Εξισώσεις κίνησης του Hamilton

- Newtonian → Lagrangian → Hamiltonian
  - Περιγράφουν την ίδια φυσική και δίνουν τα ίδια αποτελέσματα
  - Διαφορές είναι στο τρόπο προσέγγισης των προβλημάτων
    - Συμμετρίες και αναλλοίωτο μεγεθών είναι περισσότερο εμφανείς ανάλογα με τη μέθοδο προσέγγισης
    - Ευελιξία στους μετασχηματισμούς
- Ο φορμαλισμός Hamilton συνδέεται με την ανάπτυξη
  - Θεωρίας Hamilton-Jacobi
  - Κλασική θεωρεία διαταραχών
  - Κβαντική μηχανική
  - Στατιστική μηχανική

Από τις εξισώσεις του Lagrange σ' αυτές του Hamilton

Οι εξισώσεις Lagrange για N-συντεταγμένες:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1, \cdots, N$$

Διαφορική εξίσωση 2ης τάξης N-μεταβλητών

- N-μεταβλητές → 2 N αρχικές συνθήκες π.χ. $q_i(t=0)$ $\dot{q}_i(t=0)$

➢ Ερώτηση: Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα με διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης;

ΝΑΙ αλλά θα χρειαστούμε 2-N εξισώσεις:

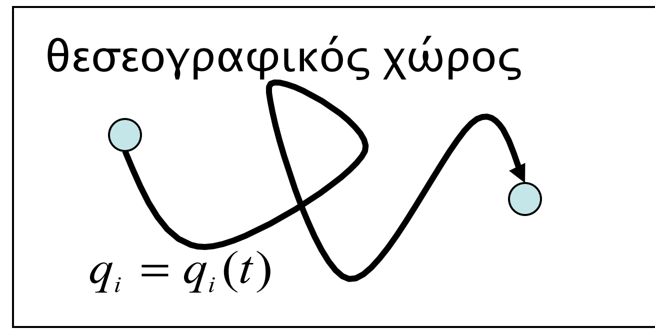
Κρατάμε τις γενικευμένες συντεταγμένες q_i και

αντικαθιστούμε τις γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}_i$ με κάτι παρόμοιο

➢ Παίρνουμε την συζυγή ορμή: $p_i \equiv \dfrac{\partial \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_i}$

Χώρος μορφής – ("configuration space")

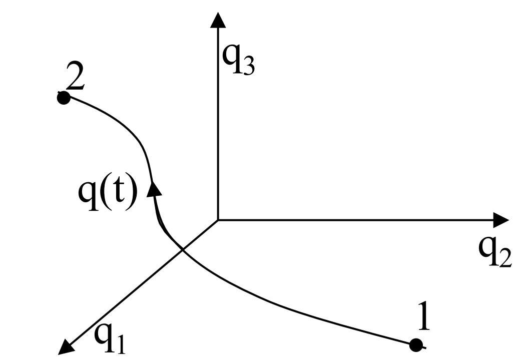
- Θεωρήσαμε $(q_1,\ldots,q_n)$ σαν ένα σημείο σε ένα Ν-διάστατο χώρο
  - Τον ονομάσαμε χώρο μορφής ή θεσεογραφικό χώρο
  - Η κίνηση του συστήματος → τροχιά στο χώρο μορφής



- Όταν παίρνουμε μεταβολές, θεωρούμε τα q_i και $\dot{q}_i$ σαν ανεξάρτητες μεταβλητές και υπολογίζουμε τα $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$ και $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$

  π.χ. έχουμε 2Ν ανεξάρτητες μεταβλητές σε ένα Ν-διάστατο χώρο

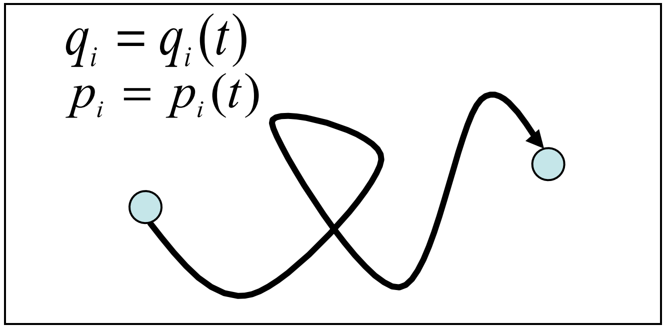
- Υπάρχουν πολλές πιθανές διαδρομές που περνούν από ένα σημείο του χώρου αυτού



- Η αρχή του Hamilton θεμελιώνει ότι η δράση $\int_1^2 \mathcal{L}dt$ έχει στάσιμη τιμή

Χώρος φάσεων

- Θεωρούμε τις συντεταγμένες και τις ορμές σαν ανεξάρτητες $q_i \quad p_i = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$
  - Η κατάσταση του συστήματος δίνεται από $(q_1,\ldots,q_N,p_1,\ldots,p_N)$
  - Το θεωρούμε σαν ένα σημείο σε ένα 2N-διάστατο χώρο φάσεων
- Μετατρέπουμε τις ανεξάρτητες μεταβλητές $(q_i,\dot{q}_i,t) \to (q_i,p_i,t)$
- Για τον μετασχηματισμό αυτό χρειαζόμαστε κάποιο μαθηματικό τέχνασμα



Μετασχηματισμός Legendre

- Ξεκινώντας από μια συνάρτηση δυο μεταβλητών $f(x,y)$
  - Το ολικό διαφορικό γράφεται: $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \equiv udx + \mathrm{v}dy$
- Έστω ότι θέλουμε ένα νέο group από ανεξάρτητες μεταβλητές u,y δηλαδή να αντικαταστήσουμε το x

αντικατέστησε

  - Ορίζουμε μια συνάρτηση g(u,y) τέτοια ώστε: $g \equiv f - ux$

με

  - Το ολικό διαφορικό της g είναι: $dg = df - d(ux) = udx + \mathrm{v}dy - udx - xdu = \mathrm{v}dy - xdu$

  Το οποίο ισούται με: $dg = \frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial y}dy$ αν $\frac{\partial g}{\partial y} = \mathrm{v}$ και $\frac{\partial g}{\partial u} = -x$

- Πως εφαρμόζεται αυτό στην Κλασική Μηχανική?

Αν $f = \mathcal{L}(q,\dot{q})$ δηλαδή $(x,y) = (\dot{q},q)$

Αυτό χρειαζόμαστε

τότε $\mathcal{L}(\dot{q},q) \rightarrow g(p,q) = \mathcal{L} - p\dot{q}$

Hamiltonian

- Ορίζουμε την Hamiltonian:

$$\mathcal{H}(q,p,t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q,\dot{q},t)$$

Αντίθετο πρόσημο από το μετασχ. Legendre

- Το ολικό διαφορικό είναι:

$$d\mathcal{H} = \cancel{p_i} d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}} d\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \dot{p}_i$$

$$d\mathcal{H} = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \quad d\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt$$

Εξισώσεις του Hamilton

$$d\mathcal{H} = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \qquad d\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt$$

- Εξισώνοντας τα δύο ολικά διαφορικά για την Hamiltonian έχουμε:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

  - 2N εξισώσεις αντικαθιστούν τις n-εξισώσεις Lagrange
  - 1^{ης} τάξης διαφορικές εξισώσεις αντί για 2^{ης} τάξης E–L
  - “Συμμετρία” μεταξύ p και q
- Δεν υπάρχει τίποτα το καινούριο – Ανασυντάξαμε τις ίδιες εξισώσεις
  - Η πρώτη εξίσωση συνδέει ορμή και ταχύτητα
    που “δίνεται” στο Newtonian φορμαλισμό
  - Η δεύτερη εξίσωση είναι ισοδύναμη με τις εξισώσεις κίνησης του Newton και Lagrange

Hamiltonian και εξισώσεις Hamilton –Η Συνταγή

① Προσδιορισμός της Lagrangian με το σύνολο των q_i : $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$

② Προσδιορισμός των συζυγών ορμών: $p_i = \dfrac{\partial \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i}$

③ Προσδιορισμός της Hamiltonian: $\mathcal{H}(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$

④ Χρησιμοποίηση της (1) για να γράψουμε τα $\dot{q}_i$ συναρτήσει των q_i και p_i
Αντιστρέφουμε δηλαδή τις εξισώσεις της συζυγούς ορμής

⑤ Αντικατάσταση όποιων $\dot{q}_i$ στην εξίσωση της $\mathcal{H}$ ώστε να είναι συνάρτηση μόνο των q_i και p_i, δηλαδή $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$

⑥ Προσδιορισμός των εξισώσεων κίνησης: (τώρα $\mathcal{H}$ έχει την σωστή μορφή)

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \qquad -\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \qquad \text{και} \qquad -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

Ένα παράδειγμα

- Μάζα m εξαρτημένη από ελατήριο υπακούει στο νόμο του Hooke $F = -kx$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \Rightarrow p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m\dot{x} \Rightarrow$$

$$\mathcal{H} = \dot{x}p - \mathcal{L} = m\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 \Rightarrow$$

$$\mathcal{H} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 \Rightarrow \boxed{\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2}$$

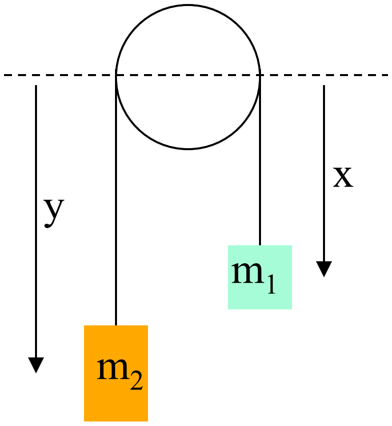
- Οι εξισώσεις Hamilton είναι:

$$\boxed{\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m}} \qquad \boxed{\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -kx}$$

Συνηθισμένες εξισώσεις αρμονικού ταλαντωτή

Δεύτερο Παράδειγμα – Μηχανή Atwood

Έστω ότι η θέση x της m_1 είναι η μια γενικευμένη συντεταγμένη



Η Lagrangian είναι: $\mathcal{L} = T - U$ όπου $T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2$

και $U = -m_1 g x - m_2 g y = -m_1 g x - m_2 g(l - x) \Rightarrow$

$U = -(m_1 - m_2)gx + const \Rightarrow U = -(m_1 - m_2)gx$

Επομένως $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + (m_1 - m_2)gx$

Υπολογίζουμε την Hamiltonian: $\mathcal{H} = p\dot{x} - \mathcal{L}$

- $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \Rightarrow p = (m_1 + m_2)\dot{x}$
- Λύνουμε την εξίσωση αυτή ως προς $\dot{x}$ $\quad \dot{x} = p/(m_1 + m_2)$
- Αντικαθιστούμε στην $\mathcal{H} = p\dot{x} - \mathcal{L}$ $\Rightarrow$ $H = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} - (m_1 - m_2)gx$
- Εξισώσεις Hamilton: $\boxed{\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m_1 + m_2}}$ $\quad \boxed{\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = (m_1 - m_2)g}$

Συνάρτηση ενέργειας

- Ο ορισμός της Hamiltonian είναι ταυτόσημος με αυτόν της συνάρτησης της ενέργειας:

$$h(q,\dot{q},t) = \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - L(q,\dot{q},t)$$

  - Ο διαχωρισμός είναι στις λεπτομέρειες: $\mathcal{H}$ είναι συνάρτηση των (q,p,t)

- Αυτό ισούται με την ολική ενέργεια αν:
  - Η Lagrangian είναι : $\mathcal{L}(q,\dot{q},t) = L_0(q,t) + L_1(q,t)\dot{q}_i + L_2(q,t)\dot{q}_j\dot{q}_k$
  - Οι δεσμοί είναι ανεξάρτητοι του χρόνου
    - Αυτό συνεπάγεται ότι: $T = L_2(q,t)\dot{q}_j\dot{q}_k$
  - Οι δυνάμεις είναι συντηρητικές:
    - Αυτό συνεπάγεται ότι: $V = -L_0(q)$

Hamiltonian και ολική ενέργεια

Αν οι συνθήκες κάνουν το h να αντιστοιχεί σε ολική ενέργεια μπορούμε να παραλείψουμε τον υπολογισμό της Lagrangian και να πάμε απ' ευθείας στον υπολογισμό της Hamiltonian

- Στο παράδειγμά μας για το σώμα στο ελατήριο θα έχουμε:

$$\mathcal{H} = E = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2$$

- Στο παράδειγμά μας για την μηχανή Atwood θα έχουμε:

$$\mathcal{H} = E = T + U = \frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} - (m_1 - m_2)gx$$

- Αυτό δουλεύει πολύ συχνά αλλά όχι πάντα
  - Όταν το σύστημα συντεταγμένων είναι εξαρτώμενο από τον χρόνο

    π.χ. περιστρεφόμενο (μη αδρανειακό) σύστημα συντεταγμένων
  - Όταν το δυναμικό εξαρτάται από την ταχύτητα

    π.χ. σωματίδιο σε ΕΜ πεδίο

Διατήρηση της Hamiltonian

Θεωρούμε τη παράγωγο ως προς το χρόνο της Hamiltonian

$$\frac{d\mathcal{H}(q,p,t)}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

και από τις εξισώσεις Hamilton: $\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \qquad \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}$

$$\boxed{\frac{d\mathcal{H}(q,p,t)}{dt} = -\cancel{\dot{p}\dot{q}} + \cancel{\dot{q}\dot{p}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}}$$

Η Hamiltonian διατηρείται αν δεν εξαρτάται εκφρασμένα από τον χρόνο.

- Η Hamiltonian μπορεί ή όχι να αντιστοιχεί στην ολική ενέργεια
  - Αν αντιστοιχεί, τότε υπάρχει διατήρηση της ενέργειας
  - Ακόμα και αν δεν είναι η ολική ενέργεια, $\mathcal{H}$ είναι μια σταθερά της κίνησης

Κυκλικές συντεταγμένες

- Μια κυκλική συντεταγμένη δεν εμφανίζεται στη Lagrangian $\mathcal{L}$
  - Από κατασκευή δεν θα εμφανίζεται ούτε στην Hamiltonian
  - Η εξίσωση του Hamilton λέει

$$\mathcal{H}(\cancel{q},p,t)=\dot{q}_i p_i-\mathcal{L}(\cancel{q},\dot{q},t)$$

$$\dot{p}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}=0$$

Η συζυγής ορμή μια κυκλικής συντεταγμένης διατηρείται

  - Ακριβώς το αποτέλεσμα που πήραμε και για το Lagrangian φορμαλισμό