

Προέλευση των Κανόνων Feynman

Απλό Μοντέλο ABC

Απλό θεωρητικό μοντέλο για εξάσκηση

Για καλύτερη κατανόηση και εξάσκηση θα χρησιμοποιήσουμε ένα απλό μοντέλο

Τα σωματίδια όλα έχουν σπιν 0, και επομένως οι κυματοσυναρτήσεις των ελεύθερων σωματιδίων είναι απλά επίπεδα κύματα μιας συνιστώσας.

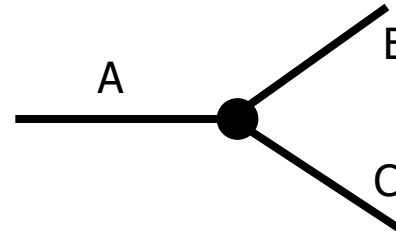
Δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ σωματιδίου και αντισωματιδίου και επομένως δεν υπάρχουν κατευθύνσεις στο χρόνο στα διαγράμματα Feynman

Υπάρχουν 3 τύποι σωματιδίου: A, B και C

Οι κανόνες για να κάνουμε τα διαγράμματα και να γράψουμε τα πινακοστοιχεία του πίνακα μετάβασης είναι αρκετά απλοί

Το Μοντέλο ABC

Υπάρχει μια και μόνο κορυφή του τύπου:



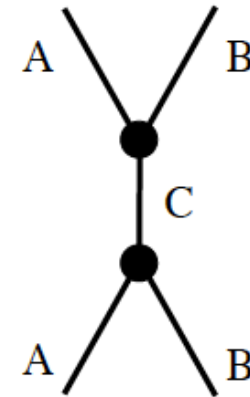
Για κάθε κορυφή, υπάρχει ένας παράγοντας $-ig$ για την σταθερά σύζευξης στο πλάτος M

Για κάθε εσωτερική γραμμή, με τετραδιάνυσμα της ορμής q_j το πλάτος έχει παράγοντα διαδότη ίσο με:

$$\frac{i}{q_j^2 - m_j^2 c^2}$$

Το πλάτος M είναι i φορές το γινόμενο:

$$M = i(-ig) \frac{i}{q_C^2 - m_C^2 c^2} (-ig)$$



Το Μοντέλο ABC

Γνωρίζουμε τις ορμές των εξωτερικών γραμμών

Αν δεν υπάρχουν εσωτερικοί βρόχοι, τότε οι ορμές των εσωτερικών γραμμών προσδιορίζονται πλήρως από τις εξωτερικές γραμμές

Αν όμως υπάρχουν βρόχοι, τότε η ορμή του σωματιδίου που κινείται στον βρόχο μπορεί να είναι οτιδήποτε. Ο κανόνας είναι να ολοκληρώσουμε ως προς όλες τις δυνατές εσωτερικές ορμές σύμφωνα με τα παρακάτω:

Γράφουμε έναν παράγοντα: $(2\pi)^4 \delta^4(\underline{k}_1 + \underline{k}_2 + \underline{k}_3)$ για κάθε κορυφή

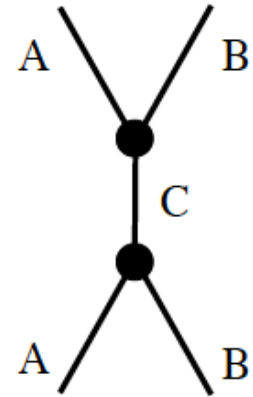
Ολοκληρώνουμε με: $\frac{d^4 q_j}{(2\pi)^4}$ για κάθε εσωτερική ορμή

Αγνοούμε τον εναπομείνοντα παράγοντα: $(2\pi)^4 \delta^4(\underline{p}_1 + \underline{p}_2 + \dots - \underline{p}_n)$

Μη εσωτερικό ολοκλήρωμα για διαγράμματα δένδρων

Σύμφωνα με τους κανόνες, εισάγουμε μια δ-συνάρτηση για κάθε κορυφή και ολοκληρώνουμε ως προς όλες τις ορμές των εσωτερικών γραμμών αγνοώντας την εναπομείνουσα δ-συνάρτηση

Για το διπλανό διάγραμμα, η εσωτερική γραμμή είναι η C. Βάζουμε 2 δ-συναρτήσεις, εκτελούμε ένα ολοκλήρωμα απαλοίφοντας μια δ-συνάρτηση, και αγνοούμε την άλλη δ-συνάρτηση.



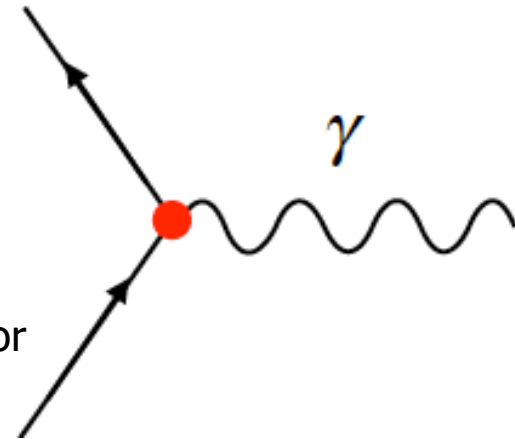
Αυτό είναι ισοδύναμο με το να θέσουμε απλά $C = A + B$ αγνοώντας τις δ-συναρτήσεις και τα ολοκληρώματα

➤ Συγκρίνοντας με την **κβαντική ηλεκτροδυναμική (QED)**:

Ο παράγοντας της κορυφής είναι: $g = \sqrt{1/137.035}$

και υπάρχει επίσης ένας 4x4 γ-πίνακας

Οι γραμμές των φορτισμένων φερμιονίων έχουν κατευθύνσεις για να διαχωρίζουμε ύλη από αντι-ύλη και παράγοντες 4-στοιχείων spinor από την εξίσωση του Dirac



Η εσωτερική γραμμή του διαδότη φωτονίου, είναι ίδια όπως και στο μοντέλο ABC αλλά η μάζα του διαδότη είναι 0. Η εσωτερική γραμμή διαδότη φερμιονίου είναι αρκετά πιο πολύπλοκη στην QED και αλλάζει ανάλογα με $1/q$ αντί $1/q^2$

Το Μοντέλο $A + A \rightarrow B + B$

Θα χρησιμοποιήσουμε το χρόνο να αλλάζει στην οριζόντια διεύθυνση, την ορμή εσωτερικών γραμμών θα τις συμβολίσουμε με q ενώ αυτές των εξωτερικών γραμμών με p .

Όταν μπορεί να είναι είτε εσωτερική ή εξωτερική θα συμβολίζουμε την ορμή με k .

Το απλούστερο διάγραμμα για σκέδαση: $A + A \rightarrow B + B$

είναι αυτό του διπλανού σχήματος:

Έχουμε ένα παράγοντα σταθεράς σύζευξης $-ig$ για κάθε κορυφή

και ένα παράγοντα για τον διαδότη $\frac{i}{q^2 - m_c^2 c^2}$ επί i

Το πλάτος M είναι i φορές το γινόμενο:

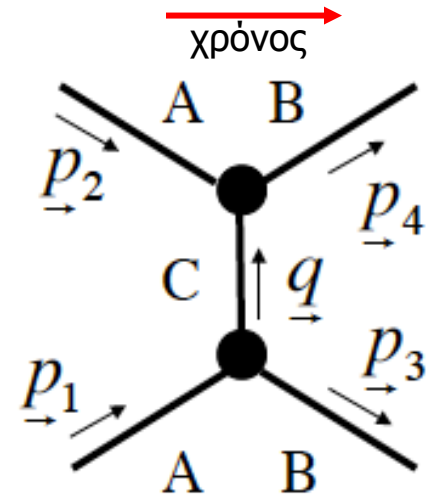
$$M = i(-ig) \frac{i}{q_c^2 - m_c^2 c^2} (-ig) \Rightarrow M = \frac{g^2}{q_c^2 - m_c^2 c^2}$$

Προσθέτοντας δ-συναρτήσεις, την ολοκλήρωση ως προς την εσωτερική ορμή και τελικά αγνοώντας την δ-συνάρτηση, οδηγεί στην σχέση: $\underline{p}_2 + \underline{q} = \underline{p}_4 \Rightarrow \underline{q} = \underline{p}_4 - \underline{p}_2$

Αντικαθιστούμε στην έκφραση για το πλάτος: $M = \frac{g^2}{(\underline{p}_4 - \underline{p}_2)^2 - m_c^2 c^2}$

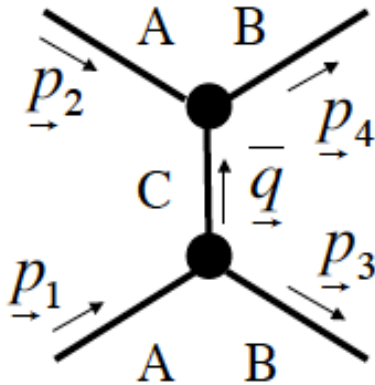
Υψώνουμε στο τετράγωνο και αντικαθιστούμε στον κανόνα σκέδασης δυο σωμάτων

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{|M(\vec{p}_{Final}(\theta))|^2}{S(E_1 + E_2)^2} \frac{p_{Final}}{p_{Initial}}$$



Το Μοντέλο $A + A \rightarrow B + B$

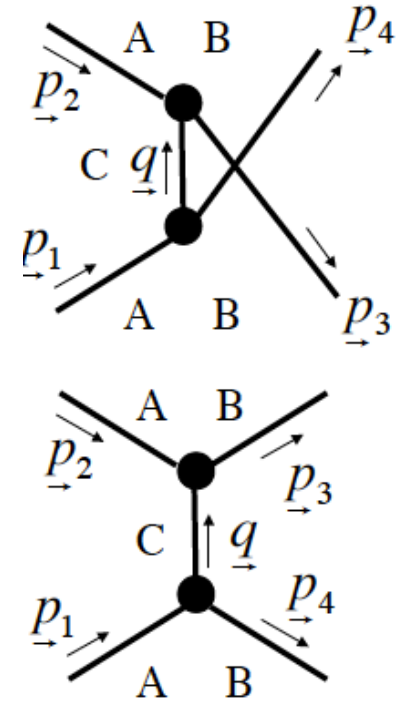
Αλλά, υπάρχουν δυο διαγράμματα με τον ίδιο αριθμό κορυφών
Το 2^ο διάγραμμα έχει τις εξωτερικές του γραμμές εναλλαγμένες



Δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε κάτι το ιδιαίτερο, αφού
το 2^ο διάγραμμα είναι το ίδιο με το πρώτο αλλά θα πρέπει
να αλλάξουμε μόνο

$$\underline{p}_4 \Leftrightarrow \underline{p}_3$$

Προσθέτουμε την συνεισφορά του στο M



Το Μοντέλο $A + A \rightarrow B + B$

$$M = \frac{g^2}{(\underline{p}_4 - \underline{p}_2)^2 - m_C^2 c^2} + \frac{g^2}{(\underline{p}_3 - \underline{p}_2)^2 - m_C^2 c^2}$$

Θεωρώντας για απλούστευση πράξεων ότι $m_A = m_B = m$

κάνει επίσης τα μέτρα των εισερχόμενων και εξερχόμενων ορμών πανομοιότυπα.

Θεωρούμε τέλος ότι $m_C = 0$

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} (\underline{p}_4 - \underline{p}_2)^2 - m_C^2 c^2 &= (mc)^2 - 2(\underline{p}_4 \cdot \underline{p}_2) + (mc)^2 = 2(mc)^2 - 2(p_4^0 p_2^0 - |\vec{p}|^2 \cos \theta_{42}) \\ &= 2(mc)^2 - 2\left(\sqrt{(mc)^2 + |\vec{p}|^2} \sqrt{(mc)^2 + |\vec{p}|^2} - |\vec{p}|^2 \cos \theta_{42}\right) \\ &= 2(mc)^2 - 2\left((mc)^2 + |\vec{p}|^2 - |\vec{p}|^2 \cos \theta_{42}\right) = -2|\vec{p}|^2 (1 - \cos \theta_{42}) \end{aligned}$$

Ο άλλος όρος θα δώσει: $(\underline{p}_3 - \underline{p}_2)^2 - m_C^2 c^2 = -2|\vec{p}|^2 (1 - \cos \theta_{32})$

Αν μετρήσουμε τις γωνίες από την \vec{p}_1 διεύθυνση και παρατηρήσουμε ότι $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$

$$(\underline{p}_3 - \underline{p}_2)^2 - m_C^2 c^2 = -2|\vec{p}|^2 (1 - \cos \theta_{32}) = -2|\vec{p}|^2 (1 + \cos \theta_{31}) = -2|\vec{p}|^2 (1 + \cos \theta_3)$$

Αν προσέξουμε ακόμα ότι $\vec{p}_4 = -\vec{p}_3$ έχουμε ακόμα μια αλλαγή πρόσημου, οπότε:

$$(\underline{p}_4 - \underline{p}_2)^2 - m_C^2 c^2 = -2|\vec{p}|^2 (1 - \cos \theta_3)$$

Το Μοντέλο $A + A \rightarrow B + B$

$$M = \frac{g^2}{-2|\vec{p}|^2(1 - \cos\theta)} + \frac{g^2}{-2|\vec{p}|^2(1 + \cos\theta)}$$

$$\Rightarrow M = \frac{g^2[(1 + \cos\theta) + (1 - \cos\theta)]}{-2|\vec{p}|^2(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)} \Rightarrow M = \frac{g^2 2}{-2|\vec{p}|^2(1 - \cos^2\theta)} \Rightarrow M = -\frac{g^2}{|\vec{p}|^2 \sin^2\theta}$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και αντικαθιστούμε στον κανόνα σκέδασης 2 – σωμάτων οπότε:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{|M(\vec{p}_{Final}(\theta))|^2}{S(E_1 + E_2)^2} \frac{p_{Final}}{p_{Initial}} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{S(E_1 + E_2)^2} \frac{p_{Final}}{p_{Initial}} \left(-\frac{g^2}{|\vec{p}|^2 \sin^2\theta}\right)^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{S} \frac{p_{Final}}{p_{Initial}} \left(\frac{\hbar c g^2}{8\pi 2E |\vec{p}|^2 \sin^2\theta}\right)^2 \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar c g^2}{16\pi E |\vec{p}|^2 \sin^2\theta}\right)^2$$

Ο παράγοντας S είναι 2 γιατί είναι 2 πανομοιότυπα σωματίδια στην τελική κατάσταση.

Με ίσες μάζες $p_{Final} = p_{Initial} = |\vec{p}|$

Ολική ενεργός διατομή για $A + A \rightarrow B + B$

Για να βρούμε την ολική ενεργό διατομή θα πρέπει να ολοκληρώσουμε την διαφορική ενεργό διατομή σκέδασης ως προς την στερεά γωνία $d\Omega$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar c g^2}{16\pi E |\vec{p}|^2 \sin^2 \theta} \right)^2$$

Θα πάρουμε: $\sigma_T = \int d\varphi \sin \theta d\theta \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar c g^2}{16\pi E |\vec{p}|^2} \right)^2 \int d\varphi \frac{1}{\sin^2 \theta} \sin \theta d\theta$

$$\Rightarrow \sigma_T = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar c g^2}{16\pi E |\vec{p}|^2} \right)^2 \int d\varphi \frac{1}{\sin^3 \theta} d\theta$$

Το ολοκλήρωμα: $\int d\varphi \frac{1}{\sin^3 \theta} d\theta = 2\pi \int \frac{d\theta}{\sin^3 \theta}$ και για μικρές γωνίες: $\sin \theta \rightarrow \theta$

οπότε θα έχουμε: $2\pi \int \frac{d\theta}{\theta^3}$ το οποίο για $\theta \rightarrow 0$ απειρίζεται

Αυτή είναι και η σωστή απάντηση αφού υποθέσαμε ότι $m_C=0$ και επομένως η δύναμη η οποία μεταφέρεται από το σωματίδιο C θα έχει άπειρη εμβέλεια.

Ανεξάρτητα δηλαδή από το πόσο μεγάλη είναι η παράμετρος πρόσκρουσης, υπάρχει πάντοτε, μικρή έστω, πιθανότητα να υπάρξει αλλαγή στην διεύθυνση του σωματιδίου και επομένως η ενεργός διατομή είναι άπειρη.

Ολική ενεργός διατομή για $A + A \rightarrow B + B$

Αν δεν είχαμε πάρει την περίπτωση $m_C=0$, τότε το πλάτος μετάβασης θα ήταν:

$$\left(\underline{p}_4 - \underline{p}_2\right)^2 - m_C^2 c^2 = -2|\vec{p}|^2 (1 + \cos \theta) - m_C^2 c^2$$

$$\left(\underline{p}_3 - \underline{p}_2\right)^2 - m_C^2 c^2 = -2|\vec{p}|^2 (1 - \cos \theta) - m_C^2 c^2$$

$$\text{Οπότε: } M = -\frac{g^2}{2|\vec{p}|^2 (1 - \cos \theta) + m_C^2 c^2} - \frac{g^2}{2|\vec{p}|^2 (1 + \cos \theta) + m_C^2 c^2}$$

Ο 1^{ος} όρος, ο οποίος απειρίζονταν για $\theta=0$ προηγουμένως, τώρα είναι πεπερασμένος.

Ο 2^{ος} όρος, απειρίζονταν για $\theta=\pi$ προηγουμένως, τώρα είναι και αυτός πεπερασμένος.

Και οι δυο παρονομαστές είναι πεπερασμένοι στο εύρος τιμών: $0 \leq \theta \leq \pi$

Ολική ενεργός διατομή για $A + A \rightarrow B + B$

Στο όριο που $m_c c \gg |\vec{p}|$ έχουμε $M = -\frac{2g^2}{m_c^2 c^2}$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι ανεξάρτητο τόσο από το μέτρο της ορμής όσο και της γωνίας.

Η διαφορική ενεργός διατομή γίνεται:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{S(E_1 + E_2)^2} \frac{p_{Final}}{p_{initial}} \left(-\frac{2g^2}{m_c^2 c^2}\right)^2 \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar c g^2}{8\pi E m_c^2 c^2}\right)^2$$

Παρατηρούμε ότι ελαττώνεται με την αύξηση της ενέργειας E , εξαιτίας του παράγοντα ροής αλλά είναι ομοιόμορφη.

Η ολική ενεργός διατομή είναι πεπαρασμένη και ελαττώνεται σύμφωνα με $1/E_{CM}^2$

$$\sigma_T = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar c g^2}{8\pi E m_c^2 c^2}\right)^2 \int d\varphi \sin\theta d\theta = \frac{4\pi}{2} \left(\frac{\hbar c g^2}{8\pi E m_c^2 c^2}\right)^2$$

Ολική ενεργός διατομή για $A + A \rightarrow B + B$

Η πιο γενική περίπτωση είναι: $M = -\frac{g^2}{2|\vec{p}|^2(1-\cos\theta) + m_c^2 c^2} - \frac{g^2}{2|\vec{p}|^2(1+\cos\theta) + m_c^2 c^2}$

$$\Rightarrow M = -\frac{g^2}{2|\vec{p}|^2} \left[\frac{1}{(1-\cos\theta) + \frac{m_c^2 c^2}{|\vec{p}|^2}} + \frac{1}{(1+\cos\theta) + \frac{m_c^2 c^2}{|\vec{p}|^2}} \right] \quad \text{και θέτουμε ότι: } r = \frac{m_c^2 c^2}{|\vec{p}|^2}$$

$$\Rightarrow M = -\frac{g^2}{2|\vec{p}|^2} \left[\frac{1}{(1-\cos\theta) + r} + \frac{1}{(1+\cos\theta) + r} \right]$$

$$\Rightarrow M = -\frac{g^2}{2|\vec{p}|^2} \frac{[(1+\cos\theta) + r] + [(1-\cos\theta) + r]}{[(1-\cos\theta) + r][(1+\cos\theta) + r]} \Rightarrow M = -\frac{g^2}{2|\vec{p}|^2} \frac{2(1+r)}{(1-\cos^2\theta) + 2r + r^2}$$

$$\Rightarrow M = -\frac{g^2}{|\vec{p}|^2} \frac{(1+r)}{\sin^2\theta + 2r + r^2}$$

που είναι πάντοτε πεπερασμένο

Ολική ενεργός διατομή για $A + A \rightarrow B + B$

Η διαφορική ενεργός διατομή θα είναι:
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar c g^2}{8\pi E |\vec{p}|^2} \frac{1+r}{(\sin\theta + r)^2} \right)^2$$

Η ολική ενεργός διατομή θα είναι:
$$\sigma_T = \frac{2\pi}{2} \left(\frac{\hbar c g^2 (1+r)}{16\pi E |\vec{p}|^2} \right)^2 \int \frac{\sin\theta d\theta}{(\sin^2\theta + 2r + r^2)^2}$$

Το τελευταίο αυτό ολοκλήρωμα μπορεί να λυθεί είτε αριθμητικά ή με το Mathematica

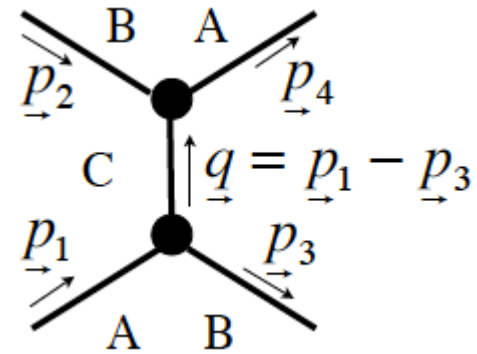
$$\int \frac{\sin\theta d\theta}{(\sin^2\theta + 2r + r^2)^2} = \frac{1}{4(1+r)^3} \left[\frac{4(1+r)}{r(2+r)} + 2 \log \frac{2+r}{r} \right]$$

Σκέδαση $A + B \rightarrow A + B$

Υπάρχουν δυο διαγράμματα για την σκέδαση: $A + B \rightarrow A + B$

Το διάγραμμα στο οποίο **υπάρχει ανταλλαγή** ενός σωματιδίου C

$$M = i(-ig) \frac{i}{(\underline{p}_1 - \underline{p}_3)^2 - m_C^2 c^2} (-ig) = \frac{g^2}{(\underline{p}_1 - \underline{p}_3)^2 - m_C^2 c^2}$$

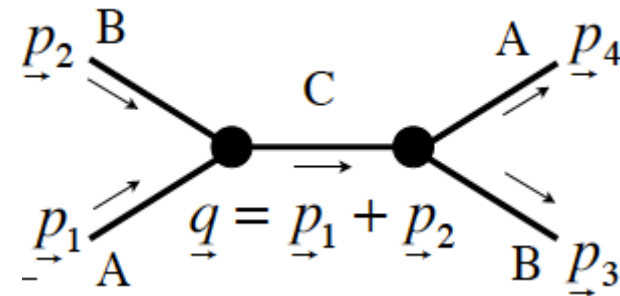


Από την στιγμή που τα A και B δεν είναι πανομοιότυπα, δεν υπάρχει η δυνατότητα εναλλαγής μεταξύ των εξωτερικών γραμμών $\underline{p}_4 \Leftrightarrow \underline{p}_3$

χρόνος →

Υπάρχει ωστόσο το διάγραμμα της **εξαύλωσης**

$$M = \frac{g^2}{(\underline{p}_1 + \underline{p}_3)^2 - m_C^2 c^2}$$

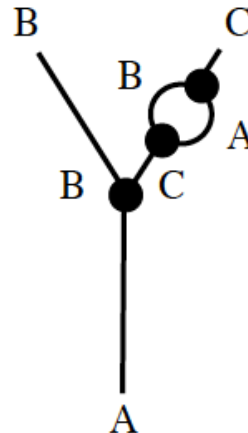
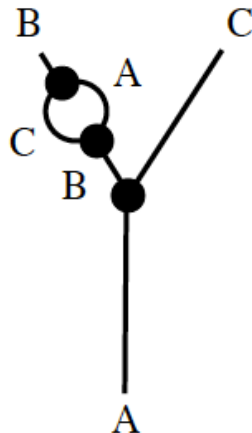
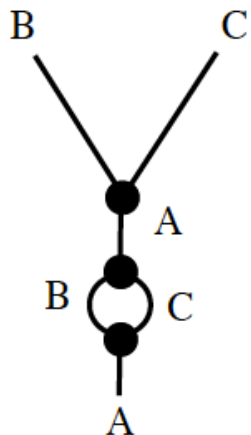
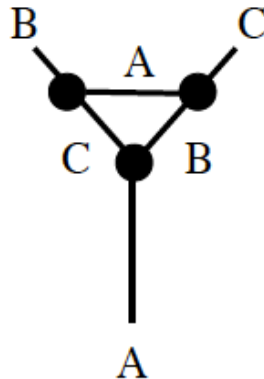
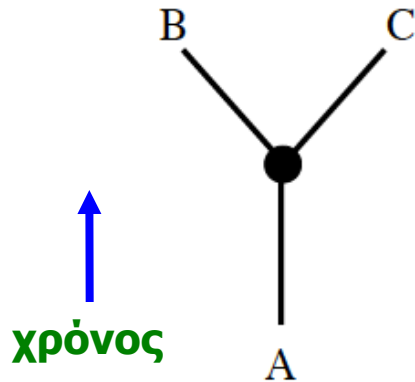


Αθροίζοντας τις δυο συνεισφορές θα έχουμε:

$$M = \frac{g^2}{(\underline{p}_1 - \underline{p}_3)^2 - m_C^2 c^2} + \frac{g^2}{(\underline{p}_1 + \underline{p}_2)^2 - m_C^2 c^2}$$

Διαγράμματα δένδρου και βρόχου για $A \rightarrow BC$

Μέχρι τώρα είδαμε διαγράμματα χαμηλής τάξης, ωστόσο μπορούμε να προσθέσουμε είτε βρόχους ή επιπλέον εσωτερικές ή εξωτερικές γραμμές:



➤ Το διάγραμμα δένδρου δεν έχει εσωτερικές γραμμές αλλά μόνο μια κορυφή.

□ Το πλάτος είναι: $M = i(-ig) = g$

➤ Όλα τα διαγράμματα βρόχου έχουν δυο επιπλέον κορυφές και άρα επιπλέον παράγοντες $(-ig)^2 = -g^2$

□ Αν $g^2 \ll 1$ τα διαγράμματα αυτά έχουν μικρότερα πλάτη από ότι τα διαγράμματα δένδρου

➤ Θα πρέπει να προσθέσουμε τα πλάτη από όλα τα διαγράμματα πριν το τετράγωνο του M , και άρα αν $g \ll 1$ δεν θα αλλάξουν την αρχική τιμή του M^2 κατά πολύ

➤ Όλα τα διαγράμματα βρόχου έχουν 3 εσωτερικές γραμμές και άρα έχουν 3 παράγοντες διαδότη και θα πρέπει να κάνουμε ένα ολοκλήρωμα

Ολοκλήρωμα διαγράμματος βρόχου

Για το διάγραμμα αυτό θα έχουμε:

$$(-ig) \frac{i}{\underline{q}_C^2 - m_C^2 c^2} (-ig) \frac{i}{\underline{q}_B^2 - m_B^2 c^2} (-ig) \frac{i}{\underline{q}_A^2 - m_A^2 c^2}$$

Αλλά: $\underline{p}_B = \underline{q}_C + \underline{q}_A \Rightarrow \underline{q}_C = \underline{p}_B - \underline{q}_A$

καί ανάλογα: $\underline{p}_C = \underline{q}_B - \underline{q}_A \Rightarrow \underline{q}_B = \underline{p}_C + \underline{q}_A$

Αντικαθιστώντας στους παρονομαστές παραπάνω θα πάρουμε:

$$\frac{g}{(\underline{p}_C + \underline{q}_A)^2 - m_B^2 c^2} \frac{g}{(\underline{p}_B - \underline{q}_A)^2 - m_C^2 c^2} \frac{g}{\underline{q}_A^2 - m_A^2 c^2}$$

Και το ολοκλήρωμα γίνεται:
$$\int \frac{d^4 q_A}{(2\pi)^4} \frac{g}{(\underline{p}_C + \underline{q}_A)^2 - m_B^2 c^2} \frac{g}{(\underline{p}_B - \underline{q}_A)^2 - m_C^2 c^2} \frac{g}{\underline{q}_A^2 - m_A^2 c^2}$$

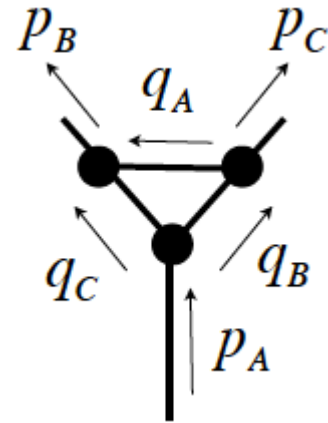
Για μεγάλες τιμές του q_A , ο παρονομαστής δίνει ουσιαστικά ένα παράγοντα q_A^{-6}

και μπορούμε να γράψουμε το διαφορικό με την μορφή: $d^4 q_A = q_A^3 dq_A d\Omega_4$

όπου $d\Omega_4$ είναι μια αδιάστατη ποσότητα κάτι σαν 4-διάστατη στερεά γωνία («[περιστροφή Wick](#)»)

Επομένως για μεγάλες τιμές του q_A το ολοκλήρωμα γίνεται:
$$\int \frac{q_A^3 dq_A d\Omega_4}{q_A^6} = \int \frac{dq_A d\Omega_4}{q_A^3}$$

το οποίο είναι πεπερασμένο καθώς το πάνω όριο στο q_A πηγαίνει στο άπειρο



Ολοκλήρωμα διαγράμματος βρόχου

Θα πρέπει ωστόσο να ανησυχούμε για εμφάνιση μηδενικών τιμών στον παρονομαστή:

Από τον αρχικό παρονομαστή είχαμε:
$$\left(-ig\right)\frac{i}{\underline{q}_C^2 - m_C^2 c^2} \left(-ig\right)\frac{i}{\underline{q}_B^2 - m_B^2 c^2} \left(-ig\right)\frac{i}{\underline{q}_A^2 - m_A^2 c^2}$$

Αν η τετρα-ορμή μιας εσωτερικής γραμμής δώσει: $\underline{q}^2 = m^2 c^2$

ο παρονομαστής μηδενίζεται και το ολοκλήρωμα απειρίζεται

Κοιτώντας ξανά τα βήματα που οδήγησαν στην εισαγωγή των κανόνων Feynman ο παράγοντας που σχετίζεται με τον διαδότη στην πραγματικότητα έχει την μορφή:

$$\frac{i}{\underline{q}^2 - m^2 c^2 + i\varepsilon} \quad \text{με } \varepsilon \rightarrow 0$$

Η μορφή αυτή κάνει το ολοκλήρωμα πεπερασμένο και ανεξάρτητα του ε

Ένα διαφορετικό διάγραμμα βρόχου

Διάγραμμα στο οποίο ο βρόχος εμφανίζεται σε μια γραμμή

Για το σχετικό τμήμα του πλάτους θα έχουμε:

$$(-ig) \frac{i}{\underline{q}_B^2 - m_B^2 c^2} \frac{i}{\underline{q}_C^2 - m_C^2 c^2} (-ig) \frac{i}{\underline{q}_A^2 - m_A^2 c^2} (-ig)$$

$$\text{Αλλά: } \underline{p}_A = \underline{q}_B + \underline{q}_C = \underline{q}_A \Rightarrow \underline{q}_C = \underline{p}_A - \underline{q}_B$$

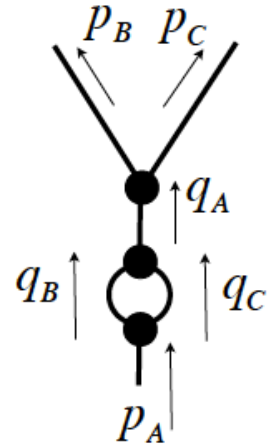
Αντικαθιστώντας στους παρονομαστές παραπάνω και γράφοντας το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{d^4 q_B}{(2\pi)^4} \frac{g}{\underline{q}_B^2 - m_B^2 c^2} \frac{g}{(\underline{p}_A - \underline{q}_B)^2 - m_C^2 c^2} \frac{g}{\underline{p}_A^2 - m_A^2 c^2}$$

Όπως στην προηγούμενη περίπτωση βρόχου που εξετάσαμε καταλήγουμε σε ολοκλήρωμα της μορφής:

$$\frac{g^3}{(2\pi)^4} \int \frac{q_B^3 dq_B d\Omega_4}{q_B^4} = \frac{g^3}{(2\pi)^4} \int d\Omega_4 \int \frac{dq_B}{q_B}$$

Το ολοκλήρωμα δίνει επομένως ένα παράγοντα $\log(q_A)$ ο οποίος απειρίζεται καθώς $q_A \rightarrow \infty$



Διαγράμματα Πεπερασμένα και μη

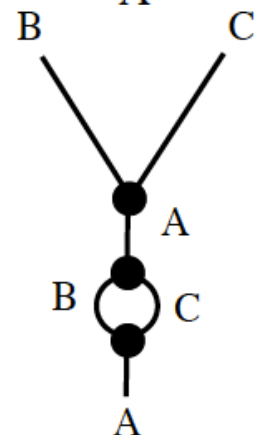
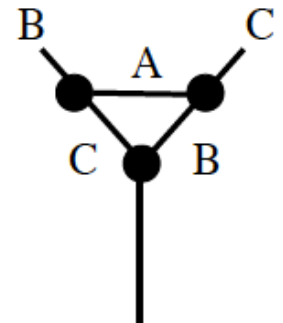
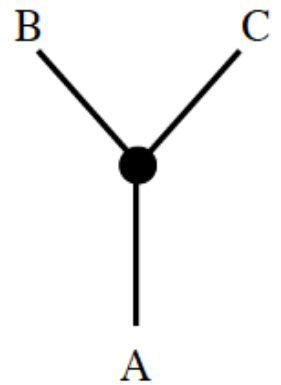
Ο 1^{ος} όρος στο ανάπτυγμα της σειράς των διαταραχών είναι το διάγραμμα δένδρου. Συνήθως ο υπολογισμός του διαγράμματος αυτού οδηγεί σε πεπερασμένη τιμή και δίνει μια ακριβή πρόβλεψη σε περίπτωση που η σταθερά σύζευξης είναι μικρή

Ο επόμενος όρος στο ανάπτυγμα της σειράς των διαταραχών είναι το άθροισμα όλων των διαγραμμάτων με 2 επιπλέον κορυφές. Όλα αυτά τα διαγράμματα δίνουν ένα παράγοντα g^2 , που τείνει να κάνει την συνεισφορά των διαγραμμάτων αυτών μικρότερη από τα διαγράμματα δένδρου.

Τα διαγράμματα αυτά έχουν βρόχους που οδηγούν σε επιπλέον υπολογισμούς ολοκληρωμάτων

Το διάγραμμα που συνδέει διαφορετικές γραμμές σωματιδίων είναι πεπερασμένο.

Το διάγραμμα το οποίο έχει βρόχο σε μια γραμμή σωματιδίου απειρίζεται λογαριθμικά



Ο λόγος της παρουσίας απειρισμών

Οι απειρισμοί εμφανίζονται εξαιτίας της επέκτασης της ολοκλήρωσης σε τεράστιες τιμές ορμής του σωματιδίου που κινείται μέσα στο βρόχο

Αν υπήρχε κάποια νέα φυσική σε πεπερασμένες τιμές ορμής, τότε θα ήταν «φυσιολογικό» να αποκόψουμε τον υπολογισμό του ολοκληρώματος από την ενεργειακή περιοχή που η νέα φυσική αρχίζει να λαμβάνει μέρος, γιατί οι κανόνες Feynman που χρησιμοποιούμε θα αποτελούν απλά και μόνο μια προσέγγιση της αλληλεπίδρασης και επομένως δεν θα μας δίνουν ακριβή αποτελέσματα

Η εξήγηση αυτή ουσιαστικά πριμοδοτεί εναντίον οποιουδήποτε διαγράμματος εκτός των πεπερασμένων διαγραμμάτων δένδρου, εκτός και αν τα αποτελέσματα δεν εξαρτώνται από την κλίμακα αποκοπής

Στην ιδανική περίπτωση, θα έπρεπε να κάνουμε νέους κανόνες Feynman, συμπεριλαμβάνοντας την νέα φυσική και οι νέοι αυτοί κανόνες θα είναι απαλλαγμένοι από απειρισμούς

Ο λόγος της παρουσίας απειρισμών

Υπάρχει όμως τρόπος
για να μετατρέψουμε

και να κάνουμε με
τον τρόπο αυτό
υπολογισμούς με
διαγράμματα βρόχων
και να πάρουμε διαγράμματα
που μπορούν να ερμηνευτούν
ότι δίνουν πεπερασμένα αποτελέσματα



Πως όμως ξέρουμε τις τιμές που θα πρέπει να βάλουμε για τις μάζες σωματιδίων ή σταθερές σύζευξης (φορτία)?

Εκτελούμε πειράματα, συγκρίνουμε τα πειραματικά αποτελέσματα με τις θεωρητικές προβλέψεις (Feynman διαγράμματα) και βρίσκουμε τις μάζες και σταθερές σύζευξης που δίνουν τη βέλτιστη συμφωνία με τις πειραματικές μετρήσεις

Μπορούμε να κάνουμε και άλλους υπολογισμούς αλά Feynman για να προβλέψουμε τι θα πρέπει να παρατηρήσουμε σε διαφορετικές συνθήκες.

Ο λόγος της παρουσίας απειρισμών

Αν κάνουμε υπολογισμούς Feynman διαγραμμάτων 2^{ης} τάξης για μια νέα κατάσταση η οποία δίνει απειρισμό, θα πρέπει να κάνουμε υπολογισμούς 2^{ης} τάξης όταν προσαρμόσαμε για την τιμή μιας μάζας ή μιας σταθεράς σύζευξης, οι οποίες θα πρέπει επίσης να εμφανίζουν απειρισμούς

Η θεωρία δεν δίνει πεπερασμένα αποτελέσματα για οποιεσδήποτε πεπερασμένες τιμές μάζας ή σταθεράς σύζευξης από την στιγμή που προχωρούμε σε υπολογισμούς πέρα από τα διαγράμματα δένδρου (της βασικής τάξης)

Ωστόσο μπορεί να εξακολουθεί να δίνει πεπερασμένα αποτελέσματα για τον λόγο ή διαφορά μετρήσεων που πραγματοποιήθηκαν σε διαφορετικές συνθήκες, με πεπερασμένες τιμές για τις μάζες ή σταθερές σύζευξης.

Χειρισμός των απειρισμών - συνταγή

Πρώτα, μετατρέπουμε το ολοκλήρωμα ώστε να το κάνουμε πεπερασμένο, χρησιμοποιώντας μια παράμετρο η οποία μπορεί δίνοντας την κατάλληλη τιμή να επαναφέρει την αρχική κατάσταση (απειρισμό)

Η μέθοδος αυτή ονομάζεται ομαλοποίηση (**regularization**)

Εκτελούμε κατόπιν τα ολοκληρώματα για όλα τα διαγράμματα δεδομένης τάξης, όλα ομαλοποιημένα με τον ίδιο τρόπο και τα αθροίζουμε.

Το αποτέλεσμα γράφεται συνήθως με τέτοιο τρόπο ώστε να αποτελείται από δυο μέρη. Ένα μέρος είναι ανεξάρτητο της παραμέτρου ομαλοποίησης (το πεπερασμένο μέρος) και ένα το οποίο εξαρτάται από την παράμετρο και απειρίζεται όταν χρησιμοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες

Απορροφούμε κατόπιν το δεύτερο μέρος που εξαρτάται από την παράμετρο ομαλοποίησης μέσω μιας πεπερασμένης σειράς όρων εξισορρόπησης (**counterterms**) οδηγώντας σε πεπερασμένο φυσικό αποτέλεσμα ακόμα και όταν προσπαθήσουμε να επαναφέρουμε την αρχική μορφή που οδηγούσε σε απειρισμό

Η μέθοδος αυτή ονομάζεται ανακανονικοποίηση (**renormalization**)

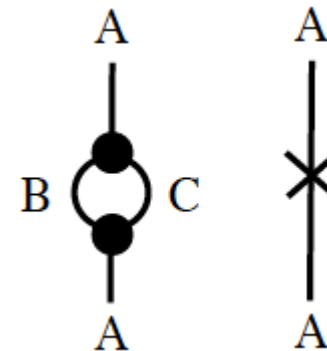
Χειρισμός των απειρισμών - συνταγή

Ο διαχωρισμός των υπολογισμών σε ένα τμήμα πεπερασμένο και ένα τμήμα το οποίο εξαρτάται από την παράμετρο ομαλοποίησης δεν είναι μια διαδικασία που συμβαίνει με έναν και μόνο τρόπο.

Ωστόσο ανάλογα με θεωρήσεις που γίνονται, η διαδικασία μπορεί να οριστεί με συγκεκριμένο τρόπο

Η αφαίρεση των όρων που εξαρτώνται από την παράμετρο ομαλοποίησης, μπορεί να θεωρηθεί σαν η πρόσθεση ενός νέου διαγράμματος το οποίο έχει αρνητική συνεισφορά και με ισχύ τέτοια ώστε να ακυρώνει την απόκλιση των κανονικών διαγραμμάτων.

Αν **η ίδια** νέα συνεισφορά ακυρώνει τους απειρισμούς **για όλα** τα ανάλογα διαγράμματα, ακόμα και αυτά με περισσότερες κορυφές σε υψηλότερη τάξη υπολογισμών, τότε το σχήμα ανακανονικοποίησης είναι μοναδικό και επομένως αποδεκτό για χρήση



Στο απλό μοντέλο που εξετάζουμε, οι μόνοι απειρισμοί εμφανίζονται εξαιτίας των διαγραμμάτων βρόχων που εμφανίζονται στις γραμμές A, B και C.

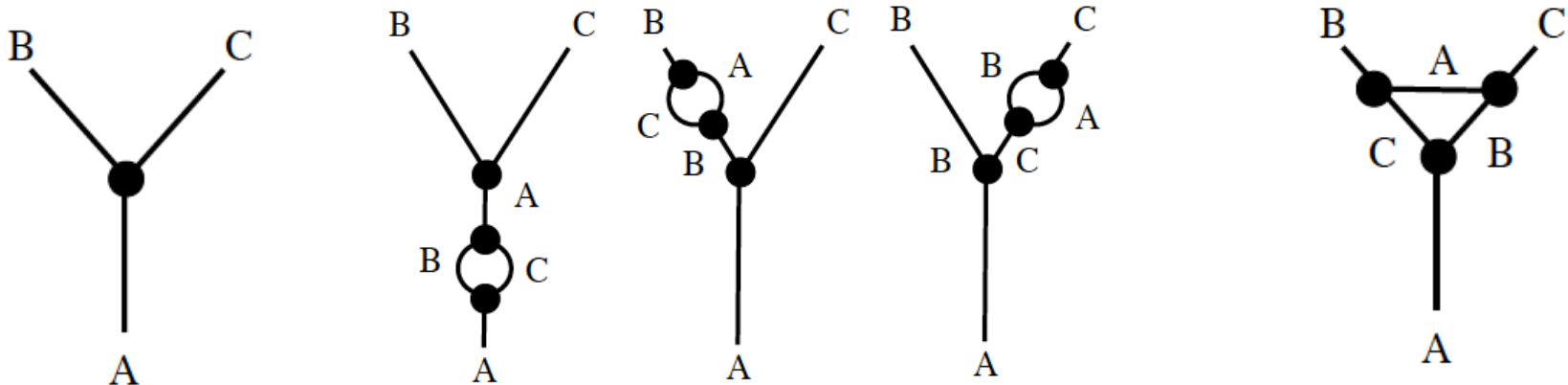
Διορθώνοντας τους απειρισμούς αυτούς έχει σαν αποτέλεσμα η ισχύουσα μάζα (**effective mass**) των σωματιδίων A, B και C να παρουσιάζουν λογαριθμική εξάρτηση από την κλίμακα της ενέργειας του πειράματος που εκτελείται

Διαγράμματα για $A \rightarrow BC$

Το διάγραμμα δένδρου δίνει πεπερασμένο αποτέλεσμα τάξης g

Εξαιτίας της φυσικής μάζας των σωματιδίων A , B και C , τα αποτελέσματα βρόχων στις εξωτερικές γραμμές (απειρισμοί) έχουν ήδη συμπεριληφθεί και επομένως αγνοούμε την συνεισφορά τους

Το άλλο διάγραμμα ενός βρόχου έχει πεπερασμένη συνεισφορά διόρθωσης τάξης g^3

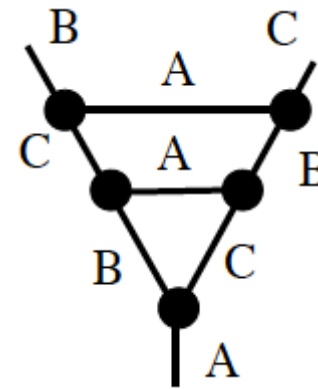
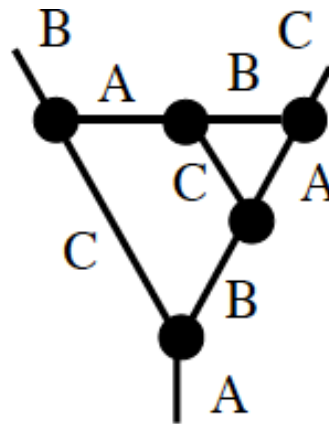
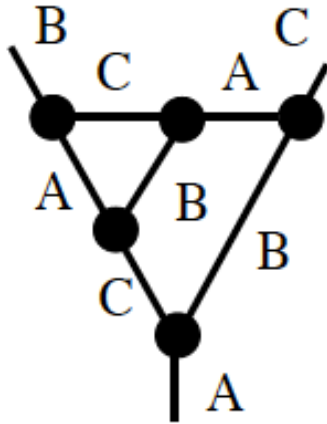


διάγραμμα δένδρου
πεπερασμένο, $\sim g$

Διαγράμματα βρόχου εξωτερικών
γραμμών αποκλίνοντα, τάξης $\sim g^3$,
μη συμπεριλαμβανόμενα

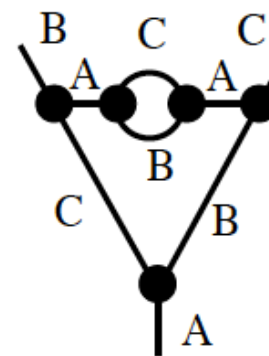
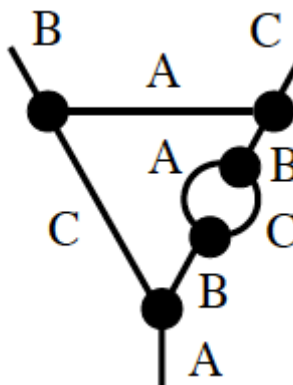
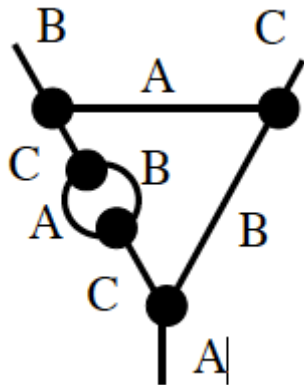
Διάγραμμα βρόχου
εσωτερικών γραμμών
συγκλίνον, τάξης $\sim g^3$

Διαγράμματα για $A \rightarrow BC$



↑
χρόνος

Εσωτερικά διαγράμματα βρόχων τάξης g^5 (πεπερασμένα?)



Εσωτερικά διαγράμματα βρόχων τάξης g^5 (αποκλίνουντα)

Διαγράμματα για $A \rightarrow BC$

Τα πρώτα τρία διαγράμματα είναι (πιθανότατα) συγκλίνοντα (πεπερασμένα) τάξης g^5

Τα επόμενα τρία διαγράμματα (κάτω σειρά) είναι αποκλίνοντα (άπειρα) και επίσης τάξης g^5

Είναι πολύ περισσότερο σημαντικά από τα πρώτα τρία διαγράμματα όταν αναλύουμε αποτελέσματα από κάποιο πείραμα για τον καθορισμό της σταθεράς σύζευξης g .

Ωστόσο χρησιμοποιούνται για να επανα-ορίσουμε τις μάζες των σωματιδίων A , B και C που θα χρησιμοποιηθούν στους εσωτερικούς διαδότες

Η αλλαγή που επιφέρουν εξαρτάται μόνο από τον λογάριθμο της ενέργειας της εξωτερικής γραμμής

Ο λόγος των δεδομένων σε υψηλές ενέργειες ως προς τα αντίστοιχα σε χαμηλές ενέργειες έχει αναμφίβολη πρόβλεψη η οποία δείχνει τις διορθώσεις

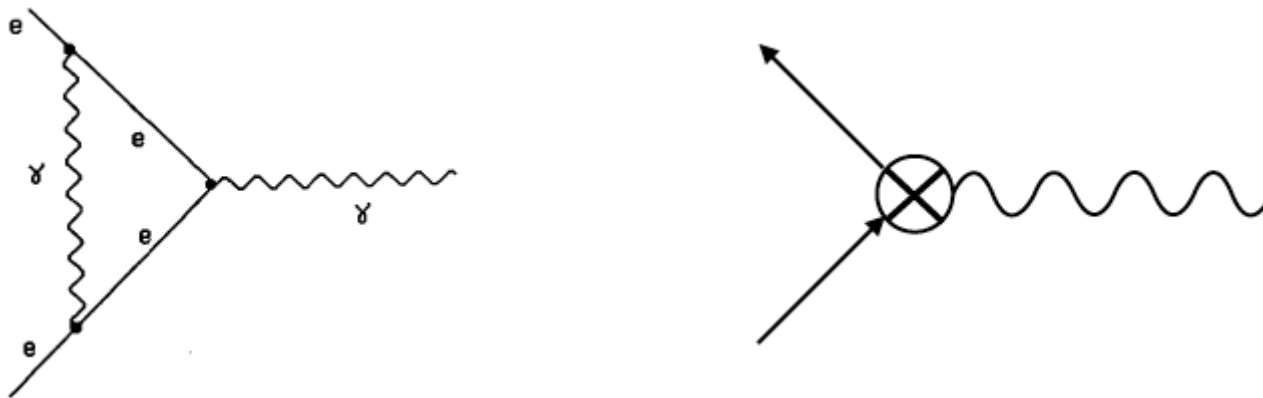
Απειρισμοί σε άλλες θεωρίες

Στο απλό μοντέλο ABC, ο τριγωνικός βρόχος είναι πεπερασμένος αλλά στην περίπτωση της QED (κβαντικής ηλεκτροδυναμικής) το διάγραμμα αυτό εμφανίζει απειρισμό.

Αυτό οφείλεται στην διαφορική ενεργειακή εξάρτηση του διαδότη στην περίπτωση του μοντέλου ABC ($\propto 1/q^2$) και τον διαδότη του ηλεκτρονίου της QED ($\propto 1/q$)

Ακυρώνουμε τον απειρισμό αυτό, προσθέτοντας ένα νέο διάγραμμα και απαιτώντας το ίδιο διάγραμμα να δουλεύει εξίσου καλά σε όλες τις τάξεις του αναπτύγματος της θεωρίας των διαταραχών.

Η εισαγωγή του διαγράμματος αυτού έχει σαν αποτέλεσμα την αλλαγή στην τιμή της μαγνητικής ροπής του ηλεκτρονίου ακόμα και σε χαμηλές ενέργειες



Απειρισμοί σε άλλες θεωρίες

Προσθέτοντας ένα βρόχο ηλεκτρονίου στην γραμμή ενός φωτονίου οδηγεί και πάλι σε απειρισμό αλλά με διαφορετικό τρόπο απ' ότι στο μοντέλο ABC



Ωστόσο, αντί να αλλάξουμε την μάζα του φωτονίου, αυτή διατηρείται ίση με μηδέν, αλλά το ισχύον φορτίο (effective charge) του ηλεκτρονίου αποκτά λογαριθμική εξάρτηση με την ενέργεια

Προσθέτοντας ένα βρόχο φωτονίου στην γραμμή ενός ηλεκτρονίου, προσδίδει λογαριθμική εξάρτηση από την ενέργεια της μάζας του ηλεκτρονίου.

Πηγαίνοντας από τον κλασικό E&M στην QED με τον πλέον προφανή τρόπο μαζί με τις ανακανονικοποιήσεις της μάζας και του φορτίου του ηλεκτρονίου, τα αποτελέσματα της θεωρίας είναι πεπερασμένα σε όλες τις τάξεις της θεωρίας διαταραχών

Προς το παρόν, δεν υπάρχει κάποιος γνωστός τρόπος ώστε να μεταβούμε από την κλασική θεωρία της βαρύτητας (γενική σχετικότητα) στην κβαντική θεωρία η οποία δίνει πεπερασμένα αποτελέσματα σε όλες τις τάξεις με μόνο πεπερασμένο αριθμό ανακανονικοποιήσεων

Δεν υπάρχουν κλασικά ανάλογα των ισχυρών και ασθενών αλληλεπιδράσεων, και επομένως θα πρέπει να μαντέψουμε ποιοι είναι οι κανόνες Feynman και να συγκρίνουμε με τα πειραματικά αποτελέσματα και να ελέγχουμε αν είναι επανακανονικοποιήσιμα

Απειρισμοί σε άλλες θεωρίες

Ο Ε&Μ έχει μια ιδιαίτερη ιδιότητα που ονομάζεται **local gauge invariance** και αυτή η ιδιότητα φαίνεται να είναι το κλειδί για να είναι ανακανονικοποιήσιμη θεωρία.

Πολλές θεωρίες που παρουσιάζουν local gauge invariance είναι ανακανονικοποιήσιμες ενώ αυτές που δεν παρουσιάζουν local gauge invariance δεν είναι.

Σε απλή μορφή, gauge invariance απαιτεί όλα τα σωματίδια να είναι άμαζα.

Τα μποζόνια W και Z έχουν ωστόσο πολύ μεγάλη μάζα ενώ τα quarks και τα λεπτόνια έχουν και αυτά πεπερασμένη μάζα. Σαν αποτέλεσμα, για μεγάλο χρονικό διάστημα, οι θεωρίες βαθμίδος παρουσίαζαν μόνο ... ακαδημαϊκό ενδιαφέρον

Αλλά υπάρχει ένα τρικ, (ο μηχανισμός Higgs) ο οποίος εισάγει τις μάζες των σωματιδίων χωρίς να παραβιάζεται το gauge invariance της θεωρίας

Ο μηχανισμός Higgs χρησιμοποιείται για να αποκτήσουν μάζα τα quarks, τα λεπτόνια καθώς και τα μποζόνια W και Z και η θεωρία των ασθενών αλληλεπιδράσεων είναι με τον τρόπο αυτό ανακανονικοποιήσιμη.

Οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις στην κβαντική χρωμοδυναμική, QCD, μεταφέρονται από άμαζα γκλουόνια και είναι μια θεωρία βαθμίδος που είναι επανακανονικοποιήσιμη

Στην θεωρία χορδών, σημειακά σωματίδια αντικαθίστανται από χορδές. Αυτό αλλάζει τα πάντα και έχει σαν αποτέλεσμα όλα σχεδόν τα (ισοδύναμα) Feynman διαγράμματα να είναι πεπερασμένα