

ΦΥΣ. 133

ΕΡΓΑΣΙΑ # 5

Επιστροφή 13-3-2006

1. Προσδιορίστε την Hamiltonian και τις εξισώσεις κίνησης του Hamilton για την διπλή μηχανή του Atwood της διάλεξης 7.
2. Βρείτε την Hamiltonian ενός μη αρμονικού ταλαντωτή του οποίου η Lagrangian είναι:

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} - ax^3 + bx\dot{x}^2$$

3. Θεωρείστε ένα ιδανικό στεφάνι μάζας M και ακτίνας R το οποίο κυλά χωρίς ολίσθηση προς το κατώτερο σημείο ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης α με την οριζόντια διεύθυνση. Το στεφάνι αφήνεται από τη κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου από την κατάσταση ηρεμίας τη χρονική στιγμή $t=0$. Ορίστε σαν θ την γωνία κατά την οποία έχει περιστραφεί το στεφάνι από την αρχική του θέση. Ορίστε S την απόσταση που έχει διανύσει το κέντρο του στεφανιού από τη στιγμή που άρχισε να κινείται:
(α) Γράψτε την Lagrangian για το σύστημα συναρτήσει της γωνίας θ (εφαρμόστε το δεσμό από της κύλισης χωρίς ολίσθηση για να απαλείψετε την εξάρτηση από το S).
(β) Βρείτε την εξίσωση κίνησης Lagrange για θ από την Lagrangian και προσδιορίστε την γωνιακή επιτάχυνση $\ddot{\theta}$.
(γ) Γράψτε τώρα μια Lagrangian στην οποία εμφανίζονται τα θ και S μαζί με ένα πολλαπλασιαστή Lagrange που περιγράφει το δεσμό της κύλισης χωρίς ολίσθηση.
(δ) Βρείτε και πάλι τις εξισώσεις κίνησης για αυτή τη Lagrangian και επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα που βρήκατε στο υποερώτημα (β) για την γωνιακή επιτάχυνση.
(ε) Από το πολλαπλασιαστή Lagrange, προσδιορίστε το μέγεθος της δύναμης της τριβής που απαιτείται για να μην υπάρχει ολίσθηση του στεφανιού. Για ένα σταθερό συντελεστή στατικής τριβής μ_s , βρείτε, την μέγιστη τιμή της γωνίας κλίσης α για την οποία δεν έχουμε ολίσθηση. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε απλές μεθόδους από τη Newtonian μηχανική για να προσδιορίσετε την κάθετη δύναμη μεταξύ του στεφανιού και του κεκλιμένου επιπέδου).
4. Ένα σφαιρικό εκκρεμές αποτελείται από μια μάζα m που εξαρτάται από το άκρο μιας αβαρούς ράβδου μήκους l . Το άλλο άκρο της ράβδου μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα προς όλες τις κατευθύνσεις γύρω από το σημείο στήριξής της. (α) Βρείτε την συνάρτηση Hamilton σε σφαιρικές συντεταγμένες (αν $p_\phi=0$, το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με αυτό του απλού εκκρεμούς). (β) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης του Hamilton. (γ) Συγχωνώστε τους όρους που εξαρτώνται από p_ϕ με τους όρους του κανονικού δυναμικού για να ορίσετε ένα ενεργό δυναμικό $V(\theta, p_\theta)$. Σχεδιάστε το V συναρτήσει του θ για αρκετές τιμές του p_ϕ συμπεριλαμβανομένης και της τιμής $p_\phi=0$. (δ) Σχολιάστε τα χαρακτηριστικά της κίνησης, και τονίστε τις διαφορές μεταξύ $p_\phi=0$ και $p_\phi \neq 0$.
5. Ένας ομοιόμορφος κύλινδρος ακτίνας a και πυκνότητας ρ είναι τοποθετημένος ώστε να μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από ένα κατακόρυφο άξονα. Στην εξωτερική επιφάνεια του κυλίνδρου υπάρχει μια ελικοειδής τροχιά κατά μήκος της οποίας ένα υλικό σημείο μάζας m γλιστρά χωρίς τριβές. Υποθέστε ότι το σωματίδιο ξεκινά από την ηρεμία στο ψηλότερο σημείο

του κυλίνδρου και γλιστρά προς τα κάτω υπό την επίδραση της βαρύτητας. Χρησιμοποιώντας ένα οποιοδήποτε group από γενικευμένες συντεταγμένες βρείτε την Hamiltonian του συστήματος (σωματίδιο και κύλινδρος) και λύστε τις εξισώσεις Hamilton για να βρείτε την κίνηση του συστήματος. Υποθέστε ότι η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου είναι $I = \frac{1}{2} Ma^2$.

