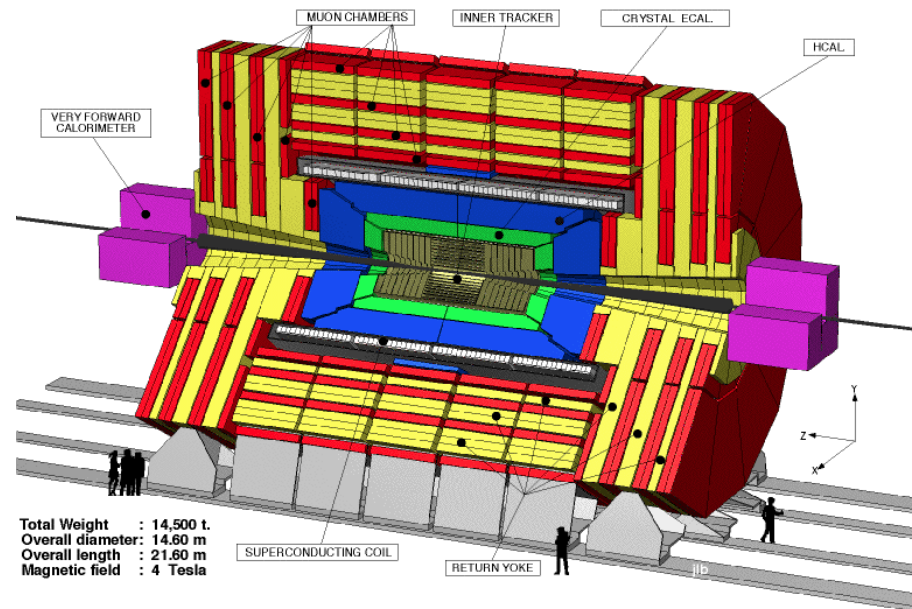
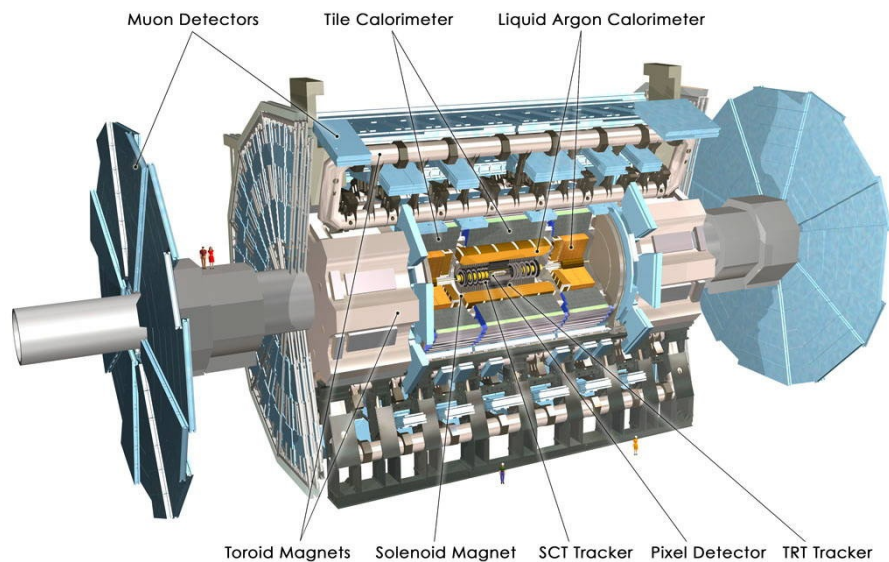


Αλληλεπιδράσεις σωματιδίων με την ύλη και απώλεια ενέργειας dE/dx



Μήκος εξασθένισης και ενεργός διατομή

- Αν υπάρχουν N σωματίδια στην δέσμη τα οποία διαπερνούν ένα στόχο πάχους dx πυκνότητας ρ και η ενεργός διατομή σκέδασης είναι σ , η αλλαγή στον αριθμό των σωματιδίων της δέσμης λόγω της αλληλεπίδρασής τους με το στόχο, είναι:

$$dN = -N\sigma\rho dx$$

- Επομένως μπορούμε να γράψουμε $\frac{dN}{N} = -\sigma\rho dx$ και ολοκληρώνουμε τα δυο μέλη

$$\ln N = -\sigma\rho x + C \Rightarrow N(x) = N_0 e^{-\sigma\rho x} \Rightarrow N(x) = N_0 e^{-x/\lambda}$$

- όπου ορίζουμε σαν **μήκος εξασθένισης ή μέση ελεύθερη διαδρομή** την ποσότητα:
- $$\lambda = \frac{1}{\rho\sigma}$$

- Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε: $\lambda\rho\sigma = 1$

- Το μήκος εξασθένισης μετράται σε cm όταν ρ μετράται σε άτομα/cm³ και σ σε cm²

$$\rho = \frac{\text{atoms}}{\text{cm}^3} = \frac{\text{atoms}}{\text{mole}} \frac{\text{mole}}{\text{gr}} \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} = 6.02 \times 10^{23} \frac{1}{A} \rho_{\text{gr/cm}^3} \quad \sigma = \text{cm}^2 = 10^{-24} \text{cm}^2 \sigma_{\text{barns}}$$

$$\sigma\rho = \left(6.02 \times 10^{23} \frac{\rho_{\text{gr/cm}^3}}{A} \right) \left(10^{-24} \text{cm}^2 \sigma_{\text{barns}} \right) = 0.602 \frac{\sigma_{\text{barns}} \rho_{\text{gr/cm}^3}}{A} \Rightarrow \lambda_{\text{cm}} = \frac{A}{0.602 \sigma_{\text{barns}} \rho_{\text{gr/cm}^3}}$$

Μήκος εξασθένισης και ενεργός διατομή

- Αν πολλαπλασιάσουμε το λ σε cm με την πυκνότητα σε gr/cm^3 , παίρνουμε μια ποσότητα η οποία μετράται σε gr/cm^2
- Έστω η ποσότητα αυτή $\lambda_{\text{gr/cm}^2}$ ενώ η αρχική ποσότητα είναι λ_{cm}
- Παρόλο που οι μονάδες δεν είναι αυτές μήκους, καλούμε την ποσότητα αυτή μήκος εξασθένισης

$$\lambda_{\text{gr/cm}^2} = \lambda_{\text{cm}} \rho_{\text{gr/cm}^3} = \frac{A}{0.602 \sigma_{\text{barns}} \rho_{\text{g/cm}^3}} \rho_{\text{g/cm}^3} = \frac{A}{0.602 \sigma_{\text{barns}}}$$

- Στις μονάδες αυτές, η πυκνότητα του υλικού απαλείφεται
- Πυρηνική φυσική και πειράματα σκέδασης ηλεκτρονίων μας λένε ότι οι πυρήνες δρουν σαν σφαίρες με πυκνότητα ανεξάρτητη του πυρηνικού αριθμού B
- Η πυρηνική ακτίνα αυξάνει σαν $B^{1/3}$ ενώ η επιφάνεια του πυρήνα αυξάνει κατά το παράγοντα $B^{2/3}$ όπου $B \sim A$.
- Αν η ενεργός διατομή για κάθε νουκλεόνιο είναι 30mb (ακτίνα 1fm), και η ενεργός διατομή για κάθε πυρήνα είναι αυτή του νουκλεονίου επί $A^{2/3}$ τότε

$$\lambda_{\text{gr/cm}^2} = \frac{A}{0.602 (30 \times 10^{-3} A^{2/3})} = 55.4 A^{1/3}$$

- Η σχέση δίνει τάξη μεγέθους και εξάρτηση από A

Μήκος εξασθένισης και ενεργός διατομή

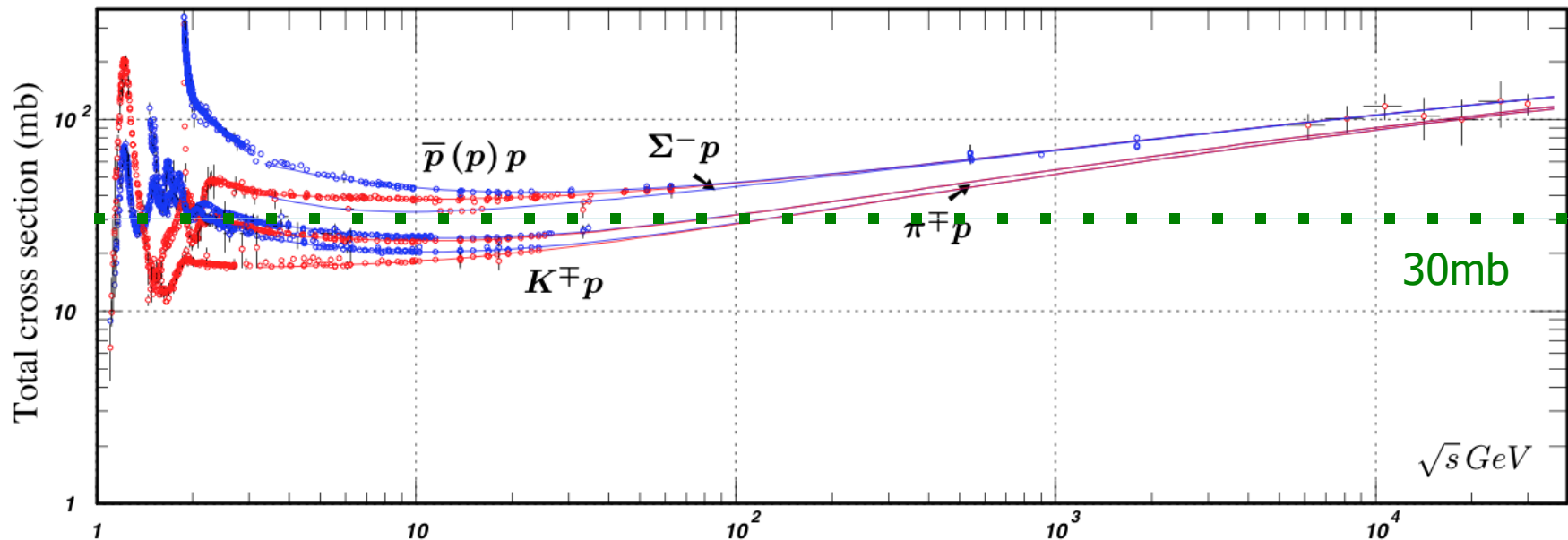
- ❑ Οι ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις με τους πυρήνες τείνουν να είναι ανάλογες του Z^2 . Για τα μέσα στοιχεία έχουμε $A \sim B \sim 2Z$
- ❑ Αν η ενεργός διατομή για κάθε νουκλεόνιο είναι $30\text{mb} \times Z^2$, και $A \sim 2Z$ τότε

$$\lambda_{gr/cm^2} = \frac{2Z}{0.602(30 \times 10^{-3} Z^2)} = \frac{111}{Z}$$

- ❑ Υπάρχει επομένως μια εξάρτηση της μορφής $1/Z$

Ενεργός διατομή σκέδασης αδρονίων

- Μερικά GeV πάνω από την ενέργεια του κέντρου μάζας, \sqrt{s} , η ολική ενεργός διατομή για αλληλεπιδράσεις αδρονίων - αδρονίων είναι μεταξύ 20 και 100 mb
- Οι τιμές αυτές των ενεργών διατομών δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερη εξάρτηση από το είδος των αδρονίων που συμμετέχουν στην σκέδαση



Ορισμοί

- **Μήκος πυρηνικής αλληλεπίδρασης, λ_i** , σημαίνει αλληλεπίδραση που καταστρέφει το αρχικό αδρόνιο δημιουργώντας ένα νέο, μικρότερης ενέργειας.
 - Αντιστοιχεί στο μέσο μήκος διαδρομής που απαιτείται για να ελλατωθεί ο αριθμός των σχετικιστικών φορτισμένων σωματιδίων, N_0 , κατά ένα παράγοντα $1/e$ ή 0.368 , καθώς περνούν μέσα από το υλικό $N(x) = N_0 e^{-x/\lambda}$
 - Για ένα αδρόνιο, είναι η μέση απόσταση που διανύει πριν αλληλεπιδράσει μέσω ανελαστικής σκέδασης με πυρήνα
- **Μήκος πυρηνικής σύγκρουσης, λ_T** , περιέχει αλληλεπιδράσεις οι οποίες αλλάζουν μόνο την διεύθυνση του αδρονίου χωρίς την απώλεια μεγάλης ενέργειας. Το μήκος αυτό είναι μικρότερο από αυτό του μήκους αλληλεπίδρασης
- **Μήκος ακτινοβολίας, X_0** , σχετίζεται αλλά όχι ακριβώς ίδιο, με το μήκος αλληλεπίδρασης των φωτονίων σε υψηλές ενέργειες.
 - Αναφέρεται στο μήκος στο οποίο η ενέργεια του ηλεκτρονίου/ποζιτρονίου πέφτει στο $1/e$ της αρχικής
 - Το μήκος ακτινοβολίας των φωτονίων είναι στην πραγματικότητα $9/7 X_0$ με X_0 αυτό που αντιστοιχεί σε ηλεκτρόνιο
- Οι επόμενοι πίνακες δίνουν τιμές των παραπάνω μεγεθών για διάφορα υλικά
 - Οι πίνακες από το particle data group PDG

Ατομικά και πυρηνικά χαρακτηριστικά υλικών

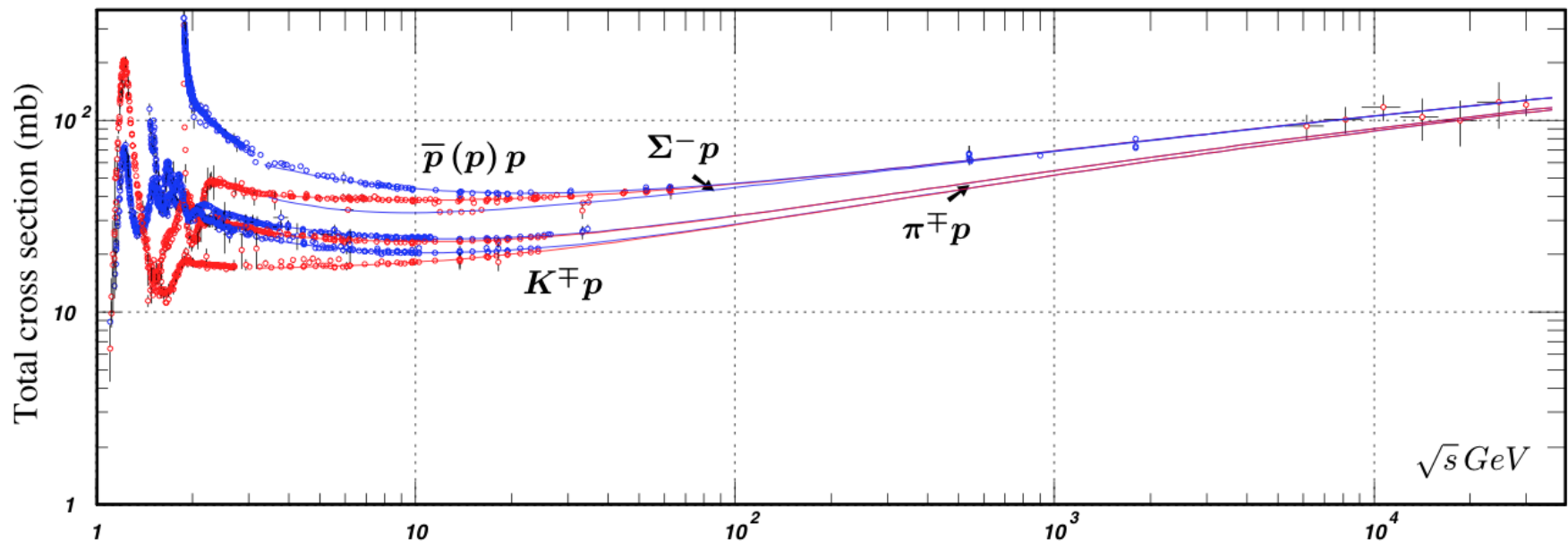
Material	Z	A	$\langle Z/A \rangle$	Nucl.coll. length λ_T {g cm ⁻² }	Nucl.inter. length λ_I {g cm ⁻² }	Rad.len. X_0 {g cm ⁻² }	$dE/dx _{min}$ { MeV g ⁻¹ cm ² }	Density {g cm ⁻³ } ({gℓ ⁻¹ })
H ₂	1	1.00794(7)	0.99212	42.8	52.0	63.04	(4.103)	0.071(0.084)
D ₂	1	2.01410177803(8)	0.49650	51.3	71.8	125.97	(2.053)	0.169(0.168)
He	2	4.002602(2)	0.49967	51.8	71.0	94.32	(1.937)	0.125(0.166)
Li	3	6.941(2)	0.43221	52.2	71.3	82.78	1.639	0.534
Be	4	9.012182(3)	0.44384	55.3	77.8	65.19	1.595	1.848
C diamond	6	12.0107(8)	0.49955	59.2	85.8	42.70	1.725	3.520
C graphite	6	12.0107(8)	0.49955	59.2	85.8	42.70	1.742	2.210
N ₂	7	14.0067(2)	0.49976	61.1	89.7	37.99	(1.825)	0.807(1.165)
O ₂	8	15.9994(3)	0.50002	61.3	90.2	34.24	(1.801)	1.141(1.332)
F ₂	9	18.9984032(5)	0.47372	65.0	97.4	32.93	(1.676)	1.507(1.580)
Ne	10	20.1797(6)	0.49555	65.7	99.0	28.93	(1.724)	1.204(0.839)
Al	13	26.9815386(8)	0.48181	69.7	107.2	24.01	1.615	2.699
Si	14	28.0855(3)	0.49848	70.2	108.4	21.82	1.664	2.329
Cl ₂	17	35.453(2)	0.47951	73.8	115.7	19.28	(1.630)	1.574(2.980)
Ar	18	39.948(1)	0.45059	75.7	119.7	19.55	(1.519)	1.396(1.662)
Ti	22	47.867(1)	0.45961	78.8	126.2	16.16	1.477	4.540
Fe	26	55.845(2)	0.46557	81.7	132.1	13.84	1.451	7.874
Cu	29	63.546(3)	0.45636	84.2	137.3	12.86	1.403	8.960
Ge	32	72.64(1)	0.44053	86.9	143.0	12.25	1.370	5.323
Sn	50	118.710(7)	0.42119	98.2	166.7	8.82	1.263	7.310
Xe	54	131.293(6)	0.41129	100.8	172.1	8.48	(1.255)	2.953(5.483)
W	74	183.84(1)	0.40252	110.4	191.9	6.76	1.145	19.300
Pt	78	195.084(9)	0.39983	112.2	195.7	6.54	1.128	21.450
Au	79	196.966569(4)	0.40108	112.5	196.3	6.46	1.134	19.320
Pb	82	207.2(1)	0.39575	114.1	199.6	6.37	1.122	11.350
U	92	[238.02891(3)]	0.38651	118.6	209.0	6.00	1.081	18.950
Air (dry, 1 atm)			0.49919	61.3	90.1	36.62	(1.815)	(1.205)
Shielding concrete			0.50274	65.1	97.5	26.57	1.711	2.300
Borosilicate glass (Pyrex)			0.49707	64.6	96.5	28.17	1.696	2.230
Lead glass			0.42101	95.9	158.0	7.87	1.255	6.220
Standard rock			0.50000	66.8	101.3	26.54	1.688	2.650

Αλληλεπιδράσεις νουκλεονίων-νουκλεονίων

- ❑ Οι ισχυρές (πυρηνικές) αλληλεπιδράσεις συμπεριφέρονται σαν να υπάρχουν σκεδάσεις μεταξύ δυο νουκλεονίων ακτίνας $\sim 1\text{fm}$ και σταθερής πυρηνικής πυκνότητας
- ❑ Η ενεργός διατομή είναι σταθερή, $\sim 30\text{mb}$, με την ενέργεια των προσπίπτοντων νουκλεονίων και ανεξάρτητη του είδους τους (πέρα από κάποια τιμή E_{cm})
- ❑ Από το πίνακα παρατηρούμε ότι μήκος πυρηνικών αλληλεπιδράσεων γίνεται **μεγαλύτερο** για στοιχεία με μεγαλύτερο B (αυτο-θωράκιση ή προστασία)
- ❑ Η ενεργός διατομή ανά νουκλεόνιο (30mb) είναι σχεδόν η ίδια και για το μήκος ακτινοβολίας για υλικά χαμηλού Z (είναι **απλή σύμπτωση**)
- ❑ Το μήκος ακτινοβολίας, χ_0 , γίνεται **πολύ μικρότερο** καθώς το Z του υλικού αυξάνει.
 - Η ελάττωση αυτή ωστόσο δεν ακολουθεί το θεωρητικό μοντέλο γιατί στο μοντέλο αγνοείται θωράκιση από τα ηλεκτρόνια εσωτερικών ενεργειακών στοιβάδων

Ισχυρές αλληλεπιδράσεις σε χαμηλές ενέργειες

- ❑ Οι ισχυρές πυρηνικές αλληλεπιδράσεις είναι ιδιαίτερα πολύπλοκες σε χαμηλές ενέργειες.
- ❑ Οι διεργασίες κυριαρχούνται από την παραγωγή και σχεδόν άμεση διάσπαση σωματιδίων συντονισμών (εξαιρετικά σύντομου χρόνου ζωής δέσμιων καταστάσεων των quarks).
- ❑ Το είδος των quark που συμμετέχουν στη δέσμια κατάσταση καθώς και η διαθέσιμη ενέργεια είναι σημαντικά για τα φαινόμενα στις χαμηλές ενέργειες



Αλληλεπιδράσεις φωτονίων σε χαμηλές ενέργειες

- ❑ Σε υψηλές ενέργειες, η κύρια διεργασία που διέπει αλληλεπιδράσεις φωτονίων με ύλη είναι αυτή της δίδυμης γέννησης e^-e^+ στο EM πεδίο του πυρήνα (ισχυρή Z-εξάρτηση - **ενεργός διατομή αυξάνει με Z^2**)

➤ Η διεργασία $\gamma \rightarrow e^+e^-$ δεν μπορεί να συμβεί χωρίς την παρουσία πυρήνα γιατί διαφορετικά παραβιάζεται η διατήρηση της ορμής
- ❑ Κάτω από την ενέργεια κατωφλίου, $2m_e c^2$, η διεργασία δεν μπορεί ενεργειακά να συμβεί και η κύρια διεργασία περίπου σε 1 MeV ενέργεια είναι αυτή της **σκέδασης Compton** των φωτονίων από ατομικά ηλεκτρόνια.

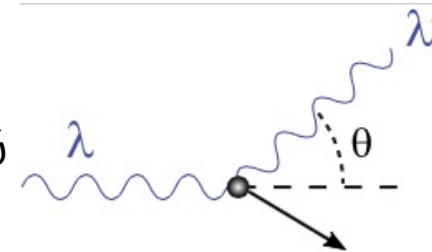
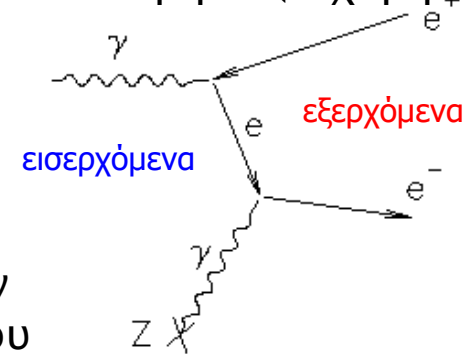
➤ Από τη στιγμή που ο αριθμός των ηλεκτρονίων/gr υλικού εξαρτάται μόνο από τον λόγο πρωτονίων/νετρονίων του υλικού, η εξάρτηση από το Z του υλικού είναι μικρή

➤ Η αλλαγή στην ενέργεια του φωτονίου δίνεται από:

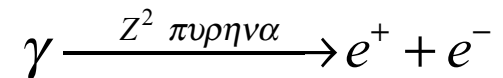
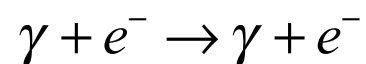
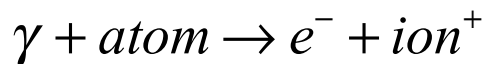
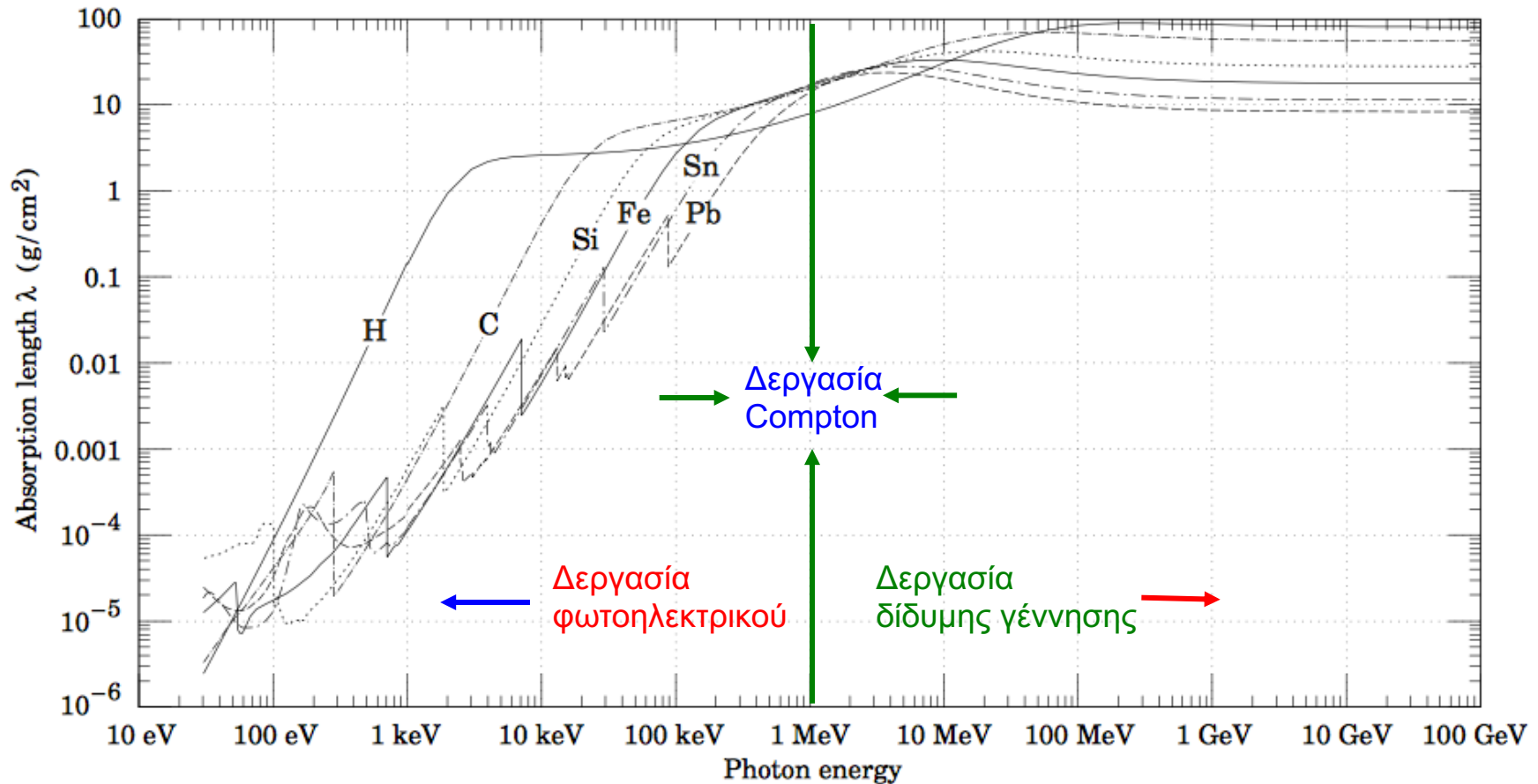
$$\lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$
- ❑ Σε χαμηλότερες ενέργειες του 1 MeV, η κύρια διεργασία είναι αυτή της απορρόφησης του φωτονίου (φωτοηλεκτρικό φαινόμενο), και οι λεπτομέρειες των ενεργειακών σταθμών του ατόμου είναι σημαντικές στον καθορισμό της ενεργού διατομής.

➤ Η ενεργός διατομή είναι:

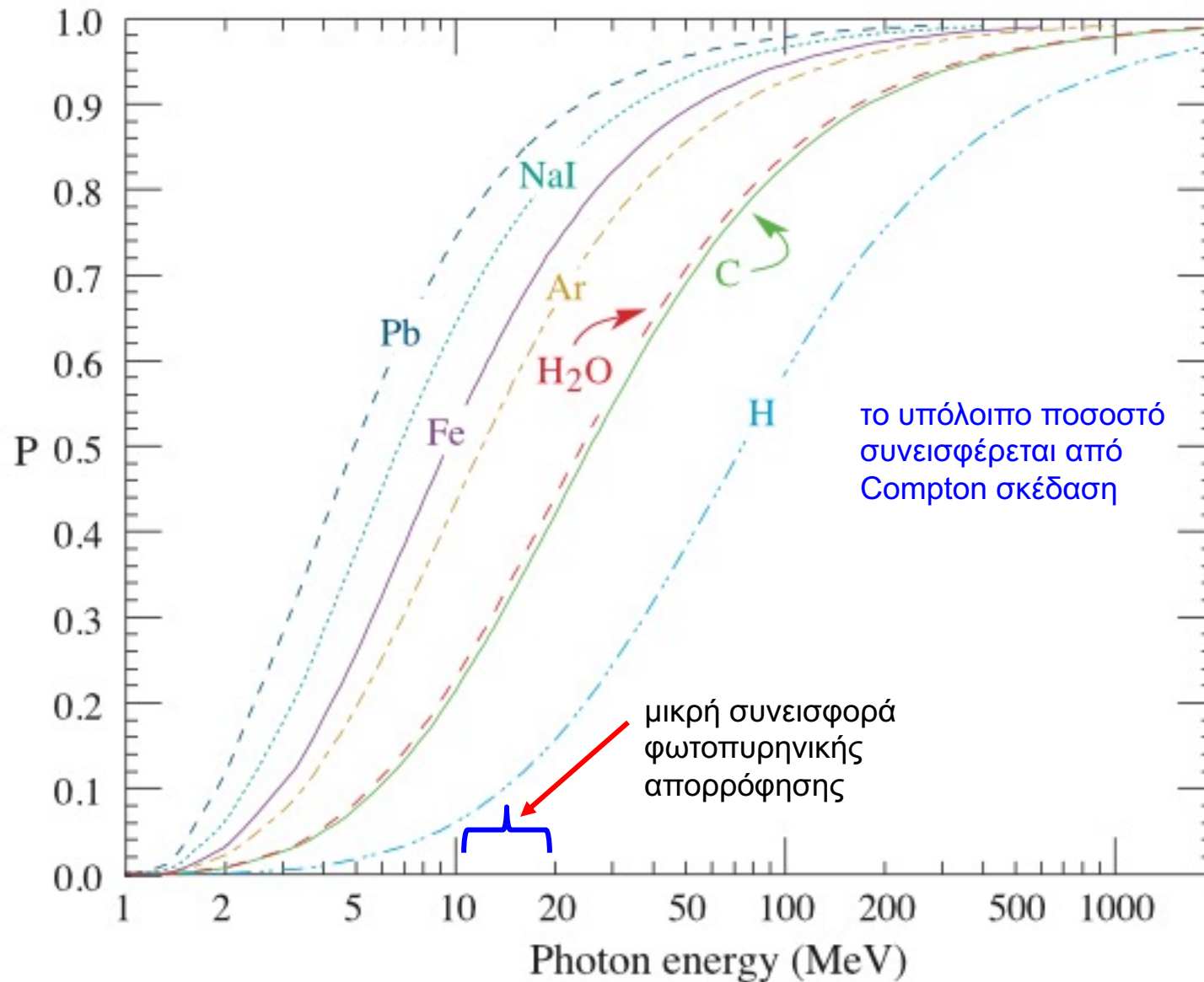
$$\sigma_{p.e.} = \begin{cases} \sim Z^4 / (h\nu)^3 & \text{χαμηλή } E \\ \sim Z^5 / (h\nu) & \text{υψηλή } E \end{cases}$$



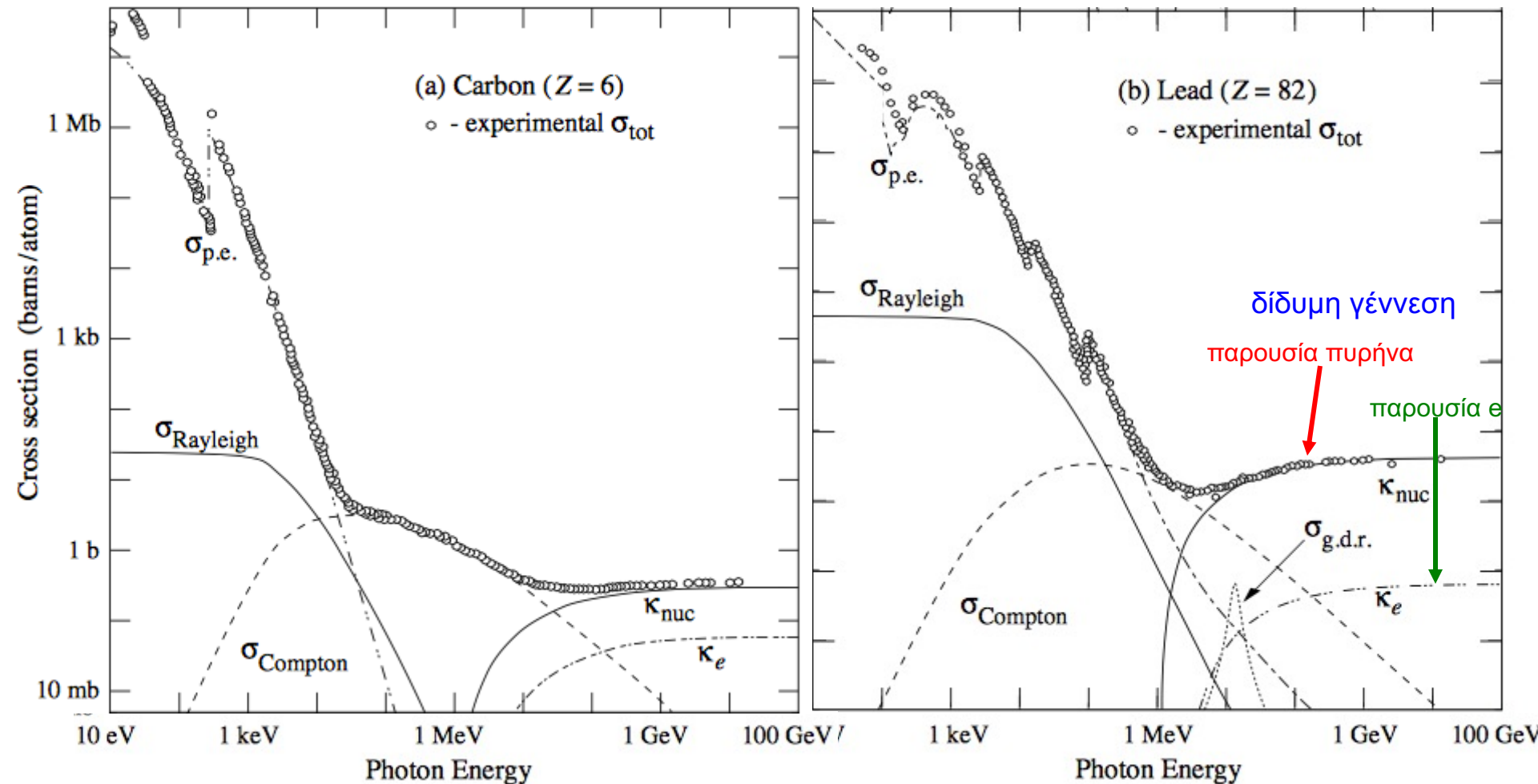
Μήκος αλληλεπίδρασης φωτονίων με ενέργεια



Πιθανότητα δίδυμης γέννησης



Ενεργός διατομή σκέδασης φωτονίων vs E



Ανασκόπηση

- ❑ $\pi/K/\Lambda^0/p/n$: αδρόνια και αλληλεπιδρούν ισχυρά με την ύλη μέσω κυρίως ισχυρών αλληλεπιδράσεων αλλά και EM
- ❑ γ : αλληλεπίδραση μέσω EM αλληλεπιδράσεων
- ❑ e/μ : φορτισμένα λεπτόνια, αλληλεπίδραση μέσω EM αλληλεπιδράσεων
- ❑ ν : ουδέτερα, αλληλεπίδραση μέσω ασθενών αλληλεπιδράσεων
- ❑ σ : ενεργός διατομή = Εμβαδό επιφάνειας ανάλογο της πιθανότητας αλληλεπίδρασης

$$N_D = \sigma \frac{N_\delta N_{\sigma\tau}}{A} \quad \text{όπου } \sigma \text{ μετράται σε } barn: \quad 10^{-28} m^2 = 10^{-24} cm^2$$

- ❑ λ : μήκος εξασθένισης=μέση απόσταση για αλληλεπίδραση: $\lambda\rho\sigma = 1$

$$\lambda_{gr/cm^2} = \lambda_{cm} \rho_{gr/cm^3} = \frac{A_{atomic\ mass}}{0.602\sigma_{barn}}$$

Απώλεια ενέργειας φορτισμένου σωματιδίου

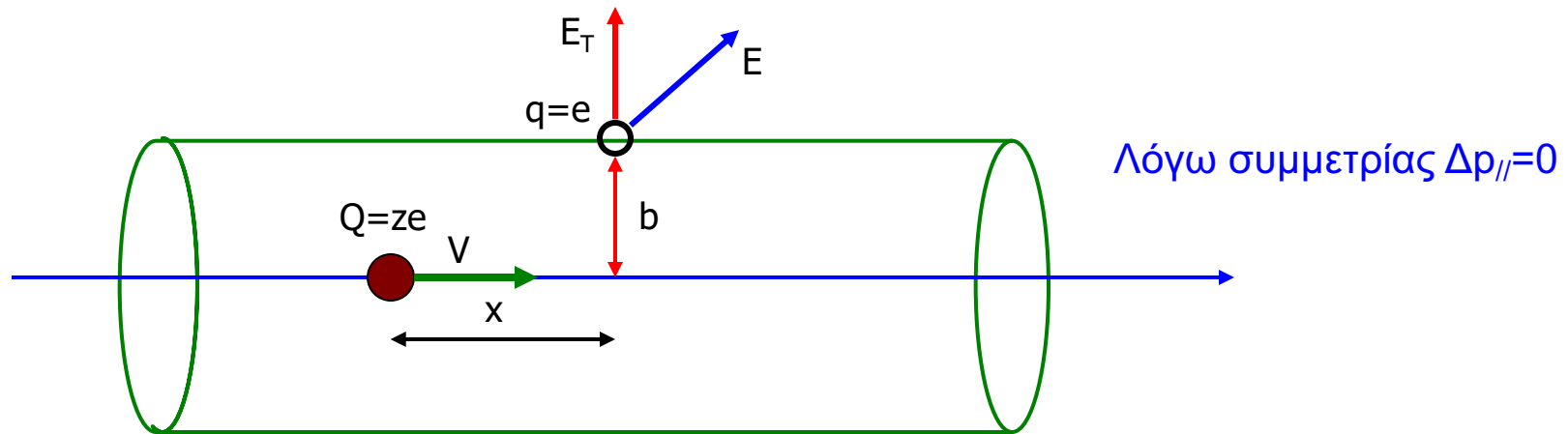
- Η ενέργεια κέντρου μάζας σωματιδίου που αλληλεπιδρά με κάποιο σωματίδιο στόχου T, είναι: (έστω p και T τα 4-διανύσματα του σωματιδίου και στόχου)

$$\sqrt{(p+T)^2} = \sqrt{p^2 + 2p \cdot T + T^2} = \sqrt{m_p^2 + 2E_p m_T + m_T^2} \quad \text{όπου } T=(m_T,0)$$

- Αν ο στόχος είναι ένα ατομικό ηλεκτρόνιο, ο όρος $\sqrt{2E_p m_T}$ είναι μικρός και η κινητική ενέργεια CM αρκετά μικρή.
 - Η διαθέσιμη ενέργεια δεν είναι αρκετή πέρα από αλληλεπιδράσεις της μορφής ελαστικής σκέδασης: δηλαδή αλλαγή των διευθύνσεων για τις μικρές στο CM ορμές.
- Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, το ατομικό ηλεκτρόνιο πηγαίνει από την ηρεμία σε κίνηση.
 - Εφόσον το ατομικό ηλεκτρόνιο κέρδισε ενέργεια, σημαίνει ότι το προσπίπτον σωματίδιο έχει χάσει ενέργεια

Απώλεια ενέργειας φορτισμένων σωματιδίων

- Σωματίδια που κινούνται, προσδίδουν μικρές ωθήσεις στα γειτονικά τους ηλεκτρόνια. Η κινητική ενέργεια που αποκτούν τα ηλεκτρόνια είναι ενέργεια που έχασαν τα προσπίπτοντα σωματίδια



Η ώθηση που δέχεται το ηλεκτρόνιο είναι: $\Delta p_{\perp} = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\perp} dt$

αλλά: $F_{\perp} = eE_{\perp}$ και: $dt = \frac{dx}{V}$ οπότε με αντικατάσταση: $\Delta p_{\perp} = \frac{e}{V} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\perp} dx$ (1)

Από το νόμο του Gauss έχουμε: (άπειρος κύλινδρος με το σωματίδιο Q στο κέντρο)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_{\perp} (2\pi b) dx = \Phi_E = 4\pi Q = 4\pi ze \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\perp} dx = 2ze \frac{1}{b} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε: $\Delta p_{\perp} = \frac{ze^2}{8\pi^2 \epsilon_0} \frac{1}{Vb}$

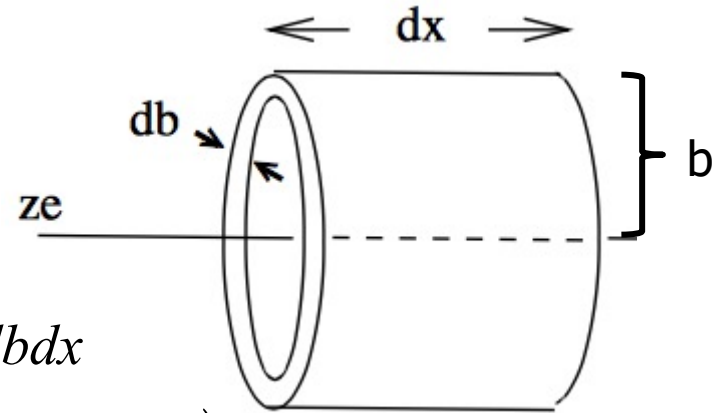
Bethe-Bloch κλασική λύση απώλειας ενέργειας

Η ενέργεια που μεταφέρεται σε ένα ηλεκτρόνιο με παράμετρο κρούσης b είναι:

$$\Delta E(b) = \frac{\Delta p^2}{2m_e} \Rightarrow \Delta E(b) = \frac{2z^2 e^4}{m_e} \frac{1}{V^2 b^2}$$

Θεωρώντας κυλινδρικό σώμα: $N_e = n_e (2\pi b) db dx$

όπου n_e η πυκνότητα ηλεκτρονίων $n_e = \frac{N_A (\text{atoms / mole}) \times \rho}{A (\text{gr / mol})}$



Η ενέργεια που χάνεται ανά μήκος διαδρομής dx για απόσταση μεταξύ b και $b+db$ σε υλικό με πυκνότητα ηλεκτρονίων, n_e ,

$$-dE(b) = \frac{\Delta p^2}{2m_e} N_e = \frac{2z^2 e^4}{b^2 V^2 m_e} 2\pi n_e b db dx \Rightarrow -dE(b) = \frac{4\pi n_e z^2 e^4}{m_e V^2} \frac{db}{b} dx$$

Απειρίζεται για $b \rightarrow 0$ και η ολοκλήρωση γίνεται μόνο για περιοχή $[b_{\min}, b_{\max}]$

$$\Rightarrow -\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi n_e z^2 e^4}{m_e V^2} \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{db}{b} \Rightarrow -\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi n_e z^2 e^4}{m_e V^2} \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}}$$

Bethe-Bloch κλασική λύση απώλειας ενέργειας

Προσδιορισμός της ενδιαφέρουσας περιοχής [b_{\min} , b_{\max}]

$b_{\min} > \lambda_e$ de Broglie μήκος κύματος και $b_{\max} < \infty$ λόγω θωράκισης

$$b_{\min} = \lambda_e = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\gamma m_e V} \quad \text{χρησιμοποίηση της αβεβαιότητας του Heisenberg ή ότι το ηλεκτρόνιο βρίσκεται μέσα σε ένα μήκος de Broglie}$$

$$b_{\max} = \frac{\gamma V}{\langle v_e \rangle} \quad \text{ο χρόνος αλληλεπίδρασης } b/V \text{ είναι πολύ μικρότερος από την τροχιακή περίοδο του ηλεκτρονίου στο άτομο } \gamma / \langle v_e \rangle \text{ για να είμαστε σίγουροι για μεταφορά ενέργειας}$$

$$\Rightarrow -\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e c^2 \beta^2} n_e \ln \frac{m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{2\pi\hbar \langle v_e \rangle} \quad \text{διαφέρει ένα παράγοντα 2 από την κβαντική λύση}$$

Η πυκνότητα των ηλεκτρονίων είναι $n_e = N_A \rho Z / A$

Το ενεργό ιονίζον δυναμικό είναι: $I \sim h \langle v_e \rangle$

Bethe-Bloch κβαντική λύση απώλειας ενέργειας

Λαμβάνοντας υπόψη ότι:

- Η μεταφερόμενη ενέργεια στα ατομικά ηλεκτρόνια συμβαίνει σε διακριτά ποσά
- Κυματική φύση των σωματιδίων

Καταλήγουμε:
$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = Kz^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right] \times [\rho]$$
 πυκνότητα

Μονάδες μέτρησης: $MeV \cdot gr^{-1} \cdot cm^2$

Πολλαπλασιάζοντας με ρ : $MeV \cdot cm^{-1}$

$$K = 4\pi N_A r_e^2 m_e c^2 = 0.307 MeV g^{-1} cm^2$$

$$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ Avogadro}$$

$$T_{\max} = 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 / \left(1 + 2\gamma m_e / M + (m_e / M)^2 \right)$$

$$r_e = e^2 / (4\pi\epsilon_0 m_e c^2) = 2.8 fm$$

$$m_e = 511 keV$$

Μέγιστη ενέργεια μεταφοράς σε μια μόνο σύγκρουση

$$\beta = v/c \quad \text{και} \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-2}$$

z : φορτίο προσπίπτοντος σωματιδίου

M : μάζα προσπίπτοντος σωματιδίου

Z : μαζικός αριθμός μέσου

A : ατομική μάζα μέσου

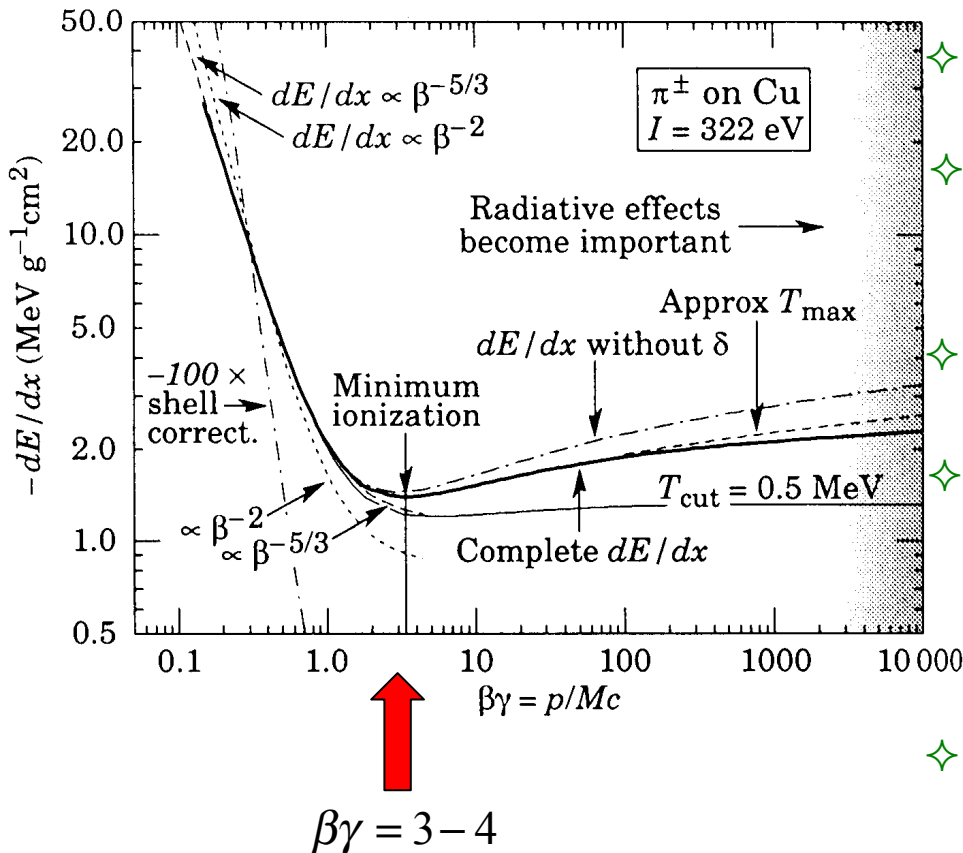
I : μέση ενέργεια διέγερσης μέσου

δ : διόρθωση πυκνότητας λόγω της εγκάρσιας έκτασης του ηλεκτρικού πεδίου

- Τετραγωνική εξάρτηση από φορτίο και ταχύτητα προσπίπτοντος σωματιδίου αλλά δεν υπάρχει εξάρτηση από τη μάζα του
- Γραμμική εξάρτηση από το είδος του υλικού Z και A (ηλεκτρονική πυκνότητα)
- Λογαριθμική εξάρτηση από το I
- Η σχέση ισχύει για:
 $0.05 < \beta\gamma < 500$ και $M > m_\mu$

Απώλεια Ενέργεια πιονίων

$$-\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = Kz^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right]$$



- ✧ Ενέργεια σωματιδίου αυξάνει, dE/dx μειώνεται λόγω της $1/\beta^2$ εξάρτησης
- ✧ Όλα τα σωματίδια έχουν μια περιοχή ελάχιστης ιονιστικής ικανότητας (MIP)
 $dE/dx \sim 2 \text{ MeV} \cdot \text{cm}^2/\text{gr}$
- ✧ Καθώς β αυξάνει, ο παράγοντας $\ln \gamma^2$ κυριαρχεί και το dE/dx αυξάνει
- ✧ Σε πολύ μεγάλες τιμές $\beta\gamma$ dE/dx γίνεται σταθερό εξαιτίας του σχετικιστικού παράγοντα δ της διόρθωσης του ηλεκτρικού πεδίου και της πόλωσης του υλικού
- ✧ 1 MIP χάνει περίπου $dE/dx \sim 13 \text{ MeV}/\text{cm}$ πυκνότητα χαλκού $8.94 \text{ gr}/\text{cm}^3$