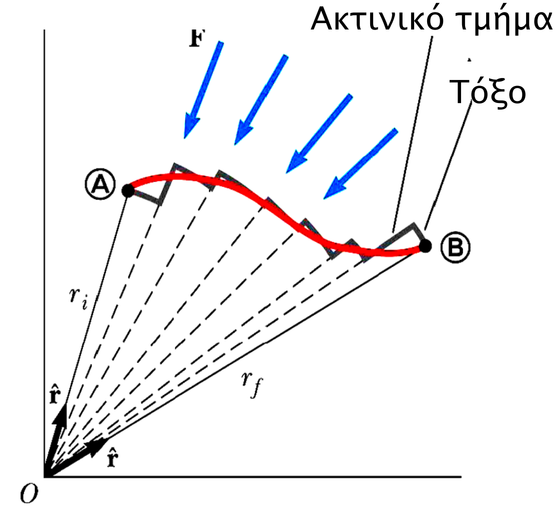
Βαρυτική δυναμική ενέργεια

- Η βαρυτική δύναμη είναι συντηρητική δύναμη
- Η βαρυτική δύναμη είναι κεντρική δύναμη
  - Έχει ακτινική διεύθυνση με φορά προς το κέντρο
  - Το μέτρο της εξαρτάται μόνο από την απόσταση r
  - Μια κεντρική δύναμη μπορεί να γραφεί $F(r)\,\hat{r}$
- Σωματίδιο κινείται από το σημείο Α στο Β υπό την επίδραση κεντρική δύναμης
- Μπορούμε να χωρίσουμε τη διαδρομή σε μια σειρά από ακτινικά τμήματα και τμήματα τόξου
- Το έργο κατά μήκος των τμημάτων τόξου είναι μηδέν και επομένως το έργο εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση r_f και r_i



Βαρυτική δυναμική ενέργεια

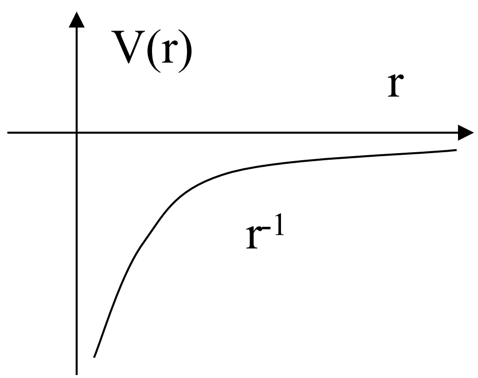
Για να βρούμε τη βαρυτική δυναμική ενέργεια, χρειάζεται να ολοκληρώσουμε τη δύναμη.

$$F = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -\int_{r_1}^{r_2} F\,dr = -\int_{r_1}^{r_2}\left(-G\frac{Mm}{r^2}\right)dr = -\frac{GMm}{r}\Bigg|_{r_1}^{r_2} \Rightarrow dV = -GMm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

(-) επειδή η δύναμη είναι ελκτική

Δαπανώμενο έργο για να κινηθεί η μάζα m ως την M

- Συνήθως θεωρούμε σα σημείο αναφοράς το σημείο $r_1 = \infty$



$$V(r) = -\frac{GMm}{r}, \quad V(\infty) = 0$$

Η ειδική περίπτωση: mgh

- Για την δυναμική ενέργεια βαρύτητας έχουμε μάθει να χρησιμοποιούμε τη σχέση: mgh
  - Αυτή είναι ειδική περίπτωση της γενικής εξίσωσης: $-G\dfrac{Mm}{r}$ κοντά στην επιφάνεια της γης, γιατί:

$$\Delta V = GMm\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)=\frac{GMm}{R}\left(1-\frac{1}{1+h/R}\right)=\frac{GMm}{R}\left(1-\frac{1}{1+\varepsilon}\right)\Rightarrow$$

Επειδή ε << 1 μπορούμε να πάρουμε το διονυμικό ανάπτυγμα: $\dfrac{1}{1+\varepsilon}=1-\varepsilon+\cdots$

$$\Delta V = \frac{GMm}{R}\left[1-\left(1-\frac{h}{R}\right)\right]=\left(\frac{GM}{R^2}\right)mh\equiv mgh$$

$\boxed{\text{Η σχέση αυτή ισχύει μόνο για h << R}}$

Στις 2 τελευταίες σελίδες κάναμε ένα μεγάλο κύκλο: ολοκληρώσαμε τη δύναμη για να πάρουμε το δυναμικό, διαφορίσαμε το δυναμικό και πολλαπλασιάσαμε με h για να πάρουμε έργο: Fh=mgh

Σφαιρικά σώματα και βαρύτητα

- Χρησιμοποιήσαμε τις εκφράσεις $F(r) = -\frac{GMm}{r^2}$ και $V(r) = -\frac{GMm}{r}$ που ισχύουν για σημειακές μάζες M και m.

- Ένα χαρακτηριστικό γεγονός, που κάνει τους υπολογισμούς πολύ πιο εύκολους είναι ότι αυτές οι εξισώσεις ισχύουν και για τις σφαίρες.

  Για τη βαρύτητα, σφαιρικά σώματα μοιάζουν σαν υλικά σημεία με όλη τη μάζα τους στο κέντρο της σφαίρας.

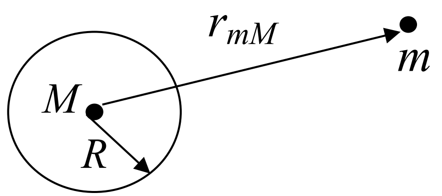
- Προς το παρόν δεχόμαστε δύο σημαντικά γεγονότα:
  - Αν είστε **ΕΞΩ** από μια σφαιρική κοιλότητα, η κοιλότητα μοιάζει σαν υλικό σημείο.

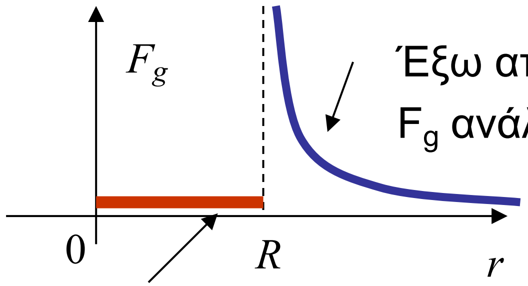
    Οι σφαίρες μοιάζουν να αποτελούνται από πολλές σφαιρικές κοιλότητες και άρα οι σφαίρες μοιάζουν επίσης σαν υλικά σημεία
  - Αν είστε **ΜΕΣΑ** σε μια σφαιρική κοιλότητα, η κοιλότητα μοιάζει σαν τίποτα.

    Είναι σα να μην υπάρχει καμιά δύναμη.

Γραφική αναπαράσταση

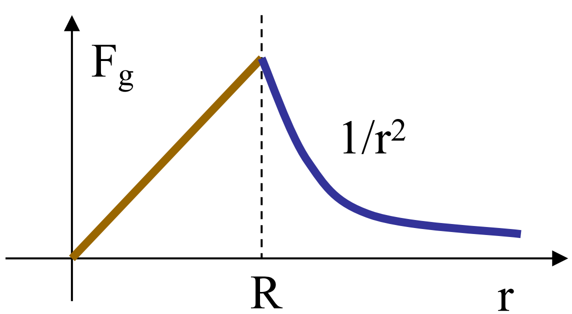
Για σφαιρικές κοιλότητες:





Για σφαίρες: Άθροισμα σφαιρικών κοιλοτήτων

Αθροίζουμε όλες τις σφαιρικές κοιλότητες για να δημιουργήσουμε μια συμπαγή σφαίρα



$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \qquad r \geq R$$

$$\vec{F}'_g = -\frac{GmM'}{r^2}\hat{r} \qquad r < R$$

όπου M΄ είναι η μάζα που περιέχεται σε σφαίρα ακτίνας r < R

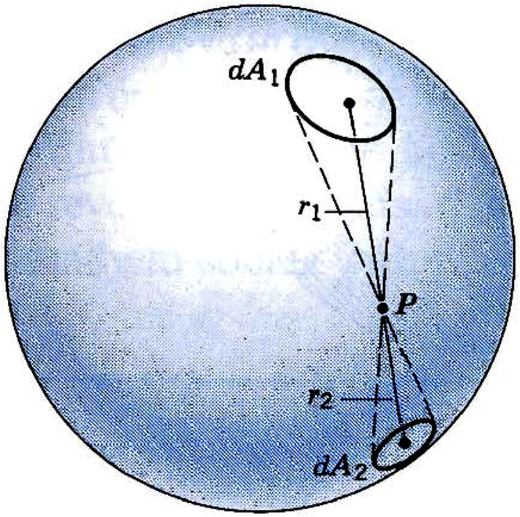
Για σφαίρα ομοιόμορφης πυκνότητας:

$$\frac{M'}{M} = \frac{\rho V'}{\rho V} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow M' = M\frac{r^3}{R^3} \Rightarrow \vec{F}'_g = -\frac{GmM}{r^2}\frac{r^3}{R^3}\hat{r} \Rightarrow \boxed{\vec{F}'_g = -\frac{GmM}{R^3}r\hat{r}} \text{ για } r < R$$

$$\Rightarrow r \to 0 \quad F_g \to 0$$

Μια απόδειξη για την περίπτωση των κοίλων σφαιρών

κοίλη σφαίρα



Αποδεικνύεται εύκολα ότι οι δυνάμεις από τα τμήματα των μαζών στις 2 απέναντι πλευρές του P αλληλοαναιρούνται.

Ας υποθέσουμε για ευκολία ότι η περιοχή A_1 είναι δύο φορές πιο μακριά από το P σε σχέση με την περιοχή A_2.

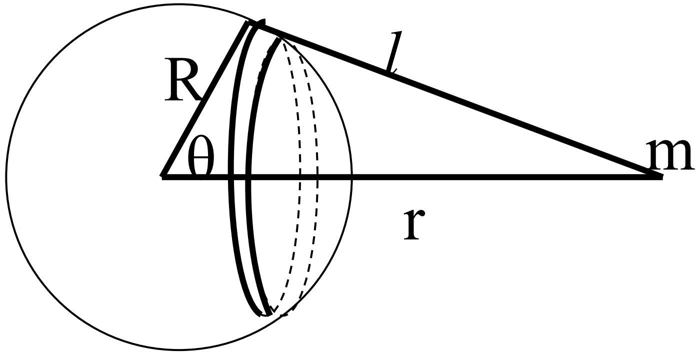
Επομένως το εμβαδό και άρα η μάζα του A_1 θα είναι 4 φορές μεγαλύτερο από αυτό στο A_2.

Αυτός ακριβώς ο όρος, $4=2^2$, στη μάζα αναιρεί το παράγοντα $2^2=4$ στο r^2 του παρονομαστή της δύναμης, καταλήγοντας σε ίσες και αντίθετες δυνάμεις στο P ➔ $\Sigma F=0$

Σημειώστε ότι το παραπάνω επιχείρημα δεν δουλεύει για κυκλικά στεφάνια (αντί κοιλότητας) γιατί χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι τα A_1 και A_2 είναι εμβαδά, που είναι ανάλογα των τετραγώνων των αντίστοιχων μηκών.

Σφαιρικά σώματα μοιάζουν με υλικά σημεία

Αυτό που θα αποδείξουμε εδώ είναι ότι το δυναμικό εξαιτίας ενός σφαιρικού κελύφους (σφαιρικής κοιλότητας) είναι ίδιο με το δυναμικό εξαιτίας μιας σημειακής μάζας στο κέντρο. Από τη στιγμή που F=-dV/dr , το αποτέλεσμα θα ισχύει και για τη δύναμη.



Θεωρήστε ένα σφαιρικό κέλυφος.

Ποιό είναι το δυναμικό στην θέση r?

Χωρίστε το κέλυφος σε δακτυλίους και αθροίστε τα δυναμικά

Από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε: $l = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta}$

Το εμβαδό του δακτυλίου είναι (πάχος)(περιφέρεια) $= (Rd\theta)(2\pi R\sin\theta)$

Έστω σ=M/4πR^2 η πυκνότητα μάζας ανά μονάδα επιφάνειας

Το δυναμικό εξαιτίας του δακτυλίου θα είναι: $-\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} = \frac{-Gm\left(\sigma\left(Rd\theta\right)\left(2\pi R\sin\theta\right)\right)}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta}}$

Σφαιρικά σώματα μοιάζουν με υλικά σημεία

Το δυναμικό εξαιτίας του σφαιρικού κελύφους θα είναι:

$$V(r) = -2\pi\sigma G R^2 m \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta}} = -2\pi\sigma GRm \left. \frac{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta}}{r} \right|_0^{\pi}$$

$$= -2\pi\sigma GRm \frac{1}{r}\left(\sqrt{(R+r)^2} - \sqrt{(r-R)^2} \right)$$

Ανάλογα με το πρόσημο του r-R υπάρχουν 2 περιπτώσεις:

(α) $r > R \Rightarrow \; V(r) = -\frac{2\pi\sigma GRm}{r}\left[(R+r)-(r-R)\right] = -\frac{G\left(4\pi\sigma R^2\right)m}{r} = \frac{-GMm}{r}$

(β) $r < R \Rightarrow \; V(r) = -\frac{2\pi\sigma GRm}{r}\left[(R+r)-(R-r)\right] = -\frac{G\left(4\pi\sigma R^2\right)m}{R} = \frac{-GMm}{R}$

Για να πάρουμε τη δύναμη:

(α) $r > R \Rightarrow F(r) = -\frac{dV}{dr} = -\frac{GMm}{r^2}$

Το κέλυφος μοιάζει με σημειακή μάζα M στο κέντρο

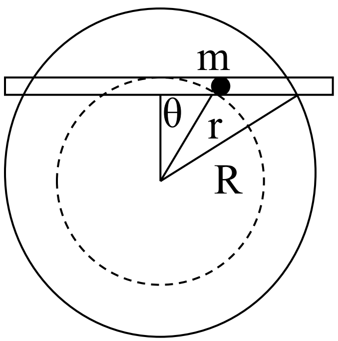
(β) $r < R \Rightarrow \; F(r) = -\frac{dV}{dr} = 0$

Δηλαδή σα να μην υπήρχε το κέλυφος

Ένα απίθανο παράδειγμα

Ανοίγουμε μια τρύπα στη γη από τη μια πλευρά στην άλλη και κατά μήκος μιας χορδής της. Αφήνουμε ένα σώμα να πέσει μέσα στην τρύπα αυτή. Αγνοώντας τριβές κ.λ.π. βρείτε το χρόνο που χρειάζεται για να περάσει από την άλλη άκρη.

Λύση



Η δύναμη στο m είναι $GM_r m/r^2$, προς το εσωτερικό,

M_r είναι η μάζα που περικλείεται σε μια ακτίνα r

(Θυμηθείτε: η μάζα m δεν «βλέπει» τη μάζα που περικλείεται σε κοίλες σφαίρες έξω από την ακτίνα r).

Ο όγκος είναι ανάλογος του r^3 και επομένως $M_r=M(r/R)^3$

$$F_g = \frac{GM\frac{r^3}{R^3}m}{r^2} = \frac{GMmr}{R^3}$$

Θέλουμε μόνο την συνιστώσα της F κατά μήκος της χορδής που ανοίξαμε

$$F_x = ma = F\sin\theta = F\left(\frac{x}{r}\right) = -\frac{GMmx}{R^3} = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{GM}{R^3}x$$

Εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή με συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} = \frac{2\pi}{T} => T \sim 84\min$

Άρα θα χρειαστεί 42min για ένα one-way ταξίδι

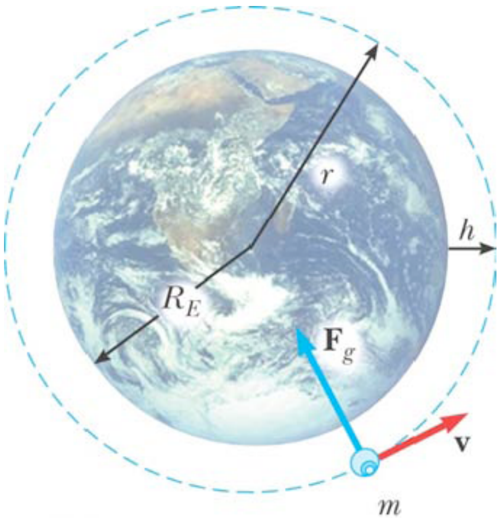
Και ένα πιθανό...

- Σύγχρονοι Δορυφόροι: Μένουν πάντοτε πάνω από το ίδιο σημείο της γης. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα τέτοιο δορυφόρο πάνω από τον ισημερινό. Άρα η περίοδος περιστροφής τους είναι T = 1 ημέρα. Θέλουμε να βρούμε την ακτίνα της τροχιάς τους r, και την γραμμική ταχύτητα v.

$$\frac{GMm_{\delta o\rho.}}{r^2} = m_{\delta o\rho.}\frac{\mathrm{v}^2}{r}$$

Αλλά $$T = \frac{2\pi r}{\mathrm{v}} = 1\eta\mu. \Rightarrow \mathrm{v} = \frac{2\pi r}{T}$$

Επομένως $$\frac{GMm_{\delta o\rho.}}{r^2} = m_{\delta o\rho.}\frac{(2\pi r)^2}{T^2 r}$$



Ταχύτητα διαφυγής

Ορισμός: Ταχύτητα διαφυγής είναι η ταχύτητα που πρέπει να αποκτήσει ένα σώμα ώστε να φθάσει στο άπειρο (r=∞) με ταχύτητα 0.

Ποια αρχική ταχύτητα v_0 απαιτείται ώστε ένα σώμα να ξεφύγει από την βαρυτική δύναμη της γης;

Η μηχανική ενέργεια διατηρείται, και επομένως:

$$E^{i}_{\mu\eta\chi} = E^{f}_{\mu\eta\chi} \Rightarrow U_i + K_i = U_f + K_f \qquad (1)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της ταχύτητας διαφυγής: $\upsilon_f = 0.0 m/s$

Αλλά ξέρουμε ακόμα ότι: $U(r=\infty) = 0 = U_f$

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}v_0^2 - \frac{G\cancel{m}M_{\Gamma\eta}}{r_{\Gamma\eta}} = 0 + 0 \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2GM_{\Gamma\eta}}{r_{\Gamma\eta}}}}$$

Η ταχύτητα είναι ανεξάρτητη της μάζας του σώματος.

Κυκλικές τροχιές

Η μηχανική ενέργεια για δορυφόρο που κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R κοντά στην γη θα είναι:

$$E_{\mu\eta\chi} = U_g + K \Rightarrow E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2} m_\delta \upsilon^2 - G\frac{M_\Gamma m_\delta}{R} \qquad (1)$$

Αλλά για κυκλική τροχιά η βαρύτητα προσφέρει τη κεντρομόλο δύναμη:

$$F_g = F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} \Rightarrow G\frac{M_\Gamma m_\delta}{R^2} = m_\delta \frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow \upsilon^2 = G\frac{M_\Gamma}{R} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας (2) στην (1) έχουμε:

$$E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2} m_\delta \frac{GM_\Gamma}{R} - G\frac{M_\Gamma m_\delta}{R} \Rightarrow E_{\mu\eta\chi} = -\frac{1}{2} m_\delta \frac{GM_\Gamma}{R} \Rightarrow E_{\mu\eta\chi} = \frac{1}{2} U_g = -E_{\kappa\iota\nu}$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για όλες τις κυκλικές τροχιές

17ο Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

- Θα στείλετε τη φωτογραφία της απάντησής σας στο fotis@ucy.ac.cy

Έτοιμοι