Στροφορμή

Στροφορμή

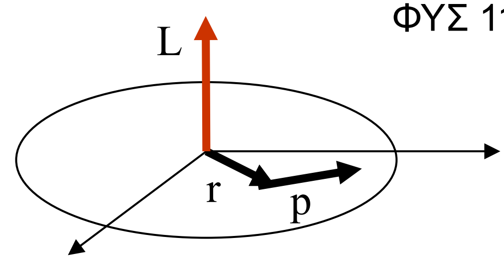
- Ένα από τα βασικά μεγέθη που σχετίζονται με την περιστροφική κίνηση είναι η στροφορμή
- Θυμηθείτε ότι για μάζα m που κινείται με ταχύτητα v ορίζουμε την ορμή p=mv (όπου η ταχύτητα μετριέται ως προς σύστημα αναφοράς με αρχή O).
  - Η μεταβολή της ορμής σχετίζεται με την ολική δύναμη βάση του 2ου νόμου του Newton.
- Η στροφορμή έχει την παρόμοια σημασία:

Οποιαδήποτε η τροχιά ενός σώματος, ευθύγραμμη, καμπυλόγραμμη η **στροφορμή L** του σώματος σε κάθε σημείο της τροχιάς του **ως προς ένα αδρανειακό σημείο αναφοράς** (όπως η αρχή των αξόνων) δίνεται από:

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$$

Οι διαστάσεις της στροφορμής είναι Kgm^2/sec

Στροφορμή $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$



- Το μέτρο και η διεύθυνση της στροφορμής σχετίζονται πάντα με την αρχή του συστήματος συντεταγμένων ή το σημείο αναφοράς ως προς το οποίο μετρούμε την στροφορμή.
- Αν η διεύθυνση της ταχύτητας του σώματος περνά από το σημείο αναφοράς τότε η στροφορμή είναι μηδέν.
- Θα αποδείξουμε τώρα το ανάλογο του 2^{ου} νόμου του Newton σε περιστροφική κίνηση:
  - Εφαρμόζοντας μια ροπή μπορούμε να αλλάξουμε την στροφορμή ενός σώματος:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F} \;=\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)}{dt}-\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}\Rightarrow$$

$$\vec{\tau}=\frac{d\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)}{dt}-\vec{\mathrm{v}}\times m\vec{\mathrm{v}}\Rightarrow\vec{\tau}=\frac{d\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)}{dt} \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{\tau}=\frac{d\vec{L}}{dt}}$$

Αν $\sum\vec{\tau}=0$ τότε $\vec{L}=\sigma\tau\alpha\theta.$ ⇒ **Νόμος διατήρησης στροφορμής**

Προσοχή!!!!

- Η εξίσωση για την μεταβολή της στροφορμής: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ ισχύει μόνο όταν:

  (α) Η αρχή είναι ένα σταθερό σημείο

  (β) Όταν το σημείο αναφοράς είναι το CM

- Είναι μια διανυσματική εξίσωση και επομένως έχουμε 3 εξισώσεις

$$\tau_x = \frac{dL_x}{dt}, \qquad \tau_y = \frac{dL_y}{dt}, \qquad \tau_z = \frac{dL_z}{dt}$$

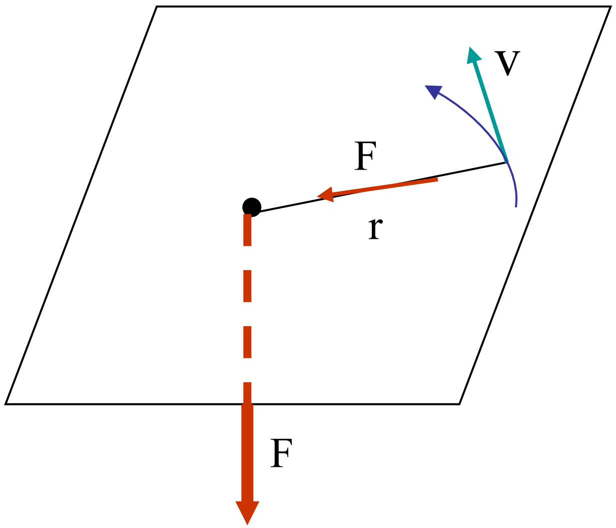
- Προσοχή: Η ροπή και η στροφορμή πρέπει να υπολογίζονται ως προς το ίδιο σημείο ή άξονα

- Για να βρούμε την στροφορμή ενός συστήματος προσθέτουμε τις στροφορμές κάθε ξεχωριστού σώματος του συστήματος:

$$L_z = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = I\omega \qquad \sum \tau_{\varepsilon\xi} = \frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

Παράδειγμα

Σώμα εξαρτημένο στην άκρη ενός νήματος, σε επίπεδο, με δύναμη κάθετη στο επίπεδο. Αλλάζετε το r, τι συμβαίνει στη στροφορμή;



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\mathrm{v}r\sin\theta \Rightarrow \vec{L} = m\mathrm{v}r \quad (\theta=90^0)$$

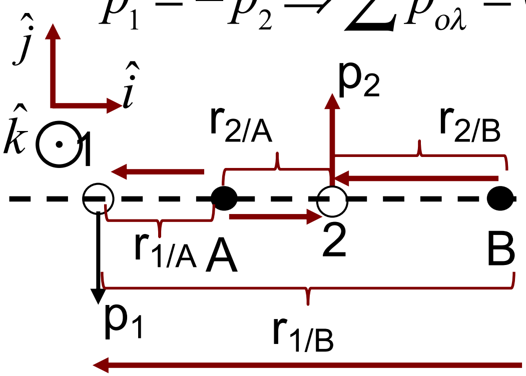
Για 2 διαφορετικές θέσεις του σώματος θα έχουμε:

$$m\mathrm{v}_1 r_1 = m\mathrm{v}_2 r_2 \Rightarrow \mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2 \frac{r_2}{r_1}$$

Στροφορμή ως προς 2 διαφορετικά σημεία

Θεωρούμε δύο σημειακά σωματίδια 1 και 2 τα οποία κινούνται με ίσες και αντίθετες ορμές. Η ορμή του συστήματος επομένως είναι ίση με 0.

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \Rightarrow \sum \vec{p}_{o\lambda} = \vec{0} \qquad \left|\vec{p}_1\right| = \left|\vec{p}_2\right| = p$$



$$\left(r_{12} = r_{1A} + r_{2A}\right)$$

Έστω δύο σημεία A και B στο χώρο με σύστημα συντεταγμένων Τα διανύσματα θέσης των σωματιδίων 1 και 2 ως προς τα σημεία A και B είναι $\vec{\mathrm{r}}_{1/\mathrm{A}}, \vec{r}_{2/A}, \vec{r}_{1/B}, \vec{r}_{2/B}$

Η στροφορμή του συστήματος των σωματιδίων ως προς το A:

$$\vec{L}_A = \vec{r}_{1/A} \times \vec{p}_1 + \vec{r}_{2/A} \times \vec{p}_2 = \left(-\left|\vec{r}_{1/A}\right|\right)\hat{i} \times \left|\vec{p}_1\right|\left(-\hat{j}\right) + \left|\vec{r}_{2/A}\right|\hat{i} \times \left|\vec{p}_2\right|\hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_A = pr_{1A}\hat{k} + pr_{2A}\hat{k} \Rightarrow \vec{L}_A = p\left(r_{1A} + r_{2A}\right)\hat{k} \Rightarrow \vec{L}_A = pr_{12}\hat{k} \qquad \textbf{(1)}$$

Η στροφορμή του συστήματος των σωματιδίων ως προς το σημείο B:

$$\vec{L}_B = \vec{r}_{1/B} \times \vec{p}_1 + \vec{r}_{2/B} \times \vec{p}_2 = \left(-\left|\vec{r}_{1/B}\right|\right)\hat{i} \times \left|\vec{p}_1\right|\left(-\hat{j}\right) + \left(-\left|\vec{r}_{2/B}\right|\right)\hat{i} \times \left|\vec{p}_2\right|\hat{j}$$

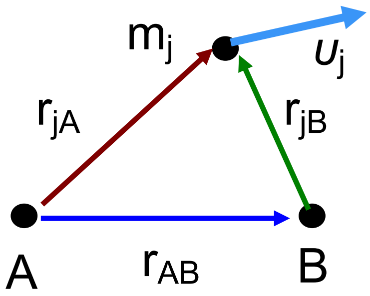
$$\Rightarrow \vec{L}_B = \left[\left(r_{1A} + r_{2A}\right) + r_{2B}\right]p\hat{k} - r_{2B}p\hat{k} \Rightarrow \vec{L}_B = \left(r_{1A} + r_{2A}\right)p\hat{k} \Rightarrow \vec{L}_B = pr_{12}\hat{k} \qquad \textbf{(2)}$$

Από (1) και (2) έχουμε: $\vec{L}_A = \vec{L}_B$

Όταν η ορμή του συστήματος είναι $\sum \vec{p}_{o\lambda} = \vec{0}$ τότε η στροφορμή του συστήματος είναι ανεξάρτητη της επιλογής του σημείου περιστροφής

Στροφορμή συστήματος σωμάτων

Θεωρούμε ένα σύστημα αποτελούμενο από Ν υλικά σημεία και δύο σημεία Α και Β.



Θεωρούμε μία τυχαία μάζα m_j που κινείται με ταχύτητα υ_j

Τα διανύσματα θέσης της μάζας ως προς Α και Β είναι: $\vec{r}_{j/A}, \vec{r}_{j/B}$

και το σχετικο διάνυσμα θέσης των Α και Β είναι: $\vec{r}_{AB}$

Η στροφορμή της μάζας m_j ως προς το Α είναι: $\vec{L}_A = \vec{r}_{jA} \times m_j \vec{\upsilon}_j$

Η στροφορμή του συστήματος ως προς το Α είναι: $\vec{L}_A^{\sigma\upsilon\sigma.} = \sum_{j=1}^{N} \vec{L}_{Aj} = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_{jA} \times m_j \vec{\upsilon}_j$ **(1)**

Παρόμοια, η στροφορμή του συστήματος ως προς το Β είναι: $\vec{L}_B^{\sigma\upsilon\sigma.} = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_{jB} \times m_j \vec{\upsilon}_j$ **(2)**

Αλλά έχουμε ότι: $\vec{r}_{Aj} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{Bj}$ και αντικαθιστούμε στην (1):

$$\vec{L}_A^{\sigma\upsilon\sigma.} = \sum_{j=1}^{N} \left(\vec{r}_{jB} + \vec{r}_{AB}\right) \times m_j \vec{\upsilon}_j \Rightarrow \vec{L}_A^{\sigma\upsilon\sigma.} = \sum_{j=1}^{N} \left(\vec{r}_{jB} \times m_j \vec{\upsilon}_j\right) + \sum_{j=1}^{N} \left(\vec{r}_{AB} \times m_j \vec{\upsilon}_j\right)$$

$$\Rightarrow \vec{L}_A^{\sigma\upsilon\sigma.} = \vec{L}_B^{\sigma\upsilon\sigma.} + \vec{r}_{AB} \times \sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j \Rightarrow \vec{L}_A^{\sigma\upsilon\sigma.} = \vec{L}_A^{\sigma\upsilon\sigma.} + \vec{r}_{AB} \times \vec{p}^{\sigma\upsilon\sigma.}$$

Αν η ορμή του συστήματος είναι $\vec{p}^{\sigma\upsilon\sigma.} = \vec{0}$ τότε η στροφορμή είναι η ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο. Η ορμή του συστήματος είναι 0 στο σύστημα αναφοράς του ΚΜ και άρα η L είναι η ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο στο σύστημα αναφοράς του ΚΜ

Στροφορμή

Είδαμε ότι $\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Αλλά ξέρουμε ότι $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

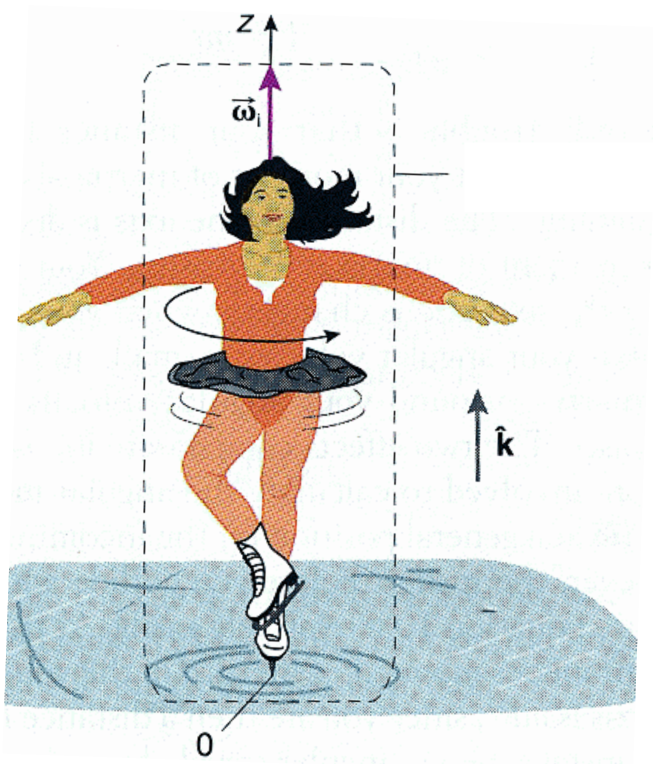
Η παραπάνω σχέση ισχύει για στερεό σώμα που περιστρέφεται γύρω από σταθερό σημείο ή σταθερό άξονα ή άξονα που περνά από το CM του και παραμένει παρ/λος προς την αρχική του διεύθυνση.

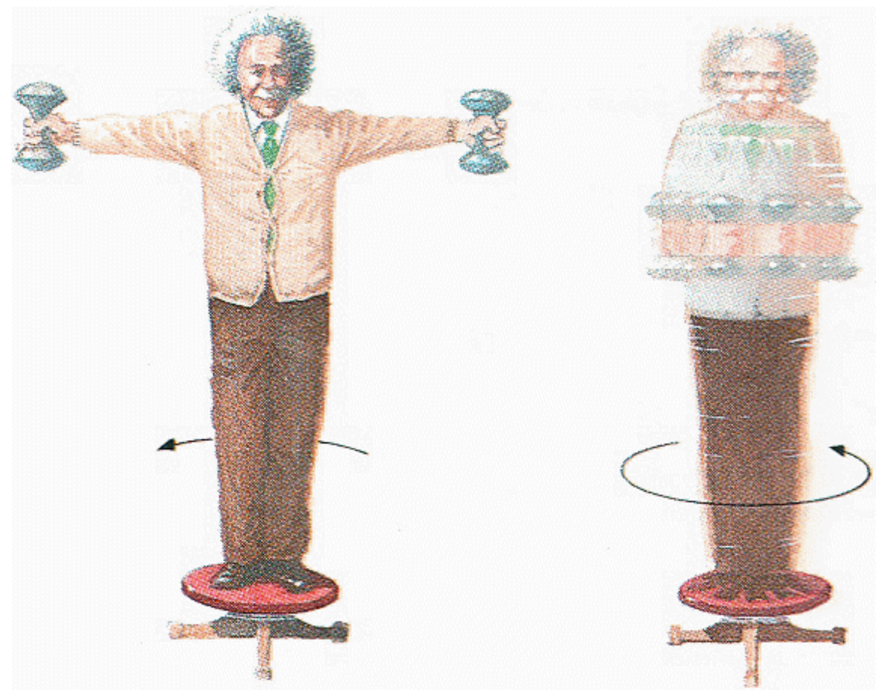
Αν η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών είναι μηδέν τότε $\vec{L}_i = \vec{L}_f$

σε αναλογία με διατήρηση της γραμμικής ορμής

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \quad \text{όταν} \quad \sum \vec{F}_{\varepsilon\xi.} = 0$$

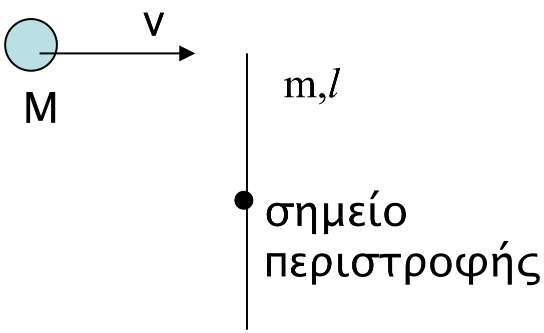
Τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα





Παράδειγμα

Μια μπάλα μάζας Μ συγκρούεται με ένα ραβδί που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το κέντρο του. Αν η κρούση είναι πλαστική ποια είναι η προκληθείσα γωνιακή ταχύτητα?



Λύση

Αρχικά υπολογίζουμε τη στροφορμή ως προς το σημείο περιστροφής.

Ως προς το σημείο αυτό η στροφορμή διατηρείται επειδή η εξωτερική δύναμη που δρα πάνω του δεν προκαλεί ροπή.

$$L_i = Mv\frac{l}{2} \quad \text{(στροφορμή μπάλας)}$$

$$L_f = I\omega = \left(I_{\mathrm{CM}}^{\rho\alpha\beta.} + I_{\mu\pi\alpha\lambda\alpha\varsigma}\right)\omega = \left(\frac{1}{12}ml^2 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)\omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\mathrm{M}vl/2}{\frac{ml^2}{12}+\frac{Ml^2}{4}} = \frac{\mathrm{M}vl}{\frac{ml^2}{6}+\frac{Ml^2}{2}}$$

Προσοχή: Σε περιπτώσεις που ένα σώμα παραμορφώνεται και αλλάζει η ροπή αδράνειας I, η διατήρηση της στροφορμής, L, λέει

$$I_{\mathrm{i}}\omega_{\mathrm{i}} = I_{\mathrm{f}}\omega_{\mathrm{f}}$$