ΦΥΣ 145 – Μαθηματικές Μέθοδοι στη Φυσική

5 Μαίου 2012

Συμπληρώστε τα στοιχεία σας στο παρακάτω πίνακα τώρα

Ονοματεπώνυμο	
Αρ. Ταυτότητας	
Username	
Password	

Δημιουργήστε ένα φάκελο στο home directory σας με το όνομα **Final** (όχι άλλα ονομάτα). Θα πρέπει να δουλέψετε όλα τα προβλήματα της εξέτασης στο φάκελο αυτό και πουθενά αλλού. Στο τέλος της εξέτασης τα αρχεία σας θα παρθούν από το φάκελο αυτό.

Σας δίνονται 5 προβλήματα και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλα. Συνολική βαθμολογία 100 μονάδες. Διαβάστε όλα τα προβλήματα και αρχίστε να δουλεύετε πρώτα με αυτά που νομίζετε ότι ξέρετε να λύσετε. Η σειρά των προβλημάτων δεν είναι ενδεικτική της δυσκολίας τους.

Ο χρόνος εξέτασης είναι 240 λεπτά.

Επιτρέπεται: η χρήση του υλικού των ιστοσελίδων και μόνο του μαθήματος, καθώς και οι ασκήσεις/λύσεις των εργαστηρίων και homeworks που έχετε δώσει και σας έχουν δοθεί. ***Απαγορεύονται:*** η συνεργασία/συζήτηση και οποιαδήποτε ανταλλαγή αρχείων, η χρήση e-mail καθώς και η χρήση κινητών τηλεφώνων τα οποία θα πρέπει να απενεργοποιηθούν τώρα.

Καλή επιτυχία
Καλό καλοκαίρι και
Καλή συνέχεια στα επόμενα χρόνια σας στο φυσικό

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Το πολυόνυμο Legendre τάξης L ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$P(L,x) = A(L)\sum_{r=0}^{r=L/2}\left[B(L,r)\,x^{(L-2r)}\right]$$

όπου $A(L) = 1/2^L$ και $B(L,r)$ δίνεται από τη σχέση:

$$B(L,r) = (-1)^r \frac{(2L-2r)!}{\left[r!(L-r)!(L-2r)!\right]}$$

Στο πρόβλημα αυτό θα μελετήσετε το πολυόνυμο Legendre τάξης L = 8.

Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να έχει τα ακόλουθα στοιχεία:

(α) Μια συνάρτηση, *FACT*, η οποία υπολογίζει το παραγοντικό ενός ακεραίου που περνάτε.[**2μ**]

(β) Μια συνάρτηση, *LEGENDRE*, η οποία υπολογίζει την τιμή του πολυονύμου Legendre P(8,x) για κάποια τιμή του x που περνάτε. [**4μ**]

(γ) Θα πρέπει να γράψετε ένα κύριο πρόγραμμα το οποίο δέχεται από το πληκτρολόγιο την αρχική τιμή του x για την οποία θα πρέπει να υπολογίσετε το $P(8,x)$. Η αρχική αυτή τιμή είναι x =-1. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να υπολογίζει την τιμή του πολυονύμου για όλες τις τιμές του x στο διάστημα [-1, 1] με βήμα δx = 0.05. Θα πρέπει να γράψετε τις τιμές του x και τις αντίστοιχες τιμές του πολυονύμου $P(8,x)$ σαν ζεύγη, σε ένα file το οποίο ονομάζεται *Legendre.dat.* [**4μ**]

(δ) Βλέποντας το file αυτό θα παρατηρήσετε ότι $P(8,x)$ έχει 4 ρίζες στο διάστημα [-1.0,0.0]. Επειδή το πολυόνυμο είναι συμμετρικό ως προς x, αυτές οι ρίζες θα είναι συμμετρικές και θα υπάρχουν και στο διάστημα [0.0,1.0]. Επομένως βρίσκοντας τις 4 αρνητικές ρίζες θα έχουμε βρει και τις 4 θετικές. Θα πρέπει τώρα να προσθέσετε στο πρόγραμμά σας μια συνάρτηση, *NEWTON*, η οποία υπολογίζει την ρίζα μιας συνάρτησης, η οποία βρίσκεται ανάμεσα σε δυο τιμές x_1 και x_2 που περνάτε σαν ορίσματα στην συνάρτηση *NEWTON*. Η συνάρτηση *NEWTON* θα πρέπει να έχει δυο ακόμα ορίσματα, την συνάρτηση την ρίζα της οποίας θέλετε να βρείτε και την ακρίβεια με την οποία θέλετε να βρείτε τη ρίζα. Θεωρήστε ότι η ακρίβεια που θέλετε να πετύχετε για την εύρεση της ρίζας είναι ε = 0.000001. Η τιμή της ρίζας θα είναι αυτή για την οποία είτε η τιμή του $|P(8,x)| < \varepsilon$ ή $|x_1 - x_2| < \varepsilon$. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει τώρα να τυπώνει και τις ρίζες τις οποίες βρίσκετε σε ένα file το οποίο ονομάζεται *LegendreRoots.dat.*

Υπόδειξη: Μπορείτε να προσεγγίσετε τη παράγωγο του πολυωνύμου από την κλίση της ευθείας που ορίζεται από τα σημεία x_1 και x_2 και τις αντίστοιχες τιμές του πολυονύμου [**7μ**]

(ε) Κάντε την γραφική παράσταση των τιμών του πολυονύμου $P(8,x)$ συναρτήσει του x χρησιμοποιώντας τις τιμές που έχετε αποθηκεύσει στο file *Legendre.dat* στο (γ) ερώτημα. Το γράφημα που θα πρέπει να έχει κατάλληλα ονοματισμένους άξονες θα πρέπει να το αποθηκεύσετε στο αρχείο *Legendre.pdf.* [**3μ**]

2. Ένα σώμα κινείται σε οριζόντια διεύθυνση με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 4.0 m/s^2$ και δέχεται την επίδραση μιας δύναμης αντίστασης η οποία παρουσιάζει γραμμική εξάρτηση από την ταχύτητα, υ, του σώματος. Η δύναμη της αντίστασης είναι τέτοια ώστε οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση του σώματος είναι:

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon \text{ και } \frac{d\upsilon}{dt} = 4.0 - 0.5\upsilon$$

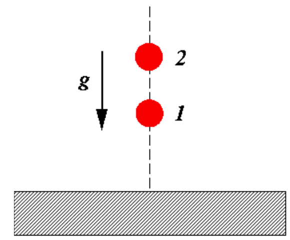
(α) Λύστε αριθμητικά τις δυο αυτές εξισώσεις κίνησης χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ου} βαθμού. Θα πρέπει να βρείτε ότι η τιμή της ταχύτητα πλησιάζει ένα ανώτερο όριο.[**12μ**]

(β) Κάντε τα γραφήματα της ταχύτητας, υ(t) και θέσης, x(t) ως προς το χρόνο t για το χρονικό διάστημα t=0 ως τη χρονική στιγμή t που το σώμα αποκτά ταχύτητα τουλάχιστον ίση με το 99% της ανώτατης τιμής που μπορεί να λάβει. Το γράφημά σας θα πρέπει να έχει κατάλληλα ονοματισμένους άξονες. Αποθηκεύστε το file αυτό με το όνομα *AirResistance_plot1.pdf.* [**4μ**]

(γ) Να κάνετε ένα ακόμα ζευγάρι γραφημάτων που να δείχνει το ποσοστιαίο σφάλμα της αριθμητικής σας λύσης ως προς την θεωρητικά αναμενόμενη τιμή της θέσης, x(t), και της ταχύτητας, υ(t), του σώματος για το ίδιο χρονικό διάστημα. Αποθηκεύστε το γράφημα αυτό στο file με όνομα *AirResistance_plot2.pdf.* [**4μ**]

Θεωρήστε ότι στο πρόβλημα αυτό η επίδραση της βαρύτητας είναι αμελητέα.

3. Θεωρήστε ότι έχετε 2 μπάλες μάζας m_1 και m_2 αντίστοιχα. Οι 2 μπάλες αφήνονται από την κατάσταση της ηρεμίας να πέσουν στο έδαφος υπό την επίδραση της βαρύτητας (δεν υπάρχει αντίσταση από τον αέρα). Υποθέστε ότι οι μπάλες μπορούν να κινηθούν κατακόρυφα, έτσι ώστε να συγκρούονται κεντρικά είτε μεταξύ τους ή με το έδαφος (μόνο η μπάλα 1). Αν υποθέσουμε τέλεια ελαστικές συγκρούσεις οι 2 μπάλες θα συνεχίσουν να συγκρούονται μεταξύ τους επ΄άπειρον.



Η κίνηση της κάθε μπάλας επομένως καθορίζεται από την επιτάχυνση της βαρύτητας και το αποτέλεσμα της σύγκρουσής της με την άλλη μπάλα ή το έδαφος. Όταν η μπάλα 1 χτυπά στο έδαφος, η ταχύτητά της αντιστρέφεται, $\upsilon_1' = -\upsilon_1$. Στην περίπτωση της σύγκρουσης μεταξύ των 2 μπαλών ξέρουμε από την εισαγωγική φυσική ότι για τέλεια ελαστικές κρούσες οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση ως προς τις ταχύτητές πριν την κρούση δίνονται από τις σχέσεις:

$$\upsilon_1' = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)\upsilon_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)\upsilon_2$$

$$\upsilon_2' = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)\upsilon_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)\upsilon_2$$

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Verlet - ταχύτητας για να περιγράψετε την κίνηση των δυο σωμάτων.

Για την περίπτωση της κρούσης, ο απλούστερος τρόπος είναι να ελέγχετε σε κάθε χρονικό βήμα τις θέσεις των δυο σωμάτων. Αν στην αντίστοιχη χρονική στιγμή έχει συμβεί κάποια σύγκρουση τότε θα πρέπει να τροποποιήσετε κατάλληλα τις αντίστοιχες ταχύτητες σύμφωνα με τους παραπάνω τύπους και να συνεχίσετε την χρονική εξέλιξη της κίνησης των σωμάτων. Για παράδειγμα για την περίπτωση της κρούσης της μπάλας 1 με το έδαφος αρκεί να ελέγξετε αν $x_1 < r_1$ όπου r_1 είναι η ακτίνα της μπάλας 1. Αν η συνθήκη ισχύει τότε μπορούμε να αντιστρέψουμε την ταχύτητα.

Η απλή αυτή προσέγγιση ωστόσο οδηγεί σε κάποια σφάλματα γιατί κάποιο ποσοστό του χρόνου dt η μπάλα 1 θα μπορούσε να βρεθεί σε αρνητική θέση. Ανάλογα ισχύουν και στην κρούση των δυο μπαλών. Επομένως θα πρέπει στις περιπτώσεις αυτές να χρησιμοποιήσετε γραμμική παρεμβολή για να βρείτε τόσο την ταχύτητα που αντιστοιχεί στο σημείο της κρούσης όσο και το χρόνο της κρούσης. Αυτός ο χρόνος θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί και για τις 2 μπάλες για να συνεχίσετε την εξέλιξη του συστήματός σας.

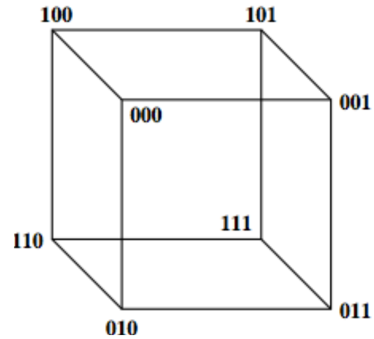
Θεωρείστε για το πρόβλημά σας ότι $m_1 = 1kg$, $m_2 = 1kg$, $x_1 = 1m$, $x_2 = 3m$, $g = 9.81m/s^2$, $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0$, $r_1 = r_2 = 0.1m$ και $dt = 0.003sec$

(α) Να γράψετε το πρόγραμμα που περιγράφει την κίνηση των 2 σωμάτων [**10μ**]

(β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση των x_1 και x_2 ως προς το χρόνο για $t_{max} = 100sec$. Το γράφημα αυτό να το ονομάσετε *collision_graph*1.*pdf*. [**4μ**]

(γ) Τρέξτε και πάλι το πρόγραμμά σας για λόγο μαζών $m_1/m_2 = 2$ και κάντε και πάλι το ίδιο γράφημα με το ερώτημα (β). Ονομάστε το γράφημα *collision_graph2.pdf*. Τι παρατηρείτε σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση; [**6μ**]

4. Κατά τη διάρκεια των τελευταίων εργαστηρίων ασχοληθήκατε με την προσομοίωση διαφόρων τυχαίων περιπάτων. Στο πρόβλημα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την ιδέα αυτή για έναν υπερκύβο d-διαστάσεων. Για $d \geq 1$, ο d-διάστατος υπερκύβος είναι το γράφημα με τις κορυφές του να αποτελούνται από σειρές bits (0 ή 1) και μήκους πλευράς d. Οι κορυφές εκατέρωθεν της πλευράς του κύβου διαφέρουν ακριβώς 1 bit. Το σχήμα δείχνει την περίπτωση ενός τέτοιου κύβου για d = 3 (τρισδιάστατος).



Για μια κορυφή, u, μπορούμε να γράψουμε u = $b_1b_2b_3$ σα μια σειρά 3 καταστάσεων bits. Οι τρεις γειτονικές κορυφές θα έχουν καταστάσεις bits που αντιστοιχούν σε συμπληρωματικά bits αυτών της κορυφής u. Δηλαδή οι γειτονικές κορυφές θα είναι $\overline{b}_1b_2b_3$, $b_1\overline{b}_2b_3$ και $b_1b_2\overline{b}_3$.

Για παράδειγμα να u = 101, τότε οι γειτονικές κορυφές θα είναι 001, 111 και 100.

Για να ορίσουμε μια τυχαία διαδρομή, έστω το σωματίδιο ξεκινά από μια συγκεκριμένη αρχική κατάσταση, S_o, και μετά από κάποιο χρονικό βήμα *i* βρίσκεται στην κατάσταση S_i = $b_1b_2b_3$. Στο επόμενο χρονικό βήμα, *i*+1, μπορεί να βρεθεί σε μια από τις 3 τρεις καταστάσεις, $\overline{b}_1b_2b_3$ με πιθανότητα *p*, $b_1\overline{b}_2b_3$ με πιθανότητα *q* ή $b_1b_2\overline{b}_3$ με πιθανότητα *r*. Επειδή το σώμα δεν μπορεί να είναι ακίνητο θα πρέπει $p + q + r = 1$. Μπορείτε να υποθέσετε ότι $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ και $0 < r < 1$. Για παράδειγμα, αν το σώμα ξεκινά αρχικά στη θέση S_0=000 η πιθανή ακολουθία διαδρομής θα είναι:

000, 001, 101, 001, 011, 010, 000, 100, 101, 100, 110, 111, 101, 111, 011

Για κάθε κορυφή $b_1b_2b_3$, υπάρχει μια αντίθετη κορυφή σε πλήρως συμπληρωματική κατάσταση bits, η $\overline{b_1b_2b_3}$ που ονομάζεται αντικορυφή. Ο χρόνος (ή αριθμός των βημάτων) για να φθάσει το σωματίδιο την πρώτη φορά στην αντικορυφή ονομάζεται *χρόνος αντικορυφής*. Στο παραπάνω παράδειγμα, η αρχική κατάσταση είναι S_0 = 000 και η αντικορυφή είναι S_α = 111. Ο χρόνος αντικορυφής είναι 11 γιατί χρειάστηκαν 11 βήματα για να φθάσει την πρώτη φορά στην αντικορυφή.

Θα πρέπει να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο προσομοιώνει ένα συγκεκριμένο αριθμό τυχαίων διαδρομών σε ένα κύβο 3-διαστάσεων για δεδομένο αριθμό βημάτων και να υπολογίζει το μέσο χρόνο αντικορυφής για τις τυχαίες διαδρομές. Οι παράμετροι για την προσομοίωση που θα πρέπει να δοθούν από το πληκτρολογίο είναι: (α) η αρχική κατάσταση S_0, (β) οι τιμές των πιθανοτήτων *p*, *q* και *r* και (γ) ο αριθμός των διαδρομών που θα πρέπει να προσομοιώσετε. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει στη 1η γραμμή την αρχική κατάσταση και στις υπόλοιπες γραμμές τις διαδοχικές καταστάσεις μέχρις ότου φθάσει στην κατάσταση της αντικορυφής. Στην περίπτωση αυτή η προσομοίωση σταματά και τυπώνεται μια κενή γραμμή. Η επομένη προσομοίωση ξεκινά και πάλι από την αρχική κατάσταση πιου θέσατε. Τα αποτελέσματά σας θα πρέπει να τυπωθούν για 2 προσομοιώσεις σε μορφή bits. Στο τέλος το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει το μέσο χρόνο αντικορυφής για όλες τις προσομοιώσεις που κάνατε και τις τιμές των πιθανοτήτων που δόθηκαν.

Για παράδειγμα αν δώσετε σαν αρχική κατάσταση 100, οι διαδρομές δυο πειραμάτων είναι:

```
100          100
110          101          Ο μέσος χρόνος αντικορυφής είναι: 6
100          001
101          011
111          010
011          110
             111
             011
```

5. Ένα κουτί περιέχει 100 μπάλες αριθμημένες από 1 έως 100. Τυχαία επιλέγετε Μ από τις μπάλες αυτές ($1 < M < 100$) και αθροίζετε τα νούμερα που αντιστοιχούν στις Μ αυτές μπάλες. Να βρεθεί η πιθανότητα το άθροισμα τους να είναι μεγαλύτερο από 500. Θα πρέπει να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο δέχεται σαν παράμετρο εισόδου τον αριθμό των μπαλών Μ που θα επιλέξετε, και τον αριθμό των πειραμάτων που θα προσομοιώσετε. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει σαν αποτέλεσμα την πιθανότητα το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο από το επιθυμητό αποτέλεσμα. Το πρόγραμμα θα πρέπει να τυπώνει ένα μύνημα στην περίπτωση που κάποια εισαγωγή στοιχείων δεν είναι σωστή.

Προσέξτε ότι σε κάθε πείραμα επιλέγετε Μ μπάλες ταυτόχρονα. Το αποτέλεσμα θα ήταν διαφορετικό αν επιλέγατε τις μπάλες μια προς μια και μετά τις τοποθετούσατε και πάλι στο κουτί. Επομένως κάθε νούμερο επιλέγεται μια και μόνο φορά.