Στροφορμή

Merry-go-round

Έχει ακτίνα R=1.3m και ροπή αδράνειας I και στρέφεται με ω_0. Ένα αγόρι μάζας M που περπατούσε με κατεύθυνση προς το κέντρο, πηδάει πάνω στο merry-go-round. Ποια η νέα ω?

Αργότερα ένα κορίτσι μάζας M που τρέχει εφαπτομενικά προς το merry-go-round πηδά πάνω. Αν η διεύθυνση της κίνησης της είναι ίδια με του merry-go-round ποια η νέα ω?

Λύση

Περπατώντας κατευθείαν προς τον άξονα περιστροφής, το αγόρι δεν έχει στροφορμή ως προς τον άξονα, και επομένως η ολική στροφορμή είναι $I\omega_0$.

Από διατήρηση της στροφορμής έχουμε:

$$I\omega_o = I\omega_2 + MR^2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{I\omega_0}{\left(I + MR^2\right)}$$

Merry-go-round

Το κορίτσι που τρέχει εφαπτομενικά έχει στροφορμή προς τον άξονα $M\upsilon R$

Επομένως η συνολική στροφορμή του συστήματος είναι: $I\omega_0+M\upsilon R$

Όταν ανεβαίνει στο merry-go-round η συνολική ροπή αδράνειας περιλαμβάνει τη ροπή αδράνειας του merry-go-round καθώς και αυτή του κάθε παιδιού που είναι MR^2.

Ορίζοντας σαν ω_3 την τελική γωνιακή ταχύτητα από διατήρηση της στροφορμής:

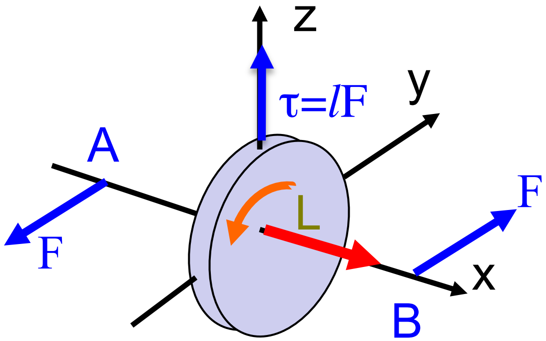
$$I\omega_o + M\upsilon R = I\omega_3 + MR^2\omega_3 + MR^2\omega_3 \Rightarrow \omega_3 = \frac{I\omega_0 + M\upsilon R}{\left(I + 2MR^2\right)}$$

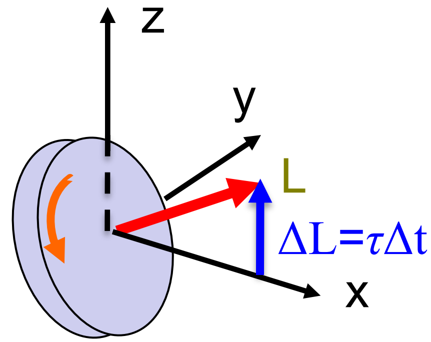
Διατηρείται η μηχανική ενέργεια όταν τα παιδιά ανέβουν στο merry-go-round?

ΟΧΙ

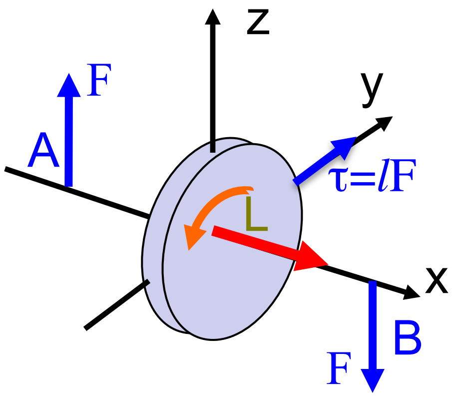
Δυνάμεις τριβής ενεργούν για να φέρουν τα παιδιά και το merry-go-round σε ηρεμία σε σχέση με το καθένα και η περίπτωση μοιάζει αυτή της πλαστικής κρούσης.

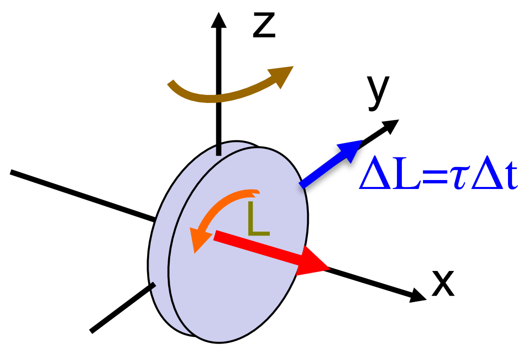
Γυροσκόπιο – Περιστροφή με ροπή





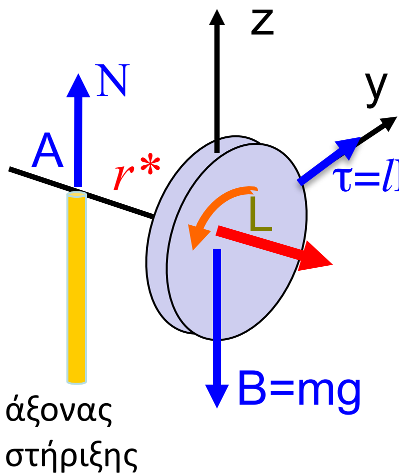
Η μεταβολή της στροφορμής είναι πάντοτε στη διεύθυνση της ροπής

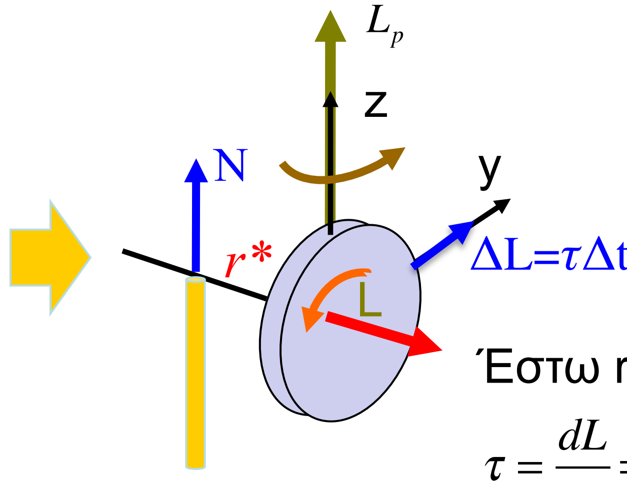




Γυροσκόπιο – Περιστροφή με ροπή

Έστω ότι κάποιος δίσκος περιστρέφεται με μια γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο του και ο άξονας περιστροφής στηρίζεται σε κάποιο σημείο



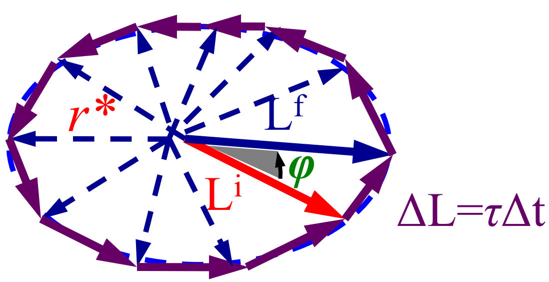


Έστω r* η απόσταση του B από το A

$$\tau = \frac{dL}{dt} \Rightarrow mgr^* = \frac{dL}{dt} \Rightarrow dL = mgr^* dt$$

Ο δίσκος διαγράφει τόξο γωνίας dφ:

$$dL = Ld\varphi \Rightarrow mgr^* dt = Ld\varphi \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgr^*}{L}$$



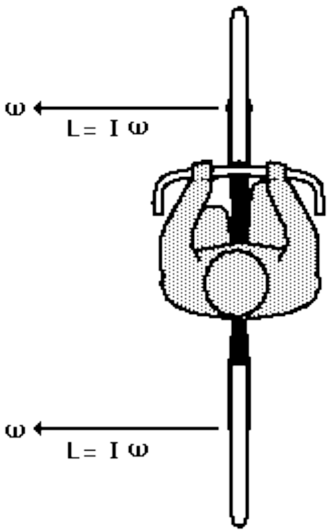
Αλλά $L = I\omega_{spin}$

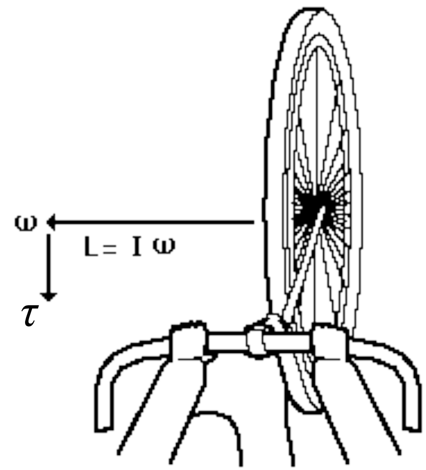
ενώ $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_{\mu\epsilon\tau\alpha\pi\tau.}$ γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης

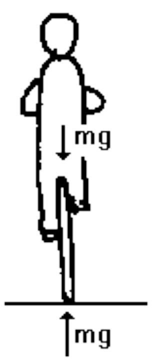
Επομένως: $\boxed{\omega_{\mu\epsilon\tau\alpha\pi\tau.} = \frac{mgr^*}{I\omega_{spin}}} \Rightarrow \omega_{spin} \times \omega_{\mu\epsilon\tau\alpha\pi\tau.} = \frac{mgr^*}{I} = \sigma\tau\alpha\theta.$ (για $L_{spin} >> L_{tot}$)

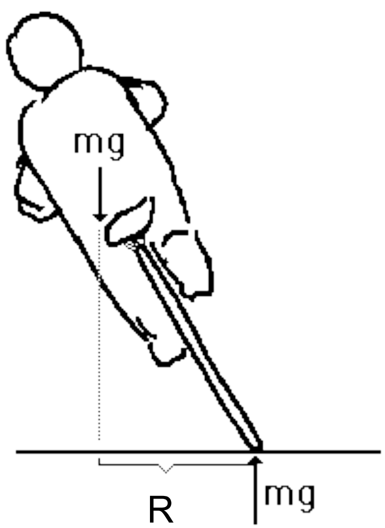
Ο δίσκος έχει δυο είδη περιστροφής και η ολική στροφορμή είναι: $\vec{L}_{tot} = \vec{L}_{spin} + \vec{L}_{\mu\epsilon\tau\alpha\pi\tau.}$

Κίνηση του ποδηλάτου









Καθώς γέρνουμε προς τα αριστερά, το βάρος παράγει ροπή που έχει φορά προς τη πίσω ρόδα και μεταβάλει τη διεύθυνση της στροφορμής

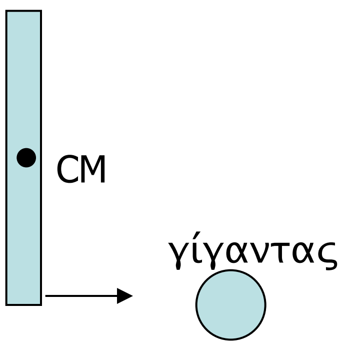
Σαν αποτέλεσμα η στροφορμή προσπαθεί να στραφεί προς τη διεύθυνση της ροπής και επομένως αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, δηλαδή αριστερά

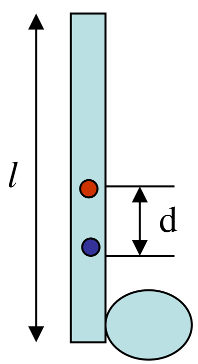
Η φυγόκεντρος δύναμη που εμφανίζεται λόγω της κυκλικής αυτής κίνησης διορθώνει τη κλίση φέρνοντας το ποδήλατο στη κατακόρυφο θέση

Παράδειγμα διατήρησης στροφορμής

Κολόνα πέφτει σε γίγαντα. Δίνονται η μάζα του γίγαντα M, της κολόνας m, το μήκος της κολόνας l, η ταχύτητα της κολόνας v. Η κίνηση γίνεται σε λεία επιφάνεια.

Πόσο γρήγορα κινείται το CM μετά την κρούση. Ποια η ω ως προς το CM?





Λύση

Από διατήρηση της ορμής έχουμε βρίσκουμε τη v_{cm}:

$$\mathrm{mv} + 0 = (M+m)\mathrm{v}_{\mathrm{CM}} \Rightarrow \mathrm{v}_{\mathrm{CM}} = \frac{\mathrm{mv}}{(M+m)}$$

Η στροφορμή διατηρείται. L γύρω από ποιο άξονα;

Από τη στιγμή που η μάζα του γίγαντα είναι μεγάλη το CM αλλάζει θέση.

Έστω d η απόσταση από το παλιό CM

Το νέο CM θα είναι: $d = \dfrac{Ml/2}{M+m}$

L ράβδου ως προς το νέο CM

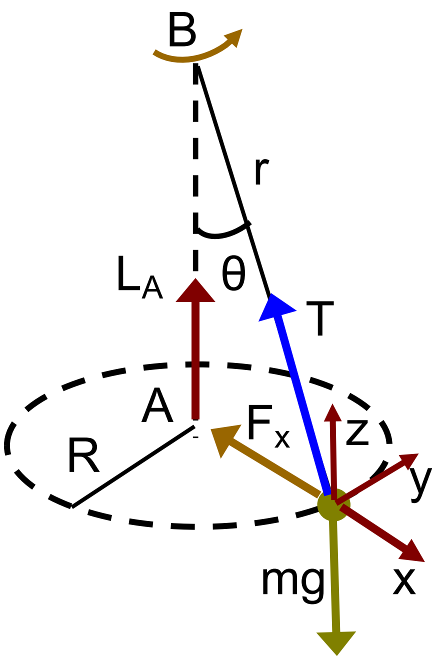
Διατήρηση της στροφορμής: $L_i = L_f = m\mathrm{v}d + 0 = I_{o\lambda}\omega$

$$I_{o\lambda} = \left(\mathrm{I}_{\mathrm{CM}}^{\pi\rho\iota\nu} + md^2\right) + M\left(\frac{l}{2} - d\right)^2 \Rightarrow$$

$$L_f = \left(\frac{1}{12}ml^2 + md^2 + M\left(\frac{l}{2} - d\right)^2\right)\omega = m\mathrm{v}d \Rightarrow \omega = \ldots$$

Κωνικό Εκκρεμές

Έστω ότι το σύστημα του κωνικού εκκρεμούς, όπου σώμα μάζας m στρέφεται με σταθερή ταχύτητα υ σε οριζόντια κυκλική τροχιά. Το σημείο στήριξης είναι το σημείο B και το μήκος του νήματος είναι r.



Μελέτη Ροπής και στροφορμής ως προς το σημείο A

Θεωρούμε αρχικά τη ροπή ως προς το σημείο A (κέντρο κύκλου)

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι η Τάση (T) και το βάρος του σώματος.

Στη z-διεύθυνση δεν υπάρχει κίνηση και επομένως:

$$\sum \vec{F}_z = \vec{0} \Rightarrow T_z - mg = 0 \Rightarrow T\cos\theta - mg = 0 \Rightarrow \sum \vec{\tau}_y = \vec{0}$$

Στη x-διεύθυνση (οριζόντια διεύθυνση): $\sum \vec{F}_x = \vec{T}_x \Rightarrow \sum F_x = T\sin\theta$

Η ροπή της δύναμης αυτής είναι μηδέν γιατί ο φορέας της περνά από το σημείο A.

Επομένως η ροπή όλων των δυνάμεων ως προς το A είναι 0

Δηλαδή η στροφορμή ως προς το A (L είναι παράλληλη με τον άξονα AB) διατηρείται

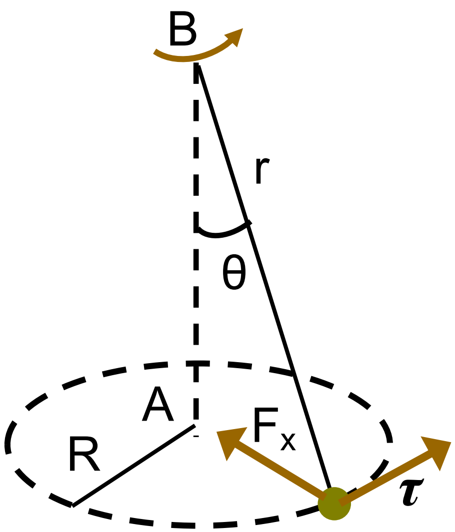
$$\vec{L}_A = \vec{R} \times \vec{p} \Rightarrow L_A = (r\sin\theta)m\upsilon \Rightarrow L_A = (m\upsilon r)\sin\theta$$

Η διεύθυνση της στροφορμής είναι από το A προς το B και παράλληλη προς το AB

Κωνικό Εκκρεμές

Μελέτη Ροπής και στροφορμής ως προς το σημείο Β

Ως προς το σημείο στήριξης Β, η συνισταμένη δύναμη F_x προκαλεί ροπή: $\sum \vec{\tau}_B = \vec{r} \times \vec{F}_x$



$$\left.\begin{aligned}\sum \tau_B &= AB \cdot F_x = F_x r\cos\theta \\ F_x &= T\sin\theta\end{aligned}\right\} = r\underbrace{\boxed{\cos\theta T}}_{mg}\sin\theta \Rightarrow \tau_B = mgr\sin\theta = mgR$$

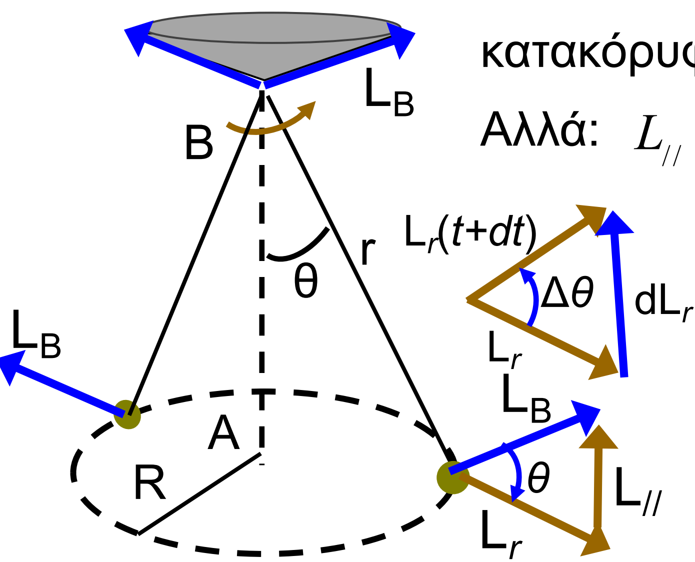
Εφόσον υπάρχει ροπή ως προς το Β θα έχουμε και μεταβολή στη

στροφορμή ως προς το σημείο Β: $\vec{\tau}_B = \dfrac{d\vec{L}_B}{dt} \Rightarrow d\vec{L}_B // \vec{\tau}_B$

Η στροφορμή ως προς το Β είναι: $\vec{L}_B = \vec{r} \times m\vec{\upsilon} \;\; \Rightarrow L_B = m\upsilon r$

Αναλύσουμε τη στροφορμή σε μία ακτινική (L_r) και μια κατακόρυφη συνιστώσα ($L_{//}$)

Αλλά: $L_{//} = m\upsilon r\sin\theta = m\upsilon R = \sigma\tau\alpha\theta. = L_A$



$$\Delta L_r = L_r \Delta\theta \text{ (\textasciitilde τόξο κύκλου)} \quad \Rightarrow dL_r = L_r d\theta$$

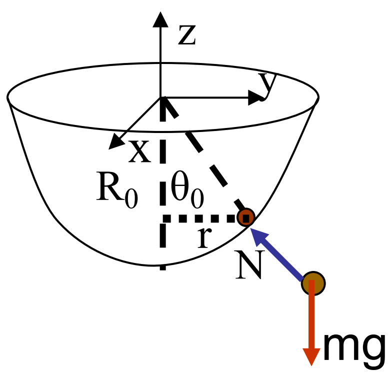
$$\Rightarrow dL_r/dt = L_r\, d\theta/dt \;= L_r\omega = \omega L_B\cos\theta \;= mr\omega^2 R\cos\theta$$

$$= rF_x\cos\theta = r\cos\theta F_y\tan\theta \;= rmg\sin\theta = \tau$$

Η στροφορμή εξαιτίας της ροπής αλλάζει διεύθυνση αλλά όχι μέτρο και διαγράφει μια κωνική επιφάνεια καθώς το σώμα περιστρέφεται

Παράδειγμα στροφορμής

Ένα σώμα είναι ελεύθερο να κινηθεί στο εσωτερικό ενός ημισφαιρικού bowl. Έχει αρχική ταχύτητα v_0 με φορά προς το εσωτερικό της σελίδας. Αν η αρχική γωνία θ_0 είναι όπως δείχνεται στο σχήμα, ποια είναι η μέγιστη v_0 για την οποία το σώμα παραμένει μέσα στο bowl?



Λύση

Η οριακή περίπτωση που το σώμα παραμένει ή όχι στο bowl είναι όταν η ταχύτητα v_0 είναι οριζόντια στο χείλος του πιάτου.

Αν είχε κατακόρυφη συνιστώσα ταχύτητας τότε θα έρχονταν ή θα πήγαινε.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διατήρηση της L_z επειδή οι μόνες δυνάμεις που δρουν είναι το βάρος και η κάθετη δύναμη.

Η κάθετη δύναμη, N, δεν προκαλεί ροπή ως προς το κέντρο της σφαίρας

Το βάρος προκαλεί ροπή πού είναι οριζόντια, $\vec{\tau}_B = \vec{r} \times m\vec{g}$

Επομένως δεν υπάρχει ροπή στην κατακόρυφη διεύθυνση και άρα L_z=σταθ

Μπάλα σε bowl (συνέχεια)

Διατήρηση της L:

$$L_z = m\mathrm{v}_0 R\sin\theta_0 = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow m\mathrm{v}_f R = m\mathrm{v}_0 R\sin\theta_0$$

Όταν η μπάλα είναι στο χείλος του bowl τότε $\mathrm{v}_f = \mathrm{v}_0 \sin\theta_0$ (1)

Διατήρηση της E:

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}_0^2 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_f^2 + mgR\cos\theta_0 \Rightarrow \frac{1}{2}m\left(\mathrm{v}_0^2 - \mathrm{v}_f^2\right) = mgR\cos\theta_0 \Rightarrow (1)$$

$$\left(\mathrm{v}_0^2 - \mathrm{v}_0^2\sin^2\theta_0\right) = 2gR\cos\theta_0 \Rightarrow \mathrm{v}_0^2\left(1-\sin^2\theta_0\right) = 2gR\cos\theta_0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{v}_0^2\cos^2\theta_0 = 2gR\cos\theta_0 \Rightarrow \mathrm{v}_0 = \sqrt{\frac{2gR}{\cos\theta_0}}$$ ⟵ Η μέγιστη ταχύτητα

Αν $\theta_0=0$ $\quad \mathrm{v}_0=\sqrt{2gR}$

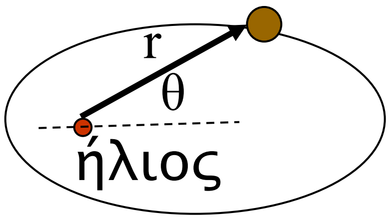
Αν $\theta_0=90^o$ $\mathrm{v}_0=\infty$

Κίνηση πλανητών – Νόμοι του Kepler

- Θα υποθέσουμε ότι ο ήλιος είναι ακίνητος (σχεδόν σωστό αφού έχει τόσο μεγάλη μάζα και η γη δεν τον κινεί).
- Οι τροχιές των πλανητών μοιάζουν κάπως σα τις παρακάτω ελλείψεις

Θέλουμε να ξέρουμε το r συναρτήσει της γωνίας θ.

Η συνάρτηση αυτή θα μας δώσει το σχήμα της τροχιάς του πλανήτη.



Ο υπολογισμός είναι αρκετά πολύπλοκος και δεν θα τον προχωρήσουμε μέχρι το τέλος

Η βαρύτητα είναι κεντρική δύναμη και επομένως δεν δημιουργεί ροπές (σχετικά με τον ήλιο)

Άρα η στροφορμή του συστήματος διατηρείται:

$$mr\text{v} = L \Rightarrow mr\left(r\frac{d\theta}{dt}\right) = L \Rightarrow mr^2\dot{\theta} = L = \sigma\tau\alpha\theta$$

Επίσης η ενέργεια του συστήματος διατηρείται, και έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\text{v}^2 + V(r) = E \Rightarrow (\frac{1}{2}m\text{v}_r^2 + \frac{1}{2}m\text{v}_\theta^2) - \frac{GMm}{r} = E \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\overbrace{\left(r\dot{\theta}\right)^2}^{\omega^2} - \frac{GMm}{r} = E \Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = E$$

Κίνηση πλανητών – Νόμοι του Kepler

Καταλήξαμε στην: $$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = E$$

Από την τελευταία μπορούμε να γράψουμε:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2E}{m} - \frac{L^2}{m^2r^2} + \frac{2GM}{r}$$

Αλλά $$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \Rightarrow \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{m^2r^4}$$

Τις διαιρούμε για να διώξουμε την εξάρτηση από t

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr/dt}{d\theta/dt}\right)^2 = \frac{2Emr^4}{L^2} - r^2 + \frac{2GM^2m^2r^3}{L^2} \equiv \mathcal{F}(r)$$

Με διαχωρισμό μεταβλητών έχουμε: $$\int \frac{dr}{\sqrt{\mathcal{F}(r)}} = \int d\theta$$

Αυτή η τελευταία σχέση μπορεί να ολοκληρωθεί για να δώσει τη θ συναρτήσει του r και κατόπιν να αναστραφεί για να πάρουμε το r συναρτήσει του θ.

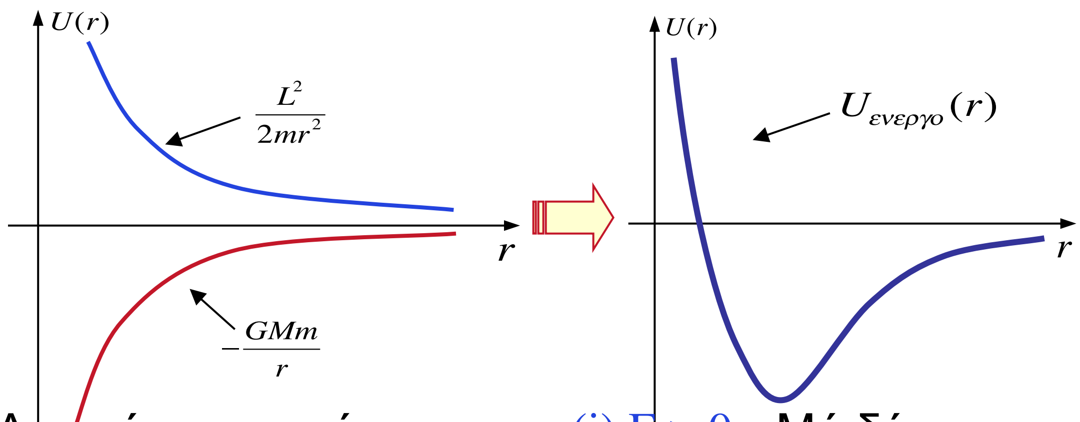
Ο υπολογισμός είναι πολύπλοκος.

Τελικό αποτέλεσμα: η εξίσωση της τροχιάς, r(θ), είναι έλλειψη με τον ήλιο σε μια εστία της.

Διάγραμμα ενέργειας

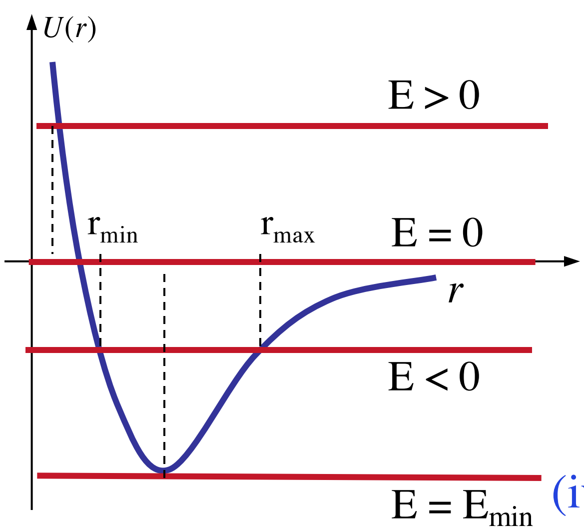
Είδαμε ότι από: $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$ πήραμε $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\varepsilon\nu\varepsilon\rho\gamma o}(r)$$



- για $L \neq 0$ ο όρος $\frac{L^2}{2mr^2}$ υπερισχύει για μικρά r
- ο όρος $-\frac{GMm}{r}$ υπερισχύει για μεγάλα r

Διαγράμματα ενέργειας:



(i) $E > 0$ Μή δέσμια τροχιά. Το σώμα πλησιάζει μέχρι κάποιο r_{min} ($E = U_{\varepsilon\nu\varepsilon\rho\gamma\acute{o}}$) όπου $E_{\kappa\iota\nu}=0$ και μετά επιστρέφει εκεί απ΄όπου ήρθε
Η τροχιά είναι υπερβολή

(ii) $E = 0$ Παρόμοια με την περίπτωση (i) αλλά στο όριο μεταξύ δέσμιας και μή δέσμιας τροχιάς
Η τροχιά είναι παραβολή

(iii) $E < 0$ Η κίνηση περιορίζεται μεταξύ r_{min} και r_{max}
Η τροχιά είναι έλλειψη

(iv) $E = E_{min}$ Η κίνηση επιτρέπεται για μια μόνο τιμή του r
Η τροχιά είναι κυκλική

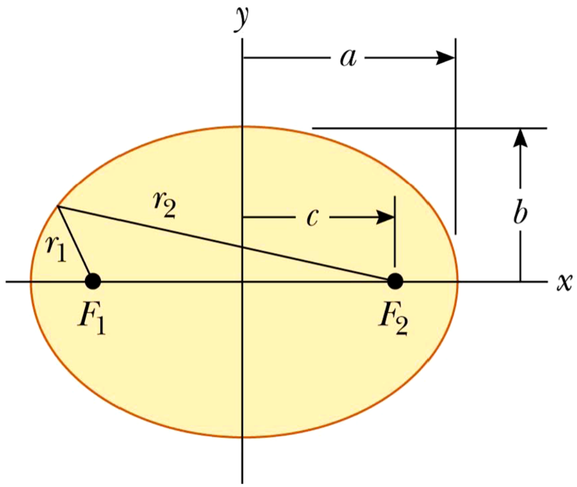
Κίνηση πλανητών – Νόμοι του Kepler

- Τρεις οι νόμοι του Kepler:
  - Οι πλανήτες κινούνται σε ελλειπτικές τροχιές με τον ήλιο σε μια εστία τους.
  - Η επιβατική ακτίνα ενός πλανήτη διαγράφει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους
  - Το τετράγωνο της περιόδου ενός πλανήτη είναι ανάλογο του κύβου του μέγιστου ημιάξονα της ελλειπτικής τροχιάς του με μια σταθερά αναλογίας που δεν εξαρτάται από την μάζα του πλανήτη:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

Σχετικά με ελλείψεις

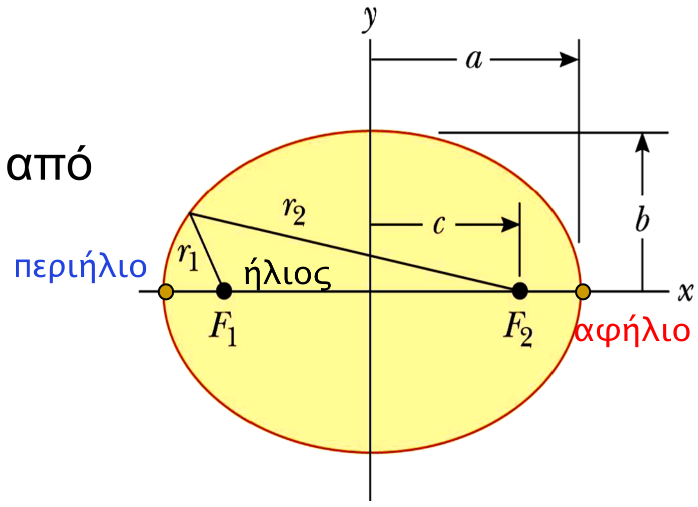
- F_1 και F_2 είναι οι εστίες της έλλειψης
  - Είναι σε απόσταση c από το κέντρο



- Η μεγαλύτερη απόσταση διαμέσου του κέντρου ονομάζεται κύριος άξονας της έλλειψης
  - Ο α είναι ο μεγάλος ημιάξονας.
- Η μικρότερη απόσταση διαμέσου του κέντρου ονομάζεται δευτερεύων άξονας της έλλειψης
  - Ο b είναι ο μικρός ημιάξονας.
- Η εκκεντρότητα της έλλειψης ορίζεται ως: $\boxed{e = \frac{c}{a}}$
  - Για κυκλική τροχιά: $e = 0$
  - Η εκκεντρότητα παίρνει τιμές στο διάστημα: $0 < e < 1$
- Η εκκεντρότητα μιας παραβολικής τροχιάς (E = 0) είναι: $e = 1$
- Η εκκεντρότητα μιας υπερβολικής τροχιάς (E > 0) είναι: $e > 1$

Σχετικά με ελλειπτικές τροχιές πλανητών

- Ο ήλιος είναι σε μια εστία της έλλειψης
  - Η άλλη εστία είναι κενή

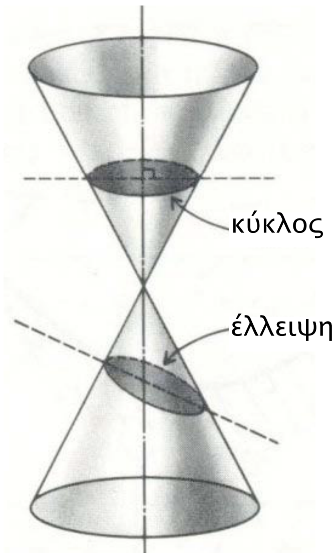


- Αφήλιο ονομάζεται το πιο απομακρυσμένο από τον ήλιο σημείο της έλλειψης.
  - Η απόσταση του αφηλίου είναι: α + c
  - Για μια τροχιά γύρω από την γη το σημείο αυτό ονομάζεται απόγειο.

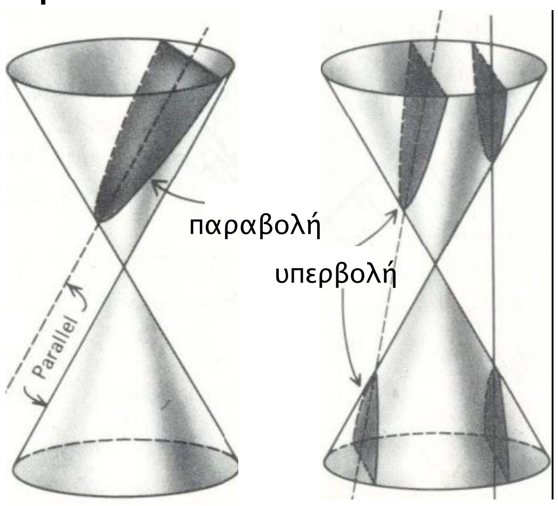
- Περιήλιο ονομάζεται το πιο κοντινό στον ήλιο σημείο της έλλειψης
  - Η απόσταση του περιηλίου είναι: α - c
  - Για μια τροχιά γύρω από το γη το σημείο αυτό ονομάζεται περίγειο

Ο 1ος νόμος του Kepler

- Μια κυκλική τροχιά είναι ειδική περίπτωση της γενικής ελλειπτικής τροχιάς.
- Είναι αποτέλεσμα της εξάρτησης από το r^{-2} της βαρυτικής δύναμης

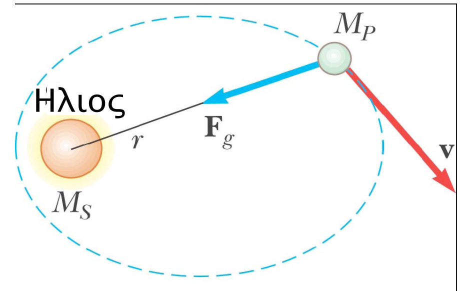


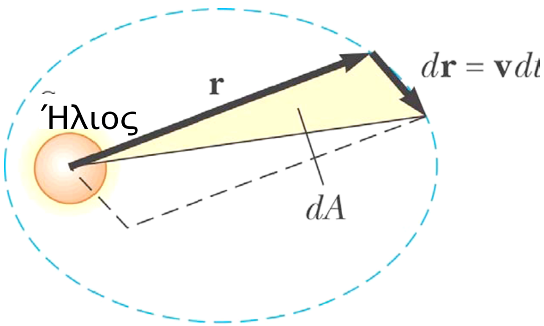
- Ελλειπτικές (και κυκλικές) τροχιές επιτρέπονται για δέσμια σώματα
  - Ένα σώμα είναι δέσμιο όταν περιφέρεται γύρω από το κέντρο έλξης
  - Ένα σώμα μη δέσμιο θα περάσει αλλά δε θα επιστρέψει
    - Αυτά τα σώματα θα έχουν τροχιές που είναι παραβολές (e = 1) ή υπερβολές (e > 1)



Ο 2ος Νόμος του Kepler

- Είναι αποτέλεσμα της διατήρησης της στροφορμής
- Η βαρυτική έλξη δεν προκαλεί ροπή ➔ L = σταθ.
- Μπορούμε να τον αποδείξουμε εύκολα:



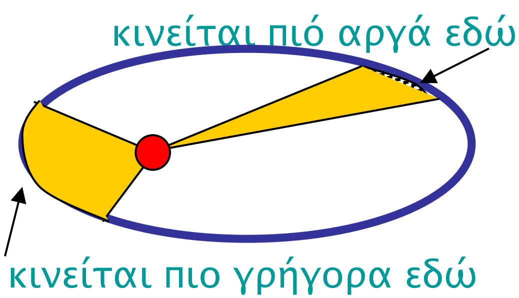


Σε χρόνο dt, η ακτίνα σαρώνει το εμβαδό dA που είναι το μισό του παραλληλογράμμου: $\left|\vec{r} \times d\vec{r}\right|$

Αλλά $\quad d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt = rd\theta$

$$dA = \frac{1}{2}r\left(rd\theta\right) \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{mr^2\dot{\theta}}{2m} = \frac{L}{2m} \qquad L = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \sigma\tau\alpha\theta.$$



εμβαδική ταχύτητα = σταθ.

Ο 2ος νόμος του Kepler ισχύει για οποιαδήποτε κεντρική δύναμη ανεξάρτητα από το αν ακολουθεί το νόμο r^{-2}.

Ο 3ος Νόμος του Kepler

- Μπορεί να προβλεφθεί από το νόμο της παγκόσμιας έλξης και το 2ο νόμο του Newton:

$$G\frac{M_{\text{Ηλιου}}m_{\pi\lambda\alpha\nu\eta\tau\eta}}{r^2} = m_{\pi\lambda\alpha\nu\eta\tau\eta}\frac{\upsilon^2}{r}$$

υποθέτοντας κυκλική τροχιά

- Η βαρυτική δύναμη προκαλεί κεντρομόλο δύναμη και επομένως $\upsilon = \dfrac{2\pi r}{T}$

- Λύνοντας ως προς T θα έχουμε:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_{\text{Ηλιου}}}\right)r^3 = K_{\text{Η}}r^3$$

Η σταθερά $K_{\text{Η}}$ εξαρτάται από τη μάζα του ήλιου και όχι του πλανήτη

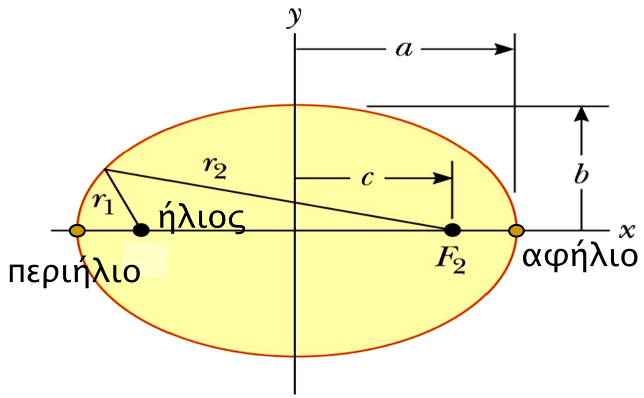
- Τα παραπάνω μπορούν να επεκταθούν και για ελλειπτικές τροχιές αντικαθιστώντας r με α (το μεγάλο ημιάξονα της έλλειψης)

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_{H\lambda\iota o\upsilon}}\right)a^3 = K_{\text{Η}}a^3$$

- Από την απόσταση ήλιου-γης και την περίοδο της γης βρίσκουμε $M_{\text{ήλιου}}$

Παράδειγμα

Ένας πλανήτης κινείται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τον ήλιο.
Εάν γνωρίζουμε την ταχύτητά του στο σημείο του περιήλιου, υ_π,
μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητά του στο σημείο του αφήλιου, υ_α.



Η στροφορμή του πλανήτη σε σχέση με τον ήλιο διατηρείται.

Η στροφορμή δίνεται από τη σχέση $\vec{L} = m_{\pi\lambda\alpha\nu\eta\tau\eta}\vec{r}\times\vec{\upsilon}$

Στα σημεία του περιηλίου και αφηλίου η ακτίνα είναι κάθετη στην ταχύτητα:

$$L_\pi = m_{\pi\lambda\alpha\nu\eta\tau\eta} r_\pi \upsilon_\pi \qquad L_\alpha = m_{\pi\lambda\alpha\nu\eta\tau\eta} r_\alpha \upsilon_\alpha \qquad L_\pi = L_\alpha$$

$$m_{\pi\lambda\alpha\nu\eta\tau\eta} r_\pi \upsilon_\pi = m_{\pi\lambda\alpha\nu\eta\tau\eta} r_\alpha \upsilon_\alpha \boxed{\Rightarrow \upsilon_\alpha = \frac{r_\pi}{r_\alpha}\upsilon_\pi}$$

Μελανές Οπές – Black Holes

- Μελανή οπή είναι το απομεινάρι ενός αστέρα που συνεθλίβει κάτω από το δικό του βαρυτικό πεδίο

- Είδαμε ότι η ταχύτητα διαφυγής δίνεται από την σχέση: $\mathrm{v}_0 = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$

- Η ταχύτητα διαφυγής για την περίπτωση μιας μελανής οπής είναι πολύ μεγάλη εξαιτίας της μεγάλης συγκέντρωσης μάζας μέσα σε μια σφαίρα πολύ μικρής ακτίνας.
  - Αν η ταχύτητα διαφυγής ξεπεράσει την ταχύτητα του φωτός τότε ακτινοβολία δεν μπορεί να διαφύγει και εμφανίζεται σα μελανό σώμα.
- Από στη σχέση της ταχύτητας διαφυγής αντικαταστήσουμε όπου $v_0 = c$ τότε παίρνουμε:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$ ακτίνα Schwarzchild (1916)

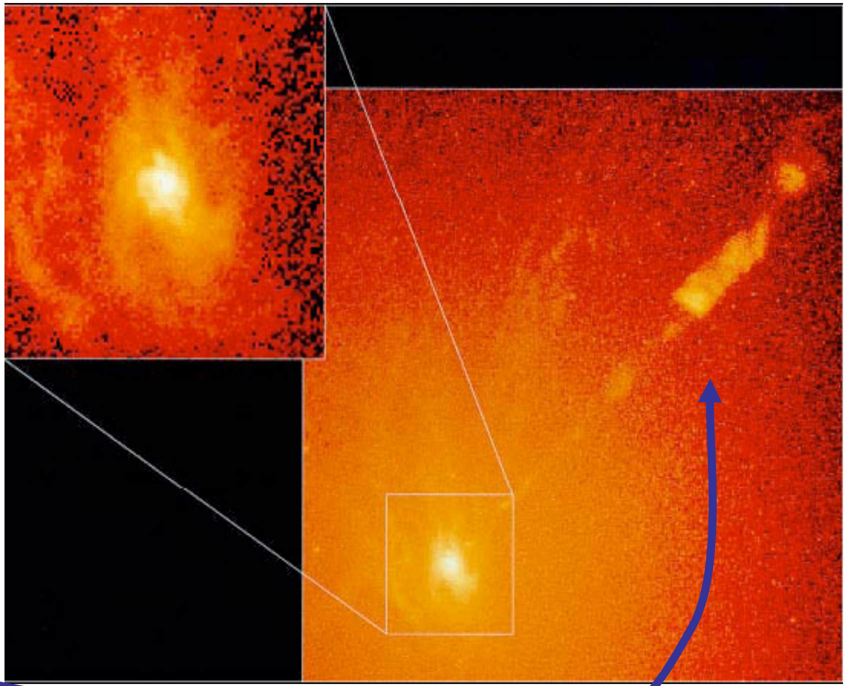
Για $M \sim 3M_{Ηλιου}$ ένας αστέρας μπορεί να γίνει μελανή οπή.
Στην περίπτωση αυτή $R_s = 9$ Km
Η πυκνότητα αυτής της μελανής οπής είναι: $\sigma = \dfrac{2M_{Ηλιου}}{V} = \dfrac{2M_{Ηλιου}}{\frac{4\pi}{3}R_S^3} \Rightarrow$

$$\sigma = 6\times 10^{17}\, kgr/m^3$$

Μελανές οπές και Γαλαξίες

Υπάρχουν ενδείξεις ότι μελανές οπές πολύ μεγάλης μάζας υπάρχουν στο κέντρο των γαλαξιών

Η θεωρία προβλέπει ότι πίδακες ύλης (jets) πρέπει να είναι ανιχνεύσιμοι κατά μήκος του άξονα περιστροφής της μελανής οπής



Φωτογραφία του γαλαξία M87 από το τηλεσκόπιο Hubble. Ο πίδακας ύλης θεωρείται σαν ένδειξη ότι υπάρχει μια πολύ μεγάλης μάζας μελανή οπή

Να σημειώσουμε εδώ ότι οι σχέσεις που βρήκαμε στηρίζονται στους νόμους του Newton που δεν έχουν εφαρμογή σε ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του φωτός. Ωστόσο είναι από τις λίγες περιπτώσεις που τα αποτελέσματα της σχετικιστικής δυναμικής συμφωνούν με αυτά της κλασικής