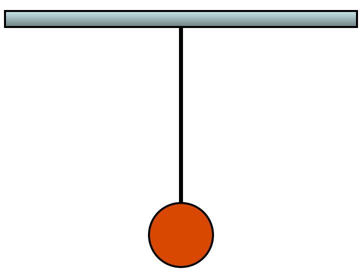
Ευσταθής – Ασταθής ισορροπία

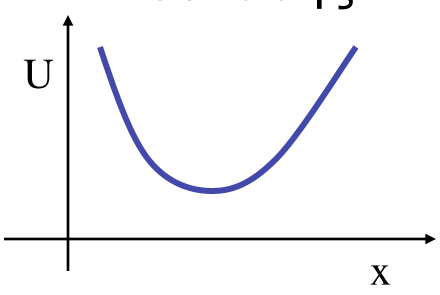
Έστω ένα σώμα σε ισορροπία. Του δίνουμε μια μικρή ώθηση
Αν το σώμα κινηθεί προς τη θέση ισορροπίας τότε η ισορροπία είναι ευσταθής.

Αν το σώμα απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας τότε η ισορροπία είναι ασταθής.

Για παράδειγμα

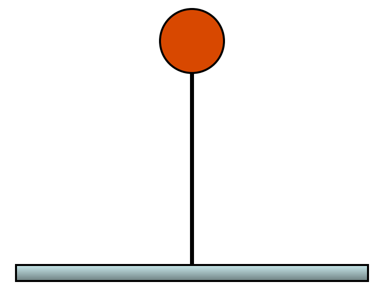


Ευσταθής

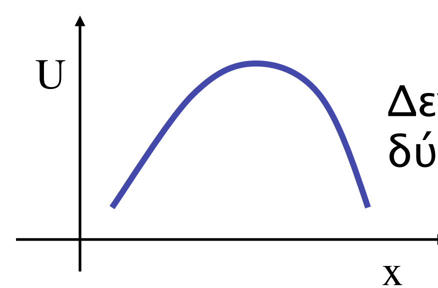


$$F = -\frac{dU}{dx}$$

Δύναμη επαναφοράς



Ασταθής



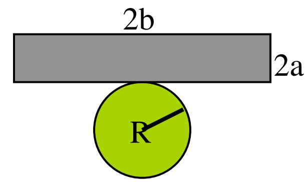
Δεν υπάρχει δύναμη επαναφοράς

Αν η μετακίνηση αυξάνει τη δυναμική ενέργεια έχουμε ευσταθή ισορροπία

Παράδειγμα

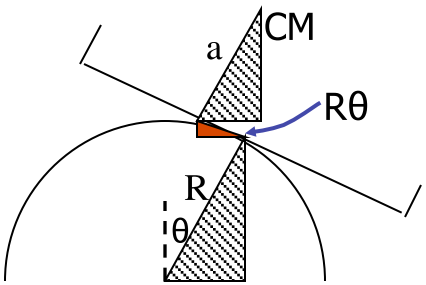
Ο κύλινδρος είναι σταθερός και το δοκάρι ταλαντώνεται χωρίς να γλιστρά

Ποια η συνθήκη σταθερής ισορροπίας;



Λύση

Εξετάζουμε αν το CM ανεβαίνει προς τα πάνω ή κατεβαίνει όταν το δοκάρι μετακινείται από τη θέση ισορροπίας.



Έστω ότι το δοκάρι γέρνει κατά γωνία θ

Τα τρία τρίγωνα είναι όμοια (ίδια γωνία θ)

Οι τρεις υποτίνουσες είναι: R, a και Rθ

Αθροίζουμε τις κάθετες πλευρές στα τρία τρίγωνα

$$h_{CM} = R\cos\theta + R\theta\sin\theta + \mathrm{a}\cos\theta$$

Αλλά αφού θ μικρή τότε (ανάπτυγμα Taylor) $\sin\theta \approx \theta \quad \cos\theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$

Επομένως έχουμε: $$h_{CM} = R\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + R\theta^2 + \mathrm{a}\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow h_{CM} = R + \mathrm{a} + (R - \mathrm{a})\frac{\theta^2}{2}$$

Αν a<R το CM ανεβαίνει προς τα πάνω ➡ ευσταθής

Αν a>R το CM κατεβαίνει προς τα κάτω ➡ ασταθής

Διαφορετικά: Η οριζόντια απόσταση του CM ως προς το σημείο επαφής

$x_{CM} = -R\theta\cos\theta + \mathrm{a}\sin\theta \approx -(R - a)\theta$ Για a<R το CM αριστερά σημείου επαφής

Η βαρύτητα δίνει μια ροπή επαναφοράς ως προς το σημείο επαφής

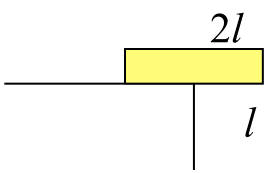
Στοιβαγμένα τούβλα

Πόσο ψηλά μπορεί να φθάσει μια στοίβα από Ν τούβλα τα οποία βρίσκονται στην άκρη ενός τραπεζιού? (καθένα έχει μάζα m και μήκος $2l$)

Λύση

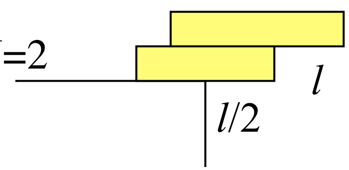
Το κύριο της άσκησης είναι ότι χρειαζόμαστε το CM των **n** επάνω τούβλων να τοποθετηθούν σωστά (στην περίπτωση της μέγιστης απόστασης από την άκρη του τραπεζιού) ακριβώς πάνω από την άκρη του **(n+1)** τούβλου (έτσι ώστε η βαρύτητα να μην παράγει ροπή). και το CM όλων να βρίσκεται πέρα από την άκρη του τραπεζιού.
Ας δούμε μερικές περιπτώσεις μικρού αριθμού τούβλων:

N=1



Απόσταση = l

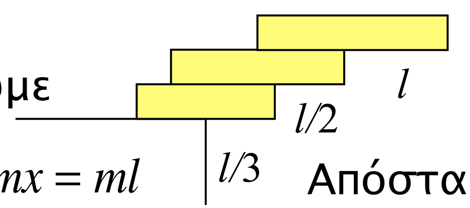
N=2

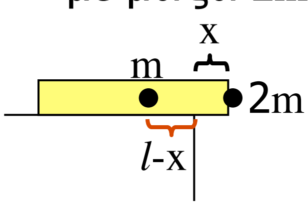


Απόσταση = $l(1+1/2)$

N=3

Τα 2 πρώτα τούβλα είναι πρακτικά 1 τούβλο με μάζα 2m βρισκόμενη στο CM. Δηλαδή έχουμε



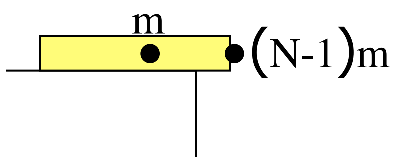


$$\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow m(l-x) - 2mx = 0 \Rightarrow 3mx = ml$$

Απόσταση= $l\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$

$$\Rightarrow x = \frac{l}{3}$$ Η θέση του CM είναι $l/3$ από άκρη

Τούβλα (συνέχεια)



Το κέντρο μάζας του N και (N-1)m μαζών είναι l/N από το άκρο. Με επαγωγή παίρνουμε:

$$\text{Απόσταση} = l\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\right)$$

Ουσιαστικά, η άκρη του τραπεζιού στην περίπτωση των N-τούβλων θα είναι η θέση του τέλους του κατώτερου τούβλου στην περίπτωση (N+1) τούβλων. Κατόπιν απλά αντικαθιστούμε τα πάνω N τούβλα σα σημειακή μάζα Nm, όταν βρίσκουμε το CM των (N+1) τούβλων.

Σημειώστε ότι $l\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\right)$ συμπεριφέρεται όπως $l \ln N$ καθώς $N \to \infty$

Αφού το lnN αποκλίνει, μπορούμε να έχουμε την στοίβα αρκετά πέρα από την άκρη. Αλλά θα χρειαστεί ένας μεγάλος αριθμός τούβλων.

$$l \ln N = d \Rightarrow N = e^{d/l}$$

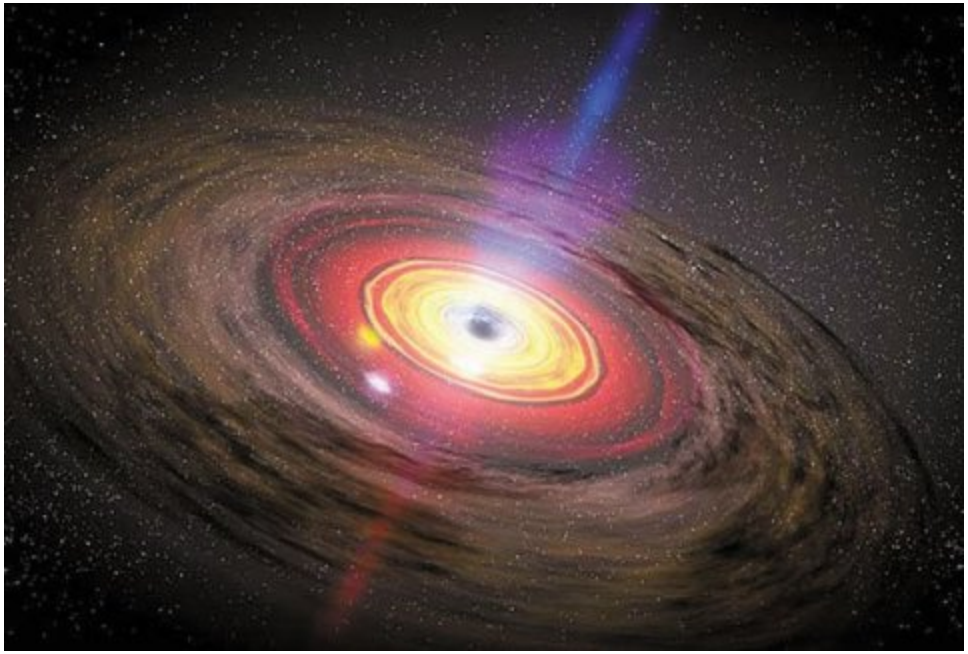
Αν θέλετε να βάλετε ένα ακόμα τούβλο, το βάζετε από κάτω.

Αν d/l = 5 ➡ N = 149

Αν d/l =10 ➡ N = 22000

Γι' αυτή την τελευταία περίπτωση, το CM όλων των τούβλων είναι πέρα από τη άκρη του τραπεζιού επειδή ένας μεγάλος αριθμός είναι στημένα στα αριστερά της στοίβας

Νόμος παγκόσμιας έλξης



Κοιτάζοντας τα άστρα ...

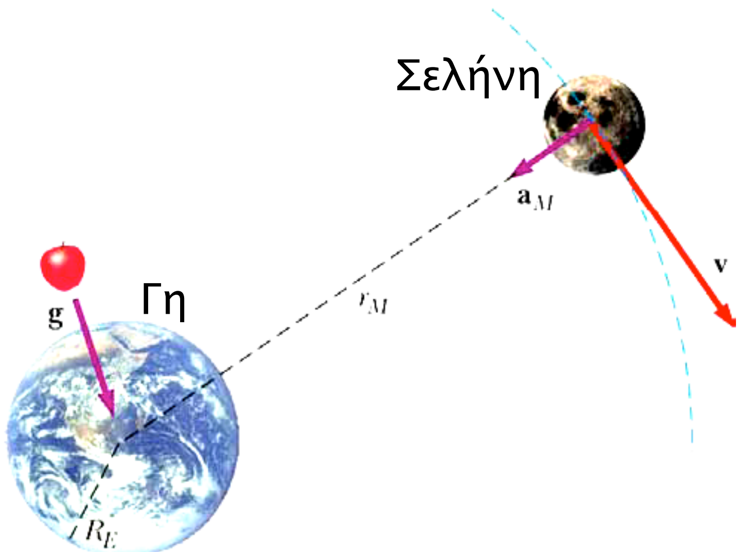
Η εξήγηση για τη δυναμική μεταξύ ουράνιων σωμάτων ξεκίνησε από παρατηρήσεις και πνευματικές αναζητήσεις από την αρχή της ανθρωπότητας

- Πτολεμαίος: Είχε την λάθος γεωκεντρική θεωρία
- Κοπέρνικος: Έδωσε μια περισσότερο σωστή ηλιοκεντρική θεωρία
- Brahe: Πολλές παρατηρήσεις και ακριβή δεδομένα
- Keppler: Χρησιμοποίησε τα δεδομένα του Brahe και πρότεινε τρεις εμπειρικούς νόμους
- Newton: Βρήκε ένα παγκόσμιο νόμο που εξηγεί τους νόμους του Keppler
- Einstein: Δημιούργησε μια νέα θεωρία που εξηγεί μερικές μικρές ανακρίβειες στη θεωρία του Newton

???????: Τι έρχεται για το μέλλον?

Βαρύτητα-Νόμος παγκόσμιας βαρυτικής έλξης

- Ο Newton συνέδεσε την πτώση αντικειμένων στην επιφάνεια της γης με την κίνηση της σελήνης γύρω από την γη.
  - Η σελήνη πέφτει συνεχώς προς την γη:



$$a_r^{\sigma\varepsilon\lambda.} = \frac{v^2}{R_{\gamma\eta-\sigma\varepsilon\lambda.}} = \frac{(2\pi R_{\gamma\eta-\sigma\varepsilon\lambda.}/T)^2}{R_{\gamma\eta-\sigma\varepsilon\lambda.}} = 0.00272 m/s^2$$

όπου $R_{\gamma\eta\text{-}\sigma\varepsilon\lambda.} = 3.84\mathrm{x}10^8\mathrm{m}$ και $T = 27.3$ ημέρες

Πως συγκρίνεται αυτό με το g?

$$\frac{a_{\varepsilon\pi\iota\varphi.\text{-}\gamma\eta\varsigma}}{a_{\tau\rho o\chi\iota\alpha\text{-}\sigma\varepsilon\lambda.}} = \frac{9.81 m/s^2}{2.72\times10^{-3}} \approx 3600$$

Αλλά $$\frac{R_{\gamma\eta-\sigma\varepsilon\lambda.}}{\mathrm{R}_{\gamma\eta}} = \frac{3.84\times10^8}{6.37\times10^6} \approx 60$$

Αφού η επιτάχυνση που προκαλείται από τη βαρυτική δύναμη ελαττώνεται σαν $1/R^2$ τότε και η δύναμη θα μεταβάλλεται όπως $1/R^2$

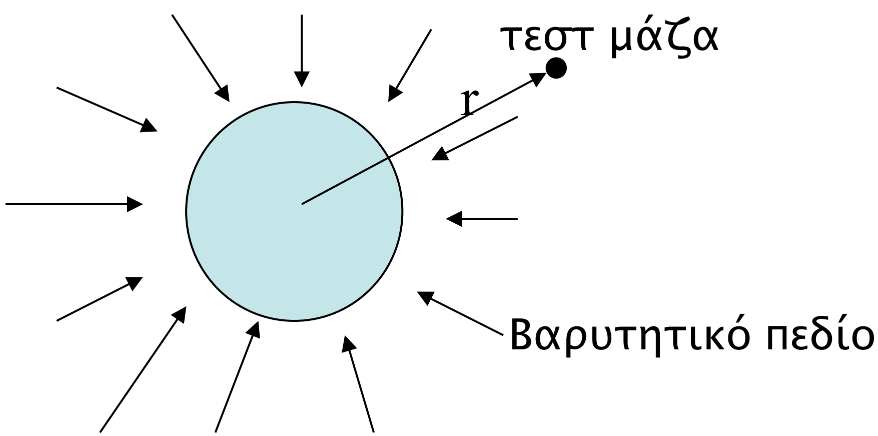
$$F_r = ma_r \propto \frac{1}{r^2}$$

Εξάρτηση από τη μάζα

Μάζα η μόνη κοινή φυσική ιδιότητα μεταξύ γης-σελήνης.

- Από το 3ο νόμο του Newton $F_{γης-σελ} = -F_{σελ-γης}$
- ? Αν η εξίσωση της δύναμης εξαρτώνταν από την μάζα τότε η εξάρτηση μπορούσε να έχει τη μορφή: $(M+m)^n$ ή $(Mm)^n$.
- ✓ Από πειράματα Γαλιλαίου ➔ εξάρτηση της μορφής $(Mm)^n$
  (επιτάχυνση μάζας m που προκαλείται από μάζα M είναι ανεξάρτητη της μάζας m)

Βαρυτική δύναμη $F_r \propto \dfrac{Mm}{r^2}$ $\Rightarrow F_{grav} = G\dfrac{Mm}{r^2}$



Αμοιβαία έλξη μεταξύ δύο οποιαδήποτε μαζών στο σύμπαν!

$G = 6.67 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$ πολύ μικρή!!

Βαρυτική μάζα → Αδρανειακή μάζα → Βαρυτική

- Οι μάζες στον νόμο της παγκόσμιας βαρυτικής έλξης – βαρυτικές
- Οι μάζες στο 2ο νόμο του Newton αδρανειακές

- Ποια η σχέση μεταξύ τους? Τι λένε τα πειράματα?

$$F_{grav} = G\frac{M_g m_g}{r^2} = m_{\alpha\delta\rho.}a \;\Rightarrow a = G\frac{M_g}{r^2}\frac{m_g}{m_{\alpha\delta\rho.}}$$

- **Πείραμα**: όλα τα σώματα που κάνουν ελεύθερη πτώση πέφτουν με g

Επομένως $\mathbf{m_g = m_{\alpha\delta\rho}}$

- Η σταθερά G είναι πάρα πολύ δύσκολο να μετρηθεί και είναι μια από τις λιγότερο γνωστές (σε ακρίβεια) σταθερές στη φυσική

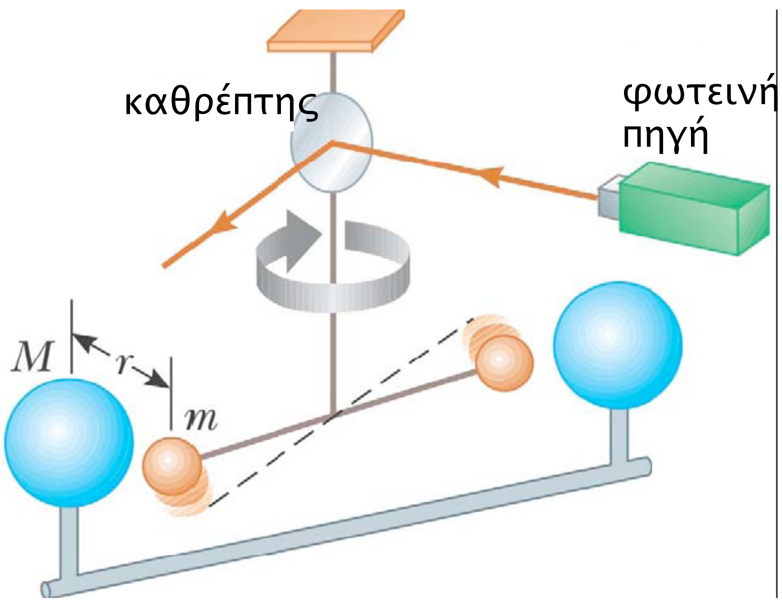
- Οι βαρυτικές δυνάμεις είναι προστιθέμενες:

$$\sum \vec{F}_g = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \cdots + \vec{F}_{1n}$$

Μέτρηση της σταθεράς G

- Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την γη σα μια από τις μάζες αφού δεν ξέρουμε την μάζα της.
- Χρειαζόμαστε δύο γνωστές μάζες.
  - Η δύναμη μεταξύ δύο «καθημερινών» μαζών είναι πολύ μικρή. Πρέπει να 'μαστε έξυπνοι.
  - O Cavendish ήταν αρκετά έξυπνος. 100 χρόνια μετά το Newton (1798) ήταν ο πρώτος που μέτρησε το G.

Βασική ιδέα: Μέτρηση της παραμόρφωσης λόγω περιστροφής υπό την επίδραση της βαρύτητας ενός λεπτού σύρματος που συνέδεε δύο γνωστές μικρές μάζες.



Το στρίψιμο του σύρματος μετρά τη βαρυτική δύναμη F, ενώ γνωρίζουμε τα m_1, m_2 και r και άρα βρίσκουμε το G

Σημαντικό: Η μέθοδος θεωρεί ότι τα 2 σφαιρικά σώματα δρουν σα να είναι σημειακά. Δηλαδή όλη τους η μάζα στο κέντρο της σφαίρας.

Αυτό αποδεικνύεται σωστό.

Σημασία του πειράματος του Cavendish

- Γνωστό και σα πείραμα μέτρησης του βάρους της Γης:

  Αφού μετρήσαμε το G με 2 γνωστές μάζες μπορούμε να μετρήσουμε τη μάζα της γης από

$$mg = G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow g = G\frac{M}{r^2} \Rightarrow M = \frac{gr^2}{G} \Rightarrow M = \frac{9.8\cdot(6.37\times10^6)^2}{6.67\times10^{-11}} = 5.97\times10^{24}\,kg$$

- Η μέση πυκνότητα της γης είναι $\rho = M/(4/3\ \pi R^3)$ ➔ $\rho_{\alpha\nu}$=5.5gr/cm^3

- Αλλά η πυκνότητα της κρούστας της γης είναι < 5.5 gr/cm^3

  Επομένως το κέντρο της πρέπει να ’ναι περισσότερο συμπαγές.

  Το πείραμα του Cavendish μας δίνει πληροφορίες και για το κόρο της γης

Μεταβολές της επιτάχυνσης της βαρύτητας

- Η επιτάχυνση της βαρύτητας δεν είναι σταθερή στην επιφάνεια της γης:

$$mg = G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow g = G\frac{M}{r^2} \approx 9.8m/s^2$$

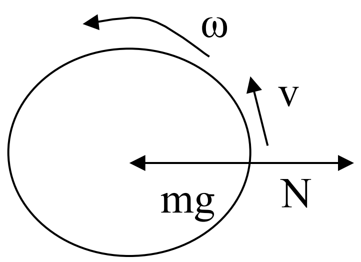
(α) Ο φλοιός δεν είναι ομοιόμορφος.

(β) Η γη δεν είναι σφαίρα (πιο πλατιά στον ισημερινό)

(γ) Η γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της (β και γ σχετίζονται)

- Σε κάποια από τις αρχικές διαλέξεις είχαμε υπολογίσει το g στον ισημερινό.

Λόγω της περιστροφής της γης το g δίνεται από:



$$mg - N = \frac{m\mathrm{v}^2}{R} \Rightarrow N = m(g - \frac{\mathrm{v}^2}{R}) = m(g - \omega^2 R)$$

Αλλά:

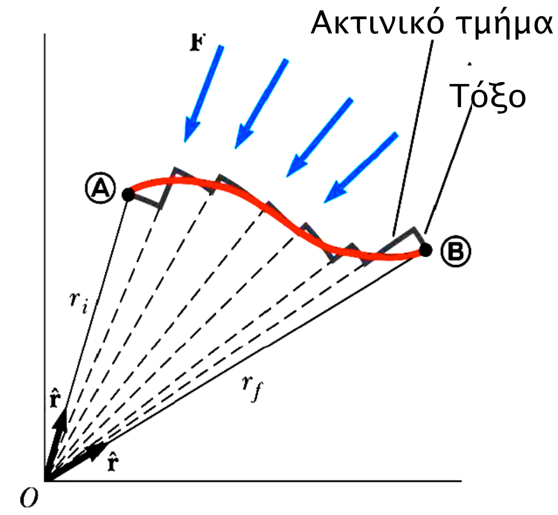
$$\omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{1\eta\mu\varepsilon\rho\alpha}\right)^2 R = \left(\frac{2\pi}{86400}\right)^2 R = 0.034m/s^2$$

Στη κορυφή ενός βουνού:

$$g = G\frac{M}{(r+h)^2} = \frac{GM}{r^2 + h^2 + 2rh} \approx \frac{GM}{r^2(1+2h/r)} = \frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{2h}{r}\right) \Rightarrow g = g\left(1 - \frac{2h}{r}\right)$$

Βαρυτική δυναμική ενέργεια

- Η βαρυτική δύναμη είναι συντηρητική δύναμη
- Η βαρυτική δύναμη είναι κεντρική δύναμη
  - Έχει ακτινική διεύθυνση με φορά προς το κέντρο
  - Το μέτρο της εξαρτάται μόνο από την απόσταση r
  - Μια κεντρική δύναμη μπορεί να γραφεί $F(r)\,\hat{r}$
- Σωματίδιο κινείται από το σημείο A στο B υπό την επίδραση κεντρική δύναμης
- Μπορούμε να χωρίσουμε τη διαδρομή σε μια σειρά από ακτινικά τμήματα και τμήματα τόξου
- Το έργο κατά μήκος των τμημάτων τόξου είναι μηδέν και επομένως το έργο εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση r_f και r_i



Βαρυτική δυναμική ενέργεια

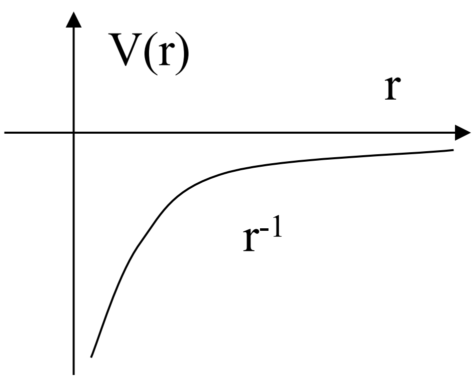
Για να βρούμε τη βαρυτική δυναμική ενέργεια, χρειάζεται να ολοκληρώσουμε τη δύναμη.

$$F = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -\int_{r_1}^{r_2} F\,dr = -\int_{r_1}^{r_2}\left(-G\frac{Mm}{r^2}\right)dr = -\frac{GMm}{r}\Bigg|_{r_1}^{r_2} \Rightarrow dV = -GMm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

(-) επειδή η δύναμη είναι ελκτική

Δαπανώμενο έργο για να κινηθεί η μάζα m ως την M

- Συνήθως θεωρούμε σα σημείο αναφοράς το σημείο $r_1 = \infty$



$$V(r) = -\frac{GMm}{r}, \qquad \mathrm{V}(\infty) = 0$$

Η ειδική περίπτωση: mgh

- Για την δυναμική ενέργεια βαρύτητας έχουμε μάθει να χρησιμοποιούμε τη σχέση: mgh
  - Αυτή είναι ειδική περίπτωση της γενικής εξίσωσης: $-G\dfrac{Mm}{r}$ κοντά στην επιφάνεια της γης, γιατί:

$$\Delta V = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = \frac{GMm}{R}\left(1 - \frac{1}{1+h/R}\right) = \frac{GMm}{R}\left(1 - \frac{1}{1+\varepsilon}\right) \Rightarrow$$

Επειδή ε << 1 μπορούμε να πάρουμε το ανάπτυγμα Taylor: $\dfrac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon + \cdots$

$$\Delta V = \frac{GMm}{R}\left[1 - \left(1 - \frac{h}{R}\right)\right] = \left(\frac{GM}{R^2}\right)mh \equiv mgh$$

$$\boxed{\text{Η σχέση αυτή ισχύει μόνο για h << R}}$$

Στις 2 τελευταίες σελίδες κάναμε ένα μεγάλο κύκλο: ολοκληρώσαμε τη δύναμη για να πάρουμε το δυναμικό, διαφορίσαμε το δυναμικό και πολλαπλασιάσαμε με h για να πάρουμε έργο: Fh=mgh