Έργο – Κινητική Ενέργεια

Δυναμική ενέργεια

Σκεφτείτε τι συμβαίνει σε μια διάσταση:

$$U_f = -\int_i^f F(x)dx + U_i \qquad \textbf{(A)}$$

Ας υποθέσουμε $U_i = 0$ και $U_f = U_f(\mathrm{x})$

Αν αντιστρέψουμε την (Α) (δηλαδή παραγωγίσουμε) τότε θα πάρουμε

$$\frac{dU_f}{dx} = -\frac{d}{dx}\int_i^f F(x)dx = -F(x) \Rightarrow \begin{cases} \boxed{F(x) = -\dfrac{dU_f}{dx}} \\ \boxed{U_f(x) = -\int F(x)dx} \end{cases}$$

Αν ξέρουμε τη *U* βρίσκουμε την *F*

Αν ξέρουμε την *F* βρίσκουμε την *U*

Σε 3 διαστάσεις (χρησιμοποιούμε μερικές παραγώγους αφού U=U(x,y,z))

$$F_x = -\frac{\partial U_f}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U_f}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U_f}{\partial z} \Rightarrow \quad \boxed{-F(x,y,z) = \hat{i}\frac{\partial U_f}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial U_f}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial U_f}{\partial z}}$$

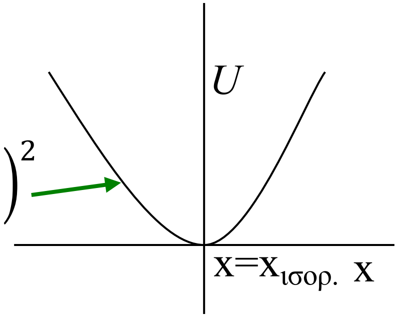
Αν μπορούμε να μετρήσουμε *U*(*r*) τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την *F*

Ελατήρια

Η δύναμη ελατηρίου $F = -k\Delta x$, είναι μια συντηρητική δύναμη.

Ξεκινάμε με ελατήριο στο φυσικό του μήκος και μετά το συμπιέζουμε κατά μια ποσότητα x.

$$U_f - U_i = U(x) - U(x_{\iota\sigma o\rho.}) = -\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{l} = -\int_{x_{\iota\sigma o\rho}}^{x} (-k\Delta x)dx = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$



Αν διαλέξουμε την ποσότητα $U(x_{\iota\sigma o\rho.}) = 0$ τότε:

$$\boxed{U_f(\Delta x) = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2}$$

Ελαστική δυναμική ενέργεια

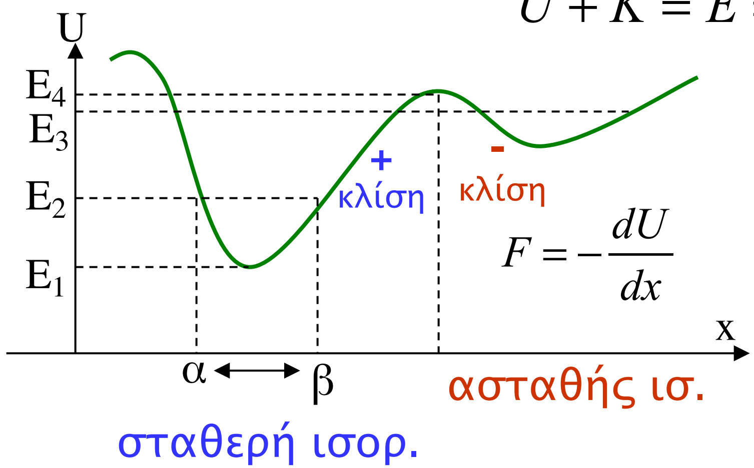
$E_{\kappa\iota\nu}$ και U θεωρούνται και τα δύο μορφές μηχανικής ενέργειας

$$\left.\begin{aligned} W_{\text{net}} &= \Delta(E_{\kappa\iota\nu.}) \\ \Delta U &= -\int_1^2 \vec{F}_{\text{net}}\cdot d\vec{l} = -W_{\text{net}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta E_{\kappa\iota\nu.} + \Delta U = 0$$

Διάγραμμα ενέργειας

Η γενική κίνηση ενός σώματος μπορεί να βρεθεί αν κάνουμε το διάγραμμα της δυναμικής ενέργειας:

$$U + K = E \Rightarrow U(x) + \frac{1}{2}mv^2 = E \Rightarrow v = \pm\sqrt{\frac{2}{\mathrm{m}}\left(E - U(x)\right)}$$



Πρέπει E ≥ U(x) ώστε η ταχύτητα, *v*, να έχει πραγματική τιμή

Αν $E = E_2$ τότε το σώμα ταλαντώνεται μεταξύ των σημείων α και β

Επομένως η γενική λύση για τα x(t)

$$v = \pm\sqrt{\frac{2}{\mathrm{m}}\left(E - U(x)\right)} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mathrm{m}}\left(E - U(x)\right)} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}} = \pm\int_0^t dt$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε το χρόνο t συναρτήσει της x
Κατόπιν αν αναστρέψουμε θα πάρουμε την x συναρτήσει του t.

Γενικά αυτό δεν είναι πάντα πραγματοποιήσιμο αναλυτικά και χρειάζεται να λύσουμε το πρόβλημα αριθμητικά (υπολογιστές) .

Παράδειγμα

Μια μπάλα πέφτει από ύψος h, με u_0=0. Δείξτε ότι y(t) = h-1/2gt^2

ΛΥΣΗ

Μετρούμε την U σχετικά με το έδαφος.

$$E = mgh \quad \text{και} \quad U(y) = mgy \qquad E^i_{\kappa\iota\nu} = 0$$

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι $E = mgh$

Στο ύψος y(t) η δυναμική του ενέργεια είναι $U(y) = mgy$

Αλλά

$$E_{o\lambda} = E_{\kappa\iota\nu} + U \Rightarrow E_{\kappa\iota\nu} = E_{o\lambda} - U \Rightarrow \frac{1}{2}m\text{v}^2 = mgh - mgy \Rightarrow$$

$$\text{v} = \pm\sqrt{2g(h-y)} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \pm\sqrt{2g(h-y)} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{2g(h-y)}} = \pm dt \Rightarrow$$

$$\int_h^y \frac{dy}{\sqrt{2g(h-y)}} = -\int_0^t dt \Rightarrow -\int_h^y \frac{dy}{\sqrt{2g}\sqrt{h-y}} = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2g}} 2\sqrt{h-y}\Big|_h^y \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{(h-y)} \Rightarrow y = h - \frac{1}{2}gt^2$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το έργο που παράγεται σε 2 διαφορετικά αδρανειακά συστήματα για σώμα που επιταχύνεται με επιτάχυνση "α" από τη θέση ηρεμίας ως προς (α) Ακίνητο σύστημα (β) Κάποιο που κινείται με ταχύτητα v.

(α) Ακίνητο σύστημα

$$F = ma \qquad d = \frac{1}{2}at^2 \quad \left(\mathrm{v_i} = 0,\ \mathrm{v_f} = at\right)$$

$$\Rightarrow W = Fd = (ma)\left(\frac{1}{2}at^2\right) = \frac{1}{2}m(at)^2 = \frac{1}{2}m\left(\mathrm{v_f^2} - \cancelto{0}{\mathrm{v_i^2}}\right) = \frac{1}{2}m\mathrm{v_f^2} = \Delta E_{\kappa\iota\nu}$$

(β) Κινούμενο σύστημα

$$d = \mathrm{v}t + \frac{1}{2}at^2, \quad F = ma \quad \left(\mathrm{v_i} = \mathrm{v},\ \mathrm{v_f} = \mathrm{v} + at\right)$$

$$\Rightarrow W = Fd = (ma)\left(\mathrm{v}t + \frac{1}{2}at^2\right) = ma\mathrm{v}t + \frac{1}{2}m(at)^2 \qquad (1)$$

Αλλά $\Delta E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}m\left(\mathrm{v_f^2} - \mathrm{v_i^2}\right) = \frac{1}{2}m(\mathrm{v} + at)^2 - \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 = \frac{1}{2}m\left[\mathrm{v}^2 + (at)^2 + 2\mathrm{v}at\right] - \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2$

$$\Rightarrow \Delta E_{\kappa\iota\nu} = m\mathrm{v}at + \frac{1}{2}m(at)^2 \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε $\boldsymbol{W = \Delta E_{\kappa\iota\nu}}$

- *W* και *ΔE*$_{\kappa\iota\nu}$ δεν έχουν την ίδια μορφή όπως στο ακίνητο σύστημα αλλά είναι και πάλι ίσα μεταξύ τους.

Ισχύς

- Ισχύς ορίζεται σαν ο ρυθμός παραγωγής έργου: $\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{x}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \boxed{\Rightarrow P = \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{v}}}$$

Μονάδα μέτρησης ισχύος
Watt = Joule/sec

Στρατηγική για λύση προβλημάτων

- Βρίσκουμε τη κατάσταση μηδενικής δυναμικής ενέργειας
  - ✓ Χρησιμοποιούμε τη βαρυτική και την ελαστική δυναμική ενέργεια αν υπάρχει δύναμη επαναφοράς ή βαρυτική δύναμη
  - ✓ Εν γένει, αν περισσότερες δυνάμεις δρουν στο σύστημα πρέπει να γράφουμε τη δυναμική ενέργεια που προέρχεται από κάθε δύναμη
- Αν στο σύστημα δρουν τριβή ή αντίσταση του αέρα ή μέσου τότε η μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται

  Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο για έργο μη συντηρητικών δυνάμεων
- Αν η μηχανική ενέργεια ενός συστήματος διατηρείται τότε γράφουμε

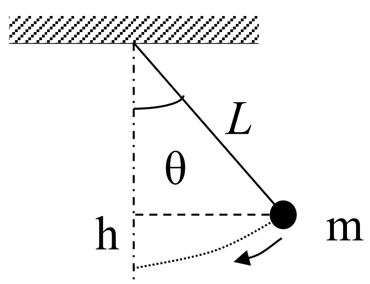
  $$E^{i}_{\mu\eta\chi} = E^{i}_{\kappa\iota\nu} + U_{i}$$ για την αρχική κατάσταση

  $$E^{f}_{\mu\eta\chi} = E^{f}_{\kappa\iota\nu} + U_{f}$$ για την τελική κατάσταση

  Αφού η μηχανική ενέργεια διατηρείται μπορούμε να λύσουμε προς τις άγνωστες ποσότητες του προβλήματος
- Αν υπάρχουν μη-συντηρητικές δυνάμεις ορίζουμε το απομονωμένο σύστημα και την αρχική και τελική κατάσταση του συστήματος
  - Βρίσκουμε τη κατάσταση της μηδενικής δυναμικής ενέργειας όπως πριν
  - Η διαφορά τελικής – αρχικής ενέργειας είναι το έργο της μη συντηρητικής δύναμης

Παράδειγμα

Βρείτε το έργο που παράγεται από την βαρύτητα στην μάζα του εκκρεμούς όπως αυτή κινείται προς το χαμηλότερο σημείο



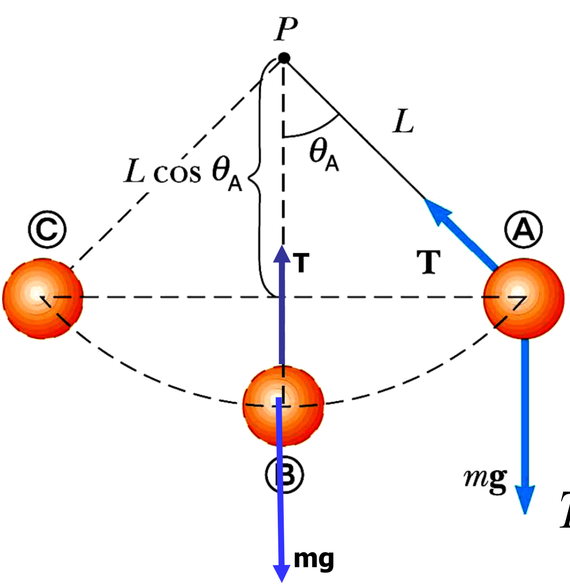
$$\vec{F}_g = (0, -mg) \quad \kappa\alpha\iota \quad d\vec{x} = Ld\theta(\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\Rightarrow W = \int_\theta^0 -mgL\sin\theta\, d\theta = mgL\cos\theta\Big|_\theta^0 = mgL(1-\cos\theta) = mgh$$

$$\Rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{x} = -mgL\sin\theta d\theta$$

Το ίδιο σα να είχαμε ρίξει τη μάζα ένα ύψος h

- Ποια η ταχύτητα στο χαμηλότερο σημείο?



$$E_{\kappa\iota\nu}^{A} + U_A = E_{\kappa\iota\nu}^{B} + U_B \Rightarrow$$

$$0 + U_A = E_{\kappa\iota\nu}^{B} + 0 \Rightarrow$$

$$0 + mg(L - L\cos\theta) = \frac{1}{2}m\upsilon_A^2 + 0 \Rightarrow \upsilon_A = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)}$$

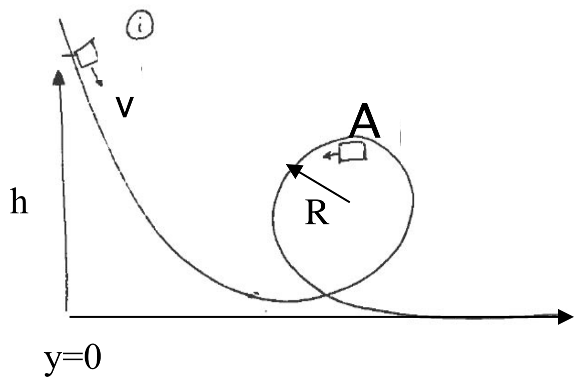
- Η τάση στο χαμηλότερο σημείο;

$$T_B - mg = \frac{m\upsilon^2}{L} \Rightarrow T_B = mg + \frac{m2gL(1-\cos\theta)}{L} \Rightarrow \quad T_B = mg(3-2\cos\theta)$$

Παραδείγματα

- Χάντρα γλιστρά πάνω σε σύρμα χωρίς τριβή. Ποια η ταχύτητα της χάντρας στο σημείο Α αν αφήνεται από ύψος h = 3.5R.

Λύση



Διαλέγουμε την θέση y=0 σα τη θέση U(0)=0

Στην αρχική θέση v=0, U=mgh, $E_{\kappa} = 0$

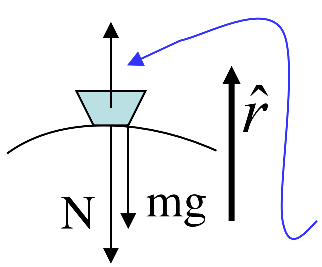
$$E^{i}_{\mu\eta\chi} = U^{i}_{g} + E^{i}_{\kappa\iota\nu} = mgh = 3.5mgR$$

Σύμφωνα με την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, στο σημείο Α θα ισχύει $E_A = E_i$ άρα

$$3.5Rmg = \frac{1}{2}\mathrm{mv}^2 + 2mgR \Rightarrow \mathrm{v}_A = \sqrt{3gR}$$

- Ποιά είναι η κάθετη δύναμη (N) στη χάντρα στο σημείο Α?

$$\vec{F} = m\vec{a}_r, \quad N(-\hat{r}) + mg(-\hat{r}) = \frac{m\mathrm{v}_A^2}{R}(-\hat{r})$$



Αυτό θα μας δώσει $N = 2mg$

Αν διαλέγαμε την αντίθετη κατεύθυνση για την κάθετη δύναμη τότε $N(+\hat{r}) + mg(-\hat{r}) = m3g(-\hat{r}) \Rightarrow N = -2mg$

Που σημαίνει ότι η κάθετη δύναμη έχει αντίθετη διεύθυνση