ΦΥΣ 145 – Μαθηματικές Μέθοδοι στη Φυσική

10 Μαίου 2010

Συμπληρώστε τα στοιχεία σας στο παρακάτω πίνακα τώρα

Ονοματεπώνυμο	
Αρ. Ταυτότητας	
Username	
Password	

Δημιουργήστε ένα φάκελο στο home directory σας με το όνομα **Final** (όχι άλλα ονομάτα). Θα πρέπει να δουλέψετε όλα τα προβλήματα της εξέτασης στο φάκελο αυτό και πουθενά αλλού. Στο τέλος της εξέτασης τα αρχεία σας θα παρθούν από το φάκελο αυτό.

Σας δίνονται 5 προβλήματα και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλα. Συνολική βαθμολογία 100 μονάδες.

Ο χρόνος εξέτασης είναι 200 λεπτά.

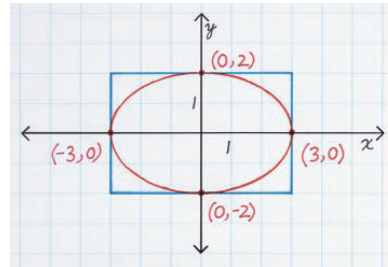
Επιτρέπεται: η χρήση του υλικού των ιστοσελίδων και μόνο του μαθήματος, καθώς και οι ασκήσεις/λύσεις των εργαστηρίων και homeworks που έχετε δώσει και σας έχουν δοθεί. ***Απαγορεύονται:*** η συνεργασία/συζήτηση και οποιαδήποτε ανταλλαγή αρχείων, η χρήση e-mail καθώς και η χρήση κινητών τηλεφώνων τα οποία θα πρέπει να απενεργοποιηθούν τώρα.

Καλή επιτυχία
Καλό καλοκαίρι και
Καλή συνέχεια στα επόμενα χρόνια σας στο φυσικό

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ένα βαρέλι περιέχει αρχικά S=2kg αλάτι το οποίο έχει διαλυθεί σε 20lt νερό. Αν ρίχνουμε καθαρό νερό στο βαρέλι με ρυθμό 0.4lt/min και το βαρέλι χάνει με τον ίδιο ρυθμό το αρχικό διάλυμα αλατόνερου πόσο αλάτι θα περιέχει το βαρέλι μετά από 8min; Θα πρέπει να γράψετε την διαφορική εξίσωση του προβλήματος καθώς και τη λύση της στο χώρο που σας δίνεται παρακάτω [**4μ**]. Θα πρέπει να γράψετε ένα πρόγραμμα το οποίο λύνει τη διαφορική εξίσωση με τη μέθοδο του Euler. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει το αποτέλεσμα που βρίσκετε τόσο με την αναλυτική όσο και με την θεωρητική λύση μετά από πάροδο 8min [**8μ**]. Να γίνει η γραφική παράσταση της ποσότητας αλατιού στο βαρέλι συναρτήσει του χρόνου χρησιμοποιώντας κατάλληλα ονοματισμένους άξονες τόσο για την αναλυτική όσο και για την αριθμητική λύση [**4μ**]. Χρησιμοποιώντας γραμμική παρεμβολή (linear interpolation) να βρεθεί ο χρόνος που απαιτείται ώστε το βαρέλι να περιέχει 1kg αλάτι [**4μ**].

2. Μια έλλειψη ορίζεται από την εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, όπου α και b ο μεγάλος και μικρός άξονάς της. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Monte Carlo να βρεθεί το εμβαδό της έλλειψης του διπλανού σχήματος που έχει α = 3 και b = 2. Χρησιμοποιείστε 10, 100, 1000, 10000, 100000 και 1000000 προσπάθειες και τυπώστε τα αποτελέσματα κάθε διαφορετικής περίπτωσης σε ένα αρχείο το οποίο ονομάστε *area.dat* με τη μορφή 3 στηλών <Αριθμός προσπαθειών> <Εμβαδό> <Αναλυτική – Αριθμητική> όπου η αναλυτική τιμή είναι το εμβαδό της έλλειψης υπολογιζόμενο θεωρητικά και που είναι ίσο με $A_{ελ.} = \pi \cdot a \cdot b$ [**20μ**]



3. Η μέθοδος της τέμνουσας είναι μια παραλλαγή της μεθόδου του Newton για την εύρεση της ρίζας μιας μη γραμμικής εξίσωσης. Η μέθοδος χρησιμοποείται σε περιπτώσεις που η εύρεση της παραγώγου μιας συνάρτησης δεν είναι εύκολη. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης σε κάποιο σημείο x_n, $f'(x_n) = \dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ μπορούμε να αντικαταστήσουμε στη μέθοδο του Newton $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ και να υπολογίσουμε τη λύση της $f(x)$. Γραφικά αυτό που κάνει η μέθοδος αυτή είναι να λαμβάνει την ευθεία γραμμή που ενώνει τα σημεία $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ και $(x_n, f(x_n))$ και να βρίσκει που τέμνει η ευθεία αυτή τον x-άξονα. Προφανώς για να ξεκινήσει η μέθοδος χρειάζεται να δώσουμε 2 σημεία. Γράψτε το πρόγραμμα το οποίο εφαρμόζει τη μέθοδο της τέμνουσας. Εφαρμόστε τη μέθοδο για να βρείτε τη θετική λύση της εξίσωσης $x^2 - 4x\sin x + 2(\sin x)^2 = 0$ [**15μ**]. Συγκρίνετε τον αριθμό των επαναλήψεων που κάνατε για να φθάσετε στην επιθυμητή ακρίβεια της λύσης με το αριθμό που απαιτούνται για τη μέθοδο Newton. Θα πρέπει το πρόγραμμά σας να περιέχει και τις δυο μεθόδους [**5μ**]. Θεωρήστε ότι και στις δυο περιπτώσεις η επιθυμητή ακρίβεια είναι 10^{-8}.

4. Γνωρίζουμε ότι ο πληθυσμός ενός είδους ζώων περιγράφεται από μια συνάρτηση $N(t)$ (συνάρτηση του χρόνου, t, όπου t μετράται σε μήνες) η οποία αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης: $\frac{dN}{dt} = aN - bN^2$, όπου α και b είναι θετικές σταθερές ποσότητες. Όταν b = 0, ο πληθυσμός αυξάνει εκθετικά, αλλά όταν b > 0 ο δεύτερος όρος εισάγει μια μείωση του πληθυσμού σαν αποτέλεσμα ανταγωνισμού μεταξύ ζευγαριών του πληθυσμού. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ης} τάξης λύστε αριθμητικά το πρόβλημα αυτό για τις ακόλουθες δυο περιπτώσεις: (i) $\alpha = 10$, $b = 3$ και $N(0) = 10$ και (ii) $\alpha = 10$, $b = 0.01$ και $N(0) = 1000$ [**14μ**]. Με βάση τα αποτελέσματά σας να γίνουν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις του πληθυσμού, $N(t)$, συναρτήσει του χρόνου t [**5μ**]. Τα αποτελέσματα εξαρτώνται από το χρονικό βήμα που επιλέγεται. Διαλέξτε ένα κατάλληλο βήμα και συνολικό χρόνο μελέτης της εξέλιξης του πληθυσμού για να εξάγετε τα αποτελέσματά σας.

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση έχει αναλυτική λύση της μορφής $N(t) = \frac{N_0 a e^{at}}{N_0 + bN_0 e^{at}}$, όπου $N(t{=}0) = N_0$ Συγκρίνετε γραφικά τα αποτελέσματά σας με τη θεωρητική αυτή λύση Θα πρέπει το γράφημά σας να έχει κατάλληλα ονοματισμένους άξονες. Σχολιάστε τη γραφική παράσταση στη δεύτερη περίπτωση [**1μ**].

5. Υποθέστε ότι κάποιο άτομο αποφασίζει να αυξήσει τα χρήματά του πηγαίνοντας σε ένα καζίνο. Αρχικά το άτομο έχει M euros και αποφασίζει να στοιχηματίζει μέχρι να φθάσει σε κάποιο ποσό N euros, όπου $N > M$, ή χάσει όλα τα χρήματά του (το καζίνο δεν κάνει πιστώσεις). Το παιχνίδι που δοκιμάζει είναι ρουλέτα και σε κάθε παιχνίδι χάνει 1 euro ή κερδίζει 1 euro ποντάροντας στο κόκκινο. Ο παίκτης παίζει μέχρι να φθάσει στο χρηματικό ποσό του στόχου του ή χάσει όλα τα χρήματά του. Ποια είναι η πιθανότητα να φθάσει ο παίκτης το στόχο του συναρτήσει του λόγου $k=N/M$; [**13μ**] Να κάνετε τη γραφική παράσταση της πιθανότητας να κερδίσει συναρτήσει της ποσότητας k για 2 περιπτώσεις προσπαθειών, χρησιμοποιώντας κατάλληλα ονοματισμένους άξονες [**5μ**]. Πόσα παιχνίδια θα παίξει κατά μέσο όρο ώστε είτε να πετύχει το στόχο του ή να χρεωκοπήσει; [**2μ**]