

Lab05: Νόμοι του Kirchhoff και Θεώρημα Thevenin

Κατασκευή συστήματος δύο τροφοδοτικών

Νόμοι του Kirchhoff

Απλά κυκλώματα είναι αυτά που μπορούν να μειωθούν σε άλλα ισοδύναμα κυκλώματα που περιέχουν μία μόνο αντίσταση και μία μόνο πηγή τάσης. Πολλά κυκλώματα δεν είναι απλά και απαιτούν τη χρήση των Νόμων του Kirchhoff για να προσδιοριστούν οι τιμές της τάσης, του ρεύματος ή της αντίστασης. Οι Νόμοι του Kirchhoff για το ρεύμα και την τάση είναι :

$$\text{Νόμος Κόμβων/Ρευμάτων: } \sum_{i=1}^n I_i = 0, \text{ εξ. 5.1}$$

όπου ο δείκτης i αναφέρεται σε όλου τα ρεύματα που εισέρχονται και εξέρχονται από έναν κόμβο του κυκλώματος. Ρεύματα που εισέρχονται έχουν θετικό πρόσημο ενώ αυτά που εξέρχονται έχουν αρνητικό πρόσημο.

$$\text{Νόμος Τάσεων/Βρόχων: } \sum_{i=1}^n \Delta V_i = 0, \text{ εξ. 5.2}$$

όπου ο δείκτης i αναφέρεται σε όλα τα στοιχεία (αντιστάσεις, μπαταρίες, πυκνωτές) που υπάρχουν σε ένα κλειστό βρόχο κυκλώματος. ΔV_i είναι η διαφορά δυναμικού στα άκρα του i -στοιχείου του κυκλώματος.

Στη σημερινή εργαστηριακή δραστηριότητα, θα κατασκευάσετε δύο κυκλώματα με 4 αντιστάτες και δύο πηγές τάσης. Τα κυκλώματα αυτά δεν θα είναι απλά και επομένως θα πρέπει να εφαρμόσετε τους κανόνες του Kirchhoff για να προσδιορίσετε τις εντάσεις των ρευμάτων σε κάθε αντιστάτη. Θα χρησιμοποιήσετε κατόπιν δύο ψηφιακά πολύμετρα για να βρείτε την πτώση τάση στα άκρα κάθε αντιστάτη στα κυκλώματα. Οι κανόνες του Kirchhoff θα εφαρμοστούν κατόπιν στα κυκλώματα για να βρείτε τις θεωρητικές τιμές των ρευμάτων που διαρρέουν κάθε αντιστάτη. Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Ohm θα μπορέσετε να βρείτε τις θεωρητικές τιμές της διαφοράς δυναμικού σε κάθε αντιστάτη. Στο τέλος θα μπορέσετε να συγκρίνετε τις θεωρητικές και πειραματικές τιμές και να βρείτε το % σφάλμα.

Δραστηριότητα 1

Κατασκευή δύο τροφοδοτικών τάσης

Στη δραστηριότητα αυτή θα πρέπει να τροποποιήσετε το κύκλωμα του τροφοδοτικού σας ώστε να κατασκευάσετε ένα κύκλωμα με δύο τροφοδοτικά ρυθμιζόμενης τάσης. Το δεύτερο τροφοδοτικό θα σας δίνει αρνητική τάση.

Θα χρειαστείτε τα ακόλουθα στοιχεία σε μια νέα πλακέτα:

4 διόδους (κάθε σύμβολο διόδου του Σχήματος 5.2 αντιστοιχούν 2 διόδοι σε σειρά)

2 ηλεκτρολυτικούς πυκνωτές $1800\mu F$

2 αντιστάσεις 100Ω στους ακροδέκτες adjust

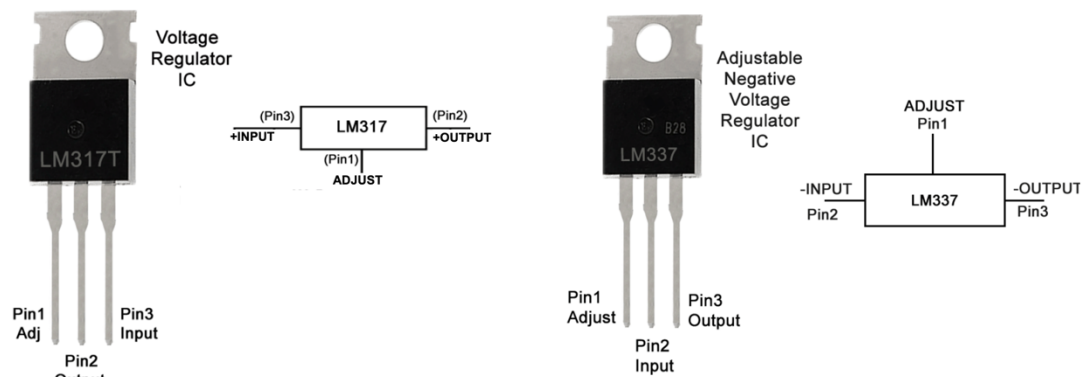
2 ποτενσιόμετρα $5k\Omega$

2 ηλεκτρολυτικούς πυκνωτές $100\mu F$

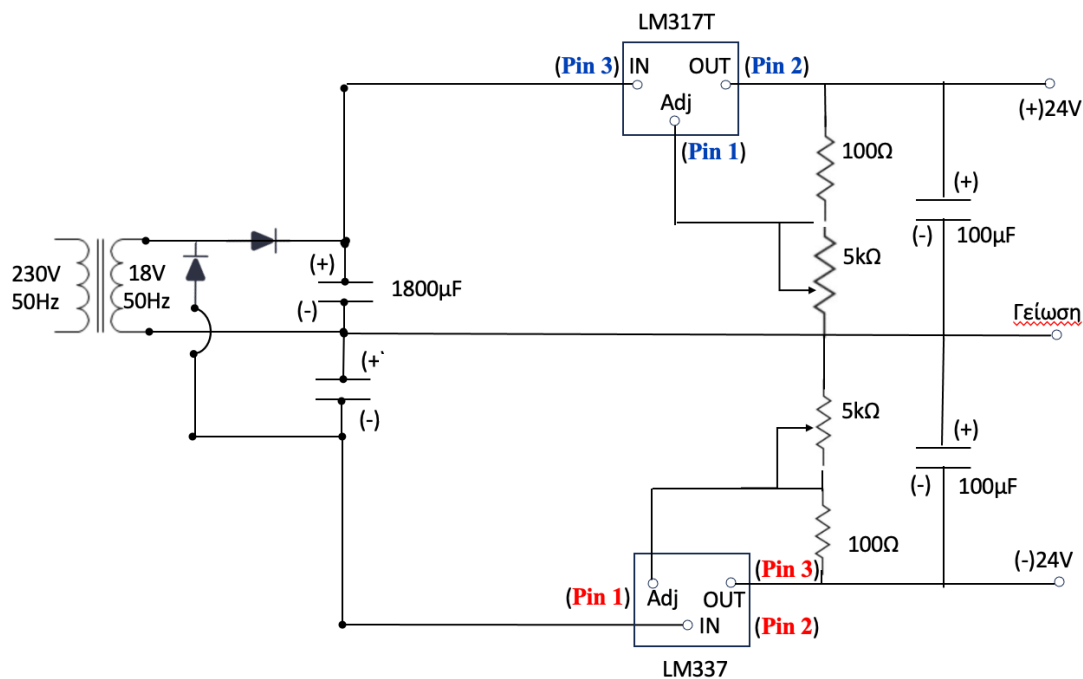
1 ρυθμιστή αρνητικής τάσης LM337

1 ρυθμιστή θετικής τάσης LM317

Προσέξτε το Σχήμα 5.1 στον οποίο φαίνεται ο ορισμός των ακροδεκτών των ρυθμιστών θετικής (LM317) και αρνητικής τάσης (LM337). Ο ρόλος των ακροδεκτών 2 και 3 εναλλάσσεται στις δύο περιπτώσεις.



Σχήμα 5.1: Διάταξη και ορισμών των ακροδεκτών των ρυθμιστών τάσης LM317 και LM337.



Σχήμα 5.2: Κύκλωμα δύο τροφοδοτικών με μέγιστη έξοδο $\pm 24V$.

Ελέγξτε ότι η τάση εξόδου και για τα δύο τροφοδοτικά μπορεί να ρυθμιστεί για διάφορες τιμές από $1.2V$ έως $18V$.

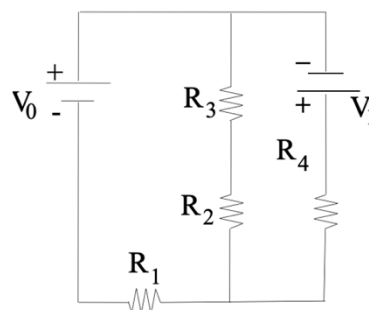
Δραστηριότητα 1:

Στοιχεία που θα χρησιμοποιηθούν

1. Η διάταξη των δύο τροφοδοτικών χαμηλής τάσης
2. Τέσσερις (4) αντιστάτες ($R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 50\Omega$, $R_3 = 100\Omega$, $R_4 = 390\Omega$)
3. Δύο (2) πολύμετρα.

Διαδικασία

1. Κατασκευάστε το κύκλωμα του Σχήματος 5.3.
2. Ανοίξτε την πηγή των δύο τροφοδοτικών και χρησιμοποιώντας το πολύμετρο στα άκρα του κάθε τροφοδοτικού, ρυθμίστε την τάση $V_0 = V_1 = 5\text{Volts}$.
3. Συνδέστε το 1^ο πολύμετρο στα άκρα κάθε αντιστάτη. Καταγράψτε τις μετρήσεις σας στον Πίνακα 5.1 που δίνεται παρακάτω.
4. Συνδέστε το 2^ο πολύμετρο ως αμπερόμετρο και μετρήστε τις εντάσεις των ρευμάτων σε κάθε αντιστάτη. Καταγράψτε τις μετρήσεις σας στον Πίνακα 5.1 που δίνεται παρακάτω
5. Σβήστε το τροφοδοτικό και αποσυνδέστε το κύκλωμα.



Σχήμα 5.3: Κύκλωμα εξόδου

Ανάλυση

1. Χρησιμοποιείτε τις εξισώσεις των κανόνων του Kirchhoff (εξ. 5.1 και 5.2) και γράψτε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων οι οποίες όταν τις λύσετε θα σας βοηθήσουν να βρείτε το ρεύμα σε κάθε κλάδο του κυκλώματος.
2. Λύστε το σύστημα και βρείτε το κάθε ρεύμα. Θα πρέπει στην αναφορά σας να δείξετε τι ακριβώς κάνατε. Συγκρίνετε με τις τιμές των ρευμάτων που μετρήσατε.

Θα μπορούσατε να βρείτε επίσης πρώτα την ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος και κατόπιν το συνολικό ρεύμα και κατόπιν να κάνετε χρήση του 1^{ου} και 2^{ου} κανόνα Kirchhoff για να βρείτε το ρεύμα σε κάθε κλάδο. Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με τις δύο μεθόδους.
3. Χρησιμοποιώντας τα ρεύματα που προσδιορίσατε στο προηγούμενο βήμα και τον νόμο του Ohm προσδιορίστε τις θεωρητικές τιμές των τάσεων στα άκρα κάθε αντιστάτη.
4. Συγκρίνετε τις θεωρητικές τιμές τάσεων που βρήκατε στο προηγούμενο βήμα με τις τιμές των τάσεων που μετρήσατε.

Αποτελέσματα

	V (Θεωρητική)	V (πειραματική)	I (πειραματική)	I (θεωρητική)	% σφάλμα (Δυναμικό)
$R_1 =$					
$R_2 =$					
$R_3 =$					
$R_4 =$					

Πίνακας 5.1: Μετρήσεις της Δραστηριότητας 1.

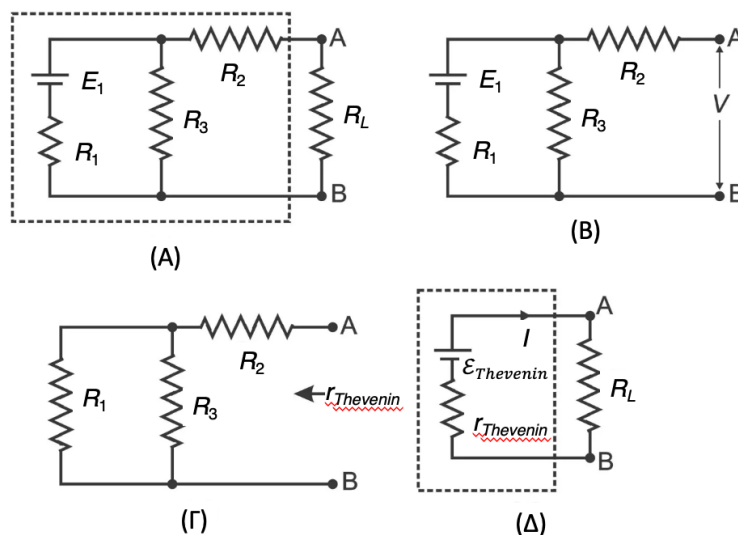
Παράρτημα

Θεώρημα Thevenin

Ένας οποιοσδήποτε συνδυασμός από τροφοδοτικά τάσης και αντιστατών, με δύο ακροδέκτες μπορεί να αντικατασταθεί από μία πηγή τάσης $\mathcal{E}_{Thevenin}$, και μια και μόνο αντίσταση r σε σειρά με την πηγή. Η τιμή της ισοδύναμης ηλεκτρεγερτικής δύναμης $\mathcal{E}_{Thevenin}$ είναι αυτή που αντιστοιχεί στη διαφορά δυναμικού στα άκρα των ακροδεκτών χωρίς να είναι συνδεδεμένο κάποιο φορτίο, ενώ η τιμή της αντίστασης r αντιστοιχεί στην \mathcal{E} διαιρούμενη με την τιμή του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα με τους ακροδέκτες βραχυκυκλωμένους.

Για παράδειγμα έστω το κύκλωμα του Σχήματος A1 (A). Θα πρέπει να προσδιορίσουμε αρχικά ποιο είναι το φορτίο του κυκλώματος. Ο αντιστάτης R_L στους ακροδέκτες AB αποτελεί το φορτίο του κυκλώματος. Η τάση Thevenin είναι η τάση στους ακροδέκτες AB όταν αφαιρεθεί ο αντιστάτης R_L . Η ισοδύναμη αντίσταση $r_{Thevenin}$ είναι η αντίσταση που φαίνεται από τους ακροδέκτες AB αντικαθιστώντας όλες τις πηγές δυναμικού με τις εσωτερικές τους αντιστάσεις, αν οι πηγές είναι ιδανικές τότε αντικαθίστανται με βραχυκύκλωμα. Αν υπήρχαν πηγές ρεύματος τότε αυτές θα πρέπει να αντικατασταθούν με ανοικτό τμήμα κυκλώματος.

Το Σχήμα A1 παρουσιάζει τα βήματα που απαιτούνται ώστε να υπολογιστεί το Thevenin ισοδύναμο ενός κυκλώματος. Το Thevenin ισοδύναμο του κυκλώματος του Σχήματος A1 (A) φαίνεται στο Σχήμα A1(Δ).



Σχήμα A1: Εύρεση του Thevenin ισοδύναμου του κυκλώματος που φαίνεται στο (A).

Εύρεση Thevenin ισοδύναμου κυκλώματος

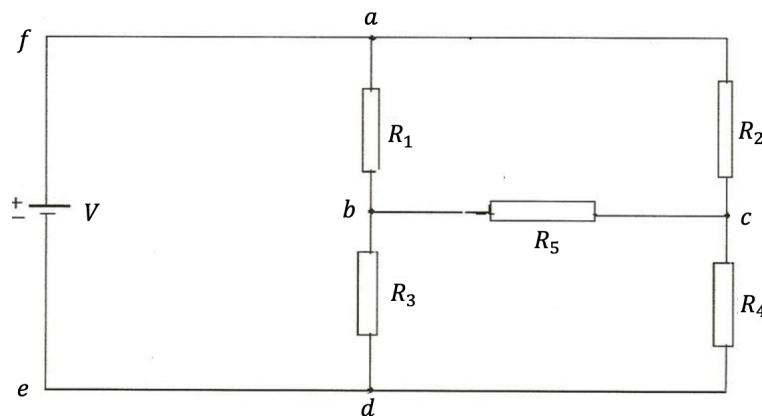
1. Προσδιορίζουμε το φορτίο και επομένως τους ακροδέκτες ως προς τους οποίους θα υπολογίσουμε το ισοδύναμο Thevenin του κυκλώματος.
2. Αφαιρούμε την αντίσταση φορτίου, R_L , και αφήνουμε τους ακροδέκτες AB ανοικτούς όπως στο Σχήμα A1(B).
3. Αντικαθιστούμε όλες τις πηγές τάσεις (ιδανικές) με βραχυκυκλώματα (μηδενική αντίσταση) ή με τις εσωτερικές τους αντιστάσεις (μη ιδανικές πηγές) και υπολογίζουμε την αντίσταση του κυκλώματος που προκύπτει, όπως στο Σχήμα A1(Γ).

Με βάση το Σχήμα A1(Γ) η ισοδύναμη αντίσταση $r_{Thevenin}$ θα είναι η $R_2 + R_1 // R_3$. Επομένως θα έχουμε $r_{Thevenin} = R_2 + R_1 R_3 / (R_1 + R_3)$.

4. Υπολογίζουμε την τάση στους ακροδέκτες AB χρησιμοποιώντας τους κανόνες του Kirchhoff. Στην περίπτωση του Σχήματος A1 (B), η διαφορά δυναμικού στα άκρα AB είναι η διαφορά δυναμικού στα άκρα της R_3 γιατί η R_2 δεν διαρρέεται από ρεύμα όταν AB είναι ανοικτά. Η διαφορά δυναμικού στην R_3 θα είναι από τον διαιρέτη τάσης, $V_{AB} = V_{R_3} = IR_3 = \frac{E_1}{(R_1 + R_3)} R_3$. Επομένως $\mathcal{E}_{Thevenin} = \frac{E_1}{R_1 + R_3} R_3$.

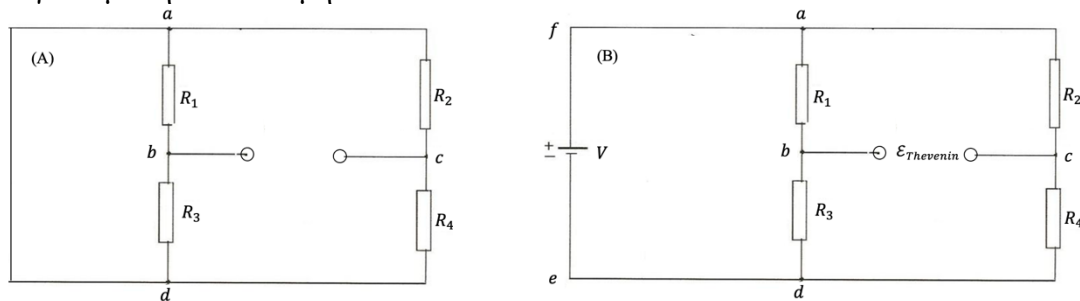
Η γέφυρα Wheatstone και το θεώρημα Thevenin

Θεωρήστε το κύκλωμα του Σχήματος A2, στο οποίο φαίνεται η διάταξη μιας μη ισορροπημένης γέφυρας Wheatstone.



Σχήμα A2: Μη ισορροπημένη γέφυρα Wheatstone.

Με βάση τα προηγούμενα, μπορούμε να υπολογίσουμε το Thevenin ισοδύναμο του κυκλώματος αυτού. Αφαιρούμε την αντίσταση R_5 και αφήνουμε το κύκλωμα ανοικτό στα σημεία BC, και βραχυκυκλώνουμε την πηγή δυναμικού. Το κύκλωμα που προκύπτει, Σχήμα A3(A), μας βοηθά να υπολογίσουμε την ισοδύναμη $r_{Thevenin}$.



Σχήμα A3: Ισοδύναμα κυκλώματα για εύρεση της (A) $r_{Thevenin}$ και (B) $\mathcal{E}_{Thevenin}$.

Παρατηρούμε ότι στο κύκλωμα που προκύπτει, οι R_1 και R_3 είναι παράλληλα συνδεδεμένες, όπως και οι R_2 με R_4 και αυτές είναι συνδεδεμένες σε σειρά: $R_1 // R_3 + R_2 // R_4$.

Θα πρέπει να υπολογίσουμε την διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων BC όπως φαίνεται στο Σχήμα A3(B). Θα πρέπει επομένως να υπολογίσουμε την διαφορά δυναμικού μεταξύ V_{BD} και V_{CD} .

Αλλά η διαφορά δυναμικού V_{BD} και V_{CD} προκύπτει από τον διαιρέτη τάσης στον κλάδο ABD και ACD. Θα έχουμε ότι:

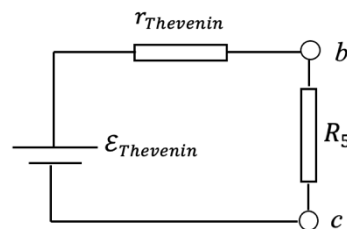
$$V_{BD} = \frac{V}{(R_1 + R_3)} R_3 \quad \text{και} \quad V_{CD} = \frac{V}{(R_2 + R_4)} R_4$$

Επομένως από τις δύο τελευταίες εξισώσεις θα έχουμε ότι:

$$\mathcal{E}_{Thevenin} = V_{BD} - V_{CD} = \frac{V}{(R_1 + R_3)} R_3 - \frac{V}{(R_2 + R_4)} R_4 = V \left[\frac{R_3 R_2 + R_3 R_4 - R_1 R_4 - R_3 R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)} \right] \Rightarrow$$

$$\mathcal{E}_{Thevenin} = V \left[\frac{R_3 R_2 - R_1 R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)} \right]$$

Το ισοδύναμο Thevenin του κυκλώματος της μη ισορροπημένης γέφυρας Wheatstone φαίνεται στο Σχήμα A4.



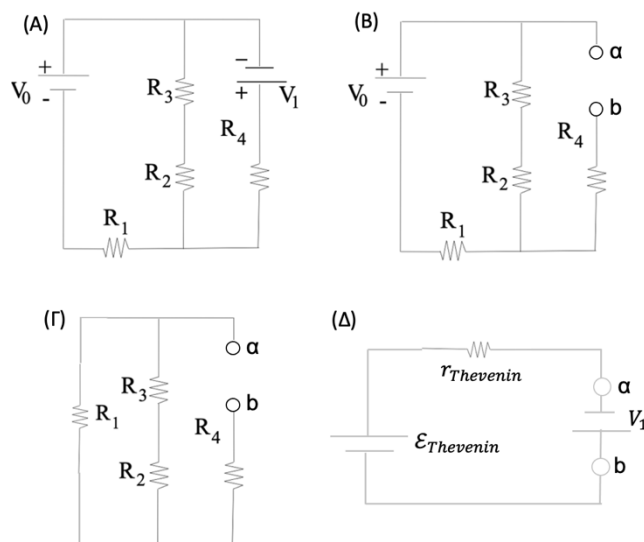
Σχήμα A4: Ισοδύναμο Thevenin του κυκλώματος της μη ισορροπημένης γέφυρας Wheatstone.

Το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R_5 είναι:

$$I = \frac{\mathcal{E}_{Thevenin}}{r_{Thevenin} + R_5}$$

Εφαρμογή θεωρήματος Thevenin σε κύκλωμα με 2 πηγές

Θεωρήστε ότι έχετε ένα κύκλωμα όπως αυτό του Σχήματος A5(A), το οποίο είναι αυτό του Σχήματος 5.3 που υπάρχει στη δραστηριότητα. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στο κύκλωμα αυτό, το εξωτερικό φορτίο είναι η πηγή V_1 . Επομένως οι ανοικτοί ακροδέκτες AB είναι όπως Σχήμα A5(B).



Σχήμα A5: Εύρεση του Thevenin ισοδύναμου του κυκλώματος που φαίνεται στο (A).

Αφαιρούμε ανάμεσα από τους ακροδέκτες ab την πηγή V_1 όπως φαίνεται στο Σχήμα A5(B) και κατόπιν υπολογίζουμε την Thevenin ισοδύναμη αντίσταση που φαίνεται από τους ακροδέκτες ab , βραχυκυκλώνοντας την V_0 . Η αντίσταση R_1 είναι συνδεδεμένη παράλληλα με τις R_2 και R_3 που είναι συνδεδεμένες σε σειρά μεταξύ τους. Η R_4 δε διαρρέεται από ρεύμα και είναι συνδεδεμένη σε σειρά με την ισοδύναμη των άλλων τριών αντιστάσεων. Επομένως, η ισοδύναμη Thevenin αντίσταση θα είναι: $r_{Thevenin} = [R_1 // (R_2 + R_3)] + R_4$.

Η ισοδύναμη Thevenin αντίσταση του κυκλώματος θα είναι:

$$r_{Thevenin} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4 = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_4 + R_2R_4 + R_3R_4}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Η διαφορά δυναμικού V_{ab} υπολογίζεται από το κύκλωμα του Σχήματος A5(B). Η αντίσταση R_4 δεν διαρρέεται από ρεύμα και επομένως δεν υπάρχει πτώση δυναμικού στα άκρα της. Η διαφορά δυναμικού V_{ab} είναι αυτή στα άκρα του διαιρέτη τάσης των αντιστάσεων R_2 και R_3 . Έστω I η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον βρόχο του κυκλώματος του Σχήματος A5(B), θα έχουμε:

$$V_{Thevenin} = V_{ab} = I(R_2 + R_3) = \frac{V_0(R_2 + R_3)}{(R_1 + R_2 + R_3)}$$

Έχοντας υπολογίσει την $r_{Thevenin}$ και $\mathcal{E}_{Thevenin}$ μπορούμε να εισαγάγουμε την V_1 ανάμεσα στους ακροδέκτες ab και να υπολογίσουμε με τους κανόνες Kirchhoff το συνολικό ρεύμα που διαρρέει το ισοδύναμο κύκλωμα.

Θεωρώντας τα δεδομένα του άσκησης $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 50\Omega$, $R_3 = 100\Omega$, $R_4 = 390\Omega$, $V_0 = V_1 = 5V$,

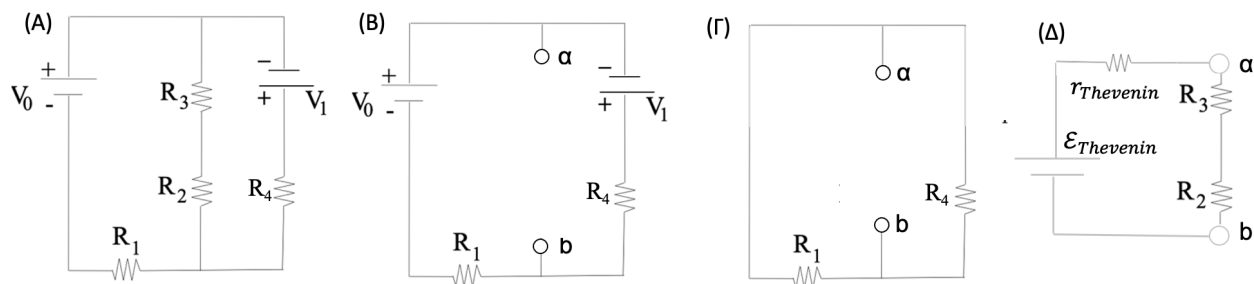
$$V_{Thevenin} = 5V \times \frac{150\Omega}{170\Omega} = 4.4V, \quad r_{Thevenin} = 20\Omega \times \frac{150\Omega}{170\Omega} + 390 = 407.6\Omega$$

Το ρεύμα που διαρρέει το ισοδύναμο Thevenin κύκλωμα θα είναι: $I = \frac{5V + 4.4V}{r_{Thevenin}} = \frac{9.4V}{407.6\Omega} = 23.09mA$.

Σχετικά με το αρχικό κύκλωμα, η διαφορά δυναμικού στα άκρα της R_4 θα είναι: $V_{R_4} = 23.09mA \times 390\Omega = 9.004V$. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα των R_2 και R_3 θα είναι: $V_{R_2, R_3} = 5V - 9.004V = -4.004V$ και το ρεύμα που διαρρέει τις R_2 και R_3 θα είναι: $I_{R_2, R_3} = -\frac{4.004V}{150\Omega} = -26.7mA$. Επομένως, $V_{R_2} = 50\Omega \times (-26.7mA) = -1.335V$ και $V_{R_3} = 100\Omega \times (-26.7mA) = -2.67V$. Το ρεύμα διαρρέει τον κλάδο των R_2 και R_3 με φορά από την R_3 προς την R_2 . Το ρεύμα που διαρρέει την R_1 σύμφωνα με τον 1^ο κανόνα του Kirchhoff είναι: $I_{R_1} = I_{R_2, R_3} + I_{R_4} = 26.7mA + 23.09mA = 49.79mA$ και η διαφορά δυναμικού στα άκρα της R_1 θα είναι: $V_{R_4} = 49.79mA \times 20\Omega = 0.9958V$.

2^{ος} Τρόπος προσέγγισης

Το προηγούμενο παράδειγμα θα μπορούσε να λυθεί αν θεωρούσαμε ότι οι ακροδέκτες ab βρίσκονται στο τμήμα του κυκλώματος με τις δύο αντιστάσεις R_2 και R_3 , θεωρώντας ότι η σε σειρά ισοδύναμη αντίσταση των R_2 και R_3 είναι το η αντίσταση φορτίου $R_L = R_2 + R_3$. Το κύκλωμα σε αυτή την περίπτωση θα έμοιαζε όπως στο Σχήμα A6.



Σχήμα Α6: Διαφορετικός τρόπος προσέγγισης για ανάλυση κατά Thevenin του κυκλώματος του σχήματος (Α) όπου θεωρούμε ότι το φορτίο $R_L = R_2 + R_1$ συνδέεται στους ακροδέκτες ab όπως στο (Β).

Για να βρούμε την Thevenin ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος του Σχήματος Α6(Β), βραχυκυκλώνουμε τις δύο πηγές όπως φαίνεται στο Σχήμα Α6(Γ). Η Thevenin ισοδύναμη αντίσταση είναι $r_{Thevenin} = R_1 // R_4 = R_1 R_4 / (R_1 + R_4)$.

Η ισοδύναμη τάση στα άκρα του κυκλώματος ab βρίσκεται εφαρμόζοντας τον 2^ο κανόνα του Kirchhoff στον βρόχο του κυκλώματος στο Σχήμα Α6(Β) θεωρώντας ότι το ρεύμα I διαρρέει το βρόχο δεξιόστροφα. Θα έχουμε ότι:

$$I = \frac{(V_0 + V_1)}{R_1 + R_4}$$

$$V_a = V_0$$

$$V_b = IR_1 = \frac{V_0 + V_1}{R_1 + R_4} R_1 = \frac{V_0 R_1 + V_1 R_1}{R_1 + R_4}$$

$$V_a - V_b = V_0 - \frac{V_0 R_1 + V_1 R_1}{R_1 + R_4} = \frac{V_0 R_4 - V_1 R_1}{(R_1 + R_4)} = \frac{V_0 (R_4 - R_1)}{R_1 + R_4} \text{ αφού } V_0 = V_1$$

Η συνολική αντίσταση του κυκλώματος θα είναι:

$$R = r_{Thevenin} + R_L = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} + R_2 + R_3 = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_4 + R_3 R_4}{R_1 + R_4}$$

Αν αντικαταστήσουμε και στην περίπτωση αυτή τα αριθμητικά δεδομένα, βλέπουμε ότι:

$$V_{Thev.} = 4.512V \text{ και } r_{Thev.} = \frac{20\Omega \times 390\Omega}{410\Omega} = 19.02\Omega$$

Η τάση στα άκρα της αντίστασης φορτίου, R_L , θα είναι:

Το ρεύμα που διαρρέει την R_L είναι: $I_{R_L} = \frac{V_{Thev.}}{R_L + r_{Thev.}} = \frac{4.512V}{150\Omega + 19.02\Omega} = 26.695mA$ και η διαφορά δυναμικού στα άκρα της R_L είναι: $V_{R_L} = I_{R_L} R_L = 26.695mA \times 150\Omega = 4.004V$. Όπως και στην πρώτη προσέγγιση, η διαφορά δυναμικού στα άκρα της R_1 , χρησιμοποιώντας τον 2^ο νόμο του Kirchhoff στον αριστερό βρόχο, θα είναι: $V_{R_1} = V_0 - V_{R_L} = 5.0V - 4.004V = 0.996V$. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα της R_4 , χρησιμοποιώντας τον 2^ο νόμο του Kirchhoff στον δεξιό βρόχο, θα είναι: $V_{R_4} = V_1 + V_{R_L} = 5.0V + 4.004V = 9.004V$. Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Ohm, υπολογίζουμε τα ρεύματα I_{R_1} και I_{R_4} .