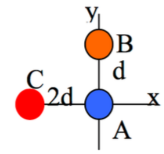
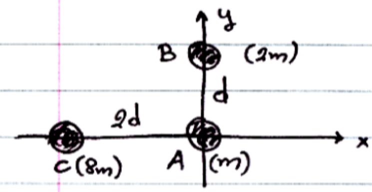
ΦΥΣ. 111

10º ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή 25.11.2020**

1. Τρία αντικείμενα A, B και C με μάζα *m*, 2*m* και 8*m* αντίστοιχα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και στις θέσεις που φαίνονται στο σχήμα. Σε ποια θέση (x,y) πρέπει να τοποθετεί ένα τέταρτο σώμα D, μάζας 8*m* ώστε η συνολική βαρυτική δύναμη στο σώμα A να είναι μηδέν;





$m_A = m$ στη θέση (0,0)

$m_B = 2m$ στη θέση (0,d)

$m_C = 8m$ στη θέση (-2d,0)

$m_D = 8m$ στη θέση (x,y)

Η δύναμη από το B που εφαρμόζει στο A είναι: $\vec{F}_{BA} = \frac{G m_B m_A}{d^2}\hat{y}$

Η δύναμη από το C στο A είναι: $\vec{F}_{CA} = \frac{G m_C m_A}{(2d)^2}(-\hat{x})$

Αν η ολική βαρυτική δύναμη στο σημείο A είναι μηδέν τότε:

$F^x_{DA} = -F_{CA}$ (η συνισταμένη δύναμη στη x-διεύθυνση είναι μηδέν)

$F^y_{DA} = -F_{BA}$ (η συνισταμένη δύναμη στη y-διεύθυνση είναι μηδέν)

Επομένως $\tan\Theta = \frac{F^y_{DA}}{F^x_{DA}} = \frac{F_{BA}}{F_{CA}} = \frac{4m_B}{m_C} = \frac{4(2m)}{8m} = 1 \Rightarrow \boxed{\Theta = 45^\circ}$

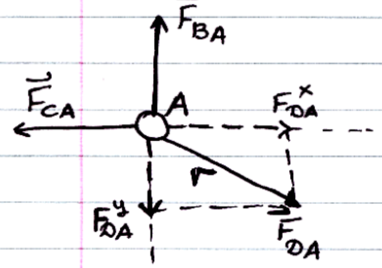
$$F^x_{DA} = \frac{\cancel{G}\cancel{m_A}\cancel{m_D}}{r^2}\cos\Theta = \cancel{-}F^x_{CA} = \frac{\cancel{G}\cancel{m_A}\cancel{m_C}}{(2d)^2} \Rightarrow r^2 = (2d)^2\cos\Theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = 2d\sqrt{\cos\Theta} = 2d\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \boxed{r = 2^{3/4}d}$$

Αλλά οι συντεταγμένες (x,y) μπορούν να γραφούν:

$$(x,y) = (r\cos\Theta, -r\sin\Theta) = \left(\frac{2d}{2^{1/4}}\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{2d}{2^{1/4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(x,y) = (2^{1/4}d, -2^{1/4}d)}$$



2. Αστέρες νετρονίων είναι αστέρες με υπερβολικά μεγάλη πυκνότητα μάζας και δημιουργούνται μετά την έκρηξη ενός supernova. Πολλοί από τους αστέρες αυτούς περιστρέφονται πολύ γρήγορα. Υποθέστε ότι η μάζα ενός συγκεκριμένου σφαιρικού άστρου νετρονίων είναι διπλάσια από τη μάζα του ήλιου και η ακτίνα του μόλις 10km. Υπολογίστε την μεγαλύτερη δυνατή γωνιακή ταχύτητα που μπορεί να έχει έτσι ώστε η ύλη στην επιφάνεια του αστέρα στον ισημερινό του να κρατιέται σε τροχιά από την βαρυτική δύναμη.

Η βαρυτική δύναμη σε ένα μικρό πακέτο μάζας στην επιφάνεια του αστέρα στον ισημερινό του, δημιουργεί την απαραίτητη κεντρομόλο δύναμη και επιτάχυνση επομένως, σύμφωνα με την σχέση

$$\frac{GM_s m}{R_s^2} = \frac{m v^2}{R_s} = m R_s \omega^2$$

όπου R_s = η ακτίνα του αστέρα

M_s = η μάζα του αστέρα

m = η μάζα στη επιφάνεια

v = η ταχύτητα

$M_{ηλίου} = 1.99 \cdot 10^{30}$ kgr

$$\omega^2 = \sqrt{\frac{GM_s}{R_s^3}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 1.99 \cdot 10^{30}}{(10 \cdot 10^3)^3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = 1.63 \cdot 10^4 \text{ rad/s}}$$

3. Να εξαγάγετε μια εξίσωση για το έργο που χρειάζεται για να μετακινήσει κάποιος ένα γήινο δορυφόρο μάζας *m* από μια κυκλική τροχιά ακτίνας $2R_{\gamma\eta}$ σε μια άλλη ακτίνας $3R_{\gamma\eta}$.

Για ένα δορυφόρο σε τροχιά ακτίνας R γύρω από τη γή, η ολική ενέργεια του συστήματος Γή-Δορυφόρου είναι: $E = -\frac{GM_{\Gamma\acute{\eta}}}{2R}$.

Επομένως, για να αλλάξει η τροχιά από μιά με ακτίνα $R = 2R_{\Gamma\acute{\eta}}$ σε μιά με ακτίνα $R = 3R_{\Gamma\acute{\eta}}$, το απαιτούμενο έργο είναι

$$W = \Delta E = -\frac{GM_{\Gamma\acute{\eta}}m}{2R_f} + \frac{GM_{\Gamma\acute{\eta}}m}{2R_i} = \frac{GM_{\Gamma\acute{\eta}}m}{2R_{\Gamma\acute{\eta}}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{GM_{\Gamma\acute{\eta}}m}{12R_{\Gamma\acute{\eta}}}}$$

4. Ένας δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά ακριβώς πάνω από την επιφάνεια ενός πλανήτη (ύψος δένδρου) χωρίς να υπάρχει αντίσταση αέρα. Δείξτε ότι η γραμμική ταχύτητα της τροχιάς του, υ, και η ταχύτητα διαφυγής, $V_{διαφ.}$, συνδέονται με την σχέση: $V_{διαφ.} = \sqrt{2}\upsilon$.

Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα στην τροχιά χρησιμοποιούμε:

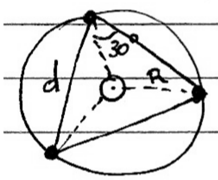
$$G\frac{Mm}{R^2} = \frac{m\upsilon^2}{R} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{MG}{R}} \quad (1)$$

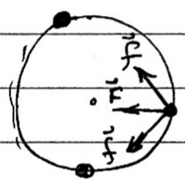
Η ταχύτητα διαφυγής υπολογίζεται: $E_{κιν} - U(R) = \cancel{E^{\infty}_{κιν}}^{\,0} - \cancel{U(\infty)}^{\,0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m\upsilon^2_{διαφ} - G\frac{Mm}{R} = 0 \Rightarrow \boxed{\upsilon_{διαφ} = \sqrt{\frac{2MG}{R}} \overset{(1)}{=} \sqrt{2}\,\upsilon}$$

5. Κάποια συστοιχία αστέρων αποτελείται από 4 αστέρες. Τρεις από τους αστέρες, ο καθένας με μάζα m, κινούνται στην ίδια κυκλική τροχιά ακτίνας R γύρω από κάποιον κεντρικό αστέρα μάζας M. Οι 3 αστέρες περιστρέφονται με την ίδια φορά και βρίσκονται σε θέσεις που απέχουν 1/3 περιστροφής το ένα από το άλλο. Δείξτε ότι η περίοδος κάθε αστέρα δίνεται από τη σχέση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G\left(M + m/\sqrt{3}\right)}}$$





Η απόσταση μεταξύ των περιστρεφόμενων άστρων είναι $d = 2R\cos 30^\circ = \underline{\sqrt{3}R}$

Σε κάθε άστρο ασκούνται 3 δυνάμεις. 2 δυνάμεις από τα 2 άλλα περιστρεφόμενα άστρα, f, και μία κεντρομόλος δύναμη F από την έλξη του κεντρικού άστρου μάζας M.

Η συνισταμένη δύναμη που έχει φορά προς τα μέσα είναι:

$$F + 2f\cos 30^\circ = \frac{GM\cancel{m}}{R^2} + 2\frac{m\cancel{m}G}{d^2}\cos 30^\circ = \frac{\cancel{m}v^2}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G\left(\frac{M}{R^{\cancel{2}}} + \cancel{2}\frac{m}{R^{\cancel{2}}\cancel{\sqrt{3}}\sqrt{3}}\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}}\right) = \frac{v^2}{\cancel{R}} \Rightarrow G\left(\frac{M}{R} + \frac{m}{\sqrt{3}R}\right) = v^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 R^2 = G\left(\frac{M}{R} + \frac{m}{\sqrt{3}R}\right) \Rightarrow 4\pi^2 T^{-2} R^2 = G\left(\frac{M}{R} + \frac{m}{\sqrt{3}R}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{G\left(M + \frac{m}{\sqrt{3}}\right)} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G\left(M + \frac{m}{\sqrt{3}}\right)}}}$$

6. Θεωρήστε ένα σύστημα το οποίο αποτελείται από δυο σωματίδια μάζας *M* και *m* και τα οποία βρίσκονται σε μια τεράστια απόσταση το ένα από το άλλο. Παρ’ όλο που τα σώματα έχουν πολύ μεγάλη απόσταση μεταξύ τους αλληλεπιδρούν εξαιτίας της βαρυτικής δύναμης και επομένως όταν αφήνονται ελεύθερα έλκονται και κινούνται το ένα προς το άλλο. (α) Έστω οι ταχύτητες των σωματιδίων σε κάποια ορισμένη χρονική στιγμή είναι *υ*M και *υ*m. Βρείτε μια σχέση για την ταχύτητα *υ*M συναρτήσει των *M*, *m* και *υ*m. *Υπόδειξη:* Δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα. Προσέξτε ότι τα σωματίδια κινούνται προς το μέρος του άλλου και επομένως οι ταχύτητες έχουν αντίθετες διευθύνσεις. (β) Έστω d παριστάνει την απόσταση μεταξύ των δυο μαζών σε κάποια δεδομένη χρονική στιγμή. Γράψτε μια εξίσωση που να σχετίζει τις μάζες των σωματιδίων, *m* και *M*, τις ταχύτητες τους, *υ*m και *υM*, τη δεδομένη χρονική στιγμή και την απόστασή *d*. *Υπόδειξη:* Από τη στιγμή που τα σωματίδια έχουν αρχικά μεγάλη απόσταση, μπορείτε να υποθέσετε ότι η ολική αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια είναι ίση με μηδέν. (γ) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από τα ερωτήματα (α) και (β) δείξτε ότι η ταχύτητα οποιουδήποτε από τα σωματίδια σχετικά με το άλλο σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή δείχνεται από την ακόλουθη εξίσωση (*d* η απόστασή τους την δεδομένη χρονική στιγμή) $\upsilon_{\sigma\chi\epsilon\tau.} = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{d}}$.

(α) Δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις που να ασκούνται στο σύστημα

Επομένως η ορμή διατηρείται :

$$m v_m + M v_M = 0 \Rightarrow \boxed{v_M = -\frac{m}{M} v_m} \quad (A)$$

(β) Στην αρχική τους απόσταση η κινητική και βαρυτική ενέργεια είναι μηδέν. Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, η ολική ενέργεια του συστήματος θα είναι πάντοτε μηδέν.

Σε τυχαία χρονική στιγμή, t, η κινητική ενέργεια δίνεται από :

$$K^{ολ} = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_M^2$$ όπου v_m κ v_M οι ταχύτητες των 2 σωμάτων τη στιγμή t

Η δυναμική ενέργεια βαρύτητας θα είναι :

$$U_g = -\frac{GmM}{d}$$ όπου d η απόσταση των 2 σωμάτων τη στιγμή t.

Άρα $E^{ολ}_{μηχ} = E^{ολ}_{κιν} + U_g = \boxed{\frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_M^2 - \frac{GmM}{d} = 0}$ (B) (γ) Η σχετική ταχύτητα των 2 σωμάτων θα είναι: $v_{σχ} = v_m - v_M$

Αντικαθιστώντας την (Α) έχουμε: $v_{σχ} = v_m - \left(-\frac{m}{M} v_m\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow v_{σχ} = v_m \left(\frac{M+m}{M}\right) \quad (Γ)$$

Από την εξίσωση της ενέργειας (Β) έχουμε:

$$\frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_M^2 = \frac{GmM}{d} \overset{(A)}{\Rightarrow} \frac{1}{2} \cancel{m} v_m^2 + \frac{1}{2} \cancel{M} \frac{m^{\cancel{2}}}{M^{\cancel{2}}} v_m^2 = \frac{GM\cancel{m}}{d} \Rightarrow$$

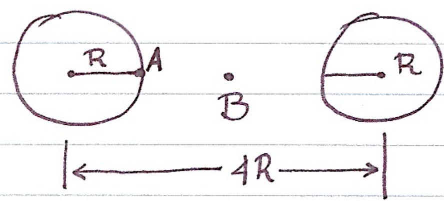
$$\Rightarrow (M+m) v_m^2 = \frac{2GM^2}{d} \Rightarrow \boxed{v_m = M\sqrt{\frac{2G}{d(M+m)}}}$$

Αντικατάσταση στη (Γ) δίνει:

$$v_{σχ} = \cancel{M}\sqrt{\frac{2G}{d(M+m)}} \frac{(M+m)}{\cancel{M}} \Rightarrow \boxed{v_{σχ} = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{d}}}$$

7. Δύο πλανήτες μάζας M και ακτίνας R και οι δύο βρίσκονται στο διάστημα ακίνητοι και τα κέντρα τους απέχουν απόσταση $4R$. Θέλετε να εκτοξεύσετε ένα βλήμα από την επιφάνεια του ενός πλανήτη προς τον άλλο πλανήτη. Ποια είναι η ελάχιστη αρχική ταχύτητα που πρέπει να δώσετε ώστε να πραγματοποιηθεί το εγχείρημα αυτό;

Από τη στιγμή που το βλήμα φθάσει στο μέσο της απόστασης τότε ουσιαστικά μπορεί να φθάσει στον άλλο πλανήτη.
Η ερώτηση επομένως είναι ποιά η ελάχιστη ταχύτητα υ_0 ώστε να φθάσει στο μέσο της απόστασης



Το δυναμικό στο σημείο A εξαιτίας της βαρύτητας και των 2 πλανητών θα είναι:

$$V_A = -\frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{3R}$$

Το δυναμικό στο σημείο B (μέσο των 2 πλανητών) είναι:

$$V_B = -\frac{GMm}{2R} - \frac{GMm}{2R} \Rightarrow V_B = -2\frac{GMm}{2R}$$

Η ελάχιστη ταχύτητα δίνεται από διατήρηση της ενέργειας

$$E_A^i = E_B^f \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon_0^2 - \frac{GM\cancel{m}}{R} - \frac{GM\cancel{m}}{3R} = -\cancel{2}\frac{GM\cancel{m}}{\cancel{2}R} + 0$$

(Η κινητική ενέργεια του βλήματος στο σημείο B θα είναι μηδέν, σχεδόν)

$$\text{Επομένως :} \quad \frac{1}{2}\upsilon_0^2 = -\cancel{\frac{GM}{R}} + \cancel{\frac{GM}{R}} + \frac{GM}{3R} \Rightarrow \upsilon_0^2 = \frac{2}{3}\frac{GM}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon_0 = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{GM}{R}}}$$

8. Το διαστημόπλοιο Ήλιος Β, το οποίο σχεδιάστηκε για να τεθεί σε τροχιά γύρω από τον ήλιο είχε ταχύτητα υ=71.0km/s όταν η απόστασή του από τον ήλιο ήταν 43 εκατομμύρια χιλιόμετρα. (α) Αποδείξτε ότι η τροχιά του διαστημοπλοίου δεν ήταν κυκλική. (β) Αποδείξτε ότι η τροχιά του διαστημοπλοίου ήταν ελλειπτική.

(α) Έχουμε $a = \frac{F}{m} = \frac{1}{\cancel{m}} \frac{GM\cancel{m}}{r^2} \Rightarrow a = \frac{GM}{r^2}$ στην ακτινική διεύθυνση

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα: $a = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.99 \cdot 10^{30}}{(43 \cdot 10^{9})^2} \Rightarrow \boxed{a = 0.072\ m/s^2}$

Αν η τροχιά ήταν κυκλική τότε η ταχύτητα $\vec{V}$ θα ήταν κάθετη

και η $a_r = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{(71 \cdot 10^3)^2}{43 \cdot 10^9} \Rightarrow \boxed{a_r = 0.12\ m/sec^2}$

Όπως βλέπουμε $a \neq a_r$ και επομένως η τροχιά δεν είναι κυκλική.

(β) Ξέρουμε ότι $E^{\mu\eta\chi} = E^{\kappa\iota\nu} + U_g \begin{cases} >0 & \text{υπερβολική τροχιά} \\ =0 & \text{κυκλική τροχιά} \\ <0 & \text{ελλειπτική τροχιά} \end{cases}$

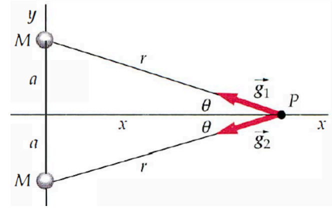
Βρήκαμε ότι η τροχιά δεν είναι κυκλική.
Υπολογίζουμε την ολική ενέργεια:

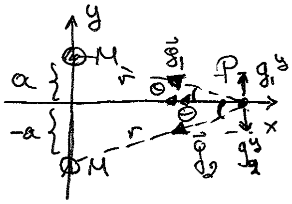
$$E = \frac{1}{2} m\upsilon^2 - \frac{GMm}{r} = m\left(\frac{\upsilon^2}{2} - \frac{GM}{r}\right) \Rightarrow \frac{E}{m} = \frac{\upsilon^2}{2} - \frac{GM}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{E}{m} = \frac{(7.1 \cdot 10^4)^2}{2} - \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.99 \cdot 10^{30}}{4.3 \cdot 10^{10}} \Rightarrow \frac{E}{m} = -5.66 \cdot 10^8\ m^2 s^{-2}$$

$\Rightarrow \underline{E < 0}$ και άρα η τροχιά είναι ελλειπτική

9. Δύο σημειακά σώματα, το καθένα μάζας M, είναι πάνω στον y-άξονα στις θέσεις $y=+a$ και $y=-a$. Βρείτε το βαρυτικό πεδίο, ($g=F/m$), σε όλα τα σημεία κατά μήκος του x-άξονα συναρτήσει του x.





Η απόσταση κάθε μάζας από το σημείο P είναι:

$$r=\sqrt{x^2+a^2}$$

Η βαρυτική επιτάχυνση στο σημείο P από κάθε μία μάζα είναι:

$$g_1=g_2=G\frac{M}{x^2+a^2}$$

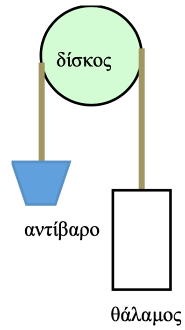
Λόγω συμμετρίας ωστόσο, οι y-συνιστώσες των δύο επιταχύνσεων είναι ίσες και αντίθετες και επομένως η μόνη επιτάχυνση που έχουμε είναι στη x-διεύθυνση

$$\left.\begin{aligned} g_{1x}&=g_{2x}\\ g_x&=g_{1x}+g_{2x}\end{aligned}\right\} \Rightarrow g_x=2g_{1x}=-2g_1\cos\theta$$

Αλλά η γωνία συναρτήσει των x και a είναι: $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$$\Rightarrow g_x=-2g_1\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}=-2\frac{GM}{x^2+a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} \Rightarrow \boxed{\vec{g}=-2\frac{GMx}{(x^2+a^2)^{3/2}}\hat{i}}$$

10. Ένας παλιομοδίτικος ανελκυστήρας λειτουργεί με ένα καλώδιο να περνά από μια τροχαλία διαμέτρου 2.5*m*. Το ένα άκρο του καλωδίου είναι συνδεδεμένο σε ένα αντίβαρο ενώ το άλλο άκρο είναι συνδεδεμένο στο θάλαμο του ανελκυστήρα. Ο ανελκυστήρας μπορεί να ανεβαίνει ή να κατεβαίνει περιστρέφοντας τη τροχαλία χωρίς το καλώδιο να γλιστρά πάνω της αλλά να την αναγκάζει να περιστρέφεται. (α) Πόσες στροφές το λεπτό πρέπει να κάνει η τροχαλία ώστε να ανεβάσει το θάλαμο του ανελκυστήρα με ταχύτητα 25.0cm/s; (β) Για να αντίβαρο ξεκινήσει να κινείται ο ανελκυστήρας πρέπει να δοθεί μια επιτάχυνση g/8. Πόση πρέπει να είναι η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας σε rad/s^2; (γ) Πόση γωνία (σε rad) έχει στραφεί η τροχαλία αν ο θάλαμος του ανελκυστήρα έχει ανεβεί κατά 3.25m.



Όπως έχουμε αναφέρει, εφόσον το σχοινί δεν γλιστρά πάνω στη τροχαλία, τότε η εφαπτομενική ταχύτητα και επιτάχυνση κάθε σημείου της περιφέρειας της τροχαλίας είναι ίση με τη γραμμική ταχύτητα και επιτάχυνση του αντίβαρου. Η διαδρομή που καλύπτουν τα σημεία της περιφέρειας (το τόξο που διαγράφουν) θα είναι ίση με τη γραμμική μετατόπιση του σχοινιού και επομένως του αντίβαρου αρκεί η γωνία να μετράται σε ακτίνια: $R\Theta = S$.

Η ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας θα είναι: $\upsilon = \omega R$
ενώ η εφαπτομενική επιτάχυνση: $a_{εφ} = R\alpha$ (α = γωνιακή επιτάχυνση)

Μια πλήρη στροφή είναι 2π rad $\Rightarrow 1rpm = \frac{2\pi}{60min} = 0.104\,rad/sec$

(α) Ξέρουμε ότι $\upsilon = 0.250m/s \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon}{R} \Rightarrow \omega = \frac{0.250}{1.25} \Rightarrow \boxed{\omega = 0.200\,\frac{rad}{sec}}$

(β) Η γραμμική επιτάχυνση είναι $a = \frac{1}{8}g$ αλλά $a = R\alpha$ οπότε:

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{\frac{1}{8}g}{1.25} \Rightarrow \alpha = \frac{1.225}{1.25} \Rightarrow \boxed{\alpha = 0.980\,rad/s^2}$$

(γ) Ο ανελκυστήρας έχει μετακινηθεί γραμμικά κατά $S = 3.25m$
Αλλά $S = R\Theta$ Επομένως $\Theta = \frac{S}{R} = \frac{3.25}{1.25} = 2.60\,rad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Theta = \frac{2.60}{2\pi} \cdot 180^\circ \Rightarrow \boxed{\Theta = 149^\circ}$$