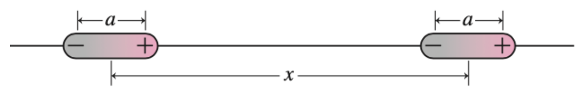
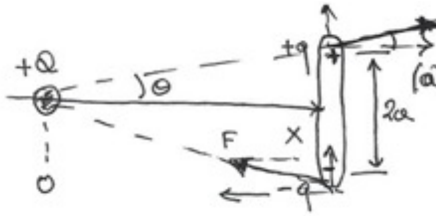
ΦΥΣ. 112

1ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή 29.09.2023**

1. Δύο πανομοιότυπα δίπολα το καθένα με φορτίο q και απόσταση μεταξύ των φορτίων α, βρίσκονται σε απόσταση x, μεταξύ τους όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. (α) Θεωρώντας τις δυνάμεις μεταξύ ζευγών φορτίων από διαφορετικά δίπολα, υπολογίστε την δύναμη μεταξύ των δίπολων και δείξτε ότι στο όριο $\alpha \ll x$, η δύναμη αυτή έχει μέτρο $6kp^2/x^4$, όπου $p = qa$ η διπολική ροπή του δίπολου και k η σταθερά Coulomb. (β) Προσδιορίστε κατά πόσο η δύναμη αυτή είναι ελκτική ή απωστική.





(α) Θεωρούμε το σύστημα των συντεταγμένων όπως στο σχήμα.

Έχουμε $\vec{p} = (2qa)\hat{j}$ και το πεδίο από το φορτίο Q στο δίπολο θα είναι: $\vec{E} = \frac{kQ}{x^2}\hat{i}$

Στο όριο $x \gg \alpha$, η ροπή στο δίπολο δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \Rightarrow \vec{\tau} = (2qa)\hat{j} \times \frac{kQ}{x^2}\hat{i} \Rightarrow \vec{\tau} = -\frac{2kQqa}{x^2}\hat{k}$$

Η διεύθυνση είναι προς το εσωτερικό της σελίδας, σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού ώστε να ευθυγραμμιστεί το δίπολο με το $\vec{E}$

(β) Όπως έχουμε δει στις διαλέξεις, το πεδίο του διπόλου στην θέση που βρίσκεται το φορτίο +Q είναι: $\vec{E}_{\delta\iota\pi o\lambda o} = -\frac{2kqa}{x^3}\hat{j}$

Επομένως η δύναμη στο +Q θα είναι: $\boxed{\vec{F}_{Q\delta\iota\pi} = Q\vec{E}_{\delta\iota\pi o\lambda o} = -\frac{2kQqa}{x^3}\hat{j}}$

Η δύναμη που ασκεί το φορτίο +Q στο δίπολο θα είναι:

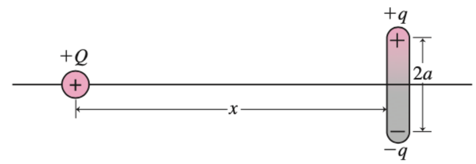
$$\vec{F}_{\delta\iota\pi\text{-}Q} = +2F^{y}_{Qq} = +2\frac{kQq}{(x^2+a^2)}\sin\theta\,\hat{j} \overset{x\gg a}{\simeq} +2\frac{kQq}{x^2+\underbrace{a^2}_{0}}\frac{a}{x}\hat{j} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{\delta\iota\pi\text{-}Q} = +\frac{2kQqa}{x^3}\hat{j}}$$

Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο από τον 3ο νόμο του Newton, η δύναμη $\vec{F}_{Q\text{-}\delta\iota\pi} = -\vec{F}_{\delta\iota\pi\text{-}Q}$ όπως φαίνεται συγκρίνοντας τις δύο εξισώσεις των δυνάμεων.

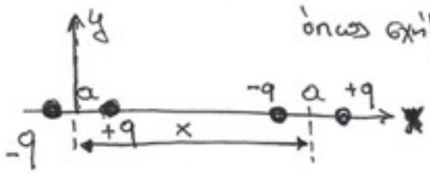
(γ) Η δύναμη που ασκείται στο δίπολο από το φορτίο +Q είναι παράλληλη προς την διπολική ροπή.

Αν το δίπολο ήταν ελεύθερο να κινηθεί, θα εκτελούσε γραμμική κίνηση στην +y-διεύθυνση και περιστροφή σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού

2. Ένα δίπολο με φορτία $\pm q$ και απόσταση μεταξύ τους $2a$ είναι τοποθετημένο σε απόσταση x από ένα σημειακό φορτίο $+Q$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Βρείτε τις εξισώσεις που δίνουν τα μέτρα (α) της συνισταμένης ροπής που ασκείται στο δίπολο και (β) συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο δίπολο στο όριο $a \ll x$. (γ) Προσδιορίστε την κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης;



Για να βρούμε την δύναμη μεταξύ των διπόλων θα εφαρμόσουμε την αρχή της υπέρθεσης στον νόμο του Coulomb. Θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων



όπως σχήμα. Το δίπολο στο αριστερό μέρος έχει το φορτίο $-q$ στη θέση $x=-a/2$ και το φορτίο $+q$ στη θέση $+a/2$. Το δίπολο στο δεξί μέρος έχει τα φορτία στις θέσεις $x-a/2$ $(-q)$ και $x+\frac{a}{2}$ $(+q)$

Η δύναμη Coulomb σε ένα φορτίο στο δίπολο της δεξιάς πλευράς από τα φορτία του διπόλου στην αριστερή πλευρά θα είναι:

$$\vec{F}_{q_\Delta} = k q_\Delta q_A \frac{(x_\Delta - x)\,\hat{\imath}}{(x_\Delta - x_A)^3}$$

όπου x_A η θέση του φορτίου στο αριστερό δίπολο και x_Δ η θέση του φορτίου στο δεξί δίπολο

Επομένως βάζοντας όλες τις συνεισφορές:

$$\vec{F}_x = kq^2\,\hat{\imath}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+a)^2} - \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{x^2}\right]$$

όπου ο 1ος και 4ος όρος αναφέρονται στη δύναμη μεταξύ των ομόσημων φορτίων και ο 2ος και 3ος στα $(-q_A)(+q_\Delta)$ και $(+q_A)(-q_\Delta)$

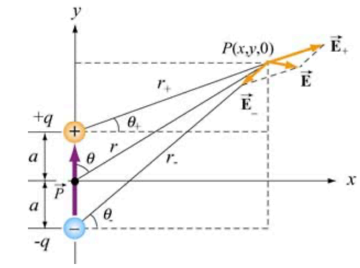
Επομένως: $$\boxed{\vec{F}_x = -\frac{2kq^2a^2(3x^2-a^2)}{x^2(x^2-a^2)^2}\,\hat{\imath}}$$

(α) Στο όριο $x \gg a$ θα έχουμε: $\vec{F}_x \simeq \frac{-2kq^2a^2(3x^2)}{x^6}\,\hat{\imath} = \frac{-6kq^2a^2}{x^4}\,\hat{\imath} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_x = \frac{-6kp^2}{x^4}\,\hat{\imath}}$

(β) Η δύναμη στο δεξί δίπολο είναι στην αρνητική x-κατεύθυνση δηλώνοντας ότι η δύναμη είναι ελκτική.

3. Θεωρήστε το ηλεκτρικό δίπολο του σχήματος.

(α) Δείξτε ότι οι δύο συνιστώσες E_x και E_y του ηλεκτρικού πεδίου του διπόλου στο όριο που $r \gg a$ δίνονται από τις σχέσεις:



$$E_x = \frac{3p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} sin\theta cos\theta \qquad E_y = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1)$$

όπου $sin\theta = x/r$ και $cos\theta = y/r$.

(β) Δείξτε ότι οι δύο παραπάνω σχέσεις για τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου μπορούν να γραφούν σε πολικές συντεταγμένες με την μορφή: $\vec{E}(r,\theta) = E_r\hat{r} + E_\theta\hat{\theta}$, όπου:

$$E_r = \frac{2pcos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad E_\theta = \frac{psin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

(α) Υπολογίζουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση $r \gg a$, από το δίπολο. Η x-συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P με καρτεσιανές συντεταγμένες $(x, y, 0)$ δίνεται από τη σχέση:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\cos\theta_+}{r_+^2} - \frac{\cos\theta_-}{r_-^2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x}{[x^2+(y-a)^2]^{3/2}} - \frac{x}{[x^2+(y+a)^2]^{3/2}}\right]$$

όπου $r_\pm^2 = r^2 + a^2 \mp 2ra\cos\theta = x^2 + (y \mp a)^2$

Παρόμοια, η y-συνιστώσα δίνεται από τη σχέση:

$$E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\sin\theta_+}{r_+^2} - \frac{\sin\theta_-}{r_-^2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{y-a}{[x^2+(y-a)^2]^{3/2}} - \frac{y+a}{[x^2+(y+a)^2]^{3/2}}\right]$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα Taylor για να αναπτύξουμε το ηλεκτρικό πεδίο, και θα κρατήσουμε μόνο όρους που είναι ανάλογοι του $1/r^3$ και θα αγνοήσουμε όρους μεγαλύτερης τάξης από $1/r^5$. όπου $r = (x^2+y^2)^{1/2}$

Έχουμε αρχικά:

$$[x^2+(y\pm a)^2]^{-3/2} = (x^2+y^2+a^2 \pm 2ay)^{-3/2} = r^{-3}\left[1 + \frac{a^2 \pm 2ay}{r^2}\right]^{-3/2}$$

Στο όριο $r \gg a$ χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα Taylor με $s = \frac{a^2 \pm 2ay}{r^2}$

$$(1+s)^{-3/2} \simeq 1 - \frac{3}{2}s + \frac{15}{8}s^2 - \dots$$

Οι εξισώσεις για τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου γίνονται επομένως:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{6xya}{r^5} + \dots$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{2a}{r^3} + \frac{6y^2a}{r^5}\right) + \dots$$

όπου αγνοούμε όρους τάξης ίσης ή μεγαλύτερης του s^2. Το ηλεκτρικό πεδίο επομένως γράφεται:

$$\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{2a}{r^3}\hat{j} + \frac{6ya}{r^5}(x\hat{i}+y\hat{j})\right] = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\frac{3yx}{r^2}\hat{i} + \left(\frac{3y^2}{r^2}-1\right)\hat{j}\right]$$

όπου χρησιμοποιούμε τον ορισμό του μέτρου της ηλεκτρικής διπολικής ροπής $p=2aq$

Συναρτήσει των πολικών συντεταγμένων, με $\sin\theta = \frac{x}{r}$ και $\cos\theta = \frac{y}{r}$ θα πάρουμε:

$$\boxed{E_x = \frac{3p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sin\theta\cos\theta} \quad \text{και} \quad \boxed{E_y = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1)}$$

(β) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε καρτεσιανές συντεταγμένες θα είναι:

$$\vec{E}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3\sin\theta\cos\theta\,\hat{i} + (3\cos^2\theta - 1)\hat{j}\right]$$

Με πράξεις, η προηγούμενη σχέση γράφεται ως:

$$\vec{E}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta(\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}) + \sin\theta\cos\theta\,\hat{i} + (\cos^2\theta - 1)\hat{j}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta(\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}) + \sin\theta(\cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j})\right]$$

Σε πολικές συντεταγμένες μπορούμε να γράψουμε τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{r}$ και $\hat{\theta}$ ως:

$$\hat{r} = \sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$
$$\hat{\theta} = \cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j}$$

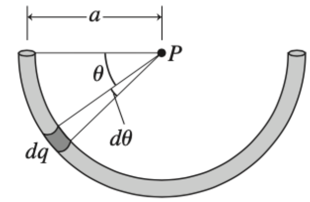
Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο γράφεται χρησιμοποιώντας τα $\hat{r}$ και $\hat{\theta}$

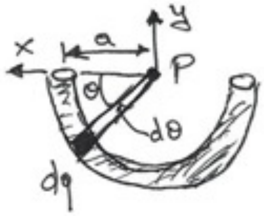
$$\boxed{\vec{E}(r,\theta) = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right]}$$

Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ θα είναι:

$$E = \left(E_x^2 + E_y^2\right)^{1/2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\cos^2\theta + 1\right)^{1/2}}$$

4. Ένας ημικυκλικός βρόχος ακτίνας a είναι φορτισμένος με φορτίο Q που είναι ομοιόμορφα καταναμημένο σε όλο το μήκος του. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο E, στο κέντρο του βρόχου (σημείο P του διπλανού σχήματος). *Υπόδειξη:* Θα πρέπει να χωρίσετε το βρόχο σε μικρά τμήματα με φορτίο dq όπως φαίνεται στο σχήμα, και να γράψετε κατόπιν το dq συναρτήσει της γωνίας $d\varphi$ και να ολοκληρώσετε.





Θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων του σχήματος, με αρχή το σημείο P και άξονες y και x.

Το στοιχειώδες φορτίο dq δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο έντασης $dE = k\dfrac{dq}{a^2}$ κατά μήκος της ακτινικής διεύθυνσης:

$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$.

Το ολικό πεδίο $\vec{E}$ στο σημείο P προκύπτει ολοκληρώνοντας τα στοιχειώδη πεδία για όλα τα στοιχειώδη φορτία dq: $\vec{E}(P) = \int E\,d\hat{r}$

Η κατανομή φορτίου είναι ομοιόμορφη κατά μήκος του τόξου μήκους πa που αντιστοιχεί σε ημικύκλιο. Η γραμμική πυκνότητα φορτίου: $\lambda = \dfrac{Q}{\ell} = \dfrac{Q}{\pi a}$

Επομένως το στοιχειώδες φορτίο $dq = \lambda\,d\ell$
Αλλά το στοιχειώδες μήκος τόξου $d\ell = a\,d\theta$

$\Big\} \Rightarrow dq = \lambda a\,d\theta$

Γράφουμε επομένως το ολοκλήρωμα, θεωρώντας $dE = k\dfrac{\lambda \cancel{a}\,d\theta}{a^{\cancel{2}}} = k\dfrac{\lambda\,d\theta}{a}$

$$\vec{E}(P) = \int_0^{\pi} \frac{k\lambda}{a}\,d\theta\,\hat{r} = \frac{k\lambda}{a}\left[\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta\,\hat{i} + \int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\,\hat{j}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}(P) = \frac{k\lambda}{a}\Big(\underbrace{\cancel{\sin\theta\Big|_0^{\pi}}}_{0}\hat{i} - \cos\theta\Big|_0^{\pi}\hat{j}\Big) \Rightarrow \vec{E}(P) = -\frac{k\lambda}{a}(-1-1)\hat{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}(P) = \frac{2k\lambda}{a}\hat{j} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(P) = \frac{2kQ}{\pi a^2}\hat{j}}$$

Το πεδίο ελαττώνεται κατά $1/a^2$ από το φορτίο.

5. Μια λεπτή ράβδος βρίσκεται κατά μήκος του x-άξονα και έχει μήκος $2L$. Το μέσο της ράβδο βρίσκεται στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Η ράβδος έχει γραμμική πυκνότητα φορτίου $\lambda = \lambda_o(x/L)$, όπου λ_o σταθερά. (α) Βρείτε την εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου σε σημεία στον x-άξονα για $x > L$. (β) Δείξτε ότι για $x \gg L$ το αποτέλεσμά σας παρουσιάζει την εξάρτηση του $1/x^3$ που παρουσιάζει το πεδίου ενός ηλεκτρικού διπόλου και προσδιορίστε την διπολική ροπή της ράβδου.

(α) Η ράβδος έχει γραμμική πυκνότητα φορτίου $\lambda = \lambda_o \frac{x'}{L}$ όπου το x' εκτείνεται από το $x' = -L$ έως $x' = +L$. Θα βρούμε αρχικά το ηλεκτρικό πεδίο σε κάποιο σημείο το οποία βρίσκεται σε απόσταση $x > L$

Το ηλεκτρικό πεδίο dE που δημιουργείται από το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο της γραμμικής κατανομής θα είναι: $dE = k\frac{dq}{r^2}\hat{r}$ με $dq = \lambda dx'$ και $r = x - x'$

Υπολογίζουμε αρχικά το ολοκλήρωμα:

$$\vec{E} = \int_{-L}^{L} \frac{k\lambda_o (x'/L)\hat{i}}{(x-x')^2}dx' = \frac{k\lambda_o}{L}\hat{i}\left[\frac{x}{x-x'} + \ln(x-x')\right]_{-L}^{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{k\lambda_o}{L}\hat{i}\left[\frac{x}{x-L} - \frac{x}{x+L} + \ln(x-L) - \ln(x+L)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{k\lambda_o}{L}\hat{i}\left[\frac{x}{x-L} - \frac{x}{x+L} + \ln\frac{(x-L)}{(x+L)}\right] \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{k\lambda_o}{L}\hat{i}\left[\frac{2xL}{x^2-L^2} + \ln\frac{(x-L)}{(x+L)}\right]}$$

(β) Όταν $x \gg L$ τότε η τελευταία εξίσωση θα δώσει:

$$\vec{E} = \frac{k\lambda_o}{L}\hat{i}\left[\frac{2xL}{x^2-L^2} + \ln(x-L) - \ln(x-L)\right] = \frac{k\lambda_o}{L}\hat{i}\left[\frac{2L}{x\left(1-\frac{L^2}{x^2}\right)} + \ln\left[\cancel{x}\left(1-\frac{L}{x}\right)\right] - \ln\left[\cancel{x}\left(1+\frac{L}{x}\right)\right]\right]$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{k\lambda_o}{L}\hat{i}\left[\frac{2L}{x}\left(1-\frac{L^2}{x^2}\right)^{-1} + \ln\left(1-\frac{L}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{L}{x}\right)\right] \Rightarrow$$

Από ανάπτυγμα Taylor όπου $L/x = \varepsilon \Rightarrow$

$(1-\varepsilon^2)^{-1} \simeq 1+\varepsilon^2$

$\ln(1\pm\varepsilon) \simeq \pm\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2$

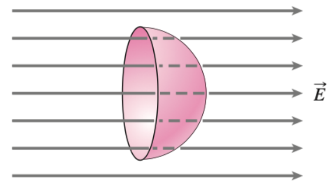
$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{k\lambda_o}{L}\hat{i}\left[\frac{2L}{x}\left(1+\frac{L^2}{x^2}\right) + \left(-\frac{L}{x} - \cancel{\frac{1}{2}\frac{L^2}{x^2}}\right) - \left(\frac{L}{x} - \cancel{\frac{1}{2}\frac{L^2}{x^2}}\right)\right]$$

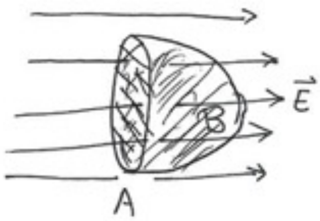
$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{k\lambda_o}{L}\hat{i}\left[\cancel{\frac{2L}{x}} + \frac{2L^3}{x^3} - \cancel{\frac{2L}{x}}\right] \Rightarrow \vec{E} = \frac{k\lambda_o}{\cancel{L}}\hat{i}\,\frac{2L^3}{x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{2k\lambda_o L^2}{x^3}\hat{i}} \Rightarrow \vec{E} = \frac{2kp}{x^3}\hat{i}$$

όπου $p = \lambda_o L^2$ η διπολική ροπή της ράβδου

6. Προσδιορίστε την ηλεκτρική ροή διαμέσω του ημισφαιρικού κελύφους ακτίνας R του διπλανού σχήματος που βρίσκεται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο E. <u>*Υπόδειξη:*</u> Δεν χρειάζεται να κάνετε κάποιο πολύπλοκο ολοκλήρωμα.





Η ροή που περνά από το ημισφαίριο περνά από το δίσκο του ισημερινού της σφαίρας A.
Επομένως η ροή διαμέσω της A που είναι κάθετη στο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ είναι ίση με τη ροή που περνά από το ημισφαίριο.

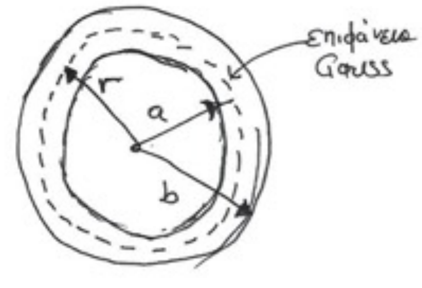
Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ είναι ομοιόμορφο και άρα $\Phi_E = \pi R^2 E$

Το αποτέλεσμα εφαρμογής του νόμου του Gauss είναι ίδιο δεδομένου ότι η ροή μέσω του δίσκου και της σφαιρικής επιφάνειας του ημισφαιρίου θα είναι 0 αφού το συνολικό φορτίο που περικλείει αυτή η κλειστή επιφάνεια θα είναι 0

$$\Phi_{AB} = \oiint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{g}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \Phi_A + \Phi_B = 0 \Rightarrow \Phi_A = -\Phi_B \Rightarrow \boxed{\Phi_{\eta\mu} = -\pi R^2 E}$$

7. Ένας χοντρός σφαιρικός φλοιός εσωτερικής ακτίνας a και εξωτερικής ακτίνας b είναι φορτισμένος με ομοιόμορφη χωρική πυκνότητα φορτίου ρ. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή στο εσωτερικό του σφαιρικού φλοιού ($\alpha < r < b$) και δείξτε ότι το αποτέλεσμά σας είναι συμβατό με αυτό μιας φορτισμένης σφαίρας με χωρική πυκνότητα φορτίου ρ, και ακτίνας b. (Στην περίπτωση αυτή $\alpha = 0$).

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας του προβλήματος μπορούμε να εφαρμόσουμε τον νόμο του Gauss.



Θεωρούμε την επιφάνεια Gauss σφαίρας ακτίνας $a < r < b$.

Σύμφωνα με τον νόμο του Gauss θα έχουμε:

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{A} = EA = \frac{q_{εσ}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q_{εσ}}{A\varepsilon_0} = \frac{q_{εσ}}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

Το φορτίο $q_{εσ}$ είναι αυτό που περικλείεται από τον όγκο της σφαίρας της Gaussian επιφάνειας και του εσωτερικού φλοιού:

$$q_{εσ} = \rho V_{εσ} = \rho \frac{4}{3}\pi (r^3 - a^3).$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση του πεδίου, δίνει: $E = \dfrac{\frac{4}{3}\pi (r^3 - a^3)\rho}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \dfrac{a^3}{r^2}\right)}$

Έστω ότι $a \to 0$ και από το γεγονός ότι $Q = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$ θα έχουμε:

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

που αποτελεί όπως έχουμε δει το πεδίο στο εσωτερικό μιας ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας (όχι αγώγιμης). Το πεδίο αυξάνει γραμμικά καθώς απομακρυνόμαστε από το κέντρο της σφαίρας μέχρι την επιφάνειά της και μετά ελαττώνεται ως $1/r^2$

8. Η χωρική πυκνότητα φορτίου μιας συμπαγούς μη αγώγιμης σφαίρας ακτίνας a δίνεται από την σχέση $\rho = \frac{\rho_0 r}{\alpha}$, όπου ρ_o είναι σταθερά. (α) Βρείτε το ολικό φορτίο της σφαίρας και (β) την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό της σφαίρας συναρτήσει της απόστασης r από το κέντρο της σφαίρας.

Λόγω σφαιρικής συμμετρίας της κατανομής φορτίου μπορούμε να εφαρμόσουμε τον νόμο του Gauss. Ωστόσο η κατανομή φορτίου δεν είναι ομοιόμορφη και επομένως θα χρειαστεί να ολοκληρώσουμε για να βρούμε το φορτίο που περικλείεται από την Gaussian επιφάνεια

Το φορτίο στο εσωτερικό σφαίρας ακτίνας $r \leq a$ είναι:

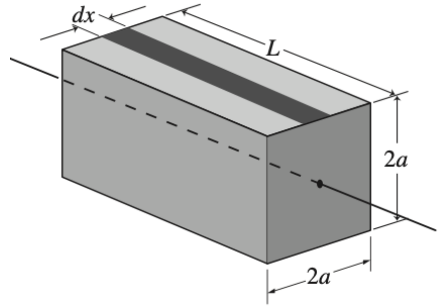
$$q(r) = \int_0^r \rho\, dV = \int_0^r \rho\, 4\pi r^2 dr \Rightarrow q(r) = \frac{4\pi\rho_0}{a}\int_0^r r^3 dr \Rightarrow \boxed{q(r) = \frac{\pi\rho_0 r^4}{a}}$$

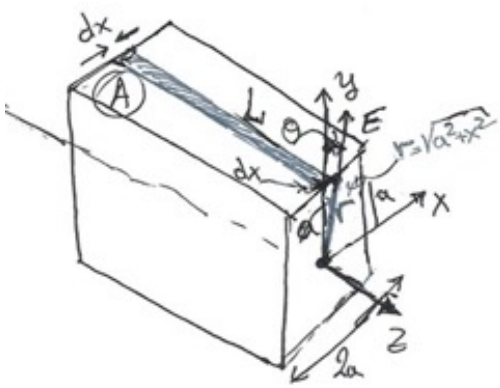
Για $r = a$ θα έχουμε: $q(a) = \frac{\pi\rho_0 a^{\cancel{4}\,3}}{\cancel{a}} \Rightarrow \boxed{q(a) = \pi\rho_0 a^3}$

Από τον νόμο του Gauss: $\oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E4\cancel{\pi} r^{\cancel{2}} = \frac{\cancel{\pi}\rho_0 r^{\cancel{4}\,2}}{\varepsilon_0 a} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0 a}}$$

9. Το διπλανό σχήμα δείχνει ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με πλευρές $2a$ και μήκος L που περιβάλει έναν ευθύγραμμο αγωγό που είναι φορτισμένος ομοιόμορφα με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ. Ο ευθύγραμμος αγωγός περνά από το κέντρο των δύο βάσεων του παραλληλεπιπέδου όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ολοκληρώστε το πεδίο της γραμμικής κατανομής φορτίου χρησιμοποιώντας λωρίδες στοιχειώδους πάχους dx όπως φαίνεται στο σχήμα ώστε να βρείτε την στοιχειώδη ηλεκτρική ροή διαμέσω μιας πλευράς του παραλληλεπιπέδου. Βρείτε την ολική ροή και δείξτε ότι το αποτέλεσμά σας είναι συμβατό με τον νόμο του Gauss.





Αντί να χρησιμοποιήσουμε την γραμμική συμμετρία της κατανομής φορτίου, θα βρούμε τη ροή μιας επίπεδης επιφάνειας μέρος του ορθογωνίου που δίνεται.

Ξέρουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο στην πάνω επιφάνεια του κουτιού έχει μέτρο: $\lambda/2\pi\varepsilon_0 r$ και έχει διεύθυνση ακτινική απομακρυνόμενη από τη γραμμική κατανομή του φορτίου.

Η ροή διαμέσου μιας λωρίδας πλάτους dx στη θέση x είναι:

$$d\Phi = E L \cos\theta \, dx = \left[\lambda/(2\pi\varepsilon_0 r)\right] L \,(a/r)\, dx$$

όπου $r=\sqrt{a^2+x^2}$ το διάνυσμα θέσης της λωρίδας πάχους dx

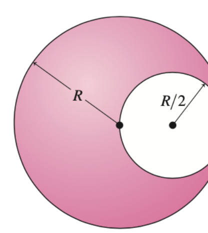
Ολοκληρώνουμε για $x=-a$ έως $x=a$ (από το αριστερό στο δεξιό άκρο του κουτιού):

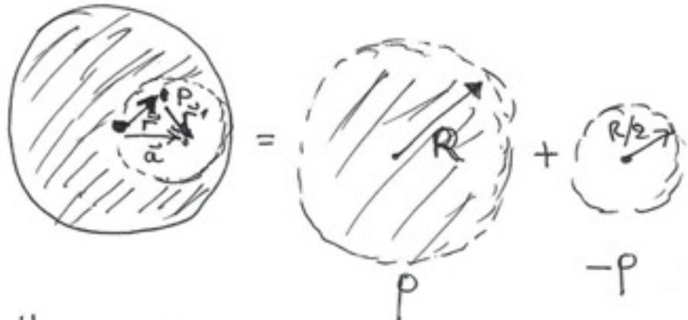
$$\Phi_A = \int_{-a}^{a}\left(\frac{\lambda a L}{2\pi\varepsilon_0}\right)\left(\frac{dx}{a^2+x^2}\right) = \left(\frac{\lambda a L}{2\pi\varepsilon_0}\right)\left[\frac{1}{a}\tan\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{-a}^{a} \Rightarrow \Phi_A = \left(\frac{\lambda L}{2\cancel{\pi}\varepsilon_0}\right)\left(\frac{\cancel{\pi}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_A = \frac{\lambda L}{4\varepsilon_0}}$$

Λόγω συμμετρίας, η ροή που περνά το κουτί θα είναι 4 φορές το προηγούμενο αποτέλεσμα. Δηλαδή $\Phi_{tot} = 4\Phi_A \Rightarrow \boxed{\Phi_{TOT} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}}$ που συμφωνεί με το αποτέλεσμα της εφαρμογής του νόμου του Gauss επειδή $q_{εσω} = \lambda \cdot L$

10. Μια συμπαγής μη αγώγιμη σφαίρα ακτίνας R είναι ομοιόμορφα φορτισμένη με χωρική πυκνότητα φορτίου ρ. Στη σφαίρα υπάρχει μια σφαιρική τρύπα το κέντρο της οποίας βρίσκεται σε απόσταση $R/2$ από το κέντρο της αρχικής σφαίρας, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Δείξτε ότι το ηλεκτρικό πεδίο παντού στο χώρο της τρύπας έχει οριζόντια διεύθυνση και μέτρο ίσο με $\rho R/6\varepsilon_0$. Υπόδειξη: Θα μπορούσατε να θεωρήσετε ότι η τρύπα συμπεριφέρεται σαν η υπέρθεση δύο ομοιόμορφα φορτισμένων σφαιρών με αντίθετα φορτία.





Η συμπαγής σφαίρα μπορεί να θεωρηθεί ως υπέρθεση μιας σφαίρας με κοιλότητα και μιας μικρότερης σφαίρας που συμπληρώνει την κοιλότητα. Η μια σφαίρα θεωρούμε ότι έχει ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου $+\rho$, ενώ η μικρότερη σφαίρα έχει πυκνότητα φορτίου $-\rho$, όπως το παραπάνω σχήμα. Από το νόμο του Gauss θα έχουμε: ότι το πεδίο σε ένα σημείο P εξαιτίας της μεγαλύτερης σφαίρας θα είναι:

$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\cdot\cancel{4\pi r^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi} r^{\cancel{3}} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}}$$

Παρόμοια, το ηλεκτρικό πεδίο εξαιτίας της μικρότερης σφαίρας, θα είναι:

$$E' 4\pi r' = \frac{q'_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}(-\rho)\frac{4}{3}\pi r'^3 \Rightarrow \boxed{E' = -\frac{\rho r'}{3\varepsilon_0}}$$

Το συνολικό πεδίο προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα των δύο προηγούμενων πεδίων, τα οποία έχουν διεύθυνση ακτινική.

Θα έχουμε:
$$\vec{E}_P = \vec{E} + \vec{E}' = \frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho\vec{r}'}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r} + \vec{r}') \Rightarrow \boxed{\vec{E}_P = \frac{\rho\vec{a}}{3\varepsilon_0}}$$

Το διάνυσμα $\vec{a} = \frac{R}{2}\hat{i}$. Άρα $\boxed{\vec{E}_P = \frac{\rho R}{6\varepsilon_0}\hat{i}}$ Το πεδίο στο εσωτερικό της κοιλότητας έχει διεύθυνση στη x-διεύθυνση και μέτρο $\rho R/6\varepsilon_0$

Η εξίσωση $\vec{E}_P = \frac{\rho\vec{a}}{3\varepsilon_0}$ ισχύει για οποιοδήποτε μέγεθος κοιλότητας