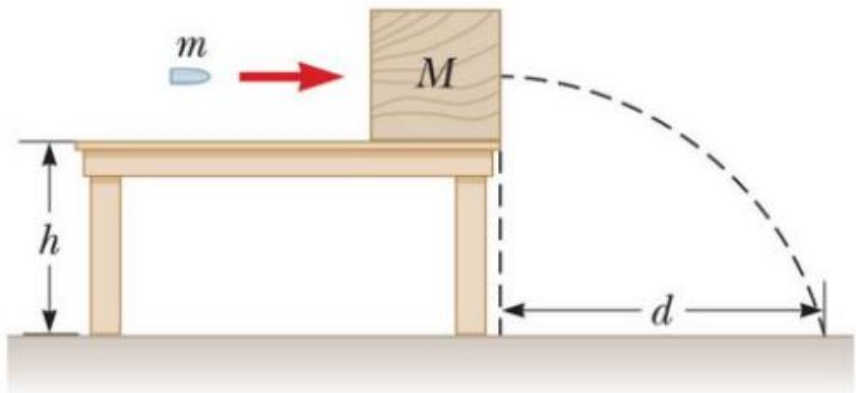
ΦΥΣ 111: ΓΕΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ 1

11/11/20 7^o Φροντιστήριο

Προβλήματα:

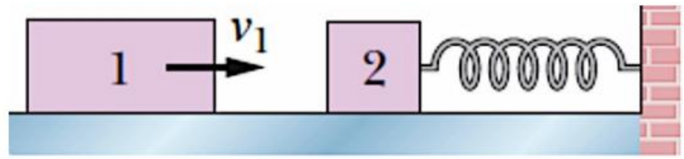
1. Μια σφαίρα μάζας m = 8.00 g εκτοξεύεται κατά ενός σώματος μάζας M = 250 g που αρχικά είναι ακίνητο στην άκρη ενός λείου τραπεζιού ύψους 1 m (βλ. Σχήμα). Η σφαίρα παραμένει μέσα στο σώμα, και μετά την κρούση το σώμα προσγειώνεται σε απόσταση 2 m από τη βάση του τραπεζιού. Προσδιορίστε την αρχική ταχύτητα της σφαίρας.



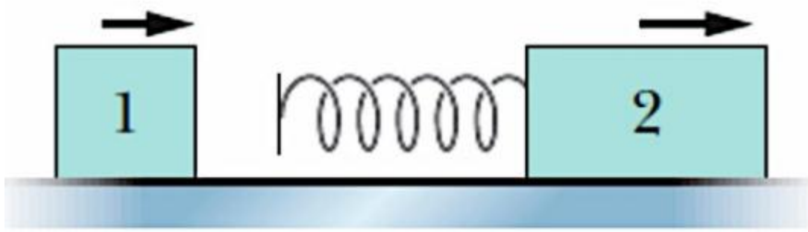
2. Μια μπάλα μάζας 0.200kg έχει ταχύτητα ίση με $1.50\hat{\imath}m/s$, μια δεύτερη μπάλα μάζας 0.300kg έχει ταχύτητα ίση με $-0.400\hat{\imath}m/s$. Οι δύο μπάλες συγκρούονται ελαστικά. Ποιές είναι οι ταχύτητες τους μετά την κρούση.

3. Ένας πύραυλος κινείται εκτός πεδίου βαρύτητας. Στον πύραυλο προσκολλάται διαστημική σκόνη με ρυθμό $\frac{dm}{dt} = kv$ οπού κ μια σταθερά και v η στιγμιαία ταχύτητα του πυραύλου. Ζητείται η ταχύτητα του πυραύλου σαν συνάρτηση του χρόνου t. m(0) = M , v(0) = V0.

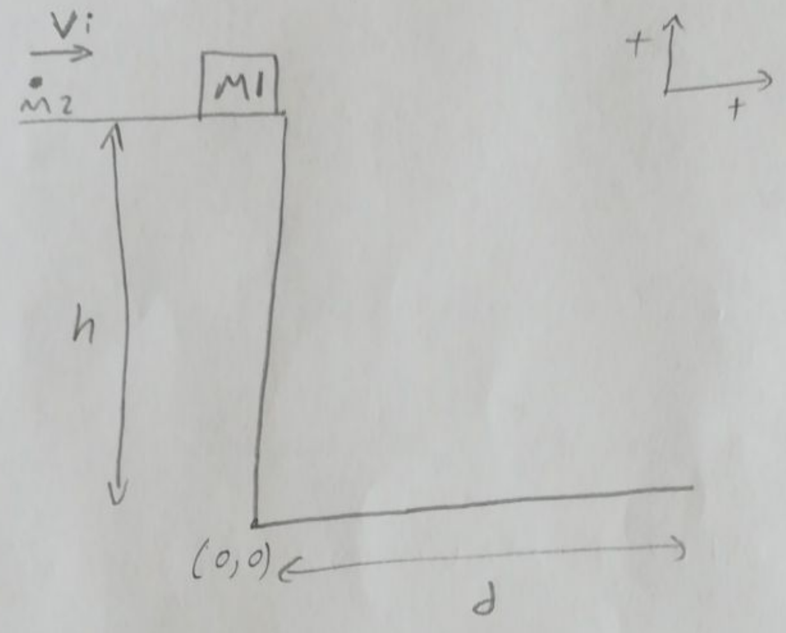
4. Ένα τούβλο μάζας m2 = 1.0kg είναι ακίνητο πάνω σε λεία επιφάνεια και ακουμπά στο ελεύθερο άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς k = 200N/m που βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι εξαρτημένο σε ακλόνητο τοίχο. Ένα άλλο τούβλο μάζας m1 = 2.0kg κινείται με ταχύτητα υ1 = 4m/s και συγκρούεται και προσκολλάται στο ακίνητο τούβλο. Ποιά η συσπείρωση του ελατηρίου όταν τα τούβλα σταματούν στιγμιαία;



5. Ένα τούβλο μάζας m1=2.0kg κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα 10m/s ενώ το τούβλο μάζας m2 = 5.0kg κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα 3.0m/s. Η επιφάνεια στην οποία κινούνται τα τούβλα είναι λεία. Στο τούβλο m2 υπάρχει ένα ελατήριο σταθεράς k = 1120N/m. Όταν τα τούβλα συγκρουστούν, η συσπείρωση του ελατηρίου γίνεται μέγιστη τη στιγμή που τα τούβλα έχουν την ίδια ταχύτητα. Βρείτε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.



1.



$m_1 = 2{,}5\,kg$

$m_2 = 8\,g$

$h = 1\,m$

$d = 2\,m$

Διατήρηση ορμής:

$$m_2 v_i = (m_1 + m_2) v_f \Rightarrow \boxed{v_i = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right) v_f}$$

$$\vec{a}(t) = -g\,\hat{y}$$

$$\vec{v}(t) = -g t\,\hat{y} + v_f\,\hat{x}$$

$$\vec{r}(t) = h\,\hat{y} + v_f t\,\hat{x} - \frac{1}{2} g t^2\,\hat{y}$$

Όταν φτάνει στο έδαφος $y = 0$, $x = d$

$\Rightarrow$ • $h - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

• $d = v_f t \Rightarrow v_f = d\sqrt{\frac{g}{2h}}$

$$\Rightarrow v_i = d\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right)\sqrt{\frac{g}{2h}} \Rightarrow \boxed{v_i = 1388\,m/s}$$

2.

$m_1 = 0{,}200\,kg \qquad m_2 = 0{,}300\,kg$

$v_1 = 1{,}50\,\hat{\imath}\,m/s \qquad v_2 = -0{,}400\,\hat{\imath}\,m/s$

A τρόπος:

$$\vec{P}_{πριν} = \vec{P}_{μετά} \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

$$\Rightarrow \boxed{m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'} \quad (1)$$

Από τη διατήρηση ενέργειας:

$$\boxed{v_2' - v_1' = v_1 - v_2} \quad (2) \Rightarrow v_2' = v_1 - v_2 + v_1'$$

$$\overset{(1),(2)}{\Rightarrow} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2(v_1 - v_2 + v_1')$$

$$\Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_1 - m_2 v_2 + m_2 v_1'$$

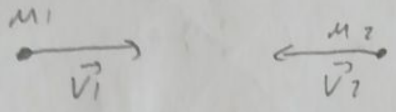
$$\Rightarrow v_1'(m_1 + m_2) = 2 m_2 v_2 + (m_1 - m_2) v_1$$

$$\Rightarrow v_1' = \frac{v_1(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} + \frac{2 m_2 v_2}{(m_1 + m_2)} \Rightarrow \boxed{v_1' = -0{,}780\,m/s}$$

$$v_2' = v_1 - v_2 + v_1' \Rightarrow \boxed{v_2' = 1{,}12\,m/s}$$

Β Τρόπος

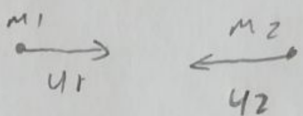
$$V_{KM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = 0{,}360\ \hat{i}\ m/s$$



Σύστημα ΚΜ

Η ορμή του ΚΜ ισούται με 0

$\Rightarrow P_{KM} = 0$



$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{KM}$

$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_{KM}$

Πριν την κρούση $P_{KM} = 0$

$\Rightarrow$ Για να διατηρηθεί μηδενική η ορμή του κέντρου μάζας : $P_{KM}^{\pi\rho\acute{\iota}\nu} = -P_{KM}^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \vec{u}_1{}' &= -\vec{v}_1 + \vec{v}_{KM} \\ \vec{u}_2{}' &= -\vec{v}_2 + \vec{v}_{KM} \end{aligned}\right\}$$

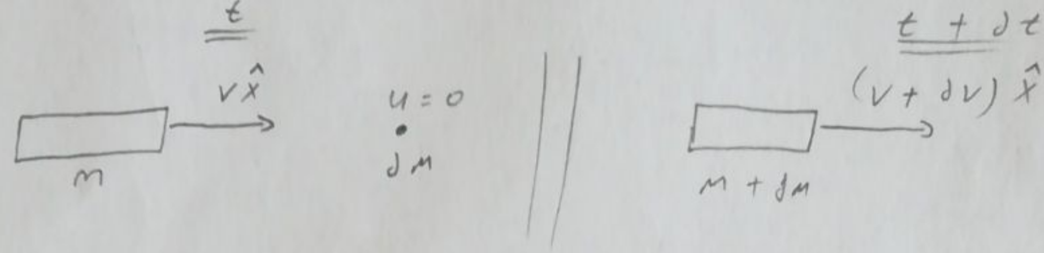
Αυτές είναι οι τελικές ταχύτητες τους στο σύστημα του ΚΜ

$\Rightarrow$ Για να επιστρέψω στο αρχικό σύστημα προσθέτω σε όλα $\vec{v}_{KM}$

$$\Rightarrow \vec{v}_1{}' = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_{KM} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_1{}' = -0{,}780\ \hat{i}\ m/s}$$

$$\vec{v}_2{}' = -\vec{v}_2 + 2\vec{v}_{KM} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_2{}' = 1{,}12\ \hat{i}\ m/s}$$

3. $\dfrac{dm}{dt} = kv \qquad m(0) = M \qquad v(0) = v_0 \qquad \xrightarrow{+}$



• Σύστημα αυξανόμενης μάζας

$$P(t) = mv\hat{x} + dm \cdot 0 \Rightarrow P(t) = mv\hat{x}$$

$$P(t+dt) = (m+dm)(v+dv) = mv + mdv + vdm + \cancel{dv\,dm}^{\,0}$$

$$= (mv + dm\,v + m\,dv)\,\hat{x}$$

Δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη στο σύστημα $\Rightarrow F = 0$

$$F\,dt = P(t+dt) - P(t)$$

$$\Rightarrow (\cancel{mv} + v\,dm + m\,dv - \cancel{mv})\hat{x} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{dm\,v + m\,dv = 0} \text{ (1)} \Rightarrow \frac{dm}{m} = -\frac{dv}{v}$$

$$\int_M^m \frac{dm'}{m'} = -\int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{v'} \Rightarrow \ln(m) - \ln(M) = -\ln(v) + \ln(v_0)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{m}{M}\right) = \ln\left(\frac{v_0}{v}\right) \Rightarrow mv = Mv_0$$

$$\boxed{m = \frac{Mv_0}{v}} \text{ (2)}$$

$$\frac{dm}{dt} = kv \Rightarrow \boxed{dm = kv\,dt} \text{ (3)}$$

(1), (2), (3) $\Rightarrow kv^2 dt + \dfrac{Mv_0}{v}dv = 0 \Rightarrow k\,dt = -Mv_0 \dfrac{dv}{v^3}$

$$\Rightarrow k\int_{t_0}^{t} dt' = -Mv_0\int_{v_0}^{v} v^{-3}\,dv \Rightarrow k(t - \cancel{t_0}^{\,0}) = -Mv_0\left[-\frac{1}{2v^2} + \frac{1}{2v_0^2}\right]$$

$$\Rightarrow kt = \frac{Mv_0}{2v^2} - \frac{M}{2v_0} \Rightarrow v^2 = \frac{Mv_0^2}{M + 2kv_0t} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{Mv_0^2}{M+2kv_0t}}}$$

4.

$m_1 = 2,0\,kg$

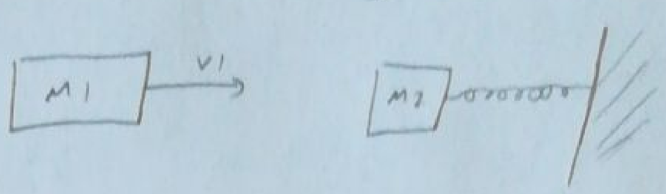
$m_2 = 1,0\,kg$

$k = 200\,N/m$

$v_1 = 4\,m/s$

$v_2 = 0\,m/s$

$\xrightarrow{+}$



$$P_{\alpha\rho\chi} = P_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow m_1 v_1 = (m_1+m_2)v$$

$$\Rightarrow v = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)v_1 \Rightarrow \boxed{v = 2,7\,m/s}$$

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow E_{\kappa\iota\nu} = E_{\tau\varepsilon\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \Rightarrow \Delta x^2 = \frac{(m_1+m_2)v^2}{k}$$

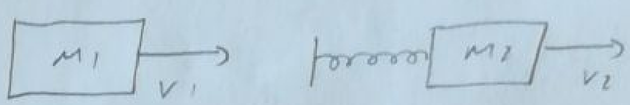
$$\Rightarrow \Delta x = v\sqrt{\frac{(m_1+m_2)}{k}} \Rightarrow \boxed{\Delta x = 0,33\,m}$$

---

5. $m_1 = 2,0\,kg \quad v_1 = 10\,m/s$

$m_2 = 5,0\,kg \quad v_2 = 3,0\,m/s$

$k = 1120\,N/m$



- $P_{\alpha\rho\chi} = P_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1+m_2)v$
- $E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$

$$\Rightarrow k(\Delta x)^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2 - \frac{\cancel{(m_1+m_2)}(m_1v_1+m_2v_2)^2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}}$$

$$= m_1v_1^2 + m_2v_2^2 - \frac{m_1^2v_1^2 - 2m_1m_2v_1v_2 - m_2^2v_2^2}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{\cancel{m_1^2v_1^2} + \cancel{m_2^2v_2^2} + m_1m_2v_1^2 + m_1m_2v_2^2 - \cancel{m_1^2v_1^2} - 2m_1m_2v_1v_2 - \cancel{m_2^2v_2^2}}{m_1+m_2}$$

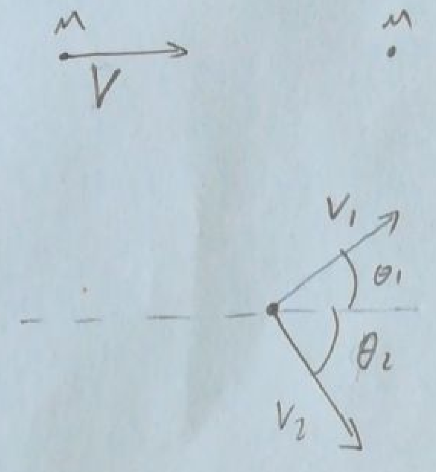
$$= \frac{m_1m_2(v_1^2+v_2^2-2v_1v_2)}{m_1+m_2} = \frac{m_1m_2(v_1-v_2)^2}{m_1+m_2}$$

$$\Rightarrow \Delta x^2 = \frac{m_1m_2(v_1-v_2)^2}{k(m_1+m_2)} \Rightarrow \boxed{\Delta x = 0,25\,m}$$

Μια μπάλα μάζας m και ταχύτητας $v = 3$ m/s συγκρούεται ελαστικά αλλά όχι κεντρικά με μια όμοια ακίνητη μπάλα. Μετά την κρούση η μια μπάλα απομακρύνεται κινούμενη υπό γωνιά $\theta_1 = 30°$ ως προς την αρχική διεύθυνση κίνησης και η δεύτερη υπό γωνιά θ_2 ως προς τον ίδιο άξονα. Να βρεθούν τα μέτρα των τελικών ταχυτήτων των 2 σωμάτων.

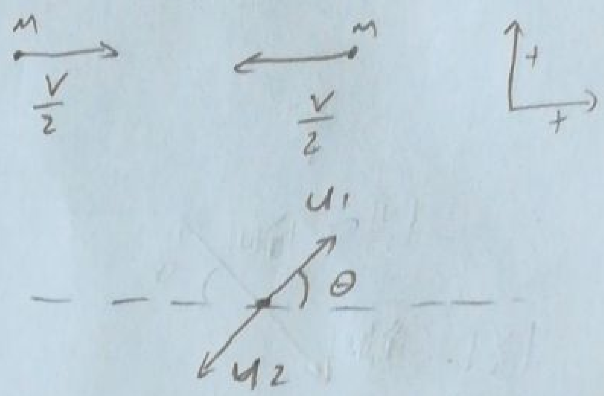
3.

Πριν



Μετά

Σύστημα ΚΜ



$$\vec{V}_{KM} = \frac{mV}{m+m} = \frac{V}{2}\hat{i}$$

$$\vec{V_1} = |V_1|\cos\theta_1\hat{i} + |V_1|\sin\theta_1\hat{j}$$

$$\vec{V_2} = |V_2|\cos\theta_2\hat{i} - |V_2|\sin\theta_2\hat{j}$$

$$\theta_1 = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \vec{V_1} = \frac{|V_1|\sqrt{3}}{2}\hat{i} + \frac{|V_1|}{2}\hat{j}$$

$$P_{KM} = 0 \Rightarrow u_1' = u_2' = u$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\frac{V^2}{4} + \frac{1}{2}m\frac{V^2}{4} = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}mu^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{V}{2}\right)^2 = u^2 \Rightarrow |u| = \left|\frac{V}{2}\right|$$

$$\Rightarrow \vec{u_1} = +\frac{V}{2}\cos\theta\,\hat{i} + \frac{V}{2}\sin\theta\,\hat{j}$$

$$\vec{u_2} = -\frac{V}{2}\cos\theta\,\hat{i} - \frac{V}{2}\sin\theta\,\hat{j}$$

Για να πάω από το ΚΜ στο αρχικό σύστημα προσθέτω σε $\vec{u_1}$ και $\vec{u_2}$ την $\vec{V}_{KM}$

$$\Rightarrow \frac{|V_1|\sqrt{3}}{\cancel{2}}\hat{i} + \frac{|V_1|\hat{j}}{\cancel{2}} = +\frac{V}{\cancel{2}}\cos\theta\,\hat{i} + \frac{V}{\cancel{2}}\sin\theta\,\hat{j} + \frac{V}{\cancel{2}}\hat{i}$$

$$\hat{i}: |V_1|\sqrt{3} = +V\cos\theta + V \Rightarrow V\cos\theta = -V + |V_1|\sqrt{3}$$

$$\hat{j}: |V_1| = V\sin\theta$$

$$\Rightarrow \cancel{V^2} = |V_1|^2 + \cancel{V^2} - 2V|V_1|\sqrt{3} + 3|V_1|^2 \Rightarrow |V_1|^2 - \frac{V\sqrt{3}}{2}|V_1| = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{|V_1| = \frac{\sqrt{3}\,V}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}V}{2} = V\sin\theta \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

Για το άλλο σώμα

$$|V_2|\cos\theta_2\hat{i} - |V_2|\sin\theta_2\hat{j} = -\frac{V}{4}\hat{i} - \frac{\sqrt{3}}{4}V\hat{j} + \frac{V}{2}\hat{i}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\hat{i}: |V_2|\cos\theta_2 = \frac{V}{4}\\ \hat{j}: |V_2|\sin\theta_2 = \frac{\sqrt{3}V}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \tan\theta_2 = \sqrt{3} \Rightarrow \theta_2 = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{|V_2| = \frac{V}{2}}$$