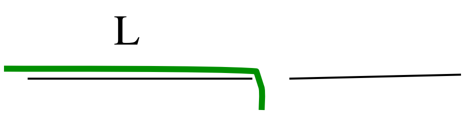
Παράδειγμα – Ενέργειες

Το ακόλουθο πρόβλημα μπορεί να λυθεί είτε με χρήση των νόμων του Newton (F=ma) ή Διατήρηση ενέργειας.

Ένα μικρό τμήμα σχοινιού κρέμεται προς τα κάτω μέσα από μια τρύπα σε λείο τραπέζι. Το σκοινί πέφτει μέσω της τρύπας.

Ποια η ταχύτητά του τη στιγμή που έχει περάσει πλήρως από την τρύπα?



Λύση με διατήρηση της ενέργειας

Θεωρούμε την επιφάνεια του τραπεζιού σαν ύψος 0.

$$U_i + K_i = U_f + K_f \Rightarrow 0 + 0 = mg\left(-\frac{L}{2}\right) + \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 \Rightarrow \mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{gL}}$$

μέσο ύψος που έπεσε το σχοινί

Λύση με $\mathrm{F} = \mathrm{m}\alpha$

Έστω τη χρονική στιγμή t το σχοινί έχει πέσει κατά μήκος x

Έστω ακόμα ότι το σχοινί έχει γραμμική πυκνότητα ρ=m/L ➔ m = ρL

Η δύναμη που κινεί το σχοινί είναι το βάρος του τμήματος που κρέμεται

$F = ma = m'g$ m η συνολική μάζα του σχοινιού m=ρL και m΄ αυτή που κρέμεται

$$\Rightarrow F = m'g = \overset{m}{(\rho L)}a \Rightarrow \overset{m'}{(\rho x)}g = (\rho L)a \Rightarrow \rho x g = \rho L\left(\frac{d\mathrm{v}}{d\mathrm{x}}\frac{d\mathrm{x}}{d\mathrm{t}}\right) = \rho \mathrm{L}\left(\mathrm{v}\frac{d\mathrm{v}}{d\mathrm{x}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g\int_\sigma^L x\,dx = \int_0^{\mathrm{v}} L\mathrm{v}\,d\mathrm{v} \Rightarrow g\frac{L^2}{2} - \overset{\sim 0}{\cancel{g\frac{\sigma^2}{2}}} = L\frac{\mathrm{v}^2}{2} \Rightarrow \mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{gL}}$$

σ είναι το αρχικό πολύ μικρό μήκος που το σχοινί κρέμεται

Ορμή - Κρούσεις

Γραμμική Ορμή - Κρούσεις

- Ορισμός: $\vec{p} \equiv m\vec{\upsilon}$

- Ενδιαφέρουσα ποσότητα:
  - 2ο Νόμο του Newton $\vec{F} \equiv m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \dfrac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Σωστή διατύπωση του 2ου Νόμου

> Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος ισούται με την συνισταμένη δύναμη που δρα πάνω στο σώμα

- Ο ορισμός αυτός της δύναμης είναι πολύ πιο γενικός από ότι έχουμε χρησιμοποιήσει μέχρι τώρα.
- Επιτρέπει επίσης τον υπολογισμό και για μεταβαλλόμενες μάζες.

Αν F=0 τότε η ορμή σταθερή

Διατήρηση Ορμής

- Θεωρούμε σύστημα ≥2 σώματα απομονωμένο από το περιβάλλον:
  - Από 3ο Νόμο του Newton $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (Δύναμη στο 1 λόγω 2)

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \sigma\tau\alpha\theta$$

Νόμος Διατήρησης της Ορμής:
Σε ένα απομονωμένο σύστημα 2 ή περισσοτέρων σωμάτων που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους η ολική ορμή του συστήματος διατηρείται ανεξάρτητα από το είδος της αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωμάτων.

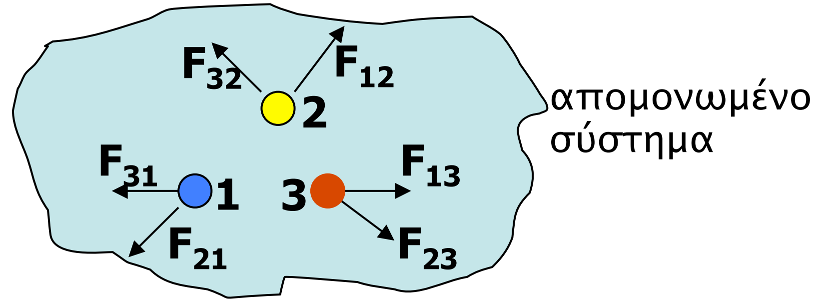
- Δηλαδή σε απομονωμένα συστήματα δεν υπάρχει κανένας μηχανισμός που να δημιουργεί ή να καταστρέφει ορμή

- Η ορμή του συστήματος διατηρείται αλλά όχι απαραίτητα η ορμή του κάθε σώματος ξεχωριστά.

- Η ολική ορμή ενός απομονωμένου συστήματος ισούται με την αρχική του ορμή.

Διατήρηση της ορμής

- Αν είχαμε περισσότερα σώματα τότε



$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}) + (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}) + (\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}) = 0$$

- Γενικά σε απομονωμένο σύστημα όλες οι δυνάμεις εξουδετερώνονται σε ζεύγη

Τι συμβαίνει σε μια μπάλα που κινείται σε παραβολική τροχιά ?

Η ταχύτητα της αλλάζει και επομένως αλλάζει και η ορμή της

Υπάρχει μια ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ δύναμη (η βαρύτητα).
Το σύστημα δεν είναι απομονωμένο

- Αν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις τότε:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^{\varepsilon\sigma\omega\tau.} + \vec{F}_i^{\varepsilon\xi\omega\tau.} \Rightarrow \frac{d\left(\sum \vec{p}_i\right)}{dt} = \sum \vec{F}_i^{\varepsilon\sigma\omega\tau.} + \sum \vec{F}_i^{\varepsilon\xi\omega\tau.} \Rightarrow \frac{d\vec{P}_{o\lambda\iota\kappa\eta}}{dt} = \vec{F}_{\varepsilon\xi\omega\tau.} + 0$$

Αν θεωρήσουμε τη γη-μπάλα σαν ένα σύστημα (απομονωμένο τώρα) τότε η ορμή διατηρείται

Διατήρηση της ορμής

- Η διατήρηση της ορμής μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά με διάφορους τρόπους

$$\vec{p}_{ολ.} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = σταθ$$

$$\vec{p}_1^{\,\mathrm{i}} + \vec{p}_2^{\,\mathrm{i}} = \vec{p}_1^{\,\mathrm{f}} + \vec{p}_2^{\,\mathrm{f}}$$

- Σε μορφή συνιστωσών, η συνολική ορμή σε κάθε διεύθυνση διατηρείται:

$$p_{\mathrm{x}}^{\mathrm{i}} = p_{\mathrm{x}}^{\mathrm{f}} \qquad p_{\mathrm{y}}^{\mathrm{i}} = p_{\mathrm{y}}^{\mathrm{f}} \qquad p_{\mathrm{z}}^{\mathrm{i}} = p_{\mathrm{z}}^{\mathrm{f}}$$

- Διατήρηση της ορμής μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε συστήματα με οποιαδήποτε αριθμό σωμάτων

Τοξοβόλος

Έστω ένας τοξοβόλος ο οποίος βρίσκεται πάνω σε μια λεία επιφάνεια (δεν υπάρχουν τριβές)

Πως μπορούμε να μελετήσουμε την δυναμική του συστήματος αυτού;

- Εφαρμογή του 2ου Νόμου του Newton? ΟΧΙ

  Δεν υπάρχουν πληροφορίες για F ή α

- Εφαρμογή διατήρησης ενέργειας? ΟΧΙ

  Δεν υπάρχουν πληροφορίες για έργο ή ενέργεια

- Εφαρμογή διατήρησης ορμής? ΝΑΙ

Τοξοβόλος (συνέχεια)

- Έστω ότι το σύστημά μας είναι ο τοξοβόλος με το τόξο (σώμα 1) και το βέλος (σώμα 2)

- Δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις που ενεργούν στα σώματα στην x-διεύθυνση

  Το σύστημα είναι απομονωμένο ως προς την x-διεύθυνση και άρα η ορμή διατηρείται.

- Η ορμή του συστήματος πριν αφήσει το βέλος = 0

- Η ολική ορμή του συστήματος αφού ρίξει το βέλος θα είναι:

$$\vec{p}^{\,f}_{\tau o\xi o\beta o\lambda o\varsigma} + \vec{p}^{\,f}_{\beta\varepsilon\lambda o\varsigma} = 0 \Rightarrow \vec{p}^{\,f}_{\tau o\xi o\beta o\lambda o\varsigma} = -\vec{p}^{\,f}_{\beta\varepsilon\lambda o\varsigma}$$

- Ο τοξοβόλος θα κινηθεί αντίθετα με την φορά κίνησης του βέλους
  - Συμφωνεί και με το 3ο νόμο του Newton

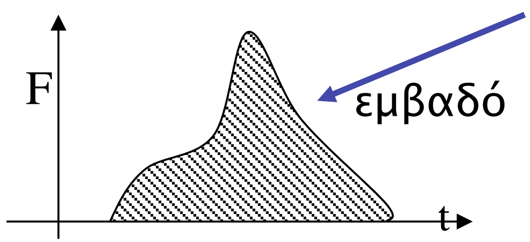
- Επειδή η μάζα του τοξοβόλου είναι πολύ μεγαλύτερη από του βέλους η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του είναι αμελητέες σε σχέση με αυτές του βέλους

Ώθηση

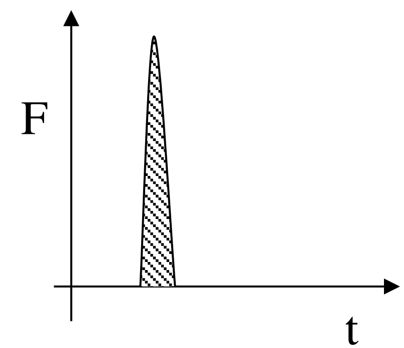
Από το 2ο νόμο του Newton έχουμε $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

$$d\vec{p} = \vec{F}dt \Rightarrow \int d\vec{p} = \int \vec{F}dt \Rightarrow \Delta\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt \Rightarrow$$

Ώθηση: $\boxed{I \equiv \Delta\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt}$



Για μικρό Δt, F μπορεί να ΄ναι μεγάλη ➔ μεγάλη μεταβολή ορμής



Θεώρημα ώθησης – ορμής: Η ώθηση μιας δύναμης F που δρα σε ένα σώμα ισούται με τη μεταβολή της ορμής του σώματος

- Αυτό είναι ισοδύναμο με το 2ο νόμο του Newton

Η ώθηση δεν είναι ιδιότητα του σώματος αλλά ένας μέγεθος που δείχνει την μεταβολή της ορμής ενός σώματος

Χτύπημα καράτε

- Σπάσιμο μιας σανίδας ξύλου με την ώθηση

$I = F\Delta t = \Delta p = m\Delta \upsilon$ Δt πολύ μικρό και Δp = σταθ. ➔ F μεγάλη

- Σώματα:
  - ✓Χέρι: $M_{χεριού}$=3Kg, ταχύτητα $\upsilon_{χεριού}$=15m/s, ορμή $p_{χεριού}$ =45Kg m/s
  - ✓Σανίδα: l=30 cm, κινείται ~1cm πριν σπάσει, ~500Nt για 1cm λύγισμα

Αν υποθέσουμε ότι η σανίδα σταματά το χέρι τότε:

$$\Delta l = \bar{\upsilon}\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta l}{\bar{\upsilon}} = \frac{1cm}{(\upsilon_f - \upsilon_i)/2} = \frac{1cm}{7.5m/s} \Rightarrow \Delta t = 10ms$$

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{45\text{K}gm/s}{0.001s} = 4.5\times 10^4 N!!!$$

Παράδειγμα

Δυο όμοιες μπάλες αφήνονται να πέσουν στο έδαφος από το ίδιο ύψος. Και στις δυο περιπτώσεις οι μπάλες έχουν την ίδια ταχύτητα προς τα κάτω καθώς χτυπούν στο έδαφος. Στην περίπτωση 1 η μπάλα αναπηδά ενώ στη περίπτωση 2 η μπάλα παραμένει κολλημένη στο έδαφος. Σε ποια περίπτωση το μέγεθος της ώθησης από το έδαφος στη μπάλα είναι μεγαλύτερη;

(Α) Περίπτωση 1 (Β) Περίπτωση 2 (Γ) Ίδια και στις δυο περιπτώσεις

Περίπτωση 1 - Αναπήδηση

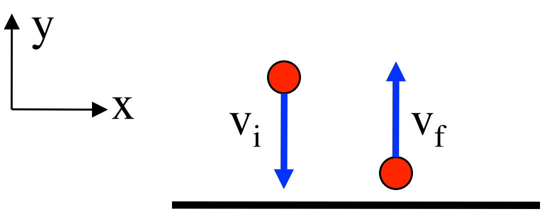
$$|\mathrm{I}| = |\Delta\vec{p}| \Rightarrow |\mathrm{I}| = |m\vec{\upsilon}_f - m\vec{\upsilon}_i|$$

$$\Rightarrow |\mathrm{I}| = m|\vec{\upsilon}_f - (-\vec{\upsilon}_i)| = 2m\upsilon$$

Περίπτωση 2 – Μη αναπήδηση

$$|\mathrm{I}| = |\Delta\vec{p}| \Rightarrow |\mathrm{I}| = |m\vec{\upsilon}_f - m\vec{\upsilon}_i|$$

$$\Rightarrow |\mathrm{I}| = m|0 - (-\vec{\upsilon}_i)| = m\upsilon$$



Παράδειγμα

Ο Γιώργος μάζας 75kg και η Μαρία μάζας 50kg είναι ακίνητοι στηριζόμενοι στα πατίνια τους κοιτάζοντας ο ένας τον άλλο. Η Μαρία σπρώχνει το Γιώργο με μια σταθερή δύναμη F = 45N για Δt = 3sec. Ποιος από του δυο θα κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα μετά την ώθηση;

(Α) Γιώργος

(Β) Μαρία

(Γ) Έχουν την ίδια ταχύτητα

Γιώργος (κίνηση σε + διεύθυνση)

$$\mathrm{I} = \Delta\vec{p} = F_{\mathrm{M}\to\Gamma}\Delta t = 45\times 3 = 135\,N\sec$$

$$\mathrm{I} = m_{\Gamma}\left(\vec{\upsilon}_f - \vec{\upsilon}_i\right) = m_{\Gamma}\upsilon_{\Gamma}$$

Από τις 2 παραπάνω σχέσεις

$$\upsilon_{\Gamma} = \frac{135}{75} = 1.8\,m/s$$

Μαρία (κίνηση σε – διεύθυνση)

$$\mathrm{I} = \Delta\vec{p} = F_{\Gamma\to\mathrm{M}}\Delta t = \left(-45\right)\times 3 = -135\,N\sec$$

$$\mathrm{I} = m_{\mathrm{M}}\left(\vec{\upsilon}_f - \vec{\upsilon}_i\right) = -m\upsilon_{\mathrm{M}}$$

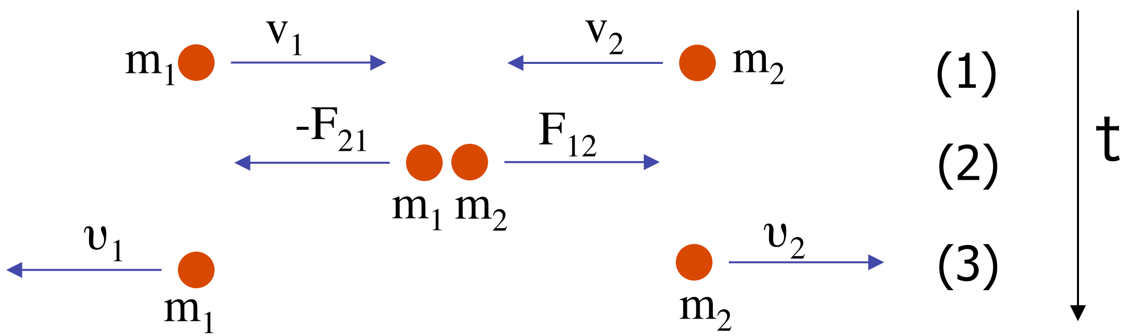
Από τις 2 παραπάνω σχέσεις

$$\upsilon_{\mathrm{M}} = -\frac{135}{50} = -2.7\,m/s$$

Σημειώστε: $\vec{P}_{\Gamma} + \vec{P}_{M} = 75\times 1.8 + 50\times\left(-2.7\right) = 135 - 135 = 0 \;\Rightarrow \vec{P}^{f}_{\Gamma/M} = 0 = \vec{P}^{i}_{\Gamma/M}$

Κρούσεις

- Αν δύο σώματα συγκρουστούν τότε:
  - Υπάρχει ώθηση (ο χρόνος αλλαγής ορμής είναι μικρός)
  - Οι δυνάμεις είναι ίσες και αντίθετες και πολύ μεγαλύτερες από οποιαδήποτε εξωτερική δύναμη (σύστημα απομονωμένο)



- Ξέρουμε ότι $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow d\vec{p} = \vec{F}dt \Rightarrow \int d\vec{p} = \int \vec{F}dt$

Εξετάζουμε τη μάζα m_2: $\vec{p}_2' - \vec{p}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt = \Delta\vec{p}_2$

Εξετάζουμε τη μάζα m_1: $\vec{p}_1' - \vec{p}_1 = \int_{t_i}^{t_f} -\vec{F}dt = \Delta\vec{p}_1$

Από τη στιγμή που οι δυνάμεις είναι ίσες και αντίθετες $\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$

$$\Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

Ελαστική κρούση – 1 διάσταση

- Σε ελαστικές κρούσεις διατηρούνται η κινητική ενέργεια και η ορμή

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

Διατήρηση ορμής

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$$

Διατήρηση κινητικής ενέργειας

Έχουμε 2 εξισώσεις και 2 αγνώστους: v'_1 και v'_2. Λύνουμε για v'_1 και v'_2

Μετά από πράξεις μπορούμε να δείξουμε ότι για κρούσεις σε 1-διάσταση:

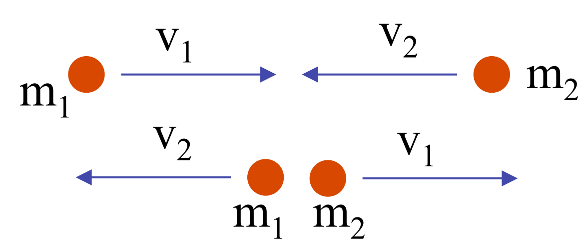
$$\vec{v}_1' = v_1\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) + v_2\left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

$$\vec{v}_2' = v_1\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) + v_2\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

Αν $m_1 = m_2$ τότε:

$v'_2 = v_1$ και $v'_1 = v_2$

τα σώματα ανταλλάσουν ταχύτητες



Ελαστική κρούση

- Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\boxed{\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_2' - \vec{v}_1'}$$

Δηλαδή οι σχετικές τους ταχύτητες είναι ίδιες πριν και μετά την κρούση ακόμα και αν οι μάζες τους είναι διαφορετικές

Μή Ελαστικές και Πλαστικές κρούσεις

- Σε μή ελαστικές κρούσεις ΔΕΝ ΔΙΑΤΗΡΕΙΤΑΙ η μηχανική ενέργεια
- Επομένως υπάρχει μόνο μια εξίσωση, αυτή της διατήρησης της ορμής

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

- Σε πλαστικές κρούσεις τα σώματα μένουν κολλημένα μετά την κρούση

Κρούση σε 1-διάσταση - Παράδειγμα

Μια σφαίρα 7.00gr όταν φεύγει από ένα πιστόλι προς ένα ακλόνητο ξύλινο τούβλο μάζας 1.00kgr διεισδύει στο τούβλο σε βάθος 8.00cm. Το τούβλο κατόπιν τοποθετείται πάνω σε μια λεία επιφάνεια και είναι ελεύθερο να κινηθεί. Μια δεύτερη όμοια σφαίρα πυροβολείται με την ίδια ταχύτητα και ίδια απόσταση από το όπλο προς το τούβλο. Σε πόσο βάθος θα εισχωρήσει η σφαίρα μέσα στο τούβλο στην δεύτερη περίπτωση;

Λύση

Υποθέτουμε ότι οι ταχύτητες των 2 σφαιρών είναι ίσες και ότι η ίδια δύναμη απαιτείται ώστε οι σφαίρες να διεισδύσουν μέσα στο τούβλο. Αυτή η δύναμη δρα στη σφαίρα αντίθετα με τη φορά της κίνησής της

- Για την 1η σφαίρα, από το θεώρημα έργου-ενέργειας έχουμε:

$$W = E^{\mathrm{f}}_{\kappa\iota\nu.} - E^{\mathrm{i}}_{\kappa\iota\nu.} = -E^{\mathrm{i}}_{\kappa\iota\nu.} \Rightarrow -Fd_1 = -\frac{1}{2}m_{\sigma\varphi.}\upsilon_{\mathrm{i}}^2 \Rightarrow F = \frac{m_{\sigma\varphi.}\upsilon_{\mathrm{i}}^2}{2d_1} \qquad (1)$$

- Όμοια για τη 2η σφαίρα: (το τούβλο μπορεί να κινηθεί τώρα)

$$W = E^{\mathrm{f}}_{\kappa\iota\nu.} - E^{\mathrm{i}}_{\kappa\iota\nu.} \Rightarrow -Fd_2 = \frac{1}{2}(m^2_{\sigma\varphi} + m^1_{\sigma\varphi} + M_{\tau o \upsilon \beta.})\upsilon_{\mathrm{f}}^2 - \frac{1}{2}m_{\sigma\varphi}\upsilon_{\mathrm{i}}^2 \qquad (2)$$

- Από διατήρηση της ορμής στη 2η περίπτωση παίρνουμε:

$$p_{\mathrm{i}} = p_{\mathrm{f}} \Rightarrow m_{\sigma\varphi}\upsilon_{\mathrm{i}} = (2m_{\sigma\varphi} + M_{\tau o \upsilon \beta.})\upsilon_{\mathrm{f}} \Rightarrow \upsilon_{\mathrm{f}} = \frac{m_{\sigma\varphi}\upsilon_{\mathrm{i}}}{(2m_{\sigma\varphi} + M_{\tau o \upsilon \beta.})} \qquad (3)$$

Αντικαθιστούμε την (1) και (3) στη (2)

$$-\frac{m_{\sigma\varphi.}\upsilon_{\mathrm{i}}^2}{2d_1}d_2 = \frac{1}{2}\left(2m_{\sigma\varphi.} + M_{\tau o \upsilon \beta.}\right)\frac{m^2_{\sigma\varphi.}\upsilon_{\mathrm{i}}^2}{\left(2m_{\sigma\varphi.} + M_{\tau o \upsilon \beta.}\right)^2} - \frac{1}{2}m_{\sigma\varphi.}\upsilon_{\mathrm{i}}^2 \Rightarrow d_2 = \frac{m_{\sigma\varphi.} + M_{\tau o \upsilon \beta.}}{\left(2m_{\sigma\varphi.} + M_{\tau o \upsilon \beta.}\right)}d_1$$