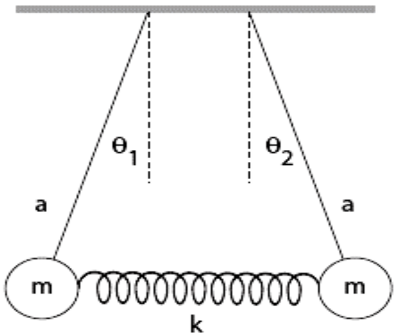
Μικρές ταλαντώσεις – Συζευγμένα εκκρεμή

- Είδαμε ότι στην περίπτωση δύο εκκρεμών συζευγμένων με ένα ελατήριο το σύστημα μπορεί να κινείται με μια από δύο χαρακτηριστικές συχνότητες (ιδιοσυχνότητες) οι οποίες βρίσκονται λύνοντας την:

$$\boxed{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{1})\Theta=0}$$ όπου $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1+\eta & -\eta\\ -\eta & 1+\eta\end{pmatrix}$ με $\eta\equiv\dfrac{ka}{mg}$ και $\lambda\equiv\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}$ $\omega_0^2\equiv\dfrac{g}{a}$



- Οι δύο ιδιοσυχνότητες προκύπτουν ζητώντας η ορίζουσα

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{1}|=\begin{vmatrix}1+\eta-\lambda & -\eta\\ -\eta & 1+\eta-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(1+\eta-\lambda)^2-\eta^2=0$$

δίνοντας: $\lambda_1=1 \Rightarrow \boxed{\omega_1=\omega_0}$ και $\lambda_2=1+2\eta \Rightarrow \boxed{\omega_2=\omega_0\sqrt{1+2\eta}}$

- Με κατάλληλες αρχικές συνθήκες το σύστημα μπορεί να κινείται με μια από τις δύο χαρακτηριστικές συχνότητες. Η αντίστοιχη κίνηση δίνεται από τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα:

$\theta_1(t)=C\cos\omega_1 t$ $\quad\theta_2(t)=C\cos\omega_1 t\quad$ για λ_1: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\theta_1(t)=-C\cos\omega_2 t$ $\quad\theta_2(t)=C\cos\omega_2 t\quad$ για λ_2: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

Φυσικοί τρόποι ταλάντωσης

(normal modes)

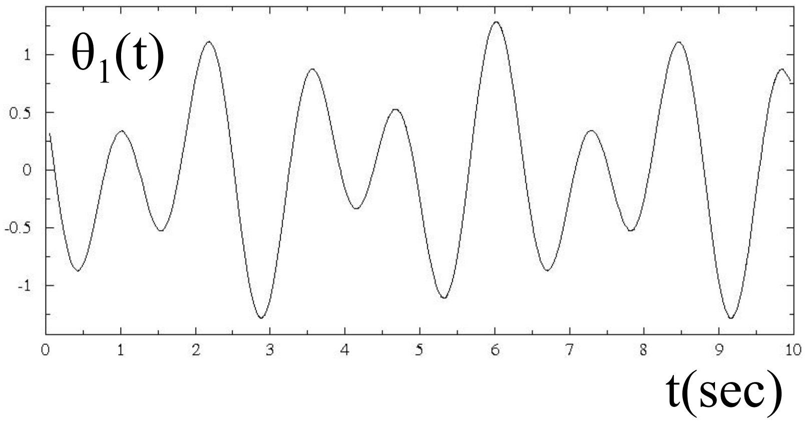
Μικρές ταλαντώσεις – Συζευγμένα εκκρεμή

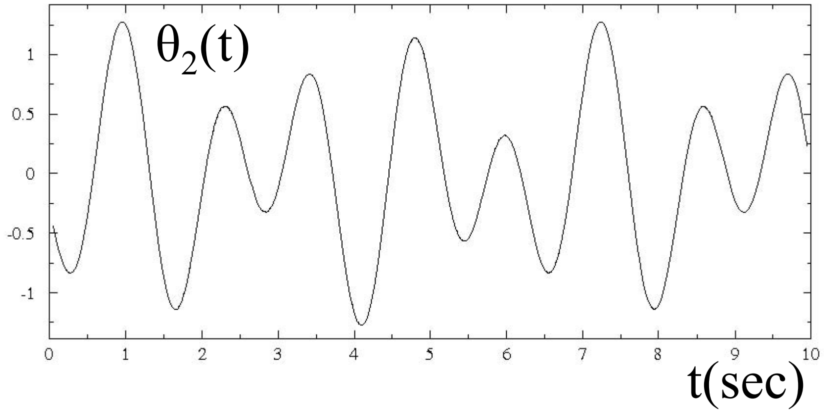
- Η γενική κίνηση του συστήματος περιγράφεται σαν ένας γραμμικός συνδυασμός των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + A_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2)$$

  - Περιμένουμε 4 σταθερές ολοκλήρωσης ($A_1, A_2, \delta_1, \delta_2$) αφού έχουμε 2 Δ.Ε. δευτέρας τάξης για τις μεταβλητές $\theta_1(t)$ και $\theta_2(t)$

- Η γενική λύση εν γένει είναι δύσκολο να περιγραφεί:





μια και αποτελείται από ένα μείγμα δύο συχνοτήτων ω_1 και ω_2

Συζευγμένα εκκρεμή

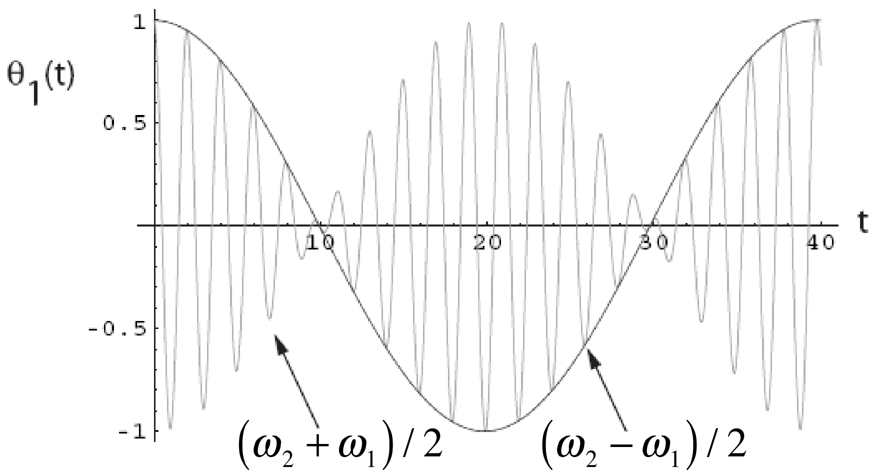
Αν υποθέσουμε ότι η σύζευξη των δύο εκκρεμών είναι ασθενής (k μικρό)

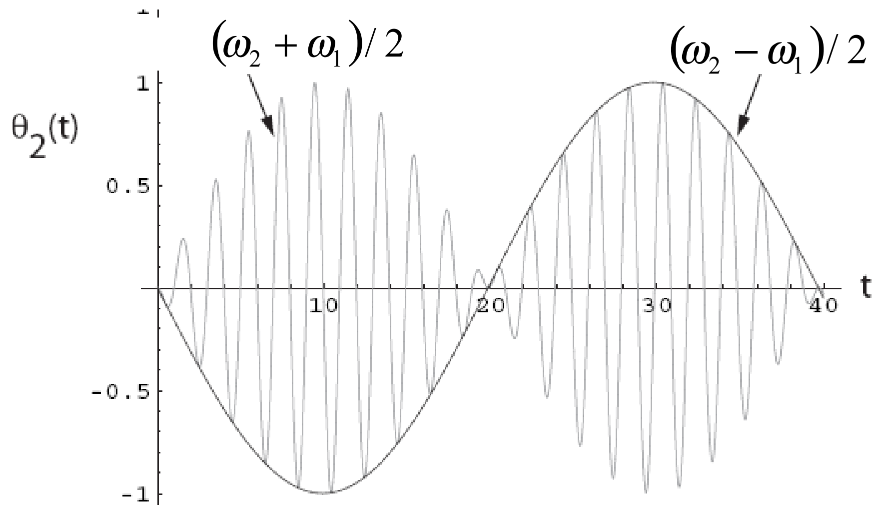
ώστε: $\omega_2 = \omega_0\sqrt{1+2\frac{ka}{mg}} \approx \omega_0 = \omega_1$

και ότι οι αρχικές συνθήκες είναι τέτοιες ώστε $A_1=A_2=C/2$ και $\delta_1=\delta_2=0$ τότε:

$$\theta_1(t) = \frac{C}{2}\left[\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t\right] = C\sin\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right) = C\sin\omega_\delta t\sin\omega_\mu t$$

$$\theta_2(t) = \frac{C}{2}\left[\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right] = C\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right) = C\cos\omega_\delta t\cos\omega_\mu t$$

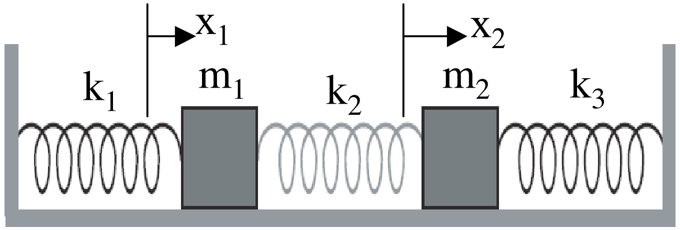




Αφού $\omega_\delta=\omega_2-\omega_1$ είναι μικρό έχουμε το σχηματισμό διακροτήματος

Ένα άλλο σύστημα

- Το παρακάτω σύστημα είναι ανάλογο με το σύστημα των δύο εκκρεμών.
- Οι δύο ιδιοσυχνότητες του συστήματος είναι ίδιες με τις ιδιοσυχνότητες των δύο εκκρεμών αντικαθιστώντας όπου



$$\omega_0^2 \equiv \frac{g}{a} \Rightarrow \omega_0^2 \equiv \frac{k_0}{m}$$ (για $k_1=k_3=k_0$ $m_1=m_2=m$)

Αν μελετήσουμε την κίνηση θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 + k_2\left(x_2 - x_1\right) \\ m_2\ddot{x}_2 &= k_2\left(x_1 - x_2\right) - k_3x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{M\ddot{x}} = -\mathbf{Kx}$$

Μπορούμε να γράψουμε δηλαδή: $$\underbrace{\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

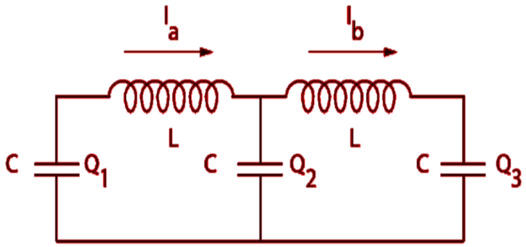
Οι λύσεις είναι της μορφής: $$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \begin{bmatrix} b_1e^{-i\delta_1 t} \\ b_2^{-i\delta_2 t} \end{bmatrix} e^{i\omega t}$$ (μιγαδικές)

Αλλά αφού έχουμε φυσικό σύστημα, η πραγματική λύση είναι το $\mathrm{Re}\,\mathbf{z}(t)$

Επομένως καταλήγουμε: $$\boxed{-\omega^2\mathbf{Ma}e^{i\omega t} = -\mathbf{Ka}e^{i\omega t} \Rightarrow \left(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}\right)\mathbf{a} = 0}$$

Ένα άλλο σύστημα

- Το παρακάτω σύστημα είναι ανάλογο με το σύστημα των δύο εκκρεμών.



- Έχουμε 3 πυκνωτές αντί για ελατήρια
- Έχουμε 2 πηνία αντί για μάζες
- Η V_L είναι ίση με $V_{C1} - V_{c2}$

Επομένως γράφουμε: $L\dfrac{dI_a}{dt} = \dfrac{Q_1}{C} - \dfrac{Q_2}{C}$ και $L\dfrac{dI_b}{dt} = \dfrac{Q_2}{C} - \dfrac{Q_3}{C}$

Παραγωγίζοντας ως προς t έχουμε: $\ddot{I}_a = -\dfrac{I_a}{LC} + \dfrac{(I_b - I_a)}{LC}$ και $\ddot{I}_b = -\dfrac{I_b}{LC} - \dfrac{(I_b - I_a)}{LC}$

Αν $I_\alpha = I_b$ (συμμετρικός τρόπος), οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν: $\boxed{\omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$

Δηλαδή ο μεσαίος πυκνωτής δεν φορτίζεται ποτέ και μπορεί να αφαιρεθεί

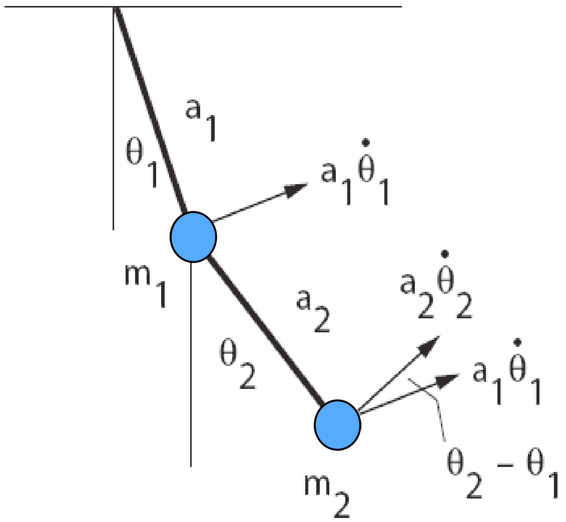
Το ισοδύναμο κύκλωμα έχει 2 πυκνωτές σε σειρά $C_{o\lambda} = \dfrac{C}{2}$
και 2 πηνία σε σειρά: $L_{o\lambda} = 2L$

$\Rightarrow \omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

Αν $I_\alpha = -I_b$ τότε οι εξισώσεις δίνουν: $\boxed{\omega = \dfrac{3}{\sqrt{LC}}}$

Ίδια περίπτωση με τις 2 μάζες και 3 ελατήρια ίδιας σταθεράς K

Το διπλό εκκρεμές



Δουλεύοντας σε πολικές συντεταγμένες:

Το εκκρεμές 1 έχει ταχύτητα: $a_1\dot{\theta}_1 \perp a_1$

Το εκκρεμές 2 έχει ταχύτητα: $a_2\dot{\theta}_2 \perp a_2 + \; a_1\dot{\theta}_1$

Η γωνία $\Delta\theta$ μεταξύ των 2 ταχυτήτων είναι: $\Delta\theta = \;\theta_2 - \theta_1$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= m_1 g a_1 \cos\theta_1 \\ U_2 &= m_2 g\left[a_2\cos\theta_2 + a_1\cos\theta_1\right] \end{aligned}\right\} \text{ως προς το σημείο στήριξης}$$

Οι κινητικές ενέργειες των 2 εκκρεμών είναι:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1 a_1^2\dot{\theta}_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2\left(a_2\dot{\vec{\theta}}_2 + a_1\dot{\vec{\theta}}_1\right)^2 = \frac{1}{2}m_2\left(a_2^2\dot{\theta}_2^2 + a_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2a_1a_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\Delta\theta\right)$$

Επομένως η Lagrangian του συστήματος γίνεται:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_2a_2^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)a_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2a_1a_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\left(\theta_2-\theta_1\right) +$$

$$+\left(m_1+m_2\right)ga_1\cos\theta_1 + m_2ga_2\cos\theta_2$$

Το διπλό εκκρεμές

Θα μπορούσαμε να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης αλλά είναι περίπλοκες. Θεωρώντας ότι οι γωνίες απόκλισης θ_1 και θ_2 είναι μικρές, παίρνουμε το ανάπτυγμα Taylor ως προς $\sin\theta_i$ και $\cos\theta_i$ κρατώντας τους πρώτους όρους:

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots \approx \theta \qquad \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!}\cdots \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_2 a_2^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)a_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2-\theta_1) +$$

$$+(m_1+m_2)g a_1\cos\theta_1 + m_2 g a_2 \cos\theta_2 \Rightarrow$$

→1 γιατί $\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$ μικρό

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_2 a_2^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)a_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2 a_1 a_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - (m_1+m_2)g a_1\frac{\theta_1^2}{2} - m_2 g a_2\frac{\theta_2^2}{2}$$

αγνοώντας $(m_1+m_2)g a_1 + m_2 g a_2$

Εφαρμόζοντας τη εξίσωση Lagrange παίρνουμε τις εξισώσεις κίνησης:

$$(m_1+m_2)a_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 a_1 a_2\ddot{\theta}_2 = -(m_1+m_2)g a_1\theta_1$$

$$m_2 a_1 a_2\ddot{\theta}_1 + m_2 a_2^2\ddot{\theta}_2 = -m_2 g a_2\theta_2$$

Η προσέγγιση μικρών γωνιών οδήγησε σε ομογενή δευτέρου βαθμού και δευτεροβάθμια εξάρτηση από ταχύτητες και συντεταγμένες για T και U

Το διπλό εκκρεμές

Μπορούμε να γράψουμε τις δύο εξισώσεις κίνησης στην μορφή: $\mathbf{M}\ddot{\Theta} = -\mathbf{K}\Theta$

$$\begin{pmatrix} (m_1 + m_2)a_1^2 & m_2 a_1 a_2 \\ m_2 a_1 a_2 & m_2 a_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} (m_1 + m_2)g a_1 & 0 \\ 0 & m_2 g a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας M δεν έχει μόνο μάζες αλλά έχει τις ιδιότητες, αφού πολ-ζει τις επιταχύνσεις και επομένως παίζει το ρόλο της μάζας αδράνειας.

Θεωρούμε ίσες μάζες και μήκη εκκρεμών για απλούστευση πράξεων, οπότε:

$$ma^2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = -mga\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Όπως και πριν οποιαδήποτε λύση μπορεί να γραφεί σα το πραγματικό μέρος μιας μιγαδικής λύσης z(t) με χρονική εξάρτηση $e^{i\omega t}$. Άρα θα πρέπει να ικανοποιείται η χαρακτηριστική εξίσωση:

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} 2(\omega_0^2 - \omega^2) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{pmatrix} \quad \text{με} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$$

Το διπλό εκκρεμές

Οι ιδιοσυχνότητες δίνονται από: $Det\left(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}\right)=0 \Rightarrow \omega^4 - 4\omega^2\omega_0^2 + 2\omega_0^4 = 0$

με λύσεις: $\omega^2 = \left(2 \pm \sqrt{2}\right)\omega_0^2$ Δηλαδή οι φυσικές συχνότητες είναι:

$$\boxed{\omega_1^2 = \left(2-\sqrt{2}\right)\omega_0^2} \quad \text{και} \quad \boxed{\omega_2^2 = \left(2+\sqrt{2}\right)\omega_0^2}$$

Ξέροντας τις φυσικές συχνότητες μπορούμε να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα και επομένως να βρούμε τους φυσικούς τρόπους ταλάντωσης.

Αντικαθιστώντας στην χαρακτηριστική εξίσωση τις ω_1 και ω_2 έχουμε:

$\omega=\omega_1$: $$\left(\mathbf{K}-\omega_1^2\mathbf{M}\right)\mathbf{a} = ma^2\omega_0^2\left(\sqrt{2}-1\right)\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} = 0$$

Η λύση της παραπάνω δίνει $a_2 = \sqrt{2}a_1$ Τα εκκρεμή ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα και την ίδια φάση.

Για τη συχνότητα ω_2 δίνει $a_2 = -\sqrt{2}a_1$ Τα εκκρεμή ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα αλλά αντίθετη φάση. Γράφοντας $a_1 = A_2 e^{-i\delta_2 t}$ κίνηση περιγράφεται από:

$$\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \mathrm{Re}\,\mathbf{a}e^{i\omega_2 t} = A_2\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}\cos\left(\omega_2 t - \delta_2\right)$$