Σειρά	Θέση

ΦΥΣ. 131

$2^η$ Πρόοδος: 24-Νοεμβρίου-2012

Πριν αρχίσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητας).

Ονοματεπώνυμο	Αριθμός Ταυτότητας

Απενεργοποιήστε τα κινητά σας.

Η εξέταση αποτελείται από 6 προβλήματα. **Γράψτε καθαρά τον τρόπο με τον οποίο δουλεύετε τις απαντήσεις σας.**

Η συνολική βαθμολογία της εξέτασης είναι 100 μονάδες.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μόνο το τυπολόγιο που σας δίνεται και απαγορεύται η χρήση οποιοδήποτε σημειώσεων, βιβλίων, κινητών.

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΣΤΕ ΜΟΝΟ ΤΙΣ ΣΕΛΙΔΕΣ ΠΟΥ ΣΑΣ ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΜΗΝ ΚΟΨΕΤΕ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΣΕΛΙΔΑ

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 120 λεπτά. Καλή Επιτυχία !

Άσκηση	Βαθμός
$1^η$ (15μ)	
$2^η$ (15μ)	
$3^η$ (15μ)	
$4^η$ (15μ)	
$5^η$ (20μ)	
$6^η$ (20μ)	
Σύνολο	

Τύποι που μπορεί να φανούν χρήσιμοι

Γραμμική κίνηση:

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a\left(x - x_0\right)$$

Στροφική κίνηση:

1περιστροφή = 360° = 2π ακτίνια

$$\theta = \frac{s}{r}$$

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega = \omega_0^2 + 2\alpha\left(\theta - \theta_0\right)$$

$$\upsilon_{\varepsilon\varphi} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \upsilon_{\varepsilon\varphi} = \omega r$$

$$\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad \vec{a}_{\varepsilon\varphi} = \vec{\alpha} \times \vec{r} \Rightarrow \left|\vec{a}_{\varepsilon\varphi}\right| = |\alpha||r|$$

$$\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho} = \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow \left|\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}\right| = \frac{\upsilon_{\varepsilon\varphi}^2}{r} = \omega^2 r$$

$$\vec{a}_{\gamma\rho\alpha\mu} = \vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} + \vec{a}_{\varepsilon\varphi} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\upsilon_{\varepsilon\varphi}}$$

Περιστροφή σώματος:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

$$E_{\kappa\iota\nu}^{\pi\varepsilon\rho.} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = I\alpha$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I\vec{\omega}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Απομονωμένο σύστημα: $L_i = L_f$

μετάπτωση γυροσκοπίου $\omega_\mu = \dfrac{\tau}{I\omega_{\pi\varepsilon\rho}}$

Συνθήκες στατικής ισορροπίας:

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} = 0 \text{ και } \sum \vec{\tau}_{\varepsilon\xi} = 0$$

Έργο – Ενέργεια:

Έργο σταθερής δύναμης: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

Έργο μεταβαλλόμενης δύναμης: $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$

$$\vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}}$$

$$\Delta U = -\int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}kx^2$$

$$U_g = mgh \quad (\text{h}<<\text{R}_{\gamma\eta\varsigma})$$

$$W = \Delta E_{\kappa\iota\nu.}$$

$W = -\Delta U$ (για συντηρητικές δυνάμεις)

$$E_{\mu\eta\chi.} = E_{\kappa\iota\nu.} + U$$

$$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

$W = \Delta E_{\mu\eta\chi.}$ (για μη συντηρητικές δυνάμεις)

$$\vec{F}_{\varepsilon\lambda} = -k\vec{x}$$

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$$

Ορμή – Ώθηση - Κρούσεις:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$$

Ώθηση: $\vec{I} = \int F\,dt = \Delta\vec{p}$

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Απομονωμένο σύστημα: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$

Ελαστική κρούση: $\Delta\vec{p} = 0,\ \Delta E = 0$

Μη ελαστική κρούση: $\Delta\vec{p} = 0,\ \Delta E \neq 0$

Ελαστική κρούση σε 1-Δ: $\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2 = -\left(\vec{\upsilon}_1' - \vec{\upsilon}_2'\right)$

$$x_{CM} = \frac{1}{M_{o\lambda}}\sum_i m x_i$$

$$\vec{\upsilon}_{CM} = \frac{1}{M_{o\lambda}}\sum_i m\upsilon_i$$

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} = M\vec{a}_{CM}$$

Ροπές αδράνειας, I_{CM}, διαφόρων σωμάτων μάζας M ως προς άξονα που περνά από το ΚΜ

Συμπαγής σφαίρα ακτίνας R: $I_{CM} = 2MR^2/5$

Κοίλη σφαίρα ακτίνας R: $I_{CM} = 2MR^2/3$

Συμπαγής κύλινδρος/δίσκος/τροχαλία ακτίνας R: $I_{CM} = MR^2/2$

Κοίλος κύλινδρος/κυκλικό στεφάνι ακτίνας R: $I_{CM} = MR^2$

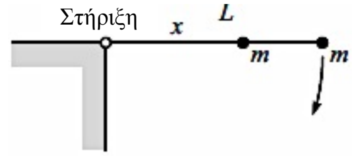
Συμπαγής κυλινδρικός δακτύλιος ακτίνων R_1 και R_2: $I_{CM} = M\left(R_1^2 + R_2^2\right)/2$

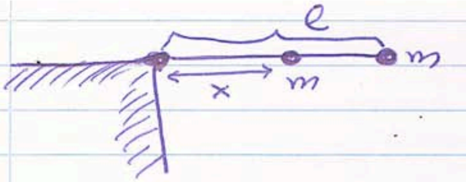
Συμπαγής ράβδος μήκους L: $I_{CM} = ML^2/12$

Συμπαγές παραλληλόγραμμο πλευρών α και β: $I_{CM} = M\left(a^2 + \beta^2\right)/12$

Άσκηση 1 [15μ]

Μια αβαρής ράβδος μήκους L μπορεί να περιστρέφεται ως προς το ένα άκρο της όπως στο σχήμα. Στο άλλο άκρο της υπάρχει στερεωμένη μια μάζα m. Το σύστημα κρατιέται σε οριζόντια θέση. Σε ποιο σημείο πάνω στην ράβδο θα πρέπει να τοποθετηθεί μια δεύτερη μάζα επίσης m ώστε το σύστημα ράβδου-μαζών να πέφτει με την μέγιστη επιτάχυνση όταν αφαιθεί ελεύθερο να κινηθεί.





Η ροπή ως προς το σημείο στήριξης είναι $\boxed{\tau = mg\ell + mgx}$, όπου x είναι η άγνωστη θέση στην οποία τοποθετούμε τη $2^η$ μάζα m.

Αφού η ράβδος είναι αβαρής η ροπή προκαλείται μόνο από το βάρος των 2 μαζών.

Σύμφωνα με τον $2^ο$ νόμο του Newton για περιστροφική κίνηση:

$\Sigma\tau = I\alpha$ όπου I η ροπή αδράνειας των μαζών ως προς το σημείο περιστροφής.

$I = m\ell^2 + mx^2$

Επομένως: $\Sigma\tau = (\cancel{m}\ell^2+\cancel{m}x^2)\alpha = \cancel{m}g\ell+\cancel{m}gx \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\ell^2+x^2)\alpha = g(\ell+x) \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{g(\ell+x)}{\ell^2+x^2}}$$

Θέλουμε να βρούμε το x ώστε η α να είναι μέγιστη $\Rightarrow \frac{d\alpha}{dx}=0$

Επομένως: $\frac{d}{dx}\left[\frac{g(\ell+x)}{\ell^2+x^2}\right]=0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{\ell+x}{\ell^2+x^2}\right]=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(\ell^2+x^2)(1)-(\ell+x)(2x)}{\underbrace{(\ell^2+x^2)^2}_{>0}} = 0 \Rightarrow \ell^2+x^2-2\ell x-2x^2=0 \Rightarrow$$

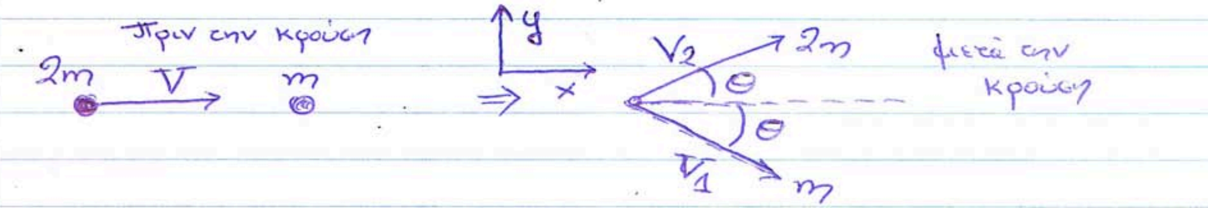
$$\Rightarrow \ell^2-2\ell x-x^2=0 \Rightarrow x^2+2\ell x-\ell^2=0$$

Οι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι: $x_{1,2}=\frac{-2\ell\pm\sqrt{8\ell^2}}{2}$

Επειδή x πρέπει να είναι θετικό $x=\frac{-\cancel{2}\ell+\cancel{2}\ell\sqrt{2}}{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{x=\ell(\sqrt{2}-1)}$

Άσκηση 2 [15μ]

Σώμα μάζας $2m$, κινείται με ταχύτητα V και συγκρούεται ελαστικά με ένα άλλο σώμα μάζας m, το οποίο είναι αρχικά ακίνητο. Υποθέστε ότι τα δυο σώματα μετά την σύγκρουσή τους σκεδάζονται σε ίσες γωνίες, φ, ως προς την αρχική διεύθυνση κίνησης της μάζας $2m$. Να βρεθεί η γωνία αυτή.



Το σύστημά μας είναι απομονωμένο οπότε έχουμε διατήρηση της ορμής. Επίσης ξέρουμε από τα δεδομένα της άσκησης ότι η κρούση είναι τέλεια ελαστική και επομένως έχουμε διατήρηση της ενέργειας. Ακόμα ξέρουμε ότι τα σώματα μετά την κρούση φεύγουν με ίσες γωνίες θ όπως στο παραπάνω σχήμα.

Από διατήρηση της ορμής: $\vec{P}_{ολ}^{\,i} = \vec{P}_{ολ}^{\,f} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_{x_i}^{ολ} = P_{x_f}^{ολ} \\ P_{y_i}^{ολ} = P_{y_f}^{ολ} \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ x-διεύθυνση: $2\cancel{m}V = 2\cancel{m}V_2\cos\theta + \cancel{m}V_1\cos\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2V = 2V_2\cos\theta + V_1\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{2V = \cos\theta(2V_2 + V_1)} \quad (1)$$

$\Rightarrow$ y-διεύθυνση: $0 = 2\cancel{m}V_2\sin\theta - \cancel{m}V_1\sin\theta \Rightarrow \boxed{2V_2 = V_1} \quad (2)$

Από διατήρηση ενέργειας: $E_{ολ}^{i} = E_{ολ}^{f} \Rightarrow \cancel{\tfrac{1}{2}}2\cancel{m}V^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}V_1^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}2\cancel{m}V_2^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2V^2 = V_1^2 + 2V_2^2 \overset{(2)}{\Longrightarrow} \cancel{2}V^2 = \cancel{4}^{2}V_2^2 + \cancel{2}V_2^2 \Rightarrow 3V_2^2 = V^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_2 = \frac{V}{\sqrt{3}}} \quad (3)$$

Από (3) κ (2) $\Rightarrow \boxed{V_1 = \dfrac{2V}{\sqrt{3}}} \quad (4)$

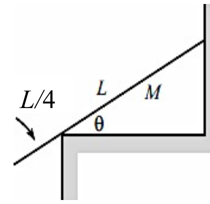
Αντικατάσταση των (3) και (4) στην (1) θα δώσει:

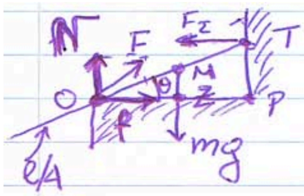
$$\cancel{2V} = \cos\theta\left(\frac{\cancel{2V}}{\sqrt{3}} + \frac{\cancel{2V}}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta = 30^\circ}$$

Άσκηση 3 [15μ]

Μια ράβδος μήκους *L* και μάζας *M*, είναι ακουμπισμένη σε λείο τοίχο με το ¼ του μήκους της να προεξέχει από ένα σκαλοπάτι, όπως στο διπλανό σχήμα. Υποθέστε ότι η γωνία του σκαλοπατιού είναι αρκετά τραχιά ώστε υπάρχει αρκετή τριβή και η ράβδος είναι σε ισορροπία. Να βρεθεί η συνολική δύναμη που ασκεί η γωνία του σκαλοπατιού στην ράβδο. Θα πρέπει να εκφράσετε την δύναμη αυτή είτε δίνοντας το μέτρο και την κατεύθυνσή της ή τις συνιστώσες της.





Εφόσον ο κατακόρυφος τοίχος είναι λείος, δεν υπάρχει τριβή και η μόνη δύναμη από τον τοίχο στη ράβδο είναι η κάθετη δύναμη F_τ

Στη γωνία του σκαλοπατιού υπάρχει η δύναμη της τριβής f που δεν επιτρέπει στη ράβδο να γλυσσρά, και η κάθετη αντίδραση από τη γωνία στη ράβδο N. Αυτές οι 2 δυνάμεις είναι οι συνιστώσες της συνολικής αντίδρασης από την γωνία στη ράβδο.

Σύμφωνα με τις διαλέξεις, οι τρεις δυνάμεις που ενεργούν στη ράβδο, F, Mg και $F_{\tau o\iota\chi}$ θα πρέπει να περνούν από το ίδιο σημείο αφού η ράβδος ισορροπεί.

Οι συνθήκες ισορροπίας επιβάλλουν $\Sigma F_x=0$, $\Sigma F_y=0$ και $\Sigma\tau=0$

$$\Sigma F_x=0 \Rightarrow F_{\tau o\iota\chi} - f = 0 \Rightarrow \boxed{f = F_{\tau o\iota\chi}} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow N - mg = 0 \Rightarrow \boxed{N = mg} \quad (2)$$

$\Sigma\tau=0$ ως προς την γωνία του σκαλοπατιού για να μηδενίσουμε τις 2 άγνωστες δυνάμεις f και N.
Το μήκος της ράβδου μεταξύ της γωνίας και του τοίχου είναι $3\ell/4$ και η απόσταση του ΚΜ της ράβδου από την γωνία θα είναι $\ell/4$ αφού το ΚΜ είναι στο $\ell/2$.

$$\Sigma\tau=0 \Rightarrow mg\cdot(OZ) = F_{\tau o\iota\chi}\cdot(TP) \Rightarrow mg(OM)\cos\theta = F_{\tau o\iota\chi}\cdot(OT)\sin\theta$$

$$\Rightarrow mg\frac{\cancel{\ell}}{\cancel{4}}\cos\theta = F_{\tau o\iota\chi}\cdot\frac{3\cancel{\ell}}{\cancel{4}}\sin\theta \Rightarrow \boxed{F_{\tau o\iota\chi} = \frac{mg}{3\tan\theta}} \quad (3)$$

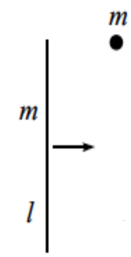
$$\text{Από την } (1) \Rightarrow f = F_{\tau o\iota\chi} \Rightarrow \boxed{f = \frac{mg}{3\tan\theta}} \quad (4)$$

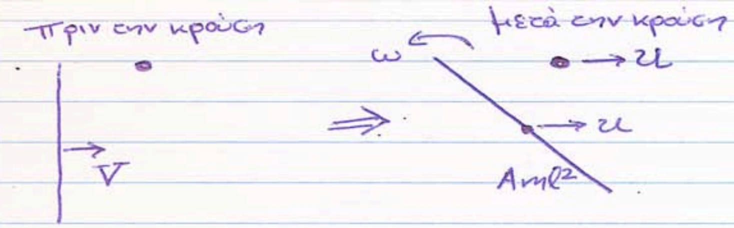
Οι εξισώσεις (2) κ (4) δίνουν τις συνιστώσες της δύναμης F

Η διεύθυνσή της είναι: $\tan\theta_F = \dfrac{N}{f} \Rightarrow \boxed{\tan\theta_F = 3\tan\theta}$ 3 φορές η κλίση της ράβδου

Άσκηση 4 [15μ]

Μια ράβδος μήκους *l*, γλυστρά πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια και συγκρούεται ελαστικά με μια μπάλα. Τόσο η μπάλα όσο και η ράβδος έχουν μάζα *m*. Η μάζα της ράβδου είναι κατανεμημένη με τέτοιο τρόπο ώστε η ροπή αδράνειάς της ως προς το κέντρο μάζας της CM (το οποίο είναι στο μέσο της ράβδου) δίνεται από την σχέση $I_\rho^{CM} = Aml^2$, όπου *A* μια αδιάστατη σταθερά. Ποια θα πρέπει να είναι η τιμή της σταθεράς *A* ώστε η μπάλα και το κέντρο της ράβδου να κινούνται με την ίδια ταχύτητα μετά την σύγκρουση;





Μετά την κρούση η μπάλα και το ΚΜ της ράβδου έχουν την ίδια γραμμική ταχύτητα. Η ράβδος επιπλέον περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω όπως στο παραπάνω σχήμα.

Στο πρόβλημα έχουμε επομένως τρεις αγνώστους u, ω και A και τρεις εξισώσεις που προκύπτουν από διατήρηση ορμής, στροφορμής και ενέργειας αφού δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις και ροπές οι οποίες ενεργούν στο σύστημα.

Διατήρηση ορμής: $P_{o\lambda}^{i} = P_{o\lambda}^{f} \Rightarrow mV = mu + mu \Rightarrow \boxed{u = \frac{V}{2}}$ (1)

Διατήρηση στροφορμής: $L_{o\lambda}^{i} = L_{o\lambda}^{f} \Rightarrow 0 = \underbrace{mu\left(\frac{l}{2}\right)}_{L_{\mu\pi\alpha\lambda\alpha\varsigma}} - \underbrace{I\omega}_{L_{\rho\alpha\beta\delta o\upsilon}} \Rightarrow$
ως προς το μέσο της ράβδου

$$\Rightarrow mu\frac{l}{2} = I\omega \overset{(1)}{\Rightarrow} \cancel{m}\frac{V}{2}\frac{l}{2} = A\cancel{m}l^{\cancel{2}}\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V = 4Al\omega} \quad (2)$$

Διατήρηση ενέργειας: $E_{o\lambda}^{i} = E_{o\lambda}^{f} \Rightarrow \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mu^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mu^2\right)}_{E_{\kappa\iota\nu}^{\rho\alpha\beta}}$

$$\Rightarrow \cancel{\tfrac{1}{2}}mV^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}m\frac{V^2}{4} + \cancel{\tfrac{1}{2}}I\omega^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}m\frac{V^2}{4}$$

$$\Rightarrow mV^2 - m\frac{V^2}{4} - m\frac{V^2}{4} = I\omega^2 \Rightarrow \cancel{m}\frac{V^2}{2} = Al^2\cancel{m}\omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V^2 = 2Al^2\omega^2} \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (3) $\Rightarrow 16A^{\cancel{2}}\cancel{l^2}\cancel{\omega^2} = 2\cancel{A}\cancel{l^2}\cancel{\omega^2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{8}}$

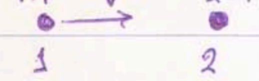
Άσκηση 5 [20μ]

Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου (ακίνητος παρατηρητής) μια μπάλα μάζας *m* κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα *υ* και συγκρούεται με μια άλλη μπάλα μάζας 2*m* που είναι αρχικά ακίνητη. Παρατηρείται ότι στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας, CM, ¾ της ενέργειας έχουν χαθεί σε μορφή θερμότητας κατά την σύγκρουση. Υποθέστε ότι η σύγκρουση είναι μονοδιάστατη.

(α) Ποιες είναι οι ταχύτητες των δυο σωμάτων στο σύστημα αναφοράς του CM πριν την σύγκρουση; [**5μ**]

(β) Ποιες είναι οι ταχύτητες των δυο σωμάτων στο σύστημα αναφοράς του CM μετά την σύγκρουση; [**10μ**] (*Προσοχή*: Θα πρέπει να μελετήσετε την κρούση στο σύστημα αναφοράς του CM για να βαθμολογηθεί το ερώτημα αυτό).

(γ) Ποιες είναι οι ταχύτητες των δυο σωμάτων στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου μετά την σύγκρουση; [**5μ**] (α) Στο σύστημα του εργαστηρίου, πριν την κρούση, η κατάσταση είναι:



Η ταχύτητα του CM των δυο μαζών θα είναι:

$$\upsilon_{CM} = \frac{mV + 2m(0)}{3m} \Rightarrow \boxed{\upsilon_{CM} = \frac{V}{3}} \quad (1)$$

Επομένως πηγαίνοντας στο CM των σωμάτων οι ταχύτητές τους θα είναι:

$$V_{1/εργ} = V_{1/CM} + V_{CM/εργ} \Rightarrow V_{1/CM} = V_{1/εργ} - V_{CM/εργ} \Rightarrow \boxed{V_{1/CM} = V - \frac{V}{3} = \frac{2V}{3}}$$

$$V_{2/εργ} = V_{2/CM} + V_{CM/εργ} \Rightarrow V_{2/CM} = V_{2/εργ} - V_{CM/εργ} \Rightarrow \boxed{V_{2/CM} = 0 - \frac{V}{3} = -\frac{V}{3}}$$

Η κατάσταση πριν την κρούση στο σύστημα αναφοράς του ΚΜ είναι:

Στο σύστημα αυτό το ΚΜ είναι ακίνητο και επομένως η ορμή του είναι 0

(β) Εφόσον το σύστημα είναι απομονωμένο η ορμή διατηρείται. Στο σύστημα αναφοράς του ΚΜ η συνολική ορμή είναι $\emptyset$ πριν την κρούση και επομένως θα είναι μηδέν και μετά την κρούση

$$P_{ολ}^{μετά} = \emptyset \Rightarrow mV_1' + 2mV_2' = 0 \Rightarrow V_1' = -2V_2'$$

Δηλαδή ο λόγος των ταχυτήτων των δυο μαζών παραμένει: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1'}{V_2'} = \frac{2}{1}$

Ξέρουμε ότι κατά την κρούση μόνο το 1/4 της ενέργειας είναι διαθέσιμο και τα υπόλοιπα 3/4 χάθηκαν σε μορφή θερμότητας. Επομένως:

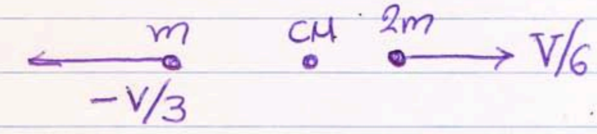
$$E^{i}_{κιν} = \frac{1}{2} m V_{1/CM}^2 + \frac{1}{2}(2m) V_{2/CM}^2 = \frac{1}{2} m \left(V_{1/CM}^2 + 2V_{2/CM}^2\right) = \frac{1}{2} m \left(4V_{2/CM}^2 + 2V_{2/CM}^2\right) = 3mV_{2/CM}^2$$

Ακριβώς ανάλογα $E^{f}_{κιν} = \frac{1}{2} m V'^2_{1/CM} + \frac{1}{2} 2m V'^2_{2/CM} \Rightarrow E^{f}_{κιν} = 3mV'^2_{2/CM}$

Αλλά $\frac{E^{f}_{κιν}}{E^{i}_{κιν}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\cancel{3m}V'^2_{2/CM}}{\cancel{3m}V^2_{2/CM}} = \frac{1}{4} \Rightarrow V'_{2/CM} = \frac{1}{2} V_{2/CM} \Rightarrow \boxed{V'_{2/CM} = +\frac{V}{6}}$

Ενώ η ταχύτητα του σώματος μάζας m θα είναι: $V'_{1/CM} = 2V'_{2/CM} \Rightarrow \boxed{V'_{1/CM} = \frac{-V}{3}}$

Επομένως μετά την κρούση η κατάσταση των σωμάτων στο σύστημα αναφοράς του ΚΜ θα είναι:

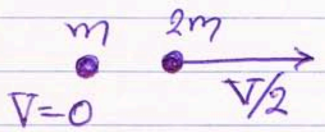


(γ) Εφόσον ξέρουμε τις ταχύτητες των σωμάτων στο σύστημα αναφοράς του CM μεταφερόμαστε ξανά πίσω στο σύστημα του εργαστηρίου όπου το CM έχει όπως βρήκαμε στο ερώτημα (α) ταχύτητα $v_{CM} = V/3$.

$$V'_{1/εργ} = V'_{1/CM} + V_{CM/εργ} \Rightarrow V'_{1/εργ} = -\frac{V}{3} + \frac{V}{3} \Rightarrow \boxed{V'_{1/εργ} = 0}$$

$$V'_{2/εργ} = V'_{2/CM} + V_{CM/εργ} \Rightarrow V'_{2/εργ} = \frac{V}{6} + \frac{V}{3} \Rightarrow \boxed{V'_{2/εργ} = \frac{V}{2}}$$

Η κατάσταση της κίνησης μετά την κρούση στο εργαστήριο θα είναι:



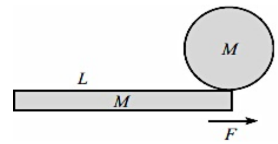
Σημείωση:

Κάποιος μπορεί να αναρωτηθεί ότι η απώλεια ενέργειας στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου είναι διαφορετική από αυτή στο σύστημα αναφοράς του CM. Όντως στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου $E^f_{κιν} = \frac{1}{2}(2m)\frac{V^2}{4}$ ενώ η $E^i_{κιν} = \frac{1}{2}mV^2$. Επομένως $\frac{E^f_{κιν}}{E^i_{κιν}} = \frac{1}{2}$

Η ενέργεια του συστήματος είναι η ενέργεια του CM + Ενέργεια των επιμέρους σωμάτων ως προς το CM. Η άσκηση μας λέει ότι η απώλεια ενέργειας ενέργειας παρατηρήθηκε στο ΚΜ, δηλαδή στην επιμέρους ενέργεια. Η τελική κινητική ενέργεια των σωμάτων στο ΚΜ είναι: $E^f_{κιν} = 3mV'^2_{2/CM} \Rightarrow E^f_{κιν} = \cancel{3}m\frac{V^2}{\cancel{36}\,12} \Rightarrow E^f_{κιν} = m\frac{V^2}{12}$. Η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος θα είναι $E_{κιν} = \underbrace{\frac{1}{2}(3M)\frac{V^2}{9}}_{CM} + m\frac{V^2}{12} = \frac{1}{2}m\frac{V^2}{2}$ όπως στο εργαστήριο

Άσκηση 6 [20μ]

Ένα νόμισμα (θεωρήστε ότι είναι δίσκος) ακτίνας *R* είναι στην κατακόρυφο θέση στο δεξί άκρο μιας σανίδας μήκους *L* και μάζας *M*, όπως στο σχήμα. Το σύστημα αρχικά είναι ακίνητο. Μια σταθερή οριζόντια δύναμη *F* ασκείται στην σανίδα προς τα δεξιά. Υποθέστε ότι το νόμισμα δεν γλυστρά ως προς την σανίδα.



(α) Να βρεθούν οι επιταχύνσεις της σανίδας και του νομίσματος. [**15μ**]

(β) Να βρεθεί η απόσταση την οπ οία έχει κινηθεί το νόμισμα προς τα αριστερά, όταν το αριστερό άκρο της σανίδας έχει φθάσει στο νόμισμα. [**5μ**]

(α) Η δύναμη της τριβής f είναι αυτή που θα επιταχύνει το νόμισμα προς τα δεξιά με μια επιτάχυνση a_N^{CM} γραμμική

Αυτή η επιτάχυνση δεν είναι ίδια με την επιτάχυνση της σανίδας γιατί η δύναμη της τριβής (στατική τριβή εφόσον το νόμισμα δεν γλυστρά ως προς την σανίδα) του προσδίδει μια ροπή και το νόμισμα αρχίζει να περιστρέφεται όπως στο σχήμα. Επομένως το νόμισμα αποκτά μια επιτρόχιο επιτάχυνση εξαιτίας της περιστροφής του η οποία είναι αντίθετη από την κίνηση του συστήματος.

Στην σανίδα ενεργούν, η δύναμη F και η δύναμη της τριβής από το νόμισμα στην σανίδα.

Εφαρμόζοντας το 2° νόμο του Newton για γραμμική και περιστροφική κίνηση:

Σανίδα: $\Sigma F = ma_\Sigma \Rightarrow F - f = ma_\Sigma$ (1) $\Rightarrow F = m(a_\Sigma + a_N^{CM})$ (2)

Νόμισμα: $\Sigma F = ma_N^{CM} \Rightarrow f = ma_N^{CM}$

Ροπές: $\Sigma \tau = I\alpha \Rightarrow f \cdot R = \frac{1}{2} mR^2 \alpha \Rightarrow f = \frac{1}{2} mR\alpha$ $\Rightarrow R\alpha = 2a_N^{CM}$

Από την συνθήκη της κύλισης χωρίς ολίσθηση του νομίσματος ως προς την σανίδα, θα έχουμε: $x_\Sigma - x_N = S$ όπου S το τόξο του κύκλου που κάλυψε το νόμισμα κατά την περιστροφή του. Παραγωγίζοντας ως προς χρόνο δύο φορές θα έχουμε:

Συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση: $a_\Sigma - a_N^{CM} = \frac{d^2 S}{dt^2} = \frac{d^2(R\theta)}{dt^2} = R\alpha$ (3)

Από (2) & (3) $\Rightarrow a_\Sigma - a_N^{CM} = 2a_N^{CM} \Rightarrow \boxed{a_\Sigma = 3a_N^{CM}}$ (4)

Η εξίσωση της δύναμης γίνεται: $F = m(3a_N^{CM} + a_N^{CM}) \Rightarrow \boxed{a_N^{CM} = \frac{F}{4m}}$ (A)

Αντικατάσταση στην (4) δίνει την επιτάχυνση της σανίδας: $\boxed{a_\Sigma = \frac{3F}{4m}}$ (B)

β) Η σχέση των επιταχύνσεων λέει ότι η σανίδα καλύπτει τριπλάσια απόσταση από το νόμισμα. Αν το νόμισμα κινήθηκε κατά x τότε η σανίδα κινήθηκε L+x

Αλλά $L + x = 3x \Rightarrow 2x = L \Rightarrow \boxed{x = L/2}$