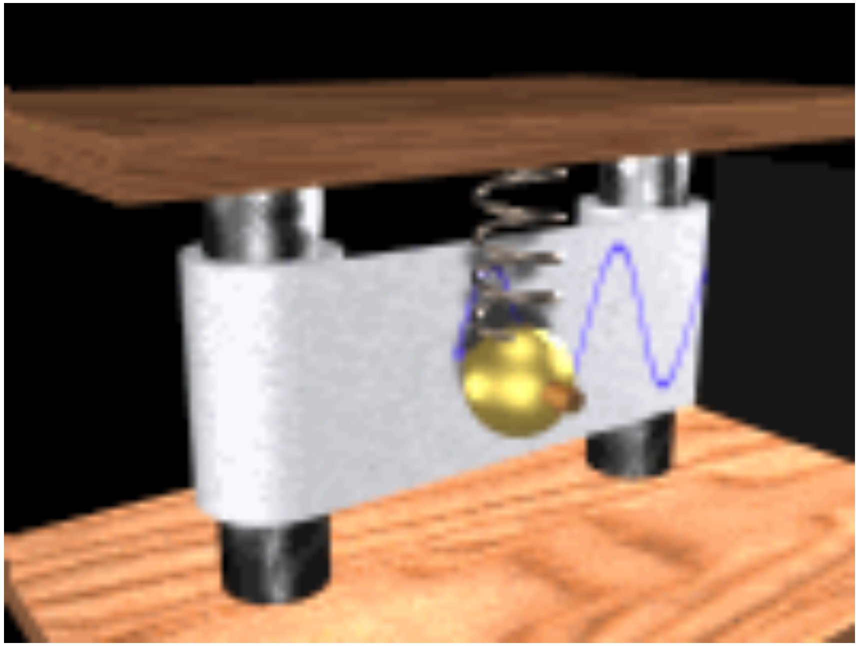
Φθίνουσες και εξαναγκασμένες ταλαντώσεις



Φθίνουσες ταλαντώσεις

- Οι περισσότερες ταλαντώσεις στη φύση εξασθενούν (φθίνουν) γιατί χάνεται ενέργεια.
- Φανταστείτε ένα σύστημα κάτω από μια δύναμη αντίστασης της μορφής

$$F = -b\upsilon \equiv -b\dot{x}$$

  Αυτή η δύναμη δρα επιπλέον της δύναμης επαναφοράς του ελατηρίου

- Κοιτάμε τέτοιες δυνάμεις επειδή:
  - Είναι λογικό να 'χουμε τέτοια συμπεριφορά δύναμης
  - Μπορούμε να λύσουμε ακριβώς την εξίσωση για x(t)

$$F = ma \Rightarrow -Kx - b\dot{x} = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (1)$$

όπου $\gamma \equiv \dfrac{b}{2m}$ και $\omega_0^2 \equiv \dfrac{\mathrm{K}}{m}$ ← φυσική συχνότητα συστήματος

- Μαντεύουμε μια λύση της μορφής $x(t) = Ae^{at}$ και αντικαθιστούμε:

$$(1) \Rightarrow a^2 Ae^{at} + 2\gamma a Ae^{at} + \omega_0^2 Ae^{at} = 0 \Rightarrow a^2 + 2\gamma a + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{a = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$$

⇒ Τρεις περιπτώσεις ανάλογα με την τιμή της διακρίνουσας

Φθίνουσες ταλαντώσεις – Μικρή απόσβεση ($\gamma<\omega_0$)

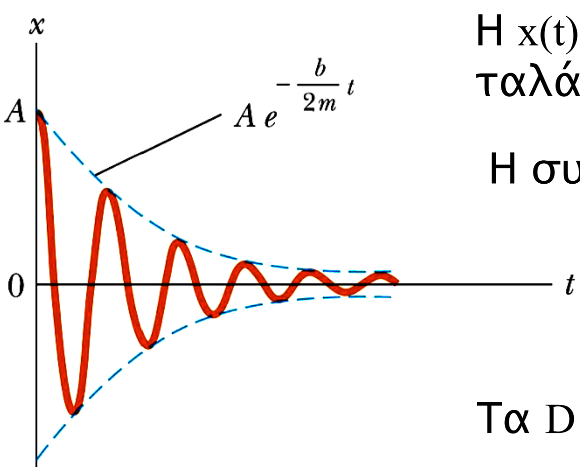
Ορίζουμε $\Omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ επομένως $a \equiv -\gamma \pm i\Omega$

Έχουμε έτσι δύο λύσεις: $x(t) = Ae^{-\gamma t + i\Omega}$ και $x(t) = Ae^{-\gamma t - i\Omega}$

- Από τη στιγμή που η εξίσωση είναι γραμμική ως προς x το άθροισμα των παραπάνω λύσεων θα είναι επίσης λύση.
- Μια και λέμε ότι κάνουμε φυσική, η εξίσωση θέσης, $x(t)$, πρέπει να 'ναι πραγματική και όχι μιγαδική.

Άρα οι 2 λύσεις πρέπει να 'ναι συζυγείς μιγαδικοί: $A = B^* \equiv Ce^{i\varphi t}$

$$x(t) = Ce^{-\gamma t}\left(e^{i(\Omega t+\varphi)} + e^{-i(\Omega t+\varphi)}\right) = De^{-\gamma t}\cos(\Omega t+\varphi)$$



Η $x(t)$ μοιάζει με μια συνημιτονοειδή συνάρτηση ταλάντωσης μέσα σε μια $e^{-\gamma t}$ εκθετικά φθίνουσα συνάρτηση

Η συχνότητα ταλάντωσης είναι:

$$\Omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{K}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

παράδειγμα

Τα D και φ της $x(t)$ καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες

Φθίνουσες ταλαντώσεις – Μεγάλη απόσβεση ($\gamma>\omega_0$)

Ορίζουμε $\Omega \equiv \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ επομένως $a \equiv -\gamma \pm \Omega$

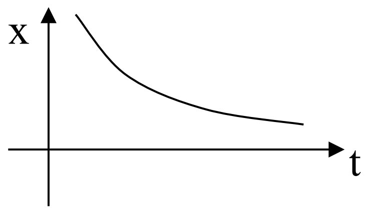
Η γενική λύση στην περίπτωση αυτή είναι $\boxed{x(t) = \mathrm{A}e^{-(\gamma+\Omega)\,t} + \mathrm{B}e^{-(\gamma-\Omega)t}}$

και προφανώς πραγματική.

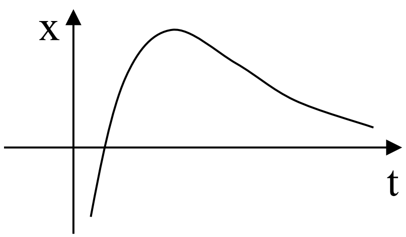
Αρνητικό εκθετικό

Δεν υπάρχει κίνηση ταλάντωσης στην περίπτωση αυτή.

x(t) μοιάζει όπως τα παρακάτω σχήματα



ή



Σημειώστε ότι $\gamma + \Omega > \gamma - \Omega \Rightarrow$ για μεγάλα t, x(t) μοιάζει με $x(t) \approx Be^{-(\gamma-\Omega)t}$

αφού ο πρώτος όρος $x(t) = \mathrm{A}e^{-(\gamma+\Omega)\,t}$ είναι ακόμα πιο μικρός

Για μεγάλα γ, $\gamma - \Omega$ είναι πολύ μικρό και το x πηγαίνει στο 0 αργά

γιατί $\gamma - \Omega = \gamma - \gamma\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}} \approx \gamma - \gamma\left(1 - \frac{\omega_0^2}{2\gamma^2}\right) = \frac{\omega_0^2}{2\gamma} =$ μικρό

Φθίνουσες ταλαντώσεις – Κριτική απόσβεση ($\gamma=\omega_0$)

- Στην περίπτωση αυτή, $a=-\gamma\pm 0$, και επομένως έχουμε μόνο μια λύση της Δ.Ε

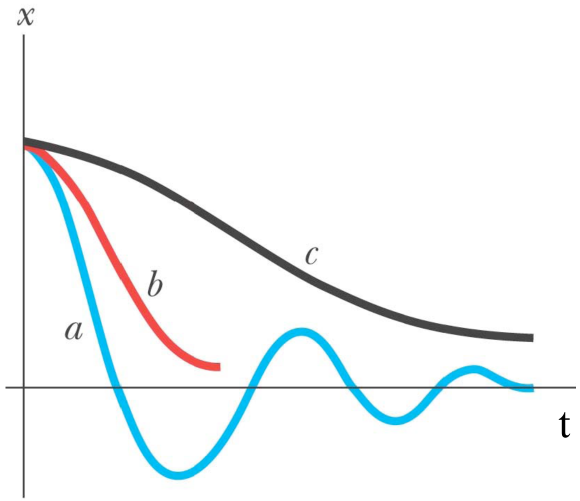
> Είναι η περίπτωση που η στρατηγική του να δοκιμάζουμε μια εκθετική λύση για την επίλυση Δ.Ε. δεν δουλεύει.

- Μια άλλη λύση βγαίνει τελικά ότι είναι της μορφής $x(t)=Bte^{-\gamma t}$
- Προσθέτοντάς την στην προηγούμενη γενική λύση έχουμε:

$$\boxed{x(t)=Ae^{-\gamma t}+Bte^{-\gamma t}\Rightarrow x(t)=e^{-\gamma t}(A+Bt)}$$

Ο όρος $e^{-\gamma t}$ υπερισχύει του όρου Bt και για μεγάλα t το $x\rightarrow 0$ κατά $e^{-\gamma t}$

- Η κριτική απόσβεση επαναφέρει το x στο μηδέν γρηγορότερα απ' όλες τις διεργασίες απόσβεσης.



> Για πολύ μεγάλα γ, η μεγάλη απόσβεση πηγαίνει στο $x=0$ πολύ αργά (καμπύλη c)

> Για πολύ μικρά γ, η μικρή απόσβεση πηγαίνει στο $x=0$ πολύ αργά (καμπύλη α)

> Για $\gamma=\omega_0$, κριτική απόσβεση πηγαίνει στο $x=0$ γρηγορότερα (καμπύλη b)

Εξαναγκασμένες φθίνουσες ταλαντώσεις

- Στην περίπτωση αυτή μελετάμε την δεδομένη οδηγό δύναμη: $F_d(t) = F\cos\omega_d t$ η οποία δρα επιπλέον των άλλων δυνάμεων: $-Kx - b\dot{x}$
- Η συχνότητα μπορεί να 'ναι οτιδήποτε.
- Εν γένει είναι χρήσιμο να κοιτάξουμε τέτοιες δυνάμεις γιατί κάθε γενική συνάρτηση του t μπορεί να γραφεί συναρτήσει ημιτόνων και συνημίτονων μέσω Fourier ανάλυση.
- Επικεντρωνόμαστε στην $F_d(t) = F\cos\omega_d t$ γιατί μπορούμε να την λύσουμε

$$F = ma \Rightarrow -Kx - b\dot{x} + F_d\cos\omega_d t = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f\cos\omega_d t$$

όπου $\gamma \equiv \dfrac{b}{2m}$ και $\omega_0^2 \equiv \dfrac{\mathrm{K}}{m}$ και $f = \dfrac{F_d}{m}$

Ως συνήθως μαντεύουμε την λύση της μορφής $x(t) = A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t$

Θα μπορούσαμε να πάρουμε οποιαδήποτε άλλη συχνότητα πέρα από την συχνότητα της οδηγού δύναμης.

Αν δούμε ότι δεν έχουμε λύση για ω_d τότε δοκιμάζουμε άλλη συχνότητα.

Αλλά θα δούμε ότι πάντα υπάρχει λύσει για ω_d

Εξαναγκασμένες φθίνουσες ταλαντώσεις

- Η λύση αυτή είναι διαφορετική από τι έχουμε κάνει μέχρι τώρα.
- Εδώ μαντεύουμε την συχνότητα και λύνουμε ως προς τις σταθερές Α και Β ενώ πριν λύναμε για τη συχνότητα και βρίσκαμε Α και Β από αρχικές συνθήκες.

Αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση (F=mα) έχουμε:

$$-\omega_d^2 A\cos\omega_d t-\omega_d^2 B\sin\omega_d t+2\gamma\left(-\omega_d A\sin\omega_d t+\omega_d B\cos\omega_d t\right)+\omega_0^2\left(A\cos\omega_d t+B\sin\omega_d t\right)=f\cos\omega_d t$$

Αν η σχέση ισχύει για κάθε t τότε οι συντελεστές των $\cos\omega_d t$ και $\sin\omega_d t$ πρέπει να συμφωνούν και από τις 2 πλευρές της εξίσωσης:

$$\sin\omega_d t\Rightarrow\omega_d^2 B-2\gamma\omega_d A+\omega_0^2 B=0$$

$$\cos\omega_d t\Rightarrow-\omega_d^2 A+2\gamma\omega_d B+\omega_0^2 A=f$$

Σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους το οποίο δίνει για Α και Β

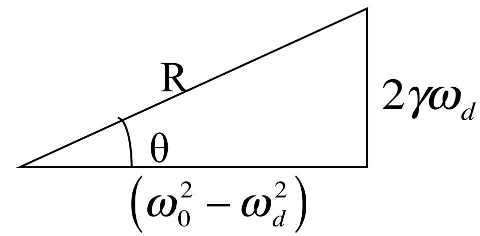
$$A=\frac{\left(\omega_0^2-\omega_d^2\right)}{\left(\omega_0^2-\omega_d^2\right)^2+\left(2\gamma\omega_d\right)^2}\qquad B=\frac{\left(2\gamma\omega_d\right)f}{\left(\omega_0^2-\omega_d^2\right)^2+\left(2\gamma\omega_d\right)^2}$$

Ορίζουμε $R=\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_d^2\right)^2+\left(2\gamma\omega_d\right)^2}$ οπότε $A=\dfrac{\left(\omega_0^2-\omega_d^2\right)^2}{R^2}$ $\qquad B=\dfrac{\left(2\gamma\omega\right)f}{R^2}$

Εξαναγκασμένες φθίνουσες ταλαντώσεις

Γράφουμε την x(t) μετά την εύρεση των A και B:

Ορίζουμε τις ποσότητες: $R \equiv \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega_d\right)^2}$ και θ



$$\tan\theta = \frac{2\gamma\omega_d}{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)}{R} \\ \sin\theta &= \frac{2\gamma\omega_d}{R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{f\cos\theta}{R} \\ B &= \frac{f\sin\theta}{R} \end{aligned} \right.$$

$$x(t) = \frac{f\cos\theta}{R}\cos\omega_d t + \frac{f\sin\theta}{R}\sin\omega_d t \boxed{\Rightarrow x(t) = \frac{f}{R}\cos\left(\omega_d t - \theta\right)}$$

Όλα σ' αυτή την λύση είναι προσδιορισμένα!! Δεν υπάρχουν ελεύθερες παράμετροι. Δεν έχει να κάνει με τις αρχικές συνθήκες του x και υ.

Η πιο γενική λύση της εξίσωσης είναι αυτή που έχει την παραπάνω λύση και την λύση της ομογενούς που βρήκαμε προηγουμένως

$$x(t) = \frac{f}{R}\cos\left(\omega_d t - \theta\right) + \text{ Λύση ομογενούς } \qquad De^{-\gamma t}\cos\left(\Omega t + \varphi\right)$$

Αν υπάρχει απόσβεση τότε ο όρος $e^{-\gamma t}$ της ομογενούς κάνει τον όρο να μηδενίζεται και απομένει μια λύση που ταλαντώνει με συχνότητα ω_d και η οποία είναι ανεξάρτητη από τις αρχικές συνθήκες.

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις - Συντονισμός

Το πλάτος της συγκεκριμένης ταλάντωσης είναι ανάλογο του

$$\frac{1}{R} \equiv \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega_d\right)^2}}$$

- Για συγκεκριμένα γ και ω_d, γίνεται μέγιστο όταν ο πρώτος όρος στην ρίζα είναι μηδέν.

  Αυτό συμβαίνει όταν $\omega_0 = \omega_d$.
- Αν το γ είναι μικρό (μικρή απόσβεση) και ω_0(ιδιοσυχνότητα) είναι κοντά στην ω_d (οδηγούσα συχνότητα) το πλάτος είναι πολύ μεγάλο.
- Όταν $\omega_0 = \omega_d$ λέμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε συντονισμό
- Για συγκεκριμένα γ και ω_0, χρειάζεται κάποια δουλειά για να βρούμε την συχνότητα ω_d στην οποία το πλάτος μεγιστοποιείται. Αυτό που χρειάζεται να κάνουμε είναι να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση

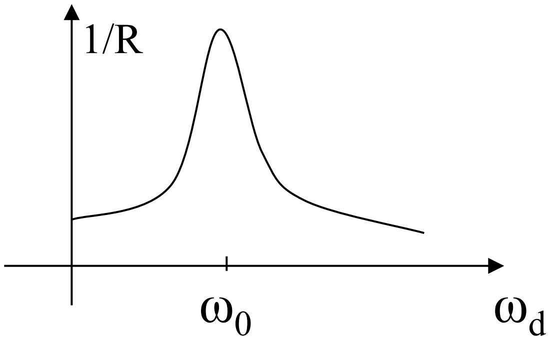
$$\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega_d\right)^2$$

Θέτοντας την παράγωγο ίση με 0 έχουμε $x = \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$

Για μικρά γ (που είναι η συνηθισμένη περίπτωση) έχουμε και πάλι $\omega_0 = \omega_d$

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις - Συντονισμός

Για συγκεκριμένες τιμές των γ και ω_0, η τιμή του $1/R$ συναρτήσει του ω_d μπορεί να μοιάζει με το παρακάτω σχήμα:



Η φάση θ:

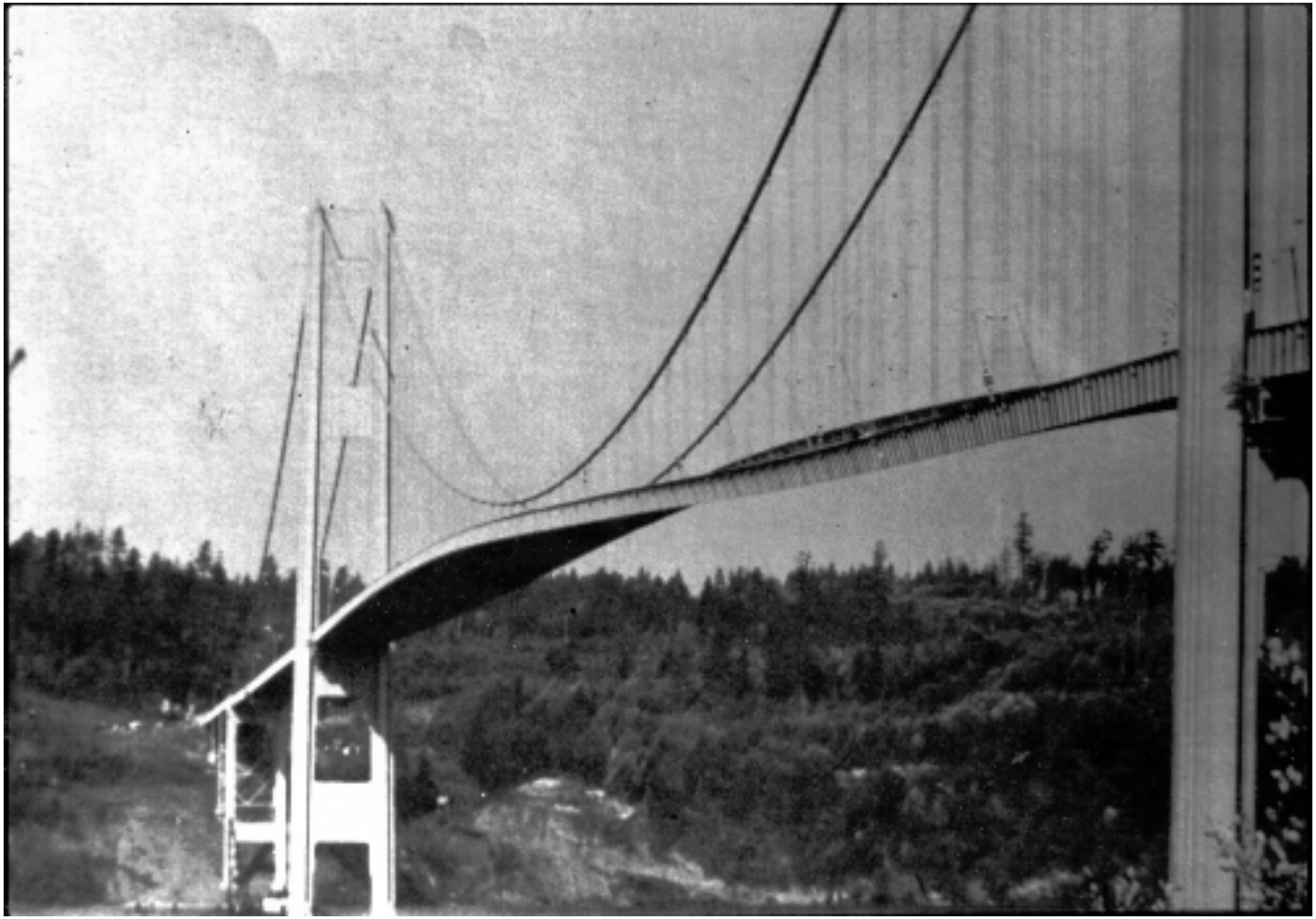
Για συγκεκριμένο ω_0, η φάση θ στην εξίσωση $x(t) = \frac{f}{R}\cos(\omega_d t - \theta)$ μπορεί να υπολογισθεί για ορισμένες περιπτώσεις χρησιμοποιώντας $\tan\theta = \frac{2\gamma\omega_d}{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)}$

$\omega_d \sim 0$ ➔ $\theta \sim 0$ (σε φάση με τη δύναμη)

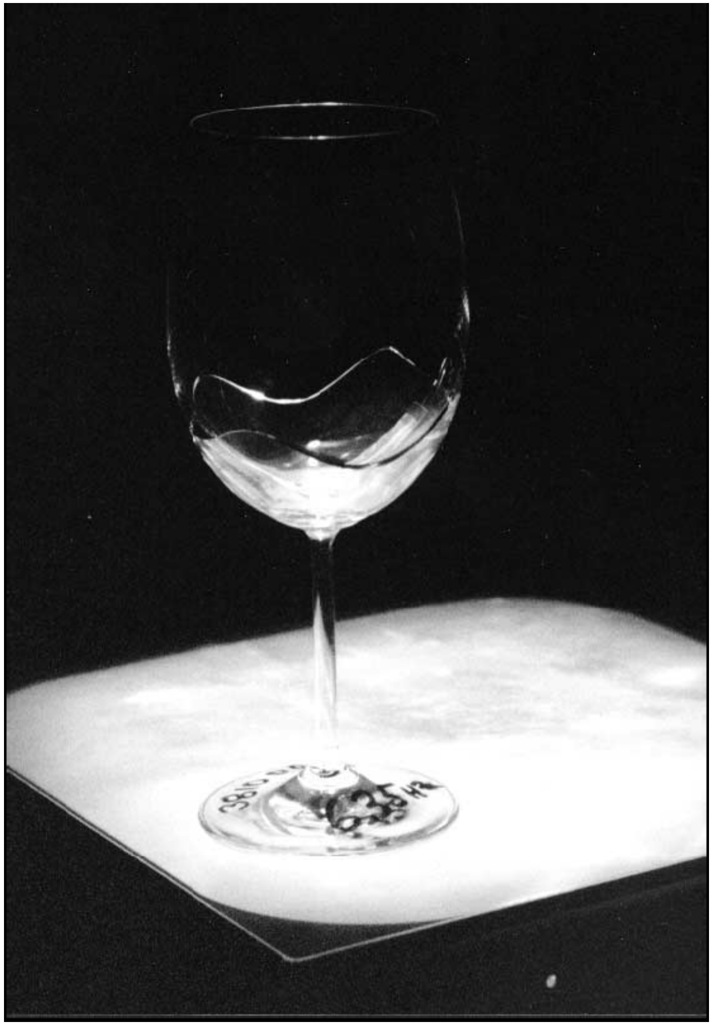
$\omega_d \sim \omega_0$ ➔ $\theta \sim \pi/2$ (δύναμη μέγιστη στο x=0). Εφαρμόζουμε τη δύναμη όταν το σώμα κινείται ταχύτατα $(x = 0)$ ➔ $P = F\upsilon$. Μέγιστη μεταφορά ισχύος ➔ Μέγιστη E ➔ Μέγιστο πλάτος

$\omega_d \to \infty$ ➔ $\theta \sim \pi$ (Η κίνηση δεν είναι σε φάση με την δύναμη). Η μάζα δεν κινείται ιδιαίτερα και το ελατήριο δίνει μικρή δύναμη

Συντονισμός και η γέφυρα Tacoma Narrows



Σπάζοντας ένα ποτήρι



Παραδείγματα

Μια μάζα 3kg τοποθετείται σε ένα ελατήριο σταθεράς k=24N/m. Επιμηκύνεται κατά 5cm και αφήνεται να ταλαντωθεί.

(α) Ποια εξίσωση περιγράφει τη θέση του συναρτήσει του χρόνου

(β) Ποια η ενέργεια του συστήματος

(γ) Ποια η μέγιστη ταχύτητα του συστήματος

(δ) Μετά από πόσο χρόνο έχει και πάλι απομάκρυνση +5cm

(α) Ξέρουμε ότι για t = 0, x=5cm ενώ υ=0m/s. Επομένως: $x(t) = 5\cos(\omega t)$

(β) Η μηχανική ενέργεια διατηρείται. Επομένως τη χρονική στιγμή t = 0

$$E_{\mu\eta\chi} = E_{\kappa\iota\nu.} + E_{\varepsilon\lambda.} = 0 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \times 24 \times \left(5 \times 10^{-2}\right)^2 = 0.3J$$

(γ) Το σώμα έχει μέγιστη ταχύτητα όταν η $E_{\delta\upsilon\nu}$=0, ενώ $E_{\mu\eta\chi}$=σταθ.

$$E_{\mu\eta\chi} = E_{\kappa\iota\nu.} + E_{\varepsilon\lambda.} = 0 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = 0.3J \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2 \times 0.3}{3}} \Rightarrow \upsilon = 0.14m/s$$

(δ) Η γωνιακή συχνότητα του συστήματος είναι:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{24}} \Rightarrow T = 2.2s$$