Υπολογισμός Ενεργών Διατομών στην QED

Χειραλικότητα - Chirality

Η χειραλικότητα εισάγεται ορίζοντας τον γ^5-πίνακα ως: $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}}$$

Οι ιδιότητες του γ^5 πίνακα εξάγονται ουσιαστικά από τις μεταθετικές και Ερμιτισιανές ιδιότητες των γ-πινάκων που οδηγούν στις ακόλουθες σχέσεις:

$$\left(\gamma^5\right)^2 = 1 \qquad \left(\gamma^5\right)^\dagger = \gamma^5 \quad \text{και} \quad \gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$$

Η χειραλικότητα είναι ανεξάρτητη από οποιεσδήποτε περιστροφές ως προς οποιονδήποτε άξονα.

Από την στιγμή που υπάρχουν περιστροφές που μπορεί να αλλάξουν το spin ενός σωματιδίου σε ηρεμία, η χειραλικότητα δεν είναι πανομοιότυπη με το spin του σωματιδίου.

Αντί να χρησιμοποιήσουμε ιδιοκαταστάσεις ελικότητας σαν Dirac βάση, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε ιδιοκαταστάσεις χειραλικότητας.

Οι ιδιοκαταστάσεις χειραλικότητας συνήθως συμβολίζονται με u_L, u_R, v_L, v_R αντί $u_\uparrow, u_\downarrow, v_\uparrow, v_\downarrow$

Σε υψηλές ενέργειες ισχύει ότι: $\gamma^5 u_\uparrow = +u_\uparrow \quad \gamma^5 u_\downarrow = -u_\downarrow \quad \gamma^5 v_\uparrow = -v_\uparrow$ και $\gamma^5 v_\downarrow = +v_\downarrow$

Δηλαδή σε υψηλές ενέργειες, οι ιδιοκαταστάσεις της χειραλικότητας και ελικότητας είναι ίδιες αλλά αυτό δεν ισχύει για σωματίδια χαμηλής ενέργειας

Η χειραλικότητα είναι ακριβώς Lorentz αναλλοίωτη ποσότητα και διατηρείται ακριβώς από τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις

Χειραλικότητα - Chirality

Εν γένει, οι ιδιοκαταστάσεις της χειραλικότητας ορίζονται σαν L(eft)-handed και R(ight)-handed ενώ οι ιδιοκαταστάσεις της ελικότητας συμβολίζονται όπως είπαμε σαν ↑↓

$$\gamma^5 u_L = -u_L \qquad \gamma^5 v_L = +v_L$$

$$\gamma^5 u_R = +u_R \qquad \gamma^5 v_R = -v_R$$

Με την παραπάνω σύμβαση, φαίνεται ότι για υψηλές ενέργειες οι ιδιοκαταστάσεις της ελικότητας και χειραλικότητας ταυτίζονται τόσο για σωματίδια όσο και αντισωματίδια

Δηλαδή για παράδειγμα ισχύει: $u_R \to u_\uparrow$ και $v_L \to v_\downarrow$

Οι λύσεις της εξίσωσης Dirac που είναι και ιδιοκαταστάσεις του γ^5 είναι ίδιες με τις ιδιοκαταστάσεις της ελικότητας για την περίπτωση μηδενικής μάζας

Επομένως θα έχουμε:

$$u_R \equiv N\begin{pmatrix} c \\ se^{i\varphi} \\ c \\ se^{i\varphi} \end{pmatrix} \qquad u_L \equiv N\begin{pmatrix} -s \\ ce^{i\varphi} \\ s \\ -ce^{i\varphi} \end{pmatrix} \qquad v_R \equiv N\begin{pmatrix} s \\ -ce^{i\varphi} \\ -s \\ ce^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad v_L \equiv N\begin{pmatrix} c \\ -se^{i\varphi} \\ c \\ se^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

Όπου: $N = \sqrt{\dfrac{E+m}{c}}$ και $c = \cos(\theta/2)$ ενώ $s = \sin(\theta/2)$

Σε αντίθεση με την ελικότητα δεν υπάρχει απλή φυσική ερμηνεία για την χειραλικότητα

Χειραλικοί Τελεστές προβολής

Μπορούμε να αναλύσουμε σε χειραλικές συνιστώσες οποιοδήποτε Dirac spinor χρησιμοποιώντας τους χειραλικούς τελεστές προβολής P_L και P_R που ορίζονται ως:

$$\boxed{P_L = \frac{1-\gamma^5}{2}} \quad \text{και} \quad \boxed{P_R = \frac{1+\gamma^5}{2}}$$

Οι τελεστές P_L και P_R ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$P_L + P_R = 1 \qquad P_R P_R = P_R \qquad P_L P_L = P_L \quad \text{και} \quad P_R P_L = 0$$

Οι τελεστές P_L και P_R μπορούν να γραφούν σε μορφή πίνακα σαν

$$P_R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P_L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

Συνδυάζοντας με τις ιδιοκαταστάσεις της χειραλικότητας θα έχουμε:

$$P_R u_R = u_R \qquad P_R u_L = 0 \qquad P_R v_R = 0 \quad \text{ενώ} \quad P_R v_L = v_L$$

$$P_L u_R = 0 \qquad P_L u_L = u_L \qquad P_L v_R = v_R \quad \text{ενώ} \quad P_L v_L = 0$$

Αφού έχουμε προβολές χειραλικών καταστάσεων, τότε ένα οποιοδήποτε spinor γράφεται:

$$u = a_R u_R + a_L u_L = \frac{1}{2}\left(1+\gamma^5\right)u + \frac{1}{2}\left(1-\gamma^5\right)u$$

όπου a_L, a_R είναι μιγαδικοί συντελεστές και u_L, u_R είναι χειραλικές ιδιοκαταστάσεις

Πίσω στην σκέδαση $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Βρήκαμε ότι το πλάτος για την μετάβαση είναι: $M = \frac{e^2}{(p_1+p_2)^2}\left[\bar{u}(3)\gamma_\mu v(4)\right]\left[\bar{v}(2)\gamma^\mu u(1)\right]$

και τα μή μηδενικά 4-διανύσματα ρευμάτων ήταν:

$$\left[\bar{v}_\downarrow \gamma^\mu u_\uparrow\right] = \frac{2E}{c}(0,-1,-i,0) \qquad \left[\bar{u}_\downarrow \gamma^\mu v_\uparrow\right] = \frac{2E}{c}(0,-\cos\theta,-i,\sin\theta)$$

και

$$\left[\bar{v}_\uparrow \gamma^\mu u_\downarrow\right] = \frac{2E}{c}(0,-1,+i,0) \qquad \left[\bar{u}_\uparrow \gamma^\mu v_\downarrow\right] = \frac{2E}{c}(0,-\cos\theta,+i,\sin\theta)$$

Υπολογίζουμε τώρα τα εσωτερικά γινόμενα των 4-διανυσμάτων αυτών:

$$\left[\bar{u}_\downarrow \gamma^\mu v_\uparrow\right]\cdot\left[\bar{v}_\downarrow \gamma^\mu u_\uparrow\right] = \frac{4E^2}{c^2}(0,-\cos\theta,-i,\sin\theta)\cdot(0,-1,-i,0) \quad = +\frac{4E^2}{c^2}(\cos\theta-1)$$

$$\left[\bar{u}_\downarrow \gamma^\mu v_\uparrow\right]\cdot\left[\bar{v}_\uparrow \gamma^\mu u_\downarrow\right] = \frac{4E^2}{c^2}(0,-\cos\theta,-i,\sin\theta)\cdot(0,-1,+i,0) \quad = +\frac{4E^2}{c^2}(\cos\theta+1)$$

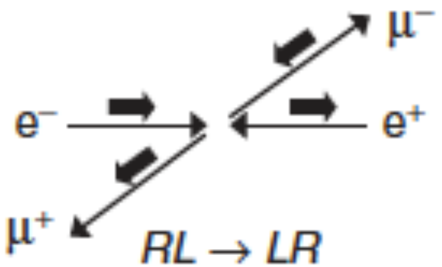
$$\left[\bar{u}_\uparrow \gamma^\mu v_\downarrow\right]\cdot\left[\bar{v}_\downarrow \gamma^\mu u_\uparrow\right] = \frac{4E^2}{c^2}(0,-\cos\theta,+i,\sin\theta)\cdot(0,-1,-i,0) \quad = +\frac{4E^2}{c^2}(\cos\theta+1)$$

$$\left[\bar{u}_\uparrow \gamma^\mu v_\downarrow\right]\cdot\left[\bar{v}_\uparrow \gamma^\mu u_\downarrow\right] = \frac{4E^2}{c^2}(0,-\cos\theta,+i,\sin\theta)\cdot(0,-1,+i,0) \quad = +\frac{4E^2}{c^2}(\cos\theta-1)$$

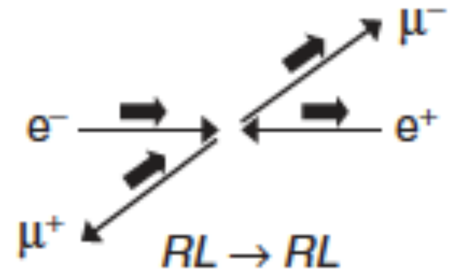
Συνδυασμός ρευμάτων στη σκέδαση $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Για τα μή μηδενικά 4-διανύσματα ρευμάτων έχουμε:

$$\left[\bar{u}_{\downarrow}\gamma^{\mu}v_{\uparrow}\right]\cdot\left[\bar{v}_{\downarrow}\gamma^{\mu}u_{\uparrow}\right]=+\frac{4E^2}{c^2}\left(\cos\theta-1\right)$$

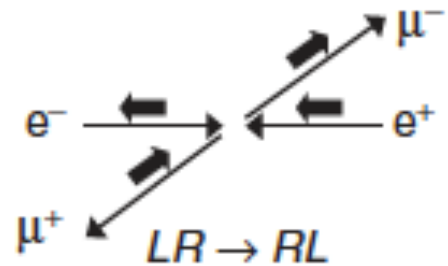


$$\left[\bar{u}_{\uparrow}\gamma^{\mu}v_{\downarrow}\right]\cdot\left[\bar{v}_{\downarrow}\gamma^{\mu}u_{\uparrow}\right]=+\frac{4E^2}{c^2}\left(\cos\theta+1\right)$$



$$\left[\bar{u}_{\downarrow}\gamma^{\mu}v_{\uparrow}\right]\cdot\left[\bar{v}_{\uparrow}\gamma^{\mu}u_{\downarrow}\right]=+\frac{4E^2}{c^2}\left(\cos\theta+1\right)$$

$$\left[\bar{u}_{\uparrow}\gamma^{\mu}v_{\downarrow}\right]\cdot\left[\bar{v}_{\uparrow}\gamma^{\mu}u_{\downarrow}\right]=+\frac{4E^2}{c^2}\left(\cos\theta-1\right)$$



Οι καταστάσεις spin της αρχικής κατάστασης θα πρέπει να ευθυγραμμιστούν ώστε να συμβεί η σκέδαση.

Τα spins της τελικής κατάστασης θα πρέπει και αυτά να ευθυγραμμιστούν.

Το πλάτος μετάβασης είναι μεγάλο όταν οι αρχικές και τελικές καταστάσεις ευθυγραμμίζονται μεταξύ τους, και είναι μηδέν όταν δείχνουν αντίθετα.

Συνδυασμός ρευμάτων στη σκέδαση $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Το πλάτος μετάβασης είναι: $M = \frac{e^2}{s}\left[\bar{u}(3)\gamma_\mu v(4)\right]\left[\bar{v}(2)\gamma^\mu u(1)\right]$

Το γινόμενο δύο ρευμάτων θα δώσει: ($\sqrt{s} = 2E/c = (p_1 + p_2)$)

$$\frac{4E^2}{c^2}(\cos\theta \pm 1) = s(\cos\theta \pm 1)$$

$\Rightarrow M = e^2(\cos\theta \pm 1)$

Οι καταστάσεις είναι διακριτές αλλά δεν ξέρουμε αρχικά spins και δεν μετρούμε τελικά spins.

Επομένως υψώνουμε στο τετράγωνο τα ξεχωριστά πλάτη, αθροίζουμε και διαιρούμε με 4

$$\frac{1}{4}\sum|M|^2 = \frac{1}{4}\left\{2\left[e^2(\cos\theta + 1)\right]^2 + 2\left[e^2(\cos\theta - 1)\right]^2\right\}$$

$$= \frac{e^4}{2}\left[\left(\cos^2\theta + 1 + 2\cos\theta\right) + \left(\cos^2\theta + 1 - 2\cos\theta\right)\right]$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{1}{4}\sum|M|^2 = e^4\left(1 + \cos^2\theta\right)}$$

Διαφορική ενεργός διατομή σκέδασης $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Η ενεργός διατομή σκέδασης για σκέδαση 2 σωμάτων σε 2 σώματα ($2 \rightarrow 2$) στο σύστημα αναφοράς του CM είναι:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{S} \frac{|M|^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{p_F}{p_I} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{S} \frac{|M|^2}{s} \frac{p_F}{p_I}$$

Ο παράγοντας των συνδυασμών, S, είναι 1, ενώ αν αγνοήσουμε τις μάζες: $\frac{p_F}{p_I} = 1$

Εισάγουμε τον όρο του M^2 που υπολογίσαμε προηγουμένως οπότε θα πάρουμε τελικά:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{e^4 \left(1 + \cos^2\theta\right)}{s}$$

Αλλά η σταθερα της λεπτής υφής είναι: $\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi}$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = (\hbar c)^2 \frac{\alpha^2}{4s}\left(1 + \cos^2\theta\right)}$$

Υπολογισμός Ενεργών Διατομών στην QED

Συνδυασμός ρευμάτων στη σκέδαση $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Το πλάτος μετάβασης είναι: $M = \frac{e^2}{s}\left[\bar{u}(3)\gamma_\mu v(4)\right]\left[\bar{v}(2)\gamma^\mu u(1)\right]$

Το γινόμενο δύο ρευμάτων θα δώσει: ($\sqrt{s} = 2E/c = (p_1 + p_2)$)

$$\frac{4E^2}{c^2}(\cos\theta \pm 1) = s(\cos\theta \pm 1)$$

$$\Rightarrow M = e^2(\cos\theta \pm 1)$$

Οι καταστάσεις είναι διακριτές αλλά δεν ξέρουμε αρχικά spins και δεν μετρούμε τελικά spins.

Επομένως υψώνουμε στο τετράγωνο τα ξεχωριστά πλάτη, αθροίζουμε και διαιρούμε με 4

$$\frac{1}{4}\sum|M|^2 = \frac{1}{4}\left\{2\left[e^2(\cos\theta+1)\right]^2 + 2\left[e^2(\cos\theta-1)\right]^2\right\}$$

$$= \frac{e^4}{2}\left[\left(\cos^2\theta + 1 + 2\cos\theta\right) + \left(\cos^2\theta + 1 - 2\cos\theta\right)\right]$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{1}{4}\sum|M|^2 = e^4\left(1+\cos^2\theta\right)}$$

Διαφορική ενεργός διατομή σκέδασης $e^+ e^- \to \mu^+ \mu^-$

Η ενεργός διατομή σκέδασης για σκέδαση 2 σωμάτων σε 2 σώματα $(2 \to 2)$ στο σύστημα αναφοράς του CM είναι:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{S} \frac{|M|^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{p_F}{p_I} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{S} \frac{|M|^2}{s} \frac{p_F}{p_I}$$

Ο παράγοντας των συνδυασμών, S, είναι 1, ενώ αν αγνοήσουμε τις μάζες: $\frac{p_F}{p_I} = 1$

Εισάγουμε τον όρο του M^2 που υπολογίσαμε προηγουμένως οπότε θα πάρουμε τελικά:

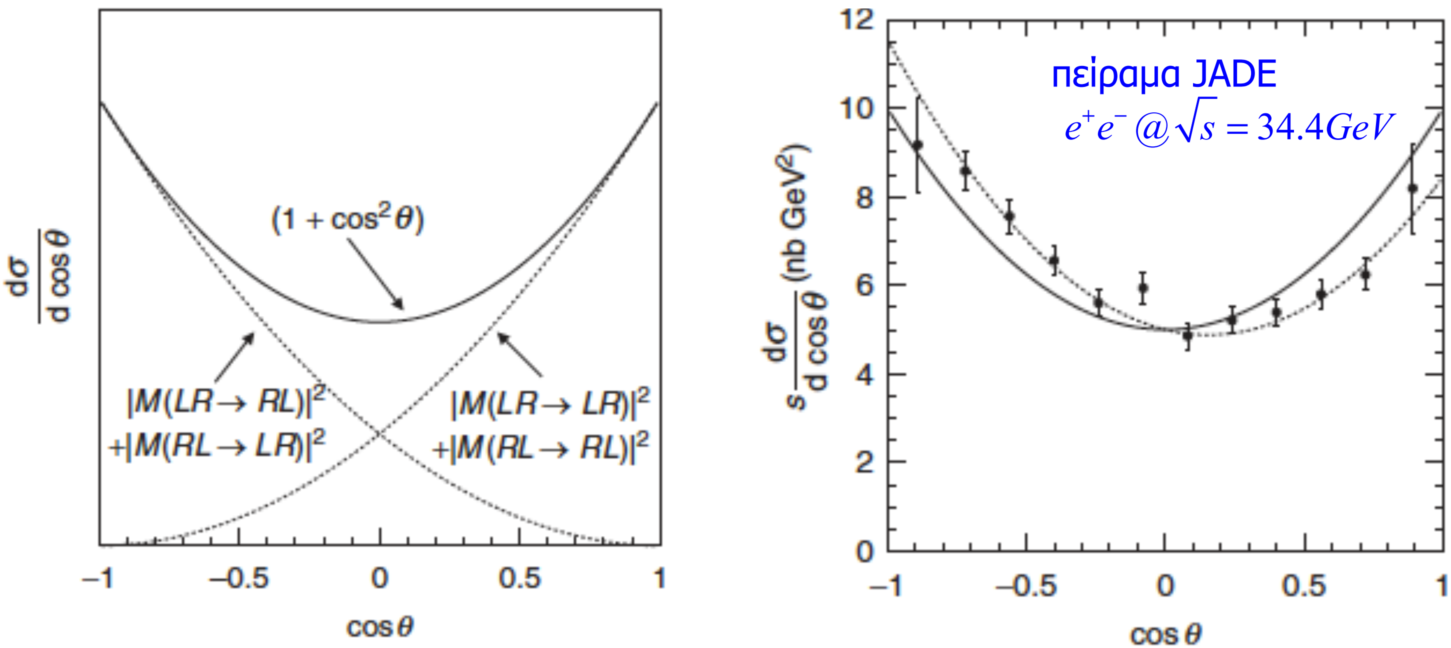
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{e^4 \left(1 + \cos^2\theta\right)}{s}$$

Αλλά η σταθερα της λεπτής υφής είναι: $\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi}$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = (\hbar c)^2 \frac{\alpha^2}{4s}\left(1 + \cos^2\theta\right)}$$

Ενεργός διατομή σκέδασης

Το γράφημα της ενεργούς διατομής συναρτήσει του cosθ φαίνεται παρακάτω καθώς επίσης και οι συνεισφορές των διαφορετικών καταστάσεων ελικότητας



Η κατανομή είναι συμμετρική (ίδιος αριθμός μιονίων μ^+) στο ημισφαίριο προς την μια πλευρά της δέσμης ως προς το ημισφαίριο ως προς την αντίθετη πλευρά της δέσμης.

Αναμενόμενο λόγω διατήρησης της parity στις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις

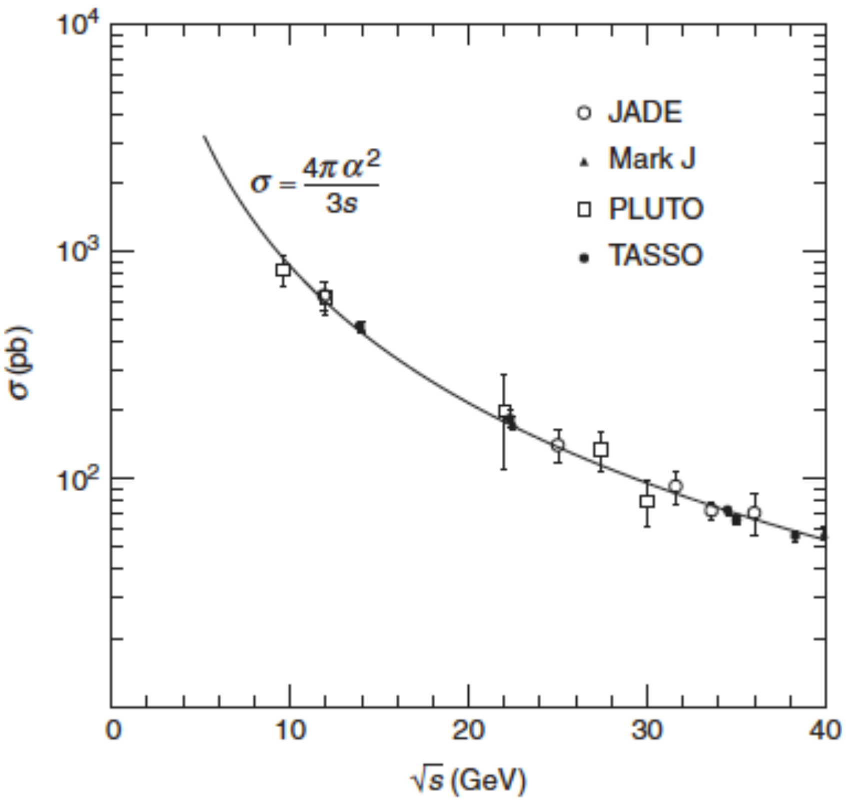
Πειραματικά εμφανίζεται μια μικρή ασυμμετρία που προέρχεται από την συνεισφορά διαγραμμάτων συμμετοχής του Z^0 μποζονίου και την συμβολή του με τα QED διαγράμματα

Ολική ενεργός διατομής σκέδασης

Ολοκληρώνοντας ως προς την ολική στερεά γωνία θα έχουμε: $d\Omega = \sin\theta d\varphi d\theta = d\varphi d\left(\cos\theta\right)$

οπότε: $\int\left(1+\cos^2\theta\right)d\Omega = 2\pi\int_{-1}^{1}\left(1+\cos^2\theta\right)d\left(\cos\theta\right) = \dfrac{16\pi}{3}$

Αντικαθιστώντας τους σταθερούς παράγοντες της διαφορικής ενεργού διατομής παίρνουμε:



$$\sigma_{o\lambda} = \frac{\alpha^2}{4s}\frac{16\pi}{3} \boxed{\Rightarrow \sigma_{o\lambda} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}}$$

Η διπλανή εικόνα δείχνει την μετρούμενη ολική ενεργό διατομή συναρτήσει της ενέργειας του κέντρου μάζας.

Η συμφωνία είναι της τάξης του 1% για την απλή θεωρία χαμηλότερης τάξης.

Τα διαγράμματα συμβολής από την συνεισφορά του μποζονίου Z^0 στην προκειμένη περίπτωση έχουν πολύ μικρή επιρροή αφού η ασυμμετρία στην περίπτωση αυτή σχεδόν ακυρώνεται

Ενεργός διατομή σε Lorentz αναλλοίωτη μορφή

Για τον υπολογισμό των πινακοστοιχείων βασιστήκαμε στις σχέσεις της γωνίας θ, στο σύστημα αναφοράς του CM

Τα πινακοστοιχεία είναι αναλλοίωτα κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz, οπότε θα μπορούσαμε να γράψουμε την ενεργό διατομή σε μια Lorentz αναλλοίωτη μορφή.

Τα 4-διανύσματα των σωματιδίων της σκέδασης είναι:

$$\underset{\rightarrow}{p}_1 = \left(E, 0, 0, E\right) \qquad \underset{\rightarrow}{p}_3 = \left(E, E\sin\theta, 0, E\cos\theta\right)$$

$$\underset{\rightarrow}{p}_2 = \left(E, 0, 0, -E\right) \qquad \underset{\rightarrow}{p}_4 = \left(E, -E\sin\theta, 0, -E\cos\theta\right)$$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε τις σχέσεις μεταξύ τους ως:

$$\underset{\rightarrow}{p}_1\underset{\rightarrow}{p}_2 = 2E^2 \qquad \underset{\rightarrow}{p}_1\underset{\rightarrow}{p}_3 = E^2\left(1+\cos\theta\right) \qquad \underset{\rightarrow}{p}_1\underset{\rightarrow}{p}_4 = E^2\left(1-\cos\theta\right)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις αυτές στην μέση τιμή του πλάτους μετάβασης θα πάρουμε:

$$\frac{1}{4}\sum\left|M\right|^2 = \frac{1}{4}\left\{2\left[e^2\left(\cos\theta+1\right)\right]^2 + 2\left[e^2\left(\cos\theta-1\right)\right]^2\right\} = \frac{e^4}{2}\left[\left(\cos\theta+1\right)^2 + \left(\cos\theta-1\right)^2\right]$$

$$= \frac{e^4}{2}\left[\frac{\left(\underset{\rightarrow}{p}_1\underset{\rightarrow}{p}_3\right)^2}{E^4} + \frac{\left(\underset{\rightarrow}{p}_1\underset{\rightarrow}{p}_4\right)^2}{E^4}\right] = \frac{2e^4}{4E^4}\left[\left(\underset{\rightarrow}{p}_1\underset{\rightarrow}{p}_3\right)^2 + \left(\underset{\rightarrow}{p}_1\underset{\rightarrow}{p}_4\right)^2\right] = 2e^4\left[\frac{\left(\underset{\rightarrow}{p}_1\underset{\rightarrow}{p}_3\right)^2 + \left(\underset{\rightarrow}{p}_1\underset{\rightarrow}{p}_4\right)^2}{\left(\underset{\rightarrow}{p}_1\underset{\rightarrow}{p}_2\right)^2}\right]$$

Ενεργός διατομή σε Lorentz αναλλοίωτη μορφή

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις των Lorentz αναλλοίωτων μεταβλητών Mandelstam και θεωρώντας τις μάζες των σωμάτων αμελητέες, θα πάρουμε:

$$s = \left(\underrightarrow{p}_1 + \underrightarrow{p}_2\right)^2 = \underrightarrow{p}_1^2 + \underrightarrow{p}_2^2 + 2\underrightarrow{p}_1 \cdot \underrightarrow{p}_2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\underrightarrow{p}_1 \cdot \underrightarrow{p}_2 \quad \Rightarrow s \approx 2\underrightarrow{p}_1 \cdot \underrightarrow{p}_2$$

$$t = \left(\underrightarrow{p}_1 - \underrightarrow{p}_3\right)^2 = \underrightarrow{p}_1^2 + \underrightarrow{p}_3^2 - 2\underrightarrow{p}_1 \cdot \underrightarrow{p}_3 = m_1^2 + m_3^2 - 2\underrightarrow{p}_1 \cdot \underrightarrow{p}_3 \quad \Rightarrow t \approx -2\underrightarrow{p}_1 \cdot \underrightarrow{p}_3$$

$$u = \left(\underrightarrow{p}_1 - \underrightarrow{p}_4\right)^2 = \underrightarrow{p}_1^2 + \underrightarrow{p}_4^2 - 2\underrightarrow{p}_1 \cdot \underrightarrow{p}_4 = m_1^2 + m_4^2 - 2\underrightarrow{p}_1 \cdot \underrightarrow{p}_4 \quad \Rightarrow u \approx -2\underrightarrow{p}_1 \cdot \underrightarrow{p}_4$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία εξίσωση του πλάτους μετάβασης έχουμε:

$$\frac{1}{4}\sum\left|M\right|^2 = 2e^4\left[\frac{\left(\underrightarrow{p}_1\underrightarrow{p}_3\right)^2 + \left(\underrightarrow{p}_1\underrightarrow{p}_4\right)^2}{\left(\underrightarrow{p}_1\underrightarrow{p}_2\right)^2}\right] = 2e^4\left[\frac{t^2+u^2}{s^2}\right]$$

$$\boxed{\left|M_{fi}\right|^2 = 2e^4\left[\frac{t^2+u^2}{s^2}\right]}$$

Υπολογισμός Ενεργών Διατομών στην QED

Διαφορική ενεργός διατομή σκέδασης $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Η ενεργός διατομή σκέδασης για σκέδαση 2 σωμάτων σε 2 σώματα ($2 \to 2$) στο σύστημα αναφοράς του CM είναι:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{S} \frac{|M|^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{p_F}{p_I} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{S} \frac{|M|^2}{s} \frac{p_F}{p_I}$$

Ο παράγοντας των συνδυασμών, S, είναι 1, ενώ αν αγνοήσουμε τις μάζες: $\frac{p_F}{p_I} = 1$

Εισάγουμε τον όρο του M^2 που υπολογίσαμε προηγουμένως οπότε θα πάρουμε τελικά:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{e^4 \left(1 + \cos^2\theta\right)}{s}$$

Αλλά η σταθερα της λεπτής υφής είναι: $\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi}$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = (\hbar c)^2 \frac{\alpha^2}{4s}\left(1 + \cos^2\theta\right)}$$

Άθροισμα ως προς spins

Έστω το πλάτος: $M = \sum_{\mu} \left[\bar{u}(a) \gamma^{\mu} u(b) \right] \left[\bar{u}(c) \gamma_{\mu} u(d) \right]$

Θεωρούμε έναν από τους $2^4 = 16$ συνδυασμούς spin που υπάρχουν, και παίρνουμε το τετράγωνο της απόλυτης τιμής (χρησιμοποιώντας ν σαν τον δείκτη για τον συζυγή). Κατόπιν αθροίζουμε ως προς τους 16 spin συνδυασμούς και στο τέλος θα πρέπει να διαιρέσουμε για να βρούμε την μέση τιμή για τους δυνατούς συνδυασμούς της αρχικής κατάστασης.

$$|M|^2 = \sum_{\substack{\mu,\nu \\ spins\ a,b,c,d}} \left[\bar{u}(a) \gamma^{\mu} u(b) \right] \left[\bar{u}(c) \gamma_{\mu} u(d) \right] \left[\bar{u}(a) \gamma^{\nu} u(b) \right]^{\dagger} \left[\bar{u}(c) \gamma_{\nu} u(d) \right]^{\dagger}$$

Ανακατάξη στους όρους του γινομένου θα δώσει:

$$|M|^2 = \sum_{\mu,\nu} \left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\sum_{spins\ a,b} \left[\bar{u}(a) \gamma^{\mu} u(b) \right] \left[\bar{u}(a) \gamma^{\nu} u(b) \right]^{\dagger} \\ \times \\ \displaystyle\sum_{spins\ c,d} \left[\bar{u}(c) \gamma_{\mu} u(d) \right] \left[\bar{u}(c) \gamma_{\nu} u(d) \right]^{\dagger} \end{array} \right\}$$

Casimir trick

$$\sum_{spins\ a,b}\left[\bar{u}(a)\Gamma^1 u(b)\right]\left[\bar{u}(a)\Gamma^2 u(b)\right]^\dagger = Tr\left[\bar{\Gamma}^1\left(\not{p}_b \pm m_b c\right)\bar{\Gamma}^2\left(\not{p}_a \pm m_a c\right)\right]$$

Όπου:

Γ^n το γινόμενο των γ-πινάκων με πάνω ή κάτω δείκτη

Tr το ίχνος πίνακα (trace), δηλαδή το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του

$\bar{\Gamma}$ δηλώνει ότι παίρνουμε το γινόμενο: $\bar{\Gamma} = \gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0$

$\not{p}$ ο συμβολισμός Feynman με την πλάγεια που δηλώνει: $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$

Κρατάμε αριστερά προς δεξιά σειρά για τους πίνακες Γ^n και αντίθετη για τα a και b

Χρησιμοποιούμε το «-» για τα spinors των αντιφερμιονίων αντί για spinors φερμιονίων

Εν γένει έχουμε:

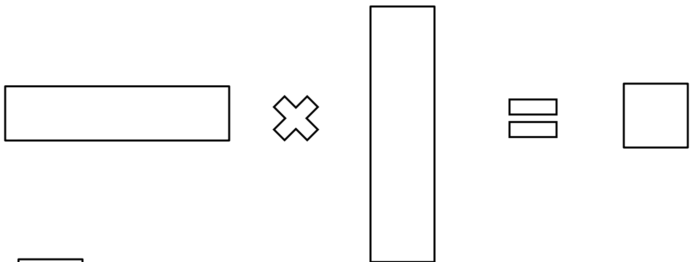
$$\left[\bar{u}\Gamma u\right]^\dagger = \left[u^\dagger\gamma^0\Gamma u\right]^\dagger = u^\dagger\Gamma^\dagger\left(\gamma^0\right)^\dagger u = u^\dagger\gamma^0\gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0 u = \bar{u}\bar{\Gamma}u$$

Από τις ιδιότητες των γ-πινάκων: $\gamma^0\left(\gamma^\mu\right)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu$ για όλα τα μ

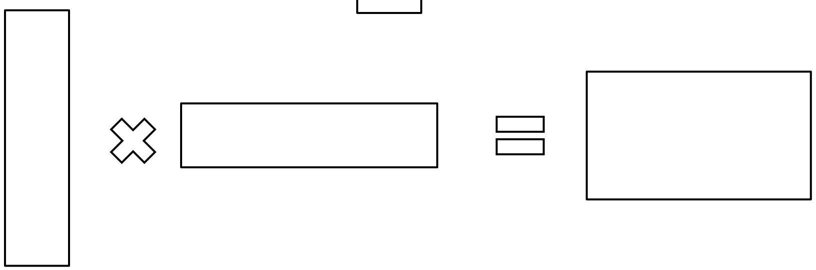
Επομένως για τις κορυφές QED (ισχύει και για QCD ή EWK): $\bar{\Gamma} = \gamma^0\left(\gamma^\mu\right)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu = \Gamma$

Σημασία του ίχνους

Από τον πολλαπλασιασμό πινάκων έχουμε:



εσωτερικό γινόμενο



εξωτερικό γινόμενο

Τα διαγώνια στοιχεία του εξωτερικού γινομένου είναι τα ίδια με αυτά που εμφανίζονται στο άθροισμα για το εσωτερικό γινόμενο

Το ίχνος επομένως του εξωτερικού γινομένου μιας στήλης και μιας γραμμής ισούται με το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής και της στήλης

Πως εμφανίζεται ο όρος $\not{p}$ του Feynman

Ο συμβολισμός $\not{p} = \gamma^{\mu} p_{\mu}$ αντιπροσωπεύει ένα 4x4 spinor πίνακα, τα στοιχεία του οποίου εξαρτώνται από την ορμή του σωματιδίου

Ένας spinor είναι ένα διάνυσμα στήλης ενώ ο συζυγής spinor είναι διάνυσμα γραμμής.

Το εξωτερικό τους γινόμενο θα είναι ένας 4x4 spinor πίνακας.

Εφόσον τα στοιχεία του spinor εξαρτώνται από τις συνιστώσες της ορμής του σωματιδίου, ανάλογα τα στοιχεία του εξωτερικού γινομένου των 2 spinors θα εξαρτώνται από την ορμή

Οι ιδιότητες της εξίσωσης Dirac και των λύσεων δίνουν ότι:

$$\sum_{spins} u\bar{u} = \gamma^{\mu} p_{\mu} + mc = \not{p} + mc$$

$$\sum_{spins} v\bar{v} = \gamma^{\mu} p_{\mu} - mc = \not{p} - mc$$

Θεωρήματα ιχνών

Αν Γ είναι ένα οποιοδήποτε γινόμενο γ-πινάκων, $\bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$ είναι το γινόμενο των ίδιων πινάκων αλλά με αντίστροφη σειρά

$$\boxed{Tr(I) = 4}$$

και το πόρισμά του: $\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = 2\underset{\to}{a} \cdot \underset{\to}{b}$

$\boxed{Tr\left(\gamma^\mu \gamma^\nu\right) = 4g^{\mu\nu}}$ ξεκινώντας από τον κανόνα αντιμεταθετικότητας: $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu \equiv 2g^{\mu\nu} I$

$$\Rightarrow Tr\left(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu\right) = 2g^{\mu\nu} Tr(I) \Rightarrow 2Tr\left(\gamma^\mu \gamma^\nu\right) = 2g^{\mu\nu} Tr(I) \Rightarrow Tr\left(\gamma^\mu \gamma^\nu\right) = 4g^{\mu\nu}$$

Το ίχνος του γινομένου ενός περιττού αριθμού γ-πινάκων είναι μηδέν

$$Tr\left(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho\right) = Tr\left(\gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho\right) = Tr\left(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^5\right) = -Tr\left(\gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho\right) = -Tr\left(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho\right)$$

Το τελευταίο ισχύει γιατί $\gamma^5 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma^5$ οπότε καταλήγουμε: $2Tr\left(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho\right) = 0$

$$\boxed{Tr\left(\not{a}\not{b}\right) = 4\underset{\to}{a} \cdot \underset{\to}{b}}$$

$\boxed{Tr\left(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma\right) = 4\left(g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}\right)}$ (δηλαδή $1234 \to 12,34 - 13,24 + 14,23$)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma = \left(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu\right)\gamma^\lambda \gamma^\sigma = 2g^{\mu\nu} \gamma^\lambda \gamma^\sigma - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\sigma$$

$$= 2g^{\mu\nu} \gamma^\lambda \gamma^\sigma - \gamma^\nu \left(2g^{\mu\lambda} - \gamma^\lambda \gamma^\mu\right)\gamma^\sigma = 2g^{\mu\nu} \gamma^\lambda \gamma^\sigma - 2g^{\mu\lambda} \gamma^\nu \gamma^\sigma + \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\sigma$$

$$= 2\left(g^{\mu\nu} \gamma^\lambda \gamma^\sigma - g^{\mu\lambda} \gamma^\nu \gamma^\sigma\right) + \gamma^\nu \gamma^\lambda \left(2g^{\mu\sigma} - \gamma^\sigma \gamma^\mu\right) = 2\left(g^{\mu\nu} \gamma^\lambda \gamma^\sigma - g^{\mu\lambda} \gamma^\nu \gamma^\sigma + g^{\mu\sigma} \gamma^\nu \gamma^\lambda\right)$$

$$-\gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\mu$$

Θεωρήματα ιχνών

$$\Rightarrow \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\sigma} + \gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu} = 2\left(g^{\mu\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\sigma} - g^{\mu\lambda}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma} + g^{\mu\sigma}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow Tr\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\sigma} + \gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu}\right) = 2Tr\left(g^{\mu\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\sigma} - g^{\mu\lambda}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma} + g^{\mu\sigma}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow 2Tr\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\sigma}\right) = 2g^{\mu\nu}Tr\left(\gamma^{\lambda}\gamma^{\sigma}\right) - 2g^{\mu\lambda}\left(\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}\right) + 2g^{\mu\sigma}Tr\left(\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow Tr\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\sigma}\right) = 4\left(g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}\right)$$

$$Tr\left(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\right) = 4\left[\left(\underset{\rightarrow}{a}\cdot\underset{\rightarrow}{b}\right)\left(\underset{\rightarrow}{c}\cdot\underset{\rightarrow}{d}\right) - \left(\underset{\rightarrow}{a}\cdot\underset{\rightarrow}{c}\right)\left(\underset{\rightarrow}{b}\cdot\underset{\rightarrow}{d}\right) + \left(\underset{\rightarrow}{a}\cdot\underset{\rightarrow}{d}\right)\left(\underset{\rightarrow}{b}\cdot\underset{\rightarrow}{c}\right)\right]$$

Χρησιμοποιώντας και τις ιδιότητες του πίνακα γ^5 θα έχουμε:

$$Tr\left(\gamma^{5}\right) = 0$$

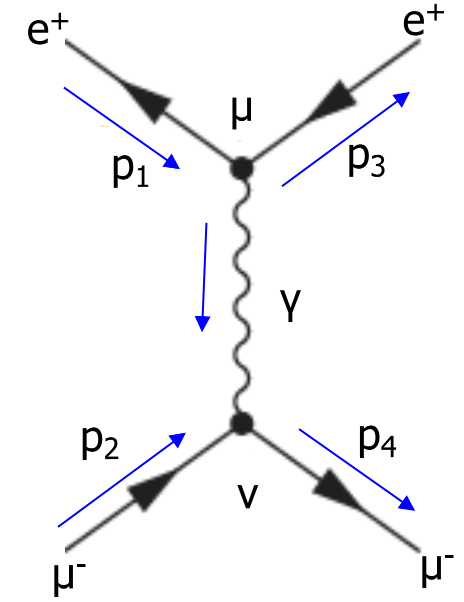
$$Tr\left(\gamma^{5}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right) = 0$$

$$\gamma^{5}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} = \gamma^{5}\left(2g^{\mu\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right) = 2g^{\mu\nu}\gamma^{5} - \gamma^{5}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu} \Rightarrow \gamma^{5}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{5}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu}\gamma^{5}$$

$$\Rightarrow 2Tr\left(\gamma^{5}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right) = 2g^{\mu\nu}Tr\left(\gamma^{5}\right) = 0$$

$$Tr\left(\gamma^{5}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\right) = 4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

Σκέδαση $e^{+}\mu^{-} \rightarrow e^{+}\mu^{-}$



Γράφουμε τα στοιχεία για τις κορυφές και τον διαδότη

$$\bar{v}^{s1}(p_1)\left[-ig_{\varphi o\rho\tau.}\gamma^{\mu}\right]v^{s3}(p_3)$$

$$-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$$

$$\bar{u}^{s4}(p_4)\left[-ig_{\varphi o\rho\tau.}\gamma^{\nu}\right]u^{s2}(p_2)$$

Το πλάτος σκέδασης επομένως θα είναι:

$$M = \frac{g^2}{(p_1 - p_3)^2}\left[\bar{v}(1)\gamma^{\mu}v(3)\right]\left[\bar{u}(4)\gamma_{\mu}u(2)\right]$$

Αντί να ακολουθήσουμε την διαδικασία που χρησιμοποιήσαμε για τη σκέδαση $e^{+}e^{-} \rightarrow \mu^{+}\mu^{-}$ σύμφωνα με την οποία, υπολογίσαμε τα πινακοστοιχεία για κάθε ένα συνδυασμό ελικότητας γράφοντας αναλυτικά τους αντίστοιχους spinors και γ-πίνακες.

Στην προκειμένη περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε το Casimir trick

Casimir trick - I

Ξεκινάμε με το πλάτος σκέδασης: $M = \frac{g^2}{\left(p_1 - p_3\right)^2}\left[\bar{v}(1)\gamma^\mu v(3)\right]\left[\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)\right]$

Υψώνουμε στο τετράγωνο οπότε θα πάρουμε παράγοντες με γ^ν και γ_ν

Αθροίζοντας ως προς τα spins διευκολύνει στην χρήση του Casimir trick και στις δυο αγκύλες

Χρησιμοποιούμε ένα «-» πρόσημο στην πρώτη αγκύλη

Αντιστρέφουμε την σειρά των δεικτών 1 με 3 και 4 με 2

$$|M|^2 = \sum_{\mu,\nu}\left\{\begin{array}{c}\displaystyle\sum_{spins\ a,b}\left[\bar{u}(a)\gamma^\mu u(b)\right]\left[\bar{u}(a)\gamma^\nu u(b)\right]^\dagger \\ \times \\ \displaystyle\sum_{spins\ c,d}\left[\bar{u}(c)\gamma_\mu u(d)\right]\left[\bar{u}(c)\gamma_\nu u(d)\right]^\dagger\end{array}\right\}$$

$$\sum_{spins\ a,b}\left[\bar{u}(a)\Gamma^1 u(b)\right]\left[\bar{u}(a)\Gamma^2 u(b)\right]^\dagger = Tr\left[\Gamma^1\left(\not{p}_b \pm m_b c\right)\bar{\Gamma}^2\left(\not{p}_a \pm m_a c\right)\right]$$

$$\sum|M|^2 = \frac{g^4}{\left(p_1 - p_3\right)^4}\times Tr\left[\gamma^\mu\left(\not{p}_3 - m_3 c\right)\gamma^\nu\left(\not{p}_1 - m_1 c\right)\right]\times Tr\left[\gamma_\mu\left(\not{p}_2 + m_2 c\right)\gamma_\nu\left(\not{p}_4 + m_4 c\right)\right]$$

Casimir trick - II

Αναπτύσουμε το πρώτο ίχνος οπότε παίρνουμε:

$$Tr\left[\gamma^{\mu}\left(\not{p}_3 - m_3 c\right)\gamma^{\nu}\left(\not{p}_1 - m_1 c\right)\right] = Tr\left[\gamma^{\mu}\not{p}_3\gamma^{\nu}\not{p}_1\right] - Tr\left[\gamma^{\mu} m_3 c\gamma^{\nu}\not{p}_1\right]$$
$$- Tr\left[\gamma^{\mu}\not{p}_3\gamma^{\nu} m_1 c\right] + Tr\left[\gamma^{\mu} m_3 c\gamma^{\nu} m_1 c\right]$$

Κάθε όρος που περιέχει Feynman πλαγεία «/» εμπεριέχει ένα γ-πίνακα

Ο 2ος και 3ος όρος περιέχουν περιττό αριθμό γ-πινάκων και επομένως είναι 0

Ο τελευταίος όρος έχει 2 πίνακες μόνο και επομένως $Tr\left[\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right] = 4g^{\mu\nu}$

Ο 1ος όρος έχει 2 «άμεσους» γ-πίνακες και άλλους 2 «έμεσους» γ-πίνακες και επομένως θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε την σχέση με τους 4 γ-πίνακες

$$Tr\left[\gamma^{\mu}\not{p}_3\gamma^{\nu}\not{p}_1\right] = Tr\left[\gamma^{\mu}\gamma^{\lambda}\left(p_3\right)_{\lambda}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}\left(p_1\right)_{\sigma}\right] = \left(p_3\right)_{\lambda}\left(p_1\right)_{\sigma} Tr\left[\gamma^{\mu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}\right]$$
$$= \left(p_3\right)_{\lambda}\left(p_1\right)_{\sigma} 4\left(g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\lambda\nu}\right) = 4\left[p_3^{\mu}p_1^{\nu} - g^{\mu\nu}p_3\cdot p_1 + p_1^{\mu}p_3^{\nu}\right]$$

Συλλέγοντας τα παραπάνω αποτελέσματα καταλήγουμε ότι από τον όρο: $\left[\bar{v}(1)\gamma^{\mu}v(3)\right]$

παίρνουμε: $Tr\left[\gamma^{\mu}\left(\not{p}_3 - m_3 c\right)\gamma^{\nu}\left(\not{p}_1 - m_1 c\right)\right] = 4\left[p_3^{\mu}p_1^{\nu} + p_1^{\mu}p_3^{\nu} - g^{\mu\nu}\left(p_3\cdot p_1 - m_1 m_3 c^2\right)\right]$

Casimir trick - III

Το δεύτερο ίχνος είναι ίδιο με το προηγούμενο αλλά στην περίπτωση αυτή οι δείκτες των πινάκων είναι κάτω αντί επάνω, τα σωματίδια είναι 1➔4 και 3➔2 ενώ τα «-» έχουν μετατραπεί σε «+» γιατί έχουμε σωματίδια και όχι αντισωματίδια

Ο 1ος και 4ος όρος παραμένουν ίδιοι ενώ οι ενδιάμεσοι όροι (2ος και 3ος) αλλάζουν πρόσημο αλλά από την στιγμή που περιέχουν γινόμενο 3 γ-πινάκων το αποτέλεσμα είναι 0.

Εκτελώντας την ίδια διαδικασία όπως και πριν, καταλήγουμε ότι ο όρος: $\left[\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)\right]$

συνεισφέρει: $Tr\left[\gamma_\mu\left(\not{p}_2+m_2c\right)\gamma_\nu\left(\not{p}_4+m_4c\right)\right]=4\left[p_{2\mu}p_{4\nu}+p_{4\mu}p_{2\nu}-g_{\mu\nu}\left(p_2\cdot p_4-m_2m_4c^2\right)\right]$

Επομένως και τα δυο ρεύματα $\left[\bar{v}\gamma^\mu v\right]$ και $\left[\bar{u}\gamma^\mu u\right]$ στις κορυφές, συνεισφέρουν κατά:

$$\left.\begin{matrix}\left[\bar{u}\gamma^\mu u\right]\\ \left[\bar{v}\gamma^\mu v\right]\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ 4\left[p_1^\mu p_3^\nu+p_3^\mu p_1^\nu-g^{\mu\nu}\left(p_1\cdot p_3-m_1m_3c^2\right)\right]$$

που είναι συμμετρικό ανάμεσα στις δυο ορμές

Αν ακολουθήσουμε τα ίδια βήματα για τις άλλες 2 δυνατές καταστάσεις $\left[\bar{v}\gamma^\mu u\right]$ και $\left[\bar{u}\gamma^\mu v\right]$ το μόνο που αλλάζει είναι το πρόσημο στον όρο της μάζας.

$$\left.\begin{matrix}\left[\bar{u}\gamma^\mu v\right]\\ \left[\bar{v}\gamma^\mu u\right]\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ 4\left[p_1^\mu p_3^\nu+p_3^\mu p_1^\nu-g^{\mu\nu}\left(p_1\cdot p_3+m_1m_3c^2\right)\right]$$

Casimir trick - IV

Πολλαπλασιάζουμε τα δυο αποτελέσματα των ιχνών και εκτελούμε το άθροισμα ως προς μ και ν, και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$

$$4\left[p_1^\mu p_3^\nu + p_3^\mu p_1^\nu - g^{\mu\nu}\left(p_1 \cdot p_3 - m_1 m_3 c^2\right)\right] \times 4\left[p_{2\mu}p_{4\nu} + p_{4\mu}p_{2\nu} - g_{\mu\nu}\left(p_2 \cdot p_4 - m_2 m_4 c^2\right)\right]$$

$$= 16\left[\begin{array}{c} \left(p_1\cdot p_2\right)\left(p_3\cdot p_4\right)+\left(p_1\cdot p_4\right)\left(p_2\cdot p_3\right)-\left(p_1\cdot p_3\right)\left(p_2\cdot p_4\right)+\left(p_1\cdot p_3\right)m_2m_4c^2 + \\ \left(p_3\cdot p_2\right)\left(p_1\cdot p_4\right)+\left(p_3\cdot p_4\right)\left(p_1\cdot p_2\right)-\left(p_3\cdot p_1\right)\left(p_2\cdot p_4\right)+\left(p_3\cdot p_1\right)m_2m_4c^2 + \\ -2\left(p_2\cdot p_4\right)\left(p_1\cdot p_3\right)+2\left(p_2\cdot p_4\right)m_1m_3c^2 + \\ 4\left\{\left(p_1\cdot p_3\right)\left(p_2\cdot p_4\right)-\left(p_1\cdot p_3\right)m_2m_4c^2 - m_1m_3c^2\left(p_2\cdot p_4\right)+m_1m_3m_2m_4c^4\right\} \end{array}\right]$$

Οι δυο πρώτες γραμμές είναι ίδιες. Οπότε τις αθροίζουμε με την 3^η γραμμή και έχουμε:

$$= 16\left[\begin{array}{c} 2\left(p_1\cdot p_2\right)\left(p_3\cdot p_4\right)+2\left(p_1\cdot p_4\right)\left(p_2\cdot p_3\right)-2\left(p_1\cdot p_3\right)\left(p_2\cdot p_4\right)+2\left(p_1\cdot p_3\right)m_2m_4c^2 + \\ -2\left(p_2\cdot p_4\right)\left(p_1\cdot p_3\right)+2\left(p_2\cdot p_4\right)m_1m_3c^2 + \\ 4\left\{\left(p_1\cdot p_3\right)\left(p_2\cdot p_4\right)-\left(p_1\cdot p_3\right)m_2m_4c^2 - m_1m_3c^2\left(p_2\cdot p_4\right)+m_1m_3m_2m_4c^4\right\} \end{array}\right]$$

Casimir trick - V

Επομένως καταλήγουμε ότι:

$$Tr\left[\gamma^{\mu}\left(\not{p}_3 - m_3 c\right)\gamma^{\nu}\left(\not{p}_1 - m_1 c\right)\right] \times Tr\left[\gamma_{\mu}\left(\not{p}_2 + m_2 c\right)\gamma_{\nu}\left(\not{p}_4 + m_4 c\right)\right]$$

$$= 32\left[\begin{array}{c}(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) - \\ -(p_1 \cdot p_3)m_2 m_4 c^2 - (p_2 \cdot p_4)m_1 m_3 c^2 + \\ +2m_1 m_3 m_2 m_4 c^4\end{array}\right]$$

Άρα το άθροισμα ως προς όλα τα spins των τετραγώνων των πλατών είναι:

$$\sum |M|^2 = \frac{g^4}{(p_1 - p_3)^4} \times 32\left[\begin{array}{c}(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) - \\ -(p_1 \cdot p_3)m_2 m_4 c^2 - (p_2 \cdot p_4)m_1 m_3 c^2 + \\ +2m_1 m_3 m_2 m_4 c^4\end{array}\right]$$

Θέλουμε να αθροίσουμε ως πρός όλα τα τελικά spins αλλά να βρουμε την μέση τιμή ως προς τις αρχικέ καταστάσεις. Επομένως θα πρέπει να διαιρέσουμε με 4 και να χρησιμοποιήσουμε τον χρυσό κανόνα του Fermi για σκέδαση δυο σωμάτων σε 2 σώματα στο CM

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4}\sum |M|^2 \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{S(E_1 + E_2)^2}\frac{p_F}{p_I}$$