ΦΥΣ. 131
$2^η$ Πρόοδος: 4-Νοεμβρίου-2005

Πριν αρχίσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητας).

Ονοματεπώνυμο	Αριθμός ταυτότητας

Σας δίνονται 6 ισότιμα προβλήματα (20 βαθμοί το καθένα) και **πρέπει να απαντήσετε σε οποιαδήποτε 5 από αυτά**. Όποιοι απαντήσουν σε όλα τα προβλήματα θα πάρουν σαν bonus τις μονάδες που αντιστοιχούν στο επιπλέον πρόβλημα. Δηλαδή ο βαθμός σας αν λύσετε και τα 6 προβλήματα μπορεί να είναι 120/100.

Προσπαθήστε να δείξετε την σκέψη σας και να εξηγήσετε όσο το δυνατόν πιο καθαρά για ποιό λόγο κάνετε ότι γράφετε. Γράψτε καθαρά διαγράμματα με δυνάμεις, ταχύτητες, επιταχύνσεις.

Η δεύτερη σελίδα περιέχει τυπολόγιο με τύπους που ίσως σας φανούν χρήσιμοι.

ΑΠΑΓΟΡΕΥΟΝΤΑΙ: ΨΙΘΥΡΟΙ, ΧΡΗΣΗ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ, ΒΙΒΛΙΩΝ, ΚΙΝΗΤΩΝ Η ΟΤΙΔΗΠΟΤΕ ΑΛΛΟ. ΟΙ ΠΑΡΑΒΑΤΕΣ ΘΑ ΜΗΔΕΝΙΣΤΟΥΝ ΑΥΤΟΜΑΤΑ

Έχετε συνολικά 80 λεπτά. Καλή Επιτυχία

Τυπολόγιο

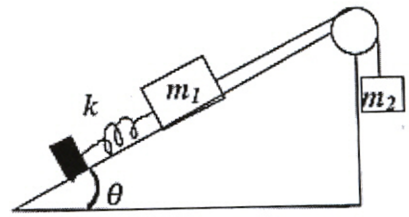
$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$
$$E_{\mu\eta\chi} = E_{\kappa\iota\nu} + U$$
$$U_{\beta\alpha\rho} = mgh$$
$$U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = \frac{1}{2} kx^2$$
$$\vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}}$$
$$\Delta U = -\int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$
$$W = -\Delta U$$
$$W_{\mu\eta\sigma\upsilon\nu\tau.} = \Delta(E_{\kappa\iota\nu} + U)$$
$$\vec{F}_{\varepsilon\lambda} = -k\vec{x}$$
$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$
$$P = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$$
$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} m\upsilon^2$$
$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$$
$$\mathrm{I} = \int F dt = \Delta\vec{p}$$
$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$
$$x_{CM} = \frac{1}{M_{o\lambda}} \sum_i m_i x_i$$
$$\vec{P} = M\vec{\upsilon}_{\mathrm{KM}}$$
$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$
$$\vec{\upsilon}_{\mathrm{KM}} = \frac{1}{\mathrm{M}_{o\lambda}} \sum_i m_i \upsilon_i$$
$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM}$$
Ελλαστική : $\Delta\vec{p} = 0, \Delta\mathrm{E} = 0$

Μη ελαστική : $\Delta\vec{p} = 0, \Delta\mathrm{E} \neq 0$
$$\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2 = -(\vec{\upsilon}_1' - \vec{\upsilon}_2')$$
$$g = 10\, m / \sec^2$$

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$
$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2} at^2$$
$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a(x - x_0)$$
$$\theta = \frac{s}{r}$$
1 Περισ = 360° = 2π ακτίνια
$$\mathrm{T} = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{v}$$
$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$
$$\overline{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$
$$\omega = \omega_0 t + \alpha t$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$
$$\upsilon = \omega r$$
$$a_{\varepsilon\varphi} = \alpha r$$
$$a_r = \frac{\upsilon^2}{r} = \omega^2 r$$
$$\vec{a}_{\gamma\rho\alpha\mu} = \vec{a}_{\varepsilon\varphi} + \vec{a}_r$$
$$I = \sum_i m_i r_i^2$$
$$E_{\kappa\iota\nu}^{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2}\mathrm{I}\omega^2$$
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \mathrm{I}\alpha$$
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$L = I\omega$$
Απομον. σύστημα : $L_i = L_f$

Στατική ισορροπία
$$\sum \mathrm{F}_{\varepsilon\xi\omega\tau} = 0 \quad \Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = 0$$

1. Ένα τούβλο μάζας m_1 συνδέεται με άλλο τούβλο μάζας m_2 με ένα σχοινί αμελητέας μάζας το οποίο περνά από μια αβαρή τροχαλία. Το τούβλο μάζας m_1 βρίσκεται πάνω σε στη λεία επιφάνεια ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ με τον ορίζοντα, και συνδέεται με ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου k (το ελατήριο έχει αμελητέα μάζα). Το άλλο άκρο του ελατηρίου εξαρτάται από ένα ακλόνητο σημείο. Τη χρονική στιγμή t = 0s και οι δύο μάζες βρίσκονται σε ηρεμία και κρατούνται σε τέτοια θέση ώστε το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Όταν και οι δυο μάζες αφήνονται ελεύθερες, η μάζα m_1 επιταχύνεται προς τα πάνω ενώ η μάζα m_2 επιταχύνεται προς τα κάτω.



(α) Ποια είναι η αλλαγή στην ενέργεια ΔE (E_f - E_i) του συστήματος όταν η μετατόπιση της m_1 (Δx) είναι μέγιστη (η μάζα m_2 βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο της); (**4β**)

(β) Ποια είναι η μέγιστη μετατόπιση Δx συναρτήσει της σταθερής ελατηρίου k, των μαζών m_1 και m_2, της επιτάχυνσης της βαρύτητας g και της γωνίας θ του κεκλιμένου επιπέδου; (**8β**)

(γ) Αν η επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου έχει συντελεστή στατικής τριβής μ_s ποια θα είναι τότε η μέγιστη μετατόπιση Δx συναρτήσει των k, m_1, m_2, g, θ και μ_s? (Υποθέστε ότι ο συντελεστής μ_s είναι αρκετά μικρός ώστε το τούβλο μάζας m_1 μπορεί να κινηθεί όταν αρχικά αφήνεται ελεύθερο). (**8β**)

(α) Από τη στιγμή που όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι συντηρητικές (βαρύτητα, δύναμη ελατηρίου) η μηχανική ενέργεια διατηρείται.

Επομένως: $\Delta E_{\mu\eta\chi} = \emptyset$

(β) Σύμφωνα με τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας $\Delta E^{\mu\eta\chi} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta E = \Delta E_{\kappa\iota\nu} + \Delta U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} + \Delta U_{\beta\alpha\rho} = \emptyset$$

Οι συνιστώσες της ενέργειας θα είναι:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta E_{\kappa\iota\nu} = E^{f}_{\kappa\iota\nu} - E^{i}_{\kappa\iota\nu} = E^{1f}_{\kappa\iota\nu} + E^{2f}_{\kappa\iota\nu} - E^{1i}_{\kappa\iota\nu} - E^{2i}_{\kappa\iota\nu} = 0 + 0 - 0 - 0 = \emptyset \\ \Delta U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \\ \Delta U_{\beta\alpha\rho} = \Delta U_1 + \Delta U_2 = m_1 g \Delta x \sin\theta - m_2 g \Delta x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E = 0 + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 + m_1 g \Delta x \sin\theta - m_2 g \Delta x = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{2g(m_2 - m_1 \sin\theta)}{k}}$$

(γ) Αν υπάρχει κινητική τριβή, τότε ενέργεια χάνεται από το σύστημα και η μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται. Η αλλαγή στην ολική μηχανική ενέργεια είναι ίση με το έργο της τριβής.

$$\left.\begin{array}{l} \Delta E = W_f = F \cdot \Delta x = -\mu_k m_1 g \cos\theta \cdot \Delta x \\ \Delta E = 0 + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 + m_1 g \Delta x \sin\theta - m_2 g \Delta x \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{2g(m_2 - m_1 \sin\theta - \mu m_1 \cos\theta)}{k}}$$

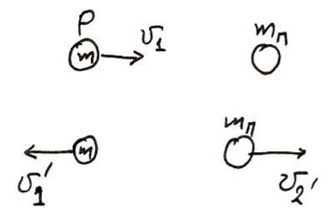
2. Φανταστείτε ότι είστε στο κέντρο ελέγχου ενός επιταχυντή σωματιδίων και στέλνετε μια δέσμη πρωτονίων (μάζας m) που κινείται με ταχύτητα $\upsilon_\delta = 2.00\text{x}10^7$ m/s πάνω σε ένα στόχο που αποτελείται από κάποιο άγνωστο αέριο. Ο ανιχνευτής που χρησιμοποιείται για να ελέγξετε τα αποτελέσματα της κρούσης αυτής, σας πληροφορεί ότι κάποια από τα πρωτόνια της δέσμης σκεδάζονται ακριβώς προς τα πίσω μετά την σύγκρουση με κάποιους πυρήνες του άγνωστου αερίου του στόχου. Όλα αυτά τα πρωτόνια σκεδάζονται με την ίδια ταχύτητα $\upsilon = 1.5\text{x}10^7$ m/s. Υποθέστε ότι η αρχική ταχύτητα των πυρήνων του αερίου του στόχου είναι αμελητέα και ότι η σύγκρουσή τους με τα πρωτόνια της δέσμης είναι τελείως ελαστική. Με βάση το είδος της σύγκρουσης που δόθηκε παραπάνω υπολογίστε τα ακόλουθα:

(α) Να βρεθεί η μάζα του πυρήνα του αγνώστου αερίου. Εκφράστε την απάντησή σας συναρτήσει της μάζας του πρωτονίου m. (**12β**)

(β) Ποια είναι η ταχύτητα που αποκτά ένας από τους πυρήνες του αερίου του στόχου ακριβώς μετά τη σύγκρουσή του με ένα πρωτόνιο της δέσμης; (**8β**)

(α) Πριν τη σύγκρουση

μετά τη σύγκρουση



$\upsilon_1 = 2\cdot10^7$ m/s

$\upsilon_2 = \emptyset$ m/s

$\upsilon_1' = 1.5\cdot10^7$ m/s

Από διατήρηση της ορμής : $p^i = p^f \Rightarrow m\vec{\upsilon}_1 + 0 = m\vec{\upsilon}_1' + m_N\vec{\upsilon}_2' \Rightarrow$

$$\Rightarrow m\upsilon_1 + 0 = -m\upsilon_1' + m_N\upsilon_2' \Rightarrow \boxed{m(\upsilon_1+\upsilon_1') = m_N\upsilon_2'} \quad (1)$$

Από διατήρηση της ενέργειας (αφού έχουμε ελαστική κρούση):

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}m\upsilon_1^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}m\upsilon_1'^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}m_N\upsilon_2'^2 \Rightarrow \boxed{m(\upsilon_1^2-\upsilon_1'^2) = m_N\upsilon_2'^2} \quad (2)$$

Διαιρώντας τη (2) με (1) έχουμε: $\upsilon_2' = \frac{(\upsilon_1-\upsilon_1')\cancel{(\upsilon_1+\upsilon_1')}}{\cancel{\upsilon_1+\upsilon_1'}} \Rightarrow \boxed{\upsilon_2' = \upsilon_1-\upsilon_1'}$ (3)

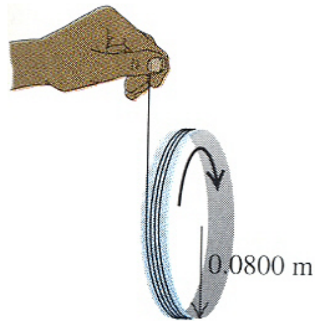
Αντικαθιστώντας την (3) στη (1) έχουμε: $m(\upsilon_1+\upsilon_1') = m_N(\upsilon_1-\upsilon_1') \Rightarrow m_N = \frac{m(\upsilon_1+\upsilon_1')}{\upsilon_1-\upsilon_1'} \Rightarrow$

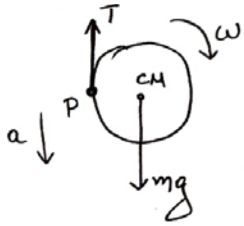
$$\Rightarrow m_N = \frac{m(2+1.5)\cancel{10^7}}{(2-1.5)\cancel{10^7}} = \frac{3.5m}{0.5} \Rightarrow \boxed{m_N = 7m}$$

(β) Από την εξίσωση (3) έχουμε:

$$\upsilon_2' = (2-1.5)\cdot10^7 \Rightarrow \upsilon_2' = 0.5\cdot10^7 \text{ m/s} \Rightarrow \boxed{\upsilon_2' = 5\cdot10^6 \text{ m/s}}$$

3. Ένα νήμα είναι τυλιγμένο πολλές φορές γύρω από τη περιφέρεια ενός μικρού στεφανιού ακτίνας 0.0800m και μάζας 0.120Kgr (όπως στο σχήμα) Αν το ελεύθερο άκρο του νήματος κρατείται στην ίδια θέση και αφήνουμε το στεφάνι από την θέση ηρεμίας, υπολογίστε την τάση του νήματος καθώς το στεφάνι κατεβαίνει και το νήμα ξετυλίγεται (Η ροπή αδράνειας ενός στεφανιού ως προς το κέντρο μάζας του δίνεται από τη σχέση: $I=MR^2$) (**20β**)





$\Sigma F_y = m\alpha_{cm} \Rightarrow -T+mg = ma \Rightarrow T = m(g-\alpha)$ (1)

Υπάρχουν 3 τρόποι για να υπολογίσομε το α

(A) Από τη ροπή ως προς το Κ.Μ.

$\Sigma\tau_{CM} = TR = I_{CM}\alpha = MR^2\left(\frac{a}{R}\right) = MaR \Rightarrow T = Ma$

$M=m$

Αντικαθιστώντας στην (1) $\Rightarrow \cancel{m}a = \cancel{m}(g-a) \Rightarrow \boxed{a=\frac{g}{2}}$

(B) Από τις ροπές ως προς το P

$$\Sigma\tau_P = mgR = I_P\alpha = (\overbrace{I_{CM}+MR^2}^{\text{Θεώρημα παράλληλων αξόνων}})\alpha = (MR^2+MR^2)\frac{a}{R} = 2MR^2\frac{a}{\cancel{R}} = 2mRa \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{m}g\cancel{R} = 2\cancel{m}\cancel{R}a \Rightarrow \boxed{a=\frac{g}{2}}$$

(γ) Από διατήρηση της ενέργειας.

Αφού η ταχύτητα του σημείου P είναι μηδέν, η τάση T δε παράγει έργο και επομένως η μηχανική ενέργεια διατηρείται

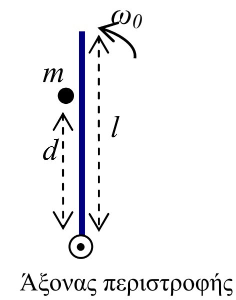
$$E_o = E_f \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}(mR^2)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2 = mv_{cm}^2$$

Παίρνοντας την παράγωγο ως προς χρόνο: $mg\underbrace{\frac{dh}{dt}}_{v_{cm}} = m\frac{dv_{cm}^2}{dt} = m2v_{cm}\overbrace{\frac{dv_{cm}}{dt}}^{a} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{m}g\cancel{v_{cm}} = 2\cancel{m}\cancel{v_{cm}}a \Rightarrow \boxed{a=\frac{g}{2}}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) $\Rightarrow T = m\left(g-\frac{g}{2}\right) \Rightarrow T = \frac{mg}{2} \Rightarrow \boxed{T=0.588N}$

4. Μια ομοιόμορφη βέργα μάζας m και μήκους l (η ροπή αδράνειας της βέργας ως προς άξονα που περνά από το άκρο της είναι $I=ml^2/3$) έχει το ένα άκρο της στερεωμένο σε ένα άξονα και μπορεί να περιστρέφεται πάνω σε ένα οριζόντιο τραπέζι χωρίς τριβές με γωνιακή ταχύτητα ω_0. Μια μπάλα μάζας m επίσης, τοποθετείται πάνω στο τραπέζι σε απόσταση d από το σημείο περιστροφής, και η βέργα συγκρούεται ελαστικά μαζί της.



(α) Ποια είναι η ταχύτητα της μπάλας μετά τη σύγκρουση συναρτήσει της απόστασης d; (**13β**)

(β) Για ποια τιμή της απόστασης d η ταχύτητα αυτή γίνεται μέγιστη; (Υπόδειξη: μπορείτε να βρείτε την απάντηση παίρνοντας την παράγωγο της απάντησής σας στο ερώτημα (α) ή να σκεφθείτε τι θα κατέληγε να κάνει η βέργα στην περίπτωση αυτή) (**7β**).

(α) Η ενέργεια διατηρείται αφού η σκέδαση είναι ελαστική

Η ορμή Δεν διατηρείται αφού υπάρχει εξωτερική δύναμη στον άξονα περιστροφής

Η στροφορμή γύρω από τον άξονα περιστροφής διατηρείται αφού η εξωτερική δύναμη περνά από τον άξονα και άρα δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές

Από διατήρηση της ενέργειας $\Rightarrow \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}I\omega_f^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow I(\omega_0^2-\omega_f^2) = m\upsilon^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{I(\omega_0-\omega_f)(\omega_0+\omega_f) = m\upsilon^2} \quad (1)$$

Από διατήρηση της στροφορμής $\Rightarrow I\omega_0 = I\omega_f + m\upsilon d \Rightarrow \boxed{I(\omega_0-\omega_f) = m\upsilon d}$ (2)

Διαιρώντας (1) με (2) $\Rightarrow \omega_0+\omega_f = \frac{\upsilon}{d} \Rightarrow \boxed{\omega_f = \frac{\upsilon}{d}-\omega_0}$ (3)

Αντικαθιστώντας τη (3) στη (2) $\Rightarrow I\left(\omega_0 - \frac{\upsilon}{d}+\omega_0\right) = m\upsilon d \Rightarrow I\left(2\omega_0 - \frac{\upsilon}{d}\right) = m\upsilon d \Rightarrow$

$I=\frac{ml^2}{3} \Rightarrow \frac{\cancel{m}l^2}{3}\left(2\omega_0 - \frac{\upsilon}{d}\right) = \cancel{m}\upsilon d \Rightarrow \frac{2\omega_0 l^2}{3} = \upsilon\left(d+\frac{l^2}{3d}\right) \Rightarrow \boxed{\upsilon = \frac{2\omega_0 l^2}{3d+\frac{l^2}{d}}}$

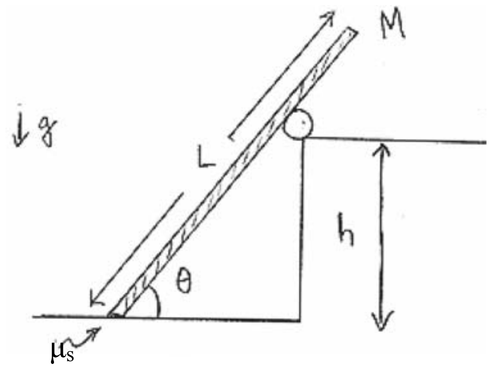
(β) Για να γίνει η ταχύτητα μέγιστη πρέπει ο παρονομαστής να γίνει ελάχιστος

Παίρνοντας τη παράγωγο ως προς d έχουμε $\frac{d}{dd}\left(3d+\frac{l^2}{d}\right) = 3 - \frac{l^2}{d^2} = 0 \Rightarrow \boxed{d=\frac{l}{\sqrt{3}}}$

<u>Διαφορετικά:</u> Η μέγιστη ταχύτητα υ (δηλαδή η μέγιστη κινητική ενέργεια) συμβαίνει όταν η κινητική ενέργεια της βέργας είναι ελάχιστη. Όταν δηλαδή $\omega_f=0$. Στη περίπτωση αυτή, διατήρηση της ενέργειας και στροφορμής δίνουν:

$$\left.\begin{aligned} E &: \tfrac{1}{2}I\omega_0^2 = \tfrac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 \Rightarrow \upsilon_{max} = \sqrt{\tfrac{I}{m}}\,\omega_0 \\ L &: I\omega_0 = m\upsilon_{max}d \end{aligned}\right\} \Rightarrow I\cancel{\omega_0} = m\left(\sqrt{\tfrac{I}{m}}\,\cancel{\omega_0}\right)d \Rightarrow d = \sqrt{\tfrac{I}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}\cancel{m}l^2}{\cancel{m}}} \Rightarrow \boxed{d=\frac{l}{\sqrt{3}}}$$

5. Μια σανίδα μήκους L και μάζας M ακουμπά στο έδαφος και ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ εδάφους και σανίδας είναι μ_s. Η σανίδα ακουμπά πάνω σε ένα σκαλοπάτι που βρίσκεται σε ύψος h πάνω από το έδαφος και σε ένα κυκλικό υποστήριγμα που βρίσκεται στην γωνία του σκαλοπατιού. Όλο το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία. Υποθέστε ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g. Δώστε τις απαντήσεις στα ακόλουθα ερωτήματα συναρτήσει των g, M, L, θ, h και μ_s. Για τις δυνάμεις που θα σας ζητηθούν πρέπει να δώσετε το μέτρο και την διεύθυνσή τους.

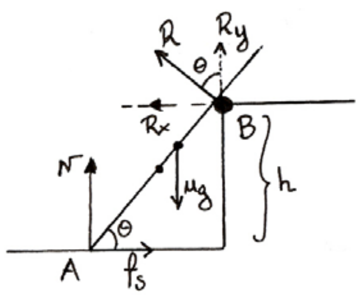


(α) Ποια είναι η κάθετη αντίδραση από το έδαφος στη σανίδα; (**5β**)

(β) Ποια είναι η αντίδραση από το υποστήριγμα στην σανίδα; (**5β**)

(γ) Ποια είναι η δύναμη τριβής στη σανίδα; (**5β**)

(δ) Ποια είναι η ελάχιστη γωνία θ για την οποία η σανίδα δεν γλιστρά; (**5β**)



(α) Έστω N η κάθετη αντίδραση από το έδαφος, και R η αντίδραση από το υποστήριγμα (αυτή είναι κάθετη στη σανίδα)

Η συνθήκη στατικής ισορροπίας είναι:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow f_s - R_x = f_s - R\sin\theta = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + R_y - Mg = N + R\cos\theta - Mg = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow Mg\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right) - R\cdot l_{AB} = 0 \qquad (3)$$ (ροπές ως προς A)

$$l_{AB} = h/\sin\theta \qquad (4)$$

Από (3) και (4) έχουμε: $\Sigma\tau = Mg\frac{L}{2}\cos\theta - R\frac{h}{\sin\theta} = 0 \qquad (5)$

Από την (5) $\Rightarrow R = Mg\frac{L}{2h}\cos\theta\sin\theta$ (A)

Αντικαθιστώντας στη (2) έχουμε: $N = Mg - R\cos\theta \Rightarrow \boxed{N = Mg\left[1 - \frac{L}{2h}\cos^2\theta\sin\theta\right]}$ (B)

Προφανώς η τελευταία σχέση έχει νόημα μόνο για $N \geq 0$

(β) Από (A) $\Rightarrow \boxed{R = Mg\frac{L}{2h}\cos\theta\sin\theta}$ (Γ)

(γ) Από την εξίσωση (1) $\Rightarrow f_s = R\sin\theta \overset{(A)}{\Rightarrow} \boxed{f_s = Mg\frac{L}{2h}\cos\theta\sin^2\theta}$ (Δ)

(δ) Όσο $f_s \leq \mu_s N$ η σανίδα δε γλιστρά. Επομένως από (B) κ (Δ) θα έχουμε:

$$\cancel{Mg}\frac{L}{2h}\cos\theta\sin^2\theta \leq \mu_s\cancel{Mg}\left[1 - \frac{L}{2h}\cos^2\theta\sin\theta\right] \Rightarrow \frac{L}{2h}\cos\theta\sin^2\theta + \mu_s\frac{L}{2h}\cos^2\theta\sin\theta \leq \mu_s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta\cdot\sin^2\theta + \mu_s\cos^2\theta\sin\theta \leq \mu_s\frac{2h}{L}}$$

6. O Crab Nebula είναι ένα αέριο φωτεινό νεφέλωμα με διάμετρο 10 έτη φωτός και σε απόσταση 6500 έτη φωτός μακριά από την γη. Είναι απομεινάρι ενός αστέρα που εξεράγει και το πρωτοείδαμε στη γη το 1054 μ.Χ. Το νεφέλωμα του Crab Nebula εκλύει ενέργεια με ρυθμό $5x10^{31}$ W, η οποία είναι 10^5 φορές μεγαλύτερη από το ρυθμό με τον οποίο εκλύει ενέργεια ο ήλιος του δικού μας πλανητικού συστήματος. Το Crab Nebula αποκτά την ενέργειά του από την πολύ γρήγορη περιστροφή ενός αστέρα νετρονίου που βρίσκεται στο κέντρο του νεφελώματος. Ο αστέρας αυτός κάνει μια πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονά του κάθε 0.0331 sec και η περίοδος αυτή αυξάνει κατά $4x10^{-13}$ sec για κάθε δευτερόλεπτο που περνά.

(α) Αν ο ρυθμός με τον οποίο χάνεται ενέργεια από τον αστέρα νετρονίου είναι ο ίδιος με τον ρυθμό έκλυσης ενέργειας από το νεφέλωμα, βρείτε τη ροπή αδράνειας του αστέρα νετρονίου. (**10β**)

(<u>*Υπόδειξη*</u>: Εκφράστε την κινητική ενέργεια περιστροφής συναρτήσει της ροπής αδράνειας, I, και της περιόδου περιστροφής T. Κατόπιν εκφράστε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας συναρτήσει της ροπής αδράνειας I, της περιόδου T και μεταβολής της περιόδου dT/dt. Σημειώστε ότι θετικό dT/dt σημαίνει ότι έχουμε επιβράδυνση αφού η περίοδος αυξάνει).

(β) Θεωρίες για την έκρηξη του αστέρα που έδωσε το αστέρι νετρονίου που βρίσκεται στο νεφέλωμα του Crab Nebula, προβλέπουν ότι το αστέρι νετρονίου έχει μάζα περίπου 1.4 φορές τη μάζα του δικού μας ήλιου ($M_{ήλιου} = 1.99x10^{30}$kgr, $R_{ήλιου} = 6.96x10^8$m). Θεωρώντας ότι το αστέρι νετρονίου είναι μια συμπαγής ομοιόμορφη σφαίρα, υπολογίστε την ακτίνα της σε χιλιόμετρα (Km). (Η ροπή αδράνειας μιας συμπαγούς ομοιόμορφης σφαίρας ως προς το κέντρο μάζας της δίνεται από τη σχέση: $I = \frac{2}{5} MR^2$). (**3β**)

(γ) Ποια είναι η γραμμική ταχύτητα ενός σημείου στον ισημερινό του αστέρα νετρονίου; Συγκρίνετε την απάντησή σας με την ταχύτητα του φωτός, $c=3.10^8$ m/s. (**3β**)

(δ) Υποθέστε ότι ο αστέρας νετρονίου είναι ομοιόμορφος. Υπολογίστε την πυκνότητά του. Συγκρίνετε με την πυκνότητα μια συνηθισμένης πέτρας (3000 Kgr/m^3) και την πυκνότητα ενός πυρήνα ατόμου (περίπου 10^{17} Kgr/m^3). Δείξτε ότι η θεωρία πως ένας αστέρας νετρονίου είναι σαν ένα τεράστιος πυρήνας ατόμου είναι σωστή. (**4β**)

(α) Η κινητική ενέργεια περιστροφής είναι $E=\frac{1}{2}I\omega^2$ όπου $\omega=\frac{2\pi}{T}$

Επομένως: $\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} I\, 4\pi^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{T^2}\right) = \frac{1}{2} I\, 4\pi^2 \left(-\frac{2}{T^3}\right)\frac{dT}{dt} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = -\frac{4\pi^2 I}{T^3}\frac{dT}{dt} \Rightarrow$

$\Rightarrow I = -\frac{T^3}{4\pi^2}\frac{dE/dt}{dT/dt} \Rightarrow \boxed{I = 1.15\times 10^{38}\ kg\,m^2}$

(β) Για ομοιόμορφη συμπαγή σφαίρα $I=\frac{2}{5}MR^2$, αλλά $M=1.4M_H \Rightarrow R=\sqrt{\frac{5I}{2\cdot 1.4M_H}} \Rightarrow \boxed{R=10.16\ km}$

(γ) $v=\omega R \Rightarrow v=\frac{2\pi}{T}R \Rightarrow v=\frac{2\pi}{0.0331}10.16\cdot 10^3 \Rightarrow \boxed{v=1.9\cdot 10^6\ m/s} \Rightarrow \frac{v}{c}=\frac{1.9\cdot 10^6}{3\cdot 10^8}=0.53\cdot 10^{-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{v \sim 0.53\%\ c}$

(δ) $M=\rho V \Rightarrow M=\rho\frac{4\pi}{3}R^3 \Rightarrow \rho=\frac{3\cdot 1.4M_H}{4\pi R^3} \Rightarrow \rho=\frac{4.2\cdot 1.99\,10^{30}}{4\pi\cdot(10.16)^3\cdot 10^9} \Rightarrow \boxed{\rho=6.34\cdot 10^{17}\ kg/m^3}$ Ίδια περίπου με πυρηνική πυκνότητα