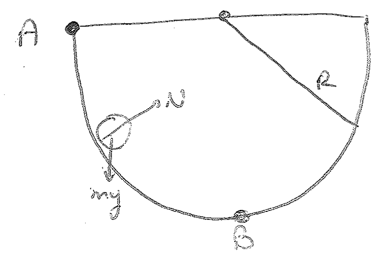
ΦΥΣ 111: ΓΕΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ 1

04/11/20 6ο Φροντιστήριο

1. Μια μικρή πέτρα μάζας 0.20kg αφήνεται από το σημείο Α που βρίσκεται στην κορυφή ενός ημισφαιρικού μπολ ακτίνας R=0.50m Το σημείο Β βρίσκεται στον πάτο του μπολ. Το έργο που παράγεται από την τριβή επάνω στο σώμα μέχρι αυτό να μετατοπιστεί από το σημείο Α στο Β έχει μέτρο 0.22J. (α) Πόσο έργο παράγεται στο σώμα κατά την ίδια διαδρομή, από (i) την κάθετη αντίδραση (ii) τη Βαρύτητα; (β) Ποια η ταχύτητα της πέτρας στο σημείο Β; (γ) Ποιες από τις τρεις δυνάμεις που ασκούνται στην πέτρα κατά τη διαδρομή Α→Β είναι σταθερή και ποιες όχι; Εξηγήστε. (δ) Ποια η κάθετη δύναμη που ασκείται στην πέτρα στο σημείο Β;



α) i) Η κάθετη αντίδραση είναι κάθετη στην κίνηση του σώματος επομένως το έργο που παράγει το σώμα είναι 0.

$W_g = U_{g_A} - U_{g_B} = mg\psi_A - mg\psi_B = mgR - 0 = 0,98J$

$W_{τριβής} = \frac{1}{2}mU_B^2 + \cancel{mg\psi_B}^{0} - (\cancel{\frac{1}{2}mU_A^2}^{0} + mg\psi_A) = EM_B - EM_A$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mU_B^2 = W_{τριβής} + mg\psi_A$

$\Rightarrow U_B = \sqrt{\frac{2W_{τριβής}}{m} + 2g\psi_A} = \sqrt{\frac{2\cdot(-0,22)}{0,2} + 2\cdot 9,8\cdot 0,5} = 2,75 m/s$

Η δύναμη λόγω βαρύτητας είναι σταθερή: $F_{βάρος} = mg$

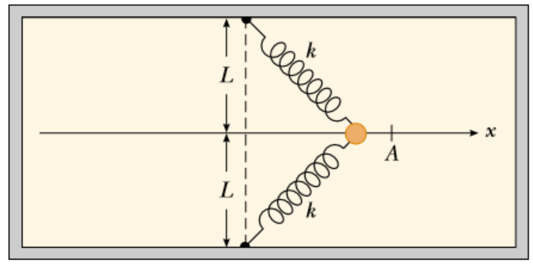
Η κάθετη αντίδραση δεν είναι σταθερή, μηδενίζεται στο σημείο Α και είναι μη μηδενική στο σημείο Β.

Η τριβή δεν είναι σταθερή αφού $F_{τριβής} = \mu N$, εξαρτάται από την καθ. αντίδρ.

Στο σημείο Β: $\Sigma F_\psi = ma_\psi \Rightarrow N - mg = ma_\psi \Rightarrow N = m(g + a_\psi)$

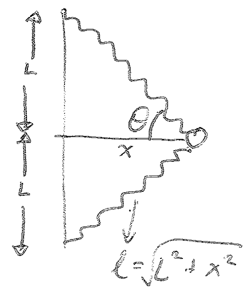
$N = m(g + a_{κεντρ.}) = m(g + \frac{U^2}{R}) = 0,2\left(9,8 + \frac{2,75^2}{0,5}\right) = 4,98 N$

2. Ένα σωματίδιο είναι συνδεδεμένο μεταξύ δύο όμοιων ελατηρίων σταθεράς k και φυσικού μήκους L. Το σύστημα βρίσκεται σε οριζόντιο τραπέζι χωρίς τριβή. (α) Αν το σωματίδιο ωθείται σε απόσταση x, κατά μήκος μίας κατεύθυνσης κάθετης προς την αρχική διαμόρφωση των ελατηρίων (όπως φαίνεται στο σχήμα 1), δείξτε ότι η δύναμη που ασκείται από τα ελατήρια πάνω στο σωματίδιο είναι: $F = -2kx(1 - L(x^2+L^2)^{1/2})$. (β) Προσδιορίστε το έργο που παράγει η δύναμη αυτή κατά τη μετακίνηση του σωματιδίου από το σημείο x=A στο σημείο x=0.



Η επιμήκυνση του ελατηρίου δίνεται από:

$$\ell - L = \sqrt{L^2+x^2} - L = \Delta s$$



$$\vec{F} = -2k\left(\sqrt{x^2+L^2} - L\right)\cos\theta\,\hat{i} + 0\hat{j}, \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}}$$

$$\vec{F} = -2k\left(\sqrt{x^2+L^2} - L\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}} = -2kx\left(1 - \frac{L}{\sqrt{x^2+L^2}}\right)\hat{i}$$

$$W = \int_{x=A}^{x=0} F_x\,dx = -2k\int_{x=A}^{x=0} x\left(1 - \frac{L}{\sqrt{x^2+L^2}}\right)dx = \left[-\cancel{2}k\frac{x^2}{\cancel{2}} + 2kL\sqrt{x^2+L^2}\right]_{x=A}^{x=0}$$

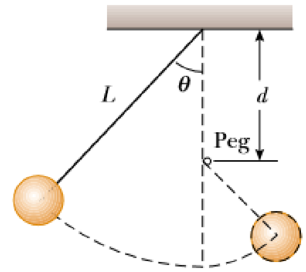
$$= kA^2 + 2kL^2 - 2kL\left(A^2+L^2\right)^{1/2}$$

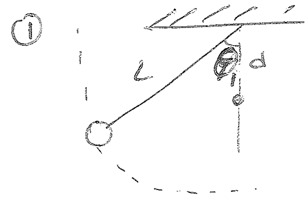
χρήση δυναμικής ενέργειας: $W = U_{x=A} - U_{x=0} = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}k\left(\sqrt{L^2+A^2} - L\right)^2 - \cancel{2\cdot\frac{1}{2}k\,0^2}$

$$= kL^2 + kA^2 + kL^2 - 2kL\sqrt{L^2+A^2} = kA^2 + 2kL^2 - 2kL\sqrt{L^2+A^2}$$

Τα δύο αποτελέσματα συμφωνούν.

3. Ένα εκκρεμές μήκους L ταλαντώνεται πάνω σε κατακόρυφο επίπεδο. Το νήμα χτυπά πάνω σε μια πρόκα που βρίσκεται σε απόσταση d κάτω από το σημείο ανάρτησης του εκκρεμούς. Αποδείξτε ότι αν το εκκρεμές αφεθεί ελεύθερο από την οριζόντια θέση (θ=90°) και πρόκειται να διαγράψει έναν πλήρη κύκλο που έχει κέντρο την πρόκα, τότε η ελάχιστη τιμή του d ώστε το νήμα να παραμένει τεντωμένο είναι 3L/5.

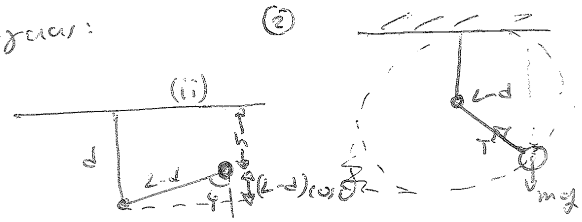




Το νήμα χαλαρώνει όταν $T=0 \Rightarrow mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$

$\Rightarrow v^2 = Rg\cos\theta$

Επιλέγουμε $E_{δυν}=0$ στη θέση $\theta_1 = 90^\circ$ και εφαρμόζουμε διατήρηση μηχανικής ενέργειας:



$E^{i}_{μηχ} = 0$ (όταν $\theta_1 = 90^\circ$)

$E^{ii}_{μηχ} = -mgh + \frac{1}{2}mv^2$

$h = d-(L-d)\cos\theta$ } *

$* \Rightarrow -mg[d-(L-d)\cos\theta] + \frac{1}{2}mv^2 = 0$, $v^2 = Rg\cos\theta$

$\Rightarrow g[d-(L-d)\cos\theta] = \frac{1}{2}(L-d)g\cos\theta$

$\Rightarrow 2d - 2(L-d)\cos\theta = (L-d)\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta[(L-d)+2(L-d)] = 2d \Rightarrow 2d = 3\cos\theta(L-d)$

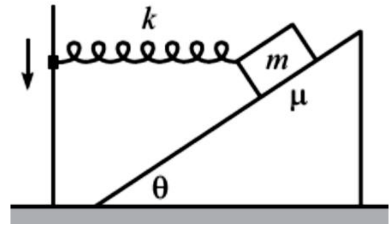
$\Rightarrow \cos\theta = \frac{2d}{3(L-d)}$

Όμως $\cos\theta \le 1 \Rightarrow \frac{2d}{3(L-d)} \le 1 \Rightarrow 2d \le 3(L-d)$ αφού $d < L$

$\Rightarrow 5d \le 3L \Rightarrow d \le \frac{3L}{5}$

Για $d < \frac{3L}{5}$ η τάση του νήματος μηδενίζεται πριν εκτελέσει πλήρη περιστροφή. Για να εκτελέσει το σώμα πλήρη περιστροφή πρέπει $d \ge \frac{3L}{5}$ επομένως η μικρότερη τιμή για το d είναι $\frac{3L}{5}$

4. Μια μάζα m βρίσκεται πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο το οποίο σχηματίζει γωνιά θ με την οριζόντια διεύθυνση. Ο συντελεστής τριβής (κινητικής και στατικής τριβής) μεταξύ της μάζας και του κεκλιμένου επιπέδου είναι μ. Ένα οριζόντιο ελατήριο σταθεράς ελατηρίου k, έχει το δεξί άκρο του εξαρτώμενο από τη μάζα ενώ το αριστερό άκρο του εξαρτάται από ένα δαχτυλίδι το οποίο μπορεί να κινείται πάνω σε κατακόρυφο στύλο. Το ελατήριο είναι αρχικά στο φυσικό του μήκος. Κατόπιν η μάζα αφήνεται ελεύθερη και αρχίζει να γλιστρά προς το κατώτερο σημείο του κεκλιμένου επιπέδου, ενώ το δαχτυλίδι στο αριστερό άκρο του ελατηρίου παρακολουθεί την κίνηση της μάζας ώστε το ελατήριο να παραμένει πάντοτε οριζόντιο.(α) Ποια απόσταση καλύπτει η μάζα πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο πριν έρθει σε ηρεμία για πρώτη φορά αν μ=1; (β) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της γωνίας θ έτσι ώστε η μάζα m να ξεκινήσει να κινείται; (γ) Ποια η συνολική απόσταση που θα διανύσει η μάζα m μέχρι να σταματήσει αν μ=1 συνάρτηση της γωνίας θ;



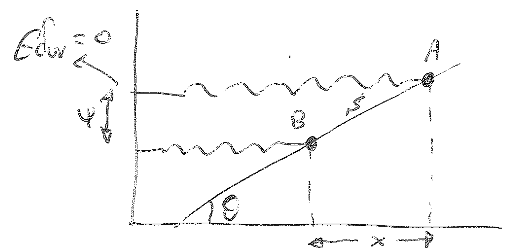
[illegible]:

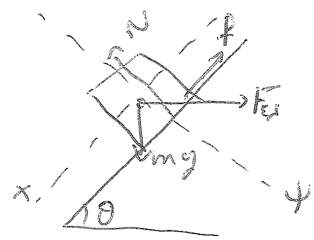
$F_\psi = 0 \Rightarrow N - F_{ελ}\sin\theta - mg\cos\theta = 0$

$\Rightarrow N = kx\sin\theta + mg\cos\theta$

$\tan\theta = \frac{\psi}{x} \Rightarrow \psi = x\tan\theta$

$s = \frac{x}{\cos\theta} = \frac{\psi}{\sin\theta}$





$M_A = 0$

$M_B = \frac{1}{2}kx^2 - mg\psi$

$M_A + W_{τρ} = EM_B$

$x = s\cos\theta$

$W_{τριβ} = \int_0^s ds' f = -\int_0^s ds' \mu N = -\int_0^s ds' \mu (kx\sin\theta + mg\cos\theta)$

$= -\int_0^s ds' \mu (ks'\cos\theta\sin\theta + mg\cos\theta) = -\mu\Big[k\frac{s'^2}{2}\cos\theta\sin\theta + mgs'\cos\theta\Big]_0^s$

$= -\mu\left(\frac{ks^2}{2}\cos\theta\sin\theta + mgs\cos\theta\right)$

$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2}ks^{\cancel{2}}\cos^2\theta - mg\sin\theta\,\cancel{s} + \frac{ks^{\cancel{2}}}{2}\mu\sin\theta\cos\theta + mg\,\cancel{s}\,\mu\cos\theta, \quad s \neq 0$

$\Rightarrow \frac{s}{2}k\cos\theta(\cos\theta + \mu\sin\theta) + mg(\mu\cos\theta - \sin\theta) = 0$

$\Rightarrow s = \frac{2mg(-\mu\cos\theta + \sin\theta)}{k\cos\theta(\cos\theta + \mu\sin\theta)}$ Για να έχει νόημα πρέπει $s > 0$

$\Rightarrow \mu\cos\theta < \sin\theta \Rightarrow \mu < \tan\theta$.

$\Sigma F_x = -F_{\varepsilon\lambda}\cos\theta + mg\sin\theta - f$

α να ξεκινήσει η κίνηση πρέπει $\Sigma F_x > 0$ στο $x = 0$ $(x=0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 0)$

$\Rightarrow \cancel{mg}\sin\theta - \mu\cancel{kx}\sin\theta - \mu\cancel{mg}\cos\theta > 0 \Rightarrow \tan\theta > \mu$ Συνθήκη για να ξεκινήσει η κίνηση.

Το σώμα αφού σταματήσει στην θέση B μπορεί να παραμείνει ακίνητο ή να ξεκινήσει να κινείται προς τα πάνω. Στην δεύτερη περίπτωση πρέπει να επαναληφθεί η ίδια πάνω διαδικασία.

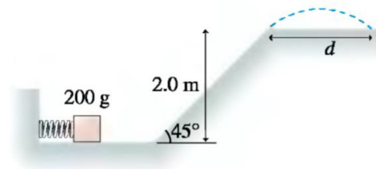
$x_B = \frac{\ell}{\cos\theta} = \frac{2mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{k\cos^2\theta(\cos\theta + \mu\sin\theta)}$

Στην θέση B: $\left.\begin{array}{l} \Sigma F_x = F_{\varepsilon\lambda,B}\cos\theta - mg\sin\theta - f_{max} \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = k x_B\sin\theta + mg\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma F_x = k x_B\cos\theta - mg\sin\theta - \mu k x_B\sin\theta - \mu mg\cos\theta$

Για να ξεκινήσει ξανά κίνηση $\Sigma F_x < 0 \Rightarrow 2 - \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta(2 + \cos^2\theta) < 0$.

Για $\theta \to 90^\circ$ Η ανισότητα ικανοποιείται και η κίνηση συνεχίζει. (παραλαμβάνονται

5. Το ελατήριο του διπλανού σχήματος έχει σταθερά ελατηρίου $1000 N/m$. Το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά $0.15m$ και εκτοξεύει ένα σώμα μάζας $200gr$. Η οριζόντια επιφάνεια είναι λεία αλλά κατόπιν το σώμα συναντά μια τραχιά κεκλιμένη επιφάνεια ύψους $2.0m$ και γωνίας κλίσης 45° με την οριζόντια διεύθυνση. Η επιφάνεια του σώματος και του κεκλιμένου επιπέδου παρουσιάζουν συντελεστή κινητικής τριβής 0.30. Ποιά είναι η απόσταση d που διαγράφει το σώμα στον αέρα;

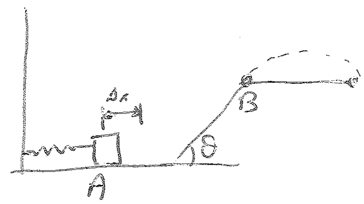


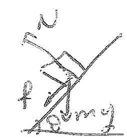
$EM_A + W_{τριβής} = EM_B$

$EM_A = \frac{1}{2}k\Delta x^2$

$EM_B = \frac{1}{2}mU_B^2 + mgh$, $h = 2m$, $S = \frac{h}{\sin\theta}$

$W_{τριβ} = f \cdot S = -\mu m g \cos\theta \frac{h}{\sin\theta}$





$N = mg\cos\theta$

$f = \mu N = \mu m g \cos\theta$

$\frac{1}{2}\frac{k\Delta x^2}{\cancel{m}} - \mu \cancel{m} g h \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{2}\cancel{m}U_B^2 + \cancel{m}gh$

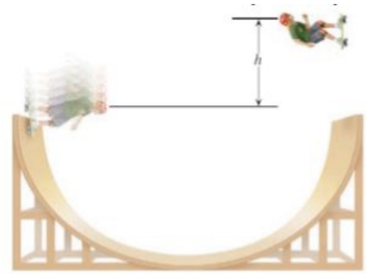
$U_B^2 = \frac{k\Delta x^2}{m} - 2\mu g h \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 2gh = \frac{k\Delta x^2}{m} - 2gh\left(1 + \mu\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

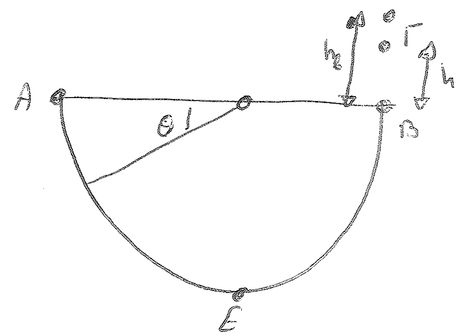
$U_B = \sqrt{\frac{k\Delta x^2}{m} - 2gh\left(1 + \mu\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)} = 7{,}84 m/s$

α την βολή:

Βεληνεκές: $d = \frac{U_B^2 \sin 2\theta}{g} = 6{,}27 m$

6. Ένα παιδί μάζας 61kg κάνει skateboard ξεκινώντας με ταχύτητα 5.4m/s από το αριστερό μέρος της πίστας όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα και κινείται προς το χαμηλότερο σημείο. Η πίστα έχει κυκλικό σχήμα ακτίνας r = 2.70m. Αγνοήστε αρχικά τριβές και την αντίσταση του αέρα. (α) Βρείτε το μέγιστο ύψος, h, στο οποίο θα φτάσει το παιδί στο δεξί μέρος της πίστας. (β) Υποθέστε ότι το παιδί φτάνει σε μέγιστο ύψος h = 1.80m, εκτελεί μισή περιστροφή και αρχίζει να κινείται και πάλι προς το χαμηλότερο σημείο της πίστας, όπου φτάνει έχοντας ταχύτητας 6.8m/s. Ποια είναι η μέση τιμή του μέτρου της δύναμης της τριβής που ασκούν τα τοιχώματα της πίστας στο skateboard; (γ) Ποια η απάντηση στο ερώτημα (α) αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ του skateboard και του εδάφους είναι μ=0,1; (δ) Στην περίπτωση του ερωτήματος (α) ποιος ο ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ παπουτσιού και skateboard για να μην γλιστρήσει το παιδί; (ε) Ποια η ισχύς της βαρύτητας, τριβής και κάθετης αντίδρασης στο παιδί συνάρτηση του ύψους H από το χαμηλότερο σημείο του ημικυκλίου πριν φτάσει το παιδί στο δεξί μέρος της πίστας;





1 α) $EM_A = EM_Γ$

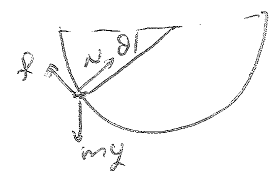
$\Rightarrow \frac{1}{2} m U_A^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{U_A^2}{2g} = 1{,}5\,m$

$EM_Δ + W_{τριβής} = EM_E \Rightarrow W_{τριβ.} = EM_E - EM_Δ$

$W_{τριβ} = -mgh_B + \frac{1}{2} m U_E^2 - mgR = -mg(h_B + R) + \frac{1}{2} m U_E^2$

$W_{τριβ} = \int_{x_Δ}^{x_E} dx\, f(x) \equiv \bar{f}\Delta x \Rightarrow \bar{f} = \frac{W_{τριβ}}{\Delta x}$, Δx = περιφέρεια τεταρτημορίου $= \frac{2\pi R}{4}$

$\Rightarrow \bar{f} = \frac{-mg(h_B + R) + \frac{1}{2} m U_E^2}{\pi R/2} = \frac{-2mg(h_B + R) + m U_E^2}{\pi R} = -302N$



$EM_A + W_{τριβής} = EM_Γ$

$W_{τριβής} = \int_{x_A}^{x_B} dx\, f(x) = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\theta\, f(\theta) R$ αφού $dx = R d\theta$

$N - mg \sin\theta = \frac{U^2}{R} m$

$\Rightarrow N = m\left(\frac{U^2}{R} + g \sin\theta\right)$

...να βρούμε την ταχύτητα U θα πρέπει να γνωρίζουμε
...ν ενέργεια που χάθηκε λόγω της τριβής σε
...θε γωνία θ.

$W_{τριβής}(\theta) = \int_0^{\theta} d\theta' f(\theta') R \equiv W(\theta)$

$EM_\theta = EM_A + W(\theta) \Rightarrow -R \sin\theta\, mg + \frac{1}{2} m U^2(\theta) = \frac{1}{2} m U_A^2 + W(\theta)$

$\Rightarrow U^2_{(\theta)} = U_A^2 + \frac{2W(\theta)}{m} + 2Rg \sin\theta$

$v(\theta) = v_A \cdot \frac{\quad}{m} \cdot \theta$

$f = \mu N = \mu m\left(\frac{v^2}{R} + g\sin\theta\right) = \mu m\left(\frac{v_A^2}{R} + \frac{2W(\theta)}{mR} + 2g\sin\theta + g\sin\theta\right)$

$W(\theta) = \int_0^\theta d\theta' f(\theta') R = \mu \int_0^\theta d\theta' \left(v_A^2 m + 2W(\theta') + 3gR\sin\theta'\right)$

$= 2\mu \int_0^\theta d\theta' W(\theta') + \mu m \int_0^\theta \left(v_A^2 + 3gR\sin\theta'\right) d\theta' = 2\mu \int_0^\theta d\theta' W(\theta') + g(\theta)$

γνωστή συνάρτηση του θ

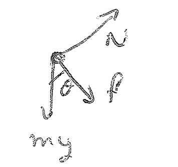
$W(\theta) = 2\mu \int_0^\theta d\theta' W(\theta') + g(\theta)$ Αυτή η εξίσωση λύνεται αριθμητικά.

Όπως δεί την λύσουμε για $\theta = \pi$ και βρήκαμε το συνολικό έργο της τριβής.

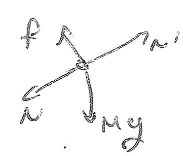
τε: $EM_A + W(\pi) = EM_\Gamma \Rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 + W(\pi) = m g h_\Gamma \Rightarrow h_\Gamma = \frac{v_A^2}{2g} + \frac{W(\pi)}{mg}$

δ)

$\Sigma F_x = ma = mg\cos\theta + f$ παιδί



$\Sigma F_x = Ma = Mg\cos\theta - f$ skateboard



Άρα οι επιταχύνσεις του παιδιού και skateboard πρέπει να είναι ίσες τότε:

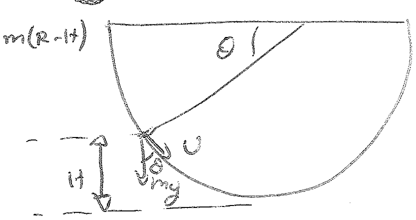
$\left.\begin{aligned} mMa &= Mmg\cos\theta + Mf \\ mMa &= Mmg\cos\theta - mf \end{aligned}\right\} \Rightarrow (M+m)f = 0 \Rightarrow f = 0$

Η τριβή μεταξύ παιδιού και skateboard είναι μηδέν $\Rightarrow$ δεν έχει σημασία ο συντελεστής τριβής.

ε: Αυτό το αποτέλεσμα ισχύει μόνο για λεία πίστα.

[redacted]

Ισχύς: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$, $EM_A = EM_K \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = -gm(R-H)$



Βαρύτητα: $\vec{F}\cdot\vec{v} = mgv\cos\theta$

$= mg\sqrt{v_A^2 + 2g(R-H)}\sqrt{\frac{H}{R}\left(2-\frac{H}{R}\right)}$

Για περίπτωση χωρίς τριβή

$\sin\theta = \frac{R-H}{R}$

$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{\frac{H}{R}\left(2-\frac{H}{R}\right)}$

Κάθετη αντίδραση: $\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{F}\cdot\vec{v} = 0$

Τριβή: $\vec{f}\cdot\vec{v} = f(\theta)\, v(\theta)$ Μπορεί να βρεθεί αριθμητικά