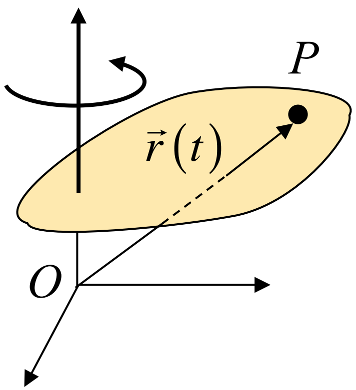
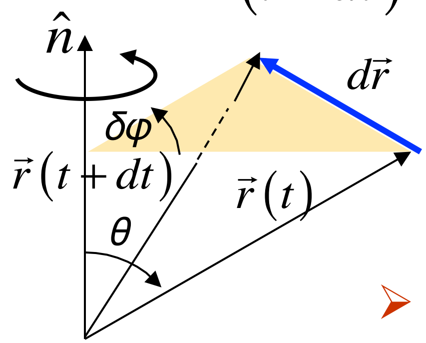
Απειροστές περιστροφές και γωνιακή ταχύτητα

- Θεωρήστε ότι έχετε ένα σώμα το οποίο περιστρέφεται ως προς άξονα:
- Θεωρήστε ότι ένα σημείο P πάνω στο σώμα με διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$



- Εξετάζουμε την κίνηση του P ως προς ακίνητο παρατηρητή
  - Πόσο μετακινείται το P σε χρόνο dt ?
  - Έστω $\vec{r}(t+dt) \equiv \vec{r}(t) + d\vec{r}$ όπου $d\vec{r}$ η απειροστή μετατόπιση



$|d\vec{r}| = r\sin\theta d\varphi$ και $d\vec{r} \perp d\vec{\varphi}$ $\quad d\vec{r} \perp \vec{r}$

  - Χρησιμοποιώντας το διάνυσμα $\hat{n}$

$\hat{n} \times \vec{r} = |\vec{r}|\sin\theta$

  - Επομένως: $d\vec{r} = d\varphi\hat{n} \times \vec{r}$
  - Θεωρώντας: $d\vec{\varphi} \equiv d\varphi\hat{n}$

$$\left.\begin{matrix} d\vec{r} = d\varphi\hat{n} \times \vec{r} \\ d\vec{\varphi} \equiv d\varphi\hat{n} \end{matrix}\right\} \; d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$$

- Η σχέση $d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$ ισχύει μόνο για απειροστές περιστροφές
- Η ταχύτητα του σημείου P για συνεχή περιστροφή θα είναι: $\vec{u}_P = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}$
- Ορίζουμε γωνιακή ταχύτητα ω: $\vec{\omega} \equiv \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$ οπότε: $\vec{u}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}$
- Τα διανύσματα ω και dφ δεν είναι ακριβώς διανύσματα – αλλά ψευδο-διανύσματα
  - ψευδοδιανύσματα περιστρέφονται σαν διανύσματα αλλά είναι αμετάβλητα ως προς χωρικούς αντικατοπτρισμούς $(\mathrm{X} \to -\mathrm{X}, \mathrm{Y} \to -\mathrm{Y}, \mathrm{Z} \to -\mathrm{Z})$

Πίνακας περιστροφής

- Ο πίνακας U εξαρτάται εν γένει από τον χρόνο και έχουμε δει ότι: $\vec{r} = \sum_i r_i \vec{e}_i = \sum_i r_i' \vec{e}_i'$
- Η ταχύτητα επομένως του σημείου με διάνυσμα θέσης $\vec{r}$

$$\dot{\vec{r}} = \sum_i \dot{r}_i' \vec{e}_i'$$ τα $\vec{e}_i'$ είναι σταθερά και δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο

- Αλλά αν προσπαθήσω να γράψω την ταχύτητα του $\vec{r}$ στο περιστρεφόμενο σύστημα τα $\vec{e}_i$ δεν είναι σταθερά και μεταβάλλονται με τον χρόνο
- Η χρονική παράγωγος του $\vec{r}$ θα αποτελείται από δυο τμήματα:

$$\dot{\vec{r}} = \sum_i \dot{r}_i \vec{e}_i + \sum_i r_i \dot{\vec{e}}_i$$

- Ποια η χρονική παράγωγος των $\dot{\vec{e}}_i$? $\dot{\vec{e}}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_j U_{ij}\vec{e}_j'\right) = \sum_j \dot{U}_{ij}\vec{e}_j'$

$$\Rightarrow \dot{\vec{e}}_i = \sum_j \dot{U}_{ij}\left(\sum_k U^{-1}_{jk}\vec{e}_k\right) \Rightarrow \dot{\vec{e}}_i = \sum_j \left(\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\right)_{ij}\vec{e}_j$$

- Επομένως καταλήγουμε ότι: $\dot{\vec{r}} = \sum_i \dot{r}_i \vec{e}_i + \sum_{ij} r_i \left(\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\right)_{ij}\vec{e}_j$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = \sum_i \left[\dot{r}_i + \boxed{\left(\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\right)_{ji} r_j}\right]\vec{e}_j$$

Διόρθωση για το γεγονός ότι οι άξονες συντεταγμένων δεν είναι σταθεροί χρονικά

Πίνακας περιστροφής

- Είδαμε ότι στο περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων: $\dot{\vec{r}} = \sum_i \left[\dot{r}_i + \left(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \right)_{ji} r_j \right] \vec{e}_j$
- Ορίζουμε τον πίνακα: $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}}$ ο οποίος είναι αντισυμμετρικός
  - **A** αντισυμμετρικός γιατί: $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{1} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \right) = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} + \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}} = 0$

$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \left(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \right)^{\mathrm{T}} \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{U}^{\mathrm{T}} \right)^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}} \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}}$$

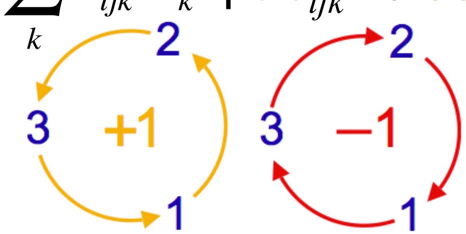
  - Επομένως: $\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} + \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \Rightarrow$ **A** αντισυμμετρικός
- **A** είναι ένας 3 × 3 αντισυμμετρικός πίνακας
  - Καθορίζεται πλήρως με τον ορισμό των στοιχείων πάνω από την κύρια διαγώνιο. Επομένως τα στοιχεία α_{12}, α_{13} και α_{23}

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ & 0 & -\omega_1 \\ & & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{αντισυμμετρικός}} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Χρησιμοποιώντας φορμαλισμό δεικτών: $A_{jk} = \sum_k \varepsilon_{ijk} \omega_k$ με ε_{ijk} το σύμβολο Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k) = (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \\ -1 & (i,j,k) = (1,3,2),(3,2,1),(2,1,3) \\ 0 & \end{cases}$$



Ταχύτητα σε περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων

- Είδαμε ότι μπορούμε να γράψουμε: $\mathrm{A}_{ij} = \sum_k \varepsilon_{ijk}\omega_k$
- Τα ω_i είναι οι συνιστώσες του διανύσματος: $\vec{\omega} = \sum_i \omega_i \vec{e}_i$ γωνιακή ταχύτητα
- Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να γράψουμε τις ποσότητες:

$$\dot{\vec{e}}_i = \sum_j \left(\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\right)_{ij}\vec{e}_j \quad \text{και} \quad \dot{\vec{r}} = \sum_i \left[\dot{r}_i + \left(\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\right)_{ji} r_j\right]\vec{e}_j$$

$$\dot{\vec{e}}_i = \sum_j \mathrm{A}_{ij}\vec{e}_j = -\sum_{jk}\varepsilon_{ijk}\omega_k\vec{e}_j$$

  - Από το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων: $\vec{e}_k \times \vec{e}_j = -\varepsilon_{kji}\vec{e}_i = \varepsilon_{jki}\vec{e}_i$

$$\Bigg\} \quad \dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega}\times\vec{e}_i$$

- Το διάνυσμα της ταχύτητας θα γραφεί: $\dot{\vec{r}} = \sum_i \left[\dot{r}_i + \mathrm{A}_{ji} r_j\right]\vec{e}_j \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \sum_i \left[\dot{r}_i + r_i\vec{\omega}\times\right]\vec{e}_i$
- Η παραπάνω απόδειξη ισχύει εν γένει, για οποιοδήποτε διάνυσμα **w** και την παράγωγό του ως προς χρόνο σε περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς:

$$\vec{w} = \sum_i w_i\vec{e}_i = \sum_i w_i'\vec{e}_i'$$

$$\dot{\vec{w}} = \sum_i \left(\dot{w}_i + w_i\vec{\omega}\times\right)\vec{e}_i$$

➡ Άθροισμα δυο όρων, ο ένας εκ των οποίων είναι κάθετος στα διανύσματα $\vec{e}_i$ και ίσος με $w_i\vec{\omega}\times\vec{e}_i$

Επιτάχυνση σε περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς

- Θεωρήστε ένα σώμα με θέση που δίνεται από το διάνυσμα: $\vec{r} = \sum_i r_i \vec{e}_i$
- Η ταχύτητά του θα είναι: $\dot{\vec{r}} = \sum_i \left(\dot{r}_i + r_i \vec{\omega} \times \ \right) \vec{e}_i \qquad (1)$
- Η επιτάχυνση του σώματος (στο περιστρεφόμενο σύστημα) προκύπτει από την παράγωγο της (1): $\vec{a} = d\left(\dot{\vec{r}}\right)/dt$
  - Είδαμε όμως: $\dot{\vec{w}} = dw/dt = \sum_i \left(\dot{w}_i + w_i \vec{\omega} \times\right) \vec{e}_i$ και θεωρήστε ότι: $w_i = \dot{r}_i + r_i \vec{\omega} \times$
  - Επομένως θα έχουμε: $\vec{a} = \sum_i \left[\frac{d}{dt}\left(\dot{r}_i + r_i \vec{\omega} \times\right) + \left(\dot{r}_i + r_i \vec{\omega} \times \ \right) \vec{\omega} \times \ \right] \vec{e}_i$

$$\Rightarrow \vec{a} = \sum_i \left[\ddot{r}_i \ \ + \dot{r}_i \vec{\omega} \times \ \ + r_i \dot{\vec{\omega}} \times \ \ + \dot{r}_i \vec{\omega} \times \ + \dot{r}_i \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \right] \ \vec{e}_i$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \sum_i \left[\ddot{r}_i + 2\dot{r}_i \vec{\omega} \times \ \ + \dot{r}_i \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \ + r_i \dot{\vec{\omega}} \times \right] \vec{e}_i$$

διάνυσμα επιτάχυνσης σε περιστρεφόμενο σύστημα

- Η έκφραση αυτή της επιτάχυνσης οδηγεί στην εισαγωγή «φαινομενικών» δυνάμεων

2ος Νόμος του Newton σε περιστρεφόμενο σύστημα

- Θεωρούμε δυο νέα διανύσματα ορισμένα στο περιστρεφόμενο σύστημα (αγνοώντας τις διορθώσεις από την περιστροφή των αξόνων)

$$\vec{v}_{\sigma\omega\mu.} = \sum_i \dot{r}_i \vec{e}_i \quad \text{και} \quad \vec{a}_{\sigma\omega\mu.} = \sum_i \ddot{r}_i \vec{e}_i$$

(προσοχή: δεν είναι ταχύτητα ή επιτάχυνση)

- Με τα παραπάνω διανύσματα, το διάνυσμα της επιτάχυνσης στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς μπορεί να γραφεί:

$$\vec{a} = \sum_i \left[\ddot{r}_i + 2\dot{r}_i \vec{\omega}\times \ + r_i \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\right) + r_i \dot{\vec{\omega}}\times \right] \vec{e}_i$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{\sigma\omega\mu.} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{\sigma\omega\mu.} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$$

επιτάχυνση σε περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων

- Επομένως για περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς, οι εξισώσεις κίνησης είναι:
  - Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$
  - Σύμφωνα με την έκφραση της πραγματικής επιτάχυνσης α συναρτήσει της $\alpha_{\sigma\omega\mu.}$ εμφανίζονται 3 νέοι όροι:

$\vec{a}_1 = \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$ φυγόκεντρος επιτάχυνση

$\vec{a}_2 = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{\sigma\omega\mu.}$ Coriolis επιτάχυνση

$\vec{a}_3 = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$ Euler επιτάχυνση

συνεπίπεδη της κίνησης και κάθετη στη φυγόκεντρο. Εμφανίζεται λόγω μεταβολής της ω

Μη αδρανειακές δυνάμεις με φορμαλισμό Lagrange

- Θα θέλαμε να βρούμε τις μη αδρανειακές δυνάμεις χρησιμοποιώντας τον φορμαλισμό Lagrange
- Η Lagrangian ενός σώματος που κινείται σε ένα δυναμικό, γράφεται:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{2} - V(r) \qquad (1)$$

- Στο στατικό σύστημα συντεταγμένων θα γραφεί:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}'^{2} - V(r) \Rightarrow L = \frac{1}{2} m \sum_i \dot{r}_i' \dot{r}_i' - V(r) \qquad (2)$$

- Οι εξισώσεις κίνησης χρησιμοποιώντας τις στατικές συντεταγμένες βρίσκονται από τις εξισώσεις Euler-Lagrange και την μορφή της Lagrangian από την (2)
- Ποια θα ήταν η μορφή των εξισώσεων κίνησης χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες του περιστρεφόμενου συστήματος
- Θυμηθήτε από πριν ότι: $r_i' = \sum_j U_{ij}^{-1} r_j = \sum_j U_{ij}^{T} r_j \Rightarrow r_i' = \sum_j U_{ji} r_j$ (3)
- Ενώ η παράγωγος του r ως προς t θα είναι: $\dot{r}_i' = \sum_j \left(\dot{U}_{ji} r_j + U_{ji} \dot{r}_j \right)$ (4)
- Με βάση τις εξισώσεις (3) και (4) μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην (2) και τις εξισώσεις E-L και να χρησιμοποιήσουμε τα r_i σαν τις δυναμικές μεταβλητές

Μη αδρανειακές δυνάμεις με φορμαλισμό Lagrange

- Παραλείποντας τους δείκτες θα μπορούσαμε να γράψουμε: $\dot{r} = \dot{\mathbf{U}}r + \mathbf{U}\dot{r}$
- Επομένως η Lagrangian θα γραφεί: $L \approx \frac{1}{2}m\left(\dot{\mathbf{U}}r + \mathbf{U}\dot{r}\right)\left(\dot{\mathbf{U}}r + \mathbf{U}\dot{r}\right) - V$

$$\Rightarrow L \approx \frac{1}{2}m\left(\dot{\mathbf{U}}\dot{\mathbf{U}}r^2 + \mathbf{U}\dot{\mathbf{U}}r\dot{r} + \mathbf{U}\mathbf{U}\dot{r}^2\right) - V$$ (παραλείποντας όρους x2)

- Η εξίσωση Euler-Lagrange: $\partial_t\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial L}{\partial r} \Rightarrow \partial_t\left(\mathbf{U}\dot{\mathbf{U}}r + \mathbf{U}\mathbf{U}\dot{r}\right) = \dot{\mathbf{U}}\dot{\mathbf{U}}r + \mathbf{U}\dot{\mathbf{U}}\dot{r} - V'$

$$\Rightarrow \dot{\mathbf{U}}\dot{\mathbf{U}}r + \mathbf{U}\ddot{\mathbf{U}}r + \underbrace{\mathbf{U}\dot{\mathbf{U}}}_{\mathbf{A}}\dot{r} + \mathbf{U}\mathbf{U}\ddot{r} = V'$$

$\mathbf{A}\dot{r}$

φυγόκεντρος

Euler

$\vec{\omega}\times\dot{r}$ Coriolis

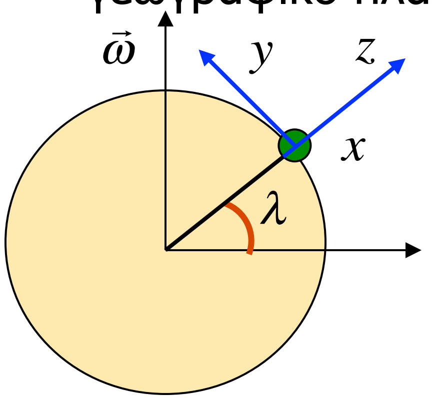
$\ddot{r}$ επιτάχυνση σώματος

- Άσκηση: Προσπαθήστε να λύσετε το παραπάνω με τους σωστούς δείκτες! Σε κάποιους από τους όρους θα πρέπει να θυμηθείτε την συνθήκη ορθοκανονικότητας (π.χ. ο όρος $\mathbf{U}\mathbf{U}\ddot{r}$ που δίνει $\ddot{r}$)

Εφαρμογές

- Το κλασικό παράδειγμα ενός περιστρεφόμενου συστήματος είναι η Γη:
  - Η γωνιακή ταχύτητα είναι: $\omega = \dfrac{2\pi}{24\times 3600} s^{-1} \approx 7\times 10^{-5}\, rad/\sec$

- Μια μάζα η οποία κρέμεται στην άκρη ενός εκκρεμούς βρισκόμενο σε γεωγραφικό πλάτος λ :



- Οι περιστρεφόμενες συντεταγμένες συντεταγμένες είναι:

z : κατακόρυφος άξονας
y : προς τον βόρρειο πόλο
x : «ανατολικά»

} άξονες συντεταγμένων σώματος

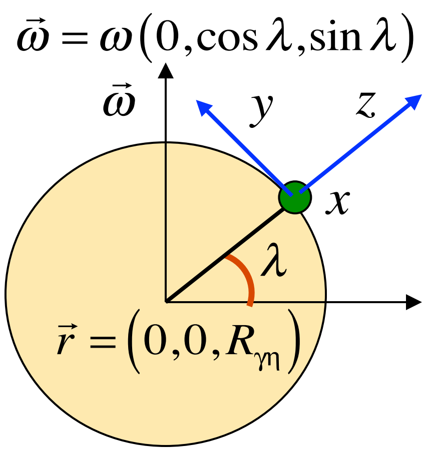
- Η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ στο σύστημα συντεταγμένων του σώματος θα είναι:

$$\vec{\omega} = \omega\left(0, \cos\lambda, \sin\lambda\right)$$

- Θεωρούμε ότι η μάζα του εκκρεμούς έχει διάνυσμα θέσης $\vec{r} = \left(0, 0, R_{\gamma\eta}\right)$ (σε συντεταγμένες σώματος):

Εφαρμογές – Κίνηση στην επιφάνεια της Γης

- Ας θεωρήσουμε αρχικά ότι η μάζα δεν κινείται (οπότε η δύναμη Coriolis είναι 0)



- Χρειάζεται επομένως να υπολογίσουμε την φυγόκεντρο δύναμη
  - Η δύναμη της βαρύτητας είναι: $\vec{F}_{\beta\alpha\rho.} = -mg\hat{z}$
  - Η φυγόκεντρος δύναμη είναι: $\vec{F}_{\varphi\upsilon\gamma o\kappa.} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\varphi\upsilon\gamma o\kappa.} = -m\vec{\omega} \times (\omega R \cos\lambda \hat{x})$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\varphi\upsilon\gamma o\kappa.} = -m\omega^2 R(-\cos^2\lambda \hat{z} + \sin\lambda\cos\lambda \hat{y})$$

- Η φυγόκεντρος δύναμη αποτελείται από δυο όρους:
  - Η μάζα θα αποκλίνει προς την $-y$-διεύθυνση («νότια»): $\dfrac{\omega^2 R}{g_{45^o}} \approx 0.3\%$
    - Το αποτέλεσμα «χάνεται» στους πόλους και ισημερινό
  - Η βαρυτική δύναμη «ελαττώνεται» κατά ένα ποσοστό: $\dfrac{\omega^2 R}{g_{45^o}} \approx 0.3\%$
    - Το αποτέλεσμα «χάνεται» στους πόλους ($cos\lambda = 0$) και γίνεται μέγιστο στον ισημερινό

Εφαρμογές – Παράδειγμα δύναμης Coriolis

- Ας θεωρήσουμε ότι αφήνουμε μια μάζα να πέσει από την κορυφή ενός κτιρίου
- Πως επιρεάζει η δύναμη Coriolis την κίνηση του σώματος?
  - Το αποτέλεσμα της δύναμης αυτής θα είναι πολύ μικρό
  - Σε χαμηλότερη τάξη μεγέθους, η ταχύτητα θα είναι: $\vec{\upsilon}_o = -gt\hat{z}$
    (το σώμα αφέθηκε την στιγμή t=0, να πέσει από το σημείο x=y=0, z=z):
  - Η δύναμη Coriolis θα είναι: $\vec{F}_{Coriolis} = -2\vec{\omega}\times\vec{v} = -2\vec{\omega}\times\vec{v}_0 + \cdots$

$$\Rightarrow \vec{F}_{Coriolis} = -2\omega(0,\cos\lambda,\sin\lambda)\times(-gt\hat{z}) \Rightarrow \vec{F}_{Coriolis} = -2\omega\cos\lambda(-gt)\hat{x}$$

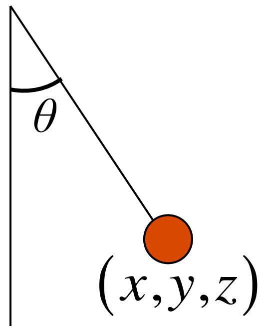
  - Η δύναμη αυτή θα είναι ($1^η$ τάξη αναπτύγματος της επιτάχυνσης του σώματος):

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow \vec{F}_{Coriolis} = m\dot{\vec{v}}_1 = 2m\omega gt\cos\lambda\hat{x}\\ &\text{✧ Όπου: } \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \cdots\end{aligned}\right\} \vec{v}_1 = \omega gt^2\cos\lambda\hat{x}$$

  - Η απόκλιση της θέσης του σώματος είναι: $d\vec{r} = \int \vec{v}_1\,dt = \dfrac{\omega gt^3\cos\lambda}{3}\hat{x}$
  - Το σώμα αυτό θα αποκλίνει «ανατολικά»
  - Στο νότιο ημισφαίριο, λ<0, το σώμα θα αποκλίνει «δυτικά»
  - Για ένα 10-όροφο κτίριο η απόκλιση είναι ~5mm

Εφαρμογές – Το εκκρεμές Foucault

- Έχουμε ένα σφαιρικό εκκρεμές



- Μπορούμε να γράψουμε την Lagrangian του συστήματος σε σφαιρικές συντεταγμένες όπως έχουμε κάνει πολλές φορές
- Αλλά στην περίπτωση αυτή είναι καλύτερο να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των πολ/στων Lagrange και να αφήσουμε τα x, y, z σαν ανεξάρτητες συντεταγμένες
- Η Lagrangian θα είναι: $L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2\right) - mgz'$ (1)
  - σε «αδρανειακές» συντεταγμένες και θα πρέπει να μετατρέψουμε σε συντεταγμένες σώματος (περιστροφικές)
- Η ταχύτητα «σώματος», $v_{\sigma\omega\mu.}$ θα είναι: $\vec{v}_{\alpha\delta\rho\alpha\nu.} = \vec{v}_{\sigma\omega\mu.} + \vec{\omega}\times\vec{r}$
- Άρα $\vec{v}^2_{\alpha\delta\rho\alpha\nu.} = \vec{v}_{\alpha\delta\rho\alpha\nu.}\cdot\vec{v}_{\alpha\delta\rho\alpha\nu.}$

  $\Rightarrow \vec{v}^2_{\alpha\delta\rho\alpha\nu.} = \vec{v}^2_{\sigma\omega\mu.} + \vec{v}_{\sigma\omega\mu.}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) + (\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{v}_{\sigma\omega\mu.} + (\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})$ (2)
- Αλλά $\vec{\omega} = \omega(0,\cos\lambda,\sin\lambda)$ ενώ είδαμε ότι: $\omega \sim 7\times 10^{-5} \Rightarrow (\vec{\omega}\times\vec{r})^2 \approx 0$ (3)
- Ο όρος $\vec{v}^2_{\sigma\omega\mu.} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ (4)
- Τέλος ο όρος $\vec{v}_{\sigma\omega\mu.}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})$ μπορεί να γραφεί $\vec{v}_{\sigma\omega\mu.}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \vec{\omega}\cdot\left(\vec{r}\times\vec{v}_{\sigma\omega\mu.}\right)$

  $= \vec{\omega}\cdot\left[(y\dot{z}-z\dot{y})\hat{x} - (x\dot{z}-z\dot{x})\hat{y} + (x\dot{y}-y\dot{x})\hat{z}\right] = -\omega_y(x\dot{z}-z\dot{x}) + \omega_z(x\dot{y}-y\dot{x})$ (5)

Το εκκρεμές Foucault

- Συλλέγοντας τους όρους από τις εξισώσεις (3), (4) και (5) η (2) γίνεται:

$$\dot{x}'^2+\dot{y}'^2+\dot{z}'^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2+2\omega\cos\lambda\left(\dot{x}z-\dot{z}x\right)+2\omega\sin\lambda\left(\dot{y}x-\dot{x}y\right)+\cancelto{0}{O\left(\omega^2\right)}$$

- Υποθέτουμε ότι το z είναι ~ σταθερό:
  - Τότε ο όρος της Lagrangian $\dot{z}^2=0$
  - Επίσης μπορούμε να αγνοήσουμε τον όρο: $2\omega\cos\lambda\left(\dot{x}z-\dot{z}x\right)$
    - γιατί ο 2ος όρος θα είναι ~0
    - ενώ ο 1ος όρος γράφεται σαν: $\dot{x}z=\dfrac{d(xz)}{dt}$ που είναι ολικό διαφορικό

    και η δυναμική δεν αλλάζει αν προσθέσουμε στην Lagrangian ολικό διαφορικό

- Επίσης: $z^2=l^2-x^2-y^2\Rightarrow z^2=l^2\left(1-\dfrac{x^2+y^2}{l^2}\right)\Rightarrow z=l\sqrt{\left(1-\dfrac{x^2+y^2}{l^2}\right)}$

$$\Rightarrow z\approx l\left(1-\frac{x^2+y^2}{2l^2}\right)\Rightarrow z\approx l-\frac{x^2+y^2}{2l}$$

- Επομένως η Lagrangian γίνεται: $L=\dfrac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+m\omega\sin\lambda\left(\dot{y}x-\dot{x}y\right)-mg\dfrac{x^2+y^2}{2l}$

- Μετά τις απλουστεύσεις αυτές μπορούμε να υπολογίσουμε τις εξισώσεις κίνησης:

Το εκκρεμές Foucault – εξισώσεις κίνησης

- Βρήκαμε ότι την Lagrangian: $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + m\omega\sin\lambda\left(\dot{y}x - \dot{x}y\right) - mg\frac{x^2+y^2}{2l}$

- Οι εξισώσεις θα είναι: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\dot{x} - m\omega\sin\lambda y\right) = m\ddot{x} - m\omega\sin\lambda\dot{y} \\
&\frac{\partial L}{\partial x} = m\omega\sin\lambda\dot{y} - mg\frac{x}{l}
\end{aligned}\right\} \ddot{x} + \frac{g}{l}x = 2\omega\sin\lambda\dot{y}$$

- Ανάλογα για το y: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial y}$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\dot{y} + m\omega\sin\lambda x\right) = m\ddot{y} + m\omega\sin\lambda\dot{x} \\
&\frac{\partial L}{\partial y} = -m\omega\sin\lambda\dot{x} - mg\frac{y}{l}
\end{aligned}\right\} \ddot{y} + \frac{g}{l}y = -2\omega\sin\lambda\dot{x}$$

- Οι δυο εξισώσεις μοιάζουν με ένα ζεύγος αρμονικών ταλαντωτών

Το εκκρεμές Foucault – εξισώσεις κίνησης

- Βρήκαμε ότι οι εξισώσεις κίνησης είναι απλά ένα ζεύγος αρμονικών ταλαντωτών:

$$\ddot{x}+\frac{g}{l}x=2\omega\sin\lambda\dot{y} \qquad \ddot{y}+\frac{g}{l}y=-2\omega\sin\lambda\dot{x}$$

- Αν βρισκόμασταν στον ισημερινό: $\sin\lambda=0$ οπότε: $\ddot{x}+\frac{g}{l}x=0$ και $\ddot{y}+\frac{g}{l}y=0$
- Για διαφορετικές θέσεις, οι εξισώσεις λένε ότι έχουμε κάποια «πηγή» για τους αρμονικούς ταλαντωτές:
- Οι δυο αρμονικοί ταλαντωτές είναι συζευγμένοι
- Ένα trick: Θεωρήστε την μιγαδική ποσότητα $\zeta\equiv x+iy$
- Πολ/ζουμε την 2η εξίσωση με i και την προσθέτουμε στην 1η εξίσωση:

$$\ddot{x}+i\ddot{y}+\frac{g}{l}(x+iy)=2\omega\sin\lambda(\dot{y}-i\dot{x}) \Rightarrow \ddot{\zeta}+\frac{g}{l}\zeta=-i2\omega\sin\lambda\dot{\zeta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\zeta}+\frac{g}{l}\zeta+i2\omega\sin\lambda\dot{\zeta}=0$$ αρμονικός ταλαντωτής με μιγαδική απόσβεση

- Οι λύσεις αυτές ενός αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση αλλά τώρα $Q\to iQ$
- Επομένως θα έχουμε λύσεις της μορφής: $\zeta=e^{iat}$

Το εκκρεμές Foucault – Λύσεις εξίσωσης κίνησης

- Ανάγαμε το πρόβλημα των δυο συζευγμένων ταλαντώσεων σε x-y, σε μια αποσβένουσα ταλάντωση με μιγαδικό παράγοντας ποιότητας

$$\ddot{\zeta} + \frac{g}{l}\zeta + i2\omega \sin\lambda \dot{\zeta} = 0$$ με λύσεις της μορφής: $\zeta = e^{iat}$

- Αντικατάσταση στην διαφορική εξίσωση δίνει: $-a^2 + \frac{g}{l} - 2\omega a \sin\lambda = 0$
- Υποθέτουμε ότι ο 2ος όρος είναι αρκετά μεγαλύτερος του 3ου όρου, οπότε οι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης γίνονται:

$$a \approx -(\omega \sin\lambda) \pm \sqrt{\frac{g}{l}}$$

- Επομένως $\zeta = x + iy = A \times e^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t - i\omega \sin\lambda t}$ όπου Α μιγαδική σταθερά
  - Η σταθερά Α περιγράφει την αρχική διεύθυνση της ταλάντωσης
    Αν Α πραγματική η ταλάντωση είναι στην x-διέυθυνση, αν είναι μιγαδική στην y
  - Ο όρος του sinλ προκαλεί μικρή αλλαγή στην μιγαδική σταθερά Α
    - Αν για t=0 ήταν στην x-διεύθυνση μετά από χρόνο t θα έχει αλλάξει h γωνια το x-y επίπεδο
- Το εκκρεμές θα ταλαντώνεται στο x-y επίπεδο αλλά ο άξονας περιστροφής θα περιστρέφεται με περίοδο: $T = 2\pi / (\omega \sin\lambda)$