ΦΥΣ 331 – Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων

Εργασία 1η **Επιστροφή: Παρασκευή 23.09.22**

1. Αποδείξτε ότι η εξίσωση Schrödinger δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz.

Έχουμε την εξίσωση Schrödinger: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)+V(x)\psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$

Η εξίσωση αυτή είναι 2ης τάξης ως προς x και πρώτη ως προς t.

Θέλουμε να εξετάσουμε αν παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz

Δηλαδή αν $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\psi(x',t')+V(x')\psi(x',t')=i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\psi(x',t')$

Ο μετασχηματισμός Lorentz θα δώσει: $x'=\gamma(x-vt)$ και $t'=\gamma(t-\frac{vx}{c^2})$

και μετασχηματίζουμε κατά Lorentz την κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t)\to\psi(x',t')$.

Θα πρέπει να μετασχηματίσουμε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial}{\partial x}$ και $\frac{\partial}{\partial t}$

Αλλά $\frac{\partial}{\partial x}=\underbrace{\frac{\partial x'}{\partial x}}_{\gamma}\frac{\partial}{\partial x'}+\underbrace{\frac{\partial t'}{\partial x}}_{-\gamma v/c^2}\frac{\partial}{\partial t'}=\gamma\frac{\partial}{\partial x'}-\gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}=F \quad (1)$

Η 2η παράγωγος θα δώσει: $\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}F=\underbrace{\frac{\partial x'}{\partial x}}_{\gamma}\frac{\partial F}{\partial x'}+\underbrace{\frac{\partial t'}{\partial x}}_{-\gamma\frac{v}{c^2}}\frac{\partial F}{\partial t'}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}=\gamma\frac{\partial F}{\partial x'}-\gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial F}{\partial t'}\overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}=\gamma\left[\gamma\frac{\partial^2}{\partial x'^2}-\gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t}\right]-\gamma\frac{v}{c^2}\left[\gamma\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}-\gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\gamma^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x'^2}-2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}+\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right]} \quad (A)$$

Εξετάζουμε τον μετασχηματισμό του $\frac{\partial}{\partial t}$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}=\boxed{-\gamma v\frac{\partial}{\partial x'}+\gamma\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial t}} \quad (B)$$

Αντικαθιστούμε την $\frac{\partial}{\partial t}$ και $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ στην εξίσωση Schrödinger για να δούμε αν παραμένει αναλλοίωτη:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\gamma^2\left[\frac{\partial^2}{\partial x'^2}-\underset{1}{\frac{2v}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial t'}}+\underset{2}{\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}}\right]\psi(x',t')+V(x')\psi(x',t')=i\hbar\gamma\left[\underset{3}{v\frac{\partial}{\partial x'}}+\frac{\partial}{\partial t'}\right]\psi(x',t')$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η Lorentz μετασχηματισμένη εξίσωση Schrödinger.

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν όροι όπως οι 1, (αναμεμιγμένες μερικές παράγωγοι) 2 $2^η$ μερική παράγωγος ως προς χρόνο και 3 μερική παράγωγος ως προς x' που δεν υπάρχουν στην αρχική εξίσωση Schrödinger. Επομένως δεν είναι μια σχετικιστική κβαντομηχανική εξίσωση.

2. Ένα σωματίδιο διασπάται σε ηρεμία σε δύο σωματίδια σύμφωνα με την διάσπαση $A \to B + C$.

(α) Να βρείτε την ενέργεια και την ορμή των σωματιδίων B και C.

(β) Τι θα συμβεί όταν $m_A < m_B + m_C$;

(α) Έχουμε τη διάσπαση του σωματιδίου $A \to B + C$ όπου το A είναι σε ηρεμία, οπότε $\vec{P}_A = \vec{0}$ και $\vec{P}_B + \vec{P}_C = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{P}_B = -\vec{P}_C \Rightarrow |\vec{P}_B| = |\vec{P}_C|}$ (1)

$$\underset{\smile}{P}_A = \underset{\smile}{P}_B + \underset{\smile}{P}_C \Rightarrow \underset{\smile}{P}_C = \underset{\smile}{P}_A - \underset{\smile}{P}_B \Rightarrow \cancelto{m_C^2}{\underset{\smile}{P}_C^2} = \cancelto{m_A^2}{\underset{\smile}{P}_A^2} + \cancelto{m_B^2}{\underset{\smile}{P}_B^2} - 2\underset{\smile}{P}_A \cdot \underset{\smile}{P}_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_C^2 = m_A^2 + m_B^2 - 2\left(\cancelto{m_A}{E_A} E_B - \cancelto{0}{\vec{P}_A \cdot \vec{P}_B}\right) \Rightarrow m_C^2 = m_A^2 + m_B^2 - 2E_B m_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2E_B m_A = m_A^2 + m_B^2 - m_C^2 \Rightarrow \boxed{E_B = \frac{m_A^2 + m_B^2 - m_C^2}{2m_A}} \quad (A)$$

Ανάλογα μπορούμε να δουλέψουμε για το C και θα πάρουμε:

$$\boxed{E_C = \frac{m_A^2 - m_B^2 + m_C^2}{2m_A}} \quad (B)$$

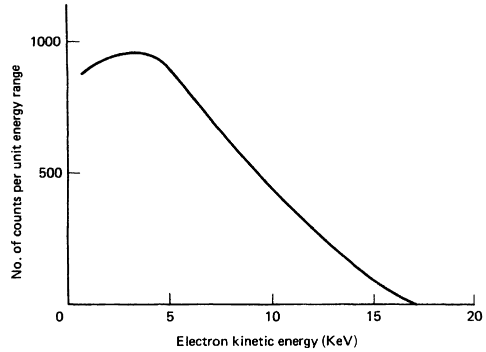
Η ορμή των σωματιδίων: $E_B^2 - |\vec{P}_B|^2 = m_B^2 \Rightarrow |\vec{P}_B|^2 = E_B^2 - m_B^2 \overset{(A)}{\Rightarrow}$

$$|\vec{P}_B|^2 = \frac{(m_A^2 + m_B^2 - m_C^2)^2}{4m_A^2} - \frac{4m_A^2 m_B^2}{4m_A^2} \Rightarrow |\vec{P}_B| = \frac{1}{2m_A}\sqrt{m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 - 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 - 2m_C^2 m_B^2}$$

$$\Rightarrow |\vec{P}_B| = |\vec{P}_C| = \frac{1}{2m_A}\sqrt{\lambda(m_A^2, m_B^2, m_C^2)} \rightarrow \text{η τριγωνική συνάρτηση}$$

(β) Όταν $m_A < m_B + m_C$ η διάσπαση είναι κινηματικά μη επιτρεπτή, εφόσον αν μεταφερθούμε στο CM του διασπώμενου σωματιδίου δεν υπάρχει αρκετή ενέργεια για να παραχθούν οι μάζες B και C

3. Πριν την ανακάλυψη του νετρονίου, πολλοί πίστευαν ότι ο πυρήνας αποτελείται από πρωτόνια και ηλεκτρόνια, με τον ατομικό αριθμό να είναι έκφραση του πλεονάσματος των πρωτονίων. Η β-διάσπαση φαινόταν να υποστηρίζει αυτή την υπόθεση. Χρησιμοποιώντας την σχέση της αβεβαιότητας θέσης – ορμής, $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$, να εκτιμήσετε την ελάχιστη ορμή ενός ηλεκτρονίου το οποίο είναι εγκλωβισμένο μέσα σε ένα πυρήνα τυπικών διαστάσεων ακτίνας $10^{-13} cm$. Χρησιμοποιώντας την σχετικιστική εξίσωση ενέργειας-ορμής, $E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4$, υπολογίστε την ενέργεια του ηλεκτρονίου στην περίπτωση αυτή και συγκρίνετε την με την ενέργεια του ηλεκτρονίου που εκπέμπεται στην β-διάσπαση του τριτίου που φαίνεται στο διπλανό γράφημα ($^3_1H \rightarrow {}^3_2He$).



Θεωρώντας την ακτίνα του πυρήνα $r_0 = 1fm = 10^{-15}m$, τη σταθερά Planck

$\hbar = 6.58 \cdot 10^{-22} MeV s$ και την μάζα του ηλεκτρονίου $m_e = 0.511 MeV/c^2$

θα πάρουμε: $\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{\hbar}{2r_0} = \frac{\hbar c}{2r_0}\frac{1}{c} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta p \geq \frac{200 MeV \cancel{fm}}{2 \cdot \cancel{fm}\, c} \Rightarrow \boxed{P_{min} \simeq 100 MeV/c}$$

Από το γράφημα της κατανομής της ενέργειας του ηλεκτρονίου που εκπέμπεται στην β-διάσπαση του τριτίου έχουμε ότι $E_e < 17 keV$

Η ενέργεια που αντιστοιχεί στην περίπτωση το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται μέσα στον πυρήνα αντιστοιχεί σε $E = \sqrt{P_{min}^2 + m_e^2} = \sqrt{100^2 + 0.5^2} \Rightarrow E_{min} \simeq 100 MeV$

Επομένως δεν μπορεί το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται μέσα στον πυρήνα, γιατί τότε η ενέργειά του θα ήταν πολύ μεγαλύτερη από την παρατηρούμενη στην β-διάσπαση του τριτίου.

4. Στο πρόβλημα αυτό θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε δεδομένα και πίνακες που περιέχονται στο «βιβλίο των σωματιδίων» ή διαφορετικά *Particle Data Book* που ανανεώνεται και κρατιέται online στην ηλεκτρονική διεύθυνση [*http://pdg.lbl.gov*](http://pdg.lbl.gov). Στη διεύθυνση αυτή υπάρχουν πάρα πολλές πληροφορίες και επισκοπήσεις σχετικά με σωματίδια, ιδιότητές τους και φαινόμενα που έχουν παρατηρηθεί. Για την άσκηση αυτή θα χρησιμοποιήσετε την κατηγορία *Particle Listings* που όπως και κάθε άλλη ενότητα αποτελεί link για άλλες ιστοσελίδες.

(α) Βρείτε τα μποζόνια *W, Z*. Συγκρίνετε τις μάζες των σωματιδίων αυτών με αυτή του πρωτονίου. Εκτιμήστε την εμβέλεια των δυνάμεων που φέρονται από τα *W* και *Z* και συγκρίνετέ την με το μέγεθος του πρωτονίου.

(α) Σκεφθείτε την εμβέλεια της δύναμης σαν μια κβαντική διαταραχή: $\Delta E \cdot \Delta t \simeq \hbar$

$\Rightarrow \Delta t \simeq \hbar / \Delta E$ $\Big\} \Rightarrow$

Αλλά $\Delta E = mc^2$ η μάζα του σωματιδίου που μεταφέρει τη δύναμη

$\Rightarrow \Delta t \simeq \hbar / mc^2 \Rightarrow R = c\Delta t \simeq c\hbar / mc^2 \Rightarrow \boxed{R \simeq \hbar / mc}$ δηλαδή η εμβέλεια της δύναμης είναι αντιστρόφως ανάλογη της μάζας του σωματιδίου

$M_W \simeq 80.385 \pm 0.015\ \mathrm{GeV}/c^2$

$M_Z = 91.1876 \pm 0.0021\ \mathrm{GeV}/c^2$

Επομένως: $R = \dfrac{\hbar c}{mc^2} \simeq \dfrac{200\ \mathrm{MeV\,fm}}{80.385 \cdot 10^3} \Rightarrow$

$\Rightarrow R_W = 2.45 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{fm} \Rightarrow \boxed{R_W = 2.45\ 10^{-18}\ \mathrm{m}}$

Για το Z^0 θα έχουμε: $R_Z = \dfrac{197\ \mathrm{MeV\,fm}}{91.1876} \Rightarrow \boxed{R_Z = 2.16 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{m}}$

Η ακτίνα του πρωτονίου (φορτίο) δίνεται από $r_p \simeq 0.84087 \pm 0.00039\ \mathrm{fm}$

Επομένως $\dfrac{r_p}{r_{W/Z}} \simeq \dfrac{0.84087}{2.45 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \dfrac{r_p}{r_{W/Z}} \simeq [340 \div 390]$

(β) Βρείτε τα σωματίδια μ^+, τ^+, K^+, π^+, π^0, ρ^0, D^+, B^+, J/ψ και καταγράψτε τους χρόνους ζωής τους. Με βάση τη πληροφορία αυτή ποιες είναι οι αλληλεπιδράσεις που είναι υπεύθυνες για τις διασπάσεις των σωματιδίων αυτών; Υπολογίστε την μέση απόσταση που θα διανύσουν τα σωματίδια αυτά πριν διασπαστούν (στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου) υποθέτοντας ότι έχουν ορμή 10 GeV/c.

<u>Πληροφοριακά:</u> το περιεχόμενο σε quark των σωματιδίων K^+, π^+, π^0, ρ^0, D^+, B^+, J/ψ είναι, $K^+ = d\bar{s}$, $\pi^+ = u\bar{d}$, $\pi^0 = \dfrac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}}$ *το ρ^0 έχει το ίδιο περιεχόμενο με το π^0,* $D^+ = c\bar{d}$, $B^+ = u\bar{b}$ *ενώ το* $J/\psi = c\bar{c}$. *Τα σωματίδια αυτά είναι δέσμιες καταστάσεις ζεύγους quark-antiquark* $\left(q\bar{q}\right)$ *και ονομάζονται μεσόνια. Όλα τα παραπάνω μεσόνια αποτελούν τις χαμηλότερες ενεργειακά καταστάσεις του δεδομένου συνδυασμού. Οι καταστάσεις αυτές έχουν μηδενική συνολική στροφορμή (τροχιακή και ιδιοστροφορμή) ζεύγους εκτός από τα ρ^0 και J/ψ που έχουν συνολική στροφορμή 1. Η συνολική αυτή στροφορμή είναι το σπιν του σωματιδίου.*

(β) Εξαιτίας της διαστολής του μήκους ο χρόνος που χρειάζεται το σωματίδιο να κινηθεί είναι: $t = \tau\gamma$

Η απόσταση που θα καλύψει επομένως θα είναι: $L = \beta\tau\gamma = \frac{p\tau}{m}$ αφού $p = \gamma m \beta$

Επομένως $L = \frac{p}{m} c\tau$

1) Το μ^+ έχει χρόνο ζωής 2.2 μsec και μάζα $m_\mu = 0.106\,GeV$. Άρα $L = \frac{10}{0.105} 2.2\cdot10^{-6}\cdot3\cdot10^{8} \Rightarrow$ $L = 63\,km$ και η διάσπασή του είναι <u>Ασθενής</u> διεργασία.

2) Το τ^+ έχει χρόνο ζωής 291 psec και μάζα $m_\tau = 1.78\,GeV$. Άρα $L = \frac{10}{1.78}\cdot 291\cdot10^{-15}\cdot3\cdot10^{8}$ $\Rightarrow L = 490\,\mu m$. Η διεργασία είναι <u>Ασθενής</u>.

3) Το K^+ έχει χρόνο ζωής $1.2\cdot10^{-8}$ sec και μάζα $m_K = 0.494\,GeV$. Επομένως $L = \frac{10}{0.494}\cdot 1.2\cdot10^{-8}\cdot3\cdot10^{8} \Rightarrow L = 72\,m$. Η διεργασία είναι <u>Ασθενής</u>

4) Το π^+ έχει μάζα $m = 0.140\,GeV$ και χρόνο ζωής $\tau = 2.6\cdot10^{-8}\,sec$.
$L = \frac{10}{0.140} 2.6\cdot10^{-8}\cdot3\cdot10^{8} \Rightarrow L = 560\,m$. Η διεργασία είναι <u>ασθενής</u>

5) Το π^0 έχει μάζα $m = 0.140\,GeV$ και χρόνο ζωής $\tau = 8.4\cdot10^{-17}\,sec$
$L = \frac{10}{0.140} 8.4\cdot10^{-17}\cdot3\cdot10^{8} \Rightarrow L = 2\cdot10^{-6} = 2\,\mu m$. Η διεργασία είναι <u>Ηλεκτρομαγνητική</u>

6) Το ρ^0 έχει μάζα $m = 0.770\,GeV$ και χρόνο ζωής $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{6.6\cdot10^{-22}\,MeV\cdot sec}{149\,MeV} = 4.4\cdot10^{-24}\,s$
$L = \frac{10}{0.770} 4.4\cdot10^{-24}\cdot3\cdot10^{+8} \Rightarrow L = 17\cdot10^{-15} \Rightarrow L = 17\,fm$ <u>Ισχυρής</u> διεργασία

7) Το D^+ έχει μάζα $m = 1.87\,GeV$ και χρόνο ζωής $\tau = 1.1\cdot10^{-12}\,sec$
Επομένως $L = \frac{10}{1.87}\cdot 1.1\cdot10^{-12}\cdot3\cdot10^{8} \Rightarrow L = 1.8\,mm$ <u>Ασθενής</u> διεργασία

8) Το B^+ έχει μάζα $m = 5.28\,GeV$ και χρόνο ζωής $\tau = 1.6\cdot 10^{-12}\,sec$

Επομένως $L = \frac{10}{5.28}\cdot 1.6\cdot 10^{-12}\cdot 3\cdot 10^{8} \Rightarrow L = 0.9\,mm$. Ασθενής διεργασία

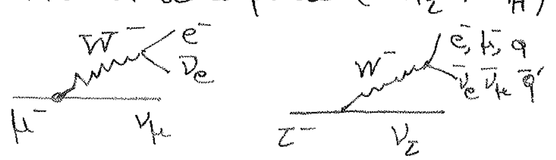
9) Το J/ψ έχει μάζα $m = 3.1\,GeV$ και $\Gamma = 92.9\,keV \Rightarrow \tau = \frac{6.6\cdot 10^{-22}}{0.0929} = 7.1\cdot 10^{-21}\,sec$

Ο χρόνος ζωής είναι λίγο μεγαλύτερος από τους χρόνους μιας ισχυρής αλληλεπίδρασης αλλά και λίγο μικρότερος από αυτό της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης. Στην πραγματικότητα το J/ψ διασπάται τόσο ηλεκτρομαγνητικά όσο και ισχυρά. Οι ισχυρές διασπάσεις είναι περιορισμένες και ο ρυθμός των ισχυρών αλληλεπιδράσεων είναι παρόμοιος των ηλεκτρομαγνητικών.

Η διάσπαση πραγματοποιείται σε $L = \frac{10}{3.1}\cdot 7.1\cdot 10^{-21}\cdot 3\cdot 10^{8} \Rightarrow L = 687\,fm$

(γ) Παρατηρήστε τη διάσπαση του μ^+ και του τ^+ λεπτονίων. Γιατί οι τρόποι διάσπασης των σωματιδίων αυτών είναι τόσο διαφορετικοί;

(γ) Το μ μπορεί να διασπαστεί μόνο στο ελαφρύτερο φορτισμένο σωματίδιο που είναι διαθέσιμο, και αυτό είναι το ηλεκτρόνιο. Τα πιόνια είναι βαρύτερα των μιονίων. Το τ-λεπτόνιο μπορεί να διασπαστεί σε ελαφρύτερα λεπτόνια (ηλεκτρόνια, μιόνια) αλλά και σε αδρόνια ($m_\tau > m_\pi$)



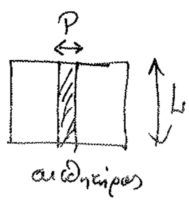
(δ) Στο πάνω μέρος της ατμόσφαιρας, κοσμική ακτινοβολία πολύ υψηλής ενέργειας, παράγει ίδιο αριθμό π^+ και π^- τα οποία διασπώνται μετέπειτα. Τα προϊόντα διάσπασής τους διασπώνται επίσης. Ποιος ο λόγος του αριθμού των νετρίνο ηλεκτρονίων ως προς τον αριθμό των νετρίνο μιονίου που φθάνουν στην επιφάνεια της γης; Υποθέστε ότι όλα τα ασταθή σωματίδια διασπώνται πριν φθάσουν στην επιφάνεια της γης. Η υπόθεση αυτή βέβαια δεν είναι σωστή.

(δ) Τα $\pi^\pm$ διασπώνται δίνοντας: $\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$, $\mu^+ \to e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$ $\quad \pi^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu$, $\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$

Επομένως ο αριθμός των μιονίων νετρίνο που φθάνουν στη γη είναι διπλάσιος αυτού των νετρίνο ηλεκτρονίων. $\nu_\mu / \nu_e \simeq 2$.

(ε) Ένας πειραματικός κατασκεύασε έναν ανιχνευτή πυριτίου μεγέθους 3cm x 3cm ώστε να μπορέσει να μετρήσει με ακρίβεια τις τροχιές φορτισμένων σωματιδίων. Ο ανιχνευτής αυτός (και θα πούμε περισσότερα για τους ανιχνευτές) έχει πολλούς αισθήτηρες ανάγνωσης ηλεκτρικών σημάτων που παράγονται από τον ιονισμό του υλικού καθώς διαπερνάται από κάποιο φορτισμένο σωματίδιο. Οι αισθητήρες αυτοί απέχουν 50μm μεταξύ τους. Για τον έλεγχο της σωστής λειτουργίας του ανιχνευτή, ο πειραματικός είχε χρησιμοποιήσει στο παρελθόν κάποιο επιταχυντή σωματιδίων όπου τοποθέτησε τον ανιχνευτή πυριτίου ανάμεσα σε δυο άλλους ανιχνευτές που λειτουργούσαν σωστά και επέτρεψε δέσμη σωματιδίων να περάσει από την διάταξη. στην προκειμένη περίπτωση, αποφάσισε να χρησιμοποιήσει δέσμη μιονίων στην επιφάνεια της γης. Υπολογίστε πόσο χρόνο θα χρειαστεί ώστε να συλλέξει το σήμα από 1000 μιόνια για κάθε αισθητήρα του ανιχνευτή του. Η ροή μιονίων που πέφτουν κάθετα στην επιφάνεια της γης είναι $I \sim 1cm^{-2}\min^{-1}$. Για την ροή μιονίων κοσμικής ακτινοβολίας στην επιφάνεια της γης μπορείτε να διαβάσετε και πάλι την ιστοσελίδα του *Particle Data Group* και ιδιαίτερα το *link* που αναφέρεται στην επισκόπηση σχετικά με κοσμική ακτινοβολία και συγκεκριμένα την παράγραφο 28.3.

(ε)



Έχουμε ότι $L=3cm$ και πάχος του αισθητήρα είναι: $50\mu m$

Επομένως υπάρχουν $\frac{3\cdot10^{-2}}{50\cdot10^{-6}} = \frac{300\cancel{0}}{5\cancel{0}} = 600$ αισθητήρες.

Η ροή των μιονίων στον ανιχνευτή είναι $1\mu^+/(cm^2 min)$

Η επιφάνεια του ανιχνευτή είναι $A = 3\times3 = 9cm^2$. Επομένως έχουμε $9\mu^+/min$ μέσα από τον ανιχνευτή. Θέλουμε όμως 1000 μιόνια για κάθε αισθητήρα. Επομένως θέλουμε $6\cdot10^5$ μιόνια $\Rightarrow t_{ολ} = \frac{6\cdot10^5}{9} \Rightarrow t_{ολ} = 6.7\cdot10^4 min \Rightarrow$

$\Rightarrow t_{ολ} = 1.1\cdot10^3 h \Rightarrow t_{ολ} = 46.5$ ημέρες.

5. Δείξτε ότι η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση είναι σχετικά ασθενής και για το λόγο αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση Schrödinger για να περιγράψουμε το άτομο του υδρογόνου. (*<u>Υπόδειξη:</u>* ίσως βοηθούσε να σκεφθείτε τη ταχύτητα με την οποία κινείται το ηλεκτρόνιο στο άτομο του υδρογόνου).

Η ταχύτητα του ηλεκτρονίου στη χαμηλότερη τροχιά στο άτομο του υδρογόνου

είναι: (κλασικό)

$$\frac{m_e v^2}{\cancel{R_B}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R_B^{\cancel{2}}} \Rightarrow \boxed{m_e v^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R_B}} \quad (1)$$

Η σταθερά της λεπτής υφής είναι $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137}$ θεωρώντας $\hbar = c = \varepsilon_0 = 1$

θα πάρουμε: $\boxed{\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}}$ (2)

Από την (1) και (2) $\Rightarrow m_e v^2 = \frac{\alpha}{R_B} \Rightarrow v^2 = \frac{\alpha}{m_e R_B} = \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha \cancel{m_e}} \cancel{m_e}} \Rightarrow$

$\Rightarrow v^2 = \alpha^2 \Rightarrow \boxed{v = \alpha}$

$R_B = \frac{\hbar}{\alpha m_e c}$ για $\hbar = c = 1$ θα έχουμε: $\boxed{R_B = \frac{1}{\alpha m_e}}$

Παρατηρούμε ότι: $v = \alpha$ και εισάγοντας τον κατάλληλο παράγοντα c για να πάρουμε αδιάστατη ποσότητα: $\frac{v}{c} = \alpha \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{1}{137}$

Επομένως η ταχύτητα του ηλεκτρονίου είναι αρκετά μικρή ώστε εγγυάται ότι οι σχετικιστικές διορθώσεις είναι αρκετά μικρές και μπορούν να αγνοηθούν. Σαν αποτέλεσμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση Schröedinger για να περιγράψουμε το άτομο του υδρογόνου.

6. Η βαρύτητα σε σχέση με τις υπόλοιπες θεμελειώδεις αλληλεπιδράσεις της φύσης συμπεριφέρεται πολύ διαφορετικά. Αυτό μπορούμε να το δείξουμε εύκολα υπολογίζοντας την ενεργειακή κλίμακα της βαρύτητας, την ενεργειακή κλίμακα δηλαδή που η Κβαντική Βαρύτητα γίνεται σημαντική. Η εμβέλεια της βαρύτητας είναι άπειρη γιατί το γκραβιτόνιο, ο φορέας της αλληλεπίδρασης, δεν έχει μάζα. Υπολογίστε επίσης τις αποσπάσεις που κυριαρχεί η Κβαντική Βαρύτητα.

Η ισχύς της βαρυτικής αλληλεπίδρασης δίνεται από την σταθερά του Newton:

$$G_N = 6.67\cdot 10^{-11}\, m^3 kgr^{-1} sec^{-2} \Rightarrow G_N = 6.67\cdot 10^{-11}\, Joule\; m\; kg^{-2} \quad (1)$$

Αλλά
$$1\,Joule = \frac{1\,eV}{1.6\times 10^{-19}}$$
$$1\,m = \frac{\hbar c\times 10^{15}}{0.1973}\,GeV^{-1}$$
$$1\,kg = 5.6\times 10^{26}\,\frac{GeV}{c^2}$$

Η (1) δίνει $\Rightarrow$ $G_N \simeq 6.67\times 10^{-39}\dfrac{\hbar c}{(GeV/c^2)^2}$

Θέτοντας $\hbar = c = 1$ θα πάρουμε:

$$G_N \simeq 6.67\cdot 10^{-39}\frac{1}{(GeV/c^2)^2}$$

Επομένως η ενεργειακή κλίμακα της βαρυτικής αλληλεπίδρασης θα είναι

$$\mu_g \sim \frac{1}{\sqrt{G_N}} \Rightarrow \mu_g \sim 10^{19}\,GeV$$

Αυτή αποτελεί τη λεγόμενη μάζα του Planck όπου τα αποτελέσματα της κβαντικής βαρύτητας γίνονται ιδιαίτερα σημαντικά. Η απόσταση που αντιστοιχεί αυτό είναι:

$$\lambda = \frac{\hbar c}{10^{19}\,GeV} \sim 10^{-33}\,cm$$ που αποτελεί το μήκος Planck

Στο φυσικό σύστημα μονάδων το μήκος Planck ορίζεται ως: $l_P = \sqrt{G_N}$

Από τον νόμο της παγκόσμιας έλξης έχουμε: $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow G_N = \frac{F\cdot r^2}{m_1 m_2} \Rightarrow [G_N] = \frac{[F][r]^2}{[M]^2} = \frac{[F][L][L]}{[M]^2} = \frac{[E][L]}{[M]^2} = \frac{[L]^3}{[M][T]^2}$$

Στο φυσικό σύστημα θα μπορούσαμε να γράψουμε: $G_N = \dfrac{1}{M_P^2}$

εφόσον $[G_N] = \dfrac{\cancel{[E][L]}}{[M]^2} \Rightarrow [G_N] = \dfrac{1}{[M]^2}$ όπου M_P η μάζα Planck

Ξέρουμε ότι $\hbar = [E][T] = \frac{[M][L^2]}{[T]}$ αλλά $[G_N] = \frac{[L]^3}{[M][T]^2}$

Επομένως: $\hbar[G_N] = \frac{[L]^3}{\cancel{[M]}[T]^2}\frac{\cancel{[M]}[L^2]}{[T]} \Rightarrow \hbar[G_N] = \frac{[L^5]}{[T^3]}$

Διαιρούμε την τελευταία σχέση με: $c^3 = \frac{[L^3]}{[T^3]}$ οπότε θα πάρουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\hbar G_N}{c^3} = \frac{[L^5]/\cancel{[T^3]}}{[L^3]/\cancel{[T^3]}} \Rightarrow \boxed{\frac{\hbar G_N}{c^3} = [L^2]} \\ \text{Συγκρίνοντας την } \ell_p = \sqrt{G_N} \end{array}\right\} \Rightarrow \ell_p = \sqrt{G_N} = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^3}} \Rightarrow$$

$\ell_p \simeq 6.67 \cdot 10^{-39}\,GeV^{-2}$

$$\ell_p = \sqrt{G_N} = 0.82 \times 10^{-19}\,GeV^{-1} = 0.82 \times 10^{-19} \times 10^{-3}\,MeV \times 197\,MeV \cdot fm \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell_p = 161.56 \times 10^{-22}\,fm \Rightarrow \ell_p = 1.62 \cdot 10^{-20}\,fm \Rightarrow \ell_p = 1.62 \cdot 10^{-20} \cdot 10^{-15}\,m$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell_p = 1.62 \cdot 10^{-35}\,m}$$

Θα μπορούσαμε να βρούμε την εξίσωση του μήκους Planck δουλεύοντας με διαστατική ανάλυση: Ξέρουμε ότι θα πρέπει να έχει διαστάσεις $[L]$ επομένως:

$[L] = [G_N]^a[\hbar]^b[c]^c$ όπου εκφράζουμε το μήκος συναρτήσει των τριών θεμελιωδών σταθερών, G_N, $\hbar$ και c.

Αλλά $[G_N] = \frac{[L^3]}{[M][T^2]}$, $[\hbar] = \frac{[M][L^2]}{[T]}$ και $[c] = \frac{[L]}{[T]}$

Αντικαθιστούμε και έχουμε: $[L] = [G_N]^a[\hbar]^b[c]^c = \frac{[L^{3a}]}{[M^a][T^{2a}]}\frac{[M^b][L^{2b}]}{[T^b]}\frac{[L^c]}{[T^c]}$

$$\Rightarrow [L] = [L^{3a+2b+c}][M^{b-a}][T^{-2a-b-c}] \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 3a+2b+c = 1 \\ \left.\begin{array}{l} b-a = 0 \Rightarrow b = a \\ -2a-b-c = 0 \Rightarrow c = -2a-b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} b = a \\ c = -3a \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \cancel{3a}+2a-\cancel{3a} = 1 \Rightarrow a = 1/2 \\ b = 1/2 \\ c = -3/2 \end{array}$$

Οπότε θα έχουμε

$$\ell_p = \sqrt{\frac{G_N \hbar}{c^3}}$$

7. Δύο top quarks απέχουν μεταξύ τους 10^{-16} cm. Υπολογίστε τη βαρυτική και ηλεκτροστατική δύναμη που αναπτύσσεται στο ένα top quark εξαιτίας της παρουσίας του δεύτερου top quark. Υπολογίστε την ισχύ της ισχυρούς ($a_s = \frac{g^2}{\hbar c}$ όπου $g = 0.32$), ηλεκτρομαγνητικής ($a = \frac{e^2}{\hbar c}$), ασθενούς ($a_W = \frac{G_F m_p^2}{\hbar c}$ όπου m_p η μάζα του πρωτονίου και $\frac{G_F}{(\hbar c)^3} = 1.17 \times 10^{-5} GeV^{-2}$) και βαρυτικής αλληλεπίδρασης ($a_g = \frac{G_N m_p^2}{\hbar c}$ όπου m_p η μάζα του πρωτονίου) υπολογίστε την ισχύ της ισχυρής και ασθενούς δύναμης που αναπτύσσεται ανάμεσα στα δύο top quarks. Γράψτε τα αποτελέσματά σας σε αύξουσα ισχύ.

(α) Η ηλεκτρική δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ δύο top quarks είναι:

$$F = \frac{k q_1 q_2}{d^2}$$ όπου $k = 9 \times 10^9 Nm^2C^{-2}$

$q_1 = q_2 = \frac{2}{3} 1.6 \times 10^{-19} C$

$d = 10^{-16} m$

Επομένως η δύναμη θα είναι: $$F = \frac{9 \times 10^9 \left(\frac{2}{3} 1.6 \cdot 10^{-19}\right)^2}{\left(10^{-16}\right)^2} \Rightarrow \boxed{F_q = 1 \times 10^4 N}$$

(β) Η βαρυτική δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ των δύο quarks θα είναι:

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{d^2} =$$

$G = 6.67 \times 10^{-12} Nm^2 kg^{-2}$

$m_t = 170 \times 1.67 \times 10^{-27} kg$

$d = 10^{-16} m$

Επομένως: $$F_g = \frac{6.67 \times 10^{-12} \cdot \left(170 \times 1.67 \times 10^{-27}\right)^2}{\left(10^{-16}\right)^2} \Rightarrow \boxed{F_g = 5.4 \times 10^{-28} N}$$

(γ) Η ισχυρή αλληλεπίδραση είναι 137 φορές ισχυρότερη της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης

Επομένως: $$F_{strong} = 137 * F_q \Rightarrow \boxed{F_{strg} \simeq 1.4 \cdot 10^6 N}$$

(δ) Η ασθενής αλληλεπίδραση είναι $1/G_F$ λιγότερο ισχυρή από την ισχυρή αλληλεπίδραση; δηλαδή $F_W = 8.85 N$

Επομένως: $F_g = 5.4 \cdot 10^{-28} N$ $\quad F_q = 1 \cdot 10^{4} N$

$F_{ew} \simeq 8.8 N$ $\quad F_{stg} = 1 \cdot 10^{6} N$

8. Θεωρήστε ένα κουνούπι το οποίο ζυγίζει 2.0mg. Αν έχει ενέργεια 13 TeV, όση και η ενέργεια της δέσμης πρωτονίων στον LHC την περίοδο αυτή, υπολογίστε την κλασική ταχύτητά του και συγκρίντε την με την μέση ταχύτητα ενός κουνουπιού που είναι περίπου 1.6km/h.

Από ενέργεια έχουμε: $1eV = 1.6\times10^{-19}J$

$1\,TeV = 1.6\times10^{-19}\times10^{12}J = 1.6\times10^{-7}J$

Η κινητική ενέργεια του κουνουπιού θα είναι: $E_\kappa = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = 1.6\times10^{-7}J$

Για μάζα κουνουπιού $2.0mg = 2\cdot10^{-3}kg\cdot10^{-3} \Rightarrow m_\kappa = 2\times10^{-6}kg$

Θα έχουμε ότι $\upsilon^2 = \frac{2E_\kappa}{m_\kappa} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2E}{m_\kappa}} = \sqrt{\frac{3.2\cdot10^{-7}}{2\cdot10^{-6}}} \Rightarrow \underline{\underline{\upsilon = 0.4\,m/s}}$

που είναι 1.4km/h λίγο αργό για κουνούπι!..