Δυναμικό εξαρτώμενο από την ταχύτητα

Σύμφωνα με την γενική μορφή των εξισώσεων Lagrange θα έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j=-\frac{\partial U}{\partial q_j}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

Θεωρώντας και πάλι $L=T(q_j,\dot{q}_j,t)-U(q_j,\dot{q}_j,t)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial (T-U)}{\partial q_j}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$$

Αυτό είναι δυνατό για μια ιδιαίτερη αλλά πολύ σημαντική περίπτωση:

κίνηση ενός ηλεκτρικού φορτίου μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Ηλεκτρομαγνητική δύναμη σε σωματίδιο

- Η δύναμη Lorentz σε ένα κινούμενο φορτισμένο σωματίδιο, e, είναι:

$$\vec{F} = e\left[\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})\right]$$ εξαρτώμενη από ταχύτητα

- Τα πεδία E και B δίνονται από τις σχέσεις

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

όπου το V(r,t) και A(r,t) είναι το βαθμωτό και διανυσματικό δυναμικό

- Μικρή παρένθεση σε E&M
  - Οι εξισώσεις Maxwell είναι ως γνωστό (CGS σύστημα):

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1) \qquad \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (2) \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4)$$

Ξέρουμε όμως ότι: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot \left(\nabla \times \nabla\right) = 0$

Και επομένως από την (1) έχουμε: $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t)$

Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Επομένως ο 4ος νόμος του Maxwell μπορεί να γραφεί:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial(\nabla \times \vec{A})}{\partial t} = \nabla \times \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Η τελευταία εξίσωση ισχύει παντού στο χώρο.

Από θεωρήματα της διανυσματικού λογισμού ξέρουμε ότι υπάρχει μια βαθμωτή συνάρτηση V και μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

Για A ανεξάρτητο του t: $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$ οπότε $\vec{E} = \nabla V$ Ηλεκτροστατικό δυναμικό

Στην περίπτωση αυτή το A είναι το μαγνητοστατικό διανυσματικό δυναμικό για προβλήματα με σταθερά ρεύματα

- Πως παίρνουμε τα A και V ?

Χρησιμοποιούμε τις άλλες 2 εξισώσεις Maxwell που περιέχουν τις πηγές ϱ και J

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho = \nabla \cdot \left(-\nabla V - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \nabla^2 V + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) = -4\pi\rho$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Χρησιμοποιώντας την σχέση: $\nabla\times\nabla\times\vec{A}\equiv\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$ η τελευταία εξίσωση δίνει

Εν γένει ισχύει: $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{C}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)-\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)$

$$\nabla\times\vec{B}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t}\right)\Rightarrow\nabla\times\vec{B}=-\frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

Επομένως παίρνουμε τα A και V συναρτήσει των πηγών J και ϱ.

Οι εξισώσεις είναι συζευγμένες αλλά τα πεδία E και B είναι αμετάβλητα όταν τα δυναμικά αλλάζουν κάτω από ένα μετασχηματισμό βαθμίδας

$$\vec{A}\rightarrow\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\Lambda(\vec{r},t)$$

$$V\rightarrow V'=V-\frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda(\vec{r},t)}{\partial t}$$

Αυτή η ευκολία οδηγεί σε χρήσιμες απλοποιήσεις για ορισμένες επιλογές του Λ (επιλογή βαθμίδας)

Κλείσιμο της παρένθεσης σε Ε&Μ

Ηλεκτρομαγνητική δύναμη σε σωματίδιο

- Ισχυρισμός: Η χρήση του δυναμικού $U = eV - e\vec{A}\cdot\vec{\mathrm{v}}$ στην εξίσωση Lagrange δίνει την δύναμη Lorentz

Απόδειξη: $L = T - U = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 - eV + e\vec{A}\cdot\vec{\mathrm{v}}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \mathrm{v}_x} = m\mathrm{v}_x + eA_x \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathrm{v}_x}\right) = m\frac{d\mathrm{v}_x}{dt} + e\frac{dA_x}{dt}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -e\frac{\partial V}{\partial x} + e\left(\mathrm{v}_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + \mathrm{v}_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + \mathrm{v}_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

Από την εξίσωση του Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ παίρνουμε επομένως

$$m\frac{d\mathrm{v}_x}{dt} + e\frac{dA_x}{dt} + e\frac{\partial V}{\partial x} - e\left(\mathrm{v}_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + \mathrm{v}_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + \mathrm{v}_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = 0$$

Αλλά $$\frac{dA_x}{dt} = \left(\mathrm{v}_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + \mathrm{v}_y\frac{\partial A_y}{\partial y} + \mathrm{v}_z\frac{\partial A_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

Αυτό είναι ο ολικός ρυθμός μεταβολής του A_x σύμφωνα με παρατηρητή που κινείται μαζί με το φορτίο

Ηλεκτρομαγνητική δύναμη σε σωματίδιο

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$m\frac{d\mathrm{v}_x}{dt}+e\left(\cancel{\mathrm{v}_x\frac{\partial A_x}{\partial x}}+\mathrm{v}_y\frac{\partial A_y}{\partial x}+\mathrm{v}_z\frac{\partial A_z}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)+e\frac{\partial V}{\partial x}-e\left(\cancel{\mathrm{v}_x\frac{\partial A_x}{\partial x}}+\mathrm{v}_y\frac{\partial A_y}{\partial y}+\mathrm{v}_z\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)=0$$

$$\Rightarrow m\frac{d\mathrm{v}_\mathrm{x}}{dt}+e\underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)}_{E_x}+e\left(\mathrm{v}_y\underbrace{\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)}_{\left(\nabla\times\vec{A}\right)_z}+\mathrm{v}_z\underbrace{\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)}_{\left(\nabla\times\vec{A}\right)_y}\right)=0$$

Επομένως καταλήγουμε:

$$m\frac{d\mathrm{v}_x}{dt}-eE_x-e\left[\vec{\mathrm{v}}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right]_x=0\Rightarrow m\frac{d\mathrm{v}_x}{dt}=e\left[E_x+\left(\vec{\mathrm{v}}\times\vec{B}\right)_x\right]$$

Ανάλογα αποδεικνύεται και για τα y και z.

Δυνάμεις τριβής

Όταν βγάλαμε τις εξισώσεις Lagrange αποφύγαμε τις δυνάμεις τριβής. Στην ακρίβεια αυτό που κάναμε ήταν να διαχωρίσουμε τη ολική δύναμη σε κάθε υλικό σημείο σε

$\vec{F}_i \rightarrow \vec{F}_i^{(e)} + f_i$ και υποθέσαμε ότι $\sum_i \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ όπου f_i οι δυνάμεις δεσμών

Δηλαδή συμπεριλάβαμε στην F_i όλες τις δυνάμεις για τις οποίες $\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i \neq 0$

Σε μια τουλάχιστον πρακτική περίπτωση, μπορούμε να συμπεριλάβουμε δυνάμεις τριβής στο φορμαλισμό Lagrange.

Αυτό όταν οι δυνάμεις τριβής είναι ανάλογες της ταχύτητας. Δηλαδή:

$$F_{f_i x} = -k_x \mathrm{v}_{ix}$$

Αυτός ο τύπος χρησιμοποιείται πολύ συχνά (π.χ. στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση).

$$\mathbb{F} = \frac{1}{2}\sum_i\left(k_x \mathrm{v}_{ix}^2 + k_y \mathrm{v}_{iy}^2 + k_z \mathrm{v}_{iz}^2\right)$$

Επομένως: $F_{f_i a} = -\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathrm{v}_{ia}}$ όπου α =x,y,z Διανυσματικά: $F_{f_i a} = -\nabla_{\mathrm{v}}\mathbb{F}$

Η γενικευμένη δύναμη σ' αυτή την περίπτωση είναι:

$$Q_j = \sum_i F_{f_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathrm{v}_i} \cdot \frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \longrightarrow$$

Θυμηθείτε ότι: $\dfrac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \dfrac{\partial r_i}{\partial q_j}$

Δυνάμεις τριβής

Επομένως καταλήγουμε ότι: $Q_j = -\sum_i \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \dot{q}_j}$

Θέτοντας: $L = T - V$ παίρνουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

Ποια είναι η φυσική σημασία αυτής της συνάρτησης $\mathbb{F}$

Θεωρήστε το έργο που παράγει το σύστημα ενάντια στην τριβή:

$$dW_f = -\vec{F}_f \cdot d\vec{r} = -\vec{F}_f \cdot \vec{\mathrm{v}}dt = -\sum_{a=x,y,z} F_{fa}\mathrm{v}_a dt = \sum_a k_a \mathrm{v}_a^2 dt \Rightarrow$$

$$\frac{dW_f}{dt} = 2\left(\frac{1}{2}\sum_a k_a \mathrm{v}_a^2\right) = 2\mathbb{F}$$

Δηλαδή: $2\mathbb{F}$ είναι ο ρυθμός διάχυσης της ενέργειας.