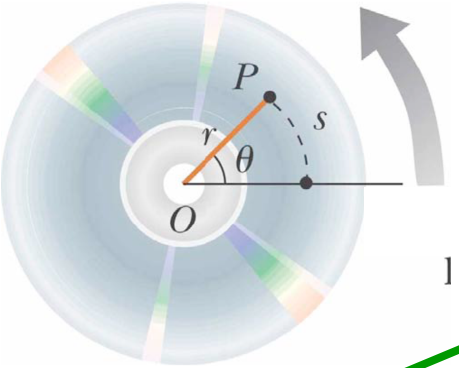
Περιστροφή στερεού σώματος - Εισαγωγικά

Θεωρήστε μιά χάντρα η οποία κινείται σε μια κυκλική περιφέρεια.



Διαγράφει μια γωνιακή μετατόπιση θ σε χρόνο t.
Η χάντρα διαγράφει την απόσταση *S*

$$\frac{S}{t} = \frac{r\Delta\theta}{\Delta t} = \omega r$$

Μέση γωνιακή ταχύτητα

Μέση εφαπτομενική ταχύτητα

$$\bar{\omega} \equiv \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \bar{\mathrm{v}} = \bar{\omega} r$$

Μπορούμε ακόμα να πούμε ότι $\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$

Επομένως ορίζουμε την στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

Και επομένως στιγμιαία εφαπτομενική ταχύτητα $\mathrm{v} = \omega r$ για r = σταθ

Περιστροφή στερεού σώματος - Εισαγωγικά

- Παίρνοντας την προηγούμενη σχέση, $\mathrm{v} = \omega r$ γράφουμε:

$$\frac{dS}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d^2S}{dt^2} = r\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d\mathrm{v}}{dt} = r\left(\frac{d\omega}{dt}\right) \Rightarrow \boxed{a_{\varepsilon\phi} = r\alpha}$$

Εφαπτομενική επιτάχυνση

Γωνιακή επιτάχυνση

Ξέρουμε ότι σε σώμα που κινείται σε κυκλική τροχιά ενεργεί η κεντρομόλος επιτάχυνση η οποία έχει φορά ΠΑΝΤΑ προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και ευθύνεται για την αλλαγή της διεύθυνσης της ταχύτητας:

$$a_r = \frac{\mathrm{v}^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} \Rightarrow \boxed{a_r = \omega^2 r}$$

Περιστροφή στερεού σώματος - Εισαγωγικά

- Η ολική γραμμική επιτάχυνση ενός σώματος που εκτελεί περιστροφική κίνηση είναι:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\varepsilon\phi} + \vec{a}_r \Rightarrow \left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_{\varepsilon\phi}^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + \omega^4 r^2} \Rightarrow \boxed{\left|\vec{a}\right| = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}}$$

- Συνοψίζοντας, στη περιστροφική κίνηση έχουμε εξισώσεις κίνησης για σταθερή γωνιακή επιτάχυνση και σταθερή εφαπτομενική επιτάχυνση:

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + a_{\varepsilon\phi} t$$

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}_0^2 + 2a_{\varepsilon\phi} l$$

$$\omega r = \omega_0 r + r\alpha t \Rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\left(\theta - \theta_0\right)$$

Περιστροφή στερεού σώματος - Εισαγωγικά

- Υπάρχει επομένως μια πλήρης αντιστοιχία μεταξύ των εξισώσεων της ευθύγραμμης κίνησης με **σταθερή** γραμμική επιτάχυνση και της περιστροφικής με **σταθερή** γωνιακή επιτάχυνση

Ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή γραμμική επιτάχυνση	Περιστροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση
$\alpha = \sigma\tau\alpha\theta.$	$\alpha = \sigma\tau\alpha\theta$
$v = v_0 + \alpha t$	$\omega = \omega_0 + \alpha\, t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\, \alpha t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\, \alpha\, t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2\alpha(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\, \alpha\, (\theta - \theta_0)$
$x - x_0 = \frac{1}{2}\, (v + v_0) t$	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}\, (\omega + \omega_0) t$

Περιστροφική κίνηση στερεών - Εισαγωγικά

- Η απόδειξη των εξισώσεων κίνησης για την στροφική κίνηση είναι απλή:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha dt = d\omega \Rightarrow \alpha \int dt = \int d\omega \Rightarrow \alpha t = \omega - \omega_0$$

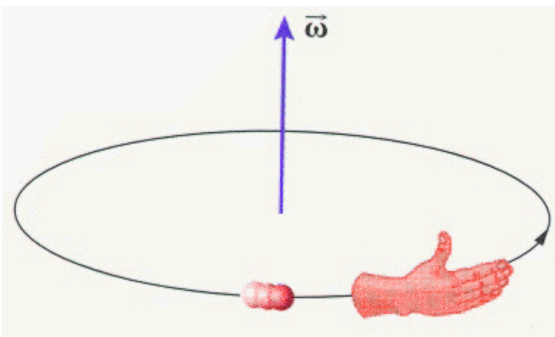
- Αν ολοκληρώσουμε και πάλι την τελευταία σχέση

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt \Rightarrow \int d\theta = \int \omega\, dt = \int \left(\omega_0 + \alpha t\right) dt \Rightarrow \theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Περιστροφική κίνηση στερεών - Εισαγωγικά

- Το μέγεθος ω είναι διανυσματικό όταν η γωνία θ μετριέται σε ακτίνια.

  Η διεύθυνσή του είναι παράλληλη προς τον άξονα περιστροφής και η φορά του ορίζεται σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία ή χεριού:



Ο δείκτης του χεριού ακολουθεί την φορά του θ ο αντίχειρας δείχνει τη φορά του ω

- Όταν εξετάσαμε τη κυκλική κίνηση είδαμε ότι η διεύθυνση του ω ορίζεται από την διανυσματική εξίσωση

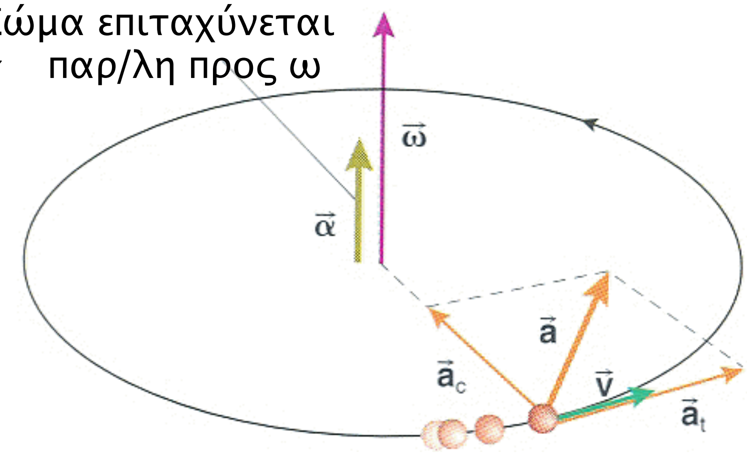
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- Η γωνιακή επιτάχυνση α έχει την ίδια διεύθυνση με αυτή του ω
  Αν η φορά της είναι ίδια με της ω, η περιστροφή αυξάνει ενώ στην αντίθετη περίπτωση επιβραδύνεται.

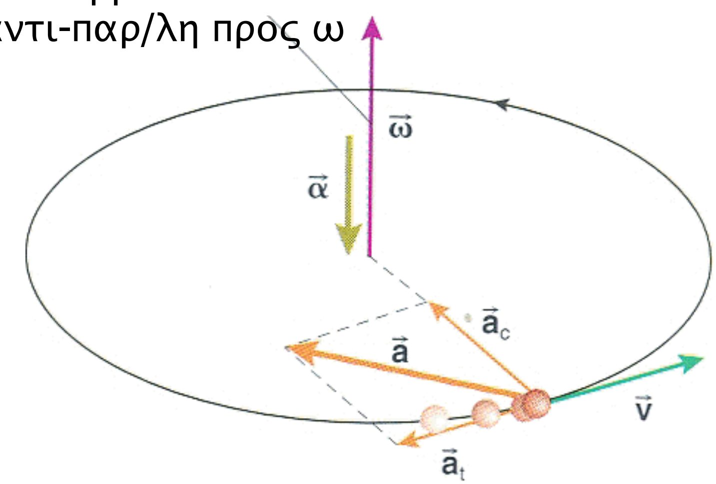
Περιστροφική κίνηση στερεού - Εισαγωγικά

- Στην περίπτωση περιστροφής γύρω από σταθερό άξονα επειδή η γωνία θ που σαρώνεται είναι ίδια για όλα τα σημεία, έπεται ότι:
  - Όλα τα σημεία του στερεού περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα και γωνιακή επιτάχυνση
  - Η γραμμική τους ταχύτητα δεν είναι ίδια αφού βρίσκονται σε διαφορετικές αποστάσεις από τον άξονα περιστροφής.

Σώμα επιταχύνεται
α παρ/λη προς ω



Σώμα επιβραδύνεται
α αντι-παρ/λη προς ω



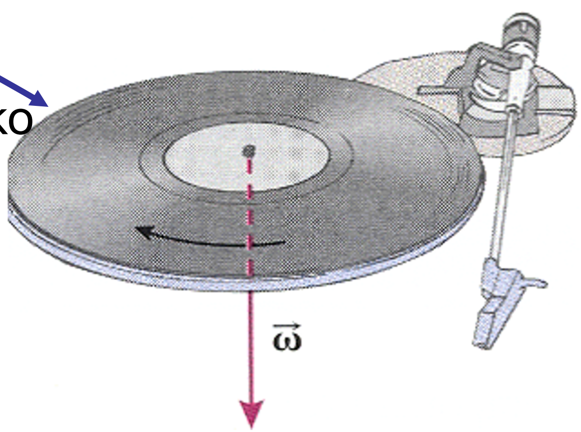
Παράδειγμα – Γωνιακή ταχύτητα

CD player: Η μουσική είναι γραμμένη σε αύλακα κατά μήκος μιας σπειροειδούς διαδρομής 5.4km. Το laser παρακολουθεί την αύλακα με σταθερή γραμμική ταχύτητα v = 1.2m/s. Η τροχιά ξεκινά σε ακτίνα r = 2.3cm και τελειώνει σε ακτίνα r = 5.9cm.

Ποια είναι η αρχική και τελική γωνιακή ταχύτητα?

- Για να κρατήσουμε την γραμμική ταχύτητα σταθερή σημαίνει ότι η γωνιακή ταχύτητα ω μεταβάλλεται

παλιομοδίτικο



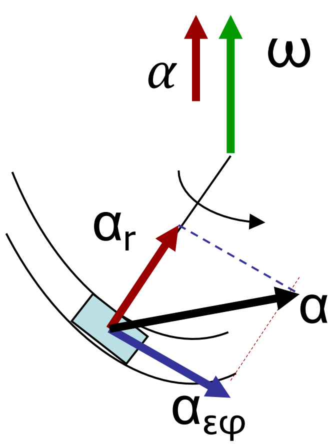
$$\omega_i = \frac{\mathrm{v}}{r_i} = 52.2 rad/s$$

$$\omega_f = \frac{\mathrm{v}}{r_f} = 20.3 rad/s$$

Παράδειγμα – Γωνιακή επιτάχυνση

- Αγωνιστικό αυτοκίνητο κάνει μια στροφή ακτίνας 50m με γωνιακή ταχύτητα ω = 0.6rad/s και γωνιακή επιτάχυνση α = 0.20rad/s^2.

  Ποιες οι τιμές της γραμμικής ταχύτητα v, α_r, $\alpha_{\varepsilon\varphi}$, και ολικής γραμμικής επιτάχυνσης α ?



$$\mathrm{v} = \omega r = 30 m/s$$

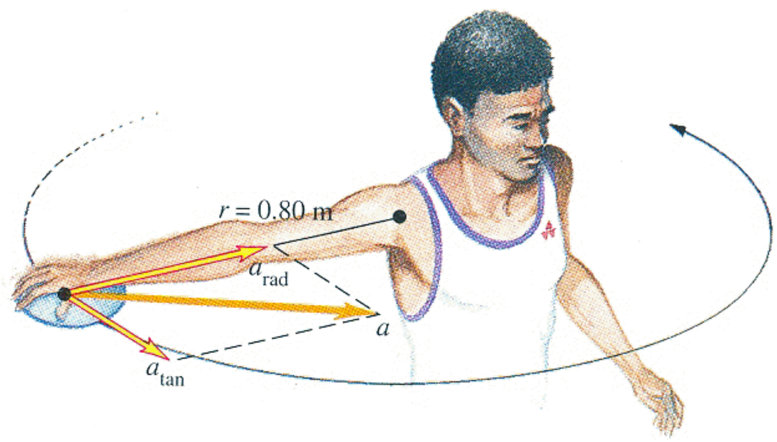
$$a_r = \frac{\mathrm{v}^2}{r} = 18 m/s^2$$

$$a_{\varepsilon\phi} = r\alpha = 10 m/s^2$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_{\varepsilon\phi}^2} = 21 m/s^2$$

$$\tan\theta = \frac{a_r}{a_{\varepsilon\phi}} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{a_r}{a_{\varepsilon\phi}} = 61^0$$

Παράδειγμα – Ρίψη δίσκου



Ένας δισκοβόλος στρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση α =50rad/s^2, κινώντας το δίσκο σε κύκλο ακτίνας 0.80cm.

Θεωρούμε το χέρι του σα στερεό σώμα κι' έτσι η ακτίνα είναι σταθερή.

Ποια η εφαπτομενική και ακτινική επιτάχυνση του δίσκου και ποιο το μέγεθος της επιτάχυνσης τη στιγμή που η γωνιακή ταχύτητα είναι 10 rad/s.

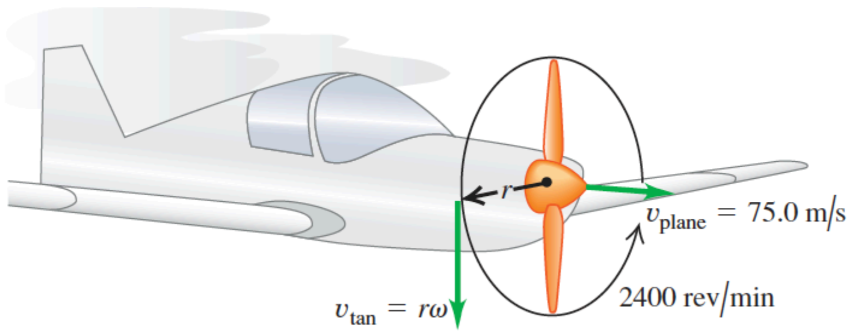
Από τη στιγμή που ο δίσκος κινείται σε κυκλική τροχιά η εφαπτομενική επιτάχυνση θα είναι

$$a_{\varepsilon\phi} = r\alpha = \left(50\,rad/s^2\right)\left(0.8rad\right) = 40\,m/s^2$$

$$a_{\mathrm{r}} = \omega^2 r = \left(10\,rad/s\right)^2\left(0.8rad\right) = 80\,m/s$$

$$\alpha = \sqrt{a_r^2 + a_{\varepsilon\phi}^2} = 89\,m/s^2$$

Παράδειγμα – Προπέλα αεροπλάνου



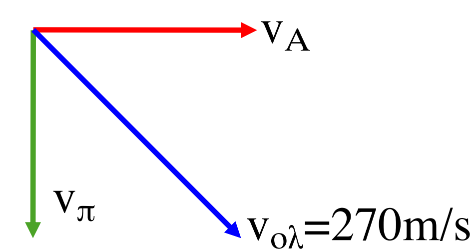
Σχεδιασμός της προπέλας ενός αεροπλάνου:
Θέλετε να κινείται με 2400rpm. Η ταχύτητα του αεροπλάνου προς τα εμπρός πρέπει να είναι 75m/s, ενώ η ταχύτητα των άκρων της προπέλας δεν πρέπει να ξεπερνούν τα 270m/s

Ποια η μέγιστη ακτίνα που θα πρέπει να έχει η προπέλα? (β) με αυτή την ακτίνα ποια είναι η επιτάχυνση των άκρων της προπέλας?

Λύση

Μετατρέπουμε πρώτα τα rpm σε rad/s.

$$\omega = 2400 rpm = 2400\left(\frac{rev}{\min}\right)\left(\frac{2\pi}{1\ rev}\right)\left(\frac{1\min}{60s}\right) = 251 rad/s$$

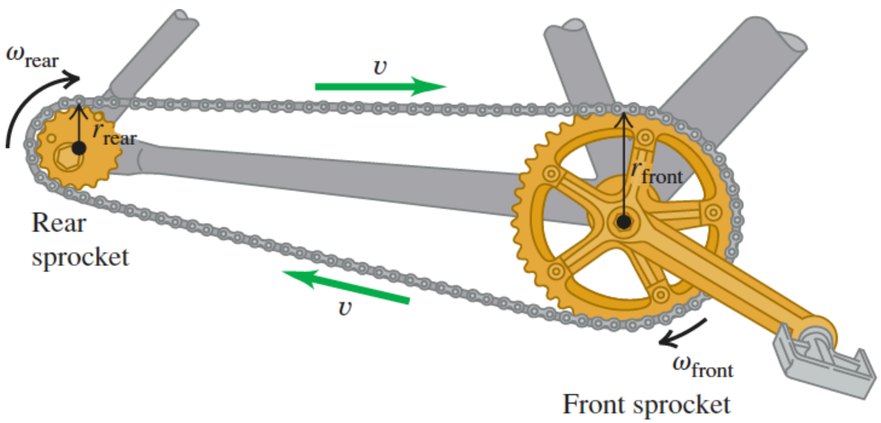


Η εφαπτομενική ταχύτητα των άκρων της προπέλας, v_P, είναι κάθετη στην εμπρόσθια ταχύτητα του αεροπλάνου, v_A

$$\vec{v}_{o\lambda} = \vec{v}_p + \vec{v}_A \Rightarrow v_{o\lambda} = \sqrt{\omega^2 r^2 + v_A^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{v_{o\lambda}^2 - v_A^2}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{270^2 - 75^2}{251^2}} = 1.03m$$

Η γωνιακή ταχύτητα της προπέλας είναι σταθερή,
επομένως υπάρχει μόνο κεντρομόλος επιτάχυνση: $a_r = \omega^2 r = 6.5\times10^4 m/s^2 \Rightarrow F = 6.5\times10^4 N$

Παράδειγμα – Δίσκοι ταχυτήτων ποδηλάτου



Πώς σχετίζονται τα «δόντια» των δίσκων των ταχυτήτων του ποδηλάτου με τις γωνιακές ταχύτητες των δίσκων

Η αλυσίδα δεν γλιστρά και δεν επιμηκύνεται πάνω στους δίσκους και επομένως έχει την ίδια εφαπτομενική ταχύτητα

Επομένως: $\upsilon = \omega_\varepsilon r_\varepsilon = \omega_\pi r_\pi \quad \Rightarrow \dfrac{\omega_\pi}{\omega_\varepsilon} = \dfrac{r_\varepsilon}{r_\pi}$ (1)

Τα δόντια είναι ισοκατανεμημένα στην περιφέρεια των δίσκων έτσι ώστε η αλυσίδα να κουμπώνει το ίδιο σε κάθε δίσκο:

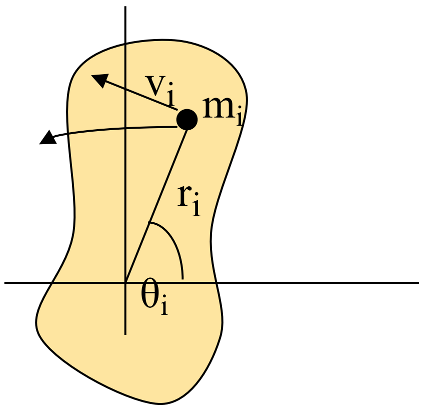
$$\frac{2\pi r_\pi}{N_\pi} = \frac{2\pi r_\varepsilon}{N_\varepsilon} \Rightarrow \frac{r_\pi}{N_\pi} = \frac{r_\varepsilon}{N_\varepsilon} \Rightarrow \frac{r_\varepsilon}{r_\pi} = \frac{N_\varepsilon}{N_\pi} \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε: $\Rightarrow \dfrac{\omega_\pi}{\omega_\varepsilon} = \dfrac{N_\varepsilon}{N_\pi}$

Επομένως για συγκεκριμένη γωνιακή ταχύτητα με την οποία κάνουμε pedal, ω_ε, ο πίσω δίσκος έχει τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα όταν ο λόγος N_ε/N_π είναι μέγιστος, δηλαδή όταν χρησιμοποιούμε μπροστά το δίσκο με το μεγαλύτερο αριθμό «δοντιών» και πίσω το δίσκο με το μικρότερο αριθμό «δοντιών»

Ενέργεια στην περιστροφική κίνηση

- Ένα περιστρεφόμενο στερεό αποτελεί μια μάζα σε κίνηση.
  Επομένως υπάρχει κινητική ενέργεια.



Θεωρείστε ένα στερεό σώμα περιστρεφόμενο γύρω από σταθερό άξονα.

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Αθροίζοντας ως προς όλα τα σωμάτια που απαρτίζουν το στερεό θα έχουμε:

$$\sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \longleftarrow$$ όλα έχουν το ίδιο ω

Η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\sum_i K_i = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 \Rightarrow \boxed{K_{tot} = \frac{1}{2} \mathrm{I}\omega^2}$$

Ανάλογο του

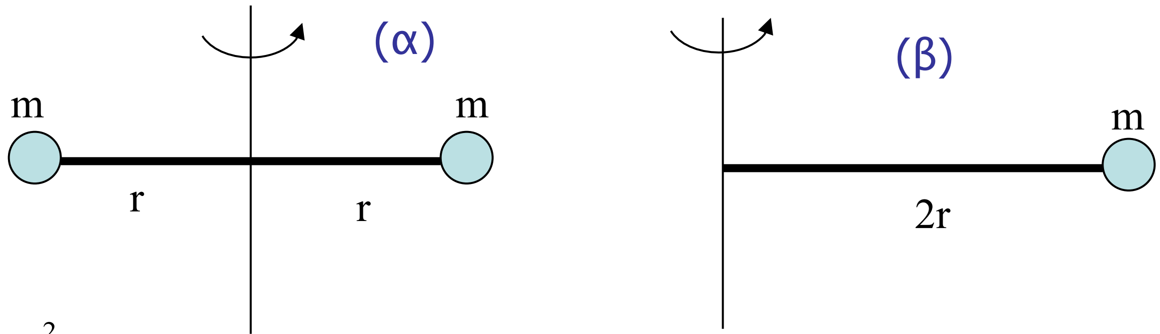
$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

Ορίζουμε σα ροπή αδράνειας: $\mathrm{I} = \sum_i m_i r_i^2$

- Η ροπή αδράνειας, I, είναι το περιστροφικό ανάλογο της μάζας m.
  Δηλαδή, είναι πολύ πιο δύσκολο να προκαλέσεις περιστροφή σ' ένα σώμα όταν η ροπή αδράνειας γίνεται μεγαλύτερη

Ροπή αδράνειας

- Ας δούμε την ροπή αδράνειας ενός στερεού περιστροφέα:



$$\mathrm{I} = \sum_{i=1}^{2} m_i r_i^2 = mr^2 + mr^2 = 2mr^2$$

$$\mathrm{I} = m(2r)^2 = 4mr^2$$

- Είναι δυσκολότερο να προκαλέσεις περιστροφή στην (β) περίπτωση

- Η ροπή αδράνειας εξαρτάται από τον άξονα περιστροφής.

- Η ροπή αδράνειας ορίζεται ως προς κάποιο σταθερό άξονα

- Η τιμή της εξαρτάται από την θέση και τον προσανατολισμό του άξονα περιστροφής

Ροπή αδράνειας για στερεά συνεχούς κατανομής

- Για στερεά σώματα συνεχούς κατανομής μάζας η ροπή αδράνειας υπολογίζεται αντικαθιστώντας το άθροισμα με ολοκλήρωμα: (αντικαθιστούμε όλες τις μάζες m_i με dm)

$$\mathrm{I} = \sum_i m_i r_i^2 \rightarrow \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i \Rightarrow I = \int r^2 dm$$

Ροπή αδράνειας

Θυμίζει τον υπολογισμό του κέντρου μάζας ενός σώματος $r_{CM} = \int r dm$

- Για παράδειγμα: έστω ρ η πυκνότητα = m/V για ένα στερεό

$$\rho = dm / dV \rightarrow dm = \rho dV \rightarrow I = \int r^2 \rho dV$$

Για ομοιογενή κατανομή μάζας, η πυκνότητα είναι σταθερή και έχουμε:

$$I = \rho \int r^2 dV$$

Περισσότερη μάζα πιο απομακρυσμένη από τον άξονα περιστροφής, μεγαλύτερη η ροπή αδράνειας I, και επομένως μεγαλύτερη η αντίσταση του σώματος στο να αλλάξει την περιστροφική του κίνηση