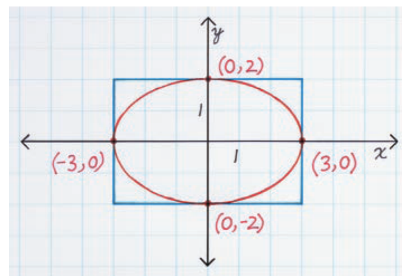
ΦΥΣ 145 – Υπολογιστικές Μέθοδοι στη Φυσική

6η Εργασία **Επιστροφή: 28/4/13**

<u>Υπενθύμιση:</u> Οι εργασίες πρέπει να επιστρέφονται με e-mail που θα στέλνετε από το πανεπιστημιακό σας λογαριασμό το αργότερο μέχρι την ημερομηνία που αναγράφεται.
Σα θέμα (subject) του e-mail θα πρέπει να αναγράφεται την εργασία (Homework 6)
Κάθε αρχείο που επισυνάπτετε (attach) στο e-mail σας θα πρέπει να έχει το όνομα στη μορφή ***username_hm6.tgz*** όπου username είναι το *username του e-mail σας*. Επίσης σα πρώτο σχόλιο μέσα σε κάθε file θα πρέπει να αναφέρεται το ονοματεπώνυμό σας. Η εντολή tar είναι: tar –czvf username_hm6.tgz *.f

1. Μια έλλειψη ορίζεται από την εξίσωση $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, όπου α και b ο μεγάλος και μικρός άξονάς της. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Monte Carlo να βρεθεί το εμβαδό της έλλειψης του διπλανού σχήματος που έχει a = 3 και b = 2. Χρησιμοποιείστε 10, 100, 1000, 10000, 100000 και 1000000 προσπάθειες και τυπώστε τα αποτελέσματα κάθε διαφορετικής περίπτωσης σε ένα αρχείο το οποίο ονομάστε *area.dat* με τη μορφή 3 στηλών <Αριθμός προσπαθειών> <Εμβαδό> <Αναλυτική – Αριθμητική> όπου η αναλυτική τιμή είναι το εμβαδό της έλλειψης υπολογιζόμενο θεωρητικά και που είναι ίσο με $A_{\varepsilon\lambda.}=\pi\cdot a\cdot b$



2. Θεωρήστε ένα ομοιόμορφο και ομεγενή δίσκο, D, μάζας M = 1kg και πυκνότητας, d, ο οποίος έχει ακτίνα R =1 και το κέντρο του οποίου βρίσκεται στο (0,0). Θέλουμε να υπολογίσουμε την ροπή αδράνειας του δίσκου για περιστροφή του ως προς ένα σημείο $r_0=(x_0,y_0)$. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς το σημείο αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$I(r_0)=\int_D d^2r(\vec{r}-\vec{r}_0)^2=\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1+x^2}}dy\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]$$

Υπολογίστε το παραπάνω ολοκλήρωμα ως ακολούθως:

(**α**) Θεωρήστε έναν ακέραιο μετρητή N και έναν πραγματικό μετρητή S και του δυο ίσους με μηδέν.

(**β**) Θεωρήστε δυο τυχαίους αριθμούς x και y που ανήκουν στο διάστημα [-1, 1]. Προσέξτε ότι η συνάρτηση *rand*() επιστρέφει τυχαίους αριθμούς στο διάστημα $[0,1)$ και επομένως θα πρέπει να μετρατρέψετε τους τυχαίους αριθμούς x και y ώστε το εύρος τους να είναι στο διάστημα $[-1,1]$.

(**γ**) Αν $x^2+y^2<1$, το σημείο βρίσκεται στο δίσκο και επομένως μπορείτε να αυξήσετε το μετρητή N κατά μια μονάδα ενώ ο μετρητής S αυξάνει κατά $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$

(**δ**) Επαναλάβετε τα βήματα (β) και (γ) εως ότου ο μετρητής N είναι 5x10^7.

(**ε**) Το αποτέλεσμα θα είναι $I(r_0) = S/N$

Μπορείτε να επαληθεύσετε τους υπολογισμούς σας για τις περιπτώσεις r_0=(0,0), I=0.500 ενώ για r_0=(0.5,0.0) I=0.750. Ποια είναι η ροπή αδράνειας για r_0=(0.25,0.25);

3. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μέσης τιμής της Monte Carlo ολοκλήρωσης να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$ (στο διάστημα $x \in [0,\pi]$). Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να υπολογίζει την τιμή του ολοκληρώματος για αρχικά δύο σημεία τα οποία διαδοχικά αυξάνουν γεωμετρικά (2, 4, 8, ...) μέχρι μέγιστη τιμή 2^{17}. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει για κάθε περίπτωση σημείων την τιμή του ολοκληρώματος καθώς και το σφάλμα του υπολογισμού. Το σφάλμα θα το υπολογίσετε από τη σχέση: $err = (b-a)\sqrt{\frac{\left(\left\langle f(x)^2\right\rangle - \left\langle f(x)\right\rangle^2\right)}{N}}$ όπου N είναι ο αριθμός των σημείων, b και α τα όρια ολοκλήρωσης και $\langle f(x)\rangle$ δηλώνει τη μέση τιμή της συνάρτησης ολοκλήρωσης ως προς τον αριθμό των σημείων ολοκλήρωσης. Θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση *rand*() για την δημιουργεία τυχαίων αριθμών με αρχικό *seed*=123456. Τα αποτελέσματα του προγράμματός σας θα πρέπει να τα αποθηκεύσετε σε ένα αρχείο με όνομα *integral.dat* και στο οποίο θα πρέπει να υπάρχουν 3 στήλες, αριθμό προσπαθειών, τιμή ολοκληρώματος και αντίστοιχο σφάλμα.

4. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ολοκλήρωσης Monte Carlo υπολογίστε το ακόλουθο ολοκλήρωμα:

$$f = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_0^1 dx_3 \int_0^1 dx_4 \int_0^1 dx_5 \int_0^1 \left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6\right)^2 dx_6$$

Θα πρέπει να επιστρέψετε το πρόγραμμά σας μαζί με τα αποτελέσματα της τιμής που υπολογίζετε για διαφορετικές τιμές δοκιμών οι οποίες αυξάνουν γεωμετρικά από 2 ως 2^{21}. Τα αποτελέσματα αυτά θα πρέπει να είναι στο file *askisi3.dat* το οποίο και θα επιστρέψετε μαζί με το κώδικά σας.

5. Οι ραδιενεργείς διασπάσεις αποτελούν χαρακτηριστικά παραδείγματα χρήσης της μεθόδου Monte Carlo προσομοίωσης. Υποθέστε ότι τη χρονική στιγμή t=0 έχουμε $N(0)$ πυρήνες ενός ραδιενεργού στοιχείου X το οποίο μπορεί να διασπαστεί. Σε μια χρονική στιγμή $t > 0$ θα έχουμε $N(t)$ πυρήνες. Με πιθανότητα διάσπασης $\omega=1/\tau$, η οποία αντιπροσωπεύει τη πιθανότητα το σύστημα να κάνει μετάβαση σε μια νέα κατάσταση κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος ενός 1 sec, έχουμε όπως είδαμε τη διαφορική εξίσωση:

$$dN(t) = -\omega N(t)dt \text{ με λύση } N(t) = N(t=0)e^{-\omega t}.$$

Αν οι πυρήνες ενός στοιχείου X διασπάται σε άλλους πυρήνες τύπου Y που και αυτοί με τη σειρά τους διασπώνται, έχουμε ένα σύστημα συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων:

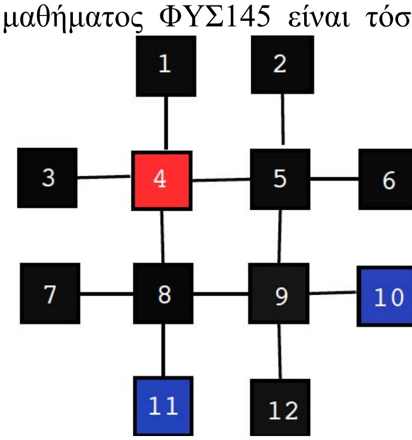
$$\frac{dN_X(t)}{dt} = -\omega_X N_X(t) \text{ και}$$

$$\frac{dN_Y(t)}{dt} = -\omega_Y N_Y(t) + \omega_X N_X(t)$$

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο χρησιμοποιεί τη μέθοδο Monte Carlo για να προσομοιώσετε την αλυσίδα διασπάσεων των πυρήνων *X* και *Y*. Να κάνετε τη γραφική παράσταση του αριθμού των πυρήνων *X* και *Y* συναρτήσει του χρόνου. <u>*Υπόδειξη:*</u> Θα πρέπει να εκτελέσετε πολλά πειράματα Monte Carlo και σε κάθε πείραμα να βρίσκετε τον αριθμό πυρήνων που απομένουν σε κάθε χρονική στιγμή. Για κάθε χρονική στιγμή θα πρέπει να υπολογίζεται για κάθε υπάρχων πυρήνα, τη πιθανότητα να διασπαστεί συγκρίνοντας με το τυχαίο αριθμό με την πιθανότητα διάσπασης. Αν η πιθανότητα διάσπασης είναι μεγαλύτερη από τον τυχαίο αριθμό τότε ο πυρήνας διασπάται και ελαττώνεται ο αριθμός των πυρήνων του συγκεκριμένου στοιχείου.

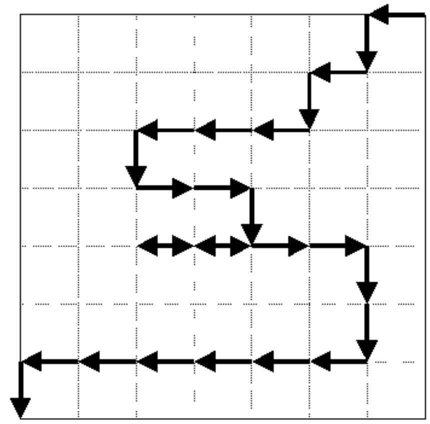
6. Ένα κουτί περιέχει 100 μπάλες αριθμημένες από 1 έως 100. Τυχαία επιλέγετε *M* από τις μπάλες αυτές ($1 < M < 100$) και αθροίζετε τα νούμερα που αντιστοιχούν στις *M* αυτές μπάλες. Να βρεθεί η πιθανότητα το άθροισμα τους να είναι μεγαλύτερο από 500. Θα πρέπει να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο δέχεται σαν παράμετρο εισόδου τον αριθμό των μπαλών *M* που θα επιλέξετε, και τον αριθμό των πειραμάτων που θα προσομοιώσετε. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει σαν αποτέλεσμα την πιθανότητα το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο από το επιθυμητό αποτέλεσμα. Το πρόγραμμα θα πρέπει να τυπώνει ένα μύνημα στην περίπτωση που κάποια εισαγωγή στοιχείων δεν είναι σωστή. <u>*Προσέξτε:*</u> ότι σε κάθε πείραμα επιλέγετε *M* μπάλες ταυτόχρονα. Το αποτέλεσμα θα ήταν διαφορετικό αν επιλέγατε τις μπάλες μια προς μια και μετά τις τοποθετούσατε και πάλι στο κουτί. Επομένως κάθε νούμερο επιλέγεται μια και μόνο φορά.

7. Ένας φοιτητής βγαίνοντας από την εξέταση του μαθήματος ΦΥΣ145 είναι τόσο ζαλισμένος που δεν ξέρει προς πια κατεύθυνση να κινηθεί. Ωστόσο αυτό που επιθυμεί είναι να βρεθεί σε ένα από τα 2 bars που είναι κοντά στο Πανεπιστήμιο και να ξεχάσει για το βράδυ την εμπειρία της εξέτασης. Του δίνονται 4 δυνατές διευθύνσεις με την ίδια πιθανότητα. Σε κάθε εξωτερική θέση του χάρτη ο φοιτητής θα βρεθεί σε μια εκδήλωση από την οποία δεν μπορεί να φύγει. Οι θέσεις στις οποίες βρίσκονται τα bars είναι η 10 και η 11, ενώ το εργαστήριο της Πληροφορικής που είχε την εξέταση βρίσκεται στη θέση 4. Στις θέσεις 5, 8 και 9 μπορεί να κινηθεί προς οποιαδήποτε κατεύθυνση.



Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει την πιθανότητα ο φοιτητής να καταλήξει σε ένα από τα δυο bars που φαίνονται στο παραπάνω χάρτη.

8. Μια σειρά από προβλήματα διάχυσης αερίων μπορούν να προσομοιωθούν με μια προσομοίωση τυχαίας διαδρομής που μπορεί να απλουστευθεί ως ακολούθως: Ένας μεθυσμένος φυσικός ξεκινά από το υψηλότερο δεξί άκρο (π.χ. συντεταγμένες 8,8) του τετραγωνικού πλέγματος των δρόμων που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα και προσπαθεί να φθάσει στο σπίτι του που είναι στη θέση με συντεταγμένες (1,1) περπατώντας τυχαία στους δρόμους. Κάθε φορά που φθάνει σε μια γωνία αποφασίζει τυχαία ποια κατεύθυνση θα ακολουθήσει. Ωστόσο ποτέ δεν βγαίνει έξω από τα όρια του τετραγώνου του πλέγματος των δρόμων.

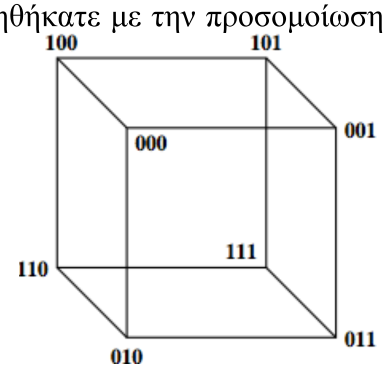


Μια πιθανή διαδρομή φαίνεται στο σχήμα. Όπως βλέπετε αρκετές φορές χρειάζεται να πισωγυρίσει στον ίδιο δρόμο γιατί όλες οι διευθύνσεις (4 στα εσωτερικά σημεία, μείον 1 στα όρια του πλεγματικού τετραγώνου) έχουν την ίδια πιθανότητα. Η διαδρομή που φαίνεται στο σχήμα έχει μήκος 26*m* γιατί αποτελείται από 26 βήματα και η πλευρά του μικρού τετραγώνου είναι 1*m*.

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει το μέγιστο, ελάχιστο και αναμενόμενο μήκος της διαδρομής. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να προσομοιώνει 5000 επιτυχείς διαδρομές (επιτυχής είναι η διαδρομή στην οποία ο φυσικός μας φθάνει τελικά στο σπίτι του) και υπολογίζει τις τρεις παραπάνω ποσότητες. Πρέπει να προσέξετε τα βήματα στα όρια του πλέγματος. Βήματα τα οποία οδηγούν στην υπέρβαση των ορίων δεν θα πρέπει να επιτρέπονται και δεν θα πρέπει να επηρεάζουν το μήκος της διαδρομής.

Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει τον αριθμό της διαδρομής, τον αριθμό των βημάτων που εκτελέστηκαν, την αναμενόμενη τιμή βημάτων, την μέγιστο και ελάχιστο αριθμό βημάτων που έχουν βρεθεί και τέλος το αναμενόμενο μήκος της διαδρομής με βάση όλες τις επιτυχείς διαδρομές.

9. Κατά τη διάρκεια των τελευταίων εργαστηρίων ασχοληθήκατε με την προσομοίωση διαφόρων τυχαίων περιπάτων. Στο πρόβλημα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την ιδέα αυτή για έναν υπερκύβο d-διαστάσεων. Για $d \geq 1$, ο d-διάστατος υπερκύβος είναι το γράφημα με τις κορυφές του να αποτελούνται από σειρές bits (0 ή 1) και μήκους πλευράς d. Οι κορυφές εκατέρωθεν της πλευράς του κύβου διαφέρουν ακριβώς 1 bit. Το σχήμα δείχνει την περίπτωση ενός τέτοιου κύβου για d = 3 (τρισδιάστατος).



Για μια κορυφή, u, μπορούμε να γράψουμε u = $b_1b_2b_3$ σα μια σειρά 3 καταστάσεων bits. Οι τρεις γειτονικές κορυφές θα έχουν καταστάσεις bits που αντιστοιχούν σε συμπληρωματικά bits αυτών της κορυφής u. Δηλαδή οι γειτονικές κορυφές θα είναι $\overline{b}_1 b_2 b_3$, $b_1\overline{b}_2 b_3$ και $b_1 b_2 \overline{b}_3$.

Για παράδειγμα να u = 101, τότε οι γειτονικές κορυφές θα είναι 001, 111 και 100.

Για να ορίσουμε μια τυχαία διαδρομή, έστω το σωματίδιο ξεκινά από μια συγκεκριμένη αρχική κατάσταση, S_o, και μετά από κάποιο χρονικό βήμα *i* βρίσκεται στην κατάσταση $S_i = b_1b_2b_3$. Στο επόμενο χρονικό βήμα, *i*+1, μπορεί να βρεθεί σε μια από τις 3 τρεις καταστάσεις, $\overline{b}_1 b_2 b_3$ με πιθανότητα *p*, $b_1\overline{b}_2 b_3$ με πιθανότητα *q* ή $b_1 b_2 \overline{b}_3$ με πιθανότητα *r*. Επειδή το σώμα δεν μπορεί να είναι ακίνητο θα πρέπει *p* + *q*

+ r =1. Μπορείτε να υποθέσετε ότι 0 < p < 1, 0 < q < 1 και 0 < r < 1. Για παράδειγμα, αν το σώμα ξεκινά αρχικά στη θέση S_0=000 η πιθανή ακολουθία διαδρομής θα είναι:

000, 001, 101, 001, 011, 010, 000, 100, 101, 100, 110, 111, 101, 111, 011

Για κάθε κορυφή $b_1b_2b_3$, υπάρχει μια αντίθετη κορυφή σε πλήρως συμπληρωματική κατάσταση bits, η $\overline{b_1b_2b_3}$ που ονομάζεται αντικορυφή. Ο χρόνος (ή αριθμός των βημάτων) για να φθάσει το σωματίδιο την πρώτη φορά στην αντικορυφή ονομάζεται *χρόνος αντικορυφής*. Στο παραπάνω παράδειγμα, η αρχική κατάσταση είναι S_0 = 000 και η αντικορυφή είναι $S_α$ = 111. Ο χρόνος αντικορυφής είναι 11 γιατί χρειάστηκαν 11 βήματα για να φθάσει την πρώτη φορά στην αντικορυφή.

Θα πρέπει να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο προσομοιώνει ένα συγκεκριμένο αριθμό τυχαίων διαδρομών σε ένα κύβο 3-διαστάσεων για δεδομένο αριθμό βημάτων και να υπολογίζει το μέσο χρόνο αντικορυφής για τις τυχαίες διαδρομές. Οι παράμετροι για την προσομοίωση που θα πρέπει να δοθούν από το πληκτρολογίο είναι: (α) η αρχική κατάσταση S_0, (β) οι τιμές των πιθανοτήτων p, q και r και (γ) ο αριθμός των διαδρομών που θα πρέπει να προσομοιώσετε. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει στη $1^η$ γραμμή την αρχική κατάσταση και στις υπόλοιπες γραμμές τις διαδοχικές καταστάσεις μέχρις ότου φθάσει στην κατάσταση της αντικορυφής. Στην περίπτωση αυτή η προσομοίωση σταματά και τυπώνεται μια κενή γραμμή. Η επομένη προσομοίωση ξεκινά και πάλι από την αρχική κατάσταση πιου θέσατε. Τα αποτελέσματά σας θα πρέπει να τυπωθούν για 2 προσομοιώσεις σε μορφή bits. Στο τέλος το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει το μέσο χρόνο αντικορυφής για όλες τις προσομοιώσεις που κάνατε και τις τιμές των πιθανοτήτων που δόθηκαν.

Για παράδειγμα αν δώσετε σαν αρχική κατάσταση 100, οι διαδρομές δυο πειραμάτων είναι:

100	100	
110	101	Ο μέσος χρόνος αντικορυφής είναι: 6
100	001	
101	011	
111	010	
011	110	
	111	
	011	

10. Θεωρήστε ότι ένα μικρό χαλίκι εκτεινάσεται κατακόρυφα προς τα πάνω (θεωρήστε την φορά προς τα πάνω σα τη +y) με αρχική ταχύτητα $υ_0$. Σε συνθήκες έλειψης αντίστασης του αέρα ξέρουμε ότι η πέτρα θα ανέβει σε ένα ύψος $\frac{υ_0^2}{2g}$, ενώ η ταχύτητα με την οποία επιστρέφει στο έδαφος είναι και ίδια με την αρχική της ταχύτητα $υ_0$ και ο χρόνος ανόδου είναι ίσος με το χρόνο καθόδου. Πριν κάνετε οποιαδήποτε αριθμητική επίλυση του προβλήματος δώστε μια απλή ποιοτική εξήγηση για το πως νομίζετε ότι θα επιρεαστούν οι ποσότητες αυτές με την παρουσία αντίστασης του αέρα. Ιδιαίτερα εξηγήστε πως θα διαφέρει ο χρόνος ανόδου από το χρόνο καθόδου (μεγαλύτερος, μικρότερος ή ίδιος). (δώστε τις απαντήσεις σας στο παρακάτω χώρο.

Θα κάνετε τώρα μια αριθμητική επίλυση του προβλήματος για να δείτε αν οι απαντήσεις σας ήταν σωστές. Για την επίλυση του προβλήματος θα χρησιμοποιήσετε μια νέα μέθοδο λύσης διαφορικών εξισώσεων που ονομάζεται *Runge-Kutta* 4ης τάξης. Περιγραφή της μεθόδου υπάρχει παρακάτω. Για το πρόβλημα που έχετε να επιλύσετε υποθέστε ότι η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας, υ^2. Θεωρήστε ότι η μάζα της πέτρας είναι 10^{-2} *kgr,* η ακτίνας της 0.01*m* με αποτέλεσμα η σταθερά αντίστασης να είναι $D = 10^{-2}$*kgr* οπότε η δύναμη της αντίστασης του αέρα δίνεται από την σχέση $F_D = -mD\upsilon^2$. Θεωρήστε ότι η πέτρα ρίχνεται με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 50 m/s$. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να υπολογίσει το χρόνο ανόδου και το χρόνο καθόδου, το μέγιστο ύψος στο οποίο φθάνει η πέτρα και να κάνει τη γραφική παράσταση της συνισταμένης δύναμης συναρτήσει της ταχύτητας υ. Θα πρέπει να αποθηκεύσετε το γράφημα αυτό σε μορφή pdf με όνομα *stone.pdf*. Θα πρέπει να γράψετε σε ένα διαφορετικό file (*stone.dat*) τα αποτελέσματα που σας ζητούνται (χρόνος ανόδου, καθόδου και μέγιστο ύψος).

Περιγραφή της Μεθόδου *Runge-Kutta*:

Η μέθοδος χρειάζεται την διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$y'' = f(x, y, y')$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

Από τη στιγμή που η ανεξάρτητη μεταβλητή στο πρόβλημά μας είναι *t*, θα έχουμε:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{b}{m}\frac{dx}{dt} = f_x\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \Rightarrow \ddot{x} = f_x(t, x, \dot{x}) \Rightarrow f_x(t, x, \dot{x}) = -\frac{b}{m}\dot{x}$$

και αντίστοιχα στη y-διεύθυνση:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{b}{m}\frac{dy}{dt} = f_y\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \Rightarrow \ddot{y} = f_y(t, y, \dot{y}) \Rightarrow f_y(t, y, \dot{y}) = -g - \frac{b}{m}\dot{y}$$

Ο αλγόριθμος *Runge-Kutta* 2ης τάξης πρώτα είναι:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad [\mathbf{1}]$$

$$y(t) = \int f(t, y)\,dt \qquad [\mathbf{2}]$$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y)\,dt \qquad [\mathbf{3}]$$

Έστω ότι πέρνουμε το ανάπτυγμα Taylor της $f(t, y)$ ως προς το κέντρο του διαστήματος ολοκλήρωσης t_i και t_{i+1}, δηλαδή $t_i + h/2$, όπου h είναι το χρονικό βήμα. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του ενδιάμεσου σημείου για να κάνουμε την ολοκλήρωση και ορίζοντας $y(t_i + h/2) = y_{i+1/2}$ και $t_i + h/2 = t_{i+1/2}$, έχουμε:

$$\int_{t_i}^{t_i+1} f(t, y) \approx hf\left(t_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right) + O\left(h^3\right) \qquad [\mathbf{4}]$$

Αυτό σημαίνει ότι θα έχουμε:

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(t_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right) + O\left(h^3\right) \qquad [\mathbf{5}]$$

Ωστόσο δεν γνωρίζουμε την τιμή $y_{t+1/2}$. Εδώ εφαρμόζουμε την επόμενη προσέγγιση, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο *Euler* για να βρούμε προσεγγιστικά το $y_{t+1/2}$. Επομένως, θα έχουμε:

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2}\frac{dy}{dt} = y(t_i) + \frac{h}{2} f(t_i, y_i) \qquad [\mathbf{6}]$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να ορίσουμε τον ακόλουθο αλγόριθμο για τη μέθοδο *Runge-Kutta* 2^{ης} τάξης:

$$k_1 = hf(t_i, y_i) \qquad [\mathbf{7}]$$

$$k_2 = hf\left(t_{i+h/2}, y_i + k_1/2\right) \qquad [\mathbf{8}]$$

και τελικά:

$$y_{i+1} \approx y_i + k_2 + O\left(h^3\right) \qquad [\mathbf{9}]$$

Η διαφορά με τις προηγούμενες μεθόδου ενός βήματος είναι ότι χρειαζόμαστε ένα ενδιάμεσο βήμα στους υπολογισμούς μας, το βήμα $t_i + h/2 = t_{i+1/2}$ όπου υπολογίζουμε την παράγωγο *f*.

Η μέθοδος *Runge-Kutta* 4^{ης} τάξης ή *RK*4 ξεκινά και πάλι με την εξίσωση:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y)\,dt$$

αλλά αντί να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα με τη μέθοδο του ενδιάμεσου σημείου χρησιμοποιούμε την μέθοδο ολοκλήρωσης του *Simpson* στο $t_i + h/2$. Η μέθοδος *Simpson* ολοκλήρωσης, ορίζοντας $y(t_i + h/2) = y_{i+1/2}$ και $t_i + h/2 = t_{i+1/2}$ έχουμε:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y)\,dt \approx \frac{h}{6}\left[f(t_i, y_i) + 4f\left(t_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right) + f\left(t_{i+1}, y_{i+1}\right)\right] + O\left(h^5\right) \qquad [\mathbf{10}]$$

Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να γνωρίζουμε τις τιμές των $y_{i+1/2}$ και y_{i+1}. Η μέθοδος *Runge-Kutta* 4^{ου} βαθμού χωρίζει τους υπολογισμούς του ενδιάμεσου σημείου σε δυο βήματα:

$$y_{i+1} \approx y_i + \frac{h}{6}\left[f(t_i, y_i) + 2f\left(t_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right) + 2f\left(t_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right) + f\left(t_{i+1}, y_{i+1}\right)\right] \qquad [\mathbf{11}]$$

αφού θέλουμε να προσεγγίσουμε τη κλίση στο $y_{i+1/2}$ σε δυο βήματα. Οι δυό πρώτοι υπολογισμοί της συναρτήσης είναι όπως και στη μέθοδο *RK*2. Ο αλγόριθμος είναι ο ακόλουθος:

(**i**) Πρώτα υπολογίζουμε: $k_1 = hf(t_i, y_i)$ [**12**]

που δεν είναι τίποτα άλλο από τη κλίση στο t_i. Αν σταματούσαμε εδώ θα είχαμε τη μέθοδο του *Euler*.

(**ii**) Υπολογίζουμε κατόπιν τη κλίση στο ενδιάμεσο σημείο χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του *Euler* για να προβλέψουμε το $y_{i+1/2}$ όπως και στη μέθοδο *RK*2. Αυτό οδηγεί στον υπολογισμό:

$$k_2 = hf\left(t_i + h/2, y_i + k_1/2\right) \qquad [\mathbf{13}]$$

(**iii**) Η καλύτερη προσέγγιση της κλίσης στο ενδιάμεσο σημείο χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί καλύτερα η κλίση στο $y_{i+1/2}$:

$$k_3 = hf\left(t_i + h/2, y_i + k_2/2\right) \qquad [\mathbf{14}]$$

(**iv**) Χρησιμοποιώντας αυτή τη τελευταία κλίση μπορούμε να υπολογίσουμε τη τιμή y_{i+1} με βάση τον υπολογισμό:

$$k_4 = hf\left(t_i + h, y_i + k_3\right) \qquad [\mathbf{15}]$$

(**v**) Το τελευταίο στάδιο του υπολογισμού είναι:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \qquad [\mathbf{16}]$$

Επομένως ο αλγόριθμος αποτελείται από τα ακόλουθα 4 στάδια. Πρώτα υπολογισμός του k_1, κατόπιν αύξηση της ανεξάρτητης μεταβλητής κατά μισό βήμα $h/2$ και υπολογισμός του k_2 και k_3 και τέλος υπολογισμός του k_4. Χρειάζεται δηλαδή να γράψουμε 4 συναρτήσεις που κάνουν ακριβώς αυτούς τους υπολογισμούς.
Η ακρίβεια της μεθόδου είναι h^5 και η συνολική ακρίβεια h^4.

<u>Τι θα κάνετε:</u>

Διαβάστε τις αρχικές συνθήκες και παραμέτρους από το πληκτρολόγιο. Δημιουργήστε δύο συναρτήσεις οι οποίες είναι οι συναρτήσεις *f* που χρησιμοποιούνται από τη μέθοδο *Runge-Kutta*. Χρησιμοποιήστε ένα do loop για να εφαρμόσετε για όλα τα βήματα την ταχύτητα και θέση για κάθε χρονική στιγμή *t*. Γράψτε τα αποτελέσματά σας αυτά σε ένα file