

# Ρεύμα Μετατόπισης

# Ρεύμα Μετατόπισης

Είδαμε ότι ο νόμος του Ampere μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση του μαγνητικού πεδίου  $\vec{B}$  που δημιουργείται ένα ρεύμα  $I$ , αρκεί το ρεύμα αυτό να είναι συνεχές και σταθερό

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{encl.}$$

Το ρεύμα  $I_{encl.}$ , εκφράζει το συνολικό ρεύμα που περικλείεται από την καμπύλη  $C$  και ονομάζεται **ρεύμα αγωγιμότητας**

Αν η ένταση του ρεύματος δεν είναι σταθερή, τότε ο νόμος του Ampere αποτυγχάνει.

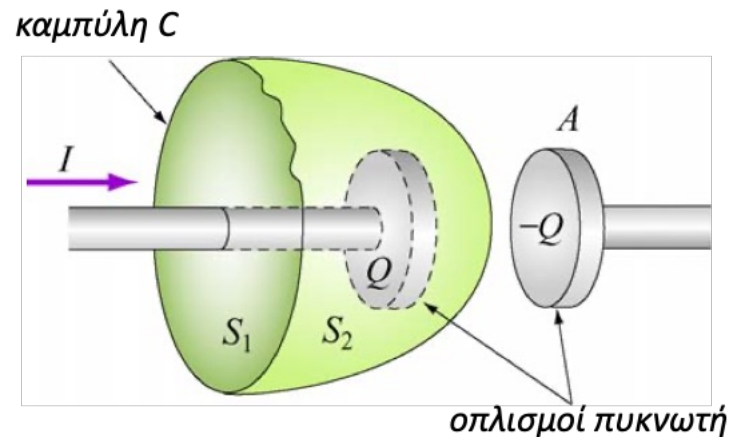
Κάτι τέτοιο συμβαίνει κατά την φόρτιση για παράδειγμα ενός πυκνωτή, όπου το ρεύμα δεν είναι σταθερό

Σύμφωνα με τον νόμο του Ampere, το ρεύμα που περικλείεται στην καμπύλη  $C$  θα δώσει ότι υπάρχει πεδίο:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{encl.} \neq 0$$

Η καμπύλη  $C$  μπορεί να θεωρηθεί σύνορο της επιφάνειας  $S_1$ .

Αλλά θα μπορούσε να θεωρηθεί και σύνορο της επιφάνειας  $S_2$  που βρίσκεται ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή, τότε:



## Ρεύμα Μετατόπισης

Ανάλογα με το ποια επιφάνεια έχουμε θεωρήσει, το συνολικό ρεύμα μπορεί ή όχι να είναι μηδέν και καταλήγουμε σε αντίφαση.

Για να εξασφαλιστεί ότι ο νόμος του Ampere ισχύει και για την περίπτωση των κυκλωμάτων ακόμα και όταν περιέχουν πυκνωτές που παρουσιάζεται κενό ανάμεσα στους οπλισμούς τους, ο Maxwell εισήγαγε ακόμα ένα όρο στο νόμο του Ampere:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0(I + I_d) \quad \text{Ο όρος } I_d \text{ ονομάζεται } \textbf{ρεύμα μετατόπισης}$$

**Το ρεύμα μετατόπισης ορίζεται ως:**  $I_d = \frac{\epsilon_0 d\Phi_e}{dt}$

όπου,  $\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$  η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια των οπλισμών του πυκνωτή

## Ρεύμα Μετατόπισης

Αν εφαρμόσουμε τον γενικευμένο αυτό νόμο με την επιφάνεια  $S_1$ , το ρεύμα μετατόπισης είναι μηδέν και θα έχουμε:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I \quad \text{όπως με τον νόμο του Ampere}$$

Αν επιλέξουμε την επιφάνεια  $S_2$ , το ρεύμα αγωγιμότητας είναι μηδέν,  $I = 0$  και το ρεύμα μετατόπισης υπολογίζεται από την ηλεκτρική ροή που διέρχεται από τους οπλισμούς του πυκνωτή.

Θα έχουμε:  $\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = EA$ , όπου  $A$  το εμβαδό των οπλισμών του πυκνωτή.

Από τον νόμο του Gauss:  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$

Επομένως η ροή θα είναι:  $\Phi_e = EA = \frac{Q}{\epsilon_0}$

Το ρεύμα μετατόπισης προκύπτει ότι είναι:  $I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} = \epsilon_0 \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dt} = I$

Εφόσον:  $I_d = I$  καταλήγουμε στον ίδιο αποτέλεσμα με τον νόμο Ampere

# Νόμος Ampere-Maxwell

Έχουμε επομένως την τροποποίηση του νόμου του Ampere:  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0(I + I_d)$

όπου  $I_d = \frac{\varepsilon_0 d\Phi_e}{dt}$  και  $\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Αυτός ο τροποποιημένος νόμος, ονομάζεται νόμος Ampere-Maxwell

Εκφράζει το γεγονός ότι μαγνητικά πεδία παράγονται από ρεύματα αγωγιμότητας και ρεύματα μετατόπισης. Δηλαδή και από ρεύματα που διαρρέουν αγωγούς αλλά και από χρονικά μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά πεδία

## Παράδειγμα:

Στους οπλισμούς ενός πυκνωτή χωρητικότητας  $C=2\mu F$  εφαρμόζεται μεταβαλλόμενη διαφορά δυναμικού:  $V = V_0 \sin \omega t$  όπου  $V_0 = 5V$  και  $\omega = 10kHz$ . Πόσο ρεύμα διέρχεται από τον πυκνωτή;

- Το ρεύμα αγωγιμότητας μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή είναι 0
- Το ρεύμα μετατόπισης, σύμφωνα με τα προηγούμενα, ισούται με το ρεύμα αγωγιμότητας στους αγωγούς που συνδέονται με τους οπλισμούς του πυκνωτή

$$I_d = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow I_d = \frac{d(CV)}{dt} = C \frac{dV}{dt} = CV_0 \frac{d(\sin \omega t)}{dt} = CV_0 \omega \cos \omega t \Rightarrow I = I_0 \cos \omega t$$

όπου  $I_0 = CV_0 \omega = 2 \times 10^{-6} F \times 5V \times 10 \times 10^3 Hz = 0.1A = 100mA$

## Μαγνητικές Ιδιότητες της ύλης

# Μαγνητικά Υλικά

Η εισαγωγή υλικών μέσων στη μελέτη του μαγνητισμού έχει πολύ διαφορετικά αποτελέσματα από την εισαγωγή υλικών στην περίπτωση της ηλεκτροστατικής.

Μελετήσαμε το αποτέλεσμα διηλεκτρικών υλικών στην ηλεκτροστατική και είδαμε ότι το αποτέλεσμά τους ήταν να ελαττώνουν **πάντοτε** το ηλεκτρικό πεδίο σε τιμές μικρότερες από αυτές που αντιστοιχούν σε δεδομένες τιμές ελεύθερου φορτίου.

Σε αντίθεση, όταν εισαγάγουμε κάποιο υλικό σε μαγνητικό πεδίο, τότε μπορούν να συμβούν ένα από τα ακόλουθα:

- **Ελάττωση** του μαγνητικού πεδίου  $\vec{B}$  κάτω από την τιμή που θα είχε, για την ίδια ποσότητα «ελεύθερου» ρεύματος (**διαμαγνητικά υλικά**)
- **Μικρή αύξηση** του μαγνητικού πεδίου  $\vec{B}$  σε σχέση με την τιμή που θα είχε, για την ίδια ποσότητα «ελεύθερου» ρεύματος (**παραμαγνητικά υλικά**)
- **Μεγάλη αύξηση** του μαγνητικού πεδίου  $\vec{B}$  σε σχέση με την τιμή που θα είχε, για την ίδια ποσότητα «ελεύθερου» ρεύματος (**σιδηρομαγνητικά υλικά**)

# Μαγνητικές ιδιότητες υλικών

Οι μαγνητικές ιδιότητες των υλικών οφείλονται στις μαγνητικές ιδιότητες των ατόμων, οι οποίες προέρχονται από την κίνηση των ηλεκτρονίων γύρω από τους πυρήνες:

Η μαγνητική ροπή των ατόμων προέρχεται από την κίνηση των ηλεκτρονίων γύρω από τον πυρήνα του ατόμου:

Η στροφορμή του ηλεκτρονίου θα είναι:  $L = mvr$

Η κυκλική κίνηση του ηλεκτρονίου δημιουργεί ηλεκτρικό ρεύμα έντασης:

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{vT} = \frac{ev}{2\pi r}$$

Η μαγνητική ροπή αυτού του κυκλικού ρεύματος είναι:  $\mu = IA = I\pi r^2$

Αντικαθιστώντας το ρεύμα:  $\mu = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 \Rightarrow \mu = \frac{1}{2} evr$

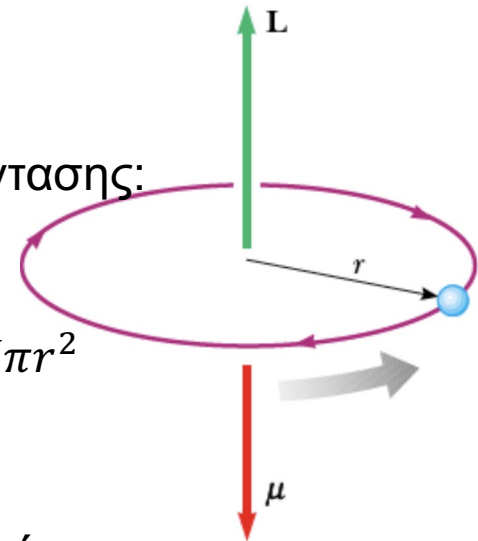
Η φορά της μαγνητικής ροπής είναι αντίθετη αυτής της στροφορμής.

Ο λόγος της μαγνητικής ροπής ως προς την στροφορμή είναι:  $\frac{\mu}{L} = \frac{1}{2} \frac{evr}{mvr} \Rightarrow \frac{\mu}{L} = \frac{1}{2} \frac{e}{m}$

Η τελευταία σχέση δίνει:  $\mu = \left(\frac{e}{2m}\right) L$

Από την κβαντομηχανική έχουμε:  $L = n \left(\frac{h}{2\pi}\right) = n\hbar, n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow L = 0, \hbar, 2\hbar, 3\hbar, \dots$

Η μικρότερη μη μηδενική μαγνητική ροπή είναι:  $\mu = \left(\frac{e\hbar}{2m}\right)$  **μαγνητόνη του Bohr**





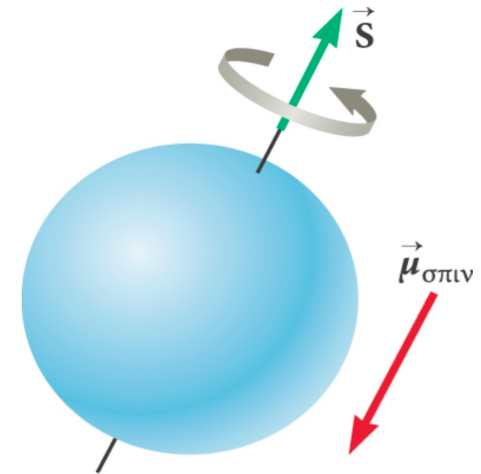
## Το spin των ηλεκτρονίων

Το ηλεκτρόνιο, όπως και άλλα σωματίδια, έχει μια εγγενή ιδιότητα που ονομάζεται spin, η οποία συνεισφέρει επίσης στη μαγνητική του ροπή

Στην πραγματικότητα, το ηλεκτρόνιο δεν περιστρέφεται γύρω από τον εαυτό του. Έχει μια εγγενή στροφορμή σαν να περιστρέφονταν γύρω από τον εαυτό του. Η στροφορμή λόγω του spin είναι ένα σχετικιστικό φαινόμενο.

Το μέτρο της μαγνητικής ροπής λόγω spin είναι:

$$\mu = \left( \frac{e\hbar}{2m_e} \right) \text{ μαγνητόνη του Bohr}$$



## Η ολική μαγνητική ροπή των ατόμων

Η συνολική μαγνητική ροπή ενός ατόμου είναι το διανυσματικό άθροισμα των μαγνητικών ροπών λόγω της τροχιακής κίνησης (στροφορμής) και λόγω του spin των ηλεκτρονίων.

Η μαγνητική ροπή από τη συνεισφορά των μαγνητικών ροπών των πρωτονίων και νετρονίων είναι πολύ μικρή και παραλείπεται

Στα περισσότερα υλικά, η μαγνητική ροπή ενός ηλεκτρονίου σε κάποιο άτομο, αντισταθμίζεται από την μαγνητική ροπή ενός άλλου ηλεκτρονίου του ίδιου ατόμου, που κινείται σε τροχιά αντίθετης φοράς. Σαν αποτέλεσμα η μαγνητική επίδραση της τροχιακής κίνησης των ηλεκτρονίων είναι πολύ μικρή ή και μηδενική

Στα άτομα με πολλά ηλεκτρόνια, συνήθως σχηματίζονται ζεύγη ηλεκτρονίων με αντίθετα spins.

Στα άτομα με περιττό αριθμό ηλεκτρονίων θα έχουν κάποια μαγνητική ροπή λόγω του spin του ηλεκτρονίου που δεν συμμετέχει στο σχηματισμό ζεύγους.

# Μαγνήτιση

Τα μαγνητικά υλικά αποτελούνται από πολλά μόνιμα ή επαγόμενα μαγνητικά δίπολα.

Μια από τις έννοιες ιδιαίτερα σημαντική για την κατανόηση των μαγνητικών υλικών είναι η μέση τιμή του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται όταν πολλά μαγνητικά δίπολα ευθυγραμμίζονται

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα κομμάτι μαγνητικού υλικού στη μορφή ενός μακριού κυλίνδρου ακτίνας  $R$ , επιφάνειας  $A$  και μήκους  $L$ , το οποίο αποτελείται από  $N$  μαγνητικά δίπολα, το καθένα με μαγνητική ροπή  $\vec{\mu}$ , κατανεμημένα ομοιόμορφα στον όγκο του κυλίνδρου.

Υποθέτουμε ακόμα ότι όλες οι μαγνητικές διπολικές ροπές,  $\vec{\mu}$ , είναι ευθυγραμμισμένες με τον άξονα του κυλίνδρου

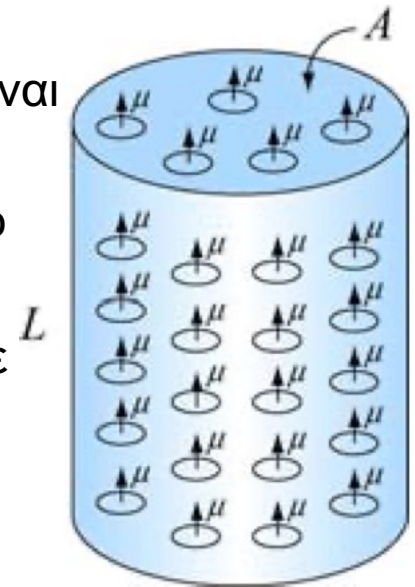
Απουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, ποιο είναι το μαγνητικό πεδίο εξαιτίας όλων αυτών των μαγνητικών διπόλων;

Για να απαντήσουμε στην ερώτηση αυτή, παρατηρούμε ότι κάθε δίπολο έχει το δικό του μαγνητικό πεδίο.

Ορίζουμε το διάνυσμα της **μαγνήτισης**,  $\vec{M}$ , ως τη συνισταμένη μαγνητική ροπή ανά μονάδα όγκου:

όπου  $V$  ο όγκος

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{\mu}_i$$



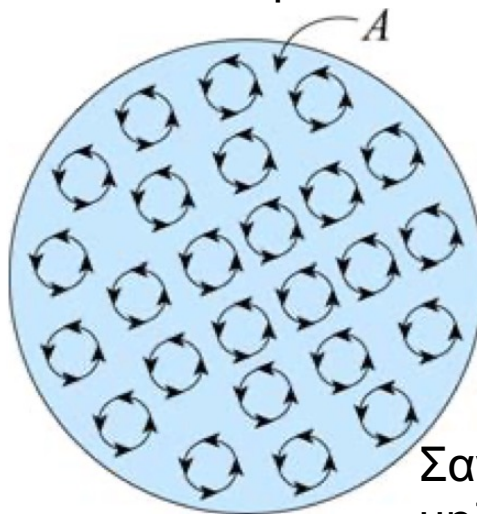
# Μαγνήτιση

Ορίσαμε τη μαγνήτιση ως το διάνυσμα:  $\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{\mu}_i$

Για την περίπτωση του κυλίνδρου που όλα τα δίπολα είναι ευθυγραμμισμένα έχουμε:

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{\mu}_i \Rightarrow M = \frac{N\mu}{AL}$$

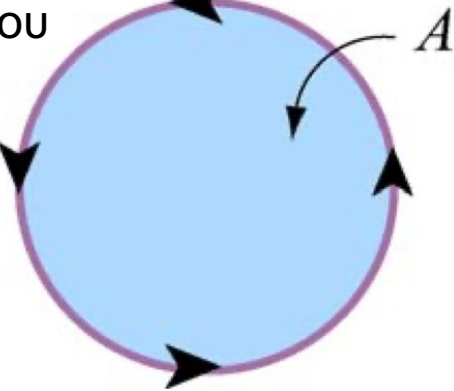
Ποιο θα είναι το μέσο μαγνητικό πεδίο που δημιουργούν όλα αυτά τα δίπολα μέσα στον κύλινδρο;



Μπορούμε να φανταστούμε όλα τους μικρούς βρόχους ρεύματος που σχετίζονται με τις διπολικές ροπές και τις διευθύνσεις των ρευμάτων κοιτάζοντές από πάνω ;

Στο εσωτερικό του κυλίνδρου, ρεύματα που κινούνται προς μια φορά αναιρούνται από γειτονικά ρεύματα που κινούνται σε αντίθετη φορά. Η μόνη περιοχή που δεν έχουμε αναιρέσεις των ρευμάτων είναι κοντά στα όρια του κυλίνδρου

Σαν αποτέλεσμα το ρεύμα στο εσωτερικό  $I_{eq}$  μηδενίζεται και το μόνο ρεύμα που εμφανίζεται στη πλευρά του κυλίνδρου που εμφανίζεται να διαρρέεται από ρεύμα όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα



# Μαγνήτιση

Η συναρτησιακή μορφή του ισοδύναμου ρεύματος μπορεί να εξαχθεί αν θεωρήσουμε τη μαγνητική ροπή που δημιουργεί το ρεύμα αυτό και ζητήσουμε να ισοδυναμεί με την μέση μαγνητική ροπή που προκαλούν όλα τα δίπολα στο κομμάτι του κυλίνδρου:

$$\vec{M}_{\text{ισοδ.}} = \vec{M}_{\text{διπ.}} \Rightarrow I_{\text{ισοδ.}} A = N\mu \Rightarrow I_{\text{ισοδ.}} = \frac{N\mu}{A}$$

Υπολογίζουμε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το ισοδύναμο ρεύμα.

Με το ρεύμα να ρέει στις πλευρές, η ισοδύναμη διάταξη είναι αυτή ενός σωληνοειδούς που έχει ένα «επιφανειακό» ρεύμα (ή ρεύμα ανά μονάδα μήκους)  $K$ .

Οι δυο ποσότητες συνδέονται με τη σχέση:  $K = \frac{I_{\text{ισοδ.}}}{L} = \frac{N\mu}{AL} = M$

Βλέπουμε ότι το ρεύμα επιφάνειας  $K$  είναι ίσο με την μαγνήτιση  $M$ , που με την σειρά της είναι η μέση μαγνητική διπολική ροπή ανά μονάδα όγκου.

Το μέσο μαγνητικό πεδίο το οποίο δημιουργείται από το ισοδύναμο ρεύμα είναι: (μαγνητικό πεδίο πηνίου πεπερασμένων διαστάσεων)

$$B_M = \mu_0 K = \mu_0 M$$

Από τη στιγμή που η φορά του πεδίου αυτού είναι ίδια με αυτή της μαγνήτισης, η προηγούμενη έκφραση μπορεί να γραφεί και σε διανυσματική μορφή:

$$\vec{B}_M = \mu_0 \vec{M} \quad \text{ακριβώς αντίθετο αποτέλεσμα από την ηλεκτροστατική που το πεδίο στο υλικό ήταν αντίθετο από το εξωτερικό πεδίο}$$