Άλγεβρα

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^{(x \pm y)} = a^x a^{\pm y}$$

$$\log a = x \Rightarrow a = 10^x \qquad \log a \pm \log b = \log(ab^{\pm 1}) \qquad \log(a^n) = n \log(a)$$

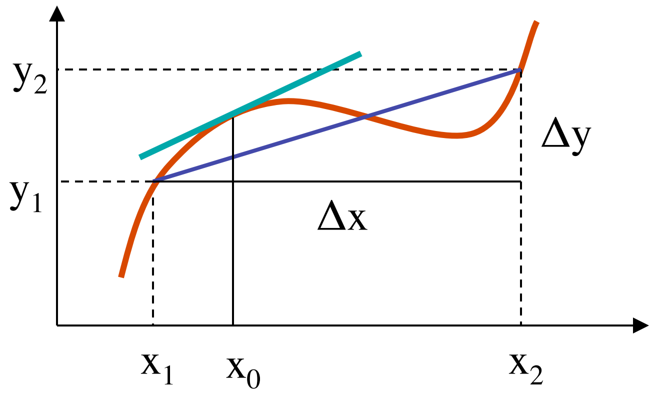
$$\ln a = x \Rightarrow a = e^x \qquad \ln a \pm \ln b = \ln(ab^{\pm 1}) \qquad \ln(a^n) = n \ln(a)$$

Άσκηση για το σπίτι: Διαβάστε το παράρτημα Β του βιβλίου

Διαφορικός λογισμός

Έστω y = f(x) μια συναρτησιακή σχέση της μεταβλητής y ως προς την μεταβλητή x: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Η παράγωγος του y ως προς το χ ορίζεται ως το όριο των κλίσεων των χορδών που φέρονται μεταξύ 2 σημείων στην γραφική παράσταση του y ως προς το x καθώς το x τείνει στο μηδέν



$$\frac{dy}{dx} = \lim_{dx\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{dx\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$$

Διαφορικός λογισμός – ιδιότητες παραγώγων

- Η παράγωγος του αθροίσματος 2 συναρτήσεων είναι

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\left[g(x)+h(x)\right]=\frac{d}{dx}g(x)+\frac{d}{dx}h(x)$$

- Η παράγωγος του γινομένου 2 συναρτήσεων είναι

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\left[g(x)h(x)\right]=h\frac{dg}{dx}+g\frac{dh}{dx}$$

- Πηλίκο δύο συναρτήσεων? $\frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)=\frac{h\frac{dg}{dx}-g\frac{dh}{dx}}{h^2}$

- Αν y = f(x) και x είναι συνάρτηση μιας άλλης μεταβλητής z τότε

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz}$$

- Η δεύτερη παράγωγος της y ως προς x ορίζεται $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

Διαφορικός λογισμός - τυπολόγιο

$$\frac{d}{dx}ax^{n} = nax^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin ax) = a\cos ax$$

$$\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a\sin ax$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{ax}\right) = ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx}\ln(ax) = \frac{a}{x}$$

Ολοκληρωτικός λογισμός

- Θεωρούμε την ολοκλήρωση ως το αντίστροφο της διαφόρισης:

$$f(x) = \frac{dy}{dx} \rightarrow dy = f(x)dx$$

Μπορούμε να βρούμε την y(x) αθροίζοντας για όλες τις τιμές του x.

Αυτή η αντίστροφη πράξη γράφεται $y(x) = \int f(x)dx$

π.χ. για μιά συνάρτηση $f(x) = 3ax^2 + b$ η παραπάνω ολοκλήρωση δίνει

$$y(x) = \int (3ax^2 + b)dx = ax^3 + bx + c$$

Το ολοκλήρωμα ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα επειδή η τιμή του εξαρτάται από τη τιμή της σταθεράς c.

Το αόριστο ολοκλήρωμα ορίζεται ως $I(x) = \int f(x)dx$

Η συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται ολοκληρωτέα συνάρτηση: $f(x) = \frac{dI(x)}{dx}$

Για μια συνεχή συνάρτηση το ολοκλήρωμα μπορεί να περιγραφεί σα το εμβαδό που ορίζεται από την καμπύλη της $f(x)$ και του άξονα x, μεταξύ 2 ορισμένων τιμών x_1 και x_2 ⇒ Οριμένο ολοκλήρωμα

Ολοκληρωτικός λογισμός

- Ένα από τα πιο χρήσιμα ολοκληρώματα που συναντιούνται είναι:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Διαφόριση του δεξιού μέλους δίνει $f(x) = x^n$. Αν τα όρια της ολοκλήρωσης είναι γνωστά τότε το ολοκλήρωμα δίνει:

$$\int x^n dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_{x_q}^{x_2} = \frac{x_2^{n+1} - x_1^{n+1}}{n+1}$$

- Μερικοί τρόποι ολοκληρώσεως
  - Ολοκλήρωση κατά παράγοντες: $\int udv = uv - \int vdu$

Για παράδειγμα: $I(x) = \int x^2 e^x dx = \int \underset{u}{x^2}\, d(\underset{v}{e^x}) = x^2 e^x - 2\int e^x x dx + c_1$

Επαναλαμβάνοντας στο δεύτερο όρο έχουμε

$$-2\int e^x x dx = -2e^x x + 2\int e^x dx = -2e^x x + 2e^x + c_2$$

Ολοκληρωτικός λογισμός

- Τέλειο διαφορικό : προσπαθούμε με αλλαγή της μεταβλητής ολοκλήρωσης το διαφορικό της συνάρτησης να είναι διαφορικό της ανεξάρτητης μεταβλητής που εμφανίζεται στην ολοκληρωτέα συνάρτηση

π.χ

$$I(x) = \int \cos^2 x \sin x dx$$

$$d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$I(x) = -\int \cos^2 x d(\cos x)$$

$$I(x) = -\frac{1}{3}\cos^3(x)$$

Μερικά χρήσιμα ολοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1}\, dx = \ln x \qquad \int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx) \qquad \int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$$

$$\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) \qquad \int \cos(ax) dx = \frac{1}{a}\sin(ax)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \int xe^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$$

Αναπτύγματα σε σειρές

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots$$ Για x<<1 $$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$ Για x<<1 $$e^x \approx 1 + x$$

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$ Για x<<1 $$\ln(1 \pm x) \approx \pm x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

x σε ακτίνια

Κινηματική

Σύνοψη εννοιών

- Κινηματική: Περιγραφή της κίνησης ενός σώματος

- Θέση και μετατόπιση
- Ταχύτητα
  - Μέση
  - Στιγμιαία
- Επιτάχυνση
  - Μέση
  - Στιγμιαία

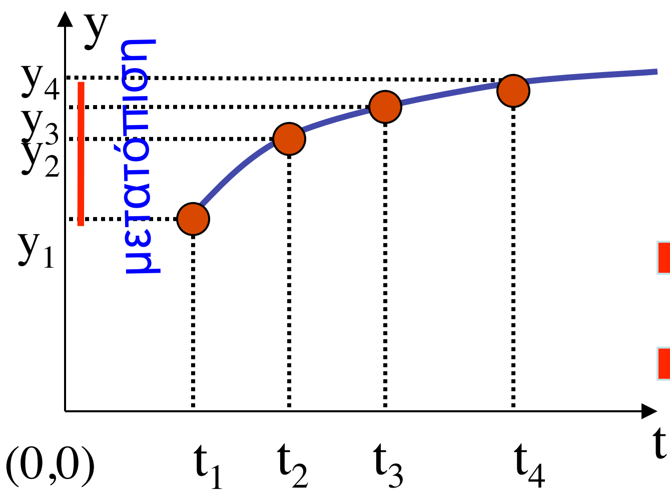
Κίνηση - Τροχιές

- Πετάξετε ένα αντικείμενο στον αέρα και μετρήστε την θέση του σε πολλές διαδοχικές χρονικές στιγμές

Θέλουμε ένα ρολόι για μέτρηση χρόνου και μια μονάδα μήκους για μέτρηση του x

Σύστημα συντεταγμένων – άξονας x (χρόνος) - άξονας y (θέση)

Γράφημα θέσης-χρόνου



Αρχικός χρόνος: t_i Αρχική θέση: y_i

Τελικός χρόνος: t_f Τελική θέση: y_f

- Το γράφημα δίνει τη θέση συναρτήσει του χρόνου
- Μετατόπιση = αλλαγή στη θέση του σώματος
  - Ανεξάρτητη της διαδρομής $\Delta y = y_f - y_i$

Διαφορετική ως προς το διάστημα, d, που κάλυψε το σώμα

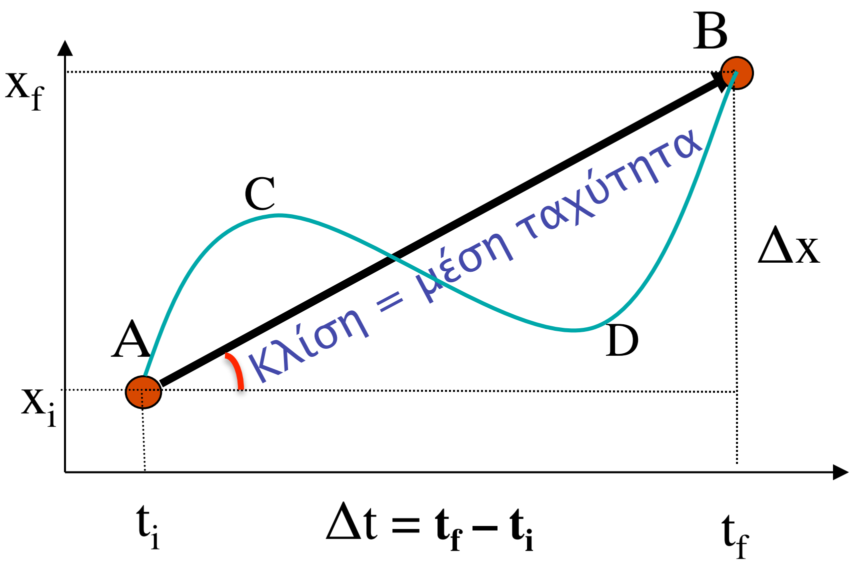
Μέση ταχύτητα

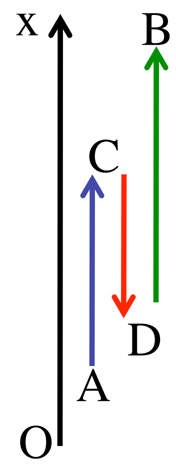
Η κλίση του διανύσματος AB δίνει τη μέση ταχύτητα

Μέση ταχύτητα πηγαίνοντας από το $\mathbf{t_f} \rightarrow \mathbf{t_i}$: $\vec{\bar{v}} = \dfrac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$

- διανυσματικό μέγεθος
- Σε αντίθεση με $\langle v \rangle = \dfrac{\delta\iota\alpha\delta\rho o\mu\eta}{\Delta t}$ που είναι βαθμωτό

Μονάδες μέτρησης $\dfrac{[L]}{[T]} = m/s$



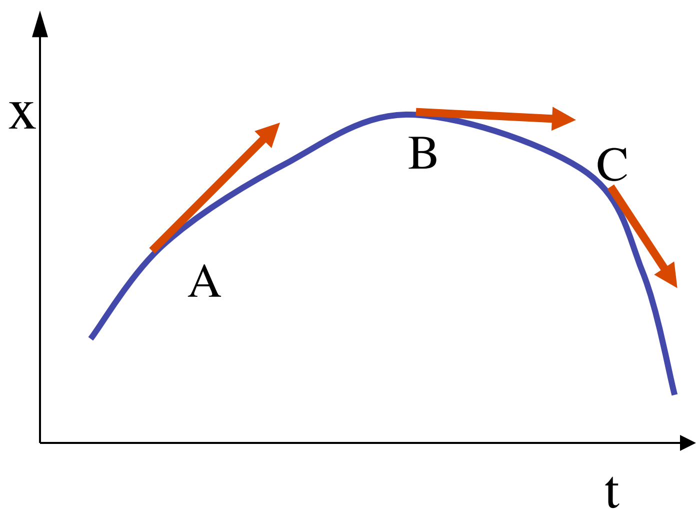


Η τροχιά πρέπει να'ναι συνεχής, ομαλή και μονότιμη

Στιγμιαία ταχύτητα

Ορίζεται ως $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ ← Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός

v είναι η κλίση της εφαπτομένης του γραφήματος θέση–χρόνος στα διάφορα σημεία.



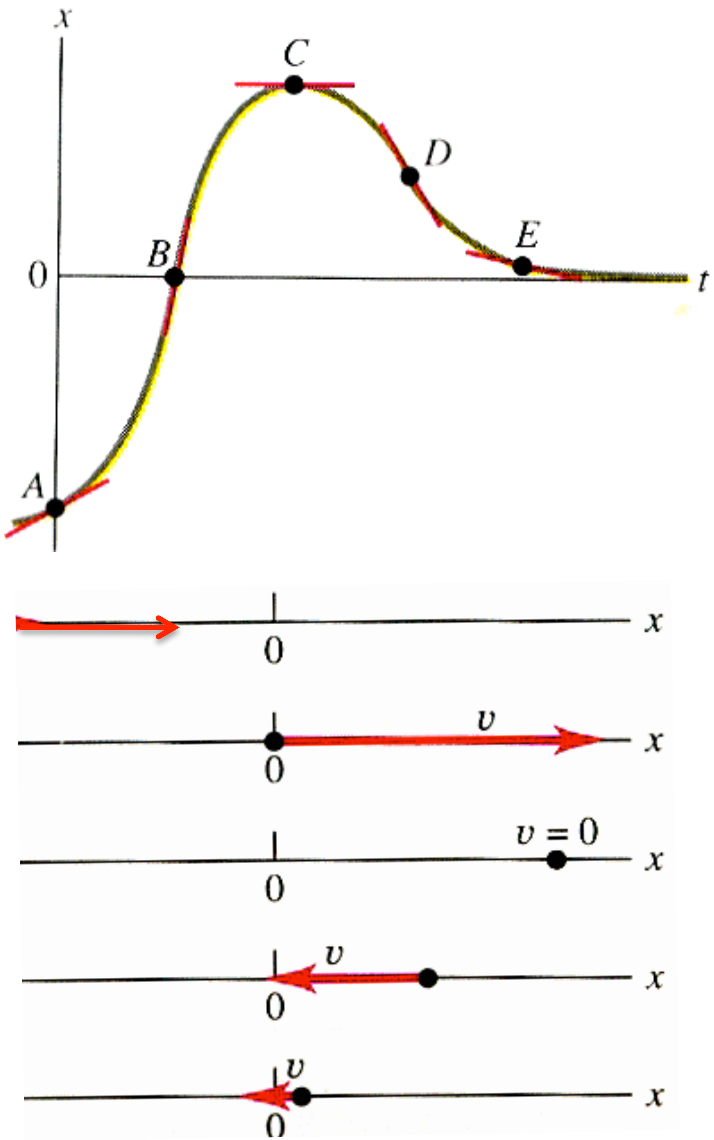
Στο A $\frac{dx}{dt} > 0 \Rightarrow \vec{v}_A > 0$

Στο B $\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v}_B = 0$

Στο C $\frac{dx}{dt} < 0 \Rightarrow \vec{v}_B < 0$

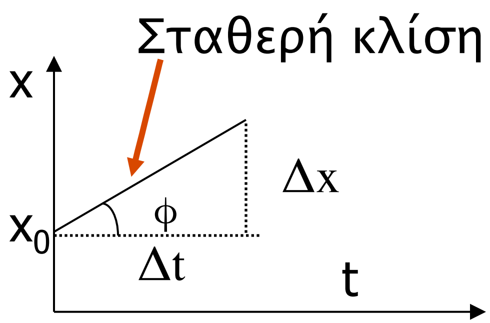
- Η στιγμιαία ταχύτητα έχει ίδιο πρόσημο με το πρόσημο του Δx

Εύρεση της ταχύτητας σε ένα x-t γράφημα



- Μεταξύ των σημείων A και B $x < 0$ αλλά αυξάνει
- H κλίση αυξάνει συνεχώς και άρα το σώμα κινείται με αυξάνουσα ταχύτητα προς θετικά x
- Στο B η κλίση και επομένως η ταχύτητα έχουν τις μέγιστες τιμές
- Μεταξύ B και C η κλίση και ταχύτητα ελαττώνονται αλλά εξακολουθεί να κινείται στην +x διεύθυνση
- Στο σημείο C η κλίση και ταχύτητα είναι μηδέν
- Από το σημείο C μέχρι το E, $x>0$ αλλά ελαττώνεται και επομένως η κλίση και ταχύτητα ειναι αρνητικές
- Στο σημείο E, η κλίση και ταχύτητα ➔0 καθώς το x➔0

Μέση επιτάχυνση



Σταθερή κλίση ⇒ V_x=σταθ.

$$v_x = \tan\phi = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \Rightarrow v_x = \frac{x - x_0}{t}$$

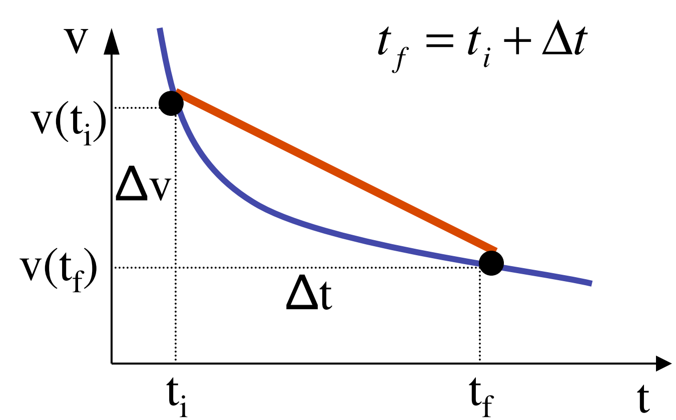
$$x = x_0 + v_x t$$

- Στην πραγματικότητα x(t) μπορεί να μην είναι γραμμική: $x(t)=f(t) = at^2+bt$
  Τότε v_x δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται από το χρόνο t

- Πόσο γρήγορα όμως μεταβάλλεται η ταχύτητα με το χρόνο?

Η μέση τιμή της μεταβολής από $t_i \rightarrow t_f$

$$\bar{a} = \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{(t+\Delta t) - t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

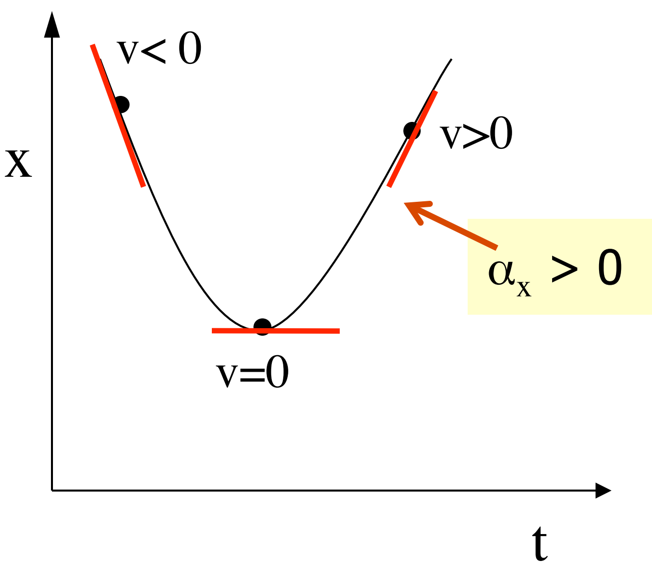


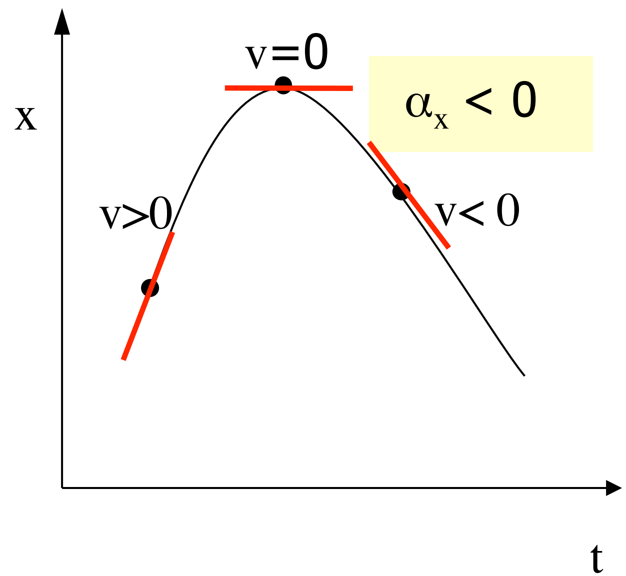
Η κλίση είναι η μέση επιτάχυνση

Η μέση επιτάχυνση είναι διάνυσμα

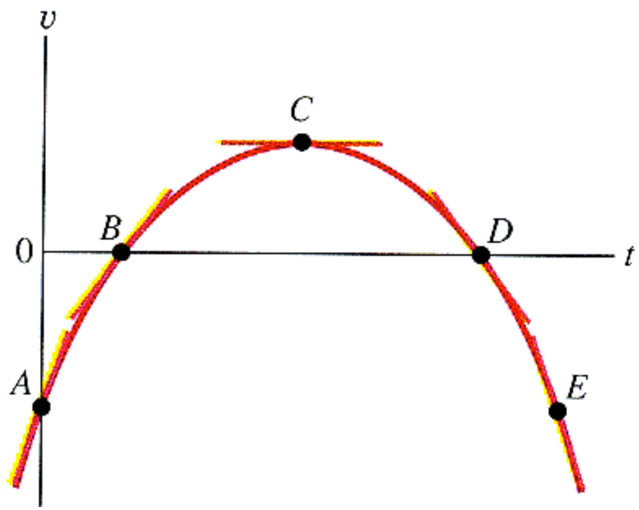
Στιγμιαία επιτάχυνση

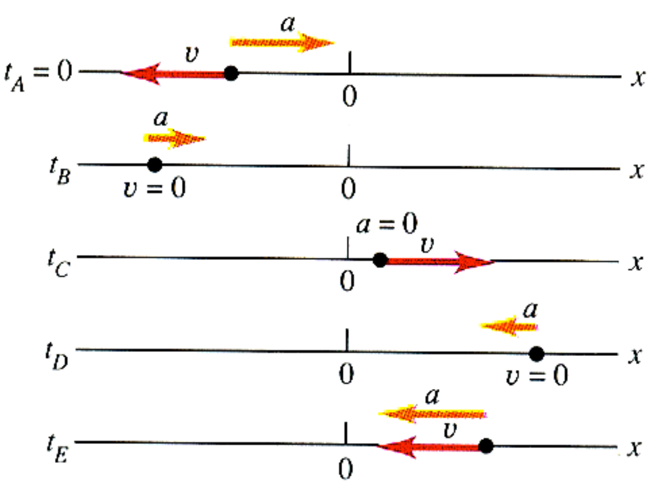
Όταν Δt➔0 $a(\mathrm{t}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{v}(t+\Delta t) - \mathrm{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathrm{v}(t)}{dt}$ με μονάδες: $\frac{[L]}{[T]^2} = m/s^2$





Εύρεση της επιτάχυνσης σε ένα v-t γράφημα





- Από το A στο B, $v < 0$ αλλά αυξάνει και η κλίση άρα και επιτάχυνση είναι θετικές
- Το σωματίδιο “φρενάρει” μέχρι το B οπότε $v = 0$ (σταματά στιγμιαία) αλλά εξακολουθεί να επιταχύνεται αφου η κλίση είναι μη μηδενική
- Από το B στο C, $v > 0$ και αυξάνει, η κλίση και επιτάχυνση είναι θετικές
- Στο C, $v = \max$ αλλά η επιτάχυνση είναι 0
- Από το C στο D, $v > 0$ αλλά ελαττώνεται και η επιτάχυνση είναι αρνητική. Το σώμα επιβραδύνει
- Στο D, $v = 0$ και σταματά αλλά δέχεται επιτάχυνση
- Από το D στο E, $v < 0$ και συνεχίζει να ελαττώνεται και η επιτάχυνση είναι αρνητική. Το σώμα επιταχύνεται

Κίνηση σε μία διάσταση

- **Ανακεφαλαιώνοντας**

  θέσης τροχιάς $\mathbf{x}$

  μετατόπισης $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_i,$

  χρονικού διαστήματος $\Delta\mathbf{t} = \mathbf{t}_f - \mathbf{t}_i,$

παράγωγος

μέση ταχύτητα

$$\bar{\vec{\mathrm{v}}} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

στιγμιαία ταχύτητα

$$\vec{\mathrm{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

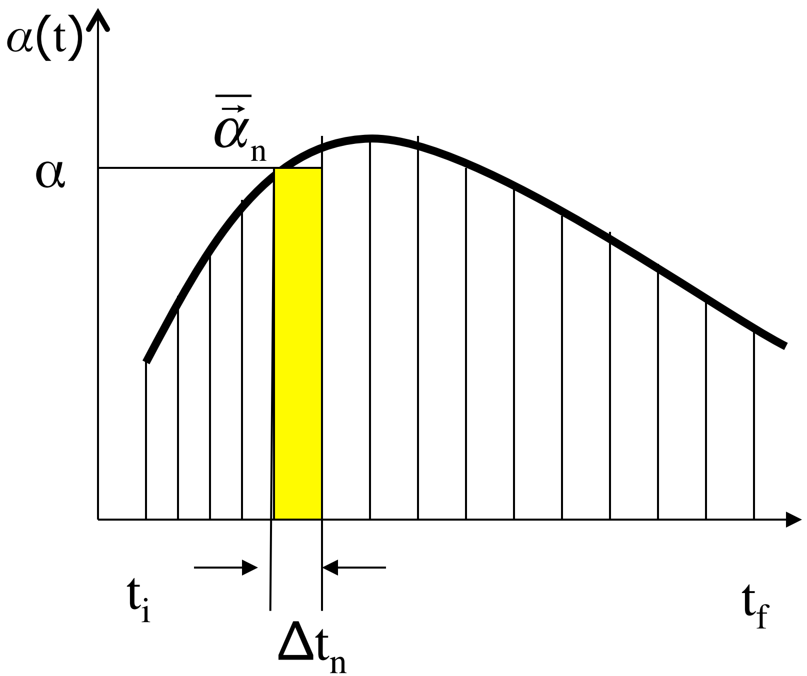
μέση επιτάχυνση

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{\mathrm{v}}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{\mathrm{v}}(t+\Delta t) - \vec{\mathrm{v}}(t)}{\Delta t}$$

στιγμιαία επιτάχυνση

$$\vec{a}(\mathrm{t}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\mathrm{v}}(t+\Delta t) - \vec{\mathrm{v}}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}(t)}{dt}$$

- Αν ξέρουμε την επιτάχυνση $\boldsymbol{\alpha}$, μπορούμε να βρούμε από τις προηγούμενες εξισώσεις την $\mathbf{v}$ και την $\mathbf{x}$ τη στιγμή t
- Πώς?
  - Χρησιμοποιώντας την έννοια του ολοκληρώματος
  - Γραφικά πρώτα



Χωρίζουμε το χρονικό διάστημα σε πολλά ισόχρονα διαστήματα Δt_n. Ξέρουμε ότι

$$\bar{\vec{\alpha}}_n = \Delta v_n / \Delta t \Rightarrow \Delta v_n = \bar{\vec{\alpha}}_n \Delta t_n$$ ⇐ Εμβαδό!!

Αθροίζοντας όλα τα εμβαδά απο $t_i \rightarrow t_f$ έχουμε:

$$\Delta v = \sum_n \bar{\vec{\alpha}}_n \Delta t_n$$

Στο όριο $n \rightarrow \infty$, δηλαδή $\Delta t_n \rightarrow 0$ η μεταβολή της ταχύτητας δίνεται από το εμβαδό της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη επιτάχυνσης - χρόνου

$$\Delta v = \lim_{n \to \infty} \sum_n \vec{\alpha}_n \Delta t_n$$

Στιγμιαία και όχι μέση τιμή α

- Αν είναι γνωστή η καμπύλη επιτάχυνσης – χρόνου, η μεταβολή της ταχύτητας βρίσκεται από το εμβαδό της επιφάνειας.

Το παραπάνω ορισμένο ολοκλήρωμα γράφεται

$$\lim_{n\to\infty}\sum_n a_n\,\Delta t_n = \int_{t_i}^{t_f} a(t)\,dt$$

- Γνωρίζοντας τη συνάρτηση $\alpha(\mathrm{t})$ μπορούμε υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα για τυχαία χρονική στιγμή t.

$$a(\mathrm{t}) = \frac{d\mathrm{v}(t)}{dt} \Rightarrow \quad a(t)dt = d\mathrm{v}(t) \Rightarrow \int_{t_i}^{t} a(t)dt = \int_{\mathrm{v}_i}^{\mathrm{v}_t} d\mathrm{v} = \mathrm{v}_t - \mathrm{v}_i = \mathrm{v}(t) - \mathrm{v}(t_i)$$

Επομένως σε μια χρονική στιγμή $\mathbf{t}$ η ταχύτητα είναι

$$\boxed{\mathrm{v}(t) = \int_{t_i}^{t} a(t)dt + \mathrm{v}(t_i)}$$

Αν $\mathrm{t_i} = 0$ συνήθως γράφουμε $\mathrm{v(t_i)} = \mathbf{v_0}$ ⇨ $\boxed{\mathrm{v}(\mathrm{t}) = \int_0^t a(t)dt + \mathrm{v}_0}$

- Κατά τον ίδιο τρόπο γνωρίζοντας την ταχύτητα μπορούμε να βρούμε την μετατόπιση

$$\mathrm{v}(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^t \mathrm{v}(t)dt = \int_{x_i}^{\mathrm{x}} dx = x - x_i = x(t) - x(t_i) = x(t) - x_0$$

$$\boxed{\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_0^t \mathrm{v}(t)dt}$$

Δύο εξισώσεις κίνησης ανάλογα με το πρόβλημα που δίνεται

$$\mathrm{v}(t) = \int_0^t a(t)dt + \mathrm{v}_0 \quad \text{(A)} \qquad x(t) = x_0 + \int_0^t \mathrm{v}(t)dt \quad \text{(B)}$$

Αν v(t) είναι σταθερή π.χ. $v = v_0$ $\xrightarrow{\text{(B)}}$ $x(t) = x_0 + \mathrm{v}_0 t$

Κίνηση σε μία διάσταση - Ανακεφαλαίωση

Διάνυσμα θέσης τροχιάς: $\vec{r} = x\hat{i}$ (για >1–διαστάσεις: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$)

Μετατόπιση: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = (x_f - x_i)\hat{i}$

διαδρομή

Χρονικό διάστημα $\Delta t = t_f - t_i$

Μέση ταχύτητα $\boxed{\bar{\vec{v}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i}}$

Προσοχή $\langle v \rangle = \dfrac{|d|}{at}$ Βαθμωτό μέγεθος

Στιγμιαία ταχύτητα $\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\hat{i}}$

παράγωγος

Μέση επιτάχυνση $\boxed{\bar{\vec{a}} = \dfrac{\Delta\vec{v}(t)}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}}$

Στιγμιαία επιτάχυνση $\boxed{\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt}}$

Δύο εξισώσεις κίνησης ανάλογα με το πρόβλημα που δίνεται

$v(t) = \int_0^t a(t)dt + v_0$ (A) $x = x_0 + \int_0^t v(t)dt$ (B)

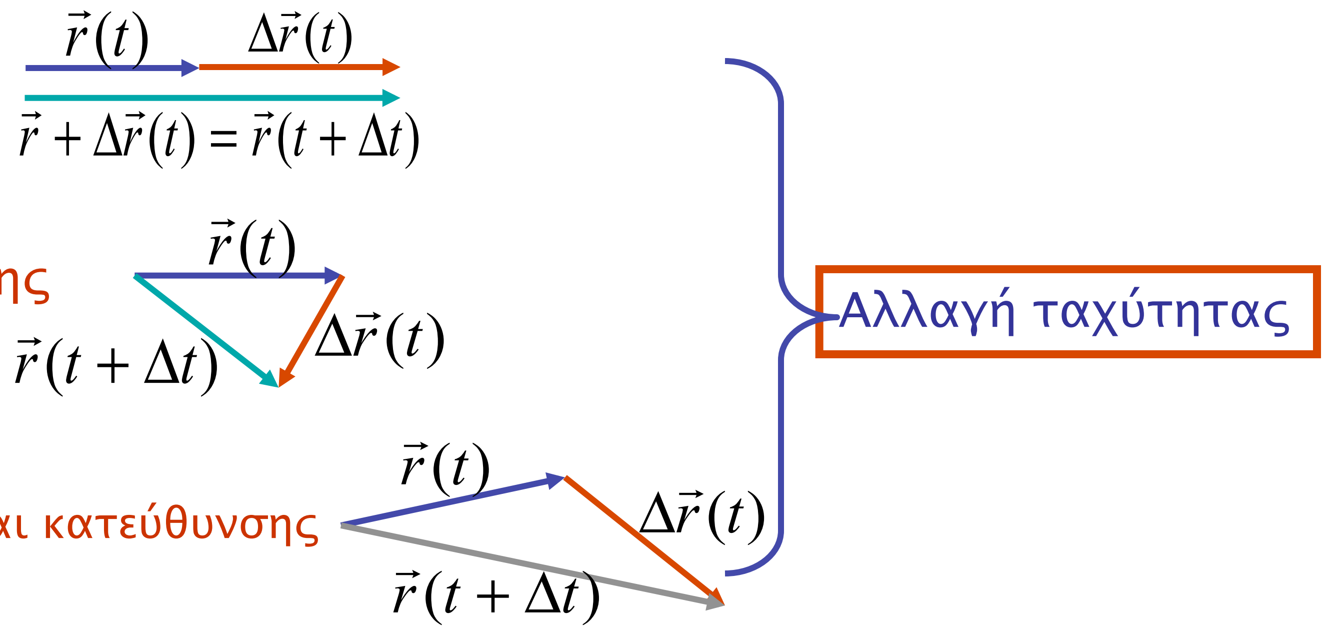
Σημαντικά σημεία

- Από τον ορισμό της στιγμιαίας ταχύτητας $\vec{\mathrm{v}} = \dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}$

Αλλαγή μέτρου

Αλλαγή κατεύθυνσης

Αλλαγή και μέτρου και κατεύθυνσης



- Από τον ορισμό της στιγμιαίας επιτάχυνσης $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}$

Αλλαγή στο μέτρο ή διεύθυνση ή και στα δυό μαζί της ταχύτητας ενός σώματος έχει σαν αποτέλεσμα την επιτάχυνση του σώματος

Αν $\Delta\vec{\mathrm{v}} > 0$ τότε το σώμα επιταχύνεται $\vec{a} = a_x\hat{i}$

Αν $\Delta\vec{\mathrm{v}} < 0$ τότε το σώμα επιβραδύνεται $\vec{a} = -a_x\hat{i}$

Κίνηση με σταθερή επιτάχυνση, α(t) =σταθ.

Από την εξίσωση κίνησης $\mathrm{v} = \int_{t_0}^{t} a(t)dt + \mathrm{v}_0 \Rightarrow \mathrm{v} = at + \mathrm{v}_0$ (1)

Αντικαθιστώντας στην $x = x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{v}(t)dt$

$$x = x_0 + \int_0^t (at + \mathrm{v}_0)dt = x_0 + \int_0^t (at)dt + \int_0^t \mathrm{v}_0 dt$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}at^2 + \mathrm{v}_0 t \qquad (2)$$

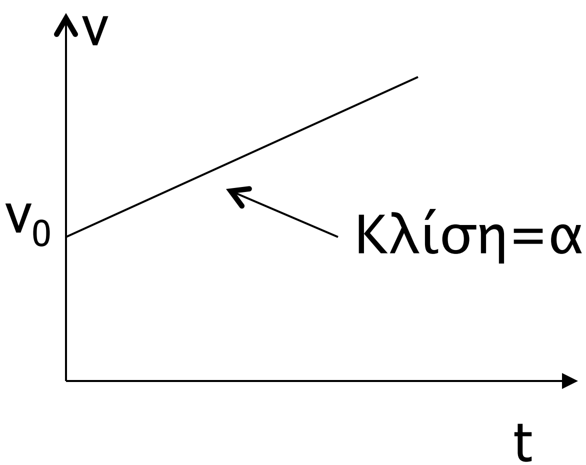
Λύνοντας ως προς t στην εξίσωση (1) και αντικαθιστώντας στην (2):

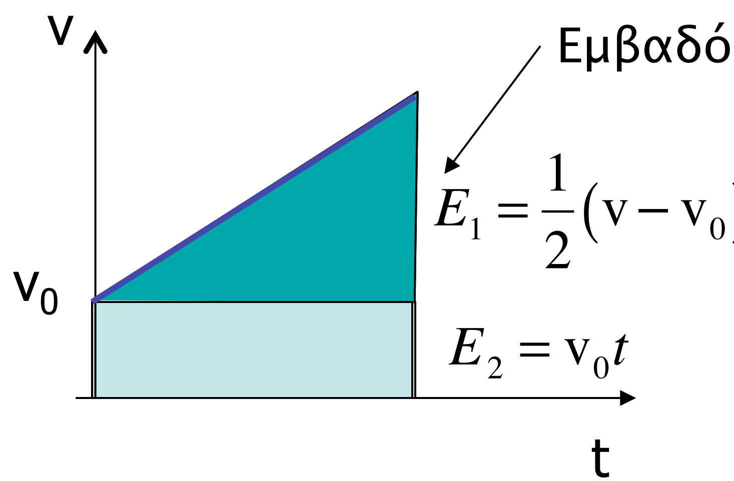
$$2a(x - x_0) = \mathrm{v}^2 - \mathrm{v}_0^2 \qquad (3)$$

Λύνοντας ως προς α (επιτάχυνση) στην (1) και αντικαθιστώντας στην (2)

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(\mathrm{v} + \mathrm{v}_0)t \qquad (4)$$

Γεωμετρική ερμηνεία





$$E_1 = \frac{1}{2}(\mathrm{v} - \mathrm{v}_0)t = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$E_2 = \mathrm{v}_0 t$$

Ολική επιφάνεια κάτω από την καμπύλη

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2}at^2 + \mathrm{v}_0 t$$

Πιο εύκολα...

$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{x\text{-}x_0}{t\text{-}t_0} = \frac{x - x_0}{t} \Rightarrow x = x_0 + \bar{\mathrm{v}}t \qquad (1)$$

$$\bar{a} = a = \frac{\mathrm{v}\text{-}\mathrm{v}_0}{t} \Rightarrow \mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + at \qquad (2)$$

$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{v} + \mathrm{v}_0}{2}$$ αφού η v γραμμική (3)

Αντικαθιστώντας την (3) στην (1) έχουμε

$$x = x_0 + \bar{\mathrm{v}}t = x_0 + \left(\frac{\mathrm{v} + \mathrm{v}_0}{2}\right)t = x_0 + \left(\frac{\mathrm{v}_0 + \mathrm{v}_0 + at}{2}\right)t \Rightarrow x = x_0 + \mathrm{v}_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Θέση συναρτήσει χρόνου - Παράδειγμα

- Ποια η θέση του σώματος για t = 3s?

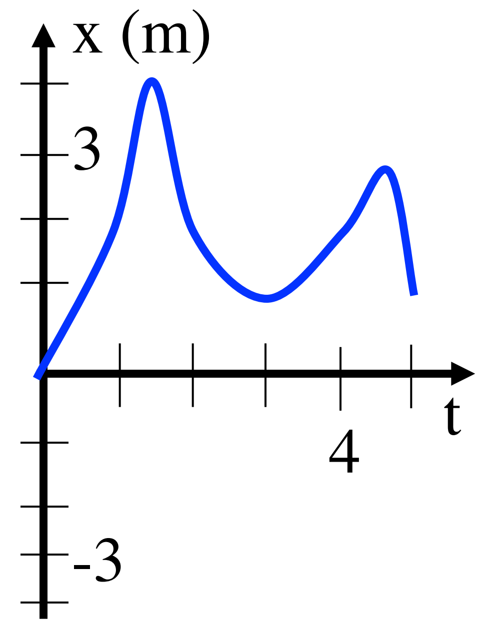
  x(t=3) = 1m

- Ποια η μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα μεταξύ t = 5 και t = 1s?

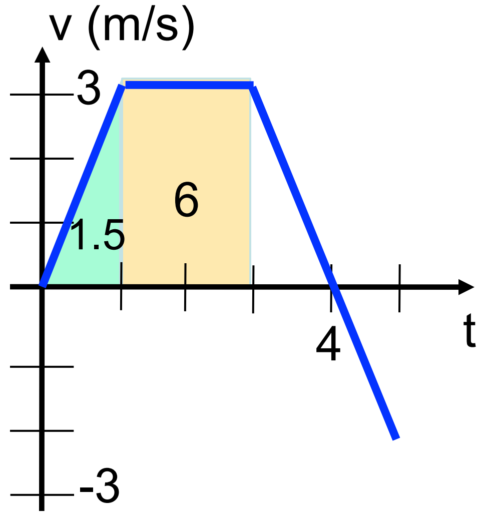
  x(t=5) = 1m
  x(t=1) = 2m
  Μετατόπιση = Δx = 1 – 2 = -1m

- Ποια η μέση ταχύτητα του σώματος στο χρονικό διάστημα t = 5 και t = 1s?

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-1}{4} = -0.25 m/s$$



Ταχύτητα συναρτήσει χρόνου - Παράδειγμα



- Ποια η ταχύτητα του σώματος για t = 2s?

  υ(t=2) = 3m/s

- Ποια η μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα μεταξύ t = 3 και t = 0s?

  Εύρεση εμβαδού:
  - t=0➔1: E_1=0.5x(1s)x(3m/s)=1.5m
  - t=1➔3: E_2=(2s)x(3m/s)=6.0m

  Μετατόπιση: $E_{ολ} = E_1 + E_2 = 1.5 + 6 \rightarrow \Delta x = 7.5m$

- Ποια η μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα μεταξύ t=0 και 3s?

$$\bar{\upsilon} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{7.5}{3} = 2.5m/s$$

- Ποια η μεταβολή της ταχύτητας στο χρονικό διάστημα μεταξύ t=3 και 5s?

$$\Delta\upsilon = \upsilon(t=5) - \upsilon(t=3) = -2-3 = -5m/s$$

- Ποια η μέση επιτάχυνση στο χρονικό διάστημα μεταξύ t=3 και 5s?

$$a = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{-5m/s}{2} \Rightarrow a = -2.5m/s^2$$

Επιτάχυνση συναρτήσει χρόνου - Παράδειγμα

- Ποια η επιτάχυνση του σώματος για t = 4s?

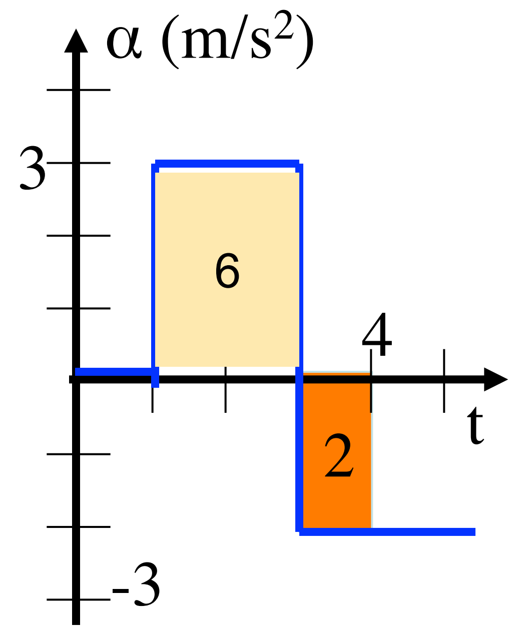
  $x(t=4) = -2m/s^2$

- Ποια η μεταβολή της ταχύτητας του σώματος στο χρονικό διάστημα μεταξύ t = 4 και t = 1s?

Μεταβολή ταχύτητας = Εμβαδό κάτω από τη καμπύλη:

Εύρεση εμβαδού:
- $t=1 \rightarrow 3$: $E_1=(2s)x(3m/s^2)=6.0m/s$
- $t=3 \rightarrow 4$: $E_2=(1s)x(-2m/s^2)=-2.0m/s$

$E_{o\lambda} = E_1 + E_2 = 6.0 - 2.0 \rightarrow \Delta u = 4.0m/s$



Ερώτηση:

- Είναι δυνατό ένα σώμα να έχει θετική ταχύτητα και την ίδια χρονική στιγμή να έχει αρνητική επιτάχυνση ?

NAI

Ναι γιατί μπορεί να έχει θετική ταχύτητα καθώς επιβραδύνεται

OXI

- Αν η ταχύτητα του σώματος δεν είναι μηδέν μπορεί η επιτάχυνσή του να είναι κάποτε μηδέν

NAI

Μηδενική επιτάχυνση σημαίνει σταθερή ταχύτητα

OXI

- Αν η μέση ταχύτητα ενός σώματος που εκτελεί μονοδιάστατη κίνηση είναι θετική μπορεί η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος για κάποιο χρονικό διάστημα να είναι αρνητική ?

NAI

Φανταστείτε ότι κινήστε 5Km προς τη θετική διεύθυνση, κατόπιν σταματάτε και κινείστε 3Km προς το μηδέν (αρνητική διεύθυνση)
Η μέση ταχύτητα είναι θετική

OXI

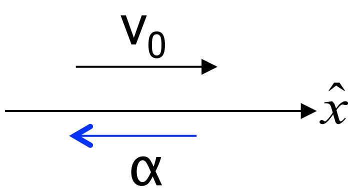
Παράδειγμα

Ένα σώμα κινείται σε 1-διάσταση

Αρχικές συνθήκες:

για $t=0$, $x_0 = 10m$, $v_0=15m/s$, $α=-5m/sec^2$, ως προς $\hat{x}$

Ποια η ταχύτητα **v** και διάνυσμα θέσης **x** του σώματος μετά από 8 sec



Το σώμα με $v_0 > 0$ ελαττώνει ταχύτητα αφού $α < 0$

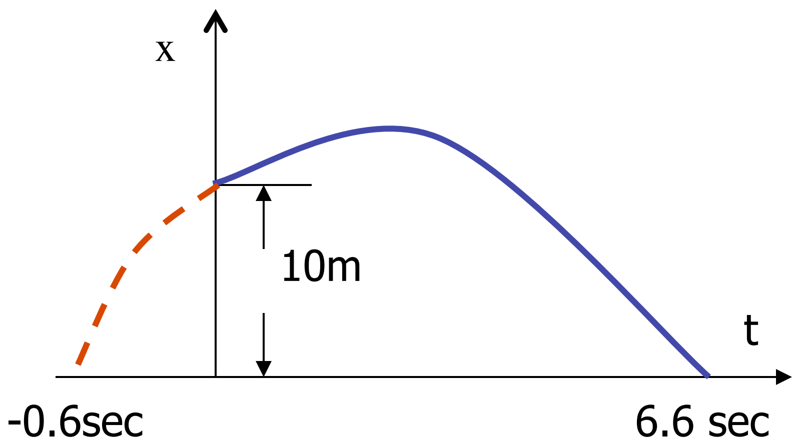
$$v(t) = v_0 + at \Rightarrow v(t=8) = 15 + (-5)\times 8 = -25m/s$$

Η ταχύτητα του σώματος ελαττώνεται μέχρι να μηδενιστεί και κατόπιν αλλάζει φορά κίνησης (προς τη -x διεύθυνση)

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow x(t=8s) = 10 + \frac{1}{2}(-5)\times 8^2 + 15\times 8 = -30m$$

Παράδειγμα (συνέχεια) – Μερικές ερωτήσεις

Πότε το σώμα περνά από x = 0?



$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

$$x(t) = 10 - \frac{5}{2}t^2 + 15t = 0$$

Δευτεροβάθμια εξίσωση με λύσεις

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\gamma}}{2a}$$

$$t_{1,2} = 3 \pm \sqrt{13} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 6.6s \\ t_2 = -0.6s \end{cases}$$

Ποια από τις 2 απαντήσεις είναι φυσική?

Εξαρτάται από το πρόβλημα. Τι συνέβη τη χρονική στιγμή -0.6 sec;
Πιθανόν να ρίξαμε το σώμα προς τα πάνω.
Επομένως t_2=-0.6s είναι ο χρόνος που χρειάστηκε για να αποκτήσει την αρχική ταχύτητα u_0= 15m/s και να βρεθεί στην αρχική θέση x_0=10m.