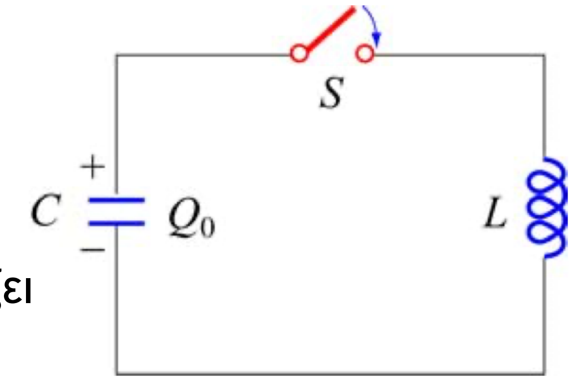
Κυκλώματα που περιέχουν Πηνία
RL, LC, RLC

Κύκλωμα LC – Ταλαντώσεις



Έστω το *LC* κύκλωμα του διπλανού σχήματος, όπου ένας πυκνωτής χωρητικότητας *C* συνδέεται με ένα πηνίο με συντελεστή επαγωγής *L*.

Υποθέτουμε ότι αρχικά ο πυκνωτής είναι φορτισμένος σε φορτίο Q_0 και ο διακόπτης S κλείνει οπότε ο πυκνωτής αρχίζει να αποφορτίζεται και η ηλεκτρική ενέργεια ελαττώνεται.

Το ρεύμα που δημιουργείται από την διεργασία της αποφόρτισης δημιουργεί μαγνητική ενέργεια η οποία αποθηκεύεται στο πηνίο. Αν δεν υπάρχει ωμική αντίσταση η ενέργεια μετατρέπεται μεταξύ ηλεκτρικής ενέργειας στον πυκνωτή και μαγνητικής ενέργειας στο πηνίο. Έχουμε επομένως μια **ηλεκτρομαγνητική ταλάντωση**

Η ολική ενέργεια στο κύκλωμα μετά το κλείσιμο του διακόπτη *S* είναι:

$$U = U_C + U_L = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow$$

Η ενέργεια διατηρείται οπότε η παράγωγος ως προς τον χρόνο θα δώσει:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2\right) = 0 \Rightarrow \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} = -LI\frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} = -L\frac{dQ}{dt}\frac{dI}{dt}$$

Από την τελευταία εξίσωση θα πάρουμε: $\frac{Q}{C} = -L\frac{d^2Q}{dt^2}$ ή ισοδύναμα: $\frac{Q}{C} = -L\frac{dI}{dt}$

Κύκλωμα LC – Ταλαντώσεις

Η τελευταία εξίσωση στηρίζεται στη σύμβαση του πρόσημου όπου: $I = -\frac{dQ}{dt}$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι το ρεύμα ισούται με τον ρυθμό ελάττωσης του φορτίου στους οπλισμούς του πυκνωτή ακριβώς μετά το κλείσιμο του διακόπτη.

Το ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να βρούμε αν εφαρμόσουμε τον τροποποιημένο 2^{o} νόμο του Kirchhoff κινούμενοι κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού.

Η γενική λύση της εξίσωσης: $\frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0$ είναι: $Q(t) = Q_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$

όπου Q_0 είναι το πλάτος και φ η φάση. ω_0 είναι η γωνιακή συχνότητα, $\omega_0 = 1/\sqrt{\mathrm{LC}}$

Το αντίστοιχο ρεύμα στο πηνίου είναι:

$$I(t) = -\frac{d}{dt}[Q_0\cos(\omega_0 t + \varphi)] \Rightarrow I(t) = Q_0\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow I(t) = I_0\sin(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow$$

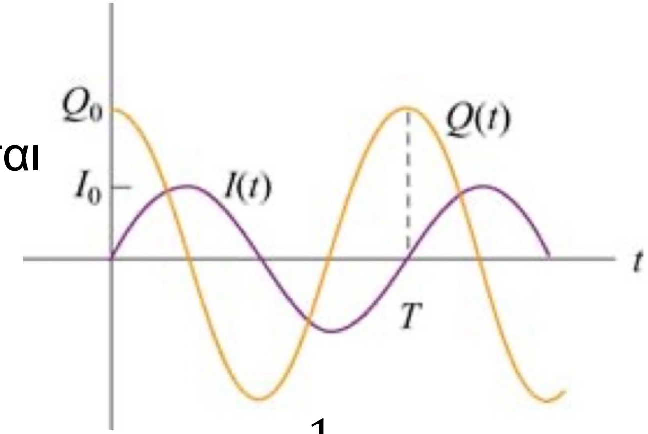
Από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος έχουμε: $Q(t=0) = Q_0$ και $I(t=0) = 0$

και άρα η φάση είναι: $\varphi = 0$

Επομένως οι λύσεις για το φορτίο και το ρεύμα θα είναι:

$$\boxed{\begin{aligned} Q(t) &= Q_0\cos(\omega_0 t) \\ I(t) &= I_0\sin(\omega_0 t) \end{aligned}}$$

Κύκλωμα LC – Ταλαντώσεις



Η χρονική εξάρτηση του ρεύματος και φορτίου φαίνονται στο διπλανό σχήμα:

Με βάση τις εξισώσεις του ρεύματος και φορτίου, η ηλεκτρική και μαγνητική ενέργεια γράφονται ως:

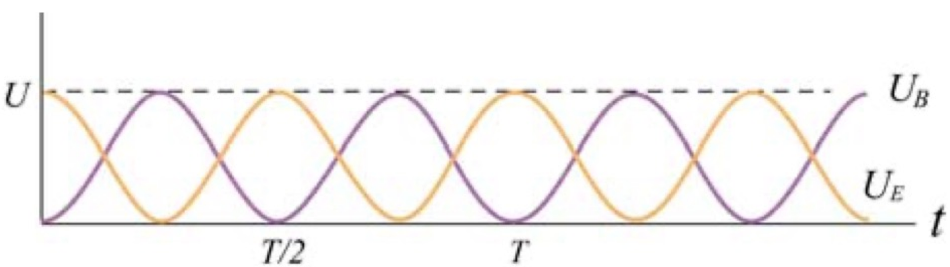
$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}\cos^2(\omega_0 t) \quad \text{και} \quad U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}LI_0^2\sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}LQ_0^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t)$$

Από τις δύο αυτές εξισώσεις προκύπτει αμέσως ότι η ολική ενέργεια είναι σταθερή:

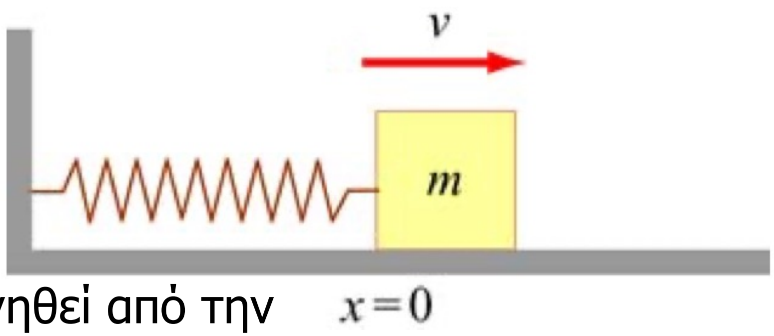
$$U = U_E + U_m = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}LQ_0^2\,\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t) \Rightarrow$$

$$U = \frac{1}{2}Q_0^2\left[\frac{1}{C}\cos^2(\omega_0 t) + L\omega_0^2\sin^2\ \omega_0 t\right] = \frac{1}{2}Q_0^2\left[\frac{1}{C}\cos^2(\omega_0 t) + \frac{L}{LC}\sin^2\ \omega_0 t\right] \Rightarrow U = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$$

Οι ηλεκτρικές και μαγνητικές ταλαντώσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Κύκλωμα LC – Ταλαντώσεις



Το μηχανικό ανάλογο είναι:

Αν η μάζα κινείται με ταχύτητα v και το ελατήριο έχει σταθερά ελατηρίου *k* έχει μετακινηθεί από την θέση ισορροπίας του κατά *x*, τότε η ολική ενέργεια αυτού του μηχανικού συστήματος θα είναι:

$$U = U_{\varepsilon\lambda.} + K = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Απουσία τριβών, η ολική ενέργεια διατηρείται και θα έχουμε:

$$\frac{dU}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dU_{\varepsilon\lambda.}}{dt} + \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2\right] = kx\frac{dx}{dt} + mv\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow kx + m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

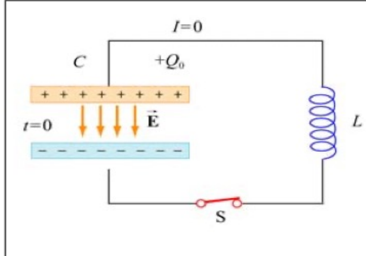
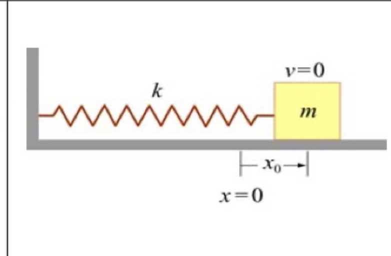
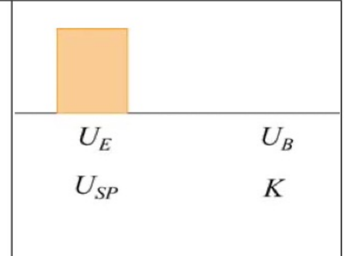
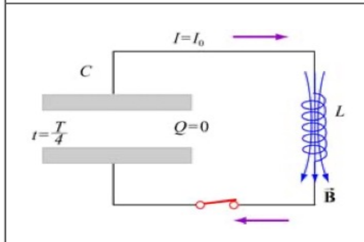
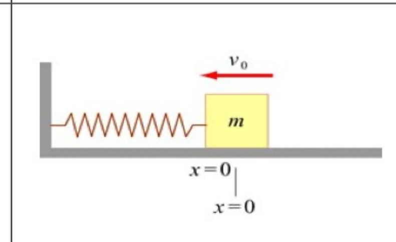
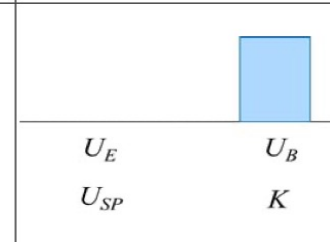
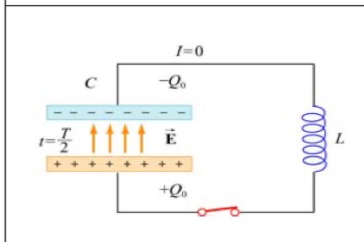
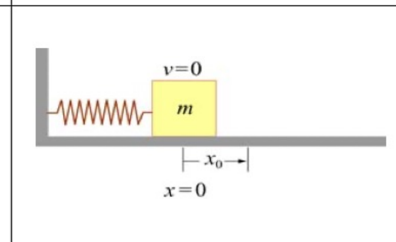
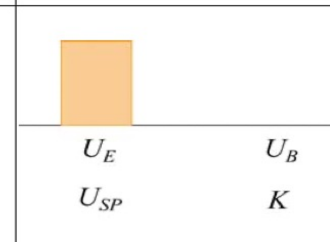
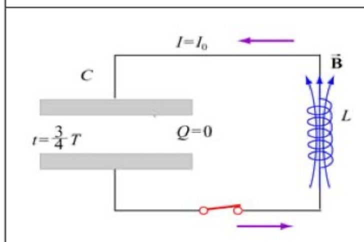
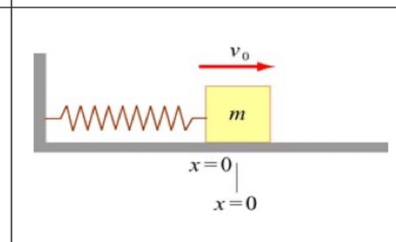
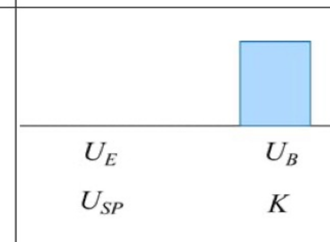
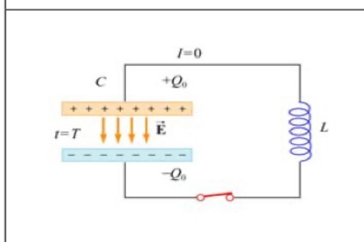
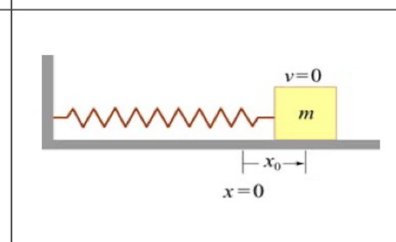
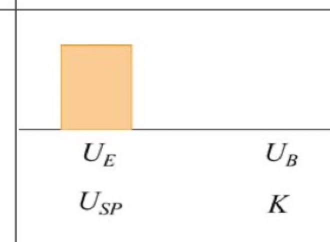
Με γενική λύση: $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$ όπου $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ η γωνιακή συχνότητα και x_0 το πλάτος

Σε μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή, η ενέργεια του συστήματος γράφεται:

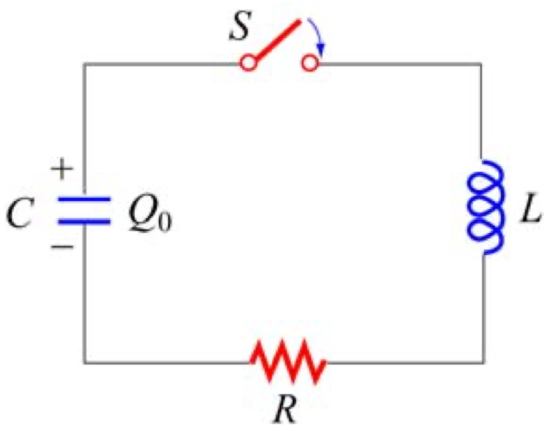
$$U = \frac{1}{2}kx_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}mx_0^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}kx_0^2[\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)]$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}kx_0^2$$

Ισοδυναμία LC κυκλώματος και αρμονικού ταλαντωτή

LC κύκλωμα	Μάζα – ελατήριο	Ενέργεια
		
		
		
		
		

Το κύκλωμα RLC σε σειρά



Έστω το *RLC* κύκλωμα του παρακάτω σχήματος, το οποίο περιέχει μια αντίσταση *R*, έναν πυκνωτή χωρητικότητας *C* και ένα πηνίο συντελεστή αυτεπαγωγής *L*, όλα σε σειρά.

Αρχικά ο πυκνωτής είναι φορτισμένος και περιέχει φορτίο Q_0.

Όταν κλείσει ο διακόπτη *S*, ρεύμα αρχίζει να διαρρέει το κύκλωμα και ο πυκνωτής αποφορτίζεται.

Σε αντίθεση με το *LC* κύκλωμα, που είδαμε προηγουμένως, ενέργεια καταναλώνεται στην αντίσταση *R.*

Ο ρυθμός με τον οποίο ενέργεια καταναλώνεται στην αντίσταση είναι: $P = \frac{dU}{dt} = -I^2R$

όπου το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η ολική ενέργεια ελαττώνεται.

Όπως προηγουμένως, η ενέργεια του κυκλώματος είναι το άθροισμα της ηλεκτρικής ενέργειας του πυκνωτή και της μαγνητικής ενέργειας στο πηνίο.

$$U = U_C + U_L = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2\right) = -I^2R \Rightarrow \boxed{\frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = -I^2R}$$

όπου θεωρήσαμε και πάλι ότι το ρεύμα είναι ο ρυθμός ελάττωσης του φορτίου των οπλισμών του πυκνωτή, $I = -dQ/dt$.

Το κύκλωμα RLC σε σειρά

Ξεκινώντας από τη σχέση: $\frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = -I^2R$ διαιρούμε και τα δύο μέλη με *I*

$$\frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = -IR \Rightarrow \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} + IR = 0 \Rightarrow \frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{dQ}{dt}R = 0$$

Η προηγούμενη σχέση αντιστοιχεί σε αυτή της φθίνουσας ταλάντωσης:

$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0$ Θεωρούμε ότι: $\gamma = \frac{R}{2L}$ και: $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ φυσική συχνότητα του συστήματος

Έχουμε ως λύση τη μορφής: $Q(t) = Ae^{at}$

Αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση δίνει: $a^2Ae^{at} + 2\gamma aAe^{at} + \omega_0^2Ae^{at} = 0 \Rightarrow$

$\boxed{\Rightarrow a^2 + 2\gamma a + \omega_0^2 = 0}$ οπότε: $\boxed{a = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$ τρεις περιπτώσεις ανάλογα με τη τιμή της διακρίνουσας

Για μικρές τιμές της αντίστασης *R* (μικρή απόσβεση ταλάντωσης) βρίσκουμε εύκολα ότι η λύση είναι της μορφής:

$\boxed{Q(t) = Q_0e^{-\gamma t}\cos(\omega'_0 t + \varphi)}$ όπου

$\gamma = \frac{R}{2L}$ ο παράγοντας απόσβεσης:

$\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ η γωνιακή συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης

Q_0 και φ προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες

17° Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

Έτοιμοι