

## Lab07: Κυκλώματα Εναλλασσόμενης Τάσης (AC) – Κύκλωμα RLC

### Εισαγωγή:

Ένα πηνίο/βρόχος ( $L$ ) είναι ένα σημαντικό στοιχείο των κυκλωμάτων, στο ίδιο επίπεδο με τις αντιστάσεις ( $R$ ) και τους πυκνωτές ( $C$ ). Το πηνίο βασίζεται στην αρχή της αυτεπαγωγής - ότι τα κινούμενα φορτία δημιουργούν ένα μαγνητικό πεδίο (το αντίστροφο ισχύει επίσης - ένα κινούμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο). Τα πηνία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παραγωγή ενός επιθυμητού μαγνητικού πεδίου και την αποθήκευση ενέργειας στο μαγνητικό τους πεδίο, παρόμοια με τους πυκνωτές που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή ηλεκτρικών πεδίων και την αποθήκευση ενέργειας στο ηλεκτρικό τους πεδίο. Στο απλούστερο επίπεδο, ένας βρόχος αποτελείται από ένα βρόχο σύρματος μέσα σε ένα κύκλωμα. Το σύμβολο κυκλώματος για έναν πηνίο φαίνεται στο Σχήμα 1α.

Σε προηγούμενες πειραματικές ασκήσεις είδαμε ότι σε ένα κύκλωμα  $RC$  το φορτίο, το ρεύμα και η διαφορά δυναμικού αυξάνονται και μειώνονται εκθετικά, περιγραφόμενα από μια χρονική σταθερά  $\tau$ . Εάν ένα πηνίο και ένας πυκνωτής συνδέονται σε σειρά σε ένα κύκλωμα, το φορτίο, το ρεύμα και η διαφορά δυναμικού δεν αυξάνονται/μειώνονται εκθετικά, αλλά αντίθετα ταλαντώνονται ημιτονοειδώς. Σε μια ιδανική κατάσταση (έλλειψη εσωτερικής αντίστασης), αυτές οι ταλαντώσεις συνεχίζονται επ' αόριστον με περίοδο ( $T$ ) και γωνιακή συχνότητα  $\omega$ , που δίνονται από:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1)$$

Η συχνότητα αυτή αναφέρεται ως η φυσική γωνιακή συχνότητα του κυκλώματος.

Ένα κύκλωμα που περιέχει μια αντίσταση, έναν πυκνωτή και ένα πηνίο ονομάζεται κύκλωμα  $RLC$  (ή  $LCR$ ), και φαίνεται στο Σχήμα 1β. Με την παρουσία μιας αντίστασης, η συνολική ηλεκτρομαγνητική ενέργεια δεν είναι πλέον σταθερή, καθώς χάνεται ενέργεια μέσω της θέρμανσης Joule στην αντίσταση. Οι ταλαντώσεις του φορτίου, του ρεύματος και του δυναμικού μειώνονται τώρα συνεχώς με το πλάτος. Αυτό αναφέρεται ως αποσβένουσες ταλαντώσεις. Οι ταλαντώσεις στο κύκλωμα  $RLC$  δεν θα εξασθενήσουν εάν μια εξωτερική πηγή ηλεκτρομαγνητικής δύναμης παρέχει αρκετή ενέργεια για να αντισταθμίσει την ενέργεια που χάνεται από την αντίσταση. Αυτή η ενέργεια παρέχεται από μια ταλαντώμενη πηγή ηλεκτρομαγνητικής δύναμης με εναλλασσόμενο ρεύμα (AC).

Εάν η εφαρμοζόμενη τάση σε ένα κύκλωμα  $RLC$  έχει τη μορφή:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

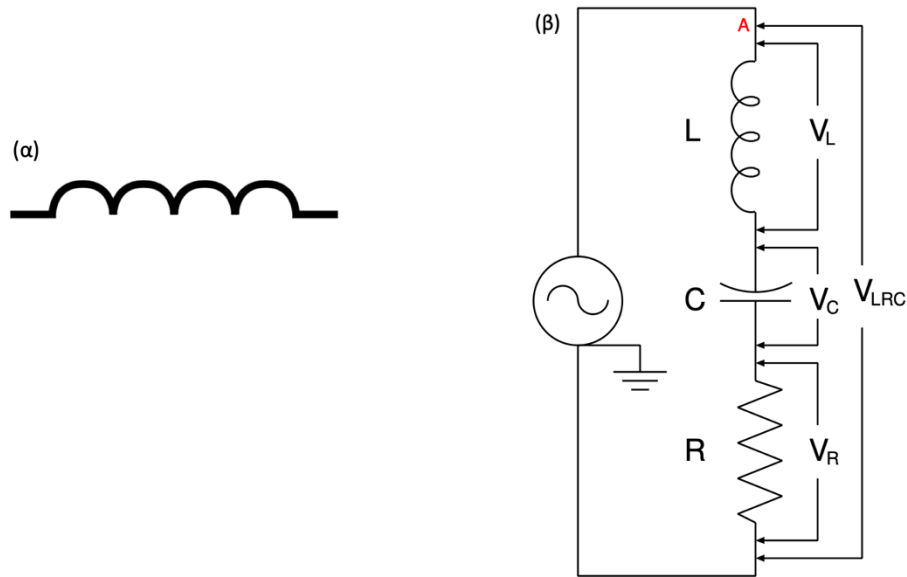
όπου  $\mathcal{E}_0$  είναι το μέγιστο πλάτος της ηλεκτρομαγνητικής δύναμης ( $emf$ ), τότε η διαφορά δυναμικού σε κάθε στοιχείο μπορεί να γραφτεί ως:

$$V_R = V_{0R} \sin(\omega t) \quad (3)$$

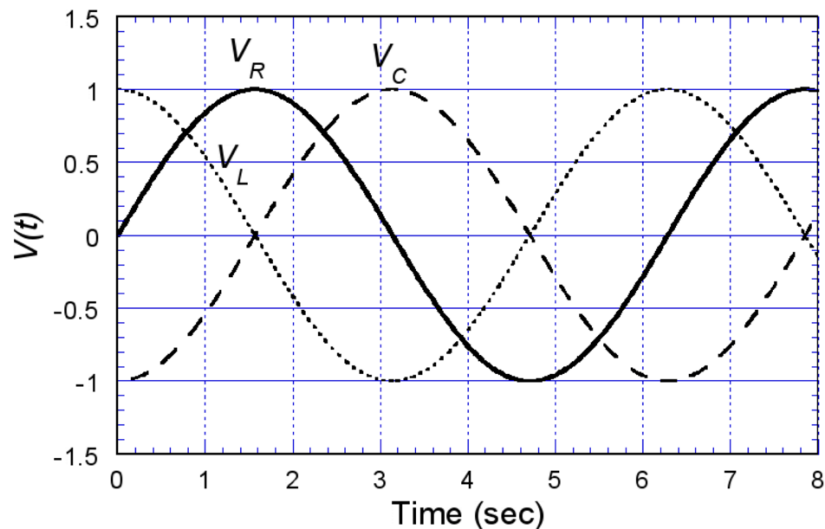
$$V_C = V_{0C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (4)$$

$$V_L = V_{0L} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (5)$$

όπου  $V_{0R}$ ,  $V_{0C}$ , και  $V_{0L}$ , είναι τα μέγιστα (πλάτη) των τάσεων στα στοιχεία της αντίστασης, του πυκνωτή και του πηνίου αντίστοιχα. Η  $\omega$  είναι η γωνιακή συχνότητα της ταλαντώμενης πηγής ηλεκτρομαγνητικής δύναμης. Παρατηρούμε ότι η τάση στον πυκνωτή,  $V_C$ , υστερεί της  $V_R$ , κατά  $90^\circ$ , και η τάση στο πηνίο,  $V_L$ , προηγείται της  $V_R$  κατά  $90^\circ$ . Και οι τρεις τάσεις απεικονίζονται στο Σχήμα 2.



**Σχήμα 7.1:** (α) Πηνίο και (β) RLC κύκλωμα.



**Σχήμα 7.2:** Σχέσεις μεταξύ των τάσεων στα άκρα των στοιχείων ενός RLC κυκλώματος. Χρησιμοποιώντας την τάση στα άκρα της αντίστασης  $V_R$  ως τάση αναφοράς,  $V_L$  οδηγεί κατά  $90^\circ$  ενώ η  $V_C$  υπολείπεται κατά  $90^\circ$ . Σημειώστε ότι τα πλάτος της τάσης για κάθε στοιχείο μπορεί να μην είναι ίσα όπως φαίνονται στο σχήμα αλλά εξαρτώνται από τις τιμές των  $L$ ,  $R$  και  $C$ .

Στο παρόν εργαστήριο θα συζητήσουμε μόνο κυκλώματα  $RLC$  σε σειρά. Δεδομένου ότι τα στοιχεία  $R$ ,  $L$  και  $C$  είναι σε σειρά, το ίδιο ρεύμα διέρχεται από αυτά. Το ρεύμα στο κύκλωμα μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή του Νόμου του Ohm ως:

$$I = \frac{\varepsilon_0}{Z} \quad (6)$$

όπου  $Z$  είναι η εμπέδηση του κυκλώματος, η οποία ορίζεται ως:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad (7)$$

Η εμπέδηση ενός κυκλώματος είναι ένα γενικευμένο μέτρο της αντίστασης, το οποίο περιλαμβάνει τις εξαρτήσεις από την συχνότητα της εμπέδησης του πυκνωτή και του πηνίου. Παρατηρούμε από την Εξ. 6, ότι η ένταση,  $I$ , είναι μέγιστη όταν η εμπέδηση  $Z$  είναι ελάχιστη. Επομένως, για μια δεδομένη αντίσταση  $R$ , το πλάτος του ρεύματος είναι μέγιστο όταν  $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ . Αυτό θα συμβεί όταν:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (8)$$

ή λύνοντας ως προς την συχνότητα  $\omega$ ,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (9)$$

Η μέγιστη τιμή του ρεύματος εμφανίζεται όταν η οδηγούσα γωνιακή συχνότητα συμπίπτει με τη φυσική γωνιακή συχνότητα (Εξ. 1), δηλαδή στη συχνότητα συντονισμού. Στο παρόν εργαστήριο, θα μελετήσουμε ένα κύκλωμα  $RLC$  με μια πηγή AC για να δημιουργήσουμε ένα σύστημα συντονισμού.

Η περίπτωση αυτού του  $RLC$  κυκλώματος αποτελεί παράδειγμα εξαναγκασμένης ταλάντωσης. Απουσία της εξωτερικής εναλλασσόμενης πηγής τάσης το κύκλωμα θα αντιστοιχούσε σε ταλαντωτή που εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση όπως συζητιέται και εξετάζεται στην 2<sup>η</sup> δραστηριότητα αυτού του εργαστηρίου.

Αν θεωρήσουμε τον τροποποιημένο 2<sup>ο</sup> κανόνα του Kirchhoff για το κύκλωμα του Σχήματος 7.1β, θα γράψουμε ότι:

$$V_{gen.} = V_R + V_C + V_L \quad (10)$$

Η πτώση τάσης στο πηνίο είναι:  $V_L = \frac{LdI}{dt}$  όπου  $I$  το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα. Η πτώση τάσης στα άκρα της αντίστασης είναι  $V_R = IR_t$  όπου  $R_t = R + R_L + R_{gen.}$  όπου  $R_L$  η ωμική αντίσταση του πηνίου και  $R_{gen.}$  η ωμική αντίσταση της εξόδου της γεννήτριας συχνοτήτων που αναγράφεται στην έξοδο (50Ω στην περίπτωση του κυκλώματος που θα χρησιμοποιήσουμε).

Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα μπορεί να βρεθεί από την τάση στα άκρα του πυκνωτή χρησιμοποιώντας τη σχέση:  $I = C \frac{dV_C}{dt}$ . Αντικαθιστώντας τα προηγούμενα στην Εξ. 10 παίρνουμε:

$$V_{gen.} = L \frac{dI}{dt} + I(R + R_L + R_{gen.}) + V_C \Rightarrow V_{gen.} = LC \frac{d^2V_C}{dt^2} + CR_t \frac{dV_C}{dt} + V_C \quad (11)$$

Η τελευταία γράφεται ως:

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + 2\frac{R_t}{2L} \frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{LC} = \frac{V_{gen.}}{LC} \Rightarrow \frac{d^2V_C}{dt^2} + 2\gamma \frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{\omega_0^2} = \frac{V_{gen.}}{\omega_0^2} \quad (12)$$

Η τελευταία διαφορική εξίσωση είναι η διαφορική εξίσωση ενός συστήματος που εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Ο όρος  $\gamma = \frac{R_t}{2L}$  αποτελεί τον **συντελεστή απόσβεσης**. Μεγάλος

συντελεστής απόσβεσης σημαίνει ότι οι ταλαντώσεις του συστήματος θα σταματήσουν γρήγορα ενώ μικρός συντελεστής σημαίνει ότι οι ταλαντώσεις μπορεί να συνεχιστούν επ' άπειρον.

Όπως είδαμε και πιο πάνω, η φυσική συχνότητα,  $\omega_0$ , του συστήματος είναι  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  και αν ο παράγοντας απόσβεσης μειωθεί σχεδόν στο μηδέν τότε το σύστημα θα ταλαντώνεται στην ιδιοσυχνότητά του. Αλλά ακόμα και για σημαντική απόσβεση, η συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος είναι κοντά στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος όπως θα δούμε παρακάτω στη 2<sup>η</sup> δραστηριότητα.

Θεωρούμε ότι η εξωτερική γεννήτρια συχνοτήτων παρέχει μια ημιτονοειδή τάση της μορφής:

$$V_{gen.} = V_0 \sin(\omega_{gen.} t) \quad (13)$$

Η λύση που δίνει την τάση στα άκρα του πυκνωτή συναρτήσει του χρόνου είναι της μορφής:

$$V_C(t) = A \sin(\omega_{gen.} t + \varphi) \quad (14)$$

Βλέπουμε ότι εξακολουθεί να είναι ημιτονοειδούς μορφής με συχνότητα ίδια με τη συχνότητα της πηγής, αλλά υπάρχει μια διαφορά φάσης  $\varphi$  και ένα πλάτος  $A$  το οποίο εξαρτάται από την συχνότητα:

$$A = \frac{V_0}{C} \frac{1}{\sqrt{R_t^2 \omega_{gen.}^2 + L^2 \left( \omega_{gen.}^2 - \frac{1}{LC} \right)^2}} \quad (15)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left[ \frac{R_t \omega_{gen.}}{L \left( \omega_{gen.}^2 - \frac{1}{LC} \right)} \right] \quad (16)$$

Μπορούμε να βρούμε τη συχνότητα συντονισμού για την τάση του πυκνωτή, παραγωγίζοντας το πλάτος  $A$  ως προς την γωνιακή συχνότητα,  $\omega_{gen.}$ , της εξωτερικής πηγής και ζητώντας να παρουσιάζει ακρότατο:

$$\left. \frac{\partial A}{\partial \omega_{gen.}} \right|_{\omega_{gen.} = \omega_{συντ.}} = 0 \quad (17)$$

Βρίσκοντας την συχνότητα συντονισμού μπορούμε να αντικαταστήσουμε στην Εξ. 15 και να βρούμε το πλάτος  $A$  στη συχνότητα συντονισμού ή τη μέγιστη τιμή της τάσης στα άκρα του πυκνωτή για την περίπτωση του συντονισμού. Θα μπορούσε επομένως κάποιος να μετρήσει το πλάτος  $V_0 - (-V_0)$  (peak-to-peak) του σήματος της γεννήτριας συχνοτήτων και να το συγκρίνει με την peak-to-peak τάση στον πυκνωτή μεταβάλλοντας την συχνότητα του σήματος. Έτσι θα μπορούσαμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της θεωρίας και του πειράματος.

Θα πρέπει να σαρώσουμε για διαφορετικές τιμές συχνότητας, ξεκινώντας από χαμηλές συχνότητες ως αρκετά υψηλές (μετά την συχνότητα συντονισμού) προσέχοντας ωστόσο να πάρουμε αρκετές μετρήσεις γύρω από την συχνότητα συντονισμού. Η καμπύλη των μετρήσεων αυτών δίνει την **καμπύλη απόκρισης** του κυκλώματος.

Μία διαφορετική παράμετρος ενδιαφέροντος είναι ο λεγόμενος **παράγοντας ποιότητας**  $Q$ , που ορίζεται ως:

$$Q \equiv \frac{\omega_{συντ.}}{2\gamma} = \omega_{συντ.} \frac{L}{R_t} \quad (18)$$

Ο παράγοντας ποιότητας  $Q$ , αποτελεί ένδειξη για το πόσο ισχυρή είναι η απόσβεση του συστήματος. Μεγάλος παράγοντας  $Q$  δηλώνει ότι το κύκλωμα  $RLC$  επιτρέπει μια μικρή μόνο περιοχή συχνοτήτων να επιφέρουν μεγάλη ενίσχυση κάνοντας το κύκλωμα ένα πολύ καλό φίλτρο ζώνης συχνοτήτων. Για μικρές τιμές αντιστάσεων:

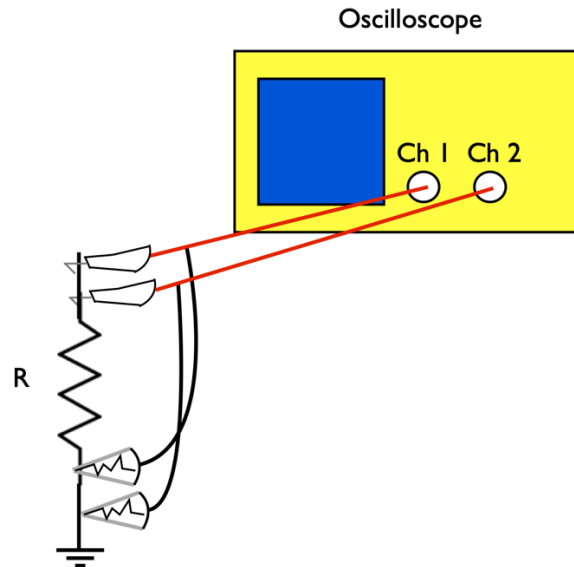
$$Q \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \sim \frac{\omega_{\text{συντ.}}}{\Delta\omega} \quad (19)$$

Όπου  $\Delta\omega$  είναι **ζώνη συχνοτήτων** του κυκλώματος, δηλαδή η διαφορά μεταξύ των δύο συχνοτήτων που δημιουργούν διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή που είναι  $1/\sqrt{2}$  της μέγιστου πλάτους της ταλάντωσης συντονισμού,  $A_{\text{συντ.}}$ . Ο παράγοντας ποιότητας μπορεί να προσδιοριστεί πειραματικά προσδιορίζοντας το  $\Delta\omega$ , και χρησιμοποιώντας την παρατηρούμενη συχνότητα συντονισμού  $\omega_{\text{συντ.}}$  στην Εξ. 19 και μπορεί να συγκριθεί με την θεωρητική τιμή που δίνεται από την Εξ. 18.

### Διαδικασία και Ανάλυση:

1. Σας δίνονται μια αντίσταση  $R = 150\Omega$ , ένα πηνίο  $L = 1mH$ , και ένας πυκνωτής χωρητικότητας  $C = 100nF$ , αντίστοιχα. Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι  $\omega_0 = 10^5 \text{ rad/s}$  και η συχνότητα συντονισμού  $f_d = 15.9 \text{ kHz}$ .
2. Κατασκευάστε το κύκλωμα που φαίνεται στο Σχήμα 1β χρησιμοποιώντας την πλακέτα σύνδεσης (breadboard) και καλώδια σύνδεσης. Τοποθετείστε την ωμική αντίσταση πλησιέστερα στο σημείο γείωσης του κυκλώματος.
3. Ενεργοποιήστε τη γεννήτρια σημάτων και ρυθμίστε τη συχνότητα του σήματος περίπου στα  $250 \text{ Hz}$  (υπόδειξη:  $\omega = 2\pi f$ ) και το πλάτος του σήματος στα  $E_0 = 6.0 \text{ V}$ . Οι χρονικά μεταβαλλόμενες τάσεις θα μελετηθούν χρησιμοποιώντας τον παλμογράφο. Οι παλμογράφοι επιτρέπουν τη μέτρηση της διαφοράς δυναμικού ως προς τη γείωση.
4. Βεβαιωθείτε αρχικά ότι οι ρυθμίσεις του παλμογράφου είναι κατάλληλες και δεν μετράτε κάτι λάθος. Για κάθε κανάλι, πατήστε αρχικά το «Default setup» και κατόπιν το «AUTOSSET». Συνδέστε το probe στο CH1 του παλμογράφου και τους ακροδέκτες στις υποδοχές του σήματος που δίνει η εσωτερική πηγή συχνοτήτων του παλμογράφου. Ελέγξτε ότι υπάρχει η σωστή βαθμονόμηση του probe και η σωστή κυματομορφή (τετραγωνικός παλμός χωρίς παραμορφώσεις στα άκρα του). Επαναλάβετε την διαδικασία για το CH2.
5. Ως πρώτη άσκηση, θα παρατηρήσουμε την τάση στον παλμογράφο όταν οι "δύο" πηγές είναι σε φάση μεταξύ τους. Συνδέστε τα καλώδια από τα CH1 και CH2 του παλμογράφου στο κύκλωμα  $LRC$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Αυτό σημαίνει ότι και τα δύο κανάλια θα μετρήσουν την τάση στην αντίσταση  $R$ .
6. Βεβαιωθείτε ότι και τα δύο σήματα είναι ορατά στην οθόνη. Ρυθμίστε τους περιστροφικούς διακόπτες της Οριζόντιας και Κάθετης κλίμακας ώστε να αποκτήσετε μια κατάλληλη απεικόνιση στον παλμογράφο.
7. Είναι τα σήματα από τα CH1 και CH2 σε φάση μεταξύ τους; Γιατί συμβαίνει αυτό; Σχεδιάστε τα σήματα στην αναφορά που θα γράψετε.
8. Αλλάξτε τον επιλεγόμενο τρόπο απεικόνισης από  $y-t$  σε  $x-y$  (x έναντι y). Χρησιμοποιήστε το κουμπί απεικόνισης (DISPLAY) και το κουμπί "μορφή" (FORMAT) που βρίσκεται στο μενού της οθόνης για να εναλλάξετε μεταξύ των δύο ρυθμίσεων. Εάν οι x και y είναι σε φάση μεταξύ

τους (φτάνουν στις κορυφές και τις κοιλάδες τους ταυτόχρονα), ο παλμογράφος θα πρέπει να εμφανίσει μια ευθεία γραμμή κεκλιμένη υπό γωνία ( $45^\circ$  εάν και οι δύο είσοδοι έχουν το ίδιο μέγεθος και κλίμακα βαθμονόμησης). Επαληθεύστε αυτό! Όπως παρατηρήσατε άμεσα τη μορφή κυματομορφής στη Βήμα 7, αυτή είναι μια άλλη τεχνική για να ελέγξετε αν τα δύο σήματα είναι σε φάση μεταξύ τους. Αυτή η απεικόνιση είναι γνωστή ως μορφή Lissajous. Σχεδιάστε αυτήν την απεικόνιση στην αναφορά σας και θυμηθείτε να επισημάνετε τους άξονες κατάλληλα.



**Σχήμα 7.3:** Σύνδεση των ακροδεκτών των probes του παλμογράφου για κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος. Σημειώστε ότι μόνο η αντίσταση του RLC κυκλώματος παρουσιάζεται στο σχήμα.

9. Αλλάξτε τις ρυθμίσεις για να εμφανίσετε το σήμα όπως στα βήματα 6-7. Αποσυνδέστε το CH2 από το κύκλωμα και συνδέστε το στο Σημείο A, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1β. Σε αυτήν τη θέση, το CH1 εξακολουθεί να μετρά την τάση στην αντίσταση  $R$  ( $V_R$ ), αλλά το CH2 τώρα μετρά την τάση σε όλα τα στοιχεία ( $V_{RLC}$ ). Ρυθμίστε τις κατακόρυφες και οριζόντιες κλίμακες για να αποκτήσετε την καλύτερη εμφάνιση.
10. Είναι τα δύο σήματα σε φάση μεταξύ τους; Το  $V_{RLC}$  προηγείται ή υστερεί του  $V_R$  και κατά πόσο; Σχεδιάστε το στην αναφορά σας.
11. Παρατηρήστε τη μορφή Lissajous για αυτά τα δύο σήματα επαναλαμβάνοντας το βήμα 8. Είναι αυτή ίδια με αυτή που παρατηρήσατε προηγουμένως; Σχεδιάστε το στην αναφορά σας. Θα πρέπει τώρα να γνωρίζετε πώς φαίνεται η μορφή Lissajous όταν τα σήματα είναι σε φάση και εκτός φάσης μεταξύ τους.
12. Αλλάξτε τις ρυθμίσεις για να επιστρέψετε στην εμφάνιση του σήματος όπως στα βήματα 9 - 10 (χρησιμοποιώντας το κουμπί «Format»), αλλά αυτή τη φορά, ρυθμίστε την οθόνη να δείχνει μόνο το σήμα από το CH1, που είναι το  $V_R$ . Ωστόσο, αφήστε το CH2 συνδεδεμένο όπως είναι.
13. Αλλάξτε τη συχνότητα της γεννήτριας σημάτων (υπόδειξη: ίσως θελήσετε να αυξήσετε τη συχνότητα) παρατηρώντας συνεχώς το πλάτος του  $V_R$ . Βρείτε τη συχνότητα στην οποία το πλάτος του  $V_R$  είναι μέγιστο. Αλλάξτε την κάθετη κλίμακα και τη θέση της γραμμής, όπως επιθυμείτε, για να καθορίσετε με ακρίβεια αυτήν τη συχνότητα. Μην ξεχάσετε να διαβάσετε

τη συχνότητα από τον μετρητή συχνότητας. Σε αυτή τη συχνότητα, το ρεύμα στο κύκλωμα είναι επίσης μέγιστο, καθώς  $V_R = IR$ . Επομένως, από τις Εξ. 6 και 7, αυτή είναι η συχνότητα συντονισμού του κυκλώματος  $RLC$ .

14. Αλλάξτε ξανά τις ρυθμίσεις της οθόνης ώστε να βλέπετε και το  $V_R$  από το CH1 και το  $V_{RLC}$  από το CH2. Από τις Εξισώσεις 8 και 9, η εμπέδηση του πηνίου ( $X_L = \omega L$ ) και η εμπέδηση του πυκνωτή ( $X_C = 1/\omega C$ ) θα πρέπει να αλληλοαναιρούνται, ώστε η εμπέδηση του κυκλώματος να εξαρτάται μόνο από την αντίσταση. Αυτό σημαίνει ότι το  $V_{RLC}$  θα πρέπει να είναι σε φάση με το  $V_R$ . Είναι αυτό που παρατηρείτε;
15. Ελέγξτε αυτό, παρατηρώντας τη μορφή Lissajous στη συχνότητα συντονισμού. Εάν η μορφή δεν δείχνει το σχήμα που απαιτείται ώστε τα δύο σήματα να είναι σε φάση, κάντε τις απαραίτητες προσαρμογές στη συχνότητα μέχρι να βεβαιωθείτε ότι είναι σε φάση μεταξύ τους. Καταγράψτε αυτή τη συχνότητα εάν είναι διαφορετική από την προηγούμενη που βρήκατε.
16. Χρησιμοποιώντας την Εξ. 9, υπολογίστε τη θεωρητική τιμή της συχνότητας συντονισμού και συγκρίνετέ την με την (ή τις) τιμές που βρήκατε πειραματικά. Σημειώστε ότι στην Εξ. 9 υπολογίζετε τη γωνιακή συχνότητα συντονισμού  $\omega$ .
17. Υπολογίστε τη σταθερά φάση  $\varphi$  για τη βήμα 10 - δηλαδή:

$$\tan(\varphi) = \frac{(X_L - X_C)}{R}$$

Είναι το κύκλωμα πιο επαγωγικό από ό,τι χωρητικό ή το αντίστροφο; Πώς μπορείτε να το διαπιστώσετε; Ποια είναι η σταθερά φάσης του κυκλώματος στο βήμα 13;

18. Πάρτε ξανά μετρήσεις για την εύρεση της καμπύλης απόκρισης του κυκλώματος χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά το πολύμετρό σας το οποίο θα πρέπει να συνδέσετε στα άκρα της αντίστασης. Καταγράψτε τις τιμές της τάσης που μετράτε συναρτήσει των τιμών των συχνοτήτων του σήματος. Κάντε τη γραφική παράσταση της  $V_R$  συναρτήσει της συχνότητας της πηγής συχνοτήτων,  $f_{gen.}$ .

## Φθίνουσες Ταλαντώσεις - Θεωρητικά

Όπως έχουμε δει από τις διαλέξεις, για ένα κύκλωμα  $RLC$ , ξεκινώντας από την εξίσωση της ενέργειας:

$$U = U_{\eta\lambda.} + U_{\mu\alpha\gamma\nu.} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} + LI \frac{dI}{dt} = -IR^2 \quad (20)$$

Επομένως, καταλήγουμε στην διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$\frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} + L \frac{dQ}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{dQ}{dt} \right) = - \left( \frac{dQ}{dt} \right)^2 R^2 \Rightarrow \frac{Q}{C} + L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} R^2 = 0 \quad (21)$$

Θεωρούμε ότι η λύση της εξίσωσης αυτής είναι της μορφής:

$$Q(t) = e^{at} \quad (22)$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. 21, θα έχουμε:

$$Q(t) \left[ \frac{1}{C} + La^2 + aR \right] = 0 \quad (23)$$

Για να ισχύει η Εξ.23 για οποιοδήποτε  $Q(t)$  θα πρέπει η σχέση να ικανοποιείται η σχέση,

$$\left[ \frac{1}{C} + La^2 + aR \right] = 0$$

που είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση με λύσεις:

$$a = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L} \Rightarrow a = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad (24)$$

Θεωρούμε  $\gamma = R/2L$  και  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  τη φυσική συχνότητα του συστήματος, οπότε η Εξ. 24 γράφεται:

$$a = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\left( \gamma \mp \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right) \quad (25)$$

Για την τελευταία εξίσωση, ανάλογα με την τιμή της διακρίνουσας ξεχωρίζουμε και τις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$(1) \quad \Delta = \frac{R^2}{4L^2} - \omega_0^2 = \gamma^2 - \omega_0^2 > 0 \Rightarrow \gamma^2 > \omega_0^2$$

Ορίζουμε στην Εξ. 25:

$$\Gamma_+ = \left( \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right) \quad \text{και} \quad \Gamma_- = \left( \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \right) \quad (26)$$

Με βάση τα παραπάνω, η γενική λύση της Εξ. 22, είναι:

$$Q(t) = Ae^{-(\Gamma_+ )t} + Be^{-(\Gamma_- )t} \quad (27)$$

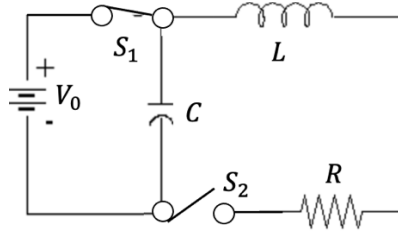
Μπορούμε να επιλέξουμε τη λύση είτε με την  $\Gamma_+$  ή την  $\Gamma_-$  ή έναν οποιοδήποτε γραμμικό συνδυασμό τους όπως στην Εξ. 27. Δηλαδή, μπορούμε να έχουμε:



$$Q(t) = Ce^{-(\Gamma_+)t} \quad \text{ή} \quad Q(t) = De^{-(\Gamma_-)t} \quad (28)$$

Η περίπτωση αυτή αποτελεί την περίπτωση του **ταλαντωτή με μεγάλη απόσβεση**. Οι σταθερές  $A$ ,  $B$  ή  $C$ , ή  $D$ , υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος για το φορτίο και το ρεύμα σε κάποια χρονική στιγμή.

Για παράδειγμα θεωρούμε το κύκλωμα  $RLC$  του Σχήματος 7.4. Ο διακόπτης  $S_1$  είναι κλειστός ενώ ο διακόπτης  $S_2$  ανοικτός. Ο πυκνωτής φορτίζεται με φορτίο  $Q_0 = CV_0$ . Τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , ο διακόπτης  $S_1$  ανοίγει και αποσυνδέεται η πηγή ενώ ο διακόπτης  $S_2$  κλείνει οπότε έχουμε ένα  $RLC$  κύκλωμα στο οποίο ο πυκνωτής εκφορτίζεται. Στην περίπτωση αυτή λόγω της παρουσίας του πηνίου  $L$  θα έχουμε ταλάντωση μεταξύ του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου του πυκνωτή και πηνίου. Την στιγμή που κλείνει ο διακόπτης  $S_2$  το ρεύμα που διαρρέει το  $RLC$  είναι 0.



**Σχήμα 7.4:**  $RLC$  κύκλωμα για μελέτη φθινουσών ταλαντώσεων

Οι αρχικές συνθήκες επομένως είναι:

$$\text{Για } t = 0: \quad Q(t = 0) = Q_0 = A + B \Rightarrow B = Q_0 - A \quad (29)$$

$$\text{Για } t = 0: \quad I(t = 0) = \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=0} \Rightarrow -A\Gamma_+ - B\Gamma_- = 0 \Rightarrow A\Gamma_+ = -(Q_0 - A)\Gamma_- \quad (30)$$

Αντικαθιστώντας από την Εξ. 16 θα πάρουμε:

$$A(\Gamma_+ - \Gamma_-) = -Q_0\Gamma_- \Rightarrow A(2\sqrt{\Delta}) = -Q_0\Gamma_- \Rightarrow A = -\frac{Q_0\Gamma_-}{2\sqrt{\Delta}} \quad (31)$$

$$\text{αντικατάσταση της Εξ. 31 στην Εξ. 29 θα δώσει: } B = -\frac{Q_0(\gamma - \sqrt{\Delta})}{2\sqrt{\Delta}} \Rightarrow B = +\frac{Q_0\Gamma_+}{2\sqrt{\Delta}} \quad (32)$$

Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει ουσιαστικά ταλάντωση του συστήματος. Το σύστημα φθίνει προς την κατάσταση ισορροπίας είτε περνώντας μία φορά από αυτή και κατόπιν επιστρέφοντας αργά στην κατάσταση ισορροπίας ή πηγαίνοντας αργά στη κατάσταση ισορροπία χωρίς ποτέ να περνά από αυτή. Στην κατάσταση ισορροπίας το φορτίο του πυκνωτή θα είναι μηδενικό.

Το Σχήμα 7.5 δείχνει την περίπτωση αυτή του ταλαντωτή με μεγάλη απόσβεση χρησιμοποιώντας την Εξ. 17 με  $A$  και  $B$  όπως δίνονται από τις Εξ. 21 και 22. Ως αριθμητικά δεδομένα λαμβάνονται τα ακόλουθα,  $L = 1mH$ ,  $C = 3\mu F$  και  $R = 50\Omega$ , και  $V_0 = 4Volts$ . Ο παράγοντας  $\gamma = R/2L = 50\Omega/(2 \times 1mH) = 25 \times 10^3 \Omega \cdot H$ , ενώ η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι:  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(1 \times 10^{-3}H) \times (3 \times 10^{-6}F)}} = 18.257krad/s$ .

Το αρχικό φορτίο του πυκνωτή είναι  $Q_0 = CV_0 = 3 \times 10^{-6}F \times 4.0V = 12 \times 10^{-5}C = 120\mu C$ .

Η τιμή της διακρίνουσας είναι:  $\Delta = \gamma^2 - \omega_0^2 = 291.6 \times 10^6 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 17.1 \times 10^3 rad/s$ .

$$(2) \quad \Delta = \frac{R^2}{4L^2} - \omega_0^2 = \gamma^2 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \gamma^2 = \omega_0^2$$

Στην περίπτωση αυτή, η Εξ. 25 δίνει απλά:

$$\Gamma_{\pm} = -\gamma \quad (33)$$

Η περίπτωση αυτή όπου  $\gamma = \omega_0 \Rightarrow \frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  αποτελεί την περίπτωση του **ταλαντωτή με κριτική απόσβεση**.

Η γενική λύση της Εξ. 22 είναι:

$$Q(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t} \quad (34)$$

Το σύστημα καταλήγει στην κατάσταση ισορροπίας στον μικρότερο χρόνο.

Οι παράμετροι  $A$  και  $B$  προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος (αρχικό φορτίο και ρεύμα την χρονική στιγμή  $t = 0$ ).

Αν θεωρήσουμε ότι στο προηγούμενο παράδειγμα η αντίσταση είχε τιμή τέτοια ώστε να έχουμε κριτική απόσβεση τότε θεωρώντας  $\gamma = \omega \Rightarrow \frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow R = \frac{2L}{\sqrt{LC}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ . Θεωρώντας τις ίδιες τιμές για  $L$  και  $C$  όπως και πριν, θα υπάρχει κριτική απόσβεση αν  $R = 36.5\Omega$ .

Για  $t = 0$ ,  $Q|_{t=0} = CV_0 = A$  ενώ το ρεύμα θα είναι 0,  $I|_{t=0} = 0 \Rightarrow -\gamma A + B = 0 \Rightarrow B = \gamma A$ . Επομένως η λύση θα έχει την μορφή  $Q(t) = A(1 + \gamma t)e^{-\gamma t} = CV_0(1 + \gamma t)e^{-\gamma t}$ .

Η μορφή εμφανίζεται στο Σχήμα 7.5. Βλέπουμε ότι το σύστημα όντως πηγαίνει στη θέση ισορροπίας στον μικρότερο χρόνο.

$$(3) \quad \Delta = \frac{R^2}{4L^2} - \omega_0^2 < 0 \Rightarrow \gamma^2 - \omega_0^2 < 0 \Rightarrow \gamma^2 < \omega_0^2$$

Στην περίπτωση αυτή η διακρίνουσα είναι αρνητική και υπάρχουν επομένως δύο μιγαδικές συζυγείς λύσεις, δηλαδή της μορφής  $x + iy$  και η συζυγής της  $x - iy$ . Μπορούμε να γράψουμε την Εξ. 26 με τη μορφή:

$$\Gamma_+ = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma + i\Omega \quad \text{και} \quad \Gamma_- = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma - i\Omega \quad (35)$$

Η λύση επομένως θα είναι το γινόμενο μιας εκθετικά φθίνουσας συνάρτησης,  $e^{-\gamma t}$ , και μιας μιγαδικής εκθετικής,  $e^{\pm i\Omega t}$ , και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Euler ( $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ) καταλήγει σε γινόμενο μια εκθετικά φθίνουσας συνάρτησης και μιας ημιτονοειδούς ή συνημιτονοειδούς συνάρτησης.

Η περίπτωση αυτή αποτελεί την περίπτωση του **ταλαντωτή με μικρή απόσβεση**.

Θα έχουμε επομένως μια λύση της μορφής

$$Q(t) = Ae^{-\gamma t}e^{+i\Omega t} \quad \text{ή} \quad Q(t) = Be^{-\gamma t}e^{-i\Omega t} \quad (36)$$

$$\text{ή γραμμικό συνδυασμό τους:} \quad Q(t) = e^{-\gamma t}(Ce^{+i\Omega t} + De^{-i\Omega t}) \quad (27)$$

Εφόσον έχουμε ένα φυσικό σύστημα, η λύση θα πρέπει να είναι πραγματική και όχι μιγαδική. Αλλά από δύο μιγαδικές εκθετικές λύσεις μπορούμε να πάρουμε δύο πραγματικές λύσεις. Έστω οι δύο μιγαδικές συζυγείς λύσεις ήταν  $z(t)$  και  $z^*(t)$ , το άθροισμά τους θα είναι πραγματικό όπως

και η διαφορά τους διαιρούμενη με  $2i$ . Οι λύσεις αυτές έχουν την μορφή (χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Euler):

$$x_1(t) = \frac{Re(z(t) + z^*(t))}{2} = \frac{e^{+i\Omega t} + e^{-i\Omega t}}{2} = \cos\Omega t$$

$$x_2(t) = \frac{Im(z(t) - z^*(t))}{2i} = \frac{e^{+i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{2i} = \sin\Omega t$$

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω για την περίπτωση θα έχουμε:

$$Q(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\Omega t - \varphi) \quad (38)$$

$$Q(t) = e^{-\gamma t} [C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t)] \quad (39)$$

Οι σταθερές  $A$  και  $\varphi$  συνδέονται με τις σταθερές  $C$  και  $D$  σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\text{Για } t = 0, \text{ από τις Εξ. 38 και 39 έχουμε } A \cos(-\varphi) = C \Rightarrow A \cos(\varphi) = C$$

$$\text{Παραγωγίζοντας τις Εξ. 38 και 39 και για } t = 0 \text{ πέρνουμε: } A \sin(\varphi) = D$$

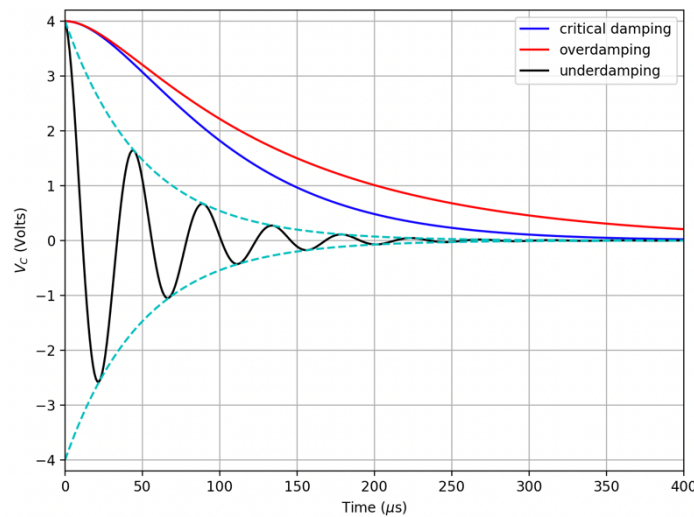
Από τις δύο τελευταίες προκύπτει ότι:

$$A = \sqrt{C^2 + D^2} \text{ και } \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{D}{C}\right) \quad (40)$$

Βασιζόμενοι στο παράδειγμα προηγουμένως, θεωρούμε τώρα ότι ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα  $50nF$ , η αντίσταση είναι  $40.0\Omega$  και το πηνίο  $L = 1.0mH$  ενώ η τάση  $V_0 = 4Volts$ . Στην περίπτωση αυτή  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^5 rad/s$ . Η σταθερά απόσβεσης είναι:  $\gamma = \frac{R}{2L} = \frac{40}{2 \times 10^{-3}} = 2 \times 10^4 rad/s$ .

Επομένως:  $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = 140krad/s$  δηλαδή η συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης είναι περίπου ίση με  $f_d = 22.28kHz$  ή  $T_d = 44.88\mu s$ . Οι αρχικές συνθήκες της περίπτωσης θα δώσουν για την Εξ. 38,  $Q|_{t=0} = Q_0 = A \cos(-\varphi) = A \cos(\varphi)$  και  $I|_{t=0} = 0 = A \Omega \sin(\varphi)$  οπότε προκύπτει ότι  $\varphi = 0$  και  $A = Q_0$ . Οπότε η Εξ. 38 έχει τη μορφή:  $Q(t) = Q_0 e^{-\gamma t} \cos(\Omega t)$ .

Το Σχήμα 7.5 παρουσιάζει την περίπτωση αυτή της ταλάντωσης με μικρή απόσβεση.



**Σχήμα 7.5:** Η τάση στα άκρα του πυκνωτή για το RLC κύκλωμα του Σχήματος 7.4 για τις τρεις περιπτώσεις φθίνουσας ταλάντωσης. Η διακεκομμένη γραμμή περιγράφει την ελάττωση του πλάτους της ταλάντωσης κατά  $V_0 e^{-\gamma t}$ .

## Φθίνουσες Ταλαντώσεις – Δραστηριότητα

Στη δραστηριότητα αυτή, θα μελετήσετε την φθίνουσα ταλάντωση ενός  $RLC$  κυκλώματος. Θα κατασκευάσετε ένα  $RLC$  κύκλωμα όπως αυτό του Σχήματος 7.4. Μπορείτε να αγνοήσετε τους διακόπτες και απλά αρχικά θα φορτίσετε τον πυκνωτή και δεν θα έχετε τον βρόχο στα δεξιά κλειστό στη ένωση μεταξύ της αντίστασης και του πυκνωτή. Το κύκλωμα αποτελείται από ένα πηνίο αυτεπαγωγής  $L = 1mH$ , μία αντίσταση  $R = 50\Omega$ , και έναν πυκνωτή χωρητικότητας  $50nF$ . Η επιλογή της τιμής της αντίστασης επιβάλλεται από το γεγονός ότι το μέγιστο ρεύμα που μπορεί να διαρρέει το πηνίο δεν μπορεί να ξεπερνά τα  $140mA$ .

Για την κατασκευή του κυκλώματος θα συνδέσετε τον ένα πόλο του πυκνωτή με το πηνίο και το άλλο άκρο του πηνίου με την αντίσταση. Για να κλείσει το κύκλωμα θα πρέπει να συνδέσετε την αντίσταση με τον άλλο πόλο του πυκνωτή που θα αποτελεί και την γείωση ή τάση αναφοράς για τον παλμογράφο. Αντί να χρησιμοποιήσετε ένα απλό καλώδιο μπορείτε να χρησιμοποιήσετε έναν διακόπτη θέτοντάς τον στην θέση OFF (ανοικτός).

Έχοντας αρχικά τον διακόπτη ανοικτό, χρησιμοποιήστε το τροφοδοτικό χαμηλής τάσης για να φορτίσετε τον πυκνωτή σε τάση  $4.0V$ . Συνδέστε το θετικό ακροδέκτη του τροφοδοτικού με το σημείο ένωσης του πυκνωτή με το πηνίο και το GRND του τροφοδοτικού με τον άλλο ακροδέκτη του πυκνωτή.

Χρησιμοποιήστε το probe καλώδιο του παλμογράφου και συνδέστε τον ακροδέκτη του σήματος ανάμεσα στον πυκνωτή και το πηνίο και τον ακροδέκτη GRND στο σημείο ένωσης του πυκνωτή με την αντίσταση.

Αυτό που θα μελετήσετε είναι η εκφόρτιση του πυκνωτή μέσω του πηνίου και της αντίστασης όπως περιγράφεται στο προηγούμενο θεωρητικό τμήμα. Το σήμα δεν θα είναι συνεχές αλλά θα εμφανιστεί μόνο μία φορά, οπότε θα χρειαστεί να το καταγράψετε στην οθόνη του παλμογράφου για να το μελετήσετε.

Πατήστε το κουμπί «**Trigger Menu**» του παλμογράφου να επιλέξετε στο menu «**Slope**» το «**Falling edge**» του σήματος από την εκφόρτιση. Ρυθμίστε το trigger level σε  $-1.0V$ . Ρυθμίστε επίσης την κατακόρυφη κλίμακα ( $Volts/div$ ) του παλμογράφου σε  $500mV/div$  και την οριζόντια κλίμακα ( $sec/div$ ) σε  $20.0\mu s/div$  (γιατί;).

Πατήστε το κουμπί «**ACQUIRE**» και δείτε το Acquire menu που εμφανίζεται στην οθόνη του παλμογράφου. Επιλέξτε το κουμπί «**Peak Detect**». Πατήστε κατόπιν το κουμπί «**Single Seq**». Όταν θα κλείσετε το κύκλωμα του πυκνωτή, ο παλμογράφος θα καταγράψει το σήμα.

Αφού φορτίσετε τον πυκνωτή αποσυνδέστε το τροφοδοτικό. Γυρίστε τον διακόπτη στην θέση ON και αφήστε τον πυκνωτή να εκφορτιστεί.

Παρατηρήστε το σήμα στον παλμογράφο. Η μορφή που θα πάρετε θα πρέπει να είναι αυτή μια φθίνουσας ταλάντωσης.

Χρησιμοποιώντας τον λειτουργία «**CURSOR**» του παλμογράφου καταγράψτε το πλάτος κάθε κορυφής του σήματος που εμφανίζεται καθώς και την χρονική στιγμή που εμφανίζεται σχετικά με την αρχή του σήματος.

Σχεδιάστε τη μορφή του σήματος που πήρατε και υπολογίστε την συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης και συγκρίνετε το αποτέλεσμα που βρήκατε με την αναμενόμενη τιμή.

Δοκιμάστε να χρησιμοποιήσετε αντίσταση  $30\Omega$ ,  $100\Omega$  και  $500\Omega$  και σχεδιάστε τη μορφή του σήματος που παίρνετε στις τρεις περιπτώσεις.