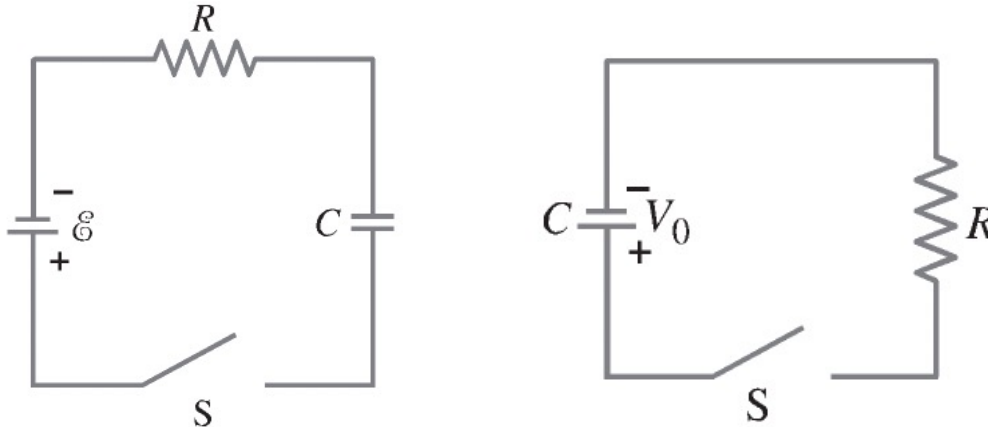


# Κυκλώματα RC

## Κύκλωμα RC

Ένα κύκλωμα  $RC$  αποτελείται από ένα αντιστάτη αντίστασης  $R$  και έναν πυκνωτή χωρητικότητας  $C$  συνδεδεμένα σε σειρά.

Σε κυκλώματα συνεχούς ρεύματος στα οποία υπάρχουν πυκνωτές, το ρεύμα μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου μέχρι να φορτιστεί ή να αποφορτιστεί ο πυκνωτής. Το ρεύμα έχει την ίδια φορά.



Δύο διαφορετικές διατάξεις κυκλώματος  $RC$ .

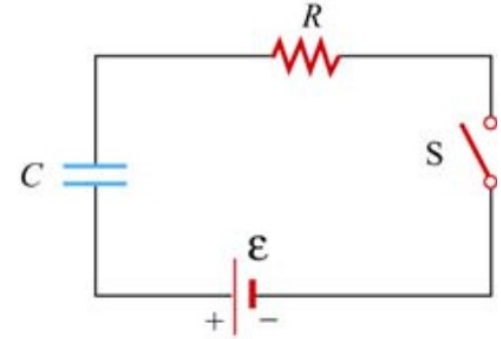
Τα κυκλώματα  $RC$  έχουν ευρεία εφαρμογή σε διάφορες διατάξεις: ο μηχανισμός των υαλοκαθαριστήρων των αυτοκινήτων, ο χρονισμός των σημάτων της τροχαίας, ο βηματοδότης, τα flashes των φωτογραφικών μηχανών είναι μερικές από τις εφαρμογές των κυκλωμάτων  $RC$  στην καθημερινή ζωή

## Φόρτιση Πυκνωτή

Εξετάζουμε το κύκλωμα  $RC$  του σχήματος.

Ο πυκνωτής συνδέεται με μια πηγή ΗΕΔ,  $\mathcal{E}$ .

Ο πυκνωτής αρχικά είναι αφόρτιστος,  $Q(t \leq 0) = 0$



Για  $t \leq 0$  ο πυκνωτής συμπεριφέρεται σαν διακόπτης και δεν υπάρχει δυναμικό στα άκρα του

Τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , ο διακόπτης  $S$  κλείνει και  
ρεύμα αρχίζει να ρέει σύμφωνα με την εξίσωση:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , η διαφορά δυναμικού στους πόλους της μπαταρίας είναι ίδια με αυτή που υπάρχει στα άκρα της αντίστασης.

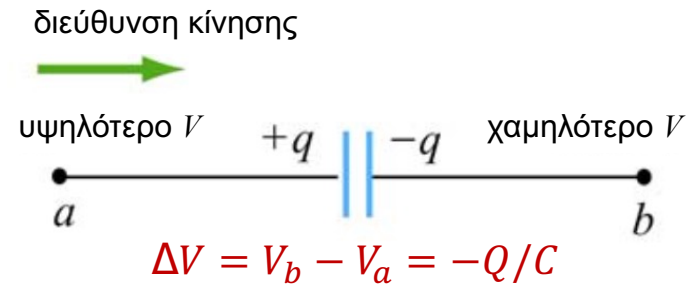
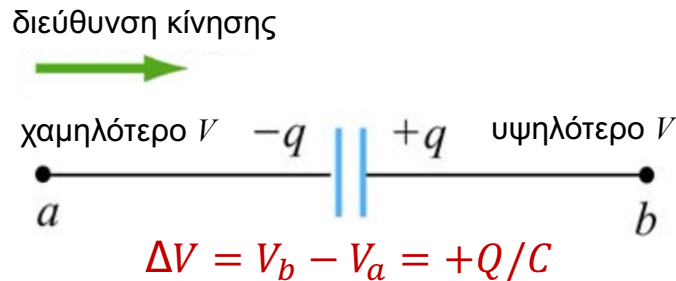
**Ξεκινά η φόρτιση του πυκνωτή.**

Καθώς ο πυκνωτής αρχίζει να φορτίζεται η διαφορά δυναμικού στα άκρα του αρχίζει να αυξάνει με το χρόνο:

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

# Φόρτιση Πυκνωτή

Χρησιμοποιούμε τους κανόνες *Kirchhoff* για κυκλώματα με πυκνωτές:



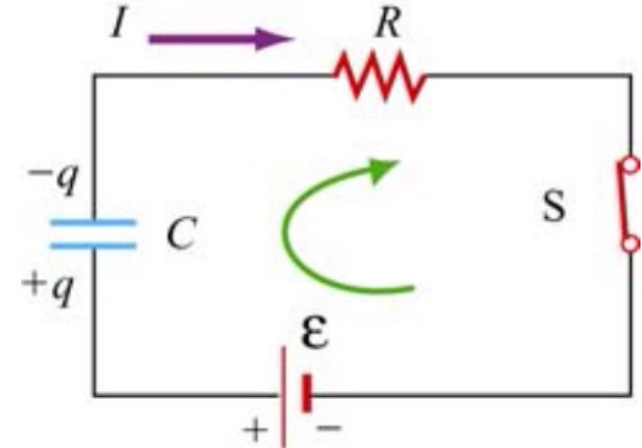
Κινούμαστε στον κλειστό βρόχο του κυκλώματος σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού:

$$\mathcal{E} - V(t) - I(t)R = 0 \Rightarrow \mathcal{E} - \frac{Q(t)}{C} - \frac{dQ(t)}{dt}R = 0$$

Το ρεύμα είναι ίδιο σε όλο το κύκλωμα ➡

Το ρεύμα στην αντίσταση ίσο με το ρυθμό αύξησης του φορτίου στον πυκνωτή

- Το **ρεύμα ωστόσο αρχίζει να ελαττώνεται** γιατί το φορτίο που συσσωρεύεται στον πυκνωτή δυσκολεύει την συσσώρευση επιπλέον φορτίου στον πυκνωτή



## Φόρτιση Πυκνωτή

Όταν το φορτίο φθάσει στη μέγιστη τιμή του  $Q_{max}$  τότε το ρεύμα μηδενίζεται εφόσον δεν υπάρχει μεταβολή του φορτίου

Επομένως μπορούμε να έχουμε:  $I(t)R = \mathcal{E} - V(t)$

Δηλαδή, ο πυκνωτής που φορτίζεται ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση 1<sup>ου</sup> βαθμού

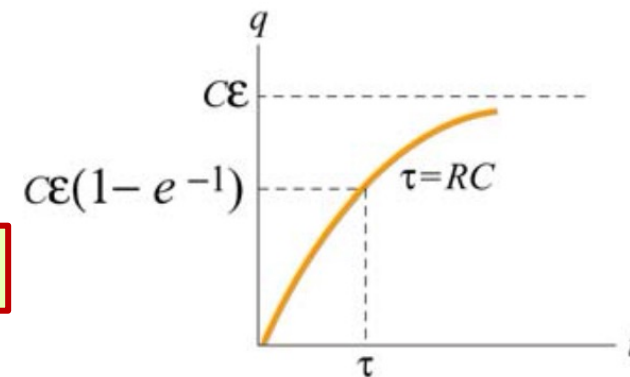
$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{1}{R} \left( \mathcal{E} - \frac{Q(t)}{C} \right) \quad \text{Λύνουμε την εξίσωση με χωρισμό μεταβλητών:}$$

$$\frac{dQ(t)}{\left( \mathcal{E} - \frac{Q(t)}{C} \right)} = \frac{1}{R} dt \Rightarrow \frac{dQ(t)}{(\mathcal{E}C - Q(t))} = \frac{1}{RC} dt \Rightarrow \frac{dQ(t)}{(Q(t) - \mathcal{E}C)} = -\frac{1}{RC} dt$$

$$\text{Ολοκληρώνουμε και τα δύο σκέλη της εξίσωσης: } \int_t^Q \frac{dQ'(t)}{(Q'(t) - \mathcal{E}C)} = \int_0^t -\frac{1}{RC} dt' \Rightarrow$$

$$\ln \left( \frac{Q - \mathcal{E}C}{\mathcal{E}C} \right) = -\frac{1}{RC} t \Rightarrow \frac{Q - \mathcal{E}C}{\mathcal{E}C} = e^{-t/RC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(t) = \mathcal{E}C [1 - e^{-t/RC}] \Rightarrow \boxed{Q(t) = Q_{max} [1 - e^{-t/RC}]}$$



## Φόρτιση Πυκνωτή

Εφόσον ξέρουμε το φορτίο στον πυκνωτή, μπορούμε να βρούμε το δυναμικό στα άκρα του

$$Q(t) = Q_{max}[1 - e^{-t/RC}] \Rightarrow V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \mathcal{E}[1 - e^{-t/RC}]$$

Η γραφική του δυναμικού είναι παρόμοια με του φορτίου.

Μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα ( $t \rightarrow \infty$ ) η τιμή του φορτίου προσεγγίζει τη μέγιστη τιμή:

$$Q(t = \infty) = Q_{max} = \mathcal{E}C$$

Τη χρονική στιγμή που ο πυκνωτής αποκτά το μέγιστο φορτίο, η διαφορά δυναμικού στα άκρα του γίνεται μέγιστη και ίση με την εφαρμοζόμενη τάση της πηγής

$$V_C(t = \infty) = \frac{Q(t = \infty)}{C} = \frac{Q_{max}}{C} = \mathcal{E}$$

Η διεργασία της φόρτισης σταματά

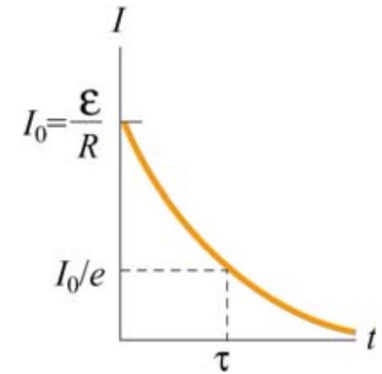
➤ Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι:  $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{Q_{max}}{RC} e^{-t/RC} \Rightarrow$

➤ Αλλά:  $Q_{max} = \mathcal{E}C \Rightarrow \frac{Q_{max}}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R} = I_0$  επομένως:  $I(t) = I_0 e^{-t/RC} \Rightarrow$

# Φόρτιση Πυκνωτή

- Το ρεύμα επομένως σε ένα κύκλωμα φόρτισης ελαττώνεται εκθετικά με τον χρόνο:  $I(t) = I_0 e^{-t/RC} \Rightarrow I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$

όπου  $\tau = RC$  χρονική σταθερά



- Οι μονάδες μέτρησης της σταθεράς αυτής στο SI είναι:

$$[\Omega][F] = ([V]/[A])([C]/[V]) = [C]/[C]/[T] = [T]$$

- Αντιπροσωπεύει τον χρόνο απόσβεσης της εκθετικής συνάρτησης και ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:  $I(t + \tau) = I(t)e^{-1}$

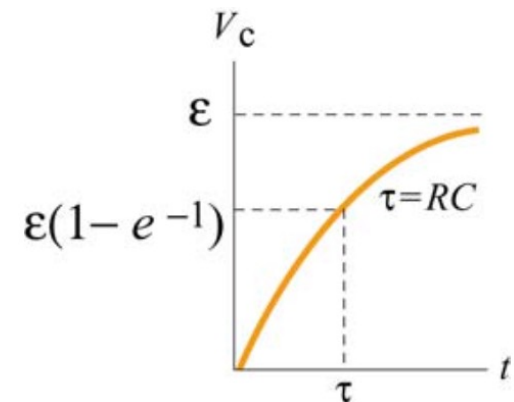
- Μετά από  $t = \tau$ , το ρεύμα ελαττώνεται κατά  $e^{-1} = 0.368$

- ✓ Ανάλογα μπορούμε να γράψουμε την τάση στα άκρα του πυκνωτή:  $V_C(t) = \varepsilon[1 - e^{-t/RC}] \Rightarrow V_C(t) = \varepsilon[1 - e^{-t/\tau}]$

□ Για  $t = 0$ ,  $V_C = 0$

□ Για  $t = \tau$ , το δυναμικό στα άκρα του πυκνωτή έχει αυξηθεί κατά:

$(1 - e^{-1}) = 0.632$  της τελικής τιμής. Επομένως  $V_C(t = \tau) = 0.632\varepsilon$

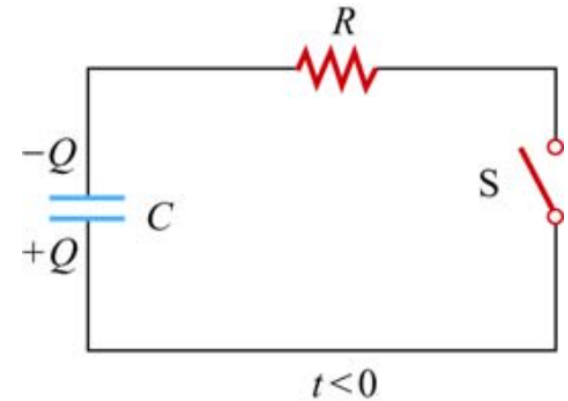


## Εκφόρτιση πυκνωτή

Εξετάζουμε το κύκλωμα  $RC$  του σχήματος.

Δεν υπάρχει πηγή τάσης στο κύκλωμα.

Ο πυκνωτής αρχικά είναι φορτισμένος με φορτίο,  
 $Q(t \leq 0) = Q$



Για  $t \leq 0$  ο διακόπτης είναι ανοικτός και η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή είναι:  $V_C = Q/C$

Το κύκλωμα είναι ανοικτό και δεν διαρρέεται από ρεύμα. Επομένως:  $V_R = 0$

Το χρονική στιγμή  $t = 0$  ο διακόπτης  $S$  κλείνει και ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται

Ο πυκνωτής συμπεριφέρεται ως πηγή δυναμικού για το κύκλωμα και ρεύμα αρχίζει να το διαρρέει

Καθώς ο πυκνωτής εκφορτίζεται, ηλεκτρόνια μετακινούνται από τον αρνητικό οπλισμό του πυκνωτή μέσω του σύρματος στον θετικό οπλισμό του πυκνωτή. Σαν αποτέλεσμα η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή μειώνεται

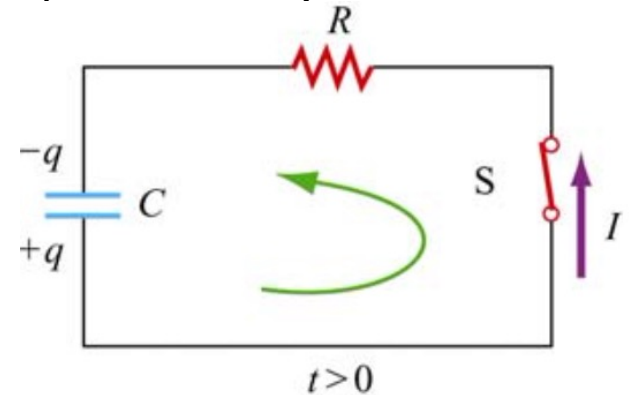


## Εκφόρτιση πυκνωτή

Χρησιμοποιούμε τους κανόνες *Kirchhoff* για κυκλώματα με πυκνωτές:

Κινούμαστε στον κλειστό βρόχο του κυκλώματος αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού:

$$V(t) - I(t)R = 0 \Rightarrow \frac{Q(t)}{C} - I(t)R = 0$$



Το ρεύμα το οποίο ρέει από τον θετικό οπλισμό είναι ανάλογο με το φορτίο στον οπλισμό:  $I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt}$

Το αρνητικό πρόσημο στην προηγούμενη σχέση οφείλεται στο γεγονός ότι το φορτίο ελαττώνεται.

Η παραπάνω εξίσωση του βρόχου γράφεται:  $\frac{Q(t)}{C} + \frac{dQ(t)}{dt}R = 0$

Η εξίσωση είναι μια διαφορική εξίσωση 1<sup>ου</sup> βαθμού που μπορεί να λυθεί με διαχωρισμό μεταβλητών

$$\frac{Q(t)}{C} + \frac{dQ(t)}{dt}R = 0 \Rightarrow \frac{Q(t)}{C} = -R \frac{dQ(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dQ(t)}{Q(t)} = -\frac{dt}{RC}$$

## Εκφόρτιση πυκνωτή

Καταλήξαμε στην διαφορική εξίσωση:  $\frac{dQ(t)}{Q(t)} = -\frac{dt}{RC}$

Ολοκλήρωση θα δώσει:

$$\int_{Q_{max}}^Q \frac{dQ'(t)}{Q'(t)} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \Rightarrow \ln\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \boxed{Q(t) = Q_{max}e^{-t/RC}}$$

Το δυναμικό στα άκρα του πυκνωτή βρίσκεται διαιρώντας το φορτίο με την χωρητικότητα. Θα έχουμε:

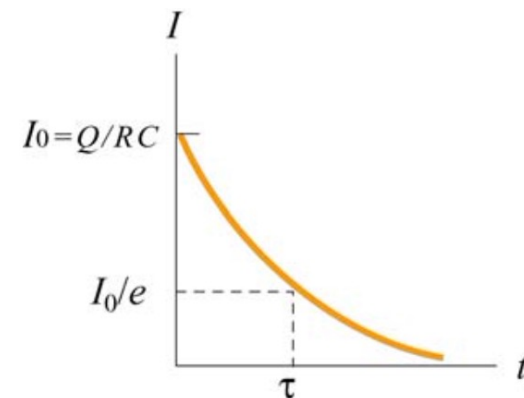
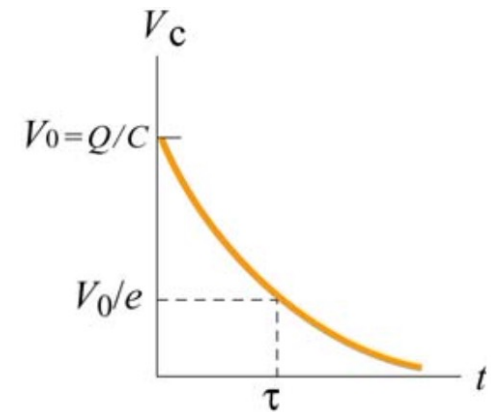
$$V = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_{max}}{C} e^{-t/RC} \Rightarrow \boxed{V = V_0 e^{-t/RC}}$$

Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα ελαττώνεται εκθετικά.

Μπορούμε να βρούμε το ρεύμα διαφορίζοντας την εξίσωση του φορτίου.

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{Q_{max}}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow I(t) = I_0 e^{-t/RC}}$$



## Παράδειγμα: Ισοδύναμη αντίσταση

Θεωρήστε το κύκλωμα των αντιστατών του σχήματος

Για δεδομένη τιμή της αντίστασης  $R_0$  ποια πρέπει να είναι η αντίσταση  $R_1$  ώστε η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος να είναι  $R_0$ ;

Η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος του βρόχου είναι:

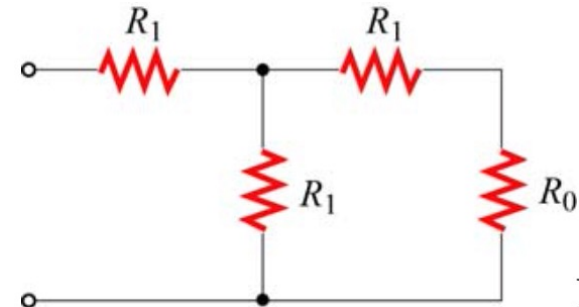
$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 + R_0} = \frac{2R_1 + R_0}{R_1(R_1 + R_0)} \Rightarrow R' = \frac{R_1(R_1 + R_0)}{2R_1 + R_0}$$

Η  $R'$  είναι σε σειρά με την 4<sup>η</sup> αντίσταση  $R_1$  και η συνολική αντίσταση γίνεται:

$$\Rightarrow R_{o\lambda} = R' + R_1 = \frac{R_1(R_1 + R_0)}{2R_1 + R_0} + R_1 \Rightarrow R_{o\lambda} = \frac{3R_1^2 + 2R_1R_0}{R_0 + 2R_1}$$

Για να είναι  $R_{o\lambda} = R_0$  θα πρέπει:  $\frac{3R_1^2 + 2R_1R_0}{R_0 + 2R_1} = R_0 \Rightarrow$

$$3R_1^2 + 2R_1R_0 = R_0^2 + 2R_1R_0 \Rightarrow 3R_1^2 = R_0^2 \Rightarrow R_1 = \frac{R_0}{\sqrt{3}}$$



## Παράδειγμα: Μεταβλητή αντίσταση

Δείξτε ότι όταν μια μπαταρία γνωστής ΗΕΔ με εσωτερική αντίσταση  $r$  συνδεθεί με μεταβλητή εξωτερική αντίσταση  $R$ , καταναλώνει μεγαλύτερη ισχύ στην αντίσταση όταν  $r = R$

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα Kirchhoff για τον βρόχο:  $\mathcal{E} - Ir - IR = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = I(r + R)$

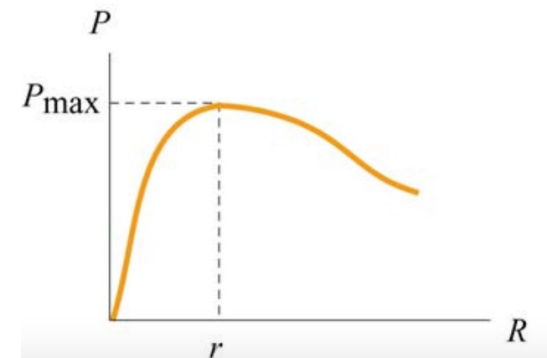
Η ισχύς που καταναλώνεται είναι:  $P = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{(R + r)^2} R$

Για να βρούμε την τιμή της αντίστασης  $R$  για την οποία έχουμε την μέγιστη ισχύ, παραγωγίζουμε ως προς  $R$  και θέτουμε την παράγωγο να είναι 0 (ακρότατο):

$$\frac{dP}{dR} = \mathcal{E}^2 \left[ \frac{(R + r)^2 - 2R(R + r)}{(R + r)^4} \right] = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dR} = \mathcal{E}^2 \left[ \frac{(R + r)(R + r - 2R)}{(R + r)^4} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r - R = 0 \Rightarrow R = r$$

Αυτό αποτελεί παράδειγμα ταιριάσματος αντίστασης όπου επιλέγεται η εξωτερική αντίσταση ώστε η ισχύς που καταναλώνεται να είναι μέγιστη



## Παράδειγμα: RC κύκλωμα

Θεωρήστε ότι στο διπλανό κύκλωμα ο διακόπτης είναι ανοικτός για μεγάλο χρονικό διάστημα. Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  ο διακόπτης κλείνει.

(α) Ποια η χρονική σταθερά πριν κλείσει ο διακόπτης;

Πριν κλείσει ο διακόπτης, οι δύο αντιστάτες  $R_1$  και  $R_2$  είναι συνδεδεμένοι σε σειρά με τον πυκνωτή.

Η ολική αντίσταση είναι:  $R_{ολ.} = R_1 + R_2$

Η χρονική σταθερά είναι:  $\tau = R_{ολ.}C = (R_1 + R_2)C$

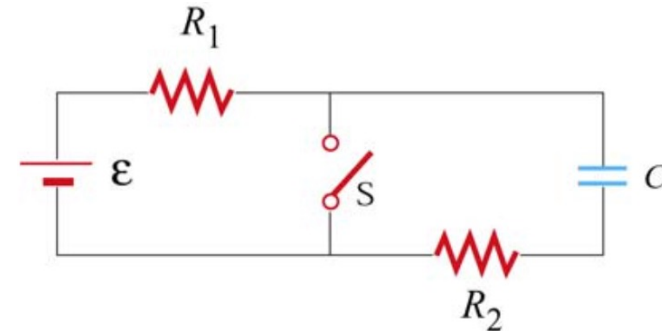
Το φορτίο το οποίο είναι αποθηκευμένο στον πυκνωτή είναι:  $Q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-t/\tau})$

(β) Ποια η χρονική σταθερά αφότου κλείσει ο διακόπτης;

Όταν κλείσει ο διακόπτης, ο βρόχος στα δεξιά γίνεται ένα κύκλωμα αποφόρτισης πυκνωτή.

Η χρονική σταθερά του κυκλώματος αυτού είναι:  $\tau' = R_2C$

Ο πυκνωτής χάνει φορτίο σύμφωνα με την εξίσωση:  $Q(t) = C\varepsilon e^{-t/\tau'}$



## Παράδειγμα: RC κύκλωμα

(Y) Ποιο το ρεύμα που διαρρέει τον διακόπτη συναρτήσει του χρόνου αφότου κλείσει ο διακόπτης;

Το ρεύμα που διαρρέει τον διακόπτη αποτελείται από δύο συνιστώσες:

Το σταθερό ρεύμα,  $I_1$ , που παρέχει στο κύκλωμα η πηγή μέσω του αριστερού βρόχου και το ρεύμα,  $I_2$ , που παρέχει στο κύκλωμα ο αποφορτιζόμενος πυκνωτής μέσω του δεξιού βρόχου του κυκλώματος

Τα ρεύματα είναι:  $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1}$

$$I'_2(t) = \frac{dq'}{dt} = -\frac{C\mathcal{E}}{\tau'} e^{-t/\tau'} \Rightarrow I'_2(t) = -\frac{\mathcal{E}}{R_2} e^{-t/CR_2}$$

Το αρνητικό πρόσημο στο  $I'_2$  δηλώνει ότι η φορά του ρεύματος αποφόρτισης είναι αντίθετη αυτής της φόρτισης

Εφόσον τόσο το  $I_1$  όσο και το  $I'_2$  έχουν φορά από πάνω προς τα κάτω καθώς διαπερνούν τον διακόπτη, το συνολικό ρεύμα που περνά τον διακόπτη είναι:

$$I_{ολ.} = I_1 + I'_2(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} + \frac{\mathcal{E}}{R_2} e^{-t/CR_2}$$

## Παράδειγμα: Σύνδεση σε σειρά ως προς παράλληλα

Θεωρήστε το κύκλωμα των δύο αντιστάτων με αντιστάσεις  $R_1$  και  $R_2$  συνδεδεμένες παράλληλες ή σε σειρά. Η μπαταρία έχει ΗΕΔ,  $\mathcal{E}$ .

➤  $R_1$  και  $R_2$  συνδεδεμένες παράλληλα

(α) Ποια η ισχύς που παρέχεται στους 2 αντιστάτες

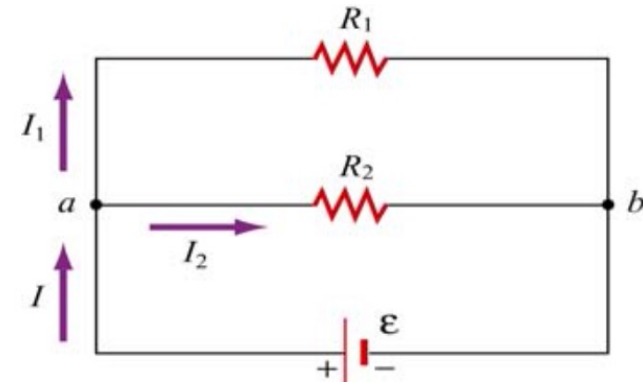
Σε παράλληλη συνδεσμολογία, το ρεύμα σε κάθε αντιστάτη είναι:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} \quad \text{και} \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2}$$

Η ισχύς σε κάθε αντιστάτη θα είναι:  $P_1 = I_1^2 R_1 = \frac{\mathcal{E}^2}{R_1}$  και  $P_2 = I_2^2 R_2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R_2}$

Όσο μικρότερη επομένως είναι η αντίσταση τόσο μεγαλύτερη η ισχύς που παρέχεται

Αν οι αντιστάτες είναι λαμπτήρες, τότε αυτός με την μικρότερη αντίσταση θα φωτοβολεί περισσότερο λόγω της μεγαλύτερης ισχύος πάνω του



## Παράδειγμα: Σύνδεση σε σειρά ως προς παράλληλα

(β) Δείξτε ότι το άθροισμα της ισχύος που καταναλώνεται σε κάθε αντιστάτη ισούται με την ισχύ που παρέχει η μπαταρία

$$\text{Η ολική ισχύς στους αντιστάτες είναι: } P_R = P_1 + P_2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R_1} + \frac{\mathcal{E}^2}{R_2} = \frac{\mathcal{E}^2}{R_{o\lambda}}$$

$$\text{όπου: } \frac{1}{R_{o\lambda}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{o\lambda} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\text{Η ολική ισχύς που παρέχει η μπαταρία είναι: } P_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}I \text{ όπου: } I = I_1 + I_2$$

$$\text{άρα: } P_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}(I_1 + I_2) = \mathcal{E}I_1 + \mathcal{E}I_2 = \left(\frac{\mathcal{E}}{R_1}\right)\mathcal{E} + \left(\frac{\mathcal{E}}{R_2}\right)\mathcal{E} \Rightarrow P_{\mathcal{E}} = \left(\frac{\mathcal{E}^2}{R_1}\right) + \left(\frac{\mathcal{E}^2}{R_2}\right) = \frac{\mathcal{E}^2}{R_{o\lambda}} = P_R$$

Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο με βάση την αρχή διατήρησης ενέργειας:

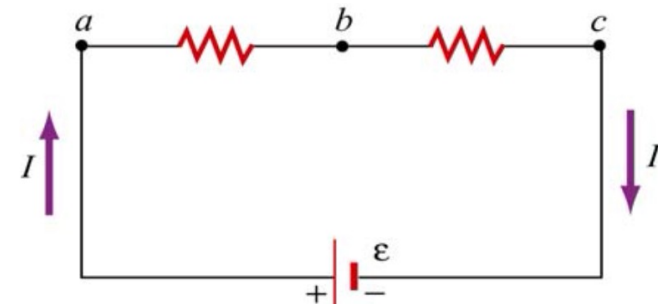
➤  $R_1$  και  $R_2$  συνδεδεμένες σε σειρά

(γ) Ποια η ισχύς που καταναλώνετε σε κάθε αντίσταση

Η ολική αντίσταση είναι:  $R_{o\lambda} = R_1 + R_2$

και το ρεύμα σε κάθε μία είναι:  $I_{o\lambda} = I_1 = I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_{o\lambda}}$

και η ισχύς σε κάθε μία είναι:  $P_1 = I_1^2 R_1 = \frac{\mathcal{E}^2}{R_{o\lambda}^2} R_1$  και  $P_2 = I_2^2 R_2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R_{o\lambda}^2} R_2$



Αντίθετα με την παράλληλη συνδεσμολογία, μεγαλύτερη αντίσταση μεγαλύτερη ισχύς



## Παράδειγμα: Σύνδεση σε σειρά ως προς παράλληλα

(δ) Δείξτε ότι το άθροισμα της ισχύος που καταναλώνεται σε κάθε αντιστάτη ισούται με την ισχύ που παρέχει η μπαταρία

Η ολική ισχύς στους αντιστάτες είναι:  $P_R = P_1 + P_2 = \left(\frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}\right)^2 R_1 + \left(\frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}\right)^2 R_2$

$$\Rightarrow P_R = \frac{\mathcal{E}^2}{R_{o\lambda}^2} (R_1 + R_2) = \frac{\mathcal{E}^2}{R_{o\lambda}^2} R_{o\lambda} \Rightarrow P_R = \frac{\mathcal{E}^2}{R_{o\lambda}}$$

Η ολική ισχύς από την μπαταρία είναι:  $P_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}I = \mathcal{E} \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{\mathcal{E}^2}{R_1 + R_2} = \frac{\mathcal{E}^2}{R_{o\lambda}} = P_R$   
 όπως αναμένονταν από διατήρηση ενέργειας

(ε) Ποια συνδεσμολογία απαιτεί περισσότερη ισχύ;

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα από τα ερωτήματα (β) και (δ) βλέπουμε ότι:

$$P_{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}^2}{R_1} + \frac{\mathcal{E}^2}{R_2} > \frac{\mathcal{E}^2}{R_1 + R_2}$$

Η παράλληλη συνδεσμολογία χρησιμοποιεί περισσότερη ισχύ και άρα ενέργεια.

Η ολική αντίσταση δύο αντιστατών συνδεδεμένων παράλληλα είναι μικρότερη από την ολική τους αντίσταση όταν είναι συνδεδεμένοι σε σειρά.

## Παράδειγμα: Δίκτυο αντιστατών

Θεωρήστε το δίκτυο των αντιστατών σε σχήμα κύβου. Ο καθένας έχει αντίσταση  $R$ . Δείξτε ότι η αντίσταση μεταξύ των σημείων  $a$  και  $b$  είναι  $5R/6$

Από συμμετρία, το ρεύμα το οποίο εισέρχεται στο  $a$  θα πρέπει να χωριστεί σε 3 ίσα ρεύματα κατά μήκος κάθε αντιστάτη που συνδέεται στην κορυφή  $a$ .

Επομένως σε κάθε ακμή υπάρχει ρεύμα:  $I/3$

Για λόγους συμμετρίας, σε κάθε άλλη κορυφή το ρεύμα θα χωριστεί σε 2 ισοδύναμα ρεύματα. Έτσι στην κορυφή  $c$  το ρεύμα θα χωριστεί σε δύο ρεύματα  $I'/2$

Το ρεύμα που ρέει στον αντιστάτη  $ac$  είναι  $I' = I/3$  επομένως στους αντιστάτες  $cd$  και  $ce$  το ρεύμα θα είναι:  $I/6$

Το ρεύμα που ρέει στον αντιστάτη  $db$  είναι το άθροισμα των ρευμάτων στους αντιστάτες  $cd$  και  $fd$ . Δηλαδή θα έχουμε  $I/6 + I/6 = I/3$

Η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα  $ab$  μπορεί να εξαχθεί ως:

$$V_{ab} = V_{ac} + V_{cd} + V_{db} = \frac{I}{3}R + \frac{I}{6}R + \frac{I}{3}R \Rightarrow V_{ab} = \frac{5}{6}RI \Rightarrow R_{o\lambda} = \frac{5}{6}R$$

