Για τη συνέχεια σήμερα…

- Συζήτηση ξανά των νόμων διατήρησης
  - Χρησιμοποιώντας τον φορμαλισμό Lagrange
  - Γραμμική ορμή και στροφορμή
  - Σύνδεση μεταξύ συμμετρίας, αναλλοίωτο της Lagrangian, και διατήρηση της γενικευμένης ορμής

Νόμοι διατήρησης

- Έχουμε δει διατήρηση γραμμικής ορμής, στροφορμής και ενέργειας στην Newtonian μηχανική
  - Πως δουλεύουν στην Lagrangian μηχανική

    Πρέπει να 'ναι οι ίδιες

- Ωστόσο θα δούμε μερικές διαφορές και μερικές υποθέσεις
  - Προέρχονται από περιορισμούς και προσεγγίσεις που δεν λάβαμε υπ' όψη

Διατήρηση της ορμής

- Ας μελετήσουμε ένα απλό σύστημα:

Δυναμικό δεν εξαρτάται από ταχύτητα

$$L = T - V = \sum_i \frac{m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)}{2} - V(x_i, y_i, z_i, t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i = p_{ix}$$ ορμή

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_{ix}$$ Δύναμη

Lagrange: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = const. \Rightarrow p_{ix} = const.$$

Η ορμή p_{ix} διατηρείται αν το V δεν εξαρτάται από το x_i

Πως το γενικεύουμε από δω και πέρα?

Γενικευμένη ορμή

- Ορίζουμε σαν γενικευμένη ορμή τον όρο $p_j \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$
    - Γνωστή ακόμα σαν κανονική ή συζυγής ορμή
    - ✓ Είναι ίση με τις "γνωστές" ορμές για x-y-z συντεταγμένες
- Η εξίσωση του Lagrange γίνεται:

$$\frac{dp_j}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

☞ p_j διατηρείται αν η L δεν εξαρτάται ακριβώς από το q_j

➢ Τέτοια συντεταγμένη q_j ονομάζεται κυκλική ή αγνοήσιμη

Γενικευμένη ορμή που σχετίζεται με μια κυκλική συντεταγμένη διατηρείται

⇐ Η διατήρηση της γραμμικής ορμής είναι ιδιαίτερη περίπτωση

Γενικευμένη ορμή $p_j \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

- Η γενικευμένη ορμή μπορεί και να μην μοιάζει με την γραμμική ορμή
  - Οι μονάδες μπορεί να διαφέρουν, αν η q_j δεν είναι χωρική συντεταγμένη
  - $p_j q_j$ πάντα έχει τις μονάδες της δράσης (=έργο $\times$ χρόνο)
  - Η εξίσωση μπορεί να διαφέρει αν το V εξαρτάται από την ταχύτητα
    - ✓ Παράδειγμα το ΕΜ πεδίο

$$L = \frac{1}{2} m \mathrm{v}^2 - q\phi + q\mathbf{A}\cdot \mathrm{v} \Rightarrow p_x = m\dot{x} + qA_x$$

Επιπλέον όρος εξαιτίας του εξαρτωμένου από την ταχύτητα δυναμικού

Συμμετρία

- Η γραμμική ορμή $\mathbf{p}=(p_x,p_y,p_z)$ είναι συζυγής των (x,y,z) συντεταγμένων
  - Διατηρείται αν η Lagrangian δεν εξαρτάται ακριβώς από την θέση

Είναι ανεξάρτητη ως προς χωρικές μετατοπίσεις

$$(x,y,z)\rightarrow(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$$

- Ένα τέτοιο σύστημα ονομάζεται συμμετρικό ως προς χωρικές μετατοπίσεις

Συμμετρία συστήματος = Αναλλοίωτη Lagrangian

$\Downarrow$

Διατήρηση της συζυγούς ορμής

Παράδειγμα: Διατήρηση της στροφορμής

Στροφορμή

- Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα με πολλά σώματα $\mathbf{r}_i=\mathbf{r}_i(q_1,\ldots,q_n,t)$
  - Ας υποθέσουμε ότι η q_1 περιστρέφει όλο το σύστημα

    π.χ. φ στο $r_i=(x_i,y_i,z_i)=(r_i\cos\varphi, r_i\sin\varphi, z_i)$
  - Υποθέτουμε ακόμα ότι το V δεν εξαρτάται από το $\dot{\varphi}$
- Συζυγής ορμή είναι:

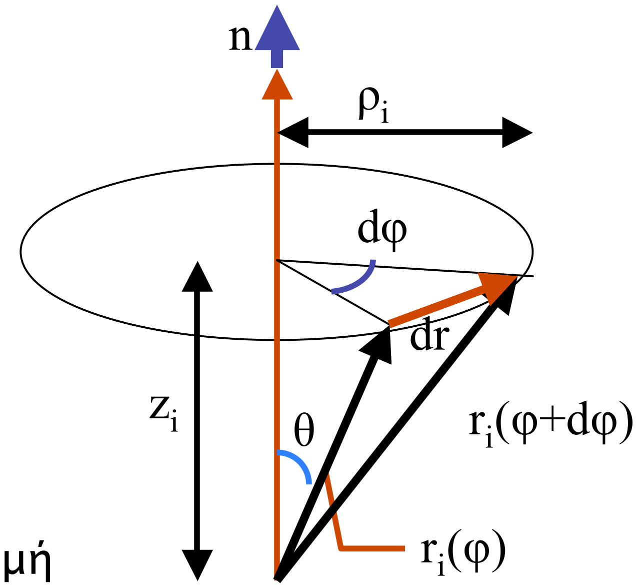
πράξεις

$$p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}$$

$$= \vec{n}\cdot\sum_i \vec{L}_i = \vec{n}\cdot\vec{L}$$

Άξονας περιστροφής

Ολική στροφορμή



Πράξεις....

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\varphi, q_2, \ldots, q_n, t)$$

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \sum_{k=2}^{n}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$ παράγωγος ως προς $\dot{\varphi}$ $\Rightarrow \dfrac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{\varphi}} = \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial \varphi}$

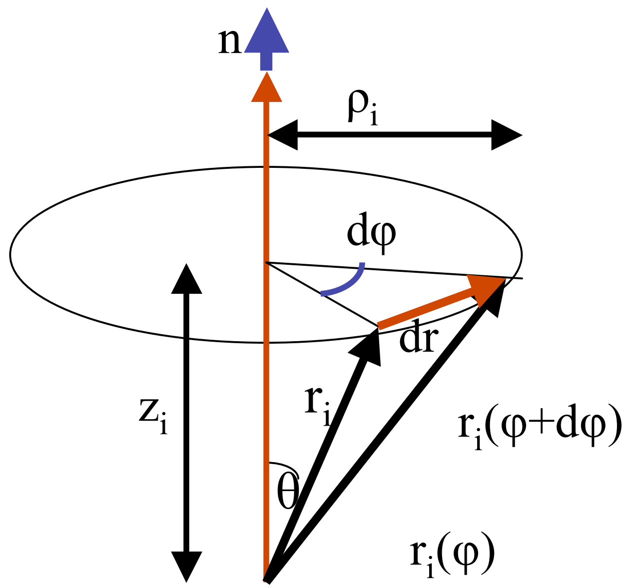
$$T = \sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_j \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{\varphi}} \quad \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \varphi}$$

- $d\mathbf{r}_i$ είναι κάθετο και στο $\mathbf{n}$ και στο $\mathbf{r}_i$
- Το μέτρο του είναι: $|d\vec{r}_i| = r_i \sin\theta d\phi$

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \varphi} = \vec{n} \times \vec{r}_i$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (\hat{n} \times r_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_i m_i \hat{n} \cdot (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) = \hat{n} \cdot \sum_i \vec{L}_i$$



Στροφορμή

- Η στροφορμή διατηρείται αν το σύστημα είναι συμμετρικό σε περιστροφές.
  - Πως σχετίζεται αυτό με την ολική ροπή;

Γενικευμένη Δύναμη $\Rightarrow$ $\boxed{Q_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \varphi}}$

Αυτό πρέπει να 'ναι 0 αν φ κυκλική

Η T δεν μπορεί να εξαρτάται από την φ ← Περιστροφή δεν αλλάζει v_i^2

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \varphi} = \sum_i \vec{F}_i \cdot (\hat{n} \times \vec{r}_i) = \hat{n} \cdot \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Ροπή

Αλλά $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

Η συνολική ροπή είναι μηδέν κατά μήκους του άξονα συμμετρίας

Νόμοι διατήρησης

- Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:
  - Ένα σύστημα είναι συμμετρικό ως προς γενικευμένη συντεταγμένη
  - Η συντεταγμένη είναι κυκλική (δεν εμφανίζεται στην Lagrangian)
  - Η συζυγής γενικευμένη συντεταγμένη διατηρείται
  - Η αντίστοιχη γενικευμένη δύναμη είναι μηδέν

Συμμετρία	Χωρικές μετατοπίσεις	Περιστροφή
Συντεταγμένη	Απόσταση κατά μήκους ενός άξονα	Γωνία γύρω από ένα άξονα
Ορμή	Γραμμική	Στροφορμή
Δύναμη	Δύναμη	Ροπή

Διατήρηση της Ενέργειας

- Θεωρούμε την παράγωγο ως προς το χρόνο της Lagrangian

$$\frac{dL(q,\dot{q},t)}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

- Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Lagrange έχουμε ότι:

$$\frac{dL(q,\dot{q},t)}{dt} = \sum_j \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\frac{dq_j}{dt}} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Ορίζουμε αυτό σαν μια συνάρτηση της ενέργειας $h(q,\dot{q},t)$

- Η ποσότητα αυτή διατηρείται αν η Lagrangian δεν εξαρτάται ακριβώς εκφρασμένα από το χρόνο

Συνάρτηση ενέργειας $h(q,\dot{q},t) = \left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right)$

- Αντιπροσωπεύει αυτή η συνάρτηση ενέργειας την ολική ενέργεια?

  - Ας δούμε ένα παράδειγμα:

    Σωματίδιο κινείται κατά μήκος του x-άξονα:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x) \Rightarrow h = m\dot{x}^2 - L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = T + V$$

  - Ok δουλεύει για την περίπτωση αυτή αλλά πόσο γενικό είναι?

Συνάρτηση Ενέργειας $h(q,\dot{q},t) = \left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right)$

- Ας υποθέσουμε ότι η Lagrangian μπορεί να γραφεί ως:

$$L(q,\dot{q},t) = L_0(q,t) + L_1(q,\dot{q},t) + L_2(q,\dot{q},t)$$

Πρώτης τάξης σε $\dot{q}$

Δεύτερης τάξης σε $\dot{q}$

- Οι παράγωγοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_j} = 0, \qquad \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} = L_1, \qquad \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} = 2L_2$$

Θεώρημα Euler

$$\Rightarrow \quad h(q,\dot{q},t) = \left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right) = L_2 - L_0$$

Συνάρτηση Ενέργειας

$$h(q,\dot{q},t) = L_2 - L_0, \qquad L = T - V$$

- Η συνάρτηση της ενέργειας ισούται με την ολική ενέργεια E=T+V αν

$$T = L_2 \qquad \text{και} \qquad V = -L_0$$

- Η πρώτη συνθήκη ικανοποιείται αν οι μετασχηματισμοί από το r στο q_j είναι ανεξάρτητοι του χρόνου.

- Η δεύτερη συνθήκη ικανοποιείται αν το δυναμικό είναι ανεξάρτητο από την ταχύτητα

- Όχι τριβές

- Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Κινητική Ενέργεια

Ανεξάρτητο χρόνου

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{r}_i^2, \qquad r_i = r_i(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

- Χρησιμοποιώντας τον κανόνα $\frac{dr_j}{dt} = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$

$$\sum_i \frac{m_i}{2} \dot{r}_i^2 = \sum_i \frac{m_i}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k = \underline{\sum_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k \sum_i} \frac{m_i}{2} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_k}$$

Δευτέρου βαθμού ομογενείς

Χωρίς $\dot{q}$

Τα παραπάνω **δεν** θα ίσχυαν αν $r_i = r_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$ γιατί

$$\frac{dr_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t}$$

Διατήρηση της Ενέργειας

- Η συνάρτηση της ενέργειας ισούται με την ολική ενέργεια αν
  - Οι δεσμοί είναι ανεξάρτητοι του χρόνου
    - Η κινητική ενέργεια T είναι δευτέρου βαθμού ομογενής συνάρτηση των ταχυτήτων.
    - Το δυναμικό V είναι ανεξάρτητο της ταχύτητας
- Η συνάρτηση της ενέργειας διατηρείται αν
  - Η Lagrangian δεν εξαρτάται ακριβώς από το χρόνο
- Τα παραπάνω είναι απλά εκφράσεις του θεωρήματος διατήρησης της ενέργειας σε ένα πιο γενικό πλαίσιο.

Περίληψη

- Βγάλαμε τις εξισώσεις Lagrange από την αρχή του Hamilton
  - Λογισμός μεταβολών
- Συζητήσαμε νόμους διατήρησης
  - Γενικευμένη (συζυγής) ορμή
  - Συμμετρία του συστήματος
    - Αναλλοίωτο της Lagrangian
    - Διατήρηση της ορμής

$$p_j \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

- Έχουμε τελειώσει με τις βασικές ιδέες και έννοιες
  - Θα μπούμε σε εφαρμογές → Πρόβλημα κεντρικού δυναμικού