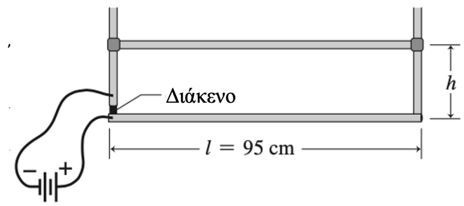
ΦΥΣ. 112

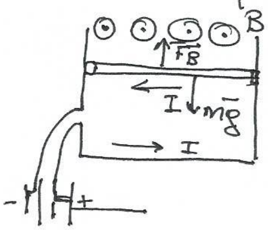
5ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή 10.11.2023**

1. Η διάταξη στο διπλανό σχήμα αποτελείται από αγώγιμες ράβδους. Η πάνω οριζόντια ράβδος έχει μήκος 95*cm* και μάζα 27*gr* και μπορεί να κινείται στην κατακόρυφη διεύθυνση κρατώντας ηλεκτρική επαφή με τις κατακόρυφες ράβδους. Μια μπαταρία συνδέεται με την διάταξη στους ακροδέκτες που βρίσκονται στο μονωτικό διάκενο στο κάτω μέρος της μιας κατακόρυφης ράβδου όπως φαίνεται στο σχήμα. Η μπαταρία προκαλεί ρεύμα 67A στη διάταξη. Σε ποιο ύψος *h* η πάνω οριζόντια ράβδος θα βρεθεί σε ισορροπία;



Θεωρούμε ότι το ύψος στο οποίο ανεβαίνει η ράβδος είναι μικρό σχετικά με το μήκος της ράβδου, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε τη ράβδο ως άπειρη. Η ράβδος θα ισορροπεί όταν η δύναμη του μαγνητικού πεδίου στην ράβδο που διαρρέεται από ρεύμα γίνει ίση με την δύναμη της βαρύτητας

$$F_B = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi h} = mg \Rightarrow$$



$$\Rightarrow h = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi mg} = \frac{(\overset{2}{\cancel{4}}\pi\times10^{-7}\,N/A^2)(66A)^2(0.95m)}{\cancel{2}\pi(0.022kg)(9.8m/s^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \underline{3.8mm}$$

2. Επιστήμονες της NASA αναπτύσουν μια τεχνική για τον προσανατολισμό ενός τηλεσκοπίου σε τροχιά. Το σύστημα χρησιμοποιεί 3 κάθετα σωληνοειδή στα οποία αναπτύσσονται ροπές εξαιτίας του μαγνητικού πεδίου της γης όταν διαρρέονται από ρεύμα. Επειδή υπάρχουν περιορισμοί στο βάρος της διάταξης, μπορούν να χρησιμοποιήσουν σύρμα μήκους *l* για κάθε σωληνοειδές. Ένας από τους επιστήμονες της ομάδας ισχυρίζεται ότι η μέγιστη διπολική ροπή και επομένως μέγιστη ροπή μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας πηνία με πολλές σπείρες. Ωστόσο ένας άλλος επιστήμονας ισχυρίζεται ότι πηνίο μιας και μόνο σπείρας επιφέρει καλύτερα αποτελέσματα.

Θέλουμε τη ροπή που θα προκαλέσει το μαγνητικό πεδίο της Γης στο βρόχο του ρεύματος. και θέλουμε η ροπή αυτή να είναι μέγιστη για τον αγωγό που είναι διαθέσιμος για την κατασκευή του βρόχου.

Υποθέτουμε ότι ο βρόχος θα είναι κυκλικός. Η ροπή που αναπτύσσεται σε τέτοιο βρόχο είναι:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \Rightarrow |\vec{\tau}| = |\vec{\mu}||\vec{B}|\sin\theta \Rightarrow |\vec{\tau}| = (NIA)B\sin\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{\tau}| = NI\pi r^2 B\sin\theta \qquad (1)$$

Το μήκος του σύρματος σχετίζεται με τον αριθμό των κυκλικών βρόχων που μπορούμε να έχουμε: $l = N(2\pi r)$ (2)

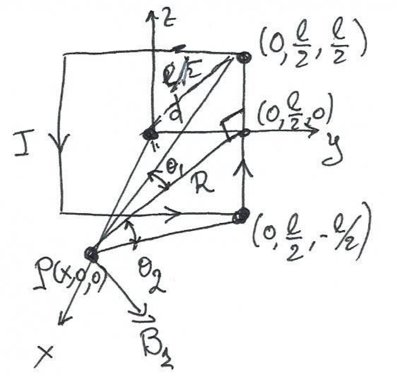
Αντικατάσταση της (2) στην (1) θα δώσει:

$$|\vec{\tau}| = NI\pi\left(\frac{l}{2\pi N}\right)^2 B\sin\theta \Rightarrow |\vec{\tau}| = \frac{1}{N}\left(\frac{l^2 I}{4\pi}\right)B\sin\theta$$

Επομένως η ροπή είναι ανάλογη του $1/N$ των αριθμών των σπειρών. και επομένως για $N=1$ έχουμε την μέγιστη ροπή

Είναι ενδιαφέρον ότι ενώ η (1) λέει ότι κερδίζουμε με τον αριθμό των σπειρών, η επιφάνεια του βρόχου γίνεται μικρότερη και αυτό έχει μεγαλύτερο αποτέλεσμα στην μείωση της μαγνητικής ροπής

3. Θεωρήστε ένα τετραγωνικό πλαίσιο πλευράς α το οποίο βρίσκεται στο επίπεδο $z = 0$ με το κέντρο του στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Το πλαίσιο διαρρέεται από ρεύμα έντασης I. (α) Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο σε οποιαδήποτε σημείο του z-άξονα. (β) Δείξτε ότι για z πολύ μεγαλύτερο από το μήκος της πλευράς του πλαισίου ($z \gg a$), το αποτέλεσμα που βρήκατε στο (α) υποερώτημα δίνεται ως $B \approx \mu\mu_0/(2\pi z^3)$ όπου μ είναι το μέτρο της μαγνητικής διπολικής ροπής του πλαισίου.



Λόγω συμμετρίας το μαγνητικό πεδίο από τα 4 ευθύγραμμα τμήματα θα είναι ίδια. Χρειάζεται να βρούμε το μαγνητικό πεδίο στη x-διεύθυνση από ένα μόνο τμήμα και να πολ/με με 4 για να βρούμε το συνολικό πεδίο.

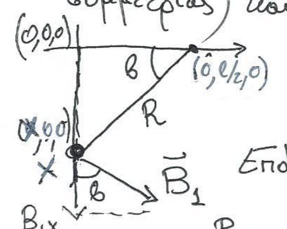
Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ένα ευθύγραμμο τμήμα όπως έχουμε δει από τις διαλέξεις δίνεται από τη σχέση: $B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R}(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)$ όπου R η απόσταση του σημείου P από το ευθύγραμμο τμήμα. Το σημείο P βρίσκεται στην κατακόρυφο στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος. Επομένως $\theta_1 = \theta_2$ και $R = \sqrt{x^2 + \frac{\ell^2}{4}}$

Επομένως: $B_1(x,0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{\sqrt{x^2+\frac{\ell^2}{4}}}(2\sin\theta_1) \Rightarrow B_1(x,0,0) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\sqrt{x^2+\frac{\ell^2}{4}}}\sin\theta_1$

Αλλά $\sin\theta_1 = \frac{\ell/2}{d} = \frac{\ell/2}{\sqrt{x^2+\ell^2/2}}$ Αντικατάσταση στην εξίσωση του B_1

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\sqrt{x^2+\ell^2/4}}\frac{\ell/2}{\sqrt{x^2+\ell^2/2}} \Rightarrow \boxed{B_1(x,0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{\sqrt{x^2+\ell^2/4}}\frac{\ell}{\sqrt{x^2+\ell^2/2}}}$$

Οι συνιστώσες του πεδίου στην y και z διευθύνσεις από τα υπόλοιπα 3 ευθύγραμμα τμήματα δίνουν συνισταμένη $\emptyset$ στις διευθύνσεις αυτές (λόγω συμμετρίας) και επομένως χρειάζεται να αθροίσουμε μόνο τις 4 B_x συνεισφορές.



Από το διπλανό διάγραμμα βλέπουμε το επίπεδο xy και τη σχέση του $\vec{B}_1$ και της γωνίας b: $B_{1x} = B_1\cos b = B_1\frac{\ell/2}{\sqrt{x^2+\ell^2/4}}$

Επομένως: $B_{1x} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{\sqrt{x^2+\ell^2/4}}\frac{\ell}{\sqrt{x^2+\ell^2/2}}\frac{\ell/2}{\sqrt{\ell^2/4+x^2}} \Rightarrow$

$B_{1x} = \frac{\mu_0 I\ell^2}{8\pi(x^2+\ell^2/4)\sqrt{x^2+\ell^2/2}}$. Επομένως θα έχουμε: $\vec{B} = 4B_{1x}\hat{i} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I\ell^2}{2\pi(x^2+\ell^2/4)(x^2+\ell^2/2)^{1/2}}}$$

(b) Από το τελευταίο αποτέλεσμα θα έχουμε:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \ell^2 \, \hat{i}}{2\pi x^2 \left(1+\frac{\ell^2}{4x^2}\right)\left(x^2\left(1+\frac{\ell^2}{2x^2}\right)\right)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I \ell^2 \, \hat{i}}{2\pi x^3 \left(1+\frac{\ell^2}{4x^2}\right)\left(1+\frac{\ell^2}{2x^2}\right)^{1/2}}$$

Για $x \gg \ell$ οι όροι τις παρενθέσεις δίνουν 1 οπότε:

$$\vec{B} \simeq \frac{\mu_0 I \ell^2}{2\pi x^3}\,\hat{i} \Rightarrow \boxed{\vec{B} \simeq \frac{\mu_0 \mu}{2\pi x^3}\,\hat{i}} \quad \text{όπου } \mu = I\ell^2$$

4. Ο συγκάτοικός σας έπεσε θύμα της θεραπείας των μικρομαγνητών σύμφωνα με την οποία χρησιμοποιούνται πολλοί μικροί ραβδόμορφοι μαγνήτες σε διάφορα σημεία του σώματος. Επειδή σας φαίνεται λίγο περίεργο ζητάτε από τον συγκάτοικό σας να σας εξηγήσει περίπου τον τρόπο λειτουργίας της θεραπείας και σας αναφέρει κάτι περί φαινομένου Hall το οποίο, όπως ισχυρίζονται αυτοί που επινόησαν τη θεραπεία, προκαλεί την αύξηση της ταχύτητας ροής του αίματος. Μετά από κάποια σκέψη, υπολογίζετε τη διαφορά δυναμικού Hall που προκαλεί ένας ραβδόμορφος μαγνήτης έντασης $100G$ σε ερυθρά αιμοσφαίρια που υποθέτετε ότι μεταφέρουν φορτίο $2pC$ κινούμενα με ταχύτητα $15cm/s$ μέσα σε ένα αγγείο διαμέτρου $3.0mm$ το οποίο περιέχει 5 δισεκατομμύρια ερυθρά αιμοσφαίρια αν ml ($1ml = 10^{-6}m^3$). Για να δείξετε ότι το δυναμικό Hall στην περίπτωση αυτή είναι αμελητέο, συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με το δυναμικό των αρκετών δεκάδων mV που προκαλείται σε μια τυπική βιοηλεκτρική δραστηριότητα. Πώς συγκρίνονται οι δύο τιμές δυναμικού που λαμβάνετε;

Βρίσκουμε αρχικά το ρεύμα που διαρρέει μια τριχοειδή φλέβα αίματος.

Το φορτίο που μεταφέρει είναι $2pC$ και το αίμα κινείται με ταχύτητα $v = 12cm/s$.

Ο αριθμός των ερυθρών αιμοσφαιρίων είναι $5\cdot10^9/ml$ και περνάν από μια διατομή διαμέτρου $3mm$.

Επομένως το ρεύμα που διαρρέει το αγγείο θα είναι:

$$I = \eta A q v = \left(\frac{5\cdot10^9}{ml}\right)\left(\pi\left(\frac{1}{2}3mm\right)^2\right)(2pC)(12cm/s) = \underline{\underline{8.5mA}}$$

Το δυναμικό Hall δίνεται από τη σχέση: $V_H = \frac{IB}{\eta q d}$ όπου d: το πάχος του αγωγού

Για τα αγγεία υποθέτουμε ότι το πάχος είναι η διάμετρος του αγγείου.

Άρα το δυναμικό Hall θα είναι: $V_H = \frac{IB}{\eta q d} = \frac{(8.5mA)(100G)}{(5\times10^9/mL)(2pC)(3mm)} = \underline{\underline{3\mu V}}$

Το δυναμικό αυτό είναι περίπου 10^4 μικρότερο από το δυναμικό των διαφόρων βιοηλεκτρικών διεργασιών.

5. Ένα ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο B μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου σύμφωνα με την εξίσωση $\vec{B} = bt\hat{k}$, όπου b=0.36T/s. Βρείτε το επαγόμενο ρεύμα σε έναν αγώγιμο βρόχο εμβαδού 200 cm^2 και αντίστασης 0.3Ω που βρίσκεται στο x-y επίπεδο. Ποια η κατεύθυνση του επαγόμενου ρεύματος, όπως φαίνεται από τον θετικό z-άξονα;

Έχουμε μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο το οποίο θα προκαλέσει επαγωγική τάση στο βρόχο.

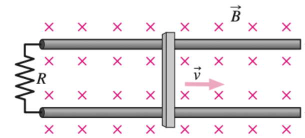
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right) = -A\frac{dB}{dt} = -Ab$$

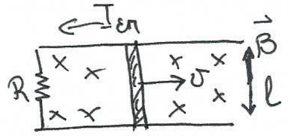
Επομένως το επαγόμενο ρεύμα θα είναι: $I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{Ab}{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = -\frac{(240\,cm^3)(0.35\,T/s)}{0.20\,\Omega} \Rightarrow \underline{\underline{I = -42\,mA}}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι εφώ θεώρησα ότι το διάνυσμα της επιφάνειας είναι ομόρροπο στο μαγνητικό πεδίο και αυτή τη φορά ως θετική, το επαγόμενο ρεύμα έχει φορά αντίθετη. Το διάνυσμα $\hat{n}$ έχει φορά προς τα πάνω (αντίθετη κίνηση στη φορά των δεικτών του ρολογιού). Επομένως το επαγόμενο ρεύμα έχει φορά των δεικτών του ρολογιού.

6. Το διπλανό σχήμα δείχνει δύο παράλληλες μεταξύ τους αγώγιμες ράγες οι οποίες βρίσκονται σε απόσταση l μεταξύ τους μέσα σε ένα ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$. Ένας αντιστάτης αντίστασης R είναι συνδεδεμένος στα άκρα των δύο ραγών, ενώ μια αγώγιμη ράβδος αμελητέας αντίστασης κινείται πάνω στις ράγες προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}$ υπό την επίδραση μιας εξωτερικής δύναμης. (α) Ποια η κατεύθυνση του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη; (β) Ποιος είναι ο ρυθμός παραγωγής έργου από την εξωτερική δύναμη;





Καθώς η ράβδος κινείται προς τα δεξιά, η επιφάνεια που κυκλώματος αυξάνει και ως αποτέλεσμα η επαγόμενη τάση, προκαλεί ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα.

Η επιφάνεια του κυκλώματος αυξάνει και επομένως το μέτρο της μαγνητικής ροής αυξάνει. Θα πρέπει σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz, το επαγόμενο ρεύμα να έχει φορά τέτοια που να ελαττώσει την ροή. Επομένως το ρεύμα θα πρέπει να έχει φορά αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού όπως δείχνει το παραπάνω σχήμα

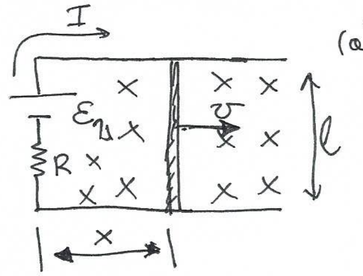
Η ισχύς που προσφέρει το εξωτερικό αίτιο ώστε η ράβδος να κινείται με σταθερή ταχύτητα θα είναι:

$$P_{μηχ} = \vec{F}\cdot\vec{v} = BIlv = \frac{Blv\mathcal{E}}{R} = Blv\frac{(Blv)}{R} \Rightarrow P = \frac{(Bvl)^2}{R}$$

Η ισχύς αυτή θα είναι ίση με την ισχύ στην αντίσταση του κυκλώματος

$$P_{ηλ} = I^2 R = \left(\frac{Bvl}{R}\right)^2 R \Rightarrow P_{ηλ} = \frac{(Bvl)^2}{R} = P_{μηχ}$$ όπως αναμένεται.

7. Σε συνέχεια του προηγούμενου προβλήματος, θεωρήστε ότι συνδέετε τώρα μια μπαταρία ηλεκτρεγερτικής δύναμης Ɛ σε σειρά με τον αντιστάτη και με τέτοιο τρόπο ώστε ο θετικός πόλος της μπαταρίας να συνδέεται με την πάνω οριζόντια ράγα. Η ράβδος είναι αρχικά ακίνητη και καμία εξωτερική δύναμη δεν ασκείται πάνω της. (α) Περιγράψτε την κίνηση της ράβδου τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί. (β) Εξηγήστε γιατί η ράβδος αποκτά σταθερή ταχύτητα μετά από κάποιο χρονικό διάστημα. (γ) Ποιο το μέτρο της ταχύτητας αυτής συναρτήσει του μαγνητικού πεδίου *B,* της ηλεκτρεγερτικής δύναμης Ɛ και του μήκους της ράβδου *l*. Εξηγήστε κατά πόσο η αντίσταση *R* επηρεάζει την τιμή της τελικής ταχύτητας και αν όχι το ρόλο της.



(α) Η μπαταρία προκαλεί ένα ρεύμα σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού. (από το πάνω μέρος της ράβδου προς το χαμηλότερο)

Ως αποτέλεσμα, υπάρχει μαγνητική δύναμη που αναπτύσσεται στη ράβδο με φορά προς τα δεξιά.: $\vec{F} = I\vec{l}\times\vec{B} \Rightarrow |F| = BIl$

Η ράβδος επομένως θα αρχίσει να επιταχύνεται προς τα δεξιά με επιτάχυνση: $a = \frac{F}{m}$.

Η κίνηση της ράβδου έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη επαγόμενης τάσης σύμφωνα με το νόμο του Faraday επειδή αυξάνει η επιφάνεια του κυκλώματος

$\mathcal{E}_{επαγ} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -Bl\upsilon$ που είναι αντίθετη της $\mathcal{E}_{ηλ}$ από την μπαταρία

Επομένως το ρεύμα θα είναι: $I(t) = \frac{\mathcal{E}_{ηλ}+\mathcal{E}_{επαγ}}{R} = \frac{\mathcal{E}_{ηλ} - B\upsilon l}{R}$

Όπως βλέπουμε, η ράβδος θα επιταχυνθεί προς τα δεξιά έως ότου αρχίσει να κινείται με σταθερή ταχύτητα

(β) Όταν $\mathcal{E}_{ηλ} = B\upsilon l$ τότε το ρεύμα I θα γίνει μηδέν και επομένως η μαγνητική δύναμη θα γίνει 0. και η ράβδος θα κινείται με σταθερή ταχύτητα αφού $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$

(γ) Όταν $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ τότε $\upsilon_{ορ} = \frac{\mathcal{E}_{ηλ}}{Bl}$. Η ταχύτητα $\upsilon_{ορ}$ δεν εξαρτάται από την αντίσταση R, αλλά η αντίσταση R καθορίζει πόσο γρήγορα η ράβδος αποκτά την $\upsilon_{ορ}$. Όσο μεγαλύτερη η αντίσταση R τόσο πιο αργά το ρεύμα φορτίζει τη ράβδο και αργεί να πάρει την οριακή ταχύτητα.

Για το πρόβλημα έχουμε: $F = ma \Rightarrow \frac{(\mathcal{E}_{\eta\lambda} - Bv\ell)}{R} B\ell = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(B\ell v_{op} - Bv\ell)}{R} B\ell = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{B^2\ell^2}{mR}(v_{op} - v) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{B^2\ell^2}{mR} dt = \frac{dv}{v_{op} - v} \Rightarrow \int_{t=0}^{t} \frac{B^2\ell^2}{mR} dt = \int_{v=0}^{v} \frac{dv}{v_{op} - v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{B^2\ell^2}{mR} t = -\ln(|v - v_{op}|)\Big|_0^v \Rightarrow -\ln(v_{op}) + \ln(v_{op} - v) = -\frac{B^2\ell^2}{mR} t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(1 - \frac{v}{v_{op}}\right) = -\frac{B^2\ell^2}{mR} t \Rightarrow 1 - \frac{v}{v_0} = e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t} \Rightarrow v(t) = v_{op}\left(1 - e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t}\right)$$

Θεωρούμε ως χρονική σταθερά: $\boxed{\tau = mR/B^2\ell^2}$ θα έχουμε:

$$\boxed{v(t) = v_{op}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

8. Θεωρώντας και πάλι το πρόβλημα 6, υποθέστε ότι η ράβδος έχει μάζα *m* και είναι αρχικά ακίνητη. Μια σταθερή δύναμη $\vec{F}$ ασκείται στη ράβδο με κατεύθυνση προς τα δεξιά. Τροποποιήστε κατάλληλα τον δεύτερο νόμο του Newton ώστε να υπολογίσετε την ταχύτητα της ράβδου συναρτήσει του χρόνου.

Για το πρόβλημα έχουμε: $F = ma \Rightarrow \frac{(\mathcal{E}_{\varepsilon\pi} - Bvl)}{R}Bl = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(Blv_{op} - Bvl)}{R}Bl = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{B^2l^2}{mR}(v_{op} - v) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{B^2l^2}{mR}dt = \frac{dv}{v_{op} - v} \Rightarrow \int_{t=0}^{t}\frac{B^2l^2}{mR}dt = \int_{v=0}^{v}\frac{dv}{v_{op} - v} \Rightarrow$$

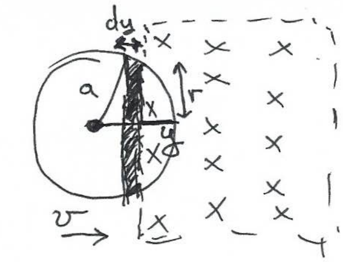
$$\Rightarrow \frac{B^2l^2}{mR}t = -\ln(|v - v_{op}|)\Big|_0^v \Rightarrow -\ln(v_{op}) + \ln(v_{op} - v) = -\frac{B^2l^2}{mR}t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(1 - \frac{v}{v_{op}}\right) = -\frac{B^2l^2}{mR}t \Rightarrow 1 - \frac{v}{v_0} = e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t} \Rightarrow v(t) = v_{op}\left(1 - e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}\right)$$

Θεωρούμε ως χρονική σταθερά: $\boxed{\tau = mR/B^2l^2}$ θα έχουμε:

$$\boxed{v(t) = v_{op}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

9. Ένα σύρμα είναι λυγισμένο σε μορφή κυκλικού βρόχου ακτίνας a και παρουσιάζει αντίσταση R. Ο βρόχος σύρεται με σταθερή ταχύτητα υ, μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο B. Το επίπεδο του βρόχου είναι κάθετο στο πεδίο και ξεκινά να εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο τη χρονική στιγμή $t = 0$. Βρείτε την εξίσωση του ρεύματος που διαρρέει τον βρόχο από την στιγμή $t = 0$ έως τη στιγμή που ο βρόχος εισέρχεται πλήρως μέσα στο μαγνητικό πεδίο.



Τη στιγμή που ο βρόχος αρχίζει να κινείται και να εισέρχεται στην περιοχή του μαγνητικού πεδίου το εμβαδόν της επιφάνειας αρχίζει να μεταβάλλεται.

Η αλλαγή δίνεται από το γραμμοσκιασμένο τμήμα της επιφάνειας του διπλανού σχήματος. Αυτή η στοιχειώδης επιφάνεια είναι: $dA = 2r \cdot dy = 2\sqrt{a^2-(a-y)^2}\,dy \Rightarrow$

$$\Rightarrow dA = 2\sqrt{\cancel{a^2}-\cancel{a^2}-y^2+2ay}\,dy \Rightarrow dA = 2\sqrt{2ay-y^2}\,dy$$

Η μεταβολή θα είναι: $$\frac{dA}{dt} = 2\sqrt{2ay-y^2}\,\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\upsilon\sqrt{2ay-y^2}$$

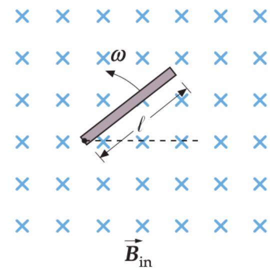
Επομένως $$I(t) = \frac{\mathcal{E}_m}{R} = -\frac{d\Phi_m/dt}{R} = -\frac{B}{R}2\upsilon\sqrt{2ay-y^2} \Rightarrow y = \upsilon t$$

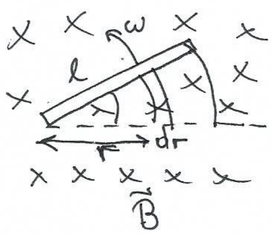
$$\Rightarrow I(t) = -\frac{B}{R}2\upsilon\sqrt{2a\upsilon t-\upsilon^2t^2} = -\frac{B}{R}2\upsilon\sqrt{\upsilon t(2a-\upsilon t)}$$

Το πρόσημο δηλώνει τη φορά αντίθετα με της επιφάνειας y πεδίου.

Το ρεύμα μηδενίζεται όταν ο βρόχος έχει εισέλθει πλήρως στο μαγνητικό πεδίο. Τότε $2a - \upsilon t = 0 \Rightarrow t = \frac{2a}{\upsilon}$

10. Μια αγώγιμη ράβδος μήκους *l* περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω ως προς το ένα άκρο της δημιουργώντας ένα επίπεδο το οποίο είναι κάθετο σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. (α) Δείξτε ότι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των άκρων της ράβδου δίνεται από τη σχέση $\frac{1}{2}B\omega l^2$. (β) Υποθέστε ότι η γωνία θ μεταξύ της ράβδου και της οριζόντιας διεύθυνσης δίνεται από τη σχέση $\theta = \omega t$. Δείξτε ότι το εμβαδό της επιφάνειας που σαρώνεται από την ράβδο σε χρόνο *t* δίνεται από τη σχέση $\frac{1}{2}\theta l^2$. (γ) Υπολογίστε τη μαγνητική ροή, Φ_m, που διαπερνά την επιφάνεια αυτή και εφαρμόζοντας τον νόμο του Faraday ($\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$) δείξτε ότι η κινητική ηλεκτρεγερτική δύναμη επαγωγής δίνεται από τη σχέση $\frac{1}{2}B\omega l^2$.





(α) Η μαγνητική δύναμη στη ράβδο θα είναι: $\vec{F} = q\vec{\upsilon}\times\vec{B}$

Η επαγόμενη ΗΕΔ σε ένα τμήμα της περιστρεφόμενης ράβδου, μήκους dr θα είναι:

$$d\mathcal{E} = B r\, d\upsilon \Rightarrow d\mathcal{E} = B r\, d(\omega r) = B r \omega\, dr$$

Ολοκληρώνουμε: $\mathcal{E} = \int_0^{\mathcal{E}} d\mathcal{E} = B\omega\int_0^{l} r\,dr \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2}B\omega l^2}$

(β) Από τον νόμο του Faraday θα έχουμε: $|\mathcal{E}| = \frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{B\,dA}{dt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\mathcal{E}| = B\frac{\int_0^{l} r\theta\,dr}{dt} \Rightarrow |\mathcal{E}| = B\frac{d\left[\theta\frac{1}{2}l^2\right]}{dt} \Rightarrow |\mathcal{E}| = \frac{1}{2}Bl^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}B\omega l^2$$

Το αποτέλεσμα είναι ίδιο με αυτό που βρέθηκε στο ερώτημα (α)