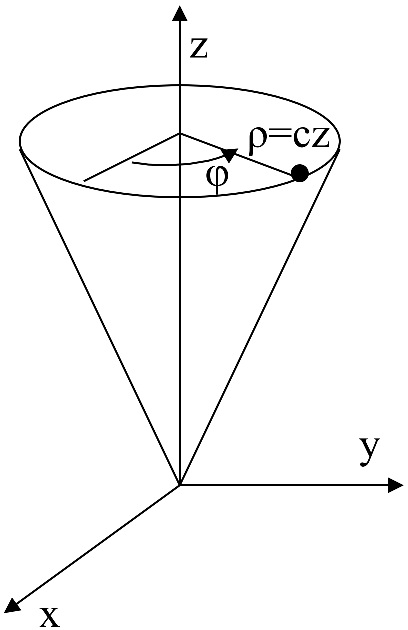
Hamiltonian Δυναμική – Παράδειγμα

Μάζα m κινείται στο εσωτερικό επιφάνειας κατακόρυφου κώνου $\rho=cz$. Το σώμα κινείται μέσα σε ομοιόμορφο βαρυτικό πεδίο με g προς τα κάτω. Χρησιμοποιήστε z και φ σαν γενικευμένες συντεταγμένες.

(α) Να δειχθεί ότι για μια οποιαδήποτε δεδομένη λύση υπάρχουν μέγιστα και ελάχιστα ύψη, z_{max} και z_{min}, στα οποία περιορίζεται η κίνηση.

(β) Με βάση το αποτέλεσμα αυτό, περιγράψετε την κίνηση της μάζας.

(γ) Δείξτε ότι για μια οποιαδήποτε τιμή του $z>0$ υπάρχει μια λύση για την οποία το σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά σε συγκεκριμένο ύψος z.



Οι γενικευμένες συντεταγμένες είναι z και φ, ενώ το ρ προσδιορίζεται από το δεσμό $\rho = cz$

Η κινητική ενέργεια δίνεται από:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\left(c^2+1\right)\dot{z}^2 + (cz\dot{\varphi})^2\right)$$

Η δυναμική ενέργεια είναι: $U = mgz$

Επομένως οι γενικευμένες ορμές είναι:

$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\left(c^2+1\right)\dot{z} \quad \text{και} \quad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mc^2z^2\dot{\varphi}$$

Σωματίδιο σε κώνο

Μπορούμε να λύσουμε τις εξισώσεις αυτές ως προς $\dot{z}$ και $\dot{\varphi}$

$$\dot{z} = \frac{p_z}{m\left(c^2+1\right)} \qquad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mc^2 z^2}$$

Οπότε η Hamiltonian γίνεται: $\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = E = T + U$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\frac{p_z^2}{\left(c^2+1\right)} + \frac{p_\varphi^2}{c^2 z^2}\right) + mgz$$

Από αυτή την τελευταία σχέση προκύπτουν οι εξισώσεις του Hamilton

$$\dot{z} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m\left(c^2+1\right)} \quad \text{και} \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = \frac{p_\varphi^2}{mc^2 z^3} - mg$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mc^2 z^2} \quad \text{και} \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = 0$$

Αλλά p_φ είναι η συνιστώσα της στροφορμής στη διεύθυνση z και είναι σταθερή όπως περιμέναμε

Σωματίδιο σε κώνο

Ο πιο εύκολος τρόπος για να δούμε αν η κίνηση του σωματιδίου είναι περιορισμένη μεταξύ z_{max}, z_{min} για μια οποιαδήποτε λύση είναι να θυμηθούμε ότι η Hamiltonian είναι ίση με την ενέργεια και η ενέργεια διατηρείται.

Επομένως για κάθε λύση $\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = E_j$ όπου E_j η ενέργεια της συγκεκριμένης λύσης και $E_j = E$

Αλλά $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\frac{p_z^2}{(c^2+1)} + \frac{p_\varphi^2}{c^2 z^2}\right) + mgz > 0$ ενώ $mgz \to \infty$ όταν $z \to \infty$

Επομένως αφού η E=σταθ. θα πρέπει $z < z_{max}$

Με το ίδιο σκεπτικό, όταν $z \to 0$ ο όρος $\frac{p_\varphi^2}{c^2 z^2} \to \infty$

Επομένως αφού η E=σταθ. θα πρέπει $z > z_{min} > 0$

Η μάζα δεν μπορεί να πέσει στην κορυφή του κώνου όπου $z=0$

Περιγραφή της κίνησης της μάζας:

- κίνηση γύρω από τον άξονα-z με σταθερή στροφορμή $p_z = m(c^2+1)\dot{z}$
- p_φ = σταθ., η $\dot{\varphi}$ αυξάνει για μικρά z και ελαττώνεται για μεγάλα z
- Το ύψος της μάζας, z, ταλαντώνεται μεταξύ z_{max}, z_{min}

Σωματίδιο σε κώνο

Υπάρχει λύση για την οποία το σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά?

Αυτό συνεπάγεται ότι $z = const \Rightarrow \dot{z} = 0$

Στην περίπτωση αυτή, έχουμε: $\dot{z} = \dfrac{p_z}{m(c^2+1)} \Rightarrow p_z = 0 \Rightarrow \dot{p}_z = 0$

Από την εξίσωση Hamilton: $\dot{p}_z = \dfrac{p_\varphi^2}{mc^2 z^3} - mg = 0 \Rightarrow p_\varphi = \pm mc\sqrt{gz^3}$

- Αν από κάποιο ύψος, z, εκτοξεύσουμε την m με $p_z = 0$ και $p_\varphi = \pm mc\sqrt{gz^3}$

  τότε αφού η $\dot{p}_z = 0 \Rightarrow p_z = 0, \quad \dot{z} = 0$ πάντοτε

  Η μάζα θα συνεχίσει να κινείται στο αρχικό της ύψος σε κυκλική τροχιά

Παράδειγμα κυκλικής συντεταγμένης

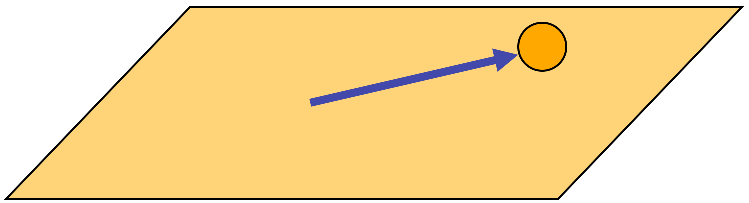
- Πρόβλημα κεντρικής δύναμης σε 2 διαστάσεις.

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r) \Rightarrow$$

$$p_r = m\dot{r}, \qquad p_\theta = mr^2\dot{\theta},$$

$$\mathcal{H}\left(x_i, p_i\right) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + V(r)$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}\left(x_i, p_i\right) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{l^2}{r^2}\right) + V(r)$$



θ κυκλική, p_θ=σταθ.=l

- Οι εξισώσεις Hamilton είναι:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \qquad \dot{p}_r = \frac{l^2}{mr^3} - \frac{\partial V(r)}{\partial t}$$

Οι κυκλικές συντεταγμένες δεν εμφανίζονται από μόνες τους στις εκφράσεις

Σωματίδιο σε ΕΜ πεδίο

- Για σωματίδιο σε ΕΜ πεδίο

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}_i^2 - q_c\phi + q_c A_i \dot{x}_i$$

Δεν μπορούμε να πάμε απ' ευθείας στο $\mathcal{H}$=E εξαιτίας του τελευταίου όρου, αλλά

$$\Rightarrow p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + q_c A_i$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \left(m\dot{x}_i + q_c A_i\right)\dot{x}_i - \mathcal{L} = \frac{m\dot{x}_i^2}{2} + q_c\phi$$

Αυτό αντιστοιχεί στην ενέργεια E

- Θα είχαμε τελειώσει αν θέλαμε να βρούμε την συνάρτηση ενέργειας h
- Η Hamiltonian όμως εξαρτάται μόνο από τα q και p.

  Πρέπει επομένως να τη ξαναγράψουμε χρησιμοποιώντας

$$p_i = m\dot{x}_i + q_c A_i$$

$$\boxed{\mathcal{H}\left(x_i, p_i\right) = \frac{\left(p_i - q_c A_i\right)^2}{2m} + q_c\phi}$$

Σωματίδιο σε ΕΜ πεδίο $\mathcal{H}(x_i, p_i) = \frac{(p_i - q_c A_i)^2}{2m} + q_c\phi$

- Οι εξισώσεις του Hamilton θα είναι επομένως:

$$\boxed{\dot{x}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{p_i - q_c A_i}{m}}$$

$$\boxed{\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = q_c \frac{p_j - q_c A_j}{m} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - q_c \frac{\partial \phi}{\partial x_i}}$$

- Είναι ισοδύναμες με την συνήθη δύναμη Lorentz?

- Μπορούμε να το ελέγξουμε απαλείφοντας το p_i

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}_i + q_c A_i) = q_c \dot{x}_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - q_c \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\mathrm{v}_i) = q_c E_i + q_c (\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{B}})_i$$

Φασικός χώρος – phase space

- Ένας 2-Ν διαστατικός χώρος με άξονες $\{q_k\}$ και $\{p_k\}$.
  - Χρήσιμος στην Hamiltonian δυναμική:
    - ✓ $\{q_k\}$ και $\{p_k\}$ είναι οι βαθμοί ελευθερίας
    - ✓ Οι εξισώσεις Hamilton συνδέουν χρονικές παραγώγους των συντεταγμένων με μερικές παραγώγους της Hamiltonian στον φασικό χώρο
- Η Hamiltonian είναι ένα σύνολο επιφανειών στο φασικό χώρο
  - Για κάθε επιφάνεια αντιστοιχεί διαφορετική αλλά σταθερή τιμή της Hamiltonian
- Οι εξισώσεις του Hamilton μας λένε την διεύθυνση κίνησης του συστήματος στον φασικό χώρο
  - Έστω σωματίδιο κινείται στο φασικό χώρο και η Hamiltonian διατηρείται – ανεξάρτητη του χρόνου (επομένως οι επιφάνειες είναι σταθερές)
  - Έστω $\hat{q}$ και $\hat{p}$ τα μοναδιαία διανύσματα στις διευθύνσεις q και p

$$\vec{\nabla}_{qp}\mathcal{H} = \hat{q}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} + \hat{p}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}$$

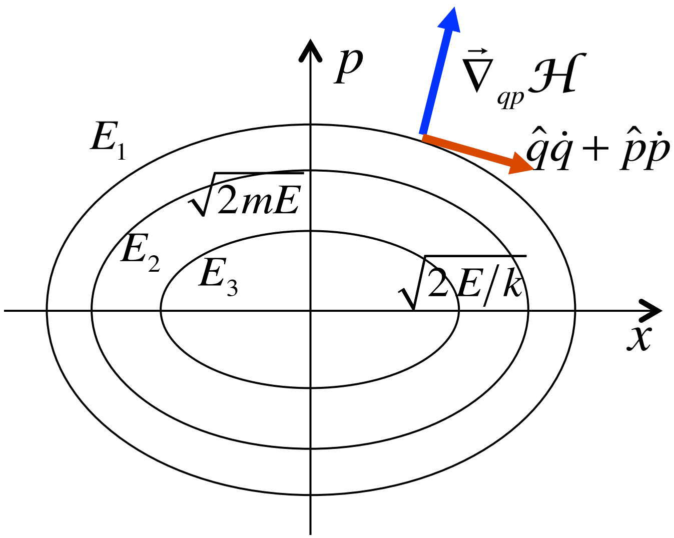
Η εξέλιξη της θέσης του συστήματος στο φασικό χώρο: $\hat{q}\dot{q} + \hat{p}\dot{p} = \hat{q}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} - \hat{p}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}$

Από τις 2 σχέσεις: $\vec{\nabla}_{qp}\mathcal{H} \cdot \left(\hat{q}\dot{q} + \hat{p}\dot{p}\right) = 0 \;\; \Rightarrow \vec{\nabla}_{qp}\mathcal{H} \perp \left(\hat{q}\dot{q} + \hat{p}\dot{p}\right)$

Φασικός χώρος – phase space

- Έστω απλός αρμονικός ταλαντωτής: $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 = E$

  Γράφημα στο φασικό χώρο: $\frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/k} = 1$ ← έλλειψη:



Μεγάλος ημιάξονας: $\sqrt{2E/k}$

Μικρός ημιάξονας: $\sqrt{2mE}$

- Για περισσότερες από 2-Δ:

$$\vec{\nabla}_{qp}\mathcal{H} = \sum_k \left[\hat{q}_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} + \hat{p}_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \right]$$

$$\sum_k \left[\hat{q}_k \dot{q}_k + \hat{p}_k \dot{p}_k \right] = \sum_k \left[\hat{q}_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} - \hat{p}_k \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \right]$$

$$\vec{\nabla}_{qp}\mathcal{H} \cdot \sum_k \left[\hat{q}_k \dot{q}_k + \hat{p}_k \dot{p}_k \right] = 0$$

προβολή σε κάποιο q_k-p_k επίπεδο

προβολή σε κάποιο q_k-p_k επίπεδο

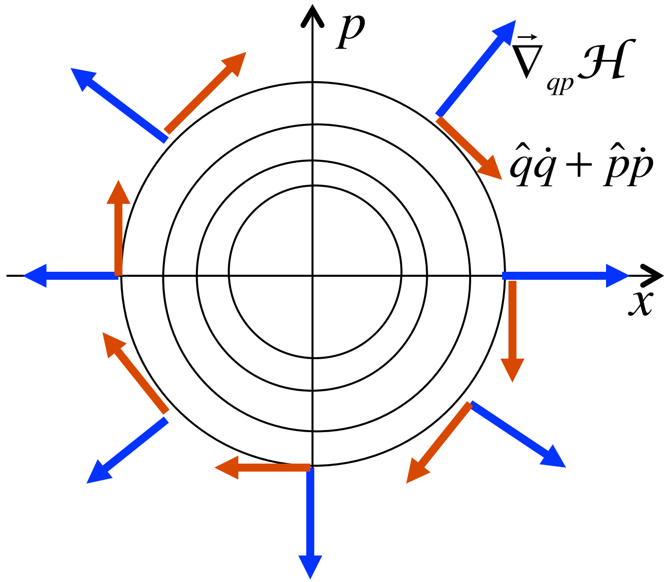
κάθετες μεταξύ τους

- Ένα σύστημα σωμάτων κινείται σαν ένα «υγρό» ή «αέριο» στο χώρο φάσεων

Φασικός χώρος – phase space

- Έστω ο αρμονικός ταλαντωτής έχει συχότητα 1 : $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2} = E \Rightarrow$

Γράφημα στο φασικό χώρο: $\frac{p^2}{2E} + \frac{x^2}{2E} = 1$ ← κύκλος ακτίνας $\sqrt{2E}$



$$(\dot{q},\dot{p}) = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\right) = (p, -q)$$

Η ροή της κλίσης της Hamiltonian ή ροή της Hamiltonian

Η δυναμική είναι «ροή»

Φασικός χώρος – Θεώρημα Liouville

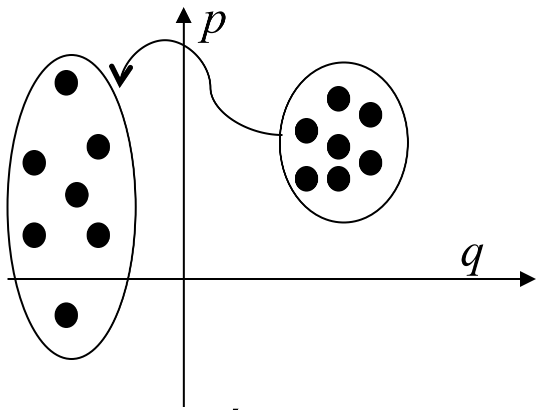
- Όχι μόνο το σύστημα σωμάτων μοιάζει σαν «υγρό» αλλά και η ροή του είναι ασυμπίεστη.
- Η πυκνότητα του φασικού χώρου είναι σταθερή κατά μήκος των τροχιών των σωματιδίων

$$\frac{d\rho}{dt}\left(\{q_k\},\{p_k\},t\right)=0$$

- Λέει ότι οποιεσδήποτε είναι οι δυναμικές συντεταγμένες (q,p) δεν μπορούμε να συμπιέσουμε μια κατανομή του φασικού χώρου σε μικρότερη περιοχή του φασικού χώρου
  - Για δυνάμεις τριβής το θεώρημα παραβιάζεται
- Το εμβαδό μιας περιοχής του φασικού χώρου ΔΑ=ΔqΔp, διατηρείται καθώς το σύστημα χρονοεξελίσεται

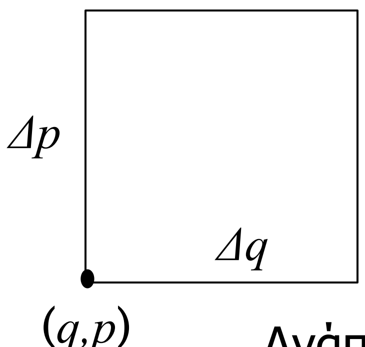
Φασικός χώρος – Θεώρημα Liouville

- Έστω ένα σύνολο από αρχικές καταστάσεις. Θέλουμε να ξέρουμε πως θα εξελιχθεί χρονικά .



Liouville: το εμβαδό της N–διαστατικής επιφάνειας σε χώρο των φάσεων παραμένει σταθερό

- Θεωρήστε 2–Δ και η επιφάνεια είναι ένα τετράγωνο



  - Χρονική εξέλιξη των πλευρών του τετραγώνου:

$(q,p) \rightarrow \left(q+\mathcal{H}_p dt, p-\mathcal{H}_q dt\right)$ όπου $\mathcal{H}_p = \dot{q} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}$ και $\mathcal{H}_q = \dot{p} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}$

$$(q+\Delta q, p) \rightarrow \left(q+\Delta q + dt\left(\mathcal{H}_p + \mathcal{H}_{pq}\Delta q\right), p - \left(\mathcal{H}_q + \mathcal{H}_{qq}\Delta q\right)dt\right)$$

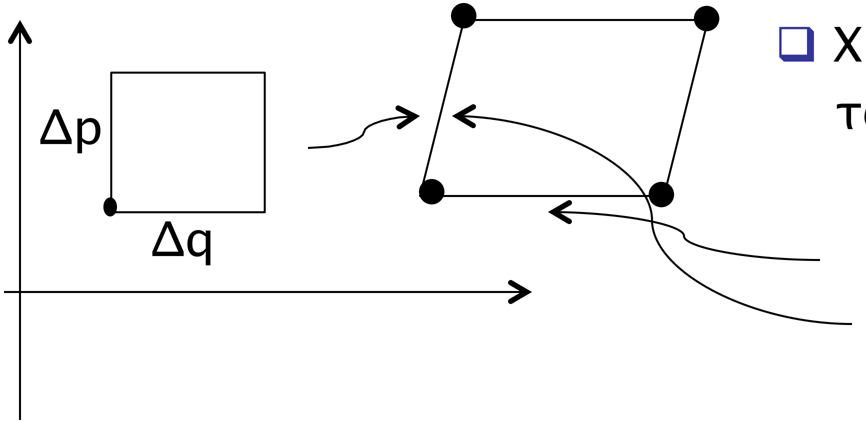
Ανάπτυγμα Taylor του $\mathcal{H}_p\big|_{q=q+\Delta q} = \mathcal{H}_p\big|_{q=q} + \left.\dfrac{\partial \mathcal{H}_p}{\partial q}\right|_{q=q} \Delta q = \mathcal{H}_p\big|_{q=q} + \mathcal{H}_{pq}\big|_{q=q}\Delta q$

$$(q, p+\Delta p) \rightarrow \left(q + dt\left(\mathcal{H}_p + \mathcal{H}_{pp}\Delta p\right), p+\Delta p - \left(\mathcal{H}_q + \mathcal{H}_{qp}\Delta p\right)dt\right)$$

$$(q+\Delta q, p+\Delta p) \rightarrow \left(q+\Delta q + dt\left(\mathcal{H}_p + \mathcal{H}_{pp}\Delta p + \mathcal{H}_{pq}\Delta q\right), p+\Delta p - \left(\mathcal{H}_q + \mathcal{H}_{qp}\Delta p + \mathcal{H}_{qq}\Delta q\right)dt\right)$$

Φασικός χώρος – Θεώρημα Liouville

- Ουσιαστικά αυτό που κάναμε ήταν.



- Χρειάζεται να υπολογίσουμε το μήκος των πλευρών του νέου σχήματος:

$$\left(\Delta q + dt\mathcal{H}_{pq}\Delta q, \Delta q\mathcal{H}_{qq}dt\right)$$

$$\left(dt\mathcal{H}_{pp}\Delta p, \Delta p - \Delta p\mathcal{H}_{pq}dt\right)$$

- Το αρχικό εμβαδό ήταν: $A = \Delta p\Delta q$
- Μετά από χρόνο dt: $A' = \Delta p\Delta q \det\begin{pmatrix} 1 + dtH_{pq} & dtH_{qq} \\ dtH_{pp} & 1 - dtH_{pq} \end{pmatrix}$

$$A' = \Delta p\Delta q \det\left(\left(1 - dt^2 H_{pq}^2\right) - dt^2 H_{pp} H_{qq}\right)$$

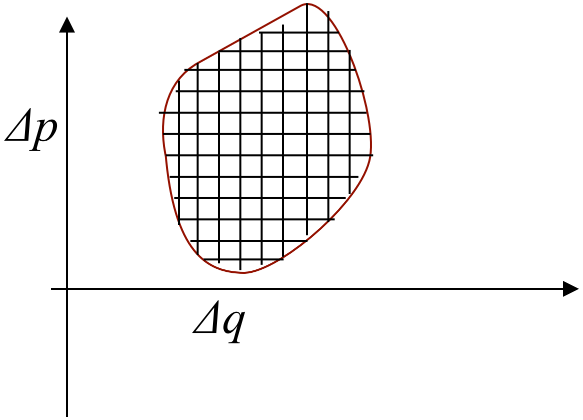
$$A' = \Delta p\Delta q + 0\left(dt^2\right)$$

- Επομένως το εμβαδόν δεν αλλάζει για 0(dt) $\frac{dA}{dt} = 0$
- Ολοκληρώνοντας έχουμε: Α=σταθ.

➢ Το εμβαδό δεν αλλάζει αλλά το σχήμα αλλάζει

Φασικός χώρος – Θεώρημα Liouville

- Τα προηγούμενα ισχύουν για οποιαδήποτε σχήμα:



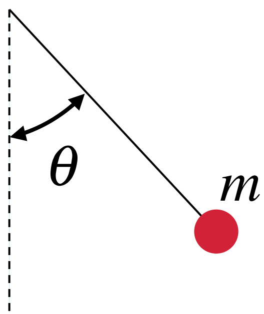
  - Μπορούμε να χωρίσουμε το σχήμα σε πολλά μικρότερα τετράγωνα τα οποία δεν αλλάζουν εμβαδό
  - Αθροίζουμε τα τετράγωνα

- Για N–διάστατο χώρο η απόδειξη είναι ίδια
  - N–διάστατος όγκος παραμένει αμετάβλητος με το χρόνο
  - Το σχήμα ωστόσο αλλάζει

Μονοδιάστατα συστήματα

- Ας θεωρήσουμε το εκκρεμές

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

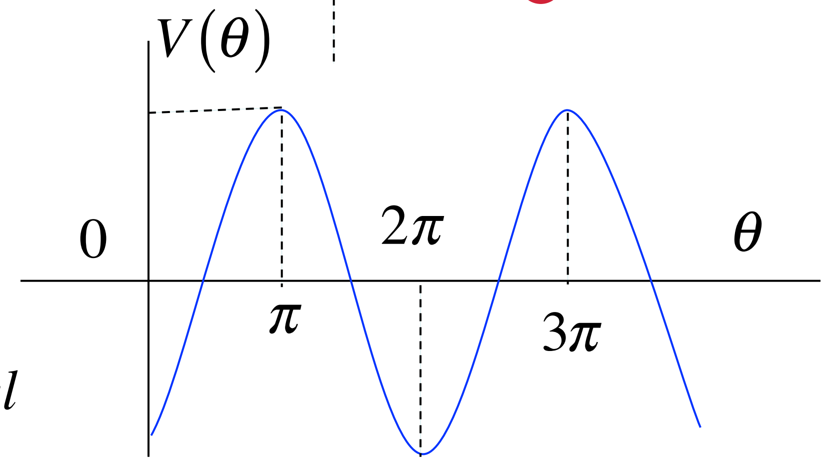


- Ευσταθή σημεία ισορροπίας

$$\theta = 2n\pi$$

- Ασταθή σημεία ισορροπίας

$$\theta = (2n+1)\pi$$



- Αν η ενέργεια έχει τιμές $mgl > E > -mgl$
  - Ταλάντωση ως προς ευσταθές σημείο
- Αν η ενέργεια έχει τιμές $E > mgl$
  - Θ θα είναι μονότονη: θα αυξάνει ή θα ελαττώνεται

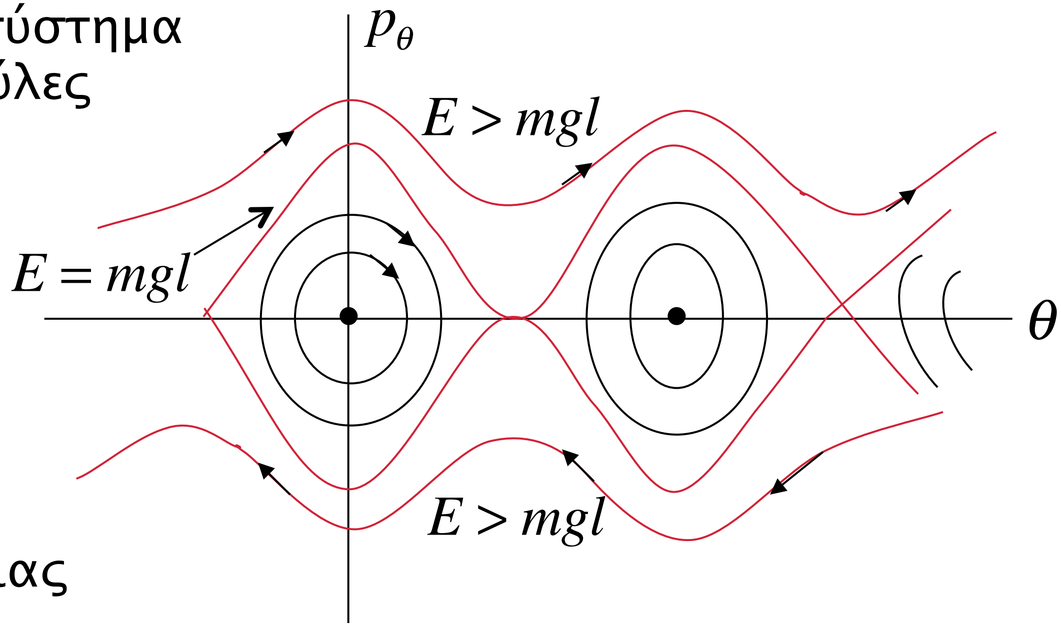
    το εκκρεμές θα περιστρέφεται πάντοτε

Φασικός χώρος – phase space

- Χρήσιμο να περιγράψουμε την δυναμική στο φασικό χώρο
- Για το εκκρεμές αυτό θα είναι ένα επίπεδο θ, p_θ
- Η ενέργεια είναι σταθερή, το σύστημα θα κινείται σε σταθερές καμπύλες
- Για το εκκρεμές:

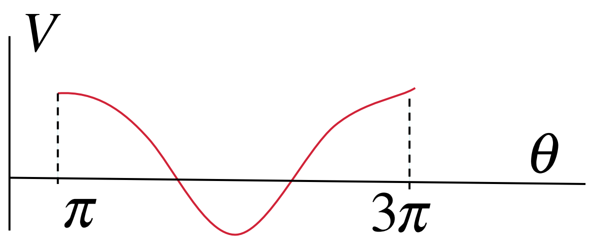
$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$$

$$\Rightarrow E = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta$$



- Φασικός χώρος (θ,p_θ):
  - καμπύλες σταθερής ενέργειας
  - Όταν $-mgl < E < mgl$ κλειστές καμπύλες −π<θ<π
  - Όταν $E = -mgl$ σημείο $p_\theta=0, \theta=0$ δεν υπάρχει ταλάντωση
  - Όταν $E > mgl$ ανοικτές καμπύλες
    $p_\theta>0$ περιστροφή δεξιόστροφα
    $p_\theta<0$ περιστροφή αριστερόστροφα
  - Για $E = mgl$ μια καμπύλη διαχωριστική

Φασικός χώρος



- Στην διαχωριστική καμπύλη

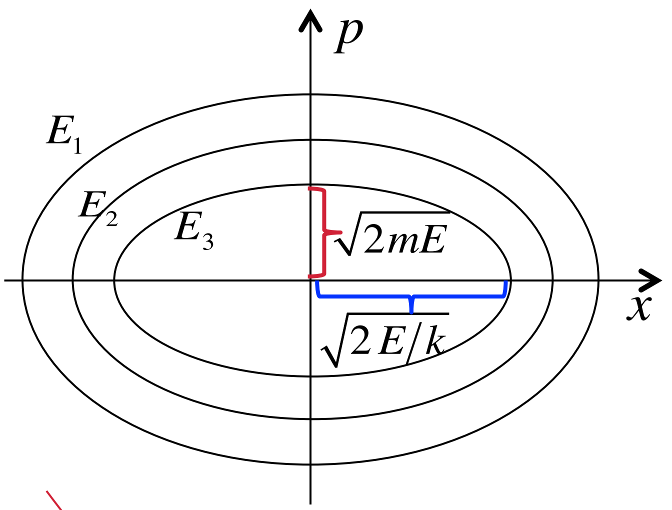
  Το εκκρεμές είναι ανάποδα

  θα κυλήσει προς τα κάτω και θα πάρει άπειρο χρόνο για να ανέβει

  Μπορείτε από το ολοκλήρωμα του χρόνου να δείτε ότι απειρίζεται για να βρεθεί και πάλι στην θέση ανάποδα

- Κοντά σε σημείο ευσταθούς ισορροπίας
  - Αρμονικός ταλαντωτής: $\mathcal{H}=\frac{p^2}{2m}+\frac{k}{2}x^2$

$\mathcal{H}=E$ οπότε: $E=\frac{p^2}{2m}+\frac{x^2}{2/k}\Rightarrow 1=\frac{p^2}{2mE}+\frac{x^2}{2E/k}$

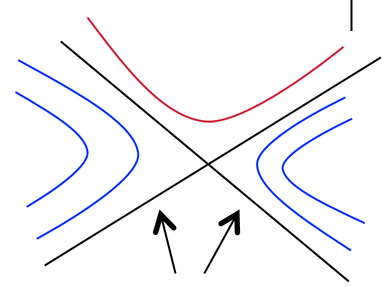


Μεγάλος ημιάξονας: $\sqrt{2E/k}$

Μικρός ημιάξονας: $\sqrt{2mE}$

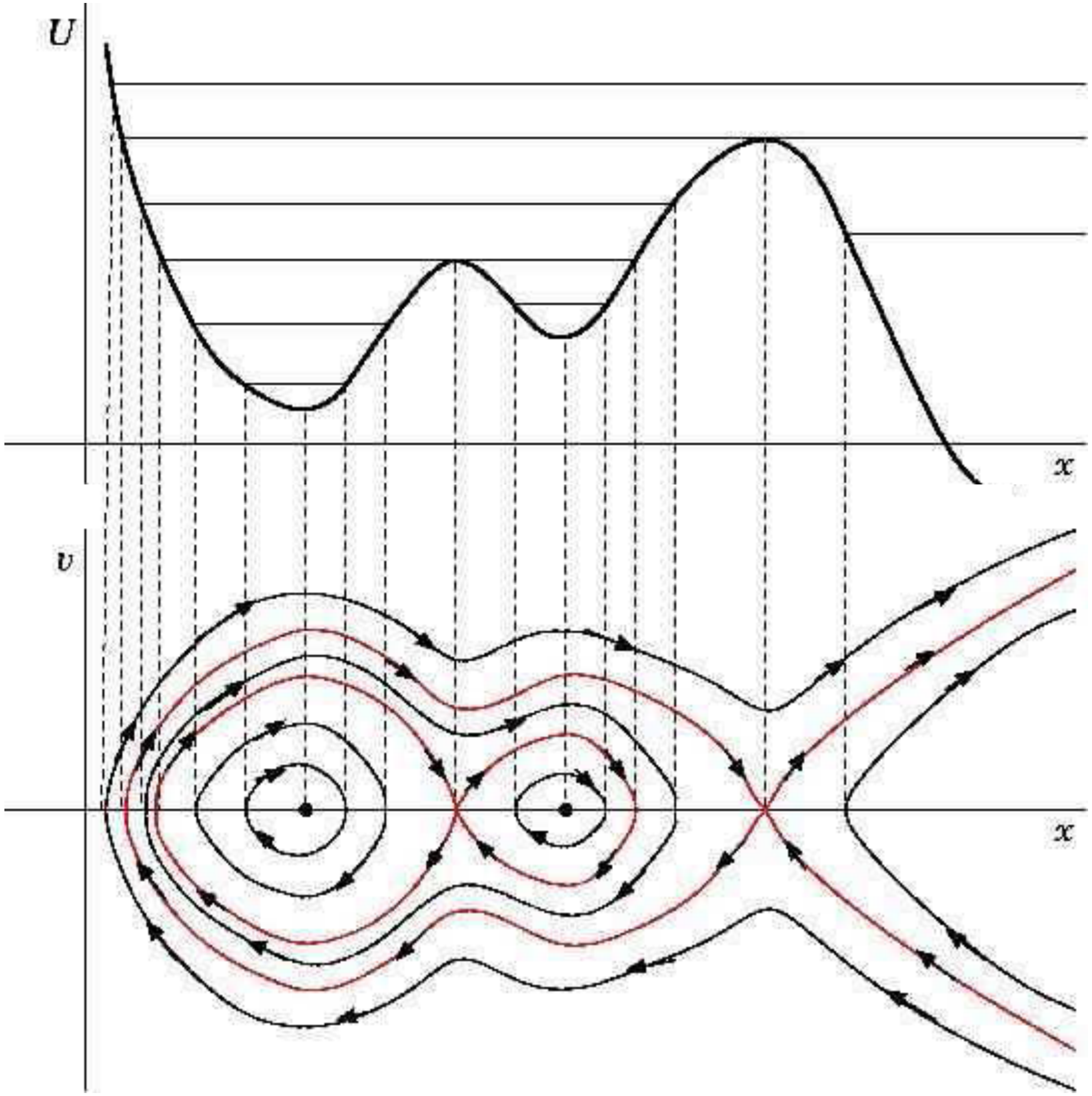
έλλειψη:

- Κοντά σε σημεία ασταθούς ισορροπίας
  - Υπερβολές



διαχωριστικές

Κατασκευή φασικών γραμμών - παράδειγμα



Φασικός χώρος - Παράδειγμα

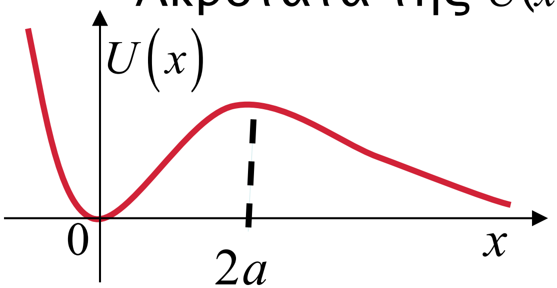
Σωματίδιο κινείται σε δυναμικό της μορφής: $U(x) = U_0 \frac{x^2}{a^2} e^{-x/a}$

(α) Να κατασκευαστεί το γράφημα του δυναμικού

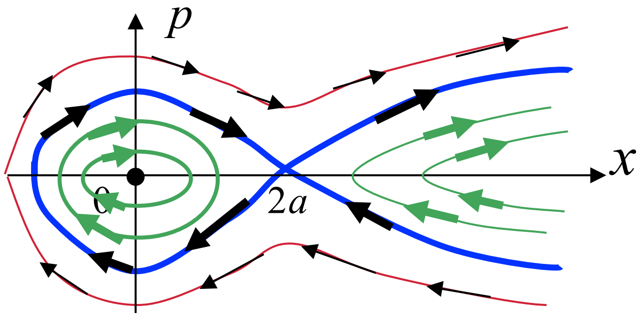
(β) Να κατασκευαστεί το γράφημα των αντιπροσωπευτικών καμπυλών στο φασικό χώρο. Να βρεθούν τα πιθανά σταθερά σημεία και η ενέργεια των διαχωριστικών καμπυλών

(α) Για $x \to +\infty$ $U(x) \to 0$ ενώ για $x \to -\infty$ $U(x) \to \infty$

Ακρότατα της $U(x)$ για $\frac{dU(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{U_0}{a^2}\left(2x - \frac{x^2}{a}\right)e^{-x/a} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{ελάχιστο} \\ x = 2a & \text{μέγιστο} \end{cases}$



(β) Τα τοπικά ακρότατα δημιουργούν κέντρα στο επίπεδο (x,p).



Σταθερό σημείο στο $x = 0$ και ασταθές στο $x = 2α$

Ενέργεια διαχωριστικής καμπύλης $E = U(x = 2a)$