

Εύρεση ηλεκτρικού πεδίου από ηλεκτρικό δυναμικό

Η σχέση μεταξύ διαφοράς ηλεκτρικού δυναμικού και ηλεκτρικού πεδίου είναι:

$$\Delta V_e = \frac{\Delta U_e}{q} = - \int_A^B \left(\frac{\vec{F}_e}{q_0} \right) \cdot d\vec{s} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Έστω ότι έχουμε δύο σημεία τα οποία απέχουν μικρή απόσταση, $d\vec{s}$, μεταξύ τους.

Η προηγούμενη σχέση οδηγεί στη διαφορική μορφή: $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$

Χρησιμοποιώντας Καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k} \quad \text{και} \quad d\vec{s} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$$

$$\text{οπότε: } dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = -(E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}) = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

$$\text{Η τελευταία σχέση υποδηλώνει ότι: } E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\text{Χρησιμοποιώντας τον τελεστή «del»}: \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\text{Γράφουμε το ηλεκτρικό πεδίο: } \vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι αν το ηλεκτρικό δυναμικό αυξάνει καθώς ένα θετικό φορτίο κινείται σε μια κατεύθυνση, έστω x , με $\frac{\partial V}{\partial x} > 0$, τότε υπάρχει μη μηδενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου, $-E_x \neq 0$, στην αντίθετη κατεύθυνση.

Εύρεση ηλεκτρικού πεδίου από ηλεκτρικό δυναμικό

Αν η κατανομή φορτίου έχει σφαιρική συμμετρία, τότε το ηλεκτρικό πεδίο είναι συνάρτηση της ακτινικής απόστασης r , δηλαδή $\vec{E} = E_r \hat{r}$

Στην περίπτωση αυτή, $dV = -E_r \hat{r}$

Αν γνωρίζουμε το $V(r)$ τότε μπορούμε να βρούμε το \vec{E} : $\vec{E} = E_r \hat{r} = -\left(\frac{dV}{dr}\right) \hat{r}$

Σαν παράδειγμα το ηλεκτρικό δυναμικό ενός σημειακού φορτίου είναι $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

Από την προηγούμενη σχέση θα πάρουμε τότε: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$

Κλίση και ισοδυναμικές

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σύστημα σε δύο διαστάσεις με δυναμικό $V(x,y)$. Οι καμπύλες που χαρακτηρίζονται από σταθερό δυναμικό $V(x,y)$ ονομάζονται **ισοδυναμικές καμπύλες**

Σε τρεις διαστάσεις έχουμε **ισοδυναμικές επιφάνειες** και περιγράφονται από τη σχέση: $V(x,y,z) = \text{σταθ.}$

Εφόσον $\vec{E} = -\nabla V$ μπορούμε να δείξουμε ότι η διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} είναι πάντα κάθετη στην ισοδυναμική στο σημείο τομής.

Απόδειξη:

Έστω ένα σημείο $P(x,y)$ με δυναμικό $V(x,y)$

Έστω ένα γειτονικό σημείο $P(x+dx, y+dy)$.

Πόσο μπορεί να αλλάξει το δυναμικό;

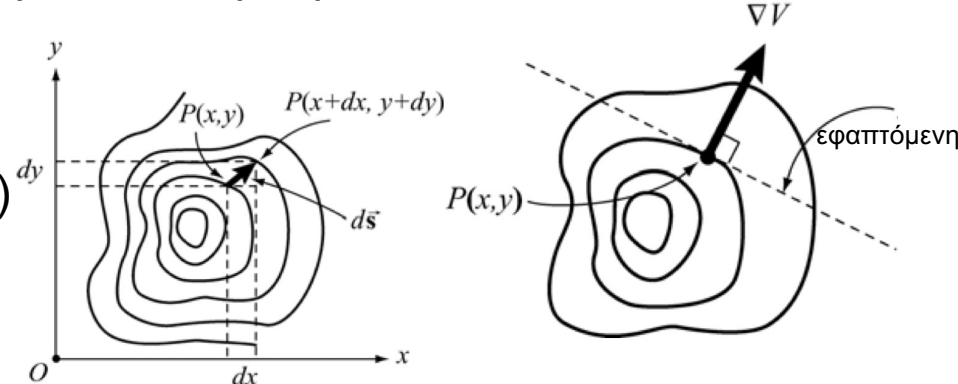
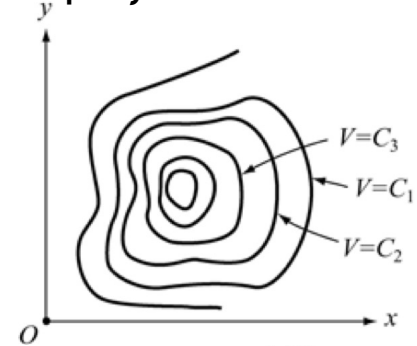
Έστω η διαφορά δυναμικού είναι: $dV = V(x+dx, y+dy) - V(x,y) \Rightarrow$

$$dV = \left[V(x,y) + \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \dots \right] - V(x,y) \approx \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy$$

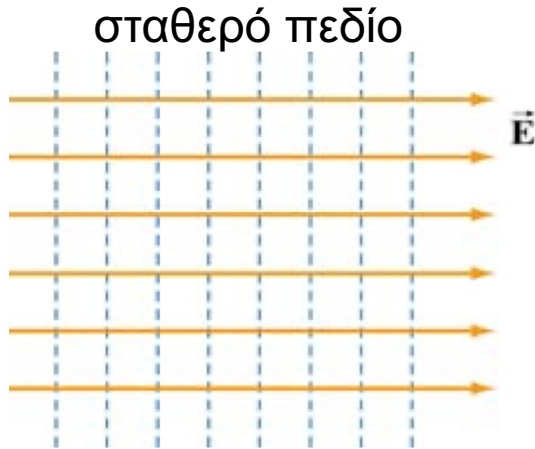
Αλλά το διάνυσμα της μετατόπισης είναι: $d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$ και μπορούμε να γράψουμε:

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} \right) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) \Rightarrow dV = (\nabla V) \cdot d\vec{s} \Rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Αν $d\vec{s}$ κατά μήκος της εφαπτόμενης, τότε $dV=0$ (ισοδυναμική) } $\Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{s}$



Ισοδυναμικές



Τα χαρακτηριστικά των ισοδυναμικών επιφανειών είναι:

- (α) Οι ηλεκτρικές γραμμές είναι κάθετες πάντοτε στις ισοδυναμικές και έχουν διεύθυνση από υψηλότερο σε χαμηλότερο δυναμικό.
- (β) Λόγω συμμετρίας, οι ισοδυναμικές επιφάνειες που παράγονται από σημειακό φορτίο είναι πάντοτε ομόκεντρες σφαίρες και για σταθερό ηλεκτρικό πεδίο, δημιουργούν μια οικογένεια από επίπεδα κάθετα στις γραμμές του πεδίου.
- (γ) Η εφαπτόμενη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος της ισοδυναμικής επιφάνειας είναι μηδέν, διαφορετικά θα υπήρχε έργο για την μετακίνηση φορτίου από ένα σημείο της επιφάνειας σε ένα άλλο.
- (δ) Δεν απαιτείται έργο για την μετακίνηση ενός φορτίου κατά μήκος μιας ισοδυναμικής επιφάνειας

1^ο Παράδειγμα: Δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένης ράβδου

Θεωρούμε μια μη αγωγίμη ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδο μήκους l και γραμμικής πυκνότητας φορτίου λ . Ποιο το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P που βρίσκεται σε απόσταση y από τη ράβδο στην κατακόρυφο που περνά από το μέσο της ράβδου.

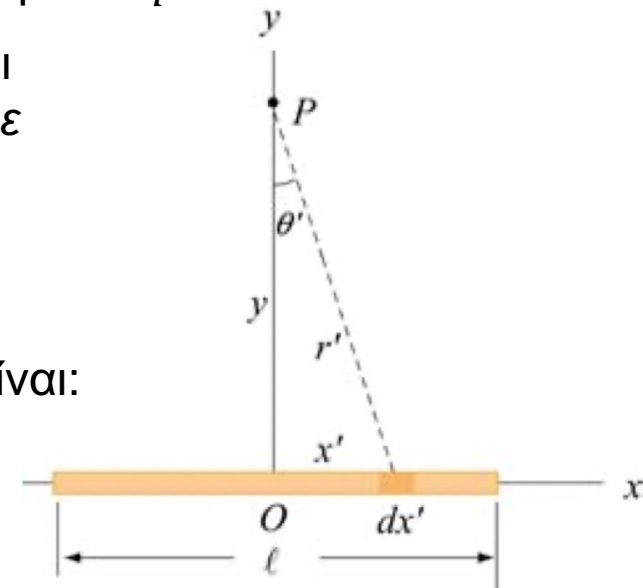
Θεωρούμε στοιχειώδες μήκος dx' το οποίο εμπεριέχει φορτίο $dq = \lambda dx'$.

Το στοιχειώδες φορτίο που δημιουργεί το πεδίο βρίσκεται στη θέση $(x', 0)$ ενώ το δοκιμαστικό φορτίο στη θέση P με συντεταγμένες $(0, y)$

Η απόσταση από την πηγή στο P είναι: $\sqrt{x'^2 + y^2}$

Η συνεισφορά του στοιχειώδους φορτίου στο δυναμικό είναι:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$$



Θεωρούμε ότι το δυναμικό είναι 0 στο άπειρο.

Επομένως το δυναμικό εξαιτίας όλης της ράβδου θα είναι:

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 + y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[x' + \sqrt{x'^2 + y^2} \right] \Big|_{-l/2}^{+l/2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(l/2) + \sqrt{(l/2)^2 + y^2}}{-(l/2) + \sqrt{(l/2)^2 + y^2}} \right]$$

1^ο Παράδειγμα: Δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένης ράβδου

Το γράφημα του $V(y)/V_0$ όπου $V_0 = \lambda/4\pi\epsilon_0$, συναρτήσει της ποσότητας y/l .

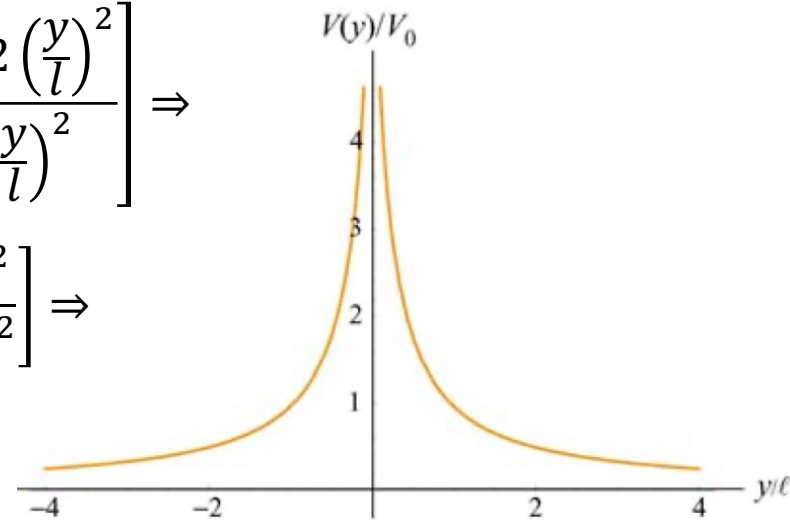
Στο όριο $l \gg y$, το δυναμικό γίνεται:

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(l/2) + (l/2)\sqrt{1 + (2y/l)^2}}{-(l/2) + (l/2)\sqrt{1 + (2y/l)^2}} \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1 + (2y/l)^2}}{-1 + \sqrt{1 + (2y/l)^2}} \right] \Rightarrow \text{δινουμικό ανάπτυγμα}$$

$$V \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{1 + \left\{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2y}{l}\right)^2\right\}}{-1 + \left\{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2y}{l}\right)^2\right\}} \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{2 + 2 \left(\frac{y}{l}\right)^2}{2 \left(\frac{y}{l}\right)^2} \right] \Rightarrow$$

$$V \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{2}{2 \left(\frac{y}{l}\right)^2} \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{1}{\left(\frac{y}{l}\right)^2} \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{l^2}{y^2} \right] \Rightarrow$$

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{l}{y} \right]$$



Το αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + y^2}}$$

2° Παράδειγμα: Δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένου δακτυλίου

Θεωρούμε έναν μη αγωγίμο ομοιόμορφα φορτισμένο δακτύλιο ακτίνας R και γραμμικής πυκνότητας φορτίου λ . Ποιο το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P που βρίσκεται σε απόσταση z από τον κεντρικό άξονα.

Θεωρούμε στοιχειώδες μήκος $dl' = R d\phi'$.

Το τμήμα αυτό εμπεριέχει φορτίο $dq = \lambda dl' = \lambda R d\phi'$.

Το στοιχειώδες δυναμικό στο P θα είναι επομένως:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\phi'}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

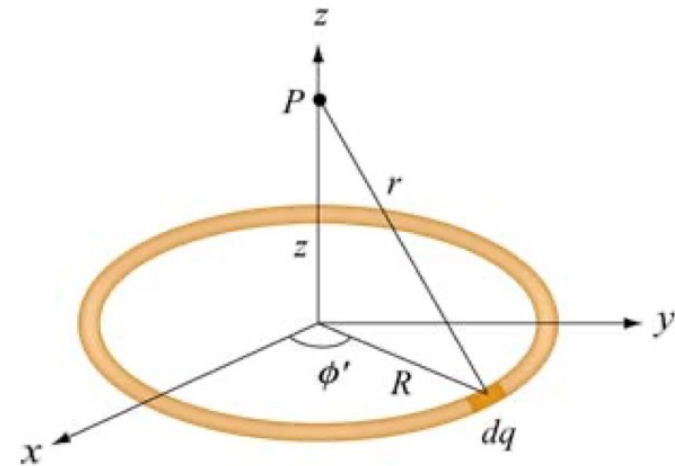
Το δυναμικό στο P θα είναι επομένως:

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \oint d\phi' \Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda 2\pi R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Όταν $z \gg R$, το δυναμικό προσεγγίζεται με αυτό του σημειακού φορτίου: $V \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z}$

Το ηλεκτρικό πεδίο στην θέση P υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \Rightarrow E_z = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \Rightarrow E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$



3^ο Παράδειγμα: Δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου

Θεωρούμε μη αγώγιμο ομοιόμορφα φορτισμένο δίσκο ακτίνας R και επιφανειακής πυκνότητας φορτίου σ . Ο δίσκος βρίσκεται στο x - y επίπεδο. Να βρεθεί το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P που βρίσκεται σε απόσταση z από τον κεντρικό άξονα.

Θεωρούμε έναν δακτύλιο ακτίνας r' και πλάτους dr' .

Το φορτίο του στοιχειώδους αυτού δακτυλίου είναι:

$$dq = \sigma dA = \sigma (2\pi r' dr')$$

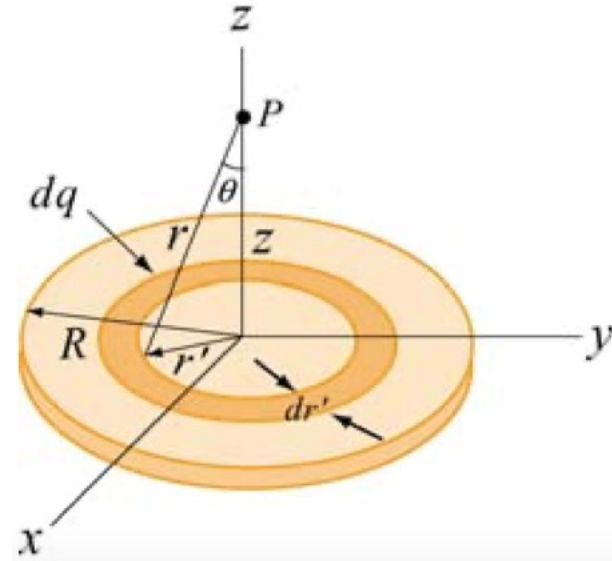
Το δυναμικό στο σημείο P εξαιτίας αυτού του στοιχειώδους φορτίου θα είναι:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma (2\pi r' dr')}{\sqrt{r'^2 + z^2}}$$

Αθροίζουμε (ολοκληρώνουμε) ως προς όλους τους στοιχειώδεις δακτυλίους που απαρτίζουν τον δίσκο:

$$V = \int dV = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{(r' dr')}{\sqrt{r'^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{(r' dr')}{\sqrt{r'^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{r'^2 + z^2} \right]_0^R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right]$$



3^ο Παράδειγμα: Δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου

Στο όριο $|z| \gg R$ μπορούμε να πάρουμε το διωνυμικό ανάπτυγμα της $\sqrt{R^2 + z^2}$ οπότε:

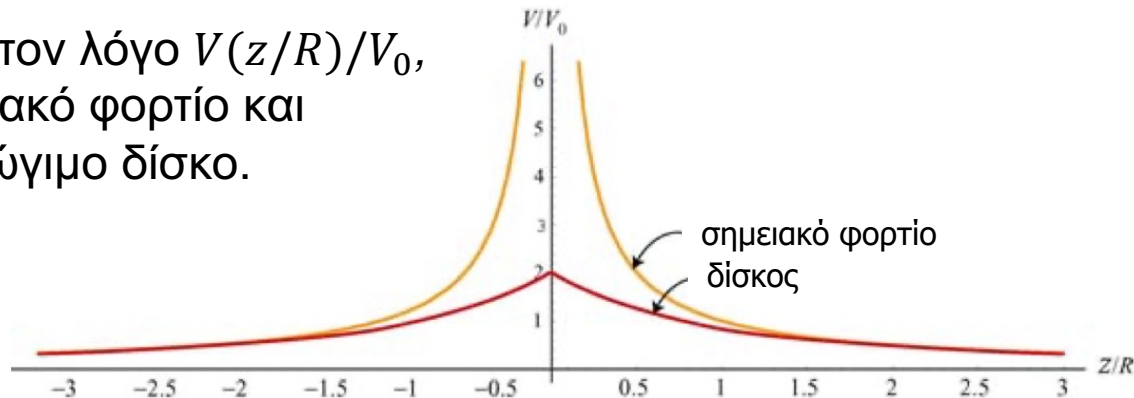
$$\sqrt{R^2 + z^2} = |z| \sqrt{\left(\frac{R}{z}\right)^2 + 1} = |z| \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{z}\right)^2 + \dots \right] = |z| \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} \right)$$

Οπότε το δυναμικό απλουστεύεται σε αυτό του σημειακού φορτίου:

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} |z| \left[1 + \frac{R^2}{2z^2} - 1 \right] \Rightarrow V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} |z| \frac{R^2}{2z^2} \Rightarrow V = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \frac{R^2}{|z|} \Rightarrow V = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\pi R^2}{|z|} \Rightarrow \boxed{V = \frac{Q}{4|z|\pi\varepsilon_0}}$$

Όπως είναι αναμενόμενο, το δυναμικό εξαιτίας ενός μη αγώγιμου δίσκου φορτίου Q είναι το ίδιο με αυτό που προκαλεί ένα σημειακό φορτίο Q .

Το διπλανό γράφημα συγκρίνει τον λόγο $V(z/R)/V_0$, όπου $V_0 = Q/(4\pi\varepsilon_0 R)$ για σημειακό φορτίο και ομοιόμορφα φορτισμένο μη-αγώγιμο δίσκο.



3^ο Παράδειγμα: Δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου

Βρήκαμε ότι το δυναμικό που προκαλεί φορτισμένος δίσκος ομοιόμορφης κατανομής φορτίου σε σημείο P σε απόσταση z είναι: $V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right]$

Το δυναμικό στο κέντρο του δίσκου ($z = 0$) είναι:

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} R = \frac{\sigma\pi R^2}{2\pi\varepsilon_0 R} = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow V = 2V_0$$

Το έργο που χρειάζεται για να φέρουμε το μοναδιαίο φορτίο από το άπειρο στο κέντρο του δίσκου.

Το αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P θα είναι:

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \quad \text{που συμφωνεί με τον υπολογισμό ξεκινώντας από τον ορισμό του ηλεκτρικού πεδίου:}$$

Στο όριο $R \gg z$, η εξίσωση δίνει $E_z = \sigma/2\varepsilon_0$ που είναι το ηλεκτρικό πεδίο άπειρης μη-αγώγιμης επιφάνειας.

4^ο Παράδειγμα: Υπολογισμός ηλεκτρικού πεδίου από δυναμικό

Έστω ότι το ηλεκτρικό δυναμικό εξαιτίας μιας κατανομής φορτίου γράφεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες ως:

$$V(x, y, z) = Ax^2y^2 + Bxyz \quad \text{όπου } A, B, \text{ σταθερές.}$$

Ποιο το ηλεκτρικό πεδίο που σχετίζεται με το δυναμικό αυτό;

Το ηλεκτρικό πεδίο βρίσκεται από τις εξισώσεις:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2Axy^2 - Byz$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -2Ax^2y - Bxz$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -Bxy$$

Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι:

$$\vec{E} = (-2Axy^2 - Byz)\hat{i} - (2Ax^2y + Bxz)\hat{j} - Bxy\hat{k}$$