Εκφυλισμένες ιδιοτιμές

- Υποθέσαμε ότι : $\omega_k \neq \omega_j \quad j \neq k$
- Τι ακριβώς συμβαίνει όταν έχουμε εκφυλισμών των ιδιοτιμών?
- Στην περίπτωση αυτή πολλαπλές ιδιοτιμές αντιστοιχούν σε πολλαπλά ιδιοδιανύσματα
- Η χαρακτηριστική εξίσωση των ιδιοτιμών γράφεται στην περίπτωση αυτή:

$$\det\left|\mathbf{U}'' - \omega^2\mathbf{T}\right| = \left(\omega^2 - \kappa^2\right)^m f\left(\omega^2\right) = 0 \quad \text{όπου: } \omega = \kappa \quad \text{με m-εκφυλισμό}$$

- Η εξίσωση ιδιοδιανυσμάτων : $\left(\mathbf{U}'' - \kappa^2\mathbf{T}\right)\boldsymbol{a}_j = 0$ όπου j=1,...,m ιδιοδιανύσματα
- Αλλά ο γραμμικός συνδυασμός ιδιοδιανυσμάτων είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα: $c_j\boldsymbol{a}_j$
- Είναι επίσης δυνατόν να βρεθεί μια ομάδα από m ορθογώνιων διανυσμάτων

Εκφυλισμένες ιδιοτιμές – Η συνταγή

- Για μια m-εκφυλισμένως ιδιοτιμή με m-ιδιοδιανύσματα
- Αρχικά κανονικοποιούμε ένα ιδιοδιάνυσμα χρησιμοποιώντας: $\boldsymbol{a}_1^T \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{a}_1$
- Κατόπιν χρησιμοποιούμε το ιδιοδιάνυσμα **α**$_2$ και το μετασχηματίζουμε ως:

$$\boldsymbol{a}_2' = \boldsymbol{a}_2 - \left(\boldsymbol{a}_1^T \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{a}_2\right) \cdot \boldsymbol{a}_1$$

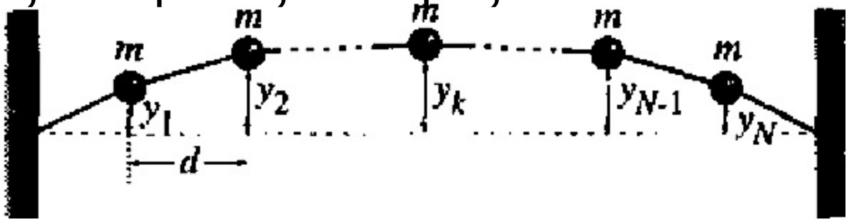
  - Έτσι ικανοποιείται η συνθήκη ορθοκανονικότητας: $\boldsymbol{a}_1^T \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{a}_2' = 0$
- Κανονικοποιούμε το ιδιοδιάνυσμα **α′**$_2$: $\boldsymbol{a}_2'^T \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{a}_2'$
- Κατόπιν χρησιμοποιούμε το ιδιοδιάνυσμα **α**$_3$ και το μετασχηματίζουμε ως:

$$\boldsymbol{a}_3' = \boldsymbol{a}_3 - \left(\boldsymbol{a}_1^T \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{a}_3\right) \cdot \boldsymbol{a}_1 - \left(\boldsymbol{a}_2'^T \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{a}_3\right) \cdot \boldsymbol{a}_2'$$

  - Ο μετασχηματισμός ικανοποιεί τις συνθήκες: $\boldsymbol{a}_2'^T \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{a}_3' = 0$ και $\boldsymbol{a}_1^T \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{a}_3' = 0$
- Συνεχίζουμε την διαδικασία για τα υπόλοιπα ιδιοδιανύσματα
- Η διαδικασία αυτή οδηγεί σίγουρα στον σχηματισμό του πίνακα **A**: $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}$

Συζευγμένες ταλαντώσεις – Υλικά σημεία σε χορδή

- Θεωρήστε Ν υλικά σημεία μάζας m, τα οποία ισαπέχουν (απόσταση d μεταξύ δυο γειτονικών σημείων) και συνδέονται με αβαρή χορδή που έχει τάση τ
- Τα άκρα της χορδής είναι ακλόνητα θέτοντας συνοριακές συνθήκες



- Το πρόβλημα ουσιαστικά οδηγεί στην περιγραφή της ταλάντωσης συνεχούς μέσου, διάδοσης κυμάτων μέσω συνεχούς μέσου και δονήσεις ενός κρυσταλικού πλέγματος όπως στα στερεά
- Περιοριζόμαστε μόνο σε εγκάρσιες κινήσεις των μαζών
- Έστω y_k η μετατόπιση του σημείου k
- Η κινητική ενέργεια θα είναι: $T = \frac{1}{2} m\dot{y}_k^2$ (1)
- Θεωρώντας την επιμήκυνση της χορδής, Δl, μεταξύ δυο υλικών σημείων:

$$\Delta l = \sqrt{d^2 + \left(y_{k+1} - y_k\right)^2} - d \Rightarrow \Delta l \simeq d + \frac{1}{2d}\left(y_{k+1} - y_k\right)^2 - d \Rightarrow \Delta l = \frac{1}{2d}\left(y_{k+1} - y_k\right)^2$$

- Για τάση, τ, η δυναμική ενέργεια στο τμήμα αυτό της χορδής θα είναι:

$$U_{(k+1,k)} = \tau \Delta l = \frac{\tau}{2d}\left(y_{k+1} - y_k\right)^2 \qquad (2)$$

Υλικά σημεία σε χορδή

- Για ένα τμήμα της χορδής έχουμε: $T = \frac{1}{2} m \dot{y}_k^2$ και $U_{(k+1,k)} = \frac{\tau}{2d}\left(y_{k+1} - y_k\right)^2$
- Για όλο το σύστημα επομένως: $T = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2} m \dot{y}_k^2$ και $U = \sum_{k=1}^{N} \frac{\tau}{2d}\left(y_{k+1} - y_k\right)^2$

$$\Rightarrow U = \frac{\tau}{2d}\sum_{k=1}^{N}\left(y_{k+1} - y_k\right)^2 \Rightarrow U = \frac{K}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(y_{k+1} - y_k\right)^2 \text{ όπου: } K = \frac{\tau}{d}$$

με συνοριακές συνθήκες: $y_0 = y_{N+1} = 0$

- Η Lagrangian θα είναι: $L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[m\dot{y}_k^2 - K\left(y_{k+1} - y_k\right)^2\right]$

k διαφορικές εξισώσεις

- και οι ΕΟΚ: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_k}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial y_k}\right) = 0$ δίνουν: $m\ddot{y}_k = -K\left(y_k - y_{k-1}\right) + K\left(y_{k+1} - y_k\right)$

π.χ. για δυο σώματα: $L = \frac{1}{2} m\left(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2\right) - K\left(\left(y_1 - \overset{0}{y_0}\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2\right)$

οπότε: $m\ddot{y}_2 = -K\left(y_2 - y_1\right) + K\left(\underset{0}{y_3} - y_2\right)$ και: $m\ddot{y}_1 = -Ky_1 + K\left(y_2 - y_1\right)$

- Υποθέτουμε ότι τα y_k κινούνται αρμονικά και εξετάζουμε την λύση: $y_k = a_k \cos\omega t$ όπου a_k το πλάτος ταλάντωσης του k-υλικού σημείου
- Αντικατάσταση στις διαφορικές εξισώσεις δίνει: $-m\omega^2 a_k = K\left(a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}\right)$
- που περιλαμβάνει τα άκρα της χορδής όπου: $a_0 = a_{N+1} = 0$

Υλικά σημεία σε χορδή

- Στην συνηθισμένη μορφή πινάκων:

$$\mathbf{T}=\frac{m}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 1 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 1 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{U}''=K\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & \cdots\\ 1 & 2 & -1 & \cdots\\ 0 & -1 & 2 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$$

- Η χαρακτηριστική εξίσωση των ιδιοτιμών θα είναι: $\det\left|-\omega^2\mathbf{T}+\mathbf{U}''\right|=0$

$$\det\begin{vmatrix}2K-\frac{m\omega^2}{2} & -K & 0 & \cdots\\ K & 2K-\frac{m\omega^2}{2} & -K & \cdots\\ 0 & -K & 2K-\frac{m\omega^2}{2} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{vmatrix}=0 \qquad N \text{ λύσεις για } \omega$$

- Αντί να λύσουμε την ορίζουσα, μπορούμε να δουλέψουμε με την εξίσωση:

$-m\omega^2 a_k = K\left(a_{k-1}-2a_k+a_{k+1}\right)$ και υποθέτουμε ότι: $a_k = A\sin k\varphi$

- Αντικατάσταση: $-m\omega^2 A\sin\left(k\varphi\right)=KA\left(\sin\left(k\varphi-\varphi\right)-2\sin\left(k\varphi\right)+\sin\left(k\varphi+\varphi\right)\right)$

Υλικά σημεία σε χορδή

- Από την σχέση: $-m\omega^2 A\sin(k\varphi) = KA\left(\sin(k\varphi-\varphi) - 2\sin(k\varphi) + \sin(k\varphi+\varphi)\right)$
- Καταλήγουμε στην: $m\omega^2 = K(2-2\cos\varphi) \Rightarrow m\omega^2 = 4K\sin^2\frac{\varphi}{2}$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{4K}{m}\sin^2\frac{\varphi}{2} \Rightarrow \omega = 2\left(\frac{K}{m}\right)^{1/2}\sin\frac{\varphi}{2} \quad \Rightarrow \omega = 2\omega_0\sin\frac{\varphi}{2}$$

- Η αντικατάσταση για το πλάτος a_k: $a_k = A\sin k\varphi$ ικανοποιεί την συνθήκη $a_0=0$:
- Η παράμετρος φ υπολογίζεται από την άλλη συνοριακή συνθήκη, $a_{N+1}=0$

$a_{N+1} = A\sin\left[(N+1)\varphi\right] = 0 \quad \Rightarrow (N+1)\varphi = n\pi$ όπου n ακέραιος

- Έχοντας το φ, οι ιδιοσυχνότητες θα είναι: $\omega_n = 2\omega_0\sin\left(\frac{n\pi}{2N+2}\right)$
- Τα πλάτη των κανονικών ταλαντώσεων θα είναι: $a_k = A\sin\left(\frac{n\pi k}{N+1}\right)$
- Η κίνηση του συστήματος σε μια ιδιοσυχνότητα θα είναι: $y_k = A\sin\left(\frac{\pi nk}{N+1}\right)\cos\omega_n t$
- Στο όριο : $N\to\infty,\ \ \mathrm{d}\to 0 \Rightarrow d(N+1)\to l$ όπου l το μήκος της χορδής

αν επίσης $m\to 0,\ \ m/d=\rho$ τότε $\omega_n = 2\sqrt{\frac{\tau}{md}}\sin\left(\frac{n\pi d}{2l}\right) \Rightarrow \omega_n \approx \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$

Υλικά σημεία σε χορδή

- Θεωρώντας την απόσταση των σημείων από το ακλόνητο άκρος της χορδής: $x = kd$

$$y_k = A\sin\left(\frac{\pi n k}{N+1}\right)\cos\omega_n t = A\sin\left(\frac{\pi n (kd)}{(N+1)d}\right)\cos\omega_n t$$

- Η προηγούμενη σχέση καταλήγει:

$$y_k = A\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\omega_n t$$ εξίσωση στάσιμων κυμάτων

Μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς

- Μέχρι τώρα έχουμε χρησιμοποιήσει συστήματα αναφοράς όπως

$\left(x,y,z\right)$ καρτεσιανό

- όπου ο 2ος νόμος του Newton $\vec{F}=m\vec{a}$ έχει την μορφή: $\begin{cases} \ddot{x}=f\left(x,y,z\right) \\ \ddot{y}=q\left(x,y,z\right) \\ \ddot{z}=h\left(x,y,z\right) \end{cases}$

- Πολύ συχνά χρησιμοποιούνται συντεταγμένες οι οποίες κινούνται ως προς τις στατικές καρτεσιανές συντεταγμένες

- Αν οι εξισώσεις κίνησης του Newton έχουν και πάλι την μορφή $\begin{cases} \ddot{x}'=f \\ \ddot{y}'=q \\ \ddot{z}'=h \end{cases}$
  - το νέο σύστημα συντεταγμένων είναι «αδρανειακό»
  - Γιατί έτσι, ο 1ος νόμος του Newton σύμφωνα με τον οποίο ένα σώμα σε ηρεμία θα παραμείνει σε ηρεμία όταν δεν εφαρμόζονται δυνάμεις πάνω του εξακολουθεί να ισχύει
  - Για παράδειγμα ένα σύστημα συντεταγμένων με μορφή: $\vec{x}'=\vec{x}-\vec{\upsilon}t$

    είναι αδρανειακό γιατί: $\ddot{\vec{x}}'=\ddot{\vec{x}}$

- Σε διαφορετική περίπτωση το σύστημα συντεταγμένων είναι «μη αδρανειακό»

Μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς

- Οι νόμοι της φυσικής είναι ανεξάρτητοι από το σύστημα συντεταγμένων
  - Αλλάζει μόνο η μορφή των εξισώσεων κίνησης
  - Για παράδειγμα: επιταχυνόμενο σύστημα συντεταγμένων: $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{f}(t)$
    - Αν η συνάρτηση $f(t)$ γραμμική με t έχουμε και πάλι αδρανειακό σύστημα
    - Μια πολύπλοκη μορφή της $f(t)$ περιγράφει επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς
  - Έστω σύστημα συντεταγμένων που κινείται με σταθερή επιτάχυνση:

$$y' = y + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \ddot{y}' = \ddot{y} + a$$

  - Εισαγωγή φανταστικής δύναμης λόγω επιτάχυνσης του συστήματος αναφοράς
  - Η φανταστική δύναμη υπάρχει επειδή γράψαμε την εξίσωση κίνησης σε μη αδρανειακό σύστημα
  - Έστω στο παραπάνω παράδειγμα, ότι βρισκόμαστε στην επιφάνεια της γης
    - Όλα τα σώματα υπόκεινται στην σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας: $\ddot{y} = -g$
    - Επιλέγω ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με επιτάχυνση: $a = g$
      - Στο σύστημα αυτό επομένως: $\Rightarrow \ddot{y}' = 0$
  - Επομένως, η βαρυτική δύναμη στην επιφάνεια της γης μπορεί να αφαιρεθεί κάνοντας αλλαγή του συστήματος αναφοράς – Αρχή της ισοδυναμίας

Περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων

- Σημεία για ξεκαθάρισμα:
  - Η κίνηση συμμβαίνει σε κάποιο περιστρεφόμενο σώμα και παρατηρείται
    - Είτε ως προς σύστημα αναφοράς «καρφωμένο» στο περιστρεφόμενο σώμα
    - Είτε ως προς εξωτερικό σύστημα αναφοράς – «αδρανειακό»/χωρικό
  - Το πρόβλημα της περιγραφής της κίνησης χωρίζεται σε 3 μέρη
    - Πως μετασχηματίζουμε τις συνιστώσες ενός διανύσματος μεταξύ των δυο συστημάτων αναφοράς? (για καθορισμένη περιστροφή)
      - ✓ Η απάντηση εξαρτάται από τον σχετικό προσανατολισμό των αξόνων στα δυο συστήματα αναφοράς και όχι από το διάνυσμα
    - Πως μετασχηματίζουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου το οποίο είναι ακίνητο στο ένα σύστημα αναφοράς στις συντεταγμένες του άλλου συστήματος όταν ένα από τα δυο συστήματα περιστρέφεται ως προς το άλλο
    - Πως μετασχηματίζουμε τις χρονικές παραγώγους διανυσμάτων από το ένα σύστημα συντεταγμένων στο άλλο.
      - ✓ Ο ρυθμός μεταβολής στο περιστρεφόμενο σύστημα προέρχεται από:

        (α) ρυθμό μεταβολής των συνιστωσών του διανύσματος όπως γίνεται αντιληπτός στο ένα σύστημα και μετασχηματίζεται στο άλλο σύστημα

        (β) μεταβολή του μετασχηματισμού μεταξύ των δυο συστημάτων

Περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων

- Σημεία για προσοχή:
  - Το μέτρο ενός διανύσματος παραμένει σταθερό ανεξάρτητα του συστήματος που επιλέγουμε για να το περιγράψουμε $\vec{r}^{\,2} = \sum_k r_k^2 = \sum_k r_k'^2$
  - Το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων είναι αμετάβλητο από αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_k a_k b_k = \sum_k a_k' b_k'$
  - Για να δούμε τον ακριβή μετασχηματισμό συντεταγμένων
    - ✓ Επιλέξτε δυο συστήματα με ίδια αρχή που διαφέρουν κατά μια περιστροφή
    - ✓ Θεωρήστε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i'$ (προβολή του άξονα i στον άξονα i') και το $\sum_i \vec{r} \cdot \vec{e}_i'$ το οποίο γράφεται: $\sum_i \left(\sum_k r_k \vec{e}_k \right) \cdot \vec{e}_i' = \sum_{i,k} r_k \vec{e}_k \cdot \vec{e}_i'$

      Αναλυτικά:

$$\left.\begin{aligned} r_1' &= r_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1' + r_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1' + r_3 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1' \\ r_2' &= r_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2' + r_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2' + r_3 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2' \\ r_3' &= r_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3' + r_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3' + r_3 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \\ r_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1' & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1' & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1' \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2' & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2' & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2' \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3' & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3' & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

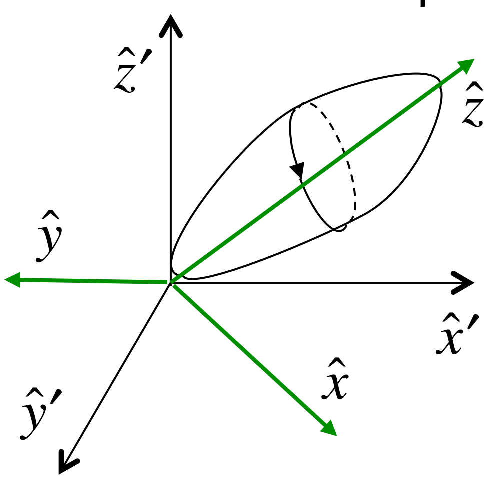
  - Ο παραπάνω μετασχηματισμός αποτελεί και τον ορισμό ενός διανύσματος
    - ✓ Αποφεύγεται η θεώρηση μέτρου και διεύθυνσης που απαιτούν καθορισμό συστήματος συντεταγμένων

Περιστρεφόμενα συστήματα αναφοράς

- Έστω ότι η θέση ενός σώματος ως προς στατικό καρτεσιανό σύστημα: $r_i' \quad i=1,2,3$
- ενώ η θέση ενός σώματος σχετικά με περιστρεφόμενο σύστημα είναι: $r_i \quad i=1,2,3$
- Το διάνυσμα θέσης επομένως στα δυο συστήματα αναφοράς θα είναι:

$\vec{r} = \sum_i r_i' \vec{e}_i'$ με $\vec{e}_i'$ τα διανύσματα των στατικών αξόνων συντεταγμένων

- Ανάλογα: $\vec{r} = \sum_i r_i \vec{e}_i$ με $\vec{e}_i$ τα διανύσματα των περιστρεφόμενων αξόνων
- Για κάποιο περιστρεφόμενο σώμα:



r_i' χωρικές συντεταγμένες = στατικές $\quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \\ r_3' \end{pmatrix}$

r_i συντεταγμένες σώματος = περιστρεφόμενες $\quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$

- Τι σημαίνει όμως ότι τα 2 συστήματα συντεταγμένων σχετίζονται μεταξύ τους μέσω περιστροφής?

Οι στατικοί άξονες, $\vec{e}_i'$, σχετίζονται με τους περιστρεφόμενους άξονες, $\vec{e}_i$, μέσω μιας γραμμικής σχέσης:

διάνυσμα με συνιστώσες διανύσματα $\quad \vec{e}_i = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\vec{e}_i} = \sum_j \boxed{U_{ij}} \boxed{\vec{e}_j'}$$

3×3 πίνακας μετασχηματισμού
πίνακας περιστροφής

Περιστρεφόμενα συστήματα αναφοράς

- Μπορούμε να γράψουμε: $\vec{e}_i = \sum_j U_{ij}\vec{e}'_j$
- Ο πίνακας περιστροφής U_{ij} εν γένει εξαρτάται από τον χρόνο t, άρα έχουμε $U_{ij}(t)$
- Η σύνδεση με τις συνιστώσες θέσης ενός σώματος μέσω του μετασχηματισμού:

$$\vec{r} = \sum_i r_i\vec{e}_i = \sum_{ij} U_{ij}\, r_i\, \vec{e}'_j = \left(\sum_{ij} U_{ji}\, r_j\right)\vec{e}'_i$$

  - και θέλουμε να το συγκρίνουμε με: $\vec{r} = \sum_i r^{i'}\vec{e}'_i$ εφόσον $\vec{r}$ είναι αμετάβλητο
- Η σχέση μεταξύ των «χωρικών» και «περιστροφικών» συντεταγμένων: $r'_i = \sum_j r_j U_{ji}$
  - και θα μπορούσαμε να το γράψουμε με την μορφή: $r'_i = \sum_j U^{\mathrm{T}}_{ij} r_j$
- Ο πίνακας U_{ij} έχει την ιδιότητα ότι τα $\vec{e}'_i$ και $\vec{e}_i$ είναι ορθοκανονική βάση: $\begin{cases}\vec{e}'_i\cdot\vec{e}'_j = \delta_{ij}\\ \vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \delta_{ij}\end{cases}$

  δηλαδή τα μετασχηματισμένα διανύσματα παραμένουν ορθοκανονικά

  Ορισμός περιστροφής
- Από την σχέση $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \delta_{ij}$ και την $\vec{e}_i = \sum_j U_{ij}\vec{e}'_j$ θα έχουμε:

$$\left(\sum_k U_{ik}\vec{e}_k{}'\right)\cdot\left(\sum_l U_{jl}\vec{e}_l{}'\right) = \delta_{ij} \Rightarrow \left(\sum_{k,l} U_{ik}U_{jl}\vec{e}_k{}'\cdot\vec{e}_l{}'\right) = \delta_{ij} \Rightarrow \left(\sum_{k,l} U_{ik}U_{jl}\delta_{kl}\right) = \delta_{ij}$$

Πίνακας περιστροφής

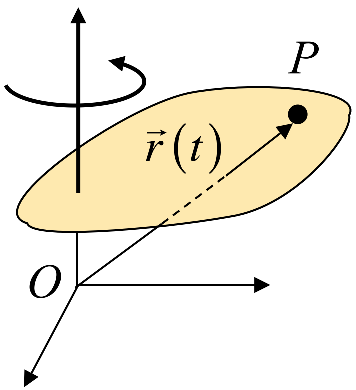
- Από την συνθήκη ορθοκανονικότητας έχουμε: $\sum_{k,l} U_{ik} U_{jl} \delta_{kl} = \sum_{k} U_{ik} U_{jk}$ (1)
- Ουσιαστικά είναι ο τύπος πολ/σμου πινάκων: $\sum_{j} A_{ij} \cdot B_{jk} = \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\right)_{ik}$
- Επομένως μπορούμε να γράψουμε την (1) σαν: $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{U}^{-1}$

  Δηλαδή, ο πίνακας περιστροφής είναι ορθοκανονικός
- Το σύνολο όλων των πινάκων περιστροφής για τους οποίους ισχύει $\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{U}^{-1}$ αποτελούν την οθογώνια ομάδα **O(3)**
  - Επειδή $\mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{U}^{-1} \Rightarrow \det \mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \det \mathbf{U}^{-1}$
  - αλλά $\det \mathbf{U} = \det \mathbf{U}^{T}$ και $\det \mathbf{U}^{-1} = 1/\det \mathbf{U}$

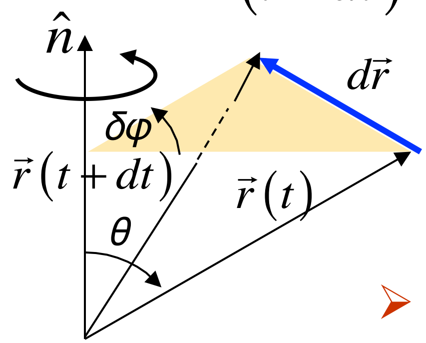
  $\Big\}\ \det \mathbf{U} = \pm 1$ Ορισμός ορθοκανονικού πίνακα
  - Το σύνολο των ορθογώνιων πινάκων με $\det \mathbf{U} = +1$ αποτελούν την ομάδα **SO(3)** στην QM θα δείτε τους πίνακες Pauli (πίνακες spin) που ανήκουν στην SO(3)
- Ο πίνακας U εξαρτάται εν γένει από τον χρόνο και έχουμε δει ότι: $\vec{r} = \sum_{i} r_i \vec{e}_i = \sum_{i} r_i \vec{e}_i'$

Απειροστές περιστροφές και γωνιακή ταχύτητα

- Θεωρήστε ότι έχετε ένα σώμα το οποίο περιστρέφεται ως προς άξονα:
- Θεωρήστε ότι ένα σημείο P πάνω στο σώμα με διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$



- Εξετάζουμε την κίνηση του P ως προς ακίνητο παρατηρητή
  - Πόσο μετακινείται το P σε χρόνο dt ?
  - Έστω $\vec{r}(t+dt) \equiv \vec{r}(t) + d\vec{r}$ όπου $d\vec{r}$ η απειροστή μετατόπιση



$|d\vec{r}| = r\sin\theta d\varphi$ και $d\vec{r} \perp d\vec{\varphi}$ $\quad d\vec{r} \perp \vec{r}$

- Χρησιμοποιώντας το διάνυσμα $\hat{n}$

$\hat{n}\times\vec{r} = |\vec{r}|\sin\theta$

- Επομένως: $d\vec{r} = d\varphi\hat{n}\times\vec{r}$
- Θεωρώντας: $d\vec{\varphi} \equiv d\varphi\hat{n}$

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi}\times\vec{r}$$

- Η σχέση $d\vec{r} = d\vec{\varphi}\times\vec{r}$ ισχύει μόνο για απειροστές περιστροφές
- Η ταχύτητα του σημείου P για συνεχή περιστροφή θα είναι: $\vec{u}_P = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}\times\vec{r}$
- Ορίζουμε γωνιακή ταχύτητα ω: $\vec{\omega} \equiv \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ οπότε: $\vec{u}_P = \vec{\omega}\times\vec{r}$
- Τα διανύσματα ω και dφ δεν είναι ακριβώς διανύσματα – αλλά ψευδο-διανύσματα
  - ψευδοδιανύσματα περιστρέφονται σαν διανύσματα αλλά είναι αμετάβλητα ως προς χωρικούς αντικατοπτρισμούς $(\mathrm{X}\to-\mathrm{X}, \mathrm{Y}\to-\mathrm{Y}, \mathrm{Z}\to-\mathrm{Z})$

Πίνακας περιστροφής

- Ο πίνακας U εξαρτάται εν γένει από τον χρόνο και έχουμε δει ότι: $\vec{r} = \sum_i r_i \vec{e}_i = \sum_i r_i' \vec{e}_i'$
- Η ταχύτητα επομένως του σημείου με διάνυσμα θέσης $\vec{r}$

$$\dot{\vec{r}} = \sum_i \dot{r}_i' \vec{e}_i'$$ τα $\vec{e}_i'$ είναι σταθερά και δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο

- Αλλά αν προσπαθήσω να γράψω την ταχύτητα του $\vec{r}$ στο περιστρεφόμενο σύστημα τα $\vec{e}_i$ δεν είναι σταθερά και μεταβάλλονται με τον χρόνο
- Η χρονική παράγωγος του $\vec{r}$ θα αποτελείται από δυο τμήματα:

$$\dot{\vec{r}} = \sum_i \dot{r}_i \vec{e}_i + \sum_i r_i \dot{\vec{e}}_i$$

- Ποια η χρονική παράγωγος των $\dot{\vec{e}}_i$? $\dot{\vec{e}}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_j U_{ij} \vec{e}_j' \right) = \sum_j \dot{U}_{ij} \vec{e}_j'$

$$\Rightarrow \dot{\vec{e}}_i = \sum_j \dot{U}_{ij} \left(\sum_k U^{-1}_{jk} \vec{e}_k \right) \Rightarrow \dot{\vec{e}}_i = \sum_j \left(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \right)_{ij} \vec{e}_j$$

- Επομένως καταλήγουμε ότι: $\dot{\vec{r}} = \sum_i \dot{r}_i \vec{e}_i + \sum_{ij} r_i \left(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \right)_{ij} \vec{e}_j$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = \sum_i \left[\dot{r}_i + \boxed{\left(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \right)_{ji} r_j} \right] \vec{e}_j$$

Διόρθωση για το γεγονός ότι οι άξονες συντεταγμένων δεν είναι σταθεροί χρονικά

Πίνακας περιστροφής

- Είδαμε ότι στο περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων: $\dot{\vec{r}} = \sum_i \left[\dot{r}_i + \left(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \right)_{ji} r_j \right] \vec{e}_j$
- Ορίζουμε τον πίνακα: $\mathbf{A} = \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}}$ ο οποίος είναι αντισυμμετρικός
  - **A** αντισυμμετρικός γιατί: $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} = \mathbf{1} \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \right) = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} + \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}} = 0$

$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \left(\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \right)^{\mathrm{T}} \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{U}^{\mathrm{T}} \right)^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}} \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}}$$

  - Επομένως: $\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{\mathrm{T}} + \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{U}}^{\mathrm{T}} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \Rightarrow$ **A** αντισυμμετρικός
- **A** είναι ένας 3 × 3 αντισυμμετρικός πίνακας

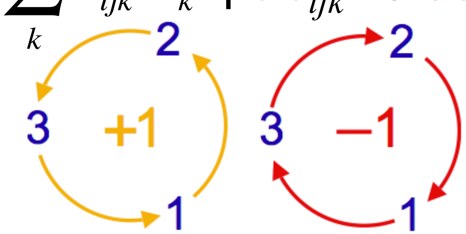
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

  - Καθορίζεται πλήρως με τον ορισμό των στοιχείων πάνω από την κύρια διαγώνιο
    Επομένως τα στοιχεία α_{12}, α_{13} και α_{23}

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ & 0 & -\omega_1 \\ & & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{αντισυμμετρικός}} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Χρησιμοποιώντας φορμαλισμό δεικτών: $A_{jk} = \sum_k \varepsilon_{ijk} \omega_k$ με ε_{ijk} το σύμβολο Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k) = (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \\ -1 & (i,j,k) = (1,3,2),(3,2,1),(2,1,3) \\ 0 & \end{cases}$$



Ταχύτητα σε περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων

- Είδαμε ότι μπορούμε να γράψουμε: $\mathrm{A}_{ij} = \sum_k \varepsilon_{ijk}\omega_k$
- Τα ω_i είναι οι συνιστώσες του διανύσματος: $\vec{\omega} = \sum_i \omega_i \vec{e}_i$ γωνιακή ταχύτητα
- Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να γράψουμε τις ποσότητες:

$$\dot{\vec{e}}_i = \sum_j \left(\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\right)_{ij}\vec{e}_j \quad \text{και} \quad \dot{\vec{r}} = \sum_i \left[\dot{r}_i + \left(\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\right)_{ji} r_j\right]\vec{e}_j$$

$$\dot{\vec{e}}_i = \sum_j \mathrm{A}_{ij}\vec{e}_j = -\sum_{jk}\varepsilon_{ijk}\omega_k\vec{e}_j$$

  - Από το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων: $\vec{e}_k \times \vec{e}_j = -\varepsilon_{kji}\vec{e}_i = \varepsilon_{jki}\vec{e}_i$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\vec{e}}_i = \sum_j \mathrm{A}_{ij}\vec{e}_j = -\sum_{jk}\varepsilon_{ijk}\omega_k\vec{e}_j \\ \vec{e}_k \times \vec{e}_j = -\varepsilon_{kji}\vec{e}_i = \varepsilon_{jki}\vec{e}_i \end{array}\right\} \dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega}\times\vec{e}_i$$

- Το διάνυσμα της ταχύτητας θα γραφεί: $\dot{\vec{r}} = \sum_i \left[\dot{r}_i + \mathrm{A}_{ji} r_j\right]\vec{e}_j \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \sum_i \left[\dot{r}_i + r_i\vec{\omega}\times\right]\vec{e}_i$
- Η παραπάνω απόδειξη ισχύει εν γένει, για οποιοδήποτε διάνυσμα **w** και την παράγωγό του ως προς χρόνο σε περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς:

$$\vec{w} = \sum_i w_i \vec{e}_i = \sum_i w_i' \vec{e}_i'$$

$$\dot{\vec{w}} = \sum_i \left(\dot{w}_i + w_i\vec{\omega}\times\right)\vec{e}_i$$

➡ Άθροισμα δυο όρων, ο ένας εκ των οποίων είναι κάθετος στα διανύσματα $\vec{e}_i$ και ίσος με $w_i\vec{\omega}\times\vec{e}_i$

Επιτάχυνση σε περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς

- Θεωρήστε ένα σώμα με θέση που δίνεται από το διάνυσμα: $\vec{r} = \sum_i r_i \vec{e}_i$
- Η ταχύτητά του θα είναι: $\dot{\vec{r}} = \sum_i \left(\dot{r}_i + r_i \vec{\omega} \times \ \right) \vec{e}_i \qquad (1)$
- Η επιτάχυνση του σώματος (στο περιστρεφόμενο σύστημα) προκύπτει από την παράγωγο της (1): $\vec{a} = d\left(\dot{\vec{r}}\right)/dt$
  - Είδαμε όμως: $\dot{\vec{w}} = dw/dt = \sum_i \left(\boxed{\dot{w}_i} + \boxed{w_i} \vec{\omega} \times \right) \vec{e}_i$ και θεωρήστε ότι: $w_i = \dot{r}_i + r_i \vec{\omega} \times$
  - Επομένως θα έχουμε: $\vec{a} = \sum_i \left[\boxed{\frac{d}{dt}\left(\dot{r}_i + r_i \vec{\omega} \times \right)} + \boxed{\left(\dot{r}_i + r_i \vec{\omega} \times \ \right)} \vec{\omega} \times \ \right] \vec{e}_i$

$$\Rightarrow \vec{a} = \sum_i \left[\ddot{r}_i \ \ + \dot{r}_i \vec{\omega} \times \ \ + r_i \dot{\vec{\omega}} \times \ \ + \dot{r}_i \vec{\omega} \times \ + \dot{r}_i \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \right] \ \vec{e}_i$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \sum_i \left[\ddot{r}_i + 2\dot{r}_i \vec{\omega} \times \ \ + \dot{r}_i \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \ + r_i \dot{\vec{\omega}} \times \right] \vec{e}_i$$

διάνυσμα επιτάχυνσης σε περιστρεφόμενο σύστημα

- Η έκφραση αυτή της επιτάχυνσης οδηγεί στην εισαγωγή «φαινομενικών» δυνάμεων

$2^{ος}$ Νόμος του Newton σε περιστρεφόμενο σύστημα

- Θεωρούμε δυο νέα διανύσματα ορισμένα στο περιστρεφόμενο σύστημα (αγνοώντας τις διορθώσεις από την περιστροφή των αξόνων)

$\vec{v}_{\sigma\omega\mu.} = \sum_i \dot{r}_i \vec{e}_i$ και $\vec{a}_{\sigma\omega\mu.} = \sum_i \ddot{r}_i \vec{e}_i$ (προσοχή: δεν είναι ταχύτητα ή επιτάχυνση)

- Με τα παραπάνω διανύσματα, το διάνυσμα της επιτάχυνσης στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς μπορεί να γραφεί:

$$\vec{a} = \sum_i \left[\ddot{r}_i + 2\dot{r}_i \vec{\omega} \times \ + \dot{r}_i \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \ + r_i \dot{\vec{\omega}} \times \right] \vec{e}_i$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{\sigma\omega\mu.} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\sigma\omega\mu.} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$$

επιτάχυνση σε περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων

- Επομένως για περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς, οι εξισώσεις κίνησης είναι:
  - Σύμφωνα με τον 2^o νόμο του Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$
  - Σύμφωνα με την έκφραση της πραγματικής επιτάχυνσης α συναρτήσει της $\alpha_{\sigma\omega\mu.}$ εμφανίζονται 3 νέοι όροι:

$\vec{a}_1 = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ φυγόκεντρος επιτάχυνση

$\vec{a}_2 = \vec{\omega} \times \vec{v}_{\sigma\omega\mu.}$ Coriolis επιτάχυνση

$\vec{a}_3 = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ Euler επιτάχυνση

συνεπίπεδη της κίνησης και κάθετη στη φυγόκεντρο. Εμφανίζεται λόγω μεταβολής της ω