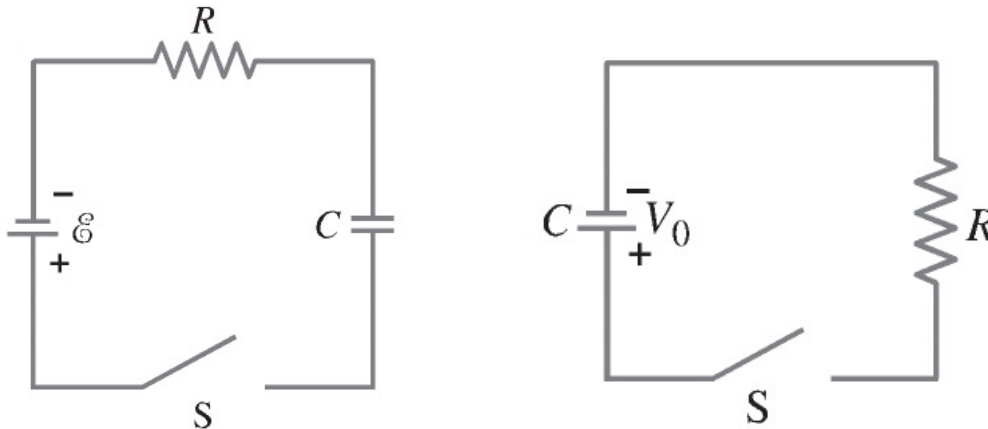


Κυκλώματα RC

Κύκλωμα RC

Ένα κύκλωμα RC αποτελείται από ένα αντιστάτη αντίστασης R και έναν πυκνωτή χωρητικότητας C συνδεδεμένα σε σειρά.

Σε κυκλώματα συνεχούς ρεύματος στα οποία υπάρχουν πυκνωτές, το ρεύμα μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου μέχρι να φορτιστεί ή να αποφορτιστεί ο πυκνωτής. Το ρεύμα έχει την ίδια φορά.



Δύο διαφορετικές διατάξεις κυκλώματος RC .

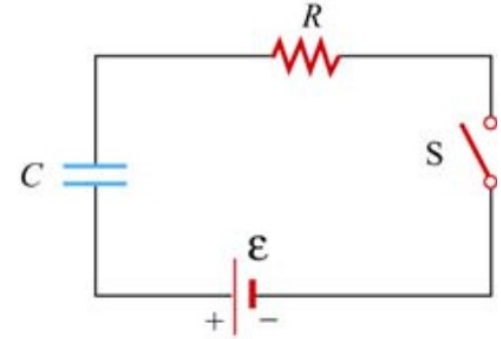
Τα κυκλώματα RC έχουν ευρεία εφαρμογή σε διάφορες διατάξεις: ο μηχανισμός των υαλοκαθαριστήρων των αυτοκινήτων, ο χρονισμός των σημάτων της τροχαίας, ο βηματοδότης, τα flashes των φωτογραφικών μηχανών είναι μερικές από τις εφαρμογές των κυκλωμάτων RC στην καθημερινή ζωή

Φόρτιση Πυκνωτή

Εξετάζουμε το κύκλωμα RC του σχήματος.

Ο πυκνωτής συνδέεται με μια πηγή ΗΕΔ, \mathcal{E} .

Ο πυκνωτής αρχικά είναι αφόρτιστος, $Q(t \leq 0) = 0$



Για $t \leq 0$ ο πυκνωτής συμπεριφέρεται σαν διακόπτης και δεν υπάρχει δυναμικό στα άκρα του

Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ο διακόπτης S κλείνει και
ρεύμα αρχίζει να ρέει σύμφωνα με την εξίσωση:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$, η διαφορά δυναμικού στους πόλους της μπαταρίας είναι ίδια με αυτή που υπάρχει στα άκρα της αντίστασης.

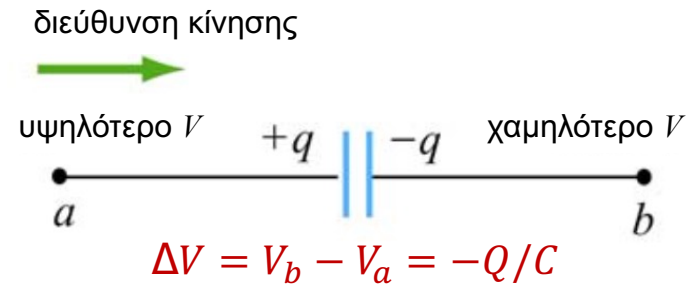
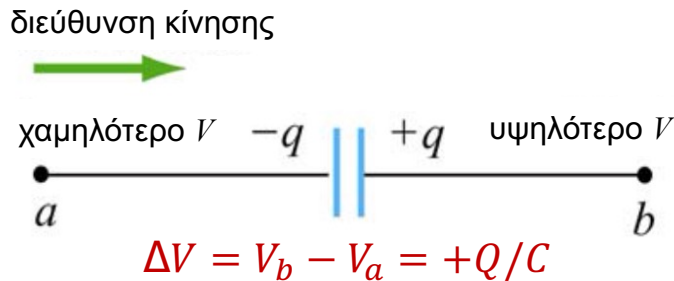
Ξεκινά η φόρτιση του πυκνωτή.

Καθώς ο πυκνωτής αρχίζει να φορτίζεται η διαφορά δυναμικού στα άκρα του αρχίζει να αυξάνει με το χρόνο:

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

Φόρτιση Πυκνωτή

Χρησιμοποιούμε τους κανόνες *Kirchhoff* για κυκλώματα με πυκνωτές:



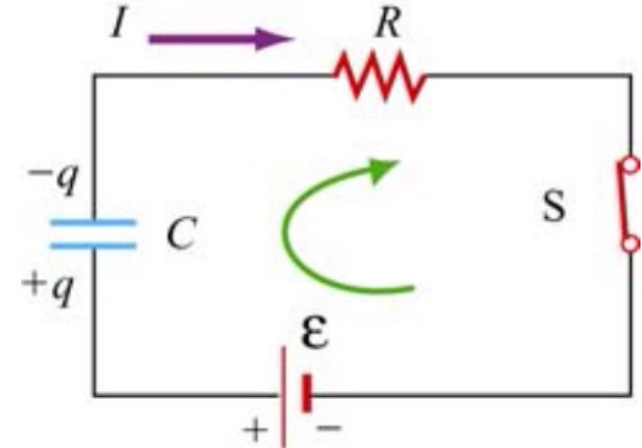
Κινούμαστε στον κλειστό βρόχο του κυκλώματος σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού:

$$\mathcal{E} - V(t) - I(t)R = 0 \Rightarrow \mathcal{E} - \frac{Q(t)}{C} - \frac{dQ(t)}{dt}R = 0$$

Το ρεύμα είναι ίδιο σε όλο το κύκλωμα ➡

Το ρεύμα στην αντίσταση ίσο με το ρυθμό αύξησης του φορτίου στον πυκνωτή

- Το **ρεύμα ωστόσο αρχίζει να ελαττώνεται** γιατί το φορτίο που συσσωρεύεται στον πυκνωτή δυσκολεύει την συσσώρευση επιπλέον φορτίου στον πυκνωτή



Φόρτιση Πυκνωτή

Όταν το φορτίο φθάσει στη μέγιστη τιμή του Q_{max} τότε το ρεύμα μηδενίζεται εφόσον δεν υπάρχει μεταβολή του φορτίου

Επομένως μπορούμε να έχουμε: $I(t)R = \mathcal{E} - V(t)$

Δηλαδή, ο πυκνωτής που φορτίζεται ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση 1^{ου} βαθμού

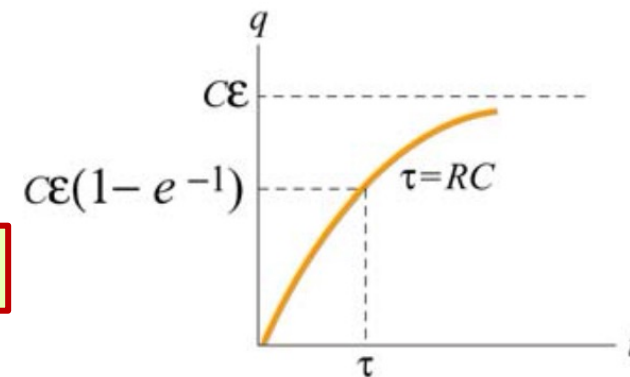
$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{1}{R} \left(\mathcal{E} - \frac{Q(t)}{C} \right) \quad \text{Λύνουμε την εξίσωση με χωρισμό μεταβλητών:}$$

$$\frac{dQ(t)}{\left(\mathcal{E} - \frac{Q(t)}{C} \right)} = \frac{1}{R} dt \Rightarrow \frac{dQ(t)}{(\mathcal{E}C - Q(t))} = \frac{1}{RC} dt \Rightarrow \frac{dQ(t)}{(Q(t) - \mathcal{E}C)} = -\frac{1}{RC} dt$$

$$\text{Ολοκληρώνουμε και τα δύο σκέλη της εξίσωσης: } \int_t^Q \frac{dQ'(t)}{(Q'(t) - \mathcal{E}C)} = \int_0^t -\frac{1}{RC} dt' \Rightarrow$$

$$\ln \left(\frac{Q - \mathcal{E}C}{\mathcal{E}C} \right) = -\frac{1}{RC} t \Rightarrow \frac{Q - \mathcal{E}C}{\mathcal{E}C} = e^{-t/RC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(t) = \mathcal{E}C [1 - e^{-t/RC}] \Rightarrow \boxed{Q(t) = Q_{max} [1 - e^{-t/RC}]}$$



Φόρτιση Πυκνωτή

Εφόσον ξέρουμε το φορτίο στον πυκνωτή, μπορούμε να βρούμε το δυναμικό στα άκρα του

$$Q(t) = Q_{max}[1 - e^{-t/RC}] \Rightarrow V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \varepsilon[1 - e^{-t/RC}]$$

Η γραφική του δυναμικού είναι παρόμοια με του φορτίου.

Μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα ($t \rightarrow \infty$) η τιμή του φορτίου προσεγγίζει τη μέγιστη τιμή:

$$Q(t = \infty) = Q_{max} = \varepsilon C$$

Τη χρονική στιγμή που ο πυκνωτής αποκτά το μέγιστο φορτίο, η διαφορά δυναμικού στα άκρα του γίνεται μέγιστη και ίση με την εφαρμοζόμενη τάση της πηγής

$$V_C(t = \infty) = \frac{Q(t = \infty)}{C} = \frac{Q_{max}}{C} = \varepsilon$$

Η διεργασία της φόρτισης σταματά

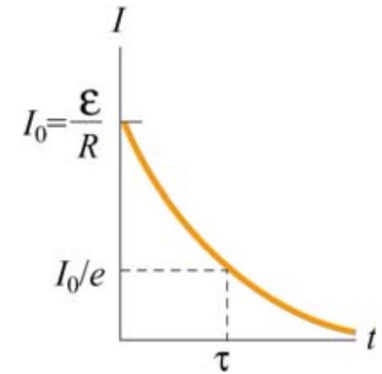
➤ Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι: $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{Q_{max}}{RC} e^{-t/RC} \Rightarrow$

➤ Αλλά: $Q_{max} = \varepsilon C \Rightarrow \frac{Q_{max}}{RC} = \frac{\varepsilon}{R} = I_0$ επομένως: $I(t) = I_0 e^{-t/RC} \Rightarrow$

Φόρτιση Πυκνωτή

- Το ρεύμα επομένως σε ένα κύκλωμα φόρτισης ελαττώνεται εκθετικά με τον χρόνο: $I(t) = I_0 e^{-t/RC} \Rightarrow I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$

όπου $\tau = RC$ χρονική σταθερά



- Οι μονάδες μέτρησης της σταθεράς αυτής στο SI είναι:

$$[\Omega][F] = ([V]/[A])([C]/[V]) = [C]/[C]/[T] = [T]$$

- Αντιπροσωπεύει τον χρόνο απόσβεσης της εκθετικής συνάρτησης και ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση: $I(t + \tau) = I(t)e^{-1}$

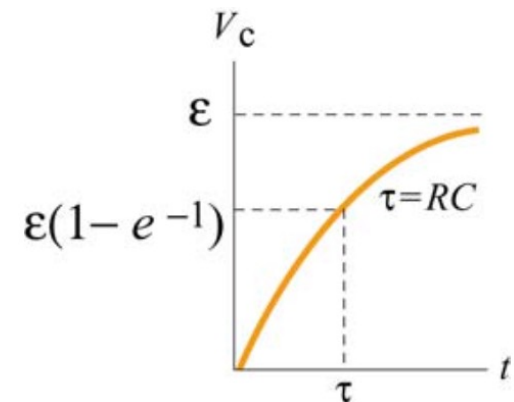
- Μετά από $t = \tau$, το ρεύμα ελαττώνεται κατά $e^{-1} = 0.368$

- ✓ Ανάλογα μπορούμε να γράψουμε την τάση στα άκρα του πυκνωτή: $V_C(t) = \epsilon[1 - e^{-t/RC}] \Rightarrow V_C(t) = \epsilon[1 - e^{-t/\tau}]$

□ Για $t = 0$, $V_C = 0$

□ Για $t = \tau$, το δυναμικό στα άκρα του πυκνωτή έχει αυξηθεί κατά:

$(1 - e^{-1}) = 0.632$ της τελικής τιμής. Επομένως $V_C(t = \tau) = 0.632\epsilon$

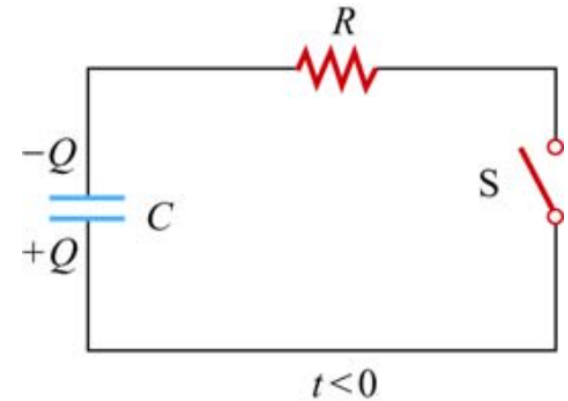


Εκφόρτιση πυκνωτή

Εξετάζουμε το κύκλωμα RC του σχήματος.

Δεν υπάρχει πηγή τάσης στο κύκλωμα.

Ο πυκνωτής αρχικά είναι φορτισμένος με φορτίο,
 $Q(t \leq 0) = Q$



Για $t \leq 0$ ο διακόπτης είναι ανοικτός και η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή είναι: $V_C = Q/C$

Το κύκλωμα είναι ανοικτό και δεν διαρρέεται από ρεύμα. Επομένως: $V_R = 0$

Το χρονική στιγμή $t = 0$ ο διακόπτης S κλείνει και ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται

Ο πυκνωτής συμπεριφέρεται ως πηγή δυναμικού για το κύκλωμα και ρεύμα αρχίζει να το διαρρέει

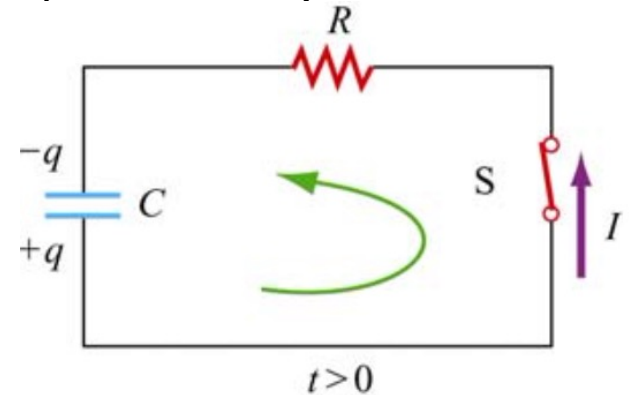
Καθώς ο πυκνωτής εκφορτίζεται, ηλεκτρόνια μετακινούνται από τον αρνητικό οπλισμό του πυκνωτή μέσω του σύρματος στον θετικό οπλισμό του πυκνωτή. Σαν αποτέλεσμα η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή μειώνεται

Εκφόρτιση πυκνωτή

Χρησιμοποιούμε τους κανόνες *Kirchhoff* για κυκλώματα με πυκνωτές:

Κινούμαστε στον κλειστό βρόχο του κυκλώματος αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού:

$$V(t) - I(t)R = 0 \Rightarrow \frac{Q(t)}{C} - I(t)R = 0$$



Το ρεύμα το οποίο ρέει από τον θετικό οπλισμό είναι ανάλογο με το φορτίο στον οπλισμό: $I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt}$

Το αρνητικό πρόσημο στην προηγούμενη σχέση οφείλεται στο γεγονός ότι το φορτίο ελαττώνεται.

Η παραπάνω εξίσωση του βρόχου γράφεται: $\frac{Q(t)}{C} + \frac{dQ(t)}{dt}R = 0$

Η εξίσωση είναι μια διαφορική εξίσωση 1^{ου} βαθμού που μπορεί να λυθεί με διαχωρισμό μεταβλητών

$$\frac{Q(t)}{C} + \frac{dQ(t)}{dt}R = 0 \Rightarrow \frac{Q(t)}{C} = -R \frac{dQ(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dQ(t)}{Q(t)} = -\frac{dt}{RC}$$

Εκφόρτιση πυκνωτή

Καταλήξαμε στην διαφορική εξίσωση: $\frac{dQ(t)}{Q(t)} = -\frac{dt}{RC}$

Ολοκλήρωση θα δώσει:

$$\int_{Q_{max}}^Q \frac{dQ'(t)}{Q'(t)} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \Rightarrow \ln\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \boxed{Q(t) = Q_{max}e^{-t/RC}}$$

Το δυναμικό στα άκρα του πυκνωτή βρίσκεται διαιρώντας το φορτίο με την χωρητικότητα. Θα έχουμε:

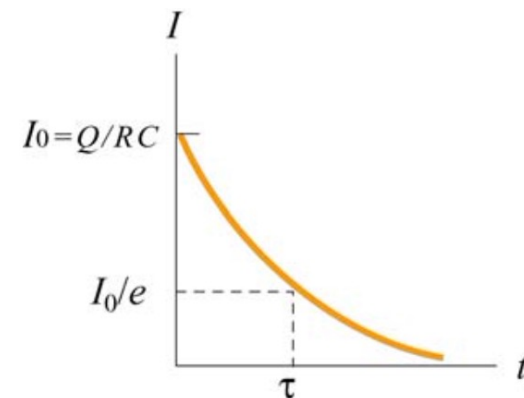
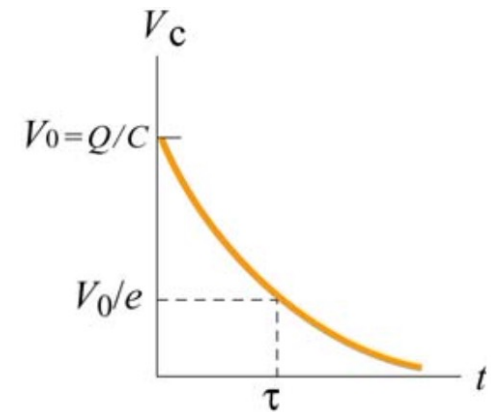
$$V = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_{max}}{C} e^{-t/RC} \Rightarrow \boxed{V = V_0 e^{-t/RC}}$$

Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα ελαττώνεται εκθετικά.

Μπορούμε να βρούμε το ρεύμα διαφορίζοντας την εξίσωση του φορτίου.

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{Q_{max}}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow I(t) = I_0 e^{-t/RC}}$$



Παράδειγμα: RC κύκλωμα

Θεωρήστε ότι στο διπλανό κύκλωμα ο διακόπτης είναι ανοικτός για μεγάλο χρονικό διάστημα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο διακόπτης κλείνει.

(α) Ποια η χρονική σταθερά πριν κλείσει ο διακόπτης;

Πριν κλείσει ο διακόπτης, οι δύο αντιστάτες R_1 και R_2 είναι συνδεδεμένοι σε σειρά με τον πυκνωτή.

Η ολική αντίσταση είναι: $R_{ολ.} = R_1 + R_2$

Η χρονική σταθερά είναι: $\tau = R_{ολ.}C = (R_1 + R_2)C$

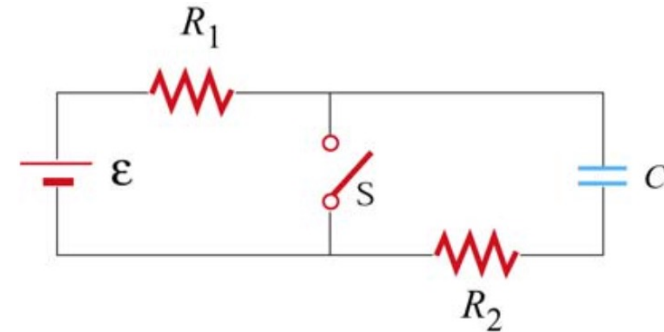
Το φορτίο το οποίο είναι αποθηκευμένο στον πυκνωτή είναι: $Q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-t/\tau})$

(β) Ποια η χρονική σταθερά αφότου κλείσει ο διακόπτης;

Όταν κλείσει ο διακόπτης, ο βρόχος στα δεξιά γίνεται ένα κύκλωμα αποφόρτισης πυκνωτή.

Η χρονική σταθερά του κυκλώματος αυτού είναι: $\tau' = R_2C$

Ο πυκνωτής χάνει φορτίο σύμφωνα με την εξίσωση: $Q(t) = C\varepsilon e^{-t/\tau'}$



Παράδειγμα: RC κύκλωμα

(Y) Ποιο το ρεύμα που διαρρέει τον διακόπτη συναρτήσει του χρόνου αφότου κλείσει ο διακόπτης;

Το ρεύμα που διαρρέει τον διακόπτη αποτελείται από δύο συνιστώσες:

Το σταθερό ρεύμα, I_1 , που παρέχει στο κύκλωμα η πηγή μέσω του αριστερού βρόχου και το ρεύμα, I_2 , που παρέχει στο κύκλωμα ο αποφορτιζόμενος πυκνωτής μέσω του δεξιού βρόχου του κυκλώματος

Τα ρεύματα είναι: $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1}$

$$I'_2(t) = \frac{dq'}{dt} = -\frac{C\mathcal{E}}{\tau'} e^{-t/\tau'} \Rightarrow I'_2(t) = -\frac{\mathcal{E}}{R_2} e^{-t/CR_2}$$

Το αρνητικό πρόσημο στο I'_2 δηλώνει ότι η φορά του ρεύματος αποφόρτισης είναι αντίθετη αυτής της φόρτισης

Εφόσον τόσο το I_1 όσο και το I'_2 έχουν φορά από πάνω προς τα κάτω καθώς διαπερνούν τον διακόπτη, το συνολικό ρεύμα που περνά τον διακόπτη είναι:

$$I_{ολ.} = I_1 + I'_2(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} + \frac{\mathcal{E}}{R_2} e^{-t/CR_2}$$