ΦΥΣ. 131
Τελική Εξέταση: 7-Δεκεμβρίου-2004

Πριν αρχίσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητας) στην πρώτη σελίδα των απαντήσεών σας.

Απαντήστε και στις 13 ασκήσεις. Ολες οι ασκήσεις είναι ισοδύναμες. Σύνολο 130 βαθμοί

Προσπαθήστε να δείξετε την σκέψη σας και να εξηγήσετε όσο το δυνατόν πιο καθαρά για ποιό λόγο κάνετε ότι γράφετε. Όπου χρειάζονται διαγράμματα δυνάμεων, ροπών ή ταχυτήτων σχεδιάστε αναλυτικά όλα τα διανύσματα που λαμβάνετε υπ'όψην.

Κάποιες ασκήσεις είναι περισσότερο απλές από άλλες. **Η σειρά των ασκήσεων δεν είναι ενδεικτική της δυσκολίας τους.** Διαβάστε όλα τα προβλήματα. Αν σε κάποιο φαίνεται να ξοδεύεται πολύ χρόνο προχωρήστε στο επόμενο πρόβλημα.

ΑΠΑΓΟΡΕΥΕΤΑΙ ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ ΕΙΔΟΣ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ ΚΑΙ ΧΡΗΣΗ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ, ΒΙΒΛΙΩΝ, ΚΙΝΗΤΩΝ Η ΟΤΙΔΗΠΟΤΕ ΑΛΛΟ. ΟΙ ΠΑΡΑΒΑΤΕΣ ΘΑ ΜΗΔΕΝΙΣΤΟΥΝ ΑΥΤΟΜΑΤΑ

Καλή Επιτυχία

Τύποι που μπορεί να φανούν χρήσιμοι

$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$

$E_{tot} = KE + PE$

$U_{\beta\alpha\rho} = mgh$

$U_{\varepsilon\lambda\alpha\tau} = \frac{1}{2}kx^2$

$\vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}}$

$\Delta U = -\int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$W = -\Delta U$

$W_{NC} = \Delta KE + \Delta U$

$\vec{F}_{\varepsilon\lambda} = -k\vec{x}$

$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$

$P = \vec{F} \cdot \vec{u}$

$K = \frac{1}{2}mu^2$

$a_{\kappa\varepsilon\nu\tau} = \frac{u^2}{r}$

$\vec{a} = \vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau} + \vec{a}_{\varepsilon\phi}$

$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{v}$

$u = u_0 + at$

$x = x_0 + u_0 t + \frac{1}{2}at^2$

$u^2 = u_0^2 + 2a(x - x_0)$

$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$

$J = \Delta\vec{p}$

$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$

$\vec{P} = M\vec{\upsilon}_{\Psi M}$

$\vec{p}_i = \vec{p}_f$

$\vec{\upsilon}_{\Psi M} = \frac{1}{M_{o\lambda}}\sum_i m_i \upsilon_i$

$\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2 = -(\vec{\upsilon}_1' - \vec{\upsilon}_2')$

$E\lambda\alpha\sigma\tau$: $\Delta p = 0, \Delta E = 0$

$M\eta\ \varepsilon\lambda\alpha\sigma\tau$: $\Delta p = 0, \Delta E \neq 0$

$g = 10\ m/\sec^2$

$x_{CM} = \frac{1}{M_{o\lambda}}\sum_i m_i x_i$

$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM}$

$\theta = \frac{s}{r}$

$1\ \pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho = 360^0 = 2\pi$ ακτίνια

$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

$\overline{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

$\omega = \omega_0 t + \alpha t$

$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$

$\upsilon = \omega r$

$a_{\varepsilon\varphi} = \alpha r$

$a_r = \frac{\upsilon^2}{r} = \omega^2 r$

$\vec{a}_{\gamma\rho\alpha\mu} = \vec{a}_{ef} + \vec{a}_r$

$I = \sum_i m_i r_i^2$

$KE_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2}I\omega^2$

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\tau = r_{\kappa\alpha\theta} F$

$\sum \vec{\tau} = I\alpha$

$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$

$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i$

$L = I\omega$

$A\pi o\mu o\nu$. σύστημα : $L_i = L_f$

Ισορροπία :

$\sum F_{\varepsilon\xi\omega\tau} = 0 \quad \Sigma\tau_{\varepsilon\xi} = 0$

$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_H}\right)r^3$

$g = \frac{F_g}{m}$

$U = -\frac{Gm_1 m_2}{r}$

$E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{GMm}{r}$

$\upsilon_{\delta\iota\alpha\varphi} = \sqrt{\frac{2GM_{\gamma\eta}}{R_{\gamma\eta}}}$

$G = 6.6726 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

$R_{\gamma\eta} = 6.4 \cdot 10^3\ Km$

$M_{\gamma\eta} = 5.97 \cdot 10^{24}\ kg$

$y = A\sin[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)]$

$y = A\sin(kx - \omega t)$

$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

$\overline{P} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v$

$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$

$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

$s(x,t) = s_{\max}\cos(kx - \omega t)$

$\Delta P = \Delta P_{\max}\sin(kx - \omega t)$

$\Delta P_{\max} = \rho v\omega s_{\max}$

$I = \frac{1}{2}\rho v(\omega s_{\max})^2$

$\beta = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$

$f' = \left(\frac{v \pm v_0}{v \mp v_0}\right)f$

$\sigma\tau\acute{\alpha}\sigma\iota\mu\alpha\ \kappa\acute{\upsilon}\mu\alpha\tau\alpha$:

$y = (2A\sin kx)\cos\omega t$

$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad n = 1,2,3,...$

$f_n = n\frac{v}{2L} \quad n = 1,2,3,...$

$f_n = n\frac{v}{4L} \quad n = 1,3,5,...$

$x = A\cos(\omega t + \phi)$

$T = 2\pi/\omega$

$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$

$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \phi)$

$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2(\omega t + \phi)$

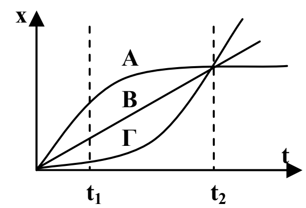
$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)$

$E = \frac{1}{2}kA^2$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$

1. Το παρακάτω διάγραμμα περιγράφει τρεις καμπύλες θέσης – χρόνου για την μονοδιάστατη κίνηση μιας μάζας m. Και στις τρεις περιπτώσεις η μάζα είναι ίδια. Ταξινομείστε τις καμπύλες (σε φθίνουσα σειρά) σύμφωνα με το καθαρό έργο που παράγεται στη μάζα m μεταξύ t_1 και t_2. (**10β**)

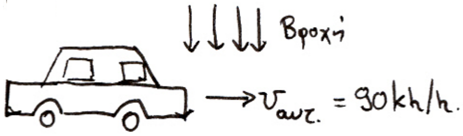


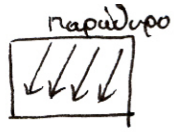
Η κλίση κάθε καμπύλης στα σημεία t_1 κ t_2 δίνει την ταχύτητα της μάζας σε κάθε περίπτωση.

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας θα δώσει το έργο που παράγεται στη μάζα:

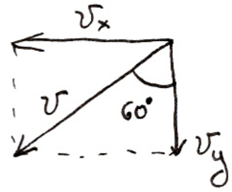
$$\left.\begin{array}{l} v_F^{\Gamma} >> v_i^{\Gamma} \\ v_B^{f} = v_B^{i} \\ v_A^{f} << v_A^{i} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{W_C^{\Gamma} > W_B > W_A}$$

2. Σταγόνες βροχής πέφτουν ευθύγραμμα προς τα κάτω. Όταν παρατηρούνται μέσα από ένα αυτοκίνητο που ταξιδεύει με ταχύτητα 90 Km/h, οι σταγόνες χτυπούν στο πλαϊνό παράθυρο του αυτοκινήτου με γωνία 60^0 με την κατακόρυφο. Βρείτε την ταχύτητα με την οποία πέφτουν οι σταγόνες της βροχής. (**10 β**)





Βλέποντας τις σταγόνες μέσα από το αυτοκίνητο φαίνονται να έχουν οριζόντια ταχύτητα 90km/h, όση η ταχύτητα του αυτοκινήτου



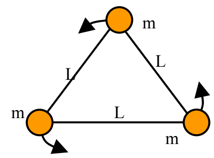
Η γωνία που σχηματίζουν οι σταγόνες της βροχής είναι 60° με την κατακόρυφο.

Επομένως:

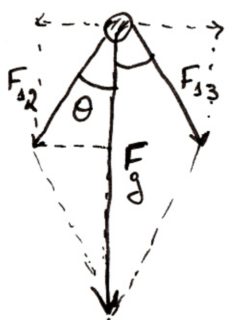
$$\left.\begin{array}{l} \upsilon \sin\theta = \upsilon_x \\ \upsilon \cos\theta = \upsilon_y \end{array}\right\} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\upsilon_x}{\upsilon_y} \Rightarrow \upsilon_y = \frac{\upsilon_x}{\tan\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_y = \frac{90}{\tan 60} \Rightarrow \boxed{\upsilon_y = 51.96\ kh/h}$$

3. Τρεις ίσες μάζες στο χώρο περιστρέφονται σε μια σταθερή κατάσταση με την κεντρομόλο επιτάχυνση να προσφέρεται εξαιτίας της αμοιβαίας έλξης τους, όπως στο σχήμα. Να βρεθεί η ταχύτητά τους. (**10β**)



Η συνισταμένη δύναμη προέρχεται από την αμοιβαία έλξη των τριών μαζών.
Η δύναμη αυτή παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δυνάμεως στην κίνηση των τριών μαζών.
Αν εξετάσουμε τη μάζα που βρίσκεται στην κορυφή του τριγώνου, τότε οι δυνάμεις βαρύτητας θα είναι :



Επειδή το τρίγωνο είναι ισόπλευρο η γωνία $\Theta = 30^\circ$

Επομένως : $F_{12} = F_{13} = \frac{Gmm}{L^2} = \frac{Gm^2}{L^2}$

$$\vec{F}_g = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} \Rightarrow F_g = 2F_{12}\cos\Theta = 2\frac{Gm^2}{L^2}\cos\Theta. \quad (1)$$

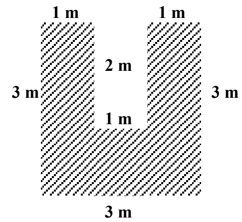
Η δύναμη αυτή θα είναι η κεντρομόλος : $F_g = \frac{mv^2}{r}$

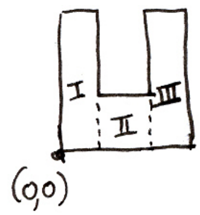
όπου r είναι το κέντρο του τριγώνου : $r = \frac{L/2}{\cos\Theta}$

$\Rightarrow F_g = \frac{mv^2}{L/2}\cos\Theta$ (2)

Από (1) ∧ (2) $\Rightarrow \cancel{2}\frac{Gm^{\cancel{2}}}{L^2}\cancel{\cos\Theta} = \frac{\cancel{m}v^2}{\cancel{L/2}}\cancel{\cos\Theta} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{Gm}{L}}}$

4. Το ομοιόμορφο φύλο του ξύλου του σχήματος έχει μάζα 20Kg. Να βρεθεί το κέντρο μάζας του.
(Το φύλο του ξύλου να θεωρηθεί επίπεδο, δηλαδή με αμελητέο πάχος)





Από συμμετρία το $x_{cm} = 1.5 cm$

Θεωρούμε σαν αρχή του συστήματος συντεταγμένων το αριστερό κάτω άκρο του φύλου.

Για κάθε ένα από τα τρία κομάτια θεωρούμε το CM του και ότι όλη η μάζα είναι συγκεντρωμένη στο σημείο αυτό. Επομένως τα τρία τμήματα συμπεριφέρονται σαν 3 διακριτές μάζες στις θέσεις του κέντρου μάζας τους, και με μάζα το καθένα ίση με $m = A \cdot \rho$ όπου A το εμβαδό του τμήματος και ρ η επιφανειακή πυκνότητα.

Επομένως θα έχουμε:

$$m_I = A_I \cdot \rho = L \cdot \frac{L}{3} \cdot \rho = \frac{L^2}{3}\rho \qquad y_I^{CM} = \frac{L}{2}$$

$$m_{II} = A_{II} \cdot \rho = \frac{L}{3}\,\frac{L}{3}\,\rho = \frac{L^2}{9}\rho \qquad y_{II}^{CM} = \frac{L}{6}$$

$$m_{III} = A_{III}\,\rho = L\,\frac{L}{3}\,\rho = \frac{L^2}{3}\rho \qquad y_{III}^{CM} = \frac{L}{2}$$

$$y_{CM} = \frac{m_I y_I^{CM} + m_{II} y_{II}^{CM} + m_{III} y_{III}^{CM}}{m_I + m_{II} + m_{III}} \Rightarrow$$

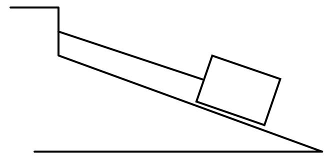
$$y_{CM} = \frac{\frac{L^{\cancel{2}}}{3}\cancel{\rho}\cdot\frac{L}{2} + \frac{L^{\cancel{2}}}{9}\cancel{\rho}\,\frac{L}{6} + \frac{L^{\cancel{2}}}{3}\cancel{\rho}\,\frac{L}{2}}{\frac{L^{\cancel{2}}}{3}\cancel{\rho} + \frac{L^{\cancel{2}}}{9}\cancel{\rho} + \frac{L^{\cancel{2}}}{3}\cancel{\rho}} \Rightarrow$$

$$y_{CM} = \frac{L\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6\cdot 9} + \frac{1}{6}\right)}{\frac{1}{3}\left(2 + \frac{1}{3}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{CM} = \frac{L\frac{1}{\cancel{6}_2}\left(2 + \frac{1}{9}\right)}{\frac{1}{\cancel{3}}\,\frac{7}{3}} = \frac{\frac{19L}{\cancel{9}3}}{\frac{14}{\cancel{3}}} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_{CM} = \frac{19L}{3\cdot 14} \\ L = 3m \end{array}\right\} \Rightarrow y_{CM} = \frac{19}{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{CM} = 1.357m}$$

5. Ένα τούβλο μάζας M, που συγκρατείται από μιά χορδή, βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση. Το μήκος της χορδής είναι L και η μάζα της m<<M. Να βρεθεί μιά έκφραση για το χρονικό διάστημα που απαιτήται για ένα εγκάρσιο κύμα να διανύσει την απόσταση από το ένα άκρο της χορδής στο άλλο. (**10 β**)

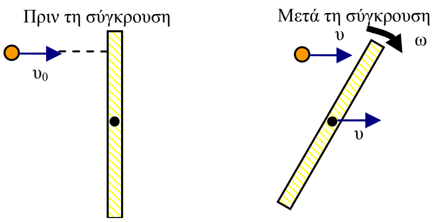


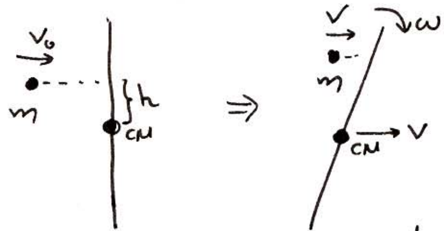
Η τάση της χορδής είναι $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T - mg\sin\theta = 0 \Rightarrow T = mg\sin\theta$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{Mg\sin\theta}{\frac{m}{L}}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{MgL\sin\theta}{m}}$$

$$\Delta t = \frac{L}{\upsilon} = L\left(\sqrt{\frac{mgL\sin\theta}{m}}\right)^{-1} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \sqrt{\frac{mL}{Mg\sin\theta}}}$$

6. Μια μπάλα μάζα m κινείται με ταχύτητα υ_0 της οποίας η διεύθυνση είναι κάθετη σε μια ξύλινη βέργα μάζας m και μήκους L, που αρχικά ηρεμεί. Σε ποιό σημείο της βέργας θα πρέπει να συγκρουστεί ελαστικά η μπάλα με την βέργα, έτσι ώστε η μπάλα και το κέντρο της βέργας να έχουν ίσες ταχύτητες μετά την σύγκρουση. (**10β**) (Η ροπή αδράνειας της βέργας ως προς το κέντρο μάζας της είναι $I=1/12ML^2$)





Έχουμε 3 αγνώστους : v, ω, h

Έχουμε όμως 3 εξισώσεις από Διατήρηση E, P, L

Διατήρηση ορμής: $m v_0 = mv + mv \Rightarrow \boxed{v = \frac{v_0}{2}}$ (1)

Διατήρηση ενέργειας: $\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \left[\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I\omega^2\right] \Rightarrow$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \frac{v_0^2}{4} + \frac{1}{2} m \frac{v_0^2}{4} + \frac{1}{2} I\omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}\,4}\cancel{m} v_0^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{1}{\cancel{12}\,6}\cancel{m}L^2\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = 6\left(\frac{v_0}{L}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{6}\,\frac{v_0}{L}} \quad (2)$$

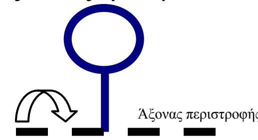
Διατήρηση στροφορμής: (γύρω από το αρχικό κέντρο της βέργας)

$m v_0 h = m(v_0/2)\,h + [I\omega + 0]$ αφού το CM της βέργας δεν έχει στροφορμή σχετικά με την αρχική θέση του κέντρου μάζας (περνά από το σημείο περιστροφής)

$$\Rightarrow \frac{\cancel{m}\cancel{v_0}h}{\cancel{2}} = \frac{1}{6\,\cancel{12}}\cancel{m}L^{\cancel{2}}\left(\sqrt{6}\,\frac{\cancel{v_0}}{\cancel{L}}\right) \Rightarrow h = \frac{1}{6}\sqrt{6}\,L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{L}{\sqrt{6}}}$$

7. Μια συμπαγής κατασκευή αποτελείται από ένα λεπτό στεφάνι ακτίνας R και μάζας m εξαρτώμενο από μια λεπτή ράβδο μάζας m και μήκους 2R. Η κατασκευή αρχικά είναι στην κατακόρυφη θέση και σε κατάσταση ηρεμίας (όπως στο σχήμα). Δίνοντας μιά απειροστή ώθηση από πίσω η κατασκευή αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από τον οριζόντιο άξονα. Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα καθώς περνά από την αντιδιαμετρική θέση; (Κατασκευή στην κατακόρυφη θέση αλλά προς τα κάτω). Η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της είναι $I_{ραβ}=1/12\ ML^2$ ενώ η ροπή αδράνειας ενός στεφανιού ως προς το CM είναι $I_{στ}=1/2\ MR^2$. (**10 β**)



$$I_{ράβδου} = I^{CM}_{ράβδου} + mR^2 = \frac{1}{12}m(2R)^2 + mR^2 = \frac{1}{3}mR^2 + mR^2 \Rightarrow I_{ράβδου} = \frac{4}{3}mR^2 \quad (1)$$

$$I_{στεφ} = I^{CM}_{στεφ} + m(2R+R)^2 = \frac{1}{2}mR^2 + m9R^2 \Rightarrow \qquad I_{στεφ} = \frac{19}{2}mR^2 \quad (2)$$

$$y_{CM} = \frac{\cancel{m}R + \cancel{m}(2R+R)}{2\cancel{m}} \Rightarrow y_{CM} = \frac{4R}{2} \Rightarrow \qquad y_{CM} = 2R \quad (3)$$

$$I_{κατασκ.} = I_{ράβδου} + I_{στεφ} \xRightarrow{(1)+(2)} \qquad I_{κατασκ} = \frac{65}{6}mR^2 \quad (4)$$

Από διατήρηση της ενέργειας θα έχουμε:

$$E^{i}_{κιν} + U^{i}_{g} = E^{f}_{κιν} + U^{f}_{g} \Rightarrow 0 + 2mg\,y^{CM} = E^{f}_{κιν} - 2mg\,y^{CM} \Rightarrow$$

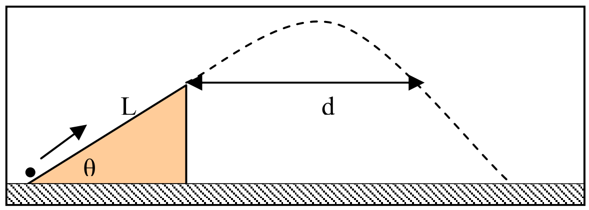
$$\Rightarrow \frac{1}{2}I\omega^2 = 2mg\,y^{CM} + 2mg\,y^{CM} \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{(4),(3)} \frac{1}{2}\,\frac{65}{6}\cancel{m}R^{\cancel{2}}\omega^2 = 4\cancel{m}g\,2\cancel{R} \Rightarrow \omega^2 = \frac{96}{65}\,\frac{g}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{96}{65}\,\frac{g}{R}}}$$

8. Ένα κανόνι όταν στοχεύει κατακόρυφα προς τα πάνω, παρατηρείται ότι ρίχνει μια οβίδα σε ένα μέγιστο ύψος L. Μια άλλη οβίδα ρίχνεται αργότερα με την ίδια ταχύτητα, αλλά αυτή τη φορά το κανόνι σημαδεύει κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου, μήκους L, και γωνίας κλίσεως θ. Ποια πρέπει να 'ναι η γωνία ώστε η οβίδα να διανύσει την μεγαλύτερη οριζόντια απόσταση d, την στιγμή που επιστρέφει στο ύψος της κορυφής του κεκλιμένου επιπέδου;(**10 β**)

(Αν δεν έχετε χρόνο μπορείτε να αφήσετε την απάντησή σας μέχρι το σημείο της εξίσωσης ως προς τη γωνία χωρίς να τη λύσετε.)



Βρίσκουμε πρώτα την αρχική ταχύτητα : (από την κατακόρυφη βολή)

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon_0^2 = \cancel{m}gL \Rightarrow \boxed{\upsilon_0 = \sqrt{2gL}} \qquad (1)$$

Βρίσκουμε τώρα την ταχύτητα στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου :

Από διατήρηση της ενέργειας :

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \cancel{m}g(L\sin\theta) \Rightarrow v^2 = \upsilon_0^2 - 2gL\sin\theta \overset{(1)}{\Rightarrow} v^2 = 2gL - 2gL\sin\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v^2 = 2gL(1-\sin\theta)} \qquad (2)$$

Από το σημείο αυτό έχουμε βολή με αρχική ταχύτητα V και γωνία θ.

Ο χρόνος για το μέγιστο ύψος είναι : $t = \frac{v^y}{g} \Rightarrow$ ολικός χρόνος $= \frac{2V_y}{g} = \frac{2v\sin\theta}{g} = t_{ολ}$

Επομένως η απόσταση θα είναι $d = V_x t_{ολ} = (V\cos\theta)\left(\frac{2V\sin\theta}{g}\right) \Rightarrow d = \frac{2V^2\sin\theta\cos\theta}{g}$

Αντικαθιστώντας από την (2) $\Rightarrow$ $d = \frac{2(2\cancel{g}L(1-\sin\theta))\sin\theta\cos\theta}{\cancel{g}} \Rightarrow d = 4L(1-\sin\theta)\sin\theta\cos\theta$

Μεγιστοποιούμε την d συναρτήσει της θ: $\Rightarrow d \propto \sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta\cos\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{d\theta}(\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta\cos\theta) = -\sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin^3\theta - 2\sin\theta\cos^2\theta \Rightarrow$$

$$0 = -\sin^2\theta + (1-\sin^2\theta) + \sin^3\theta - 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) \Rightarrow 0 = 3\sin^3\theta - 2\sin^2\theta - 2\sin\theta + 1 \Rightarrow$$

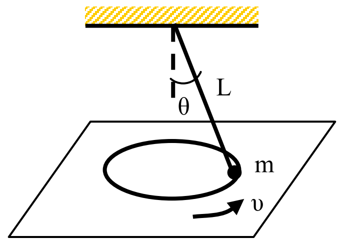
$$\Rightarrow (\sin\theta - 1)(3\sin^2\theta + \sin\theta - 1) \Rightarrow$$

$\sin\theta = 1$

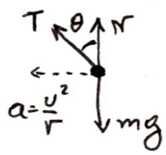
ή $\sin\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\cdot 3}}{6} = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$, $\frac{-1-\sqrt{13}}{6}$ απορ., $\frac{-1+\sqrt{13}}{6} \simeq 0.43$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = 25.7^\circ}$$

9. Μια μάζα m είναι εξαρτημένη από ένα νήμα αμελητέου βάρους. Το μήκος του νήματος είναι L. Η μάζα διαγράφει κυκλική τροχιά πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι, όπως δείχνει το σχήμα. Αν το νήμα σχηματίζει πάντοτε γωνία θ ως προς την κατακόρυφο, και αν η μάζα κινείται με ταχύτητα υ, ποια είναι η κάθετη δύναμη από το τραπέζι στην μάζα; Για ποια τιμή της ταχύτητας υ της μάζας, η κάθετη δύναμη είναι μηδέν; (**10 β**)



Διάγραμμα ελευθέρου σώματος:



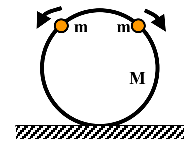
$$F_x = ma_x \Rightarrow T\sin\theta = m\frac{\upsilon^2}{r} = m\frac{\upsilon^2}{L\sin\theta} \Rightarrow \boxed{T = \frac{m\upsilon^2}{L\sin^2\theta}} \quad (1)$$

$$F_y = ma_y \Rightarrow T\cos\theta + N - mg = 0 \Rightarrow$$

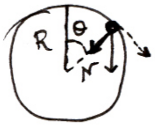
$$\Rightarrow N = mg - T\cos\theta \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{N = mg - \frac{m\upsilon^2}{L\sin^2\theta}\cos\theta}$$

Όταν $N=0 \Rightarrow$ $$\cancel{m}g = \frac{\cancel{m}\upsilon^2}{L}\,\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{gL\sin^2\theta}{\cos\theta}} \Rightarrow \boxed{\upsilon = \sqrt{gL\sin\theta\tan\theta}}$$

10. Δύο χάντρες μάζας m είναι τοποθετημένες στο εσωτερικό της κορυφής ενός λείου στεφανιού μάζας M και ακτίνας R, το οποίο στέκεται κατακόρυφο στο έδαφος. Οι χάντρες δέχονται απειροστές ωθήσεις (η ώθηση δεν προσδίδει οποιαδήποτε ενέργεια) και αρχίζουν να γλιστρούν πάνω στο στεφάνι προς τα κάτω, η μια αριστερά και η άλλη δεξιά. Ποια είναι η μικρότερη τιμή του λόγου m/M για την οποία το στεφάνι θα σηκωθεί από το έδαφος κάποια στιγμή κατά την διάρκεια της κίνησης των δύο χαντρών. (**10β**)



Έστω N η δύναμη που ασκείται από το στεφάνι σε μιά χάντρα (θετική θεωρούμε τη φορά προς το κέντρο του στεφανιού).



$$N + mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$$

Διατήρηση της ενέργειας $\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mg(1-\cos\theta)R$

$$\Rightarrow N + mg\cos\theta = \frac{2mg(1-\cos\theta)\cancel{R}}{\cancel{R}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{N = mg(2-3\cos\theta)} \quad (1)$$

Σύμφωνα με το 3° νόμο του Newton αυτή η δύναμη ασκείται προς τα έξω στο στεφάνι. Αφού έχουμε 2 χάντρες σε συμμετρικές θέσεις κάθε φορά, η δύναμη αυτή που ασκείται στο στεφάνι, θα είναι $\vec{N}_{ολ} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 \overset{(1)}{\Rightarrow} N_{ολ} = 2N_1 \cdot \cos\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{N_{ολ} = 2mg(2-3\cos\theta)\cos\theta} \quad (2)$$

Για να σηκωθεί το στεφάνι, θα πρέπει η $N_{ολ} \geq Mg \overset{(2)}{\Rightarrow}$

$$2m\cancel{g}(2-3\cos\theta)\cos\theta \geq M\cancel{g} \Rightarrow 4\cos\theta - 6\cos^2\theta \geq \frac{M}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m}{M} \geq \frac{1}{4\cos\theta - 6\cos^2\theta} \qquad (3)$$

Επομένως θα πρέπει να μεγιστοποιήσουμε το δεξί μέρος. Έστω $f(\theta) = 4\cos\theta - 6\cos^2\theta \Rightarrow$

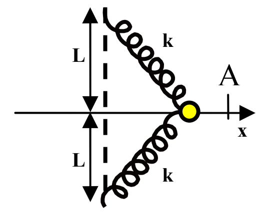
$$\Rightarrow f'(\theta) = 0 \Rightarrow -4\sin\theta + 12\sin\theta\cos\theta = 0 \Rightarrow -4\sin\theta(1-3\cos\theta) = 0$$

Προφανώς η λύση $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0°$ δεν ισχύει αφού είναι στην αρχική θέση

Έτσι: $1 - 3\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\theta = 70.53°}$

Αντικαθιστώντας στην (3) $\Rightarrow \frac{m}{M} \geq \frac{1}{4\frac{1}{3} - \cancel{6}^{2}\frac{1}{\cancel{9}_{3}}} \Rightarrow \boxed{\frac{m}{M} \geq \frac{3}{2}}$ //

11. Ένα σωματίδιο είναι εξαρτημένο μεταξύ 2 όμοιων ελατηρίων πάνω σε οριζόντιο λείο τραπέζι. Και τα 2 ελατήρια έχουν σταθερά ελατηρίου Κ, και αρχικά βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος. Αν το σωματίδιο τραβηχτεί κατά απόσταση x κατά μήκος της διεύθυνσης κάθετης στην αρχική κατάσταση των 2 ελατηρίων (δείτε το σχήμα), να δειχθεί ότι η δύναμη που αναπτύσσεται από τα ελατήρια πάνω στο σώμα δίνεται από τη σχέση $\vec{F} = -2Kx\left(1 - \frac{L}{\sqrt{(x^2+L^2)}}\right)\hat{i}$ (**5 β**). Να βρεθεί το έργο που παράγεται από την δύναμη ελατηρίου για να κινηθεί το σωματίδιο από τη θέση A στο x=0. (**5 β**)



Το νέο μήκος κάθε εκκρεμούς είναι : $\sqrt{x^2+L^2}$

επομένως η επιμήκυνσή του θα είναι : $\sqrt{x^2+L^2} - L$

Από το νόμο του Hooke η δύναμη που ασκείται πάνω στη μάζα είναι:

$F = k\left(\sqrt{x^2+L^2} - L\right)$. Η δύναμη αυτή έχει φορά προς το ακλόνητο άκρο του ελατηρίου.

Η y-συνιστώσα της δύναμης κάθε ελατηρίου έχει το ίδιο μέτρο και αντίθετη φορά με αποτέλεσμα η συνισταμένη στην y-διεύθυνση να είναι $\Sigma F_y = \emptyset$.

Προσθέτοντας τις x-συνιστώσες θα έχουμε:

$$\Sigma F_x = F_x^1 + F_x^2 \Rightarrow \Sigma F_x = 2F_x^1 \Rightarrow \Sigma F_x = -2\hat{i}\left(\sqrt{x^2+L^2}-L\right) k \cdot \cos\theta \Rightarrow$$

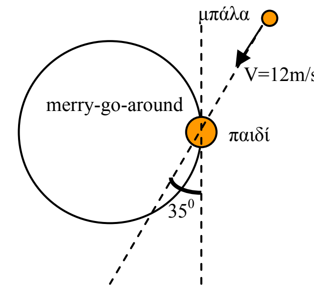
$$\Rightarrow \Sigma F_x = -2\hat{i}\left(\sqrt{x^2+L^2}-L\right) k \frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}} \Rightarrow \boxed{\Sigma F_x = -2\hat{i}\left(1 - \frac{L}{\sqrt{x^2+L^2}}\right) kx}$$

Το έργο που παράγεται θα είναι :

$$W = \int_A^0 F_x \cdot dx = \int_A^0 -2kx\,\hat{i}\left(1 - \frac{L}{\sqrt{x^2+L^2}}\right) dx = -\int_A^0 2kx\,dx + \int_A^0 \frac{2kLx}{\sqrt{x^2+L^2}}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = -2k\frac{x^2}{2}\Big|_A^0 + kL\frac{\sqrt{x^2+L^2}}{1/2}\Big|_A^0 \Rightarrow W = +kA^2 + 2kL^2 + 2kL\sqrt{A^2+L^2}$$

12. Ένα παιδί μάζας 30 Kg στέκεται επάνω και στην άκρη ενός ακίνητου merry-go-around μάζας 100 Kg και ακτίνας 2.0m. Η ροπή αδράνειας του merry-go-around γύρω από τον άξονα περιστροφής του είναι $150Kg\cdot m^2$. Το παιδί πιάνει μια μπάλα μάζας 1Kg που του πέταξε μια φίλη του. Ακριβώς πριν πιάσει την μπάλα, η μπάλα είχε οριζόντια ταχύτητα 12m/s και η διεύθυνσή της σχημάτιζε γωνία 35^o με την εφαπτομένη του merry-go-around στο σημείο που βρίσκεται το παιδί (όπως στο σχήμα). Θυμηθείτε ότι η ροπή αδράνειας ενός δίσκου γύρω από το κέντρο μάζας του είναι $I=1/2\ MR^2$.



(α) Ποια είναι η στροφορμή της μπάλας γύρω από ένα άξονα που περνά από το κέντρο του merry-go-around και κάθετο σ' αυτό. (**4β**)

(β) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα του merry-go-around ακριβώς τη στιγμή που το παιδί έπιασε την μπάλα σε 2 περιπτώσεις:

(1) Αν το παιδί θεωρηθεί σαν ένα υλικό σημείο αμελητέας μάζας (**3β**) και

(2) Το παιδί θεωρηθεί σαν ένα υλικό σημείο με μάζα 30Kg. (**3β**)

(α): $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\vec{v} = rmv\sin\theta \Rightarrow L = 2(1)(12)\sin(125) = 24\cos 35^\circ \simeq 20\,kg\,m^2/s$

(β): Το παιδί είναι χωρίς μάζα:

Αφού $\tau^{εξ} = \emptyset \Rightarrow dL = \emptyset \Rightarrow L^i = L^f \Rightarrow 20 = I_m\cdot\omega + I_{μπάλα}\cdot\omega \Rightarrow$

$\Rightarrow 20 = (150 + m_{μπ}\cdot r^2)\omega \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{20}{154}\ rad/sec}$ προς τη φορά των δεικτών.

Το παιδί έχει μάζα:

Αφού $\tau^{εξ} = \emptyset$ όπως και προηγουμένως:

$20 = (I_{μπάλας} + I_{παιδ} + I_{merry})\omega \Rightarrow \omega = \frac{20}{(150 + 30\cdot 4 + 4\cdot 1)} = \frac{20}{274} \Rightarrow$

$\boxed{\omega = \frac{20}{274}\ rad/sec}$ προς τη φορά των δεικτών.

13. Γονείς που περιμένουν παιδί είναι ενθουσιασμένοι όταν ακούνε τους παλμούς της καρδιάς του αγέννητου ακόμα παιδιού τους όπως αποκαλύπτεται από μια ultra-sound συσκευή. Υποθέστε ότι το καρδιακό τοίχωμα του εμβρύου κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος ταλάντωσης 1.8mm και συχνότητα 115 σφιγμούς το λεπτό. (α) Βρείτε την μέγιστη γραμμική ταχύτητα του καρδιακού τοιχώματος. (**2 β**). (β) Υποθέστε ότι ο ανιχνευτής της κίνησης του εμβρύου όταν είναι σε επαφή με την κοιλιά της μέλουσας μητέρας παράγει ηχητικά σήματα συχνότητας $2\cdot10^6$ Hz, τα οποία διαδίδονται διαμέσου του μαλακού ιστού με ταχύτητα 1.5 km/s. Ποιά είναι η συχνότητα με την οποία αντιλαμβάνονται από την καρδιά του εμβρύου; (**4 β**)   (γ) Βρείτε τη μέγιστη συχνότητα του ήχου που λαμβάνει ο ανιχνευτής κίνησης (**4 β**).

(α) $$\omega = 2\pi f = 2\pi\left(\frac{115/min}{60. s/min}\right) = 12. \ rad/sec$$

$$\upsilon_{max} = \omega A = (12.0 \ rad/s)(1.8\cdot10^{-3}) \Rightarrow \boxed{\upsilon_{max} = 0.0217 \ m/s}$$

(β) Το τοίχωμα της καρδιάς είναι ένας κινούμενος παρατηρητής:

$$f' = f\left(\frac{\upsilon+\upsilon_\kappa}{\upsilon}\right) = (2\cdot10^6)\,\frac{1500+0.0217}{1500} \Rightarrow \boxed{f' = 2000028.9 \ Hz}$$

(γ) Στην περίπτωση αυτή το τοίχωμα της καρδιάς είναι μιά κινούμενη πηγή:

$$f'' = f'\left(\frac{\upsilon}{\upsilon-\upsilon_\pi}\right) = (2000028.9)\,\frac{1500}{1500-0.0217} \Rightarrow \boxed{f'' = 2000057.8 \ Hz}$$