Ροπή δύναμης – Μεθοδολογία ασκήσεων

- Κάντε ένα σκίτσο του προβλήματος και διαλέξτε το σώμα ή σώματα που θα αναλύσετε.
- Για κάθε σώμα σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται (διάγραμμα ελευθέρου σώματος). Προσέξτε το σχήμα ώστε να σχεδιάσετε αποστάσεις και γωνίες που θα χρησιμοποιηθούν σε υπολογισμό ροπών
- Διαλέξτε άξονες συντεταγμένων και ορίστε πιθανούς τρόπους περιστροφής (θετική) για τα σώματα.

  Αν υπάρχει γραμμική επιτάχυνση διαλέξτε την φορά της σαν τη θετική φορά ενός άξονα.

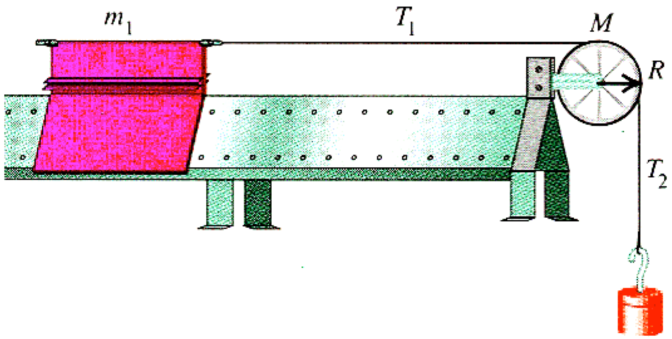
  Αν γνωρίζετε την γωνιακή επιτάχυνση ορίστε τη φορά της σαν ένα άξονα.
- Αναλύστε τις δυνάμεις στις συνιστώσες τους.
- Κάποια προβλήματα μπορεί να έχουν μεταφορική, περιστροφική ή και τις δυο κινήσεις. Ανάλογα με τη συμπεριφορά του σώματος πάρτε τις εξισώσεις

  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ή $\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ ή και τις δυο.
- Αν υπάρχουν δύο ή περισσότερα σώματα επαναλάβετε τα παραπάνω βήματα για κάθε σώμα. Γράψτε τις εξισώσεις και βρείτε ποιες από τις επιταχύνσεις σχετίζουν τα δύο σώματα (π.χ. δύο γραμμικές επιταχύνσεις ή μια γραμμική επιτάχυνση και μια γωνιακή επιτάχυνση).
- Λύστε το σύστημα των εξισώσεων

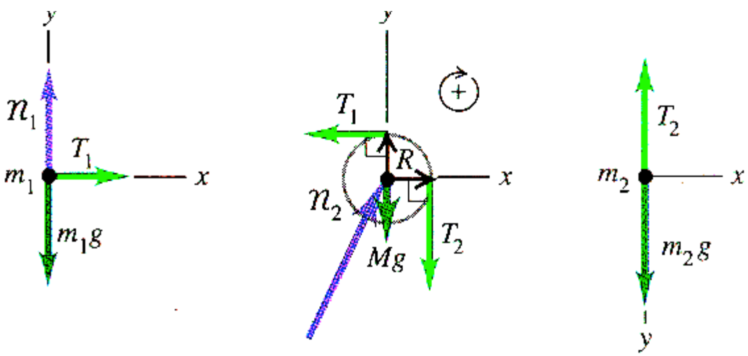
Παράδειγμα

Η μάζα m_1 γλιστρά χωρίς τριβές στην οριζόντια δοκό. Η μάζα m_2 είναι συνδεδεμένη με την m_1 με αβαρές νήμα που περνά από τροχαλία μάζας M και ακτίνας R. Η τροχαλία περιστρέφεται εξαιτίας του νήματος χωρίς να παρουσιάζεται ολίσθηση.

Να βρεθούν η επιτάχυνση κάθε σώματος, η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας και η τάση του νήματος στα δυο τμήματα του νήματος .



ΠΡΟΣΟΧΗ: Στη περίπτωση αυτή υπάρχει τριβή που δεν αφήνει το σχοινί να γλιστρά. Γι' αυτό οι δυο τάσεις T_1 και T_2 δεν μπορεί να είναι ίσες. Αν ήταν τότε η τροχαλία δεν θα είχε γωνιακή επιτάχυνση.



Λύση

Οι εξισώσεις κίνησης για τις μάζες m_1 και m_2:

$$\sum F_x = T_1 = m_1 a_1 \quad (1)$$

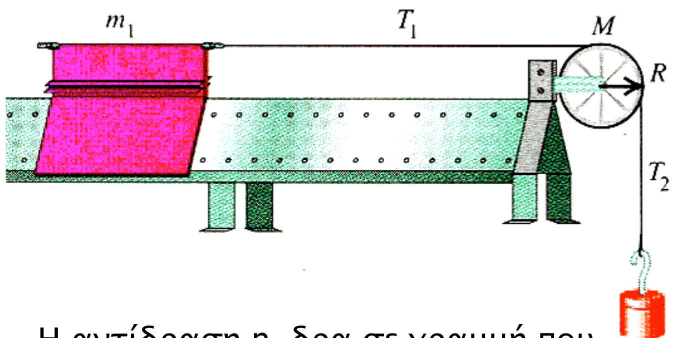
$$\sum F_y = m_2 g + (-T_2) = m_2 a_2 \quad (2)$$

Η άγνωστη αντίδραση n_2 δρα στον άξονα περιστροφής και επομένως έχει ροπή μηδέν.

Παίρνουμε τη φορά των δεικτών του ρολογιού σαν θετική.

Επομένως οι ροπές στη τροχαλία δίνουν: $\sum \tau = T_2 R + (-T_1 R) = I\alpha = \left(MR^2\right)\,\alpha$ (3)

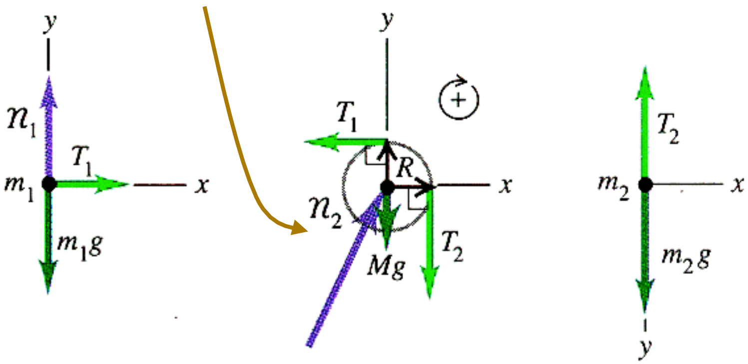
Παράδειγμα (συνέχεια)



Αφού το νήμα δεν γλιστρά η εφαπτομενική επιτάχυνση της τροχαλίας, α θα είναι ίση με την γραμμική επιτάχυνση κάθε σώματος $α_1$, $α_2$:

$$a_1 = a_2 = R\alpha \qquad (4)$$

Η αντίδραση n_2 δρα σε γραμμή που περνά από τον άξονα περιστροφής



Επομένως έχουμε 5 εξισώσεις με 5 αγνώστους $α_1$,$α_2$, α, T_1, T_2

$$T_1 = m_1 a_1 \qquad (1)$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_1 \qquad (2)\&(4)$$

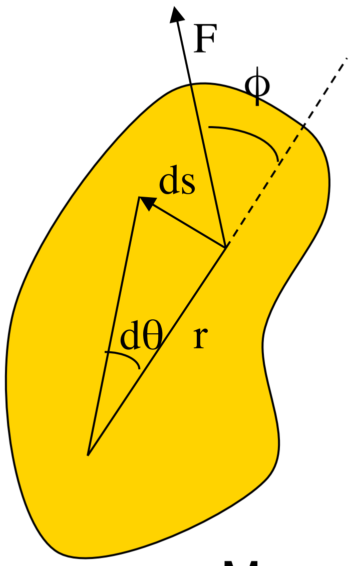
$$T_2 \cancel{R} - T_1 \cancel{R} = MR^{\cancel{2}}\alpha \Rightarrow T_2 - T_1 = M a_1 \qquad (3)\&(4)$$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις έχουμε: $a_1 = \dfrac{m_2 g}{m_1 + m_2 + M} = a_2$

Αντικαθιστώντας στις 2 πρώτες εξισώσεις έχουμε:

$$T_1 = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + M} \qquad T_2 = \frac{(m_1 + M) m_2 g}{m_1 + m_2 + M}$$

Έργο παραγόμενο κατά την περιστροφή στερεού



Μια πατάτα περιστρέφεται γύρω από τον άξονα 0 εξαιτίας μιας εξωτερικής δύναμης F.

Το έργο που παράγει η δύναμη F είναι:

$$\left.\begin{aligned} dW &= \vec{F}\cdot d\vec{s} = Fr\sin\theta d\theta \\ \tau &= rF\sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow dW = \tau d\theta \Rightarrow W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta$$

Ανάλογο του $W = \int_{x_i}^{x_f} F\,dx$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η αρχή έργου-ενέργειας ισχύει και για την περιστροφική κίνηση στερεού σώματος

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta = \frac{1}{2} I\omega_f^2 - \frac{1}{2} I\omega_i^2 = \Delta K$$

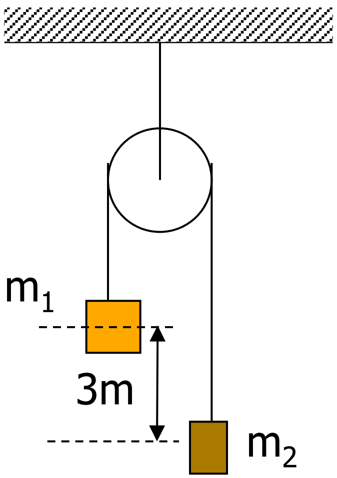
Η απόδειξη είναι:

$$\int_i^f \tau\, d\theta = \int_i^f I \frac{d\omega}{dt} d\theta = \int_i^f I \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} d\theta = \int_i^f I\omega\, d\omega = \frac{1}{2} I\omega_f^2 - \frac{1}{2} I\omega_i^2$$

Ισχύς: $\frac{dW}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow P = \tau\omega$ σε αναλογία με $P = \vec{F}\cdot\vec{\upsilon}$

Παράδειγμα - τροχαλία με μάζα

Ένα σώμα 15kg και ένα σώμα 10kg κρέμονται συνδεδεμένα μεταξύ τους με ένα σχοινί που περνά από μια τροχαλία ακτίνας 10cm και μάζας 3kg. Το σχοινί έχει αμελητέα μάζα και δεν γλιστρά στην τροχαλία. Η τροχαλία περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της χωρίς τριβές. Τα σώματα ξεκινούν έχοντας μεταξύ τους απόσταση 3m. Θεωρήστε την τροχαλία σαν ένα ομοιογενή δίσκο. Προσδιορίστε τις ταχύτητες των δύο σωμάτων καθώς συναντιόνται και προσπερνά το ένα το άλλο με αντίθετη κατεύθυνση.



Δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα που να καταναλώνουν έργο και δεν υπάρχουν δυνάμεις τριβής όπου χάνεται ενέργεια.

Επομένως η μηχανική ενέργεια διατηρείται: $E^{\mathrm{f}}_{\kappa\iota\nu} + U^{\mathrm{f}}_{\mathrm{g}} = E^{\mathrm{i}}_{\kappa\iota\nu} + U^{\mathrm{i}}_{\mathrm{g}}$

Θεωρούμε σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το σημείο στο οποίο συναντιόνται οι δύο μάζες. Άρα:

$$U^{\mathrm{f}}_{\mathrm{g}} = 0$$

$E^{\mathrm{i}}_{\kappa\iota\nu} = 0$ (τα σώματα αρχικά είναι ακίνητα)

$$U^{\mathrm{i}}_{\mathrm{g}} = U^{\mathrm{i}}_{\mathrm{g}1} + U^{\mathrm{i}}_{\mathrm{g}2} = m_1 g h_1 + m_2 g h_2$$

$h_1 = 1.5m, \quad h_2 = -1.5m$ (ως προς το σημείο συνάντησης)

$$E_{\kappa\iota\nu}^{\mathrm{f}} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \longleftarrow$$ περιστροφή τροχαλίας

Το σύστημα των δύο μαζών έχει την ίδια επιτάχυνση και άρα οι 2 μάζες κινούνται με την ίδια ταχύτητα: $\upsilon_1=\upsilon_2=\upsilon$

Αφού το σκοινί δεν γλιστρά στην τροχαλία και αυτή περιστρέφεται τα σημεία επαφής της τροχαλίας με το σκοινί θα έχουν επίσης ταχύτητα υ. Άρα:

$$\omega = \frac{\upsilon}{R}$$

Η κινητική ενέργεια των σωμάτων τη στιγμή που συναντιόνται είναι:

$$E_{\kappa\iota\nu}^{\mathrm{f}} = \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{\upsilon^2}{R^2} \quad \text{όπου} \quad I = \frac{1}{2}MR^2$$

Από εξίσωση διατήρησης της μηχανικής ενέργειας έχουμε:

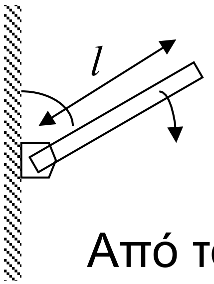
$$E_{\kappa\iota\nu}^{\mathrm{f}} + U_{\mathrm{g}}^{\mathrm{f}} = E_{\kappa\iota\nu}^{\mathrm{i}} + U_{\mathrm{g}}^{\mathrm{i}} \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon^2 + \frac{1}{4}M\upsilon^2 + 0 = 0 + m_1gh_1 + m_2gh_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M\right)\upsilon^2 = m_1g(1.5) + m_2g(-1.5) \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{2\times1.5\times(m_1-m_2)\times g}{m_1+m_2+\frac{1}{2}M}$$

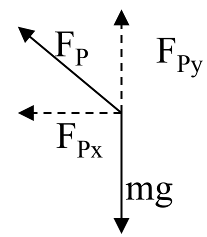
$$\upsilon^2 = \frac{3\times5\times10}{10+15+1.5} \Rightarrow \boxed{\upsilon = 2.36m/s}$$

Παράδειγμα περιστροφής

Μια λεπτή σανίδα μάζας M και μήκους *l* μπορεί να περιστρέφεται γύρω από ένα άκρο της όπως στο σχήμα. Η σανίδα αφήνεται με γωνία 60° ως προς την κατακόρυφο. Ποιο είναι το μέτρο και η διεύθυνση της δύναμης στο σημείο περιστροφής όταν η σανίδα είναι οριζόντια.



Οι δυνάμεις που ασκούνται στην σανίδα στην οριζόντια θέση είναι η δύναμη στο σημείο περιστροφής και η βαρύτητα



Από το 2° νόμο του Newton: $\sum F_x = F_{px} = ma_x$

Το ΚΜ κινείται σε κύκλο $a_x = \dfrac{\upsilon^2}{r} = \dfrac{\upsilon^2}{l/2}$ Άρα: $F_{px} = m\dfrac{2\upsilon^2}{l}$

Χρησιμοποιώντας διατήρηση της ενέργειας βρίσκουμε το υ, $\left(\omega = \dfrac{\upsilon}{R} = \dfrac{\upsilon}{l/2}\right)$

$$E^i = E^f \Rightarrow mg\frac{l}{2}\cos\theta = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow mg\frac{l}{2}\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\frac{\upsilon^2}{l^2/4} \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{3}{4}gl\cos\theta$$

Οπότε $F_{px} = m\dfrac{2}{l}\dfrac{3}{4}gl\cos\theta \Rightarrow F_{px} = \dfrac{3}{4}mg$

$$\sum F_y = F_{py} - mg = ma_y$$

Για να βρούμε τη επιτάχυνση α_y μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ροπή ως προς το σημείο περιστροφής

Η ροπή του βάρους ως προς το σημείο περιστροφής είναι: $\tau = mg\dfrac{l}{2}$

αλλά $\tau = I\alpha \Rightarrow I\alpha = mg\dfrac{l}{2}$ (1) ενώ $a_y = \alpha R = \alpha\dfrac{l}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{2a_y}{l}$ (2)

Ξέρουμε ότι η ροπή αδράνειας ράβδου (σανίδα) ως προς το ΚΜ είναι $I_{CM} = \dfrac{1}{12}ml^2$

Εφόσον περιστρέφεται ως προς το άκρο της, από το θεώρημα παρ/λων αξόνων:

$$I = I_{CM} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\frac{l^2}{4} \Rightarrow I = \frac{1}{3}ml^2 \qquad (3)$$

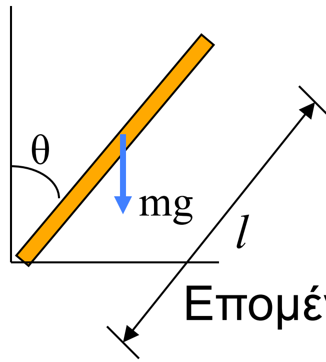
Αντικατάσταση της (2) και (3) στην (1) δίνει: $\dfrac{1}{3}ml^2\dfrac{2a_y}{l} = mg\dfrac{l}{2} \Rightarrow a_y = \dfrac{3}{4}g$

Η εξίσωση του 2ου νόμου του Newton στη y-διεύθυνση δίνει: $F_{py} - mg = m\dfrac{3}{4}g$

Η αντίδραση από το σημείο στήριξης θα είναι: $F_p = \sqrt{F_{px}^2 + F_{py}^2}$

Καμινάδα που πέφτει

Όταν η καμινάδα πέφτει, το πάνω τμήμα της δεν μπορεί να συνεχίσει με το χαμηλότερο και η καμινάδα σπάει. Βρείτε πόσο είναι το τμήμα της καμινάδας (σχετικά με το ολικό της μήκος) το οποίο έχει εφαπτομενική επιτάχυνση μεγαλύτερη από gsinθ όπου θ η γωνία της καμινάδας με την κατακόρυφο. Υποθέστε ότι η καμινάδα είναι ράβδος με ροπή αδράνειας $I_{CM}=ML^2/12$



Η ροπή είναι $\tau = I\alpha$ (1)

και προκαλείται από το βάρος της καμινάδας που βρίσκεται $l/2$ από τη βάση της.

Επομένως $$\tau = mg\frac{l}{2}\sin\theta \qquad (2)$$

Ξέρουμε επίσης ότι $$I_{\mathrm{CM}} = \frac{ml^2}{12}$$

Θεώρημα παρ/λων αξόνων έχουμε: $$I = I_{\mathrm{CM}} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3} \qquad (3)$$

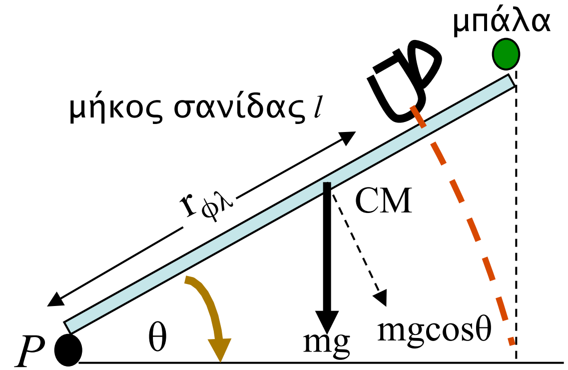
Από (1),(2) και (3): $$\cancel{m}g\frac{\cancel{l}}{2}\sin\theta = \frac{\cancel{m}l^{\cancel{2}}}{3}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\theta$$

Αυτή είναι η επιτάχυνση κάθε τμήματος της καμινάδας

Αλλά $$a_{\varepsilon\varphi.} = \alpha r \Rightarrow a_{\varepsilon\varphi.} = \left(\frac{3}{2}\frac{\cancel{g}}{l}\cancel{\sin\theta}\right) r > \cancel{g\sin\theta} \Rightarrow r > \frac{2}{3}l$$

Δηλαδή περίπου 1/3 της καμινάδας θα επιταχύνεται γρηγορότερα από gsinθ

Μπάλα σε φλιτζάνι (ίδιο με καμινάδα)



Τα αφήνουμε να πέσουν. Η μπάλα πέφτει με επιτάχυνση α=g. Το φλιτζάνι και η σανίδα πέφτουν μαζί και πιο γρήγορα από την μπάλα έτσι ώστε η μπάλα να πέσει μέσα στο φλιτζάνι.

Ποια πρέπει να 'ναι η γωνία θ ώστε αυτό να ισχύει?

$$\left.\begin{aligned} &\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha} = \vec{r} \times \vec{F} \\ &I_P = \left(\frac{1}{3}ml^2\right) \\ &\vec{r} \times \vec{F} = \frac{l}{2} mg\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow mg\frac{l}{2}\cos\theta = \left(\frac{1}{3}ml^2\right)\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3g}{2l}\cos\theta$$

Η εφαπτομενική επιτάχυνση του φλιτζανιού είναι: $a^{\varphi\lambda.}_{\varepsilon\varphi.} = \alpha r_{\varphi\lambda.} = \frac{3}{2} g\cos\theta \frac{r_{\varphi\lambda.}}{l}$

Για να πέσει η μπάλα στο φλιτζάνι πρέπει $\alpha_y > g$ $a^{\varphi\lambda.}_{y} = a^{\varphi\lambda.}_{\varepsilon\varphi.}\cos\theta = \frac{3}{2}\cancel{g}\cos^2\theta\frac{r_{\varphi\lambda.}}{l} > \cancel{g}$

$$\Rightarrow \cos^2\theta \geq \frac{2}{3}\frac{l}{r_{\varphi\lambda}} \quad \text{για} \quad r_{\varphi\lambda.} = l \Rightarrow \cos\theta_{\max} \geq \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \theta_{\max} \leq 35.3^\circ$$

Όταν η μπάλα μπαίνει στο φλιτζάνι τα 2 σώματα έχουν τις ίδιες συντεταγμένες. Η μπάλα όμως βρίσκεται πάντοτε στη θέση $x = l\cos\theta$ ενώ το φλιτζάνι σε κύκλο ακτίνας $r_{\varphi\lambda}$.

Επομένως $r_{\varphi\lambda.} = l\cos\theta$

Κύλιση και περιστροφή

Είδαμε τις εξισώσεις για την περιστροφή γύρω από σταθερό άξονα

Τι ισχύει για συνδυασμένη κίνηση? μεταφορά και περιστροφή

- Αν $\sum \vec{F} = 0$ και $\sum \vec{\tau} = 0$

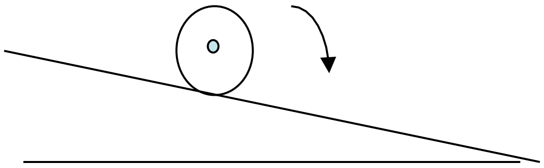
  Τότε υπάρχει ισορροπία. Ούτε μεταφορά ούτε περιστροφή

- Αν $\sum \vec{F} = 0$ και $\sum \vec{\tau} \neq 0$

  Τότε υπάρχει περιστροφή αλλά **όχι μεταφορά**

- Αν $\sum \vec{F} \neq 0$ και $\sum \vec{\tau} \neq 0$

  Τότε υπάρχει περιστροφή και μεταφορά



Μια μπάλα που κυλά προς τα κάτω σε κεκλιμένο επίπεδο