Γωνίες Euler

- Όλοι σχεδόν οι υπολογισμοί που έχουμε κάνει για την κίνηση ενός στερεού στο σύστημα συντεταγμένων του στερεού σώματος
  - Για παράδειγμα η γωνιακή ταχύτητα είναι: $\vec{\omega} = \sum_i \omega_i \vec{e}_i$
- Ωστόσο θα θέλαμε να καταλάβουμε/περιγράψουμε την κίνηση του στερεού ως προς αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων:
- Η σύνδεση μεταξύ του περιστρεφόμενου και αδρανειακού συστήματος γίνεται μέσω: $\vec{e}_i = \sum_j U_{ij} \vec{e}'_j$
  - Επομένως είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να υπάρχει ένας ακριβής τρόπος για να παραμετροποιήσουμε τους πίνακες περιστροφής:
- Ισχυρισμός: Ένας τυχαίος 3×3 ορθογώνιος πίνακας περιστροφής U_{ij} μπορεί να γραφεί σαν το αποτέλεσμα 3 διαδοχικών περιστροφών, ψ, θ, φ γύρω από 3 διαφορετικούς άξονες συντεταγμένων

$U(\psi,\theta,\varphi) = U_3(\psi) U_1(\theta) U_3(\varphi)$ όπου U_j περιγράφει περιστροφή ως προς $\vec{e}_j$

  - π.χ $U_3(\varphi)$ περιγράφει περιστροφή γύρω από τον z-άξονα κατά γωνία φ $U_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Γωνίες Euler

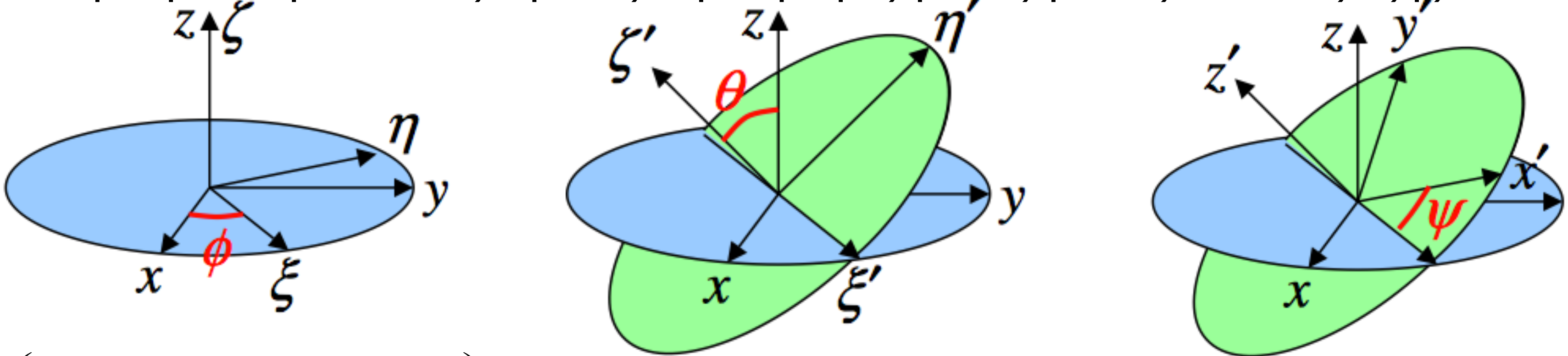
- Ανάλογα, ο πίνακας περιστροφής $U_1(\theta)$ θα περιγράφει περιστροφή κατά γωνία θ, ως προς τον x-άξονα

$$U_1(\theta)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

  - Προσοχή: άξονας $\vec{e}_j$ ως προς τον οποίο γίνεται η περιστροφή, είναι αυτός όπως έχει προκύψει μετά από κάποια προηγούμενη περιστροφή
  - Γράφοντας αναλυτικά τις περιστροφές:
    - $U_3(\varphi):\quad \vec{e}_i' \longrightarrow \vec{e}_j'' = \sum_i U_3(\varphi)_{ji}\,\vec{e}_i'$ περιστροφή γύρω από τον z-άξονα των αδρανειακών συντεταγμένων
    - $U_1(\theta):\quad \vec{e}_i'' \longrightarrow \vec{e}_j''' = \sum_i U_1(\theta)_{ji}\,\vec{e}_i''$ περιστροφή γύρω από τον x-άξονα των $''$ συντεταγμένων (δηλαδή $\vec{e}_x''$)
    - $U_3(\psi):\quad \vec{e}_i''' \longrightarrow \vec{e}_j = \sum_i U_3(\psi)_{ji}\,\vec{e}_i'''$ περιστροφή γύρω από τον z-άξονα των $'''$ συντεταγμένων (δηλαδή $\vec{e}_z'''$)
  - Η διαδικασία αυτή επιτρέπει την γραφή της γωνιακής ταχύτητας στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς: $\vec{e}_i'$

Γωνίες Euler – Γραφικά

- Θα μπορούσαμε να δείξουμε τις περιστροφές για τις γωνίες Euler ως εξής:



$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\cos\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi & \cos\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta\\ -\sin\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\cos\psi & -\sin\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta\\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\end{pmatrix}$$

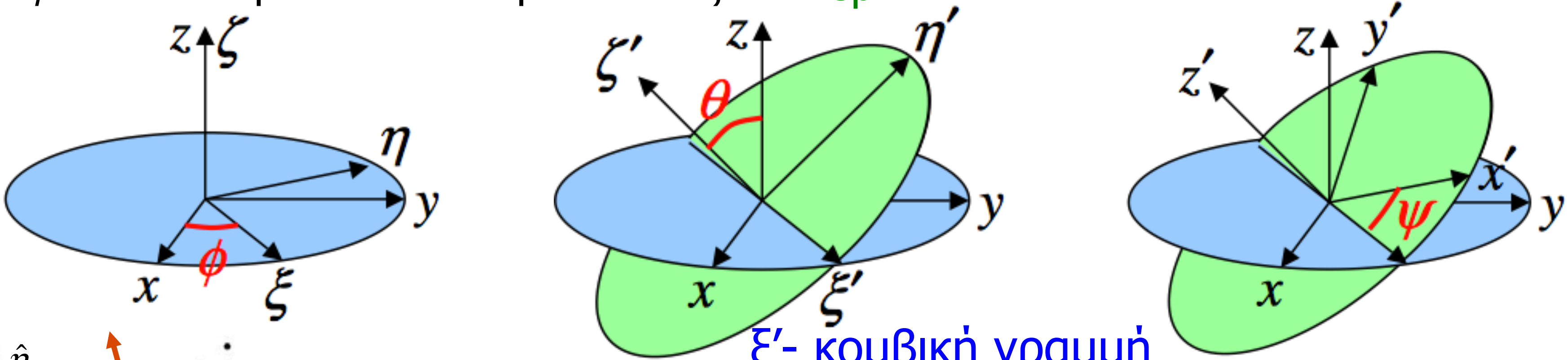
Γωνίες Euler – Γωνιακή ταχύτητα

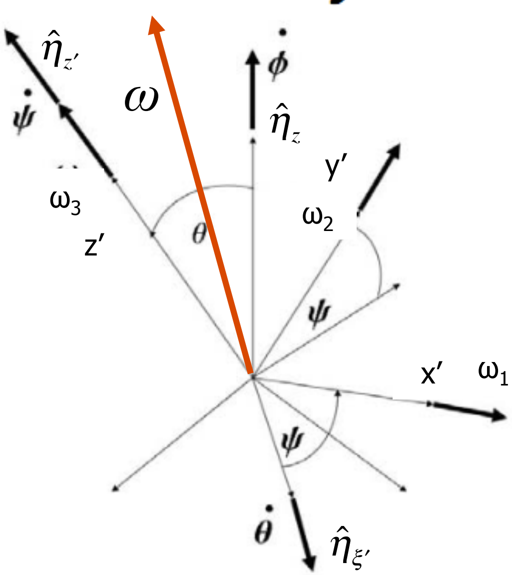
- Οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας ωστόσο δεν αποτελούν ορθογώνιο σύστημα. Συγκεκριμένα:

  $\dot{\varphi}$ είναι στην κατεύθυνση του αρχικού z - άξονα - μετάπτωση

  $\dot{\theta}$ είναι στην κατεύθυνση του ξ - άξονα - κλόνηση

  $\dot{\psi}$ είναι στην κατεύθυνση του z'- άξονα - spin





Μπορούμε να γράψουμε την γωνιακή ταχύτητα:

$$\vec{\omega} = \hat{\eta}_z \dot{\varphi} + \hat{\eta}_{\xi'} \dot{\theta} + \hat{\eta}_{z'} \dot{\psi} = \hat{\eta}_{x'} \omega_1 + \hat{\eta}_{y'} \omega_2 + \hat{\eta}_{z'} \omega_3$$

Παίρνουμε τις συνιστώσες των γωνιακών ταχυτήτων ως προς το τελικό σύστημα συντεταγμένων x′y′z′

Γωνίες Euler – Γωνιακή ταχύτητα

- Χρησιμοποιώντας τις γωνίες Euler, και τον μετασχηματισμό περιστροφής μεταξύ των δυο συστημάτων, $\vec{w}_{loc} = \left[A\right]\vec{w}_{gl}$,η γωνιακή ταχύτητα μπορεί να γραφεί:

$$\omega_1 = \dot{\varphi}\hat{\eta}_{x'}\cdot\hat{\eta}_z + \dot{\theta}\hat{\eta}_{x'}\cdot\hat{\eta}_{\xi'} + \dot{\psi}\hat{\eta}_{x'}\cdot\hat{\eta}_{z'} \quad = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi$$
$$\omega_2 = \dot{\varphi}\hat{\eta}_{y'}\cdot\hat{\eta}_z + \dot{\theta}\hat{\eta}_{y'}\cdot\hat{\eta}_{\xi'} + \dot{\psi}\hat{\eta}_{y'}\cdot\hat{\eta}_{z'} \quad = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi$$
$$\omega_3 = \dot{\varphi}\hat{\eta}_{z'}\cdot\hat{\eta}_z + \dot{\theta}\hat{\eta}_{z'}\cdot\hat{\eta}_{\xi'} + \dot{\psi}\hat{\eta}_{z'}\cdot\hat{\eta}_{z'} \quad = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

- Τα παραπάνω εσωτερικά γινόμενα υπολογίζονται εύκολα παρατηρώντας ότι:

  Η γωνία μεταξύ $\hat{z}\sphericalangle\xi'$ είναι 90ο - ψ

  Η γωνία μεταξύ $\hat{z}\sphericalangle z'$ είναι θ

  $$\Rightarrow \hat{z} = \cos\left(90^o - \psi\right)\sin\theta\hat{\eta}_{x'} + \sin\left(90^o - \psi\right)\sin\theta\hat{\eta}_{y'} + \cos\theta\hat{\eta}_{z'}$$

  Το μοναδιαίο διάνυσμα επί της κομβικής γραμμής, $\hat{\eta}_{\xi'}$

  $$\hat{\eta}_{\xi'} = \cos\psi\hat{\eta}_{x'} - \sin\psi\hat{\eta}_{y'}$$

- Επομένως η γωνιακή ταχύτητα συναρτήσει των γωνιών Euler θα γραφεί ως εξής:

$$\vec{\omega} = \hat{\eta}_z\dot{\varphi} + \hat{\eta}_{\xi'}\dot{\theta} + \hat{\eta}_{z'}\dot{\psi} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

- Στο σύστημα αναφοράς του περιστρεφόμενου σώματος

Γωνίες Euler – Γωνιακή ταχύτητα

- Μπορούμε να εκφράσουμε την Lagrangian με την μορφή: $T = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^2$
  - Θεωρώντας ότι το CM είναι η αρχή του περιστρεφόμενου συστήματος αναφοράς

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + T'\left(\dot{\varphi},\dot{\theta},\dot{\psi}\right)$$

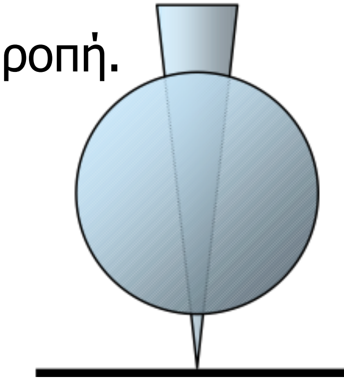
- Αρκετές φορές μπορούμε να ξεχωρίσουμε και την δυναμική ενέργεια:

$$U = U_1\left(x,y,z\right) + U_2\left(\varphi,\theta,\psi\right)$$

  - U_1 βαρυτικό πεδίο: $U_1 = -\vec{g}\cdot\vec{r}$
  - U_2 μαγνητικό πεδίο, B, και διπολική ροπή M: $U_2 = -\vec{M}\cdot\vec{B}$
- Η Lagrangian μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα δυο τμημάτων:

$$L = L_{\gamma\rho\alpha\mu.}\left(x,y,z,\varphi,\theta,\psi\right) + L_{\pi\varepsilon\rho.}\left(\dot{x},\dot{y},\dot{z},\dot{\varphi},\dot{\theta},\dot{\psi}\right)$$

Περιστροφή κάτω από εξωτερική ροπή

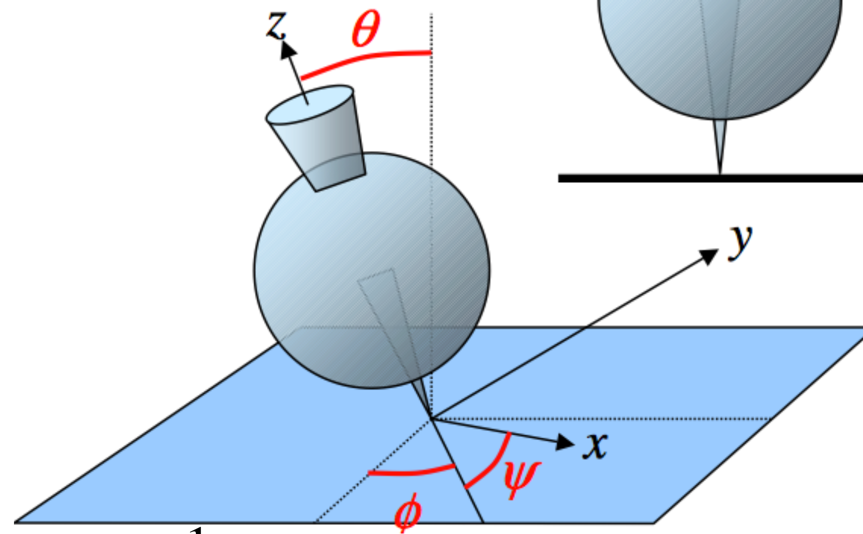


- Συζητήσαμε περιπτώσεις στερεών στα οποία δεν υπήρχε εξωτερική ροπή.
  - Εισάγωντας εξωτερικές ροπές, η κατάσταση γίνεται πολύπλοκη
  - Εξισώσεις κίνησης γίνονται:

$$I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3\left(I_2 - I_3\right) = \tau_1$$

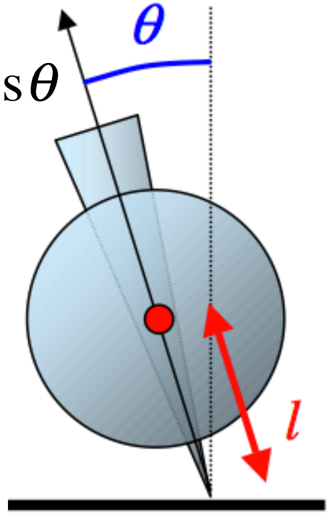
$$I_2\dot{\omega}_2 - \omega_1\omega_3\left(I_3 - I_1\right) = \tau_2$$

$$I_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2\left(I_1 - I_2\right) = \tau_3$$



- Θεωρήστε μια περιστρεφόμενη σβούρα:
- Ορίζουμε τις γωνίες Euler:
  - Έστω: $I_1 = I_2 \neq I_3$
  - Η κινητική ενέργεια είναι: $T = \frac{1}{2}I_1\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2$
  - Αλλά η γωνιακή ταχύτητα γράφεται: $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}$
  - Επομένως η κινητική ενέργεια είναι: $T = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2$

Βαριά Σβούρα



- Η δυναμική ενέργεια προέρχεται από το ύψος του CM: $V = Mgl\cos\theta$
  - και η τελική μορφή της Lagrangian είναι:

$$L = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 - Mgl\cos\theta$$

- Οι γωνίες φ και ψ είναι κυκλικές:
  - Υπάρχουν συζυγείς ορμές οι οποίες διατηρούνται: p_φ και p_ψ
- Διατήρηση των δυο ορμών δίνει:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right) \Rightarrow p_\psi = I_3\omega_3 = \text{σταθ.} \equiv I_1 a$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta + I_3\cos\theta\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right) \Rightarrow p_\theta = I_1\omega_1 = \text{σταθ.} \equiv I_1 b$$

- Λύνουμε για: $\dot{\varphi}$ και $\dot{\psi}$

$$\dot{\varphi} = \frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta} \quad \text{και} \quad \dot{\psi} = \frac{I_1 a}{I_3} - \cos\theta\frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

- Χρειάζεται να βρούμε την συνάρτηση $\theta(t)$ για να προσδιοριστούν $\varphi(t)$ και $\psi(t)$

Βαριά Σβούρα

- Η μηχανική ενέργεια όμως διατηρείται, οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$E = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 + Mgl\cos\theta$$

- Ο 2ος όρος όμως δίνει: $\frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$
- Και μπορούμε να γράψουμε την ενέργεια με την μορφή: $E' = E - \frac{I_3\omega_3^2}{2}$

$$\Rightarrow E' = \frac{I_1\dot{\theta}^2}{2} + \frac{I_1}{2}\frac{\left(b - a\cos\theta\right)^2}{\sin^2\theta} + Mgl\cos\theta$$

- Καταλήξαμε σε εξίσωση κίνησης σε 1-διάσταση:
  - Σώμα με μάζα I_1 σε δυναμικό της μορφής: $V_{eff} = \frac{I_1}{2}\left(\frac{b - a\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 + Mgl\cos\theta$
- Απλουστεύουμε την εξίσωση κίνησης, ορίζοντας: $\alpha \equiv \frac{2E - I_3\omega_3^2}{I_1}$ και $\beta \equiv \frac{2Mgl}{I_1}$
  - Η εξίσωση κίνησης γίνεται: $\alpha = \dot{\theta}^2 + \left(\frac{b - a\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 + \beta\cos\theta$
  - Αλλάζουμε μεταβλητές: $\theta \longrightarrow u = \cos\theta$
  - Η εξίσωση κίνησης γίνεται: $\dot{u}^2 = \left(1 - u^2\right)\left(\alpha - \beta u\right) - \left(b - au\right)^2$

Βαριά Σβούρα – Εξίσωση κίνησης – Ποιοτική μελέτη

- Βρίσκουμε σαν εξίσωση κίνησης: $\dot{u}^2 = \left(1-u^2\right)(\alpha-\beta u)-(b-au)^2$
- Ολοκλήρωση θα δώσει: $t = \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{\left(1-u^2\right)(\alpha-\beta u)-(b-au)^2}}$ Ελλειπτικό ολοκλήρωμα
- Μπορούμε να μελετήσουμε την κίνηση ποιοτικά (κίνηση σε κεντρικό δυναμικό)
  - Υπάρχουν όρια στις τιμές του u: $u=\cos\theta \longrightarrow u \in [-1,1]$

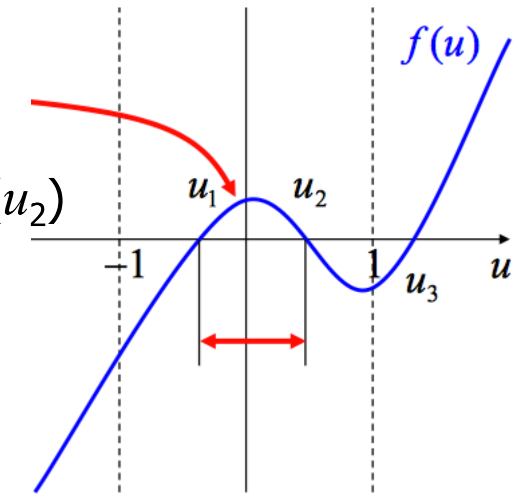
$$\dot{u}^2 = f(u) = \left(1-u^2\right)(\alpha-\beta u)-(b-au)^2$$
$$= \beta u^3 - \left(\alpha+a^2\right)u^2 + (2ab-\beta)u + \left(\alpha-b^2\right) \geq 0$$

  - Η $f(u)$ είναι κυβική συνάρτηση του u με $\beta \equiv \frac{2Mgl}{I_1} > 0$
  - Οι δυο οριακές τιμές: $f(\pm 1) = -(b-au) \leq 0$
- Οι συνθήκες αυτές περιορίζουν την μορφή της συνάρτησης $f(u)$
- Πολυώνυμο 3[ου] βαθμού, οπότε περιμένουμε 3 ρίζες

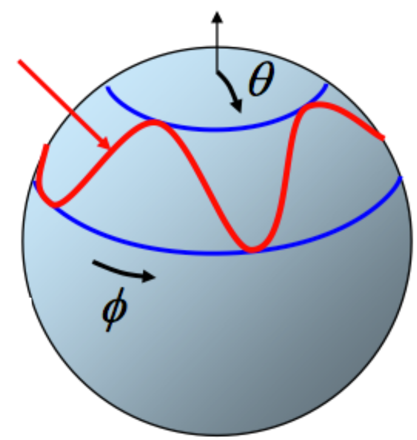
Βαριά Σβούρα – Ποιοτική Μελέτη Λύσεων – Κλόνηση

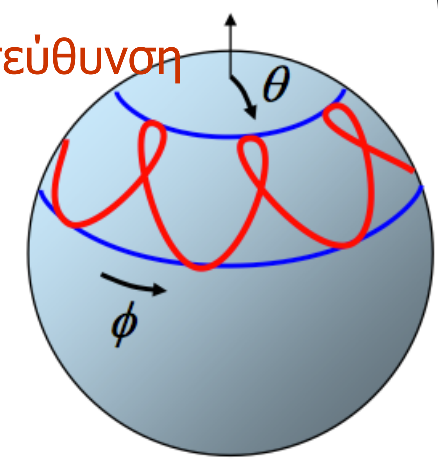
- Τρεις ρίζες $-1 \le u_1 \le u_2 \le 1 \le u_3$
  - Η λύση για $\dot{u}^2 = f(u)$ είναι φραγμένη $u_1 \le u \le u_2$
- Η θ ταλαντώνεται μεταξύ των τιμών cos$^{-1}(u_1)$ και cos$^{-1}(u_2)$
- Οι γωνίες φ και ψ προσδιορίζονται από τις:

$$\dot{\varphi} = \frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta} \quad \text{και} \quad \dot{\psi} = \frac{I_1 a}{I_3} - \cos\theta \frac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta}$$



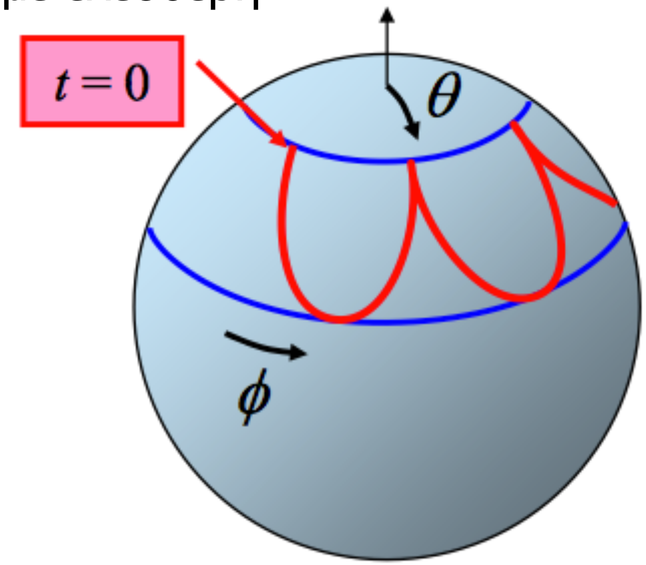
- Μελετώντας το πρόσημο της : $\dot{\varphi} = \dfrac{b - a\cos\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{b - au}{1 - u^2}$
  - Η $\dot{\varphi}$ αλλάζει πρόσημο στο $b - au = 0 \Rightarrow u = u' = b/a$
    - $u' < u_1$ ή $u' > u_2$ ➡ φ μονότονη
    - $u_1 < u' < u_2$ ➡ φ αλλάζει κατεύθυνση





Βαριά Σβούρα – Αρχικές συνθήκες

- Υποθέστε ότι αρχικά ο άξονας είναι ακίνητος
- Θέτουμε την σβούρα σε περιστροφή και την αφήνουμε ελεύθερη
- Οι αρχικές συνθήκες είναι:



$$\dot{\theta}_{t=0} = 0 \Rightarrow f\left(u_{t=0}\right) = 0 \Rightarrow u_{t=0} = u_1 \text{ ή } u_2$$

$$\dot{\varphi}_{t=0} = 0 \Rightarrow b - a u_{t=0} = 0 \Rightarrow u_{t=0} = u'$$

  - Αρχικά ο άξονας "πέφτει"
  - Αρχίζει κατόπιν να μεταπίπτει ως προς φ
  - Η διεύθυνση της μετάπτωσης?
- Προέλευση της μετάπτωσης ?
  - Από διατήρηση της στροφορμής

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 \omega_3 \quad \text{και} \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2\theta + I_3 \omega_3 \cos\theta$$

  - ω_3 είναι σταθερή
  - Καθώς ο άξονας περιστροφής «πέφτει», ω_3 ελαττώνεται στην p_φ
  - φ πρέπει να αρχίσει να μεταπίπτει για να εξισορροπήσει την απώλεια
- Η διεύθυνση της μετάπτωσης είναι ίδια με αυτή της περιστροφής της σβούρας

Βαριά Σβούρα – Ομοιόμορφη μετάπτωση

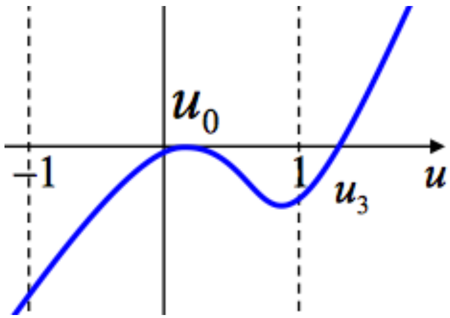
- Μπορούμε να κάνουμε την σβούρα να μεταπίπτει χωρίς κλόνηση

$$\dot{\theta} = 0 \quad \text{και} \quad \dot{\varphi} = \frac{b - au}{1 - u^2} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

- Χρειάζεται να υπάρχει διπλή ρίζα για $f(u)$=0

$$\left.\begin{aligned} f(u_0) &= (1 - u_0^2)(\alpha - \beta u_0) - (b - au_0)^2 = 0 \\ f'(u_0) &= -2u_0(\alpha - \beta u_0) - \beta(1 - u_0^2) + 2\alpha(b - au_0) = 0 \end{aligned}\right\} \frac{\beta}{2} = a\dot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 u_0$$

$$\left.\begin{aligned} I_1 a &\equiv I_3 \omega_3 \\ \beta &\equiv \frac{2Mgl}{I_1} \end{aligned}\right\} Mgl = \dot{\varphi}\left(I_3\omega_3 - I_1\dot{\varphi}\cos\theta_0\right)$$

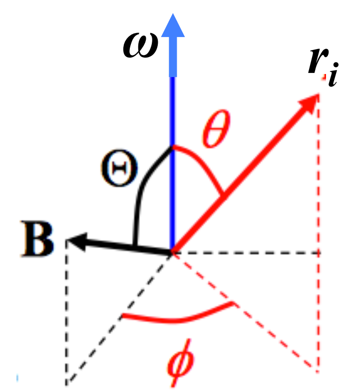


- Για οποιαδήποτε δεδομένη τιμή του ω_3 και γωνία του άξονα περιστροφής. $\cos\theta_0$, πρέπει να δοθεί ακριβώς η σωστή ώθηση σε φ ώστε να μην υπάρχει κλόνηση
- Εξίσωση 2ου βαθμού και επομένως 2 λύσεις – Η ίδια σβούρα μπορεί να κάνει είτε γρήγορη είτε αργή μετάπτωση
- Για να υπάρχει λύση θα πρέπει $I_3^2\omega_3^2 > 4MglI_1\cos\theta_0 \Rightarrow \omega_3 > \frac{2}{I_3}\sqrt{MglI_1\cos\theta_0}$
- Ομοιόμορφη μετάπτωση επιτυγχάνεται από μια γρήγορα περιστρεφόμενη σβούρα

Μαγνητική διπολική ροπή

- Θεωρήστε ένα στερεό σώμα το οποίο αποτελείται από φορτισμένα σωματίδια
  - Επομένως θα έχουμε: μάζα m_i, φορτίο q_i, θέση r_i και ταχύτητα υ_i
- Υποθέτουμε ότι υπάρχει ομοιόμοργο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$
  - Σε κάθε φορτισμένο σωματίδιο ασκείται μια δύναμη: $\vec{F}_i = q_i \vec{u}_i \times \vec{B}$
  - Αν το ΚΜ είναι ακίνητο και q_i/m_i = σταθ., τότε: $\vec{F} = q_i \vec{u}_i \times \vec{B} = \dfrac{q}{m} m_i \vec{u}_i \times \vec{B} = 0$
- Η ροπή θα είναι:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = q_i \vec{r}_i \times \left(\vec{u}_i \times \vec{B}\right) \Rightarrow \vec{\tau} = \frac{q}{m} m_i \vec{r}_i \times \left(\vec{u}_i \times \vec{B}\right)$$



- Χρησιμοποιώντας $\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \frac{q}{m} m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)\left(\vec{r}_i \cdot \vec{B}\right)$$

- Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες

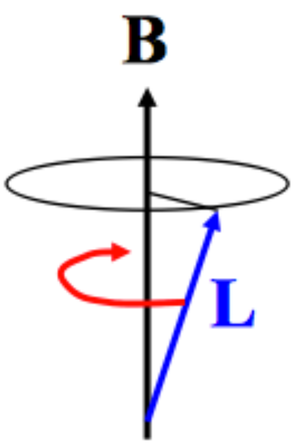
$$\left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)\left(\vec{r}_i \cdot \vec{B}\right) = \omega r_i^2 B \sin\theta \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \left(\sin\theta\cos\varphi\sin\Theta + \cos\theta\cos\Theta\right)$$

- Υποθέτοντας γρήγορη περιστροφή παίρνουμε μέση τιμή ως προς χρόνο $\Rightarrow \vec{\tau} = \dfrac{q}{2m} m_i \left(r_i \sin\theta\right)^2 \vec{\omega} \times \vec{B} = \dfrac{q}{2m} \vec{L} \times \vec{B}$

Μαγνητική διπολική ροπή

- Η ροπή είναι: $\vec{\tau} = \frac{q}{2m}\vec{L}\times\vec{B}$
- Μαγνητικό δίπολο $\vec{M}$ σε πεδίο $\vec{B}$ αισθάνεται ροπή: $\vec{\tau} = \vec{M}\times\vec{B}$
- Ένα γρήγορα περιστρεφόμενο φορτισμένο σώμα έχει μαγνητική ροπή: $\vec{M} = \gamma\vec{L}$
  - όπου: $\gamma = q/2m$ γυρομαγνητικός λόγος
- Η εξίσωση της κίνησης θα γίνει: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \gamma\vec{L}\times\vec{B}$
  - Κάνει το διάνυσμα της στροφορμής να μεταπίπτει γύρω από το B
  - Γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης είναι:

$$\omega_{\mu\varepsilon\tau\alpha\pi\tau.} = -\gamma\vec{B} = -\frac{q}{2m}\vec{B}$$ συχνότητα Larmor



Μαγνητική διπολική ροπή στοιχειωδών σωματιδίων

- Σωματίδια όπως το ηλεκτρόνιο και το πρωτόνιο έχουν
  - σπιν, s
  - μαγνητική ροπή, μ
- Η εξίσωση του Dirac για σωματίδια με σπιν ½ προβλέπει ότι: $\vec{\mu} = \frac{q}{m}\vec{s}$
  - Διαφέρει από το κλασικό φορτισμένο στερεό σώμα κατά ένα παράγοντα 2
  - Συνηθίζεται να λέμε $\vec{\mu} = \frac{gq}{2m}\vec{s}$ όπου $g = \begin{cases} 1 & \text{κλασικό στερεό} \\ 2 & \text{σωματίδιο Dirac} \end{cases}$
- $g=2$ για τα ηλεκτρόνια, μιόνια – Dirac σωματίδια
- $g=2.8$ για τα πρωτόνια, -1.9 για τα νετρόνια – Δεν είναι στοιχειώδη σωματίδια
- μ για τα ηλεκτρόνια και μιόνια είναι γνωστή με μεγάλη ακρίβεια

$$g_{\eta\lambda\varepsilon\kappa.} = 2.002319304374 \pm 0.000000000008$$
$$g_{\mu\iota o\nu\iota o\upsilon} = 2.002331832 \pm 0.0000000012$$

- Όχι ακριβώς Dirac σωματίδια εξαιτίας ενός νέφους δυνητικών σωματιδίων που τα περιβάλει εξαιτίας κβαντικών διαταραχών
- Η πειραματική μέτρηση στηρίζεται σε πολύ καλή γνώση του μαγνητικού πεδίου

Πείραμα μέτρησης g-2 του μιονίου

- Η πειραματική μέτρηση στηρίζεται σε πολύ καλή γνώση του μαγνητικού πεδίου
- Χρησιμοποιεί μετάπτωση του σπιν των σωματιδίων
- Αποθηκεύει σωματίδια με γνωστό προσανατολισμό spin σε μαγνητικό πεδίο
- Μέτρηση του προσανατολισμού του spin μετά από χρόνο t: $\omega_{\mu\varepsilon\tau\alpha\pi\tau.} = -\frac{gq}{2m}\vec{B}$