

## ΦΥΣ. 211 ΕΡΓΑΣΙΑ # 5

**Επιστροφή την Τετάρτη 2/3/2016 στο τέλος της διάλεξης**

- Ένα ομοιογενές στεφάνι, ακτίνας  $a$ , και μάζας  $M$ , μπορεί να γλυστρά ελεύθερα σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια. Ένα έντομο μάζας  $m$ , κινείται στην περιφέρεια του στεφανιού. Το σύστημα είναι ακίνητο όταν το έντομο αρχίζει να κινείται. Ποια η γωνία που έχει καλύψει το στεφάνι όταν το έντομο έχει κάνει μια πλήρη περιστροφή του στεφανιού;
  - Το σφαιρικό εκκρεμές αποτελείται από ένα σώμα μάζας  $m$ , δεμένο σε ακλόνητο σημείο μέσω ενός αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους  $a$ , και κινείται κάτω από την επίδραση της δύναμης της βαρύτητας. Διαφέρει από το απλό μαθηματικό εκκρεμές στο γεγονός ότι η κίνησή του δεν είναι περιορισμένη σε κατακόρυφο επίπεδο. Δείξτε ότι η Lagrangian του συστήματος είναι:  $L = \frac{1}{2} m a^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + m g a \cos \theta$ , όπου  $\theta$  και  $\phi$  οι πολικές γωνίες φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Να βρεθεί η Hamiltonian και οι εξισώσεις του Hamilton και να προσδιοριστούν τυχόν κυκλικές συντεταγμένες.
- 
- Η Lagrangian για ένα σωματίδιο μάζας  $m$  και φορτίου  $e$  το οποίο κινείται μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο  $\{\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t)\}$  δίνεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες από την σχέση:  $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} - e \varphi(\vec{r}, t) + e \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$ , όπου  $\vec{r} = (x, y, z)$  και  $\{\varphi, \vec{A}\}$  είναι τα ηλεκτροδυναμικά δυναμικά των πεδίων  $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ . Δείξτε ότι η αντίστοιχη Hamiltonian δίνεται από την σχέση:  $H(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{(\vec{p} - e \vec{A}) \cdot (\vec{p} - e \vec{A})}{2m} + e \varphi$ , όπου  $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$  είναι οι γενικευμένες ορμές συζυγείς των συντεταγμένων  $(x, y, z)$ . Σημειώστε ότι  $\vec{p}$  δεν είναι η κανονική γραμμική ορμή του σωματιδίου. Κάτω από ποιές συνθήκες η Hamiltonian,  $H$ , διατηρείται;
  - Ένα σώμα κινείται σε παραβολική τροχιά στο βαρυτικό πεδίο ενός πλανήτη, και περνά ακριβώς εφαπτομενικά από την επιφάνεια του πλανήτη στο σημείο της εγγύτερης προσέγγισης. Ο πλανήτης έχει πυκνότητα  $\rho$ . Ποια η στροφορμή του σώματος ως προς το κέντρο του πλανήτη, την στιγμή που περνά εφαπτομενικά από την επιφάνεια του πλανήτη;
  - Ένα σωματίδιο κινείται μέσα σε δυναμικό της μορφής  $V = -V_0 e^{-\lambda^2 r^2}$ . (α) Δεδομένης της στροφορμής  $L$ , να βρεθεί η ακτίνα της σταθερής κυκλικής τροχιάς. (β) Αν η στροφορμή  $L$  είναι πολύ μεγάλη, τότε δεν υπάρχει κυκλική τροχιά. Ποια είναι η μέγιστη τιμή της στροφορμής για την οποία υπάρχει κυκλική τροχιά; Έστω  $r_0$  η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς για αυτή την οριακή περίπτωση. Ποιά θα είναι η τιμή του  $V_{eff}(r_0)$ ;
  - Ένα σωματίδιο μάζας  $m$  κινείται σε δυναμικό που δίνεται από την σχέση  $V(r) = \beta r^k$  και έστω ότι η στροφορμή του είναι  $L$ . (α) Βρείτε την ακτίνα,  $r_0$ , της κυκλικής τροχιάς. (β) Αν δοθεί στο σωματίδιο μια μικρή ώθηση ώστε η τροχιά να ταλαντώνεται γύρω από την τιμή  $r_0$ , βρείτε την συχνότητα  $\omega_r$  των μικρών ταλαντώσεων ως προς  $r$ . (γ) Ποιος είναι ο λόγος  $\omega_r/\omega_\theta$  όπου

$\omega_\theta = \dot{\theta}$  είναι η συχνότητα της σχεδόν κυκλικής τροχιάς. Ο λόγος αυτός εξαρτάται από την τιμή της σταθεράς  $k$ . Δώστε μερικές περιπτώσεις τιμών  $k$ , για τις οποίες ο λόγος είναι ρητός, δηλαδή η διαδρομή της κυκλικής τροχιάς είναι κλειστή (κλείνει δηλαδή πίσω στο σημείο που ξεκίνησε).

7. Ένα σωματίδιο κινείται σε ένα δυναμικό της μορφής  $V(r) = \beta r^2$ . Δείξτε ότι η τροχιά του σωματιδίου είναι έλλειψη.