ΦΥΣ 331 – Χειμερινό Εξάμηνο 2015

Τελική Εξέταση

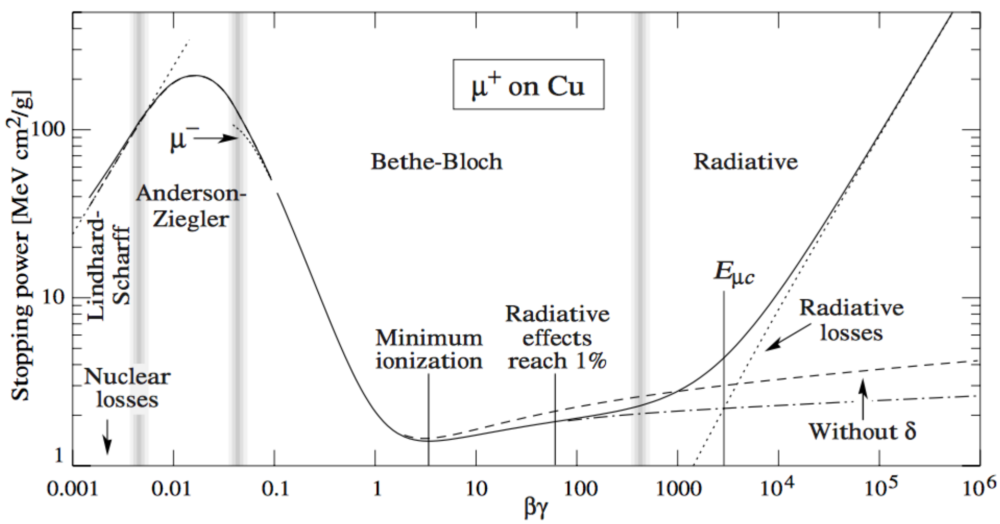
Σάββατο 12/10/2015 **Διάρκεια**: **10:00 – 13:00**

Σας δίνονται 5 ισοδύναμα προβλήματα και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλα. Σύνολο μονάδων 100.

Καλή Επιτυχία

1. **[20μ]**

Ένα πείραμα απαιτεί θετικά μιόνια (μ^+) με πολύ μικρή κινητική ενέργεια ώστε να μπορέσουν να σταματήσουν σε στόχο ώστε αυτό να βοηθήσει στην μέτρηση του χρόνου ζωής τους. Τα μιόνια παράγονται από την διάσπαση, $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$, εν πτήση των πιονίων της δέσμης. Η κινητική ενέργεια των πιονίων είναι 85 MeV. Πιόνια συγκεκριμένης ορμής και κατεύθυνσης επιλέγονται περνώντας την δέσμη μέσω ενός τσιμεντένιου εμποδίου το οποίο έχει μια τρύπα στο κέντρο του.



Σχήμα 1: Απώλεια ενέργειας σε MeV cm²/g για φορτισμένο σωματίδιο καθώς κινείται μέσα σε υλικό, συναρτήσει του σχετικιστικού παράγοντα βγ.

(α) Υπολογίστε το μήκος διάσπασης των πιονίων στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Ο χρόνος ζωής των π^+ είναι 26ns και η μάζα τους είναι 139.6 MeV.
Η σύσταση της προσπίπτουσας στο πείραμα δέσμης βρέθηκε ότι ήταν 90% π^+ και 10% μ^+. Εκτιμήστε την απόσταση της πειράματος από το σημείο παραγωγής των πιονίων. Θεωρήστε ότι η ταχύτητα του φωτός είναι 2.998 x 10^8m/s. **[4μ]**

(β) Υπολογίστε τις ενέργειες των νετρίνο και των μιονίων στο σύστημα αναφοράς του πιονίου. Υποθέστε ότι τα νετρίνο έχουν μηδενική μάζα και ότι η μάζα των μιονίων είναι $m_\mu = 105.7\,MeV$. **[4μ]**

(**γ**) Υπολογίστε τη μέγιστη και ελάχιστη κινητική ενέργεια των μιονίων στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. [**4μ**]

(**δ**) Υπολογίστε τη μέγιστη γωνία (μετρούμενη ως προς τη διεύθυνση της δέσμης) των διασπώμενων μιονίων στο σύστημα αναφορας του εργαστηρίου. [**4μ**]

(**ε**) Ένα κιβώτιο από άνθρακα μήκους 30cm τοποθετείται στην διεύθυνση της προσπίπτουσας δέσμης πριν από τον ανιχνευτή του πειράματος. Το κουτί αυτό σταματά πιόνια, έτσι ώστε μια πολύ καθαρή δέσμη μιονίων να προσπίπτει στο στόχο που βρίσκεται μετά από το κιβώτιο, κατά μήκος της διεύθυνσης της δέσμης.

Χρησιμοποιήστε το σχήμα 1, υποθέτοντας ότι τα σωματίδια χάνουν ενέργεια μόνο μέσω ιονισμού, για να δείξετε ότι τα μιόνια της μέγιστης ενέργειας μπορούν να διαπεράσουν το κουτί του άνθρακα αλλά τα πιόνια σταματούν στο κιβώτιο αυτό. Θεωρείστε την πυκνότητα του άνθρακα, $d_C = 2.27 g / cm^3$. [**4μ**]

2. [**20μ**]

Δεδομένου του περιεχομένου σε quarks των σωματιδίων που αναφέρονται $\Lambda(uds)$, $K^0(\bar{s}d)$, $K^+(u\bar{s})$ και $\pi^+(u\bar{d})$, να σχεδιάσετε τα διαγράμματα Feynman των ακόλουθων διεργασιών (θα πρέπει να δείξετε ποια η διεύθυνση του χρόνου στις γραμμές σωματιδίων):

(**α**) Σκέδαση $\pi^- p \to \Lambda K^0$ χρησιμοποιώντας gluons αλλά όχι W's. [**4μ**]

(**β**) Διάσπαση $\Lambda \to n\pi^0$. [**3μ**]

(**γ**) Διάσπαση $K^+ \to \pi^+\pi^0$ [**3μ**]

(**δ**) Διάσπαση $\tau^+ \to \pi^+\nu_\tau$ [**4μ**]

(**ε**) Διάσπαση $K^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0$ [**6μ**]

3. [**20μ**]

(**α**) Σχεδιάστε το ή τα διάγραμματα Feynman πρώτης τάξης (leading order) για την σκέδαση $A + A \rightarrow C + C$ του μοντέλου ABC που συζητήσαμε στις διαλέξεις. Μη ξεχάσετε να σημειώσετε την διεύθυνση του χρόνου. [**5μ**]

(**β**) Ποιο είναι το πλάτος μετάβασης $|M|^2$ συναρτήσει των 4-ορμών; [**4μ**]

(**γ**) Ποια είναι η διαφορική ενεργός διατομή σκέδασης, $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, συναρτήσει των 4-ορμών στο σύστημα κέντρου μάζας; [**3μ**]

(**δ**) Ποια είναι η διαφορική ενεργός διατομής σκέδασης, $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, συναρτήσει της γωνίας σκέδασης στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας, υποθέτοντας ότι το A και C έχουν μάζα M και το B έχει μηδενική μάζα; [**5μ**]

(**ε**) Σχεδιάστε το ή τα πρώτης τάξης διαγράμματα Feynman για την σκέδαση $A + A \rightarrow A + A$. [**3μ**]

4. [**20μ**]

Το φορτισμένο πιόνιο, το οποίο έχει spin μηδέν και μάζα 139.6 MeV, μπορεί να διασπαστεί σε ένα ηλεκτρόνιο, μάζας 0.511MeV ή ένα μιόνιο μάζας 105.7 MeV, μέσω της διάσπασης $\pi^- \to l^- \bar{\nu}_l$, όπου l αναπαραστά το λεπτόνιο, ηλεκτρόνιο ή μιόνιο. Οι διασπάσεις αυτές έχουν ποσοστό διακλάδωσης $1.23\text{x}10^{-4}$ και 0.99988 σε ηλεκτρόνιο ή μιόνιο αντίστοιχα. Στα επόμενα θεωρήστε την μάζα των αντι-νετρίνο αμελητέα.

(**α**) Σχεδιάστε το διάγραμμα Feynman για την διάσπαση. [**2μ**]

(**β**) Ο χρυσός κανόνας του Fermi, δίνει ότι το μερικό εύρος, Γ_i, ενός σωματιδίου μάζας m, για να διασπαστεί στο κανάλι διάσπασης i, δίνεται από την σχέση: $\Gamma_i = \frac{|M_i|^2 \rho_i}{2m}$, όπου M_i είναι το πινακοστοιχείο της μετάβασης και ρ_i, είναι ο αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz φασικός χώρος. Εξηγήστε σύντομα την φυσική σημασία των όρων της εξίσωσης αυτής. [**4μ**]

(**γ**) Ο φασικός χώρος που είναι διαθέσιμος για την παραπάνω διάσπαση του πιονίου σε δεδομένο λεπτόνιο, δίνεται από την εξίσωση: $\rho_l = \frac{1}{8\pi}\frac{m_\pi^2 - m_l^2}{m_\pi^2}$. Υπολογίστε τον λόγο των μέτρων των παραγόντων του φασικού χώρου για τις δυο διασπάσεις και σχολιάστε το αποτέλεσμα. [**4μ**]

(**δ**) Το αποτέλεσμα για το πινακοστοιχείο για την πιθανότητα των παραπάνω διασπάσεων είναι: $|M_i|^2 = 2G_F^2 f_\pi m_l^2 \left(m_\pi^2 - m_l^2\right)$ όπου G_F^2 είναι η σταθερά Fermi ενώ f_π είναι ο λεγόμενος παράγοντας μορφής του πιονίου (ηλεκτρικός/μαγνητικός). Βρείτε μια σχέση μεταξύ των επί μέρους ευρών διάσπασης για τις δυο αυτές διασπάσεις και σχολιάστε το αποτέλεσμά σας. [**3μ**]

(**ε**) Ένα αριστερόστροφο φερμιόνιο έχει συνιστώσες τόσο με αρνητική όσο και θετική ελικότητα, $\lambda = \pm 1$, με πλάτη $\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 \mp \frac{p}{E+m}\right)$ αντίστοιχα, όπου p και E είναι η ορμή και ενέργεια του φερμιονίου. Είναι γνωστό ότι το φορτισμένο ρεύμα των ασθενών αλληλεπιδράσεων συζεύγνυται μόνο με αριστερόστροφα φερμιόνια και με δεξιόστροφα αντιφερμιόνια. Χρησιμοποιείστε αυτά τα δεδομένα, καθώς και διατήρηση της στροφορμής για να σχεδιάσετε ένα διάγραμμα το οποίο να δείχνει τις ελικότητες του λεπτονίου και του νετρίνο στις διασπάσεις αυτές και εξηγήστε την επιλογή των ελικοτήτων που κάνατε. [**4μ**]

(**στ**) Από την εξίσωση του (**δ**) υποερωτήματος προκύπτει ότι ο ρυθμός διάσπασης μηδενίζεται όταν η μάζα του λεπτονίου προσεγγίζει το μηδέν. Εξηγήστε την παρατήρηση αυτή χρησιμοποιώντας το διάγραμμα που σχεδιάσατε στο υποερώτημα (**ε**) και εξηγήστε με τον τρόπο αυτό τον λόγο για τον οποίο η διάσπαση του πιονίου σε ηλεκτρόνιο είναι τόσο πολύ μικρή σε σχέση με την διάσπαση σε μιόνιο. [**3μ**]

5. [20μ]

Θεωρήστε τον χειραλικό τελεστή $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ και τον τελεστή ελικότητας $\vec{\Sigma}\cdot\hat{p}$, όπου $\vec{\Sigma}$, ο τελεστής του σπιν, που δίνεται από την σχέση $\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$ ενώ $\hat{p} = \dfrac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος της διεύθυνσης της κίνησης ενός φερμιονίου με σπιν ½.

Η Hamiltonian Dirac δίνεται από την σχέση: $H = \vec{a}\cdot\vec{p} + \beta m$, όπου:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ και $\beta = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix}$ ενώ ορίζουμε τους $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$

με τις ιδιότητες: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ και $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$. Οι πίνακες $\vec{\sigma}$ είναι οι πίνακες Pauli.

(**α**) Δείξτε ότι με αυτή την Hamiltonian, η ελικότητα διατηρείται πάντοτε σε κάποιο δεδομένο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. [**3μ**]

(**β**) Δείξτε ότι η χειραλικότητα διατηρείται μόνο στο σχετικιστικό όριο όταν η μάζα του φερμιονίου είναι είτε ακριβώς μηδέν ή μπορεί να αγνοηθεί. [**3μ**]

(**γ**) Θεωρήστε τις λύσεις για θετική και αρνητική ενέργεια της εξίσωσης Dirac:

$$\Psi^{(1,2)}(x) = N\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \end{pmatrix}\chi^{\pm}e^{-ip^\mu x_\mu} \text{ (Λύσεις θετικής ενέργειας)}$$

$$\Psi^{(3,4)}(x) = N\begin{pmatrix} \dfrac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E-m} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}\chi^{\pm}e^{-ip^\mu x_\mu} \text{ (Λύσεις αρνητικής ενέργειας)}$$

όπου $\chi^+ = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ και $\chi^- = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Δείξτε ότι είναι ιδιοδιανύσματα του τελεστή ελικότητας $\vec{\Sigma}\cdot\hat{p}$. Δείξτε δηλαδή ότι ισχύει $(\vec{\Sigma}\cdot\hat{p})\Psi = \lambda\Psi$ με ιδιοτιμές $\lambda = \pm 1$. [**6μ**]

(**δ**) Στο εξαιρετικά σχετικιστικό όριο, η εξίσωση Dirac γράφεται: $\gamma^\mu \partial_\mu \Psi(x) = 0$. Θεωρήστε την γενική λύση της εξίσωσης του Dirac $\Psi(x) = u(\vec{p})e^{-ip_\mu x^\mu}$ και δείξτε ότι στην περίπτωση αυτή, ο τελεστής χειραλικότητας είναι ίσος με τον τελεστή ελικότητας για τις λύσεις θετικής ενέργειας, $p^0 = E > 0$, δηλαδή ισχύει ότι: $\gamma_5\Psi = (\vec{\Sigma}\cdot\hat{p})\Psi$, ενώ για τις λύσεις αρνητικής ενέργειας, $p^0 = E < 0$, δείξτε ότι: $\gamma_5\Psi = -(\vec{\Sigma}\cdot\hat{p})\Psi$. [**4μ**] (**ε**) Χρησιμοποιείστε την απάντηση από το προηγούμενο ερώτημα για να δείξετε ότι στο εξαιρετικά σχετικιστικό όριο, ο spinor $\Psi_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\Psi$ είναι ένας καθαρά αρνητικής ελικότητας spinor, δηλαδή $\lambda = -1$ αν ο Ψ είναι ιδιοκατάσταση θετικής ενέργειας και $\Psi_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\Psi$ είναι ένας καθαρά θετικής ελικότητας spinor, δηλαδή $\lambda = +1$ αν ο Ψ είναι ιδιοκατάσταση αρνητικής ενέργειας. [**4μ**]

Υπόδειξη: Γράψτε τον Ψ με την μορφή $\Psi = \Psi(\uparrow) + \Psi(\downarrow)$ όπου $\Psi(\uparrow)$ και $\Psi(\downarrow)$ είναι οι ιδιοκαταστάσεις με θετικής και αρνητικής ελικότητας.