Εξισώσεις κίνησης του Hamilton

- Newtonian → Lagrangian → Hamiltonian
  - Περιγράφουν την ίδια φυσική και δίνουν τα ίδια αποτελέσματα
  - Διαφορές είναι στο τρόπο προσέγγισης των προβλημάτων
    - Συμμετρίες και αναλλοίωτο μεγεθών είναι περισσότερο εμφανείς ανάλογα με τη μέθοδο προσέγγισης
    - Ευελιξία στους μετασχηματισμούς
- Ο φορμαλισμός Hamilton συνδέεται με την ανάπτυξη
  - Θεωρίας Hamilton-Jacobi
  - Κλασσική θεωρεία διαταραχών
  - Κβαντική μηχανική
  - Στατιστική μηχανική

Από τις εξισώσεις του Lagrange σ′ αυτές του Hamilton

- Οι εξισώσεις Lagrange για n-συντεταγμένες:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, \cdots, n$$

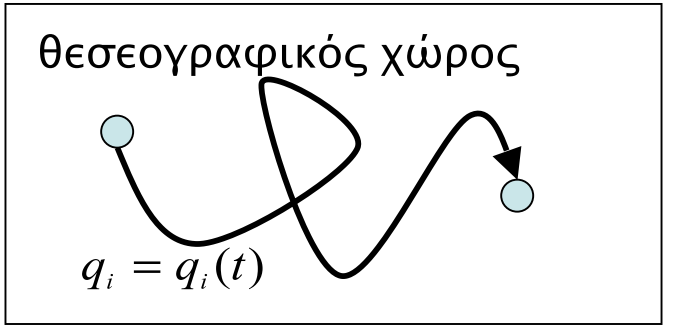
Διαφορική εξίσωση 2ης τάξης n-μεταβλητών

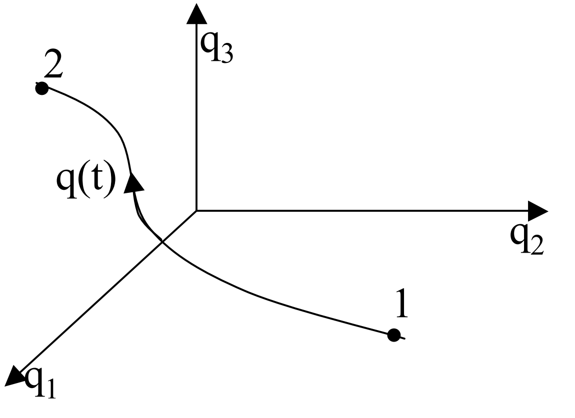
  - n-μεταβλητές → 2n αρχικές συνθήκες π.χ. $q_i(t=0)$ $\dot{q}_i(t=0)$
- Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα με διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης;
  - ΝΑΙ αλλά θα χρειαστούμε 2-n εξισώσεις
  - Κρατάμε τις γενικευμένες συντεταγμένες q_i και αντικαθιστούμε τις γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}_i$ με κάτι παρόμοιο
  - Παίρνουμε την συζυγή ορμή:

$$p_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_i}$$

Χώρος μορφής – ("configuration space")

- Θεωρήσαμε $(q_1,\ldots,q_n)$ σαν ένα σημείο σε ένα n-διάστατο χώρο
  - Τον ονομάσαμε χώρο μορφής ή θεσεογραφικό χώρο
  - Η κίνηση του συστήματος → τροχιά στο χώρο μορφής
- Όταν παίρνουμε μεταβολές, θεωρούμε τα q_i και $\dot{q}_i$ σαν ανεξάρτητες μεταβλητές και υπολογίζουμε τα $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$ και $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$
  - π.χ. έχουμε 2n ανεξάρτητες μεταβλητές σε ένα n-διάστατο χώρο
  - Υπάρχουν πολλές πιθανές διαδρομές που περνούν από ένα σημείο του χώρου αυτού
  - Η αρχή του Hamilton θεμελιώνει ότι η δράση $\int_1^2 \mathcal{L}dt$ έχει στάσιμη τιμή



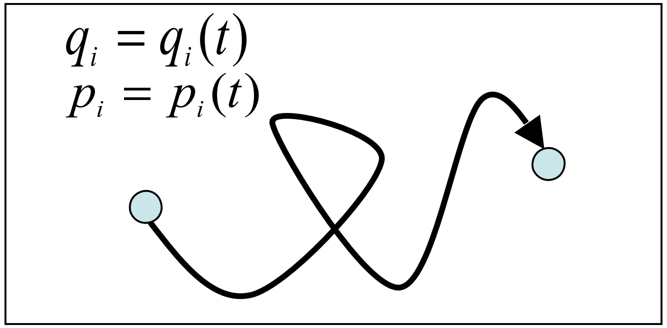


Χώρος φάσεων

- Θεωρούμε τις συντεταγμένες και τις ορμές σαν ανεξάρτητες q_i $p_i = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$
  - Η κατάσταση του συστήματος δίνεται από $(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n)$
  - Το θεωρούμε σαν ένα σημείο σε ένα 2n-διάστατο χώρο φάσεων
- Μετατρέπουμε τις ανεξάρτητες μεταβλητές

$$\left(q_i, \dot{q}_i, t\right) \rightarrow \left(q_i, p_i, t\right)$$

  - Για τον μετασχηματισμό αυτό χρειαζόμαστε κάποιο μαθηματικό τέχνασμα



Μετασχηματισμός Legendre

- Ξεκινώντας από μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x,y)$
  - Το ολικό διαφορικό γράφεται:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \equiv udx + \mathrm{v}dy$$

  - Έστω ότι θέλουμε ένα νέο group από ανεξάρτητες μεταβλητές u,y δηλαδή να αντικαταστήσουμε το x.

- Ορίζουμε μια συνάρτηση g(u,y) τέτοια ώστε: $g \equiv f - ux$

αντικατέστησε

με

Το ολικό διαφορικό της g είναι:

$$dg = df - d(ux) = udx + \mathrm{v}dy - udx - xdu = \mathrm{v}dy - xdu$$

Το οποίο ισούται με: $dg = \frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial y}dy$ αν $\frac{\partial g}{\partial y} = \mathrm{v}$ και $\frac{\partial g}{\partial u} = -x$

- Πίσω στην κλασσική Μηχανική

Αν $f = \mathcal{L}$ και $(x,y) = (\dot{q},q)$

τότε $\mathcal{L}(\dot{q},q) \rightarrow g(p,q) = \mathcal{L} - p\dot{q}$

Αυτό είναι ότι χρειαζόμαστε

Hamiltonian

Αντίθετο πρόσημο από το μετασχ. Legendre

- Ορίζουμε την Hamiltonian: $\mathcal{H}(q,p,t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q,\dot{q},t)$
  - Το ολικό διαφορικό είναι:

$$d\mathcal{H} = \cancel{p_i d\dot{q}_i} + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

  - Από την εξίσωση Lagrange έχουμε: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \dot{p}_i$

$$d\mathcal{H} = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

  - Αυτό πρέπει να 'ναι ισοδύναμο με

$$\Rightarrow \quad d\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt$$

Εξισώσεις του Hamilton

$$d\mathcal{H} = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \qquad d\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt$$

- Εξισώνοντας τα δύο ολικά διαφορικά για την Hamiltonian έχουμε:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

  - 2n εξισώσεις αντικαθιστούν τις n-εξισώσεις Lagrange
  - 1ης τάξης διαφορικές εξισώσεις αντί για τις Δ.Ε. 2ης τάξης
  - “Συμμετρία” μεταξύ p και q
- Δεν υπάρχει τίποτα το καινούριο – Απλά ανασυντάξαμε τις ίδιες εξισώσεις
  - Η πρώτη εξίσωση συνδέει ορμή και ταχύτητα
  - Αυτή η σχέση “δίνεται” στο Newtonian φορμαλισμό
- Η δεύτερη εξίσωση είναι ισοδύναμη με τις εξισώσεις κίνησης του Newton και Lagrange

Ένα παράδειγμα

- Μάζα m εξαρτημένη από ελατήριο υπακούει στο νόμο του Hooke $F=-kx$

$$\mathcal{L}=\frac{m}{2}\dot{x}^2-\frac{k}{2}x^2 \Rightarrow p=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}=m\dot{x}\Rightarrow$$

$$\mathcal{H}=\dot{x}p-\mathcal{L}=m\dot{x}^2-\frac{m}{2}\dot{x}^2+\frac{k}{2}x^2\Rightarrow$$

$$\mathcal{H}=\frac{m}{2}\dot{x}^2+\frac{k}{2}x^2\Rightarrow \boxed{\mathcal{H}=\frac{p^2}{2m}+\frac{k}{2}x^2}$$

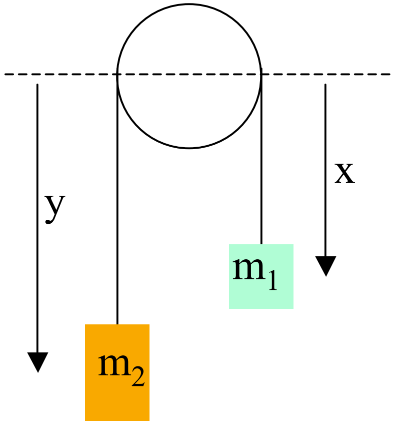
- Οι εξισώσεις Hamilton είναι:

$$\boxed{\dot{x}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}=\frac{p}{m}} \qquad \boxed{\dot{p}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}=-kx}$$

Συνηθισμένες εξισώσεις αρμονικού ταλαντωτή

Δεύτερο Παράδειγμα

Χρησιμοποίηση του φορμαλισμού Hamilton για την μηχανή Atwood.
Έστω ότι το ύψος x της m_1 το οποίο μετράτε προς τα κάτω είναι η μια γενικευμένη συντεταγμένη



Η Lagrangian είναι: $\mathcal{L} = T - U$ όπου $T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2$

και $U = -m_1 g x - m_2 g y = -m_1 g x - m_2 g(l - x) \Rightarrow$

$$U = -(m_1 - m_2)gx + const \Rightarrow U = -(m_1 - m_2)gx$$

Επομένως $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + (m_1 - m_2)gx$

Υπολογίζουμε την Hamiltonian: $\mathcal{H} = p\dot{x} - \mathcal{L}$

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \Rightarrow \qquad p = (m_1 + m_2)\dot{x}$$

Λύνουμε την εξίσωση αυτή ως προς $\dot{x}$ $\qquad \dot{x} = p/(m_1 + m_2)$

Αντικαθιστούμε στην $\mathcal{H} = p\dot{x} - \mathcal{L}$ $\Rightarrow$ $H = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} - (m_1 - m_2)gx$

Εξισώσεις Hamilton: $\boxed{\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m_1 + m_2}}$ $\quad \boxed{\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = (m_1 - m_2)g}$

Συνάρτηση ενέργειας

- Ο ορισμός της Hamiltonian είναι ταυτόσημος με αυτό της συνάρτησης της ενέργειας:
  - Ο διαχωρισμός είναι στις λεπτομέρειες: $\mathcal{H}$ είναι συνάρτηση των(q,p,t)

$$h(q,\dot{q},t) = \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - L(q,\dot{q},t)$$

- Αυτό ισούται με την ολική ενέργεια αν:
  - Η Lagrangian είναι : $\mathcal{L}(q,\dot{q},t) = L_0(q,t) + L_1(q,t)\dot{q}_i + L_2(q,t)\dot{q}_j\dot{q}_k$
  - Οι δεσμοί είναι ανεξάρτητοι του χρόνου
    - Αυτό συνεπάγεται ότι: $T = L_2(q,t)\dot{q}_j\dot{q}_k$
  - Οι δυνάμεις είναι συντηρητικές:
    - Αυτό συνεπάγεται ότι: $V = -L_0(q)$

Hamiltonian και ολική ενέργεια

- Αν οι συνθήκες κάνουν το h να αντιστοιχεί σε ολική ενέργεια, μπορούμε να παραλείψουμε τον υπολογισμό της Lagrangian και να πάμε απ' ευθείας στον υπολογισμό της Hamiltonian
  - Στο παράδειγμά μας για το σώμα στο ελατήριο θα έχουμε:

$$\mathcal{H} = E = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2$$

  - Στο παράδειγμά μας για την μηχανή Atwood θα έχουμε:

$$\mathcal{H} = E = T + U = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} - (m_1 - m_2)gx$$

- Αυτό δουλεύει πολύ συχνά αλλά όχι πάντα
  - Όταν το σύστημα συντεταγμένων είναι εξαρτώμενο από το χρόνο
    - π.χ. περιστρεφόμενο (μη αδρανειακό) σύστημα συντεταγμένων
  - Όταν το δυναμικό εξαρτάται από την ταχύτητα
    - π.χ. σωματίδιο σε ΕΜ πεδίο

Διατήρηση της Hamiltonian

Θεωρούμε τη παράγωγο ως προς το χρόνο της Hamiltonian

$$\frac{d\mathcal{H}(q,p,t)}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$ και από τις εξισώσεις Hamilton $\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}$ $\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}$

$$\boxed{\frac{d\mathcal{H}(q,p,t)}{dt} = -\cancel{\dot{p}}\dot{q} + \cancel{\dot{q}}\dot{p} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}}$$

Η Hamiltonian διατηρείται
αν δεν εξαρτάται εκφρασμένα
από το χρόνο.

- Η Hamiltonian μπορεί ή όχι να αντιστοιχεί στην ολική ενέργεια
  - Αν αντιστοιχεί, τότε υπάρχει διατήρηση της ενέργειας
  - Ακόμα και αν δεν είναι η ολική ενέργεια, $\mathcal{H}$ είναι μια σταθερά της κίνησης

Κυκλικές συντεταγμένες

- Μια κυκλική συντεταγμένη δεν εμφανίζεται στη Lagrangian $\mathcal{L}$
  - Από κατασκευή δεν θα εμφανίζεται ούτε στην Hamiltonian
  - Η εξίσωση του Hamilton λέει

$$\boxed{\mathcal{H}(\cancel{q}, p, t) = \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(\cancel{q}, \dot{q}, t)}$$

$$\boxed{\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = 0}$$

Η συζυγής ορμή μια κυκλικής συντεταγμένης διατηρείται

- Ακριβώς το αποτέλεσμα που πήραμε και για το Lagrangian φορμαλισμό