

ΦΥΣ 145 – Μαθηματικές Μέθοδοι στη Φυσική

Πρόοδος

18 Μαρτίου 2012

Γράψτε το ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητάς σας στο πάνω μέρος της αυτής της σελίδας.

Πρέπει να απαντήσετε σε όλα τα προβλήματα που σας δίνονται.

Ο χρόνος εξέτασης είναι 180 λεπτά και χωρίζεται σε 2 μέρη. Στο πρώτο μέρος, διάρκειας 60 λεπτών, θα πρέπει να απαντήσετε στο γραπτό μέρος χωρίς τη χρήση υπολογιστών. Στο δεύτερο μέρος, διάρκειας 120 λεπτών, θα πρέπει να γράψετε τα προγράμματα που περιγράφονται στις ασκήσεις. Το σύνολο για κάθε τμήμα της εξέτασης είναι 60 μονάδες.

Από τη στιγμή αυτή δεν υπάρχει συνεργασία/συζήτηση ανταλλαγή αρχείων και e-mails με κανένα και φυσικά κουδούνισμα κινητού που πρέπει να κλείσουν. Σημειώσεις, χαρτάκια κλπ απαγορεύονται όπως και επισκέψεις σε ιστοσελίδες ή accounts που δεν αναφέρονται στην ιστοσελίδα του μαθήματος. **Απαγορεύεται επίσης η χρήση του e-mail σας καθόλη τη διάρκεια της εξέτασης.**

Καλή επιτυχία

Α' Μέρος - ΑΣΚΗΣΕΙΣ χωρίς υπολογιστή

1. [10μ] Απαντήστε στις ακόλουθες 10 ερωτήσεις (1μ/ερώτηση)

Αυτή και οι επόμενες 5 ερωτήσεις αναφέρονται στην ακόλουθη περίπτωση:

Δίνεται το ακόλουθο τμήμα κώδικα:

```
PARAMETER (pi=3.14159, epsilon=2.71828)
CHARACTER*12 text
DATA text/'April 1st' /
INTEGER int1, year, id
DATA/12345, 2012, 9398/
```

(Α) Συμπληρώστε στις διακεκομμένες γραμμές που δίνονται το αποτέλεσμα της εντολής:

```
Write(6,10) text
10      FORMAT(1x,A8)
```

=====

(Β) Συμπληρώστε στις διακεκομμένες γραμμές το αποτέλεσμα της εντολής:

```
Write(6,20) int1
20      FORMAT(1x,I8)
```

=====

(Γ) Συμπληρώστε στις διακεκομμένες γραμμές το αποτέλεσμα της εντολής:

```
Write(6,30) year, id
30      FORMAT(1x,I4,I6)
```

=====

(Δ) Συμπληρώστε στις διακεκομμένες γραμμές το αποτέλεσμα της εντολής:

```
Write(6,40) pi
40      FORMAT(1x,F8.6)
```

=====

(Ε) Συμπληρώστε στις διακεκομμένες γραμμές το αποτέλεσμα της εντολής:

```
Write(6,50) epsilon
50      FORMAT(1x,E12.3)
```

=====

(ΣΤ) Τι θα τυπώσει το ακόλουθο απόσπασμα κώδικα; Θεωρήστε ότι τα στοιχεία του file που βρίσκεται στη μονάδα 10 είναι αυτά που φαίνονται στα δεξιά του κώδικα.

INTEGER L(4), M, N, K	11	12	13	14	15
READ(10,*) L,M	16	17	18	19	20
READ(10,*)	21	22	23	24	25
READ(10,*) N	26	27	28	29	30
READ(10,*) K	31	32	33	34	35
PRINT *,L,M,N,K					

(Ζ) Ποιος είναι ο ακέραιος αριθμός, A, που απεικονίζει η παρακάτω word του υπολογιστή;

0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

A =

(Η) Υποθέστε ότι δίνονται οι λογικές μεταβλητές A και B με τιμές A true και B false. Ποιο το αποτέλεσμα της παρακάτω έκφρασης;

.NOT.(A.AND.B)

(Θ) Υποθέστε ότι όλες οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται είναι τύπου *INTEGER* και ο χρήστης δίνει τους αριθμούς **2, 4, 5, -1** από το πληκτρολόγιο. Ποιο θα είναι η τιμή της μεταβλητής **SUM**;

```

Sum = 0
Num = 0
PRINT*, "Dwse ti timi -1 gia na stamatisais"
Read *, Num
DO WHILE (Num.ne.-1)
    Read*, num
    Sum = Sum + 1
Enddo
Write(6,*) Sum

```

SUM =

(Ι) Ποια είναι η σημαντικότερη διαφορά μεταξύ ενός υποπρογράμματος τύπου *FUNCTION* και ενός υποπρογράμματος τύπου *SUBROUTINE* στη *FORTRAN*;

2. [10μ] Απαντήστε στις ακόλουθες πέντε ερωτήσεις (2μ/ερώτηση)

(Α) Ποια εντολή Linux θα χρησιμοποιήσετε για να κάνετε **μόνο compilation** ενός προγράμματός σας;

(Β) Έστω ότι έχετε ένα *tgz* file. Ποια εντολή θα δώσετε για να δείτε τα περιεχόμενα του file αυτού;

(Γ) Έστω ότι έχετε ένα πρόγραμμα *test.x*. Τι ακριβώς σας κάνει η εντολή *./test.x < mydata.dat*;

(Δ) Ποια η διαφορά των εντολών *more* και *less*;

(Ε) Ένα CD έχει συνήθως χωρητικότητα 670MB. Πόσα CD θα χρειαστείτε για να αντιγράψετε 5.3GB δεδομένων που βρίσκονται στον υπολογιστή σας;

3. [20μ] Απαντήστε τις ακόλουθες πέντε ερωτήσεις: (4μ/ερώτηση)

(Α) Δίνεται το παρακάτω πρόγραμμα. Ποιο το αποτέλεσμα που θα τυπωθεί αν δεν υπάρξει λάθος;

```
Program test
INTEGER MIP(4,4)
DATA MIP/4*2,4*4,4*5,4*10/
CALL SUB(MIP,2,2)
END

SUBROUTINE SUB(ENE,M,N)
INTEGER M, N, K, J, K
INTEGER ENE(M,N)
K = 0
DO I = 1, M
  DO J = 1, N
    K = K + ENE(I,J)
  ENDDO
ENDDO
PRINT *, K
RETURN
END
```

(B) Δίνεται το παρακάτω πρόγραμμα. Ποιο το αποτέλεσμα που θα τυπωθεί από την υπορουτίνα (ακριβώς με τη μορφή που δίνεται);

```
Program test
INTEGER M(4,2)
DATA M/10,20,25,50,30,90,110,60/
CALL SUB(M,4,2)
END

SUBROUTINE SUB(L,M,N)
INTEGER M, N, J, I
INTEGER L(M,N)
DO J = 1, M
  WRITE(6,10) (L(J,I), I=1,N)
ENDDO
10  FORMAT(2(2X,I2))
RETURN
END
```

(Γ) Δίνεται το παρακάτω πρόγραμμα. Ποιο θα είναι το αποτέλεσμα που θα τυπώσει;

```
Program test
INTEGER I, J, N, M, COUNT
PARAMETER(N=3,M=3)
INTEGER IP(N,M)
DATA IP/0,0,0,0,0,0,0,0,0,0/
COUNT = 0
DO WHILE (I.LE.N)
  I = I + 1
  DO WHILE (J.LE.M)
    J = J + 1
    IP(I,J) = I/J * 10
    COUNT = COUNT + 1
  ENDDO
ENDDO
PRINT *, IP
PRINT *, COUNT, I, J
END
```

(Δ) Συμπληρώστε τις παρακάτω γραμμές κώδικα ώστε η ακόλουθη συνάρτηση να επιστρέφει μια τιμή για την *yinterp* δεδομένης μιας τιμής *x* και η οποία αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα της γραμμικής παρεμβολής μεταξύ δυο σημείων (*x_{low}*, *y_{low}*) και (*x_{high}*, *y_{high}*). Η συνάρτησή σας θα πρέπει να τυπώνει ένα κατάλληλο μήνυμα σε περίπτωση σφάλματος και να επιστρέφει την τιμή -1.11E+11 αν η τιμή *x* δεν είναι μεταξύ των *x_{low}* και *x_{high}*.

```
Real Function yinterp(x, xlow, ylow, xhigh, yhigh)
Implicit none
Real x, xlow, ylow, xhigh, yhigh

- - - - -
- - - - -
- - - - -
- - - - -
- - - - -
- - - - -
- - - - -

RETURN
END
```

(Ε) Ποια πράξη νομίζετε ότι είναι περισσότερο γρήγορη για τον υπολογιστή το x^7 ή το $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$ και γιατί;

4. [20μ] Στα ακόλουθα 4 ερωτήματα συμπληρώστε τις απαραίτητες γραμμές κώδικα ανάλογα με το ζητούμενο (**5μ/ερώτημα**)

(A) Να γραφεί το τμήμα του κώδικα το οποίο υπολογίζει το άθροισμα των πρώτων 10 όρων της παρακάτω σειράς:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \dots$$

(B) Τι θα τυπώσει το ακόλουθο τμήμα κώδικα;

```
INTEGER A, B
DO A = 13, 23, 4
  DO B = 1, 3
    IF (MOD(A,B) .GT. B/3) THEN
      IF (A/6 .GE. B) THEN
        PRINT *, "PHYS145"
      ELSE
        PRINT *, "PHYS115"
      ENDIF
    ELSE
      PRINT *, "PHYS114"
    ENDIF
  ENDDO
ENDDO
```

(Γ) Βρείτε τα 5 λάθη στο ακόλουθο πρόγραμμα. Τα δεδομένα που διαβάζονται είναι:

PROGRAM TEST	1	2	4
INTEGER ICOL, IROW, IST	3	5	8
DATA ICOL, IROW/0,0/	5	8	6
INTEGER A(3,3)	C		
FIRST = .TRUE.			
IST = 0			
DO WHILE (IST.EQ.0)			
ICOL = ICOL + 1			
READ(10,*,IOSTAT=IST) (A(ICOL,IROW), IROW=1,3)			
IF (ICOL .EQ. 2) FIRST = .FALSE.			
ENDDO			
CALL SWAP(A,ICOL,IROW)			
DO I = 1, IROW			
WRITE(6,10) (A(I,J), J=1, ICOL)			
ENDDO			
END			
SUBROUTINE SWAP(M,N,MAT)			
INTEGER M,N, MAT(3,3), I, J			
DO I = 1, M			
DO J = 1, N			
MAT(I,J) = INT(exp(MAT(I,J)))			
ENDDO			
ENDDO			
RETURN			
END			

(Δ) Το πολυώνυμο Taylor, $P_N(x)$ για τη συνάρτηση $f(x) = \ln(x)$ που αναπτύσσεται ως προς $x_0 = 1$ είναι:

$$P_N(x) = \sum_{i=1}^N \frac{(-1)^{i+1}}{i} (x-1)^i$$

Γράψτε το τμήμα του κώδικα το οποίο υπολογίζει και τυπώνει την αντίστοιχη τιμή $P_N(x)$ για τις περιπτώσεις που το $N = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$. Για κάθε περίπτωση τιμής του N , συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με την τιμή που $\ln(x)$. Θεωρήστε ότι το x έχει κάποια τιμή κοντά στο x_0 .

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

USERNAME

PASSWORD:

Ασκήσεις για τον υπολογιστή

Δημιουργήστε ένα subdirectory midterm στον οποίο θα δουλέψετε τις παρακάτω τρεις ασκήσεις. Θα πρέπει στο τέλος της εξέτασης να δημιουργήσετε ένα tar file με όλα τα f, pdf και dat files τα οποία δημιουργήσατε ή χρησιμοποιήσατε. Το tar file θα πρέπει να βρίσκεται στο subdirectory midterm και να έχει όνομα με τη μορφή `<username>_groupX.tgz` όπου username ο e-mail account σας στο πανεπιστήμιο και X η ομάδα σας (Α ή Β). Το file αυτό θα το πάρουμε από τους directories σας.

Θα πρέπει να γράψετε το κωδικό εισόδου σας στο πάνω μέρος της σελίδας αυτής. Αν το password σας είναι διαφορετικό από αυτό που σας δώθηκε αρχικά και ξεχάσετε να το δώσετε δε θα βαθμολογηθείτε στις παρακάτω ασκήσεις

Μην ξεχάσετε να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας και αριθμό ταυτότητας σε κάθε file που αντιστοιχεί στο πρόγραμμα που στέλνετε.

5. [10μ] Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο βρίσκει τον πρώτο άρτιο αριθμό ο οποίος διαιρείται με το 7 και είναι τέλειο τετράγωνο (δηλαδή η τετραγωνική του ρίζα είναι ένας ακέραιος αριθμός).
6. [20μ] Στην άσκηση αυτή θα γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο θα πρέπει να μετατρέπει ένα οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό με βάση το 10, στον αντίστοιχό του με βάση το 2. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να μετατρέπει πρώτα το ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού που δίνετε στο δυαδικό σύστημα και κατόπιν να χρησιμοποιεί το δεκαδικό μέρος του αριθμού και να το μετατρέπει στο δυαδικό σύστημα. Οι μετατροπές αυτές για τα 2 τμήματα θα πρέπει να γίνονται μέσα σε 2 υποπρογράμματα. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να γράφει το αποτέλεσμα της μετατροπής στην οθόνη του υπολογιστή. Θα πρέπει να δοκιμάσετε το πρόγραμμά σας για το αριθμό 1352631.4765625. Συμπληρώστε το αποτέλεσμα που βρήκατε στο παρακάτω χώρο:

Αριθμός = _____

Υπόδειξη: Στο δεκαδικό σύστημα τα ψηφία ενός αριθμού μπορεί να έχουν 10 δυνατές τιμές (0,1,2,...,9) ενώ στο δυαδικό σύστημα μόνο δυο δυνατές τιμές, 0 ή 1. Για να μετατρέψετε ένα ακέραιο αριθμό από το δεκαδικό σύστημα στο δυαδικό σύστημα θα πρέπει να βρείτε την ακολουθία των αριθμών που είναι δυνάμεις του 2 των οποίων το άθροισμά ισούται με τον δεκαδικό αριθμό. Για παράδειγμα ο αριθμός 156 γράφεται στο δυαδικό σύστημα σαν 10011100. Πως βρίσκουμε το νούμερο αυτό:

Διαιρούμε τον αριθμό με το 2 και κρατάμε το υπόλοιπο. Κατόπιν διαιρούμε το πηλίκο της διαίρεσης και το διαιρούμε και πάλι δια 2 και κρατάμε το υπόλοιπο. Συνεχίζουμε την διαδικασία εως ότου το πηλίκο είναι 1. Το τελευταίο πηλίκο μαζί με τα όλα τα υπόλοιπα των διαιρέσεων στα προηγούμενα στάδια **σε αντίστροφη σειρά** είναι ο αριθμός στο δυαδικό σύστημα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα με τον αριθμό 156 θα είχαμε:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 156/2 = 78 & 78/2 = 39 & 39/2 = 19 & 19/2 = 9 & 9/2 = 4 & 4/2 = 2 & 2/2 = 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}$$

Επομένως: $156_{10} = 10011100_2$

Για την περίπτωση του δεκαδικού μέρους η διαδικασία είναι λίγο διαφορετική. Στην περίπτωση αυτή πολλαπλασιάζουμε το δεκαδικό μέρος επί 2 και πέρνουμε ένα νέο πραγματικό αριθμό και κρατάμε το ακέραιο τμήμα του (το οποίο θα είναι 0 ή 1). Το δεκαδικό τμήμα του νέου πραγματικού αριθμού το

πολλαπλασιάζουμε επί 2 και κρατάμε το ακέραιο τμήμα του πραγματικού αριθμού που προκύπτει. Συνεχίζουμε την διαδικασία έως ότου το δεκαδικό τμήμα γίνει 0. Όλα τα ακέραια τμήματα που βρήκαμε στη διαδικασία αυτή **με τη σειρά** που βρέθηκαν αποτελούν το δεκαδικό τμήμα του αριθμού που δώσαμε σε δυαδική μορφή. Για παράδειγμα αν το δεκαδικό μέρος του πραγματικού αριθμού ήταν 0.375 τότε η παραπάνω διαδικασία θα έδινε:

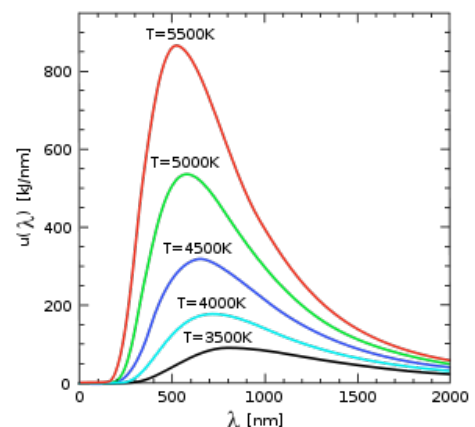
$$\begin{array}{ccc} 2 \times 0.375 = 0.750 & 2 \times 0.750 = 1.5 & 2 \times 0.5 = 1.0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Επομένως: $0.375_{10} = 011_2$

7. [30μ] Ένα σώμα που ακτινοβολεί μπορεί να θεωρηθεί σαν μελανό σώμα όταν έχει πολύ ασθενή αλληλεπίδραση με το περιβάλλον του και μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται σε μια κατάσταση θερμικής ισορροπίας. Ο κύριος νόμος που περιγράφει την ακτινοβολία ενός μελανού σώματος είναι ο νόμος του Planck, ο οποίος περιγράφει την ένταση της ακτινοβολίας που εκπέμπεται ανά μονάδα επιφάνειας ενός μελανού σώματος σε μια συγκεκριμένη διεύθυνση (στερεά γωνία) συναρτήσει του μήκους κύματος της ακτινοβολίας για μια συγκεκριμένη θερμοκρασία. Μαθηματικά, η πυκνότητα ενέργειας ανά μονάδα όγκου ανά μήκος κύματος εκπέμπουσας ακτινοβολίας σύμφωνα με το νόμο του Planck δίνεται από την εξίσωση:

$$u(\lambda, T) = \frac{4\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}$$

όπου λ το μήκος κύματος της εκπέμπουσας ακτινοβολίας, $h = 6.626 \times 10^{-34}$ (Joule sec) η σταθερά του Planck, $c = 2.998 \times 10^8$ m/s η ταχύτητα του φωτός, $k_B = 1.381 \times 10^{-23}$ Joule K^{-1} η σταθερά Boltzmann και T η θερμοκρασία σε μονάδες Kelvin. Η συμπεριφορά αυτή φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ο νόμος του Planck αντιπροσωπεύει μια κατανομή η οποία έχει κορυφή σε ένα συγκεκριμένο μήκος κύματος και η κορυφή της κατανομής αυτής μετακινείται σε μικρότερα μήκη κύματος για υψηλότερες θερμοκρασίες και το εμβαδό της περιοχής που περικλείεται κάτω από την καμπύλη αυξάνει καθώς η θερμοκρασία του μέλανος σώματος αυξάνει. Εφαρμογές του παραπάνω νόμου έχετε συναντήσει σε ολοκληρωτική μορφή στο εργαστήριο φυσικής II όταν μελετήσατε το νόμο του Stefan-Boltzmann.



- (α) [10μ] Δείξτε ότι υπάρχει μια γενική εξίσωση που συνδέει την θερμοκρασία και το μέγιστο μήκος

κύματος, λ_{\max} , της εκπέμπουσας ακτινοβολίας της μορφής: $\frac{hc}{k_B T \lambda} = 5 \left(1 - e^{-\frac{hc}{k_B T \lambda}} \right)$

- (β) [5μ] Δείξτε με βάση την προηγούμενη σχέση ότι $\lambda_{\max} T = \text{σταθ.}$ Η σχέση αυτή αποτελεί το νόμο ακτινοβολίας του Wien.

- (γ) [15μ] Η τιμή της σταθεράς μπορεί να βρεθεί μόνο αριθμητικά. Βρείτε τη σταθερά με ακρίβεια 10^{-8} . **Υπόδειξη:** Θα ήταν πιο εύκολο για τις πράξεις σας να ορίσετε στο τέλος των πράξεών σας μια νέα

ποσότητα $x = \frac{hc}{\lambda_{\max} k_B T}$

Συμπληρώστε παρακάτω τη τιμή της σταθεράς που βρήκατε

Σταθερά =