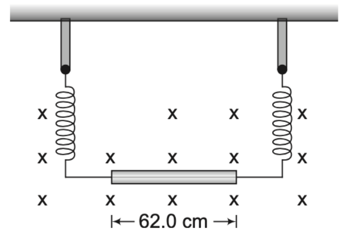
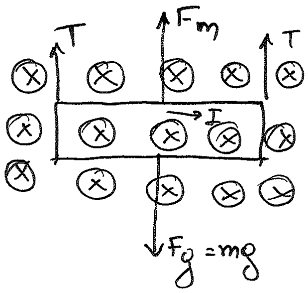
ΦΥΣ. 112

6ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή: Παρασκευή 01.11.2024**

1. Ένα σύρμα μήκους 62.0cm και μάζας 13.0gr αιωρείται με την βοήθεια δύο εύκαμπτων ακροδεκτών μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης 0.440T όπως στο διπλανό σχήμα. Βρείτε το μέτρο και κατεύθυνση του ρεύματος που απαιτείται ώστε να εξουδετερωθεί η τάση στους ακροδέκτες που κρατούν το σύρμα. Θεωρείστε ότι $g = 10m/s^2$.





Στο σύρμα ενεργούν οι δυνάμεις από το μαγνητικό πεδίο και την βαρύτητα καθώς και οι τάσεις των δύο ακροδεκτών.

Το σύρμα βρίσκεται σε ισορροπία, οπότε $2T + F_M - B = 0$

Θέλουμε να βρούμε το ρεύμα που θα πρέπει να διαρρέει το σύρμα ώστε η τάση να είναι $\emptyset$. Επομένως $T=0$ και από την προηγούμενη εξίσωση:

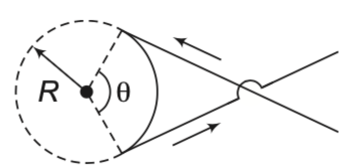
$$2\cdot 0 + F_M - B = 0 \Rightarrow F_M = B = mg \quad (1)$$

Η μαγνητική δύναμη είναι: $\vec{F}_M = I\vec{l}\times\vec{B} \Rightarrow F_M = IlB \overset{(1)}{=} mg \Rightarrow I = \frac{mg}{lB} \Rightarrow$

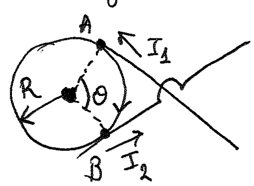
$$\Rightarrow I = \frac{13.0\times10^{-3}\times10}{62.0\times10^{-2}\times0.440} \Rightarrow \boxed{I = 0.48A}$$

Εφόσον η μαγνητική δύναμη πρέπει να είναι προς τα πάνω το ρεύμα που διαρρέει το σύρμα θα πρέπει να έχει φορά προς τα δεξιά. Σύμφωνα με τον κανόνα των τριών δακτύλων δεξιού χεριού.

2. Σύρμα διαρρέεται από ρεύμα *i* έχει τη μορφή του διπλανού σχήματος. Δύο ευθύγραμμοι αγωγοί απείρου μήκους, και οι δύο εφαπτόμενοι στον ίδιο κύκλο, συνδέονται μεταξύ τους με τοξωτό σύρμα που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία θ, κατά μήκος της περιφέρειας του κύκλου, με όλα τα τμήματα να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Βρείτε την γωνία θ, ώστε το μαγνητικό πεδίο B να μηδενίζεται στο κέντρο του κύκλου.



Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί η διάταξη των ρευμάτων θα είναι:



το μαγνητικό πεδίο από τον ρευματοφόρο αγωγό I_1, έστω $\vec{B}_1$

το μαγνητικό πεδίο από τον ρευματοφόρο αγωγό I_2, έστω $\vec{B}_2$

και το μαγνητικό πεδίο από τον τοξωτό αγωγό AB, έστω $\vec{B}_3$

Το μαγνητικό πεδίο B_1 είναι στην κατακόρυφο διεύθυνση με φορά προς το εξωτερικό της σελίδας. Όμοια και το B_2. Τα δύο πεδία είναι ίσα σε μέτρο γιατί $I_1 = I_2 = I$. Το ίδιο ρεύμα διαρρέει και τον τοξωτό αγωγό $\widehat{AB}$.

Το μαγνητικό πεδίο από τον τοξωτό αγωγό, $\vec{B}_3$, έχει φορά κατακόρυφο και ~~π~~ρος το εσωτερικό της σελίδας. Το πεδίο αυτό μπορούμε να το υπολογίσουμε από το πεδίο που θα δημιουργούσε κυκλικός αγωγός ακτίνας R σε αναλογία με το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στην επίκεντρη γωνία Θ.

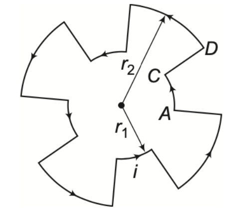
Επομένως
$$\left.\begin{aligned}\vec{B}_1 &= \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}\hat{k}\\ \vec{B}_3 &= -\frac{\mu_0 I}{2R}\frac{\Theta}{2\pi}\hat{k}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = \left(\frac{2\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R} - \frac{\mu_0 I}{2R}\frac{\Theta}{2\pi}\right)\hat{k}$$

μαγνητικό πεδίο κυκλικού βρόχου

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(2-\Theta)\hat{k}}$$

Θέλουμε $\vec{B} = \vec{0}$ οπότε $\underline{\Theta = 2\,rad}$

3. Ο κλειστός βρόχος του διπλανού σχήματος διαρρέεται από ρεύμα $10A$. Ο βρόχος είναι τοποθετημένος σε οριζόντιο επίπεδο. Το κύκλωμα του βρόχου αποτελείται από οκτώ (8) εναλλασσόμενα τόξα ακτινών $r_1 = 0.08m$ και $r_1 = 0.12m$ αντίστοιχα. Το κάθε τόξο αντιστοιχεί στην ίδια επίκεντρη γωνία. (α) Βρείτε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από αυτό το κύκλωμα στο κέντρο του βρόχου. (β) Ένας απείρου μήκους ευθύγραμμος αγωγός διαρρέεται από ρεύμα $10A$ και περνά από το κέντρο του κυκλώματος του βρόχου. (i) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στον ευθύγραμμο αγωγό εξαιτίας του ρεύματος που διαρρέει τον βρόχο του κυκλώματος. (ii) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο τόξο AC και στο ακτινικό τμήμα CD εξαιτίας του ρεύματος του ευθύγραμμου αγωγού.



(α) Το ρεύμα που διαρρέει τον βρόχο είναι $i = 10A$ και οι ακτίνες των τοξωτών τμημάτων είναι: $r_1 = 0.08m$ και $r_2 = 0.12m$.

Τα ευθύγραμμα τμήματα θα δώσουν μηδενικό μαγνητικό πεδίο στο κέντρο.

Τα οκτώ τοξωτά τμήματα θα δημιουργήσουν μαγνητικό πεδίο στο κέντρο, και όλα θα έχουν την ίδια κατεύθυνση. Θα έχουν διεύθυνση κάθετη στην σελίδα με φορά προς τα έξω. Επομένως:

$$\vec{B} = \vec{B}_{εσ.τόξα} + \vec{B}_{εξ.τόξα} \Rightarrow B = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 i}{2r_1} + \frac{1}{2}\frac{\mu_0 i}{2r_2} \Rightarrow B = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\pi i \frac{r_1 + r_2}{r_1 * r_2}$$

Αριθμητική αντικατάσταση θα δώσει: $B = \dfrac{(10^{-7})(3.14)(10)(0.08+0.12)}{0.08 * 0.12} = 6.54 \cdot 10^{-5} T$

με φορά κατακόρυφη και προς το εξωτερικό της σελίδας.

(β) Η δύναμη που αναπτύσσεται στο AC και όλα τα τοξωτά τμήματα, θα είναι μηδέν γιατί το μαγνητικό πεδίο από τον αγωγό που περνά από το σύρμα στο κέντρο του βρόχου είναι εφαπτόμενο των τόξων και επομένως $\vec{F}_1 = \cancel{I\vec{l} \times \vec{B}} \to 0$

Η δύναμη που αναπτύσσεται στο τμήμα CD θα είναι $\vec{F}_2 = I\vec{l} \times \vec{B}$

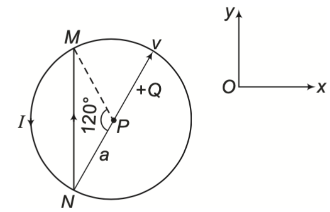
Το μαγνητικό πεδίο θα είναι: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{i}{x}$

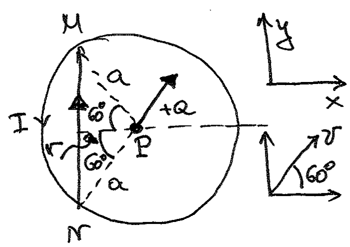
Επομένως η δύναμη θα είναι: $dF_M = i\left(\dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{i}{x}\right) \cdot dx \Rightarrow dF_M = \left(\dfrac{\mu_0}{2\pi}\right) i^2 \dfrac{dx}{x}$

Η συνισταμένη δύναμη στο CD θα είναι: $F = \displaystyle\int_{x=r_1}^{x=r_2} dF_M = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi}\int_{0.08}^{0.12}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

Η δύναμη που αναπτύσσεται στο σύρμα που περνά από το κέντρο προκαλείται από το μαγνητικό πεδίο του υποερωτήματος (α) και έχει κατακόρυφη διεύθυνση παράλληλη στον αγωγό. Επομένως η δύναμη θα είναι $\emptyset$.

4. Ένας κυκλικός βρόχος διαρρέεται από ρεύμα I και είναι τοποθετημένος στο x-y επίπεδο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. (α) Αν ένα σωματίδιο με φορτίο $+Q$ και μάζα m τοποθετηθεί στο κέντρο P του βρόχου και απελευθερωθεί με αρχική ταχύτητα $\vec{v}$ κατά μήκος του NP (όπως φαίνεται στο σχήμα) βρείτε την επιτάχυνση με την οποία κινείται. (β) Αν ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B_0\hat{\imath}$ ενεργήσει στην περιοχή, βρείτε την δύναμη και την ροπή που ασκείται στον βρόχο εξαιτίας αυτού του μαγνητικού πεδίου.





(α) Το μαγνητικό πεδίο στο σημείο P εξαιτίας του ρεύματος που διαρρέει το τόξο $\widehat{MN}$ βρίσκεται αν πάρουμε αναλογικά το μαγνητικό πεδίο στο P που δημιουργεί ο κυκλικός δακτύλιος τόξο του οποίου είναι το $\widehat{MN}$. Δηλαδή:

$$B_{\widehat{MN}} = \frac{1}{3}B_{κ.δ.} = \frac{1}{3}\left(\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{2a}\right)$$

Το $\frac{1}{3}$ επειδή το τόξο αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 120°.

Επομένως $B_{\widehat{MN}}$ στο σημείο P είναι: $\boxed{B_{\widehat{MN}} = \frac{\mu_0 I}{6\pi a}}$ με φορά προς το εξωτερικό της σελίδας.

Το μαγνητικό πεδίο εξαιτίας του ευθύγραμμου τμήματος MN στο σημείο P βρίσκεται από τον νόμο των Biot-Savard: $B_{\overline{MN}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r}(\sin 60^\circ + \sin 60^\circ)$

όπου $r = a\cos 60^\circ$. Αντικαθιστώντας δίνει: $B_{\overline{MN}} = \frac{\mu_0}{2\cancel{4}\pi}\frac{I}{a\cos 60^\circ}\cancel{2}\sin 60^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{B_{\overline{MN}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\tan 60^\circ}$$ με φορά προς το εσωτερικό της σελίδας

Επομένως το συνιστάμενο μαγνητικό πεδίο θα είναι $\vec{B}_{ολ} = \vec{B}_{\widehat{MN}} + \vec{B}_{\overline{MN}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{B}_{ολ} = \frac{\mu_0 I}{6\pi a}\hat{k} - \frac{\mu_0 I}{2\pi}\tan 60^\circ\,\hat{k} \Rightarrow \boxed{\vec{B}_{ολ} = -\frac{0.11\mu_0}{a}I\hat{k}}$$

Η ταχύτητα του σωματιδίου μπορεί να γραφεί ως: $\vec{v} = v\cos 60^\circ\,\hat{\imath} + v\sin 60^\circ\,\hat{\jmath}$

$$\Rightarrow \vec{v} = v_0\frac{1}{2}\hat{\imath} + v_0\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath} \Rightarrow \vec{v} = \frac{v}{2}\hat{\imath} + \frac{v\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}$$

Η μαγνητική δύναμη είναι: $\boxed{F_L = q\,\vec{v}\times\vec{B} = \frac{0.11\mu_0 Q}{a}I\frac{v}{2}\hat{\jmath} - \frac{0.11\mu_0\sqrt{3}vQ}{2a}I\hat{\imath}}$

Αρα η επιτάχυνση θα είναι: $\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}_L}{m} = \frac{0.11\mu_0 v I Q}{2am}\left(\hat{\jmath} - \sqrt{3}\,\hat{\imath}\right)}$

(β) Σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, η δύναμη σε κλειστό βρόχο ρεύματος είναι μηδέν.

Η μαγνητική διπολική ροπή του βρόχου ρεύματος θα είναι: $\vec{\mu} = (IA)\hat{k}$ όπου A το εμβαδό της επιφάνειας του βρόχου.

A είναι το εμβαδό όλου του κυκλικού δακτυλίου − εμβαδό MNP

$$A = \frac{1}{3}(\pi a^2) - \frac{1}{2}\left[2\times a \sin 60^\circ\right]\left[a\cos 60^\circ\right] = \frac{\pi a^2}{3} - \frac{a^2}{2}\sin 120^\circ \Rightarrow A = 0.61 a^2$$

Επομένως η μαγνητική διπολική ροπή θα είναι: $\boxed{\vec{\mu} = 0.61\, I a^2 \hat{k}}$

Δεδομένου ότι $\vec{B} = B\hat{i}$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B} = 0.61\, I a^2 \hat{k} \times B\hat{i} \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = 0.61\, B I a^2 \hat{j}}$$

5. Θεωρήστε ένα φορτισμένο σωματίδιο μάζας m το οποίο ελευθερώνεται με αρχική ταχύτητα $\vec{v} = v_0\hat{\imath}$ σε μια περιοχή ενός ομογενούς ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου τα οποία είναι και τα δύο παράλληλα στον y-άξονα. Θεωρήστε ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\vec{E} = E_0\hat{\jmath}$ και $\vec{B} = B_0\hat{\jmath}$. Βρείτε τις εξισώσεις της ταχύτητας και της θέσης του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου.

Όταν $\vec{E} // \vec{B}$ τότε η ταχύτητα είναι κάθετη και στα δύο πεδία.

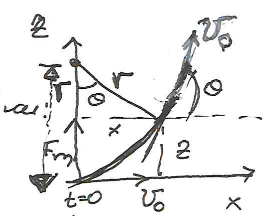
Επομένως έστω ότι έχουμε ένα σωματίδιο το οποίο έχει φορτίο q και μάζα m και αφήνεται να κινηθεί από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων με αρχική ταχύτητα $\vec{v} = v_0 \hat{\imath}$ στην περιοχή όπου $\vec{E} = E_0 \hat{\jmath}$ και $\vec{B} = B_0 \hat{\jmath}$

Το σωματίδιο επιταχύνεται από το ηλεκτρικό πεδίο στην y-διεύθυνση

Επομένως η επιτάχυνση στην y-διεύθυνση θα είναι: $a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{F_e}{m} = \frac{qE_0}{m}$

Το σωματίδιο εκτελεί κυκλική τροχιά μέσα στο μαγνητικό πεδίο στο xz-επίπεδο

Το σωματίδιο θα εκτελεί στην πραγματικότητα ελικοειδή τροχιά εξαιτίας της αυξανόμενης της ταχύτητάς του στην y-διεύθυνση. Η απόσταση των ελίκων δεν θα είναι σταθερή επειδή η ταχύτητα του σωματιδίου μεταβάλλεται λόγω της επιτάχυνσης a_y.



Η ταχύτητα του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου θα είναι:

$\vec{v} = v_x \hat{\imath} + v_y \hat{\jmath} + v_z \hat{k}$ όπου $v_y = a_y t = \frac{qE_0}{m} t$

$F_L = F_k \Rightarrow q\cancel{v}B = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow qB = \frac{mv}{R} = \frac{m\omega \cancel{R}}{\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{qB}{m}}$ $\quad v_x^2 + v_z^2 = \text{σταθερή} = v_0^2$

Η γωνία που διαγράφει το σωματίδιο θα είναι: $\Theta = \omega t = \frac{Bq}{m} t$

Επομένως
$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\Theta = v_0 \cos\left(\frac{Bqt}{m}\right) \\ v_z &= v_0 \sin\Theta = v_0 \sin\left(\frac{Bqt}{m}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = v_0 \cos\left(\frac{Bqt}{m}\right)\hat{\imath} + v_0 \sin\left(\frac{Bqt}{m}\right)\hat{k} + \left(\frac{qE_0}{m}t\right)\hat{\jmath}}$$

Η θέση του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου t μπορεί να γραφεί:

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}(t) &= x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \\ y &= \frac{1}{2} a_y t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{qE_0}{m}\right)t^2 \\ x &= r\sin\Theta = \left(\frac{mv_0}{Bq}\right)\sin\left(\frac{Bqt}{m}\right) \\ z &= r(1-\cos\Theta) = -\frac{mv_0}{Bq}\left[\cos\left(\frac{Bqt}{m}\right) - 1\right] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \left(\frac{mv_0}{Bq}\right)\sin\left(\frac{Bqt}{m}\right)\hat{\imath} + \frac{1}{2}\left(\frac{qE_0}{m}\right)t^2\hat{\jmath} + \frac{mv_0}{Bq}\left[1 - \cos\left(\frac{Bqt}{m}\right)\right]\hat{k}}$$

6. Θεωρήστε ένα φορτισμένο σωματίδιο μάζας m το οποίο ελευθερώνεται με μηδενική αρχική ταχύτητα σε μια περιοχή ενός ομογενούς ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους. Το ηλεκτρικό πεδίο ενεργεί στον x-άξονα, $\vec{E} = E_0\hat{\imath}$, ενώ το μαγνητικό πεδίο ενεργεί στον y-άξονα, $\vec{B} = B_0\hat{\jmath}$. Βρείτε τις εξισώσεις της ταχύτητας και της θέσης του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου.

Θεωρούμε την περίπτωση που $\vec{E} \perp \vec{B}$ και το σωματίδιο ξεκινά με μηδενική αρχική ταχύτητα, από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων.

Έχουμε ότι $\left.\begin{array}{l}\vec{E} = E_0\hat{\imath}\\ \vec{B} = B_0\hat{\jmath}\end{array}\right\}$ Το ηλεκτρικό πεδίο επιταχύνει το σωματίδιο στην x-διεύθυνση ενώ το μαγνητικό πεδίο θα το περιστρέψει στο xz-επίπεδο.

Επομένως σε μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή η ταχύτητά του και σαν αποτέλεσμα η θέση του, θα έχουν μόνο x και z συνιστώσες.

Έστω: $\vec{v}(t) = v_x\hat{\imath} + v_z\hat{k}$

Η συνισταμένη δύναμη θα είναι: $\vec{F} = \vec{F}_m + \vec{F}_e = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{F} = q\left[E_0\hat{\imath} + (v_x\hat{\imath} + v_z\hat{k})\times B_0\hat{\jmath}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = q\left[(E_0 - v_zB_0)\hat{\imath} + v_xB_0\hat{k}\right]} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = a_x\hat{\imath} + a_z\hat{k}$$

Επομένως $\boxed{a_x = q(E_0 - v_zB_0)/m} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2v_x}{dt^2} = -\dfrac{qB_0}{m}\dfrac{dv_z}{dt}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{d^2v_x}{dt^2} = -\dfrac{qB_0}{m}\dfrac{qv_xB_0}{m} \Rightarrow$

$\boxed{a_z = qv_xB_0/m} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d^2v_x}{dt^2} = -\overbrace{\frac{q^2B_0^2}{m^2}}^{\omega^2}v_x \Rightarrow \boxed{\frac{d^2v_x}{dt^2} = -\omega^2 v_x} \quad \boxed{\omega = \frac{qB_0}{m}}$$

Διαφορική εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή

Η γενική λύση της εξίσωσης είναι της μορφής $\boxed{v_x = A\sin(\omega t + \phi)}$.

Για $t = 0$, $v_x = 0$ κι επομένως $\phi = 0$.

Επομένως: $\boxed{\dfrac{dv_x}{dt} = A\omega\cos\omega t}$ αλλά $\left.\dfrac{dv_x}{dt} = a_x = q(E_0 - v_zB_0)/m\right\} \Rightarrow a_x = \dfrac{qE_0}{m}$

Για $t = 0$ $v_{x0} = v_{z0} = 0$

Δηλαδή: $A\omega = \dfrac{qE_0}{m} \Rightarrow A = \dfrac{qE_0}{m\omega} \Rightarrow A = \dfrac{\cancel{q}E_0}{\cancel{m}\dfrac{\cancel{q}B_0}{\cancel{m}}} \Rightarrow \boxed{A = \dfrac{E_0}{B}}$

Άρα: $\boxed{v_x = \dfrac{E_0}{B_0}\sin\left(\dfrac{qB_0}{m}t\right)}$

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε την v_x στην εξίσωση της a_z οπότε έχουμε:

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{qB_0}{m} v_x = \frac{q\cancel{B_0}}{m}\frac{E_0}{\cancel{B_0}}\sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) = \frac{q}{m}E_0 \sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{v_z} dv_z = \int_0^t \frac{qE_0}{m}\sin\omega t' dt' \Rightarrow v_z = \frac{qE_0}{m\omega}(1-\cos\omega t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_z = \frac{\cancel{q}E_0}{\cancel{m}\frac{\cancel{q}B_0}{\cancel{m}}}\left(1-\cos\frac{qB_0}{m}t\right) \Rightarrow \boxed{v_z = \frac{E_0}{B_0}\left[1-\cos\left(\frac{qB_0}{m}t\right)\right]}$$

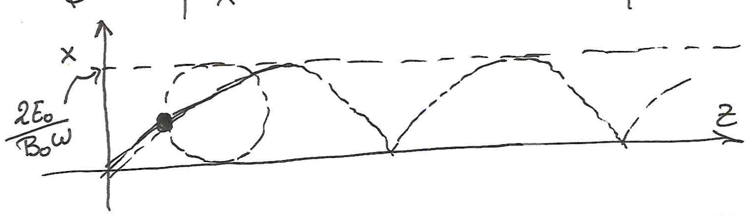
Ενώ όπως βρήκαμε πριν $\boxed{v_x = \frac{E_0}{B_0}\sin\left(\frac{qB_0}{m}t\right)}$

Ολοκληρώνουμε τις δύο τελευταίες σχέσεις για να βρούμε x και z

$$\int \frac{dx}{dt} = \frac{E_0}{B}\int_0^t \sin\omega t' dt' = -\frac{E_0}{B_0\omega}\cos\omega t\Big|_0^t \Rightarrow \boxed{x = \frac{E_0}{B_0\omega}(1-\cos\omega t)}$$

$$\int \frac{dz}{dt} = \frac{E_0}{B}\int_0^t [1-\cos(\omega t')]dt' \Rightarrow \boxed{z = \frac{E_0}{B_0\omega}(\omega t - \sin(\omega t))}$$

Οι τελευταίες δύο εξισώσεις είναι οι εξισώσεις ενός κυκλοειδούς, το οποίο ορίζεται ως η τροχιά που διαγράφει ένα σημείο στην περιφέρεια ενός τροχού που κυλίεται στο έδαφος.

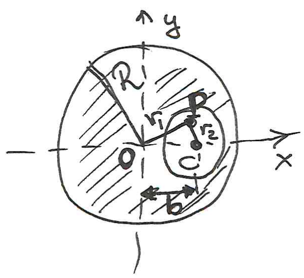


Στην προκειμένη περίπτωση η ακτίνα του κυλιόμενου τροχού θα είναι: $\frac{E_0}{B_0\omega}$ και επομένως η διάμετρος θα είναι η μέγιστη μετατόπιση στο x, $\frac{2E_0}{B_0\omega}$

Η μετατόπιση στη x-διεύθυνση είναι 0 όταν $t=0, \frac{2\pi}{\omega}, \frac{4\pi}{\omega}$ κλπ.

Παρατηρήστε ότι η τροχιά ενός σωματιδίου σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο ομογενή και τα δύο παραμένει αμετάβλητη αν $\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_e + \vec{F}_m = 0 \Rightarrow q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{v}\times\vec{B} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{B}\times\vec{v}}$

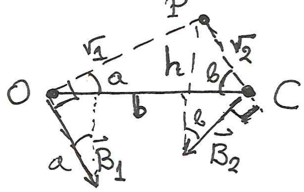
7. Ένα ρεύμα διαρρέει έναν κυλινδρικό αγωγό στο εσωτερικό του οποίου υπάρχει μια τρύπα (ή κοιλότητα). Δείξτε ότι το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό της κοιλότητας είναι σταθερό και βρείτε το μέτρο του και την κατεύθυνσή του.



Θα βρούμε το μαγνητικό πεδίο σε ένα σημείο P μέσα στην κοιλότητα. Έστω το σημείο βρίσκεται σε απόσταση r_1 από το κέντρο του αγωγού και απόσταση r_2 από το κέντρο C της κοιλότητας.

Στο σημείο P το μαγνητικό πεδίο εξαιτίας του ρεύματος i_1 που διαρρέει όλο τον αγωγό είναι B_1 και είναι κάθετο στο διάνυσμα OP.

Επίσης υπάρχει το μαγνητικό πεδίο εξαιτίας του ρεύματος i_2 που διαρρέει την κοιλότητα και έστω ότι είναι B_2. Το πεδίο αυτό θα είναι κάθετο στο CP.



Έστω B_x η x-συνιστώσα του συνιστάμενου πεδίου $\vec{B}$ και B_y η y-συνιστώσα του συνιστάμενου πεδίου $\vec{B}$.

Επομένως $B_x = B_{1x} + B_{2x} = B_1 \sin a - B_2 \sin b$. $\Rightarrow$

i_1 και i_2 τα ρεύματα στο εσωτερικό του αγωγού και κοιλότητας. i_1 στο εσωτερικό της σελίδας και το i_2 επομένως αντίθετα

$$\Rightarrow B_x = \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1}{R^2}r_1\right)\sin a - \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_2}{a^2}r_2\right)\sin b. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_x = \frac{\mu_0}{2\cancel{\pi}}\left(\frac{J\cancel{\pi}\cancel{R^2}}{\cancel{R^2}}r_1\right)\sin a - \left(\frac{\mu_0}{2\cancel{\pi}}\frac{J\cancel{\pi}\cancel{a^2}}{\cancel{a^2}}r_2\right)\sin b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_x = \frac{\mu_0}{2}J\left[r_1\sin a - r_2\sin b\right]$$

Από το τρίγωνο OPC βλέπουμε ότι: $\sin a = \frac{h}{r_1} \Rightarrow h = r_1\sin a$ ενώ $h = r_2 \sin b$

$$\Rightarrow \boxed{B_x = 0} = \frac{\mu_0 J}{2}\left[\cancel{h-h}\right]^{\to 0}$$

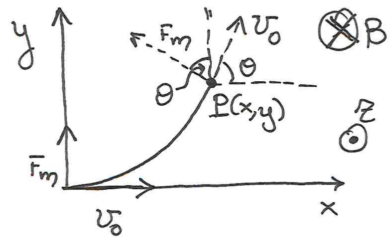
Η B_y συνιστώσα, θα είναι: $B_y = B_{1y} + B_{2y} = -B_1\cos a - B_2\cos b \Rightarrow$

$$\Rightarrow B_y = -\left[\frac{\mu_0}{2\cancel{\pi}}\frac{J\cancel{\pi}\cancel{R^2}}{\cancel{R^2}}r_1\cos a + \frac{\mu_0}{2\cancel{\pi}}\frac{J\cancel{\pi}\cancel{a^2}}{\cancel{a^2}}r_2\cos b\right] = -\frac{\mu_0 J}{2}\left[\underbrace{r_1\cos a}_{x_1} + \underbrace{r_2\cos b}_{x_2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_y = -\frac{\mu_0 J}{2}(\overbrace{x_1 + x_2}^{b}) \Rightarrow \boxed{B_y = -\frac{\mu_0 J}{2}b}$$

το μαγνητικό πεδίο είναι σταθερό και στην −y-διεύθυνση

8. Ένα σωματίδιο φορτίου q και μάζας m εκτοξεύεται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων με ταχύτητα $\vec{v} = v_0\hat{\imath}$, μέσα σε μη ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = -B_0 x\hat{k}$, όπου v_0 και B_0 θετικές σταθερές με τις κατάλληλες διαστάσεις μονάδων. Βρείτε τη μέγιστη θετική x-συντεταγμένη του σωματιδίου κατά την κίνησή του.



Το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στο επίπεδο της σελίδας και στο εσωτερικό της.
Το σωματίδιο θα περιστραφεί εξαιτίας της μαγνητικής δύναμης που στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων έχει την +y-διεύθυνση.
Η τροχιά δεν θα είναι κυκλική γιατί το μαγνητικό πεδίο δεν είναι ομογενές.

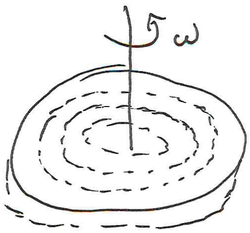
Έστω ένα σημείο $P(x,y)$ στη τροχιά του σωματιδίου. Στο σημείο αυτό, η ταχύτητά του σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση (+x-άξονας). Σαν επακόλουθο η μαγνητική δύναμη θα σχηματίζει επίσης γωνία θ με την κατακόρυφο διεύθυνση (+y-άξονα).

Επομένως: $a_y = \left(\frac{F_m}{m}\right)\cos\theta \Rightarrow \frac{dv_y}{dt} = \frac{(B_0 x)(q v_0 \cos\theta)}{m} \Rightarrow$

$$\frac{dv_y}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{B_0 q x}{m} v_0\cos\theta \Rightarrow \frac{dv_y}{dx}\cancelto{v_0\cos\theta}{v_x} = \frac{B_0 q x}{m}\cancel{v_0\cos\theta} \Rightarrow \frac{dv_y}{dx} = \frac{B_0 q}{m}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{v_0} dv_y = \int_0^{x_{max}} \frac{B_0 q}{m} x\,dx \Rightarrow v_0 = \frac{B_0 q}{m}\frac{x_{max}^2}{2} \Rightarrow \boxed{x_{max} = \sqrt{\frac{2 m v_0}{B_0 q}}}$$

9. Ένας επίπεδος δίσκος ακτίνας R είναι κατασκευασμένος από μονωτικό υλικό και είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με συνολικό φορτίο Q. Ο δίσκος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω ως προς κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του. Βρείτε την ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του δίσκου.



Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο δίσκος αποτελεί ένα σύνολο από ομόκεντρους βρόχους ρεύματος.

Ξέρουμε ότι ένας βρόχος ρεύματος δημιουργεί μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του που έχει φορά κατακόρυφη προς την κατεύθυνση του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας ω.

Το μαγνητικό πεδίο θα είναι: $B = \frac{\mu_0 I}{2r}$ (A) όπου r η ακτίνα ενός βρόχου.

Θεωρούμε ότι κάθε δακτύλιος έχει πάχος dr και το φορτίο του είναι:

$$dQ = \frac{2\pi r}{\pi R^2} Q\, dr \qquad (1)$$

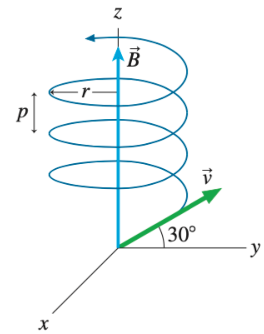
Το ρεύμα που προκαλεί αυτό το στοιχειώδες φορτίο που περιστρέφεται, εξαρτάται από την περίοδο περιστροφής $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (2)

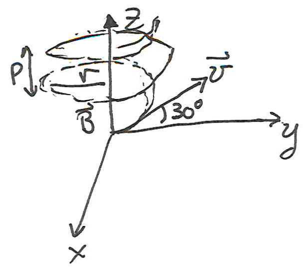
Από (1) $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $I = \frac{dQ}{T} = \frac{\cancel{2\pi} r Q\, dr}{\pi R^2 \cancel{2\pi}}\omega \Rightarrow I = \frac{Q r\, dr}{\pi R^2}\omega$ (3)

Το ολικό πεδίο θα είναι: $B = \int_0^R dB \overset{(3)}{=} \int_0^R \frac{\mu_0}{2\cancel{r}} \frac{Q\omega}{\pi R^2} \cancel{r}\, dr = \frac{Q\omega\mu_0}{2\pi R^2}\int_0^R dr \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi R}}$$

10. Ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο $30mT$ έχει κατεύθυνση προς τον θετικό z-άξονα. Ένα ηλεκτρόνιο εισέρχεται στον χώρο αυτού του μαγνητικού πεδίου με ταχύτητα μέτρου $5 \times 10^6 m/s$ και διεύθυνσή που σχηματίζει γωνία 30° με το xy-επίπεδο. Ως αποτέλεσμα η τροχιά που θα εκτελέσει είναι ελικοειδής. Βρείτε την ακτίνα r και την απόσταση, p, των επιπέδων της κάθε έλικας της τροχιάς του, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.





Το μαγνητικό πεδίο είναι στην +Z-διεύθυνση.

Το σωματίδιο έχει ταχύτητα $\vec{v}$ που σχηματίζει γωνία με την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου.

Μπορούμε να αναλύσουμε την ταχύτητα του σωματιδίου σε δύο συνιστώσες, κάθετη και παράλληλη με το μαγνητικό πεδίο. Εξαιτίας της κάθετης στο μαγνητικό πεδίο συνιστώσας της ταχύτητας, το σωματίδιο θα εκτελεί κυκλική κίνηση, επομένως η τροχιά θα είναι κύκλος. Ωστόσο, εξαιτίας της συνιστώσας της ταχύτητας παράλληλης προς το μαγνητικό πεδίο το σωματίδιο θα κινείται με σταθερή ταχύτητα και οι κύκλοι της κυκλικής τροχιάς θα μεταφέρονται οπότε, η τροχιά του θα είναι ελικοειδής.

Η ταχύτητα $v_y = v_0 \cos 30°$ και η ταχύτητα αυτή είναι υπεύθυνη για την κυκλική κίνηση. Η δύναμη Lorentz θα δρα ως κεντρομόλος δύναμη,

$$F_K = F_L \Rightarrow \frac{m v_y^2}{R} = q \cancel{v_y} B \Rightarrow R = \frac{m v_y}{qB} \Rightarrow R = \frac{9.11 \times 10^{-31} kg \cdot (5 \cdot 10^{6} m/s) \cos 30°}{1.6 \cdot 10^{-19} C \; 0.030T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 0.82mm}$$

Ο χρόνος για μια περιστροφή είναι: $T = \frac{2\pi r}{v_y} = \frac{2\pi (8.2 \times 10^{-4} m)}{(5.0 \times 10^{6} m/s) \cos 30°} \Rightarrow \boxed{T = 1.19 \cdot 10^{-9}}$

Στο χρονικό αυτό διάστημα διανύει κατακόρυφη απόσταση: $p = v_z \cdot T \Rightarrow$

$$p = (5.0 \, 10^{6} m/s) \sin 30° (1.19 \cdot 10^{-9} s) \Rightarrow p = 3 \cdot 10^{-3} m \Rightarrow \underline{p = 3mm}$$