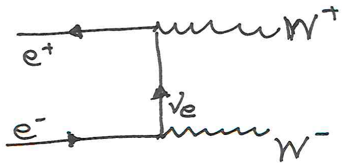
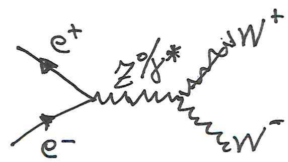
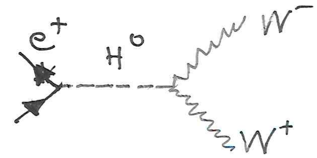
ΦΥΣ 331 – Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων

Εργασία 2η **Επιστροφή: Δευτέρα 3.10.22**

1. Σχεδιάστε όλα τα διαγράμματα χαμηλότερης τάξης τα οποία συνεισφέρουν στη διεργασία $e^+ + e^- \to W^+ + W^-$.







το οποίο είναι αρκετά σπάνιο επειδή η σύζευξη του H^0 με e^-e^+ είναι ιδιαίτερα μικρή.

2. Το φωτόνιο προβλέπεται από την θεωρία ότι έχει μηδενική μάζα. Αυτό μπορούμε να το ελέγξουμε από παρατηρήσεις ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων στο σύμπαν σε πολύ μεγάλες αποστάσεις. Ένα από τα όρια που τέθηκαν για τη μάζα του φωτονίου προέρχεται από τη μέτρηση του μαγνητικού πεδίου του γαλαξία Milky Way που περιέχει το ηλιακό μας σύστημα. Υποθέτοντας ότι το μαγνητικό πεδίο του γαλαξία υπακούει στις εξισώσεις Maxwell, υπολογίστε ένα πάνω όριο στη μάζα του φωτονίου τόσο σε μονάδες *eV* όσο και *kg*. Πόσο μικρότερη είναι αυτή σε σύγκριση με τη μάζα του ηλεκτρονίου; Η διάμετρος του γαλαξία μας είναι περίπου 100,000 έτη φωτός. <u>*Υπόδειξη*</u>: δεν χρειάζεται να λύσετε κάποια από τις εξισώσεις Maxwell.

Αν οι εξισώσεις Maxwell περιγράφουν το μαγνητικό πεδίο του Milky Way αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να θέσουμε ένα πάνω όριο στη μάζα του φωτονίου.

Η διάμετρος του γαλαξία είναι 100,000 έτη φωτός και σε μέτρα θα είναι:

$100{,}000\ \ell\text{-}y = 10^5 (3 \cdot 10^8)(10^7 \pi) \simeq 10^{21}\ m$ (ο αριθμός των δευτερολέπτων σε 1 έτος είναι: $\sim \pi 10^7$ sec).

Αν ο ηλεκτρομαγνητισμός, όπως τον ξέρουμε, περιγράφει το μαγνητικό πεδίο του γαλαξία στην απόσταση αυτή, τότε το φωτόνιο θα μπορούσε να έχει τέτοιο μήκος κύματος, συγκρίσιμο του μεγέθους δηλαδή.

Σαν αποτέλεσμα, το αντίστοιχο πάνω όριο, στην ενέργεια του φωτονίου θα είναι:

$$E_\gamma < \frac{\hbar c}{x} \simeq \frac{(1.05\times10^{-34})(3\times10^{8})}{10^{21}} J \Rightarrow E_\gamma \simeq 3\times10^{-47} J.$$

Σε eV η ενέργεια αυτή είναι: $E < \frac{3\times10^{-47}}{1.6\times10^{-19}} eV \Rightarrow E \lesssim 2\times10^{-28} eV$

Εφόσον $E = m_\gamma + E_{κιν} \Rightarrow m_\gamma \lesssim 2\cdot10^{-28} eV$ ή $m_\gamma \lesssim \frac{2\cdot10^{-47}}{(3\times10^8)^2} \simeq 3\cdot10^{-64}\ kg$

3. Η κοσμική ακτινοβολία υποβάθρου (Cosmic Microwave Backgroud ή CMB) είναι κατάλοιπο ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από τα πρώτα στάδια του σύμπαντος. Ανακαλύφθηκε από τους Arno Penzias και Robert Wilson την δεκαετία του 1960 ως στατικό υπόβαθρο θορύβου στα δεδομένα που συλλέγονταν από τα ραδιοτηλεσκόπια. Μπορείτε να βρείτε τη δημοσίευση σχετικά με την ανακάλυψη στην ακόλουθο αναφορά: *A. A. Penzias and R. W. Wilson, “A measurement of excess antenna temperature at 4080 Mc/s,” Astrophys. J.* ***142****, 419 (1965).*

(α) Παρατηρήθηκε ότι η ενέργεια των φωτονίων του CMB ανταποκρίνεται πλήρως στο φάσμα του μελανού σώματος. Στην περίπτωση αυτή, αναφερόμαστε στη χαρακτηριστική ενέργεια του φάσματος ως θερμοκρασία, η οποία για την περίπτωση της CMB αντιστοιχεί σε 2.7°K. Ποια η αντιστοιχία της θερμοκρασίας αυτής σε *eV*; *Υπόδειξη:* η σταθερά Boltzmann είναι $k_B = 1.38 \times 10^{-23} J \cdot K$.

(β) Στο πρώιμο σύμπαν, ηλεκτρόνια και πρωτόνια είχαν κινητική ενέργεια που ήταν πολύ μεγάλη για να μπορέσουν να δημιουργήσουν δέσμιες καταστάσεις και ως αποτέλεσμα δημιουργούσαν ένα αδιαφανές πλάσμα. Όταν η θερμοκρασία του σύμπαντος έπεσε αρκετά, τότε ηλεκτρόνια και πρωτόνια μπόρεσαν να δημιουργήσουν ηλεκτρικά ουδέτερες δέσμιες καταστάσεις, τα άτομα του υδρογόνου. Η περίοδος αυτή της ιστορίας του σύμπαντος αναφέρεται ως επανασύνδεση ή recombination. Χρησιμοποιώντας την ενέργεια της βασικής κατάστασης το υδρογόνου υπολογίστε τη θερμοκρασία στην οποία συνέβη η επανασύνδεση.

(γ) Την εποχή της επανασύνδεσης, η ενέργεια των φωτονίων καθορίστηκε από τη θερμοκρασία στην οποία συνέβη η επανασύνδεση. Τα φωτόνια που εκπέμφθηκαν την εποχή αυτή του σύμπαντος είναι αυτά που αποτελούν την CMB ακτινοβολία. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από το (α) και (β) ερώτημα, υπολογίστε τον λόγο του μήκους κύματος των φωτονίων του CMB που παρατηρούμε τώρα ως προς το μήκος κύματος των φωτονίων την εποχή της επανασύνδεσης. Αυτός ο λόγος αναφέρεται ως redshift παράγοντας και αποτελεί σημαντική ένδειξη για την επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος. Η διαστολή του σύμπαντος επιμηκύνει αποστάσεις συμπεριλαμβανομένου και του μήκους κύματος των φωτονίων.

Το παραπάνω αποτελεί μόνο ένα χονδρικό υπολογισμό του παράγοντα redshift και ο πιο ακριβής προσδιορισμός του μπορεί να επιτευχθεί με περισσότερο λεπτομερείς υπολογισμούς και χρήση θερμοδυναμικής για την επανασύνδεση των ηλεκτρονίων και πρωτονίων στο άτομο του υδρογόνου. Μπορείτε να βρείτε σχετικές πληροφορίες στις αναφορές P. J. E. Peebles, “Recombination of the primeval plasma,” Astrophys. J. **153**, 1 (1968); Y. B. Zeldovich, V. G. Kurt and R. A. Sunyaev, “Recombination of hydrogen in the hot model of the universe,” Sov. Phys. JETP **28**, 146 (1969) [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **55**, 278 (1968)].

(α) Η θερμοκρασία της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου (CMB) είναι 2.7K.

Επομένως: $E_{CMB} = k_B T$ όπου k_B η σταθερά Boltzmann.

$$E_{CMB} = 2.7 \times 1.38 \times 10^{-23} J \Rightarrow E_{CMB} \simeq 3.7 \times 10^{-23} J \simeq \frac{3.7 \cdot 10^{-23}}{1.6\ 10^{-19}} eV \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{CMB} \simeq 2.3 \cdot 10^{-4} eV}$$

(β) Η ενέργεια της βασικής κατάστασης του υδρογόνου είναι $E=-13.6eV$. Επομένως όταν η ενέργεια του σύμπαντος είναι λιγότερη από $13.6eV$, τα ηλεκτρόνια και πρωτόνια μπορούν να δημιουργήσουν δέσμια κατάσταση, αυτή του ατόμου του υδρογόνου. Για να προσδιορίσουμε την θερμοκρασία αυτή:

$$T_{επανασ.} = 1.6\times10^{-19}\frac{|E_{βασ}|}{k_B} = 1.6\times10^{-19}\frac{13.6}{1.38\cdot10^{-23}} \Rightarrow \boxed{T_{επ.}=1.6\times10^{5}\,K}$$

(γ) Για να υπολογίσουμε τον λόγο του μήκους κύματος της CMB που παρατηρούνται σήμερα, $\lambda_{σημ}$, ως προς το μήκος κύματος των φωτονίων στην περίοδο της επανασύνδεσης:

$$\frac{\lambda_{σημ}}{\lambda_{επαν}} = \frac{f_{σημ}}{f_{επαν}} = \frac{E_{επαν}}{E_{σημ}} = \frac{T_{επαν}}{T_{σημ}} \Rightarrow \frac{\lambda_{σημ}}{\lambda_{επαν}} = \frac{T_{επαν}}{T_{σημ}} = \frac{1.6\times10^{5}}{2.7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\lambda_{σημ}}{\lambda_{επαν}} \simeq 5.9\times10^{4}}$$

4. Ένας τύπος μετασχηματισμών Lorentz είναι απλά η περιστροφή γύρω από σταθερό άξονα. Έστω ότι έχουμε μια περιστροφή ως προς τον x-άξονα κατά μία γωνία θ. Ποιος θα είναι ο πίνακας Λ που δημιουργεί αυτή την περιστροφή σε ένα 4-διάνυσμα;

Βρίσκουμε αρχικά την περιστροφή που ενεργεί στο χωρικό διάνυσμα της ορμής $\vec{p}$. Η περιστροφή επιτυγχάνεται με τον πίνακα M, όπου:

$$\vec{p} \to M\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y\cos\theta - p_z\sin\theta \\ p_y\sin\theta + p_z\cos\theta \end{pmatrix}$$

Η ενέργεια εξαρτάται μόνο από το μέγεθος της ορμής και επομένως είναι αμετάβλητη κάτω από περιστροφή. Επομένως ο πίνακας Λ ο οποίος επιφέρει περιστροφή ενός τετραδιανύσματος p είναι:

$$p_\mu \to \Lambda_\mu{}^\nu p_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}_\mu{}^\nu \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}_\nu = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y\cos\theta - p_z\sin\theta \\ p_y\sin\theta + p_z\cos\theta \end{pmatrix}_\mu$$

Η περιστροφή μπορεί να εφαρμοστεί ενεργώντας από δεξιά:

$$p_\mu \to p_\nu \Lambda^\nu{}_\mu = (E, p_x\ p_y\ p_z)_\nu \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^\nu{}_\mu$$

Παρατηρήστε ότι ο πίνακας Λ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\Lambda^\mu{}_\rho\, \eta^{\rho\sigma} \Lambda^\nu{}_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^\mu{}_\rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{\rho\sigma} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^\nu{}_\sigma = \eta^{\mu\nu}$$

και είναι επομένως ένας μετασχηματισμός Lorentz

5. Θεωρήστε την ώθηση (boost) η οποία αποτελεί έναν διαφορετικό τύπο μετασχηματισμού Lorentz. Η ώθηση Lorentz μετασχηματίζει ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς κινούμενο με σχετική ταχύτητα. Υποθέστε ότι έχετε μία ώθηση κατά τη διεύθυνση του *z*-άξονα, μετατρέποντας τη σχετική ταχύτητα του αδρανειακού συστήματος κατά μία ταχύτητα $\vec{\beta} = \beta\hat{z}$. Σε μονάδες του φυσικού συστήματος, η ταχύτητα β είναι το ποσοστό της ταχύτητας του φωτός με την οποία κινείται το σύστημα και επομένως $-1 < \beta < 1$ (το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ώθηση στην αντίθετη κατεύθυνση). $|\beta| = 1$ σημαίνει ότι η ώθηση είναι με την ταχύτητα του φωτός *c*, που δεν είναι δυνατή. Ποιος είναι ο πίνακας Λ που δημιουργεί αυτή την ώθηση;

Ώθηση κατά μήκος του z-άξονα αφήνει τις συνιστώσες P_x & P_y αναλλοίωτες.

$P_x \to P_x$ και $P_y \to P_y$ ενώ η ενέργεια E και η συνιστώσα P_z αλλάζουν

Κάτω από την ώθηση αυτή, η ενέργεια γίνεται:

$E \to \gamma(E + P_z)$ όπου γ ο παράγοντας Lorentz ή ώθησης.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{και} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Η z-συνιστώσα της ορμής αλλάζει:

$$P_z \to \gamma(P_z + \beta E)$$

Οι δύο μετασχηματισμοί είναι γραμμικοί από τη στιγμή που είναι γραμμικοί συνδυασμοί της P_z και E. Μπορούμε επομένως να τις εφαρμόσουμε μέσω ενός πίνακα Λ που ενεργεί σε ένα τετραδιάνυσμα P.

Ενεργώντας από αριστερά θα έχουμε:

$$P_\mu \to \Lambda^\nu{}_\mu P_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}^{\nu}_{\mu} \begin{pmatrix} E \\ P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma E + \gamma\beta P_z \\ P_x \\ P_y \\ \gamma\beta E + \gamma P_z \end{pmatrix}_{\mu}$$

Ενεργώντας από δεξιά θα είχαμε:

$$P_\mu \to P_\nu \Lambda^\nu{}_\mu = \begin{pmatrix} E & P_x & P_y & P_z \end{pmatrix}_{\nu} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}^{\nu}_{\mu} .$$

6. Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιασμούς πινάκων, δείξτε ότι ο πίνακας Λ που προκαλεί μετασχηματισμούς Lorenz ώθησης όπως προσδιορίστηκε στην προηγούμενη άσκηση

$$\Lambda_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}_\mu^{\ \nu}$$

αφήνει την μετρική αμετάβλητη: $\Lambda_\rho^\mu g_\sigma^\rho \Lambda_\sigma^\nu = g_\mu^\nu$. Θυμηθείτε ότι ο παράγοντας ώθησης ισούται με $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Πρέπει να δείξουμε ότι ο πίνακας $\Lambda_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ αφήνει

την μετρική $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ αναλλοίωτη.

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας Λ είναι συμμετρικός: $\Lambda^T = \Lambda$. Πολλαπλασιάζουμε

από αριστερά οπότε θα πάρουμε:

$$\Lambda^T \eta = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία με Λ από δεξιά θα δώσει:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{\gamma^2(1-\beta^2)}_{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{-\gamma^2(1-\beta^2)}_{-1} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ εφόσον $1-\beta^2 = \gamma^{-2}$

7. Στη φυσική στοιχειωδών σωματιδίων χρησιμοποιείται ευρέως η έννοια της ωκύτητας (rapidity) η οποία εκφράζει τη διεύθυνση κίνησης ενός σωματιδίου και συμβολίζεται με το γράμμα y. Μαθηματικά η ωκύτητα ορίζεται από τη σχέση:

$$y = \frac{1}{2} ln\left(\frac{E + p_z}{E - p_z}\right)$$

για ένα σωματίδιο με ενέργεια Ε και z-συνιστώσα ορμής ίση με p_z. Η ωκύτητα είναι ιδιαίτερα εύχρηστη εξαιτίας των ιδιοτήτων κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Πραγματοποιήστε έναν μετασχηματισμό ώθησης της ενέργειας και ορμής στην z-διεύθυνση κατά ταχύτητα β και υπολογίστε πως μετασχηματίζεται η ωκύτητα κάτω από τον μετασχηματισμό αυτό. Θα πρέπει να γράψετε την μετασχηματιζόμενη ωκύτητα σαν μια απλή συνάρτηση της αρχικής ωκύτητας.

Η ωκύτητα ορίζεται ως: $y = \frac{1}{2} \ln \frac{E+p_z}{E-p_z}$

Εφαρμόζουμε μια Lorentz ώθηση στην z-διεύθυνση με ταχύτητα β.

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma E + \gamma\beta p_z \\ 0 \\ 0 \\ \gamma\beta E + \gamma p_z \end{pmatrix}$$

Επομένως κάτω από μετασχηματισμό Lorentz, η ωκύτητα μετασχηματίζεται

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{\gamma(E+\beta p_z)+\gamma(p_z+\beta E)}{\gamma(E+\beta p_z)-\gamma(p_z+\beta E)} = \frac{1}{2} \ln \frac{(1+\beta)(E+p_z)}{(1-\beta)(E-p_z)} \Rightarrow y = y + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}$$

Επομένως κάτω από ώθηση κατά μήκος του z-άξονα, η ωκύτητα μετασχηματίζεται προσθετικά.