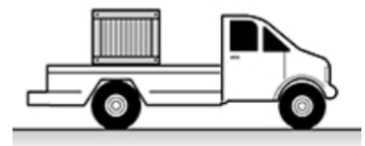
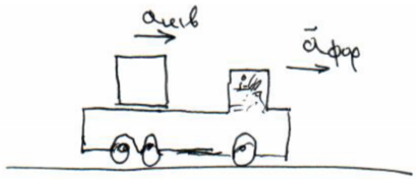
ΦΥΣ. 111

5ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή 12.10.2020**

1. Ένα κιβώτιο μάζας 100kg και διαστάσεων 50 *cm* · 50 *cm* · 50 *cm* είναι τοποθετημένο στην καρότσα ενός φορτηγού. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ της επιφάνειας του κιβωτίου και αυτής της καρότσας είναι $\mu_s = 0.40$ ενώ ο αντίστοιχος συντελεστής κινητικής τριβής είναι $\mu_k = 0.20$. Ποιά είναι η μέγιστη επιτάχυνση που μπορεί να αναπτύξει το φορτηγό ώστε να μη γλιστρήσει το κιβώτιο;

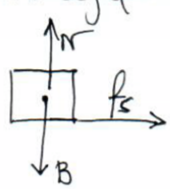




Αν το κιβώτιο δεν γλιστρά ως προς την επιφάνεια της καρότσας τότε δεν υπάρχει κίνηση του κιβωτίου σχετικά με το φορτηγό και επομένως το κιβώτιο θα πρέπει να έχει την ίδια επιτάχυνση με αυτή του φορτηγού:

κιβώτιο δεν ολισθαίνει ως προς φορτηγό: $a_{φορ} = a_{κιβ}$

Από τη στιγμή που το φορτηγό και το κιβώτιο επιταχύνουν, θα πρέπει να εφαρμόζεται στο κιβώτιο μία δύναμη σύμφωνα με το 2ο νόμο του Newton.
Η δύναμη αυτή προέρχεται από την <u>στατική</u> τριβή μεταξύ των επιφανειών της καρότσας και του κιβωτίου γιατί το κιβώτιο είναι ακίνητο. Η δύναμη αυτή αναγκάζει το κιβώτιο να ακολουθήσει την κίνηση του φορτηγού και έχει φορά προς τη φορά κίνησης του φορτηγού. Αν δεν υπήρχε τριβή και οι επιφάνειες ήταν λείες τότε το κιβώτιο θα γλιστρούσε προς τα πίσω όπως γίνεται αντιληπτό από κάποιο παρατηρητή στο φορτηγό. Λύνουμε το πρόβλημα ως προς παρατηρητή στο έδαφος, αφού το φορτηγό δεν είναι αδρανειακό σύστημα αναφοράς.
Σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για το κιβώτιο:

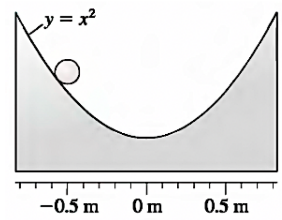


2ο νόμος του Newton: $\left\{\begin{array}{l} \Sigma F_x = m_\kappa a_x = f_s \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - B = 0 \Rightarrow N = B = mg \end{array}\right\} \Rightarrow$

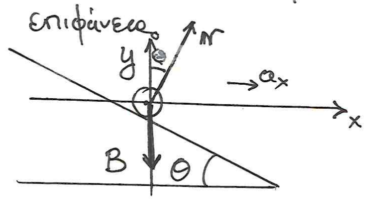
$\Rightarrow m_\kappa a_\kappa = \mu_s N \Rightarrow \cancel{m_\kappa} a_\kappa = \mu_s \cancel{m_\kappa} g \Rightarrow a_\kappa = \mu_s g \Rightarrow \boxed{a_\kappa = 3.9 m/s^2}$

Αυτή είναι η μέγιστη επιτάχυνση που μπορεί να έχει το φορτηγό ώστε να μην γλιστρήσει το κιβώτιο γιατί αντιστοιχεί και στη μέγιστη τιμή της στατικής τριβής $f_s \le \mu_s N$
Αν η επιτάχυνση αυξηθεί, το κιβώτιο γλιστρά και η τριβή που ασκείται είναι κινητική τριβή και είναι πολύ μικρότερη της στατικής.

2. Το διπλανό σχήμα δείχνει μια συσκευή μέτρησης επιτάχυνσης για αυτοκίνητα και αεροπλάνα. Μία μπάλα είναι ελεύθερη να κυλά πάνω όπου x και y μετρούνται σε μέτρα. Μία κλίμακα στο κάτω μέρος της τροχιάς χρησιμεύει για τη μέτρηση της θέσης της μπάλας κατά μήκος της x-διεύθυνσης. (α) Να βρεθεί μια εξίσωση που να επιτρέπει τον υπολογισμό της επιτάχυνσης στην x-διεύθυνση στηριζόμενοι στη μέτρηση της θέσης της μπάλας στη x-διεύθυνση. Για παράδειγμα θα μπορούσατε να βρείτε μία έκφραση της μορφής $a_x = 5x$. (β) Ποιά είναι η επιτάχυνση αυτή αν η θέση της μπάλας είναι x=20cm;



Υποθέτουμε ότι η μπάλα είναι σε κεκλιμένη επιφάνεια, η κλίση της οποίας αλλάζει (αυξάνει) καθώς τη μετατόπισή της στη x-διεύθυνση αυξάνει. Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει τριβή και πως καθώς η μπάλα επιταχύνεται προς τα δεξιά, με σταθερή επιτάχυνση παραμένει ακίνητη στην επιφάνεια.



Θεωρούμε σύστημα συντεταγμένων όπως στο σχήμα, ώστε η επιτάχυνση στην οριζόντια διεύθυνση να συμπίπτει με το x-άξονα. Σύμφωνα με το 2° νόμο του Newton θα έχουμε:

$$\Sigma F_x = m a_x \Rightarrow N \cdot \sin\theta = m a_x$$

$$\Sigma F_y = m a_y \Rightarrow N\cos\theta - mg = 0 \Rightarrow N\cos\theta = mg$$

$$\Bigg\} \Rightarrow \frac{\cancel{N}\sin\theta}{\cancel{N}\cos\theta} = \frac{\cancel{m}a_x}{\cancel{m}g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a_x = g \cdot \tan\theta} \quad (1)$$

Η εξίσωση της καμπύλης της τροχιάς είναι $y = x^2$. Η κλίση της σε κάθε σημείο x είναι $\tan\theta$. Αλλά η κλίση είναι επίσης η παράγωγος της καμπύλης στο σημείο αυτό.

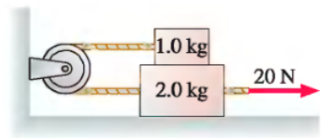
Επομένως $\tan(\pi-\theta) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) \Rightarrow \boxed{\tan\theta = -2x} \quad (2)$

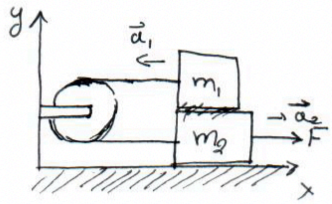
Από την (1) κ (2) έχουμε ότι: $\boxed{a_x = -g\,2x}$

(β) Όταν η θέση της μπάλας είναι $x = 20cm$ τότε

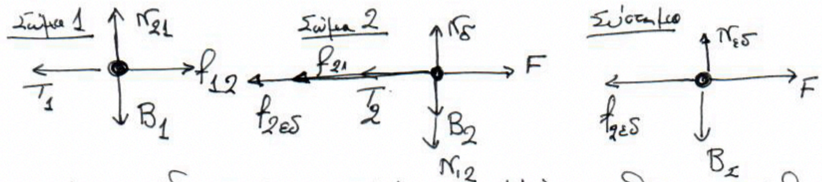
$$a_x = -2 \cdot (0.20m)\, 9.8 m/s^2 \Rightarrow a_x = -3.92 m/s^2$$

3. Το κιβώτιο που βρίσκεται στη χαμηλότερη θέση στο διπλανό σχήμα σύρεται με δύναμη 20N μέσω ενός σχοινιού. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ της επιφάνειας του κιβωτίου και της οριζόντιας επιφάνειας είναι μ_k=0.30. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ των δύο κιβωτίων είναι επίσης 0.30. Ποιά είναι η επιτάχυνση του κιβωτίου που βρίσκεται στην υψηλότερη θέση;





Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα απελευθερωμένου σώματος για κάθε σώμα ξεχωριστά όπως και για το σύστημα των δύο σωμάτων:



Τα κιβώτια επιταχύνονται με την ίδια επιτάχυνση σε μέτρο αλλά αντίθετη κατεύθυνση.
Επομένως έχουμε ότι: $\boxed{a = a_2 = -a_1}$ (1)

Η τάση στα άκρα του σχοινιού που συνδέει τα δύο κιβώτια είναι ίδια εφόσον υποθέτουμε ότι το σχοινί είναι αβαρές. Επομένως:

$$\boxed{T_2 = T_1 = T} \quad (2)$$

Καθώς οι επιφάνειες των δύο κιβωτίων αρχίζουν να κινούνται εμφανίζεται κινητική τριβή. Η τριβή στο κιβώτιο 1 έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά εφόσον το κιβώτιο κινείται αριστερά ενώ η δύναμη της τριβής στο πάνω μέρος της επιφάνειας του κιβωτίου 2 έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά γιατί το κιβώτιο θα κινηθεί προς τα δεξιά ως προς το κιβώτιο 1.
Επομένως θα έχουμε $\boxed{f_{12} = -f_{21}}$ (3)

Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Newton στα σώματα 1 & 2 και στο σύστημα.

Σώμα 1: $\left.\begin{cases} \Sigma F_x = -m_1 a \Rightarrow f_{12} - T = -m_1 a \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_{21} - B = 0 \Rightarrow N_{21} = m_1 g \\ f_{12} = \mu_k N_{21} \Rightarrow f_{12} = \mu_k m_1 g \end{cases}\right\} \Rightarrow \mu m_1 g - T = -m_1 a \Rightarrow \boxed{T = (\mu_k g + a) m_1}$ (4)

Σώμα 2:

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma F_x = m_2 a \Rightarrow -f_{2\varepsilon\delta} - f_{21} - T + F = m_2 a \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_\delta - N_{12} - B_2 = 0 \Rightarrow N_\delta = N_{12} + B_2 = \\ f_{2\varepsilon\delta} = \mu_k N_\delta = \mu_k (N_{12} + B_2) \\ N_{12} = N_{21} = B_1 = m_1 g \end{array}\right.$$

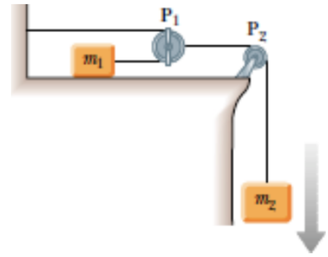
$$\Rightarrow f_{2\varepsilon\delta} = \mu_k (m_1 g + m_2 g) = \mu_k g (m_1 + m_2)$$

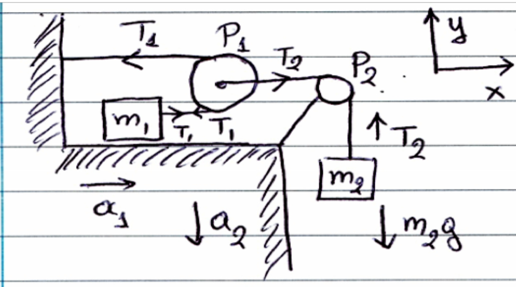
$$\overset{(4)}{\Rightarrow} \quad F - \overbrace{\mu_k g (m_1 + m_2)}^{f_{2\varepsilon\delta}} - \overbrace{\mu_k m_1 g}^{f_{21}} - \overbrace{(\mu_k g + a) m_1}^{T} = m_2 a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F - 3\mu_k g m_1 - \mu_k g m_2 - m_1 a = m_2 a \Rightarrow F - \mu_k g (3m_1 + m_2) = (m_1 + m_2) a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{F - \mu_k g (3m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}} \Rightarrow a = \frac{(20 - 0.3 \cdot 9.8 \cdot 5) N}{3.0 Kgr} = \frac{5.3}{3} \frac{m}{s^2} \Rightarrow \boxed{a = 1.77 \frac{m}{s^2}}$$

4. Ένα σώμα μάζας m_1 βρίσκεται πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Το σώμα είναι συνδεδεμένο με άλλο σώμα μάζας m_2 μέσω μιας αβαρούς και λείας τροχαλίας P_1 και μίας ακίνητης τροχαλίας P_2, όπως στο σχήμα. (α) Αν a_1 και a_2 είναι οι επιταχύνσεις των σωμάτων m_1 και m_2 αντίστοιχα, ποια σχέση συνδέει τις δύο επιταχύνσεις; (β) Εκφράστε τις τάσεις στα σχοινιά και (γ) τις επιταχύνσεις a_1 και a_2 συναρτήσει των μαζών m_1 και m_2 και της επιτάχυνσης της βαρύτητας.





Η τροχαλία P_1 έχει επιτάχυνση a_2 (αφού είναι συνδεδεμένη με το m_2 που έχει επιτάχυνση a_2)

Από αρχή διατήρησης του νήματος όταν η τροχαλία P_1 κινείται απόσταση x_2 το σώμα 1 θα κινηθεί $x_1 = 2x_2$ εφόσον η απόσταση αυτή θα πρέπει να εμφανιστεί από τα 2 σχοινιά εκατέρωθεν της P_1.

Επομένως $x_2 = \frac{x_1}{2} \Rightarrow \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d^2x_1}{dt^2} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}a_1 \Rightarrow \boxed{a_1 = 2a_2}$

Εφαρμόζουμε το 2° νόμο του Newton στα 2 σώματα:

m_2: $T_2 - m_2 g = -m_2 a_2$ (πρόσημο '−')

m_1: $T_1 = m_1 a_1$

P_1: $T_2 - 2T_1 = 0 \Rightarrow T_2 = 2T_1$

$\Rightarrow T_2 = 2m_1 a_1 \Rightarrow 2m_1 a_1 - m_2 g = -m_2 a_2$

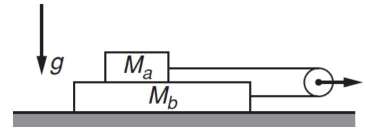
Από την τελευταία σχέση και από $a_1 = 2a_2$ έχουμε:

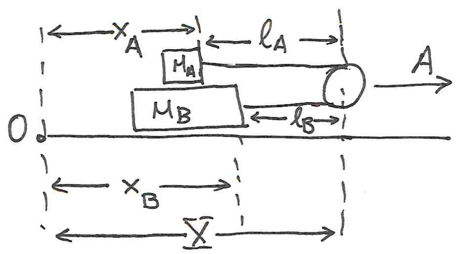
$2m_1 2a_2 - m_2 g = -m_2 a_2 \Rightarrow (4m_1 + m_2)a_2 = m_2 g \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{m_2 g}{4m_1 + m_2}}$

Άρα αφού $a_1 = 2a_2 \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{2m_2 g}{4m_1 + m_2}}$

Οι τάσεις στα 2 σχοινιά θα είναι: $\boxed{T_1 = \frac{2m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}}$ $\boxed{T_2 = \frac{4m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}}$

5. Μία μάζα M_a βρίσκεται πάνω σε μία άλλη μάζα M_b όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Υποθέστε ότι $M_b > M_a$. Οι δύο μάζες τραβιούνται από την ηρεμία με την βοήθεια νήματος αμελητέας μάζας που περνά από μία αβαρή τροχαλία. Η τροχαλία επιταχύνεται με επιτάχυνση A. Η μάζα *B* γλιστρά πάνω στην επιφάνεια του τραπεζιού χωρίς τριβές. Ωστόσο υπάρχει μία σταθερή δύναμη τριβής, *f*, μεταξύ των επιφανειών των δύο μαζών εξαιτίας της σχετικής τους κίνησης. Να βρεθεί η τάση του νήματος.





Σχεδιάζουμε τις συντεταγμένες των σωμάτων θεωρώντας τυχαίο σύστημα συντεταγμένων με αρχή το O.

Το νήμα έχει σταθερό μήκος, επομένως:

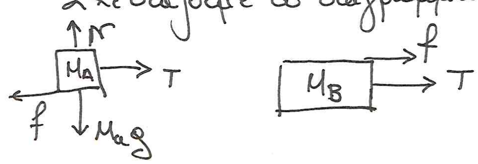
$$l_A + l_B = σταθ \Rightarrow \frac{dl_A}{dt} + \frac{dl_B}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 l_A}{dt^2} = -\frac{d^2 l_B}{dt^2} \Rightarrow \boxed{a_{Al} = -a_{Bl}} \quad (1)$$

Επίσης
$$\left.\begin{aligned} x_A + l_A = X &\Rightarrow \frac{dx_A}{dt} + \frac{dl_A}{dt} = \frac{dX}{dt} \Rightarrow \frac{d^2 x_A}{dt^2} + \frac{d^2 l_A}{dt^2} = \frac{d^2 X}{dt^2} \\ x_B + l_B = X &\Rightarrow \frac{dx_B}{dt} + \frac{dl_B}{dt} = \frac{dX}{dt} \Rightarrow \frac{d^2 x_B}{dt^2} + \frac{d^2 l_B}{dt^2} = \frac{d^2 X}{dt^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a_A + a_{Al} &= A \\ a_B + a_{Bl} &= A \end{aligned}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{\begin{aligned} a_A + a_{Al} &= A \\ a_B - a_{Al} &= A \end{aligned}} \quad (2)$$

Σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος:



Επομένως από το 2ο νόμο του Newton:

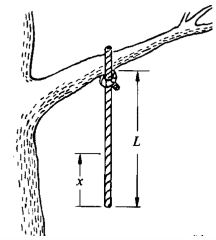
$$\left.\begin{aligned} M_A a_A = T - f &\Rightarrow a_A = \frac{1}{M_A}(T-f) \\ M_B a_B = T + f &\Rightarrow a_B = \frac{1}{M_B}(T+f) \end{aligned}\right\} \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

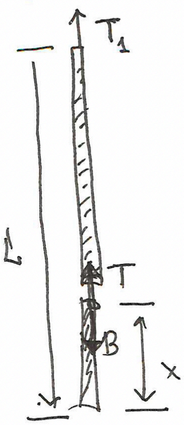
$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} A - a_{Al} &= \frac{1}{M_A}(T-f) \\ A + a_{Al} &= \frac{1}{M_B}(T+f) \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2A = \left(\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B}\right)T + \left(\frac{1}{M_B} - \frac{1}{M_A}\right)f =$$

$$= \frac{M_B + M_A}{M_A M_B} T + \frac{M_A - M_B}{M_B M_A} f \Rightarrow$$

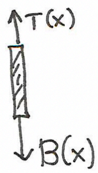
$$\Rightarrow 2A(M_A M_B) - (M_A - M_B)f = (M_A + M_B)T \Rightarrow T = 2A\frac{M_A M_B}{(M_A + M_B)} - \frac{M_A - M_B}{M_A + M_B} f$$

6. Ένα ομοιογενές σχοινί μάζας M και μήκους L κρέμεται από το κλαδί ενός δένδρου. Να βρείτε την τάση του σχοινιού σε απόσταση x από το κάτω άκρο του.





Σε απόσταση x από το κάτω άκρο του σχοινιού πάνω σε ένα τμήμα του ασκούνται οι δυνάμεις όπως φαίνονται στο σχήμα



Υπάρχει η τάση $T(x)$ και το βάρος του τμήματος του σχοινιού $B(x)$.

Αλλά το βάρος του τμήματος του σχοινιού είναι:

$B(x) = m_x g$ όπου m_x η μάζα του τμήματος του σχοινιού.

Αλλά εφόσον το σχοινί είναι ομοιόμορφο: τότε η γραμμική του πυκνότητα:

$\lambda = \dfrac{m}{L}$ (σε αναλογία με την πυκνότητα επιφάνειας).

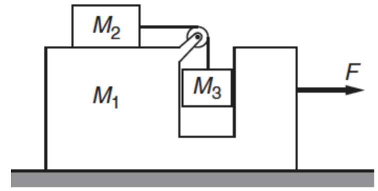
Επομένως $m_x = \lambda \cdot x$. Τότε $B(x) = \lambda x g = \dfrac{mg}{L} x = B\dfrac{x}{L}$

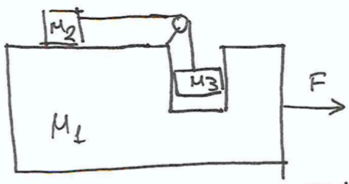
Το σχοινί είναι ακίνητο και επομένως η συνισταμένη των δυνάμεων θα είναι

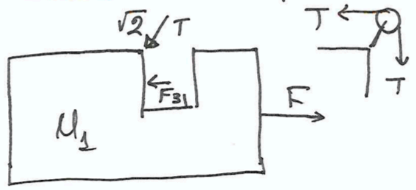
$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T}_x + \vec{B}_x = 0 \Rightarrow \vec{T}(x) = -\vec{B}(x) \Rightarrow \boxed{T(x) = -(-B(x)) = B\dfrac{x}{L}}$

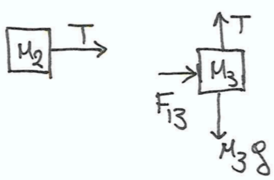
Η τάση του νήματος στο κλαδί $(x=L)$ είναι ίση με το βάρος του, ενώ στο κατώτερο άκρο του είναι $T(x=0) = 0N$.

7. Θεωρήστε το σύστημα των μαζών του διπλανού σχήματος. Όλες οι επιφάνειες είναι λείες. Ποια δύναμη, F, θα πρέπει να ασκηθεί πάνω στο σώμα μάζας M_1 ώστε η μάζα M_3 να παραμένει ακίνητη;









Η μάζα M_3 είναι ακίνητη. Επομένως όλες οι μάζες M_1, M_2 και M_3 έχουν την ίδια οριζόντια επιτάχυνση a.

Επίσης η μάζα M_1 ωθεί την μάζα M_3 με μία δύναμη F_{13} ώστε η M_3 να αποκτήσει επιτάχυνση a.

Σύμφωνα με τον 3^o νόμο του Newton και η M_3 ασκεί δύναμη F_{31} στο σώμα M_1.

Η τροχαλία ασκεί μία δύναμη στο M_1 όπως στο σχήμα. Η δύναμη αυτή έχει οριζόντια συνιστώσα που είναι αντίθετης διεύθυνσης από την δύναμη F.

Σύμφωνα με τα διαγράμματα ελεύθερου σώματος, θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} M_1 a &= F - F_{31} - T \\ M_2 a &= T \\ M_3 a &= F_{13} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F = M_1 a + F_{31} + T \Rightarrow$$

$$M_3 g - T = 0 \Rightarrow T = M_3 g = M_2 a \Rightarrow a = \frac{M_3}{M_2} g$$

$F_{13} = F_{31}$ μέτρα ίσα λόγω δράσης-αντίδρασης

$$F = M_1 a + M_3 a + M_2 a \Rightarrow$$

$$F = (M_1 + M_3 + M_2) a \Rightarrow$$

$$\boxed{F = (M_1 + M_2 + M_3) \frac{M_3}{M_2} g}$$