ΦΥΣ. 112

1º ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή 16.09.2022**

1. Δίνεται ένα θετικό φορτίο Q το οποίο θέλουμε να χωρίσουμε σε δύο θετικά σημειακά φορτία q_1 και q_2. Δείξτε ότι για δεδομένη απόσταση D μεταξύ των δύο φορτίων, η δύναμη που αναπτύσσει το ένα φορτίο στο άλλο γίνεται μέγιστη όταν $q_1=q_2=Q/2$.

Από τον νόμο του Coulomb, η δύναμη που θα αναπτύσσεται μεταξύ των δύο φορτίων q_1 και q_2 που θα προκύψουν από τον χωρισμό του φορτίου Q θα είναι:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{D^2} \quad (1)$$

Αλλά $q_2 + q_1 = Q \Rightarrow q_2 = Q - q_1 \quad (2)$

$$\Rightarrow F = k\frac{q_1(Q-q_1)}{D^2} = k\frac{Qq_1 - q_1^2}{D^2} \quad (3)$$

Θα πρέπει να βρούμε το μέγιστο της δύναμης αυτής ως προς το q_1 για δεδομένη απόσταση D. Παραγωγίζοντας θα έχουμε:

$$\frac{d}{dq_1}F = 0 \Rightarrow \frac{d}{dq_1} k\frac{Qq_1 - q_1^2}{D^2} = 0 \Rightarrow \frac{k}{D^2}\frac{d}{dq_1}\left(Qq_1 - q_1^2\right) = 0 \Rightarrow$$

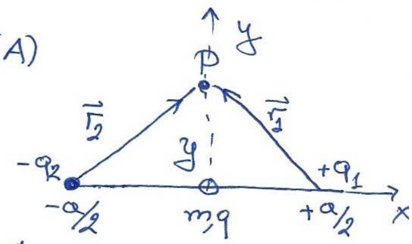
$$\Rightarrow Q - 2q_1 = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{Q}{2} \overset{(2)}{\Rightarrow} q_2 = Q - \frac{Q}{2} = \frac{Q}{2}$$

Επομένως για συγκεκριμένη απόσταση, η δύναμη που ασκεί το ένα φορτίο στο άλλο γίνεται μέγιστη όταν $q_1 = q_2 = \frac{Q}{2}$

2. Δύο ίσα θετικά φορτία Q βρίσκονται στον x-άξονα στις θέσεις $x=+a/2$ και $x=-a/2$. (α) Βρείτε μια εξίσωση για το ηλεκτρικό πεδίο στον y-άξονα συναρτήσει του y. (β) Μια χάντρα μάζας M φορτισμένη με φορτίο q, κινείται κατά μήκος του y-άξονα πάνω σε λείο, λεπτό τεντωμένο νήμα. Βρείτε την ηλεκτρική δύναμη που ασκείται στη χάντρα συναρτήσει του y και προσδιορίστε το πρόσημο του φορτίου q της χάντρας έτσι ώστε η δύναμη αυτή να δείχνει πάντοτε μακριά από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. (γ) Θεωρήστε ότι η χάντρα βρίσκεται στη θέση $x = 0 = y$. Αν δοθεί μια μικρή αρχικά ώθηση στην $+y$-διεύθυνση, πόσο γρήγορα θα κινείται η χάντρα τη χρονική στιγμή που η συνισταμένη δύναμη αποκτά τη μέγιστη τιμή της; (Υποθέστε ότι η βαρύτητα είναι αμελητέα).

(α) Από την αρχή της γραμμικής επαλληλίας και του ορισμό του πεδίου:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = k\frac{q_1}{r_{1,p}^2}\hat{r}_{1,p} + k\frac{q_2}{r_{2,p}^2}\hat{r}_{2,p} \qquad (A)$$



αλλά $\hat{r}_{i,p} = \frac{\vec{r}_{i,p}}{r_{i,p}}$

$$\vec{r}_{1,p} = \vec{r}_p - \vec{r}_{q_1} = (0\hat{i} + y\hat{j}) - \left(\frac{a}{2}\hat{i} + 0\hat{j}\right) = -\frac{a}{2}\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\vec{r}_{2,p} = \vec{r}_p - \vec{r}_{q_2} = (0\hat{i} + y\hat{j}) - \left(-\frac{a}{2}\hat{i} + 0\hat{j}\right) = \frac{a}{2}\hat{i} + y\hat{j}$$

$$r_{1,p} = r_{2,p} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + y^2} = \left(\frac{a^2}{4} + y^2\right)^{1/2}$$

Αντικατάσταση στην (A) δίνει: $\vec{E} = k\frac{q_1}{\left(\frac{a^2}{4}+y^2\right)^{3/2}}\left(-\frac{a}{2}\hat{i} + y\hat{j}\right) + k\frac{q_2}{\left(\frac{a^2}{4}+y^2\right)^{3/2}}\left(\frac{a}{2}\hat{i} + y\hat{j}\right)$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{k}{\left(\frac{a^2}{4}+y^2\right)^{3/2}}\left[\frac{a}{2}(q_2 - q_1)\hat{i} + y(q_1 + q_2)\hat{j}\right] \xRightarrow{q_1 = q_2 = +Q} \vec{E}_x = \vec{0}$$

αναμενόμενο λόγω συμμετρίας

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_y = \frac{2kQy\hat{j}}{\left(\frac{a^2}{4}+y^2\right)^{3/2}}}$$

(β) Η δύναμη που ασκείται στη χάντρα μάζας m και φορτίου q θα είναι:

$$\vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{F}_y = q\vec{E}_y = q\frac{2kQy}{\left(\frac{a^2}{4}+y^2\right)^{3/2}}\hat{j}$$

με κατεύθυνση πάντοτε προς τα θετικά $+y$

(γ) Από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας, καθώς η χάντρα κινείται από τη θέση $(0,0)$ στη θέση που η δύναμη F_y είναι μέγιστη θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} &W_{21} = \Delta E_{κιν} = E_{κιν}^{f} - E_{κιν}^{i} \\ &E_{κιν}^{i} = 0 \text{ αφού η χάντρα είναι ακίνητη} \end{aligned}\right\} \Rightarrow W_{21} = \frac{1}{2}m v_f^2 \Rightarrow \boxed{v_f = \sqrt{\frac{2W_{21}}{m}}} \qquad (B)$$

Αλλά το έργο της ηλεκτρικής δύναμης F στη χάντρα θα είναι:

$$W_{21} = \int_0^{y_{max}} \vec{F}_{21} \cdot d\vec{s} = \int_0^{y_{max}} \frac{2kQq}{\left(\frac{a^2}{4}+y^2\right)^{3/2}}\, y\, dy \quad (\Gamma)$$ όπου y_{max} το σημείο στο οποίο η δύναμη είναι μέγιστη.

Για να έχουμε μέγιστη δύναμη, θα πρέπει $\frac{dF_{21}}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dy}\left(\frac{2kQq\,y}{\left(\frac{a^2}{4}+y^2\right)^{3/2}}\right) = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}\left[\frac{y}{\left(\frac{a^2}{4}+y^2\right)^{3/2}}\right] = 0 \Rightarrow \frac{\left(a^2/4+y^2\right)^{3/2} - y(2y)\frac{3}{2}\left(\frac{a^2}{4}+y^2\right)^{1/2}}{\frac{a^2}{4}+y^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left(a^2/4+y^2\right)^{3/2} - \frac{3}{2}(2y^2)\left(a^2/4+y^2\right)^{1/2}}{a^2/4+y^2} = \frac{\left(a^2/4+y^2\right)^{1/2}\left[\left(a^2/4+y^2\right) - 3y^2\right]}{a^2/4+y^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2/4+y^2-3y^2}{\left(a^2/4+y^2\right)^{1/2}} = 0 \Rightarrow \frac{a^2}{4} - 2y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{a^2}{2\cdot 4} \Rightarrow y = \pm a/2\sqrt{2}$$

Αγνοούμε την αρνητική λύση γιατί δίνουμε στη χάντρα ώθηση προς $+y$.
Επομένως το σημείο στο οποίο η ηλεκτρική δύναμη είναι μέγιστη είναι $\boxed{y = \frac{a}{2\sqrt{2}}}$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα (Γ) χρησιμοποιώντας το τελευταίο αποτέλεσμα:

$$\int_0^{a/2\sqrt{2}} \frac{y\,dy}{\left(\frac{a^2}{4}+y^2\right)^{3/2}}$$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $u = x^2+a^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$$\int \frac{y\,dy}{\left(\frac{a^2}{4}+y^2\right)^{3/2}} = \int \frac{1}{2\cancel{y}} \frac{\cancel{y}\,du}{u^{3/2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{1}{2}\left(-2\frac{1}{\sqrt{u}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{a/2\sqrt{2}} \frac{y\,dy}{\left(\frac{a^2}{4}+y^2\right)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+y^2}}\Bigg|_0^{a/2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4\cdot 2}}} + \frac{1}{\frac{a}{2}} = \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{a\sqrt{3}}$$

Το ολοκλήρωμα στη (Β):

$$v_f = \sqrt{\frac{2}{m}\frac{2kQq}{a}\frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{4}{ma}kQq\cdot 0.367} \Rightarrow \boxed{v_f = 1.21\sqrt{\frac{kQq}{ma}}}$$

3. Δύο ουδέτερα μόρια που βρίσκονται στον x-άξονα έλκονται μεταξύ τους. Κάθε μόριο έχει διπολική ροπή $\vec{p}$, και οι διπολικές αυτές ροπές βρίσκονται στον x-άξονα και απέχουν απόσταση d μεταξύ τους. Βρείτε μια εξίσωση που δίνει την ελκτική δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ των διπόλων συναρτήσει της απόστασης, d, και της ηλεκτρικής διπολικής ροπής, p. <u>*Υπόδειξη:*</u> Θεωρείστε ότι η απόσταση μεταξύ των διπόλων είναι αρκετά μεγαλύτερη από την απόσταση των φορτίων που αποτελούν κάθε δίπολο.

Η ηλεκτρική δύναμη που ασκεί κάθε δίπολο στο άλλο προέρχεται από μια συνάρτηση δυναμικής ενέργειας U. Η δύναμη αυτή είναι ελκτική και θα είναι:

$$\boxed{F = -\frac{dU}{dx}} \quad (1)$$

Η δυναμική ενέργεια U κάθε διπόλου συναρτήσει του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί η παρουσία του άλλου διπόλου είναι: $\boxed{U = -pE}$ (2) όπου p η ηλεκτρική διπολική ροπή του διπόλου.

Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί κάθε δίπολο σε απόσταση x είναι:

$$\vec{E} = k\left(-\frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}\right) \Rightarrow E_x = k\left(+\frac{p}{x^3} + \frac{p\cdot x\, x}{x^5}\right) \Rightarrow \boxed{E_x = \frac{2p}{x^3}} \quad (3)$$

Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο στο δίπολο 1 εξαιτίας του διπόλου 2 είναι $E_1 = \frac{2kp_2}{x^3}$ όπου x η απόσταση των διπόλων.

Αντικατάσταση στην (2) δίνει $U_1 = -p_1\frac{2kp_2}{x^3} \Rightarrow U_1 = -\frac{2kp_1p_2}{x^3}$

Αντικατάσταση στην (1) δίνει: $F = -\frac{dU_1}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{2kp_1p_2}{x^3} \Rightarrow F = -\frac{6kp_1p_2}{x^4}$

Το πρόσημο δείχνει ότι η δύναμη είναι ελκτική.

Δεδομένου ότι τα δύο μόρια έχουν την ίδια διπολική ροπή $p_1 = p_2 = p$ και η μεταξύ τους απόσταση είναι d, το μέτρο της δύναμης που αναπτύσσεται θα είναι:

$$\boxed{F = \frac{6kp^2}{d^4}}$$

4. Το 1919 ο Rutherford χρησιμοποίησε α-σωματίδια (πυρήνες του στοιχείου Ηλίου) τα οποία έριχνε σε στόχο που αποτελούνταν από λεπτό φύλλο χρυσού. Στο πείραμα αυτό ανακάλυψε ότι πρακτικά όλη η μάζα του ατόμου βρίσκεται σε ένα μικρό συμπαγή χώρο που αποτελεί τον πυρήνα του ατόμου. Υποθέστε ότι σε ένα τέτοιο πείραμα, ένα από τα α-σωματίδια έχει αρχική κινητική ενέργεια $5.0 MeV$ ($1eV$ αντιστοιχεί σε ενέργεια $1.602 \times 10^{-19} Joule$). Αν το α-σωματίδιο κατευθύνεται απευθείας προς τον πυρήνα του χρυσού, και η μόνη δύναμη που ασκείται πάνω του είναι η ηλεκτρική απωστική δύναμη από τον πυρήνα του χρυσού, πόσο θα πλησιάσει τον πυρήνα του χρυσού πριν αντιστρέψει την κίνησή του και αρχίσει να απομακρύνεται από τον πυρήνα; Διατυπώνοντας διαφορετικά, ποια είναι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των κέντρων των θετικών φορτίων του α-σωματιδίου και του πυρήνα χρυσού;

Το ηλεκτρικό πεδίο του πυρήνα του ατόμου του χρυσού ασκεί δύναμη στα α-σωματίδια η οποία εκτελεί έργο πάνω τους, με αποτέλεσμα την μεταβολή της κινητικής τους ενέργειας. Η δύναμη αυτή είναι απωστική και επομένως τα σωματίδια-α θα χάσουν όλη την αρχική τους ενέργεια και θα σταματήσουν στιγμιαία και κατόπιν θα αρχίσουν να κινούνται αντίθετα με την αρχική φορά κίνησής τους, απομακρυνόμενα από τους πυρήνες του ατόμου του χρυσού.

Το έργο της απωστικής δύναμης Coulomb θα είναι:

$$W_{ηλ} = \int \vec{F}_{ηλ} \cdot d\vec{r} = \Delta E_{κιν} \Rightarrow \Delta E_{κ} = E^{f}_{κιν} - E^{i}_{κιν} = \int_{\infty}^{r_{min}} k \frac{q_a \cdot Q^{Au}}{r^2} dr \quad (A)$$

Τα σωματίδια α είναι πυρήνες ηλίου και επομένως $q_a = 2e$

Ο πυρήνας του ατόμου του χρυσού (Au) αποτελείται από 79 πρωτόνια $\Rightarrow Q^{Au} = 79e$

Η τελική κινητική ενέργεια θα είναι: $E^{f}_{κιν} = \emptyset$ Joule

Επομένως η (A) γίνεται: $-E^{i}_{κιν} = k158e^2 \int_{\infty}^{r_{min}} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow + E^{i}_{κιν} = 158ke^2 \left[+ \frac{1}{r} \right]_{\infty}^{r_{min}}$

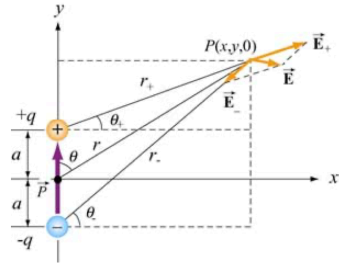
$$\Rightarrow E^{i}_{κιν} = 158ke^2 \frac{1}{r_{min}} \Rightarrow r_{min} = \frac{158ke^2}{E^{i}_{κιν}} = \frac{158 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19} \cancel{C})^2 \, 8.988 \times 10^9 \, \frac{N \cdot m^2}{\cancel{C^2}}}{5 \cdot 10^6 \cdot 1.602 \times 10^{-19} \cancel{J}}$$

$$\Rightarrow r_{min} = \frac{158 \cdot 1.6^{\cancel{2}} \cdot 8.988}{5 \cdot \cancel{1.6}} \cdot 10^{-16} \Rightarrow r_{min} = 455 \cdot 10^{-16} m \Rightarrow r_{min} = 4.55 \cdot 10^{-14} m$$

Επομένως η ελάχιστη απόσταση στην οποία πλησιάζουν τα α-σωματίδια στους πυρήνες χρυσού είναι: $r_{min} = 45.5 \cdot 10^{-15} m = \underline{45.5 fm}$

5. Θεωρήστε το ηλεκτρικό δίπολο του σχήματος.

(α) Δείξτε ότι οι δύο συνιστώσες E_x και E_y του ηλεκτρικού πεδίου του διπόλου στο όριο που $r \gg a$ δίνονται από τις σχέσεις:



$$E_x = \frac{3p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} sin\theta cos\theta \qquad E_y = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1)$$

όπου $sin\theta = x/r$ και $cos\theta = y/r$.

(β) Δείξτε ότι οι δύο παραπάνω σχέσεις για τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου μπορούν να γραφούν σε πολικές συντεταγμένες με την μορφή: $\vec{E}(r,\theta) = E_r\hat{r} + E_\theta\hat{\theta}$, όπου:

$$E_r = \frac{2pcos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad E_\theta = \frac{psin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

(α) Υπολογίζουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση $r \gg a$, από το δίπολο. Η x-συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P με καρτεσιανές συντεταγμένες $(x, y, 0)$ δίνεται από τη σχέση:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\cos\theta_+}{r_+^2} - \frac{\cos\theta_-}{r_-^2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x}{[x^2+(y-a)^2]^{3/2}} - \frac{x}{[x^2+(y+a)^2]^{3/2}}\right]$$

όπου $r_\pm^2 = r^2 + a^2 \mp 2ra\cos\theta = x^2 + (y \mp a)^2$

Παρόμοια, η y-συνιστώσα δίνεται από τη σχέση:

$$E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\sin\theta_+}{r_+^2} - \frac{\sin\theta_-}{r_-^2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{y-a}{[x^2+(y-a)^2]^{3/2}} - \frac{y+a}{[x^2+(y+a)^2]^{3/2}}\right]$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα Taylor για να αναπτύξουμε το ηλεκτρικό πεδίο, και θα κρατήσουμε μόνο όρους που είναι ανάλογοι του $1/r^3$ και θα αγνοήσουμε όρους μεγαλύτερης τάξης από $1/r^5$. όπου $r = (x^2+y^2)^{1/2}$

Έχουμε αρχικά:

$$[x^2+(y\pm a)^2]^{-3/2} = (x^2+y^2+a^2 \pm 2ay)^{-3/2} = r^{-3}\left[1 + \frac{a^2 \pm 2ay}{r^2}\right]^{-3/2}$$

Στο όριο $r \gg a$ χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα Taylor με $s = \frac{a^2 \pm 2ay}{r^2}$

$$(1+s)^{-3/2} \simeq 1 - \frac{3}{2}s + \frac{15}{8}s^2 - \cdots$$

Οι εξισώσεις για τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου γίνονται επομένως:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{6xya}{r^5} + \dots$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{2a}{r^3} + \frac{6y^2a}{r^5}\right) + \dots$$

όπου αγνοούμε όρους τάξης ίσης ή μεγαλύτερης του s^2. Το ηλεκτρικό πεδίο επομένως γράφεται:

$$\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{2a}{r^3}\hat{j} + \frac{6ya}{r^5}(x\hat{i} + y\hat{j})\right] = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\frac{3yx}{r^2}\hat{i} + \left(\frac{3y^2}{r^2} - 1\right)\hat{j}\right]$$

όπου χρησιμοποιούμε τον ορισμό του μέτρου της ηλεκτρικής διπολικής ροπής $p = 2aq$

Συναρτήσει των πολικών συντεταγμένων, με $\sin\theta = \frac{x}{r}$ και $\cos\theta = \frac{y}{r}$ θα πάρουμε:

$$\boxed{E_x = \frac{3p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sin\theta\cos\theta} \quad \text{και} \quad \boxed{E_y = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1)}$$

(β) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε καρτεσιανές συντεταγμένες θα είναι:

$$\vec{E}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3\sin\theta\cos\theta\,\hat{i} + (3\cos^2\theta - 1)\hat{j}\right]$$

Με πράξεις, η προηγούμενη σχέση γράφεται ως:

$$\vec{E}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta(\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}) + \sin\theta\cos\theta\,\hat{i} + (\cos^2\theta - 1)\hat{j}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta(\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}) + \sin\theta(\cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j})\right]$$

Σε πολικές συντεταγμένες μπορούμε να γράψουμε τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{r}$ και $\hat{\theta}$ ως:

$$\hat{r} = \sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$
$$\hat{\theta} = \cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j}$$

Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο γράφεται χρησιμοποιώντας τα $\hat{r}$ και $\hat{\theta}$

$$\boxed{\vec{E}(r,\theta) = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right]}$$

Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ θα είναι:

$$E = \left(E_x^2 + E_y^2\right)^{1/2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\cos^2\theta + 1\right)^{1/2}}$$

6. (α) Δείξτε ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου E, κατά μήκος του άξονα μιας κατανομής φορτίου σε μορφή δακτυλίου ακτίνας a, παρουσιάζει μέγιστο στις τιμές $z = \pm a/\sqrt{2}$. (β) Χρησιμοποιώντας PYTHON να σχεδιάσετε την ένταση του πεδίου, E, ως προς z, για θετικές και αρνητικές τιμές του z. (γ) Προσδιορίστε τη μέγιστη τιμή E.

(α) Το ηλεκτρικό πεδίο που προκαλείται από φορτισμένο δακτύλιο με φορτίο Q, σε απόσταση z από το επίπεδο του δακτυλίου, κατά μήκος άξονα που περνά από το κέντρο του δακτυλίου και είναι κάθετος σε αυτόν, δίνεται από:

$$E_z = k\frac{Qz}{(z^2+a^2)^{3/2}}$$

Για να βρούμε τα ακρότατα, παραγωγίζουμε ως προς z.

$$\frac{dE}{dz} = kQ\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z^2+a^2)^{3/2}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{(z^2+a^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(2z)(z^2+a^2)^{1/2}}{(z^2+a^2)^3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(z^2+a^2)^{1/2}\left[(z^2+a^2) - 3z^2\right]}{(z^2+a^2)^{3/2}} = 0 \Rightarrow z^2+a^2-3z^2 = 0 \Rightarrow 2z^2 = a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}}$$

(β) Κάνουμε το γράφημα του μέτρου της έντασης του πεδίου συναρτήσει του λόγου $z/a = w$

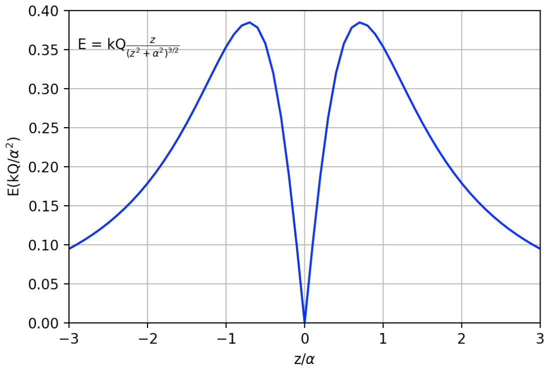
Γράφουμε την ένταση $E = \frac{kQ}{a^2}\frac{z}{a\left((z/a)^2+1\right)^{3/2}} \Rightarrow \boxed{E = \frac{kQ}{a^2}\frac{w}{(w^2+1)^{3/2}}}$

Θεωρούμε την ποσότητα $\frac{kQ}{a^2} = E_0$ οπότε η γραφική παράσταση είναι $E/E_0 = \frac{w}{(w^2+1)^{3/2}} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{w}{(w^2+1)^{3/2}}$

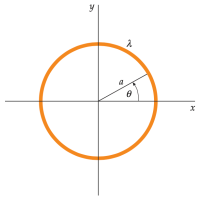
(Ο κώδικας της PYTHON με το γράφημα στην επόμενη σελίδα).

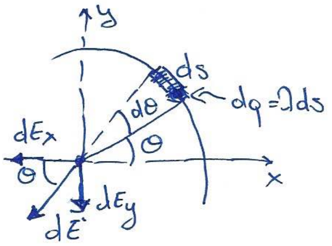
(γ) Οι τιμές του πεδίου στα ακρότατα είναι: $E_{z,max} = E_{z=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{kQ(\pm a/\sqrt{2})}{\left[(\pm a/\sqrt{2})^2+a^2\right]^{3/2}} = k\frac{2\sqrt{3}Q}{9a^2}$

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def func(x):
    return np.abs(x/(x**2+1)**(3/2))

x=np.arange(-3,3.1,0.1)

plt.figure(figsize=(6,4))
plt.plot(x,func(x),'b-')
plt.xlabel(r'z/$\alpha$')
plt.ylabel(r'E(kQ/$\alpha^2$)')
plt.text(-2.9,0.35,r'E = kQ$\frac{z}{(z^2+\alpha^2)^{3/2}}$')
plt.rc('font',size=10)
plt.xlim(-3,3.)
plt.ylim(0.,0.4)
plt.grid(True)
plt.show()
```



7. Ένας φορτισμένος μη αγώγιμος δακτύλιος έχει κατανομή φορτίου που μεταβάλλεται κατά μήκος της περιφέρειάς του σύμφωνα με τη σχέση $\lambda(\theta) = \lambda_0 sin\theta$, όπως φαίνεται στο σχήμα. (α) Ποια η διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου E στο κέντρο του δακτυλίου; (β) Ποιο το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο του δακτυλίου;





(α) Το πεδίο στο κέντρο του δακτυλίου θα είναι:
(συνεισφορά από το στοιχειώδες φορτίο dq σε στοιχειώδες τμήμα του δακτυλίου)

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y = -dE\cos\theta\,\hat{i} - dE\sin\theta\,\hat{j} \qquad (A)$$

Το μέτρο του στοιχειώδους αυτού πεδίου θα είναι: $dE = \frac{k\,dq}{r^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow dE = \frac{k\lambda ds}{r^2} \Rightarrow dE = \frac{k\lambda_0 \sin\theta\, ds}{r^2} \quad \text{όπου } \lambda = \lambda_0\sin\theta$$

Το στοιχειώδες τμήμα του δακτυλίου έχει μήκος $ds = a \cdot d\theta$ όπου a η ακτίνα

Επομένως: $dE = \frac{k\lambda_0 a}{a^2}\sin\theta d\theta \Rightarrow dE = \frac{k\lambda_0}{a}\sin\theta d\theta$.

Αντικαθιστούμε στην (1) και θα πάρουμε: $d\vec{E} = -k\frac{\lambda_0}{a}\left[\underbrace{\sin\theta\cos\theta}_{\sin 2\theta/2} d\theta\,\hat{i} + \sin^2\theta d\theta\,\hat{j}\right]$

Ολοκληρώνουμε ως προς Θ από ϕ έως 2π οπότε θα έχουμε:

$$\vec{E} = -\frac{k\lambda_0}{a}\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2\theta}{2}d\theta\,\hat{i} - \frac{k\lambda_0}{a}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta\,\hat{j} \qquad (B)$$

Το 1° ολοκλήρωμα: $\int_0^{2\pi}\sin 2\theta\, d\theta$ θα δώσει: $u = 2\theta \Rightarrow du = 2d\theta \Rightarrow d\theta = du/2$

οπότε $\int \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int \sin(u)du = -\frac{1}{2}\cos(u) \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \sin 2\theta d\theta = -\frac{\cos 2\theta}{2}$ οπότε $\int_0^{2\pi}\sin 2\theta d\theta = -\frac{\cos 2\theta}{2}\Big|_0^{2\pi}$

Το πρώτο ολοκλήρωμα θα δώσει: $\int_0^{2\pi}\sin 2\theta d\theta = \phi$ Επομένως $\boxed{\vec{E}_x = \vec{0}}$ (Γ)

Το 2° ολοκλήρωμα θα δώσει:

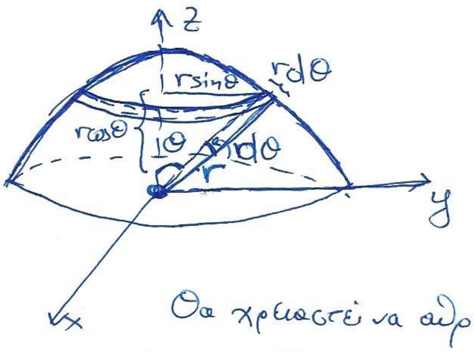
$$\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta = \int\frac{(1-\cos 2\theta)d\theta}{2} = \int\frac{d\theta}{2} - \int\frac{\cos 2\theta}{2}d\theta \Bigg\} \Rightarrow$$

Αλλά $u = 2\theta \Rightarrow du = 2d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{1}{2}du$

$$\Rightarrow \int\sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\int\cos(u)\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin(u) = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta$$

Επομένως καταλήγουμε ότι: $\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta = \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \pi - 0 = \pi$ (Δ)

8. Ένα λεπτό ημισφαιρικό κέλυφος ακτίνας R, έχει ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο της βάσης του ημισφαιρικού κελύφους.



Θεωρούμε στοιχειώδες φορτίο το οποίο είναι κατανεμημένο στο στοιχειώδη δακτύλιο ακτίνας $r\sin\theta$, που βρίσκεται στη θέση $z = r\cos\theta$ και έχει πάχος $r\,d\theta$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Θα χρειαστεί να αθροίσουμε ως προς όλους αυτούς τους δακτυλίους από τη θέση $z=0$ ως $z=R$.

Η στοιχειώδης ένταση του ηλεκτρικού πεδίου dE στο κέντρο του κελύφους που προκαλείται από τον στοιχειώδη δακτύλιο φορτίου dq θα είναι:

$$dE = \frac{k z\,dq}{\left(r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta\right)^{3/2}} = \frac{k z\,dq}{r^3} \quad \text{με } z = r\cos\theta \qquad (1)$$

Το στοιχειώδες φορτίο θα είναι: $dq = \sigma\,dA = \sigma\left(2\pi r\sin\theta\right) r\,d\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow dq = 2\pi\sigma r^2 \sin\theta\,d\theta \qquad (2)$$

Αντικατάσταση της (2) στην (1) θα δώσει: $dE = \dfrac{k z\, 2\pi\sigma \cancel{r^2} \sin\theta}{r^3}\,d\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow dE = \frac{k \cancel{r} \cos\theta\, 2\pi\sigma \sin\theta}{\cancel{r}}\,d\theta \Rightarrow dE = 2\pi\sigma k \sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

Ολοκλήρωση ως προς θ για το ημισφαίριο, $\theta \in [0, \pi/2]$ θα δώσει:

$$E = \cancel{2}\pi\sigma k \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta\,d\theta}{\cancel{2}} \Rightarrow E = \pi\sigma k \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\,d\theta = \pi\sigma k \sin^2\theta \Big|_0^{\pi/2} \Rightarrow \boxed{E = \pi\sigma k}$$

$$\int \sin 2\theta\,d\theta : \; u = 2\theta \Rightarrow du = 2\,d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{du}{2} \qquad \int \sin 2\theta\,d\theta = \int \frac{\sin u\,du}{2} = -\frac{1}{2}\cos u = -\frac{\cos 2x}{2}$$

9. Ένας ομοιόμορφα φορτισμένος δακτύλιος ακτίνας α, έχει το επίπεδό του στο οριζόντιο επίπεδο και έχει αρνητικό φορτίο -*Q*. Ένα στοιχειώδες σωματίδιο μάζας *m* έχει φορτίο +*q*. Το φορτίο βρίσκεται στον άξονα του δακτυλίου. (α) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του λόγου *q/m* ώστε το σωματίδιο να βρίσκεται σε ισορροπία κάτω από την επίδραση της βαρυτικής και ηλεκτροστατικής δύναμης; (β) Αν ο λόγος *q/m* έχει τιμή διπλάσια από αυτή που υπολογίσατε στο ερώτημα (α) ποια θα είναι η θέση ισορροπίας του σωματιδίου; Να εκφράσετε την απάντησή σας συναρτήσει της ακτίνας *α* του δακτυλίου.

(α) Η συνθήκη ισορροπίας για το σωματίδιο, δίνει: $\Sigma F_z = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow qE_z - mg = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{q}{m} = \frac{g}{E_z}} \quad (A)$$

Παρατηρούμε ότι στη συνθήκη ισορροπίας, η q/m θα έχει ελάχιστη τιμή όταν το ηλεκτρικό πεδίο E_z έχει μέγιστη τιμή, εφόσον g είναι σταθερό.

Αλλά το ηλεκτρικό πεδίο στον z-άξονα εξαιτίας του φορτίου του δακτυλίου είναι: $E_z = \dfrac{kQz}{(z^2+a^2)^{3/2}}$

Παραγώγιση της σχέσης και εξίσωση με 0 θα μας δώσει τα ακρότατα του πεδίου. Επομένως θα έχουμε:

$$\frac{dE_z}{dz} = kQ\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z^2+a^2)^{3/2}}\right] = kQ\,\frac{(z^2+a^2)^{3/2} - z\left(\frac{3}{2}\right)(2z)(z^2+a^2)^{1/2}}{(z^2+a^2)^3} \Rightarrow$$

$$\frac{dE}{dz} = kQ\,\frac{(z^2+a^2)^{1/2}\left[z^2+a^2-3z^2\right]}{(z^2+a^2)^3} = \frac{kQ(z^2+a^2)^{1/2}}{(z^2+a^2)^3}(a^2-2z^2) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Ακρότατα παρουσιάζονται στις θέσεις $\boxed{z = \pm a/\sqrt{2}}$

Υπολογίζουμε τη 2η παράγωγο του ηλεκτρικού πεδίου ως προς z, και εξετάζουμε την τιμή της στις θέσεις των ακρότατων που υπολογίσαμε:

$$\frac{d^2E}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{d}{dz}E\right) = kQ\left[\frac{\left[\frac{1}{2}(2z)(z^2+a^2)^{-1/2}(a^2-2z^2)+(z^2+a^2)^{1/2}(-4z)\right](z^2+a^2)^3}{(z^2+a^2)^6} - \frac{(z^2+a^2)^{1/2}(a^2-2z^2)\,3(2z)(z^2+a^2)^2}{(z^2+a^2)^6}\right]$$

$$\frac{d^2E}{dz^2} = kQ\left[\frac{(z^2+a^2)\left\{z(a^2-2z^2)\frac{1}{(z^2+a^2)^{1/2}} - 4z(z^2+a^2)^{1/2}\right\} - 6z(a^2-2z^2)(z^2+a^2)^{1/2}}{(z^2+a^2)^4}\right]$$

Για $z = \pm a/\sqrt{2}$ οι όροι (1) και (2) μηδενίζονται οπότε:

$$\left.\frac{d^2E}{dz^2}\right|_{z=\pm a/\sqrt{2}} = kQ\frac{\cancel{(z^2+a^2)}\left(-4z(z^2+a^2)^{1/2}\right)}{(z^2+a^2)^{\cancel{4}\,3}} = kQ\frac{-4z(z^2+a^2)^{1/2}}{(z^2+a^2)^3}$$

Επομένως για $z = +\frac{a}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{d^2E}{dz} < 0$ επομένως παρουσιάζεται ελάχιστο στο ηλεκτρικό πεδίο

ενώ για $z = -a/\sqrt{2} \rightarrow \frac{d^2E}{dz} > 0$ και το ηλεκτρικό πεδίο παρουσιάζει μέγιστο.

Η μέγιστη τιμή του ηλεκτρικού πεδίου είναι: $E_z^{max} = \frac{kQ\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)}{\left[\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+a^2\right]^{3/2}} = \frac{2kQ}{\sqrt{27}\,a^2}$

Αντικατάσταση στην (A) δίνει: $\left(\frac{q}{m}\right)_{min} = \frac{g}{E_{max}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{q}{m}\right)_{min} = \frac{g\sqrt{27}\,a^2}{2kQ}} \quad (B)$$

(β) Αν η ποσότητα q/m είναι διπλάσια της ποσότητας που βρέθηκε στο (B) τότε το ηλεκτρικό πεδίο θα πρέπει να είναι μισό της μέγιστης τιμής του που προσδιορίσαμε στο ερώτημα (α). Δηλαδή $E_z = \frac{\cancel{kQ}}{\sqrt{27}\,a^2} = \frac{\cancel{kQ}z}{(z^2+a^2)^{3/2}}$

Επομένως: $\frac{1}{\sqrt{27}\,a^2} = \frac{z}{(z^2+a^2)^{3/2}} \Rightarrow \frac{1}{27a^4} = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^3} \Rightarrow \frac{1}{27\cancel{a^4}} = \frac{z^2}{a^{\cancel{6}}\left(\frac{z^2}{a^2}+1\right)^3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{27} = \frac{z^2/a^2}{(z^2/a^2+1)^3} = \frac{w}{(w+1)^3} \Rightarrow w^3+3w^2+3w+1-27w=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{w^3+3w^2-24w+1=0}$$

Μπορούμε να βρούμε τη λύση της εξίσωσης αυτής αριθμητικά με τη μέθοδο διχοτόμησης ή Newton αφού πρώτα τη σχεδιάσουμε.

Υπάρχουν δύο λύσεις για w, που αντιστοιχούν σε δύο θέσεις ισορροπίας

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Newton, οι λύσεις της εξίσωσης είναι:

$w = 0.04189$ και $w = 3.596$. Επομένως αντικατάσταση:

$$\frac{z^2}{a^2} = 0.04189 \Rightarrow z = \pm 0.2047a$$

$$\frac{z^2}{a^2} = 3.596 \Rightarrow z = \pm 1.896a$$

$\Rightarrow$ Από το (α) ερώτημα έχουμε $\frac{q}{m}$ ελάχιστο για αρνητικές τιμές του z και επομένως για την περίπτωση αυτή, πάλι οι αρνητικές τιμές αντιστοιχούν σε ελάχιστο q/m

Θα έχουμε επομένως:

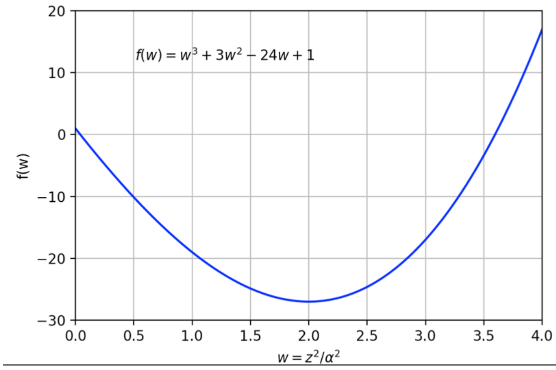
$z = -0.205a$ κ $z = -1.896a$

Για συνθήκη ισορροπίας, όταν το σωματίδιο βρίσκεται σε περισσότερο θετικές τιμές θέσης (λιγότερη αρνητική τιμή z) τότε η συνισταμένη δύναμη θα πρέπει να έχει αρνητική τιμή ($|\vec{F}_{βαρ}| > |\vec{F}_{ηλ}|$) ώστε να προσπαθεί να φέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας. Όταν το σώμα βρίσκεται σε περισσότερο αρνητική θέση από αυτή της θέσης ισορροπίας, τότε $|\vec{F}_{βαρ}| < |\vec{F}_{ηλ}|$ και η συνισταμένη δύναμη έχει φορά προς τα θετικά z ώστε να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας.

Επομένως μεταξύ της θέσης $z = -0.205a$ και -1.896 η συνισταμένη δύναμη είναι προς τα θετικά z επειδή η ηλεκτρική δύναμη είναι μεγαλύτερου μέτρου από τη βαρυτική. Αλλά για τιμές του $z < -1.896a$, η βαρυτική δύναμη είναι μεγαλύτερου μέτρου της ηλεκτρικής και το σώμα δεν θα επανέλθει ποτέ στη θέση ισορροπίας $z = -1.896a$. (Είναι θέση ασταθούς ισορροπίας)

Η θέση $z = -0.205a$ είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def func(x):
    return x**3 + 3*x**2 - 24*x + 1

x=np.arange(0,4.01,0.01)

plt.figure(figsize=(6,4))
plt.plot(x,func(x),'b-')
plt.xlabel(r'$w = z^2/\alpha^2$')
plt.ylabel(r'f(w)')
plt.text(0.51,12,r'$f(w) = w^3+3w^2-24w+1$')
plt.rc('font',size=10)
plt.xlim(0,4.)
plt.ylim(-30.,20)
plt.grid(True)
plt.show()
```



10. Ένα ηλεκτρικό δίπολο έχει ηλεκτρική διπολική ροπή $\vec{p}$ και είναι τοποθετημένο σε κάθετο από μια άπειρου μήκους φορτισμένη ράβδο ομογενούς γραμμικής πυκνότητας φορτίου λ και σε απόσταση R από αυτή. Υποθέστε ότι η διπολική ροπή έχει την ίδια διεύθυνση με αυτή του ηλεκτρικού πεδίου της γραμμικής πυκνότητας φορτίου. Προσδιορίστε την ηλεκτρική δύναμη που ασκείται στο δίπολο.

Το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο P που απέχει απόσταση r από μια άπειρου μήκους γραμμική κατανομή φορτίου δίνεται όπως είδαμε στις διαλέξεις, από την εξίσωση: $E = 2k\lambda/r$

Η δύναμη που αναπτύσσεται σε ένα δίπολο, διπολικής ροπής p είναι:

$$F = p\frac{dE}{dr}.$$

Αντικατάσταση της E στην τελευταία εξίσωση θα δώσει:

$$F = p\frac{d}{dr}\left(2k\lambda/r\right) \Rightarrow F = -p\,2k\lambda\frac{1}{r^2} \Rightarrow \boxed{F = -\frac{2k\lambda p}{r^2}}$$