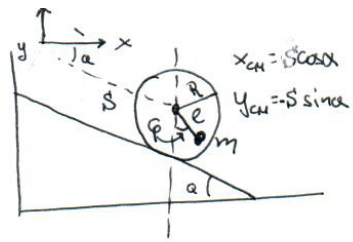
ΦΥΣ. 211
ΕΡΓΑΣΙΑ # 2
Επιστροφή την Δευτέρα 8/2/2016 στο τέλος της διάλεξης

1. Ένας δίσκος μάζας M και ακτίνας R κυλά χωρίς ολίσθηση προς την βάση ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης α ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Ο δίσκος έχει ένα κοντό αβαρή άξονα αμελητέας ακτίνας. Από τον άξονα αυτόν κρέμεται ένα απλό εκκρεμές μήκους $l < R$ ενώ η μάζα του είναι m. Θεωρήστε ότι η κίνηση του εκκρεμούς γίνεται στο επίπεδο του δίσκου. Να βρεθούν οι εξισώσεις Lagrange του συστήματος.



Χρησιμοποιούμε τις γενικευμένες συντεταγμένες όπως στο σχήμα:
Η κινητική ενέργεια του συστήματος μπορεί να περιγραφεί σαν την κινητική ενέργεια του δίσκου T_{disk} και την κινητική ενέργεια του εκκρεμούς $T_{εκκ}$

Η κινητική ενέργεια του δίσκου αναλύεται στην κινητική ενέργεια μεταφοράς του κέντρου μάζας και την κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής όλων των σημείων του δίσκου ως προς το κέντρο μάζας:

$T_{disk} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} J\omega^2$ όπου I είναι η ροπή αδράνειας του δίσκου, $I = MR^2$ και ω η γωνιακή ταχύτητα ως προς το κέντρο μάζας

Ωστόσο ξέρουμε ότι ο δίσκος κυλίεται χωρίς ολίσθηση και επομένως $S = R\Theta \Rightarrow$
$\Rightarrow \dot{S} = R\dot{\Theta} \Rightarrow V_{CM} = R\omega$ όπου S η μετατόπιση του κέντρου μάζας και Θ η γωνιακή μετατόπιση του σημείου επαφής

Επομένως η κινητική ενέργεια του δίσκου γράφεται: $T_{disk} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} M\cancel{R^2}\frac{V_{CM}^2}{\cancel{R^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{T_{disk} = M V_{CM}^2} \Rightarrow \boxed{T_{disk} = M\dot{S}^2}$ (1)

Η δυναμική ενέργεια του κέντρου μάζας του δίσκου θα είναι: $\boxed{V = Mg\,y_{CM} = -MgS\sin\alpha}$ (2)

Για το εκκρεμές έχουμε: $T_{\text{εκρ}} = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_{\text{εκρ}}^2 + \dot{y}_{\text{εκρ}}^2 \right)$

Αλλά

$$\left.\begin{aligned} x_{\text{εκρ}} &= x^{CM}_{disk} + l\sin\phi \\ y_{\text{εκρ}} &= -\left(y^{CM}_{disk} + l\cos\phi\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_{\text{εκρ}} &= s\cos\alpha + l\sin\varphi \\ y_{\text{εκρ}} &= -\left(s\sin\alpha + l\cos\varphi\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \dot{x}_{\text{εκρ}} &= \dot{s}\cos\alpha + l\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{y}_{\text{εκρ}} &= -\left(\dot{s}\sin\alpha - l\dot{\varphi}\sin\varphi\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{\text{εκρ}} = \frac{1}{2} m \left[\dot{s}^2\cos^2\alpha + l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + 2l\dot{\varphi}\dot{s}\cos\alpha\cos\varphi + \dot{s}^2\sin^2\alpha + l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi - 2l\dot{s}\dot{\varphi}\sin\alpha\sin\varphi \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{\text{εκρ}} = \frac{1}{2} m \left[\dot{s}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{s}\cos(\alpha+\varphi) \right]} \quad (3)$$

Η δυναμική ενέργεια του εκκρεμούς θα είναι: $\boxed{V_{\text{εκρ}} = mg\,y_{\text{εκρ}} = -mg\left(s\sin\alpha + l\cos\varphi\right)}$ (4)

Συγκεντρώνοντας τις (1), (2), (3) και (4) η συνάρτηση Lagrange του συστήματος θα είναι:

$$\boxed{L = M\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{s}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{s}\cos(\alpha+\varphi)\right] + (M+m)g\,s\sin\alpha + mgl\cos\varphi}$$

Οι εξισώσεις Lagrange θα είναι:

για s: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) = \frac{\partial L}{\partial s} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left((2M+m)\dot{s} + ml\dot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi) \right) = (M+m)g\sin\alpha \Rightarrow$

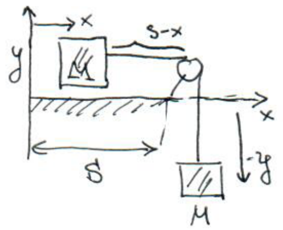
$$\Rightarrow \boxed{(2M+m)\ddot{s} + ml\ddot{\varphi}\cos(\alpha+\varphi) - ml\dot{\varphi}^2\sin(\alpha+\varphi) = (M+m)g\sin\alpha}$$

για φ: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\varphi} + ml\dot{s}\cos(\alpha+\varphi) \right) = -mgl\sin\varphi - ml\dot{\varphi}\dot{s}\sin(\alpha+\varphi)$

$$\Rightarrow \cancel{ml}\,l\ddot{\varphi} + \cancel{ml}\,\ddot{s}\cos(\alpha+\varphi) - \cancel{ml\dot{s}\dot{\varphi}\sin(\alpha+\varphi)} = -\cancel{ml}\,g\sin\varphi - \cancel{ml\dot{\varphi}\dot{s}\sin(\alpha+\varphi)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{\ddot{s}}{l}\cos(\alpha+\varphi) = -\frac{g}{l}\sin\varphi}$$

2. Δυο κιβώτια μάζας M το καθένα, συνδέονται μεταξύ τους με ομοιόμορφο και μη εκτατό νήμα μήκους l . Το ένα κιβώτιο βρίσκεται πάνω σε λεία επιφάνεια ενώ το δεύτερο κιβώτιο κρέμεται από το τέλος της επιφάνειας μέσω του νήματος που περνά από μια λεία τροχαλία. Περιγράψτε την κίνηση του συστήματος όταν (α) το νήμα είναι αβαρές και (β) όταν το νήμα έχει μάζα m.



Το μήκος του νήματος είναι συγκεκριμένο οπότε οι θέσεις των δύο σωμάτων με βάση το διπλανό σχήμα θα είναι: $(S-x)-y=l$

(1) $x+y=S-l$ όπου l το μήκος του νήματος και x η θέση του σώματος στην οριζόντια επιφάνεια

Από την εξίσωση του δεσμού έχουμε $\dot{x}+\dot{y}=0 \Rightarrow \dot{x}=-\dot{y}$ (2)

(α) Η lagrangian του συστήματος είναι:

$$L=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}M\dot{y}^2+Mgy \overset{(2)}{\Longrightarrow} L=\frac{1}{2}M\dot{y}^2+\frac{1}{2}M\dot{y}^2+Mgy \Rightarrow L=M\dot{y}^2+Mgy$$

Η εξίσωση Euler-Lagrange για y θα είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)=\frac{\partial L}{\partial y} \Rightarrow 2M\ddot{y}=Mg \Rightarrow \ddot{y}=g/2$$

Λύνοντας την εξίσωση αυτή έχουμε $\dot{y}=\int g/2\,dt=\frac{1}{2}gt+C_2(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y=\int gt/2\,dt+\int C_2(t)\,dt \Rightarrow y=C_1+C_2t+\frac{1}{4}gt^2$$

Χρησιμοποιώντας κατάλληλες αρχικές συνθήκες μπορούμε να υπολογίσουμε τις σταθερές C_1 και C_2. Έστω ότι την χρονική στιγμή $t=0$, $y=\phi$ και $\dot{y}=\phi$ τότε θα έχουμε ότι $C_1=0$ ενώ $C_2=0$.

Επομένως η εξίσωση της θέσης του σώματος είναι: $\boxed{y(t)=\frac{1}{4}gt^2}$

(β) Όταν το νήμα έχει μάζα, θα πρέπει να λάβουμε υπόψην την ταχύτητα και επομένως την κινητική του ενέργεια, και την θέση του για τον υπολογισμό της δυναμικής του ενέργειας.

Έστω m η μάζα του σχοινιού. Η κινητική του ενέργεια είναι: $T_{σχ}=\frac{1}{2}m\dot{y}^2$

Το σχοινί θα έχει την ίδια ταχύτητα με την ταχύτητα των σωμάτων ενώ ισχύει η (2)

Η δυναμική ενέργεια εξαρτάται από την μάζα του σχοινιού που κρέμεται από την τροχαλία.

Αν θεωρήσουμε σαν λ την γραμμική πυκνότητα του σχοινιού, θα έχουμε: $\lambda = \frac{m}{\ell}$,

ενώ η μάζα του σχοινιού που κρέμεται θα είναι: $m_{\sigma\chi/y} = \lambda y$ όπου y το μήκος που κρέμεται

Η δυναμική ενέργεια θα είναι επομένως: $V_{\sigma\chi} = - m_{\sigma\chi/y} \cdot g \cdot y_{cm}$ όπου y_{cm} η θέση του C.M. του σχοινιού που κρέμεται

Αλλά $y_{cm} = -y/2$.

Επομένως η Lagrangian του συστήματος θα είναι τώρα:

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + Mgy + \frac{m}{\ell} y g \frac{y}{2} = M\dot{y}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + Mgy + \frac{mg}{2\ell} y^2$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{2}(2M+m)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\left(2Mgy + \frac{mg}{\ell} y^2\right)$$

Η εξίσωση Euler-Lagrange ως προς y θα δώσει:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} \Rightarrow (2M+m)\ddot{y} = +Mg + \frac{mg}{\ell} y \Rightarrow (2M+m)\ddot{y} = \frac{mg}{\ell}\left(y + \frac{M\ell}{m}\right)$$

Αλλά $\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{mg}{\ell}\left(y + \frac{M\ell}{m}\right)\right] = \frac{mg}{\ell}\frac{d^2}{dt^2} y \Rightarrow (2M+m)\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{mg}{\ell}\frac{d^2}{dt^2}\left(y + \frac{M\ell}{m}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{mg}{\ell(2M+m)}\left[y + \frac{M\ell}{m}\right] \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\left(y + \frac{M\ell}{m}\right) = \frac{mg}{\ell(2M+m)}\left(y + \frac{M\ell}{m}\right) \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{mg\,u}{\ell(2M+m)}$$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{u} = \omega^2 u}$ Η εξίσωση αυτή θα ήταν αρμονικού ταλαντωτή αν ήταν της μορφής $\ddot{u} = -\omega^2 u$. Στην περίπτωση αυτή η λύση είναι εκθετική

$$u = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \Rightarrow y + \frac{M\ell}{m} = Ae^{+\omega t} + Be^{-\omega t} \quad \text{όπου } \omega = \sqrt{\frac{mg}{\ell(2M+m)}}$$

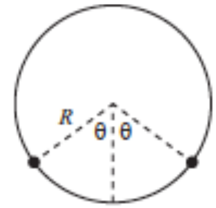
Με βάση τις αρχικές συνθήκες $y(t=0) = \dot{y}(t=0) = 0$ θα έχουμε:

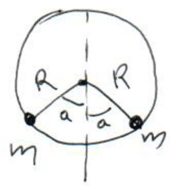
$$\left.\begin{aligned} B + A &= +\frac{M\ell}{m} \\ \omega(A-B) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = B \quad \text{και} \quad 2A = +\frac{M\ell}{m} \Rightarrow A = B = +\frac{M\ell}{2m}$$

Επομένως η λύση έχει την μορφή: $y(t) = +\frac{M\ell}{m}\left(-1 + \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{M\ell}{m}\left(-1 + \cosh \omega t\right)}$$

3. Δυο σώματα ίσης μάζας είναι κολλημένες σε αβαρή στεφάνι ακτίνας R το οποίο είναι ελεύθερο να στρέφεται γύρω από το κέντρο σε κατακόρυφο επίπεδο. Η γωνία μεταξύ των μαζών είναι 2θ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρεθεί η συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων ως προς το σημείο ισορροπίας.





Θεωρούμε την θέση της μάζας στα αριστερά σαν $\vec{r}_1$ και τη θέση της μάζας στα δεξιά σαν $\vec{r}_2$.

Η ταχύτητα κάθε μάζας είναι το άθροισμα της ταχύτητας περιστροφής κάθε μάζας ως προς το κέντρο του στεφανιού, και της ταχύτητας λόγω μεταφοράς του στεφανιού

Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες για να περιγράψουμε την κίνηση, οπότε έχουμε:

$$\vec{r}_1 = \left[x_{CM} - R\sin(\Theta + a)\right]\hat{i} + \left(-R\cos(\Theta + a)\right)\hat{j}$$

όπου Θ είναι η περιστροφή του στεφανιού

$$\vec{r}_2 = \left[x_{CM} - R\sin(\Theta - a)\right]\hat{i} + \left(-R\cos(\Theta - a)\right)\hat{j}$$

Επομένως παραγωγίζοντας θα πάρουμε:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_1 &= \left[\dot{x}_{CM} - R\dot{\Theta}\cos(\Theta + a)\right]\hat{i} + \left(R\dot{\Theta}\sin(\Theta + a)\right)\hat{j} \\ \dot{\vec{r}}_2 &= \left[\dot{x}_{CM} - R\dot{\Theta}\cos(\Theta - a)\right]\hat{i} + \left(R\dot{\Theta}\sin(\Theta - a)\right)\hat{j} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} |\dot{\vec{r}}_1|^2 &= \dot{x}_{CM}^2 + R^2\dot{\Theta}^2\cos^2(\Theta + a) - 2R\dot{x}_{CM}\dot{\Theta}\cos(\Theta + a) + R^2\dot{\Theta}^2\sin^2(\Theta + a) \\ |\dot{\vec{r}}_2|^2 &= \dot{x}_{CM}^2 + R^2\dot{\Theta}^2\cos^2(\Theta - a) - 2R\dot{x}_{CM}\dot{\Theta}\cos(\Theta - a) + R^2\dot{\Theta}^2\sin^2(\Theta + a) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\dot{\vec{r}}_1|^2 + |\dot{\vec{r}}_2|^2 = 2\dot{x}_{CM}^2 + 2R^2\dot{\Theta}^2 - 2R\dot{x}_{CM}\dot{\Theta}\left[\cos(\Theta + a) + \cos(\Theta - a)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\dot{\vec{r}}_1|^2 + |\dot{\vec{r}}_2|^2 = 2\left[\dot{x}_{CM}^2 + R^2\dot{\Theta}^2 - R\dot{x}_{CM}\dot{\Theta}\left(\cos\Theta\cos a - \cancel{\sin\Theta\sin a} + \cos\Theta\cos a + \cancel{\sin\Theta\sin a}\right)\right]$$

$$\left.\Rightarrow |\dot{\vec{r}}_1|^2 + |\dot{\vec{r}}_2| = 2\left[\dot{x}_{CM}^2 + R^2\dot{\Theta}^2 - 2R\dot{x}_{CM}\dot{\Theta}\cos\Theta\cos a\right]\right\} \Rightarrow$$

Αλλά λόγω κύλισης του στεφανιού $x_{CM} = R\Theta \Rightarrow \dot{x}_{CM} = R\dot{\Theta}$

$$|\dot{\vec{r}}_1|^2 + |\dot{\vec{r}}_2|^2 = 2\left[R^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\theta}^2 - 2R^2\dot{\theta}^2\cos a\cos\theta\right] \Rightarrow |\dot{\vec{r}}_1|^2 + |\dot{\vec{r}}_2|^2 = 4R^2\dot{\theta}^2(1-\cos a\cos\theta)$$

Επομένως η κινητική ενέργεια του συστήματος θα είναι:

$$T = \frac{1}{2}m\left(|\dot{\vec{r}}_1|^2 + |\dot{\vec{r}}_2|^2\right) = \frac{1}{2}m4R^2\dot{\theta}^2(1-\cos\theta\cos a) \Rightarrow \boxed{T = 2mR^2\dot{\theta}^2(1-\cos a\cos\theta)}$$

Η δυναμική ενέργεια θεωρώντας τις y συντεταγμένες της θέσης των μαζών θα είναι:

$$V = mg(y_1+y_2) = -mgR\left[\cos(\theta+a)+\cos(\theta-a)\right] \Rightarrow \boxed{V = -2mgR\cos\theta\cos a}$$

Η συνάρτηση Lagrange επομένως θα είναι:

$$L = T - V = 2mR^2\dot{\theta}^2(1-\cos a\cos\theta) + 2mgR\cos\theta\cos a.$$

Θεωρούμε μικρές γωνιακές αποκλίσεις: $|\theta| \ll 1$ και αναπτύσσουμε κατά Taylor το $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots$

Στην περίπτωση αυτή ο όρος $\dot{\theta}^2\left(1-\frac{\theta^2}{2}+\dots\right)$ είναι ήδη πολύ μικρός για $\dot{\theta}^2$ και επομένως προσεγγίζουμε $\dot{\theta}^2\cos a\cos\theta \simeq \dot{\theta}^2\cos a$

Στην περίπτωση του όρου που αναφέρεται στην δυναμική ενέργεια, κρατάμε τον όρο $2^{ης}$ τάξης ως προς θ. Οπότε θα έχουμε:

$$L = 2mR^2\dot{\theta}^2(1-\cos a) + 2mgR\cos a - \cancel{2}mgR\frac{\theta^2}{\cancel{2}}\cos a$$

Η εξίσωση Euler-Lagrange ως προς τη μοναδική συντεταγμένη θ είναι:

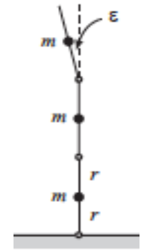
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial\theta} \Rightarrow \overset{2}{\cancel{4}}\cancel{m}R^2\ddot{\theta}(1-\cos a) = -\cancel{2}\cancel{m}gR\theta\cos a \Rightarrow 2\ddot{\theta} = -\frac{g\,\theta\cos a}{R(1-\cos a)}$$

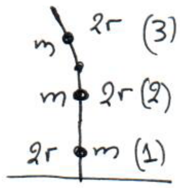
$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g\cos a}{2R(1-\cos a)}\theta}$$

Η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή με $\omega^2 = \frac{g\cos a}{2R(1-\cos a)} \Rightarrow$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g\cos a}{2R(1-\cos a)}}}$$

4. Τρία αβαρή ξυλάκια μήκους $2r$, σε καθένα από τα οποία είναι στερεωμένη στο μέσο του μια μάζα m, συνδέονται μεταξύ τους όπως στο σχήμα. Το ένα άκρο του κατώτερου μέρους του ενός από τα ξυλάκια είναι στο έδαφος. Κρατιούνται με τέτοιο τρόπο ώστε τα κατώτερα δυο ξυλάκια είναι κατακόρυφα, ενώ το τρίτο ξυλάκι είναι κεκλιμένο κατά μια γωνία ε, ως προς την κατακόρυφο. Αφήνονται κατόπιν ελεύθερα. Την στιγμή αυτή, ποιες είναι οι γωνιακές επιταχύνσεις των τριών τμημάτων; Θεωρήστε πάντα ότι η γωνία ε είναι πολύ μικρή.





Έστω Θ_1, Θ_2 και Θ_3 οι γωνίες που σχηματίζουν τα ξυλάκια με την κατακόρυφο. Θεωρούμε θετική φορά μέτρησης των γωνιών αυτή αντίθετη με την φορά των δεικτών του ρολογιού.

Οι γωνίες αναφέρονται στο ξυλάκια από το κατώτερο (πιο κοντά στο έδαφος) προς το υψηλότερο.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε τα διανύσματα θέσης των 3 μαζών:

$$\vec{r_1} = (r\sin\Theta_1, r\cos\Theta_1)$$

$$\vec{r_2} = (2r\sin\Theta_1 + r\sin\Theta_2, 2r\cos\Theta_1 + r\cos\Theta_2)$$

$$\vec{r_3} = (2r\sin\Theta_1 + 2r\sin\Theta_2 + r\sin\Theta_3, 2r\cos\Theta_1 + 2r\cos\Theta_2 + r\cos\Theta_3)$$

Για να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια, χρησιμοποιούμε την προσέγγιση της μικρής γωνίας και κρατάμε μόνο τους γραμμικούς όρους.
Αυτό γιατί θέλουμε μόνο δευτεροβάθμιους όρους στην Lagrangian και η κινητική ενέργεια είναι το τετράγωνο της ταχύτητας.

Επομένως θα γράψουμε: $\vec{r_1} = (r\Theta_1, r)$ $\vec{r_2} = (2r\Theta_1 + r\Theta_2, \overset{3r}{\cancel{2r+r}})$

$\vec{r_3} = (2r\Theta_1 + 2r\Theta_2 + r\Theta_3, \overset{5r}{\cancel{2r+2r+r}})$

Επομένως οι ταχύτητες θα είναι: $\vec{v_1} = \dot{\vec{r_1}} = (r\dot{\Theta}_1, 0)$, $\dot{\vec{r_2}} = (2r\dot{\Theta}_1 + r\dot{\Theta}_2, 0)$ και

$\dot{\vec{r_3}} = (2r\dot{\Theta}_1 + 2r\dot{\Theta}_2 + r\dot{\Theta}_3, 0)$

Η κινητική ενέργεια είναι: $T = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \Rightarrow T = \frac{1}{2}m\left(\dot{\Theta}_1^2 + (2r\dot{\Theta}_1 + r\dot{\Theta}_2)^2 + (2r\dot{\Theta}_1 + r\dot{\Theta}_2 + \dot{\Theta}_3 r)^2\right)$

$$T = \frac{1}{2} m r^2 \left(\dot\theta_1^2 + (\dot\theta_2 + 2\dot\theta_1)^2 + (\dot\theta_3 + 2\dot\theta_1 + 2\dot\theta_2)^2 \right) \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} m r^2 \left(\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2 + 4\dot\theta_1^2 + 4\dot\theta_2\dot\theta_1 + \dot\theta_3^2 + 4\dot\theta_1^2 + 4\dot\theta_2^2 + 4\dot\theta_1\dot\theta_3 + 4\dot\theta_2\dot\theta_3 + 8\dot\theta_1\dot\theta_2 \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m r^2 \left(9\dot\theta_1^2 + 5\dot\theta_2^2 + \dot\theta_3^2 + 12\dot\theta_1\dot\theta_2 + 4\dot\theta_1\dot\theta_3 + 4\dot\theta_2\dot\theta_3 \right)}$$

Υπολογίζουμε την δυναμική ενέργεια: $V = mg(y_1 + y_2 + y_3)$ όπου y_i οι κατακόρυφες συνιστώσες της θέσης της μάζας σε κάθε βήμα:

$$V = mg\left(r\cos\theta_1 + (2r\cos\theta_1 + r\cos\theta_2) + (2r\cos\theta_1 + 2r\cos\theta_2 + r\cos\theta_3) \right) \Rightarrow$$

$$V = mg\left(5r\cos\theta_1 + 3r\cos\theta_2 + r\cos\theta_3 \right) \Rightarrow \boxed{V = mgr\left(5\cos\theta_1 + 3\cos\theta_2 + \cos\theta_3 \right)}$$

Όπως και προηγουμένως, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση των μικρών γωνιών θα έχουμε:

$\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \dots$ και κρατώντας όρους $2^{ου}$ βαθμού θα πάρουμε:

$$V = mgr\left(5 - \frac{5\theta_1^2}{2} + 3 - 3\frac{\theta_2^2}{2} + 1 - \frac{\theta_3^2}{2} \right) = mgr\left(9 - \frac{1}{2}\left(5\theta_1^2 + 3\theta_2^2 + \theta_3^2 \right) \right)$$

Η Lagrangian του προβλήματος θα είναι:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m r^2 \left(9\dot\theta_1^2 + 5\dot\theta_2^2 + \dot\theta_3^2 + 12\dot\theta_1\dot\theta_2 + 4\dot\theta_1\dot\theta_3 + 4\dot\theta_2\dot\theta_3 \right) - mgr\left(9 - \frac{1}{2}\left(5\theta_1^2 + 3\theta_2^2 + \theta_3^2 \right) \right)$$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Euler-Lagrange για τις 3 συντεταγμένες θ_1, θ_2 κ θ_3:

$$\theta_1: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \Rightarrow \cancel{m}r^{\cancel{2}}\left(9\ddot\theta_1 + 6\ddot\theta_2 + 2\ddot\theta_3 \right) = -\cancel{m}g\cancel{r}\,5\theta_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r\left(9\ddot\theta_1 + 6\ddot\theta_2 + 2\ddot\theta_3 \right) = -5g\theta_1}$$

$$\theta_2: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \Rightarrow \cancel{m}r^{\cancel{2}}\left(5\ddot\theta_2 + 6\ddot\theta_1 + 2\ddot\theta_3 \right) = -\cancel{m}g\cancel{r}\,3\theta_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{r\left(5\ddot\theta_2 + 6\ddot\theta_1 + 2\ddot\theta_3 \right) = -3g\theta_2}$$

$$\theta_3: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3} = 0 \Rightarrow \cancel{m}r^{\cancel{2}}\left(\ddot\theta_3 + 2\ddot\theta_1 + 2\ddot\theta_2 \right) = -\cancel{m}g\cancel{r}\,\theta_3 \Rightarrow$$

$$\boxed{r\left(\ddot\theta_3 + 2\ddot\theta_1 + 2\ddot\theta_2 \right) = -g\theta_3}$$

Από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος έχουμε: $\theta_1=\theta_2=0$ και $\theta_3=\varepsilon$

Επομένως οι 3 προηγούμενες διαφορικές εξισώσεις δίνονται:

$$r\left(9\ddot{\theta}_1+6\ddot{\theta}_2+2\ddot{\theta}_3\right)=0 \quad (1)$$

$$r\left(5\ddot{\theta}_1+5\ddot{\theta}_2+2\ddot{\theta}_3\right)=0 \quad (2)$$

$$r\left(2\ddot{\theta}_1+2\ddot{\theta}_2+\ddot{\theta}_3\right)=-g\varepsilon \quad (3)$$

$$\xRightarrow{(1)-2(3)} r\left(9\ddot{\theta}_1+6\ddot{\theta}_2+\cancel{2\ddot{\theta}_3}-4\ddot{\theta}_1-4\ddot{\theta}_2-\cancel{2\ddot{\theta}_3}\right)=-2g\varepsilon$$

$$\xRightarrow{(2)-2(3)} 6\ddot{\theta}_1+5\ddot{\theta}_2+\cancel{2\ddot{\theta}_3}-4\ddot{\theta}_1-4\ddot{\theta}_2-\cancel{2\ddot{\theta}_3}=-2g$$

Οπότε:

$$\left.\begin{aligned}5\ddot{\theta}_1+2\ddot{\theta}_2&=-2g\varepsilon/r\\ 2\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2&=-2g\varepsilon/r\end{aligned}\right\}\Rightarrow 5\ddot{\theta}_1+\cancel{2\ddot{\theta}_2}-4\ddot{\theta}_1-\cancel{2\ddot{\theta}_2}=-2g\varepsilon/r+4g\varepsilon/r\Rightarrow\boxed{\ddot{\theta}_1=2g\varepsilon/r}$$

Από την $\ddot{\theta}_2=-2g\varepsilon/r-2\ddot{\theta}_1/r=\left(-2g\varepsilon-4g\varepsilon\right)/r\Rightarrow\boxed{\ddot{\theta}_2=-6g\varepsilon/r}$

Τέλος από την (3) με αντικατάσταση των $\ddot{\theta}_1$ και $\ddot{\theta}_2$ θα έχουμε:

$$\ddot{\theta}_3=-\frac{g\varepsilon}{r}-2\ddot{\theta}_1-2\ddot{\theta}_2=-\frac{g\varepsilon}{r}-2\,\frac{2g\varepsilon}{r}+12\,\frac{g\varepsilon}{r}\Rightarrow\boxed{\ddot{\theta}_3=7g\varepsilon/r}$$