Έργο – Κινητική Ενέργεια

Παράδειγμα

- Ένα σώμα μάζας 2.0kg κινείται κατά μήκος του x-άξονα κάτω από την επίδραση μιας δύναμης F=-6x N, όπου x είναι η θέση του σώματος σε μέτρα. Αν η ταχύτητα του σώματος στην θέση x=3.0m είναι 8.0m/s, ποια είναι η ταχύτητα του σώματος στην θεση x=4.0m;

ΛΥΣΗ

Από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας έχουμε ότι: $W = \Delta E_{kin} = \frac{1}{2}m\upsilon_f^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_i^2$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}m\left(\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2\right) \qquad \text{(A)}$$

Αλλά: $W = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f} \left(-6x\right)dx \Rightarrow W = -6\frac{1}{2}x^2\Big|_{x_i}^{x_f} \Rightarrow W = -3\left(x_f^2 - x_i^2\right) = -21J$ (B)

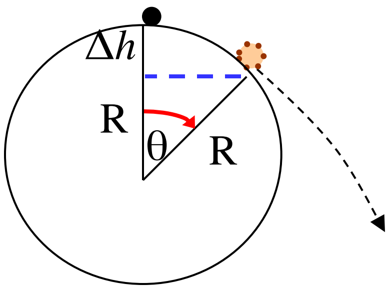
Από (A) και (B) θα έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\left(\upsilon_f^2 - 8^2\right) = -21J \Rightarrow \upsilon_f^2 = -\frac{42}{2} + \frac{1}{2}2\times 64 \quad \Rightarrow \upsilon_f^2 = 43 \quad \Rightarrow \upsilon_f = 6.56m/s$$

Παράδειγμα

- Δίνουμε στη μάζα μια μικρή ώθηση και αρχίζει να κινείται
  Σε ποιά γωνία θα αφήσει την σφαίρα.

ΛΥΣΗ



Μια κανονική δύναμη που δρα στο σώμα και έχει φορά προς τα έξω.

Η εξίσωση της ακτινικής δύναμης θα 'ναι:

$$mg\cos\theta - N = m\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{R}}$$

Η μάζα φεύγει από την σφαίρα όταν N=0.

Επομένως θέλουμε: $$mg\cos\theta = m\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{R}} \qquad \text{(A)}$$

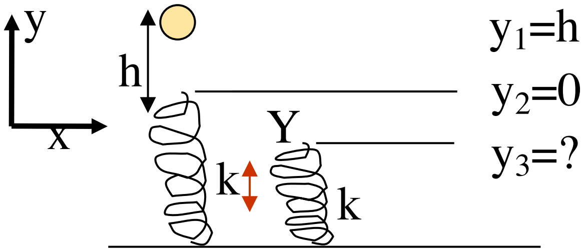
Από αρχή διατήρησης της ενέργειας ($\Delta E_{\kappa\iota\nu}+\Delta U=0$)

$$\frac{1}{2}\mathrm{mv}^2 = mg\Delta h = mgR(1-\cos\theta) \Rightarrow m\mathrm{v}^2 = 2mgR(1-\cos\theta)$$ και από (A) θα έχουμε:

$$mg\cos\theta = \frac{2mgR(1-\cos\theta)}{R} \Rightarrow \cos\theta = 2-2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = 48.2^\circ$$

Παράδειγμα ελατήρια και ενέργεια

- Ρίχνουμε από ύψος h μια μπάλα μάζας m σε ένα ελατήριο σταθερής k. Ποιά είναι η μέγιστη συμπίεση που θα υποστεί το ελατήριο



Προσθέτουμε την ελαστική ενέργεια ελατηρίου και τη δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας:

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}_1^2 + mgy_1 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_3^2 + mgY + \frac{1}{2}kY^2$$

Θα πρέπει να είναι αρνητικό

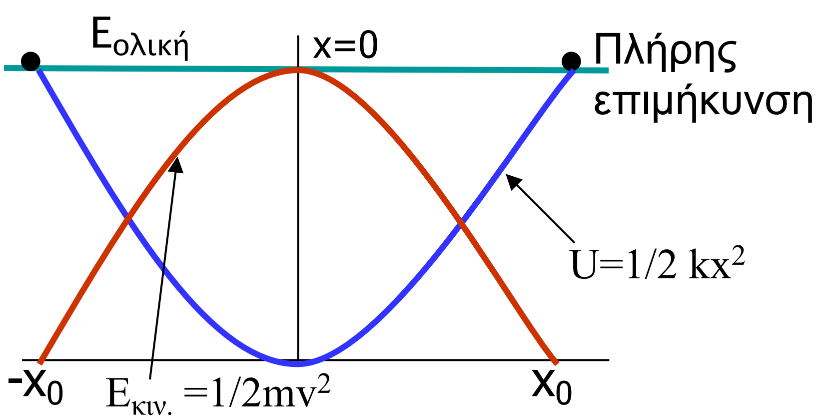
Οι αρχικές συνθήκες είναι: $v_1= 0$, $x_1= 0$, $v_3= 0$, $y_3=Y=?$, οπότε

$$mgh = mgY + \frac{1}{2}kY^2 \Rightarrow y = \frac{-mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2k(mgh)}}{k}$$

Το (-) θα δίνει το y_{max}

Αν ξέρουμε το k μπορούμε να βρούμε το Y ή το ανάποδο

Ας δούμε την δυναμική ενέργεια σε ελατήριο γραφικά



Για μή συντηρητικές δυνάμεις:

$$W_{\text{net}} = W_{συντ.} + W_{μη-συντ.}$$

$$W_{συντ} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{l} = -\Delta U$$

$$\Delta E_{κιν} = -\Delta U + W_{μη-συντ}$$

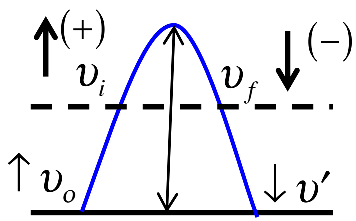
$$\Delta E_{κιν} + \Delta U = W_{μη-συντ}$$

Παράδειγμα

- Ένα σώμα βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω με κάποια αρχική ταχύτητα $υ_0$. Φτάνει στο μέγιστο ύψος της πορείας του σε χρόνο T_1 (χρόνος ανόδου) και κατόπιν επιστρέφει στο έδαφος σε χρόνο T_2 (χρόνος καθόδου). Η αντίσταση του αέρα δεν είναι αμελητέα. Ποιος από τους δυο χρόνους είναι μεγαλύτερος και γιατί;

ΛΥΣΗ

Λόγω της αντίστασης του αέρα που είναι μη συντηριτική δύναμη $\Delta E_{μηχ} \neq 0$



$$\Rightarrow \Delta E_{μηχ} = -W_{αντ.} \Rightarrow E^f_{μηχ} - E^i_{μηχ} = -W_{αντ.}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_f^2 - U_g^f - \frac{1}{2}m\upsilon_f^2 + U_g^i = -W_{αντ.}$$

Αν εξετάσουμε τις θέσεις του σώματος στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο: $\Delta U_g = 0 \Rightarrow U_g^f = -U_g^i$

$$\frac{1}{2}m\left(\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2\right) = -W_{αντ} \Rightarrow \upsilon_f^2 - \upsilon_i^2 < 0 \Rightarrow \upsilon_f < \upsilon_i$$

Η ταχύτητα του σώματος σε κάποιο ύψος της τροχιάς του ανεβαίνοντας είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα που έχει στο ίδιο ύψος κατεβαίνοντας.

Επομένως και η ταχύτητα με την οποία θα πέσει στο έδαφος θα είναι μικρότερη της ταχύτητας με την οποία εκτοξεύτηκε $\upsilon' < \upsilon_o$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Η μέση ταχύτητα ανόδου είναι: } \bar{\upsilon}_{αν} = \dfrac{\Delta h}{t_{αν.}} = \dfrac{h_{\max}}{t_{αν.}} \\ \text{Η μέση ταχύτητα καθόδου είναι: } \bar{\upsilon}_{καθ} = \dfrac{\Delta h}{t_{καθ.}} = \dfrac{h_{\max}}{t_{καθ.}} \end{array}\right\} \begin{array}{l} t_{αν.} = \dfrac{h_{\max}}{\bar{\upsilon}_{αν}} \\ t_{καθ.} = \dfrac{h_{\max}}{\bar{\upsilon}_{καθ.}} \end{array}$$

αλλά $\bar{\upsilon}_{αν} > \bar{\upsilon}_{καθ}$

$$\Rightarrow t_{αν} < t_{καθ}$$

Παράδειγμα

- Η δυναμική ενέργεια δυο ατόμων σε κάποιο διατομικό μόριο είναι: $U(r) = -\frac{a}{r^6} + \frac{b}{r^{12}}$

όπου r η απόσταση μεταξύ των ατόμων και α,b θετικές σταθερές.
(α) Για ποιες τιμές του r η U είναι σε ελάχιστο, μέγιστο, μηδέν;
(β) Σχεδιάστε την U(r) και αναφέρετε όλα τα χαρακτηριστικά σημεία.

ΛΥΣΗ

Για να βρούμε τα τοπικά μέγιστα θα πρέπει η 1η παράγωγος να είναι μηδέν

$$\frac{dU(r)}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(-\frac{a}{r^6} + \frac{b}{r^{12}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{6a}{r^7} - \frac{12b}{r^{13}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^7}\left(6a - \frac{12b}{r^6}\right) = 0 \Rightarrow r_0 = \left(\frac{2b}{a}\right)^{1/6}$$

Εξετάζουμε την 2η παράγωγο στο σημείο αυτό: $\left.\frac{d^2U(r)}{dr^2}\right|_{r=r_0} = \frac{d}{dr}\left(\frac{dU(r)}{dr}\right)$

$$\Rightarrow \frac{d^2U(r)}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left(\frac{6a}{r^7} - \frac{12b}{r^{13}}\right) = -\frac{42a}{r^8} + \frac{156b}{r^{14}} = \frac{1}{r^8}\left(-42a + \frac{156b}{r^6}\right) = \frac{1}{r_0^8}\left(-42a + \frac{156b}{r_0^6}\right)$$

Αντικατάσταση του r_0 θα δώσει: $-42a + 156b\frac{1}{\left(\left(2b/a\right)^{1/6}\right)^6} = -42a + 78a \Rightarrow \frac{d^2U(r)}{dr^2} > 0$

Η τελευταία σχέση μας λέει ότι στην θέση r_0 έχουμε ελάχιστο

Για μικρά *r*, ο όρος $\frac{1}{r^{12}}$ κυριαρχεί ως προς τον όρο $\frac{1}{r^6}$ και επομένως $U(0) \to +\infty$

Για μεγάλα *r*, ο όρος $\frac{1}{r^6}$ κυριαρχεί ως προς τον όρο $\frac{1}{r^{12}}$ και επομένως $U(\infty) \to 0$

Παράδειγμα

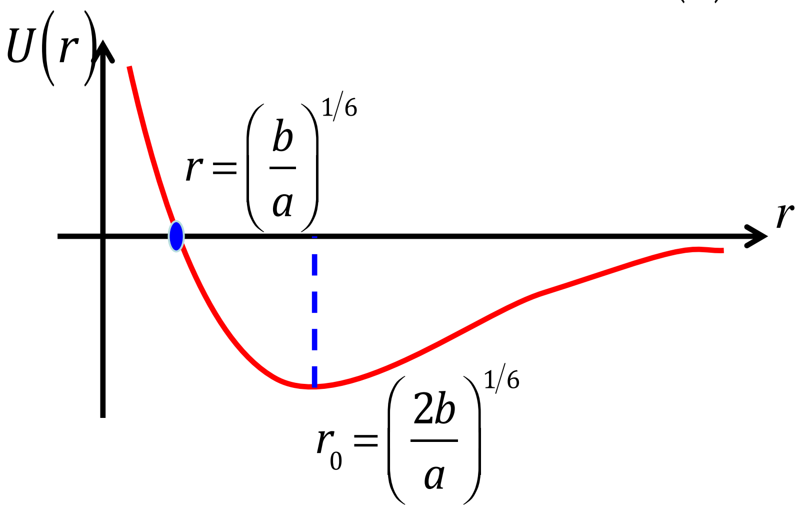
Αλλά $\frac{dU(r)}{dr} = \frac{1}{r^7}\left(6a - \frac{12b}{r^6}\right)$

Για $r > r_0 = \left(\frac{2b}{a}\right)^{1/6}$

$\Rightarrow \frac{dU(r)}{dr} > 0$

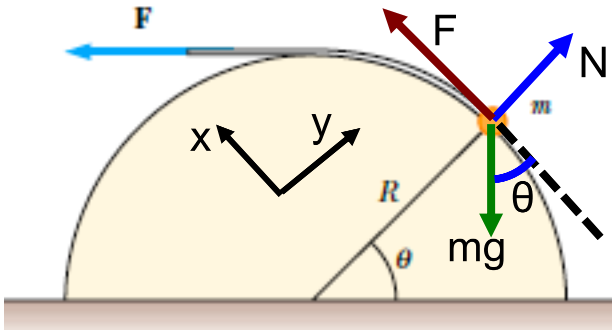
Άρα για $r \rightarrow \infty$ το U=0 αποτελεί την μέγιστη τιμή

Το δυναμικό είναι 0 όταν: $U(r) = 0 \Rightarrow -\frac{a}{r^6} + \frac{b}{r^{12}} = 0 \Rightarrow \frac{a}{r^6} = \frac{b}{r^{12}} \Rightarrow r = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/6}$



Παράδειγμα

Ένα μικρό σώμα μάζας *m* σύρεται στην επιφάνεια λείου ημικυκλικού σύρματος ακτίνας *R* με τη βοήθεια νήματος που περν'ά από την κορυφή του ημικυκλίου. Αν η ταχύτητα του σώματος είναι σταθερή δείξτε ότι *F=mgcosθ.* Εφόσον το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα θα πρέπει η συνιστώσα της δύναμης εφαπτόμενης του ημικυκλίου να είναι 0 σε κάθε χρονική στιγμή. (β) Να βρεθεί το έργο που καταναλώνεται στο σώμα ώστε να κινείται με σταθερή ταχύτητα από το χαμηλότερο σημείο του ημικυκλίου στο υψηλότερο.



Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων όπως στο σχήμα

Κατασκευάζουμε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος

Η δύναμη *F* είναι κατά μήκος της εφαπτόμενης της ημικυκλικής επιφάνειας.

Από το διάγραμμα ελεύθερου σώματος: $\sum \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow F - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow F = mg\cos\theta$

Το έργο δίνεται από τη σχέση: $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ όπου $d\vec{r}$ το στοιχειώδες τόξο κύκλου

Το στοιχειώδες τόξο συναρτήσει της στοιχειώδους γωνιακής μετατόπισης: $dr = Rd\theta$

Στο χαμηλότερο σημείο του ημικυκλίου $\theta = 0$ και στο υψηλότερο σημείο: $\theta = \pi/2$

Το ολοκλήρωμα γράφεται: $W = \int_0^{\pi/2} FR\,d\theta = \int_0^{\pi/2} Rmg\cos\theta\,d\theta = mgR\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta$

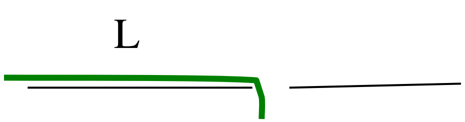
$\Rightarrow W = mgR\sin\theta\Big|_0^{\pi/2} \Rightarrow W = mgR(1-0) \Rightarrow W = mgR$ ίδιο με την αλλαγή της U_g

Παράδειγμα

Το ακόλουθο πρόβλημα μπορεί να λυθεί είτε με χρήση των νόμων του Newton ή Διατήρηση Ενέργειας.

- Ένα μικρό τμήμα σχοινιού κρέμεται προς τα κάτω μέσα από μια τρύπα σε λείο τραπέζι. Το σκοινί πέφτει μέσω της τρύπας.

Ποιά η ταχύτητά του τη στιγμή που έχει περάσει πλήρως από την τρύπα?



Λύση με διατήρηση της ενέργειας

Θεωρούμε την επιφάνεια του τραπεζιού σαν ύψος 0.

$$U_i + K_i = U_f + K_f \Rightarrow 0 + 0 = mg\left(-\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{gL}}$$

μέσο ύψος που έπεσε το σχοινί

Λύση με $\mathrm{F} = \mathrm{m}\alpha$

Έστω τη χρονική στιγμή t το σχοινί έχει πέσει κατά μήκος x

Έστω ακόμα ότι το σχοινί έχει γραμμική πυκνότητα ρ=m/L m = ρL

Η δύναμη που κινεί το σχοινί είναι το βάρος του τμήματος που κρέμεται

$F = ma = m'g$ *m* η συνολική μάζα του σχοινιού *m=ρL* και *m΄* αυτή που κρέμεται

$$\Rightarrow F = m'g = \overset{m}{(\rho L)}a \Rightarrow \overset{m'}{(\rho x)}g = (\rho L)a \Rightarrow \rho x g = \rho L\left(\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{dx}}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}\right) = \rho \mathrm{L}\left(\mathrm{v}\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{dx}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g\int_\sigma^L x\,dx = \int_0^{\mathrm{v}} L\mathrm{v}\,d\mathrm{v} \Rightarrow g\frac{L^2}{2} - \cancelto{\sim 0}{g\frac{\sigma^2}{2}} = L\frac{\mathrm{v}^2}{2} \Rightarrow \mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{gL}}$$

σ είναι το αρχικό πολύ μικρό μήκος που το σχοινί κρέμεται