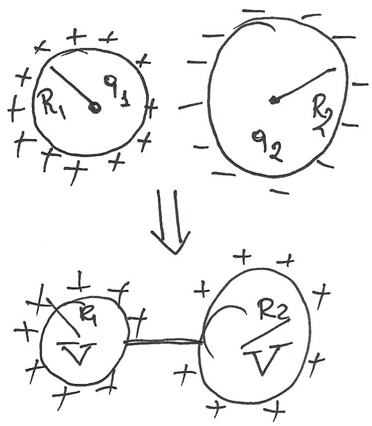
ΦΥΣ. 112

4ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή: Παρασκευή 11.10.2024**

1. Θεωρήσετε δύο σφαιρικούς αγωγούς χωρητικότητας C_1 και C_2 που είναι φορτισμένοι με φορτία q_1 και q_2 αντίστοιχα και ακτίνες R_1 και R_2. Οι δύο αγωγοί συνδέονται μεταξύ τους με αγώγιμο σύρμα και μετά από λίγο επέρχεται ηλεκτροστατική ισορροπία. Βρείτε (α) το φορτίο των δύο αγωγών και (β) την ενέργεια του συστήματος στην τελική κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας. Υπάρχουν απώλειες κατά την ανακατανομή των φορτίων;



(α) Το ολικό φορτίο είναι $q_1+q_2=q$. (1)

Μετά την ένωσή τους με το αγώγιμο σύρμα τα φορτία ανακατανέμονται στους δύο αγωγούς σύμφωνα με τον λόγο των χωρητικοτήτων τους έως ότου επέλθει στατική ηλεκτροστατική ισορροπία.

Έστω q_1' και q_2' το φορτίο τους στην τελική κατάσταση. Το φορτίο θα είναι:

$$\left.\begin{aligned} q_1' &= C_1 V_1' \\ q_2' &= C_2 V_2' \end{aligned} \quad \& \quad V_1'=V_2'=V' \right\} \Rightarrow \frac{q_1'}{q_2'} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\cancel{4\pi\varepsilon_0} R_1}{\cancel{4\pi\varepsilon_0} R_2} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{q_1'}{\underbrace{q_1'+q_2'}_{q \text{ από διατήρηση φορτίου}}} = \frac{C_1}{C_1+C_2} = \frac{R_1}{R_1+R_2} \Rightarrow \boxed{q_1' = \frac{C_1}{C_1+C_2}\, q = \frac{R_1}{R_1+R_2}\, q} \quad (2)$$

Αντίστοιχα:

$$\frac{q_1'+q_2'}{q_2'} = \frac{R_1+R_2}{R_2} = \frac{C_1+C_2}{C_2} \Rightarrow \boxed{q_2' = \frac{C_2}{C_1+C_2}\, q = \frac{R_2}{R_1+R_2}\, q} \quad (3)$$

Το κοινό δυναμικό θα είναι: $\boxed{V = \frac{Q_{ολ}}{C_{ολ}} = \frac{q_1+q_2}{C_1+C_2}}$ (4)

(β) Η αρχική ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι: $U_i = \frac{1}{2}\left[\frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2}\right]$

Η τελική ηλεκτρική δυναμική ενέργεια θα είναι: $U_f = \frac{1}{2}\frac{(q_1+q_2)^2}{(C_1+C_2)}$

Επομένως $\Delta U = U_f - U_i = \frac{1}{2}\left[\frac{(q_1+q_2)^2}{C_1+C_2} - \frac{q_1^2}{C_1} - \frac{q_2^2}{C_2}\right]$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{1}{2}\left[\frac{C_1C_2\left(q_1^2+q_2^2+2q_1q_2\right) - q_1^2C_1C_2 - q_1^2C_2^2 - q_2^2C_1^2 - q_2^2C_2C_1}{\left(C_1+C_2\right)C_1C_2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(C_1+C_2\right)C_1C_2}\Big[\cancel{q_1^2C_1C_2} - \cancel{q_1^2C_1C_2} + \cancel{q_2^2C_1C_2} - \cancel{q_2^2C_1C_2} + 2q_1q_2C_1C_2$$
$$- q_1^2C_2^2 - q_2^2C_1^2\Big] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta U = \frac{1}{2}\frac{1}{C_1C_2\left(C_1+C_2\right)}\left[2q_1q_2C_1C_2 - q_1^2C_2^2 - q_2^2C_1^2\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{C_1C_2\left(C_1+C_2\right)}\left[q_1C_2 - q_2C_1\right]^2 = -\frac{C_1C_2}{2\left(C_1+C_2\right)}\left[\overset{V_1}{\cancel{\frac{q_1}{C_1}}} - \overset{V_2}{\cancel{\frac{q_2}{C_2}}}\right]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta U = -\frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{\left(C_1+C_2\right)}\left(V_1-V_2\right)^2 < 0 \quad \text{εφόσον } \left(V_1-V_2\right)^2>0 \text{ και } \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}>0.$$

Επομένως υπάρχει ελάττωση της ενέργειας του συστήματος, μετά την ανακατανομή των φορτίων.

Παρατηρούμε ότι όταν $V_1=V_2$ τότε $\underline{\Delta U=0}$

Αυτό είναι αναμενόμενο επειδή δεν υπάρχει ροή φορτίων από τον έναν αγωγό στον άλλο όταν βρίσκονται στο ίδιο δυναμικό.

2. Μία αγώγιμη σφαίρα S_1 ακτίνας r είναι προσαρτημένη σε μια μονωμένη ράβδο. Μια άλλη αγώγιμη σφαίρα S_2 ακτίνας R είναι προσαρτημένη σε ένα μονωμένο κατακόρυφο στήριγμα. Η S_2 είναι αρχικά αφόρτιστη. Δίνουμε φορτίο Q στη σφαίρα S_1 και φέρνεται σε επαφή με την S_2 και κατόπιν απομακρύνεται. Η σφαίρα S_1 επαναφορτίζεται ώστε το φορτίο της να γίνει και πάλι Q και φέρνεται ξανά σε επαφή με την S_2 και κατόπιν απομακρύνεται. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται N φορές. (α) Βρείτε την ηλεκτροστατική ενέργεια στη σφαίρα S_2 μετά από N τέτοιες επαφές με τη σφαίρα S_1. (β) Ποια είναι η οριακή τιμή για την ενέργεια αυτή αν το N προσεγγίζει το άπειρο ($N \to \infty$);

Έχουμε δύο σφαιρικούς αγωγούς οπότε ο λόγος των χωρητικοτήτων τους θα είναι ίσος με το λόγο των ακτίνων τους:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= 4\pi\varepsilon_0 R_1 \\ C_2 &= 4\pi\varepsilon_0 R_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (1)$$

Τα φορτία κατανέμονται με βάση την σχέση (1).

Έστω ότι στην 1η επαφή, το φορτίο που έλαβε η S_2 είναι q_1.

Επομένως το φορτίο στην S_1 θα είναι $Q - q_1 = q_1'$

Από την (1) θα έχουμε: $\dfrac{q_1}{q_1'} = \dfrac{q_1}{Q-q_1} = \dfrac{C_2}{C_1} = \dfrac{R}{r} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{q_1 = Q\,\frac{R}{R+r}} \quad (2)$$

Στην 2η επαφή, S_1 αποκτά και πάλι φορτίο Q. Επομένως το φορτίο στις S_1, S_2 θα είναι: $Q + q_1 = Q\left(1 + \dfrac{R}{R+r}\right)$ Το φορτίο ανακατανέμεται με τον ίδιο λόγο:

$$\text{Άρα: } q_2 = Q\left(1+\frac{R}{R+r}\right)\left(\frac{R}{R+r}\right) = Q\left(\frac{R}{R+r} + \frac{R^2}{(R+r)^2}\right)$$

Ανάλογα, στην 3η επαφή θα έχουμε ότι: $q_3 = Q\left[\dfrac{R}{R+r} + \left(\dfrac{R}{R+r}\right)^2 + \left(\dfrac{R}{R+r}\right)^3\right]$

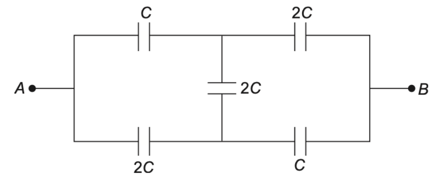
Στην N-επαφή θα έχουμε:

$$q_N = Q\left[\frac{R}{R+r} + \left(\frac{R}{R+r}\right)^2 + \dots + \left(\frac{R}{R+r}\right)^N\right] \Rightarrow \boxed{q_N = Q\,\frac{R}{r}\left[1 - \left(\frac{R}{R+r}\right)^N\right]}$$

Επομένως μετά από N επαφές η ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια της S_2 είναι:

$$U_{2N} = \frac{q_N^2}{2(4\pi\varepsilon_0 R)} \Rightarrow \boxed{U_{2N} = \frac{q_N^2}{8\pi\varepsilon_0 R}}$$

3. Βρείτε την ισοδύναμη χωρητικότητα μεταξύ των σημείων A και B για το κύκλωμα του διπλανού σχήματος. Θεωρήστε ότι οι χωρητικότητες των επιμέρους πυκνωτών είναι όπως φαίνονται στο σχήμα.



Στους πυκνωτές και τη συνδεσμολογία τους μπορούμε να εφαρμόσουμε

(A) την αρχή διατήρησης φορτίου που συνήθως εφαρμόζεται στα άκρα μιας μπαταρίας ή ενός απομονωμένου συστήματος.

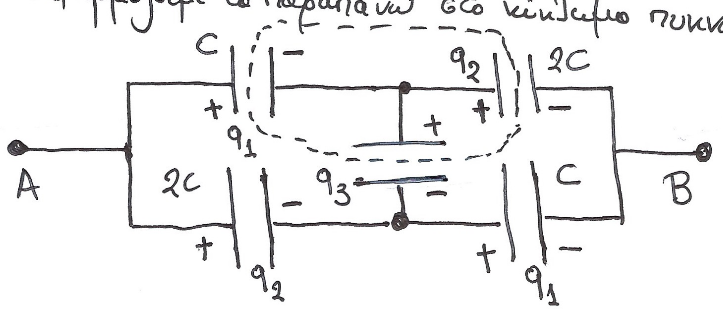
(i) Στην περίπτωση της μπαταρίας και οι δύο πόλοι της μπαταρίας προσφέρουν ίσες ποσότητες φορτίου.

(ii) Σε ένα απομονωμένο σύστημα (αυτό που δεν είναι συνδεδεμένο σε πηγή φορτίου όπως η γη ή οι πόλοι μιας μπαταρίας) το συνολικό φορτίο παραμένει σταθερό.

(B) Η διαφορά δυναμικού ελαττώνεται κατά q/C καθώς κινούμαστε από τον θετικό οπλισμό ενός πυκνωτή στον αρνητικό οπλισμό και στην μπαταρία ελαττώνεται κατά την ηλεκτρεγερτική δύναμη $\mathcal{E}$ της μπαταρίας καθώς κινούμαστε από τον θετικό πόλο στον αρνητικό.

Αυτοί είναι οι δύο κανόνες του "Kirchhoff" για τις περιπτώσεις των πυκνωτών.

Εφαρμόζουμε τα παραπάνω στο κύκλωμα πυκνωτών της άσκησης.



Υποθέτουμε ότι το σημείο A είναι συνδεδεμένο με τον θετικό πόλο μιας μπαταρίας και το σημείο B με τον αρνητικό πόλο της μπαταρίας.

Επομένως συνολικό φορτίο Q είναι αποθηκευμένο στο σύστημα των πυκνωτών. Παρατηρώντας συμμετρία του κλάδου εισόδου και εξόδου, μπορούμε να πούμε ότι τα φορτία θα κατανέμονται όπως στο σχήμα.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα θα έχουμε:

Από το (B) : $-\frac{q_1}{C}+\frac{q_2}{2C}-\frac{q_3}{2C}=0 \Rightarrow -2q_1+q_2-q_3=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2q_1-q_2+q_3=0 \qquad (1)$$

Από το (A) : $q_1+q_2=Q \qquad (2)$

Οι οπλισμοί που βρίσκονται μέσα στον βρόχο που ορίζεται η διακεκομμένη καμπύλη αποτελούν απομονωμένο σύστημα. Επομένως θα έχουμε:

$$q_3+q_2-q_1=0 \qquad (3)$$

Λύνουμε το σύστημα των 3 εξισώσεων με αγνώστους q_1, q_2 και q_3

Πολ/ζουμε την (3)×2 και προσθέτουμε στην (1):

$$\left.\begin{aligned}2q_1-q_2+q_3&=0\\-2q_1+2q_2+2q_3&=0\end{aligned}\right\} \stackrel{+}{\Rightarrow} q_2+3q_3=0 \Rightarrow q_2=-3\cdot q_3 \quad (4)$$

Από την (2) έχουμε: $q_1=Q-q_2 \quad (5) \stackrel{(4)}{\Rightarrow} q_1=Q+3q_3 \; (6)$

Αντικαθιστούμε στην (3): $q_3-3q_3-Q-3q_3=0 \Rightarrow -5q_3=Q \Rightarrow$

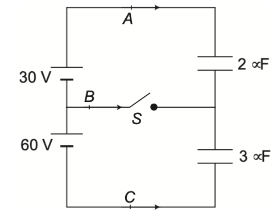
$$\Rightarrow \boxed{q_3=-\frac{Q}{5}}$$

Αντικατάσταση στην (4) δίνει $\boxed{q_2=\frac{3Q}{5}}$ και στην (6) $\boxed{q_1=\frac{2Q}{5}}$

Μεταξύ των σημείων Α κ Β η ισοδύναμη χωρητικότητα του συστήματος είναι $C_{ισοδ}=\frac{Q}{V_{AB}}=Q\Big/\left[\frac{q_1}{C}+\frac{q_2}{2C}\right]=\cancel{Q}\Big/\left[\frac{2\cancel{Q}}{5C}+\frac{3\cancel{Q}}{10C}\right] \Rightarrow$

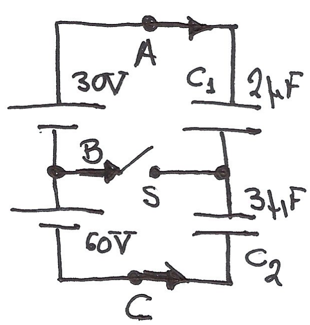
$$\Rightarrow \boxed{C_{ισοδ}=\frac{10}{7}C}$$

4. Βρείτε το φορτίο που θα κινηθεί διαμέσως των σημείων A, B και C στις διευθύνσεις που αναγράφονται όταν κλείσει ο διακόπτης S στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος.

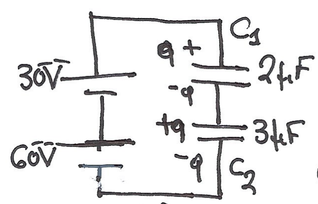


Όταν ο διακόπτης κλείσει στο κύκλωμα της άσκησης, φορτίο αρχίζει να ρέει διαμέσου διαφόρων σημείων του κυκλώματος. Το ίδιο θα συμβεί και όταν ο διακόπτης ανοίξει ή εν γένει αλλάξει κατάσταση και το κύκλωμα μετακινηθεί από μια κατάσταση σταθερή σε μια άλλη.

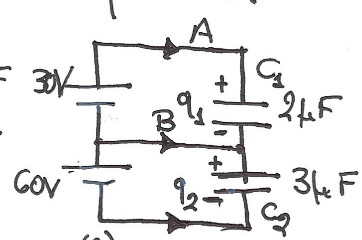
Τέτοιου είδους προβλήματα μπορούν να λυθούν βρίσκοντας τα φορτία που είναι αποθηκευμένα σε διάφορους πυκνωτές του συστήματος στην αρχική και τελική κατάσταση του διακόπτη και να βρούμε τα φορτία που ρέουν από διάφορα σημεία υπολογίζοντας τη διαφορά στα φορτία των πυκνωτών.



Οι δύο καταστάσεις του κυκλώματος που θα εξετάσουμε είναι οι παρακάτω:



(α)



(β)

(A) Όταν ο διακόπτης είναι ανοικτός (σχήμα α) οι δύο πυκνωτές είναι σε σειρά. Η χωρητικότητα του ισοδύναμου πυκνωτή θα είναι

$$C_{ισοδ} = \frac{C_1 C_2}{C_1+C_2} \Rightarrow C_{ισοδ} = \frac{2\cdot 3(\mu F)^2}{5\cancel{\mu F}} \Rightarrow \boxed{C_{ισοδ} = \frac{6}{5}\mu F}$$

Το φορτίο σε κάθε πυκνωτή θα είναι: $Q = CV \Rightarrow \boxed{Q = \frac{6}{5}\mu F \cdot 90V = 108\mu C}$

(B) Όταν κλείσει ο διακόπτης τότε φορτία ανακατανέμονται.

Έστω q_1 και q_2 τα φορτία που αποκτούν οι δύο πυκνωτές.

Εφαρμόζοντας τον "δεύτερο νόμο του kirchhoff" στους δύο μικρότερους βρόχους (πάνω και κάτω) θα έχουμε:

$$V_1 - \frac{q_1}{C_1} = 0 \Rightarrow 30V - \frac{q_1}{2\mu F} = 0 \Rightarrow \boxed{q_1 = 60\mu C}$$

$$V_2 - \frac{q_2}{C_2} = 0 \Rightarrow 60V - \frac{q_2}{3\mu F} = 0 \Rightarrow \boxed{q_2 = 180\mu C}$$

Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα φορτία q_1 και q_2 διαφορετικά παρατηρώντας ότι ο πάνω οπλισμός του πυκνωτή C_1 είναι συνδεδεμένος με τον θετικό πόλο της μπαταρίας και επομένως βρίσκεται στο ίδιο δυναμικό. Αντίστοιχα ο κάτω οπλισμός του πυκνωτή C_1 είναι συνδεδεμένος με τον αρνητικό πόλο της $1^{ης}$ μπαταρίας και επομένως θα έχουν το ίδιο δυναμικό.

Δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι η διαφορά δυναμικού στους οπλισμούς του πυκνωτή C_1 είναι όση και στα άκρα της $1^{ης}$ μπαταρίας

$$q_1 = C_1 \cdot V_1 \Rightarrow q_1 = 2\mu F \cdot 30V \Rightarrow q_1 = 60\mu C$$

Αντίστοιχα, η διαφορά δυναμικού στα άκρα του $2^{ου}$ πυκνωτή C_2 θα είναι όση και αυτή της $2^{ης}$ μπαταρίας, και επομένως: $q_2 = 180\mu C$

Έστω φορτίο q_A ρέει διαμέσου του A στον επάνω κλάδο του κυκλώματος. Το φορτίο αυτό πηγαίνει στον πάνω οπλισμό του πυκνωτή C_1. Αρχικά, ο πυκνωτής είχε φορτίο $+q$ και τελικά έχει φορτίο $+q_1$:

Επομένως θα έχουμε:

$$q_1 = q + q_A \Rightarrow q_A = q_1 - q \Rightarrow q_A = (60-108)\mu C = -48\mu C$$

$$\Rightarrow \boxed{q_A = -48\mu C}$$

Παρόμοια, το φορτίο q_B το οποίο πηγαίνει στον πάνω οπλισμό του πυκνωτή C_2 και στον κάτω οπλισμό του πυκνωτή C_1 θα είναι:

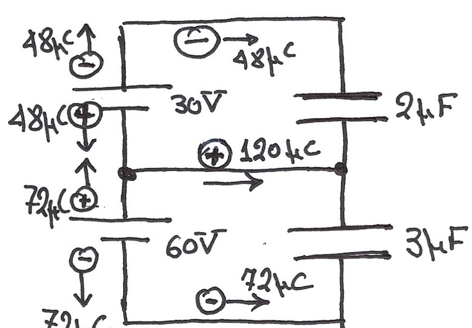
$$q_2 - q_1 = q_B + \underbrace{\cancelto{0}{(q-q)}}_{\text{αρχικό φορτίο στους δύο οπλισμούς}} \Rightarrow q_B = q_2 - q_1 = (180-60)\mu C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{q_B = 120\mu C}$$

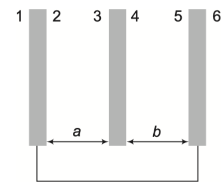
Φορτίο q_C κινείται στον κάτω κλάδο του κυκλώματος προς τον κατώτερο οπλισμό του πυκνωτή C_2. Αρχικά το φορτίο στον οπλισμό αυτόν είναι $-q$ και τελικά είναι $-q_2$. Επομένως θα έχουμε:

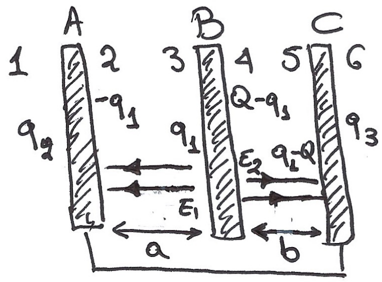
$$-q_2 = (-q) + q_C \Rightarrow q_C = q - q_2 \Rightarrow q_C = 108 - 180 \Rightarrow \boxed{q_C = -72\mu C}$$

Τα φορτία που ρέουν στους τρεις κλάδους του κυκλώματος όταν ο διακόπτης είναι κλειστός θα είναι όπως στο παρακάτω σχήμα



5. Τρεις πανομοιότυπες μεταλλικές πλάκες κρατούνται σε απόσταση a και b μεταξύ τους όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι εξωτερικές πλάκες συνδέονται μεταξύ τους με ένα αγώγιμο σύρμα και ένα φορτίο Q τοποθετείται στη μεσαία πλάκα. Να βρείτε την τελική κατανομή φορτίου σε όλες τις επιφάνειες του συστήματος.





Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή φορτίου στις 6 επιφάνειες του σχήματος είναι όπως στο σχήμα. Στην κατανομή των φορτίων στις διαφορετικές επιφάνειες, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι δύο απέναντι επιφάνειες έχουν ίσα και αντίθετα φορτία. *(δες απόδειξη παρακάτω)

Το συνολικό φορτίο στις ~~πλάκες~~ A και C είναι μηδέν. Επομένως:

$$q_2 - q_1 + q_3 + q_1 - Q = 0 \Rightarrow \boxed{q_2 + q_3 = Q} \quad (1)$$

Από τη στιγμή που οι πλάκες A και C συνδέονται με αγώγιμο σύρμα θα βρίσκονται στο ίδιο δυναμικό. Επομένως:

$$V_B - V_A = V_B - V_C \Rightarrow E_1 a = E_2 b \Rightarrow \frac{q_1}{\cancel{A\varepsilon_0}} \cdot a = \frac{Q - q_1}{\cancel{A\varepsilon_0}} b \Rightarrow$$

εμβαδό επιφάνειας

$$\Rightarrow q_1 a = (Q - q_1) b \Rightarrow \boxed{q_1 = \frac{Qb}{a+b}} \quad (2)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό ενός αγωγού είναι μηδέν. Επομένως:

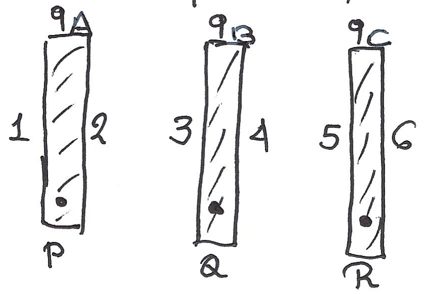
$$\frac{q_2}{2A\varepsilon_0} - \frac{q_1}{2A\varepsilon_0} + \frac{q_1}{2A\varepsilon_0} + \frac{Q - q_1}{2A\varepsilon_0} + \frac{q_1 - Q}{2A\varepsilon_0} - \frac{q_3}{2A\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \boxed{q_2 - q_3 = 0} \quad (3)$$

Έχουμε τρεις εξισώσεις (1), (2) κ (3) με τρεις αγνώστους, οπότε:

Από (1) κ (3) έχουμε ότι $\boxed{q_2 = \frac{Q}{2}}$ και από την (3) $\boxed{q_2 = q_3 = \frac{Q}{2}}$

Ακολουθώντας το σχήμα και τα q_1, q_2, q_3 μπορούμε να γράψουμε τα φορτία σε όλες τις επιφάνειες.

* Μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι δύο απέναντι επιφάνειες έχουν ίσα και αντίθετα φορτία και ότι οι δύο εξωτερικές επιφάνειες έχουν φορτίο ίσο με το μισό του συνολικού φορτίου ως εξής:



Έστω στις τρεις μεταλλικές πλάκες υπάρχουν φορτία q_A, q_B και q_C. Τα φορτία θα κατανεμηθούν στις 6 επιφάνειες ως εξής:

$$q_2 = q_A - q_1 \qquad (A)$$
$$q_4 = q_B - q_2 \qquad (B)$$
$$q_6 = q_C - q_5 \qquad (C)$$

Στο εσωτερικό κάθε αγώγιμης πλάκας το πεδίο είναι 0. Επομένως στο σημείο P που είναι στο εσωτερικό της αριστερής πλάκας $E_P=0$

Στο σημείο P, το φορτίο στην επιφάνεια 1 προκαλεί πεδίο προς τα αριστερά ενώ όλα τα υπόλοιπα φορτία q_2, q_3, q_4, q_5 και q_6 θα δημιουργούν πεδίο προς τα αριστερά.

Το πεδίο που δημιουργεί επίπεδη επιφάνεια, επιφανειακής πυκνότητας σ είναι $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{Q}{2A\varepsilon_0}$ όπου A το εμβαδό της επιφάνειας. Επομένως:

$$\underbrace{E_1 - E_{q_j-1}}_{\text{το πεδίο από όλα τα φορτία εκτός της επιφάνειας 1.}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2A\varepsilon_0}\left[q_1-(q_A-q_1)-q_3-(q_B-q_3)-q_5-(q_C-q_5)\right]=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2q_1-q_A-q_B-q_C=0 \Rightarrow \boxed{q_1=\frac{q_A+q_B+q_C}{2}}=\boxed{\frac{Q}{2}}$$

Ανάλογα, το πεδίο στο σημείο R της πλάκας C θα έχει ένταση μηδέν, και επομένως: $\boxed{q_6=\frac{q_A+q_B+q_C}{2}} \Rightarrow \boxed{q_6=\frac{Q}{2}}$ Το μισό συνολικού φορτίου εμφανίζεται στις δύο εξωτερικές επιφάνειες

Στην ενδιάμεση πλάκα B και στο σημείο Q που είναι στο εσωτερικό της

$E_Q = 0$ οπότε: $\frac{1}{2A\varepsilon_0}\left[q_1 + (q_A - q_1) + q_3 - (q_B - q_3) - q_5 - (q_C - q_5)\right] = 0$

$$\Rightarrow q_A - q_B - q_C + 2q_3 = 0 \Rightarrow \boxed{q_3 = \frac{q_B + q_C - q_A}{2}} \Rightarrow$$

Ανάλογα: $q_2 = q_A - q_1 = \frac{2q_A - q_A - q_B - q_C}{2} = \boxed{\frac{q_A - q_B - q_C}{2}}$

$$\boxed{q_2 = -q_3}$$

Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να δείξουμε ότι:

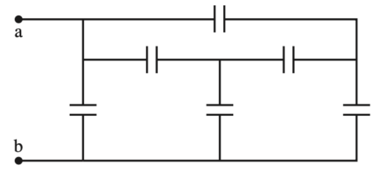
$$q_4 = q_B - q_3 = \frac{2q_B - q_B - q_C + q_A}{2} \Rightarrow \boxed{q_4 = \frac{q_A + q_B - q_C}{2}}$$

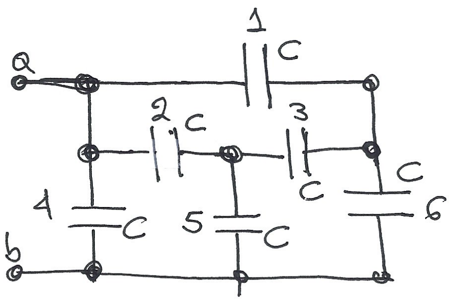
και $q_5 = q_C - q_6 = q_C - \frac{q_A + q_B + q_C}{2} \Rightarrow \boxed{q_5 = \frac{q_C - q_A - q_B}{2}}$

$$\boxed{q_4 = -q_5}$$

Επομένως τα ζευγάρια των απέναντι επιφανειών όπως (2,3), (4,5) έχουν ίσα και αντίθετα φορτία.

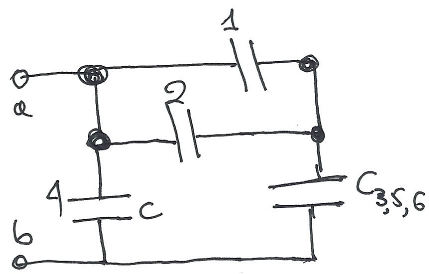
6. Κάθε πυκνωτής στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος έχει χωρητικότητα *C*. Πια είναι η χωρητικότητα μεταξύ των σημείων Α και Β του κυκλώματος του παρακάτω σχήματος;



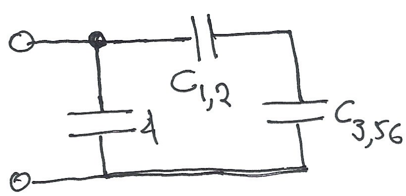


Παρατηρούμε το κύκλωμα των πυκνωτών και βλέπουμε ότι οι πυκνωτές 3&5 είναι συνδεδεμένοι σε σειρά και παράλληλα με τον πυκνωτή 6.

Με βάση αυτό μπορούμε να απλοποιήσουμε το κύκλωμα αντικαθιστώντας τους 3,5&6 πυκνωτές με τον ισοδύναμο πυκνωτή.



Από το απλούστερο κύκλωμα του διπλανού σχήματος βλέπουμε ότι οι πυκνωτές 1&2 είναι συνδεδεμένοι παράλληλα μεταξύ τους. Αντικαθιστούμε με τον ισοδύναμο πυκνωτή τους



Επομένως το κύκλωμα έχει καταλήξει σε δύο πυκνωτές συνδεδεμένους σε σειρά, οι ισοδύναμοι $C_{1,2}$ και $C_{3,5,6}$ σε παράλληλη συνδεσμολογία με τον C_4.

Επομένως θα έχουμε: $\frac{1}{C_{3,5}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_5} \Rightarrow \frac{1}{C_{3,5}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} \Rightarrow \frac{1}{C_{3,5}} = \frac{2}{C} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{C_{3,5} = \frac{C}{2}}$

Αλλά $C_{3,5}$ παράλληλα με τον C_6 οπότε $C_{3,5,6} = \frac{C}{2} + C \Rightarrow \boxed{C_{356} = \frac{3}{2}C}$

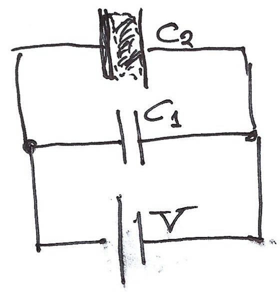
$C_{1,2}$ είναι η παράλληλη συνδεσμολογία των C_1 & C_2 : $C_{1,2} = C + C \Rightarrow \boxed{C_{1,2} = 2C}$

Επομένως ο ισοδύναμος των $C_{3,5,6}$ & $C_{1,2}$ είναι $\frac{1}{C_{3,56,1,2}} = \frac{1}{C_{356}} + \frac{1}{C_{12}} \Rightarrow \frac{1}{C_{3,56,12}} = \frac{2}{3C} + \frac{1}{2C}$

$\Rightarrow \boxed{C_{3,5,6,1,2} = \frac{6}{7}C}$

Τέλος ο ισοδύναμος πυκνωτής έχει χωρητικότητα $C_4 + C_{35612} = C + \frac{6}{7}C \Rightarrow \boxed{C_{ολ} = \frac{13}{7}C}$

7. Θεωρήστε δύο επίπεδους πυκνωτές με χωρητικότητα C_1 και C_2. Οι δύο πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι παράλληλα μεταξύ τους. Οι δύο πυκνωτές είναι πανομοιότυποι εκτός από το γεγονός ότι ο C_2 έχει διηλεκτρικό ανάμεσα στις πλάκες του. Μια μπαταρία 200V συνδέεται στα άκρα του συστήματος των δύο πυκνωτών έως ότου επέλθει ηλεκτροστατική ισορροπία και κατόπιν αποσυνδέεται. (α) Βρείτε το φορτίο σε κάθε πυκνωτή. (β) Ποια η ενέργεια που αποθηκεύτηκε στους δύο πυκνωτές; (γ) Θεωρήστε ότι το διηλεκτρικό υλικό αφαιρείται από τον C_2. Ποια η τελική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στους δύο πυκνωτές; (δ) Ποια η διαφορά δυναμικού στα άκρα των δύο πυκνωτών;



(α) $Q_1 = C_1 \cdot V = (200V) C_1$

$Q_2 = C_2 V = k C_1 V = (200V) k C_1$

(β) Η ολική δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στους πυκνωτές είναι: $U = U_{C_1} + U_{C_2} = \frac{1}{2} C_1 V^2 + \frac{1}{2} C_2 V^2$

$\Rightarrow U = \frac{1}{2} C_1 V^2 + \frac{1}{2} k C_1 V^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}(1+k) C_1 V^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{U = (1+k) U_{C_1}} = (2 \cdot 10^4 V^2)(1+k) C_1$

(γ) Όταν απομακρύνεται το διηλεκτρικό από τον C_2 τότε η ολική δυναμική ενέργεια γίνεται: $U_f = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4C_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{U_f = \frac{Q^2}{4C_1}}$ (A)

Αλλά το συνολικό φορτίο είναι: $Q_{ολ} = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V = C_1 V + k C_1 V$

$\Rightarrow \boxed{Q_{ολ} = (1+k) C_1 V}$ (B)

Αντικαθιστούμε την (B) στην (A) οπότε: $U_f = \frac{(1+k)^2 C_1^2 V^2}{4 \cancel{C_1}} = \frac{(1+k)^2 V^2 C_1}{4}$

(δ) Οι πυκνωτές είναι παράλληλα συνδεδεμένοι οπότε $C_{ισοδ} = C_1 + C_2 = 2C_1$ $\Big\} \Rightarrow$

Το ολικό φορτίο είναι σύμφωνα με την (B): $Q_{ολ} = (1+k) C_1 V$

$\Rightarrow V_f = \frac{Q}{C_{ισοδ}} = \frac{(1+k)\cancel{C_1} V}{2\cancel{C_1}} \Rightarrow \boxed{V_f = \frac{(1+k)}{2} V}$

8. Ένας πυκνωτής είναι κατασκευασμένος από δύο ομόκεντρους αγώγιμους λεπτούς κυλινδρικούς φλοιούς ακτίνας *α* και *b* (*b*>*α*), και μήκους *L* >>*b*. Φορτίο +*Q* εισάγεται στον εσωτερικό φλοιό και φορτίο -*Q* στον εξωτερικό φλοιό. Η περιοχή ανάμεσα στους δύο κυλινδρικούς φλοιούς είναι γεμάτη με διηλεκτρικό υλικό διηλεκτρικής σταθερής *κ*. (α) Βρείτε την διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο κυλινδρικών φλοιών. (β) Βρείτε την πυκνότητα των ελεύθερων φορτίων $\sigma_{ελ.}$ στον εσωτερικό και εξωτερικό φλοιό. (γ) Βρείτε την δέσμια πυκνότητα φορτίου, σ_b, στον εσωτερικό και εξωτερικό φλοιό. (δ) Βρείτε την ολική αποθηκευμένη ενέργεια. (ε) Αν το διηλεκτρικό υλικό μπορεί να μετακινηθεί χωρίς τριβή, πόσο μηχανικό έργο απαιτείται ώστε να αφαιρεθεί όλο το κυλινδρικό διηλεκτρικό υλικό;

(α) Η διαφορά δυναμικού θα είναι: $V = \frac{Q}{C}$ (1)

Αλλά η χωρητικότητα είναι σύμφωνα με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 k L}{\ln(b/a)} \quad (2)$$

Αντικατάσταση της (2) στην (1) δίνει $V = \frac{Q\ln(b/a)}{2\pi\varepsilon_0 k L} \Rightarrow \boxed{V = \frac{2k_e Q\ln(b/a)}{kL}}$

(β) Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι: $\sigma(r=a) = \frac{Q}{2\pi a L}$

και αντίστοιχα $\sigma(r=b) = -\frac{Q}{2\pi b L}$

(γ) Το δέσμιο φορτίο στην εσωτερική επιφάνεια του διηλεκτρικού (κοντά στον εσωτερικό κύλινδρο) καθώς και στην εξωτερική επιφάνεια του διηλεκτρικού είναι ανάλογο του πεδίου E_δ στο διηλεκτρικό, ενώ το αντίστοιχο φορτίο Q στους οπλισμούς του πυκνωτή είναι ανάλογο του πεδίου E στον πυκνωτή:

$E_b = \frac{\sigma_b}{\varepsilon_0}$, $E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ $\Rightarrow E = E_0 - E_b = \frac{E_0}{k}$ (νέο πεδίο στον πυκνωτή) $\Rightarrow E_b = \frac{k-1}{k}E_0$

$$\left.\begin{aligned} Q_\delta(a) &= \frac{-Q(k-1)}{k} \\ Q_\delta(b) &= \frac{Q(k-1)}{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \sigma_\delta(a) &= \frac{Q_\delta(a)}{A_a} = \frac{-Q(k-1)/k}{2\pi a L} \\ \sigma_\delta(b) &= \frac{Q_\delta(b)}{A_b} = \frac{Q(k-1)/k}{2\pi b L} \end{aligned}$$

(δ) Η ολική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη είναι: $U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}Q\left[\frac{2k_e Q\ln(b/a)}{kL}\right]$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{k_e Q^2 \ln(b/a)}{kL}}$$

(ε) Η ενέργεια που απαιτείται για να αφαιρεθεί το διηλεκτρικό ισούται με τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας: $W = \Delta U = U' - U = \kappa U - U = U(\kappa - 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{kQ^2(\kappa-1)\ln(b/a)}{\kappa L}}$$

9. (α) Συγκρίνετε την χωρητικότητα ενός πυκνωτή αποτελούμενος από 2 ομόκεντρες σφαίρες ακτίνας $R_1 = 6cm$ και $R_2 = 9cm$ με αυτή ενός κυλινδρικού πυκνωτή που αποτελείται από δύο ομοαξονικούς κυλίνδρους ίδιας ακτίνας όπως και ο σφαιρικός πυκνωτής και έχουν μήκος $15cm$. Γιατί οι χωρητικότητες είναι σχεδόν παρόμοιες;

(β) Δείξτε ότι όταν R_1 και R_2 είναι σχεδόν ίσες ($R_2 = R_1 + \delta, \delta \ll R_1$) οι εξισώσεις που δίνουν τη χωρητικότητα για έναν σφαιρικό και έναν κυλινδρικό πυκνωτή μπορούν να προσεγγιστούν με την εξίσωση που δίνει την χωρητικότητα ενός επίπεδου πυκνωτή $\left(C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}\right)$. *Υπόδειξη: Μπορείτε να κάνετε το ανάπτυγμα Taylor για την ποσότητα δ/R1.*

(α) Υπολογίζουμε την χωρητικότητα του σφαιρικού πυκνωτή όπως έχουμε δει από τις διαλέξεις:

$$C_{σφ} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1R_2}{R_2-R_1} = 4\pi(8.85\times10^{-12})\left(\frac{(0.06)(0.09)}{0.09-0.06}\right) = 2.00\times10^{-11} F$$

Για τον κυλινδρικό πυκνωτή έχουμε:

$$C_{κυλ} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)} = \frac{2\pi(8.85\times10^{-12})}{\ln(0.09/0.06)} = 2.06\times10^{-11} F$$

Οι δύο χωρητικότητες είναι σχεδόν ίσες γιατί η απόσταση των οπλισμών είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις, και η επιφάνεια των πυκνωτών είναι σχεδόν ίδια που οδηγεί στην ίδια χωρητικότητα ~~είναι~~ για τις δύο περιπτώσεις όπως αποδεικνύεται στο επόμενο ερώτημα.

(β) Για $R_2 = R_1 + \delta$ ($\delta \ll R_1$) για τον σφαιρικό πυκνωτή θα έχουμε:

$$C_{σφ} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1(R_1+\delta)}{\cancel{R_1}+\delta-\cancel{R_1}} = \varepsilon_0 \frac{4\pi R_1^2}{\delta}(1+\delta/R_1).$$

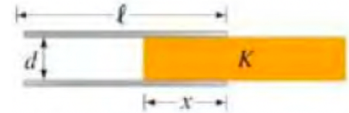
Για $\delta/R_1 \ll 1$, το παραπάνω θα δώσει $C_{σφ} = \varepsilon_0 A/\delta$ όπου $A = 4\pi R_1^2$ το εμβαδό του φλοιού, που είναι η εξίσωση του πυκνωτή με παράλληλους οπλισμούς.

Για τον κυλινδρικό πυκνωτή θα χρησιμοποιήσουμε Taylor expansion για $x \ll 1$, $\ln(1+x) \approx x$

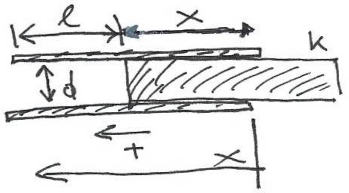
Η χωρητικότητα είναι: $C_{κυλ} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(1+\delta/R_1)} \approx \varepsilon_0 \frac{2\pi R_1 L}{\delta} \Rightarrow C_{κυλ} = \varepsilon_0 A/\delta$

όπου $A = 2\pi R_1 L$, το εμβαδό των επιφανειών του κυλίνδρου. Βλέπουμε δηλαδή ότι όταν η απόσταση μεταξύ των οπλισμών γίνεται πολύ μικρή, οι πυκνωτές ακόμα και καμπύλης γεωμετρίας μοιάζουν με πυκνωτές με παράλληλους οπλισμούς.

10. Ένα κομμάτι υλικού πάχους d και διηλεκτρικής σταθεράς K έχει εισαχθεί κατά απόσταση x, στο χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς ενός επίπεδου τετραγωνικού πυκνωτή πλευράς l, όπως φαίνεται στο σχήμα. Προσδιορίστε συναρτήσει του x, (α) τη χωρητικότητα, (β) την αποθηκευμένη ενέργεια αν η διαφορά δυναμικού είναι V_0 και (γ) το μέτρο και διεύθυνση της δύναμης που ασκείται στο διηλεκτρικό υλικό. Υποθέστε ότι V_0 παραμένει σταθερό και δεν μεταβάλλεται.



(α)

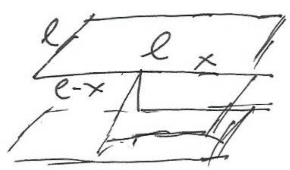


Θεωρούμε το σύστημα αυτό σαν 2 πυκνωτές ένας με διηλεκτρικό και ένας χωρίς διηλεκτρικό. Και οι δύο πυκνωτές έχουν τους δύο οπλισμούς τους με υψηλό δυναμικό ενωμένους όπως και τους δύο οπλισμούς με χαμηλό δυναμικό επίσης ενωμένους μεταξύ τους. Επομένως οι δύο πυκνωτές στην περίπτωση αυτή είναι συνδεδεμένοι παράλληλα μεταξύ τους.

Επομένως η ισοδύναμη χωρητικότητα θα είναι: $C = C_1 + C_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow C = \varepsilon_0 \frac{l(l-x)}{d} + k\varepsilon_0 \frac{lx}{d} \Rightarrow \boxed{C = \varepsilon_0 \frac{l^2}{d}\left[1+(k-1)\frac{x}{l}\right]}$$

Εφόσον ο πυκνωτής είναι τετραγωνικός η μία πλευρά του θα είναι l και



(β) Και οι δύο πυκνωτές έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού, επομένως $U = \frac{1}{2}CV^2$

Επομένως $U = \frac{1}{2}(C_1+C_2)V_0^2 = \varepsilon_0 \frac{l^2}{d}\left[1+(k-1)\frac{x}{l}\right]V_0^2$

(γ) Όταν η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς ενός πυκνωτή είναι σταθερή και διηλεκτρικό υλικό εισέρχεται ανάμεσα στους οπλισμούς, φορτίο ρέει από την πηγή δυναμικού (μπαταρία) στον πυκνωτή. Υποθέτουμε ότι το έργο που παράγεται από ένα εξωτερικό φορέα, με τέτοιο τρόπο ώστε το διηλεκτρικό να μην έχει κινητική ενέργεια. Επομένως $W_{εξ} = \Delta U \Rightarrow dW_{εξ} = dU$. Αυτό είναι ανάλογο με τη βαρυτική δυναμική ενέργεια όπου κινάμε ένα σώμα με σταθερή ταχύτητα κατακόρυφα. Για να αυξήσουμε (μειώσουμε) τη βαρυτική δυναμική ενέργεια, θετικό (αρνητικό) έργο πρέπει να καταναλωθεί από μια εξωτερική μη βαρυτική πηγή.

Στην προκειμένη περίπτωση, η δυναμική ενέργεια της πηγής δυναμικού και η δυναμική ενέργεια του πυκνωτή αλλάζουν καθώς αλλάζει το x.

Προσέξτε επίσης ότι η αλλαγή στο φορτίο που είναι αποθηκευμένο στον πυκνωτή είναι αντίθετη από την αλλαγή στο φορτίο που είναι αποθηκευμένο στην πηγή δυναμικού.

$$dW_{\varepsilon\xi} = dU = dU_{\pi\upsilon\kappa} + dU_{\mu\pi\alpha\tau} \Rightarrow F_{\varepsilon\xi}\,dx = d\left(\frac{1}{2}CV_0^2\right) + d\left(Q_{\mu\pi\alpha\tau}V_0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{\varepsilon\xi} = \frac{1}{2}V_0^2\frac{dC}{dx} + V_0\frac{dQ_{\mu\pi\alpha\tau}}{dx} = \frac{1}{2}V_0^2\frac{dC}{dx} - V_0\frac{dQ_{\pi\upsilon\kappa}}{dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{\varepsilon\xi} = \frac{1}{2}V_0^2\frac{dC}{dx} - V_0^2\frac{dC}{dx} \Rightarrow F_{\varepsilon\xi} = -\frac{1}{2}V_0^2\frac{dC}{dC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{\varepsilon\xi} = -\frac{1}{2}V_0^2\varepsilon_0\frac{\ell^2}{d}\left[\frac{(K-1)}{\ell}\right] \Rightarrow \boxed{F_{\varepsilon\xi} = -\frac{V_0^2\varepsilon_0\ell}{2d}(K-1)}$$

Η δύναμη αυτή είναι στην αντίθετη διεύθυνση του dx, και επομένως είναι προς τα δεξιά. Αυτή η δύναμη εφαρμόζεται ώστε να κρατά το διηλεκτρικό από το να επιταχύνεται. Επομένως θα πρέπει να υπάρχει μια δύναμη ίσου μέτρου με κατεύθυνση προς τα αριστερά ~~η~~ οποία τραβά το διηλεκτρικό. Η δύναμη αυτή προέρχεται από την έλξη του φορτίου των οπλισμών του πυκνωτή και του επαγόμενου φορτίου στο διηλεκτρικό. Η δύναμη αυτή έχει επομένως μέτρο: $F_{\eta\lambda} = \frac{V_0^2\varepsilon_0\ell}{2d}(K-1)$ με φορά προς τα αριστερά