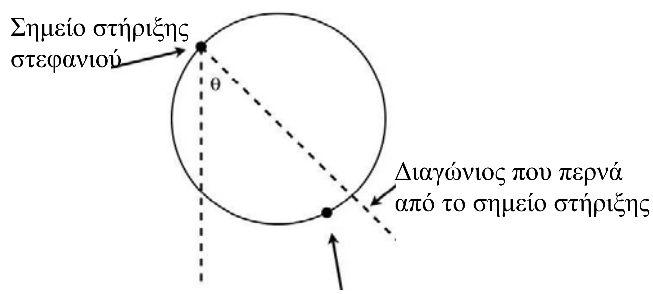
ΦΥΣ. 133

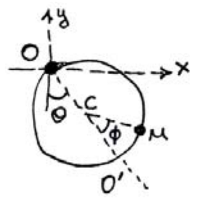
ΕΡΓΑΣΙΑ # 8 **Επιστροφή 3-5-2006**

Η τελευταία εργασία: πρέπει να επιστραφεί στις 3-Μαου. Καθυστερημένες αλλά και όμοιες εργασίες δεν θα βαθμολογηθούν.

1. Ένα λεπτό στεφάνι ακτίνας R και μάζας M είναι εξαρτημένο από ένα σημείο και ταλαντώνεται στο κατακόρυφο επίπεδο. Πάνω στο στεφάνι βρίσκεται μια μικρή μπάλα μάζας M επίσης η οποία περιορίζεται να κινείται χωρίς τριβές κατά μήκος της περιφέρειας του στεφανιού όπως στο σχήμα. Η ροπή αδράνειας του στεφανιού ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του είναι $I = MR^2$. Θεωρείστε μικρές μόνο ταλαντώσεις και υπολογίστε τα ακόλουθα:



(α) Τους δύο πίνακες **M** και **V.** [**10β**]
(β) Τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος. [**4β**]
(γ) Τα ιδιοδιανύσματα. [**4β**]
(δ) Βρείτε τα 2 σετ των αρχικών συνθηκών που οδηγούν σε ταλάντωση με τον ένα ή τον άλλο κανονικό τρόπο ταλάντωσης (normal mode). Περιγράψτε ποιοτικά σε τι αντιστοιχούν οι δύο φυσικοί τρόποι ταλάντωσης. [**2β**]



Έστω O το σημείο στήριξης του στεφανιού και C το κέντρο του στεφανιού. OO' είναι η διάμετρος του στεφανιού

$$T=\frac{1}{2} I\dot{\theta}^2+\frac{1}{2} M\left(\dot{x}_M^2+\dot{y}_M^2\right)$$

κινητική ενέργεια στεφανιού (περιστροφή ως πρός O) + κινητική ενέργεια μάζας M ως προς ϕ εξαιτίας περιστροφής.

Οι συντεταγμένες x_M και y_M είναι ως προς σύστημα συντεταγμένων που περνά από το O. και έχει αρχή το O.

Σε πολικές συντεταγμένες γράφονται:

$$\left.\begin{aligned} x_m &= R\sin\theta + R\sin(\theta+\phi) \\ y_m &= -R\cos\theta + R\cos(\pi-(\theta+\phi)) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = R\left[\sin\theta+\sin(\theta+\phi)\right] \\ y_M = -R\left[\cos\theta+\cos(\theta+\phi)\right] \end{cases}$$

Επομένως οι αντίστοιχες ταχύτητες θα είναι:

$$\begin{cases} \dot{x}_M = R\left[\dot{\theta}\cos\theta+(\dot{\theta}+\dot{\phi})\cos(\theta+\phi)\right] \\ \dot{y}_M = -R\left[-\dot{\theta}\sin\theta-(\dot{\theta}+\dot{\phi})\sin(\theta+\phi)\right] \end{cases}$$

Άρα:

$$\begin{cases} \dot{x}_M = R\left[\dot{\theta}\cos\theta+(\dot{\theta}+\dot{\phi})\cos(\theta+\phi)\right] \\ \dot{y}_M = R\left[\dot{\theta}\sin\theta+(\dot{\theta}+\dot{\phi})\sin(\theta+\phi)\right] \end{cases}$$

Η ροπή αδράνειας του στεφανιού ως προς άξονα που περνά από το O είναι: $I=2MR^2$

Επομένως

$$T=MR^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}MR^2\left[\dot{\theta}^2+(\dot{\theta}+\dot{\phi})^2+2\big(\underbrace{\cos\ \cos(\theta+\phi)+\sin\theta\sin(\theta+\phi)}_{\cos(\cancel{\theta}+\phi-\cancel{\theta})=\cos\phi}\big)(\dot{\theta}+\dot{\phi})\dot{\theta}\right]$$

$$\Rightarrow T=MR^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}MR^2\left[\dot{\theta}^2+(\dot{\theta}+\dot{\phi})^2+2\cos\phi(\dot{\theta}+\dot{\phi})\dot{\theta}\right]$$

Για προσεγγίσεις μικρών γωνιών θα έχουμε :

$$T = MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MR^2\left[\dot{\theta}^2 + (\dot{\theta}+\dot{\phi})^2 + 2(\dot{\theta}+\dot{\phi})\dot{\theta}\right] = \frac{1}{2}MR^2\left[2\dot{\theta}^2 + (4\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2+4\dot{\theta}\dot{\phi})\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}MR^2\left[6\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi} + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\right]$$ ομογενής δευτέρου βαθμού ως προς ταχύτητες

Επομένως :

$$\{M\} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2}MR^2$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος θα είναι :

$$V = -\underbrace{MgR\cos\theta}_{\text{στεφάνια}} - \big[\underbrace{MgR\cos\theta + MgR\cos(\theta+\phi)}_{\text{μάζας}}\big]$$ μετρούμενα ως προς το σημείο στήριξης.

Για μικρές γωνίες και αγνοώντας το σταθερό όρο θα έχουμε :

$$V = -MgR\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right) - \left[MgR\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right) + MgR\left(1-\frac{(\theta+\phi)^2}{2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$V = MgR\frac{\theta^2}{2} + MgR\frac{\theta^2}{2} + MgR\frac{(\theta+\phi)^2}{2} = \frac{1}{2}MgR\left[\theta^2+\theta^2+(\theta+\phi)^2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{2}MgR\left[3\theta^2+\phi^2+\theta\phi+\phi\theta\right]$$

Επομένως $\{V\} = \frac{1}{2}MgR\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(β) Από τη χαρακτηριστική εξίσωση έχουμε : $\{V_{ij} - \omega^2 M_{ij} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{3MgR}{2} - 3\omega^2MR^2 & \frac{Mg}{2}R - \omega^2MR^2 \\ \frac{MgR}{2} - \omega^2MR^2 & \frac{MgR}{2} - \frac{\omega^2MR^2}{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^4(2M^2R^4) - 5\omega^2M^2R^3g + 2M^2g^2R^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{5M^2gR^3 \pm 3M^2R^3g}{4M^2R^4}$$

Άρα οι δύο ιδιοσυχνότητες είναι : $\left.\begin{aligned}\omega_1^2 &= \frac{2g}{R} \\ \omega_2^2 &= \frac{g}{2R}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{\frac{2g}{R}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{g}{2R}}\end{aligned}$

(γ) Τα ιδιοδιανύσματα :

Αντικαθιστώντας $\omega_1 = \sqrt{\frac{2g}{R}}$ στην χαρακτηριστική εξίσωση έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 3\frac{MgR}{2} - 3\frac{2g}{\cancel{R}}MR^{\cancel{2}} & \frac{M}{2}gR - \frac{2g}{\cancel{R}}MR^{\cancel{2}} \\ \frac{M}{2}gR - \frac{2g}{\cancel{R}}MR^{\cancel{2}} & \frac{MgR}{2} - \frac{2g}{2\cancel{R}}MR^{\cancel{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{9}{2}gMR & -\frac{3gMR}{2} \\ -\frac{3gMR}{2} & -\frac{MgR}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 3a_{11} + a_{21} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{21} = -3a_{11}$$

Επομένως $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Όμοια αντικαθιστώντας $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{2R}}$ θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \frac{3M}{2}gR - \frac{3}{2}\frac{g}{\cancel{R}}MR^{\cancel{2}} & \cancel{\frac{M}{2}gR - \frac{g}{2\cancel{R}}MR^{\cancel{2}}} \\ \cancel{\frac{M}{2}gR - \frac{g}{2\cancel{R}}MR^{\cancel{2}}} & \frac{MgR}{2} - \frac{g}{2\cdot 2\cancel{R}}MR^{\cancel{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{MgR}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_{12} = 0 \\ a_{22} = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Οι 2 φυσικοί τρόποι ταλάντωσης είναι επομένως

i) Για την περίπτωση 1 η μάζα M κινείται με το τριπλάσιο πλάτος από το στεφάνι αλλά στην αντίθετη κατεύθυνση

ii) Για τη περίπτωση 2: η μάζα θα είναι ακίνητη.

2. Μια χάντρα μάζας Μ περιορίζεται στο να κινείται στην επιφάνεια μιας λείας σφαίρας μάζας ακτίνας R_0. Η δυναμική ενέργεια της χάντρας ανάλογα με τη θέση της, δίνεται από την σχέση:

$$U(\vec{r}) = MA_0\left[l_1 x + l_2 y + l_3 z\right]$$

(α) Να βρεθεί η Lagrangian του συστήματος και να εκφραστεί συναρτήσει δύο γωνιών και των χρονικών παραγώγων τους. [**2β**]

(β) Να βρεθεί η εξίσωση κίνησης του συστήματος μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrange. [**2β**]

(γ) Να βρεθεί η Hamiltonian του συστήματος. [**2β**]

(δ) Θεωρείστε τώρα δύο σώματα μάζας M_1 και M_2 αντίστοιχα με συντεταγμένες (x_1,y_1,z_1) και (x_2,y_2,z_2) τα οποία κινούνται στην επιφάνεια της σφαίρας. Το σύστημα αυτό έχει δυναμική ενέργεια που δίνεται από τη σχέση:

$$U_{tot} = U(\vec{r}_1) + U(\vec{r}_2) + \frac{1}{2}k_A R_0^2\left(6\theta_1 - 5\theta_2\right)^2 + \frac{1}{2}k_B R_0^2\left(\theta_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_C R_0^2\left(\theta_2\right)^2$$

Να βρεθεί η μορφή της εξίσωσης του $2^{ου}$ νόμου του Newton [**3β**].

(ε) Για την περίπτωση των δύο σωμάτων, λύστε την εξίσωση του $2^{ου}$ νόμου του Newton και περιγράψτε πλήρως την κίνηση. Η απάντησή σας θα πρέπει να περιέχει συζήτηση σχετικά με τους φυσικούς τρόπους ταλάντωσης, ιδιοσυχνότητες και ιδιοδιανύσματα. [**11β**]

Η δυναμική ενέργεια του σώματος ανάλογα με τη θέση του πάνω στη σφαιρική επιφάνεια είναι:

$$U = MA_0\left(l_1 x + l_2 y + l_3 z\right)$$

(α) Για να βρούμε τη Lagrangian του συστήματος χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$x = R_0\cos\phi\sin\Theta \qquad y = R_0\sin\phi\cos\Theta \qquad z = R_0\cos\Theta$$

Επομένως $$T = \frac{1}{2}MR_0^2\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\Theta\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]$$

$$U = MA_0R_0\left(l_1\cos\phi\sin\Theta + l_2\sin\phi\sin\Theta + l_3\cos\Theta\right)$$

$$L = T - U$$

(β) Οι εξισώσεις κίνησης λαμβάνονται από τις εξισώσεις Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = MR_0^2\dot\theta \qquad \frac{\partial L}{\partial\dot\phi} = MR_0^2\sin^2\Theta(\dot\phi) \qquad \frac{\partial L}{\partial\theta} = MR_0^2\sin\theta\cos\theta\,\dot\theta^2 - MR_0A_0\left[l_1\cos\phi\cos\theta + l_2\sin\theta\sin\phi - l_3\sin\theta\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial\phi} = -MR_0A_0\sin\theta\left[-l_1\sin\phi + l_2\cos\phi\right]$$

Επομένως:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{d}{dt}\left[MR_0^2\dot\theta\right] - MR_0^2\sin\theta\cos\theta(\dot\theta)^2 + MR_0A_0\left[l_1\cos\phi\cos\theta + l_2\sin\phi\cos\theta - l_3\sin\theta\right] = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}\right) - \frac{\partial L}{\partial\phi} = \frac{d}{dt}\left[MR_0^2\sin^2\theta\,\dot\phi\right] + MA_0R_0\sin\theta\left[-l_1\sin\phi + l_2\cos\phi\right] = 0$$

(γ) Για να βρούμε τη Hamiltonian παρατηρούμε ότι:

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = MR_0^2\dot\theta \qquad P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = MR_0^2 \sin^2\theta(\dot\phi)$$

Επομένως:

$$H = P_\theta \dot\theta + P_\phi \dot\phi - L = \frac{P_\theta^2}{2MR_0^2} + \frac{P_\phi^2}{2MR_0^2\sin^2\theta} + MA_0R_0[l_1\cos\phi\sin\theta + l_2\sin\theta\sin\phi + l_3\cos\theta]$$

(δ) Έχουμε 2 σώματα με μάζες M_1 και M_2 πάνω στη ίδια σφαίρα. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες και πάλι. Η δυναμική ενέργεια του συστήματος θα είναι:

$$V = V(\vec r_1) + V(\vec r_2) + \frac{1}{2}k_A R_0^2(6\theta_1 - 5\theta_2)^2 + \frac{1}{2}k_B R_0^2\theta_1^2 + \frac{1}{2}k_C R_0^2\theta_2^2$$

Η μορφή του δεύτερου νόμου του Newton θα είναι:

$$\frac{d}{dt}\left[MR_0^2\dot\theta_1\right] = MR_0^2\sin\theta_1\cos\theta_1\dot\theta_1^2 - MR_0A_0[l_1\cos\theta_1\cos\phi_1 + l_2\sin\phi_1\cos\theta_1 - l_3\sin\theta_1] - 6k_AR_0^2(6\theta_1 - 5\theta_2) - k_BR_0^2\theta_1$$

$$\frac{d}{dt}\left[MR_0^2\sin^2\theta_1\dot\phi_1\right] = -MA_0R_0\sin\theta_1[-l_1\sin\phi_1 + l_2\cos\phi_1]$$

$$\frac{d}{dt}\left[MR_0^2\dot\theta_2\right] = MR_0^2\sin\theta_2\cos\theta_2\dot\theta_2^2 - MA_0R_0[l_1\cos\phi_2\cos\theta_2 + l_2\sin\phi_2\cos\theta_2 - l_3\sin\theta_2] + 5k_AR_0^2(6\theta_1 - 5\theta_2) - k_CR_0^2\theta_2$$

$$\frac{d}{dt}\left[MR_0^2\sin^2\theta_2\dot\phi_2\right] = -MA_0R_0\sin\theta_2[-l_1\sin\phi_2 + l_2\cos\phi_2]$$

(ε) Πριν περιγράψουμε την κίνηση είναι απαραίτητο να δούμε το δυναμικό στο α' μέρος του προβλήματος. Το δυναμικό αυτό δηλώνει μια δύναμη της μορφής:

$$\vec{F} = -MA_0\left[\ell_1\hat{x} + \ell_2\hat{y} + \ell_3\hat{z}\right] = -MA_0|\ell|^2\left[\frac{\ell_1\hat{x}+\ell_2\hat{y}+\ell_3\hat{z}}{\sqrt{\ell_1^2+\ell_2^2+\ell_3^2}}\right] = -MA_0|\ell|^2\hat{n}$$

όπου $|\ell|^2 = \sqrt{\ell_1^2+\ell_2^2+\ell_3^2}$. Αυτή είναι μια σταθερή δύναμη με μέτρο $MA_0|\ell|^2$

με κατεύθυνση στο διάνυσμα $\hat{n}$. Αλλά αυτή η δύναμη είναι ακριβώς ανάλογη της δύναμης της βαρύτητας. Η γωνία μ που σχηματίζει η δύναμη με τον άξονα z δίνεται από:

$$\cos\mu = \hat{z}\cdot\hat{n} = \frac{\ell_3}{\sqrt{\ell_1^2+\ell_2^2+\ell_3^2}}$$

Επομένως για να απλουστεύσουμε το πρόβλημα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γενικευμένες συντεταγμένες:

$$b_1 = \theta_1 - \mu \qquad b_2 = \theta_2 - \mu$$

και η Lagrangian του συστήματος για τις νέες συντεταγμένες θα γίνει:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}MR_0^2\left[\dot{b}_1^2 + \sin^2(b_1+\mu)\,\dot{\phi}_1^2\right] + \frac{1}{2}MR_0^2\left[\dot{b}_2^2 + \sin^2(b_2+\mu)\,\dot{\phi}_2^2\right] - MA_0R_0\left[|\ell|^2(\cos b_1 + \cos b_2)\right]$$

$$-\frac{1}{2}k_AR_0^2(6b_1 - 5b_2 + \mu)^2 - \frac{1}{2}k_BR_0^2(b_1+\mu)^2 - \frac{1}{2}k_CR_0^2(b_2+\mu)^2$$

Η αλλαγή των συντεταγμένων είχε σαν αποτέλεσμα το δυναμικό να εκφραστεί με μορφή ανεξάρτητη των ϕ_1 και ϕ_2

Χρησιμοποιώντας προσέγγιση μικρών γωνιών μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathcal{L} \simeq \frac{1}{2}MR_0^2\left[\dot{b}_1^2 + \sin^2\mu\,\dot{\phi}_1^2\right] + \frac{1}{2}MR_0^2\left[\dot{b}_2^2 + \sin^2\mu\,\dot{\phi}_2^2\right] - MA_0R_0|\ell|^2\left[2 - \frac{1}{2}b_1^2 - \frac{1}{2}b_2^2\right] -$$

$$-\frac{1}{2}k_AR_0^2(6b_1 - 5b_2 + \mu)^2 - \frac{1}{2}k_BR_0^2(b_1+\mu)^2 - \frac{1}{2}k_CR_0^2(b_2+\mu)^2$$

Από την οποία φαίνεται ότι μόνο οι γωνίες β παίρνουν μέρος στους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.

Οι εξισώσεις κίνησης παίρνουν τη μορφή:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[MR_0^2\dot{\beta}_1\right] &= -MA_0R_0|\ell|^2\beta_1 - 6k_AR_0^2(6\beta_1-5\beta_2+\mu) - k_BR_0^2(\beta_1+\mu)\\ \frac{d}{dt}\left[MR_0^2\dot{\beta}_2\right] &= -MA_0R_0|\ell|^2\beta_2 + 5k_AR_0^2(6\beta_1-5\beta_2+\mu) - k_CR_0^2(\beta_2+\mu)\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned}\ddot{\beta}_1 &= -\frac{A_0|\ell|^2}{R_0}\beta_1 - 6\frac{k_A}{M}(6\beta_1-5\beta_2+\mu) - \frac{k_B}{M}(\beta_1+\mu)\\ \ddot{\beta}_2 &= -\frac{A_0|\ell|^2}{R_0}\beta_2 + 5\frac{k_A}{M}(6\beta_2-5\beta_2+\mu) - \frac{k_C}{M}(\beta_2+\mu)\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\ddot{\beta}_1 = -\left[\dfrac{A_0|\ell|^2}{R_0} + \dfrac{36k_A+k_B}{M}\right]\beta_1 + \dfrac{30k_A}{M}\beta_2 - \left(\dfrac{6k_A+k_B}{M}\right)\dfrac{k_B}{M}\mu\\ \ddot{\beta}_2 = \dfrac{30k_A}{M}\beta_1 - \left[\dfrac{A_0|\ell|^2}{R_0} + \left(\dfrac{25k_A+k_C}{M}\right)\right]\beta_1 - \left(\dfrac{5k_A+k_C}{M}\right)\dfrac{k_B}{M}\mu\end{cases}$$

Οι όροι που είναι ανεξάρτητοι από τα β_1 και β_2 μπορούν να απαλειφθούν με κάποιο επαναορισμό. Δεν παίζουν κανένα ρόλο.

Από τις πιο πάνω εξισώσεις μπορούμε να ορίσουμε 3 συχνότητες:

$$\Omega_A = \sqrt{\frac{30k_A}{M}}$$

$$\Omega_{AB} = \sqrt{\frac{36k_A+k_B}{M} + \frac{A_0|\ell|^2}{R_0}}$$

$$\Omega_{AC} = \sqrt{\frac{25k_A+k_C}{M} + \frac{A_0|\ell|^2}{R_0}}$$

Αυτό οδηγεί στην εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων:

$$\left[\omega^2-\Omega_{AB}^2\right]\left[\omega^2-\Omega_{AC}^2\right] - \Omega_A^4 = 0 \Rightarrow \omega^4 - \left[\Omega_{AB}^2+\Omega_{AC}^2\right]\omega^2 + \Omega_{AB}^2\Omega_{AC}^2 - \Omega_A^4 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^4 - b\omega^2 - c = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{2}\left[b \pm \sqrt{b^2+4c}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{2}\left[\Omega_{AB}^2+\Omega_{AC}^2\right] \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left[\Omega_{AB}^2-\Omega_{AC}^2\right]^2 + 4\Omega_A^4}$$ Συνήθης εξίσωση 2 συζευγμένων ταλαντωτών

Τα ιδιοδιανύσματα είναι $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ και $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

3. Η Lagrangian ενός συγκεκριμένου συστήματος μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$L = \frac{m}{2}\left(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2\right) - \frac{K}{2}\left(ax^2 + 2bxy + cy^2\right)$$

Όπου α,b,c είναι αυθαίρετες σταθερές αλλά υπόκεινται στη συνθήκη b^2-αc ≠ 0. Ποιες είναι οι εξισώσεις κίνησης; Εξετάστε τις δύο περιπτώσεις α = 0 = c και b = 0, c = -α. Ποιο είναι το φυσικό σύστημα που περιγράφεται από την παραπάνω Lagrangian; [**10β**]

Η Lagrangian του συστήματος είναι: $L = \frac{m}{2}\left(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2\right) - \frac{k}{2}\left(ax^2 + 2bxy + cy^2\right)$

Υπάρχουν 2 εξισώσεις κίνησης, μια για το x και μια για το y. Για απλούστευση ορίζουμε τη σταθερά $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ οπότε οι εξισώσεις κίνησης θα είναι:

$$x:\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(ma\dot{x} + mb\dot{y}\right) - \left(-kax - kby\right) = 0 \Rightarrow a\ddot{x} + b\ddot{y} + \omega_0^2 a x + \omega_0^2 b y = 0$$

$$y:\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt}\left(mb\dot{x} + mc\dot{y}\right) - \left(-kbx - kcy\right) = 0 \Rightarrow b\ddot{x} + c\ddot{y} + \omega_0^2 b x + \omega_0^2 c y = 0$$

(α) Για την ειδική περίπτωση, όπου $a = c = 0$, οι παραπάνω 2 εξισώσεις απλουστεύονται στις:

$$\left.\begin{aligned} b\ddot{y} + b\omega_0^2 y &= 0 \\ b\ddot{x} + b\omega_0^2 x &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Δύο ασύζευκτοι αρμονικοί ταλαντωτές}$$

(β) Στην ειδική περίπτωση όπου $b=0$ και $a=-c$ παίρνουμε και πάλι ασύζευκτους αρμονικούς ταλαντωτές:

$$a\ddot{x} + a\omega_0^2 x = 0$$
$$-a\ddot{y} - a\omega_0^2 y = 0$$

(γ) Αφού ξέρουμε ότι στις δύο παραπάνω ειδικές περιπτώσεις, το σύστημα είναι δύο ασύζευκτοι αρμονικοί ταλαντωτές, μπορούμε να μαντέψουμε ότι το σύστημα είναι απλά 2 ασύζευκτοι ταλαντωτές. Αυτό μπορεί να φανεί πιο εύκολα με τον ακόλουθο μετασχηματισμό:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Αφού $b^2 - ac \neq 0$, ο πίνακας μετασχηματισμού είναι αναστρέψιμος. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να διαγωνοποιήσουμε το πίνακα αυτό για να βρούμε νέες συντεταγμένες (η, χ). Η Lagrangian που προκύπτει θα είναι 2 ασύζευκτοι αρμονικοί ταλαντωτές στις συντεταγμένες (η, χ)

4. Να βρεθούν οι διαστάσεις ενός παραλληλεπιπέδου μέγιστου όγκου το οποίο περιέχεται μέσα σε σφαίρα ακτίνας R. [**10β**]

Χρειάζεται να βρούμε ακρότατο για το ολοκλήρωμα: $J = \int f(x,y)dx$

Από την εξίσωση του Euler-Lagrange έχουμε $\frac{\partial f}{\partial y} = \emptyset$ το οποία

και δηλώνει ότι $\frac{\partial J}{\partial y} = \int \frac{\partial f}{\partial y} dx = \emptyset$ το οποίο και μας δίνει

μια τροποποιημένη μορφή της εξίσωσης του Euler-Lagrange.

Θεωρώντας τους πολ/στές Lagrange για περιπτώσεις δεσμών θα έχουμε:

$$\frac{\partial J}{\partial y_i} + \sum_j \lambda_j(x) \frac{\partial g_j}{\partial y_i} = 0 \qquad \text{όπου } g_j(y_i, x) = 0$$

Για τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με πλευρές a_1, b_1 κ c_1 είναι:

$$V = a_1 b_1 c_1$$

Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τον όγκο αυτό κάτω από τη συνθήκη όμως ότι το παραλληλεπίπεδο περιέχεται σε σφαίρα ακτίνας R οπότε:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 4R^2$$

Επομένως θεωρούμε τα a_1, b_1, c_1 μεταβλητές κ V_1 είναι η συνάρτηση που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε. Η παραπάνω εξίσωση είναι η εξίσωση του δεσμού $g(a_1, b_1, c_1) = \emptyset$.

Επομένως οι εξισώσεις για τη λύση είναι:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial a_1} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial b_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial b_1} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial c_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial c_1} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} b_1 c_1 + 2\lambda a_1 &= 0 \\ a_1 c_1 + 2\lambda b_1 &= 0 \\ a_1 b_1 + 2\lambda c_1 &= 0 \\ a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 4R^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_1 = b_1 = c_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} R.$$

Άρα το παραλληλεπίπεδο είναι κύβος πλευράς $\frac{2R}{\sqrt{3}}$

5. Ένα σώμα περιορίζεται να κινείται σε ένα στεφάνι αμελητέας μάζας και ακτίνας R_0 το οποίο βρίσκεται στο κατακόρυφο επίπεδο και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από την κατακόρυφο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης του Lagrange υποθέτοντας ότι οι μόνες εξωτερικές δυνάμεις που δρούν προέρχονται από την βαρύτητα. Ποιες είναι σταθερές της κίνησης; Δείξτε ότι αν ω είναι μεγαλύτερη από μια τιμή ω_0, υπάρχει μια λύση για την οποία το σώμα παραμένει ακίνητο στο στεφάνι σε ένα σημείο το οποίο δεν βρίσκεται στο κατώτερο σημείο του στεφανιού, αλλά αν $\omega<\omega_0$, το μόνο σημείο στο οποίο το σώμα μπορεί να είναι ακίνητο είναι το κατώτερο σημείο του στεφανιού. Ποια είναι η τιμή της ω_0; [**20β**]

Χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες όπου η ακτίνα $r = R_0 = $ σταθ ενώ η γωνία φ κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω

Επομένως θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} x &= R_0 \sin\theta \cos\omega t \\ y &= R_0 \sin\theta \sin\omega t \\ z &= R_0 \cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x} &= R_0\dot{\theta}\cos\theta\cos\omega t - R_0\omega\sin\theta\sin\omega t \\ \dot{y} &= R_0\dot{\theta}\cos\theta\sin\omega t + R_0\omega\sin\theta\sin\omega t \\ \dot{z} &= -R_0\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned}$$

Επομένως η κινητική ενέργεια του σώματος θα είναι:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mR_0^2\left(\dot{\theta}^2+\omega^2\sin^2\theta\right)$$

Η δυναμική ενέργεια θα είναι: $V = mgz \Rightarrow V = mgR_0\cos\theta$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}\left(R_0^2\dot{\theta}^2 + R_0^2\omega^2\sin^2\theta\right) - mgR_0\cos\theta$$

Επομένως η εξίσωση του Lagrange θα είναι: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow mR_0^2\ddot{\theta} - mR_0^2\omega^2\sin\theta\cos\theta - mgR_0\sin\theta = 0.$$

Για να έχω σταθερές καταστάσεις θα πρέπει $\ddot{\theta} = 0$ οπότε παίρνουμε:

$$mR_0^2\omega^2\sin\theta\cos\theta - mgR_0\sin\theta = 0 \Rightarrow mR_0\sin\theta\left(R_0\omega^2\cos\theta + g\right) = 0$$

Για μη τετριμμένη λύση θα πρέπει $\theta \neq 0$ κ π, οπότε: $R_0\omega^2\cos\theta + g = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\omega > \omega_0 = \sqrt{g/R_0}}$$

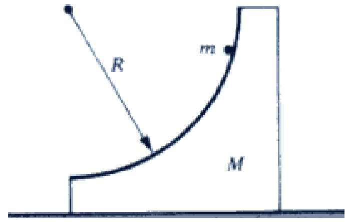
Η Lagrangian εξαρτάται από τα θ κ $\dot{\theta}$ αλλά όχι από το χρόνο t. Επομένως η συνάρτηση ενέργειας ή Hamiltonian του σώματος διατηρείται:

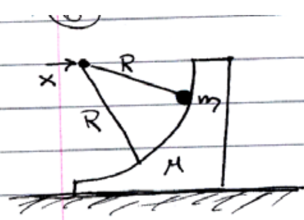
$$h = \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = \frac{m}{2}\left(R_0^2\dot{\theta}^2 - R_0^2\omega^2\sin^2\theta\right) + mgR_0\cos\theta = T + V - mR_0^2\omega^2\sin^2\theta$$

Όπως βλέπουμε η συνάρτηση της ενέργειας μπορεί να διατηρείται αλλά δεν είναι η ολική ενέργεια. Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι ο 2^{ος} όρος της T δεν είναι δευτέρου βαθμού συνάρτηση της ταχύτητας.

Μια περισσότερο διαισθητική εξήγηση μπορεί να δοθεί από το γεγονός ότι για να κινηθεί το στεφάνι με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, υπάρχει κατανάλωση έργου από κάποια μηχανή για να κινεί το στεφάνι. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η ενέργεια να μεταβάλλεται με το χρόνο.

6. Ένα σώμα μάζας m γλιστρά προς το κατώτερο μέρος μιας λείας σφαιρικής επιφάνειας μάζας M που βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο όπως στο σχήμα.
(α) Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης για το m και M. [**10β**]
(β) Να βρεθεί η αντίδραση της σφαιρικής επιφάνειας. [**10β**]





Οι συντεταγμένες της σφαιρικής επιφάνειας και του σώματος είναι:

$$x_M = x \qquad x_m = r\cos\theta + x$$
$$y_M = y \qquad y_m = -r\sin\theta$$

Επομένως η Lagrangian θα είναι:

$$L = \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\dot{r}\cos\theta - 2\dot{x}r\dot{\theta}\sin\theta\right) + mgr\sin\theta$$

Προσέξτε ότι δεν περιορίζουμε την ακτίνα r να είναι σταθερή αφού θέλουμε να βρούμε την αντίδραση της επιφάνειας στο σώμα.
Η εξίσωση του δεσμού είναι:

$$f(x,\theta,r) = r - R = 0$$

(α) Υπολογίζουμε την εξίσωση κίνησης:
Στην προκειμένη περίπτωση μπορούμε να θέσουμε $r = R = \text{σταθ} \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$ για να βρούμε την εξίσωση κίνησης για x και θ.
Θα έχουμε:

$$x: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = \frac{m}{M+m}R\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) \qquad (A)$$

$$\theta: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}\sin\theta + g\cos\theta}{R} \qquad (B)$$

(β) Μπορούμε να βρούμε την αντίδραση της σφαιρικής επιφάνειας από την εξίσωση Lagrange ως προς r:

$$\lambda = m\ddot{x}\cos\theta - mR\dot{\theta}^2 - mg\sin\theta \qquad (\Gamma)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (A) και (B) μπορούμε να λύσουμε ως προς $\ddot{x}$ συναρτήσει των $\dot{\theta}$ και θ και να αντικαταστήσουμε στην (Γ)

Θα έχουμε (θέτοντας $a=\frac{m}{M+m}$)

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x} &= aR(\ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta)\\ \ddot{\theta} &= \frac{\ddot{x}\sin\theta+g\cos\theta}{R}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \ddot{x} = aR\left(\frac{\ddot{x}\sin^2\theta+g\cos\theta\sin\theta}{R}+\dot{\theta}^2\cos\theta\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(1-a\sin^2\theta) = ga\cos\theta\sin\theta + aR\dot{\theta}^2\cos\theta$$

Επομένως η (Γ) θα γίνει:

$$\lambda = \left[\frac{a-1}{1-a\sin^2\theta}\right](R\dot{\theta}^2+g\sin\theta) \qquad (\Delta)$$

Η Lagrangian δεν εξαρτάται από το χρόνο και επομένως η ενέργεια διατηρείται. Χρησιμοποιώντας διατήρηση ενέργειας μπορούμε να βρούμε μια έκφραση για το $\dot{\theta}$

$$H = \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}(R^2\dot{\theta}^2 - 2\dot{x}R\dot{\theta}\sin\theta) - mgR\sin\theta = T+V = -mgR\sin\theta_0$$

όπου θ_0 είναι η αρχική θέση του σώματος m και $-mgR\sin\theta_0$ είναι η ολική ενέργεια του συστήματος (υποθέτοντας ότι ξεκινάμε από την ηρεμία). Δηλαδή η αρχική ενέργεια ισούται με την ενέργεια σε οποιαδήποτε άλλη χρονική στιγμή.

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (Α) έχουμε:

$\dot{x} = \dot{\theta}aR\sin\theta$ την οποία μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση της ενέργειας οπότε θα έχουμε:

$$H = \frac{M+m}{2}(\dot{\theta}aR\sin\theta)^2 + \frac{m}{2}(R\dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta}^2aR^2\sin^2\theta) - mgR\sin\theta = -mgR\sin\theta_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g(\sin\theta-\sin\theta_0)}{R(1-a\sin^2\theta)}$$

Αντικαθιστώντας στην (Δ) θα έχουμε: $\lambda = -\frac{mMg(3\sin\theta - a\sin^3\theta - 2\sin\theta_0)}{(M+m)(1-a\sin^2\theta)^2}$