

# **Σχετικιστική Πυκνότητα Καταστάσεων Πολλών Σωμάτων**

## Επισκόπηση

Ο χρυσός κανόνας του Fermi  $\Gamma = \frac{dP}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{kS}|^2 \rho(E_S)$

όπου  $V_{kS} = \langle \psi_k | V | \psi_S \rangle$  και  $\rho(E_S) = dN/dE_S$

Για ένα μη σχετικιστικό σωματίδιο:  $\rho = \frac{mk}{2\pi^2 \hbar^2} = \frac{mp}{2\pi^2 \hbar^3}$

Ο παράγοντας ροής για ένα μη σχετικιστικό σωματίδιο:  $\Phi = v = \frac{p}{m} = \frac{\hbar k}{m}$

Η διαφορική ενεργός διατομή σκέδασης:  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\Gamma}{\Phi}$

# Πυκνότητα καταστάσεων και η συνάρτηση $\delta$ -Dirac

Ένας διαφορετικός τρόπος υπολογισμού των ενεργειακών καταστάσεων είναι ο ακόλουθος.

Ο αριθμός των καταστάσεων στο χώρο των ορμών,  $p$ , με ενέργεια  $< E$  είναι:

$$N_{<E} = \frac{w_p}{v_p} = \frac{1}{v_p} \int \theta \left( E - \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} \right) dp_x dp_y dp_z$$

όπου  $\theta$  είναι η συνάρτηση βήματος και  $v_p = (2\pi\hbar/L)^3$  είναι ο όγκος μιας κατάστασης στον χώρο των ορμών.

Η πυκνότητα καταστάσεων είναι η παράγωγος αυτού ως προς  $E$ .

Η παράγωγος της συνάρτησης βήματος όμως είναι η συνάρτηση  $\delta$  του Dirac.

Επομένως η πυκνότητα των ενεργειακών καταστάσεων γράφεται ως:

$$\rho(E) = \frac{dN_{<E}}{dE} = \frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3} \int \delta \left( E - \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} \right) dp_x dp_y dp_z$$

## Η πυκνότητα καταστάσεων στη σχετικότητα

Ο υπολογισμός της πυκνότητας των καταστάσεων εξαρτάται από την σχέση μεταξύ ενέργειας και ορμής, η οποία είναι διαφορετική στην περίπτωση της σχετικιστικής κίνησης:

Στην σχετικότητα έχουμε:  $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 = (\hbar kc)^2 + (mc^2)^2$

Αντί να λύσουμε για  $k$  συναρτήσει της  $E$  και να παραγωγίσουμε, είναι απλούστερο να κάνουμε μια έμμεση παραγωγή:

$$2EdE = (\hbar c)^2 2kdk + 0 \rightarrow \frac{dk}{dE} = \frac{E}{(\hbar c)^2 k}$$

Το υπόλοιπο του υπολογισμού είναι ίδιο με αυτόν της μη-σχετικιστικής περίπτωσης

Ο όγκος στον  $k$ -χώρο για σωματίδιο με κυματάριθμο  $k$ , είναι  $w = (4/3)\pi k^3$

και ο όγκος ανά κατάσταση είναι:  $v = (2\pi/L)^3$

και επομένως ο αριθμός των καταστάσεων με μικρότερο κυματάριθμο είναι:  $N = \frac{w}{v} = \frac{2k^3 L^3}{3(2\pi)^2}$

Η πυκνότητα καταστάσεων είναι η παράγωγος ως προς ενέργεια της προηγούμενης σχέσης:

Παίρνουμε την παράγωγο ως προς  $k$  και χρησιμοποιούμε τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{dN}{dk} \frac{dk}{dE} = \frac{2}{3(2\pi)^2} 3k^2 \frac{E}{(\hbar c)^2 k} = \frac{2kE}{(2\pi\hbar c)^2} \Rightarrow \rho(E) = \frac{2kE}{(2\pi\hbar c)^2}$$

Αντικατάσταση στην  $E=mc^2$  δίνει το μη σχετικιστικό αποτέλεσμα:  $\rho(E) = \frac{km}{2(\pi\hbar)^2}$

## Η πυκνότητα καταστάσεων στη σχετικότητα

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο τρικ με την συνάρτηση βήματος και την δ-συνάρτηση:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \rightarrow (E/c)^2 - p^2 - (mc)^2 = 0 \rightarrow \underline{p}^2 - (mc)^2 = 0$$

Ολοκλήρωση ως προς τις συνιστώσες της ορμής με μια θ-συνάρτηση και ολοκλήρωση ως προς μια ενέργεια  $E'$  προσθέτοντας μια δ-συνάρτηση θα δώσει:

$$N_{<E} = \frac{1}{V} \int \theta(\underline{p}^2 - (mc)^2) dp_x dp_y dp_z \delta(E' - E) dE'$$

Παίρνουμε την παράγωγο χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\rho(E) = \frac{d(E^2/c^2)}{dE} \frac{dN}{d(E^2/c^2)} = \frac{2E}{c^2} \frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3} \int \delta(\underline{p}^2 - (mc)^2) \delta(E' - E) d^4 \underline{p}$$

## Τελική κατάσταση 2 σωματιδίων

Για σκέδαση ενός σωματιδίου από σταθερό δυναμικό, διατήρηση της ενέργειας εγγυάται ότι το μέτρο της τελικής ορμής είναι φιξαρισμένο και μόνο η διεύθυνση μπορεί να μεταβάλλεται.

Για ένα σωματίδιο το οποίο διασπάται σε δυο σωματίδια, στο σύστημα αναφοράς του διασπώμενου σωματιδίου, οι δυο ορμές πρέπει να είναι ίσες και αντίθετες και η διατήρηση της ενέργειας φιξάρει τα μέτρα τους. Επομένως η διεύθυνση ενός σωματιδίου μπορεί να διαφοροποιείται αλλά η διεύθυνση του άλλου σωματιδίου είναι πλήρως σχετιζόμενη και τα μέτρα είναι πλήρως καθορισμένα.

Για μια σκέδαση 2 σωματιδίων που παράγει δυο σωματίδια στο κέντρο μάζας η περίπτωση δεν διαφέρει από αυτή της διάσπασης ενός σωματιδίου σε δυο σωματίδια. Ξέρουμε την αρχική ενέργεια, η αρχική ορμή είναι μηδέν, μια διεύθυνση είναι ελεύθερη παράμετρος

## Τελική κατάσταση περισσότερο από 2 σωματιδίων

Η περίπτωση είναι αρκετά πιο περίπλοκη όταν υπάρχουν περισσότερο από 2 σωματίδια στην τελική κατάσταση.

Αν ξέρουμε 2 από τα διανύσματα της ορμής, μπορούμε πάντοτε να βρούμε το τρίτο εφαρμόζοντας διατήρηση της ορμής (υποθέτοντας πάντοτε ότι ξέρουμε την αρχική ορμή). Έτσι στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχουν 3 ανεξάρτητα διανύσματα ορμών αλλά μόνο δυο

Αλλά αν διαλέξουμε τυχαία δυο διανύσματα ορμής και υπολογίσουμε το τρίτο διάνυσμα εφαρμόζοντας διατήρηση ορμής, το άθροισμα των τριων ενεργειών δεν εγγυάται ότι θα είναι ίσο με την αρχική ενέργεια του συστήματος. (αυτό ισχύει ανεξάρτητα από σχετικιστική ή μη κίνηση)

Για  $N$  σωματίδια υπάρχουν  $3N$  συνιστώσες ορμών και οι 3 συνιστώσες ορμής μαζί με την ενέργεια δίνουν 4 περιορισμούς. Επομένως, θα έχουμε  $3N-4$  ανεξάρτητες μεταβλητές

Για τελική κατάσταση 2 σωματιδίων, έχουμε  $3 \times 2 - 4 = 2$  μεταβλητές, τις οποίες λαμβάνουμε να είναι οι γωνίες  $\theta$  και  $\phi$  για ένα σωματίδιο με γνωστό μέτρο ορμής  $p$ . Το άλλο σωματίδιο είναι πλήρως προσδιορισμένο από το πρώτο

Για τελική κατάσταση 3 σωματιδίων, έχουμε  $3 \times 3 - 4 = 5$  μεταβλητές. Όλα τα μέτρα των ορμών και ενεργειών έχουν συνεχεί εύρη τιμών (περιοριζόμενα βέβαια από κινηματική)

## Τελική κατάσταση περισσότερο από 2 σωματιδίων

Πρέπει να πάρουμε τις μεταβλητές της τελικής κατάστασης υπόψην τόσο στον υπολογισμό του πλάτους όσο και της πυκνότητας καταστάσεων στην εξίσωση του χρυσού κανόνα του Fermi

Εφόσον οι περιορισμοί από την διατήρηση της ενέργειας και ορμής εκφραστούν στον χώρο των ορμών, μετασχηματίζουμε το «δυναμικό» (την αλληλεπίδραση δηλαδή ανάμεσα στα σωματίδια) στον χώρο των ορμών.

Ο μετασχηματισμός Fourier του δυναμικού, υπολογίζεται με απλούς κανόνες από το διάγραμμα Feynman, οι οποίοι δίνουν μια συνάρτηση όλων των συνιστωσών των ορμών όλων των σωματιδίων. Βασικά, ο Feynman έχει υπολογίσει μερικά από τα δύσκολα ολοκληρώματα για μας

Ολοκληρώνουμε την συνάρτηση των ορμών όλων των σωματιδίων, δεδομένου του διαγράμματος Feynman, πολλαπλασιαζόμενα με την πυκνότητα καταστάσεων, ως προς όλες τις τελικές ορμές και ενέργειες των σωματιδίων, γράφοντας την πυκνότητα των καταστάσεων χρησιμοποιώντας το τρικ με την σχετικιστική συνάρτηση  $\delta$  του Dirac.

Αυτό μας δίνει το ρυθμό  $\Gamma$ .

Αν θέλουμε το χρόνο ζωής, σημαίνει ότι έχουμε τελειώσει τον υπολογισμό μας.

Αν χρειαζόμαστε την ολική ενεργό διατομή, διαιρούμε με την ολική ροή  $\Phi$ . Αν θέλουμε την διαφορική ενεργό διατομή, δεν χρειάζεται να εκτελέσουμε το τμήμα της στερεάς γωνίας του ολοκληρώματος



# Χρυσός κανόνας για διασπάσεις σωματιδίων

Για σωματίδιο 1 το οποίο διασπάται σε 2, 3, ..., n σωματίδια, ο ρυθμός δίνεται από

$$\Gamma = \frac{1}{S} \frac{1}{2\hbar m_1} \int |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4(\underline{p}_1 - \underline{p}_2 - \underline{p}_3 - \dots - \underline{p}_n) \times \prod_{j=2}^n 2\pi \delta(\underline{p}_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(E_j) \frac{d^4 \underline{p}_j (E^2/c^2)}{(2\pi)^4}$$

Ο όρος M είναι ισοδύναμος του όρου  $\langle \psi_k | V | \psi_S \rangle$  στον χρυσό κανόνα του Fermi.

Ολοκληρώνουμε ως προς όλες τις τιμές όλων των τελικών καταστάσεων ενέργειας και συνιστωσών ορμής. Η πρώτη συνάρτηση  $\delta^4$  επιβάλλει γενική διατήρηση ορμής και ενέργειας.

Οι παράγοντες των συναρτήσεων  $\delta(\underline{p}_j^2 - m_j^2 c^2)$  επιβάλλουν ότι ενέργεια και ορμή αντιστοιχίζουν για κάθε σωματίδιο της τελικής κατάστασης.

Η συνάρτηση βήματος  $\theta(E_j)$  επιτρέπει στο ολοκλήρωμα να περιέχει αρνητική ενέργεια

Ο όρος S μπροστά είναι ένας παράγοντας S! για κάθε S πανομοιότυπα σωματίδια

Υπάρχουν μερικοί απλοί κανόνες σχετικά με τους παράγοντες 2π.

Μετακινήστε τον παράγοντα 2π του χρυσού κανόνα στον φασικό χώρο  $\Gamma = \frac{1}{\hbar} |V_{fi}|^2 [2\pi\rho(E)]$

Κατόπιν κάθε δ-συνάρτηση δίνει ένα παράγοντα 2π, και κάθε d είναι διαίρεση με 2π

$$2\pi\rho(E) = \frac{2E}{c^2} \frac{L^3}{\hbar^3} \int \mathbf{2\pi} \delta(\underline{p}^2 - (mc)^2) \mathbf{2\pi} \delta(E' - E) \frac{d^4 p}{(\mathbf{2\pi})^4} \quad \text{για ένα σωματίδιο}$$

## Χρυσός κανόνας για διασπάσεις σωματιδίων

Κάθε δ-συνάρτηση έχει ένα παράγοντα  $2\pi$  ο οποίος προέρχεται από:  $\int e^{i(k-k')x} dx = 2\pi\delta(k-k')$

Κάθε  $dp$  έχει ένα παράγοντα  $1/2\pi$  που προέρχεται από την πυκνότητα καταστάσεων.

Οι παράγοντες  $L^3$  απαλλοίφονται.

Μερικοί παράγοντες  $E$  και  $c$  απορροφούνται στα πινακοστοιχεία  $M$ , με τέτοιο τρόπο ώστε τόσο το  $M$  όσο και η πυκνότητα καταστάσεων να είναι αναλλοίωτα κάτω από Lorentz μετασχηματισμούς

Οι δ-συναρτήσεις ολοκληρώνονται αρκετά εύκολα αλλά για την περίπτωση της  $p^0$  (ενέργειας) χρειαζόμαστε:

$$\int g(x)\delta(f(x)) = \frac{g(y)}{df/dx|_y} \quad \text{όπου } f(x)=0 \text{ για } x=y$$

Αφού γίνουν τα ολοκληρώματα ως προς  $p^0$  ο ρυθμός μετάβασης για σωματίδιο 1 να διασπαστεί σε 1,2,3...,n σωματίδια είναι:

$$\Gamma = \frac{1}{S} \frac{1}{2\hbar m_1} \int |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4(\underline{p}_1 - \underline{p}_2 - \underline{p}_3 - \dots - \underline{p}_n) \times \prod_{j=2}^n \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}_j^2 + m_j^2 c^2}} \frac{d^3 \vec{p}_j}{(2\pi)^3}$$

## Διάσπαση σε 2 σώματα στο σύστημα κέντρου μάζας

$$\Gamma = \frac{1}{S} \frac{1}{2\hbar m_1} \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^6} \int |M|^2 \frac{\delta^4(\underline{p}_1 - \underline{p}_2 - \underline{p}_3)}{2\sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^2 c^2} 2\sqrt{\vec{p}_3^2 + m_3^2 c^2}} d^3 \vec{p}_2 d^3 \vec{p}_3$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{1}{S} \frac{1}{32\pi^2 \hbar m_1} \int |M|^2 \frac{\delta^4(\underline{p}_1 - \underline{p}_2 - \underline{p}_3)}{\sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^2 c^2} \sqrt{\vec{p}_3^2 + m_3^2 c^2}} d^3 \vec{p}_2 d^3 \vec{p}_3$$

$$\delta^4(\underline{p}_1 - \underline{p}_2 - \underline{p}_3) = \delta(p_1^0 - p_2^0 - p_3^0) \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3)$$

$$\delta^4(\underline{p}_1 - \underline{p}_2 - \underline{p}_3) = \delta\left(m_1 c - \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^2 c^2} - \sqrt{\vec{p}_3^2 + m_3^2 c^2}\right) \delta^3(\vec{p}_2 + \vec{p}_3)$$

Επομένως: 
$$\Gamma = \frac{1}{S} \frac{1}{32\pi^2 \hbar m_1} \int |M|^2 \frac{\delta\left(m_1 c - \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^2 c^2} - \sqrt{\vec{p}_3^2 + m_3^2 c^2}\right)}{\sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^2 c^2} \sqrt{\vec{p}_3^2 + m_3^2 c^2}} \delta^3(\vec{p}_2 + \vec{p}_3) d^3 \vec{p}_2 d^3 \vec{p}_3$$

Κάνουμε τώρα το  $d^3 \vec{p}_3$  που είναι εύκολο γιατί η συνάρτηση  $\delta^3(\vec{p}_2 + \vec{p}_3)$  αντικαθιστά απλά  $\vec{p}_3 = -\vec{p}_2$  και είναι πάντοτε στο τετράγωνο οπότε το πρόσημο δεν παίζει σημασία

$$\Gamma = \frac{1}{S} \frac{1}{32\pi^2 \hbar m_1} \int |M|^2 \frac{\delta\left(m_1 c - \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^2 c^2} - \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_3^2 c^2}\right)}{\sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^2 c^2} \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_3^2 c^2}} d^3 \vec{p}_2$$

## Διάσπαση σε 2 σώματα στο σύστημα κέντρου μάζας

Υπάρχει μόνο μια ορμή για να ολοκληρώσουμε οπότε αγνοούμε τον δείκτη και αλλάζουμε σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\Gamma = \frac{1}{S} \frac{1}{32\pi^2 \hbar m_1} \int |M|^2 \frac{\delta\left(m_1 c - \sqrt{\vec{p}^2 + m_2^2 c^2} - \sqrt{\vec{p}^2 + m_3^2 c^2}\right)}{\sqrt{\vec{p}^2 + m_2^2 c^2} \sqrt{\vec{p}^2 + m_3^2 c^2}} p^2 dp \sin\theta d\theta d\varphi$$

Το πινακοστοιχείο είναι εν γένει συνάρτηση των ορμών  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$  αλλά  $\vec{p}_1$  δεν είναι μεταβλητή ολοκλήρωσης ενώ  $\vec{p}_2 = -\vec{p}_3$  και επομένως το M είναι απλά συνάρτηση του  $\vec{p}_2$   $M(\vec{p}_2)$

Δεν εξαρτάται από την διεύθυνση της  $p_2$  (εκτός και αν το σωματίδιο που διασπάται έχει σπιν και η διεύθυνση του σπιν δεν είναι τυχαία), οπότε τα γωνιακά ολοκληρώματα δίνουν  $4\pi$

Ορίζουμε  $u = \sqrt{p^2 + m_2^2 c^2} + \sqrt{p^2 + m_3^2 c^2}$  και προσέχουμε ότι

$$\frac{du}{dp} = \frac{2p}{2\sqrt{p^2 + m_2^2 c^2}} + \frac{2p}{2\sqrt{p^2 + m_3^2 c^2}} = p \frac{\sqrt{p^2 + m_3^2 c^2} + \sqrt{p^2 + m_2^2 c^2}}{\sqrt{p^2 + m_2^2 c^2} \sqrt{p^2 + m_3^2 c^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dp} = p \frac{u}{\sqrt{p^2 + m_2^2 c^2} \sqrt{p^2 + m_3^2 c^2}} \Rightarrow \frac{1}{up} \frac{du}{dp} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + m_2^2 c^2} \sqrt{p^2 + m_3^2 c^2}}$$

## Διάσπαση σε 2 σώματα στο σύστημα κέντρου μάζας

Επομένως έχουμε: 
$$\Gamma = \frac{1}{S} \frac{1}{8\pi\hbar m_1} \int \left| M(p) \right|^2 \delta(m_1 c - u) \frac{1}{u p} \frac{du}{dp} p^2 dp$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{1}{S} \frac{1}{8\pi\hbar m_1} \int \left| M(p) \right|^2 \delta(m_1 c - u) \frac{p}{u} du \Rightarrow \Gamma = \frac{1}{S} \frac{1}{8\pi\hbar m_1} \frac{p_F}{u} \left| M(p_F) \right|^2$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{1}{S} \frac{1}{8\pi\hbar m_1^2 c} p_F \left| M(p_F) \right|^2$$

Η δ-συνάρτηση θέτει  $u = m_1 c = \sqrt{p^2 + m_2^2 c^2} + \sqrt{p^2 + m_3^2 c^2}$

Λύνουμε για  $p_F = c \sqrt{\left( \frac{m_1^2 - m_2^2 - m_3^2}{2m_1} \right)^2 - m_2^2}$  (κινηματική 4-διανυσμάτων)

Από συμμετρία: 
$$= c \frac{\sqrt{m_1^4 + m_2^4 + m_3^4 - 2m_1^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_3^2 - 2m_2^2 m_3^2}}{2m_1}$$

Αυτή είναι η τιμή της  $p_F$  που πρέπει να αντικαταστήσουμε στην παραπάνω εξίσωση του ρυθμού

## Διάσπαση σε περισσότερα από 2 σώματα

$$\Gamma = \frac{1}{S} \frac{1}{2\hbar m_1} \int |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4(\underline{p}_1 - \underline{p}_2 - \underline{p}_3 - \dots - \underline{p}_n) \times \prod_{j=2}^n \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}_j^2 + m_j^2 c^2}} \frac{d^3 \vec{p}_j}{(2\pi)^3}$$

Η σχέση εξακολουθεί να ισχύει και μπορούμε να ολοκληρώσουμε ως προς μια 3-ορμή και να απαλοίσουμε τις δ-συναρτήσεις των 3-ορμών.

Μπορούμε να κάνουμε επίσης την ορμή  $\vec{p}_n = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \dots - \vec{p}_{n-1}$  από τις άλλες ορμές. Θα εξακολουθήσουμε να έχουμε την δ-συνάρτηση σχετικά με την γενική διατήρηση ενέργειας μέσα σε ένα ολοκλήρωμα ως προς τις άλλες 3-ορμές ενώ το  $M$  τυπικά εξαρτάται από τις ορμές (τα μέτρα και τις μεταξύ τους γωνίες).

Τα μέτρα των 3-ορμών θα έχουν πεπερασμένες τιμές και το εύρος τιμών για τα όρια ολοκλήρωσης αναμένεται ότι θα είναι αρκετά περίπλοκα.

Δεν μπορούμε να προχωρήσουμε στην εκτέλεση του ολοκληρώματος αν δεν ξέρουμε την συναρτησιακή εξάρτηση του πινακοστοιχείου  $M(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4)$  και ακόμη και στην περίπτωση αυτή είναι πολύπλοκο.

Για σημαντικές αλλά απλές καταστάσεις όπως  $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$  και  $\mu \rightarrow e + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$  τα ολοκληρώματα έχουν υπολογισθεί για την τυπική ασθενή διάσπαση και γενικεύσεις της.

Τα ολοκληρώματα αυτά είναι καλές υποψήφιες περιπτώσεις εφαρμογής σε MonteCarlo αριθμητικές προσομοιώσεις. Σύμφωνα με αυτές, δημιουργούμε πολλά 3-διανύσματα διατήρησης ενέργειας και ορμής τα οποία έχουν τυχαίους προσανατολισμούς στο χώρο των φάσεων, και κατόπιν βρίσκουμε την μέση τιμή της ποσότητας  $|M|^2 / \prod_{j=2}^n \sqrt{\vec{p}_j^2 + m_j^2 c^2}$  ως προς τα σημεία αυτά

## Χρυσός κανόνας για σκεδάσεις σωματιδίων

Για σωματίδια 1 και 2 που παράγουν σωματίδια 3,4,...,n η ενεργός διατομή δίνεται από:

$$\sigma = \frac{1}{S} \frac{\hbar^2}{4\sqrt{(\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \int |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4(\underline{p}_1 + \underline{p}_2 - \underline{p}_3 - \dots - \underline{p}_n) \\ \times \prod_{j=3}^n 2\pi \delta(\underline{p}_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(E_j) \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4}$$

Ο παράγοντας S είναι ο ίδιος στατιστικός παράγοντας, το πίνακοστοιχείο M, είναι ο ίδιος παράγοντας πίνακοστοιχείου, και οι δ-συναρτήσεις οι ίδιες όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις.

Η τετραγωνική ρίζα στον παρονομαστή περιγράφει τις σχετικές ταχύτητες των αρχικών σωματιδίων, όπως συνέβαινε με τη μάζα του διασπώμενου σωματιδίου, με ένα Lorentz αναλλοίωτο τρόπο.

Όπως και στην περίπτωση της διάσπασης, μπορούμε να κάνουμε τα ολοκληρώματα και έχουμε:

$$\sigma = \frac{1}{S} \frac{\hbar^2}{4\sqrt{(\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \int |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4(\underline{p}_1 + \underline{p}_2 - \underline{p}_3 - \dots - \underline{p}_n) \times \prod_{j=3}^n \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}_j^2 + m_j^2 c^2}} \frac{d^3 \vec{p}_j}{(2\pi)^3}$$

## Χρυσός κανόνας – σκέδαση 2 σωμάτων

Στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας,  $\sqrt{(\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2} = \frac{E_1 + E_2}{c} p_I$   
 όπου το  $p_I$  είναι η (κοινή) εισερχόμενη ορμή στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας.

Ο χρυσός κανόνας γίνεται: 
$$\sigma = \frac{1}{S} \frac{\hbar^2 c}{64\pi^2 (E_1 + E_2) p_I} \int |M|^2 \frac{\delta^4(\underline{p}_1 + \underline{p}_2 - \underline{p}_3 - \underline{p}_4)}{\sqrt{\vec{p}_3^2 + m_3^2 c^2} \sqrt{\vec{p}_4^2 + m_4^2 c^2}} d^3 \vec{p}_3 d^3 \vec{p}_4$$

Μοιράζουμε την δ-συνάρτηση όπως πριν:

$$\delta^4(\underline{p}_1 + \underline{p}_2 - \underline{p}_3 - \underline{p}_4) = \delta\left(\frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c} - p_3^0 - p_4^0\right) \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4)$$

$$\Rightarrow \delta^4(\underline{p}_1 + \underline{p}_2 - \underline{p}_3 - \underline{p}_4) = \delta\left(\frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c} - \sqrt{\vec{p}^2 + m_3^2 c^2} - \sqrt{\vec{p}^2 + m_4^2 c^2}\right) \delta^3(\vec{p}_3 + \vec{p}_4)$$

Μπορούμε να κάνουμε ένα 3-ορμή ολοκλήρωμα όπως στην περίπτωση της διάσπασης των σωματιδίων αντικαθιστώντας  $\vec{p}_3 = -\vec{p}_4$  και απαλοίφοντας τους δείκτες στις ορμές.

Συνήθως θέλουμε την διαφορική ενεργό διατομή, οπότε μετακινούμε το γωνιακό τμήμα του άλλου 3-ορμή ολοκλήρωμα στην άλλη πλευρά, ώστε να μας μείνει μόνο το ολοκλήρωμα ως προς το μέτρο της ορμής να κάνουμε

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\theta \sin\theta d\varphi} = \frac{1}{S} \frac{\hbar^2 c}{64\pi^2 (E_1 + E_2) p_{CM}} \int |M|^2 \frac{\delta\left(\frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c} - \sqrt{\vec{p}^2 + m_3^2 c^2} - \sqrt{\vec{p}^2 + m_4^2 c^2}\right)}{\sqrt{\vec{p}_3^2 + m_3^2 c^2} \sqrt{\vec{p}_4^2 + m_4^2 c^2}} p^2 dp$$



## Χρυσός κανόνας – σκέδαση 2 σωμάτων

Ορίζουμε μια ποσότητα  $u$  όπως στην περίπτωση της διάσπασης σωματιδίου και κάνουμε ακριβώς τα ίδια βήματα. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο μόνο που έχουμε τις εξής τροποποιήσεις:

$$m_1 \rightarrow \frac{E_1 + E_2}{c} \quad \text{και} \quad m_2 \rightarrow m_4$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{S} \frac{\hbar^2 c^2}{64\pi^2 (E_1 + E_2)^2} \frac{p_F}{p_I} |M|^2 = \left( \frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{|M(\vec{p}_F)|^2}{S (E_1 + E_2)^2} \frac{p_F}{p_I}$$

Η τιμή της  $p_I$  καθορίζεται από τις συνθήκες της δέσμης.

Η τιμή της  $p_F$  είναι η ίδια αν οι μάζες των τελικών σωματιδίων είναι ίδιες με αυτές των αρχικών σωματιδίων, αλλά διαφορετική αν οι μάζες των τελικών προϊόντων είναι διαφορετικές από αυτές των αρχικών προϊόντων.

Η εξάρτηση από την γωνία είναι κρυμμένη μέσα στον υπολογισμό του πινακοστοιχείου  $M(\vec{p}_F)$

# Χρυσοί κανόνες

Αρχικός Fermi:  $\Gamma = \frac{dP}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{kS}|^2 \rho(E_S)$

Διάσπαση σωματιδίου:  $\Gamma = \frac{1}{S} \frac{1}{2\hbar m_1} \times I$

Σκέδαση:  $\sigma = \frac{\Gamma}{\Phi} = \frac{1}{S} \frac{\hbar^2}{4\sqrt{(\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}} \times I$

Ολοκλήρωμα:

$$I = \int |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4(\underline{p}_{initial} - \underline{p}_{final}) \times \prod_{final} 2\pi \delta(\underline{p}_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(E_j) \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4}$$

$$I = \int |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4(\underline{p}_{initial} - \underline{p}_{final}) \times \prod_{final} \frac{1}{\sqrt{\vec{p}_j^2 + m_j^2 c^2}} \frac{d^3 \vec{p}_j}{(2\pi)^3}$$

# Διάσπαση σωματιδίου σε 2 σώματα στο σύστημα CM

Για σωματίδιο το οποίο διασπάται σε σωματίδια 2 και 3 έχουμε:

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{S} \frac{1}{8\pi\hbar m_1^2 c} p_F \left| M(p_F) \right|^2$$

Όπου

$$p_F = c \sqrt{\left( \frac{m_1^2 - m_2^2 - m_3^2}{2m_1} \right)^2 - m_2^2} = c \frac{\sqrt{m_1^4 + m_2^4 + m_3^4 - 2m_1^2 m_2^2 - 2m_1^2 m_3^2 - 2m_2^2 m_3^2}}{2m_1}$$

## Σκέδαση $2 \rightarrow 2$ σώματα στο σύστημα CM

Για σωματίδια 1 και 2 με αρχικό μέτρο ορμής  $p_I$  στο σύστημα αναφοράς του CM, σκεδάζονται για να παράγουν σωματίδια 3 και 4 με ορμή μέτρου  $p_F$  :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{S} \left( \frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{1}{(E_1 + E_2)^2} \frac{p_F}{p_I} \left| M(\vec{p}_F) \right|^2$$

Η τιμή της  $p_I$  καθορίζεται από τις συνθήκες της δέσμης.

Η τιμή της  $p_F$  είναι η ίδια αν οι μάζες των τελικών σωματιδίων είναι ίδιες με αυτές των αρχικών σωματιδίων, αλλά διαφορετική αν οι μάζες των τελικών προϊόντων είναι διαφορετικές από αυτές των αρχικών προϊόντων.

Η εξάρτηση από την γωνία είναι κρυμμένη μέσα στον υπολογισμό του πινακοστοιχείου  $M(\vec{p}_F)$

# Διαστασιακή Ανάλυση

Οι διαστάσεις του  $|M|^2$  μπορεί να βρεθεί με διαστασιακή ανάλυση σε αναλογία με τον φασικό χώρο. Αυτό αρκετές φορές μας βοηθά να κάνουμε εκτιμήσεις τάξης μεγέθους για το  $M$ .

Ωστόσο χρειάζεται προσοχή εξαιτίας των δ-συναρτήσεων που δεν είναι αδιάστατες

Θεωρήστε έστω ότι: 
$$\int f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

Είναι φανερό ότι η δ-συνάρτηση θα πρέπει να έχει διαστάσεις  $1/x$  για να ισχύει

Έστω τώρα ότι: 
$$\int f(x) \delta(g(x)) dx = f(x) / (g'(x)) \Big|_{g(x)=0}$$

Για να ισχύει το προηγούμενο θα πρέπει η δ-συνάρτηση να έχει διαστάσεις  $1/g$

➤ Οι διαστάσεις της δ-συνάρτησης Dirac είναι επομένως οι διαστάσεις του 1/όρισμά της

# Διαστασιακή Ανάλυση

$$\Gamma = \frac{1}{S} \frac{1}{2\hbar m_1} \int |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4(\underline{p}_1 - \underline{p}_2 - \underline{p}_3 - \dots - \underline{p}_n) \times \prod_{j=2}^n 2\pi \delta(\underline{p}_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(E_j) \frac{d^4 \underline{p}_j (E^2/c^2)}{(2\pi)^4}$$

Ο ρυθμός διάσπασης,  $\Gamma$ , έχει διαστάσεις  $1/T$ , οι διαστάσεις του  $\hbar$  είναι  $p \times L$  ενώ η συνάρτηση  $\delta^4(\underline{p})$  δίνει  $p^{-4}$  και ο όρος  $\delta^4(\underline{p}_j^2 - m_j^2 c^2) d^4 \underline{p}_j$  δίνει  $p^{-2} p^4 = p^2$  για κάθε σωματίδιο της τελικής κατάστασης.

Επομένως για  $K$  σωματίδια στην τελική κατάσταση θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &\propto \frac{1}{\hbar} \frac{1}{m} |M|^2 p^{-4} p^{2k} \Rightarrow \frac{1}{T} \propto \frac{1}{pL} \frac{1}{m} |M|^2 p^{2k-4} \\ \Rightarrow |M|^2 &\propto p \left( m \frac{L}{T} \right) p^{4-2k} \Rightarrow |M|^2 \propto p(mv) p^{4-2k} \Rightarrow |M|^2 \propto p^{6-2k} \end{aligned}$$

Για διάσπαση σε 2 σωματίδια:  $|M|^2 \propto p^{6-4} = p^2 \Rightarrow M \propto p$

Για διάσπαση σε 3 σωματίδια:  $|M|^2 \propto p^{6-6} = p^0 \Rightarrow M \propto p^0$

# Διαστασιακή Ανάλυση

Οι διαστάσεις για σκέδασης σε τελική κατάσταση  $k$ -σωματιδίων είναι:

$$L^2 \propto \frac{\hbar^2}{p^2} |M|^2 p^{-4} p^{2k} \propto \frac{p^2 L^2}{p^2} |M|^2 p^{2k-4} \Rightarrow |M|^2 \propto p^{4-2k}$$

Για διασπάσεις είχαμε βρει ότι:  $|M|^2 \propto p^{6-2k}$

Μπορούμε να θέσουμε ένα κανόνα και για τις δυο περιπτώσεις, αν θεωρήσουμε ότι  $n$  είναι ο αριθμός των σωματιδίων της τελικής κατάστασης + τα σωματίδια της αρχικής

Για τις διασπάσεις θα έχουμε:  $k = n - 1$  και επομένως:  $|M|^2 \propto p^{6-2(n-1)} = p^{8-2n}$

Για τις σκεδάσεις θα έχουμε:  $k = n - 2$  και επομένως:  $|M|^2 \propto p^{4-2(n-2)} = p^{8-2n}$

➤ Άρα τόσο για διάσπαση όσο και για σκέδαση ισχύει:  $|M| \propto p^{4-n} = p^4 / p^n$

# Υπολογισμός πινακοστοιχείων

Οι υπολογισμοί των πινακοστοιχείων στην πραγματικότητα είναι περισσότερο πολύπλοκοι κυρίως για δυο λόγους:

- Τα λεπτόνια (ηλεκτρόνια, μίονια, ταυ και αντίστοιχα νετρίνο) υπακούουν επακριβώς στην εξίσωση Dirac. Αλλά το σπιν τους κάνει τους υπολογισμούς ιδιαίτερα επίπονους
- Υπάρχουν πολλά σωματίδια με μηδενικό σπιν, όπως τα πιόνια, όπου δεν υπάρχουν προβλήματα στους υπολογισμούς των πινακοστοιχείων εξαιτίας του σπιν, αλλά δεν είναι στοιχειώδη σωματίδια και επομένως οι αλληλεπιδράσεις γίνονται πολύπλοκες και οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις γίνονται πολύ ισχυρές ώστε η θεωρία των διαταραχών να είναι χρήσιμη για τους υπολογισμούς
- Ιστορικά, όταν ο φορμαλισμός ήταν καινούργιος, λίγοι επιστήμονες μπορούσαν να εκτελέσουν τους υπολογισμούς. Ο διαχωρισμός μεταξύ των όρων του φασικού χώρου και των πινακοστοιχείων δεν ήταν ξεκάθαρος και η διατήρηση του αναλλοίωτου κάτω από Lorentz μετασχηματισμούς δεν ήταν ιδιαίτερα προφανές και εύκολο
  - ✧ Το γεγονός ότι υπάρχουν πολλοί παράμετροι ελευθερίας για διάφορες προσεγγίσεις οδηγούν αρκετές φορές σε αδιέξοδα υπολογισμών
- Η συνεισφορά του Feynman ήταν το γεγονός ότι μπόρεσε να διακρίνει ότι για τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις, το ανάπτυγμα της θεωρίας των διαταραχών οδηγούσε σε όρους που μπορούσαν να χαρτογραφηθούν σε διαγράμματα τα οποία με την σειρά τους μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για θέσπιση κανόνων για την γραφή παραραγόντων στον υπολογισμό των πινακοστοιχείων



# Κλασική σκέδαση φορτισμένου σωματιδίου

Υπολογίζουμε αρχικά το EM πεδίο το οποίο παράγεται από ένα σωματίδιο.

Κατόπιν υπολογίζουμε το αποτέλεσμα αυτού του πεδίου στη κίνηση ενός άλλου σωματιδίου

Ο 3<sup>ος</sup> νόμος του Newton εγγυάται ότι η αλλαγή στην ορμή του σωματιδίου που δημιουργεί το EM πεδίο είναι ίση και αντίθετη με την αλλαγή στην ορμή του σωματιδίου που επιρεάζεται από το EM πεδίο

Επομένως θα μπορούσαμε να χωρίσουμε την αλληλεπίδραση σε αρκετά μικρότερα τμήματα και να ολοκληρώσουμε.

Το σημαντικό σημείο ωστόσο είναι ότι υπάρχουν 2 στάδια σε κάθε βήμα:

παραγωγή πεδίου και δράση πεδίου

➤ Τα σωματίδια δεν αλληλεπιδρούν απευθείας μεταξύ τους, αλλά μέσω του EM πεδίου

Είδαμε ότι στην χρονοεξάρτητη θεωρία διαταραχών, το πλάτος για μια διαταραχή  $V$  η οποία προκαλεί μεταβάσεις σε μια τελική κατάσταση  $f$  ξεκινώντας από μια αρχική κατάσταση  $i$  και η οποία περνά από κάποια ενδιάμεση κατάσταση  $j$  περιγράφεται από την:

$$T_{fi} = \langle f|V|i \rangle + \sum_{i \neq j} \frac{\langle f|V|j \rangle \langle j|V|i \rangle}{E_i - E_j} + \dots$$

Ο 1<sup>ος</sup> όρος εκφράζει τις απευθείας μεταβάσεις, ενώ ο δεύτερος είναι το άθροισμα ως προς εμμεσες μεταβάσεις μέσω μιας ενδιάμεσης κατάστασης  $j$ .

Για σκέδαση από σταθερό δυναμικό  $V$  (Rutherford σκέδαση) ο πρώτος όρος κυριαρχεί. Ο 2<sup>ος</sup> όρος αντιπροσωπεύει προσπίπτοντα σωματίδια να σκεδάζονται στο δυναμικό και τα τελικά σωματίδια να σκεδάζονται και πάλι στο δυναμικό

# Προέλευση του διαδότη Feynman

Για σκέδαση δυο πραγματικών ηλεκτρονίων μεταξύ τους, δεν υπάρχει σταθερό δυναμικό (ακόμα και στο αρχικό σύστημα ηρεμίας ενός εκ των δυο ηλεκτρονίων, το ηλεκτρόνιο αυτό καταλήγει να κινείται).

Τα δυο ηλεκτρόνια δεν αλληλεπιδρούν απευθείας μεταξύ τους αλλά μέσω του EM πεδίου

Σαν αποτέλεσμα, ο πρώτος όρος του αναπτύγματος της σειράς των διαταραχών δεν υπάρχει και δεν μπορεί να εφαρμοστεί για την σκέδαση των δυο ηλεκτρονίων. Υπάρχουν όμως όπως έχουμε δει οι υπόλοιποι όροι:

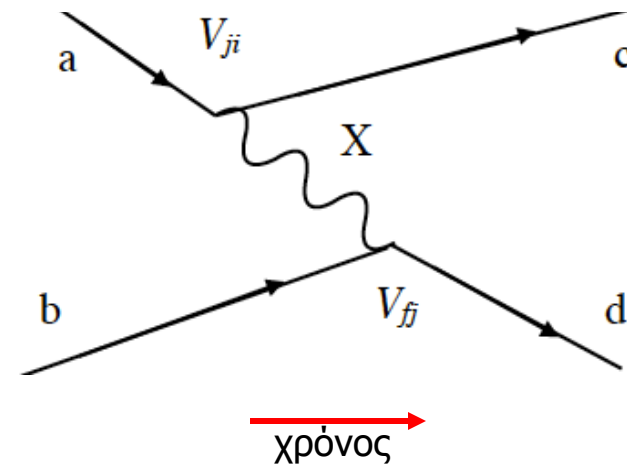
$$T_{fi} = \sum_{i \neq j} \frac{\langle f|V|j \rangle \langle j|V|i \rangle}{E_i - E_j} + \dots$$

Η σύμβαση που ακολουθείται είναι ότι το εισερχόμενο σωματίδιο a, μετατρέπεται σε εξερχόμενο σωματίδιο c, εκπέμποντας ένα φωτόνιο το οποίο μεταφέρει την διαφορά στην ορμή των δυο σωματιδίων (a και c).

Το εισερχόμενο σωματίδιο b, απορροφά το φωτόνιο αυτό με αποτέλεσμα να αλλάξει η ορμή του και να μετραπεί σε εξερχόμενο σωματίδιο d.

Η ενδιάμεση κατάσταση j περιέχει τα σωματίδια c, X και b.

Το πλάτος είναι: 
$$T_{fi}^{ab} = \frac{V_{fi} V_{ji}}{E_i - E_j} = \frac{\langle d|V|X+b \rangle \langle c+X|V|a \rangle}{(E_a + E_b) - (E_c + E_X + E_b)}$$

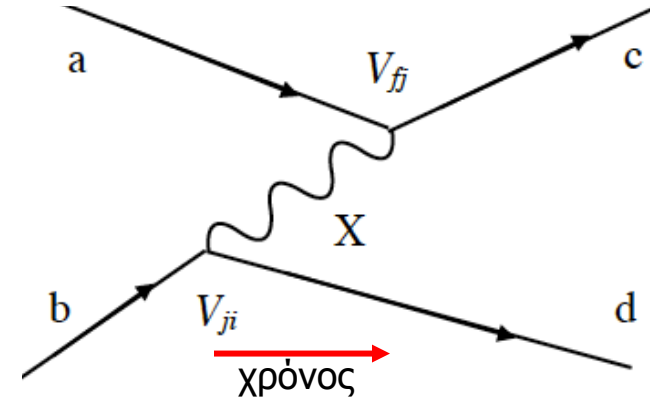


# Προέλευση του διαδότη Feynman

Η διεργασία ωστόσο μπορεί να γίνει με το σωματίδιο  $b$  να εκπέμπει το φωτόνιο  $X$  και το σωματίδιο  $a$  να το απορροφά. Στην περίπτωση αυτή η ενδιάμεση κατάσταση περιέχει τα σωματίδια  $a$ ,  $X$  και  $d$ :

Το πλάτος είναι:

$$T_{fi}^{ba} = \frac{V_{fi} V_{ji}}{E_i - E_j} = \frac{\langle c | V | X + a \rangle \langle d + X | V | b \rangle}{(E_a + E_b) - (E_a + E_X + E_d)}$$



Χρειάζεται να αθροίσουμε ως προς τις δυνατές ενδιάμεσες καταστάσεις:

Η απλούστερη περίπτωση είναι αν ο παράγοντας του πλάτους σε κάθε κορυφή είναι μια σταθερά  $g$ , ανεξάρτητη από οτιδήποτε. Στη περίπτωση αυτή θα πάρουμε:

$$T_{fi} = \frac{g^2}{(E_a + E_b) - (E_c + E_X + E_b)} + \frac{g^2}{(E_a + E_b) - (E_a + E_X + E_d)}$$

Απαλοΐφουμε το  $E_b$  στον 1<sup>ο</sup> όρο και χρησιμοποιούμε διατήρηση ενέργειας:  $E_a + E_b = E_c + E_d$  για να απαλοΐφουμε το  $E_d$  στον 2<sup>ο</sup> όρο, οπότε καταλήγουμε:

$$T_{fi} = \frac{g^2}{E_a - E_c - E_X} + \frac{g^2}{E_c - E_a - E_X} \Rightarrow T_{fi} = \frac{g^2}{E_a - E_c - E_X} - \frac{g^2}{E_a - E_c + E_X}$$

# Προέλευση του διαδότη Feynman

Από τον κοινό παρονομαστή και απλοποιώντας θα έχουμε:

$$T_{fi} = \frac{g^2 (E_a - E_c + E_X) - g^2 (E_a - E_c - E_X)}{(E_a - E_c - E_X)(E_a - E_c + E_X)} \Rightarrow T_{fi} = \frac{2g^2 E_X}{(E_a - E_c)^2 - E_X^2}$$

Αλλά:  $E_X^2 = \vec{P}_X^2 + M_X^2 = (\vec{p}_a - \vec{p}_c)^2 + M_X^2$

Αντικατάσταση θα δώσει:  $T_{fi} = \frac{2g^2 E_X}{(E_a - E_c)^2 - (\vec{p}_a - \vec{p}_c)^2 - M_X^2} \Rightarrow T_{fi} = \frac{2g^2 E_X}{(\underline{p}_a - \underline{p}_c)^2 - M_X^2}$

Έχουμε επομένως κάτι που μοιάζει με πλάτος Feynman

Ο παρονομαστής έρχεται από 2<sup>ης</sup> τάξης θεωρία διαταραχών, η οποία θα έπρεπε να είναι γραμμική ως προς την ενέργεια αλλά πρέπει να προσθέσουμε τις δυο διαφορετικές χρονικές ταξινομήσεις (τα δυο διαγράμματα) τα οποία έχουν αντίθετο πρόσημο, και σχεδόν αλληλοαναιρούνται αφήνοντας κάτι το οποίο είναι 2<sup>ης</sup> τάξης ως προς το χρόνο.

Ο παράγοντας  $E_X$  στον αριθμητή απαλοίφεται από την κανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης στην περίπτωση της σχετικότητας