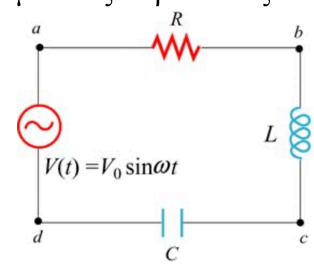
# ΦΥΣ. 112

**7ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ** **Επιστροφή 24.11.2023**

**1.** Υποθέστε ότι μια AC γεννήτρια με $V(t) = (150V)\sin 100t$ συνδέεται με τους ακροδέκτες του κυκλώματος που περιέχει μια αντίσταση $R = 40.0\Omega$, πηνίο αυτεπαγωγής $L=80.0mH$ και πυκνωτή χωρητικότητας $C=50.0\mu F$ όπως φαίνεται στο σχήμα.




(α) Υπολογίστε τις τάσεις $V_{R0}$, $V_{L0}$ και $V_{C0}$ το μέγιστο από τις πτώσεις δυναμικού σε κάθε συνιστώσα του κυκλώματος.

(β) Υπολογίστε τη μέγιστη διαφορά δυναμικού στα άκρα του πηνίου και του πυκνωτή μεταξύ των σημείων $b$ και $d$ όπως φαίνονται στο σχήμα.

(α) Η επαγωγική και χωρητική αντίσταση του κυκλώματος, δίνονται από τις σχέσεις:

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{(100 r/s)(50.0\times 10^{-6} F)} \Rightarrow X_C = 200\Omega.$$

$$X_L = L\omega = (100 r/s)(80.0\times 10^{-3} H) \Rightarrow X_L = 8.0\Omega$$

Η εμπέδηση επομένως θα είναι: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \Rightarrow Z = 196\Omega.$

Το μέγιστο ρεύμα θα είναι: $I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{150V}{196\Omega} \Rightarrow I_0 = 0.765A$

Το μέγιστο δυναμικό στα άκρα της αντίστασης R θα είναι το γινόμενο του μέγιστου ρεύματος και της αντίστασης: $V_{R_0} = I_0 R = (0.765A)(40.0\Omega) \Rightarrow \boxed{V_{R0} = 30.6V}$

Ανάλογα, η μέγιστη διαφορά δυναμικού στα άκρα του πηνίου θα είναι:

$$V_{L0} = I_0 X_L = (0.765A)(8.0\Omega) \Rightarrow \boxed{V_{L0} = 6.12V}$$

Τέλος η μέγιστη διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή θα είναι:

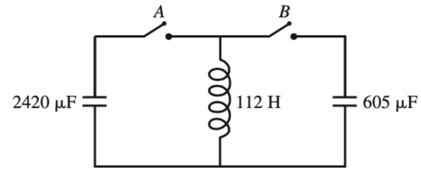
$$V_{C0} = I_0 X_C = (0.765A)(200.\Omega) \Rightarrow \boxed{V_{C0} = 153V}$$

Η μέγιστη διαφορά δυναμικού $V_0$ σχετίζεται με τις επιμέρους μέγιστες τιμές διαφορών δυναμικού σύμφωνα με τη σχέση: $V_0 = \sqrt{V_{R0}^2 + (V_{L0} - V_{C0})^2}$

(β) Από το σημείο b στο d, η μέγιστη διαφορά δυναμικού θα είναι η διαφορά δυναμικού $V_{L0}$ και $V_{C0}$ οπότε: $|\vec{V}_{bd}| = |\vec{V}_{L0} + \vec{V}_{C0}| = |V_{L0} - V_{C0}| = |(6.12 - 153)V| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\underline{|\vec{V}_{bd}| = 147V}}$$

**2.** Θεωρήστε το κύκλωμα του διπλανού σχήματος. Ο πυκνωτής χωρητικότητας $2420\mu F$ φορτίζεται αρχικά σε διαφορά δυναμικού $250V$. (α) Περιγράψτε πως θα χρησιμοποιήσετε τους διακόπτες A και B ώστε να μεταφέρεται όλη την ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στον πυκνωτή χωρητικότητας $2420\mu F$ στον πυκνωτή με χωρητικότητα $605\mu F$. Θα πρέπει να συμπεριλάβετε και το χρόνο αλλαγής της θέσης των διακοπτών. (β) Ποια θα είναι η τάση στα άκρα του πυκνωτή χωρητικότητας $605\mu F$ στο τέλος της διαδικασίας αυτής;




Σύμφωνα με το ζητούμενο θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τους διακόπτες με τέτοιο τρόπο ώστε να μεταφέρουμε όλη την ενέργεια από τον ένα πυκνωτή στον άλλο αποθηκεύοντάς την προσωρινά στο πηνίο.

Η ενέργεια στο πηνίο είναι $U_L = \frac{1}{2}LI^2$ ενώ στον πυκνωτή $U_C = \frac{1}{2}CV^2$

Αρχικά η ενέργεια είναι στον 1ο πυκνωτή: $U_C = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(2420\cdot10^{-6}F)(250V)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow U_C = 75.625 J$

Σε ένα κύκλωμα LC, το ρεύμα ακολουθεί την τάση κατά $\pi/2$. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να κλείσουμε τον διακόπτη A για $T/4$ για να μεταφέρουμε όλη την ενέργεια από τον πυκνωτή της χωρητικότητας $2420\mu F$ στο πηνίο. Ακολούθως, μπορούμε να ανοίξουμε τον διακόπτη A και να κλείσουμε τον διακόπτη B για $T/4$ για να μεταφέρουμε την ενέργεια από το πηνίο στον 2ο πυκνωτή, της χωρητικότητας των $605\mu F$.

(α) Ο χρόνος που ο διακόπτης A είναι κλειστός: $t_A = \frac{T_A}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{\omega_A}\right) = \frac{1}{2}\pi\sqrt{LC_A} \Rightarrow$

$\Rightarrow t_A = \frac{1}{2}\pi\sqrt{(112H)(2420\times10^{-6}F)} \Rightarrow \boxed{t_A = 818ms}$

κατά το χρονικό διάστημα $t_A$ μεταφέρεται ενέργεια 75.625J στο πηνίο.

Ο χρόνος $t_B$ που ο διακόπτης B είναι κλειστός και ο διακόπτης A ανοικτός είναι:

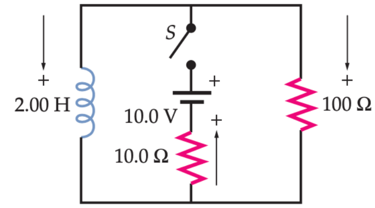
$t_B = \frac{1}{2}\pi\sqrt{LC_B} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{(112H)(605\mu F)} \Rightarrow \boxed{t_B = 409ms}$

Κατόπιν, ο διακόπτης B ανοίγει για να διατηρηθεί το φορτίο στον 2ο πυκνωτή.

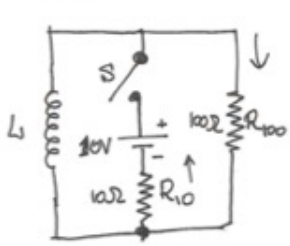
(β) Όταν ο δεύτερος πυκνωτής έχει ενέργεια 75.625J το δυναμικό στα άκρα του είναι:

$V = \sqrt{2\cdot E_c/C} = \sqrt{2\cdot 75.625J/605\cdot10^{-6}F} \Rightarrow \boxed{V = 500V}$

**3.** Στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος, το πηνίο έχει αμελητέα εσωτερική ωμική αντίσταση και ο διακόπτης *S* είναι ανοικτός για μεγάλο χρονικό διάστημα. Ο διακόπτης κλείνει. (α) Βρείτε το ρεύμα στην μπαταρία, το ρεύμα στην αντίσταση των 100Ω και το ρεύμα στο πηνίο ακριβώς μετά το κλείσιμο του διακόπτη. (β) Βρείτε το ρεύμα στην μπαταρία, το ρεύμα στην αντίσταση των 100Ω και το ρεύμα στο πηνίο μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα αφότου έκλεισε ο διακόπτης. (γ) Βρείτε το ρεύμα στην μπαταρία, το ρεύμα στην αντίσταση των 100Ω και το ρεύμα στο πηνίο την στιγμή που ο διακόπτης ανοίγει. (δ) Βρείτε το ρεύμα στην μπαταρία, στην αντίσταση των 100Ω και στο πηνίο μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα αφότου έχει ανοίξει ο διακόπτης




(α)




Ο διακόπτης ανοίγει. Το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο είναι $I_L = 0$, όπως συνέβαινε και πριν κλείσει ο διακόπτης.

Από τον 1° νόμο του kirchhoff, το ρεύμα της μπαταρίας, του πηνίου και της αντίστασης $R_{100\Omega}$ θα είναι:

$$I_{μπατ.} = I_L + I_{100\Omega} \Rightarrow I_{μπατ} = I_{100\Omega} \quad (1)$$

Από τον 2° νόμο του kirchhoff στον βρόχο στο δεξί μέρος θα έχουμε:

$$\mathcal{E}_{μπατ} - I_{μπατ} R_{10.0\Omega} - I_{R-100\Omega}(100\Omega) = 0 \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_{μπατ} = I_{R100}(R_{10\Omega} + R_{100\Omega})$$

$$\Rightarrow I_{R-100} = \frac{\mathcal{E}}{R_{100} + R_{10}} = \frac{10.0V}{110\Omega} \Rightarrow \boxed{I_{R-100} = 90.9\,mA}$$

(β) Μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα, τα ρεύματα είναι σταθερά και το πηνίο συμπεριφέρεται σαν βραχυκύκλωμα, και επομένως η διαφορά δυναμικού στα άκρα της αντίστασης $R_{100\Omega}$ είναι μηδέν: $-L\,dI_L/dt + I_{100\Omega}R_{100} = 0$ αλλά: $dI_L/dt = 0$ $\Rightarrow$

Από τον 2° νόμο του kirchhoff στον δεξί βρόχο:

$$\Rightarrow I_{100\Omega} R_{100\Omega} = 0 \Rightarrow \boxed{I_{100\Omega} = 0}$$

Επομένως στο δεξί βρόχο: $\mathcal{E} - I_{μπατ}\cdot(R_{10\Omega}) - I_{100\Omega}R_{100\Omega} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 10V - I_{μπατ}(10\Omega) - 0\cdot 100\Omega = 0 \Rightarrow \boxed{I_{μπατ} = \frac{\mathcal{E}}{R_{10}}} \Rightarrow \boxed{I_{μπατ} = 1.0A}$$

Από τον 1° νόμο του κίρχωφ θα έχουμε $I_{μπατ} = I_L + I_{100\Omega} \Rightarrow 1.0A = I_L + 0 \Rightarrow \boxed{I_L = 1.0A}$

(γ) Όταν ο διακόπτης ανοίγει και πάλι, $I_{μπατ} = 0$ και το $I_L$ αλλάζει συνεχώς, ενώ τη στιγμή που ανοίγει ο διακόπτης $I_L = 1.0A$. Από το νόμο του κίρχωφ:

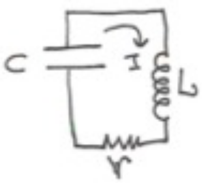
$$I_{μπ} = I_L + I_{R-100\Omega} \Rightarrow 0 = 1A + I_{R-100} \Rightarrow \boxed{I_{R-100\Omega} = -1A}$$

(δ) Μεγάλο χρονικό διάστημα αφότου ανοίξει ο διακόπτης, τα ρεύματα είναι: $\underline{I_L = I_{μπατ} = I_{R-100} = 0}$

**4.** Ένα πηνίο με εσωτερική αντίσταση μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας αντιστάτης και ένα ιδανικό πηνίο σε σειρά. Υποθέστε ότι το πηνίο έχει εσωτερική αντίσταση $1.0\Omega$ και αυτεπαγωγή $400mH$. Ένας πυκνωτής $2.0\mu F$ φορτίζεται σε $24.0V$ και συνδέεται στα άκρα του πηνίου. (α) Ποια είναι αρχικά η τάση στα άκρα του πηνίου; (β) Πόση ενέργεια χάνεται στο κύκλωμα πριν σβήσουν οι ταλαντώσεις που προκαλούνται; (γ) Ποια είναι η συχνότητα των ταλαντώσεων στο κύκλωμα; (Υποθέστε ότι η εσωτερική αντίσταση είναι αρκετά μικρή ώστε να μην επηρεάζει τη συχνότητα ταλαντώσεων). (δ) Ποιος ο παράγοντας ποιότητας του κυκλώματος;

(α) Εφαρμόζουμε τον 2ο κανόνα του Kirchhoff για να βρούμε την αρχική τάση στα άκρα του πηνίου.

$$V_c - L\frac{dI}{dt} - Ir = 0 \Rightarrow 24.0V = L\frac{dI}{dt} + Ir$$




Αρχικά το πηνίο συμπεριφέρεται σαν διακόπτης και επομένως η τάση στα άκρα του πηνίου θα είναι ίδια με του πυκνωτή: 24V.

(β) Η ενέργεια του πυκνωτή θα είναι: $U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(2.0\mu F)(24V)^2 \Rightarrow \underline{U = 0.576mJ}$

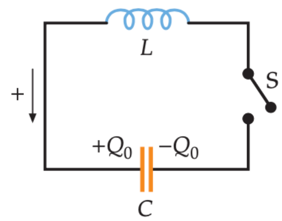
Η ενέργεια αυτή καταναλώνεται ως θερμότητα στην αντίσταση του πηνίου.

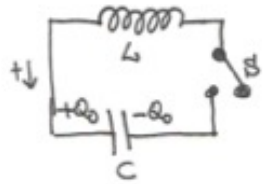
(γ) Η ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος είναι: $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(400mH)(2.0\mu F)}} \Rightarrow \boxed{f = 178Hz}$

(δ) Ο παράγοντας ποιότητας θα είναι: $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}L}{R} = \frac{1}{R}\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{C}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{1.0\Omega}\sqrt{\frac{400mH}{2.0\mu F}} \Rightarrow \underline{\underline{Q = 447}}$$

**5.** Ένα πηνίο και ένας πυκνωτής συνδέεονται όπως στο κύκλωμα του σχήματος. Αρχικά ο διακόπτης είναι ανοικτός και ο αριστερός οπλισμός του πυκνωτή έχει φορτίο $Q_0$. Κατόπιν ο διακόπτης κλείνει. (α) Κάντε το γράφημα του φορτίου $Q$ ως προς τον χρόνο $t$ και του ρεύματος $I$ ως προς τον χρόνο $t$ στο ίδιο γράφημα και εξηγήστε με βάση το γράφημα αυτό πως το ρεύμα προηγείται σε φάση του φορτίου κατά 90°. (β) Με βάση τις εξισώσεις που περιγράφουν το φορτίο και το ρεύμα, $Q = Q_0 cos\omega t$ και $I = -I_o sin\omega t$ αντίστοιχα, αποδείξτε χρησιμοποιώντας τριγωνομετρία και άλγεβρα ότι το ρεύμα προηγείται του φορτίου κατά 90°.




Έστω Q το στιγμιαίο φορτίο στον πυκνωτή.
Χρησιμοποιούμε τον 2° κανόνα του kirchhoff για να έχουμε την διαφορική εξίσωση του κυκλώματος.

$$\frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = 0$$

Η λύση στην εξίσωση αυτή είναι: $Q(t) = Q_0\cos(\omega t - \delta)$ με $\omega = 1/\sqrt{LC}$

Από τις αρχικές συνθήκες, για $t=0$ $Q=Q_0$ οπότε: $\cancel{Q_0} = \cancel{Q_0}\cos(\omega 0 - \delta) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\delta = 1 \Rightarrow \delta = 0$$

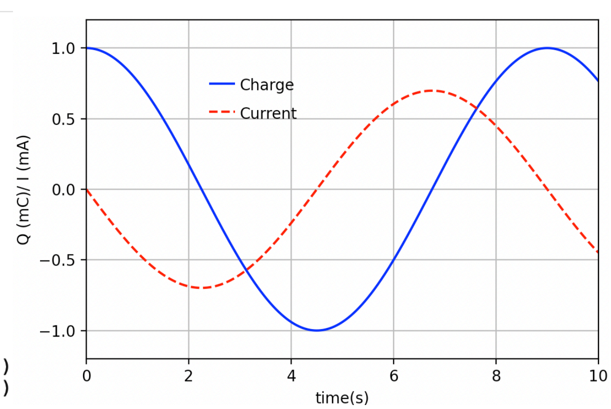
Επομένως το φορτίο γράφεται: $\boxed{Q = Q_0\cos\omega t}$ (1)

Το ρεύμα θα είναι: $I = \frac{dQ}{dt} = Q_0\frac{d}{dt}(\cos\omega t) \Rightarrow \boxed{I = -Q_0\omega\sin\omega t}$ (2)

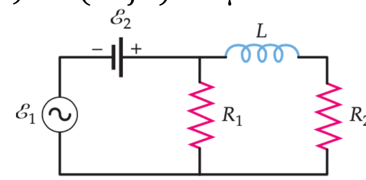
(α) Το γράφημα μπορούμε να το κάνουμε με Python και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα όπως και ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε

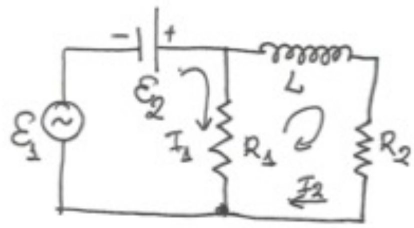
(β) Η εξίσωση για το ρεύμα: $I = -\omega Q_0\sin\omega t = \omega Q_0\cos(\omega t + \pi/2)$ επομένως το ρεύμα προηγείται του φορτίου κατά 90°, όπως φαίνεται και από το γράφημα.

```python
#!/usr/bin/python3
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
time=[0.001*k for k in range(10001)]
omega=2*np.pi/9
Q=[np.cos(omega*t) for t in time]
I=[-omega*np.sin(omega*t) for t in time]
plt.figure(figsize=(6,4))
plt.plot(time,Q,'b-')
plt.plot(time,I,'r--')
plt.xlabel('time(s)')
plt.ylabel('Q (mC)/ I (mA)')
plt.ylim(-1.2,1.2)
plt.xlim(0,10)
plt.text(3.0,0.70,'Charge')
plt.text(3.0,0.50,'Current')
plt.hlines(0.75,2.4,2.9,color='blue',linestyle='solid')
plt.hlines(0.55,2.4,2.9,color='red',linestyle='dashed')
plt.grid(True)
plt.show()
```



**6.** Μία ιδανική πηγή εναλλασσόμενου ρεύματος με ΗΕΔ $\mathcal{E}_1 = (20V)\cos(2\pi f t)$ και μια ιδανική μπαταρία με ΗΕΔ $\mathcal{E}_1 = 16V$ είναι συνδεδεμένες με ένα συνδυασμό 2 αντιστατών και ενός πηνίου όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Οι δύο αντιστάτες έχουν αντίσταση $R_1$=10Ω και $R_2$=8.0Ω ενώ το πηνίο έχει αυτεπαγωγή ίση με $L$=6.0$mH$. Βρείτε την μέση ισχύ που προσφέρεται σε κάθε αντιστάτη αν η οδηγούσα συχνότητα είναι (α) 100$Hz$, (β) 200$Hz$ και (γ) 800$Hz$.




(α) Η ολική ισχύς που καταναλώνεται στις αντιστάσεις $R_1$ και $R_2$ είναι:

$$P_1 = P_{1,dc} + P_{1,ac} \quad (1)$$

$$P_2 = P_{2,dc} + P_{2,ac} \quad (2)$$

Η ισχύς της σταθερής πηγής είναι: $P_{1,dc} = \frac{\mathcal{E}_2^2}{R_1}$ (3)

$$P_{2,dc} = \frac{\mathcal{E}_2^2}{R_2} \quad (4)$$

Η μέση AC ισχύς θα είναι:

$$P_{1,ac} = \frac{\mathcal{E}_{1,rms}^2}{R_1} = \frac{\mathcal{E}_{1,0}^2}{2R_1} \quad (5)$$

Από τον 2° νόμο του Kirchhoff στο βρόχο που περιλαμβάνει την $R_1$, $R_2$ και $L$:

$$R_1 I_1 - Z_2 I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{R_1 I_1}{Z_2} = \frac{\cancel{R_1}}{Z_2}\frac{\mathcal{E}_{1,0}}{\cancel{R_1}} = \frac{\mathcal{E}_{1,0}}{Z_2} \Rightarrow I_2 = \frac{\mathcal{E}_{1,0}}{Z_2} \quad (6)$$

Η μέση AC ισχύς στην αντίσταση $R_2$: $P_{2,ac} = \frac{I_{2,0}^2}{2} R_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathcal{E}_{1,0}}{Z_2}\right)^2 R_2 \Rightarrow$

$$P_{2,ac} = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{E}_1^2}{Z_2^2} R_2 \quad (7)$$

Αντικαθιστούμε την (3) & (5) στην (1) και την (7) & (4) στην (2)

$$P_1 = \frac{\mathcal{E}_2^2}{R_1} + \frac{\mathcal{E}_{1,0}^2}{2R_1} \Rightarrow P_1 = \frac{(16V)^2}{10\Omega} + \frac{(20V)^2}{2(10\Omega)} \Rightarrow \boxed{P_1 = 46W}$$

$$P_2 = \frac{\mathcal{E}_2^2}{R_2} + \frac{\mathcal{E}_1^2}{2Z_2^2} R_2 \Rightarrow P_2 = \frac{(16V)^2}{8.0\Omega} + \frac{(20V)^2 \cdot 8\Omega}{2\left[8.0^2 + (2\pi \cdot 100 \cdot 6mH)^2\right]} \Rightarrow \boxed{P_2 = 52W}$$

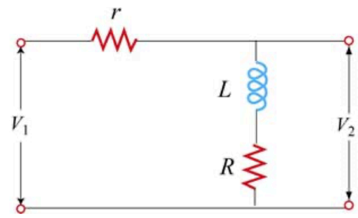
(β) Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα για να βρούμε $P_1$ & $P_2$ για $f = 200Hz$: $P_1 = 46W$, $P_2 = 45W$

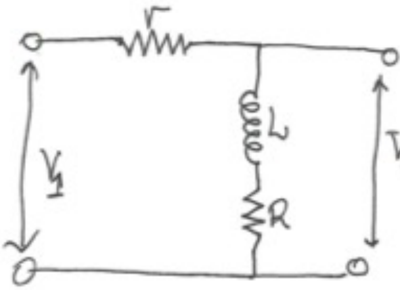
(γ) Για $f = 800Hz$ έχουμε $P_1 = 46W$ & $P_2 = 34W$.

**7.** Ένα *RL* φίλτρο υψηλών συχνοτήτων (το κύκλωμα κόβει όλα τα ρεύματα χαμηλών AC-ρευμάτων) αναπαρίσταται με αυτό που φαίνεται στο σχήμα. Η αντίσταση *R* είναι η εσωτερική αντίσταση του πηνίου.

(α) Βρείτε τον λόγο $V_{20}/V_{10}$, τον λόγο της μέγιστης εξωτερικής τάσης, $V_{20}$ προς τη μέγιστη τάση εισόδου.

(β) Υποθέστε ότι $r = 15.0\Omega$, $R = 10.0\Omega$ και $L=250mH$. Βρείτε τη συχνότητα στην οποία ο λόγος αυτός ($V_{20}/V_{10}$) ισούται με ½.




(α) Η εμπέδηση του κυκλώματος είναι:

$$Z_1 = \sqrt{(R+r)^2 + X_L^2} \quad \text{όπου } X_L = L\omega$$

Η εμπέδηση του κυκλώματος εξόδου είναι: $Z_2 = \sqrt{R^2 + X_L^2}$.

Επομένως το μέγιστο ρεύμα είναι:

$$I_0 = \frac{V_{10}}{Z_1} = \frac{V_0}{\sqrt{(R+r)^2 + X_L^2}}$$

Ανάλογα, το μέγιστο ρεύμα εξόδου θα είναι: $I_0 = \frac{V_{20}}{Z_2} \Rightarrow V_{20} = I_0\sqrt{R^2+X_L^2}$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{V_{20}}{V_{10}} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\sqrt{R^2+X_L^2}}{\sqrt{(R+r)^2+X_L^2}}$$

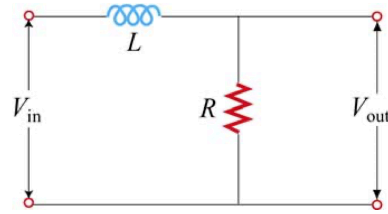
(β) Για $\frac{V_{20}}{V_{10}} = \frac{1}{2}$ θα έχουμε: $\frac{R^2+X_L^2}{(R+r)^2+X_L^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow X_L = \sqrt{\frac{(R+r)^2-4R^2}{3}}$

Αλλά $X_L = \omega L = 2\pi f L$

Αντικατάσταση δίνει: $f = \frac{1}{2\pi L}\sqrt{\frac{(R+r)^2-4R^2}{3}} \Rightarrow f = \frac{1}{(2\pi)(0.25H)}\sqrt{\frac{(10+15)^2-4(10)^2}{3}}$

$$\Rightarrow \underline{f = 5.51\,Hz}$$

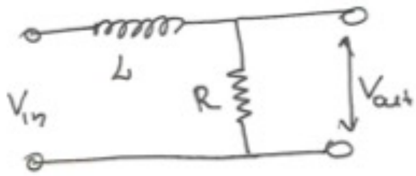
**8.** Το *RL* κύκλωμα το σχήματος παρουσιάζει ένα *RL* φίλτρο. Θεωρήστε ότι το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L$ =400 $mH$ και η τάση εισόδου είναι $V_{in}$ = (20.0V) sin$\omega t$ όπου $\omega$=200rad/s.




(α) Ποια είναι η τιμή της αντίστασης $R$ τέτοια ώστε η τάση εξόδου, ακολουθεί την τάση εισόδου κατά 30°;

(β) Προσδιορίστε το λόγο των πλατών της τάσης εξόδου και της τάσης εισόδου. Τί είδους φίλτρο είναι το συγκεκριμένο κύκλωμα, υψηλών ή χαμηλών συχνοτήτων;

(γ) Αν οι θέσεις του αντιστάτη και του πηνίου εναλλαχθούν, το κύκλωμα που προκύπτει θα είναι φίλτρο υψηλών συχνοτήτων ή φίλτρο χαμηλών συχνοτήτων;




(α) Η τάση εξόδου είναι σε φάση με το ρεύμα γιατί μετράται στα άκρα της αντίστασης. Επομένως η διαφορά φάσης μεταξύ της τάσης εισόδου και της τάσης εξόδου είναι ίδια με αυτή τη διαφορά φάσης και ικανοποιεί:

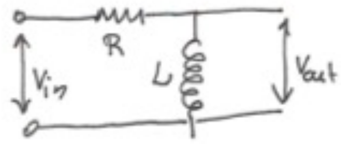
$$\tan\phi = \frac{V_L}{V_R} = \frac{\cancel{I}X_L}{\cancel{I}R} = \frac{\omega L}{R} \Rightarrow R = \frac{\omega L}{\tan\phi} = \frac{(200\,\text{r/s})(0.4\,\text{H})}{\tan 30^\circ} \Rightarrow \underline{R = 139\,\Omega}$$

(β) Ο λόγος δίνεται από

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{V_R}{V_{in}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \cos\phi = \cos 30^\circ = 0.866$$

Το κύκλωμα αποτελεί ένα φίλτρο υψηλών συχνοτήτων, εφόσον ο λόγος $\frac{V_{out}}{V_{in}}$ ελαττώνεται καθώς αυξάνει η συχνότητα $\omega$.

(γ) Στην περίπτωση αυτή το κύκλωμα είναι όπως το παρακάτω σχήμα:



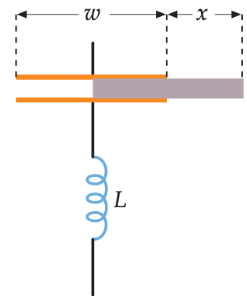

Ο λόγος της τάσης εξόδου προς την τάση εισόδου είναι:

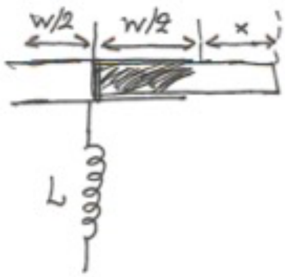
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \left[1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2\right]^{-1/2}$$

Στην περίπτωση αυτή για $\omega \to 0$ $\frac{V_{out}}{V_{in}} \to 0$ οπότε το κύκλωμα είναι ένα φίλτρο χαμηλών συχνοτήτων.

καθώς το $\omega \gg \frac{R}{L}$, τότε $\frac{V_{out}}{V_{in}} \to 1$

**9.** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας πυκνωτής σε σειρά με έναν πυκνωτή παράλληλων πλακών. Ο πυκνωτής έχει πλάτος $w$ = 20cm και η απόσταση μεταξύ των οπλισμών του είναι $2.0mm$. Ένα διηλεκτρικό υλικό με διηλεκτρική σταθερά ίση με 4.8 μπορεί να εισχωρήσει στο εσωτερικό και εξωτερικό του διάκενου μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή. Το πηνίο έχει αυτεπαγωγή $L = 2.0mH$. Όταν το μισό του διηλεκτρικού έχει εισαχθεί ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή ($x = w/2$), η συχνότητα συντονισμού είναι $90MHz$. (α) Βρείτε την χωρητικότητα του πυκνωτή χωρίς το διηλεκτρικό (β) Βρείτε η συχνότητα συντονισμού συναρτήσει του $x$ για τιμές στο διάστημα $0 \leq x \leq w$.




(α) Μπορούμε να προσεγγίσουμε τον πυκνωτή σαν τον ισοδύναμο πυκνωτή δύο πυκνωτών συνδεδεμένων παράλληλα.
Έστω $C_1$ η χωρητικότητα του πυκνωτή που είναι γεμάτος με διηλεκτρικό και $C_2$ η χωρητικότητα του πυκνωτή με αέρα.

Θα έχουμε: $C(x) = C_1 + C_2 = \frac{k\varepsilon_0 A_1}{d} + \frac{\varepsilon_0 A_2}{d}$ (1)

Γράφουμε την $A_2$ συναρτήσει της ολικής επιφάνειας $A$ ενός πυκνωτή με μήκος $W$ και ενός με μήκος οπλισμού $x$. Επομένως θα έχουμε: $\frac{A_2}{A} = \frac{x}{w} \Rightarrow A_2 = A\frac{x}{w}$ (2)

Το εμβαδό $A_1$ μπορεί να γραφεί συναρτήσει του $A_2$ και $A$ ως: $A_1 = A - A_2 = A\left(1-\frac{x}{w}\right)$ (3)

Αντικαθιστούμε την (2) και (3) στην (1) οπότε θα έχουμε:

$$C(x) = \frac{k\varepsilon_0 A}{d}\left(1-\frac{x}{w}\right) + \frac{\varepsilon_0 A}{d}\frac{x}{w} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\left[k\left(1-\frac{x}{w}\right)+\frac{x}{w}\right] = kC_0\left[1-\frac{k-1}{kw}x\right]$$

με $C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

Επομένως η χωρητικότητα όταν $x = \frac{w}{2}$ θα είναι:

$$C\left(\frac{w}{2}\right) = kC_0\left[1-\frac{k-1}{k\cancel{w}}\frac{\cancel{w}}{2}\right] \Rightarrow C\left(\frac{w}{2}\right) = kC_0\left[1-\frac{k-1}{2k}\right] \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{w}{2}\right) = C_0\frac{k+1}{2}}$$

Η συχνότητα συντονισμού του κυκλώματος συναρτήσει του $L$ και $C(x)$ είναι:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC(x)}} \Rightarrow f\left(x=\frac{w}{2}\right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0\frac{k+1}{2}}} \Rightarrow \boxed{f\left(x=\frac{w}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{(k+1)LC_0}}} \quad (A)$$

Λύνουμε ως προς $C_0$ και θα πάρουμε: $C_0 = \frac{1}{2\pi^2 f^2\left(x=\frac{w}{2}\right)L(k+1)}$

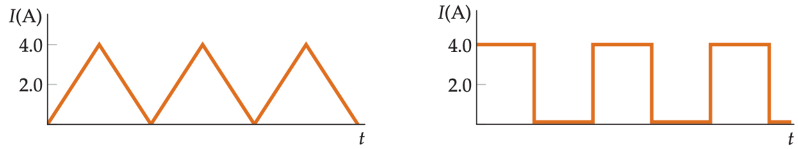
Αντικαθιστούμε αριθμητικά δεδομένα: $C_0 = \frac{1}{2\pi^2(90MHz)^2\left(\frac{20cm}{2}\right)(2.0mH)(4.8+1)} \Rightarrow \boxed{C_0 = 5.4fF}$

(β) Αντικαθιστούμε για $C(x)$ στην εξίσωση (A) θα δώσει:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\kappa C_0\left[1 - \frac{\kappa-1}{\kappa W}x\right]}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(2.0\,mH)(4.8)(5.39\cdot 10^{-16}F)\left[1 - \frac{4.8-1}{4.8(0.2m)}x\right]}} \Rightarrow$$

$$\boxed{f(x) = \frac{70\,MHz}{\sqrt{1-(4.0\,m^{-1})x}}}$$

**10.** Να βρεθούν η μέση και η rms τιμή του ρεύματος για τις δύο κυματομορφές που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.




Όπως έχουμε αναφέρει, η μέση τιμή μιας οποιασδήποτε ποσότητας ως προς ένα χρονικό διάστημα ΔΤ, είναι το ολοκλήρωμα της ποσότητας ως προς το χρονικό διάστημα διαιρούμενο με το χρονικό διάστημα ΔΤ.

Επομένως θα έχουμε: $I_{av} = \frac{1}{\Delta T}\int_0^{\Delta T} I\,dt$ και $I_{rms} = \sqrt{(I^2)_{av}}$

(α) Για την πρώτη κυματομορφή, το ρεύμα κατά τη διάρκεια του πρώτου μισού κύκλου του χρονικού διαστήματος ΔΤ θα είναι:

$$I_a = \frac{4A}{\Delta T}t \Rightarrow I_{av,a} = \frac{1}{\Delta T}\int_0^{\Delta T}\frac{4.0A}{\Delta T}t\,dt = \frac{4.A}{(\Delta T)^2}\int_0^{\Delta T}t\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{av,a} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}A}{\cancel{(\Delta T)^2}}\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\Delta T^2} \Rightarrow \boxed{I_{av,a} = 2A}$$

Το τετράγωνο του ρεύματος θα είναι: $I_a^2 = \frac{(4.A)^2}{\Delta T^2}t^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (I_a^2)_{av} = \frac{1}{\Delta T}\int_0^{\Delta T}\frac{(4A)^2}{\Delta T^2}t^2\,dt = \frac{(4.A)^2}{\cancel{\Delta T^3}}\frac{1}{3}\cancel{\Delta T^3} \Rightarrow \boxed{(I_a^2)_{av} = \frac{16A^2}{3}} \Rightarrow$$

$$I_{rms,a} = \sqrt{\frac{16}{3}A^2} = \underline{2.3A}$$

(β) Το ρεύμα κατά τη διάρκεια του δεύτερου κύκλου είναι ∅, επομένως εμφανίζουμε το ρεύμα για το πρώτο μισό κύκλο του χρονικού διαστήματος ΔΤ/2, $I_b = 4.0A$

Έχουμε· $I_{av,b} = \frac{4.0A}{\Delta T}\int_0^{\Delta T/2}dt = \frac{4.0A}{\cancel{\Delta T}}\frac{\cancel{\Delta T}}{2} \Rightarrow \boxed{I_{av,b} = 2A}$

Το τετράγωνο του ρεύματος κατά το μισό κύκλο: $I_b^2 = (4.0A)^2$

$$(I_b^2)_{av} = \frac{(4.0A)^2}{\Delta T}\int_0^{\Delta T/2}dt = \frac{4.0A^2}{\Delta T}(t)\Big|_0^{\Delta t/2} \Rightarrow (I_b^2)_{av} = 8.0A^2 \Rightarrow I_{rms,b} = \sqrt{8.0A^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{I_{rms,b} = 2.8A}$$