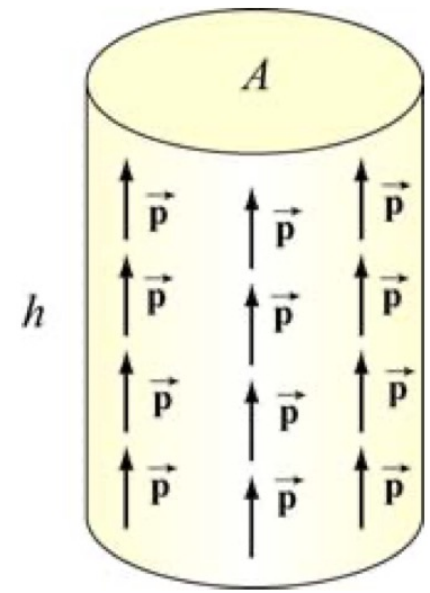
Διηλεκτρικά

(συνέχεια)

Πόλωση

Είδαμε ότι τα διηλεκτρικά υλικά αποτελούνται από πολλά μόνιμα ή επαγόμενα ηλεκτρικά δίπολα

Για να καταλάβουμε τη συμπεριφορά αυτή θα πρέπει να εξετάσουμε το μέσο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από πολλά μικρά προσανατολισμένα ηλεκτρικά δίπολα.



Υποθέστε ότι έχουμε ένα κομμάτι υλικού στη μορφή ενός κυλίνδρου με εμβαδό βάσης *A* και ύψος *h.*

Υποθέτουμε ότι ο κύλινδρος αποτελείται από *N* ηλεκτρικά δίπολα, διπολικής ροπής $\vec{p}$ που εκτείνονται ομοιόμορφα στο χώρο που καταλαμβάνει ο κύλινδρος.

Υποθέτουμε ότι όλες οι ηλεκτρικές διπολικές ροπές των ηλεκτρικών δίπολων είναι προσανατολισμένες παράλληλα με τον άξονα του κυλίνδρου.

Πόλωση

Κάθε δίπολο δημιουργεί το δικό του ηλεκτρικό πεδίο, και στην απουσία ενός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου, θα πρέπει να βρούμε το μέσο ηλεκτρικό πεδίο που προκαλείται από τα προσανατολισμένα δίπολα.

- Θεωρούμε το διάνυσμα πόλωσης $\vec{P}$ το οποίο είναι το διάνυσμα της συνισταμένης διπολικής ροπής ανά μονάδα όγκου:

$$\vec{P} = \frac{1}{Όγκος}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i$$

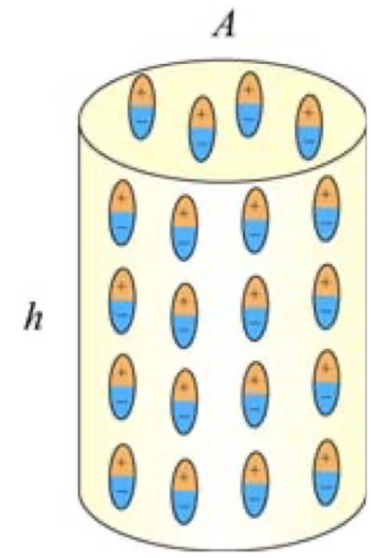
- Για την περίπτωση του κυλίνδρου, όπου όλα τα δίπολα είναι τέλεια προσανατολισμένα, $\vec{P}$, θα δίνεται από τη σχέση:

$$P = \frac{Np}{hA}$$

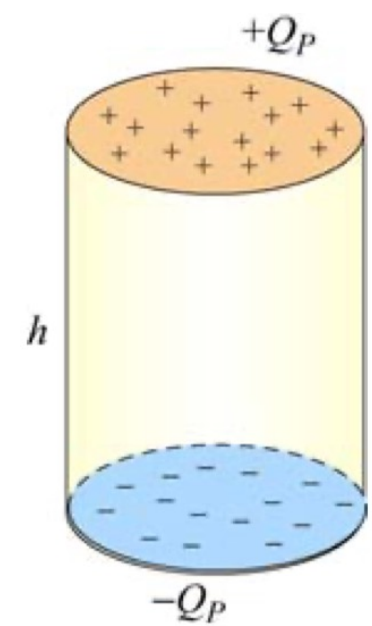
και η διεύθυνση είναι παράλληλη προς τα προσανατολισμένα δίπολα.

Πόλωση – Δημιουργία φορτίου

Θα πρέπει να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν τα προσανατολισμένα αυτά δίπολα



Μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο αυτό αν θεωρήσουμε ότι η κατάσταση των δίπολων του σχήματος μοιάζει με την κατάσταση στην οποία όλα τα ± φορτία που σχετίζονται με τα ηλεκτρικά δίπολα στο εσωτερικό του κυλίνδρου αντικαθίστανται από δύο φορτία +Q και –Q στις δύο βάσεις του κυλίνδρου



Αυτή η ισοδυναμία των δύο κατανομών μπορεί να γίνει κατανοητή αν παρατηρήσουμε ότι στο εσωτερικό του κυλίνδρου το θετικό φορτίο ενός δίπολου αναιρείται από το αρνητικό φορτίο του αμέσως επόμενου δίπολου.

Η μόνη περιοχή στην οποία δεν υπάρχει αυτή η αναίρεση φορτίων δίπολων είναι κοντά στις βάσεις του κυλίνδρου όπου δεν υπάρχουν γειτονικά δίπολα στην πάνω ή κάτω πλευρά.

Το εσωτερικό του κυλίνδρου εμφανίζεται αφόρτιστο κατά μέση τιμή (αθροίζοντας πολλά δίπολα) ενώ οι δύο βάσεις εμφανίζονται φορτισμένες με $+Q_P$ (η πάνω βάση) και $-Q_p$ (η κάτω βάση)

Πόλωση – Υπολογισμός του ισοδύναμου φορτίου

Για τον υπολογισμό του ισοδύναμου φορτίου Q_P μπορούμε να ακολουθήσουμε τα ακόλουθα βήματα

Θεωρούμε την ηλεκτρική διπολική ροπή P_Q που δημιουργεί το φορτίο Q_P

$$P_Q = Q_P h$$

Αυτή η διπολική ροπή θα πρέπει να είναι ισοδυναμεί με την ολική διπολική ροπή που δημιουργούν όλα τα δίπολα στο εσωτερικό του κυλίνδρου:

$$P_Q = Np$$

Επομένως: $P_Q = Np = Q_P h \Rightarrow \boxed{Q_P = \frac{Np}{h}}$

Πόλωση – Υπολογισμός του ισοδύναμου πεδίου

Ξέροντας το φορτίο μπορούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί αυτό το φορτίο

Παρατηρούμε ότι το ισοδύναμο φορτίο κατανέμεται με τέτοιο τρόπο ώστε να μοιάζει με την κατανομή φορτίου ενός επίπεδου πυκνωτή με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ_p

$$\sigma_P = \frac{Q_P}{A} = \frac{Np}{hA} \Rightarrow \boxed{\sigma_P = P}$$ επιφανειακή πυκνότητα φορτίου = πόλωση

Να σημειωθεί ότι οι μονάδες μέτρησης της πόλωσης στο σύστημα *SI* ($C \cdot m/m^3$) είναι ίδιες με αυτές της επιφανειακής πυκνότητας φορτίου

Εν γένει, αν το διάνυσμα της πόλωσης δημιουργεί γωνία θ με το διάνυσμα $\hat{n}$, που είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια με φορά προς τα έξω, η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου θα είναι:

$$\boxed{\sigma_P = P \cdot \hat{n} = P cos\theta}$$

το μέσο ηλεκτρικό πεδίο των διπόλων είναι αντίθετο στη διεύθυνση των διπολων

Άρα το ισοδύναμο ηλεκτρικό πεδίο θα είναι: $\boxed{E_P = \dfrac{P}{\varepsilon_0}}$

Αλλά η διεύθυνση του πεδίου είναι αντίθετη της πόλωσης: $\boxed{\vec{E}_P = -\dfrac{\vec{P}}{\varepsilon_0}}$

Αποτέλεσμα εισαγωγής διηλεκτρικού σε σύστημα

Υποθέτουμε ότι τα άτομα του υλικού που εισάγουμε στο σύστημα έχουν μόνιμη ηλεκτρική διπολική ροπή.

Ο προσανατολισμός των δίπολων αυτών απουσία ηλεκτρικού πεδίου είναι τυχαίος, και επομένως $\vec{P} = \vec{0}$.

Σαν αποτέλεσμα το μέσο ηλεκτρικό πεδίο θα είναι $\vec{E}_P = \vec{0}$.

Όταν υπάρχει εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, $\vec{E}_0$, τότε τα δίπολα προσανατολίζονται εξαιτίας της ροπής $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0$

Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα μια συνισταμένη πόλωση $\vec{P} // \vec{E}_0$ και επομένως ένα μέσο ηλεκτρικό πεδίο, $\vec{E}_P$, το οποίο είναι στην αντίθετη κατεύθυνση με το $\vec{E}_0$, και σαν αποτέλεσμα το ηλεκτρικό πεδίο μειώνεται: $\vec{E} = \vec{E}_P + \vec{E}_0$

Θα έχουμε επομένως: $\vec{E} = \vec{E}_P + \vec{E}_0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 - \dfrac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$

Η πόλωση είναι συνήθως όχι μόνο παράλληλη προς το $\vec{E}$ αλλά και γραμμικά ανάλογη με το $\vec{E}_0$ κάτι που είναι αναμενόμενο γιατί διαφορετικά απουσία πεδίου δεν θα υπήρχε προσανατολισμός των δίπολων αλλά ούτε και πόλωση.

Διηλεκτρική σταθερά

Εκφράζουμε τη γραμμική σχέση της πόλωσης $\vec{P}$ και του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ ως:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

Η σταθερά χ_e ονομάζεται ηλεκτρική επιδεκτικότητα

Υλικά που υπακούν στη προηγούμενη σχέση ονομάζονται γραμμικά διηλεκτρικά

Αντικατάσταση του πεδίου $\vec{E}$ από την σχέση: $\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{P}/\varepsilon_0$ θα δώσει:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \Rightarrow \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} = \chi_e \vec{E} \Rightarrow \vec{E}_0 - \vec{E} = \chi_e \vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_0 = (1 + \chi_e)\vec{E} \Rightarrow \vec{E}_0 = \kappa_e \vec{E}}$$

όπου $\kappa_e = (1 + \chi_e)$ η διηλεκτρική σταθερά.

Παρατηρούμε ότι η διηλεκτρική σταθερά είναι πάντοτε μεγαλύτερη της 1 επειδή $\chi_e>0$

Αυτό σημαίνει ότι: $\frac{E_0}{E} = \kappa_e \Rightarrow \frac{E_0}{k_e} < E_0$

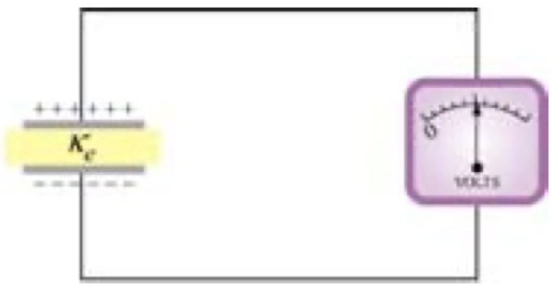
Επομένως η ύπαρξη του διηλεκτρικού έχει σαν αποτέλεσμα την ελάττωση του ηλεκτρικού πεδίου

Η περίπτωση των μη πολικών μορίων δουλεύει ανάλογα με τα προηγούμενα με τη διαφορά ότι τα μόρια δεν είναι προσανατολισμένα αρχικά

Διηλεκτρικά σε πυκνωτή χωρίς μπαταρία

Μια μπαταρία με διαφορά δυναμικού $|\Delta V_0|$ στους πόλους της συνδέεται αρχικά σε έναν πυκνωτή χωρητικότητας C_0 προσδίδοντάς του φορτίο $Q_0 = C_0|\Delta V_0|$. Κατόπιν η μπαταρία αποσυνδέεται από τον πυκνωτή αφήνοντας τον πυκνωτή φορτισμένο με φορτίο Q_0.

Εισάγουμε κατόπιν ένα διηλεκτρικό υλικό ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή, ενώ διατηρούμε σταθερό το φορτίο.



Μετράμε το δυναμικό στα άκρα του πυκνωτή και βρίσκουμε ότι έχει ελαττωθεί κατά ένα παράγοντα $\kappa_e \Rightarrow |\Delta V| = \dfrac{|\Delta V_0|}{\kappa_e}$

Η μείωση της διαφοράς δυναμικού δηλώνει ότι η χωρητικότητα έχει αλλάξει:

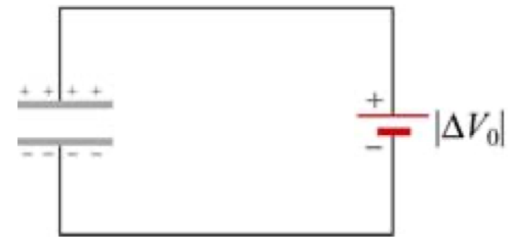
$$C = \frac{Q_0}{|\Delta V|} = \frac{Q_0}{|\Delta V_0|/\kappa_e} \Rightarrow C = \kappa_e C_0$$ αύξηση της χωρητικότητας κατά κ_e

Το ηλεκτρικό πεδίο στο διηλεκτρικό είναι τώρα: $E = \dfrac{|\Delta V|}{d} = \dfrac{|\Delta V_0|/\kappa_e}{d} = \dfrac{1}{\kappa_e}\left(\dfrac{|\Delta V_0|}{d}\right)$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{\kappa_e} E_0$$ ελάττωση του ηλεκτρικού πεδίου κατά κ_e

Διηλεκτρικά σε πυκνωτή με μπαταρία

Θεωρούμε την περίπτωση, όπως και προηγουμένως, με τον πυκνωτή να φορτίζεται με την βοήθεια της μπαταρίας με φορτίο $Q_0 = C_0|\Delta V_0|$



Στην περίπτωση αυτή η μπαταρία δεν αποσυνδέεται από τον πυκνωτή και εισάγουμε το διηλεκτρικό υλικό ενώ διατηρείται σταθερή η διαφορά δυναμικού $|\Delta V_0|$.

Πειραματικά βρέθηκε (πρώτα από τον Faraday) ότι το φορτίο στους οπλισμούς του πυκνωτή αυξάνει κατά έναν παράγοντα: $Q = \kappa_e Q_0$

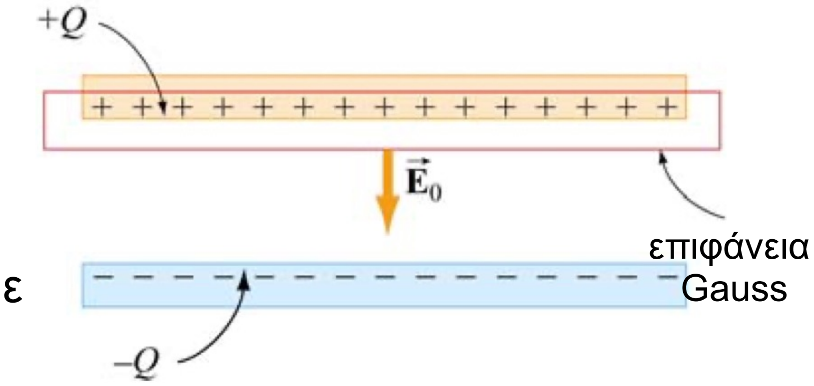
Στην περίπτωση αυτή, η χωρητικότητα του πυκνωτή γίνεται:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\kappa_e Q_0}{V_0} \Rightarrow C = \kappa_e C_0$$ αύξηση της χωρητικότητας κατά κ_e

Το τελικό αποτέλεσμα είναι ίδιο με την προηγούμενη περίπτωση, αλλά τώρα αντί να μειωθεί το δυναμικό στα άκρα του πυκνωτή αυξάνεται το φορτίο του

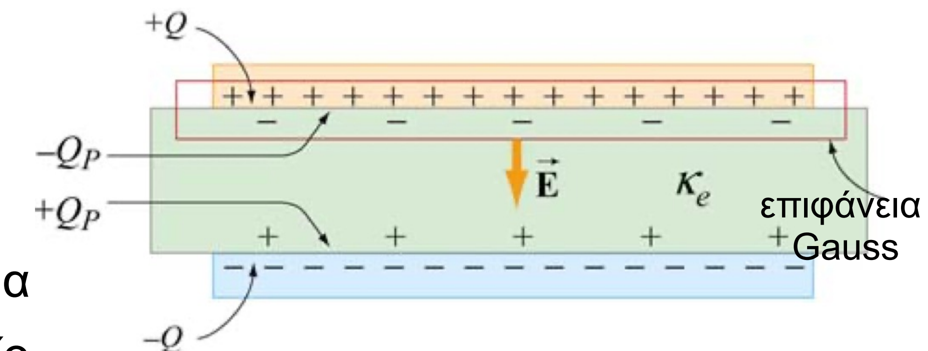
Νόμος Gauss για διηλεκτρικά

Θεωρούμε έναν επίπεδο πυκνωτή με τους οπλισμούς του φορτισμένους με φορτίο Q και βρισκόμενους σε δυναμικό $|\Delta V_0|$



Εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss υπολογίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του πυκνωτή αρχικά για την περίπτωση μη παρουσίας διηλεκτρικού υλικού

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = E_0 A = \frac{Q}{\varepsilon_0} \;\Rightarrow E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Καθώς εισάγουμε το διηλεκτρικό, επάγεται αντίθετο ηλεκτρικό φορτίο Q_P στην επιφάνεια του διηλεκτρικού. Σαν αποτέλεσμα το φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια Gauss ελαττώνεται σε: $Q - Q_P$

Εφαρμογή του νόμου του Gauss στην περίπτωση αυτή:

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = EA = \frac{Q-Q_P}{\varepsilon_0} \;\Rightarrow E = \frac{Q-Q_P}{A\varepsilon_0}$$

Νόμος Gauss για διηλεκτρικά

Η παρουσία του διηλεκτρικού έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση του αρχικού πεδίου E_0 κατά έναν παράγοντα κ_e

Επομένως: $E = \dfrac{E_0}{\kappa_e} = \dfrac{Q}{\kappa_e \varepsilon_0 A} = \dfrac{Q - Q_P}{A\varepsilon_0} \Rightarrow \dfrac{Q}{\kappa_e} = Q - Q_P$

$$\Rightarrow Q_P = Q - \frac{Q}{\kappa_e} \Rightarrow Q_P = Q\left(1 - \frac{1}{\kappa_e}\right)$$

Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου θα είναι: $\sigma_P = \sigma\left(1 - \dfrac{1}{\kappa_e}\right)$

Στο όριο που $\kappa_e \to 1$ θα πάρουμε $\sigma_P \to 0$ και $Q_P \to 0$ που είναι η περίπτωση μη παρουσίας διηλεκτρικού

Αντικαθιστώντας στον νόμο του Gauss τη σχέση για το φορτίο έχουμε:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E_0 A = \frac{Q - Q_P}{\varepsilon_0} \Rightarrow \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\kappa_e \varepsilon_0} \boxed{\Rightarrow \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon}}$$

νόμος Gauss για διηλεκτρικά

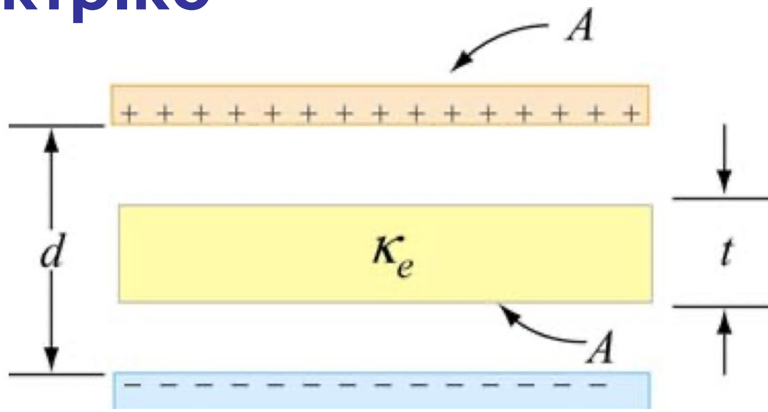
Ο όρος $\varepsilon = \kappa_e \varepsilon_0$ ονομάζεται διηλεκτρική διαπερατότητα του υλικού

Ο νόμος Gauss γραφεί επίσης ως: $\boxed{\Rightarrow \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q}$

όπου: $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E}}$
διάνυσμα ηλεκτρικής μετατόπισης

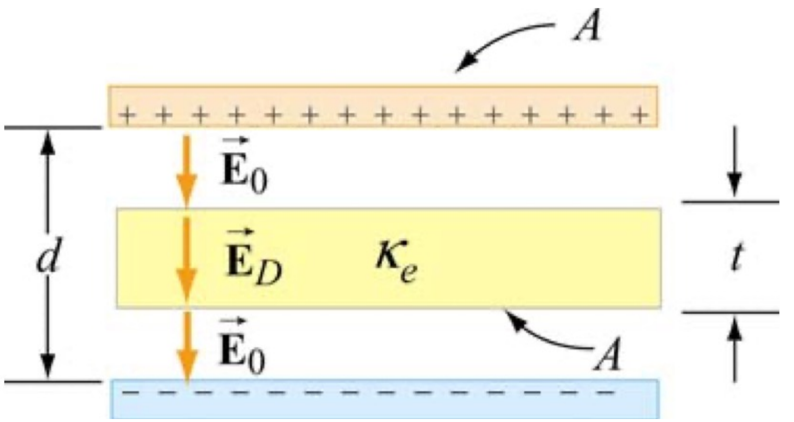
Χωρητικότητα πυκνωτή με διηλεκτρικό

Θεωρήστε ένα μη αγώγιμο κομμάτι υλικού, πάχους *t*, εμβαδού επιφάνειας *A* και διηλεκτρικής σταθεράς κ_e. Το υλικό εισάγεται ανάμεσα στους οπλισμούς ενός επίπεδου πυκνωτή, εμβαδού επιφάνειας *A*, απόστασης *d* και φορτίου *Q*.



Το διηλεκτρικό υλικό δεν βρίσκεται αναγκαστικά στο ενδιάμεσο της απόστασης των δύο οπλισμών. Θα υπολογίσουμε την χωρητικότητα του πυκνωτή

- Υπολογίζουμε αρχικά τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο οπλισμών του πυκνωτή.
- Απουσία διηλεκτρικού το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς είναι: $E_0 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 A}$
- Παρουσία του διηλεκτρικού το ηλεκτρικό πεδίο, όπως είδαμε, ελαττώνεται: $E_D = \dfrac{E_0}{\kappa_e}$

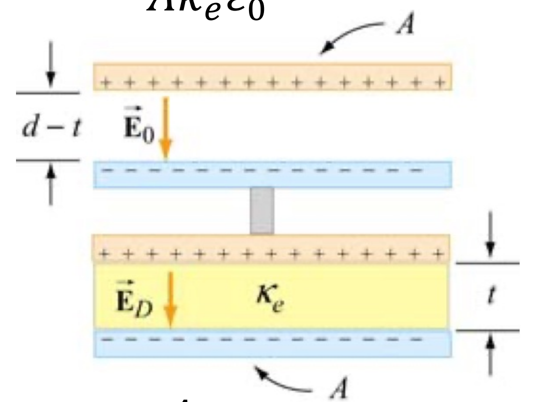


Χωρητικότητα πυκνωτή με διηλεκτρικό

- Υπολογίζουμε το δυναμικό ολοκληρώνοντας το ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος μιας κατακόρυφης γραμμής από τον πάνω οπλισμό στον κάτω:

$$\Delta V = -\int_{+}^{-} E dl = -\Delta V_0 - \Delta V_D = E_0(d-t) - E_D t = -\frac{Q}{A\varepsilon_0}(d-t) - \frac{Q}{A\kappa_e\varepsilon_0}t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta V = -\frac{Q}{A\varepsilon_0}\left[d - t\left(1 - \frac{1}{\kappa_e}\right)\right]$$



- Όπου $\Delta V_D = E_D t$ είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο επιφανειών του διηλεκτρικού.
- Από την σχέση του δυναμικού και το φορτίο βρίσκουμε την χωρητικότητα:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{A\varepsilon_0}{\left[d - t\left(1 - \frac{1}{\kappa_e}\right)\right]}$$

(α) Για $t \to 0$, καταλήγουμε: $C \to \frac{\varepsilon_0 A}{d} = C_0$

(β) Για $\kappa_e \to 1$, καταλήγουμε: $C \to \frac{\varepsilon_0 A}{d} = C_0$

(γ) Για $t \to d$, καταλήγουμε: $C \to \frac{\kappa_e \varepsilon_0 A}{d} = \kappa_e C_0$

- Η διάταξη μοιάζει με αυτή δύο πυκνωτών συνδεδεμένοι σε σειρά:
- Χρησιμοποιώντας τη σχέση της συνδεσμολογίας σε σειρά: $\frac{1}{C} = \frac{d-t}{e_0 A} + \frac{t}{k_e e_0 A}$

7ο Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

Έτοιμοι