Τυπολόγιο

Διανύσματα:

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}, \qquad \vec{A}\times\vec{A} = 0, \qquad \vec{A}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = 0,$$

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot \vec{C}, \qquad \vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right) - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$$

Στροφορμή:

$$\vec{L} = \sum_i^n \vec{L}_i = \sum_i^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i = I\vec{\omega}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{\omega\varsigma,CM} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i^n \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,\varepsilon\xi}\right]$$

Κέντρο μάζας:

$$R_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1} m_i\vec{r}_i, \; M = \sum_{i=1} m_i \;\text{ ή }\; R_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$$

Γραμμική ορμή συστήματος σωμάτων:

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{\,\varepsilon\xi}$$

Euler-Lagrange εξισώσεις:

$S = \int_{x_1}^{x_2} f\left[y(x), y'(x), x\right]dx$ είναι στάσιμο κατά μήκος της $y = y(x)$ αν $\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$

Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \mathrm{T} - V$$

Αρχή Hamilton:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,dt$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) - U\left(\rho\phi z\right)$$

Σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) - U\left(r\theta\phi\right)$$

Εξισώσεις Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Εξισώσεις Lagrange με πολλαπλασιαστές:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{m}\lambda_k(t)\frac{\partial f_k}{\partial q_i} \quad \left(i = 1,2,3,\ldots s\right)$$

Γενικευμένη ορμή:

$$p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$$

Αγνοήσιμη ή κυκλική συντεταγμένη:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

Hamiltonian:

$$\mathcal{H}\left(q_i, p_i, t\right) = \sum_i p_i\dot{q}_i - \mathcal{L}\left(q_i, \dot{q}_i, t\right)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}$$

Εξισώσεις Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i} \qquad [i = 1,\cdots,n]$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i} \qquad [i = 1,\cdots,n]$$

Ανηγμένη μάζα:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Ενεργό δυναμικό:

$$U_{eff}(r) = U(r) + U_{cf}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

Μετασχηματισμένη ακτινική Δ.Ε. τροχιάς:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u + \frac{\mu}{l^2u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) = 0, \text{ όπου } u = \frac{1}{r}$$

Ενέργεια τροχιάς:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)$$

Τροχιές Kepler:

$F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2} = \dfrac{\gamma}{r^2}$ λύση ακτινικής εξίσωσης είναι: $r(\phi) = \dfrac{c}{1 + e\cos\phi}$, με $c = \dfrac{l^2}{\gamma\mu}$

Εκκεντρότητα (*e*): $E = \dfrac{\gamma^2\mu}{2l^2}\left(e^2 - 1\right)$ όπου E = Ενέργεια

Εκκεντρότητα	Ενέργεια	Είδος Τροχιάς
$e = 0$	$E < 0$	κυκλική
$0 < e < 1$	$E < 0$	ελλειπτική
$e = 1$	$E = 0$	παραβολική
$e > 1$	$E > 0$	υπερβολική

Περιήλιο: $r_{\min} = \dfrac{c}{1+e}$ Αφήλιο: $r_{\max} = \dfrac{c}{1-e}$

Μεγάλος ημιάξονας: $a = \dfrac{c}{1-e^2}$ Μικρός ημιάξονας: $b = \dfrac{c}{\sqrt{1-e^2}}$

Νόμοι Kepler:

1ος νόμος: τροχιές πλανητών είναι ελλείψεις με τον ήλιο σε μια από τις εστίες της έλλειψης

2ος νόμος: $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{l}{2\mu}$ 3ος νόμος: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM_H}a^3$

Συζευγμένοι ταλαντωτές:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k} M_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \qquad M_{jk} = \sum_a m_a \sum \frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_j}\frac{\partial x_{a,i}}{\partial q_k}$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j,k} V_{jk} q_j q_k \qquad V_{jk} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{V}\mathbf{q} \qquad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

ιδιοσυχνότητες**:** $\det(\mathbf{V} - \omega^2\mathbf{M}) = 0$ ιδιοδιανύσματα: $\sum_j \left(V_{jk} - \omega_r^2 M_{jk}\right)a_{jr} = 0$

$q_j(t) = \sum_r a_{jr}\eta_r(t)$ Κανονικές συντεταγμένες: $\eta_r(t) = \beta_r e^{i\omega_r t}$

Ορθοκανονικότητα: $\sum_{j,k} M_{jk} a_{jr} a_{ks} = \delta_{rs} = \begin{cases} 0 & r \neq s \\ 1 & r = s \end{cases}$