ΦΥΣ. 211
1η ΠΡΟΟΔΟΣ 5-Μάρτη-2016

Πριν ξεκινήσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, αριθμό ταυτότητας) στο πάνω μέρος της σελίδας αυτής.

Για τις λύσεις των ασκήσεων θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε μόνο τις σελίδες που σας δίνονται. Μην κόψετε καμιά από τις σελίδες που σας δίνονται.

Προσπαθήστε να δείξετε τη σκέψη σας και να γράψετε καθαρές εξισώσεις. Για πλήρη ή μερική βαθμολόγηση θα πρέπει να φαίνεται καθαρά το τι προσπαθείτε να δείξετε.

Σας δίνονται 6 ασκήσεις και πρέπει να απαντήσετε σε όλες. Σύνολο μονάδων 100.

Διαβάστε πρώτα όλες τις ασκήσεις και προσπαθήστε να σκεφτείτε τι περίπου χρειάζεται να κάνετε. Η σειρά των προβλημάτων δεν είναι ενδεικτική της δυσκολία τους.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 180 λεπτά.

Καλή επιτυχία.

Ενεργό δυναμικό

$$U_{eff}(r) = U(r) + U_{cf}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

Μετασχηματισμένη ακτινική Δ.Ε. τροχιάς:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u + \frac{\mu}{l^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) = 0, \text{ όπου } u = \frac{1}{r}$$

Ενέργεια τροχιάς:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)$$

Τροχιές Kepler:

$F = G\dfrac{m_1m_2}{r^2} = \dfrac{\gamma}{r^2}$ λύση ακτινικής εξίσωσης είναι: $r(\theta) = \dfrac{c}{1+e\cos\theta}$, με $c = \dfrac{l^2}{\gamma\mu}$

Εκκεντρότητα (*e*): $E = \dfrac{\gamma^2\mu}{2l^2}\left(e^2 - 1\right)$ όπου E = Ενέργεια

Εκκεντρότητα	Ενέργεια	Είδος Τροχιάς
$0 < e < 1$	$E < 0$	ελλειπτική
$e = 1$	$E = 0$	παραβολική
$e > 1$	$E > 0$	υπερβολική

Περιήλιο: $r_{\min} = \dfrac{c}{1+e}$

Αφήλιο: $r_{\max} = \dfrac{c}{1-e}$

Μεγάλος ημιάξονας: $a = \dfrac{c}{1-e^2}$

Μικρός ημιάξονας: $b = \dfrac{c}{\sqrt{1-e^2}}$

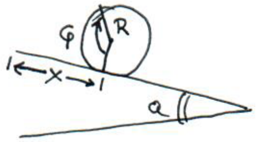
Νόμοι Kepler:

1ος νόμος: τροχιές πλανητών είναι ελλείψεις με τον ήλιο σε μια από τις εστίες της έλλειψης

2ος νόμος: $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{l}{2\mu}$

3ος νόμος: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM_H}a^3$

1. Ένα στεφάνι ακτίνας *R* και μάζας *M* κυλά χωρίς να ολισθαίνει προς την βάση ενός κεκλιμένου επιπέδου. Να βρεθεί η δύναμη της τριβής χάρη στην οποία το στεφάνι εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση. [**10μ**]



Θεωρούμε σα σύστημα συντεταγμένων την θέση ως προς το αρχικό σημείο και κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και την γωνία φ που έχει γραφεί το στεφάνι

Σύμφωνα με την συνθήκη της κύλισης χωρίς ολίσθηση, θα έχουμε το δεσμό $x=R\varphi \Rightarrow$

$$\Rightarrow dx = R\,d\varphi \Rightarrow \dot{x}-R\dot{\phi}=0 \Rightarrow \ddot{x}-R\ddot{\phi}=0 \qquad (1)$$

Η κινητική ενέργεια του στεφανιού είναι η κινητική ενέργεια του ΚΜ λόγω μεταφοράς και η κινητική ενέργεια του στεφανιού λόγω της περιστροφής ως προς το ΚΜ

Επομένως θα γράφουμε: $T=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+R^2\dot{\varphi}^2\right)}$$

Η δυναμική ενέργεια θα είναι $\boxed{V=-mgx\sin\alpha}$ θεωρώντας $V=0$ το επίπεδο που περνά από το αρχικό σημείο εκκίνησης του στεφανιού.

Η συνάρτηση του δεσμού είναι: $f(x,\varphi)=x-R\varphi$

Επομένως η Lagrangian θα γραφεί ως: $L=T-V+\lambda f(x,y)$

$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+R^2\dot{\varphi}^2\right)+mgx\sin\alpha+\lambda f(x,y)$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange θα είναι:

$$x:\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x}=mg\sin\alpha+\lambda\frac{\partial}{\partial x}(x-R\phi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{x}=mg\sin\alpha+\lambda} \qquad (A)$$

$$\varphi:\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)=\frac{\partial L}{\partial \varphi} \Rightarrow \boxed{mR^{\cancel{2}}\ddot{\varphi}=-\lambda\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{mR\ddot{\varphi}=-\lambda} \qquad (B)$$

Αντικαθιστώντας την (1) στην (A) έχουμε: $mR\ddot{\varphi}=mg\sin\alpha+\lambda \overset{(B)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow -\lambda=mg\sin\alpha+\lambda \Rightarrow -2\lambda=mg\sin\alpha \Rightarrow \boxed{\lambda=-mg\sin\alpha/2} \qquad (\Gamma)$$

Από την (B) $\cancel{m}R\ddot{\varphi}=\cancel{m}g\sin\alpha/2 \Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi}=g\sin\alpha/2R}$ & $\boxed{\ddot{x}=\frac{g\sin\alpha}{2}}$

Επομένως η δύναμη του δεσμού όπως δίνεται από την (Γ) αντιστοιχεί σε τριβή και έχει φορά αντίθετη της κίνησης (προς τα πάνω)

2. Ένα δυναμικό σύστημα με γενικευμένες συντεταγμένες r και θ περιγράφεται από την συνάντηση Lagrange $L = \frac{1}{2}m\left(\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\right) - \cos\theta$.

(α) Βρείτε την Hamiltonian του συστήματος. [**5μ**]

(β) Βρείτε τις εξισώσεις Hamilton. [**3μ**]

(γ) Εξηγήστε αναλυτικά αν η Hamiltonian διατηρείται ή όχι. [**2μ**]

(α) Η Hamiltonian του προβλήματος είναι: $H \equiv \sum \dot{q}_i p_i - L$ · όπου $L = \frac{1}{2}m(\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) - \cos\theta$

Οι γενικευμένες ορμές θα είναι: $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m}$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

Επομένως: $H = \dot{\theta} p_\theta + \dot{r} p_r - L = \frac{p_\theta^2}{m} + \frac{p_r^2}{m} - \frac{1}{2}\cancel{m}\frac{p_\theta^2}{m^{\cancel{2}}} - \frac{1}{2}\cancel{m}\frac{p_r^2}{m^{\cancel{2}}} + \cos\theta$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{p_\theta^2}{2m} + \frac{p_r^2}{2m} + \cos\theta}$$

(β) Οι εξισώσεις κίνησης του Hamilton θα είναι:

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} \qquad \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}$$

$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -(-\sin\theta) = \sin\theta \qquad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = 0 \Rightarrow r$ είναι κυκλική και η p_r διατηρείται

(γ) Η ολική παράγωγος της Hamiltonian είναι: $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}\frac{\partial p_\theta}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_r}\frac{\partial p_r}{\partial t} +$

$$+ \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} = \cancel{\dot{\theta}\dot{p}_\theta} + \cancel{\dot{r}\dot{p}_r} - \cancel{\dot{p}_\theta\dot{\theta}} - \cancel{\dot{p}_r\dot{r}} + \frac{\partial H}{\partial t} \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Η Hamiltonian δεν εξαρτάται από τον χρόνο, οπότε $\frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H = \text{σταθ.}$

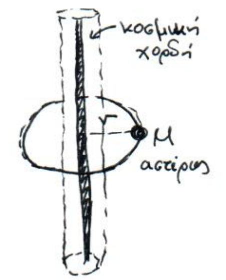
διατηρείται

3. Στη θεωρία των χορδών της σωματιδιακής φυσικής, έχει προταθεί πως κάποιες από τις χορδές έχουν μακροσκοπικές διαστάσεις και έχουν μεγάλη μάζα. Στο πρόβλημα αυτό θα θεωρήσετε μια τέτοια βαρυτική χορδή η οποία είναι ευθύγραμμη και άπειρου μήκους. Η χορδή έχει γραμμική πυκνότητα μάζας ίση με *λ*. Θεωρήστε ότι γύρω από την χορδή αυτή περιστρέφεται σε σταθερή κυκλική τροχιά ένας αστέρας μάζας *M*. Ο αστέρας έχει στροφορμή *l*.

(α) Ποιό είναι το ενεργό δυναμικό στο οποίο κινείται ο αστέρας; (*Υπόδειξη*: *την ίδια διαδικασία θα μπορούσατε να ακολουθήσετε αν είχατε αγωγό και φορτίο*) [**8μ**]

(β) Ποιά είναι η ακτίνα της σταθερής κυκλικής τροχιάς; [**6μ**]

(γ) Αν διαταραχθεί η κυκλική τροχιά, ποια θα είναι η συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων γύρω από την κλειστή κυλική τροχιά; [**6μ**]



Χρειάζεται να υπολογίσουμε το βαρυτικό πεδίο της γραμμικής αυτής πυκνότητας μάζας σε κάποιο σημείο σε απόσταση r από την χορδή και κάθετα στη χορδή.

Χρησιμοποιούμε το νόμο του Gauss: $\oint_S \vec{g}\cdot\hat{n}\, dA = -4\pi G m$

Στην περίπτωσή μας θα θεωρήσουμε ένα κύλινδρο απείρου ύψους που να περικλείει την χορδή και να έχει ακτίνα r. Σε αυτή την υποθετική επιφάνεια που περικλείει την γραμμική κατανομή μάζας, οι δύο επιφάνειες που αποτελούν της βάσεις του κυλίνδρου δεν συνεισφέρουν αφού $\vec{g}\cdot\hat{n}=0$ μια και $g\perp\hat{n}$. Επομένως η συνεισφορά προέρχεται μόνο από την κυλινδρική επιφάνεια, S. Από το νόμο του Gauss θα έχουμε επομένως:

$$\oint_S \vec{g}\cdot\hat{n}\, dA = -4\pi G M \quad\Big\} \Rightarrow -g\oint_S dA = -4\pi G M \Rightarrow$$

Αλλά $\vec{g}\cdot\hat{n} = -g$ αφού $\vec{g}\parallel\hat{n}$ και αντίθετης κατεύθυνσης $\Rightarrow g\oint_S dA = 4\pi G M$.

Αλλά $\oint_S dA = 2\pi r L$ όπου L το μήκος του κυλίνδρου και r η θέση που θέλουμε να υπολογίσουμε το πεδίο και $M=\lambda L$ όπου λ η γραμμική πυκνότητα.

Επομένως θα έχουμε: $g\,\cancel{2}\cancel{\pi} r L = \cancel{4}^{2}\cancel{\pi} G M \Rightarrow g r \cancel{L} = 2G(\cancel{L}\lambda) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{g = 2G\lambda/r}$$

Η δύναμη που ασκείται επομένως στη μάζα του αστέρα θα είναι: $F = -M_a g \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{F = -\frac{2GM_a\lambda}{r}}$$

Αφού γνωρίζουμε τη δύναμη η οποία προκύπτει από κάποιο βαθμωτό δυναμικό, θα έχουμε $F = -\nabla V \Rightarrow$

$$\Rightarrow V = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow V = \int \frac{2GM_a\lambda}{r}\, dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V = 2GM_a\lambda \ln(r)}$$

Παρατηρήστε ότι έχουμε θέση το μηδέν του λογαριθμικού δυναμικού στην θέση r=1 για κάποιες μονάδες. Αυτό δεν είναι πρόβλημα αφού σταθεροί όροι στο δυναμικό μπορούν να προστεθούν χωρίς να επηρεαστεί η δυναμική του προβλήματος.

Εφόσον έχουμε το δυναμικό που προκαλεί το πεδίο, προσθέτουμε επίσης το "φυγοκεντρικό" δυναμικό οπότε η σχέση που θα πάρουμε είναι:

$$\boxed{V_{eff}(r) = 2GM_a\lambda\ln(r) + \frac{\ell^2}{2M_a r^2}}$$ όπου ℓ η στροφορμή του αστέρα

(β) Για να βρούμε την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς θα πρέπει να υπολογίσουμε την παράγωγο του V_{eff} και να την εξισώσουμε με το μηδέν.

Θα έχουμε λοιπόν: (A) $\boxed{\frac{d}{dr}V_{eff}(r) = 2GM_a\lambda\frac{1}{r} - \frac{2\ell^2}{2M_a r^3}}$, οπότε $\left.\frac{dV_{eff}}{dr}\right|_{r=r_0} = 0$

δίνει: $$2GM_a\lambda\frac{1}{\cancel{r_0}} = \frac{\ell^2}{M_a r_0^{\cancel{3}2}} \Rightarrow r_0^2 = \frac{\ell^2}{2GM_a^2\lambda} \Rightarrow \boxed{r_0 = \sqrt{\frac{\ell^2}{2GM_a^2\lambda}}} \quad (B)$$

(γ) Για να βρούμε τη συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων, αναπτύσσουμε κατά Taylor το ενεργό δυναμικό, οπότε θα έχουμε:

$$V_{eff}(r) = \underbrace{\cancel{\left.V_{eff}(r_0)\right|_{r=r_0}}}_{\text{σταθ}} + \underbrace{\cancel{\left.V'_{eff}(r)\right|_{r=r_0}}\delta r}_{\to 0 \text{ κυκλική τροχιά}} + \frac{1}{2}\left.V''_{eff}(r)\right|_{r=r_0}\delta r^2 + \dots$$

Ο $1^{ος}$ όρος του αναπτύγματος είναι σταθερός και επομένως μπορεί να παραληφθεί.

Θεωρούμε διαταραχή της κυκλικής τροχιάς, τέτοια ώστε $r(t) = r_0 + \delta r(t)$

Επομένως $\dot r(t) = \delta\dot r(t)$ και $\ddot r(t) = \delta\ddot r(t)$.

Η εξίσωση της συνάρτησης Lagrange γράφεται επομένως: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}M_a\delta\dot r^2 - \frac{1}{2}V''_{eff}\delta r^2$

Επομένως η εξίσωση κίνησης, σύμφωνα με την εξίσωση Euler-Lagrange θα είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\delta\dot r}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\delta r} \Rightarrow M_a\delta\ddot r = -\frac{1}{2}2V''_{eff}\delta r \Rightarrow \boxed{\delta\ddot r = -\frac{V''_{eff}}{m}\delta r}$$ εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή

Η περίοδος των ταλαντώσεων καθορίζεται από την $2^η$ παράγωγο του V_{eff}.

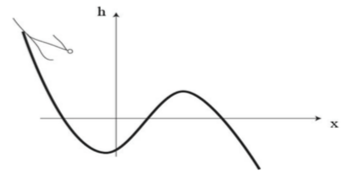
Επομένως υπολογίζουμε την $2^η$ παράγωγο

$$V''_{eff} = \frac{d^2V_{eff}}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left[\frac{dV_{eff}}{dr}\right] \overset{(A)}{=} -2GM_a\lambda\frac{1}{r^2} + \frac{3\ell^2}{M_a r^4} \Rightarrow \left.V''_{eff}(r)\right|_{r=r_0} = -\frac{2GM\lambda}{r_0^2} + \frac{3\ell^2}{M_a r_0^4}$$

Αντικατάσταση της (B) δίνει: $$\left.V''_{eff}(r)\right|_{r_0=r} = -\frac{4G^2M_a^3\lambda^2}{\ell^2} + \frac{3\cancel{\ell^2}\cdot 4G^2M_a^{\cancel{3}4}\lambda^2}{\cancel{M_a}\,\ell^{4-2}} \Rightarrow \boxed{V''_{eff} = \frac{8G^2\lambda^2M_a^3}{\ell^2}}$$

Επομένως $\omega^2 = V''_{eff}/M_a \Rightarrow \omega^2 = 8G^2\lambda^2M_a^2/\ell^2 \Rightarrow \boxed{\omega = 2G\lambda M_a/\ell\,\sqrt{2}} \boxed{= \frac{2\sqrt{G\lambda}}{r_0}}$

4. Ένας σκιέρ κατεβαίνει μια πλαγιά που μπορεί να προσεγγιστεί με μια εξίσωση της μορφής $y=f(x)$. Η κίνηση του σκιέρ μπορεί να θε ωρηθεί ότι δεν υπόκειται σε τριβές και προκαλείται από την δύναμη της βαρύτητας.



(α) Γράψτε την Lagrangian του προβλήματος και τον δεσμό. [**5μ**]

(β) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης. [**5μ**]

(γ) Βρείτε τη δύναμη που περιορίζει την κίνηση του σκιέρ. [**5μ**]

(δ) Ο σκιέρ σε κάποιο σημείο απογειώνεται από την πλαγιά όταν η κάθετη δύναμη του δεσμού, F_y, γίνεται μηδέν ή αρνητική, γιατί η καμπύλη της πλαγιάς μπορεί να δώσει μόνο θετική κάθετη δύναμη. Υποθέτοντας ότι ο σκιέρ ξεκινά από την ηρεμία και ύψος y_0, προσδιορίστε το σημείο x, στο οποίο αποχωρίζεται από την καμπύλη. *<u>Υπόδειξη:</u>* από την στιγμή που η συνάρτηση της καμπύλης της πλαγιάς δεν δίνεται, θα πρέπει το αποτέλεσμά σας να το εκφράσετε συναρτήσει της $f(x)$ και παραγώγων της. [**5μ**]

(α) Η θέση του σκιέρ δίνεται από τις συντεταγμένες x, y και τον δεσμό $y=f(x)$. Επομένως η ταχύτητα θα είναι: $T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$

η δυναμική ενέργεια θα είναι: $V = mgy$ και η εξίσωση του δεσμού θα δίνει $y-f(x)=0 \Rightarrow$ η συνάρτηση του δεσμού θα είναι:

$G = y-f(x)$

Η Lagrangian επομένως γράφεται: $\boxed{L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-mgy+\lambda G}$ (A)

(β) Οι εξισώσεις Euler-Lagrange δίνουν τις εξισώσεις κίνησης:

$$x: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x}=-\lambda\frac{\partial f(x)}{\partial x} \Rightarrow \boxed{m\ddot{x}=-\lambda f'(x)} \text{ (B)}$$

$$y: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)=\frac{\partial L}{\partial y} \Rightarrow \boxed{m\ddot{y}=-mg+\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda=m\ddot{y}+mg} \text{ (Γ)}$$

$$\Rightarrow \cancel{m}\ddot{x}=-(\cancel{m}\ddot{y}+\cancel{m}g)f'(x) \Rightarrow \boxed{\ddot{x}=-(\ddot{y}+g)f'(x)} \text{ (Δ)}$$

Επομένως θα πρέπει να λύσουμε την $\ddot{y}$ και να αντικαταστήσουμε στην (Δ)

Από την εξίσωση του δεσμού $y=f(x) \Rightarrow \boxed{\dot{y}=\frac{\partial f(x)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}=f'(x)\dot{x}} \Rightarrow$ (Δ1)

$$\Rightarrow \ddot{y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(f'(x)\dot{x}\right)\frac{\partial x}{\partial t}=f''(x)\dot{x}^2+f'(x)\frac{\partial \dot{x}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\ddot{y}=f''(x)\dot{x}^2+f'(x)\ddot{x}}$$

Αντικατάσταση της τελευταίας στην (Δ) δίνει: $-\ddot{x}=f''(x)f'(x)\dot{x}^2+f'(x)^2\ddot{x}+gf'(x)$

$$\Rightarrow -\left(1+f'^2(x)\right)\ddot{x} = f''(x)f'(x)\dot{x}^2 + g f'(x) \Rightarrow \boxed{\ddot{x} = -\frac{f'(x)\left[f''(x)\dot{x}^2+g\right]}{1+f'^2(x)}} \quad (E)$$

(γ) Η δύναμη είναι η λ και επομένως θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την (B) και να αντικαταστήσουμε την (E)

$$m\ddot{x} = -\lambda f'(x) \Rightarrow \lambda = -m\frac{\ddot{x}}{f'(x)} = m\left(\frac{\cancel{f'(x)}\left[f''(x)\dot{x}^2+g\right]}{\cancel{f'(x)}\left(1+f'^2(x)\right)}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = m\,\frac{f''(x)\dot{x}^2+g}{\left(1+f'^2(x)\right)}} \quad (Z)$$

Χρειάζεται να απαλείψουμε το $\dot{x}$ χρησιμοποιώντας διατήρηση ενέργειας

$$E = mgy_0 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) + mgf(x) \overset{(\Delta 1)}{=} \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{x}^2 f'^2(x)\right) + mgf(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{m}gy_0 = \frac{1}{2}\cancel{m}\left(1+f'^2(x)\right)\dot{x}^2 + \cancel{m}gf(x) \Rightarrow \boxed{\dot{x}^2 = \frac{2g\left(y_0-f(x)\right)}{\left(1+f'^2(x)\right)}}$$

Αντικαθιστούμε το $\dot{x}^2$ στην εξίσωση (Z) οπότε θα έχουμε:

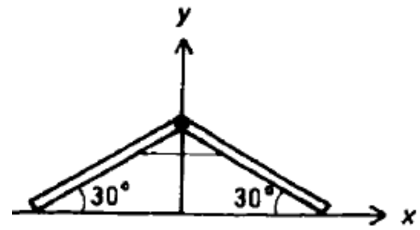
$$\lambda = m\frac{2f''(x)\,g\left(y_0-f(x)\right) + g\left(1+f'^2(x)\right)}{\left(1+f'^2(x)\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{mg}{\left(1+f'^2(x)\right)^2}\left[2f''(x)\left(y_0-f(x)\right) + 1 + f'^2(x)\right]} \quad (H)$$

(δ) Θέλουμε να βρούμε το σημείο στο οποίο $\lambda = 0$. Από την εξίσωση (H) θα έχουμε επομένως $2f''(x)\left(y_0-f(x)\right) + 1 + f'^2(x) = 0$

Αν ξέραμε την συνάρτηση $f(x)$ θα μπορούσαμε να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση και να βρούμε το σημείο απογείωσης του σκιέρ

5. Δύο λεπτές ξύλινες ράβδοι μάζας m και μήκους l η κάθε μια συνδέονται με ένα λείο μεντεσέ και μια μη εκτατή και αβαρή κλωστή. Το σύστημα είναι ακίνητο πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια όπως φαίνεται στο σχήμα. Την χρονική στιγμή t=0, το νήμα κόβεται. <u>*Υπόδειξη:*</u> Ίσως φανεί χρήσιμο ότι η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σε αυτή δίνεται από την σχέση $I_{\rho}^{CM} = ML^2/12$.



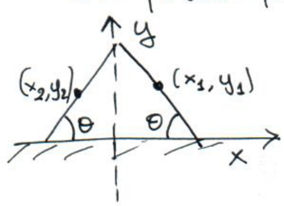
(α) Βρείτε τη συνάρτηση Lagrange του συστήματος. [**7μ**]

(β) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης. [**3μ**]

(γ) Βρείτε την ταχύτητα των ραβδών όταν χτυπούν στο έδαφος. [**5μ**]

(δ) Βρείτε το χρόνο που χρειάζεται οι ράβδοι να φθάσουν στο έδαφος. Τον χρόνο αυτό θα πρέπει να τον βρείτε με βάση ενός σωστά διατυπωμένου ολοκληρώματος, το οποίο ωστόσο δεν χρειάζεται να λύσετε. [**5μ**]

Εξαιτίας της συμμετρίας του προβλήματος, το σημείο επαφής των δυό ράβδων θα πέσει κατακόρυφα. Χρησιμοποιούμε τις συντεταγμένες όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα και θεωρούμε αυτόματα σαν Θ, τη γωνία που σχηματίζει κάθε ράβδος με την οριζόντια επιφάνεια:



(α) Τα κέντρα μάζας της κάθε ράβδου θα έχουν συντεταγμένες

$$x_1 = \frac{l}{2}\cos\Theta \qquad x_2 = -\frac{l}{2}\cos\Theta$$

$$y_1 = \frac{l}{2}\sin\Theta \qquad y_2 = \frac{l}{2}\sin\Theta$$

Οι εξισώσεις των ταχυτήτων θα είναι:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{l}{2}\dot{\Theta}\sin\Theta & \dot{x}_2 &= +\frac{l}{2}\dot{\Theta}\sin\Theta \\ \dot{y}_1 &= \frac{l}{2}\dot{\Theta}\cos\Theta & \dot{y}_2 &= \frac{l}{2}\dot{\Theta}\cos\Theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} v_1^2 &= \left(\frac{l}{2}\dot{\Theta}\right)^2\sin^2\Theta + \left(\frac{l}{2}\dot{\Theta}\right)^2\cos^2\Theta \cancel{- 2\left(\frac{l}{2}\dot{\Theta}\right)^2\cos\Theta\sin\Theta} \\ v_2^2 &= \left(\frac{l}{2}\dot{\Theta}\right)^2\sin^2\Theta + \left(\frac{l}{2}\dot{\Theta}\right)\cos^2\Theta + \cancel{2\left(\frac{l}{2}\dot{\Theta}\right)^2\cos\Theta\sin\Theta} \end{aligned}$$

Η μεταφορική κινητική ενέργεια των κέντρων μαζών των 2 ράβδων θα είναι:

$$T_M = \frac{1}{2}m\left(v_1^2+v_2^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{l}{2}\dot{\Theta}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\dot{\Theta}\right)^2\right) \Rightarrow \boxed{T_M = \frac{1}{2}m2\left(\frac{l}{2}\dot{\Theta}\right)^2}$$

Καθώς οι δυό ράβδοι πέφτουν προς τον οριζόντια επιφάνεια περιστρέφονται, ως προς το κέντρο μάζας τους με γωνιακή ταχύτητα $\dot{\Theta}$.

Επομένως η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος θα είναι:

$$T = T_{\pi\varepsilon\rho} + T_M = \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\dot{\Theta}^2 + m\left(\frac{l}{2}\dot{\Theta}\right)^2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{12}ml^2\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{4}ml^2\dot{\Theta}^2}$$

Η δυναμική ενέργεια των 2 ραβδών θα είναι: ($V=0$ στην επιφάνεια)

$$V = mg\frac{l}{2}\sin\theta + mg\frac{l}{2}\sin\theta \Rightarrow \boxed{V = mgl\sin\theta}$$

Επομένως η Lagrangian του συστήματος είναι:

$$L = T - V = \frac{1}{12}ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{4}ml^2\dot\theta^2 - mgl\sin\theta = \frac{1}{3}ml^2\dot\theta^2 - mgl\sin\theta$$

(β) Η εξίσωση κίνησης για θ θα είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) = \frac{\partial L}{\partial\theta} \Rightarrow \frac{2}{3}\cancel{m}l^2\ddot\theta = -\cancel{m}gl\cos\theta \Rightarrow \frac{2}{3}l\ddot\theta = -g\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot\theta = -\frac{3g}{2l}\cos\theta}$$

(γ) Πολλαπλασιάζω την προηγούμενη εξίσωση με $\dot\theta$ οπότε έχω: $\ddot\theta\dot\theta = -\frac{3g}{2l}\dot\theta\cos\theta$

$$\ddot\theta\dot\theta = \frac{d\dot\theta}{dt}\dot\theta = \frac{1}{2}\frac{d\dot\theta^2}{dt} = -\frac{3g}{2l}\frac{d\theta}{dt}\cos\theta \Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}\int d\dot\theta^2 = -\frac{3g}{\cancel{2}l}\int\cos\theta\, d\theta \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ με βάση την αρχική συνθήκη, για $t=0$ $\theta = 30^\circ$ και $\dot\theta(t)=0$

Επομένως $\int d\dot\theta^2 = -3g/l\int\cos\theta\, d\theta \Rightarrow \boxed{\dot\theta^2 = -\frac{3g}{l}\sin\theta + C_1}$

Από τις αρχικές συνθήκες υπολογίζουμε την σταθερά της ολοκλήρωσης C_1. Θα έχουμε:

$0 = -\frac{3g}{l}\sin(30^\circ) + C \Rightarrow C = \frac{3g}{2l}$ Επομένως $\boxed{\dot\theta^2 = \frac{3g}{2l}(1-2\sin\theta)}$ ταχύτητα πτώσης

Αυτή είναι η γωνιακή ταχύτητα που έχουν όταν οι ράβδοι χτυπούν στο έδαφος. Επομένως η γραμμική ταχύτητα θα είναι $|v| = |l\dot\theta| \Rightarrow \boxed{|v| = \sqrt{\frac{3}{2}gl}}$ ταχύτητα του μεντεσέ.

(δ) Ο χρόνος που χρειάζεται για να χτυπήσει στο έδαφος προκύπτει από το ολοκλήρωμα $\dot\theta = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow dt = \frac{d\theta}{\dot\theta} \Rightarrow t = \int_{30^\circ}^{0}\frac{d\theta}{\dot\theta} = \int_{30^\circ}^{0}\frac{d\theta}{-\sqrt{\frac{3g}{2l}(1-2\sin\theta)}}$

$$\Rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{2l}{3g}}\int_{0}^{30^\circ}\frac{d\theta}{1-2\sin\theta}}$$ χρόνος πτώσης

6. Ένα σώμα μάζας m κινείται στο πεδίο ενός δυσδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή: $V(r)=\frac{1}{2}kr^2$.

(α) Δείξτε ότι οι τροχιές του σώματος είναι ελλείψεις με το κέντρο τους στο $r=0$, αντίθετα με τις Keplerian ελλείψεις που το κέντρο τους δεν είναι στο 0. [**10μ**]

(β) Γράψτε τις παραμέτρους που καθορίζουν την έλλειψη συναρτήσει ποσοτήτων που διατηρούνται, δηλαδή ενέργειας *E,* και στροφορμής, *l.* [**10μ**]

(α) Δουλεύουμε σε καρτεσιανές συντεταγμένες οπότε θα έχουμε:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2+y^2)$$

Οι εξισώσεις κίνησης θα είναι:

$$\left.\begin{aligned} x: \quad & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} = -kx \\ y: \quad & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \Rightarrow m\ddot{y} = -ky \end{aligned}\right\} \Rightarrow m(\ddot{x}\hat{i}+\ddot{y}\hat{j}) = -k(x\hat{i}+y\hat{j}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} = -kr\hat{r}$$

Παρατηρούμε ακόμα ότι το δυναμικό $V=V(r)$ είναι σφαιρικά συμμετρικό και επομένως η Lagrangian είναι αναλλοίωτη κάτω από περιστροφές ως προς οποιαδήποτε διεύθυνση. Σαν αποτέλεσμα, η στροφορμή του συστήματος διατηρείται. Επιλέγουμε τον z-άξονα να είναι στην διεύθυνση της στροφορμής και σαν αποτέλεσμα η κίνηση του σωματιδίου λαμβάνει χώρα στο επίπεδο κάθετο στην στροφορμή, δηλαδή στο x-y επίπεδο.

Διατήρηση της στροφορμής μπορεί να βρεθεί αναλυτικά από την $m\ddot{\vec{r}} = -kr\hat{r} = \vec{F} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times(-kr)\hat{r} \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{0} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$

Από τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης έχουμε: $m\ddot{x} = -kx \Rightarrow x(t) = A\cos(\omega t - \alpha)$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad m\ddot{y} = -ky \Rightarrow y(t) = B\cos(\omega t - \beta)$$

Από τη στιγμή που τα x και y έχουν μέγιστα A και B, αντίστοιχα, τότε και η ποσότητα $r=\sqrt{x^2+y^2}$ θα παρουσιάζει μέγιστο r_{max}.

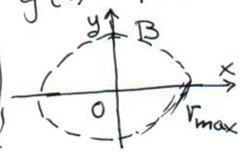
Για $t=0$ επιλέγουμε ώστε το r να είναι r_{max} και ο x-άξονας να συμπίπτει με τον $\hat{r}\,(t=0)$. Σαν αποτέλεσμα της επιλογής αυτής $y(t=0)=0$ και $x(t=0)=r_{max}$

Εισάγοντας τις αρχικές αυτές συνθήκες θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x(t=0)=r_{max}=A\cos(-\alpha) \Rightarrow \alpha=0 \text{ και } A=r_{max}. \\ y(t=0)=0 \Rightarrow 0=B\cos(-\beta) \Rightarrow \beta=\frac{\pi}{2} \text{ οπότε θα έχουμε} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x(t)=r_{max}\cos\omega t \\ y(t)=B\sin\omega t \Rightarrow \end{array}$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο: $\left.\begin{array}{l} x^2(t)=r_{max}^2\cos^2\omega t \\ y^2(t)=B^2\sin^2\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{x^2}{r_{max}^2}=\cos^2\omega t \\ \frac{y^2}{B^2}=\sin^2\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{r_{max}^2}+\frac{y^2}{B^2}=1}$$



Να σημειώσουμε εδώ, ότι για τον δυναμικό Kepler, $V(r)=\frac{-k}{r}$, η κωνική τομή που περιγράφει τις τροχιές, γράφεται με την μορφή $\frac{1}{r}=C(1+e\cos\theta)$ όπου r μετράται από το κέντρο μάζας. Για $e<1$ που έχουμε ελλειπτικές τροχιές, οι ελλείψεις <u>δεν</u> είναι συμμετρικές για $r=0$.

(b) Η ενέργεια και η στροφορμή διατηρούνται και επομένως μπορούμε να εκφράσουμε τις ποσότητες r_{max} και B συναρτήσει των ποσοτήτων αυτών.

Έχουμε ότι $\left.\begin{array}{l} \dot{x}=-\omega r_{max}\sin\omega t \\ \dot{y}=\omega B\cos\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow$

Αλλά η ενέργεια θα είναι: $E=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}k(x^2+y^2)$

$\Rightarrow E=\frac{1}{2}m\left[\omega^2 r_{max}^2\sin^2\omega t+\omega^2B^2\cos^2\omega t\right]+\frac{1}{2}k\left(r_{max}^2\cos^2\omega t+B^2\sin^2\omega t\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow E=\frac{1}{2}\left(m\omega^2 r_{max}^2+kB^2\right)\sin^2\omega t+\frac{1}{2}\left(m\omega^2B^2+kr_{max}^2\right)\cos^2\omega t \;\; \Rightarrow \frac{k}{m}=\omega^2$

$\Rightarrow E=\frac{1}{2}\left(\cancel{m}\frac{k}{\cancel{m}}r_{max}^2+kB^2\right)\sin^2\omega t+\frac{1}{2}\left(\cancel{m}\frac{k}{\cancel{m}}B^2+kr_{max}^2\right)\cos^2\omega t \Rightarrow \boxed{E=\frac{1}{2}k\left(r_{max}^2+B^2\right)}$

Η στροφορμή είναι $\vec{l}=\vec{l}_z=m\vec{r}\times\dot{\vec{r}} \Rightarrow |\vec{l}|=m(x\dot{y}-y\dot{x}) \Rightarrow$

$\Rightarrow |\vec{l}|=m\left(r_{max}\cos^2\omega t\,\omega B+B\omega r_{max}\sin^2\omega t\right) \Rightarrow \boxed{|\vec{l}|=m\omega B r_{max}} \Rightarrow l^2=m^2\omega^2B^2r_{max}^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ell^2 = m^{\cancel{2}}\frac{k}{\cancel{m}} B^2 r_{max}^2 \Rightarrow \ell^2 = mk B^2 r_{max}^2 \Rightarrow B^2 = \frac{\ell^2}{mk r_{max}^2}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ενέργειας το B^2, οπότε θα έχουμε:

$$E = \frac{1}{2} k\left(r_{max}^2 + \frac{\ell^2}{mk r_{max}^2}\right) \Rightarrow 2Em r_{max}^2 = km r_{max}^4 + \ell^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow km r_{max}^4 - 2Em r_{max}^2 + \ell^2 = 0$$ Δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς r_{max}^2

$$r_{max}^2 = \frac{2Em \pm \sqrt{(2Em)^2 - 4\ell^2 km}}{2km} \Rightarrow \boxed{r_{max}^2 = \frac{E}{k}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{k\ell^2}{mE^2}}\right]}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση B^2 θα πάρουμε:

$$B^2 = \frac{\ell^2}{mk r_{max}^2} \Rightarrow B^2 = \frac{2E}{k} - r_{max}^2 = \frac{2E}{k} - \frac{E}{k}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{k\ell^2}{mE^2}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^2 = \frac{E}{k}\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{k\ell^2}{mE^2}}\right]$$

Από τη στιγμή που $r_{max} \geq B$ εξ ορισμού:

$$\boxed{\begin{aligned} r_{max}^2 &= \frac{E}{k}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{k\ell^2}{mE^2}}\right] \\ B &= \frac{E}{k}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{k\ell}{mE^2}}\right] \end{aligned}}$$