ΦΥΣ 145 – Υπολογιστικές Μέθοδοι στη Φυσική

27 Μάη 2021

Δημιουργήστε ένα φάκελο στο home directory σας με το όνομα **Final** (όχι άλλα ονομάτα). Θα πρέπει να δουλέψετε όλα τα προβλήματα της εξέτασης στο φάκελο αυτό και πουθενά αλλού. Στο τέλος της εξέτασης θα πρέπει να κάνετε tar τον φάκελο αυτό και να στείλετε με e-mail αυτό το tar file.

Σας δίνονται 4 ισότιμα προβλήματα και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλα. Συνολική βαθμολογία 100 μονάδες. Διαβάστε όλα τα προβλήματα και αρχίστε να δουλεύετε πρώτα με αυτά που αισθάνεστε ότι δεν θα σας πάρει πολύ χρόνο για να λύσετε. Η σειρά των προβλημάτων δεν είναι ενδεικτική της δυσκολίας τους.

Όλα τα προγράμματα σας θα πρέπει να ονομάζονται ανάλογα με την άσκηση (π.χ. *askisi1.py*) και για να βαθμολογηθούν θα πρέπει να κάνουν τουλάχιστον compile.

Ο χρόνος εξέτασης είναι 180 λεπτά.

Επιτρέπεται: η χρήση του υλικού των ιστοσελίδων και μόνο του μαθήματος, καθώς και οι ασκήσεις/λύσεις των εργαστηρίων και homeworks που έχετε δώσει και σας έχουν δοθεί. ***Απαγορεύονται:*** η συνεργασία/συζήτηση και οποιαδήποτε ανταλλαγή αρχείων, η χρήση e-mail καθώς και η χρήση κινητών τηλεφώνων τα οποία θα πρέπει να απενεργοποιηθούν τώρα.

Καλή επιτυχία

Καλό καλοκαίρι και

Καλή συνέχεια στις σπουδές σας

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ου} βαθμού για να λύσετε την ακόλουθη διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης:

$$\frac{dy}{dt} = y(t) \quad \text{με} \quad y(t=0) = 1$$

Θεωρήστε ότι t_{max} = 4.0s χρησιμοποιώντας διαφορετικά χρονικά βήματα Δt, ξεκινώντας με $\Delta t = 0.5s$ και ελαττώνοντάς τα. Συγκρίνετε τα αριθμητικά σας αποτελέσματα με την αναλυτική λύση, $y(t) = e^{+t}$, και με τα αποτελέσματα που παίρνετε με την μέθοδο του Euler. Θα πρέπει να επιστρέψετε το πρόγραμμά σας καθώς και τη γραφική παράσταση που δείχνει την αναλυτική λύση, τα αποτελέσματα της μεθόδου Runge-Kutta 4^{ης} τάξης και τα αποτελέσματα της μεθόδου Euler, δηλαδή 3 γραφήματα στο ίδιο διάγραμμα, για βήμα Δt = 0.5s.

2. Να γραφεί ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \exp(-x^2/2)dx$ με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Simpson. Πόσες προσπάθειες απαιτούνται ώστε να επιτευχθεί η ίδια ακρίβεια με την μέθοδο απόρριψης Monte Carlo; (*Υπόδειξη*: Η επιθυμητή ακρίβεια επιτυγχάνεται όταν η διαφορά της τρέχουσας τιμής από την προηγούμενη είναι μικρότερη από την ζητούμενη ακρίβεια).

3. Θεωρήστε την κίνηση ενός ηλεκτρικά φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Όπως έχετε δει στην Φυσική ΙΙ το σωματίδιο υπόκειται στην επίδραση της δύναμης Lorentz η εξίσωση της οποίας είναι: $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{\upsilon} \times \vec{B}\right)$όπου q και $\vec{\upsilon}$ είναι το φορτίο του σωματιδίου και το διάνυσμα της ταχύτητάς του ενώ $\vec{E}$ και $\vec{B}$ τα διανύσματα της έντασης του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου αντίστοιχα. Η επιτάχυνση του σωματιδίου εξαιτίας της δύναμης Lorentz είναι προφανώς $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$ όπου m η μάζα του σωματιδίου. Θεωρήστε ότι η κίνηση του σωματιδίου γίνεται σε σταθερό μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B\hat{z}$ με $qB/m = 1.0$ και σε σταθερό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y}$ όπου $qE_x/m = qE_y/m = 0.1$. Το σωματίδιο έχει αρχικά ταχύτητα $\vec{\upsilon}(t=0) = 1.0\hat{y} + 0.1\hat{z}$ και το διάνυσμα θέσης του είναι $\vec{r}(t=0) = 1.0\hat{x}$.

Θα γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο υπολογίζει την τροχιά του σωματιδίου στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο από t_0 μέχρι $t_f = 40$ s και βήμα dt = 0.04s. Το πρόγραμμά σας θα περιέχει τα ακόλουθα:

(α) Θεωρήστε ότι για τα πρώτα 10s της κίνησης, το ηλεκτρικό πεδίο είναι «σβηστό» $\left(\vec{E} = 0\right)$και ότι το σώμα κινείται υπό την επίδραση μόνο του μαγνητικού πεδίου. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο *Euler-Cromer* να υπολογιστεί η τροχιά του σωματιδίου κατά το συγκεκριμένο χρονικό διάστημα της κίνησης. [**8μ**]

(β) Αποθηκεύστε τα αποτελέσματα από το προηγούμενο ερώτημα (χρόνο *t,* και τις συντεταγμένες *x, y* και *z* της θέσης του σωματιδίου) στο αρχείο *trajectory1.dat* Να κάνετε το γράφημα της τροχιάς του σωματιδίου. Επειδή η τροχιά είναι τρισδιάστατη, για να κάνετε ένα 3d γράφημα με μεταβλητές έστω *x*, *y* και *z* θα πρέπει να δώσετε τις εντολές:

```
fig=plt.figure(figsize=(8,5))
ax=fig.add_subplot(111,projection="3d")
ax.plot(x,y,z)
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("y")
ax.set_zlabel("z")
```

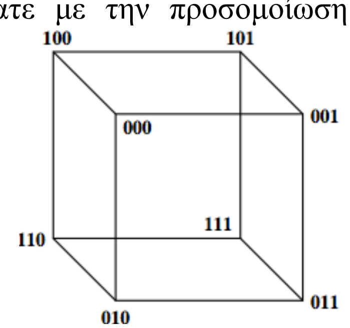
Θα πρέπει να αποθηκεύσετε την γραφική στο αρχείο *trajectory1.pdf.* [**3μ**].

(γ) Την χρονική στιγμή t = 10s "ανάβουμε" το ηλεκτρικό πεδίο και επομένως η κίνηση γίνεται υπό την επίδραση και των δύο πεδίων. Να υπολογίσετε την εξέλιξη της τροχιάς του σωματιδίου για το υπόλοιπο χρονικό διάστημα της κίνησης χρησιμοποιώντας την μέθοδο Runge-Kutta 4^{ου} βαθμού. Τα αποτελέσματά σας (ίδιο format με το ερώτημα (α)) θα πρέπει να τα αποθηκεύσετε στο αρχείο *trajectory2.dat.* [**8μ**]

(δ) Θα πρέπει να αποθηκεύσετε τα αποτελέσματα του προηγούμενου ερωτήματος στο αρχείο *trajectory2.dat.* Να κάνετε το γράφημα της τροχιάς του σωματιδίου όπως και στο ερώτημα (β) και να αποθηκεύσετε το γράφημα της τροχιάς στο αρχείο *trajectory2.pdf*. [**2μ**]

(ε) Κάντε το γράφημα της ενέργειας του σωματιδίου για τη συνολική κίνησή του (χωρίς και με την επίδραση του ηλεκτρικού πεδίου) συναρτήσει του χρόνου *t*. Προσέξτε τους όρους που συνεισφέρουν στην ενέργεια του σωματιδίου κατά την διάρκεια των δυο χρονικών περιόδων της κίνησης. [**4μ**]

4. Κατά τη διάρκεια των τελευταίων εργαστηρίων ασχοληθήκατε με την προσομοίωση διαφόρων τυχαίων περιπάτων. Στο πρόβλημα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την ιδέα αυτή για έναν υπερκύβο d-διαστάσεων. Για $d \geq 1$, ο d-διάστατος υπερκύβος είναι το γράφημα με τις κορυφές του να αποτελούνται από σειρές bits (0 ή 1) και μήκους πλευράς d. Οι κορυφές εκατέρωθεν της πλευράς του κύβου διαφέρουν ακριβώς 1 bit. Το σχήμα δείχνει την περίπτωση ενός τέτοιου κύβου για d = 3 (τρισδιάστατος).



Για μια κορυφή, u, μπορούμε να γράψουμε u = $b_1b_2b_3$ σα μια σειρά 3 καταστάσεων bits. Οι τρεις γειτονικές κορυφές θα έχουν καταστάσεις bits που αντιστοιχούν σε συμπληρωματικά bits αυτών της κορυφής u. Δηλαδή οι γειτονικές κορυφές θα είναι $\overline{b}_1b_2b_3$, $b_1\overline{b}_2b_3$ και $b_1b_2\overline{b}_3$.

Για παράδειγμα να u = 101, τότε οι γειτονικές κορυφές θα είναι 001, 111 και 100.

Για να ορίσουμε μια τυχαία διαδρομή, έστω το σωματίδιο ξεκινά από μια συγκεκριμένη αρχική κατάσταση, S_o, και μετά από κάποιο χρονικό βήμα *i* βρίσκεται στην κατάσταση S_i = $b_1b_2b_3$. Στο επόμενο χρονικό βήμα, *i*+1, μπορεί να βρεθεί σε μια από τις 3 τρεις καταστάσεις, $\overline{b}_1b_2b_3$ με πιθανότητα *p*, $b_1\overline{b}_2b_3$ με πιθανότητα *q* ή $b_1b_2\overline{b}_3$ με πιθανότητα *r*. Επειδή το σώμα δεν μπορεί να είναι ακίνητο θα πρέπει $p + q + r = 1$. Μπορείτε να υποθέσετε ότι $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ και $0 < r < 1$. Για παράδειγμα, αν το σώμα ξεκινά αρχικά στη θέση S_0=000 μία πιθανή ακολουθία διαδρομής θα είναι:

000, 001, 101, 001, 011, 010, 000, 100, 101, 100, 110, 111, 101, 111, 011

Για κάθε κορυφή $b_1b_2b_3$, υπάρχει μια αντίθετη κορυφή σε πλήρως συμπληρωματική κατάσταση bits, η $\overline{b_1b_2b_3}$ που ονομάζεται αντι-κορυφή. Ο χρόνος (ή αριθμός των βημάτων) για να φθάσει το σωματίδιο την πρώτη φορά στην αντι-κορυφή ονομάζεται *χρόνος αντι-κορυφής*. Στο παραπάνω παράδειγμα, η αρχική κατάσταση είναι S_0 = 000 και η αντι-κορυφή είναι S_α = 111. Ο χρόνος αντι-κορυφής είναι 11 γιατί χρειάστηκαν 11 βήματα για να φθάσει την πρώτη φορά στην αντι-κορυφή.

Θα πρέπει να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο προσομοιώνει έναν συγκεκριμένο αριθμό τυχαίων διαδρομών σε ένα κύβο 3-διαστάσεων και να υπολογίζει το μέσο χρόνο αντι-κορυφής για τις τυχαίες διαδρομές. Οι παράμετροι για την προσομοίωση που θα πρέπει να δοθούν από το πληκτρολόγιο είναι: (α) η αρχική κατάσταση S_0, (β) οι τιμές των πιθανοτήτων *p*, *q* και *r* και (γ) ο αριθμός των διαδρομών που θα πρέπει να προσομοιώσετε. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει στη 1η γραμμή την αρχική κατάσταση και στις υπόλοιπες γραμμές τις διαδοχικές καταστάσεις μέχρις ότου φθάσει στην κατάσταση της αντι-κορυφής. Στην περίπτωση αυτή η προσομοίωση σταματά και τυπώνεται μια κενή γραμμή. Η επομένη προσομοίωση ξεκινά και πάλι από την αρχική κατάσταση που θέσατε. Τα αποτελέσματά σας θα πρέπει να τυπωθούν για 2 προσομοιώσεις σε μορφή bits. Στο τέλος το πρόγραμμά σας θα τυπώνει το μέσο χρόνο αντι-κορυφής για όλες τις προσομοιώσεις που κάνατε και τις τιμές των πιθανοτήτων που δόθηκαν.

Για παράδειγμα αν δώσετε σαν αρχική κατάσταση 100, οι διαδρομές δυο πειραμάτων είναι:

100	100	
110	101	Ο μέσος χρόνος αντι-κορυφής είναι: 6
100	001	
101	011	
111	010	
011	110	
	111	
	011	