Η σημερινή συζήτηση αφιερώνεται στο αν η συνάρτηση ενέργειας h ή η Hamiltonian αντιπροσωπεύουν πάντοτε την ενέργεια του συστήματος.

Εν γένει η απάντηση είναι ΟΧΙ. Εξαρτάται από το είδος του μετασχηματισμού των γενικευμένων συντεταγμένων και καρτεσιανών.

Δηλαδή αν η Lagrangian ενός συστήματος γραφεί συναρτήσει μιας ομάδας γενικευμένων συντεταγμένων q_i και αυτά τα q_i σχετίζονται με ένα σετ καρτεσιανών συντεταγμένων x_i με μετασχηματισμούς της μορφής

$x_1 = x_1(q_1, q_2, \dots, q_N)$

$x_2 = x_2(q_1, q_2, \dots q_N)$

$\vdots$

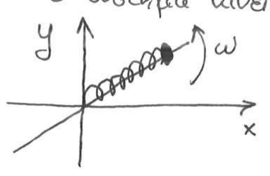
$x_N = x_N(q_1, q_2, \dots q_N)$

Τότε η συνάρτηση της ενέργειας $h = \sum \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i; t)$ αντιπροσωπεύει την ολική ενέργεια του συστήματος. Δηλαδή αν ο μετασχηματισμός δεν εμπεριέχει ακριβώς τον χρόνο t ή ταχύτητες $\dot{q}_i$ τότε $h \equiv E$ του συστήματος.

Δηλαδή η μορφή εξαρτάται από το είδος του μετασχηματισμού που χρησιμοποιούμε και τις συντεταγμένες που επιλέγουμε.

Εξετάζουμε τα ακόλουθα παραδείγματα:

1) Μια μάζα m είναι εξαρτημένη σε ένα ελατήριο σταθεράς k και μηδενικού φυσικού μήκους. Το ελατήριο συνδέει την μάζα με την αρχή των αξόνων. Το ελατήριο είναι περασμένο μέσα σε ράβδο αβαρή, η οποία περιστρέφεται ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Το σύστημα κινείται στο επίπεδο x-y.



Αν χρησιμοποιήσουμε σαν γενικευμένη συντεταγμένη την r μόνο, αφού $\dot{\theta} = \omega = \sigma\tau\alpha\theta$, τότε ο μετασχηματισμός που κάναμε είναι $x = r\cos\omega t$ και $y = r\sin\omega t$ εξαρτάται από t

Η Lagrangian του συστήματος είναι: $L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\omega^2)-\frac{1}{2}kr^2$.

Η συνάρτηση της ενέργειας είναι: $h=p\dot{r}-L=\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\dot{r}-L \Rightarrow$

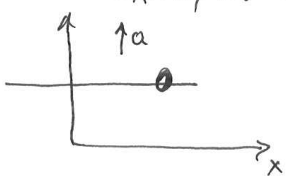
$\Rightarrow h=m\dot{r}^2-\frac{1}{2}m\dot{r}^2-\frac{1}{2}mr^2\omega^2+\frac{1}{2}kr^2 \Rightarrow h=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}kr^2-\frac{1}{2}mr^2\omega^2$.

Αυτή η τελευταία σχέση δεν αναπροσωπεύει την ενέργεια του συστήματος αφού υπάρχει ο όρος $-\frac{1}{2}mr^2\omega^2$, ο οποίος εκφράζει την ενέργεια που δίνεται στο σύστημα εξωτερικά για να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα (η ροπή). Η Lagrangian δεν εξαρτάται από τον χρόνο ακριβώς οπότε h διατηρείται.

Αν είχαμε χρησιμοποιήσει μετασχηματισμό με r και Θ τότε θα καταλήγαμε σε μια μορφή $h=\sum \dot{q}_i p_i - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta}+\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\dot{r}-L = mr^2\dot{\theta}^2+m\dot{r}^2-\frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2-\frac{m}{2}\dot{r}^2+\frac{1}{2}kr^2$

Δηλαδή $h=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{1}{2}kr^2$ που θα αναπροσωπεύε την ενέργεια του συστήματος. Επομένως η επιλογή του συγκεκριμένου μετασχηματισμού αλλάζει την μορφή της συνάρτησης ενέργειας.

2) Έστω ότι μια μάζα m είναι πάνω σε μια ράβδο που κινείται κατακόρυφα με επιτάχυνση α. Η ράβδος διατηρείται οριζόντια.



Η ταχύτητα $\dot{y}$ της ράβδου και της μάζας είναι $\dot{y}=at \Rightarrow$

$\Rightarrow y=\frac{1}{2}at^2$.

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $x=x$ και $y=0\cancel{x}+at$

η Lagrangian γράφεται: $L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+(at)^2)-mg(\frac{1}{2}at^2)$

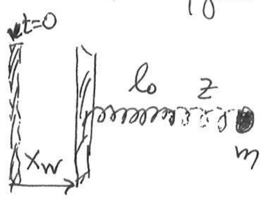
Στην περίπτωση αυτή η Lagrangian εξαρτάται ακριβώς από τον χρόνο και επίσης ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων εξαρτάται από τον χρόνο.

Η συνάρτηση της ενέργειας θα είναι: $h=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\dot{x}-\mathcal{L} = m\dot{x}^2-\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}ma^2t^2+mg\frac{at^2}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow h=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}mgat^2-\frac{m}{2}a^2t^2.$

Η μορφή αυτή της συνάρτησης ενέργειας δεν διατηρείται αφού εξαρτάται από τον χρόνο, αλλά και δεν αναπροσωπεύει την ενέργεια του συστήματος εξαιτίας του όρου $-\frac{m}{2}a^2t^2$.

3) Μια μάζα m συνδέεται με ένα τοίχο μέσω ενός οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k και φυσικού μήκους l_0. Ο τοίχος μπορεί να κινείται δεξιά-αριστερά με θέση $X_W=A\sin\omega t$. Αν z είναι η επιμήκυνση του ελατηρίου, να βρεθεί η hamiltonian συναρτήσει της επιμήκυνσης z και της συζυγούς ορμής της και να εξεταστεί αν η H αναπροσωπεύει την ενέργεια και κατά πόσο διατηρείται:



Εξετάζουμε την θέση της μάζας m ως προς την θέση του τοίχου την χρονική στιγμή t=0. Η θέση της μάζας σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή θα είναι: l_0+z+X_W. Επομένως η l_0+z είναι η θέση της μάζας ως προς τον τοίχο.

Η ταχύτητα της μάζας θα είναι: $\dot{X}=\dot{z}+\dot{X}_W = \dot{z}+A\omega\cos\omega t$

$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m(\dot{z}+A\omega\cos\omega t)^2-\frac{1}{2}kz^2 \qquad p_z=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}=m(\dot{z}+A\omega\cos\omega t) \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \mathcal{L}=\frac{1}{2m}p_z^2-\frac{1}{2}kz^2 \qquad \Rightarrow \dot{z}=\frac{p_z}{m}-A\omega\cos\omega t.$

Η Hamiltonian θα είναι επομένως:

$$H=p_z\dot{z}-\mathcal{L}=p_z\left(\frac{p_z}{m}-A\omega\cos\omega t\right)-\frac{p_z^2}{2m}+\frac{1}{2}kz^2 \Rightarrow H=\frac{p_z^2}{2m}+\frac{k}{2}z^2-p_zA\omega\cos\omega t$$

Η Hamiltonian δεν είναι η ενέργεια. Αυτό το περιμέναμε γιατί ο μετασχηματισμός μεταξύ της επιμήκυνσης που χρησιμοποιούμε σαν συντεταγμένη και της θέσης x είναι: $x=z+X_W$ και $X_W=A\cos\omega t$ που περιέχει ακριβώς τον χρόνο. Επίσης η Hamiltonian δεν διατηρείται αφού περιέχει τον χρόνο.

Μπορούμε να εξετάσουμε αν η ενέργεια διατηρείται: $E=\frac{p_z^2}{2m}+\frac{k}{2}z^2 \Rightarrow$

$$\frac{dE}{dt}=\frac{p_z\dot{p}_z}{m}+kz\dot{z}$$

Αλλά $p_z=m(\dot{z}+A\omega\cos\omega t)$ ενώ $\dot{p}_z=-\frac{\partial H}{\partial z}=-kz$ σύμφωνα με την 2η εξίσωση Hamilton

Επομένως $\frac{dE}{dt}=(-kz)(\dot{z}+A\omega\cos\omega t)+kz\dot{z}=(-kz)A\omega\cos\omega t \neq 0.$

Δηλαδή η ενέργεια δεν διατηρείται. Το αποτέλεσμα αυτό είναι λογικό αφού το αποτέλεσμα δίνει την ισχύ ($P=\frac{dE}{dt}$) πάνω στο άκρο του ελατηρίου το οποίο είναι συνδεδεμένο στον τοίχο. Η δύναμη που ασκεί ο τοίχος στο ελατήριο είναι: $F=-kz$ και το ελατήριο εξασκεί μια δύναμη kz στον τοίχο σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Newton.

4) Έστω ένα 1-Δ σύστημα που αποτελείται από μια μάζα m, εξαρτημένη από ελατήριο στο άλλο άκρο του οποίου εφαρμόζεται μια δύναμη F προκαλώντας το άκρο του ελατηρίου να κινείται με σταθερή ταχύτητα v_0.

Η δυναμική ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή (ελατήριο) είναι $\frac{1}{2}k\Delta x^2$ όπου $\Delta x=v_0 t-x$

Η Lagrangian θα είναι: $L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}k(v_0 t-x)^2$.

Η $p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$ και επομένως $H=m\dot{x}^2-\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}k(v_0 t-x)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow H=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}k(v_0 t-x)^2=\frac{1}{2}\frac{p_x^2}{m}+\frac{1}{2}k(v_0 t-x)^2.$$

Στην περίπτωση αυτή οι γενικευμένες συντεταγμένες $q_x=x$ και οι καρτεσιανές συναρτήσει των γενικευμένων, δεν περιέχουν ακριβώς τον χρόνο και επομένως η hamiltonian εκφράζει την ενέργεια. Ωστόσο υπάρχει ακριβής εξάρτηση από τον χρόνο και επομένως η ενέργεια δεν διατηρείται.

Θεωρήστε τώρα ότι χρησιμοποιούμε σαν γενικευμένη συντεταγμένη την $q_x = x - v_0 t$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μεταφερθεί σε ένα αδρανειακό σύστημα το οποίο κινείται με το δεξί μέρος του ελατηρίου (εκεί που εφαρμόζεται η δύναμη) με σταθερή ταχύτητα v_0.

Η ταχύτητα του συστήματος είναι: $\dot{q}_x = \dot{x} - v_0 \Rightarrow \dot{x} = \dot{q}_x + v_0$ και επομένως η λαγρανζιανή

$$L = \frac{1}{2} m\left(\dot{q}_x^2 + v_0^2 + 2\dot{q}_x v_0\right) - \frac{1}{2} k q_x^2 \Rightarrow L = \frac{1}{2} m\dot{q}_x^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 + m\dot{q}_x v_0 - \frac{1}{2} k q_x^2$$

Η ορμή $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_x} = m\dot{q}_x + m v_0$ οπότε: $\left(\dot{q}_x = \frac{p_x}{m} - v_0\right)$

$$H = p_x \dot{q}_x - L = \dot{q}_x\left(m\dot{q}_x + m v_0\right) - \frac{1}{2} m\dot{q}_x^2 - m\dot{q}_x v_0 - \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k q_x^2$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2} m\dot{q}_x^2 + \frac{1}{2} k q_x^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow H = \frac{1}{2m}\left(p_x - m v_0\right)^2 + \frac{k}{2} q_x^2 - \frac{m v_0^2}{2}$$

Η hamiltonian δεν αντιπροσωπεύει την ολική ενέργεια του συστήματος εξαιτίας του όρου $\frac{m v_0^2}{2}$. Περιμένουμε να μην αντιπροσωπεύει την ενέργεια γιατί ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων ($q_x = x - v_0 t \Leftrightarrow x = q_x + v_0 t$) περιέχει ακριβώς τον χρόνο. Ο μετασχηματισμός ωστόσο αφαιρεί από το σύστημα (αρχική hamiltonian) την ενέργεια του κινούμενου αδρανειακού συστήματος. Παρατηρούμε ακόμα ότι H διατηρείται αφού δεν υπάρχει εξάρτηση χρόνου. Αν αγνοήσουμε τον όρο $m v_0^2/2$ που είναι σταθερός, αυτό που αντιπροσωπεύει η hamiltonian είναι η ενέργεια της κίνησης της μάζας ως προς το άκρο του ελατηρίου στο οποίο εφαρμόζεται η δύναμη. Οι δύο Hamiltonians διαφέρουν σε μέτρο, χρονική εξάρτηση αλλά και συναρτησιακή συμπεριφορά. Ωστόσο και στις 2 περιπτώσεις θα πάρουμε τις ίδιες εξισώσεις κίνησης.