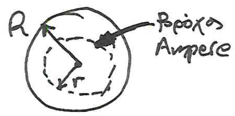
ΦΥΣ. 112

9ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή Παρασκευή 25.11.2022**

1. Ένα σύρμα ακτίνας *R* διαρρέεται από ρεύμα *I,* το οποίο είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα στην διατομή του. Βρείτε μια εξίσωση που δίνει την ολική μαγνητική ενέργεια ανά μονάδα μήκους στο εσωτερικό του σύρματος.

Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του σύρματος βρίσκεται από εφαρμογή του νόμου του Ampere

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\pi\varepsilon\rho.} \Rightarrow B\cdot 2\pi \cancel{r} = \mu_0 \cdot I \frac{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}}{\cancel{\pi} R^2} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow B = \mu_0 I \frac{r}{2\pi R^2}$$

Η πυκνότητα ενέργειας ανα μονάδα μήκους δίνεται από: $u_B = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow u_B = \frac{\mu_0^{\cancel{2}} I^2 r^2}{4\pi^2 R^4 2 \cancel{\mu_0}} \Rightarrow u_B = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R^4}$$

Ολοκληρώνουμε ως προς τον όγκο: $dV = 2\pi r L dr$ και η ενέργεια ανα μονάδα μήκους θα είναι:

$$\frac{U}{L} = \int \frac{u_B dV}{L} = \int \frac{B^2 dV}{2\mu_0 L} = \int_0^R \frac{\mu_0 I^2 r^2}{\cancel{8}^{4} \pi^{\cancel{2}} R^4 \cancel{L}} \cancel{2\pi} r \cancel{L} dr = \int_0^R \frac{\mu_0 I^2 r^3}{4\pi R^4} dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{U}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi R^4} \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^R \Rightarrow \frac{U}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi \cancel{R^4}} \frac{\cancel{R^4}}{4} \Rightarrow \boxed{\frac{U}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}}$$

Η πυκνότητα ενέργειας, όπως και η ενέργεια, είναι ανάλογη του τετραγώνου του ρεύματος.

2. Φανταστείτε ότι είστε σε ένα αεροπλάνο με τον αδελφό σας που έχει γνώσεις φυσικής μόνο του λυκείου αλλά θυμάται ότι ηλεκτρεγερτική δύναμη επαγωγής μπορεί να προκληθεί στα άκρα των πτερών του αεροπλάνου και σας ρωτά αν αυτή η τάση είναι αρκετή ώστε για την λειτουργία ενός φορητού ραδιοφώνου. Ποια θα είναι η απάντησή σας; Θεωρήστε ότι η ταχύτητα του αεροπλάνου είναι 912*km/h*, το άνοιγμα των φτερών του αεροπλάνου είναι 60*m* και το μαγνητικό πεδίο της Γης είναι 0.26*G*.

Το αεροπλάνο που κινείται στο μαγνητικό πεδίο της γης, αναπτύσσει στα άκρα των φτερών του ΗΕΔ από επαγωγή. Η ΗΕΔ θα βρεθεί με τη χρήση του νόμου του Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}[BA] \Rightarrow \mathcal{E} = -Bl\cdot\frac{dx}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = -Bl\upsilon$$

όπου l είναι το άνοιγμα των φτερών του αεροπλάνου και υ η ταχύτητα με την οποία κινείται. (υποθέτουμε ότι το αεροπλάνο καθώς και η ταχύτητα με την οποία κινείται είναι κάθετα στο μαγνητικό πεδίο της γης).

Από τα δεδομένα, θα έχουμε:

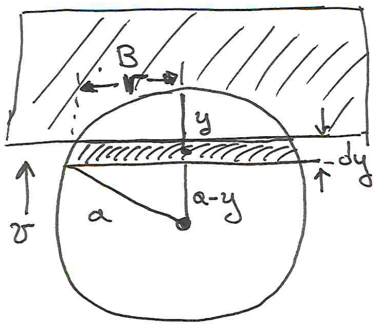
$$\mathcal{E} = Bl\upsilon = (0.3G)(6\cancel{0}m)(912\ \cancel{km}/\cancel{h})\left(\frac{10\cancel{00}\,m\,\cancel{h}}{36\cancel{00}\,\cancel{km}\,s}\right) \Rightarrow$$

$$1G \rightarrow 10^{-4}T \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = 4{,}560\cdot 10^{-4}V \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = 0.46V}$$

Η ΗΕΔ είναι πολύ μικρή για να λειτουργήσει ένα φορητό ραδιόφωνο.

Στην πραγματικότητα, το δυναμικό αυτό δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί γιατί αν συνδέσουμε καλώδια στα άκρα των φτερών, τα καλώδια αυτά θα έχουν την ίδια επαγόμενη τάση όπως τα φτερά, και δεν θα υπάρχει ροή ρεύματος.

3. Ένας κυκλικός βρόχος ακτίνας *a* και αντίστασης *R* κινείται με σταθερή ταχύτητα υ μέσα σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο *B*. Ο βρόχος είναι κάθετος στο μαγνητικό πεδίο και εισέρχεται στο πεδίο την χρονική στιγμή *t* = 0. Βρείτε την εξίσωση που περιγράφει το ρεύμα στον βρόχο από την στιγμή της εισόδου του στο μαγνητικό πεδίο έως τη χρονική στιγμή που έχει εισέλθει ολόκληρος στο πεδίο.



Από το διπλανό σχήμα, βλέπουμε ότι η αλλαγή στην επιφάνεια δίνεται από τη σχέση:

$$dA = 2r\,dy = 2\sqrt{2ay-y^2}\,dy \qquad (1)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε: $a^2=(a-y)^2+r^2 \Rightarrow r^2=\cancel{a^2}-\cancel{a^2}-y^2+2ay \Rightarrow$

$$\Rightarrow r^2 = 2ay-y^2$$

Από την (1) παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο θα έχουμε:

$$\frac{dA}{dt} = 2\sqrt{2ay-y^2}\,\frac{dy}{dt} = 2\upsilon\sqrt{2ay-y^2}$$

Επομένως το επαγόμενο ρεύμα θα είναι: $I = \frac{d\Phi_\mu}{R\,dt} = \frac{B}{R}\frac{dA}{dt}$

Εφόσον $y=\upsilon\cdot t$ αντικατάσταση θα δώσει: $I = \frac{B}{R}\,2\upsilon\sqrt{2ay-y^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \frac{2B\upsilon}{R}\sqrt{2a\upsilon t-\upsilon^2 t^2} = \boxed{\frac{2B\upsilon}{R}\sqrt{\upsilon t(2a-\upsilon t)}}$$

Ο βρόχος εισέρχεται πλήρως στο μαγνητικό πεδίο, όταν $t=\frac{2a}{\upsilon}$.

Τη χρονική στιγμή, $\frac{2a}{\upsilon}$, η ροή διαμέσου του βρόχου γίνεται σταθερή και το επαγόμενο ρεύμα μηδενίζεται.

4. Ένα κύκλωμα LC περιλαμβάνει έναν πυκνωτή χωρητικότητας $0.025 \mu F$ και ένα πηνίο $340 \mu H$. (α) Αν η μέγιστη τιμή της τάσης στα άκρα του πυκνωτή είναι $190 V$ ποια είναι η μέγιστη τιμή του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο; (β) Ποιο το χρονικό διάστημα μετά το μέγιστο της τάσης για να εμφανιστεί το μέγιστο στο ρεύμα;

Το πλάτος του ρεύματος και της τάσης σε ένα κύκλωμα $L\,C$ σχετίζονται:

$$I_0 = \omega q_0 = \omega C V_0 \Rightarrow C V_0 / \sqrt{LC} = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \quad (1)$$

Το ρεύμα που επάγεται σε ένα πηνίο έχει διαφορά φάσης 90° με την επαγόμενη τάση και μάλιστα ακολουθεί την τάση, $\omega \Delta t = \pi/2 \quad (2)$

(α) Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στην εξίσωση (1) θα έχουμε:

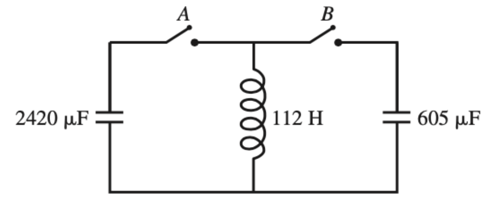
$$I_0 = \frac{190V}{\sqrt{\frac{0.025\mu F}{340 \mu H}}} \Rightarrow \underline{\underline{I_0 = 1.6A}}$$

(β) Από τη σχέση (2) $\Delta t \omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi\sqrt{LC}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{2}\sqrt{(0.025\mu F)(340\mu H)} \Rightarrow \Delta t = 4.6\mu s$$

Η περίοδος της κυματομορφής της τάσης είναι: $4\Delta t = 4 \cdot 4.6 \Rightarrow \underline{\underline{T = 18.4 \mu s}}$

5. Θεωρήστε το κύκλωμα του διπλανού σχήματος. Ο πυκνωτής χωρητικότητας $2420\mu F$ φορτίζεται αρχικά σε διαφορά δυναμικού $250V$. (α) Περιγράψτε πως θα χρησιμοποιήσετε τους διακόπτες Α και Β ώστε να μεταφέρεται όλη την ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στον πυκνωτή χωρητικότητας $2420\mu F$ στον πυκνωτή με χωρητικότητα $605\mu F$. Θα πρέπει να συμπεριλάβετε και το χρόνο αλλαγής της θέσης των διακοπτών. (β) Ποια θα είναι η τάση στα άκρα του πυκνωτή χωρητικότητας $605\mu F$ στο τέλος της διαδικασίας αυτής;



Σύμφωνα με το ζητούμενο θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τους διακόπτες με τέτοιο τρόπο ώστε να μεταφέρουμε όλη την ενέργεια από τον ένα πυκνωτή στον άλλο αποθηκεύοντάς την προσωρινά στο πηνίο.

Η ενέργεια στο πηνίο είναι $U_L = \frac{1}{2} L I^2$ ενώ στον πυκνωτή $U_C = \frac{1}{2} C V^2$

Αρχικά η ενέργεια είναι στον 1ο πυκνωτή: $U_C = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} (2420 \cdot 10^{-6} F)(250V)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow U_C = 75.625 J$

Σε ένα κύκλωμα LC, το ρεύμα ακολουθεί την τάση κατά $\pi/2$. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να κλείσουμε τον διακόπτη A για $T/4$ για να μεταφέρουμε όλη την ενέργεια από τον πυκνωτή της χωρητικότητας $2420\mu F$ στο πηνίο. Ακολούθως, μπορούμε να ανοίξουμε τον διακόπτη A και να κλείσουμε τον διακόπτη B για $T/4$ για να μεταφέρουμε την ενέργεια από το πηνίο στον 2ο πυκνωτή, της χωρητικότητας των $605\mu F$.

(α) Ο χρόνος που ο διακόπτης A είναι κλειστός: $t_A = \frac{T_A}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{\omega_A}\right) = \frac{1}{2}\pi\sqrt{LC_A} \Rightarrow$

$\Rightarrow t_A = \frac{1}{2}\pi\sqrt{(112H)(2420\times10^{-6}F)} \Rightarrow \boxed{t_A = 818 ms}$

Κατά το χρονικό διάστημα t_A μεταφέρεται ενέργεια 75.625 J στο πηνίο.

Ο χρόνος t_B που ο διακόπτης B είναι κλειστός και ο διακόπτης A ανοικτός είναι:

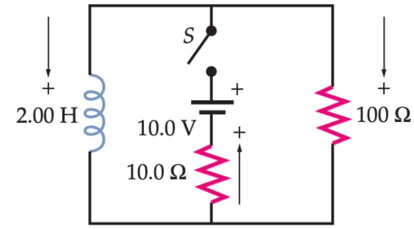
$t_B = \frac{1}{2}\pi\sqrt{LC_B} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{(112H)(605\mu F)} \Rightarrow \boxed{t_B = 409 ms}$

Κατόπιν, ο διακόπτης B ανοίγει για να διατηρηθεί το φορτίο στον 2ο πυκνωτή.

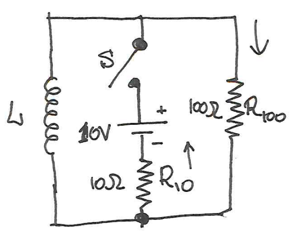
(β) Όταν ο δεύτερος πυκνωτής έχει ενέργεια 75.625 J το δυναμικό στα άκρα του είναι:

$V = \sqrt{2 \cdot E_C / C} = \sqrt{2 \cdot 75.625 J / 605 \cdot 10^{-6} F} \Rightarrow \boxed{V = 500V}$

6. Στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος, το πηνίο έχει αμελητέα εσωτερική ωμική αντίσταση και ο διακόπτης S είναι ανοικτός για μεγάλο χρονικό διάστημα. Ο διακόπτης κλείνει. (α) Βρείτε το ρεύμα στην μπαταρία, το ρεύμα στην αντίσταση των 100Ω και το ρεύμα στο πηνίο ακριβώς μετά το κλείσιμο του διακόπτη. (β) Βρείτε το ρεύμα στην μπαταρία, το ρεύμα στην αντίσταση των 100Ω και το ρεύμα στο πηνίο μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα αφότου έκλεισε ο διακόπτης. (γ) Βρείτε το ρεύμα στην μπαταρία, το ρεύμα στην αντίσταση των 100Ω και το ρεύμα στο πηνίο την στιγμή που ο διακόπτης ανοίγει. (δ) Βρείτε το ρεύμα στην μπαταρία, στην αντίσταση των 100Ω και στο πηνίο μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα αφότου έχει ανοίξει ο διακόπτης.



(α)



Ο διακόπτης ανοίγει. Το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο είναι $I_L = 0$, όπως συνέβαινε και πριν κλείσει ο διακόπτης.

Από τον 1° νόμο του kirchhoff, το ρεύμα της μπαταρίας, του πηνίου και της αντίστασης $R_{100\Omega}$ θα είναι:

$$I_{μπατ.} = I_L + I_{100\Omega} \Rightarrow I_{μπατ} = I_{100\text{-}\Omega} \quad (1)$$

Από τον 2° νόμο του kirchhoff στον βρόχο στο δεξί μέρος θα έχουμε:

$$\mathcal{E}_{μπατ} - I_{μπατ.} R_{10.0\Omega} - I_{R\text{-}100\Omega} \cdot (100\Omega) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \mathcal{E}_{μπατ} = I_{R100}(R_{10\Omega} + R_{100\Omega})$$

$$\Rightarrow I_{R\text{-}100} = \frac{\mathcal{E}}{R_{100} + R_{10}} = \frac{10.0V}{110\Omega} \Rightarrow \boxed{I_{R\text{-}100} = 90.9 mA}$$

(β) Μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα, τα ρεύματα είναι σταθερά και το πηνίο συμπεριφέρεται σαν βραχυκύκλωμα, και επομένως η διαφορά δυναμικού στα άκρα της αντίστασης $R_{100\Omega}$ είναι μηδέν. Από τον 2° νόμο του kirchhoff στον δεξί βρόχο:

$$\left.\begin{array}{l} -L\, dI_L/dt + I_{100\text{-}\Omega} R_{100} = 0 \\ \text{αλλά: } dI_L/dt = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{100\Omega} R_{100\Omega} = 0 \Rightarrow \boxed{I_{100\text{-}\Omega} = 0}$$

Επομένως στο δεξί βρόχο: $\mathcal{E} - I_{μπατ} \cdot (R_{10\Omega}) - I_{100\text{-}\Omega} R_{100\Omega} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 10V - I_{μπατ}(10\Omega) - 0 \cdot 100\Omega = 0 \Rightarrow I_{μπατ} = \frac{\mathcal{E}}{R_{10}} \Rightarrow \boxed{I_{μπατ} = 1.0A}$$

Από τον 1° νόμο των κόμβων θα έχουμε $I_{μπατ} = I_L + I_{100\text{-}\Omega} \Rightarrow 1.0A = I_L = 0 \Rightarrow$

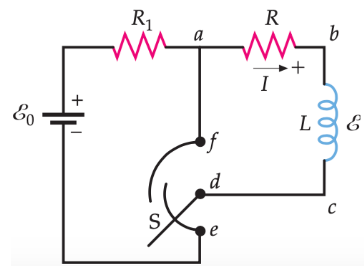
$$\Rightarrow \boxed{I_L = 1.0A}$$

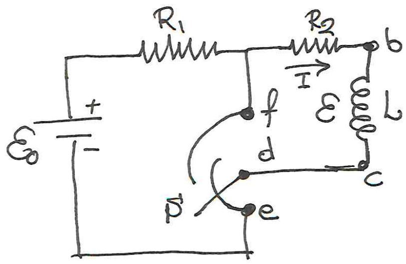
(γ) Όταν ο διακόπτης ανοίγει και πάλι, $I_{μπατ} = 0$ και το I_L αλλάζει συνεχώς, ενώ τη στιγμή που ανοίγει ο διακόπτης $I_L = 1.0A$. Από το νόμο των κόμβων:

$$I_{μπ} = I_L + I_{R\text{-}100\Omega} \Rightarrow 0 = 1A + I_{R\text{-}100} \Rightarrow \boxed{I_{R\text{-}100\Omega} = -1A}$$

(δ) Μεγάλο χρονικό διάστημα αφότου ανοίξει ο διακόπτης, τα ρεύματα είναι: $\underline{I_L = I_{μπατ} = I_{R\text{-}100} = 0}$

7. Ένα πηνίο, δύο αντιστάτες και ένας διακόπτης δύο θέσεων συνδέονται με μια μπαταρία όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ο διακόπτης βρίσκεται στη θέση *ε* για μεγάλο χρονικό διάστημα και το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο είναι 2.5A. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ο διακόπτης μετακινείται γρήγορα στη θέση f. Κατά τα επόμενα 45*ms* μετά την μετακίνηση του διακόπτη, το ρεύμα στο πηνίο ελαττώνεται στα 1.5A. (α) Ποια η σταθερά χρόνου του κυκλώματος; (β) Αν η αντίσταση R είναι 0.40 Ω, ποια είναι η τιμή της αυτεπαγωγής L του πηνίου;





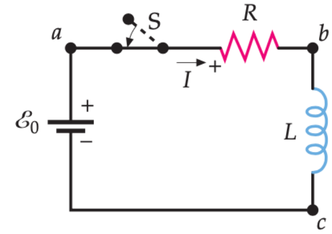
(α) Το ρεύμα αρχικά προκαλείται από το RL κύκλωμα χωρίς κάποια πηγή. Το ρεύμα δίνεται από τη σχέση: $I = I_0 e^{-t/\tau}$ όπου μπορούμε να λύσουμε ως προς τ: $\ln\frac{I}{I_0} = -t/\tau \Rightarrow \tau = -\frac{t}{\ln(I/I_0)} \Rightarrow$

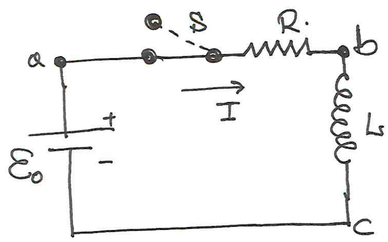
$$\Rightarrow \tau = -\frac{45ms}{\ln\left(\frac{1.5A}{2.5A}\right)} \Rightarrow \tau = 88.1ms \Rightarrow \boxed{\tau = 88ms}$$

(β) Ξέρουμε ότι $\tau = \frac{L}{R} \Rightarrow L = \tau R \Rightarrow L = 88.1 * 0.40\Omega \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{L \approx 35.2mH}$$

8. Στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος, έστω ότι η ηλεκτρεγεργετική δύναμη της μπαταρίας είναι $\mathcal{E}_0 = 12.0V$, η αντίσταση R είναι 3.00Ω και το πηνίο έχει αυτεπαγωγή L ίση με $0.60H$. Ο διακόπτης κλίνει την χρονική στιγμή $t = 0$. Για το χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = L/R$, βρείτε (α) την ενέργεια που προσφέρει η μπαταρία, (β) την ενέργεια που χάνεται στην αντίσταση και (γ) την ενέργεια που προσφέρεται στο πηνίο. <u>Υπόδειξη:</u> Βρείτε τους ρυθμούς μεταφοράς ενέργειας συναρτήσει του χρόνου και να ολοκληρώστε.





Το ρεύμα είναι: $I = I_f\left(1-e^{-t/\tau}\right)$

Αλλά $I_f = \frac{\mathcal{E}_0}{R} = \frac{12.0V}{3.0\Omega} \Rightarrow I_f = 4A$ $\Rightarrow$

$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.6H}{3.0\Omega} \Rightarrow \tau = 0.200s$

$\Rightarrow I = 4\left(1-e^{-t/0.2}\right) \Rightarrow \frac{dI}{dt} = (4.A)\left(-e^{-t/0.2s}\right)\left(-5.0\,s^{-1}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\frac{dI}{dt} = (20.A/s)\,e^{-t/0.2s}}$ (A)

(α) Ο ρυθμός που προσφέρεται ενέργεια από την μπαταρία είναι: $P = \mathcal{E}_0 \cdot I \Rightarrow$

$\Rightarrow P(t) = (12.0V)(4.0A)\left(1-e^{-t/0.2}\right) \Rightarrow P(t) = 48W\left(1-e^{-t/0.2s}\right)$

Για $t = 0.500s$ θα έχουμε: $P(0.5s) = 48.W\left(1-e^{0.5/0.2}\right) \Rightarrow \boxed{P(0.5s) = 44.1W}$

(β) Ο ρυθμός κατανάλωσης ενέργειας στην αντίσταση θα είναι:

$P_R = I^2R = \left[(4.0A)\left(1-e^{-t/0.2s}\right)\right]^2 R \Rightarrow P_R(t) = (48.0W)\left[1-e^{-t/0.2s}\right]^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow P_R(t=0.5s) = 48.0\left(1-e^{-0.5/0.2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{P_R(t=0.5s) = 40.4W}$

(γ) Από την ενέργεια που αποθηκεύεται σε ένα πηνίο $U_L = \frac{1}{2}LI^2$ μπορούμε να βρούμε τον ρυθμό αποθήκευσης ενέργειας: $\frac{dU_L}{dt} = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{2}LI\frac{dI}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$

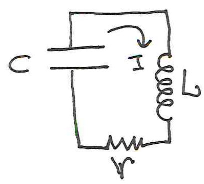
Από την (A) αντικατάσταση, θα δώσει: $\frac{dU_L}{dt} = (0.6H)(4.0A)\left(1-e^{-t/0.2s}\right)(20.A)\,e^{-t/0.2s}$

$\Rightarrow \frac{dU_L}{dt} = (48.0W)\left(1-e^{-t/0.2s}\right)e^{-t/0.2s} \Rightarrow \frac{dU_L}{dt}(t=0.5s) = (48W)\left(1-e^{-0.5/0.2}\right)e^{-0.5/0.2} = 3.62W$

9. Ένα πηνίο με εσωτερική αντίσταση μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας αντιστάτης και ένα ιδανικό πηνίο σε σειρά. Υποθέστε ότι το πηνίο έχει εσωτερική αντίσταση 1.0Ω και αυτεπαγωγή $400 mH$. Ένας πυκνωτής $2.0 \mu F$ φορτίζεται σε $24.0 V$ και συνδέεται στα άκρα του πηνίου. (α) Ποια είναι αρχικά η τάση στα άκρα του πηνίου; (β) Πόση ενέργεια χάνεται στο κύκλωμα πριν σβήσουν οι ταλαντώσεις που προκαλούνται; (γ) Ποια είναι η συχνότητα των ταλαντώσεων στο κύκλωμα; (Υποθέστε ότι η εσωτερική αντίσταση είναι αρκετά μικρή ώστε να μην επηρεάζει τη συχνότητα ταλαντώσεων). (δ) Ποιος ο παράγοντας ποιότητας του κυκλώματος;

(α) Εφαρμόζουμε τον 2ο κανόνα του Kirchhoff για να βρούμε την αρχική τάση στα άκρα του πηνίου.

$$V_c - L\frac{dI}{dt} - Ir = 0 \Rightarrow 24.0V = L\frac{dI}{dt} + Ir$$



Αρχικά το πηνίο συμπεριφέρεται σαν διακόπτης και επομένως η τάση στα άκρα του πηνίου θα είναι ίδια με του πυκνωτή: 24V.

(β) Η ενέργεια του πυκνωτή θα είναι: $U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(2.0\mu F)(24V)^2 \Rightarrow \underline{U = 0.576 mJ}$

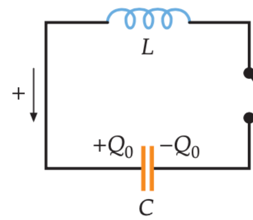
Η ενέργεια αυτή καταναλώνεται ως θερμότητα στην αντίσταση του πηνίου.

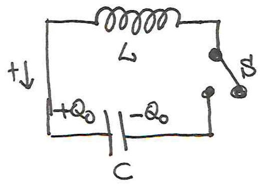
(γ) Η ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος είναι: $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(400mH)(2.0\mu F)}} \Rightarrow \boxed{f = 178 Hz}$

(δ) Ο παράγοντας ποιότητας θα είναι: $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}L}{R} = \frac{1}{R}\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{C}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{1.0\Omega}\sqrt{\frac{400mH}{2.0\mu F}} \Rightarrow \underline{\underline{Q = 447}}$$

10. Ένα πηνίο και ένας πυκνωτής συνδέεονται όπως στο κύκλωμα του σχήματος. Αρχικά ο διακόπτης είναι ανοικτός και ο αριστερός οπλισμός του πυκνωτή έχει φορτίο Q_0. Κατόπιν ο διακόπτης κλείνει. (α) Κάντε το γράφημα του φορτίου Q ως προς τον χρόνο t και του ρεύματος I ως προς τον χρόνο t στο ίδιο γράφημα και εξηγήστε με βάση το γράφημα αυτό πως το ρεύμα προηγείται σε φάση του φορτίου κατά 90°. (β) Με βάση τις εξισώσεις που περιγράφουν το φορτίο και το ρεύμα, $Q = Q_0 cos\omega t$ και $I = -I_o sin\omega t$ αντίστοιχα, αποδείξτε χρησιμοποιώντας τριγωνομετρία και άλγεβρα ότι το ρεύμα προηγείται του φορτίου κατά 90°.





Έστω Q το στιγμιαίο φορτίο στον πυκνωτή.
Χρησιμοποιούμε τον 2ο κανόνα του Kirchhoff για να έχουμε την διαφορική εξίσωση του κυκλώματος.

$$\frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = 0$$

Η λύση στην εξίσωση αυτή είναι: $Q(t) = Q_0\cos(\omega t - \delta)$ με $\omega = 1/\sqrt{LC}$

Από τις αρχικές συνθήκες, για $t=0$ $Q=Q_0$ οπότε: $\cancel{Q_0} = \cancel{Q_0}\cos(\omega 0 - \delta) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos\delta = 1 \Rightarrow \delta = 0$$

Επομένως το φορτίο γράφεται: $\boxed{Q = Q_0\cos\omega t}$ (1)

Το ρεύμα θα είναι: $I = \frac{dQ}{dt} = Q_0\frac{d}{dt}(\cos\omega t) \Rightarrow \boxed{I = -Q_0\omega\sin\omega t}$ (2)

(α) Το γράφημα μπορούμε να το κάνουμε με Python και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα όπως και ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε.

(β) Η εξίσωση για το ρεύμα: $I = -\omega Q_0\sin\omega t = \omega Q_0\cos(\omega t + \pi/2)$ επομένως το ρεύμα προηγείται του φορτίου κατά 90°, όπως φαίνεται και από το γράφημα.

```
#!/usr/bin/python3
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
time=[0.001*k for k in range(10001)]
omega=2*np.pi/9
Q=[np.cos(omega*t) for t in time]
I=[-omega*np.sin(omega*t) for t in time]
plt.figure(figsize=(6,4))
plt.plot(time,Q,'b-')
plt.plot(time,I,'r--')
plt.xlabel('time(s)')
plt.ylabel('Q (mC)/ I (mA)')
plt.ylim(-1.2,1.2)
plt.xlim(0,10)
plt.text(3.0,0.70,'Charge')
plt.text(3.0,0.50,'Current')
plt.hlines(0.75,2.4,2.9,color='blue',linestyle='solid')
plt.hlines(0.55,2.4,2.9,color='red',linestyle='dashed')
plt.grid(True)
plt.show()
```