ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

Τμήμα Φυσικής

ΦΥΣ 133 – 1η Σειρά Ασκήσεων

1 Φεβρουαρίου 2006

1) Έστω 2 σταθερά διανύσματα $\vec{A} = 2\hat{x} + 3\hat{y} + 4\hat{z}$ και $\vec{B} = 5\hat{x} + \hat{y}$.

α) Να βρεθεί το μέτρο (μήκος) του κάθε διανύσματος.

β) Να γραφούν και να σχεδιαστούν τα διανύσματα $\vec{A} + \vec{B}$ και $\vec{A} - \vec{B}$.

γ) Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{A} \cdot \vec{B}$ και το διάνυσμα που ισούται με το εξωτερικό γινόμενο $\vec{A} \times \vec{B}$.

2) Θεωρήστε το διάνυσμα $\vec{A} = (xy, 2y^2 + 1, xyz)$. Παρατηρήστε ότι δεν είναι σταθερό, αλλά εξαρτάται από το σημείο του χώρου στο οποίο βρισκόμαστε. Να βρεθούν:

α) η απόκλιση $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$,

β) η στροφή $\vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Επαναλάβετε τα παραπάνω, για τα διανύσματα

$\vec{B} = (zy, 3 - 2x, xy - 7x)$ και $\vec{\Gamma} = (10y - z, 2z + 10x + y, 2y - x)$.

3) Ας θεωρήσουμε ένα σώμα το οποίο κινείται στον τρισδιάστατο χώρο. Η θέση του μεταβάλλεται με τον χρόνο t και το διάνυσμα θέσης είναι $\vec{r} = (5t + 2, -t^3, cos(\pi t) + t)$. Βρείτε την ταχύτητα του σώματος σαν συνάρτηση του χρόνου. Ποια είναι η θέση και η ταχύτητά του στον χρόνο $t = 6sec$;

4) Έστω σώμα που είναι ελεύθερο να κινείται στον 3-D χώρο. Η θέση του είναι συνάρτηση του χρόνου, με γενική μορφή $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$. Η ταχύτητα ορίζεται ως $\vec{U} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$.

α) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος σε κυλινδρικές, πολικές και σφαιρικές συντεταγμένες. Για να το κάνετε αυτό, πρέπει να γράψετε τα x, y, z των καρτεσιανών συντεταγμένων σαν συνάρτηση των συντεταγμένων των ζητούμενων συστημάτων αναφοράς. Έπειτα θα πρέπει να παραγωγιστούν ως προς χρόνο για να εξαχθεί η ταχύτητα.

β) Ποια είναι η κινητική ενέργεια σε κάθε σύστημα μεταβλητών αν το σώμα έχει μάζα m;

'1/02/06

ΦΥΣ 133 - ΛΥΣΕΙΣ 1ης ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

$\boxed{1}$

$$\vec{A} = 2\hat{x} + 3\hat{y} + 4\hat{z}$$
$$\vec{B} = 5\hat{x} + \hat{y}$$

a) Το μέτρο ενός διανύσματος $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, δίδεται από τη σχέση:

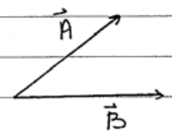
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Συνεπώς, $|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$

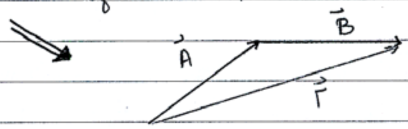
$$|\vec{B}| = \sqrt{5^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{26}$$

β) $\vec{A} + \vec{B} = (2,3,4) + (5,1,0) = (7,4,4)$.

Ας υποθέσουμε ότι τα διανύσματα $\vec{A}$, $\vec{B}$ είναι τα εξής:

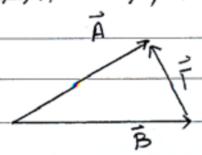


Θα μεταφέρουμε παράλληλα το $\vec{B}$ έτσι ώστε η αρχή του να είναι στο τέλος του $\vec{A}$:



Το διάνυσμα $\vec{\Gamma} = \vec{A} + \vec{B}$ (έχει δηλαδή αρχή την αρχή του $\vec{A}$ και τέλος το τέλος του $\vec{B}$)

$\vec{A} - \vec{B} = (2,3,4) - (5,1,0) = (-3,2,4)$



$\vec{\Gamma} = (\vec{A} - \vec{B})$ (έχει δηλαδή αρχή το τέλος του $\vec{B}$ και τέλος το τέλος του $\vec{A}$)

γ) Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων, είναι **βαθμωτή** ποσότητα και ισούται με:

$$\vec{A}=(A_x, A_y, A_z)$$
$$\vec{B}=(B_x, B_y, B_z)$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Για τα συγκεκριμένα διανύσματα της άσκησης: $\vec{A}\cdot\vec{B} = 2\cdot5 + 3\cdot1 + 4\cdot0 = 13$

Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι **διάνυσμα** και ισούται με

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{x}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{y}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{z}(A_xB_y - A_yB_x)$$

Για τα συγκεκριμένα $\vec{A}$ και $\vec{B}$, βρίσκουμε

$$\vec{A}\times\vec{B} = \hat{x}(0-4) + \hat{y}(20-0) + \hat{z}(2-15) = -4\hat{x} + 20\hat{y} - 13\hat{z}$$

$\boxed{2}$ $\vec{A}=(xy,\ 2y^2+1,\ xyz)$

α) Η απόκλιση είναι ένα εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\vec{A}=(A_x, A_y, A_z)$ και $\vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. Το $\vec{\nabla}$ δεν είναι ένα απλό διάνυσμα αλλά παράγωγος που θα δράσει σε ό,τι βρεθεί δεξιά της:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$ (δεν είναι διάνυσμα το αποτέλεσμα)

Για το δεδομένο $\vec{A}$ της άσκησης:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = y + 4y + xy = y(x+5)$$

β) Η στροφή $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ είναι ένα διάνυσμα που δίνεται από το εξωτερικό γινόμενο των $\vec{\nabla}$ και $\vec{A}$:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

!! Προσέξτε ότι σε κάθε όρο, το $\frac{\partial}{\partial a}$ $(a=x,y,z)$ είναι <u>πάντα</u> αριστερά των A_x, A_y, A_z γιατί δρούν πάνω σε αυτά.

Για $\vec{A} = (xy,\ 2y^2+1,\ xyz)$ $\Rightarrow$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \hat{x}\left(xz-0\right) + \hat{y}\left(0-yz\right) + \hat{z}\left(0-x\right)$$

$$= (xz)\,\hat{x} - (yz)\,\hat{y} - (x)\,\hat{z}$$

- $\vec{B} = (zy\ ,\ 3-2x\ ,\ xy-7x)$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0+0+0 = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \hat{x}\left(z-0\right) + \hat{y}\left(y-y-z\right) + \hat{z}\left(-2-z\right) =$$

$$= z\cdot\hat{x} - z\cdot\hat{y} - (2+z)\cdot\hat{z}$$

- $\vec{\Gamma} = (10y-z\ ,\ 2z+10x+y,\ 2y-x)$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\Gamma} = 0+1+0 = 1$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\Gamma} = \hat{x}\left(2-2\right) + \hat{y}\left(-1-(-1)\right) + \hat{z}\left(10-10\right) = 0$$

3 $\vec{r} = \left(5t+2\ ,\ -t^3\ ,\ \cos(\pi t)+t\right)$

Για γενικό διάνυσμα $\vec{r}=(x(t), y(t), z(t))$ η ταχύτητα δίνεται από την:

$$\vec{U} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x(t),\ y(t),\ z(t)\right) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

Για το πρόβλημα αυτό:

$$\vec{U}_{(t)} = \left(5\ ,\ -3t^2\ ,\ -\pi\sin(\pi t)+1\right)$$

Στον χρόνο $t=6sec$:

$$\vec{r}(6) = (32, -216, 1+6)$$

$$\vec{U}(6) = (5, 108, 1)$$

4 Όπως είδαμε στην προηγούμενη άσκηση, για τις καρτεσιανές συντεταγμένες, η ταχύτητα ενός σώματος που έχει διάνυσμα θέσης: $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$ είναι

$$\vec{U} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

Το ζητούμενο είναι να γράψουμε τα x,y,z σε άλλα συστήματα συντεταγμένων και να βρούμε την ταχύτητα. Ας δούμε πως το βρίσκουμε αυτό:

- <u>Πολικές Συντεταγμένες (2-D)</u>: (ρ,ϕ)

$(x,y) \rightarrow (\rho,\phi)$ $\qquad x=\rho\cos\phi$

$\qquad\qquad\qquad\qquad y=\rho\sin\phi$

Άρα η ταχύτητα είναι $\vec{U} = \left(\cos\phi\frac{d\rho}{dt} - \rho\sin\phi\frac{d\phi}{dt}\ ,\ \sin\phi\frac{d\rho}{dt}+\rho\cos\phi\frac{d\phi}{dt}\ ,\ 0\right)$

$$\vec{U} = \left(\dot{\rho}\cdot\cos\phi - \rho\cdot\dot{\phi}\cdot\sin\phi\ ,\ \dot{\rho}\sin\phi + \rho\cdot\dot{\phi}\cdot\cos\phi\ ,\ 0\right)$$

όπου $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt}$, $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$

Κινητική ενέργεια: $E_{κιν} = \frac{1}{2} m U^2$

$\Rightarrow$ χρειαζόμαστε το $U^2 = \vec{U} \cdot \vec{U} =$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή συνταγή για το εσωτερικό γινόμενο, βρίσκουμε

$$U^2 = U_x^2 + U_y^2 + U_z^2 = \dot{\rho}^2 \cos^2\phi + \rho^2 \dot{\phi}^2 \sin^2\phi - \cancel{2\rho\dot{\rho}\dot{\phi}\cos\phi\sin\phi} +$$
$$+ \dot{\rho}^2 \sin^2\phi + \rho^2\dot{\phi}^2\cos^2\phi + \cancel{2\rho\dot{\rho}\dot{\phi}\cos\phi\sin\phi} + 0 =$$

$$= \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2$$

$$\Rightarrow \quad E_{κιν} = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m \rho^2 \dot{\phi}^2$$

• Κυλινδρικές Συντεταγμένες (3-D): (ρ, ϕ, z)

Είναι η τρισδιάστατη γενίκευση των πολικών συντεταγμένων, αφού

$$x = \rho\cos\phi$$
$$y = \rho\sin\phi$$
$$z = z$$

Ακολουθώντας ίδια διαδικασία όπως παραπάνω, βρίσκουμε

$$\vec{U} = (\dot{\rho}\cos\phi - \rho\dot{\phi}\sin\phi\,,\ \dot{\rho}\sin\phi + \rho\dot{\phi}\cos\phi\,,\ \dot{z})$$

$$\Rightarrow U^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$$

$$\Rightarrow \quad E_{κιν} = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m \rho^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2$$

• Σφαιρικές Συντεταγμένες (3-D) : (r, ϕ, θ)

Για να μετατρέψουμε τις καρτεσιανές μεταβλητές σε σφαιρικές, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις:

$$x = r\cos\phi\,\sin\theta$$
$$y = r\sin\phi\,\sin\theta$$
$$z = r\cos\theta$$

Έτσι, βρίσκουμε:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{r}\cos\phi\sin\theta - r\dot{\phi}\sin\phi\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\phi\cos\theta$$

$$\frac{dy}{dt} = \dot{r}\sin\phi\sin\theta + r\dot{\phi}\cos\phi\sin\theta + r\dot{\theta}\sin\phi\cos\theta$$

$$\frac{dz}{dt} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}, \quad \dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}, \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

και συνεπώς $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$

Για την κινητική ενέργεια χρειαζόμαστε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{v}\cdot\vec{v}$:

$$\vec{v}\cdot\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} =$$

$$= \dot{r}^2\cos^2\phi\sin^2\theta_{(1)} + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\phi\sin^2\theta_{(2)} + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\phi\cos^2\theta_{(3)} - \cancel{2r\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi\sin\phi\sin^2\theta} -$$
$$- \cancel{2r^2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\phi\cos\phi\sin\theta\cos\theta} + 2\dot{r}\cdot r\cdot\dot{\theta}\cos^2\phi\sin\theta\cos\theta_{(4)}$$
$$+ \dot{r}^2\sin^2\phi\sin^2\theta_{(1)} + r^2\dot{\phi}^2\cos^2\phi\sin^2\theta_{(2)} + r^2\dot{\theta}^2\sin^2\phi\cos^2\theta_{(3)} + \cancel{2r\dot{r}\dot{\phi}\sin\phi\cos\phi\sin^2\theta} +$$
$$+ \cancel{2r^2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\phi\cos\phi\sin\theta\cos\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}\sin^2\phi\sin\theta\cos\theta_{(4)}$$
$$+ \dot{r}^2\cos^2\theta_{(1)} + r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta_{(3)} - 2r\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta_{(4)} =$$
$$= \dot{r}^2_{(1)} + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta_{(2)} + r^2\dot{\theta}^2_{(3)}$$

$$\Rightarrow \quad E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$