Κίνηση στερεών σωμάτων – περιστροφική

- Ενδιαφέρουσα κίνηση:
  - Αρκετά περίπλοκη
  - Δεν καταλήγει σε κίνηση ενός βαθμού ελευθερίας
- Τι είναι το στερεό σώμα:
  - Συλλογή υλικών σημείων των οποίων οι αποστάσεις παραμένουν σταθερές
    - Διακριτή ή συνεχή κατανομή των υλικών σημείων
  - Ιδανικός ορισμός μια και δεν υπάρχουν τέτοια συστήματα
  - Τα άτομα που αποτελούν ένα στερεό κινούνται – Μικροσκοπική κίνηση
- Ενδιαφερόμαστε για την μακροσκοπική κίνηση στερεών σωμάτων
  - Θα αγνοήσουμε μακροσκοπικές παραμορφώσεις του στερεού - μέγεθος/σχήμα

Κίνηση στερεών σωμάτων – περιστροφική

- Θεωρήστε ένα στερεό σώμα το οποίο κινείται ελεύθερα στο χώρο
- Η δυναμική του σώματος αυτού περιγράφεται από την Lagrangian: $L = T$
  - Κινείται ελεύθερα ⇨ $V = 0$
- Πρέπει επομένως να μελετήσουμε την κινητική ενέργεια T
- Έστω ότι έχουμε ένα υλικό σημείο που υπόκειται σε περιστροφή
  - Το διάνυσμα θέσης του σώματος έστω: $\vec{r}$

$\vec{r} = \sum_i r_i' \vec{e}_i'$ σταθερό σύστημα σύστημα συντεταγμένων

$\vec{r} = \sum_i r_i \vec{e}_i$ περιστρεφόμενο σύστημα σύστημα συντεταγμένων

- Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα του υλικού σημείου:
  - Θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων τέτοιο ώστε: $r_i = \text{σταθ.}$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i r_i \vec{e}_i\right) \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \sum_i r_i \dot{\vec{e}}_i \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \sum_i r_i \left(\vec{\omega} \times \vec{e}_i\right) \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- Η κινητική ενέργεια θα είναι: $T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} m \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)^2$
  - Αλλά : $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - \left(a \cdot b\right)^2$

$$= \frac{1}{2} m \left(\omega^2 r^2 - \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}\right)^2\right)$$

Κίνηση στερεών σωμάτων – περιστροφική

- Θεωρήστε τώρα ένα στερεό αντί του υλικού σημείου – συλλογή N υλικών σημείων
  - Όλα τα σημεία περιστρέφονται μαζί:
  - Η κινητική ενέργεια θα είναι: $T = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \left(\vec{\omega}^2 \vec{r}_a^{\,2} - \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_a \right)^2 \right)$
  - Η κινητική ενέργεια είναι 2ου βαθμού συνάρτηση της γωνιακής ταχύτητας ω
- Μπορούμε να την γράψουμε σε πιο απλή μορφή: $T = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{3} \omega_i I_{ij} \omega_j$
  - όπου: $\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \vec{e}_i$ οι συνιστώσες της ω στο περιστρεφόμενο σύστημα
  - και: $I_{ij} = \sum_{a=1}^{N} m_a \left(\vec{r}_a^{\,2} \delta_{ij} - r_i^a r_j^a \right)$ ένα αντικείμενο με 9 στοιχεία (i,j = 1…3)

    που ορίζεται ως ο τανυστής της ροπής αδράνειας του στερεού σώματος
  - Ουσιαστικά γράψαμε: $\vec{\omega}^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \Rightarrow \vec{\omega}^2 = \sum_{i,j}^{3} \omega_i \delta_{ij} \omega_j$

    οπότε: $\sum_{a=1}^{N} m_a \sum_{i,j}^{3} \omega_i \vec{r}_a^{\,2} \omega_j \delta_{ij} = \sum_{a=1}^{N} m_a \vec{\omega}^2 \vec{r}_a^{\,2}$ ο 1ος όρος του τανυστή αδράνειας

    ο 2ος όρος δίνει: $\sum_{a} m_a \sum_{i,j}^{3} \omega_i \left(r_i^a r_j^a \right) \omega_j = \sum_{a} m_a \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_a \right) \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_a \right) = \sum_{a} m_a \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_a \right)^2$

Κίνηση στερεών σωμάτων – περιστροφική

- Η κινητική ενέργεια είναι 2ου βαθμού συναρτήσει της γωνιακής ταχύτητας
  - Ο ρόλος της μάζας στην γραμμική κίνηση ασκείται από τον τανυστή αδράνειας

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{3} \omega_i I_{ij} \omega_j \quad \text{όπου:} \quad I_{ij} = \sum_{a=1}^{N} m_a \left(\vec{r}_a^{\,2} \delta_{ij} - r_i^a r_j^a \right)$$

  - Ο τανυστής αδράνειας είναι μια συλλογή 9 παραμέτρων που μπορούν να προσδιοριστούν για οποιοδήποτε στερεό σώμα
  - Αποτελεί ιδιότητα του στερεού σώματος ανεξάρτητα της κίνησής του
- Ο τανυστής αδράνειας περιέχει 2 ξεχωριστές ιδιότητες:
  - Συμμετρικός 3×3 πίνακας: $I_{ij} = I_{ji}$
    - δ_{ij} είναι συμμετρικό
    - το γινόμενο $r_i^a r_j^a$ είναι συμμετρικό: $r_i^a r_j^a = r_j^a r_i^a$
  - Χρονικά ανεξάρτητος $I_{ij} = \sigma\tau\alpha\theta.$
- Ο τανυστής αδράνειας ορίζεται και για συνεχείς κατανομές μάζας:
  - Έστω $\rho(\vec{r})$ η πυκνότητα μάζας του σώματος

$$I_{ij} = \int d^3\vec{r}\, \rho(\vec{r}) \left\{ \vec{r}^{\,2} \delta_{ij} - (\vec{r} \cdot \vec{e}_i)(\vec{r} \cdot \vec{e}_j) \right\}$$

ικανοποιεί τις 2 ιδιότητες του τανυστή αδράνειας

Κατανόηση ιδιοτήτων του τανυστή αδράνειας

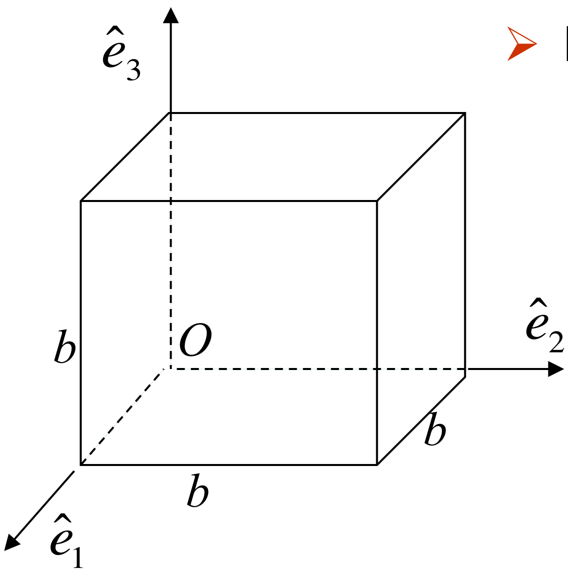
- Θα πρέπει να κατανοήσουμε πως μοιάζει ο τανυστής της αδράνειας για διάφορα σώματα και περιπτώσεις
- Ο τανυστής μπορεί να γραφεί με την μορφή: $I_{ij} = \sum_{a=1}^{N} m_a \left(\vec{r}_a^{\,2} \delta_{ij} - r_i^a r_j^a \right)$

$$\Rightarrow \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sum_a m_a \left(r_{a,2}^2 + r_{a,3}^2 \right) & -\sum_a m_a r_{a,1} r_{a,2} & -\sum_a m_a r_{a,1} r_{a,3} \\ -\sum_a m_a r_{a,2} r_{a,1} & \sum_a m_a \left(r_{a,1}^2 + r_{a,3}^2 \right) & -\sum_a m_a r_{a,2} r_{a,3} \\ -\sum_a m_a r_{a,3} r_{a,1} & -\sum_a m_a r_{a,3} r_{a,2} & \sum_a m_a \left(r_{a,1}^2 + r_{a,2}^2 \right) \end{pmatrix}$$

- Τα διαγώνια στοιχεία ονομάζονται ροπές αδράνειας
- Τα μή διαγώνια στοιχεία ονομάζονται γινόμενα αδράνειας
- Αφού ο τανυστής είναι συμμετρικός υπάρχουν 6 ανεξάρτητα στοιχεία
- Μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί το άθροισμα τανυστών αδράνειας διαφόρων τμημάτων του σώματος
  - Αυτό εξηγεί την μορφή του τανυστή για μια συνεχή κατανομή μάζας

Υπολογισμός του τανυστή αδράνειας ομογενούς κύβου

- Θεωρούμε μια κορυφή του κύβου ως την αρχή του συστήματος συντεταγμένων
- Οι άξονες του συστήματος είναι κατά μήκος των τριών ακμών του :
  - Η πυκνότητα μάζας είναι ρ=σταθ.=$M/V=M/b^3$:



- Για συνεχή κατανομή μάζας, ο τανυστής αδράνειας είναι:

$$I_{ij} = \int d^3\vec{r}\rho(\vec{r})\left\{\vec{r}^{\,2}\delta_{ij} - (\vec{r}\cdot\vec{e}_i)(\vec{r}\cdot\vec{e}_j)\right\}$$

$$I_{11} = \rho\int_0^b dr_3\int_0^b dr_2\left(r_2^2 + r_3^2\right)\int_0^b dr_1 = \frac{2}{3}\rho b^5 = \frac{2}{3}Mb^2$$

$$I_{12} = -\rho\int_0^b r_1\,dr_1\int_0^b dr_2 r_2\int_0^b dr_3 = -\frac{1}{4}\rho b^5 = -\frac{1}{4}Mb^2$$

$$I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{2}{3}Mb^2 \text{ και } I_{12} = I_{13} = I_{23} = -\frac{1}{4}Mb^2$$

- Ο τανυστής αδράνειας είναι: $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2Mb^2/3 & -Mb^2/4 & -Mb^2/4 \\ -Mb^2/4 & 2Mb^2/3 & -Mb^2/4 \\ -Mb^2/4 & -Mb^2/4 & 2Mb^2/3 \end{pmatrix}$

Διαγωνοποίηση του τανυστή αδράνειας

- Ο τανυστής αδράνειας είναι πραγματικός και συμμετρικός
  - Μπορεί να διαγωνοποιηθεί
- Υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας, **O**, τέτοιος ώστε: $\mathbf{OIO}^{\mathrm{T}}$ διαγώνιος
  - Θυμηθείτε ότι ένας ορθογώνιος πίνακας αντιπροσωπεύει περιστροφή
  - Συγκεκριμένα: $\mathbf{OIO}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{pmatrix}$
  - Ο ορθογώνιος πίνακας, **O**, αντιπροσωπεύει την απαραίτητη περιστροφή τέτοια ώστε ο πίνακας **I** να έρθει σε διαγώνια μορφή
- Ορίσαμε τον τανυστή αδράνειας μέσω συστήματος συντεταγμένων, $\vec{e}_i$ που περιστρέφονταν μαζί με το σώμα
- Μπορούμε να ορίσουμε ένα νέο σύστημα αναφοράς με άξονες $\hat{\vec{e}}_i$ ως προς το οποίο ο τανυστής αδράνειας είναι διαγώνιος
  - Συγκεκριμένα: $\hat{\vec{e}}_i = O_{ij}\vec{e}_j$ και ο πίνακας O δεν εξαρτάται από τον χρόνο
  - Δηλαδή αν υπολόγιζα τον τανυστή αδράνειας απευθείας στο σύστημα αναφοράς των $\hat{\vec{e}}_i$ ο τανυστής, I_{ij}, θα ήταν διαγώνιος
  - Οι άξονες $\hat{\vec{e}}_i$ ονομάζονται κύριοι άξονες του στερεού σώματος

Διαγωνοποίηση του τανυστή αδράνειας

- Δεν υπάρχει τρόπος να ξέρουμε τους άξονες που διαγωνοποιούν τον **I**
  - Χρειάζεται να βρεθεί ο I ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς
  - Μετά διαγωνοποιείται σύμφωνα με τους τρόπους διαγωνοποίησης
  - Οι τρεις στήλες ή γραμμές του ορθογώνιου πίνακα που διαγωνοποιεί τον **I** αποτελούν τους άξονες ως προς τους οποίους ο **I** είναι διαγώνιος
- Ωστόσο οι κύριοι άξονες είναι οι άξονες συμμετρίας του στερεού σώματος
  - Τα διαγώνια στοιχεία του διαγωνοποιημένου τανυστή αδράνειας είναι οι ιδιοτιμές του τανυστή
  - Οι άξονες ως προς τους οποίους διαγωνοποιείται ο τανυστής είναι τα ιδιοδιανύσματα του τανυστή
  - Οι ιδιοτιμές του τανυστή αδράνειας είναι πραγματικές και θετικές σταθερές
  - Αυτό ισχύει γιατί:
    - Έστω το μοναδιαίο διάνυσμα c_i: $c^2 = \sum_i c_i^2 = 1$
    - τότε: $\sum_{i,j} I_{ij} c_i c_j = \sum_a m_a \left(\vec{r}_a^{\,2} \vec{c}^{\,2} - (\vec{r}_a \cdot \vec{c})^2 \right)$
    - αλλά: $\vec{r}_a^{\,2} \vec{c}^{\,2} - (\vec{r}_a \cdot \vec{c})^2 = \vec{r}_a^{\,2} - (\vec{r}_a \cdot \vec{c})^2 \geq 0$

      $$\sum_a m_a (\geq 0) \Rightarrow \sum_{ij} I_{ij} c_i c_j \geq 0$$
    - Επομένως όλες οι κύριες τιμές της ροπής αδράνειας είναι θετικές

Ιδιότητες του διαγωνοποιημένου τανυστή αδράνειας

- Είδαμε ότι οι κύριες τιμές της ροπής αδράνειας είναι θετικές

$$\sum_{i,j} I_{ij} c_i c_j = \sum_a m_a \left(\vec{r}_a^{\,2} \vec{c}^{\,2} - \left(\vec{r}_a \cdot \vec{c} \right)^2 \right) \Rightarrow \sum_a m_a (\geq 0) \Rightarrow \sum_{ij} I_{ij} c_i c_j \geq 0$$

  - Θυμηθείτε επίσης ότι εφόσον τα $\hat{\vec{e}}_i$ είναι ιδιοδιανύσματα του τανυστή αδράνειας (από γραμμική άλγεβρα) η σχέση $\hat{\vec{e}}^{\,\mathrm{T}} \mathbf{I} \hat{\vec{e}}$ δίνει την αντίστοιχη ιδιοτιμή

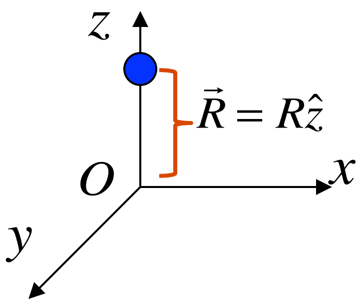
- Συνέπεια της σχέσης $\sum_a m_a (\geq 0)$ είναι ότι: όταν η σχέση στην παρένθεση είναι 0 τότε μια κύρια τιμή της ροπής αδράνειας είναι μηδέν

  - Τότε όμως όλες οι μάζες ή κατανομή μάζας είναι κατά μήκος ενός κύριου άξονα

- Μπορείτε να αποδείξετε ότι δυο κύριες τιμές της ροπής αδράνειας είναι μηδέν αν το στερεό είναι υλικό σημείο

Παράδειγμα υπολογισμού τανυστή αδράνειας

- Έστω σημειακή μάζα σε θέση R από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Θέλουμε να υπολογίσουμε την ροπή αδράνειας ως προς την αρχή και την T



- Ο τανυστής αδράνειας θα είναι: $I_{ij} = m\left(R^2\delta_{ij} - R_i R_j\right)$

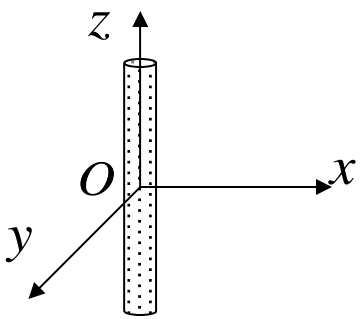
$I_z = m\left(R^2 - R_z R_z\right) = 0$ η κύρια τιμή της ροπής αδράνειας απαλείφεται ως προς τον z-άξονα

- Οι καρτεσιανές συντεταγμένες για την περίπτωση αυτή είναι οι κύριοι άξονες του τανυστή αδράνειας.

$$I_x = m\left(R^2 - R_x R_x\right) = mR^2 = I_y$$

Λεπτή ράβδος

- Ράβδος μήκους L με γραμμική πυκνότητα $\rho = M/L$ κατά μήκος του z-άξονα. Ποια η ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο της



- Οι κύριοι άξονες θα είναι οι τρεις άξονες x,y και z:

$$I_z = \int_{-L/2}^{L/2} dz\left(r^2 - (\vec{r}\cdot\hat{z})^2\right) = \int_{-L/2}^{L/2} dz\left(z^2 - z^2\right) = 0$$

- Η I_z της ροπής αδράνειας μηδενίζεται γιατί η κατανομή της μάζας είναι συγγραμμική με τον κύριο άξονα

$$I_x = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dz\left(z^2 - x^2\right) = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} z^2\, dz = \frac{ML^2}{12} = I_y$$