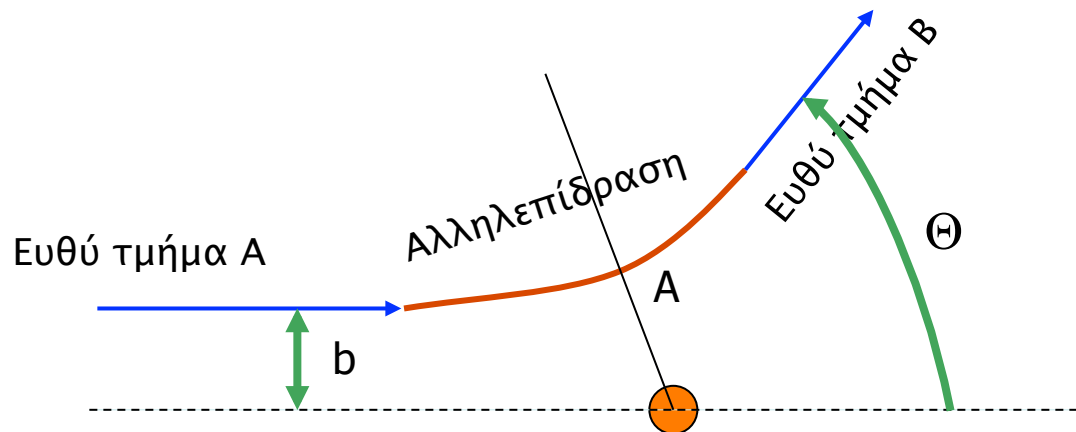


Το πρόβλημα της σκέδασης

- Θεωρήστε **μή φραγμένη** κίνηση σε κεντρικό δυναμικό
 - Σωματίδιο έρχεται από το άπειρο και πηγαίνει στο άπειρο
- Υποθέστε ότι $F(r) \rightarrow 0$ καθώς $r \rightarrow \infty$
 - Η τροχιά προσεγγίζει ευθείες γραμμές για μεγάλα r



- Το πρόβλημα: Πως σχετίζονται τα τμήματα Α και Β

- Χαρακτηριστικά:

b: παράμετρος πρόσκρουσης – η κάθετη απόσταση μεταξύ της διεύθυνσης κίνησης του σώματος και μιας παρ/λης ευθείας που περνά από το κέντρο του στόχου

Θ: γωνία σκέδασης – γωνία μεταξύ της προσπίπτουσας και σκεδαζόμενης ταχύτητας του βλήματος

A: σημείο εγγύτερης απομάκρυνσης

Σημαντικότητα του προβλήματος

- ❑ Όλες οι φυσικές παρατηρήσεις είναι φαινόμενα σκέδασης
 - Σκέδαση φωτονίων σε αντικείμενο ➡ Βλέπουμε
 - Ηλεκτρόνια σκεδάζονται σε αντικείμενο ➡ Ηλεκτρονικό μικροσκόπιο
- ❑ Πειράματα σε μικροσκοπική κλίμακα
 - Σκέδαση ηλεκτρονίων – πυρήνων ➡ Διερεύνηση δομή πυρήνων
 - Σκέδαση νετρίνο – ηλεκτρονίων ➡ Μέτρηση ενέργειας νετρίνων
- ❑ Κλασική περιγραφή των φαινομένων αυτών αποτυγχάνει
 - Κλασική προσέγγιση αρκετά καλή σε πολλές περιπτώσεις
 - Η συνταγή της κλασικής προσέγγισης χρησιμοποιείται στην κβαντική μηχανική – περισσότερο ευκολονόητη διαισθητικά

Η διατομή σκέδασης – στατιστικά

□ Θεωρήστε ότι έχετε κάποιο σύστημα αποτελούμενο από $N_{\sigma\tau}$ στόχους

➤ Πυκνότητα στόχου: $n_{\sigma\tau} = N_{\sigma\tau} / A$

➤ Αριθμός στόχων: $N_{\sigma\tau} = n_{\sigma\tau} A$

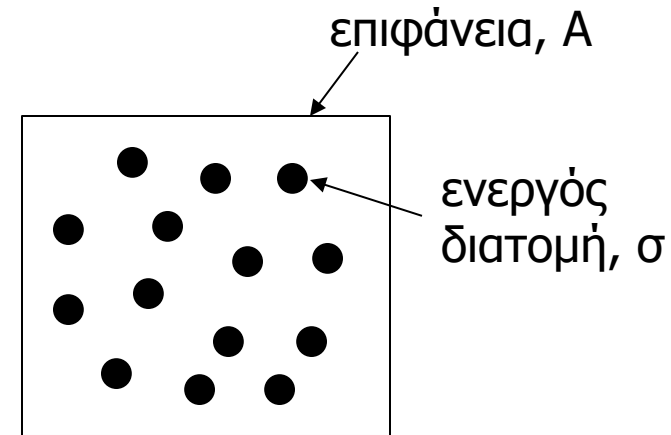
➤ Διατομή στόχων: $\sigma = \pi R^2$

➤ Ολική διατομή στόχων: $\sigma_{ολ} = n_{\sigma\tau} A \sigma$

➤ Πιθανότητα κρούσης: $\sigma_{ολ} / A = n_{\sigma\tau} A \sigma / A = n_{\sigma\tau} \sigma$

➤ Για δέσμη $N_{\delta\epsilon\sigma\mu\eta\varsigma}$ σωματιδίων/βλημάτων: $N_{\chi\tau\upsilon\pi.} = N_{\delta\epsilon\sigma\mu\eta\varsigma} \times n_{\sigma\tau} \times \sigma$

□ Μονάδας μέτρησης ενεργού διατομής, σ: **barn = 10^{-28}m^2**



Μέση ελεύθερη διαδρομή (mean free path)

□ Έστω ότι έχετε ένα αέριο αποτελούμενο από N μόρια ακτίνας R

➤ Μέση ελεύθερη διαδρομή, λ : μέση απόσταση που διανύει ένα βλήμα (μόριο) μεταξύ διαδοχικών συγκρούσεων

□ Εξετάζουμε ένα μόριο - Θεωρούμε τα υπόλοιπα ακίνητα

➤ Ενεργός Διατομή σκέδασης: $\sigma = \pi(R + R)^2 = 4\pi R^2$

➤ Αριθμός στόχων σε πάχος dx : $n_{\sigma} = \frac{N}{V} dx$

➤ Πιθανότητα σκέδασης σε dx : $prob(dx) = \frac{N\sigma}{V} dx$

➤ Πιθανότητα **μή** σκέδασης σε απόσταση x : $prob(x)$

➤ Πιθανότητα σκέδασης σε απόσταση dx αφού διανύσει απόσταση x :

$$prob(x, x + dx) = prob(x) prob(dx) = prob(x) \frac{N\sigma}{V} dx$$

➤ Αλλά αυτό είναι: $prob(x, x + dx) = prob(x) - prob(x + dx) = -\frac{d}{dx} prob(x) dx$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} prob(x) dx = -\frac{N\sigma}{V} prob(x) dx \Rightarrow prob(x) = e^{-(N\sigma/V)x}$$

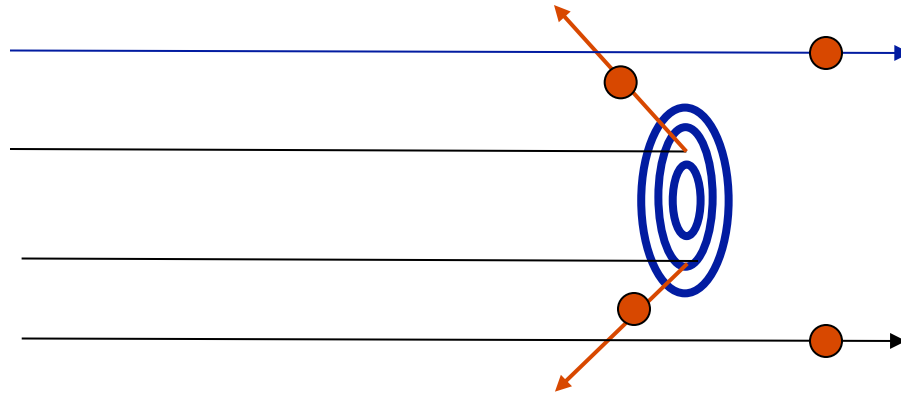
□ Μέση ελεύθερη διαδρομή: $\lambda = \langle x \rangle = \int_0^\infty x \left[\frac{d}{dx} prob(x) \right] dx = \int_0^\infty x \frac{N\sigma}{V} e^{-(N\sigma/V)x} dx$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{V}{N\sigma}$$

για μόρια αέρα ($R=0.15\text{nm}$) $\lambda \sim 130\text{nm}$

Μοντέλο κακού σκοπευτή

- Θεωρήστε ότι στοχεύετε σε ένα μικρό στόχο
 - και ότι είστε αρκετά άστοχοι



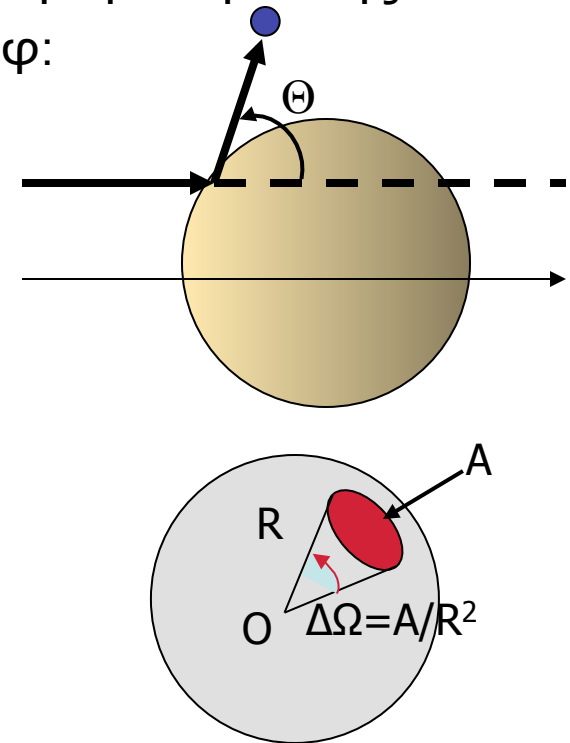
- Τα βλήματα κατανέμονται ομοιόμορφα
 - Ένταση δέσμης: $I = \frac{N_{\sigma\phi.}}{At}$ = Αριθμός σφαιρών/επιφάνεια/χρόνο
- Ο αριθμός των χτυπημάτων είναι ανάλογος του μεγέθους του στόχου

$$N_{\chi\tau\upsilon\pi.} = I \cdot \sigma$$

συχνότητα χτυπημάτων (σφαίρες/sec)
 \downarrow
 ένταση (σφαίρες/m²/sec)
 ενεργός διατομή στόχου (m²)

Σφαιρικός στόχος – Στερεά γωνία

- Θεωρήστε ότι ο στόχος είναι μια συμπαγής σφαίρα
 - Χρησιμοποιούμε σημειακά βλήματα και η σκέδαση είναι ελαστική
- Μελετούμε την γωνία σκέδασης Θ
 - Περισσότερες πληροφορίες για το είδος της αλληλεπίδρασης
- Διεύθυνσης σκέδασης ➡ θ, φ γύρω από διεύθυνση πρόσκρουσης
 - Αριθμός βλημάτων σε μικρό κώνο ως προς θ, φ :
- **Στερεά γωνία $\Delta\Omega$:** $\Delta\Omega = \frac{A}{R^2}$
 - Το τμήμα της σφαιρικής επιφάνειας, A , που ορίζει ο κώνος ως προς το τετράγωνο της ακτίνας της σφαίρας R
- Για κώνο με γωνίες $[\theta, \theta + d\theta]$, $[\varphi, \varphi + d\varphi]$:



$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \frac{r^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{r^2} = \sin\theta d\theta d\varphi$$

Σφαιρικός στόχος

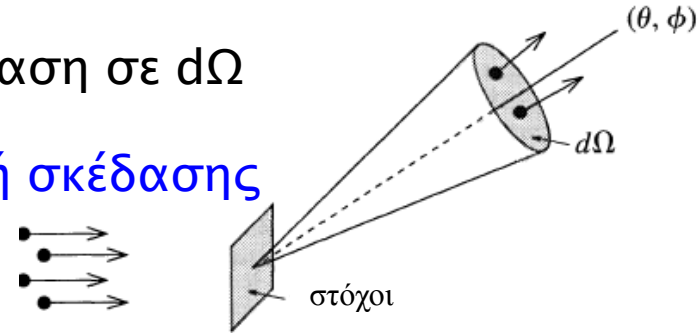
- Μελέτη του αριθμού, $N_{\chi\tau}$, των βλημάτων που σκεδάζονται σε $d\Omega$

$$N_{\chi\tau}(d\Omega) = N_{\delta} n_{\sigma\tau} d\sigma(d\Omega)$$

- $d\sigma$: ενεργός διατομή του στόχου για σκέδαση σε $d\Omega$

$$d\sigma(d\Omega) = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \text{ διαφορική ενεργός διατομή σκέδασης}$$

$$N_{\chi\tau}(d\Omega) = N_{\delta} n_{\sigma\tau} \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} d\Omega$$



- Ολοκλήρωση των $N_{\chi\tau}$ για όλες τις δυνατές $d\Omega$

$$N_{\chi\tau}^{tot} = \int_{4\pi} N_{\chi\tau}(d\Omega) d\Omega \quad \left. \vphantom{\int_{4\pi}} \right\} N_{\delta} n_{\sigma\tau} \sigma = \int N_{\delta} n_{\sigma\tau} \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} d\Omega \Rightarrow \sigma = \int \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} d\Omega$$

$$N_{\chi\tau}^{tot} = N_{\delta} n_{\sigma\tau} \sigma$$

$$\Rightarrow \sigma = \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega}$$

Υπολογισμός της Διαφορικής ενεργού διατομής

- Θεωρούμε σφαιρική συμμετρία (συμμετρική σκέδαση ως προς φ)

➤ $d\sigma/d\Omega$ ανεξάρτητη της γωνίας φ

- Αριθμός βλημάτων με παράμετρο κρούσης $[b, b+db]$

$$dN_\delta = N_\delta 2\pi b db$$

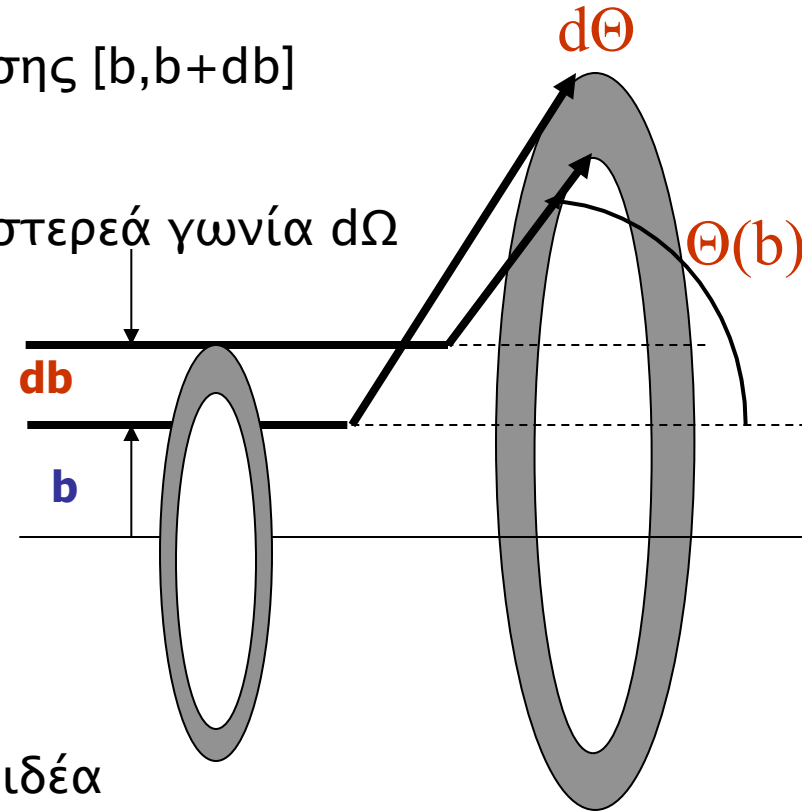
- Σκεδάζονται σε γωνίες $[\Theta, \Theta+d\Theta]$ στην στερεά γωνία $d\Omega$

$$d\Omega = 2\pi \sin \Theta d\Theta$$

$$dN_\delta = N_\delta \frac{d\sigma(\Theta, \varphi)}{d\Omega} d\Omega$$

$$N_\delta 2\pi b db = N_\delta \frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega} 2\pi \sin \Theta d\Theta$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \Theta} \left| \frac{db}{d\Theta} \right|$$



- Εξέταση αν το αποτέλεσμα πληρεί την ιδέα περί ολικής ενεργού διατομής

➤ Ολοκληρώνουμε ως προς την ολική στερεά γωνία

$$\sigma_T = \int_{4\pi} \sigma(\Omega) d\Omega \Rightarrow \sigma_T = \int_0^\pi 2\pi \sin \Theta \sigma(\Theta) d\Theta \Rightarrow \sigma_T = \int_0^\alpha 2\pi b db \Rightarrow \sigma_T = \pi \alpha^2$$

Ολική
επιφάνεια
στόχου

Σκέδαση υπό την επίδραση κεντρικής δύναμης

□ Πως σχετίζουμε την γωνία Θ με την παράμετρο b ? $\sigma(\Theta) = \frac{b}{\sin \Theta} \left| \frac{db}{d\Theta} \right|$

□ Χρειάζεται να ξέρουμε την μορφή της τροχιάς για μεγάλα r

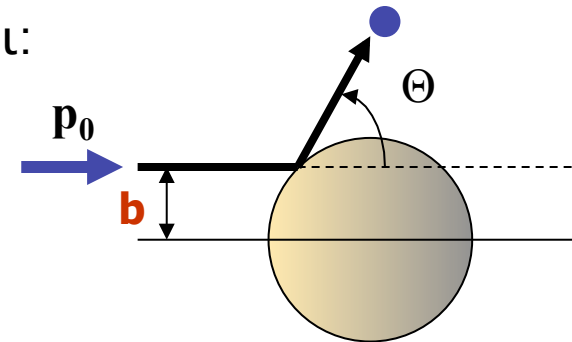
$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{l^2} \frac{dV(u^{-1})}{du} = 0 \quad \text{όπου} \quad u = \frac{1}{r}$$

➤ Η στροφορμή l και η παράμετρος b συνδέονται:

$$l = |\vec{r} \times \vec{p}_0| = rp_0 \sin \theta = bp_0$$

➤ Αν υποθέσουμε ότι $V(r) \rightarrow 0$ όταν $r \rightarrow \infty$

$$E = T = \frac{p_0^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad l = bp_0 = b\sqrt{2mE}$$



□ Γράφουμε την εξίσωση της τροχιάς συναρτήσει της παραμέτρου b και της E

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u + \frac{1}{2b^2 E} \frac{dV(u^{-1})}{du} = 0 \quad \text{Με λύση της μορφής: } u = u(\theta, b, E)$$

□ Για $r \rightarrow \infty$ όταν $\theta = \Theta$, τότε $u = u(\Theta, b, E) = 0 \Rightarrow b = b(\Theta, E)$

□ Με βάση αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε: $\sigma(\Theta, E) = \frac{b}{\sin \Theta} \left| \frac{db}{d\Theta} \right|$

Δύναμη ανάλογη του $1/r^2$

□ Θεωρήστε μια απωστική δύναμη: $F(r) = \frac{k}{r^2}$ $V(r) = \frac{k}{r}$

➤ Ηλεκτροστατική δύναμη μεταξύ ομώνυμων φορτίων

□ Εξίσωση και λύση ίδια όπως στην περίπτωση του προβλήματος Kepler

➤ Μόνο αλλαγή του προσήμου του k

$$\frac{1}{r} = -\frac{mk}{l^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta_0) \right]$$

$$l = b\sqrt{2mE}$$

$$\theta = 0, r = \infty$$

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{k}{r} > 0$$

➤ Ακτίνα $> 0 \Rightarrow e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} > 1$

← **Υπερβολή**

□ Η λύση δίνει υπερβολή:

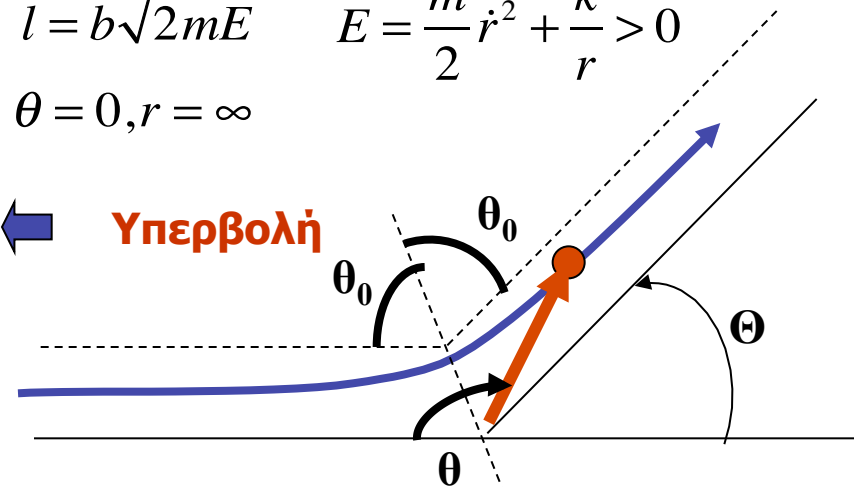
➤ $e > 1 \rightarrow E > 0$

➤ $1/r > 0 \rightarrow \cos(\theta - \theta_0) < -1/e$

□ Για $\theta=0$ και $\theta=2\theta_0 \Rightarrow u=1/r=0 \Rightarrow \cos\theta_0 = 1/e \Rightarrow \cos^2\theta_0 = 1/e^2$

□ Η γωνία σκέδασης είναι: $\Theta = \pi - 2\theta_0 \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2}$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2\theta_0 = e^2 \Rightarrow \tan\theta_0 = \sqrt{e^2 - 1} \Rightarrow \cot\frac{\Theta}{2} = \sqrt{e^2 - 1} = \frac{2Eb}{k} \Rightarrow b = \frac{k}{2E} \cot\frac{\Theta}{2}$$



Διαφορική ενεργός διατομή

- Η διαφορική ενεργός διατομή είναι:

$$\sigma(\Theta) = \frac{b}{\sin \Theta} \left| \frac{db}{d\Theta} \right| = \frac{1}{\sin \Theta} \left(\frac{k}{2E} \right)^2 \cot \frac{\Theta}{2} \frac{d}{d\Theta} \left(\cot \frac{\Theta}{2} \right) \Rightarrow \sigma(\Theta) = \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}}$$

- Η σκέδαση σωματιδίων με φορτία Ze και $Z'e$ δίνει: $k = ZZ'e^2$

$$\sigma(\Theta) = \frac{1}{4} \left(\frac{ZZ'e^2}{2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}}$$

Σκέδαση Rutherford

α-σωματίδια ($Z'=2$) σκεδάστηκαν από ατομικούς πυρήνες με Z

Απόδειξη της ύπαρξης πυρήνων

- Πριν την ανακάλυψη του Rutherford:

- Ηλεκτρόνια ήταν γνωστά
- Θετικά φορτία στο εσωτερικό των ατόμων - άγνωστη η κατανομή

- Η μέτρηση της ενεργού διατομής σκέδασης Rutherford έδειξε:


- Θετικό φορτίο $+Ze$ συγκεντρωμένο σε ένα σωματίο
- Z σωματίια με $+e$ φορτίο το καθένα θα έδιναν: $\sigma(\Theta) = \frac{Z}{4} \left(\frac{Z'e^2}{2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}}$
- Ανακάλυψη πυρήνων

Ολική ενεργός διατομή

- Ολοκλήρωση της ενεργού διατομής σκέδασης Rutherford δίνει:

$$\sigma_T = \int_{4\pi} \sigma(\Omega) d\Omega = \int_0^\pi 2\pi \sin\Theta \frac{1}{4} \left(\frac{ZZ'e^2}{2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}} d\Theta$$

$$\Rightarrow \sigma_T = 2\pi \left(\frac{ZZ'e^2}{2E} \right)^2 \int_0^\pi \frac{d\left(\sin^2 \frac{\Theta}{2} \right)}{\sin^3 \frac{\Theta}{2}} \Rightarrow \sigma_T = \infty$$

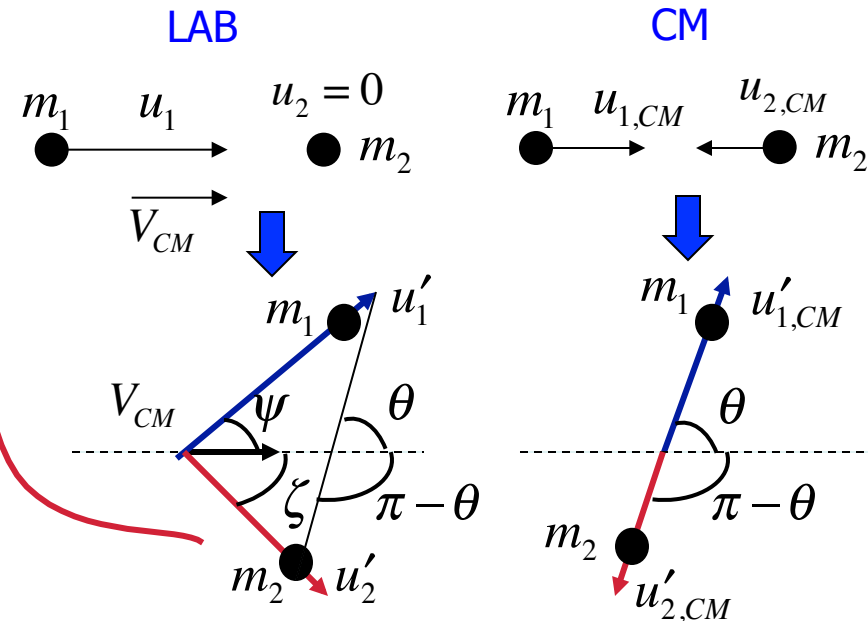
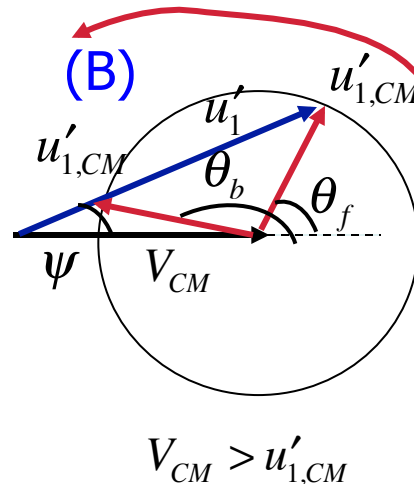
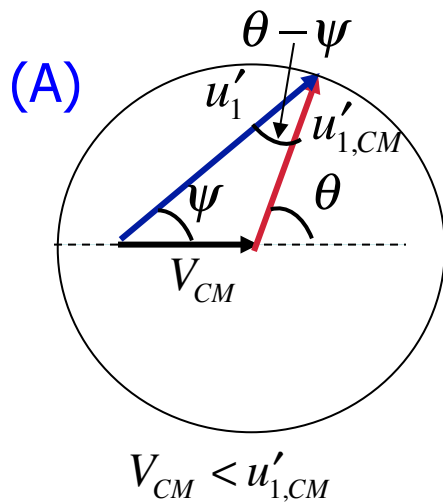
- Οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις είναι μεγάλης εμβέλειας
 - Το σωματίδιο δέχεται πάντοτε κάποια απόκλιση ανεξάρτητα από το πόσο μεγάλη είναι η παράμετρος πρόσκρουσης, b
 - Στην πραγματικότητα: το ηλεκτροστατικό πεδίο προστατεύεται από τα ηλεκτρόνια γύρω από τον πυρήνα
-  η ενεργός διατομή είναι πεπερασμένη και δεν απειρίζεται

Σκέδαση – σύστημα CM και εργαστηρίου

- Οι προηγούμενες εξισώσεις ισχύουν για σκέδαση στο σύστημα CM
- Αριθμός σωματιδίων που σκεδάζονται στο CM = αριθμός σωματιδίων που σκεδάζονται στο σύστημα εργαστηρίου (LAB)
- Αλλάζει η γωνία σκέδασης θεωρώντας τα 2 συστήματα

$$\sigma_{CM}(\Theta)d\Omega_{CM} = \sigma_{LAB}(\Psi)d\Omega'_{LAB} \Rightarrow \sigma_{CM}(\Theta)2\pi \sin\Theta d\Theta = \sigma_{LAB}(\Psi)2\pi \sin\Psi d\Psi$$

$$\Rightarrow \sigma_{LAB}(\Psi) = \sigma_{CM}(\Theta) \frac{\sin\Theta}{\sin\Psi} \frac{d\Theta}{d\Psi}$$



- Μια περίπτωση για ψ και θ

- Δυο περιπτώσεις για θ (θ_b, θ_f) και 1ψ

➡ Το σώμα σκεδάζεται πάντοτε με $\psi < \pi/2$ στο LAB

Σύστημα CM και εργαστηρίου

- Από το σχήμα (A) και τον νόμο των ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{\sin \psi}{u'_{1,CM}} = \frac{\sin(\theta - \psi)}{V_{CM}} \Rightarrow \frac{\sin(\theta - \psi)}{\sin \psi} = \frac{V_{CM}}{u'_{1,CM}} \quad (1)$$

- Από τον ορισμό του CM: $\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow M \vec{V}_{CM} = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \Rightarrow \vec{V}_{CM} = \frac{m_1 \vec{u}_1}{M}$ (2)

- Στο σύστημα αναφοράς του CM $\vec{u}_{1,CM} = \vec{u}_1 - \vec{V}_{CM} \Rightarrow \vec{u}_{1,CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{u}_1$ (3)
- $$\vec{u}_{2,CM} = \vec{u}_2 - \vec{V}_{CM} \Rightarrow \vec{u}_{2,CM} = -\frac{m_1 \vec{u}_1}{m_1 + m_2}$$

- Μετά την σκέδαση (CM) $|u'_{1,CM}| = |u_{1,CM}|$ και $|u'_{2,CM}| = |u_{2,CM}|$ (4)

- Από (2), (3) και (4) η (1) γίνεται: $\frac{\sin(\theta - \psi)}{\sin \psi} = \frac{m_1}{m_2} = x$ }

- Θέτουμε το διαφορικό: $dx = 0 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta = 0$ }

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{d\psi} = \frac{\sin(\theta - \psi) \cos \psi}{\cos(\theta - \psi) \sin \psi} + 1 \Rightarrow \frac{d\theta}{d\psi} = \frac{\sin \theta}{\cos(\theta - \psi) \sin \psi}$$

- Αντικατάσταση στην εξίσωση της $\sigma_{LAB}(\psi)$: $\sigma_{LAB}(\psi) = \sigma_{CM}(\Theta) \frac{\sin^2 \theta}{\cos(\theta - \psi) \sin^2 \psi}$

Σύστημα CM και εργαστηρίου

□ Πολ/ζουμε την $\frac{\sin(\theta - \psi)}{\sin \psi} = \frac{m_1}{m_2} = x$ με $\cos(\psi)$ και προσθέτουμε $\cos(\theta - \psi)$

$$\frac{\sin(\theta - \psi) \cos \psi}{\sin \psi} + \cos(\theta - \psi) = x \cos \psi + \cos(\theta - \psi) \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\sin \psi} = x \cos \psi + \cos(\theta - \psi)$$

□ Αντικαθιστούμε στην $\sigma_{LAB}(\psi) = \sigma_{CM}(\Theta) \frac{\sin^2 \theta}{\cos(\theta - \psi) \sin^2 \psi}$

$$\sigma_{LAB}(\psi) = \sigma_{CM}(\Theta) \frac{[x \cos \psi + \cos(\theta - \psi)]^2}{\cos(\theta - \psi)}$$

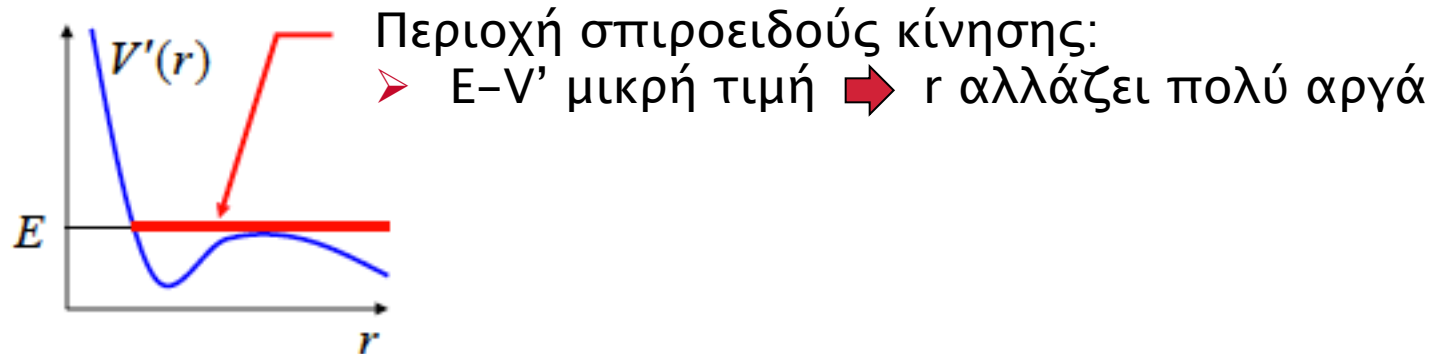
Από $\frac{\sin(\theta - \psi)}{\sin \psi} = \frac{m_1}{m_2} = x \Rightarrow \cos(\theta - \psi) = \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi}$

$$\sigma_{LAB}(\psi) = \sigma_{CM}(\Theta) \frac{[x \cos \psi + \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi}]^2}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi}}$$

Τέλος μπορούμε να γράψουμε: $\theta = \sin^{-1}(x \sin \psi) + \psi$

Ελκτική δύναμη

- Απωστικές δυνάμεις μπορούν να σκεδάσουν μόνο κατά γωνίες $0 < \Theta < \pi$
- Μια ελκτική δύναμη μπορεί να κάνει περισσότερα
 - Αν το δυναμικό και η ενέργεια έχουν κάποιες τιμές, το σωματίδιο μπορεί να κάνει πολλαπλές στροφές πριν εξέλθει
 - Αυτό καλείται **σπιροειδές**



Σκέδαση ουράνιου τόξου

- Η εξίσωση της διατομής σκέδασης, $\sigma(\Theta)$, υποθέτει ότι $b(\Theta)$ μονότιμη
 - Ισχύει για την περίπτωση της σκέδασης Rutherford

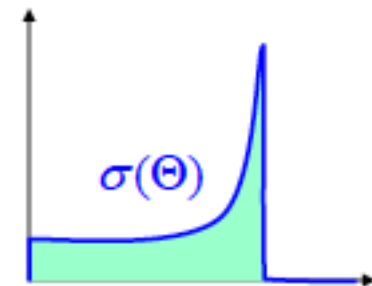
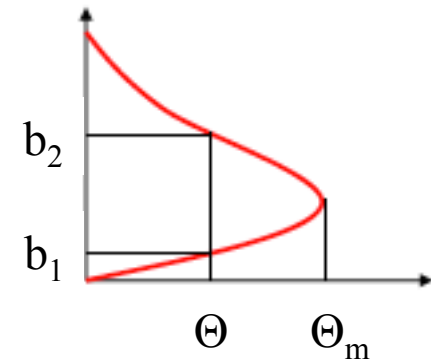
- Αν η $b(\Theta)$ μή μονότονη

$$\sigma(\Theta) = \sum_i \left| \frac{b_i}{\sin \Theta} \right| \left| \frac{db_i}{d\Theta} \right| \quad \leftarrow \text{Άθροισμα για όλα τα πιθανά } b$$

- Στο μέγιστο $\Theta = \Theta_m$

$$\frac{d\Theta}{db} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma(\Theta) = \infty$$

- Ονομάζεται σκέδαση ουράνιου τόξου

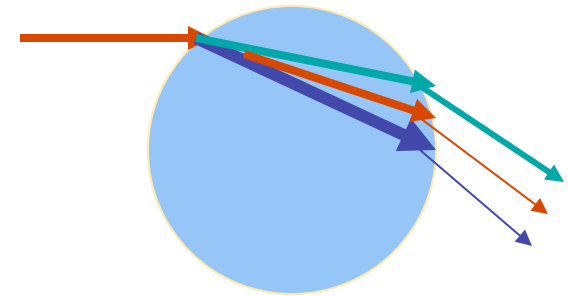


Ουράνιο τόξο

□ Γνωστός ο μηχανισμός δημιουργίας του ουράνιου τόξου



- Ωστόσο η γωνία σκέδασης εξαρτάται από τη θέση στην οποία εισέρχεται το φως στην σταγόνα
- Αν προσθέσουμε όλες τις πιθανές θέσεις εισόδου τότε το ουράνιο τόξο δεν θα δημιουργηθεί



□ Ο σχηματισμός του ουράνιου τόξου οφείλεται στο φως το οποίο ανακλάται εσωτερικά

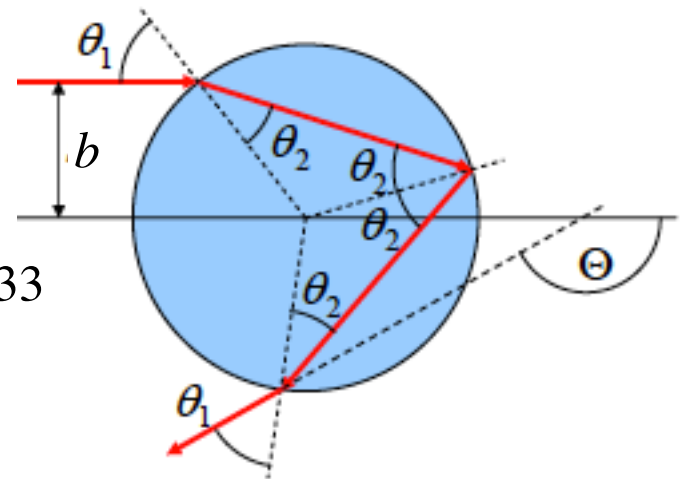
- Η ολική αλλαγή διεύθυνσης είναι:

$$\Theta = 2\theta_1 - 4\theta_2 + \pi$$

- Αλλά $\sin \theta_1 = \frac{b}{R}$

- Νόμος του Snell: $\sin \theta_1 = \eta \sin \theta_2$ $\eta = 1.33$

- Θ έχει ελάχιστο για 137.5° :



Ουράνιο τόξο

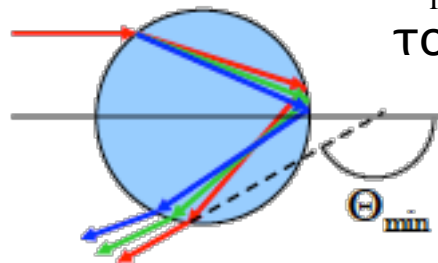
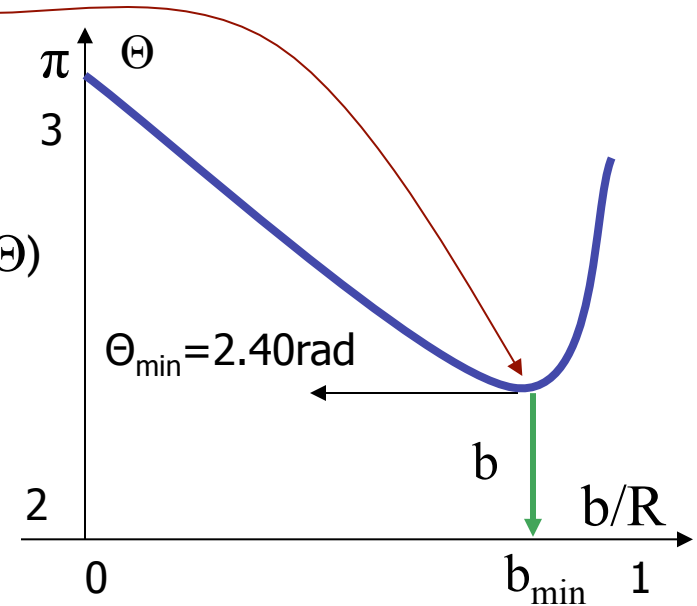
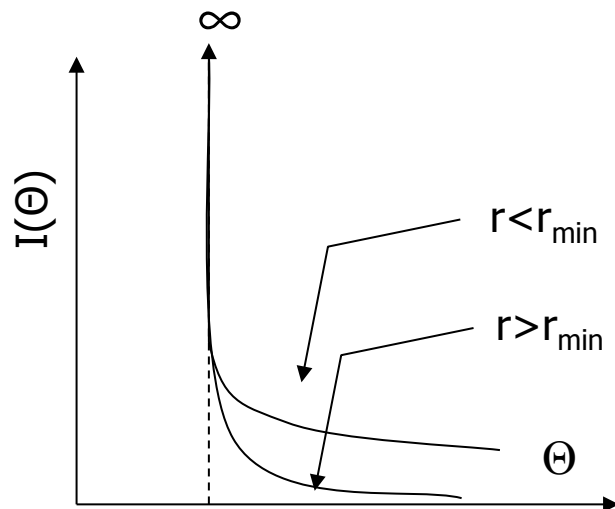
□ Αν φωτίσετε μια σταγόνα νερού με ομοιόμορφο φως

➤ Η κατανομή της έντασης του φωτός συναρτήσει της γωνίας Θ

$$I(\Theta) \propto \frac{b}{\sin \Theta} \left[\frac{db}{d\Theta} \right]$$

απειρίζεται στο σημείο καμπής

□ Στο Θ_{\min} → Οξεία κορυφή στην ένταση $I(\Theta)$



□ Ανάκλαση παρατηρείται μόνο στο Θ_{\min} - αυτό εξαρτάται από το η το η εξαρτάται από το λ

□ Πραγματικός μηχανισμός δημιουργίας ουράνιου τόξου