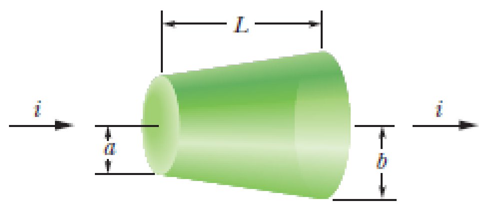
Φροντιστήριο 4 ΦΥΣ112

11/10/2023

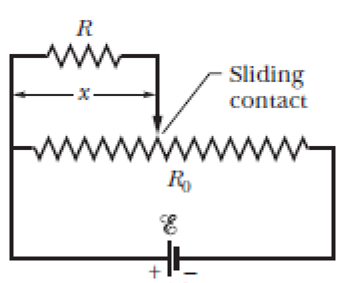
26.27) Δύο αγωγοί είναι φτιαγμένοι από το ίδιο υλικό και έχουν το ίδιο μήκος. Ο αγωγός Α είναι συμπαγές καλώδιο διαμέτρου $1.00\,mm$. Ο αγωγός Β είναι κούφιος σωλήνας με εξωτερική διάμετρο $2.00\,mm$ και εσωτερική διάμετρο $1.00\,mm$. Ποιος είναι ο λόγος των αντιστάσεών τους R_A/R_B που μετρώνται μεταξύ των δύο ακρών τους;

26.35) Στο σχήμα πιο κάτω περνάει ρεύμα διαμέσου ενός πλαγιαστού κόλουρου κώνου ειδικής αντίστασης $731\,\Omega \cdot m$, αριστερή ακτίνα $a = 2.00\,mm$, δεξιά ακτίνα $b = 2.30\,mm$ και μήκος $L = 1.94\,cm$. Υποθέστε ότι η πυκνότητα ρεύματος είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη σε κάθε επιφάνεια διατομής παρμένη κάθετα στο μήκος του κώνου. Ποια είναι η αντίσταση του κώνου;

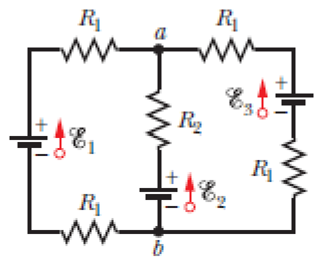


26.49) Ένας λαμπτήρας $100\,W$ είναι συνδεδεμένος σε πηγή $120\,V$. (a) Πόσο στοιχίζει ανά μήνα 31 ημερών να αφήνεται ανοιχτός ο λαμπτήρας συνεχώς; Υποθέστε ότι η ηλεκτρική ενέργεια κοστίζει €$0.06/kW \cdot h$. (b) Ποια είναι η αντίσταση του λαμπτήρα; (c) Πόσο ρεύμα διαπερνά τον λαμπτήρα;

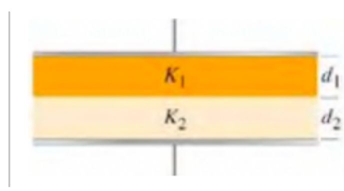
27.26) Το παρακάτω σχήμα δείχνει μια μπαταρία συνδεδεμένη με ομοιόμορφο αντιστάτη R_0. Μια κυλιόμενη επαφή μπορεί να κινείται κατά μήκος του αντιστάτη από $x = 0$ στα αριστερά έως και $x = 10\,cm$ στα δεξιά. Μετακινώντας την επαφή αλλάζουμε πόση αντίσταση υπάρχει στα αριστερά και δεξιά της. Εξάγετε μια έκφραση για τον ρυθμό που φθίνει η ενέργεια εντός του αντιστάτη R σαν συνάρτηση του x. Ζωγραφίστε την γραφική παράσταση για $\mathcal{E} = 50\,V$, $R = 2000\,\Omega$ και $R_0 = 100\,\Omega$.



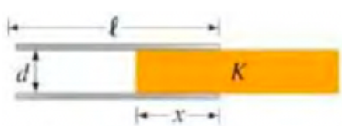
27.45) Στο σχήμα που ακολουθεί οι αντιστάσεις είναι $R_1 = 1.0\,\Omega$ και $R_2 = 2.0\,\Omega$, και οι ιδανικές μπαταρίες έχουν ΗΕΔ $\mathcal{E}_1 = 2.0\,V$ και $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = 4.0\,V$. Πόσο είναι (a) το μέγεθος και (b) η κατεύθυνση (πάνω ή κάτω) του ρεύματος στην μπαταρία 1, (c) το μέγεθος και (d) η κατεύθυνση του ρεύματος στην μπαταρία 2, και (e) το μέγεθος και (f) η κατεύθυνση του ρεύματος στην μπαταρία 3; (g) Πόση είναι η διαφορά δυναμικού $V_a - V_b$;



Πρόβλημα 1: Δύο διαφορετικά διηλεκτρικά συμπληρώνουν τον χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς ενός επίπεδου πυκνωτή όπως φαίνεται στο σχήμα. Προσδιορίστε την εξίσωση που δίνει την χωρητικότητα του πυκνωτή αυτού συναρτήσειτων διηλεκτρικών σταθερών K_1, K_2 των υλικών, της επιφάνειας A και του πάχους των διηλεκτρικών υλικώναπόστασης $d_1 = d_2 = \frac{d}{2}$. *Υπόδειξη: θα μπορούσατε να θεωρήσετε τον πυκνωτή αυτόν σαν δύο πυκνωτέςσυνδεδεμένους σε σειρά ή παράλληλα·*



Πρόβλημα 2: Ενα κομμάτι υλικού πάχους d και διηλεκτρικής σταθεράς K έχει εισαχθεί κατά απόσταση x, στο χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς ενός επίπεδου τετραγωνικού πυκνωτή πλευράς ℓ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Προσδιορίστε συναρτήσει του x, (α) τη χωρητικότητα, (β) την αποθηκευμένη ενέργεια αν η διαφορά δυναμικού είναι V_0 και (γ) το μέτρο και διεύθυνση της δύναμης που ασκείται στο διηλεκτρικό υλικό. Υποθέστε ότι V_0 παραμένει σταθερό και δεν μεταβάλλεται.



1

Ευτύχιος Καϊμακάμης

Problem 26.27) $\rightarrow R = \dfrac{\rho L}{\pi r^2}$, $d_A = 2r_A = 1{,}00\,mm$, $d_{B_1} = 2r_{B_1} = 2{,}00\,m$

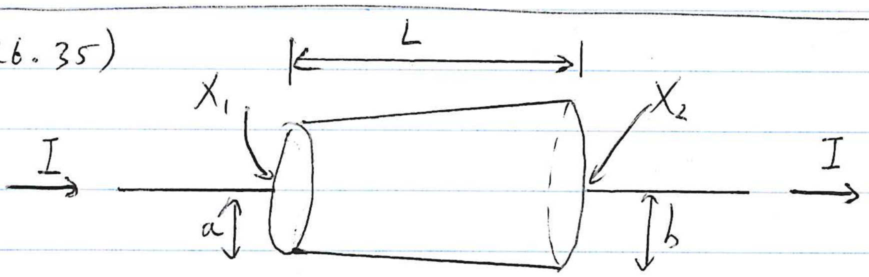
$d_{B_0} = 2r_{B_0} = 1{,}00\,m = d_A$

$$\Rightarrow R_A = \frac{\rho_A L_A}{\pi r_A^2}, \quad R_B = \frac{\rho_B L_B}{\pi (r_{B_1}^2 - r_{B_0}^2)}$$

$\rightarrow$ Ίδιο υλικό και μήκος: $\left.\begin{array}{l} \rho_A = \rho_B = \rho \\ L_A = L_B = L \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{R_A}{R_B} = \dfrac{r_{B_1}^2 - r_{B_0}^2}{r_A^2} = \dfrac{r_{B_1}^2}{r_A^2} - 1$

$$= 4 - 1 = 3$$

Problem 26.35)



$\rightarrow \rho = 731\,\Omega.m$
$\rightarrow L = 1{,}94\,cm$
$\rightarrow a = 2{,}00\,mm$
$\rightarrow b = 2{,}30\,mm$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow \vec{J} = \dfrac{I}{A}\hat{i} \Rightarrow J_x = \dfrac{I}{\pi r^2} \\ \rightarrow \vec{J} = \dfrac{\vec{E}}{\rho} \Rightarrow J_x = \dfrac{E_x}{\rho} \end{array}\right\} \Rightarrow E_x = \frac{I\rho}{\pi r^2}$$

$\rightarrow$ Σχέση μεταξύ r και x: Η παράπλευρη επιφάνεια του κώνου σχηματίζει ευθεία μεταξύ X_1 και X_2

$\Rightarrow$ Η ακτίνα r αυξάνεται γραμμικά με το x

$$\Rightarrow r = c.x + d \Rightarrow \begin{cases} r(x_1) = a \\ r(x_2) = b \end{cases}$$

$\rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow d = a$

$\rightarrow x_2 = L \Rightarrow b = c.L + a \Rightarrow c = \dfrac{b-a}{L}$

$\Rightarrow r = \left(\dfrac{b-a}{L}\right)x + a$

$$\Rightarrow E_x = \frac{I\rho}{\pi}\left[\left(\frac{b-a}{L}\right)x + a\right]^{-2}$$

$$\rightarrow V = -\int_0^L E_x\,dx = -\frac{I\rho}{\pi}\int_0^L \frac{dx}{\left[\left(\frac{b-a}{L}\right)x + a\right]^2}$$

$$= \frac{I\rho}{\pi}\frac{L}{b-a}\left[\left(\frac{b-a}{L}\right)x + a\right]^{-1}\Bigg|_0^L$$

$$= \frac{I\rho}{\pi}\frac{L}{b-a}\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right] = \frac{I\rho L}{\pi b a}$$

Ohm : $\boxed{R = \frac{V}{I} = \frac{\rho L}{\pi a b} = 9{,}81 \cdot 10^5\ \Omega}$

Problem 26.49) $P = 100\ W$

$V = 120\ V$

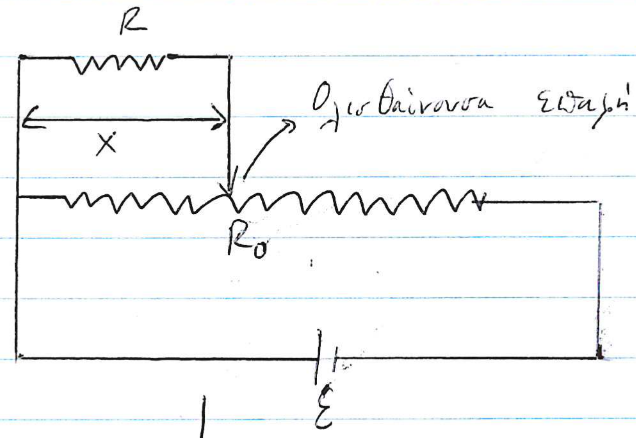
Κόστος: €0,06/kWh

(a) $t = 31$ days $= 31 \cdot (24\ h) \Rightarrow$ Ολικό κόστος $= \frac{P \cdot t}{€0{,}06/kWh} = \boxed{€4{,}46}$

(b) $\left.\begin{array}{l} R = \frac{V}{I} \\ I = \frac{P}{V} \end{array}\right\} \Rightarrow R = \frac{V^2}{P} = \boxed{144\ \Omega}$

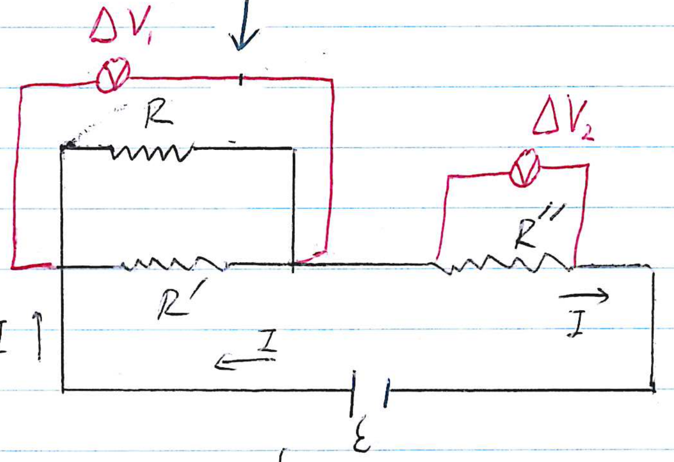
(c) $I = \frac{P}{V} = \boxed{0{,}833\ A}$

Problem 27.26)



$\rightarrow x_i = 0$

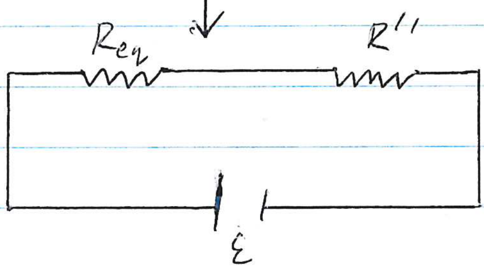
$\rightarrow x_f = 10\ cm \equiv L$



$\rightarrow R' = \frac{x}{L} R_0$

$\rightarrow R'' = R_0 - R' = \frac{L-x}{L} R_0$

$\rightarrow \Delta V_1 + \Delta V_2 = \mathcal{E}$



$\rightarrow \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_{eq}}$ (παράλληλη

$\Rightarrow R_{eq} = \frac{RR'}{R+R'} = \frac{R R_0 \frac{x}{L}}{R + R_0 \frac{x}{L}} = \frac{RR_0}{RL+R_0}$

$$\underline{\text{Ohm}}: \; I = \frac{\Delta V_1}{R_{eq}} = \frac{\Delta V_2}{R''}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V_1}{R_{eq}} = \frac{\mathcal{E} - \Delta V_1}{R''}$$

$$\Rightarrow R''\,\Delta V_1 = (\mathcal{E} - \Delta V_1) R_{eq}$$

$$\Rightarrow \Delta V_1 = \frac{\mathcal{E} R_{eq}}{R'' + R_{eq}} = \frac{\dfrac{\mathcal{E} R R_0 x}{RL + R_0 x}}{\dfrac{R R_0 x}{RL + R_0 x} + R_0 \dfrac{L-x}{L}}$$

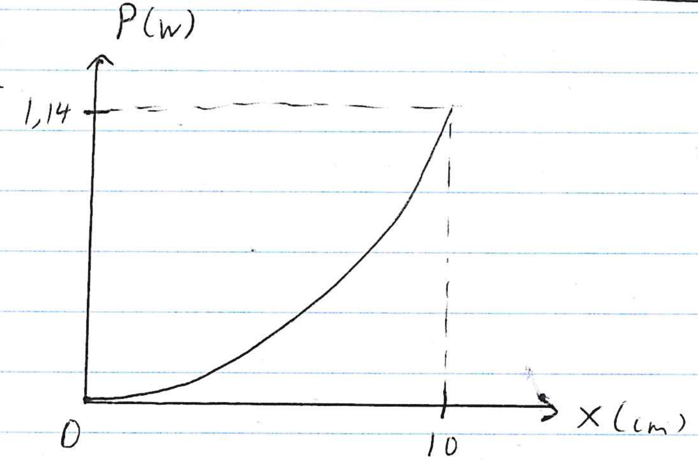
$$= \frac{L \mathcal{E} R \cancel{R_0} x}{L R \cancel{R_0} x + \cancel{R_0}(L-x)(RL + R_0 x)}$$

$$= \frac{L \mathcal{E} R x}{RL^2 + R_0 x L - R_0 x^2}$$

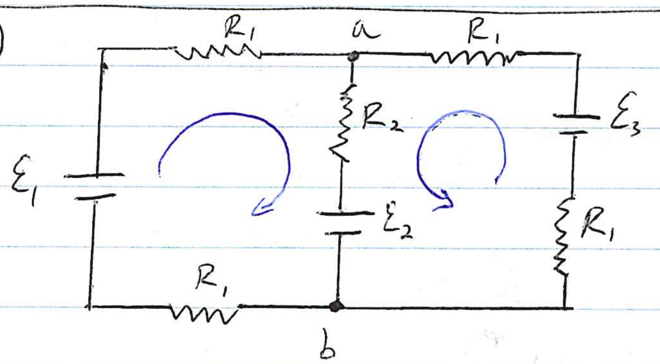
→ Ρυθμός απώλειας ενέργειας = Ισχύς

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{(\Delta V_1)^2}{R} = \frac{RL^2 \mathcal{E}^2 x^2}{(RL^2 + R_0 x L - R_0 x^2)^2}}$$

→ Γραφική:



Problem 27.45)



→ $R_1 = 1{,}0\ \Omega$

→ $R_2 = 2{,}0\ \Omega$

→ $\mathcal{E}_1 = 2{,}0\ V$

→ $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = 4{,}0\ V$

Kirchhoff: Δεξιός βρόχος: $\cancel{\mathcal{E}_3} - I_3 R_1 + I_2 R_2 - \cancel{\mathcal{E}_2} - I_3 R_1 = 0$

$$\Rightarrow I_2 = 2 I_3 \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow I_3 = I_2 \frac{R_2}{2R_1} = I_2$$

Αριστερός βρόχος: $\mathcal{E}_1 - I_1 R_1 + I_2 R_2 - \mathcal{E}_2 - I_1 R_1 = 0$

$$2\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 \Rightarrow 2 I_1 R_1 = I_2 R_2 - \mathcal{E}_1$$

$$R_2 = 2R_1 \Rightarrow I_1 = I_2 \frac{R_2}{2R_1} - \frac{\mathcal{E}_1}{2R_1} = I_2 - \frac{\mathcal{E}_1}{2R_1}$$

(a) $\rightarrow I_1 + I_2 + I_3 = 0 \Rightarrow I_1 + I_2 + I_2 = 0$

$$\Rightarrow I_1 + 2\left(I_1 + \frac{\mathcal{E}_1}{2R_1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 3I_1 = -\frac{\mathcal{E}_1}{R_1} \Rightarrow I_1 = -\frac{\mathcal{E}_1}{3R_1} = \boxed{-\frac{2}{3}A}$$

$$= \boxed{-0{,}67\,A}$$

(b) $I_1 < 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{προς τα κάτω}}$

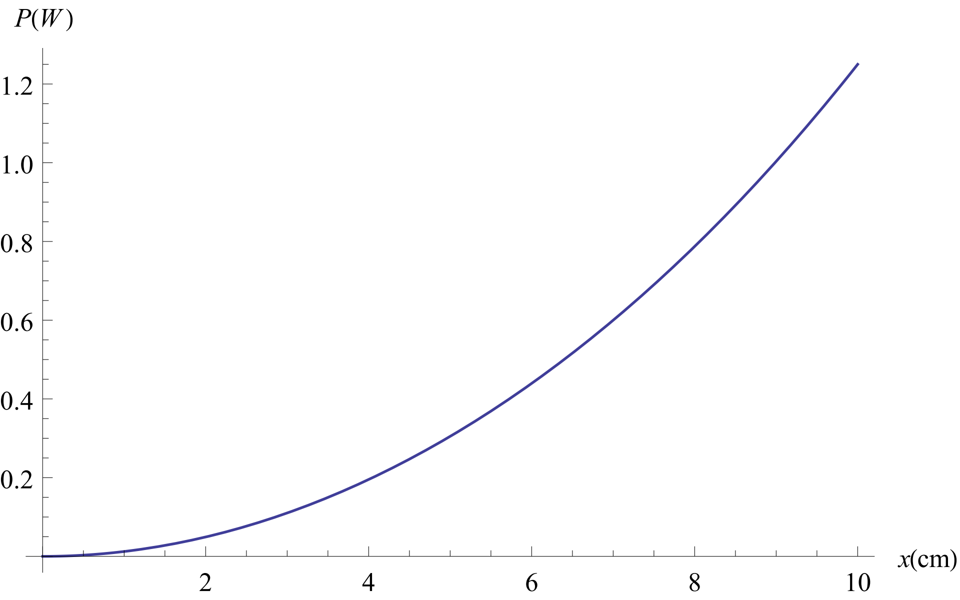
(c) $I_2 = I_1 + \frac{\mathcal{E}_1}{2R_1} = \boxed{\frac{1}{3}A} = \boxed{0{,}33\,A}$

(d) $I_2 > 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{προς τα πάνω}}$

(e) $I_3 = I_2 = \boxed{\frac{1}{3}A} = \boxed{0{,}33\,A}$

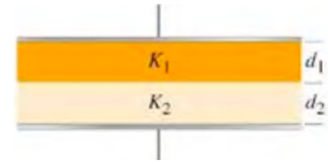
(f) $I_3 > 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{προς τα πάνω}}$

(g) $\Delta V_2 = V_a - V_b = \mathcal{E}_2 - I_2 R_2 = \boxed{\frac{10}{3}V} = \boxed{3{,}33\,V}$



P(W)
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
2
4
6
8
10
x(cm)

9. Δύο διαφορετικά διηλεκτρικά συμπληρώνουν τον χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς ενός επίπεδου πυκνωτή όπως φαίνεται στο σχήμα. Προσδιορίστε την εξίσωση που δίνει την χωρητικότητα του πυκνωτή αυτού συναρτήσει των διηλεκτρικών σταθερών K_1, K_2 των υλικών, της επιφάνειας A και του πάχους των διηλεκτρικών υλικών απόστασης $d_1 = d_2 = d/2$. <u>*Υπόδειξη:*</u> *θα μπορούσατε να θεωρήσετε τον πυκνωτή αυτόν σαν δύο πυκνωτές συνδεδεμένους σε σειρά ή παράλληλα;*



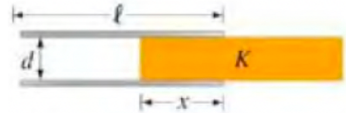
Ο πυκνωτής μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι δύο πυκνωτές σε σειρά που έχουν την ίδια επιφάνεια οπλισμών, αλλά η μεταξύ τους απόσταση και διηλεκτρικό υλικό είναι διαφορετικό.

Η χωρητικότητα του ισοδύναμου πυκνωτή θα είναι επομένως:

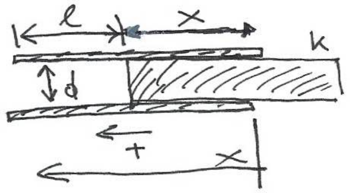
$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\frac{k_1 A \varepsilon_0}{d_1}} + \frac{1}{\frac{k_2 A \varepsilon_0}{d_2}} = \frac{d_1}{k_1 A \varepsilon_0} + \frac{d_2}{k_2 A \varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_{ολ}} = \frac{(d_1 k_2 + d_2 k_1)\cancel{A\varepsilon_0}}{k_1 k_2 \cancel{A\varepsilon_0}} \Rightarrow \frac{1}{C_{ολ}} = \frac{d_1 k_2 + d_2 k_1}{k_1 k_2} \Rightarrow \boxed{C_{ολ} = \frac{k_1 k_2}{d_1 k_2 + d_2 k_1}}$$

10. Ένα κομμάτι υλικού πάχους d και διηλεκτρικής σταθεράς K έχει εισαχθεί κατά απόσταση x, στο χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς ενός επίπεδου τετραγωνικού πυκνωτή πλευράς l, όπως φαίνεται στο σχήμα. Προσδιορίστε συναρτήσει του x, (α) τη χωρητικότητα, (β) την αποθηκευμένη ενέργεια αν η διαφορά δυναμικού είναι V_0 και (γ) το μέτρο και διεύθυνση της δύναμης που ασκείται στο διηλεκτρικό υλικό. Υποθέστε ότι V_0 παραμένει σταθερό και δεν μεταβάλλεται.



(α)

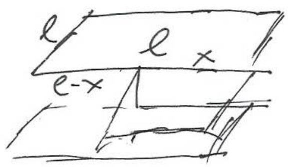


Θεωρούμε το σύστημα αυτό σαν 2 πυκνωτές ένας με διηλεκτρικό και ένας χωρίς διηλεκτρικό. Και οι δύο πυκνωτές έχουν τους δύο οπλισμούς τους με υψηλό δυναμικό ενωμένους όπως και τους δύο οπλισμούς με χαμηλό δυναμικό επίσης ενωμένους μεταξύ τους. Επομένως οι δύο πυκνωτές στην περίπτωση αυτή είναι συνδεδεμένοι παράλληλα μεταξύ τους.

Επομένως η ισοδύναμη χωρητικότητα θα είναι: $C = C_1 + C_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow C = \varepsilon_0 \frac{l(l-x)}{d} + k\varepsilon_0 \frac{lx}{d} \Rightarrow \boxed{C = \varepsilon_0 \frac{l^2}{d}\left[1+(k-1)\frac{x}{l}\right]}$$

Εφόσον ο πυκνωτής είναι τετραγωνικός η μία πλευρά του θα είναι l



(β) Και οι δύο πυκνωτές έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού, επομένως $U = \frac{1}{2}CV^2$

Επομένως $U = \frac{1}{2}(C_1+C_2)V_0^2 = \varepsilon_0 \frac{l^2}{d}\left[1+(k-1)\frac{x}{l}\right]V_0^2$

(γ) Όταν η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς ενός πυκνωτή είναι σταθερή και διηλεκτρικό υλικό εισέρχεται ανάμεσα στους οπλισμούς, φορτίο ρέει από την πηγή δυναμικού (μπαταρία) στον πυκνωτή. Υποθέτουμε ότι το έργο που παράγεται από ένα εξωτερικό φορέα, με τέτοιο τρόπο ώστε το διηλεκτρικό να μην έχει κινητική ενέργεια. Επομένως $W_{εξ} = \Delta U \Rightarrow dW_{εξ} = dU$. Αυτό είναι ανάλογο με τη βαρυτική δυναμική ενέργεια όπου κινάμε ένα σώμα με σταθερή ταχύτητα κατακόρυφα. Για να αυξήσουμε (μειώσουμε) τη βαρυτική δυναμική ενέργεια, θετικό (αρνητικό) έργο πρέπει να καταναλωθεί από μια εξωτερική μη βαρυτική πηγή.

Στην προκειμένη περίπτωση, η δυναμική ενέργεια της πηγής δυναμικού και η δυναμική ενέργεια του πυκνωτή αλλάζουν καθώς αλλάζει το x.

Προσέξτε επίσης ότι η αλλαγή στο φορτίο που είναι αποθηκευμένο στον πυκνωτή είναι αντίθετη από την αλλαγή στο φορτίο που είναι αποθηκευμένο στην πηγή δυναμικού.

$$dW_{εξ} = dU = dU_{πυκ} + dU_{μπατ} \Rightarrow F_{εξ}dx = d\left(\frac{1}{2}CV_0^2\right) + d(Q_{μπατ}V_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{εξ} = \frac{1}{2}V_0^2\frac{dC}{dx} + V_0\frac{dQ_{μπατ}}{dx} = \frac{1}{2}V_0^2\frac{dC}{dx} - V_0\frac{dQ_{πυκ}}{dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{εξ} = \frac{1}{2}V_0^2\frac{dC}{dx} - V_0^2\frac{dC}{dx} \Rightarrow F_{εξ} = -\frac{1}{2}V_0^2\frac{dC}{dC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{εξ} = -\frac{1}{2}V_0^2\varepsilon_0\frac{\ell^2}{d}\left[\frac{(K-1)}{\ell}\right] \Rightarrow \boxed{F_{εξ} = -\frac{V_0^2\varepsilon_0\ell}{2d}(K-1)}$$

Η δύναμη αυτή είναι στην αντίθετη διεύθυνση του dx, και επομένως είναι προς τα δεξιά. Αυτή η δύναμη εφαρμόζεται ώστε να κρατά το διηλεκτρικό από το να επιταχύνεται. Επομένως θα πρέπει να υπάρχει μια δύναμη ίσου μέτρου με κατεύθυνση προς τα αριστερά ~~η~~ οποία τραβά το διηλεκτρικό. Η δύναμη αυτή προέρχεται από την έλξη ~~του~~ των φορτίων των οπλισμών του πυκνωτή και του επαγόμενου φορτίου στο διηλεκτρικό. Η δύναμη αυτή έχει επομένως μέτρο: $F_{ηλ} = \frac{V_0^2\varepsilon_0\ell}{2d}(K-1)$ με φορά προς τα αριστερά