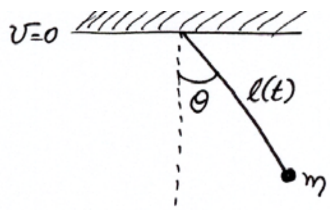
ΦΥΣ. 133

ΕΡΓΑΣΙΑ # 4 **Επιστροφή 7-3-2006**

1. Θεωρήστε ένα απλό επίπεδο εκκρεμές αποτελούμενο από μια μάζα m η οποία εξαρτάται από ένα νήμα αμελητέας μάζας και μήκους l. Το εκκρεμές τίθεται σε κίνηση και από τη χρονική αυτή στιγμή το μήκος του νήματος αρχίζει να ελαττώνεται με σταθερό ρυθμό:

$$\frac{dl}{dt} = -a = const.$$

Το σημείο στήριξης του εκκρεμούς παραμένει σταθερό.
(α) Να υπολογισθεί η Lagrangian του συστήματος
(β) Να υπολογισθεί η συνάρτηση της ενέργειας h.
(γ) Συγκρίνετε τη συνάρτηση της ενέργειας h με την ολική ενέργεια του συστήματος και σχολιάστε την διατήρηση ενέργειας για το σύστημα.



(α) Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες έχουμε:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2) = \frac{1}{2}m(a^2 + l^2\dot{\theta}^2)$$

$V = -mgl\cos\theta$ (επίπεδο $V=0$ αυτό που περνά από το σημείο εξάρτησης)

Επομένως η Lagrangian του συστήματος θα είναι:

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m(a^2 + l^2\dot{\theta}^2) + mgl\cos\theta.}$$

(β) Η συνάρτηση ενέργειας είναι: $h = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} - L = ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}ma^2 - \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{h = -\frac{1}{2}ma^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta.}$$

(γ) Η ολική ενέργεια του συστήματος είναι:

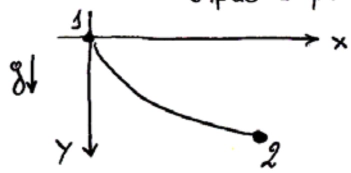
$$E = T + V = \frac{1}{2}m(a^2 + l^2\dot{\theta}^2) - mgl\cos\theta$$

Η ενέργεια είναι διαφορετική από την έκφραση της συνάρτησης ενέργειας h

Επομένως η ολική ενέργεια του συστήματος δεν διατηρείται γιατί δαπανάται έργο στο σύστημα και έχουμε: $\frac{d}{dt}(T+V) \neq 0$.

2. Θεωρείστε το πρόβλημα του βραχυστόχρονου από τις διαλέξεις. Αυτή τη φορά θεωρείστε ότι το σώμα εκτοξεύεται από το σημείο 1 με σταθερή ταχύτητα υ_0. Δείξτε ότι η διαδρομή του ελάχιστου χρόνου στο συγκεκριμένο σημείο 2 είναι και πάλι ένα κυκλοειδές αλλά αυτή τη φορά το υψηλότερο σημείο της καμπύλης του κυκλοειδούς βρίσκεται σε ύψος $\upsilon_0^2/2g$ πάνω από το σημείο 1.

Θεωρήστε το πρόβλημα του βραχυστόχρονου με τη διαφορά ότι το σώμα εκτοξεύεται από το σημείο 1 με αρχική ταχύτητα υ_0.



Ο χρόνος για να πάει από το $1 \to 2$ είναι:

$$\boxed{t(1\to 2) = \int_1^2 \frac{ds}{v}} \quad (1)$$

Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας (όπως και στο παράδειγμα στις διαλέξεις) έχουμε: $E^{\mu\eta\chi}_{\alpha\rho\chi} = E^{\mu\eta\chi}_{\tau\epsilon\lambda} = T_{\alpha\rho\chi}+V_{\alpha\rho\chi} = T_{\tau\epsilon\lambda}+V_{\tau\epsilon\lambda}$

Η αρχική κινητική ενέργεια είναι $T=\frac{1}{2}m\upsilon_0^2$ ενώ $V_{\alpha\rho\chi}=\emptyset$ θεωρώντας το επίπεδο $y=0$ ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - mgy \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + mgy \Rightarrow \boxed{\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2+2gy}} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε: $$\boxed{t(1\to 2) = \int_1^2 \frac{ds}{\sqrt{\upsilon_0^2+2gy}}} \quad (3)$$

Η απόσταση που διανύει το σώμα από το 1 στο 2 είναι:

$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+x'(y)^2}\,dy$ και επομένως η (3) γίνεται:

$$t(1\to 2) = \int_0^{y(2)} \frac{\sqrt{1+x'(y)^2}}{\sqrt{\upsilon_0^2+2gy}}\,dy$$

Θέλουμε ο χρόνος αυτός να είναι ελάχιστος οπότε το ολοκλήρωμα πρέπει να παρουσιάζει ακρότατο.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $$\boxed{f(x,x',y) = \frac{\sqrt{1+x'(y)^2}}{\sqrt{\upsilon_0^2+2gy}}} \quad (4)$$

Χρησιμοποιώντας την διαφορική εξίσωση Euler-Lagrange έχουμε:

$$(A)\quad \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial x'} = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} \begin{cases} \boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x} = \emptyset} & (5) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x'} = \dfrac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}x'\left(1+x'^2\right)^{-1/2}\left(2gy+\upsilon_0^2\right)^{-1/2} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x'} = x'\left(1+x'^2\right)^{-1/2}\left(2gy+\upsilon_0^2\right)^{-1/2}} \quad (6)$$

Από (A) & (5) $\Rightarrow \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x'}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x'} = C} \quad (7)$

Από (6) & (7) $\Rightarrow x'\left(1+x'^2\right)^{-1/2}\left(2gy+\upsilon_0^2\right)^{-1/2} = C \Rightarrow x'\left(1+x'^2\right)^{-1/2}\left(y+\dfrac{\upsilon_0^2}{2g}\right)^{-1/2} = \dfrac{C}{(2g)^2}$

$$\Rightarrow \quad x'(1+x'^2)^{-1/2}\left(y+\frac{v_0^2}{2g}\right)^{-1/2} = C'$$ Υψώνουμε στο τετράγωνο $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad x'^2(1+x'^2)^{-1}\left(y+\frac{v_0^2}{2g}\right)^{-1} = C'^2 \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)^2$$ αντικαθιστούμε: $y+\frac{v_0^2}{2g} = \hat{y}$

$$\Rightarrow \quad x'^2(1+x'^2)^{-1}(\hat{y})^{-1} = \frac{1}{2a} \Rightarrow 2a\,x'^2 = (1+x'^2)(\hat{y})$$

Λύνοντας ως προς x' έχουμε: $\boxed{x' = \sqrt{\frac{\hat{y}}{2a-\hat{y}}}}$

Η απάντηση που παίρναμε είναι ίδια με αυτή που είχαμε για το βραχυστόχρονο της διάλεξης αλλά τώρα έχουμε $\hat{y}$ αντί για y

3. Αποδείξτε ότι η γεωδεσιακή μιας κυλινδρικής επιφάνειας είναι κυλινδρική έλικα η εξίσωση της οποίας είναι $z=C_1\varphi+C_2$, όπου C_1, C_2 σταθερές.

Η απόσταση 2 σημείων σε κυλινδρικές συντεταγμένες

είναι : $ds=\sqrt{r^2d\phi^2+dz^2}$

Επομένως αν η γραμμή που συνδέει τα δύο σημεία είναι L θέλουμε το ολοκλήρωμα $L=\int ds$ να έχει ελάχιστο

Επομένως: $L=\int ds=\int\sqrt{r^2d\phi^2+dz^2}=\int dz\sqrt{r^2\frac{d\phi^2}{dz^2}+1}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ αναγνωρίζοντας τη συνάρτηση $f=\sqrt{r^2\frac{d\phi^2}{dz^2}+1}$ και εφαρμόζοντας τη διαφορική εξίσωση Euler-Lagrange παίρνουμε:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial f}{\partial\phi'}\right)=\frac{\partial f}{\partial\phi}\Rightarrow\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial\sqrt{r^2\phi'^2+1}}{\partial\phi'}\right)=\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sqrt{r^2\phi'^2+1}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\frac{\partial\sqrt{r^2\phi'^2+1}}{\partial\phi'}=\sigma\tau\alpha\theta=C_1}\quad\text{αφού}\quad\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sqrt{r^2\phi'^2+1}\right)=0$$

$$\text{Άρα}\quad\frac{r^2\phi'}{\sqrt{r^2\phi'^2+1}}=C_1\Rightarrow\frac{r^4\phi'^2}{r^2\phi'^2+1}=C_1^2\Rightarrow r^4\phi'^2=C_1^2r^2\phi'^2+C_1^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\phi'^2=\frac{C_1^2}{r^4-C_1^2r^2}\Rightarrow\phi'=\frac{C_1}{\sqrt{r^4-C_1^2r^2}}\Rightarrow\frac{d\phi}{dz}=\frac{C_1}{\sqrt{r^4-C_1^2r^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\phi=\phi_0+kz}\quad\text{όπου}\quad\boxed{k=\frac{C_1}{r\sqrt{r^2-C_1^2}}}$$

$$\text{ή διαφορετικά:}\quad\boxed{z=\frac{\phi-\phi_0}{k}}$$

4. Ένα αεροσκάφος του οποίου η ταχύτητα ως προς τον αέρα είναι υ_0 πρέπει να πετάξει από την πόλη O (η θέση της συμπίπτει με την αρχή των αξόνων) στη πόλη P που βρίσκεται απόσταση D ανατολικά. Πνέει ωστόσο ένας σταθερός άνεμος με ταχύτητα $\vec{\mathrm{V}}_{\alpha\nu\varepsilon\mu} = Vy\hat{x}$, όπου x και y μετρούνται ανατολικά και βόρεια αντίστοιχα. Βρείτε τη διαδρομή y = y(x), την οποία θα πρέπει να ακολουθήσει το αεροσκάφος ώστε να ελαχιστοποιήσει τον χρόνο πτήσης του σύμφωνα με τα ακόλουθα: (α) Βρείτε την ταχύτητα του αεροσκάφους ως προς το έδαφος συναρτήσει των υ_0, V και φ (τη γωνία με την οποία κινείται το αεροσκάφος βόρεια σχετικά με την ανατολική διεύθυνση), και την θέση του αεροσκάφους. (β) Γράψτε το χρόνο πτήσης σαν ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int_0^D f dx$. Δείξτε ότι αν υποθέσουμε ότι τα y΄ και φ παραμένουν και τα δύο μικρά (εφόσον η ταχύτητα του ανέμου δεν είναι πολύ μεγάλη), τότε το ολοκλήρωμα f παίρνει την μορφή $f = (1 + \frac{1}{2}y'^2)/(1 + ky)$ πολλαπλασιασμένο με μια μη ενδιαφέρουσα σταθερά. Εδώ $k=V/\upsilon_0$. [*Υπόδειξη:* θα χρειαστείτε να πάρετε το ανάπτυγμα Taylor στο βήμα αυτό.] (γ) Γράψτε την διαφορική εξίσωση Euler-Lagrange η οποία προσδιορίζει τη καλύτερη διαδρομή. Για να την λύσετε χρησιμοποιήστε ότι y(x) = λ(D-x)x, η οποία καμπύλη προφανώς περνά από τις δύο πόλεις. Δείξτε ότι ικανοποιεί την εξίσωση Euler-Lagrange, δεδομένου ότι $\lambda = (\sqrt{4 + 2k^2D^2} - 2)/(kD^2)$. Πόσο βόρεια παίρνει το αεροσκάφος αυτή η διαδρομή, αν D=2000mi, υ_0=500miph και ο άνεμος έχει ταχύτητα V=0.5miph; Πόσο χρόνο κερδίζει το αεροσκάφος ακολουθώντας αυτή τη διαδρομή; Η αριθμητική λύση του ολοκληρώματος ελάχιστου χρόνου ισούται με t=3.556 ώρες.

α) Χρειάζεται να υπολογίσουμε την ταχύτητα εδάφους του αεροσκάφους συναρτήσει των υ_0, V και φ (γωνία βόρεια ως προς ανατολική διεύθυνση) και τη θέση του:

$$\left.\begin{aligned} V_x &= \upsilon_0 \cos\phi + Vy^{\alpha\nu\varepsilon\mu} \\ V_y &= \upsilon_0 \sin\phi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{V_{\varepsilon\delta} = \left[\left(\upsilon_0\cos\phi + Vy^{\alpha\nu}\right)^2 + \left(\upsilon_0 \sin\phi\right)^2\right]^{1/2}} \quad (1)$$

Επομένως: $$V_{\varepsilon\delta} = \left[\upsilon_0^2\cos^2\phi + V^2y^2 + 2\upsilon_0 Vy\cos\phi + \upsilon_0^2\sin^2\phi\right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{\varepsilon\delta} = \left[\upsilon_0^2 + V^2y^2 + 2\upsilon_0 Vy\cos\phi\right]^{1/2} \xRightarrow{\text{για μικρά } \phi}$$

$$V_{\varepsilon\delta} \simeq \left[\upsilon_0^2 + V^2y^2 + 2\upsilon_0 Vy\right]^{1/2} \Rightarrow \boxed{V_{\varepsilon\delta} \cong \upsilon_0 + Vy}$$

β) Ο χρόνος πτήσης θα είναι:

$$t = \int_0^P \frac{ds}{V_{εσ}} = \int_0^D \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{v_0 + Vy} = \int_0^D \frac{(1+y'(x)^2)^{1/2} dx}{v_0 + Vy}$$

Αφού y' είναι μικρό παίρνουμε το ανάπτυγμα Taylor του αριθμητή:

$$t \simeq \int_0^D \frac{(1+\frac{1}{2}y'^2)\,dx}{v_0+Vy} \Rightarrow t \simeq \int_0^D \frac{(1+\frac{1}{2}y'^2)dx}{v_0(1+\frac{V}{v_0}y)} \xRightarrow{\boxed{k=\frac{V}{v_0}}} \boxed{t = \int_0^D \frac{1+\frac{1}{2}y'^2}{v_0(1+ky)}dx}$$

Αναγνωρίζουμε τη συνάρτηση $\boxed{F(y,y',x) = \dfrac{1+\frac{1}{2}y'^2}{v_0(1+ky)}}$ και εφαρμόζουμε την εξίσωση Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}$$

γ) Η εξίσωση Euler-Lagrange είναι: $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{1}{v_0}\left(1+\frac{1}{2}y'^2\right)k(1+ky)^{-2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{v_0}\frac{1}{(1+ky)}\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}y' = \frac{y'}{v_0(1+ky)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{1}{v_0}\frac{d}{dx}\left[y'(1+ky)^{-1}\right] = \frac{1}{v_0}\left[y''(1+ky)^{-1} - y'ky'(1+ky)^{-2}\right]$$

$$= \frac{1}{v_0}\left[y''(1+ky)^{-1} - ky'^2(1+ky)^{-2}\right]$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του Euler-Lagrange $\Rightarrow$

$$-\cancel{\frac{1}{v_0}}\left(1+\frac{1}{2}y'^2\right)(1+ky)^{-2}k = \cancel{\frac{1}{v_0}}\left[y''(1+ky)^{-1} - ky'^2(1+ky)^{-2}\right] \Rightarrow$$

$$-\frac{k(1+\frac{1}{2}y'^2)}{(1+ky)^2} - \frac{y''}{(1+ky)} + \frac{ky'^2}{(1+ky)^2} = 0 \Rightarrow \frac{-k(1+\frac{1}{2}y'^2)}{(1+ky)^2} - \frac{y''(1+ky)}{(1+ky)^2} + \frac{ky'^2}{(1+ky)^2} = 0$$

$$\Rightarrow\ -k\left(1+\frac{1}{2}y'^2\right) - y''(1+ky) + ky'^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -y''(1+ky) - k - \frac{1}{2}ky'^2 + ky'^2 = 0 \Rightarrow \boxed{y''(1+ky) - \frac{1}{2}ky'^2 + k = 0}$$

Δοκιμάζοντας τη λύση $y(x) = \lambda x(D-x)$ (όπου λ δεσμός)

έχουμε $\quad y(x) = \lambda x(D-x) \Rightarrow y'(x) = \lambda(D-x) - \lambda x \Rightarrow \boxed{y'(x) = \lambda D - 2\lambda x}$

$$\Rightarrow \boxed{y''(x) = -2\lambda}$$

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση έχουμε:

$$-2\lambda(1+ky) - \frac{1}{2}k(\lambda D - 2\lambda x)^2 + k = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -2\lambda\left(1+k\lambda x(D-x)\right) - \frac{1}{2}k\left(\lambda^2 D^2 + 4\lambda^2 x^2 - 4\lambda^2 D x\right) + k = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -2\lambda - \cancel{2\lambda^2 D k x} + \cancel{2\lambda^2 k x^2} - \frac{1}{2}k\lambda^2 D^2 - \cancel{2\lambda^2 k x^2} + \cancel{2\lambda^2 k D x} + k = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -2\lambda - \frac{1}{2}k\lambda^2 D^2 + k = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \frac{4}{kD^2}\lambda - \frac{2}{D^2} = 0$$

Επομένως οι λύσεις είναι: $\displaystyle \lambda_{1,2} = \frac{-\frac{4}{kD^2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{kD^2}\right)^2 + 4\frac{2}{D^2}}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-\frac{\cancel{4}\,2}{kD^2} \pm \frac{2}{kD^2}\sqrt{4 + 2k^2D^2}}{\cancel{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+2k^2D^2}}{kD^2} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \frac{-2+\sqrt{4+2k^2D^2}}{kD^2}}$$

Το αεροσκάφος βρίσκεται στη μέγιστη βόρεια θέση του όταν:

$$y'(x_M)=0 \Rightarrow y'(x_M) = \lambda D - 2\lambda x_M = 0 \Rightarrow \boxed{x_M = \frac{D}{2}} \text{ για } y_{max}.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της λύσης έχουμε $y_{max} = \lambda x_M (D - x_M) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{max} = \lambda \frac{D}{2}\left(D - \frac{D}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y_{max} = \lambda \frac{D^2}{4}}$$

Ο χρόνος που χρειάζεται για να καλύψει τη διαδρομή OP κατευθείαν είναι:

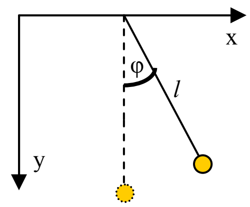
$$t_1 = \frac{D}{V} = \frac{2000}{v_0} \Rightarrow t = \frac{2000}{500} \Rightarrow \boxed{t = 4h.}$$

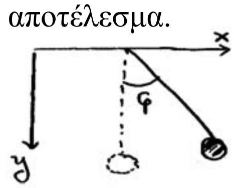
* Το ολοκλήρωμα ελάχιστου χρόνου είναι: $\boxed{t_{min} = 3.556\,h.}$ $\left(t_{min} = \int_0^P \frac{ds}{V}\right)$

Επομένως ο χρόνος που κερδίζει είναι $\boxed{26.64 \text{ min} = 4 \cdot 60 - 3.556 \cdot 60}$

* Αριθμητική λύση.

5. Γράψτε την Lagrangian του απλού εκκρεμούς του παρακάτω σχήματος συναρτήσει των καρτεσιανών συντεταγμένων x και y. Αυτές οι συντεταγμένες περιορίζονται βάσει της εξίσωσης του δεσμού $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}=l$. (α) Γράψτε τις δύο τροποποιημένες εξισώσεις Lagrange (χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές Lagrange). Συγκρίνοντας τις εξισώσεις αυτές με τις εξισώσεις από το 2^o νόμο του Newton δείξτε ότι ο πολλαπλασιαστής Lagrange είναι το αρνητικό της τάσης του νήματος. Αποδείξτε ότι $\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=F^{\delta\varepsilon\sigma\mu}$ καθώς και την αντίστοιχη εξίσωση ως προς y. (β) Η εξίσωση του δεσμού μπορεί να γραφεί με διάφορους τρόπους. Για παράδειγμα μπορούμε να γράψουμε ότι $g(x,y)=x^2+y^2=l^2$. Δείξτε ότι χρησιμοποιώντας αυτή τη συναρτησιακή μορφή θα παίρνατε το ίδιο αποτέλεσμα.





(α) Γράφουμε τη Lagrangian για το απλό εκκρεμές σε x,y συντεταγμένες:

$$\mathcal{L}=(x,x',y,y')=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+mgy=T-V \quad (1)$$

Η εξίσωση του δεσμού είναι: $f(x,y)=c \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\ell$

Επομένως:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\ell} \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\ell} \quad (3)$$

Η τροποποιημένη εξίσωση Lagrange γίνεται:

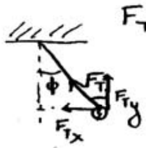
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)-\lambda\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cancel{2}}m\cancel{2}\dot{x}\right)-\lambda\frac{x}{\ell}-0=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{x}=\lambda\frac{x}{\ell}} \quad (4) \quad \frac{x}{\ell}=\sin\phi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right)-\lambda\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cancel{2}}m\cancel{2}\dot{y}\right)-\lambda\frac{y}{\ell}-mg=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{y}=mg+\lambda\frac{y}{\ell}} \quad (5) \quad \frac{y}{\ell}=\cos\phi$$

Αν F_T είναι η τάση του νήματος του εκκρεμούς τότε:



$$F_T^x=F_T\sin\phi=-\lambda\sin\phi=-\lambda\frac{x}{\ell}$$

$$F_T^y=F_T\cos\phi=-\lambda\cos\phi=-\lambda\frac{y}{\ell}$$

Από (4) $\Rightarrow$ $m\ddot{x}=-F_T^x \Rightarrow m\ddot{x}=-F_T\left(\frac{x}{\ell}\right)$

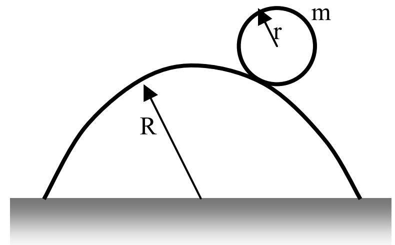
Από (5) $\Rightarrow$ $m\ddot{y}=mg-F_T^y\left(\frac{y}{\ell}\right)$

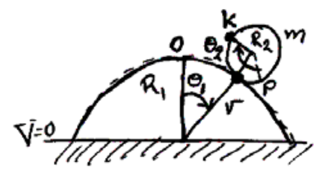
(β) Αν αντί $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}=\ell$ χρησιμοποιήσουμε $g(x,y)=x^2+y^2=\ell^2$ τότε $\frac{\partial g}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial g}{\partial y}=2y$ οπότε οι τροποποιημένες εξισώσεις Lagrange δίνουν:

$$m\ddot{x}=\lambda'(2x)$$

$$m\ddot{y}=mg+\lambda'(2y) \quad \text{οπότε τώρα} \quad \boxed{\frac{-F_T}{2}=\lambda'}$$

6. Ένας κύλινδρος ομοιόμορφης πυκνότητας, μάζας m ακτίνας r κυλά χωρίς ολίσθηση πάνω σε ένα ακίνητο κύλινδρο ακτίνας R. Η μόνη εξωτερική δύναμη είναι η δύναμη της βαρύτητας. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange για να βρείτε σε ποιο σημείο ο κυλιόμενος κύλινδρος πέφτει από τον ακλόνητο κύλινδρο.





Χρειαζόμαστε μόνο μια συντεταγμένη Θ_1, όπως δείχνεται στο σχήμα, για να περιγράψουμε την κίνηση. Ωστόσο για να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange για να βρούμε τις δυνάμεις των δεσμών, θα εισάγουμε επιπλέον συντεταγμένες.

Η άσκηση μας ζητά το σημείο, (τη γωνία Θ_1 δηλαδή) στο οποίο ο μικρός κύλινδρος πέφτει από τον μεγάλο. Στο σημείο αυτό η κάθετη δύναμη (αντίδραση) γίνεται μηδέν.

Εισάγουμε 2 συντεταγμένες, r και Θ_1, οι οποίες περιγράφουν τη κίνηση του κέντρου μάζας. $\boxed{r = R_1 + R_2}$ (1)

Εισάγουμε επίσης τη γωνία Θ_2, η οποία δείχνει τη γωνία περιστροφής του κυλίνδρου ως προς τη κατακόρυφο.

Ο δεσμός για κύλιση χωρίς ολίσθηση σημαίνει ότι: $\widehat{OP} = \widehat{PK}$ όπου το σημείο k του μικρού κυλίνδρου συνέπιπτε με το σημείο O, κορυφή του μεγάλου κυλίνδρου. Επομένως μπορούμε να γράψουμε: $\widehat{OP} = \widehat{PK} \Rightarrow \boxed{R_1\Theta_1 = R_2(\Theta_2 - \Theta_1)}$ (2)

Η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου θα είναι η κινητική ενέργεια του ΚΜ του λόγω μεταφοράς και η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής (κύλιση):

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\Theta}_1^2\right) + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{1}{2} R_2^2 m\right)}_{I_{κυλ}} \dot{\Theta}_2^2 \qquad (3)$$

Η δυναμική ενέργεια, θεωρώντας σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο που περνά από το κέντρο του μεγάλου κυλίνδρου, θα είναι:

$$V = mgr\cos\Theta_1 \qquad (4)$$

Επομένως η Lagrangian είναι: $\mathcal{L} = T - V \Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\Theta}_1^2\right) + \frac{1}{4} m R_2^2 \dot{\Theta}_2^2 - mgr\cos\Theta_1}$

(5)

Έχουμε 2 συναρτήσεις δεσμών : $\begin{cases} f_1(r) = r = R_1+R_2 \\ f_2(\theta_1,\theta_2) = R_2(\theta_2-\theta_1) - R_1\theta_1 = 0 \end{cases}$

Επομένως : $\boxed{\dfrac{\partial f_1}{\partial r} = 1}$ (6) $\boxed{\dfrac{\partial f_2}{\partial \theta_1} = R_1+R_2}$ (7) $\boxed{\dfrac{\partial f_2}{\partial \theta_2} = -R_2}$ (8)

Οι τροποποιημένες εξισώσεις Lagrange για r, θ_1 και θ_2 γράφονται:

$\boxed{r:}$ $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \xRightarrow{(5),(6)} \boxed{m\ddot r - \lambda_1 - mr\dot\theta_1^2 + mg\cos\theta_1 = 0}$$

$\boxed{\theta_1:}$ $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_1}\right) - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \xRightarrow{(5),(7)} \boxed{mr^2\ddot\theta_1 + 2mr\dot r\dot\theta_1 - \lambda_2(R_1+R_2) - mgr\sin\theta_1 = 0}$$

$\boxed{\theta_2:}$ $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_2}\right) - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \xRightarrow{(5),(8)} \boxed{\frac{1}{2}mR_2^2\ddot\theta_2 + \lambda_2 R_2 = 0}$$

Από τις 3 εξισώσεις έχουμε :

$$\boxed{m\ddot r - mr\dot\theta_1^2 + mg\cos\theta_1 = \lambda_1} \quad (9)$$

$$\boxed{mr^2\ddot\theta_1 + 2mr\dot r\dot\theta_1 - mgr\sin\theta_1 = \lambda_2(R_1+R_2)} \quad (10)$$

$$\frac{1}{2}mR_2^{\cancel{2}}\ddot\theta_2 = -\lambda_2\cancel{R_2} \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = -\frac{1}{2}mR_2\ddot\theta_2}$$

λ_2 εξαρτάται προφανώς από το χρόνο.

Αντικαθιστώντας στη (10) έχουμε :

$$mr^2\ddot\theta_1 + 2mr\dot r\dot\theta_1 - mgr\sin\theta_1 = -\frac{1}{2}mR_2\ddot\theta_2(R_1+R_2)$$

αλλά αφού $R_2(\theta_2-\theta_1) = R_1\theta_1 \Rightarrow (R_1+R_2)\theta_1 = R_2\theta_2 \Rightarrow (R_1+R_2)\ddot\theta_1 = R_2\ddot\theta_2$ $\Bigg\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow mr^2\ddot\theta_1 + 2mr\dot r\dot\theta_1 - mgr\sin\theta_1 = -\frac{1}{2}m(R_1+R_2)^2\ddot\theta_1 \Big\}\Rightarrow$$

Επειδή $r = R_1+R_2 \Rightarrow \dot r = 0$

$$\Rightarrow\ m(R_1+R_2)^{\cancel{2}}\ddot{\Theta}_1 - mg\cancel{(R_1+R_2)}\sin\Theta_1 = -\frac{m}{2}(R_1+R_2)^{\cancel{2}}\ddot{\Theta}_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{3}{2}\cancel{m}(R_1+R_2)\ddot{\Theta}_1 = \cancel{m}g\sin\Theta_1 \Rightarrow \boxed{\frac{3}{2}(R_1+R_2)\ddot{\Theta}_1 = g\sin\Theta_1}\ (11)$$

Από την εξίσωση (9) έχουμε: $(r = R_1+R_2 \Rightarrow \dot{r}=0 \Rightarrow \ddot{r}=0)$

$$-mr\dot{\Theta}_1^2 + mg\cos\Theta_1 = \mathcal{N}_1 \Rightarrow \boxed{-m(R_1+R_2)\dot{\Theta}_1^2 + mg\cos\Theta_1 = \mathcal{N}_1}\ (12)$$

Δύο εξισώσεις με 2 αγνώστους:

$$(11) \Rightarrow \frac{3}{2}(R_1+R_2)\ddot{\Theta}_1 = g\sin\Theta_1 \Rightarrow \frac{3}{2}(R_1+R_2)\ddot{\Theta}_1\dot{\Theta}_1 = g\sin\Theta_1\dot{\Theta}_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{3}{2}(R_1+R_2)\ddot{\Theta}_1\dot{\Theta}_1 = \int g\sin\Theta_1\dot{\Theta}_1 \Rightarrow \frac{3}{4}(R_1+R_2)\dot{\Theta}_1^2 = g(1-\cos\Theta_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(R_1+R_2)\dot{\Theta}_1^2 = \frac{4}{3}g(1-\cos\Theta_1)}\ (13)$$

Αντικαθιστούμε την (13) στην (12) οπότε έχουμε:

$$-\frac{4}{3}mg(1-\cos\Theta_1) + mg\cos\Theta_1 = \mathcal{N}_1 \Rightarrow \boxed{\mathcal{N}_1 = \frac{1}{3}mg(7\cos\Theta_1 - 4)}$$

Αλλά $\mathcal{N}_1$ είναι η κάθετη αντίδραση η οποία στο σημείο που χάνεται η επαφή των 2 κυλίνδρων, είναι μηδέν. Άρα:

$$\mathcal{N}_1 = \frac{1}{3}mg(7\cos\Theta_1^{\delta} - 4) = 0 \Rightarrow 7\cos\Theta_1^{\delta} - 4 = 0 \Rightarrow \cos\Theta_1^{\delta} = \frac{4}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Theta_1^{\delta} = 55^\circ}$$