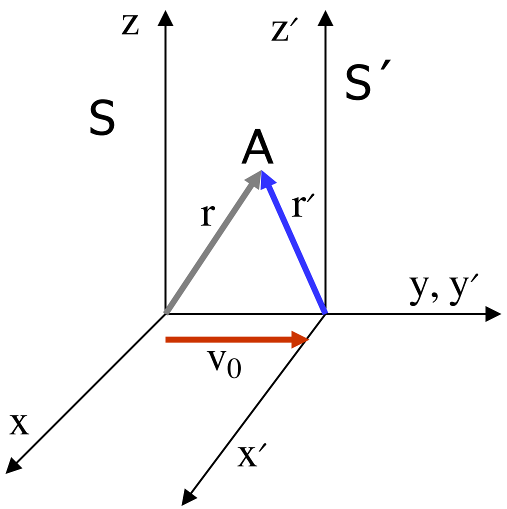
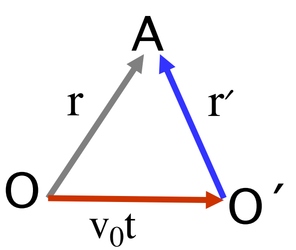
Μη αδρανειακά συστήματα – Φαινομενικό βάρος

Αδρανειακά συστήματα

Έστω δύο συστήματα αναφοράς S (αδρανειακό) και S΄(κινούμενο με σταθερή ταχύτητα v_0 ως προς το αδρανειακό σύστημα)





Το σύστημα S κινείται με ταχύτητα $-v_0$ ως προς το S΄

Τα διανύσματα θέσης ενός σώματος όπως μετρούνται από παρατηρητές στα 2 συστήματα είναι r και r΄

Μπορούμε να περιγράψουμε τη θέση του σώματος A στο σύστημα S΄ συναρτήσει της θέσης του στο S:

$$\vec{r}_A = \vec{r}\,'_A + \vec{\mathrm{v}}_0 t \qquad \vec{r}\,'_A = \vec{r}_A - \vec{\mathrm{v}}_0 t$$

Γαλιλαϊκός μετασχηματισμός θέσης

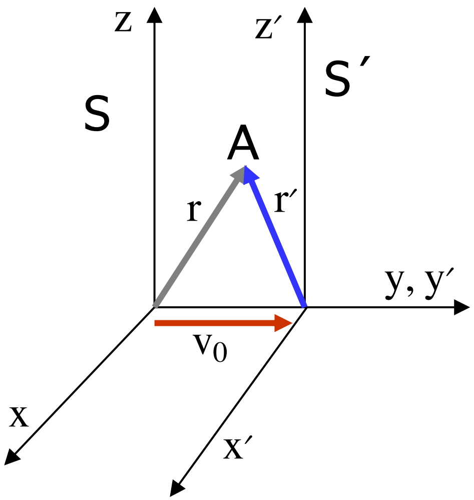
$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'_A}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\mathrm{v}}_0 t\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\mathrm{v}}_A = \vec{\mathrm{v}}\,'_A + \vec{\mathrm{v}}_0 \qquad \vec{\mathrm{v}}\,'_A = \vec{\mathrm{v}}_A - \vec{\mathrm{v}}_0$$

Γαλιλαϊκός μετασχηματισμός ταχύτητας

Μη αδρανειακά συστήματα

Έστω ότι το S΄αποκτά επιτάχυνση $α_0$



Ο παρατηρητής S΄ μετρά μια επιτάχυνση:

$$r_A = r'_A + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \Rightarrow a_A = \frac{d^2 r'_A}{dt^2} + a_0 \Rightarrow a_A = a'_A + a_0$$

$$\Rightarrow a' = a - a_0$$

Η δύναμη που μετρά ο παρατηρητής S΄ θα είναι:

$$F' = ma' = ma - ma_0 \quad \Rightarrow F' = F - ma_0$$

Αλλά η δύναμη ma είναι η πραγματική δύναμη F (μετρούμενη ως προς το αδρανειακό σύστημα)

Μπορούμε να γράψουμε: $F' = F + F_{υπ.}$ όπου $F_{υπ.} \equiv -ma_0$ ψευδο–δύναμη

Η ψευδο-δύναμη ή δύναμη αδράνειας δεν είναι δύναμη που εμφανίζεται λόγω της αλληλεπίδρασης μεταξύ σωμάτων αλλά λόγω της επιτάχυνσης του συστήματος αναφοράς

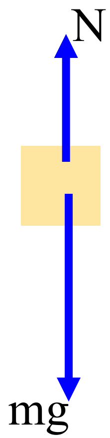
Φαινομενικό βάρος

Φανταστείτε ότι βρίσκεστε μέσα σε ένα ανελκυστήρα που κινείται με μια επιτάχυνση α και στέκεστε πάνω σε μια ζυγαριά

- Ποια θα είναι η ένδειξη της ζυγαριάς;

Σχεδιάστε το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος

Από το 2ο νόμο του Newton



$$N - mg = ma \;\; \Rightarrow N = m\left(g + a\right)$$

Φαινομενικό βάρος είναι η κάθετη δύναμη από τη ζυγαριά ή το έδαφος

- Αν ο ανελκυστήρας βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση, α=-g τότε N = 0

Για τον παρατηρητή στον ανελκυστήρα:

- Βρίσκεται σε ισορροπία: $\sum \vec{F} = \vec{0}$
- Ξέρει το βάρος του: mg
- Βλέπει την ένδειξη της ζυγαριάς, *N*, μεγαλύτερη
- Κάποια δύναμη ασκείται πάνω του:

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_X = \vec{0} \Rightarrow F_X = -N - \left(-mg\right) = -N + mg \Rightarrow F_X = -N + mg < 0$$

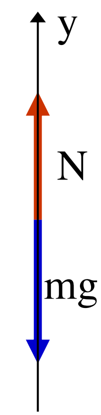
φορά προς τα κάτω σαν κάτι να σας πιέζει

Φαινομενικό βάρος

Φανταστείτε ότι βρίσκεστε μέσα σε ένα ανελκυστήρα που κινείται προς τον 30ο όροφο ενός κτιρίου. Καθώς πλησίαζετε στο 30ο όροφο ο ανελκυστήρας ελαττώνει ταχύτητα για να σταματήσει το βάρος σας εμφανίζεται να είναι:

(Α) Μεγαλύτερο (Β) Μικρότερο (Γ) Ίδιο με το κανονικό

$$\sum \vec{F} = -ma_y \Rightarrow N - mg = -ma_y \Rightarrow N = m\left(g - a_y\right) < 0$$



Για τον παρατηρητή στον ανελκυστήρα:

- Βρίσκεται σε ισορροπία: $\sum \vec{F} = \vec{0}$
- Ξέρει το βάρος του: mg
- Βλέπει την ένδειξη της ζυγαριάς, *N*, μικρότερη
- Κάποια δύναμη ασκείται πάνω του:

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_X = \vec{0} \Rightarrow F_X = -N - \left(-mg\right) = -N + mg \Rightarrow F_X = -N + mg > 0$$ φορά θετική

Αισθάνεστε ελαφρύτεροι γιατί θα πρέπει να υπάρχει μία δύναμη προς τα πάνω που ασκείται πάνω σας και κάνει την ένδειξη της ζυγαριάς μικρότερη.

Φαινόμενο βάρος

Ένα άτομο στέκεται σε ζυγαριά μέσα σε ανελκυστήρα. Το πραγματικό βάρος του ατόμου είναι 130kg αλλά η ένδειξη της ζυγαριάς είναι τώρα 145kg

- Προς ποια κατεύθυνση κινείται ο ανελκυστήρας;

(Α) Προς τα πάνω (Β) Προς τα κάτω (Γ) Δεν μπορούμε να πούμε

- Ποια η διεύθυνση της επιτάχυνσης του ανελκυστήρα;

(Α) Προς τα πάνω (Β) Προς τα κάτω (Γ) Δεν μπορούμε να πούμε

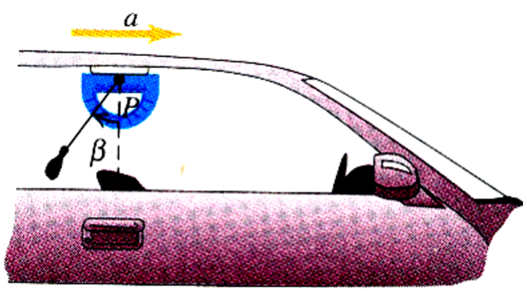
$$N = m\left(g + a_y\right)$$

Το βάρος αυξάνει όταν η επιτάχυνση έχει φορά προς τα πάνω ενώ ελατώνεται όταν η επιτάχυνση έχει φορά προς τα κάτω

Επιταχυνσιόμετρο

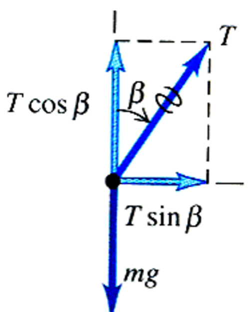
Βρίσκεστε σε ένα αυτοκίνητο το οποίο είναι αρχικά σε ηρεμία. Από την οροφή κρεμάτε μια σφαίρα με ένα αβαρές νήμα. Το αυτοκίνητο αρχίζει να επιταχύνει και το νήμα αποκλίνει κατά μια γωνία β.

➡ Ποια η επιτάχυνση του αυτοκινήτου

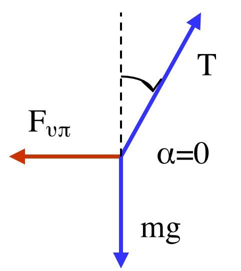


Σε ένα αδρανειακό σύστημα το διάγραμμα ελευθέρου σώματος θα δώσει:

$$N = m\left(g + a_y\right) \qquad \sum F_y = T\cos\beta - mg$$



αδρανειακό



μη αδρανειακό

Η σφαίρα αποκλίνει άρα θεωρείτε ότι υπάρχει μια δύναμη στην x-διεύθυνση και άρα επιτάχυνση

$$T\sin\beta = ma_x \qquad (1)$$

Στη y-διεύθυνση δεν υπάρχει κάποια δύναμη

$$T\cos\beta - mg = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\beta} \xrightarrow{(1)} a_x = g\frac{\sin\beta}{\cos\beta} \Rightarrow a_x = g\tan\beta$$

Για παρατηρητή στο αυτοκίνητο η υποθετική δύναμη δρα σαν οριζόντια βαρυτική δύναμη. Το σώμα είναι σε ισορροπία οπότε:

$$T\cos\beta - mg = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\beta} \quad \text{και} \quad \left.\begin{array}{l} T\sin\beta - ma_x = 0 \\ F_{\upsilon\pi} = -ma_x \end{array}\right\} \Rightarrow a_x = g\frac{\sin\beta}{\cos\beta} \Rightarrow a_x = g\tan\beta$$

10ο Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

- Θα στείλετε τη φωτογραφία της απάντησής σας στο fotis@ucy.ac.cy

Έτοιμοι

Μεταβαλόμενες Δυνάμεις

Διαφορετικό είδος F=ma προβλήματος

Υπάρχουν 2 βασικά είδη προβλημάτων με δυνάμεις:

- Δίνεται η φυσική κατάσταση και χρειάζεται να σχεδιάσουμε τις δυνάμεις (συνήθως σταθερές) και να χρησιμοποιήσουμε τον 2ο νόμο του Newton F=ma
- Δίνεται μία (συνήθως μη σταθερή) δύναμη αναλυτικά και χρειάζεται να ολοκληρώσουμε για να βρούμε το x(t).

Θα δούμε ένα τέτοιο παράδειγμα:

- Μια μικρή επανάληψη:

Όταν α = σταθ. $\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + at$ $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0 + \mathrm{v}_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν από:

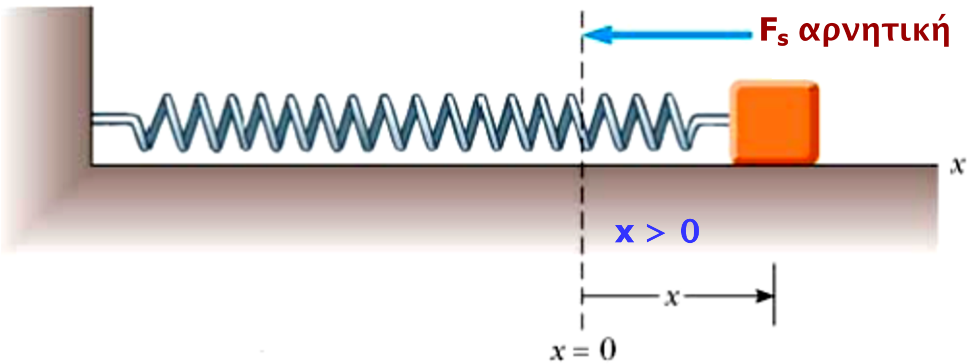
$$a = \frac{d\mathrm{v}}{dt} \Rightarrow adt = d\mathrm{v} \Rightarrow a\int_0^t dt = \int_{\mathrm{v}_0}^{\mathrm{v}} d\mathrm{v} \Rightarrow at = \mathrm{v} - \mathrm{v}_0 \Rightarrow \mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + at$$

Μετά μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathrm{v} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \mathrm{v}_0 + at = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^t (\mathrm{v}_0 + at)dt = \int_{x_0}^{x} dx \Rightarrow \mathrm{v}_0 t + \frac{1}{2}at^2 = x - x_0$$

$$x = x_0 + \mathrm{v}_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Ελατήρια και ο νόμος του Hooke



Η δύναμη που αναπτύσσεται από το ελατήριο

Δύναμη επαναφοράς $\boxed{F_s = -k\Delta s}$ Νόμος του Hooke

Δs η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας $\Delta s = x - x_{ισορ.}$

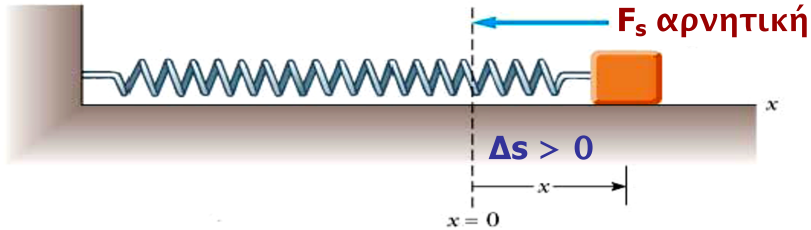
x είναι η θέση του σώματος

$x_{ισορ,}$ είναι η θέση ισορροπίας του ελατηρίου

Προσοχή: Συχνά, σύστημα αναφοράς επιλέγεται ώστε $x_{ισορ.} = 0$
αλλά όχι πάντα

k σταθερά χαρακτηριστική του ελατηρίου
Μετρά τη σκληρότητα του ελατηρίου
Δεν εξαρτάται από το μήκος του ελατηρίου αλλά την μετατόπιση Δs

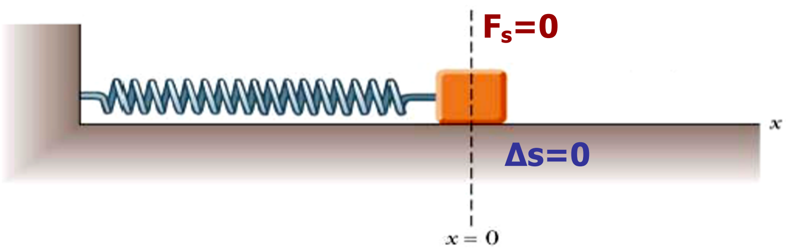
Νόμος του Hooke (συνέχεια)



Δs > 0

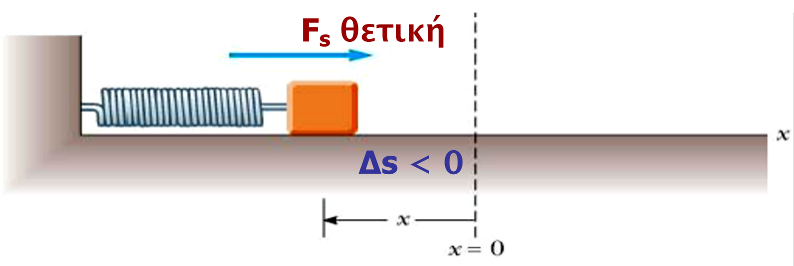
το ελατήριο επιμηκύνεται

δύναμη είναι αρνητική



Δs = 0 σημείο ισορροπίας

δύναμη είναι μηδέν



Δs < 0

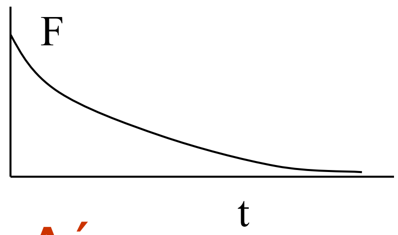
το ελατήριο συσπειρώνεται

δύναμη είναι θετική

- Η δύναμη επαναφοράς έχει φορά πάντοτε αντίθετη προς τη φορά απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας

Ένα πιο πολύπλοκο πρόβλημα

Ας υποθέσουμε ότι η δύναμη δίνεται από τη σχέση $F = F(t) = mae^{-\beta t}$
Δηλαδή είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου



Από τη στιγμή που ξέρουμε τη δύναμη σε κάθε χρονική στιγμή μπορούμε να υπολογίσουμε το x(t).

Ζητούμενο: Να βρούμε x(t) και v(t) υποθέτοντας ότι η μάζα m ξεκινά από την ηρεμία

Λύση:

$$F = m\gamma \Rightarrow mae^{-\beta t} = m\frac{d\mathrm{v}}{dt} \Rightarrow \int_0^t ae^{-\beta t}dt = \int_0^{\mathrm{v}} d\mathrm{v} \Rightarrow \left.\frac{-a}{\beta}e^{-\beta t}\right|_0^t = \mathrm{v}-0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{v}(t) = \frac{a}{\beta}\left(1-e^{-\beta t}\right)$$

Τώρα μπορούμε να βρούμε το x(t)

$$\mathrm{v} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^t \frac{a}{\beta}\left(1-e^{-\beta t}\right)dt = \int_0^x dx \Rightarrow \left.\frac{a}{\beta}\left(t+\frac{e^{-\beta t}}{\beta}\right)\right|_0^t = x \Rightarrow \mathrm{x}(t) = \frac{a}{\beta}\left(t+\frac{e^{-\beta t}}{\beta}-\frac{1}{\beta}\right)$$

Ας εξετάσουμε την v(t) στο όριο μικρού t

$$\mathrm{v}(t) = \frac{a}{\beta}\left(1-e^{-\beta t}\right) \approx \frac{a}{\beta}\left(1-\underbrace{\left(1-\beta t+\frac{(\beta t)^2}{2}\right)}_{\text{Ανάπτυγμα Taylor}}\right) = \frac{a}{\beta}\left(\beta t-\frac{\beta^2 t^2}{2}\right) = at - \frac{a\beta t^2}{2} \approx at \text{ γραμμική}$$

Λογικό: για $t \to 0$
$F \sim ma$=σταθ.

Παρένθεση – Ανάπτυγμα Taylor

Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση *f*(x) η οποία έχει k-παραγώγους σε ένα σημείο x=α, Τότε η συνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί με ένα πολυώνυμο *k*- τάξης, το οποίο ονομάζεται πολυώνυμο Taylor *k*-τάξης

$$f(x) = f(a) + (x-a)\left[f'(x)\Big|_{x=a}\right] + (x-a)^2\left[\frac{1}{2!}f''(x)\Big|_{x=a}\right] + (x-a)^3\left[\frac{1}{3!}f'''(x)\Big|_{x=a}\right] + \cdots$$

όπου $f'(x), f''(x), f'''^{(x)}, \ldots$ οι παράγωγοι 1ης , 2ης , 3ης κλπ τάξης της συνάρτησης υπολογισμένες στο σημείο x=α

Για παράδειγμα, έστω θα θέλαμε να προσεγγίσουμε το cos(x) στην περιοχή του x=0

Έστω ότι το πολυώνυμο που θα προσεγγίσει τη συνάρτηση του cos(x) είναι της μορφής: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_k x^k$

Θα πρέπει να βρούμε τους σταθερούς όρους του πολυωνύμου

Εφόσον θέλουμε να προσεγγίσουμε την cos(x) στο x=0, θα πρέπει η τιμή του cos(0) Και η τιμή του πολυωνύμου για x=0 να συμπίπτουν:

x = 0: $\cos(0) = 1$ και $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_k x^k = a_0$ οπότε $a_0 = 1$

Ανάπτυγμα Taylor

Εφόσον το πολυώνυμο προσεγγίζει την cos(x) θα ήταν επιθυμητό και η κλίση του πολυωνύμου να ταυτίζεται με την κλίση της cos(x) στο σημείο x=0 που θέλουμε

Η κλίση είναι η πρώτη παράγωγος της cos(x) στο σημείο x=0 και του πολυωνύμου

Κλίση στο x = 0: $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$

και $\frac{d}{dx}\left(a_0+a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_kx^k\right) = a_1 \ + 2a_2x \quad + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots$

Μας ενδιαφέρει η τιμή στο x=0, οπότε θα πάρουμε: $a_1 = \frac{d}{dx}cos(x) = 0$

Θα ήταν αρκετά καλύτερη προσέγγιση αν το πολυώνυμο είχε 2η παράγωγο ίδια με την 2η παράγωγο του cos(x) στο σημείο x=0.

Η 2η παράγωγος του cos(x) είναι $\frac{d^2}{d^2x}\cos(x) = -\cos(x)$. Άρα για x=0 $\frac{d^2}{d^2x}\cos(x)$=0

Η 2η παράγωγος του πολυωνύμου θα είναι:

$\frac{d^2}{d^2x}\left(a_0+a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_kx^k\right) = 2a_2 + 2\times3a_2x + 3\times4a_3x^3 + \cdots$οπότε για x=0

$$\frac{d^2}{d^2x}\left(a_0+a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_kx^k\right) = 2a_2 = \frac{d^2}{d^2x}\cos(x) \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d^2x}\cos(x)$$

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι οι παράγωγοι της συνάρτησης cos(x) διαιρούμενες με το παραγοντικό του εκθέτη του όρου του πολυωνύμου:

Ανάπτυγμα Taylor

Καταλήγουμε επομένως στη μορφή που γράψαμε νωρίτερα:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\left[f'(x)\Big|_{x=a}\right] + (x-a)^2\left[\frac{1}{2!}f''(x)\Big|_{x=a}\right] + (x-a)^3\left[\frac{1}{3!}f'''(x)\Big|_{x=a}\right] + \cdots$$

Με βάση την σχέση και ότι είδαμε στην προηγούμενη σελίδα, το ανάπτυγμα Taylor για το cos(x) στην περιοχή του x=0 (μικρές γωνίες) θα είναι :

$$\cos(x) = 1 + (x-0)\left[-\sin(x)\Big|_{x=a=0}\right] + (x-0)^2\left[-\frac{1}{2!}cos\,(x)\Big|_{x=a=0}\right] + (x-0)^3\left[\frac{1}{3!}sin(x)\Big|_{x=a=0}\right] + \cdots$$

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots}$$

ανάπτυγμα Taylor του cos(x) στο x=0

Όπως βλέπετε όλοι οι όροι που περιέχουν sin(x) μηδενίζονται για x=0

Ανάλογα μπορούμε να έχουμε το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης sin(x) στο x=0

$$\sin(x) = \sin(x=0) + (x-0)\left[cos(x)\Big|_{x=a=0}\right] + (x-0)^2\left[-\frac{1}{2!}sin\,(x)\Big|_{x=a=0}\right] + (x-0)^3\left[-\frac{1}{3!}cos(x)\Big|_{x=a=0}\right] + \cdots$$

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots}$$

ανάπτυγμα Taylor του sin(x) στο x=0

Προσπαθήστε να υπολογίσετε το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $e^{-\beta x}$ που γράψαμε στο τελευταίο παράδειγμα φυσικής

Ένα ακόμα παράδειγμα

Δίνεται η δύναμη $F(\upsilon) = -m\alpha\upsilon$. (Συνάρτηση της ταχύτητας μόνο)

Ποια είναι $x(t)$, $v(t)$. (Υποθέτουμε ότι η μάζα m ξεκινά σε $t = 0$, με v_0)

Λύση

$$F = ma \Rightarrow -ma\mathrm{v} = m\frac{d\mathrm{v}}{dt} \Rightarrow -\int_0^t a\,dt = \int_0^{\mathrm{v}} \frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} \Rightarrow -at = \ln \mathrm{v}\Big|_{\mathrm{v}_0}^{\mathrm{v}} = \ln\left(\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{v}_0}\right)$$

$$\Rightarrow e^{-at} = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{v}_0} \Rightarrow \mathrm{v}(t) = \mathrm{v}_0 e^{-at}$$

Εύρεση του x(t)

$$\mathrm{v} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^t \mathrm{v}\,dt = \int_0^x d\mathrm{x} \Rightarrow \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{v}_0 e^{-at} dt = \int_0^x d\mathrm{x} \Rightarrow \frac{-\mathrm{v}_0}{a} e^{-at}\Big|_0^t = x$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{\mathrm{v}_0}{a}\left(1\text{-}e^{-at}\right)$$

Για μικρούς χρόνους

$$x(t) = \frac{\mathrm{v}_0}{a}\left(1\text{-}\left(1\text{-}at + \cdots\right)\right) \approx \mathrm{v}_0 t$$

Η δύναμη δεν έχει αρκετό χρόνο για να ενεργήσει στο σώμα και αυτό κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Νόμοι Newton: Μερικές ακόμα εφαρμογές

Κινήσεις σώματος μέσα σε υγρά ή αέρα

Σώμα κινούμενο μέσα σε κάποιο υγρό ή τον αέρα ασκεί μια δύναμη στο μέσο στο οποίο κινείται.

Το μέσο αντιδρά και ασκεί δύναμη στο σώμα (3ος Νόμος)

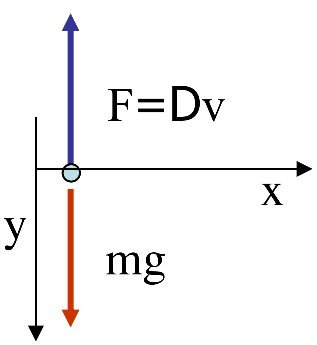
- Η δύναμη είναι πάντα αντίθετη στην φορά της ταχύτητας της κίνησης.
  - Συνήθως αυξάνει με την ταχύτητα (F=Dv)
  - Στον αέρα η δύναμη είναι $F=Dv^2$.

Εξαιτίας της δύναμης αυτής, η επιτάχυνση του σώματος ≠ σταθερή

Παράδειγμα

Αφήνουμε μια πέτρα να πέσει από την επιφάνεια μιας βαθιάς λίμνης.

Ποιά είναι η επιτάχυνση, ταχύτητα και θέση της πέτρας κάθε χρονική στιγμή (F=Dv)



$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = ma = mg + (-Dv)$$

Την στιγμή t=0, v=0 και επομένως α = g.

v αυξάνει ➔ F αυξάνει και κάποια στιγμή t mg=Dv

Όταν $\sum F_y = 0$ $\boxed{\Rightarrow v = \frac{mg}{D}}$

Οριακή ταχύτητα

Κίνηση σε υγρά-αέρα

- Πως αλλάζουν επιτάχυνση, ταχύτητα και θέση?

$$\sum F_y = ma = mg + \left(-D\mathrm{v}\right) = m\frac{d\mathrm{v}}{dt} \Rightarrow D\left(\frac{mg}{D} - \mathrm{v}\right) = m\frac{d\mathrm{v}}{dt} \Rightarrow D\left(\mathrm{v}_{o\rho} - \mathrm{v}\right) = m\frac{d\mathrm{v}}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathrm{v}}{\left(\mathrm{v}_{o\rho} - \mathrm{v}\right)} = \frac{D}{m}dt \Rightarrow \int_{\mathrm{v}=0}^{\mathrm{v}} \frac{d\mathrm{v}}{\left(\mathrm{v}_{o\rho} - \mathrm{v}\right)} = \frac{D}{m}\int_0^t dt \Rightarrow -\ln\left(\mathrm{v}_{o\rho} - \mathrm{v}\right)\Big|_0^{\mathrm{v}} = \frac{D}{m}t\Big|_0^t \Rightarrow \ln\left(\frac{\mathrm{v}_{o\rho} - \mathrm{v}}{\mathrm{v}_{o\rho}}\right) = -\frac{D}{m}t$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{v}_{o\rho}}\right) = e^{-\frac{D}{m}} \boxed{\Rightarrow \mathrm{v} = \mathrm{v}_{o\rho}\left[1 - e^{-\frac{D}{m}t}\right]}$$

$\mathrm{v} = \mathrm{v}_{o\rho}$ για $t \rightarrow \infty$

m/D =χρόνος για να φθάσει 63% $\upsilon_{o\rho}$

- Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\begin{cases} a\left(t\right) = ge^{-\left(D/m\right)t} & \text{παραγώγιση της v} \\ x\left(t\right) = \mathrm{v}_{o\rho}\left[t - \frac{m}{k}\left(1 - e^{-\left(D/m\right)t}\right)\right] & \text{ολοκλήρωση της v} \end{cases}$$

Κίνηση σε αέρα $F = D\mathrm{v}^2$

Ακολουθώντας την ίδια μέθοδο αποδεικνύεται ότι:

$$\boxed{\mathrm{v}_{o\rho} = \sqrt{\frac{mg}{D}}}$$

Βαριά σώματα πέφτουν πιο γρήγορα

Σώματα ίδιας μάζας και διαφορετικής επιφάνειας έχουν άλλο D

Sky-diving κάποιος με μάζα m=80Kg, D=0.25kg/m ⇨ $\upsilon_{o\rho}$=200Km/h