Κέντρο μάζας συνεχούς κατανομής μάζας

Να βρεθεί το κέντρο μάζας μιας ράβδου μήκους L, μάζας M και πυκνότητας λ = M/L

Λύση

Χωρίς να υπολογίσουμε ξέρουμε ότι το κέντρο μάζας είναι σε $x_{KM}=L/2$ (συμμετρία)

Ας το ελέγξουμε με υπολογισμούς:

$$dm = \lambda dx$$

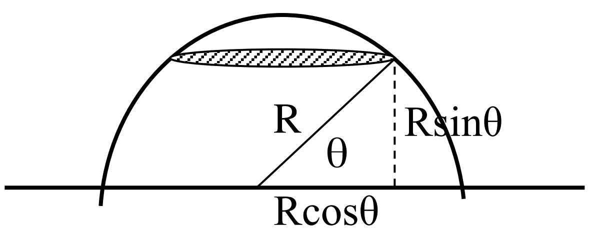
$$x_{KM} = \frac{1}{M}\int_0^M x\,dm \Rightarrow \frac{1}{M}\int_0^L x\lambda\,dx$$

$$x_{KM} = \left.\frac{\lambda x^2}{2M}\right|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M} = \frac{(\lambda L)L}{2M} = \frac{ML}{2M} \Rightarrow x_{KM} = \frac{L}{2}$$

Εύρεση κέντρου μάζας – Ένα ακόμα παράδειγμα

Να βρεθεί το κέντρο μάζας ενός ημισφαιρικού κελύφους (άδεια σφαίρα) ακτίνας R και πυκνότητας μάζας σ *Kg/m*^{2}

Λύση



Κοιτάμε σε ένα κύκλο σε γωνία θ πάνω από τον ορίζοντα.

Η κυκλική λωρίδα έχει μάζα:

$$dm = \sigma(dA) = \sigma(\mu\eta\kappa o\varsigma)(\pi\alpha\chi o\varsigma) \Rightarrow dm = \sigma(2\pi R\cos\theta)(Rd\theta)$$

Όλα τα σημεία στο κύκλο αυτό έχουν y = Rsinθ άρα

$$y_{KM} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{2\pi R^2\sigma}\int_0^{\pi/2}(R\sin\theta)(2\pi R^2\sigma\cos\theta d\theta)$$

$$y_{KM} = R\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta = R\left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\pi/2} \Rightarrow \boxed{y_{KM} = \frac{R}{2}}$$

Πόσο είναι το x_{KM}=? 0

Δυναμική συστήματος σωμάτων

Είπαμε ότι το CM μπορεί να αντικαταστήσει το σύνολο των σωμάτων του συστήματός μας σαν ένα υλικό σημείο με μάζα την μάζα των σωμάτων και διάνυσμα θέσης r_{cm}.

- Η ταχύτητα του CM θα είναι:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\right) = \frac{1}{M}\left(m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt}\right) \Rightarrow \vec{V}_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right)$$

για Ν σώματα $\vec{V}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{v}_i$ (1)

- Η επιτάχυνση

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right) = \frac{1}{M}\left(m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt}\right) \Rightarrow \vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2\right)$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right)$$

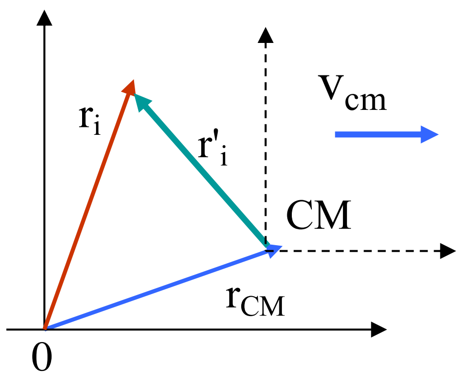
για Ν σώματα $\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{a}_i$ (2)

Από την (1) έχουμε: $M\vec{V}_{CM} = \sum_i m_i\vec{v}_i \Rightarrow \vec{P}_{CM} = \sum_i m_i\vec{v}_i$

Από την (2) έχουμε: $M\vec{a}_{CM} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i\left(\vec{F}_{\varepsilon\xi} + \vec{F}_{\varepsilon\sigma}\right) = \frac{d\vec{P}_{o\lambda}}{dt}$

Κινητική ενέργεια κέντρου μάζας

Έστω $\vec{r}_i'$ το διάνυσμα θέσης ενός σώματος ως προς το CM



$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i' \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i'$$ ← ταχύτητα σώματος i ως προς KM

$$KE = \sum_i \frac{1}{2}\left(m_i \left|\vec{v}_i\right|^2\right) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\left|\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i'\right|\right)^2 \Rightarrow$$

$$KE = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i'\right)\cdot\left(\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i'\right)$$

$$\left(\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i'\right)\cdot\left(\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i'\right) = \left|\vec{v}_{CM}\right|^2 + \left|\vec{v}_i'\right|^2 + 2\vec{v}_{CM}\cdot\vec{v}_i'$$

Άρα η κινητική ενέργεια μπορεί να γραφεί:

$$KE = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left|\vec{v}_{CM}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i \left|\vec{v}_i'\right|^2 + \vec{v}_{CM}\cdot\underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i'}_{0} \Rightarrow KE = \frac{1}{2} M \left|\vec{v}_{CM}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i \left|\vec{v}_i'\right|^2 + 0$$

Τα $\vec{r}_i'$ ορίζονται ως προς το σύστημα συντεταγμένων με αρχή το CM

Αλλά από τον ορισμό του CM έχουμε $\vec{r}_{cm}' = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i'}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = (0,0)$

$$\sum_i m_i \vec{r}_i' = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{r}_i' = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{v}_i' = 0$$

Σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας

Το σύστημα αναφοράς με αρχή το κέντρο μάζας ενός συστήματος σωμάτων λέγεται σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας.

Στο σύστημα αυτό η ολική ορμή των σωμάτων του συστήματος είναι μηδέν

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

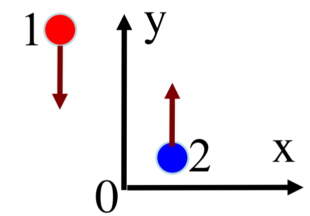
Αν διαλέξουμε σαν αρχή των αξόνων το κέντρο μάζας τότε $\vec{r}_{CM} = 0$

Ενώ οι θέσεις των σωμάτων σχετικά με αυτό το σύστημα θα είναι $\vec{r}_i'$

$$\vec{0} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i' \Rightarrow 0 = \sum_i m_i \vec{r}_i' \Rightarrow \vec{0} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{r}_i' \Rightarrow \sum_i m_i \vec{\mathrm{v}}_i' = \vec{0} \Rightarrow \sum_i \vec{p}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_{CM}^{\,tot} = \vec{0}$$

Παράδειγμα – Κέντρο Μάζας

Μια μπάλα μάζας 0.50kg εκτοξεύεται από ύψος 150m κατακόρυφα προς το έδαφος με αρχική ταχύτητα 30m/s. Την ίδια χρονική στιγμή μια μπάλα μάζας 0.25kg εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα 25m/s. Οι δυό μπάλες κινούνται παράλληλα, προσπερνούν η μια την άλλη και συνεχίζουν την κίνησή τους χωρίς να συγκρουστούν. Σε τι ύψος θα βρίσκεται το κέντρο μάζας τους 3sec μετά τη ρίψη των μπαλών;



Βρίσκουμε τη θέση των 2 μπαλών μετά από 3sec:

Μπάλα 1: $y_1 = y_{01} + (-\upsilon_{01})t - \frac{1}{2}gt^2 = 150m - 30\frac{m}{s}\times 3s - 0.5\times 9.8\frac{m}{s^2}\times 9s^2 \Rightarrow y_1 = 15.9m$

Μπάλα 2: $y_2 = y_{02} + \upsilon_{02}t - \frac{1}{2}gt^2 = 25\frac{m}{s}\times 3s - 0.5\times 9.8\frac{m}{s^2}\times 9s^2 \Rightarrow y_2 = 30.9m$

Κ.Μ.: $y_{KM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{0.5kg\times 15.9m + 0.25kg\times 30.9m}{0.5kg + 0.25kg} = \frac{7.95kgm + 7.725kgm}{0.75kg} \Rightarrow y_{KM} = 20.9m$

Διαφορετικά: Βρίσκουμε τη θέση και ταχύτητα του ΚΜ για t=0s και εξετάζουμε τη κίνηση του για τα επόμενα 3s ως ένα σώμα με μάζα = $m_1 + m_2$

$$y_{KM/t=0} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{0.5\times 150m + 0.25\times 0m}{0.5 + 0.25} \Rightarrow y_{KM/t=0} = 100.0m$$

$$y_{KM/t=3} = y_{0KM} + \upsilon_{0KM}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\upsilon_{KM/t=0} = \frac{m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2}{m_1 + m_2} = \frac{0.5\times\left(-30\frac{m}{s}\right) + 0.25\times 25\frac{m}{s}}{0.5 + 0.25} \Rightarrow \upsilon_{KM/t=0} = -11.7\frac{m}{s}$$

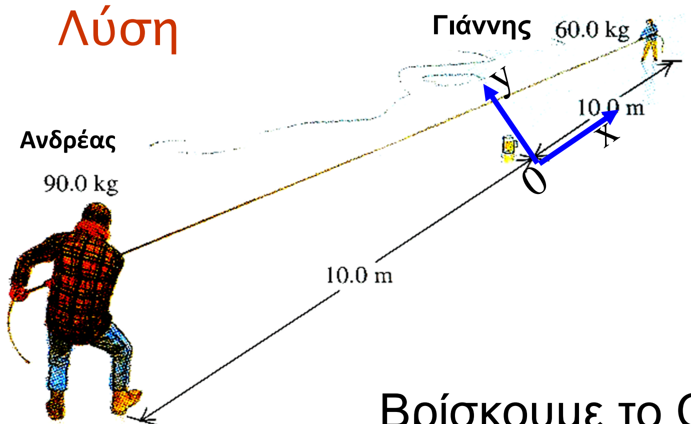
$$y_{KM/t=3} = 20.9m$$

Κέντρο μάζας - Παράδειγμα

Ο Γιάννης και ο Ανδρέας στέκονται πάνω σε μια παγωμένη λίμνη σε 20m απόσταση.
Ο Γιάννης έχει μάζα 60kg ενώ ο Ανδρέας έχει μάζα 90kg.
Στο μέσο της απόστασής τους υπάρχει ένα ποτήρι μπύρα πάνω στο πάγο.
Τραβάνε τα άκρα ενός αβαρούς σχοινιού το οποίο εκτείνεται μεταξύ τους.

Όταν ο Ανδρέας έχει κινηθεί κατά 6.0m προς το ποτήρι, πόσο έχει κινηθεί ο Γιάννης και προς πια κατεύθυνση?

Λύση



Σύστημα: Ανδρέας – Γιάννης - Σχοινί $\sum \vec{F} = \vec{0}$

$$\Delta \sum \vec{p}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}^{\,i}_{ολ} = \vec{p}^{\,f}_{ολ} \quad \text{(απομονωμένο)}$$

Αλλά $\vec{p}^{\,i}_{ολ} = \vec{0}$ και $\vec{\upsilon}_{\Gamma} = \vec{\upsilon}_{A} = \vec{\upsilon}_{CM} = \vec{0}$

Έστω σύστημα συντεταγμένων με αρχή το ποτήρι και θετική φορά αυτή προς το Γιάννη.

Βρίσκουμε το CM: $$x_{CM} = \frac{(90kg)(-10m)+(60kg)(10m)}{90kg+60kg} = -2.0m$$

Η νέα θέση του Ανδρέα είναι $-4.0\mathrm{m}$ αφού κινήθηκε κατά $6.0\mathrm{m}$ προς το ποτήρι

Έστω x_2 η νέα θέση του Γιάννη. Αφού το CM είναι ακίνητο:

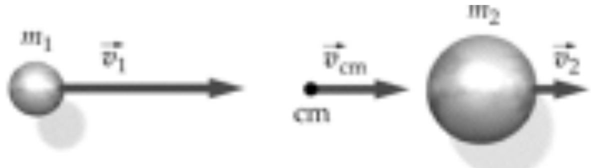
$$x_{CM} = \frac{-360kgm + 60x_2}{150kg} = -2.0m \Rightarrow x_2 = 1m$$ Ο Γιάννης είναι πολύ κοντά στο ποτήρι.

Η απόσταση που κινούνται είναι ανάλογη του αντιστρόφου του λόγου των μαζών

Γιατί ? $$\vec{P}^{i}_{ολ} = \vec{P}^{f}_{ολ} = \vec{0} \Rightarrow 0 = m_A \upsilon_A + m_\Gamma \upsilon_\Gamma \Rightarrow \frac{m_\Gamma}{m_A} = -\frac{\upsilon_A}{\upsilon_\Gamma} = \frac{d_A}{d_\Gamma}$$

Σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας

Έστω 2 σώματα μάζας m_1 και m_2 κινούμενα με ταχύτητες υ_1 και υ_2

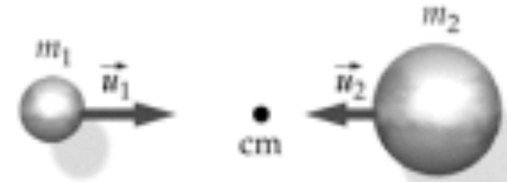


Η ταχύτητα του ΚΜ δίνεται από τη σχέση: $\vec{\upsilon}_{cm} = \dfrac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}$

Σε ένα σύστημα το οποίο συνδέεται με το ΚΜ οι ταχύτητες των μαζών είναι:

$\vec{u}_1 = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_{cm}$ $\vec{u}_2 = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_{cm}$

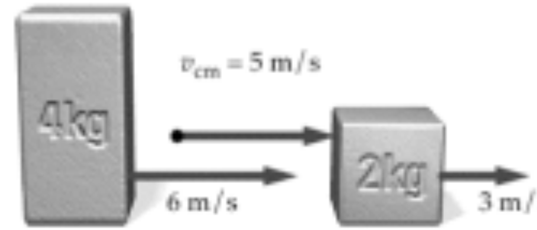
Στο σύστημα αυτό η ταχύτητα του ΚΜ είναι: $\vec{u}_{cm} = 0$



Από τη στιγμή που η ταχύτητα του ΚΜ είναι 0 τότε: $\vec{P}_{cm} = 0 \Rightarrow \vec{P}_1^{KM} = -\vec{P}_2^{KM}$

Παράδειγμα

Ένα κιβώτιο μάζας m_1 = 4kg κινείται με ταχύτητα $υ_1$=6m/s και συγκρούεται ελαστικά με κιβώτιο μάζας m_2=2kg που κινείται με ταχύτητα $υ_2$=3m/s. Τα σώματα κινούνται προς τα δεξιά. Να βρεθούν οι ταχύτητές τους μετά την κρούση μετατρέποντας τις ταχύτητές τους στο σύστημα του ΚΜ

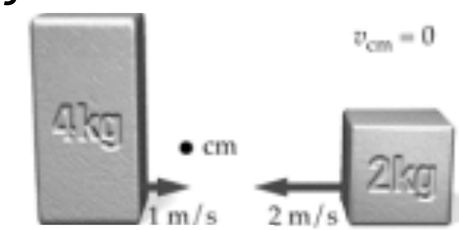


Βρίσκουμε πρώτα τη ταχύτητα του ΚΜ: $\vec{\upsilon}_{cm} = \dfrac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{4kg\times 6\frac{m}{s} + 2kg\times 3\frac{m}{s}}{2kg + 4kg} = 5m/s$

Μετασχηματίζουμε τις αρχικές ταχύτητες των σωμάτων ως προς ΚΜ:

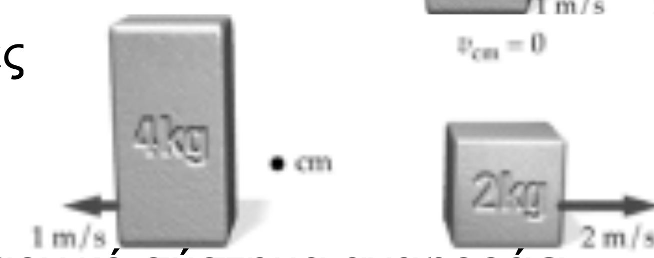
$$\vec{u}^{\,cm}_{1i} = \vec{\upsilon}_{1i} - \vec{\upsilon}_{cm} \Rightarrow \vec{u}_{1i} = 6\frac{m}{s} - 5\frac{m}{s} = 1m/s$$ και

$$\vec{u}^{\,cm}_{2i} = \vec{\upsilon}_{2i} - \vec{\upsilon}_{cm} \Rightarrow u^{cm}_{2i} = 3\frac{m}{s} - 5\frac{m}{s} = -2m/s$$



Μετά τη κρούση τα 2 σώματα έχουν ταχύτητες

$u^{cm}_{1f} = -1m/s$ και $u^{cm}_{2f} = 2m/s$



Μετασχηματίζουμε τις τελικές ταχύτητες στο αρχικό σύστημα αναφοράς:

$$\vec{\upsilon}_{1f} = \vec{u}^{\,cm}_{1f} + \vec{\upsilon}_{cm} \Rightarrow \upsilon_{1f} = -1\frac{m}{s} + 5\frac{m}{s} = 4m/s$$ και

$$\vec{\upsilon}_{2f} = \vec{u}^{\,cm}_{2f} + \vec{\upsilon}_{cm} \Rightarrow \upsilon_{2f} = 2\frac{m}{s} + 5\frac{m}{s} = 7m/s$$