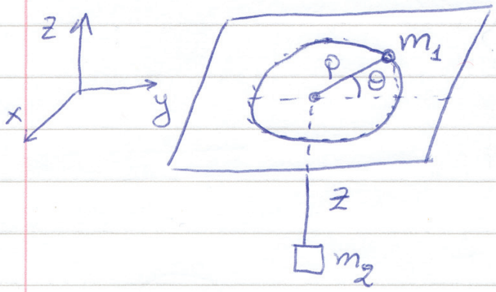
Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης για το παρακάτω σύστημα: των 2 σωμάτων m_1 και m_2 τα οποία



συνδέονται με σχοινί μήκους l.
Το σώμα m_1 κινείται σε κυκλική τροχιά πάνω στο επίπεδο x-y ενώ το σώμα m_2 μπορεί να κινείται μόνο στην κατακόρυφη διεύθυνση.

Λύση

Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες για να περιγράψουμε τη κίνηση του σώματος m_1.
Οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος είναι μόνο 2 γιατί υπάρχουν 4 δεσμοί. Για το σώμα m_2 υπάρχουν 2 δεσμοί μια και η κίνηση είναι σε μιά μόνο διεύθυνση, ενώ για το σώμα m_1 η κίνηση είναι στο επίπεδο x-y οπότε υπάρχει ακόμα ένας δεσμός ($z=0$). Τέλος υπάρχει ακόμα 1 δεσμός λόγω του σχοινιού που συνδέει τα 2 σώματα.
Επομένως από τους 6 βαθμούς ελευθερίας (3 για κάθε μάζα) καταλήγουμε σε $2 = 6-4$ δεσμούς.

Ο δεσμός μεταξύ των 2 μαζών μπορεί να γραφεί: $z=-(l-\rho)$ όπου (-) γιατί θεωρούμε τα θετική z-διεύθυνση αυτή προς τα πάνω.
Σε πολικές συντεταγμένες το διάνυσμα της ταχύτητας για το σώμα m_1 είναι:

$$m_1 : \quad \vec{V}_1 = \dot{\rho}\,\hat{\varepsilon}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\hat{\varepsilon}_\theta \Rightarrow V_1^2 = \dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2$$

$$m_2 : \quad \vec{V}_2 = \frac{dz}{dt}\hat{k} \Rightarrow \vec{V}_2 = \dot{\rho}\,\hat{k} \Rightarrow V_2^2 = \dot{\rho}^2$$

Άρα η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος των 2 μαζών είναι:

$$T = \frac{1}{2}m_1 V_1^2 + \frac{1}{2}m_2 V_2^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}m_1\dot{\rho}_1^2 + \frac{1}{2}m_1\rho^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\rho}_2^2$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m_1\rho^2\dot{\theta}^2$$

Για τον υπολογισμό της δυναμικής ενέργειας θεωρούμε το επίπεδο στο οποίο κινείται το σώμα m_1 σαν επίπεδο με $V=0$. Άρα η συνολική δυναμική ενέργεια είναι:

$$V = V_1 + V_2 = 0 - m_2 g(l-\rho) = -m_2 g(l-\rho)$$

Επομένως η Lagrangian είναι: $\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m_1\rho^2\dot{\theta}^2 - m_2 g(l-\rho)$

Γράφουμε τις εξισώσεις Lagrange για τους 2 βαθμούς ελευθερίας (ρ, θ)

$\boxed{\rho:}$ $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = (m_1+m_2)\dot{\rho} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}}\right) = (m_1+m_2)\ddot{\rho}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = m_1\rho\dot{\theta}^2 + m_2 g$$

Επομένως η εξίσωση κίνησης είναι: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{(m_1+m_2)\ddot{\rho} - m_1\rho\dot{\theta}^2 - m_2 g = 0}$$

$\boxed{\theta:}$ Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$ (δεν υπάρχει εξάρτηση από τη θ)

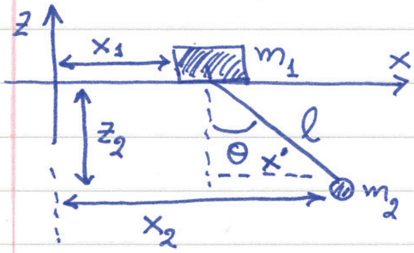
οπότε σύμφωνα με την εξίσωση Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \text{σταθ.}$$

Αλλά $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m_1\rho^2\dot{\theta}$ = στροφορμή του m_1 διατηρείται

Αναμενόμενο μιας και η δύναμη που κινεί τα σώματα περνά από το σημείο περιστροφής οπότε η ροπή της είναι μηδέν.

Έστω ότι έχουμε ένα εκκρεμές μάζας m_2 και μήκους l το οποίο είναι εξαρτημένο από στήριγμα μάζας m_1 το οποίο μπορεί να κινείται ελεύθερα και χωρίς τριβές σε οριζόντια διεύθυνση όπως στο σχήμα. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης



<u>Λύση</u>

Κάθε μάζα χρειάζεται 3 συντεταγμένες για να περιγραφεί η κίνησή της στο χώρο και επομένως θα χρειαζόμασταν 6 συνολικά συντεταγμένες για το σύστημα. Υπάρχουν όμως οι ακόλουθοι δεσμοί:

m_1: κινείται μόνο στη x-διεύθυνση οπότε υπάρχουν 2 δεσμοί για την κίνηση στη y και z-διεύθυνση (εξ. δεσμού: $y_1=0$, $z_1=0$)

m_2: κινείται στο επίπεδο x-z άρα υπάρχει 1 δεσμός για την κίνηση στη y-διεύθυνση (εξ. δεσμού $y_2=0$)

$m_1 \wedge m_2$: Υπάρχει το νήμα του εκκρεμούς που περιορίζει τη κίνηση της m_2. Η εξίσωση του δεσμού αυτού είναι:

$$(x_1-x_2)^2+z_2^2=l^2 \Rightarrow (x_1-x_2)^2+z_2^2-l^2=0.$$

Άρα οι βαθμοί ελευθερίας (ανεξάρτητες συντεταγμένες) για να περιγράψουν πλήρως το σύστημα είναι $6-4=2$

Ωστόσο οι συντεταγμένες της μάζας m_2 ως προς το σώμα m_1 μπορούν να γραφούν:

$$\left.\begin{aligned} x' &= l\sin\theta \\ z_2 &= -l\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_2 &= x_1+x' = x_1+l\sin\theta \\ z_2 &= -l\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_2 &= \dot{x}_1+l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z}_2 &= l\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned}$$

Δηλαδή οι 2 ανεξάρτητες συντεταγμένες που μπορούμε να διαλέξουμε είναι η θέση της m_1, x_1 και η γωνία θ της εκτροπής του εκκρεμούς

Επομένως μπορούμε να γράψουμε την κινητική ενέργεια του m_1 ως:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2$$

και για το m_2: $T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) = \frac{1}{2} m_2 \left[(\dot{x}_1 + \ell\dot{\theta}\cos\theta)^2 + \dot{z}_2^2 \right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{m_2}{2} \left(\dot{x}_1^2 + \ell^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2\dot{x}_1 \ell\dot{\theta}\cos\theta + \ell^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta \right)$$

Άρα $\boxed{T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1^2 + \ell^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}_1 \ell\dot{\theta}\cos\theta)}$

Η δυναμική ενέργεια είναι: $V = V_1 + V_2$.
Θεωρούμε σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο στο οποίο κινείται η μάζα m_1 οπότε $\boxed{V_1 = 0}$, ενώ $\boxed{V_2 = -m_2 g \ell\cos\theta}$.

Άρα: $\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\ell^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}_1 \ell\dot{\theta}\cos\theta) + m_2 g \ell\cos\theta}$

Οι εξισώσεις κίνησης:

$\boxed{x_1:}$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 \ell\dot{\theta}\cos\theta$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \emptyset$ (δεν υπάρχει εξάρτηση της Lagrangian από τη x_1)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = \text{σταθερή}}$$

Η τελευταία αυτή εξίσωση εκφράζει διατήρηση της ορμής στη x-διεύθυνση. Αυτό το περιμέναμε γιατί δεν υπάρχει δύναμη εξωτερική η οποία ασκείται στη x-διεύθυνση.
Άλλωστε είχαμε εκφράσει τη δυναμική ενέργεια συναρτήσει της γωνίας θ (συντεταγμένης θ) μόνο, άρα δεν υπήρχε άλλη δύναμη να προκαλεί δυναμική ενέργεια στη διεύθυνση της άλλης ανεξάρτητης συντεταγμένης

Εξετάζουμε τη $2^η$ εξίσωση κίνησης για τη συντεταγμένη Θ

$\boxed{\Theta:}$ $$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = m_2 l^2 \dot\theta + m_2 \dot x_1 l \cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = m_2 l^2 \ddot\theta + m_2 \ddot x_1 l \cos\theta - m_2 \dot x_1 l \dot\theta \sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = - m_2 \dot x_1 l \dot\theta \sin\theta - m_2 g l \sin\theta$$

Οπότε η εξίσωση Lagrange γράφεται: $\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{m_2} l^{\cancel{2}} \ddot\theta + \cancel{m_2} \ddot x_1 \cancel{l} \cos\theta - \cancel{m_2 \dot x_1 l \dot\theta \sin\theta} + \cancel{m_2 \dot x_1 l \dot\theta \sin\theta} + \cancel{m_2} g \cancel{l} \sin\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{l\ddot\theta + \ddot x_1 \cos\theta + g \sin\theta = 0.}$$ Η δεύτερη εξίσωση κίνησης

Μπορούμε να εξετάσουμε κάποιες οριακές συνθήκες για να δούμε αν η τελευταία αυτή εξίσωση δίνει σωστά αποτελέσματα

1) Έστω ότι κρατούμε το στήριγμα m_1 ακίνητο. Τότε $\ddot x_1 = \emptyset$
Η εξίσωση κίνησης μας δίνει:

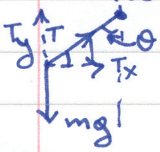
$$l\ddot\theta + g\sin\theta = \emptyset$$

Αλλά αυτή είναι η εξίσωση ενός αρμονικού ταλαντωτή με περίοδο $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ όπως θα περιμέναμε για το απλό εκκρεμές

2) Έστω τώρα ότι $\ddot\theta = \dot\theta = 0$. Δηλαδή το εκκρεμές βρίσκεται σε μία σταθερή εκτροπή Θ. Η $2^η$ εξίσωση κίνησης θα μας δώσει:

$$\cancel{l\ddot\theta}^{\,0} + \ddot x_1 \cos\theta + g\sin\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\tan\theta = -\frac{\ddot x_1}{g}}$$

Το εκκρεμές έχει μια εκτροπή Θ ~~στα~~ αντίθετη με την επιτάχυνση $\ddot x_1$
Δηλαδή μετρά την επιτάχυνση του συστήματος όπως θα περιμέναμε:



$$\left.\begin{matrix}\tan\theta = \frac{T_x}{T_y} \\ T_x = F = m\,a\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\tan\theta = \frac{ma}{T_y} \\ T_y = mg\end{matrix}\right\} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\cancel{m}a}{\cancel{m}g} \Rightarrow \tan\theta = \frac{a}{g}$$