ΦΥΣ. 111

Τελική Εξέταση: 16-Δεκεμβρίου-2018

Πριν αρχίσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητας).

Ονοματεπώνυμο	Αριθμός Ταυτότητας

Απενεργοποιήστε τα κινητά σας.

Η εξέταση έχει δύο μέρη. Μία άσκηση αποτελείται από 10 διαφορετικά ερωτήματα κατανόησης με σύντομες απαντήσεις. Οι υπόλοιπες 5 ασκήσεις είναι ισότιμες. Πρέπει να απαντήσετε σε όλα. Η μέγιστη συνολική βαθμολογία της εξέτασης είναι 100 μονάδες.

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΣΤΕ ΜΟΝΟ ΤΙΣ ΣΕΛΙΔΕΣ ΠΟΥ ΣΑΣ ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΜΗΝ ΚΟΨΕΤΕ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΣΕΛΙΔΑ

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 180 λεπτά. Καλή Επιτυχία !

Άσκηση 1	**Βαθμός**	**Άσκηση**	**Βαθμός**
Ερώτηση 1^η (3μ)		1^η (30μ)	
Ερώτηση 2^η (3μ)		2^η (8μ)	
Ερώτηση 3^η (3μ)		3^η (12μ)	
Ερώτηση 4^η (3μ)		4^η (15μ)	
Ερώτηση 5^η (3μ)		5^η (15μ)	
Ερώτηση 6^η (3μ)		6^η (20μ)	
Ερώτηση 7^η (3μ)			
Ερώτηση 8^η (3μ)			
Ερώτηση 9^η (3μ)			
Ερώτηση 10^η (3μ)			
Σύνολο			

Άσκηση 1 [30μ]

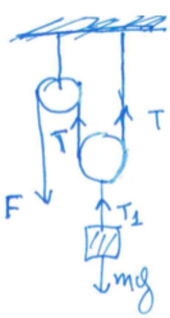
Ερώτηση I [3μ]

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός σώματος αλλάζει κατά -6*J*. Εξηγήστε ποιό είναι το έργο της δύναμης της βαρύτητας στο σώμα και πως αλλάζει (αυξάνει ή ελαττώνεται) η υψομετρική θέση του σώματος κατά την αλλαγή αυτή της βαρυτικής δυναμικής του ενέργειας.

Όπως ξέρουμε: $W_{Δυναμ} = -ΔU$. Επομένως η δύναμη της βαρύτητας εκτελεί θετικό έργο για την μείωση της δυναμικής ενέργειας.
Ουσιαστικά για να ελαττωθεί η δυναμική ενέργεια βαρύτητας, θα πρέπει mgh να γίνει μικρότερο δηλαδή το h να ελαττωθεί.
Αν ένα σώμα κινηθεί από ύψος h_1 σε ύψος h_2, η βαρύτητα εκτελεί θετικό έργο όταν $h_2 < h_1$. Αυτό γιατί η δύναμη της βαρύτητας είναι στην ίδια διεύθυνση με την μετατόπιση του σώματος και έχουν την ίδια φορά, $\vec{F}_g \cdot d\vec{h} > 0$

Ερώτηση II [3μ]

Θεωρήστε την διάταξη του διπλανού σχήματος. Αν το βάρος του κιβωτίου είναι 100*N*, ποιά δύναμη *F* θα πρέπει να ασκήσουμε ώστε να κρατήσουμε το κιβώτιο ακίνητο;



Από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = mg \\ T_1 = 2T \end{array}\right\} \Rightarrow 2T = mg \Rightarrow T = \frac{mg}{2}$$

αλλά $T = F$

$$\Rightarrow F = \frac{mg}{2} \Rightarrow \boxed{F = 50N}$$

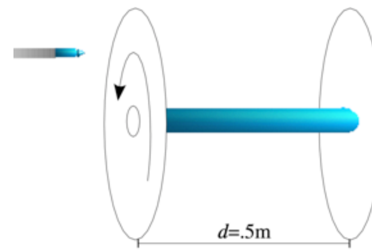
Ερώτηση III [3μ]

Να βρεθεί το μέτρο και η διεύθυνση της ροπής που ασκεί η βαρυτική έλξη της γης (μάζα $M_Γ$ και ακτίνα $R_Γ$) σε έναν επικοινωνιακό δορυφόρο μάζας *m* που περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά γύρω από την γη σε απόσταση $2R_Γ$.

Η δύναμη της βαρύτητας είναι παράλληλη στο διάνυσμα θέσης του σώματος. Είναι ακτινική δύναμη και το διάνυσμα θέσης είναι ακτινικό. Οπότε
$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_g \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{0}$

Ερώτηση IV [3μ]

Η διπλανή διάταξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μέτρηση της ταχύτητας μίας σφαίρας. Αποτελείται από δύο μεταλλικούς δίσκους προσαρτημένους σε ένα περιστρεφόμενο άξονα. Οι δίσκοι περιστρέφονται με ταχύτητα 200 *περιστροφές/sec*. Μία σφαίρα κινούμενη από τα αριστερά διαπερνά και τους δύο δίσκους. Οι τρύπες που αφήνει η σφαίρα στους δίσκους είναι σε γωνία 90^o μεταξύ τους. Αν οι δίσκοι βρίσκονται σε απόσταση $d = 0.5m$, ποιά είναι η μέγιστη ταχύτητα της σφαίρας;



Η μέγιστη ταχύτητα της σφαίρας μπορεί να υπολογισθεί αν θεωρήσουμε ότι ο δεύτερος δίσκος στρέφεται μόνο κατά $\frac{\pi}{2}$ ($\frac{1}{4}$ της στροφής) καθώς η σφαίρα κινείται μεταξύ των δύο δίσκων.

Ο χρόνος που χρειάζεται ώστε η σφαίρα να κινηθεί μεταξύ των δύο δίσκων είναι: $\Delta\Theta = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \Delta\Theta/\omega = \frac{1}{4}\,\cancel{\text{περιστροφή}}/200\,\cancel{\text{περ}}/s = \frac{1}{800}\,sec \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta t = \frac{1}{800}s$. Στο διάστημα αυτό καλύπτει απόσταση $d = 0.5m$ οπότε θα έχουμε: $\upsilon_{\sigma\varphi} = d/\Delta t \Rightarrow \upsilon_{\sigma\varphi} = 0.5m/(1/800s) \Rightarrow \upsilon_{\sigma\varphi} = \frac{800m}{2\,s} \Rightarrow \boxed{\upsilon_{\sigma\varphi} = 400\frac{m}{s}}$

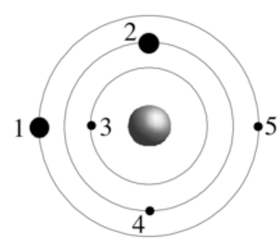
Ερώτηση V [3μ]

Μία μπάλα ρίχνεται κατά μήκος μίας λείας επιφάνειας. Αρχικά η μπάλα γλυστρά στην επιφάνεια. Εξηγήστε αν η μπάλα μπορεί να εκτελέσει κύληση χωρίς ολίσθηση και αν ναι ποια/ποιες θα πρέπει να είναι η/οι συνθήκες για να εκτελέσει τέτοιου είδους κίνηση.

Από τη στιγμή που ο διάδρομος είναι λείος, η μπάλα θα γλιστρά πάντα, και δεν υπάρχει τριβή για να προκαλέσει ροπή στο σώμα και να το περιστρέψει

Ερώτηση VI [3μ]

Το διπλανό σχήμα δείχνει 5 δορυφόρους που κινούνται σε κυκλική τροχιά γύρω από την γη. Οι μάζες των δορυφόρων είναι $m_1=m_2 > m_3=m_4=m_5$. Εξηγήστε ποιος δορυφόρος έχει την μεγαλύτερη εφαπτομενική ταχύτητα.



Για κυκλικές τροχιές, η βαρυτική δύναμη παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης

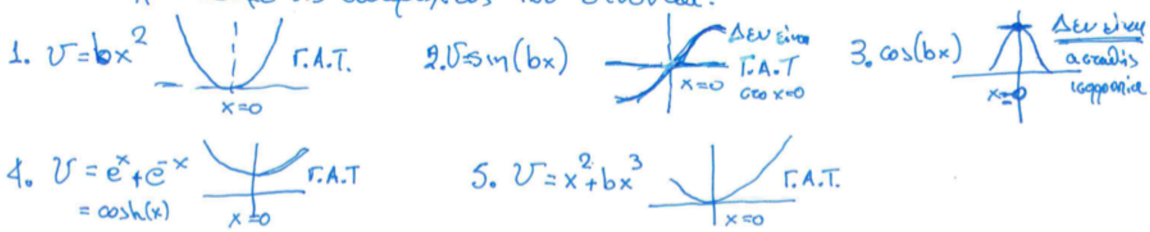
$F_g = F_\kappa \Rightarrow \frac{\cancel{m}\upsilon^2}{\cancel{R}} = \frac{GM\cancel{m}}{R^{\cancel{2}}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{GM}{R}}$. Επομένως όσο μικρότερη η ακτίνα της τροχιάς τόσο μεγαλύτερη η ταχύτητα

Ο δορυφόρος 3 θα έχει την μεγαλύτερη ταχύτητα.

Ερώτηση VI [3μ]

Σώμα μάζας M βρίσκεται στη θέση $x = 0$ και θεωρήστε ότι του δίνεται μία μικρή ώθηση. Θεωρήστε ότι το σώμα κινείται κατόπιν κάτω από την επίδραση δυνάμης που προκαλείται από δυναμική ενέργεια η συναρτήση της οποίας είναι $U_1(x) = bx^2$. Φανταστείτε ότι επαναλαμβάνετε την προηγούμενη διαδικασία τέσσερεις (4) ακόμα φορές αλλά σε κάθε περίπτωση η δύναμη που δρα στο σώμα προέρχεται από διαφορετική συνάρτηση δυναμικής ενέργειας. Οι περιπτώσεις που έχετε είναι $U_2(x) = \sin(bx)$, $U_3(x) = \cos(bx)$, $U_4(x) = e^x + e^{-x}$ και $U_5(x) = x^2 + bx^3$. Εξηγήστε σε ποια/ποιες από τις προηγούμενες 5 περιπτώσεις το σώμα **<u>δεν</u>** θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση ως προς τη θέση $x = 0$.

Ο πιο εύκολος τρόπος για να δούμε ποιά δυναμική ενέργεια οδηγεί σε μή αρμονική κίνηση είναι να σχεδιάσουμε τις συναρτήσεις που δίνονται:



Ερώτηση VIII [3μ]

Δύο σώματα γλυστρούν πάνω σε μία ξύλινη επιφάνεια με την ίδια ταχύτητα. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ του πρώτου σώματος και της επιφάνειας είναι διπλάσιος από τον συντελεστή κινητικής τριβής μεταξύ του δεύτερου σώματος και της επιφάνειας, $\mu_{\kappa_1} = 2\mu_{\kappa_2}$. Αν η απόσταση που καλύπτει το πρώτο σώμα μέχρι να σταματήσει είναι S_1 ποιά είναι η απόσταση S_2 που καλύπτει το δεύτερο σώμα μέχρι να σταματήσει; (Η απάντησή σας θα πρέπει να δοθεί συναρτήσει της απόστασης S_1).

Για κάθε σώμα ξέρουμε ότι η δύναμη της τριβής είναι $f = \mu_\kappa N = \mu_\kappa mg$

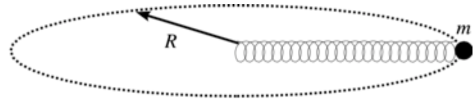
Η δύναμη της τριβής είναι η μόνη δύναμη που ασκείται στα σώματα οπότε για το καθένα θα έχουμε: $\Sigma F = ma \Rightarrow \mu_\kappa \cancel{m} g = \cancel{m} a \Rightarrow a = \mu_\kappa g$

Κινηματική εξίσωση $\cancel{v_f^2} = v_i^2 - 2ad \Rightarrow v_i^2 = 2ad \Rightarrow d = \frac{v_i^2}{2a} = S_1 = \frac{v_i^2}{2\mu_{\kappa_1} g}$

Το δεύτερο σώμα αντίστοιχα $S_2 = \frac{v_i^2}{2\mu_{\kappa_2} g} = \frac{v_i^2}{2\frac{\mu_{\kappa_1}}{2} g} = \frac{2v_i^2}{2\mu_{\kappa_1} g} \Rightarrow \boxed{S_2 = 2S_1}$

Ερώτηση IX [3μ]

Σώμα μάζας m είναι προσαρτημένο σε ελατήριο σταθεράς k και κινείται σε οριζόντια κυκλική τροχιά ακτίνας R με σταθερή ταχύτητα υ. Υποθέστε ότι το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι L. Ποιά η περίοδος της κίνησης του σώματος;



Η κεντρομόλος δύναμη που κρατά το σώμα σε κυκλική τροχιά, προέρχεται από τη δύναμη του ελατηρίου.

$$F_{ελ} = F_κ \Rightarrow k(\underbrace{R-L}_{\Delta x}) = \frac{m\upsilon^2}{R} \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{kR(R-L)}{m} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{kR(R-L)}{m}}$$

Επομένως η περίοδος θα είναι: $T = \frac{2\pi R}{\upsilon} = 2\pi R\sqrt{\frac{m/k}{R(R-L)}} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m/k}{(1-\frac{L}{R})}}}$

Ερώτηση X [3μ]

Δύο αστροναύτες βρίσκονται στο διάστημα ακίνητοι κρατώντας τα άκρα ενός αβαρούς σχοινιού. Ο αστροναύτης Α, μάζας M_A, είναι πολύ δυνατός γιατί σαν παλιός αθλητής ήταν ολυμπιονίκης της άρσης βαρών. Ο αστροναύτης Β, μάζας M_B, είναι φυσικός και δεν ασχολήθηκε ποτέ με τον αθλητισμό.

Αρχίζει ο καθένας να τραβά το σχοινί με δύναμη προς το μέρος του. Η μέγιστη δύναμη F_A, που μπορεί να ασκήσει ο Α είναι αρκετά μεγαλύτερη από τη μέγιστη δύναμη F_B, που μπορεί να ασκήσει ο Β. Βρείτε την επιτάχυνση με την οποία κινείται ο κάθε αστροναύτης.

Οι δυνάμεις που ασκούν οι αστροναύτες, F_A και F_B ασκούνται στο σχοινί και όχι στους αστροναύτες. Επομένως η συνισταμένη δύναμη στο σχοινί θα είναι: $\Sigma F = F_B - F_A$

$\Rightarrow F_B - F_A = m_\Sigma \cdot a_\Sigma$ αλλά $m_\Sigma = 0$ οπότε $F_B = F_A$ (1)

Το σχοινί, λόγω δράσης-αντίδρασης, ασκεί δυνάμεις F_A' και F_B' στους αστροναύτες και $F_A' = F_A$ ενώ $F_B' = F_B$ οπότε από (1) $F_A' = F_B'$. (2)

Οι αστροναύτες δηλαδή τραβούν με ακριβώς την ίδια δύναμη. Αν ο πιο αθλητικός αστροναύτης Α τραβήξει με μεγαλύτερη δύναμη από αυτή που μπορεί να βάλει ο Β, τότε το σχοινί θα γλιστρήσει από τα χέρια του Β.

Οι επιταχύνσεις τους θα είναι: $a_A = \frac{F_A'}{m_A}$ ενώ $a_B = -\frac{F_B'}{m_B} \overset{(2)}{\Rightarrow} a_B = -\frac{F_A'}{m_B}$

Άσκηση 2 [8μ]

Η NASA προγραμματίζει διάφορες αποστολές στον Άρη και σε μία από αυτές αναμένεται ότι τα δείγματα που θα συλλεχθούν θα μπορέσουν να έρθουν στη Γη για περισσότερη επιστημονική διερεύνηση. Ο πλανήτης Άρης έχει μάζα $M = 6.421 \times 10^{23} kg$ και ακτίνα R=3397*km*.

(**α**) Για τον προσδιορισμό της μάζας των συλλεχθέντων δειγμάτων, τοποθετούνται σε ένα ελατήριο σταθεράς k = 0.2*N/m*, και τίθενται σε ταλάντωση συχνότητας 1.35*Hz*. Ποια είναι η μάζα των δειγμάτων; [**2μ**]

Για την επιστροφή των δειγμάτων στη Γη προτείνονται δύο τρόποι. Ο πρώτος τρόπος προβλέπει την εκτόξευση μιας καψούλας στο διάστημα σαν να πρόκειται για βλήμα:

(**β**) Ποιά είναι η ταχύτητα διαφυγής στον Άρη; [**2μ**]

Ο δεύτερος τρόπος που προτάθηκε προβλέπει τη χρήση προωθητικών πυραύλων σε ένα μικρό όχημα στο οποίο θα τοποθετητούν τα δείγματα. Η αρχική μάζα του διαστημικού οχήματος συμπεριλαμβανομένων της μηχανής και των καυσίμων είναι 20*kg* και τα καύσιμα εκτοξεύονται με ταχύτητα 2.3*km/s*.

(**γ**) Ποιά είναι το μέτρο του βαρυτικού πεδίο στην επιφάνεια του Άρη; [**2μ**]

(**δ**) Ποιός είναι ο ελάχιστος ρυθμός καύσης των προωθητικών μηχανών που θα επιτρέψει στο διαστημικό όχημα να ξεπεράσει τη βαρυτική δύναμη στην επιφάνεια του Άρη; [**2μ**]

(α) Η μάζα των ευρημάτων στο ελατήριο θα ταλαντεύονται με γωνιακή συχνότητα: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{k}{(2\pi f)^2} = \frac{0.2 N/m}{(2\pi \cdot 1.35 Hz)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{m = 2.78 g}$$

(β) Η ταχύτητα διαφυγής χρησιμοποιώντας την μάζα και ακτίνα του Άρη:

$$E_{μηχ}^{(i)} = E_{μηχ}^{(f)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_{διαφ}^2 - G\frac{M_A m}{R_A} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m} v_{διαφ}^2 = G\frac{M_A \cancel{m}}{R_A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{διαφ}^2 = \frac{2GM_A}{R_A} \Rightarrow v_{διαφ} = \sqrt{\frac{2GM_A}{R_A}} \Rightarrow v_{διαφ} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6.42 \cdot 10^{23}}{3397 km}}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{διαφ} = 5021 m/s}$$

(γ) Το βαρυτικό πεδίο έχει ένταση: $g_A = \frac{F_N}{m} = \frac{G\frac{M_A \cancel{m}}{R_A^2}}{\cancel{m}} = G\frac{M_A}{R_A^2} \Rightarrow$

$$g_A = 6.67\cdot10^{-11}\,Nm^2/kg^2 \cdot \frac{6.421\cdot10^{23}\,kg}{(3397)^2} \Rightarrow \boxed{g_A = 3.71\,m/s^2}$$

(δ) Η προωθητική δύναμη είναι $F_{πρ} = \frac{dp}{dt} = υ_{αερ}\frac{dm_{αερ}}{dt} = υ_{αερ}\cdot R_{καύσης}$

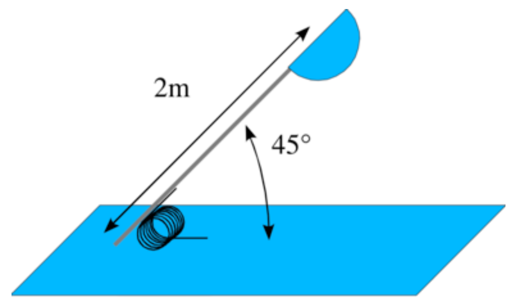
Η δύναμη αυτή θα πρέπει να υπερνικήσει τη δύναμη της βαρύτητας οπότε η ελάχιστη τιμή της θα είναι: $F_{πρ} = mg_A \Rightarrow R_{καύσης}\cdot υ_{αερ} = mg_A \Rightarrow R_{καύσης} = \frac{mg_A}{υ_{αερ}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow R_{καύσης} = \frac{20\,kg\cdot3.71\,\cancel{m}/s^2}{2.3\cdot10^3\,\cancel{m}/\cancel{s}} \Rightarrow \boxed{R_{καύσης} = 32.3\,g/s}$$

Άσκηση 3 [12μ]

Κατά τη μεσαιωνική εποχή ο στρατός μίας πόλης επινόησε έναν έξυπνο καταπέλτη για να απωθεί εχθρικά στρατεύματα που θέλανε να πολιορκήσουν την πόλη τους.

(α) Ο μηχανισμός του καταπέλτη στηρίζεται σε ένα σπειροειδές ελατήριο το οποίο εφαρμόζει ροπή η οποία είναι ανάλογη της γωνίας που έχει στραφεί το ελατήριο, δηλαδή $\tau = -D\theta$. Ο μηχανισμός ρίψης περνά σταματά την κίνηση του καταπέλτη όταν αυτός βρεθεί σε γωνία 45^{o} ως προς τη βάση της διάταξης. Πόσο έργο απαιτείται για να κατέβει το καλάθι του καταπέλτη, το οποίο μπορείτε να θεωρήσετε αμελητέας μάζας, από το υψηλότερο σημείο που μπορεί να βρεθεί ($\theta = 45^{o}$) στο χαμηλότερο σημείο ως προς τη βάση της διάταξης για να το γεμίσουν με το τοξικό φλέγον υλικό πριν την εκτόξευσή του; [**3μ**]



(**β**) Υποθέστε ότι οι στρατιώτες στην βιασύνη τους, τοποθετούν *M kg* από το τοξικό υλικό και είναι έτοιμοι να απελευθερώσουν τον μηχανισμό εκτόξευσης. Αν θεωρήσετε ότι το μήκος του βραχίονα του καταπέλτη είναι *L*, βρείτε την ταχύτητα με την οποία το υλικό φεύγει από το καλάθι. [**3μ**]

(**γ**) Αν ο βραχίονας του καταπέλτη είναι L=2m, η σταθερά του ελατηρίου είναι D =8000N/m και η μάζα του υλικού είναι M=10kg ποιά είναι η οριζόντια απόσταση που καλύπτει το υλικό από τη στιγμή που αφήνει το καλάθι και πριν πέσει στο έδαφος; [**6μ**]

(α) Ξέρουμε ότι η ροπή είναι: $\tau = -D\theta$. Επομένως η ενέργεια συναρτήσει της γωνίας θ θα είναι: $U = \frac{1}{2} D\theta^2$. Αυτό βρίσκεται από την εξίσωση του στοιχειώδους έργου: $dW = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} \Rightarrow W = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} \Rightarrow$

$\Rightarrow W = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} -D \cdot \theta \, d\theta \Rightarrow \quad W = -\frac{1}{2} D\theta^2 \Big|_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \Rightarrow W = -\frac{1}{2} D\theta_{max}^2$ αν $\theta_{min} = 0$.

Η ενέργεια του ελατηρίου θα είναι $U = -W \Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2} D \theta_{max}^2}$ ή $dU = -\tau d\theta$

Στην προκειμένη περίπτωση $\theta_{max} = \frac{\pi}{4}$ οπότε:

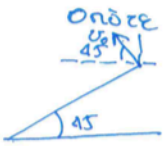
$W = \frac{1}{2} D\theta^2 = \frac{1}{2} D \frac{\pi^2}{16} \Rightarrow \quad U_{\varepsilon\lambda} = \frac{D\pi^2}{32}$

(Β) Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια και βαρυτική δυναμική ενέργεια στο σημείο εκτόξευσης του υγρού που στέφεται ο καταπέλτης.

$$U_{ελ} = E_{κιν} + U_{gr} \Rightarrow \frac{Dπ^2}{32} = E_{κιν} + MgL\sin(45^\circ) \Rightarrow \boxed{E_{κιν} = \frac{Dπ^2}{32} - MgL\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(Γ) $$E_{κιν} = \frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{Dπ^2}{32} - MgL\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8000\cdot π^2}{32} - \frac{10\cdot 9.81\cdot 2}{2}\sqrt{2} \Rightarrow E_{κιν} = \frac{1}{2}Mv_0^2 = 2328 J$$

Οπότε $v_0^2 = 466 m^2/s^2 \Rightarrow \boxed{v_0 = 21.6 m/s}$



Έχουμε πλάγια βολή γωνίας 45°. Επομένως $v_{0y} = v_0\sin 45^\circ = 21.6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} m/s$

Το μέγιστο ύψος στο οποίο φθάνει είναι: $\frac{1}{2}\cancel{m}v_{0y}^2 = \cancel{m}gh \Rightarrow \boxed{h_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = 11.9 m}$

Στο h_{max} φθάνει σε χρόνο: $v_{0y} - gt_{αν} = 0 \Rightarrow t_{αν} = \frac{v_{0y}}{g} \Rightarrow \boxed{t_{αν} = 1.56 s}$

Το σώμα χρειάζεται τον ίδιο χρόνο για να κατέβει στο ύψος από το οποίο εκτοξεύτηκε καθώς και χρόνο για να καλύψει το ύψος στο οποίο βρέθηκε ο καταπέλτης; $h_κ = L\cdot\sin(45^\circ) \Rightarrow h_κ = 2m\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{h_κ = \sqrt{2} m}$

Επομένως το συνολικό ύψος που πέφτει το σώμα για να φθάσει στο έδαφος είναι: $h_{tot} = h_{max} + h_κ = v_0 t + \frac{1}{2}gt_π^2 \Rightarrow t_π = \sqrt{\frac{2h_{tot}}{g}} \Rightarrow$

$t_π = \sqrt{\frac{2\cdot(11.9+\sqrt{2})\cancel{m}}{9.81 \cancel{m}/s^2}} \Rightarrow \boxed{t_{πτ} = 1.65 sec}$ χρόνος πτώσης από ύψος $h_{tot} = h_{max} + h_κ$

Ο συνολικός χρόνος πτήσης θα είναι $t_{tot} = t_{αν} + t_{πτ} = 1.56 + 1.65 s \Rightarrow$

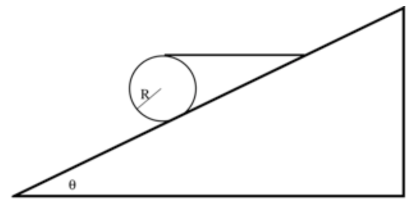
$\Rightarrow \boxed{t_{tot} = 3.21 s}$

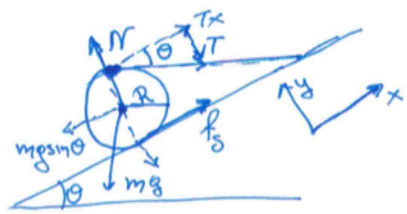
Στο διάστημα αυτό το σώμα καλύπτει απόσταση: $x_{tot} = v_{0x}\cdot t_{tot} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{tot} = 21.6\frac{m}{\cancel{s}}\cdot\cos(45^\circ)\cdot 3.21\cancel{s} \Rightarrow \boxed{x_{tot} = 49 m}$

Άσκηση 4 [15μ]

Ένας κοίλος (κούφιος) κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R είναι ακίνητος σε κεκλιμένη επιφάνεια. Κρατείται ακίνητος με την βοήθεια ενός οριζόντιου νήματος, το ένα άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο πάνω σημείο της περιφέρειας του κυλίνδρου. Το άλλο άκρο του είναι στερεωμένο στην κεκλιμένη επιφάνεια. Έστω η κλίση της κεκλιμένης επιφάνειας με την οριζόντια διεύθυνση είναι θ και ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ της κεκλιμένης επιφάνειας και του κυλίνδρου είναι $\mu_ς$. Ποιά πρέπει να είναι η μικρότερη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής $\mu_ς$ ώστε ο κύλινδρος να διατηρήσει την θέση αυτή σαν θέση ισορροπίας;





Γράφουμε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα :

x-διεύθυνση: $\Sigma F_x = -mg\sin\theta + T\cos\theta + f_s = 0$ (1)

y-διεύθυνση: $\Sigma F_y = N - mg\cos\theta - T\sin\theta = 0$ (2)

Αλλά $f_s \le f_s^{max} = \mu_s N$

Αν ο κύλινδρος γλυστρήσει τότε $\boxed{f_s = \mu_s N = f_s^{max}}$ (3)

Αντικαθιστούμε την (3) στην (1) οπότε έχουμε:

$\Sigma F_x = \boxed{-mg\sin\theta + T\cos\theta + \mu_s N = 0}$ (4)

$\Sigma F_y = N - mg\cos\theta - T\sin\theta \Rightarrow \boxed{N = mg\cos\theta + T\sin\theta}$ (5)

Θεωρούμε τις ροπές ως προς το κέντρο του κυλίνδρου:

$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow T\cdot R - f_s\cdot R = 0 \Rightarrow T\cdot\cancel{R} = f_s\cdot\cancel{R} \Rightarrow \boxed{T = f_s}$ (6)

(Η τάση του νήματος είναι εφαπτόμενη της κυλινδρικής επιφάνειας και επομένως κάθετη στην ακτίνα του κυλίνδρου).

Αντικαθιστούμε την (6) με χρήση της (3) στην (5) και έχουμε:

$$N = mg\cos\theta + f_s\sin\theta \Rightarrow N = mg\cos\theta + \mu_s N\sin\theta \Rightarrow N(1-\mu_s\sin\theta) = mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{N = \frac{mg\cos\theta}{1-\mu_s\sin\theta}} \quad (7)$$

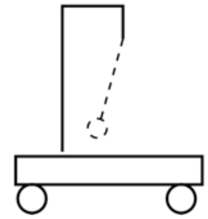
Αντικατάσταση στην (4) με την (6): $-mg\sin\theta + f_s\cos\theta + \mu_s N = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow -mg\sin\theta + \mu_s N\cos\theta + \mu_s N = 0 \Rightarrow \boxed{N = \frac{mg\sin\theta}{\mu_s + \mu_s\cos\theta}} \quad (8)$$

Από (7) & (8) $\Rightarrow \frac{\cancel{mg}\cos\theta}{1-\mu_s\sin\theta} = \frac{\cancel{mg}\sin\theta}{\mu_s+\mu_s\cos\theta} \Rightarrow \mu_s\cos\theta + \mu_s\cos^2\theta = \sin\theta - \mu_s\sin^2\theta \Rightarrow \boxed{\mu_s = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}}$

Άσκηση 5 [15μ]

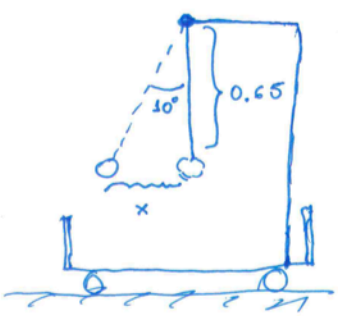
Ένα απλό εκκρεμές μάζας $m = 0.5kg$ και μήκους $0.65m$ είναι στερεωμένο σε ένα βαγονάκι μάζας $1kg$. Η μάζα του στηρίγματος του εκκρεμούς είναι αμελητέα. Το βαγονάκι μπορεί να κινηθεί ελεύθερα πάνω σε λεία επιφάνεια. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, η μάζα του εκκρεμούς αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί από την ηρεμία όταν το νήμα του εκκρεμούς σχηματίζει γωνία 10^o ως προς την κατακόρυφο. Υποθέστε ότι η κίνηση του βαγονιού ως προς το έδαφος είναι απλή αρμονική ταλάντωση.



(**α**) Βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης του βαγονιού. [**9μ**]

(**β**) Για ποιό λόγο νομίζετε ότι το βαγονάκι εκτελεί απλή αρμονική κίνηση; [**6μ**]

Υπόδειξη: Θυμηθείτε ότι ο τύπος που δίνει την κίνηση του εκκρεμούς είναι ως προς το σημείο περιστροφής του.



Η γωνιακή συχνότητα του εκκρεμούς είναι: $\omega = \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow$

$\omega = \sqrt{\frac{0.65m}{9.8\ m/s^2}} \Rightarrow \boxed{\omega = 0.26\ rad/s}$ (1)

Θεωρούμε την οριζόντια απομάκρυνση του εκκρεμούς στο μέγιστο πλάτος της ταλάντωσής του:

$x = l \cdot \sin 10^\circ \Rightarrow x = 0.65m \sin 10^\circ \Rightarrow \boxed{A_{\varepsilon\kappa} = 0.113m}$ (2)

Η θέση του εκκρεμούς θα είναι επομένως: $\boxed{x_{\varepsilon\kappa} = A_{\varepsilon\kappa} \cdot \cos(\omega t)}$ (3)

και η ταχύτητά του θα είναι: $\boxed{\upsilon_{\varepsilon\kappa} = -A_{\varepsilon\kappa}\omega \sin(\omega t)} = -0.0293 \sin 0.26$ (4)

Η ταχύτητα του εκκρεμούς είναι ως προς το σημείο στήριξης το οποίο βρίσκεται πάνω στο βαγονάκι, το οποίο κινείται.

Η θέση του εκκρεμούς ως προς ακίνητο παρατηρητή είναι: $x_{\varepsilon\kappa}^{\varepsilon\delta} = x_{\varepsilon\kappa}^{\beta\alpha\gamma} + x_{\beta\alpha\gamma}^{\varepsilon\delta} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x_{\varepsilon\kappa}^{\varepsilon\delta}\right) = \frac{d}{dx}\left(x_{\varepsilon\kappa.}^{\beta\alpha\gamma} + x_{\beta\alpha\gamma}^{\varepsilon\delta}\right) \Rightarrow \boxed{\upsilon_{\varepsilon\kappa/\varepsilon\delta} = \upsilon_{\varepsilon\kappa/\beta\gamma} + \upsilon_{\beta\alpha\gamma/\varepsilon\delta}}$ (5)

Από διατήρηση της ορμής θα έχουμε: $m_\beta \cdot \upsilon_{\beta/\varepsilon\delta} + m_{\varepsilon\kappa} \cdot \upsilon_{\varepsilon\kappa/\varepsilon\delta} = 0 \xRightarrow{(5)}$

$\Rightarrow m_\beta \upsilon_{\beta/\varepsilon\delta} + m_{\varepsilon\kappa}\left(\upsilon_{\varepsilon\kappa/\beta} + \upsilon_{\beta/\varepsilon\delta}\right) = 0 \Rightarrow \upsilon_{\beta/\varepsilon\delta}\left(m_\beta + m_{\varepsilon\kappa}\right) = -m_{\varepsilon\kappa}\upsilon_{\varepsilon\kappa/\beta} \Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon_{\beta\gamma/\varepsilon\delta} = -\frac{m_{\varepsilon\kappa}}{m_\beta + m_{\varepsilon\kappa}} \cdot \upsilon_{\varepsilon\kappa/\beta} \Rightarrow \boxed{\upsilon_{\beta\gamma} = -\frac{0.5\cancel{kg}}{1.5\cancel{kg}}\upsilon_{\varepsilon\kappa/\beta} = -\frac{1}{3}\upsilon_{\varepsilon\kappa/\beta}}$

Η θέση του βαγονιού συναρτήσει του χρόνου: $x_{\beta\alpha\gamma} = \int v_{\beta\gamma}\, dt = \int -\frac{1}{3} v_{\varepsilon\kappa/\beta} \cdot dt \overset{(a)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \quad x_{\beta\alpha\gamma} = -\frac{1}{3} A_{\varepsilon\kappa} \cos(\omega t) \Rightarrow \boxed{x_{\beta\alpha\gamma} = -\frac{1}{3} x_{\varepsilon\kappa/\beta}} = -\frac{1}{3} A_{\varepsilon\kappa} \cos\omega t = -0.0377 \cos 0.26 t$$

Επομένως το πλάτος της ταλάντωσης του βαγονιού είναι: $A_\beta = -0.0377$ αντίθετο με το εκκρεμές.

(β) Περιμένουμε ότι το βαγονάκι θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση γιατί

βρήκαμε ότι $$\boxed{v_{\beta\alpha\gamma} = -\frac{m_{\varepsilon\kappa}}{m_{\varepsilon\kappa} + m_{\beta\alpha\gamma}} \cdot v_{\varepsilon\kappa/\beta\alpha\gamma}}$$

Αν είχαμε ξεχάσει να μετασχηματίσουμε τις ταχύτητες στο σύστημα αναφοράς του εδάφους (ακίνητος παρατηρητής)

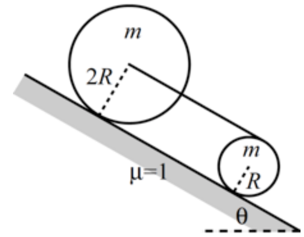
$$m_{\beta\alpha\gamma} \cdot v_{\beta/\varepsilon\delta} + m_{\varepsilon\kappa} v_{\varepsilon\kappa/\beta} = 0 \Rightarrow v_{\beta/\varepsilon\delta} = -\frac{m_{\varepsilon\kappa}}{m_{\beta\alpha\gamma}} v_{\varepsilon\kappa/\beta} = -\frac{1}{2} v_{\varepsilon\kappa/\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{\beta\alpha\gamma} = -\frac{1}{2} x_{\varepsilon\kappa/\beta} = -\frac{1}{2} A_{\varepsilon\kappa} \cos\omega t = -0.057 \cos 0.26 t$$

Επομένως θα βρίσκαμε το πλάτος της ταλάντωσης του βαγονιού θα ήταν $A_{\beta\alpha\gamma} = -0.057 m$.

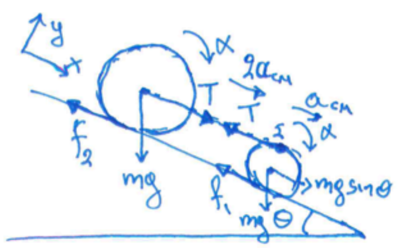
Άσκηση 6 [20μ]

Δύο συμπαγείς κύλινδροι τοποθετούνται σε μία κεκλιμένη επιφάνεια γωνίας κλίσης θ με την οριζόντια επιφάνεια, όπως στο σχήμα. Οι δύο κύλινδροι έχουν ο καθένας μάζα m, αλλά η ακτίνα του ενός είναι διπλάσια του άλλου. Ένα αβαρές νήμα συνδέει τους δύο κυλίνδρους, από το κέντρο του μεγαλύτερου κυλίνδρου στην περιφέρεια του μικρότερου κυλίνδρου. Οι κύλινδροι ελευθερώνονται από την ηρεμία και αρχίζουν να κυλούν χωρίς να ολισθαίνουν προς τη βάση της κεκλιμένης επιφάνειας.



(**α**) Ποια είναι η επιτάχυνση των δύο κυλίνδρων; [**12μ**]

(**β**) Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ των κυλινδρικών επιφανειών και της κεκλιμένης επιφάνειας είναι μ=1, ποιά είναι η μέγιστη γωνία θ για την οποία δεν θα παρουσιαστεί ολίσθηση μεταξύ κανενός από τους κυλίνδρους και της κεκλιμένης επιφάνειας; [**8μ**]



Κατά μήκος της κεκλιμένης επιφάνειας οι δυνάμεις που δρουν στους δύο κυλίνδρους είναι: η Τάση, T, του νήματος, η συνιστώσα mg sinθ της βαρύτητας, και η δύναμη f της τριβής.

Το κέντρο μάζας του μεγάλου κυλίνδρου συνδέεται με το υψηλότερο σημείο της περιφέρειας του μικρού κυλίνδρου. Επομένως θα έχουν την ίδια γραμμική επιτάχυνση. Αλλά το υψηλότερο σημείο της περιφέρειας κινείται με διπλάσια ταχύτητα και άρα επιτάχυνση από αυτή του κέντρου μάζας. Επομένως αν ο μικρός κύλινδρος κινείται με επιτάχυνση a^{1}_{CM} τότε το υψηλότερο σημείο της περιφέρειας θα κινείται με επιτάχυνση $2a_{CM}$ και επομένως το κέντρο μάζας του μεγάλου κυλίνδρου θα κινείται με επιτάχυνση $2a^{1}_{CM}$.

Δηλαδή έχουμε: $a^{1}_{\Sigma} = a^{1}_{CM} + \alpha^{1} R$

κύλιση χωρίς ολίσθηση: $a^{1}_{CM} = \alpha^{1} R$

$$\left.\begin{array}{l} a^{1}_{\Sigma} = a^{1}_{CM} + \alpha^{1} R \\ a^{1}_{CM} = \alpha^{1} R \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{a^{1}_{\Sigma} = 2a^{1}_{CM}} \\ a^{2}_{CM} = a^{1}_{\Sigma} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a^{2}_{CM} = 2a^{1}_{CM}} \quad (1)$$

Αφού $a^{2}_{CM} = 2R\alpha^{2} \Rightarrow \alpha^{2} = \dfrac{a^{2}_{CM}}{2R} = \dfrac{\cancel{2}a^{1}_{CM}}{\cancel{2}R} \Rightarrow \alpha^{2} = \dfrac{a^{1}_{CM}}{R} = \dfrac{\alpha^{1}\cancel{R}}{\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{\alpha^{2} = \alpha^{1}}$ ίδια γωνιακή επιτάχυνση (2)

Επομένως από την (1) και (2) έχουμε $a^2_{CM} = 2a^1_{CM} = 2a$

$\alpha^2 = \alpha^1 = \alpha$

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton για τους δύο κυλίνδρους:

<u>Μικρός κύλινδρος</u>: $mg\sin\theta - f_1 - T = m a_{CM}$ (3)

<u>Μεγάλος κύλινδρος</u>: $mg\sin\theta - f_2 + T = m a^2_{CM} = 2m a_{CM}$ (4)

Η ροπή ως προς το κέντρο μάζας του μικρού κυλίνδρου προέρχεται από τη ροπή της στατικής τριβής και τη ροπή της τάσης του νήματος:

$$\Sigma\tau = I\alpha \Rightarrow f_1\cdot R - T\cdot R = I\alpha \Rightarrow (f_1 - T)\cancel{R} = \frac{1}{2}mR^{\cancel{2}}\frac{a_{CM}}{\cancel{R}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f_1 - T = \frac{1}{2} m a_{CM}} \quad (5)$$

Για τον μεγάλο κύλινδρο, η μόνη δύναμη που προκαλεί ροπή ως προς το κέντρο του είναι: η δύναμη της τριβής:

$$\Sigma\tau = I\alpha \Rightarrow f_2\cdot(2\cancel{R}) = \frac{1}{2}m(2R)^{\cancel{2}}\frac{a^2_{CM}}{2\cancel{R}} \Rightarrow f_2 = \frac{1}{\cancel{2}}m\cancel{2}a_{CM} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f_2 = m a_{CM}} \quad (6)$$

Λύνουμε την (5) ως προς f_1 και αντικαθιστούμε στην (3): $\boxed{f_1 = T + \frac{1}{2} m a_{CM}}$

$$mg\sin\theta - f_1 - T = m a_{CM} \Rightarrow mg\sin\theta - \frac{1}{2} m a_{CM} - 2T = m a_{CM} \Rightarrow \boxed{mg\sin\theta - 2T = \frac{3}{2} m a_{CM}} \quad (7)$$

Αντίστοιχα αντικαθιστούμε την (6) στην (4) και έχουμε:

$$mg\sin\theta + T - m a_{CM} = 2m a_{CM} \Rightarrow \boxed{mg\sin\theta + T = 3m a_{CM}} \quad (8)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (8) με 2 και προσθέτουμε στην (7) οπότε έχουμε:

$$3\cancel{m}g\sin\theta = \left(6 + \frac{3}{2}\right)\cancel{m}a_{CM} \Rightarrow \cancel{3}g\sin\theta = \frac{\cancel{15}^{\,5}}{2}a_{CM} \Rightarrow \boxed{a_{CM} = \frac{2}{5}g\sin\theta} \quad (A)$$

Επομένως η επιτάχυνση του μεγάλου κυλίνδρου θα είναι $\boxed{a^2_{CM} = \frac{4}{5}g\sin\theta}$

Επομένως η επιτάχυνση του μεγάλου κυλίνδρου θα είναι $\boxed{a^2_{CM} = \frac{4}{5} g \sin\theta}$

Από την (6) έχουμε: $\boxed{f_2 = \frac{2}{5} m g \sin\theta}$ (B) $\overset{(A)}{\Rightarrow} T = m a^2_{cm} + f_2 - m g \sin\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow T = \frac{4}{5} g m \sin\theta + \frac{2}{5} m g \sin\theta - m g \sin\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{5} m g \sin\theta}$ (Γ)

Επομένως από (5) $\Rightarrow f_1 = \frac{1}{2} m \frac{2}{5} g \sin\theta + \frac{1}{5} m g \sin\theta \Rightarrow \boxed{f_1 = \frac{2}{5} m g \sin\theta}$ (Δ)

Από το (B) κ (Δ) βλέπουμε ότι οι δυνάμεις τριβής $f_1 = f_2$ είναι ίδιες, ενώ όπως ξέρουμε, και οι μάζες των δύο κυλίνδρων είναι ίσες. Επομένως οι κύλινδροι θα γλιστρήσουν ακριβώς στην ίδια γωνία αφού και ο συντελεστής τριβής είναι ίδιος.

Για να μην γλιστρήσουν θα πρέπει η δύναμη f_s να είναι πάντοτε μικρότερη ή ίση της μέγιστης δύναμης τριβής: $f_s \leq \mu N = f_{max} \Rightarrow$

$\overset{(B)}{\Rightarrow} \frac{2}{5} \cancel{m} \cancel{g} \sin\theta \leq \mu_s \cancel{m} \cancel{g} \cos\theta \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \leq \frac{5}{2} \cancel{\mu_s}^{1} \Rightarrow \boxed{\tan\theta \leq \frac{5}{2}} \Rightarrow$

$\theta \leq 68.2^\circ$