ΦΥΣ133 - 2η ΠΡΟΟΔΟΣ - ΛΥΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ # 1

(1) (15β)

Το effective δυναμικό ορίζεται από τη σχέση: $V'(r)=V(r)+\frac{\ell^2}{2mr^2}$

Στην προκειμένη περίπτωση $V(r)=-\int F(r)dr = -\int\left(-\frac{k}{r^2}-\frac{k'}{r^4}\right)dr = -\frac{k}{r}-\frac{k'}{3r^3}$

Επομένως το effective δυναμικό έχει τη μορφή $V'(r)=-\frac{k}{r}-\frac{k'}{3r^3}+\frac{\ell^2}{2m(r^2)}$.

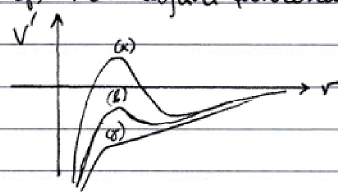
Ο όρος $-\frac{k}{r}$ υπερισχύει για μεγάλα r, ενώ ο όρος $\frac{k'}{3r^3}$ υπερισχύει σε μικρά r. Αυτό σημαίνει ότι $V(r)$ είναι αρνητικό και για μικρά και για μεγάλα r. Το ποιό είναι ακριβώς η μορφή του για ενδιάμεσες τιμές του r εξαρτάται από τις τιμές του k, k', $\ell^2/2m$.

Υπάρχουν εν γένει τρείς διαφορετικές τιμές που δίνουν τα ακόλουθα σχήματα:

(α) $V'(r)$ πηγαίνει σε τιμή μεγαλύτερη από $V(r)=\phi$.

(β) $V'(r)$ παραμένει αρνητικό αλλά παρουσιάζει μέγιστο ανάλογα με το $\frac{\ell^2}{m^2}$

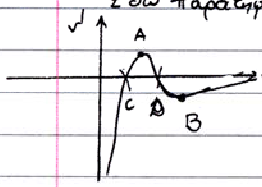
(γ) $V'(r)$ αυξάνει μονοτονικά ενώ παραμένει σε αρνητικές τιμές:



(2) (15β)

Λαμβάνουμε το δυναμικό της μορφής (α).

Εδώ παρατηρούμε ότι υπάρχουν 2 ακρότατα για το δυναμικό τα οποία προέρχονται από την παραγώγιση:



$$\frac{dV'}{dr}=0 \Rightarrow \frac{k}{r_0^2}+\frac{k'}{r_0^4}-\frac{\ell^2}{mr_0^3}=\phi. \quad (1)$$

Οι τιμές r που αντιστοιχούν στα ακρότατα είναι:

$$kr^2+k'-\frac{\ell^2 r}{m}=0 \Rightarrow r_0=\frac{\frac{\ell^2}{m}\pm\sqrt{\left(\frac{\ell^2}{m}\right)^2-4kk'}}{2k}$$

Η τιμή $r_0^A=\frac{\frac{\ell^2}{m}-\sqrt{\left(\frac{\ell^2}{m}\right)^2-4kk'}}{2k}$ αντιστοιχεί στο σημείο A, ενώ η δεύτερη στην τιμή του $r_0^B = \dfrac{\frac{\ell^2}{m} + \sqrt{\left(\frac{\ell^2}{m}\right)^2 - 4kk'}}{2k}$

Προφανώς για να έχουμε πραγματική τιμή θα πρέπει $\left(\dfrac{\ell^2}{2mk}\right)^2 - \dfrac{4kk'}{4k^2} \geq 0 \Rightarrow (2)$ $\boxed{\left(\dfrac{\ell^2}{2mk}\right)^2 - \dfrac{k'}{k} \geq 0}$

Η τιμή r_A αντιστοιχεί σε μέγιστο του δυναμικού. Στο σημείο αυτό μπορούμε να έχουμε κυκλική τροχιά αλλά τελικά δεν θα είναι σταθερή αφού μικρή μεταβολή της ενέργειας πάνω από το $V'(r_B)$ θα προκαλέσει μη φραγμένη κίνηση.

Η τιμή του r_B αντιστοιχεί σε ελάχιστο. Στην προκειμένη περίπτωση η ενέργεια είναι αρνητική, $E<0$, και έχει τη μικρότερη τιμή της για κίνηση από μεγάλα r σε μικρά.

Η περιοχή του r μεταξύ των σημείων C, D είναι απαγορευμένη καθώς και η ενέργεια γίνεται μικρότερη από το δυναμικό. Ωστόσο μπορούμε να έχουμε κίνηση από $r=+\infty$ μέχρι το σημείο D. Και επίσης από το $r=0$ (πηγή δυναμικού) στο C (περιοχή ελλειπτικών τροχιών).

Επανερχόμενοι στις κυκλικές τροχιές Η δεύτερη συνθήκη για να έχουμε σταθερή κυκλική τροχιά είναι η $\dfrac{d^2V'}{dr^2} > 0$.

Επομένως: $-\dfrac{2k}{r_0^3} - \dfrac{4k'}{r_0^5} + \dfrac{3\ell^2}{mr_0^4} > 0. \quad (3)$

Αν πολλαπλασιάσουμε την (1) με $\dfrac{3}{r_0}$ και προσθέσουμε στην (3) παίρνουμε:

$$+\frac{k}{r_0^3} - \frac{k'}{r_0^5} > 0 \Rightarrow \frac{1}{r_0^3}\left(k - \frac{k'}{r_0^2}\right) > 0 \Rightarrow k > \frac{k'}{r_0^2} \Rightarrow \boxed{kr_0^2 > k'}$$

Το ίδιο βγαίνει και από την (2).:

$\left(\dfrac{\ell^2}{2mk}\right)^2 - \dfrac{k'}{k} \geq 0.$ Όταν $\dfrac{\ell^2}{2mk} = \dfrac{k'}{k}$ τότε $r_0^B = \dfrac{\ell^2}{2mk}$. Αντικαθιστώντας έχουμε: $\left(r_0^B\right)^2 - \dfrac{k'}{k} \geq 0 \Rightarrow \boxed{k {r_0^B}^2 \geq k'}$

ΑΣΚΗΣΗ # 2

(3β) (α) Το περιήλιο και αφήλιο συνδέονται με τον κύριο άξονα α και την εκκεντρότητα e με τις σχέσεις:

$$r_{min} = \alpha(1-e) \quad \text{και} \quad r_{max} = \alpha(1+e)$$

Επομένως η απόσταση του αφήλιου υπολογίζεται εύκολα:

$$r_{max} = r_{min}\frac{1+e}{1-e} = 89.10^6 \frac{1+0.967}{1-0.967} \Rightarrow \boxed{r_{max} = 5.3\cdot 10^9 \text{ km}}$$

(12β) (β) Από την εμβαδική ταχύτητα μπορούμε να υπολογίσουμε τις ταχύτητες:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} \quad (A)$$

Αλλά στα δύο χαρακτηριστικά σημεία, περιήλιο και αφήλιο, η ταχύτητα είναι κάθετη στην ακτίνα και επομένως:

$$(A) \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}r\upsilon = \frac{1}{2}\alpha(1\pm e)\upsilon \quad (1)$$ και τα σύμβολα $\pm$ αντιστοιχούν στο αφήλιο (+) και περιήλιο (-) αντίστοιχα.

Από τη στιγμή που ξέρουμε την περίοδο του κομήτη T μπορούμε να γράψουμε την εμβαδική ταχύτητα σύμφωνα με την

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A}{T} = \frac{\pi\alpha^2\sqrt{1-e^2}}{T} \quad (2)$$

Από (1) κ (2) παίρνουμε $\frac{1}{2}\alpha(1\pm e)\upsilon = \frac{\pi\alpha^2\sqrt{1-e^2}}{T} \Rightarrow \boxed{\upsilon = \frac{2\pi\alpha\sqrt{(1-e^2)}}{T(1\pm e)}}$

Αντικατάσταση στους τύπους δίνει :

$$\upsilon = \frac{2\pi\, 2697\cdot 10^9 \cdot 2548\cdot 10^{-1}}{76\cdot 3.1536\cdot 10^7\,(1\pm 0.967)} \Rightarrow \begin{cases} \upsilon_{περιήλιου} = \frac{1.8}{0.033} = 54.59 \text{ km/sec} \\ \upsilon_{αφήλιου} = \frac{1.8}{1.967} = 0.915 \text{ km/sec} \end{cases}$$

ΦΥΣ 133 - 2η ΠΡΟΟΔΟΣ - ΛΥΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ # 3 :

α) (10β)

Απο την εξίσωση της τροχιάς που μας δίνεται, παίρνουμε $r \to \infty$ οπότε: λαμβάνουμε τις διευθύνσεις των 2 ασυμπτωτικών της μη φραγμένης κίνησης, της πτήσης του διαστημοπλοίου:

$$r \to \infty \quad \frac{1}{r} = \frac{\mu k}{\ell^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{\mu k^2}}\cos\Theta\right) \Rightarrow 0 = 1 + e\cos\Theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Theta_{r\to\infty} = \pm \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) \quad \text{οπου} \quad e = \sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{\mu k^2}}$$

Οι 2 λύσεις σχηματίζουν γωνία $\Delta\Theta = 2\arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$.

Η γωνία αυτή σχετίζεται με τη γωνία σκέδασης: $\boxed{\Theta = 2\arccos\left(-\frac{1}{e}\right) - \pi}$

β) (5β)

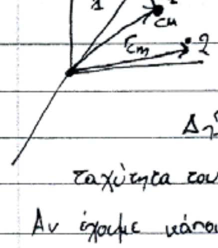
Το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορεί να γραφεί σαν $\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{2} = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\Theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{e} \Rightarrow \boxed{\sin\frac{\Theta}{2} = \frac{1}{e}}$$

γ) (10β)

Γενικά για το σύστημα αναφοράς του Κ.Μ.: Πληροφοριακά:

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε 2 σώματα μάζας m_1 και m_2 με διανύσματα θέση r_1 και r_2 όπως μετρώνται στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Το κέντρο μάζας των 2 σωμάτων θα έχει διάνυσμα θέσης: $\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m_1+m_2}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)$ όπως μετράται στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου



Θα μπορούσα να γράψω επομένως:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_1{}' \Rightarrow \dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{r}}_{CM} + \dot{\vec{r}}_1{}' \Rightarrow \underline{\vec{V}_1 = \vec{V}_{CM} + \vec{V}_1{}'}$$

Δηλαδή η ταχύτητα του σώματος στο εργαστήριο είναι ίση με την ταχύτητα του ΚΜ και την ταχύτητα του σώματος ως προς το Κ.Μ.

Αν έχουμε κάποια κρούση τότε: $\vec{V}_{CM} = \frac{1}{m_1+m_2}(m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2) \Rightarrow (m_1+m_2)\vec{V}_{CM} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2$

Ξέρουμε ότι η ορμή διατηρείται οπότε: $m_1\vec{V}_1{}' + m_2\vec{V}_2{}' = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 \Rightarrow (m_1+m_2)\vec{V}_{CM}^{\,\text{πριν}} = (m_1+m_2)\vec{V}_{CM}^{\,\text{μετά}} \Rightarrow$

Δηλαδή η ταχύτητα του Κ.Μ. πριν και μετά τη σκέδαση διατηρείται ίδια.

Αν τώρα θελήσουμε να περιγράψουμε την κίνηση των σωμάτων στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας βλέπουμε ότι η συνολική ορμή των σωμάτων του συστήματός μας είναι μηδέν.

Αυτό γιατί:

$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i$. Αν μεταφερθούμε στο σύστημα αναφοράς του ΚΜ τότε οι άξονες και η αρχή του συστήματος συντεταγμένων συμπίπτει με το ΚΜ

όποτε $\dot{\vec{r}}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i \dot{\vec{r}}_i' \Rightarrow 0 = \frac{1}{M}\sum \vec{p}_i'$

όπου $\vec{r}_i'$ είναι η σχετική θέση κάθε σώματος του συστήματός μας στο ΚΜ.

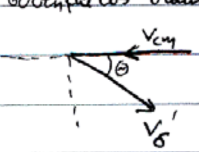
Επιστρέφω στο πρόβλημα:

Οι τιμές των μεγεθών των ταχυτήτων του διαστημόπλοιου πριν και μετά το πείραμα είναι αντίστοιχα v_{δ_1} και v_{δ_2} όπως μετρούνται από το σύστημα του παρατηρητή ή του εργαστηρίου.

Αυτές οι δύο ταχύτητες συνδέονται με την ταχύτητα στο σύστημα του Κ.Μ. (που δεν μεταβάλλεται σε μέγεθος κατά το πείραμα του διαστημόπλοιου) με την σχέση:

$\vec{V}_{\delta_1} = \vec{V}_{cm} + \vec{V}_{\delta'} \Rightarrow V_{\delta_1} = V_{\delta'} - V_{cm}$ μια και το Κ.Μ. είναι πιό κοντά στον πλανήτη και κινείται αντίθετα πρὸς την κίνηση του διαστημόπλοιου.

Μετά τη σκέδαση, υποθέτω ότι το διαστημόπλοιο σκεδάστηκε κατά γωνία Θ. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας όπως είπαμε πιο πάνω παραμένει η ίδια μετά την σκέδαση. Το ίδιο και η ταχύτητα των σωμάτων στο κέντρο μάζας. Αφού $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1} = \text{σταθ.}$ Αφού η _ _ ενέργεια του συστήματος διατηρείται οι ταχύτητες θα είναι ίσες και μετά τη κρούση.



Έχουμε ότι $\vec{V}_{\delta_2} = \vec{V}_{\delta'} + \vec{V}_{cm} \Rightarrow$

$$V_{\delta_2}^2 = (V_\delta' \cos\Theta - V_{cm})^2 + V_\delta'^2 \sin^2\Theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{\delta_2}^2 = V_\delta'^2 \cos^2\theta + V_{cm}^2 - 2V_\delta' V_{cm}\cos\theta + V_\delta'^2 \sin^2\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{\delta_2}^2 = V_\delta'^2 - 2V_\delta' V_{cm}\cos\theta + V_{cm}^2}$$

ενώ $\boxed{V_{\delta_1} = V_\delta' - V_{cm}}$

(δ) (5 β)

Η κινητική ενέργεια του διαστημόπλοιου, πριν το πέρασμα είναι:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = \frac{1}{2} m V_{\delta_1}^2 = \frac{1}{2} m \left(V_\delta'^2 - 2V_\delta' V_{cm} + V_{cm}^2\right) \\ \text{Μετά το πέρασμα: } T_2 = \frac{1}{2} m \left(V_\delta'^2 - 2V_\delta' V_{cm}\cos\theta + V_{cm}^2\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = m\left(-V_\delta' V_{cm}\cos\theta + V_\delta' V_{cm}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta T = m V_\delta' V_{cm}(1-\cos\theta) \Rightarrow \boxed{\Delta T = m V_\delta' V_{cm}(1-\cos\theta)}$$

(ε) (10 β)

Η αύξηση της ενέργειας του διαστημόπλοιου οφείλεται στην απώλεια κινητικής ενέργειας του πλανήτη. (Αν ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία μπορούμε να δούμε ότι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του πλανήτη συμπίπτει με το $-\Delta T$ της παραπάνω).

Αυτό σημαίνει ότι ο πλανήτης "φρενάρει" σχετικά στο σύστημα του παρατηρητή. Ωστόσο επειδή ο πλανήτης είναι πολύ βαρύτερος σε σχέση με το διαστημόπλοιο, αυτό το φρενάρισμα δεν φαίνεται.

ΦΥΣ 133 - ΠΡΟΟΔΟΣ 2η - ΛΥΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ #4

Η διαφορική ενεργός διατομή είναι: $\sigma(\Theta) \equiv \frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega}\Big|_{KM} = \frac{b(\Theta)}{\sin\Theta}\left|\frac{db}{d\Theta}\right|$

όπου b είναι η παράμετρος κρούσης

Θεωρώ μία αρχική ροή I σωματιδίων, και ΔN ορίζω τον αριθμό των σωματιδίων με παράμετρο κρούσης μεταξύ b και $b+db$, μέσα σε ένα χρονικό διάστημα Δt.

Επομένως: $\Delta N_b = 2\pi b\,db \cdot I \cdot \Delta t$, όπου $2\pi b\,db$ είναι το εμβαδό του δακτυλίου

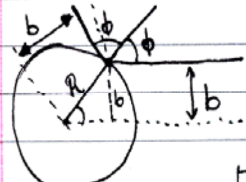
Στο διάστημα $(b, b+db)$ αντιστοιχεί ένα άλλο διάστημα $(\Theta, \Theta \pm d\Theta)$ και

$\Delta N_\Theta = \frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega}\Big|_{KM} \cdot \sin\Theta\, d\Theta\, 2\pi \cdot I \cdot \Delta t$ εξ ορισμού.

Η έκφραση για το $\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega}\Big|_{KM}$ βγαίνει από το να θέσω $\Delta N_b = \Delta N_\Theta = \Delta N$

και η απόλυτη τιμή χρειάζεται για την περίπτωση που υπάρχει αρνητικό πρόσημο μπροστά από το $d\Theta$.

Για μία αδιαπέραστη σφαίρα, διατήρηση της στροφορμής απαιτεί τα σωματίδια να σκεδαστούν από τη σφαίρα με ίσες γωνίες ως προς την κάθετο:



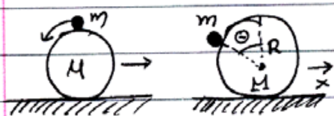
$$\left.\begin{array}{l} \Theta + 2\phi = \pi \\ \sin\phi = \frac{b}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow b = R\cos\frac{\Theta}{2}.$$

Άρα $$\boxed{\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega}\Big|_{KM} = R^2\,\frac{\cos\Theta/2}{\sin\Theta}\left|-\frac{1}{2}\sin\Theta/2\right| = \frac{R^2}{4}}$$

Η ολική ενεργός διατομή θα είναι: $\sigma_{TOT} = \int \frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega}\Big|_{KM} d\Omega(\Theta) = \frac{2\pi R^2}{4}\int_0^\pi \sin\Theta\, d\Theta = \underline{\pi R^2}$.

ΦΥΣ 133 - 2η ΠΡΟΟΔΟΣ - ΛΥΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 5η



Έστω R η ακτίνα της σφαίρας
Υποθέτουμε ότι το σωμάτιο "πέφτει" προς τα αριστερά αλλά η σφαίρα κινείται προς τα δεξιά. (κάτι σαν "ανάκρουση")

Έστω Θ η γωνία από το υψηλότερο σημείο της σφαίρας, μετρούμενη αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Τελικά θεωρούμε ότι η σφαίρα κινείται προς τη θετική διεύθυνση του άξονα x.

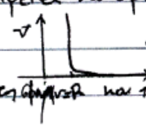
Η θέση του σωματιδίου σχετικά με την αρχική θέση του κέντρου της σφαίρας είναι:

$x - r\sin\Theta$ όπου r περιορίζεται να είναι R

$r\cos\Theta$

Η ταχύτητα του σωματιδίου είναι: $\left.\begin{array}{l}\dot{x} - r\dot{\Theta}\cos\Theta \\ -r\dot{\Theta}\sin\Theta\end{array}\right\} \Rightarrow v^2 = \dot{x}^2 + r^2\dot{\Theta}^2 - 2r\dot{x}\dot{\Theta}\cos\Theta$

Αγνοούμε τους όρους που περιέχουν $\dot{r}$ μια και είναι πολύ μικροί:
Για να βρούμε τη δύναμη του δεσμού θα πρέπει να βρούμε το δυναμικό $V(r)$ κρατώντας το σωματίδιο στη σφαίρα:



Δηλαδή ο δεσμός είναι σαν δημιουργεί πολλά μικρά ελατήρια που συμπιέζονται στη σφαίρα και η σφαίρα αντιδρά. Ο δεσμός εξαφανίζεται όταν η μπάλα φεύγει από τη σφαίρα.

Η Lagrangian του συστήματος γράφεται:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x} + r^2\dot{\Theta}^2 - 2r\dot{x}\dot{\Theta}\cos\Theta\right) - mgr\cos\Theta - V(r)$$

Θεωρώντας το υψηλότερο σημείο της σφαίρας σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας.

Οι εξισώσεις κίνησης μεταβλητών x, Θ, r είναι:

$$(M+m)\ddot{x} - mr\frac{d}{dt}\left(\dot{\Theta}\cos\Theta\right) = 0$$

$$r\ddot{\Theta} - \ddot{x}\cos\Theta = g\sin\Theta$$

$$mr\dot{\Theta}^2 - m\dot{x}\dot{\Theta}\cos\Theta - mg\cos\Theta - V'(r) = 0$$

(V' = παράγωγος)

όπου και πάλι αγνοώ τους όρους $\dot{r}$.

Ολοκλήρωση της $1^{ης}$ εξίσωσης δίνει διατήρηση της ορμής.
Η δεύτερη εξίσωση δίνει $F=ma$ για τη διεύθυνση θ
Η τρίτη εξίσωση δίνει την ακτινική δύναμη του δεσμού, $F=-\frac{dV}{dr}$
υπολογιζόμενη σε $r=R$.

$$F(\theta,\dot{\theta},\dot{x}) = mg\cos\theta + m\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta - mR\dot{\theta}^2$$

Λύνουμε την (1) εξίσωση ως προς $\ddot{x}$ και αντικαθιστούμε στην (2)

$$\ddot{x} = mr\frac{d}{dt}(\dot{\theta}\cos\theta)/(M+m)$$

$$r\ddot{\theta} - \frac{m}{M+m}\frac{d}{dt}(\dot{\theta}\cos\theta)\cos\theta = g\sin\theta \Rightarrow$$

$$r\ddot{\theta} - \frac{mr}{M+m}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)\cos\theta = g\sin\theta \Rightarrow$$

$$r\ddot{\theta}(M+m) - mr\ddot{\theta}\cos^2\theta + mr\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta = g(M+m)\sin\theta \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta}(M+m-m\cos^2\theta)r + mr\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta = g(M+m)\sin\theta \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta}(M+m-m\cos^2\theta) + m\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta = \frac{g}{r}(M+m)\sin\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta}(M+m\sin^2\theta) + m\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta = \frac{g}{R}\sin\theta(M+m)} \quad r=R$$

Από $\ddot{x} = mr\frac{d}{dt}(\dot{\theta}\cos\theta)/(M+m)$ με ολοκλήρωση παίρνουμε: $\dot{x}(M+m) = mr\dot{\theta}\cos\theta + C$

Για $t=0$ $\dot{x}(0)=0$ και $\dot{\theta}=0$ οπότε $C=0$ οπότε έχουμε:

$$\dot{x}(M+m) - mr\dot{\theta}\cos\theta = 0 \Rightarrow \dot{x} = \frac{mr}{M+m}\dot{\theta}\cos\theta = \frac{mR}{M+m}\dot{\theta}\cos\theta$$

Αντικαθιστώντας το $\dot{x}$ της εξίσωσης (3) με βάση το παραπάνω

$$\boxed{F(\theta,\dot{\theta}) = mg\cos\theta + \frac{m^2R\dot{\theta}^2}{M+m}\cos^2\theta - mR\dot{\theta}^2.}$$

ΑΣΚΗΣΗ # 6

(9β) (α) Κίνηση σωματιδίου κάτω από σταθερή στροφορμή γίνεται σε επίπεδο ορισμένο από τα διανύσματα $\vec{r}_0$ και $\vec{p}_0$.

Η στροφορμή του σωματιδίου γράφεται: $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow \dot{\vec{\ell}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{\vec{\ell}} = m\dot{\vec{r}} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \dot{\vec{v}} \Rightarrow \dot{\vec{\ell}} = \underbrace{m\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r} \times \vec{F}$ $\Rightarrow \vec{F}$ πρέπει να 'ναι

Αφού μας δίνεται ότι η στροφορμή διατηρείται $\Rightarrow \dot{\vec{\ell}} = \phi$ ανάλογη του r,

Αν τώρα αναλύσουμε την ταχύτητα σε μιά συνιστώσα κατά μήκος του r και μιά κάθετη σ' αυτό, τότε η δύναμη F μπορεί να αλλάξει μόνο την ταχύτητα που είναι παράλληλη στο r.

Δηλαδή η κίνηση λαμβάνει χώρα σε ένα επίπεδο ορισμένο και κάθετο στο διάνυσμα της στροφορμής $\ell = m r(t) \times \dot{r}(t) = m\vec{r}_0 \times \vec{v}_0$ το οποίο είναι σταθερό.

(6β) Οι κινήσεις για τα (α), (β), (ε) και (ζ) είναι δυνατές.
Η κίνηση κατά μήκος του (γ) δεν είναι δυνατή γιατί η στροφορμή ℓ θα μηδενιστεί καθώς περνά από το σημείο στροφής, αλλά θα είναι διαφορετική από μηδέν πριν και μετά το σημείο.
Κατά το ίδιο σκεπτικό η κίνηση που περιγράφεται από το (δ) δεν είναι δυνατή γιατί το ℓ θα μηδενιστεί καθώς περνά από το σημείο O αλλά θα είναι διαφορετική από μηδέν πριν και μετά το σημείο αυτό.
Η κίνηση για την τροχιά που περιγράφεται στο (ε) είναι δυνατή γιατί η στροφορμή είναι μηδέν πριν και μετά το σημείο O.

ΦΥΣ 133 - 2η ΠΡΟΟΔΟΣ - ΛΥΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 7η

Ο κομήτης θα πέσει πάνω στον ήλιο όταν το περιήλιο της τροχιάς του (υπερβολής) είναι μικρότερο ή το πολύ ίσο με την ακτίνα R του ήλιου.

Αν υποθέσουμε ότι ο κομήτης πλησιάζει με ενέργεια E, τότε πριν από τη σύγκρουση η σχετική ορμή θα είναι $|p| = \sqrt{2\mu E}$ όπου μ η ανηγμένη μάζα του συστήματος ήλιος-κομήτης.

Η στροφορμή θα δίνεται τότε από $\ell = pb$ όπου b η παράμετρος πρόσκρουσης.

Αφού ο κομήτης θα πέσει στον ήλιο τότε η παράμετρος πρόσκρουσης b θα είναι $b \leq b_{max}$ ενώ b_{max} καθορίζεται από την αρχική συνθήκη που θέσαμε ότι $r_{περιήλιο} \leq R_{ήλιου}$.

Το περιήλιο δίνεται από $\frac{q}{1+e} = R$ όπου $q = \frac{\ell^2}{A\mu} = \frac{p^2 b^2}{A\mu}$

και η εκκεντρότητα $e = \sqrt{1 + \frac{2E p^2 b^2}{\mu A^2}} = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu A^2}}$ όπου $A = GMm$ η σταθερά

του δυναμικού της βαρυτικής έλξης.

Αντικαθιστώντας έχουμε: $\frac{q}{1+\sqrt{1+\frac{2qA\mu E}{\mu A^2}}} = R \Rightarrow \frac{q}{1+\sqrt{1+\frac{2qE}{A}}} = R$

Λύνοντας ως προς q και αντικαθιστώντας έχουμε $b_{max} = R\sqrt{1+\frac{A}{ER}}$

Η ενεργός διατομή θα δίνεται:

$$\sigma_{TOT} = \int_0^{b_{max}} 2\pi b\, db = \pi R^2 \left(1 + \frac{A}{ER}\right)$$

Για $A = 0$, $\sigma_{TOT} = \pi R^2$ που είναι η επιφάνεια του ήλιου που βλέπει ο κομήτης. Καθώς $A > 0$, δηλαδή η βαρυτική έλξη αυξάνει, η επιφάνεια που βλέπει ο κομήτης αυξάνει κατά το λόγο (δυναμική ενέργεια στην άκρη του ήλιου)/(ενέργεια της σχετικής κίνησης)