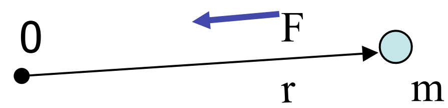
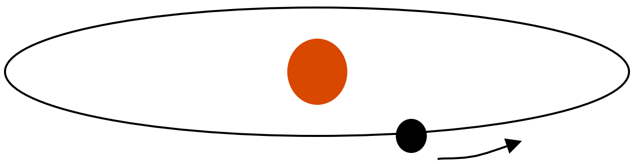
Κίνηση σε κεντρικό δυναμικό

- Έστω ένα σωματίδιο κάτω από την επίδραση μιας κεντρικής δύναμης
  - Δύναμη παράλληλη στο r



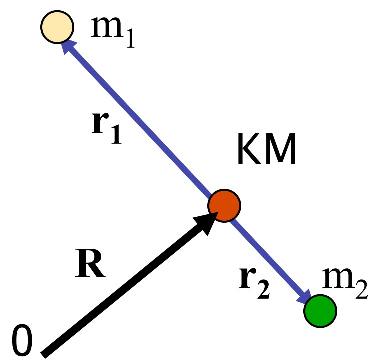
- Υποθέτουμε ότι η δύναμη είναι συντηρητική: $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$
  - V είναι συνάρτηση του |r| αν η F είναι κεντρική
- Τέτοια συστήματα είναι πολύ συνηθισμένα
  - Πλανήτης γύρω από τον ήλιο
  - Δορυφόρος γύρω από την γη
  - Ηλεκτρόνιο γύρω από το πυρήνα



- Τα παραδείγματα αυτά υποθέτουν ότι το σώμα στο κέντρο είναι αρκετά βαρύ και δεν κινείται

Πρόβλημα δύο σωμάτων

- Θεωρήστε 2 σώματα χωρίς εξωτερική δύναμη
  - $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ σχετικά με το κέντρο μάζας



- H Lagrangian γράφεται:

$$\mathcal{L} = \frac{(m_1+m_2)\dot{\vec{R}}^2}{2} + \sum_{i=1}^{2} \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} - V(\vec{r})$$

Κίνηση του KM

Κίνηση γύρω από το KM

Δυναμικό είναι συνάρτηση του $|\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$

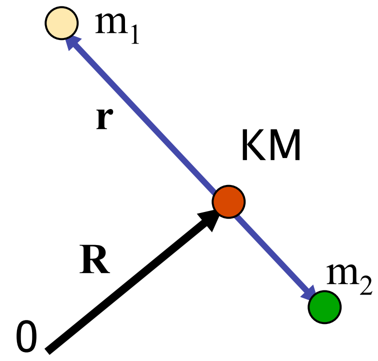
$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\vec{r}$$

Ισχυρός νόμος δράσης - αντίδρασης

$$\sum_{1}^{2} \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\dot{\vec{r}}^{\,2}$$

Δυο Σώματα – Κεντρική Δύναμη

$$\mathcal{L} = \frac{(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$$



- R είναι κυκλική συντεταγμένη
  - Κ.Μ. κινείται με σταθερή ταχύτητα
  - Μετακινούμε την αρχή του συστήματος συντεταγμένων στο Κ.Μ.
    - δεν χρειάζεται να ασχοληθούμε ξανά

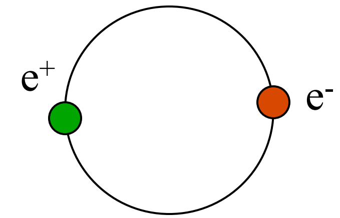
$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$$

Σχετική κίνηση 2 σωμάτων είναι ταυτόσημη με την κίνηση ενός σωματιδίου σε δυναμικό κεντρικής δύναμης

Ανηγμένη μάζα: $\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}}$ $\boxed{\Rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}$

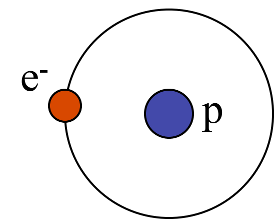
Παράδειγμα: Υδρογόνο και Ποζιτρόνιουμ

- Το ποζιτρόνιουμ είναι δέσμια κατάσταση ενός e^- και ενός e^+
  - Παρόμοιο με το υδρογόνο αλλά $m(p) >> m(e^+)$
  - Το δυναμικό V(r) είναι ίδιο: $V(r) = -\frac{q^2}{r}$



- Μετατρέπουμε σε πρόβλημα κεντρικής δύναμης

$$\mu_{positronium} = \frac{m_e m_e}{(m_e + m_e)} = \frac{\mathrm{m_e}}{2}$$



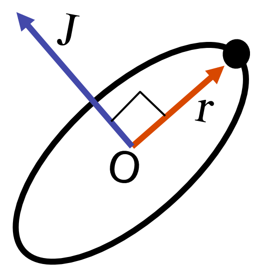
$$\mu_{\upsilon\delta\rho o\gamma o\nu o} = \frac{m_p m_e}{(m_p + m_e)} \approx m_e$$

- Το φάσμα του ποζιτρόνιουμ είναι ανάλογο του υδρογόνου με $\mathrm{m_e} \rightarrow \mathrm{m_e}/2$

Σφαιρική συμμετρία

- Σύστημα κεντρικής δύναμης είναι σφαιρικά συμμετρικό
  - Μπορεί να περιστραφεί γύρω από οποιοδήποτε άξονα που περνά από την αρχή του συστήματος
- Η Lagrangian $\mathcal{L} = T\left(\dot{\vec{r}}^2\right) - V(\vec{r})$ ανεξάρτητη της διεύθυνσης
- Η στροφορμή διατηρείται $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} = \sigma\tau\alpha\theta.$
  - Η διεύθυνση της $\vec{J}$ είναι προσδιορισμένη

    $\vec{r} \perp \vec{J}$ εξ' ορισμού → r είναι πάντα στο ίδιο επίπεδο



- Διαλέγουμε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\vec{r} = \vec{r}(r,\theta,\underbrace{\psi}_{\text{Αζιμούθιο}}) = \vec{r}(r,\underbrace{\theta}_{\text{Ζενίθ} = 1/2\,\pi})$$

  - Ο άξονας αζιμούθιου ταυτίζεται με τη διεύθυνση $\vec{J}$

Περισσότερο φορμαλιστικά

Η Lagrangian σε σφαιρικές συντεταγμένες, $\vec{r} = \vec{r}(r, \theta, \psi)$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\psi\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\psi}^2\right) - V\left(\vec{r}\right)$$

- Η θ είναι κυκλική, αλλά η ψ δεν είναι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 2m\dot{r}\dot{\psi} + mr^2\left(\underline{\ddot{\psi} - \dot{\theta}^2 \sin\psi \cos\psi}\right) = 0$$

- Διαλέγουμε τον αζιμουθιακό άξονα και αρχικές συνθήκες: $\psi = \pi/2, \ \ \dot{\psi} = 0$

1ος όρος = 0 πάντοτε

2ος όρος 0 $\ddot{\psi} = 0$

- Τώρα η ψ είναι σταθερή και μπορούμε να την ξεχάσουμε

Στροφορμή

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r)$$

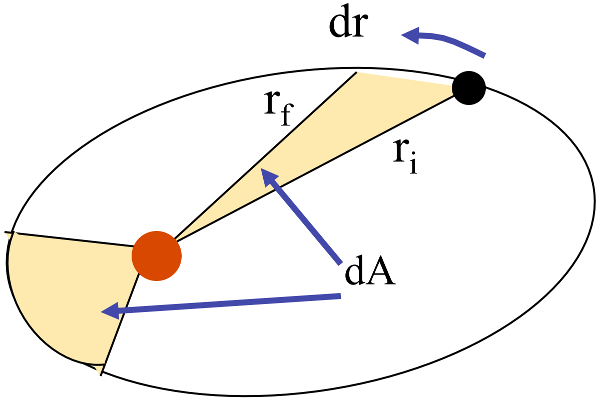
- θ είναι κυκλική: ⇨ η συζυγής ορμή, p_θ, διατηρείται

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \sigma\tau\alpha\theta. \equiv l$$

⇦ Μέτρο της στροφορμής

- Διαφορετικά:

Εμβαδική ταχύτητα ⇨ $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \sigma\tau\alpha\theta$



- Ο 2ος Νόμος του Kepler
- Ισχύει για κάθε κεντρική δύναμη

Ακτινική κίνηση

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r)$$

- Η εξίσωση του Lagrange για r: $$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V(r)}{\partial r} = 0$$
  - Παράγωγος του δυναμικού V είναι η δύναμη $F(r) = -\dfrac{\partial V(r)}{\partial r}$

$$m\ddot{r} = \underbrace{mr\dot{\theta}^2}_{\text{Κεντρομόλος δύναμη}} + \underbrace{F(r)}_{\text{Κεντρική δύναμη}}$$

- Χρησιμοποιώντας την στροφορμή: $l = mr^2\dot{\theta}$

$$m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} + F(r)$$

Διατήρηση Ενέργειας

$$E = T + V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r) \Rightarrow E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V(r) = \sigma\tau\alpha\vartheta.$$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\underline{\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}$$

1ου βαθμού διαφορική εξίσωση του r

Αυτό δεν γίνεται **ποτέ** αρνητικό

- Μπορεί να λυθεί ως:

$$t = \int_0^t dt = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}} = t(r)$$

- Μετά με αναστροφή $t(r) \rightarrow r(t)$
- Κατόπιν υπολογίζεται το $\theta(t)$ ολοκληρώνοντας $\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$

Βαθμοί Ελευθερίας

- Ένα σώμα έχει 3 βαθμούς ελευθερίας
  - Η εξίσωση κίνησης είναι 2ου βαθμού διαφορική ⇒ 6 σταθερές
- Κάθε νόμος διατήρησης ελαττώνει μια παραγώγιση:
  «χρονική μερική παράγωγος ισούται με μηδέν»
- Χρησιμοποιήσαμε E και $\vec{J}$ ⇒ 4 διατηρήσιμες ποσότητες: $\left(J_x, J_y, J_z, E\right)$
  - Παραμένουν μόνο 2 σταθερές ολοκλήρωσης = r_0 και θ_0
- Δεν χρειάζεται εν γένει να χρησιμοποιούμε νόμους διατήρησης
  - Είναι όμως πιο εύκολο αφού δεν χρειάζεται να λύσουμε όλες τις εξισώσεις Lagrange

Ποιοτική συμπεριφορά

- Ολοκλήρωση της ακτινικής εξίσωσης δεν είναι πάντα εύκολο
  - Πολλές φορές είναι αδύνατο $\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}$
- Συμπεράσματα για την γενική συμπεριφορά βλέποντας τη σχέση

$$V'(r) \equiv V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$$

⇐ Ημί-δυναμικό το οποίο περικλύει την κεντρομόλο δύναμη

- Η ενέργεια διατηρείται και E-V' πρέπει να ναι θετική ποσότητα

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V'(r) \Rightarrow \frac{m\dot{r}^2}{2} = E - V'(r) \geq 0 \Rightarrow E \geq V'(r)$$

- Σχεδιάζουμε το $V'(r)$ και μελετούμε τις τομές με το διάγραμμα της ενέργειας E

Δύναμη ανάλογη του $1/r^2$

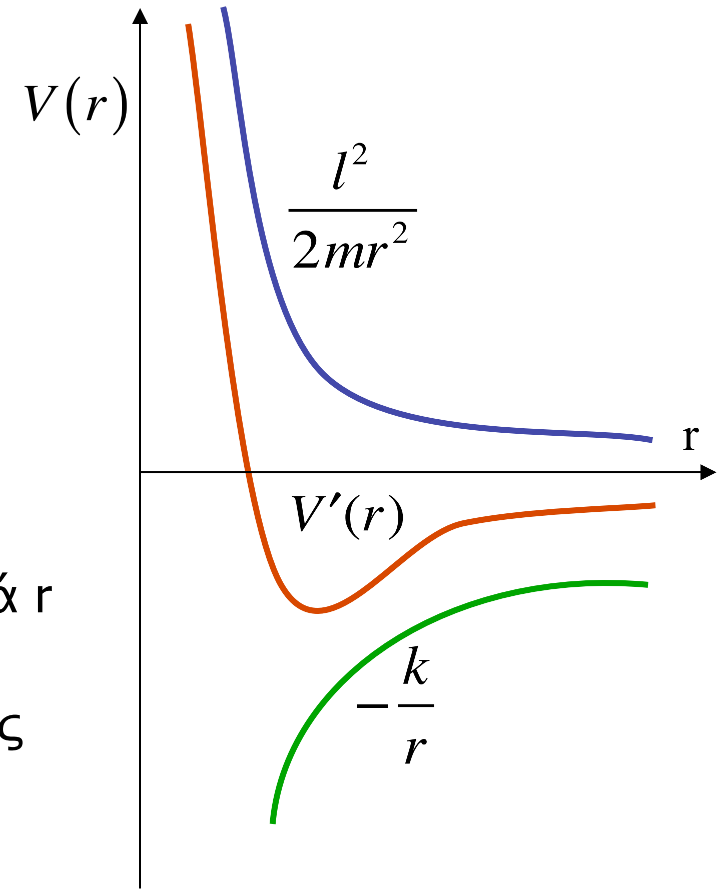
- Θεωρήστε μια ελκτική $1/r^2$ δύναμη

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} \Rightarrow V(r) = -\frac{k}{r}$$

- Βαρύτητα ή ηλεκτροστατική δύναμη

$$V'(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

- Η $1/r^2$ δύναμη υπερισχύει σε μεγάλα r
- Η κεντρομόλος δύναμη υπερισχύει σε μικρά r
- Μια «κοιλιά» εμφανίζεται στις μέσες τιμές

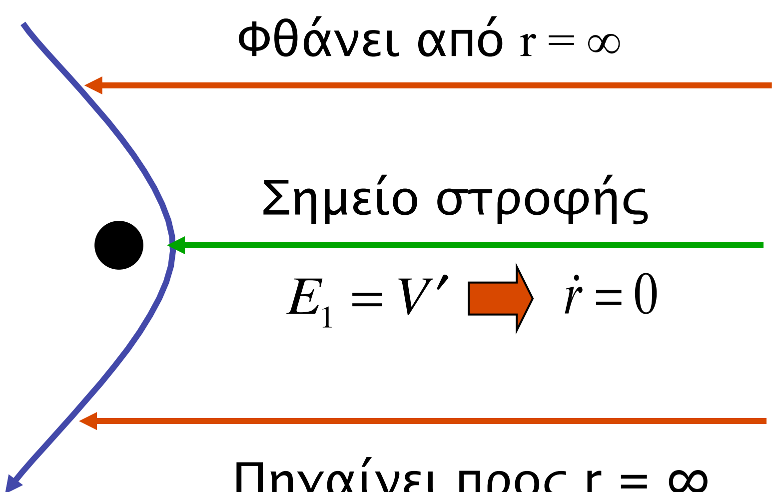


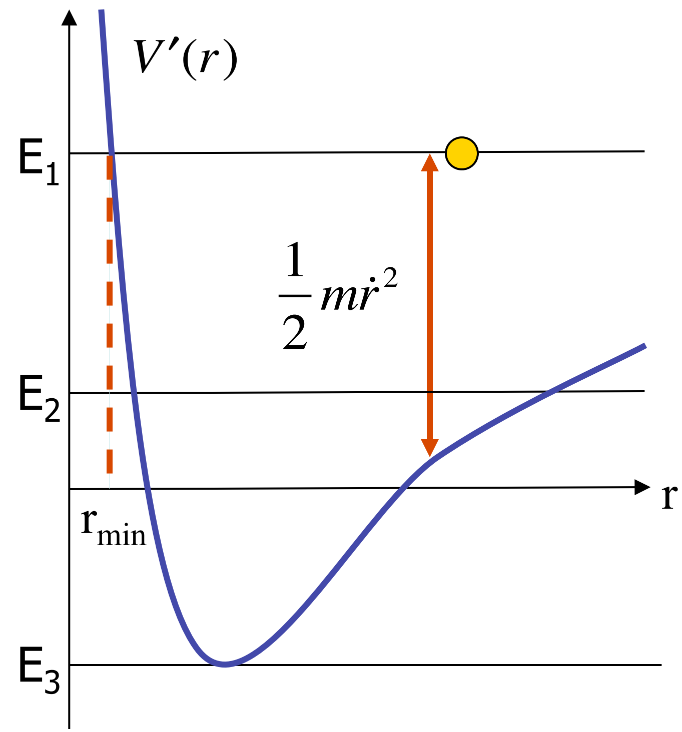
Μη φραγμένη κίνηση

- Έστω V'(r) παρόμοιο με την περίπτωση $1/r^2$
  - Ενδιαφέρουν μόνο τα γενικά χαρακτηριστικά

- $E = E_1 \rightarrow r > r_{min}$
  - Σώμα μπορεί να πάει στο άπειρο

- Γενική συμπεριφορά

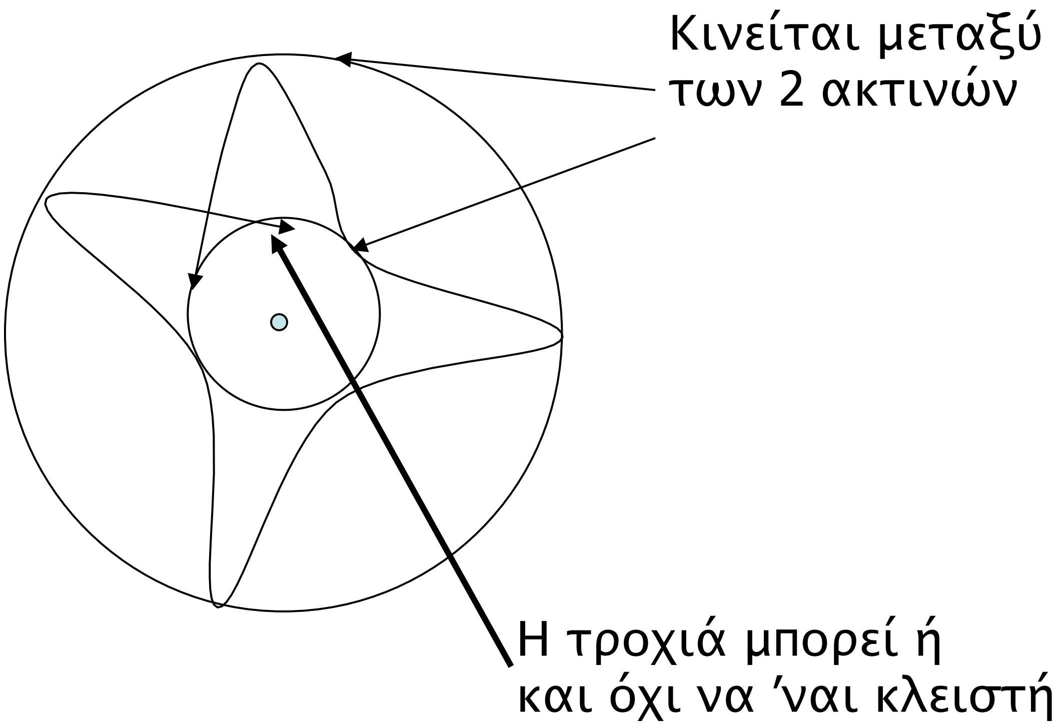


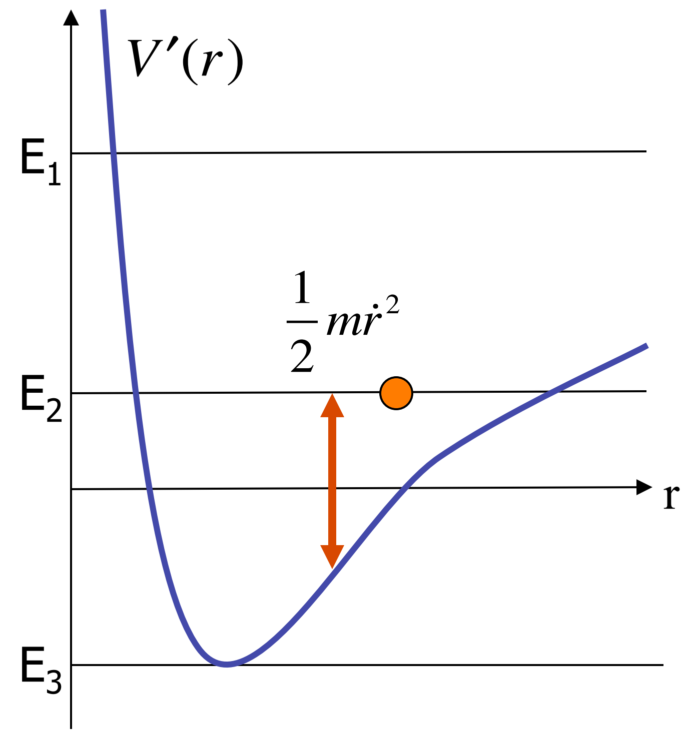


Μια δύναμη $1/r^2$ θα έκανε υπερβολή

Φραγμένη κίνηση

- $E = E_2 \rightarrow r_{min} < r < r_{max}$
  - Το σώμα είναι περιορισμένο μεταξύ δύο κύκλων

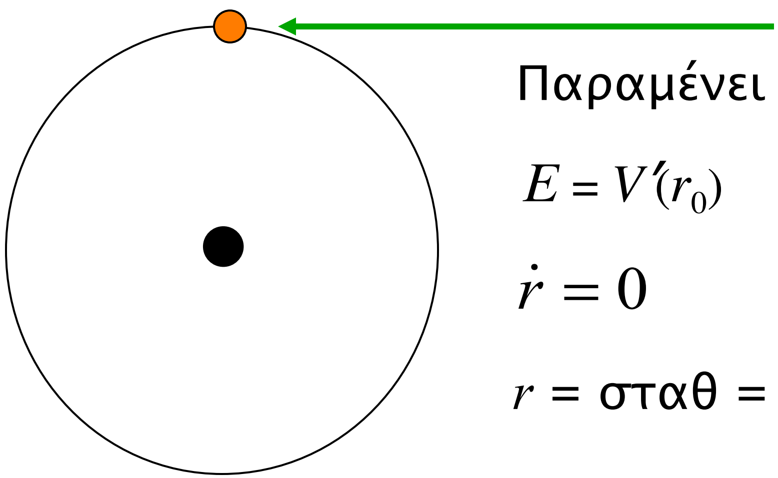




Μια δύναμη $1/r^2$ θα έκανε μια έλλειψη

Κυκλική κίνηση

- $E = E_3 \rightarrow r = r_0$
  - Μόνο μία ακτίνα επιτρέπεται

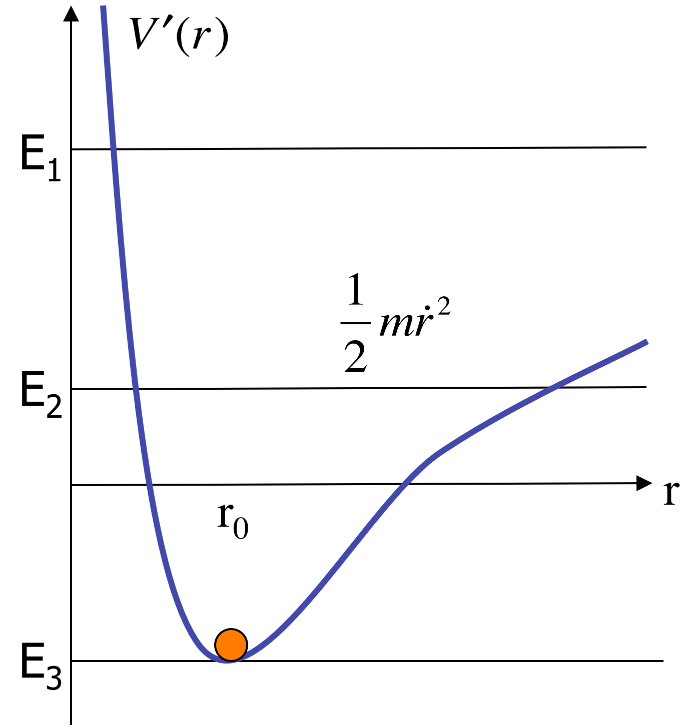


Παραμένει σε κύκλο

$$E = V'(r_0)$$

$$\dot{r} = 0$$

$$r = \text{σταθ} = r_0$$

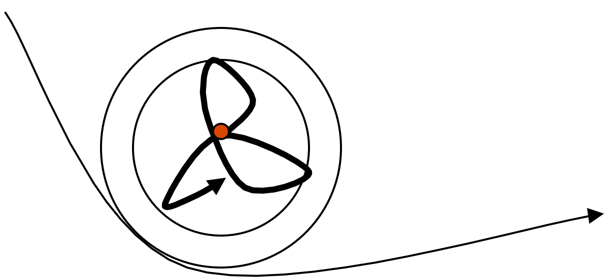


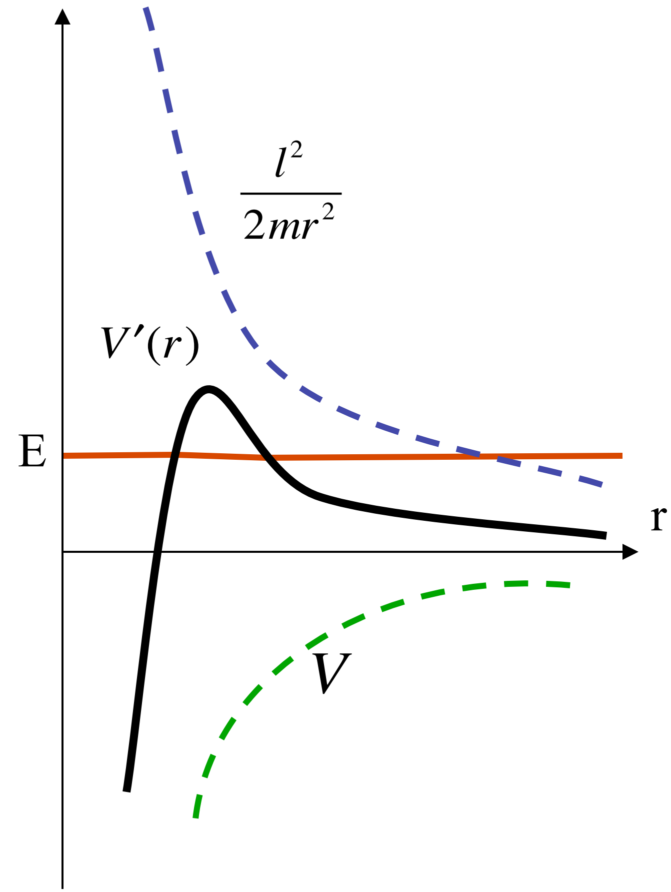
- Ο καταχωρισμός σε φραγείς, μη φραγείς και κυκλικές κινήσεις εξαρτάται από το γενικό σχήμα του V'
  - Όχι από τις λεπτομέρειες ($1/r^2$ ή διαφορετικά)

Άλλο παράδειγμα

$$V = -\frac{a}{r^3} \Leftrightarrow F = -\frac{3a}{r^4} \quad \Rightarrow \quad V'(r) = -\frac{a}{r^3} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

- Ελκτική δύναμη r^{-4}
  - $V'(r)$ έχει κάποια κορυφή
  - Σωματίδιο με ενέργεια E μπορεί να είναι φραγμένο ή όχι, ανάλογα από την αρχική r



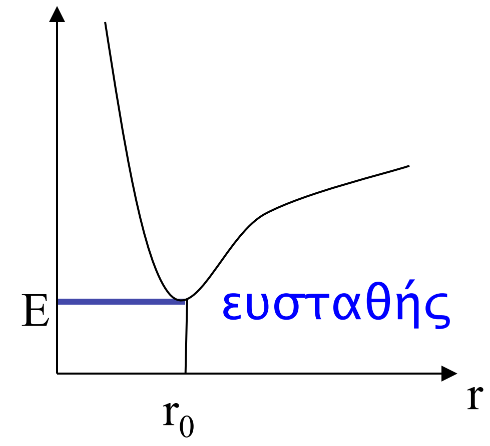


Ευσταθής κυκλική τροχιά

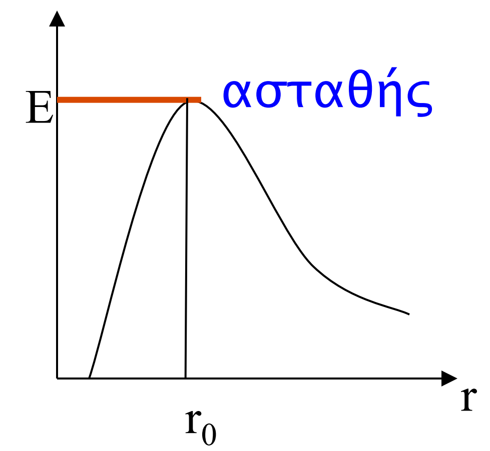
- Κυκλική τροχιά υπάρχει στο βάθος ενός κοίλους του V'

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - V' = 0 \quad \Rightarrow m\ddot{r} = -\frac{dV'}{dr} = 0$$

r = σταθ



- Στην κορυφή ενός κοίλους «δουλεύει» θεωρητικά, αλλά είναι ασταθές



- Η αρχική συνθήκη πρέπει να 'ναι ακριβής

$$\dot{r} = 0 \quad \text{και} \quad r = r_0$$

- Σταθερή κυκλική τροχιά απαιτεί: $\dfrac{d^2V'}{dr^2} > 0$

Εκθετική Δύναμη

$$V'(r) \equiv V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$$

$$\left.\frac{dV'}{dr}\right|_{r=r_0} = -F(r_0) - \frac{l^2}{mr_0^3} = 0$$

και

$$\left.\frac{d^2V'}{dr^2}\right|_{r=r_0} = -\left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=r_0} + \frac{3l^2}{mr_0^4} > 0$$

$$F(r_0) = -\frac{l^2}{mr_0^3}$$

Μόνο ελκτική δύναμη

$$\left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=r_0} < -\frac{3F(r_0)}{r_0}$$

- Υποθέστε ότι η δύναμη έχει τη μορφή: $F(r) = -kr^n$
  - $k>0$ για ελκτική δύναμη
- Συνθήκες για ευσταθή κυκλική τροχιά είναι

$$-knr_0^{n-1} < 3kr_0^{n-1} \Rightarrow n > -3$$

Εκθετικές δυνάμεις μπορούν να δημιουργήσουν ευσταθή κυκλική τροχιά όταν ο εκθέτης ικανοποιεί: $n > -3$

Περίληψη

- Ξεκινήσαμε την συζήτηση για το θέμα κεντρικής δύναμης
  - ✓ Ανάγαμε το πρόβλημα 2 σωμάτων σε πρόβλημα κεντρικής δύναμης
- Το πρόβλημα περιορίζεται σε μια εξίσωση: $m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} + F(r)$
  - ✓ Χρήση της διατήρησης στροφορμής: $V'(r) \equiv V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$
- Ποιοτική συμπεριφορά εξαρτάται από
  - ✓ Φραγμένες, μη φραγμένες και κυκλικές τροχιές
  - ✓ Συνθήκες για σταθερές κυκλικές τροχιές
- Επόμενο βήμα: Μπορούμε να λύσουμε για την τροχιά