ΦΥΣ 145 – Μαθηματικές Μέθοδοι στη Φυσική

21 Μαίου 2009

Γράψτε το ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητάς σας στο πάνω μέρος της αυτής της σελίδας.

Επίσης γράψετε το password σας. Στο τέλος της εξέτασης θα πρέπει να αφήσετε όλα τα προγράμματά σας και οποιαδήποτε άλλο αρχείο δημιουργήσατε το οποίο σας ζητούσε η εξέταση σε ένα φάκελο που θα τον ονομάσετε Final. Όλα τα files θα τα πάρω από αυτό το φάκελο.

Σας δίνονται 5 προβλήματα και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλα. Συνολική βαθμολογία 100 μονάδες.

Ο χρόνος εξέτασης είναι κανονικά 180+ λεπτά (όπου + δεν τείνει στο άπειρο**)**

Από τη στιγμή αυτή δεν υπάρχει συνεργασία/συζήτηση ανταλλαγή αρχείων και e-mails με κανένα και φυσικά κουδούνισμα κινητού που πρέπει να κλείσουν. Σημειώσεις, χαρτάκια κλπ απαγορεύονται όπως και επισκέψεις σε ιστοσελίδες ή accounts που δεν αναφέρονται στην ιστοσελίδα του μαθήματος.

Καλή επιτυχία
Καλό καλοκαίρι και
Καλή συνέχεια στα επόμενα χρόνια σας στο φυσικό

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Θεωρήστε ότι ένα μικρό χαλίκι εκτεινάσεται κατακόρυφα προς τα πάνω (θεωρήστε την φορά προς τα πάνω σα τη +y) με αρχική ταχύτητα υ_0. Σε συνθήκες έλειψης αντίστασης του αέρα ξέρουμε ότι η πέτρα θα ανέβει σε ένα ύψος $\frac{\upsilon_0^2}{2g}$, ενώ η ταχύτητα με την οποία επιστρέφει στο έδαφος είναι και ίδια με την αρχική της ταχύτητα υ_0 και ο χρόνος ανόδου είναι ίσος με το χρόνο καθόδου. Πριν κάνετε οποιαδήποτε αριθμητική επίλυση του προβλήματος δώστε μια απλή ποιοτική εξήγηση για το πως νομίζετε ότι θα επιρεαστούν οι ποσότητες αυτές με την παρουσία αντίστασης του αέρα. Ιδιαίτερα εξηγήστε πως θα διαφέρει ο χρόνος ανόδου από το χρόνο καθόδου (μεγαλύτερος, μικρότερος ή ίδιος). (δώστε τις απαντήσεις σας στο παρακάτω χώρο. [**5β**].

Κάνετε τώρα μια αριθμητική επίλυση του προβλήματος για να δείτε αν οι απαντήσεις σας ήταν σωστές. Υποθέστε ότι η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας, υ^2. Θεωρήστε ότι η μάζα της πέτρας είναι 10^{-2} kgr, η ακτίνας της 0.01m με αποτέλεσμα η σταθερά αντίστασης να είναι D=10^{-2} kgr ($F_D = -mD\upsilon^2$). Θεωρήστε ότι η πέτρα ρίχνεται με αρχική ταχύτητα υ_0=50m/s. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του ενδιάμεσου σημείου για την λύση του προβλήματός αυτού. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να υπολογίσει το χρόνο ανόδου και το χρόνο καθόδου, το μέγιστο ύψος στο οποίο φθάνει η πέτρα και να κάνει τη γραφική παράσταση της συνισταμένης δύναμης συναρτήσει της ταχύτητας υ. Θα πρέπει να αποθηκεύσετε το γράφημα αυτό σα pdf file με όνομα *stone.pdf*. Θα πρέπει να γράψετε σε ένα διαφορετικό file (*stone.dat)* τα αποτελέσματα που σας ζητούνται (χρόνος ανόδου, καθόδου, μέγιστο ύψος). [**20β**]

2. Δυό σωματίδια 1 και 2 βάλλονται από την θέση x=0 την ίδια χρονική στιγμή t=0 με ταχύτητες v_1=5m/s και v_2= -10m/s. Τα σωματίδια κινούνται μέσα σε ένα δυναμικό της μορφής $U(x)=9[\cosh(x)-1]$ (Αν θυμάστε η δύναμη δίνεται από τη σχέση $F=-\frac{dU}{dx}$). Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο ταχύτητας-Verlet για να παρακολουθήσετε την εξέλιξη και των δυό σωματιδίων ταυτόχρονα και προσδιορίστε την χρονική στιγμή καθώς και την θέση που τα δυό σωματίδια συναντιούνται και πάλι. Χρησιμοποιήστε σα χρονικό βήμα dt=9.76563x10^{-5}s και θεωρήστε σα μέγιστο επιτρεπτό χρονικό διάστημα για να σταματήσετε το πρόγραμμα αν δεν έχουν συναντηθεί τα σωματίδια t_{max} = 100s. Προσέξτε στη συνθήκη που θα θέσετε για να συναντηθούν καθώς επίσης και στο γεγονός ότι οι θέσεις τους όταν συναντιούνται, όπως και η χρονική στιγμή θα πρέπει να υπολογιστούν με γραμμική interpolation. Θα πρέπει να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των τροχιών των δυό σωματιδίων (x(t) συναρτήσει του t) στο ίδιο γράφημα στο οποίο θα πρέπει να φαίνονται ποια σημεία αντιστοιχούν σε ποιο σωματίδιο. Το γράφημα αυτό θα πρέπει να το βάλετε σε ένα pdf file με όνομα *particles.pdf*. Οι θέσεις των σωματιδίων τη στιγμή της συνάντησης και ο χρόνος συνάντησης θα πρέπει να αποθηκευτούν σε ένα file με το όνομα *particles.dat*. [**20β**]

3. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μέσης τιμής της Monte Carlo ολοκλήρωσης να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \sin x dx$ (στο διάστημα $x \in [0, \pi]$). Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να υπολογίζει την τιμή του ολοκληρώματος για αρχικά δύο σημεία τα οποία διαδοχικά αυξάνουν γεωμετρικά (2, 4, 8, ...) μέχρι μέγιστη τιμή 2^{17}. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει για κάθε περίπτωση σημείων την τιμή του ολοκληρώματος καθώς και το σφάλμα του υπολογισμού. Το σφάλμα θα το υπολογίσετε από τη σχέση: $err = (b-a)\sqrt{\frac{\left(\left\langle f(x)^2 \right\rangle - \left\langle f(x) \right\rangle^2\right)}{N}}$ όπου N είναι ο αριθμός των σημείων, b και α τα όρια ολοκλήρωσης και $\langle f(x) \rangle$ δηλώνει τη μέση τιμή της συνάρτησης ολοκλήρωσης ως προς τον αριθμό των σημείων ολοκλήρωσης. Θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση RAND() για την δημιουργεία τυχαίων αριθμών με αρχικό seed=123456. Τα αποτελέσματα του προγράμματός σας θα πρέπει να τα αποθηκεύσετε σε ένα αρχείο με όνομα *integral.dat* και στο οποίο θα πρέπει να υπάρχουν 3 στήλες, αριθμό προσπαθειών, τιμή ολοκληρώματος και αντίστοιχο σφάλμα. [**20β**]

4. Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο Runge-Kutta $4^{ου}$ βαθμού για να λύσετε την ακόλουθη διαφορική εξίσωση $1^{ης}$ τάξης:

$$\frac{dy}{dt} = y(t) \text{ με } y(t=0) = 1$$

Θεωρήστε ότι t_{max} = 4.0sec χρησιμοποιώντας διαφορετικά χρονικά βήματα Δt, ξεκινώντας με Δt=0.5 και ελαττώνοντάς τα. Συγκρίνετε τα αριθμητικά σας αποτελέσματα με την αναλυτική λύση e^{-t} και με τα αποτελέσματα που πέρνετε με την μέθοδο του Euler. Θα πρέπει να επιστρέψετε το πρόγραμμά σας καθώς και τη γραφική παράσταση που δείχνει την αναλυτική λύση, τα αποτελέσματα της μεθόδου Runge-Kutta και τα αποτέλεσματα της μεθόδου Euler, δηλαδή 3 γραφήματα στο ίδιο διάγραμμα, για βήμα Δt=0.5sec. (*<u>Υπόδειξη</u>*: Οι λύσεις των προβλημάτων 1 και 5 του $5^{ου}$ homework είναι ιδιαίτερα βοηθητικές).
[6β Euler + 14β Runge-Kutta = **20β**].

5. Η αρχή του Fermat αναφέρεται στην διάδοση των ακτίνων φωτός (τουλάχιστον στο τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε καθημερινά τη διάδοση του φωτός σε διάφορα μέσα). Σύμφωνα με την αρχή αυτή μια ακτίνα φωτός διαδίδεται από ένα σημείο A σε ένα σημείο B ακολουθώντας τη διαδρομή που απαιτεί το λιγότερο χρόνο. Η αρχή αυτή αποτελεί τη βάση της γεωμετρικής οπτικής. Για ένα ομογενές μέσο το φως διαδίδεται από ένα σημείο A σε ένα σημείο B ακολουθώντας ευθεία γραμμή. Επειδή η ταχύτητα του φωτός είναι σταθερή σε ένα μέσο η διαδρομή του ελαχίστου χρόνου είναι αυτή της ελάχιστης απόστασης, δηλαδή η ευθεία γραμμή από το A στο B. Η ταχύτητα του φωτός σε ένα μέσο περιγράφρεται συναρτήσει της ταχύτητας του φωτός στο κενό, c, σύμφωνα με τη σχέση $\upsilon = \dfrac{c}{n}$, όπου n είναι ο δείκτης διάθλασης του μέσου. Υποθέτουμε τώρα ότι το φως διαδίδεται από ένα μέσο με συντελεστή διάθλασης n_1 σε ένα άλλο μέσο με συντελεστή διάθλασης n_2. Τα δυο μέσα χωρίζονται με επίπεδη επιφάνεια. Μπορούμε χρησιμοποιώντας την αρχή του Fermat και μια μέθοδο Monte Carlo να βρούμε τη διαδρομή που θα ακολουθήσει το φως πηγαίνοντας από ένα σημείο A του ενός μέσου, σε ένα σημείο B του άλλου μέσου.

Η στρατηγική που θα ακολουθήσουμε είναι να ξεκινήσουμε με μια τυχαία διαδρομή και να κάνουμε αλλαγές στη διαδρομή αυτή με τυχαίο τρόπο. Οι αλλαγές αυτές θα γίνονται αποδεκτές μόνο αν ελαττώνουν το χρόνο διάδοσης του φωτός από το A στο B.

Θα πρέπει να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο κάνει τα ακόλουθα. (***α***) Υποθέστε ότι υπάρχουν N διαφορετικά μέσα όλα του ίδιου πάχους (επομένως η x-συντεταγμένη τους διαφέρει κατά μια μονάδα) και το φως διαδίδεται από τα αριστερά προς τα δεξιά. Επομένως υπάρχουν και N-1 διαχωριστικές επιφάνειες. (***β***) Ο δείκτης διάθλασης είναι σταθερός σε κάθε μέσο και αυξάνει πηγαίνοντας από το ένα μέσο στο άλλο (αριστερά προς τα δεξιά). Επομένως η ταχύτητα του φωτός ελαττώνεται από τα αριστερά προς τα δεξιά. (***γ***) Επειδή το φως διαδίδεται ευθύγραμμα σε ένα μέσο, η διαδρομή του φωτός ουσιαστικά δίνεται από τις συντεταγμένες y(i) πάνω σε κάθε διαχωριστική επιφάνεια. (***δ***) Οι συντεταγμένες της πηγής του φωτός και του φωτοανιχνευτή είναι (0,y(1)) και (N,y(N)) αντίστοιχα όπου y(1) και y(N) είναι σταθερά σημεία. (***ε***) Η αρχική διαδρομή διαγράφεται από τη συλλογή τυχαίων σημείων πάνω σε κάθε διαχωριστική επιφάνεια. (***στ***) Η διαδρομή του φωτός βρίσκεται διαλέγοντας τυχαία μια διαχωριστική επιφάνεια, i, και δημιουργώντας ένα δοκιμαστικό σημείο με συντατaγμένη y(i) που διαφέρει από την προηγούμενη τιμή της κατά μια τυχαία ποσότητα στο διάστημα -δ και δ. Αν η δοκιμαστική αυτή συντεταγμένη οδηγεί σε μικρότερη χρονικά διαδρομή τότε η συντεταγμένη αυτή αποτελεί τη νέα συντεταγμένη y(i) από την οποία περνά το φως στην επιφάνεια αυτή. (***ζ***) Η διαδρομή επαναπροσδιορίζεται κάθε φορά που επιφέρεται κάποια αλλαγή.

Εφαρμόστε τη παραπάνω μέθοδο σε ένα πρόγραμμα. Θεωρήστε ότι το φως διαδίδεται από ένα υλικό (αέρα) με δείκτη διάθλασης n_1=1 σε άλλο υλικό με δείκτη διάθλασης n_2=1.5 (γυαλί). Θεωρήστε ότι οι δυο αυτές περιοχές μπορούν να χωριστούν σε 10 διαφορετικά μέσα. Επομένως η διαχωριστική επιφάνεια 5 αποτελεί και τη διαχωριστική επιφάνεια των 2 περιοχών. Θεωρήστε ότι το επιτρεπτό διάστημα δ για αλλαγή της συντεταγμένης είναι δ=0.5. Τέλος θεωρήστε ότι οι y-συντεταγμένες της πηγής του φωτός και του φωτοανιχνευτή είναι αντίστοιχα 2 και 8. Θα πρέπει να επαναλάβετε τη διαδικασία για κάποιο αριθμό προσπαθειών αλλαγής συντεταγμένων. Στο τέλος θα πρέπει να τυπώσετε σε ένα file με όνομα light_path.dat, τις συντεταγμένες των αρχικών τυχαίων σημείων (αρχική τυχαία διαδρομή) καθώς και τις συντεταγμένες τις τελικής σας διαδρομής. Θα πρέπει επίσης να βρείτε το χρόνο για να καλύψει τη διαδρομή αυτή. [**20β**]