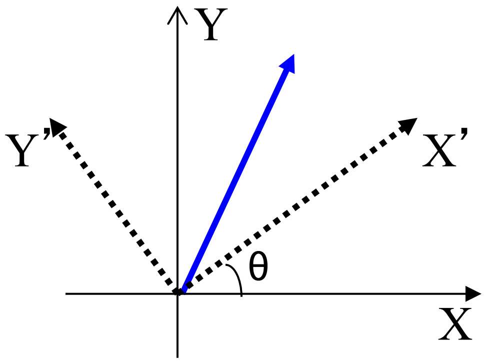
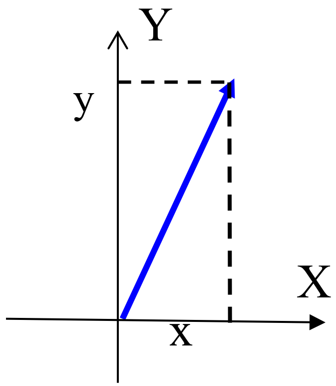
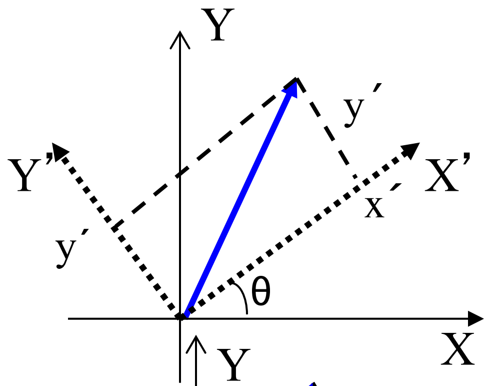
Παράδειγμα/πρόβλημα

Να βρεθούν οι συντεταγμένες (x,y) συναρτήσει των (x',y') του περιστρεφόμενου συστήματος συντεταγμένων

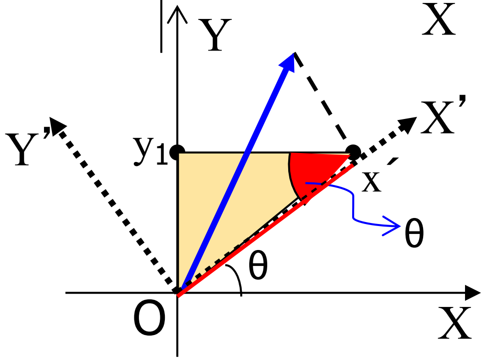






Κινηθείτε μια απόσταση x’ κατά μήκος του x′-άξονα (η προβολή στο x′)

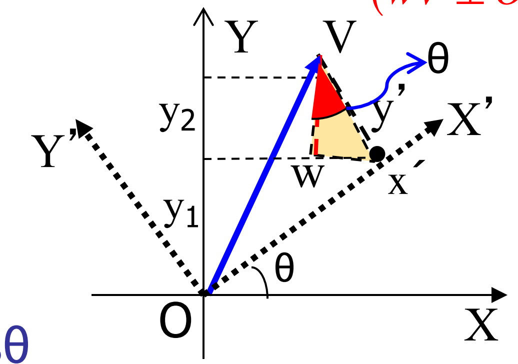
→ y_1 είναι: $\sin\theta = \dfrac{Oy_1}{Ox'} = \dfrac{y_1}{x'} \Rightarrow y_1 = x'\sin\theta$



$(wV \perp OX\ ,\ x'V \perp OX')$

Από το x′ πηγαίνουμε στο V (κίνηση κατά y’)

→ y_2 είναι: $\cos\theta = \dfrac{wV}{x'V} = \dfrac{y_2}{y'} \Rightarrow y_2 = y'\cos\theta$



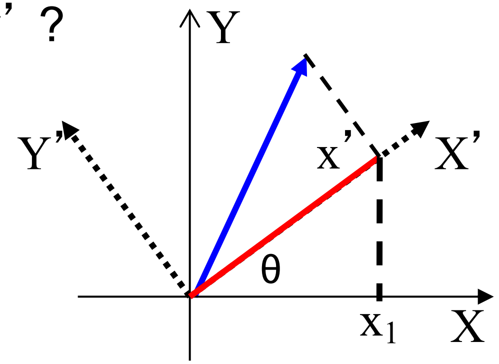
Το ύψος δεν εξαρτάται από το δρόμο που ακολουθήσατε: $y = y_1 + y_2 = x'\sin\theta + y'\cos\theta$

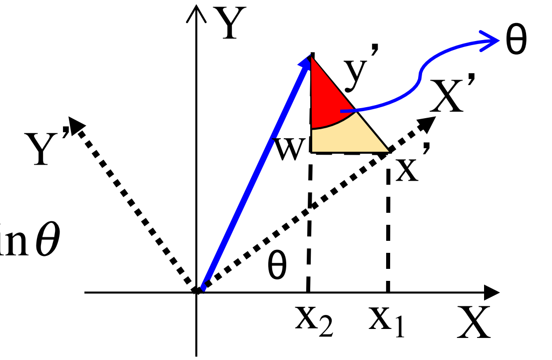
Παράδειγμα συνέχεια

Πως βρίσκουμε το x συναρτήσει των x' και y' ?

Κινούμαστε και πάλι στον x'-άξονα κατά x'

→ x_1 είναι: $\cos\theta = \dfrac{Ox_1}{Ox'} = \dfrac{x_1}{x'} \Rightarrow x_1 = x'\cos\theta$





Κινούμαστε στον Y'-άξονα κατά y'

→ x_1x_2 είναι: $\sin\theta = \dfrac{wx'}{y'} = \dfrac{x_1x_2}{y'} \Rightarrow x_1x_2 = y'\sin\theta$

Αλλά: $x = Ox_2 = Ox_1 - x_1x_2 \Rightarrow x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$

Επομένως καταλήγουμε: $\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$

Θα μπορούσαμε να το γράψουμε και με τη μορφή: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

1ο Quiz

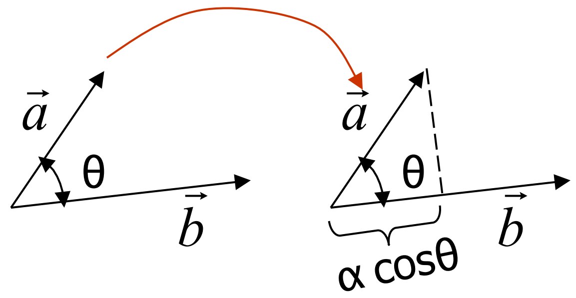
- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

  Έτοιμοι

Διανύσματα: εσωτερικό γινόμενο

Εσωτερικό γινόμενο 2 διανυσμάτων α,β ορίζεται σαν

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$



Είναι βαθμωτό μέγεθος και όχι διάνυσμα
Συμβολίζει την προβολή του διανύσματος α στο διάνυσμα β

Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να γραφεί συναρτήσει των συνιστωσών των 2 διανυσμάτων ως:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\right) = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= \left(a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}\right)\bullet\left(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}\right)\\ &= a_x b_x \hat{i}\bullet\hat{i} + a_x b_y \cancel{\hat{i}\bullet\hat{j}} + a_x b_z \cancel{\hat{i}\bullet\hat{k}} +\\ &\quad a_y b_x \cancel{\hat{j}\bullet\hat{i}} + a_y b_y \hat{j}\bullet\hat{j} + a_y b_z \cancel{\hat{j}\bullet\hat{k}} +\\ &\quad a_z b_x \cancel{\hat{k}\bullet\hat{i}} + a_z b_y \cancel{\hat{k}\bullet\hat{j}} + a_z b_z \hat{k}\bullet\hat{k} \;= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\end{aligned}$$

αλλά

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{i}\cdot\hat{k} = 0$$

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

Το εσωτερικό γινόμενο υπακούει στον επιμεριστικό κανόνα

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

Συνημίτονα κατεύθυνσης

Τα συνημίτονα κατεύθυνσης ενός διανύσματος $\vec{r}$ είναι τα συνημίτονα των γωνιών μεταξύ του διανύσματος και των μοναδιαίων διανυσμάτων των αξόνων.

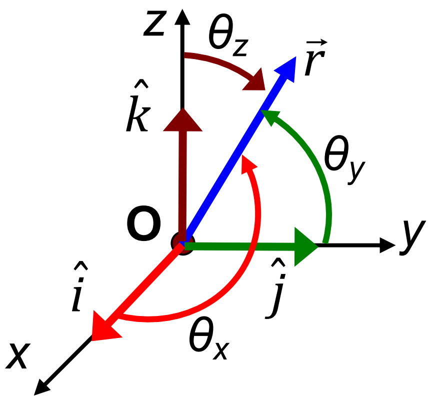
Διαφορετικά μπορούμε να πούμε ότι είναι οι συντεταγμένες ενός μοναδιαίου διανύσματος στη διεύθυνση του διανύσματος

Γράφουμε το διάνυσμα: $\vec{r} = \langle r_x, r_y, r_z \rangle$

Τα συνημίτονα κατεύθυνσης θα είναι:

$$\cos\theta_x = \frac{\vec{r}\cdot\hat{i}}{|\vec{r}|} = \frac{r_x}{|\vec{r}|} \qquad \cos\theta_y = \frac{\vec{r}\cdot\hat{j}}{|\vec{r}|} = \frac{r_y}{|\vec{r}|} \qquad \cos\theta_z = \frac{\vec{r}\cdot\hat{k}}{|\vec{r}|} = \frac{r_z}{|\vec{r}|}$$

Μπορούμε να γράψουμε το διάνυσμα $\vec{r}$ συναρτήσει του μέτρου του και του μοναδιαίου διανύσματος των συνημιτόνων κατεύθυνσης



$$\left.\begin{aligned} \vec{r} &= |\vec{r}|\hat{r} \\ \hat{r} &= \langle \cos\theta_x, \cos\theta_y, \cos\theta_z \rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{r} = |\vec{r}|\langle \cos\theta_x, \cos\theta_y, \cos\theta_z \rangle$$

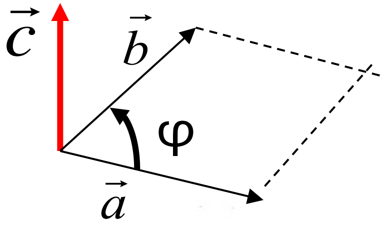
Το διάνυσμα είναι $\hat{r}$ μοναδιαίο. Επομένως:

$$\cos\theta_x^2 + \cos\theta_y^2 + \cos\theta_z^2 = 1$$

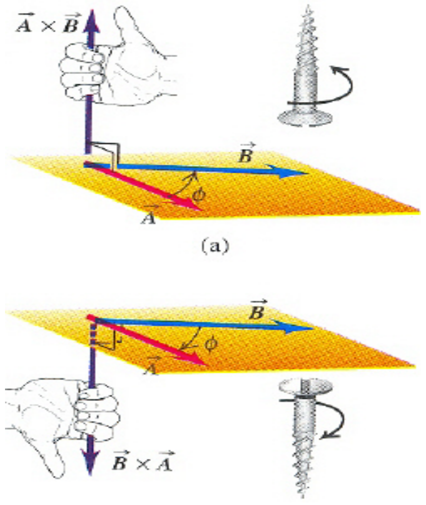
Διανύσματα: εξωτερικό γινόμενο

Εξωτερικό γινόμενο 2 διανυσμάτων a και b είναι ένα διάνυσμα c

με μέτρο $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\phi$ όπου φ η γωνία των a,b.

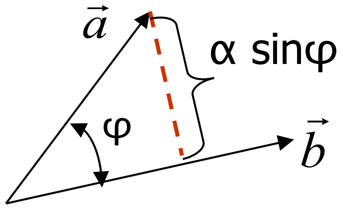


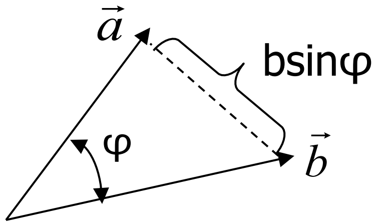
Η διεύθυνση του c είναι κάθετη στο επίπεδο των α και b και το μέτρο του ισούται με το εμβαδό του παραλ/μου.



Η διεύθυνσή του βρίσκεται σύμφωνα με το κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία:

Με το δεξί μας χέρι να στρέφεται προς τη διεύθυνση φ του διανύσματος a προς το b, ο αντίχειρας δηλώνει την διεύθυνση του διανύσματος c.





Το εξωτερικό γινόμενο ισούται με το γινόμενο του μέτρου του ενός διανύσματος επί την κάθετη συνιστώσα του άλλου διανύσματος ως προς το πρώτο

Διανύσματα: εξωτερικό γινόμενο/ιδιότητες

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \hat{i}\times\hat{j}=\hat{k} \quad \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i} \quad \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

$$\vec{a}\times\vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= (a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})\times(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}) \\ &= a_x\hat{i}\times b_x\hat{i} + a_x\hat{i}\times b_y\hat{j} + a_x\hat{i}\times b_z\hat{k} \\ &\quad + a_y\hat{j}\times b_x\hat{i} + a_y\hat{j}\times b_y\hat{j} + a_y\hat{j}\times b_z\hat{k} \\ &\quad + a_z\hat{k}\times b_x\hat{i} + a_z\hat{k}\times b_y\hat{j} + a_z\hat{k}\times b_z\hat{k} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = a_xb_y\left(+\hat{k}\right)+a_xb_z\left(-\hat{j}\right)+a_yb_x\left(-\hat{k}\right)+a_yb_z\left(+\hat{i}\right)+a_zb_x\left(+\hat{j}\right)+a_zb_y\left(-\hat{i}\right)$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_yb_z-a_zb_y)\hat{i}+(a_xb_z-a_zb_x)\hat{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\hat{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} = \hat{i}\times\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix} - \hat{j}\times\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix} + \hat{k}\times\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}$$

Άλγεβρα

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^{(x\pm y)} = a^x a^{\pm y}$$

$$\log a = x \Rightarrow a = 10^x \qquad \log a \pm \log b = \log\left(ab^{\pm 1}\right) \qquad \log\left(a^n\right) = n\log\left(a\right)$$

$$\ln a = x \Rightarrow a = e^x \qquad \ln a \pm \ln b = \ln\left(ab^{\pm 1}\right) \qquad \ln\left(a^n\right) = n\ln\left(a\right)$$

Άσκηση για το σπίτι: Διαβάστε το παράρτημα Β του βιβλίου του Serway