1. Από την άκρη ενός γκρεμού ύψους h , ένα άτομο ρίχνει μια μπάλα με ταχύτητα υ (η γωνία ρίψης δεν έχει σημασία). Οι παρακάτω ποσότητες παριστάνουν τη μέγιστη οριζόντια απόσταση την οποία μπορεί να διανύσει η μπάλα. Χωρίς να λύσετε το πρόβλημα βρείτε ποια είναι η πιο πιθανή απάντηση και εξηγήστε την αιτία που απορρίπτεται τις υπόλοιπες: (Υπόδειξη: διαστασιακά όλες οι απαντήσεις έχουν τις σωστές μονάδες).

(Α) $\frac{gh^2}{\upsilon^2}$ **(Β)** $\frac{\upsilon^2}{g}$ **(Γ)** $\sqrt{\frac{\upsilon^2 h}{g}}$ **(Δ)** $\frac{\upsilon^2}{g}\sqrt{1+\frac{2gh}{\upsilon^2}}$ **(Ε)** $\frac{\upsilon^2}{g}\left(1+\frac{2gh}{\upsilon^2}\right)$ **(ΣΤ)** $\frac{\upsilon^2/g}{\left(1-\frac{2gh}{\upsilon^2}\right)}$

Ξέρουμε ότι οι διαστάσεις είναι σωστές, οπότε για να βρούμε τη πιο πιθανή λύση θα πρέπει να εξετάσουμε τη συμπεριφορά των σχέσεων σε οριακές περιπτώσεις για τις μεταβλητές g, υ και h που υπάρχουν στις εξισώσεις:

(Α) $\frac{gh^2}{\upsilon^2}$ είναι λάθος γιατί όταν $\upsilon \to 0$ η απόσταση γίνεται πολύ μεγάλη

(Β) $\frac{\upsilon^2}{g}$ είναι λάθος γιατί δεν εξαρτάται από το ύψος h

(Γ) $\sqrt{\frac{\upsilon^2 h}{g}}$ είναι λάθος γιατί όταν h=0 τότε η απόσταση γίνεται μηδέν. (Φανταστείτε πλάγια βολή)

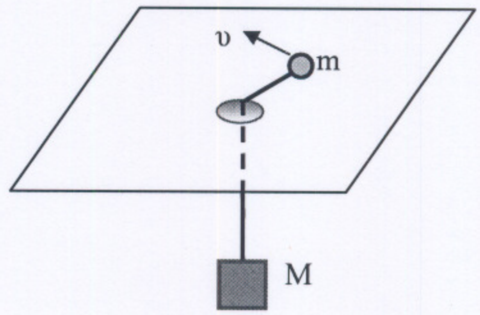
(Δ) $\frac{\upsilon^2}{g}\sqrt{1+\frac{2gh}{\upsilon^2}}$ Δεν υπάρχει κάτι λάθος

(Ε) $\frac{\upsilon^2}{g}\left(1+\frac{2gh}{\upsilon^2}\right)$ είναι λάθος γιατί όταν $\upsilon=\emptyset$ τότε η απόσταση είναι 2h ενώ θα έπρεπε να ήταν επίσης $\emptyset$. $\left[\underbrace{\frac{\upsilon^2}{g}}_{\to 0}+2h\right]$

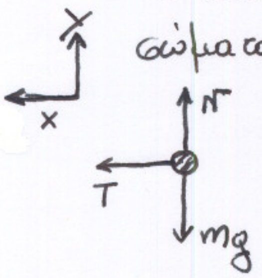
(ΣΤ) $\frac{\upsilon^2/g}{1-\frac{2gh}{\upsilon^2}}$ είναι λάθος γιατί ο παρονομαστής μηδενίζεται όταν $\frac{2gh}{\upsilon^2}=1 \Rightarrow \upsilon=\sqrt{2gh}$. Αλλά η απόσταση δεν πρέπει να γίνεται άπειρη για την ταχύτητα αυτή

Επομένως η σωστή απάντηση είναι η $\boxed{(\Delta)\ \frac{\upsilon^2}{g}\sqrt{1+\frac{2gh}{\upsilon^2}}}$

2. Μια μικρή σφαίρα μάζας m βρίσκεται σε ηρεμία πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο και σε απόσταση R από μια τρύπα στο κέντρο του επιπέδου, όπως στο διπλανό σχήμα. Περνάμε ένα νήμα αμελητέας μάζας μέσα από την τρύπα της επιφάνειας και δένουμε το ένα άκρο του πάνω στην σφαίρα. Στο άλλο άκρο του νήματος (αυτό που βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια) δένουμε ένα τούβλο μάζας M. Θέτουμε την σφαίρα σε ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας R και ταχύτητας υ. Ποιο πρέπει να είναι το μέτρο της ταχύτητας υ ώστε η μάζα M να παραμένει ακίνητη όταν την αφήνουμε ελεύθερη;



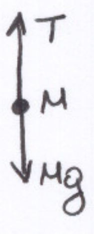
Το σώμα μάζας m εκτελεί κυκλική κίνηση με ταχύτητα υ.
Οι δυνάμεις που ενεργούν πάνω φαίνονται στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος



$\Sigma F_y = N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$ (δεν υπάρχει κίνηση στη y-διεύθυνση)

$\Sigma F_x = T = ma \Rightarrow \boxed{T = m\frac{\upsilon^2}{R}}$ (1) (κεντρομόλος δύναμη για να εκτελεί κυκλική κίνηση)

Το διάγραμμα ελευθέρου σώματος για τη μάζα M



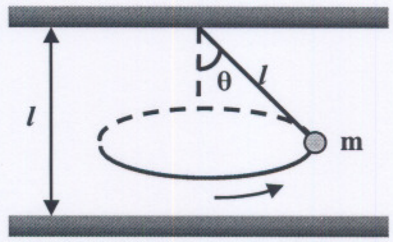
$\Sigma F_y = T - Mg = Ma$ Ωστόσο θέλουμε η μάζα M να ισορροπεί και επομένως $a=0$

Άρα $\boxed{T = Mg}$ (2)

Η τάση του νήματος όμως είναι η ίδια και για τα 2 σώματα

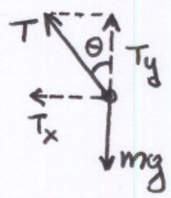
οπότε από (1) και (2) έχουμε: $m\frac{\upsilon^2}{R} = Mg \Rightarrow \boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{Mg}{m}R}}$

3. Μια μάζα m εξαρτάται από το ένα άκρο ενός νήματος αμελητέας μάζας και μήκους *l*. Το πάνω τμήμα του νήματος εξαρτάται από την οροφή η οποία απέχει επίσης απόσταση *l* από το δάπεδο. Αρχικά η μάζα m εκτελεί κυκλική κίνηση σε οριζόντιο κύκλο, ενώ το νήμα σχηματίζει πάντοτε γωνία θ με την κατακόρυφο διεύθυνση. Αν κόψουμε το νήμα, πόση είναι η οριζόντια απόσταση που καλύπτει η μάζα μεταξύ της χρονικής στιγμής που κόψαμε το νήμα και την στιγμή που χτυπά στο δάπεδο;



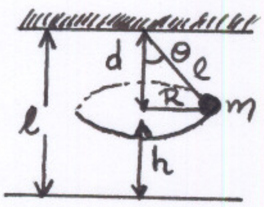
Το πρόβλημα αποτελείται από 2 σκέλη. Στο πρώτο το σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση. Στο δεύτερο σκέλος και αφού έχουμε κόψει το σχοινί εκτελεί οριζόντια βολή με αρχική ταχύτητα και αρχικό ύψος h.

(α) Κυκλική κίνηση: Αναλύουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y = mg \Rightarrow T\cos\theta = mg \Rightarrow \boxed{T = \frac{mg}{\cos\theta}} \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = m\alpha \Rightarrow \boxed{T_x = m\frac{v^2}{R}} \; (2) \text{ κεντρομόλος δύναμη}$$

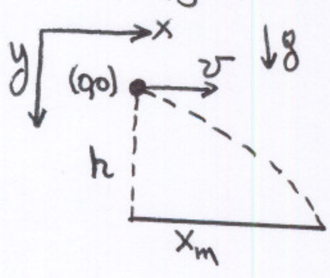


Απο το σχήμα βλέπουμε ότι $\boxed{R = l\sin\theta}$ και αντικαθιστώντας στη (2) θα πάρουμε:

$$T_x = m\frac{v^2}{l\sin\theta} \Rightarrow T\sin\theta = m\frac{v^2}{\sin\theta\, l} \xrightarrow{(1)} \frac{\cancel{m}g}{\cos\theta}\sin\theta = \cancel{m}\frac{v^2}{\sin\theta\, l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{g\tan\theta\sin\theta\, l}} \quad (A)$$

(β) Οριζόντια βολή



Το σώμα αφού κόψουμε το νήμα συνεχίζει να κινείται με ταχύτητα v που βρήκαμε στην (A) σε διεύθυνση εφαπτομενική της κυκλικής τροχιάς. Εξαιτίας της g διαγράφει πλέον οριζόντια βολή από ύψος h. Το ύψος στο οποίο βρίσκεται είναι: $h = l - d = l - l\cos\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{h = l(1-\cos\theta)}$$ (όπως στο παραπάνω σχήμα)

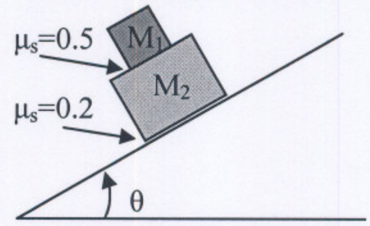
Ο χρόνος που χρειάζεται για να καλύψει αυτό το ύψος είναι:

$$y = y_0 + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}}} \quad (3) \quad t = \sqrt{\frac{2l(1-\cos\theta)}{g}}$$

Στον ίδιο χρόνο διανύει απόσταση στη διεύθυνση x

$$X_m = v \cdot t \xrightarrow{(3)\,(A)} X_m = \sqrt{\cancel{g}\tan\theta\sin\theta\, l}\sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \boxed{X_m = l\sqrt{2\tan\theta\sin\theta(1-\cos\theta)}}$$

4. Δύο τούβλα με μάζες M_1 και M_2 είναι ακίνητα το ένα πάνω στο άλλο και βρίσκονται πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο, όπως στο διπλανό σχήμα (όλα τα στοιχεία του προβλήματος είναι όπως αναγράφονται στο σχήμα).

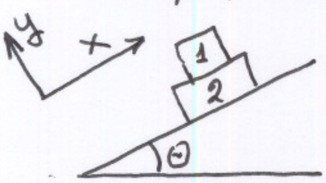


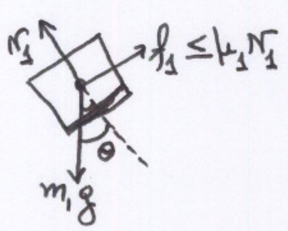
(α) Σχεδιάστε τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος .**(8β)**

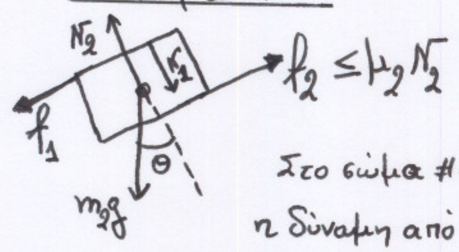
(β) Γράψτε τις εξισώσεις του Newton για τις μάζες M_1 και M_2. **(6β)**

(γ) Αν η γωνία θ του κεκλιμένου επιπέδου αυξάνει σταδιακά, ποιο από τα δυο τούβλα θα γλιστρήσει πρώτο και γιατί; **(6β)**

(α) Χρησιμοποιούμε τους άξονες x-y παράλληλα και κάθετα στο κεκλιμένο επίπεδο







Στο σώμα #2 δρούν η δύναμη από το 1 στο 2 (δράση-αντίδραση) και η f_1 (τριβή λόγω της κίνησης του σώματος 1).

(β) Με βάση τα διαγράμματα των δυνάμεων έχουμε:

Σώμα 1 (ηρεμεί)

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_x = f_1 - m_1 g\sin\Theta = \phi \\ \Sigma F_y = N_1 - m_1 g\cos\Theta = \phi\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} N_1 = m_1 g\cos\Theta & (1) \\ f_1 = m_1 g \sin\Theta & (2)\end{array}$$

Σώμα 2 (ηρεμεί)

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma F_x = f_2 - f_1 - m_2 g\sin\Theta = \phi \\ \Sigma F_y = N_2 - N_1 - m_2 g\cos\Theta = \phi\end{array}\right\} \xRightarrow{(1)\wedge(2)} \begin{array}{ll} N_2 = (m_1+m_2) g\cos\Theta & (3) \\ f_2 = (m_1+m_2) g \sin\Theta & (4)\end{array}$$

(γ) Το σώμα 2 θα γλιστρήσει πρώτο γιατί ο συντελεστής τριβής είναι μικρότερος

Συγκεκριμένα, όταν είναι να γλιστρήσει $f_2 = \mu_2 N_2 \xRightarrow{(3)\wedge(4)} \mu_2 \cancel{(m_1+m_2) g}\cos\Theta = \cancel{(m_1+m_2) g}\sin\Theta$

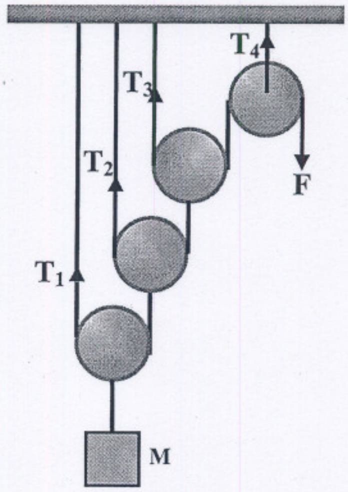
$$\Rightarrow \mu_2 = \tan\Theta \Rightarrow \boxed{\Theta = arc(\tan\mu_2)}$$

Για το σώμα 1 θα έχουμε ανάλογα: $\mu_1 = \tan\Theta \Rightarrow \Theta = arc(\tan\mu_1)$

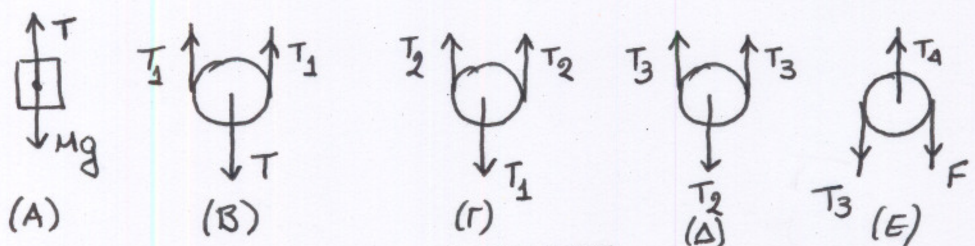
Αφού $\mu_2 < \mu_1$ η γωνία Θ θα είναι μικρότερη για το σώμα 2 από ότι στο 1.

π.χ $\Theta = \arctan(0.2) \Rightarrow \Theta = 11.3^\circ$ ενώ $\Theta = \arctan(0.5) \Rightarrow \Theta = 26.6^\circ$

5. Σας δίνεται το παρακάτω σύστημα τροχαλιών. Όλες οι μάζες τροχαλιών και σχοινιών μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες ενώ δεν υπάρχουν τριβές. Να βρεθούν η δύναμη F που πρέπει να εξασκήσουμε ώστε η μάζα Μ να παραμένει ακίνητη καθώς και οι τάσεις των σχοινιών T_1, T_2, T_3, T_4.



Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος για τη μάζα Μ και τις 4 τροχαλίες ξεκινώντας από τη χαμηλότερη τροχαλία:



Αφού το σώμα ηρεμεί $\boxed{T = Mg}$ (1)

Στη πρώτη τροχαλία η τάση στα 2 σχοινιά δεξιά και αριστερά είναι η ίδια

Επομένως ο 2ος νόμος του Newton για τη περίπτωση (B) είναι: $T_1 + T_1 - T = 0 \Rightarrow \boxed{T_1 = \frac{T}{2}}$

Για τη περίπτωση (Γ) ισχύουν ότι και για τη χαμηλότερη τροχαλία

Αυτή τη φορά το κάτω σχοινί έχει τάση T_1 ενώ τα 2 πάνω σχοινιά έχουν τάση ίδια

Άρα $T_2 + T_2 - T_1 = 0 \Rightarrow 2T_2 = T_1 \Rightarrow T_2 = \frac{T_1}{2} \Rightarrow \boxed{T_2 = \frac{T}{4}}$

Για τη περίπτωση (Δ) θα έχουμε $T_3 + T_3 - T_2 = 0 \Rightarrow T_3 = \frac{T_2}{2} \Rightarrow \boxed{T_3 = \frac{T}{8}}$

Στη περίπτωση (Ε) η δύναμη F είναι ίση με τη τάση T_3 άρα $\boxed{F = \frac{T}{8}}$

ενώ $T_3 + F = T_4 \Rightarrow T_4 = 2T_3 = 2\frac{T}{8} \Rightarrow \boxed{T_4 = \frac{T}{4}}$ όπου $T = Mg$ από (1)