

# Αμοιβαία Επαγωγή - Αυτεπαγωγή

# Αμοιβαία Επαγωγή

Θεωρούμε δύο πηνία που είναι τοποθετημένα το ένα κοντά στο άλλο.

Το πηνίο 1 έχει  $N_1$  σπείρες και διαρρέεται από ρεύμα  $I_1$  το οποίο δημιουργεί ένα μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}_1$ .

Εφόσον τα δύο πηνία είναι κοντά το ένα στο άλλο, κάποιες από τις μαγνητικές γραμμές από το πεδίο του πηνίου 1 θα περάσουν και από το δεύτερο πηνίο.

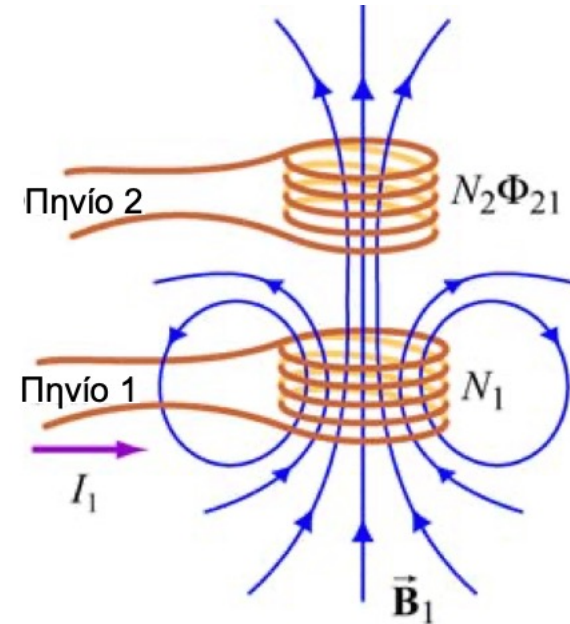
Έστω  $\Phi_{21}$  η μαγνητική ροή που περνά από μια σπείρα του πηνίου 2 εξαιτίας του ρεύματος  $I_1$ .

Αν το ρεύμα  $I_1$  μεταβάλλεται με τον χρόνο, τότε μια ΗΕΔ θα επαχθεί στο πηνίο 2:

$$\mathcal{E}_{21} = -N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = - \frac{d}{dt} \iint_{\text{πηνίο 2}} \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2$$

Ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ροής  $\Phi_{21}$  στο πηνίο 2, είναι ανάλογος της μεταβολής του ρεύματος στο πηνίο 1:

$$N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad \text{η σταθερά αναλογίας } M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} \text{ καλείται } \textbf{η αμοιβαία επαγωγή}$$



**Μονάδα μέτρησης** της επαγωγής στο SI είναι το **Henry (H)** [  $1\text{H} = 1 \text{ Tm}^2/\text{A}$  ]

# Αμοιβαία Επαγωγή

Η σταθερά της αμοιβαίας επαγωγής εξαρτάται όπως θα δούμε παρακάτω από τις γεωμετρικές ιδιότητες των δύο πηνίων (ακτίνα σπειρών, αριθμός σπειρών)

Θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι το πηνίο 2 διαρρέεται από ρεύμα  $I_2$  και αυτό το ρεύμα μεταβάλλεται με τον χρόνο. Επομένως επάγει ΗΕΔ στο πηνίο 1:

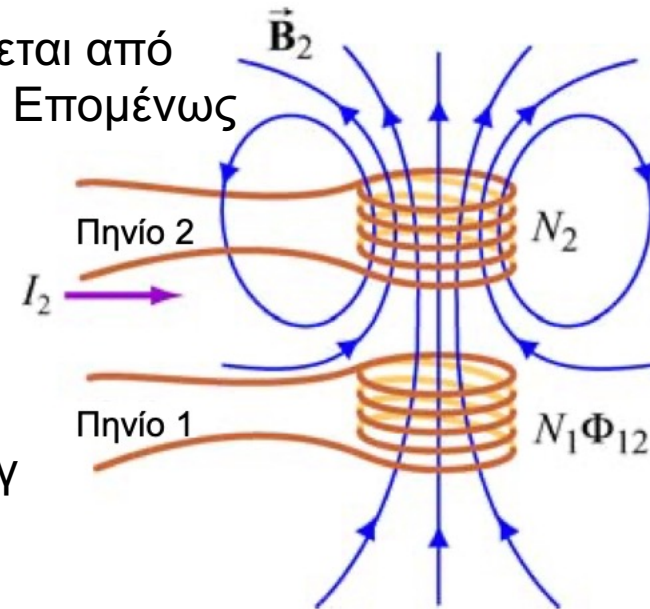
$$\mathcal{E}_{12} = -N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{\text{πηνίο 1}} \vec{B}_2 \cdot d\vec{A}_1$$

και ρεύμα επάγεται στο πηνίο 1:

Η αλλαγή στη μαγνητική ροή του πηνίου 1 είναι ανάλογη της αλλαγής τους ρεύματος που διαρρέει το πηνίο 2

$$N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = M_{12} \frac{dI_2}{dt} \quad \text{η σταθερά αναλογίας } M_{12} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2} \text{ καλείται αμοιβαία επαγωγή}$$

Οι δύο σταθερές αποδεικνύεται ότι είναι ίσες μεταξύ τους και άρα  $M_{12} = M_{21} = M$



## Παράδειγμα: Αμοιβαία επαγωγή μεταξύ δύο ομοεπίπεδων και ομόκεντρων βρόχων

Έστω δύο κυκλικοί βρόχοι αποτελούμενοι από μια σπείρα ο καθένας, ακτίνων  $R_2 \ll R_1$  βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και τα κέντρα τους συμπίπτουν.

Θα υπολογίσουμε την αμοιβαία επαγωγή τους.

Από τις εφαρμογές του νόμου Biot-Savart, είχαμε υπολογίσει το μαγνητικό πεδίο ενός κυκλικού αγωγού ακτίνας  $R$ , που διαρρέεται από ρεύμα  $I$ , σε σημεία του άξονα που περνά από το κέντρο του αγωγού και είναι κάθετος στο επίπεδο του και είχαμε βρει:

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad \text{όπου } z \text{ η απόσταση του σημείου από το επίπεδο του αγωγού}$$

Για  $z = 0$  βρίσκουμε το πεδίο στο κέντρο του βρόχου:  $B_1 = \frac{\mu_0 I_1 R_1^2}{2R_1^3} \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}$

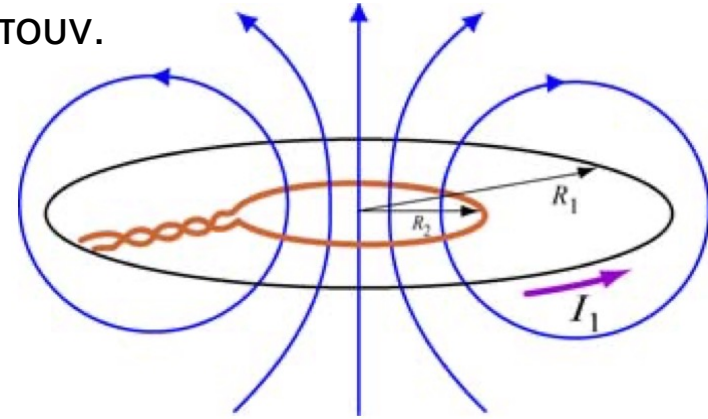
Εφόσον  $R_2 \ll R_1$ , προσεγγίζουμε το μαγνητικό πεδίο σε ολόκληρο τον εσωτερικό βρόχο με  $B_1$  και επομένως η μαγνητική ροή στο εσωτερικό του εσωτερικού βρόχου είναι:

$$\Phi_{21} = B_1 A_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} \pi R_2^2 \Rightarrow \Phi_{21} = \frac{\mu_0 \pi I_1 R_2^2}{2R_1}$$

Η αμοιβαία επαγωγή δίνεται από τη σχέση:  $\frac{d\Phi_{21}}{dt} = M_{12} \frac{dI_1}{dt} \Rightarrow M_{12} = M = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$

άρα:  $M = \frac{\mu_0 \pi I_1 R_2^2}{2R_1 I_1} \Rightarrow M = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}$

Η αμοιβαία επαγωγή εξαρτάται μόνο από γεωμετρικούς παράγοντες και όχι από το ρεύμα

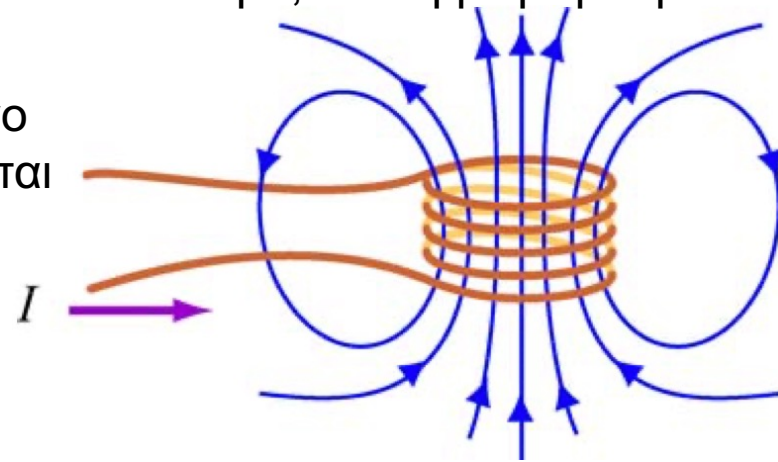


# Αυτεπαγωγή

Θεωρούμε και πάλι ένα πηνίο το οποίο διαρρέεται από ρεύμα  $I$  με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού. Αν το ρεύμα είναι σταθερό, τότε η μαγνητική ροή που διαπερνά το πηνίο παραμένει σταθερή.

Υποθέτουμε ότι το ρεύμα μεταβάλλεται με το χρόνο και άρα σύμφωνα με τον νόμο του Faraday επάγεται ΗΕΔ η οποία αντιτίθεται στην αλλαγή της ροής.

Το ρεύμα που επάγεται έχει φορά αντίθετη με την αλλαγή του ρεύματος που προκαλεί την μεταβολή της μαγνητικής ροής. Συγκεκριμένα αν:



- $dI/dt > 0$  τότε το επαγόμενο ρεύμα έχει τη φορά των δεικτών του ρολογιού
- $dI/dt < 0$  τότε το επαγόμενο ρεύμα έχει φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού

Η ιδιότητα του βρόχου σύμφωνα με την οποία το ίδιο μαγνητικό πεδίο του βρόχου αντιτίθεται σε οποιαδήποτε αλλαγή τους ρεύματος που το διαρρέει ονομάζεται **αυτεπαγωγή** και η **ΗΕΔ** που εμφανίζεται ονομάζεται **τάση αυτεπαγωγής,  $\mathcal{E}_L$**

Η ιδιότητα αυτή εμφανίζεται σε όλα τα πηνία που διαρρέονται από ρεύμα.

# Αυτεπαγωγή

Μαθηματικά, η τάση αυτεπαγωγής μπορεί να γραφεί ως:

$$\varepsilon_L = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -N \frac{d}{dt} \iint_{\text{πηνίο}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

και σχετίζεται με τον συντελεστή αυτεπαγωγή  $L$ :  $\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$    $L = N \frac{\Phi_m}{I}$

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής  $L$  αποτελεί ιδιότητα του πηνίου και δείχνει την αντίσταση ενός πηνίου σε αλλαγές του ρεύματος. Μεγαλύτερος ο συντελεστής  $L$  μικρότερος ο ρυθμός μεταβολής του ρεύματος.

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής  $L$  εξαρτάται:

- Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πηνίου
- Τις φυσικές ιδιότητες του κυκλώματος, όπως για παράδειγμα οι μαγνητικές ιδιότητες του μέσου και η εγγύτητα σε άλλα κυκλώματα

## Παράδειγμα: Συντελεστής αυτεπαγωγής πηνίου

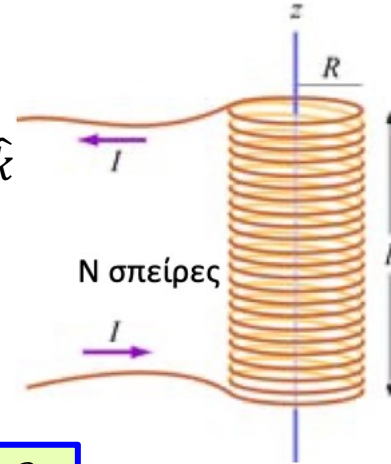
Θα υπολογίσουμε τον συντελεστή αυτεπαγωγής ενός πηνίου που αποτελείται από  $N$  σπείρες ακτίνας  $R$ , έχει μήκος  $l$ , διαρρέεται από ρεύμα  $I$

Από τον νόμο του Ampere, έχουμε ότι το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του πηνίου δίνεται από την σχέση:  $\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{l} \hat{k}$

Η μαγνητική ροή που διαπερνά κάθε σπείρα είναι:  $\Phi_m = \frac{\mu_0 N I}{l} \pi R^2$

Επομένως, ο συντελεστής αυτεπαγωγής θα είναι:

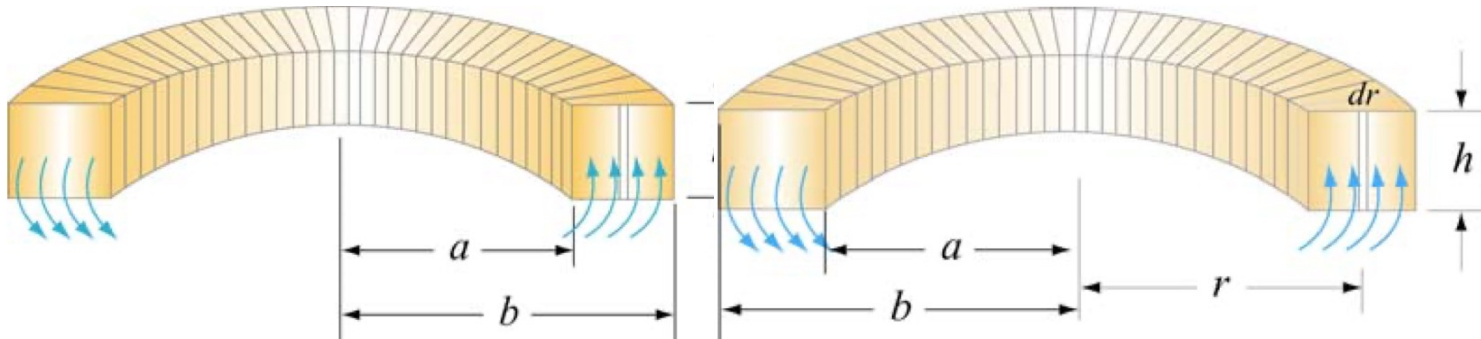
$$L = \frac{N \Phi_m}{I} = N \frac{\mu_0 N I}{l I} \pi R^2 \Rightarrow L = \frac{N \Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 \pi N^2}{l} R^2 \Rightarrow \boxed{L = \mu_0 \pi n^2 l R^2}$$



Ο συντελεστής αυτεπαγωγής εξαρτάται από όλους τους γεωμετρικούς παράγοντες και είναι ανεξάρτητος του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο.

## Παράδειγμα: Συντελεστής αυτεπαγωγής τοροειδούς

Θα υπολογίσουμε τον συντελεστή αυτεπαγωγής ενός τοροειδούς πηνίου που αποτελείται από  $N$  σπείρες, έχει το σχήμα ορθογωνίου, εσωτερική ακτίνα  $a$ , εξωτερική ακτίνα  $b$  και ύψος σπείρας  $h$ .



Σύμφωνα με τον νόμο του Ampere, το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του τοροειδούς δίνεται από τη σχέση:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint B ds = B \oint ds = B 2\pi r = \mu_0 N I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

Η μαγνητική ροή που περνά μέσω μιας σπείρας είναι:  $\Phi_m = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A}$  όπου  $d\vec{A} = h dr$

$$\Rightarrow \Phi_m = \int_a^b \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} h dr \Rightarrow \Phi_m = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} h \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \Phi_m^{o\lambda} = N \Phi_m = \frac{\mu_0 N^2 I}{2\pi} h \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



## Παράδειγμα: Συντελεστής αυτεπαγωγής τοροειδούς

Επομένως ο συντελεστής αυτεπαγωγής είναι:  $L = \frac{\Phi_m^{ολ.}}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, ο συντελεστής αυτεπαγωγής είναι ανεξάρτητος του ρεύματος και εξαρτάται από γεωμετρικά χαρακτηριστικά.

Εξετάζουμε την περίπτωση όπου  $a \gg b - a$ . Αναπτύσσουμε τον  $\log$  οπότε:

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(1 + \frac{b-a}{a}\right) \approx \frac{b-a}{a}$$

και ο συντελεστής της αυτεπαγωγής γίνεται:  $L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \frac{b-a}{a} \Rightarrow L \approx \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi a}$

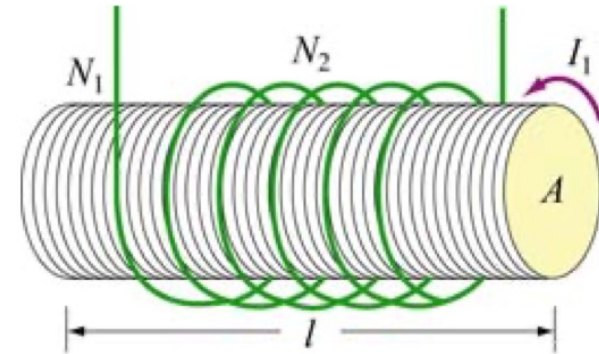
όπου  $A = h(b-a)$  το εμβαδό της σπείρας και  $l = 2\pi a$  το μήκος του τοροειδούς.

Παρατηρούμε ότι στο όριο αυτό, ο συντελεστής αυτεπαγωγής για το τοροειδές και το πηνίο συμπίπτουν.

## Παράδειγμα: Συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής μεταξύ ενός βρόχου που περιβάλλει σωληνοειδές

Ένα μακρύ σωληνοειδές μήκους  $l$  και επιφάνειας διατομής  $A$ , αποτελείτε από  $N_1$  σπείρες. Ένας δεύτερος μονωμένος βρόχος είναι τυλιγμένος γύρω από το σωληνοειδές.

- (α) Θα βρεθεί η αμοιβαία επαγωγή μεταξύ των δύο πηνίων υποθέτοντας ότι ροή δεν χάνεται.
- (β) Θα βρεθεί η σχέση της αμοιβαίας επαγωγής  $M$  με τους συντελεστές αυτεπαγωγής  $L_1$  και  $L_2$  των δύο πηνίων.



- (α) Η μαγνητική ροή που περνά από κάθε σπείρα του εξωτερικού βρόχου εξαιτίας του σωληνοειδούς είναι: .

$$\Phi_{21} = BA = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l} A \quad \text{όπου } B = \mu_0 N_1 I_1 / l \text{ το ομογενές μαγνητικό πεδίο του σωληνοειδούς}$$

Επομένως ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής θα είναι:  $M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{l} A$

- (β) Είδαμε ότι ο συντελεστής αυτεπαγωγής για ένα πηνίο είναι:  $L_1 = \frac{N_1 \Phi_{11}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1^2}{l} A$

όπου  $\Phi_{11}$  η μαγνητική ροή που περνά από μια σπείρα του σωληνοειδούς και προέρχεται από το πεδίο που δημιουργεί το ρεύμα  $I_1$ .

## Παράδειγμα: Συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής μεταξύ ενός βρόχου που περιβάλλει σωληνοειδές

Παρόμοια θα πάρουμε για τον δεύτερο (εξωτερικό) βρόχο ότι ο συντελεστής αυτεπαγωγής θα είναι:

$$L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2}{l} A$$

Ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής συναρτήσει των  $L_1$  και  $L_2$  είναι:  $M = \sqrt{L_1 L_2}$

Γενικά, ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής συναρτήσει των  $L_1$  και  $L_2$  είναι:

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad \text{όπου } 0 \leq k \leq 1 \text{ ο συντελεστής σύζευξης}$$

Στις εξεταζόμενες περιπτώσεις υποθέτουμε ότι όλη η ροή που παράγει το σωληνοειδές περνά από το εξωτερικό βρόχο και το ανάποδο.