ΦΥΣ 112

Τελική Εξέταση: 10-Δεκεμβρίου-2024

Πριν αρχίσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητας).

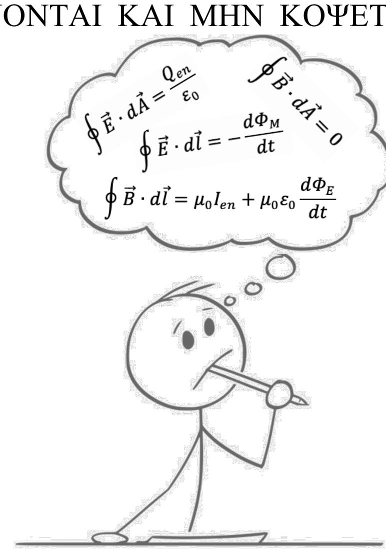
Ονοματεπώνυμο	**Αριθμός Ταυτότητας**

Απενεργοποιήστε τα κινητά σας.

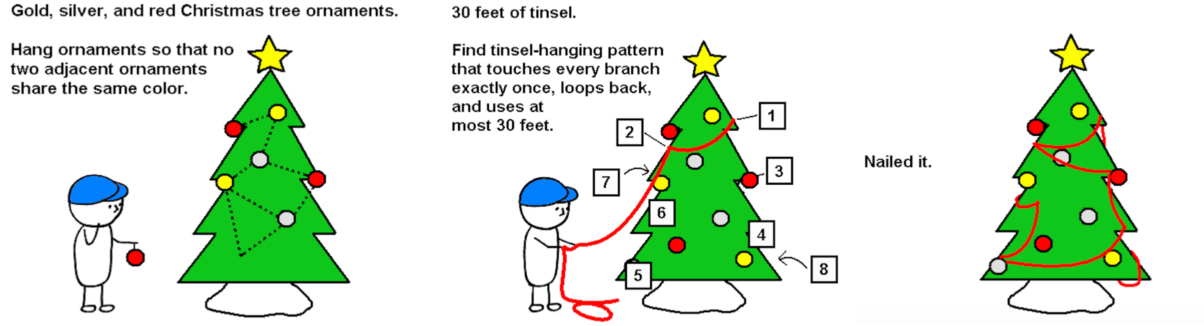
Το δοκίμιο περιέχει 6 προβλήματα της ίδιας βαρύτητας. Προσπαθήστε να απαντήσετε σε όλα τα προβλήματα όσο καλύτερα μπορείτε. Θα βαθμολογηθούν όλα τα προβλήματα και θα αφαιρεθεί αυτό με την χαμηλότερη βαθμολογία. Η μέγιστη βαθμολογία της εξέτασης είναι 150 μονάδες (30 μονάδες x 5 ασκήσεις).

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΣΤΕ ΜΟΝΟ ΤΙΣ ΣΕΛΙΔΕΣ ΠΟΥ ΣΑΣ ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΜΗΝ ΚΟΨΕΤΕ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΣΕΛΙΔΑ

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3-ώρες. Καλή Επιτυχία !



Καλές Γιορτές

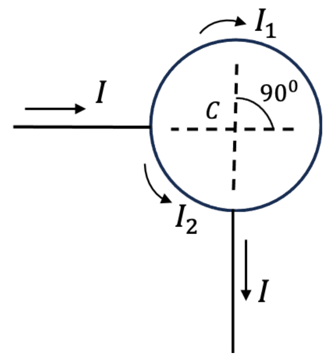


Άσκηση	**Βαθμός**
$1^η$ (30μ)	
$2^η$ (30μ)	
$3^η$ (30μ)	
$4^η$ (30μ)	
$5^η$ (30μ)	
$6^η$ (30μ)	
Σύνολο	

Αναλυτικά προβλήματα – Σύνολο 150 μονάδες

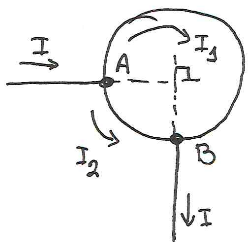
Άσκηση 1 [30μ]

Ένα ομογενές σύρμα είναι λυγισμένο σε σχήμα κυκλικού βρόχου ακτίνας *R*. Δύο μακριά ευθύγραμμα σύρματα είναι συνδεδεμένα με το βρόχο όπως στο σχήμα.



(**A**) Αν το συνολικό ρεύμα το οποίο διαρρέει τα δύο ευθύγραμμα σύρματα είναι I και με την διεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα, προσδιορίστε τον λόγο I_1/I_2 των ρευμάτων στα δύο τμήματα του βρόχου. [**12μ**]

(**B**) Προσδιορίστε το διάνυσμα του συνολικού μαγνητικού πεδίου που παράγεται από τα ρεύματα στο κέντρο *C* του βρόχου. [**18μ**]



(A) Έστω τα δύο κυκλικά τμήματα έχουν αντιστάσεις R_1 και R_2

Το δυναμικό στα άκρα τους είναι ίδιο και επομένως:

$$V_{AB} = I_1 R_1 = I_2 R_2 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \frac{\cancel{\rho}\, \ell_2/\cancel{A_2}}{\cancel{\rho}\, \ell_1/\cancel{A_1}} = \frac{\ell_2}{\ell_1} \quad (1)$$

Από την γεωμετρία του προβλήματος το τμήμα που διαρρέεται από ρεύμα I_1 αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία που είναι τριπλάσια αυτής που αντιστοιχεί στο I_2. Επομένως θα έχουμε:

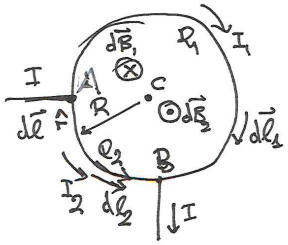
$$R\Theta_1 = 3R\Theta_2 \Rightarrow \ell_1 = 3\ell_2. \quad (2)$$

Από (1) και (2) επομένως θα πάρουμε: $\frac{I_1}{I_2} = \frac{\cancel{\ell_2}}{3\cancel{\ell_2}} \Rightarrow \boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{3}}$ 3

(B) Τα ευθύγραμμα τμήματα των αγωγών δεν συνεισφέρουν στο μαγνητικό πεδίο στο κέντρο C του κυκλικού βρόχου, αφού από τον νόμο των Biot-Savard:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} = \emptyset \qquad d\vec{\ell} \parallel \hat{r}$$ αφού το C είναι στον άξονα των ευθύγραμμων συρμάτων.

Θεωρώντας το πάνω τμήμα του βρόχου θα έχουμε:



$$\boxed{d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\vec{\ell}_1 \times \hat{r}'}{R^2}} \quad (4)$$

το μαγνητικό πεδίο έχει φορά προς το εσωτερικό της σελίδας.

Θεωρούμε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το κάτω μέρος του βρόχου

$$\boxed{d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2\, d\vec{\ell}_2 \times \hat{r}''}{R^2}} \quad (5)$$

με φορά προς το εξωτερικό της σελίδας.

Από την αρχή της επαλληλίας θα έχουμε: $\vec{B}_{ολ} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ (6)

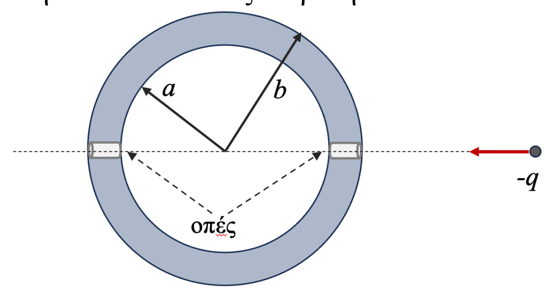
Από την (4) με ολοκλήρωση θα πάρουμε: $B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1}{R^2} \int_0^{\ell_1} d\ell_1 \Rightarrow \boxed{B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1}{R^2} \ell_1}$ (7)

Από την (5) με ολοκλήρωση θα πάρουμε: $B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2}{R^2} \int_0^{\ell_2} d\ell_2 \Rightarrow \boxed{B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2}{R^2} \ell_2}$ (8)

Αντικατάσταση στην (6) θα δώσει: $\vec{B}_{ολ} = \frac{\mu_0}{4\pi R^2}(I_1 \ell_1 - I_2 \ell_2) \overset{(2)\,\&\,(3)}{\Rightarrow} \vec{B}_{ολ} = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} 0 \Rightarrow \boxed{\vec{B}_{ολ} = 0}$

<u>Άσκηση 2</u> [**30μ**]

Ένα σφαιρικό κέλυφος από αγώγιμο υλικό έχει εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική ακτίνα b. Το κέλυφος έχει συνολικό φορτίο $+Q$. Η συντεταγμένη r μετρά την απόσταση από το κέντρο του κελύφους.



(**Α**) Προσδιορίστε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$, παντού στο χώρο. Σχεδιάστε το $\vec{E}(r)$ συναρτήσει της r. [**5μ**]

(**Β**) Προσδιορίστε το ηλεκτροστατικό δυναμικό V, παντού στο χώρο. Σχεδιάστε το $V(r)$ συναρτήσει της r. [**5μ**]

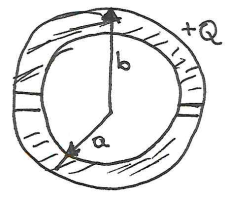
(**Γ**) Προσδιορίστε την ηλεκτροστατική πυκνότητα ενέργειας, u_E, παντού στο χώρο. Ολοκληρώστε την ηλεκτροστατική πυκνότητα ενέργειας, u_E, ως προς όλο το χώρο και προσδιορίστε την ολική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο. [**8μ**]

Υποθέστε τώρα ότι ανοίγουμε δύο μικρές οπές στο κέλυφος κατά μήκος της οριζόντιας διαμέτρου του. Οι τρύπες είναι αρκετά μικρές ώστε το ηλεκτρικό πεδίο να μην αλλάζει ιδιαίτερα. Ένα μικρό αρνητικό φορτίο -q αφήνεται από την ηρεμία και απόσταση $2b$ από το κέντρο του κελύφους να κινηθεί προς το κέλυφος. Το φορτίο -q περνά από τη μία οπή, το κέντρο του κελύφους και την άλλη οπή και εξέρχεται από την άλλη πλευρά.

(**Δ**) Προσδιορίστε την ταχύτητα με την οποία κινείται το φορτίο -q όταν φθάνει στην επιφάνεια του κελύφους στη θέση $r = b$. [**7μ**]

(**Ε**) Τι επιτάχυνση ασκείται στο φορτίο -q στην περιοχή $r < b$; Ποια είναι η ταχύτητά του όταν εξέρχεται από την άλλη πλευρά του κελύφους; [**2μ**]

(**ΣΤ**) Περιγράψτε ποιοτικά την κίνηση που θα εκτελέσει το φορτίο -q όταν θα εξέλθει από την άλλη πλευρά του κελύφους. [**3μ**]

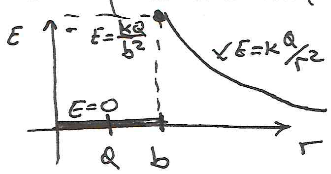


(A) Το φορτίο θα κατανεμηθεί ομοιόμορφα στην εξωτερική επιφάνεια του φλοιού.

Για $r>b$ $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{r>b \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}} \quad (1)$$

Για $r<a$, $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{περ.}}{\varepsilon_0} = 0$ από τη στιγμή που δεν υπάρχει φορτίο στο εσωτερικό της επιφάνειας αυτής. $\boxed{r<a \quad \vec{E}=\vec{0}}$ (2)

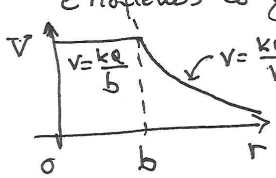


(B) $\Delta V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l}$ και θεωρούμε αρχικά ότι $V(r\to\infty)=0$.

Θα έχουμε επομένως: $V(r) = -\int_{+\infty}^{r} \frac{kQ}{r'^2}dr' = \frac{kQ}{r'}\Big|_{\infty}^{r} \Rightarrow V(r) = \frac{kQ}{r}$

Για $r<b$, $\Delta V=0$ από τη στιγμή που $\vec{E}=\vec{0}$. Επομένως για $r<b$, V είναι σταθερό και ίσο με $V(r<b) = \frac{kQ}{b}$

Επομένως το γράφημα θα είναι:



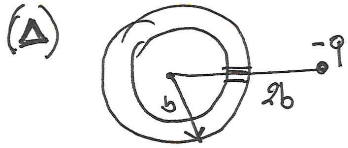
(Γ) Η πυκνότητα ενέργειας είναι: $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ επομένως για $\boxed{r>b, \ u_E = \frac{Q^2 \cancel{\varepsilon_0}}{16\pi^2\varepsilon_0^2\, 2r^4}}$

ενώ για $\boxed{r<b \quad u_E=0 \text{ αφού } \vec{E}=\vec{0}}$

Επομένως $U_{ολ} = \int u_E\, dV = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\int_{r=b}^{\infty}\frac{4\pi r^2 dr}{r^4}$ όπου $dV = 4\pi r^2 dr$

Έχουμε: $U_{ολ} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_b^{\infty}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow U_{ολ} = -\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_b^{\infty} \Rightarrow U_{ολ} = -\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[0-\frac{1}{b}\right] \Rightarrow \boxed{U_{ολ} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 b}}$

(Δ)



Ο ευκολότερος τρόπος για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό είναι να χρησιμοποιήσουμε διατήρηση της ενέργειας:

$$E = E_q \Rightarrow E_\Delta^i + E_{κιν}^i = E_\Delta^f + E_κ^f \quad \Big\} \Rightarrow$$

Αρχικά το σωματίδιο είναι ακίνητο οπότε: $E_{κιν}^i = 0$.

$$E_{κιν.}^f = E_{Δυν}^i - E_{Δυν}^f = \frac{kQ(-q)}{2b} - \frac{kQ(-q)}{b} \Rightarrow E_{κιν}^f = -kQq\left(\frac{1}{2b} - \frac{1}{b}\right) = -kQq\frac{1}{2b}$$

Επομένως: $E_{κιν}^f = \frac{kQq}{2b} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{kQq}{mb}}}$ η ταχύτητα του φορτίου q όταν φθάνει στη θέση $r=b$.

(Ε) Στην περιοχή $-b<r<b$, το φορτίο δεν δέχεται καμιά δύναμη αφού $\vec{E}=\vec{0}$. Εφόσον $\vec{a}=\vec{0}$, η ταχύτητά του όταν εξέρχεται από τον σφαιρικό φλοιό στη θέση $r=-b$ θα είναι η ίδια με αυτήν που είχε καθώς εισήλθε στον σφαιρικό φλοιό. Επομένως $\boxed{v_{εξ} = \sqrt{\frac{kQq}{mb}}}$

(ΣΤ) Καθώς το φορτίο q εξέρχεται από την πλευρά $r=-b$, δέχεται ηλεκτροστατική δύναμη από το φορτίο του φλοιού και επιβραδύνεται. Η κινητική του ενέργεια μετατρέπεται και πάλι σε δυναμική ηλεκτροστατική ενέργεια, και το φορτίο έρχεται σε ηρεμία στη θέση $r=-2b$. Αρχίζει κατόπιν να επιταχύνεται προς τον σφαιρικό φλοιό. Σαν αποτέλεσμα, το φορτίο εκτελεί ταλάντωση μεταξύ $\pm 2b$.
Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα στη θέση $r=b$:

$$F = -\frac{kQq}{r^2} = ma \Rightarrow a = -\frac{kQq}{mr^2}$$

Η επιτάχυνση αυτή είναι μη σταθερή και θα πρέπει να ολοκληρώσουμε:

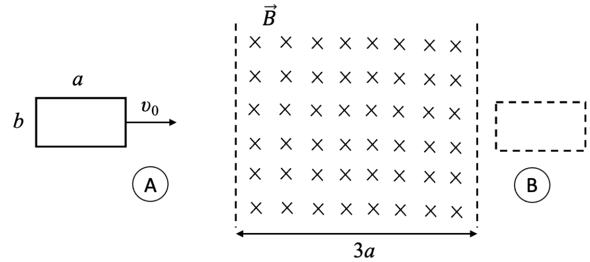
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dr} = -\frac{kQq}{mr^2} \Rightarrow \int_0^v v\,dv = -\int_{2b}^{b}\frac{kQq}{m}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = +\frac{kQq}{m}\left(+\frac{1}{r}\right)_{2b}^{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = \frac{kQq}{m}\left(\overbrace{\frac{1}{b} - \frac{1}{2b}}^{1/2b}\right) \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}v^2 = \frac{kQq}{\cancel{2}mb} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{kQq}{mb}}}$$

όπως βρήκαμε στο (Δ) κ (Ε)

Άσκηση 3 [30μ]

Ένα επίπεδο ορθογώνιο συρμάτινο πλαίσιο έχει συνολική μάζα m και μήκη πλευρών a και b όπως στο σχήμα. Η συνολική αντίσταση του πλαισίου είναι R. Το πλαίσιο κινείται πάνω σε λεία επιφάνεια (το επίπεδο της σελίδας) προς μια περιοχή πλάτους $3a$ που περιέχει ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο B το οποίο έχει κατεύθυνση προς το εσωτερικό της σελίδας. Το πλαίσιο εισέρχεται στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου με αρχική ταχύτητα υ_0. Περνά από την περιοχή του μαγνητικού πεδίου και εξέρχεται από την άλλη πλευρά.



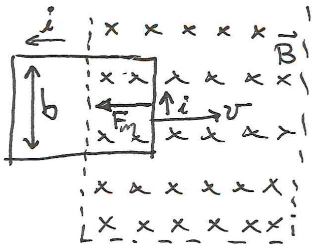
(**Α**) Εξηγήστε αναλυτικά, αν το πλαίσιο επιταχύνεται ή επιβραδύνεται καθώς εισέρχεται στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου. [**5μ**]

(**Β**) Προσδιορίστε την αρχική επιτάχυνση του βρόχου καθώς εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο. Η επιτάχυνση αυτή είναι σταθερή καθώς το πλαίσιο κινείται προς το εσωτερικό του μαγνητικού πεδίου; Εξηγήστε. [**6μ**]

(**Γ**) Ο βρόχος επιταχύνεται ή επιβραδύνεται καθώς αρχίζει να εξέρχεται από την περιοχή του μαγνητικού πεδίου; Εξηγήστε αναλυτικά. [**5μ**]

(**Δ**) Σχεδιάστε ποιοτικά την ταχύτητα του πλαισίου συναρτήσει του χρόνου καθώς ο βρόχος κινείται από τη θέση Α στη θέση Β που φαίνονται στο σχήμα. [**7μ**]

(**Ε**) Προσδιορίστε το συνολικό φορτίο Q το οποίο διέρχεται από ένα σημείο στο σύρμα του πλαισίου από τη στιγμή που το πλαίσιο αρχίζει να εισέρχεται στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου έως ότου βρίσκεται πλήρως στο χώρο του πεδίου. [**7μ**]



(A) Καθώς το πλαίσιο εισέρχεται στο χώρο του μαγνητικού πεδίου, η δύναμη Lorentz αναγκάζει τους φορείς φορτίων στον αγωγό να μετακινηθούν, δημιουργώντας ηλεκτρεγερτική δύναμη κίνησης, η οποία με τη σειρά της δημιουργεί ένα ρεύμα με φορά προς τα πάνω (για το δεξί τμήμα του πλαισίου). Το ρεύμα στο εσωτερικό του πλαισίου έχει φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού.

Εξαιτίας αυτού του ρεύματος επαγωγής και του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$, ασκείται στο δεξί τμήμα του πλαισίου μια δύναμη $\vec{F}_m = I\cdot d\vec{l}\times\vec{B}$ η οποία έχει φορά προς τα αριστερά και σαν αποτέλεσμα η κίνηση του πλαισίου επιβραδύνεται.

Προσέξτε ότι τόσο η ηλεκτρεγερτική δύναμη, όσο και το ρεύμα θα πρέπει να έχουν τέτοια φορά (αντίθετη με τη φορά των δεικτών του ρολογιού) ώστε η αυξανόμενη ροή εξαιτίας του πεδίου $\vec{B}$ να ελαττωθεί από το μαγνητικό πεδίο του επαγωγικού ρεύματος i.

(B) Η επιτάχυνση θα είναι: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ από τον 2^o νόμο του Newton $\Big\} \Rightarrow$

Η μόνη δύναμη που ασκείται είναι η δύναμη F_m οπότε $F_m = I\,b\hat{j}\times(-B)\hat{k} = -IBb\hat{i}$

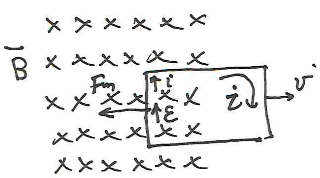
Οπότε $|a| = \frac{|IbB|}{m} \Rightarrow a = \frac{|\mathcal{E}|}{R}\,\frac{|Bb|}{m} = \frac{|Bvb|}{R}\,\frac{|Bb|}{m} \Rightarrow \boxed{a = \frac{B^2b^2v}{mR}}$ με φορά προς το $-\hat{i}$

Εφόσον η ταχύτητα v ελαττώνεται, και η επιτάχυνση είναι ανάλογη της v τότε η επιτάχυνση ελαττώνεται επίσης και δεν είναι σταθερή.

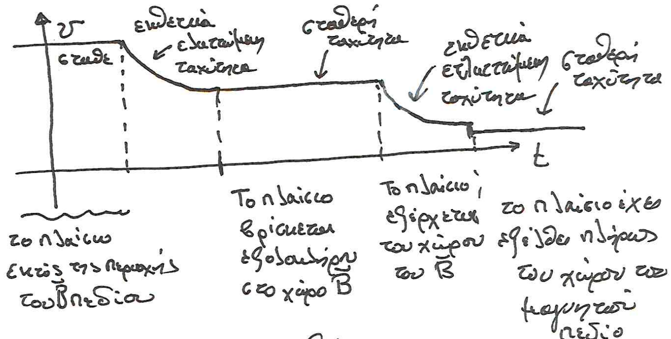
Τη στιγμή που το πλαίσιο εισέρχεται πλήρως μέσα στο χώρο του μαγνητικού πεδίου, η επιτάχυνση μηδενίζεται. Αυτό γιατί το ρεύμα μηδενίζεται εφόσον στις δύο κατακόρυφες πλευρές του πλαισίου αναπτύσσεται η ίδια ηλεκτρεγερτική δύναμη επαγωγής και επομένως δεν υπάρχει διαφορά δυναμικού.

(Γ) Καθώς το πλαίσιο αρχίζει να εξέρχεται από το μαγνητικό πεδίο, το τμήμα του που βρίσκεται ακόμα μέσα στο μαγνητικό πεδίο και το επαγωγικό ρεύμα και ηλεκτρεγερτική δύναμη, έχοντας φορά σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού ούτως ώστε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το επαγωγικό ρεύμα να αυξήσει τη μαγνητική ροή του πλαισίου η οποία ελαττώνεται επειδή η επιφάνεια του πλαισίου στο εσωτερικό του εξωτερικού πεδίου ελαττώνεται.

Η φορά του ρεύματος και το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, προκαλούν μια μαγνητική δύναμη με φορά προς τα αριστερά και άρα το πλαίσιο επιβραδύνεται και πάλι.



(Δ)



* Η ταχύτητα ελαττώνεται εκθετικά γιατί η επιτάχυνση που βρήκαμε στο ερώτημα (B) είναι: $a = -k\upsilon$ οπου $k = \frac{B^2 b}{mR} = \text{σταθ.} > 0$. Επομένως $\frac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -k\,dt \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{d\upsilon'}{\upsilon'} = -k\int_{t=0}^{t} dt' \Rightarrow \ln\frac{\upsilon}{\upsilon_0} = -kt \Rightarrow \boxed{\upsilon = \upsilon_0 e^{-kt}}$$

(Ε) Το ρεύμα που διαρρέει το πλαίσιο είναι: $i = \frac{dq}{dt}$ και $i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B\upsilon b}{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow i = \frac{Bb}{R}\frac{dx}{dt}$$

Συνδυάζοντας τις 2 εξισώσεις θα έχουμε:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{Bb}{R}\frac{dx}{dt} \Rightarrow dq = \frac{Bb}{R}dx \Rightarrow q_{ολ} = \int dq = \frac{Bb}{R}\int dx = \frac{Bb}{R}a \Rightarrow \boxed{q_{ολ} = \frac{Bba}{R}}$$

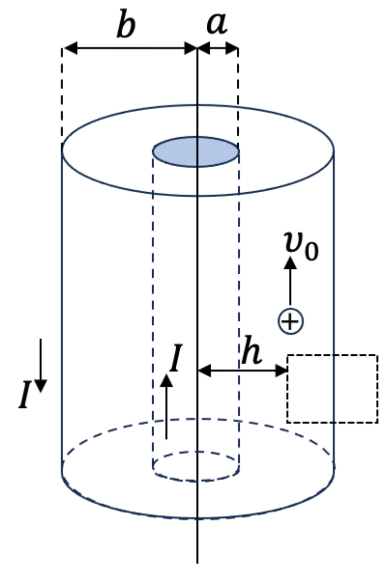
Θα μπορούσαμε να το υπολογίσουμε διαφορετικά από την εξίσωση του νόμου του Faraday

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi_m}{dt} \Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{d\Phi_m}{R\,dt} \Rightarrow I = \frac{d\Phi_m}{R\,dt} \Rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{d\Phi_m}{R\,dt} \Rightarrow dq = \frac{d\Phi_m}{R} \Rightarrow q_{ολ} = \frac{1}{R}\int d\Phi_m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{ολ} = \frac{1}{R}\int \vec{B}\cdot d\vec{A} = \frac{1}{R}B\int d\vec{A} \Rightarrow \boxed{q_{ολ} = \frac{Bab}{R}}$$

<u>Άσκηση 4</u> [30μ].

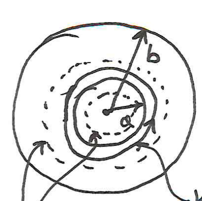
Θεωρήστε ένα μακρύ ομοαξονικό καλώδιο, το οποίο αποτελείται από ένα μακρύ ευθύγραμμο κυλινδρικό σύρμα αμελητέας αντίστασης και ακτίνας a, και από ένα εξωτερικό κυλινδρικό αγωγό ακτίνας b, αμελητέας αντίστασης, και αμελητέου πάχους. Ο εσωτερικός αγωγός διαρρέεται από σταθερό ρεύμα έντασης I με κατεύθυνση όπως φαίνεται στο σχήμα (προς τα πάνω), και είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα σε όλη τη διατομή του. Ο εξωτερικός αγωγός διαρρέεται επίσης από ρεύμα της ίδιας έντασης I αλλά αντίθετης κατεύθυνσης όπως φαίνεται στο σχήμα (προς τα κάτω) το οποίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στην περιφέρειά του.



(**Α**) Προσδιορίστε το μέτρο και τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου συναρτήσει της ακτινικής απόστασης, r, από τον άξονα του καλωδίου. Σχεδιάστε το μέτρο του μαγνητικού πεδίου συναρτήσει του r για $0 < r < 2b$. Περιγράψτε αναλυτικά τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. [**8 μ**]

(**Β**) Αν ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο κινείται αρχικά παράλληλα προς το σύρμα με ταχύτητα υ_0 και κατά την κατεύθυνση του ρεύματος στο σύρμα, σχεδιάστε ποιοτικά την τροχιά που θα διαγράψει το σωματίδιο, υποθέτοντας ότι η ταχύτητα υ_0 είναι αρκετά μικρή ώστε το σωματίδιο να μη χτυπήσει ούτε στον εσωτερικό ή στον εξωτερικό αγωγό. Περιγράψτε την κίνηση ποιοτικά και εξηγήστε την απάντησή σας. [**8μ**]

(**Γ**) Αν αντί για σταθερή ένταση ρεύματος, η ένταση του ρεύματος I αύξανε με τον χρόνο έτσι ώστε $dI/dt = K$ (όπου K θετική σταθερά), προσδιορίστε το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου (κατεύθυνση και μέτρο) στο σημείο P, το οποίο βρίσκεται σε απόσταση h από τον άξονα του καλωδίου. (<u>*Υπόδειξη*:</u> θεωρήστε τη ροή του μαγνητικού πεδίου που διαπερνά την επιφάνεια που ορίζεται από την διακεκομμένη διαδρομή που φαίνεται στο σχήμα). [**14μ**]



βρόχοι Ampere

κυλινδρική συμμετρία του ρεύματος, που δίνει κυκλικό μαγνητικό πεδίο ομοκεντρικό με τους άξονες. Το ρεύμα είναι σε φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού

(Α) Από τον νόμο του Ampere έχουμε ότι:

$$\oint_{\substack{\text{κλειστός}\\ \text{βρόχος}}} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{περικλ.}}$$

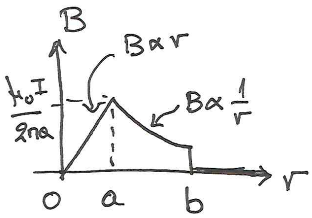
Για $r<a$: $B\cdot 2\pi r = \mu_0 I\left(\frac{\pi r^2}{\pi a^2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I \cancel{\pi} r^{\cancel{2}}}{2\cancel{\pi}\cancel{r}}\frac{1}{\pi a^2} \Rightarrow$$

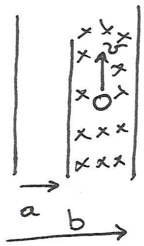
$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2}\, r}$$

Για $a<r<b$: $B\cdot 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$

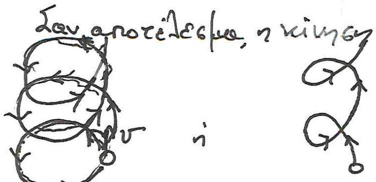
Για $r>b$: $B\cdot 2\pi r = \mu_0 (I - I) \Rightarrow \boxed{B=0}$



(Β) Στο επίπεδο της αρχικής θέσης του σωματιδίου και του άξονα του κυλίνδρου, το μαγνητικό πεδίο έχει κατεύθυνση προς το εσωτερικό της σελίδας. Το σωματίδιο δέχεται μια δύναμη Lorentz προς τα αριστερά και κινείται προς μια περιοχή ισχυρότερου μαγνητικού πεδίου, που αντιστοιχεί σε μικρότερη ακτίνα περιστροφής.

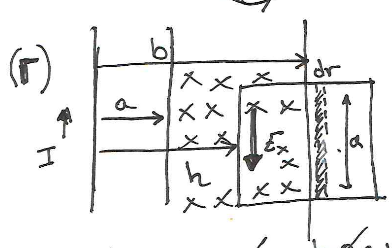


Σαν αποτέλεσμα, η κίνηση του σωματιδίου θα μοιάζει ως:



ανάλογα με την αρχική ταχύτητα v_0 και πόσο μικρή ή μεγάλη η απόσταση a

(Γ)



Από τον νόμο του Faraday: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$

Αλλά $\Phi_m = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int_h^b \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)(a\cdot dr) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\int_h^b \frac{dr}{r} \Rightarrow$

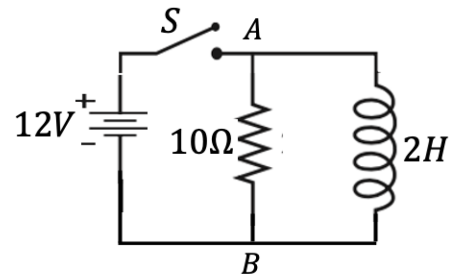
$$\Rightarrow \Phi_m = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\frac{b}{h}$$

Επομένως: $E\cancel{a} = -\frac{\mu_0 \cancel{a}}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\frac{dI}{dt} \Rightarrow \boxed{E = -\frac{K\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}}$ με κατεύθυνση αντίθετη του ρεύματος στο κεντρικό σύρμα του καλωδίου

<u>Άσκηση 5</u> [**30μ**]

(**Κύκλωμα Ι**)

Στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος, ο διακόπτης ήταν ανοικτός για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο διακόπτης κλείνει και ανοίγει και πάλι μετά από $2s$.



(**Α**) Σχεδιάστε το γράφημα της του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R και του ρεύματος που διαρρέει την επαγωγή L ως προς τον χρόνο t για το χρονικό διάστημα $0 < t < 2s$. Σημειώστε στους άξονες x και y κατάλληλα σημεία έτσι ώστε τα γραφήματά σας να είναι ποσοτικά. [**6μ**]

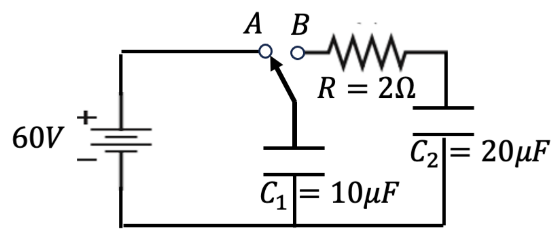
(**Β**) Γράψτε μια εξίσωση για την ισχύ που προσφέρει η μπαταρία συναρτήσει του χρόνου στο χρονικό διάστημα $0 < t < 2s$. [**3μ**]

(**Γ**) Προσδιορίστε τη διαφορά δυναμικού $(V_A - V_B)$ αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη τη χρονική στιγμή $t = 2s$. Εξηγήστε το πρόσημο της απάντησής σας. [**4μ**]

(**Δ**) Κάντε το γράφημα του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη ακριβώς μετά το άνοιγμα του διακόπτη τη χρονική στιγμή $t = 2s$. [**2μ**]

(**Κύκλωμα ΙΙ**)

Στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος, ο διακόπτης S βρίσκεται στη θέση A για μεγάλο χρονικό διάστημα πριν μετακινηθεί στην θέση B τη χρονική στιγμή $t = 0$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο πυκνωτής C_2 είναι αφόρτιστος.

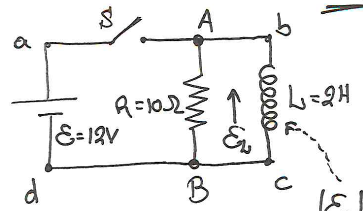


(**Α**) Προσδιορίστε το φορτίο στον πυκνωτή C_1 πριν τη χρονική στιγμή $t = 0$. [**3μ**]

(**Β**) Προσδιορίστε το φορτίο σε κάθε πυκνωτή πολύ αργότερα αφότου ο διακόπτης έχει μετακινηθεί στη θέση B $(t = +\infty)$. [**6μ**]

(**Γ**) Προσδιορίστε την ενέργεια που καταναλώθηκε στην αντίσταση κατά την ανακατανομή των φορτίων μεταξύ του πυκνωτή C_1 και C_2. [**6μ**]

Κύκλωμα I



$|\mathcal{E}_L| = L\frac{|dI|}{dt}$

(Α) Το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R είναι:

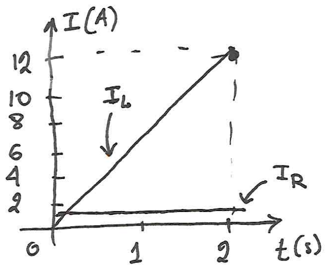
$$I_R = \frac{V}{R} = \frac{12V}{10\Omega} \Rightarrow I_R = 1.2A \text{ σταθερό}$$

Για το πηνίο θεωρούμε το βρόχο abcd και εφαρμόζουμε τον τροποποιημένο 2ο νόμο του Kirchhoff:

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_L = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E}_L \Rightarrow \mathcal{E} = L\frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{12V}{2H} \Rightarrow \boxed{\frac{dI}{dt} = 6A/s}$$

Επομένως: $\int_0^i dI = 6\int_0^t dt \Rightarrow \boxed{i_L = 6t}$

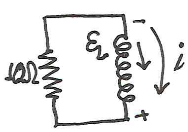


Το ρεύμα στο πηνίο αυξάνει γραμμικά με τον χρόνο:

(Β) Η ισχύς που προσφέρει η μπαταρία στο κύκλωμα θα είναι: $P = \mathcal{E}\cdot I_{ολ} = \mathcal{E}(I_R + I_L) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{P = 12(1.2 + 6\cdot t)\ W}$$

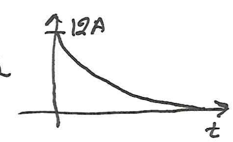
(Γ) Ακριβώς τη χρονική στιγμή που ο διακόπτης S ανοίγει, το πηνίο αντιδρά και διατηρεί το ίδιο ρεύμα το οποίο είναι $i = 6\cdot(2s) \Rightarrow i = 12A$.



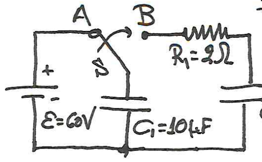
Το ρεύμα αυτό περνά μέσω της αντίστασης $R = 10\Omega$. Επομένως η τάση εξόδου θα είναι $V_{out} = RI = (10\Omega)(12A) \Rightarrow \boxed{V_{out} = 120V}$

Επομένως θα έχουμε ότι: $V_A - V_B = -120V$ και άρα B είναι σε υψηλότερο δυναμικό από το

(Δ) Το ρεύμα στην αντίσταση R ελαττώνεται εκθετικά



Κύκλωμα ΙΙ



(Α) Το αρχικό φορτίο στον πυκνωτή C_1 είναι:

$$Q_1 = C_1 V = (10\cdot 10^{-6}\,\mu F)(60V) \Rightarrow \underline{Q_1 = 6\cdot 10^{-4} C}$$

(Β) Μετακινώντας τον διακόπτη S στη θέση Β, φορτία μετακινούνται και ανακατανέμονται στους πυκνωτές C_1 και C_2 (το φορτίο διατηρείται) και οι διαφορές δυναμικού στα άκρα των χωρητικοτήτων C_1 και C_2 είναι ίσες.

Από τη στιγμή που η χωρητικότητα του πυκνωτή C_2 είναι διπλάσια του C_1, τότε το φορτίο του C_2 θα είναι διπλάσιο του C_1 για μια τελική διαφορά δυναμικού.

Δηλαδή $C_2=2C_1$ και $Q_{2f}+Q_{1f}=Q_1$ όπου Q_{1f}, Q_{2f} τα τελικά φορτία των πυκνωτών.

Επομένως: $Q_{1f} + 2Q_{1f} = Q_1 \Rightarrow Q_{1f} = Q_1/3 \Rightarrow \underline{\underline{Q_{1f} = 2\cdot 10^{-4} C}}$ και $\underline{\underline{Q_{2f} = 4\cdot 10^{-4} C}}$

(Γ) Η αρχική ενέργεια που ήταν αποθηκευμένη στον πυκνωτή C_1 είναι:

$$E_i = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} \Rightarrow E_i = \frac{1}{2}\frac{(6\times 10^{-4})^2 C}{10\cdot 10^{-6} F} \Rightarrow E_i = \frac{1}{2}\frac{36\cdot 10^{-8}}{10^{-5}} J \Rightarrow \boxed{E_i = 18\cdot 10^{-3} J}$$

Η τελική ενέργεια στο κύκλωμα είναι αυτή που αποθηκεύεται στον C_1 και C_2, άρα

$$E_f = \frac{1}{2}\frac{Q_{1f}^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_{2f}^2}{C_2} = \frac{1}{2}\frac{Q_{1f}^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{(2Q_{1f})^2}{2C_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{Q_{1f}^2}{C_1} + \frac{\cancel{4}2Q_{1f}^2}{\cancel{2}C_1}\right) = \frac{1}{2}\frac{3Q_{1f}^2}{C_1} \Rightarrow$$

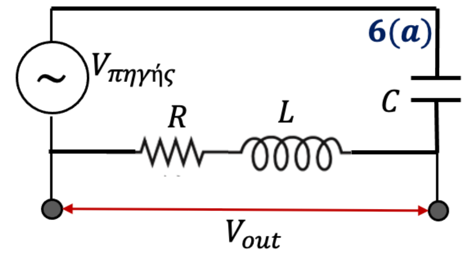
$$\Rightarrow E_f = \frac{1}{2}\frac{3\cdot(2\cdot 10^{-4})^2}{10^{-5}} \Rightarrow \boxed{E_f = 6\cdot 10^{-3} J}$$

Η ενέργεια που χάθηκε από το κύκλωμα είναι: $\Delta E = E_f - E_i = (6-18)10^{-3} J \Rightarrow \underline{\Delta E = -12\cdot 10^{-3} J}$

και η ενέργεια αυτή χάνεται στον αντιστάτη R.

<u>Άσκηση 6</u> [**30μ**]

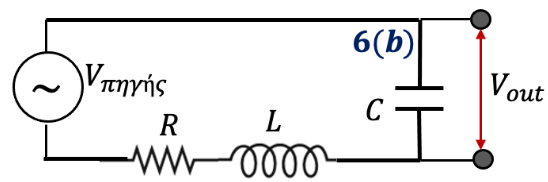
Το διπλανό σχήμα δείχνει ένα κύκλωμα φίλτρου συχνοτήτων. Η τάση εξόδου του φίλτρου λαμβάνεται από τα άκρα της συνδυασμού των στοιχείων $L-R$ όπως φαίνεται στο σχήμα.



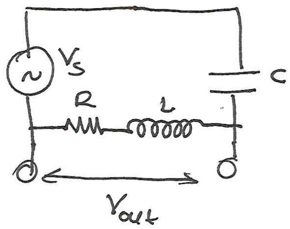
(**Α**) Βρείτε μια σχέση για $V_{out}/V_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}\varsigma}$, τον λόγο του πλάτους της τάσης εξόδου προς το πλάτος της τάσης της πηγής, συναρτήσει της γωνιακής συχνότητας ω της πηγής. [**8μ**]

(**Β**) Δείξτε ότι όταν η γωνιακή συχνότητα ω, είναι μικρή ο λόγος αυτός των τάσεων είναι ανάλογος της γωνιακής συχνότητας ω και επομένως ο λόγος είναι μικρός και όταν $\omega \to \infty$ τότε ο λόγος των τάσεων προσεγγίζει τη μονάδα, δηλαδή $\frac{V_{out}}{V_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}\varsigma}} \to 1.0$. [**8μ**]

(**Γ**) Υποθέστε τώρα ότι παίρνετε την τάση εξόδου από τα άκρα του πυκνωτή C όπως φαίνεται στο Σχήμα 6β. Βρείτε και πάλι μια σχέση για τον λόγο του πλάτους της τάσης εξόδου προς το πλάτος της τάσης της πηγής, $V_{out}/V_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}\varsigma}$, συναρτήσει και πάλι της γωνιακής συχνότητας ω της τάσης της πηγής. Δείξτε ότι όταν η γωνιακή συχνότητα ω είναι μεγάλη, ο λόγος αυτός είναι πολλαπλάσιο του $1/\omega^2$ και επομένως ο λόγος των τάσεων είναι πολύ μικρός. [**8μ**]



(**Δ**) Δείξτε ότι για το κύκλωμα όπως τροποποιήθηκε σύμφωνα με το Σχήμα 6β, ο λόγος των τάσεων $\frac{V_{out}}{V_{\pi\eta\gamma\acute{\eta}\varsigma}} \to 1$ καθώς $\omega \to 0$. Όπως θα έχετε ανακαλύψει, το κύκλωμα του Σχήματος 6α επιτρέπει να περάσουν οι υψηλές συχνότητες ενώ το κύκλωμα του Σχήματος 6β επιτρέπει να περάσουν οι χαμηλές συχνότητες. [**6μ**]



(A) Χρησιμοποιώντας μιγαδική μέθοδο για το κύκλωμα θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} V_s &= I\left(R+i\left[\omega L-\frac{1}{C\omega}\right]\right) \\ V_{out} &= I\left(R+iL\omega\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{V_{out}}{V_s}=\frac{R+iL\omega}{R+i\left[\omega L-\frac{1}{C\omega}\right]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_{out}}{V_s}=\frac{\left(R+iL\omega\right)\left(R-i\left[\omega L-\frac{1}{C\omega}\right]\right)}{\left(R+i\left[\omega L-\frac{1}{C\omega}\right]\right)\left(R-i\left[\omega L-\frac{1}{C\omega}\right]\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{V_{out}}{V_s}=\frac{\left(R+iL\omega\right)\left(R-i\left[\omega L-\frac{1}{C\omega}\right]\right)}{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad (1)$$

(B) καθώς $\omega \to 0$ από την (1) παρατηρούμε ότι ο όρος $\left(\omega L-\frac{1}{C\omega}\right)\to -\frac{1}{C\omega}$

Επομένως η (1) γίνεται: $\frac{V_{out}}{V_s} \simeq \frac{R\, i/C\omega}{1/C^2\omega^2} \Rightarrow \boxed{\frac{V_{out}}{V_s} \to iRC\omega \to 0}$

$(R+iL\omega)\to R$

$R-i\left[\omega L-\frac{1}{C\omega}\right]\to i\frac{1}{C\omega}$

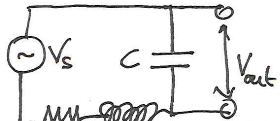
Όταν $\omega\to\infty$ τότε $R+iL\omega \to iL\omega$, $R-i\left[\omega L-\frac{1}{C\omega}\right]\to -iL\omega$

και αντίστοιχα στον παρονομαστή θα πάρουμε: $R^2+\left(\omega L-\frac{1}{C\omega}\right)^2 \to \omega^2 L^2$

Επομένως όταν $\omega\to\infty$ $\frac{V_{out}}{V_s}=\frac{(iL\omega)(-iL\omega)}{L^2\omega^2}=\frac{L^2\omega^2}{L^2\omega^2}\to 1$, $\boxed{\frac{V_{out}}{V_s}\to 1 \text{ για } \omega\to\infty}$

Το κύκλωμα επομένως είναι ένα φίλτρο υψηλών συχνοτήτων επιτρέποντας τις μεγάλες συχνότητες να διέλθουν.

(Γ) Στο κύκλωμα όπου λαμβάνουμε την τάση από τα άκρα του πυκνωτή:



V_s = ίδια όπως και στο προηγούμενο κύκλωμα $= I\left[R+i\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)\right]$

$V_{out}=I\frac{1}{i\omega C}=-\frac{iI}{\omega C}$. Επομένως: $\frac{V_{out}}{V_s}=\frac{-i\,1/\omega C}{R+i\left[L\omega-\frac{1}{C\omega}\right]} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{V_{out}}{V_s}=\frac{-i/\omega C\left[R-i\left(L\omega-1/C\omega\right)\right]}{R^2+\left(L\omega-1/C\omega\right)^2}} \quad (2)$$

Εξετάζουμε και πάλι τις περιπτώσεις $\omega \to 0$ & $\omega \to \infty$.

Για $\omega \to 0$ ο αριθμητής θα δώσει: $1/C^2\omega^2$ και ο παρονομαστής $(1/C\omega)^2$

Επομένως για $\omega \to 0$ $\quad \frac{V_{out}}{V_s} \simeq \frac{1/C^2\omega^2}{1/C^2\omega^2} \to 1$

Για $\omega \to \infty$ ο αριθμητής δίνει L/C και ο παρονομαστής δίνει: $\omega^2 L^2$

Επομένως: $\quad \frac{V_{out}}{V_s} \to \frac{(-i/C\omega)(-iL\omega)}{(L\omega)^2} = \frac{-\frac{L}{C}}{L^2\omega^2} = -\frac{1}{LC\omega} \to 0$

Στην περίπτωση αυτή το κύκλωμα επιτρέπει τη διέλευση σημάτων με χαμηλή συχνότητα και αποκόπτει σήματα με υψηλές συχνότητες. Αποτελεί επομένως φίλτρο χαμηλών συχνοτήτων.