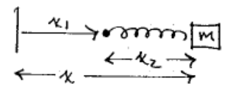
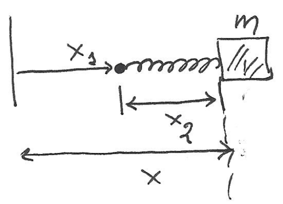
# ΦΥΣ. 211
## ΕΡΓΑΣΙΑ # 9
## Επιστροφή την Παρασκευή 15/3/2016 πριν της 12:00

**1.** (α) Μια μάζα $M$ είναι προσδεμένη σε ελατήριο σταθεράς $k$ και φυσικού μήκους $l_0$. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι εξαναγκασμένο να κινείται σύμφωνα με την εξίσωση $x_1 = a\cos\omega t$. Δουλεύοντας στο επιταχυνόμενο σύστημα με αρχή το σημείο $x_1$, βρείτε την εξίσωση κίνησης $x_2(t)$ του άλλου άκρου του ελατηρίου στο οποίο είναι προσδεμένη η μάζα $M$ και δείξτε ότι είναι της μορφής $x(t) = l_0 + \frac{a\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t$ $\left(+A\cos\sqrt{\frac{k}{M}}t+\varphi\right.$ αν δεν υπάρχει απόσβεση).



(β) Ένα σώμα κινείται με ταχύτητα $\upsilon$ πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Δείξτε ότι το σώμα θα κινείται σε κυκλική τροχιά εξαιτίας της περιστροφής της γης και βρείτε την ακτίνα της τροχιάς αυτής. Μπορείτε να αγνοήσετε όρους τάξης $\Omega_{\gamma\eta\varsigma}^2$, όπου $\Omega$ είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της γης.

(α) Στο επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς, με αρχή το σημείο $x_1$, η εξίσωση κίνησης



είναι: $m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - l_0) - m\ddot{x}_1$

Ο όρος $m\ddot{x}_1$ αναπαριστά την δύναμη που εμφανίζεται εξαιτίας της επιτάχυνσης του συστήματος που θεωρούμε.

Θέτουμε $x_1 = a\cos\omega t$ οπότε η παραπάνω εξίσωση είναι:

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 + kl_0 + ma\omega^2\cos\omega t \Rightarrow \ddot{x}_2 + \frac{k}{m}x_2 = \frac{k}{m}l_0 + a\omega^2\cos\omega t$$

Θεωρούμε $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ οπότε: $\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = \omega_0^2 l + a\omega^2\cos\omega t$

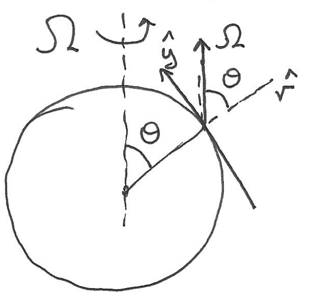
Η λύση έχει τη μορφή: $x_2 = l + b\cos\omega t$ : (μαντεύουμε τη λύση). οπότε αντικαθιστούμε στην αρχική εξίσωση έχουμε: $b(\omega_0^2 - \omega^2) = a\omega^2 \Rightarrow \boxed{b = \frac{a\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}}$

Από $x_2 = l + b\cos\omega t \Rightarrow x_2 = l + \frac{a\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t$.

Επομένως η πλήρης λύση είναι: $x = x_1 + x_2 = l + \left[\frac{a\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2} + a\right]\cos\omega t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{x = l + \frac{a\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t}$$

(β) Αγνοούμε την φυγόκεντρο δύναμη και επομένως η εξίσωση κίνησης γίνεται:




$$m\frac{d^2\vec r}{dt^2}\Big|_{αδρ} = m\frac{d^2\vec r}{dt^2}\Big|_{σωμ} + 2m\vec\Omega\times\vec v \Rightarrow$$

$$m\frac{d^2\vec r}{dt^2}\Big|_{σωμ} = m\frac{d^2\vec r}{dt^2}\Big|_{αδρ} - 2m\vec\Omega\times\vec v \Rightarrow$$

$$m\frac{d\vec v}{dt}\Big|_{σωμ} = \vec F - 2m\vec\Omega\times\vec v = \vec N - 2m\vec\Omega\times\vec v \quad (1)$$

όπου $\vec N$ η κάθετη δύναμη από την πλατφόρμα στο σώμα.

Επειδή η κίνηση είναι περιορισμένη στην οριζόντια επιφάνεια και $\vec\Omega=\Omega(0,\sin\theta,\cos\theta)$

$\vec v = \dot x\hat x + \dot y\hat y = (\dot x,\dot y)$ το εξωτερικό γινόμενο $\vec\Omega\times\vec v$ θα δώσει:

$$\begin{vmatrix} \hat x & \hat y & \hat r \\ 0 & \Omega\sin\theta & \Omega\cos\theta \\ \dot x & \dot y & 0 \end{vmatrix} = (-\dot y\Omega\cos\theta)\hat x - \hat y(-\Omega\dot x\cos\theta) + \hat r(-\dot x\Omega\sin\theta) = \vec F_{Coriolis}$$

$$\Rightarrow \quad \vec F_{cor} = 2m\vec\Omega\times\vec v = 2m\Omega\cos\theta\,\hat r\times\vec v + 2m\Omega\sin\theta\,\hat y\times\vec v$$

Ο τελευταίος όρος ουσιαστικά τροποποιεί την κάθετη αντίδραση $N$ από την οριζόντια επιφάνεια. Από την στιγμή που οι επιφάνειες είναι λείες και δεν παρουσιάζεται τριβή.

Επομένως η εξίσωση κίνησης (1) γίνεται: $m\frac{d\vec v}{dt}\Big|_{σωμ} = 2m\Omega\cos\theta\,\hat r\times\vec v$

Το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο τόσο στην ταχύτητα $\vec v$ όσο και στο $\hat r$.

Επομένως η συνιστώσα της Coriolis στο επίπεδο, δεν παράγει έργο εφόσον είναι κάθετη στο διάνυσμα της ταχύτητας. Επομένως $\Omega=σταθ$, $\theta=σταθ$ και $v=σταθ$

Δύναμη που είναι κάθετη πάντοτε στην κίνηση ενός σώματος προκαλεί κυκλική τροχιά.

Η γωνιακή ταχύτητα του σώματος είναι $\vec\omega = 2\Omega\cos\theta\,\hat r$

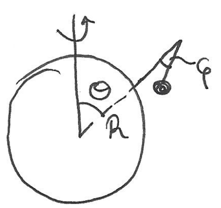
Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς $r=\frac{v}{\omega}=\frac{v}{2\Omega\cos\theta}$

Για $\theta=45^\circ$ και $v=1m/s$ $r\approx 10km$ που είναι πολύ δύσκολο να παρατηρηθεί

**2.** (α) Ένα εκκρεμές δεν δείχνει απευθείας προς το κέντρο της γης εξαιτίας της φυγοκεντρικής δύναμης. Δείξτε ότι η γωνία εκτροπής είναι: $\tan\varphi = \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\dfrac{g}{\Omega^2 R} - \sin^2\theta}$ όπου $\dfrac{g}{R\Omega^2} \sim 290$.

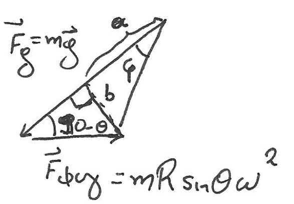
(β) Μπορεί να αναμένουμε ότι η επιφάνεια της γης είναι πάντοτε κάθετη στην διεύθυνση του εκκρεμούς (τουλάχιστον η επιφάνεια της θάλασσας). Αυτό απαιτεί η επιφάνεια της γης να είναι εξογκωμένη στον ισημερινό. Η επιφάνεια θα είναι κάθετη στην διεύθυνση του εκκρεμούς αν είναι ισοδυναμική επιφάνεια του βαρυτικού πεδίου και της φυγοκεντρικής δύναμης. Δείξτε ότι η θεώρηση αυτή οδηγεί στην εξίσωση της επιφάνειας $R^3\sin^2\theta = \dfrac{2GM}{\Omega^2}\left(\dfrac{R}{R_p} - 1\right)$ όπου $R_p$ η ακτίνα στους πόλους. Θεωρήστε ότι η ακτίνα της γης στον ισημερινό είναι $R_E$ και γράψτε ότι $R_E/R_p = 1+\varepsilon$, ώστε να καταλήξετε ότι $\varepsilon \sim 1/580$. Πειραματικά, $\varepsilon \sim 1/297$. Υποθέστε ότι το βαρυτικό δυναμικό της εξογκωμένης γης είναι το ίδιο με το δυναμικό της σφαιρικής γης.

(α) Από την στιγμή που το εκκρεμές δεν κινείται, οι δυνάμεις που μας ενδιαφέρουν είναι η δύναμη της βαρύτητας και η φυγόκεντρος δύναμη.




Η δύναμη της βαρύτητας είναι: $\vec{F}_g = m\vec{g} = \dfrac{GMm}{R^2}$

Ενώ η φυγόκεντρος είναι $\vec{F}_{φυγ} = mR\sin\theta\,\omega^2$




Οι δύο δυνάμεις φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι:

$$\tan\phi = \frac{b}{a} = \frac{mR\sin\theta\,\omega^2\sin(90^\circ-\theta)}{\dfrac{GMm}{R^2} - mR\sin\theta\,\omega^2\cos(90^\circ-\theta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan\phi = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\dfrac{g}{\Omega^2 R} - \sin^2\theta}$$

Αυτό ισχύει αφού το άθροισμα των δύο δυνάμεων θα πρέπει να δίνει συνισταμένη που είναι παράλληλη με την διεύθυνση του νήματος του εκκρεμούς έτσι ώστε να εξουδετερώνει την δύναμη της τάσης (β) Γράφουμε την Lagrangian για την περίπτωση αυτή: (φ μετρούμενο στη γη)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\theta \left(\dot{\varphi} + \Omega\right)^2 + r^2 \dot{\theta}^2\right) + \frac{GMm}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\theta\left(\dot{\varphi}^2 + \Omega^2\right) + 2r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}\, \Omega + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{GMm}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\theta\left(\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\Omega\right) + r^2\dot{\theta}^2\right) + \left[\frac{GMm}{r} + \frac{m}{2} r^2 \sin^2\theta\, \Omega^2\right]$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το ενεργό δυναμικό είναι:

$$V_{eff} = -\frac{GMm}{r} - \frac{m}{2} r^2 \sin^2\theta\, \Omega^2$$

Ζητούμε η επιφάνεια της γης να αποτελεί ισοδυναμική επιφάνεια

Επομένως θέλουμε: $-\frac{GMm}{r} - \frac{1}{2} m r^2 \sin^2\theta\, \Omega^2 = \sigma\tau\alpha\theta = -\frac{GMm}{r_p}$

και υπολογίζουμε την σταθερά για $\theta = 0^\circ$. Επομένως θα έχουμε:

$$\cancel{m} r^2 \sin^2\theta\, \Omega^2 = \frac{2GM\cancel{m}}{r}\left(\frac{r}{r_p} - 1\right) \Rightarrow r^3 \sin^2\theta = \frac{2GM}{\Omega^2}\left(\frac{r}{r_p} - 1\right)$$

Θέτοντας $\theta = 90^\circ$ τότε $r = R_E$ οπότε: $\frac{r_E}{r_p}\frac{2GM}{\Omega^2} = \frac{2GM}{\Omega^2} + r_E^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{r_E}{r_p} = 1 + \frac{r_E^3 \Omega^2}{2GM} \Rightarrow \frac{r_E}{r_p} = 1 + \varepsilon \quad \text{όπου} \quad \varepsilon = \frac{\Omega^2 r_E^3}{2GM} \simeq \frac{(7.3\cdot 10^{-5})^2\cdot(6.4\cdot 10^{6})^3}{2\cdot 6.7\cdot 10^{-11}\, 6\cdot 10^{24}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{1.4\cdot 10^{12}}{8.04\cdot 10^{14}} \Rightarrow \varepsilon = 0.175\cdot 10^{-2} \Rightarrow \boxed{\varepsilon \simeq 1.7\cdot 10^{-3} = \frac{1}{580}}$$

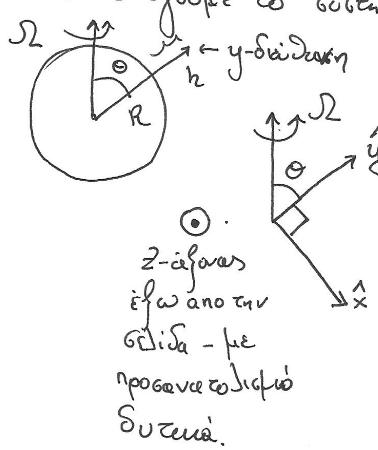
**3.** (α) Ένα σώμα πέφτει από ύψος $h$ πάνω από την επιφάνεια της γης (θεωρήστε ότι $h \ll R_{γης}$) με γωνία $\theta$ ως προς την κατακόρυφο. Σε πρώτη τάξη ως προς την γωνιακή συχνότητα περιστροφής, $\Omega$, της γης, δείξτε ότι η απόκλιση του σωματιδίου είναι: $d = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2h^3}{g}}\Omega\sin\theta$. Σε ποια διεύθυνση; Θεωρήστε ότι $g$ = σταθ.

(β) Υποθέστε ότι πηδάτε επιτόπια σε ένα ύψος $h$ και πέφτετε πάλι προς τα κάτω. Δείξτε ότι η δύναμη Coriolis επηρεάζει την κίνησή σας και πέφτετε σε απόσταση $d = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2h^3}{g}}\Omega\sin\theta$ ως προς το σημείο που ξεκινήσατε. Σε ποια διεύθυνση είναι η απόκλιση αυτή; Πως θα αλλάξει αυτό το αποτέλεσμα αν είσασταν στο νότιο ημισφαίριο;

(γ) Χρησιμοποιήστε διατήρηση της στροφορμής και θεώρηση μη επιταχυνόμενου συστήματος για να υπολογίσετε την αλλαγή στην αζιμουθιακή γωνία $\varphi$, κατά την διάρκεια του επιτόπιου πηδήματός σας. Δείξτε ότι αυτό οδηγεί στην ίδια μετατόπιση όπως και στο ερώτημα (β). Θεωρήστε ότι $h \ll R_{γης}$.

Από τη στιγμή που ενδιαφερόμαστε για $1^η$ τάξη ως προς $\Omega$ σημαίνει ότι μπορούμε να αγνοήσουμε την φυγόκεντρο δύναμη.

Διαλέγουμε το σύστημα συντεταγμένων του διπλανού σχήματος




Γράφουμε την δύναμη Coriolis ως εξής:

$$-2m\vec{\Omega}\times\vec{v} = -2m\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ -\Omega\sin\theta & \Omega\cos\theta & 0\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2m\vec{\Omega}\times\vec{v} = -2m\Big[v_z\Omega\cos\theta\,\hat{x} + v_z\Omega\sin\theta\,\hat{y} + \left(-\Omega v_y\sin\theta - v_x\Omega\cos\theta\right)\hat{z}\Big]$$

Αλλά οι ταχύτητες $v_z$ και $v_x$ θα είναι ανάλογες της $\Omega$ οπότε οι όροι $v_z\Omega\cos\theta$ και $v_x\Omega\cos\theta$, $v_z\Omega\sin\theta$ είναι $2^{ης}$ τάξης ως προς $\Omega$ ενώ δεχόμαστε όρους μόνο μέχρι $1^{ης}$ τάξης.

Επομένως η δύναμη Coriolis θα είναι: $F_{cor} = -2m\vec{\Omega}\times\vec{v} = 2m\Omega v_y\sin\theta\,\hat{z}$

Οι εξισώσεις κίνησης θα είναι: $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\Big|_{abs} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\Big|_{rot} + \cancel{F_{φυγ}} + F_{cor} + \cancel{F_{Eul}} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -g\hat{y} + \vec{F}_{cor}}$.

$$m\ddot{y} = -mg \Rightarrow \ddot{y} = -g \qquad \ddot{x} = 0.$$

$$m\ddot{z} = 2m\Omega v_y\sin\theta \Rightarrow \ddot{z} = 2\Omega v_y\sin\theta$$

Απο την εξίσωση ως προς $y$ θα πάρουμε: $\boxed{y=h-\frac{1}{2}gt^2}$ (A)

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση ως προς $z$: και κάνουμε τη διπλή ολοκλήρωση χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $z=\dot{z}=0$ για $t=0$

$$z=\int_0^t\int_0^{t'} 2\Omega\left(-gt''\right)\sin\theta\, dt''dt' = -\frac{1}{3}g\Omega\sin\theta\, t^3 \qquad (B)$$

Από την εξίσωση (A) μπορούμε να βρούμε το χρόνο που το σώμα χρειάζεται να πέσει στο έδαφος: $y=0=h-\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$

Αντικαθιστούμε στην (B) οπότε: $z=-\frac{1}{3}g\Omega\sin\theta\left(\frac{2h^3}{g^3}\right)^{1/2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{z=-\frac{2}{3}\Omega\sin\theta\sqrt{\frac{2h^3}{g}}}$$

Η ποσότητα αυτή είναι αρνητική και επομένως σύμφωνα με το σύστημα συντεταγμένων που επιλέξαμε, η απόκλιση θα είναι <u>ανατολικά</u>

(β) Στην περίπτωση αυτή από την εξίσωση ως προς $y$ θα πάρουμε:

$$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2=\sqrt{2gh}\,t-\frac{1}{2}gt^2$$ όπου $v^2-v_0^2=-2g\Delta h \Rightarrow v_0=\sqrt{2gh}$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση ως προς $z$ και ολοκληρώνουμε όπως πριν, δύο φορές κρατώντας τις αρχικές συνθήκες:

$$z=\int_0^t\int_0^{t'} 2\Omega\sin\theta\left(\sqrt{2gh}-gt''\right)dt''dt' \Rightarrow z=\Omega\sin\theta\left(\sqrt{2gh}\,t^2-\frac{1}{3}gt^3\right)$$

Ο ολικός χρόνος πτήσης θα είναι $t_{ολ}=2\sqrt{\frac{2h}{g}}$ ώστε το σώμα να φτάσει πάλι στο $y=0$. Αντικαθιστώντας θα έχουμε:

$$z=\Omega\sin\theta\,\frac{8h}{g}\left(\sqrt{2gh}-\frac{2}{3}\sqrt{2gh}\right) \Rightarrow \boxed{z=\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2h^3}{g}}\,\Omega\sin\theta}$$

Η ποσότητα είναι θετική οπότε η απόκλιση είναι προς τα <u>δυτικά</u>

Το αποτέλεσμα αυτό είναι αμετάβλητο για $\theta\to 180-\theta$, οπότε ισχύει και στο νότιο ημισφαίριο (γ) Από διατήρηση της στροφορμής έχουμε:

$$L = m(R+y)^2 \sin^2\Theta\, \dot{\varphi} = mR^2 \sin^2\Theta\, \Omega \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{R^2\Omega}{(R+y)^2} = \frac{\cancel{R^2}\Omega}{\cancel{R^2}\left(1+\frac{y}{R}\right)^2} = \frac{\Omega}{\left(1+y/R\right)^2}$$

Για $y \ll R$ θα έχουμε επομένως: $\dot{\varphi} \simeq \Omega - 2\frac{y}{R}\Omega$

Επομένως, η αλλαγή στην αζιμουθιακή γωνία όπως φαίνεται στη γη είναι:

$$\Delta\phi = \int_0^t (\dot{\varphi} - \Omega)\,dt' = \Delta\varphi - \Omega t = -\frac{2}{R}\Omega \int_0^t y\,dt' = -\frac{2}{R}\Omega \int_0^t \int_0^{t'} v_y\, dt''\, dt'$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $y(0)=0$.

Επομένως η απόκλιση που προκαλείται δίνεται από τη σχέση:

$$z = R\sin\Theta(-\Delta\phi) = \int_0^t \int_0^{t'} 2\Omega \sin\Theta\, v_y\, dt''\, dt'$$ όπως και στο ερώτημα (β)

Τα δύο ερωτήματα επομένως δίνουν την ίδια απάντηση: $\Delta\phi = \frac{z}{R\sin\Theta}$

**4.** Ένα πυροβόλο είναι τοποθετημένο στην επιφάνεια της γης σε πολική γωνία *θ*. Απουσία της δύναμης Coriolis, ένα βλήμα που ρίχνεται από το πυροβόλο αυτό θα προσγειωθεί σε απόσταση *D* μακριά, έχοντας φθάσει σε ύψος *h*. Αγνοήστε αποτελέσματα εξαιτίας της καμπυλότητας της γης και θεωρήστε ότι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της γης είναι *Ω*.

(α) Αν το πυροβόλο, εκτόξευσε το βλήμα Βόρεια, δείξτε ότι το βλήμα απόκλινε κατά απόσταση $d = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\Omega\left(\frac{4h}{3}\sin\theta - D\cos\theta\right)$. Ποια είναι η κατεύθυνση της απόκλισης;

(β) Αν το πυροβόλο εκτόξευσε το βλήμα Ανατολικά. Δείξτε ότι το βλήμα απόκλινε κατά απόσταση $d = 2\Omega\sqrt{\frac{2h}{g}}D\cos\theta$. Ποια είναι η κατεύθυνση της απόκλισης; Δείξτε ακόμα ότι προσγειώνεται σε απόσταση $D' = D\left(1 + \frac{\Omega D\sin\theta}{\sqrt{2gh}}\right)$ ανατολικά. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σε $1^{\eta}$ τάξη προσέγγιση ως προς *Ω*.

(α) Από το προηγούμενο πρόβλημα βρήκαμε ότι η δύναμη Coriolis γράφεται:

$$-2m\vec{\Omega}\times\vec{v} = -2\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -\Omega\sin\theta & \Omega\cos\theta & 0 \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = -2m\Omega v_z\cos\theta\,\hat{x} + 2m\Omega v_z\sin\theta\,\hat{y} - \left[-2m\Omega v_y\sin\theta - 2m\Omega v_x\cos\theta\right]\hat{z}$$

Στην περίπτωση που το πυροβόλο ρίχνει το βλήμα Βόρεια, τόσο η $v_x$ και η $v_y$ εμπεριέχουν μηδενικής τάξης όρο ως προς $\Omega$. Επομένως από την εξίσωση της δύναμης Coriolis, θα πάρουμε:

$$\ddot{z} = 2\Omega\dot{y}\sin\theta + 2\Omega\dot{x}\cos\theta$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{y} &= -g \\ \ddot{x} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y &= \sqrt{2gh}\,t - gt^2/2 \\ x &= -D\,t/t_{o\lambda} \end{aligned}$$

όπου $t_{o\lambda}$ ο ολικός χρόνος πτήσης $t_{o\lambda} = 2\sqrt{2h/g}$

Την χρονική στιγμή $t=0$, $x = y = z = \dot{z} = 0$ οπότε από την $z$-εξίσωση έχουμε:

$$\dot{z} = 2\Omega y\sin\theta + 2\Omega x\cos\theta$$

$$z = 2\Omega\int_0^{t_{o\lambda}}\left[\left(\sqrt{2gh}\,t - \frac{1}{2}gt^2\right)\sin\theta - \frac{t}{t_{o\lambda}}D\cos\theta\right]dt = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\Omega\left(\frac{1}{3}h\sin\theta - D\cos\theta\right)$$

Το αποτέλεσμα μπορεί να δώσει $z>0$ οπότε έχουμε απόκλιση δυτικά ή $z<0$ ανατολικά (β) Στην περίπτωση αυτή τόσο η $v_y$ όσο και η $v_z$ έχουν μηδενικούς όρους ως προς Ω. Οι κατάλληλες εξισώσεις κίνησης θα είναι:

$$\left.\begin{array}{ll} \boxed{\ddot{x} = -2\dot{z}\Omega\cos\Theta} & (1) \\ \boxed{\ddot{y} = -g - 2\dot{z}\Omega\sin\Theta} & (2) \\ \boxed{\ddot{z} = 2\Omega\dot{y}\sin\Theta} & (3) \end{array}\right\} \xRightarrow{O(\Omega)} \begin{array}{ll} \ddot{x} = 0 & \rightarrow x^{(0)} = 0 \text{ δεν αλλάζει} \\ \ddot{y} = -g & \rightarrow y^{(0)} = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \\ \ddot{z} = 0 & \rightarrow z^{(0)} = -\frac{t}{t_{o\lambda}}D \end{array}$$

Αν θεωρούσαμε τις παραπάνω εξισώσεις σε μηδενική τάξη ως προς Ω τότε το αποτέλεσμα θα ήταν ακριβώς ίδιο με το ερώτημα (α) με μόνη διαφορά την διεύθυνση εκτόξευσης:

$$\boxed{z^{(0)} = -\frac{t}{t_{o\lambda}}D} \ (4) \quad \boxed{y^{(0)} = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2} \ (5) \left(\text{όπου } v_0 = \sqrt{2gh},\ t_0^{\circ} = 2\sqrt{2h/g}\right) \ \& \ x^{\circ} = 0$$

Αντικαθιστούμε το $\dot{z}$ στην εξίσωση του $\ddot{y}$ οπότε θα έχουμε:

$$\ddot{y} = -g + 2\Omega\sin\Theta\frac{D}{t_{o\lambda}}$$

οπότε ολοκληρώνουμε και πάλι 2 φορές ως προς $t$ για να πάρουμε:

$$\dot{y} = -gt + \frac{2\Omega\sin\Theta D}{t_{o\lambda}}t + v_0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{\Omega\sin\Theta D}{t_{o\lambda}}t^2 + v_0 t$$

Τον χρόνο πτήσης τον βρίσκουμε θέτοντας $y=0$ οπότε $t_{\pi\tau} = 2v_0 \Big/ \left(g - \frac{2\Omega\sin\Theta D}{t_{o\lambda}}\right)$

Αλλά $t_{o\lambda} = 2\sqrt{2h/g}$ και με αντικατάσταση έχουμε: $t_{\pi\tau} \simeq t_g^{\circ} + \frac{2\Omega}{g}\sin\Theta D$

όπου χρησιμοποιούμε και το ανάπτυγμα διωνυμικό

Η θέση προσγείωσης επομένως θα είναι: από την (4) και (3)

$$z = -D\left(1 + \frac{2\Omega}{g}\sin\Theta\frac{D}{t_{o\lambda}^{\circ}}\right) + \int_0^{t_{o\lambda}} 2\Omega\sin\Theta\, y\, dt = -D\left(1 + \frac{2\Omega}{g}\sin\Theta\frac{D}{t_{o\lambda}}\right) + \int_0^{t_{o\lambda}} 2\Omega\sin\Theta\left(v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right)dt$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα δίνει: $2\Omega\int_0^{t_{o\lambda}}\sin\Theta\left(v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right)dt = 2\Omega\sin\Theta\left[\frac{v_0 t_{o\lambda}^2}{2} - \frac{1}{6}g t_{o\lambda}^3\right] =$

$$= 2\Omega\sin\Theta\left[\frac{\sqrt{2gh}}{\cancel{2}}\,4\,\cancel{2}h/g - \frac{8}{6}g\sqrt{\frac{8h^3}{g^3}}\right] = 2\Omega\sin\Theta\left[4\sqrt{\frac{2h^3}{g}} - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2h^3}{g}}\right] = \underline{\frac{8h}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}\,\Omega\sin\Theta}$$

Έχουμε επομένως: $z = -D\left(1 + \frac{2\Omega}{g}\sin\theta \frac{D}{t_{o\lambda}}\right) + \frac{8h}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}\,\Omega\sin\theta.$

Η απόσταση θα είναι: $|z| = D\left(1 + \frac{2\Omega}{g}\sin\theta\frac{D}{t_{o\lambda}}\right) - \frac{8h}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}\,\Omega\sin\theta$

Η απόκλιση κατά μήκος του x-άξονα (βόρεια-νότια) θα είναι:

$$x^{(1)} = 2\Omega\cos\theta\int_0^{t_{o\lambda}}\frac{D}{t_{o\lambda}}\,t\,dt = \cancel{2}\Omega\cos\theta\frac{D}{\cancel{t_{o\lambda}}}\frac{1}{\cancel{2}}t_{o\lambda}^{\cancel{2}} = t_{o\lambda}\Omega\cos\theta D$$

$$\Rightarrow x^{(1)} = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\,\Omega\cos\theta D \Rightarrow \boxed{x^{(1)} = 2\Omega\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos\theta D}$$

Η απόκλιση είναι θετική και επομένως δείχνει στην <u>νότια</u> διεύθυνση