ΦΥΣ 331 – Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων

Εργασία 6η **Επιστροφή: Τρίτη 15.11.22**

1. Υπολογίστε το μέσο αριθμό σωματιδίων που περιέχονται σε μια ηλεκτρομαγνητική καταιγίδα που δημιούργησε ένα φωτόνιο ενέργειας 50 GeV που έχει διαπεράσει 10, 13 και 20cm σιδήρου.

Τα σωματίδια που περιέχονται σε μια ηλεκτρομαγνητική καταιγίδα προέρχονται από δίδυμη γένεση e^+e^- που προκαλούν φωτόνια, και φωτόνια που εκπέμπονται λόγω bremsstrahlung από ηλεκτρόνια και ποζιτρόνια με αποτέλεσμα την ελάττωση της ενέργειας του σωματιδίου που τα εκπέμπει.

Και τις δύο περιπτώσεις, η δίδυμη γένεση και η ακτινοβολία bremsstrahlung μπορούν να θεωρηθούν σαν διεργασίες που παράγουν 2 σωματίδια με ενέργεια ίση περίπου (κατά μέσο όρο) με το 1/2 της ενέργειας του σωματιδίου που τις προκαλεί. Δηλαδή τα σωματίδια μοιράζονται την ενέργεια του σωματιδίου που τα παράγει.

Η διεργασία σταματά όταν η ενέργεια των σωματιδίων πέσει κάτω από μια τιμή που αποτελεί την κρίσιμη ενέργεια. Τα σωματίδια κάτω από την ενέργεια αυτή χάνουν ενέργεια μόνο μέσω ιονισμού και διεγέρσεων ατόμων.

Η ενέργεια που έχουν σωματίδια αφού έχουν διαπεράσει υλικό πάχους x, δίνεται από την σχέση: $\boxed{E = E_0 e^{-x/X_0}}$ όπου E_0 η αρχική ενέργεια του σωματιδίου, x το πάχος του υλικού και X_0 είναι το μήκος ακτινοβολίας του υλικού.

Για σίδηρο, το μήκος ακτινοβολίας είναι: $X_0 = 13.84\ g/cm^2$ που αντιστοιχεί σε
$L = X_0/d = 13.84/7.864 = 1.76\ cm$ όπου $d = 7.864\ g/cm^3$ η πυκνότητα του σιδήρου

Επομένως μετά από 10 cm σιδήρου, η μέση ενέργεια του κάθε σωματιδίου είναι:

$$E_{10} = E_0 e^{-x/L} = (5\times10^4)\, e^{-10/1.76} \Rightarrow E_{10} = 170.4\ MeV$$

Η κρίσιμη ενέργεια είναι $E_c = 27.4\ MeV$. Από την στιγμή που όλα τα σωματίδια κατά μέσο όρο έχουν την ίδια ενέργεια, ο αριθμός των σωματιδίων θα είναι:

$$n_{10} = \frac{E_0}{E_{10}} = \frac{5\times10^4}{170.4} \Rightarrow n_{10} = 293 \text{ σωματίδια}$$

Επαναλαμβάνοντας τους ίδιους υπολογισμούς για $x = 13cm$ θα έχουμε:

$$E_{13} = \frac{E_0}{e^{x/l}} = 5\times10^4 \cdot e^{-13/1.76} \Rightarrow E_{13} = 31.0 \text{ MeV}$$

Η τιμή αυτή είναι λίγο μεγαλύτερη από την κρίσιμη ενέργεια. Ο αντίστοιχος αριθμός των σωματιδίων είναι $n_{13} = \frac{E_0}{E_{13}} \Rightarrow n_{13} = \frac{5\times10^4}{31} \Rightarrow n_{13} = 1613$ σωματίδια

Για πάχος μεγαλύτερο από 13.2 cm, η μέση ενέργεια των σωματιδίων γίνεται μικρότερη από την κρίσιμη ενέργεια E_c.

Η πολλαπλασιαστική διεργασία γίνεται λιγότερο σημαντική σε σχέση με την συνεχή απώλεια ενέργειας. Σε απόσταση 20cm, ο αριθμός των σωματιδίων που υπάρχουν στην καταιγίδα είναι μικρότερος από τον αριθμό n_{13}.

2. Θεωρήστε ένα μαγνητικό φασματόμετρο το οποίο επιλέγει θετικά φορτισμένα σωματίδια ορμής $p = 0.5GeV/c$ που περιέχονται σε δέσμη σωματιδίων που αποτελείται από π^+ και K^+. Ο διαχωρισμός μεταξύ των δυο ειδών σωματιδίων γίνεται με την χρήση της τεχνικής του χρόνου πτήσης (Time of flight). Για τον σκοπό αυτό, δυο σπινθηριστές τοποθετούνται σε 3m απόσταση μεταξύ τους. Κάθε πλαστικός σπινθηριστής έχει πάχος $\Delta x = 2cm$, και πυκνότητα $\rho = 1.03 g/cm^3$ και μήκος ακτινοβολίας $X_0 = 40cm$. Προσδιορίστε:

(α) Τις ταχύτητες των π και K.

(β) Την ενέργεια που χάνεται στον πρώτο σπινθηριστή

(γ) Την μέση γωνία απόκλισης λόγω πολλαπλής σκέδασης Coulomb, για τα π^+ και K^+ μετά τον πρώτο ανιχνευτή.

(α) Η ορμή και ενέργεια του σωματιδίου είναι: $p = m\upsilon\gamma$ και $E = m\gamma = \frac{p}{\upsilon} \Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon = \frac{p}{E}$

Οι μάζες των δυο σωματιδίων είναι: $m_\pi = 140 MeV$ και $m_K = 494 MeV$. Επομένως

για ορμή $p = 0.5GeV$ θα έχουμε: $\upsilon_\pi = \frac{p}{\sqrt{p^2+m_\pi^2}} = \frac{0.5}{\sqrt{0.5+0.14^2}} \Rightarrow \boxed{\upsilon_\pi = 0.963c}$

Για τα καόνια θα έχουμε: $\upsilon_K = \frac{p_K}{\sqrt{p_K+m_K^2}} = \frac{0.5}{\sqrt{0.5^2+0.494^2}} \Rightarrow \boxed{\upsilon_K = 0.711c}$

Ο χρόνος πτήσης μεταξύ των δυο σπινθηριστών είναι:

$$\Delta t_\pi = \frac{3m}{\upsilon_\pi} = \frac{10}{0.963} 10^{-8} s \Rightarrow \boxed{\Delta t_\pi = 10.4 ns}$$

$$\Delta t_K = \frac{3m}{\upsilon_K} = \frac{10}{0.7111} 10^{-8} s \Rightarrow \boxed{\Delta t_K = 14.1 ns}$$

(β) Η ενέργεια που χάνεται στον πρώτο σπινθηριστή εξαρτάται από τον παράγοντα $\beta\gamma$ του σωματιδίου. Η τιμή $\beta\gamma = P/m$ για τα δυο σωματίδια είναι:

$(\beta\gamma)_\pi = (0.5/0.14)_\pi = 3.7$ ενώ για το καόνιο $(\beta\gamma)_K = (0.5/0.5) = 1.$

Η απώλεια ενέργειας στον άνθρακα (σπινθηριστής) είναι: $dE/dx \cong 1.75 MeV g^{-1} cm^2$ για την περίπτωση του πιονίου και $dE/dx \simeq 2.7 MeV g^{-1} cm^2$ για την περίπτωση του καονίου. Χρησιμοποιούμε τις καμπύλες dE/dx για τον άνθρακα, για υλικά κατασκευασμένα από ελαφριά στοιχεία όπως ο σπινθηριστής που είναι οργανικό (πλαστικό) πολυμερές αποτελούμενο από C H και O. Η ενέργεια που χάνεται, σε ανιχνευτή πάχους x είναι:

$$\left(\Delta E\right)_{\pi} = \left(\frac{dE}{dx}\right)\rho\,\Delta x = 1.75 * 1.03 * 2 \Rightarrow \boxed{\left(\Delta E\right)_{\pi} = 3.6\,\text{MeV}}$$

$$\left(\Delta E\right)_{k} = \left(\frac{dE}{dx}\right)\rho\,\Delta x = 2.7 * 1.03 * 2 \Rightarrow \boxed{\left(\Delta E\right)_{k} = 5.6\,\text{MeV}}$$

(γ) Η μέση γωνία απόκλισης λόγω πολλαπλής σκέδασης Coulomb είναι:

$$\theta_0 = \theta^{rms}_{\varepsilon\pi\iota\pi\varepsilon\delta} = \frac{13.6\,\text{MeV}}{\beta c p}\, z \sqrt{\frac{x}{X_0}}\left[1 + 0.038 \ln\left(x/X_0\right)\right]$$

όπου p, βc και z είναι η ορμή, ταχύτητα και φορτίο του προσπίπτοντος σωματιδίου, x/X_0 είναι το πάχος του υλικού σε μονάδες μήκους ακτινοβολίας.

Για τα καόνια, με $\beta_k = 0.711$ θα έχουμε:

$$\theta_0^k = \frac{13.6}{0.711 * 500\,\text{MeV}}\sqrt{\frac{2}{40}}\left[1 - 0.11\right] \Rightarrow \theta_0^k = 7.5 * 10^{-3}\,\text{rad} = \boxed{7.5\,\text{mrad}}$$

Ανάλογα για το πιόνιο, η γωνία πολλαπλής σκέδασης θα είναι: $\boxed{\theta_0^{\pi} = 5.5\,\text{mrad}}$

3. Ποια είναι η μέση ενέργεια που χάνεται για ηλεκτρόνια ορμής 5 GeV/c και για μιόνια της ίδιας ορμής 5 GeV/c που περνούν μέσω 10cm άνθρακα;

Από τα γραφήματα dE/dx ως προς $\beta\gamma$ ή ορμή, βρίσκουμε την απώλεια ενέργειας για μιόνια 5GeV/c. Από το γράφημα βλέπουμε ότι dE/dx είναι $2.1\,MeV/gr/cm^2$.

Πολλαπλασιάζουμε με την πυκνότητα του άνθρακα οπότε: $\frac{dE}{dx} = 2.1 * 2.21 = 4.6\,MeV/cm$

Επομένως το μιόνιο αφού περάσει 10cm άνθρακα θα έχει εναποθέσει:

$$dE = 4.6\,MeV/cm * 10\,cm \Rightarrow \boxed{dE = 46\,MeV}$$

Για το ηλεκτρόνιο υπολογίζουμε τον παράγοντα $\beta\gamma$ οπότε έχουμε:

$$p = \beta\gamma m \Rightarrow \beta\gamma = \frac{p}{m} = \frac{5000\,MeV}{0.511} \Rightarrow \beta\gamma = 9784$$

Για την τιμή αυτή του $\beta\gamma$ και για άνθρακα, $dE/dx = 2.6\,MeV/g/cm^2$.

Πολλαπλασιάζοντας και πάλι με την πυκνότητα του άνθρακα έχουμε

$$\frac{dE}{dx} = 26 * 2.21 = 5.75\,MeV/cm \Rightarrow dE/_{10cm} = 5.75 * 10 \Rightarrow dE/_{10cm} = 57.5\,MeV$$

Για τα ηλεκτρόνια ωστόσο η βασική διεργασία απώλειας ενέργειας είναι μέσω ακτινοβολίας Bremsstrahlung. Η ενέργεια που χάνει το ηλεκτρόνιο μέσω της διαδικασίας αυτής είναι: $E = E_0 e^{-x/X_0}$ όπου X_0 το μήκος ακτινοβολίας που εξαρτάται από το υλικό και x η απόσταση που κάλυψε το ηλεκτρόνιο, ενώ E_0 η αρχική ενέργεια του ηλεκτρονίου

Η ενέργεια που θα χάσει το ηλεκτρόνιο θα είναι: $\Delta E = E_0 - E = E_0(1 - e^{-x/X_0})$

Για 10cm άνθρακα, θα έχουμε: $\Delta E = 5000\left[1 - e^{-10/(42.7/d)}\right]$ όπου υποθέτουμε ότι $E_0 \simeq p$, ενώ $X_0 = 42.7\,gr/cm^2$ και $d = 2.21\,gr/cm^3$ η πυκνότητα

Οπότε $\Delta E = 5000\left[1 - e^{-22.1/42.7}\right] \Rightarrow \Delta E = \underline{2020\,MeV}$

Το ηλεκτρόνιο επομένως θα χάσει συνολικά: $2020 + 57.5 = 2077.5\,MeV = \underline{2.078\,GeV}$

4. Στο πείραμα BaBar στο SLAC, υπάρχει ένας ανιχνευτής DIRC που χρησιμοποιείται για την ανίχνευση φορτισμένων σωματιδίων βασιζόμενος στην ανακατασκευή των δακτυλίων Cherenkov που δημιουργούνται καθώς φορτισμένα σωματίδια διαπερνούν λεπτή ράβδο από quartz (γυαλί). Ο δείκτης διάθλασης του quartz είναι n = 1.2. Η διακριτική ικανότητα προσδιορισμού της γωνίας Cherenkov είναι $\sigma(\theta_C)$= 2.5 *mrad.*

(α) Ποιά είναι η ελάχιστη ορμή που μπορεί να έχουν φορτισμένα καόνια ώστε να προκαλέσουν ακτινοβολία Cherenkov;

(β) Ποιά είναι η μέγιστη ορμή κάτω από την οποία ο ανιχνευτής DIRC μπορεί να διαχωρίσει με σημαντικότητα τουλάχιστον 3σ ένα π^+ από ένα K^+;

(α) Η ταχύτητα κατωφλίου για την ακτινοβολία Cherenkov είναι:

$$\beta_{κατ.} = \frac{P_{κατ}}{\sqrt{P_{κατ}^2+m^2}} = \frac{1}{n}$$

Επομένως για τα καόνια, η ορμή κατωφλίου θα είναι:

$$P_{κατ}^2 = \frac{P_{κατ}^2+m^2}{n^2} \Rightarrow (n^2-1)P_{κατ}^2 = m^2 \Rightarrow P_{κατ} = \frac{m}{\sqrt{n^2-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{κατ} = \frac{0.4937\,MeV/c}{\sqrt{1.2^2-1}} \Rightarrow \boxed{P_{κατ} = 0.744\,GeV/c}$$

(β) Η διαφορά στις γωνίες Cherenkov για τα πιόνια και καόνια είναι:

$$\cos\theta_1-\cos\theta_2 = \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{m_1^2}{p^2}}-\sqrt{1+\frac{m_2^2}{p^2}}\right) \simeq \frac{1}{2n}\left(\cancel{1}+\frac{m_1^2}{P_1^2}-\cancel{1}-\frac{m_2^2}{P_2^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta_1-\cos\theta_2 \cong \frac{1}{2n}\left(\frac{m_1^2-m_2^2}{p^2}\right)} \quad \text{όπου } \cos\theta_i = \frac{1}{n\beta_i} = \frac{1}{n\frac{P_i}{E_i}} = \frac{E_i}{nP_i}$$

Αλλά $\cos\theta_1-\cos\theta_2 \simeq \cos\theta_1-\cos(\theta_1+\Delta\theta) = \cancel{\cos\theta_1}-\cancel{\cos\theta_1}\overset{1}{\cancel{\cos\Delta\theta}}+\sin\theta_1\sin\Delta\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\theta_1-\cos\theta_2 \simeq \sin\theta_1\overset{\sim\Delta\theta}{\cancel{\sin\Delta\theta}} \Rightarrow \boxed{\cos\theta_1-\cos\theta_2 \simeq \sin\theta\,\Delta\theta}$$

Ξέρουμε ακόμα ότι $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\frac{1}{\beta^2n^2} \Rightarrow \sin^2\theta \simeq 1-\frac{1}{n^2} \Rightarrow \boxed{\sin^2\theta \simeq \frac{n^2-1}{n^2}}$

Από τις 2 τελευταίες εξισώσεις θα πάρουμε ότι:

$\cos\theta_1-\cos\theta_2 \simeq \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\Delta\theta$ και για διαχωρισμό 3σ: $\cos\theta_1-\cos\theta_2 \geq \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}3\sigma(\theta)$

Επομένως: $\frac{1}{2n}\frac{m_1^2-m_2^2}{p^2} \geq \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}3\sigma(\theta) \Rightarrow p^2 \leq \frac{m_1^2-m_2^2}{6\sqrt{n^2-1}\,\sigma(\theta)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow p^2 \leq \frac{0.4937^2-0.1396^2\,(GeV/c)^2}{6\sqrt{1.2^2-1}\cdot\sigma(\theta)} = \frac{0.224\,(MeV/c)^2}{6\cdot 0.66\cdot 2.5\cdot 10^{-3}} \Rightarrow p^2 \leq 22.5\frac{MeV^2}{c^2} \Rightarrow \boxed{p \leq 4.7\,GeV/c}$$

5. Ένα φορτισμένο σωματίδιο έχει ορμή 30 MeV/c και παρατηρείται ότι μπορεί να διαπεράσει γραφίτη (άνθρακα) πάχους 1.0cm. Εξηγήστε τί είδους σωματίδιο μπορεί να είναι.

Από τον πίνακα των στοιχείων και των ατομικών και πυρηνικών ιδιοτήτων τους έχουμε ότι για τον γραφίτη, η πυκνότητα είναι: $d = 2.21\,g/cm^3$.
Επομένως για πάχος 1cm θα έχουμε $2.21\,g/cm^2$.

Από το γράφημα της απόστασης R που ένα σωματίδιο χάνει ενέργεια λόγω μόνο ιονισμού και ατομικής διεγέρσεις (R/M) ως προς βγ, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (από το PDG) ότι για άνθρακα και για μιόνια, είναι περίπου $1.5\,g/cm^2/GeV/c^2$ για μιόνια $30\,MeV/c = 0.030\,GeV/c$
Πολλαπλασιάζοντας με τη μάζα του μιονίου $M = 0.106\,GeV/c^2$ έχουμε:
μια απόσταση $R = 0.106 * 1.5\,g/cm^2/GeV/c^2 \Rightarrow \underline{R = 0.15\,g/cm^2}$
Επομένως ένα μιόνιο με την ορμή αυτή δεν μπορεί να διαπεράσει γραφίτη 1c

Θα μπορούσαμε να το συμπεράνουμε διαφορετικά. Ένα μιόνιο έχει μάζα ηρεμίας 105MeV/c που είναι πολύ μεγαλύτερη από την ορμή 30MeV/c
Η κλασική κινητική ενέργεια θα είναι $E_{κιν} = \frac{p^2}{2m} = \frac{30^2}{2 \cdot 106} \Rightarrow E_{κιν} = 4.3\,MeV$
Σωματίδια ελάχιστης ιονιστικής ικανότητας στο γραφίτη έχουν $\frac{dE}{dx} = 1.742 \frac{MeV}{g/cm}$
και επομένως η ενέργεια που θα χαθεί κοντά στο ελάχιστο της dE/dx καμπύλης θα είναι: $1.742 \frac{MeV}{g/cm^2} * d = 1.742 \frac{MeV}{\cancel{g/cm^2}} * 2.21\,\cancel{g/cm^2} \Rightarrow dE/dx = 3.84\,MeV$
Επομένως εφόσον το μιόνιο δεν είναι σχετικιστικό και η απώλεια ενέργειας θα είναι πολύ μεγαλύτερη από την ελάχιστη ενέργεια

Αν το σωματίδιο δεν ήταν μιόνιο ~~και~~ ήταν πρωτόνιο ή πιόνιο, ή κάποιο τότε η κινητική ενέργεια των 30MeV/c θα ήταν ακόμη μικρότερη και σαν αποτέλεσμα η απόσταση που θα διένυε θα ήταν πολύ μικρότερη ενώ οι απώλειες ενέργειας dE/dx πολύ μεγαλύτερες.

Ενα ηλεκτρόνιο 30MeV/c είναι σχετικιστικό με $\beta\gamma = p/m = 30/0.511 = 58.7$.

Ο λόγος R/M στον άνθρακα θα ήταν περίπου $3\times10^4\, g/cm^2/GeV/c^2$.

Πολλαπλασιάζοντας με τη μάζα του ηλεκτρονίου: θα έχουμε μια απόσταση R

$R = 3\cdot10^4\cdot0.511\cdot10^{-3} \Rightarrow R = 15.33\, g/cm^2$

Για ηλεκτρόνια με $\beta\gamma = 58.7$ έχουμε $dE/dx = 2.1\, MeV/g/cm^2 \Rightarrow \frac{dE}{dx} = 2.1*2.21 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dE}{dx} = 4.64\, MeV/cm$

Η κινητική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου 30MeV/c ορμής είναι σχεδόν 30MeV.
Επομένως ένα ηλεκτρόνιο ορμής 30MeV/c θα περάσει διαμέσου του 1cm γραφίτη εναποθέτοντας dE/dx ενέργεια και υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν άλλες απώλειες

Το μήκος ακτινοβολίας στο γραφίτη είναι $42.7\, g/cm^2$ και με πάχος $2.21\, g/cm^2$ αντιστοιχεί σε 5% του μήκους ακτινοβολίας.

Δηλαδή η απώλεια λόγω ακτινοβολίας θα είναι $30MeV\cdot0.05 = 1.5\, MeV$ που θα πρέπει να προστεθεί στην απώλεια ενέργειας λόγω ιονισμού dE/dx.

Επομένως οι συνολικές απώλειες θα είναι $1cm\cdot4.64\, MeV/cm + 1.5MeV \simeq 6\, MeV$ που είναι πολύ μικρότερες από την κινητική ενέργεια των 30MeV.

Δηλαδή ένα ηλεκτρόνιο θα διαπεράσει 1cm γραφίτη.

6. Στο πείραμα Zeus στον επιταχυντή DORIS στο εργαστήριο DESY στο Αμβούργο της Γερμανίας, χρησιμοποιήθηκε ένα ηλεκτρομαγνητικό καλορίμετρο δειγματοληψίας το οποίο αποτελούνταν από υγρό αργό, Ar, σαν ενεργό υλικό μέσα στο όποιο ήταν εμβαπτισμένες πλάκες σιδήρου, Fe, πάχους 1.5mm και σε απόσταση 2.0mm η μία από την άλλη. Οι τιμές ενέργειας ιονισμού που αντιστοιχούν σε σωματίδιο ελαχίστης ιονιστικής ικανότητας (MIP) είναι $1.519 MeV \cdot g^{-1} \cdot cm^2$ και $1.451 MeV \cdot g^{-1} \cdot cm^2$ για το υγρό Ar, και Fe αντίστοιχα. Η πυκνότητα του Ar είναι $\rho^{Ar} = 1.396\ g/cm^3$ και του σίδηρου $\rho^{Fe} = 7.870\ g/cm^3$. Ο ατομικός αριθμός του σίδηρου είναι $Z^{Fe} = 26$ και ο μαζικός αριθμός $A^{Fe} = 55.85$ ενώ το μήκος ακτινοβολίας είναι $X_0^{Fe} = 1.76 cm.$

(α) Υπολογίστε το λόγο δειγματοληψίας για το καλορίμετρο αυτό. Υποθέστε ούτε κατά την εκδήλωση της ηλεκτρομαγνητικής καταιγίδας όλα τα φορτισμένα σωματίδια συμπεριφέρονται σαν σωματίδια ελάχιστης ιονιστικής ικανότητας και να υπολογίσετε τις απώλειες ενέργειας χρησιμοποιώντας την εξίσωση Beth-Block.

(β) Υπολογίστε την κριτική ενέργεια, E_C, για ον απορροφητή του καλορίμετρου.

(γ) Να εκτιμήσετε τις τιμές του στοχαστικού όρου της διακριτικής ικανότητας ενέργειας του καλορίμετρου αν η διόρθωση λόγω της ενέργειας αποκοπής είναι $F = 0.869$.

(δ) Υπολογίστε τον αριθμό των στοιχείων του δειγματοληπτικού καλορίμετρο (τον αριθμό των ζευγών ενεργού και απορροφητικού υλικού) το όποιο απαιτείται ώστε να περιέχεται το 95% των καταιγίδων που προκαλούνται από ηλεκτρόνια ενέργειας 30 GeV.

(ε) Υποθέστε ότι ηλεκτρόνια προσπίπτουν στο καλορίμετρο. Καθώς τα ηλεκτρόνια χτυπούν το μπροστινό μέρος του καλορίμετρο θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν φαινόμενα που σχετίζονται με το εγκάρσιο προφίλ του ανιχνευτή. Δηλαδή λανθασμένη εκτίμηση της ενέργειας επειδή σε κάποια ηλεκτρόνια η καταιγίδα διαφεύγει από τον ανιχνευτή λόγων της εγκάρσιας έκτασής της. Υποθέτοντας ότι το σημείο πρόσκρουσης του ηλεκτρονίου στην επιφάνεια του καλορίμετρο είναι γνωστό με πολύ καλή ακρίβεια, πόσο μακριά από τις άκρες του καλορίμετρου θα πρέπει να βρίσκεται ώστε το 95% της καταιγίδας στην εγκάρσια διεύθυνσή να περιέχεται στον καλορίμετρου.

(a) Ο λόγος δειγματοληψίας είναι ο λόγος της ενέργειας που εναποτίθεται στο ενεργό υλικό του καλορίμετρου ως προς την ενέργεια που εναποτίθεται στο υλικό του απορροφητή του καλορίμετρου από ένα σωματίδιο ελάχιστης ιονιστικής ικανότητας:

$$f = \frac{d_{\epsilon\nu\epsilon\rho\gamma.} \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\epsilon\nu\epsilon\rho\gamma\acute{o}}}{d_{\epsilon\nu\epsilon\rho} \left(\frac{dE}{d\cancel{x}}\right)_{\epsilon\nu\epsilon\rho\gamma\acute{o}} + d_{\alpha\pi o\rho.} \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\alpha\pi o\rho}} = \frac{0.2cm * 1.519\, MeV g^{-1} cm^2 * 1.396\, g\, cm^{-3}}{0.2cm * 1.519 * 1.396 + 0.15 * 1.451 * 7.87}$$

$$\Rightarrow f = 0.188 \Rightarrow \underline{f \simeq 20\%}$$ Η ενέργεια που εναποτίθεται στο ενεργό υλικό

(β) Η κριτική ενέργεια του σιδήρου μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$E_c = \frac{610}{Z + 1.24} = \frac{610}{26 + 1.24} \Rightarrow E_c = 22.39 MeV$$

(γ) Ο στοχαστικός όρος της διακριτικής ικανότητας θα είναι

$$\frac{\sigma(E)}{E} = \sqrt{\frac{E_c d_{Fe}}{\rho E X_0 F}} = \sqrt{\frac{22.39 * 0.15}{0.2 * 1000 * 1.76 \cdot E}} = \frac{0.098}{\sqrt{E(GeV)}} \Rightarrow \frac{\sigma(E)}{E} = \frac{9.8\%}{\sqrt{E(GeV)}}$$

Ο λόγος $E/(E_c * \frac{d}{X_0})$ δίνει τον αριθμό των σωματιδίων στη καταιγίδα για συγκεκριμένη ενέργεια E. Ο όρος $\rho E = E_{\varphi\omega\tau}$ είναι η ενέργεια που αναποτίθεται καθ' όλη στο ενεργό στοιχείο.

(δ) Ο αριθμός των μηκών ακτινοβολίας που απαιτούνται για τον πλήρη εντοπισμό της καταιγίδας αυξάνει λογαριθμικά με την ενέργεια.

Για κάθε μήκος ακτινοβολίας X_0 μια νέα γενιά σωματιδίων δημιουργείται, έως ότου φθάσουν στη κριτική ενέργεια οπότε αρχίζουν να χάνουν ενέργεια μέσω της διεργασίας του ιονισμού.

$$t_{max} = \ln\left(\frac{E}{E_c}\right) - 0.5[X_0] = \ln\left(\frac{310^4}{22.39}\right) - 0.5[X_0] = 6.7X_0 = \underline{11.8cm}$$

Επομένως χρειαζόμαστε 8 στοιχεία δειγματοληψίας για το μέγιστο της καταιγίδας.

Για να κρατήσουμε το 95% της καταιγίδας θα έχουμε:

$$t_{95\%} = t_{max} + 0.08 * Z + 9.6 * X_0 \Rightarrow t_{95\%} = 18X_0$$ και επομένως χρειαζόμαστε ~11 στοιχεία δειγματοληψίας

(ε) Η ακτίνα Molier μπορεί να υπολογισθεί από:

$$R_M = \frac{21MeV}{E_c}[X_0] = 1.65cm$$

Αλλά $R_M = \frac{7A}{Z}(g/cm^2) \Rightarrow \boxed{R_M \simeq \frac{7A}{Z}\left(\frac{1}{\rho_1^{Fe}}\right)cm = \frac{7 * 55.85}{26 * 7} = 1.9cm}$

Τα δύο αποτελέσματα είναι αρκετά ίσια.

Συνήθως, λαμβάνουμε το 95% της ενέργειας καταιγίδας αν λάβουμε μια απόσταση $2 * R_M$ από το κέντρο της καταιγίδας:

$$R_{95\%} = \frac{14A}{Z}\left(\frac{1}{\rho^{Fe}}\right)^{cm} = \frac{14 * 55.85}{26 * 7} \Rightarrow R_{95\%} \simeq 3.8cm$$

Επομένως αν ένα ηλεκτρόνιο πέσει ~4cm από το άκρο του ανιχνευτή, τότε πολύ πιθανόν να μετρήσουμε λάθος την ενέργειά του, γιατί μέρος της καταιγίδας χάνεται στα άκρα της καταιγίδας

7. Ένας θάλαμος ιονισμού είναι κατασκευασμένος σε μορφή κύβου ακμής 1 μέτρου και είναι γεμάτος με αέριο Ξένο (*Xe*) σε συνθήκες κανονικής θερμοκρασίας και πίεσης. Να βρεθεί το ρεύμα το οποίο παράγεται καθώς κοσμική ακτινοβολία περνά μέσα από τον θάλαμο αυτό. Μπορείτε να θεωρήστε ότι η κοσμική ακτινοβολία αποτελείται από μονιά ενέργειας 1 GeV τα οποία εισέρχονται στον ανιχνευτή κάθετα με ροή 1μιόνια cm-2 min-1. Συγκρίνετε το ρεύμα με αυτό που παράγεται από μία δέσμη πρωτονίων ενέργειας 100 GeV που προσπίπτει στον θάλαμο κινούμενη στην οριζόντια διεύθυνση. Θεωρήστε ότι η δέσμη έχει διάμετρο 1.0cm και ροή 1013 πρωτόνια/sec.

Μιόνια ορμής 1.GeV/c είναι περίπου 1.1 φορές ελάχιστης ιονιστικής ικανότητας ενώ ένα πρωτόνιο 100 GeV είναι περίπου 1.3 φορές.

Η καμπύλη dE/dx για το Ξένο παρουσιάζει ελάχιστο σε 1.255 MeV/g/cm² και η πυκνότητα του αερίου είναι 5.483 g/lt ή $5.483\cdot10^{-3}$ g/cm³.

Επομένως η απώλεια ενέργειας θα είναι: $7.569\cdot10^{-3}$ MeV/cm.

Ο ανιχνευτής είναι 100cm μήκος και επομένως η συνολική απώλεια ενέργειας για το μιόνιο θα είναι: $7.569\cdot10^{-1}\,\text{MeV} = 7.569\cdot10^{+5}\,\text{eV}$

Η απώλεια ενέργειας για κάθε ζεύγος ιόντων είναι 22eV και επομένως υπάρχουν $E_{ολ}/22\text{eV} = 7.569\cdot10^{5}/22\,\text{eV} = 3.44\cdot10^{4}$ ζεύγη ιόντων για κάθε μιόνιο.

Η επιφάνεια του κύβου του ανιχνευτή είναι $10^4\,\text{cm}^2$ και επομένως ο αριθμός των κοσμικών μιονίων που διαπερνούν τον κύβο είναι: $10^4/60\text{sec} = 1.66\cdot10^{2}\,\mu/\text{s}$

Άρα ο αριθμός των ζευγών ιόντων / δευτερόλεπτο $= 3.44\cdot10^{4}\cdot1.66\cdot10^{2} = \underline{5.73\times10^{6}}$

Το ρεύμα θα είναι: $5.73\cdot10^{6} * 1.602\cdot10^{-19}\,C \Rightarrow I_{ιον}^{\mu} = 9.18\cdot10^{-13}\,A = \underline{.92p}$

Για πρωτόνια 100GeV το ρεύμα θα είναι: $1.3 * 1.255 * 10^{6} * 5.483\cdot10^{-3} * 100 *$
$* 10^{13} * 1.6\cdot10^{-19}/22 = \underline{6.514\cdot10^{-2}\,A}$

Το ρεύμα είναι μεγαλύτερο όχι εξαιτίας της ενέργειας των σωματιδίων που άλλωστε αυξάνει το dE/dx πολύ λίγο, αλλά λόγω της έντασης των προσπίπτωντων σωματιδίων.