Δυναμική ενέργεια ενός δίπολου διπολικής ροπής p

Είδαμε ότι όταν ένα ηλεκτρικό δίπολο βρεθεί μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο, η διπολική του ροπή, *p*, τείνει να ευθυγραμμιστεί με το πεδίο εξαιτίας της ροπής που ασκείται στα φορτία του δίπολου.

Η ροπή που ασκείται είναι: $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$

Το έργο το οποίο καταναλώνεται από το πεδίο για να στρέψει το δίπολο κατά μια γωνία *dθ* είναι:

$$dW = -\tau d\theta = -pE sin\theta d\theta$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η ροπή αντιτίθεται σε οποιαδήποτε αύξηση της γωνίας *θ.*

Το συνολικό έργο το οποίο καταναλώνεται από το ηλεκτρικό πεδίο για να περιστρέψει το δίπολο από την γωνία θ_0 στην γωνία *θ* είναι:.

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} -pE sin\theta d\theta = pE(cos\theta - cos\theta_0)$$

Το έργο είναι θετικό όταν $cos\theta - cos\theta_0 > 0$.

Δυναμική ενέργεια ενός δίπολου διπολικής ροπής p

Η αλλαγή στη δυναμική ενέργεια, *ΔU*, *του* διπόλου είναι το -W το οποίο εκτελεί το πεδίο στο δίπολο

$$\Delta U = U - U_0 = -W = -pE(cos\theta - cos\theta_0)$$

όπου $U_0 = -pEcos\theta_0$ η δυναμική ενέργεια σε ένα σημείο αναφοράς

Θεωρούμε ως σημείο αναφοράς αυτό για $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ έτσι ώστε η δυναμική ενέργεια $U_0 = 0$

Παρουσία επομένως ενός εξωτερικού πεδίου, το δίπολο έχει δυναμική ενέργεια:

$$U = -pEcos\theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Ξέρουμε ότι ένα σύστημα είναι σε σταθερή ισορροπία όταν η δυναμική του ενέργεια βρίσκεται σε κάποιο ελάχιστο (τοπικό ή γενικό).

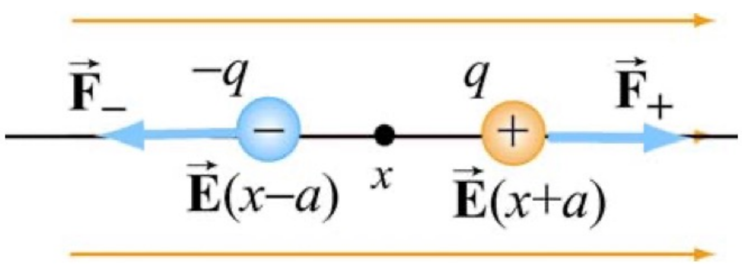
Στην περίπτωση του δίπολου αυτό συμβαίνει ότι το δίπολο ευθυγραμμίζεται με το ηλεκτρικό πεδίο οπότε η δυναμική του ενέργεια γίνεται: $U = -pE$

Στην αντίθετη περίπτωση που το δίπολο είναι αντιπαράλληλο με το ηλεκτρικό πεδίο η δυναμική του ενέργεια γίνεται μέγιστη: $U = pE$ και το σύστημα είναι ιδιαίτερα ασταθές

Δυναμική ενέργεια δίπολου

Στην περίπτωση που το δίπολο εισαχθεί σε μή-ομοιόμορφο ηλεκτρικό πεδίο, τότε πέρα από την ροπή θα ασκείται πάνω του και μια συνισταμένη δύναμη και η κίνηση του δίπολου θα είναι η συνδυαστική κίνηση μεταφορική και περιστροφική.

Για παράδειγμα έστω ότι το δίπολο είναι σε μη ομογενές ηλεκτρικό πεδίο και ότι το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_+$ στο $+q$ διαφέρει από το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_-$ στο $-q$.



Υποθέτουμε ότι το δίπολο είναι πολύ μικρό και αναπτύσσουμε τα πεδία ως προς το x

$$E_+(x+a) \approx E(x) + a\left(\frac{dE}{dx}\right)$$

$$E_-(x-a) \approx E(x) - a\left(\frac{dE}{dx}\right)$$

Η δύναμη στο δίπολο γίνεται τότε: $\vec{F}_e = q\left(\vec{E}_+ - \vec{E}_-\right) = 2qa\left(\frac{dE}{dx}\right)\hat{\imath} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_e = p\left(\frac{dE}{dx}\right)\hat{\imath}}$

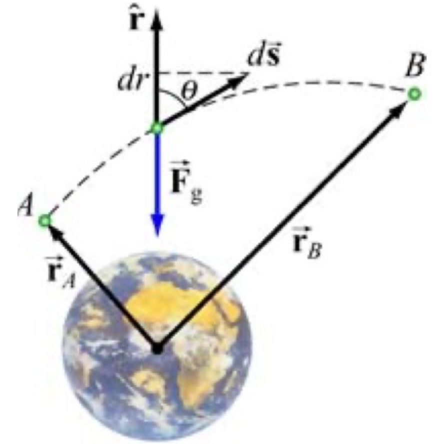
Παράδειγμα συνισταμένης δύναμης που ασκείται σε δίπολο είναι η έλξη μεταξύ μικρών κομματιών χαρτιού και μιας κτένας που φορτίστηκε τρίβοντάς την σε μαλλί. Το χαρτί έχει επαγόμενες διπολικές ροπές ενώ το πεδίο της κτένας είναι μη ομογενές λόγω σχήματος

Ηλεκτρικό Δυναμικό

Αναδρομή στην Μηχανική

Ένα σώμα μάζας *m* το οποίο βρίσκεται σε απόσταση *r* από το κέντρο της Γης δέχεται μια δύναμη:

$$\vec{F}_g = -G\,\frac{M_\Gamma m}{r^2}\hat{r} \quad \text{βαρυτική δύναμη} \quad G = 6.67\times 10^{-11} N\cdot m^2/kg^2$$



Υποθέτουμε ότι η Γη είναι ομοιόμορφη σφαίρα μάζας M_Γ

Το βαρυτικό πεδίο είναι: $\vec{g} = \dfrac{\vec{F}_g}{m} = -G\,\dfrac{M_\Gamma}{r^2}\hat{r}$

- Το βαρυτικό πεδίο εξαρτάται από την μάζα που δημιουργεί το πεδίο (στην προκειμένη περίπτωση M_Γ και την απόσταση *r* από την *M*

Θεωρούμε ότι μετακινούμε ένα σώμα μάζας *m* από το A στο B υπό την επίδραση της δύναμης της βαρύτητας.

Το έργο που παράγει η δύναμη της βαρύτητας κατά την μετακίνηση αυτή δίνεται από:

$$W_g = \int \vec{F}_g\cdot d\vec{s} = \int_{r_A}^{r_B}\left(-G\,\frac{Mm}{r^2}\right)dr = \left.\frac{GMm}{r}\right|_{r_A}^{r_B} \Rightarrow \boxed{W_g = GMm\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)}$$

Το έργο είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση.

Αναδρομή στην Μηχανική

Το έργο της δύναμης της βαρύτητας, W_g, είναι διαφορετικό από το έργο, $W_{εξ.}$, που παράγει μια εξωτερική δύναμη:

$$W_g = -W_{εξ}.$$

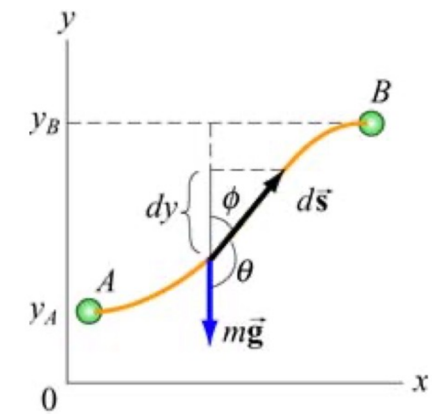
Κοντά στην επιφάνεια της γης το βαρυτικό πεδίο είναι περίπου σταθερό με μέτρο ίσο με:

$$g = G\frac{M}{r^2} = 9.81 m/s^2$$

Το έργο που παράγει η δύναμη της βαρύτητας για να μεταφέρει ένα σώμα από το σημείο A στο σημείο B είναι:

$$W_g = \int \vec{F}_g \cdot d\vec{s} = \int_A^B mgcos\theta ds = -\int_A^B mgcos\varphi ds \Rightarrow$$

$$W_g = -\int_{y_A}^{y_B} mgdy \Rightarrow \boxed{W_g = -mg(y_B - y_A)}$$



Το έργο είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και εξαρτάται μόνο από τη μεταβολή του ύψους: $y_B - y_A$

Κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής, το έργο της βαρυτικής δύναμης είναι μηδέν. Η δύναμη της βαρύτητας είναι συντηρητική δύναμη.

Εν γένει, μία δύναμη είναι συντηρητική εάν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής είναι μηδέν

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Αναδρομή στην Μηχανική

Όπως έχουμε δει, για συντηρητικές δυνάμεις μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της δυναμικής ενέργειας *U*.

Η αλλαγή στη δυναμική ενέργεια που σχετίζεται με κάποια συντηρητική δύναμη $\vec{F}$ που δρα σε κάποιο σώμα το οποίο κινείται από τη θέση Α στη θέση Β είναι: .

$$\Delta U = U_B - U_A = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -W_F$$

όπου W_F το έργο της συντηρητικής δύναμης $\vec{F}$ που ασκείται στο σώμα.

Για την βαρυτική δύναμη μπορούμε επομένως να γράψουμε: $\boxed{U_g = -G\frac{Mm}{r} + U_0}$

με U_0 μια σταθερά η τιμή της οποίας εξαρτάται από το σημείο αναφοράς που επιλέγεται ώστε $U_o = 0$. Για την βαρυτική δύναμη θεωρούμε $U(r = \infty) = 0$

Εφόσον η δυναμική ενέργεια εξαρτάται από το σημείο αναφοράς που επιλέγεται αυθαίρετα, μόνο η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας έχει φυσική σημασία.

Μια έννοια που σχετίζεται με την δυναμική ενέργεια είναι το δυναμικό. Αν Δ*U* είναι η βαρυτική δυναμική ενέργεια τότε το δυναμικό είναι :

$$\boxed{\Delta V_g = \frac{\Delta U_g}{m} = -\int_A^B \left(\frac{\vec{F}_g}{m}\right) \cdot d\vec{s} = -\int_A^B \vec{g} \cdot d\vec{s}}$$

το αρνητικό του έργου της F_g ανά μονάδα μάζας για να μετακινηθεί ένα σώμα από την θέση Α στη θέση Β

Σύνδεση με τον Ηλεκτρισμό

Η ηλεκτροστατική δύναμη Coulomb είναι ίδιας μορφής με αυτή της βαρυτικής δύναμης. Είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης και είναι μια συντηρητική δύναμη.

Στην παρουσία ενός ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$, σε αναλογία με το βαρυτικό πεδίο, $\vec{g}$, μπορούμε να ορίσουμε τη διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού

$$\boxed{\Delta V_e = \frac{\Delta U_e}{q} = -\int_A^B \left(\frac{\vec{F}_e}{q_0}\right) \cdot d\vec{s} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

όπου q_0 θετικό δοκιμαστικό φορτίο

Η διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού ΔV είναι το έργο ανά μονάδα φορτίου, για να μετακινηθεί ένα δοκιμαστικό φορτίο q_0 από το A στο B χωρίς να υπάρχει αλλαγή στην κινητική ενέργεια του φορτίου

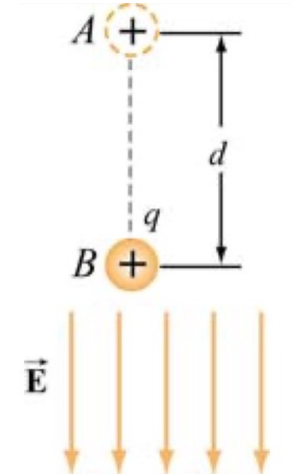
Η διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού ΔV είναι διαφορετική ποσότητα από την μεταβολή τη δυναμικής ενέργειας. Ωστόσο οι δύο ποσότητες σχετίζονται από τη σχέση:

$$\Delta U_e = q_0 \Delta V_e$$

Στο SI μονάδες μέτρησης του ηλεκτροστατικού δυναμικού είναι το *Volt* = *1Joule/C*

Μια χρήσιμη μονάδα μέτρησης του δυναμικού: $\boxed{1eV = 1.6 \times 10^{-19} C \cdot 1V = 1.6 \times 10^{-19} J}$

Ηλεκτρικό δυναμικό ομοιόμορφου πεδίου



Θεωρούμε φορτίο +q το οποίο κινείται στη διεύθυνση ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E} = -E_0\hat{j}$ κατά $d\vec{s} = ds\hat{j}$

Η διαδρομή που ακολουθεί είναι παράλληλη του πεδίου $\vec{E}$, η διαφορά δυναμικού V ανάμεσα σε δύο σημεία A και B θα είναι:

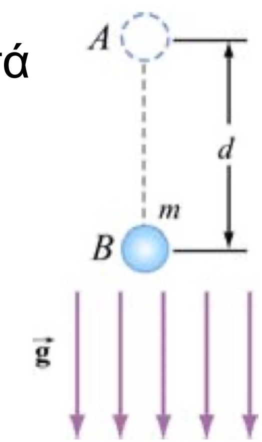
$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = +E_0\int_A^B ds \Rightarrow \quad \Delta V = -E_0 d < 0$$

που δηλώνει ότι το σημείο B είναι σε μικρότερο δυναμικό από το σημείο A.

Αυτό είναι αναμενόμενο γιατί οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου πάντοτε δείχνουν από σημεία υψηλότερου δυναμικού σε σημεία χαμηλότερου δυναμικού.

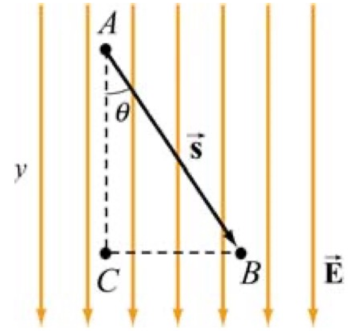
Η αλλαγή στην ηλεκτρική δυναμική ενέργεια είναι: $\Delta U = q\Delta V \Rightarrow \Delta U = -qE_0 d < 0$

Η δυναμική ενέργεια ενός θετικού φορτίου ελαττώνεται όταν κινείται κατά την διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου.



Η αναλογία με το βαρυτικό πεδίο είναι ότι μια μάζα m χάνει δυναμική ενέργεια $(\Delta U = -mgd)$ καθώς κινείται κατά τη διεύθυνση του βαρυτικού πεδίου $-\vec{g}$.

Ηλεκτρικό δυναμικό ομοιόμορφου πεδίου



Εξετάζουμε την περίπτωση που το φορτίο +q κινείται υπό γωνία θ ως προς τη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E} = -E_0\hat{\jmath}$.

Στην περίπτωση αυτή η διαφορά δυναμικού γράφεται ως:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\vec{E}\cdot\vec{s} \Rightarrow \Delta V = -E_0 s cos\theta \Rightarrow \Delta V = -E_0 y$$

Παρατηρούμε ότι και πάλι κινούμενοι κατά τη διεύθυνση του πεδίου το δυναμικό ελαττώνεται.

Θα μπορούσαμε να μελετήσουμε την κίνηση από το A στο B μέσω του σημείου C.

Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν δύο συνεισφορές, κίνηση από το A στο C και από το C στο B. $\Delta V = V_{CA} + V_{BC}$

Από το A στο C η διαφορά δυναμικού θα είναι: $V_{CA} = V_C - V_A = -E_0 y$

Από το C στο B η διαφορά δυναμικού θα είναι: $V_{BC} = V_B - V_C = 0$

εφόσον η διαδρομή κάθετη στο πεδίο.

Επομένως λαμβάνουμε την ίδια διαφορά δυναμικού όπως θα αναμέναμε δεδομένου ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι συντηρητικό.

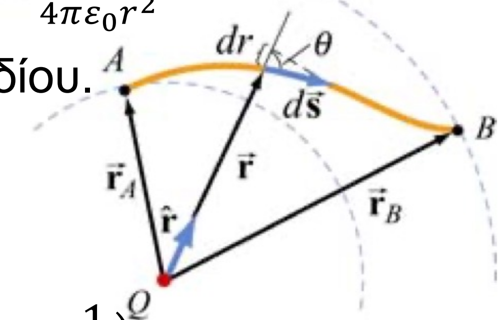
Τα σημεία B και C έχουν το ίδιο δυναμικό: $V_B = V_C$ Όλα τα σημεία στη γραμμή CB έχουν το ίδιο δυναμικό – Βρίσκονται στην ίδια ισοδυναμική γραμμή

Ηλεκτρικό δυναμικό σημειακών φορτίων

Θεωρούμε ένα ηλεκτρικό φορτίο +Q και θέλουμε να υπολογίσουμε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων A και B στο πεδίο του φορτίου αυτού.

Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από το φορτίο Q είναι: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$.

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{r}$ έχει διεύθυνση προς το σημείο του πεδίου.



Αλλά $\hat{r} \cdot d\vec{s} = (ds)cos\theta = dr$

Θα πάρουμε επομένως:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r} \cdot d\vec{s} = -\int_A^B \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

Η διαφορά δυναμικού *ΔV* εξαρτάται και πάλι από τα ακραία σημεία και όχι τη διαδρομή που ακολουθεί το σώμα.

Όπως και στο βαρυτικό δυναμικό, από τη στιγμή που μόνο διαφορές δυναμικού έχουν φυσική σημασία, μπορούμε να διαλέξουμε το σημείο αναφοράς μηδενικού δυναμικού να είναι στο $r = \infty$.

Σαν αποτέλεσμα το δυναμικό μπορεί να γραφεί ως $V_P = -\int_\infty^P \vec{E} \cdot d\vec{s}$ όταν $V(\infty) = 0$

Το ηλεκτρικό δυναμικό σε απόσταση *r* από το σημείο θα είναι: $V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r}$

Για πολλαπλά φορτία: $V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$

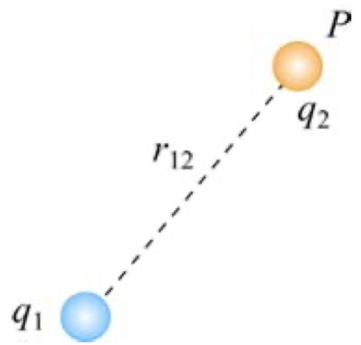
Δυναμική ενέργεια σε σύστημα φορτίων

Για ένα σύστημα φορτίων που έγινε μέσω της εφαρμογής μιας εξωτερικής δύναμης,

$\Delta U = -W = +W_{\varepsilon\xi.}$ Η μεταβολή στην δυναμική ενέργεια του συστήματος ισούται με το έργο που πρέπει να δαπανηθεί από μία εξωτερική δύναμη για να κατασκευαστεί το σύστημα των φορτίων.

Στην περίπτωση του βαρυτικού πεδίου, για να σηκώσουμε μία μάζα m κατά ύψος y θα πρέπει να καταναλώσουμε έργο mgh ενώ το βαρυτικό πεδίο παράγει έργο $-mgh$

Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο φορτία τα οποία μεταφέρθηκαν από το άπειρο χωρίς επιτάχυνση και είναι σε ηρεμία.



Ξεκινάμε με δύο φορτία q_1 και q_2. Θεωρούμε αρχικά το πεδίο του q_1 και έστω ότι το δυναμικό στο σημείο *P* του χώρου είναι V_1.

Το έργο που δαπανά μια εξωτερική δύναμη για να φέρει το φορτίο στην θέση *P* από το άπειρο, θα είναι: $W_2 = V_1 q_2$

Δεν χρειάζεται να δαπανηθεί έργο για να μεταφερθεί το q_1, οπότε W_1=0.

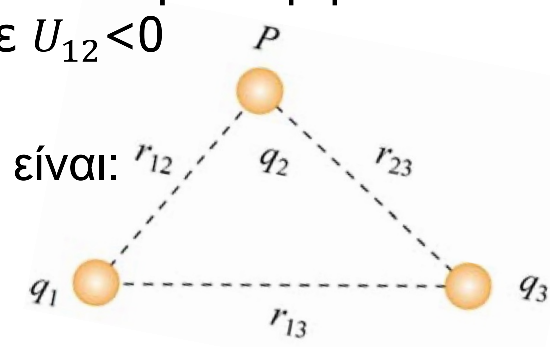
Αλλά το δυναμικό $V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$ όπου r_{12} η απόσταση του *P* από το q_1.

Επομένως η δυναμική ενέργεια θα είναι: $U_{12} = W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$

Δυναμική ενέργεια σε σύστημα φορτίων

Επομένως η δυναμική ενέργεια θα είναι: $U_{12} = W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$

Αν $q_1 q_2 > 0$ τότε χρειάζεται θετικό έργο για να καλυφθεί η απωστική δύναμη μεταξύ των φορτίων ενώ όταν τα φορτία είναι αντίθετα, τότε U_{12}<0 εξαιτίας της ελκτικής δύναμης.



Για να προσθέσουμε ένα 3ο φορτίο q_3 το έργο που απαιτείται είναι:

$$W_3 = q_3(V_{31} + V_{32}) = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right)$$

Η δυναμική ενέργεια αυτής της κατάστασης των φορτίων είναι:

$$U = W_2 + W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right) = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$

Επομένως η δυναμική ενέργεια είναι το άθροισμα των συνεισφορών ξεχωριστών ζευγών. Γενικεύοντας για σύστημα *N* φορτίων θα πάρουμε:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j>i}}^{N}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Θέτουμε $j > i$ για αποφυγή διπλού μετρήματος

Δυναμικό στη θέση του κάθε φορτίου *i* από τα άλλα φορτία

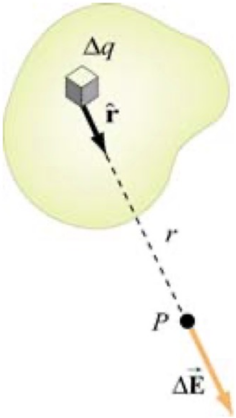
Κάποιος θα μπορούσε να διπλομετρήσει και να διαιρέσει με το 2:

$$U = \frac{1}{8\pi\varepsilon_o}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_j}{r_{ij}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V(r_i)$$

Δυναμικό συνεχούς κατανομής φορτίου

Αν η κατανομή φορτίου είναι συνεχής, το δυναμικό σε ένα σημείο *P* μπορεί να βρεθεί αθροίζοντας τις συνεισφορές κάθε διαφορικού στοιχειώδους φορτίου *dq*.

Θεωρούμε το άπειρο ως το σημείο αναφοράς για μηδενική τιμή του δυναμικού.



Το ηλεκτρικό δυναμικό στο *P* εξαιτίας του στοιχειώδους φορτίου *dq* θα είναι:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

Άθροισμα όλων των συνεισφορών οδηγεί: $V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r}$

2ο Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

Έτοιμοι