ΦΥΣ. 111

1η Πρόοδος: 13-Οκτωβρίου-2018

Πριν αρχίσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητας).

Ονοματεπώνυμο	Αριθμός Ταυτότητας

Απενεργοποιήστε τα κινητά σας.

Η εξέταση αποτελείται από 2 μέρη. Το πρώτο μέρος έχει 5 προβλήματα πολλαπλής επιλογής και το δεύτερο μέρος έχει 4 κανονικά προβλήματα. Η μέγιστη συνολική βαθμολογία της εξέτασης είναι 100 μονάδες.

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΣΤΕ ΜΟΝΟ ΤΙΣ ΣΕΛΙΔΕΣ ΠΟΥ ΣΑΣ ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΜΗΝ ΚΟΨΕΤΕ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΣΕΛΙΔΑ

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 180 λεπτά. Καλή Επιτυχία !

Άσκηση	Βαθμός
1η (5μ)	
2η (5μ)	
3η (5μ)	
4η (5μ)	
5η (5μ)	
6η (15μ)	
7η (20μ)	
8η (20μ)	
9η (20μ)	
Σύνολο	

Τύποι που μπορούν να φανούν χρήσιμοι

Γραμμική κίνηση:

$$\upsilon(t)=\upsilon_0+\int_{t_i}^{t_f}a(t)dt$$

$$x(t)=x_0+\int_{t_i}^{t_f}\upsilon(t)dt$$

$\upsilon^2=\upsilon_o^2+2a(x-x_o)$ για α=σταθ.

$x=x_o+\frac{1}{2}(\upsilon+\upsilon_o)t$ για α = σταθ

$x_{\max}=\frac{\upsilon_o^2\sin 2\theta}{g}$ βεληνεκές

g = 9.8m/s^2

Τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\cos(a\pm b)=\cos(a)\cos(b)\mp\sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a\pm b)=\sin(a)\cos(b)\pm\cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b)+\cos(a+b)=2\cos(a)\cos(b)$$

$$\cos(a-b)-\cos(a+b)=2\sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b)+\sin(a+b)=2\sin(a)\cos(b)$$

$$\cos^2(a)=\frac{1}{1+\tan^2(a)} \quad \sin^2(a)=\frac{\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}$$

Κυκλική κίνηση:

$\theta=\frac{s}{R}$ s =μήκος τόξου κύκλου ακτίνας R

$$\bar{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t},\quad \omega=\frac{d\theta}{dt},\quad \omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f,\ f=\frac{1}{T}$$

$$\omega=\omega_0+\alpha_{\gamma\omega\nu}t \qquad \alpha_{\gamma\omega\nu}=\sigma\tau\alpha\theta.$$

$$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t^2 \qquad \alpha_{\gamma\omega\nu}=\sigma\tau\alpha\theta.$$

$$\omega_f^2-\omega_i^2=2\alpha_{\gamma\omega\nu}\left(\theta_f-\theta_i\right) \qquad \alpha_{\gamma\omega\nu}=\sigma\tau\alpha\theta.$$

$$\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho,}=\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi.} \qquad \left|\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.}\right|=\frac{\left|\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi}\right|^2}{R}=\left|\vec{\omega}\right|^2 R$$

$$\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi.}=\vec{\omega}\times\vec{r} \qquad \left|\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi.}\right|=\left|\vec{\omega}\right|R$$

$$\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}=\frac{d\vec{\omega}}{dt},\ \vec{a}_{\varepsilon\varphi.}=\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.}\times\vec{r}\Rightarrow\left|\vec{a}_{\varepsilon\varphi.}\right|=\left|\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.}\right|\left|\vec{r}\right|$$

$$\vec{a}=\vec{a}_{\varepsilon\varphi.}+\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau.}=\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi.}$$

ΜΕΡΟΣ Α

Άσκηση 1 [5μ]

Τη χρονική στιγμή t = 0, ένα σώμα που βρίσκεται στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων αρχίζει να κινείται στον x-άξονα. Το διάνυσμα θέσης του σώματος συναρτήσει του χρόνου δίνεται από τη σχέση: $x(t) = -v_{x0}t + bt^3/3$, όπου b είναι μία θετική σταθερά, $b > 0$ ενώ $v_{x0} > 0$ είναι η x-συνιστώσα της ταχύτητας τη στιγμή t = 0. Ποιά από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθής; (Εξηγήστε την απάντησή σας).

I. Τη στιγμή t = 0, το σώμα κινείται στη θετική x-διεύθυνση και σε μία μεταγενέστερη χρονική στιγμή το σώμα θα σταματήσει και θα αντιστραφεί η διεύθυνση κίνησής του.

II. Τη στιγμή t = 0, το σώμα κινείται στην αρνητική x-διεύθυνση και σε μία μεταγενέστερη χρονική στιγμή το σώμα θα σταματήσει και θα αντιστραφεί η διεύθυνση κίνησής του.

III. Τη στιγμή t = 0, το σώμα κινείται στη θετική x-διεύθυνση και σε μία μεταγενέστερη χρονική στιγμή το σώμα θα σταματήσει και θα παραμείνει ακίνητο.

IV. Τη στιγμή t = 0, το σώμα κινείται στην αρνητική x-διεύθυνση και σε μία μεταγενέστερη χρονική στιγμή το σώμα θα σταματήσει και θα παραμείνει ακίνητο.

V. Η x-συνιστώσα της επιτάχυνσης του σώματος μειώνεται καθώς περνά ο χρόνος.

VI. Η x-συνιστώσα της επιτάχυνσης του σώματος έχει μία αρχικά αρνητική μή μηδενική τιμή τη στιγμή t = 0 και στη συνέχεια αυξάνει συναρτήσει του χρόνου.

Η απάντηση είναι η πρόταση (2).

Από την εξίσωση της θέσης - συναρτήσει του χρόνου μπορούμε να βρούμε παραγωγίζοντας την ταχύτητα και επιτάχυνση του σώματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή:

$$x(t) = -v_{0x}t + \frac{bt^3}{3} \Rightarrow v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -v_{0x} + bt^2 \Rightarrow \boxed{a(t) = \frac{dv(x)}{dt} = 2bt \geq 0}$$

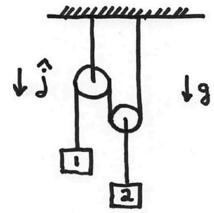
Τη χρονική στιγμή $t = 0$, $\boxed{v_x(0) = -v_{0x} < 0}$, το σώμα δηλαδή κινείται στην αρνητική x-διεύθυνση

Μπορούμε να βρούμε τη χρονική στιγμή που σταματά αφού ασκείται πάνω του επιτάχυνση αντίθετη με τη φορά κίνησής του.

$0 = v_x(t_1) = -v_{0x} + bt_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{v_{x0}}{b}}$ η στιγμή που το σώμα σταματά

Για $t > t_1$, η κίνηση του σώματος αναστρέφεται αφού $v_x(t>t_1) > 0$

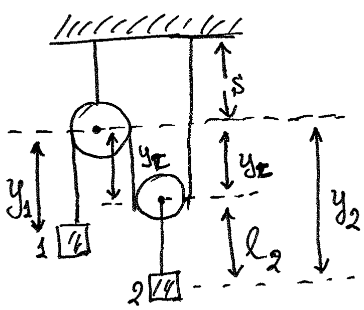
Άσκηση 2 [5μ]



Στο σύστημα του διπλανού σχήματος, όλες οι τροχαλίες είναι λείες και αβαρείς και τα νήματα είναι αμελητέας μάζας. Θεωρήστε τη διεύθυνση προς τα κάτω ως την θετική διεύθυνση της επιτάχυνσης ενός σώματος. Η επιτάχυνση της βαρύτητας, g, έχει φορά προς τα κάτω. Ποιά από τις παρακάτω εξισώσεις δίνει τη σχέση των επιταχύνσεων των σωμάτων 1 και 2; (Εξηγήστε την απάντησή σας).

- **I.** $0 = \alpha_1 + \alpha_2$
- **II.** $0 = \alpha_1 - \alpha_2$
- **III.** $0 = 2\alpha_1 + \alpha_2$
- **IV.** $0 = 2\alpha_1 - \alpha_2$
- **V.** $0 = \alpha_1 + 2\alpha_2$
- **VI.** $0 = \alpha_1 - 2\alpha_2$
- **VII.** Κανένα από τα προηγούμενα

Η σωστή απάντηση είναι η (5).



Το νήμα που είναι τυλιγμένο γύρω από τις 2 τροχαλίες και είναι δεμένο στην οροφή ενώ το άλλο άκρο του είναι δεμένο στο σώμα μάζας 1. έχει συνολικό μήκος l_1

$$l_1 = y_1 + y_\tau + y_\tau + S + \pi R + \pi R \qquad (1)$$

όπου πR είναι το μήκος του τόξου της τροχαλίας (υποθέτοντας ότι R είναι η ακτίνα των 2 τροχαλιών).

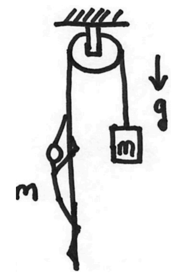
Παραγωγίζουμε την (1) οπότε:

$$\frac{dl_1}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + 2\frac{dy_\tau}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d^2y_1}{dt^2} + 2\frac{d^2y_\tau}{dt^2} = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 + 2a_\tau = 0}$$

Αλλά $l_2 = y_2 - y_\tau \Rightarrow \cancel{\frac{dl_2}{dt}}^{\,0} = \frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_\tau}{dt} \Rightarrow 0 = \frac{d^2y_2}{dt^2} - \frac{d^2y_\tau}{dt^2} \Rightarrow \boxed{a_2 - a_\tau = 0}$

Από τις δύο εξισώσεις έχουμε ότι $\boxed{a_1 + 2a_2 = 0}$

Άσκηση 3 [5μ]



Ένα άτομο σκαρφαλώνει ένα μή εκτατό σχοινί αμελητέας μάζας. Το σχοινί περνά από μία λεία και αβαρή τροχαλία που είναι στερεωμένη σε ακλόνητο σημείο στην οροφή ενός γυμναστηρίου. Στο άλλο άκρο του σχοινιού είναι δεμένο ένα κιβώτιο. Το κιβώτιο και το άτομο έχουν την ίδια μάζα *m*. Υποθέστε ότι το άτομο σκαρφαλώνει τραβώντας το σχοινί με μία δύναμη σταθερού μέτρου *F*. Θεωρήστε την επιτάχυνση του ατόμου ως $\vec{a}_{ατ.}$ και την επιτάχυνση του κιβωτίου ως $\vec{a}_{κιβ.}$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας, *g*, έχει φορά προς τα κάτω. Ποιά από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθής; (<u>Εξηγήστε την απάντησή σας</u>).

I. Το άτομο έχει επιτάχυνση προς τα πάνω και για το κιβώτιο $\vec{a}_{κιβ.} = \vec{0}$.

II. Το άτομο και το κιβώτιο έχουν επιτάχυνση προς τα πάνω και $|\vec{a}_{ατ.}| > |\vec{a}_{κιβ.}| > 0$.

III. Το άτομο και το κιβώτιο έχουν επιτάχυνση προς τα πάνω και $|\vec{a}_{ατ.}| = |\vec{a}_{κιβ.}|$.

IV. Το άτομο και το κιβώτιο έχουν επιτάχυνση προς τα πάνω και $0 < |\vec{a}_{ατ.}| < |\vec{a}_{κιβ.}|$.

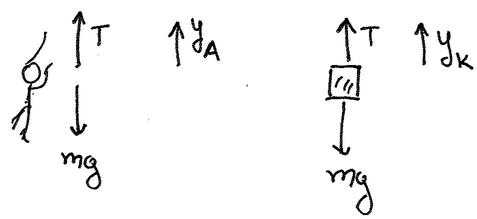
V. Το άτομο έχει επιτάχυνση προς τα πάνω και το κιβώτιο προς τα κάτω και $|\vec{a}_{ατ.}| > |\vec{a}_{κιβ.}| > 0$.

VI. Το άτομο έχει επιτάχυνση προς τα πάνω και το κιβώτιο προς τα κάτω και $|\vec{a}_{ατ.}| = |\vec{a}_{κιβ.}|$.

VII. Το άτομο έχει επιτάχυνση προς τα πάνω και το κιβώτιο προς τα κάτω και $0 < |\vec{a}_{ατ.}| < |\vec{a}_{κιβ.}|$.

Η σωστή απάντηση είναι το (3)

Από τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος για το άτομο και το κιβώτιο:

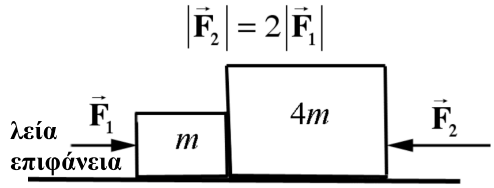


$$\left.\begin{array}{l} \underline{\text{Άτομο:}}\ T - mg = m a_{ατ} \\ \underline{\text{Κιβώτιο:}}\ T - mg = m a_{κιβ} \end{array}\right\} \Rightarrow a_{ατ} = a_{κιβ}$$

Η επιτάχυνση $\vec{a}_{ατ}$ είναι προς τα πάνω και επομένως $|\vec{a}_{ατ}| = |\vec{a}_{κιβ}|$

Άσκηση 4 [5μ]

Κιβώτιο 1 μάζας *m* βρίσκεται σε επαφή με κιβώτιο 2 μάζας 4*m*. Τα δύο κιβώτια βρίσκονται πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Υποθέστε ότι μία οριζόντια δύναμη $\vec{F}_1$ ασκείται στα αριστερά του κιβωτίου 1 και μία δεύτερη δύναμη $\vec{F}_2$ ασκείται στα δεξιά του κιβωτίου 2 όπως στο διπλανό σχήμα. Τα μέτρα των δυνάμεων έχουν τη σχέση $F_2 = |\vec{F}_2| = 2|\vec{F}_1| = 2F_1$.



Θεωρήστε ότι $\vec{F}_{21}$ είναι η δύναμη που ασκεί το κιβώτιο 2 στο κιβώτιο 1 λόγω της επαφής τους. Η δύναμη αυτή έχει μέτρο $F_{21} = |\vec{F}_{21}|$. Θεωρήστε ότι το μέτρο της επιτάχυνσης των κιβωτίων είναι *a*. Ποιά από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθής; (<u>Εξηγήστε την απάντησή σας</u>).

I. $F_1 = F_{21} = ma$

II. $F_1 = F_{21} = 5ma$

III. $F_1 = ma$ και $F_{21} = 2ma$

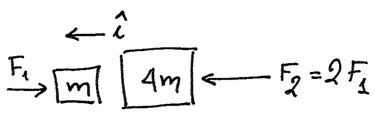
IV. $F_1 = ma$ και $F_{21} = 0$

V. $F_1 = 5ma$ και $F_{21} = 6ma$

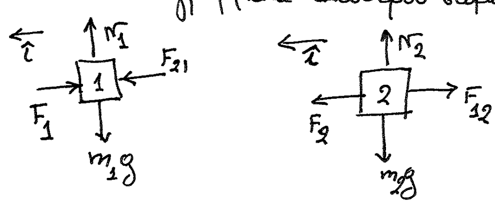
VI. $F_1 = 5ma$ και $F_{21} = 4ma$

VII. Κανένα από τα παραπάνω

Η σωστή απάντηση είναι η (5)



Από τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος έχουμε:



<u>Σώμα 1</u>

$F_{21} - F_1 = m a_1$

<u>Σώμα 2</u>

$F_2 - F_{12} = 4m a_2$

Αλλά $a_1 = a_2 = a$

$F_{12} = F_{21}$

$\Rightarrow$ $F_{21} - F_1 = ma \Rightarrow F_{21} = F_1 + ma$

$2F_1 - F_{12} = 4ma \Rightarrow 2F_1 - (F_1 + ma) = 4ma \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{F_1 = 5ma}$

Επομένως $F_{21} = 5ma + ma \Rightarrow \boxed{F_{21} = 6ma}$

Αν θεωρούσαμε τα δύο σώματα σαν ένα σύστημα $M_{ολ} = 5m$

Η συνισταμένη δύναμη θα ήταν: $\Sigma F = 2F_1 - F_1 = 5m\,a \Rightarrow \boxed{F_1 = 5ma}$

Άσκηση 5 [5μ]

Μία μπάλα αφήνεται να πέσει με μηδενική αρχική ταχύτητα από την κορυφή ενός κτιρίου ύψους H και όταν φθάνει στο έδαφος έχει ταχύτητα υ_f. Η ίδια μπάλα αφήνεται από την ηρεμία και πάλι να πέσει στο έδαφος από την κορυφή του κτιρίου. Την ίδια χρονική στιγμή μία παρόμοια μπάλα εκτοξεύεται από το έδαφος κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = \upsilon_f$ (ίδιο μέτρο με την ταχύτητα που έχει η πρώτη μπάλα όταν χτυπά στο έδαφος). Αγνοήστε την αντίσταση του αέρα. Ποιά από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθής; (Εξηγήστε την απάντησή σας).

I. Οι μπάλες συναντιώνται στο μέσο του κτιρίου.

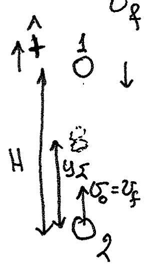
II. Οι μπάλες συναντιώνται σε κάποιο ύψος που είναι πάνω από το μέσο του κτιρίου.

III. Οι μπάλες συναντιώνται σε κάποιο ύψος που είναι κάτω από το μέσο του κτιρίου.

Η σωστή απάντηση είναι η (2).

Η ταχύτητα με την οποία πέφτει η μπάλα στο έδαφος από ύψος H είναι:

$$v_f^2 - \cancel{v_0^2}^{\,0} = -2g(0-H) \Rightarrow \boxed{v_f^2 = 2gH} \quad (1)$$



Οι μπάλες αφήνονται ταυτόχρονα και επομένως κινούνται το ίδιο χρονικό διάστημα. Όταν συναντιούνται έχουν την ίδια θέση $y_Σ$.

Μπάλα 1: $y_Σ = H - \frac{1}{2} g t_Σ^2$

Μπάλα 2: $y_Σ = 0 + v_{02} t_Σ - \frac{1}{2} g t_Σ^2$

$$\Rightarrow H - \frac{1}{2} g t_Σ^2 = v_{02} t_Σ - \frac{1}{2} g t_Σ^2 \Rightarrow \boxed{t_Σ = \frac{H}{v_{02}}} \quad (2)$$

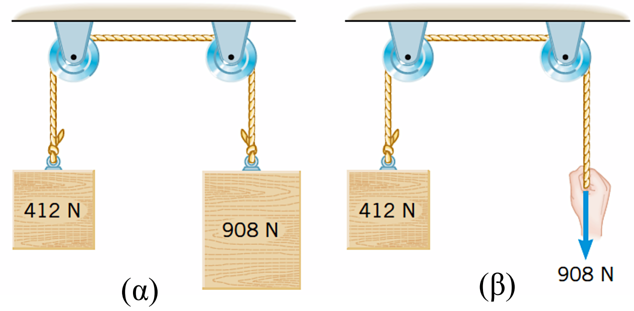
Αλλά $v_{02} = v_f \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{v_{02}^2 = 2gH}$ (3)

Αντικαθιστούμε: $y_Σ = H - \frac{1}{2} g \frac{H^2}{v_{02}^2} = H - \frac{1}{2}\cancel{g}\frac{H^{\cancel{2}}}{2\cancel{g}\cancel{H}} \Rightarrow y_Σ = H - \frac{H}{4} \Rightarrow \boxed{y_Σ = \frac{3H}{4}}$

ΜΕΡΟΣ Β

Άσκηση 6 [15μ]

Το παρακάτω σχήμα δείχνει δύο κιβώτια τα οποία συνδέεονται μεταξύ τους με ένα σχοινί το οποίο περνά από δύο τροχαλίες. Το ένα κιβώτιο έχει βάρος $412N$ ενώ το άλλο κιβώτιο έχει βάρος $908N$. Οι τροχαλίες είναι αβαρείς και λείες και το σχοινί έχει αμελητέα μάζα.

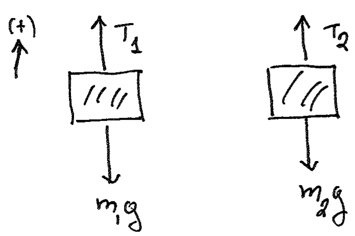


(α) Ποιά είναι η επιτάχυνση του ελαφρύτερου κιβώτιου; [**5μ**]

(β) Υποθέστε τώρα ότι το βαρύτερο κιβώτιο αντικαθίσταται και στη θέση του ένα άτομο εφαρμόζει μία δύναμη $F = 908N$ προς τα κάτω, όπως φαίνεται στο σχήμα (β). Να βρείτε την επιτάχυνση του ελαφρύτερου κιβωτίου. [**6μ**]

(γ) Εξηγήστε τυχόν διαφορές μεταξύ των απαντήσεών σας στα ερωτήματα (α) και (β). [**4μ**]

(α) Από τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος για τα δύο κιβώτια:



Το ίδιο σχοινί συνδέει τα δύο σώματα και επομένως ασκεί την ίδια τάση και στα δύο:

$$T_1 = T_2 = T$$

Από τον 2ο νόμο του Newton θα έχουμε:

Σώμα 1: $T - m_1 g = m_1 a_1$

Σώμα 2: $T - m_2 g = m_2 a_2$

αλλά $a_1 = -a_2$

$$\overset{(-)}{\Rightarrow} m_2 g - m_1 g = m_2 a + m_1 a \Rightarrow a = \frac{m_2 g - m_1 g}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{W_2 - W_1}{\frac{W_2 + W_1}{g}} \Rightarrow a = \frac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1} g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{908N - 412N}{908N + 412N} \times 9.8 \frac{m}{s^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{496}{1320N} 9.8 \frac{m}{s^2} \Rightarrow \boxed{a = 3.68\ m/s^2}$$

(β) Η τάση στο σχοινί στην περίπτωση αυτή είναι 908N αφού η τάση είναι η αντίδραση στη δύναμη που ασκεί το χέρι στο σχοινί. Εφαρμόζουμε τον 2° νόμο του Newton στο σώμα 1 και θα έχουμε:

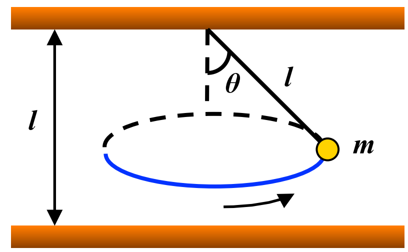
$$T - m_1 g = m_1 a \Rightarrow a = \frac{T}{m_1} - g = \frac{F}{m_1} - g = \frac{F}{W_1/g} - g = \frac{F}{W_1} g - g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{F}{W_1} - 1\right) g \Rightarrow a = \left(\frac{908N}{412N} - 1\right) 9.8 \frac{m}{s^2} \Rightarrow \boxed{a = 11.80 \, m/s^2}$$

(γ) Στην 1η περίπτωση η αδράνεια και των δύο κιβωτίων επηρεάζει την επιτάχυνση του συστήματος ενώ στη δεύτερη περίπτωση υπάρχει μόνο η αδράνεια του ενός σώματος

Άσκηση 7 [20μ]

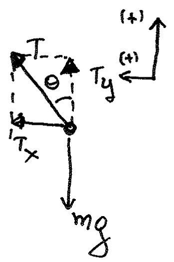
Μία μάζα *m* εξαρτάται από το ένα άκρο ενός νήματος αμελητέας μάζας και μήκους *l*. Το πάνω τμήμα του νήματος εξαρτάται από την οροφή η οποία απέχει επίσης απόσταση *l* από το δάπεδο. Αρχικά η μάζας *m* εκτελεί κυκλική κίνηση σε οριζόντιο κύκλο, ενώ το νήμα σχηματίζει γωνία *θ* με την κατακόρυφο διεύθυνση.



(α) Βρείτε την ταχύτητα της μάζας καθώς αυτή περιστρέφεται; [**10μ**]

(β) Ξαφνικά το νήμα κόβεται. Ποιά η οριζόντια απόσταση που καλύπτει η μάζα από τη χρονική στιγμή που κόπηκε το νήμα μέχρι τη χρονική στιγμή που χτυπά στο δάπεδο; [**10μ**]

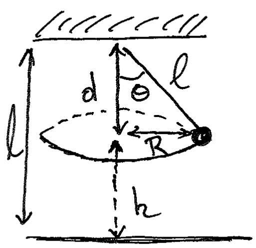
(α) Το σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, και αναλύουμε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του.



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y - mg = 0 \Rightarrow T_y = mg \Rightarrow T\cos\theta = mg \Rightarrow \boxed{T = \frac{mg}{\cos\theta}} \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow \boxed{T_x = m\frac{v^2}{R}} \quad (2)$$ κεντρομόλος δύναμη

Από το σχήμα βλέπουμε ότι $\boxed{R = l\sin\theta}$ (3)



Αντικαθιστούμε στη (2) οπότε έχουμε:

$$T_x = m\frac{v^2}{l\sin\theta} \Rightarrow T\sin\theta = m\frac{v^2}{l\sin\theta} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{\cancel{m}g}{\cos\theta}\sin\theta = \cancel{m}\frac{v^2}{l\sin\theta} \Rightarrow$$

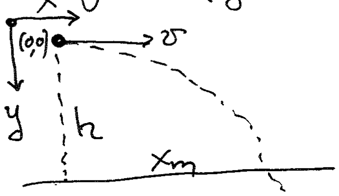
$$\Rightarrow v^2 = lg\tan\theta\sin\theta \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{gl\tan\theta\sin\theta}} \quad (A)$$

(β) Τη στιγμή που κόβουμε το νήμα, το σώμα εκτελεί οριζόντια βολή, αφού θα εξακολουθεί να κινείται εφαπτομενικά της κυκλικής του τροχιάς. Εξαιτίας της επιτάχυνσης της βαρύτητας, g, θα διαγράφει οριζόντια βολή από ύψος h. Το ύψος στο οποίο βρίσκεται είναι: $h = l - d = l - l\cos\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{h = l(1-\cos\theta)} \quad (4)$$

Ο χρόνος που χρειάζεται για να πέσει στο έδαφος από το ύψος αυτό είναι:

$$y = y_0 + \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}}} \quad (5) \overset{(4)}{\Rightarrow} t = \sqrt{\frac{2\ell(1-\cos\theta)}{g}}$$



Στο ίδιο χρονικό διάστημα, διανύει οριζόντια απόσταση

$$x_m = \upsilon t \overset{(5)(4)}{\Rightarrow} x_m = \sqrt{\ell \cancel{g} \tan\theta \sin\theta \, \frac{2\ell(1-\cos\theta)}{\cancel{g}}} \Rightarrow$$

$$\boxed{x_m = \ell\sqrt{2\tan\theta \sin\theta (1-\cos\theta)}}$$

Άσκηση 8 [20μ]

Ένα βλήμα βάλεται από ένα σημείο Α με κάποια γωνία θ σχετικά με τον ορίζοντα. Ξαφνικά και ενώ βρίσκεται στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του και αφού έχει διανύσει μια οριζόντια απόσταση D, εκρήγνυται σε δύο ίσα θραύσματα τα οποία κινούνται οριζόντια με ίσες και αντίθετες ταχύτητες όπως μετρούνται σχετικά με το βλήμα τη στιγμή πριν την έκρηξη. Το ένα θραύσμα προσγειώνεται πίσω στο σημείο Α. Πόσο μακριά από το σημείο Α θα προσγειωθεί το δεύτερο θραύσμα;

Στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς, η ταχύτητα του βλήματος είναι οριζόντια προς το έδαφος. Υποθέτουμε ότι η ταχύτητα αυτή είναι $V_{B/\varepsilon\delta}$

Η ταχύτητα των θραυσμάτων ως προς το βλήμα είναι επίσης οριζόντια και τα δύο θραύσματα έχουν ίσες και αντίθετες ταχύτητες, όπως αναφέρει η εκφώνηση της άσκησης.

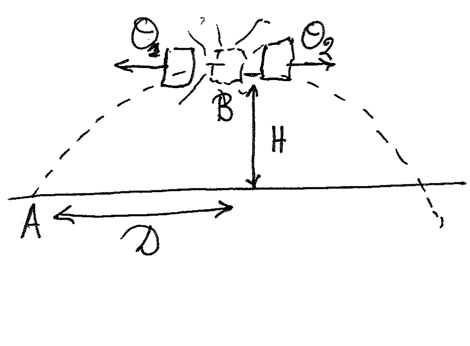
Έστω το θραύσμα 1 (αυτό που προσγειώνεται ξανά στο A) έχει ταχύτητα με μέτρο υ και είναι στην αρνητική x-διεύθυνση. Η ταχύτητα του θραύσματος 2 θα είναι στη θετική x-διεύθυνση και θα έχει επίσης μέτρο υ.

Οι ταχύτητες των θραυσμάτων ως προς το έδαφος θα είναι:

$$\vec{V}_{\Theta_1/\varepsilon\delta} = \vec{V}_{\Theta_1/B} + \vec{V}_{B/\varepsilon\delta} \Rightarrow \boxed{-V_{\Theta_1/\varepsilon\delta} = V_{B/\varepsilon\delta} - \upsilon} \quad (1) \Rightarrow \boxed{\upsilon = V_{B/\varepsilon\delta} + V_{\Theta_1/\varepsilon\delta}} \quad (2)$$

$$\vec{V}_{\Theta_2/\varepsilon\delta} = \vec{V}_{\Theta_2/B} + \vec{V}_{B/\varepsilon\delta} \Rightarrow \boxed{V_{\Theta_2/\varepsilon\delta} = \upsilon + V_{B/\varepsilon\delta}} \quad (3)$$

Και τα δύο θραύσματα ξεκινούν από το ίδιο σημείο με μηδενική κατακόρυφη ταχύτητα. Το θραύσμα 1 επιστρέφει στη θέση A και άρα διανύει οριζόντια απόσταση D, η οποία είναι: $\boxed{x_{\Theta_1} = V_{\Theta_1/\varepsilon\delta} \cdot t^{\pi\tau}_{\Theta_1} = D}$ (4) πηγαίνει προς τα πίσω



Τα θραύσματα πέφτουν από το ίδιο ύψος από στο οποίο έφθασε το αρχικό βλήμα. Επομένως ο χρόνος πτώσης τους θα είναι ίδιος με το χρόνο ανόδου του αρχικού βλήματος. $t^{\alpha\nu}_{B}$

Θα έχουμε επομένως: $\boxed{t^{\pi\tau}_{\Theta_1} = t^{\pi\tau}_{\Theta_2} = t^{\alpha\nu}_{B} = t}$ (5)

Κατά τον χρόνο ανόδου του στο ύψος H, το βλήμα κάλυψε απόσταση στη x-διεύθυνση ίση με D. Η κίνηση στη x-διεύθυνση είναι ομαλή οπότε έχουμε:

$$D = V_{B/\varepsilon\delta} \cdot t^{\alpha\nu}_{B} \Rightarrow \boxed{D = V_{B/\varepsilon\delta} \cdot t} \quad (6)$$

Το θραύσμα 2 θα κινηθεί κατά απόσταση x_{Θ_2} την οποία θα καλύψει στο ίδιο χρονικό διάστημα με το θραύσμα 1, σύμφωνα με την (5).

Θα έχουμε επομένως: $x_{\Theta_2} = V_{\Theta_2/\varepsilon\delta} \cdot t^{\pi\tau}_{\Theta_2} \Rightarrow x_{\Theta_2} = V_{\Theta_2/\varepsilon\delta} \cdot t \overset{(3)}{\Rightarrow}$

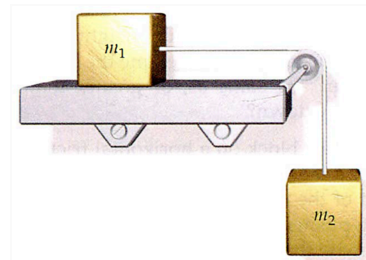
$$x_{\Theta_2} = \left(V_{B/\varepsilon\delta} + \upsilon\right) t \overset{(2)}{\Rightarrow} x_{\Theta_2} = \left(V_{B/\varepsilon\delta} + V_{B/\varepsilon\delta} + V_{\Theta_1/\varepsilon\delta}\right) \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{\Theta_2} = 2V_{B/\varepsilon\delta} \cdot t + V_{\Theta_1/\varepsilon\delta} \cdot t \overset{(6),(4)}{\Longrightarrow} x_{\Theta_2} = 2D + D \Rightarrow \boxed{x_{\Theta_2} = 3D}$$

από το σημείο έκρηξης

Άσκηση 9 [20μ]

Μία μάζα m_1 βρίσκεται πάνω στην οριζόντια επιφάνεια ενός τραπεζιού. Η μάζα συνδέεται μέσω ενός λεπτού νήματος που περνά από λεία και αβαρή τροχαλία με μία άλλη μάζα $m_2 = 2.5kg$ που κρέμεται από την πλευρά του τραπεζιού και σε ύψος $1.5m$ από το έδαφος, όπως στο διπλανό σχήμα. Το σύστημα αφήνεται από την κατάσταση ηρεμίας και η μάζα m_2 χτυπά στο έδαφος σε χρόνο 0.82s. Το σύστημα επαναφέρεται στην αρχική του θέση και μία μάζα $m_3 = 1.2kg$ τοποθετείται πάνω στη μάζα m_1. Το σύστημα αφήνεται και πάλι να κινηθεί από την ηρεμία και η μάζα m_2 στην περίπτωση αυτή χτυπά στο έδαφος σε χρόνο 1.3s.

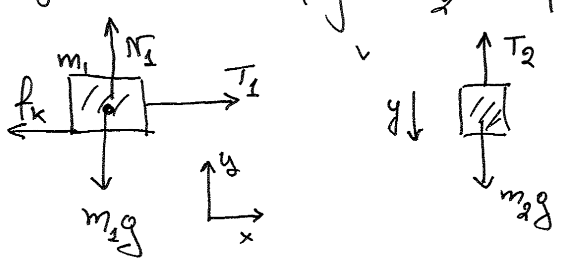


(α) Κάντε τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος για κάθε μία από τις μάζες του συστήματος. [**5μ**]

(β) Υπολογίστε τη μάζα m_1. [**8μ**]

(γ) Υπολογίστε τον συντελεστή κινητικής τριβής μεταξύ της m_1 και της οριζόντιας επιφάνειας.[**7μ**]

Κάνουμε τα διαγράμματα ελευθέρου σώματος για το κιβώτιο μάζας m_1 και για το κιβώτιο μάζας m_2. Ξέρουμε ότι στο m_1 ασκείται τριβή, επίσης το σχοινί εφόσον συνδέει τα σώματα m_1 και m_2 και έχει αμελητέα μάζα, τότε $T_1 = T_2$.



Εφαρμόζουμε τον νόμο του Νεύτωνα στα δύο σώματα.

Θα έχουμε: (τα δύο σώματα έχουν τις ίδιες επιταχύνσεις $a_1 = a_2 = a$)

<u>Σώμα m_2</u>: $\Sigma F_y = m_2 g - T = m_2 a \Rightarrow \boxed{T = m_2(g-a)}$ (1)

<u>Σώμα m_1</u>: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 - m_1 g = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g$

λόγω τριβής $f_k = \mu_k \cdot N_1$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{f_k = \mu_k m_1 g}$ (2)

$\Sigma F_x = T_1 - f_k = m_1 a \Rightarrow \boxed{T - \mu_k m_1 g = m_1 a}$ (3)

Αντικαθιστούμε την (1) στη (3) οπότε θα έχουμε:

$$m_2(g-a) - \mu_k m_1 g = m_1 a \Rightarrow m_2 g - \mu_k m_1 g = (m_1 + m_2) a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{g(m_2 - \mu_k m_1) = (m_1 + m_2) a} \quad (4)$$ <u>Περίπτωση Α</u>

Από κινηματική μπορούμε να βρούμε τις επιταχύνσεις του συστήματος σωμάτων και για τις δύο περιπτώσεις.

Στην περίπτωση A που δεν έχουμε τοποθετήσει την μάζα m_3 η επιτάχυνση θα είναι:

(το σύστημα ξεκινά από ηρεμία)

$$x_f = x_i + v_i \cdot t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow x_f - x_i = \cancel{v_i t}^{\,0} + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{2\Delta x}{a} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2\Delta x}{t^2}} \quad (5)$$

Επομένως από την εξίσωση (5) θα έχουμε:

$$\begin{cases} \text{περίπτωση A: } \boxed{a_A = \dfrac{2 \cdot 1.5m}{0.82s^2} = 4.46 m/s^2} \\ \text{Περίπτωση B: } \boxed{a_B = \dfrac{2 \cdot 1.5m}{(1.3s)^2} = 1.775 m/s^2} \end{cases}$$

Στην περίπτωση B που προσθέτουμε την μάζα m_3 οι εξισώσεις είναι ίδιες με αυτές της περίπτωσης A με τη διαφορά ότι η μάζα m_1 γίνεται ουσιαστικά $m_1 + m_3$. Επομένως η εξίσωση (4) θα γίνει:

$$\boxed{g\left(m_2 - \mu_k (m_1 + m_3)\right) = (m_1 + m_2 + m_3)\, a_B} \quad (5) \ \text{Περίπτωση B}$$

Από την (4) κ (5) βλέπουμε ότι έχουμε ένα σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους, τη μάζα m_1 και τον συντελεστή κινητικής τριβής μ_k

Θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} g(m_2 - \mu_k m_1) &= (m_1 + m_2) a_A \\ g\left(m_2 - \mu_k (m_1 + m_3)\right) &= (m_1 + m_2 + m_3) a_B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\mu_k = \frac{(m_1 + m_2) a_A - m_2 g}{m_1 g}} \quad (6)$$

Αντικαθιστούμε στη 2η εξίσωση:

$$m_2 g + \left[\frac{(m_1 + m_2) a_A - m_2 g}{m_1}\right](m_1 + m_3) = (m_1 + m_2 + m_3) a_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{m_1 m_2 g} + (m_1 + m_2)(m_1 + m_3) a_A - \cancel{m_1 m_2 g} - m_2 m_3 g = m_1^2 a_B + m_1 (m_2 + m_3) a_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1^2 a_A + m_1 (m_2 + m_3) a_A + m_2 m_3 a_A - m_2 m_3 g = m_1^2 a_B + m_1 (m_2 + m_3) a_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m_1^2(a_A-a_B)+m_1(m_2+m_3)(a_A-a_B)+m_2m_3(a_A-g)=0} \quad (7)$$

Έχουμε μία δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς τη μάζα m_1, ενώ ξέρουμε όλους τους συντελεστές:

$$m_2+m_3 = 2.5\,kg + 1.2\,kg = 3.7\,kg$$

$$a_A - a_B = 4.46\,\frac{m}{s^2} - 1.775\,\frac{m}{s^2} = 2.685\,m/s^2$$

$$m_2 m_3 = 2.5\,kg \cdot 1.2\,kg = 3.0\,kg^2$$

$$a_A - g = 4.46\,\frac{m}{s^2} - 9.8\,\frac{m}{s^2} = -5.34\,m/s^2$$

Η εξίσωση γίνεται:

$$m_1^2 \cdot 2.685\,\frac{m}{s^2} + m_1\,(3.7kg)(2.685\tfrac{m}{s^2}) + (-5.34\tfrac{m}{s^2})(3.0kg^2)=0 \Rightarrow$$

$$2.685\,m_1^2 + 9.9345\,m_1 - 16.02 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \frac{-9.9345^{kg} \pm \sqrt{9.9345^2 + 4\cdot 16.02\cdot 2.685}}{2\cdot 2.685}$$

Η μία λύση είναι αρνητική και απορρίπτεται και θα έχουμε:

$$m_1 = \frac{-9.9345^{kg} + \sqrt{270.7491\,kg^2}}{2\cdot 2.685} \Rightarrow m_1 = \frac{-9.9345^{(kg)} + 16.4545^{(kg)}}{5.37} \Rightarrow m_1 = \frac{6.52\,kg}{5.37} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m_1 = 1.21\,kgr}$$

Αντικαθιστούμε πλέον στην εξίσωση (6) και έχουμε για τον συντελεστή κινητικής τριβής:

$$\mu_k = -\frac{3.7kg\cdot 4.46\frac{m}{s^2} - 9.8\cdot 2.5\,kg\,\cancel{m/s^2}}{1.21\cdot 9.8\,\cancel{kg\,m/s^2}} = -\frac{-7.998}{11.858} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_k = 0.674}$$