ΦΥΣ 347 – Χειμερινό Εξάμηνο 2017

Τελική Εξέταση

Δευτέρα, 11 Δεκέμβρη Διάρκεια εξέτασης: **14:00– 20:00**

Θα πρέπει να δουλέψετε όλες τις ασκήσεις μόνοι σας χωρίς να συζητήσετε τα αποτελέσματα και τον κώδικά σας παρά μόνο με τον εαυτό σας και ίσως εμένα αν έχετε απορίες.

Θα πρέπει ο κώδικάς σας να είναι ευανάγνωστος και να περιέχει απαραίτητα σχόλια που εξηγούν τι κάνετε.

Θα πρέπει να κάνετε τις γραφικές που ζητούνται χρησιμοποιώντας το λογισμικό ROOT και να τις αποθηκεύσετε σε pdf μορφή.

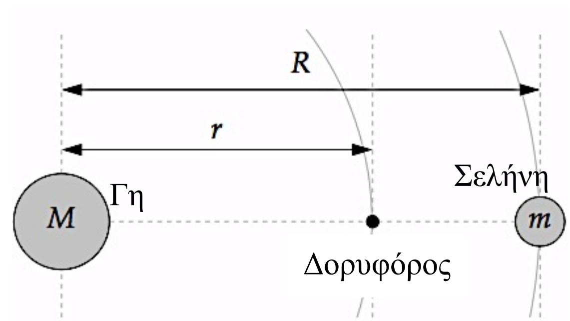
Στο τέλος της εξέτασης θα πρέπει να επιστρέψετε μέσω e-mail (fotis@ucy.ac.cy), το κώδικα που αντιστοιχεί σε κάθε άσκηση, τα σχετικά γραφήματα και *dat* ή *text* και *root* files που ζητούνται σε ένα tar zipped της μορφής *username_final.tgz,* όπου username είναι το username σας στο e-mail του πανεπιστημίου.

Σημειώστε ότι είναι δική σας ευθύνη να μου στείλετε το tgz file. Σε περίπτωση λάθους και μετά το τέλος της εξέτασης δεν θα γίνουν δεκτές μεταγενέστερες αποστολές ανάλογων αρχείων όπως και οποιεσδήποτε προσθήκες, ή αλλαγές στο tgz file.

Καλή Επιτυχία

1. Έστω: $V = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 xyz\ln\left(x+2y+3z\right)\sin\left(x+y+z\right)dx\,dy\,dz$. Να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο να υπολογίζει το προηγούμενο ολοκλήρωμα και το σφάλμα του με την μέθοδο Metropolis. Σημειώστε ότι το σφάλμα στην τιμή του ολοκληρώματος που βρίσκετε μπορεί να υπολογιστεί από το σφάλμα της μέσης τιμής $\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{N}$ και $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$ η τυπική απόκλιση. Θεωρήστε την $p\left(x,y,z\right) = \sin\left(x+y+z\right)/C$ σα συνάρτηση κατανομής πιθανότητας, όπου η σταθερά κανονικοποίησης δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση: $C = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sin\left(x+y+z\right)dx\,dy\,dz = \cos\left(3\right) - 3\cos\left(2\right) + 3\cos\left(1\right) - 1.$

2. Το σημείο Lagrange είναι ένα σημείο μεταξύ Γης και Σελήνης στο οποίο όταν βρεθεί ένας δορυφόρος τότε μπορεί να περιφέρεται γύρω από την Γη σε πλήρη συγχρονισμό με την Σελήνη, παραμένοντας πάντοτε ανάμεσα στην Γη και την Σελήνη. Αυτό συμβαίνει γιατί η βαρυτική έλξη που ασκεί η Γη και η βαρυτική έλξη που ασκεί η Σελήνη πάνω στο δορυφόρο δημιουργούν την απαραίτητη κεντρομόλο



δύναμη ώστε ο δορυφόρος να παραμένει στην τροχιά του, όπως στο διπλανό σχήμα. Υποθέτοντας κυκλικές τροχιές μπορεί να δειχθεί ότι η απόσταση του σημείου Lagrange, r, από το κέντρο της Γης ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{GM_{\Gamma}}{r^2} - \frac{Gm_{\Sigma}}{(R-r)^2} = \omega^2 r\,,$$

όπου M_{Γ} και m_{Σ} η μάζα της Γης και Σελήνης αντίστοιχα, G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, R η απόσταση μεταξύ Γης-Σελήνης και ω η κοινή γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου και της Σελήνης. Θεωρείστε ότι $G = 6.674x10^{-11}m^3kg^{-1}s^{-2}$, $M_{\Gamma} = 5.974x10^{24}kgr$, $m_{\Sigma} = 7.348x10^{22}kgr$, $\omega = 2.662x10^{-6}s^{-1}$ και $R = 3.844x10^8m$.

Να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει την απόσταση του σημείου Lagrange από την Γη με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων.

3. (α) Έστω ένας πίνακας Α 20x20 ορίζεται σύμφωνα με τις παρακάτω ακέραιες τιμές: (στην ιστοσελίδα http://home.fnal.gov/~ptohos/phy347/*matrix.dat* θα βρείτε το αρχείο με τα νοούμερα που φαίνονται παρακάτω).

74	80	47	33	22	26	40	44	34	40	48	39	42	50	33	42	22	32	66	74
70	61	52	23	14	19	22	31	39	40	45	32	36	31	21	17	17	23	36	70
65	59	46	29	31	15	15	29	28	45	38	45	41	26	24	21	13	37	48	64
56	56	40	25	21	10	12	9	26	36	35	19	28	12	7	27	34	41	34	53
45	40	41	34	26	20	27	22	21	29	37	39	23	10	20	18	17	29	43	59
60	48	44	42	36	25	31	14	29	29	37	27	20	19	16	26	14	42	59	53
56	66	60	32	37	32	28	19	24	42	30	30	28	22	26	30	29	28	62	67
62	74	45	29	23	20	25	34	45	51	47	30	45	30	26	28	21	50	48	59
81	71	55	41	44	41	41	35	50	47	36	43	33	31	32	40	38	65	50	70
70	57	46	35	30	43	29	41	33	38	48	55	48	43	43	23	26	44	70	67
87	61	53	57	42	39	37	49	57	60	45	49	44	36	44	40	26	33	50	99
93	65	56	48	39	28	47	42	43	41	41	53	41	52	43	26	30	34	49	74
72	62	61	42	26	29	38	40	33	42	51	46	42	42	37	30	45	34	66	59
64	61	64	40	26	22	31	45	48	41	31	45	42	43	21	35	27	52	66	78
52	55	57	37	31	36	34	22	39	36	34	32	34	28	15	14	22	47	41	72
49	48	47	41	36	11	17	14	27	37	36	38	22	22	18	13	17	43	61	50
64	62	57	41	19	25	16	8	18	24	25	32	18	19	19	14	27	40	53	49
47	53	45	46	26	8	25	28	31	28	29	31	31	8	7	19	26	26	36	60
66	62	36	41	24	28	21	38	43	49	37	31	41	30	16	10	25	21	47	55
70	60	50	22	15	18	24	37	46	47	53	41	41	39	38	35	28	33	58	68

Να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο βρίσκει το μεγαλύτερο γινόμενο μεταξύ τεσσάρων διαδοχικών αριθμών σε γραμμή, στήλη ή διαγώνιο.

(β) Επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία για περιοδικές συνοριακές συνθήκες.

(γ) Τοποθετείστε ένα θερμικό περιπατητή στην θέση (0,0). Επιτρέψτε του να πάρει τις άμεσα γειτονικές του θέσεις (πάνω, κάτω, αριστερά ή δεξιά) με πιθανότητα $P = \min\left(1, e^{-\Delta E/T}\right)$, όπου ΔE η αλλαγή στις τιμές του πλέγματος πηγαίνοντας από την προηγούμενη θέση στη νέα θέση. Θεωρείστε ότι η διαδικασία υπολογισμού ενός εκθετικού και δημιουργίας ενός τυχαίου αριθμού είναι ιδιαίτερα επιβαρυντικές διεργασίες για τον υπολογιστή, γράψτε την διεργασία αποδοχής ή απόρριψης του βήματος με τον πιο δυνατά αποδοτικό τρόπο.

(δ) Πραγματοποιήστε 10^6 βήματα προς την κατάσταση ισορροπίας χωρίς να πάρετε μετρήσεις και 10^6 βήματα δειγματοληψίας κατά την διάρκεια των οποίων κρατάτε ένα ιστόγραμμα με τις θέσεις του περιπατητή για κάθε βήμα (μην δίνεται σημασία σε προβλήματα αυτοσυσχέτισης ή διακριτοποίησης του ιστογράμματος, απλά πάρτε τιμές για κάθε βήμα Monte Carlo). Θα πρέπει να πραγματοποιήσετε τη διαδικασία αυτή για 5 διαφορετικές θερμοκρασίες T = 1, 10, 20, 40 και 80 και θα επομένως θα πρέπει να δημιουργήσετε 5 διαφορετικά 2-Δ ιστογράμματα με τις θέσεις του παρατηρητή στην x και y διεύθυνση. Τα ιστογράμματα αυτά, θα πρέπει να έχουν 20 bins σε κάθε διάσταση το μέσο κάθε ενός θα αντιστοιχεί στην θέση του περιπατητή. Θα πρέπει αφού τα κανονικοποιήσετε να τα αποθηκεύσετε σε ένα αρχείο με όνομα *rw.root*.

(ε) Μπορείτε να δείτε τα ιστογράμματα που σχεδιάσατε χρησιμοποιώντας την επιλογή colz

όταν τα σχεδιάσετε (π.χ. h2->Draw(“colz”). Σχολιάστε το τι βλέπετε καθώς η θερμοκρασία ελαττώνεται από T=80 σε T=10 καθώς και το αρκετά διαφορετικό αποτέλεσμα για T=1. Τα σχόλιά σας να τα γράψετε στο τέλος του κώδικά σας σαν σχόλιο.

4. Στο πρόβλημα αυτό θα πρέπει να υπολογίσετε την ενεργό διατομή παραγωγής δύο λεπτονίων κατά τη σκέδαση δύο πρωτονίων, $pp \to l^- l^+$. Στη σκέδαση πρωτονίων, πολύ μεγάλης ενέργειας τα σωματίδια που σκεδάζονται στη πραγματικότητα είναι τα συστατικά των πρωτονίων, τα quarks. Τα quarks που αποτελούν το πρωτόνιο χωρίζονται σε quark σθένους και quarks της θάλασσας που μπορείτε να τα θεωρήσετε σαν δυνητικές διεγέρσεις των gluons μέσα στο πρωτόνιο. Στην άσκηση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε 2 από τα 6 είδη quarks που υπάρχουν και συγκεκριμένα τα u και d quarks τα οποία έχουν φορτίο +2/3 και -1/3 αντίστοιχα. Αν ένα quark και ένα αντι-quark συγκρουστούν, εξαϋλώνονται σε ένα δυνητικό φωτόνιο το οποίο με τη σειρά του διασπάται σε ζεύγος $l^- l^+$.

Για να μελετήσουμε τη διεργασία αυτή, συγκρούομε δύο δέσμες πρωτονίων και ένα quark από το ένα πρωτόνιο θα εξαϋλωθεί με το αντίστοιχό του αντι-quark από το άλλο πρωτόνιο. Η πιθανότητα για να συμβεί αυτό δίνεται από την ενεργό διατομή σκέδασης που έχει την μορφή:

$$\frac{d^2\sigma}{x_1 x_2} = \sigma\tau\alpha\theta. \times \frac{1}{M^2}\sum_i e_i^2 \left[f_i^A\left(x_1\right)\bar{f}_i^B\left(x_2\right) + \bar{f}_i^A\left(x_1\right) f_i^B\left(x_2\right)\right] \qquad \textbf{(A)}$$

Στην παραπάνω εξίσωση η σταθερά ισούται με $\sigma\tau\alpha\theta. = 4\pi\alpha^2/9$ όπου $\alpha = 1/137$ η σταθερά της λεπτής υφής. Οι όροι x_1 και x_2 αναφέρονται στο ποσοστό της ενέργειας των πρωτονίων της δέσμης που μεταφέρουν τα quarks 1 και 2 που σκεδάζονται. Επειδή τα πρωτόνια έχουν

3 quarks σθένους, θα περιμέναμε το καθένα να μεταφέρει περίπου το 1/3 της ενέργειας του πρωτονίου. Ωστόσο τα quarks παρουσιάζουν μια κατανομή ορμής που μπορεί να είναι μεταξύ 0 (ακίνητα) και 1 (μεταφέρουν όλη την ορμή). Πειραματικά έχει προσδιοριστεί ότι οι κατανομές της ορμής για τα u, d quark σθένους και των u και d quarks της θάλασσας δίνεται από τη σχέση:

$$u_\sigma(x) = 2.13\sqrt{x}(1-x)^{2.8}$$
$$d_\sigma(x) = 1.26\sqrt{x}(1-x)^{3.8}$$
$$\overline{u_{\theta\alpha\lambda.}}(x) = \overline{d_{\theta\alpha\lambda.}}(x) = 0.27(1-x)^{0.81}$$

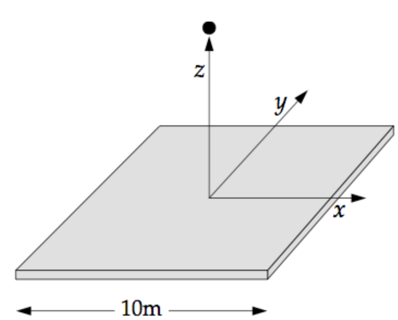
Στην εξίσωση (Α), η f_i αντιστοιχεί στη κατανομή των ορμών για τα quark σθένους (u_σ και d_σ) ενώ η $\overline{f_i}$ αντιστοιχεί στην κατανομή των ορμών για των quarks της θάλασσας $\left(\overline{u_{\theta\alpha\lambda.}} = \overline{d_{\theta\alpha\lambda.}}\right)$. Ο όρος e^2 είναι το τετράγωνο του φορτίου των quarks που συμμετέχουν στη σκέδαση ενώ ο δείκτης στο άθροισμα πέρνει τιμές από 1 έως 3 για τα τρία quarks σθένους που συμμετέχουν στη σκέδαση. Τέλος, ο όρος M^2 αναφέρεται στην αναλοίωτη μάζα του συστήματος των 2 λεπτονίων που παράγονται και είναι συνάρτηση της ολικής ενέργειας $S = \left(2 \times E_{\delta\varepsilon\sigma\mu\eta\varsigma}\right)^2$ και του ποσοστού της ορμής των σκεδαζόμενων quarks x_1 και x_2:

$$M^2 = x_1 x_2 S$$

Θα πρέπει να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει την ενεργό διατομή σκέδασης δύο πρωτονίων ενέργειας 50 GeV χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της απόρριψης Monte Carlo.

Συγκεκριμένα θα πρέπει χρησιμοποιώντας το λογισμικό πακέτο ROOT να προσομοιώσετε $5\text{x}10^6$ τέτοιες σκεδάσεις πρωτονίου – πρωτονίου και να κατασκευάσετε το γράφημα της ενεργού διατομής σκέδασης που υπολογίζετε, $d^2\sigma/(x_1x_2)$, συναρτήσει της M των δύο λεπτονίων στο διάστημα $M \in [5GeV, 30GeV]$. Θα πρέπει επίσης να κατασκευάσετε τα γραφήματα των συναρτήσεων κατανομής ορμής των συστατικών του πρωτονίου, να τα συγκρίνετε και να σώσετε το αποτέλεσμα της σύγκρισης σε ένα pdf αρχείο.

5. Μια ομογενής τετραγωνική μεταλλική επιφάνεια (αμελητέου πάχους), πλευράς 10*m* και μάζας 10,000*kg* αιωρείται ακίνητη στο χώρο. Θεωρήστε ένα σφαιρικό σωματίδιο μάζας 1.0*kg* το οποίο βρίσκεται σε απόσταση *z* από το κέντρο της μεταλλικής επιφάνειας και σε διεύθυνση κάθετη στην επιφάνεια, όπως στο σχήμα. Η βαρυτική δύναμη που δέχεται το σωματίδιο εξαιτίας της έλξης που ασκεί μια στοιχειώδης μάζα στην επιφάνεια *dxdy* είναι: $dF_z = G\rho \frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} dxdy$,



όπου $G = 6.674\times10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-1}$ η σταθερά της παγκόσμιας έλξης και ρ η επιφανειακή πυκνότητα της μεταλλικής επιφάνειας.

(α) Να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει την δύναμη που ασκεί η μεταλλική επιφάνεια στο σφαιρικό σώμα για z =0.0m μέχρι z = 1.0m με βήμα dz = 0.1m. Για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος χρησιμοποιήστε μια μέθοδο Monte Carlo της προτίμησής σας και 1,000,000 δοκιμές.

(β) Επαναλάβετε τον υπολογισμό της βαρυτικής δύναμης χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά την μέθοδο ολοκλήρωσης *Simpson* για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος. Θεωρήστε ότι έχετε 100 διαστήματα σε κάθε άξονα ολοκλήρωσης.

(γ) Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματά των ερωτημάτων (α) και (β) για να κάνετε το γράφημα της υπολογιζόμενης δύναμης με τις δυο μεθόδους συναρτήσει της απόστασης z.

Υπόδειξη για το (β) ερώτημα: Όπως έχουμε δει η μέθοδος *Simpson* για απλά ολοκληρώματα σε μια διάσταση γράφεται με την μορφή:

$$S_x = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h_x}{3}\Big(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+2f(x_{N_x-2})+4f(x_{N_x-1})+f(x_{N_x})\Big) \quad \mathbf{(1)}$$

όπου το διάστημα [a,b] έχει χωριστεί σε N_x ίσα υποδιαστήματα μεγέθους $h_x = (b-a)/N_x$ και οι συντελεστές 4 και 2 εναλλάσονται σε όλο το ενδιάμεσο διάστημα εκτός των δυο ακραίων τιμών του x (x_o=a και x_N=b). Η εξίσωση (1) μπορεί να γραφεί σε πιο απλή μορφή όπως την έχουμε χρησιμοποιήσει: $S_x = \frac{h_x}{3}\left[f(x_0)+f(x_{N_x})+4\sum_{j=1}^{\frac{N_x}{2}} f(x_{2j-1})+2\sum_{j=1}^{\frac{N_x-2}{2}} f(x_{2j})\right]$ (**2**)

Ένα τυπικό διπλό ολοκλήρωμα έχει την μορφή: $S = \iint f(x,y)dx\,dy$ και η μέθοδος *Simpson* εφαρμόζεται στην περίπτωση αυτή σε δυο στάδια. Στο πρώτο στάδιο εφαρμόζεται ως προς την μια μεταβλητή (έστω x) και καταλήγουμε στην ανάλογη μορφή της εξίσωσης (2):

$$S_x(y_i) = f(x_0,y_i)+f(x_{N_x},y_i)+4\sum_{j=1}^{\frac{N_x}{2}} f(x_{2j-1},y_i)+2\sum_{j=1}^{\frac{N_x-2}{2}} f(x_{2j},y_i)$$

Στο δεύτερο στάδιο εφαρμόζουμε και πάλι τη μέθοδο αλλά στο εξωτερικό ολοκλήρωμα και κάνοντας τις πράξεις καταλήγουμε στην:

$$S = \frac{h_x h_y}{9}\times\Big[S_x(y_0)+S_x(y_{N_y})+4S_x(y_1)+2S_x(y_2)+\cdots+4S_x(y_{N_y-2})+2S_x(y_{N_y-1})\Big]$$

και συλλέγοντας τα αθροίσματα μπορεί να γραφεί με την μορφή:

$$S=\frac{h_x h_y}{9}\times\left[S_x\left(y_0\right)+S_x\left(y_{N_y}\right)+4\sum_{i=1}^{\frac{N_y}{2}}S_x\left(y_{2i-1}\right)+2\sum_{i=1}^{\frac{N_y-2}{2}}S_x\left(y_{2i}\right)\right]$$

Η τελευταία εξίσωση δείχνει ουσιαστικά ότι η μέθοδος *Simpson* για διπλό (ή μεγαλύτερης τάξης) ολοκλήρωμα αποτελείται από μια ολοκλήρωση κατά μήκος του ενός άξονα για κάθε υποδιάστημα στο ορθογώνιο άξονα, ακολουθούμενη από εφαρμογή της μεθόδου *Simpson* στα αποτελέσματα που λαμβάνονται στον ορθογώνιο άξονα.