ΦΥΣ 331 – Χειμερινό Εξάμηνο 2020

Τελική Εξέταση

Σάββατο 12/12/2020 **Διάρκεια**: **15:00 – 18:00**

Σας δίνονται 9 προβλήματα και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλα.
Σύνολο μονάδων 100.

Καλή Επιτυχία

Μερικές χρήσιμες σχέσεις:

$$u_1(p) = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{p_z}{E+m} \\ \dfrac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_2(p) = N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \dfrac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \quad \upsilon_1(p) = N\begin{pmatrix} \dfrac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \dfrac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \upsilon_2(p) = N\begin{pmatrix} \dfrac{p_z}{E+m} \\ \dfrac{p_x+ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$N = \sqrt{E+m}$$

$$u_\uparrow(\theta,\varphi) = N\begin{pmatrix} c \\ se^{i\varphi} \\ \dfrac{p}{E+m}c \\ \dfrac{pe^{i\varphi}}{E+m}s \end{pmatrix} \quad u_\downarrow(\theta,\varphi) = N\begin{pmatrix} -s \\ ce^{i\varphi} \\ \dfrac{p}{E+m}s \\ \dfrac{-pe^{i\varphi}}{E+m}c \end{pmatrix} \quad \upsilon_\uparrow(\theta,\varphi) = N\begin{pmatrix} \dfrac{p}{E+m}s \\ \dfrac{-pe^{i\varphi}}{E+m}c \\ -s \\ ce^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad \upsilon_\downarrow(\theta,\varphi) = N\begin{pmatrix} \dfrac{p}{E+m}c \\ \dfrac{pe^{i\varphi}}{E+m}s \\ c \\ se^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

$c = \cos(\theta/2)$ και $s = \sin(\theta/2)$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},\ \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ -\sigma_\mu & 0 \end{pmatrix},\ \{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu},\ (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0,\quad (\gamma^\mu)^\dagger = -\gamma^\mu$$

Dirac: $\partial_\mu\psi + \frac{mc}{\hbar}\psi = 0$

1. [**10μ**]

Δεδομένου του περιεχομένου σε quarks των σωματιδίων που αναφέρονται $\Lambda(uds)$, $K^0(\bar{s}d)$, $K^+(u\bar{s})$ και $\pi^+(u\bar{d})$, να σχεδιάσετε τα διαγράμματα Feynman των ακόλουθων διεργασιών (θα πρέπει να δείξετε ποια η διεύθυνση του χρόνου στις γραμμές σωματιδίων):

(**α**) Σκέδαση $\pi^- p \to \Lambda K^0$ χρησιμοποιώντας gluons αλλά όχι W's. [**2μ**]

(**β**) Διάσπαση $\Lambda \to n\pi^0$. [**2μ**]

(**γ**) Διάσπαση $K^+ \to \pi^+\pi^0$ [**2μ**]

(**δ**) Διάσπαση $\tau^+ \to \pi^+\nu_\tau$ [**2μ**]

(**ε**) Διάσπαση $K^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0$ [**2μ**]

2. [**10μ**]

Να δείξετε ότι η διάσπαση $\omega \to \pi^+\pi^-\pi^0$ διατηρεί το isospin ενώ η διάσπαση $\omega \to \pi^0\pi^0\pi^0$ δεν το διατηρεί.

3. [**10μ**]

Μια δέσμη K^0 παράγεται από την σκέδαση $\pi^- p \to K^0\Lambda^0$ και διαδίδεται στο κενό και μπορεί να διασπαστεί. Σε απόσταση d που αντιστοιχεί σε 20 φορές τον χρόνο ζωής του K_1 ($d = 20c\tau_{\mathrm{K}_1}$) υπάρχει ένας στόχος που απορροφά το 10% της προσπίπτουσας δέσμης των K^0. Αν η ενεργός διατομή σκέδασης των $\bar{\mathrm{K}}^0$ είναι τρεις φορές μεγαλύτερη από αυτή των K^0, υπολογίστε το σχετικό ποσοστό των K_1 και K_2 στην δέσμη:

(α) Ακριβώς στο σημείο παραγωγής της δέσμης. [**2μ**]

(β) Ακριβώς πριν τον στόχο. [**3μ**]

(γ) Ακριβώς μετά τον στόχο. [**5μ**]

Υποθέστε ότι τα καόνια είναι χαμηλής ενέργειας και αγνοήστε σχετικιστικές επιδράσεις. Σας δίνεται ότι ο χρόνος ζωής των K_2 είναι $\tau_{\mathrm{K}_2} \approx 600\tau_{\mathrm{K}_1}$.

4. [**10μ**]

Δείξτε ότι τουλάχιστον μία από τις λύσεις μη-μηδενικής ορμής, για παράδειγμα θεωρήστε την $\Psi(x) = Ae^{-ik_\mu x^\mu}\begin{pmatrix} -p_x/mc + i\,p_y/mc \\ E/mc^2 + p_z/mc \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ αποτελεί λύση της εξίσωσης του *Dirac*.

5. [**10μ**]

Είδαμε ότι ο γ^5 πίνακας ορίζεται από την σχέση: $\gamma^5 \equiv -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ταυτότητες ικανοποιούνται από οποιοδήποτε σετ πινάκων *Dirac* (όχι απαραίτητα αυτούς που παρουσιάστηκαν στις διαλέξεις) οι οποίοι ικανοποιούν τη γενική σχέση: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I_{4\times 4}$, την παραπάνω σχέση για τον γ^5 πίνακα αλλά και αυτά που ξέρετε για τους πίνακες και τη μετρική τους. Το σύμβολο "Tr" αναφέρεται στο ίχνος του πίνακα. Τέλος είναι χρήσιμο να θυμηθείτε ότι το ίχνος είναι κυκλικό, δηλαδή *Tr*(ABC) = *Tr*(BCA) = *Tr*(CAB).

(α) $Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4\eta^{\mu\nu}$. [**2μ**]

(β) $\gamma^5\gamma^5 = I$. [**2μ**]

(γ) $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$. [**2μ**]

(δ) Το ίχνος περιττού γινομένου γ-πινάκων είναι πάντοτε μηδέν. [**2μ**]

(ε) $Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu) = -Tr(\gamma^5\gamma^\nu\gamma^\mu)$ [**2μ**]

6. [**10μ**]

Το εσωτερικό γινόμενο δύο 4-διανυσμάτων είναι $P^1 \cdot P^2 \equiv P^1_\mu P^{2\mu}$, ενώ σύμφωνα με τις ιδιότητες των ιχνών πινάκων έχουμε ότι: $Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho) = 4(\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho} - \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho} + \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda})$.

(**α**) Υπολογίστε το $Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho)P^1_\mu P^2_\nu P^2_\lambda P^1_\rho$ ως εσωτερικά γινόμενα 4-διανυσμάτων, π.χ. $P^1 \cdot P^2$ κλπ. [**5μ**]

(**β**) Υπολογίστε το $Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda)P^1_\mu P^2_\nu P^2_\lambda$ [**2μ**]

(γ) Δείξτε ότι η απάντησή σας στο ερώτημα (α) είναι αμετάβλητη κάτω από τη συμμετρία εναλλαγής του ίχνους. [**3μ**]

7. [**10μ**]

Ένα πείραμα σκοπός του οποίου είναι η αναζήτηση διάσπασης του πρωτονίου μέσω της ανίχνευσης της διεργασίας $p \rightarrow e^+ + \pi^0$ έχει σχεδιαστεί ώστε να χρησιμοποιεί μια δεξαμενή με νερό σε σχήμα κύβου ως πηγή των πρωτονίων. Οι πιθανές διασπάσεις μπορούν να ανιχνευτούν μέσω της ακτινοβολίας Cherenkov που εκπέμπεται από τις ηλεκτρομαγνητικές καταιγίδες των σωματιδίων της διάσπασης που διαπερνούν το νερό του ανιχνευτή.

(α) Πόσο μεγάλη θα πρέπει να είναι η δεξαμενή ώστε να περιέχει τις καταιγίδες αυτές νοουμένου ότι ξεκινούν από το κέντρο του ανιχνευτή; [**5μ**]

(β) Εκτιμήστε το συνολικό μήκος της ακτινοβολίας των καταιγίδων που προκαλούνται από ένα γεγονός διάσπασης πρωτονίου και επομένως τον συνολικό αριθμό φωτονίων που εκπέμπονται στην περιοχή του ορατού φάσματος (λ=400-700 nm ή 1.77-3.1eV). Δίνεται ότι το μήκος ακτινοβολίας X_0 του νερού είναι 433mm και η κριτική ενέργεια E_c = 70MeV. [**3μ**]

(γ) Αν το φως από την ακτινοβολία ανιχνεύεται μέσω μιας σειράς φωτοπολλαπλασιαστών που βρίσκονται στην επιφάνεια του νερού του ανιχνευτή και αν η οπτική διαπερατότητα του νερού είναι 50% ενώ η απόδοση της φωτοκαθόδου του φωτοπολλαπλασιαστή είναι 20%, ποιο ποσοστό της επιφάνειας του νερού θα πρέπει να καλυφθεί με φωτοπολλαπλασιαστές ώστε να επιτευχθεί 5% διακριτική ικανότητα ενέργειας; [**2μ**]

8. [**10μ**]

Σε έναν ανιχνευτή καταγράφονται οι τροχιές δύο φορτισμένων σωματιδίων που προέρχονται από την ίδια κορυφή (δηλαδή αντιπροσωπεύουν τα προϊόντα διάσπασης ενός άλλου σωματιδίου). Οι ορμές των δύο σωματιδίων στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου είναι $\vec{p}_1 = (0.087, 0., 8.854) GeV/c$ και $\vec{p}_2 = (-0.087, 0., 1.083) GeV/c$. Παρακάτω είναι ένας πίνακας σωματιδίων, η μάζας τους και το φορτίο τους. Υποθέστε ότι ανιχνεύονται όλα τα σωματίδια από την διάσπαση (δηλαδή δεν υπάρχουν μη ανιχνεύσιμα σωματίδια).

Σωματίδιο	**Μάζα (GeV/c^2)**	**Τύπος**	**Φορτίο**
p	0.9383	Βαρυόνιο	+1
n	0.9396	Βαρυόνιο	0
π^+	0.1396	Μεσόνιο	+1
π^-	0.1396	Μεσόνιο	-1
π^0	0.1349	Μεσόνιο	0
e^-	0.000511	Λεπτόνιο	-1
e^+	0.000511	Λεπτόνιο	+1
μ^+	0.1134	Λεπτόνιο	+1
μ^-	0.1134	Λεπτόνιο	-1
K^+	0.4937	Μεσόνιο	+1
K^-	0.4937	Μεσόνιο	-1
K^0	0.4977	Μεσόνιο	0
Λ	1.1157	Βαρυόνιο	0
Ξ^-	1.3213	Βαρυόνιο	-1
Ξ^0	1.3148	Βαρυόνιο	0

(α) Θεωρώντας την μετρούμενη ορμή των σωματιδίων, τους νόμους διατήρησης και τις μάζες και ιδιότητες των σωματιδίων που αναγράφονται στον πίνακα, από ποιο σωματίδιο προέρχονται οι τροχιές που παρατηρούνται στον ανιχνευτή; [**6μ**] (β) Αν θεωρήσουμε τον z-άξονα στη διεύθυνση του διασπώμενου σωματιδίου, ποια είναι η γωνία στην οποία το σωματίδιο 1 διασπάται ως προς αυτόν το άξονα στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας του διασπώμενου σωματιδίου; [**4μ**]

9. [**20μ**]

(**α**) Σχεδιάστε το ή τα διαγράμματα Feynman πρώτης τάξης (leading order) για την σκέδαση $A + A \rightarrow C + C$ του μοντέλου ABC που συζητήσαμε στις διαλέξεις. Μη ξεχάσετε να σημειώσετε την διεύθυνση του χρόνου. [**5μ**]

(**β**) Ποιο είναι το πλάτος μετάβασης $|M|^2$ συναρτήσει των 4-ορμών; [**4μ**]

(**γ**) Ποια είναι η διαφορική ενεργός διατομή σκέδασης, $\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$, συναρτήσει των 4-ορμών στο σύστημα κέντρου μάζας; [**3μ**]

(**δ**) Ποια είναι η διαφορική ενεργός διατομής σκέδασης, $\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$, συναρτήσει της γωνίας σκέδασης στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας, υποθέτοντας ότι το A και C έχουν μάζα M και το B έχει μηδενική μάζα; [**5μ**]

(**ε**) Σχεδιάστε το ή τα πρώτης τάξης διαγράμματα Feynman για την σκέδαση $A + A \rightarrow A + A$. [**3μ**]

For $I = 1$ (π, b, ρ, a): $u\overline{d}$, $(u\overline{u} - d\overline{d})/\sqrt{2}$, $d\overline{u}$;
for $I = 0$ (η, η', h, h', ω, ϕ, f, f'): $c_1(u\overline{u} + d\overline{d}) + c_2(s\overline{s})$

$\pi^{\pm}$ $I^G(J^P) = 1^-(0^-)$

Mass $m = 139.57061 \pm 0.00024$ MeV (S = 1.6)
Mean life $\tau = (2.6033 \pm 0.0005) \times 10^{-8}$ s (S = 1.2)
$c\tau = 7.8045$ m

π^0 $I^G(J^{PC}) = 1^-(0^{-+})$

Mass $m = 134.9770 \pm 0.0005$ MeV (S = 1.1)
$m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0} = 4.5936 \pm 0.0005$ MeV
Mean life $\tau = (8.52 \pm 0.18) \times 10^{-17}$ s (S = 1.2)
$c\tau = 25.5$ nm

$K^+ = u\overline{s}$, $K^0 = d\overline{s}$, $\overline{K}^0 = \overline{d}s$, $K^- = \overline{u}s$, similarly for K^*'s

$K^{\pm}$ $I(J^P) = \frac{1}{2}(0^-)$

Mass $m = 493.677 \pm 0.016$ MeV [u] (S = 2.8)
Mean life $\tau = (1.2380 \pm 0.0020) \times 10^{-8}$ s (S = 1.8)
$c\tau = 3.711$ m

K^0_S $I(J^P) = \frac{1}{2}(0^-)$

Mean life $\tau = (0.8954 \pm 0.0004) \times 10^{-10}$ s (S = 1.1) Assuming CPT
Mean life $\tau = (0.89564 \pm 0.00033) \times 10^{-10}$ s Not assuming CPT
$c\tau = 2.6844$ cm Assuming CPT

$\boxed{K_L^0}$ $I(J^P) = \frac{1}{2}(0^-)$

$m_{K_L} - m_{K_S}$

$= (0.5293 \pm 0.0009) \times 10^{10}\ \hbar\ \mathrm{s}^{-1}$ (S = 1.3) Assuming CPT

$= (3.484 \pm 0.006) \times 10^{-12}$ MeV Assuming CPT

$= (0.5289 \pm 0.0010) \times 10^{10}\ \hbar\ \mathrm{s}^{-1}$ Not assuming CPT

Mean life $\tau = (5.116 \pm 0.021) \times 10^{-8}$ s (S = 1.1)

$c\tau = 15.34$ m

$\boxed{\omega(782)}$ $I^G(J^{PC}) = 0^-(1^{--})$

$p,\ N^+ = uud; \quad n,\ N^0 = udd$

$\boxed{p}$ $I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$

$\boxed{n}$ $I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$

$\Lambda^0 = uds$

$\boxed{\Lambda}$ $I(J^P) = 0(\frac{1}{2}^+)$

$\Sigma^+ = uus, \quad \Sigma^0 = uds, \quad \Sigma^- = dds$

$\boxed{\Sigma^+}$ $I(J^P) = 1(\frac{1}{2}^+)$

$\boxed{\Sigma^0}$ $I(J^P) = 1(\frac{1}{2}^+)$

$\boxed{\Sigma^-}$ $I(J^P) = 1(\frac{1}{2}^+)$

$\Xi^0 = uss, \quad \Xi^- = dss$

$\boxed{\Xi^0}$ $I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$

$\boxed{\Xi^-}$ $I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$

43. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

		J	J	...
		M	M	...
m1	m2	Coefficients		
m1	m2			
.	.			

1/2×1/2

m1	m2	J=1, M=+1
+1/2	+1/2	1

m1	m2	J=1, M=0	J=0, M=0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

m1	m2	J=1, M=−1
−1/2	−1/2	1

1×1/2

m1	m2	J=3/2, M=+3/2
+1	+1/2	1

m1	m2	J=3/2, M=+1/2	J=1/2, M=+1/2
+1	−1/2	1/3	2/3
0	+1/2	2/3	−1/3

m1	m2	J=3/2, M=−1/2	J=1/2, M=−1/2
0	−1/2	2/3	1/3
−1	+1/2	1/3	−2/3

m1	m2	J=3/2, M=−3/2
−1	−1/2	1

2×1

m1	m2	J=3, M=+3
+2	+1	1

m1	m2	J=3, M=+2	J=2, M=+2
+2	0	1/3	2/3
+1	+1	2/3	−1/3

m1	m2	J=3, M=+1	J=2, M=+1	J=1, M=+1
+2	−1	1/15	1/3	3/5
+1	0	8/15	1/6	−3/10
0	+1	2/5	−1/2	1/10

m1	m2	J=3, M=0	J=2, M=0	J=1, M=0
+1	−1	1/5	1/2	3/10
0	0	3/5	0	−2/5
−1	+1	1/5	−1/2	3/10

m1	m2	J=3, M=−1	J=2, M=−1	J=1, M=−1
0	−1	2/5	1/2	1/10
−1	0	8/15	−1/6	−3/10
−2	+1	1/15	−1/3	3/5

m1	m2	J=3, M=−2	J=2, M=−2
−1	−1	2/3	1/3
−2	0	1/3	−2/3

m1	m2	J=3, M=−3
−2	−1	1

1×1

m1	m2	J=2, M=+2
+1	+1	1

m1	m2	J=2, M=+1	J=1, M=+1
+1	0	1/2	1/2
0	+1	1/2	−1/2

m1	m2	J=2, M=0	J=1, M=0	J=0, M=0
+1	−1	1/6	1/2	1/3
0	0	2/3	0	−1/3
−1	+1	1/6	−1/2	1/3

m1	m2	J=2, M=−1	J=1, M=−1
0	−1	1/2	1/2
−1	0	1/2	−1/2

m1	m2	J=2, M=−2
−1	−1	1

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\Big)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

2×1/2

m1	m2	J=5/2, M=+5/2
+2	+1/2	1

m1	m2	J=5/2, M=+3/2	J=3/2, M=+3/2
+2	−1/2	1/5	4/5
+1	+1/2	4/5	−1/5

m1	m2	J=5/2, M=+1/2	J=3/2, M=+1/2
+1	−1/2	2/5	3/5
0	+1/2	3/5	−2/5

m1	m2	J=5/2, M=−1/2	J=3/2, M=−1/2
0	−1/2	3/5	2/5
−1	+1/2	2/5	−3/5

m1	m2	J=5/2, M=−3/2	J=3/2, M=−3/2
−1	−1/2	4/5	1/5
−2	+1/2	1/5	−4/5

m1	m2	J=5/2, M=−5/2
−2	−1/2	1

3/2×1/2

m1	m2	J=2, M=+2
+3/2	+1/2	1

m1	m2	J=2, M=+1	J=1, M=+1
+3/2	−1/2	1/4	3/4
+1/2	+1/2	3/4	−1/4

m1	m2	J=2, M=0	J=1, M=0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

m1	m2	J=2, M=−1	J=1, M=−1
−1/2	−1/2	3/4	1/4
−3/2	+1/2	1/4	−3/4

m1	m2	J=2, M=−2
−3/2	−1/2	1

3/2×1

m1	m2	J=5/2, M=+5/2
+3/2	+1	1

m1	m2	J=5/2, M=+3/2	J=3/2, M=+3/2
+3/2	0	2/5	3/5
+1/2	+1	3/5	−2/5

m1	m2	J=5/2, M=+1/2	J=3/2, M=+1/2	J=1/2, M=+1/2
+3/2	−1	1/10	2/5	1/2
+1/2	0	3/5	1/15	−1/3
−1/2	+1	3/10	−8/15	1/6

m1	m2	J=5/2, M=−1/2	J=3/2, M=−1/2	J=1/2, M=−1/2
+1/2	−1	3/10	8/15	1/6
−1/2	0	3/5	−1/15	−1/3
−3/2	+1	1/10	−2/5	1/2

m1	m2	J=5/2, M=−3/2	J=3/2, M=−3/2
−1/2	−1	3/5	2/5
−3/2	0	2/5	−3/5

m1	m2	J=5/2, M=−5/2
−3/2	−1	1

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^\ell_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

$$d^{\,j}_{m',m} = (-1)^{m-m'} d^{\,j}_{m,m'} = d^{\,j}_{-m,-m'}$$

3/2×3/2

m1	m2	J=3, M=+3
+3/2	+3/2	1

m1	m2	J=3, M=+2	J=2, M=+2
+3/2	+1/2	1/2	1/2
+1/2	+3/2	1/2	−1/2

m1	m2	J=3, M=+1	J=2, M=+1	J=1, M=+1
+3/2	−1/2	1/5	1/2	3/10
+1/2	+1/2	3/5	0	−2/5
−1/2	+3/2	1/5	−1/2	3/10

m1	m2	J=3, M=0	J=2, M=0	J=1, M=0	J=0, M=0
+3/2	−3/2	1/20	1/4	9/20	1/4
+1/2	−1/2	9/20	1/4	−1/20	−1/4
−1/2	+1/2	9/20	−1/4	−1/20	1/4
−3/2	+3/2	1/20	−1/4	9/20	−1/4

m1	m2	J=3, M=−1	J=2, M=−1	J=1, M=−1
+1/2	−3/2	1/5	1/2	3/10
−1/2	−1/2	3/5	0	−2/5
−3/2	+1/2	1/5	−1/2	3/10

m1	m2	J=3, M=−2	J=2, M=−2
−1/2	−3/2	1/2	1/2
−3/2	−1/2	1/2	−1/2

m1	m2	J=3, M=−3
−3/2	−3/2	1

2×3/2

m1	m2	J=7/2, M=+7/2
+2	+3/2	1

m1	m2	J=7/2, M=+5/2	J=5/2, M=+5/2
+2	+1/2	3/7	4/7
+1	+3/2	4/7	−3/7

m1	m2	J=7/2, M=+3/2	J=5/2, M=+3/2	J=3/2, M=+3/2
+2	−1/2	1/7	16/35	2/5
+1	+1/2	4/7	1/35	−2/5
0	+3/2	2/7	−18/35	1/5

m1	m2	J=7/2, M=+1/2	J=5/2, M=+1/2	J=3/2, M=+1/2	J=1/2, M=+1/2
+2	−3/2	1/35	6/35	2/5	2/5
+1	−1/2	12/35	5/14	0	−3/10
0	+1/2	18/35	−3/35	−1/5	1/5
−1	+3/2	4/35	−27/70	2/5	−1/10

m1	m2	J=7/2, M=−1/2	J=5/2, M=−1/2	J=3/2, M=−1/2	J=1/2, M=−1/2
+1	−3/2	4/35	27/70	2/5	1/10
0	−1/2	18/35	3/35	−1/5	−1/5
−1	+1/2	12/35	−5/14	0	3/10
−2	+3/2	1/35	−6/35	2/5	−2/5

m1	m2	J=7/2, M=−3/2	J=5/2, M=−3/2	J=3/2, M=−3/2
0	−3/2	2/7	18/35	1/5
−1	−1/2	4/7	−1/35	−2/5
−2	+1/2	1/7	−16/35	2/5

m1	m2	J=7/2, M=−5/2	J=5/2, M=−5/2
−1	−3/2	4/7	3/7
−2	−1/2	3/7	−4/7

m1	m2	J=7/2, M=−7/2
−2	−3/2	1

2×2

m1	m2	J=4, M=+4
+2	+2	1

m1	m2	J=4, M=+3	J=3, M=+3
+2	+1	1/2	1/2
+1	+2	1/2	−1/2

m1	m2	J=4, M=+2	J=3, M=+2	J=2, M=+2
+2	0	3/14	1/2	2/7
+1	+1	4/7	0	−3/7
0	+2	3/14	−1/2	2/7

m1	m2	J=4, M=+1	J=3, M=+1	J=2, M=+1	J=1, M=+1
+2	−1	1/14	3/10	3/7	1/5
+1	0	3/7	1/5	−1/14	−3/10
0	+1	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−1	+2	1/14	−3/10	3/7	−1/5

m1	m2	J=4, M=0	J=3, M=0	J=2, M=0	J=1, M=0	J=0, M=0
+2	−2	1/70	1/10	2/7	2/5	1/5
+1	−1	8/35	2/5	1/14	−1/10	−1/5
0	0	18/35	0	−2/7	0	1/5
−1	+1	8/35	−2/5	1/14	1/10	−1/5
−2	+2	1/70	−1/10	2/7	−2/5	1/5

m1	m2	J=4, M=−1	J=3, M=−1	J=2, M=−1	J=1, M=−1
+1	−2	1/14	3/10	3/7	1/5
0	−1	3/7	1/5	−1/14	−3/10
−1	0	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−2	+1	1/14	−3/10	3/7	−1/5

m1	m2	J=4, M=−2	J=3, M=−2	J=2, M=−2
0	−2	3/14	1/2	2/7
−1	−1	4/7	0	−3/7
−2	0	3/14	−1/2	2/7

m1	m2	J=4, M=−3	J=3, M=−3
−1	−2	1/2	1/2
−2	−1	1/2	−1/2

m1	m2	J=4, M=−4
−2	−2	1

$$d^{\,1}_{0,0} = \cos\theta \qquad d^{\,1/2}_{1/2,1/2} = \cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,1/2}_{1/2,-1/2} = -\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,1}_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2} \qquad d^{\,1}_{1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \qquad d^{\,1}_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,3/2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,1/2} = -\sqrt{3}\,\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,-1/2} = \sqrt{3}\,\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,-3/2} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{1/2,1/2} = \frac{3\cos\theta-1}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{1/2,-1/2} = -\frac{3\cos\theta+1}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,2}_{2,2} = \Big(\frac{1+\cos\theta}{2}\Big)^2$$

$$d^{\,2}_{2,1} = -\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{\,2}_{2,0} = \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta$$

$$d^{\,2}_{2,-1} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{\,2}_{2,-2} = \Big(\frac{1-\cos\theta}{2}\Big)^2$$

$$d^{\,2}_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta-1)$$

$$d^{\,2}_{1,0} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta$$

$$d^{\,2}_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta+1)$$

$$d^{\,2}_{0,0} = \Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\Big)$$

Figure 43.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974).