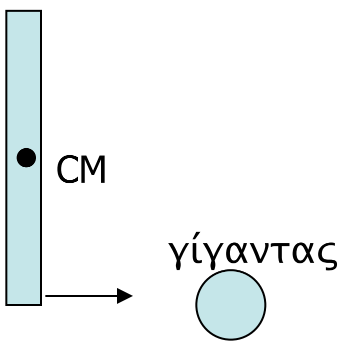
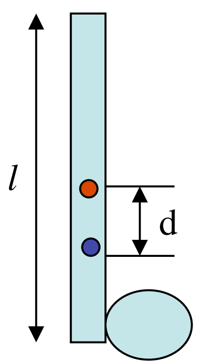
Παράδειγμα διατήρησης στροφορμής

Κολόνα πέφτει σε γίγαντα. Δίνονται η μάζα του γίγαντα M, της κολόνας m, το μήκος της κολόνας l, η ταχύτητα της κολόνας v. Η κίνηση γίνεται σε λεία επιφάνεια.

Πόσο γρήγορα κινείται το CM μετά την κρούση. Ποια η ω ως προς το CM?





Λύση

Από διατήρηση της ορμής έχουμε βρίσκουμε τη v_{cm}:

$$\mathrm{mv} + 0 = (M + m)\mathrm{v}_{\mathrm{CM}} \Rightarrow \mathrm{v}_{\mathrm{CM}} = \frac{\mathrm{mv}}{(M + m)}$$

Η στροφορμή διατηρείται. L γύρω από ποιο άξονα;

Από τη στιγμή που η μάζα του γίγαντα είναι μεγάλη το CM αλλάζει θέση.

Έστω d η απόσταση από το παλιό CM

Το νέο CM θα είναι: $$d = \frac{Ml/2}{M + m}$$

L ράβδου ως προς το νέο CM

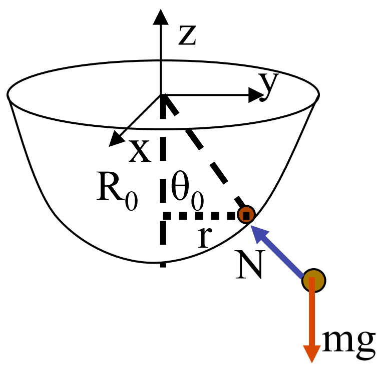
Διατήρηση της στροφορμής: $$L_i = L_f = m\mathrm{v}d + 0 = I_{o\lambda}\omega$$

$$I_{o\lambda} = \left(\mathrm{I}_{\mathrm{CM}}^{\pi\rho\iota\nu} + md^2\right) + M\left(\frac{l}{2} - d\right)^2 \Rightarrow$$

$$L_f = \left(\frac{1}{12}ml^2 + md^2 + M\left(\frac{l}{2} - d\right)^2\right)\omega = m\mathrm{v}d \Rightarrow \omega = \ldots$$

Παράδειγμα στροφορμής

Ένα σώμα είναι ελεύθερο να κινηθεί στο εσωτερικό ενός ημισφαιρικού bowl. Έχει αρχική ταχύτητα v_0 με φορά προς το εσωτερικό της σελίδας. Αν η αρχική γωνία θ_0 είναι όπως δείχνεται στο σχήμα, ποια είναι η μέγιστη v_0 για την οποία το σώμα παραμένει μέσα στο bowl?



Λύση

Η οριακή περίπτωση που το σώμα παραμένει ή όχι στο bowl είναι όταν η ταχύτητα v_0 είναι οριζόντια στο χείλος του πιάτου.

Αν είχε κατακόρυφη συνιστώσα ταχύτητας τότε θα έρχονταν ή θα πήγαινε.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διατήρηση της L_z επειδή οι μόνες δυνάμεις που δρουν είναι το βάρος και η κάθετη δύναμη.

Η κάθετη δύναμη, N, δεν προκαλεί ροπή ως προς το κέντρο της σφαίρας

Το βάρος προκαλεί ροπή πού είναι οριζόντια, $\vec{\tau}_B = \vec{r} \times m\vec{g}$

Επομένως δεν υπάρχει ροπή στην κατακόρυφη διεύθυνση και άρα L_z=σταθ

Μπάλα σε bowl (συνέχεια)

Διατήρηση της L:

$$L_z = m\mathrm{v}_0 R\sin\theta_0 = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow m\mathrm{v}_f R = m\mathrm{v}_0 R\sin\theta_0$$

Όταν η μπάλα είναι στο χείλος του bowl τότε $\mathrm{v}_f = \mathrm{v}_0 \sin\theta_0$ (1)

Διατήρηση της E:

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}_0^2 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_f^2 + mgR\cos\theta_0 \Rightarrow \frac{1}{2}m\left(\mathrm{v}_0^2 - \mathrm{v}_f^2\right) = mgR\cos\theta_0 \Rightarrow (1)$$

$$\left(\mathrm{v}_0^2 - \mathrm{v}_0^2\sin^2\theta_0\right) = 2gR\cos\theta_0 \Rightarrow \mathrm{v}_0^2(1-\sin^2\theta_0) = 2gR\cos\theta_0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{v}_0^2\cos^2\theta_0 = 2gR\cos\theta_0 \Rightarrow \mathrm{v}_0 = \sqrt{\frac{2gR}{\cos\theta_0}}$$ ⟵ Η μέγιστη ταχύτητα

Αν $\theta_0=0$ $\mathrm{v}_0=\sqrt{2gR}$

Αν $\theta_0=90^o$ $\mathrm{v}_0=\infty$

Στατική ισορροπία

- Ισορροπία υπάρχει όταν $\sum \vec{F} = 0 \quad \& \quad \sum \vec{\tau} = 0$

- Οι παραπάνω συνθήκες δηλώνουν ότι η γραμμική και γωνιακή ταχύτητα του συστήματος θα είναι σταθερές ή μηδέν
  - Στην περίπτωση που ω = v = 0 έχουμε «στατική» ισορροπία
  - Μπορούμε να αντιστρέψουμε το επιχείρημα και να πούμε πως αν ω = v = 0 τότε η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών και δυνάμεων είναι μηδέν

- Θα ασχοληθούμε μόνο με περιπτώσεις επίπεδης κίνησης και επομένως μόνο η z-συνιστώσα της ροπής παίζει ρόλο
  - Πρέπει να είμαστε ευρηματικοί και προσεκτικοί για να βρούμε το σύστημα στο οποίο θα εφαρμόσουμε τις παραπάνω σχέσεις

- Οι 2 εξισώσεις είναι ουσιαστικά 6 εξισώσεις για 3-d περιπτώσεις.

  Σε 2 διαστάσεις έχουμε 3 (2 για δυνάμεις και μία 1 για ροπές)

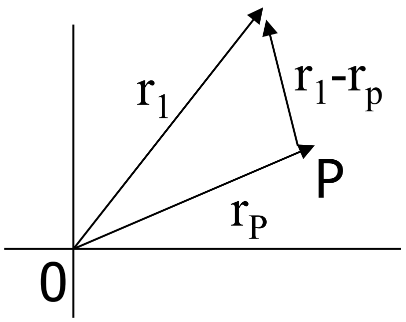
Ένα θεώρημα

Για ένα στερεό στο οποίο $\sum \vec{F} = 0$,αν η $\sum \vec{\tau} = 0$ γύρω από ένα σημείο,

τότε $\sum \vec{\tau} = 0$ γύρω από οποιαδήποτε άλλο σημείο.

Επομένως είμαστε ελεύθεροι να διαλέξουμε το πιο κατάλληλο σημείο για υπολογισμό ροπής.

Απόδειξη



Υποθέτουμε ότι $\sum \vec{\tau} = 0$ γύρω από το σημείο O(0,0)

$$0 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \cdots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n$$

Η ροπή των δυνάμεων ως προς το σημείο P είναι:

$$\vec{\tau}_P = (\vec{r}_1 - \vec{r}_p) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_P) \times \vec{F}_2 + \cdots + (\vec{r}_n - \vec{r}_P) \times \vec{F}_n$$

$$\vec{\tau}_P = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \cdots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n - \vec{r}_p \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\tau}_P = \vec{\tau}_O - \vec{r}_p \times \left(\sum \vec{F}\right) \\ \text{αλλά εξ' υποθέσεως } \vec{\tau}_O = \left(\sum \vec{F}\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\tau}_P = 0 - 0 = 0$$

Κάτι ακόμα από θεωρία – Κέντρο βάρους

- Η δύναμη της βαρύτητας δεν προκαλεί καμιά ροπή γύρω από το κέντρου βάρους ➔ Δέν υπάρχει περιστροφή.

- Κέντρο βάρους είναι το σημείο όπου το ολικό βάρος ενός συστήματος ή σώματος μπορεί να θεωρηθεί ότι ενεργεί:

$$X_{\mathrm{KB}} = \frac{\sum_i F_g^i x_i}{\sum_i F_g^i}$$

- Που είναι το δικό σας?

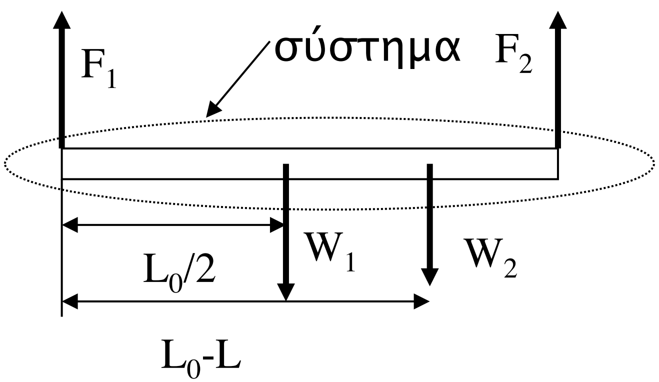
- Μπορείτε να σηκωθείτε από μια καρέκλα χωρίς να περιστρέφεστε/μετακινήστε?

Παράδειγμα

Δύο ζυγαριές στηρίζουν τα άκρα μιας ομοιόμορφης σανίδας μήκους L_0 και μάζας M. Ένα άτομο μάζας m βρίσκεται πάνω στη σανίδα σε απόσταση L στην απόσταση των 2 ζυγαριών. Η σανίδα και το άτομο είναι σε ηρεμία. Ποιο το μέγεθος της δύναμης που ασκεί κάθε ζυγαριά στη σανίδα.

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι η σανίδα είναι το σύστημά μας. Οι δυνάμεις είναι:



Το βάρος της σανίδας W_1, το βάρος του ατόμου W_2, οι δυνάμεις των ζυγαριών F_1 και F_2.

$$F_1 + F_2 - W_1 - W_2 = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 = (m + M)g$$

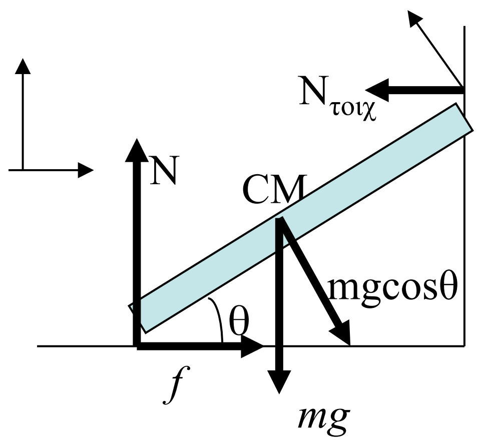
Η δεύτερη συνθήκη ισορροπίας είναι ότι η ολική ροπή ως προς ένα σημείο να είναι μηδέν.

Διαλέγουμε σα σημείο το ένα άκρο της ράβδου ώστε να μηδενίσουμε την ροπή μιας δύναμης. Έστω το F_1.

$$\left.\begin{aligned}
\vec{\tau}_{\alpha\tau} &= (L_0 - L)(-mg) = -(L_0 - L)(mg) \\
\vec{\tau}_{\sigma\alpha\nu} &= \frac{L_0}{2}(-\mathrm{M}g) = -\frac{L_0}{2}\mathrm{M}g \\
\vec{\tau}_{\zeta\upsilon\gamma} &= F_2 L_0
\end{aligned}\right\}
\quad
\begin{aligned}
&\vec{\tau}_{\alpha\tau} + \vec{\tau}_{\sigma\alpha\nu} + \vec{\tau}_{\zeta\upsilon\gamma} = 0 \Rightarrow \\
&\vec{\tau}_{o\lambda} = -(L_0 - L)(mg) - \frac{L_0}{2}Mg + F_2 L_0 = 0
\end{aligned}$$

Στατική ισορροπία

- Γενικά αυτό που θα προσπαθούμε να κάνουμε είναι να διαλέγουμε σα σημείο αναφοράς, το σημείο στο οποίο ενεργούν οι περισσότερες δυνάμεις, γιατί τότε δεν υπάρχει μοχλοβραχίονας και επομένως οι ροπές είναι μηδέν.
  Αυτή η συνθήκη κάνει τις εξισώσεις πολύ πιο απλές.
- Παράδειγμα: Σκάλα μήκους *l* ακουμπά σε τοίχο.
  Ποια η θ_{min} πριν γλιστρήσει



$$(a)\quad \sum F_x = f - N_t = 0$$

$$(\beta)\quad \sum F_y = N - Mg = 0$$

Ροπές ως προς το σημείο επαφής σκάλας εδάφους

$$(\gamma)\quad \sum I_z = N_{\tau o\iota\chi o\upsilon}\, l\sin\theta - Mg\frac{l}{2}\cos\theta = 0$$

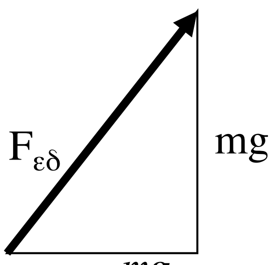
Από (γ): $N_{\tau o\iota\chi}\, l\sin\theta = Mg\frac{l}{2}\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = Mg\frac{l}{2}\frac{1}{N_{\tau o\iota\chi}\, l}$

Από (α): $N_{\tau o\iota\chi} = f_{\max} = \mu_s Mg$

Επομένως $\tan\theta_{\min} = \frac{Mg}{2}\frac{1}{\mu_s Mg} \Rightarrow \tan\theta_{\min} = \frac{1}{2\mu_s}$

Σκάλα σε τοίχο - σχόλια

Η αντίδραση του εδάφους στην σκάλα είναι: $\Rightarrow \tan\phi = \dfrac{mg}{\dfrac{mg}{2\tan\theta}} = 2\tan\theta$



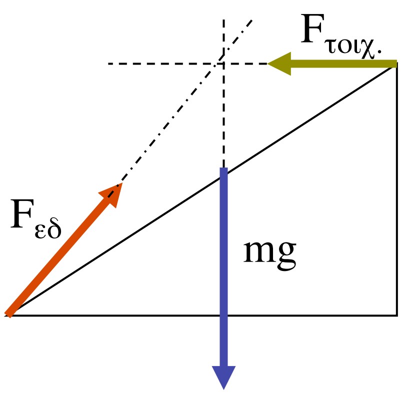
$f = \dfrac{mg}{2\tan\theta}$

Δηλαδή η δύναμη δεν έχει κατεύθυνση κατά μήκος της σκάλας

Αντίθετα, έχει διεύθυνση προς τα πάνω με κλίση διπλάσια από την κλίση της σκάλας.

Υπάρχει ένας cool τρόπος να δούμε γιατί αυτό ισχύει

Σχεδιάζουμε τις γραμμές όλων των δυνάμεων.



Το γεγονός ότι tanφ=2tanθ υποδηλώνει ότι και οι 3 γραμμές των δυνάμεων περνούν από το ίδιο σημείο!!

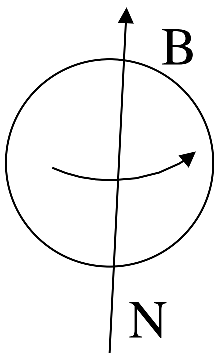
Η τομή των γραμμών πρέπει να ισχύει για όλες τις περιπτώσεις που περιλαμβάνουν 3 δυνάμεις, γιατί αν δεν ήταν αληθινό, τότε μια δύναμη θα προκαλούσε ροπή ως προς το σημείο τομής των άλλων δύο.

Αλλά τότε θα είχαμε $\sum \vec{\tau} \neq 0$

Επομένως 3 δυνάμεις ➔ οι γραμμές τους τέμνονται σε ένα σημείο

Παραδείγματα:

Η γη είναι μια ομοιόμορφη σφαίρα με ακτίνα $R=6.4\times10^6$m και $M=5.98\times10^{24}$ kg. Ποια είναι η στροφορμή της?

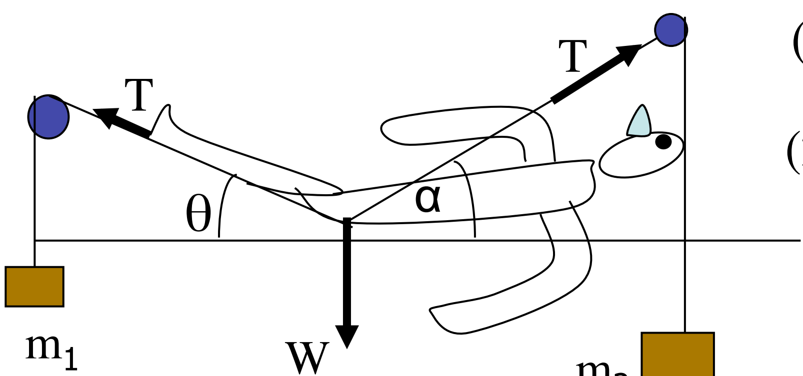


$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

$$L = I\omega = 7.1\times10^{33}\, kgm^2/s$$

Διεύθυνση? Η γη γυρνά αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Παράδειγμα νοσοκομείου



$$(1) \quad \sum F_x = 0 = -m_1 g\cos\theta + m_2 g\cos a$$

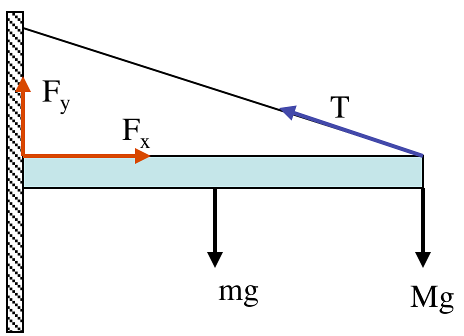
$$(2) \quad \sum F_y = 0 = m_1 g\sin\theta + m_2 g\sin a - W$$

Οι ροπές ως προς τη λεκάνη? 0

Επομένως διαιρούμε (1)/(2) και συνεχίζουμε ανάλογα με τι δίνεται $m_1,\theta \rightarrow m_2,\ \alpha$

Παράδειγμα

Μια οριζόντια δοκός μάζας m είναι στερεωμένη στο αριστερό της άκρο σε σημείο ώστε να μπορεί να περιστρέφεται. Το δεξί της άκρο κρατά μια μεγάλη μάζα M, και στο σημείο αυτό στηρίζεται με τη βοήθεια ενός χοντρού σύρματος το οποίο σχηματίζει γωνία 30° με την οριζόντια διεύθυνση. Το σύρμα είναι στερεωμένο στο τοίχο. Να βρεθεί η τάση στο σύρμα καθώς και η οριζόντια και κατακόρυφη δύναμη στο σημείο στήριξης της δοκού στο τοίχο.



Λύση

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι:

$\mathrm{T}, \mathrm{Mg}, \mathrm{mg}, \mathrm{F_x}$ και $\mathrm{F_y}$

Θεωρώντας τις ροπές ως προς το σημείο στήριξης της δοκού θα έχουμε:

$$\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow Mgl + mg\frac{l}{2} - Tl\sin 30^o = 0 \Rightarrow \frac{T}{2} = Mg + \frac{mg}{2} \Rightarrow T = g(2M+m)$$

Η δεύτερη συνθήκη ισορροπίας στερεού είναι:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

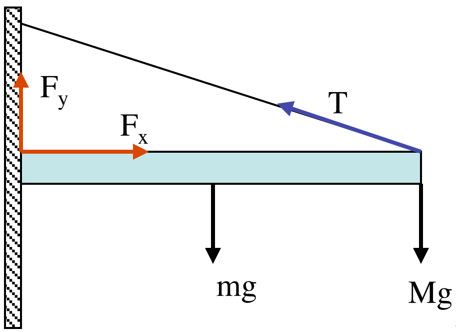
$$F_x - T_x = 0 \Rightarrow F_x = T\cos 30^o \Rightarrow F_x = \frac{\sqrt{3}}{2} g(2M+m)$$

$$F_y + T_y - mg - Mg = 0 \Rightarrow F_y = g(M+m) - T\sin 30^o$$

$$\Rightarrow F_y = g(M+m) - \frac{g}{2}(2M+m) \Rightarrow F_y = mg$$

Παράδειγμα

Μια οριζόντια δοκός μάζας m είναι στερεωμένη στο αριστερό της άκρο σε σημείο ώστε να μπορεί να περιστρέφεται. Το δεξί της άκρο κρατά μια μεγάλη μάζα M, και στο σημείο αυτό στηρίζεται με τη βοήθεια ενός χοντρού σύρματος το οποίο σχηματίζει γωνία 30° με την οριζόντια διεύθυνση. Το σύρμα είναι στερεωμένο στο τοίχο. Να βρεθεί η τάση στο σύρμα καθώς και η οριζόντια και κατακόρυφη δύναμη στο σημείο στήριξης της δοκού στο τοίχο.



Λύση

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι:

$\mathrm{T}, \mathrm{Mg}, \mathrm{mg}, \mathrm{F_x}$ και $\mathrm{F_y}$

Θεωρώντας τις ροπές ως προς το σημείο στήριξης της δοκού θα έχουμε:

$$\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow Mgl + mg\frac{l}{2} - Tl\sin 30^o = 0 \Rightarrow \frac{T}{2} = Mg + \frac{mg}{2} \Rightarrow T = g(2M + m)$$

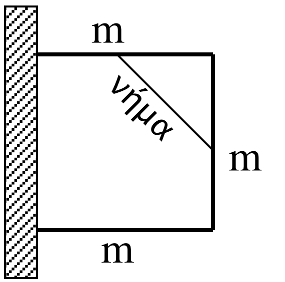
Η δεύτερη συνθήκη ισορροπίας στερεού είναι:

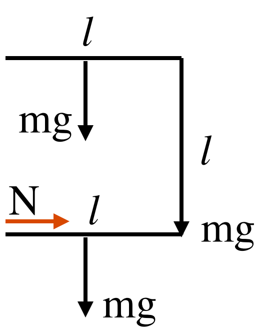
$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} F_x - T_x = 0 \Rightarrow F_x = T\cos 30^o \Rightarrow F_x = \frac{\sqrt{3}}{2} g(2M + m) \\ F_y + T_y - mg - Mg = 0 \Rightarrow F_y = g(M + m) - T\sin 30^o \end{array}$$

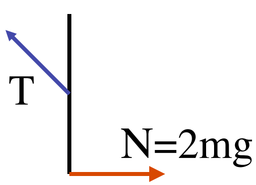
$$\Rightarrow F_y = g(M + m) - \frac{g}{2}(2M + m) \Rightarrow F_y = mg$$

Παράδειγμα στατικής ισορροπίας

Τρεις ράβδοι μάζας m σχηματίζουν τις τρεις πλευρές ενός τετραγώνου όπως στο σχήμα. Τα σημεία σύνδεσης μεταξύ των ραβδών με το τοίχο είναι λεία. Τα μέσα της υψηλότερης και κατακόρυφης ράβδου συνδέονται με ένα αβαρές νήμα. Ποια είναι η τάση στο νήμα.







Λύση

Κοιτάζουμε τις ροπές όλου του συστήματος ως προς το σημείο στήριξης της πάνω ράβδου

Οι εξωτερικές δυνάμεις και ροπές τους που ενδιαφέρουν είναι

$$mg\frac{l}{2} + mgl + mg\frac{l}{2} - Nl = 0 \Rightarrow Nl = 2mgl \Rightarrow N = 2mg$$

Εξετάζουμε τη συνισταμένη των δυνάμεων στη κατώτερη ράβδο

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N - R_x = 0 \Rightarrow N = R_x = 2mg$$

Η δύναμη R_x εξασκείται από την κατακόρυφο ράβδο

Σύμφωνα με το 3ο νόμο του Newton και η κατώτερη ράβδος ασκεί ίση και αντίθετη δύναμη στην κατακόρυφο ράβδο R_x=2mg

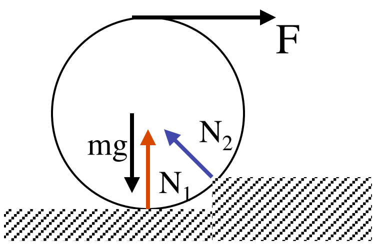
Κοιτάζουμε τις ροπές στην κατακόρυφο ράβδο ως προς το ανώτερο άκρο της.

Οι ενδιαφέρουσες ροπές είναι:

$$T\frac{l}{2}\cos 45^o = Nl \Rightarrow T\frac{\sqrt{2}}{4} = N \Rightarrow T = \frac{4\sqrt{2}}{2}2mg \Rightarrow T = 4\sqrt{2}mg$$

Παράδειγμα - ισορροπία στερεού

Μια συμπαγής σφαίρα μάζας M και ακτίνας R είναι ακίνητη στηριζόμενη σε ένα σκαλοπάτι ύψους h (h<<R). Ποια μέγιστη οριζόντια δύναμη F μπορούμε να ασκήσουμε στο ανώτερο σημείο της σφαίρας χωρίς να ανεβάσουμε τη σφαίρα στο σκαλοπάτι;



Λύση

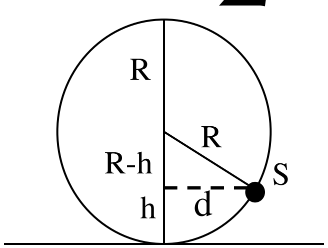
Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα είναι: $\mathrm{F}, \mathrm{mg}, \mathrm{N}_1$ και N_2

Για τη μέγιστη δύναμη F η αντίδραση $N_1 = 0$
(η σφαίρα είναι έτοιμη να ανέβει το σκαλοπάτι)

Αφού η σφαίρα είναι σε ισορροπία (στο σκαλοπάτι) τότε:

$\sum \vec{\tau} = 0$ (ως προς το σκαλοπάτι για να μηδενίσουμε την ροπή της άγνωστης δύναμης N_2)

Οπότε: $\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \tau_{mg} - \tau_F = 0 \Rightarrow mgd - Fl = 0 \Rightarrow mgd = Fl$



Αλλά $l = 2R - h$

$d = \sqrt{R^2 - (R-h)^2}$

$\Rightarrow mg\sqrt{2Rh - h^2} = F(2R - h)$

$$\Rightarrow F = mg\frac{\sqrt{h(2R-h)}}{(2R-h)} \Rightarrow F = mg\sqrt{\frac{h}{(2R-h)}}$$