ΦΥΣ 140 – Εισαγωγή στην Επιστημονική Χρήση Υπολογιστών

5η Εργασία **Επιστροφή: Τετάρτη 09/11/2022**

<u>Υπενθύμιση:</u> Οι εργασίες πρέπει να επιστρέφονται με e-mail στο fotis@ucy.ac.cy που θα στέλνετε από το πανεπιστημιακό σας λογαριασμό το αργότερο μέχρι την ημερομηνία που αναγράφεται.

Ως subject του e-mail θα πρέπει να αναγράφεται την εργασία (username_phy140_hmX όπου X ο αριθμός της εργασίας)

Κάθε αρχείο που επισυνάπτετε (attach) στο e-mail σας θα πρέπει να έχει το όνομα στη μορφή username_hmX.tgz όπου username είναι το username του e-mail σας και X ο αριθμός της εργασίας. Επίσης σαν πρώτο σχόλιο μέσα σε κάθε file που περιέχει το πρόγραμμά σας θα πρέπει να αναφέρεται το ονοματεπώνυμό σας. Οι εργασίες είναι ατομικές και πανομοιότυπες εργασίες δε θα βαθμολογούνται. Για να κάνετε ένα tgz file (ουσιαστικά tar zipped file) θα πρέπει να δώσετε στο terminal την εντολή tar -czvf username_hmX.tgz *.py όπου py είναι όλα τα py files των προγραμμάτων σας.

1. Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει τη σειρά:

$$f_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{\pi}\left[1-(-1)^n\right]\frac{\sin(nx)}{n}$$

η οποία δίνει την αναπαράσταση Fourier της συνάρτησης βήματος:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να υπολογίζει τις $f(x)$, $f_1(x)$, $f_5(x)$, $f_{10}(x)$ και $f_{100}(x)$ για $0 \le x < \pi$ με βήμα δx = π/500. Τα αποτελέσματα θα πρέπει να τα γράψετε σε ένα αρχείο με όνομα *fourier.dat* σε μορφή 6 στηλών όπου η 1η στήλη περιέχει την τιμή του *x*, η 2η στήλη την τιμή της $f(x)$, η 3η στήλη την τιμή της $f_1(x)$, η 4η στήλη την τιμή της $f_5(x)$, η 5η στήλη την τιμή της $f_{10}(x)$ και η 6η στήλη την τιμή της $f_{100}(x)$. Χρησιμοποιώντας το file αυτό, να κάνετε τη γραφική παράσταση όλων των *f* συναρτήσει του *x* στο ίδιο γράφημα. Θα πρέπει μαζί με το πρόγραμμά σας να επιστρέψετε και το γράφημα αυτό.

2. Τα πολυώνυμα Legendre ικανοποιούν την αναγωγική σχέση:

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x)$$

με $P_0(x) = 1$ και $P_n(x) = 0$ για n<0. Να γραφεί ένα πρόγραμμα σε Python το οποίο περιέχει μια *function* που να υπολογίζει το $P_n(x)$ για δεδομένα *n* και *x*. Σαν εφαρμογή να υπολογισθούν τα P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 για x = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3,…,1.0.

3. Μια φοιτήτρια χρησιμοποιεί μια ζυγαριά ελατηρίου για να μετρήσει διάφορες μάζες. Κρεμά το ένα άκρο του ελατηρίου σε ακλόνητο σημείο, κρεμά ένα δίσκο στο άλλο άκρο του και επικολλά ένα ξύλινο χάρακα στο πίσω μέρος της διάταξης ώστε να μετρά τις αποκλίσεις του ελατηρίου από τη θέση ισορροπίας. Ωστόσο πριν χρησιμοποιήσει το μέτρο θα πρέπει να το βαθμονομήσει. Δηλαδή πρέπει να βρει τη σχέση μεταξύ της μάζας που τοποθετεί στο δίσκο και της επιμήκυνσης του ελατηρίου. Για να βαθμονομήσει τη διάταξη χρησιμοποιεί 5 γνωστές μάζες (μετρημένες με μεγάλη ακρίβεια) των 2.0*kg* και τις τοποθετεί τη μια μετά την άλλη στο δίσκο του ελατηρίου και μετρά την επιμήκυνση. Οι μετρήσεις της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Υποθέτοντας ότι το ελατήριο ακολουθεί το νόμο του Hooke περιμένει ότι η επιμήκυνση του ελατηρίου θα είναι γραμμική συνάρτηση της μάζας, *m*, που βρίσκεται πάνω στο δίσκο:

$$l = A + Bm$$

όπου *A* είναι το μήκος του ελατηρίου χωρίς κάποιο μάζα εξαρτημένη πάνω του και *B* είναι ίσο με *g*/*k*, όπου *k* η σταθερά του ελατηρίου. Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση και ξέροντας τις σταθερές *A* και *B* μπορεί να υπολογίσει μια οποιαδήποτε άγνωστη μάζα *m* μετρώντας την επιμήκυνση του ελατηρίου.

Για να βρει τις σταθερές αυτές χρησιμοποιεί τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Όπως ξέρετε οι τύποι που δίνουν τις σταθερές *A* και *B* είναι:

$$A = \frac{\sum m^2 \sum l - \sum m \sum (m \cdot l)}{\Delta},\ B = \frac{N \sum (m \cdot l) - \sum m \sum l}{\Delta} \text{ και } \Delta = N \sum m^2 - \left(\sum m\right)^2.$$

όπου οι μεταβλητές *m* και *l* υποτίθεται ότι καλύπτουν όλες τις μετρήσεις *N* και τα αθροίσματα είναι πάνω σε όλες τις μετρήσεις *N*.

Για τον υπολογισμό του σφάλματος των τιμών *A* και *B*, υποθέτει ότι όλες οι μετρήσεις της επιμήκυνσης ακολουθούν Gaussian κατανομή γύρω από την "αληθινή" τιμή $A + Bm_i$ με εύρος σ_l. Επομένως οι αποκλίσεις $l_i - A - Bm_i$ είναι όλες Gaussian κατανεμημένες με την κεντρική τιμή ίση με μηδέν και το ίδιο εύρος σ_l. Μια καλή εκτίμηση της σ_l δίνεται από την σχέση $\sigma_l = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum(l_i - A - Bm_i)^2}$ όπου το άθροισμα είναι ως προς όλες τις μετρήσεις *N*.

Με βάση τη σχέση αυτή, οι αβεβαιότητες των *A* και *B* είναι: $\sigma_A = \sigma_l \sqrt{\frac{\sum m^2}{\Delta}}$ και $\sigma_B = \sigma_l \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$.

Με βάση τους παραπάνω τύπους να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο διαβάζει τις τιμές του πίνακα των μετρήσεών της που δίνονται από το αρχείο *Measurements.dat* και τις αποθηκεύει σε κατάλληλες λίστες. Κατόπιν το πρόγραμμα χρησιμοποιεί τις παραπάνω σχέσεις και υπολογίζει την ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων και επομένως τις σταθερές *A*, *B* και τα αντίστοιχα σφάλματα. Θα πρέπει να επιστρέψετε το πρόγραμμά σας μαζί με τα αποτελέσματα για τις τιμές των *A, B* και τα αντίστοιχα σφάλματά τους ως σχόλια στο τέλος του προγράμματός σας.

Να κάνετε την γραφική παράσταση των μετρήσεων και της ευθείας των ελαχίστων τετραγώνων και να την αποθηκεύσετε στο αρχείο *FitMeasurements.dat*

Χρησιμοποιήστε τα ακόλουθα δεδομένα:

Μέτρηση	Μάζα (kgr) - x_i	Επιμήκυνση, l_i (cm) - y_i
1	2	42.0
2	4	48.4
3	6	51.3
4	8	56.3
5	10	58.6

4. Το πολυώνυμο Legendre τάξης L ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$P(L,x) = A(L)\sum_{r=0}^{r=L/2}\left[B(L,r)x^{(L-2r)}\right]$$

όπου$A(L) = 1/2^L$ και $B(L,r)$ δίνεται από τη σχέση:

$$B(L,r) = (-1)^r \frac{(2L-2r)!}{[r!\,(L-r)!\,(L-2r)!]}$$

Στο πρόβλημα αυτό θα μελετήσετε το πολυώνυμο Legendre τάξης $L = 8$.

Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να έχει τα ακόλουθα στοιχεία:

(**α**) Μια συνάρτηση, *FACT*, η οποία υπολογίζει το παραγοντικό ενός ακεραίου που περνάτε.

(**β**) Μια συνάρτηση, *LEGENDRE*, η οποία υπολογίζει την τιμή του πολυωνύμου Legendre $P(8,x)$ για κάποια τιμή του x που περνάτε.

(**γ**) Θα πρέπει να γράψετε ένα κύριο πρόγραμμα το οποίο δέχεται από το πληκτρολόγιο την αρχική τιμή του x για την οποία θα πρέπει να υπολογίσετε το $P(8,x)$. Η αρχική αυτή τιμή είναι $x = -1$. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να υπολογίζει την τιμή του πολυωνύμου για όλες τις τιμές του x στο διάστημα $[-1.0, 1.0]$ με βήμα $\delta x = 0.05$. Θα πρέπει να γράψετε τις τιμές του x και τις αντίστοιχες τιμές του πολυωνύμου $P(8,x)$ σαν ζεύγη, σε ένα file το οποίο ονομάζεται *Legendre.dat.*

(**δ**) Βλέποντας το file αυτό θα παρατηρήσετε ότι $P(8,x)$ έχει 4 ρίζες στο διάστημα $[-1.0, 0.0]$. Επειδή το πολυώνυμο είναι συμμετρικό ως προς x, αυτές οι ρίζες θα είναι συμμετρικές και θα υπάρχουν και στο διάστημα $[-1.0, 0.0]$. Επομένως βρίσκοντας τις 4 αρνητικές ρίζες θα έχουμε βρει και τις 4 θετικές. Θα πρέπει τώρα να προσθέσετε στο πρόγραμμά σας μια συνάρτηση, *NEWTON*, η οποία υπολογίζει την ρίζα μιας συνάρτησης, η οποία βρίσκεται ανάμεσα σε δυο τιμές x_1 και x_2 που περνάτε σαν ορίσματα στην συνάρτηση *NEWTON*. Η συνάρτηση *NEWTON* θα πρέπει να έχει δυο ακόμα ορίσματα, την συνάρτηση την ρίζα της οποίας θέλετε να βρείτε και την ακρίβεια με την οποία θέλετε να βρείτε τη ρίζα. Θεωρήστε ότι η ακρίβεια που θέλετε να πετύχετε για την εύρεση της ρίζας είναι $\varepsilon = 0.000001$ ($6^{ου}$ δεκαδικού ψηφίου). Η τιμή της ρίζας θα είναι αυτή για την οποία είτε η τιμή του $|P(8,x)| < \varepsilon$ ή $|x_1 - x_2| < \varepsilon$. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει και τις ρίζες τις οποίες βρίσκετε σε ένα file το οποίο ονομάζεται *LegendreRoots.dat.*

Υπόδειξη: Μπορείτε να προσεγγίσετε τη παράγωγο του πολυωνύμου από την κλίση της ευθείας που ορίζεται από τα σημεία x_1 και x_2 και τις αντίστοιχες τιμές του πολυωνύμου.

(**ε**) Κάντε την γραφική παράσταση των τιμών του πολυωνύμου $P(8,x)$ συναρτήσει του x χρησιμοποιώντας τις τιμές που έχετε αποθηκεύσει στο file *Legendre.dat* στο (**γ**) ερώτημα. Το γράφημα που θα πρέπει να έχει κατάλληλα ονοματισμένους άξονες θα πρέπει να το αποθηκεύσετε στο αρχείο *Legendre.pdf.*

5. Υποθέστε ότι έχει μετρήσει την περίοδο ταλάντωσης T ενός απλού μαθηματικού εκκρεμούς αποτελούμενο από σώμα μάζας m εξαρτημένο από αβαρές νήμα μήκους L. Για τις μετρήσεις σας μεταβάλλετε το μήκος L, του εκκρεμούς και καταγράφετε τις αντίστοιχες τιμές της περιόδου T. Οι μετρήσεις σας περιέχονται σε ένα αρχείο με όνομα *pendulum.dat.* Οι τιμές στο αρχείο είναι αυτές που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. (Θα πρέπει να αντιγράψετε τις τιμές αυτές στο αρχείο *pendulum.dat* ακριβώς όπως δίνονται στον πίνακα). Η πρώτη στήλη περιέχει τις τιμές του μήκους του εκκρεμούς ενώ η 2^{η} στήλη περιέχει τις τιμές της περιόδου.

(α) Κάντε το γράφημα του μήκους *L,* ως προς την περίοδο *T,* χρησιμοποιώντας κύκλους ως σύμβολα των πειραματικών σημείων.

(β) Κάντε το γράφημα χρησιμοποιώντας λογαριθμικό χαρτί (Οι άξονες θα πρέπει να είναι σε λογαριθμική κλίμακα).

(γ) Υπολογίστε την κλίση της ευθείας που περνά από τα πειραματικά σημεία και χαράξτε την ευθεία που περνά από αυτά τα σημεία.

(δ) Βρείτε γραφικά την τεταγμένη της ευθείας και την τιμή που αντιστοιχεί σε αυτή.

L	T
0.1	0.6
0.2	0.9
0.3	1.1
0.4	1.3
0.5	1.4
0.6	1.6
0.7	1.7
0.8	1.8
0.9	1.9
1.0	2.0

.