1. Δύο σώματα μάζας m_1 και m_2 έλκονται μεταξύ τους κάτω από την επίδραση ενός λογαριθμικού δυναμικού της μορφής $U(r) = U_0\ln(r/\alpha)$.
(α) Να γραφεί και να σχεδιαστεί το ενεργό δυναμικό $U_{eff}(r)$.
(β) Να βρεθεί η ακτίνα r_0 και η περίοδος T_0 της κυκλικής τροχιάς.
(γ) Για μικρές αποκλίσεις γύρω από την κυκλική τροχιά , γράψτε $r(t) = r_0 + \eta(t)$. Να βρεθεί η εξίσωση της κίνησης για την απόκλιση $\eta(t)$ και να λυθεί υποθέτοντας ότι $\eta(t)$ είναι μικρή ποσότητα.
(δ) Ποια είναι η γεωμετρική εξίσωση της διαταραχής $\eta(\varphi)$; Είναι η διαταραγμένη τροχιά κλειστή ή όχι;

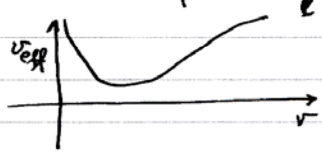
(α) $U(r) = U_0 \ln\left(\frac{r}{a}\right)$

Αφού τα σώματα έλκονται τότε $U_0 > 0$.

Η ενέργεια του συστήματος γράφεται: $E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U_0\ln\left(\frac{r}{a}\right)$

Επομένως $U_{eff}(r) = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U_0 \ln\left(\frac{r}{a}\right)$

Όλες οι ποσότητες είναι θετικές και γιά $r \to 0$ $U_{eff} \to \infty$
ενώ για $r \to \infty$ ο όρος $U_\ell = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} \to 0$ ενώ $U(r) \to \infty$
Επομένως:



(β) Για να έχουμε κυκλική τροχιά $\frac{dU_{eff}}{dr} = 0 \Rightarrow -\frac{2\ell^2}{2\mu r_0^3} + \frac{U_0}{r_0} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow r_0 = \sqrt{\frac{\ell^2}{U_0\mu}}$ ακτίνα κυκλικής τροχιάς.

$\dot{\phi} = \frac{2\pi}{T_0}$ και $\dot{\phi} = \frac{\ell}{\mu r_0}$ οπότε $T_0 = \frac{2\pi}{\frac{\ell}{\mu r_0^2}} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi r_0^2 \mu}{\ell}$

Αντικαθιστώντας για $r_0 = \sqrt{\frac{\ell^2}{U_0\mu}}$ έχουμε: $T_0 = \frac{2\pi\ell}{U_0}$

(γ) $r(t) = r_0 + \eta(t)$

$$L = T - U = \frac{1}{2}\mu\dot{\eta}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu}\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{2}{r_0^3}\eta + \frac{3}{r_0^4}\eta^2 + O(\eta^3)\right) - U_0\left(\ln\frac{r_0}{a} + \frac{1}{r_0}\eta - \frac{1}{2r_0^2}\eta^2 + O(\eta^3)\right)$$

Επομένως η εξίσωση της κίνησης θα είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow \mu\ddot{\eta} + \eta\left[\frac{U_0}{r_0^2} + \frac{3\ell^2}{\mu r_0^4}\right] = 0$$

όπου οι όροι που είναι γραμμικοί ως πρός η απαλοίφονται μια και $\left.\frac{dU_{eff}}{dr} = 0\right|_{r=r_0}$ Επομένως: $\boxed{\mu\ddot{\eta} + \eta\omega_0^2 = 0}$ όπου $\boxed{\omega_0^2 = \frac{U_0}{r_0^2} + \frac{3\ell^2}{\mu r_0^4}}$

Επομένως η λύση της εξίσωσης αυτής είναι: $\eta(t) = A\cos\omega_0 t + \delta$

(δ) Η εξίσωση της διαταραχής είναι: $\eta(t) = A\cos\omega_0 t$ όπου θεωρώ ότι $\delta = 0$ για ευκολία

Μπορώ να γράψω $t = \frac{\phi}{\dot{\phi}}$ και να αντικαταστήσω στη λύση

$$\eta(\phi) = A\cos\left(\omega_0 \frac{\phi}{\dot{\phi}}\right)$$

Για να δούμε αν η τροχιά είναι κλειστή θα πρέπει να εξετάσουμε

αν $\eta(\phi=0) = \eta(\phi=2\pi)$ (που είναι ισοδύναμο με $\eta(t=0) = \eta(t=T_0)$)

Για $t=0$ $\quad \eta(0) = A$

για $t = T_0$ $\quad \eta(T_0) = A\cos\left[\underbrace{\left(\sqrt{\frac{v_0}{r_0^2} + \frac{3\ell^2}{\mu r_0^4}}\right)\frac{2\pi\ell}{v_0}}_{= 2\pi k}\right]$ $\Rightarrow$ για να είναι περιοδική

$$\Rightarrow k \overset{?}{=} \sqrt{\frac{v_0}{r_0^2} + \frac{3\ell^2}{\mu r_0^4}}\ \frac{\ell}{v_0}$$ που δεν είναι ακέραιος.

Επομένως η τροχιά δεν είναι κλειστή.

2. Ένας πλανήτης μάζας m περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά ακτίνας R, γύρω από ένα αστέρα μάζας Μ. Θεωρείστε ότι M>>m. Ξαφνικά σαν αποτέλεσμα μιας έκρηξης supernova, ο αστέρας χάνει ακριβώς το 20% της αρχικής του μάζας. Η έκρηξη είναι σφαιρικά συμμετρική οπότε το δυναμικό εξακολουθεί να είναι κεντρικό δυναμικό Kepler και τα εκτοξευόμενα τμήματα της μάζας του αστέρα δεν επηρεάζουν την κίνηση του πλανήτη τη στιγμή της έκρηξης (δηλαδή δεν έρχονται σε σύγκρουση με τον πλανήτη). Θεωρείστε ότι τόσο η έκρηξη όσο και η απώλεια της μάζας του αστέρα γίνονται στιγμιαία.

(α) Να βρεθούν η ενέργεια και η στροφορμή του συστήματος πριν και μετά την έκρηξη. (**7β**)

(β) Να βρεθεί η εκκεντρότητα της τροχιάς του πλανήτη μετά την έκρηξη.(**3β**)

(γ) Να βρεθούν πόσα και ποια είναι τα σημεία καμπής της νέας τροχιάς συναρτήσει της ακτίνας, R, της αρχικής τροχιάς. (**2β**)

(δ) Κάντε ένα καθαρό σχήμα στο οποίο να φαίνονται η αρχική τροχιά του πλανήτη, η θέση του πλανήτη τη στιγμή της έκρηξης και η νέα τροχιά του πλανήτη, αυτή δηλαδή που θα ακολουθήσει ο πλανήτης μετά την έκρηξη. Στο σχήμα σας θα πρέπει να φαίνονται όλα τα σχετικά μεγέθη που περιγράφουν το είδος της τροχιάς του πλανήτη.(**3β**)

(α) Απο τη στιγμή που η έκρηξη είναι σφαιρικά συμμετρική, η κίνηση του πλανήτη θα εξακολουθεί να είναι κάτω από ένα δυναμικό όπως του Kepler, βαρυτικό δυναμικό : $V = -\frac{GMm}{r}$

Έτσι θα έχουμε :

<u>Πριν την έκρηξη</u> — <u>Μετά την έκρηξη</u>

$$V = -\frac{k}{r} = -\frac{GMm}{r}, \ k = GMm \qquad V' = -\frac{k'}{r} = -\frac{GM'm}{r} = -\frac{4}{5}\frac{GMm}{r}, \ k' = \frac{4}{5}GMm = \frac{4}{5}k$$

όπου M' η μάζα του αστέρα μετά την έκρηξη $M' = \frac{4}{5}M$ $\left(1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}M\right)$.

Η μόνη ποσότητα που διατηρείται είναι η στροφορμή, αφού V και V' είναι κεντρικά δυναμικά, και δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις που να ασκούνται στο σύστημα, οπότε να παράγουν ροπές. Επομένως $\ell' = \ell$

Η ενέργεια του συστήματος δεν διατηρείται αφού έχουμε απώλειες μάζας.

Αφού $M \gg m \Rightarrow \mu = \frac{Mm}{M+m} \simeq m$ και επομένως το κέντρο μάζας μπορούμε να πούμε ότι συμπίπτει με τη θέση του αστέρα, ο οποίος λαμβάνεται ότι είναι σε ηρεμία.

Επομένως η κίνηση του συστήματος μπορεί να προσεγγισθεί με την κίνηση ενός σώματος μάζας m (ο πλανήτης) γύρω από το κέντρο μάζας (το αστέρας)

Έστω R η ακτίνα της αρχικής κυκλικής τροχιάς:

$$E = T+V = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{GmM}{R} \simeq \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{R} \quad (1)$$ (ενέργεια πριν την έκρηξη)

$$E' = T'+V' = \frac{1}{2}\mu v'^2 - \frac{GmM'}{R} \simeq \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{4}{5}\frac{GmM}{R} \quad (2)$$ (ενέργεια μετά την έκρηξη - η θέση R του πλανήτη είναι ίδια)

Εκφράζουμε τις ταχύτητες του πλανήτη πριν και μετά την έκρηξη (v και v') συναρτήσει της σταθερής ποσότητας ℓ

$$\left.\begin{array}{l} \ell = \mu v R \\ \ell' = \mu v' R \\ \ell = \ell' \end{array}\right\} \Rightarrow \ell = \mu v R = \mu v' R \Rightarrow \boxed{v = v' \simeq \frac{\ell}{mR}} \quad (3)$$

Αφού αρχικά ο πλανήτης εκτελούσε κυκλική τροχιά, τότε $\left.\frac{dV_{eff}}{dr}\right|_{r=R} = 0$

Επομένως: $$\left.\frac{d}{dr}\left(\frac{\ell^2}{2\mu r^2} + \left(-\frac{GmM}{r}\right)\right)\right|_{r=R} = 0 \Rightarrow -\frac{\cancel{2}\ell^2}{\cancel{2}\mu R^3} + \frac{GmM}{R^2} = 0 \Rightarrow \frac{\ell^2}{mR^{\cancel{3}}} = \frac{GmM}{\cancel{R^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell^2 = m^2 GMR \Rightarrow \boxed{\ell = m\sqrt{GMR}} \quad (4)$$

(αυτό βγαίνει και από $F_g = F_k \Rightarrow \frac{GmM}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$)

Αντικαθιστώντας την (4) στην (3) $\Rightarrow$ $v = v' = \frac{\cancel{m}\sqrt{GMR}}{\cancel{m}R} \Rightarrow \boxed{v = v' = \frac{\sqrt{GMR}}{R}}$

Επομένως μπορούμε να βρούμε τις ενέργειες πριν και μετά την έκρηξη, από (1) και (2)

$$E = \frac{1}{2}m\frac{GM\cancel{R}}{R^{\cancel{2}}} - \frac{GMm}{R} \Rightarrow E = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{R} \Rightarrow \boxed{E = -\frac{1}{2}\frac{k}{R}}$$

$$E' = \frac{1}{2}m\frac{GM\cancel{R}}{R^{\cancel{2}}} - \frac{4}{5}\frac{GMm}{R} \Rightarrow E' = -\frac{3}{10}\frac{GMm}{R} \Rightarrow \boxed{E' = -\frac{3}{10}\frac{k}{R}}$$

Η ενέργεια E' είναι αρνητική και επομένως η τροχιά θα είναι ελλειπτική

Η εκκεντρότητά της δίνεται από τη σχέση: $e' = 1 + \frac{2E'\ell'}{\mu k'^2} \simeq 1 + \frac{2E'\ell'}{mk'^2}$

Αντικαθιστώντας τα E', ℓ', k' έχουμε:

$$e'^2 = 1 + \frac{2\ell^2\left(-\frac{3}{10}\frac{k}{R}\right)}{m\left(\frac{4}{5}\right)^2 k^2} = 1 - \frac{\ell^2 \frac{3}{5}\frac{\cancel{k}}{R}}{m\frac{16}{25}k^{\cancel{2}}} \Rightarrow e'^2 = 1 - \frac{15\ell^2}{16\,mkR} \overset{(4)}{\Rightarrow} e'^2 = 1 - \frac{15\cancel{m^2}\cancel{GM}\cancel{R}}{16\cancel{m}\cancel{GMm}\cancel{R}}$$

$$\Rightarrow e'^2 = 1 - \frac{15}{16} \Rightarrow \boxed{e'^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow e' = \frac{1}{4}}$$

Επομένως η τροχιά μετά την έκρηξη είναι όντως μια έλλειψη.

Μπορούμε να βρούμε το περιήλιο και αφήλιο της τροχιάς, δηλαδή τα r_{min} και r_{max}. Ξέρουμε ότι

$$r_{min} = \alpha'(1-e')$$
$$r_{max} = \alpha'(1+e')$$

όπου α' το μήκος του μεγάλου ημιάξονα της έλλειψης

Αλλά $\alpha' = \frac{-k'}{2E'} = -\frac{\frac{4}{\cancel{5}}\cancel{k}}{\cancel{2}\left(-\frac{3}{\cancel{10}}\frac{\cancel{k}}{R}\right)} \Rightarrow \boxed{\alpha' = \frac{4}{3}R}$

Επομένως : $r_{min} = \frac{4}{3}R\left(1-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \boxed{r_{min} = R}$ όπως αναμενόταν

$$r_{max} = \frac{4}{3}R\left(1+\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \boxed{r_{max} = \frac{5}{3}R}$$

Το μήκος του μικρού ημιάξονα της έλλειψης θα είναι: $b'^2 = \alpha'^2(1-e'^2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow b' = \frac{4}{3}R\left(1-\frac{1}{16}\right)^{1/2} \Rightarrow \boxed{b' = \frac{\sqrt{15}}{3}R}$$

Επομένως το σχήμα της τροχιάς πριν και μετά την έκρηξη θα είναι: