# ΦΥΣ. 111

## Τελική Εξέταση: 22-Δεκεμβρίου-2020

Πριν αρχίσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητας).

| **Ονοματεπώνυμο** | **Αριθμός Ταυτότητας** |
|---|---|
| | |

**Απενεργοποιήστε τα κινητά σας.**

Η εξέταση περιέχει 10 ισότιμες ασκήσεις και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλες από αυτές. Η μέγιστη συνολική βαθμολογία της εξέτασης είναι 100 μονάδες.

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΣΤΕ ΜΟΝΟ ΤΙΣ ΣΕΛΙΔΕΣ ΠΟΥ ΣΑΣ ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΜΗΝ ΚΟΨΕΤΕ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΣΕΛΙΔΑ

**Η διάρκεια της εξέτασης είναι 180 λεπτά. Καλή Επιτυχία !**

| **Άσκηση** | **Βαθμός** |
|---|---|
| $1^{η}$ (10μ) | |
| $2^{η}$ (10μ) | |
| $3^{η}$ (10μ) | |
| $4^{η}$ (10μ) | |
| $5^{η}$ (10μ) | |
| $6^{η}$ (10μ) | |
| $7^{η}$ (10μ) | |
| $8^{η}$ (10μ) | |
| $9^{η}$ (10μ) | |
| $10^{η}$ (10μ) | |
| **Σύνολο** | |

# Τύποι που μπορεί να φανούν χρήσιμοι

**Γραμμική κίνηση:**

$\upsilon(t)=\upsilon_0+\int_{t_i}^{t_f} a(t)dt$

$x(t)=x_0+\int_{t_i}^{t_f} \upsilon(t)dt$

$\upsilon^2=\upsilon_0^2+2a(x-x_0)$ για α=σταθ.

$x=x_o+\frac{1}{2}(\upsilon+\upsilon_o)t$ για α=σταθ.

$x_{\max}=\frac{\upsilon_o^2\sin 2\theta}{g}$ βεληνεκές

g = 9.8m/s$^2$

**Στροφική κίνηση:**

1περιστροφή = 360° = 2π ακτίνια

$\theta=\frac{s}{r}$

$\bar{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t},\quad \bar{\alpha}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

$\omega=\omega_0+\alpha_{\gamma\omega\nu.}t$

$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu.}t^2$

$\omega_f^2=\omega_i^2+2\alpha_{\gamma\omega\nu.}(\theta_f-\theta_i)$

$\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi}=\vec{\omega}\times\vec{r}\qquad |\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi}|=|\vec{\omega}|r$

$\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\qquad \vec{a}_{\varepsilon\varphi}=\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.}\times\vec{r}\Rightarrow|\vec{a}_{\varepsilon\varphi}|=|\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.}||\vec{r}|$

$\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}=\vec{\omega}\times\vec{r}\Rightarrow|\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}|=\frac{|\vec{\upsilon}_{\varepsilon\varphi}|^2}{r}=|\vec{\omega}|^2 r$

$\vec{a}_{\gamma\rho\alpha\mu}=\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.}+\vec{a}_{\varepsilon\varphi}=\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}$

$T=\frac{1}{f}=\frac{2\pi r}{\upsilon_{\varepsilon\varphi}}$

**Βαρυτική έλξη:**

$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$

$G=6.67\times10^{-11}\,N\cdot m^2/kg^2$

$U_g=-G\frac{m_1m_2}{r}$

$E=\frac{1}{2}m\upsilon^2-G\frac{m_1m}{r}$

**Έργο – Ενέργεια:**

Έργο σταθερής δύναμης: $W=\vec{F}\cdot\vec{s}$

Έργο μεταβαλλόμενης δύναμης: $W=\int\vec{F}\cdot d\vec{s}$

$\vec{F}=-\frac{dU}{d\vec{r}}$

$\Delta U=-\int_{r_i}^{r_f}\vec{F}\cdot d\vec{r}$

$U_{\varepsilon\lambda}=\frac{1}{2}kx^2$

$U_g=mgh$ (h<<R$_{\gamma\eta\varsigma}$)

$W=\Delta E_{\kappa\iota\nu.}$

$W=-\Delta U$ (για συντηρητικές δυνάμεις)

$E_{\mu\eta\chi.}=E_{\kappa\iota\nu.}+U$

$E_{\kappa\iota\nu.}=\frac{1}{2}m\upsilon^2$

$W=\Delta E_{\mu\eta\chi.}$ (για μη συντηρητικές δυνάμεις)

$\vec{F}_{\varepsilon\lambda}=-k\vec{x}$

$P=\frac{\Delta W}{\Delta t}=\frac{\Delta E}{\Delta t}$

$P=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}$

**Ορμή – Ώθηση - Κρούσεις:**

$\vec{p}=m\vec{\upsilon}$

Ώθηση: $\vec{I}=\int F\,dt=\Delta\vec{p}$

$\vec{F}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$

Απομονωμένο σύστημα: $\vec{p}_i=\vec{p}_f$

Ελαστική κρούση: $\Delta\vec{p}=0,\ \Delta E=0$

Μη ελαστική κρούση: $\Delta\vec{p}=0,\ \Delta E\neq0$

Ελαστική κρούση: $\vec{\upsilon}_1-\vec{\upsilon}_2=-(\vec{\upsilon}_1'-\vec{\upsilon}_2')$

$\vec{r}_{CM}=\frac{1}{M_{o\lambda}}\sum_i m\vec{r}_i\qquad r_{CM}=\frac{1}{M_{o\lambda}}\int r\,dm$

$$\upsilon_{\delta\iota\alpha\varphi\upsilon\gamma\eta\varsigma.} = \sqrt{\frac{2GM_{\gamma\eta}}{R_{\gamma\eta}}}$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G\mathrm{M_H}}\right) r^3$$

$R_{\gamma\eta} = 6.4\times10^3 km \quad M_{\gamma\eta} = 5.97\times10^{24} kg$

**Περιστροφή σώματος:**

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

$$E_{\kappa\iota\nu}^{\pi\varepsilon\rho.} = \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = I\alpha$$

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = I\vec{\omega}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Απομονωμένο σύστημα: $L_i = L_f$

μετάπτωση γυροσκοπίου $\omega_\mu = \dfrac{\tau}{I\omega_{\pi\varepsilon\rho}}$

**Συνθήκες στατικής ισορροπίας:**

$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} = 0$ και $\sum \vec{\tau}_{\varepsilon\xi} = 0$

$$\vec{\upsilon}_{CM} = \frac{1}{M_{o\lambda}}\sum_i m\upsilon_i$$

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} = M\vec{a}_{CM}$$

**Ταλαντώσεις:**

$m\ddot{x} + kx = 0$ Δ.Ε. αρμονικού ταλαντωτή

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = B\sin(\omega t + \theta)$$

$$x(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$$

$$x(t) = Ee^{i\omega t} + Fe^{-i\omega t}$$

$$\upsilon(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi), \quad \upsilon = \pm\omega\sqrt{(A^2 - x^2)}$$

$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$$E = U + E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

**Τριγωνομετρικές ταυτότητες**:

$$\cos(a\pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a\pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) + \cos(a+b) = 2\cos(a)\cos(b)$$

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) + \sin(a+b) = 2\sin(a)\cos(b)$$

$$\cos^2(a) = \frac{1}{1+\tan^2(a)} \qquad \sin^2(a) = \frac{\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}$$

**Ροπές αδράνειας**:

Συμπαγής σφαίρα: $I_{CM} = 2MR^2/5$

Κοίλη σφαίρα: $I_{CM} = 2MR^2/3$

Συμπαγής κύλινδρος/δίσκος: $I_{CM} = MR^2/2$

Κυλινδρικός φλοιός/στεφάνι: $I_{CM} = MR^2$

Ράβδος: $I_{CM} = ML^2/12$

**Ανάπτυγμα Taylor:**

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(x)|_{x=a} + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(x)|_{x=a} + \frac{1}{3!}(x-a)^3 f'''(x)|_{x=a} + \cdots$$

**Διονυμικό Ανάπτυγμα:**

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$ όπου $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ για $n$ θετικό ακέραιο εκθέτη

$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}x^{r-k}y^k$ όπου $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k!}$ για $r$ πραγματικό εκθέτη

$(1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \cdots$ για $|x| << 1$

$(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \cdots$ για $|x| << 1$

$(1\pm x)^{n} = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$ για $|x| << 1$

**Άσκηση 1 [10μ]**

Υπάρχουν τρεις θεμελιώδεις σταθερές, η σταθερά του Planck $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34} kg\, m^2/s$, η σταθερά της παγκόσμιας έλξης που ισούται με $G = 6.67 \cdot 10^{-11} m^3/(kg\, s^2)$, και η ταχύτητα του φωτός $c = 3.0 \cdot 10^8 m/s$. Οι σταθερές αυτές μπορούν να συνδυαστούν και να δώσουν μεγέθη με διαστάσεις μήκους, χρόνου και μάζας. Τα μεγέθη αυτά είναι γνωστά ως *μήκος Planck, χρόνος Planck* και *μάζα Planck.* Να βρείτε τα τρία αυτά μεγέθη και τις αντίστοιχες τιμές τους.

Μπορούμε να γράψουμε γενικές εκφράσεις της μορφής: $\hbar^a G^b c^\gamma$ για κάθε ένα μέγεθος που επιθυμούμε και να λύσουμε ως προς τις τιμές των εκθετών, ώστε οι διαστάσεις στο αριστερό και δεξί σκέλος των εξισώσεων να είναι ίδιες:

(α) Για το μήκος Planck οι διαστάσεις πρέπει να είναι αυτές του μήκους:

$$l_p = \hbar^a G^b c^\gamma \Rightarrow [l_p] = [\hbar]^a [G]^b [c]^\gamma \Rightarrow L = \left(M\frac{L^2}{T}\right)^a \left(\frac{L^3}{MT^2}\right)^b \left(\frac{L}{T}\right)^\gamma$$

$$\Rightarrow L = \left(M^a L^{2a} T^{-a}\right)\left(L^{3b} M^{-b} T^{-2b}\right)\left(L^\gamma T^{-\gamma}\right) \Rightarrow \boxed{L = M^{a-b} T^{-a-2b-\gamma} L^{2a+3b+\gamma}}$$

Το δεξί μέλος θα είναι κοινό για όλες τις περιπτώσεις που εξετάζουμε:

Στην περίπτωση του μήκους Planck θα πάρουμε:

$$\left.\begin{aligned} a-b &= 0 \Rightarrow a = b \quad (1)\\ -a-2b-\gamma &= 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} -3b = \gamma \Rightarrow \gamma = -3b = -3a \quad (2)\\ 2a+3b+\gamma &= 1 \overset{(2)}{\Rightarrow} 2a + \cancel{3b} - \cancel{3b} = 1 \Rightarrow a = 1/2 \quad (3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &a = 1/2 = b\\ &\gamma = -3/2\\ &\boxed{l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}} \end{aligned}$$

Αντικατάσταση των σταθερών δίνει: $l_p = \sqrt{\dfrac{1.05\cdot10^{-34}\cdot 6.67\cdot10^{-11}\, m^5/s^3}{(3\cdot10^8)^3\, m^3/s^3}} \Rightarrow l_p = 1.6\cdot10^{-35} m$

(β) Ο χρόνος Planck:

$$T = M^{a-b} T^{-a-2b-\gamma} L^{2a+3b+\gamma}$$

$$\left.\begin{aligned} a-b &= 0 \Rightarrow a = b \quad (1)\\ \left.\begin{aligned} -a-2b-\gamma &= 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} -3b-\gamma = 1\\ 2a+3b+\gamma &= 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} 5b+\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -5b \ (2) \end{aligned}\right\} &\Rightarrow -3b+5b = 1 \Rightarrow b = 1/2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = b = 1/2 \quad \gamma = -5/2$$

Επομένως $\boxed{t_p = \sqrt{\dfrac{\hbar G}{c^5}}}$

Αντικατάσταση των σταθερών δίνει: $t_p = \sqrt{\dfrac{1.05\cdot10^{-34}\cdot 6.67\cdot10^{-11}\, m^5/s^2}{(3\cdot10^8)^5\, m^5/s^5}} \Rightarrow \boxed{t_p = 5.4\cdot10^{-44} s}$

(γ) Για τη μάζα Planck: $M = M_*^{a-b} T^{-a-2b-\gamma} L^{2a+3b+\gamma}$

$$\left.\begin{aligned} &a-b = 1\\ &\left.\begin{aligned} -a-2b-\gamma &= 0\\ 2a+3b+\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} a+b = 0 \end{aligned}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} \begin{aligned} &a = 1/2\\ &b = -1/2\\ &\gamma = -a-2b = 1/2 \end{aligned} \Bigg\} \Rightarrow \boxed{M_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}} \Rightarrow \boxed{M_p = 2.2\cdot10^{-8} kg}$$

**Άσκηση 2 [10μ]**

Ένα άτομο ρίχνει μια μπάλα με ταχύτητα $\upsilon_0$ και γωνία 45° ως προς την οριζόντια διεύθυνση και χτυπά έναν στόχο. Κατόπιν το άτομο ρίχνει την μπάλα με την ίδια ταχύτητα αλλά με μια τέτοια γωνία ώστε η μπάλα να χτυπήσει στο έδαφος να αναπηδήσει και να φθάσει στον ίδιο στόχο. Οι τροχιές της μπάλας πριν και μετά την αναπήδησή της είναι πανομοιότυπες. Σε ποια από τις δύο περιπτώσεις ρίψης η μπάλα φθάνει πιο γρήγορα στον στόχο και ποια η χρονική διαφορά στις δύο περιπτώσεις. Θεωρήστε ότι η κρούση με το έδαφος είναι τέλεια ελαστική και αγνοήστε την αντίσταση από τον αέρα.

Ξέρουμε ότι το βεληνεκές για ρίψη με γωνία 45° και αρχική ταχύτητα $\upsilon_0$ είναι:

$$\left.\begin{aligned} x_{max} &= \upsilon_{0x}\cdot t_{\pi\tau} = \upsilon_0\cos\theta\, t_{\pi\tau} \\ t_{\pi\tau} &= 2t_{\alpha\nu} = 2\,\frac{\upsilon_0\sin\theta}{g}\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_{max} = \frac{2\upsilon_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{\upsilon_0^2\sin(2\theta)}{g}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{max} = \frac{\upsilon_0^2}{g}} \quad (1)$$

Στην περίπτωση της ρίψης με αναπήδηση της μπάλας, κάθε τμήμα της τροχιάς πριν και μετά την αναπήδηση έχει το ίδιο βεληνεκές και ίσο με το μισό του βεληνεκούς της αρχικής ρίψης όπως βρέθηκε στην (1).

Η ταχύτητα ρίψης είναι και πάλι $\upsilon_0$. Επομένως το αρχικό τμήμα της τροχιάς θα είναι:

$$x^{(2)}_{max} = \frac{1}{2}x^{(1)}_{max} \Rightarrow \frac{\cancel{\upsilon_0^2}\sin(2\theta_2)}{\cancel{g}} = \frac{1}{2}\,\frac{\cancel{\upsilon_0^2}}{\cancel{g}} \Rightarrow \sin(2\theta_2) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\theta_2 = 30^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\theta_2 = 15^\circ}$$

Η σταθερά συνιστώσα της ταχύτητας στη x-διεύθυνση είναι $\upsilon_{0x} = \upsilon_0\cos\theta$.

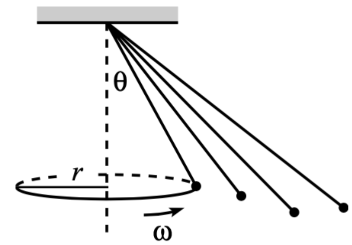
Στην 1η περίπτωση η συνιστώσα αυτή είναι: $\upsilon_0\cos45^\circ$ ενώ στη 2η περίπτωση θα είναι $\upsilon_0\cos15^\circ$.

Η οριζόντια μετατόπιση θα είναι: $\left\{\begin{aligned} x_1 &= \upsilon_0\cos45^\circ\cdot t^{(1)}_{\pi\tau} \\ x_2 &= \upsilon_0\cos15^\circ\cdot t^{(2)}_{\pi\tau}\end{aligned}\right\} \overset{\div}{\Rightarrow} \frac{\cos45^\circ}{\cos15^\circ} = \frac{t^{(2)}_{\pi\tau}}{t^{(1)}_{\pi\tau}}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{t^{(2)}_{\pi\tau}}{t^{(1)}_{\pi\tau}} \Rightarrow t^{(2)}_{\pi\tau} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,t^{(1)}_{\pi\tau} \Rightarrow \boxed{t^{(2)}_{\pi\tau} \simeq 0.73\, t^{(1)}_{\pi\tau}}$$

ο χρόνος πτήσης για τη ρίψη με την αναπήδηση είναι μικρότερος ~30% από την απευθείας ρίψη.

**Άσκηση 3 [10μ]**

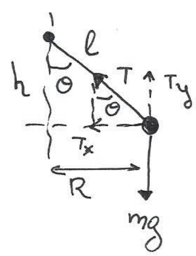



Ένας μεγάλος αριθμός από μάζες είναι προσαρτημένος μέσω νημάτων διαφορετικών μηκών από ένα κοινό ακλόνητο σημείο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Όλες οι μάζες περιστρέφονται σε οριζόντιους κύκλους (ένας τέτοιος κύκλος φαίνεται στο σχήμα) διαφορετικών ακτίνων με την ίδια γωνιακή ταχύτητα *ω*.

(α) Βρείτε την ακτίνα *r* μιας τέτοιας κυκλικής τροχιάς συναρτήσει της γωνίας *θ* που σχηματίζει το νήμα που συγκρατεί τη μάζα με την κατακόρυφο διεύθυνση. [**4μ**]

(β) Αν πάρετε μια φωτογραφία της διάταξης κάποια τυχαία χρονική στιγμή όταν όλες οι μάζες βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο (όπως φαίνεται στο σχήμα για 4 μάζες), ποια θα είναι η μορφή της καμπύλης που περνά από τις μάζες; [**6μ**]

(a)




$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow T_y - mg = 0 \Rightarrow T_y = mg \\ \Sigma F_x = T_x = ma &\Rightarrow T_y \tan\theta = ma \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{m} g \tan\theta = \cancel{m} a \Rightarrow \boxed{a = g\tan\theta} \quad (1)$$

Αλλά η δύναμη $T_x$ δρα ως κεντρομόλος δύναμη και επομένως η επιτάχυνση α θα αποτελεί την κεντρομόλο επιτάχυνση.

Ξέρουμε ότι η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι: $a_r = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^{\cancel{2}}}{\cancel{R}} = \omega^2 R$

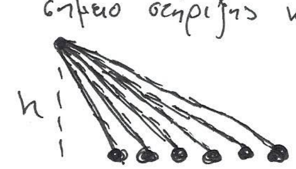
Αντικατάσταση της (1) στην τελευταία δίνει: $\omega^2 R = g\tan\theta \Rightarrow \boxed{R = \frac{g}{\omega^2}\tan\theta}$

(β) Από το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) έχουμε $\frac{R}{\tan\theta} = \frac{g}{\omega^2}$

Αλλά $\frac{R}{\tan\theta} = h$ ενώ $g$ και $\omega^2$ είναι σταθερά για όλες τις μάζες.

Επομένως $\frac{R}{\tan\theta} = \frac{g}{\omega^2} = σταθ = h$

Αυτό σημαίνει ότι όλες οι μάζες βρίσκονται στο ίδιο ύψος από το σημείο στήριξης και επομένως σχηματίζουν μια οριζόντια ευθεία γραμμή

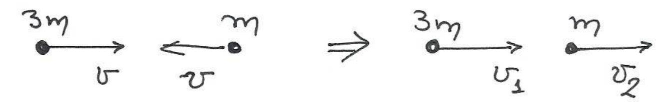


**Άσκηση 4 [10μ]**

Σώμα μάζας $3m$ κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα $\upsilon$ και σώμα μάζας $m$ κινείται προς τα αριστερά επίσης με ταχύτητα $\upsilon$. Τα σώματα συγκρούονται ελαστικά. Να βρείτε τις ταχύτητές τους μετά την σύγκρουση στο σύστημα αναφοράς του ακίνητου παρατηρητή. Θα πρέπει να λύσετε το πρόβλημα δουλεύοντας στο:

(α) Στο σύστημα αναφοράς του ακίνητου παρατηρητή. [**5μ**]

(β) Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας. [**5μ**]

(α) 


Θεωρούμε την θετική φορά αυτή προς τα δεξιά, και τις τελικές ταχύτητες μετά την κρούση ως $\upsilon_1$ και $\upsilon_2$ για τη μάζα 3m και m αντίστοιχα.

Διατήρηση της ορμής δίνει: $\vec{P}^i_{ολ} = \vec{P}^f_{ολ} \Rightarrow \vec{p}_1^{\,i} + \vec{p}_2^{\,i} = \vec{p}_1^{\,f} + \vec{p}_2^{\,f} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3m\upsilon_1^i + m\upsilon_2^i = 3m\upsilon_1^f + m\upsilon_2^f \Rightarrow 3m\upsilon - m\upsilon = 3m\upsilon_1^f + m\upsilon_2^f \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\cancel{m}\upsilon_1^f + \cancel{m}\upsilon_2^f = 2\cancel{m}\upsilon \Rightarrow \boxed{3\upsilon_1^f + \upsilon_2^f = 2\upsilon}$ (1)

Από διατήρηση της ενέργειας έχουμε:

$E^i_{κιν_1} + E^i_{κιν_2} = E^f_{κιν_1} + E^f_{κιν_2} \Rightarrow \cancel{\tfrac{1}{2}}3\cancel{m}\upsilon^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}\upsilon^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}3\cancel{m}\upsilon_1^{f\,2} + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}\upsilon_2^{f\,2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{4\upsilon^2 = 3\upsilon_1^{f\,2} + \upsilon_2^{f\,2}}$ (2)

Από τη σχέση που δίνει τη σχετική ταχύτητα πριν και μετά την κρούση έχουμε:

$\vec{\upsilon}_1^{\,i} - \vec{\upsilon}_2^{\,i} = -(\vec{\upsilon}_1^{\,f} - \vec{\upsilon}_2^{\,f}) \Rightarrow \upsilon - (-\upsilon) = -\upsilon_1^f + \upsilon_2^f \Rightarrow \boxed{2\upsilon = -\upsilon_1^f + \upsilon_2^f}$ (3)

Από (1) και (3) έχουμε: $3\upsilon_1^f + \cancel{\upsilon_2^f} = -\upsilon_1^f + \cancel{\upsilon_2^f} \Rightarrow 4\upsilon_1^f = 0 \Rightarrow \boxed{\upsilon_1^f = 0}$

Αντικατάσταση στην (3) δίνει ότι: $2\upsilon = \upsilon_2^f \Rightarrow \boxed{\upsilon_2^f = 2\upsilon}$

Επομένως η μάζα 3m σταματά μετά τη σύγκρουση ενώ η μάζα m κινείται με $2\upsilon$.

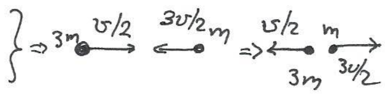
(β) Το κέντρο μάζας των δύο σωμάτων κινείται με ταχύτητα: $\upsilon_{cm} = \frac{3\cancel{m}\upsilon - \cancel{m}\upsilon}{4\cancel{m}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon_{cm} = \frac{\cancel{2}\upsilon}{\cancel{4}\,2} \Rightarrow \boxed{\upsilon_{cm} = \frac{1}{2}\upsilon}$ προς τα δεξιά.

Οι ταχύτητες των σωμάτων στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας θα είναι:

$$v^{i}_{1/CM} = v^{i}_{1} - v_{CM} = v - \frac{1}{2}v \Rightarrow v^{i}_{1/CM} = v/2$$

$$v^{i}_{2/CM} = v^{i}_{2} - v_{CM} = -v - \frac{1}{2}v \Rightarrow v^{i}_{2/CM} = -3v/2$$

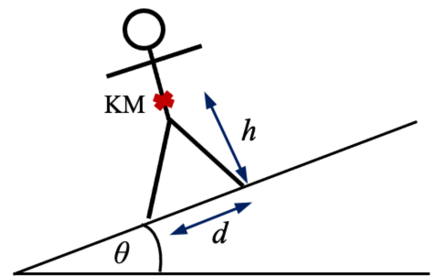
$\Rightarrow$ 


Μετά τη σύγκρουση, τα σώματα απλά αντιστρέφουν τις ταχύτητές τους στο σύστημα του CM.

Πηγαίνουμε και πάλι στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου: $v^{f}_{1/lab} = v^{f}_{1/CM} + v_{CM} = -\frac{v}{2} + \frac{v}{2} = 0$

Ενώ για το σώμα μάζας $m$ θα έχουμε: $v^{f}_{2/lab} = v^{f}_{2/CM} + v_{CM} = \frac{3}{2}v + \frac{v}{2} \Rightarrow \boxed{v^{f}_{2} = 2v}$

**Άσκηση 5 [10μ]**



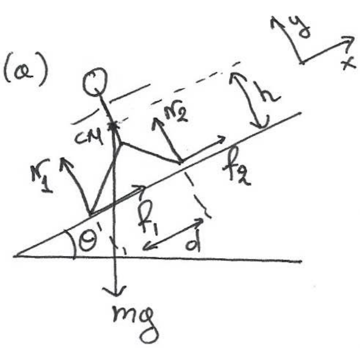

Ένα άτομο στέκεται σε μια κεκλιμένη επιφάνεια κλίσης $\theta$ με την οριζόντια διεύθυνση, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το άτομο έχει τα πόδια του ανοικτά με τέτοιο τρόπο ώστε το ένα πόδι να βρίσκεται χαμηλότερα στην κεκλιμένη επιφάνεια ενώ το άλλο πόδι να βρίσκεται σε υψηλότερη θέση. Η απόσταση μεταξύ των ποδιών είναι $d$. Το κέντρο μάζας, ΚΜ, του ατόμου είναι σε ύψος $h$ από την κεκλιμένη επιφάνεια στην κάθετο από την κεκλιμένη επιφάνεια και στο μέσο μεταξύ του ανοίγματος των ποδιών του. Υποθέστε ότι ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των ποδιών του ατόμου και της κεκλιμένης επιφάνειας είναι αρκετά μεγάλος ώστε το άτομο να μη γλιστρήσει πάνω στην επιφάνεια.

(α) Να κάνετε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος. [**2μ**]

(α) Ποιο είναι το μέτρο της κάθετης δύναμης σε κάθε πόδι; [**6μ**]

(β) Ποια πρέπει να είναι η απόσταση μεταξύ των ποδιών του ατόμου ώστε η κάθετη αντίδραση από την κεκλιμένη επιφάνεια στο πόδι που βρίσκεται στην υψηλότερη θέση να είναι σχεδόν 0. Αυτή είναι η στιγμή που το άτομο αρχίζει να στρέφεται και πέφτει. [**2μ**]

(α)




Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο άτομο καθώς στέκεται στην κεκλιμένη επιφάνεια. Θεωρούμε επίσης το σύστημα συντεταγμένων του σχήματος.

Εφαρμόζουμε το νόμο του Newton στη x και y διεύθυνση:

$$x: \ \Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \Rightarrow f_1 + f_2 - mg\sin\theta = 0 \Rightarrow f_1 + f_2 = mg\sin\theta \quad (1)$$

$$y: \ \Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow N_1 + N_2 - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = mg\cos\theta \quad (2)$$

Υπολογίζουμε τις ροπές ως προς το κέντρο μάζας του ατόμου:

$$\Sigma \vec{\tau} = \vec{0} \Rightarrow h\cdot f_1 + h\cdot f_2 + N_2\cdot\frac{d}{2} - N_1\frac{d}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(f_1+f_2) + \frac{d}{2}(N_2 - N_1) = 0 \quad (3)$$

Από την τελευταία εξίσωση έχουμε: $N_1 - N_2 = \frac{2h(f_1+f_2)}{d}$

Αντικατάσταση της (1) στην τελευταία δίνει: $\boxed{N_1 - N_2 = \frac{2h(mg\sin\Theta)}{d}}$ (4)

Προσθέτουμε τις (2) κ (4): $2N_1 = \frac{mgd\cos\Theta + 2hmg\sin\Theta}{d} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{N_1 = \frac{mg(d\cos\Theta + 2h\sin\Theta)}{2d}} \quad (A)$$

Αντικατάσταση στην (2) δίνει: $N_2 = mg\cos\Theta - N_1 = \frac{2mgd\cos\Theta - mg(d\cos\Theta + 2h\sin\Theta)}{2d} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{N_2 = \frac{mg(d\cos\Theta - 2h\sin\Theta)}{2d}} \quad (B)$$

Από την (B) παρατηρούμε ότι η κάθετη δύναμη $N_2$ μηδενίζεται όταν ο αριθμητής μηδενιστεί: $d\cos\Theta - 2h\sin\Theta = 0 \Rightarrow \frac{d}{2h} = \tan\Theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{d = 2h\tan\Theta}$$

Να σημειωθεί, ότι δεν κάναμε οποιαδήποτε υπόθεση για κάποιο μοντέλο τριβών για τις δυνάμεις τριβής που χρησιμοποιήθηκαν, και δεν έχει χρησιμοποιηθεί κάποιος συντελεστής στατικής τριβής. Οι δύο δυνάμεις τριβής $f_1$ και $f_2$ δεν υπολογίστηκαν ξεχωριστά. Αντίθετα το άθροισμά τους μόνο χρησιμοποιήθηκε στον παραπάνω υπολογισμό.

**Άσκηση 6 [10μ]**

Δύο μπάλες του basket, κάθε μία μάζας *m* και ακτίνας *R* βρίσκονται σε επαφή.

(α) Να βρείτε τη βαρυτική δύναμη *f* που ασκεί κάθε μπάλα στην άλλη. [**1μ**]

(β) Οι δύο μπάλες, η μία ακριβώς πάνω από την άλλη και σε επαφή, αφήνονται να κινηθούν κάτω από την βαρυτική έλξη ενός μακρινού πλανήτη μάζας *M*. Υποθέστε ότι δεν υπάρχει οποιαδήποτε άλλο ουράνιο σώμα που να επηρεάζει την κίνηση των δύο μπαλών. Ποιο το μέτρο της διαφοράς της ελκτικής δύναμης, $\Delta F$, που ασκεί ο πλανήτης στις δύο μπάλες συναρτήσει της απόστασης *r* όπως μετριέται από το κέντρο του πλανήτη στο σημείο επαφής των δύο μπαλών; [**2μ**]

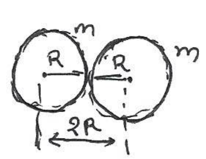
(γ) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η ακτίνα των μπαλών είναι πολύ μικρότερη από την απόστασή τους από τον πλανήτη ($R \ll r$) να γράψετε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος σε μια απλούστερη προσεγγιστική μορφή. [**2μ**]

(δ) Βρείτε συναρτήσει των μεγεθών *m*, *M*, και *R* την απόσταση $r_o$ στην οποία οι δύο μπάλες χάνουν επαφή. [**4μ**]

(ε) Θεωρήστε ότι οι μπάλες και ο πλανήτης έχουν την ίδια πυκνότητα μάζας ($\rho = M/V$). Δείξτε ότι στην περίπτωση αυτή $r_o = 2R_{πλ.}$, όπου $R_{πλ.}$ είναι η ακτίνα του πλανήτη.

_Πληροφοριακά:_ ο υπολογισμός αυτός σχετίζεται με έναν περισσότερο πολύπλοκο υπολογισμό του *ορίου Roche*. Ένας δορυφόρος που συγκρατείται από εσωτερική βαρύτητα της ύλης του, θα καταστραφεί αν πλησιάσει περισσότερο από 2.*44R* της ακτίνας του πλανήτη ως προς τον οποίο περιστρέφεται γιατί τότε η βαρυτική έλξη του πλανήτη στα διάφορα τμήματα μάζας του δορυφόρου γίνεται πολύ διαφορετική με αποτέλεσμα να αποκολλιούνται. Τα δακτυλίδια του πλανήτη Κρόνου αποτελούνται από κοσμική σκόνη και μικρά αντικείμενα, και δεν συγκρατούνται από την βαρύτητα, βρίσκονται σε απόσταση περίπου του ορίου *Roche*, σε αντίθεση με τα πολλά φεγγάρια του που βρίσκονται σε μεγαλύτερες αποστάσεις από το όριο *Roche*. [**1μ**]

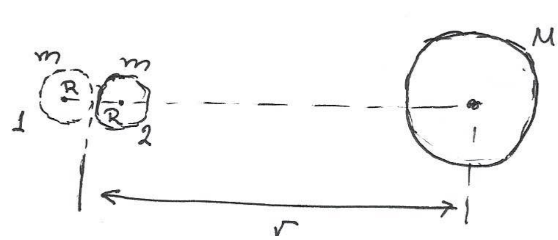
(α)




Οι δύο μπάλες συμπεριφέρονται σα να είναι σημειακές:

$$f = G\frac{mm}{(2R)^2} \Rightarrow \boxed{f = G\frac{m^2}{4R^2}} \quad (A)$$

(β)




Η δύναμη που ασκεί ο πλανήτης στη μπάλα 1 είναι:

$$F_1 = G\frac{Mm}{(r+R)^2}$$

και στη μπάλα 2 είναι

$$F_2 = G\frac{Mm}{(r-R)^2}$$

Επομένως $\boxed{\Delta F = GMm\left[\frac{1}{(r-R)^2} - \frac{1}{(r+R)^2}\right]}$ (B)

(γ) Από την τελευταία σχέση μπορούμε να γράψουμε:

$$\Delta F = \frac{GMm}{r^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{R}{r}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{R}{r}\right)^2}\right]$$

αλλά $\frac{R}{r}=x<<1$ επομένως χρησιμοποιούμε το διωνυμικό ανάπτυγμα $(1-x)^{-2}$ και $(1+x)^{-2}$

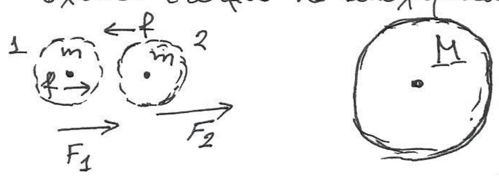
$$(1+x)^{-2} = 1-2x+\cancel{\frac{2\cdot 3}{2!}x^2}^{\to 0} - \dots \simeq 1-2x$$

$$(1-x)^{-2} = 1+2x+\cancel{\frac{2\cdot 3}{2!}x^2}^{\to 0}+\dots \simeq 1+2x$$

Αντικατάσταση θα δώσει: $\Delta F \simeq \frac{GMm}{r^2}\left[(1+2x)-(1-2x)\right] \Rightarrow \Delta F \simeq \frac{4GMm}{r^2}x$

$$\Rightarrow \Delta F \simeq 4\frac{GMm}{r^2}\frac{R}{r} \Rightarrow \boxed{\Delta F \simeq 4\frac{GMm}{r^3}R} \quad (\Gamma)$$

(δ) Θεωρούμε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος για τις δύο μπάλες όταν είναι σχεδόν έτοιμες να αποχωριστούν (να χάσουν επαφή).




f: είναι η βαρυτική δύναμη που ασκεί η μία μπάλα στην άλλη (ερώτημα α)

$F_{1,2}$: η βαρυτική δύναμη που ασκεί ο πλανήτης στις μπάλες 1 και 2.

Εφαρμόζοντας τον 2ο νόμο του Νεύτων:
$$F_1 + f = ma_1 \quad (1)$$
$$F_2 - f = ma_2 \quad (2)$$

Αφαιρούμε την (1) από την (2) οπότε έχουμε:

$$F_2 - f - (F_1+f) = ma_2 - ma_1 \Rightarrow F_2 - f - F_1 - f = m(a_2-a_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_2 - F_1 - 2f = m(a_2-a_1) \quad (3)$$

Όσο οι μπάλες βρίσκονται σε επαφή, οι επιταχύνσεις $a_2 = a_1$. Επομένως από την (3) έχουμε $F_2 - F_1 - 2f = 0 \Rightarrow F_2 - F_1 = 2f$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (γ) ερωτήματος θα έχουμε:

$$\Delta F = 2f \Rightarrow 4G\frac{Mm}{r^3}R \simeq 2f \overset{(a)}{\Rightarrow} 4\cancel{G}\frac{M\cancel{m}}{r^3}R \simeq \cancel{2}\cancel{G}\frac{m^{\cancel{2}}}{{}_{2}\cancel{4}R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\frac{M}{r^3}R \simeq \frac{m}{2R^2} \quad (4)$$

Όταν οι δύο μπάλες χάσουν επαφή, τότε κινούνται με διαφορετικές επιταχύνσεις και επομένως από την (3) θα έχουμε $F_2 - F_1 \geq 2f$. Επομένως η οριακή περίπτωση είναι στην απόσταση $r_0$ που η ισότητα παύει να ισχύει.

Από την (4) τότε θα έχουμε: $\frac{4M}{r_0^3}R = \frac{m}{2R^2} \Rightarrow \boxed{r_0^3 = 8\frac{M}{m}R^3}$ (Δ)

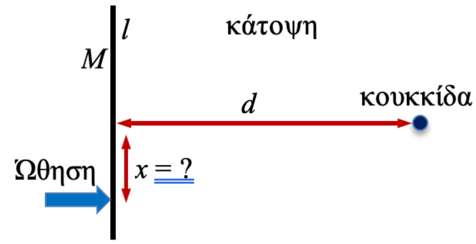
(ε) Αν θεωρήσουμε ότι τα σώματα έχουν την ίδια πυκνότητα, τότε:

$$\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow \rho_{πλ} = \frac{M_{πλ}}{\cancel{\frac{4}{3}\pi} R_{π}^3} = \rho_{μ} = \frac{m}{\cancel{\frac{4}{3}\pi} R^3} \Rightarrow \boxed{\frac{M_{πλ}}{m} = \frac{R_{πλ}^3}{R^3}} \quad (Ε)$$

Αντικατάσταση στη (Δ) δίνει: $r_0^3 = 8\frac{R_{π}^3}{\cancel{R^3}}\cancel{R^3} \Rightarrow r_0^3 = 8R_{πλ}^3 \Rightarrow \boxed{r_0 = 2R_{πλ}}$

**Άσκηση 7 [10μ]**

Μία ράβδος μήκους *l* και μάζας *M* βρίσκεται ακίνητη πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Για πολύ μικρό χρονικό διάστημα ασκείται στη ράβδο μια ώθηση κάθετη στο μήκος της και σε απόσταση *x* από το κέντρο μάζας της. Πάνω στο τραπέζι είναι βαμμένη μια κουκκίδα που βρίσκεται σε απόσταση *d* από το κέντρο της ράβδου πριν δοθεί η ώθηση.




(α) Βρείτε την απόσταση *x* (συναρτήσει του *l* και *d*) στην οποία θα πρέπει να ασκηθεί η ώθηση ώστε η ράβδος να κάνει μια πλήρη περιστροφή όταν το κέντρο της περνά από την κουκκίδα. [**7μ**]

(β) Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση *d* της κουκκίδας από το κέντρο της ράβδου ώστε να υπάρχει μια τιμή του *x* που να ικανοποιεί τη συνθήκη του προβλήματος; [**3μ**]

(α) Από τον γενικευμένο 2ο νόμο του Newton για την στροφική κίνηση, έχουμε ότι:

$$\tau = \frac{dL}{dt} \Rightarrow dL = \tau\, dt \Rightarrow \int dL = \int \tau\, dt \Rightarrow \Delta L = \int \tau\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta L = \int x F\, dt \qquad (1)$$

Στην περίπτωση του προβλήματος, η ώθηση ασκείται πολύ σύντομο διάστημα, και επομένως το x είναι σταθερό. Επομένως η (1) δίνει: $\Delta L = x \int F\, dt$

Αλλά $F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow dp = F\, dt \Rightarrow \int dp = \int F\, dt \Rightarrow \Delta p = \int F\, dt$

$$\left.\begin{matrix} \Delta L = x \int F\, dt \\ \Delta p = \int F\, dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\Delta L = x\Delta p}$$

Η ράβδος είναι αρχικά ακίνητη και άρα $\Delta p = p^f - p^i \Rightarrow \Delta p = p^f$

Επομένως $\Delta L = xp \Rightarrow L^f - \cancel{L^i}^{\,0} = xp \Rightarrow I\omega = xp \Rightarrow \frac{1}{12}\cancel{M} l^2 \omega = x \cancel{M} v$

$$\Rightarrow \frac{1}{12} l^2 \omega = x v \Rightarrow \boxed{\frac{\omega}{v} = \frac{12x}{l^2}} \quad (A)$$

Ξέρουμε ότι η ράβδος εκτελεί μία πλήρη περιστροφή όταν το κέντρο της φθάσει στην κουκκίδα: Επομένως:

$$\left.\begin{matrix} \omega t = 2\pi \\ v t = d \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{d}} \quad (B)$$

Από την (A) κ (B) έχουμε ότι: $\frac{\cancel{2}\pi}{d} = \frac{\cancel{12}^{\,6}x}{l^2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi l^2}{6d}} \quad (\Gamma)$

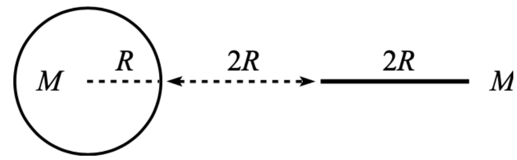
(Β) Το σημείο εφαρμογής της ώθησης δεν μπορεί να είναι σε απόσταση $x > \frac{\ell}{2}$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα (Γ) θα έχουμε: $\frac{\pi \ell^{\cancel{2}}}{3\cancel{6}d} \leq \frac{\cancel{\ell}}{\cancel{2}_1} \Rightarrow \frac{\pi \ell}{3d} \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{d \geq \frac{\pi \ell}{3}}$ που είναι λίγο μεγαλύτερο από το μήκος της ράβδου, $\ell$.

**Άσκηση 8 [10μ]**

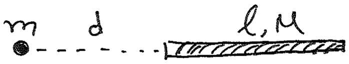
Μία ομογενής σφαίρα μάζας $M$ και ακτίνας $R$ είναι τοποθετημένη σε απόσταση $2R$ από μια ομοιόμορφη ράβδο μάζας $M$ και μήκους $2R$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα αντικείμενα αφήνονται από την κατάσταση της ηρεμίας να κινηθούν ελεύθερα. Εξαιτίας της βαρυτικής έλξης που ασκεί το ένα στο άλλο τα σώματα πλησιάζουν μεταξύ τους.




(α) Να βρεθεί η βαρυτική δυναμική ενέργεια μεταξύ της σφαίρας και της ράβδου. [**5μ**]

(β) Έστω ότι η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα είναι: $U = -\frac{GM^2}{2R}\ln\left(1+\frac{l}{d}\right)$, όπου $l$ το μήκος της ράβδου και $d$ η απόσταση μεταξύ της σφαίρας και της ράβδου. Να βρεθεί η ταχύτητά τους ακριβώς πριν συγκρουστούν. [**5μ**]

(α) Μια σφαίρα μάζας M συμπεριφέρεται ως ένα υλικό σημείο με τη μάζα στο σημείο αυτό. Επομένως χρειάζεται να υπολογίσουμε την δυναμική ενέργεια μεταξύ ενός υλικού σημείου μάζας $m$ και μιας ράβδου μήκους $l$ και μάζας $M$ σε απόσταση $d$ από την σημειακή μάζα.




Η δυναμική ενέργεια ενός στοιχειώδους τμήματος της ράβδου, έστω $dx$ θα είναι: $\boxed{dU = -\frac{Gm\,dm}{d+x}}$ (1)

όπου $dm$ είναι η μάζα του στοιχειώδους αυτού τμήματος $dx$ της ράβδου.

Αλλά $dm = \rho dx$ όπου $\rho = \frac{M}{l}$. Αντικατάσταση στην (1): $\boxed{dU = -\frac{Gm\rho dx}{d+x}}$

Επομένως η δυναμική ενέργεια βρίσκεται ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση για το μήκος της ράβδου από 0 έως $l$.

$$U = -\int_0^l \frac{Gm\rho dx}{d+x} = -Gm\rho\int_0^l \frac{dx}{d+x} = -Gm\rho \ln(d+x)\Big|_0^l = -Gm\rho\left[\ln(d+l) - \ln(d)\right]$$

$$\Rightarrow U = -Gm\rho\ln\left(\frac{d+l}{d}\right) \Rightarrow \boxed{U = -Gm\rho\ln\left(1+\frac{l}{d}\right)} \quad (A)$$

Για το πρόβλημα $\rho = \frac{m}{l}$ και $d = 3R$, $l = 2R$ οπότε $\rho = \frac{m}{2R}$

(β) Από διατήρηση της ενέργειας, θα έχουμε: $E_{\text{μηχ}}^{i} = E_{\text{μηχ}}^{f}$ $\Rightarrow$

$$U^{i} + E_{\text{κιν}}^{i} = U^{f} + E_{\text{κιν}}^{f} \quad (2)$$

Αρχικά τα σώματα έχουν $d=3R$ και πριν συγκρουστούν $d=R$

$E_{\text{κιν}}^{i} = 0$ τα σώματα είναι αρχικά ακίνητα

$$U^{i} = -\frac{Gmm}{2R}\ln\left(1+\frac{2R}{3R}\right) = -\frac{Gm^2}{2R}\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$U^{f} = -\frac{Gmm}{2R}\ln\left(1+\frac{2R}{R}\right) = -\frac{Gm^2}{2R}\ln(3)$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} -\frac{Gm^2}{2R}\ln\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{Gm^2}{2R}\ln(3) + E_{\text{κιν}}^{f}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{\text{κιν}}^{f} = -\frac{Gm^2}{2R}\left[\ln\left(\frac{5}{3}\right) - \ln(3)\right]} \quad (B)$$

Από διατήρηση της ορμής, (το σύστημα είναι απομονωμένο) αρχικά ακίνητο

$$P_{\text{ολ}}^{i} = P_{\text{ολ}}^{f} \Rightarrow 0 = m_{\rho}\upsilon_{\rho}^{f} + m_{\sigma}\upsilon_{\sigma\varphi}^{f} \Rightarrow m_{\rho}\upsilon_{\rho}^{f} = -m_{\sigma\varphi}\upsilon_{\sigma\varphi}^{f} \quad \Rightarrow$$

Τα δύο σώματα έχουν ίσες μάζες και κινούνται αντίθετα

$$\cancel{m}\,\upsilon_{\rho}^{f} = \cancel{m}\,\upsilon_{\sigma\varphi}^{f} \Rightarrow \boxed{\upsilon_{\rho}^{f} = \upsilon_{\sigma\varphi}^{f} = \upsilon} \quad (\Gamma)$$

Η τελική κινητική ενέργεια πριν τη σύγκρουση είναι:

$$E_{\text{κιν}}^{f} = \frac{1}{2}m\upsilon_{\sigma\varphi}^{2} + \frac{1}{2}m\upsilon_{\rho}^{2} \overset{(\Gamma)}{\Longrightarrow} \boxed{E_{\text{κιν}}^{f} = 2\left(\frac{1}{2}m\upsilon^{2}\right)} \quad (\Delta)$$

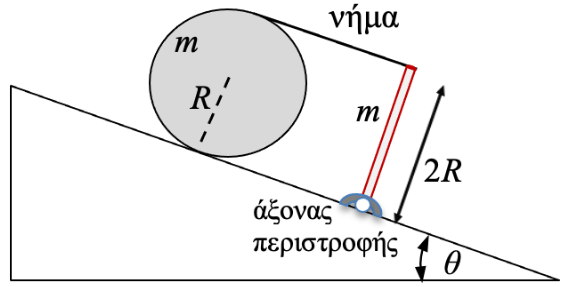
Αντικατάσταση της (Δ) στην (Β) δίνει:

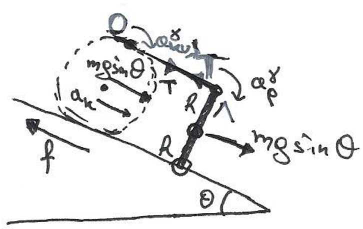
$$\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\,\upsilon^{2} = -\frac{Gm^{\cancel{2}}}{2R}\ln\left(\frac{5/3}{3}\right) \Rightarrow \upsilon^{2} = -\frac{Gm}{2R}\ln\left(\frac{5}{9}\right) \Rightarrow \upsilon^{2} = \frac{Gm}{2R}\ln\left(\frac{9}{5}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{Gm}{2R}\ln\left(\frac{9}{5}\right)}}$$

**Άσκηση 9 [10μ]**

Ένας ομογενής συμπαγής κύλινδρος μάζας $m$ και ακτίνας $R$ και μια ομογενής ράβδος μήκους $2R$ και μάζας $m$ βρίσκονται πάνω σε κεκλιμένη επιφάνεια γωνίας κλίσης $\theta$. Η ράβδος είναι τοποθετημένη κάθετα στην κεκλιμένη επιφάνεια και μπορεί να στραφεί ως προς σταθερό άξονα που περνά από το κατώτερο άκρο της και είναι στερεωμένος στην κεκλιμένη επιφάνεια. Η διάταξη φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ο κύλινδρος μπορεί να κυλήσει χωρίς ολίσθηση πάνω στην κεκλιμένη επιφάνεια. Ένα νήμα αμελητέας μάζας συνδέει το πάνω μέρος του κυλίνδρου με το πάνω άκρο της ράβδου όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα δύο σώματα κρατιούνται αρχικά ακίνητα. Να βρεθεί η επιτάχυνση του κέντρου του κυλίνδρου όταν τα σώματα αφεθούν ελεύθερα να κινηθούν.




Η ράβδος μπορεί να περιστραφεί ως προς τον άξονα περιστροφής που βρίσκεται στην κεκλιμένη επιφάνεια με γωνιακή επιτάχυνση $a_{\rho}^{\gamma\omega\nu.}$

Στη ράβδο ασκείται η συνιστώσα του βάρους της κατά μήκος της κεκλιμένης επιφάνειας: $F_x^{\rho} = mg\sin\theta$ και η τάση $T$ του νήματος.

Στον κύλινδρο, ο οποίος μπορεί να εκτελέσει κύλιση χωρίς ολίσθηση, ασκείται η τάση του νήματος $T$, η συνιστώσα του βάρους του $mg\sin\theta$, και η δύναμη της στατικής τριβής $f$. Ο κύλινδρος μπορεί να εκτελέσει μεταφορική κίνηση με επιτάχυνση για το κέντρο μάζας του $a_{cm}$ και περιστροφική κίνηση με γωνιακή επιτάχυνση $a_{\kappa\upsilon\lambda}^{\gamma\omega\nu.}$ ως προς το κέντρο μάζας του.

Επομένως υπάρχουν 5 άγνωστοι στο πρόβλημα: $T$, $f$, $a_{cm}$, $a_{\kappa\upsilon\lambda}^{\gamma\omega\nu.}$ $a_{\rho}^{\gamma\omega\nu.}$

Εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton για μεταφορική και περιστροφική κίνηση για τα δύο σώματα:

<u>κύλινδρος:</u> ο 2ος νόμος του Newton για περιστροφική κίνηση (ροπές ως προς το κέντρο του κυλίνδρου)

$$\tau = I a_{\kappa\upsilon\lambda}^{\gamma\omega\nu} \Rightarrow f \cdot R + T \cdot R = I a_{\kappa\upsilon\lambda}^{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \boxed{(f+T)\cancel{R} = \frac{mR^{\cancel{2}}}{2} a_{\kappa\upsilon\lambda}^{\gamma\omega\nu}} \quad (1)$$

ο 2ος νόμος του Newton για μεταφορική κίνηση

$$\Sigma F_x = \boxed{T + mg\sin\Theta - f = m a_{CM}} \qquad (2)$$

ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει: $\boxed{a_{CM} = R\, a^{\gamma\omega\nu}_{\kappa\upsilon\lambda}}$ (3)

<u>ράβδος:</u> Η ράβδος περιστρέφεται μόνο, οπότε από τον 2ο νόμο του Newton για περιστροφική κίνηση ως προς τον άξονα περιστροφής:

$$\tau = I_p a_p^{\gamma\omega\nu} \Rightarrow mg\sin\Theta\, R - T(2R) = I_p a_p^{\gamma\omega\nu}$$

Θεώρημα Steiner: $I_p = I_{CM} + mR^2 \Rightarrow I_p = \frac{1}{3}m(2R)^2$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (mg\sin\Theta - 2T)\cdot \cancel{R} = \frac{a_p^{\gamma\omega\nu}}{3} m 4R^{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{mg\sin\Theta - 2T = \frac{4mR\, a_p^{\gamma\omega\nu}}{3}} \qquad (4)$$

Χρειαζόμαστε ακόμα μια εξίσωση που να συνδέει τις επιταχύνσεις του σημείου της περιφέρειας του κυλίνδρου και της ράβδου που συνδέονται με το νήμα.

Εξαιτίας του νήματος, οι γραμμικές επιταχύνσεις των δύο σημείων πρέπει να ισούνται:

$$\boxed{a^{\gamma\rho}_{\Lambda} = a^{\gamma\rho}_{O}} \qquad (5)$$

Αλλά η γραμμική επιτάχυνση του σημείου Λ της ράβδου δεδομένης της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της $a_p^{\gamma\omega\nu}$ δίνεται από: $\boxed{a^{\gamma\rho}_{\Lambda} = a^{\gamma\omega\nu}_p\cdot(2R)}$ (5α)

Το σημείο O της περιφέρειας του κυλίνδρου, έχει γραμμική επιτάχυνση ως προς το κέντρο περιστροφής του: $\boxed{a^{\gamma\rho}_{O/CM} = a^{\gamma\omega\nu}_{\kappa\upsilon\lambda}\cdot R}$ (5β)

Αλλά το κέντρο του κυλίνδρου κινείται επίσης με επιτάχυνση γραμμική ως προς ακίνητο παρατηρητή (ή το σημείο επαφής του κυλίνδρου με την κεκλιμένη επιφάνεια). Η γραμμική επιτάχυνση του CM θα είναι: $\boxed{a_{CM/\varepsilon\delta} = a^{\gamma\omega\nu}_{\kappa\upsilon\lambda}\cdot R}$ (5γ)

Επομένως $a^{\gamma\rho}_{O/\varepsilon\delta} = a^{\gamma\rho}_{O/CM} + a^{\gamma\rho}_{CM/\varepsilon\delta} \xRightarrow{(5\beta,5\gamma)} \boxed{a^{\gamma\rho}_{O/\varepsilon\delta} = a^{\gamma\omega\nu}_{\kappa\upsilon\lambda}(2R)}$ (5δ)

(Το ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε αν θεωρούσαμε περιστροφή ως προς το σημείο επαφής κυλίνδρου–κεκλιμένης επιφάνειας)

Από (5), (5α) & (5δ) έχουμε ότι: $a_p^{\gamma\omega\nu}\cdot(\cancel{2R}) = a^{\gamma\omega\nu}_{\kappa\upsilon\lambda}(\cancel{2R}) \Rightarrow \boxed{a_p^{\gamma\omega\nu} = a^{\gamma\omega\nu}_{\kappa\upsilon\lambda}}$ (6)

Από την (3) & (6) έχουμε επίσης ότι: $\boxed{a_p^{\gamma\omega\nu} = a^{\gamma\omega\nu}_{\kappa\upsilon\lambda} = \frac{a_{CM}}{R}}$ (7)

Επομένως έχουμε τις εξισώσεις:

$$(1):\quad f + T = \frac{mR}{2}\frac{a_{CM}}{R} \Rightarrow f + T = \frac{m a_{CM}}{2} \qquad (A)$$

$$(4):\quad mg\sin\theta - 2T = \frac{4}{3} m R a_\rho^{\gamma\omega\nu} \Rightarrow mg\sin\theta - 2T = \frac{4}{3} m a_{CM} \qquad (B)$$

$$(2):\quad T + mg\sin\theta - f = m a_{CM} \qquad (\Gamma)$$

$$+ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cancel{m}g\sin\theta = \left(1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right)\cancel{m} a_{CM} \Rightarrow 2g\sin\theta = \frac{17}{6} a_{CM} \Rightarrow \boxed{a_{CM} = \frac{12}{17} g\sin\theta}$$

Να σημειωθεί ότι υποθέσαμε ότι το νήμα παραμένει πάντοτε τεντωμένο. Αυτό ισχύει πάντοτε, γιατί αν λύσουμε ως προς την τάση $T$ θα δούμε ότι είναι πάντοτε θετική. Για παράδειγμα, η (B) θα δώσει: $2T = mg\sin\theta - \frac{4}{3} m a_{CM} = mg\sin\theta - \frac{4}{\cancel{3}} m \frac{\cancel{12}^{4}}{17} g\sin\theta$

$$\Rightarrow 2T = \frac{mg\sin\theta}{17} > 0.$$

Το γεγονός ότι το νήμα είναι πάντοτε τεντωμένο, οφείλεται στο ότι το πάνω άκρο της ράβδου, θα είχε μεγαλύτερη γραμμική επιτάχυνση από το υψηλότερο σημείο της περιφέρειας του κυλίνδρου, αν το νήμα δεν υπήρχε. Στην περίπτωση αυτή η επιτάχυνση του σημείου της ράβδου θα ήταν: $\tau = I_\rho a_\rho^{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \cancel{m}g\sin\theta \cdot \cancel{R} = \frac{4\cancel{m}R^{\cancel{2}}}{3} a_\rho^{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$

$$\Rightarrow g\sin\theta = \frac{4R}{3} a_\rho^{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \frac{3g\sin\theta}{4R} = a_\rho^{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_\Lambda^{\gamma\rho} = a_\rho^{\gamma\omega\nu} \cdot 2R = \frac{3}{2\cancel{4R}} g\sin\theta\, \cancel{2R} \Rightarrow$$

$\boxed{a_\Lambda^{\gamma\rho} = \frac{3}{2} g\sin\theta}$ όταν δεν υπάρχει το νήμα.

Αντίστοιχα για το σημείο $O$ στο υψηλότερο σημείο της περιφέρειας του κυλίνδρου

$\tau = I a_{\kappa\upsilon\lambda}^{\gamma\omega\nu}$ ως προς το σημείο επαφής $\Rightarrow \cancel{m}gR\sin\theta = \left(\frac{1}{2}\cancel{m}R^{\cancel{2}} + \cancel{M}R^{\cancel{2}}\right) a_{\gamma\omega\nu}^{\kappa\upsilon\lambda}$

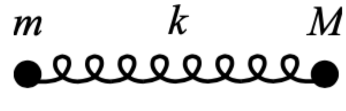
$\Rightarrow a_{\kappa\upsilon\lambda}^{\gamma\omega\nu} = \frac{2g\sin\theta}{3R}$ Επομένως το σημείο $O$ θα έχει γραμμική επιτάχυνση

$a_O^{\gamma\rho} = a_{\kappa\upsilon\lambda}^{\gamma\omega\nu} \cdot 2R \Rightarrow \boxed{a_O^{\gamma\rho} = \frac{4}{3} g\sin\theta}$ όταν δεν υπάρχει το νήμα

Η τάση του νήματος επομένως επιβραδύνει τη ράβδο και επιταχύνει τον κύλινδρο έως ότου οι δύο επιταχύνσεις γίνουν ίσες μεταξύ τους.

**Άσκηση 10 [10μ]**

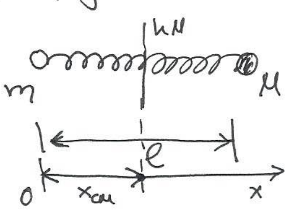
Δύο μάζες *m* και *M* βρίσκονται στις άκρες ενός ιδανικού ελατηρίου αμελητέας μάζας, φυσικού μήκους *l* και σταθεράς ελαστικότητας *k*. Το σύστημα ελατηρίου-μαζών βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Οι δύο μάζες απομακρύνονται μεταξύ τους και το ελατήριο επιμηκύνεται κατά μία απόσταση *A*. Οι μάζες αφήνονται ελεύθερες να κινηθούν από την κατάσταση ηρεμίας. Να βρείτε τη θέση της μάζας *m* συναρτήσει του χρόνου *t*. Θεωρήστε ότι $x = 0$ στο μέσο της διαδρομής της μάζας. <u>*Υπόδειξη:*</u> Μπορείτε να σκεφθείτε την κίνηση του κέντρου μάζας.





Το σύστημα είναι απομονωμένο, και αρχικά το κέντρο μάζας του συστήματος είναι ακίνητο. Το κέντρο μάζας επομένως θα είναι ακίνητο και για την μεταγενέστερη κίνηση των δύο μαζών. Μπορούμε επομένως να θεωρήσουμε ότι το ελατήριο είναι στερεωμένο στο κέντρο μάζας των δύο σωμάτων και επομένως χρειάζεται να μελετήσουμε την κίνηση δύο μαζών εξαρτημένες από δύο ελατήρια μικρότερου μήκους από το αρχικό.


Το ελατήριο στο οποίο φαινομενικά είναι συνδεδεμένη η μάζα m, έχει "φυσικό" μήκος ίσο με την απόσταση του ΚΜ από τη μία μάζα όταν το αρχικό ελατήριο είναι στο φυσικό του μήκος:




$$\Rightarrow x_{cm} = \frac{m\cdot 0 + M\cdot l}{M+m} = \frac{M}{M+m} l$$

Αν το αρχικό ελατήριο επιμηκυνθεί κατά μια απόσταση x, προκαλεί μια δύναμη F όπου $F=-kx$ που ασκείται και στις δύο μάζες που βρίσκονται στα δύο του άκρα.

Το τμήμα του ελατηρίου που είναι συνδεδεμένο με την μάζα m, επιμηκύνεται κατά $\frac{M}{M+m}x$ αλλά η επιμήκυνση αυτή προκαλεί την ίδια δύναμη F του αρχικού ελατηρίου.

Επομένως θα έχουμε: $F = -k\cancel{x} = -k'\frac{M}{M+m}\cancel{x} \Rightarrow \boxed{k' = \frac{M+m}{M}k}$ αυτή είναι η σταθερά ελαστικότητας του φαινομενικού μικρότερου ελατηρίου.

Η συχνότητα ταλάντωσης της μάζας m θα είναι:

$$\omega = \sqrt{\frac{k'}{m}} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{M+m}{mM}k}}$$

Ως προς τη θέση ισορροπίας της, η μάζα $m$ βρίσκεται αρχικά σε απόσταση $\frac{M}{M+m}A$ στα αριστερά του κέντρου μάζας και είναι αρχικά ακίνητη.

Επομένως $\frac{M}{M+m}A$ είναι το αρχικό πλάτος της ταλάντωσης της μάζας $m$.

Η εξίσωση της θέσης της μάζας $m$, θα γραφεί ως: $x(t)=\frac{M}{M+m}A\cos(\omega t+\varphi)$

Τη χρονική στιγμή $t=0$ η μάζα $m$ βρίσκεται στα αριστερά, επομένως η θέση της είναι αρνητική και επομένως: $-\cancel{\frac{M}{M+m}}\cancel{A}=\cancel{\frac{MA}{M+m}}\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi=-1$

Οπότε $\varphi=180^\circ$.

Καταλήγουμε να γράψουμε επομένως: $x(t)=\frac{M}{M+m}A\cos(\omega t+\pi) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{x(t)=-\frac{M}{M+m}A\cos\omega t} \quad \text{όπου} \quad \boxed{\omega=\sqrt{\frac{M+m}{Mm}k}}$$