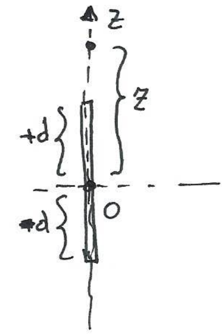
ΦΥΣ. 112

4ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή 07.11.2022**

1. Μια λεπτή ράβδος εκτείνεται κατά μήκος του z-άξονα από $z = -d$ έως $z = +d$. Η ράβδος είναι φορτισμένη με φορτίο Q και γραμμική πυκνότητα $\lambda = Q/2d$.

(α) Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα σημείο με $z > 2d$ κατά μήκος του z-άξονα.
(β) Ποια είναι η αλλαγή στη ηλεκτρική δυναμική ενέργεια όταν ένα ηλεκτρόνιο μετακινείται από τη θέση $z = 4d$ στη θέση $z = 3d$;
(γ) Αν το ηλεκτρόνιο ξεκινά από την ηρεμία στο σημείο $z = 4d$ βρείτε την ταχύτητά του όταν $z = 3d$.



(α) Θεωρούμε ένα τμήμα της ράβδου μήκους dz' το οποίο βρίσκεται σε απόσταση z' στον z-άξονα.

Το φορτίο dq στο απειροστό αυτό τμήμα θα είναι: $dq = \lambda dz'$

Το δυναμικό σε σημείο $z > d$ εξαιτίας του στοιχειώδους αυτού φορτίου, θα είναι:

$$dV = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dz'}{z-z'},$$ θεωρούμε για απλούστευση ότι το δυναμικό στο άπειρο είναι $\emptyset$ $V(\infty)=0$.

Ολοκληρώνοντας, θα έχουμε το δυναμικό από το φορτίο κατά μήκος της ράβδου:

$$V(z) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z+d}^{z-d}\frac{dz'}{z-z'} \Rightarrow \boxed{V(z) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{z+d}{z-d}\right)} \quad (A)$$

(β) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του ερωτήματος (α), το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο $z = 4d$ είναι: $V(z=4d) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{4d+d}{4d-d} \Rightarrow V(z=4d) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{5}{3}$

Όμοια το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο $z=3d$ θα είναι: $V(z=3d) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{4}{2}$

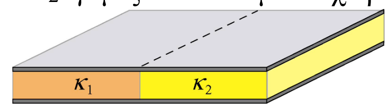
Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο σημείων θα είναι:

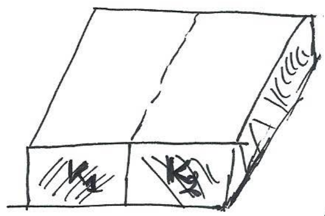
$$\Delta V = V(z=3d) - V(z=4d) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\ln 2 - \ln\frac{5}{3}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{6}{5}\right) > 0$$

Από τη σχέση $\boxed{\Delta U = q\Delta V = -\frac{|e|\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{6}{5}\right) < 0}$ όπου $q = -e$ το φορτίο του ηλεκτρονίου

(γ) Αν το ηλεκτρόνιο ξεκινά από την ηρεμία στο $z = 4d$, τότε η αλλαγή στην κινητική ενέργεια θα είναι: $\Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 = -\Delta U = \frac{|e|\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{6}{5}\right) > 0$. Επομένως, το μέτρο της ταχύτητας στο $z = 3d$ θα είναι: $\boxed{v_f = \sqrt{\frac{2|e|\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{m}\ln\left(\frac{6}{5}\right)}}$

2. Δύο διηλεκτρικά υλικά με διηλεκτρική διαπερατότητα κ_1 και κ_2 γεμίζουν τον μισό χώρο ανάμεσα στους παράλληλους οπλισμούς ενός επίπεδου πυκνωτή, όπως φαίνεται στο σχήμα. Κάθε οπλισμός έχει εμβαδό A και η μεταξύ τους απόσταση είναι d. Υπολογίστε την χωρητικότητα του συστήματος.





Η διαφορά δυναμικού ΔV σε κάθε μισό του πυκνωτή είναι ίδια και επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύστημα αποτελείται από δύο πυκνωτές, χωρητικότητας C_1 και C_2 με φορτία $\pm Q_1$ και $\pm Q_2$ αντίστοιχα.

Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου E_1 και E_2 είναι το ίδιο και στα δύο τμήματα επειδή $|E_1| = |E_2| = |E| = \frac{|\Delta V|}{d}$ (1)

Από το νόμο του Gauss για διηλεκτρικά έχουμε ότι: $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{k\varepsilon_0} \Rightarrow$

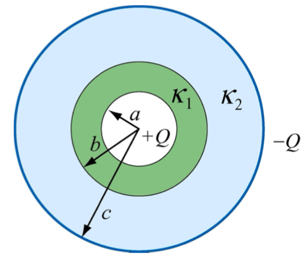
$\Rightarrow E\cdot A = \frac{Q_i}{k_i\varepsilon_0} \Rightarrow Q_i = k_i\varepsilon_0 E\left(A/2\right)$ μισή επιφάνεια οπλισμών για κάθε μισό του πυκνωτή

Αντικαθιστούμε την ένταση από την (1) οπότε έχουμε: $\boxed{Q_i = k_i\varepsilon_0 \frac{|\Delta V| A}{2d}}$

Η χωρητικότητα του συστήματος θα είναι επομένως:

$$C = \frac{Q_1+Q_2}{|\Delta V|} = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}(\kappa_1+\kappa_2) = C_1 + C_2 \quad \text{όπου} \quad C_i = \frac{\varepsilon_0 (A/2)}{d} k_i \text{ και } i=1,2$$

3. Θεωρήστε ένα αγώγιμο σφαιρικό φλοιό εσωτερικής και εξωτερικής ακτίνας a και c αντίστοιχα και φορτίου +Q και $-Q$ αντίστοιχα. Θεωρήστε ότι ο χώρος ανάμεσα στις δύο σφαιρικές επιφάνειες είναι γεμάτος με δύο διαφορετικά υλικά διηλεκτρικής σταθεράς κ_1 και κ_2. Το ένα υλικό καλύπτει την περιοχή από την επιφάνεια ακτίνας a έως μια επιφάνεια ακτίνας b ενώ το δεύτερο υλικό εκτείνεται από την επιφάνεια ακτίνας b έως την εσωτερική σφαιρική επιφάνεια του σφαιρικού φλοιού ακτίνας c, όπως φαίνεται στο σχήμα. Προσδιορίστε την χωρητικότητα του συστήματος.



Μπορούμε να θεωρήσουμε το σύστημα σαν δύο πυκνωτές συνδεδεμένους σε σειρά, εφόσον η διαφορά δυναμικού στα άκρα των πυκνωτών είναι το άθροισμα των διαφορών δυναμικού στα άκρα των επιμέρους πυκνωτών,

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 .$$

Κάθε σφαιρικός φλοιός έχει φορτίο του ίδιου μεγέθους κατ' απόλυτη τιμή και επομένως: $\Delta V_i = \dfrac{Q}{C_i}$ όπου $i = 1, 2$

Κάθε επιμέρους πυκνωτής ικανοποιεί τη σχέση: $C_i = k_i C_{i,\phi}$ όπου C_0 είναι η χωρητικότητα σφαιρικών πυκνωτών εσωτερικής ακτίνας r_i και εξωτερικής ακτίνας r_2, χωρίς διηλεκτρικό υλικό ανάμεσα στους οπλισμούς του.

Υπολογίσαμε στις διαλέξεις ότι η χωρητικότητα τέτοιων σφαιρικών πυκνωτών δίνεται από τη σχέση: $C_{i,\phi} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1}$

Επομένως οι χωρητικότητες των δύο πυκνωτών του συστήματος είναι: $\begin{cases} C_1 = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{abk_1}{b-a} \\ C_2 = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{bck_2}{c-b} \end{cases}$

Αφού οι πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι σε σειρά, η ολική χωρητικότητα του συστήματος θα είναι: $C_{ολ} = \dfrac{Q}{\Delta V_1 + \Delta V_2} = \dfrac{\cancel{Q}}{\cancel{Q}/C_1 + \cancel{Q}/C_2} \Rightarrow C_{ολ} = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

Αντικαθιστώντας τις χωρητικότητες C_1 και C_2 στην τελευταία εξίσωση, θα έχουμε:

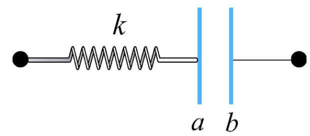
$$C_{ολ} = \frac{(4\pi\varepsilon_0)^{\cancel{2}} k_1 k_2 \,(ab \cdot bc) / \cancel{[(b-a)(c-b)]}}{\cancel{(4\pi\varepsilon_0)}\left[k_1 \dfrac{ab}{\cancel{b-a}} + k_2 \dfrac{bc}{\cancel{c-b}}\right]} \Rightarrow C_{ολ} = \frac{4\pi\varepsilon_0 \, k_1 k_2 \, ab\cancel{b}c}{k_1 a\cancel{b}(c-b) + k_2 \cancel{b}c(b-a)} \Rightarrow$$

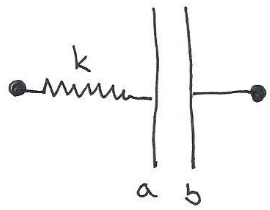
$$\Rightarrow C_{ολ} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{k_1 k_2 abc}{ac(k_1 - k_2) - b(k_1 a - k_2 c)} \Rightarrow \boxed{C_{ολ} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{k_1 k_2 abc}{k_2 c(b-a) + k_1 a(c-b)}}$$

Για $k_1, k_2 \to 1$ τότε $C_{ολ} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 abc}{c(b-a) + a(c-b)} = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{a\cancel{b}c}{\cancel{b}(c-a)} \Rightarrow C_{ολ} = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{ac}{c-a}$

που είναι η χωρητικότητα σφαιρικού πυκνωτή εσωτερικής ακτίνας a και εξωτερικής

4. Θεωρήστε έναν επίπεδο πυκνωτή με αέρα ανάμεσα στους δύο οπλισμούς του. Ένας από τους οπλισμούς του πυκνωτή είναι συνδεδεμένος με ελατήριο σταθεράς ελατηρίου k, ενώ ο άλλος οπλισμός είναι ακλόνητος. Το σύστημα είναι σε ηρεμία πάνω σε οριζόντια επιφάνεια όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν τα φορτία στους οπλισμούς του πυκνωτή είναι $+Q$ και $-Q$ αντίστοιχα και το εμβαδό της επιφάνειάς τους είναι Α, βρείτε την επιμήκυνση του ελατηρίου συναρτήσει του φορτίου Q, του εμβαδού της επιφάνειας Α και της σταθεράς του ελατηρίου k.





Η δύναμη ελατηρίου $\vec{F}_{ελ}$ που ενεργεί στον οπλισμό a είναι: $\vec{F}_{ελ} = -kx\hat{i}$

Παρόμοια, η ηλεκτροστατική δύναμη $\vec{F}_{ηλ}$ εξαιτίας του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από τον οπλισμό b είναι:

$$\vec{F}_{ηλ} = QE\hat{i} = Q\left(\frac{σ}{2ε_0}\right)\hat{i} \Rightarrow \vec{F}_{ηλ} = \frac{Q^2}{2Aε_0}\hat{i}$$ όπου A το εμβαδόν του οπλισμού.

Το φορτίο στον οπλισμό a δεν μπορεί να ασκήσει δύναμη στον εαυτό του, όπως αναμένεται από τον $3^{ο}$ νόμο του Νεύτωνα. Επομένως θεωρούμε μόνο το ηλεκτρικό πεδίο εξαιτίας του φορτίου στον οπλισμό b.

Σε ισορροπία, οι δύο δυνάμεις εξουδετερώνονται και έχουμε:

$$F_{ελ} = F_{ηλ} \Rightarrow kx = Q\frac{Q}{2Aε_0} \Rightarrow \boxed{x = \frac{Q^2}{2Aε_0 k}}$$

5. Θεωρήστε το σύστημα το οποίο αποτελείται από μια συμπαγή μεταλλική σφαίρα ακτίνας 10.*0cm* και φορτίου <u>*5nC* και</u> έναν ομόκεντρο μεταλλικό σφαιρικό φλοιό εσωτερικής ακτίνας 10.5*cm*; (α) Υπολογίστε την ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο στη περιοχή μεταξύ των δύο σφαιρών. *<u>Υπόδειξη</u>*: Μπορείτε να θεωρήσετε τις σφαίρες σαν παράλληλα επίπεδα τμήματα σε απόσταση 0.5cm.

(β) Υπολογίστε την χωρητικότητα του συστήματος των δύο σφαιρών.

(γ) Υπολογίστε την ολική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο χρησιμοποιώντας τη σχέση $\frac{1}{2}Q^2/C$ και να συγκρίνετε την απάντησή σας με αυτή από το (α) ερώτημα.

(α) Η ολική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο θα είναι:

$U = uV$ όπου u είναι η πυκνότητα ενέργειας στο χώρο ανάμεσα στις σφαίρες και V είναι ο όγκος του χώρου ανάμεσα στις σφαίρες

Αλλά ξέρουμε ότι $u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ όπου E το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο ανάμεσα στις σφαίρες.

Ο όγκος ανάμεσα στις σφαίρες θα είναι: $V = 4\pi r_1^2 (r_2 - r_1)$

Αντικατάσταση στη σχέση της ενέργειας δίνει:

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 4\pi r_1^2 (r_2 - r_1) \qquad (1)$$

Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου ανάμεσα στις δύο σφαίρες θα είναι $E = E_Q + E_{-Q}$ η συνεισφορά κάθε φορτίου.

Σύμφωνα με την άσκηση, μπορούμε να θεωρήσουμε τις δύο σφαιρικές επιφάνειες σαν επίπεδες επιφάνειες (αυτό συμβαίνει γιατί η απόσταση μεταξύ των δύο σφαιρών είναι αρκετά μικρή, οπότε οι επιφάνειες μοιάζουν σαν να είναι επίπεδες)

Ξέρουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο επίπεδης επιφάνειας δίνεται από $E_i = \frac{\sigma_Q}{2\epsilon_0}$

Επομένως για τις δύο σφαιρικές επιφάνειες: $E = \frac{\sigma_{+Q}}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_{-Q}}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma_Q}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi r_1^2 \epsilon_0}$

Αντικατάσταση στην εξίσωση (1) δίνει: $U = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\epsilon_0}\frac{Q^2}{\cancel{16}_{4}\pi^2 r_1^4 \epsilon_0^{\cancel{2}}}\cancel{4\pi r_1^2}(r_2 - r_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{8}\frac{Q^2}{\pi r_1^2 \epsilon_0}(r_2 - r_1)}$ και με αριθμητική αντικατάσταση: $U = 0.0 \mu J$

(β) Η χωρητικότητα του συστήματος θα είναι: $C = \frac{Q}{\Delta V}$ όπου ΔV η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σφαιρών.

Το δυναμικό στις επιφάνειες των δύο σφαιρών θα είναι:

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} \quad \text{και} \quad V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

Επομένως: $$C = \frac{\cancel{Q}}{\frac{\cancel{Q}}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{\cancel{Q}}{4\pi\varepsilon_0 r_2}} \Rightarrow \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}}$$

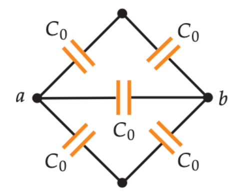
Αντικαθιστώντας αριθμητικά δεδομένα: $C = 4\pi\left(8.854 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}\right)\left(\frac{10cm \cdot 10.5cm}{10.5cm - 10cm}\right)$

$\Rightarrow C = 0.2337 nF \Rightarrow \boxed{C = 0.2 F}$

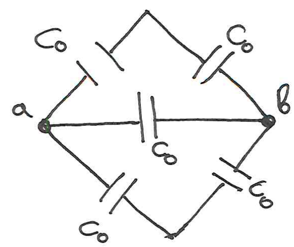
(γ) Για να βρούμε την ολική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη ανάμεσα στις δύο σφαίρες θα έχουμε: $U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \Rightarrow U = \frac{1}{2}\left[\frac{5 \cdot \cancel{10^{-9}} C}{0.2337 \cdot \cancel{10^{-9}} F}\right] \Rightarrow \boxed{U = 0.05 \mu J}$

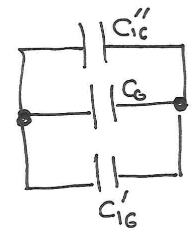
Το αποτέλεσμα συμφωνεί με το αποτέλεσμα του (α) ερωτήματος με ακρίβεια 5%. Να σημειωθεί ότι το αποτέλεσμα του (α) ερωτήματος θεωρείται ως το ακριβές αποτέλεσμα

6. Θεωρήστε το κύκλωμα της γέφυρας πυκνωτών του διπλανού σχήματος το οποίο αποτελείται από 5 όμοιους πυκνωτές της ίδιας χωρητικότητας C_o. (α) Βρείτε την ισοδύναμη χωρητικότητα του κυκλώματος μεταξύ των σημείων a και b. (β) Βρείτε την ισοδύναμη χωρητικότητα μεταξύ των σημείων a και b αν ο πυκνωτής στο κέντρο αντικατασταθεί με έναν πυκνωτή χωρητικότητας $10C_o$.



Η γέφυρα των 5 πυκνωτών θα μπορούσε να αντικατασταθεί από το παρακάτω ισοδύναμο κύκλωμα:





όπου $C'_{ισ}$ είναι ο ισοδύναμος πυκνωτής των 2 πυκνωτών του χαμηλότερου κλάδου που έχουμε σε σειρά συνδεσμολογία

$$\frac{1}{C'_{ισ}}=\frac{1}{C_0}+\frac{1}{C_0} \Rightarrow C'_{ισ}=\frac{C_0}{2}$$

Ενώ $C''_{ισ}$ είναι ο αντίστοιχος ισοδύναμος πυκνωτής για τον πάνω κλάδο:

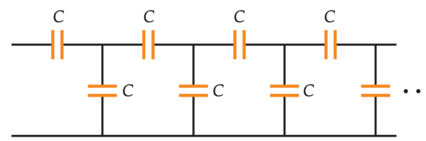
Εφόσον όλοι οι πυκνωτές έχουν την ίδια χωρητικότητα: $C''_{ισ}=C'_{ισ}=\frac{C_0}{2}$

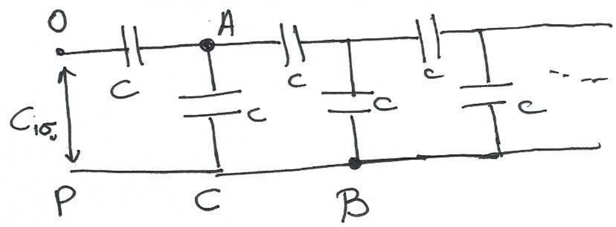
Οι πυκνωτές $C''_{ισ}$, $C''_{ισ}$ και C_0 είναι συνδεδεμένοι παράλληλα, οπότε:

$$C_{ολ}=C'_{ισ}+C''_{ισ}+C_0=\frac{C_0}{2}+\frac{C_0}{2}+C_0 \Rightarrow \boxed{C_{ολ}=2C_0}$$

Αν ο πυκνωτής στον μεσαίο κλάδο αντικατασταθεί με ένα πυκνωτή χωρητικότητας $10C_0$ τότε η ολική χωρητικότητα θα είναι: $\boxed{C_{ολ}=11C_0}$

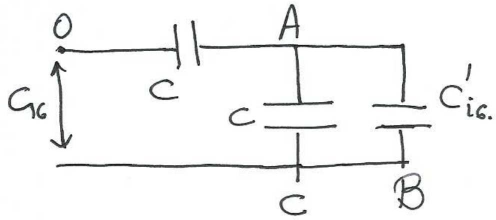
7. Ποια είναι η ισοδύναμη χωρητικότητα του άπειρου δικτύου των πυκνωτών του διπλανού σχήματος; Κάθε πυκνωτής έχει χωρητικότητα *C*. Η απάντησή σας θα πρέπει να εκφραστεί συναρτήσει της χωρητικότητας *C*.





Παρατηρούμε ότι το σχήμα της άπειρης σκάλας των πυκνωτών μεταξύ των σημείων AB μοιάζει με αυτό, ανάμεσα στα OC.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ανάμεσα στα AB υπάρχει η ισοδύναμη χωρητικότητα $C'_{ισ.}$ και το κύκλωμα της άπειρης σκάλας να γραφεί



Επομένως έχουμε την χωρητικότητα $C'_{ισ.}$ συνδεδεμένη παράλληλα με την χωρητικότητα C ανάμεσα στα AB και το σύστημα αυτό συνδεδεμένο σε σειρά με τη χωρητικότητα C ανάμεσα στα OA.

Να σημειωθεί ότι η χωρητικότητα του συστήματος των άπειρων πυκνωτών είναι πεπερασμένη και επομένως η προσθήκη ενός ακόμα πυκνωτή δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της χωρητικότητας. Επομένως θα έχουμε:

Παράλληλη συνδεσμολογία: $C'_{ισ} + C = C''_{ισ}$ (1)

σε σειρά συνδεσμολογία: $\frac{1}{C_{ισοδ}} = \frac{1}{C''_{ισ}} + \frac{1}{C} \Rightarrow \frac{1}{C_{ισ}} = \frac{C + C''_{ισ}}{CC''_{ισ}} \Rightarrow$

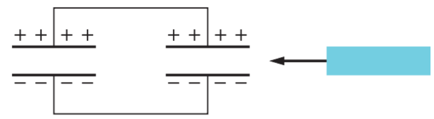
$\Rightarrow CC''_{ισ} = C_{ισ} + C_{ισ}C''_{ισ}$ $\Big\} \Rightarrow CC''_{ισ} = C'_{ισ}C + C'_{ισ}C''_{ισ}$

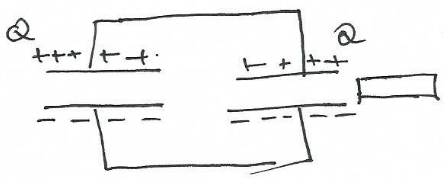
Θεωρούμε όπως προαναφέρθηκε ότι $C_{ισοδ} = C'_{ισοδ}$ $\Rightarrow$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \cancel{CC'_{ισ}} + C^2 = \cancel{CC'_{ισ}} + C'^2_{ισ} + C'_{ισ}C \Rightarrow C'^2_{ισ} + C'_{ισ}C - C^2 = 0$

Λύνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση κρατώντας τη θετική λύση ως αποδεκτή λύση: $C'_{ισ} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 + 4C^2}}{2} \Rightarrow C'_{ισ} = \frac{-C + C\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \boxed{C'_{ισ} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)C}$

8. Δύο πυκνωτές, ο καθένας αποτελούμενος από δύο αγώγιμους επίπεδους οπλισμούς επιφάνειας *A* που βρίσκονται σε απόσταση *d*, είναι συνδεδεμένοι παράλληλα μεταξύ τους όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ένα κομμάτι διηλεκτρικού υλικού πάχους *d* και εμβαδού επιφάνειας *A* με διηλεκτρική σταθερά *κ*, εισέρχεται ανάμεσα στους οπλισμούς του ενός από τους δύο πυκνωτές. Υπολογίστε το νέο φορτίο *Q’* στον θετικό οπλισμό του πυκνωτή αυτού μετά την αποκατάσταση της ηλεκτροστατικής ισορροπίας. Η απάντησή σας θα πρέπει να εκφραστεί συναρτήσει του φορτίου *Q* και της διηλεκτρικής σταθεράς *κ*.





Έστω το φορτίο στον πυκνωτή χωρίς το διηλεκτρικό ότι είναι Q_1 και στον πυκνωτή με το διηλεκτρικό είναι Q_2

Αν οι δύο πυκνωτές είχαν αρχικοί χωρητικότητα C τότε ο πυκνωτής με το διηλεκτρικό θα έχει χωρητικότητα $C' = kC$.

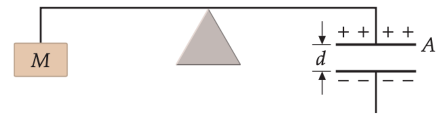
Από διατήρηση φορτίου θα έχουμε: $Q_1 + Q_2 = 2Q$ όπου Q το αρχικό φορτίο

Οι πυκνωτές βρίσκονται στη ίδια διαφορά δυναμικού: $V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{Q_1}{\cancel{C}} = \frac{Q_2}{k\cancel{C}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} Q_2 = kQ_1 \\ Q_1 + Q_2 = 2Q \end{array}\right\} \Rightarrow Q_1 + kQ_1 = 2Q \Rightarrow \boxed{Q_1 = \frac{2Q}{k+1}}$$

Επομένως $\boxed{Q_2 = \frac{2kQ}{k+1}}$

9. Το διπλανό σχήμα παρουσιάζει μία ζυγαριά πυκνωτών. Η ζυγαριά έχει ένα σώμα μάζας M στο ένα άκρο μίας ράβδου αμελητέας μάζας ενώ το άλλο άκρο της ράβδου είναι στερεωμένο σε έναν επίπεδο πυκνωτή του οποίου η απόσταση μεταξύ των οπλισμών μπορεί να μεταβάλλεται. Υποθέστε ότι ο πάνω οπλισμός του πυκνωτή έχει αμελητέα μάζα. Όταν η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή είναι V_o, η ελκτική ηλεκτροστατική δύναμη μεταξύ των οπλισμών εξισορροπεί το βάρος της μάζας M. (α) Θεωρείτε ότι η ζυγαριά βρίσκεται σε σταθερή ισορροπία; Δηλαδή αν την ρυθμίσουμε να βρίσκεται σε ισορροπία και κατόπιν μετακινήσουμε τους οπλισμούς σε λίγο μικρότερη απόσταση, οι οπλισμοί θα κινηθούν για να εκμηδενίσουν την μεταξύ τους απόσταση ή θα επανέλθουν στην αρχική απόσταση ισορροπίας; (β) Υπολογίστε τη τιμή της διαφοράς δυναμικού V_o, που απαιτείται ώστε να ισορροπήσει ένα σώμα μάζας M θεωρώντας ότι η απόσταση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή είναι d_o και το εμβαδό της επιφάνειας των οπλισμών είναι A. *Υπόδειξη*: Μια χρήσιμη σχέση είναι ότι η δύναμη μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή ισούται με την παράγωγο της αποθηκευμένης ηλεκτροστατικής ενέργειας ως προς την απόσταση των δύο οπλισμών.



(α) Το έργο που απαιτείται για να φορτίσουμε τον πυκνωτή συναρτήσει της δύναμης μεταξύ των οπλισμών του είναι:

$$dW = dE = -F\,dl \Rightarrow F = -\frac{dW}{dl} = -\frac{dE}{dl} \quad (1)$$

Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σε έναν πυκνωτή είναι: $E = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{l} V_0^2$

Παραγωγίζουμε την ενέργεια ως προς l: $\frac{dE}{dl} = \frac{d}{dl}\left[\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{l} V_0^2\right] \Rightarrow$

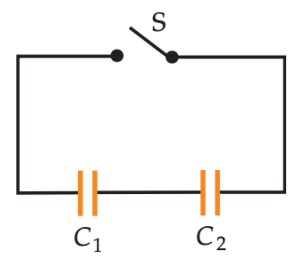
$$\Rightarrow \frac{dE}{dl} = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{l^2} V_0^2 \quad (2)$$

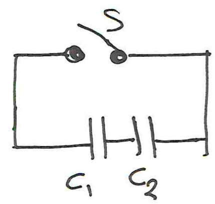
Εξισώνοντας $(1) \wedge (2) \Rightarrow F = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{l^2} V_0^2 \Rightarrow \boxed{F = \frac{\varepsilon_0 A}{2d^2} V_0^2}$

Βλέπουμε ότι η δύναμη είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης μεταξύ των οπλισμών. Μειώνοντας την απόσταση θα διαταράξει την ισορροπία του συστήματος, και επομένως η ζυγαριά είναι σε ασταθή ισορροπία.

(β) Θέτοντας $\Sigma F = 0$ στο σώμα μάζας M όταν η απόσταση των οπλισμών είναι d_0 θα έχουμε: $Mg - \frac{\varepsilon_0 A}{2d_0^2} V_0^2 = 0 \Rightarrow \boxed{d_0 = \sqrt{\frac{2Mg}{\varepsilon_0 A}}}$

10. Θεωρήστε το κύκλωμα του διπλανού σχήματος. Πριν κλείσει ο διακόπτης *S*, η διαφορά δυναμικού στα άκρα των ηλεκτροδίων του διακόπτη είναι $120V$ και η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή χωρητικότητας C_1 είναι $40V$. Η χωρητικότητα του πυκνωτή C_1 είναι $0.200\mu F$. Η ολική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στους δύο πυκνωτές είναι $1.44mJ$. Μετά το κλείσιμο του διακόπτη, η διαφορά δυναμικού στα άκρα του κάθε πυκνωτή είναι $80V$ και η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στους δύο πυκνωτές ελαττώνεται στα $960\mu J$. Προσδιορίστε την χωρητικότητα C_2 του δεύτερου πυκνωτή καθώς και το φορτίο του πριν κλείσει ο διακόπτης *S*.





Όταν κλείσει ο διακόπτης, οι πυκνωτές C_1 και C_2 είναι συνδεδεμένα παράλληλα μεταξύ τους.
Η ισοδύναμη χωρητικότητα $C_{ισ} = C_1 + C_2$
Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στον ισοδύναμο πυκνωτή θα είναι: $U_f = \frac{1}{2} C_{ισ} V^2 \Rightarrow U_f = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)V^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2U_f = C_1 V^2 + C_2 V^2 \Rightarrow C_2 = \frac{2U_f - C_1 V^2}{V^2} = \frac{2 \cdot 960\mu J}{(80V)^2} - 0.20\mu F \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2 = 0.100\mu F}$$

Το φορτίο του C_2 θα είναι: $Q_2 = C_2 V_2$ όταν ο πυκνωτής είναι στο ανοικτό κύκλωμα
Η ενέργεια του συστήματος όταν ο διακόπτης είναι ανοικτός θα είναι:

$$U_i = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 + \frac{1}{2} C_2 V_2^2 \Rightarrow V_2^2 = \frac{2U_i - C_1 V_1^2}{C_2} \Rightarrow Q_2 = \sqrt{C_2^{\cancel{2}} \frac{2U_i - C_1 V_1^2}{\cancel{C_2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_2 = \sqrt{2U_i C_2 - C_1 C_2 V_1^2} \Rightarrow Q_2 = \sqrt{(0.10\mu F) 2 \cdot 1.44mJ - 0.10 \cdot 0.20 \cdot (40V)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_2 = 16\mu C}$$

Προσέξτε ότι όταν ο διακόπτης είναι ανοικτός, οι πυκνωτές δεν έχουν το ίδιο φορτίο και το σύστημα δεν έχει επέλθει κάποια ισορροπία. Οι δύο οπλισμοί που βρίσκονται συνδεδεμένοι, βρίσκονται με θετικό φορτίο και επομένως έχουν αντίθετη πολικότητα. Το φορτίο στον πυκνωτή C_1 είναι $8\mu C$ ενώ στο C_2 το φορτίο είναι $16\mu F$ και η τάση στο $V_{C_1} = 40V$ και στο $V_{C_2} = 160V$