Ηλεκτρισμός

Επανάληψη – Παραδείγματα/Προβλήματα

Εύρεση του ηλεκτρικού πεδίου Ε από το δυναμικό V

Το διπλανό γράφημα δείχνει τη μεταβολή του ηλεκτρικού δυναμικού V με την απόσταση *z*.
Το δυναμικό V δεν εξαρτάται από το *x* και το *y*
Το δυναμικό V στην περιοχή -1m < z < 1m δίνεται σε Volts από την εξίσωση:

$$V(z) = 15 - 5z^2.$$

Έξω από την περιοχή, το ηλεκτρικό δυναμικό μεταβάλλεται γραμμικά με το *z*, όπως φαίνεται από το γράφημα.

(α) Βρείτε μια εξίσωση για την z-συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου, E_Z, στην περιοχή -1m < z < 1m.

(β) Ποια η ένταση του πεδίου, E_Z, στην περιοχή *z* > +1m; Προσοχή στο πρόσημο.

(γ) Ποια η ένταση του πεδίου, E_Z, στην περιοχή *z* < -1m; Προσοχή στο πρόσημο.

(δ) Το δυναμικό δημιουργείται εξαιτίας μιας χωρικής κατανομής φορτίων χωρικής πυκνότητας ρ_o. Που στο χώρο βρίσκεται η συγκεκριμένη κατανομή φορτίων; Θα πρέπει να δώσετε τις *z*-συνιστώσες που οριοθετούν την χωρική κατανιμή. Ποια η πυκνότητα φορτίου ρ_0 του αντικειμένου που οριοθετεί την χωριτική κατανομή σε C/m^3.

Εύρεση του ηλεκτρικού πεδίου Ε από το δυναμικό V

(α) $V(z) = 15 - 5z^2$

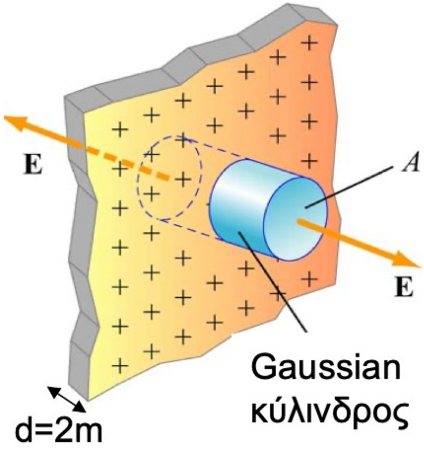
$$\vec{E}(z) = -\vec{\nabla}V \Rightarrow E(z) = -\frac{\partial V}{\partial z} \Rightarrow \vec{E}(z) = 10z\hat{k}$$

(β) $(Z > +1\mathrm{m})\ E(z) = -\frac{\partial V}{\partial z} = +10V/m$

(γ) $(Z < -1\mathrm{m})\ E(z) = -\frac{\partial V}{\partial z} = -10V/m$

(δ) Το ηλεκτρικό πεδίο είναι σταθερό έξω από την περιοχή [-1m, +1m]

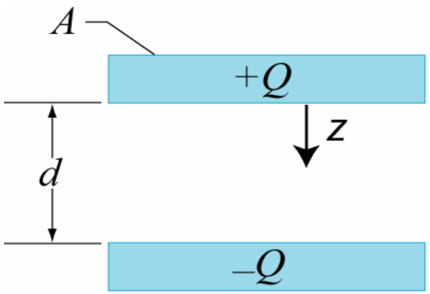
Το φορτίο της κατανομής είναι θετικό γιατί η ένταση του πεδίου έχει διεύθυνση μακριά από την κατανομή (προς $+\infty$ όταν $z > 1$ και προς το $-\infty$ όταν $z < -1$) .



$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\pi\varepsilon\rho\iota\kappa.}}{\varepsilon_0} = E_{Rt}A + E_{Lt}A = 2EA = \frac{q_{\pi\varepsilon\rho\iota\kappa.}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 V_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 A d}{\varepsilon_0}$$

$$\rho_0 = \frac{2EA\varepsilon_0}{Ad} \Rightarrow \rho_0 = 2(10V/m)\varepsilon_0(2m) \Rightarrow \rho_0 = 10\varepsilon_0[\frac{C}{m^3}]$$

Επίπεδος Πυκνωτής



Ένας επίπεδος πυκνωτής παράλληλων πλακών εμβαδού Α με απόσταση d μεταξύ τους, έχουν φορτίο +Q (υψηλότερος οπλισμός) και -Q (χαμηλότερος οπλισμός). Ο z-άξονας είναι όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

(α) Ποιο το μέτρο και η διεύθυνση και κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου στις ακόλουθες περιπτώσεις: πάνω και κάτω από τους οπλισμούς, στους οπλισμούς και ανάμεσα στους οπλισμούς.

(β) Ποιο το δυναμικό $V(z)$ στις προηγούμενες 5 περιοχές; Θεωρήστε ότι το δυναμικό είναι 0 στην περιοχή $V(z=0) = \alpha$.

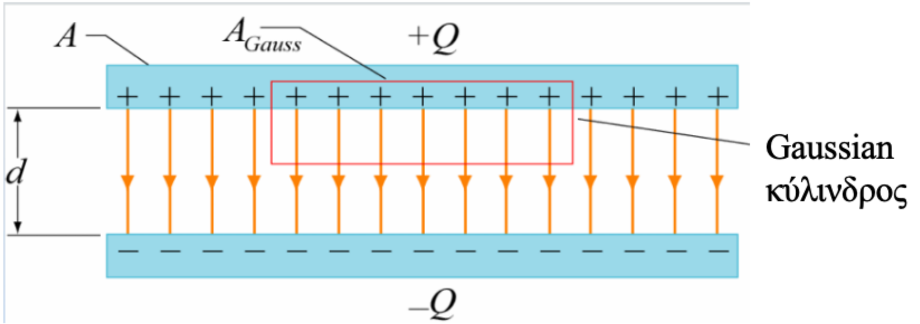
(γ) Ποια η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στον υψηλότερο και χαμηλότερο οπλισμό;

(δ) Ποια η χωρητικότητα του πυκνωτή αυτού;

(ε) Φανταστείτε ότι ο πυκνωτής αυτός βυθίζεται σε μια λεκάνη με υγρό διηλεκτρικό υλικό διηλεκτρικής *κ*. Ποιο το δυναμικό V(z) τώρα σε τυχαίο σημείο στο χώρο;

Επίπεδος Πυκνωτής

(α) Οι αγωγοί έχουν $E = 0$ στο εσωτερικό τους, οπότε σύμφωνα με τον νόμο Gauss η μόνη περιοχή με $E \neq 0$ είναι αυτή ανάμεσα στους οπλισμούς.



$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\pi\varepsilon\rho\iota\kappa.}}{\varepsilon_0} \Rightarrow EA_{Gauss} = \frac{\sigma A_{Gauss}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A\varepsilon_0}$$ με φορά προς τα κάτω

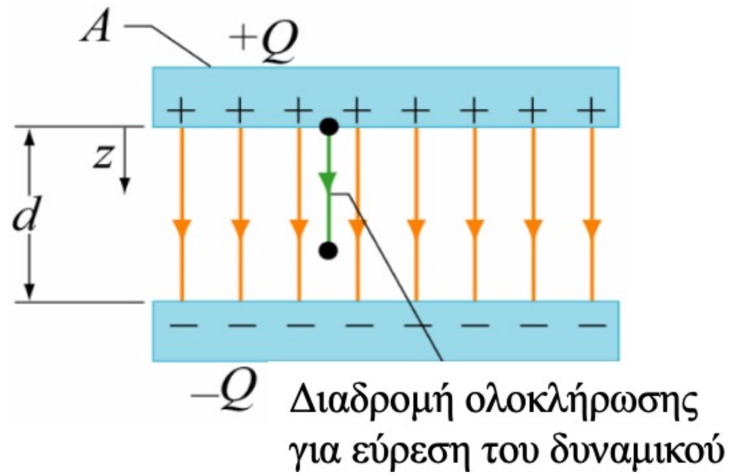
Πρόσεξετε ότι χρειάζεται να θεωρήσετε μόνο τον έναν από τους δύο οπλισμούς ! Ο 2ος οπλισμός χρησιμοποιήθηκε ήδη από το γεγονός ότι το φορτίο είναι $\pm Q$ στις εσωτερικές επιφάνειες των οπλισμών.

(β) Ξεκινούμε από μια περιοχή που το δυναμικό είναι γνωστό $V(z=0) = 0$

Στον χώρο πάνω και στο εσωτερικό του οπλισμού $\vec{E} = \vec{0}$ και άρα $V = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow V = 0$

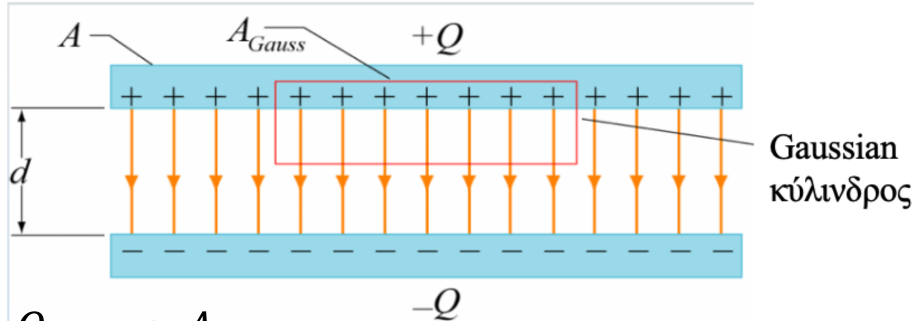
Μεταξύ των οπλισμών: $V_{\varepsilon\sigma.}(z) = \Delta V = -\int_0^z \vec{E} \cdot d\vec{S}$

$$\Rightarrow \Delta V = -Ez \Rightarrow \Delta V = -\frac{Qz}{A\varepsilon_0}$$



Στον χαμηλότερο οπλισμό και στην περιοχή κάτω από αυτόν ($\vec{E} = \vec{0}$): $\Delta V = -\dfrac{Qd}{A\varepsilon_0}$

Επίπεδος Πυκνωτής



(γ) Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών θα είναι:

$$\Delta V = V(0) - V(d) = \frac{Qd}{A\varepsilon_0}$$

(δ) Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι: $C = \dfrac{Q}{|\Delta V|} = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$

(ε) Όταν βυθίζεται ο πυκνωτής στο διηλεκτρικό τότε η διηλεκτρική σταθερά είναι παντού ίση με τη διηλεκτρική σταθερά του υλικού *κ*:

Σαν αποτέλεσμα το πεδίο και το δυναμικό ελαττώνονται κατά έναν παράγοντα 1/*κ*

Το δυναμικό στην περιοχή πάνω και στο εσωτερικό του οπλισμού είναι 0

$$V_{\varepsilon\sigma.}(z) = -\frac{Q}{\kappa A\varepsilon_0} z \qquad V_{\kappa\acute{\alpha}\tau\omega}(z) = -\frac{Q}{\kappa A\varepsilon_0} d$$

Ηλεκτρική Δυναμική Ενέργεια

Το έργο που παράγει μια δύναμη $\vec{F}$ είναι: $W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s}$

Αν η δύναμη $\vec{F}$ είναι συντηρητική, το έργο της εκφράζεται συναρτήσει της U.

$$W_{A\to B} = U_A - U_B = -(U_B - U_A) = -\Delta U$$

όπου $W_{A\to B}$ το έργο της ηλεκτροστατικής δύναμης και όχι της εξωτερικής δύναμης

Όταν **το έργο της συντηρητικής δύναμης είναι θετικό**, **η δυναμική ενέργεια του συστήματος ελαττώνεται** και το αντίθετο

Ηλεκτρικό δυναμικό σε σημείο ορίζεται ως: $V_A = \dfrac{U_A}{q}$

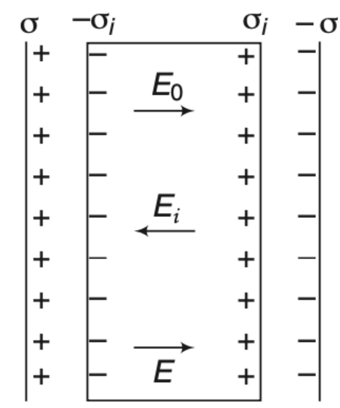
Το έργο που εκτελεί η ηλεκτροστατική δύναμη για να μετακινήσει ένα τεστ φορτίο q_0 από το σημείο A στο σημείο B μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο είναι:

$$W_{A\to B} = -(U_B - U_A) \Rightarrow \frac{U_A}{q_0} - \frac{U_B}{q_0} = \frac{W_{A\to B}}{q_0} \Rightarrow V_A - V_B = \frac{W_{A\to B}}{q_0}$$

το έργο της συντηρητικής δύναμης ανά μονάδα φορτίου καθώς το φορτίο μετακινείται από το A στο B είναι ίσο με το δυναμικό στο A μείον το δυναμικό στο B

Πυκνωτές - Διηλεκτρικά

Εισαγωγή διηλεκτρικού αυξάνει την χωρητικότητα του πυκνωτή:



$$C' = \kappa C$$

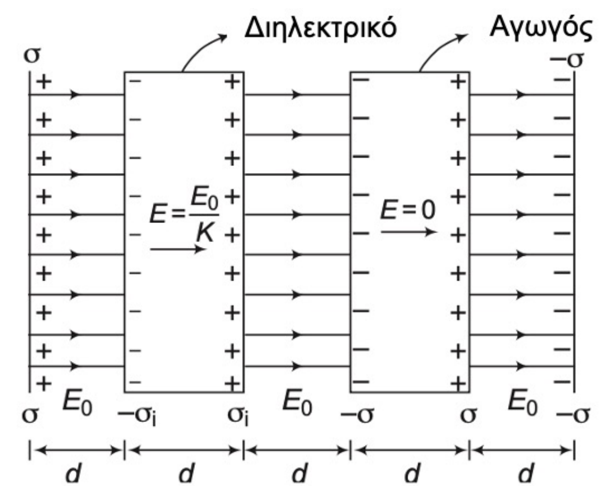
Ελαττώνεται το ηλεκτρικό πεδίο: $E = \dfrac{E_0}{\kappa}$ και το δυναμικό: $V = \dfrac{V_0}{\kappa}$

$$E = E_0 - E_i \quad \Rightarrow \frac{E_0}{\kappa} = E_0 - E_i \Rightarrow E_i = E_0\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)$$

Επομένως: $\dfrac{\sigma_i}{\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{1}{\kappa}\right) \Rightarrow \sigma_i = \sigma\left(1 - \dfrac{1}{\kappa}\right)$ ή $\Rightarrow Q_i = Q\left(1 - \dfrac{1}{\kappa}\right)$

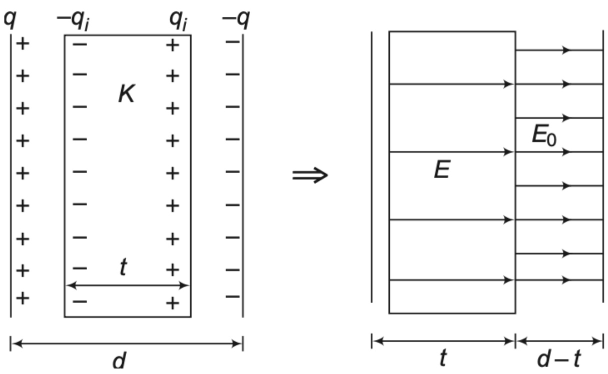
Για αγωγό $\kappa = \infty$ $\Rightarrow \sigma_i = \sigma$ $\Rightarrow q_i = q$ και $E = 0$

Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις: $q_i \leq q$ και $\sigma_i \leq \sigma$



Πυκνωτές - Διηλεκτρικά

Εισαγωγή διηλεκτρικού σε περιοχή του πυκνωτή:



Αν στον πυκνωτή δοθεί φορτίο q τότε φορτίο q_i επάγεται στο διηλεκτρικό και

$$q_i = q\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)$$

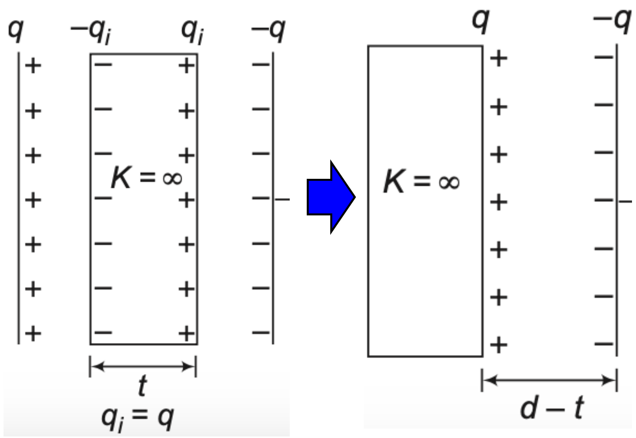
Αν E_0 το πεδίο έξω από το διηλεκτρικό, τότε μέσα στο διηλεκτρικό θα είναι $E = E_0/\kappa$

Η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή θα είναι:

$$V = V_+ - V_- \;\; = Et + E_0(d-t) \; = \frac{E_0}{\kappa}t + E_0(d-t) = E_0\left[\frac{t}{\kappa} + \; (d-t)\right]$$

$$\Rightarrow V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(d - t + \frac{t}{\kappa}\right) \Rightarrow V = \frac{q}{A\varepsilon_0}\left(d - t + \frac{t}{\kappa}\right)$$

Η χωρητικότητα θα είναι: $C = \dfrac{q}{V} = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d - t + \dfrac{t}{\kappa}}$



Αν $t = d$ τότε: $C = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d/\kappa} = \kappa C_0$

Αν $\kappa = \infty$ (αγωγός) τότε: $C = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d - t + d/\kappa} = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d - t}$

Αν $\kappa = \infty$ και $t = d$ τότε $C = \infty$

Συνδεσμολογία Αντιστάσεων/Πυκνωτών

Εν γένει για συνδεσμολογία αντιστάσεων/πυκνωτών σε σειρά:

$$R_{\iota\sigma o\delta.} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N \qquad \frac{1}{C_{\iota\sigma o\delta.}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N}$$

Εν γένει για συνδεσμολογία αντιστάσεων/πυκνωτών παράλληλα:

$$\frac{1}{R_{\iota\sigma o\delta.}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N} \qquad C_{\iota\sigma o\delta.} = C_1 + C_2 + \cdots C_N$$

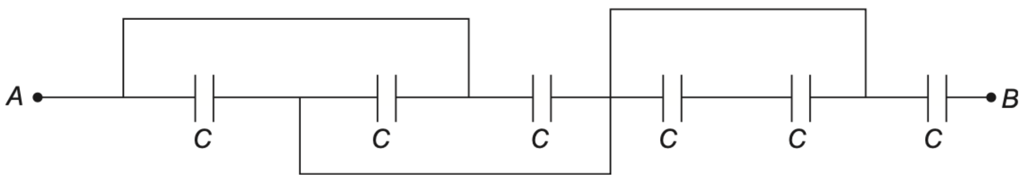
Σε πολλές περιπτώσεις εμφανίζονται μικτοί τύποι συνδεσμολογιών:

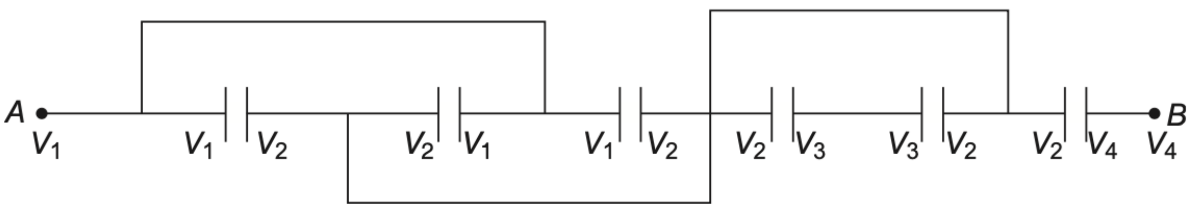
Μικτή Συνδεσμολογία Αντιστάσεων/Πυκνωτών

Δύο μέθοδοι που μπορούν να χρησιμοποιηθούν:

Μέγεθος των ίδιων δυναμικών: Στα άκρα των ακροδεκτών αντιστάσεων ή πυκνωτών υπάρχουν διάφορα δυναμικά. Σημεία που συνδέονται με αγωγό βρίσκονται στο ίδιο δυναμικό. Αντιστάτες ή πυκνωτές με την ίδια διαφορά δυναμικού είναι παράλληλα συνδεδεμένοι.

Ποια η ισοδύναμη χωρητικότητα στη συνδεσμολογία:





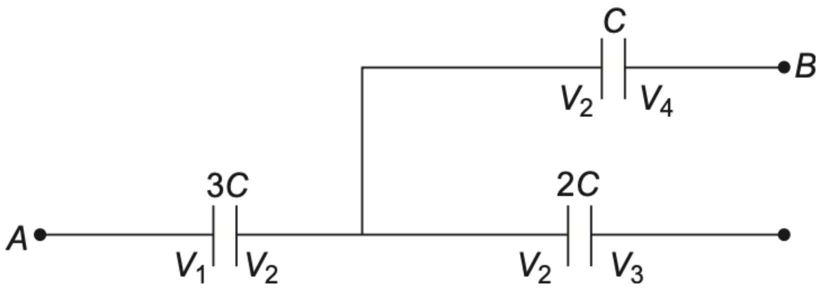
Τρεις πυκνωτές έχουν διαφορά δυναμικού $V_1 - V_2$ και είναι παράλληλα συνδεδεμένοι. Επομένως η ισοδύναμη χωρητικότητά τους είναι 3C

Δύο πυκνωτές έχουν διαφορά δυναμικού $V_2 - V_3$ και είναι παράλληλα συνδεδεμένοι και η ισοδύναμη χωρητικότητά τους θα είναι 2C

Ένας πυκνωτής έχει διαφορά δυναμικού $V_2 - V_4$

Μικτή Συνδεσμολογία Αντιστάσεων/Πυκνωτών

Με βάση τα προηγούμενα έχουμε:



Διαφορά Δυναμικού	Χωρητικότητα
$V_1 - V_2$	3C
$V_2 - V_3$	2C
$V_2 - V_4$	C

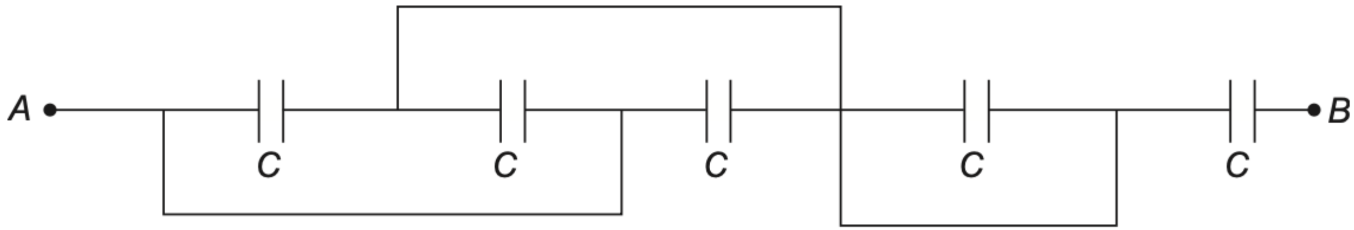
Έχουμε να υπολογίσουμε την ισοδύναμη χωρητικότητα μεταξύ των σημείων A-B που η διαφορά δυναμικού είναι $V_1 - V_4$

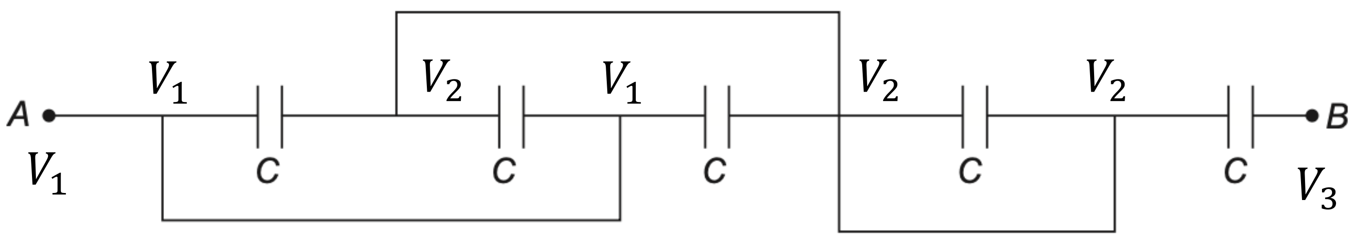
Ο πυκνωτή 2C είναι εκτός του κυκλώματος και επομένως έχουμε τους πυκνωτές 3C και C συνδεδεμένους σε σειρά:

$$C_{\iota\sigma o\delta.} = \frac{3\mathrm{CC}}{4\mathrm{C}} = \frac{3}{4}\mathrm{C}$$

Μικτή Συνδεσμολογία Αντιστάσεων/Πυκνωτών

Αποδείξτε ότι η ισοδύναμη χωρητικότητα του κυκλώματος μεταξύ A και B είναι $\frac{3}{4}C$





Υπάρχουν 3 πυκνωτές με διαφορά δυναμικού $V_1 - V_2$ με ισοδύναμη χωρητικότητα 2C

Υπάρχουν 1 πυκνωτής που είναι είναι βραχυκυκλωμένος ($V_2 - V_2$) επομένως δεν μπορεί να αποθηκεύσει φορτίο

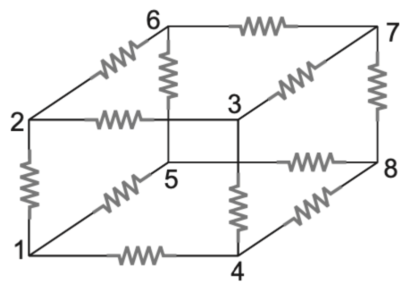
Υπάρχουν 1 πυκνωτής με δυναμικό $V_2 - V_3$

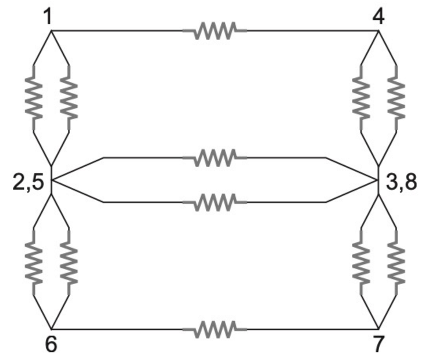
Επομένως η ισοδύναμη χωρητικότητα θα είναι: $C_{\iota\sigma o\delta.} = \frac{C_{3C} \times C}{\mathrm{C}_{3\mathrm{C}} + \mathrm{C}} = \frac{3\mathrm{C}^2}{4\mathrm{C}} = \frac{3}{4}\mathrm{C}$

Μικτή Συνδεσμολογία Αντιστάσεων/Πυκνωτών

Σημεία που είναι συμμετρικά τοποθετημένα ως το αρχικό και τελικό σημείο του κυκλώματος είναι στο ίδιο δυναμικό και επομένως οι αντιστάσεις/πυκνωτές μεταξύ των σημείων αυτών μπορούν να αγνοηθούν

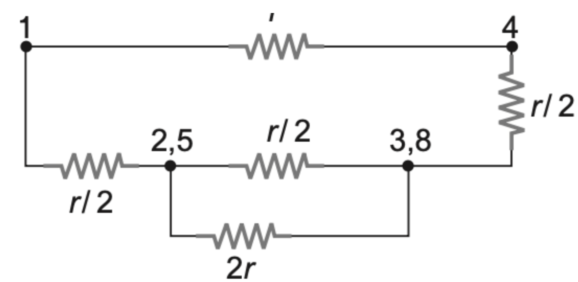
Ποια η ισοδύναμη αντίσταση μεταξύ των 1 και 4





Τα σημεία 2, 5 και 3, 8 είναι συμμετρικά ως προς τα 1 και 4.

Επομένως $V_2 = V_5$ και $V_3 = V_8$

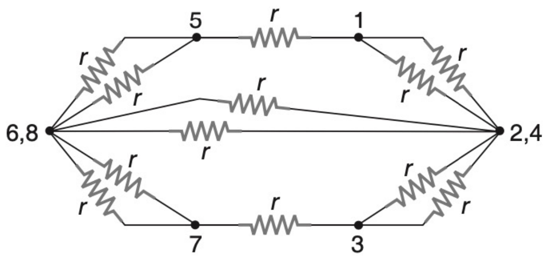


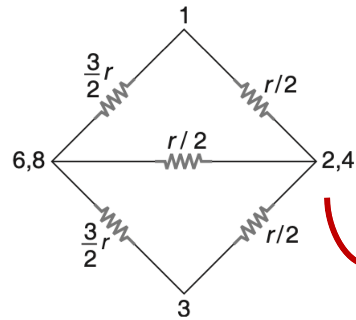
Μικτή Συνδεσμολογία Αντιστάσεων/Πυκνωτών

Ποια η ισοδύναμη αντίσταση μεταξύ των 1 και 3

Τα σημεία 6, 8 και 2, 4 είναι συμμετρικά ως προς τα 1 και 3.

Επομένως $V_6 = V_8$ και $V_2 = V_4$





Γέφυρα Wheatstone σε ισορροπία