ΦΥΣ 145 — 9^o QUIZ - 30 λεπτά — 12/04/2021

Άσκηση 1 [8μ]

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο μετασχηματισμού, να γράψετε τον τρόπο με τον οποίο θα πάρετε τυχαίους αριθμούς κατανεμημένους σύμφωνα με την $P(x) = \cos(x)$. Ποιο διάστημα τιμών του x θα χρησιμοποιήσετε;

Απ: Η PDF θα πρέπει να είναι θετική στο διάστημα ενδιαφέροντος μια και αντιπροσωπεύει την πιθανότητα για μια συγκεκριμένη περιοχή τιμών και επομένως δεν μπορεί να είναι αρνητική. Η συνάρτηση cos(x) είναι θετική παντού στο διάστημα [-π/2, π/2]. Ωστόσο θα πρέπει να την κανονικοποιήσουμε ώστε $A\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\,dx = 1$. Από τη σχέση αυτή έχουμε ότι ο παράγοντας κανονικοποίησης θα είναι $A = \frac{1}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)dx} = \frac{1}{\sin(x)|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2}$.

Επομένως, από την $P(y)dy = P(x)dx$, όπου $P(y)$ η ομοιόμορφη κατανομή, θα έχουμε:

$$P(y)dy = P(x)dx \Rightarrow \int_0^y P(y)dy = A\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\cos(x)\,dx \Rightarrow y = \frac{\sin(x)|_{-\frac{\pi}{2}}^{x}}{2} = \frac{\sin(x)+1}{2}$$

Λύνουμε την τελευταία ως προς *x* και θα έχουμε: $2y - 1 = \sin(x) \Rightarrow x = \arcsin(2y-1)$.

Χρησιμοποιώντας τυχαίους αριθμούς *y* στο διάστημα [0,1) και την τελευταία εξίσωση θα πάρουμε τιμές του *x* με PDF σύμφωνα με cos(x) στο διάστημα [-π/2, π/2].

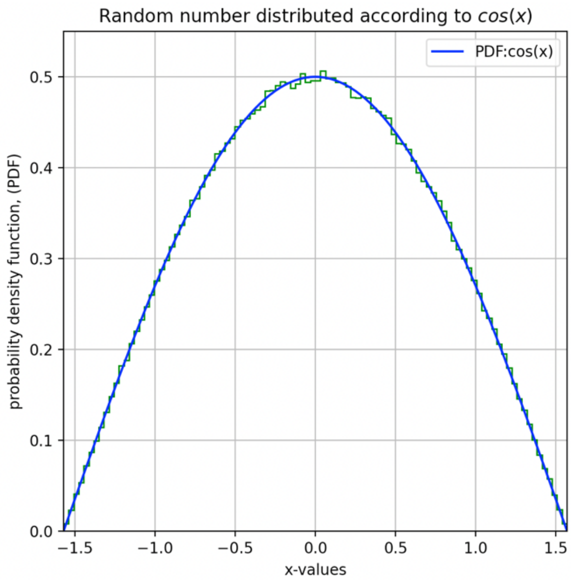
Ο κώδικας για τα παραπάνω καθώς και το γράφημα της κατανομής των τυχαίων αριθμών καθώς και η PDF φαίνονται παρακάτω:

```
#!/usr/bin/python3
import numpy as np
from math import asin
import matplotlib.pyplot as plt
from random import seed, random

def PDF(x):
    return np.cos(x)

xlo = float(input("Low x-value [-pi/2] "))
xup = float(input("Upp x-value [ pi/2] "))
Ntries = int(input("No. to generate [100K]? "))
seed(123456)
xvl = []
norm = (np.sin(xup) - np.sin(xlo))
for itry in range(Ntries):
    yv = random()         # tuxaia timi [0,1)
    yv = norm*yv - 1      # sin(x) = 2y-1
    xvl.append(asin(yv))  # x = arcsin(2y-1)

plt.figure(figsize=(6,6))
cont,xbinv,intr=plt.hist(xvl,bins=100,range=(-np.pi/2,np.pi/2),\
                         density=True,histtype='step',color='g')
ypdf=PDF(xbinv)/norm
plt.plot(xbinv,ypdf,'b-',label=r'PDF:cos(x)')
plt.xlabel('x-values')
plt.ylabel('probability density function, (PDF)')
plt.title('Random number distributed according to $cos(x)$')
plt.axis([-np.pi/2, np.pi/2, 0., 0.55])
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```



Άσκηση 2 [7μ]

Να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει την πιθανότητα ρίχνοντας 3 ζάρια να πάρουμε ακριβώς την ίδια τιμή σε 2 από αυτά.

<u>Σημείωση:</u> η πιθανότητα να συμβεί αυτό μπορεί να υπολογιστεί θεωρώντας τα ακόλουθο: Αν ρίξουμε το ένα ζάρι, τότε η ρίψη του $2^{ου}$ ζαριού μπορεί να δώσει την ίδια τιμή με πιθανότητα 1/6 ή διαφορετική με πιθανότητα 5/6.

Αν το 2^{o} ζάρι έχει την ίδια τιμή με το 1^{o} ζάρι τότε για να έχουμε μόνο 2 ζάρια με την ίδια τιμή θα πρέπει το 3^{o} ζάρι να έχει διαφορετική τιμή από τα άλλα δύο που αντιστοιχεί σε πιθανότητα 5/6. Επομένως αν τα 2 ζάρια έχουν την ίδια τιμή, η πιθανότητα είναι 5/36 (1/6 x 5/6).

Αν το 2^{o} ζάρι έχει διαφορετική τιμή από το 1^{o} ζάρι, τότε το 3^{o} ζάρι μπορεί να έχει την ίδια τιμή είτε με το 1^{o} ζάρι ή με το 2^{o} ζάρι. Το καθένα από αυτά έχει πιθανότητα 1/6, επομένως η πιθανότητα το 3^{o} ζάρι να έχει τιμή με ένα από τα πρώτα δύο είναι 2x1/6 = 1/3. Επομένως η πιθανότητα το 3^{o} ζάρι να έχει την ίδια τιμή με το 1^{o} ή το 2^{o} όταν η τιμή του $2^{ου}$ δεν ταυτίζεται με την τιμή του $1^{ου}$ ζαριού (5/6 πιθανότητα), είναι 1/3 x 5/6 = 5/18.

Η συνολική πιθανότητα να έχουμε 2 από τα 3 ζάρια με την ίδια τιμή είναι το άθροισμα των δύο περιπτώσεων που περιεγράφηκαν παραπάνω: 5/36 + 5/18 = 15/36 = 5/12.

Απ:

```
#!/usr/bin/python3

import numpy as np
from random import seed, random, randint
seed(123456)
Ntries = int(input("How many tries "))
Nsuccess = 0
iz = np.zeros(3,int)
for itry in range(Ntries):
    iz[0] = randint(1,6)
    iz[1] = randint(1,6)
    iz[2] = randint(1,6)
    match = 0
    for i in range(len(iz)-1):
        for j in range(i+1,len(iz)):
            if iz[i] == iz[j]:
                match +=1
    if match == 1:
        Nsuccess +=1

print(" The simulated probability is %6.4f:"
      "\n The expected probability is %6.4f:"
      % (Nsuccess*100/Ntries,5*100/12))
```