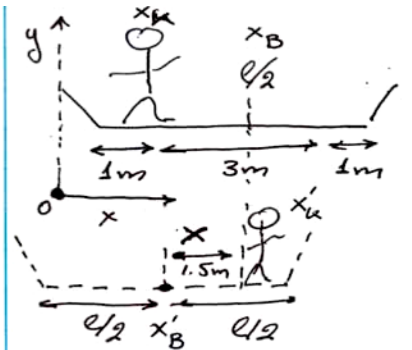
ΦΥΣ. 131
ΕΡΓΑΣΙΑ # 7

1. Μια κοπέλα μάζας 45.0kg στέκεται 1.0m από το άκρο μιας βάρκας μήκους 5m και μάζας 60.0kg. Περπατά από το σημείο αυτό προς κάποιο άλλο σημείο το οποίο βρίσκεται 1.0m από το άλλο άκρο της βάρκας. Αν θεωρήσετε αμελητέες τις τριβές της βάρκας με το νερό, πόσο μετακινήθηκε η βάρκα κατά τη κίνηση της κοπέλας;



Στη x-διεύθυνση δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη (θεωρούμε αμελητέα την αντίσταση του νερού). Επομένως η ορμή του συστήματος διατηρείται. Τα σώματα του συστήματος (γυναίκα-βάρκα) είναι αρχικά ακίνητα και επομένως το ΚΜ είναι ακίνητο. Μετά τη κίνηση και εφόσον η ολική ορμή διατηρείται το ΚΜ θα παραμείνει στην ίδια θέση.

Στην αρχική θέση το ΚΜ βρίσκεται: $x_{CM} = \dfrac{m_K \cdot x_K + x_B \cdot m_B}{m_K + m_B}$

Όταν η γυναίκα κινηθεί στο άλλο σημείο της βάρκας, η βάρκα κινείται και το μέσο της κινείται κατά x.

Λαμβάνοντας το αριστερό άκρο της βάρκας σα τη θέση $x=0$, αρχικά η γυναίκα έχει $x_K = 1m$ και $x_B = \frac{\ell}{2} = 2.5m$.

Μετά την κίνηση η γυναίκα βρίσκεται στη θέση x'_K και το μέσο της βάρκας στη θέση x'_B.
Η θέση όμως της γυναίκας είναι 1m αριστερά του δεξιού άκρου της βάρκας και δεξιά κατά 1.5m από το μέσο της βάρκας.
Δηλαδή $x'_K = x'_B + 1.5$

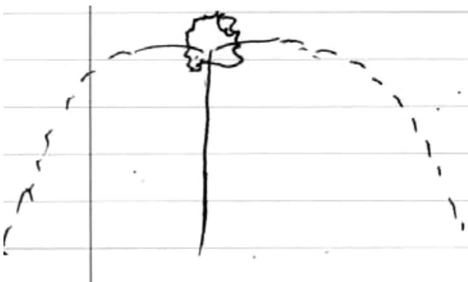
Το ΚΜ θα είναι: $x'_{CM} = \dfrac{m_K x'_K + m_B x'_B}{m_K + m_B} = \dfrac{m_K(x'_B + 1.5) + m_B x'_B}{m_K + m_B}$

Αλλά $x'_{CM} = x_{CM} \Rightarrow m_K x_K + m_B x_B = m_K(x'_B + 1.5) + m_B x'_B \Rightarrow$

$\Rightarrow 45 \cdot 1 + 60 \cdot 2.5 = (45+60)x'_B + 45 \cdot 1.5 \Rightarrow x'_B = \dfrac{127.5}{105} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x'_B = 1.21m.}$ Επομένως η βάρκα κινήθηκε κατά:
$x = x'_B - x_B = 1.21 - 2.5 \Rightarrow x = -1.29m$ στα αριστερά.

2. Ένα πυροτέχνημα βάλεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του, 80m από το έδαφος, εκρήγνυται σε δυο τμήματα, ένα με μάζα 1.40kg και ένα άλλο με μάζα 0.28kg. Κατά την έκρηξη 860J χημικής ενέργειας μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια των δυο θραυσμάτων. (α) Ποια είναι η ταχύτητα των θραυσμάτων ακριβώς μετά την έκρηξη. (β) Παρατηρείται ότι τα δυο θραύσματα φθάνουν ταυτόχρονα στο έδαφος. Ποια είναι η απόσταση των σημείων που χτυπούν στο έδαφος; Υποθέστε ότι το έδαφος είναι επίπεδο και αγνοήστε την αντίσταση του αέρα.



Το βλήμα κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω και τα θραύσματά του κάνουν ανάλογα κινήσεις βλημάτων. Κατά την έκρηξη το σύστημα είναι απομονωμένο και επομένως έχουμε διατήρηση ενέργειας και ορμής.

Η σημαντική πληροφορία που μας δίνει η άσκηση είναι σχετικά με το χρόνο πτώσης των θραυσμάτων. Αφού τα θραύσματα φθάναν ταυτόχρονα στο έδαφος σημαίνει ότι θα πρέπει το μέγιστο ύψος της κίνησής τους πρέπει να είναι ίδιο. Επειδή το αρχικό βλήμα εκρήγνυται στο μέγιστο ύψος, η ταχύτητά του είναι μηδέν και επομένως δεν υπάρχει ορμή στην y-διεύθυνση όπως και στη x-διεύθυνση μια και η κίνησή του είναι κατακόρυφη. Για το λόγο αυτό και για να ικανοποιηθεί η συνθήκη της ταυτόχρονης προσγείωσης, τα 2 θραύσματα θα πρέπει να εκτελούν οριζόντια βολή, οπότε πέφτουν από το ίδιο ύψος, και οι 2 ταχύτητες είναι αντίθετες.

$$m_1 = 1.4\,kgr \qquad m_2 = 0.28\,kgr$$

$$\Sigma \vec{p}_x = 0 \Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0 \Rightarrow P_1 - P_2 = 0 \Rightarrow m_1 \upsilon_1 = m_2 \upsilon_2 \quad (1)$$

Από ενέργεια: $\frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 = 860\,J \quad (2)$

Αντικαθιστούμε από την (1) $\Rightarrow \upsilon_2 = \frac{m_1}{m_2} \upsilon_1$ στη (2) οπότε:

$$\frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} \cancel{m_2} \frac{m_1^2}{m_2^{\cancel{2}}} \upsilon_1^2 = \frac{1}{2} \upsilon_1^2 \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2} \right) = 860\,J \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_1^2 = \frac{1720}{m_1 (1 + m_1/m_2)} = \frac{1720}{1.4 \left(1 + \frac{1.4}{0.28}\right)} \Rightarrow \boxed{\upsilon_1 = 14.3\,\frac{m}{s}}$$

Από την (1) $\Rightarrow \upsilon_2 = \frac{1.4}{0.28} 14.3 \Rightarrow \boxed{\upsilon_2 = 71.5\,m/s}$

(β) Βρίσκουμε το χρόνο για να φθάσουν τα θραύσματα στο έδαφος: ($v_y = 0\,m/s$)

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80}{9.8}} \Rightarrow \boxed{t = 4.04\ sec}$$

Κατά το χρόνο αυτό τα θραύσματα κινούνται οριζόντια μια απόσταση:

$$x_1 = v_1 \cdot t = 14.3 \cdot 4.04 \Rightarrow \boxed{x_1 = 57.8m}$$

$$x_2 = v_2 \cdot t = 71.5 \cdot 4.04 \Rightarrow \boxed{x_2 = 289.m}$$

Αφού κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις η απόστασή τους θα είναι:

$$x = x_1 + x_2 = 57.8 + 289 \Rightarrow \boxed{x = 346.8m}$$

3. Ένα βλήμα μάζας 12.0kg εκτοξεύεται με γωνία 55° πάνω από την οριζόντια διεύθυνση με αρχική ταχύτητα 150m/s. Όταν βρίσκεται στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του το βλήμα εκρήγνυται σε 2 θραύσματα, το ένα με μάζα 3 φορές μεγαλύτερη του άλλου. Τα δυο θραύσματα φθάνουν στο έδαφος ταυτόχρονα. Αγνοήστε την αντίσταση του αέρα. Αν το βαρύτερο θραύσμα χτυπά στο έδαφος στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε το βλήμα, σε ποιο σημείο θα πέσει το ελαφρύτερο θραύσμα και πόση ενέργεια ελευθερώθηκε κατά την έκρηξη;

Στο σημείο στο οποίο εκρήγνυται το βλήμα (μέγιστο ύψος) έχει ταχύτητα μόνο στη x-διεύθυνση.
Τα δύο θραύσματα φθάνουν στο έδαφος ταυτόχρονα. Οπότε πρέπει να έχουν το ίδιο μέγιστο ύψος τροχιάς
Από τη στιγμή που δεν υπάρχει αρχική ορμή στη y-διεύθυνση, τα 2 θραύσματα δεν μπορούν να έχουν y-συνιστώσα ταχύτητας γιατί τότε οι δύο συνιστώσες θα έπρεπε να είναι σε αντίθετη διεύθυνση και σαν αποτέλεσμα το ένα θραύσμα θα έφθανε στο έδαφος πιο γρήγορα από το άλλο.
Επομένως τα δύο θραύσματα κινούνται οριζόντια (αμέσως μετά την έκρηξη) και σε αντίθετες κατευθύνσεις.

Εφαρμόζουμε διατήρηση ορμής θα έχουμε:

$$m_\beta \vec{\upsilon}_\beta = m_1 \vec{\upsilon}_1 + m_2 \vec{\upsilon}_2$$

όπου $\upsilon_\beta = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos 55^\circ \Rightarrow \upsilon_\beta = 86 m/s$.

$m_1 = 3m_2 \Rightarrow m_1 + m_2 = m_\beta \Rightarrow 4m_2 = m_\beta \Rightarrow m_2 = \frac{12}{4} = 3kgr$

$\Rightarrow m_1 = 9kgr$

$\Rightarrow \boxed{12 \cdot 86 = -9 \cdot \upsilon_1 + 3\upsilon_2}$ (1) (το βαρύ βλήμα κινείται προς την αρχή άρα έχει αρνητική ταχύτητα)

Ξέρουμε ότι το βαρύ βλήμα προσγειώνεται στο σημείο εκτόξευσης. Αυτό σημαίνει ότι κινείται στη x-διεύθυνση απόσταση ίση με το μισό του βεληνεκούς του αρχικού βλήματος (η έκρηξη γίνεται στο μέγιστο ύψος, που γίνεται στο μέσο της x-κίνησης).
Επομένως:

$$x_1 = \frac{R_\beta}{2} = \frac{\upsilon_0^2 \sin(110^\circ)}{2g} \Rightarrow \boxed{x_1 = 1078 m.}$$

Η ταχύτητα του βαρέος βλήματος θα ισούται (μετά την έκρηξη) με την ταχύτητα του αρχικού βλήματος στη x-διεύθυνση αφού καλύπτουν την ίδια οριζόντια απόσταση, στο ίδιο χρόνο.
Επομένως $\upsilon_1 = -\upsilon_\beta^x \Rightarrow \boxed{\upsilon_1 = -86 m/s}$

Από την (1) θα έχουμε:

$$12\cdot 86 = -9\cdot 86 + 3\upsilon_2 \Rightarrow \cancel{3}\upsilon_2 = \overset{7}{\cancel{21}}\cdot 86 \Rightarrow \boxed{\upsilon_2 = 602\,m/s}$$

Το βαρύ θραύσμα κινείται $x_1 = \upsilon_1 t \Rightarrow t = \frac{x_1}{\upsilon_1}$

Τον ίδιο χρόνο κινείται και το 2° θραύσμα. Επομένως η απόσταση που διανύει θα είναι:

$$x_2 = \upsilon_2\cdot t = \upsilon_2 \frac{x_1}{\upsilon_1} \Rightarrow x_2 = \frac{602}{86}\cdot 1078 \Rightarrow$$

$$\boxed{x_2 = 7546\,m}$$ από το σημείο έκρηξης.

Η απόσταση των 2 θραυσμάτων θα είναι:

$$x = x_1 + x_2 = 1078 + 7546 \Rightarrow \boxed{x = 8624\,m}$$

(β) Η ενέργεια που ελευθερώνεται κατά την έκρηξη θα είναι:

$$W = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m_{βλ}\upsilon_{0x\,βλ}^2 = \frac{1}{2}9\cdot 86^2 + \frac{1}{2}3\cdot 602^2 - \frac{1}{2}12\cdot 86^2 \Rightarrow$$

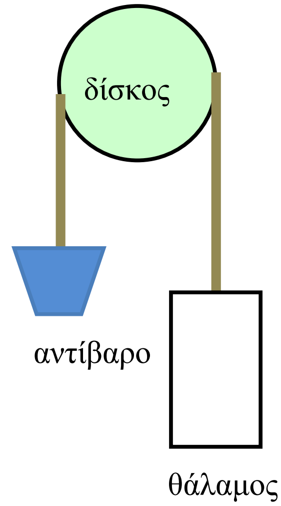
$$\Rightarrow W = \frac{3}{2}\left(602^2 - 86^2\right) \Rightarrow \boxed{W = 5.33\times 10^5\,J}$$

Να σημειώσουμε ότι την απόσταση των 2 θραυσμάτων θα μπορούσαμε να τη βρούμε, θεωρώντας το ΚΜ των 2 θραυσμάτων, το οποίο είναι το αρχικό βλήμα.
Όταν τα βλήματα φθάνουν στο έδαφος, το ΚΜ θα βρίσκεται στο σημείο το οποίο θα έφθανε το αρχικό βλήμα. Άρα στο μέγιστο βεληνεκές.
Θεωρώντας το σημείο εκτόξευσης σαν αρχή των αξόνων, θα έχουμε:

$$x_{CM} = R = \frac{x_1\cdot m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{0\cdot 9 + x_2 \cancel{3}}{\cancel{12}\,4} = \frac{x_2}{4} \Rightarrow x_2 = 4\cdot R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = 4\cdot 2156 = \underline{8624\,m}$$

4. Ένας παλιομοδίτικος ανελκυστήρας λειτουργεί με ένα καλώδιο να περνά από μια τροχαλία διαμέτρου 2.5m. Το ένα άκρο του καλωδίου είναι συνδεδεμένο σε ένα αντίβαρο ενώ το άλλο άκρο είναι συνδεδεμένο στο θάλαμο του ανελκυστήρα. Ο ανελκυστήρας μπορεί να ανεβαίνει ή να κατεβαίνει περιστρέφοντας τη τροχαλία χωρίς το καλώδιο να γλιστρά πάνω της αλλά να την αναγκάζει να περιστρέφεται. (α) Πόσες στροφές το λεπτό πρέπει να κ άνει η τροχαλία ώστε να ανεβάσει το θάλαμο του ανελκυστήρα με ταχύτητα 25.0cm/s; (β) Για να ξεκινήσει να κινείται ο ανελκυστήρας πρέπει να δοθεί μια επιτάχυνση g/8. Πόση πρέπει να είναι η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας σε rad/s^2; (γ) Πόση γωνία (σε rad) έχει στραφεί η τροχαλία αν ο θάλαμος του ανελκυστήρα έχει ανέβει κατά 3.25m;



Όπως έχουμε αναφέρει, εφόσον το σχοινί δεν γλιστρά πάνω στη τροχαλία, τότε η εφαπτομενική ταχύτητα και επιτάχυνση κάθε σημείου της περιφέρειας της τροχαλίας είναι ίση με τη γραμμική ταχύτητα και επιτάχυνση του αντίβαρου. Η διαδρομή που καλύπτουν τα σημεία της περιφέρειας (το τόξο που διαγράφουν) θα είναι ίση με τη γραμμική μετατόπιση του σχοινιού και επομένως του αντίβαρου αρκεί η γωνία να μετράται σε ακτίνια: $R\Theta = S$.

Η ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας θα είναι: $\upsilon = \omega R$
ενώ η εφαπτομενική επιτάχυνση: $a_{εφ} = R\alpha$ (α = γωνιακή επιτάχυνση)

Μια πλήρη στροφή είναι 2π rad $\Rightarrow 1\text{rpm} = \frac{2\pi}{60\text{min}} = 0.104\ \text{rad/sec}$

(α) Ξέρουμε ότι $\upsilon = 0.250\text{m/s} \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon}{R} \Rightarrow \omega = \frac{0.250}{1.25} \Rightarrow \boxed{\omega = 0.200\ \frac{\text{rad}}{\text{sec}}}$

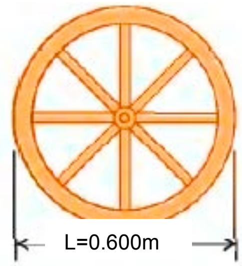
(β) Η γραμμική επιτάχυνση είναι $a = \frac{1}{8}g$ αλλά $a = R\alpha$ οπότε:

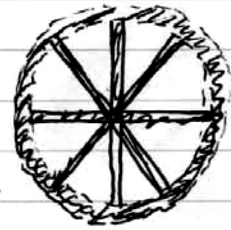
$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{\frac{1}{8}g}{1.25} \Rightarrow \alpha = \frac{1.225}{1.25} \Rightarrow \boxed{\alpha = 0.980\ \text{rad/s}^2}$$

(γ) Ο ανελκυστήρας έχει μετακινηθεί γραμμικά κατά $S = 3.25\text{m}$
Αλλά $S = R\Theta$ Επομένως $\Theta = \frac{S}{R} = \frac{3.25}{1.25} = 2.60\ \text{rad} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Theta = \frac{2.60}{2\pi} \cdot 180^\circ \Rightarrow \boxed{\Theta = 149^\circ}$$

5. Η ρόδα ενός κάρου είναι όπως το διπλανό σχήμα. Η ακτίνα της είναι 0.300m και η μάζα της 14.0kg. Κάθε μια από τις 8 ακτίνες της ρόδας έχει μήκος 0.300m και μάζα 0.280kg. Ποια είναι η ροπή αδράνειας της ρόδας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδο της ρόδας;





Η ροπή αδράνειας του τροχού δίνεται από το άθροισμα των ροπών αδράνειας κάθε σώματος που τον απαρτίζει. $I = \Sigma m_i r_i^2$.

Δηλαδή του στεφανιού που περιστρέφεται ως προς το κέντρο $I_{στ} = MR^2$ και των οκτώ ακτίνων μπορούν να θεωρηθούν σαν ράβδοι που στρέφονται ως προς άξονα που περνά από το ένα άκρο τους.

$I_{ραβ} = I_{CM} + MR^2$ (Θεώρημα παρ/λων αξόνων)

$I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$ όπου $R = \frac{L}{2}$

$$I_{ραβ} = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{12}_{3}}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2 \Rightarrow$$

Αλλά το μήκος της ράβδου είναι η ακτίνα του τροχού οπότε

$I_{ακτ} = \frac{1}{3}M_{ακ}R^2$ και επομένως για όλες τις ακτίνες:

$$I = 8\frac{1}{3}M_{ακ}R^2$$

Η συνολική ροπή αδράνειας του τροχού θα είναι: $I_{τρ} = I_{στ} + I_{ακτίνων} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_{τρ} = MR^2 + \frac{8}{3}M_{ακ}R^2 = (1.4)(0.3)^2 + \frac{8}{3}(0.28)(0.3)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{τρ} = 0.193\ \text{kg}\,\text{m}^2}$$

6. Υποθέστε ότι κάποια μελοντική εποχή οι ενεργειακές ανάγκες της γης είναι τέτοιες ώστε κάποιοι προτείνουν να εκμεταλευτούμε την ενέργεια περιστροφής της σελήνης και να την διοχετεύσουμε στη γη. Αν η περίοδος περιστροφής της σελήνης γύρω από τον άξονά της είναι 27.3 ημέρες και η μάζα της είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη (α) πόση ενέργεια μπορούμε να πάρουμε από την περιστροφή της σελήνης; (β) Αν οι ενεργειακές ανάγκες είναι σήμερα $4.0 \mathrm{x} 10^{20}$J και μελοντικά οι ανάγκες είναι 4 φορές μεγαλύτερες για πόσα χρόνια η ενέργεια από την περιστροφή της σελήνης θα μπορεί να καλύψει τις ανάγκες αυτές;

(α) Θεωρούμε ότι η σελήνη είναι μια ομοιόμορφη, ομογενής σφαίρα.
Η ροπή αδράνειας μιας σφαίρας δίνεται από $I = \frac{2}{5} MR^2$, όπου $M = m_{σελ} = 7.35 \cdot 10^{22}$ kgr και η ακτίνα της $R_{σελ} = 1.74 \cdot 10^6$ m

Η σελήνη κάνει μια πλήρη περιστροφή (2π rad) σε 27.3 ημέρες.
Επομένως η γωνιακή της ταχύτητα, ω, θα είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(27.3)(86400 \text{ sec/ημέρα})} \Rightarrow \omega = 2.66 \cdot 10^{-6} \text{ rad/sec}$$

$$1 \text{ ημέρα} = (24 h)(60 min)(60 sec) = 86400 \text{ sec}$$

Η ενέργεια επομένως της σελήνης από περιστροφή θα είναι:

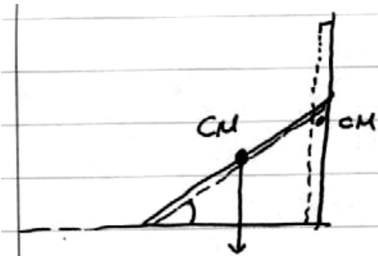
$$E_{κιν}^{σελ} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 5}(7.35 \cdot 10^{22})(1.74 \cdot 10^6)^2 \cdot (2.66 \cdot 10^{-6})^2 = \underline{\underline{3.15 \cdot 10^{23} \text{ J}}}$$

(β) Εφόσον οι ανάγκες είναι $E = 5 \cdot 4 \times 10^{20} \text{ J} = 2 \cdot 10^{21} \text{ J}$

Θα έχουμε: $\frac{3.15 \times 10^{23}}{2 \cdot 10^{21}} \Rightarrow$ Η ενέργεια της σελήνης θα είναι

αρκετή για 158 χρόνια. Προφανώς το κόστος για μόνο 158 χρόνια κάνει τη λύση αυτή ασύμφορη.
Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την ενέργεια περιστροφής της γης που είναι μεγαλύτερη, αλλά τότε θα μεγαλώναμε τη διάρκεια της ημέρας

7. Μια ο μογενής και ο μοιόμορφη σκάλα μήκους 2.0m και μάζας 9.0kg βρίσκεται ακουμπισμένη σε ένα τοίχο σχηματίζοντας γωνία 53^o με το δάπεδο. Κάποιος εργάτης σπρώχνει την σκάλα προς το τοίχο μέχρι να είναι παράλληλη προς το τοίχο. Πόσο έργο παράγει ο εργάτης εναντίον της βαρύτητας;



Το έργο που καταναλώνει ο εργάτης είναι για να υπερνικήσει το έργο που παράγει η βαρύτητα για να μετακινήσει το ΚΜ της σκάλας από την αρχική του θέση, στην τελική.

Το ΚΜ της σκάλας, το οποίο βρίσκεται στο μέσο της σκάλας έχει αρχικό ύψος:

$$y_1^{CM} = \frac{l}{2}\sin 53^\circ \Rightarrow y_1^{CM} = \frac{2}{2}\cdot\sin 53^\circ \Rightarrow y_1^{CM} = 0.799m$$

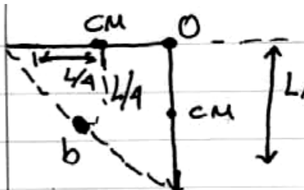
Μετά τη μετακίνηση το ΚΜ βρίσκεται σε ύψος ίσο με το $\frac{l}{2} = 1m$

Επομένως η βαρύτητα παράγει έργο: $W_{βαρ} = mgh_1^{CM} - mgh_2^{CM} \Rightarrow$

$$W_{βαρ} = -mg\left(y_2^{CM} - y_1^{CM}\right) = -9\cdot 9.81\cdot(1-0.799) = -17.7J$$

Το άτομο παράγει το αντίθετο έργο και επομένως $W_{ατ} = 17.7J$

8. Μια λεπτή ομοιόμορφη ράβδος μήκους L και μάζας M λυγίζεται με τέτοιο τρόπο ως προς το μέσο της ώστε τα δυο επιμέρους τμήματα να είναι κάθετα μεταξύ τους. Να βρεθεί η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που (α) περνά από το μέσο της στο σημείο που ενώνονται τα δυο τμήματα και είναι κάθετος στο επίπεδο της ράβδου (β) περνά από το μέσο της γραμμής που ενώνει τα δυο άκρα της.



Η ροπή αδράνειας της ράβδου θα είναι το άθροισμα της ροπής αδράνειας κάθε τμήματος.

κάθε τμήμα έχει μάζα $M/2$ και μήκος $L/2$

Στην (α) ερώτηση ο άξονας περιστροφής είναι στο άκρο κάθε τμήματος (σημείο O). Επομένως εφαρμόζουμε το θεώρημα παρ/λων αξόνων για να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας κάθε τμήματος:

$$I_{τμ} = I_{cm} + \frac{M}{2}\cdot\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{1}{12}\frac{M}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{M}{2}\frac{L^2}{16} = \frac{ML^2}{2}\left(\frac{1}{12\cdot 4} + \frac{1}{16}\right) \Rightarrow$$

$$I_{τμ} = \frac{ML^2}{2}\left(\frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{48}_{12}}\right) \Rightarrow \boxed{I_{τμ} = \frac{ML^2}{24}}$$

Η ροπή αδράνειας όλου του συστήματος θα είναι $I_{ολ} = 2I_{τμ} \Rightarrow \boxed{I_{ολ} = \frac{ML^2}{12}}$

(β) Το ΚΜ κάθε τμήματος βρίσκεται στο μέσο του τμήματος, σε απόσταση $L/4$ από το άκρο.
Για κάθε τμήμα, η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που περνά από το ΚΜ είναι:

$$I_{cm} = \frac{1}{12}\left(\frac{M}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{I_{cm} = \frac{1}{96}ML^2}$$

Ο νέος άξονας βρίσκεται στο μέσο του τμήματος που ενώνει τα 2 άκρα των τμημάτων. Επομένως βρίσκεται $L/4$ από το ΚΜ κάθε τμήματος.
Εφαρμόζουμε το θεώρημα παρ/λων αξόνων για κάθε τμήμα, οπότε:

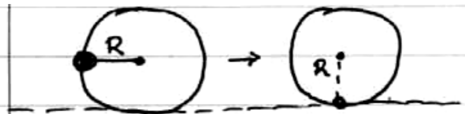
$$I_{β} = I_{cm} + \frac{M}{2}\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{1}{96}ML^2 + \frac{M}{2}\frac{L^2}{16} \Rightarrow I_{β} = \frac{1}{24}ML^2$$

Επομένως η συνολική ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα θα είναι

$$I_{ολ} = 2I_{β} = 2\,\frac{1}{24}ML^2 \Rightarrow \boxed{I_{ολ} = \frac{1}{12}ML^2}$$

Η ροπή αδράνειας είναι ίδια και στις 2 περιπτώσεις.

9. Ένας ομοιόμορφος ομογενής δίσκος μάζας M και ακτίνας R μπορεί να στραφεί ως προς άξονα που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου. Ένα μικρό σώμα με μάζα επίσης M είναι κολλημένο στη περιφέρεια του δίσκου. Το σύστημα δίσκος-σώμα κρατιέται ακίνητο με το σώμα στην οριζόντια θέση. Το σύστημα αφήνεται κατόπιν ελεύθερο να περιστραφεί. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του σώματος όταν αυτό βρίσκεται ακριβώς κάτω από τον άξονα του δίσκου (στη χαμηλότερη κατακόρυφο θέση).



Θεωρούμε το επίπεδο που περνά από το κατώτερο σημείο της περιφέρειας του δίσκου, σα το επίπεδο της μηδενικής δυναμικής ενέργειας.

Καθώς το σύστημα περιστρέφεται από την οριζόντια θέση, στο κατώτερο σημείο του δίσκου, πηγαίνει σε σημείο χαμηλότερης δυναμικής ενέργειας και επομένως η ενέργεια αυτή μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια:

Η κινητική ενέργεια $E_{κιν} = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 = mgR$

Ο δίσκος και το σώμα έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω, και επομένως η γραμμική ταχύτητα του σώματος θα είναι: $v = \omega R$

Αντικαθιστούμε και έχουμε: $\frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 = \frac{1}{2}(I + mR^2)\omega^2$

Η ροπή αδράνειας του δίσκου είναι: $I = \frac{1}{2} mR^2$

$$\Rightarrow E_κ = mgR \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cancel{m}R^2 + \cancel{m}R^2\right)\omega^2 = \cancel{m}gR \Rightarrow \omega^2 = \frac{2gR}{3R^2/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{g}{R}}}$$

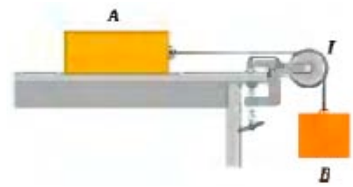
Επομένως η ταχύτητα του μικρού σώματος θα είναι $v = \omega R \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4}{3} gR}$

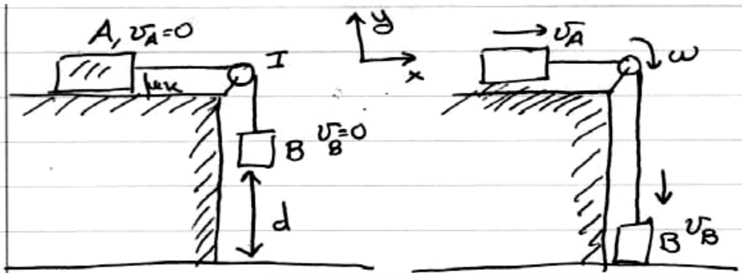
Ας σημειωθεί ότι αν το σώμα απλά το αφήναμε να πέσει από ύψος R τότε η γραμμική του ταχύτητα θα ήταν:

$$E_{κιν} = mgR \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 = \cancel{m}gR \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{2gR}$$

Επομένως η ταχύτητά του όταν είναι εξαρτημένο στο δίσκο ελαττώνεται κατά: $\frac{v_Σ}{v_{ΕΠ}} = \sqrt{\frac{\cancel{4}^{2} gR}{3\cdot\cancel{2}gR}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

10. Η τροχαλία του σχήματος έχει ακτίνα R και ροπή αδράνειας I. Το σχοινί δεν γλιστρά καθώς περνά από την τροχαλία ενώ η τροχαλία περιστρέφεται ως προς λείο άξονα κάθετο στο επίπεδό της. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ του σώματος A και του τραπεζιού είναι $μ_k$. Το σύστημα είναι αρχικά ακίνητο και κατόπιν αφήνεται να κινηθεί ελεύθερα οπότε και το σώμα B κατεβαίνει. Το σώμα A έχει μάζα m_A και το σώμα B έχει μάζα m_B. Χρησιμοποιόντας μεθόδους από ενέργεια να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος B συναρτήσει του ύψους d που έχει κατέβει.





Από το θεώρημα έργου ενέργειας έχουμε ότι το έργο των μη-συντηρητικών δυνάμεων ισούται με τη μεταβολή της ενέργειας του συστήματος:

$$W_{τρ} = ΔE_{μηχ} = E^{τελ}_{μηχ} - E^{αρχ}_{μηχ} = E^{τελ}_{κιν} + E^{τελ}_{δυν} - E^{αρχ}_{κιν} - E^{αρχ}_{δυν} \quad (1)$$

Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων x-y με τη φορά προς τα πάνω τα +y και προς τα δεξιά τα +x. Η αρχή του συστήματος θεωρείται ότι είναι στο έδαφος και το οποίο λαμβάνουμε σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας.

Η τάση του σχοινιού παράγει θετικό έργο στο σώμα A και αρνητικό στο σώμα B και ίδιου μεγέθους με αυτό στο A, επομένως το έργο στο σχοινί είναι μηδέν.

Εφόσον το σχοινί δε γλιστρά στην τροχαλία, τα 2 σώματα έχουν την ίδια γραμμική ταχύτητα και ίδια με τη γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας.

Όση απόσταση κινείται το σώμα B στην κατακόρυφη διεύθυνση την ίδια απόσταση κινείται το σώμα A οριζόντια και επομένως η τριβή παράγει έργο κατά την απόσταση αυτή:

$$W_{τρ} = -μ_κ m_1 g \cdot d \quad (2)$$

Αρχικά το σύστημα είναι ακίνητο, οπότε $E^{αρχ}_{κιν}=0$ ενώ υπάρχει αρχική δυναμική ενέργεια λόγω της θέσης του σώματος B $E^{αρχ}_{δυν} = m_2 g d$.

(Η δυναμική ενέργεια του A αγνοείται γιατί η βαρύτητα δεν παράγει έργο)

Στην τελική θέση, η δυναμική ενέργεια είναι $E_{δυν}^{τελ} = 0$.

Το σύστημα έχει αποκτήσει κινητική ενέργεια $E_{κιν}^{τελ} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$

Αλλά $v_1 = v_2 = v_{τροχ} = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}$ όπου $v = v_1 = v_2$, $I = \frac{1}{2} MR^2$

Επομένως:

$$W_{τρ} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{R^2} - m_2 g d \Rightarrow -\mu_k m_1 g d = \frac{1}{2}\left[(m_1 + m_2) + I/R^2\right] v^2 - m_2 g d$$

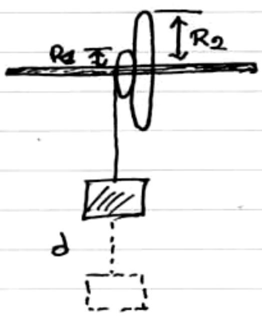
$$\Rightarrow v^2 \left[\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)\right] = (m_2 - \mu_k m_1) g d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2(m_2 - \mu_k m_1) g d}{(m_1 + m_2 + I/R^2)}}}$$

Αν $m_2 \gg (m_1, I/R^2)$ τότε $v = \sqrt{2gd}$ που σημαίνει ότι το σώμα Β πέφτει ελεύθερα. Αν η ροπή αδράνειας I είναι πολύ μεγάλη τότε το σώμα Β πέφτει πολύ αργά.

Για να κινηθεί το σύστημα θα πρέπει $m_2 \gg \mu_k m_1$, δηλαδή το βάρος του Β θα πρέπει νάναι μεγαλύτερο της δύναμης της τριβής στο Α.

11. Δυο μεταλικοί δίσκοι, ένας ακτίνας R_1=2.50cm και μάζας M_1=0.80kg και ένα άλλος ακτίνας R_2=5cm και μάζας M_2=1.60kg, είναι συγκολημένοι και ένας λείος άξονας περνά από το κέντρο τους. (α) Ποια είναι η συνολική ροπή αδράνειας του συστήματος των δυο δίσκων; (β) Ένα ελαφρύ νήμα τυλίγεται γύρω από την περιφέρεια του μικρότερου δίσκου και ένα σώμα μάζας 1.50kg εξαρτάται από το ελεύθερο άκρο του νήματος. Αν το σώμα αφήνεται από την κατάσταση της ηρεμίας και 2.0m πάνω από το έδαφος, ποια είναι η ταχύτητά του ακριβώς πριν χτυπήσει στο έδαφος; (γ) Επαναλάβατε τους υπολογισμούς του ερωτήματος (β) αλλά αυτή τη φορά υποθέστε ότι το νήμα είναι τυλιγμένο γύρω από το μεγαλύτερο δίσκο. Σε ποια από τις δυο περιπτώσεις η τελική ταχύτητα του σώματος είναι μεγαλύτερη; Εξηγήστε γιατί συμβαίνει αυτό.



Η ροπή αδράνειας του συστήματος των 2 δίσκων είναι το άθροισμα των ροπών αδράνειας των 2 δίσκων.

Οι δίσκοι έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα και η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του δίσκου γύρω από τον οποίο περνά το σχοινί έχουν την ίδια ταχύτητα με το κρεμάμενο σώμα.

Εφόσον δεν υπάρχουν μη-συντηρητικές δυνάμεις η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Έτσι θα έχουμε:

$$E_{κιν}^{αρχ} + E_{δυν}^{αρχ} = E_{κιν}^{τελ} + E_{δυν}^{τελ} \Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I_{ολ}\cdot\omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}(I_{1\delta} + I_{2\delta})\frac{\upsilon^2}{R_1^2} \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I_{1\delta}+I_{2\delta}}{R_1^2}\right)\upsilon^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon^2 = \frac{2\cancel{m}gh}{\cancel{m}\left(1 + \frac{I_{1\delta}+I_{2\delta}}{mR_1^2}\right)} \Rightarrow \boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1 + \frac{I_{1\delta}+I_{2\delta}}{mR_1^2}\right)}}} \quad (1)$$

$I_{1\delta} = \frac{1}{2}M_1R_1^2$ και $I_{2\delta} = \frac{1}{2}M_2R_2^2$ οπότε $I_{1\delta} + I_{2\delta} = \frac{1}{2}0.8\cdot(2.5\cdot10^{-2})^2 + \frac{1}{2}1.6(5\cdot10^{-2})^2 \Rightarrow$

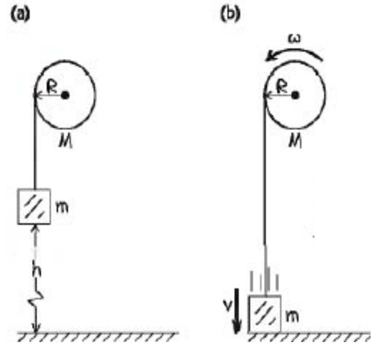
$$I_{ολ} = I_{1\delta} + I_{2\delta} = 2.25\cdot10^{-2}\,kg\,m^2$$

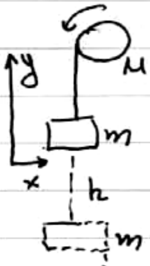
Αντικατάσταση στην (1) $\Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2\cdot9.8\cdot2}{1+\left(2.25\cdot10^{-2}/\left[1.5(0.025)^2\right]\right)}} \rightarrow \boxed{\upsilon = 3.4\,m/s}$

Αν χρησιμοποιήσουμε την ακτίνα R_2 αντί της R_1 τότε $\boxed{\upsilon = 4.35\,m/s}$

Επομένως όταν το σώμα έχει συνδεθεί στο μεγαλύτερο δίσκο αποκτά μεγαλύτερη ταχύτητα. Για $R=R_2$ μεγαλύτερο ποσοστό της ολικής κινητικής ενέργειας βρίσκεται στο σώμα. Η ολική κινητική ενέργεια και στις 2 περιπτώσεις είναι ίδια, αλλά μεγαλύτερο μέρος της κινητικής ενέργειας είναι στο σώμα που κρέμεται το οποίο και έχει μεγαλύτερη ταχύτητα.

12. Στο σύστημα του διπλανού σχήματος μια μάζα 12.0kg αρχικά ακίνητη αφήνεται να πέσει προκαλόντας το ομοιόμορφο κύλινδρο μάζας 10.0kg και διαμέτρου 30.0cm να περιστραφεί ως προς λείο άξονα που περνά από το κέντρο του. Πόσο απόσταση πρέπει να κατέβει η μάζα ώστε ο κύλινδρος να αποκτήσει 250J κινητικής ενέργειας;





Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας θα έχουμε!

$$\Delta E_{μηχ}=0 \Rightarrow E^{τελ}_{μηχ}-E^{αρχ}_{μηχ}=0 \Rightarrow E^{τελ}_{κιν}+E^{τελ}_{δυν}=E^{αρχ}_{κιν}+E^{αρχ.}_{δυν} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m v_{αρ}^2+\frac{1}{2}I\omega_{αρχ}^2+E^{αρχ}_{δυν}=\frac{1}{2}m v_{τελ}^2+\frac{1}{2}I\omega_{τελ}^2+E^{τελ}_{δυν}$$

Θεωρούμε τη θέση του σώματος m μετά τη κίνησή του κατά απόσταση h σα το επίπεδο της μηδενικής δυναμικής ενέργειας. Επομένως $E^{αρχ}_{δυν}=mgh$ και $E^{τελ}_{δυν}=0$.

Το σύστημα είναι αρχικά ακίνητο οπότε $v_{αρ}=0$ κ $\omega=0$
Στη τελική θέση η ταχύτητα της περιφέρειας της τροχαλίας είναι ίδια με τη ταχύτητα του σώματος $v=v_{τρχ}=\omega\cdot R$, $I=\frac{1}{2}MR^2$

Οπότε: $\frac{1}{2}m v_{τελ}^2+\frac{1}{2}I\omega_{τελ}^2=mgh \Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2R^2+\frac{1}{2}I\omega^2=mgh$

Αλλά $\frac{1}{2}I\omega^2=250 \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{250\cdot 2}{I}} \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{500}{I}}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mR^2\frac{500}{I}+\frac{1}{2}\cancel{I}\frac{500}{\cancel{I}}=mgh \Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}m\cancel{R^2}\frac{500}{\cancel{\frac{1}{2}}M\cancel{R^2}}+\frac{1}{2}500=mgh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 500\left(\frac{m}{M}+\frac{1}{2}\right)=mgh \Rightarrow h=\frac{500(2m+M)}{2Mmg} \Rightarrow h=\frac{\overset{25}{\cancel{500}}(2\cdot 12+10)}{\cancel{2}\cdot\cancel{10}\cdot 12\cdot 9.8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h=\frac{25\cdot 34}{12\cdot 9.8} \Rightarrow h=\underline{\underline{7.23m}}$$

Η αρχική ενέργεια του συστήματος είναι η δυναμική ενέργεια $E_{δυν}=mgh \Rightarrow$
$\Rightarrow E_{δυν}=12\cdot 9.8\cdot 7.23=850J$.
Η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου είναι $E^{περ}_{κιν}=250J$. Οπότε η μάζα έχει κινητική ενέργεια 600J.