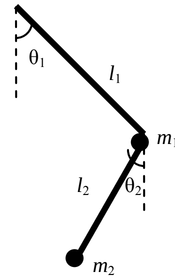
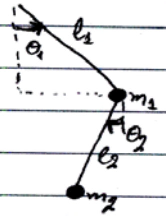
1. Να βρεθούν οι φυσικοί τρόποι ταλάντωσης (normal modes) του διπλού εκκρεμούς υποθέτοντας ίσα μήκη, αλλά όχι ίσες μάζες και ταλαντώσεις μικρής γωνίας θ_1 και θ_2. Δείξτε ότι όταν η μάζα m_2 που βρίσκεται χαμηλότερα είναι αρκετά μικρή σε σχέση με την μάζα m_1, οι δύο συχνότητες είναι σχεδόν ίσες. Αν τα δύο εκκρεμή τεθούν σε κίνηση τραβώντας την πάνω μάζα m_1, λίγο από τη θέση ισορροπίας ως προς την κατακόρυφο και μετά αφήνοντάς την ελεύθερη, δείξτε ότι σε κανονικά περιοδικά διαστήματα, το ένα εκκρεμές είναι σε ηρεμία ενώ το άλλο εκτελεί ταλάντωση μέγιστου πλάτους.





Για μικρές γωνίες έχουμε ταλαντώσεις μικρού πλάτους.
Αγνοώντας τις κατακόρυφες συνιστώσες των ταχυτήτων και προσεγγίζοντας τα $\cos\theta_i$ με Taylor ανάπτυγμα κρατώντας μόνο τους 2 πρώτους όρους, θα έχουμε:

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\ell\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\ell\dot{\theta}_1 - \ell\dot{\theta}_2)^2 \qquad \ell_1 = \ell_2 = \ell$$

$$V = \frac{m_1 g \ell}{2}\theta_1^2 + \frac{m_2 g \ell}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2) \qquad \cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}, \quad \sin\theta \simeq \frac{\theta}{2}$$

όπου $x_i = \ell\sin\theta \simeq \ell\frac{\theta}{2} \Rightarrow \dot{x} = \ell\frac{\dot{\theta}}{2}$

$V_1 = mg\ell(1-\cos\theta_1) = mg\ell(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{\theta_1^2}{2}) \Rightarrow V = mg\ell\frac{\theta_1^2}{2}$

$V_2 = m_2 g[\ell(1-\cos\theta_1) + \ell(1-\cos\theta_2)] \Rightarrow V_2 = \frac{1}{2} m_2 g \ell(\theta_1^2 + \theta_2^2)$

Επομένως μπορούμε τώρα να γράψουμε των πινάκων:

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial\theta_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial\theta_1\partial\theta_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial\theta_2\partial\theta_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial\theta_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 g\ell + m_2 g\ell & 0 \\ 0 & m_2 g\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1+m_2)g\ell & 0 \\ 0 & m_2 g\ell \end{bmatrix}$$

$$[m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\theta}_1^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\theta}_1\partial\dot{\theta}_2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\theta}_2\partial\dot{\theta}_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\theta}_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1\ell^2 + m_2\ell^2 & -m_2\ell^2 \\ -m_2\ell^2 & m_2\ell^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1+m_2)\ell^2 & -m_2\ell^2 \\ -m_2\ell^2 & m_2\ell^2 \end{bmatrix}$$

Η εξίσωση των ιδιοσυχνοτήτων είναι επομένως:

$(|[A] - [m]\omega^2|) = \phi \Rightarrow$ Αντικαθιστώντας $\lambda = \omega^2$ και $[A]$, $[m]$ από πιο πάνω έχουμε:

$$\begin{vmatrix} (m_1+m_2)g\ell - (m_1+m_2)\ell^2\lambda & +m_2\ell^2\lambda \\ m_2\ell^2\lambda & m_2 g\ell - m_2\ell^2\lambda \end{vmatrix} = \phi \Rightarrow \begin{vmatrix} (m_1+m_2)(g\ell - \ell^2\lambda) & m_2\ell^2\lambda \\ m_2\ell^2\lambda & m_2\ell(g - \ell\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (m_1+m_2)\ell^2(g-\ell\lambda)^2 m_2 - m_2^2\ell^4\lambda^2 = \phi \Rightarrow \underset{\neq 0}{\cancel{\ell^2}}\big(\underbrace{m_2(m_1+m_2)(g-\ell\lambda)^2 - m_2^2\ell^2\lambda^2}_{\text{διαφορά τετραγώνων}}\big) = \phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m_1+m_2)m_2 = \sqrt{(m_1+m_2)^2 m_2^2}$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{m_1+m_2}\, g - \left(\sqrt{m_1+m_2} - \sqrt{m_2}\right) \lambda l\right]\left[\sqrt{m_1+m_2}\, g - \left(\sqrt{m_1+m_2} + \sqrt{m_2}\right) \lambda l\right] = \emptyset \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \omega_{1,2}^2 = \frac{\sqrt{m_1+m_2}\, g}{\left[\sqrt{m_1+m_2} \mp \sqrt{m_2}\right] l} \Rightarrow$$ Οι ιδιοσυχνότητες είναι:

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \omega_{1,2}^2 = \frac{\sqrt{m_1+m_2}}{\left[\sqrt{m_1+m_2} \mp \sqrt{m_2}\right]} \frac{g}{l}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{12} = \omega_{12}^2 = \frac{m_1+m_2 \pm \sqrt{m_2(m_1+m_2)}}{m_1} \frac{g}{l}} \quad (A)$$

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα, χρησιμοποιούμε την εξίσωση:

$$\sum_j \left(A_{jk} - \omega_r^2 m_{jk}\right) a_{jr} = \emptyset$$

Για $r=1$ ($1^η$ ιδιοσυχνότητα) $k=1$ έχουμε:

$$\left(A_{11} - \omega_1^2 m_{11}\right) a_{11} + \left(A_{21} - \omega_1^2 m_{21}\right) a_{21} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[(m_1+m_2) g l - (m_1+m_2) l^{\cancel{2}} \frac{m_1+m_2+\sqrt{m_2(m_1+m_2)}}{m_1} \frac{g}{\cancel{l}}\right] a_{11} +$$

$$+ m_2 \cancel{l^2}\, \frac{m_1+m_2+\sqrt{m_2(m_1+m_2)}}{m_1} \frac{g}{\cancel{l}}\, a_{21} = \emptyset \quad (B)$$

Για $r=2$ ($2^η$ ιδιοσυχνότητα) και $k=1$ έχουμε:

$$\left(A_{21} - \omega_2^2 m_{21}\right) a_{12} + \left(A_{22} - \omega_2^2 m_{22}\right) a_{22} = \emptyset \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{21}\left(m_2 l^{\cancel{2}} \frac{m_1+m_2-\sqrt{m_2(m_1+m_2)}}{m_1} \frac{g}{\cancel{l}}\right) + \left[m_2 g l - \left(\frac{m_1+m_2-\sqrt{m_2(m_1+m_2)}}{m_1} \frac{g}{\cancel{l}} m_2 l^{\cancel{2}}\right)\right] a_{22} = 0$$

(Γ)

Από την (B) έχουμε:

$$(m_1+m_2)gl\left[1-\frac{m_1+m_2+\sqrt{m_2(m_1+m_2)}}{m_1}\right]a_{11}+m_2gl\,\frac{m_1+m_2+\sqrt{m_2(m_1+m_2)}}{m_1}\,a_{21}=0$$

$$\Rightarrow a_{11}\,(m_1+m_2)gl\left[\frac{\cancel{m_1}-\cancel{m_1}-m_2-\sqrt{m_2(m_1+m_2)}}{m_1}\right]+m_2gl\,\frac{m_1+m_2+\sqrt{m_2(m_1+m_2)}}{m_1}\,a_{21}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{11}\,(m_1+m_2)gl\,\frac{m_2+\sqrt{m_2(m_1+m_2)}}{m_1}=m_2gl\,\frac{m_1+m_2+\sqrt{m_2(m_1+m_2)}}{m_1}\,a_{21}$$

$$\Rightarrow a_{11}=\frac{m_2\left(m_1+m_2+\sqrt{m_2(m_1+m_2)}\right)}{(m_1+m_2)\left(m_2+\sqrt{m_2(m_1+m_2)}\right)}\,a_{21}\qquad (\Delta)$$

Με τον ίδιο τρόπο από την (Γ) παίρνουμε:

$$a_{22}=\frac{m_2\left(m_1+m_2-\sqrt{m_2(m_1+m_2)}\right)}{(m_1+m_2)\left(m_2-\sqrt{m_2(m_1+m_2)}\right)}\,a_{12}\qquad (E)$$

Κανονικοποιώντας τα παραπάνω ιδιοδιανύσματα σύμφωνα με την σχέση:

$$a_r^T[m]a_r=1$$ όπου a_r^T είναι το ανάστροφο του a_r.

Από την παραπάνω σχέση και χρησιμοποιώντας (Δ) ∧ (Ε) έχουμε ότι:

$$a_{1,2}=\frac{1}{l\sqrt{2m_1m_2\left(m_1+m_2\pm\sqrt{m_2(m_1+m_2)}\right)}}\begin{bmatrix}m_2\pm\sqrt{m_2(m_1+m_2)}\\ m_1+m_2\pm\sqrt{m_2(m_1+m_2)}\end{bmatrix}\qquad (Z)$$

Τα δύο αυτά διανύσματα δίνουν και τους φυσικούς τρόπους ταλάντωσης.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $m_1>>m_2$ και θεωρήσουμε ότι $\mu=\frac{m_2}{m_1}$ το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γραφτεί

$$\omega_{1,2}=\frac{g}{l}\left(1+\mu\pm\sqrt{\mu(1+\mu)}\right)\simeq\frac{g}{l}\left(1\pm\sqrt{\mu}\right)$$ θεωρώντας ότι $1>>\sqrt{\mu}>>\mu$

Επομένως οι 2 συχνότητες είναι σχεδόν ίδιες μιά και $1 >> \sqrt{\mu}$

Με τις ίδιες προσεγγίσεις για τα ιδιοδιανύσματα έχουμε: (Z).

$$a_{1,2} = \frac{1}{l\sqrt{2m_1\mu\left(1+\mu\pm\sqrt{\mu(1+\mu)}\right)}}\begin{bmatrix}\mu\pm\sqrt{\mu(1+\mu)}\\ 1+\mu\pm\sqrt{\mu(1+\mu)}\end{bmatrix} \approx \frac{1}{l\sqrt{2m_1\mu}}\begin{bmatrix}\pm\sqrt{\mu}\\ 1\end{bmatrix}$$

Είδαμε ότι οι γενικευμένες συντεταγμένες q_j μπορούν να γραφούν συναρτήσει των κανονικοποιημένων συντεταγμένων η_r σύμφωνα με τη σχέση:

$$q_j(t) = \sum_r a_{jr}\,\eta_r(t) \quad \text{όπου } \eta_r(t) \equiv \beta_r e^{i\omega_r t}$$

μιγαδικό περιέχει και φάση

Επομένως μπορούμε να τη γράψουμε σε μορφή πίνακα:

$$[q_j] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}[\eta_r] \Rightarrow$$

$$[\Theta] = \frac{1}{l\sqrt{2m_1\mu}}\begin{bmatrix}\sqrt{\mu} & -\sqrt{\mu}\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\end{bmatrix} = \frac{1}{l\sqrt{2m_1\mu}}\begin{bmatrix}\sqrt{\mu} & -\sqrt{\mu}\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$\Theta_1 = \Theta_0,\ \Theta_2 = 0,\ \dot{\Theta}_1 = 0 \text{ και } \dot{\Theta}_2 = 0 \qquad \eta_{1,2} = C_{1,2}\, e^{i\omega_z t}$$

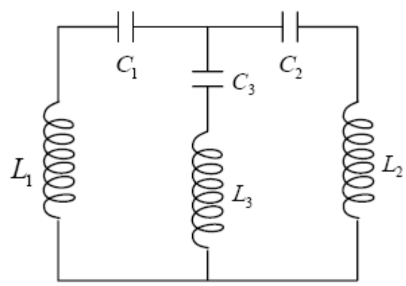
Επομένως οι αντίστοιχες αρχικές συνθήκες για τις κανονικοποιημένες συντεταγμένες θα είναι:

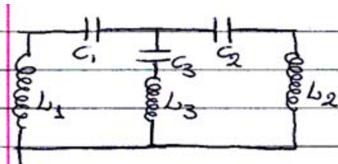
$$\begin{bmatrix}Re(C_1)\\ Re(C_2)\end{bmatrix} = A^{-1}[m]\begin{bmatrix}\Theta_0\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{l\sqrt{2m_1\mu}}\begin{bmatrix}\sqrt{\mu} & 1\\ -\sqrt{\mu} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(m_1+m_2)l^2 & m_2l^2\\ m_2l^2 & m_2l^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Theta_0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}Re(C_1)\\ Re(C_2)\end{bmatrix} = \frac{1}{l\sqrt{2m_1\mu}}\, l^2\Theta_0 m_1\sqrt{\mu}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} = l\Theta_0\sqrt{\frac{m_1}{2}}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}Im(C_1\omega_1)\\ Im(C_2\omega_2)\end{bmatrix} = A^{-1}[m]\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

2. Βρείτε εκφράσεις για τις ιδιοσυχνότητες του ηλεκτρικού κυκλώματος του σχήματος. **Υπόδειξη:** Ένας πυκνωτής C έχει δυναμική ενέργεια V=1/2 Q^2/C όταν είναι φορτισμένος με φορτίο Q. Ένα πηνίο L έχει «κινητική ενέργεια» T=1/2LI^2 όταν ρεύμα I περνά απ'αυτό. Διατήρηση του φορτίου σας επιτρέπει να εκφράσετε το ρεύμα σαν το διαφορικό του φορτίου ως προς χρόνο. Επίσης το φορτίο που αποθηκεύεται στους 3 πυκνωτές πρέπει να αθροίζεται σε μηδέν. Την στιγμή που γράψετε την ολική κινητική και δυναμική ενέργεια, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον Lagrangian φορμαλισμό ακριβώς όπως και στα μηχανικά συστήματα.





Έστω ότι το φορτίο που έχει αποθηκευτεί στους πυκνωτές είναι Q_1, Q_2 και Q_3 αντίστοιχα.
Το πρόσημο λαμβάνεται τέτοιο ώστε ο κόμβος των 3 συρμάτων βλέπει καθαρό φορτίο $Q_1+Q_2+Q_3$

Το ρεύμα I_1, I_2, I_3 που ρέει από το πυκνωτή C_1, C_2, C_3 στα πηνία L_1, L_2 και L_3 σχετίζονται με τα φορτία Q_1, Q_2, Q_3

$$I_1 = \dot{Q}_1 \;,\; I_2 = \dot{Q}_2 \;,\; I_3 = \dot{Q}_3$$

Επομένως η κινητική ενέργεια δίνεται από τη σχέση $T_i = \frac{L_i}{2}\dot{Q}_i^2$ ενώ η δυναμική ενέργεια από $V = \frac{1}{2C_i}Q_i^2$

Διατήρηση του φορτίου απαιτεί ότι $Q_1+Q_2+Q_3 = \emptyset \Rightarrow Q_3 = -Q_1-Q_2$

Άρα $T = \frac{L_1}{2}\dot{Q}_1^2 + \frac{L_2}{2}\dot{Q}_2^2 + \frac{L_3}{2}(\dot{Q}_1+\dot{Q}_2)^2$

$$V = \frac{1}{2C_1}Q_1^2 + \frac{1}{2C_2}Q_2^2 + \frac{1}{2C_3}(Q_1+Q_2)^2$$

Επομένως $\left|[A] - \omega^2[m]\right| = \emptyset$ όπου

$$\left.\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial Q_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial Q_1 \partial Q_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial Q_1 \partial Q_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial Q_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_3} & \frac{1}{C_3} \\ \frac{1}{C_3} & \frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3} \end{bmatrix} \\ [m] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{Q}_1^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{Q}_1 \partial \dot{Q}_2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{Q}_1 \partial \dot{Q}_2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{Q}_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1+L_3 & L_3 \\ L_3 & L_2+L_3 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_3} - \omega^2(L_1+L_3) & \frac{1}{C_3} - L_3\omega^2 \\ \frac{1}{C_3} - L_3\omega^2 & \frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3} - \omega^2(L_2+L_3) \end{vmatrix} = \emptyset \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (L_1L_2 + L_2L_3 + L_3L_1)\omega^4 - \left(\frac{L_1}{C_2} + \frac{L_1}{C_3} + \frac{L_2}{C_3} + \frac{L_2}{C_1} + \frac{L_3}{C_1} + \frac{L_3}{C_2}\right)\omega^2 + \frac{1}{C_1C_2} + \frac{1}{C_2C_3} + \frac{1}{C_3C_1} = 0$$

Θέτουμε $\lambda = \omega^2$ οπότε λύνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση που προκύπτει και που μας δίνει τις δύο ιδιοσυχνότητες του συστήματος