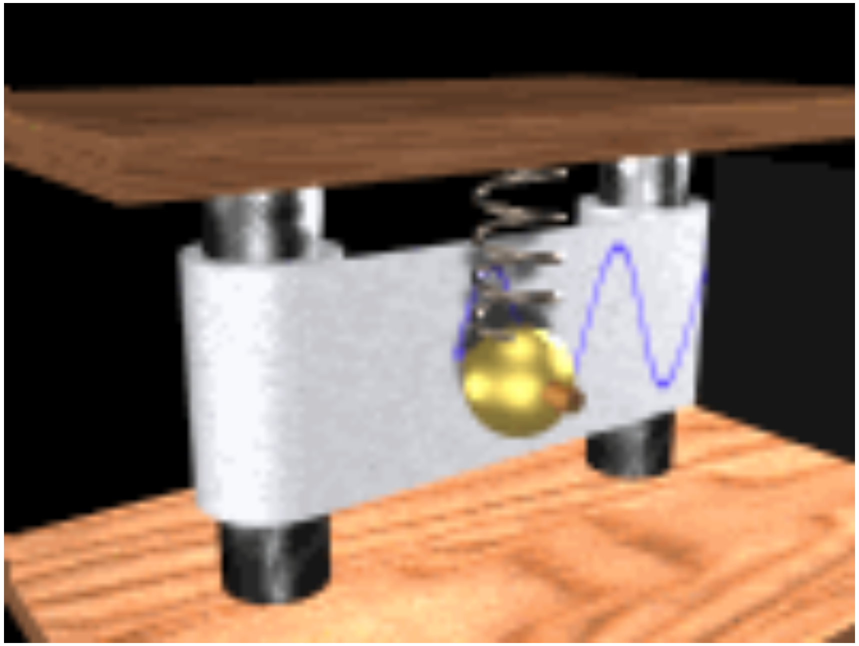
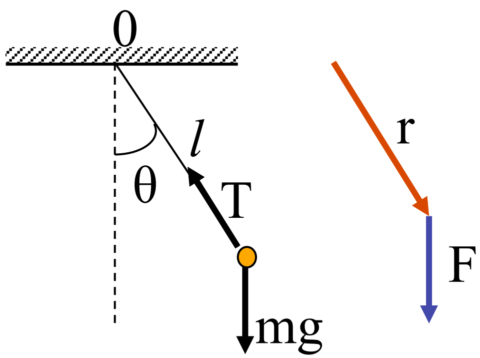
Αρμονικοί ταλαντωτές



Εκκρεμή - Απλό εκκρεμές



$$\left.\begin{array}{l}\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}=-mgl\sin\theta \\ \vec{\tau}=I\vec{\alpha}, \quad \mathrm{I}=Ml^2\end{array}\right\}\Rightarrow Ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}=-Mgl\sin\theta\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\theta\Rightarrow\boxed{\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\sin\theta}$$ Διαφορική εξίσωση

Αυτή η εξίσωση είναι δύσκολο να λυθεί. Δεν μοιάζει με τη γνωστή εξίσωση

Για μικρές γωνίες θ μπορούμε όμως να γράψουμε $\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}+\cdots\approx\theta$

Επομένως η διαφορική εξίσωση γίνεται: $\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\theta$ Δ.Ε. αρμονικού ταλαντωτή

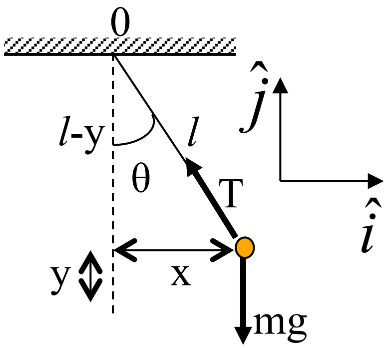
Άρα η λύση είναι: $\theta(t)=A\cos(\omega\, t+\varphi)$ όπου: $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$

Προσοχή στην ορολογία: Το ω δεν είναι η γωνιακή ταχύτητα, αλλά η γωνιακή συχνότητα:

$$\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\Rightarrow\mathrm{T}=\frac{2\pi}{\omega}\Rightarrow\boxed{\mathrm{T}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Ανεξάρτητο της μάζας

Απλό εκκρεμές – Με το 2° νόμο του Newton



Η δύναμη του νήματος Τ στη μάζα m γράφεται:

$$\vec{T} = (-T\sin\theta)\hat{i} + (T\cos\theta)\hat{j}$$

Το βάρος είναι: $\vec{w} = (-mg)\hat{j}$

Επομένως στον y-άξονα η συνισταμένη δύναμη είναι:

$$\sum F_y = ma_y = (-mg + T\cos\theta) \Rightarrow -mg + T\cos\theta = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

Αλλά γεωμετρικά: $\cos\theta = \frac{l-y}{l}$ $\boxed{-mg + T\frac{l-y}{l} = m\frac{d^2y}{dt^2}}$

Στη x-διεύθυνση: $\sum F_x = ma_x = T\sin\theta \Rightarrow T\sin\theta = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \boxed{T\frac{x}{l} = m\frac{d^2x}{dt^2}}$

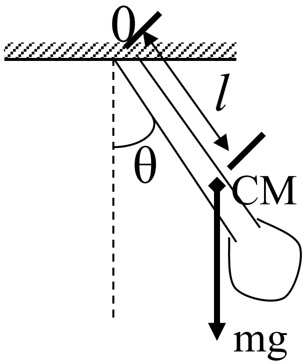
Για μικρές γωνίες εκτροπής θ, η κατακόρυφη κίνηση είναι αμελητέα συγκριτικά με την οριζόντια και μπορούμε να αγνοήσουμε την d^2y/dt^2

Ακόμα για μικρές γωνίες y << l και επομένως: $\cos\theta = {}^{l-y}\!/_{l} \approx 1$

Η εξίσωση στην y-διεύθυνση γίνεται: $-mg + T \approx 0 \Rightarrow T \approx mg$

Στη x-διεύθυνση έχουμε: $-mg\frac{x}{l} = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0$ Δ.Ε. αρμονικού ταλαντωτή

Εκκρεμή - Φυσικό εκκρεμές



$$\vec{\tau} = -mgl\sin\theta = \mathrm{I}\frac{d^2\theta}{dt^2} = I\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{mgl}{I}\sin\theta$$

για μικρό θ: sinθ~θ ➔ $\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{mgl}{I}\theta}$

Επομένως εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή. Η λύση γνωστή

Η γωνιακή συχνότητα, ω, στην περίπτωση αυτή είναι:

$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}}$ ενώ πριν είχαμε βρει μόνο: $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

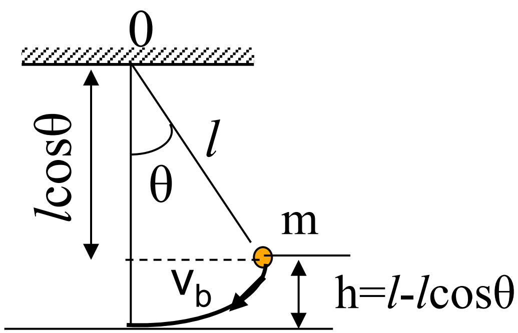
Επομένως η περίοδος είναι διαφορετική μεταξύ απλού και φυσικού. Πόσο?

Για ένα μέτρο μήκος εκκρεμούς αλλάζει σε σχέση με το φυσικό κατά ~2%

Τα περισσότερα ρολόγια έχουν περίοδο 2 sec.

Ενέργεια εκκρεμούς

Θεωρήστε την ενέργεια του εκκρεμούς:



Η δυναμική ενέργεια θεωρώντας σαν επίπεδο μηδενικού δυναμικού (U=0) το χαμηλότερο σημείο:

$$U = mgh = mgl(1-\cos\theta)$$

Παίρνοντας και πάλι το ανάπτυγμα Taylor έχουμε:

$$\cos\theta \cong 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \cdots$$

Επομένως το δυναμικό γράφεται: $U = \frac{1}{2}mgl\theta^2$

Η εξίσωση της τροχιάς είναι $\theta(t) = \theta_{\max}\cos(\omega t + \varphi)$

Άρα $U = \frac{1}{2}mgl\theta_{\max}^2\cos^2(\omega t + \varphi)$

Ποιο το ω? $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow \omega^2 l = g$

ταχύτητα? $\upsilon_b = l\frac{d\theta}{dt}$

Κινητική ενέργεια? $E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}ml^2\omega^2\theta_{\max}^2\sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}mgl\theta_{\max}^2\sin^2(\omega t + \varphi)$

Ολική Ενέργεια: $E = U + E_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow E = \frac{1}{2}mgl\theta_{\max}^2$

Παράδειγμα

Ένα εκκρεμές μήκους 15m ξεκινά με ταχύτητα υ_0=3.9m/s, θ=10°
Ποιο το πλάτος της ταλάντωσης;

Λύση

θ=10° επομένως μικρό

$$E \approx \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 = \frac{1}{2}mgl\theta_{\max}^2 \Rightarrow$$

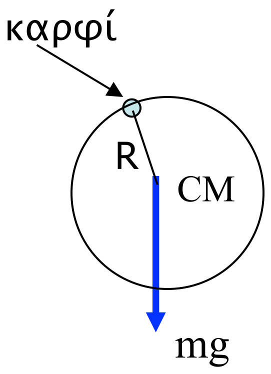
$$\theta_{\max}^2 = \frac{2E}{mgl} = \frac{\upsilon^2}{gl} + \theta^2$$

Απλή αντικατάσταση:

$$\theta_{\max}^2 = \frac{(3.9)^2}{(9.8)(15)} + (10\pi/180)^2 \Rightarrow \theta_{\max}^2 = 0.13 \Rightarrow \theta_{\max} = 0.37\alpha\kappa\tau\iota\nu\iota\alpha$$

Παράδειγμα φυσικού εκκρεμούς

Ένα στεφάνι ακτίνας 30cm κρέμεται από ένα καρφί. Ποια η συχνότητα των ταλαντώσεών του



Το στεφάνι καθώς ταλαντώνεται γύρω από το καρφί αποτελεί ένα φυσικό εκκρεμές.

Ξέρουμε ότι η γωνιακή συχνότητα του φυσικού εκκρεμούς δίνεται από

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgd}{I_{\kappa\alpha\rho\varphi\iota}}}, \qquad d = R$$

$$I_{\kappa\alpha\rho\varphi\iota} = I_{CM} + MR^2 \Rightarrow I_{\kappa\alpha\rho\varphi\iota} = MR^2 + MR^2 \Rightarrow I_{\kappa\alpha\rho\varphi\iota} = 2MR^2$$

Οπότε

$$\omega = \sqrt{\frac{MgR}{2MR^2}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{2R}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{9.8}{2\times 0.3}} \Rightarrow \omega = 4.04$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = 0.64\,Hz$$

Φθίνουσες ταλαντώσεις

- Οι περισσότερες ταλαντώσεις στη φύση εξασθενούν (φθίνουν) γιατί χάνεται ενέργεια.
- Φανταστείτε ένα σύστημα κάτω από μια δύναμη αντίστασης της μορφής

$$F = -b\upsilon \equiv -b\dot{x}$$

  Αυτή η δύναμη δρα επιπλέον της δύναμης επαναφοράς του ελατηρίου

- Κοιτάμε τέτοιες δυνάμεις επειδή:
  - Είναι λογικό να 'χουμε τέτοια συμπεριφορά δύναμης
  - Μπορούμε να λύσουμε ακριβώς την εξίσωση για x(t)

$$F = ma \Rightarrow -Kx - b\dot{x} = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (1)$$

όπου $\gamma \equiv \dfrac{b}{2m}$ και $\omega_0^2 \equiv \dfrac{K}{m}$ ← φυσική συχνότητα συστήματος

- Μαντεύουμε μια λύση της μορφής $x(t) = Ae^{at}$ και αντικαθιστούμε:

$$(1) \Rightarrow a^2 Ae^{at} + 2\gamma a Ae^{at} + \omega_0^2 Ae^{at} = 0 \Rightarrow a^2 + 2\gamma a + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow$$

$$a = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

⇒ Τρεις περιπτώσεις ανάλογα με την τιμή της διακρίνουσας

Φθίνουσες ταλαντώσεις – Μικρή απόσβεση ($\gamma<\omega_0$)

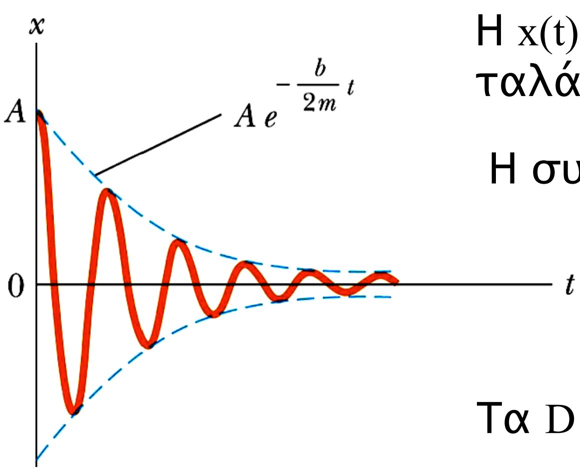
Ορίζουμε $\Omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ επομένως $a \equiv -\gamma \pm i\Omega$

Έχουμε έτσι δύο λύσεις: $x(t) = Ae^{-\gamma t + i\Omega}$ και $x(t) = Ae^{-\gamma t - i\Omega}$

- Από τη στιγμή που η εξίσωση είναι γραμμική ως προς x το άθροισμα των παραπάνω λύσεων θα είναι επίσης λύση.
- Μια και λέμε ότι κάνουμε φυσική, η εξίσωση θέσης, x(t), πρέπει να 'ναι πραγματική και όχι μιγαδική.

Άρα οι 2 λύσεις πρέπει να 'ναι συζυγείς μιγαδικοί: $A = B^* \equiv Ce^{i\varphi t}$

$$x(t) = Ce^{-\gamma t}\left(e^{i(\Omega t+\varphi)} + e^{-i(\Omega t+\varphi)}\right) = De^{-\gamma t}\cos\left(\Omega t + \varphi\right)$$



Η x(t) μοιάζει με μια συνημιτονοειδή συνάρτηση ταλάντωσης μέσα σε μια $e^{-\gamma t}$ εκθετικά φθίνουσα συνάρτηση

Η συχνότητα ταλάντωσης είναι:

$$\Omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{K}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

παράδειγμα

Τα D και φ της x(t) καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες

Φθίνουσες ταλαντώσεις – Μεγάλη απόσβεση ($\gamma > \omega_0$)

Ορίζουμε $\Omega \equiv \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ επομένως $a \equiv -\gamma \pm \Omega$

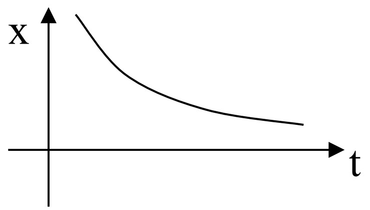
Η γενική λύση στην περίπτωση αυτή είναι $\boxed{x(t) = \mathrm{A}e^{-(\gamma+\Omega)\,t} + \mathrm{B}e^{-(\gamma-\Omega)t}}$

και προφανώς πραγματική.

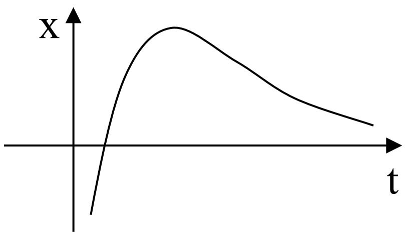
Αρνητικό εκθετικό

Δεν υπάρχει κίνηση ταλάντωσης στην περίπτωση αυτή.

x(t) μοιάζει όπως τα παρακάτω σχήματα



ή



Σημειώστε ότι $\gamma + \Omega > \gamma - \Omega \Rightarrow$ για μεγάλα t, x(t) μοιάζει με $x(t) \approx Be^{-(\gamma-\Omega)t}$

αφού ο πρώτος όρος $x(t) = \mathrm{A}e^{-(\gamma+\Omega)\,t}$ είναι ακόμα πιο μικρός

Για μεγάλα γ, $\gamma - \Omega$ είναι πολύ μικρό και το x πηγαίνει στο 0 αργά

γιατί $\gamma - \Omega = \gamma - \gamma\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}} \approx \gamma - \gamma\left(1 - \frac{\omega_0^2}{2\gamma^2}\right) = \frac{\omega_0^2}{2\gamma} =$ μικρό

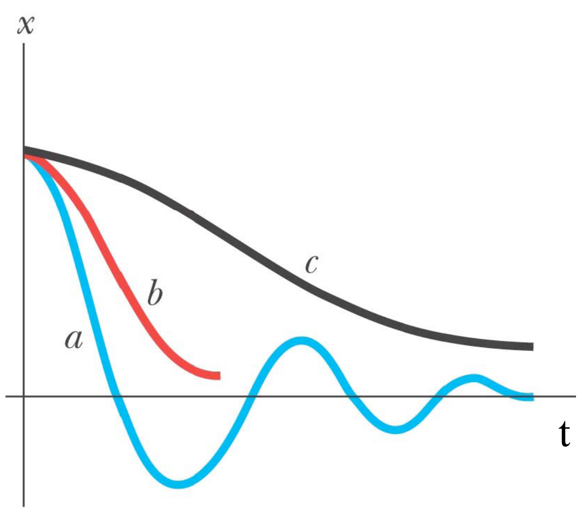
Φθίνουσες ταλαντώσεις – Κριτική απόσβεση ($\gamma=\omega_0$)

- Στην περίπτωση αυτή, $a=-\gamma\pm 0$, και επομένως έχουμε μόνο μια λύση της Δ.Ε
  - Είναι η περίπτωση που η στρατηγική του να δοκιμάζουμε μια εκθετική λύση για την επίλυση Δ.Ε. δεν δουλεύει.
- Μια άλλη λύση βγαίνει τελικά ότι είναι της μορφής $x(t)=Bte^{-\gamma t}$
- Προσθέτοντάς την στην προηγούμενη γενική λύση έχουμε:

$$\boxed{x(t)=Ae^{-\gamma t}+Bte^{-\gamma t}\Rightarrow x(t)=e^{-\gamma t}(A+Bt)}$$

Ο όρος $e^{-\gamma t}$ υπερισχύει του όρου Bt και για μεγάλα t το x→0 κατά $e^{-\gamma t}$

- Η κριτική απόσβεση επαναφέρει το x στο μηδέν γρηγορότερα απ' όλες τις διεργασίες απόσβεσης.



- Για πολύ μεγάλα γ, η μεγάλη απόσβεση πηγαίνει στο $x=0$ πολύ αργά (καμπύλη c)
- Για πολύ μικρά γ, η μικρή απόσβεση πηγαίνει στο $x=0$ πολύ αργά (καμπύλη α)
- Για $\gamma=\omega_0$, κριτική απόσβεση πηγαίνει στο $x=0$ γρηγορότερα (καμπύλη b)