ΦΥΣ 111: ΓΕΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ 1

16/09/20 1^o Φροντιστήριο

Προβλήματα:

1. Στηριζόμενοι σε διαστασιακή ανάλυση, υπολογίστε την εξίσωση της ταχύτητας (με μια σταθερά αναλογίας) ενός τεχνητού δορυφόρου μάζας m που κινείται σε τροχιά ακριβώς πάνω από την επιφάνεια της γης. Θεωρήστε ότι η ακτίνα της γης είναι R και η επιτάχυνση της βαρύτητας g σε m/sec^2.

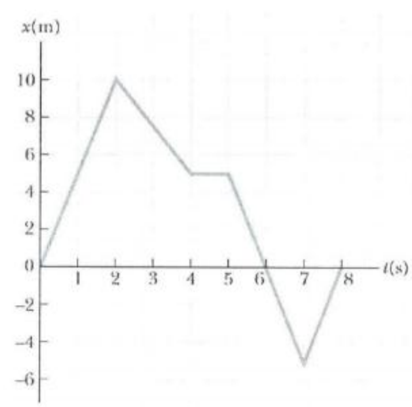
2. Χρησιμοποιώντας διανύσματα αποδείξτε το νόμο των συνημιτόνων.

3. Δείξτε ότι αν |A - B | = |A + B| τότε το A είναι κάθετο στο B.

4. Αποδείξτε το νόμο των ημιτόνων χρησιμοποιώντας το εξωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων. Υπόδειξη: Μπορεί να λάβει κάποιος το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από τα διανύσματα A, B και C όπου A+B+C=0.

5. Δίνονται δύο διανύσματα $\overrightarrow{A} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$ και $\overrightarrow{B} = -\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$. Υπολογίστε τα (α)$\vec{A} + \vec{B}$, (β) $\vec{A} - \vec{B}$, (γ) $\left|\vec{A} + \vec{B}\right|$, (δ) $\left|\vec{A} + \vec{B}\right|$, (ε) την κατεύθυνση των $\vec{A} + \vec{B}$ και $\vec{A} - \vec{B}$.

6. Η μετατόπιση σε συνάρτηση με τον χρόνο ενός σώματος που κινείται στον άξονα των χ φαίνεται στο σχήμα 1. Βρείτε την μέση ταχύτητα στα χρονικά διαστήματα: (α) 0 έως 2s, (β) 0 έως 4s, (γ) 2 έως 4s, (δ) 4 έως 7s, (ε) 0 έως 8s.



Σχήμα 1

7. Σε ένα αγώνα δρόμου 100m, δύο αθλήτριες τερμάτισαν ισόπαλες γιατί έκαναν και οι δύο χρόνο 10.2s. επιταχύνοντας σταθερά το τρέξιμό τους, η πρώτη αθλήτρια χρειάστηκε 2.0s και η δεύτερη 3.0s για να αποκτήσουν μέγιστη ταχύτητα, την οποία διατήρησαν σε όλη την υπόλοιπη διαδρομή. (α) Ποια είναι η επιτάχυνση καθεμιάς αθλήτριας; (β) Ποιες είναι οι αντίστοιχες μέγιστες ταχύτητες τους; (γ) Ποια αθλήτρια προηγείται στο σημείο των 6s και πόσο;

8. Ένας παίχτης του χόκεϋ στέκεται στα παγοπέδιλά του πάνω σε μία παγωμένη λίμνη όταν ένας αντίπαλος παίχτης πατινάροντας με το δίσκο περνάει πλάι του με σταθερή ταχύτητα 12m/s. Μετά από 3s, ο πρώτος παίχτης αλλάζει γνώμη και αποφασίζει να καταδιώξει τον αντίπαλο. Αν επιταχύνεται σταθερά κατά 4m/s 2 : (α) Πόσος χρόνος χρειάζεται ώστε να φτάσει τον αντίπαλο; (β) Πόσο διάστημα θα διανύσει σε αυτό το χρόνο; (Υποθέστε ότι ο παίχτης με το δίσκο εξακολουθεί να κινείται με σταθερή ταχύτητα).

Πρόβλημα 1

Ψάχνουμε να βρούμε την εξίσωση της ταχύτητας, συναρτήσει των m, g, R

$V = c\, m^{\alpha} g^{\beta} R^{\gamma}$ · c = σταθερά αναλογίας

Διαστάσεις:

· Ταχύτητα: $V = \frac{L}{T}$

· Μάσα: $m = M$

· Επιτάχυνση: $g = \frac{L}{T^2}$

· Ακτίνα γής: $R = L$

$$\Rightarrow \frac{L}{T} = M^{\alpha} \frac{L^{\beta}}{T^{2\beta}} L^{\gamma} \Rightarrow L T^{-1} = M^{\alpha} L^{\beta+\gamma} T^{-2\beta}$$

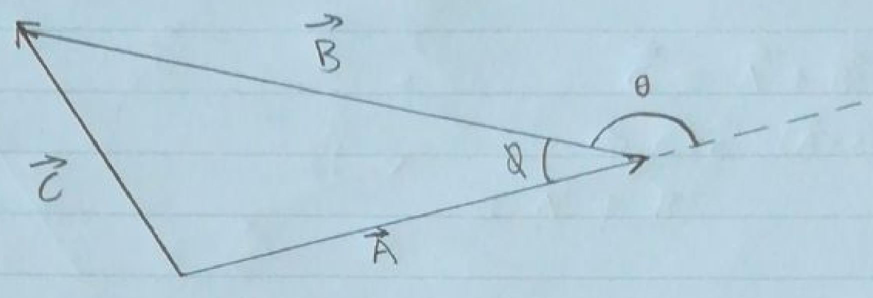
$\Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$, $\beta + \gamma = 1 \Rightarrow \gamma = 1 - \beta \Rightarrow \gamma = 1 - 1/2$

$\Rightarrow \boxed{\gamma = 1/2}$

$2\beta = 1 \Rightarrow \boxed{\beta = 1/2}$

Τελικά: $\boxed{V = c\sqrt{gR}}$

πρόβλημα 2



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \Rightarrow \vec{C}\cdot\vec{C} = (\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})$$

$$= \vec{A}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B} + 2\,\vec{A}\cdot\vec{B} = A^2 + B^2 + 2|A||B|\cos(\theta)$$

$$= A^2 + B^2 + 2AB\cos(\pi - \phi) \Rightarrow \boxed{C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos(\phi)}$$

πρόβλημα 3

$$|\vec{A} - \vec{B}| = |\vec{A} + \vec{B}| \Rightarrow |\vec{A} - \vec{B}|^2 = |\vec{A} + \vec{B}|^2$$

- $|\vec{A} - \vec{B}|^2 = (\vec{A} - \vec{B})\cdot(\vec{A} - \vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B} - 2\vec{A}\cdot\vec{B}$

$$= A^2 + B^2 - 2\vec{A}\cdot\vec{B}$$

- $|\vec{A} + \vec{B}|^2 = (\vec{A} + \vec{B})\cdot(\vec{A} + \vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B} + 2\vec{A}\cdot\vec{B}$

$$= A^2 + B^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\Rightarrow \cancel{A^2} + \cancel{B^2} - 2\vec{A}\cdot\vec{B} = \cancel{A^2} + \cancel{B^2} + 2\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\Rightarrow 4\vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow 4|A||B|\cos(\phi) = 0$$

$$|A| \neq 0 \quad |B| \neq 0 \Rightarrow \cos(\phi) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = 90^\circ}$$

Πρόβλημα 4

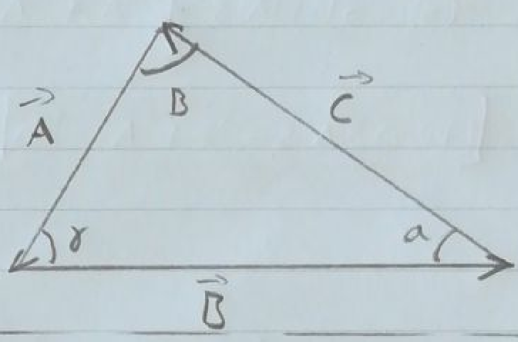
$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0$$

$$\vec{A}\times(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}) = \cancel{\vec{A}\times\vec{A}}^{\,0} + \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$

$$= \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C} = 0 \Rightarrow \vec{A}\times\vec{B} = -(\vec{A}\times\vec{C})$$

$$\Rightarrow |\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}\times\vec{C}| \Rightarrow |A||B|\sin(\gamma) = |A||C|\sin(\beta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{B}{\sin(\beta)} = \frac{C}{\sin(\gamma)}}$$



Πρόβλημα 5

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} \quad , \quad \vec{B} = -\hat{i} - 4\hat{j}$$

α) $\vec{A}+\vec{B} = (3\hat{i}-2\hat{j}) + (-\hat{i}-4\hat{j}) = (3-1)\hat{i} + (-1-4)\hat{j} = 2\hat{i} - 6\hat{j}$

β) $\vec{A}-\vec{B} = (3\hat{i}-2\hat{j}) - (-\hat{i}-4\hat{j}) = (3+1)\hat{i} + (-2+4)\hat{j} = 4\hat{i} + 2\hat{j}$

γ) $|\vec{A}+\vec{B}| = \sqrt{2^2+6^2} = 6{,}32$

δ) $|\vec{A}-\vec{B}| = \sqrt{4^2+2^2} = 4{,}47$

ε) • κατεύθυνση $\vec{A}+\vec{B}$: $\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{6}{2}\right) = -71{,}6^\circ = 288^\circ$

• κατεύθυνση $\vec{A}-\vec{B}$: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{4}\right) = 26{,}6^\circ$

Πρόβλημα 6

$$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{τελ} - x_{αρχ}}{t_{τελ} - t_{αρχ}}$$

α) 0s έως 2(s) $\Rightarrow \bar{V} = \frac{10m - 0m}{2s - 0s} = \frac{10m}{2s} = 5\,m/s$

β) 0s έως 4s $\Rightarrow \bar{V} = \frac{5m - 0m}{4s - 0s} = \frac{5m}{4s} = 1{,}25\,m/s$

γ) 2s έως 4s $\Rightarrow \bar{V} = \frac{5m - 10m}{4s - 2s} = \frac{-5m}{2s} = -2{,}5\,m/s$

δ) 4s - 7s $\Rightarrow \bar{V} = \frac{-5m - 5m}{7s - 4s} = \frac{-10m}{3s} = -3{,}3\,m/s$

ε) 0s έως 8s $\Rightarrow \bar{V} = \frac{0-0}{8s - 0s} = 0\,m/s$

Πρόβλημα 7

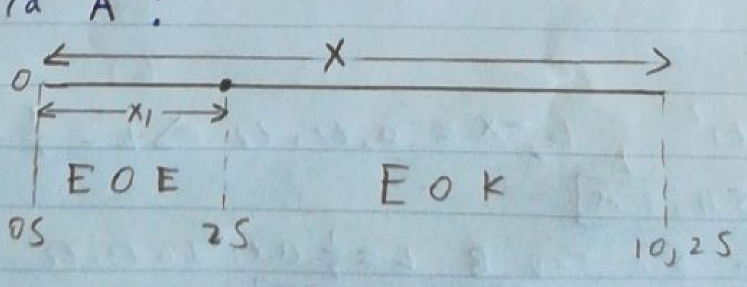
Αθλήτρια Α: 0 έως 2s → ΕΟΕ 2s έως 10,2s → ΕΟΚ

Αθλήτρια Β: 0 έως 3s → ΕΟΕ 3s έως 10,2s → ΕΟΚ

$x = 100m$ → συνολικό μήκος διαδρομής
$t = 10{,}2s$ → συνολικός χρόνος διαδρομής

α)

Αθλήτρια Α:



$t_1 = 2s$

$t_2 = 10{,}2 - 2 = 8{,}2s$

$x_1 = \cancel{x_{01}}^{0} + \cancel{v_0} t^{0} + \frac{1}{2} a t_1^2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} a t_1^2$ ①

$x - x_1 = x'_{02} + u \cdot t_2$, $u = a \cdot t_1 + \cancel{v_0}^{0}$

$\Rightarrow x - x_1 = a \cdot t_1 \cdot t_2$ ②

① + ② $\Rightarrow x = a \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{1}{2} a t_1^2$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} a t_1^2 + a t_2 t_1 = 100m}$ → Εξίσωση ③

$t_1 = 2s \quad t_2 = 8,2s \Rightarrow a\left(\frac{4s^2}{2} + 16,4s^2\right) = 100m$

$\Rightarrow \boxed{a_A = 5,43 \, m/s^2}$ → Αθλήτρια Α

Εφαρμόζω την ③ για την Αθλήτρια Β
όπου $t_1 = 3s$ και $t_2 = 7,2s$

$\Rightarrow a\left(\frac{9s^2}{2} + 21,6s^2\right) = 100m$

$\Rightarrow \boxed{a_B = 3,83 \, m/s^2}$ → Αθλήτρια Β

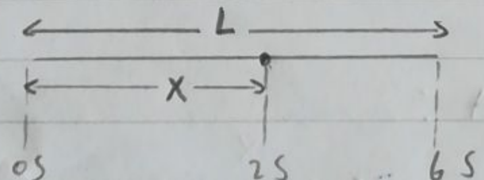
Β)

$u_A = a_A t_A + \cancel{v_0}^{0} = 5,43 \frac{m}{s^2} \cdot 2,0s \Rightarrow \boxed{u_A = 10,9 \, m/s}$

$u_D = a_B t_B + v_0 = 3,83 \, m/s^2 \cdot 3,0s \Rightarrow \boxed{u_B = 11,5 \, m/s}$

γ) $t = 6s$

Αθλήτρια Α :



$t_1 = 2s$

$t_2 = 4s$

$x = \frac{1}{2} a t_1^2$, $L - x = a \cdot t_1 \cdot t_2 \Rightarrow L = \frac{1}{2} a t_1^2 + a t_1 \cdot t_2$

$\Rightarrow \boxed{L_A = 54,3 \, m}$

Αντίστοιχα για την Β $L = \frac{1}{2} a t_1^2 + a t_1 \cdot t_2$ $\quad t_1 = 3s$, $t_2 = 3s$

$\Rightarrow \boxed{L_B = 51,7 \, m}$

Πρόβλημα 8

Εξισώσεις κίνησης:

Παίχτης Α: ΕΟΕ, $a = 4 \, m/s^2$

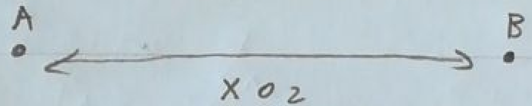
$$x_1 = \cancel{x_{01}}^{0} + \cancel{v_{01}}^{0} t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow \boxed{x_1 = 2t^2}$$

Παίχτης Β: ΕΟΚ, $u = 12 \, m/s$

$$x_2 = x_{02} + ut \Rightarrow \boxed{x_2 = 36 + 12t}$$

Ο παίχτης Β κινείται για 3s με σταθερή ταχύτητα 12 m/s μέχρι να αποφασίσει ο παίχτης Α να τον καταδιώξει. ⇒ την στιγμή που ο παίχτης Α αρχίσει να κινείται $(t = 0s)$ ο Β έχει διανύσει ήδη μια απόσταση.

$t = 0 \, s$



$$x_{02} = \cancel{x_0}^{0} + u \cdot t'$$

$$\Rightarrow x_{02} = 12 \frac{m}{s} \cdot 3s$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{02} = 36 \, m}$$

α) Για να φτάσει ο (Α) τον (Β)

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow 2t^2 = 36 + 12t$$

$$\Rightarrow t^2 - 6t - 18 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - (4 \cdot (-18))}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_1 = 8s} \quad \boxed{t_2 = -2s} \rightarrow \text{απορρίπτεται}$$

→ Δεκτή

β) $x_1 = 2t^2 \qquad t = t_1 = 8s$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = 128 \, m}$$