Στροφορμή στερεού

- Η στροφορμή του στερεού γράφεται σαν: $\vec{l} = \sum_a m_a \left[\vec{r}_a^{\,2} \vec{\omega} - \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_a \right) \vec{r}_a \right]$ (1)
- Αλλά ο τανυστής αδράνειας έχει οριστεί σαν: $I_{ij} = \sum_a m_a \left(\vec{r}_a^{\,2} \delta_{ij} - r_i^a r_j^a \right)$ (2)
- Η γωνιακή ταχύτητα δίνεται από: $\vec{\omega} = \sum_i \omega_i \vec{e}_i$ (3)
- Μπορούμε να γράψουμε το διάνυσμα της στροφορμής στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς σαν: $\vec{l} = \sum_i l_i \vec{e}_i$
- Από τις (2) και (3) η (1) μπορεί να γραφεί: $l_i = \sum_j I_{ij} \omega_j$ (4)
- Από διατήρηση στροφορμής: $\dot{\vec{l}} = 0$
  - Αλλά: $\dot{\vec{l}} = \frac{d}{dt} \vec{l} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i l_i \vec{e}_i \right) \Rightarrow \dot{\vec{l}} = \sum_i \left(\dot{l}_i \vec{e}_i + l_i \dot{\vec{e}}_i \right) \Rightarrow \dot{\vec{l}} = \sum_i \left(\dot{l}_i \vec{e}_i + l_i \vec{\omega} \times \vec{e}_i \right)$

    $\Rightarrow \dot{\vec{l}} = \sum_i \left(\dot{l}_i + l_i \vec{\omega} \times \ \right) \vec{e}_i = 0$

- Αλλά από την (4) θα έχουμε: $\dot{l}_i = \sum_j I_{ij} \dot{\omega}_j$
- ενώ: $\vec{\omega} \times \vec{e}_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \omega_j \vec{e}_k$
- και: $l_i \vec{\omega} \times \vec{e}_i = \sum_{jk} l_i \varepsilon_{ijk} \omega_j \vec{e}_k = \sum_{jk} \left(\sum_l I_{il} \omega_l \right) \varepsilon_{ijk} \omega_j \vec{e}_k$

$$\dot{l}_i = \sum_j I_{ij} \dot{\omega}_j + \sum_{jkl} \varepsilon_{jkl} \omega_j I_{kl} \omega_l = 0$$

Εξισώσεις κίνησης στερεού

- Η εξίσωση κίνησης που καταλήξαμε: $\dot{l}_i = \sum_j I_{ij}\dot{\omega}_j + \sum_{jkl} \varepsilon_{jkl}\omega_j I_{kl}\omega_l = 0$
  - αρκετά πολύπλοκη μορφή
- Αν γράψουμε όμως τον τανυστή αδράνειας ως προς τους κύριους άξονες:
  - ο τανυστής αδράνειας είναι τώρα διαγώνιος: $I_{ij} = I_i$ για $i=j$ και $I_{ij} = 0$ $i \neq j$
  - Η στροφορμή επομένως ως προς το σύστημα των κύριων αξόνων είναι: $l_i = I_i\omega_i$
- Η διατήρηση της στροφορμής θα πάρει την μορφή:

$$\dot{\vec{l}} = 0 \Rightarrow \dot{l}_i + \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\omega_j l_k = 0 \Rightarrow I_i\dot{\omega}_i + \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\omega_j I_k\omega_k = 0$$

- Εξίσωση κίνησης ενός περιστρεφόμενου στερεού σώματος χρησιμοποιώντας τους κύριους άξονες:

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3\left(I_3 - I_2\right) = 0 \\ &\Rightarrow I_2\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\left(I_1 - I_3\right) = 0 \\ &\Rightarrow I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2\left(I_2 - I_1\right) = 0 \end{aligned}\right\}$$

Εξισώσεις Euler

Τρεις διαφορικές εξισώσεις κίνησης που χρησιμοποιούνται για να βρεθούν τα ω

Δηλαδή να βρεθεί ο πίνακας περιστροφής και επομένως η θέση του στερεού συναρτήσει του χρόνου

- Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν την κίνηση ενός στερεού που είναι ελεύθερο χωρίς εξωτερικές δυνάμεις (εξωτερικές ροπές)

Εξισώσεις κίνησης στερεού

- Οι εξισώσεις κίνησης που καταλήξαμε:

$$I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3\left(I_3 - I_2\right) = 0 \quad I_2\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\left(I_1 - I_3\right) = 0 \quad I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2\left(I_2 - I_1\right) = 0$$

  περιγράφουν την κίνηση ενός περιστρεφόμενου στερεού που δεν υπόκειται σε εξωτερικές ροπές

- Αν υπήρχαν εξωτερικές ροπές τότε η στροφορμή δεν διατηρείται και επομένως η μεταβολή της στροφορμής θα είναι ίση με την ροπή που ασκείται:

$$\dot{\vec{l}} = \vec{\tau} \Rightarrow \begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3\left(I_3 - I_2\right) = \tau_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\left(I_1 - I_3\right) = \tau_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2\left(I_2 - I_1\right) = \tau_3 \end{cases}$$

Εξισώσεις Euler
με εξωτερική ροπή

Διερεύνηση των εξισώσεων κίνησης

- Οι εξισώσεις κίνησης που καταλήξαμε:

$$I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3\left(I_3 - I_2\right) = 0 \quad I_2\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\left(I_1 - I_3\right) = 0 \quad I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2\left(I_2 - I_1\right) = 0$$

- Θα εξετάσουμε τις λύσεις των διαφορικών αυτών εξισώσεων για διάφορες περιπτώσεις στερεών σωμάτων
- Έστω ένα στερεό σώμα με ίσες κύριες ροπές αδράνειας: $I_1 = I_2 = I_3$

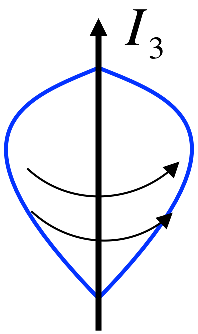
  σφαιρικά συμμετρικό σώμα

  - Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις κίνησης είναι απλά: $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$
  - Δηλαδή: $\omega_i = \sigma\tau\alpha\theta.$
  - Στο περιστρεφόμενο σύστημα που χρησιμοποιούμε, το σφαιρικά συμμετρικό σώμα (μια μπάλα) θα περιστρέφεται ως προς τους κύριους άξονές του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα
- Έστω η περίπτωση που ένα στερεό σώμα έχει $I_1 = I_2 \neq I_3$
  - Τα σώματα είναι συμμετρικά ως προς περιστροφές
  - Αξονική συμμετρία
  - Είδαμε διάφορα παραδείγματα στερεών με ίδιες 2 κύριες ροπές αδράνειας
  - Σώμα με αξονική συμμετρία, ονομάζεται συμμετρική σβούρα

Συμμετρική σβούρα χωρίς εξωτερικές δυνάμεις

- Οι εξισώσεις κίνησης Euler:

$$I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3\left(I_3 - I_2\right) = 0 \quad I_2\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\left(I_1 - I_3\right) = 0 \quad I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2\left(I_2 - I_1\right) = 0$$



- Εφόσον: $I_1 = I_2 \Rightarrow I_3\dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \omega_3 = \sigma\tau\alpha\theta.$
- οι άλλες 2 εξισώσεις είναι:

$$I_1\dot{\omega}_1 = \omega_2\omega_3\left(I_1 - I_3\right)$$
$$I_1\dot{\omega}_2 = \omega_1\omega_3\left(I_3 - I_1\right)$$

- Ορίζουμε: $\Omega = \omega_3 \dfrac{I_1 - I_3}{I_1}$
- Οι εξισώσεις κίνησης γίνονται: $\dot{\omega}_1 = \omega_2\Omega$ και $\dot{\omega}_2 = -\omega_1\Omega$
- Οι λύσεις των εξισώσεων αυτών είναι απλά: $\dot{\omega}_1 = \omega_2\Omega \Rightarrow \ddot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2\Omega$

$\Rightarrow \ddot{\omega}_1 = -\omega_1\Omega^2$ απλός αρμονικός ταλαντωτής με συχνότητα Ω

- Όμοια για το ω_2: $\Rightarrow \ddot{\omega}_2 = -\omega_2\Omega^2$
- Οι λύσεις για ω_1 και ω_2 δίνουν: $\left(\omega_1, \omega_2\right) = A\left(\sin\Omega t, \cos\Omega t\right)$

πλάτος της ταλάντωσης

Συμμετρική σβούρα χωρίς εξωτερικές δυνάμεις

- Ποια η φυσική σημασία του αποτελέσματος:

Αντίθετα με την περίπτωση της σφαιρικής συμμετρίας όπου η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή ως προς τους κύριους άξονες

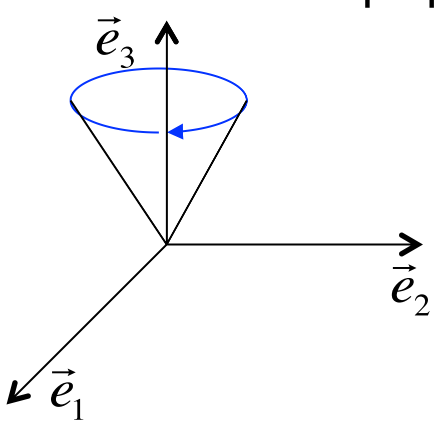
Στην περίπτωση αυτή, η συνιστώσα της γωνιακής ταχύτητας ως προς τον άξονα συμμετρίας είναι σταθερή αλλά οι συνιστώσες ως προς τους δυο άλλους κύριους άξονες (κάθετους στον άξονα συμμετρίας) ταλαντώνονται με συχνότητα Ω

Περιστρέφονται ουσιαστικά με συχνότητα Ω

Η διεύθυνση της περιστροφής δεν είναι σταθερή αλλά μεταπίπτει γύρω από τον άξονα συμμετρίας.

Η συχνότητα της μετάπτωσης είναι: $\Omega = \omega_3 \dfrac{I_1 - I_3}{I_1}$

Η διεύθυνση της μετάπτωσης εξαρτάται από : $I_1 > I_3$ ή $I_1 < I_3$



Για μακρύ και λεπτό στερεό, όπου $I_1=I_2>I_3$, η μετάπτωση είναι σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού

Για κοντό και παχύ στερεό, όπου $I_1=I_2<I_3$, η μετάπτωση είναι αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού

Για την γη: $(I_1 - I_3)/I_1 \sim 1/300$ και : $\omega_3 = 1/day$

$\Rightarrow \Omega = 1/300(day)$ πειραματικά Ω=1/435 και πλάτος 10m:

Γενική περίπτωση στερεού

- Εξετάζουμε την περίπτωση όπου: $I_1 \neq I_2 \neq I_3$

  Εν γένει μπορεί να μην υπάρχει μια γενική λύση, αλλά υπάρχουν μερικές ειδικές περιπτώσεις που είναι εύκολο να βρούμε

  - Θεωρήστε ότι έχετε περιστροφή γύρω από έναν κύριο άξονα με $\omega_1 = \Omega$
  - Οι εξισώσεις Euler θα είναι:

$$I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3\left(I_3 - I_2\right) = 0$$

$$I_2\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3\left(I_1 - I_3\right) = 0$$

$$I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2\left(I_2 - I_1\right) = 0$$

  - Αλλά τώρα: $\omega_1 = \Omega$ ενώ: $\omega_2 = \omega_3 = 0$ είναι μια ειδική λύση
  - Εξετάζουμε αν η λύση αυτή είναι ευσταθής ή όχι
  - Θεωρούμε: $\omega_1 = \Omega + \eta_1$ $\omega_2 = \eta_2$ $\omega_3 = \eta_3$ όπου η_i διαταραχές
    - Η 1η εξίσωση θα δώσει: $I_1\dot{\eta}_1 + O\left(\eta^2\right) = 0$
    - Η 2η εξίσωση θα δώσει: $I_2\dot{\eta}_2 = \Omega\eta_3\left(I_3 - I_1\right)$
    - Η 3η εξίσωση θα δώσει: $I_3\dot{\eta}_3 = \Omega\eta_2\left(I_1 - I_2\right)$

Γενική περίπτωση στερεού

- Η λύση του συστήματος αυτού βρίσκεται όπως πριν:
  - Από την 2η εξίσωση: $I_2\dot{\eta}_2 = \Omega\eta_3\left(I_3 - I_1\right) \Rightarrow I_2\ddot{\eta}_2 = \Omega\dot{\eta}_3\left(I_3 - I_1\right)$
  - Αντικατάσταση από την 3η εξίσωση: $\ddot{\eta}_2 = \dfrac{\Omega^2}{I_2 I_3}\eta_2\boxed{\left(I_3 - I_1\right)\left(I_1 - I_2\right)}$
  - Η ποσότητα αυτή θα είναι θετική ή αρνητική ανάλογα με το πρόσημο του όρου:
  - Η λύση θα είναι ευσταθής αν $\left(I_3 - I_1\right)\left(I_1 - I_2\right) < 0 \Rightarrow \begin{cases} I_1 < I_2 \;\&\; I_3 \\ I_1 > I_2 \;\&\; I_3 \end{cases}$
  - Η λύση θα είναι ασταθής αν $\left(I_3 - I_1\right)\left(I_1 - I_2\right) > 0 \Rightarrow \begin{cases} I_2 < I_1 < I_3 \\ I_3 < I_1 < I_2 \end{cases}$
  - Ένα σώμα με τρεις κύριες ροπές αδράνειας διαφορετικές μεταξύ τους, μπορεί να περιστρέφεται ως προς ένα κύριο άξονά του και η περιστροφή θα είναι σταθερή αν ο άξονας αυτός είναι ο άξονας με την μεγαλύτερη ή την μικρότερη ροπή αδράνειας