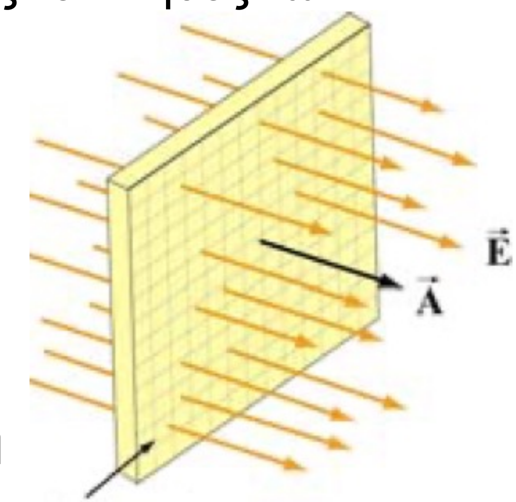
Νόμος του Gauss

Η έννοια της ροής

Μέχρι τώρα είδαμε πως η ένταση ενός ηλεκτρικού πεδίου είναι ανάλογη του αριθμού των γραμμών πεδίου ανά μονάδα επιφάνειας.

- Ο αριθμός των γραμμών πεδίου που διαπερνούν μια δεδομένη επιφάνεια ονομάζεται ηλεκτρική ροή και συμβολίζεται με το γράμμα Φ_E.
- Το ηλεκτρικό πεδίο θα μπορούσαμε να το θεωρήσουμε ως το πλήθος των γραμμών πεδίου ανά μονάδα επιφάνειας.



Θεωρούμε την επιφάνεια του σχήματος και ορίζουμε το διάνυσμα της επιφάνειας $\vec{A} = A\hat{n}$ όπου $\hat{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια και A το μέτρο του εμβαδού της επιφάνειας.

Αν η επιφάνεια τοποθετηθεί σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ το οποίο δείχνει προς την κατεύθυνση όπως και το $\hat{n}$, δηλαδή κάθετα στην επιφάνεια A, τότε η ροή διαμέσου της επιφάνειας δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = \vec{E} \cdot \hat{n} A = EA}$$

Αν το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ σχηματίζει γωνία θ με το $\hat{n}$, η ηλεκτρική ροή γράφεται με τη μορφή

$$\boxed{\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA cos\theta = E_n A}$$

όπου $E_n = E \cdot \hat{n}$ η συνιστώσα του πεδίου κάθετη στην επιφάνεια

Ροή ηλεκτρικών γραμμών

Με βάση τον ορισμό του κάθετου διανύσματος, $\hat{n}$, η ηλεκτρική ροή Φ_E είναι θετική αν οι γραμμές του πεδίου εξέρχονται της επιφάνειας και αρνητική αν εισέρχονται στην επιφάνεια.

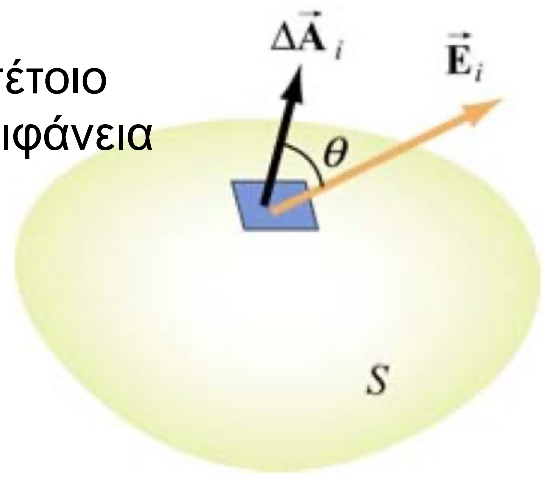
Εν γένει, μια επιφάνεια S μπορεί να είναι καμπύλη και το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ μπορεί να μεταβάλλεται κατά μήκος της επιφάνειας.

- Θα επικεντρωθούμε στις περιπτώσεις που η επιφάνεια αυτή είναι κλειστή

Θεωρούμε μια επιφάνεια κλειστή όταν περικλείει πλήρως έναν όγκο.

Για να υπολογίσουμε την ροή, θα πρέπει να χωρίσουμε την επιφάνεια σε έναν μεγάλο αριθμό στοιχειωδών επιφανειών $\Delta\vec{A}_i = \Delta A_i \hat{n}_i$.

Για κλειστή επιφάνεια, το κάθετο διάνυσμα $\hat{n}_i$, επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε να έχει την διεύθυνση που εξέρχεται από την επιφάνεια



Η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την στοιχειώδη επιφάνεια $\Delta\vec{A}_i$ είναι:

$$\Delta\Phi_E = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i = E_i \Delta A_i cos\theta$$

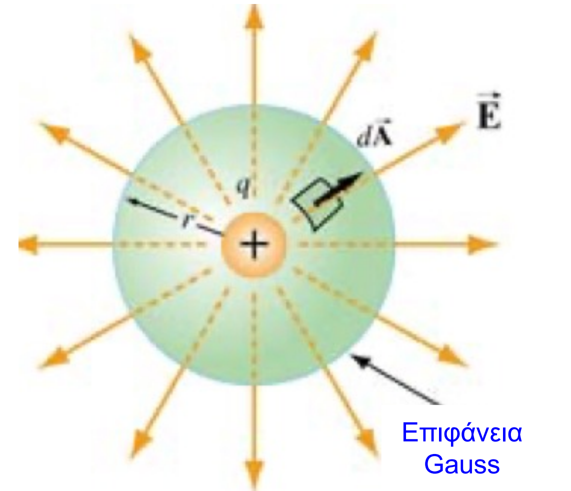
Ηλεκτρική Ροή

Η ολική ροή που διέρχεται από την S βρίσκεται ολοκληρώνοντας ως προς όλες τις στοιχειώδεις επιφάνειες και λαμβάνοντας το όριο $\Delta\vec{A} \rightarrow 0$:

$$\boxed{\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \vec{E}_i \cdot d\vec{A}_i = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$

Το σύμβολο $\oint\!\!\!\oint$ αναφέρεται σε ένα διπλό ολοκλήρωμα ως προς την κλειστή επιφάνεια S. Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αυτό θα πρέπει να καθορίσουμε αρχικά την επιφάνεια και κατόπιν να αθροίσουμε ως προς το γινόμενο $\vec{E} \cdot d\vec{A}$

Ο Νόμος του Gauss



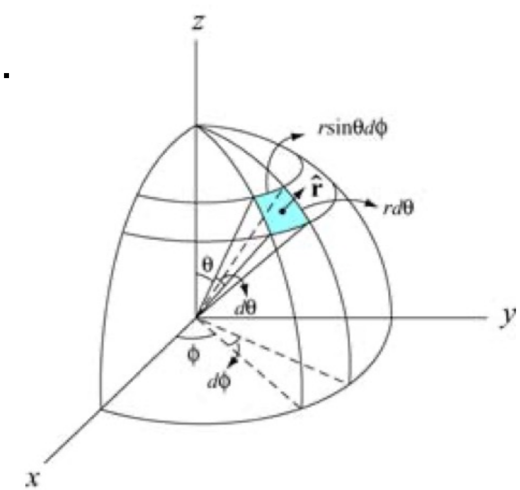
Θεωρούμε ένα θετικό σημειακό φορτίο Q, το οποίο βρίσκεται στο κέντρο μιας σφαίρας ακτίνας *r.*

Το ηλεκτρικό πεδίο εξαιτίας του σημειακού φορτίου είναι: $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

Το πεδίο έχει ακτινική διεύθυνση με φορά από το ηλεκτρικό φορτίο προς το άπειρο.

Θεωρούμε μια νοητική επιφάνεια που περικλείει το φορτίο Q.

- Ονομάζουμε την επιφάνεια αυτή ως «Επιφάνεια Gauss»



Σε σφαιρικές συντεταγμένες, η στοιχειώδης επιφάνεια πάνω στην σφαίρα δίνεται από: $\boxed{d\vec{A} = r^2 sin\theta d\theta d\varphi \hat{r}}$

Σαν αποτέλεσμα, η ολική ηλεκτρική ροή που διαπερνά τη στοιχειώδη επιφάνεια είναι:

$$d\Phi_E = \vec{E}\cdot d\vec{A} = EdA = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(r^2 sin\theta d\theta d\varphi) \Rightarrow d\Phi_E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(sin\theta d\theta d\varphi)$$

Η ολική ροή που διαπερνά την επιφάνεια της σφαίρας θα είναι: $\Phi_E = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} \Rightarrow \Phi_E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi} sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

Ο Νόμος του Gauss

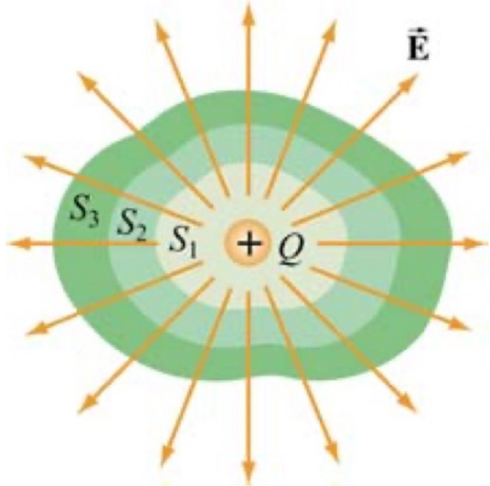
Θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα αν θεωρούσαμε ότι μια σφαίρα ακτίνας r έχει εμβαδό επιφάνειας $4\pi r^2$, και εφόσον το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο στην σφαιρική επιφάνεια είναι $E = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$, η ηλεκτρική ροή που περνά την επιφάνεια θα είναι:

$$\Phi_E = \oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\oint\!\!\oint_S dA = EA \Rightarrow \Phi_E = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)(4\pi r^2) \Rightarrow \Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Στον παραπάνω υπολογισμό θεωρήσαμε ως επιφάνεια Gauss, την επιφάνεια της σφαίρας. Ωστόσο, το είδος της κλειστής επιφάνειας Gauss που θεωρούμε μπορεί να είναι οποιοδήποτε.

Θα καταλήγαμε στο ίδιο αποτέλεσμα για την ολική ροή ανεξάρτητα του είδους της επιφάνειας που θα διαλέγαμε:

$$\Phi_E^{S_1} = \Phi_E^{S_2} = \Phi_E^{S_3} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



Ο Νόμος του Gauss

Νόμος Gauss

«Η συνολική ροή που διαπερνά μια κλειστή επιφάνεια *S* είναι ανάλογη του συνολικού φορτίου Q που περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια.»

Η μαθηματική διατύπωση του νόμου του Gauss είναι:
$$\boxed{\Phi_E = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{o\lambda}^S}{\varepsilon_0}}$$

όπου $q_{o\lambda.}^S$ το ολικό φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια *S.*

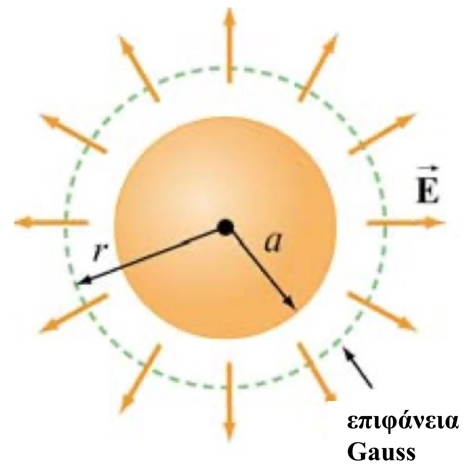
Ένας απλός τρόπος να εξηγήσουμε γιατί ισχύει ο νόμος του Gauss είναι να θεωρήσουμε ότι το πλήθος των ηλεκτρικών γραμμών που εξέρχονται από το φορτίο είναι ανεξάρτητο από το είδος της νοητικής επιφάνειας Gauss που θα θεωρήσουμε ότι περικλείει το φορτίο

Νόμος Gauss – ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα

1η περίπτωση: $r \leq a$

Εφαρμογή του νόμου Gauss, δίνει: $\Phi_E = E4\pi r^2 = \frac{q^S_{o\lambda.}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^3}{a^3}\right) \Rightarrow$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \alpha^3} r, \qquad r \leq a}$$

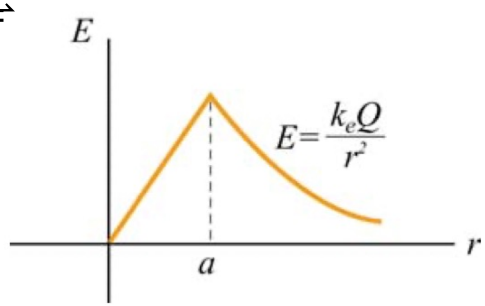


2η περίπτωση: $r \geq a$

Στην περίπτωση αυτή η επιφάνεια Gauss είναι μία σφαίρα ακτίνας $r \geq \alpha$ που περικλείει όλο το φορτίο της σφαίρας. Επομένως $q^S_{o\lambda.} = \mathrm{Q}$

Η ροή που διαπερνά την επιφάνεια Gauss είναι: $\Phi_E = E4\pi r^2$

Εφαρμογή του νόμου Gauss, δίνει: $\Phi_E = E4\pi r^2 = \frac{q^S_{o\lambda.}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$



$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad r \geq a}$$

Το πεδίο έξω από την σφαίρα είναι σαν όλο το φορτίο της σφαίρας να είναι συγκεντρωμένο στο κέντρο της

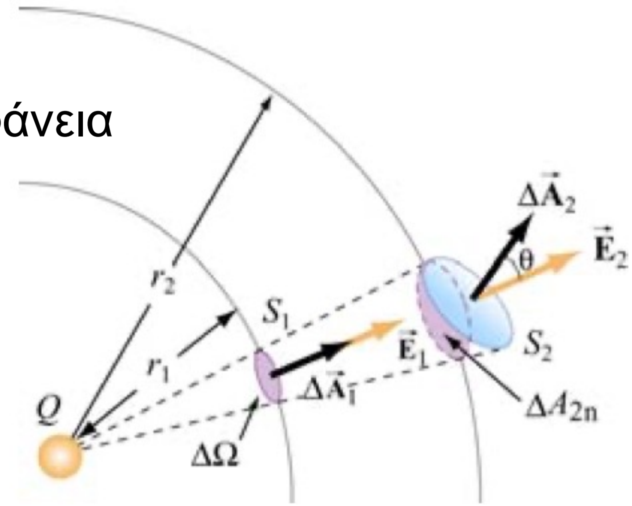
Απόδειξη του νόμου του Gauss

Για να αποδείξουμε το νόμο του Gauss, εισάγουμε την έννοια της στερεάς γωνίας.

Έστω $\Delta\vec{A} = \Delta A\hat{r}$ μια στοιχειώδης επιφάνεια της σφαιρικής επιφάνειας S_1 που έχει ακτίνα r_1, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Η στερεά γωνία ΔΩ, που υπόκειται στην στοιχειώδη επιφάνεια $\Delta\vec{A}_i = \Delta A_i\hat{r}$ στο κέντρο της σφαίρας, ορίζεται από:

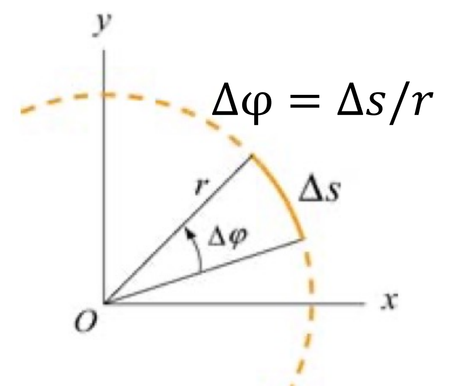
$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A_i}{r_i^2}$$



Η στερεά γωνία είναι μια αδιάστατη ποσότητα που μετριέται σε steradians.

Εφόσον η επιφάνεια μιας σφαίρας είναι $4\pi r^2$, η στερεά γωνία που αντιστοιχεί στην επιφάνεια μιας σφαίρας θα είναι:

$$\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} \Rightarrow \Omega = 4\pi$$



Η έννοια της στερεάς γωνίας σε 3-διαστάσεις είναι ανάλογη της έννοιας της γωνίας σε 2 διαστάσεις: μια γωνία δφ είναι ο λόγος του μήκους ενός τόξου ως προς την ακτίνα του κύκλου

Απόδειξη του νόμου του Gauss

Εφόσον το συνολικό μήκος της κυκλικής περιφέρειας είναι $s = 2\pi r$, η γωνία που καθορίζεται από τόξο ίσο με την περιφέρεια του κύκλου θα είναι $\varphi = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$

Στο σχήμα, η στοιχειώδης επιφάνεια $\Delta\vec{A}_2$ σχηματίζει γωνία θ με το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα $\hat{r}$. Η στερεά γωνία που καθορίζεται από την στοιχειώδη επιφάνεια $\Delta\vec{A}_2$ είναι:

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta\vec{A}_2 \cdot \hat{r}}{r_2^2} = \frac{\Delta \mathrm{A}_2 cos\theta}{r_2^2} = \frac{\Delta \mathrm{A}_{2n}}{r_2^2}$$

όπου ΔA_{2n} είναι το εμβαδό της ακτινικής προβολής της ΔA_2 σε μια δεύτερη σφαιρική επιφάνεια S_2 ακτίνας r_2 ομόκεντρης της S_1

Η στερεά γωνία που καθορίζεται από τις στοιχειώδεις επιφάνειες ΔA_1 και ΔA_2 είναι ακριβώς ίδια: $\Delta\Omega = \frac{\Delta A_1}{r_1^2} = \frac{\Delta \mathrm{A}_2 cos\theta}{r_2^2}$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ένα σημειακό φορτίο Q εισάγεται στο κέντρο των δύο ομόκεντρων σφαιρών. Το ηλεκτρικά πεδία E_1 και E_2 στο κέντρο των δύο στοιχειωδών επιφανειών ΔA_1 και ΔA_2 σχετίζονται με βάση το νόμο του Coulomb:

$$E_i = \frac{\mathrm{Q}}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Απόδειξη του νόμου του Gauss

Η ροή που διαπερνά την στοιχειώδη επιφάνεια ΔA_1 της σφαίρας S_1 είναι:

$$\Delta\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{A}_1 = E_1 \Delta A_1$$

Η ροή που διαπερνά την στοιχειώδη επιφάνεια ΔA_2 της σφαίρας S_2 είναι:

$$\Delta\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \Delta\vec{A}_2 = E_2 \Delta A_2 cos\theta$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση μεταξύ των εντάσεων του ηλεκτρικού πεδίου στις ΔA_1 και ΔA_2 θα πάρουμε:

$$\Delta\Phi_2 = E_2 \Delta A_2 cos\theta = E_1 \frac{r_1^2}{r_2^2} \frac{r_2^2}{r_1^2} \Delta A_1 \Rightarrow \Delta\Phi_2 = E_1 \Delta A_1 = \Delta\Phi_1$$

Βλέπουμε επομένως ότι η ηλεκτρική ροή μέσω μιας τυχαίας στοιχειώδους επιφάνειας που καθορίζει σταθερή στερεά γωνία είναι σταθερή, ανεξάρτητα του σχήματος της επιφάνειας ή του προσανατολισμού της.

Ο νόμος του Gauss παρέχει έναν εύκολο τρόπο για τον υπολογισμό ηλεκτρικών πεδίων. Ωστόσο η χρήση του περιορίζεται σε συστήματα με συγκεκριμένη συμμετρία, κυλινδρική, σφαιρική ή επίπεδη.

3ο Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

Έτοιμοι