ΦΥΣ 145 – Υπολογιστικές Μέθοδοι στη Φυσική

5η Εργασία **Επιστροφή: 7/4/13**

<u>**Υπενθύμιση:**</u> Οι εργασίες πρέπει να επιστρέφονται με e-mail που θα στέλνετε από το πανεπιστημιακό σας λογαριασμό το αργότερο μέχρι την ημερομηνία που αναγράφεται.
Σα θέμα (subject) του e-mail θα πρέπει να αναγράφεται την εργασία (Homework 5)
Κάθε αρχείο που επισυνάπτετε (attach) στο e-mail σας θα πρέπει να έχει το όνομα στη μορφή ***username_hm5.tgz*** όπου username είναι το *username του e-mail σας*. Επίσης σα πρώτο σχόλιο μέσα σε κάθε file θα πρέπει να αναφέρεται το ονοματεπώνυμό σας. Η εντολή tar είναι: tar –czvf username_hm5.tgz *.f

1. Θεωρήστε την περίπτωση ενός ποδηλάτη που αγωνίζεται σε κάποιο αγώνα ταχύτητας. Θεωρήστε αρχικά ότι δεν υπάρχει αντίσταση του αέρα. Από τον 2ο νόμο του Newton ξέρουμε ότι: $\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{F}{m}$ όπου m συνολική μάζα του συστήματος ποδηλάτη-ποδήλατου, υ η ταχύτητα του συστήματος και F η δύναμη που αναπτύσει ο ποδηλάτης. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ισχύος μπορούμε να γράψουμε ότι $P = \frac{dE}{dt}$ όπου E η ενέργεια. Για την περίπτωση ενός οριζόντιου δρόμου η ισχύς που αναπτύσει ο ποδηλάτης πηγαίνει σε κινητική ενέργεια $E = m\upsilon^2/2$. Επομένως μπορούμε να γράψουμε ότι $P = m\upsilon d\upsilon/dt$ και επομένως $\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{P}{m\upsilon}$. Υποθέστε ότι η ισχύς P, που αναπτύσει ο ποδηλάτης για μια παρατεταμένη χρονική περίοδο από $t=0$ σε $t'=t$ είναι σταθερή. Από την τελευταία σχέση θα έχουμε: $\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \upsilon' d\upsilon' = \int_0^t \frac{P}{m} dt$ με λύση: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + \frac{2P}{m}t}$. Λύστε το παραπάνω πρόβλημα αριθμητικά χρησιμοποιώντας την μέθοδο *Euler*. Θεωρήστε ότι η ισχύς που αναπτύσει ο ποδηλάτης κατά την διάρκεια μιας ώρας είναι $P = 400W$, η μάζα του συστήματος ποδηλάτη-ποδήλατου είναι $m = 70kg$ και η αρχική ταχύτητα του συστήματος είναι $\upsilon_0 = 4m/s$. Θεωρήστε σαν χρονικό βήμα $dt = 0.1sec$. Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της ταχύτητας υ, του ποδηλάτη συναρτήσει του χρόνου t και σχολιάστε το αποτέλεσμα που πέρνετε. Θεωρήστε τώρα ότι η αντίσταση του αέρα δεν είναι αμελητέα αλλά η δύναμη αυτή έχει την μορφή $F_{αντ.} = -\frac{1}{2}C\rho A\upsilon^2$ όπου C είναι ο συντελεστής αντίστασης, ρ η πυκνότητα του αέρα και A η μετωπική επιφάνεια του συστήματος ποδηλάτη-ποδήλατου. Θεωρήστε ότι $C = 0.5$, $A = 0.33m^2$ και $\rho = 1.204kg/m^3$. Να κατασκευάσετε και πάλι το γράφημα ταχύτητας – χρόνου στο ίδιο γράφημα που πήρατε για την περίπτωση έλλειψης αντίστασης και να σχολιάσετε το αποτέλεσμά σας. Θεωρήστε και πάλι το ίδιο χρονικό διάστημα κίνησης και το ίδιο χρονικό βήμα.

2. Θεωρήστε σώμα εξαρτημένο από ελατήριο. Το σύστημα κινείται κάτω από την επίδραση μιας δύναμης αντίστασης με αποτέλεσμα η ταλάντωση την οποία εκτελεί το σώμα να είναι φθίνουσα. Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του

σώματος είναι: $m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-b\frac{dx}{dt}$, όπου x η θέση του σώματος, k η σταθερά του ελατηρίου, m η μάζα του σώματος και b ο παράγοντας απόσβεσης. Θεωρήστε $k=1N/m$, $m=1kg$, $b=0.1kg/s$ και αρχικές συνθήκες $x(t=0)$ = 1.0m και $\upsilon(t=0)$ = 0m/s. Χρησιμοποιώντας αρχικά την μέθοδο του *Euler* και χρονικά βήματα dt = 0.25*sec* και $dt=1$sec και για χρονικό διάστημα από 0 ως 25*sec*, να κατασκευάσετε τα γραφήματα $x(t)$ ως προς t, $\upsilon(t)$ ως προς t, για κάθε χρονικό βήμα και να τα συγκρίνετε στο ίδιο γράφημα. Κάντε επίσης το γράφημα $x(t)$ ως προς $\upsilon(t)$. Χρησιμοποιήστε την μέθοδο Verlet-ταχύτητας και κατασκευάστε τα ίδια γραφήματα όπως και πριν. Για το χρονικό βήμα $dt=0.25sec$ συγκρίνετε τα αποτελέσματα των δυο μεθόδων καθώς και το αναμενώμενο χρησιμοποιώντας την αναλυτική λύση: $x(t)=1.00125x_0e^{-0.05t}\cos(0.0500209-0.998749t)$,όπου $x_0=x(t=0)$.

3. Το πολυόνυμο Legendre τάξης L ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$P(L,x)=A(L)\sum_{r=0}^{r=L/2}\left[B(L,r)x^{(L-2r)}\right]$$

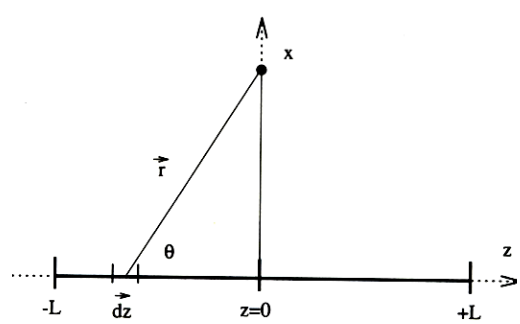
όπου $A(L)=1/2^L$ και $B(L,r)$ δίνεται από τη σχέση:

$$B(L,r)=(-1)^r\frac{(2L-2r)!}{\left[r!(L-r)!(L-2r)!\right]}$$

Στο πρόβλημα αυτό θα μελετήσετε το πολυόνυμο Legendre τάξης L = 8.
Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να έχει τα ακόλουθα στοιχεία:
(α) Μια συνάρτηση, *FACT*, η οποία υπολογίζει το παραγοντικό ενός ακεραίου που περνάτε.
(β) Μια συνάρτηση, *LEGENDRE*, η οποία υπολογίζει την τιμή του πολυονύμου Legendre $P(8,x)$ για κάποια τιμή του x που περνάτε.
(γ) Θα πρέπει να γράψετε ένα κύριο πρόγραμμα το οποίο δέχεται από το πληκτρολόγιο την αρχική τιμή του x για την οποία θα πρέπει να υπολογίσετε το $P(8,x)$. Η αρχική αυτή τιμή είναι x =-1. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να υπολογίζει την τιμή του πολυονύμου για όλες τις τιμές του x στο διάστημα [-1, 1] με βήμα δx = 0.05. Θα πρέπει να γράψετε τις τιμές του x και τις αντίστοιχες τιμές του πολυονύμου $P(8,x)$ σαν ζεύγη, σε ένα file το οποίο ονομάζεται *Legendre.dat.*
(δ) Βλέποντας το file αυτό θα παρατηρήσετε ότι $P(8,x)$ έχει 4 ρίζες στο διάστημα [-1.0,0.0]. Επειδή το πολυόνυμο είναι συμμετρικό ως προς x, αυτές οι ρίζες θα είναι συμμετρικές και θα υπάρχουν και στο διάστημα [0.0,1.0]. Επομένως βρίσκοντας τις 4 αρνητικές ρίζες θα έχουμε βρει και τις 4 θετικές. Θα πρέπει τώρα να προσθέσετε στο πρόγραμμά σας μια συνάρτηση, *NEWTON*, η οποία υπολογίζει την ρίζα μιας συνάρτησης, η οποία βρίσκεται ανάμεσα σε δυο τιμές x_1 και x_2 που περνάτε σαν ορίσματα στην συνάρτηση *NEWTON*. Η συνάρτηση *NEWTON* θα πρέπει να έχει δυο ακόμα ορίσματα, την συνάρτηση την ρίζα της οποίας θέλετε να βρείτε και την ακρίβεια με την οποία θέλετε να βρείτε τη ρίζα. Θεωρήστε ότι η ακρίβεια που θέλετε να πετύχετε για την εύρεση της ρίζας είναι ε = 0.000001. Η τιμή της ρίζας θα είναι αυτή για την οποία είτε η τιμή του $|P(8,x)| < \varepsilon$ ή $|x_1 - x_2| < \varepsilon$. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει τώρα να τυπώνει και τις ρίζες τις οποίες βρίσκετε σε ένα file το οποίο ονομάζεται *LegendreRoots.dat.*

<u>Υπόδειξη</u>: Μπορείτε να προσεγγίσετε τη παράγωγο του πολυωνύμου από την κλίση της ευθείας που ορίζεται από τα σημεία x_1 και x_2 και τις αντίστοιχες τιμές του πολυονύμου. (ε) Κάντε την γραφική παράσταση των τιμών του πολυονύμου $P(8,x)$ συναρτήσει του x χρησιμοποιώντας τις τιμές που έχετε αποθηκεύσει στο file *Legendre.dat* στο (γ) ερώτημα. Το γράφημα που θα πρέπει να έχει κατάλληλα ονοματισμένους άξονες θα πρέπει να το αποθηκεύσετε στο αρχείο *Legendre.pdf.*

4. Θεωρήστε ένα ευθύγραμμο αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα I. Σύμφωνα με το νόμο του Biot-Savart το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από ρεύμα I που διαρρέει ένα τμήμα $d\vec{z}$ του αγωγού δίνεται από τη σχέση: $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{z}\times\vec{r}}{r^3}$, όπου r είναι το διάνυσμα από το τμήμα, $d\vec{z}$, του αγωγού στο σημείο που θέλουμε να εξετάσουμε το πεδίο (δείτε το σχήμα). Για τη συγκεκριμένη γεωμετρία το εξωτερικό γινόμενο $d\vec{z}\times\vec{r}$ μπορεί να γραφεί συναρτήσει της γωνίας θ οπότε έχουμε: $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dz\sin\theta}{r^2}$, όπου αγνοούμε το σύμβολο του διανύσματος, μια και το πεδίο από κάθε τμήμα Δz του ευθύγραμμου αγωγού έχει διεύθυνση κάθετη προς το επίπεδο της σελίδας. Το ολικό πεδίο δίνεται από το ολοκλήρωμα του dB ως προς το συνολικό μήκος του αγωγού. Για να το υπολογίσουμε αυτό το ολοκλήρωμα μετατρέπουμε ως συνήθως τα διαφορικά σε μικρές διαφορές, δηλαδή το dz γίνεται Δz και το ολοκλήρωμα γίνεται άθροισμα από το ένα άκρο του αγωγού στο άλλο: $B \approx \sum \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{x\Delta z}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}$, όπου εκφράσαμε τα r και sinθ συναρτήσει των x και z. Το άθροισμα αυτό δίνει μια προσεγγιστική τιμή για το πεδίο B, ενώ το αριθμητικό σφάλμα ελαττώνεται κάνοντας το Δz πολύ μικρό. Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ένα ευθύγραμμο σύρμα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Simpson και συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά που βρίσκετε χρησιμοποιώντας την προσεγγιστική εξίσωση για το B από την παραπάνω συζήτηση του προβλήματος και για την ίδια τιμή του Δz. Θεωρείστε ότι $\mu_0 I = 1$ και ότι το μήκος του αγωγού είναι 1m. Για διαφορετικές τιμές του βήματος Δz, χρησιμοποιήστε την προηγούμενη σχέση για να συγκρίνεται τα αποτελέσματά σας με αυτά που παίρνετε από τον νόμο του Ampere. Κάντε τη γραφική παράσταση του πεδίου B που βρίσκεται συναρτήσει του x για δύο αγωγούς με μήκος $l = 1$ και $l = 10$ και για $\Delta z = 0.1$.



5. Να υπολογισθεί η τιμή του ολοκληρώματος $\int_5^8 6x^3\,dx$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Euler και βήμα dx=0.15. [**10μ**] Συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με αυτό που λαμβάνετε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Simpson και το ίδιο βήμα dx.

6. Έστω σώμα κινείται σε μια διάσταση και η θέση και ταχύτητά του υπολογίζονται σε κάθε χρονική στιγμή σύμφωνα με τις εξισώσεις: $t_{i+1} = t_i + dt$

$x_{i+1} = x_i + \upsilon_i dt + \frac{1}{2} a_i \left(dt\right)^2$ και $\upsilon_{i+1} = \upsilon_i + a_i dt$, όπου η επιτάχυνση, $a_i = a\left(x_i, \upsilon_i, t_i\right)$ υπολογίζεται στην αρχή κάθε βήματος. Θεωρήστε ότι στο πρόβλημά σας η επιτάχυνση δίνεται από την εξίσωση $a_i = a\left(x_i, \upsilon_i, t_i\right) = -kx^3$ όπου k=4.0.

(**α**) Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο χρησιμοποιεί τις παραπάνω εξισώσεις για να κάνετε την αριθμητική ολοκλήρωση της τροχιάς του σώματος. Θεωρήστε ότι για t =0 το σώμα βρίσκεται στην θέση x_0 = 0.0*m* και η ταχύτητά του είναι υ_0 =1.0*m/s* και θεωρείστε σαν χρονικό βήμα, dt = 0.05 *sec.* Κάντε το γράφημα της τροχιάς για $x(t)$ ως προς t για $0 \le t \le 4\pi$. Κάντε επίσης το γράφημα της θέσης, $x(t)$ ως προς την ταχύτητα του σώματος $\upsilon(t)$.

(**β**) Το πλάτος της κίνησης είναι σταθερό μεταξύ δυο διαδοχικών ελαχίστων ή μεγίστων και αν όχι κατά πόσο μεταβάλλεται; Τροποποιήστε το πρόγραμμά σας ώστε να μεταβάλλεται το χρονικό βήμα dt, έως ότου το πλάτος να παραμένει σταθερό με μεταβολή λιγότερη από 1% μεταξύ δυο διαδοχικών ακροτάτων. (*Υπόδειξη*: μετατρέψτε το πρόγραμμά σας ώστε να κοιτάτε τις περιπτώσεις που η ταχύτητα γίνεται μηδέν, υ = 0.0. Έτσι μπορείτε να προσδιορίσετε τα σημεία αυτά με μεγαλύτερη ακρίβεια). Ποια η τιμή του χρονικού βήματος την οποία βρίσκετε με το τρόπο αυτό;

(**γ**) Γράψτε την εξίσωση της στιγμιαίας ολικής (κινητικής και δυναμικής) μηχανικής ενέργειας, E, του συστήματος. Αυτό πρέπει να αποτελεί μια σταθερά της κίνησης. Κάντε τη γραφική παράσταση του σφάλματος της ενέργειας $E(t)$ – $E(t=0)$ συναρτήσει του χρόνου για το χρονικό διάστημα $0 \le t \le 4\pi$ και για το χρονικό βήμα dt που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Θεωρήστε ότι η μάζα του σώματος είναι m = 1.0*kg*.

(**δ**) Χρησιμοποιώντας την τιμή του χρονικού βήματος dt που προσδιορίσατε στο ερώτημα (β), υπολογίστε την περίοδο της κίνησης. Αυτό θα το υπολογίσετε βρίσκοντας το χρόνο που χρειάζεται το σώμα να περάσει και πάλι από τη θέση x=0.0 με θετική φορά ταχύτητας. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής για καλύτερα αποτελέσματα.

(**ε**) Επαναλάβετε το (δ) ερώτημα για υ_0 = 0.25, 0.5, 1.0, 2.0, 4.0 και 8.0 και κάντε τη γραφική παράσταση της αριθμητικά υπολογιζόμενης περιόδου συναρτήσει της μηχανικής ενέργειας $E(t=0)$.