ΦΥΣ 347 – Χειμερινό Εξάμηνο 2017

Ενδιάμεση Εξέταση - Δευτέρα 16/10/2015

Διάρκεια εξέτασης: **14:00 – 18:00**

Θα πρέπει να δουλέψετε όλες τις ασκήσεις μόνοι σας χωρίς να συζητήσετε τα αποτελέσματα και τον κώδικά σας παρά μόνο με τον εαυτό σας και ίσως εμένα αν έχετε απορίες.

Θα πρέπει ο κώδικάς σας να είναι ευανάγνωστος και να περιέχει απαραίτητα σχόλια που εξηγούν τι κάνετε. Θα βαθμολογηθείτε για την ύπαρξη ή μή σχολίων.

Θα πρέπει στο τέλος της εξέτασης να μου στείλετε με e-mail ένα αρχείο με όνομα midterm_<username>.tgz το οποίο περιέχει τα files των προγραμμάτων σας και οποιαδήποτε αρχεία σας ζητούν οι ασκήσεις να δημιουργήσετε. Προσοχή είναι δική σας ευθύνη να επιστρέψετε με το τέλος της εξέτασης τα files που πρέπει. Μετά το τέλος της εξέτασης δεν θα γίνει δεκτή οποιαδήποτε αλλαγή ή διόρθωση λαθών στα αρχεία που στείλατε.

Καλή Επιτυχία

1. Ο μαθηματικός Georges Buffon συνέλαβε την ιδέα ενός πειράματος για τον προσδιορισμό μιας εκτίμησης της τιμής του π. Το πείραμα στηρίζονταν στον προσδιορισμό της πιθανότητας μια βελόνα πέφτοντας σε ξύλινο πάτωμα να διασταυρώσει ένα χώρισμα μεταξύ των ξύλινων πλακιδίων του πατώματος. Το πείραμα του Buffon βελτιώθηκε από τον Laplace που προσδιόρισε την πιθανότητα για την περίπτωση που το δάπεδο αποτελούνταν από ορθογώνια πλακίδια.

Μπορείτε να προσομοιώσετε το πρόβλημα υποθέτοντας ότι αν χρησιμοποιήσετε μία βελόνα μήκους ίση με την μονάδα μήκους η οποία πέφτει σε ένα πλακίδιο πλάτους ίσο με τη μονάδα μήκους (δηλαδή μεταξύ δύο παράλληλων γραμμών) και να υπολογίσετε ποια η πιθανότητα η βελόνα να διασταυρώσει μία από τις γραμμές.

Υποθέστε ότι το κέντρο της βελόνας πέφτει σε μια τυχαία θέση ανάμεσα στις δύο γραμμές. Θεωρήστε ότι η απόσταση από την πλησιέστερη γραμμή είναι u.Θεωρήστε επίσης μια τυχαία γωνία θ που προσδιορίζει την κατεύθυνση της βελόνας. Θεωρήστε τη γωνία αυτή ως προς ευθεία παράλληλη προς τις δύο ευθείες του πλακιδίου. Με βάση τα δεδομένα αυτά μπορείτε να βρείτε αν η βελόνα διασταυρώνει κάποια γραμμή ή όχι.

Να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο χρησιμοποιεί την ιδέα του πειράματος Buffon και αφού το εφαρμόσετε για 100000 ρίψεις της βελόνας να υπολογίσετε τη τιμή του π μετρώντας την πιθανότητα η βελόνα να διασταυρώσει κάποια γραμμή. Θα πρέπει να συγκρίνετε την πιθανότητα αυτή με την τιμή 2/π.

2. Στο πρόγραμμα αυτό θα πρέπει να γράψετε ένα πρόγραμμα που προσομοιώνει το παιχνίδι του πόκερ και θα πρέπει να υπολογίσετε την πιθανότητα να πάρετε τρία ίδια φύλλα. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να επιλέγει 5 τυχαία φύλλα και να το κάνει αυτό N φορές. Από τις N αυτές τις φορές θα επιλέξουμε τις M φορές που τα 5 φύλλα περιέχουν 3 όμοια.

Για να εκτελέσετε το πρόγραμμα αυτό θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε πίνακες για όλα τα φύλλα της τράπουλας (52 συνολικά) τα οποία αυξάνουν από το 1 έως το 13 και για τα 5 χαρτιά που δίνονται. Είναι επίσης χρήσιμο να χρησιμοποιηθεί ένας βοηθητικός πίνακας που να κρατά τα φύλλα που έχουν παρουσιαστεί μια και στη μοιρασιά δεν μπορούν να εμφανιστούν τα ίδια χαρτιά ταυτόχρονα. Για τα 5 χαρτιά θα πρέπει να ελέγξουμε αν υπάρχουν 3 όμοια χαρτιά.

Θα πρέπει να τρέξετε το πρόγραμμά σας για 5000 μοιρασιές. Θα πρέπει να συγκρίνετε με την θεωρητικά αναμενόμενη τιμή 0.029 για 3 κάρτες ίδιου αριθμού.

3. Το πολυόνυμο Legendre τάξης L ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$P(L,x) = A(L)\sum_{r=0}^{r=L/2}\left[B(L,r)x^{(L-2r)}\right]$$

όπου $A(L) = 1/2^L$ και $B(L,r)$ δίνεται από τη σχέση:

$$B(L,r) = (-1)^r \frac{(2L-2r)!}{\left[r!(L-r)!(L-2r)!\right]}$$

Στο πρόβλημα αυτό θα μελετήσετε το πολυόνυμο Legendre τάξης L = 8.

Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να έχει τα ακόλουθα στοιχεία:

(α) Μια συνάρτηση, *FACT*, η οποία υπολογίζει το παραγοντικό ενός ακεραίου που περνάτε.[**2μ**]

(β) Μια συνάρτηση, *LEGENDRE*, η οποία υπολογίζει την τιμή του πολυονύμου Legendre P(8,*x*) για κάποια τιμή του *x* που περνάτε. [**4μ**]

(γ) Θα πρέπει να γράψετε ένα κύριο πρόγραμμα το οποίο δέχεται από το πληκτρολόγιο την αρχική τιμή του *x* για την οποία θα πρέπει να υπολογίσετε το *P*(8,*x*). Η αρχική αυτή τιμή είναι *x* =-1. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να υπολογίζει την τιμή του πολυονύμου για όλες τις τιμές του *x* στο διάστημα [-1, 1] με βήμα δx = 0.05. Θα πρέπει να γράψετε τις τιμές του *x* και τις αντίστοιχες τιμές του πολυονύμου *P*(8,*x*) σαν ζεύγη, σε ένα file το οποίο ονομάζεται *Legendre.dat.* [**4μ**]

(δ) Βλέποντας το file αυτό θα παρατηρήσετε ότι *P*(8,*x*) έχει 4 ρίζες στο διάστημα [-1.0,0.0]. Επειδή το πολυόνυμο είναι συμμετρικό ως προς *x,* αυτές οι ρίζες θα είναι συμμετρικές και θα υπάρχουν και στο διάστημα [0.0,1.0]. Επομένως βρίσκοντας τις 4 αρνητικές ρίζες θα έχουμε βρει και τις 4 θετικές. Θα πρέπει τώρα να προσθέσετε στο πρόγραμμά σας μια συνάρτηση, *NEWTON*, η οποία υπολογίζει την ρίζα μιας συνάρτησης, η οποία βρίσκεται ανάμεσα σε δυο τιμές x_1 και x_2 που περνάτε σαν ορίσματα στην συνάρτηση *NEWTON*. Η συνάρτηση *NEWTON* θα πρέπει να έχει δυο ακόμα ορίσματα, την συνάρτηση την ρίζα της οποίας θέλετε να βρείτε και την ακρίβεια με την οποία θέλετε να βρείτε τη ρίζα. Θεωρήστε ότι η ακρίβεια που θέλετε να πετύχετε για την εύρεση της ρίζας είναι ε = 0.000001. Η τιμή της ρίζας θα είναι αυτή για την οποία είτε η τιμή του $|P(8,x)| < \varepsilon$ ή $|x_1 - x_2| < \varepsilon$. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει τώρα να τυπώνει και τις ρίζες τις οποίες βρίσκετε σε ένα file το οποίο ονομάζεται *LegendreRoots.dat.*

Υπόδειξη: Μπορείτε να προσεγγίσετε τη παράγωγο του πολυωνύμου από την κλίση της ευθείας που ορίζεται από τα σημεία x_1 και x_2 και τις αντίστοιχες τιμές του πολυονύμου [**7μ**]

(ε) Κάντε την γραφική παράσταση των τιμών του πολυονύμου *P*(8,*x*) συναρτήσει του *x* χρησιμοποιώντας τις τιμές που έχετε αποθηκεύσει στο file *Legendre.dat* στο (γ) ερώτημα. Το γράφημα που θα πρέπει να έχει κατάλληλα ονοματισμένους άξονες θα πρέπει να το αποθηκεύσετε στο αρχείο *Legendre.pdf.* [**3μ**]

4. Σε πολλές κλιματολογικές μελέτες όπου χρειάζεται να υπολογιστεί το γενικό κλίμα του πλανήτη, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της προσομοίωσης Monte Carlo. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο αυτή για να προσδιορίσουμε την γενική μέση θερμοκρασία του πλανήτη και τη ποσότητα ηλιακού φωτός το οποίο πέφτει σε ζώνες που περικλείονται μεταξύ δυο διαδοχικών γραμμών γεωγραφικού πλάτους (το γεωγραφικό πλάτος είναι η γωνιακή απόσταση ενός τόπου από τον ισημερινό. Ο ισημερινός έχει γεωγραφικό πλάτος 0^o και ο βόρειος πόλος 90^o. Κάθε γραμμή γεωγραφικού πλάτους είναι ένας κύκλος παράλληλος προς τον κύκλο που περνά από τον ισημερινό).

Για να υπολογίσουμε τη παγκόσμια μέση τιμή της θερμοκρασίας, θα χρειαστεί να βρούμε τη μέση της θερμοκρασίας ως προς κάθε ζώνη γεωγραφικού πλάτους. Ωστόσο αυτό θα ήταν λάθος αφού το εμβαδό γης που περικλείεται σε κάθε γεωγραφική ζώνη δεν είναι σταθερό και ελαττώνεται καθώς κινούμαστε σε ζώνες πιο κοντά στους δυο πόλους της γης. Επομένως για να βρούμε τη παγκόσμια μέση τιμή της θερμοκρασίας θα πρέπει να σταθμίσουμε τη μέση θερμοκρασία κάθε γεωγραφικής ζώνης με το εμβαδό της γης που περικλείεται στη ζώνη αυτή. Αυτό μπορεί να γίνει ολοκληρώνοντας αναλυτικά, αλλά μπορεί να γίνει και με τη χρήση μεθόδων ολοκλήρωσης Monte Carlo.

Για απλούστευση του προβλήματος, θεωρήστε τη γη σε μορφή σφαίρας με ακτίνα $R = 6400km$. (*Υπενθύμιση:* η εξίσωση της σφαίρας δίνεται από τη σχέση $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$). Θεωρήστε ακόμα ότι υπάρχουν 9 ζώνες γεωγραφικού πλάτους 10^o η κάθε μία. Η $1^η$ ζώνη των 10 μοιρών ορίζεται από τον Ισημερινό και τη πρώτη γεωγραφική γραμμή (γεωγραφικό πλάτος 10^o), ενώ η $9^η$ ζώνη ορίζεται μεταξύ του βόρειου πόλου και της γραμμής γεωγραφικού πλάτους 80^o.

(α) Θα πρέπει να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει με τη μέθοδο ολοκλήρωσης Monte Carlo, το ποσοστό εμβαδού της επιφάνειας της γης που περικλείεται σε κάθε μια από τις 9 γεωγραφικές ζώνες. Θα πρέπει το πρόγραμμά σας να υπολογίζει (χρησιμοποιώντας απλή τριγωνομετρία) σε ποια γεωγραφική ζώνη αντιστοιχεί το κάθε τυχαίο σημείο που εξετάζετε. Για τον υπολογισμό σας θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε 10^6 συνολικά προσπάθειες. [**10μ**]

(β) Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει στο τέλος των υπολογισμών τα αποτελέσματά σας σε μορφή πίνακα (χρησιμοποιώντας κατάλληλο formatting) ως ακολούθως

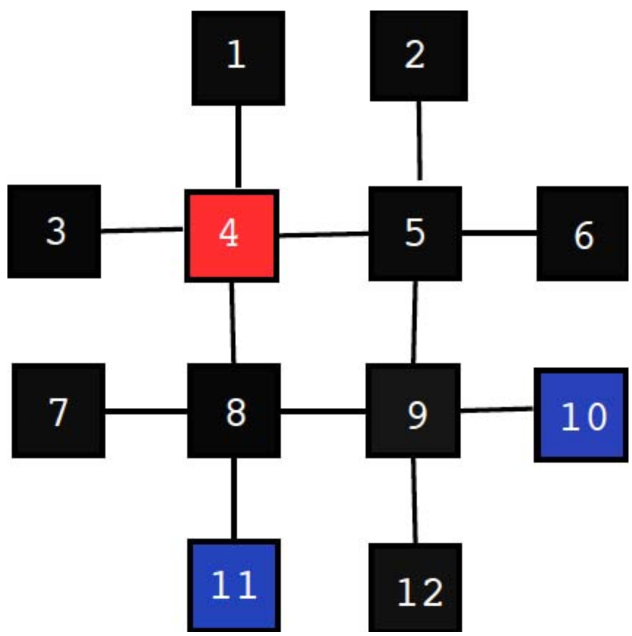
Total generated Points: xxxxx
bbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbbb *Summary for Zones*
Low angle bbbbb *Upper angle* bbbbb *Sim. Fractional Area* bbbbb *Sfalma* bbbbb *Theor. Fraction*

xxxx *xxxxx* *xxxxx* *xxxx* *xxxxxx*

όπου xxxx αντιπροσωπεύει κάποια τιμή, και bbbbb αντιπροσωπεύουν τον αριθμό των κενών θέσεων μεταξύ αυτών που γράφετε. Η θεωρητικά αναμενόμενη τιμή του ποσοστού εμβαδού κάθε ζώνης δίνεται από τη σχέση: $\sin(\theta_{i+1}\times\pi/180)-\sin(\theta_i\times\pi/180)$ όπου θ_{i+1} και θ_i τα γεωγραφικά πλάτη των γραμμών που ορίζουν κάθε ζώνη. [**7μ**]

(γ) Αν οι μέσες θερμοκρασίες κάθε ζώνης είναι 30°C, 28°C, 23°C, 25°C, 20°C, 16°C, 11°C, 5°C και -5°C (από την 1η έως την 9η) να βρεθεί η μέση θερμοκρασία της γης. [**3μ**]

5. Ένας φοιτητής βγαίνοντας από την εξέταση του μαθήματος ΦΥΣ347 είναι τόσο ζαλισμένος που δεν ξέρει προς πια κατεύθυνση να κινηθεί. Ωστόσο αυτό που επιθυμεί είναι να βρεθεί σε ένα από τα 2 bars που είναι κοντά στο Πανεπιστήμιο και να ξεχάσει για το βράδυ την εμπειρία της εξέτασης. Του δίνονται 4 δυνατές διευθύνσεις με την ίδια πιθανότητα. Σε κάθε εξωτερική θέση του χάρτη ο φοιτητής θα βρεθεί σε μια εκδήλωση από την οποία δεν μπορεί να φύγει. Οι θέσεις στις οποίες βρίσκονται τα bars είναι η 10 και η 11, ενώ το εργαστήριο Η/Υ του Τμήματος Φυσικής που είχε την εξέταση βρίσκεται στη θέση 4. Στις θέσεις 5, 8 και 9 μπορεί να κινηθεί προς οποιαδήποτε κατεύθυνση:



Να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει την πιθανότητα ο φοιτητής να καταλήξει σε ένα από τα δυο bars που φαίνονται στο παραπάνω χάρτη.[**20μ**]