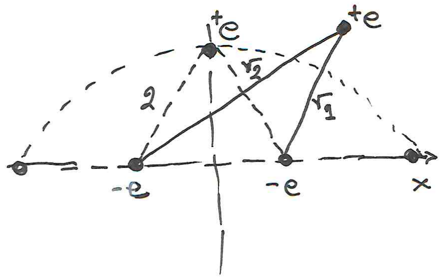
ΦΥΣ. 112

3ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή 02.11.2022**

1. Θεωρήστε την περίπτωση ενός πρωτονίου και δύο ηλεκτρονίων. Βρείτε την γεωμετρική διάταξη του συστήματος των 3 αυτών φορτίων τέτοια ώστε η δυναμική ενέργεια που θα αντιστοιχεί στην κατανομή να είναι μηδέν. Υπάρχουν άπειρες τέτοιες διατάξεις στο επίπεδο και στον χώρο. Πόσες τέτοιες διαφορετικές διατάξεις υπάρχουν για τα 3 αυτά σωματίδια στην ίδια ευθεία γραμμή; Χρησιμοποιώντας *PYTHON* να κάνετε το γράφημα των πιθανών διατάξεων των σωματιδίων που αντιστοιχούν στο επίπεδο.



Η γενική περίπτωση της διάταξης των 3 φορτίων είναι αυτή για την οποία τα 3 φορτία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Ωστόσο θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι δύο από αυτά βρίσκονται στην ίδια ευθεία η οποία συμπίπτει με τον x-άξονα.

Θεωρούμε λοιπόν ότι τα ηλεκτρόνια βρίσκονται σε απόσταση ίση με μια μονάδα απόστασης, δηλαδή $x_1 = -\frac{1}{2}$ και $x_2 = +\frac{1}{2}$.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το πρωτόνιο βρίσκεται στο επίπεδο xy. Για μια τυχαία θέση, η απόσταση του πρωτονίου από τα δύο ηλεκτρόνια, θα είναι r_1 και r_2. Η ενέργεια του συστήματος των 3 φορτίων θα είναι:

$$U = k\left(\frac{e^2}{1} - \frac{e^2}{r_1} - \frac{e^2}{r_2}\right) \Rightarrow U = ke^2\left(1 - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad (1)$$

Θέλουμε η ενέργεια αυτή να είναι $\emptyset$. Οπότε $U = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1}$ (2)

Όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα, όταν το πρωτόνιο βρίσκεται πάνω στον y-άξονα, η εξίσωση (2) ικανοποιείται όταν $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{r_1} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{r_1 = 2}$

Η εξίσωση (2) ορίζει μια καμπύλη στο xy-επίπεδο, και μια επιφάνεια περιστροφής ως προς τον x-άξονα στο χώρο.

Όταν όλα τα φορτία βρίσκονται στον x-άξονα, υποθέτουμε ότι το πρωτόνιο βρίσκεται στα δεξιά του ηλεκτρονίου που βρίσκεται στα δεξιά. Επομένως από την εξίσωση (2) θα έχουμε: $r_1 = x - 1/2$ και $r_2 = x + 1/2$.

$$\frac{1}{x-1/2} + \frac{1}{x+1/2} = 1 \Rightarrow x + \cancel{1/2} + x - \cancel{1/2} = x^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow 2x = x^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - 2x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+1}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Η αρνητική λύση $x_2 = \frac{2-\sqrt{5}}{2}$ απορρίπτεται γιατί υποθέσαμε ότι το πρωτόνιο βρίσκεται δεξιά του ηλεκτρονίου που βρίσκεται στον $+x$-άξονα.

Επομένως $x_p = \frac{2+\sqrt{5}}{2}$.

Η απόσταση του πρωτονίου από το ηλεκτρόνιο που βρίσκεται στη θέση $x = \frac{1}{2}$ είναι: $\frac{2+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Επομένως ο λόγος της απόστασης ηλεκτρονίου-πρωτονίου προς την απόσταση των δύο ηλεκτρονίων, είναι: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ αφού υποθέσαμε ότι $x_e - x_e = 1$

Αντίστοιχα, το πρωτόνιο θα μπορούσε να βρίσκεται αριστερά του ηλεκτρονίου στη θέση $x_e = -1/2$ και σε απόσταση $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ από το ηλεκτρόνιο ή

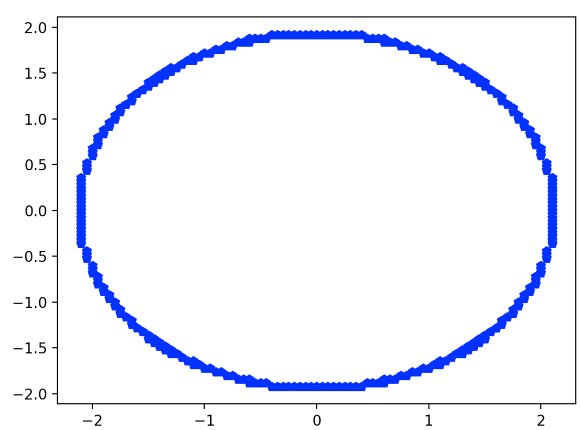
$$x_p = \frac{-2-\sqrt{5}}{2} = -2.118$$

Δεν υπάρχει λύση για την περίπτωση που το πρωτόνιο βρίσκεται ανάμεσα στο δύο ηλεκτρόνια.

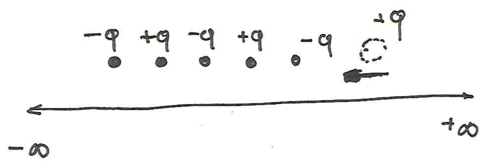
```python
#!/usr/bin/python3

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x=np.linspace(-2.5,2.5,101)
y=np.linspace(-2.0,2.0,101)
q0x = 1/2
q1x = -1/2
xpl = []
ypl = []
eps = 0.01
for i in range(len(x)):
    r1x = x[i]-q0x
    r2x = x[i]-q1x
    for j in range(len(y)):
        yp = y[j]
        r1 = np.sqrt(r1x**2+yp**2)
        r2 = np.sqrt(r2x**2+yp**2)
        if r1 == 0 or r2 == 0: continue
        if np.abs(1/r1 + 1/r2 - 1)<eps :
            xpl += [ x[i] ]
            ypl += [ y[j] ]
plt.plot(xpl,ypl,'bp')
plt.show()
```



2. Προσδιορίστε τη δυναμική ενέργεια, ανά ιόν, για μια μονοδιάστατη κρυσταλλική δομή ιόντων απείρου μήκους. Αυτό σημαίνει ότι θα έχετε μία κατανομή φορτίων τα οποία βρίσκονται σε μία γραμμή, ισαπέχουν μεταξύ τους και το φορτίο τους είναι ίσο με e και εναλλάσσεται από το ένα φορτίο στο άλλο. *Υπόδειξη:* μπορεί να βρείτε χρήσιμο το ανάπτυγμα του $ln(1+x)$.



Υποθέστε ότι η κρυσταλλική πλευρά έχει δημιουργηθεί ξεκινώντας από το $-\infty$ και έχουμε φθάσει έως ένα συγκεκριμένο αρνητικό ιόν, όπως στο σχήμα. Για να προσθέσουμε το επόμενο θετικό ιόν στα δεξιά, θα χρειαστεί να δαπανηθεί εξωτερικό έργο ίσο με:

$$W_{\varepsilon\xi} = k\left(-\frac{e^2}{a} + \frac{e^2}{2a} - \frac{e^2}{3a} + \frac{e^2}{4a} - \dots\right) = -k\frac{e^2}{a}\left(+1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) \quad (1)$$

Το ανάπτυγμα Taylor του $ln(1+x)$ για $-1 < x \leq 1$ είναι:

$$ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \overset{x=1}{\Longrightarrow} ln(2) \simeq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι: $W_{\varepsilon\xi} = -k\frac{e^2}{a} \cdot ln(2) = -0.693\,k\frac{e^2}{a}$

Επομένως, η ενέργεια της άπειρης αλυσίδας ανά ιόν είναι $-0.693k\frac{e^2}{a}$.

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι ακριβές και πεπερασμένο.

Η πρόσθεση επιπλέον ιόντων στα δεξιά δεν επηρεάζει την ενέργεια που απαιτείται για να δημιουργηθεί η προηγούμενη αλυσίδα ιόντων, και επομένως αυτή είναι η ενέργεια που απαιτείται ανά ιόν για την κατασκευή της άπειρης αλυσίδας και στις δύο κατευθύνσεις.

Το γεγονός ότι το αποτέλεσμα είναι αρνητικό, σημαίνει ότι απαιτείται ενέργεια για να απομακρυνθούν τα φορτία μεταξύ τους, εφόσον είναι αντίθετου φορτίου.

Να σημειωθεί ότι εάν τα φορτία είχαν όλα θετικό ή αρνητικό φορτίο, τότε το έργο θα ήταν: $W_{\varepsilon\xi} = \pm k\frac{e^2}{a}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right)$ και το άθροισμα στην παρένθεση δεν συγκλίνει. Θα απαιτούνταν άπειρη ενέργεια για να έρθουν τα φορτία αυτά στην αλυσίδα αυτή.

3. (α) Μία σφαίρα ακτίνας a είναι φορτισμένη με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου πυκνότητας ρ. Υπολογίστε την δυναμική ενέργεια U της σφαίρας αυτής, δηλαδή το έργο που απαιτήθηκε ώστε να έρθουν τα φορτία στην σφαίρα. Για να το υπολογίσετε θα πρέπει να σκεφθείτε ότι «χτίζετε» τη σφαίρα αυτή φλοιό-φλοιό και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το ηλεκτρικό πεδίο έξω από την σφαιρική κατανομή φορτίου είναι σταθερό και ίσο με το πεδίο ενός σημειακού φορτίου ίσου με το φορτίο της σφαιρικής κατανομής στο κέντρο της κατανομής. Εκφράστε το αποτέλεσμά σας συναρτήσει του ολικού φορτίου της σφαίρας.

(β) Στην αρχή του $20^{ου}$ αιώνα υπήρχε η ιδέα ότι η μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου μπορεί να είναι καθαρά ηλεκτρικής προέλευσης. Αυτή η αντίληψη ενισχύθηκε με την εισαγωγή της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας και την έννοια της ισοδυναμίας μεταξύ μάζας και ενέργειας. Φανταστείτε ότι το ηλεκτρόνιο είναι μια συμπαγής φορτισμένη σφαίρα ομοιόμορφης κατανομής φορτίου και ακτίνας r_o. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) και θέτοντας τη δυναμική ενέργεια της σφαίρας του ηλεκτρονίου ίση με τη μάζα ηρεμίας του mc^2 υπολογίστε την ακτίνα r_o του ηλεκτρονίου. Ένα προφανές πρόβλημα της θεώρησης αυτής είναι ότι τίποτα δεν προσφέρεται για να διατηρήσει αυτή την κατανομή φορτίου. Δίνεται ότι η μάζα του ηλεκτρονίου είναι $m_e = 9.1x10^{-31}kg$.

(α) Το φορτίο που υπάρχει στο εσωτερικό μιας σφαίρας ακτίνας $r < \alpha$, και χωρικής πυκνότητας φορτίου ρ είναι $Q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

Το ηλεκτρικό πεδίο εξωτερικά της σφαίρας αυτής είναι σαν να βρίσκεται όλο το φορτίο στο κέντρο της σφαίρας, και η σφαίρα ενεργεί σαν σημειακό φορτίο.

Προσθέτοντας ένα επιπλέον σφαιρικό κέλυφος, πάχους dr, θα αυξήσει το φορτίο κατά $dq = (4\pi r^2 dr)\rho$

Το έργο που χρειάζεται για να φέρουμε το φορτίο dq (το οποίο ισούται με την δυναμική ενέργεια του σφαιρικού κελύφους εξαιτίας της σφαίρας) θα είναι:

$$dW = k\frac{dq \cdot Q}{r} \Rightarrow dW = k\frac{4\pi r^{\cancel{3}\,2}}{3\cancel{r}}\rho\, 4\pi r^2 dr \rho \Rightarrow dW = k\frac{(4\pi\rho)^2}{3} r^4 dr$$

Για να κατασκευάσουμε τη σφαίρα, φέρνοντας σφαιρικά κελύφη με τον τρόπο αυτό θα δώσει το συνολικό έργο που απαιτείται, αλλά και επομένως την δυναμική ενέργεια:

$$W = \int_0^{\alpha} k\frac{(4\pi\rho)^2}{3} r^4 dr = k\frac{(4\pi\rho)^2}{3}\frac{a^5}{5}$$

Το φορτίο σε όλη την σφαίρα είναι $Q_{ολ} = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho \Rightarrow 4\pi\rho = \frac{3Q_{ολ}}{a^3}$

$$\Rightarrow \boxed{W = U = k\frac{3Q^2}{5a}}$$

(β) Βρήκαμε στο (α) ερώτημα, ότι η δυναμική ενέργεια φορτισμένης σφαίρας χωρικής πυκνότητας ρ και ακτίνας a, και ολικού φορτίου Q είναι:

$$U = \frac{3}{5} k \frac{Q^2}{a}$$

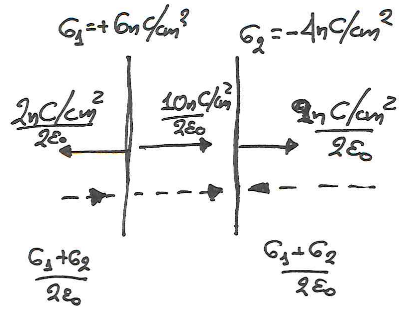
Θέτοντας την ενέργεια αυτή ίση με την ενέργεια της μάζας ηρεμίας του ηλεκτρονίου, θα έχουμε:

$$U = \frac{3}{5} k \frac{e^2}{r_0} = mc^2 \Rightarrow r_0 = \frac{3ke^2}{5mc^2} = \frac{3}{5}\,\frac{\left(9\cdot 10^{9}\,\frac{kg\,m^3}{s^2C^2}\right)\left(1.6\cdot 10^{-19}\,C\right)^2}{\left(9.1\cdot 10^{-31}\,kg\right)\left(3\cdot 10^{8}\,m/s\right)}$$

$$\Rightarrow r_0 = 1.69\cdot 10^{-15}\,m \Rightarrow \underline{r_0 = 1.69\,fm}$$

Αν η χωρική πυκνότητα φορτίου διπλασιάζονταν τότε το φορτίο στη σφαίρα του ηλεκτρονίου θα γίνονταν 8 φορές περισσότερο και η αντίστοιχη ηλεκτρική δυναμική ενέργεια θα γίνονταν 64 φορές μεγαλύτερη (φορτίο στο τετράγωνο) ελαττωμένη κατά έναν παράγοντα της ακτίνας r_0, επομένως η δυναμική ενέργεια θα γίνονταν 32 φορές μεγαλύτερη, όταν η πυκνότητα φορτίου διπλασιάζονταν. Αποτέλεσμα που θα παίρναμε αν χρησιμοποιούσαμε τη σχέση: $U = \left(\frac{4\pi\rho}{3}\right)^2 \frac{a^5}{5}$ στην οποία παρουσιάζεται η εξάρτηση από την a^5, οπότε θα είχαμε έναν παράγοντα $2^5 = 32$.

4. Θεωρήστε 2 απείρου μήκους επίπεδες επιφάνειες με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου σ_1 και σ_2 αντίστοιχα όπου $\sigma_1 = +6nC/cm^2$ 0 ενώ $\sigma_2 = -4nC/cm^2$. Οι δύο επιφάνειες είναι αρχικά παράλληλα μεταξύ τους και σε απόσταση d=2cm. (α) Υπολογίστε και σχεδιάστε το ηλεκτρικό πεδίο της διάταξης αυτής. (β) Θεωρήστε τώρα ότι οι δύο αυτές επιφάνειες αντί να είναι παράλληλες, τέμνονται κάθετα μεταξύ τους. Σχεδιάστε το πεδίο και τις δυναμικές γραμμές σε κάθε μία από τις 4 περιοχές που ορίζονται στο χώρο από την τομή των δύο επιφανειών.

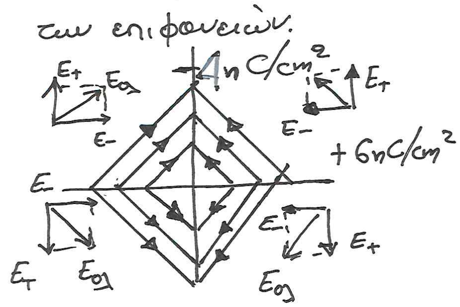


Το ηλεκτρικό πεδίο από μια φορτισμένη επιφάνεια απείρου μήκους και με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ, έχει μέτρο: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

Το πεδίο έχει φορά ώστε να απομακρύνεται από την επιφάνεια εάν είναι θετικά φορτισμένη ή φορά προς την επιφάνεια αν είναι αρνητικά φορτισμένη.

Για την διάταξη με τις δύο πλάκες, το ολικό πεδίο είναι η υπέρθεση των πεδίων από τις δύο πλάκες. Το αποτέλεσμα της υπέρθεσης αυτής φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

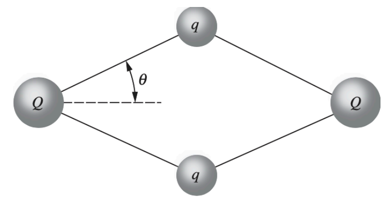
Ανάμεσα στις δύο επιφάνειες το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι: $\frac{10nC}{2\varepsilon_0 cm^2}$ ενώ εξωτερικά των επιφανειών είναι $\frac{2nC/cm^2}{2\varepsilon_0}$. Με φορά απομακρυνόμενη των επιφανειών.

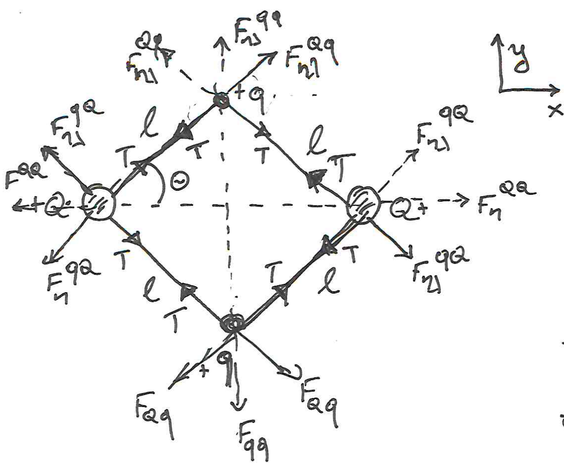


Αν οι επιφάνειες τέμνονται κάθετα μεταξύ τους, μπορούμε να πάρουμε το πεδίο από την υπέρθεση των πεδίων της θετικής και αρνητικής κατανομής φορτίων όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στις 4 περιοχές είναι: $E=\sqrt{6^2+4^2}\,\frac{nC/cm^2}{2\varepsilon_0} \Rightarrow E=\sqrt{52}\,\frac{nC/cm^2}{2\varepsilon_0}$

5. Θεωρήστε 4 φορτισμένα σώματα, 2 με φορτίο Q και 2 με φορτίο q, όπως στο σχήμα. Τα φορτία συνδέονται μεταξύ τους με 4 μη εκτατά νήματα ίσου μήκους. Απουσία εξωτερικής δύναμης τα 4 φορτία αποκτούν την διάταξη του σχήματος. Δείξτε ότι η γωνία θ ικανοποιεί τη σχέση $\tan^3\theta = q^2/Q^2$. Μπορείτε να το κάνετε με δύο τρόπους. Είτε (α) να δείξετε ότι η συνισταμένη δύναμη σε κάθε σώμα που προκύπτει από την ηλεκτροστατική δύναμη και τη δύναμη της τάσης νήματος είναι μηδέν. Ή (β) να γράψετε τη δυναμική ενέργεια της διάταξης των 4 φορτίων και να την ελαχιστοποιήσετε.





Απο συμμετρία, οι τάσεις σε όλα τα νήματα θα πρέπει να είναι ίσες μεταξύ τους.

Σε κάθε φορτίο, ασκείται ηλεκτρική δύναμη από τα άλλα τρία φορτία της διάταξης.

Το σύστημα ισορροπεί και επομένως για τα φορτία qq θα έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}^{ηλ} + \vec{F}_T = 0 \Rightarrow \vec{F}_T = -\vec{F}^{ηλ} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ y-διεύθυνση: $\vec{F}_T^{y} = -\vec{F}_{ηλ}^{y} \Rightarrow T\cdot\sin\theta + T\cdot\sin\theta = +k\frac{Qq}{l^2}\sin\theta + k\frac{Qq}{l^2}\sin\theta + \frac{kqq}{4l^2\sin^2\theta}$

$$\Rightarrow 2T\sin\theta = 2k\frac{qQ}{l^2}\sin\theta + k\frac{q^2}{4l^2\sin^2\theta} \Rightarrow k\frac{q^2}{8\sin^3\theta} = l^2T - kqQ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{kq^2}{8\sin^3\theta} = l^2T - kqQ} \qquad (1)$$

Παρόμοια, κάθε φορτίο Q είναι σε ισορροπία γιατί η ηλεκτροστατική δύναμη στην x-διεύθυνση εξισορροπεί την τάση στη x-διεύθυνση:

$$k\frac{Qq}{l^2} + k\frac{Qq}{l^2} + \frac{kQ^2}{(2l\cdot\cos\theta)^2} = 2T\cdot\cos\theta \Rightarrow \frac{2kQq}{l^2} + \frac{kQ^2}{4l^2\cos^3\theta} = 2T\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{kQ^2}{8\cos^3\theta} = l^2T - kqQ} \qquad (2)$$

Παρατηρούμε ότι τα δεξιά μέλη της (1) κ (2) ισούνται: $\frac{\cancel{k}q^2}{\cancel{8}\sin^3\theta} = \frac{\cancel{k}Q^2}{\cancel{8}\cos^3\theta} \Rightarrow \boxed{\tan^3\theta = \left(\frac{q}{Q}\right)^2}$

Θα μπορούσαμε να λύσουμε την άσκηση θεωρώντας την ηλεκτροστατική ενέργεια της διάταξης των 4 φορτίων:

$$V = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k\neq j}^{4} k\frac{q_j q_k}{r_{jk}} = \frac{k}{2}\left[\frac{qQ}{l} + \frac{qQ}{l} + \frac{q^2}{2l\sin\theta} + \frac{Qq}{l} + \frac{Qq}{l} + \frac{Q^2}{2l\cos\theta} + \frac{qQ}{l} + \frac{qQ}{l} + \frac{q^2}{2l\sin\theta} + \frac{Qq}{l} + \frac{Qq}{l} + \frac{Q^2}{2l\cos\theta}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = k\left[2\frac{qQ}{l} + 2\frac{Qq}{l} + \frac{q^2}{4l\sin\theta} + \frac{Q^2}{4l\cos\theta}\right] \Rightarrow V = k\left[\frac{4Qq}{l} + \frac{q^2}{4l\sin\theta} + \frac{Q^2}{4l\cos\theta}\right]$$

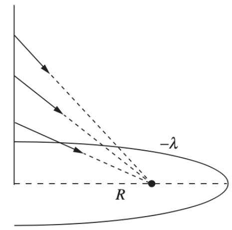
Για να ελαχιστοποιήσουμε την ενέργεια θα έχουμε:

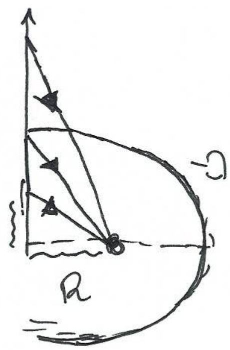
$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left[\frac{q^2}{4l\sin\theta} + \frac{Q^2}{4l\cos\theta}\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left[\frac{q^2}{\sin\theta} + \frac{Q^2}{\cos\theta}\right] = 0$$

Επομένως: $$\frac{q^2\cos\theta}{\sin^2\theta} - \frac{Q^2\sin\theta}{\cos^2\theta} = 0 \Rightarrow \frac{q^2\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{Q^2\sin\theta}{\cos^2\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta} = \left(\frac{q}{Q}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\tan^3\theta = \left(\frac{q}{Q}\right)^2}$$

6. Ένα σύρμα σε σχήμα ημικυκλίου ακτίνας *R*, είναι φορτισμένο με ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου -*λ*. Δείξτε ότι για όλα τα σημεία κατά μήκος του άξονα που περνά από το κέντρο του ημικυκλίου και είναι κάθετος στο επίπεδο του ημικυκλίου, η ένταση του πεδίου δείχνει προς το ίδιο σημείο στο επίπεδο του ημικυκλίου. Ποιο σημείο είναι αυτό;





Θεωρούμε ένα σημείο σε ύψος z από το ημικύκλιο.

Όλα τα σημεία του ημικυκλικού σύρματος βρίσκονται σε απόσταση $l = \sqrt{R^2+z^2}$ από το σημείο αυτό.

Θεωρούμε ένα τμήμα του σύρματος το οποίο έχει φορτίο: $dq = \lambda R d\theta$. Το ηλεκτρικό πεδίο εξαιτίας του φορτίου αυτού είναι: $\boxed{dE = k\frac{dq}{l^2} \Rightarrow dE = k\frac{\lambda R d\theta}{R^2+z^2}}$ (1)

Έστω ο άξονας x, χωρίζει το ημικυκλικό σύρμα στη μέση. Από συμμετρία το πεδίο στη y-διεύθυνση θα έχει μηδενική συνιστώσα, $E_y = 0$.

Τα μέτρα των x και z- συνιστωσών του πεδίου dE θα είναι:

$$\left.\begin{aligned} dE_x &= dE \cdot \frac{\cancel{R}}{l}\frac{x}{\cancel{R}} = dE\frac{x}{l} \\ dE_z &= dE\frac{z}{l} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} dE_x &= k\frac{\lambda R x\, d\theta}{(R^2+z^2)^{3/2}} = k\frac{\lambda R(R\cos\theta)d\theta}{(R^2+z^2)^{3/2}} \quad (2) \\ dE_z &= k\frac{\lambda R z\, d\theta}{(R^2+z^2)^{3/2}} \quad (3) \end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε τις (2) και (3) ως προς Θ με όρια ολοκλήρωσης $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

$$E_x = \frac{k\lambda R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta \Rightarrow E_x = k\frac{\lambda R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\sin\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \Rightarrow E_x = 2k\frac{\lambda R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \quad (4)$$

$$E_z = \frac{k\lambda R z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \Rightarrow E_z = k\frac{\lambda R z \pi}{(R^2+z^2)^{3/2}} \quad (5)$$

Διαιρώντας τις (4) και (5) έχουμε: $\frac{E_z}{E_x} = \frac{z\pi}{2R} \Rightarrow \boxed{\frac{E_z}{E_x} = \frac{z}{(2R/\pi)}}$ (A)

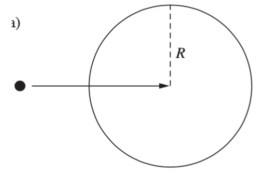
Η τελευταία σχέση δίνει την κλίση του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο που βρίσκεται σε ύψος z στον z-άξονα.
Η κλίση καλύπτει μια απόσταση $2R/\pi$ ενώ καλύπτει απόσταση z στην κατακόρυφη διεύθυνση.
Επομένως, η ευθεία που έχει τη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο $(0,0,z)$ περνά από το σημείο $(2R/\pi, 0, 0)$ στο επίπεδο του ημικυκλικού σύρματος. Το σημείο αυτό είναι ανεξάρτητο του z.

Το σημείο αυτό τυγχάνει να είναι επίσης το "κέντρο του φορτίου" ή διαφορετικά το κέντρο μάζας του ημικυκλίου. $\Big[r_{cm} = \dfrac{\int R\,dm}{\int dm} = \dfrac{\int R \cdot R\cos\theta\,\lambda\,d\theta}{\int dm}$

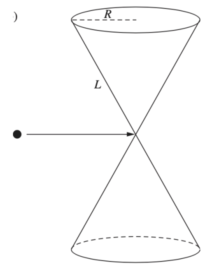
$$\Rightarrow r_{cm} = \frac{\lambda R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta}{M} = \frac{\lambda R^2 2}{M} = \frac{\lambda R 2R}{M} = \frac{\pi R \lambda \frac{R2}{\pi}}{M} = \frac{\cancel{M}\, 2R/\pi}{\cancel{M}} \Rightarrow r_{cm} = \frac{2R}{\pi} \Big]$$

Επομένως, μακριά από την κατανομή των φορτίων, το ηλεκτρικό πεδίο έχει κατεύθυνση προς το κέντρο των φορτίων της κατανομής.

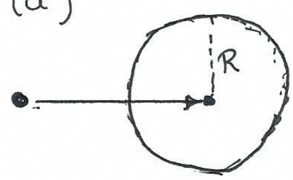
7. (α) Θεωρήστε έναν φορτισμένο κοίλο σφαιρικό φλοιό ακτίνας R και επιφανειακής πυκνότητας φορτίου σ. Ένα σωματίδιο μάζας m και φορτίου $-q$ το οποίο είναι αρχικά ακίνητο και αρχίζει να πλησιάζει από το άπειρο. Υποθέτοντας ότι υπάρχει μια μικρή τρύπα στην επιφάνεια του φλοιού, βρείτε την ταχύτητά του όταν φθάσει στο κέντρο του σφαιρικού φλοιού.



(β) Θεωρήστε στην περίπτωση αυτή ότι έχετε δύο κωνικούς φλοιούς με ακτίνα βάσης R, και μήκους κωνικής επιφάνειας L. Οι δύο κωνικές επιφάνειες έχουν επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ και η διάταξή τους είναι όπως στο διπλανό σχήμα. Ένα σωματίδιο μάζας m και φορτίου $-q$ το οποίο είναι αρχικά ακίνητο, αρχίζει να κινείται από το άπειρο και να πέφτει προς τη διάταξη. Βρείτε τη ταχύτητα του σωματιδίου καθώς αυτό περνά από την κορυφή των 2 κώνων. Θα πρέπει να βρείτε ότι η απάντησή σας σχετίζεται με την απάντησή σας στο ερώτημα (α).



(α)



Στο εσωτερικό του σφαιρικού φλοιού δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο και επομένως δεν ασκείται κάποια δύναμη πάνω στο σωματίδιο.

Θα πρέπει να υπολογίσουμε την ταχύτητα του σωματιδίου όταν φθάνει στην επιφάνεια του φλοιού

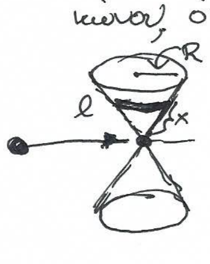
Το φορτίο στην επιφάνεια του φλοιού είναι: $Q = 4\pi R^2 \sigma$ και επομένως η δυναμική ενέργεια του σωματιδίου στην επιφάνεια του φλοιού θα είναι:

$$U(R) = k\frac{Q(-q)}{R} = -k\frac{4\pi R^2 \sigma q}{R} \Rightarrow U(R) = -\frac{4\pi R\sigma q}{4\pi\varepsilon_0} = -\frac{R\sigma q}{\varepsilon_0}$$

Η αρχική δυναμική ενέργεια ήταν $\emptyset$ και επομένως η απώλεια σε δυναμική ενέργεια εμφανίζεται ως κινητική ενέργεια:

$$\Delta K = -\Delta U \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{R\sigma q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2R\sigma q}{m\varepsilon_0}}}$$

(β) Υπολογίζουμε τη δυναμική ενέργεια U του σωματιδίου εξαιτίας ενός κώνου, όταν το σωματίδιο βρίσκεται στην κορυφή των δύο κώνων.



Θεωρούμε ένα στοιχειώδες δακτύλιο του κώνου, και κατόπιν ολοκληρώνουμε ως προς όλους τους δακτυλίους.

Έστω ένας τέτοιος δακτύλιος που βρίσκεται σε απόσταση x από την κορυφή του κώνου.

Το φορτίο του δακτυλίου αυτού, είναι: $dQ = 2\pi r\sigma\, dx$ όπου r είναι η ακτίνα του δακτυλίου: $\frac{r}{x} = \frac{R}{\ell} \Rightarrow r = \frac{R}{\ell}x$

Κάθε σημείο του δακτυλίου βρίσκεται στην ίδια απόσταση x από την κορυφή του κώνου:

$$dV = \frac{dQ(-q)}{4\pi\varepsilon_0 x} = -\frac{(2\pi\sigma r\,dx)q}{4\pi\varepsilon_0 x} = -\frac{\cancel{2}\cancel{\pi}\sigma\frac{R}{\ell}\cancel{x}\,dx\,q}{2\cancel{4}\cancel{\pi}\varepsilon_0\cancel{x}} \Rightarrow dV = -\frac{\sigma R q}{2\varepsilon_0 \ell}\,dx$$

Ολοκληρώνουμε από $x=0$ έως $x=\ell$ και θα έχουμε:

$$V = \int_0^\ell dV = -\frac{\sigma R q}{2\varepsilon_0 \ell}\int_0^\ell dx \Rightarrow V = -\frac{\sigma R q}{2\varepsilon_0 \cancel{\ell}}\cancel{\ell} \Rightarrow \boxed{V = -\frac{\sigma R q}{2\varepsilon_0}}$$

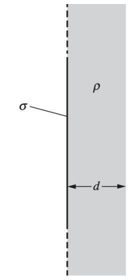
Το αποτέλεσμα είναι ίδιο με αυτό που πήραμε στο ερώτημα (α).

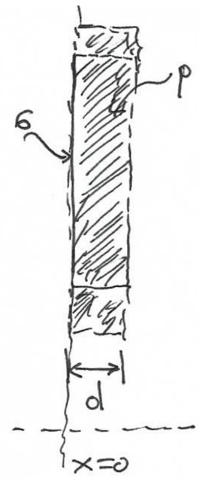
Χρειάζεται να διπλασιάσουμε το αποτέλεσμα αυτό γιατί υπάρχουν 2 κώνοι.

Επομένως το αποτέλεσμα θα είναι: $V = -\frac{\sigma R q}{\varepsilon_0}$ ίδιο με αυτό του ερωτήματος (α).

Θα έχουμε επομένως ότι $v = \sqrt{\frac{2R\sigma q}{m\varepsilon_0}}$ που είναι ανεξάρτητη του ℓ

8. Μια επιφάνεια απείρων διαστάσεων έχει επιφανειακή πυκνότητα φορτίου *σ*. Ακριβώς εφαπτομενικά στην επιφάνεια αυτή υπάρχει ένα στρώμα υλικού απείρων διαστάσεων. πάχους *d* και επιφανειακής πυκνότητας *ρ*. Τα φορτία δεν μπορούν να κινηθούν. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο ***E*** σε τυχαίο σημείο στο χώρο.





Το φορτίο που περιέχεται σε μια περιοχή της πλάκας του υλικού εμβαδού A θα είναι $\rho A d$ όπου ρ η χωρική πυκνότητα φορτίου στην πλάκα.

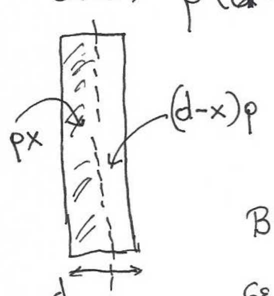
Επομένως η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου για το σύστημα της επιφάνειας και της πλάκας θα είναι: $\sigma+\rho d$.

Θεωρούμε ότι η επιφάνεια απείρων διαστάσεων βρίσκεται στη θέση $x=0$.

Όταν $x<0$, το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι: $\boxed{E_{x<0} = -\dfrac{\sigma+\rho d}{2\varepsilon_0}}$ (1)

Για $x>d$, το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι: $\boxed{E_{x>d} = \dfrac{\sigma+\rho d}{2\varepsilon_0}}$ (2)

Για $0<x\leq d$, η πυκνότητα φορτίου είναι: $\sigma+\rho x$ για την περιοχή $[0,x]$ ενώ για την περιοχή δεξιά του x έως το $x=d$ η πυκνότητα φορτίου είναι: $\rho(d-x)$.



Επομένως το πεδίο στην περιοχή $0<x\leq d$ θα είναι:

$$E=\frac{\sigma+\rho x}{2\varepsilon_0}-\frac{\rho d-\rho x}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_{0<x\leq d}=\frac{\sigma-\rho d+2\rho x}{2\varepsilon_0}} \quad (3)$$

Βλέπουμε ότι για $x=0$ το πεδίο αλλάζει από $E=-\dfrac{\sigma+\rho d}{2\varepsilon_0}$ σε $E=\dfrac{\sigma-\rho d}{2\varepsilon_0}$ και παρουσιάζει ασυνέχεια στην τιμή.

Ωστόσο για $x=d$, $E=\dfrac{\sigma-\rho d+2\rho d}{2\varepsilon_0}=\dfrac{\sigma+\rho d}{2\varepsilon_0}$ ενώ $x>d$: $E=\dfrac{\sigma+\rho d}{2\varepsilon_0}$ επομένως παρουσιάζει συνέχεια πηγαίνοντας από την πλάκα δεξιά τη

Αν η επιφάνεια είχε κάποιο πάχος, τότε το πεδίο θα ήταν συνεχές για $x=0$.

9. Ένα τετραγωνικό φύλο έχει ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ. Θεωρείστε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό V σε άπειρη απόσταση από το φύλο είναι μηδέν ενώ το δυναμικό στο κέντρο του τετραγώνου είναι V_o ενώ σε μία από τις κορυφές του είναι ίσο με V_1. Προσδιορίστε το λόγο V_o/V_1.

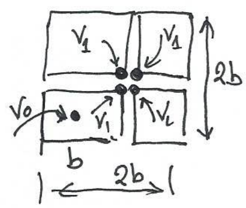
Έστω ότι έχουμε ένα τετράγωνο με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ και πλευρά μήκους S. Το φορτίο που έχει το τετράγωνο θα είναι: $Q = \sigma S^2$

Το δυναμικό στο κέντρο του τετραγώνου θα πρέπει να είναι ανάλογο του $\frac{Q}{S}$. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού το δυναμικό εν γένει είναι ανάλογο του $V = k\frac{Q}{r}$ και στο συγκεκριμένο πρόβλημα, Q είναι το φορτίο του τετραγώνου και S η μονάδα μήκους που εμφανίζεται στο πρόβλημα.

Επομένως $V \propto \frac{\sigma S^{2}}{\cancel{S}} \Rightarrow \boxed{V \propto \sigma S}$ και για σταθερό σ, το δυναμικό είναι ανάλογο του S.

Ισοδύναμα, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το δυναμικό από το ολοκλήρωμα $V = \int \frac{\sigma\, da}{r}$. Ωστόσο αν υποθέσουμε ότι αυξάνουμε το μέγεθος του τετραγώνου κατά ένα παράγοντα f, τότε το εμβαδό του αυξάνει κατά ένα παράγοντα f^2 ενώ r αυξάνει επίσης κατά ένα παράγοντα f. Επομένως το καθαρό αποτέλεσμα είναι να αυξηθεί το δυναμικό κατά ένα παράγοντα f σε σχέση με το δυναμικό του μη τροποποιημένου μεγέθους.

Αν συνδυάσουμε 4 τετράγωνα πλευράς b θα φτιάξουμε ένα τετράγωνο πλευράς $2b$. Επίσης το τετράγωνο αυτό, θα έχει δυναμικό στο κέντρο του το οποίο είναι $4V_1$ όπου V_1 είναι το δυναμικό σε μια κορυφή των επιμέρους τετραγώνων.

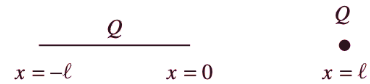


Αλλά όπως προαναφέραμε $V \propto S$, το δυναμικό $4V_1$ θα πρέπει να είναι 2 φορές το δυναμικό του κέντρου του τετραγώνου πλευράς b.

Δηλαδή $2V_c = 4V_1 \Rightarrow V_c = 2V_1$ και επομένως ο επιθυμητός λόγος είναι 2.

Επομένως απαιτείται διπλάσιο έργο για να φέρουμε ένα φορτίο από το άπειρο στο κέντρο του τετραγώνου απ' ότι να φέρουμε το φορτίο στην κορυφή του τετραγώνου.

10. Μία ράβδος μήκους *l* είναι φορτισμένη με φορτίο *Q* το οποίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο μήκος της. Είναι τοποθετημένη κατά μήκος του *x*-άξονα μεταξύ των σημείων *x* = -*l* και *x* = 0. Ένα σημειακό φορτίο επίσης *Q* βρίσκεται στον *x*-άξονα στη θέση *x* = *l* όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



(α) Έστω *x* = *a* το σημείο στον *x*-άξονα ανάμεσα στα δύο φορτία στο οποίο το ηλεκτρικό πεδίο είναι 0. Βρείτε το *a*.
(β) Υπάρχει ακόμα ένα σημείο στο οποίο το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν (το σημείο βρίσκεται στο εσωτερικό της ράβδου). Επιπλέον αυτού του σημείου, υπάρχουν άλλα σημεία στο χώρο που το ηλεκτρικό πεδίο είναι 0; Εξηγήστε την απάντησή σας (γιατί ναι ή γιατί όχι).
(γ) Ζωγραφίστε τις δυναμικές και ισοδυναμικές καμπύλες στο επίπεδο της σελίδας. Δείξτε πως οι γραμμές μετατρέπουν το σχήμα τους από την περιοχή που είναι κοντά στα φορτία στην περιοχή μακριά από τα πεδία. Μην σας απασχολεί ιδιαίτερα η περιοχή πολύ κοντά στη ράβδο. Τι συμβαίνει στην περιοχή κοντά στο σημείο που βρήκατε στο ερώτημα (α);

(α)

Ένα τμήμα dx της ράβδου, στη θέση x (όπου x<0) βρίσκεται σε απόσταση a−x από ένα σημείο x=a.

$\lambda = \frac{Q}{l}$

Προσθέτοντας τις επιμέρους συνεισφορές στο ηλεκτρικό πεδίο από όλα τα στοιχειώδη τμήματα της ράβδου θα δώσει το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο x=a:

$$E_p=\int_{-l}^{0}\frac{\lambda\,dx}{4\pi\varepsilon_0(a-x)^2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{a-x}\Big|_{-l}^{0}\Rightarrow E_p=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_p=\frac{\lambda l}{4\pi\varepsilon_0\,a(a+l)}\Rightarrow \boxed{E_p=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,a(a+l)}} \quad (1)$$

Ανάμεσα στα δύο αντικείμενα (ράβδος και σημειακό φορτίο) το ηλεκτρικό πεδίο από τη ράβδο έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά ενώ το ηλεκτρικό πεδίο από το σημειακό φορτίο Q, το ηλεκτρικό πεδίο έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά. Ενδιαφερόμαστε τα δύο πεδία να αλληλοαναιρούνται. Η απόσταση από το σημείο x=a στο σημείο του σημειακού φορτίου, είναι: l−a.

Επομένως θα έχουμε: $E_p=E_Q\Rightarrow\frac{\cancel{Q}}{\cancel{4\pi\varepsilon_0}\,a(a+l)}=\frac{\cancel{Q}}{\cancel{4\pi\varepsilon_0}(l-a)^2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow l^2+\cancel{a^2}-2al=\cancel{a^2}+al\Rightarrow 3a\cancel{l}=l^{\cancel{2}}\Rightarrow\boxed{a=l/3}$$

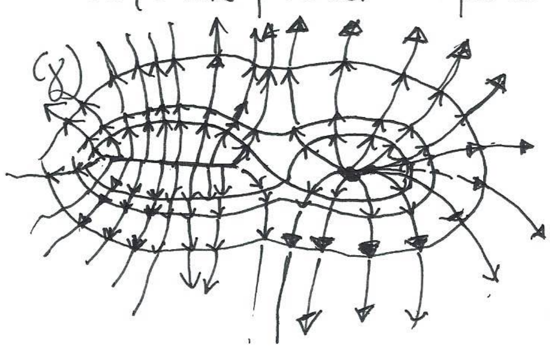
(β) Δεν υπάρχουν άλλα σημεία στα οποία το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\emptyset$.

Αγνοώντας το εσωτερικό της ράβδου, το πεδίο δεν μπορεί να είναι μηδέν πουθενά αλλού στον x-άξονα γιατί δεξιά του σημειακού φορτίου, $x > l$, και τα δύο φορτισμένα σώματα προκαλούν πεδίο που έχει κατεύθυνση προς τα $+x$, και επομένως δεν αναιρούνται. Στα αριστερά της ράβδου $x < -l$, και τα δύο αντικείμενα προκαλούν ηλεκτρικό πεδίο με φορά προς τα αριστερά και επομένως δεν αναιρούνται.

Για σημεία που δεν βρίσκονται στον x-άξονα, και τα δύο αντικείμενα δημιουργούν ηλεκτρικό πεδίο, που έχει συνιστώσα που να έχει κατεύθυνση μακριά από τα δύο αντικείμενα και επομένως ποτέ δεν θα έχουν άθροισμα μηδέν.

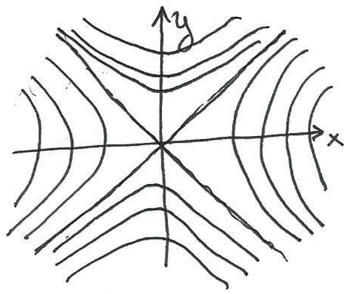
Η ύπαρξη ενός σημείου με $E=0$, στο εσωτερικό της ράβδου μπορεί να εξηγηθεί με θεώρηση της συνέχειας. Το ηλεκτρικό πεδίο έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά και αποκλίνει ακριβώς δεξιά από το δεξιότερο άκρο της ράβδου. Αλλά δείχνει αριστερά στο περισσότερο αριστερό άκρο της ράβδου. Επομένως κάπου ενδιάμεσα θα πρέπει να μηδενίζεται

(γ)

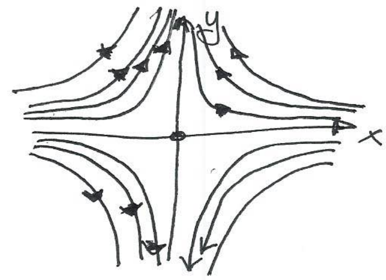


Το διπλανό σχήμα δείχνει κάποιες δυναμικές και ισοδυναμικές γραμμές. Οι δυναμικές γραμμές είναι παντού κάθετες στις ισοδυναμικές επιφάνειες εφόσον $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ και η κλίση μιας συνάρτησης είναι κάθετη στην επιφάνεια.

Οι ισοδυναμικές καμπύλες αλλάζουν από δύο επιφάνειες (γύρω από κάθε φορτισμένο αντικείμενο) σε μια επιφάνεια (προσεγγίζει σφαίρα στο άπειρο) ενώ τέμνονται στο σημείο $E=0$ δηλαδή για $x = l/3$. Εκεί που τέμνονται ισοδυναμικές το πεδίο είναι $\emptyset$, γιατί θα πρέπει να είναι κάθετο και στις δύο ισοδυναμικές και μπορεί να γίνει κάθετο σε δύο διαφορετικές επιφάνειες μόνο αν είναι 0.



Ισοδυναμικές γραμμές σε περιοχή κοντά στο σημείο που $E=0$. Στη περίπτωσή μας $x=\frac{l}{3}$



Δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου κοντά στο σημείο που $\vec{E}=0$, στο σημείο $x=l/3$. Οι διευθύνσεις τους είναι σχεδόν κατακόρυφες κοντά στον x-άξονα. Είναι κατακόρυφες στο άπειρο γιατί τα δύο αντικείμενα έχουν ίδιο φορτίο Q.