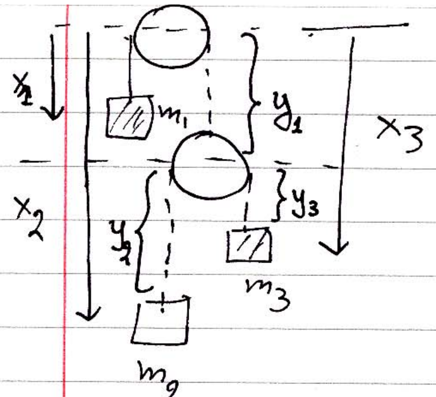
ΦΥΣ 133 – 5ο ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ



Να βρεθούν οι τάσεις των νημάτων στο σύστημα μηχανής του Atwood του διπλανού σχήματος, το οποίο αποτελείται από 3 μάζες m_1, m_2 και m_3 που συνδέονται με 2 σχοινιά μήκους l_2 (μεταξύ m_2 και m_3) και l_1 μεταξύ της m_1 και της κινητής τροχαλίας.
Θεωρήστε αβαρείς τροχαλίες οι ακτίνες των οποίων είναι αμελητέες ως προς το μήκος του νήματος. Δεν υπάρχουν τριβές

Θεωρούμε τις συντεταγμένες x_1, x_2, x_3 ως προς το κέντρο της υψηλότερης τροχαλίας. (ακίνητης τροχαλίας). Για να βρούμε την τάση θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι οι συντεταγμένες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και να χρησιμοποιήσουμε τις τροποποιημένες εξισώσεις Lagrange με τους πολ/στές. Θα έχουμε:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 + g(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3) = 0$$

(Θεωρούμε ότι το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας είναι αυτό που περνά από το κέντρο της ακίνητης τροχαλίας)

Οι δεσμοί του συστήματος: $x_1 + y_1 = l_1$

$$\left.\begin{aligned} &y_2 + y_3 = l_2 \\ \text{Αλλά}\quad &y_2 = x_2 - y_1 \text{ και } y_3 = x_3 - y_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2 - y_1 + x_3 - y_1 = l_2$$

$$\Rightarrow y_1 = l_1 - x_1$$

$$x_2 + x_3 - 2y_1 = l_2 \Rightarrow x_2 + x_3 + 2x_1 - 2l_1 = l_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2 + x_3 + 2x_1 - 2l_1 - l_2 = 0} = f(x_1, x_2, x_3) \quad \text{εξίσωση δεσμού}$$

Οι εξισώσεις Lagrange θα είναι:

$$x_1: \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}-\frac{\partial L}{\partial x_1}=\lambda\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} \Rightarrow m_1\ddot{x}_1-m_1 g=2\lambda \quad (A)$$

$$x_2: \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}-\frac{\partial L}{\partial x_2}=\lambda\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2} \Rightarrow m_2\ddot{x}_2-m_2 g=\lambda \quad (B)$$

$$x_3: \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}-\frac{\partial L}{\partial x_3}=\lambda\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3} \Rightarrow m_3\ddot{x}_3-m_3 g=\lambda \quad (\Gamma)$$

Από την εξίσωση του δεσμού έχουμε: $x_2+x_3+2x_1-2l_1-l_2=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dot{x}_2+\dot{x}_3+2\dot{x}_1=0 \Rightarrow \ddot{x}_2+\ddot{x}_3=-2\ddot{x}_1 \quad (\Delta)$$

Από (B) ∧ (Γ) $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} m_2m_3\ddot{x}_2-m_2m_3 g=\lambda m_3 \\ m_3m_2\ddot{x}_3-m_3m_2 g=\lambda m_2\end{array}\right\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow m_2m_3(\ddot{x}_2+\ddot{x}_3)-2m_2m_3 g=\lambda(m_3+m_2)\Rightarrow$$

$$(\Delta)\Rightarrow -2\ddot{x}_1 m_2m_3-2m_2m_3 g=\lambda(m_3+m_2)\Rightarrow \lambda=\frac{-2\ddot{x}_1m_2m_3-2m_2m_3 g}{m_3+m_2}$$

Οπότε από την (A) $\Rightarrow$ $\ddot{x}_1=(2\lambda+m_1 g)/m_1$

$$-2\frac{m_2m_3(2\lambda+m_1 g)}{m_1}-2m_2m_3 g=\lambda(m_3+m_2)\Rightarrow$$

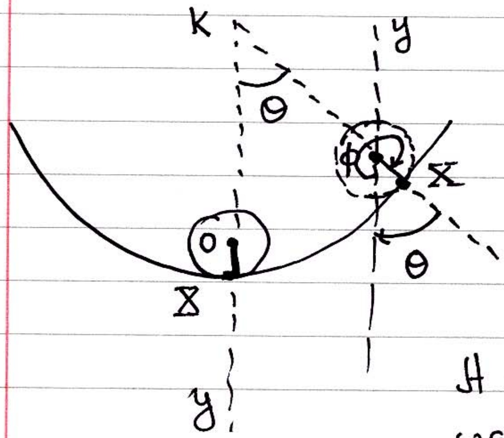
$$\Rightarrow \lambda\left[(m_3+m_2)m_1+4m_2m_3\right]=-2m_1m_2m_3 g-2m_1m_2m_3 g\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda\left[(m_1m_3+m_1m_2+4m_2m_3)\right]=-4m_1m_2m_3 g\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{-4m_1m_2m_3 g}{m_1m_2+m_1m_3+4m_2m_3}\Rightarrow \boxed{\lambda=-\frac{4g}{\frac{4}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}}}$$

$$T_1=m_1\ddot{x}_1-m_1 g=\lambda\frac{\partial f}{\partial x_1}=2\lambda \Rightarrow \boxed{T=\frac{-8g}{\frac{4}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}}}$$

Κύλιση χωρίς ολίσθηση: Δίσκος στο εσωτερικό/εξωτερικό σφαιρικής επιφάνειας. Εύρεση του δεσμού για κύλιση χωρίς ολίσθηση.

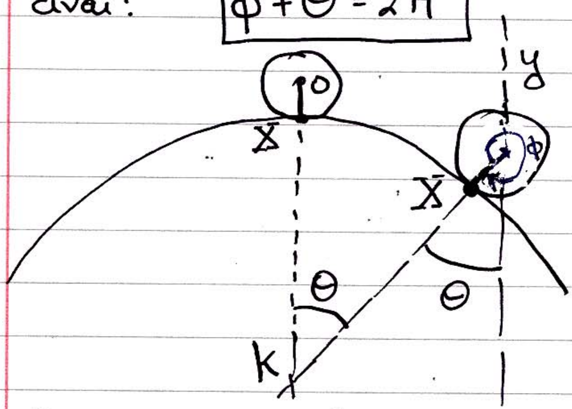


Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι ο δίσκος έχει κυλήσει κατά ένα τόξο όσο η περιφέρεια του οπότε το σημείο X βρίσκεται και πάλι σε επαφή με τη σφαιρική επιφάνεια.

Η ακτίνα OX έχει περιστραφεί ωστόσο κατά γωνία φ (ως προς την y κατακόρυφο που περνά από το κέντρο του δίσκου)

Βλέπουμε λοιπόν από το σχήμα ότι η σχέση μεταξύ των φ και θ

είναι: $\boxed{\phi + \theta = 2\pi}$



Στην περίπτωση αυτή και για κίνηση ώστε το X να βρεθεί και πάλι σε επαφή με τη σφαιρική επιφάνεια (ο δίσκος δηλαδή έκανε τόξο 2πρ όπως και στην 1η περίπτωση)

Η ακτίνα OX διέγραψε γωνία φ ως προς την κατακόρυφο y η οποία στην περίπτωση αυτή είναι μεγαλύτερη από 2π.

Δηλαδή στην περίπτωση αυτή όπως δείχνει το σχήμα:

$\boxed{\phi - \theta = 2\pi}$

Και στις 2 περιπτώσεις το τόξο που διαγράφηκε πάνω στη σφαιρική επιφάνεια είναι: $R \cdot \theta$ (R η ακτίνα της σφαιρικής επιφάνειας)

Για το δίσκο το τόξο αυτό είναι όσο και το μήκος της περιφέρειας δηλαδή $2\pi\rho$ (όπου ρ η ακτίνα του δίσκου)

Επομένως για την 1η περίπτωση έχουμε:

$$2\pi\rho = (\phi+\Theta)\rho = R\Theta \Rightarrow \boxed{\phi\rho = (R-\rho)\Theta} \quad (A)$$

Και για τη 2η περίπτωση έχουμε:

$$2\pi\rho = (\phi-\Theta)\rho = R\Theta \Rightarrow \boxed{\phi\rho = (R+\rho)\Theta} \quad (B)$$

Ακόμα και για μια τυχαία περιστροφή θα είχαμε ότι:

$2\pi \underset{\text{τυχαία περιστροφή}}{s} - \Theta = \phi \Rightarrow \phi+\Theta = 2\pi s$ 1η περίπτωση

$2\pi s + \Theta = \phi \Rightarrow \phi-\Theta = 2\pi s$ 2η περίπτωση

Οπότε $\quad 2\pi s\rho = R\Theta \Rightarrow R\Theta = \begin{cases} \rho(\phi+\Theta) \\ \rho(\phi-\Theta) \end{cases}$

Όλα αυτά τα τόξα είναι ίσα γιατί έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση.
Οι εξισώσεις των δεσμών σας 2 περιπτώσεις δίνονται από τις σχέσεις (A) και (B)