ΦΥΣ. 111

$2^{η}$ Πρόοδος: 24-Νοεμβρίου-2018

Πριν αρχίσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητας).

Ονοματεπώνυμο	**Αριθμός Ταυτότητας**

Απενεργοποιήστε τα κινητά σας.

Σας δίνονται 9 προβλήματα και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλα. Η μέγιστη συνολική βαθμολογία της εξέτασης είναι 120 μονάδες.

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΣΤΕ ΜΟΝΟ ΤΙΣ ΣΕΛΙΔΕΣ ΠΟΥ ΣΑΣ ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΜΗΝ ΚΟΨΕΤΕ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΣΕΛΙΔΑ

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 150 λεπτά. Καλή Επιτυχία !

Άσκηση	**Βαθμός**
$1^{η}$ (10μ)	
$2^{η}$ (10μ)	
$3^{η}$ (10μ)	
$4^{η}$ (10μ)	
$5^{η}$ (10μ)	
$6^{η}$ (10μ)	
$7^{η}$ (20μ)	
$8^{η}$ (20μ)	
$9^{η}$ (20μ)	
Σύνολο	

<u>Τύποι που μπορεί να φανούν χρήσιμοι</u>

<u>Γραμμική κίνηση:</u>

$\upsilon(t) = \upsilon_0 + \int_{t_i}^{t_f} a(t)dt$

$x(t) = x_0 + \int_{t_i}^{t_f} \upsilon(t)dt$

$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a(x - x_0)$ για α=σταθ.

$x = x_o + \frac{1}{2}(\upsilon + \upsilon_o)t$ για α=σταθ.

$x_{\max} = \frac{\upsilon_o^2 \sin 2\theta}{g}$ βεληνεκές

g = 9.8m/s^2

<u>Στροφική κίνηση:</u>

1περιστροφή = 360° = 2π ακτίνια

$\theta = \frac{s}{r}$

$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu.} t$

$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu.} t^2$

$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha_{\gamma\omega\nu.}(\theta_f - \theta_i)$

$\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad |\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi}| = |\vec{\omega}| r$

$\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad \vec{a}_{\varepsilon\varphi} = \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.} \times \vec{r} \Rightarrow |\vec{a}_{\varepsilon\varphi}| = |\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.}||\vec{r}|$

$\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho} = \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow |\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}| = \frac{|\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi}|^2}{r} = |\vec{\omega}|^2 r$

$\vec{a}_{\gamma\rho\alpha\mu} = \vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} + \vec{a}_{\varepsilon\varphi} = \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}$

$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi r}{\upsilon_{\varepsilon\varphi}}$

<u>Βαρυτική έλξη:</u>

$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$

$G = 6.67 \times 10^{-11}\, N \cdot m^2 / kg^2$

$U_g = -G\frac{m_1 m_2}{r}$

<u>Έργο – Ενέργεια:</u>

Έργο σταθερής δύναμης: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

Έργο μεταβαλλόμενης δύναμης: $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$

$\vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}}$

$\Delta U = -\int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}kx^2$

$U_g = mgh$ (h<<R$_{\gamma\eta\varsigma}$)

$W = \Delta E_{\kappa\iota\nu.}$

$W = -\Delta U$ (για συντηρητικές δυνάμεις)

$E_{\mu\eta\chi.} = E_{\kappa\iota\nu.} + U$

$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$

$W = \Delta E_{\mu\eta\chi.}$ (για μη συντηρητικές δυνάμεις)

$\vec{F}_{\varepsilon\lambda} = -k\vec{x}$

$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$

$P = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$

<u>Ορμή – Ώθηση - Κρούσεις:</u>

$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$

Ώθηση: $\vec{I} = \int F\, dt = \Delta\vec{p}$

$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$

Απομονωμένο σύστημα: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$

Ελαστική κρούση: $\Delta\vec{p} = 0, \quad \Delta E = 0$

Μη ελαστική κρούση: $\Delta\vec{p} = 0, \; \Delta E \neq 0$

Ελαστική κρούση **σε 1-Δ**: $\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2 = -(\vec{\upsilon}_1' - \vec{\upsilon}_2')$

$$E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - G\frac{m_1 m}{r}$$

$$\upsilon_{\delta o\rho\upsilon\varphi.} = \sqrt{\frac{2GM_{\gamma\eta}}{R_{\gamma\eta}}}$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G\mathrm{M}_{\mathrm{H}}}\right)r^3$$

$R_{\gamma\eta} = 6.4\times10^3 km \quad M_{\gamma\eta} = 5.97\times10^{24} kg$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M_{o\lambda}}\sum_i m\vec{r}_i \qquad r_{CM} = \frac{1}{M_{o\lambda}}\int r\,dm$$

$$\vec{\upsilon}_{CM} = \frac{1}{M_{o\lambda}}\sum_i m\upsilon_i$$

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} = M\vec{a}_{CM}$$

Τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\cos(a\pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a\pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$$

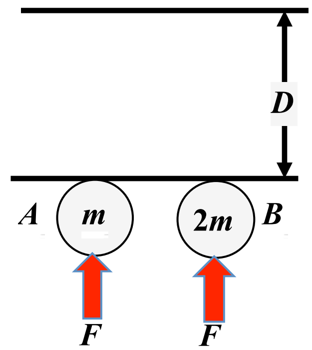
$$\cos(a-b) + \cos(a+b) = 2\cos(a)\cos(b)$$

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) + \sin(a+b) = 2\sin(a)\cos(b)$$

$$\cos^2(a) = \frac{1}{1+\tan^2(a)} \quad \sin^2(a) = \frac{\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}$$

Άσκηση 1 [10μ]



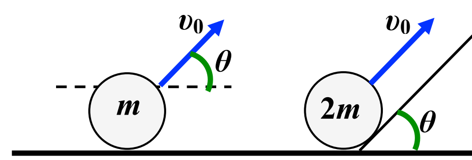
Μία δύναμη μέτρου *F* ασκείται σε δύο δίσκους Α και Β μάζας *m* και 2*m* αντίστοιχα. Οι δύο δίσκοι ξεκινούν από την κατάσταση της ηρεμίας από την ίδια θέση και κινούνται σε λεία επιφάνεια κατά μία απόσταση *D*, όπως στο διπλανό σχήμα.

(**α**) Ποιός δίσκος καλύπτει την απόσταση στο συντομότερο χρόνο; [**2μ**]

(**β**) Όταν φθάνουν στο τέλος της απόστασης *D*, ποιός δίσκος έχει τη μεγαλύτερη κινητική ενέργεια; [**2μ**]

(**γ**) Θεωρήστε ότι η επιφάνεια δεν είναι λεία αλλά υπάρχει τριβή και ο συντελεστής τριβής μεταξύ της επιφάνειας και των δίσκων είναι *μ*. Για την περίπτωση αυτή, ποιός δίσκος θα έχει την μεγαλύτερη κινητική ενέργεια όταν θα έχει καλύψει την απόσταση *D*; [**2μ**].

Φανταστείτε τώρα ότι τα σώματα έχουν μιά διαφορετική κατάσταση. Το σώμα Α μάζας *m* εκτοξεύεται σαν βλήμα με αρχική ταχύτητα υ_0 και γωνία *θ* ως προς τον ορίζοντα. Το σώμα Β μάζας 2*m* γλυστρά προς την κορυφή μίας λείας κεκλιμένης επιφάνειας γωνίας κλίσης *θ,* ίση με την γωνία βολής του σώματος Α, και με αρχική ταχύτητα υ_0 ίση με την ταχύτητα εκτόξευσης του σώματος Α.



(**δ**) Μετά την αρχική εκτόξευσή τους, τα σώματα φθάνουν στο μέγιστο ύψος της κίνησής τους. Στο ύψος αυτό, ποιό σώμα έχει την μεγαλύτερη κινητική ενέργεια; [**2μ**]

(**ε**) Ποιό σώμα έχει το μεγαλύτερο μέγιστο ύψος της κίνησής του; [**2μ**]

(α) Από τον 2° νόμο του Newton: $\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F = ma$

Για τον δίσκο (Α) $a_A = \frac{F}{m_A}$ ενώ για τον δίσκο (Β) $a_B = \frac{F}{2m_A} = \frac{a_A}{2}$

Επομένως ο δίσκος Β κινείται με μικρότερη επιτάχυνση και επομένως θα καλύψει την απόσταση D σε μεγαλύτερο χρονικό διάστημα

$x = D = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t^2 = 2D/a \Rightarrow \left.\begin{aligned} t_A^2 &= 2D/a_A \\ t_B^2 &= 2D/a_B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{t_A}{t_B}\right)^2 = \frac{a_B}{a_A} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{t_A}{t_B} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

(β) Στο σώμα A και στο σώμα B ασκείται η ίδια δύναμη F για την ίδια μετατόπιση D. Το έργο της δύναμης επομένως $W = \vec{F} \cdot \vec{D} = |\vec{F}||\vec{D}|$ είναι ίδιο και για τους δύο δίσκους. Από το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας έχουμε ότι $\Delta E_{κιν} = W_F$ τα δύο σώματα θα έχουν την ίδια μεταβολή κινητικής ενέργειας μετά από απόσταση D και εφόσον ξεκινάν από την ηρεμία θα έχουν την ίδια κινητική ενέργεια.

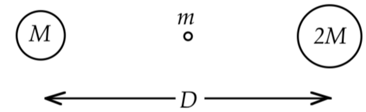
(γ) Αν υπάρχει τριβή μεταξύ της επιφάνειας των δίσκων και της επιφάνειας κίνησης, η δύναμη της τριβής θα είναι μεγαλύτερη για τον δίσκο B που έχει διπλάσια μάζα $f = \mu \cdot N \Rightarrow f_A = m_A g \mu$ και $f_B = m_B g \mu = 2m_A g \mu$
Η τριβή επομένως καταναλώνει περισσότερο έργο για την περίπτωση του δίσκου B: $W_B = f_B \cdot D \Rightarrow W_B = -2\mu g m_A D > W_A = -\mu m_A g D$ και άρα
$\Delta E_K^B = F \cdot D - f_B D = (F - f_B) D = (F - 2m_A \mu g) D < \Delta E_K^A = (F - \mu m_A g) D$

(δ) Όταν τα σώματα φθάνουν στο μέγιστο ύψος της τροχιάς τους, ο δίσκος (B) έχει μεταφέρει την κινητική του ενέργεια σε δυναμική και έχει σταματήσει. Ο δίσκος (A) ωστόσο έχει οριζόντια ταχύτητα στο μέγιστο ύψος εφόσον εκτελεί πλάγια βολή. Έτσι ο δίσκος (A) έχει τη μεγαλύτερη κινητική ενέργεια.

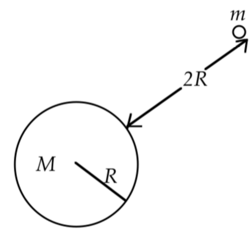
(ε) Το σώμα B έχει μετατρέψει όλη την κινητική του ενέργεια σε βαρυτική δυναμική ενέργεια. Επομένως το ύψος στο οποίο φθάνει είναι μεγαλύτερο από το ύψος στο οποίο φθάνει ο δίσκος (A).

Άσκηση 2 [10μ]

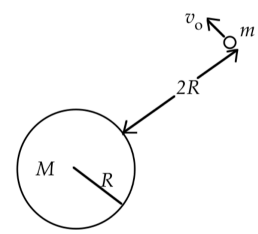
(**α**) Δύο μεγάλοι σφαιρικοί αστέρες με μάζες M και $2M$ αντίστοιχα βρίσκονται σε απόσταση D μεταξύ τους (μετρούμενη από το κέντρο του ενός αστέρα στο κέντρου του άλλου) όπως στο σχήμα. Ένας μικρός σφαιρικός αστεροειδής μάζας m βρίσκεται ανάμεσα στους δύο αστέρες με το κέντρο του στο μέσο της απόστασης των δύο αστέρων. Βρείτε το μέγεθος και διεύθυνση της ολικής βαρυτικής δύναμης που ασκείται στον αστεροειδή. [**1μ**]



(**β**) Ένα μικρό σώμα μάζας m αφήνεται από την κατάσταση της ηρεμίας και απόσταση $2R$ πάνω από την επιφάνεια ενός σφαιρικού πλανήτη μάζας M και ακτίνας R. Βρείτε την ταχύτητα που θα έχει το σώμα όταν αυτό θα χτυπήσει στην επιφάνεια του πλανήτη. Υποθέστε ότι ο πλανήτης δεν έχει ατμόσφαιρα και ότι δεν υπάρχει άλλη δύναμη εκτός της βαρυτικής η οποία ασκείται στο σώμα. [**2μ**]

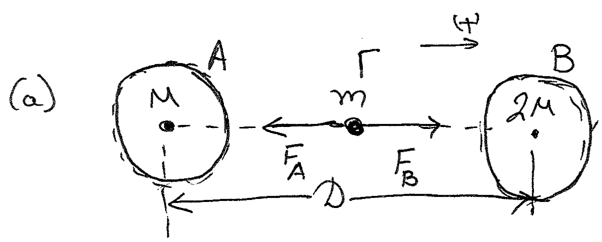


(**γ**) Υποθέστε ότι ένα μικρό σώμα αφήνεται από την ίδια απόσταση από τον σφαιρικό πλανήτη ($2R$) αλλά αυτή τη φορά ξεκινά με ταχύτητα $\upsilon_0 = \sqrt{GM/4R}$. Το σώμα έχει ένα προωθητικό πύραυλο προσαρτημένο πάνω του που θέτει το σώμα σε κυκλική τροχιά. Βρείτε την ταχύτητα που θα έχει το σώμα όταν θα αποκτήσει την κυκλική τροχιά του. Βρείτε επίσης το έργο που καταναλώνει ο πύραυλος. Υποθέστε ότι σε όλες τις χρονικές στιγμές το σώμα βρίσκεται στην ίδια απόσταση από τον πλανήτη και ότι δεν υπάρχουν άλλες δυνάμεις που να ασκούνται στο σώμα εκτός από την βαρυτική δύναμη. [**3μ**]



(**δ**) Επαναλάβετε την ερώτηση (**β**) αφού έχετε υποθέσει ότι πλανήτης είναι μία κοίλη σφαίρα και ότι το σώμα πέφτει μέσω μιας μικρής τρύπας στο εσωτερικό της σφαιρικής κοιλότητας. Βρείτε την ταχύτητα του σώματος καθώς αυτό φθάνει στο κέντρο του σφαιρικού φλοιού. [**4μ**]

(α)



Η δύναμη που ασκείται από τον αστέρα A στον αστεροειδή Γ είναι: $F_A = G\dfrac{M_A \cdot m}{(D/2)^2}$

Αντίστοιχα η δύναμη από τον B στο Γ είναι $F_B = G\dfrac{M_B m}{(D/2)^2}$ $\Rightarrow$

$$\Sigma F_\Gamma = F_B - F_A = G\frac{2M_A m}{(D/2)^2} - G\frac{M_A m}{(D/2)^2} \Rightarrow \Sigma F = G\frac{M_A m}{(D/2)^2} \Rightarrow \Sigma F = \frac{4GM_A m}{D^2}$$

προς τον B.

(β) Στο σύστημα ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις και επομένως η μηχανική ενέργεια διατηρείται.

$$E^{i}_{μηχ} = E^{f}_{μηχ} \Rightarrow U_g^{i} + E^{i}_{κιν} = U_g^{f} + E^{f}_{κιν} \Rightarrow -G\frac{Mm}{3R} + \cancel{\frac{1}{2}m v_i^2}^{\,0} = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}m v_f^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m} v_f^2 = \frac{GM\cancel{m}}{R} - \frac{GM\cancel{m}}{3R} \Rightarrow \frac{1}{2}v_f^2 = \frac{2GM}{3R} \Rightarrow v_f^2 = \frac{4}{3}\,GM/R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{GM}{R}}$$

(γ) Το σώμα τίθεται σε κυκλική τροχιά ακτίνας 3R. Επομένως για την τροχιά αυτή η βαρυτική δύναμη παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης και θα έχουμε: $F_{κεν} = F_g \Rightarrow \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{3R}} = G\frac{M\cancel{m}}{(3R)^{\cancel{2}}} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{3R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{3R}}$

Ο πύραυλος παρέχει το έργο για να τεθεί το σώμα σε κυκλική τροχιά ίδιας ακτίνας με την αρχική απόσταση του σώματος. Επομένως η δυναμική ενέργεια δεν μεταβάλλεται. Μεταβάλλεται ωστόσο η κινητική ενέργεια του σώματος.

$$W_{πυρ.} = \Delta E_{μηχ} = E^{f}_{κιν} + U_g^{f} - E^{i}_{κιν} - U_g^{i} = E^{f}_{κιν} - E^{i}_{κιν} + \cancel{\Delta U_g}^{\,0} = \frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right)$$

$$\Rightarrow W_{πυρ} = \frac{1}{2}m\left(\frac{GM}{3R} - \frac{GM}{4R}\right) \Rightarrow W_{πυρ} = \frac{1}{2}m\,\frac{GM}{12R} \Rightarrow \boxed{W_{πυρ} = +\frac{GMm}{24R}}$$ Θετικό

(δ) Στο εσωτερικό του σφαιρικού κελύφους η δύναμη που αναπτύσσεται στο σώμα είναι $\emptyset$. Επομένως η δυναμική ενέργεια του σώματος είναι σταθερή και η κινητική ενέργεια είναι επίσης σταθερή αφού δεν υπάρχει δύναμη που να παράγει έργο στο σώμα ή να καταναλώνει. Επομένως η ταχύτητα του σώματος στο κέντρο του σφαιρικού κελύφους θα είναι ίδια με την ταχύτητα που έχει το σώμα στην επιφάνεια του κελύφους, όπως βρέθηκε στο ερώτημα (β)

Άσκηση 3 [10μ]

Δύο δίσκοι έρχονται σε σύγκρουση πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Οι ταχύτητες των δίσκων πριν την σύγκρουσή τους φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Αφού συγκρουστούν, ο δίσκος Α κινείται όπως στο σχήμα. Υποθέστε ότι η μάζα του δίσκου Α είναι διπλάσια από την μάζα του δίσκου Β, $M_A = 2M_B$.

(**α**) Ποιό το μέτρο και η διεύθυνση της ταχύτητας του δίσκου Β μετά την σύγκρουση; Προσδιορίστε στο γράφημά σας την γωνία που χρησιμοποιείτε για να προσδιορίσετε τη διεύθυνση του Β; [**6μ**]

(**β**) Διατηρείται η κινητική ενέργεια στην κρούση αυτή; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Αν όχι θα πρέπει ξεκάθαρα να απαντήσετε ποια είναι η ποσότητα κινητικής ενέργειας που κερδήθηκε ή χάθηκε κατά την σύγκρουση. [**4μ**]

(α) Έχουμε διατήρηση της γραμμικής ορμής:

Από το σχήμα θα έχουμε: x: $M_A v_A^i \cos\Theta_A^i + M_B v_B^i \cos\Theta_B^i = M_A \cdot v_A^f + M_B v_{Bx}^f$

$\Rightarrow 2M_B v_A^i \cos\Theta_A^i + M_B v_B^i \cos\Theta_B^i = 2M_B v_A^f + M_B v_{Bx}^f \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{2M_B}\left(v_A^i \cos\Theta_A^i + \frac{1}{2} v_B^i \cos\Theta_B^i\right) = \cancel{2M_B}\left(v_A^f + \frac{1}{2} v_{Bx}^f\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{v_A^i \cos\Theta_A^i + \frac{1}{2} v_B^i \cos\Theta_B^i = v_A^f + \frac{1}{2} v_{Bx}^f}$ (1)

Στην y-διεύθυνση θα έχουμε:

$2\cancel{M_B} v_A^i \sin\Theta_A^i + \cancel{M_B} v_B^i \sin\Theta_B^i = \cancel{m_B} v_{By}^f \Rightarrow \boxed{2v_A^i \sin\Theta_A^i + v_B^i \sin\Theta_B^i = v_{By}^f}$ (2)

Οι γωνίες είναι $\Theta_A = -40^\circ$, $\Theta_B = 25^\circ$, $v_A^i = 25 m/s$, $v_B^i = 30 m/s$ και $v_A^f = 15 m/s$

Αντικατάσταση στην (1) και (2) δίνει:

$\frac{1}{2} v_{Bx}^f = \left(25 \frac{m}{s}\right)\cos(-40^\circ) + \frac{1}{2}\left(30 \frac{m}{s}\right)\cos(25^\circ) - \frac{15}{2}\frac{m}{s} = 0.766 \cdot 25 \frac{m}{s} + \left(15 \frac{m}{s}\right) 0.906 - $

$\Rightarrow \frac{1}{2} v_{Bx}^f = 17.74 \frac{m}{s} \Rightarrow \boxed{v_{Bx}^f = 35.48 m/s}$ (3)

Στη (2) θα έχουμε: $v_{By}^f = 2 \cdot \left(25 \frac{m}{s}\right) \sin(-40^\circ) + \left(30 \frac{m}{s}\right) \cdot \sin 25^\circ \Rightarrow \boxed{v_{By}^f = -19.46 \frac{m}{s}}$ (4)

Επομένως η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα του B μετά την κρούση με τον x-άξονα, είναι $\tan\Theta_B^f = \frac{-18.46}{35.48} \Rightarrow \tan\Theta_B^f = -0.548 \Rightarrow \boxed{\Theta_B^f = 28.74^\circ}$ κάτω από τον x-άξονα

Από (3) κ (4) το μέτρο της ταχύτητας είναι: $|\vec{v}_B^f| = \sqrt{v_{Bx}^{f\,2} + v_{By}^{f\,2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{|\vec{v}_B^f| = 40.5\ m/s}$

(β) Η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι: $E_{κιν}^i = E_{κA}^i + E_{κB}^i \Rightarrow$

$E_κ^i = \underbrace{\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2}= \frac{1}{2} 2 m_B v_A^{i2} + \frac{1}{2} m_B v_B^{i2} = \frac{1}{2} m_B (2v_A^2 + v_B^2) \Rightarrow E_{κιν}^i = \frac{1}{2} m_B (2 \cdot 25 \frac{m^2}{s^2} + 30$

$\Rightarrow \boxed{E_κ^i = 1075\ m_B}$

Η τελική κινητική ενέργεια: $E_{κιν}^f = \frac{1}{2} m_B (2 v_A^{f\,2} + v_B^{f\,2}) = \frac{1}{2} m_B \left(15^2 \frac{m^2}{s^2} + 40.5^2 \frac{m^2}{s^2}\right) \Rightarrow \boxed{E_{κν}^f = 1045\ m_B}$ απώλ κινητ ενέργ

Άσκηση 4 [10μ]

(α) Ένας αστροναύτης στέκεται σε ένα φεγγάρι του πλανήτη Ποσειδώνα και εκτοξεύει μια μπάλα μάζας 0.15*kg* με αρχική ταχύτητα 37*m/s*. Η μάζα του φεγγαριού είναι $3.8\times10^{19}\,kg$ και η ακτίνα του είναι 200*km*. Αν ο αστροναύτης εκτοξεύει τη μπάλα οριζόντια ως προς την επιφάνεια του φεγγαριού, υπάρχει περίπτωση να θέσει τη μπάλα σε κυκλική τροχιά γύρω από το φεγγάρι; Εξηγήστε την απάντησή σας. [**6μ**]

(β) Θεωρήστε τώρα ότι ο αστροναύτης εκτοξεύει την μπάλα κατακόρυφα προς τα πάνω με την ίδια αρχική ταχύτητα όπως αυτή στο ερώτημα (α). Ποιο το μέγιστο ύψος στο οποίο φθάνει η μπάλα; [**4μ**]

(α) Για κυκλική τροχιά έχουμε: $F_{κεν} = F_g \Rightarrow \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} = \frac{GM\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r}$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{6.67\cdot10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot 3.8\cdot10^{19}\cancel{kg}}{2\cdot10^5\cancel{m}}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{6.67\cdot3.8}{2}10^3\frac{\cancel{kg}\cdot m\cdot m}{s^2\,\cancel{kg}}}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{12673\,\frac{m^2}{s^2}} \Rightarrow \boxed{v = 112.57\,m/s}$$

Αυτή είναι η ταχύτητα που πρέπει να έχει για να μπεί σε κυκλική τροχιά και επομένως η ταχύτητα που δίνει ο αστροναύτης $(v = 37m/s)$ δεν είναι αρκετή για να θέσει την μπάλα σε κυκλική τροχιά.

(β) Στην περίπτωση της κατακόρυφης εκτόξευσης χρησιμοποιούμε διατήρηση μηχανικής ενέργειας για να βρούμε το μέγιστο ύψος. Αρχικά το σώμα έχει κινητική και δυναμική ενέργεια, ενώ στο τέλος όλη η κινητική του ενέργεια έχει μετατραπεί σε δυναμική ενέργεια.

$$E^i_{μηχ} = E^f_{μηχ} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 - G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{(r+h)} + \cancel{\frac{1}{2}mv_f^2}^{\,0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{GM}{r+h} = \frac{GM}{r} - \frac{1}{2}v_i^2 \Rightarrow \frac{1}{r+h} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2}\frac{v_i^2}{GM} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2}\frac{37^2\,m^2/s^2}{6.67\frac{Nm^2}{kg^2}\cdot10^{-11}\cdot3.8\cdot10^{19}kg}$$

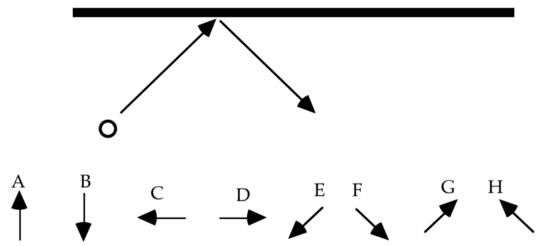
$$\Rightarrow \frac{1}{r+h} = \frac{1}{2\cdot10^5 m} - \frac{1}{2}\frac{1369\,m^2/s^2}{25.36\cdot10^8\frac{kg\,m^3}{s^2\,kg}} \Rightarrow \frac{1}{r+h} = \frac{1}{2\cdot10^5 m} - \frac{1}{2}\frac{53.98}{10^8 m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r+h} = \frac{1}{2}\left(\frac{10^8 - 10^5\cdot53.98}{10^{13}\,m}\right) \Rightarrow r+h = \frac{2\cdot10^{13}m}{10^5(10^3-53.98)} = 211412.02m \Rightarrow$$

$$h = 2.11\,10^5 - 2.\,10^5 \Rightarrow \boxed{h = 0.11\cdot10^5 m}$$ πάνω από την επιφάνεια

Άσκηση 5 [10μ]

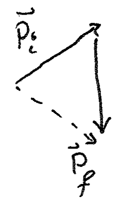
(**α**) Μία μπάλα χτυπά σε ένα τοίχο και ανακλάται όπως φαίνεται στο σχήμα. Υποθέστε ότι η σύγκρουση είναι τέλεια ελαστική. Ποιό από τα διανύσματα περιγράφει καλύτερα την μεταβολή της ορμής της μπάλας; Σημειώστε την απάντησή σας και σχολιάστε την. [**4μ**]



(**β**) Ένα μικρό αυτοκίνητο κινούμενο με ταχύτητα 3*υ* στον αυτοκινητόδρομο χτυπά το πίσω μέρος ενός φορτηγού το οποίο κινείται με ταχύτητα *υ* στην ίδια κατεύθυνση με το αυτοκίνητο. Μετά τη σύγκρουση το αυτοκίνητο μένει προσκολημμένο στο φορτηγό. Κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης, ποιό αυτοκίνητο δέχεται τη μεγαλύτερη μέση δύναμη; Εξηγήστε την απάντησή σας. [**2μ**]

(γ) Δύο μπάλες μάζας 2*kg* και 3*kg* αντίστοιχα γλυστρούν πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια με ταχύτητες 4*m/s* και 2*m/s*, αντίστοιχα. Μετά από μία ανελαστική σκέδαση, οι μπάλες προσκολούνται και κινούνται με ταχύτητα 2*m/s*. Σε ποιά διεύθυνση κινούνται οι μπάλες πριν την σύγκρουσή τους; [**4μ**]

(α) Από το σχήμα έχουμε:

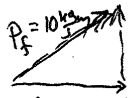


$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$ Επομένως η απάντηση είναι (B).

(β) Κατά την κρούση των δύο οχημάτων, οι δυνάμεις που αναπτύσσονται είναι δυνάμεις δράσης – αντίδρασης. Επομένως οι δυνάμεις στο αυτοκίνητο και το φορτηγό είναι ίσες

(γ) Τα δύο σώματα συγκρούονται και η γωνία με την οποία κινούνται αρχικά είναι ανάμεσα σε 0° και 180° (δηλαδή δεν κινούνται παράλληλα ή αντιπαράλληλα).

Στην πραγματικότητα τα σώματα κινούνται σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις :



$P_B^i = 3\,kg \cdot 2\frac{m}{s} = 6\frac{kg\,m}{s}$

$P_A^i = 8\,kg\,m/s$

Το σώμα A έχει ορμή $|\vec{P}_A| = m_A |\vec{v}_A| \Rightarrow$

$|\vec{P}_A|^i = 4\,kg \cdot 2\frac{m}{s} \Rightarrow |\vec{P}_A| = 8\frac{kg\,m}{s}$

Το σώμα B έχει ορμή $|\vec{P}_B| = m_B |\vec{v}_B| \Rightarrow$

$|\vec{P}_B|^i = 3\,kg\, 2\frac{m}{s} \Rightarrow |\vec{P}_B|^i = 6\,m/s\,kg$

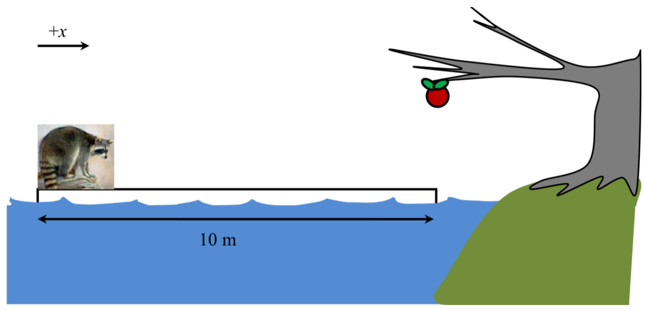
$|\vec{P}^f_{ολ}| = (m_A + m_B)\cdot v_f = 5\,kg \cdot 2\frac{m}{s} = 10\,kg\,m/s$

Αλλά $|\vec{P}_{ολ}|^2 = |\vec{P}_A^i|^2 + |\vec{P}_B^i|^2 = (8^2 + 6^2)(kg\,m/s)^2 \Rightarrow |\vec{P}_{ολ}|^2 = 100\left(\frac{kg\,m}{s}\right)^2$.

Επομένως $\vec{P}_{ολ} = \vec{P}_A^i + \vec{P}_B^i$ όπως στο σχήμα.

Άσκηση 6 [10μ]

Ένα κάστορας στέκεται στην άκρη ενός κορμού δέντρου μήκους 10*m*. Ο κορμός επιπλέει στα νερά ενός ποταμού. Ξαφνικά βλέπει ένα μήλο να κρέμεται από το κλαδί ενός δέντρου το οποίο βρίσκεται ακριβώς πάνω από την άλλη άκρη του κορμού στο οποίο στέκεται ο κάστορας. Ο κάστορ ας αρχίζει να κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 0.1 m/s$ προς το μήλο. Αυτή είναι η ταχύτητα του κάστορα ως προς τον κορμό του δέντρου. Υποθέστε ότι ο κάστορας έχει μάζα 25*kg* ενώ η μάζα του κορμού είναι 100 *kg*. Αγνοήστε το μέγεθος του κάστορα.

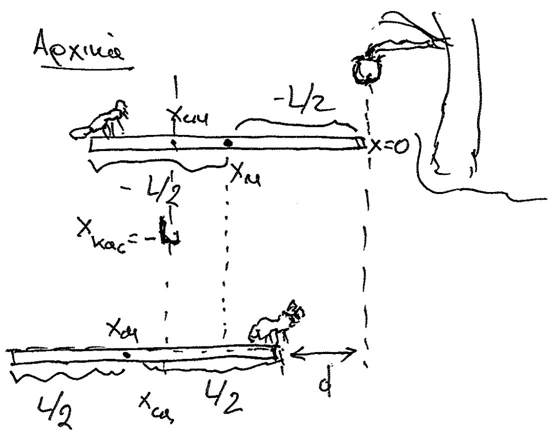


(α) Καθώς ο κάστορας κινείται πάνω στον κορμό, ποια η ταχύτητα του κορμού ως προς την όχθη; [**5μ**]

(β) Όταν ο κάστορας φθάνει στο άλλο άκρο του κορμού ποια η οριζόντια απόστασή του από το μήλο που επιθυμεί; [**5μ**]

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με διάφορους τρόπους:

<u>Κέντρο Μάζας:</u> το σύστημα είναι απομονωμένο και επομένως το κέντρο μάζας δεν αλλάζει θέση:



Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων με την αρχή $x=0$ το σημείο κάτω από το μήλο, στο οποίο βρίσκεται το άκρο του κορμού πριν αρχίζει ο κάστορας να κινείται.

Η μάζα του κάστορα είναι $m_κ$ και η μάζα του κορμού $m_ξ$. Η αρχική θέση του κάστορα είναι $x_κ = -L_{ξύλο}$ ενώ η θέση του μέσου του κορμού $x_ξ = -L/2$.

Θεωρούμε θετική φορά προς την όχθη.

Όταν ο κάστορας έχει κινηθεί στην άκρη του κορμού κοντά στην όχθη, ο κορμός έχει μετακινηθεί κατά μία απόσταση $-d$ μακριά από την όχθη. Επομένως οι νέες θέσεις του κάστορα και του κορμού θα είναι: $x'_κ = -d$ και του κορμού $x'_ξ = -\frac{L}{2} - d$, Ωστόσο το κέντρο μάζας θα είναι στην ίδια θέση: $X^i_{KM} = X^f_{KM} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{m_\kappa \cdot x_\kappa^i + m_\xi x_\xi^i}{\cancel{m_\kappa + m_\xi}} = \frac{m_\kappa x_\kappa^f + m_\xi x_\xi^f}{\cancel{m_\kappa + m_\xi}} \Rightarrow m_\kappa x_\kappa^i + m_\xi x_\xi^i = m_\kappa x_\kappa^f + m_\xi x_\xi^f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (25kg)(-10m) + (100kg)\cdot(-5m) = (25kg)(-d) + (100kg)(-5m-d) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-250 - 500 + 500)kg\,m = -(125kg)d \Rightarrow -250\cancel{kg}m = -125\cancel{kg}d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d = 2m}$$

Ξέρουμε ότι ο κάστορας κινείται με ταχύτητα $v_\kappa = 0.1 m/s$ ως προς τον κορμό. Επομένως χρειάζεται $v\cdot t = L \Rightarrow t = L/v = 10m/0.1 \Rightarrow \underline{t = 100sec}$ για να περπατήσει το μήκος του κορμού. Το χρόνο αυτό ο κορμός κινείται $-2m \Rightarrow v_{\kappa o\rho} = -2/100 = 0.02$ αρνητικά.

<u>Από διατήρηση της ορμής</u>

(α) $\vec{P}_{tot} = \vec{0} \Rightarrow m_\kappa \vec{V}_{\kappa/\varepsilon} + m_\xi \vec{V}_{\xi/\varepsilon} = \vec{0}$ (1)

$\vec{V}_{\kappa'} = \vec{V}_{\kappa/\varepsilon}$ είναι η ταχύτητα του κάστορα ως προς το έδαφος (την όχθη)

και αντίστοιχα $\vec{V}_\xi$ η ταχύτητα του κορμού ως προς την όχθη.

Αλλά $\vec{V}_{\kappa/\varepsilon} = \vec{V}_{\kappa/\xi} + \vec{V}_{\xi/\varepsilon}$ (2)

Από την (1) $\Rightarrow m_\kappa \vec{V}_{\kappa/\varepsilon} = -m_\xi \vec{V}_{\xi/\varepsilon} \Rightarrow \vec{V}_{\kappa/\varepsilon} = -\frac{m_\xi}{m_\kappa}\vec{V}_{\xi/\varepsilon} \Rightarrow$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} -\frac{m_\xi}{m_\kappa}\vec{V}_{\xi/\varepsilon} = \vec{V}_{\kappa/\xi} + \vec{V}_{\xi/\varepsilon} \Rightarrow -\vec{V}_{\xi/\varepsilon}\left(\frac{m_\xi}{m_\kappa} + 1\right) = \vec{V}_{\kappa/\xi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{\xi/\varepsilon} = -\frac{\vec{V}_{\kappa/\xi}}{\left(1 + m_\xi/m_\kappa\right)} \Rightarrow \vec{V}_{\xi/\varepsilon} = -\frac{1}{1 + \frac{100\cancel{kg}}{25\cancel{kg}}}\vec{V}_{\kappa/\xi} \Rightarrow$$

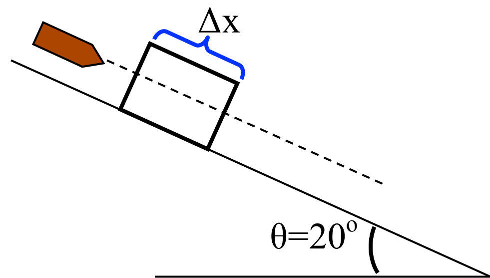
$$\Rightarrow \vec{V}_{\xi/\varepsilon} = -\frac{1}{5}\vec{V}_{\kappa/\xi} = -\frac{1}{5}(0.1)\frac{m}{s} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_{\xi/\varepsilon} = -0.02\,m/s}$$

(β) Ο χρόνος για να κινηθεί ο κάστορας από τη μία άκρη του κορμού στην άλλη $v\cdot t = d \Rightarrow t = \frac{d}{v_{\kappa/\xi}} = \frac{10\cancel{m}}{0.1\cancel{m}/s} \Rightarrow t = 100s$

Εφόσον ο κορμός κινείται με ταχύτητα $v_{\xi/\varepsilon} = -0.02 m/s$ θα διανύσει απόσταση: $d_\xi = v_{\xi/\varepsilon} * t = -0.02\frac{m}{\cancel{s}}\cdot 100\cancel{s} \Rightarrow \underline{d_\xi = -2m}$

Άσκηση 7 [20μ]

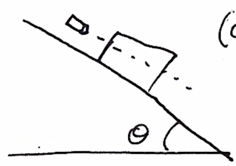
Ένα τούβλο μάζας M=1kg και πάχους Δx=0.1m βρίσκεται ακίνητο στην κορυφή ενός κεκλιμένου επιπέδου κλίσης 20^o με την οριζόντια διεύθυνση. Μια σφαίρα μάζας m=5gr η οποία κινείται παράλληλα προς το κεκλιμένο επίπεδο με ταχύτητα υ=300m/s χτυπά το τούβλο, το διαπερνά και εξέρχεται έχοντας χάσει το 75% της αρχικής κινητικής της ενέργειας.



(α) Ποια είναι η ταχύτητα του τούβλου ακριβώς τη στιγμή που η σφαίρα εξέρχεται από αυτό. (Υποθέστε ότι η σφαίρα και το τούβλο δεν αλλάζουν μάζα) [**8π**]

(β) Ποια είναι η μέση δύναμη που ασκείται στην σφαίρα καθώς διαπερνά το τούβλο; [**5π**]

(γ) Αν το τούβλο κατόπιν γλυστρά κατά s = 50m προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου πριν σταματήσει, ποιος είναι ο συντελεστής της κινητικής τριβής μεταξύ του τούβλου και της επιφάνειας του επιπέδου; [**7π**]



(α) Ξέρουμε από τα δεδομένα του προβλήματος ότι η σφαίρα εξέρχεται από το τούβλο έχοντας χάσει 75% της ενέργειάς της. Επομένως: $E^{f}_{κιν} = \frac{1}{4} E^{i}_{κ} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \upsilon^2_{σφ_i} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} m \upsilon^2_{σφ_f}\right) \Rightarrow \upsilon^2_{σφ_f} = \frac{1}{4}\upsilon^2_{σφ_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon_{σφ_f} = \frac{1}{2}\upsilon_{σφ_i}}$$ (A) τελική ταχύτητα της σφαίρας

Στο σύστημά μας δεν ενεργούν εξωτερικές δυνάμεις και επομένως ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής: $P_i = P_f$

Η αρχική ορμή του συστήματος τούβλου-σφαίρας είναι: $P_i = m\upsilon_{σφ_i}$

Η τελική ορμή του συστήματος τούβλου-σφαίρας είναι: $P_f = m\upsilon_{σφ_f} + M_τ V_τ$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow m\upsilon_{σφ_i} = m\upsilon_{σφ_f} + M_τ V_τ \Rightarrow V_τ = \frac{m\upsilon_{σφ_i} - m\upsilon_{σφ_f}}{M_τ} = \frac{m}{M_τ}\,\upsilon_{σφ_i} - \upsilon_{σφ_f} \Rightarrow$$

$$\overset{(A)}{\Rightarrow} V_τ = \frac{m}{M_τ}\left(\upsilon_{σφ_i} - \frac{\upsilon_{σφ_i}}{2}\right) = \frac{m}{M_τ}\frac{\upsilon_{σφ_i}}{2} \Rightarrow V_T = \frac{5\cdot10^{-3}}{1}(150) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_T = 0.75\, m/s}$$

(b) Έστω $F_{σφ}$ η δύναμη που αναπτύσσεται στη σφαίρα καθώς διαπερνά το τούβλο. Σύμφωνα με το 2° νόμο του Newton:

$$\boxed{F_{σφ} = m\, a_{σφ}}$$

όπου $a_{σφ}$ η μέση επιτάχυνση που έχει η σφαίρα μέσα στο τούβλο.

Ξέρουμε όμως: $\quad υ_{σφ_f}^2 = υ_{σφ_i}^2 + 2a_{σφ}(x - x_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow υ_{σφ_f}^2 - υ_{σφ_i}^2 = 2a_{σφ}(Δx)$$

όπου $Δx$ το πάχος του τούβλου

$$\Rightarrow a_{σφ} = \frac{υ_{σφ_f}^2 - υ_{σφ_i}^2}{2Δx} \overset{(A)}{=} \frac{\frac{υ_{σφ_i}^2}{4} - υ_{σφ_i}^2}{2Δx} = \frac{-3υ_{σφ_i}^2}{8Δx}$$

(το πρόσημο δηλώνει ότι έχουμε επιβράδυνση)

$$\Rightarrow a_{σφ} = \frac{3υ_{σφ_i}^2}{8Δx}.$$

Επομένως η δύναμη που αναπτύσσεται στη σφαίρα θα είναι:

$$F = -m\frac{3υ^2}{8Δx} \Rightarrow F = -5\cdot 10^{-3}\,\frac{3\cdot(300)^2}{8\cdot 0.1} \Rightarrow \boxed{F = -1687.5\,N}$$

$$F = \frac{ΔP}{Δt} = \frac{m_{σφ}\,ΔV_{σφ}}{Δt} = \frac{m_{σφ}\,υ_{σφ}/2}{Δt} = m\,a_{σφ}$$

Βρίσκουμε το $Δt$ από $\quad υ_{σφ}^f = υ_{σφ}^i + a_{σφ}t \Rightarrow t = \frac{υ_{σφ}^f - υ_{σφ}^i}{a_{σφ}} = 4.4\cdot 10^{-4}s$

$$\Rightarrow \boxed{Δt = 4.4\cdot 10^{-4}\,sec}$$

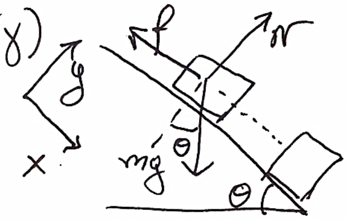
Από το θεώρημα έργου-ενέργειας: $\quad ΔE_{κιν} + ΔU = ΔE_{μηχ} \Rightarrow$

$$\Rightarrow ΔE_{κιν} = ΔE_{μηχ} = W_F \Rightarrow \frac{1}{2}m\left(υ_{σφ_f}^2 - υ_{σφ_i}^2\right) = F\cdot Δx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = -\frac{υ_{σφ_i}^2 - υ_{σφ_f}^2}{2Δx}m \Rightarrow \boxed{F = -1687.5\,N}$$

ίδιο με πριν

(γ)



Εξισώσεις του Νεύτωνα:

$$\Sigma F_y = N - m_T g\cos\theta = 0 \Rightarrow N = m_T g\cos\theta \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = m_T g\sin\theta - f = m_T a \quad (2)$$

Αλλά $v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \Rightarrow 0 = v_i^2 + 2aS \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = -\frac{v_i^2}{2S} \Rightarrow \boxed{a = -5.625\ m/s^2} \quad (3)$$

Από την (2) έχουμε: $f = m_T g\sin\theta - m_T a = m_T(g\sin\theta - a) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f = \left(9.8\cdot\sin 20^\circ - (-5.625)\right)m \Rightarrow \boxed{f = 3.357\,N}$$

Αλλά $f = \mu\cdot N \overset{(1)}{\Rightarrow} \mu = \dfrac{f}{m_T g\cos\theta} = \dfrac{3.357}{9.8\cdot\cos 20^\circ} \Rightarrow \boxed{\mu = 0.36}$

Διαφορετικά πάλι απο διατήρηση ενέργειας θα είχαμε:

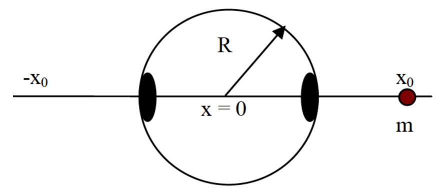
$$\Delta E_{κιν} + \Delta U = \Delta E_{μηχ} \Rightarrow \frac{1}{2}m_T\left(v_f^2 - v_i^2\right) + \cancel{M}g(y_f - y_i) = W_f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_f = -\frac{1}{2}\cancel{m_T}v_i^2 + \cancel{m_T}g(-h) = -f\cdot S = -\mu_k N S = -\mu_k \cancel{m_T} g\cos\theta\, S$$

$$\Rightarrow \mu_k = \frac{\frac{1}{2}v_i^2 + gh}{g\cos\theta\, S} \Rightarrow \boxed{\mu_k = 0.36}$$

Άσκηση 8 [20μ]

Ένα πολύ λεπτό σφαιρικό κέλυφος (κοίλη σφαίρα) μάζας M και ακτίνας R κατέχει κάποια σταθερή θέση στο χώρο ώστε το κέντρο του να συμπίπτει με την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Δύο μικρές τρύπες ανοίγονται στο κέλυφος ακριβώς στα σημεία στα οποία ο x-άξονας διαπερνά το κέλυφος. Μία μικρή μάζα m κινείται κατά μήκος το υ x-άξονα από τη θέση x_0 στη θέση $-x_0$. Οι διαστάσεις των τρυπών είναι λίγο μεγαλύτερες από τις διαστάσεις της μάζας και έτσι η μάζα μπορεί να περάσει μέσα από τις τρύπες αυτές.



(α) Προσδιορίστε τη βαρυτική δυναμική ενέργεια $U(x)$ του συστήματος, όπου x είναι η (μεταβαλλόμενη) θέση της m. Θεωρήστε όλες τις τιμές του x από το $-x_0$ έως το $+x_0$. [**5μ**]
Κάντε επίσης το γράφημα της $U(x)$ συναρτήσει της θέσης x. [**5μ**]

(β) Προσδιορίστε τη βαρυτική δύναμη $F(x)$ στη μάζα m, για x από το $-x_0$ στο $+x_0$. [**5μ**]
Κάντε το γράφημα της $F(x)$ συναρτήσει του x. [**5μ**]

Θεωρήστε την F αρνητική εάν έχει την κατεύθυνση στη $-x$-διεύθυνση και θετική εάν έχει κατεύθυνση στην $+x$-διεύθυνση.

Όπως έχουμε δει, σε προβλήματα σφαιρικής γεωμετρίας η βαρυτική δύναμη σε ακτίνα R είναι ίδια σα να προέρχεται από μια σημειακή μάζα $M(R)$, όπου $M(R)$ η μάζα που περιλείεται σε σφαίρα ακτίνας R με κέντρο την αρχή των αξόνων.

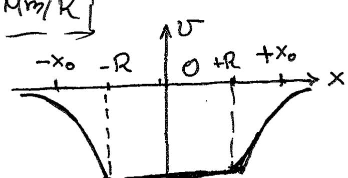
(α) Για $x>R$, η δυναμική ενέργεια είναι $U=-\frac{GMm}{|x|}$

Για $x<R$, δεν υπάρχει μάζα στο εσωτερικό της σφαιρικής κοιλότητας και επομένως η βαρυτική δύναμη είναι μηδέν, $F=0N$. Ξέρουμε ωστόσο, ότι $F=-\frac{dU}{dx}\Rightarrow 0=\frac{dU}{dx}\Rightarrow$

$U(x)=\sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow \boxed{U(x)=U(|x|=R)=-GMm/R}$

Επομένως θα ισχύει:

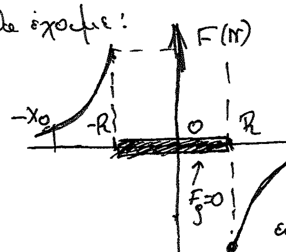
$$U(x)=\begin{cases}-\frac{GMm}{R} & \text{για } |x|\le R\\ -\frac{GMm}{|x|} & \text{για } |x|\ge R\end{cases}$$



(β) Έξω από το σφαιρικό κέλυφος $F_g=-\frac{GMm}{|x|^2}$ για $x\ge R$ ενώ για $x\le -R$, $F_g=+\frac{GMm}{|x|^2}$

Μέσα στο κέλυφος $F_g=0N$. Επομένως θα έχουμε:

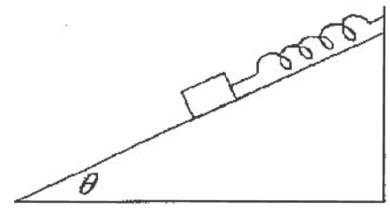
$$F(x)=\begin{cases}+\frac{GMm}{|x|^2} & \text{για } -x_0\le x\le R\\ \emptyset & \text{για } -R<x<R\\ -\frac{GMm}{|x|^2} & \text{για } R\le x\le +x_0\end{cases}$$



Η δύναμη δεν είναι συνεχής γιατί το κέλυφος έχει μικρό πάχος, έτσι η μάζα είναι στην επιφάνεια

Άσκηση 9 [20μ]

Ένα κιβώτιο μάζας m βρίσκεται ακίνητο πάνω σε κεκλιμένη επιφάνεια που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση. Υπάρχει τριβή μεταξύ του κιβωτίου και της κεκλιμένης επιφάνειας και ο συντελεστής στατικής τριβής, μ_s, είναι μεγαλύτερος από τον συντελεστή της κινητικής τριβής, μ_k. Το κιβώτιο είναι στερεωμένο σε ελατήριο αμελητέας μάζας και σταθεράς k. Απουσία οποιασδήποτε δύναμης στο ελατήριο, το φυσικό του μήκος είναι l.



(**α**) Τραβάμε το κιβώτιο προκαλώντας επιμήκυνση του ελατηρίου κατά $l+x$. Ποια είναι η μέγιστη επιμήκυνση στο ελατήριο, x_{max}, για την οποία το κιβώτιο θα παραμείνει ακίνητο όταν αφαιθεί ελεύθερο; [**3μ**]

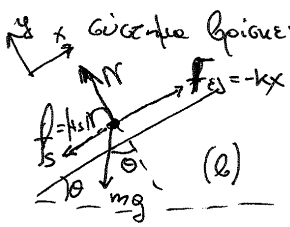
(**β**) Για την θέση αυτή σχεδιάστε το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος για το κιβώτιο. Σημειώστε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται και δώστε το μέτρο τους. [**2μ**]

(**γ**) Καθώς το κιβώτιο βρίσκεται στην θέση x_{max}, του δίνουμε μια μικρή ώθηση (θεωρείστε ότι αυτός είναι ο χρόνος $t_0 = 0$) και αυτό αρχίζει να κινείται. Για ποια τιμή του x το κιβώτιο θα αποκτήσει την μέγιστη ταχύτητά του; [**5μ**]

(**δ**) Καθώς το κιβώτιο κινείται, το ελατήριο συσπειρώνεται και σε κάποια χρονική στιγμή, t_f, θα έχει απομάκρυνση από το φυσικό του μήκος, x. Ποιο είναι το έργο της δύναμης της βαρύτητας, της δύναμης του ελατηρίου και της δύναμης της τριβής στο διάστημα μεταξύ t_0 και t_f; [**5μ**]

(**ε**) Καθώς το κιβώτιο κινείται προς την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου το ελατήριο συσπειρώνεται. Ποια είναι η απαραίτητη προϋπόθεση ώστε το ελατήριο να συσπειρωθεί και να επανέλθει στο φυσικό του μήκος, l; [**5μ**]

(α) Για μέγιστη επιμήκυνση, x_{max}, οι δυνάμεις που δρουν στο σώμα θα είναι, η δύναμη του ελατηρίου, η δύναμη της βαρύτητας, και η δύναμη της στατικής τριβής. Το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία οπότε από τον 2° νόμο του Newton θα έχουμε:



$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow \vec{N} + m\vec{g}\cos\theta = \vec{0} \Rightarrow \vec{N} = -m\vec{g}\cos\theta \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

$$\Sigma F_x = \vec{0} \Rightarrow -mg\sin\theta - \mu_s mg\cos\theta + kx_{max} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{max} = \frac{mg}{k}\left(\sin\theta + \mu_s\cos\theta\right)} \quad (1)$$

(γ) Από τη στιγμή που το κιβώτιο αρχίζει να κινείται, η τριβή που εμφανίζεται είναι κινητική τριβή: $\boxed{f_k = \mu_k N = \mu_k mg\cos\theta}$ (2) Σύμφωνα με τον 2° νόμο του Newton, η συνισταμένη δύναμη στην παράλληλη διεύθυνση προς το κεκλιμένο επίπεδο

Θα είναι: $\Sigma F_x = kx - mg\sin\theta - f_k = ma \Rightarrow \boxed{kx - mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta = ma}$ (3)

Θέλουμε να βρούμε τη μέγιστη ταχύτητα. Αυτό συμβαίνει όταν $a=0$ (4)

Από την (3) θέτοντας $a=0$ έχουμε: $kx = mg\sin\theta + \mu_k mg\cos\theta \Rightarrow \boxed{x = \frac{mg}{k}(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)}$

(δ) Το έργο που παράγει η δύναμη της βαρύτητας θα είναι:

$$W_g = -mg\sin\theta \cdot \Delta x \Rightarrow \boxed{W_g = -mg\sin\theta\,(x_{max} - x)}$$

Το έργο της δύναμης ελατηρίου: $W_{E\lambda} = \int_{x_{max}}^{x} (-kx)\,dx = -\frac{1}{2}k(x^2 - x_{max}^2) \Rightarrow \boxed{W_{E\lambda} = +\frac{1}{2}k(x_{max}^2 - x^2)}$

Το έργο της δύναμης της τριβής: $\boxed{W_{\tau\rho} = -\mu_k mg\cos\theta\,(x_{max} - x)}$

(ε) Το ελατήριο θα επανέλθει στο φυσικό του μήκος όταν το ολικό έργο που παράγεται από όλες τις δυνάμεις που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα είναι ≥ 0 όταν το $x=0$. (στην περίπτωση αυτή η επιμήκυνση θα είναι $l + x = l$)

Θα έχουμε: $W_{E\lambda} + W_g + W_{f_k}$ καθώς το σώμα κινείται από το $x_{max} \rightarrow x=0$. Οπότε:

$$\Sigma W = \frac{1}{2}kx_{max}^2 - \cancel{\frac{1}{2}kx^2} - mg\sin\theta\, x_{max} + \cancel{mg\sin\theta\, x} - \mu_k mg\cos\theta\, x_{max} + \cancel{\mu_k mg\cos\theta\, x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma W \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}kx_{max}^2 - \mu_k mg\cos\theta\, \cancel{x_{max}} - mg\sin\theta\, \cancel{x_{max}} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}kx_{max} \geq mg(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)$$

Αντικαθιστούμε το x_{max} από την εξίσωση (1) που βρήκαμε στο (α) ερώτημα.

$$\frac{1}{2}\cancel{k}\,\frac{\cancel{mg}}{\cancel{k}}(\sin\theta + \mu_s\cos\theta) \geq \cancel{mg}(\sin\theta + \mu_k\cos\theta) \Rightarrow \frac{1}{2}(\sin\theta + \mu_s\cos\theta) \geq (\sin\theta + \mu_k\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \sin\theta + \mu_s\cos\theta \geq 2\sin\theta + 2\mu_k\cos\theta \Rightarrow (\mu_s - 2\mu_k)\cos\theta \geq \sin\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_s - 2\mu_k \geq \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \boxed{\mu_s - 2\mu_k \geq \tan\theta}$$