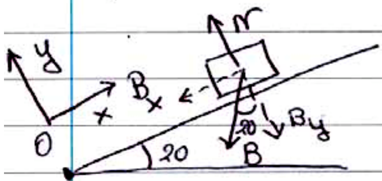
ΦΥΣ. 131
ΕΡΓΑΣΙΑ # 3

1. Θέλουμε να μετακινήσουμε ένα κιβώτιο κατά μήκος ενός λείου κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης 20^o με την οριζόντια διεύθυνση. Δίνουμε στο κιβώτιο μια αρχική ταχύτητα 5.0m/s και το αφήνουμε να κινηθεί χωρίς να εφαρμόζουμε κάποια δύναμη. Πόση απόσταση θα διανύσει πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο μέχρι να σταματήσει;

Το κιβώτιο δέχεται τη συνιστώσα του βάρους του (κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου) η οποία το επιβραδύνει:



$$B_x = B\sin 20$$
$$B_y = B\cos 20$$

Από το 2° νόμο του Newton $\Sigma F_x = m a_x \Rightarrow -B\sin 20 = m a_x \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\cancel{m} g\sin 20 = \cancel{m} a_x \Rightarrow \boxed{a_x = -g\sin 20}$$

Από τις εξισώσεις κίνησης έχουμε: $\upsilon_f^2 = \upsilon_i^2 + 2a(x_f - x_i) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = \upsilon_i^2 - 2g\sin(20^\circ)\left[x_f - 0\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_i^2 = 2g\sin(20)\, x_f \Rightarrow x_f = \frac{\upsilon_i^2}{2g\sin\theta} \Rightarrow x_f = \frac{25}{2 \cdot 9.8 \cdot 0.34}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_f = 3.73m}$$

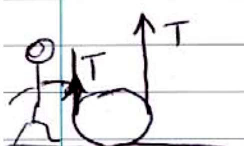
2. Στο παρακάτω σχήμα, ένας εργάτης προσπαθεί να τραβήξει το σχοινί που περνά από μια αβαρή και λεία τροχαλία ώστε να μετακινηθεί προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα. Αν ο εργάτης και η πλατφόρμα στην οποία στέκεται ζυγίζουν 950N, υπολογίστε πόση δύναμη θα πρέπει ο εργάτης να βάλει για να τραβήξει το σχοινί ώστε να πραγματοποιήσει την προσπάθειά του. Μήπως είναι αδύνατο να το πετύχει; Εξηγήστε την απάντησή σας.

Καθώς ο εργάτης μετακινείται με σταθερή ταχύτητα προς τα πάνω, η τάση του σχοινιού εκατέρωθεν της τροχαλίας είναι ίδια:

Θεωρούμε το σύστημα εργάτης-πλατφόρμα-τροχαλία σα το σύστημά μας:

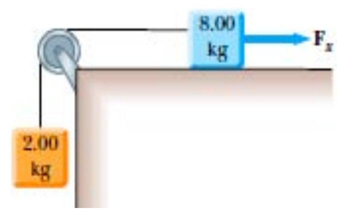
$\Sigma F_y = 0$ (σταθερή ταχύτητα)

$T - B = 0 \Rightarrow T = B \Rightarrow T = 950N$

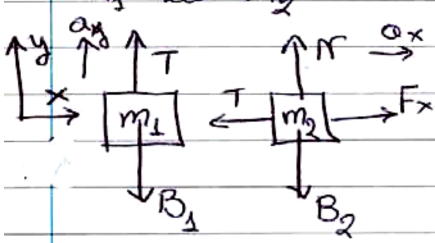


Επομένως ο εργάτης θα πρέπει να τραβήξει το σχοινί με 950N

3. Στο σύστημα του διπλανού σχήματος μια οριζόντια δύναμη F_x ασκείται στο σώμα μάζας m_2=8.0kg. (α) Για ποια τιμή της F_x η μάζα m_1=2.0kg επιταχύνεται προς τα πάνω; (β) Για ποια τιμή της F_x η τάση στο νήμα είναι μηδέν; (γ) Σχεδιάστε την επιτάχυνση της μάζας m_2=8.0kg συναρτήσει της δύναμης F_x. Θεωρήστε τιμές της F_x από -1000N μέχρι 1000N.



Κάνουμε το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος για τις μάζες m_1 και m_2



m_1: $\Sigma F_y = m_1 a_y \Rightarrow \boxed{T - m_1 g = m_1 a_y}$

m_2: $\Sigma F_x = m_2 a_x \Rightarrow \boxed{F_x - T = m_2 a_x}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - B_2 = 0 \Rightarrow N = m_2 g$

Η επιτάχυνση και για τα δύο σώματα είναι ίδια $a_x = a_y$

Επομένως λύνουμε τη 1η εξίσωση ως προς T και αντικαθιστούμε στη 2η ⇒

$$T = m_1 a_y + m_1 g \qquad (A)$$

$$F_x - m_1 a_y - m_1 g = m_2 a_x \Rightarrow F_x - m_1 g = m_1 a_x + m_2 a_x \overset{(a_x = a_y)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow F_x - m_1 g = (m_1 + m_2) a_x \Rightarrow \boxed{a_x = \frac{F_x - m_1 g}{m_1 + m_2}} \qquad (B)$$

Εφόσον $a_x > 0$ $\quad F_x - m_1 g > 0 \Rightarrow F_x > m_1 g \Rightarrow \boxed{F_x > 19.6N}$

Αντικαθιστούμε την (B) στην (A) για να βρούμε τη τάση T.

$$T = m_1 \frac{F_x - m_1 g}{m_1 + m_2} + m_1 g \Rightarrow T = m_1 \left[\frac{F_x - \cancel{m_1 g} + \cancel{m_1 g} + m_2 g}{m_1 + m_2} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (F_x + m_2 g)} \qquad (\Gamma)$$

$T = 0 \Rightarrow F_x + m_2 g = 0 \Rightarrow F_x = -m_2 g$ οπότε για $\boxed{F_x \le -m_2 g,\ T = 0}$

Όταν η $F_x < 0$ τότε ουσιαστικά σπρώχνει το m_2 προς τα δεξιά και το m_1 κατεβαίνει. Όταν $T=0$ το m_1 κατεβαίνει με επιτάχυνση g

Από την εξίσωση (B) $\Rightarrow$ $a_x = \dfrac{F_x - m_1 g}{m_1 + m_2}$

Όταν $F_x = m_1 g$ τότε $a_x = 0$

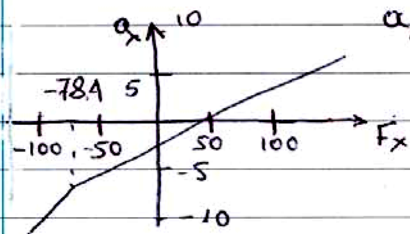
για $F_x \leq -m_2 g$ τότε $a_x \leq -g$ το m_1 κατεβαίνει με $a > g$

για $F_x > -m_2 g$ τότε $a_x > -g$ το m_1 κατεβαίνει με $a < g$

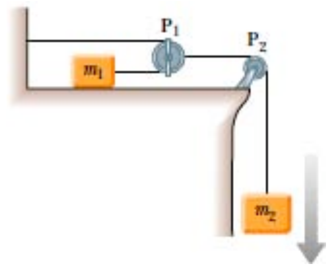
για $F_x > m_1 g$ τότε $a_x > 0$ το m_1 ανεβαίνει

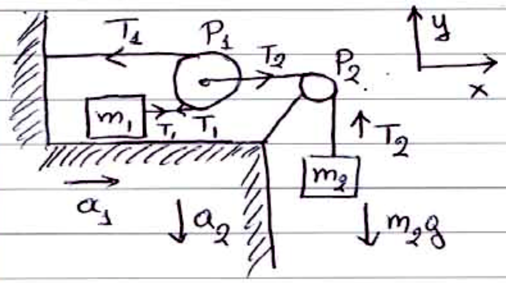
Σε πίνακα:

F_x:	-100	-78.4	-50.	0	50.	100
a_x:	-12.5	-9.8	-6.96	-1.96	3.08	8.09



4. Ένα σώμα μάζας m_1 βρίσκεται πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Το σώμα είναι συνδεδεμένο με άλλο σώμα μάζας m_2 μέσω μιας αβαρούς και λείας τροχαλίας P_1 και μιας ακίνητης τροχαλίας P_2, όπως στο σχήμα. (α) Αν $α_1$ και $α_2$ είναι οι επιταχύνσεις των σωμάτων m_1 και m_2 αντίστοιχα, ποια σχέση συνδέει τις δυο επιταχύνσεις; (β) εκφράστε τις τάσεις στα σχοινιά και (γ) τις επιταχύνσεις $α_1$ και $α_2$ συναρτήσει των μαζών m_1 και m_2 και της επιτάχυνσης της βαρύτητας, g.





Η τροχαλία P_1 έχει επιτάχυνση a_2 (αφού είναι συνδεδεμένη με το m_2 που έχει επιτάχυνση a_2)

Από αρχή διατήρησης του νήματος όταν η τροχαλία P_1 κινείται απόσταση x_2 το σώμα 1 θα κινηθεί $x_1 = 2x_2$ εφόσον η απόσταση αυτή θα πρέπει να εμφανιστεί από τα 2 σχοινιά εκατέρωθεν της P_1.

Επομένως $x_2 = \frac{x_1}{2} \Rightarrow \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d^2x_1}{dt^2} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}a_1 \Rightarrow \boxed{a_1 = 2a_2}$

Εφαρμόζουμε το 2° νόμο του Newton στα 2 σώματα:

m_2: $T_2 - m_2 g = -m_2 a_2$ (πρόσημο '−')

m_1: $T_1 = m_1 a_1$

P_1: $T_2 - 2T_1 = 0 \Rightarrow T_2 = 2T_1$

$T_2 = 2m_1 a_1$

$\Rightarrow 2m_1 a_1 - m_2 g = -m_2 a_2$

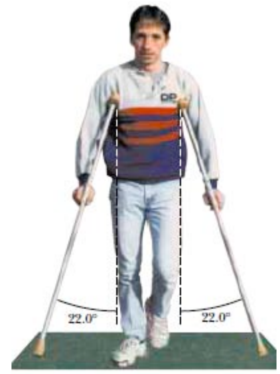
Από την τελευταία σχέση και από $a_1 = 2a_2$ έχουμε:

$2m_1 2a_2 - m_2 g = -m_2 a_2 \Rightarrow (4m_1 + m_2)a_2 = m_2 g \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{m_2 g}{4m_1 + m_2}}$

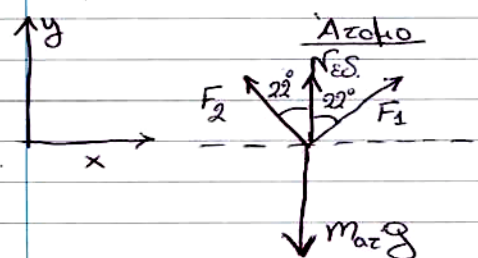
Άρα αφού $a_1 = 2a_2 \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{2m_2 g}{4m_1 + m_2}}$

Οι τάσεις στα 2 σχοινιά θα είναι: $\boxed{T_1 = \frac{2m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}}$ $\boxed{T_2 = \frac{4m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}}$

5. Το άτομο της διπλανής φωτογραφίας βάρους 80N στηρίζεται σε 2 πατερίτσες αμελητέας μάζας; Κάθε πατερίτσα σχηματίζει γωνία 20^o με την κατακόρυφο διεύθυνση. Το μισό βάρος του ατόμου εξισορροπείται από την κάθετη αντίδραση του δαπέδου στο πόδι του ατόμου. Το άλλο μισό βάρος του ατόμου εξισορροπείται από τις πατερίτσες. Υποθέστε ότι το άτομο κινείται με σταθερή ταχύτητα και ότι οι δυνάμεις που αναπτύσει το έδαφος στις πατερίτσες ενεργούν κατά μήκος των πατερίτσων. Υπολογίστε τη μικρότερη τιμή του συντελεστή τριβής μεταξύ του εδάφους και πατερίτσων. (β) Το μέγεθος της δύναμης που πιέζει τις πατερίτσες.



Κάνουμε τα διαγράμματα απελευθερωμένου σώματος για το άτομο και το σημείο που ακουμπάει η πατερίτσα το έδαφος



$N_{εδ} = m_{ατ} g/2$ (σύμφωνα με την άσκηση το μισό βάρος εξισορροπείται από τη δύναμη στο πόδι)

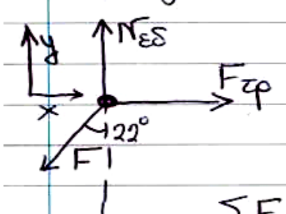
$\vec{F}_1$ κ $\vec{F}_2$ κατά μήκος των πατερίτσων

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{1x} - F_{2x} = 0 \Rightarrow F_{1x} = F_{2x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_1 \sin 22^\circ = F_2 \sin 22^\circ \Rightarrow \boxed{F_1 = F_2 = F}$$

Στη διεύθυνση y θα έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{2y} + F_{1y} + N_{εδ} = m_{ατ} \cdot g \Rightarrow F_1 \cos 22^\circ + F_2 \cos 22 + \frac{mg}{2} = mg \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2F\cos 22^\circ + \frac{mg}{2} = mg \Rightarrow F = \frac{mg}{4\cos 22^\circ} \Rightarrow \boxed{F = F_1 = F_2 = 21.6N}$$

Εξετάζουμε το κάτω τμήμα από τις πατερίτσες:



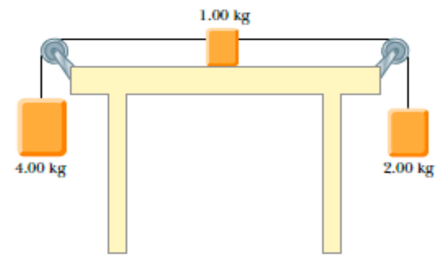
$$\Sigma F_x = F_{τρ} - F\sin 22 = 0 \Rightarrow \boxed{F_{τρ} = F\sin 22^\circ} \Rightarrow \quad (A)$$
$$\Rightarrow F_{τρ} = 21.6 \cdot 0.37 \Rightarrow \boxed{F_{τρ} = 8.09N}$$
$$\Sigma F_y = N_{εδ} - F\cos 22 = 0 \Rightarrow \boxed{N_{εδ} = F\cos 22} \quad (B)$$

Αλλά $F_{τρ} = \mu_s \cdot N \overset{(B)}{\Rightarrow} F_{τρ} = \mu_s F\cos 22 \overset{(A)}{\Rightarrow} \cancel{F}\sin 22 = \mu_s \cancel{F}\cos 22$

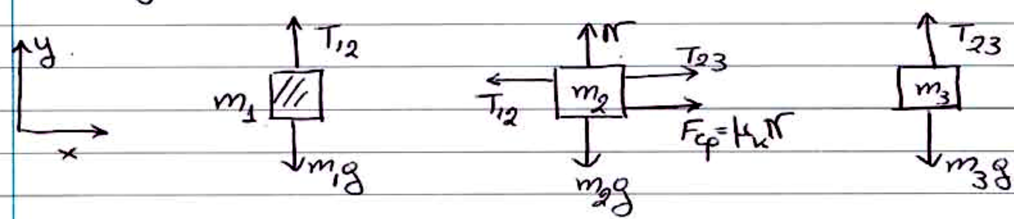
$$\Rightarrow \mu_s = \frac{\sin 22}{\cos 22} \Rightarrow \boxed{\mu_s = \tan 22^\circ} \Rightarrow \boxed{\mu_s = 0.40}$$

Η δύναμη συμπίεσης σε κάθε πατερίτσα είναι $F = F_1 = F_2 = 21.6N$

6. Τρία σώματα συνδέονται όπως στο σχήμα. Η επιφάνεια του τραπεζιού είναι αρκετά τραχειά και ο συντελεστής κινητικής τριβής είναι $\mu_{\kappa}=0.350$. Τα σώματα έχουν μάζες $m_1= 4.0kg$, $m_2=1.0kg$ και $m_3=2.0kg$ αντίστοιχα ενώ οι τροχαλίες είναι λείες και αβαρείς. Να σχεδιάσετε το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος και για τα 3 σώματα. (α) Προσδιορίστε την επιτάχυνση (μέτρο και διεύθυνση) κάθε σώματος. (β) Προσδιορίστε την τάση στα δυο σχοινιά.



Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα απελευθερωμένου σώματος:



Θεωρούμε ότι το σύστημα (και επομένως κάθε σώμα) κινείται με επιτάχυνση a. Το σώμα m_1 έστω ότι κινείται προς τα πάνω οπότε η επιτάχυνση a_1 είναι θετική, το σώμα m_2 κινείται προς τα δεξιά, επομένως $a_x=a_2$ ενώ το σώμα 3 κινείται προς τα κάτω οπότε η επιτάχυνσή του είναι $a_3=-a$.

Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα σε κάθε σώμα:

m_1 : $\Sigma F_y = m_1 a_y \Rightarrow \boxed{T_{12} - m_1 g = m_1 a}$ (1)

m_2 : $\Sigma F_x = m_2 a_x \Rightarrow -T_{12} + T_{23} + F_{\tau\rho} = m_2 a \Rightarrow -T_{12}+T_{23}+\mu_\kappa N = m_2 a$ (2)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - m_2 g = 0 \Rightarrow N = m_2 g$ (3)

Από (2) κ (3) $\Rightarrow \boxed{-T_{12} + T_{23} + \mu_\kappa m_2 g = m_2 a}$ (4)

m_3 : $\Sigma F_y = -m_3 a_y \Rightarrow \boxed{T_{23} - m_3 g = -m_3 a}$ (5)

Από τις εξισώσεις (1), (4) και (5) (σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους)

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & T_{12} - m_1 g = m_1 a \\ (4) & -T_{12} + T_{23} + \mu_\kappa m_2 g = m_2 a\end{array}\right\} \stackrel{+}{\Rightarrow} T_{23} - m_1 g + \mu_\kappa m_2 g = (m_1+m_2) a \Big\} \Rightarrow$$

$$(5) \quad T_{23} - m_3 g = -m_3 a \Rightarrow T_{23} = m_3 (g-a)$$

Αντικαθιστούμε T_{23} και λύνουμε ως προς a.

$$m_3(g-a) - m_1 g + \mu_\kappa m_2 g = (m_1+m_2)a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_3 g - m_1 g + \mu_\kappa m_2 g = (m_1+m_2+m_3)a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{(m_3 - m_1 + \mu_\kappa m_2)}{(m_1+m_2+m_3)} g}$$

Αριθμητική αντικατάσταση δίνει: $a = \frac{2-4+0.35\cdot 1}{4+2+1} 9.8 \Rightarrow$

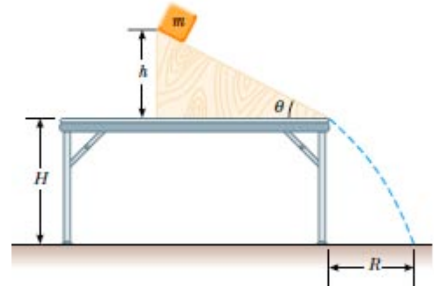
$\Rightarrow a = -0.236g \, m/s^2$ Δηλαδή θεωρήσαμε την
$\Rightarrow a = -2.31 \, m/s^2$ ανάποδη φορά κίνησης.

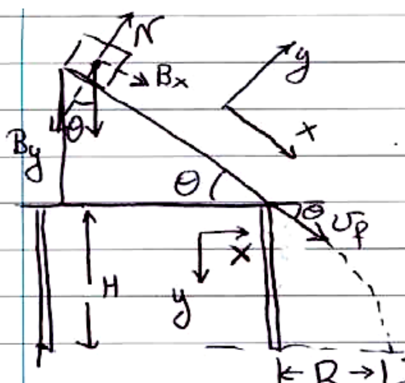
Αφού ξέρουμε την επιτάχυνση αντικατάσταση στις 2 εξισώσεις που δίνουν T_{12} και T_{23} θα έχουμε:

$$T_{12} = m_1(a+g) \Rightarrow T_{12} = 4\cdot(9.8-2.31) \Rightarrow \boxed{T_{12} = 29.96 \, N}$$

$$T_{23} = m_3(g-a) \Rightarrow T_{23} = 2\cdot(9.8-(-2.31)) \Rightarrow \boxed{T_{23} = 24.22 \, N}$$

7. Ένα σώμα μάζας m = 2.0kg αφήνεται από την κατάσταση της ηρεμίας να κινηθεί προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου όπως στο σχήμα. Το ύψος από το οποίο αφήνεται να κινηθεί είναι h=0.500m πάνω από την επιφάνεια του τραπεζιού. Η κλίση του κεκλιμένου επιπέδου είναι 30° ως προς την οριζόντια επιφάνεια. Το κεκλιμένο επίπεδο το οποίο είναι λείο βρίσκεται πάνω σε τραπέζι το ύψος του οποίου είναι H=2.0m από το έδαφος. (α) Προσδιορίστε την επιτάχυνση του σώματος καθώς κινείται προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. (β) Ποια η ταχύτητα του σώματος καθώς αφήνει το κεκλιμένο επίπεδο; (γ) Πόσο μακριά από το τραπέζι θα χτυπήσει το σώμα στο έδαφος; (δ) Ποιο το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που αφήσαμε το σώμα να κινηθεί από την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου μέχρι τη στιγμή που χτύπησε στο έδαφος; (ε) Επιρεάζει η μάζα του σώματος οποιοδήποτε από τους προηγούμενους υπολογισμούς;





Αναλύσαμε το βάρος του σώματος σε 2 άξονες όπως στο σχήμα:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - B_y = 0 \Rightarrow N = B_y \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow B_x = ma_x \Rightarrow \cancel{m}g\sin\theta = \cancel{m}a_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a_x = g\sin\theta}$$

Το σώμα καλύπτει το μήκος του κεκλιμένου επιπέδου, x, εκτελώντας επιταχυνόμενη κίνηση στη x-διεύθυνση με επιτάχυνση $g\sin\theta$.

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon_f^2 = \upsilon_i^2 + 2a_x(x_f - x_i) \Rightarrow \upsilon_f^2 = 2g\sin\theta\, x_f \\ \text{Αλλά} \quad x_f = h/\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \upsilon_f^2 = 2g\cancel{\sin\theta}\frac{h}{\cancel{\sin\theta}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon_f = \sqrt{2gh}} \quad (1)$$

Ο χρόνος που χρειάστηκε να καλύψει την απόσταση αυτή είναι:

$$(x_f - x_i) = \frac{1}{2}(\upsilon_f - \upsilon_i)(t_f - t_i) \Rightarrow \boxed{t_f = \frac{2x_f}{\upsilon_f} = \frac{2h}{\sin\theta\sqrt{2gh}}} \quad (2)$$

Από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου το σώμα εκτελεί πλάγια βολή προς τα κάτω. Θεωρούμε το σύστημα αξόνων με θετική φορά του άξονα y προς τα κάτω.

Αναλύουμε την ταχύτητα σε 2 συνιστώσες:

$$v_y = v_f \sin\theta \quad \text{και} \quad v_x = v_f \cos\theta \quad \text{με } v_f = \sqrt{2gh}$$

Το σώμα θα χτυπήσει στο έδαφος μετά από χρόνο:

$$y_f = y_i + v_y t + \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow H = \sqrt{2gh}\, t \sin\theta + \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t_{1,2} = \frac{-\sqrt{2gh}\sin\theta \pm \sqrt{2gh\sin^2\theta - 2gH}}{g}$$

Η λύση με το αρνητικό πρόσημο απορρίπτεται, οπότε:

$$t_\beta = \frac{-\sqrt{2gh}\sin\theta + \sqrt{2gh\sin^2\theta - 2gH}}{g}$$

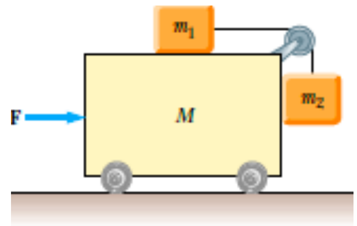
Το διάστημα που καλύπτει στη x-διεύθυνση είναι:

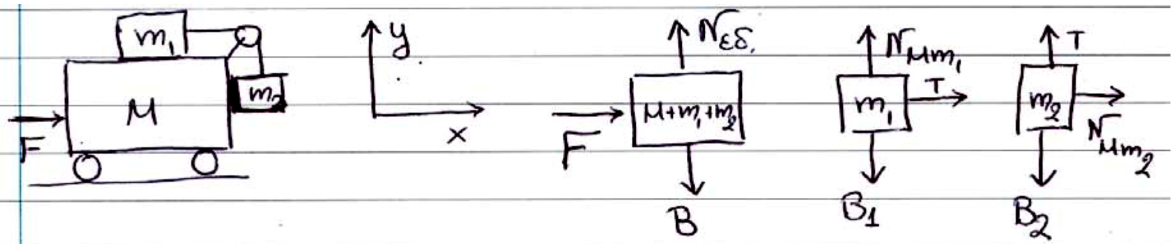
$$x = v_x \cdot t_\beta \Rightarrow x = v_f \cdot \cos\theta \cdot t_\beta \Rightarrow x = \sqrt{2gh}\cos\theta \cdot t_\beta$$

Ο συνολικός χρόνος κίνησης είναι $t_{o\lambda} = t_f + t_\beta$

Προφανώς η μάζα του σώματος δεν εισέρχεται στους υπολογισμούς

8. Πόση οριζόντια δύναμη θα πρέπει να θέσετε στο βαγονάκι του σχήματος ώστε οι μάζες m_1 και m_2 να παραμένουν ακίνητες ως προς το βαγονάκι; Θεωρήστε ότι όλες οι επιφάνειες, τροχαλίες και ρόδες δεν παρουσιάζουν τριβές. (<u>Υπόδειξη:</u> παρατηρήστε ότι η δύναμη της τάσης στην μάζα m_1 επιταχύνει την μάζα αυτή).





Οι δυνάμεις N_{Mm_1} και N_{Mm_2} δηλώνουν την αντίδραση της μάζας M στα σώματα m_1 και m_2 που βρίσκονται σε επαφή μαζί της.

Εφαρμόζουμε το νόμο του Newton:

m_1: $\Sigma F_x^1 = m_1 a \Rightarrow T = m_1 a \quad (1)$

m_2: $\Sigma F_x^2 = m_2 a \Rightarrow N_{Mm_2} = m_2 a \quad (2)$

$\Sigma F_y^2 = 0 \Rightarrow T - m_2 g = 0 \Rightarrow T = m_2 g \quad (3)$

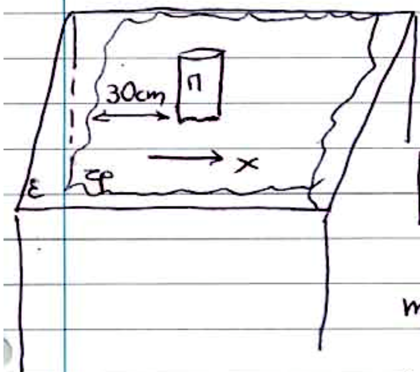
Από (1) κ (3) $\Rightarrow m_1 a = m_2 g \Rightarrow \boxed{a = \frac{m_2}{m_1} g} \quad (4)$

Εφαρμόζοντας το 2° νόμο του Newton σε όλο το σύστημα μπορούμε να βρούμε τη δύναμη F που απαιτείται ώστε να δώσουμε την επιτάχυνση a:

$$\Sigma F_{Tot} = M_{tot} \cdot a \Rightarrow \boxed{F = (M + m_1 + m_2) \cdot \frac{m_2}{m_1} g}$$

9. Ένας ταχυδακτυλουργός τραβά ένα τραπεζομάντηλο κάτω από ένα ποτήρι μάζας 200gr. Το ποτήρι βρίσκεται σε απόσταση 30cm από την άκρη του τραπεζομάντηλου. Το τραπεζομάντηλο εξασκεί μια δύναμη τριβής 0.100N στο ποτήρι και τραβιέται με σταθερή επιτάχυνση $3.0 m/s^2$. Πόσο μακριά κινείται το ποτήρι ως προς το τραπέζι μέχρι τη στιγμή που το τραπεζομάντηλο έχει τραβηχτεί τελείως κάτω από το ποτήρι. Σημειώστε ότι το τραπεζομάντηλο θα πρέπει να κινηθεί περισσότερο από 30cm σχετικά προς το τραπέζι κάτω από αυτή τη προσπάθεια.

Έστω ότι η θετική διεύθυνση στον άξονα x είναι η φορά που τραβά ο ταχυδακτυλουργός το τραπεζομάντηλο.



Οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στο ποτήρι είναι:

$$\Sigma F_x = m a_x \Rightarrow F_{τρ} = m \cdot a_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{F_{τρ}}{m} = \frac{0.1}{0.2} \Rightarrow \boxed{a_x = 0.5 m/s^2}$$

Ως προς το τραπεζομάντηλο η σχετική επιτάχυνση του ποτηριού είναι:

$$a_{π/ε} = a_{π/τρ} + a_{τρ/ε} \Rightarrow a_{π/τρ} = a_{π/ε} - a_{τρ/ε} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{π/τρ} = a_x - a_{τρ/ε} = (0.5 - 3) m/s^2 \Rightarrow \boxed{a_{π/τρ} = -2.5 m/s^2}$$

Επομένως το ποτήρι θα φθάσει στην άκρη του τραπεζομάντηλου σε χρόνο:

$$(x_f - x_i) = \frac{1}{2}(υ_f + υ_i)\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{2x_f}{υ_f}$$

Αλλά $υ_f^2 = υ_i^2 + 2a(x_f - x_i) \Rightarrow υ_f = \sqrt{2a x_f}$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{2 \cdot 0.3}{\sqrt{2 \cdot 2.5 \cdot 0.3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = 0.49 sec}$$

Το ποτήρι ως προς το τραπέζι καλύπτει απόσταση:

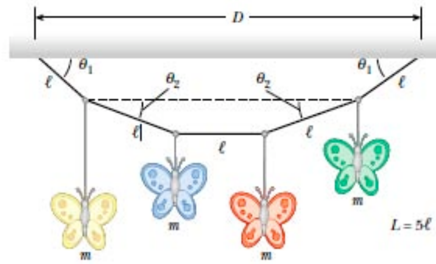
$$x = \frac{1}{2} a_x t^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} 0.5 \cdot 0.49^2 \Rightarrow x = 0.06 m \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 6cm}$$

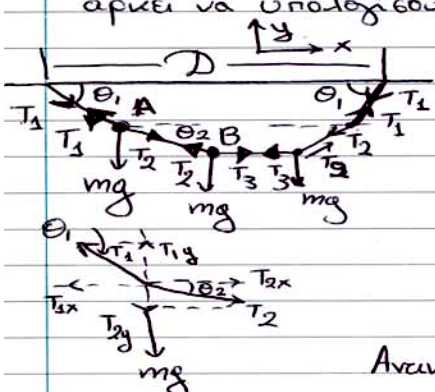
Επομένως το τραπεζομάντηλο κινείται ως προς το τραπέζι κατά 36cm

10. Θεωρήστε την παρακάτω διάταξη που αποτελείται από 4 μεταλλικές πεταλούδες ίδιας μάζας m οι οποίες κρέμονται από ένα νήμα μήκους L. Τα σημεία εξάρτησης των πεταλούδων ισαπέχουν μεταξύ τους μια απόσταση *l*. Το νήμα σχηματίζει γωνία θ_1 με την οροφή και στα δυο του άκρα. Το κεντρικό τμήμα του νήματος είναι οριζόντιο ενώ τα δυο υπόλοιπα τμήματα του νήματος σχηματίζουν γωνία θ_2 με την οριζόντια διεύθυνση. (α) Βρείτε την τάση σε κάθε τμήμα του νήματος συναρτήσει των θ_1, m και g. (β) Βρείτε τη γωνία θ_2 συναρτήσει της γωνίας θ_1. (γ) Δείξτε ότι η απόσταση D μεταξύ των σημείων στήριξης του νήματος στην οροφή δίνεται από τη σχέση:

$$D = \frac{L}{5}\left(2\cos\theta_1 + 2\cos\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan\theta_1\right)\right] + 1\right).$$



Εφαρμόζουμε το 2° νόμο του Νεύτων μεταξύ 2 σημείων που κρέμονται οι πεταλούδες.
Προσέξετε ότι το σύστημά μας είναι συμμετρικό και επομένως αρκεί να υπολογίσουμε τις δυνάμεις στο μισό της διάταξης.



(A) : (1) $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_2\cos\theta_2 - T_1\cos\theta_1 = 0$

(2) $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_1\sin\theta_1 - T_2\sin\theta_2 - mg = 0$

(B) (3) $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_3 - T_2\cos\theta_2 = 0$

(4) $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_2\sin\theta_2 - mg = 0$

Αντικαθιστούμε την (4) στη (2) οπότε έχουμε:

$$T_1\sin\theta_1 - mg - mg = 0 \Rightarrow T_1\sin\theta_1 = 2mg \Rightarrow \boxed{T_1 = \frac{2mg}{\sin\theta_1}}$$

Αντικατάσταση της (3) στην (1) δίνει:

$$T_3 - T_1\cos\theta_1 = 0 \Rightarrow T_3 = T_1\cos\theta_1 \Rightarrow T_3 = \frac{2mg}{\sin\theta_1}\cos\theta_1 \Rightarrow \boxed{T_3 = 2mg/\tan\theta_1}$$

Από την (4) $\Rightarrow \boxed{T_2 = \frac{mg}{\sin\theta_2}}$

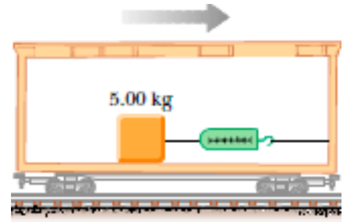
Από τις εξισώσεις (3) και (4) με διαίρεση έχουμε:

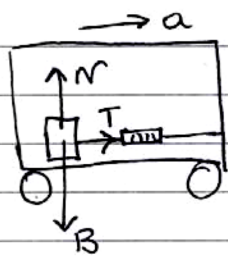
$$\frac{\cancel{T_2}\cos\theta_2}{\cancel{T_2}\sin\theta_2} = \frac{T_3}{mg} \Rightarrow \frac{1}{\tan\theta_2} = \frac{2\cancel{mg}/\tan\theta_1}{\cancel{mg}} \Rightarrow \tan\theta_2 = \frac{\tan\theta_1}{2} \Rightarrow \boxed{\theta_2 = \mathrm{arc}\left[\tan\theta_1/2\right]}$$

Η απόσταση D μπορεί να γραφεί σα το άθροισμα των συνιστωσών των τμημάτων του νήματος στην οριζόντια διεύθυνση:

$$\left.\begin{aligned} &D = 2\ell\cos\theta_1 + 2\ell\cos\theta_2 + \ell \\ &\text{και}\quad L = 5\ell \end{aligned}\right\} \Rightarrow D = \frac{L}{5}\left\{2\cos\theta_1 + 2\cos\left[\mathrm{arc}(\tan\theta_1/2)\right] + 1\right\}$$

11. Ένα σώμα μάζας 5.0kg εξαρτημένο από το άκρο ενός ελατηρίου βρίσκεται σε ηρεμία πάνω στην λεία επιφάνεια ενός βαγονιού. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι εξαρτημένο από το μπροστινό τοίχωμα του βαγονιού. Το ελατήριο έχει σταθερή ένδειξη 18N όταν το βαγόνι βρίσκεται σε κίνηση. (α) Αν η ένδειξη του ελατηρίου είναι μηδέν όταν το βαγόνι είναι ακίνητο, υπολογήστε την επιτάχυνση του βαγονιού. (β) Ποια σταθερή ένδειξη θα έχει το ελατήριο αν το βαγόνι κινείται με σταθερή ταχύτητα; (γ) Περιγράψτε τις δυνάμεις στο σώμα όπως τις αντιλαμβάνεται κάποιος ακίνητος παρατηρητής που βρίσκεται έξω από το βαγόνι.





(α) $\Sigma F_x = ma \Rightarrow T = ma \Rightarrow a = \frac{T}{m} = 3.6\, m/s^2$

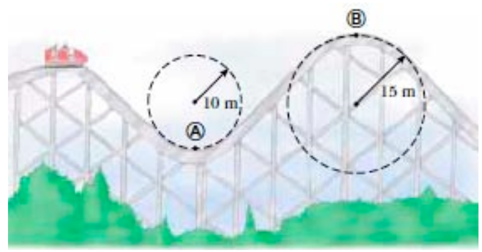
Η επιτάχυνση είναι προς τα δεξιά.

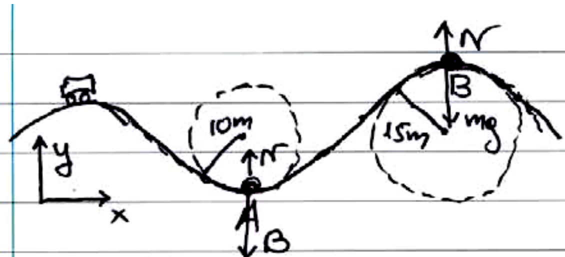
(β) Αν η ταχύτητα είναι σταθερή, τότε $v = σταθ \Rightarrow a = 0$ οπότε $T = 0$

(γ) Κάποιος παρατηρητής μέσα στο βαγόνι (μη αδρανειακός παρατηρητής) πιστεύει ότι οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στη μάζα m κατά τη διεύθυνση x είναι τάση T και μια υποθετική δύναμη $-Ma$

Κάποιος αδρανειακός παρατηρητής (στο έδαφος) πιστεύει ότι η τάση T είναι η μόνη δύναμη που δρα στη μάζα m στη διεύθυνση x.

12. Ένα όχημα roller coaster έχει μάζα 500kg όταν είναι γεμάτο με επιβάτες. (α) Αν το όχημα έχει ταχύτητα 20m/s στο σημείο A ποια δύναμη αναπτύσεται στο όχημα από τις ράγιες του roller coaster στο σημείο αυτό; (β) Πόση μπορεί να είναι η μέγιστη ταχύτητα του οχήματος στο σημείο B ώστε να παραμένει στις ράγες της τροχιάς;





(α) Η ταχύτητα του οχήματος είναι $\upsilon = 20m/s$

Η αντίδραση των ραγιών είναι N και η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι $R = 10.0m$.

Το όχημα στη θέση A εκτελεί κυκλική κίνηση και επομένως δέχεται δυνάμεις η συνισταμένη των οποίων παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης:

$$\Sigma F_A = \frac{m\upsilon^2}{R} = N - mg \Rightarrow N = mg + \frac{m\upsilon^2}{R} = 500\cdot 9.8 + \frac{500\cdot 20^2}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{N = 2.49\cdot 10^4 N}$$

Στο σημείο B, οι δυνάμεις που δρουν είναι και πάλι η αντίδραση N και το βάρος. Η συνισταμένη τους παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης που έχει φορά προς τα κάτω και επομένως έχει αρνητικό πρόσημο:

$$\Sigma F_y = N - B = -m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N = B - \frac{m\upsilon^2}{R} = m\left(g - \frac{\upsilon^2}{R}\right)$$

Για να παραμένει μόλις σε επαφή με τη τροχιά θα πρέπει η $N = 0$. Τότε το όχημα θα χάσει επαφή.

Επομένως:

$$m\left(g - \frac{\upsilon^2}{R}\right) = 0 \Rightarrow g - \frac{\upsilon^2}{R} = 0 \Rightarrow \upsilon^2 = gR \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = \sqrt{gR} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{9.8\cdot 15} \Rightarrow \boxed{\upsilon = 12.1 m/s}$$

13. Ένα άτομο στέκεται πάνω σε ζυγαριά μέσα σε ασανσέρ. Καθώς το ασανσέρ αρχίζει να κινείται η ένδειξη της ζυγαριάς είναι σταθερή και ίση με 591N. Αργότερα καθώς το ασανσέρ αρχίζει να σταματά η ένδειξη της ζυγαριάς είναι 391N. Υποθέστε ότι το μέτρο της επιτάχυνσης κατά το ξεκίνημα και σταμάτημα του ασανσέρ είναι ίδιο. Να βρεθούν (α) το βάρος του ατόμου, (β) η μάζα του ατόμου και (γ) η επιτάχυνση του ασανσέρ.

Σύμφωνα με τις διαλέξεις θα έχουμε: $\uparrow y$

$$\Sigma F_y = ma = N - B \Rightarrow ma = N - mg \Rightarrow N = m(a+g)$$

Όταν η επιτάχυνση του σώματος είναι προς τα πάνω τότε θα έχουμε τη μεγαλύτερη φαινομενική δύναμη ενώ όταν η επιτάχυνση είναι προς τα κάτω η φαινομενική δύναμη θα είναι μικρότερη:

$$\left.\begin{aligned} N_{max} &= m(a+g) = 591N \\ N_{min} &= m(g-a) = 391N \end{aligned}\right\} \Rightarrow N_{max} + N_{min} = 2mg \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg = \frac{591+391}{2} \Rightarrow \boxed{mg = 491N}$$

$$mg = 491 \Rightarrow m = \frac{491}{g} = \frac{491}{9.8} \Rightarrow \boxed{m = 50.1kg}$$

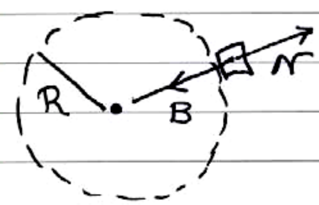
Από τις 2 εξισώσεις για N_{max} και N_{min} αφαιρώντας θα έχουμε:

$$N_{max} - N_{min} = 2ma \Rightarrow a = \frac{591-391}{2m} = \frac{\cancel{200}^{1}}{\cancel{2}\cdot 50.1} \Rightarrow \boxed{a \simeq 2.0 m/s^2}$$

14. Η γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της με περίοδο 24 ωρών. Υποθέστε ότι κάτω από κάποιες περίεργες συνθήκες η ταχύτητα περιστροφής της γης έχει αυξηθεί. Αν ένα σώμα στον ισημερινό της γης έχει κάτω από τις συνθήκες αυτές μηδενικό φαινομενικό βάρος (α) ποια είναι η νέα περίοδος περιστροφής της γης; (β) κατά ποιο παράγοντα θα αυξηθεί η ταχύτητα του σώματος όταν η γη περιστρέφεται με μεγαλύτερη ταχύτητα; Σημειώστε ότι το φαινομενικό βάρος ενός σώματος γίνεται μηδέν όταν η κάθετη δύναμη που ασκείται πάνω του γίνει μηδέν.

Εφόσον το σώμα βρίσκεται στη γη η οποία εκτελεί κυκλική κίνηση θα εκτελεί και αυτό κυκλική κίνηση.
Στο σώμα δρούν 2 δυνάμεις: Το βάρος του και η αντίδραση του εδάφους N. Η συνισταμένη των 2 αυτών δυνάμεων παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης που κρατά το σώμα σε κυκλική κίνηση:

$$\Sigma F = N - B = -m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N = B - m\frac{\upsilon^2}{R}$$



Το σώμα θα έχει φαινόμενο βάρος $\emptyset$ όταν η αντίδραση του εδάφους γίνει $N=0$

Οπότε: $B - \frac{m\upsilon^2}{R} = 0 \Rightarrow \cancel{m}g = \frac{\cancel{m}\upsilon^2}{R} \Rightarrow \upsilon^2 = Rg \Rightarrow \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 = Rg \Rightarrow$

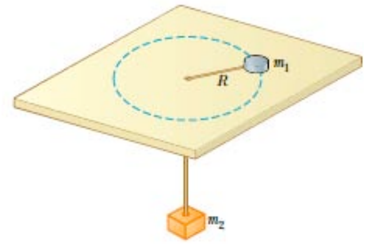
$$\Rightarrow \frac{4\pi^2 R^{\cancel{2}}}{T^2} = \cancel{R}g \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 R}{g} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R}{g}} \Rightarrow$$

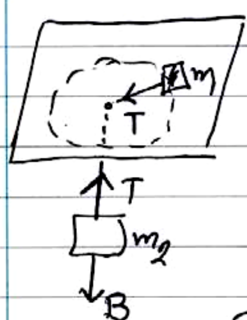
$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{6.37\cdot 10^6 m}{9.8}} \Rightarrow T = 5.07\cdot 10^3 s \Rightarrow \boxed{T = 1.41h}$$

Το ποσοστό αύξησης της ταχύτητας της γης θα είναι:

$$\frac{\upsilon_{νέα}}{\upsilon_0} = \frac{\cancel{2\pi R}/T_{νέα}}{\cancel{2\pi R}/T_0} \Rightarrow \frac{\upsilon_{νέα}}{\upsilon_0} = \frac{T_0}{T_{νέα}} = \frac{24.0}{1.41} \Rightarrow \boxed{\frac{\upsilon_{νέα}}{\upsilon_0} = 17.1}$$

15. Ένα σώμα μάζας m_1 είναι εξαρτημένο από ένα νήμα και μπορεί να περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R πάνω σε λεία επιφάνεια. Το άλλο άκρο του νήματος περνά μέσα από μια τρύπα στο κέντρο της κυκλικής τροχιάς και είναι προσαρτημένο σε σώμα μάζας m_2 όπως στο σχήμα. Το αιωρούμενο σώμα m_2, παραμένει ακίνητο ενώ το σώμα m_1 περιστρέφεται. (α) Ποια είναι η τάση στο νήμα. (β) Ποια η ακτινική δύναμη που αναπτύσεται στο σώμα m_1; (γ) Ποια η ταχύτητα του σώματος m_1;





Το σώμα m_2 βρίσκεται σε ισορροπία και σύμφωνα με το 2ο νόμο του Newton:

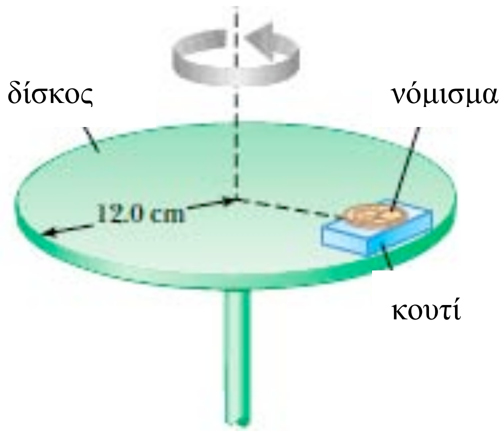
$$\Sigma F_y^{2} = 0 \Rightarrow T - m_2 g = 0 \Rightarrow \boxed{T = m_2 g} \quad (1)$$

Το σώμα m_1 εκτελεί κυκλική κίνηση. Η μόνη δύναμη που δρα στην ακτινική διεύθυνση είναι η τάση του νήματος. Η δύναμη παίζει το ρόλο της κεντρομόλου:

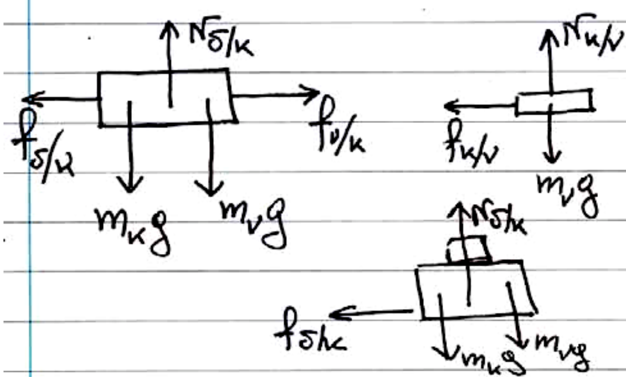
$$\Sigma F_r = m_1 \frac{\upsilon^2}{R} = T \overset{(1)}{\Rightarrow} m_1 \frac{\upsilon^2}{R} = m_2 g \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{m_2}{m_1} g R \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{m_2}{m_1} g R}}$$

16. Ένα νόμισμα μάζας 3.10gr βρίσκεται πάνω σε σπιρτόκουτο μάζας 20.0gr το οποίο με τη σειρά του βρίσκεται πάνω σε ένα περιστρεφόμενο δίσκο όπως στο σχήμα. Οι συντελεστές στατικής και κινητικής τριβής μεταξύ του σπιρτόκουτου και του δίσκου είναι 0.75 και 0.64 αντίστοιχα, ενώ οι συντελεστές στατικής και κινητικής τριβή μεταξύ του νομίσματος και του σπιρτόκουτου είναι 0.52 και 0.45 αντίστοιχα. Ποια η μέγιστη συχνότητα περιστροφής που μπορεί να έχει ο δίσκος (σε περιστροφές/λεπτό) ώστε τόσο το νόμισμα όσο και το σπιρτόκουτο να μην γλυστρούν πάνω στο δίσκο;



Κάνουμε τα διαγράμματα απελευθερωμένου σώματος για το νόμισμα και το σπιρτοκούτι.



$f_{δ/κ}$: τριβή από το έδαφος στο κουτί

$f_{ν/κ}$: τριβή από το νόμισμα στο κουτί

$f_{κ/ν}$: τριβή από το κουτί στο νόμισμα

Για το σπιρτοκούτι - νόμισμα σύστημα

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{δ/κ} - m_κ g - m_ν g = 0 \Rightarrow N_{δ/κ} = (m_κ + m_ν) g$$

Για να παραμένει το σπιρτοκούτι ακίνητο χωρίς να γλυστρά θα πρέπει η τριβή μεταξύ δίσκου κ σπιρτοκούτι να είναι :

$$f_{δ/κ} \le \mu_{s1} N_{δ/κ} = \mu_{s1}(m_κ + m_ν) g$$

Τη στιγμή που το σπιρτοκούτι-νόμισμα γλυστρά $f_{δ/κ} = \mu_{s1}(m_κ + m_ν) g$

Η δύναμη αυτή της μέγιστης τριβής παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης για το σύστημα: Η κεντρομόλος γίνεται μέγιστη για μέγιστη τιμή στατικής τριβής:

$$\Sigma F_r = m_{\kappa+\nu}\frac{v^2}{R} = f_{\sigma/\kappa} \Rightarrow \frac{m_{\kappa+\nu} v^2}{R} = \mu_{s1}(m_\kappa + m_\nu) g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{(m_\kappa + m_\nu)} v^2 = \mu_{s1} \cancel{(m_\kappa + m_\nu)} g R \Rightarrow v = \sqrt{\mu_{s1} g R} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{0.75 \cdot 9.8 \cdot 0.12} \Rightarrow \boxed{v = 0.939\ m/s}$$

Για να παραμένει ακίνητο το νόμισμα πάνω στο σπιρτοκούτι θα έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{\kappa/\nu} - m_\nu g = 0 \Rightarrow N_{\kappa/\nu} = m_\nu g$$

$$\Sigma F_r = m_\nu \frac{v^2}{R} = f_{\kappa/\nu} = \mu_{s2} \cdot N_{\kappa/\nu} \Rightarrow \cancel{m_\nu}\frac{v^2}{R} = \mu_{s2} \cancel{m_\nu} g$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{R} = \mu_{s2} g \Rightarrow v^2 = \mu_{s2} g R \Rightarrow v = \sqrt{\mu_{s2} g R} = \sqrt{0.52 \cdot 9.8 \cdot 0.120}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = 0.782 m/s}$$

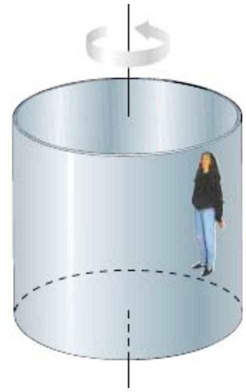
Η ταχύτητα αυτή είναι μικρότερη από τη μέγιστη ταχύτητα που βρήκαμε για το σπιρτοκούτι. Επομένως το νόμισμα γλυστρά πιο γρήγορα από το σπιρτοκούτι.

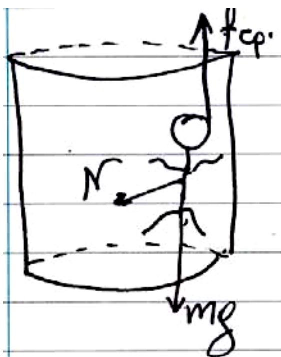
Η μέγιστη συχνότητα περιστροφής για το ~~σπιρτοκούτι~~ νόμισμα να γλυστρήσει είναι:

$$v = 2\pi R \nu \Rightarrow \nu = \frac{v}{2\pi R} = \frac{0.782}{2\pi \cdot 0.12} \Rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi}\frac{0.782}{0.12}\frac{60s}{1min} \Rightarrow$$

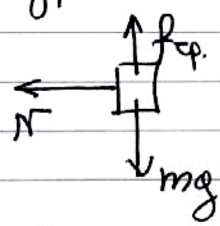
$$\boxed{\nu = 62.2\ \text{περιστροφές/λεπτό}}$$

17. Κάποιο ενδιαφέρον παιχνίδι σε ένα πάρκο αναψυχής αποτελείται από ένα περιστρεφόμενο κατακόρυφο κύλινδρο που περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του αρκετά γρήγορα ώστε ένα άτομο που βρίσκεται στο εσωτερικό του να είναι κολλημένο στο εσωτερικό τοίχωμα του κυλίνδρου όταν ανοίγει το δάπεδο του κυλίνδρου. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του ατόμου και του τοιχώματος του κυλίνδρου είναι μ_s και η ακτίνα του κυλίνδρου R. (α) Δείξτε ότι η μέγιστη περίοδος του κυλίνδρου ώστε να μη πέσει το άτομο δίνεται από τη σχέση $\mathrm{T} = \sqrt{4\pi^2 R\mu_s / g}$.





Το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος είναι:



Η δύναμη της τριβής είναι προς τα πάνω αφού το άτομο είναι κολλημένο στο τοίχωμα του κυλίνδρου και ~~τη~~ εξαιτίας του βάρους του είναι να κινηθεί προς τα κάτω. Η αντίδραση του τοιχώματος είναι προς το κέντρο του κυλίνδρου και κάθετη στην κυλινδρική επιφάνεια.
Η αντίδραση αυτή N παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

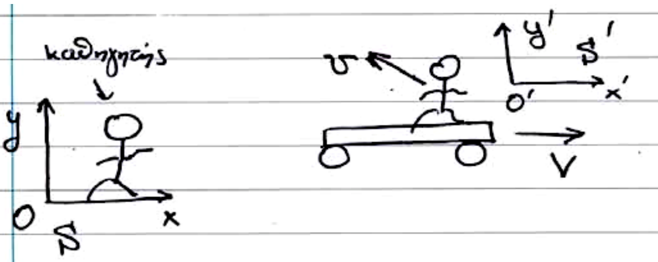
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow f_{τρ} - mg = 0 \Rightarrow f_{τρ} = mg \Rightarrow \mu_s N = mg \Rightarrow \boxed{N = \frac{mg}{\mu_s}}$$

$$\Sigma F_x = m\frac{v^2}{R} = N \Rightarrow \cancel{m}\frac{v^2}{R} = \cancel{m}\frac{g}{\mu_s} \Rightarrow v^2 = \frac{gR}{\mu_s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{gR}{\mu_s} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu_s R}{g}}} \Rightarrow T = 2.54\,s$$

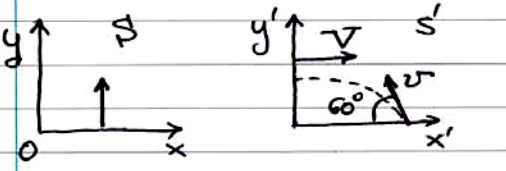
$$\text{Αριθμός περιστροφών/min} = \frac{1\,\text{περ.}}{2.54}\,\frac{60\,s}{min} = \boxed{23.6\ \text{περ./λεπτό}}$$

18. Ένας φοιτητής επιβαίνει σε ένα βαγόνι τραίνου το οποίο κινείται σε ευθεία οριζόντια τροχιά με σταθερή ταχύτητα 10m/s. Ο φοιτητής ρίχνει μια μπάλα προς τα πάνω υπολογίζοντας ότι σχηματίζει γωνία 60° με την οριζόντια διεύθυνση. Ο καθηγητής του φοιτητή που βρίσκεται στο έδαφος βλέπει τη μπάλα να κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω. Ποιο είναι το ύψος στο οποίο βλέπει ο καθηγητής να φθάνει η μπάλα;

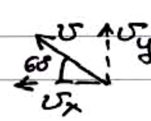


Θεωρούμε το σύστημα του καθηγητή σα το αδρανειακό σύστημα ενώ αυτό του φοιτητή σα το κινούμενο σύστημα

Σύμφωνα με τους 2 παρατηρητές η κίνηση της μπάλας είναι:



Στο σύστημα S' θα έχουμε:



$$\boxed{\tan 60° = \frac{υ_y}{υ_x} = \sqrt{3}} \quad (1)$$

Έστω V η ταχύτητα του S' ως προς το S.
Η ταχύτητα της μπάλας ως προς το S μπορεί να γραφεί σύμφωνα με τη διανυσματική εξίσωση:

$$\vec{υ}_{μπ/S} = \vec{υ}_{μπ/S'} + \vec{V}_{S'/S}$$ Αναλύουμε τη ταχύτητα αυτή στους άξονες x & y:

$$υ^x_{μπ/S} = υ^x_{μπ/S'} + V^x_{S'/S} \quad (A) \qquad V^x_{S'/S} = 10\,m/s$$

$$υ^y_{μπ/S} = υ^y_{μπ/S'} + V^y_{S'/S} \quad (B) \qquad V^y_{S'/S} = 0\,m/s.$$

Ο καθηγητής βλέπει τη μπάλα να κινείται κατακόρυφα οπότε η συνιστώσα της ταχύτητας της μπάλας στη x-διεύθυνση του S είναι 0

$$υ^x_{μπ/S} = 0 \overset{(A)}{\Rightarrow} 0 = υ^x_{μπ/S'} + V^x_{S'/S} \Rightarrow \boxed{υ^x_{μπ/S'} = -V^x_{S'/S} = -10\,m/s}$$

Ανακαθιστώντας στην (1) έχουμε: $\boxed{υ^y_{μπ/S'} = \sqrt{3}\,υ^x_{μπ/S'} = 10\sqrt{3}\,m/s}$

Δηλαδή η μπάλα στο S' ρίχνεται προς τα πίσω.

Ξέρουμε ότι $V^y_{S'/S} = 0$ (το τρένο κινείται στη x-διεύθυνση)

Άρα από την εξίσωση (B) $\boxed{υ^y_{μπ/S} = υ^y_{μπ/S'} = 10\sqrt{3}}$

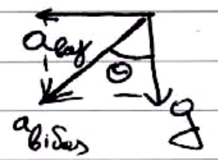
Ξέρουμε από τις εξισώσεις κινηματικής για επιταχυνόμενη κίνηση ότι:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(y_f - y_i) \Rightarrow 0 = v_i^2 - 2g\,h_{max} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_{max} = \frac{v_i^2}{2g} = \frac{(10\sqrt{3})^2}{2g} = \frac{100 \cdot 3}{2 \cdot 9.8} \Rightarrow \boxed{h_{max} = 15.3m}$$

19. Μια βίδα πέφτει από την οροφή ενός βαγονιού που επιταχύνει με ρυθμό 2.5m/s^2. Ποια η επιτάχυνση της βίδας (α) σχετικά με το βαγόνι και (β) τη γη.

(α) Για παρατηρητή που βρίσκεται ακίνητος μέσα στο βαγόνι η βίδα επιταχύνει προς τα κάτω και προς το πίσω μέρος του βαγονιού



$$a_{βίδ} = \sqrt{(2.5)^2 + (9.8)^2} \Rightarrow \boxed{a_{βίδ} = 10.1\ m/s^2}$$

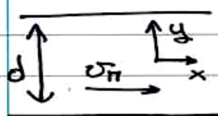
$$\tan\theta = \frac{a_{βαγ}}{g} = \frac{2.5}{9.8} \Rightarrow \tan\theta = 0.255 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = 14.3^\circ$$

(β) Για παρατηρητή στο έδαφος η βίδα απλά κάνει ελεύθερη πτώση και η επιτάχυνσή της είναι $g = a = 9.8 m/s^2$

20. Τα νερά ενός ποταμού κινούνται με σταθερή ταχύτητα 2.50m/s μεταξύ των παράλληλων όχθεων που απέχουν απόσταση 80m. Πρέπει να παραδώσετε ένα δέμα στο ακριβώς απέναντι σημείο της όχθης αλλά μπορείτε να κολυμπήσετε με ταχύτητα 1.50m/s. (α) Αν θέλετε να ελαχιστοποιήσετε το χρόνο που βρίσκεστε στο νερό προς ποια κατεύθυνση θα πρέπει να κολυμπήσετε; (β) Πόση απόσταση κατά μήκος της όχθης θα έχετε κινηθεί; (γ) Αν θέλατε να ελαχιστοποιήσετε την απόσταση που σας μεταφέρει το ποτάμι προς ποια διεύθυνση θα κολυμπούσατε; (δ) Πόσο μακριά κατα μήκος του ποταμού θα μεταφερθήτε στην περίπτωση αυτή;

(α) Για να ελαχιστοποιήσουμε το χρόνο πρέπει να κολυμπάτε κάθετα προς τις όχθες του ποταμού στη y-διεύθυνση



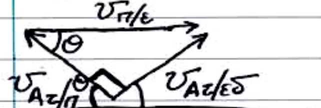
Έστω t ο χρόνος αυτός. Τότε θα έχουμε:

$$υ_y = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{υ_y} = \frac{80}{1.5} \Rightarrow \boxed{t = 53.3\,sec}$$

(β) Στο χρονικό αυτό διάστημα, το νερό του ποταμού σας μεταφέρει απόσταση x ίση με: $x = υ_π \cdot t = 2.5 \cdot 53.3 \Rightarrow \boxed{x = 133m}$

(γ) Για να ελαχιστοποιήσουμε την απόσταση αυτή θα πρέπει να κολυμπάτε με τέτοια γωνία ως προς τη ροή του ποταμού ώστε η συνισταμένη ταχύτητά σας ($\vec{υ}_{Aτ/π} + \vec{υ}_{π/εδ} = \vec{υ}_{Aτ/εδ}$) να σχηματίζει 90° γωνία

με τη διεύθυνση που κολυμπάτε. Κάτω από τη συνθήκη αυτή, η γωνία της συνισταμένης ταχύτητας και της διεύθυνσης x, μεγιστοποιείται



Δηλαδή θα πρέπει η διαφορά $υ^x_{A/εδ} = υ^x_{π/ε} - υ^x_{A/π}$ να γίνει η μικρότερη δυνατή. Επομένως η γωνία αυτή θα είναι:

$$\cos\theta = \frac{υ_{Aτ/π}}{υ_{π/ε}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1.5}{2.5} \Rightarrow \boxed{\theta = 53.1°}$$

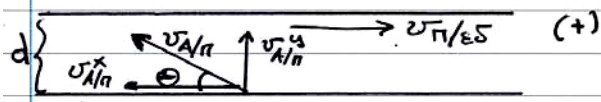
(δ) Επομένως $υ^x_{AT/π} = υ_{AT/π} \cdot \cos\theta = 1.5 \cdot 0.6 = 0.9\,m/sec$.

$υ^y_{AT/π} = υ_{AT/π} \cdot \sin\theta = 1.5 \cdot 0.8 \Rightarrow υ^y_{AT/π} = 1.2\,m/s$

Με αυτή την ταχύτητα στη y-διεύθυνση καλύπτετε την απόσταση d σε χρόνο: $t = \frac{d}{υ^y_{AT/π}} = \frac{80}{1.2} \Rightarrow t = 66.7\,sec$

Η συνισταμένη ταχύτητα στη x-διεύθυνση $υ^x_{A/εδ} = υ^x_{A/π} + υ^x_{π/ε} \Rightarrow$ $υ^x_{A/εδ} = 2.5 - 0.9 = 1.6\,m/sec$. Επομένως η απόσταση x που θα μεταφερθείτε είναι $x = υ^x_{A/εδ} \cdot 66.7 \Rightarrow x = 1.6 \cdot 66.7 = \underline{106.7m}$

Δεύτερος τρόπος για το ερώτημα (γ)



Αναλύουμε τη ταχύτητα $\upsilon_{A/\pi}$ σε 2 συνιστώσες $\upsilon^{x}_{A/\pi} = \upsilon_{A/\pi}\cos\theta$

$\upsilon^{y}_{A/\pi} = \upsilon_{A/\pi}\sin\theta$

Ο χρόνος που καλύπτει την απόσταση μεταξύ των 2 όχθεων είναι:

$$d = \upsilon^{y}_{A/\pi}\cdot t \Rightarrow t = \frac{d}{\upsilon^{y}_{A/\pi}} = \frac{d}{\upsilon_{A/\pi}\sin\theta} \qquad (1)$$

Το ίδιο χρονικό διάστημα κινείται και στη x-διεύθυνση.

Η ταχύτητα ως προς το έδαφος στη x-διεύθυνση θα είναι:

$$\vec{\upsilon}^{\,x}_{A/\varepsilon\delta} = \vec{\upsilon}^{\,x}_{A/\pi} + \vec{\upsilon}_{\pi/\varepsilon\delta} = -\upsilon_{A/\pi}\cos\theta + \upsilon_{\pi/\varepsilon\delta}$$

Η απόσταση στη x-διεύθυνση θα είναι: $x = \upsilon^{x}_{A/\varepsilon\delta}\cdot t \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \quad x = \left(\upsilon_{\pi/\varepsilon\delta} - \upsilon_{A/\pi}\cos\theta\right)\frac{d}{\upsilon_{A/\pi}\sin\theta}$$

Θέλουμε αυτή η απόσταση να είναι ελάχιστη για κάποια γωνία θ,

άρα: $$\frac{dx}{d\theta} = 0 \Rightarrow \cancel{\upsilon_{A/\pi}}\cancel{\sin\theta}\frac{d}{\cancel{\upsilon_{A/\pi}}\cancel{\sin\theta}} - \frac{\upsilon_{\pi/\varepsilon\delta}\, d\cos\theta}{\upsilon_{A/\pi}\sin^2\theta} + \frac{\cancel{\upsilon_{A/\pi}}\, d\cos^2\theta}{\cancel{\upsilon_{A/\pi}}\sin^2\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \quad d - d\,\frac{\upsilon_{\pi/\varepsilon\delta}\cos\theta}{\upsilon_{A/\pi}\sin^2\theta} + d\,\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{\upsilon_{A/\pi}\sin^2\theta}\left(\upsilon_{A/\pi}\sin^2\theta - \upsilon_{\pi/\varepsilon\delta}\cos\theta + \upsilon_{A/\pi}\cos^2\theta\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{\upsilon_{A/\pi}\sin^2\theta}\left(\upsilon_{A/\pi}\underbrace{\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)}_{1} - \upsilon_{\pi/\varepsilon\delta}\cos\theta\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \upsilon_{A/\pi} - \upsilon_{\pi/\varepsilon\delta}\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{\upsilon_{A/\pi}}{\upsilon_{\pi/\varepsilon\delta}} = \frac{1.5}{2.5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = 53.1^\circ}$$