ΦΥΣ 133 – Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Ένα.σωματίδιο κινείται μέσα σε πεδίο κεντρικής δύναμης της μορφής $F(r) = -\frac{k}{r^2} e^{-r/a}$ όπου α και k είναι θετικές σταθερές. (α) Να βρεθούν οι περιπτώσεις που κυκλικές τροχιές είναι δυνατές και (β) να βρεθεί η περίοδος των μικρών ακτινικών ταλαντώσεων γύρω από την θέση της κυκλικής τροχιάς. Είναι κλειστή αυτή η διαταραγμένη τροχιά;

Έχουμε τη δύναμη $F(r) = -\frac{k}{r^2} e^{-r/a}$ που αποτελεί τη λεγόμενη Yukawa δύναμη.

(α) Η δύναμη αυτή προέρχεται από ένα δυναμικό $V(r)$ και μπορούμε να ορίσουμε σε αναλογία με την περίπτωση του βαρυτικού δυναμικού, ένα ενεργό δυναμικό $V_{eff}(r)$

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

Οι εξισώσεις κίνησης σε αναλογία με την περίπτωση του προβλήματος kepler

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{k}{r^2} e^{-r/a} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow mr\dot{\theta}^2 = σταθ = L \quad (2)$$

Οι κυκλικές τροχιές εμφανίζονται στα ελάχιστα του ενεργού δυναμικού. Τα ελάχιστα θα είναι στις ακτινικές θέσεις r_0 :

$$\left.\frac{dV_{eff}}{dr}\right|_{r=r_0} = 0 \Rightarrow -\frac{2L^2}{2mr_0^3} + \underbrace{\left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=r_0}}_{=-F(r_0)} = 0 \Rightarrow -\frac{L^2}{mr_0^3} + \frac{k}{r_0^2} e^{-r/a} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{L^2}{kmr_0^3} + \frac{1}{r_0^2} e^{-r/a} = 0 \quad \text{ορίζουμε } b = \frac{L^2}{mk} \text{ οπότε καταλήγουμε:}$$

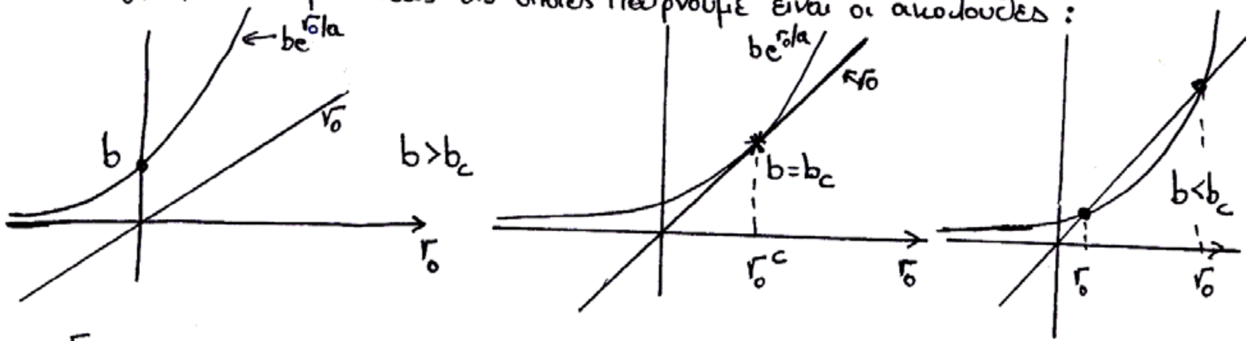
$$-\frac{b}{r_0^3} + \frac{1}{r_0^2} e^{-r/a} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_0^2}\left(-\frac{b}{r_0} + e^{-r_0/a}\right) = 0 \Rightarrow \frac{b}{r_0} = e^{-r_0/a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r_0 = b e^{r_0/a}} \quad (3) \qquad b > 0$$

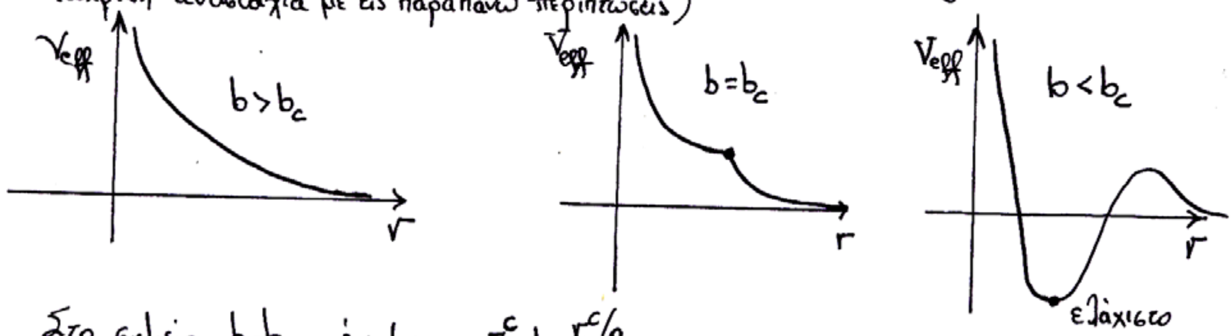
Κυκλικές τροχιές υπάρχουν μόνο για τιμές του b κάτω από κάποια "κριτική" τιμή b_c η οποία με τη σειρά της αντιστοιχεί σε κάποια τιμή της στροφορμής L_c.

Πως το συμπεραίνουμε αυτό; Κάνουμε τη γραφική παράσταση των 2 όρων της εξίσωσης (3). Για να έχουμε λύση θα πρέπει οι 2 γραφικές παραστάσεις να τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο. Αν δεν τέμνονται τότε δεν υπάρχει λύση για την εξίσωση (3) και επομένως δεν υπάρχουν κυκλικές τροχιές.

Οι γραφικές παραστάσεις τις οποίες παίρνουμε είναι οι ακόλουθες:



Για τις τρεις προηγούμενες γραφικές, το ενεργό δυναμικό θα μοιάζει ως ακολούθως: (ακριβή αντιστοιχία με τις παραπάνω περιπτώσεις)



Στο σημείο $b=b_c$ έχουμε: $r_0^c = be^{r_0^c/a}$

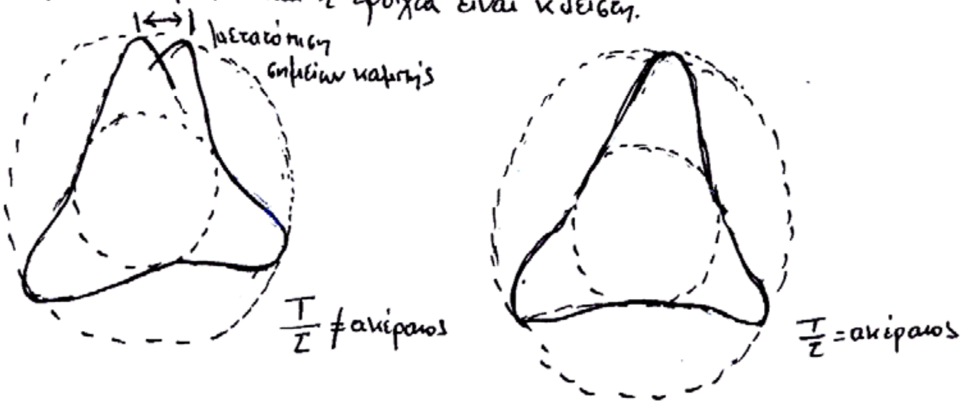
Οι $2^{ες}$ παράγωγοι θα είναι ίσες στο $r_0^c \Rightarrow 1 = \frac{b}{a}e^{r_0^c/a}$ $\Big\} \Rightarrow r_0^c = a$ οπότε $\boxed{b_c = \frac{a}{e}}$

Δεν υπάρχει σταθερή κυκλική τροχιά για $L > L_c = \sqrt{\frac{mka}{e}}$

(B) Όταν μια τροχιά είναι σχεδόν κυκλική, υπάρχουν 2 χρονικές κλίμακες στο πρόβλημα:

$T \rightarrow$ η περίοδος της περιστροφής και $\tau \rightarrow$ η περίοδος των ταλαντώσεων (ακτινικών) γύρω από το ελάχιστο του ενεργού δυναμικού.

Αν ο λόγος των 2 χρόνων $\frac{T}{\tau}$ είναι ακέραιος τότε δεν υπάρχει μετατόπιση των σημείων καμπής και η τροχιά είναι κλειστή.



Η συνθήκη για κυκλική τροχιά ακτίνας r_0 δίνει:

$$\underbrace{\frac{m\upsilon^2}{r_0}}_{\text{κεντρομόλος}} = \underbrace{F(r_0)}_{\text{βαρυτική ή δύναμη που αναλογεί στο πεδίο}}$$

οπότε για το πρόβλημά μας θα έχουμε $F(r_0) = \frac{k}{r_0^2} e^{-r_0/a}$ και άρα:

$$\frac{m\upsilon^2}{\cancel{r_0}} = \frac{k}{r_0^{\cancel{2}}} e^{-r_0/a} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{k}{mr_0} e^{-r_0/a}}$$

Η περίοδος περιστροφής επομένως θα είναι: $\upsilon = \frac{2\pi r_0}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r_0}{\upsilon} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\, r_0^{3/2} e^{r_0/2a}}$

Για να βρούμε το χρόνο τ των ακτινικών ταλαντώσεων γύρω από τη κυκλική τροχιά αναπτύσσουμε κατά Taylor το ενεργό $V_{eff}(r)$ γύρω από το r_0. Αυτό γιατί αφού το σώμα κάνει ταλάντωση τότε θα περιγράφεται η κίνησή του από εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή: $m\ddot{x} + kx = 0$ όπου $k = \left.\frac{d^2 V_{eff}}{dr^2}\right|_{r=r_0}$

Αλλά $$\left.\frac{d^2}{dr^2} V_{eff}\right|_{r=r_0} = \left.\frac{d}{dr}\left(\frac{dV_{eff}}{dr}\right)\right|_{r=r_0} = \left.\frac{d}{dr}\left[-\frac{L^2}{mr^3} + \frac{k}{r^2} e^{-r/a}\right]\right|_{r=r_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} = k \left.\frac{d}{dr}\left(-\frac{b}{r^3} + \frac{1}{r^2} e^{-r/a}\right)\right|_{r=r_0} \Rightarrow \frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} = k\left(\frac{3b}{r_0^4} - \left(\frac{2}{r_0^3} + \frac{1}{r_0^2 a}\right) e^{-r_0/a}\right)$$

Στο (a) σκέλος της άσκησης βρήκαμε όμως ότι για την κυκλική τροχιά ισχύει η συνθήκη (3) $\Rightarrow b = r_0 e^{-r_0/a}$

Επομένως η εξίσωση της $2^{ης}$ παραγώγου του ενεργού δυναμικού γίνεται :

$$\left.\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\right|_{r=r_0} = k e^{-r_0/a}\left[\frac{3\cancel{r_0}}{r_0^{\cancel{4}\,3}} - \left(\frac{2}{r_0^3}+\frac{1}{r_0^2 a}\right)\right] = k e^{-r_0/a}\left[\frac{1}{r_0^3}-\frac{1}{r_0^2 a}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left.\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\right|_{r=r_0} = \frac{k e^{-r_0/a}}{r_0^3}\left(1-\frac{r_0}{a}\right)}$$

Επομένως η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων θα είναι : (αναλογία με ελατήρια)

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{ελατ}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{d^2V_{eff}/dr^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m r_0^3 e^{r_0/a}}{k\left(1-\frac{r_0}{a}\right)}} \Rightarrow$$

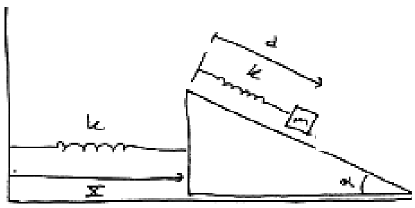
$$\Rightarrow \boxed{\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\, r_0^{3/2}\, e^{r_0/2a}\left(1-\frac{r_0}{a}\right)^{-1/2}}$$

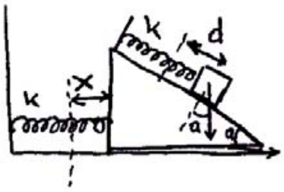
Επομένως : $\frac{T}{\tau} = \frac{1}{\left(1-\frac{r_0}{a}\right)^{-1/2}} \Rightarrow \frac{T}{\tau} = \left(1-\frac{r_0}{a}\right)^{1/2} < 1.$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Θα έχουμε μετατόπιση των σημείων καμπής κατά } \phi = \frac{\tau - T}{T}\times 2\pi \\ \text{Θεωρώντας ότι } \frac{r_0}{a} \ll 1 \rightarrow \left(1-\frac{r_0}{a}\right)^{-1/2} \cong 1+\frac{1}{2}\frac{r_0}{a} \text{ οπότε}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi = \left(\frac{\tau}{T} - 1\right)\times 2\pi = \left(\cancel{1} + \frac{r_0}{2a} - \cancel{1}\right)2\pi \Rightarrow \phi = \frac{r_0}{\cancel{2}a}\cancel{2}\pi \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{\pi r_0}{a}}$$

2. Ένα τούβλο μάζας m βρίσκεται ακίνητο πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο μάζας M. Το τούβλο εξαρτάται από ένα ελατήριο σταθεράς k το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. Το κεκλιμένο επίπεδο με τη σειρά του είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο μέσω ενός άλλου ελατηρίου της ίδιας σταθεράς k Τα δύο σώματα μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές και το σύστημα τίθεται σε κίνηση. Να βρεθούν οι φυσικοί τρόποι ταλάντωσης του συστήματος και οι αντίστοιχες συχνότητες. Δεν χρειάζεται να κανονικοποιήσετε τα ιδιοδιανύσματα.





Θεωρούμε x και d τις απομακρύνσεις του κεκλιμένου επιπέδου και τούβλου αντίστοιχα από τη θέση ισορροπίας των 2 ελατηρίων. Θεωράμε επίσης τη θέση ισορροπίας του τούβλου σα τη θέση που ορίζει το επίπεδο της μηδενικής δυναμικής ενέργειας. Επομένως οι συντεταγμένες του τούβλου θα είναι:

$$x_T = x + d\cos a \Rightarrow \dot{x}_T = \dot{x} + \dot{d}\cos a$$

$$y_T = -d\sin a \Rightarrow \dot{y}_T = -\dot{d}\sin a$$

$$\Rightarrow v_T^2 = \dot{x}^2 + \dot{d}^2\cos^2 a + 2\dot{x}\dot{d}\cos a + \dot{d}^2\sin^2 a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_T^2 = \dot{x}^2 + \dot{d}^2 + 2\dot{x}\dot{d}\cos a$$

Επομένως η Lagrangian του συστήματος γράφεται :

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{d}^2 + 2\dot{x}\dot{d}\cos a) - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kd^2 + mgd\sin a$$

Έχουμε $\Rightarrow$ $L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\dot{d}^2 + m\dot{x}\dot{d}\cos a - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kd^2 + mgd\sin a.$

$K_{ij} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}$ και $M_{ij} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ επομένως :

$$[K] = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \qquad [M] = \begin{pmatrix} M+m & m\cos a \\ m\cos a & m \end{pmatrix}$$

Επομένως πρέπει να λύσουμε: $\left([K] - \omega^2[M]\right)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$

Η ορίζουσα του συστήματος θα είναι: $\det\begin{vmatrix} k-\omega^2(M+m) & -\omega^2 m\cos a \\ -m\omega^2\cos a & k-m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$

Επομένως θα πάρουμε: $\left[(k-\omega^2 m)-M\omega^2\right]\left[k-\omega^2 m\right]-\left(m^2\omega^2\cos^2 a\right)^2=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[(M+m)m-m^2\cos^2 a\right]\omega^4-k(M+2m)\omega^2+k^2=0$$

Οι ιδιοσυχνότητες θα είναι επομένως:

$$\omega^2=k\left[\frac{(M+2m)\pm\sqrt{M^2+4m^2\cos^2 a}}{2m\left[M+\underbrace{(1-\cos^2 a)}_{\sin^2 a}m\right]}\right] \Rightarrow \begin{cases} \omega_1=k\,\dfrac{(M+2m)+\sqrt{M^2+4m^2\cos^2 a}}{2m(M+\sin^2 a\, m)} \\[2ex] \omega_2=k\,\dfrac{(M+2m)-\sqrt{M^2+4m^2\cos^2 a}}{2m(M+m\sin^2 a)} \end{cases}$$

Γυρνώντας πίσω στην εξίσωση των ιδιοδιανυσμάτων θα έχουμε:

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} k-\omega^2(M+m) & -\omega^2 m\cos a \\ -\omega^2 m\cos a & k-m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \left[k-\omega^2(M+m)\right]a_1-a_2\omega^2 m\cos a&=0 \\ -a_1\omega^2 m\cos a+a_2(k-m\omega^2)&=0 \end{aligned}\right\}$$

αυτές οι 2 εξισώσεις είναι εξαρτημένες αφού $\det\left|[K]-\omega^2[M]\right|=0$ οπότε αρκεί να χρησιμοποιήσουμε μόνο μία.

Παίρνουμε τη 2η εξίσωση και έχουμε:

$$-a_1\omega^2 m\cos a+a_2(k-m\omega^2)=0 \Rightarrow \boxed{a_1=\frac{k-m\omega^2}{m\omega^2\cos a}\,a_2}$$

Αρκεί να αντικαταστήσουμε τις τιμές των ω_1 και ω_2 για να βρούμε τα δύο ιδιονύσματα που θα 'ναι της μορφής:

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix} \dfrac{k-m\omega_1^2}{m\omega_1^2\cos a} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \vec{a}_2=\begin{pmatrix} \dfrac{k-m\omega_2^2}{m\omega_2^2\cos a} \\ 1 \end{pmatrix}$$