Εξισώσεις Maxwell – Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

Ρεύμα Μετατόπισης

Είχαμε δει το νόμο του Ampere και ότι αν ο αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα στο οποίο υπάρχει συμμετρία, τότε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το ρεύμα αυτό δίνεται από

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$ νόμος του Ampere

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του μαγνητικού πεδίου κατά μήκος μιας τυχαίας κλειστής διαδρομής ισούται με το ρεύμα το οποίο περικλείεται από την επιφάνεια που ορίζεται από την κλειστή διαδρομή.

Είδαμε ακόμα ότι σύμφωνα με τον νόμο του Faraday, ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

κάποιος μπορεί να αναρωτηθεί αν το αντίστροφο ισχύει.

Για να δούμε αν ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο δημιουργεί μαγνητικό πεδίο, θεωρούμε έναν πυκνωτή που φορτίζεται.

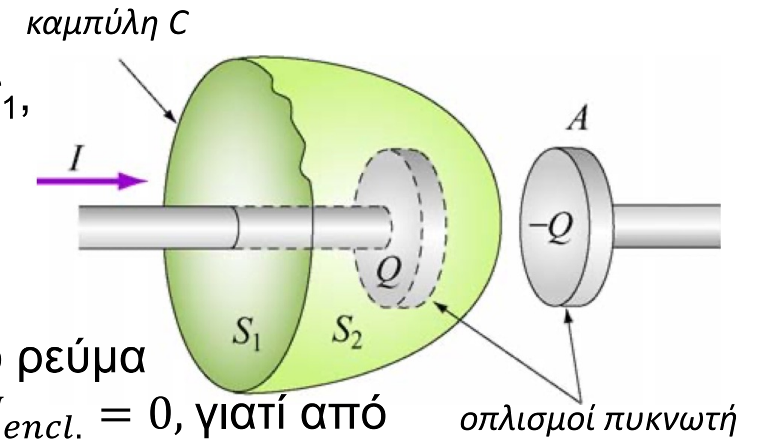
Κατά την φόρτιση, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου αυξάνει καθώς περισσότερο φορτίο συσσωρεύεται στους οπλισμούς του πυκνωτή.

Το ρεύμα αγωγιμότητας που φορτίζει τον πυκνωτή δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο

Μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο από τον νόμο του Ampere

Ρεύμα Μετατόπισης

Για να εφαρμόσουμε τον νόμο του Ampere θεωρούμε την καμπύλη *C* του σχήματος, να αποτελεί την καμπύλη Ampere.



Αν η καμπύλη C οριοθετεί την επίπεδη επιφάνεια S_1, το ρεύμα που περικλείεται είναι $I = I_{encl.}$ που είναι το ρεύμα αγωγιμότητας που μεταφέρει το φορτίο στους οπλισμούς του πυκνωτή.

Αν η καμπύλη C οριοθετεί την επιφάνεια S_2, τότε το ρεύμα που περικλείεται από την επιφάνεια αυτή είναι $I = I_{encl.} = 0$, γιατί από τη στιγμή που περιλαμβάνεται περιοχή ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή, το κύκλωμα είναι ανοικτό και δεν διαρρέεται από ρεύμα.

Επομένως υπάρχει μια αβεβαιότητα ως προς την επιφάνεια που οριοθετείται από την καμπύλη *C.*

Ο Maxwell έδειξε ότι η αβεβαιότητα που υπάρχει εξαιτίας της επιλογής της επιφάνειας μπορεί να διορθωθεί αν προστεθεί ένας επιπλέον όρος στο δεξί μέλος της εξίσωσης του νόμου του Ampere:

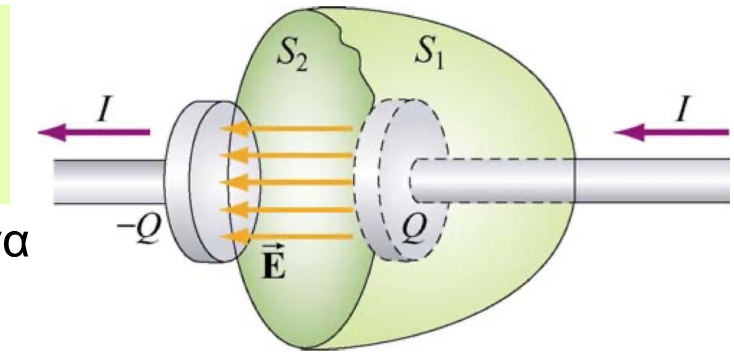
$$\boxed{I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}}$$ **ρεύμα μετατόπισης**

Ο όρος εμπεριέχει αλλαγή στην ηλεκτρική ροή

Ρεύμα Μετατόπισης

Ο γενικευμένος νόμος του Ampere λέει:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 (I + I_d)$$



Η προέλευση του ρεύματος μετατόπισης μπορεί να ερμηνευτεί ως ακολούθως:

Το διπλανό σχήμα δείχνει την ηλεκτρική ροή που διαπερνά την επιφάνεια S_2:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

όπου Q το φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια A και A το εμβαδό της επιφάνειας ενός οπλισμού του πυκντωτή:

Από τον ορισμό του ρεύματος μετατόπισης, βλέπουμε ότι είναι ανάλογο του ρυθμού αύξησης του φορτίου στον πυκνωτή ή διαφορετικά:

$$I_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \frac{dQ}{dt}$$

Το δεξί μέρος της παραπάνω εξίσωσης, dQ/dt, είναι το ρεύμα αγωγιμότητας I.

Επομένως το ρεύμα αγωγιμότητας που περνά μέσω της επιφάνειας S_1 είναι ίδιο με το ρεύμα μετατόπισης που περνά από την επιφάνεια S_2, δηλαδή $I = I_d$.

Με τον νόμο Ampere-Maxwell λύνεται η αβεβαιότητα σχετικά με την επιλογή της επιφάνειας που οριοθετείται από την καμπύλη Ampere.

Νόμος Ampere-Maxwell

Έχουμε επομένως την τροποποίηση του νόμου του Ampere: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (I + I_d)$

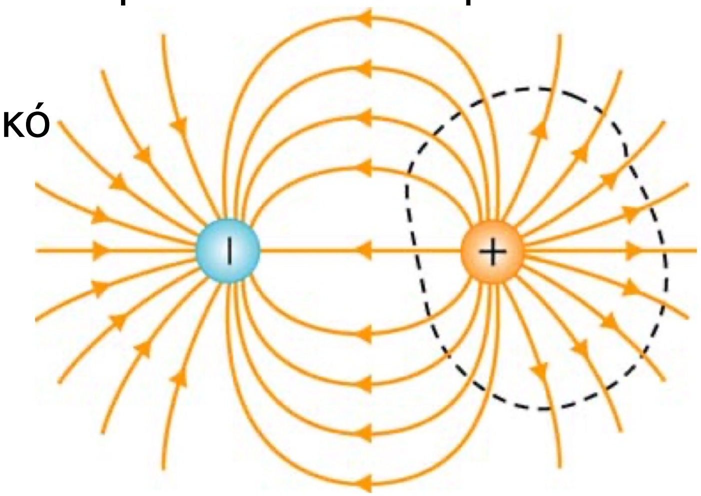
όπου $I_d = \dfrac{\varepsilon_0 d\Phi_e}{dt}$ και $\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

Αυτός ο τροποποιημένος νόμος, ονομάζεται νόμος Ampere-Maxwell

Εκφράζει το γεγονός ότι μαγνητικά πεδία παράγονται από ρεύματα αγωγιμότητας και ρεύματα μετατόπισης. Δηλαδή και από ρεύματα που διαρρέουν αγωγούς αλλά και από χρονικά μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά πεδία

Νόμος του Gauss για τον μαγνητισμό

Όπως έχουμε δει, ο νόμος του Gauss στον ηλεκτρισμό ορίζει ότι η ηλεκτρική ροή μέσω μιας κλειστής επιφάνειας ισούται με το φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια όπως φαίνεται στο σχήμα.



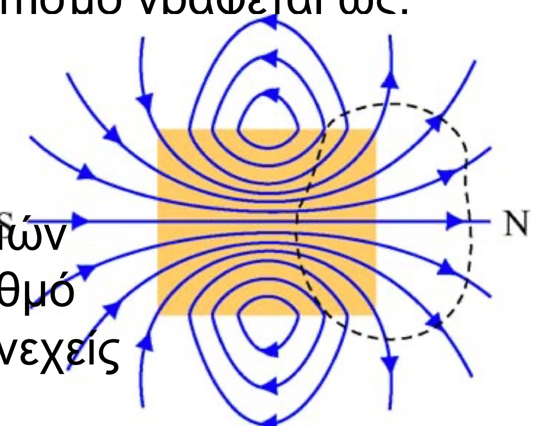
Οι ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές ξεκινούν από το θετικό φορτίο (πηγή) και καταλήγουν στο αρνητικό φορτίο (καταβόθρα)

Κάποιος θα μπορούσε να προσπαθήσει να κάνει κάτι ανάλογο για το μαγνητικό ισοδύναμο.

$$\Phi_B = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA = \frac{Q_m}{\mu_0}$$

όπου Q_m είναι το μαγνητικό πεδίο (το μονόπολο) που περικλείεται από την επιφάνεια Gauss. Ωστόσο όλες οι προσπάθειες για τον εντοπισμό ενός πόλου ήταν άκαρπες και ως αποτέλεσμα $Q_m = 0$ οπότε ο νόμος του Gaus για τον μαγνητισμό γράφεται ως:

$$\Phi_m = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$



Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός των μαγνητικών δυναμικών γραμμών που εισέρχονται σε μια κλειστή επιφάνεια είναι ίδιος με τον αριθμό που εξέρχονται της επιφάνειας. Οι δυναμικές γραμμές είναι συνεχείς χωρίς αρχή και τέλος.

Οι εξισώσεις Maxwell

Με βάση τα προηγούμενα, καταλήγουμε σε 4 εξισώσεις που αποτελούν τη βάση για τη μελέτη ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων

Νόμος	Εξίσωση	Φυσική Ερμηνεία
Νόμος του Gauss για $\vec{E}$	$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$	Η ηλεκτρική ροή που περνά από μια κλειστή επιφάνεια είναι ανάλογη του περικλειόμενου φορτίου
Νόμος του Faraday	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$	Η μεταβολή της μαγνητικής ροής προκαλεί ηλεκτρικό πεδίο
Νόμος του Gauss για $\vec{B}$	$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	Η συνολική μαγνητική ροή που περνά μια κλειστή επιφάνεια είναι μηδέν
Νόμος Ampere-Maxwell	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}\right)$	Ηλεκτρικό ρεύμα και μεταβαλλόμενη ηλεκτρική ροή προκαλούν μαγνητικό πεδίο

Οι εξισώσεις Maxwell

Μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις Maxwell σε διαφορική μορφή ως:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ νόμος Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ νόμος Faraday

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$ νόμος Gauss για το μαγνητικό πεδίο

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$ νόμος Ampere-Maxwell

όπου ρ και $\vec{J}$ είναι η πυκνότητα φορτίου και πυκνότητα αγώγιμου ρεύματος

Απουσία πηγών όπου $\rho = 0$ και $\vec{J} = 0$ οι παραπάνω εξισώσεις καταλήγουν:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \qquad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

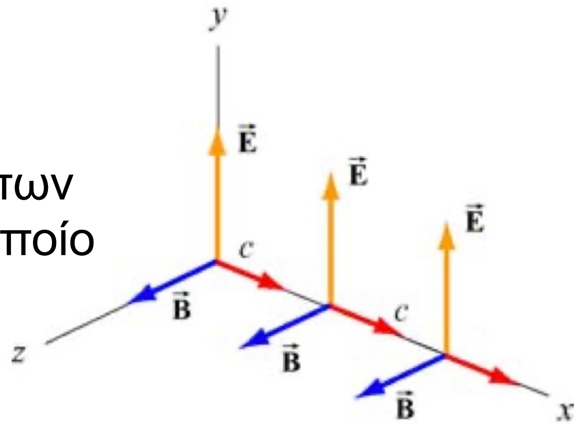
Ηλεκτρομαγνητικά κύματα – Επίπεδα κύματα

Απόρροια των νόμων του Maxwell είναι η πρόβλεψη για την ύπαρξη ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$.

Ο λόγος είναι ότι επειδή η μεταβολή ηλεκτρικού πεδίου επάγει μαγνητικό πεδίο και η μεταβολή μαγνητικού πεδίου επάγει ηλεκτρικό πεδίο και λόγω της σύζευξης μεταξύ των δύο πεδίων δημιουργούνται ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

Η πρόβλεψη αυτή επιβεβαιώθηκε από τον Hertz το 1887.

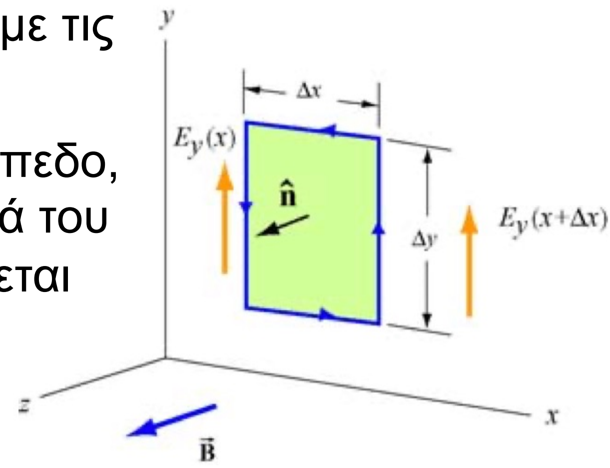
Για να εξετάσουμε τις ιδιότητες των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων θεωρούμε για απλούστευση ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα το οποίο διαδίδεται στη +*x*-διεύθυνση με το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ στη +*y*-διεύθυνση και το μαγνητικό πεδίο στη *z*-διεύθυνση



Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο κύμα επειδή σε κάθε χρονική στιγμή, τόσο το $\vec{E}$ όσο και το $\vec{B}$ είναι ομοιόμορφα ως προς οποιοδήποτε επίπεδο κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης.

Επιπλέον, το κύμα είναι εγκάρσιο επειδή και τα δύο πεδία είναι κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης η οποία συμπίπτει με τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{E}\times\vec{B}$

Επίπεδα Ηλεκτρομαγνητικά κύματα



Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Maxwell μπορούμε να βρούμε τις σχέσεις μεταξύ των μέτρων των πεδίων.

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο πλαίσιο που βρίσκεται στο *xy* επίπεδο, με την αριστερή πλευρά του πλαισίου στη θέση *x* και τη δεξιά του πλευρά στη θέση *x+Δx*. Η κάτω πλευρά του πλαισίου βρίσκεται στη θέση *y* και η πάνω πλευρά στη θέση *y+Δy.*

Θεωρούμε το διάνυσμα της επιφάνειας του πλαισίου, $\hat{n}$, το οποίο βρίσκεται στη +*z*-διεύθυνση, $\hat{n} = \hat{k}$.

Χρησιμοποιώντας το νόμο του Faraday, έχουμε: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\dfrac{d\Phi_m}{dt} = -\dfrac{d}{dt}\iint \vec{B} \cdot d\vec{A}$ (1)

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης μπορεί να γραφεί ως:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_y(x+\Delta x)\Delta y - E_y(x)\Delta y = \left[E_y(x+\Delta x) - E_y(x)\right]\Delta y = \frac{\partial E_y}{\partial x}(\Delta x \Delta y) \qquad (2)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το ανάπτυγμα: $E_y(x+\Delta x) \approx E_y(x) + \dfrac{\partial E_y}{\partial x}\Delta x + \cdots$

Ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ροής στο δεξί μέλος της εξ. 1 δίνεται από:

$$-\frac{d}{dt}\iint \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)(\Delta x \Delta y) \qquad (3)$$

Επίπεδα Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Έχουμε επομένως: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\dfrac{d}{dt}\iint \vec{B}\cdot d\vec{A}$ (1)

και: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \dfrac{\partial E_y}{\partial x}(\Delta x\Delta y)$ (2)

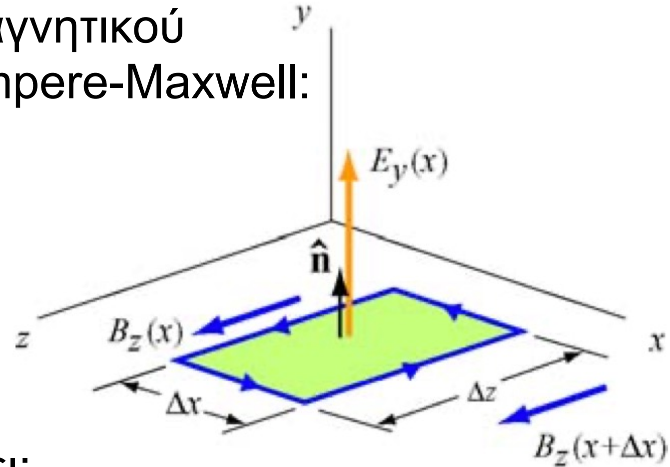
και: $-\dfrac{d}{dt}\iint \vec{B}\cdot d\vec{A} = -\left(\dfrac{\partial B_z}{\partial t}\right)(\Delta x\Delta y)$ (3)

Από (2) και (3) εξισώνοντας και διαιρώντας με το εμβαδό του πλαισίου (ΔxΔy)

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}(\Delta x\Delta y) = -\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)(\Delta x\Delta y) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)} \quad \text{(A)}$$

Η 2η συνθήκη για τη σχέση μεταξύ του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου μπορεί να εξαχθεί χρησιμοποιώντας τον νόμο Ampere-Maxwell:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\iint \vec{E}\cdot d\vec{A}$$



Θεωρούμε ένα ορθογώνιο πλαίσιο στο *xz*-επίπεδο με το διάνυσμα της επιφάνειας $\hat{n} = \hat{j}$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του μαγνητικού πεδίου δίνει:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = B_z(x)\Delta z - B_z(x+\Delta x)\Delta z = [B_z(x) - B_z(x+\Delta x)]\Delta z \approx -\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\Delta x\Delta z \quad (4)$$

Επίπεδα Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Το δεύτερο σκέλος της εξίσωσης του νόμου Ampere-Maxwell δίνει:

$$\mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\iint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \mu_0\varepsilon_0\left(\frac{\partial E_y}{\partial t}\right)(\Delta x\Delta z) \qquad (5)$$

Εξισώνοντας τις (4) και (5) και διαιρώντας με το εμβαδό του πλαισίου (*ΔxΔz*), έχουμε:

$$-\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\Delta x\Delta z = \mu_0\varepsilon_0\left(\frac{\partial E_y}{\partial t}\right)(\Delta x\Delta z) \Rightarrow \boxed{-\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = \mu_0\varepsilon_0\left(\frac{\partial E_y}{\partial t}\right)} \qquad (\text{B})$$

Το αποτέλεσμα δείχνει ότι ένα χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται από ένα χωρικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (Α) κα (Β) θα δείξουμε ότι τόσο το ηλεκτρικό όσο και το μαγνητικό πεδίο ικανοποιούν την εξίσωση του 1-Δ κύματος

Παίρνουμε αρχικά τη μερική παράγωγο ως προς *x* της εξίσωσης (Α) και μια ακόμα μερική παράγωγο της (Β) ως προς *t*:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}} \qquad (\Gamma)$$

Προσοχή στην αλλαγή της σειράς εφαρμογής των μερικών παραγώγων:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)$$

Επίπεδα Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Με τον ίδιο τρόπο, παίρνουμε μια ακόμα μερική παράγωγο της (Β) ως προς το *x* και κατόπιν ακόμη μια παράγωγο της (Α) ως προς τον χρόνο *t*:

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial B_z}{\partial t}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}} \quad (\Delta)$$

Μπορούμε να συνοψίσουμε τα αποτελέσματα (Γ) και (Δ) με τη μορφή:

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{Bmatrix} E_y(x,t) \\ B_z(x,t) \end{Bmatrix} = 0}$$

Η γενική μορφή του 1-Δ κύματος δίνεται από την εξίσωση: $\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(x,t) = 0}$

όπου υ είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος και $\psi(x,t)$ η συνάρτηση κύματος.

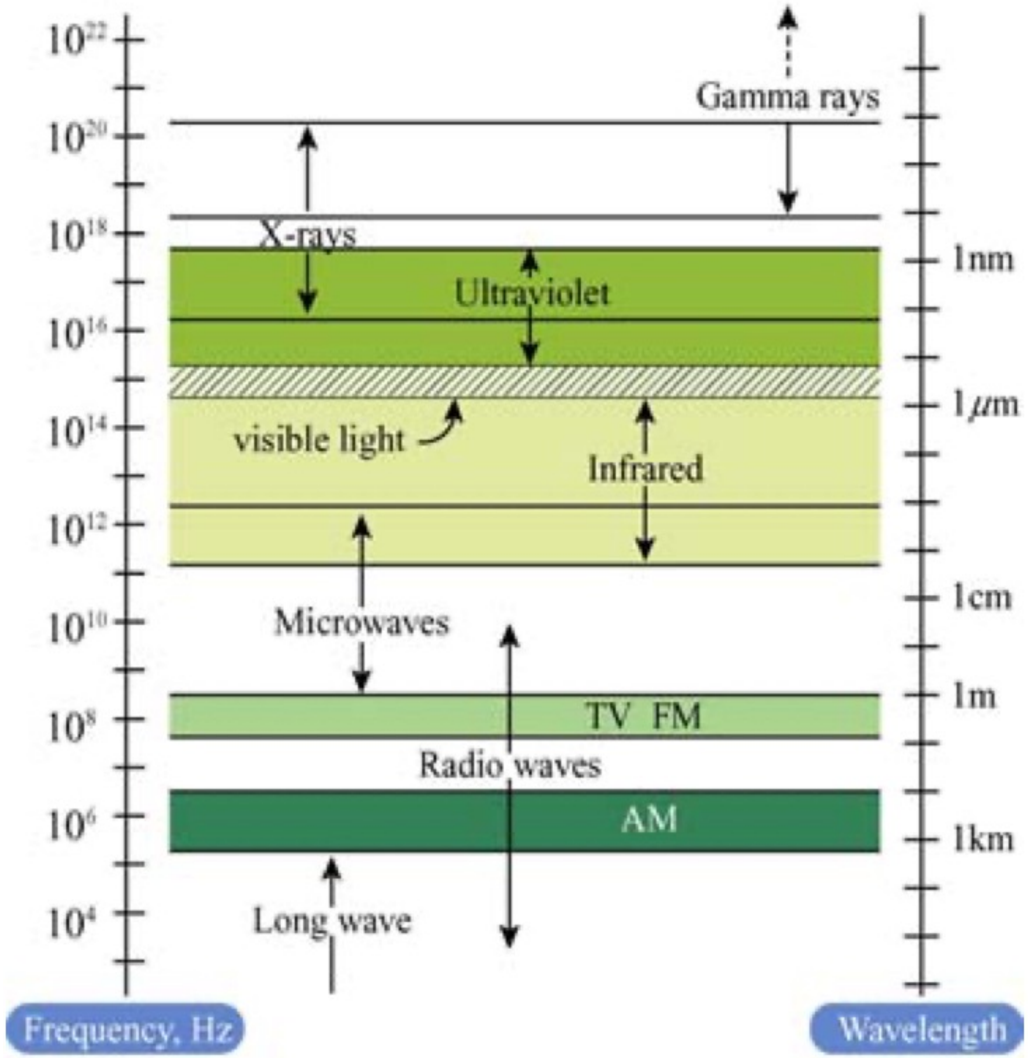
Συγκρίνοντας τις δύο εξισώσεις, βλέπουμε ότι τόσο το E_y όσο και το B_z ικανοποιούν την εξίσωση κύματος και διαδίδονται με ταχύτητα:

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{(4\pi \times 10^{-7} T \cdot m/A)(8.85 \times 10^{-12} C^2/N \cdot m^2)}} = 2.997 \times 10^8 m/s$$

Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το φως είναι ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Το φάσμα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Το φάσμα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



20ο Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

Έτοιμοι