ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

Τμήμα Φυσικής

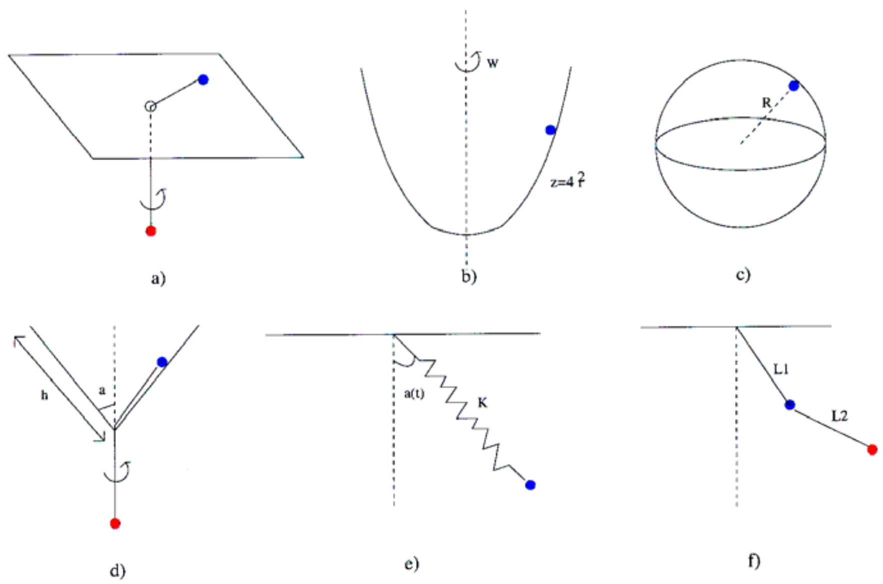
ΦΥΣ 133 – 2η Σειρά Ασκήσεων

8 Φεβρουαρίου 2006

1) Για τα παρακάτω συστηματα αφού βρείτε τις συντεταγμένες των σωματιδίων, γράψτε την Λαγκρανζιανή που περιγράφει το κάθε σύστημα. Ο ορισμός της Λαγκρανζιανής είναι:

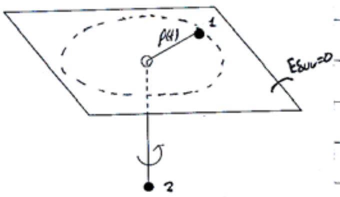
$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V},$$

όπου $\mathcal{T}$ είναι η συνολική κινητική ενέργεια και $\mathcal{V}$ η συνολική δυναμική ενέργεια. Θεωρήστε ότι όλα τα σώματα έχουν μάζα m και όπου υπάρχει νήμα, αυτό έχει σταθερό μήκος l. Επιπλέον βρείτε και τις εξισώσεις κίνησης.



08/02/06 ΦΥΣ 133 - ΛΥΣΕΙΣ 2^ης ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

[1] a)



Καταρχήν, χρειαζόμαστε τις συντεταγμένες που περιγράφουν τη θέση του κάθε σωματιδίου:

$x_1(t) = \rho(t)\cdot\cos\phi(t)$

$y_1(t) = \rho(t)\cdot\sin\phi(t)$

$z_1(t) = 0$ (θεωρούμε ότι το επίπεδο στο οποίο κινείται το σώμα 1 είναι το xy)

Θεωρούμε ότι το σώμα 2 μπορεί να κινείται μόνο πάνω-κάτω ⇒

$x_2(t) = 0$

$y_2(t) = 0$

$z_2(t) = -[\ell - \rho(t)]$

αφού βρίσκεται κάτω από το επίπεδο xy.

Ο ορισμός της Λαγκρανζιανής είναι: $L = T - V$

όπου T: ολική κινητική ενέργεια $T = T_1 + T_2$

$$T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\phi}^2$$

Αποδείχτηκε στο 1^ο set ασκήσεων (πολικές συντεταγμένες)

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_2}{dt}\right)^2\right) = \frac{1}{2}m\Big(\underbrace{\frac{d}{dt}(-\ell+\rho(t))}_{\dot{\rho}}\Big)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2$$

$$\Rightarrow \quad T = T_1 + T_2 = m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\phi}^2 \qquad (1)$$

Ας δούμε τη δυναμική ενέργεια. Η μόνη συνεισφορά είναι από το βάρος. Για ευκολία, επιλέγουμε το επίπεδο δυναμικής ενέργειας μηδέν, να είναι το επίπεδο xy ⇒

$$V = \underbrace{V_1}_{0} + V_2 = mgz_2 = -mg(l-\rho)$$

Τώρα έχουμε όλα τα συστατικά να χρειαζόμαστε για να γράψουμε την L:

$$L = m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\phi}^2 - \left(-mg(l-\rho)\right) =$$
$$= m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\phi}^2 + mg(l-\rho) \qquad (2)$$

Ποιες είναι οι εξισώσεις κίνησης?

Έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας: ρ, ϕ

Αυτό είναι αναμενόμενο για τον εξής λόγο: κανονικά έχουμε 2 βαθμούς ελευθερίας για το σώμα 1 (x_1, y_1 ή ρ, ϕ) και ένα για το σώμα 2 (z_2). Όμως επειδή τα δύο σώματα συνδέονται με σταθερό νήμα μήκους l $\Rightarrow$ Το z_2 και το ρ συνδέονται μέσω της $z_2 = -l + \rho$. Οπότε το z_2 δεν είναι πραγματικός βαθμός ελευθερίας, και μένουν μόνο 2 βαθμοί ελευθερίας.

Συνεπώς για να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης, πρέπει να εφαρμόσουμε στην (2), τις:

Ολική παράγωγος: δρα σε ό,τι εξαρτάται από χρόνο

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \phi} \qquad (3)$$

Μερική Παράγωγος: δρα μόνο στο ϕ, όχι $\dot{\phi}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \rho} \qquad (4)$$

Μερική Παράγωγος: δρα μόνο στο $\dot{\phi}$, όχι ϕ

(3) → (2) :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\rho^2(2\dot{\phi})\right) = 0$$

↳ η L δεν έχει ϕ, μόνο $\dot{\phi}$

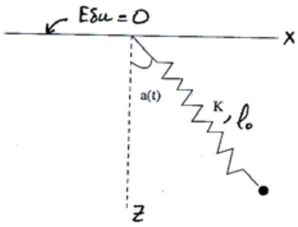
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi}) = 0 \Rightarrow \boxed{m\rho^2\dot{\phi} = \text{σταθερό ως προς χρόνο.}} \qquad (5)$$

Η ποσότητα $m\rho^2\dot{\phi}$ είναι γνωστή ως στροφορμή. και η (5) μας λέει ότι η στροφορμή διατηρείται.

(4) → (2) :

$$\frac{d}{dt}(2m\dot{\rho}) = \frac{1}{2}m(2\rho)\dot{\phi}^2 - mg \Rightarrow$$
$$2m\ddot{\rho} = m\rho\dot{\phi}^2 - mg \Rightarrow \boxed{2\ddot{\rho} = \rho\dot{\phi}^2 - g} \qquad (6)$$

e)



Θεωρούμε ότι το σώμα κινείται πάνω στο επίπεδο της σελίδας (xz) και όχι μέσα-έξω της σελίδας ⇒ $y=0$ πάντα.

Υπάρχουν 2 β.ε.: η γωνιά $a(t)$ και το μεταβλητό μήκος του ελατηρίου $l(t)$.

Η θέση του σωματιδίου περιγράφεται από τις συντεταγμένες:

$$x = l(t)\cdot \sin[a(t)]$$
$$z = -l(t)\cdot \cos[a(t)]$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right) = \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{l}\sin a + l\cos a\cdot\dot{a}\right)^2 + \left(-\dot{l}\cos a + l\cdot\dot{a}\sin a\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\dot{l}^2\sin^2 a + l^2\dot{a}^2\cos^2 a + \cancel{2l\dot{a}\dot{l}\sin a\cos a} + \dot{l}\cos^2 a + l^2\dot{a}^2\sin^2 a - \cancel{2l\dot{a}\dot{l}\sin a\cdot\cos a}\right] = \frac{1}{2}m\dot{l}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{a}^2$$

Η δυναμική ενέργεια έχει δύο συνεισφορές: → το βάρος
↘ τη δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου (F_{Hooke})

$$V = mgz + \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{l}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{a}^2 - \left[-mgl\cos a + \frac{1}{2}k(l-l_0)^2\right]$$

Εξισώσεις κίνησης:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{a}}\right) = \frac{\partial L}{\partial a} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{a}\right) = -mgl\sin a \Rightarrow m\left(2l\cdot\dot{l}\dot{a} + l^2\ddot{a}\right) = -mgl\sin a$$

↓ δρα σε l και $\dot{a}$ γιατί είναι ΟΛΙΚΗ παράγωγος

$$\Rightarrow \boxed{2\dot{l}\dot{a} + l\ddot{a} = -g\sin a}$$

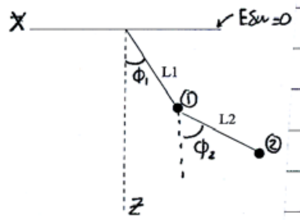
④

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\ell}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ell} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{\ell}\right) = m\ell\dot{a}^2 + mg\cos a + k(\ell - \ell_0) \Rightarrow$$

$$\boxed{m\ddot{\ell} = m\ell\dot{a}^2 + mg\cos a + k(\ell - \ell_0)}$$

f)



Τα δύο σώματα κινούνται στο επίπεδο xz (το επίπεδο της σελίδας) $\Rightarrow$

$$y_1 = y_2 = 0$$

Επειδή τα L_1 και L_2 είναι σταθερά μήκη σημαίνει ότι τα μόνα μεταβλητά είναι τα ϕ_1 και ϕ_2.

$$x_1 = L_1 \cdot \sin\phi_1$$
$$z_1 = -L_1 \cos\phi_1$$
$$x_2 = L_1 \sin\phi_1 + L_2 \sin\phi_2$$
$$z_2 = -L_1\cos\phi_1 - L_2\cos\phi_2$$

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\left(L_1 \cdot \dot{\phi}_1\cos\phi_1\right)^2 + \left(L_1\dot{\phi}_1\sin\phi_1\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}mL_1^2\dot{\phi}_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_2}{dt}\right)^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\left(L_1\dot{\phi}_1\cos\phi_1 + L_2\dot{\phi}_2\cos\phi_2\right)^2 +\right.$$

$$\left. + \left(L_1\dot{\phi}_1\sin\phi_1 + L_2\dot{\phi}_2\sin\phi_2\right)^2\right) = \frac{1}{2}mL_1\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2}mL_2\dot{\phi}_2^2 +$$

$$+ 2L_1L_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\underbrace{\left(\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2\right)}_{\cos(\phi_2-\phi_1)}$$

$$\Rightarrow \quad T = 2\cdot\frac{1}{2} m L_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} m L_2 \dot{\phi}_2^2 + 2 L_1 L_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \quad (1)$$

$$V = V_1 + V_2 = mg z_1 + mg z_2 = mg(-L_1 \cos\phi_1) + mg(-L_1\cos\phi_1 - L_2\cos\phi_2)$$

$$= -2mgL_1\cos\phi_1 - mgL_2\cos\phi_2 \quad (2)$$

Τελικά, χρησιμοποιώντας τις (1) και (2), βρίσκουμε

$$L = mL_1^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} m L_2 \dot{\phi}_2^2 + 2L_1L_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\cos(\phi_2-\phi_1) + 2mgL_1\cos\phi_1 + mgL_2\cos\phi_2 \quad (3)$$

Ας δούμε τώρα τις εξισώσεις κίνησης :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1}\right) = \frac{\partial L}{\partial \phi_1} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(2mL_1^2\dot{\phi}_1 + 2L_1L_2\dot{\phi}_2\cos(\phi_2-\phi_1)\right) = 2L_1L_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\sin(\phi_2-\phi_1) - 2mgL_1\sin\phi_1$$

$$\Rightarrow 2mL_1^2\ddot{\phi}_1 + 2L_1L_2\ddot{\phi}_2\cos(\phi_2-\phi_1) - 2L_1L_2\dot{\phi}_2\cdot\sin(\phi_2-\phi_1)\dot{\phi}_2 + 2L_1L_2\dot{\phi}_2\sin(\phi_2-\phi_1)\dot{\phi}_1$$

$$= 2L_1L_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\sin(\phi_2-\phi_1) - 2mgL_1\sin\phi_1 \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2}\right) = \frac{\partial L}{\partial \phi_2} \Rightarrow$$

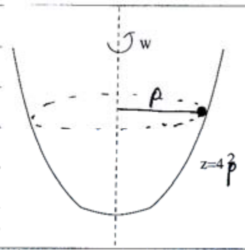
$$2mL_2^2\ddot{\phi}_2 + 2L_1L_2\ddot{\phi}_1\cos(\phi_2-\phi_1) - 2L_1L_2\dot{\phi}_1\sin(\phi_2-\phi_1)\cdot\dot{\phi}_2 + 2L_1L_2\dot{\phi}_1\sin(\phi_2-\phi_1)\dot{\phi}_1 =$$

$$= -2L_1L_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\sin(\phi_2-\phi_1) - mgL_2\cdot\sin\phi_2 \quad (5)$$

⑥

Για τα επόμενα 3 συστήματα, θα δοθούν μόνο οι συντεταγμένες. Από κει και πέρα, η L και οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να βρεθούν με τον ίδιο τρόπο, όπως και στις προηγούμενες ασκήσεις. Δοκιμάστε το και αν υπάρχει πρόβλημα, το συζητούμε.

b)

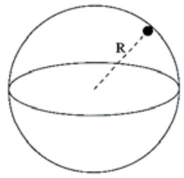


Το σύστημα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω και το σώμα βρίσκεται σε κάποιο σημείο της εσωτερικής επιφάνειας του παραβολοειδούς $z=4\rho^2$:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi \\ y &= \rho\sin\phi \end{aligned}\right\} \quad \text{όπου } \phi=\omega t \ (\text{εξ' ορισμού})$$

$$z = 4\rho^2$$

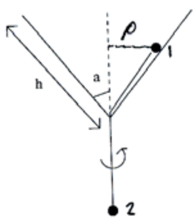
c)



Το σώμα μπορεί να κινείται στην εσωτερική επιφάνεια της σφαίρας $\Rightarrow$ η απόστασή του από το κέντρο είναι R σταθερή $\Rightarrow$

$$x = R\cos\phi\sin\theta$$
$$y = R\sin\phi\sin\theta$$
$$z = R\cos\theta$$

d)



Το σύστημα περιστρέφεται και το σώμα ① κάνει κυκλική κίνηση μεταβλητής ακτίνας ρ, ενώ το σώμα ② μπορεί να κινείται πάνω κάτω.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \rho\cos\phi \\ y_1 &= \rho\sin\phi \\ z_1 &= \rho\tan a \end{aligned}\right) \quad \phi \text{ είναι η γωνία περιστροφής (η πολική γωνία)}$$

$$x_2 = y_2 = 0$$
$$z_2 = -(l - \rho\tan a)$$

ΚΑΛΗ ΔΟΥΛΕΙΑ !!!