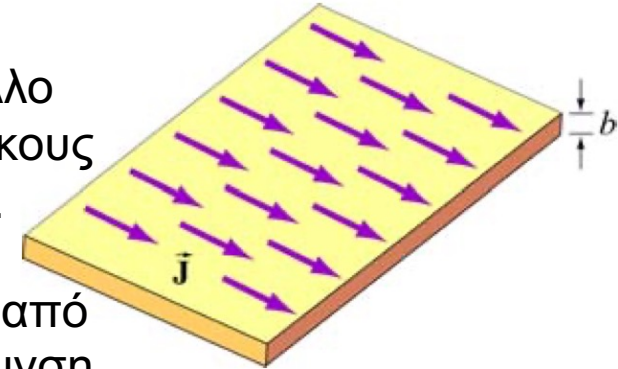


Εφαρμογές του νόμου του Ampere

Μαγνητικό πεδίο επίπεδου αγωγού απείρων διαστάσεων

Θεωρούμε έναν απείρων διαστάσεων επίπεδο αγωγό πάχους b που βρίσκεται στο x - y επίπεδο και έχει ομοιόμορφη πυκνότητα ρεύματος $\vec{J} = J_0 \hat{i}$. Θα υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου

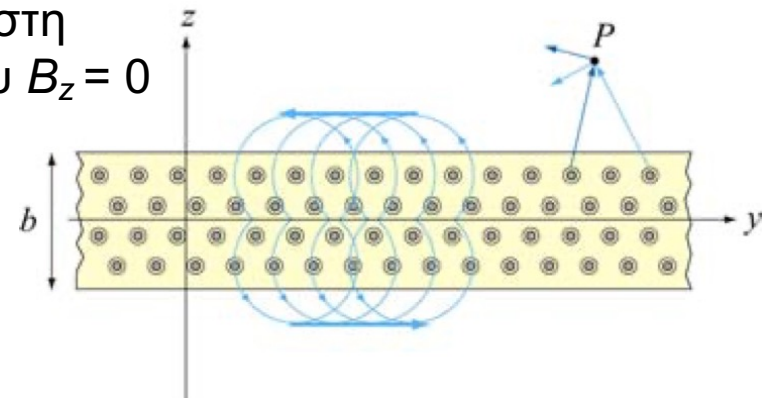
Μπορούμε να θεωρήσουμε το επίπεδο ρευματοφόρο φύλλο ως μια συλλογή από πολλούς ευθύγραμμους απείρου μήκους αγωγούς που διαρρέονται από ρεύμα I στην x -διεύθυνση.



Παρατηρούμε ότι μαγνητικό πεδίο σε ένα σημείο P πάνω από το επίπεδο του αγωγού ($z > 0$) έχει φορά προς τη $-y$ -διεύθυνση.

Η συνεισφορά όλων των ρευματοφόρων αγωγών στη z -διεύθυνση αναιρείται δίνοντας συνιστώσα πεδίου $B_z = 0$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι το μαγνητικό πεδίο σε ένα σημείο P' κάτω από το επίπεδο του αγωγού ($z < 0$) έχει φορά προς τη $+y$ -διεύθυνση.



Μαγνητικό πεδίο επίπεδου αγωγού απείρων διαστάσεων

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τώρα τον νόμο του Ampere:

Θεωρούμε τους βρόχους Ampere του σχήματος:

Για το πεδίο στο εξωτερικό του αγωγού, ολοκληρώνουμε κατά μήκος του βρόχου C_1 :

Το ρεύμα που περικλείεται στον βρόχο είναι:

$$I_{encl.} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{A} = J_0(2|z|l)$$

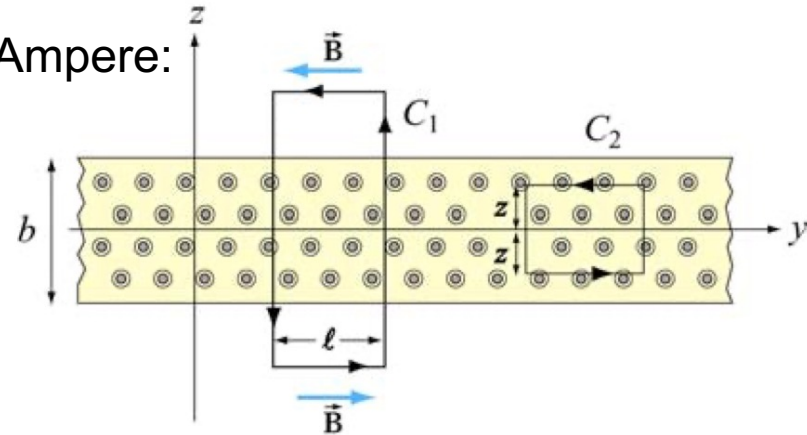
Εφαρμόζοντας τον νόμο του Ampere: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = B2l = \mu_0 I_{encl.} \Rightarrow B = \mu_0 J_0(|z|)$

Για $z=0$ το μαγνητικό πεδίο μηδενίζεται, όπως απαιτείται από συμμετρία.

Μπορούμε να συνοψίσουμε τα αποτελέσματα:
$$\vec{B} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 J_0 b}{2} \hat{j} & z > b/2 \\ -\mu_0 J_0 z \hat{j} & -\frac{b}{2} < z < \frac{b}{2} \\ +\frac{\mu_0 J_0 b}{2} \hat{j} & z < -b/2 \end{cases}$$

Στην περίπτωση πολύ λεπτού φύλλου $b \rightarrow 0$ και τότε η πυκνότητα ρεύματος γίνεται ρεύμα επιφάνειας: $\vec{K} = K\hat{i}$, όπου $K = J_0 b$ (K σε μονάδες ρεύματος/μήκος). Οπότε:

$$\vec{B} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 K}{2} \hat{j} & z > 0 \\ +\frac{\mu_0 K}{2} \hat{j} & z < 0 \end{cases}$$



Επίπεδη Συμμετρία και νόμος του Ampere

Ας θεωρήσουμε το μαγνητικό πεδίο εξαιτίας ομοιόμορφου ρεύματος που διαρρέει έναν επίπεδο αγωγό στο xy -επίπεδο στην x -διεύθυνση.

Από τον νόμο των Biot-Savard:
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \int \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Αλλά $Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') \perp I$ και αφού I στη x -διεύθυνση $\Rightarrow B_x = 0$

Ας θεωρήσουμε τώρα την z -συνιστώσα του πεδίου.

Αν αντιστρέψουμε τη φορά του ρεύματος τότε το μαγνητικό πεδίο θα αντιστραφεί.

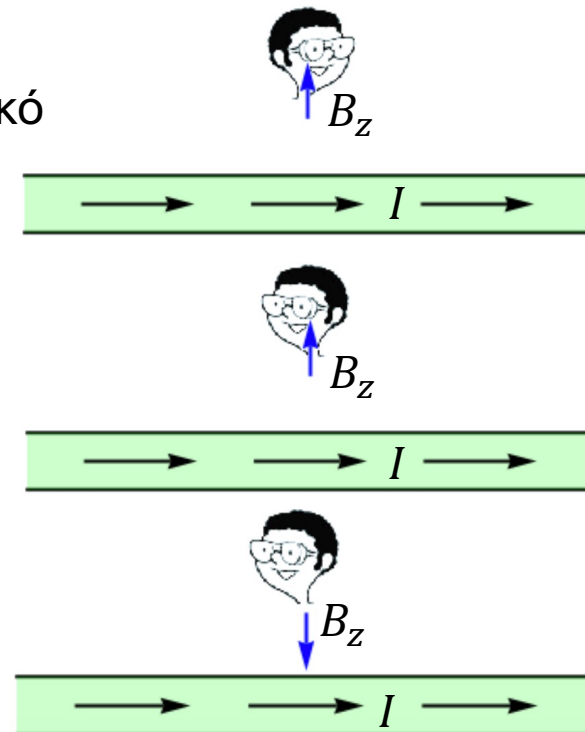
Έστω ότι σε κάποιο σημείο, $B_z > 0$ (όπως στο σχήμα).

Θεωρήστε ότι περιστρέφεστε στο χώρο κατά 180° .

Το μαγνητικό πεδίο δεν θα αλλάξει ωστόσο αφού δεν έχει περιστραφεί.

Αλλά βλέπετε το ρεύμα να κινείται με αντίθετη φορά και ο μόνος τρόπος για σας είναι το ρεύμα να έχει αντιστραφεί. Άρα το μαγνητικό πεδίο θα είναι $B_z < 0$

Ο μόνος τρόπος για να συμβούν τα δύο προηγούμενα είναι να έχουμε: $B_z = 0$



Επίπεδη Συμμετρία και νόμος του Ampere

Με βάση τα προηγούμενα και το γεγονός ότι το επίπεδο παραμένει αμετάβλητο οπουδήποτε βρισκόμαστε, οδηγεί στο: $\vec{B} = B(z)\hat{j}$

Ξέρουμε από τον νόμο του Ampere ότι: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{\mu_0}{2\pi} I_{encl}$

Χρησιμοποιώντας κατάλληλο amperian βρόχο μπορούμε να βρούμε το \vec{B} .

Θεωρούμε ορθογώνιο με 2 πλευρές παράλληλες στην y -διεύθυνση σε κατάλληλα z εφόσον το πεδίο, $B(z)$, εξαρτάται από την απόσταση από την επιφάνεια.

Αν υποθέσουμε ότι ο βρόχος δεν τέμνει την xy -επιφάνεια, τότε $I_{encl} = 0$ αλλά αφού θα πρέπει $B(z_1)l - B(z_2)l = 0$ για τυχαίο l , θα έχουμε ότι $B = \text{σταθ.}$

Αλλά B δεν είναι σταθερό στην ίδια τιμή και από τις δύο πλευρές της επιφάνειας.

Έστω ότι περιστρέφουμε την επιφάνεια ως προς τον x -άξονα.

Αυτό θα φέρει τον y -άξονα στον $-y$ -άξονα και αντίστροφα αλλά $I = \text{σταθ.}$

Θεωρούμε amperian βρόχο που τέμνει το αναστραμμένο xy -επίπεδο και η πλευρά του στην $-y$ -διεύθυνση. Το B_y θα είναι τώρα στην $+y$ -κατεύθυνση και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα θα δώσει $-2B_y l$.

Οπότε: $B_y(z > 0) = -\frac{\mu_0 I}{2l} = -\frac{\mu_0 J_0 l b}{2}$ Ενώ στην $-z$ -διεύθυνση $B_y(z < 0) > 0$

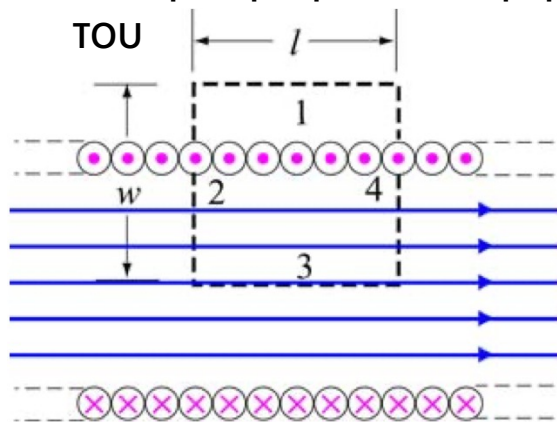
Μαγνητικά Πεδία Σωληνοειδούς - Τοροειδούς

Μαγνητικό πεδίο σωληνοειδούς

Θεωρούμε ένα σωληνοειδές το οποίο διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I . Το σωληνοειδές έχει N σπείρες. Θεωρούμε ότι οι σπείρες έχουν ακτίνα πολύ μικρότερη από το μήκος του σωληνοειδούς και ότι είναι σφικτά και ομοιόμορφα τυλιγμένες ώστε το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς να είναι ομοιόμορφο

Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Ampere για να υπολογίσουμε την ένταση του πεδίου στο εσωτερικού ενός ιδανικού σωληνοειδούς.

Θεωρούμε μια διατομή του σωληνοειδούς κατά μήκος του άξονά του

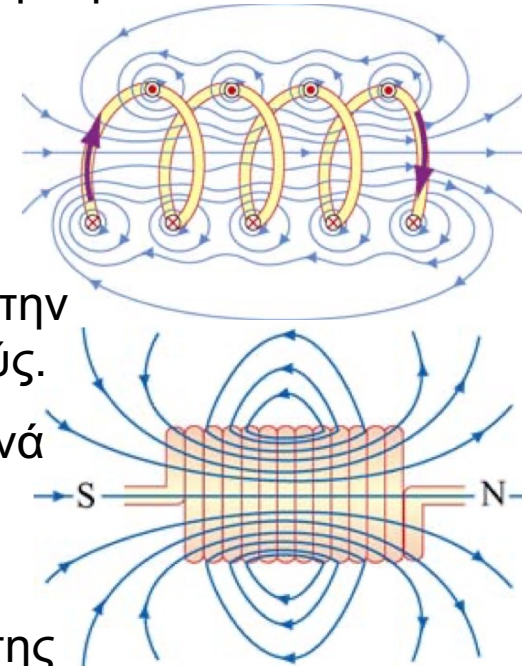


Θεωρούμε ένα ορθογώνιο βρόχο μήκους πλευρών l και w αντίστοιχα και κινούμαστε στο βρόχο αντίθετα της φοράς των δεικτών του ρολογιού:

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα θα είναι:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_1 \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_2 \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_3 \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_4 \vec{B} \cdot d\vec{s} = Bl$$

Το συνολικό ρεύμα που περικλείεται από τον βρόχο Ampere είναι: $I_{encl.} = NI$



Μαγνητικό πεδίο σωληνοειδούς

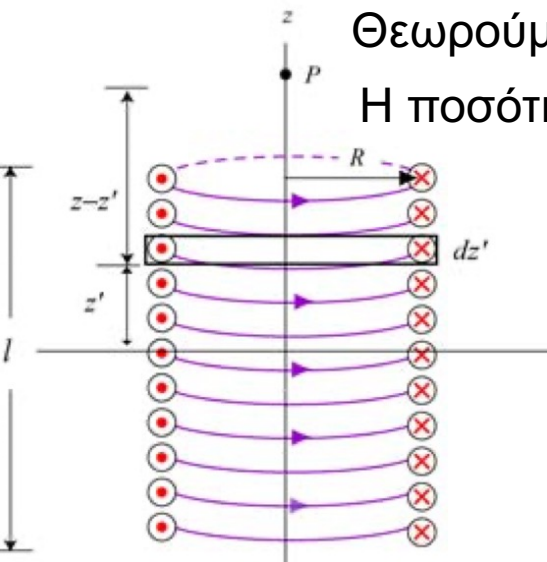
Εφαρμόζοντας τον νόμο του Ampere θα πάρουμε: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{encl.} \Rightarrow Bl = \mu_0 NI$

Το πεδίο στο εσωτερικό ενός ιδανικού σωληνοειδούς είναι: $B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \mu_0 nI$ $n = \frac{N}{l}$

➤ Τι θα συμβεί ωστόσο αν το σωληνοειδές είναι πεπερασμένου μήκους?

Προσεγγίζουμε την περίπτωση θεωρώντας έναν μεγάλο αριθμό κυκλικών βρόχων ο ένας πάνω στον άλλο σε μια στήλη βρόχων.

Υπολογίσαμε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ρευματοφόρος κυκλικός βρόχος σε σημείο P στον άξονά του και σε απόσταση z από το κέντρο του: $B_z = \frac{\mu_0 IR^2}{(2[R^2 + z^2]^{3/2})}$



Θεωρούμε μια διατομή της στήλης των βρόχων στη θέση z' με πάχος dz'

Η ποσότητα ρεύματος που διαπερνά αυτή την διατομή των βρόχων είναι

$$dI = I(ndz') = I(N/l)dz' \quad \text{όπου } n = N/l$$

Η συνεισφορά αυτής της ποσότητας σπειρών στο μαγνητικό πεδίο στο σημείο P θα είναι:

$$dB_z = \frac{\mu_0 R^2}{(2[R^2 + (z - z')^2]^{3/2})} dI \Rightarrow dB_z = \frac{\mu_0 R^2 (nI dz')}{(2[R^2 + (z - z')^2]^{3/2})}$$

Μαγνητικό πεδίο σωληνοειδούς περασμένου μήκους

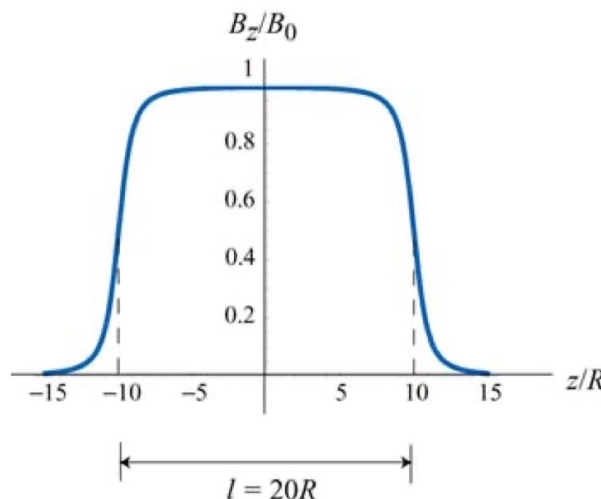
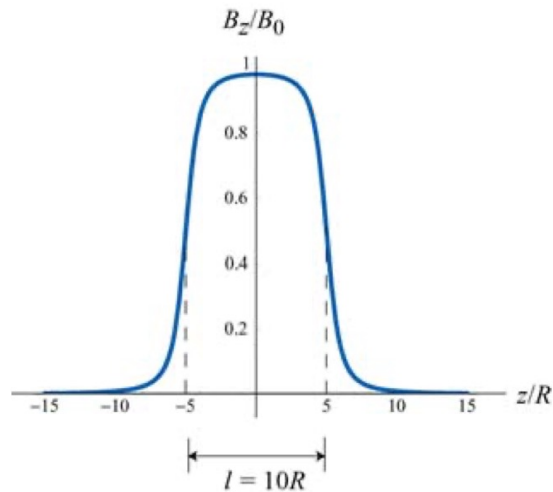
Η συνεισφορά αυτής της ποσότητας σπειρών στο μαγνητικό πεδίο στο σημείο P θα είναι:

$$dB_z = \frac{\mu_0 R^2 (n I dz')}{(2[R^2 + (z - z')^2]^{3/2})}$$

Ολοκληρώνουμε ως προς το μήκος του σωληνοειδούς:

$$B_z = \frac{\mu_0 n I R^2}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz'}{[R^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 n I R^2}{2} \left. \frac{z' - z}{R^2 \sqrt{R^2 + (z - z')^2}} \right|_{-l/2}^{l/2}$$

$$\Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[\frac{l/2 - z}{\sqrt{R^2 + (z - l/2)^2}} + \frac{l/2 + z}{\sqrt{R^2 + (z + l/2)^2}} \right]$$

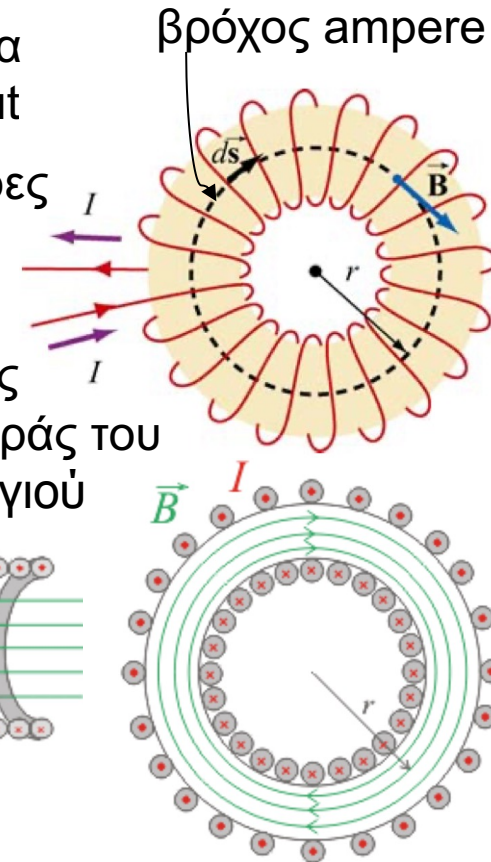
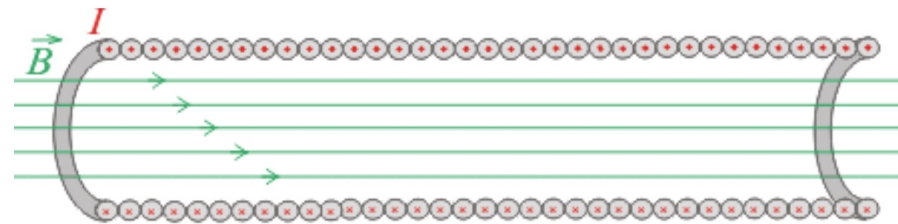


Μαγνητικό πεδίο τοροειδούς

Το τοροειδές είναι ένα λεπτό σωληνοειδές το οποίου τα δύο άκρα συμπίπτουν, οπότε το σωληνοειδές έχει το σχήμα ενός doughnut

Θεωρούμε ότι έχουμε ένα τοροειδές αποτελούμενο από N σπείρες και θα βρούμε το μαγνητικό πεδίο σε τυχαίο σημείο στο χώρο.

Από το σχήμα του τοροειδούς, καταλαβαίνουμε ότι το μαγνητικό πεδίο είναι πλήρως εγκλωβισμένο στο εσωτερικό του τοροειδούς και η διεύθυνσή του είναι αζιμουθιακή και με φορά (βάση της φοράς του ρεύματος στο σχήμα), σύμφωνα με αυτή των δεικτών του ρολογιού



Εφαρμόζουμε τον νόμο του Ampere, οπότε θα πάρουμε:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_C B ds = B \oint_C ds = B(2\pi r) = \mu_0 NI \Rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

όπου r είναι η απόσταση από το κέντρο του τοροειδούς.

- Αντίθετα με το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικού ενός ιδανικού σωληνοειδούς το οποίο είναι ομοιόμορφο, το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό ενός τοροειδούς **δεν είναι ομοιογενές** και **ελαττώνεται με την απόσταση από το κέντρο του**

Διαφορική μορφή του νόμου του Ampere

Είδαμε ότι ο νόμος του Ampere λέει: $\oint_{\text{βρόχος}} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I$ ως προς τυχαίο βρόχο

Αλλά το ρεύμα είναι η ροή της πυκνότητας ρεύματος σε μια τυχαία επιφάνεια που οριοθετείται από τον βρόχο ως προς τον οποίο υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_S \vec{J}_0 \cdot d\vec{A} \quad \text{ως προς τυχαία επιφάνεια } S$$

Από το θεώρημα Stokes έχουμε ότι: $\oint_{\text{βρόχος}} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}$

Θεωρούμε ότι η επιφάνεια στο ολοκλήρωμα ροής του ρεύματος είναι ίδια με την επιφάνεια του οριοθετείται από τον amperian βρόχο στο θεώρημα Stokes.

Επομένως από τον νόμο του Ampere θα έχουμε ότι: $\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \mu_0 \iint_S \vec{J}_0 \cdot d\vec{A}$

Για να ισχύει η τελευταία για οποιαδήποτε επιφάνεια, θα πρέπει: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_0$

η οποία αποτελεί την διαφορική μορφή διατύπωσης του νόμου του Ampere και μια από τις εξισώσεις Maxwell

12° Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

Έτοιμοι