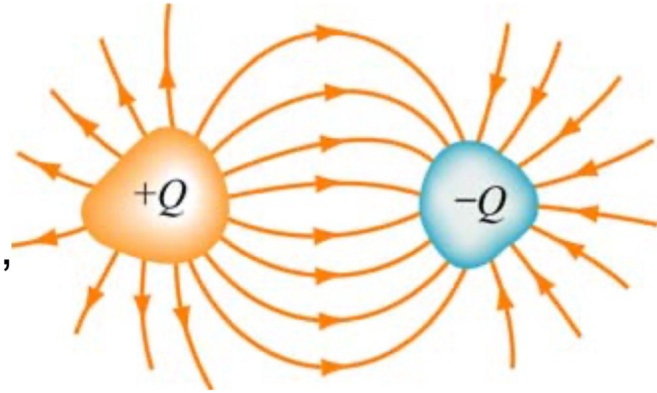
Πυκνωτές – Χωρητικότητα - Διηλεκτρικά

Χωρητικότητα και διηλεκτρικά

Ο πυκνωτής είναι μια διάταξη η οποία αποθηκεύει ηλεκτρικό φορτίο.

Οι πυκνωτές εν γένει έχουν διαφορετικό σχήμα και μέγεθος.



Βασικό χαρακτηριστικό είναι ότι αποτελούνται από δύο αγωγούς με ίσα και αντίθετα φορτία

Χρησιμοποιούνται στα ηλεκτρονικά κυκλώματα για:

- την αποθήκευση ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας,
- την καθυστέρηση μεταβολής του δυναμικού όταν συνδυαστούν με αντιστάσεις,
- το φιλτράρισμα μη επιθυμητών συχνοτήτων κάποιων σημάτων,
- τη δημιουργία κυκλωμάτων συντονισμού,
- ως διαιρέτες τάσης όταν συνδυαστούν με αντιστάσεις.

Στη βασική τους κατάσταση, αφόρτιστη κατάσταση, το φορτίο σε κάθε αγωγό του συστήματος, είναι μηδέν.

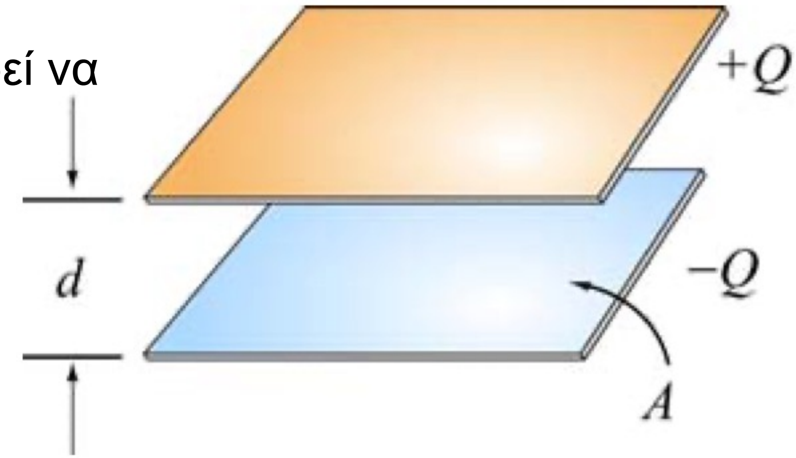
Κατά την φόρτισή τους, φορτίο *Q* μεταφέρεται από τον έναν αγωγό στον άλλο προσδίδοντας στον έναν αγωγό φορτίο +Q και στον άλλο φορτίο -*Q*.

Σαν αποτέλεσμα, έχουμε την δημιουργία διαφοράς δυναμικού ΔV με τον θετικά φορτισμένο αγωγό σε υψηλότερο δυναμικό από τον αρνητικά φορτισμένο αγωγό.

Το συνολικό φορτίο στον πυκνωτή είναι μηδέν ανεξάρτητα από το αν είναι φορτισμένος ή αφόρτιστος

Χωρητικότητα

Η απλούστερη διάταξη ενός πυκνωτή αποτελείται από δύο παράλληλες αγώγιμες πλάκες εμβαδού *A*, που απέχουν απόσταση *d* μεταξύ τους.



Πειραματικά, γνωρίζουμε ότι το φορτίο που μπορεί να αποθηκευτεί σε έναν πυκνωτή είναι ανάλογο της διαφοράς δυναμικού, Δ*V*.

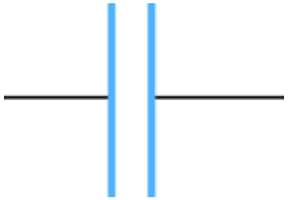
$$Q = C|\Delta V|$$

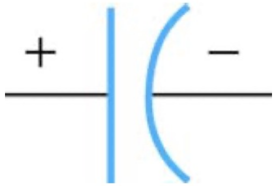
C: θετική σταθερά αναλογίας – **χωρητικότητα**

Αντιπροσωπεύει την ικανότητα της διάταξης να αποθηκεύσει ηλεκτρικό φορτίο για δεδομένη διαφορά δυναμικού Δ*V*

Μονάδα μέτρησης της χωρητικότητας είναι το ***Farad*** (***F***), $\mathbf{1F = \frac{1Coulomb}{volt} = 1\frac{C}{V}}$

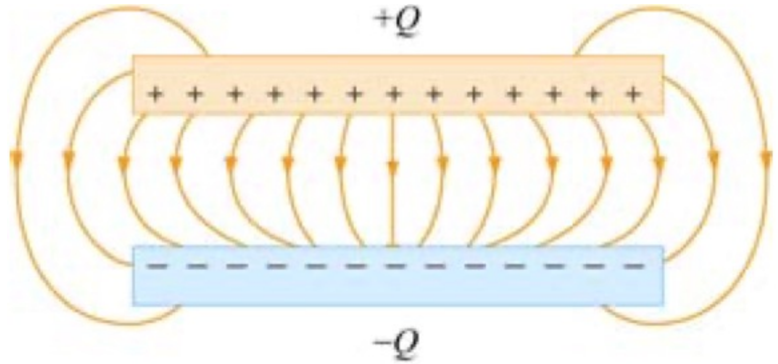
Τυπικές τιμές χωρητικότητας είναι το μ*F* (10^{-6}F) ή το p*F* (10^{-12}F)

Ο συμβολισμός της χωρητικότητας που χρησιμοποιείται σε κυκλώματα 

Για πυκνωτές συγκεκριμένης πόλωσης φορτίων χρησιμοποιείται ο συμβολισμός: 

Υπολογισμός Χωρητικότητας

Θεωρούμε την περίπτωση δύο παράλληλων επίπεδων μεταλλικών πλακών που απέχουν απόσταση *d*. Η πάνω πλάκα είναι φορτισμένη με +*Q* φορτίο και η κάτω πλάκα με –*Q*.



Η φόρτιση των δύο πλακών μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση σταθερής διαφοράς δυναμικού

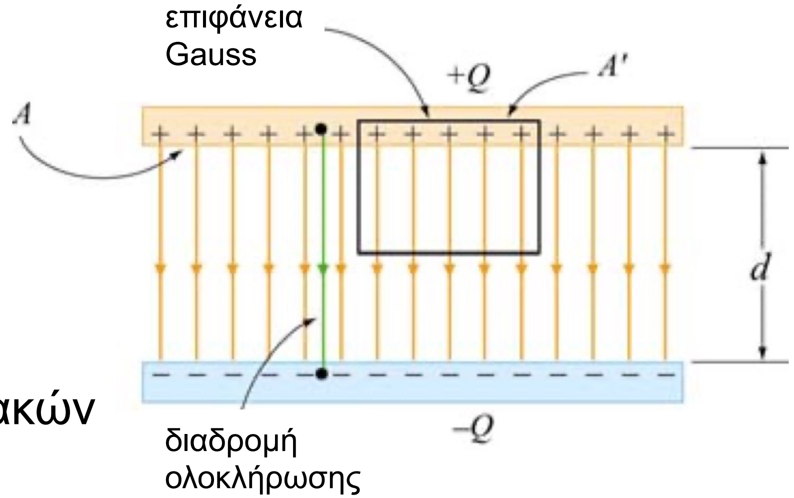
Εύρεση της χωρητικότητας *C*, προϋποθέτει γνώση του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των δύο πλακών.

Λόγω των πεπερασμένων διαστάσεων της διάταξης οι ηλεκτρικές γραμμές στα άκρα των πλακών δεν είναι ευθείες γραμμές αλλά καμπυλώνουν και το ηλεκτρικό πεδίο δεν εμπεριέχεται πλήρως ανάμεσα στις πλάκες. Το ηλεκτρικό πεδίο δεν είναι ομογενές στα άκρα και ονομάζεται *fringing field*

Υπολογισμός Χωρητικότητας

Στο όριο που οι δύο πλάκες είναι πολύ μεγάλων διαστάσεων, το σύστημα έχει επίπεδη συμμετρία και το ηλεκτρικό πεδίο υπολογίζεται σύμφωνα με τον νόμο του *Gauss*

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{\varepsilon\sigma.}}{\varepsilon_0}$$



Χρησιμοποιούμε επιφάνεια Gauss με εμβαδό βάσης *A*’ που να περιέχει το φορτίο της θετικά φορτισμένης πλάκας.

Το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή μεταξύ των πλακών

$$EA' = \frac{q_{\varepsilon\sigma.}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A'}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα το βρήκαμε χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας στην αρχή της διάλεξης

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο πλακών είναι: $\Delta V = V_- - V_+ = -\int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{s} = -Ed$

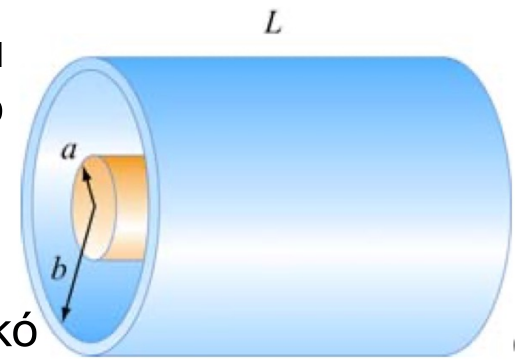
(διαδρομή ολοκλήρωσης, το ευθύγραμμο τμήμα από την θετική πλάκα στην αρνητική και $V_- < V_+$.) Στην εύρεση της χωρητικότητας το πρόσημα δεν ενδιαφέρει: $|\Delta V| = Ed$

Από τον ορισμό της χωρητικότητας: $$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\sigma A}{Ed} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} d} \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$ παράλληλες πλάκες

Κυλινδρικός πυκνωτής

Θεωρούμε μια διάταξη που αποτελείται από συμπαγή κυλινδρικό αγωγό ακτίνας *α* που περιβάλλεται από ομοαξονικό κυλινδρικό φλοιό εσωτερικής ακτίνας *b*.

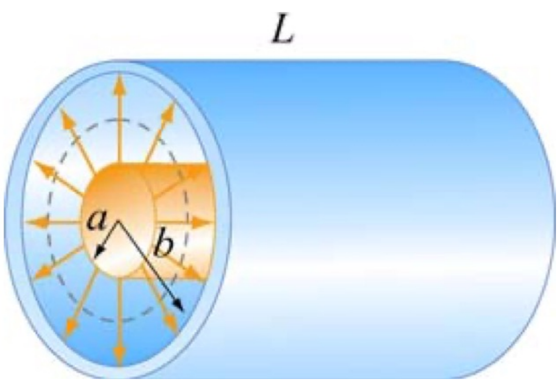
Το μήκος και των δύο κυλίνδρων είναι *L* το οποίο θεωρούμε ότι είναι πολύ μεγαλύτερο από την απόσταση που απέχουν οι δύο κύλινδροι *b*-*α*.



Μπορούμε να αγνοήσουμε φαινόμενα από fringing field.

Ο πυκνωτής φορτίζεται ώστε ο εσωτερικός κύλινδρος έχει θετικό φορτίο +Q, ενώ ο εξωτερικός κύλινδρος έχει αρνητικό φορτίο –Q.

Μπορούμε να υπολογίσουμε την χωρητικότητα αυτού του πυκνωτή ως εξής:



- Αρχικά υπολογίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο παντού.
- Από κυλινδρική συμμετρία θεωρούμε ως επιφάνεια Gauss, μια κυλινδρική επιφάνεια ομοαξονική του συστήματος, μήκους $l < L$, και ακτίνας *r*, $a < r < b$

  Επειδή $l < L$, το φορτίο Q_g που περικλείεται από την επιφάνεια Gauss θα είναι τμήμα του ολικού φορτίου Q του κυλίνδρου: $Q_g = Ql/L = \lambda l$ όπου $\lambda = Q/L$
- Από τον νόμο του Gauss έχουμε: $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = \dfrac{Q_g}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(2\pi r l) = \dfrac{\lambda l}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

Κυλινδρικός πυκνωτής

Το ηλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται παντού εκτός της περιοχής $a < r < b$

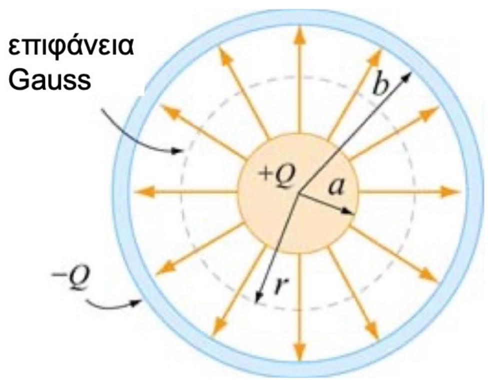
- $r < a$: Το ηλεκτρικό φορτίο που περικλείεται είναι 0 γιατί οποιοδήποτε φορτίο ενός αγωγού κατανέμεται ομοιόμορφα στην επιφάνειά του.
- $r > b$: Το ηλεκτρικό φορτίο που περικλείεται είναι 0 γιατί το φορτίο των δύο ομοαξονικών κυλίνδρων θα είναι: $q_{\varepsilon\sigma} = \lambda l - \lambda l = 0$

Η διαφορά δυναμικού θα είναι: (ολοκλήρωση κατά μήκος της γραμμής πεδίου)

$$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_a^b E_r dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_\alpha^b \frac{dr}{r} \Rightarrow \Delta V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Ο εξωτερικός αγωγός με το αρνητικό φορτίο βρίσκεται σε χαμηλότερο δυναμικό. Άρα:

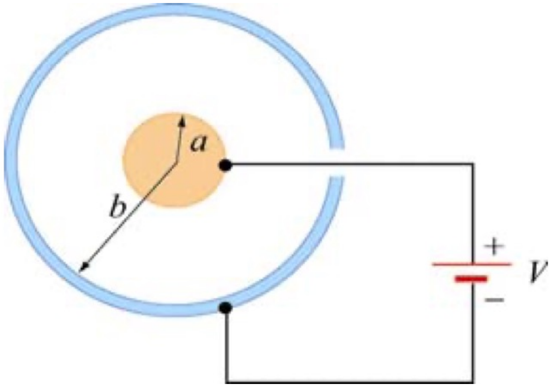
$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{\lambda L}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \qquad \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$$



Η χωρητικότητα εξαρτάται από τους γεωμετρικούς παράγοντες L, a και b του συστήματος

Σφαιρικός πυκνωτής

Θεωρούμε μια διάταξη που αποτελείται από δύο ομόκεντρους σφαιρικούς φλοιούς ακτίνων *α* και *β*. Ο εσωτερικός φλοιός έχει φορτίο +*Q* ενώ ο εξωτερικός φλοιός έχει φορτίο –*Q*.



- $\vec{E} \neq 0$ μόνο στην περιοχή $a < r < b$
- Εφαρμόζοντας τον νόμο Gauss θα έχουμε ότι:

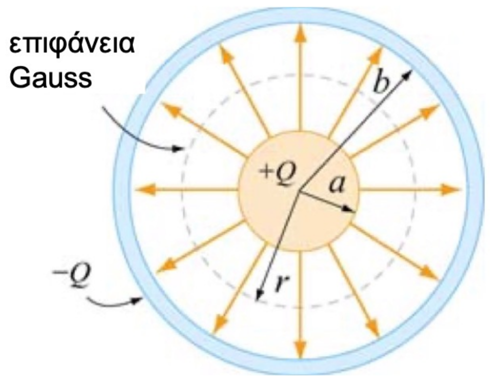
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E_r A = E_r(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

- Επομένως η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα δύο σφαιρικά κελύφη θα είναι:

$$\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b E_r dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_\alpha^b \frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow \Delta V = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \Rightarrow \Delta V = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

Η χωρητικότητα θα είναι: $C = \frac{Q}{|\Delta V|} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{ab}{b-a}\right)$



- Εξάρτηση και πάλι από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του συστήματος

Χωρητικότητα απομονωμένου αγωγού

Θεωρούμε μια διάταξη όπου ο δεύτερος αγωγός έχει τοποθετηθεί σε "άπειρη" απόσταση από τον πρώτο αγωγό τον οποίο θεωρούμε «απομονωμένο».

Στην περίπτωση αυτή ο «απομονωμένος» αγωγός παρουσιάζει χωρητικότητα

Θεωρώντας ότι: $b \to \infty$ η χωρητικότητα του σφαιρικού πυκνωτή γίνεται:

$$\lim_{b\to\infty} C = \lim_{b\to\infty} 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{ab}{b-a}\right) = 4\pi\varepsilon_0 \lim_{b\to\infty}\left(\frac{a}{1-\frac{a}{b}}\right) \Rightarrow \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 a}$$

Η χωρητικότητα ενός απομονωμένου σφαιρικού αγωγού ακτίνας *R* είναι:

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 R}$$

Η σχέση αυτή μπορεί να εξαχθεί θεωρώντας ότι ένας σφαιρικός αγωγός ομοιόμορφα φορτισμένος με φορτίο *Q*, βρίσκεται σε δυναμικό: $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

Η χωρητικότητα του θα είναι: $\boxed{C = \dfrac{Q}{|\Delta V|} = \dfrac{Q}{Q/4\pi\varepsilon_0 R} = 4\pi\varepsilon_0 R}$

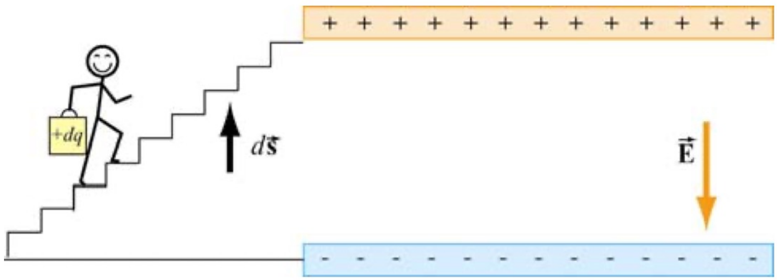
Όπως ήταν αναμενόμενο από τις προηγούμενες περιπτώσεις, η χωρητικότητα εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του αγωγού

Αποθήκευση ενέργειας σε πυκνωτή

Οι πυκνωτές χρησιμοποιούνται για αποθήκευση ηλεκτρικής ενέργειας

Η ποσότητα ηλεκτρικής ενέργειας που αποθηκεύεται ισούται με το έργο που προσφέρεται για να φορτίσουμε τον πυκνωτή.

Κατά την φόρτιση μέσω μιας μπαταρίας, φορτίο μεταφέρεται με την βοήθεια της μπαταρίας από τον αρνητικό «οπλισμό» στον θετικό.



Υποθέτουμε αρχικά ότι ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος. Κάθε οπλισμός αποτελείται από θετικά και αρνητικά φορτία και το συνολικό φορτίο είναι μηδέν.

Αρχίζουμε να μεταφέρουμε φορτία $+dq$ από τον έναν οπλισμό στον άλλο.

Ο ένας οπλισμός αρχίζει να αποκτά πλεόνασμα θετικών φορτίων ενώ ο άλλος οπλισμός παρουσιάζει πλεόνασμα αρνητικών φορτίων.

Επομένως αρχίζουμε να φορτίζουμε τον πυκνωτή και δημιουργούμε ηλεκτρικό πεδίο ενώ στην αρχή δεν υπήρχε κανένα.

Αποθήκευση ενέργειας σε πυκνωτή

Έστω σε μια χρονική στιγμή *t* το φορτίο στον θετικά φορτισμένο αγωγό είναι +*q*.

Το δυναμικό ανάμεσα στους δύο οπλισμούς θα είναι: $|\Delta V| = q/C$

- Για να εναποθέσουμε επιπλέον φορτίο +*dq* στον θετικά φορτισμένο οπλισμό θα πρέπει να καταναλώσουμε έργο για να υπερνικήσουμε την ηλεκτρική δύναμη που απωθεί το θετικό φορτίο
- Το έργο που θα καταναλώσουμε είναι: $dW = +dq|\Delta V|$
- Έστω ότι το ολικό φορτίο στο τέλος της φόρτισης είναι +Q. Το συνολικό έργο που καταναλώθηκε για να μεταφερθεί το φορτίο αυτό στον οπλισμό είναι:

$$W = \int_0^Q dW = \int_0^Q |\Delta V| dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

- Το έργο αυτό αποτελεί την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια, U_E, του συστήματος:

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q|\Delta V| \Rightarrow \boxed{U_E = \frac{1}{2}C|\Delta V|^2}$$

Πυκνότητα ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου

- Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ενέργεια που αποθηκεύτηκε σε έναν πυκνωτή, είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο το ίδιο.
- Έστω ένας επίπεδος πυκνωτής, επιφάνειας *A* και απόστασης *d* μεταξύ των οπλισμών του. Άρα: $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ ενώ η διαφορά δυναμικού είναι: $|\Delta V| = Ed$

- Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια, U_E, του συστήματος θα είναι:

$$U_E = \frac{1}{2} C|\Delta V|^2 \Rightarrow U_E = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d} E^2 d^2 \Rightarrow U_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 A E^2 d \Rightarrow U_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 (Ad)$$

- Ο όγκος ανάμεσα στους δύο οπλισμούς του πυκνωτή είναι: $V_{όγκος} = Ad$

- Ορίζουμε **πυκνότητας ενέργειας**: $u_E = \frac{U_E}{V_{όγκος}} \Rightarrow u_E = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 (Ad)}{Ad} \Rightarrow u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

Η πυκνότητα ενέργειας είναι ανάλογη του τετραγώνου του ηλεκτρικού πεδίου.

Συγκρίνοντας με το αποτέλεσμα της 7ης διάλεξης για την ηλεκτροστατική πίεση που ασκείται σε ένα τμήμα φορτίου, βλέπουμε ότι εκφράζονται από την ίδια σχέση.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η πυκνότητα ενέργειας μπορεί να ερμηνευτεί ως η ηλεκτροστατική πίεση.

Πυκνότητα ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου

- Μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σε έναν πυκνωτή από το εξωτερικό έργο που καταναλώνεται για την διάταξη του συστήματος.
- Αν η απόσταση των οπλισμών είναι *d*, και είναι φορτισμένοι με ίσο και αντίθετο φορτίο Q, τότε εξωτερικό έργο απαιτείται για να διατηρήσουμε την απόσταση μεταξύ των οπλισμών.
- Στην διάλεξη 8 είδαμε ότι η ελκτική δύναμη που αναπτύσσεται σε ένα τμήμα φορτίου $\Delta q = \sigma(\Delta A)$ είναι: $\Delta F = \dfrac{\sigma^2(\Delta A)}{2\varepsilon_0}$
- Αν η συνολική επιφάνεια του οπλισμού είναι *A* τότε η συνολική δύναμη που θα πρέπει να ασκεί ένας εξωτερικός παράγοντας για να απομακρύνει τους δύο οπλισμούς μεταξύ τους θα είναι: $F_{\varepsilon\xi.} = \dfrac{\sigma^2 A}{2\varepsilon_0}$
- Το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς είναι: $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \boxed{F_{\varepsilon\xi.} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 A}$$

- Το έργο το οποίο καταναλώνεται επομένως από τον εξωτερικό παράγοντα θα είναι:

$$W_{\varepsilon\xi.} = \int_0^d \vec{F}_{\varepsilon\xi.} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 A d \Rightarrow U_E = W_{\varepsilon\xi.} \Rightarrow u_E = \frac{U_E}{V_{\acute{o}\gamma\kappa o\varsigma}} \boxed{\Rightarrow u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

Παράδειγμα: πυκνότητα ηλεκτρικής ενέργειας ξερού αέρα

- Ο ξερός αέρας αποτελεί μονωτικό υλικό.
- Ωστόσο αν εφαρμοστεί ηλεκτρικό πεδίο το οποίο είναι αρκετά ισχυρό, τότε ο ξερός αέρας χάνει τις μονωτικές του ιδιότητες και επιτρέπει την διέλευση ηλεκτρικής εκκένωσης όταν $E_{\varepsilon\kappa.} = 3\times10^6 V/m$
- Για ηλεκτρικό πεδίο αυτής της έντασης, $E_{\varepsilon\kappa.} = 3\times10^6 V/m$, η πυκνότητα της ηλεκτρικής ενέργειας θα είναι:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}(8.85\times10^{-12} C^2/N\cdot m)(3\times10^6)^2 = 40\mathrm{J}/m^3$$

Παράδειγμα: Αποθηκευμένη ενέργεια σε σφαιρικό φλοιό

- Υπολογίζουμε την ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σε έναν σφαιρικό φλοιό ακτίνας *R* και φορτίου *Q*
- Το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από έναν σφαιρικό φλοιό φορτίου *Q* και ακτίνας *R* δίνεται από τις σχέσεις:

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & r > R \\ \vec{0} & r < R \end{cases}$$

- Η σχετιζόμενη πυκνότητα ενέργειας θα είναι: $u_E = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \Rightarrow u_E = \begin{cases} \dfrac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$
- Εφόσον το ηλεκτρικό πεδίο δεν είναι μηδέν εκτός του σφαιρικού φλοιού, θα πρέπει να ολοκληρώσουμε ως προς τον συνολικό χώρο από $r = R$ έως $r \to \infty$:
- Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες και το γεγονός ότι ο στοιχειώδης όγκος είναι $dV = 4\pi r^2 dr$ ολοκλήρωση της πυκνότητας ενέργειας θα δώσει:

$$U_E = \int_R^\infty u_E dV = \int_R^\infty \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr \Rightarrow U_E = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \Rightarrow U_E = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{2}QV$$

Παράδειγμα: Αποθηκευμένη ενέργεια σε σφαιρικό φλοιό

Βρίσκουμε ότι: $\boxed{U_E = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{2}QV}$

όπου υποθέσαμε ότι: $V(r=R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ και $V(r=\infty) = 0$

- Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι η ενέργεια του συστήματος είναι ίση με το έργο που καταναλώνεται για να φορτίσουμε τον σφαιρικό φλοιό

- Όπως έχουμε ήδη συζητήσει, αν σε μια τυχαία χρονική στιγμή, ο σφαιρικός φλοιός έχει φορτίο q και βρίσκεται σε δυναμικό $V = q/4\pi\varepsilon_0 R$ τότε το έργο που απαιτείται ώστε να φέρουμε επιπλέον φορτίο dq στον σφαιρικό φλοιό θα είναι: $dW = Vdq$

- Ολοκληρώνουμε την τελευταία σχέση για το συνολικό έργο που απαιτείται για να φέρουμε το συνολικό φορτίο Q στον σφαιρικό φλοιό:

$$W = \int dW = \int_0^Q \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^Q q dq \Rightarrow \boxed{W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}}$$

6ο Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

Έτοιμοι