

Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις – O.D.E.

Παράδειγμα αριθμητικής λύσης φυσικού προβλήματος:

Πολλοί πυρήνες είναι ασταθείς π.χ. U^{235} διασπάται σε δύο πυρήνες εκπέμποντας ακτινοβολία. Η σχάση γίνεται με τυχαίο τρόπο και για αυτό μιλάμε για την πιθανότητα διάσπασης των πυρήνων ή για την μέση ζωή τους, δηλαδή το μέσο χρονικό διάστημα για να διασπαστεί περίπου το 60% της αρχικής ποσότητας του πυρήνα

Αν $N_U(t)$ είναι ο αριθμός των πυρήνων U^{235} τη χρονική στιγμή, t , τότε ο ρυθμός διάσπασης του δίδεται από τη σχέση

$$\tau \frac{dN_U}{dt} = -N_U \quad \text{Η λύση της εξίσωσης αυτής είναι} \quad N_U(t) = N_U(0) e^{-t/\tau}$$

Η σταθερά τ είναι μια σταθερά που καθορίζει το μέσο χρόνο ζωής του U^{235} .

Όταν $t=\tau$ τότε η ποσότητα που δεν έχει διασπαστεί είναι $e^{-1} \sim 0.37$

- Η παραπάνω εξίσωση της ραδιενεργούς διάσπασης αποτελεί μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης
- Η εξίσωση αυτή λύνεται αναλυτικά αλλά θα δοκιμάσουμε μια αριθμητική λύση ώστε να ελέγξουμε αν ο αλγόριθμος που αναπτύσσουμε δίνει τη σωστή απάντηση ώστε να τον χρησιμοποιήσουμε σε προβλήματα που δεν έχουμε αναλυτική λύση

Η Μέθοδος του Euler

- Θα εξετάσουμε το γενικό σύστημα

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(\vec{y}, t) \quad \text{όπου } t \geq t_0 \text{ και ισχύει η αρχική συνθήκη: } \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$$

Υποθέτουμε δηλαδή ότι το πρόβλημα ανάγεται σε πρόβλημα αρχικής τιμής:

όλα τα y_i ορίζονται σε κάποιο αρχικό χρόνο $t=t_0$ και

θέλουμε να ξέρουμε την εξέλιξή τους σε όλους τους μεταγενέστερους χρόνους t .

Υπάρχουν ακόμα και προβλήματα συνοριακών συνθηκών όπου τα y_i ορίζονται σε περισσότερα από ένα σημεία. Αυτά τα προβλήματα είναι γενικά περισσότερο δύσκολα.

- Προς το παρόν υποθέτουμε ότι έχουμε την μεταβλητή y και ότι ο χρόνος είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή μας. Ας σημειώσουμε ότι αν η εξίσωση είναι ανώτερου βαθμού του πρώτου (όπως οι εξισώσεις της Μηχανικής) τότε οδηγούμαστε σε σύστημα εξισώσεων και χρειαζόμαστε γραμμική άλγεβρα για να το λύσουμε, ειδικά αν είμαστε σε χώρο περισσότερο της μιας διάστασης.

Η Μέθοδος του Euler

- Έστω ότι είμαστε σε μια διάσταση. Μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{v}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}(y,t)}{m}$$

Με αρχικές συνθήκες $y(0)=y_0$ και $v(0)=v_0$

- Η κεντρική ιδέα πίσω από τις αριθμητικές μεθόδους είναι η διακριτοποίηση του χρόνου (της ανεξάρτητης μεταβλητής) και η αντικατάσταση των παραγώγων από πεπερασμένες διαφορές:

$$g(y,t) = \frac{d\vec{y}}{dt} \rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

- Δηλαδή είναι σα να γράφουμε: $\vec{y}(t) = \vec{y}(t_0) + \int_{t_0}^t g[t', \vec{y}(t')] dt' \cong \vec{y}_0 + g[t_0, \vec{y}_0](t - t_0)$

Δεδομένης μιας ακολουθίας χρονικών τιμών: $t_0, t_1=t_0+\Delta t, t_2=t_0+2\Delta t, \dots$,

όπου $\Delta t > 0$ είναι το **χρονικό βήμα**,

γράφουμε τη λύση για τη χρονική στιγμή t_n σαν $y(t_n) = y_n$ και επομένως έχουμε:

$$\vec{y}_1 = \vec{y}_0 + g[t_0, \vec{y}_0]\Delta t$$

Και γενικά: $\vec{y}_n = \vec{y}_{n-1} + g[t_{n-1}, \vec{y}_{n-1}]\Delta t$

Αυτή είναι η μέθοδος του Euler

Ο αλγόριθμος του Euler

- ❑ Αν εφαρμόσουμε την μέθοδο του Euler στον υπολογιστή, θα πρέπει να αναπτύξουμε τα ακόλουθα τμήματα:
- Εισάγουμε την αρχική συνθήκη, το μέγεθος και αριθμό των βημάτων (Δt ή Δx) που ορίζονται μέσα στο διάστημα $[x_0, x_n]$ ή $[t_0, t_n]$
- Υπολογίζουμε τη τιμή της συνάρτησης και της εφαπτομένης στην αρχή κάθε διαστήματος
- Υπολογίζουμε τη τιμή της συνάρτησης στο τέλος του διαστήματος
- Επαναλαμβάνουμε η φορές τα βήματα 2 και 3, όσα είναι τα βήματα που έχουμε καθορίσει βάσει του μεγέθους του βήματος και του ολικού διαστήματος

Για να καθορίσουμε την ευστάθεια του αλγόριθμου θα πρέπει να τρέξουμε το πρόγραμμά μας πολλές φορές για διαφορετικές τιμές για το μέγεθος του βήματος (Δx ή Δt) και να δούμε για ποιες τιμές τα αποτελέσματα του αλγορίθμου παραμένουν σταθερά.

Αυτό γιατί ο αλγόριθμος δίνει αποτελέσματα που συμφωνούν με την αναλυτική λύση για μικρές τιμές των διακριτοποιημένων διαστημάτων ενώ για μεγάλες τιμές αποκλίνει του σωστού αποτελέσματος

Επίλυση ραδιενεργούς διάσπασης με μέθοδο Euler

program decay

call initial(y, x, dx, tau, nstep)

call Euler(y, x, dx, tau, nstep)

end

subroutine initial(yN, t, dt, tau, nstep) ! Αρχή υπορουτίνας initial

write(6,*) 'enter t0, yN0, tmax, dt, tau'

read(5,*) t0, yN0, tmax, dt, tau

nstep = (tmax-t0)/dt ! Συνολικός αριθμός βημάτων

yN = yN0 ! Αρχικός αριθμός πυρήνων

t = t0

return ! Επιστροφή στο κυρίως πρόγραμμα

end ! Τέλος υπορουτίνας initial

subroutine Euler(y, t, dt, tau, nstep) ! y ο αριθμός των πυρήνων

do j=1, nstep

c ypologismos klisis (παραγώγου) stin arxi tou diastimatos (Ρυθμός διάσπασης)

$$dNdt = -y / \tau \quad ! \text{ Η διαφορική είναι } \tau \frac{dN}{dt} = -N \Rightarrow \frac{dN}{dt} = -\frac{N}{\tau}$$

c ypologismos klisis sto telos tou diastimatos

y = y + dNdt * dt

t = t + dt ! Νέα χρονική στιγμή

if (j.eq.1) open (unit=2,file="decay.dat",status="unknown")

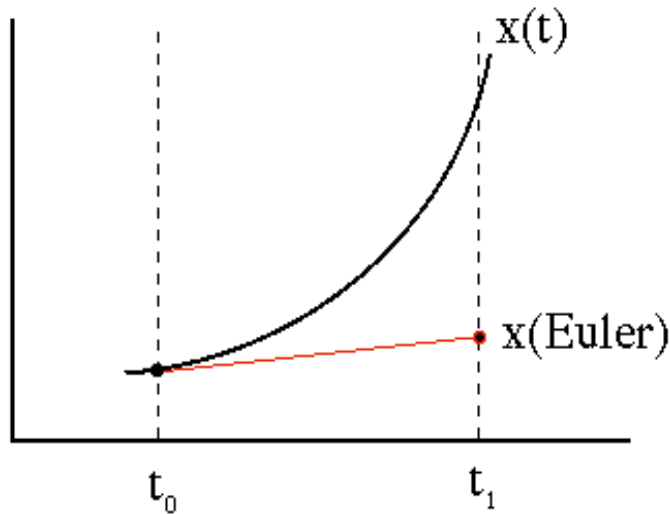
write(2,*) t, y

end do

return

end

Γραφική Αναπαράσταση – Μέθοδος Euler



Ουσιαστικά αυτό που κάνουμε με τη μέθοδο του Euler είναι να ακολουθήσουμε την εφαπτομένη της καμπύλης της λύσης για το διάστημα $(t_1 - t_0)$

Κατόπιν υπολογίζουμε και πάλι την κλίση της καμπύλης στο νέο σημείο και προχωρούμε με βάση τη κλίση αυτή στο επόμενο διάστημα

Αν θυμηθούμε, από το ανάπτυγμα Taylor έχουμε:

$$x(t) = x(t_0) + x'(t)\delta t + \frac{1}{2}x''(t)\delta t^2 + \dots$$

Χρησιμοποιώντας την κλίση σε κάθε διάστημα ουσιαστικά χρησιμοποιούμε τη 1^η παράγωγο και αγνοούμε τους ανώτερους όρους τάξης $O(\delta t^2)$

Το σφάλμα επομένως σε κάθε βήμα είναι της τάξης $O(\delta t^2)$ και για N βήματα σε ένα συγκεκριμένο διάστημα αυξάνει σχεδόν γραμμικά.

Επειδή ο αριθμός των βημάτων είναι ανάλογος του διαστήματος $1/\delta t$ ουσιαστικά το σφάλμα είναι γραμμικό με δt

Ανάπτυγμα Taylor

Αν έχουμε μια πολύπλοκη συνάρτηση $f(x)$ συνεχή και η οποία έχει συνεχείς παραγώγους τάξης n σε ένα διάστημα $a \leq x \leq b$. Μπορούμε να εξετάσουμε τις ιδιότητες της συνάρτησης κοντά ή ακριβώς σε ένα σημείο $x=a$, γράφοντάς τη με τη μορφή ενός πολυωνύμου:

$$f(x) = f(a)\big|_{x=a} + (x-a)f^{(1)}(x)\big|_{x=a} + \frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(x)\big|_{x=a} + \frac{(x-a)^3}{3!}f^{(3)}(x)\big|_{x=a} + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(x)\big|_{x=a}$$

Πως προκύπτει η σχέση αυτή:

Μπορούμε να ολοκληρώσουμε την n -ιοστή παράγωγο οπότε θα έχουμε:

$$\int_a^x f^{(n)}(x) dx = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)$$

Ολοκληρώνοντας και πάλι θα έχουμε:

$$\int_a^x \int_a^x f^{(n)}(x) dx^2 = \int_a^x [f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)] dx = f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(a) - (x-a)f^{(n-1)}(a)$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο μετά από n ολοκληρώσεις θα έχουμε:

$$\int_a^x \dots \int_a^x \int_a^x f^{(n)}(x) dx^n = f(x) - f(a) - (x-a)f^{(1)}(a) - \frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) \dots - \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)$$

Αυτή η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί επομένως:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f^{(1)}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \int_a^x \dots \int_a^x \int_a^x f^{(n)}(x) dx^n$$

Ανάπτυγμα Taylor

Καταλήξαμε στη σχέση:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f^{(1)}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n(x)$$

$$\text{όπου } R_n(x) = \int_a^x \dots \int_a^x \int_a^x f^{(n)}(x) dx^n$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού έχουμε:

$$\int_a^x g(y) dy = (x-a)g(\xi) \quad \text{όπου: } a \leq \xi \leq x$$

Εφαρμόζοντας στον όρο $R_n(x)$ και ολοκληρώνοντας $n-1$ φορές θα πάρουμε:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad \text{μορφή γνωστή ως μορφή Langrange}$$

Αν η $R_n(x)$ είναι τέτοια ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ καταλήγουμε στην άπειρη σειρά του αναπτύγματος Taylor

$$f(x) = f(a) + (x-a)f^{(1)}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f^{(3)}(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \dots$$

Αν $a=0$ τότε καταλήγουμε στη λεγόμενη σειρά McLaurin:

$$f(x) = f(0) + xf^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \dots$$

Ανάγκη βελτίωσης της μεθόδου του Euler

- Η μέθοδος κάνει γραμμική εξέλιξη ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή και επομένως **το σφάλμα ανεβαίνει σαν h^2**

Οι εξισώσεις αντιστοιχούν στο πρώτο όρο του αναπτύγματος γύρω από το σημείο t_0 ή x_0 και επομένως είναι τάξης h^2 , $O(h^2)$

 Η μέθοδος Euler δεν είναι ακριβής.

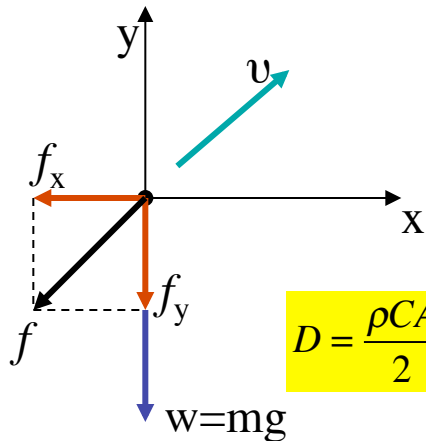
- Ο φορμαλισμός της μεθόδου του Euler είναι ασύμμετρος.
Προχωρά τη λύση μέσω του διαστήματος h αλλά χρησιμοποιεί την πληροφορία σχετικά με την παράγωγο μόνο στην αρχή του διαστήματος
- Αν έχουμε τις εξισώσεις κίνησης ενός σώματος γράφουμε: $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}(\vec{r}, \vec{v}); \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$
- Με τη μέθοδο του Euler θα γράψουμε: $\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + h\vec{a}_n \quad \vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + h\vec{v}_n$
- Μια απλή παραλλαγή της μεθόδου είναι η χρησιμοποίηση των εξισώσεων:

$$\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + h\vec{a}_n \quad \vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + h\vec{v}_{n+1} \leftarrow \text{Euler-Cromer (χρησιμοποίηση της νέας ταχύτητας)}$$
- Δεν κερδίζουμε όμως τίποτα σε ακρίβεια. Απλά η μέθοδος αυτή δίνει σωστότερα αποτελέσματα για μια κατηγορία προβλημάτων

Κίνηση σώματος σε 2 διαστάσεις με αντίσταση ρευστού

- Ας υποθέσουμε ότι έχουμε κίνηση ενός βλήματος με αρχική ταχύτητα v και ότι η δύναμη drag είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας $f = Dv^2$
- Η διεύθυνση της f είναι αντίθετη αυτής της v και το μέτρο της θα είναι:

$$f_x = -Dvv_x \quad f_y = -Dvv_y \quad f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}, \text{ και } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$



Επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$\sum F_x = -Dvv_x = ma_x, \quad \sum F_y = -(mg + Dvv_y) = ma_y$$

$$a_x = -(D/m)vv_x, \quad a_y = -g - (D/m)vv_y$$

$$D = \frac{\rho CA}{2}$$

Η σταθερά D εξαρτάται από την πυκνότητα του αέρα, ρ , το σχήμα A του σώματος (επιφάνεια όπως φαίνεται από εμπρός) και από μια αδιάστατη σταθερά C που ονομάζεται σταθερά αντίστασης

- Για ένα αρκετά μικρό χρονικό διάστημα Δt μπορούμε να τη θεωρήσουμε σταθερή
- Στο χρονικό διάστημα Δt η μέση $x(y)$ -συνιστώσα της επιτάχυνσης είναι $\alpha_x = \Delta v_x / \Delta t$, $\alpha_y = \Delta v_y / \Delta t$, ενώ η ταχύτητα αλλάζει κατά $\Delta v_x = \alpha_x \Delta t$ και $\Delta v_y = \alpha_y \Delta t$
- Επομένως στο τέλος του διαστήματος Δt η ταχύτητα έχει τιμή

$$v_x + \Delta v_x = v_x + \alpha_x \Delta t, \quad v_y + \Delta v_y = v_y + \alpha_y \Delta t$$

- Ανάλογα αλλάζουν οι συντεταγμένες του σώματος (χρησιμοποιούμε τη μέση αλλαγή της ταχύτητας στο Δt)

$$\Delta x = (v_x + \frac{\Delta v_x}{2})\Delta t = v_x \Delta t + \frac{\Delta v_x}{2} \Delta t = v_x \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_x (\Delta t)^2 \quad x + \Delta x = x + v_x \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_x (\Delta t)^2$$

Πρόγραμμα για την κίνηση βλήματος με αντίσταση αέρα

```
program cannon
```

```
real x(5000), y(5000)
```

```
call initialize(dt,v_init,theta,A_m)
```

```
call calculate(x,y,nstep,dt,v_init,theta,A_m)
```

```
call writeout(x,y,nstep)
```

```
end
```

```
subroutine initialize(dt,v_init,theta,A_m)
```

```
dt = 0.25      ! seconds
```

```
v_init = 700   ! m/s
```

```
theta = 55     ! firing angle
```

```
A_m = 4e-5     ! A2/m
```

```
return
```

```
end
```

```
subroutine writeout(x,y,nstep)
```

```
integer nstep
```

```
real x(nstep), y(nstep)
```

```
open file(unit=20,file='cannon.dat',
```

```
>      status='unknown')
```

```
write(20,10)(x(j),y(j),j=1,nstep)
```

```
10 format(2(2x,f10.4))
```

```
return
```

```
end
```

```
subroutine calculate(x,y,nstep,dt,v_init,theta,A_m)
```

```
real x(5000),y(5000)
```

```
x(1) = 0
```

```
y(1) = 0
```

```
vx = v_init * cos(theta)
```

```
vy = v_init * sin(theta)
```

```
istep = 2
```

```
doit = .true.
```

```
do while (doit .eq. .true.)
```

```
    f = A_m * sqrt(vx**2 + vy**2)    ! drag force
```

```
    vy = vy - 9.8 * dt - f * vy * dt
```

```
    vx = vx - f * vx * dt
```

```
    x(istep) = x(istep-1) + vx * dt    ! Euler-Cromer
```

```
    y(istep) = y(istep-1) + vy * dt
```

```
    if (y(istep) .le. 0.) then
```

```
        doit = .false.                ! vlima ktipise sto edafos
```

```
    else
```

```
        istep = istep + 1
```

```
    endif
```

```
enddo
```

```
nstep = istep
```

```
a = -y(nstep) / y(nstep-1)    ! eyresi simiou ptvsis
```

```
x(nstep) = (x(nstep) + a*x(nstep-1))/(1+a)
```

```
y(nstep) = 0
```

```
return
```

```
end
```

Παράδειγμα: Αρμονικός ταλαντωτής

- Οριζόντιο ελατήριο με μάζα m στο ένα άκρο του. Η εξίσωση της κίνησης είναι:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \text{όπου } x \text{ η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας}$$

- Θέτουμε τις αρχικές συνθήκες $x(0)$ και $v(0)$ και μετατρέπουμε την αρχική εξίσωση σε σύστημα δύο εξισώσεων πρώτου βαθμού

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}x$$

- Η πρακτική ερώτηση που παρουσιάζεται τώρα είναι πως μπορούμε να ελέγξουμε τις διάφορες μεθόδους αν δίνουν τα σωστά αποτελέσματα. Μια πολύ ισχυρή μέθοδος είναι αυτή των νόμων διατήρησης. Στη μηχανική όταν δεν έχουμε τριβές η ολική ενέργεια διατηρείται και μπορούμε να θέσουμε το ερώτημα κατά πόσο οι προσεγγιστικές μέθοδοι ικανοποιούν αυτή τη διατήρηση.

- Οι παραπάνω εξισώσεις κίνησης της μάζας εξαρτώμενης από ελατήριο δίνουν ενέργεια $E = mv^2/2 + kx^2/2$. Από τη μέθοδο του Euler οι εξισώσεις είναι

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + v_n h \\ v_{n+1} &= v_n + \left[(-k/m)x_n \right] h \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_{n+1} = \frac{mv_{n+1}^2}{2} + \frac{kx_{n+1}^2}{2} = (1 + \delta)E_n \quad \delta = h^2 \frac{k}{m}$$

Άρα

$$E_{n+1} = (1 + \delta)^n E_0 = (1 + n\delta + O(n^2 \delta^2))E_0$$

Η μέθοδος Euler δεν διατηρεί τη ενέργεια

Σφάλμα – μη διατήρηση ενέργειας

- ❑ Μπορεί όμως να υποθέσουμε ότι η διαφορά για κάθε βήμα είναι μικρή αφού είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το σφάλμα της μεθόδου $O(h^2)$
- ❑ Το σφάλμα όμως είναι προσθετικό και μετά από n βήματα γίνεται $n\delta$ δηλαδή πρώτης τάξης στο δ . Αν το $n\delta$ γίνει συγκρίσιμο με τη μονάδα, η προσεγγιστική μέθοδος δεν έχει έννοια.
- ❑ Το σφάλμα, όντας προσθετικό, θέτει όρια για τον αριθμό των βημάτων που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στη μέθοδο του Euler.

$$\text{Για } n_{\max}\delta \approx 1 \quad n_{\max} = \frac{1}{\delta} = \frac{m}{kh^2}$$

Βλέπουμε ότι ο μέγιστος αριθμός των βημάτων είναι ανάλογος της μάζας και αντιστρόφως ανάλογος της σταθεράς του ελατηρίου και του βήματος. Βλέπουμε επίσης ότι η ποσότητα $n_{\max}h$ έχει διαστάσεις χρόνου και επειδή η περίοδος είναι ανάλογη με το $\sqrt{m/k}$ μας ενδιαφέρει $n_{\max}h$ να είναι τουλάχιστον όσο η περίοδος.

Πόσο μικρό είναι το βήμα

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor βρήκαμε:

$$y(t + \Delta t) - y(t) = \Delta t y'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} y''(t) + \dots \Rightarrow \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \frac{dy(t)}{dt} + \frac{\Delta t}{2} y''(t) + \dots$$

Ο πρωτεύων όρος του σφάλματος εξαφανίζεται με Δt άρα είναι τάξης $O(\Delta t)$

Στη ραδιενεργό διάσπαση, η διαφορική εξίσωση γράφτηκε: $\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -\lambda y(t) + \dots$

Με προσεγγιστική λύση: $y(t + \Delta t) = y(t) - \lambda y(t) \Delta t = (1 - \lambda \Delta t) y(t)$

Είδαμε ακόμα ότι όσο το βήμα μεγαλώνει, η λύση γίνεται ασταθής

Με περίπου την ίδια ακρίβεια μπορούμε να γράψουμε τη λύση με τη μορφή:

$$y(t + \Delta t) = y(t) - \lambda y(t + \Delta t) \Delta t \quad \text{με λύση} \quad y(t + \Delta t) = \frac{y(t)}{1 + \lambda \Delta t}$$

$$\varepsilon_m = 1.1920929 \times 10^{-7}$$

Τα σφάλματα στην παράγωγο είναι περίπου: $e = E \left[\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right] = \frac{y}{\Delta t} \varepsilon_m + \frac{y'' \Delta t}{2}$

Το σχετικό σφάλμα είναι: $\frac{e}{y} = \frac{\varepsilon_m}{\Delta t} + \frac{y'' \Delta t}{2y} \Rightarrow \Delta t_\beta \approx \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \sqrt{\varepsilon_m}$

Παραγωγή ως προς Δt

Βέλτιστη τιμή βήματος

Στρογγυλοποίηση
αυξάνει για $\Delta t < \Delta t_\beta$

Η μέθοδος του ενδιάμεσου σημείου

- Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του μέσου σημείου όπου οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται τώρα είναι

$$\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + h\vec{a}_n \quad \vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + h \frac{\vec{v}_{n+1} + \vec{v}_n}{2}$$

- Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε το μέσο όρο των δύο ταχυτήτων. Αντικαθιστώντας την έκφραση της ταχύτητας από την πρώτη εξίσωση στη δεύτερη θα έχουμε:

$$\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + h\vec{v}_n + \frac{1}{2}\vec{a}_nh^2$$

- Η μορφή αυτή είναι ενδιαφέρουσα. Το σφάλμα αποκοπής είναι ακόμα τάξης h^2 στην εξίσωση της ταχύτητας αλλά για την εξίσωση θέσης, το σφάλμα αποκοπής είναι τώρα h^3 . Στην πραγματικότητα, η μέθοδος αυτή δίνει πολύ πιο σωστά αποτελέσματα από τις δύο προηγούμενες για προβλήματα που εμπλέκουν κίνηση βλημάτων αλλά και πάλι για άλλη κατηγορία προβλημάτων δεν δίνει σωστά αποτελέσματα
- Πως μπορούμε ωστόσο να αυξήσουμε την ακρίβεια της μεθόδου ώστε το σφάλμα να είναι $O(h^3)$ τουλάχιστο

Η μέθοδος του ενδιάμεσου σημείου

- Ο λόγος για τον οποίο η μέθοδος είναι ενδιαφέρουσα φαίνεται από το γεγονός ότι αν εφαρμόσουμε την μέθοδο του Euler χρησιμοποιώντας τη παράγωγο στο ενδιάμεσο σημείο θα έχουμε:

$$x(t) + f\left(t + \frac{1}{2}\delta t\right)\delta t = x(t) + \left[f(t) + \frac{1}{2}f'(t)\delta t\right]\delta t + O(\delta t^3)$$

- Αυτή είναι η σωστή έκφραση δεύτερης τάξης. Έχουμε κερδίσει μια τάξη μεγέθους στο σφάλμα με το να υπολογίζουμε την παράγωγο σε κάποια άλλη χρονική στιγμή

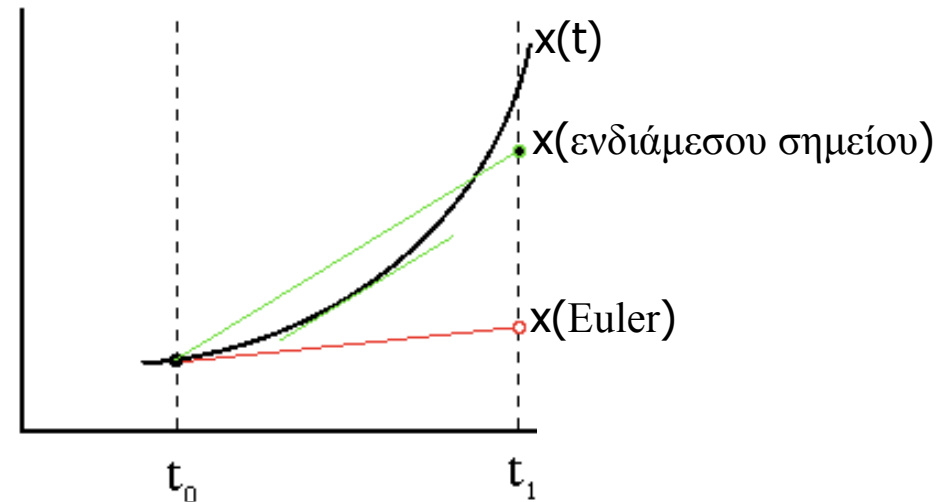
- Γεωμετρικά αυτό σημαίνει το εξής:

Πως βρίσκουμε την παράγωγο στο ενδιάμεσο σημείο?

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Euler:

$$\delta x = f(x_i, t_i)\delta t$$

$$x_{i+1} = x_i + f\left(x_i + \frac{1}{2}\delta x, t_i + \frac{1}{2}\delta t\right)\delta t$$



Παράδειγμα

□ Έστω η συνάρτηση $x'(t) = -x(t)$

Η μέθοδος του Euler θα μας δώσει:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t) = -x(t) \quad h = \Delta t$$

$$x(t+h) = x(t) + hf(x(t), t) = x(t) + h(-x) = x(t) - hx(t) = x(t)(1-h)$$

Η μέθοδος του ενδιάμεσου σημείου βάζοντας βήμα $h/2$ θα δώσει:

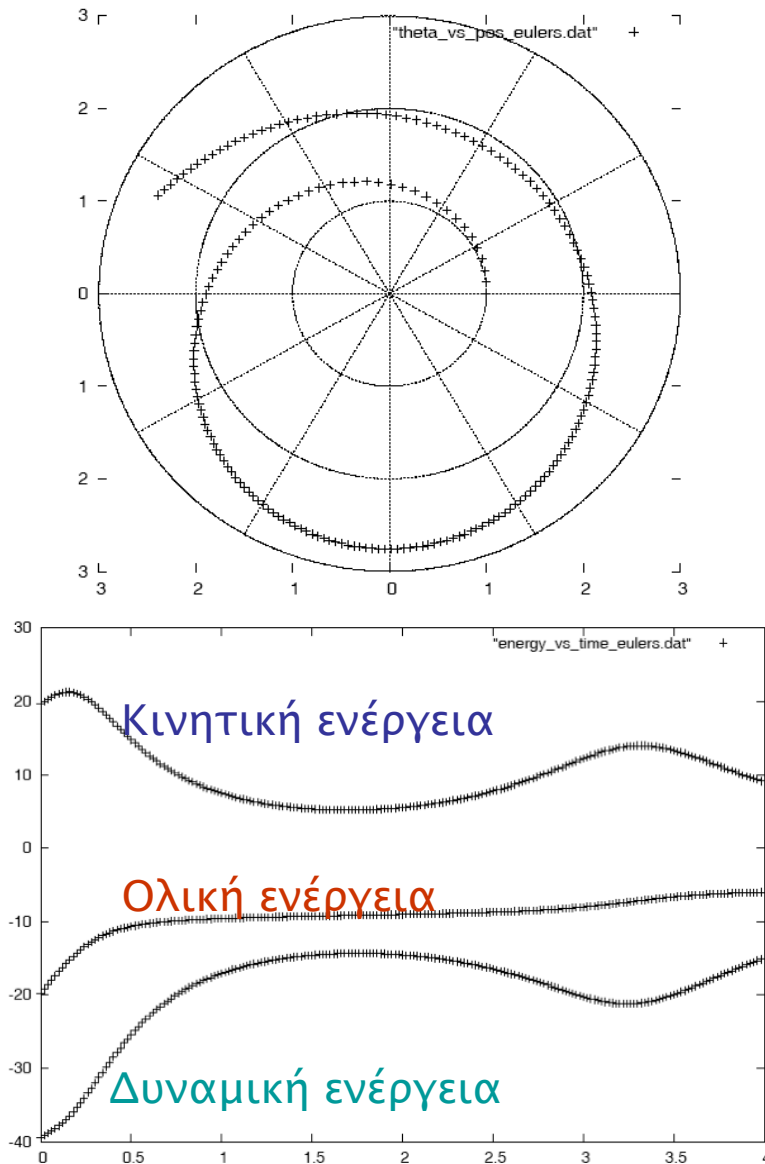
$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + hf\left(x\left(t + \frac{h}{2}\right), t + \frac{h}{2}\right) \\ &= x(t) + hf\left(\left[x(t) + \frac{h}{2}f(x(t), t)\right], t + \frac{h}{2}\right) \\ &= x(t) + hf\left(x(t) + \frac{h}{2}(-x(t)), t + \frac{h}{2}\right) \\ &= x(t) + h\left(-x(t) + \frac{h}{2}x(t)\right) = x(t)\left(1 - h + \frac{h^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Όπου στη 2^η ισότητα αντικαταστήσαμε το όρισμα $x(t+h/2)$ της f με το ανάπτυγμά του $x(t+h/2) = x(t) + (h/2)f(x(t), t)$

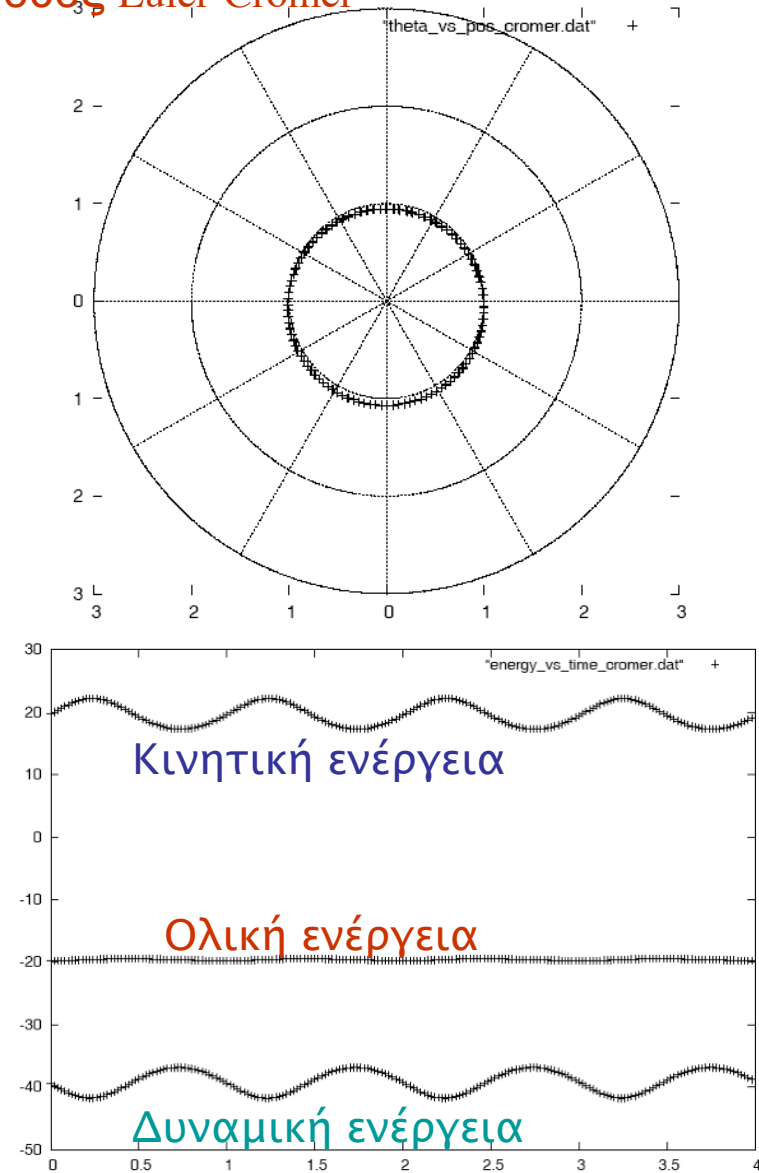
Ενώ στη 3^η και 4^η ισότητα αντικαταστήσαμε με $f(x) = -x$

Κίνηση πλανητών

Μέθοδος Euler



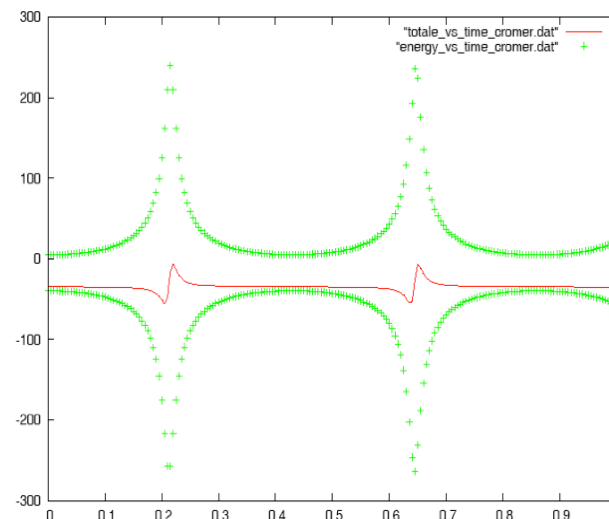
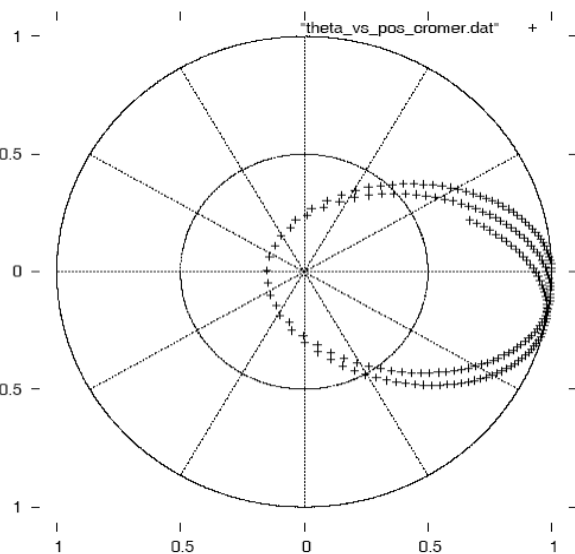
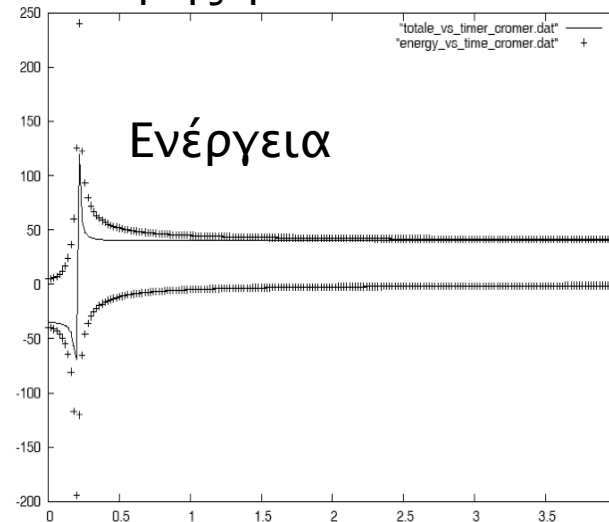
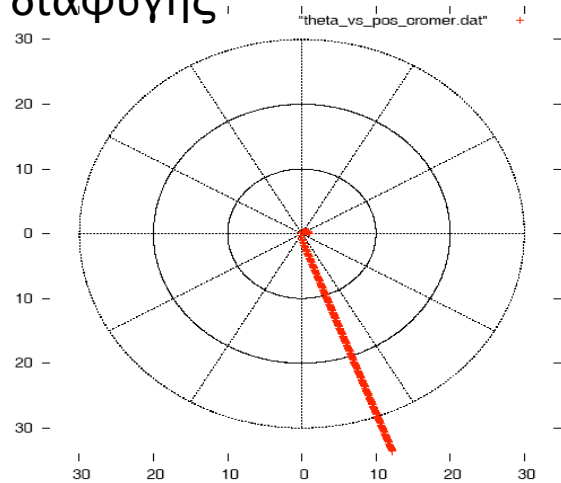
Μέθοδος Euler-Cromer



Κίνηση πλανητών

Μέθοδος Euler-Cromer για τροχιά με μεγάλη εκκεντρότητα
(αρχική ταχύτητα π AU/yr, βήμα 0.02yr και 200 βήματα)

Λόγω αριθμητικού σφάλματος ο πλανήτης φαίνεται να αποκτά ταχύτητα διαφυγής



Ίδιες συνθήκες όπως προηγουμένως αλλά για βήμα 0.005