Ταλαντώσεις

- Μια διαφορετική εφαρμογή του φορμαλισμού Lagrange
- Ταλαντωτής αποτελεί ένα σύστημα του οποίου μπορούμε να λύσουμε τις εξισώσεις κίνησης
  - σε κάποιο γενικό σύστημα οι εξισώσεις κίνησης αρκετά πολύπλοκες
- Μελετούμε ταλαντωτές γιατί είναι μαθηματικά εύκολο; ΟΧΙ
  - Τα περισσότερα φαινόμενα στην φυσική μπορούν να αναλυθούν με βάση το μοντέλο ενός αρμονικού ταλαντωτή;
  - Οι λύσεις των εξισώσεων κίνησης μπορούν να γραφούν σαν συνάρτηση απλών μαθηματικών συναρτήσεων

Ταλαντώσεις

- Θεωρήστε ένα μονοδιάστατο σύστημα:
  - 1 βαθμός ελευθερίας: q
  - Η Lagrangian είναι συνάρτηση των $q, \dot{q}$ ➡ $L = L(q, \dot{q})$

    (αρχικά) L δεν εξαρτάται ακριβώς από τον χρόνο, t
- Μια κατάσταση ισορροπίας του συστήματος: $q = const = q_0$
  - Το σύστημα ξεκινά από μια κατάσταση q_0 και παραμένει σε αυτή
  - Ισοδύναμο με το να πούμε ότι q ανεξάρτητο του t
- Ποιες οι συνθήκες ώστε ένα σύστημα να έχει σαν λύση της εξίσωσης κίνησης αυτή της κατάστασης ισορροπίας?
  - Εξίσωση κίνησης: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}$
  - Διαφορική εξίσωση 2ης τάξης ➡ 2 αρχικές συνθήκες: $q(t=0)$ $\dot{q}(t=0)$
  - Λύση που αντιστοιχεί σε κατάσταση ισορροπίας: $q = q_0$ και $\dot{q} = 0$
  - Το σύστημα θα παραμείνει σε ισορροπία αν: $\ddot{q} = 0$

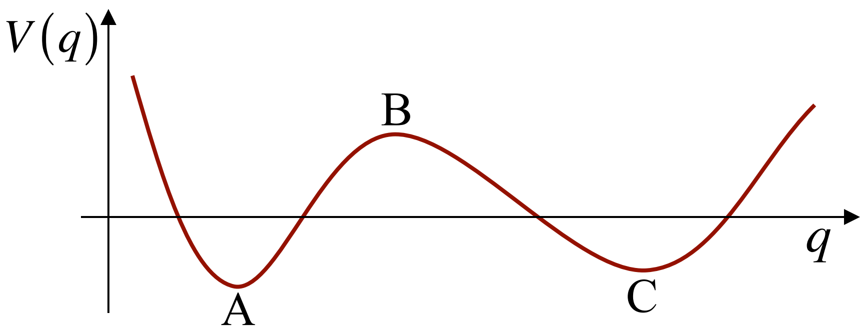
Ταλαντώσεις

- Τι σημαίνει αυτό? $L = T - V \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}$

  και για το σύστημά μας: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q}$ → συνάρτηση q

  συνάρτηση $\dot{q}, \ddot{q}$ συνάρτηση $\dot{q}$

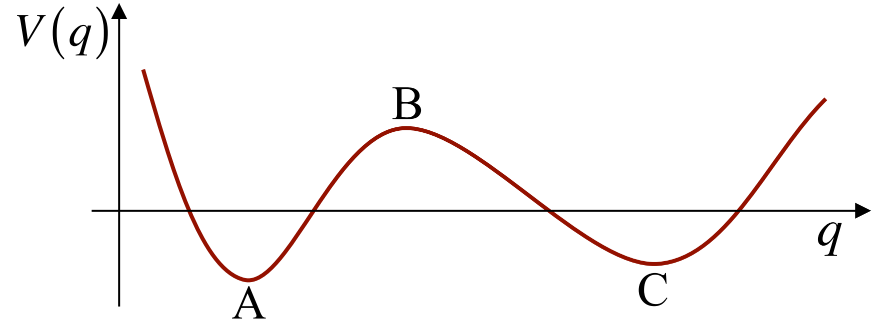
- Αλλά σε λύση ισορροπίας: $\ddot{q} = \dot{q} = 0$ ➡ $\left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q=q_o} = 0$



- Ποιοτικά δυο διαφορετικές θέσεις ισορροπίας:
  - A και C: τοπικό ελάχιστο ➡ ευσταθής ισορροπία
  - B: τοπικό μέγιστο ➡ ασταθής ισορροπία

Ταλαντώσεις

- Θεωρήστε μικρή διαταραχή ως προς σημείο ισορροπίας
  - Έστω $q = q_0 = 0$



- Αναπτύσουμε την εξίσωση κίνησης ως προς το σημείο q_0

$$L(q,\dot{q})\Big|_{q=q_0} = \underbrace{L(q_0,\dot{q}=0)}_{A} + q\underbrace{\frac{\partial}{\partial q}L(q_0,\dot{q})}_{Bq} + \dot{q}\underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{q}}L(q_0,\dot{q})}_{C\dot{q}} + Dq^2 + Eq\dot{q} + F\dot{q}^2 + \cdots$$

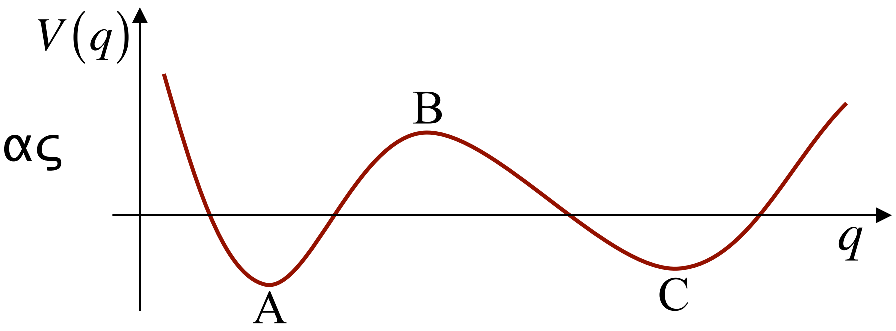
- Έχουμε δει (1η κατ'οίκον) ότι αν $L' = L + \frac{dF}{dt}$ ➡ εξ. κίνησης αμετάβλητη
  - Ελαχιστοποίηση της δράσης: $S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ ➡ $S' = \int_{t_1}^{t_2}\left(L + \frac{dF}{dt}\right)dt$

$$S' = S + \int_{t_1}^{t_2}\frac{dF}{dt}dt \Rightarrow S' = S + F(t_2) - F(t_1) \Rightarrow \delta S' = \delta S$$

- Γιατί έχει αυτό ενδιαφέρον?
  - Μπορούμε να αγνοήσουμε στο ανάπτυγμα της L όλους τους όρους που περιέχουν ολικά διαφορικά ως προς χρόνο: A, C, E

όρος $A: \frac{d}{dt}(At)$ όρος $C: \frac{d}{dt}(Cq)$ όρος $E: \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Eq^2\right)$

Ταλαντώσεις



- Ψάχνουμε για σημείο ισορροπίας

  ➡ $\dfrac{dV}{dq} = 0$

- Η Lagrangian όμως είναι: $L(q,\dot{q})\big|_{q=q_0} = A + Bq + C\dot{q} + Dq^2 + Eq\dot{q} + F\dot{q}^2 + \cdots$
  - Οι όροι του δυναμικού είναι: $Bq + Dq^2 + \cdots$ ➡ $B = 0$
- Επομένως η Lagrangian για μικρή διαταραχή ως προς το σημείο q_0

$$L(q,\dot{q})\big|_{q=q_0} = Dq^2 + F\dot{q}^2 = 2F\left(\frac{D}{2F}q^2 + \frac{1}{2}\dot{q}^2\right)$$

- Έχουμε επίσης αναφέρει ότι οι εξισώσεις κίνησης είναι αμετάβλητες αν η Lagrangian πολ/στεί με κάποια σταθερά: $L' = kL$
  - Οι εξ. κίνησης επομένως είναι αμετάβλητες αν πολ/σω με: $\dfrac{1}{2F}$
  - Άρα οι εξ. κίνησης περιγράφονται από: $L = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{D}{F}q^2 + \dot{q}^2\right)$
- Δηλαδή: μικρές διαταραχές ως προς ένα τυχαίο σημείο ισορροπίας περιγράφονται μόνο από: $\dfrac{D}{F}$ ⬅ ένα νούμερο ➡ συχνότητα²

Ταλαντώσεις

- Ορίζουμε σαν συχνότητα διαταραχής: $\omega^2 = -\dfrac{D}{F}$
  - ω πραγματικός αριθμός αν: $D/F < 0$
  - ω μιγαδικός αριθμός αν: $D/F > 0$
- Οι εξισώσεις κίνησης θα είναι: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial q}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left[\frac{1}{2}\left(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2\right)\right]\right) = \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{1}{2}\left(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2\right)\right] \Rightarrow \ddot{q} = -\omega^2 q \Rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

- Ποιες είναι οι λύσεις αυτής της διαφορικής εξίσωσης?
  - ω πραγματικός: $D/F < 0$ ➡ $q(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$
    - ✓ Οι λύσεις ταλαντώνονται ως προς $q = 0$ με συχνότητα ω
    - ✓ Το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές

      (το μέγεθος της διαταραχής ως προς q παραμένει σταθερό)
  - ω μιγαδικός: $D/F > 0 \Rightarrow \ddot{q} - |\omega|^2 q = 0$ ➡ $q(t) = Ae^{+|\omega|t} + Be^{-|\omega|t}$
    - ✓ Η διαταραχή αυξάνει με την πάροδο του χρόνου εκτός και αν A=0
    - ✓ Το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές

Αρμονικοί ταλαντωτές

- Έχουμε δει άπειρες φορές το πρόβλημα των αρμονικών ταλαντωτών:
  - Μάζες σε ελατήρια
- Είναι τόσο σημαντικό φυσικό πρόβλημα? ΟΧΙ
- Ας πάρουμε ένα σύστημα γύρω από μια θέση ισορροπίας του
  - Για ευσταθή ισορροπία και στο όριο μικρών διαταραχών
    - Το σύστημα περιγράφεται σαν ένας ταλαντωτής
      - ✓ Οχι μόνο για μάζες σε ελατήρια
      - ✓ Εκκρεμές (μικρή διαταραχή ως προς την θέση ισορροπίας)
      - ✓ Μόρια (διαταραχή ως προς την θέση ηρεμίας τους)
      - ✓ Κβαντικό πεδίο (διαταραχή σωματιδίων γύρω από την αναμενόμενη τιμή του κενού του χωροχρόνου)
      - ✓ Κβαντομηχανικά συστήματα που δέχονται μικρές διαταραχές ως προς την κατάσταση ηρεμίας τους
- Θα δούμε αργότερα συστήματα με Ν βαθμούς ελευθερίας
  - Για μικρές διαταραχές γύρω από μια ευσταθή κατάσταση, περιγράφονται από Ν αρμονικούς ταλαντωτές

Λύσεις εξίσωσης κίνησης αρμονικού ταλαντωτή

- Η εξίσωση κίνησης αρμονικού ταλαντωτή: $\ddot{q}+\omega^2 q=0$

  Με λύσεις της μορφής: $q(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$
- Ιδιότητες της εξίσωσης κίνησης:
  - Γραμμική Δ.Ε. (ως προς q και χρονικές παραγώγους του q)
    - Ο γραμμικός συνδυασμός δυο λύσεων είναι λύση της Δ.Ε.

      Αν sin(ωt) και cos(ωt) είναι λύσεις ➡ sin(ωt)+cos(ωt) είναι λύση
    - Μια λύση πολ/μενη με σταθερά είναι επίσης λύση της Δ.Ε.
  - Συνήθως γράφουμε την λύση της Δ.Ε. με την μορφή: $q=A\sin(\omega(t-\varphi))$
    - ✓ A: το πλάτος της ταλάντωσης
    - ✓ φ: φάση της ταλάντωσης

    } προσδιορισμός των A και φ προσδιορίζει την κίνηση
    - Δυο αρχικές συνθήκες απαραίτητες για τον προσδιορισμό κίνησης
  - Οι διαστάσεις του ω είναι: $[\omega]=[\mathrm{T}]^{-1}$
  - Αν επιλέξουμε κατάλληλη χρονική συντεταγμένη: ω=1

    π.χ. t = ωt ➡ $q=A\sin(t'-\varphi')$

Λύσεις εξίσωσης κίνησης αρμονικού ταλαντωτή

- Trick για λύση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων:
  - Αντί να μελετώ πραγματικές λύσεις μπορώ να κοιτάξω μιγαδικές $q(t)^{complex}$ λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης
  - Το πραγματικό και μιγαδικό μέρος της λύσης είναι επίσης λύση
- Οι μιγαδικές λύσεις της γραμμικής Δ.Ε. $\ddot{q}+\omega^2 q=0$ είναι: $q=A_c e^{i\omega t}$
  - A_C: το μιγαδικό πλάτος ⇨ $A_C = Ae^{i\omega\varphi}$
- Αν η γραμμική Δ.Ε. είναι πραγματική και $q^{complex}$ είναι λύση τότε η συζυγής μιγαδική είναι επίσης λύση