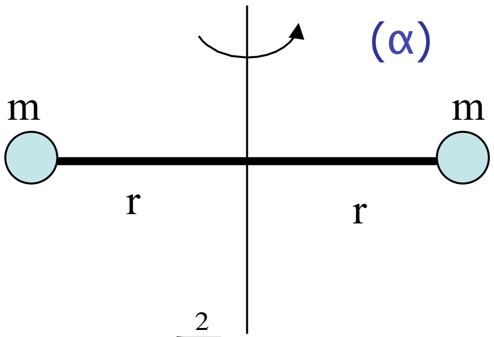
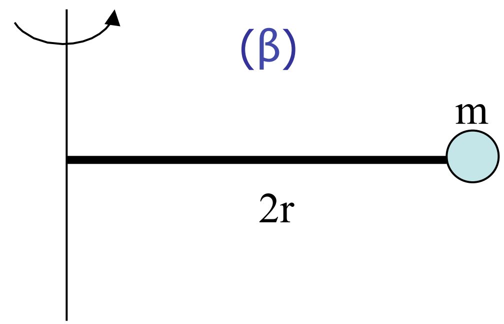
Ροπή αδράνειας

- Ας δούμε την ροπή αδράνειας ενός στερεού περιστροφέα:



$$I = \sum_{1}^{2} m_i r_i^2 = 2mr^2$$



$$I = m(2r)^2 = 4mr^2$$

- Είναι δυσκολότερο να προκαλέσεις περιστροφή στην (β) περίπτωση

- Η ροπή αδράνειας εξαρτάται από τον άξονα περιστροφής.

- Η ροπή αδράνειας ορίζεται ως προς κάποιο σταθερό άξονα

- Η τιμή της εξαρτάται από την θέση και τον προσανατολισμό του άξονα περιστροφής

Ροπή αδράνειας για στερεά συνεχούς κατανομής

- Για στερεά σώματα συνεχούς κατανομής μάζας η ροπή αδράνειας υπολογίζεται αντικαθιστώντας το άθροισμα με ολοκλήρωμα: (αντικαθιστούμε όλες τις μάζες m_i με dm)

$$\mathrm{I} = \sum_i m_i r_i^2 \rightarrow \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i \Rightarrow I = \int r^2 dm$$

Ροπή αδράνειας

Θυμίζει τον υπολογισμό του κέντρου μάζας ενός σώματος $r_{CM} = \int r dm$

- Για παράδειγμα: έστω ρ η πυκνότητα = m/V για ένα στερεό

$$\rho = dm / dV \rightarrow dm = \rho dV \rightarrow I = \int r^2 \rho dV$$

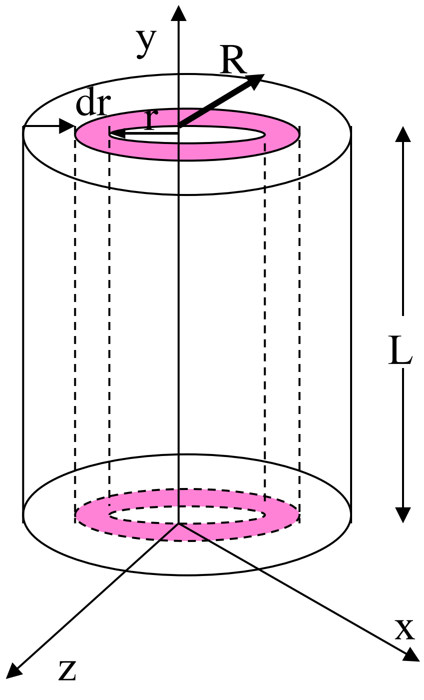
Για ομοιογενή κατανομή μάζας, η πυκνότητα είναι σταθερή και έχουμε:

$$I = \rho \int r^2 dV$$

Περισσότερη μάζα πιο απομακρυσμένη από τον άξονα περιστροφής, μεγαλύτερη η ροπή αδράνειας I, και επομένως μεγαλύτερη η αντίσταση του σώματος στο να αλλάξει την περιστροφική του κίνηση

Παράδειγμα υπολογισμού ροπής αδράνειας

- Ομοιογενής κύλινδρος μάζας m, ακτίνας R και μήκους L.



Θεωρήστε ένα κυλινδρικό φλοιό ακτίνας r και πάχους dr.

Αυτό το κάνουμε για να έχουμε την ίδια ακτίνα για όλες τις στοιχειώδεις μάζες dm.

Το εμβαδό του δακτυλίου του κυλινδρικού φλοιού είναι:

$$\left.\begin{array}{l} dA = 2\pi r dr \;\Rightarrow dV = L dA \\ I_y = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV \end{array}\right\} I_y = 2\pi\rho L \int_0^R r^3 dr \;\Rightarrow I_y = 2\pi\rho L \frac{R^4}{4}$$

$$\Rightarrow I_y = \frac{1}{2}\pi\rho L R^4$$

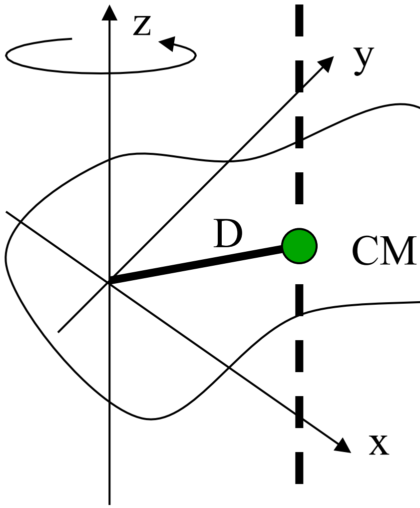
Αλλά $V_{\kappa\upsilon\lambda.} = \pi R^2 L$ και $\rho = \frac{\mathrm{M}}{V} = \frac{M}{\pi R^2 L}$

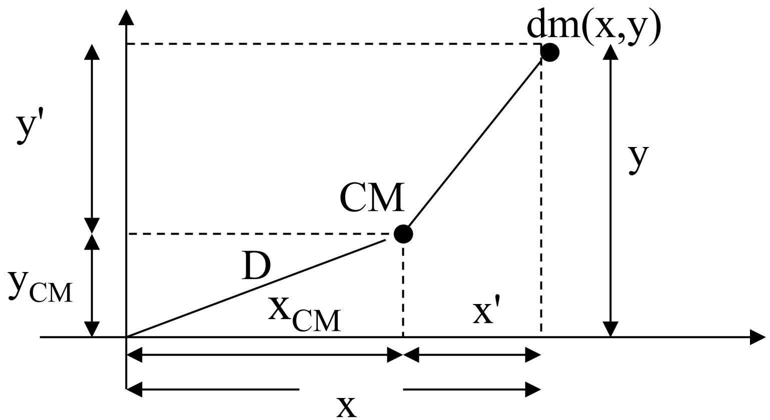
Επομένως $I_y = \frac{1}{2}\pi\rho L R^4 = \frac{1}{2} M R^2$

Αυτή είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα συμμετρίας y.

Ποια θα 'ναι η I ως προς ένα άξονα παράλληλο προς τον y?

Θεώρημα παράλληλων αξόνων





$$I = \int r^2 dm = \int \left(x^2 + y^2\right) dm$$

$$x = x' + x_{CM} \qquad y = y' + y_{CM}$$

$$I = \int \left[(x' + x_{CM})^2 + (y' + y_{CM})^2\right] dm \Rightarrow$$

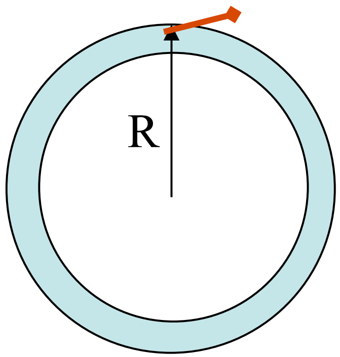
$$I = \int \left(x'^2 + y'^2\right) dm + 2x_{CM}\int x' dm + 2y_{CM}\int y' dm + \left(x_{CM}^2 + y_{CM}^2\right)\int dm$$

Επομένως: $I = I_{CM} + 0 + 0 + MD^2$

$I = I_{CM} + MD^2$ Θεώρημα παράλληλων αξόνων

Εφαρμογή του θεωρήματος παράλληλων αξόνων

- Κυκλικό στεφάνι ακτίνας R και μάζας M κρέμεται από ένα σημείο στην περιφέρειά του

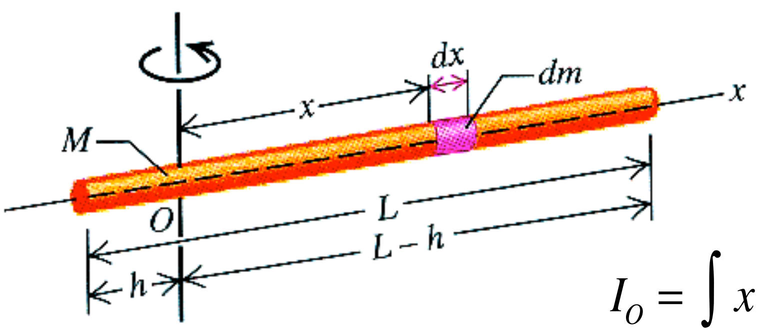


Θέλουμε την ροπή αδράνειας γύρω από αυτό το σημείο

$$I_{\sigma\tau\varepsilon\varphi.} = \mathrm{I}_{CM} + MR^2 \Rightarrow MR^2 + MR^2$$

$$I_{\sigma\tau\varepsilon\varphi.} = 2\mathrm{M}R^2$$

- Ομοιόμορφη λεπτή ράβδος μάζας M και μήκους L με άξονα κάθετο στο μήκος της



Έστω dm στοιχειώδης μάζα μήκους dx σε απόσταση x από τον άξονα περιστροφής O.

Από την εξίσωση της ροπής αδράνειας:

$$I_O = \int x^2 dm = \rho \int_{-h}^{L-h} x^2 dx = \frac{M}{L}\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-h}^{L-h} \Rightarrow I_O = \frac{1}{3}M\left(L^2 - 3Lh + 3h^2\right)$$

Για $h = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad h = L \quad \Rightarrow I_{\mathrm{O,L}} = \frac{1}{3}ML^2$

Για $h = \frac{L}{2} \quad \Rightarrow I_{\mathrm{C}} = \frac{1}{12}ML^2$

Ροπή αδράνειας - Σημεία προσοχής

- Δεν έχει νόημα να αναφέρεστε στη ροπή αδράνειας ενός σώματος χωρίς να προσδιορίζετε την θέση και προσανατολισμό του άξονα ως προς τον οποίο υπολογίζετε την ροπή αδράνειας

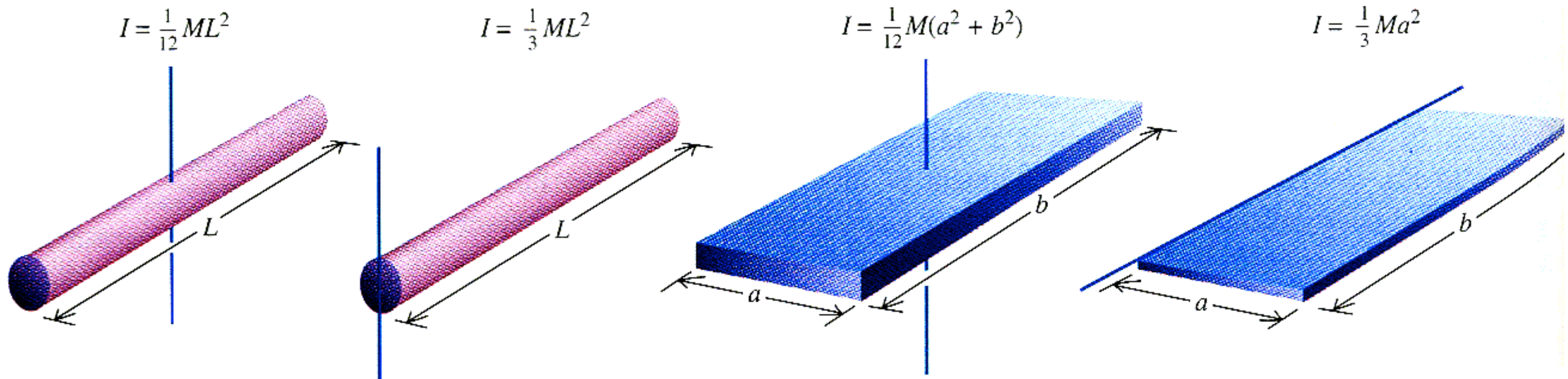
- Για συνεχείς κατανομές μάζας χρειάζεται να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα για την εύρεση της ροπής αδράνειας.

- Μην προσπαθήσετε να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας θεωρώντας ότι όλη η μάζα βρίσκεται στο κέντρο μάζας του σώματος και παίρνοντας την απόσταση του κέντρου μάζας από τον άξονα περιστροφής **ΛΑΘΟΣ**

  - ✓ Η ροπή αδράνειας της ράβδου στο προηγούμενο παράδειγμα είναι $I=ML^3/3$ ως προς άξονα που περνά από ένα άκρο της.

    Αν υποθέσω το κέντρο μάζας το οποίο βρίσκεται στο μέσο της η ροπή αδράνειας θα ήταν $M(L/2)^2=ML^2/4$ που είναι λάθος.

Περισσότερες περιπτώσεις

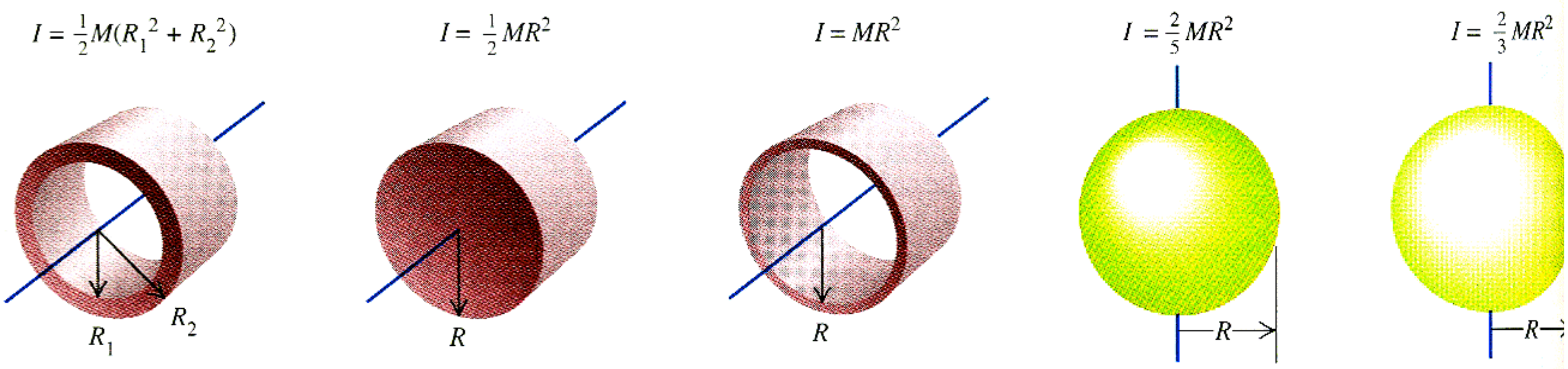


(α) ομοιογενής ράβδος
άξονας στο κέντρο

(β) ομοιογενής ράβδος
άξονας στο άκρο της

(γ) ομοιογενές φύλλο
άξονας στο μέσο

(δ) ομοιογενές φύλλο
άξονας σε πλευρά



(ε) συμπαγής κυλινδρικός
δακτύλιος

(στ) συμπαγής
κύλινδρος

(ζ) κοίλος κύλινδρος
(λεπτά τοιχώματα)

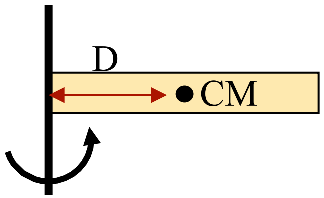
(η) ομοιογενής
σφαίρα

(η) κοίλη
σφαίρα

Δυναμική στην περιστροφική κίνηση στερεού

- Μέχρι τώρα είδαμε:
  - ✓ Ροπή αδράνειας: $I_\sigma = \int r^2 dm$
  - ✓ σε αντιστοιχία με τη θέση του CM: $r_{CM} = \frac{1}{M}\int r dm$
- Θεώρημα παράλληλων αξόνων

$$I_\sigma = I_{CM} + MD^2$$



- Κινητική ενέργεια ενός περιστρεφόμενου στερεού γύρω από σταθερό άξονα

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2$$

- Όλα τα σημεία του στερεού κινούνται με ίδια γωνιακή ταχύτητα και γωνιακή επιτάχυνση

Ενέργεια περιστροφής - μεθοδολογία προβλημάτων

Ότι έχουμε δει μέχρι τώρα σε προβλήματα ενέργειας ισχύουν και για την περίπτωση ενός περιστρεφόμενου στερεού.

- Χρησιμοποιώντας το θεώρημα έργου-ενέργειας και διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μπορούν να βρεθούν εξισώσεις για τη θέση και κίνηση του στερεού.

- Μόνη διαφορά ότι τη θέση της μάζας και ταχύτητας παίρνουν η ροπή αδράνειας και γωνιακή ταχύτητα.

$$K = \frac{1}{2} m \upsilon^2 \quad \Longrightarrow \quad K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

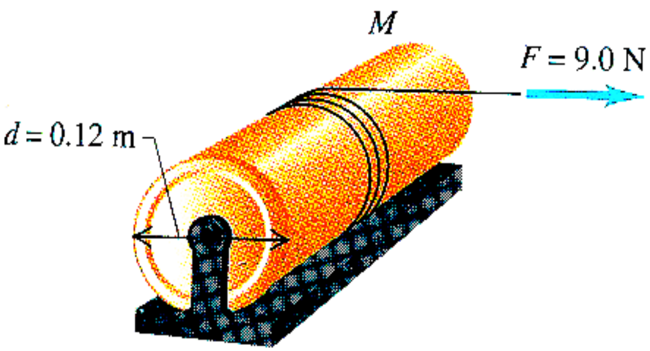
- Πολλά προβλήματα περιέχουν σχοινιά γύρω από στερεά σώματα που δρουν σα τροχαλίες:
  - ✓ Το σημείο της επαφής του σχοινιού στην τροχαλία έχει την ίδια γραμμική ταχύτητα με αυτή του σχοινιού (το σχοινί δεν γλιστρά στην τροχαλία)
  - ✓ Από τις σχέσεις μεταξύ εφαπτομενικής και ακτινικής επιτάχυνσης βρίσκουμε τις γωνιακές ταχύτητες και επιταχύνσεις

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{\text{εφαπτομενική}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{\mathrm{v}}}_{\text{ακτινική}}$$

Παράδειγμα

Νήμα αμελητέας μάζας είναι τυλιγμένο γύρω από κύλινδρο μάζας 50kg και διαμέτρου 0.12m, ο οποίος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που στηρίζεται σε σημεία χωρίς τριβές. Τραβούμε το ελεύθερο άκρο του νήματος με σταθερή δύναμη F=9.0N κατά απόσταση 2.0m. Το νήμα ξετυλίγεται χωρίς να γλιστρά προκαλώντας περιστροφή στον κύλινδρο.

Να βρεθεί η τελική γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου και τελική γραμμική ταχύτητα του νήματος αν ο κύλινδρος αρχικά είναι ακίνητος.



Ο κύλινδρος περιστρέφεται επειδή υπάρχει τριβή μεταξύ του νήματος και κυλίνδρου

Επειδή το νήμα δεν γλιστρά, δεν υπάρχει ολίσθηση του νήματος ως προς το κύλινδρο

Άρα δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας λόγω τριβών

Από το θεώρημα έργου-ενέργειας: $W_F = F \cdot s = K^f - K^i = \frac{1}{2} I\omega_f^2 - \frac{1}{2} I\omega_i^2$

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου είναι: $I = \frac{1}{2} MR^2$ ενώ $\omega_i = 0$ και επομένως έχουμε:

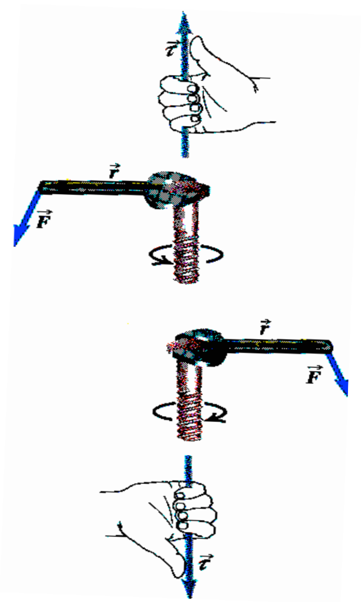
$$W_F = F \cdot s = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} MR^2\right)\omega_f^2 \Rightarrow \omega_f = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{Fs}{M}} \Rightarrow \omega_f = 20 rad/s$$

Η υ_f του νήματος είναι η τελική εφαπτομενική του κυλίνδρου: $\upsilon^f = \omega_f r = 1.2 \frac{m}{s}$

Δυναμική στερεού σώματος - Ροπή

- Η ικανότητα μιας δύναμης να περιστρέφει ένα σώμα γύρω από ένα άξονα περιγράφεται από ένα καινούριο μέγεθος που ονομάζεται ροπή. Η ροπή μιας δύναμης ορίζεται:

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow$$ ροπή: $$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = Fr\sin\theta = Fd$$ Μονάδες: Nm



- Στην παραπάνω εξίσωση ορισμού F η δύναμη και d η απόσταση του σημείου εφαρμογής της από τον άξονα περιστροφής
- Χρησιμοποιούμε τον κανόνα του δεξιού χεριού για να βρούμε τη διεύθυνση της ροπής.

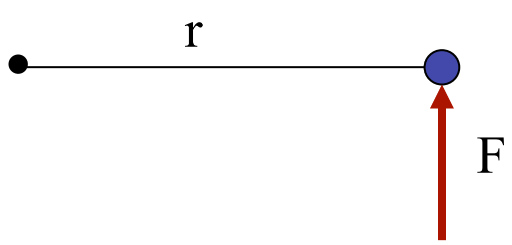
- Εμπειρικά έχει βρεθεί ότι είναι πιο εύκολα να περιστρέψουμε ένα σώμα αν εφαρμόσουμε μια δύναμη μακριά από τον άξονα στροφής και επομένως d μεγάλη.

  Αν d=0 τότε η ροπή είναι μηδέν

- Δυνάμεις που η διεύθυνσή τους περνά από τον άξονα ή σημείο περιστροφής έχουν μηδενική ροπή

Παραδείγματα ροπών

- Για ένα μόνο σωματίδιο που κινείται σε κύκλο κάτω από την επίδραση μιας δύναμης F είναι:



$$\vec{F} = m\vec{a} = ma_{\varepsilon\phi.} = m\alpha r \Rightarrow$$

$$rF = m\alpha r^2 = (mr^2)\alpha \Rightarrow$$

$$rF = I\alpha \Rightarrow \boxed{\tau = I\alpha}$$

Ανάλογο του F=ma

- Για ένα στερεό σώμα $I = \sum_i m_i r_i^2$ και για ομοιογενές στερεό: $I = \int r^2 dm$

Από τις δυνάμεις που ενεργούν σε κάθε στοιχειώδη μάζα έχουμε:

$$dF_{\varepsilon\phi} = (dm)a_{\varepsilon\phi} = (dm)\alpha r = (rdm)\alpha \Rightarrow rdF_{\varepsilon\phi} = r(rdm)\alpha \Rightarrow d\tau = r^2 dm\alpha$$

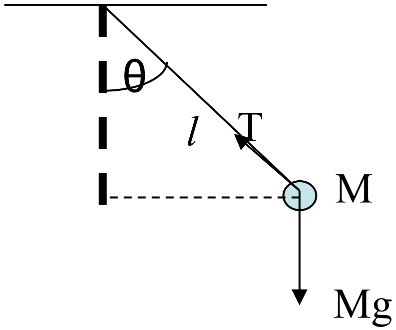
Όλα τα σημεία όμως έχουν την ίδια γωνιακή επιτάχυνση α επομένως ολοκληρώνουμε την τελευταία σχέση:

$$\boxed{\tau_{\sigma\upsilon\nu\iota\sigma\tau\alpha\mu\varepsilon\nu\eta} = \int (r^2 dm)\alpha = \alpha \int r^2 dm = I\alpha}$$

Οποιαδήποτε στιγμή το στερεό περιγράφεται από ω, α και $\tau_{\text{συνισταμένη}}$

Παράδειγμα

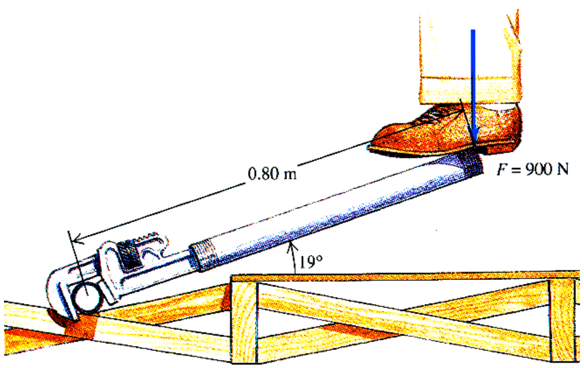
- Εκκρεμές εξαρτάται από αβαρή ράβδο. Ποια είναι η ροπή στη μάζα m?

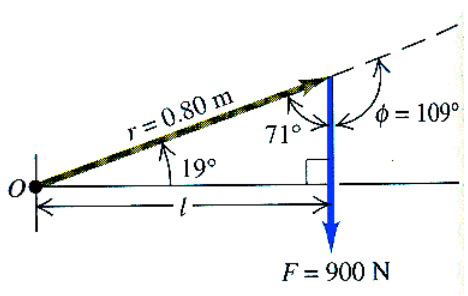


$$\vec{\tau} = \vec{r} \times M\vec{g} = lMg\sin\theta$$

⊗ Προς το εσωτερικό του χαρτιού

- Θέλετε να ξεβιδώσετε μια βίδα και το κλειδί που χρησιμοποιείται είναι κοντό. Βάζετε ένα σωλήνα και πατάτε πάνω του με όλο το βάρος σας (900kg). Η απόσταση του άκρου του σωλήνα από τη βίδα είναι 0.8m, ενώ η γωνία του κλειδιού με οριζόντιο είναι 19°. Ποια η ροπή





$$l = r \cdot \sin 71° = 0.76$$

$$\tau = lF = 900 \cdot 0.76 = 680 N \cdot m$$

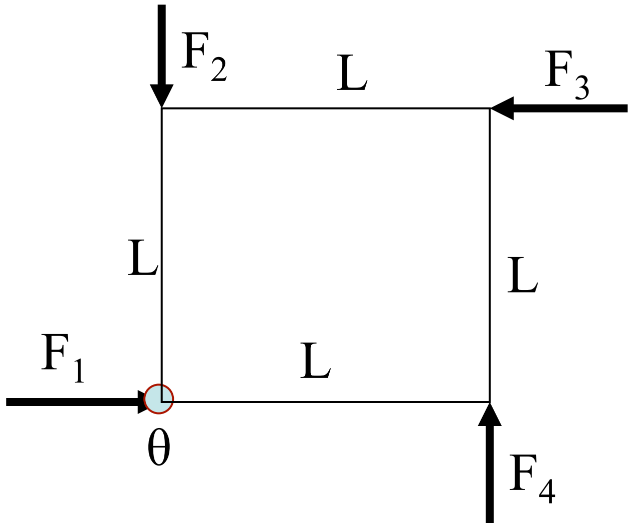
Διαφορετικά

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = rF\sin\phi \Rightarrow$$

$$\tau = 0.8 \cdot 900 \sin(109°)$$

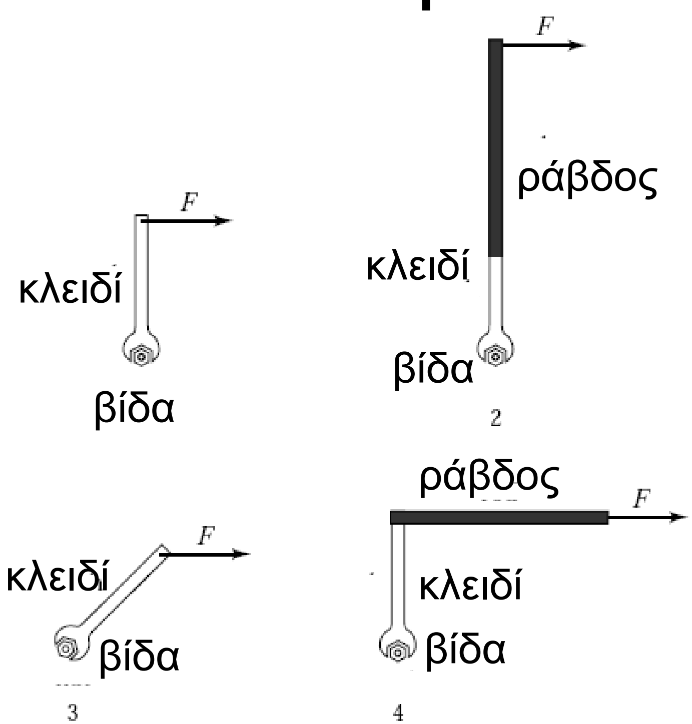
Η δύναμη προκαλεί περιστροφή προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού και επομένως η ροπή είναι κάθετη στη διαφάνεια και προς το εσωτερικό

Παράδειγμα



$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4$$

Ποια από τις δυνάμεις έχει την μεγαλύτερη ροπή ως προς το σημείο θ?



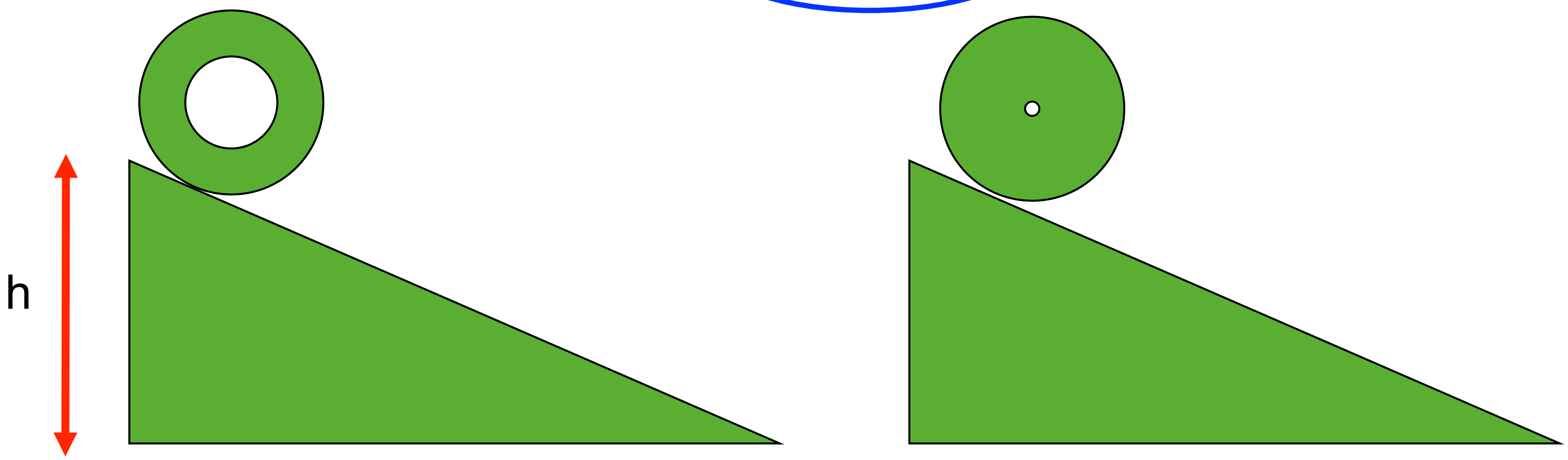
Θέλετε να ξεβιδώσετε μια σκουριασμένη βίδα. Ποια η καλύτερη διάταξη που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε;

2-1-4-3 Επειδή η δύναμη είναι ίδια σε όλες τις περιπτώσεις χρειάζεται να συγκρίνουμε την απόσταση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο περιστροφής (βίδα)

Παράδειγμα

Ένα στεφάνι και ένας κύλινδρος και τα δυο μάζας M και ακτίνας R κυλούν κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου κλίσης θ από ύψος h.
Ποιό από τα δυό σώματα φθάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου με την μεγαλύτερη κινητική ενέργεια;

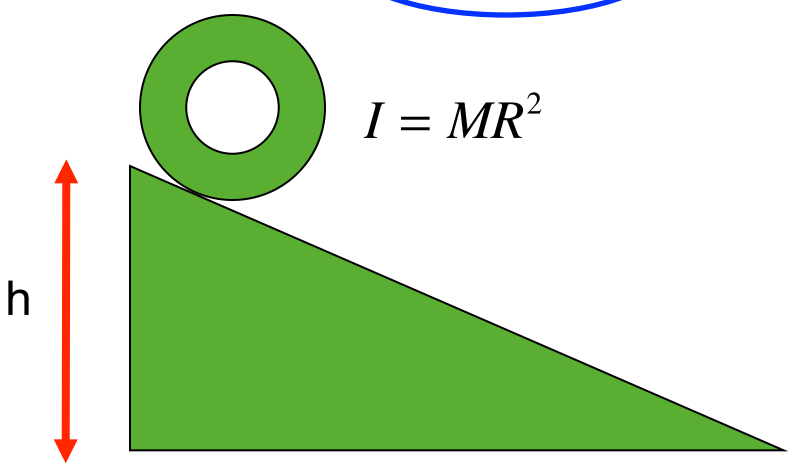
(A) Στεφάνι (B) Κύλινδρος (Γ) Ίδια ΚΕ



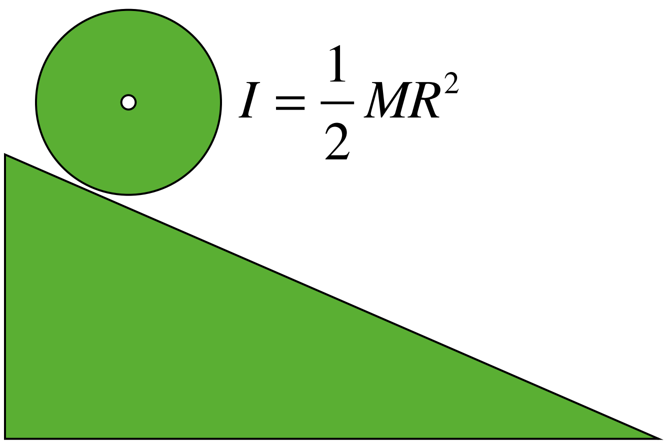
Παράδειγμα

Ένα στεφάνι και ένας κύλινδρος και τα δυο μάζας M και ακτίνας R κυλούν κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου κλίσης θ από ύψος h.
Ποιο από τα δυό σώματα φθάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου με την μεγαλύτερη ταχύτητα

(Α) Στεφάνι (Β) Κύλινδρος (Γ) Ίδια ΚΕ



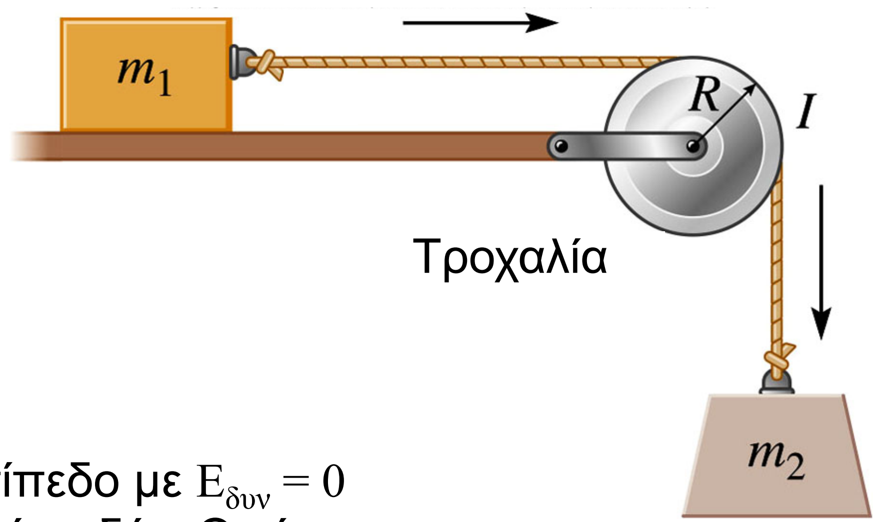
$$I = MR^2$$



$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Παράδειγμα

Θεωρήστε δυο σώματα τα οποία συνδέονται μέσω μιας αβαρούς τροχαλίας όπως στο σχήμα. Από διατήρηση ενέργειας υπολογίστε την ταχύτητα των δυο σωμάτων όταν η μάζα m_2 έχει κατέβει ένα ύψος h.



Από διατήρηση μηχανικής ενέργειας:
(δεν υπάρχουν μη συντηρητικές δυνάμεις)

$$\Delta E_{\mu\eta\chi.} = 0 \Rightarrow \Delta E_{\kappa\iota\nu} + \Delta E_{\delta\upsilon\nu.} = 0$$

$$\Rightarrow E^i_{\kappa\iota\nu} + E^i_{\delta\upsilon\nu} = E^f_{\kappa\iota\nu} + E^f_{\delta\upsilon\nu}$$

Θεωρούμε την αρχική θέση της m_2 σαν επίπεδο με $\mathrm{E}_{\delta\upsilon\nu} = 0$ ενώ οι ταχύτητες των σωμάτων είναι αρχικά μηδέν. Οπότε:

$$\left.\begin{array}{l} 0 + 0 = \dfrac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 - m_2gh \\ \text{Αλλά } \upsilon_1 = \upsilon_2 \end{array}\right\} m_2gh = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2m_2gh}{(m_1 + m_2)}}$$

Προσέξτε ότι η τάση του σχοινιού εκτελεί θετικό έργο στη μάζα m_1 και αρνητικό έργο στη μάζα m_2. Το συνολικό της έργο είναι μηδέν

Παράδειγμα

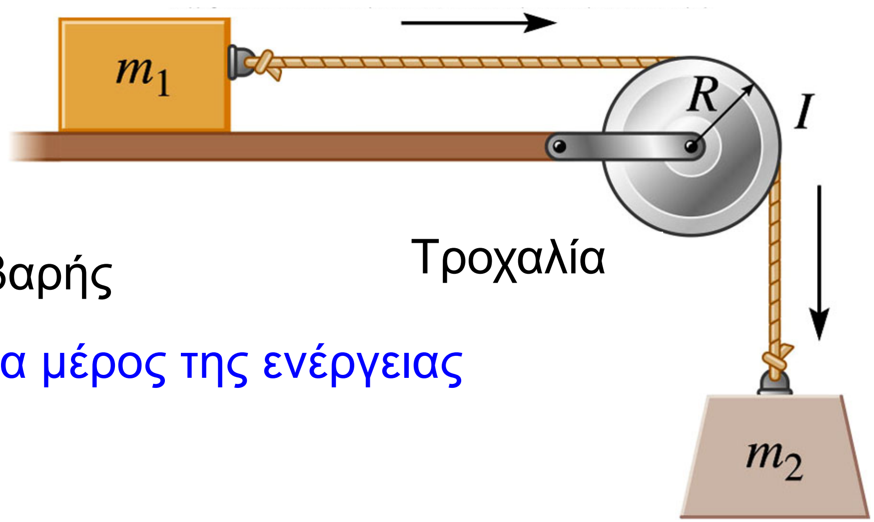
Θεωρήστε δυο σώματα τα οποία συνδέονται μέσω μιας τροχαλίας μάζας M όπως στο σχήμα. Όταν η μάζα m_2 έχει κατέβει ένα ύψος h, οι δυο μάζες θα κινούνται:

(Α) Με μεγαλύτερη ταχύτητα

(Β) Με μικρότερη ταχύτητα

(Γ) Με ίδια ταχύτητα

με αυτή που είχαν όταν η τροχαλία ήταν αβαρής



Κινούνται με μικρότερη ταχύτητα επειδή ένα μέρος της ενέργειας πηγαίνει στην περιστροφή της τροχαλίας

$$E^i_{\kappa\iota\nu} + E^i_{\delta\upsilon\nu} = E^f_{\kappa\iota\nu} + E^f_{\delta\upsilon\nu}$$

$$0 + 0 = -m_2 g h + \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_{\text{Τρ.}}$$

(Τα σημεία της περιφέρειας της τροχαλίας έχουν την ίδια ταχύτητα με το σχοινί)

$$\omega = \frac{\upsilon_{\text{Τρ.}}}{R}$$

$$m_2 g h = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)\upsilon^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 g h = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{\frac{1}{2}MR^2}{R^2}\right)\upsilon^2$$

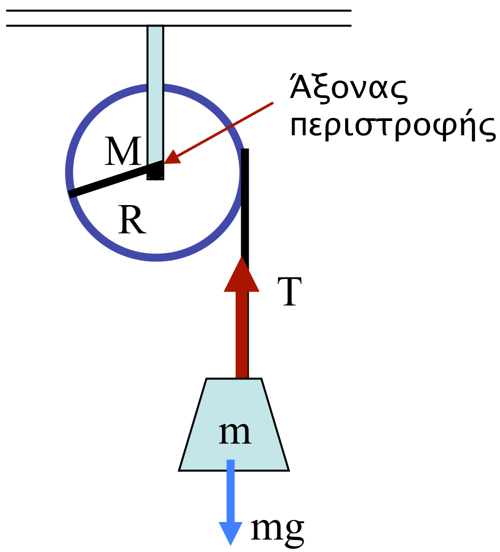
$$\Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2 m_2 g h}{m_1 + m_2 + M/2}}$$

Πως η ροπή δύναμης μπαίνει σε ασκήσεις

Θεωρήστε μια τροχαλία με μια μάζα εξαρτημένη από ένα νήμα.
Αφήνετε τη μάζα να πέσει.

Ποια είναι η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας μάζας M?

Λύση



Διαλέγουμε κάποιο σημείο για αρχή. Στην προκειμένη περίπτωση τον άξονα περιστροφής

$$\sum \tau = I\alpha \qquad I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\sum \tau = TR = I\alpha \Rightarrow T = \frac{I\alpha}{R} \qquad (1)$$

Αλλά δεν ξέρουμε την τάση T !!

Χρησιμοποιούμε 2º νόμο Newton:

$$\sum F_y = -ma_m = T - mg \qquad (\alpha_m \text{ προς τα κάτω}) \qquad (2)$$

Αφού το σκοινί δεν γλιστρά: $a_m = a^{\varepsilon\phi}_{\tau\rho o\chi.} = R\alpha$ (3)

$$(2) \xRightarrow{(1),(3)} -m\alpha R = \frac{I\alpha}{R} - mg \Rightarrow \alpha = \frac{mg}{mR + \frac{1}{2}MR^2} \overset{(3)}{\Rightarrow} a_m = \frac{g}{1 + \frac{1}{2}\frac{M}{m}R}$$