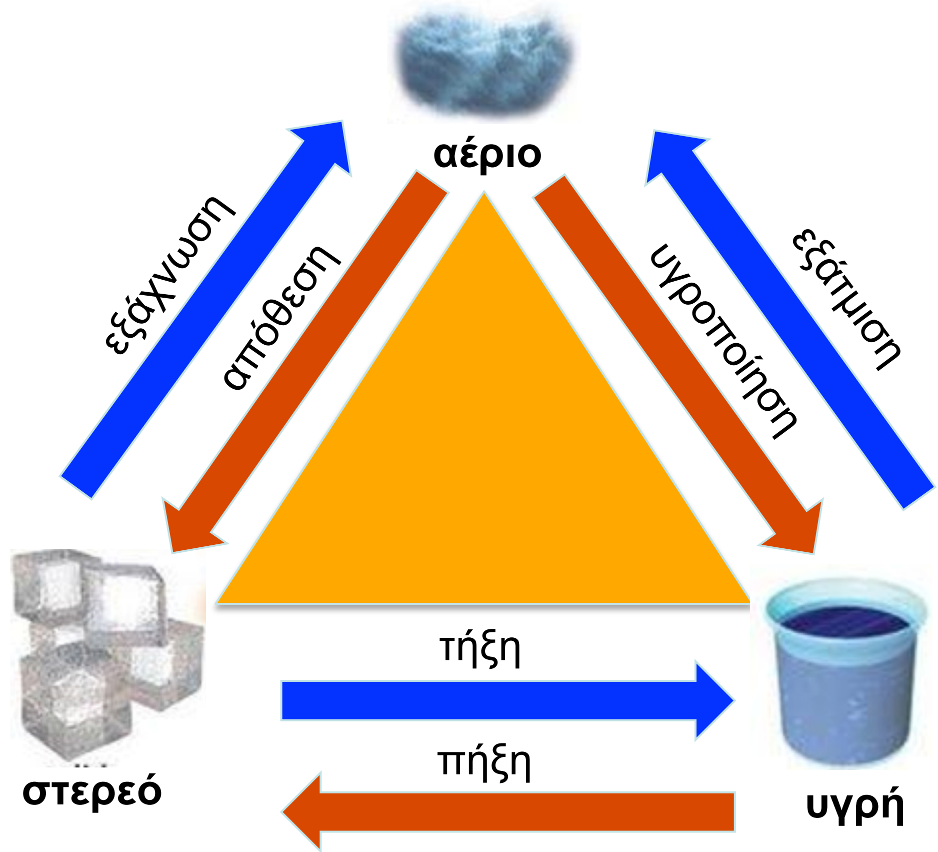

Μηχανική Ρευστών

Φάσεις της ύλης

Τρεις συνήθεις φάσης της ύλης είναι:



Στερεά: Συγκεκριμένο σχήμα και μέγεθος (κρυσταλικά / άμορφα

Υγρά: Συγκεκριμένο όγκο αλλά απροσδιόριστο σχήμα

Αέρια: Οποιοδήποτε σχήμα – εύκολα συμπιεζόμενο

Τα υγρά και αέρια ρέουν και ονομάζονται **ρευστά**

Πυκνότητα και ειδικό βάρος

Πυκνότητα ενός αντικειμένου ορίζεται ως η μάζα του ανά μονάδα όγκου: $\boxed{\rho = \frac{m}{V}}$

Μονάδες μέτρησης στο SI : kg/m^3

Το νερό σε θερμοκρασία 4^0 έχει πυκνότητα: $1g/cm^3 = 1.000\,kg/m^3$

Ειδικό βάρος: πυκνότητα ενός υλικού / πυκνότητα νερού

Πίεση

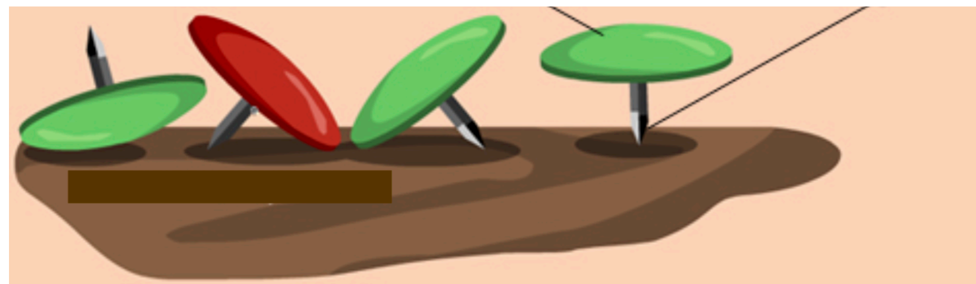
Πίεση: Μέτρο της δύναμης που ασκείται κάθετα σε μία επιφάνεια ενός αντικειμένου ως προς την επιφάνεια στην οποία κατανέμεται η δύναμη

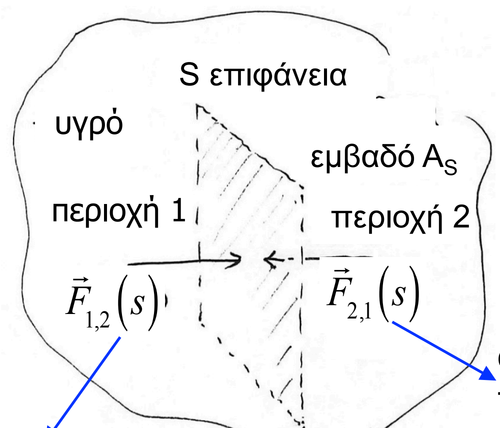
$$\boxed{P = \frac{F}{A}}$$

Βαθμωτό μέγεθος με μονάδες μέτρησης στο SI το Pascal: $\boxed{1Pa = N/m^2}$

Κατανομή δύναμης σε μεγάλη επιφάνεια - Χαμηλή πίεση

Κατανομή δύναμης σε μικρή επιφάνεια – υψηλή πίεση





συγκρούσεις των μορίων της περιοχής 2 με αυτά της περιοχής 1.

από συγκρούσεις των μορίων της περιοχής 1 με αυτά της περιοχής 2 κάθετη στην επιφάνεια

Από τον 3ο νόμο του Newton: $\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$

ορίζουμε την δύναμη $F_{\perp}(S) = \left|\vec{F}_{2,1}(S)\right| = \left|\vec{F}_{1,2}(S)\right|$

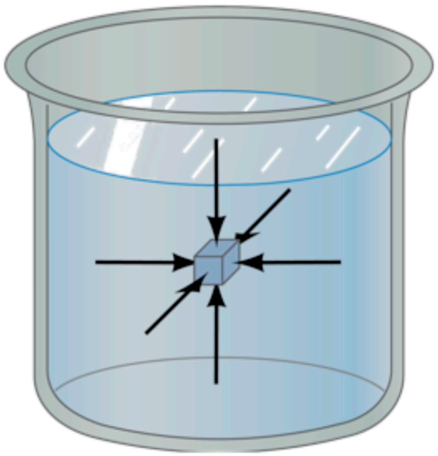
Υδροστατική πίεση: $P = \dfrac{F_{\perp}}{A_s}$ πίεση σε σημείο της επιφάνειας $P = \lim\limits_{A_s \to 0} \dfrac{F_{\perp}(S)}{A_s}$

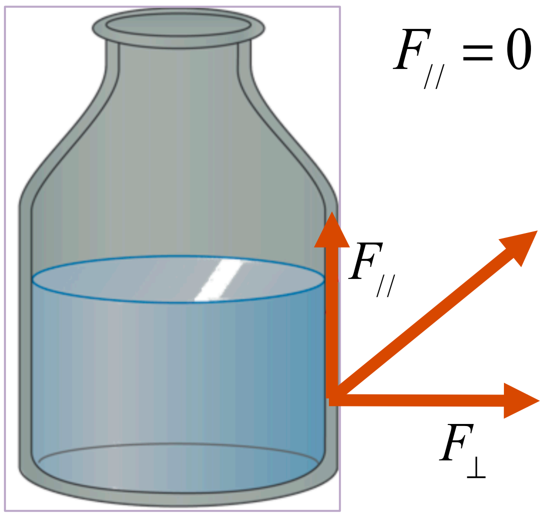
Πίεση σε υγρά

Για υγρό σε ηρεμία:

Η πίεση είναι η ίδια σε κάθε διεύθυνση σε ένα υγρό σε συγκεκριμένο βάθος

Αν δεν ήταν τότε το ρευστό θα έρεε.



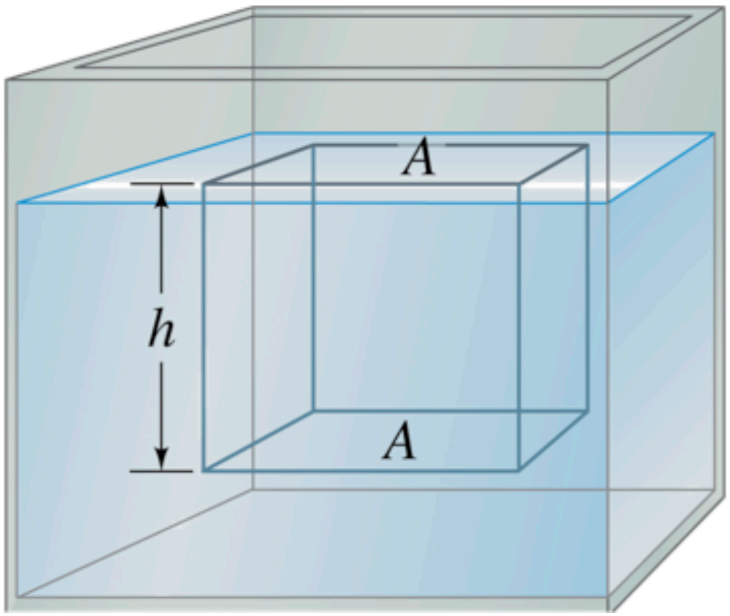


Δεν υπάρχει συνιστώσα δύναμης παράλληλη ως προς οποιαδήποτε στερεή επιφάνεια

Αν υπήρχε τότε το ρευστό θα έρεε

Πίεση σε υγρά

Η πίεση σε βάθος *h* κάτω από την επιφάνεια ενός υγρού οφείλεται στο βάρος του υγρού πάνω από την περιοχή



Μπορούμε να υπολογίσουμε γρήγορα:

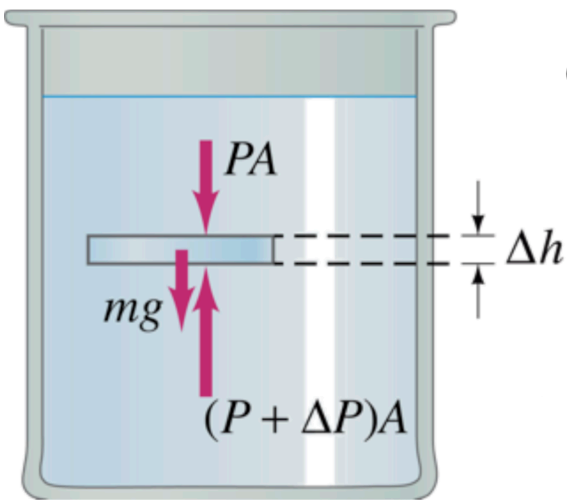
$$P = \frac{mg}{A} = \frac{\rho V g}{A} = \frac{\rho g h A}{A} \Rightarrow P = \rho g h$$

Η σχέση αυτή ισχύει για οποιοδήποτε υγρό η πυκνότητα του οποίου δεν αλλάζει με το βάθος

Πίεση σε υγρά

Τα υγρά μπορούν να θεωρηθούν σαν ασυμπίεστα

Σε αντίθεση τα αέρια μπορούν να συμπιεστούν αρκετά και επομένως η πυκνότητα αλλάζει



Θεωρούμε μία μικρή περιοχή του υγρού

Μπορούν να θεωρηθούν 3 επιφάνειες (2 βάσεις και η περίπλευρη)

Το ρευστό είναι στατικό ⇒ Δυνάμεις κάθετες στις επιφάνειες

Η δύναμη στην παράπλευρη επιφάνεια είναι μηδέν

Οι δυνάμεις στις δύο βάσεις θα είναι: $\vec{F}(h)$ και $\vec{F}(h+\Delta h)$

Η βαρυτική δύναμη που δρα στην πάνω επιφάνεια είναι:

$$\vec{F}_g(\Delta h)=(dm)g\hat{k}=(\rho dV)g\hat{k} \Rightarrow \vec{F}_g(\Delta h)=\rho A\Delta h g\hat{k}$$

Επειδή το ρευστό είναι στατικό τότε: $F(h)-F(h+\Delta h)+F_g=0 \Rightarrow F(h)-F(h+\Delta h)+\rho A\Delta h g=0$

$$\Rightarrow \frac{F(h)}{A}-\frac{F(h+\Delta h)}{A}+\frac{\rho A\Delta h g}{A}=0 \Rightarrow P(h)-P(h+\Delta h)+\rho\Delta h g=0 \Rightarrow \frac{P(h+\Delta h)-P(h)}{\Delta h}=\rho g$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta h\to 0}\frac{P(h+\Delta h)-P(h)}{\Delta h}=\rho g \Rightarrow \frac{dP}{dh}=\rho g \Rightarrow \int_{P(0)}^{P(h)} dP=\int_{z=0}^{z}\rho g\, dh \boxed{\Rightarrow P(h)-P(h=0)=\rho g h}$$

Νόμος του Pascal

Ατμοσφαιρική πίεση και μανομετρική πίεση

Στην επιφάνεια της θάλασσας η ατμοσφαιρική πίεση είναι: $P_{\alpha\tau\mu.} = 1.013 \times 10^5 \; N/m^2$

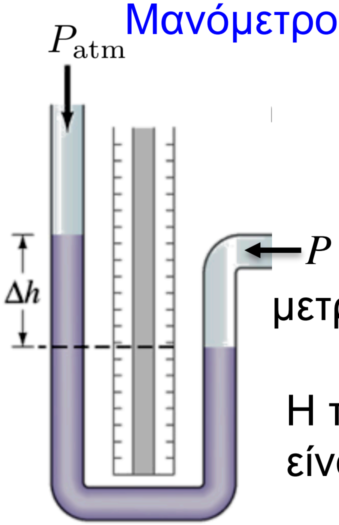
Μια άλλη μονάδα μέτρησης είναι το bar: $1 bar = 1.00 \times 10^5 \; N/m^2$

Μια ατμόσφαιρα είναι λίγο περισσότερο από 1 bar

Η πίεση αυτή δεν προκαλεί προβλήματα στον άνθρωπο γιατί η πίεση στο εσωτερικό των κυττάρων είναι αρκετή για να εξισορροπήσει αυτή την πίεση

Όργανα μέτρησης της πίεσης είναι τα μανόμετρα διαφόρων ειδών:

Μανόμετρο ανοικτού τύπου

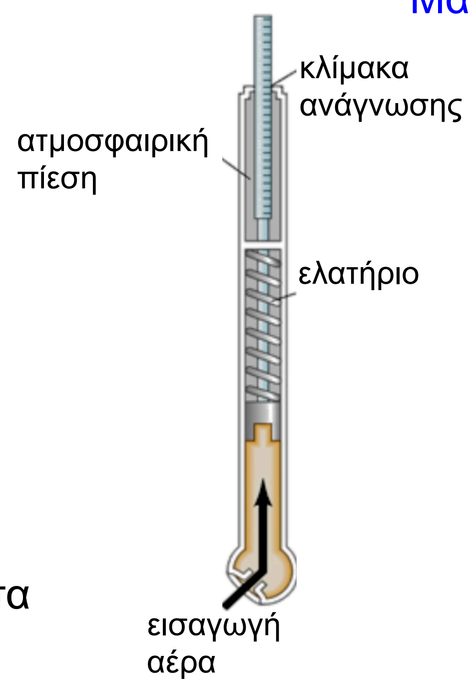


μετρούμενη πίεση

Η πίεση στο ανοικτό μέρος είναι ατμοσφαιρική πίεση

Η πίεση που μετράται θα εξαναγκάσει το υγρό να ανέβει έως ότου οι πιέσεις και στα δύο τμήματα στα ίδια ύψη είναι ίσες

Μανόμετρα πίεσης



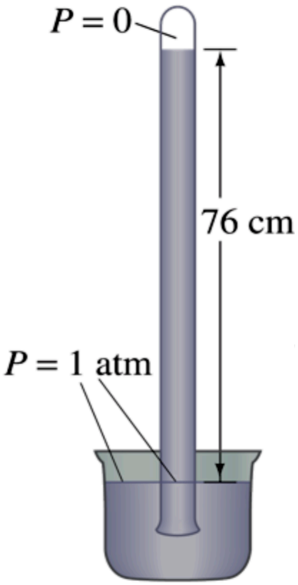
Μετρά πίεση πλέον της ατμοσφαιρικής

Η απόλυτη πίεση είναι το άθροισμα της ατμοσφαιρικής και μανομετρικής πίεσης

$$P = P_{\alpha\tau\mu.} + P_{\mu\alpha\nu.}$$

Μέτρηση βαρομετρικής πίεσης

Αναπτύχθηκε από τον Torricelli και στηρίζεται στη χρήση στήλης υδραργύρου για μέτρηση της ατμοσφαιρικής πίεσης



Η στήλη είναι τέτοια ώστε το ύψος του υδραργύρου στο σωλήνα στην επιφάνεια της θάλασσας να αντιστοιχεί σε πίεση μίας ατμόσφαιρας.

Συχνά αναφέρεται και σε mmHg – 760mmHg = 1atm

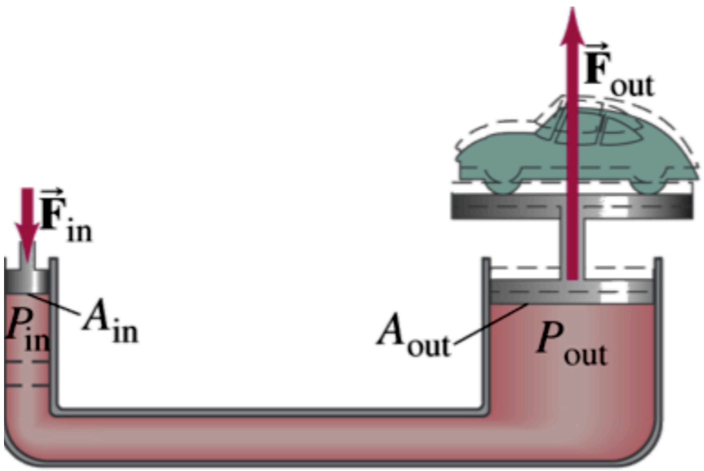
Οποιοδήποτε υγρό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το σωλήνα του βαρομέτρου Torricelli αλλά αυτά με την μεγαλύτερη πυκνότητα είναι καλύτερα.

Βαρόμετρο ύψους 10.3m

Η αρχή του Pascal

Αν σε κάποιο ρευστό το οποίο είναι περιορισμένο σε κάποιο χώρο εφαρμοστεί εξωτερική πίεση τότε σε κάθε σημείο του ρευστού αναπτύσσεται η ίδια πίεση.

Η αρχή αυτή χρησιμοποιείται για υδραυλικές ανυψώσεις:



$$P_{out} = P_{in}$$

$$\frac{F_{out}}{A_{out}} = \frac{F_{in}}{A_{in}}$$

$$\frac{F_{out}}{F_{in}} = \boxed{\frac{A_{out}}{A_{in}}}$$ → μηχανικό πλεονέκτημα

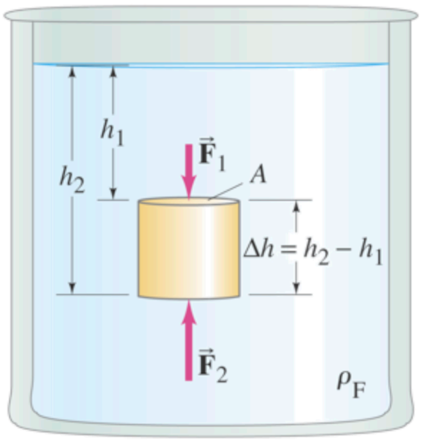
Παράδειγμα: Αν η επιφάνεια του εξωτερικού πιστονιού είναι 20 φορές μεγαλύτερη του εσωτερικού τότε η δύναμη που ασκείται στο εσωτερικό πιστόνι θα πολλαπλασιαστεί κατά τον παράγοντα αυτό στο εξωτερικό πιστόνι.
Μία δύναμη 200N θα μπορούσε να σηκώσει ένα αυτοκίνητο βάρους 4000N.

Άνωση (buoyancy) και αρχή του Αρχιμήδη

Θεωρήστε ένα σώμα το οποίο είναι βυθισμένο σε κάποιο ρευστό.

Πάνω στο σώμα ασκείται μια συνισταμένη δύναμη γιατί η πίεση στο πάνω και κάτω μέρος του είναι διαφορετική.

Η άνωση είναι η δύναμη με φορά προς τα πάνω η οποία ανιστοιχεί στον ίδιο όγκο ρευστού.

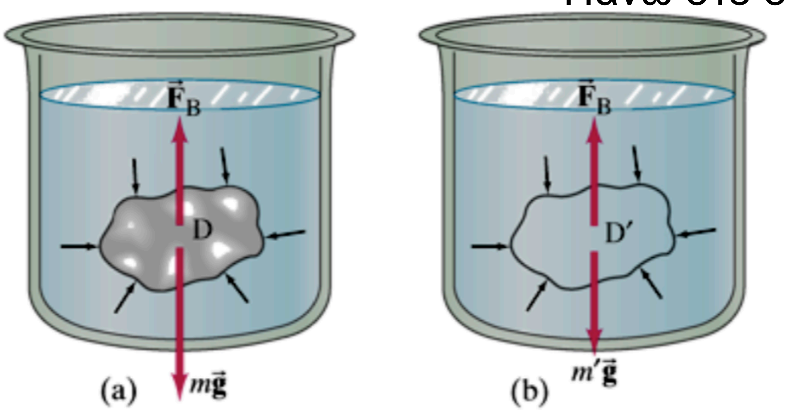


$$F_{Αν.} = F_2 - F_1 = \rho_{ρευσ.} g A (h_2 - h_1)$$

$$F_{Αν.} = \rho_{ρευσ.} g A \Delta h = \rho_{ρευσ.} g V$$

$$\boxed{F_{Αν.} = F_{Buoyancy} = m_{ρευσ.} g}$$

Θεωρήστε ένα σώμα τυχαίας μορφής που είναι βυθισμένο σε ρευστό. Πάνω στο σώμα ασκούνται η δύναμη της άνωσης και το βάρος του.

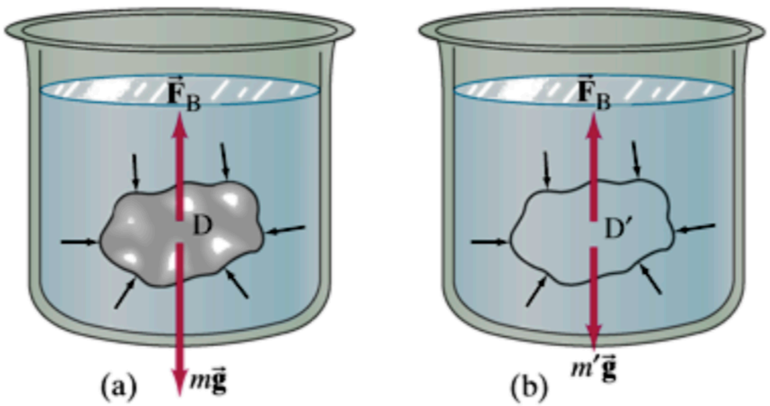


Για να προσδιορίσουμε την δύναμη της άνωσης θεωρούμε ένα σώμα D' το οποίο αυτή τη φορά έχει το ίδιο σχήμα και μέγεθος με το αρχικό σώμα αλλά τώρα είναι φτιαγμένο από το ίδιο υλικό του ρευστού και βρίσκεται στο ίδιο βάθος

Θεωρήστε ότι το σώμα αυτό του ρευστού διαχωρίζεται από το υπόλοιπο ρευστό με μία νοητή μεμβράνη.

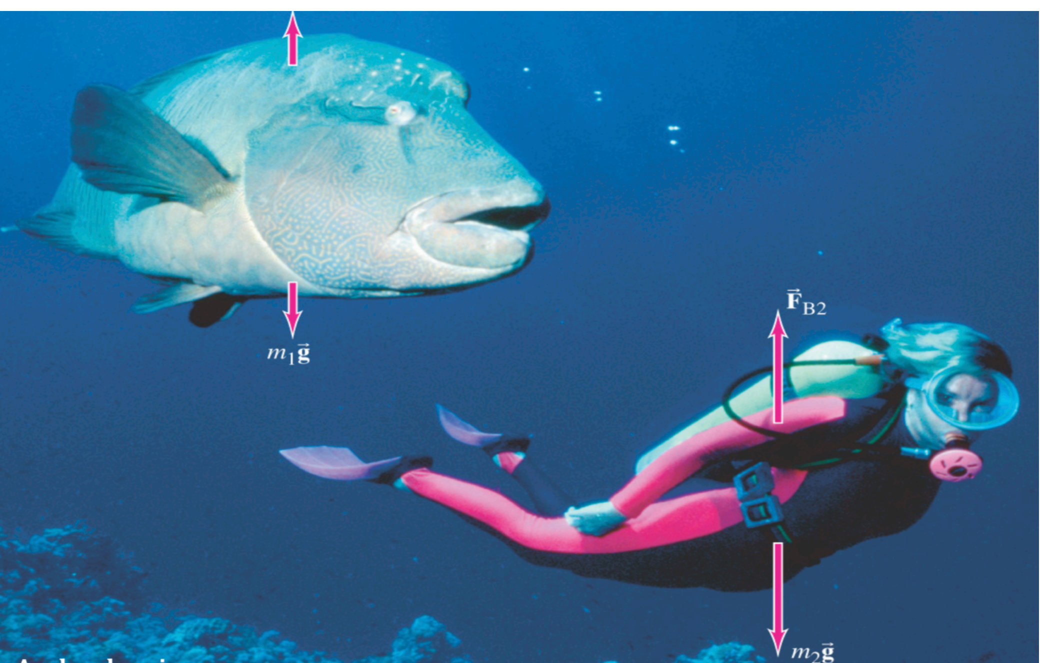
Αρχή του Αρχιμήδη

Η δύναμη της άνωσης σε αυτό το νοητό σώμα αποτελούμενο από το ρευστό θα είναι ακριβώς ίδια με την δύναμ,η της άνωσης στο πραγματικό σώμα γιατί το περιβάλλον ρευστό το οποίο ασκεί τη δύναμη F είναι ακριβώς στην ίδια κατάσταση.



Το σώμα D΄ του ρευστού είναι σε ισορροπία.

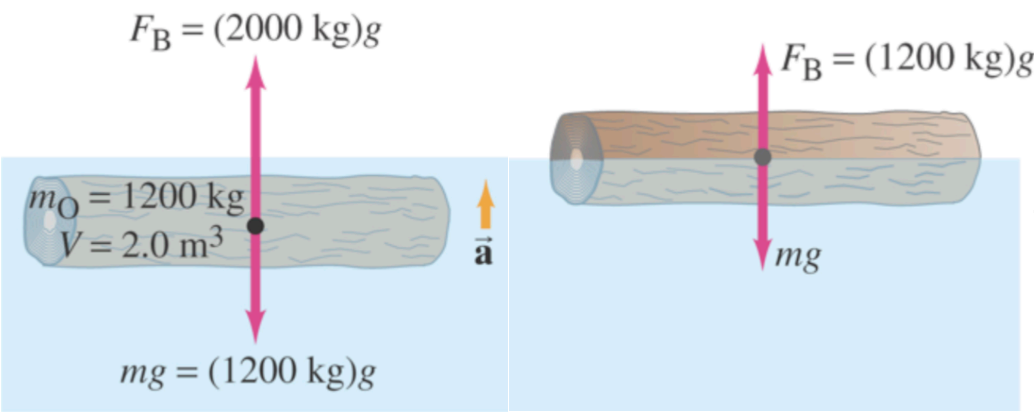
Η δύναμη της άνωσης ισούται με το βάρος του νοητού σώματος D΄ του ρευστού του οποίου ο όγκος ισούται με τον όγκο του σώματος που είναι βυθισμένο στο ρευστό.



Η συνισταμένη δύναμη σε ένα αντικείμενο είναι η διαφορά της δύναμης της βαρύτητας και της δύναμης της άνωσης.

Άνωση και αρχή του Αρχιμήδη

Αν το σώμα που είναι βυθισμένο στο ρευστό έχει πυκνότητα μικρότερη από αυτή του ρευστού τότε το σώμα δέχεται μία συνισταμένη δύναμη προς τα πάνω που το ανυψώνει μέχρις ότου βρεθεί εκτός του ρευστού.

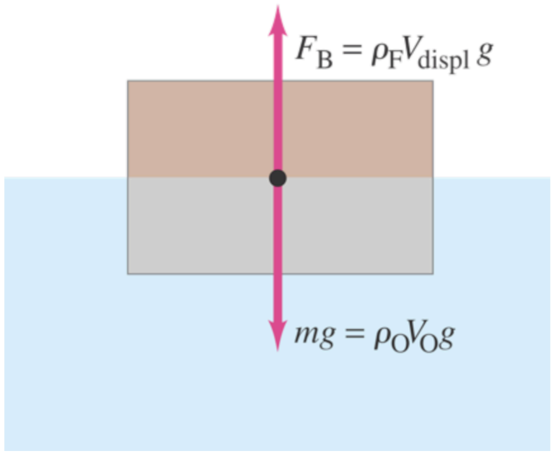


Ο κορμός του ξύλου που είναι πλήρως βυθισμένος θα ανυψωθεί επιτυχανόμενος προς τα πάνω γιατί

$$F_B > F_g = mg$$

Θα έρθει σε ισορροπία όταν $F_B = mg$ που αντιστοιχεί σε 12kg νερού ή $1.2m^3$ εκτοπισμένου νερού

Για σώμα που είναι μερικώς βυθισμένο



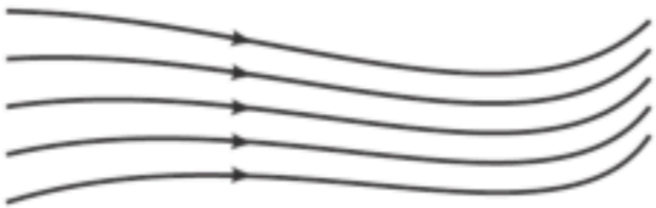
$$F_B = mg \Rightarrow \rho_F V_F g = \rho_o V_o g \Rightarrow \frac{\rho_F}{\rho_o} = \frac{V_o}{V_F}$$

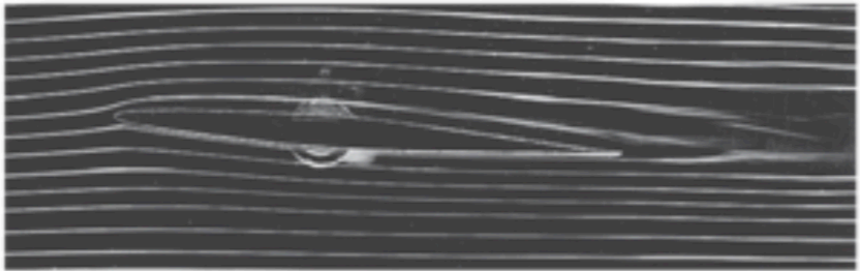
ρ_F: η πυκνότητα του ρευστού
ρ_o: η πυκνότητα του σώματος
V_F: ο όγκος του ρευστού που εκτοπίστηκε
$V_{o.}$: ο συνολικός όγκος του σώματος

Δυναμική ρευστών – Ρυθμός ροής και εξίσωση συνέχειας

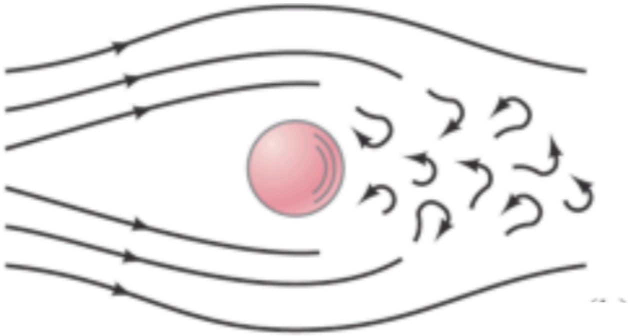
Αν τα μόρια του ρευστού ακολουθούν στρωτή τροχία, λέμε ότι η ροή του ρευστού είναι στρωτή ή στάσιμη ή μόνιμη (laminar).

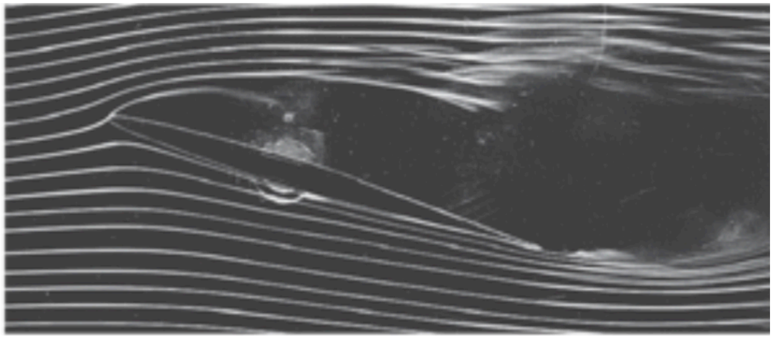
Η ταχύτητα του ρευστού σε κάθε σημείου του χώρου παραμένει σταθερή συναρτήσει του χρόνου.





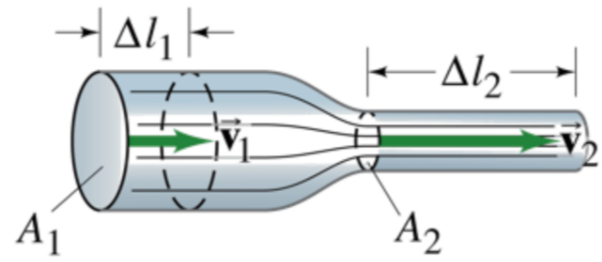
Όταν η ταχύτητα υπερβεί μία κρίσιμη τιμή τότε η ροή γίνεται τυρβώδης ή μή στάσιμη ή στροβιλώδης. Η ροή δεν είναι στρωτή αλλά άτακτη και ακανόνιστη





- Θα εξετάσουμε στρωτή ροή ρευστού
- Ο ρυθμός ροής μάζας είναι η μάζα που περνά από κάποιο δεδομένο σημείο ανά μονάδα χρόνου
- Ο ρυθμός ροής μάζας ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε σημεία θα πρέπει να είναι ίδιος αρκεί να μην υπάρχει ρευστό το οποίο προστίθεται ή αφαιρείται. ‘Ετσι πέρνουμε την εξίσωση συνέχειας

Εξίσωση συνέχειας



Θεωρήστε στρωτή ροή ρευστού μέσω ενός σωλήνα

Ο ρυθμός ροής μάζας του ρευστού $= \dfrac{\Delta m}{\Delta t}$

Ο όγκος του ρευστού που περνά από την επιφάνεια A_1 σε χρόνο Δt είναι: $\Delta V_1 = A_1 \Delta l_1$

όπου Δl_1 είναι η απόσταση που καλύπτει το ρευστό σε χρόνο Δt.

Αλλά η ταχύτητα του ρευστού που περνά από το σημείο 1 είναι: $\upsilon_1 = \Delta l_1 / \Delta t$

Οπότε θα έχουμε: $\dfrac{\Delta m_1}{\Delta t} = \dfrac{\rho \Delta V_1}{\Delta t} = \dfrac{\rho A_1 \Delta l_1}{\Delta t} \Rightarrow \dfrac{\Delta m_1}{\Delta t} = \rho A_1 \upsilon_1$

Με τον ίδιο τρόπο, σε ένα οποιοδήποτε άλλο σημείο 2 του σωλήνα θα έχουμε: $\dfrac{\Delta m_2}{\Delta t} = \rho A_2 \upsilon_2$

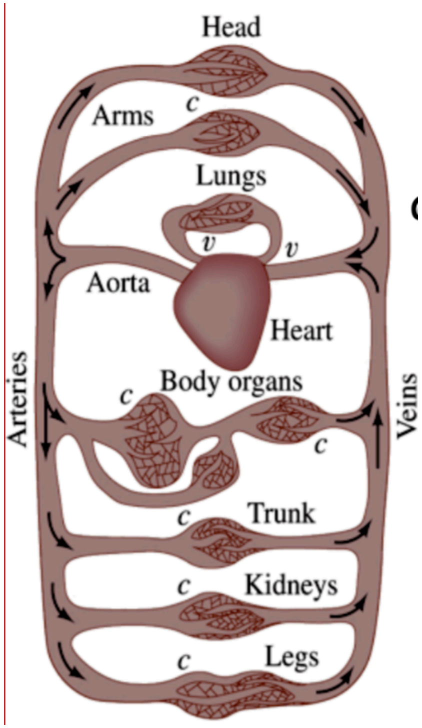
Από τη στιγμή που δεν χάνεται ρευστό ανάμεσα στα σημεία 1 και 2 τότε η μάζα που διαπερνά τα σημεία αυτά στο ίδιο χρονικό διάστημα θα πρέπει να είναι ίδια :

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t} \Rightarrow \rho A_1 \upsilon_1 = \rho A_2 \upsilon_2 \boxed{\Rightarrow A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2}$$ **Εξίσωση συνέχειας**

Εξίσωση συνέχειας – ανθρώπινο σώμα

Στους ανθρώπους το αίμα κινείται από την καρδία στην αορτή μέσω της οποίας διοχετεύεται στις υπόλοιπες αρτηρίες

Από τις αρτηρίες αυτές διοχετεύεται σε δευτερεύουσες αρτηρίες και από κεί σε εκατομύρια αγγεία



Το αίμα επιστρέφει στην καρδιά μέσω των φλεβών

Η ακτίνα της αορτής είναι 1.2cm και η ταχύτητα του αίματος που περνά από την αορτή είναι 40cm/s

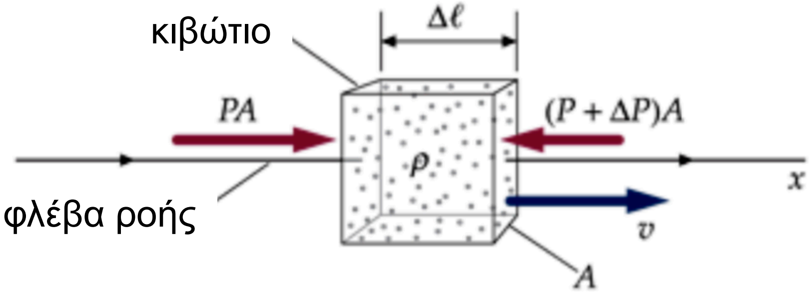
Ένα αγγείο έχει ακτίνα περίπου 0.0004cm και η ταχύτητα του αίματος μέσω του αγγείου είναι 0.0005cm/s

- Υπολογίστε τον αριθμό των αγγείων στο ανθρώπινο σώμα

$$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 \pi r_{\alpha\gamma\gamma.}^2 = \upsilon_1 N \pi r_{\alpha o\rho.}^2 \Rightarrow N = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\frac{r_{\alpha o\rho.}^2}{r_{\alpha\gamma\gamma.}^2} \Rightarrow N = 7\times 10^9$$

Εξίσωση Bernoulli

Θεωρήστε ένα μικρό κιβώτιο αέρα το οποίο κινείται κατά μήκος μιας φλέβας ροής (σύνολο ρευματικών γραμμών) σε μια περιοχή μειωμένης πίεσης



2ος νόμος του Newton: $F = m\dfrac{d\upsilon}{dt}$

$$F = PA - (P + \Delta P)A = -A\Delta P$$

θεωρήστε ότι το κιβώτιο είναι πάρα πολύ μικρό και η ΔP μπορεί να εκφραστεί ακριβώς χρησιμοποιώντας διαφορική προσέγγιση:

$$\frac{\Delta P}{\Delta l} = \frac{dP}{dx} \Rightarrow \Delta P = \frac{dP}{dx}\Delta l$$

Αντικατάσταση θα δώσει: $-A\dfrac{dP}{dx}\Delta l = m\dfrac{d\upsilon}{dt} = \rho A \Delta l \dfrac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow dP = -\rho\dfrac{d\upsilon}{dt}dx = -\rho\upsilon d\upsilon$

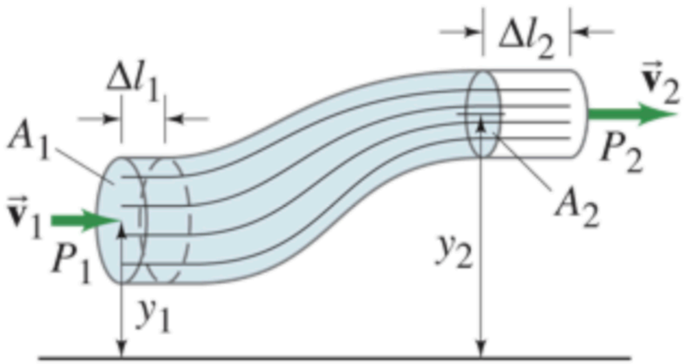
Ολοκληρώνοντας: $\displaystyle\int_{P_1}^{P_2} dP = -\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \rho\upsilon\, d\upsilon \Rightarrow P_2 - P_1 = -\frac{1}{2}\rho\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right)$

Ισοδύναμα $\boxed{P_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2}$ **Εξίσωση Bernoulli**

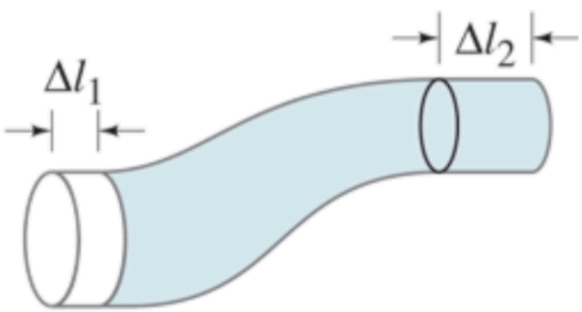
Εξίσωση Bernoulli

Ένα ρευστό θα μπορούσε να αλλάξει ακόμα και ύψος

Εξετάζοντας το έργο το οποίο παράγεται καθώς κινείται βρίσκουμε ότι



$$P + \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 + \rho g y = \sigma\tau\alpha\theta.$$



Η εξίσωση του Bernoulli μας λέει ότι:

όταν η ταχύτητα μειώνεται ➡ η πίεση αυξάνεται

όταν η ταχύτητα αυξάνεται ➡ η πίεση ελαττώνεται

Εφαρμογή της εξίσωσης του Bernoulli

Η ανύψωση του πτερού ενός αεροπλάνου οφείλεται εν μέρει στη διαφορά ταχυτήτων του αέρα και πιέσεων στις δύο επιφάνειες του πτερού.