ΦΥΣ 140 – Εισαγωγή στην Επιστημονική Χρήση Υπολογιστών

3η Εργασία **Επιστροφή: 5/10/2022**

Υπενθύμιση: Οι εργασίες πρέπει να επιστρέφονται με e-mail στο fotis@ucy.ac.cy που θα στέλνετε από το πανεπιστημιακό σας λογαριασμό το αργότερο μέχρι την ημερομηνία που αναγράφεται.
Ως subject του e-mail θα πρέπει να αναγράφεται την εργασία (username_phy140_hmX όπου X ο αριθμός της εργασίας)
Κάθε αρχείο που επισυνάπτετε (attach) στο e-mail σας θα πρέπει να έχει το όνομα στη μορφή username_hmX.tgz όπου username είναι το username του e-mail σας και X ο αριθμός της εργασίας. Επίσης σαν πρώτο σχόλιο μέσα σε κάθε file που περιέχει το πρόγραμμά σας θα πρέπει να αναφέρεται το ονοματεπώνυμό σας. Οι εργασίες είναι ατομικές και πανομοιότυπες εργασίες δε θα βαθμολογούνται. Για να κάνετε ένα tgz file (ουσιαστικά tar zipped file) θα πρέπει να δώσετε στο terminal την εντολή tar -czvf username_hmX.tgz *.py όπου py είναι όλα τα py files των προγραμμάτων σας.

1. Θεωρήστε ένα κύκλο και ένα ορθογώνιο. Ο κύκλος έχει ακτίνα $R = 10.6$. Το ορθογώνιο έχει πλευρές μήκους α και β αλλά μόνο η πλευρά α είναι γνωστή. Έστω ότι $\alpha = 1.3$. Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο χρησιμοποιεί ένα *while* loop για να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή για το μήκος της πλευράς β έτσι ώστε το εμβαδό του ορθογωνίου να είναι πολύ κοντά αλλά μικρότερο του εμβαδού του κύκλου. Τρέξτε το πρόγραμμά σας και βεβαιωθείτε ότι δίνει τη σωστή απάντηση η οποία είναι b = 271.

2. Θεωρήστε δύο συναρτήσεις $f(x) = x$ και $g(x) = x^2$ με το x να παίρνει τιμές στο διάστημα $[-4,4]$. Να γράψετε ένα πρόγραμμα σε *PYTHON* το οποίο δοκιμάζοντας διάφορες τιμές προσπαθεί να βρει προσεγγιστικά τις τιμές του x για τις οποίες οι συναρτήσεις αυτές τέμνονται, δηλαδή $f(x) = g(x)$. Για να το κάνετε αυτό, μπορείτε να θεωρήσετε N σημεία τα οποία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στο διάστημα ενδιαφέροντος και για κάθε σημείο θα πρέπει να ελέγχετε την ποσότητα $\varepsilon = |f(x) - g(x)|$, όπου ε είναι ένας μικρός αριθμός. Ο αριθμός των σημείων N και ο αριθμός ε δίνονται από το πληκτρολόγιο. Το αποτέλεσμα του προγράμματός σας τυπώνεται στην οθόνη. Το αποτέλεσμα θα πρέπει να τυπώνεται στη μορφή "Το σημείο τομής των δύο γραφικών στο διάστημα τιμών του x [-4,4] είναι: " xx,yy. Δοκιμάστε το πρόγραμμά σας για $N = 400$ και $\varepsilon = 0.01$. Δοκιμάστε να αλλάξετε τις τιμές του N κρατώντας σταθερό το ε. Τι παρατηρείτε; Τι συμβαίνει όταν το διάστημα μεταξύ διαδοχικών τιμών του x γίνει μικρότερο από το ε, δηλαδή όταν $dx = x_{i+1} - x_i < \varepsilon$; Το διάστημα καθορίζεται ουσιαστικά από τον αριθμό N και το εύρος του αρχικού διαστήματος τιμών, δηλαδή $(x_{πάνω} - x_{κάτω})/N$ όπου $x_{πάνω}=4$ και $x_{κάτω} =-4$.

3. Μέχρι τώρα, μεγάλοι μαθηματικοί έχουν αναπτύξει μεθόδους για τον υπολογισμό της τιμής του π. Ανάμεσά τους ο Leibniz (1646 – 1716) και ο Euler (1707-1783). Ο αλγόριθμος του Leibniz στηρίζεται στη σχέση:

$$\pi = 8\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+3)}$$

Ο αλγόριθμος του Euler στηρίζεται στη σχέση:

$$\pi = \sqrt{6\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}$$

Αν για κάθε περίπτωση χρησιμοποιηθούν μόνο οι N πρώτοι όροι για τον υπολογισμό του αθροίσματος, τότε το π θα έχει υπολογισθεί με κάποιο σφάλμα λόγω αποκοπής των όρων μεγαλύτερων από N.

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο λαμβάνει τον αριθμό των όρων N που χρησιμοποιούνται στο άθροισμα από το πληκτρολόγιο και κάνει το γράφημα του σφάλματος συναρτήσει του πλήθους των όρων που χρησιμοποιούνται στο άθροισμα καθώς το πλήθος αυτό τείνει στο N. Για να κάνετε το γράφημα, θα πρέπει να αποθηκεύσετε σε μία λίστα το σφάλμα που υπολογίζετε για κάθε όρο καθώς και τον όρο σε μια άλλη λίστα και να κάνετε το γράφημα σύμφωνα με αυτά που χρησιμοποιήσατε στην 1η κατ'οίκον. Σημειωτέον ότι το σφάλμα είναι $\varepsilon = |\pi - \pi_{\upsilon\pi}|$ όπου $\pi_{\upsilon\pi}$ η τιμή του π που υπολογίζετε από το άθροισμα.

Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει το τελικό σφάλμα που επιτεύχθηκε και με τους δύο αλγόριθμους όταν δηλαδή το πλήθος των όρων που χρησιμοποιήθηκαν στο άθροισμα είναι ίσο με N.

4. Θεωρήστε ένα παιγνίδι στο οποίο κάθε παίκτης που συμμετέχει επιλέγει μια σειρά από τυχαίους ακεραίους κατανεμημένους τυχαία στο διάστημα από 0 έως 10, με στόχο το άθροισμα των ακεραίων να είναι όσο περισσότερο κοντά στο 21 αλλά όχι μεγαλύτερο του 21. Τη στιγμή που το άθροισμα είναι μεγαλύτερο από 21 ο παίκτης είναι εκτός παιχνιδιού. Μετά από κάθε κατανομή ενός αριθμού ανακοινώνεται στον παίκτη ο αριθμός και το άθροισμα το οποίο έχει μέχρι το σημείο αυτό και του ζητείται να αποφασίσει αν θα «τραβήξει» επιπλέον αριθμό ή θα σταματήσει. Ο παίκτης με άθροισμα πιο κοντά στο 21 είναι ο νικητής. Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο εφαρμόζει το παραπάνω παιγνίδι. Για τυχαίους αριθμούς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την βιβλιοθήκη *random* και για να επιλέξετε ακεραίους αριθμούς μεταξύ 0 και 10 στο διάστημα [1,10] χρησιμοποιήστε την μέθοδο *randint*(0,10). Οι εντολές που θα πρέπει να δώσετε είναι:
from random import randint
Z =*randint*(0,10)
Η μεταβλητή *Z* θα έχει κάποια τυχαία τιμή μεταξύ 0 και 10 όπως μπορείτε να επιβεβαιώσετε.

5. Μετρήσεις y_i, i=1, 2, …, N (όπως δίνονται παρακάτω) ενός μεγέθους y έχουν ληφθεί σε τακτά χρονικά διαστήματα (μία μέτρηση ανά λεπτό) τις χρονικές στιγμές $t_i=i$, i =0, 1, …, N. Θέλουμε να βρούμε την τιμή του μεγέθους y σε κάποιο χρονική στιγμή που είναι ενδιάμεση των μετρήσεων, για παράδειγμα τη χρονική στιγμή t = 3.2m. Ο υπολογισμός του μεγέθους y με το τρόπο αυτό ονομάζεται ***γραμμική παρεμβολή***.
Σύμφωνα με την μέθοδο αυτό, το πρόγραμμά σας θα πρέπει να υπολογίσει την τιμή του μεγέθους y μεταξύ δύο διαδοχικών μετρήσεων ως ακολούθως:
(**i**) Εύρεση του i τέτοιου ώστε $t_i < t < t_{i+1}$.
(**ii**) Εύρεση της εξίσωσης της ευθείας η οποία διέρχεται από τα σημεία με συντεταγμένες (i, y_i) και $(i+1, y_{i+1})$.
(**iii**) Υπολογισμός της τιμής y, εισάγοντας την τιμή του επιθυμητού χρόνου (π.χ. 3.2m) στην εξίσωση της ευθείας γραμμής που προσδιορίστηκε προηγουμένως.

(**α**) Εφαρμόστε την μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής σε μία συνάρτηση η οποία δέχεται ως όρισμα μια λίστα τιμών y καθώς και κάποια χρονική στιγμή t και επιστρέφει την τιμή y που υπολογίζεται από την γραμμική παρεμβολή και αντιστοιχεί τη χρονική στιγμή t.

(**β**) Γράψτε μία άλλη συνάρτηση που καλείται μέσα σε ένα *loop* όπου ο χρήστης καλείται να δώσει μία χρονική στιγμή στο χρονικό διάστημα $[0, N]$ και η αντίστοιχη τιμή που υπολογίζεται από την μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής εμφανίζεται στην οθόνη. Η επαναληπτική διαδικασία θα πρέπει να τερματίζεται όταν ο χρήστης εισαγάγει μια αρνητική τιμή για χρονική στιγμή.

(**γ**) Χρησιμοποιήστε τις ακόλουθες μετρήσεις για το μέγεθος y: 4.4, 2.0, 11.0, 21.5, 7.5, οι οποίες αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές 0, 1, …, 4 min. Θα πρέπει να υπολογίσετε τιμές του μεγέθους y για τις χρονικές στιγμές t = 2.5 και t = 3.1min. Επιβεβαιώστε ότι οι υπολογισμοί σας είναι σωστοί κάνοντάς τους στο χαρτί.