ΦΥΣ. 111

7ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή 02.11.2020**

1. Ένα τούβλο πάγου μάζας 6.0kg βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία πάνω σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια. Ένας εργάτης εφαρμόζει μια δύναμη F πάνω στο τούβλο με διεύθυνση παράλληλη προς την επιφάνεια. Σα αποτέλεσμα το τούβλο αρχίζει να κινείται κατά μήκος του x-άξονα έτσι ώστε η θέση του συναρτήσει του χρόνου δίνεται από την εξίσωση $x(t) = \alpha t^2 + \beta t^3$, όπου $\alpha = 2.00 m/s^2$ και $\beta = 0.2 m/s^3$.

(α) Υπολογίστε την ταχύτητα του τούβλου τη στιγμή $t = 4.0s$.

(β) Υπολογίστε το μέγεθος της $\vec{F}$ τη χρονική στιγμή $t = 4.0s$.

(γ) Υπολογίστε το έργο της F κατά την διάρκεια των πρώτων 4.0s της κίνησης.

(α) $$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\alpha t^2 + \beta t^3\right) = \boxed{2\alpha t + 3\beta t^2} \ (1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = 2(2)4 + 3(0.2)4^2 \Rightarrow \boxed{v = 25.6 m/s}$$

(β) Υπολογίζουμε πρώτα την επιτάχυνση του σώματος και κατόπιν εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2\alpha t + 3\beta t^2\right) \Rightarrow \boxed{a = 2\alpha + 6\beta t} \ (2) \Rightarrow a = 2\cdot 2 + 6\cdot 0.2\cdot 4 \Rightarrow \boxed{a = 8.8 m/s^2}$$

$$F = ma \Rightarrow F = 6kg \cdot 8.8 m/s^2 \Rightarrow \boxed{F = 52.8N}$$

(γ) Από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$W = \Delta E_{κιν} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \cancel{\frac{1}{2}mv_i^2}^{\,0} \Rightarrow W = \Delta E_κ = \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}m\left(25.6\frac{m}{s}\right)^2 \Rightarrow \boxed{W = 1966.1 J}$$

Το ίδιο θα μπορούσε να βρεθεί διαφορετικά, χρησιμοποιώντας τον γενικό ορισμό του έργου δύναμης: $W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

Να σημειωθεί ότι πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα γιατί η δύναμη δεν είναι σταθερή.

Από το ολοκλήρωμα θα πάρουμε: $W = \int \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int \overbrace{(ma)}^{F}\cdot\overbrace{(v\,dt)}^{dx} \xRightarrow{(1),(2)}$

$$W = \int_0^4 m(2\alpha + 6\beta t)(2\alpha t + 3\beta t^2)dt \Rightarrow W = \int_0^4 m\left(4\alpha^2 t + 18\alpha\beta t^2 + 18\beta^2 t^3\right)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = m\left(\frac{1}{2}4\alpha^2 t^2 + \frac{18}{3}\alpha\beta t^3 + \frac{18}{4}\beta^2 t^4\right)\Big|_0^4 = m\left[2\cdot(2)^2 4^2 + 4^3(0.2)(2)(6) + \frac{9}{2}(0.2)^2 4^4 - 0\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{W = 1966.1 J}$$

2. Το ελατήριο ενός όπλου έχει αμελητέα μάζα και μια σταθερά ελατήριου $k = 400 N/m$. Το ελατήριο συμπιέζεται $0.050m$ και μια σφαίρα μάζας $0.030kg$ τοποθετείται στην οριζόντια κάνη του όπλου ώστε να ακουμπά το άκρο του συσπειρωμένου ελατήριου. Το ελατήριο κατόπιν ελευθερώνεται και η σφαίρα εκσφενδονίζεται από την κάνη του όπλου. Το μήκος της κάνης είναι $0.050m$, έτσι ώστε η σφαίρα χάνει επαφή με το ελατήριο την στιγμή που βγαίνει από την κάνη. Το όπλο κρατιέται ώστε η κάνη να είναι οριζόντια. (α) Υπολογίστε την ταχύτητα με την οποία η σφαίρα εξέρχεται από το όπλο θεωρώντας τις τριβές αμελητέες. (β) Υπολογίστε την ταχύτητα με την οποία η σφαίρα εξέρχεται από την κάνη όταν μια σταθερή δύναμη αντίστασης μέτρου $F = 6.0N$ ενεργεί στην σφαίρα καθώς αυτή κινείται μέσα στην κάνη. (γ) Για την περίπτωση του ερωτήματος (β), σε ποια θέση κατά μήκος της κάνης η μπάλα έχει την μέγιστη ταχύτητα; Πόση είναι αυτή η ταχύτητα; (στην περίπτωση αυτή η μέγιστη ταχύτητα δεν αποκτάται στο τέλος της κάνης).

(α) Η ενέργεια που μεταφέρεται στο ελατήριο μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια της μπάλας

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(400)(0.05)^2 = \frac{1}{2}(0.03)\upsilon^2 \Rightarrow \boxed{\upsilon = 5.77 m/s}$$

(β) Το έργο το οποίο παράγει η δύναμη F κατά μήκος της διαδρομής της σφαίρας μέσα στην κάνη του όπλου είναι:

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = F\cdot d = (6.0N)(0.05m) \Rightarrow \boxed{W = 0.3J}$$

Από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας έχουμε: $W_{\sigma\upsilon\nu} = \Delta E_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow W_{\varepsilon\lambda} + W_F = \Delta E_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}kx^2 - W_F \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}(400)(0.05)^2 - 0.3 \Rightarrow \boxed{\upsilon = 3.65 m/s}$$

(γ) Έστω ότι η συμπίεση του ελατηρίου είναι y. Το έργο της συνισταμένης δύναμης πάνω στη σφαίρα θα είναι:

$$W = \underbrace{\frac{1}{2}k\left[x_0^2 - y^2\right]}_{W_{\varepsilon\lambda}} - \underbrace{\left[F\cdot(x_0 - y)\right]}_{W_F} \quad (1)$$

όπου x_0 η αρχική συσπείρωση

$$W_{\varepsilon\lambda} = \int_{x_0}^{y}(-kx)\,dx = -\frac{1}{2}k(y^2 - x_0^2) \qquad W_F = \int_{x_0}^{y} F\,dx = F\cdot x = F(y - x_0) = -F(x_0 - y)$$

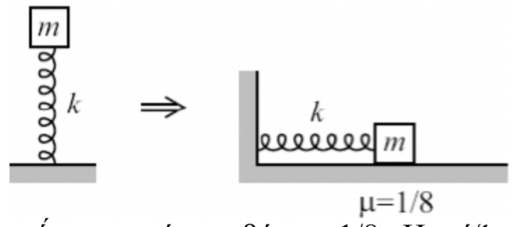
Η σφαίρα αποκτά τη μέγιστη ταχύτητα όταν το έργο είναι μέγιστο. Δηλαδή όταν $\frac{dW}{dy} = 0$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{d}{dy}\left[\frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}ky^2 - Fx_0 + Fy\right] = 0 \Rightarrow -ky + F = 0 \Rightarrow \boxed{y = \frac{F}{k} \Rightarrow y = 0.015m = 1.5cm}$$

Αντικατάσταση στην (1) δίνει: $W = 0.245 J$.

Από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας: $\frac{1}{2}m\upsilon^2 = W \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2W}{m}} \Rightarrow \boxed{\upsilon = 4.04 \frac{m}{s}}$

3. Ένα ελατήριο με σταθερά ελατήριου k είναι σε κατακόρυφη θέση και μια μάζα *m* τοποθετείται στο πάνω άκρο του ελατήριου. Η μάζα σταδιακά κατεβαίνει στη θέση ισορροπίας της. Με το ελατήριο κρατούμενο στη θέση αυτή της συσπείρωσης, το σύστημα περιστρέφεται κατά 90° στην οριζόντια θέση. Το ελεύθερο άκρο του ελατήριου εξαρτάται από ένα τοίχο και η μάζα τοποθετείται πάνω σε τραπέζι με συντελεστή κινητικής τριβής μ=1/8. Η μάζα αφήνεται ελεύθερη:



(α) Ποια είναι η αρχική συσπείρωση του ελατήριου.

(β) Πόσο ελαττώνεται η μέγιστη συσπείρωση (ή επιμήκυνση) του ελατηρίου μετά από κάθε μισή ταλάντωση (*<u>Υπόδειξη:</u>* Μην προσπαθήσετε να το λύσετε με $F = ma$).

(γ) Πόσες φορές ταλαντώνεται η μάζα *m* πριν έρθει σε κατάσταση ηρεμίας.

(α) Στη θέση ισορροπίας της μάζας, το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος είναι:

οπότε $kx_0 - mg = 0 \Rightarrow kx_0 = mg \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{m}{k} g}$ (A)

(β) Έστω x_0 η αρχική επιμήκυνση (ή συσπείρωση) και έστω x η συσπείρωση (ή επιμήκυνση) μετά από μισή ταλάντωση (στη χρονική αυτή στιγμή, η μάζα επανέρχεται στη θέση ηρεμίας, $v=0$)

Θεωρούμε ότι τόσο το x_0 όσο και το x (αρχική θέση και η θέση μετά από μισή ταλάντωση) είναι θετικά. Η διαφορά δυναμικής ενέργειας ελατηρίου θα είναι:

$$\Delta U = \frac{1}{2} k x_0^2 - \frac{1}{2} k x^2 \quad (1)$$

Η διαφορά αυτή θα είναι ίση με το έργο που παράγεται από τη δύναμη της τριβής (το έργο που χάνεται σε θερμότητα). Το έργο της τριβής θα είναι:

$$W_{τρ} = f \cdot \Delta x = \mu m g (x_0 + x) = \Delta U \overset{(1)}{\Rightarrow} \mu m g (x_0 + x) = \frac{1}{2} k (x_0 + x)(x_0 - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_0 - x) = \frac{2\mu m g}{k} \Rightarrow x = x_0 - \frac{\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{8}_{4}}\right) m g}{k} \overset{(A)}{\Rightarrow} \boxed{x = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{4k}} \quad (B)$$

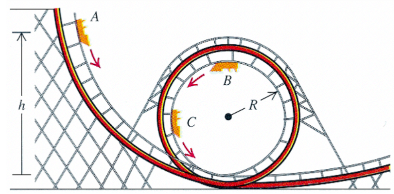
Δηλαδή η μέγιστη συσπείρωση (ή επιμήκυνση) ελαττώνεται κατά $\frac{mg}{4k}$ μετά από κάθε μισή ταλάντωση.

(γ) Το σώμα θα σταματήσει όταν η συσπείρωση ή επιμήκυνσή του γίνει 0. Δηλαδή όταν η (B) γίνει 0 μετά από n-ταλαντώσεις:

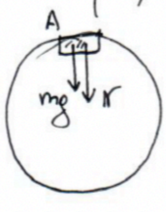
Δηλαδή: $\frac{\cancel{mg}}{\cancel{k}} = n \cdot \frac{\cancel{mg}}{4\cancel{k}} \Rightarrow \boxed{n=4}$

Το σώμα επανέρχεται σε ηρεμία όταν πραγματοποιήσει 4 μισές ή 2 πλήρεις ταλαντώσεις

4. Ένα αυτοκίνητο σε κάποιο λούνα-πάρκ κινείται χωρίς τριβές πάνω στην τροχιά της εικόνας. Ξεκινά από την ηρεμία από ένα σημείο A και σε ύψος *h* από το χαμηλότερο σημείο της κυκλικής τροχιάς. (α) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή του *h* (συναρτήσει της ακτίνας *R* της κυκλικής τροχιάς) ώστε το αυτοκίνητο να συμπληρώσει μια πλήρη περιστροφή χωρίς να πέσει από το υψηλότερο σημείο B. (β) Αν το ύψος είναι $h = 3.5R$ και R=25.0m, υπολογίστε την ταχύτητα, ακτινική επιτάχυνση, εφαπτομενική επιτάχυνση των επιβατών του αυτοκινήτου στο σημείο C, το οποίο είναι στο τέλος της οριζόντιας διαμέτρου. Δείξτε τις συνιστώσες αυτές της επιτάχυνσης σε ένα διάγραμμα.



(α) Στο υψηλότερο σημείο της κυκλικής τροχιάς A, το σώμα δέχεται τη δύναμη της βαρύτητας και τη δύναμη της αντίδρασης του δακτυλίου της τροχιάς.



Από τη στιγμή που εκτελεί κυκλική κίνηση, η συνισταμένη των δυνάμεων παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης:

$$\Sigma F_y = m\frac{v^2}{R} = mg + N \Rightarrow \boxed{N = m\frac{v^2}{R} - mg \geq 0} \quad (1)$$

Το σώμα δεν πέφτει όσο υπάρχει η αντίδραση του δακτυλίου. Δηλαδή θέλουμε $N \geq 0$. Όταν η αντίδραση γίνει 0, το σώμα χάνει επαφή με την τροχιά. Οπότε από (1) θα πάρουμε: $\cancel{m}v^2/R \geq \cancel{m}g \Rightarrow \boxed{v_A^2 \geq gR}$ (2)

Η ταχύτητα του σώματος στο σημείο A μπορεί να βρεθεί από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας: Εξετάζουμε το σημείο από όπου το αφήναμε ($v_i=0$) όπου έχει δυναμική ενέργεια λόγω βαρύτητας και στο σημείο A όπου έχει κινητική και δυναμική ενέργεια:

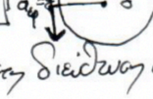
$$E^{i}_{\mu\eta\chi} = E^{A}_{\mu\eta\chi} \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv_A^2 + mg(2R) \overset{(2)}{\Rightarrow} \cancel{m}gh \geq \frac{1}{2}\cancel{m}gR + 2\cancel{m}gR \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{h \geq \frac{5}{2}R}$$

(β) Το σημείο C βρίσκεται σε ύψος R. Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας έχουμε:

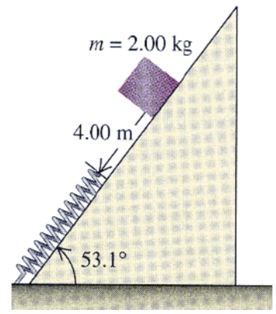
$$E^{i}_{\mu\eta\chi} = E^{C}_{\mu\eta\chi} \Rightarrow \cancel{m}g\left(\frac{7}{2}R\right) = \cancel{m}gR + \frac{1}{2}\cancel{m}v_C^2 \Rightarrow v_C^2 = 5gR \Rightarrow \boxed{v_C = \sqrt{5gR}}$$

Η ακτινική επιτάχυνση είναι $a_r = \frac{v^2}{R} \Rightarrow a_r = \frac{5g\cancel{R}}{\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{a_r = 5g}$



Η εφαπτομενική επιτάχυνση είναι $\boxed{a_{\varepsilon\varphi} = g}$ αφού μόνο το βάρος δρα στη διεύθυνση αυτή

5. Ένα κιβώτιο μάζας 2.0kg αφήνεται ελεύθερο σε ένα κεκλιμένο επίπεδο κλίσης 53.1°, 4*m* απόσταση από ένα μακρύ ελατήριο σταθερής $k = 140.0 N/m$ το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Οι συντελεστές τριβής μεταξύ του πακέτου και του κεκλιμένου επιπέδου είναι $\mu_s = 0.40$ και $\mu_k = 0.20$. Η μάζα του ελατηρίου είναι αμελητέα. (α) Ποια είναι η ταχύτητα του πακέτου ακριβώς πριν ακουμπήσει το ελατήριο; (β) Ποια είναι η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου; (γ) Το πακέτο μετά την ταλάντωση του ελατηρίου ελευθερώνεται και επιστρέφει ξανά προς το πάνω μέρος του κεκλιμένου επιπέδου. Πόσο κοντά στην αρχική του θέση μπορεί να φθάσει;



(α) Από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας έχουμε: $\Delta E_{κιν} = W \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \underbrace{mgd\sin\theta}_{\text{θετικό έργο από τη δύναμη της βαρύτητας}} - \underbrace{\mu_k mg\cos\theta\, d}_{\text{αρνητικό λόγω της τριβής}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gd(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)} \Rightarrow v = \sqrt{2\left(9.8\frac{m}{s^2}\right)(4m)\left(\sin 53.1^\circ - \cos 53.1^\circ \cdot 0.2\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v = 7.3 m/s} \quad (1)$$

Ο συντελεστής στατικής τριβής μ_s δεν παίζει ρόλο στο πρόβλημα. Το μόνο που μπορεί να κάνει είναι να σταματήσει το πακέτο από το να ξεκινήσει ξανά αφότου έχει σταματήσει.

(β) Ξεκινώντας από το σημείο που το πακέτο ακουμπά το ελατήριο, θα έχουμε:

$$W = \Delta K = mgx\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta \cdot \overset{\text{συσπείρωση}}{x} - \frac{1}{2}kx^2 = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 \overset{(1)}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 - mg(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)x - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0 \Rightarrow 60x^2 - 13.3x - 53.3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{13.3 \pm 113.9}{120} \Rightarrow \boxed{x = 1.06 m}$$ Θέλουμε τη λύση με "+" γιατί το x είναι θετικό.

(γ) Η κύρια ερώτηση είναι αν το πακέτο επιστρέφει πίσω στο ελατήριο το οποίο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος, γιατί χρειάζεται να ξέρουμε αν το ελατήριο έχει να κάνει οτιδήποτε με την όλη κίνηση. Κοιτάζουμε την κινητική ενέργεια στο σημείο ισορροπίας. Αν είναι θετική, τότε σημαίνει ότι το πακέτο πηγαίνει μέχρι το σημείο εκείνο. Μπορούμε κατόπιν να δούμε πόσο περισσότερο μπορεί να κινηθεί πέρα από το τέλος του ελατηρίου:

(A) Από το σημείο της μέγιστης συσπείρωσης στο σημείο ισορροπίας:

$$W = \Delta E_{κιν} \Rightarrow W_{βαρ} + W_f + W_{ελ} = \Delta E_{κιν} \Rightarrow -mg(1.06) - \mu_k g m \cos\theta (1.06) + \frac{1}{2}k(1.06)^2 = \Delta E_{κιν} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E^f_{κιν} = 48.3\,J}$$ Δηλαδή είναι θετική και άρα το πακέτο φθάνει στο σημείο ισορροπίας.

(B) Από το σημείο ισορροπίας προς τα πάνω: (δεν υπάρχει δύναμη ελατηρίου)

$$W = \Delta E_{κιν} \Rightarrow W_{βαρ} + W_f = \Delta E_{κιν} \Rightarrow -mgy\sin\theta - \mu_k \cos\theta\, mgy = \frac{1}{2}mv_y^2 - \frac{1}{2}mv_{ισορ}^2 \Rightarrow$$

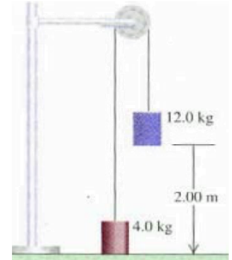
$\Rightarrow E^y_{κιν} = 0$ επειδή στο σημείο y σταματά. Επομένως θα έχουμε:

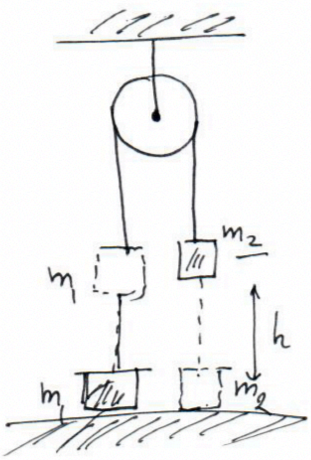
$$-mgy\sin\theta - \mu_k mgy\cos\theta = -\frac{1}{2}mv^2_{ισορ} = 48.3\,J$$ από το (A) πιο πάνω.

Αριθμητική αντικατάσταση, δίνει: $\boxed{y = 2.68\,m}$

Επομένως η πιο κοντινή απόσταση από το αρχικό σημείο θα είναι: $\boxed{4m - 2.68m = 1.32m}$

6. Το σύστημα του διπλανού σχήματος αφήνεται από την κατάσταση ηρεμίας με τον κουβά της μπογιάς μάζας 12*kg*, 2.0m πάνω από το έδαφος. Χρησιμοποιήστε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για να βρείτε την ταχύτητα με την οποία ο κουβάς χτυπά στο έδαφος. Αγνοήστε την τριβή και την αδράνεια της τροχαλίας.





Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας δίνει:

$$E^i_{\mu\eta\chi} = E^f_{\mu\eta\chi} \Rightarrow U_i + E^i_{\kappa\iota\nu} = U_f + E^f_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow$$

$$m_2 g h + 0 = m_1 g h + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2gh(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} \Rightarrow v^2 = \frac{2\cdot(9.8\,\frac{m}{s^2})(12\,kg - 4\,kg)\,2\,m}{12\,kg + 4\,kg}$$

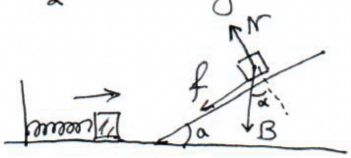
$$\Rightarrow \boxed{v = 4.43\,m/s}$$

7. Ένα κιβώτιο μάζας *m* πιέζεται πάνω σε ένα ελατήριο αμελητέας μάζας και σταθεράς ελατηρίου *k*, συσπειρώνοντάς το κατά ένα μήκος *x*. Το κιβώτιο κατόπιν αφήνεται ελεύθερο και αρχίζει να κινείται πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο κλίσης α ως προς τον ορίζοντα. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ του κιβωτίου και του κεκλιμένου επιπέδου είναι μ_k, όπου $\mu_k < 1$. Το κιβώτιο συνεχίζει να κινείται πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο αφού έχει καλύψει μια απόσταση $s > |x|$ κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Υπολογίστε τη γωνία α για την οποία η ταχύτητα του κιβωτίου αφού έχει κινηθεί κατά απόσταση s είναι ελάχιστη. Εξηγήστε γιατί η ελάχιστη ταχύτητα δεν συμβαίνει για γωνία α = 90°, ακόμα και αν για την γωνία αυτή έχουμε μέγιστη αύξηση της δυναμικής ενέργειας λόγω βαρύτητας.

Εφόσον $s > |x|$, η τελική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι μηδέν.

Η αρχική δυναμική ενέργεια, $\frac{1}{2}kx^2$, μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια βαρύτητας και κινητική ενέργεια καθώς και σε θερμότητα εξαιτίας της τριβής.

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgs\sin a + \mu mg\cos a \cdot s + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 - mgs\sin a - \mu mg\cos a}$$



Που ουσιαστικά μας δίνει το θεώρημα-έργου-κινητικής ενέργειας:

$$\Delta E_{κιν} = W_{ελ} + W_{βαρ} + W_f$$

Από την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι η ταχύτητα γίνεται ελάχιστη όταν:

$-mgs(\sin a + \mu\cos a)$ γίνει μέγιστο. Δηλαδή όταν αφαιρούμε από το ελατήριο τη μέγιστη ποσότητα. Επομένως $\sin a + \mu\cos a$ γίνεται μέγιστο όταν:

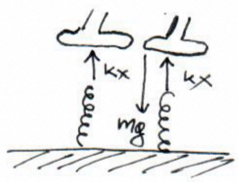
$$\frac{d}{da}(\sin a + \mu\cos a) = 0 \Rightarrow \cos a - \mu\sin a = 0 \Rightarrow \cos a = \mu\sin a \Rightarrow \boxed{\tan a = \frac{1}{\mu}}$$

Όταν $\mu = 0$ οπότε δεν έχουμε τριβή $a = 90°$

Όταν μ γίνει μεγάλο τότε α γίνεται μικρή και η κάθετη αντίδραση γίνεται όσο το δυνατόν μεγαλύτερη.

Η γωνία δεν γίνεται 90° γιατί τότε η κάθετη αντίδραση γίνεται μηδέν και επομένως δεν θα υπάρχει απώλεια ενέργειας λόγω τριβής (αφού $f=0$). Καθώς η γωνία μικραίνει από $90° \to 0°$, αυξάνει η τριβή ενώ ελαττώνεται το ύψος κατά λίγο.

8. Ο Σαΐνης είναι ένας διάσημος αστυνομικός κινουμένων σχεδίων ο οποίος έχει την ικανότητα για πολλά πράγματα κυρίως εξαιτίας των πολλών ευρηματικών κατασκευών που διαθέτει. Μια από αυτή του επιτρέπει να πηδά πάνω από ψηλούς τοίχους ή άλλα εμπόδια και να φθάνει γρήγορα τους κακοποιούς που κυνηγά. Η συσκευή που χρησιμοποιεί είναι πολύ απλή: δυο σκληρά ελατήρια στα τακούνια των παπουτσιών του. Υποθέτοντας ότι ζυγίζει 75*kg* και ότι τα ελατήρια είναι συμπιεσμένα κατά 2.5*cm* όταν στέκεται πάνω τους, κατά πόσο θα πρέπει να συμπιέσει τα ελατήρια σε μια από τις καταδιώξεις του ώστε να μπορέσει να πηδήσει ένα τοίχο ύψους 3*m*.



Το σχήμα δείχνει την ιδεατή περίπτωση του προβλήματος:

Όταν στέκεται πάνω στα ελατήρια, βρίσκεται σε ηρεμία και επομένως τα ελατήρια συσπειρώνονται για να εξισορροπήσουν το βάρος

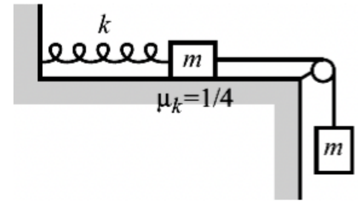
Θα έχουμε: $2kx_0 = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{2x_0} \Rightarrow k = \frac{75kg \cdot 10m/s^2}{2 \cdot 0.025m} \Rightarrow \boxed{k = 15 \cdot 10^3 N/m}$

Αν θελήσει να πηδήξει τον τοίχο των 3m, τότε η ενέργεια του από τα ελατήρια θα μετατραπεί σε δυναμική ενέργεια βαρύτητας που αντιστοιχεί στο ύψος που θέλει να βρεθεί. Οπότε θα έχουμε:

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx^2 = mgh \Rightarrow x^2 = \frac{mgh}{k} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{mgh}{k}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\cancel{mg}h}{\frac{\cancel{mg}}{2x_0}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{2hx_0}{1}} \Rightarrow x = \sqrt{0.15} \Rightarrow \boxed{x = 0.39m}$$

9. Θεωρήστε τη διάταξη του διπλανού σχήματος η οποία αποτελείται από δυο ίσές μάζες m και ένα ελατήριο σταθεράς k. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ της μάζας στα αριστερά του τραπεζιού και της επιφάνειας του τραπεζιού είναι μ = 1/4, ενώ η τροχαλία θεωρείστε την ως λεία και αβαρή. Το σύστημα συγκρατείται με ένα ελατήριο το οποίο είναι στο φυσικό του μήκος αρχικά και κατόπιν το σύστημα αφήνεται ελεύθερο.



(α) Πόσο επιμηκύνεται το ελατήριο πριν η μάζα έρθει σε κατάσταση ηρεμίας;
(β) Ποια η ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής για τον οποίο το σύστημα συνεχίζει να παραμένει σε ηρεμία μετά τη στιγμή που έρχεται για πρώτη φορά σε ηρεμία.
(γ) Αν το νήμα κοπεί, ποια είναι η τιμή της μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου εξαιτίας της κίνησης αυτής του σώματος;

(α) Από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας: $W = \Delta E_{κιν}$ και οι μάζες σταματούν όταν το ολικό έργο που δαπανάται πάνω τους είναι μηδέν.

Έστω x η επιμήκυνση του ελατηρίου, τότε το ολικό έργο είναι:

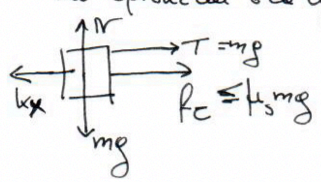
$$W = \underbrace{mgx}_{\text{έργο βαρύτητας}} - \underbrace{\tfrac{1}{2}kx^2}_{\text{έργο ελατηρίου}} - \underbrace{\mu_k mgx}_{\text{έργο τριβής}}$$

(το ίδιο θα λέγαμε αν δουλεύαμε με ενέργειες: η ελάττωση στη δυναμική ενέργεια βαρύτητας εμφανίζεται σαν ενέργεια ελατηρίου και θερμότητα).

Βάζοντας $W=0$ και λύνοντας ως προς x θα πάρουμε:

$$(1)\quad x = \frac{2mg}{k}(1-\mu_k) \Rightarrow x = \frac{2mg}{k}\left(1-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \boxed{x = \frac{3mg}{2k}}$$

(β) Όταν οι μάζες σταματούν στο σημείο x, οι δυνάμεις που ασκούνται στη μάζα που βρίσκεται στα αριστερά θα είναι:



$$\Rightarrow kx = T + f \le mg + \mu_s mg \Rightarrow k\frac{2mg}{k}(1-\mu_k) \le mg(1+\mu_s)$$

$$\Rightarrow 2(1-\mu_k) \le (1+\mu_s) \Rightarrow \mu_s \ge 1-2\mu_k \Rightarrow \boxed{\mu_s \ge 1/2}$$

(γ) Τη στιγμή που κόβουμε το νήμα, υπάρχει μόνο η αριστερή μάζα. Αυτή σταματά όταν το ολικό έργο που καταναλώνεται είναι μηδέν. Έστω d η απόσταση συσπείρωσης, η οποία είναι μία θετική ποσότητα.

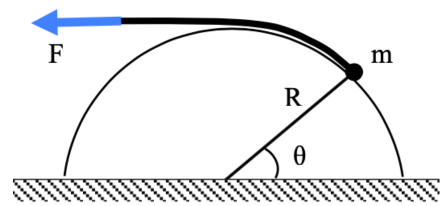
Το έργο επομένως θα είναι: $W = \left(\frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}kd^2\right) - \mu_k mg(x_0+d)$ και θέτουμε $W=0$

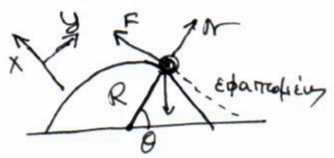
$$0 = \frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}kd^2 - \mu_k mg(x_0+d) = \frac{1}{2}k(x_0+d)(x_0-d) - \mu_k mg(x_0+d) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_0+d)\left[\frac{k}{2}(x_0-d) - mg\mu_k\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x_0 = -d} & \text{αυτή είναι η αρχική θέση} \\ \frac{k}{2}(x_0-d) = mg\mu_k \Rightarrow d = x_0 - \frac{2\mu_k mg}{k} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = \frac{2mg}{k}(1-\mu_k) - \frac{2mg}{k}\mu_k \Rightarrow \boxed{d = \frac{mg}{k}}$$

10. Ένα μικρό σώμα μάζας m σύρεται στο ψηλότερο σημείο μιας μισής λείας κυλινδρικής επιφάνειας ακτίνας R από ένα σχοινί το οποίο περνά από την κορυφή αυτής της κυλινδρικής επιφάνειας (δείτε το παρακάτω σχήμα). (α) Αν το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα υ δείξτε ότι $F = mgcos\theta$. (β) Ολοκληρώνοντας απευθείας την σχέση που δίνει το έργο ($W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$), βρείτε το έργο που παράγεται για να κινηθεί το σωματίδιο από το χαμηλότερο σημείο της κυλινδρικής επιφάνειας στο υψηλότερο.





(α) Η κάθετη δύναμη F είναι κατά μήκος της εφαπτομένης γραμμής στο σημείο που το σχοινί είναι δεμένο στη μάζα m.

Από το διάγραμμα ελεύθερου σώματος και με άξονες όπως στο παραπάνω σχήμα (x-άξονας κατά μήκος της εφαπτομένης και y-άξονας κάθετος σ' αυτήν κατά μήκος της ακτίνας του ημικυκλίου) θα έχουμε:

$$\Sigma F_x = ma_x = 0 \Rightarrow F - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow \boxed{F = mg\cos\theta} \quad (1)$$

(β) Το έργο της δύναμης αυτής θα είναι $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Σε ακτίνια η στοιχειώδης μετατόπιση θα είναι $dr = R\,d\theta$.

Στο χαμηλότερο σημείο της κυλινδρικής επιφάνειας $\theta = 0$ ενώ στο υψηλότερο σημείο $\theta = \pi/2$. Τα όρια ολοκλήρωσης επομένως θα είναι $0 - \frac{\pi}{2}$.

Γράφουμε: $$W = \int_0^{\pi/2} mg\cos\theta\, R\,d\theta \Rightarrow W = mgR\sin\theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \Rightarrow$$

$$W = mgR(1-0) \Rightarrow \boxed{W = mgR}$$

Το έργο δηλαδή είναι ίσο με την μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, όπως αναμέναμε.