ΦΥΣ. 211
ΕΡΓΑΣΙΑ # 1
Επιστροφή την Δευτέρα 1/2/2016 στο τέλος της διάλεξης

1. Υποθέστε ότι ένα σύστημα αποτελείται από δυο σωματίδια. Θεωρήστε επίσης δεδομένο ότι ισχύουν οι ακόλουθες εξισώσεις κίνησης:

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i^{(\varepsilon\xi.)} \equiv \vec{F}^{(\varepsilon\xi.)} \text{ και } \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{(\varepsilon\xi.)}$$

Από τις εξισώσεις κίνησης για το κάθε σωματίδιο δείξτε ότι οι εσωτερικές δυνάμεις μεταξύ των σωματιδίων ικανοποιούν τόσο τον ασθενή όσο και τον ισχυρό νόμο δράσης-αντίδρασης. Το επιχείρημα μπορεί να γενικευτεί για σύστημα με ένα τυχαίο αριθμό σωματιδίων, αποδεικνύοντας έτσι τα αντίστροφα των επιχειρημάτων που οδηγούν στις δυο παραπάνω εξισώσεις κίνησης.

2. Ένα σωματίδιο μάζας *m*, κινείται σε τρεις διαστάσεις κάτω από την επίδραση μιας συντηρητικής δύναμης $\vec{F}$.
(α) Προσδιορίστε την κινητική και δυναμική ενέργεια του σωματιδίου και δείξτε ότι η μηχανική ενέργεια διατηρείται.
(β) Δείξτε ότι μόνο μια από τις δύο ακόλουθες δυνάμεις:

$$\vec{F} = xz\hat{e}_x + yz\hat{e}_y + z^2\hat{e}_z \qquad (1)$$

$$\vec{F} = yz^2\hat{e}_x + xz^2\hat{e}_y + 2xyz\hat{e}_z \qquad (2)$$

είναι συντηρητική και βρείτε το δυναμικό από το οποίο προκύπτει.
(γ) Προσδιορίστε την ροπή και την στροφορμή ενός σωματιδίου που κινείται σε τρεις διαστάσεις. Αποδείξτε ότι η ροπή είναι ίση με τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής. Υποθέστε ότι στο σωματίδιο ασκείται η δύναμη (1) του προηγούμενο ερωτήματος. Υπολογίστε την ροπή. Γιατί το αποτέλεσμα είναι προφανές για την μορφή αυτή της δύναμης; Αν την χρονική στιγμή t = 0, το σωματίδιο βρίσκεται στην θέση $\vec{r}(0) = 2\hat{e}_x + 2\hat{e}_y$ και έχει ταχύτητα $\dot{r}(0) = 2\hat{e}_x + 3\hat{e}_y$, να βρεθεί η στροφορμή για οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

3. Θεωρήστε κυκλική κίνηση ($\dot{r} = 0$, όπου $r \equiv |\vec{r}|$) σταθερής κυκλικής συχνότητας *f,* οπότε ισχύει, $\dot{\theta} = 2\pi f \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$. Υπολογίστε την στροφορμή $\vec{L}$ και ροπή $\vec{\tau}$. Θεωρήστε επίσης σπειροειδή κίνηση (π.χ. υποθέστε ότι $\dot{r} \neq 0$ και $\ddot{\theta} = 0$). Υπολογίστε και πάλι την στροφορμή $\vec{L}$ και ροπή $\vec{\tau}$.

4. (α) Η δύναμη βαρύτητας του Newton που ασκείται πάνω σε ένα πλανήτη μάζας *m*, στην θέση *r*, δίνεται από την σχέση: $F = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$, όπου *G* είναι η παγκόσμια βαρυτική σταθερά, *M* είναι η μάζα του ήλιου που βρίσκεται στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων $r \equiv |\vec{r}|$ και $\hat{r}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην $\vec{r}-$διεύθυνση. Δείξτε ότι η δύναμη αυτή προέρχεται από ένα δυναμικό *V*, της μορφής: $V = -\frac{GMm}{r}$.

(β) Δείξτε ότι η στροφορμή, $\vec{L}$, του πλανήτη διατηρείται από την βαρυτική δύναμη και σαν αποτέλεσμα η κίνηση του πλανήτη περιορίζεται σε ένα επίπεδο.

5. Ένα σωματίδιο κινείται στο *xy*-επίπεδο κάτω από την επίδραση κεντρικής δύναμης ενός δυναμικού $V(r)$. Το γεγονός ότι η δύναμη είναι κεντρική εγγυάται ότι το δυναμικό V είναι συνάρτηση μόνο της απόστασης $r = |\vec{r}|$. Να γραφούν οι εξισώσεις Lagrange του σωματιδίου για τις συντεταγμένες r και θ. Θα πρέπει να βρείτε το ίδιο αποτέλεσμα με την περίπτωση του νόμου του Newton.

6. Σωματίδιο μάζας *m,* κινείται σε τρεις διαστάσεις στην επιφάνεια μιας σφαίρας που προσδιορίζεται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

(α) Αν η εξίσωση τροχιάς του σωματιδίου είναι $\vec{r}(t) \equiv r_x \hat{e}_x + r_y \hat{e}_y + r_z \hat{e}_z$, δώστε την εξίσωση δεσμού για την κίνηση του σωματιδίου και εξηγήστε το είδος του δεσμού.

(β) Εκφράστε τις καρτεσιανές συντεταγμένες του σωματιδίου (r_x, r_y, r_z) συναρτήσει των σφαιρικών πολικών συντεταγμένων θ και φ.

(γ) Γράψτε την Lagrangian του συστήματος όταν το δυναμικό είναι μηδέν ($V = 0$).

7. **<u>Προαιρετικό πρόβλημα:</u>**

Δύο σημειακές μάζες *m*, συνδέονται μεταξύ τους με μια ράβδο μήκους *l*, αμελητέας μάζας. Το κέντρο της ράβδου είναι περιορισμένο να κινείται στην περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας *R*. Εκφράστε την κινητική ενέργεια του συστήματος συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων.