ΦΥΣ. 112

2ο ΣΕΤ ΑΣΚΗΣΕΩΝ **Επιστροφή: Παρασκευή 27.09.2024**

1. Θεωρήσετε μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας 4cm με κέντρο την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Σημειακά φορτία *+q* και *-2q* βρίσκονται τοποθετημένα στις θέσεις A με συντεταγμένες (2m, 0, 0) και B με συντεταγμένες (8m, 0, 0). Δείξτε ότι κάθε σημείο της σφαιρικής επιφάνειας βρίσκεται σε μηδενικό δυναμικό.

Έστω $P(x,y,z)$ ένα τυχαίο σημείο στην επιφάνεια της σφαίρας.

Από την εξίσωση της σφαίρας: $\frac{(x-x_c)^2}{R^2}+\frac{(y-y_c)^2}{R^2}+\frac{(z-z_c)^2}{R^2}=1$ όπου

x_c, y_c, z_c οι συντεταγμένες του κέντρου της σφαίρας και R η ακτίνα της

(Θεωρούμε ότι $x_c=y_c=z_c=0$, στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων)

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}+\frac{z^2}{R^2}=1 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=R^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=16m^2$$

Το σχετικό διάνυσμα θέσης μεταξύ P και A θα είναι μέτρο:

$$PA=\sqrt{(x_A-x_p)^2+(y_A-y_p)^2+(z_A-z_p)^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}$$

Αντίστοιχα για το σχετικό διάνυσμα θέσης μεταξύ P και B θα έχουμε:

$$PB=\sqrt{(x_B-x_p)^2+(y_B-y_p)^2+(z_B-z_p)^2}=\sqrt{(x-8)^2+y^2+z^2}$$

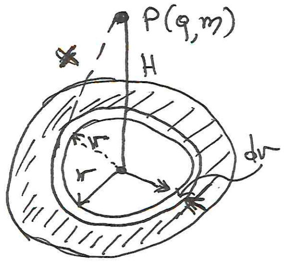
Το δυναμικό στο σημείο P θα είναι: $V_p=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{PA}-\frac{2q}{PB}\right]\Rightarrow$

$$\Rightarrow V_p=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}}-\frac{2q}{\sqrt{(x-8)^2+y^2+z^2}}\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{R^2}+4-4x}}-\frac{2q}{\sqrt{\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{R^2}+64-16x}}\right]$$

$$\Rightarrow V_p=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{16+4-4x}}-\frac{2q}{\sqrt{16+64-16x}}\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{20-4x}}-\frac{2q}{\sqrt{80-16x}}\right]$$

$$\Rightarrow V_p=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{2\sqrt{5-x}}-\frac{\cancel{2}q}{\cancel{2}\cdot 2\sqrt{5-x}}\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{2\sqrt{5-x}}-\frac{q}{2\sqrt{5-x}}\right]=\underline{\underline{0}}$$

2. Ένας μη αγώγιμος δίσκος ακτίνας R και ομοιόμορφης επιφανειακής πυκνότητας φορτίου σ, είναι τοποθετημένος στο έδαφος με τον άξονά του κατακόρυφο. Ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο φορτίου $+q$ και μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα κατά μήκος του άξονα του δίσκου από ύψος H και με αρχική ταχύτητα υ_0. Το σωματίδιο έχει $\frac{q}{m} = \frac{4\varepsilon_0 g}{\sigma}$. (α) Βρείτε το ύψος H αν το σωματίδιο μόλις και φθάνει στην επιφάνεια του δίσκου. (β) Σχεδιάστε τη δυναμική ενέργεια του σωματιδίου συναρτήσει του ύψους h και προσδιορίστε το σημείο ισορροπίας



Έστω ότι το δυναμικό στο σημείο P που βρίσκεται σε ύψος H από την επιφάνεια του δίσκου είναι V_P

Έστω ότι το στοιχειώδες φορτίο dq που βρίσκεται στον δακτύλιο που φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι:

$dq = \sigma dA = \sigma(2\pi r)dr$. Επομένως το δυναμικό dV στο σημείο P θα είναι: $dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{x}$, όπου $x=\sqrt{H^2+r^2}$

$$\Rightarrow dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(2\pi r dr)\sigma}{\sqrt{H^2+r^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{r\,dr}{\sqrt{H^2+r^2}}$$

Ολοκληρώνουμε για να βρούμε το δυναμικό από όλο τον δίσκο:

$$V_P = \int_{r=0}^{r=a} dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{r\,dr}{\sqrt{H^2+r^2}} \Rightarrow \boxed{V_P = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{a^2+H^2}-H\right]} \quad (A)$$

Το δυναμικό στο κέντρο του δίσκου θα είναι: (H=0) $\boxed{V_O = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}a}$

(α) Το σωματίδιο ελευθερώνεται από το σημείο P και φθάνει στο σημείο O

Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας: θα έχουμε ότι; η μείωση της βαρυτικής δυναμικής ενέργεια θα ισούται με αύξηση στην ηλεκτροστατική δυναμική ενέργεια. Η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του σωματιδίου είναι $\frac{1}{2}m\upsilon_0^2$ γιατί αφήνεται με αρχική ταχύτητα υ_0. και φθάνει στο σημείο O με μηδενική ταχύτητα. (μόλις που φθάνει)' Επομένως $\Delta K = K_f - K_i = -\frac{1}{2}m\upsilon_0^2$

$$\Delta U_g = \Delta U_e \Rightarrow mgH = q\Delta V_{PO} = q(V_O - V_P) = q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[a+H-\sqrt{H^2+a^2}\right]$$

Ξέρουμε ότι $\frac{q}{m} = \frac{4\varepsilon_0 g}{\sigma} \Rightarrow \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 m} = 2g$

Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας: $mgH + \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \Delta U_e = 2mg\left[a+H-\sqrt{H^2+a^2}\right]$

$$\Rightarrow gH + \frac{1}{2}\upsilon_0^2 = 2g\left[a+H-\sqrt{H^2+a^2}\right] \Rightarrow \boxed{gH + 2ga + \frac{1}{2}\upsilon_0^2 - 2g\sqrt{H^2+a^2} = 0}$$

$$\Rightarrow \left(gH + 2ga + \tfrac{1}{2}\upsilon_0^2\right)^2 = 4g^2H^2 + 4g^2a^2 \Rightarrow g^2H^2 + \cancel{4g^2a^2} + \tfrac{1}{4}\upsilon_0^4 + 4g^2aH + gH\upsilon_0^2 + ga\upsilon_0^2 = 4g^2H^2 + \cancel{4g^2a^2}$$

$$\Rightarrow 3g^2H^2 - \left(4g^2a + g\upsilon_0^2\right)H - ga\upsilon_0^2 - \tfrac{1}{4}\upsilon_0^4 = 0$$

Η εξίσωση αυτή έχει μια αρνητική λύση που απορρίπτεται και μια θετική.

$$H = \frac{+\left(4g^2a + g\upsilon_0^2\right) + \sqrt{\left(4g^2a + g\upsilon_0^2\right)^2 + 4\left(ga\upsilon_0^2 + \tfrac{1}{4}\upsilon_0^4\right)3g^2}}{6g^2}$$

για $\upsilon_0 = 0\,m/s$ $H = a/3$

(β) Η δυναμική ενέργεια του σωματιδίου σε ύψος H είναι το άθροισμα της ηλεκτροστατικής και βαρυτικής δυναμικής ενέργειας:

$$U = qV + mgH \Rightarrow U = \frac{\sigma q}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{a^2 + H^2} - H\right] + mgH \qquad (B)$$

Στη θέση ισορροπίας: $\dfrac{dU}{dH} = 0 = -F$ και παραγωγίζουμε την U.

$$mg + \underbrace{\frac{\sigma q}{2\varepsilon_0}}_{2gm}\left[\frac{1}{2}\,2H\,\frac{1}{\sqrt{a^2+H^2}} - 1\right] = 0 \Rightarrow \cancel{mg} + 2\cancel{mg}\left[\frac{H}{\sqrt{a^2+H^2}} - 1\right] = 0$$

$$1 + 2\left[\frac{H}{\sqrt{a^2+H^2}} - 1\right] = 0 \Rightarrow \frac{2H}{\sqrt{a^2+H^2}} = 1 \Rightarrow 4H^2 = a^2 + H^2 \Rightarrow 3H^2 = a^2$$

$$\Rightarrow \boxed{H = a/\sqrt{3}}$$

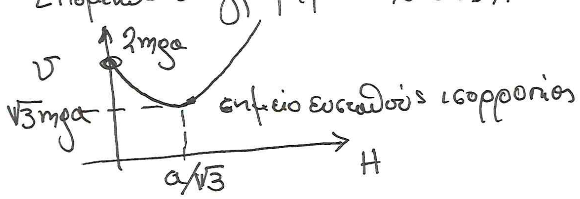
Από την εξίσωση (B) βλέπουμε ότι:

για $H = 0$ $\quad U = \dfrac{\sigma q}{2\varepsilon_0}a \Rightarrow U = 2mga$

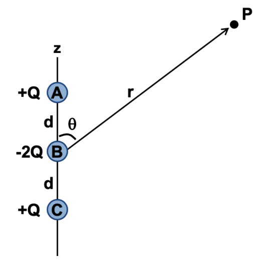
για $H = a/\sqrt{3}$ $\quad U = U_{min} = \dfrac{\sigma q}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{3}} - \dfrac{a}{\sqrt{3}}\right] + mg\dfrac{a}{\sqrt{3}} =$

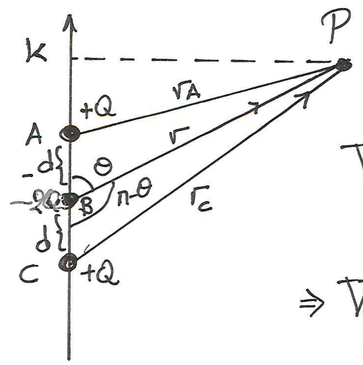
$$= 2mg\left[\cancel{\frac{a}{\sqrt{3}}} - \cancel{\frac{a}{\sqrt{3}}}\right] + mg\frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow U_{min} = \frac{mga}{\sqrt{3}}$$

Επομένως το γράφημα της U vs H



3. Στην προηγούμενη ΚΟΕ, ασχοληθήκατε με την ένταση του ηλεκτρικό πεδίο ενός δίπολου. Στην άσκηση αυτή θα ασχοληθείτε με το ηλεκτρικό τετράπολο. Το τετράπολο αποτελείται από 2 θετικά φορτία $+q$ σε απόσταση $2d$ μεταξύ τους ενώ στο μέσο της απόστασής τους βρίσκεται ένα αρνητικό φορτίο $-2Q$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα σημείο P που βρίσκεται σε απόσταση r από το φορτίο $-2Q$. <u>*Υπόδειξη:*</u> οι αποστάσεις r_A και r_C του σημείου P από τα θετικά φορτία στις θέσεις A και C σχετίζονται με την απόσταση r και τα πολυώνυμα Legendre που αναφέρονται στο παράρτημα του παρόντος. Θα βοηθήσει να θεωρήσετε τους λόγους r/r_A και r/r_B.





Το ηλεκτρικό δυναμικό θα είναι το άθροισμα των ηλεκτρικών δυναμικών από κάθε φορτίο ξεχωριστά

$$V_P = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 r_A} + \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0 r_B} + \frac{q_C}{4\pi\varepsilon_0 r_C} \Rightarrow V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r_A} - \frac{2Q}{r_B} + \frac{Q}{r_C}\right)$$

$$\Rightarrow V_P = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{r}{r_A} - 2 + \frac{r}{r_C}\right)$$ όπου $r = r_B$

Μπορούμε να βρούμε τη σχέση μεταξύ r, r_A, d και $\cos\theta$ από τον τύπο των συνημιτόνων για τα τρίγωνα ABP και BCP.

Θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} r_A^2 &= d^2 + r^2 - 2rd\cos\theta \\ r_C^2 &= d^2 + r^2 - 2rd\cos(\pi-\theta) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \left(\frac{r_A}{r}\right)^2 &= \left(\frac{d}{r}\right)^2 + 1 - 2\frac{d}{r}\cos\theta \quad (1) \\ \left(\frac{r_C}{r}\right)^2 &= \left(\frac{d}{r}\right)^2 + 1 + 2\frac{d}{r}\cos\theta \quad (2) \end{aligned}$$

Ο νόμος των συνημιτόνων αποδεικνύεται εύκολα αν θεωρήσουμε το τρίγωνο ABP και φέρουμε την κάθετο PK. οπότε:

$$\left.\begin{aligned} r_A^2 &= KP^2 + KA^2 = KP^2 + (KB-d)^2 = KP^2 + KB^2 + d^2 - 2(KB)d \\ r^2 &= KP^2 + KB^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_A^2 + r^2 = 2KP^2 + 2KB^2 + d^2 - 2(KB)d = 2(r\sin\theta)^2 + 2(r\cos\theta)^2 + d^2 - 2r\cos\theta\, d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_A^2 = 2r^2 - r^2 + d^2 - 2r\cos\theta\, d \Rightarrow \boxed{r_A^2 = r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta}$$

Από την (1) θα έχουμε: $$\frac{r}{r_A} = \frac{1}{\left[\left(\frac{d}{r}\right)^2 + 1 - 2\left(\frac{d}{r}\right)\cos\theta\right]^{1/2}} \Rightarrow \boxed{\frac{r}{r_A} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)}$$

Αντίστοιχα θα έχουμε: $$\boxed{\frac{r}{r_C} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{r}\right)^n P_n\big(\cos(\pi-\theta)\big)}$$

Επομένως το ηλεκτρικό δυναμικό του συστήματος θα είναι:

$$V_p = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{r}\right)^n P_n(\cos\Theta) - 2 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{r}\right)^n P_n(-\cos\Theta)\right] \Rightarrow \quad P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

$$V_p = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[-2 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{r}\right) P_n(\cos\Theta) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{r}\right)^2 (-1)^n P_n(\cos\Theta)\right] \Rightarrow$$

$$V_p = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[-2 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{r}\right)^n \left[P_n(\cos\Theta)\left[1 + (-1)^n\right]\right]\right] \qquad (A)$$

Για $n=0$ $P_0(x) = 1$

$n=1$ $P_1(x) = x$ } Επομένως για τους 2 πρώτους όρους θα έχουμε:

$$V_p = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\cancel{-2 + 2}^{\,0} + 0 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{d}{r}\right)^n \left[P_n(\cos\Theta)\left[1 + (-1)^n\right]\right]\right]$$

$$\Rightarrow V_p = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{d}{r}\right)^n \left[P_n(\cos(\Theta))\left[1 + (-1)^n\right]\right]\right]$$

Όλοι οι περιττοί σε n- όροι θα δώσουν μηδέν, οπότε θα έχουμε τους όρους:

$$V_p = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[2\left(\frac{d}{r}\right)^2 \frac{1}{2}\left(3\cos^2\Theta - 1\right) + 2\left(\frac{d}{r}\right)^4 P_4(\cos\Theta) + 2\left(\frac{d}{r}\right)^6 P_6(\cos\Theta)\right.$$

Ο όρος της παραπάνω σειράς για $n=2$ αποτελεί τον τετραπολικό όρο:

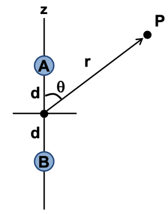
$$V_p^{\text{τετραπολικός}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\cancel{2}\left(\frac{d}{r}\right)^2 \frac{1}{\cancel{2}}\left(3\cos^2\Theta - 1\right)\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(\frac{d}{r}\right)^2\left(3\cos^2\Theta - 1\right)\right.$$

για $r \gg d$ θα έχουμε:

$$\boxed{V_p^{\text{τετραπολικός}} = \frac{Qd^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(3\cos^2\Theta - 1\right)}$$

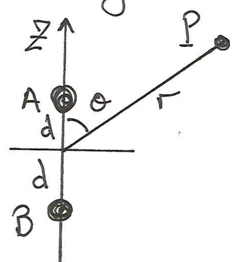
Το ηλεκτρικό δυναμικό για οποιοδήποτε σύστημα φορτίων μπορεί να εκφραστεί σαν μιά άπειρη σειρά χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Legendre. Ο $1^{ος}$ της σειράς ($n=0$) αντιπροσωπεύει το συνολικό φορτίο του συστήματος. Ο $2^{ος}$ όρος ($n=1$) αποτελεί τον διπολικό όρο, ο τρίτος όρος ($n=2$) τον τετραπολικό όρο κλπ. Αυτό αποτελεί τη βάση για το ανάπτυγμα πολυπόλων του ηλεκτρικού δυναμικού.

4. Σε αναλογία με τα προηγούμενα, βρείτε το βαρυτικό δυναμικό του συστήματος που αποτελείται από δύο πανομοιότυπα σημειακές μάζες *m* σε απόσταση *d* μεταξύ τους σε ένα σημείο *P* που βρίσκεται σε απόσταση *r* από το μέσο της απόστασης των δύο μαζών, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Το βαρυτικό δυναμικό είναι το άθροισμα των βαρυτικών δυναμικών από κάθε μάζα του συστήματος:

$$V_g = -G\frac{m}{r_A} - G\frac{m}{r_B} = -Gm\left(\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}\right) = -\frac{Gm}{r}\left(\frac{r}{r_A}+\frac{r}{r_B}\right)$$



Η μεταβλητή m είναι η μάζα του κάθε σώματος που αποτελεί το σύστημα. Οι μεταβλητές r_A και r_B είναι οι αποστάσεις του P από τις μάζες στις θέσεις A και B.

$$\frac{r}{r_A} = \frac{1}{\left[1+\left(\frac{d}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{d}{r}\right)\cos\theta\right]^{1/2}} \Rightarrow \frac{r}{r_A} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

Αντίστοιχα:
$$\frac{r}{r_B} = \frac{1}{\left[1+\left(\frac{d}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{d}{r}\right)\cos(\pi-\theta)\right]^{1/2}} \Rightarrow \frac{r}{r_B} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{r}\right)^n P_n(\cos(\pi-\theta))$$

Επομένως το βαρυτικό δυναμικό θα είναι:

$$V_g = -\frac{Gm}{r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{r}\right)^n P_n(\cos(\pi-\theta))\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_g = -\frac{Gm}{r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{r}\right)^n\left[P_n(\cos\theta) + \underbrace{P_n(-\cos\theta)}_{(-1)^n P_n(\cos\theta)}\right]\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_g = -\frac{Gm}{r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{d}{r}\right)^n\left[P_n(\cos\theta)\left(1+(-1)^n\right)\right]\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_g = -\frac{Gm}{r}\left[\underset{n=0}{2} + \underset{n=1}{0} + \underset{n=2}{\left(\frac{d}{r}\right)^2 2\,\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right)} + \sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{d}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_g = -\frac{Gm}{r}\left[2+2\left(\frac{d}{r}\right)^2\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right)\right] = -\frac{2Gm}{r}\left[1+\left(\frac{d}{r}\right)^2\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right)\right]$$

Επομένως δεν υπάρχουν βαρυτικά δίπολα.

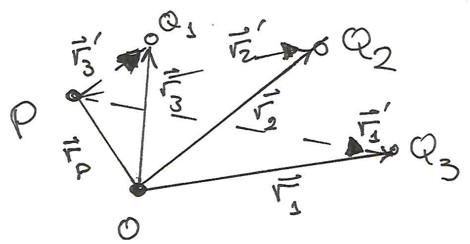
5. Έστω ένα σύστημα φορτίων $Q_1, Q_2, Q_3\ldots$ των οποίων τα διανύσματα θέσης ως προς ένα σημείο O είναι $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \ldots$ Το διανυσματικό άθροισμα $\vec{p} = \sum Q_i \vec{r}_i$ ορίζεται ως η διπολική ροπή του συστήματος των φορτίων ως προς το σημείο Ο. Αυτός είναι ο γενικός ορισμός της διπολικής ροπής αλλά δεν διαφέρει από τον απλό ορισμό που δώσαμε στις διαλέξεις. Αποδείξτε ότι αν το ολικό σύστημα έχει μηδενικό συνολικά φορτίο, δηλαδή υπάρχει τόσο θετικό όσο και αρνητικό φορτίο, η διπολική ροπή που ορίσαμε παραπάνω είναι ανεξάρτητη της επιλογής του σημείου αναφοράς Ο.

Θεωρήστε ότι το σύστημα αποτελείται από φορτία $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ οι θέσεις των οποίων ορίζονται με βάση ένα σημείο Ο και είναι $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \ldots, \vec{r}_n$.

Θεωρήστε ακόμη ότι το σύστημα είναι ηλεκτρικά ουδέτερο οπότε $\sum_{i=1}^{n} Q_i = 0$ (1)

Η ηλεκτρική διπολική ροπή $\vec{p}$ του συστήματος ορίζεται ως $\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \vec{r}_i$ (2) ως προς το σημείο Ο.

Θα δείξουμε ότι η ηλεκτρική διπολική ροπή ενός συστήματος φορτίων που είναι ηλεκτρικά ουδέτερο είναι ανεξάρτητη από το σημείο Ο.



Έστω ότι θεωρούμε ένα άλλο σημείο P και οι θέσεις των φορτίων είναι $\vec{r}_1', \vec{r}_2', \vec{r}_3', \ldots \vec{r}_n'$ ενώ το σημείο P έχει διάνυσμα θέσης $\vec{r}_P$ ως προς το αρχικό σημείο Ο.

Η ηλεκτρική διπολική ροπή ως προς το P είναι: $\vec{p}' = \sum_{i=1}^{n} Q_i \vec{r}_i'$

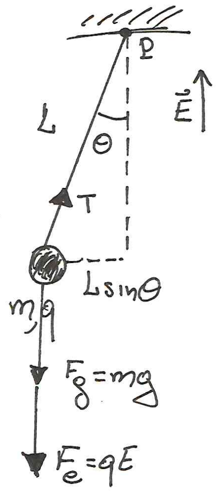
Αλλά $\vec{r}_1 = \vec{r}_P + \vec{r}_1'$, $\vec{r}_2 = \vec{r}_P + \vec{r}_2'$, $\vec{r}_n = \vec{r}_P + \vec{r}_n'$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{p}' = \sum Q_i(\vec{r}_i - \vec{r}_P) = \sum Q_i \vec{r}_i - \sum Q_i \vec{r}_P = \underbrace{\cancel{\sum Q_i \vec{r}_i}}_{\vec{p} \text{ από } (2)} - \vec{r}_P \underbrace{\cancel{\sum Q_i}}_{0 \text{ από } (1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{p}'_{\text{ως προς } P} = \vec{p}_{\text{ως προς } O}$$

επομένως ανεξάρτητη του σημείου ως προς το οποίο θεωρείται τα διανύσματα θέσης

6. Ένα απλό εκκρεμές μάζας $5.0 \times 10^{-3} kg$ και μήκους $1.0m$ τοποθετείτε μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο το οποίο έχει κατακόρυφη διεύθυνση με φορά προς τα πάνω. Το σώμα που είναι τοποθετημένο στην άκρη του εκκρεμούς είναι φορτισμένο με φορτίο -8.0μC. Η περίοδος του εκκρεμούς είναι 1.2s. Βρείτε το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$.



Το εκκρεμές βρίσκεται μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο του οποίου η φορά είναι προς τα πάνω, και η μάζα του εκκρεμούς είναι φορτισμένη αρνητικά. Επομένως θα δέχεται μια δύναμη προς τα κάτω, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Το εκκρεμές έχει εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του και άρα πάνω του ασκείται η ροπή των δυνάμεων F_g και F_e ως προς το σημείο στήριξης P. Από τον 2ο νόμο του Newton για περιστροφική κίνηση θα έχουμε:

$\Sigma \vec{\tau}_P = I_P \vec{\alpha}$ όπου $\vec{\tau}_P$ η συνισταμένη ροπή ως προς το P,
I_P η ροπή αδράνειας ως προς το P,
α η γωνιακή επιτάχυνση της περιστροφής ως προς το P.

στο σχήμα η θ μικραίνει

$$+(mg+qE)L\sin\theta = -I_P\alpha = -mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

(η τάση T περνά από το P οπότε $\vec{\tau}_T = \vec{0}$)

θ μικρή $\Rightarrow \sin\theta \simeq \theta$ οπότε:

$$-m\cancel{L^2}\frac{d^2\theta}{dt^2} - (mg+qE)\cancel{L}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mg+qE}{mL}\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left[\frac{(mg+qE)}{mL}\right]\theta = 0.$$ της μορφής $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$

Επομένως $\omega^2 = \frac{mg+qE}{mL} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{mg+qE}{mL} \Rightarrow$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{mg+qE}}$$

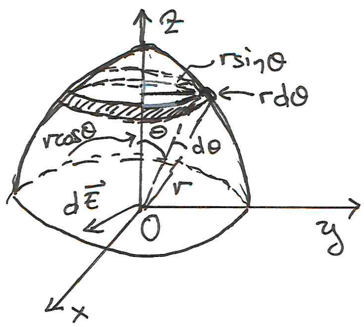
Αλλά χωρίς ηλεκτρικό πεδίο $T_g = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$$\Rightarrow \frac{T}{T_g} = \frac{\sqrt{\frac{m}{mg+qE}}}{\sqrt{\frac{1}{g}}} = \sqrt{\frac{mg}{mg+qE}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_g}{T} = \sqrt{1+\frac{qE}{mg}} \Rightarrow \frac{qE}{mg} = \frac{T_g^2}{T^2} - 1 \Rightarrow \boxed{E = \frac{mg}{q}\left[\frac{T_g^2}{T^2} - 1\right]}$$

Αριθμητική αντικατάσταση δίνει $E = \frac{(5.0mg)(9.81m/s^2)}{8.0\mu C}\left[\left(\frac{2.006s}{1.2s}\right)^2 - 1\right] \Rightarrow E \simeq 1.1\times10^{4}$

7. Ένα λεπτό κέλυφος σε σχήμα ημισφαιρίου ακτίνας *R* έχει ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο της βάσης του ημισφαιρικού κελύφους.



Θεωρούμε στοιχειώδη δακτύλιο με τον άξονά του στο +z-άξονα. Η ακτίνα του δακτυλίου θα είναι:

$\rho = r\sin\theta$ και το πλάτος του θα είναι $r\,d\theta$

Επομένως το εμβαδό θα είναι: $dA = (2\pi\rho)(w) \Rightarrow$

$\Rightarrow dA = (2\pi r\sin\theta)(r\,d\theta) \Rightarrow dA = 2\pi r^2\sin\theta\, d\theta$ (1)

Το φορτίο που αντιστοιχεί στον δακτύλιο θα είναι: $dq = \sigma\cdot dA = \sigma 2\pi r^2\sin\theta\, d\theta$

Η στοιχειώδης ένταση εξαιτίας αυτού του φορτίου θα είναι:

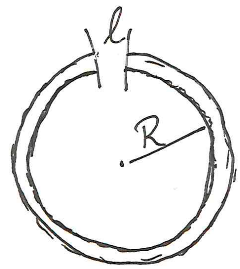
$dE = \frac{k_e\, dq}{r^3}\, r\cos\theta$ αυτό είναι το πεδίο δακτυλίου σε απόσταση z από το κέντρο στον άξονά του. Το πεδίο είναι μόνο στη z-διεύθυνση εφόσον λόγω συμμετρίας μηδενίζεται στις άλλες διευθύνσεις.

Αντικαθιστώντας dq και ολοκληρώνοντας ως προς θ θα έχουμε:

$$dE = \frac{k_e 2\pi \cancel{r^2}\sigma\sin\theta\, d\theta\, \cancel{r}\cos\theta}{\cancel{r^3}} \Rightarrow E = \int_0^{\pi/2} dE = k_e 2\pi\sigma\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = 2\pi k_e\sigma\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} \Rightarrow E = \cancel{2}\pi k_e\sigma\frac{1}{\cancel{2}}[1-0] \Rightarrow \boxed{E = \pi k_e\sigma}$$

8. Μία μακριά, λεπτή, εύκαμπτη πλαστική ράβδος είναι λυγισμένη σε σχήμα κυκλικού δακτυλίου ακτίνας R. Μεταξύ των δύο άκρων της ράβδου υπάρχει ένα μικρό κενό μήκους l όπου $l<<R$. Θετικό φορτίο Q είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στην ράβδο. (α) Βρείτε τη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο του δακτυλίου. Εξηγήστε την απάντησή σας. (β) Βρείτε το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο του δακτυλίου.



(α) Ο δακτύλιος με το μικρό διάκενο, μοιάζει με έναν κλειστό δακτύλιο και ένα αρνητικό φορτίο $-\frac{Ql}{2\pi R}$ στο διάκενο.

Το πεδίο στο κέντρο του δακτυλίου θα είναι από την αρχή της επαλληλίας, το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων του κλειστού δακτυλίου και του πεδίου από το αρνητικό φορτίο στο διάκενο.

$\vec{E} = \vec{E}_{δακ} + \vec{E}_{διακ.} = -\frac{k_e q \hat{r}}{R^2} + \vec{0}$ (1) (το πεδίο στο κέντρο του δακτυλίου είναι 0 λόγω συμμετρίας).

Επομένως το πεδίο θα είναι αυτό που προέρχεται από το υποτιθέμενο αρνητικό φορτίο στο διάκενο.

Αλλά το φορτίο στο διάκενο θα είναι $q = \lambda \cdot l$ όπου λ: η γραμμική πυκνότητα φορτίου και l το μήκος του τόξου του διάκενου

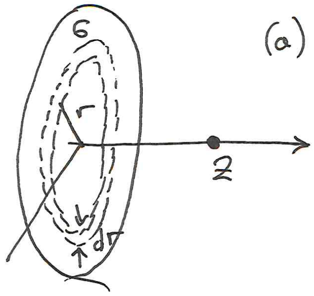
$\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$.

Αντικατάσταση στην (1): $\vec{E} = -\frac{k_e q}{R^2}\hat{r} = -k_e \frac{l \frac{Q}{2\pi R}}{R^2}\hat{r} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{k_e Q l}{2\pi R^3}\hat{r}}$

Αν το φορτίο είναι θετικό τότε το πεδίο έχει ακτινική διεύθυνση και φορά από το κέντρο του δακτυλίου προς το διάκενο.

(β) Από το αποτέλεσμα του (α) βλέπουμε ότι το μέτρο του πεδίου είναι $\boxed{E = \frac{k_e Q l}{2\pi R^3}}$

9. Ένας δίσκος ακτίνας R έχει επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma = \sigma_0 R/r$ όπου σ_0 σταθερά και r είναι η απόσταση από το κέντρο του δίσκου. (α) Βρείτε το ολικό φορτίο του δίσκου. (β) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό σε απόσταση x από το κέντρο του δίσκου στον άξονα που περνά από το κέντρο του δίσκου και είναι κάθετος στην επιφάνειά του.



(α) Το στοιχειώδες φορτίο που υπάρχει σε έναν δακτύλιο θα είναι: $dq = (2\pi r)(dr)\sigma = 2\pi \cancel{r}\, dr \frac{\sigma_0 R}{\cancel{r}} \Rightarrow$

$\Rightarrow dq = 2\pi\sigma_0 R\, dr$ $\Big\} \Rightarrow Q = \int_0^R dq \Rightarrow$

Ολοκληρώνουμε από $r=0$ έως $r=R$ $\Rightarrow Q = \int_0^R 2\pi\sigma_0 R\, dr \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q = \cancel{2}\pi\sigma_0 R \frac{R}{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{Q = \pi\sigma_0 R^2}$$

(β) Το δυναμικό στον άξονα του δίσκου θα είναι: $dV = \frac{k_e dq}{r'} = \frac{k_e 2\pi\sigma_0 R\, dr}{\sqrt{x^2+r^2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V = \int_0^R dV = \int_0^R \frac{k_e 2\pi\sigma_0 R\, dr}{\sqrt{x^2+r^2}} \Rightarrow V = 2\pi\sigma_0 k_e R \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{x^2+r^2}} \Rightarrow$$

$u = \frac{r}{x} \Rightarrow du = \frac{1}{x} d$

$$\Rightarrow V = 2\pi\sigma_0 k_e R \int \frac{x\, du}{\sqrt{x^2+u^2x^2}} = 2\pi\sigma_0 k_e R \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \Rightarrow$$

$u = \tan(v) \Rightarrow$
$v = \arctan(u)$
$du = \sec^2(v)dv$

$$\Rightarrow V = 2\pi\sigma_0 k_e R \int \frac{\sec^2(v)dv}{\sqrt{\tan^2(v)+1}}$$ αλλά $\tan^2(v)+1 = \sec^2(v)$

$$\Rightarrow V = 2\pi\sigma_0 k_e R \int \sec(v)dv = 2\pi\sigma_0 k_e R \int \frac{\sec(v)(\tan(v)+\sec(v))}{\tan(v)+\sec(v)} dv \Rightarrow$$

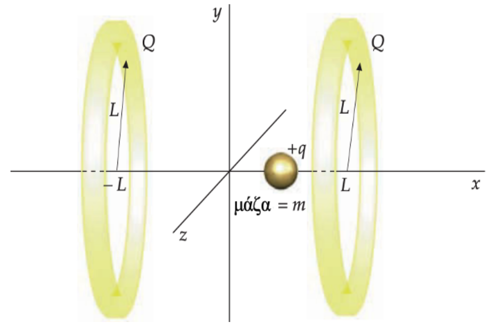
$$\Rightarrow V = 2\pi\sigma_0 k_e R \int \frac{1}{w} dw \Rightarrow$$

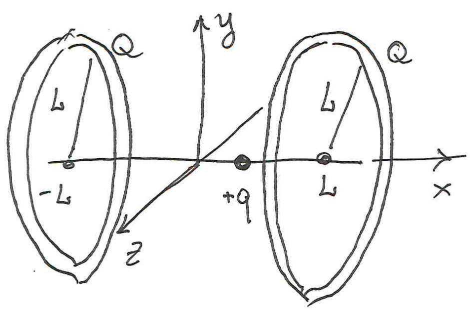
$w = \tan(v) + \sec(v)$
$dw = (\sec(v)\tan(v) + \sec^2(v))dv$

$$\Rightarrow V = 2\pi\sigma_0 k_e R \ln(w) = 2\pi\sigma_0 k_e R \ln(\tan(v)+\sec(v)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 2\pi\sigma_0 k_e \ln\left(\frac{R+\sqrt{x^2+R^2}}{x}\right)$$

10. Ένα σωματίδιο έχει μάζα m και θετικό φορτίο $+q$. Το σωματίδιο είναι περιορισμένο να κινείται κατά μήκος του x-άξονα. Στις θέσεις $x = -L$ και $x = +L$ υπάρχουν δύο φορτισμένοι δακτύλιοι ακτίνας L όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το κέντρο του κάθε δακτυλίου βρίσκεται στον x-άξονα και το επίπεδό τους είναι κάθετο σε αυτόν. Κάθε δακτύλιος έχει θετικό φορτίο $+Q$ το οποίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο κατά μήκος του δακτυλίου. (α) Βρείτε μια εξίσωση για το δυναμικό $V(x)$ στον x-άξονα εξαιτίας του φορτίου στους δακτυλίους. (β) Δείξτε ότι το δυναμικό $V(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο στο x=0. (γ) Δείξτε ότι για $x << L$, η εξίσωση του δυναμικού παίρνει την μορφή $V(x) = V(0) + ax^2$. (δ) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος για να βρείτε την γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης της μάζας m αν μετατοπιστεί ελαφρά από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και αφεθεί ελεύθερη να κινηθεί. (Υποθέστε ότι το δυναμικό ισούται με μηδέν σε σημεία πολύ μακριά από τους δακτυλίους).





(α) Το δυναμικό σε κάποιο σημείο αποτελεί το άθροισμα των δυναμικών των κατανομή φορτίου σε κάθε δακτύλιο.

Επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$V(x) = V_{αρ.δακ} + V_{δεξ.δακ} \quad (1)$$

Το δυναμικό εξαιτίας μιας κατανομής φορτίου σε κυκλικό δακτύλιο σε απόσταση x από το κέντρο του δακτυλίου και στην κάθετο της επιφάνεια του δακτυλίου δίνεται από τη σχέση:

$$V(x) = \frac{k_e Q}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$ όπου R η ακτίνα του δακτυλίου

Άρα το δυναμικό εξαιτίας του αριστερού δακτυλίου είναι $V_{αρ.δακ} = \frac{k_e Q}{\sqrt{(x+L)^2+L^2}}$ (2)

ενώ το δυναμικό εξαιτίας του δεξιού δακτυλίου είναι: $V_{δεξ.δακ} = \frac{k_e Q}{\sqrt{(x-L)^2+L^2}}$ (3)

Αντικατάσταση των (2) & (3) στην (1) δίνει ότι:

$$\boxed{V(x) = \frac{k_e Q}{\sqrt{(x+L)^2+L^2}} + \frac{k_e Q}{\sqrt{(x-L)^2+L^2}}} \quad (A)$$

(β) Για να βρούμε το ελάχιστο θα πρέπει $\frac{dV}{dx}=0 \overset{(A)}{\Rightarrow} 0=k_eQ\left[\frac{L-x}{[(L-x)^2+L^2]^{3/2}}-\frac{L+x}{[(L+x)^2+L^2]^{3/2}}\right]$

$\Rightarrow (L-x)\left[(L+x)^2+L^2\right]^{3/2}=(L+x)\left[(L-x)^2+L^2\right]^{3/2} \Rightarrow (L-x)^2\left[(L+x)^2+L^2\right]^3=(L+x)^2\left[(L-x)^2+L^2\right]^3$

Έστω $(L-x)^2=a$, $(L+x)^2=b$ και $L^2=c$ θα έχουμε $a(b+c)^3=b(a+c)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a(b^3+c^3+3b^2c+3c^2b)=b(a^3+c^3+3a^2c+3ac^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow ab^3+ac^3+3acb^2+\cancel{3abc^2}=ba^3+bc^3+3a^2bc+\cancel{3abc^2} \Rightarrow c^3(a-b)-ba(a^2-b^2)-3abc(a-b)=0$

$\Rightarrow c^3(a-b)-ba(a-b)(a+b)-3abc(a-b)=0 \Rightarrow (a-b)(c^3-ba(a+b)-3abc)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a-b)(c^3-ba(a+b+3c))=0$

$\Rightarrow a-b=0 \Rightarrow (L-x)^2-(L+x)^2=0 \Rightarrow (L-x-L-x)(L-x+L+x)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x\,2L=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$ (B)

Από την $c^3-ba(a+b+3c)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c^3-(L-x)^2(L+x)^2\left[(L-x)^2+(L+x)^2+3L^2\right]=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow L^6-(L^2-x^2)^2\left[L^2+x^2-\cancel{2Lx}+L^2+x^2+\cancel{2Lx}+3L^2\right]=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow L^6-(L^4+x^4-2L^2x^2)(5L^2+2x^2)=L^6-5L^6-5L^2x^4+10L^4x^2-2L^4x^2-2x^6+4L^2x^4$

$\Rightarrow -4L^6-L^2x^4-2x^6+8L^4x^2=0 \Rightarrow 4L^6+L^2x^4+2x^6-8L^4x^2=0$

$\Rightarrow \boxed{4L^4(L^2-2x^2)+x^4(L^2+2x^2)=0.}$ (Γ)

Η $2^η$ παράγωγος του δυναμικού θα είναι: $\frac{d^2V}{dx^2}=k_eQ\frac{d}{dx}\left[\frac{L-x}{[(L-x)^2+L^2]^{3/2}}-\frac{L+x}{[(L+x)^2+L^2]^{3/2}}\right]$

$\Rightarrow \frac{d^2V}{dx^2}=\left[-\frac{1}{[(x+L)^2+L^2]^{3/2}}+\frac{3(x+L)^2}{[(x+L)^2+L^2]^{5/2}}+\frac{3(L-x)^2}{[(L-x)^2+L^2]^{5/2}}+\frac{1}{[(L-x)^2+L^2]^{3/2}}\right]k_eQ$

Για x=0 που είναι το ένα ακρότατο που βρήκαμε θα πάρουμε ότι:

$\frac{d^2V}{dx^2}=k_eQ\left[-\frac{1}{L^3(\sqrt{2})^3}+\frac{3\cancel{L^2}}{L^{\cancel{5}\,3}(\sqrt{2})^5}+\frac{3\cancel{L^2}}{L^{\cancel{5}\,3}(\sqrt{2})^5}-\frac{1}{L^3(\sqrt{2})^3}\right]=\frac{k_eQ}{L^3}\left[\frac{-2}{(\sqrt{2})^3}+\frac{6}{(\sqrt{2})^5}\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{k_eQ}{L^3}\left[\frac{-2(\sqrt{2})^2+6}{(\sqrt{2})^5}\right] \Rightarrow \boxed{\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{k_eQ}{L^3}\frac{2}{(\sqrt{2})^5} > 0} \quad (\Delta)$$

Επομένως το ακρότατο για $x=0$ είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας αφού παρουσιάζεται ελάχιστο στο $V(x)$

Παρατηρούμε ότι καθώς το $x \to +\infty$ ή $-\infty$ το $V(x) \to 0$. Επομένως αφού παρουσιάζεται ελάχιστο στο $x=0$, τότε θα πρέπει να παρουσιάζονται ακρότατα (μέγιστα) ενδιάμεσα, ασταθούς ισορροπίας που δίνονται από (Γ)

Αν κάνουμε το γράφημα της συνάρτησης του δυναμικού συναρτήσει της θέσης x που βρίσκεται το φορτίο q θα βλέπουμε ότι παρουσιάζει 2 μέγιστα και ένα ελάχιστο στη θέση $x=0$.
Οι τιμές των μεγίστων μπορούν να υπολογιστούν αριθμητικά με τη μέθοδο Newton-Raphson ή τη μέθοδο της διχοτόμησης, λύνοντας την εξίσωση (Γ).

(γ) Μπορούμε να πάρουμε το ανάπτυγμα Taylor του δυναμικού:

$$V(x) \simeq V(0) + \frac{1}{2}\underbrace{V'(0)}_{\text{ελάχιστο}} x + \frac{1}{2}\underbrace{V''(x=0)}_{(\Delta)} x^2 + \dots$$ γύρω από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας.

Αντικατάσταση από το (α) κ (β) ερώτημα θα δώσει:

$$V(x) \cong \frac{2k_eQ}{\sqrt{2}L} + 0x + \frac{1}{2}\left(\frac{k_eQ}{2\sqrt{2}L^3}\right)x^2 = \frac{\sqrt{2}k_eQ}{L} + \frac{k_eQ}{4\sqrt{2}L^3}x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(x) \cong V(0) + ax^2 \quad \text{όπου} \quad a = \frac{k_eQ}{4\sqrt{2}L^3} \quad \text{και} \quad V(0) = \frac{\sqrt{2}k_eQ}{\sqrt{L}}$$

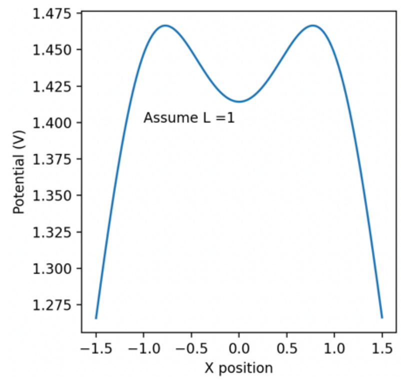
(δ) Για έναν απλό ταλαντωτή θα έχουμε $\omega = \sqrt{\frac{k'}{m}}$ όπου k' η σταθερά επαναφοράς

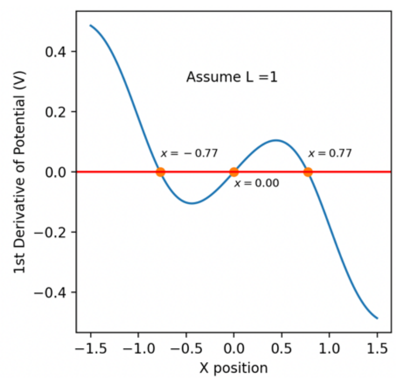
$$U(x) = qV(0) + \frac{1}{2}qV''(0) = qV(0) + \frac{1}{2}\left(\frac{k_eqQ}{2\sqrt{2}L^3}\right)x^2 = qV(0) + \frac{1}{2}k'x^2$$

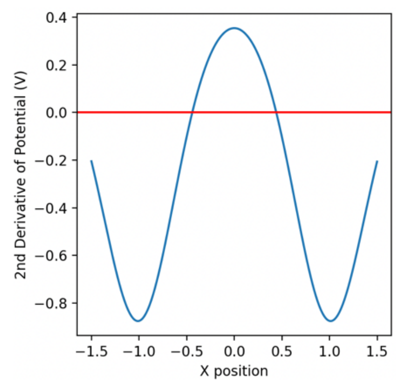
όπου $k' = \frac{k_eqQ}{2\sqrt{2}L^3}$

Επομένως θα έχουμε: $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \sqrt{\frac{k_eqQ}{2\sqrt{2}L^3m}}}$

```
#!/usr/bin/python3

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import *

x,L = symbols('x,L',real=True)
L = 1
V1stDeriv = diff(V)
V2ndDeriv = diff(V1stDeriv)
potential=lambdify(x,V)
pot1deriv = lambdify(x,V1stDeriv)
pot2deriv = lambdify(x,V2ndDeriv)
x = [0.001*i for i in range(-1500,1500)]
y = [potential(xx) for xx in x]
yy= [pot1deriv(xx) for xx in x]
yyy= [pot2deriv(xx) for xx in x]

roots = []
for i in range(len(x)-1):
    if yy[i]*yy[i+1]<0:
        roots += [ x[i] - yy[i]*(x[i+1]-x[i])/(yy[i+1]-yy[i]) ]
    elif yy[i] == 0 :
        roots += [x[i]]
for root in roots:
    print(root)
v1stsol = [pot1deriv(sol) for sol in roots]

plt.figure(figsize=(12,4))
plt.subplot(1,3,1)
plt.plot(x,y)
plt.xlabel("X position")
plt.ylabel("Potential (V)")
plt.text(-1,1.4,'Assume L =1')

plt.subplot(1,3,2)
plt.plot(x,yy)
plt.plot(roots,v1stsol,'o')
plt.xlabel("X position")
plt.ylabel("1st Derivative of Potential (V)")
plt.text(-0.5,0.3,'Assume L =1')
plt.text(roots[0],v1stsol[0]+0.05,r'$x=%3.2f$'%roots[0],fontsize=8)
plt.text(roots[1],v1stsol[1]-0.05,r'$x=%3.2f$'%roots[1],fontsize=8)
plt.text(roots[2],v1stsol[2]+0.05,r'$x=%3.2f$'%roots[2],fontsize=8)
plt.axhline(y=0,color='red',linestyle='-')
plt.tight_layout()

plt.subplot(1,3,3)
plt.plot(x,yyy)
plt.xlabel("X position")
plt.ylabel("2nd Derivative of Potential (V)")
#plt.text(-0.5,0.3,'Assume L =1')
plt.axhline(y=0,color='red',linestyle='-')
plt.tight_layout()

plt.show()
```







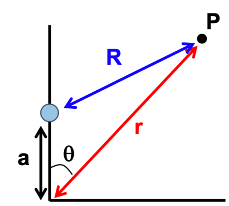
<u>Παράρτημα – Σχετικά με τα πολυώνυμα Legendre</u>

Τα πολυώνυμα Legendre, $P_n(x)$, αποτελούν λύσεις της διαφορικής εξίσωσης Legendre:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x)^2\frac{d}{dx}P_n(x)\right]+n(n+1)P_n(x)=0$$

Γιατί η εξίσωση αυτή είναι χρήσιμη ή πώς προσδιορίζονται τα πολυώνυμα Legendre θα το δείτε σε μεταγενέστερο μάθημα. Ωστόσο αυτό που είναι χρήσιμο για το παρόν μάθημα είναι ότι τα πολυώνυμα Legendre σχετίζονται με μια έκφραση που συναντούμε συχνά:

$$\frac{1}{(1-2xy+x^2)^{\frac{1}{2}}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(y)x^n$$



Θεωρήστε το σύστημα του διπλανού σχήματος όπου η απόσταση μεταξύ της θέσης ενός σημειακού σωματιδίου και της θέσης ενός σημείου στο χώρο P στο οποίο μετρούμε τις ιδιότητες του χώρου εξαιτίας του σωματιδίου είναι R, ενώ το μέτρο του διανύσματος θέσης του σωματιδίου και του σημείου P είναι a και r αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές εξισώσεις έχουμε ότι: $R^2=r^2+a^2-2racos\theta$.

Από την τελευταία εξίσωση έχουμε:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{(r^2+a^2-2racos\theta)^{\frac{1}{2}}}\Rightarrow\frac{1}{R}=\frac{1}{r\left(1+\left(\frac{a}{r}\right)^2-2\left(\frac{a}{r}\right)cos\theta\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Θεωρώντας $x=\frac{a}{r}$, η προηγούμενη εξίσωση είναι της μορφής της 2ης εξίσωσης που γράψαμε παραπάνω:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n$$

Επομένως τα πολυώνυμα Legendre είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος Taylor του παρονομαστή. Τα πρώτα πολυώνυμα Legendre δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

N	$P_n(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$

Μερικές ιδιότητες των πολυωνύμων Legendre είναι οι ακόλουθες που ίσως θυμάστε από το μάθημα PHY140 είναι:

$$P_n(-y) = (-1)^n P_n(y)$$

$$(n+1)P_{n+1}(y) = (2n+1)yP_n(y) - nP_{n-1}(y)$$