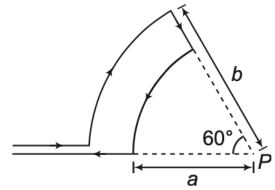
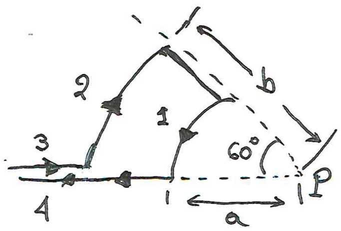
ΦΥΣ. 112

7ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή: Παρασκευή 08.11.2024**

1. Θεωρήστε τον βρόχο του διπλανού σχήματος που διαρρέεται από ρεύμα. Τα τοξωτά τμήματα του βρόχου έχουν ακτίνα R με κέντρο το σημείο P. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίο B στο σημείο P.





Θεωρούμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα 3 και 4 είναι πολύ κοντά και "διέρχονται" από το σημείο P. Επομένως το μαγνητικό πεδίο που δημιουργούν στο σημείο P θα είναι μηδέν, $B_3 = B_4 = 0$.

Τα τοξωτά τμήματα 2 και 1 αποτελούν τμήματα κυκλικού βρόχου και αντιστοιχούν σε επίκεντρη γωνία 60°.

Το μαγνητικό πεδίο κυκλικού βρόχου στο κέντρο του έχει μέτρο:

$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$ όπου R η ακτίνα του βρόχου και I το ρεύμα που τον διαρρέει.

Αναλογικά, το πεδίο που δημιουργούν τα τοξωτά τμήματα θα πρέπει να αντιστοιχ-θούν στο τμήμα του τόξου ως προς το μήκος της περιφέρειας του βρόχου:

$$B_1 = \frac{\frac{\pi}{3}\cancel{R}}{2\pi \cancel{R}}\frac{\mu_0 I}{2R} \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I}{6\cdot 2R}$$ για το τοξωτό τμήμα 1 $R = a$ οπότε:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{12a}$$ Το μαγνητικό πεδίο B_1 έχει κατεύθυνση προς το εξωτερικό της σελίδας: και επομένως:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{12a}\hat{k}$$

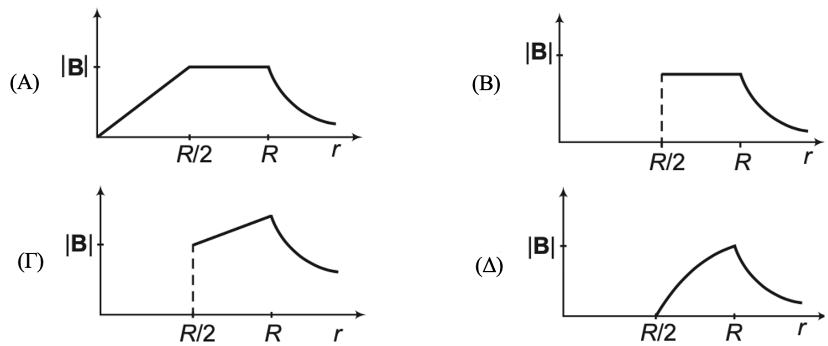
Σε αναλογία, το μαγνητικό πεδίο από το τοξωτό τμήμα 2 θα έχει μέτρο:

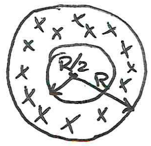
$$B_2 = \frac{\frac{\pi}{3}\cancel{b}}{2\pi \cancel{b}}\frac{\mu_0 I}{2b} \Rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 I}{12b}$$ με φορά προς το εσωτερικό της σελίδας και επομένως $\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{12b}\hat{k}$

Από την αρχή της επαλληλίας: $\vec{B}_P = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \underbrace{\cancel{\vec{B}_3}}_{0} + \underbrace{\cancel{\vec{B}_4}}_{0} = \left(\frac{\mu_0 I}{12a} - \frac{\mu_0 I}{12b}\right)\hat{k}$

οπότε $$\vec{B}_P = \frac{\mu_0 I}{12}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\hat{k}$$

2. Ένας κοίλος κυλινδρικός αγωγός απείρου μήκους με εσωτερική ακτίνα $R/2$ και εξωτερική ακτίνα R διαρρέεται από ομοιόμορφη πυκνότητα ρεύματος σε όλο το μήκος του. Εξηγήστε αναλυτικά ποια από τις παρακάτω γραφικές αντιπροσωπεύει καλύτερα το μέτρο του μαγνητικού πεδίου $|\vec{B}|$, συναρτήσει της απόστασης από τον άξονα του κυλινδρικού αγωγού.





Η διατομή του κυλινδρικού αγωγού φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Εξετάζουμε τρεις περιπτώσεις υπολογισμού του μαγνητικού πεδίου σε αποστάσεις $r \le \frac{R}{2}$, $\frac{R}{2} \le r \le R$ και $r \ge R$.

(α) $r \le \frac{R}{2}$ Από τον νόμο του Ampere: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{encl} \Rightarrow$

$\Rightarrow B \cdot l = \mu_0 I_{encl} \Rightarrow B \cdot (2\pi r) = \mu_0 I_{encl} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I_{encl}}{2\pi r}}$ (A)

Το ρεύμα στο εσωτερικό του κυλίνδρου $r < \frac{R}{2}$ είναι $I_{encl} = 0$.

Επομένως $\boxed{B = 0 \quad \text{για} \quad r \le R/2}$

(β) $\frac{R}{2} \le r \le R$ Το ρεύμα το οποίο περιέχεται στον κυλινδρικό φλοιό θα είναι η διαφορά των εμβαδών των επιφανειών των δύο κύκλων με ακτίνα $R/2$ και r. Επομένως:

$I_{encl} = (A_1 - A_2)\sigma = \left[\pi r^2 - \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\right]\sigma$ όπου σ η πυκνότητα ρεύματος,

Από την (A) θα έχουμε: $B = \frac{\mu_0}{2\cancel{\pi} r}\left[\cancel{\pi} r^2 - \cancel{\pi}\frac{R^2}{4}\right]\sigma \Rightarrow$

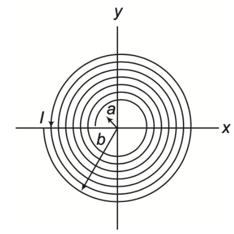
$\Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 \sigma}{2r}\left[r^2 - \frac{R^2}{4}\right] \quad \text{για} \quad \frac{R}{2} \le r \le R}$

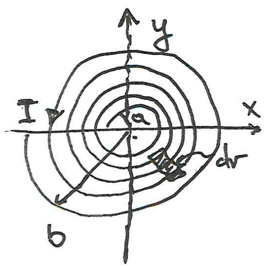
Όταν $r = R/2$ $B = 0$ ενώ όταν $r = R$ $B = \frac{3\mu_0 \sigma R}{8}$

(γ) $r \geq R$ Το μαγνητικό πεδίο στην περίπτωση αυτή είναι: $B=\frac{\mu_0}{2\pi r} I_{encl}$

Με βάση τα αποτελέσματα των (α), (β) και (γ), βλέπουμε ότι για $r \leq \frac{R}{2}$, $B=0$ οπότε απορρίπτεται το διάγραμμα (α), από το (β) το B είναι επιδεκτική για $\frac{R}{2} \leq r < R$ οπότε απορρίπτονται τα διαγράμματα (β) και (γ). Για $r > R$ παρουσιάζει εξάρτηση $1/r$ οπότε μόνο το διάγραμμα (δ) είναι σωστό.

3. Ένα μακρύ μονωμένο χάλκινο σύρμα είναι τυλιγμένο σαν σπιράλ με N σπείρες, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το σπιράλ αυτό έχει εσωτερική ακτίνα *α* και εξωτερική ακτίνα *b*. Το σπιράλ βρίσκεται οριζόντιο στο *xy*-επίπεδο και διαρρέεται από σταθερό ρεύμα *I*. Βρείτε την *z*-συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του σπιράλ. του κύκλου.





Θεωρούμε μια λωρίδα μήκους dr σε απόσταση r από το κέντρο του σπειροειδούς αγωγού.

Ο αριθμός των σπειρών που περιέχονται σε αυτή την λωρίδα θα είναι: $dN = \underbrace{\left(\frac{N}{b-a}\right)}_{\text{αριθμός σπειρών ανά μονάδα μήκος}} dr$

Το μαγνητικό πεδίο dB που προκαλεί το μικρό αυτό τμήμα του σπειροειδούς αγωγού, στο κέντρο του αγωγού, θα είναι:

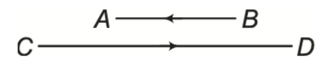
$$dB = \frac{\mu_0 (dN) I}{2r} = \frac{\mu_0 N I}{2(b-a)} \frac{dr}{r}$$

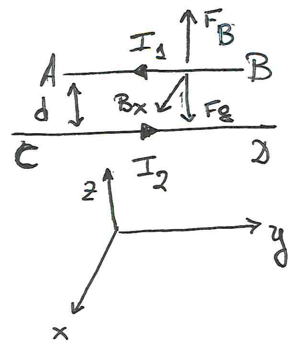
το μαγνητικό πεδίο είναι στην διεύθυνση z, με φορά προς το εξωτερικό της σελίδας.

Ολοκληρώνουμε την προηγούμενη σχέση οπότε:

$$B_z = \int_{r=a}^{r=b} dB_z = \int_{r=a}^{r=b} \frac{\mu_0 N I}{2(b-a)} \frac{dr}{r} \Rightarrow \boxed{B_z = \frac{\mu_0 N I}{2(b-a)} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

4. Ένα μακρύ οριζόντιο σύρμα *AB*, είναι ελεύθερο να κινείται σε κατακόρυφο επίπεδο και διαρρέεται από ρεύμα *20A*. Το σύρμα βρίσκεται σε ισορροπία σε ύψος 1.0*cm* πάνω από ένα άλλο παράλληλο μακρύ σύρμα *CD* το οποίο είναι σταθερό στο οριζόντιο επίπεδο και διαρρέεται από σταθερό ρεύμα 30*A* στην αντίθετη κατεύθυνση από το ρεύμα που διαρρέει το σύρμα *AB*, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Δείξτε ότι αν το σύρμα *AB* πιεστεί προς τα κάτω και αφεθεί ελεύθερο, τότε εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Βρείτε την περίοδο των ταλαντώσεων.





Οι δύο αγωγοί διαρρέονται από ρεύμα I_1 και I_2

Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ο αγωγός CD στον αγωγό AB έχει κατεύθυνση προς το εσωτερικό της σελίδας (x-διεύθυνση). Η δύναμη που αναπτύσσεται στον αγωγό AB έχει φορά προς το πάνω μέρος της σελίδας

Το μέτρο της μαγνητικής δύναμης θα είναι: $F_B = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d}$ όπου l: το μήκος του αγωγού AB

Η δύναμη ανά μονάδα μήκους είναι: $\frac{F_B}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d}$

Η δύναμη της βαρύτητας είναι: $F_g = mg \Rightarrow \frac{F_g}{l} = \frac{mg}{l} \Rightarrow \frac{F_g}{l} = \rho g$

όπου ρ η γραμμική πυκνότητα.

Σε απόσταση d, ο αγωγός AB είναι σε ισορροπία, οπότε:

$$\frac{F_g}{l} = \frac{F_B}{l} \Rightarrow \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d} = \rho g \Rightarrow \boxed{\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d^2} = \frac{\rho g}{d}} \quad (1)$$

Καθώς πιέζεται ο αγωγός προς τα κάτω, η μαγνητική δύναμη αυξάνει γιατί ελαττώνεται η απόσταση. Η βαρυτική δύναμη παραμένει σταθερή. Οποιαδήποτε μεταβολή από τη θέση ισορροπίας θα προκαλέσει δύναμη επαναφοράς προς τη θέση ισορροπίας και η δύναμη αυτή θα είναι ίση με την μεταβολή της μαγνητικής δύναμης.

Η μαγνητική δύναμη: $\overset{F_B'}{\frac{F_B}{l}} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{z}$ οπότε η μεταβολή της θα είναι μετά από παραγώγιση ως προς z: $\boxed{dF_B' = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{z^2}dz} \quad (2)$

Από την (2) και για $z=d$ έχουμε $\boxed{dF_B' = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d^2}dz}$ (3)

Από την (1) αντικαθιστώντας στην (3) θα έχουμε:

$\boxed{dF_B' = -\left(\frac{\rho g}{d}\right)dz}$ (4) Η εξίσωση αυτή είναι της μορφής του νόμου του Hook, η δύναμη επαναφοράς ανάλογη της μετατόπισης από τη θέση ισορροπίας

Επομένως το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Από τον νόμο του Newton: $dF_B' = \frac{m}{\ell}a \Rightarrow dF_B' = \rho a$

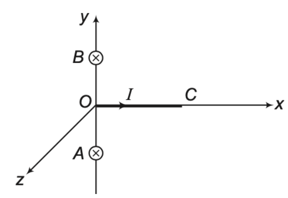
Συγκρίνοντας με την (4) έχουμε ότι: $a = -\left(\frac{g}{d}\right) \cdot dz$

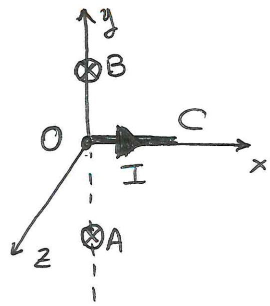
Εφόσον το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση; $a = -\omega^2 z$

Άρα $\omega^2 = \frac{g}{d} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{d} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2\frac{d}{g} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}}$

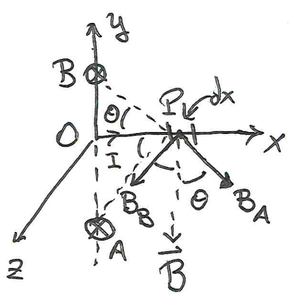
Αντικατάσταση αριθμητικών δεδομένων δίνει: $T = 2\pi\sqrt{\frac{0.01\,m}{9.8\,m/s^2}} = 0.2s$

5. Ένα ευθύγραμμο τμήμα *OC* ενός κυκλώματος, έχει μήκος *L* και διαρρέεται από σταθερό ρεύμα *I*. Το τμήμα αυτό τοποθετείται κατά μήκος του *x*-άξονα. Δύο απείρου μήκους ευθύγραμμοι αγωγοί *A* και *B* που ο καθένας εκτείνεται από $z = -\infty$ έως $z = +\infty$ διέρχονται από τις θέσεις *y=+a* και *y=-a* όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ο κάθε ευθύγραμμος αγωγός διαρρέεται από ρεύμα *I* με κατεύθυνση προς το εσωτερικό της σελίδας, βρείτε τη δύναμη που αναπτύσσεται στο ευθύγραμμο τμήμα *OC*. Ποια θα είναι η δύναμη *OC* αν αντιστραφεί η κατεύθυνση του ρεύματος στον αγωγό *B*;





Θεωρούμε ένα τμήμα του αγωγού OC το οποίο έχει μήκος dx και βρίσκεται σε απόσταση x από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Έστω ακόμα, ένα σημείο P στο στοιχειώδες αυτό τμήμα dx.



Θα βρούμε ~~το~~ το μαγνητικό πεδίο που προκαλούν οι δύο ρευματοφόροι αγωγοί στο σημείο P.

Το μαγνητικό πεδίο που προκαλεί ο αγωγός A στο P είναι B_A και το μαγνητικό πεδίο του αγωγού B στο P είναι B_B

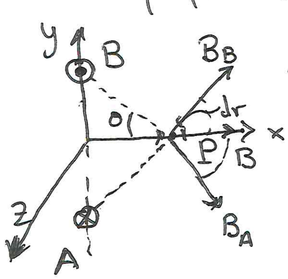
Οι δύο αγωγοί (A κ B) ισαπέχουν από το σημείο P και επομένως αφού διαρρέονται από ρεύματα ίδιας έντασης και φοράς, το μαγνητικό πεδίο που προκαλούν στο P θα είναι ίδιου μέτρου.

$$|\vec{B}_A| = |\vec{B}_B| = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r} = |\vec{B}_0| \qquad r = \sqrt{x^2+a^2}$$

$$\Sigma\vec{B} = \vec{B}_A + \vec{B}_B = \Big(\underbrace{\cancel{|\vec{B}_0|\sin\theta\,\hat{i} - |\vec{B}_0|\sin\theta\,\hat{i}}}_{0}\Big) - \Big(|\vec{B}_0|\cos\theta\,\hat{j} + |\vec{B}_0|\cos\theta\,\hat{j}\Big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma\vec{B} = -2|\vec{B}_0|\cos\theta\,\hat{j} \Rightarrow \boxed{\Sigma\vec{B} = -2\frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2+a^2}}\cos\theta\,\hat{j}} \qquad |\vec{B}| = \frac{2\mu_0 I}{2\pi\sqrt{x^2+a^2}}\cos\theta$$

Μπορούμε να εκφράσουμε το $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ οπότε $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I x}{\pi(x^2+a^2)}$



Αν αντιστραφεί η φορά του ρεύματος, οι συνιστώσες στην y-διεύθυνση μηδενίζονται γιατί είναι ίσες και αντίθετες οπότε το συνιστάμενο πεδίο είναι στην x-διεύθυνση

Αλλά $\vec{F}_B = I\vec{l}\times\vec{B} \Rightarrow \underline{\vec{F}_B = \vec{0}\,N.}$

Υπολογίζουμε την μαγνητική δύναμη για την πρώτη περίπτωση που το ρεύμα στους αγωγούς είναι στην ίδια κατεύθυνση.

Βρήκαμε ότι: $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I x}{\pi(x^2+a^2)}$ στην αρνητική y-διεύθυνση.

Η δύναμη επομένως θα είναι: $d\vec{F}_B = (I\,dx)\hat{i} \times \left[\frac{\mu_0 I x}{\pi(x^2+a^2)}\right](-\hat{j}) \Rightarrow$

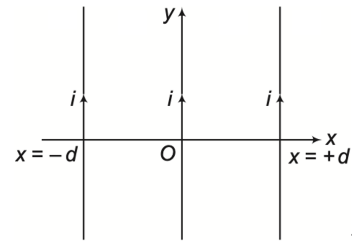
$$\Rightarrow d\vec{F}_B = I^2 dx \frac{\mu_0 x}{\pi(x^2+a^2)}(-\hat{k})$$ στην αρνητική z-διεύθυνση.

Ολοκληρώνουμε την προηγούμενη για το μήκος του αγωγού OC οπότε:

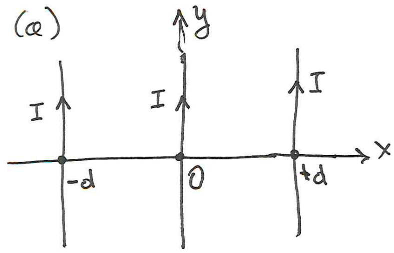
$$|\vec{F}_B| = I^2 \frac{\mu_0}{\pi} \int_0^L \frac{x\,dx}{x^2+a^2} \Rightarrow |\vec{F}_B| = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln\left(\frac{L^2+a^2}{a^2}\right) \qquad \int \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\ln(a^2+x^2)$$

Επομένως: $$\boxed{\vec{F}_B = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln\left(\frac{L^2+a^2}{a^2}\right)\hat{k}}$$

6. Τρεις λεπτοί ευθύγραμμοι αγωγοί απείρου μήκους, ο καθένας εκ των οποίων διαρρέεται από ρεύμα i στην ίδια κατεύθυνση, βρίσκονται στο xy-επίπεδο σε χώρο όπου η βαρύτητα μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Ο μεσαίος αγωγός βρίσκεται στον y-άξονα ενώ οι άλλοι δύο αγωγοί βρίσκονται στις θέσεις $y=+d$ και $y=-d$. (α) Βρείτε την καμπύλη των σημείων (γεωμετρικός τόπος) για τα οποία το μαγνητικό πεδίο είναι 0. (β) Αν ο μεσαίος αγωγός μετατοπιστεί κατά μήκος του z-άξονα κατά ένα μικρό διάστημα και αφεθεί ελεύθερος να κινηθεί, δείξτε ότι θα εκτελέσει ταλάντωση. Αν η γραμμική πυκνότητα μάζας των τριών αγωγών είναι λ, βρείτε την περίοδο των ταλαντώσεων.



(α)



Το μαγνητικό πεδίο στο x=0 που δημιουργούν οι αγωγοί που βρίσκονται στα σημεία $x=\pm d$ έχει αντίθετη φορά και ίδιο μέτρο. Επομένως το μαγνητικό πεδίο στο $x=0$ θα είναι $\vec{B}=\vec{0}$ (Σημειωτέον ότι το μαγνητικό πεδίο από κάθε αγωγό είναι στη z-διεύθυνση)

Στην περιοχή $x<-d$, το μαγνητικό πεδίο είναι διάφορο του μηδενός και στην +z-διεύθυνση.

Στην περιοχή $x>+d$ το μαγνητικό πεδίο είναι στην −z-διεύθυνση και διαφορετικό του μηδενός

Στη περιοχή $-d<x<d$ το μαγνητικό πεδίο μπορεί να πάρει μηδενικές τιμές και θα βρίσκεται στην z-διεύθυνση.

Θεωρούμε ένα σημείο P στον x-άξονα στην περιοχή $0<x<d$. Στην περιοχή αυτή το μαγνητικό πεδίο από τους αγωγούς στα αριστερά του σημείου P θα έχει κατεύθυνση προς τον −z-άξονα ενώ το πεδίο από τον αγωγό στα δεξιά του P θα έχει κατεύθυνση προς τον +z-άξονα.

Από την αρχή της επαλληλίας θα έχουμε: $\vec{B}_P=\vec{B}_{-d}+\vec{B}_0+\vec{B}_d \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{B}_P=\frac{\mu_0 I}{2\pi(d+x)}(-\hat{z})+\frac{\mu_0 I}{2\pi x}(-\hat{z})+\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)}(+\hat{z}) \Rightarrow \vec{B}_P=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{d-x}-\frac{1}{x}-\frac{1}{d+x}\right)\hat{z}$$

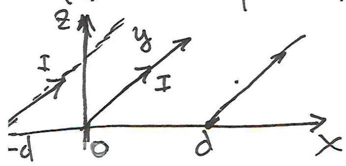
$$\Rightarrow \vec{B}_P=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{x(d+x)-(d-x)(d+x)-x(d-x)}{x(d-x)(d+x)}\right)\hat{z}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{\cancel{dx}+x^2+x^2-d^2-\cancel{dx}+x^2}{x(d-x)(d+x)}\right)\hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_P=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{3x^2-d^2}{x(d-x)(d+x)}\right)\hat{z}}$$

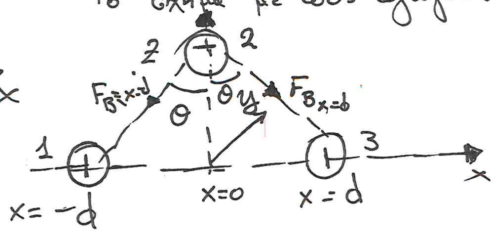
Το μαγνητικό πεδίο θα είναι μηδέν όταν $3x^2-d^2=0 \Rightarrow x^2=\frac{d^2}{3} \Rightarrow \boxed{x=\pm\frac{d}{\sqrt{3}}}$

Επομένως το μαγνητικό πεδίο θα είναι μηδέν στις ευθείες $x=0$, $x=-d/\sqrt{3}$ και $x=\frac{d}{\sqrt{3}}$

(β) Στην περίπτωση αυτή μετατοπίζουμε ελαφρά τον μεσαίο αγωγό.

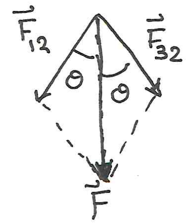


Το σχήμα με τους αγωγούς θα είναι: (αφού μετατοπιστεί ο μεσαίος).



Ο αγωγός στο $x=0$, $z=Z$ θα δέχεται μαγνητική δύναμη εξαιτίας των μαγνητικών πεδίων που δημιουργούν οι αγωγοί στις θέσεις $x=\pm d$.

Η δύναμη από κάθε αγωγό θα είναι ελκτική. Θα έχουμε επομένως:



$$\left.\begin{aligned}\Sigma\vec{F} = \vec{F}_{12}+\vec{F}_{32} &= |\vec{F}_{12}|\cos\theta\,\hat{k} - |\vec{F}_{12}|\sin\theta\,\hat{i}\\ &+ |\vec{F}_{32}|\cos\theta\,\hat{k} + |\vec{F}_{12}|\sin\theta\,\hat{i}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma\vec{F} = 2|\vec{F}_{12}|\cos\theta\,\hat{k}$$

οι δυνάμεις $\vec{F}_{12}$ & $\vec{F}_{32}$ έχουν το ίδιο μέτρο γιατί ο αγωγός 2 βρίσκεται στην ίδια απόσταση από τα αγωγό 1 & 3 και διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα

Επομένως $|\Sigma\vec{F}| = 2\dfrac{\mu_0 I^2 \ell}{2\pi r}\dfrac{z}{r} \Rightarrow \boxed{|\Sigma\vec{F}| = \dfrac{\mu_0 I^2\ell}{(d^2+z^2)\pi}z}$

Υποθέτουμε ότι $z \ll d$ οπότε $z^2+d^2 \simeq d^2$

$$\Rightarrow |\Sigma\vec{F}| = \frac{\mu_0 I^2\ell}{\pi d^2}z \Rightarrow$$

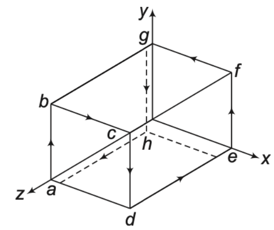
$$\boxed{\Sigma\vec{F} = -\frac{\mu_0 I^2\ell}{\pi d^2}z\,\hat{k}}$$

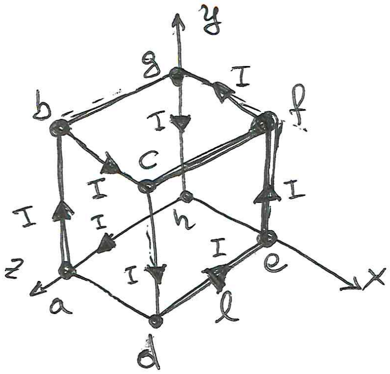
Η τελευταία είναι εξίσωση απλής αρμονικής ταλάντωσης, όπου η δύναμη επαναφοράς είναι ανάλογη της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας.

$$\Sigma F = -\frac{\mu_0 I^2\ell}{\pi d^2}z = ma \Rightarrow -\frac{\mu_0 I^2}{\pi d^2}z = \frac{m}{\ell}a \Rightarrow a = -\frac{\mu_0 I^2}{\pi\rho d^2}z \text{ όπου } \rho = \frac{m}{\ell}$$

Άρα $T^2 = \dfrac{(2\pi)^2}{\omega^2} = \dfrac{(2\pi)^2\pi\rho d^2}{\mu_0 I^2} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\dfrac{d}{I}\sqrt{\dfrac{\pi\rho}{\mu_0}}}$ όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\boxed{\omega^2 = \dfrac{\mu_0 I^2}{\pi\rho d^2}}$

7. Ένας αγωγός διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I κατά μήκος της κλειστής διαδρομής *abcdefgha* όπου συμμετέχουν 8 από τις 12 ακμές κάθε μία μήκους l. Βρείτε την μαγνητική διπολική ροπή της κλειστής διαδρομής.





Θεωρούμε ότι το μήκος της ακμής είναι l.

Μια κλειστή διαδρομή abcdefgha επιτυγχάνεται αν θεωρήσουμε την επαλληλία τριών βρόχων: bcfgb

abgha

cdefc

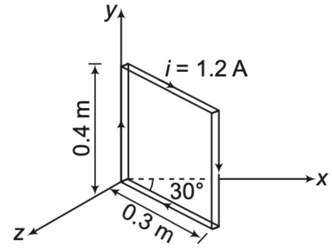
Θεωρούμε επομένως ότι στις πλευρές bg, cf κυκλοφορούν ρεύματα τα οποία όμως έχουν αντίθετη φορά και επομένως μηδενίζονται, αφού οι βρόχοι ανατρέχονται στις συγκεκριμένες πλευρές με αντίθετη φορά.

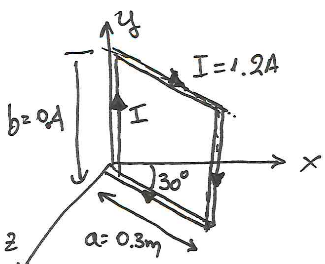
Η συνολική μαγνητική διπολική ροπή της κλειστής διαδρομής abcdefgha θα είναι το άθροισμα των μαγνητικών διπολικών ροπών των τριών παραπάνω βρόχων. Θα έχουμε επομένως:

$$\vec{M} = \vec{\mu}_{bcfgb} + \vec{\mu}_{abgha} + \vec{\mu}_{cdefc} = \underbrace{Il^2\hat{j}}_{bcfgb} + \underbrace{Il^2(-\hat{\imath})}_{abgha} + \underbrace{Il^2(+\hat{\imath})}_{cdefc} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M} = Il^2\hat{j}}$$

8. Ένας ορθογώνιος βρόχος αποτελείται από 100 σπείρες σε πολύ μικρή απόσταση. Οι διαστάσεις του βρόχου είναι $0.4m \times 0.3m$. Ο βρόχος μπορεί να περιστρέφεται ως προς τον y-άξονα που περνά από την μία πλευρά του πλαισίου του βρόχου. Το επίπεδο του βρόχου σχηματίζει γωνία 30° με τον x-άξονα. Βρείτε το μέτρο της ροπής που αναπτύσσεται στον βρόχο από ένα μαγνητικό πεδίο B=0.8T το οποίο έχει κατεύθυνση προς τον x-άξονα, όταν ο βρόχος διαρρέεται από ρεύμα έντασης $i = 1.2A$ στη διεύθυνση που δηλώνεται στο διπλανό σχήμα. Ποια είναι η αναμενόμενη διεύθυνση περιστροφής του βρόχου;





$\vec{B} = B\hat{i}$

Η μαγνητική διπολική ροπή του βρόχου είναι:

$$\vec{\mu} = NI\cdot(\vec{b}\times\vec{a}) = NI\cdot\left[b\hat{j}\times a(\cos\theta\,\hat{i}+\sin\theta\,\hat{k})\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\mu} = NI\cdot\left(ba\cos\theta\,(-\hat{k}) + ba\sin\theta\,\hat{i}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\mu} = NI\cdot ba\left(\sin\theta\,\hat{i} - \cos\theta\,\hat{k}\right)$$

Η ροπή που αναπτύσσεται πάνω στο μαγνητικό δίπολο θα είναι:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B} = NIba\left(\sin\theta\,\hat{i}-\cos\theta\,\hat{k}\right)\times B(+\hat{i}) \Rightarrow$$

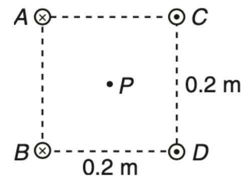
$$\Rightarrow \vec{\tau} = NIbaB\left[\cancel{\sin\theta\,\hat{i}\times\hat{i}}^{\,0} - \cos\theta\,\hat{j}\right] \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = -NIBba\cos\theta\,\hat{j}}$$

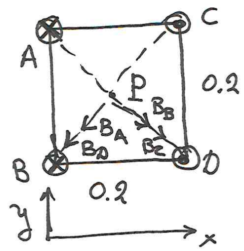
Αντικατάσταση αριθμητικών δεδομένων:

$$\vec{\tau} = -100\cdot(1.2A)(0.4m\times0.3m)0.8T\cos30^\circ\hat{k} \Rightarrow \vec{\tau} = -11.52\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{i}\ Nm \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\tau} = -9.98\,\hat{i}\ Nm}$$

9. Τέσσερεις παράλληλοι αγωγοί μεγάλου μήκους διαρρέονται ο καθένας από ρεύμα έντασης 5*A*. Η διεύθυνση των ρευμάτων είναι προς το εσωτερικό της σελίδας στα σημεία *A* και *B* και προς το εξωτερικό της σελίδας στα σημεία *C* και *D*. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο *P*, το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του τετραγώνου.





Οι αντιδιαμετρικά βρισκόμενοι αγωγοί διαρρέονται από ρεύμα ίδιας έντασης και αντίθετης φοράς. Τα μαγνητικά πεδία που δημιουργούν στο σημείο P που θεωρούμε ότι βρίσκεται στο κέντρο του τετραγώνου (για απλούστευση) θα έχουν το ίδιο μέτρο και φορά και η διεύθυνση θα βρίσκεται πάνω στην διαγώνιο που ενώνει τα σημεία αυτά. (δείτε σχήμα),

$I_A = I_B = I_C = I_D$ & $r_{AP} = r_{BP} = r_{CP} = r_{DP}$. Επομένως:

$B_A = B_B = B_C = B_D = \frac{\mu_0 2I}{4\pi r}$ όπου $r^2 = a^2/4 + a^2/4 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Το μαγνητικό πεδίο στο σημείο P θα είναι: $\vec{B} = \vec{B}_A + \vec{B}_D + \vec{B}_B + \vec{B}_C \Rightarrow$ $\theta = 45^\circ$

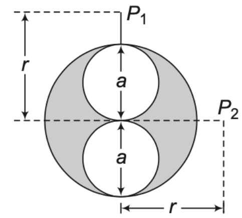
$$\vec{B} = B_A\left[-\cancel{\cos\theta\,\hat{i}} - \sin\theta\,\hat{j} - \cancel{\cos\theta\,\hat{i}} - \sin\theta\,\hat{j} + \cancel{\cos\theta\,\hat{i}} - \sin\theta\,\hat{j} + \cancel{\cos\theta\,\hat{i}} - \sin\theta\,\hat{j}\right] \Rightarrow$$

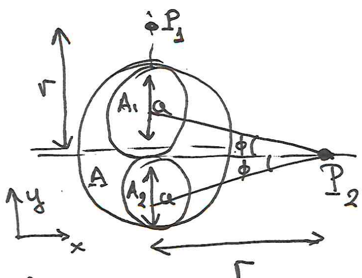
$$\Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 2I}{\cancel{4}\pi r}\cancel{4}\sin\theta\,\hat{j} \Rightarrow \vec{B} = -\frac{2\mu_0 I}{\pi \frac{a}{\cancel{2}}\cancel{\sqrt{2}}}\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}\hat{j} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = -\frac{2\mu_0 I}{\pi a}\hat{j}}$$

Το μέτρο επομένως θα είναι: $|\vec{B}| = \frac{\overset{10}{\cancel{2}}\cdot 4\cancel{\pi}\cdot 5\cdot 10^{-7}}{\cancel{\pi}\,\cancel{0.2}}\,T$ στην $-y$-διεύθυνση

οπότε $\boxed{|\vec{B}| = 2\cdot 10^{-5}\,T}$ στην $-y$-διεύθυνση

10. Ένας μακρύς κυλινδρικός αγωγός έχει ακτίνα *α*. Ο αγωγός έχει δύο κυλινδρικές κοιλότητες σε όλο το μήκος του, κάθε μια διαμέτρου *a,* κάτοψη του αγωγού φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ρεύμα έντασης *I* διαρρέει τον αγωγό με κατεύθυνση προς το εξωτερικό της σελίδας. Το ρεύμα κατανέμεται ομοιόμορφα σε όλη τη διατομή του αγωγού. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στα σημεία P_1 και P_2 συναρτήσει του ρεύματος *I*, της ακτίνας *a* και της απόστασης *r* των σημείων P_1 και P_2 από το κέντρο του κυλινδρικού αγωγού.





Θεωρούμε ότι το ρεύμα έχει τη +z-διεύθυνση οπότε στις κοιλότητες είναι στη −z-διεύθυνση

Ο αγωγός περιέχει δύο κοιλότητες. Η ολική επιφάνεια του αγωγού είναι: $A - A_1 - A_2$ όπου A η επιφάνεια του αγωγού χωρίς τις κοιλότητες και $A_1 = A_2$ η επιφάνεια των κοιλοτήτων.

Θα έχουμε ότι $A = \pi a^2$ και $A_1 = A_2 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$

Επομένως η επιφάνεια του αγωγού θα είναι $\pi a^2 - \cancel{2}\pi \frac{a^2}{\cancel{4}\,2}$

Η πυκνότητα ρεύματος θα είναι: $J = \dfrac{I}{\pi a^2 - \pi \frac{a^2}{2}} = \dfrac{2I}{\pi a^2}$

Θεωρούμε ότι οι κοιλότητες είναι ευθύγραμμοι αγωγοί που διαρρέονται από ρεύμα αντίθετης φοράς ως προς το ρεύμα που διαρρέεται ο αγωγός χωρίς τις κοιλότητες, ούτως ώστε να έχουμε το ίδιο ρεύμα όπως η πραγματική διάταξη.

Έστω B_1, B_2 και B_3 τα μαγνητικά πεδία που δημιουργούν ο πλήρης αγωγός και οι δύο κοιλότητες, η πάνω και η κάτω αντίστοιχα.

(α) Στο σημείο P_1 θα έχουμε: $\vec{B}_1 = -\dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I_1}{r}\hat{i}$

Το μαγνητικό πεδίο από τις δύο κοιλότητες θα είναι: $\vec{B}_2 = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I_2}{r-\frac{a}{2}}\hat{i}$

ενώ το $\vec{B}_3 = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I_3}{r+\frac{a}{2}}\hat{i}$

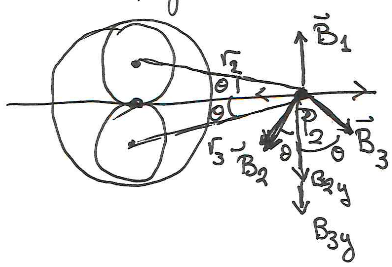
Το μαγνητικό πεδίο στο P_1 θα είναι: $\vec{B}_{P_1} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = -\dfrac{\mu_0}{2\pi}\left(\dfrac{I_1}{r} - \dfrac{I_2}{r-\frac{a}{2}} - \dfrac{I_3}{r+\frac{a}{2}}\right)\hat{i}$

$$\vec{B}_{P_1} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{J\cdot\pi a^2}{r} - \frac{J\cdot\pi\frac{a^2}{4}}{r-\frac{a}{2}} - \frac{J\pi\frac{a^2}{4}}{r+\frac{a}{2}}\right)\hat{i} = -\frac{\mu_0}{2\pi}J\pi a^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{4r-2a} - \frac{1}{4r+2a}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{P_1} = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{J\pi a^2}{r}\left(\frac{\cancel{16}^{\,8}r^2 - 4a^2 - \cancel{4r^2} - \cancel{2ar} - \cancel{4r^2} + \cancel{2ar}}{(4r-2a)(4r+2a)}\right)\hat{i} = -\frac{\mu_0 J\pi a^2}{2\pi r}\frac{\cancel{4}(2r^2-a^2)}{\cancel{4}(2r-a)(2r+a)}\hat{i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{P_1} = -\frac{\mu_0\,\cancel{2}I}{\cancel{2}\pi r}\frac{2r^2-a^2}{4r^2-a^2}\hat{i} \Rightarrow \boxed{\vec{B}_{P_1} = -\frac{\mu_0 I}{\pi r}\frac{2r^2-a^2}{4r^2-a^2}\hat{i}}$$

(β) Το μαγνητικό πεδίο στο σημείο P_2



$\vec{B}_2 \perp \vec{r}_2$ & $\vec{B}_3 \perp \vec{r}_3$ $\quad B_2 = B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, $r = \sqrt{\frac{a^2}{4}+x^2}$

Επομένως $B_{2x} = B_2 \cdot \sin\theta = B_2$

$B_{3x} = B_3 \sin\theta = B_3$ ..

$B_{2y} = B_2 \cos\theta = B_2$

$B_{3y} = B_3 \cos\theta = B_2$

Θα πάρουμε ότι το συνιστάμενο πεδίο θα είναι:

$$\vec{B}_{P_2} = \vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3 = \vec{B}_{1y} + \cancel{\vec{B}_{2x}} + \vec{B}_{2y} + \cancel{\vec{B}_{3x}} + \vec{B}_{3y} = \vec{B}_{1y}+\vec{B}_{2y}+\vec{B}_{3y}$$

Επομένως θα έχουμε: $\vec{B}_{P_2} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\hat{j} - \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}\cos\theta\, \hat{j} - \frac{\mu_0 I_3}{2\pi r}\cos\theta\, \hat{j} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{B}_{P_2} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}\hat{j} - \frac{2\mu_0 I_2}{2\pi}\cos\theta\, \hat{j} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1}{x} - \frac{2 I_2}{r}\cos\theta\right)\hat{j}$$

αλλά $I_1 = J\cdot\pi a^2$, $I_2 = J\pi\frac{a^2}{4}$ οπότε $\vec{B}_{P_2} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\frac{J\pi a^2}{x} - \frac{\cancel{2}J\pi a^2}{\cancel{4}2}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}\right)^2}\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{B}_{P_2} = \frac{\mu_0 J\pi a^2}{2\pi}\left[\frac{1}{x} - \frac{2\cancel{4}x}{\cancel{2}(4x^2+a^2)}\right]\hat{i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{P_2} = \hat{i}\,\frac{\mu_0 J\pi a^2}{2\pi a}\left[\frac{4x^2+a^2-2x^2}{x(4x^2+a^2)}\right] = \hat{i}\,\frac{\mu_0 J\pi a^2}{2\pi a}\,\frac{2x^2+a^2}{x(4x^2+a^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{P_2} = \frac{\mu_0 \cancel{2} I}{\cancel{2}\pi a}\,\frac{(2x^2+a^2)\hat{i}}{(4x^2+a^2)x} \Rightarrow \boxed{\vec{B}_{P_2} = \frac{\mu_0 I}{\pi a}\left(\frac{2x^2+a^2}{[4x^2+a^2]x}\right)\hat{i}}$$