Νόμος του Faraday – Επαγωγή
Παραδείγματα

Στρατηγική για την επίλυση προβλημάτων

Είδαμε ότι αλλαγή στην μαγνητική ροή επάγει ΗΕΔ: $\mathcal{E} = -N\dfrac{d\Phi_m}{dt}$

Για έναν αγωγό που σχηματίζει ένα κλειστό βρόχο, η ΗΕΔ δημιουργεί ένα επαγωγικό ρεύμα $I = |\mathcal{E}|/R$ όπου *R* η αντίσταση του κυκλώματος.

Για να βρούμε τη διεύθυνση του ρεύματος και να υπολογίσουμε το μέτρο του ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Για κλειστό βρόχο επιφάνειας *A* σε επίπεδο, ορίζουμε το διάνυσμα $\vec{A}$ της επιφάνειας και θεωρούμε ότι ακολουθεί τη διεύθυνση του αντίχειρά σας ώστε να εφαρμόσουμε το κανόνα του δεξιού χεριού αργότερα. Υπολογίζουμε τη ροή που περνά από τον βρόχο:

$$\Phi_m = \begin{cases} \vec{B}\cdot\vec{A} & \textit{ομογενές πεδίο} \\ \iint \vec{B}\cdot d\vec{A} & \textit{μη ομογενές πεδίο} \end{cases}$$

  Προσδιορίζουμε το πρόσημο της μαγνητικής ροής

- Υπολογισμός του ρυθμού μεταβολής της μαγνητικής ροής $d\Phi_m/dt$ και προσδιορισμός του πρόσημου της μεταβολής αυτής.

  Η μεταβολή μπορεί να σχετίζεται με αλλαγή στο $\vec{B}$ $\left(d\vec{B}/dt \neq 0\right)$, στην επιφάνεια του βρόχου $\vec{A}$ $\left(d\vec{A}/dt \neq 0\right)$ ή στον προσανατολισμό του στο πεδίο $(d\theta/dt \neq 0)$

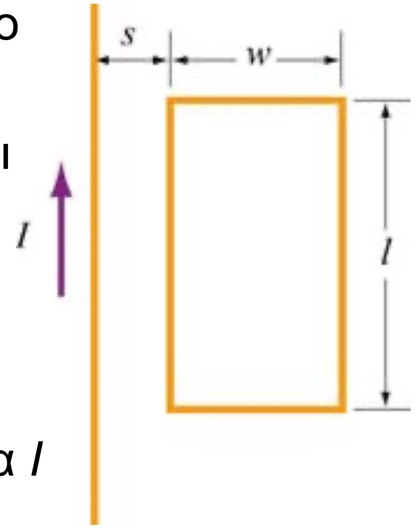
- Το πρόσημο της επαγόμενης ΗΕΔ είναι αντίθετο της $d\Phi_m/dt$ και το επαγώγιμο ρεύμα βρίσκεται με χρήση του κανόνα του Lenz

Παράδειγμα: Ορθογώνιο πλαίσιο κοντά σε ευθύγραμμο αγωγό

Θεωρούμε έναν αγωγό απείρου μήκους που διαρρέεται από ρεύμα *I* και τοποθετείται στην περιοχή ενός αγώγιμου ορθογώνιου βρόχου πλευράς μήκους l και πλάτους w.

(α) Θα προσδιορίσουμε την μαγνητική ροή που διαπερνά το πλαίσιο

(β) Υποθέτοντας ότι το ρεύμα που διαρρέει τον ευθύγραμμο αγωγό είναι συνάρτηση του χρόνου $I(t) = a + bt$ με $a, b > 0$. Ποια είναι η επαγόμενη ΗΕΔ στο βρόχο και ποια η διεύθυνση του επαγωγικού ρεύματος.



(α) Από τον νόμο του Ampere έχουμε: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{en.}$

Το μαγνητικό πεδίο εξαιτίας ενός αγωγού που διαρρέεται από ρεύμα *I* σε απόσταση *r* από τον αγωγό είναι: $B = \frac{\mu_0 I_{en.}}{2\pi r}$

Η ολική μαγνητική ροή μέσω του βρόχου μπορεί να υπολογιστεί αθροίζοντας τις συνεισφορές από όλες τις στοιχειώδεις επιφάνειες: $dA = ldr$:

$$\Phi_m = \int d\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_s^{s+w} \frac{dr}{r} \Rightarrow \Phi_m = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} ln\left(\frac{w+s}{s}\right)$$

Παράδειγμα: Ορθογώνιο πλαίσιο κοντά σε ευθύγραμμο αγωγό

(β) Από τον νόμο του Faraday έχουμε ότι η επαγόμενη ΗΕΔ θα είναι:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[\frac{\mu_0 I l}{2\pi} ln\left(\frac{s+w}{s}\right)\right] \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} ln\left(\frac{s+w}{s}\right)\frac{dI}{dt}$$

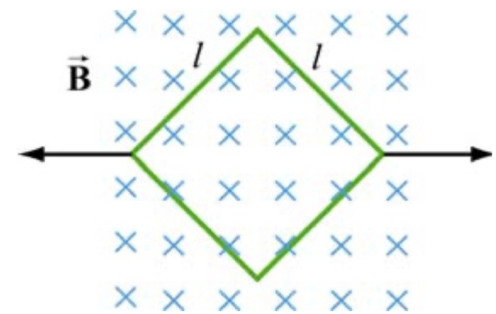
Αλλά $I(t) = a + bt \Rightarrow \frac{dI}{dt} = b$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ΗΕΔ: $\mathcal{E} = -\frac{\mu_0 b l}{2\pi} ln\left(\frac{s+w}{s}\right)$

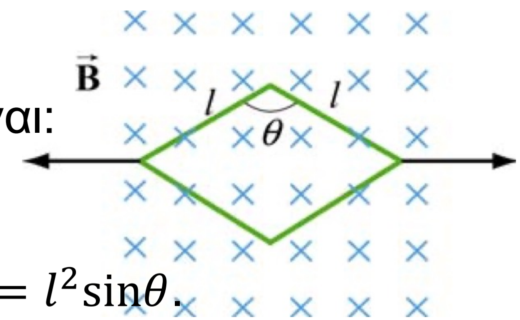
Ο ευθύγραμμος αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα *I* προκαλεί μια μαγνητική ροή προς το εσωτερικό της σελίδας που διαπερνά το ορθογώνιο πλαίσιο.

Σύμφωνα με τον νόμο του Lenz, το επαγόμενο ρεύμα θα πρέπει να έχει φορά αντίθετη με τη φορά των δεικτών του ρολογιού ώστε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί να έχει φορά προς το εξωτερικό της σελίδας και να αντισταθμίζει την αύξηση της εισρέουσας μαγνητικής ροής

Παράδειγμα: Βρόχος που αλλάζει εμβαδό επιφάνειας



Ένα τετραγωνικό πλαίσιο πλευράς μήκους l τοποθετείται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με φορά προς το εσωτερικό της σελίδας. Κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος Δt, το πλαίσιο τραβιέται από τις δύο αντιδιαμετρικές γωνίες του και μετατρέπεται σε ρόμβο. Υποθέτοντας ότι η ολική αντίσταση του πλαισίου είναι R, βρείτε το μέσο επαγωγικό ρεύμα στο πλαίσιο και την κατεύθυνσή του.



Από τον νόμο του Faraday έχουμε ότι η επαγόμενη ΗΕΔ θα είναι:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -B\frac{\Delta A}{\Delta t}$$

Η αρχική και τελική επιφάνεια του πλαισίου είναι $A_i = l^2$ και $A_f = l^2\sin\theta$.

Το εμβαδό ενός παραλληλογράμμου πλευρών $\vec{l}_1$ και $\vec{l}_2$ δίνεται από το εξωτερικό γινόμενο: $A = \left|\vec{l}_1 \times \vec{l}_2\right| \Rightarrow A = l_1 l_2 sin\theta$.

Η μέση μεταβολή της επιφάνειας θα είναι: $\dfrac{\Delta A}{\Delta t} = \dfrac{A_f - A_i}{\Delta \mathrm{t}} = \dfrac{l^2 sin\theta - l^2}{\Delta \mathrm{t}} = \dfrac{l^2(sin\theta - 1)}{\Delta \mathrm{t}} \Rightarrow$

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = -\frac{l^2(1 - sin\theta)}{\Delta t} < 0$$

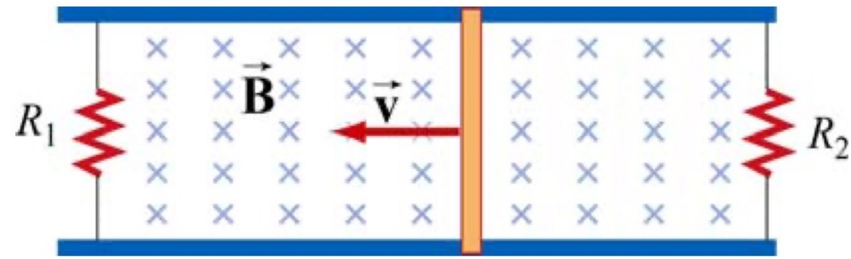
Επομένως η ΗΕΔ θα είναι: $\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi_m}{dt} = \dfrac{Bl^2(1 - sin\theta)}{\Delta t} > 0$

και το μέσο επαγόμενο ρεύμα: $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R} = \dfrac{Bl^2(1 - sin\theta)}{R\Delta t} > 0$

εφόσον $\Delta A/\Delta t < 0$ η ροή ελαττώνεται και το επαγόμενο ρεύμα κινείται με τη φορά των δεικτών του ρολογιού

Παράδειγμα: Ράβδος που γλιστρά

Μια αγώγιμη ράβδος μήκους l μπορεί να γλιστρά ελεύθερα πάνω σε δύο παράλληλους αγωγούς. Τα δύο άκρα των παράλληλων ραγών συνδέονται με δύο αντιστάσεις R_1 και R_2. Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με κατεύθυνση προς το εσωτερικό της σελίδας. Υποθέστε ότι η ράβδος κινείται προς τα αριστερά με σταθερή ταχύτητα με την βοήθεια μιας εξωτερικής δύναμης. Υπολογίστε τα ακόλουθα:



(α) Τα ρεύματα που διαρρέουν τις δύο αντιστάσεις

(β) Την ολική ισχύ που καταναλώνεται στις δύο αντιστάσεις

(γ) Την εξωτερική δύναμη που απαιτείται ώστε η ράβδος να κινείται με $\upsilon = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$

(α) Η επαγόμενη ΗΕΔ μεταξύ των δύο άκρων της κινούμενης ράβδου είναι:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -Blv$$

Τα ρεύματα που διαρρέουν τις δύο αντιστάσεις είναι: $I_1 = \dfrac{|\mathcal{E}|}{R_1}$ και $I_2 = \dfrac{|\mathcal{E}|}{R_2}$

Από τη στιγμή που η μαγνητική ροή στον αριστερό βρόχο ελαττώνεται το ρεύμα κινείται σύμφωνα με την φορά των δεικτών του ρολογιού. Στον δεξί βρόχο η μαγνητική ροή αυξάνει και επομένως το ρεύμα θα έχει φορά αντίθετη με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Παράδειγμα: Ράβδος που γλιστρά

(β) Η ολική ισχύ που καταναλώνεται στις δύο αντιστάσεις είναι:

$$P_R = I_1|\mathcal{E}| + I_2|\mathcal{E}| = (I_1 + I_2)|\mathcal{E}| = |\mathcal{E}|^2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow P_R = B^2\upsilon^2 l^2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow$$

(γ) Το ολικό ρεύμα που διαρρέει την ράβδο είναι: $I = I_1 + I_2$

Η μαγνητική δύναμη που ασκείται στη ράβδο θα είναι:

$$F_B = IBl = Bl|\mathcal{E}|\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow \quad F_B = B^2 l^2 \upsilon\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

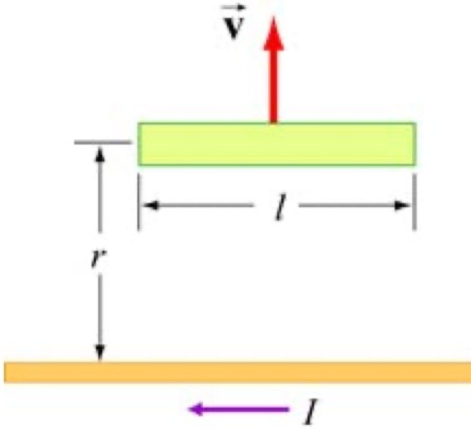
Η διεύθυνση της δύναμης είναι προς τα δεξιά. Επομένως για να κινείται η ράβδος με σταθερή ταχύτητα θα πρέπει η συνισταμένη δύναμη να είναι 0. Δηλαδή η εξωτερική δύναμη θα πρέπει να είναι ίση και αντίθετη της μαγνητικής δύναμης:

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_{\varepsilon\xi.}$$

Διαφορετικά θα μπορούσαμε να εξαγάγουμε το αποτέλεσμα θεωρώντας την ισχύ που καταναλώνεται στις δύο αντιστάσεις, και η οποία θα πρέπει να είναι ίση με την ισχύ που προσφέρεται από την εξωτερική δύναμη:

$$P_{\varepsilon\xi.} = \vec{F}_{\varepsilon\xi.} \cdot \vec{\upsilon} = B^2\upsilon^2 l^2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Παράδειγμα: Ράβδος που κινείται



Μια αγώγιμη ράβδος μήκους *l* κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ κάθετα σε ένα απείρου μήκους αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα *I*. Ποια είναι η ΗΕΔ που επάγεται στα άκρα της ράβδου

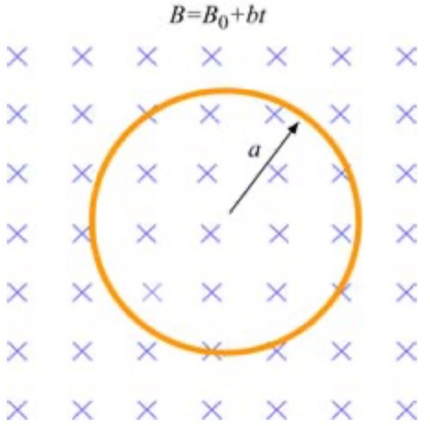
Από τον νόμο του Faraday θα έχουμε ότι η κινητική ΗΕΔ θα είναι:

$|\mathcal{E}| = B\upsilon l$ όπου υ η ταχύτητα της ράβδου

Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ο ευθύγραμμος αγωγός είναι: $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Αντικατάσταση στην εξίσωση της ΗΕΔ δίνει: $|\mathcal{E}| = \dfrac{\mu_0 I \upsilon l}{2\pi r}$

Παράδειγμα: Χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο



Ένας κυκλικός βρόχος ακτίνας α τοποθετείται σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο με το επίπεδο του βρόχου κάθετο στο μαγνητικό πεδίο. Το μαγνητικό πεδίο αλλάζει με το χρόνο σύμφωνα με την εξίσωση: $B(t) = B_0 + bt$ όπου $B_0, b > 0$. Να υπολογισθούν:

(α) Η μαγνητική ροή που διαπερνά τον βρόχο τη στιγμή *t* = 0

(β) Η επαγόμενη ΗΕΔ στον βρόχο

(γ) Το επαγόμενο ρεύμα και η διεύθυνσή του αν η ολική αντίσταση είναι *R*

(δ) Η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση *R*

(α) Η μαγνητική ροή τη στιγμή *t* είναι: $\Phi_m = BA = (B_0 + bt)\pi a^2 = \pi\ (B_0 + bt)a^2$

Όπου θεωρούμε ότι το διάνυσμα της επιφάνειας είναι στο εσωτερικό της σελίδας και επομένως η ροή $\Phi_m > 0$

Τη χρονική στιγμή *t* = 0 η ροή είναι: $\Phi_m(t = 0) = \pi B_0 a^2$

(β) Από τον νόμο του Faraday, η επαγόμενη ΗΕΔ είναι: $\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi_m}{dt} = -\dfrac{AdB}{dt} \Rightarrow$

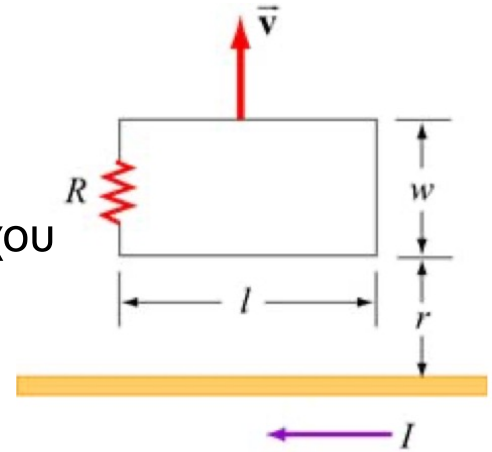
$$\mathcal{E} = -(\pi\alpha^2)\frac{dB}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = -(\pi\alpha^2)b$$

(γ) Το επαγόμενο ρεύμα θα είναι: $I = \dfrac{|\mathcal{E}|}{R} = \dfrac{\pi a^2 b}{R}$ με διεύθυνσή του αντίθετη των δεικτών

(δ) Η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση: $P = I^2 R = \left(\dfrac{\pi a^2 b}{R}\right)^2 R = \dfrac{(\pi a^2 b)^2}{R}$

Παράδειγμα: Κινούμενος βρόχος

Ένας ορθογώνιος βρόχος διαστάσεων l και w κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}$ απομακρυνόμενο από ευθύγραμμο αγωγό απείρου μήκους που διαρρέεται από ρεύμα I. Η ολική αντίσταση του βρόχου είναι R. Ποιο είναι το ρεύμα που διαρρέει τον βρόχο όταν η κοντινότερη στον ευθύγραμμο αγωγό πλευρά του βρίσκεται σε απόσταση r από αυτόν



Το μαγνητικό πεδίο σε απόσταση *s* από τον ευθύγραμμο αγωγό θα δίνεται από:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

Η μαγνητική ροή διαμέσου μια στοιχειώδους επιφάνειας του βρόχου θα είναι:

$$d\Phi_m = \vec{B}\cdot d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} l ds$$

με το διάνυσμα της επιφάνειας προς το εσωτερικό της σελίδας και επομένως $\Phi_m > 0$.

Ολοκληρώνοντας ως προς την επιφάνεια του βρόχου, βρίσκουμε την ολική ροή:

$$\Phi_m = \int d\Phi_m = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \int_r^{r+w} \frac{ds}{s} = \frac{\mu_0 l I}{2\pi} ln\left(\frac{r+w}{r}\right)$$

Παραγωγίζοντας ως προς *t*, θα πάρουμε την επαγόμενη *ΗΕΔ*: $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \Rightarrow$

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu_0 l I}{2\pi}\frac{d}{dt}\left(ln\frac{r+w}{r}\right) = -\frac{\mu_0 l I}{2\pi}\left(\frac{1}{r+w} - \frac{1}{r}\right)\frac{dr}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\mu_0 l I}{2\pi}\frac{wv}{r(r+w)}$$

όπου $v = \frac{dr}{dt}$

Παράδειγμα: Κινούμενος βρόχος

Να σημειωθεί ότι η επαγόμενη ΗΕΔ μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την εξίσωση:

$$\mathcal{E} = \oint \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{s} \Rightarrow \mathcal{E} = vl[B(r) - B(r+w)] = vl\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(r+w)}\right] \Rightarrow$$

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 I v l}{2\pi}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{(r+w)}\right] \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\frac{vw}{r(r+w)}$$

Το επαγόμενο ρεύμα είναι: $I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi R}\frac{vw}{r(r+w)}$