Επίλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων που εμπλέκουν εναλλασσόμενα ρεύμα

Επίλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων

Επίλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων σημαίνει εύρεση των ρευμάτων, των τάσεων και των διαφόρων φάσεων στους διάφορους κλάδους του κυκλώματος.

Τρεις μέθοδοι για την επίλυση: η αλγεβρική, η γεωμετρική και η μέθοδος των μιγαδικών μεγεθών.

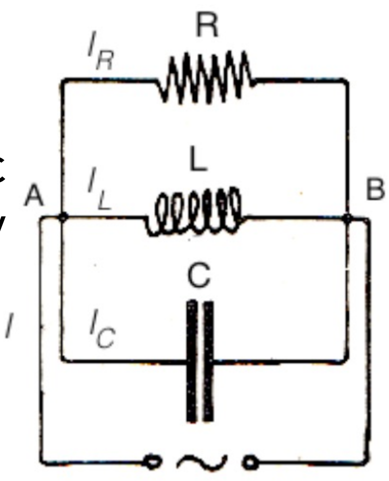
- Η αλγεβρική μέθοδος:

Χρησιμοποιούμε τις τιμές των στιγμιαίων ρευμάτων και τάσεων.

Αν το συνολικό ρεύμα είναι $I = I_0 \sin(\omega t)$, τότε για την τάση γράφουμε $V = V_0 \sin(\omega t + \varphi)$ και αντίστροφα.

Για τις στιγμιαίες τιμές εφαρμόζουμε τους κανόνες του Kirchhoff και τα ζητούμενα μεγέθη προκύπτουν από τις αλγεβρικές εξισώσεις που προκύπτουν

Αλγεβρική μέθοδος - Παράδειγμα



Έστω το κύκλωμα RLC σε παράλληλη συνδεσμολογία. Έστω ότι $V = V_0 \sin(\omega t)$. Θα βρούμε την ένταση του ρεύματος σε κάθε κλάδο, το συνολικό ρεύμα, την εμπέδιση του κυκλώματος και την διαφορά φάσης του συνολικού ρεύματος με την τάση.

Έστω ότι το συνολικό ρεύμα είναι: *I* και τα ρεύματα που διαρρέουν το *R, L, C,* είναι I_R , I_L και I_C αντίστοιχα.

Θα έχουμε επομένως: $I = I_R + I_L + I_C$ (1)

Στους 3 κλάδους έχουμε την ίδια τάση: $I_R = \frac{V_R}{R} = \frac{V_0}{R}\sin(\omega t)$ (2)

Για τον πυκνωτή: $I_C = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(CV) = CV_0\frac{d}{dt}\sin(\omega t) \Rightarrow I_C = \omega C V_0 \cos(\omega t)$ (3)

Για το πηνίο, εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Kirchhoff:

$$V(t) - L\frac{dI_L}{dt} = 0 \Rightarrow L\frac{dI_L}{dt} = V(t) \Rightarrow dI_L = \frac{V(t)}{L}dt = \frac{V_0}{L}\sin(\omega t)\,dt \Rightarrow$$

$$\int dI_L = \frac{V_0}{L}\int \sin(\omega t)\,dt \Rightarrow \; I_L = -\frac{V_0}{L\omega}\cos(\omega t) \qquad (4)$$

Αντικαθιστούμε τις (2),(3) και (4) στην (1) οπότε: $I = \frac{V_0}{R}\sin(\omega t) + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)V_0\cos(\omega t)$

Αλγεβρική μέθοδος - Παράδειγμα

Βρήκαμε ότι το συνολικό ρεύμα είναι: $I = \frac{V_0}{R}\sin(\omega t) + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)V_0\cos(\omega t)$ (5)

Μπορούμε να το γράψουμε με την μορφή: $I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ (6)

Θα πρέπει να προσδιορίσουμε τις σταθερές I_0 και φ.

Γράφουμε την (6) με την μορφή: $I_0 \sin(\omega t)\, cos\varphi + I_0\cos(\omega t) sin\varphi$ (7)

Για να είναι η (5) και η (7) ίσες, θα πρέπει οι συντελεστές των $\sin(\omega t)$ και $\cos(\omega t)$ να είναι ίσοι. Επομένως:

$$I_0 cos\varphi = \frac{V_0}{R} \quad (8)$$

$$I_0 sin\varphi = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)V_0 \quad (9)$$

$$\Rightarrow I_0^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = V_0^2\left[\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega \mathrm{L}}\right)^2\right] \Rightarrow$$

$$I_0 = V_0\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega \mathrm{L}}\right)^2}$$

Η εμπέδιση του κυκλώματος θα είναι: $Z = \frac{V_0}{I_0}$

$$\Rightarrow Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega \mathrm{L}}\right)^2}}$$

Η εφαπτομένη της διαφοράς φάσης προκύπτει από τις (8) και (9)

$$tan\varphi = \frac{(\omega C - 1/\omega L)}{1/R} \Rightarrow tan\varphi = R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Γεωμετρική μέθοδος

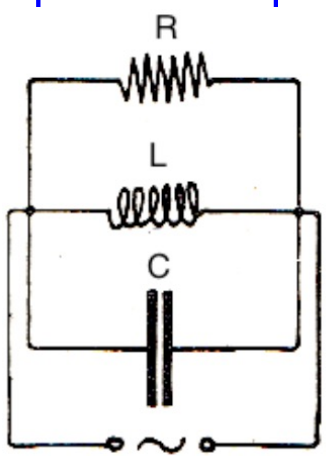
Για την εφαρμογή της γεωμετρικής μεθόδου θα πρέπει να κατασκευάσουμε το κατάλληλο διανυσματικό διάγραμμα.

Για τα στοιχεία του κυκλώματος που είναι συνδεδεμένα σε σειρά ή παράλληλα, το μέγεθος αναφοράς είναι το πλάτος του ρεύματος ή της τάσης. Επομένως:

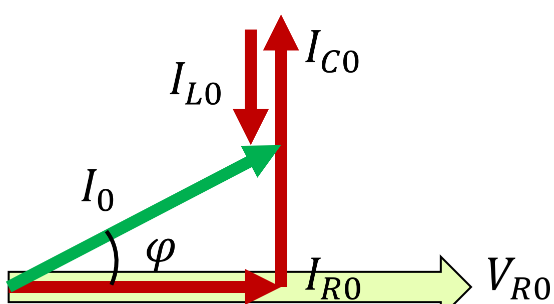
Αναφορικά με την τάση

Κύκλωμα RLC παράλληλα:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

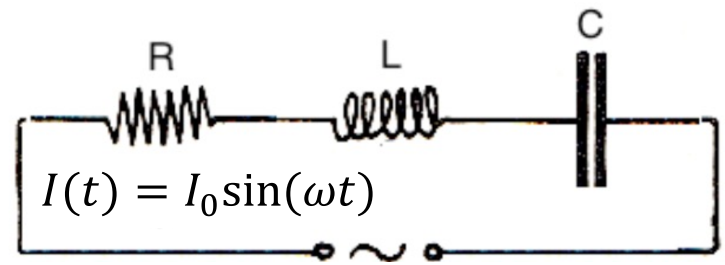


$$V(t) = V_0 \sin(\omega t)$$

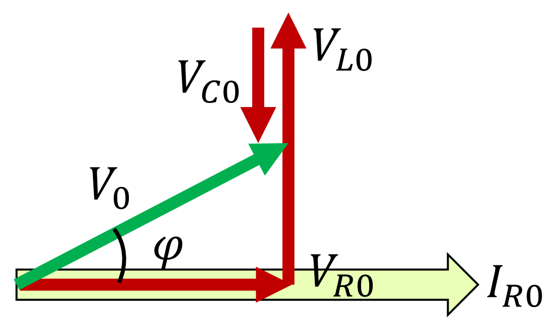


Αναφορικά με το ρεύμα

Κύκλωμα RLC σε σειρά:

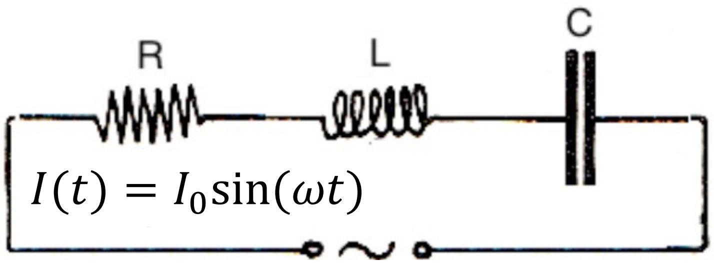


$$V(t) = V_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

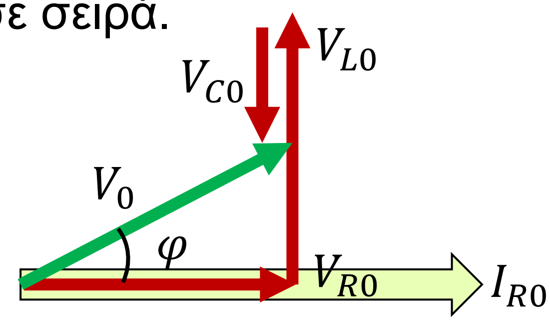


Γεωμετρική μέθοδος – RLC συνδεσμολογία σε σειρά

Εξετάζουμε την περίπτωση ενός RLC κυκλώματος σε σειρά.



$V(t) = V_0 \sin(\omega t + \varphi)$



Στην περίπτωση αυτή, τα διάφορα στοιχεία (*R, L, C*) διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, $I = I_0 \sin(\omega t)$ ενώ η τάση θα είναι $V = V_0 \sin(\omega t + \varphi)$.

Ξέρουμε ότι: $Z = \dfrac{V_0}{I_0}$

Από το διανυσματικό διάγραμμα έχουμε: $V_0 = \sqrt{V_R^2 + (V_{L0} - V_{C0})^2} \Rightarrow$

$$V_0 = \sqrt{I_0^2 Z_R^2 + (I_0 Z_L - I_0 Z_C)^2} \Rightarrow V_0 = I_0 \sqrt{Z_R^2 + (Z_L - Z_C)^2} \Rightarrow \frac{V_0}{I_0} = \sqrt{Z_R^2 + (Z_L - Z_C)^2}$$

Επομένως: $Z = \sqrt{Z_R^2 + (Z_L - Z_C)^2} \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$

Η διαφορά φάσης θα είναι: $tan\varphi = \dfrac{(V_L - V_C)}{V_R} = \dfrac{I_0(\omega L - 1/\omega C)}{I_0 R} \Rightarrow tan\varphi = \dfrac{(\omega L - 1/\omega C)}{R}$

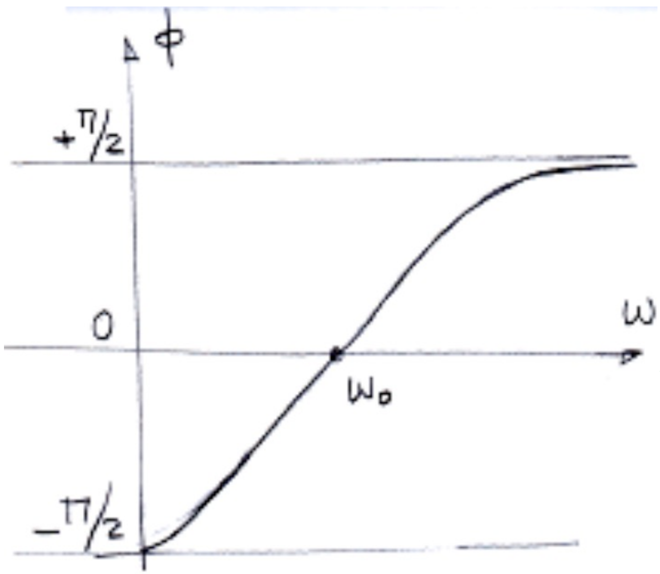
Γεωμετρική μέθοδος – RLC συνδεσμολογία σε σειρά

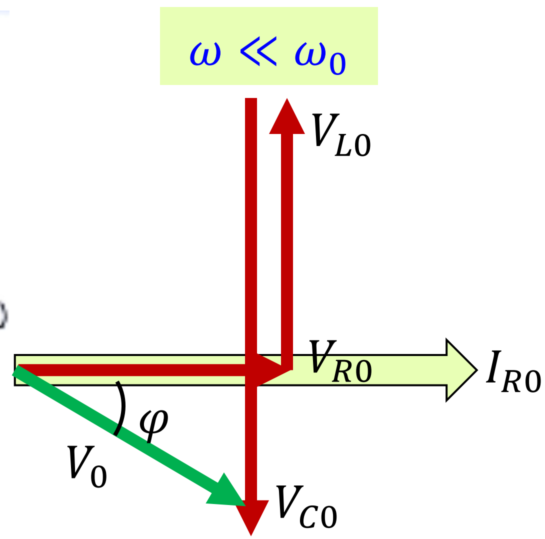
Η διαφορά φάσης είναι: $tan\varphi = \dfrac{(\omega L - 1/\omega C)}{R}$

Όταν $\omega L - 1/\omega C < 0$ τότε $\omega < \dfrac{1}{LC} = \omega_0$ και $\varphi < 0$ χωρητική για $\omega \ll \omega_0, \varphi \to -\dfrac{\pi}{2}$

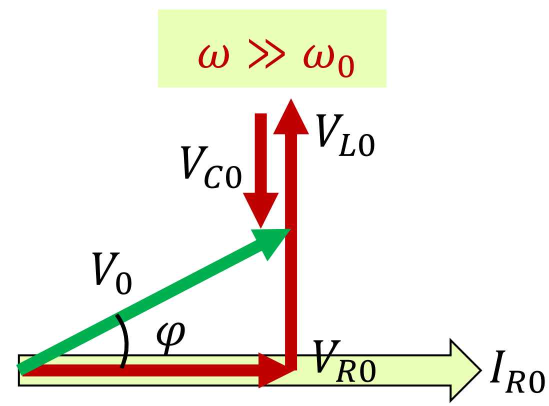
Όταν $\omega L - 1/\omega C = 0$ τότε $\omega = \dfrac{1}{LC} = \omega_0$ και $\varphi = 0$ συντονισμός

Όταν $\omega L - 1/\omega C > 0$ τότε $\omega > \dfrac{1}{LC} = \omega_0$ και $\varphi > 0$ επαγωγική για $\omega \to \infty, \varphi \to \dfrac{\pi}{2}$





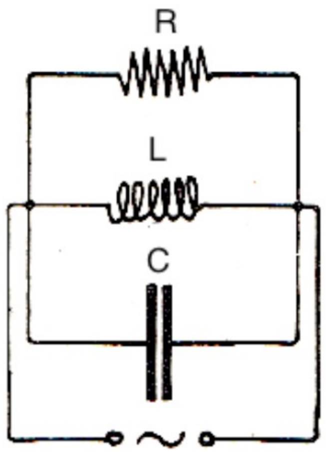
χωρητική συμπεριφορά

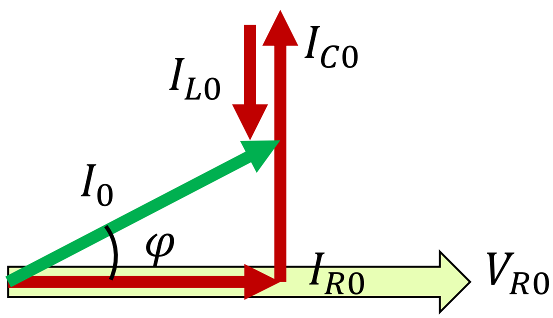


επαγωγική συμπεριφορά

Γεωμετρική μέθοδος – RLC παράλληλη συνδεσμολογία

Εφαρμόζουμε τη γεωμετρική μέθοδο για την παράλληλη συνδεσμολογία *RLC*





Επιλέγουμε το διάνυσμα της τάσης, ως διάνυσμα αναφοράς

Το πλάτος του ρεύματος που διέρχεται από την αντίσταση, I_{R0}, είναι σε φάση με το V_0.

Σε σχέση με το V_0 το I_{C0} προηγείται κατά π/2 ενώ το I_{L0} έπεται κατά π/2 της V_0.

Το πλάτος του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι η συνισταμένη των διανυσμάτων I_{R0}, I_{C0}, I_{L0} και έχει μέτρο:

$$I_0 = \sqrt{I_{R0}^2 + (I_{C0} - I_{L0})^2} = \sqrt{\left(\frac{V_{R0}}{Z_R}\right)^2 + \left(\frac{V_{C0}}{Z_C} - \frac{V_{L0}}{Z_L}\right)^2} = V_{R0}\sqrt{\left(\frac{1}{Z_R}\right)^2 + \left(\frac{1}{Z_C} - \frac{1}{Z_L}\right)^2}$$

$$\Rightarrow I_0 = V_{R0}\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$$ Δεδομένου ότι: $Z = \frac{V_0}{I_0} \Rightarrow$ $$\boxed{\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}$$

Γεωμετρική μέθοδος – RLC παράλληλη συνδεσμολογία

Βρήκαμε ότι η εμπέδιση είναι: $\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$

Το $1/Z$ γίνεται ελάχιστο στην κυκλική συχνότητα του συντονισμού, όπου $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Στην περίπτωση αυτή $Z = R$

Μέθοδος των μιγαδικών μεγεθών

Αν θεωρήσουμε ότι τα μεγέθη, I, V και Z είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε μπορούμε να λύσουμε τα AC κυκλώματα ως κυκλώματα συνεχούς ρεύματος.

Έστω εφαρμόζουμε τάση $V_0 \sin(\omega t)$ στα άκρα ενός στοιχείου (*R*, *L*, *C*).
Τότε αυτό θα διαρρέεται από ρεύμα $I_0 \sin(\omega t + \varphi)$

Θεωρούμε την μιγαδική τάση: $\mathbb{V}(t) = V_0 e^{i\omega t}$ που γράφεται ως:

$V(t) = V_0(cos\omega t + isin\omega t)$ επομένως: $V(t) = V_0 sin\omega t = \mathrm{Im}(\mathbb{V})$

Το αντίστοιχο ρεύμα γράφεται: $\mathbb{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t+\varphi)}$

Η μιγαδική αντίσταση στοιχείου *X* ορίζεται ως: $\mathbb{Z} = \frac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}} = \frac{V_0 e^{i(\omega t)}}{I_0 e^{i(\omega t+\varphi)}} \Rightarrow$

$$\mathbb{Z} = \frac{V_0}{I_0} e^{-i\varphi} = Z_X e^{-i\varphi}$$

όπου Z_X η εμπέδιση του στοιχείου (*X*=*R*, *L* ή *C*)

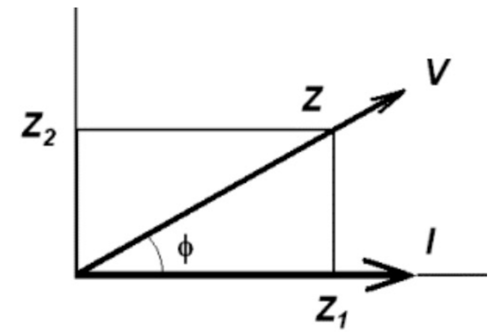
Χρησιμοποιώντας τα μιγαδικά μεγέθη σε πολική μορφή μπορούμε να κάνουμε εύκολα πράξεις κρατώντας στο τέλος το μιγαδικό μέρος μόνο.

Μέθοδος των μιγαδικών μεγεθών

Με βάση τη διαφορά φάσης μεταξύ ρευμάτων και τάσης μπορούμε να βρούμε τις μιγαδικές αντιστάσεις των στοιχείων *R*, *L* και *C*.

- **Ωμική αντίσταση**: $\boldsymbol{\varphi = 0}$ $$\mathbb{Z}_R = \frac{V_0}{I_0}e^{i0} = \frac{V_0}{I_0} = R \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}_R = R}$$
- **Χωρητική αντίσταση**: $\boldsymbol{\varphi = \pi/2}$ $$\mathbb{Z}_C = \frac{V_0}{I_0}e^{-\frac{i\pi}{2}} = -\frac{i}{\omega C} \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}}$$
- **Επαγωγική αντίσταση**: $\boldsymbol{\varphi = -\pi/2}$ $$\mathbb{Z}_L = \frac{V_0}{I_0}e^{+\frac{i\pi}{2}} = i\omega L \Rightarrow \boxed{\mathbb{Z}_L = i\omega L}$$

Για την επίλυση ενός κυκλώματος AC χρησιμοποιούμε μιγαδικές αντιστάσεις για όλα τα στοιχεία του κυκλώματος και αναλύουμε το κύκλωμα ως κύκλωμα συνεχούς:



- Για στοιχεία συνδεδεμένα σε σειρά: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_3 + \cdots$
- Για στοιχεία συνδεδεμένα παράλληλα: $\frac{1}{\mathbb{Z}} = \frac{1}{\mathbb{Z}_1} + \frac{1}{\mathbb{Z}_2} + \frac{1}{\mathbb{Z}_3} + \cdots$
- Η συνολική σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι: $\mathbb{Z} = Z_0 e^{i\varphi} = Z_1 + iZ_2$
- Η ενεργός τιμή της τάσης συνδέεται με την ενεργό τιμή του ρεύματος: $V_{rms} = Z_0 I_{rms}$
- Η φάση της τάσης προηγείται της φάσης του ρεύματος κατά: $\varphi = \tan^{-1} Z_2/Z_1$
- Η συχνότητα συντονισμού είναι εκείνη που $Z_2 = 0$, δηλαδή $Im(\mathbb{Z}) = 0$

Μέθοδος των μιγαδικών μεγεθών – Παράδειγμα

Εύρεση της συχνότητας συντονισμού ενός κυκλώματος *RLC* σε σειρά.

Η συνολική μιγαδική αντίσταση είναι: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_R + \mathbb{Z}_L + \mathbb{Z}_C = R + i(L\omega - 1/C\omega)$

Η εμπέδιση του κυκλώματος είναι: $Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

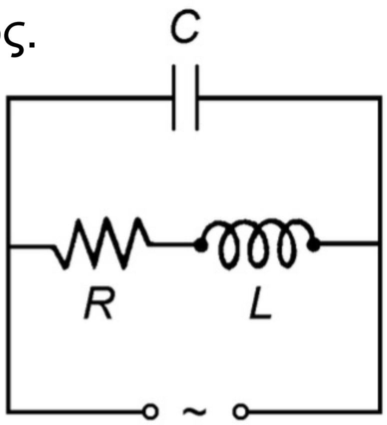
Η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος είναι: $tan\varphi = \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}$

Για σταθερή ενεργό τάση, το ενεργό ρεύμα $I = V_{rms}/Z_0$ γίνεται μέγιστο όταν η Z_0 γίνεται ελάχιστη, το οποίο συμβαίνει στην συχνότητα συντονισμού: $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

Στη συχνότητα συντονισμού, $Im(\mathbb{Z}) = 0$ και η συνολική σύνθετη αντίσταση είναι πραγματικός αριθμός.

Μέθοδος των μιγαδικών μεγεθών – Παράδειγμα

Εύρεση της συχνότητας συντονισμού του κυκλώματος του σχήματος.



Η αντίσταση του κυκλώματος θα είναι:

$$\frac{1}{\mathbb{Z}} = \frac{1}{\mathbb{Z}_{RL}} + \frac{1}{\mathbb{Z}_C} \Rightarrow \frac{1}{\mathbb{Z}} = \frac{1}{\mathbb{Z}_L + \mathbb{Z}_R} + \frac{1}{\mathbb{Z}_C} \Rightarrow \frac{1}{\mathbb{Z}} = \frac{1}{iL\omega + R} + \frac{1}{-i/\omega C} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\mathbb{Z}} = \frac{i\omega C(iL\omega + R) + 1}{R + i\omega L} \Rightarrow \frac{1}{\mathbb{Z}} = \frac{-LC\omega^2 + iRC\omega + 1}{R + i\omega L} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\mathbb{Z}} = \frac{(-LC\omega^2 + iRC\omega)(R - i\omega L) + R - i\omega L}{R^2 + L^2\omega^2} = \frac{iL^2C\omega^3 + iR^2C\omega + R - i\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\mathbb{Z}} = \frac{iL^2C\omega^3 + iR^2C\omega + R - i\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \Rightarrow \frac{1}{\mathbb{Z}} = \frac{R + i\omega(R^2C + \omega^2L^2C - L)}{R^2 + (\omega L)^2}$$

Το $1/\mathbb{Z}$ και επομένως το $\mathbb{Z}$ γίνεται πραγματικός αριθμός όταν: $(R^2C + \omega^2L^2C - L) = 0$

Επομένως: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{L - R^2C}{L^2C}} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \dfrac{R^2C}{L}}$

Επιπλέον, αν στο κύκλωμα αυτό $L = R^2C$ τότε $\omega_0 = 0$ και στο κύκλωμα δεν υπάρχει συχνότητα συντονισμού