Ανακεφαλαίωση

Τι είδαμε την προηγούμενη φορά:

Αρχή D'Alembert: $\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i - m_i\ddot{\vec{r}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i = 0$

για σύστημα με k ολόνομους δεσμούς και n=N−k γενικευμένες συντεταγμένες q_i:

$$d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}dq_j + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}$$

θεωρώντας δυνητικές μετατοπίσεις (dt=0):

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

καταλήξαμε: $\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i\right]\delta q_i = 0$ χωρίς δυνάμεις δεσμών

και ορίσαμε την γενικευμένη δύναμη: $Q_i = \sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_i}$

εφόσον δq_i ανεξάρτητα: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = 0$

Για συντηρητικές δυνάμεις $F = -\nabla V \Rightarrow Q_i = -\sum_j\frac{\partial V}{\partial r_j}\frac{\partial r_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$

Τι θα δούμε σήμερα

- Αρχή D'Alembert σε συστήματα με δυνάμεις τριβής
- Αρχή του Hamilton
  - θα εξάγουμε και πάλι τις εξισώσεις Lagrange
- Εύρεση των δυνάμεων δεσμών:
  - πολλαπλασιαστές Lagrange (Lagrange multipliers)

Δυνάμεις τριβής

Όταν βγάλαμε τις εξισώσεις Lagrange αποφύγαμε τις δυνάμεις τριβής. Στην ακρίβεια αυτό που κάναμε ήταν να διαχωρίσουμε τη ολική δύναμη σε κάθε υλικό σημείο σε $\vec{F}_i \to \vec{F}_i^{(e)} + f_i$

και υποθέσαμε ότι: $\sum_i \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ όπου f_i οι δυνάμεις δεσμών

Δηλαδή συμπεριλάβαμε στην F_i όλες τις δυνάμεις για τις οποίες $\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i \neq 0$

Σε μια τουλάχιστον πρακτική περίπτωση, μπορούμε να συμπεριλάβουμε δυνάμεις τριβής στο φορμαλισμό Lagrange.

- Δυνάμεις τριβής ανάλογες της ταχύτητας: $F_{f_i x} = -k_x \mathrm{v}_{ix}$

  Εμφανίζεται συχνά (π.χ. αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση)

$$\mathbb{F} = \frac{1}{2}\sum_i \left(k_x \mathrm{v}_{ix}^2 + k_y \mathrm{v}_{iy}^2 + k_z \mathrm{v}_{iz}^2\right)$$ Δυναμική ενέργεια Rayleigh

Επομένως: $F_{f_i a} = -\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathrm{v}_{ia}}$ όπου α =x,y,z Διανυσματικά: $F_{f_i a} = -\nabla_{\mathrm{v}} \mathbb{F}$

Η γενικευμένη δύναμη σ' αυτή την περίπτωση είναι:

$$Q_j = \sum_i F_{f_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \Rightarrow Q_j = -\sum_i \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \dot{r}_i} \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

Θυμηθείτε ότι: $\dfrac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \dfrac{\partial r_i}{\partial q_j}$

Δυνάμεις τριβής

Επομένως καταλήγουμε ότι: $Q_j = -\sum_i \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \dot{q}_j}$

Θέτοντας: $L = T - V$ όπου V από συντηρητικές δυνάμεις καταλήγουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \dot{q}_j} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \dot{q}_j} = 0}$$

- Ο όρος $\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \dot{q}_j}$ εξαρτάται από την γενικευμένη ταχύτητα αλλά δεν εισέρχεται στην παράγωγο ως προς χρόνο του 1ου όρου

Ποια είναι η φυσική σημασία αυτής της συνάρτησης $\mathbb{F}$

Θεωρήστε το έργο που παράγει το σύστημα ενάντια στην τριβή:

$$dW_f = -\vec{F}_f \cdot d\vec{r} = -\vec{F}_f \cdot \vec{\mathrm{v}}dt = -\sum_{a=x,y,z} F_{fa}\mathrm{v}_a dt = \sum_a k_a \mathrm{v}_a^2 dt \Rightarrow$$

$$\frac{dW_f}{dt} = 2\left(\frac{1}{2}\sum_a k_a \mathrm{v}_a^2\right) = 2\mathbb{F}$$

Δηλαδή: $2\mathbb{F}$ είναι ο ρυθμός διάχυσης της ενέργειας.

Μή συντηρητικές δυνάμεις

- Μια δύναμη F είναι συντηρητική αν ικανοποιεί τις ακόλουθες 2 συνθήκες:
  - Η F εξαρτάται μόνο από τη θέση του σωματιδίου όχι από την ταχύτητά του v, ή το χρόνο t, ή κάποια άλλη μεταβλητή
    Δηλαδή $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$
  - Για δυο οποιαδήποτε σημεία 1 και 2, το έργο W(1->2) που παράγεται από τη δύναμη F είναι το ίδιο για οποιαδήποτε διαδρομή μεταξύ 1 και 2
- Η πρώτη συνθήκη ισοδυναμεί με το να γράψουμε $\vec{F} = -\nabla U(r)$
- Η δεύτερη συνθήκη, ότι $W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ανεξάρτητο της διαδρομής

  ικανοποιείται αν ο στροβιλισμός της δύναμης είναι 0 δηλαδή: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$
- Όταν οι δυνάμεις που δρουν σε ένα σύστημα είναι συντηρητικές τότε όπως ξέρουμε η μηχανική ενέργεια διατηρείται.

Δυναμική ενέργεια εξαρτώμενη από το χρόνο

- Μερικές φορές μπορεί να έχουμε $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ αλλά η F εξαρτάται από το χρόνο και επομένως δεν ικανοποιείται η πρώτη συνθήκη
- Μπορούμε και πάλι να ορίσουμε μια δυναμική ενέργεια $U=U(\vec{r},t)$ με την ιδιότητα $\vec{F}=-\vec{\nabla}U$
  - Στην περίπτωση αυτή η ολική μηχανική ενέργει, E, δεν διατηρείται
- Το γεγονός ότι $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ σημαίνει ότι το ολοκλήρωμα έργου κάποια στιγμή t είναι ανεξάρτητο της διαδρομής

Επομένως μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $U=U(\vec{r},t)$ τέτοια ώστε

$$U(\vec{r},t)=-\int_{r_0}^{r_1}\vec{F}(\vec{r}',t)\cdot d\vec{r}' \Rightarrow \vec{F}(\vec{r},t)=-\nabla U(\vec{r},t)$$

- Στην περίπτωση αυτή όμως: $dU(\vec{r},t)=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz+\frac{\partial U}{\partial t}dt \Rightarrow$

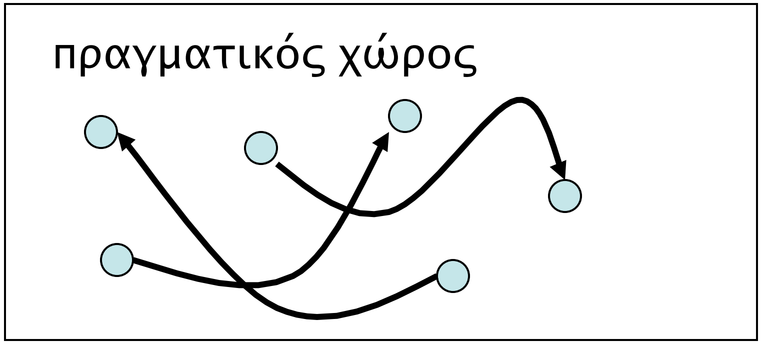
$$\Rightarrow dU(\vec{r},t)=-\vec{F}\cdot d\vec{r}+\frac{\partial U}{\partial t}dt$$

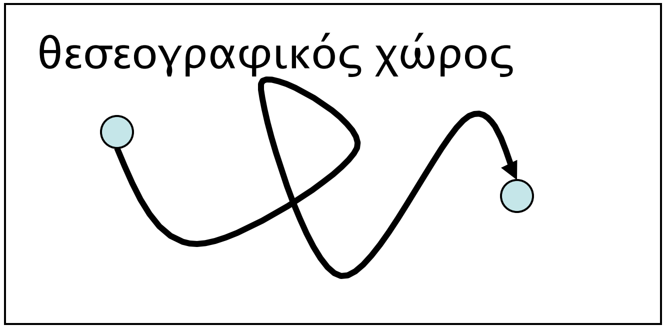
Η μεταβολή στη κινητική ενέργεια είναι: $dT=\frac{dT}{dt}dt=\left(m\dot{\vec{\mathrm{v}}}\cdot\vec{\mathrm{v}}\right)dt=\vec{F}\cdot d\vec{r}$

Προσθέτοντας τις 2 σχέσεις έχουμε: $d\left(T+U\right)=dE=\frac{\partial U}{\partial t}dt$ E δεν διατηρείται

Χώρος μορφής – configuration space

- ✓ Η εξίσωση Euler-Lagrange γενικεύεται για ένα αυθαίρετο αριθμό εξαρτημένων μεταβλητών $q_i(t)$
- ➢ Η ανεξάρτητη μεταβλητή στη μηχανική είναι ο χρόνος t.
- ✓ Οι γενικευμένες συντεταγμένες $q_1,\ldots,q_n$ περιγράφουν πλήρως την κατάσταση του συστήματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή
- ➢ Σκεφθείτε ένα χώρο n-διαστάσεων ⇐ χώρος μορφής
- ➢ Κάθε σημείο στο χώρο αυτό ($q_1,\ldots,q_n$) αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη κατάσταση του συστήματος
- ➢ Καθώς το σύστημα εξελίσσεται χρονικά → διαδρομή στο χώρο μορφής





Ολοκλήρωμα δράσης

- Ένα σύστημα κινείται σύμφωνα με $q_j = q_j(t)$ $j=1,\ldots,n$
- Το ολοκλήρωμα S του οποίου η στάσιμη τιμή προσδιορίζει την εξέλιξη ενός μηχανικού συστήματος καλείται ολοκλήρωμα δράσης
- Η ολοκληρώσιμη ποσότητα είναι η Lagrangian L και είναι

$$L(q,\dot{q},t) = L(q(t),\dot{q}(t),t) = L(t)$$

ολοκληρώνοντας

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} L dt}$$

Δράση ή ολοκλήρωμα δράσης

- Η δράση εξαρτάται από ολόκληρη την διαδρομή από το t_1 στο t_2
  - Η εκλογή των συντεταγμένων q_j δεν επηρεάζει
  - Η δράση είναι ανεξάρτητη κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων

Η αρχή του Hamilton

"Το ολοκλήρωμα δράσης ενός φυσικού συστήματος είναι στάσιμο για την πραγματική διαδρομή"

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t),\dot{q}(t),t)dt \Rightarrow \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q(t),\dot{q}(t),t)dt = 0$$

- Αυτό είναι ισοδύναμο με τις εξισώσεις Lagrange

Επομένως έχουμε 3 ισοδύναμους φορμαλισμούς

- Εξισώσεις του Newton εξαρτώνται πλήρως από x-y-z συντεταγμένες
- Οι εξισώσεις Lagrange είναι ίδιες για οποιεσδήποτε γενικευμένες συντεταγμένες
- Η αρχή του Hamilton δεν αναφέρεται σε συντεταγμένες

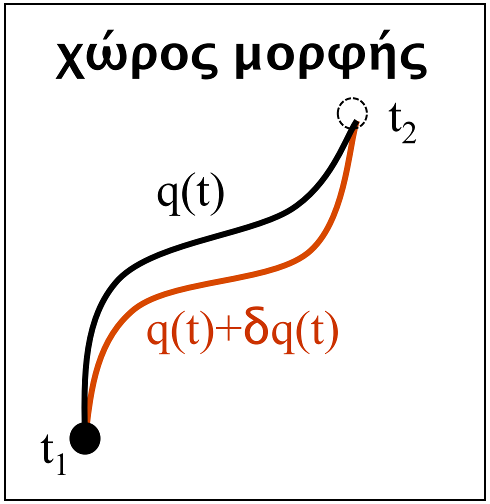
Τα πάντα βρίσκονται στο ολοκλήρωμα δράσης

Στάσιμο ή στατικό ολοκλήρωμα

- Φανταστείτε δυο διαδρομές οι οποίες είναι πολύ κοντά μεταξύ τους
  Η διαφορά τους είναι απειροελάχιστη
- Στάσιμο ολοκλήρωμα σημαίνει ότι η διαφορά των ολοκληρωμάτων δράσης είναι μηδέν κατά πρώτη προσέγγιση ως προς $\delta q(t)$
  - Ανάλογο του «πρώτη παράγωγος = 0»
    - Σχεδόν ίδιο σα να λέμε «ελάχιστο»

      Θα μπορούσε να 'ναι και μέγιστο

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt = 0$$

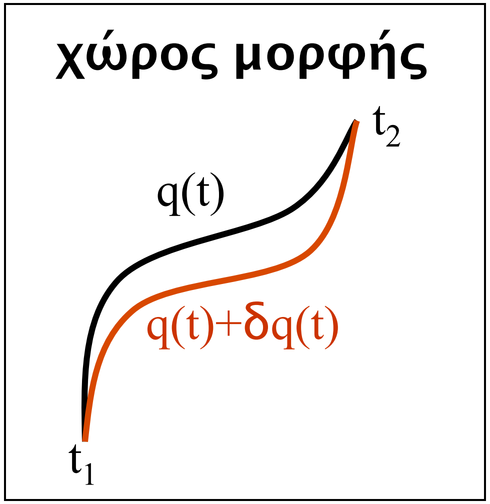


Τα ακραία σημεία της διαδρομής 1 και 2 είναι σταθερά:
$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$

Απειροελάχιστη μεταβολή τροχιάς

- Τι είναι $\delta q(t)$;
  - Είναι αυθαίρετη... Σχεδόν
  - Πρέπει να είναι μηδέν στα t_1 και t_2
  - Συμπεριφέρεται πολύ καλά

Συνεχής, μη απειριζόμενη συνεχείς $1^{ες}$ και $2^{ες}$ παράγωγοι



- Πρέπει να τη συρρικνώσουμε σε μηδέν
  - Το τέχνασμα είναι να την γράψουμε ως $\delta q(t) = a\eta(t)$ $\Rightarrow$ $q(t,\alpha) = q(t)+\alpha\eta(t)$
  - α είναι μια παράμετρος, την οποία θα κάνουμε να πηγαίνει στο 0
  - $\eta(t)$ είναι μια καλώς συμπεριφερόμενη αυθαίρετη συνάρτηση
  - $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$

Η δράση θα 'ναι $S(a) \equiv \int_{t_1}^{t_2} L\big(q(t,a),\dot{q}(t,a),t\big)dt$ $\leftarrow$ **Εξαρτάται από το $\eta(t)$**

Λογισμός μεταβολών

- Ορίσαμε $S(a) \equiv \int_{t_1}^{t_2} L\big(q(t,a),\dot{q}(t,a),t\big)\,dt$

Για οποιοδήποτε η(t)

- Αν η δράση είναι στάσιμη ⇒ $\left(\dfrac{dS(a)}{da}\right)_{a=0} = 0$

$$\frac{dS(a)}{da} = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\frac{dq}{da} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d\dot{q}}{da}\right)dt$$

πράξεις

$$q(t,a) = q(t) + a\eta(t)$$

Ο 2ος όρος με ολοκλήρωση κατά μέρη δίνει:

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d\dot{q}}{da}dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{da}\right)dt =$$

$$\underbrace{\cancel{\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{dq}{da}\right|_{t_1}^{t_2}}}_{0} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\frac{dq}{da}dt$$

Επειδή $\dfrac{dq}{da} = \eta(t)$ και

$$\eta(t_1) = \eta(t_1) = 0$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\boxed{\frac{dq}{da}}dt$$

=η(t)

Αυθαίρετη συνάρτηση

Εξίσωση Lagrange

Θεμελιώδες Λήμμα:

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x)dx = 0 \text{ για κάθε } \eta(x) \Rightarrow M(x) = 0 \quad \gamma\iota\alpha \quad x_1 < x < x_2$$

- Παίρνουμε:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\eta(t)dt = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

Εξίσωση Lagrange

- Για συντομία χρησιμοποιούμε το συμβολισμό δ για τις απειροελάχιστες μεταβολές

  π.χ. α-παράγωγος στο α=0

$$\delta S \equiv \left(\frac{dS}{da}\right)_{a=0} da = \frac{d}{da}\left(\int_{t_1}^{t_2} L(q(t,a),\dot{q}(t,a),t)dt\right)da$$

$$\delta q \equiv \left(\frac{dq}{da}\right)_{a=0} da = \eta(t)da$$

Η αρχή του Hamilton μπορεί να γραφεί

$$\delta S \equiv \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt$$

Δουλεύοντας με n-συντεταγμένες

- Η προηγούμενη μεθοδολογία μπορεί να αναπτυχθεί για περισσότερες συντεταγμένες q → $q_1,\ldots,q_n$

$$\delta S \equiv \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \underline{\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)} \delta q_i \, dt$$

=0 για κάθε i

Υπόθεση: $\delta q_1, \delta q_2, \ldots$ είναι αυθαίρετα και ανεξάρτητα

- Δεν ισχύει για x-y-z συντεταγμένες αν υπάρχουν δεσμοί
- Ισχύει για γενικευμένες συντεταγμένες αν το σύστημα είναι ολόνομο

Η αρχή του Hamilton

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt = 0$$

- Η δράση S, περιγράφει όλη την κίνηση του συστήματος

  Είναι αρκετό να εξαγάγουμε τις εξισώσεις κίνησης

- Η δράση S, δεν εξαρτάται από την εκλογή των συντεταγμένων

  Ο φορμαλισμός Lagrange είναι αναλλοίωτος από εκλογή συντεταγμένων

Οι εξισώσεις Lagrange και η αρχή του Hamilton είναι ισοδύναμες

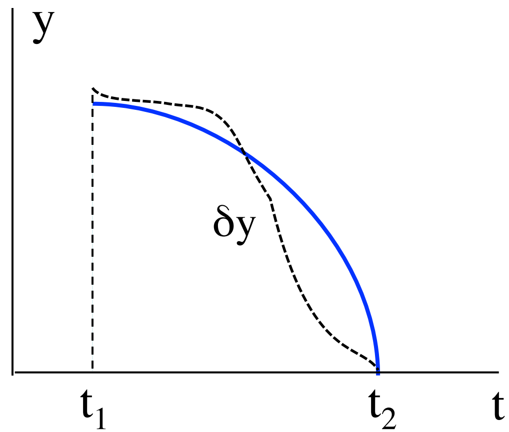
Ωστόσο:

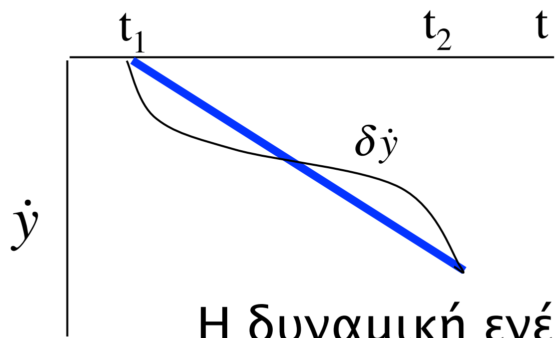
Οι εξισώσεις Lagrange είναι διαφορικές εξισώσεις.
Μας λένε πως θα εξελιχθεί χρονικά το σύστημα παίρνοντας κάθε φορά απειροστά χρονικά βήματα

Η αρχή του Hamilton είναι ολοκληρωτική.
Απαιτεί το σύστημα να λάβει υπόψην διάφορες κινήσεις από την αρχή ως το τέλος του χρονικού διαστήματος και να επιλέξει την διαδρομή που κάνει το ολοκλήρωμα δράσης στάσιμο

Η αρχή του Hamilton – Πτώση σώματος σε βαρυτικό πεδίο

Σώμα σε ηρεμία αφήνεται να πέσει κάτω από την επίδραση της βαρύτητας





δy και $\delta\dot{y}$ μικρές μεταβολές από την πραγματική θέση και ταχύτητα

Η δυναμική ενέργεια: mgy

Η κινητική ενέργεια: $m\dot{y}^2/2$

$$L = m\dot{y}^2/2 - mgy$$

Η μεταβολή στη δράση θα είναι:

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \delta\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{m\dot{y}^2}{2} - mgy\right]dt \Rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2}\left(m\dot{y}\delta\dot{y} - mg\delta y\right)dt$$

$$\frac{d}{dt}\delta y = \frac{d}{dt}(y+\delta y) - \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}\delta y = \delta\dot{y}$$

Ολοκλήρωση κατά τμήματα:

$$\int_{t_1}^{t_2} m\dot{y}\,\delta\dot{y}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} m\dot{y}\frac{d}{dt}\delta y\,dt = m\dot{y}\delta y\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{y}\,\delta y\,dt$$

αλλά: $\delta y(t_1) = \delta y(t_2) = 0$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} m\dot{y}\,\delta\dot{y}\,dt = -\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{y}\,\delta y\,dt$$

Επομένως το δS γίνεται: $\delta S = -\int_{t_1}^{t_2}\left(m\ddot{y}\delta y + mg\delta y\right)dt \Rightarrow \delta S = -\int_{t_1}^{t_2}\left(m\ddot{y} + mg\right)\delta y\,dt = 0$

που για να ισχύει για τυχαία δy πρέπει: $\left(m\ddot{y} + mg\right) = 0$ $\Rightarrow m\ddot{y} = -mg$

Ελεύθερη πτώση

Η αρχή του Hamilton – Πτώση σώματος σε βαρυτικό πεδίο

Μπορούμε να δείξουμε ότι όποια διαδρομή διαφέρει από την πραγματική θα δώσει ολοκλήρωμα δράσης που δεν έχει στατική τιμή

Θεωρούμε μεταβολή της y σύμφωνα με την παραμετρική μορφή:

$$y(a,t)=y(0,t)+a\eta(t)$$

για α=0 $y=y(0,t)=y(t)$ η αληθής λύση

$\eta(t)$ συνεχής και παραγωγίσημη στο [t_1,t_2], $\eta(t_1)=\eta(t_2)=0$

Η δράση είναι συνάρτηση του α: $S(a)=\int_{t_1}^{t_2} L\left[y(a,t),\dot{y}(a,t),t\right]dt$

$\dot{y}(a,t)=\dot{y}(0,t)+a\dot{\eta}(t)$ όπου: $\dot{y}(0,t)=-gt$

Η Lagrangian είναι: $L=m\left(\dfrac{\dot{y}^2}{2}-gy\right) \Rightarrow L=m\left(\dfrac{\left[-gt+a\dot{\eta}(t)\right]^2}{2}+gt^2-a\eta(t)\right)$

$$\Rightarrow S(a)=\int_{t_1}^{t_2} m\left\{g^2t^2-\boxed{ag\left[t\dot{\eta}(t)+\eta(t)\right]}+\frac{1}{2}a^2\dot{\eta}^2(t)\right\}dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} ag\left[t\dot{\eta}(t)+\eta(t)\right]dt=\int_{t_1}^{t_2} ag\left[t\frac{d}{dt}\left[\eta(t)\right]+\eta(t)\right]dt=\cancel{agt\eta(t)\Big|_{t_1}^{t_2}}-\int_{t_1}^{t_2}\cancel{ag\eta(t)}dt+\int_{t_1}^{t_2}\cancel{ag\eta(t)}dt$$

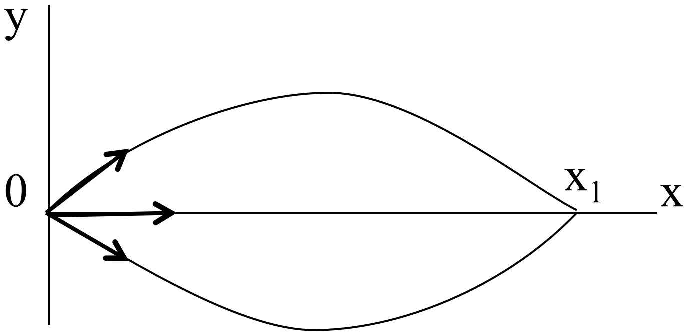
0

Επομένως: $S(a)=m\int_{t_1}^{t_2}\left[g^2t^2+\frac{1}{2}a^2\dot{\eta}^2(t)\right]dt=\dfrac{mg^2}{3}\left(t_2^3-t_1^3\right)+\dfrac{a^2}{2}\int_{t_1}^{t_2}\dot{\eta}^2(t)dt$

Αλλά: $\dfrac{a^2}{2}\int_{t_1}^{t_2}\dot{\eta}^2(t)dt>0$ και επομένως: $\left.\dfrac{\partial S(a)}{\partial a}\right|_{a=0}=0$ για α=0 και επομένως S έχει στατική τιμή μόνο για την αληθινή λύση

Παράδειγμα

Υποθέστε ότι ένα υλικό σημείο κινείται ακολουθώντας μια ημιτονοειδή τροχιά από το σημείο x=0 στο $x=x_1$ κατά το χρονικό διάστημα Δt. Το σωματίδιο κινείται ελεύθερα (δεν υπάρχει πεδία δυνάμεων). Δείξτε ότι το πλάτος της ημινοειδούς τροχιάς είναι 0, που δηλώνει ότι το σωματίδιο κινείται σε ευθεία τροχιά



Από την στιγμή που το σωματίδιο δεν υπόκειται σε δυνάμεις, η κίνησή του δίνεται από: $x = \upsilon_x t$

Κάθε άλλη μορφή κίνησης πρέπει να περατωθεί σε χρόνο: $\Delta t = t = x/\upsilon_x$

Αλλάζουμε κάθε πιθανή ημιτονοειδή τροχιά:

$x = \upsilon_x t$ και $y = \pm\eta \sin\left(\pi\upsilon_x t/x_1\right)$ η το πλάτος της ημιτονοειδούς τροχιάς

Η Lagrangian θα είναι: $L = T - V = \dfrac{1}{2}m\left[\upsilon_x^2 + \left(\dfrac{n\pi\upsilon_x}{x_1}\right)^2 \cos^2\left(\dfrac{\pi\upsilon_x t}{x_1}\right)\right] - V$

Άρα: $S = \int_0^{x_1/\upsilon_x} L\,dt = \dfrac{m\upsilon_x x_1}{2} + \dfrac{m\pi^2\upsilon_x\eta^2}{4x_1} - V\dfrac{x_1}{\upsilon_x}$

Η τροχία αλλάζει καθώς αλλάζουμε το δη ώστε: $\delta S = \left(\dfrac{m\pi^2\upsilon_x}{2x_1}\right)\eta\delta\eta = 0$

Πρέπει να επαληθεύεται για κάθε δη. Οπότε η = 0