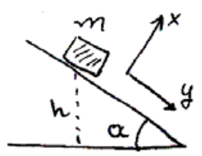
ΦΥΣ. 133

ΕΡΓΑΣΙΑ # 2 **Επιστροφή 16-2-2006**

1. Θεωρήστε σώμα μάζας m το οποίο κινείται πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο, γωνίας κλίσης θ με την οριζόντια διεύθυνση. Να γραφεί η Lagrangian συναρτήσει των συντεταγμένων x και y που ανήκουν στους άξονες x, κάθετο προς την επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου και φορά προς τα πάνω, και y, παράλληλο προς το κεκλιμένο επίπεδο και φορά προς τη βάση του. Θεωρήστε ότι η κίνηση γίνεται υπό την επίδραση της δύναμης της βαρύτητας. Βρείτε τις δύο εξισώσεις κίνησης και δείξτε ότι είναι αυτή που περιμένατε με βάση την Newtonian μηχανική.



$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \dot{x}, y, \dot{y}, t) = T - V$$

Αλλά $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

$V = -mgy\sin a$ αφού $h = y\sin a$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + mgy\sin a$$

Οι εξισώσεις κίνησης για x και y :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} = 0} \text{ και } \boxed{m\dot{x} = \text{σταθ}}$$

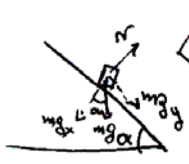
Ουσιαστικά δεν υπάρχει δύναμη στην διεύθυνση x αφού το σώμα είναι πάντοτε σε επαφή με το κεκλιμένο επίπεδο.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{y}) - mg\sin a = 0 \Rightarrow \cancel{m}\ddot{y} = \cancel{m}g\sin a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{y} = g\sin a}$$

Το σώμα δηλαδή επιταχύνεται προς τα κάτω με $g\sin a$.

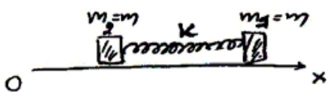
Αυτά τα περιμέναμε και από Newtonian μηχανική:



x: $-mg_x + N = 0 \Rightarrow N = mg\cos a$, $a_x = 0$.

y: $mg_y = ma_y \Rightarrow a_y = g_y = g\sin a$

2. (α) Γράψτε τη Lagrangian $L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$ για δύο σωματίδια ίσης μάζας, $m_1=m_2=m$, περιορισμένα στον x-άξονα και συνδεδεμένα με ένα ελατήριο δυναμικής ενέργειας ελατηρίου $V = \frac{1}{2}Kx^2$. Στην περίπτωση αυτή, x αναπαριστά την επιμήκυνση του ελατηρίου, $x = (x_1-x_2-l)$, και l είναι το φυσικό μήκος του ελατηρίου. Υποθέστε επίσης ότι η μάζα 1 βρίσκεται πάντοτε στα δεξιά της μάζας 2. (β) Γράψτε επίσης την Lagrangian συναρτήσει δύο νέων μεταβλητών $X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, το κέντρο μάζας του συστήματος, και x, την επιμήκυνση του ελατηρίου. Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης των X και x. (γ) Λύστε τις δύο εξισώσεις X(t) και x(t) και περιγράψτε την κίνηση.



A) Έστω x_1 η μετατόπιση του m_1 και x_2 η μετατόπιση του m_2.

Η κινητική ενέργεια των 2 μαζών θα είναι:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

Η δυναμική ενέργεια προέρχεται από το ελατήριο το οποίο επιμηκύνεται κατά $x = x_1 - \ell - x_2$

Άρα $V = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k (x_1 - x_2 - \ell)^2$.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k (x_1 - x_2 - \ell)^2 \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2} k (x_1 - x_2 - \ell)^2$$

B) Ορίζω δύο νέες μεταβλητές $z = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ και $y = x_1 - x_2 - \ell$.

Επομένως

$$x_1 = z + \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} \ell$$

$$x_2 = z - \frac{1}{2} y - \frac{1}{2} \ell$$

Η σημασία του $z = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$? αντιστοιχεί στο Κ.Μ. των 2 μαζών

Η Lagrangian μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\left(\dot{z} + \frac{1}{2}\dot{y}\right)^2 + \left(\dot{z} - \frac{1}{2}\dot{y}\right)^2 \right) - \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} m \left[\dot{z}^2 + \frac{1}{4}\dot{y}^2 + \cancel{\dot{z}\dot{y}} + \dot{z}^2 + \frac{1}{4}\dot{y}^2 - \cancel{\dot{z}\dot{y}} \right] - \frac{1}{2} k y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left[2\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 \right] - \frac{1}{2} k y^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \emptyset \Rightarrow 2m\ddot{z} = \emptyset \Rightarrow \boxed{\ddot{z} = \emptyset} \quad (A)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \emptyset \Rightarrow \frac{1}{2} m\ddot{y} + ky = \emptyset \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} m\ddot{y} = -ky} \quad (B)$$

Γ) Λύνοντας την (A) και (B) για να βρούμε τις εξισώσεις $z(t)$, $y(t)$

$$\ddot{z} = 0 \Rightarrow \frac{d\dot{z}}{dt} = 0 \Rightarrow d\dot{z} = 0 \Rightarrow \int d\dot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z}(t) = \dot{z}_0(t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{dt} dt = \int \dot{z}_0 \, dt \Rightarrow Z(t) = \dot{z}_0 t + z_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z(t) = \upsilon_0 t + z_0} \quad (\Gamma)$$

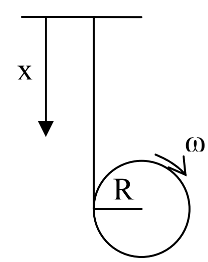
Η εξίσωση (Β) είναι η εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή: $\ddot{y} = -\frac{2k}{m} y \Rightarrow$

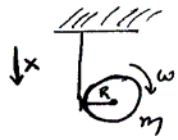
$\ddot{y} = -\omega^2 y$ $\left(\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}\right)$ με λύση $\boxed{y = A\cos(\omega t - \phi_0)}$ (Δ)

Το κέντρο μάζας κινείται επομένως σαν ένα ελεύθερο σωματίδιο μια και δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις. (εξίσωση (Γ))

Τα σώματα ταλαντώνονται σχετικά το ένα ως προς το άλλο με συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ (εξίσωση (Δ))

3. Το παρακάτω σχήμα δείχνει ένα yo-yo. Ένα νήμα αμελητέας μάζας κρέμεται κατακόρυφα από ένα σταθερό σημείο ενώ το άλλο άκρο του είναι τυλιγμένο πολλές φορές γύρω από ένα ομοιόμορφο καρούλι, μάζας m και ακτίνας R. Όταν το καρούλι αφήνεται, κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω, περιστρεφόμενος καθώς το νήμα ξετυλίγεται. Γράψτε τη Lagrangian χρησιμοποιώντας την απόσταση x σαν γενικευμένη συντεταγμένη (δείτε το σχήμα). Βρείτε την εξίσωση κίνησης Lagrange και δείξτε ότι ο κύλινδρος επιταχύνει προς τα κάτω με επιτάχυνση $\ddot{x} = 2g/3$. [<u>*Υπόδειξη*</u>: Χρειάζεται να θυμηθείτε ότι η ολική κινητική ενέργεια ενός σώματος όπως το yo-yo δίνεται από $T = \frac{1}{2} m\mathrm{v}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$, όπου v είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας, I είναι η ροπή αδράνειας (για ένα κύλινδρο, $I = \frac{1}{2} m\mathrm{R}^2$) και ω είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής γύρω από το κέντρο μάζας. Μπορείτε να εκφράσετε το ω συναρτήσει της γενικευμένης ταχύτητας $\dot{x}$].





$\omega = \frac{v}{R} = \frac{\dot{x}}{R}$

Καθώς ο κύλινδρος αφήνεται ελεύθερος, αρχίζει να κινείται προς τα κάτω ενώ παράλληλα περιστρέφεται.

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mR^2}{2}\right)\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m \cancel{R^2} \frac{\dot{x}^2}{\cancel{R^2}} \Rightarrow T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m \dot{x}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{3}{4} m \dot{x}^2}$$

Η δυναμική ενέργεια θα είναι $\boxed{V = -mgx}$

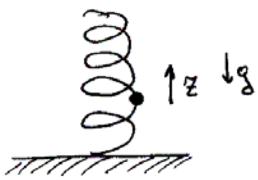
$$\left.\begin{array}{l} T = \frac{3}{4} m \dot{x}^2 \\ V = -mgx \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = \frac{3}{4} m \dot{x}^2 + mgx}$$

Το πρόσημο στη V αρνητικό αφού x είναι θετικό προς τα κάτω $V = -\int_0^x F dx = -mgx + V_0$ και θεωρούμε ότι $V_0 = 0$ για $x = 0$. (ή την αρχική του θέση)

Οι εξισώσεις κίνησης θα είναι :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} m \ddot{x} - mg = 0 \Rightarrow \cancel{m} \ddot{x} = \frac{2}{3} \cancel{m} g \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = \frac{2}{3} g}$$

4. Ένα λείο σύρμα είναι λυγισμένο σε σχήμα ελικοειδές, με κυλινδρικές συντεταγμένες ρ=R και z=λφ, όπου R και λ είναι σταθερές και ο άξονας z είναι κατακόρυφος και με φορά προς τα πάνω (και η βαρύτητα έχει φορά προς τα κάτω). Χρησιμοποιώντας το z σα τη γενικευμένη συντεταγμένη, γράψτε την Lagrangian που περιγράφει την κατάσταση μιας χάντρας μάζας m που είναι περασμένη στο σύρμα και κινείται καθ' όλο το μήκος του. Βρείτε την Lagrangian εξίσωση κίνησης και επομένως την κατακόρυφη επιτάχυνση, $\ddot{z}$,της χάντρας. Στο όριο που η ακτίνα R της έλικας τείνει στο μηδέν ποια είναι η $\ddot{z}$; Νομίζετε ότι έχει νόημα αυτό που βρίσκετε;



Το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε είναι το κυλινδρικό με z, ρ και ϕ σαν συντεταγμένες.

Αλλά σύμφωνα με το πρόβλημα $\rho = \sigma\tau\alpha\theta = R$ $\quad z = \lambda\phi = \sigma\tau\alpha\theta$

Επομένως το σύστημά έχει μόνο ένα βαθμό ελευθερίας. Θεωρούμε σαν ανεξάρτητη συντεταγμένη, την z. οπότε η κινητική ενέργεια της χάντρας:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\underbrace{\dot{\rho}}_{0}\hat{\rho} + \rho\underbrace{\dot{\phi}}_{\dot{z}/\lambda}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}\right)^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}m\left(\frac{R\dot{z}}{\lambda}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m\left(\frac{R^2\dot{z}^2}{\lambda^2} + \dot{z}^2\right) \Rightarrow \boxed{T = \frac{\dot{z}^2}{2}m\left(\frac{R^2+\lambda^2}{\lambda^2}\right)}$$

Η δυναμική ενέργεια είναι: $U = mgz$ (μηδενικό επίπεδο για $z=0$)

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{z}^2}{2}m\left(\frac{R^2+\lambda^2}{\lambda^2}\right) - mgz$$

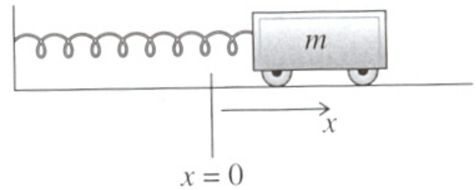
Επομένως: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \ddot{z}m\left(\frac{R^2+\lambda^2}{\lambda^2}\right) + mg = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{z} = -\frac{\lambda^2}{R^2+\lambda^2}g}$$

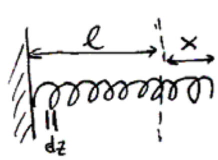
Για $R \to 0$, δηλαδή το σύρμα δεν είναι λυγισμένο αλλά κατακόρυφο και ευθύ $\ddot{z} = -g$ που ουσιαστικά σημαίνει ότι η χάντρα κάνει ελεύθερη πτώση όπως αναμένεται.

Για $\lambda \to 0$ ουσιαστικά το σύρμα (η χάντρα) είναι πάνω στο δάπεδο αφού δεν υπάρχει μετατόπιση στο z.

5. Ένα βαγόνι μάζας m εξαρτάται από ένα ελατήριο (σταθερής ελατηρίου K). Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι συνδεδεμένο με ακλόνητο σημείο. Αν αγνοήσουμε τη μάζα του ελατηρίου (όπως κάνουμε σχεδόν πάντοτε) τότε ξέρουμε από την εισαγωγική φυσική, ότι το βαγόνι εκτελεί απλή αρμονική κίνηση με γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{K/m}$. Χρησιμοποιώντας το Lagrangian φορμαλισμό, μπορείτε να βρείτε την επίδραση της μάζας του ελατηρίου M, ως εξής: (α) Υποθέτοντας ότι το ελατήριο είναι ομοιόμορφο και επιμηκύνεται ή συσπειρώνεται ομοιόμορφα, δείξτε



ότι η κινητική ενέργεια είναι $\frac{1}{6}M\dot{x}$. Ως συνήθως x είναι η απομάκρυνση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος. Γράψτε τη Lagrangian για το σύστημα ελατήριο-βαγόνι (Σημειωτέων ότι η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι $\frac{1}{2}Kx^2$. (β) Γράψτε τη Lagrangian εξίσωση κίνησης και δείξτε ότι το βαγόνι εξακολουθεί να εκτελεί αρμονική κίνηση αλλά με γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{K/(m + M/3)}$; Δηλαδή η επίδραση της μάζας M ενός ελατηρίου στην γωνιακή συχνότητα του σώματος είναι να προσθέσουμε M/3 στη μάζα του βαγονιού.



Α) Υποθέτουμε ομοιόμορφη παραμόρφωση για το ελατήριο. Υπολογίζουμε την κινητική ενέργεια: Θεωρούμε ένα μικρό τμήμα της σπείρας του ελατηρίου το οποίο βρίσκεται σε απόσταση z από το άκρο του ελατηρίου και έχει στοιχειώδες μήκος dz. Η μάζα του και μετατόπισή του θα είναι:

$$\left.\begin{aligned} m &= M\left(\frac{dz}{\ell}\right) \\ x' &= x\left(\frac{z}{\ell}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} m &= M\left(\frac{dz}{\ell}\right) \\ \dot{x}' &= v = \dot{x}\left(\frac{z}{\ell}\right) \end{aligned}$$

Επομένως $dT = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{dz}{\ell}\right)\dot{x}^2\frac{z^2}{\ell^2} \Rightarrow T = \int_0^\ell \frac{1}{2}\frac{M}{\ell^3}\dot{x}^2 z^2 dz \Rightarrow$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\frac{M}{\ell^3}\dot{x}^2\int_0^\ell z^2 dz \Rightarrow T = \frac{1}{2}\frac{M}{\cancel{\ell^3}}\dot{x}^2\frac{\cancel{\ell^3}}{3} \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}\frac{M}{3}\dot{x}^2}$$

Η δυναμική ενέργεια θα είναι: $V = \frac{1}{2}kx^2$.

Επομένως η Lagrangian του συστήματος θα είναι: $L = T_{ελ} + T_m - V \Rightarrow$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{6}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

B) Η εξίσωση κίνησης: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{M}{3}\ddot{x} + m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{M}{3} + m\right)\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0} \text{ όπου } \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{\frac{M}{3} + m}}}$$

Δηλαδή έχουμε αρμονικό ταλαντωτή με $\omega = \sqrt{\frac{k}{\frac{M}{3} + m}}$

Επομένως η επίδραση της μάζας του ελατηρίου είναι να προσθέσουμε απλά τον όρο $\frac{M}{3}$ στη γωνιακή συχνότητα που θα παίρναμε αν η μάζα του ελατηρίου ήταν αμελητέα.