ΦΥΣ 133 - ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ - ΛΥΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ #1

Κάθε ερώτημα αξίζει 4 μονάδες αν απαντηθεί τέλεια. Δύο μονάδες αν απαντήσατε μόνο μιά σωστή επιλογή, ή αν απαντήσατε 2 σωστές επιλογές και μιά επιπλέον λάθος. Τέλος μηδέν μονάδες αν επιλέξατε όλες τις απαντήσεις.

Ερώτηση 1: Οι σωστές επιλογές είναι (β) και (δ)

Ερώτηση 2: Οι σωστές επιλογές είναι (α) και (δ)

Η ολική ενέργεια διατηρείται αλλά η κινητική ενέργεια όχι

Η στροφορμή διατηρείται, αλλά η γραμμική ορμή όχι

Ερώτηση 3: Οι σωστές απαντήσεις είναι (β) και (γ)

Η ολική ενέργεια πρέπει να είναι ίση με τον ενεργό δυναμικό $V_{eff} = V + \ell^2/2mr^2$, που είναι η δυναμική ενέργεια + η κινητική ενέργεια από την περιστροφική κίνηση.

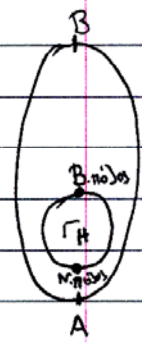
Ερώτηση 4: Οι σωστές απαντήσεις είναι (α) και (γ)

Η ενεργός διατομή είναι ανάλογη του τετραγώνου του φορτίου του σωματιδίου του στόχου. Αυτό τους επέτρεψε να βρούνε ότι ο πυρήνας αποτελείται από +79 e ηλεκτρικά φορτία.

Το γεγονός ότι ο πυρήνας είναι πολύ βαρύτερος από τα άλφα σωματίδια ήταν γνωστό από το γεγονός ότι η διαφορική ενεργός διατομή μετρούμενη στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου συμφωνούσε με την ίδια ενεργό διατομή υπολογιζόμενη στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας. Αυτό υποδείκνυε ότι η ταχύτητα του κέντρου μάζας στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου ήταν αμελητέα.

ΦΥΣ 133 - ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ - ΛΥΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ # 2



(α) Το δυναμικό στην περίπτωσή μας είναι $V=-\frac{k}{r}$, επομένως το πρόβλημα του freesbee ανάγεται σ' αυτό του kepler.

Το freesbee ρίχνεται οριζόντια σε ένα σημείο A, έτσι ώστε $\dot{r}(A)=0$. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο A είναι ένα σημείο αψίδας και επομένως η στροφορμή $\ell=|\vec{r}\times\vec{p}|$ είναι απλά $\ell=mvr_A$ όπου r_A είναι η ακτινική απόσταση από το κέντρο της γής, στο A. Ο βόρειος πόλος είναι επίσης ένα σημείο αψίδας και επομένως $\ell=m\frac{v}{2}r_B = mvr_A \Rightarrow r_B=2r_A$ όπου χρησιμοποιήσαμε την διατήρηση της στροφορμής η οποία ισχύει για κίνηση σε κεντρικό δυναμικό της μορφής $U=-\frac{k}{r}$.

Ξέρουμε ότι $r_A=r_e+1m\approx r_e$ όπου r_e η ακτίνα της γής. Επομένως $r_B=2r_e \Rightarrow$ το freesbee περνά από το βόρειο πόλο σε ύψος ίσο με μιά ακτίνα της γής.

(β) Το πρόβλημα kepler επιτρέπει κλειστές (φραγμένες) τροχιές για $E<0$ επομένως το freesbee θα επιστρέψει και πάλι στο σημείο A.

(γ)
$$\left.\begin{aligned} r_{min}&=\alpha(1-\varepsilon)=r_A \\ r_{max}&=\alpha(1+\varepsilon)=r_B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{r_A}{r_B}=\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon=\frac{1-r_A/r_B}{1+r_A/r_B}$$

Αλλά $\frac{r_A}{r_B}=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\varepsilon=\frac{1}{3}}$

(δ) $b=\frac{\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ $\qquad \alpha=r_A(1+\varepsilon)$

Από δω καταλήγουμε $b=r_A\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \Rightarrow \boxed{b=\sqrt{2}\,r_A}$

ΑΣΚΗΣΗ # 3

Η Lagrangian του συστήματος είναι: $L = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 - r\dot{q}_1 q_2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2$

(α) Η q_1 είναι κυκλική, και επομένως: $p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 - r q_2$ είναι μια σταθερά της κίνησης.

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -r\dot{q}_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = \ddot{q}_2 \Rightarrow \ddot{q}_2 = -r\dot{q}_1$$

(β) $\ddot{q}_2 = -r\dot{q}_1 = -r(p_1 + r q_2) = -r^2 q_2 - r p_1$ Εξίσωση διεγερμένου αρμονικού ταλαντωτή

$$q_2 = A\sin rt + B\cos rt - p_1/r$$

$$\dot{q}_1 = p_1 + r q_2 = rA\sin rt + rB\cos rt$$ ολοκληρώνοντας

$$q_1 = -A\cos rt + B\sin rt + C$$

(γ) $q_1(0) = 0 \Rightarrow A = C$

$\dot{q}_1(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$q_2(0) = 0 \Rightarrow B = p_1/r \Rightarrow p_1 = \emptyset$

$\dot{q}_2(0) = 3 \Rightarrow rA = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{r} = C$

Επομένως $q_1 = \frac{3}{r}(1 - \cos rt)$ $\quad q_2 = \frac{3}{r}\sin rt$

(δ) $H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = (\dot{q}_1 - r q_2)\dot{q}_1 + \dot{q}_2^2 - \left(\frac{1}{2}\dot{q}_1^2 - r\dot{q}_1 q_2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2\right) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} H = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 \\ \dot{q}_1 = p_1 + r q_2 \quad \text{και} \quad \dot{q}_2 = p_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{H = \frac{1}{2}(p_1 + r q_2)^2 + \frac{1}{2}p_2^2}$$

$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt}$. Ξέρουμε ότι η H διατηρείται είτε επειδή $\frac{\partial L}{\partial t} = \emptyset$, ή από την ίδια την Hamiltonian όταν $\frac{\partial H}{\partial t} = \emptyset$.

Για την συγκεκριμένη λύση του υποερωτήματος (c), $p_1 = 0$

$q_2 = \frac{3}{2}\sin rt$ και $p_2 = 3\cos rt$

Επομένως $H = \frac{1}{2}(3\sin rt)^2 + \frac{1}{2}(3\cos rt)^2 = \frac{9}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ # 4

(a) Για μικρές γωνίες, η κινητική ενέργεια είναι:

$$T = \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m}{2}l^2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2 + \frac{m}{2}l^2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_3)^2 \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2}[\dot{\theta}_1\ \dot{\theta}_2\ \dot{\theta}_3]\begin{bmatrix}(M+2m)l^2 & ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 & 0 \\ ml^2 & 0 & ml^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\tilde{\dot{\theta}}[T]\dot{\theta}$$

Η δυναμική ενέργεια είναι:

$$V = \frac{Mgl}{2}\theta_1^2 + \frac{mgl}{2}(\theta_1^2+\theta_2^2) + \frac{mgl}{2}(\theta_1^2+\theta_3^2) \Rightarrow$$

$$V = \frac{1}{2}[\theta_1\ \theta_2\ \theta_3]\begin{bmatrix}(M+2m)gl & 0 & 0 \\ 0 & mgl & 0 \\ 0 & 0 & mgl\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\tilde{\theta}[V]\theta$$

(b) Η εξίσωση των ιδιοτιμών είναι:

$$([A] - \omega^2[m])\,\alpha = \emptyset \quad \text{όπου } \alpha: \text{τα ιδιοδιανύσματα} \quad (1)$$

Ουσιαστικά από το (a) υποερώτημα έχουμε την απάντηση για τους πίνακες $[A] = [V]$ και $[m] = [T]$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα για να πάρουμε:

$$\begin{vmatrix}(M+2m)gl - \omega^2(M+2m)l^2 & -\omega^2 ml^2 & -\omega^2 ml^2 \\ -ml^2\omega^2 & mgl-\omega^2 ml^2 & 0 \\ -ml^2\omega^2 & 0 & mgl - ml^2\omega^2\end{vmatrix} = \emptyset \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2l^3(g-\omega^2 l)\left[(M+2m)(g-\omega^2 l)^2 - 2m\omega^4 l^2\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2l^3(g-\omega^2 l)\left[\sqrt{M+2m}\,(g-\omega^2 l) + \sqrt{2m}\,\omega^2 l\right]\left[\sqrt{M+2m}\,(g-\omega^2 l) - \sqrt{2m}\,\omega^2 l\right] = \emptyset$$

Υπάρχουν τρείς λύσεις για την εξίσωση αυτή:

$$\omega_1^2 = \frac{g}{\ell} \qquad \omega_2^2 = \frac{g}{\ell}\,\frac{\sqrt{M+2m}}{\sqrt{M+2m}-\sqrt{2m}}\,, \qquad \omega_3^2 = \frac{g}{\ell}\,\frac{\sqrt{M+2m}}{\sqrt{M+2m}+\sqrt{2m}}$$

Οι τετραγωνικές ρίζες των παραπάνω εξισώσεων δίνουν τις γωνιακές συχνότητες των φυσικών τρόπων ταλάντωσης.

(γ) Πρέπει να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα για τις λύσεις των τριών ιδιοτιμών. Ευτυχώς δεν χρειάζεται να κανονικοποιήσουμε.
Για τον πρώτο φυσικό τρόπο ταλάντωσης, το ιδιοδιάνυσμα

a_1 δίνεται από την εξίσωση **(1)** $\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} \cancelto{0}{(M+2m)\left(g\ell-\frac{g}{\ell}\ell^2\right)} & -m\frac{g}{\ell}\ell^2 & -m\frac{g}{\ell}\ell^2 \\ -m\frac{g}{\ell}\ell^2 & \cancelto{0}{m\left(g\ell-\frac{g}{\ell}\ell^2\right)} & 0 \\ -m\frac{g}{\ell}\ell^2 & 0 & \cancelto{0}{m\left(g\ell-\frac{g}{\ell}\ell^2\right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix} = 0$$

Η λύση είναι $a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$ όπου a είναι σταθερά.

Αυτό το ιδιοδιάνυσμα αντιστοιχεί στην περίπτωση γ

Για την δεύτερη και τρίτη λύση των ιδιοσυχνοτήτων χρησιμοποιούμε τις τελευταίες δύο σειρές της εξίσωσης των ιδιοδιανυσμάτων και βρίσκουμε:

$$\left.\begin{aligned} -m\omega_{2,3}^2\ell^2\Theta_1 + m\left(g\ell-\omega_{2,3}^2\ell^2\right)\Theta_2 &= 0 \\ -m\omega_{2,3}^2\ell^2\Theta_1 + m\left(g\ell-\omega_{2,3}^2\ell^2\right)\Theta_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Theta_2 = \Theta_3 = \frac{\omega_{2,3}^2\,\ell}{g-\omega_{2,3}^2\,\ell}\,\Theta_1 .$$

Απο τη στιγμή που $\omega_2^2 > \frac{g}{\ell} > \omega_3^2$

μπορούμε να πούμε:

(α) ο δεύτερος φυσικός τρόπος ταλάντωσης έχει Θ_2 και Θ_3 σε αντίθετες κατευθύνσεις από ότι το Θ_1 και

(β) ο τρίτος φυσικός τρόπος ταλάντωσης έχει Θ_2 και Θ_3 στην ίδια διεύθυνση με το Θ_1.

Επομένως ο δεύτερος και τρίτος φυσικός τρόπος ταλάντωσης αντιστοιχούν στις περιπτώσεις B και A αντίστοιχα.

(δ) Για μικρές τιμές του M μπορούμε να γράψουμε:

$$\sqrt{M+2m} = \sqrt{2m}\sqrt{1+\frac{M}{2m}} \simeq \sqrt{2m}\left(1+\frac{M}{4m}\right) = \sqrt{2m} + \frac{M}{\sqrt{8m}}$$

Η δεύτερη ιδιοσυχνότητα γίνεται τότε:

$$\omega_2^2 \cong \frac{g}{\ell}\,\frac{\sqrt{2m}}{\frac{M}{\sqrt{8m}}} = \frac{4gm}{\ell M} \Rightarrow \omega_2 \cong 2\sqrt{\frac{gm}{\ell M}}$$

Η αντίστοιχη περίπτωση του σχήματος είναι αυτή με το B. Αυτό είναι προφανές στην πραγματικότητα αν αναλογιστούμε την περίπτωση $M=\emptyset$. Με μια αβαρή ράβδο, ο τρόπος ταλάντωσης του σχήματος (B) δεν μπορεί να υπάρχει γιατί η συνισταμένη δύναμη στη ράβδο (εξαιτίας της τάσης των δύο νημάτων) είναι μη μηδενική και επομένως η αβαρής ράβδος θα δεχόταν μια άπειρη επιτάχυνση.

ΑΣΚΗΣΗ # 5

(a) Το πρόβλημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας, που μπορεί να αντιπροσωπευθεί από μιά γενικευμένη συντεταγμένη Θ. Η συντεταγμένη αυτή είναι περιοδική, $\Theta = \Theta + 2\pi$, και επομένως ο χώρος μορφών είναι κύκλος. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y,z) της χάντρας μπορούν να γραφούν συναρτήσει της γενικευμένης συντεταγμένης Θ και της χρονικής μεταβλητής t :

$$x = R\cos\Omega t\sin\Theta$$
$$y = R\sin\Omega t\sin\Theta$$
$$z = -R\cos\Theta$$

Η Lagrangian δίνεται από $\mathcal{L} = T - V$. Η κινητική ενέργεια είναι:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\Omega^2\sin^2\Theta$$

όπου χρησιμοποιούμε
$$\dot{x} = -R\Omega\sin\Omega t\sin\Theta + R\dot{\Theta}\cos\Omega t\cos\Theta$$
$$\dot{y} = R\Omega\cos\Omega t\sin\Theta + R\dot{\Theta}\sin\Omega t\cos\Theta,$$
$$\dot{z} = R\dot{\Theta}\sin\Theta.$$

Η δυναμική ενέργεια δίνεται από το ελατήριο:

$$V = \frac{1}{2}k\left(x^2+y^2+(z+L)^2\right) = \frac{1}{2}k\left(R^2+L^2+2Lz\right) = kLz + \text{σταθ.} \Rightarrow$$

$$V = -kLR\cos\Theta + \text{σταθ.}$$

Αρκετά ενδιαφέρον σαν αποτέλεσμα αφού αν αγνοήσουμε την σταθερά που μπορούμε πάντοτε να αγνοήσουμε στη Lagrangian, το δυναμικό είναι ισοδύναμο με το δυναμικό που περιγράφει μιά ομογενή βαρυτική δύναμη η οποία δρά στη διεύθυνση του z-άξονα.

Επομένως: η Lagrangian μπορεί να γραφτεί:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\Omega^2\sin^2\Theta + kLR\cos\Theta$$

Η εξίσωση της κίνησης γράφεται λοιπόν :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial \theta} \equiv mR^2\ddot\theta - mR^2\Omega^2 \sin\theta\cos\theta + kLR\sin\theta = 0$$

(b) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της Hamiltonian συναρτήσει της Lagrangian παίρνουμε :

$$H = \dot\theta \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} - L = \frac{1}{2} mR^2\dot\theta^2 - \frac{1}{2} mR^2\Omega^2\sin^2\theta - kLR\cos\theta,$$ ή

αν κάποιος επιμένει να τη γράψουμε με τη μορφή των p και q (χώρος φάσεων) τότε θα έχουμε: $p = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta}$

$$H = \frac{p^2}{2mR^2} - \frac{1}{2} mR^2\Omega^2 \sin^2\theta - kLR\cos\theta$$

Η ολική ενέργεια είναι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας :

$$E \equiv T + V = \frac{1}{2} m R^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2} mR^2\Omega^2\sin^2\theta - kLR\cos\theta$$

Δηλαδή $E \neq H$. Εν αντιθέσει έχουμε :

$$E = H + mR^2\Omega^2\sin^2\theta. \qquad (A)$$

Για τους νόμους διατήρησης: Η Lagrangian του προβλήματος είναι ανεξάρτητη του χρόνου και θυμηθείτε :

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Επομένως, Η είναι σταθερά της κίνησης. Αυτό υποδηλώνει ότι η ενέργεια E δεν είναι σταθερά της κίνησης. Αν ήταν τότε η σχέση μεταξύ της ενέργειας και της Hamiltonian (A) θα επέβαλε ότι θ είναι πάντοτε σταθερά, αλλά αυτό είναι αδύνατο. Επομένως Η είναι διατηρήσιμη ενώ η ενέργεια E όχι. Η συμμετρία υπεύθυνη για την διατήρηση της Η είναι αυτή της ανεξαρτησίας του χρόνου της Lagrangian.

(γ) Γράφοντας την Lagrangian με τη μορφή $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\Theta}^2 - V_{eff}(\Theta)$

τα σημεία στατικής ισορροπίας θα είναι τα ακρότατα του ενεργού δυναμικού

δηλαδή λύσεις της παραγώγου: $V'_{eff}(\Theta) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Theta} = R \sin\Theta (kL - mR\Omega^2 \cos\Theta) = 0$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να ικανοποιηθεί με 2 τρόπους: θέτοντας $\sin\Theta = 0$ που σημαίνει ότι $\Theta = \phi$ ή $\Theta = \pi$
ή θέτοντας $kL - mR\Omega^2 \cos\Theta = \phi$.

Αυτή η δεύτερη λύση θα υπάρχει μόνο αν $\left|\frac{kL}{mR\Omega^2}\right| \leq 1$ οπότε

παίρνουμε: $\Theta = \pm \arccos\left(\frac{kL}{mR\Omega^2}\right) \equiv \pm\Theta_0$

Επομένως, ποιοτικά, η συμπεριφορά των σημείων στατικής ισορροπίας είναι:

Για $kL > mR\Omega^2$, υπάρχουν 2 σημεία στατικής ισορροπίας, $\Theta = 0, \pi$
ενώ για $kL < mR\Omega^2$, θα υπάρχουν 2 επιπλέον σημεία, $\Theta = \pm\Theta_0$
Στο όριο $kL \to mR\Omega^2$ (από κάτω), τα 2 επιπλέον σημεία στατικής ισορροπίας πλησιάζουν $\Theta = 0$.

Ευστάθεια ή αστάθεια των σημείων στατικής ισορροπίας μπορούν να προσδιορισθούν αναπτύσσοντας τη Lagrangian γύρω από το σημείο ισορροπίας και κρατώντας μόνο τους δευτεροβάθμιους όρους:

Γύρω από το σημείο $\Theta = \phi$ έχουμε:

$$\mathcal{L} \simeq \frac{1}{2} m R^2 \dot{\Theta}^2 - \frac{R}{2}(kL - mR\Omega^2)\Theta^2$$

που δείχνει ότι $\Theta = \phi$ είναι σημείο σταθεράς ή ασταθούς ισορροπίας αν $kL > mR\Omega^2$ ή $kL < mR\Omega^2$ αντίστοιχα.

Γύρω από το σημείο $\Theta = \pi$ μπορούμε να γράψουμε $\Theta = \pi + \vartheta$

επομένως: $\mathcal{L} \simeq \frac{1}{2} m R^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{R}{2}(kL + mR\Omega^2)\vartheta^2$

Δηλαδή ανεξάρτητα από την τιμή των παραμέτρων (αρκεί να είναι θετικές ποσότητες όπως έχει υποτεθεί μέχρι τώρα), $\Theta=\pi$ είναι πάντοτε ασταθές σημείο ισορροπίας.

Στην περιοχή όπου $\Theta=\emptyset$ είναι ασταθής ισορροπία για $kb<mR\Omega^2$. Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο με παραπάνω για τα 2 επιπλέον σημεία ισορροπίας, $\Theta=\pm\Theta_0$.

Μπορούμε να γράψουμε $\Theta=\pm\Theta_0+\tilde{\Theta}$ και να αναπτύξουμε τη Lagrangian ως προς $\tilde{\Theta}$ επομένως:

$$L\simeq\frac{1}{2}mR^2\dot{\tilde{\Theta}}^2-\frac{mR^2\Omega^2}{2}\left(1-\frac{k^2b^2}{m^2R^2\Omega^4}\right)\tilde{\Theta}^2$$

Ο όρος μπροστά από το $\tilde{\Theta}^2$ λαμβάνεται από $-\frac{1}{2}V''_{eff}(\Theta_0)$

Προφανώς για όλη την περιοχή που τα δύο αυτά σημεία της στατικής ισορροπίας υπάρχουν, ο συντελεστής του $\tilde{\Theta}^2$ όρου είναι αρνητικός και επομένως τα σημεία $\Theta=\pm\Theta_0$ είναι σημεία ευσταθούς ισορροπίας.

Στην περίπτωση που $kb=mR\Omega^2$ τότε είδαμε ότι $\Theta\to 0$. Αναπτύσσοντας την Lagrangian, ο δευτεροβάθμιος όρος Θ^2 μηδενίζεται και επομένως πρέπει να χρησιμοποιήσουμε υψηλότερους τάξης όρους για να προσδιορίσουμε αν $\Theta=\emptyset$ είναι σημείο σταθερούς ή ασταθούς ισορροπίας.

Το ανάπτυγμα της Lagrangian για την περίπτωση αυτή είναι:

$$L\simeq\frac{1}{2}mR^2\dot{\Theta}^2-\frac{kbR}{8}\Theta^4$$ που σημαίνει ότι όταν $kb=mR\Omega^2$, το

$\Theta=0$ σημείο είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας. Αυτό ήταν καθαρά πληροφοριακό και δεν ζητούνταν από την άσκηση.

Οι συχνότητες ταλάντωσης γύρω από τα σημεία ευσταθούς ισορροπίας μπορούν να παρθούν από τα αναπτύγματα των Lagrangian. Όλα είναι της μορφής $L=\frac{1}{2}mR^2\dot{\Theta}^2-\frac{1}{2}C^2\Theta^2$ για κάποια σταθερά C.

Συναρτήσει των m, R και c, η συχνότητα είναι: $\omega=\frac{C}{\sqrt{m}R}$

(δ) Στην περίπτωση αυτή, η Lagrangian μετατρέπεται σχετικά με ότι είδαμε στα υποερωτήματα (α)-(γ) σύμφωνα με τον ακόλουθο τρόπο:

Η κινητική ενέργεια T είναι η ίδια, αλλά το δυναμική ενέργεια αλλάζει:

$$V = \frac{1}{2}k\left((x-D)^2 + y^2 + (z+L)^2\right) = kLz - kDx + \text{σταθ.} \Rightarrow$$

$$V = -kLR\cos\theta - kDR\cos\Omega t\sin\theta + \text{σταθ}$$

Δηλαδή η Lagrangian εξαρτάται αναλυτικά από το χρόνο t.
Αυτό σημαίνει ότι η Hamiltonian δεν διατηρείται πλέον από τη στιγμή που δεν υπάρχει αμετάβλητο χρόνου στο τροποποιημένο πρόβλημα της περίπτωσης αυτής.