ΦΥΣ. 133

ΕΡΓΑΣΙΑ # 4 **Επιστροφή 7-3-2006**

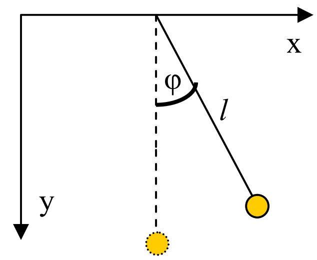
1. Θεωρήστε ένα απλό επίπεδο εκκρεμές αποτελούμενο από μια μάζα m η οποία εξαρτάται από ένα νήμα αμελητέας μάζας και μήκους l. Το εκκρεμές τίθεται σε κίνηση και από τη χρονική αυτή στιγμή το μήκος του νήματος αρχίζει να ελαττώνεται με σταθερό ρυθμό:
$$\frac{dl}{dt} = -a = const.$$
Το σημείο στήριξης του εκκρεμούς παραμένει σταθερό.
(α) Να υπολογισθεί η Lagrangian του συστήματος
(β) Να υπολογισθεί η συνάρτηση της ενέργειας h.
(γ) Συγκρίνετε τη συνάρτηση της ενέργειας h με την ολική ενέργεια του συστήματος και σχολιάστε την διατήρηση ενέργειας για το σύστημα.

2. Θεωρείστε το πρόβλημα του βραχυστόχρονου από τις διαλέξεις. Αυτή τη φορά θεωρείστε ότι το σώμα εκτοξεύεται από το σημείο 1 με σταθερή ταχύτητα υ_0. Δείξτε ότι η διαδρομή του ελάχιστου χρόνου στο συγκεκριμένο σημείο 2 είναι και πάλι ένα κυκλοειδές αλλά αυτή τη φορά το υψηλότερο σημείο της καμπύλης του κυκλοειδούς βρίσκεται σε ύψος $\upsilon_0^2 / 2g$ πάνω από το σημείο 1.

3. Αποδείξτε ότι η γεωδεσιακή μιας κυλινδρικής επιφάνειας είναι κυλινδρική έλικα η εξίσωση της οποίας είναι $z=C_1\varphi+C_2$, όπου C_1, C_2 σταθερές.

4. Ένα αεροσκάφος του οποίου η ταχύτητα ως προς τον αέρα είναι υ_0 πρέπει να πετάξει από την πόλη Ο (η θέση της συμπίπτει με την αρχή των αξόνων) στη πόλη P που βρίσκεται απόσταση D ανατολικά. Πνέει ωστόσο ένας σταθερός άνεμος με ταχύτητα $\vec{V}_{\alpha\nu\varepsilon\mu} = Vy\hat{x}$, όπου x και y μετρούνται ανατολικά και βόρεια αντίστοιχα. Βρείτε τη διαδρομή y = y(x), την οποία θα πρέπει να ακολουθήσει το αεροσκάφος ώστε να ελαχιστοποιήσει τον χρόνο πτήσης του σύμφωνα με τα ακόλουθα: (α) Βρείτε την ταχύτητα του αεροσκάφους ως προς το έδαφος συναρτήσει των υ_0, V και φ (τη γωνία με την οποία κινείται το αεροσκάφος βόρεια σχετικά με την ανατολική διεύθυνση), και την θέση του αεροσκάφους. (β) Γράψτε το χρόνο πτήσης σαν ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int_0^D f dx$. Δείξτε ότι αν υποθέσουμε ότι τα y΄ και φ παραμένουν και τα δύο μικρά (εφόσον η ταχύτητα του ανέμου δεν είναι πολύ μεγάλη), τότε το ολοκλήρωμα f παίρνει την μορφή $f = (1+\frac{1}{2}y'^2)/(1+ky)$ πολλαπλασιασμένο με μια μη ενδιαφέρουσα σταθερά. Εδώ $k=V/\upsilon_0$. [*Υπόδειξη:* θα χρειαστείτε να πάρετε το ανάπτυγμα Taylor στο βήμα αυτό.] (γ) Γράψτε την διαφορική εξίσωση Euler-Lagrange η οποία προσδιορίζει τη καλύτερη διαδρομή. Για να την λύσετε χρησιμοποιήστε ότι y(x) = λ(D-x)x, η οποία καμπύλη προφανώς περνά από τις δύο πόλεις. Δείξτε ότι ικανοποιεί την εξίσωση Euler-Lagrange, δεδομένου ότι $\lambda = (\sqrt{4+2k^2D^2} - 2)/(kD^2)$. Πόσο βόρεια παίρνει το αεροσκάφος αυτή η διαδρομή, αν D=2000mi, υ_0=500miph και ο άνεμος έχει ταχύτητα V=0.5miph; Πόσο χρόνο κερδίζει το αεροσκάφος ακολουθώντας αυτή τη διαδρομή; Η αριθμητική λύση του ολοκληρώματος ελάχιστου χρόνου ισούται με t=3.556 ώρες.

5. Γράψτε την Lagrangian του απλού εκκρεμούς του παρακάτω σχήματος συναρτήσει των καρτεσιανών συντεταγμένων x και y. Αυτές οι συντεταγμένες περιορίζονται βάσει της εξίσωσης του δεσμού $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}=l$. (α) Γράψτε τις δύο τροποποιημένες εξισώσεις Lagrange (χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές Lagrange). Συγκρίνοντας τις εξισώσεις αυτές με τις εξισώσεις από το 2^{ο} νόμο του Newton δείξτε ότι ο πολλαπλασιαστής Lagrange είναι το αρνητικό της τάσης του νήματος. Αποδείξτε ότι $\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x}=F^{\delta\varepsilon\sigma\mu}$ καθώς και την αντίστοιχη εξίσωση ως προς y. (β) Η εξίσωση του δεσμού μπορεί να γραφεί με διάφορους τρόπους. Για παράδειγμα μπορούμε να γράψουμε ότι $g(x,y)=x^2+y^2=l^2$. Δείξτε ότι χρησιμοποιώντας αυτή τη συναρτησιακή μορφή θα παίρνατε το ίδιο αποτέλεσμα.



6. Ένας κύλινδρος ομοιόμορφης πυκνότητας, μάζας m ακτίνας r κυλά χωρίς ολίσθηση πάνω σε ένα ακίνητο κύλινδρο ακτίνας R. Η μόνη εξωτερική δύναμη είναι η δύναμη της βαρύτητας. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange για να βρείτε σε ποιο σημείο ο κυλιόμενος κύλινδρος πέφτει από τον ακλόνητο κύλινδρο.