκέδασης, ϕ είναι:

$$\sin\phi = \frac{v}{V_{CM}} = \frac{\frac{m\bar{V}}{m+M}}{\frac{M\bar{V}}{m+M}} \Rightarrow \boxed{\sin\phi = \frac{m}{M}}$$

<u>Λύση δουλεύοντας στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου</u>

Έστω $\bar{V}'$ και v' οι ταχύτητες των σωμάτων μετά τη σκέδαση και έστω ϕ και γ οι γωνίες σκέδασης των M και m αντίστοιχα στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Από διατήρηση της ορμής και ενέργειας θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} M\bar{V} &= M\bar{V}'\cos\phi + mv'\cos\gamma \\ 0 &= M\bar{V}'\sin\phi - mv'\sin\gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} M\bar{V} - MV'\cos\phi &= mv'\cos\gamma \\ MV'\sin\phi &= mv'\sin\gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} (MV)^2 + (MV')^2\cos^2\phi - 2M^2VV'\cos\phi &= m^2v'^2\cos^2\gamma \\ (MV')^2\sin^2\phi &= m^2v'^2\sin^2\gamma \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}M\bar{V}^2 = \frac{1}{2}M\bar{V}'^2 + \frac{1}{2}mv'^2$$

Οπότε προσθέτοντας τις 2 σχέσεις: $M^2V^2 + M^2V'^2 - 2M^2VV'\cos\phi = m^2v'^2$

Πολ/με την εξίσωση της ενέργειας με m: $\cancel{\frac{1}{2}}mM\bar{V}^2 = \cancel{\frac{1}{2}}Mm\bar{V}'^2 + \cancel{\frac{1}{2}}m^2v'^2$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow M^2\left(\bar{V}^2 + \bar{V}'^2 - 2VV'\cos\phi\right) = m\cancel{M}\left(\bar{V}^2 - \bar{V}'^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (M-m)\bar{V}^2 + (M+m)\bar{V}'^2 - 2MVV'\cos\phi = 0$$

η οποία είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς V' που θα έχει λύσεις μόνο αν η υπόρριζη ποσότητα της διακρίνουσας είναι μη αρνητική

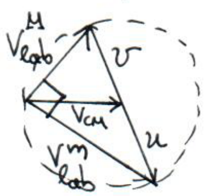
Θα έχουμε επομένως: $(2MV\cos\phi)^2 - 4(M+m)(M-m)V^2 \geq 0$

$$\Rightarrow \left[4M^2\cos^2\phi - 4M^2 + 4m^2\right]V^2 \geq 0 \Rightarrow m^2 \geq M^2(1-\cos^2\phi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2 \geq M^2\sin^2\phi \Rightarrow \boxed{\frac{m}{M} \geq \sin\phi}$$

Αν $M<m$ τότε οποιαδήποτε τιμή του ϕ είναι δυνατή αφού $\frac{m}{M} > 1 \geq \sin\phi$ που σημαίνει ότι το σώμα μάζας M να ανακλαστεί προς τα πίσω.

Σκεφτόμενοι όπως στην λύση του CM, τότε $V_{CM} < v$, και ο κύκλος θα έχει την μορφή του παρακάτω σχήματος.



Αλλά όπως η γωνία σκέδασης ϕ, μπορεί να πάρει στην προκειμένη περίπτωση οποιαδήποτε τιμή.

Είναι προφανές ότι αν οι δύο μάζες είναι ίσες, τότε $\frac{m}{M} = \sin\phi = 1 \Rightarrow \phi = 90^\circ$
δηλαδή στη σκέδαση δύο σωμάτων ίσης μάζας, τα σώματα σκεδάζονται σε γωνία 90° το ένα ως προς το άλλο

Στην περίπτωση αυτή $u = v = V_{CM} = \frac{MV}{M+m} = \frac{V}{2}$ οπότε τα δύο διανύσματα των ταχυτήτων στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας αποτελούν τη διάμετρο του κύκλου όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, που σημαίνει ότι στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση είναι κάθετες μεταξύ τους.

2. Θεωρήστε ένα σώμα στο βαρυτικό πεδίο της γης το οποίο είναι περιορισμένο να κινείται σε μια επιφάνεια η δυναμική ενέργεια της οποίας είναι $V(q) = -q^6 + 5q^4 - 4q^2$.

(α) Σχεδιάστε το φασικό διάγραμμα που αντιστοιχεί στη δυναμική του προβλήματος.
(β) Περιγράψτε την σταθερότητα των χαρακτηριστικών σημείων.
(γ) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης για κίνηση ως προς τα χαρακτηριστικά σημεία.

Το δυναμικό έχει τη μορφή $V(q) = -q^6 + 5q^4 - 4q^2$ και τα χαρακτηριστικά σημεία είναι αυτά στα οποία $F(q) = -\nabla V(q) = -\frac{\partial V}{\partial q} = 0 \Rightarrow F(q) = -\overbrace{(-6q^5 + 20q^3 - 8q)}^{(A)}$

$$\Rightarrow \quad +6q^5 - 20q^3 + 8q = 0 \Rightarrow \boxed{2q(3q^4 - 10q^2 + 4) = 0} \quad (B)$$

Θα έχουμε επομένως 5 λύσεις - χαρακτηριστικά σημεία, ένα εκ των οποίων είναι το $\boxed{q_1 = 0}$

Αντικαθιστούμε $w = q^2$ οπότε λύνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση: $3\omega^2 - 10w + 4 = 0$

$$w_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 48}}{6} \Rightarrow w_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{52}}{6} \Rightarrow w_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{3} \Rightarrow w_{1,2} = \begin{cases} 2.869 \\ 0.465 \end{cases} \Rightarrow$$

$$q_{2,3} = \pm\sqrt{w_1} \Rightarrow q_{2,3} = \begin{cases} \boxed{+1.694} \\ \boxed{-1.694} \end{cases} \quad \text{και} \quad q_{4,5} = \pm\sqrt{w_2} \Rightarrow q_{4,5} = \begin{cases} \boxed{+0.682} \\ \boxed{-0.682} \end{cases}$$

Για να δούμε αν είναι σημεία ευσταθούς ή ασταθούς ισορροπίας, θα πρέπει να εξετάσουμε την 2η παράγωγο του δυναμικού ως προς τα σημεία ισορροπίας

$$\text{Από την (A)} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} = -30q^4 + 60q^2 - 8} \quad (\Gamma)$$

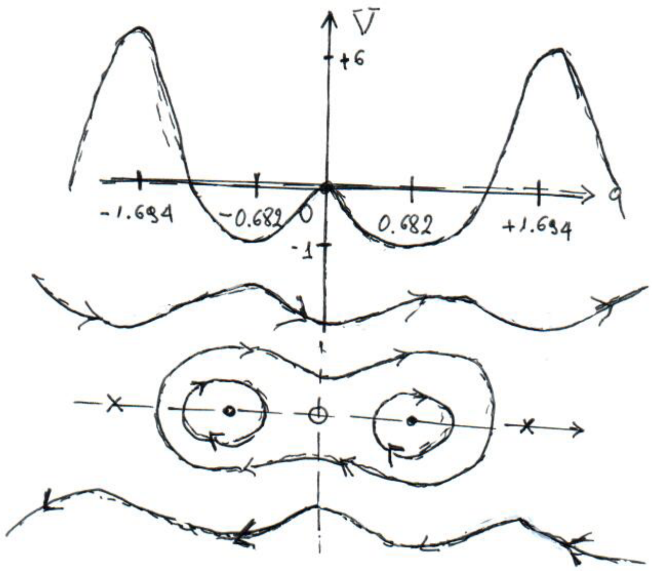
$q_1 = 0 \rightsquigarrow \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} = -8 < 0$ ασταθής ισορροπία για $q_1 = 0$

$q_{2,3} = \pm 1.694 \rightsquigarrow \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} = -82.8 < 0$ ασταθής ισορροπία για $q_{2,3} = \pm 1.694$

$q_{4,5} = \pm 0.682 \rightsquigarrow \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} = +13.4$ ευσταθής ισορροπία για $q_{4,5} = \pm 0.682$

Σχεδιάζουμε το δυναμικό και τα διαγράμματα φάσης:

$V(q_1) = 0$, $V(\pm 0.682) = -0.879$ και $V(\pm 1.694) = +6.07$



Οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να βρεθούν από το ανάπτυγμα του δυναμικού ως προς τα σημεία ισορροπίας. Από τη στιγμή που το ανάπτυγμα Taylor του δυναμικού δίνει:

$$V(q)\Big|_{q=q_0} = \underbrace{\cancel{V(q_0)}}_{\text{σταθ}} + \cancel{\frac{\partial V}{\partial q}\Big|_{q=q_0} q}^{\,0} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\Big|_{q=q_0} q^2 \Rightarrow V(q)\Big|_{q=q_0} \simeq \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}\Big|_{q=q_0} q^2$$

Επομένως η εξίσωση κίνησης προκύπτει από την εξίσωση Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = \frac{\partial L}{\partial q} \Rightarrow \boxed{m\ddot q = -\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} q} \qquad \text{όπου} \quad L = T - V = \frac{1}{2}m\dot q^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} q^2$$

Θεωρώντας ότι η μάζα του σώματος είναι 1 θα έχουμε: $\boxed{\ddot q = -\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} q} \Rightarrow \boxed{\ddot q = ax}$

Η εξίσωση αυτή ανάλογα με την τιμή της $2^{ης}$ παραγώγου του δυναμικού θα αντιστοιχεί σε απλή αρμονική ταλάντωση με $a = -w^2 = -\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} < 0$ για σημεία ευσταθούς ισορροπίας ή $a > 0$ σε κίνηση η οποία αυξάνει εκθετικά καθώς το σώμα απομακρύνεται από τη θέση ισορροπ

Για τα σημεία ευσταθούς ισορροπίας: q_4 & q_5 θα έχουμε: $q = Ae$

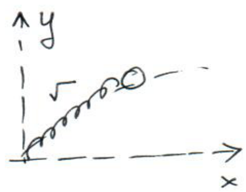
Επομένως $q(t) = A\cos(\sqrt{13.4}\,t) + B\sin(\sqrt{13.4}\,t)$ για κίνηση ως προς q_4 q_5

Για τα σημεία ασταθούς ισορροπίας θα έχουμε $a > 0 \Rightarrow$ $a = 8$ $q = 0$
$a = 82.8$ $q = \pm 1.694$

Θα έχουμε επομένως $q(t) = Ae^{\sqrt{a}t} + Be^{-\sqrt{a}t}$

3. Ένα βλήμα μάζας m, εκτοξεύεται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων με ταχύτητα υ_0 και γωνία θ ως προς τον ορίζοντα. Το βλήμα εξαρτάται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων μέσω ενός ελατηρίου σταθεράς k, και αμελητέου φυσικού μήκους.
(α) Βρείτε τις εκφράσεις για $x(t)$ και $y(t)$.
(β) Δείξτε ότι για μικρές τιμές της ποσότητας $\omega \equiv \sqrt{k/m}$, η τροχιά του σώματος αντιστοιχεί σε αυτή ενός κανονικού βλήματος. Δείξτε ότι για μεγάλες τιμές του ω, η τροχιά του σώματος καταλήγει σε αυτή ενός αρμονικού ταλαντωτή, δηλαδή ταλαντωτική κίνηση κατά μήκος μιας γραμμής (τουλάχιστον πριν το σώμα χτυπήσει στο έδαφος). Πως θα μπορούσατε να εκφράσετε διαφορετικά τις συνθήκες «μικρές τιμές του ω» και «μεγάλες τιμές του ω» ώστε να αντιπροσωπεύει τις συνθήκες πιστότερα;
(γ) Ποια θα πρέπει να είναι η τιμή του ω ώστε το βλήμα να χτυπήσει στο έδαφος κινούμενο ακριβώς κατακόρυφα;

(α) Η δύναμη στο βλήμα θα είναι: $\vec{F} = -k\vec{r} - mg\hat{y} = m\vec{a}$



Επομένως $F_x = -kx \Rightarrow m\ddot{x} = -kx \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t}$ όπου $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

Η y-συνιστώσα της δύναμης θα είναι: $F_y = -ky - mg$

Οπότε $m\ddot{y} = -k\left(y + \frac{mg}{k}\right)$ θεωρώντας $z = y + \frac{mg}{k}$

έχουμε τελικά: $\boxed{m\ddot{z} = -kz}$ που αντιστοιχεί σε απλή αρμονική ταλάντωση με σημείο ισορροπίας μετατοπισμένο $y = -\frac{mg}{k}$

Η εξίσωση αυτή έχει λύση: $\boxed{y(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t - mg/k}$

Από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος έχουμε ότι: $y(t=0) = 0$ και $\dot{y}(t=0) = \upsilon_0\sin\theta$. Επομένως θα έχουμε:

$$y(t=0) = C - mg/k = 0 \Rightarrow \boxed{C = mg/k}$$

$$\dot{y}(t=0) = \upsilon_0\sin\theta \Rightarrow -C\omega\cancelto{0}{\sin\omega t} + D\omega\cancelto{1}{\cos\omega t} = \upsilon_0\sin\theta \Rightarrow \boxed{D = \frac{\upsilon_0\sin\theta}{\omega}}$$

Επομένως έχουμε: $\boxed{y(t) = \frac{mg}{k}\left(\cos\omega t - 1\right) + \frac{\upsilon_0\sin\theta}{\omega}\sin\omega t}$ (A)

Για την κίνηση στη x-διεύθυνση και με βάση τις αρχικές συνθήκες:

$$\left.\begin{array}{l} x(t=0) = A = 0 \\ \dot{x}(t=0) = \upsilon_0\cos\theta = -A\omega\cancelto{0}{\sin\omega t} + B\omega\cancelto{1}{\cos\omega t} = B\omega \Rightarrow B = \frac{\upsilon_0\cos\theta}{\omega} \end{array}\right\}$$ οπότε

$\boxed{x(t) = \frac{\upsilon_0\cos\theta}{\omega}\sin\omega t}$ (B) (β) Για μικρές τιμές της ποσότητας ωt, $\omega t \sim 0$ έχουμε ότι $\sin\omega t \simeq \omega t$ και $\cos\omega t \simeq 1 - \frac{\omega^2 t^2}{2}$.

Επομένως αντικατάσταση στις 2 εξισώσεις κίνησης θα δώσει:

$$x(t) \simeq \frac{v_0 \cos\theta}{\omega}\omega t \Rightarrow \boxed{x(t) \simeq (v_0\cos\theta)\, t} \quad (\Gamma)$$

$$y(t) \simeq \frac{mg}{k}\left(\cancel{1} - \frac{\omega^2 t^2}{2} - \cancel{1}\right) + \frac{v_0 \sin\theta}{\cancel{\omega}}\cancel{\omega} t \Rightarrow y(t) \simeq -\frac{\cancel{m}g}{\cancel{k}}\frac{\cancel{k}}{\cancel{m}}\frac{t^2}{2} + (v_0 \sin\theta)t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) \simeq -\frac{1}{2}g t^2 + (v_0 \sin\theta)\, t} \quad (\Delta)$$

Οι 2 προηγούμενες εξισώσεις είναι οι εξισώσεις κίνησης του βλήματος και οι εξισώσεις αυτές ισχύουν στην προσέγγιση $\omega t \ll 1$ για όλη την κίνηση του βλήματος.

Επομένως αν θεωρήσουμε ότι το βλήμα έχει μόλις ολοκληρώσει την κίνησή του και χτύπησε στο έδαφος οπότε $y(t) \simeq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} g t^{\cancel{2}} = v_0 \sin\theta \cancel{t} \Rightarrow t = \frac{2 v_0 \sin\theta}{g}$

Θα πρέπει για όλη την κίνηση $\omega t \ll 1 \Rightarrow \omega \frac{2 v_0 \sin\theta}{g} \ll 1 \Rightarrow \omega \ll \frac{g}{2 v_0 \sin\theta}$

Δηλαδή "μικρές τιμές του ω" σημαίνει ότι το $\boxed{\omega \ll g / v_0 \sin\theta}$ ([illegible])

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση που το ω έχει μεγάλες τιμές. Για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t, η κίνηση του βλήματος είναι απλή αρμονική στη x-διεύθυνση.

Για να είναι πλήρως αρμονική, θα πρέπει η κίνηση να γίνεται σε ευθεία γραμμή.

Αυτή η απαίτηση προϋποθέτει ότι ο λόγος $\frac{y}{x} = \sigma\tau\alpha\theta$

Παρατηρώντας τα (A) και (B), η συνθήκη της σταθερής κλίσης σημαίνει:

$$\frac{y}{x} = \frac{mg}{k}(\cos\omega t - 1) \Big/ \frac{v_0 \cos\theta}{\omega}\sin\omega t + \tan\theta = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Ο 2ος όρος του αθροίσματος είναι σταθερός, που σημαίνει ότι θα πρέπει ο 1ος όρος στην εξίσωση του y(t) να είναι πολύ μικρότερος του 2ου όρου. Δηλαδή $\frac{mg}{k} \ll \frac{v_0 \sin\theta}{\omega}$

Επομένως $\frac{v_0 \sin\theta}{\omega} >> \frac{g}{\omega^2} \Rightarrow \boxed{\omega >> \frac{g}{v_0 \sin\theta}}$ **(2)**

Δηλαδή η σημασία των "μεγάλων τιμών του ω" σημαίνει $\omega >> \frac{g}{v_0 \sin\theta}$.

Στην περίπτωση αυτή τόσο το $x(t)$ και $y(t)$ είναι ανάλογα του $\sin\omega t$

Το βλήμα φθάνει σε μια απόσταση από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων ίση με v_0/ω και κατόπιν αρχίζει να κινείται πίσω προς την αρχή.

$d^2 = x^2 + y^2 \simeq \frac{v_0^2\cos^2\theta}{\omega^2}\sin^2\omega t + \frac{v_0^2\sin^2\theta}{\omega^2}\sin^2\omega t = \frac{v_0^2}{\omega^2}\sin^2\omega t$ για d_{max} τότε $\sin\omega t \simeq 1$ οπότε $d_{max}^2 = \frac{v_0^2}{\omega^2} \Rightarrow d_{max} = \frac{v_0}{\omega}$.

Από τις δύο συνθήκες (1) και (2) για μικρές και μεγάλες τιμές του ω, βλέπουμε ότι η χρονική κλίμακα των ταλαντώσεων χωρίς την παρουσία βαρύτητας, θα πρέπει να είναι πολύ μεγαλύτερη ή πολύ μικρότερη από την χρονική κλίμακα της κίνησης του βλήματος χωρίς την παρουσία του ελατηρίου, που είναι $\frac{2v_0\sin\theta}{g}$ (ο χρόνος πτήσης του βλήματος μέχρι να χτυπήσει στο έδαφος)

Η χρονική κλίμακα των ταλαντώσεων είναι: $\frac{1}{\omega} >> \frac{v_0\sin\theta}{g}$ και $\frac{1}{\omega} << \frac{v_0\sin\theta}{g}$ για τις κινήσεις με μικρό και μεγάλο ω αντίστοιχα.

(γ) Θέλουμε το βλήμα να χτυπήσει στο έδαφος $(y(t)=0)$ κινούμενο κατακόρυφα.

Η τελευταία συνθήκη προϋποθέτει ότι $\dot{x}(t)=0$

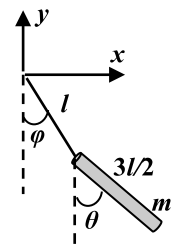
Από την εξίσωση (Β) όμως, έχουμε ότι $\dot{x}(t_0)=0 \Rightarrow v_0\cos\theta\cos\omega t = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \omega t_0 = \pi/2$.

Η τιμή του y την χρονική αυτή στιγμή θα είναι: $y(t_0) = \frac{mg}{k}(\cancel{\cos\omega t_0}^{\,0} - 1) + \frac{v_0\sin\theta}{\omega}1$

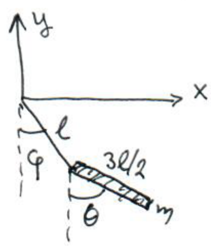
$\Rightarrow y(t_0) = -\frac{mg}{k} + \frac{v_0\sin\theta}{\omega} = 0 \Rightarrow \frac{v_0\sin\theta}{\omega} = \frac{mg}{k} \Rightarrow \frac{v_0\sin\theta}{\cancel{\omega}} = \frac{g}{\omega^{\cancel{2}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\omega = \frac{g}{v_0\sin\theta}}$ Η τιμή αυτή του ω_0 για την οποία το βλήμα πέφτει στο έδαφος με κατακόρυφο μόνο ταχύτητα είναι ακριβώς ενδιάμεσα των ακραίων τιμών του ω που προσδιορίσαμε στο (β) ερώτημα

4. Μια λεπτή ομοιογενής ράβδος μάζας m και μήκους $3l/2$, κρέμεται από μια ένα νήμα αμελητέας μάζας και μήκους l. Βρείτε τις κανονικές συχνότητες ταλάντωσης και κανονικούς τρόπους ταλάντωσης για μικρές ταλαντώσεις στο επίπεδο.



Από το σχήμα έχουμε τις συντεταγμένες του CM της ράβδου:



$$x_\rho^{CM} = \ell \sin\varphi + \frac{3}{4}\ell \sin\theta$$

$$y_\rho^{CM} = -\ell\cos\varphi - \frac{3}{4}\ell\cos\theta$$

Οι ταχύτητες $\dot{x}_\rho^{CM}$ και $\dot{y}_\rho^{CM}$ θα είναι:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_\rho^{CM} &= \ell\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{3}{4}\ell\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_\rho^{CM} &= \ell\dot{\varphi}\sin\varphi + \frac{3}{4}\ell\dot{\theta}\sin\theta\end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{x}_\rho^{2\,CM} + \dot{y}_\rho^{2\,CM} = \ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{9}{16}\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}\ell^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\theta-\phi)$$

Η ράβδος έχει επίσης κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής της ως προς το CM:

$$I_\rho^{CM} = \frac{1}{12}m\left(\frac{3\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow I_\rho^{CM} = \frac{3}{16}m\ell^2$$

Επομένως η Lagrangian του προβλήματος θα είναι:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{9}{16}\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}\ell^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos(\theta-\phi)\right) + \frac{3}{32}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\cos\varphi + \frac{3}{4}mg\ell\cos\theta$$

Για μικρές ταλαντώσεις μπορούμε να θεωρήσουμε μικρές γωνιακές αποκλίσεις οπότε θ, φ και $\dot{\theta}, \dot{\varphi}$ αρκετά μικρά, οπότε κρατούμε όρους μέχρι 2ης τάξης στις ποσότητες

$$L = \frac{1}{2}m\left(\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{9}{16}\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}\ell^2\dot{\varphi}\dot{\theta}\right) + \frac{3}{32}m\ell^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left(mg\ell\varphi^2 + \frac{3}{4}mg\ell\theta^2\right) + mg\ell + \frac{3}{4}mg\ell$$

Οπότε καταλήγουμε: $L = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\frac{\cancel{12}\,3}{\cancel{16}\,4}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{2}m\ell^2\dot{\varphi}\dot{\theta} - \frac{1}{2}mg\ell\left(\varphi^2 + \frac{3}{4}\theta^2\right) + \frac{7}{4}mg\ell$

Οι εξισώσεις Lagrange θα γραφούν:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Rightarrow \cancel{m}l^2\ddot\varphi + \frac{3}{4}\cancel{m}l^2\ddot\theta = \cancel{m}gl\varphi \Rightarrow l\ddot\varphi + \frac{3}{4}l\ddot\theta = -g\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \cancel{\frac{3}{4}}\cancel{m}l^2\ddot\theta + \cancel{\frac{3}{4}}\cancel{m}l^2\ddot\varphi = \cancel{\frac{3}{4}}\cancel{m}gl\theta \Rightarrow l\ddot\theta + l\ddot\varphi = -g\theta$$

Θεωρούμε λύσεις της μορφής: $\theta = Ae^{i\omega t}$ και $\phi = Be^{i\omega t}$ οπότε αντικατάσταση στις 2 εξισώσεις κίνησης θα δώσει:

$$\left.\begin{aligned}\left(-\frac{3}{4}l\omega^2A - Bl\omega^2\right)e^{i\omega t} &= -gBe^{i\omega t}\\ \left(-A\omega^2 l - Bl\omega^2\right)e^{i\omega t} &= -gAe^{i\omega t}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}-\frac{3}{4}l\omega^2A - (l\omega^2-g)B &= 0\\ -(\omega^2 l-g)A - l\omega^2B &= 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}-\frac{3}{4}l\omega^2 & -(l\omega^2-g)\\ -(l\omega^2-g) & -l\omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix} = 0 =$$

Η εξίσωση αυτή έχει μη τετριμμένες λύσεις για $\begin{vmatrix}-\frac{3}{4}l\omega^2 & -(l\omega^2-g)\\ -(l\omega^2-g) & -l\omega^2\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}l^2\omega^4 - l^2\omega^4 - g^2 + 2gl\omega^2 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}l^2\omega^4 + 2gl\omega^2 - g^2 = 0$$

Επομένως οι λύσεις είναι $\omega_{1,2}^2 = \dfrac{-8gl \pm \sqrt{64g^2l^2 - 16g^2l^2}}{(-2)l^2} \Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \dfrac{+8gl \pm \sqrt{48g^2l^2}}{2l^2}$

Έτσι οι δύο ιδιοσυχνότητες θα είναι: $\omega_{1,2}^2 = 4g/l \pm 2\sqrt{3}\,g/l \Rightarrow \boxed{\omega_{1,2}^2 = (4\pm 2\sqrt{3})\,g/l}$

Μπορούμε να γράψουμε: $\omega_{1,2}^2 = (1\pm\sqrt{3})^2\frac{g}{l} \Rightarrow \boxed{\omega = (\sqrt{3}\pm 1)\,g/l}$ αφού $\omega > 0$

Καταλήγουμε επομένως ότι οι ιδιοσυχνότητες είναι: $\omega_1 = (\sqrt{3}+1)\,g/l$

$\omega_2 = (\sqrt{3}-1)\,g/l$

Από την χαρακτηριστική εξίσωση των ιδιοδιανυσμάτων/ιδιοτιμών μπορούμε να υπολογίσουμε τα σχετικά πλάτη ταλάντωσης των συντεταγμένων των ιδιοδιανυσμάτων.

$$-(\omega^2 \ell - g)A - \ell\omega^2 B = 0 \Rightarrow -(\omega^2 \ell - g)A = \ell\omega^2 B \Rightarrow \boxed{\frac{B}{A} = \frac{g-\omega^2\ell}{\omega^2\ell}}$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές των ιδιοσυχνοτήτων και βρίσκουμε τα σχετικά πλάτη για κάθε συχνότητα:

$$\boxed{\omega = \omega_1 = (\sqrt{3}+1)\frac{g}{\ell}} : \quad \frac{B}{A} = \frac{g - \cancel{\ell}(\sqrt{3}+1)^2\frac{g}{\cancel{\ell}}}{\ell(\sqrt{3}+1)^2 \cancel{g/\ell}} = \frac{1-(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}+1)^2} = -\frac{(3+2\sqrt{3})}{(4+2\sqrt{3})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{B}{A} = -\frac{(3+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})}{16-12} \Rightarrow \frac{B}{A} = -\frac{\cancel{12}+8\sqrt{3}-6\sqrt{3}-\cancel{12}}{4} = -\frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{4}\,2} \Rightarrow \boxed{\frac{B}{A} = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Επομένως το ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοσυχνότητα ω_1 είναι: $A\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$

Για την συχνότητα αυτή θ και φ είναι αντίθετα σε φάση

$$\omega = \omega_2 = (\sqrt{3}-1)\frac{g}{\ell} \qquad \frac{B}{A} = \frac{g-\omega^2\ell}{\omega^2\ell} = \frac{1-(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)^2} = \frac{1-4+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}} = \frac{-3+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{(-3+2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})}{16-12} = \frac{-\cancel{12}-6\sqrt{3}+8\sqrt{3}+\cancel{12}}{4} \Rightarrow \boxed{\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Το ιδιοδιάνυσμα για την συχνότητα ω_2 είναι: $A\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}$

και για την ιδιοσυχνότητα αυτή, θ και φ είναι σε φάση

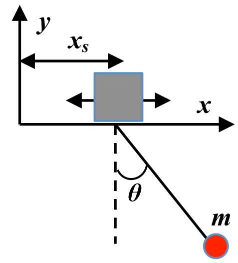
Και στις 2 περιπτώσεις ο λόγος των πλατών ταλάντωσης είναι $\sqrt{3}/2$.

5. Ένα απλό εκκρεμές μάζας *m,* είναι προσαρτημένο σε ένα στήριγμα αμελητέας μάζας στο οποίο ασκείται μια περιοδική δύναμη όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) Βρείτε την Lagrangian του συστήματος χρησιμοποιώντας σαν συντεταγμένες τη γωνία θ της εκτροπής του εκκρεμούς από την κατακόρυφο θέση και της $x(t)$ που δηλώνει την οριζόντια θέση του στηρίγματος του εκκρεμούς.

(β) Βρείτε την εξίσωση κίνησης για την συντεταγμένη θ.

(γ) Για μικρές γωνιακές μετατοπίσεις και για περιοδική κίνηση του υποστηρίγματος του εκκρεμούς της μορφής $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ βρείτε την λύση που αντιστοιχεί στη σταθερή κατάσταση της εξίσωσης κίνησης.



(α) Οι συντεταγμένες της μάζας m είναι:

$$\left.\begin{aligned} x_m &= x_s + l\sin\theta \\ y_m &= -l\cos\theta \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{η ταχύτητα}} \begin{aligned} \dot{x}_m &= \dot{x}_s + l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_m &= +l\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned}$$

Η Lagrangian του προβλήματος θα είναι: $L = T - V \Rightarrow$

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_s^2 + l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2l\dot{x}_s\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right) + mgl\cos\theta$$

(β) Οι εξισώσεις κίνησης προκύπτουν από τις εξισώσεις E-L οπότε έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial\theta} \Rightarrow \cancel{m}\left(\cancel{l^2}\ddot{\theta} + \ddot{x}_s\cancel{l}\cos\theta\right) = -\cancel{mgl}\sin\theta \Rightarrow l\ddot{\theta} + \ddot{x}_s\cos\theta + g\sin\theta = 0$$

(γ) Θεωρώντας ότι $x_s = x_0\cos(\omega t)$ και η γωνία θ είναι αρκετά μικρή, η προηγούμενη σχέση καταλήγει:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{\omega^2 x_0}{l}\cos(\omega t) \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{x_0}{l}\omega^2\cos\omega t \quad \text{όπου } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Μια ειδική λύση προκύπτει θεωρώντας ότι $\theta = A\cos(\omega t)$. Με αντικατάσταση

$$\left(-\omega^2 + \omega_0^2\right)\theta = \frac{\omega^2 x_0}{l}\cos(\omega t) \Rightarrow \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)A\,\cancel{\cos(\omega t)} = \frac{\omega^2 x_0}{l}\cancel{\cos(\omega t)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{\omega^2 x_0}{l(\omega_0^2 - \omega^2)}} \quad \text{οπότε:} \quad \boxed{\theta = \frac{x_0\omega^2\cos(\omega t)}{l(\omega_0^2 - \omega^2)} + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}$$

για $\omega \neq \omega_0$!