ΦΥΣ 111

Ενδιάμεση Εξέταση: 22-Οκτωβρίου-2020

Πριν αρχίσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητας).

Ονοματεπώνυμο	**Αριθμός Ταυτότητας**

Απενεργοποιήστε τα κινητά σας.

Η εξέταση αποτελείται από 2 μέρη. Το πρώτο μέρος έχει 10 προβλήματα πολλαπλής επιλογής και το δεύτερο μέρος έχει 4 κανονικά προβλήματα. Η μέγιστη συνολική βαθμολογία της εξέτασης είναι 120 μονάδες.

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΣΤΕ ΜΟΝΟ ΤΙΣ ΣΕΛΙΔΕΣ ΠΟΥ ΣΑΣ ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΜΗΝ ΚΟΨΕΤΕ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΣΕΛΙΔΑ

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 180 λεπτά. Καλή Επιτυχία !

<table>
<tr><th colspan="2">Μέρος Α</th><th colspan="2">Μέρος Β</th></tr>
<tr><th>Άσκηση</th><th>Βαθμός</th><th>Άσκηση</th><th>Βαθμός</th></tr>
<tr><td>$1^{η}$ (5μ)</td><td></td><td>$1^{η}$ (15μ)</td><td></td></tr>
<tr><td>$2^{η}$ (5μ)</td><td></td><td>$2^{η}$ (15μ)</td><td></td></tr>
<tr><td>$3^{η}$ (5μ)</td><td></td><td>$3^{η}$ (20μ)</td><td></td></tr>
<tr><td>$4^{η}$ (5μ)</td><td></td><td>$4^{η}$ (20μ)</td><td></td></tr>
<tr><td>$5^{η}$ (5μ)</td><td></td><td>Σύνολο</td><td></td></tr>
<tr><td>$6^{η}$ (5μ)</td><td></td><td rowspan="6">Σύνολο</td><td rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>$7^{η}$ (5μ)</td><td></td></tr>
<tr><td>$8^{η}$ (5μ)</td><td></td></tr>
<tr><td>$9^{η}$ (5μ)</td><td></td></tr>
<tr><td>$10^{η}$ (5μ)</td><td></td></tr>
<tr><td>Σύνολο</td><td></td></tr>
</table>

Τύποι που μπορούν να φανούν χρήσιμοι

Γραμμική κίνηση:

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 + \int_{t_i}^{t_f} a(t)\,dt$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_i}^{t_f} \upsilon(t)\,dt$$

$\upsilon^2 = \upsilon_o^2 + 2a(x - x_o)$ για α=σταθ.

$x = x_o + \frac{1}{2}(\upsilon + \upsilon_o)t$ για α = σταθ

$x_{\max} = \frac{\upsilon_o^2 \sin 2\theta}{g}$ βεληνεκές

g = 9.8m/s^2

Τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) + \cos(a+b) = 2\cos(a)\cos(b)$$

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) + \sin(a+b) = 2\sin(a)\cos(b)$$

$$\cos^2(a) = \frac{1}{1+\tan^2(a)}$$

$$\sin^2(a) = \frac{\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}$$

Κυκλική κίνηση:

$\theta = \frac{s}{R}$ s =μήκος τόξου κύκλου ακτίνας R

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \; f = \frac{1}{T}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t \qquad \alpha_{\gamma\omega\nu} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \qquad \alpha_{\gamma\omega\nu} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

$$\omega_f^2 - \omega_i^2 = 2\alpha_{\gamma\omega\nu}(\theta_f - \theta_i) \qquad \alpha_{\gamma\omega\nu} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

$$\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho,} = \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi.} \qquad \left|\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.}\right| = \frac{\left|\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi}\right|^2}{R} = \left|\vec{\omega}\right|^2 R$$

$$\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi.} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \left|\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi.}\right| = \left|\vec{\omega}\right| R$$

$$\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \; \vec{a}_{\varepsilon\varphi.} = \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.} \times \vec{r} \Rightarrow \left|\vec{a}_{\varepsilon\varphi.}\right| = \left|\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.}\right|\left|\vec{r}\right|$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{\varepsilon\varphi.} + \vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau.} = \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi.}$$

ΜΕΡΟΣ Α

Άσκηση 1 [5μ]

Θεωρήστε ένα κουβά γεμάτο με νερό πυκνότητας ρ kg/m^3. Ο κουβάς έχει μία μικρή τρύπα σε ύψος h κάτω από την επιφάνεια του νερού. Υποθέτοντας ότι το ιξώδες του νερού είναι αμελητέο, ποια από τις ακόλουθες εξισώσεις δίνει την ταχύτητα με την οποία εξέρχεται το νερό από την τρύπα;). (**Αιτιολογήστε την απάντησή σας**). (<u>*Υπόδειξη:*</u> Δεν χρειάζεται να λύσετε το πρόβλημα).

(α) $\sqrt{2gh}$ (β) $\sqrt{2\rho gh}$ (γ) $\sqrt{2g/h}$ (δ) $\sqrt{2h/g}$ (ε) $\sqrt{2gh/\rho}$

$\boxed{(α)\ \sqrt{2gh}}$ Η απάντηση αυτή είναι η μόνη που έχει μονάδες m/s.

Προσέξτε ότι η απάντηση δεν μπορεί να έχει την πυκνότητα ρ, γιατί δεν θα υπήρχε τρόπος να απαλείψαμε τις μονάδες του kg.

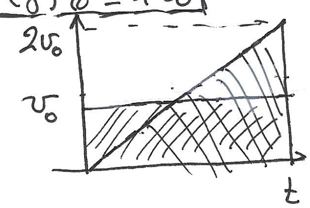
Η ταχύτητα αυτή είναι η ίδια με την ταχύτητα που αποκτά μια μπάλα που έχει πέσει κατά ένα ύψος h, υποθέτοντας ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα. Αν συμπεριλάβουμε την αντίσταση του αέρα, τότε εισάγεται μια νέα παράμετρος που εμπεριέχει μονάδες μάζας (kg) και η ταχύτητα της μπάλας μπορεί να εξαρτάται από τη μάζα (που ισχύει όπως έχουμε δει). Μια μεταλλική μπάλα πέφτει πιο γρήγορα από μια πλαστική μπάλα. Υπάρχει κάτι που περιπλέκει την κατάσταση, και αυτό έχει να κάνει με το μέγεθος της τρύπας, το οποίο εισάγει ένα επιπλέον μήκος. Σαν αποτέλεσμα υπάρχουν τώρα άπειρες απαντήσεις για την ταχύτητα. Μια έκφραση της μορφής $\sqrt{2gh^{n+1}/l^n}$ έχει τις σωστές μονάδες ταχύτητας. (l θεωρούμε ότι είναι το μέγεθος της τρύπας). Ωστόσο θεωρώντας το ιξώδες του νερού αμελητέο, $n=0$, δηλαδή το μέγεθος της οπής δεν παίζει ρόλο.

Άσκηση 2 [5μ]

Ένα αυτοκίνητο κινείται στον αυτοκινητόδρομο με σταθερή ταχύτητα υ_0. Τη χρονική στιγμή t=0 περνά μπροστά από μια μοτοσυκλέτα της τροχαίας, η οποία ξεκινά να το καταδιώκει κινούμενη με σταθερή επιτάχυνση. Ποια είναι η ταχύτητα της μοτοσυκλέτας τη στιγμή που φθάνει το αυτοκίνητο; (**Αιτιολογήστε την απάντησή σας**). (<u>*Υπόδειξη:*</u> Κάντε το γράφημα της υ-t για τα δύο οχήματα).

(α) υ_0 (β) $3\upsilon_0/2$ (γ) $2\upsilon_0$ (δ) $3\upsilon_0$ (ε) $4\upsilon_0$

$\boxed{(\gamma)\ \upsilon = 2\upsilon_0}$



Κατασκευάζουμε το γράφημα υ-t για το αυτοκίνητο και την μοτοσυκλέτα. Το εμβαδό της επιφάνειας που περικλείεται από τις δύο καμπύλες της ταχύτητας ως προς το χρόνο, δίνει την μετατόπιση των δύο οχημάτων.

Όταν τα δύο οχήματα συναντηθούν, θα έχουν την ίδια μετατόπιση.

Η μετατόπιση του αυτοκινήτου δίνεται από το εμβαδό του παραλληλογράμμου ενώ η μετατόπιση της μοτοσυκλέτας που επιταχύνει δίνεται από το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου.

Για να έχουν το ίδιο εμβαδό έχοντας την ίδια πλευρά, θα πρέπει η κατακόρυφη πλευρά του τριγώνου να είναι διπλάσια αυτής του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Επομένως η ταχύτητα της μοτοσυκλέτας τη στιγμή της συνάντησής τους είναι ίση με $2\upsilon_0$. <u>Παρατηρήστε</u> ότι η τιμή αυτή είναι ανεξάρτητη από την επιτάχυνση της μοτοσυκλέτας (σταθερής). Ακόμα και αν η επιτάχυνση της μοτοσυκλέτας ήταν πολύ μικρή, θα έκανε μεγάλο χρονικό διάστημα να φτάσει το αυτοκίνητο, αλλά όταν θα το έφθανε, η ταχύτητα θα ήταν πάλι $2\upsilon_0$. !!

Διαφορετικά κάποιος θα μπορούσε να λύσει το πρόβλημα θεωρώντας τις θέσεις των δύο σωμάτων τη στιγμή της συνάντησής τους.

Για το όχημα θα ήταν $\upsilon_0 t$ ενώ για την μοτοσυκλέτα $\frac{1}{2}at^2$. Επομένως $\upsilon_0 \cancel{t} = \frac{1}{2}at^{\cancel{2}} \Rightarrow \upsilon_0 = \frac{1}{2}at$ Αλλά η ταχύτητα της μοτοσυκλέτας που κινείται με <u>σταθερή</u> επιτάχυνση είναι: $\upsilon = at$. Επομένως $\upsilon_0 = \frac{1}{2}\upsilon \Rightarrow \upsilon = 2\upsilon_0$

Άσκηση 3 [5μ]

Μια μπάλα εκτοξεύεται από το έδαφος προς τα πάνω με ταχύτητα $υ_0$ και γωνία θ ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Ταυτόχρονα, μια δεύτερη μπάλα εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω από το σημείο του εδάφους που βρίσκεται κάτω από το μέγιστο ύψος της τροχιάς της πρώτης μπάλας. Ποια θα πρέπει να είναι η ταχύτητα της δεύτερης μπάλας αν θέλουμε να συγκρουστεί με την πρώτη μπάλα; (**Αιτιολογήστε την απάντησή σας**).

(α) $\upsilon_0/2$ (β) $\upsilon_0/\sqrt{2}$ (γ) υ_0 (δ) $\upsilon_0 cos\theta$ (ε) $\upsilon_0 sin\theta$

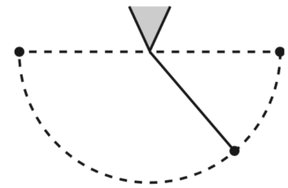
$\boxed{(ε)\ \upsilon_0 sin\theta}$

Η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας της $1^{ης}$ μπάλας είναι $\upsilon_0 sin\theta$. Αν η $2^η$ μπάλα εκτοξευτεί με την ταχύτητα αυτή, τότε θα έχει σε κάθε χρονική στιγμή το ίδιο ύψος με την $1^η$ μπάλα.

Επομένως οι δύο μπάλες θα συγκρουστούν όταν η οριζόντια θέση της $1^{ης}$ μπάλας γίνει ίδια με την θέση της $2^{ης}$ μπάλας, στην κορυφή της παραβολικής τροχιάς.

Σημειώστε ότι η αρχική θέση της $2^{ης}$ μπάλας δεν παίζει ρόλο. Από τη στιγμή που εκτοξεύεται ταυτόχρονα με την $1^η$ μπάλα με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 sin\theta$, μπορεί να εκτοξευτεί από οποιοδήποτε σημείο κάτω από την παραβολική τροχιά της $1^{ης}$ μπάλας. Οι μπάλες θα έχουν πάντοτε το ίδιο ύψος σε κάθε χρονική στιγμή. Θα συγκρουστούν επομένως όταν η οριζόντια θέση της $1^{ης}$ μπάλας συμπίπτει με την θέση της εκτόξευσης της $2^{ης}$ μπάλας. Σημειώστε επίσης ότι αν η $2^η$ μπάλα εκτοξευτεί από θέση που είναι $x > R/2$ (R το βεληνεκές της $1^{ης}$ μπάλας) τότε οι δύο μπάλες θα συγκρουστούν καθώς κατεβαίνουν και οι δύο. Στο $1^ο$ μισό της παραβολικής τροχιάς συναντιώνται καθώς ανεβαίνουν.

Άσκηση 4 [5μ]



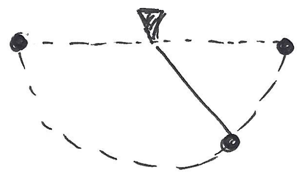
Ένα εκκρεμές ταλαντώνεται μεταξύ των δύο οριζόντιων θέσεων που φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Η επιτάχυνση στις δύο οριζόντιες θέσεις είναι κατακόρυφη προς τα κάτω (επιτάχυνση της βαρύτητας g). Ποια/ες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθής; (**Αιτιολογήστε την απάντησή σας**).

(α) Υπάρχει τουλάχιστον ακόμα ένα σημείο της τροχιάς που η επιτάχυνση είναι κατακόρυφη.

(β) Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο της τροχιάς που η επιτάχυνση είναι οριζόντια.

(γ) Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο που η επιτάχυνση είναι μηδέν.

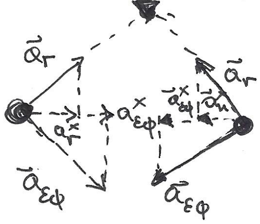
(δ) Δεν ισχύει τίποτα από τα προηγούμενα.



Η σωστή απάντηση είναι το (β)

Στις δύο ακραίες οριζόντιες θέσεις, η επιτάχυνση είναι κατακόρυφη και αρνητική (φορά προς τα κάτω, λόγω της επιτάχυνσης της βαρύτητας). Στην κατακόρυφη θέση, η επιτάχυνση είναι και πάλι κατακόρυφη αλλά με φορά προς τα πάνω (θετική) γιατί η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι μέγιστη στη θέση αυτή (μέγιστη ταχύτητα). Καθαρά για λόγους συνέχειας (αρνητική, θετική) θα πρέπει να υπάρχει ένα σημείο στο οποίο η επιτάχυνση έχει μηδενική κατακόρυφη συνιστώσα. Δηλαδή θα πρέπει να είναι οριζόντια σε κάποιο ενδιάμεσο σημείο.

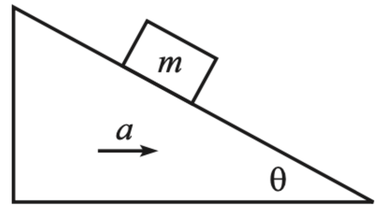
Η επιτάχυνση δεν είναι ποτέ κατακόρυφη (εκτός των υψηλότερων σημείων και του κατακόρυφου σημείου) επειδή τα διανύσματα της κεντρομόλου επιτάχυνσης $\vec{a}_r$ και της εφαπτομενικής επιτάχυνσης $\vec{a}_{εφ}$, έχουν συνιστώσες με φορά προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά και οι δύο και επομένως η x-συνιστώσα της συνολικής επιτάχυνσης δεν είναι μηδενική.



Αυτό συνάδει με το γεγονός, ότι η Τάση του νήματος, όταν το εκκρεμές βρίσκεται σε κάποια ενδιάμεση θέση της τροχιάς του, έχει οριζόντια συνιστώσα μη μηδενική. Η Τάση του νήματος είναι μηδενική στην ακραία οριζόντια θέση του σώματος, και έχει μηδενική οριζόντια συνιστώσα στην κατακόρυφη θέση της τροχιάς του.

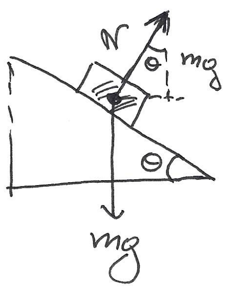
Άσκηση 5 [5μ]

Ένα κιβώτιο μάζας *m* βρίσκεται πάνω σε λεία κεκλιμένη επιφάνεια γωνίας κλίσης θ με την οριζόντια διεύθυνση, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν η κεκλιμένη επιφάνεια επιταχύνεται προς τα δεξιά με επιτάχυνση τέτοια ώστε το κιβώτιο να παραμένει ακίνητο ως προς την επιφάνεια, η κάθετη αντίδραση από την επιφάνεια στο κιβώτιο είναι: (**Αιτιολογήστε την απάντησή σας**).



(α) mg (β) $mgsin\theta$ (γ) $mg/sin\theta$ (δ) $mgcos\theta$ (ε) $mg/cos\theta$

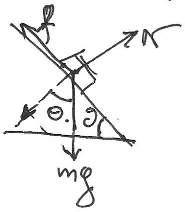
$\boxed{(\varepsilon)\ \frac{mg}{\cos\theta}}$



Από τη στιγμή που η κεκλιμένη επιφάνεια είναι λεία, οι μόνες δυνάμεις που δρουν στο σώμα είναι αυτές που φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Η κεκλιμένη επιφάνεια και το κιβώτιο επιταχύνονται προς τα δεξιά και επομένως δεν υπάρχει κίνηση στην κατακόρυφη διεύθυνση. Αυτό σημαίνει ότι το βάρος του σώματος ισούται με την κατακόρυφη συνιστώσα της αντίδρασης N από την κεκλιμένη επιφάνεια στο κιβώτιο. $N_y - mg \Rightarrow N\cos\theta = mg \Rightarrow N = mg/\cos\theta$

Μπορούμε να εξετάσουμε οριακές περιπτώσεις για να δούμε αν το αποτέλεσμα είναι λογικό. Αν $\theta = 0$ τότε η κεκλιμένη επιφάνεια είναι οριζόντια και $N = mg$, η κάθετη αντίδραση ισούται με το βάρος του σώματος. Αν $\theta = 90^\circ$, $N = \infty$. Αυτό έχει νόημα επίσης, αφού όταν η επιφάνεια είναι κατακόρυφη, χρειάζεται πολύ μεγάλη δύναμη (επιτάχυνση) για να μη γλιστρήσει το σώμα. (εφόσον δεν υπάρχει τριβή)

Αν υπήρχε τριβή μεταξύ του σώματος και της κεκλιμένης επιφάνειας, και το σύστημα ήταν ακίνητο. Η κάθετη δύναμη στην περίπτωση αυτή θα ήταν $N = mg\cos\theta$

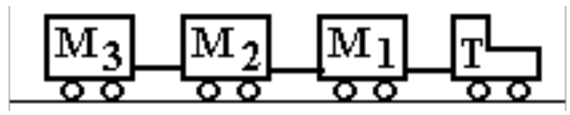


Επειδή δεν υπάρχει επιτάχυνση (κίνηση στην διεύθυνση κάθετη στην κεκλιμένη επιφάνεια) $\Sigma F_y' = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$.

Στην προηγούμενη περίπτωση, το βάρος ισούται με την κατακόρυφο συνιστώσα της κάθετης αντίδρασης N.

Άσκηση 6 [5μ]

Ένα τρακτέρ μάζας M_T = 300kg χρησιμοποιείται για την μεταφορά των αποσκευών στο αεροπλάνο. Το τρακτέρ τραβά 3 βαγονάκια μάζας M_1 = 200kg, M_2 = 100kg και M_3 = 100kg και κινούνται με επιτάχυνση 1.4m/s^2. Η ελάχιστη τιμή του συντελεστή τριβής μεταξύ των τροχών του τρακτέρ και του εδάφους είναι: (**Αιτιολογήστε την απάντησή σας**).



(α) 0.14

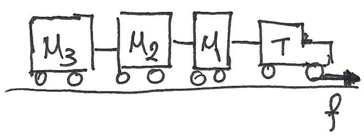
(β) 0.25

(γ) 0.33

$\boxed{\begin{array}{l}(\gamma)\\ 0.333\end{array}}$

Η δύναμη της τριβής στους τροχούς του τρακτέρ, από το έδαφος είναι η εξωτερική δύναμη που κινεί το σύστημα τρακτέρ-βαγονάκια.

Από τον 2ο νόμο του Newton έχουμε:



$$\Sigma F = M_{ολ} \cdot \alpha \Rightarrow \Sigma F = (M_T + M_1 + M_2 + M_3)\,\alpha$$

Αλλά $\Sigma F = f = \mu_s N \Rightarrow \Sigma F = \mu_s M_T g$ $\Rightarrow$

$N = M_T g$

$$\Rightarrow \mu_s M_T \cancel{g} = (M_T + M_1 + M_2)\,\alpha \Rightarrow \mu_s = \frac{M_T + M_1 + M_2}{M_T}\,\frac{\alpha}{g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_s = \frac{700\cancel{kg}}{300\cancel{kg}}\,\frac{1.4\cancel{m/s^2}}{9.8\cancel{m/s^2}} \Rightarrow \mu_s = 0.33$$

Άσκηση 7 [5μ]

Δυο βάρκες Α και Β πλέουν στα ήσυχα νερά μιας λίμνης. Η κίνησή τους περιγράφεται χρησιμοποιώντας ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων x και y με θετική διεύθυνση του x-άξονα ανατολικά (προς τα δεξιά) ενώ η θετική διεύθυνση του y-άξονα είναι βόρεια (προς τα πάνω). Η βάρκα Α έχει ταχύτητα $\upsilon_x = 5\, m/s$ και $\upsilon_y = -1\, m/s$. Η βάρκα Β έχει ταχύτητα $\upsilon_x = 4\, m/s$ και $\upsilon_y = 1\, m/s$. Η σχετική ταχύτητα των δυο βαρκών έχει μέτρο: (**Αιτιολογήστε την απάντησή σας**).

(α) 5.0 m/s (β) 4.1m/s (γ) 2.5 m/s (δ) 2.2 m/s (ε) 2.0 m/s

$\boxed{(\delta)\ 2{,}2\, m/s}$

Μας δίνονται οι ταχύτητες των δύο βαρκών ως προς ακίνητο σύστημα αναφοράς, εφόσον η λίμνη είναι ακίνητη.

Μπορούμε να γράψουμε τη σχετική ταχύτητα των δύο βαρκών ως:

$$\vec{\upsilon}_{A/\Lambda} = \vec{\upsilon}_{A/B} + \vec{\upsilon}_{B/\Lambda} \Rightarrow \vec{\upsilon}_{A/B} = \vec{\upsilon}_{A/\Lambda} - \vec{\upsilon}_{B/\Lambda}$$

Μπορούμε να γράψουμε τις συνιστώσες της προηγούμενης διανυσματικής εξίσωσης: Θεωρούμε θετική φορά x-άξονα προς τα δεξιά (ανατολικά) και του y-άξονα προς τα πάνω (βόρεια).

$$\vec{\upsilon}^{\,x}_{A/B} = \vec{\upsilon}^{\,x}_{A/\Lambda} - \vec{\upsilon}^{\,x}_{B/\Lambda}$$

$$\vec{\upsilon}^{\,y}_{A/B} = \vec{\upsilon}^{\,y}_{A/\Lambda} - \vec{\upsilon}^{\,y}_{B/\Lambda}$$

Οι προηγούμενες διανυσματικές εξισώσεις σε αλγεβρική μορφή είναι:

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon^{x}_{A/B} = \upsilon^{x}_{A/\Lambda} - \upsilon^{x}_{B/\Lambda} \\ \upsilon^{y}_{A/B} = \upsilon^{y}_{A/\Lambda} - \upsilon^{y}_{B/\Lambda} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \upsilon^{x}_{A/B} = 5\frac{m}{s} - 4\, m/s \Rightarrow \upsilon^{x}_{A/B} = 1\, m/s \\ \upsilon^{y}_{A/B} = -1\, m/s - 1\, m/s \Rightarrow \upsilon^{y}_{A/B} = -2\, m/s \end{array}$$

Επομένως $$\left|\vec{\upsilon}_{A/B}\right| = \sqrt{{\upsilon^{x}_{A/B}}^2 + {\upsilon^{y}_{A/B}}^2} = \sqrt{1\frac{m^2}{s^2} + 4\frac{m^2}{s^2}} \Rightarrow \left|\vec{\upsilon}_{A/B}\right| = 2.2\frac{m}{s}$$

Άσκηση 8 [5μ]

Ένα κιβώτιο βρίσκεται μέσα σε ένα ασανσέρ. Προσπαθείτε να σπρώξετε το κιβώτιο το οποίο κρατιέται στη θέση του λόγω στατικής τριβής. Ποια από τις ακόλουθες περιπτώσεις απαιτεί να καταβάλετε τη μεγαλύτερη δύναμη; (**Αιτιολογήστε την απάντησή σας**).

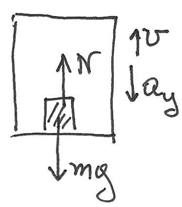
(α) Το ασανσέρ κινείται προς τα πάνω και ελαττώνει ταχύτητα

(β) Το ασανσέρ κινείται προς τα κάτω και αυξάνει ταχύτητα

(γ) Το ασανσέρ κινείται προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα

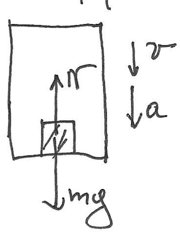
(γ)
Η σωστή απάντηση

(α) Στην περίπτωση που το ασανσέρ κινείται προς τα πάνω και ελαττώνει ταχύτητα έχει επιτάχυνση η οποία είναι αρνητική.



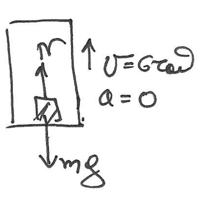
$$\Sigma F_y = ma_y = N - mg \Rightarrow N = ma_y + mg$$
$$\Rightarrow N = m(g - a_y) \Rightarrow N < N_0$$

(β) Στην περίπτωση που το ασανσέρ κατεβαίνει και αυξάνει ταχύτητα, έχει επιτάχυνση η οποία είναι αρνητική, στη φορά της κίνησης:



$$\Sigma F_y = ma_y = N - mg \Rightarrow N = ma_y + mg$$
$$\Rightarrow N = m(g - a_y) \Rightarrow N < N_0$$

(γ) Όταν το ασανσέρ κινείται με σταθερή ταχύτητα



$$\Sigma F_y = ma_y = 0 \Rightarrow N - mg = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N_0 = mg$$

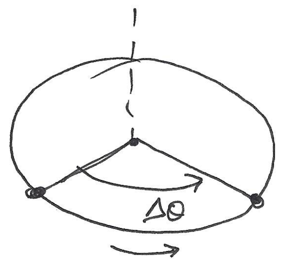
Η δύναμη που πρέπει να ασκηθεί για να κινηθεί το κιβώτιο πρέπει να είναι μεγαλύτερη από τη δύναμη της στατικής τριβής $F = f = \mu_s N \Rightarrow F = \mu_s N$ επομένως η (γ) περίπτωση απαιτεί τη μεγαλύτερη δύναμη αφού $F = max$.

Άσκηση 9 [5μ]

Ένα παιδί μάζας 30kg είναι δεμένο σε ένα τεντωμένο αβαρές σχοινί το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε στύλο που βρίσκεται στο κέντρο μιας πίστας παγοδρόμιου. Το παιδί πατινάρει γύρω από τον στύλο σε κυκλική τροχιά με γωνιακή ταχύτητα 1.0 rad/s και αρχίζει να επιβραδύνει με ρυθμό 0.01 rad/s^2. Πόσες στροφές θα κάνει γύρω από τον στύλο μέχρι να σταματήσει; (**Αιτιολογήστε την απάντησή σας**).

(α) 2 στροφές (β) 3 στροφές (γ) 4 στροφές (δ) 6 στροφές (ε) 8 στροφές

(ε)
8στροφές



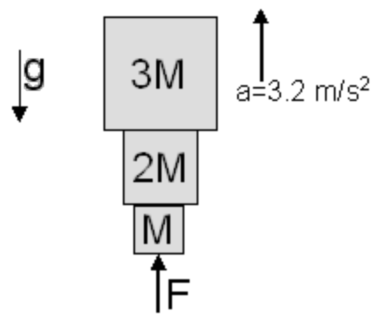
Το παιδί κινείται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $a_\gamma = -0.01\ rad/s^2$ και αρχική γωνιακή ταχύτητα $\omega = 1.0\ r/s$

Από την εξίσωση: $\omega_f^2 - \omega_i^2 = 2a_\gamma \cdot \Delta\Theta$ μπορούμε να βρούμε την γωνιακή μετατόπιση του σώματος, μέχρι να σταματήσει εφόσον $\omega_f = 0\ rad/s$. Επομένως θα έχουμε: $0 - \omega_i^2 = -2a_\gamma \Delta\Theta$

$$\Rightarrow \Delta\Theta = \frac{\omega_i^2}{2a_\gamma} = \frac{1\ rad^2/\cancel{s^2}}{2 \cdot 0.01\ \cancel{rad}/\cancel{s^2}} \Rightarrow \Delta\Theta = \frac{0.5}{0.01} \Rightarrow \Delta\Theta = 50\ rad$$

Αλλά $\Delta\Theta = 2\pi \cdot N = 50\ rad \Rightarrow N = \frac{\cancel{50}^{25}}{\cancel{2}\pi} = \frac{25}{\pi} \Rightarrow N \simeq 8$ στροφές

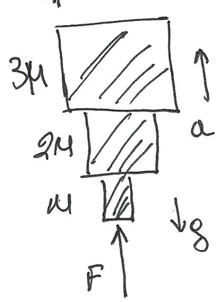
Άσκηση 10 [5μ]



Τρεις μάζες επιταχύνονται προς τα πάνω με μια δύναμη F που εφαρμόζεται στην κατώτερη μάζα M. Η μάζα M = 7kg ενώ οι άλλες μάζες είναι 2M και 3M αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η επιτάχυνση του συστήματος είναι $3.2 m/s^2$. Πως συγκρίνονται το μέτρο της δύναμης F_{1-2} στο κιβώτιο 2M από το κιβώτιο M, με το μέτρο της δύναμης F_{2-3} στο κιβώτιο 3M από το κιβώτιο 2M; (**Αιτιολογήστε την απάντησή σας**).

(α) $F_{1-2} < F_{2-3}$ (β) $F_{1-2} > F_{2-3}$ (γ) $F_{1-2} = F_{2-3}$

$\boxed{(β)\ F_{1-2} > F_{2-3}}$



Το σύστημα κινείται προς τα πάνω με επιτάχυνση α.

Η δύναμη $F_{1/2}$ είναι η δύναμη που ασκεί το σώμα μάζας M στο σώμα 2M, αλλά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η $F_{1/2}$ είναι η εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα των μαζών (2M+3M). Η άλλη εξωτερική δύναμη είναι η βαρυτική δύναμη. Επομένως στο σύστημα των σωμάτων (3M+2M) = 5M ο 2ος νόμος του Newton δίνει:

$\Sigma F_{5M} = F_{1/2} - 5Mg = 5Ma$ όπου α είναι η επιτάχυνση του συστήματος και όλων των σωμάτων που το αποτελούν.

Επομένως: $\boxed{F_{1/2} = 5M(a+g)}$ (1)

Η δύναμη $F_{2/3}$ είναι η δύναμη που ασκεί το σώμα 2M στο σώμα 3M. Από τον 2ο νόμο του Newton θα έχουμε:

$\Sigma F_{3M} = F_{2/3} - 3Mg = 3Ma \Rightarrow \boxed{F_{2/3} = 3M(a+g)}$ (2)

Επομένως από τις (1) και (2) έχουμε $F_{1/2} > F_{2/3}$

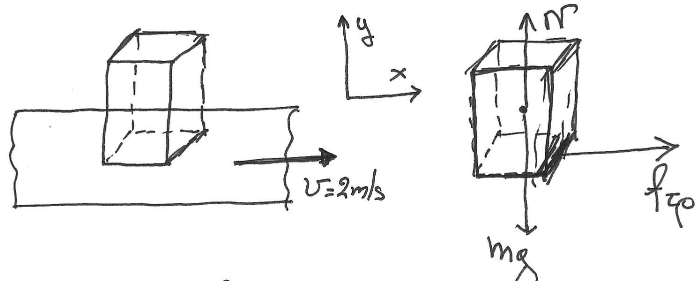
Αναμενόμενο εφόσον η $F_{1/2}$ χρειάζεται να θέσει σε κίνηση μεγαλύτερη μάζα από την $F_{2/3}$ και όλες οι μάζες να κινούνται με την ίδια επιτάχυνση.

ΜΕΡΟΣ Β

Άσκηση 1 [15μ]

Ένα κιβώτιο χωρίς αρχική οριζόντια ταχύτητα αφήνεται να πέσει πάνω σε ένα κινούμενο ιμάντα ο οποίος έχει ταχύτητα υ = 2m/s. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του κιβωτίου και του ιμάντα είναι 0.3. (α) Σχεδιάστε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος για το κιβώτιο. [**5μ**] (β) Βρείτε το χρόνο που απαιτείται ώστε το κιβώτιο να αρχίσει να κινείται χωρίς να γλιστρά. [**10μ**]

(α)



Κάνουμε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το κιβώτιο.
Στον y-άξονα ασκούνται η βαρυτική έλξη της γης και η κάθετη αντίδραση από τον ιμάντα.
Στον x-άξονα ασκείται μόνο η δύναμη της τριβής (κινητική) με φορά προς την φορά κίνησης του ιμάντα (+x-άξονας). Η τριβή εμφανίζεται προς αυτή τη διεύθυνση γιατί ο ιμάντας κινείται προς τα δεξιά ενώ το κιβώτιο όταν πέσει πάνω είναι αρχικά ακίνητο. Επομένως η τριβή από το κιβώτιο στον ιμάντα θα έχει φορά προς τα αριστερά (εφαρμόζεται στον ιμάντα). Λόγω δράσης-αντίδρασης μια δύναμη τριβής θα εμφανιστεί στο κιβώτιο με φορά προς τα δεξιά.
Η δύναμη της τριβής στο κιβώτιο είναι υπεύθυνη ώστε το κιβώτιο να αποκτήσει την ίδια ταχύτητα με τον ιμάντα ώστε να παραμένει ακίνητο ως προς τον ιμάντα. Αν ο ιμάντας ήταν λείος, τότε το κιβώτιο θα παρέμενε στο ίδιο σημείο που έπεσε και ο ιμάντας θα περνούσε κάτω από αυτό.

(β) Από τον 2ο νόμο του Newton στον x-άξονα: $\Sigma F = m_k a = f_k \Rightarrow a = \frac{f_k}{m_k}$

Η δύναμη της κινητικής τριβής είναι: $f_k = \mu N$ $\Big\} \Rightarrow f_k = \mu m_k g$

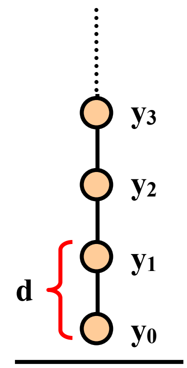
Εφαρμογή του 2ου νόμου του Newton στον y-άξονα: $\Sigma F_y = N - m_k g = 0 \Rightarrow N = m_k g$

Επομένως $a = \frac{\mu \cancel{m_k} g}{\cancel{m_k}} \Rightarrow \boxed{a = \mu g}$ ανεξάρτητη της μάζας του κιβωτίου.

Ο χρόνος που χρειάζεται ώστε το κιβώτιο να αρχίσει να κινείται χωρίς να γλιστρά είναι ο χρόνος που χρειάζεται να αποκτήσει την ταχύτητα του ιμάντα:

$$\upsilon = at \Rightarrow t = \frac{\upsilon}{a} = \frac{2m/s}{\mu g} = \frac{2m/s}{0.3 \cdot 9.8 m/s^2} \Rightarrow \boxed{t \simeq 0.68 sec}$$

Άσκηση 2 [15μ]



Μια σειρά από μικρές μεταλλικές σφαίρες είναι δεμένες σε ένα νήμα σε προσεκτικά επιλεγμένες θέσεις $y_0 = 0$, y_1, y_2, y_3 κλπ. Το νήμα κρατιέται κατακόρυφα με τέτοιον τρόπο ώστε η πρώτη σφαίρα στη θέση y_0, να είναι ακριβώς πάνω από το έδαφος όπου $y = 0$. Το νήμα αφήνεται ελεύθερο την χρονική στιγμή $t = 0$ και αμέσως η πρώτη σφαίρα χτυπά στο έδαφος. Όπως παρατηρείται οι υπόλοιπες σφαίρες χτυπούν στο έδαφος η μια μετά την άλλη μέσα σε **ίσα χρονικά διαστήματα**. Υποθέτοντας ότι $y_1 = d$, όπου d γνωστή απόσταση, προσδιορίστε τις αποστάσεις μεταξύ των σφαιρών, δηλαδή y_2-y_1, y_3-y_2, κλπ. συναρτήσει της απόστασης d. (Σημειώστε ότι στο σχήμα οι μπάλες δεν ισαπέχουν).

Ο χρόνος που απαιτείται ώστε η μπάλα στη θέση 1 να πέσει στο έδαφος είναι: $y_{1f} = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow 0 = d + \cancel{0 \cdot t} - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{2d}{g}}}$

Επομένως το χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών χτυπημάτων στο έδαφος είναι $t = \sqrt{2d/g}$ εφόσον σύμφωνα με την άσκηση, οι μπάλες πέφτουν σε ίσα χρονικά διαστήματα.

Δηλαδή ο χρόνος που χρειάζεται η μπάλα στη θέση 2 να πέσει στο έδαφος είναι $t_2 = 2t = 2\sqrt{2d/g}$

Αντικατάσταση στην εξίσωση: $\cancel{y_{2f}}^{0} = d_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \Rightarrow d_2 = \frac{1}{2} g t_2^2 = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{g}\, 4 \frac{\cancel{2}d}{\cancel{g}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{d_2 = 4d}$

Επομένως η απόσταση μεταξύ της μπάλας στη θέση 1 και της μπάλας στη θέση 2 είναι: $y_2 - y_1 = 4d - d \Rightarrow \boxed{y_2 - y_1 = 3d}$

Με το ίδιο σκεπτικό η μπάλα στη θέση 3 θα χρειαστεί χρόνο $t_3 = 3t_1 = 3\sqrt{2d/g}$ για να φθάσει στο έδαφος. Επομένως: $\cancel{y_{3f}}^{0} = d_3 - \frac{1}{2} g t_3^2 \Rightarrow d_3 = \frac{1}{2} g\, 9\, t_1^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow d_3 = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{g} \frac{\cancel{2}d}{\cancel{g}}\, 9 \Rightarrow \boxed{d_3 = 9d}$

Επομένως η απόσταση μεταξύ των μπαλών στις θέσεις 2 κ 3 είναι $\boxed{d_3-d_2=5d}$

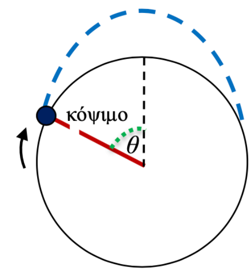
Μπορούμε να το γενικεύσουμε, ότι η θέση της η-μπάλας θα είναι: $\boxed{y_n=n^2 d_1}$

και επομένως η απόσταση μεταξύ της n κ $n-1$ μπάλας θα είναι $y_n-y_{n-1}=n^2-(n-1)^2 d$

$$\Rightarrow y_n-y_{n-1}=(n-n+1)(n+n-1)d \Rightarrow \boxed{y_n-y_{n-1}=(2n+1)d}$$

Άσκηση 3 [20μ]

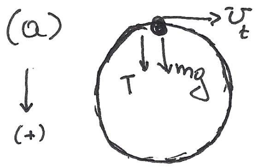
Ένα σώμα μάζας *m* είναι δεμένο στην άκρη ενός νήματος αμελητέας μάζας. Το άλλο άκρο του νήματος είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο. Το σώμα περιστρέφεται σε κατακόρυφο κύκλο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



(α) Ποια είναι ελάχιστη ταχύτητα που θα πρέπει να έχει το σώμα στη κορυφή της κυκλικής τροχιάς ώστε το νήμα να μη χαλαρώσει ποτέ; [**5μ**]

(β) Υποθέστε ότι το σώμα έχει την ελάχιστη ταχύτητα που βρήκατε στο ερώτημα (α). Σε ποια θέση (θα πρέπει να προσδιορίσετε τη γωνία *θ* που φαίνεται στο σχήμα) θα πρέπει να κόψετε το νήμα ώστε το σώμα να εκτελέσει βολή με τη θέση του μέγιστου ύψους της τροχιάς να βρίσκεται ακριβώς πάνω από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς. [**15μ**]

(α)



Στην κορυφή του κύκλου, οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι η τάση, T, του νήματος και η βαρυτική έλξη της γης, mg. Οι δύο δυνάμεις έχουν ακτινική διεύθυνση και φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.

Από τον 2ο νόμο του Newton: $\Sigma F = ma = T + mg = ma \Rightarrow \boxed{T = m(a-g)}$ (1)

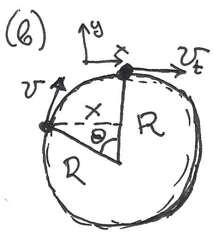
Η συνισταμένη δύναμη είναι η κεντρομόλος δύναμη που κρατά το σώμα σε κυκλική τροχιά: $\boxed{\Sigma F = F_k = m\frac{\upsilon_t^2}{R}}$ (2)

Επομένως αντικατάσταση της (2) στην (1): $\boxed{T = m\left(\frac{\upsilon_t^2}{R} - g\right)}$ (3)

Θέλουμε $T \geq 0$ οπότε $m\left(\frac{\upsilon_t^2}{R} - g\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{\upsilon_t^2}{R} \geq g \Rightarrow \boxed{\upsilon_t \geq \sqrt{gR}}$

Όταν $T<0$ το σχοινί χαλαρώνει και το σώμα πέφτει.

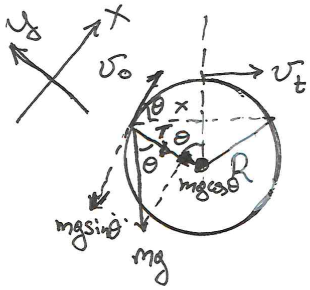
(β)



Η ταχύτητα του σώματος την στιγμή που κόβεται το νήμα είναι υ_0. Οι συνιστώσες της στην x και y διεύθυνση, στο σύστημα συντεταγμένων του σχήματος, είναι $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\theta$ και $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\theta$. Ο χρόνος ανόδου μέχρι το μέγιστο ύψος της τροχιάς όπου μηδενίζεται η ταχύτητα είναι: $\cancel{\upsilon_y}^{0} = \upsilon_{0y} - g t_{\alpha\nu} \Rightarrow t_{\alpha\nu} = \frac{\upsilon_{0y}}{g} \Rightarrow t_{\alpha\nu} = \frac{\upsilon_0 \sin\theta}{g}$

Στο χρόνο αυτό, το σώμα φθάνει στο μέσο του βεληνεκούς του που είναι ακριβώς πάνω από το κέντρο του κύκλου. Επομένως: $x = \upsilon_x \cdot t_{\alpha\nu} = \upsilon_0 \cos\theta \frac{\upsilon_0 \sin\theta}{g}$

$\Rightarrow x = \upsilon_0^2 \cos\theta \sin\theta / g \Rightarrow R \cdot \cancel{\sin\theta} = \upsilon_0^2 \cos\theta \cancel{\sin\theta}/g \Rightarrow \boxed{gR = \upsilon_0^2 \cos\theta}$ (A)



Στη θέση που κόβουμε το νήμα, η ταχύτητα του σώματος είναι υ_0. (Η ταχύτητα αυτή δεν είναι η ταχύτητα που έχει το σώμα στο μέγιστο ύψος της τροχιάς όπου η $T=0$)

Το σώμα, αν το νήμα δεν κόβονταν, θα είχε ταχύτητα υ_0 η οποία ελαττώνεται σε μέτρο εξαιτίας της εφαπτομενικής συνιστώσας της δύναμης του βάρους του $mg\sin\theta$.

Στην ακτινική διεύθυνση, δρα η συνιστώσα του βάρους $mg\cos\theta$, και η τάση του νήματος. Οι δύο αυτές δυνάμεις έχουν συνισταμένη δύναμη $\Sigma F_r = T + mg\cos\theta = \frac{m\upsilon^2}{R}$ που δρα ως κεντρομόλος δύναμη. Η δύναμη αυτή δεν προκαλεί αλλαγή του μέτρου της ταχύτητας, αλλά μόνο αλλαγή στη διεύθυνσή της.

Επομένως αλλαγή στην ταχύτητα (στο μέτρο) έχουμε εξαιτίας της $mg\sin\theta$ που δρα εφαπτομενικά. Η συνιστώσα αυτή δεν είναι σταθερή, αλλά μεταβάλλεται καθώς το σώμα κινείται προς την κορυφή του κύκλου. Φυσικά αλλάζει και η τάση και συνιστώσα του βάρους στην ακτινική διεύθυνση.

Ξέρουμε ότι $a_{\varepsilon\varphi} = \frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -g\sin\theta$

Επίσης έχουμε ότι $\upsilon = \omega R = \frac{d\theta}{dt} R \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{\upsilon}{R}$

$$\Rightarrow -g\sin\theta = \frac{d\upsilon}{dt}\frac{d\theta}{d\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -g\sin\theta = \frac{d\upsilon}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g\sin\theta = \frac{d\upsilon}{d\theta}\frac{\upsilon}{R} \Rightarrow \boxed{\upsilon\, d\upsilon = -gR\sin\theta\, d\theta}$$

ολοκληρώνουμε τη σχέση αυτή για να βρούμε τη μεταβολή της ταχύτητας:

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon_t} \upsilon\, d\upsilon = -\int_{\theta}^{0} gR\sin\theta\, d\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon^2\Big|_{\upsilon_0}^{\upsilon_t} = -gR\cos\theta\Big|_{\theta}^{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\upsilon_t^2 - \upsilon_0^2\right) = -gR\left[\cos 0 - \cos\theta\right] \Rightarrow \upsilon_t^2 - \upsilon_0^2 = -2gR(1-\cos\theta) \Rightarrow \boxed{\upsilon_0^2 = \upsilon_t^2 + 2gR(1-\cos\theta)}$$

Ξέρουμε ότι το σώμα πληροί τις συνθήκες της $\upsilon_t = \sqrt{gR} \Rightarrow \upsilon_t^2 = gR$ όταν $T=0$

Επομένως: $\upsilon_0^2 = gR + 2gR(1-\cos\theta) \Rightarrow \upsilon_0^2 = gR\left[1+2-2\cos\theta\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon_0^2 = gR(3-2\cos\theta)} \quad (B)$$

Έχουμε την ταχύτητα της μπάλας τη στιγμή που κόβουμε το νήμα.

Αντικαθιστούμε την (B) στην (A):

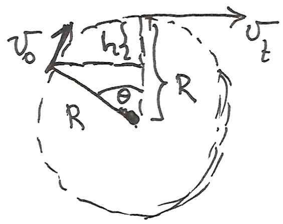
$$\cancel{g}\cancel{R} = \cancel{g}\cancel{R}(3-2\cos\Theta)\cos\Theta \Rightarrow (3-2\cos\Theta)(\cos\Theta) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cos\Theta - 2\cos^2\Theta = 1 \Rightarrow 2\cos^2\Theta - 3\cos\Theta + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2\cos\Theta - 1)(\cos\Theta - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\cos\Theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\Theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\Theta = 60^\circ} \\ \cos\Theta - 1 = 0 \Rightarrow \cos\Theta = 1 \Rightarrow \boxed{\Theta = 0^\circ} \end{cases}$$

Η λύση $\Theta = 0$, δεν είναι ενδιαφέρουσα.

Να σημειωθεί ότι η άσκηση θα είχε πολύ πιο απλή λύση αν χρησιμοποιήσουμε αρχή διατήρηση της μηχανικής ενέργειας.



Στο μέγιστο ύψος της τροχιάς το σώμα έχει μηδενική δυναμική ενέργεια, και μόνο κινητική ενέργεια.

Στη θέση Θ έχει κινητική και δυναμική ενέργεια.

Δεν υπάρχουν άλλες δυνάμεις που να καταναλώνουν ή να παράγουν έργο, και επομένως:

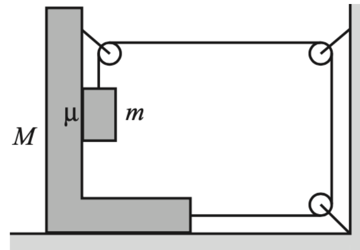
$$E^{i}_{μηχ} = E^{f}_{μηχ} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 - mgh = \frac{1}{2} m v_t^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m} v_0^2 = \frac{1}{2}\cancel{m} v_t^2 + \cancel{m} gh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v_0^2 = \frac{1}{2} v_t^2 + g[R - R\cos\Theta] \Rightarrow v_0^2 = v_t^2 + 2gR[1 - \cos\Theta] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0^2 = gR + 2gR(1 - \cos\Theta) \Rightarrow v_0^2 = gR(3 - 2\cos\Theta)$$ όπως και το (B)

Άσκηση 4 [20μ]

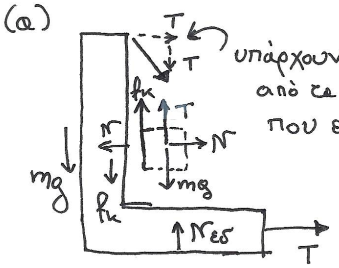
Θεωρήστε το σύστημα σωμάτων και τροχαλιών του διπλανού σχήματος. Οι τροχαλίες είναι λείες και αβαρείς ενώ τα νήματα που συνδέουν τα σώματα είναι μη εκτατά και έχουν αμελητέα μάζα. Το σώμα σχήματος L έχει μάζα *M*, ενώ το κιβώτιο έχει μάζα *m*. Μεταξύ των επιφανειών του κιβωτίου και του *L*-σώματος ο συντελεστής κινητικής τριβής είναι μ_k. Το σώμα σχήματος *L* κινείται πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια.



(α) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για τα δύο σώματα. Προσέξτε ώστε να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις. [**7μ**]

(β) Να βρείτε την επιτάχυνση του σώματος σχήματος *L*. [**13μ**]

(α)

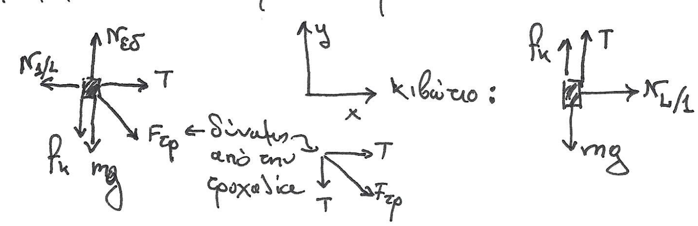


υπάρχουν δύο τάσεις, T, από τα 2 τμήματα σχοινιών που εφάπτονται στην τροχαλία

Αν θεωρήσουμε ότι T είναι η τάση του νήματος τότε αυτή είναι παντού ίδια εφόσον το νήμα είναι αμελητέας μάζας και μη εκτατό, καθώς και οι τροχαλίες είναι αβαρείς και λείες

Οι δυνάμεις στα δύο σώματα φαίνονται στο παραπάνω σχήμα.

Τα διαγράμματα ελεύθερων σωμάτων θα είναι:



(β) Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα στα 2-σώματα: (να σημειωθεί ότι για το σώμα L δεν έχουμε κίνηση στην κατακόρυφη διεύθυνση, αλλά μόνο στη x-διεύθυνση). Για το σώμα m υπάρχει κίνηση τόσο στην y όσο και στη x-διεύθυνση.

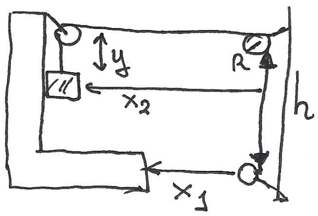
M: x-διεύθυνση $\Sigma F_x = Ma \Rightarrow T + \overset{T}{\cancel{F_{\tau\rho}}} - N_{1/L} = Ma \Rightarrow 2T - N_{1/L} = Ma_{x_L}$ (1)

m: x-διεύθυνση $\Sigma F_x = ma \Rightarrow N_{L/1} = ma_{x1}$ (2)

m: y-διεύθυνση $\Sigma F_y = -ma_y \Rightarrow f_k + T - mg = ma_y \Rightarrow \mu N_{L/l} + T - mg = ma_y$ (3)

Στην x-διεύθυνση τα δύο σώματα έχουν την ίδια επιτάχυνση $\boxed{a_{x1} = a_{xL}}$ (4) επειδή τα σώματα είναι σε επαφή.

Η επιτάχυνση του σώματος m, στην y-διεύθυνση είναι, από διατήρηση



του νήματος: $x_1 + x_2 + h + y + 3\frac{\pi}{4}R = \ell \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + y = \ell - h - 3\frac{\pi}{4}R \Rightarrow$ παραγώγιση ως προς t δύο φορές

$$\Rightarrow a_{1L} + a_{2\Sigma} + y_\Sigma = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_L + a_\Sigma = -y_\Sigma \overset{(4)}{\Rightarrow} \boxed{2a_x = -y_\Sigma} \quad (5)$$

Αντικατάσταση της (2) στην (1) δίνει: $2T - ma_x = Ma_x$ (6)

Από (3) κ (5) έχουμε: $\mu N_{L/l} + T - mg = -2ma_x \overset{(6)\,\&\,(2)}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow \mu(ma_x) + \frac{1}{2}(M+m)a_x - mg = -2ma_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\mu m a_x + (M+m)a_x - 2mg = -4ma_x \Rightarrow 2mg = (2\mu m + M + m + 4m)a_x$$

$$\Rightarrow 2mg = (2\mu m + 5m + M)a_x \Rightarrow \boxed{a_x = \frac{2mg}{[m(2\mu+5)+M]}}$$

Για $m \to 0$ τότε $a_x \to 0$ το οποίο έχει νόημα εφόσον δεν μπορεί να κινηθεί το L.