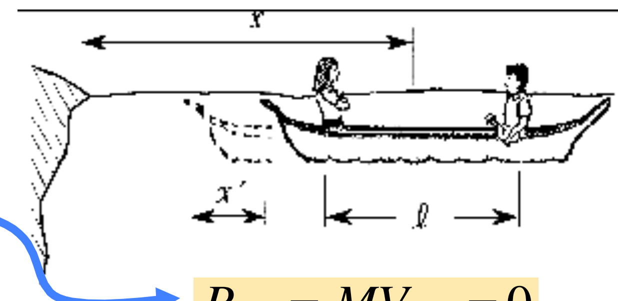
Κέντρο Μάζας - Παράδειγμα

Ο Ρωμαίο (m_R=77kg) διασκεδάζει την Ιουλιέτα (m_I=55kg) παίζοντας την κιθάρα του καθισμένος στην πρύμνη της βάρκας τους (μήκους 2.7 m) που είναι ακίνητη στα ήσυχα νερά της λίμνης. Η Ιουλιέτα κάθεται στην πλώρη της βάρκας. Στο τέλος της καντάδας η Ιουλιέτα σηκώνεται και προσεκτικά πηγαίνει στο πρύμνη για να του δώσει ένα φιλί…

Αν η κατεύθυνση της πλώρης της βάρκας ήταν προς τη στεριά πόσο μετακινήθηκε η βάρκα τους (μάζας 80 kg) προς τη στεριά ?

Λύση

Έστω x η απόσταση του ΚΜ της βάρκας από τη στεριά, l το μήκος της βάρκας και x′ η απόσταση που κινήθηκε η βάρκα. Το ΚΜ παραμένει σταθερό (**ΓΙΑΤΙ ?**).



$$P_{CM} = MV_{CM} = 0$$

Κατά την καντάδα: $$x_{CM} = \frac{xM_\beta + (x - l/2)M_I + (x + l/2)M_R}{M_\beta + M_R + M_I}$$

Μετά την καντάδα: $$x'_{CM} = \frac{(x - x')M_\beta + (x + l/2 - x')M_R + (x + l/2 - x')M_I}{M_\beta + M_R + M_I}$$

Αλλά $x'_{CM} = x_{CM}$ οπότε εξισώνοντας τις 2 σχέσεις παίρνουμε $x' = 0.70m$

Κέντρο μάζας – Παράδειγμα

Έστω απομονωμένο σύστημα 2 μαζών m_1 και m_2 αρχικά σε ηρεμία (π.χ. 2 μάζες στις άκρες ενός ελατηρίου, ένα σώμα που διασπάται σε 2 άλλα).

Όταν τα 2 σώματα φεύγουν μακριά το ένα από το άλλο με ταχύτητες υ_1 και υ_2 κάποια ποσότητα ενέργειας μοιράζεται μεταξύ τους:

$$Q = E^1_{\kappa\iota\nu} + E^2_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \qquad (1)$$

Αφού το σύστημα είναι απομονωμένο, η ολική ορμή διατηρείται

$$P^i = P^f \Rightarrow 0 = m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 \Rightarrow m_2\upsilon_2 = -m_1\upsilon_1$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και διαιρούμε με το 2

$$m_2^2\upsilon_2^2 = m_1^2\upsilon_1^2 \Rightarrow \frac{1}{2}m_2^2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1^2\upsilon_1^2 \Rightarrow m_2E^2_{\kappa\iota\nu} = m_1E^1_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow \frac{E^1_{\kappa\iota\nu}}{E^2_{\kappa\iota\nu}} = \frac{m_2}{m_1}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε:

$$Q = \frac{m_1}{m_2}E^1_{\kappa\iota\nu} + E^1_{\kappa\iota\nu} \Rightarrow m_2Q = (m_1 + m_2)E^1_{\kappa\iota\nu} \Longrightarrow E^1_{\kappa\iota\nu} = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}Q$$

και ανάλογα $\Longrightarrow E^2_{\kappa\iota\nu} = \dfrac{m_1}{(m_1 + m_2)}Q$

Όταν υπάρχουν 2 μόνο σωματίδια η υπάρχουσα ενέργεια μοιράζεται πάντοτε με τον ίδιο τρόπο.

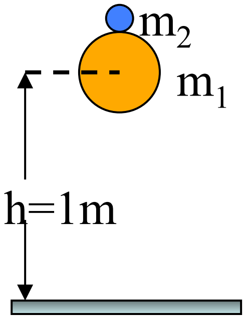
Το ελαφρύτερο σωματίδιο παίρνει το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας

Διατήρηση Ορμής – Κρούσεις – Παράδειγμα

Υποθέστε ότι κρατάτε μια μικρή μπάλα μάζας m_2 ακριβώς πάνω σε μια άλλη μπάλα μάζας m_1 (όπου $m_1 >> m_2$). Οι μπάλες είναι σε επαφή και βρίσκονται σε ύψος $h=1m$ πάνω από το δάπεδο. Αφήστε τις δυο μπάλες ταυτόχρονα να πέσουν στο πάτωμα. Βρείτε το ύψος στο οποίο θα αναπηδήσει η μικρή μπάλα;

Υποθέστε ότι όλες οι κρούσεις είναι τελείως ελαστικές και ακόμα ότι πρώτα χτυπά η μεγάλη μπάλα και αναπηδώντας συναντά τη μικρή που έρχεται ακριβώς πίσω της.

Λύση



Από διατήρηση της ενέργειας για την μεγάλη μπάλα έχουμε:

$$E_1^i = E_2^f \Rightarrow m_1 g h + 0 = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + 0 \Rightarrow \boxed{\upsilon_1 = -\sqrt{2gh}}$$ (θετική φορά προς τα πάνω)

Η μπάλα συγκρούεται με το έδαφος και αναπηδά με $V_1 = -\upsilon_1$

Η μάζα m_1 αναπηδά και συγκρούεται με την μικρή που έχει ταχύτητα $\upsilon_2 = \sqrt{2gh}$

Η μπάλα m_1 κινείται με αντίθετη ταχύτητα από την m_2. Η σχετική ταχύτητα της m_2 ως προς την m_1 θα είναι: $\upsilon_2^{\sigma\chi} = -\upsilon_2 + V_1 = -\upsilon_2 + (-\upsilon_2) = -2\upsilon_2$

Αφού $m_1 >> m_2$, μετά τη κρούση (m_1 με m_2) η m_2 έχει $V_2^{\sigma\chi} = -\upsilon_2^{\sigma\chi}$ ως προς τη m_1

Η m_1 όμως έχει ταχύτητα V_1 ως προς το έδαφος και άρα η ταχύτητα της m_2 ως προς το έδαφος είναι: $V_2^{\varepsilon\delta} = V_2^{\sigma\chi} + V_1 \Rightarrow V_2^{\varepsilon\delta} = 3\upsilon_2$

Διατήρηση της ενέργειας: $\frac{1}{2} m_2 (V_2^{\varepsilon\delta})^2 + 0 = m_2 g h' \Rightarrow h' = \frac{(V_2^{\varepsilon\delta})^2}{2g} \Rightarrow h' = \frac{(3\sqrt{2gh})^2}{2g} \Rightarrow h' = 9h = 9m$

Διαφορετικά…

Από τις εξισώσεις των ταχυτήτων για ελαστική κρούση σε 1-Δ

$$\mathrm{v}_1 = \upsilon_1\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) + \upsilon_2\left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

$$\mathrm{v}_2 = \upsilon_1\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) + \upsilon_2\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

Οι εξισώσεις αυτές αναφέρονται στην κρούση της μπάλας m_1 με την m_2. Πριν την κρούση η ταχύτητα της m_1 είναι $\upsilon_1=V_1$ και της m_2 είναι $\upsilon_2=-V_1$ Αντικαθιστώντας στην 2η εξίσωση βρίσκουμε ότι μετά την κρούση η μπάλα 2 έχει ταχύτητα ($m_1>>m_2$):

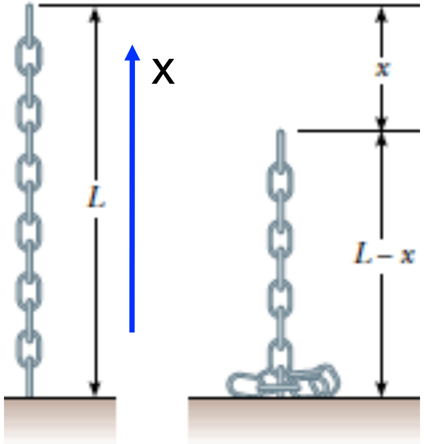
$$\mathrm{v}_2 = \upsilon_1\left(\frac{2m_1}{m_1 + \underbrace{m_2}_{\sim 0}}\right) + \upsilon_2\left(\frac{\cancel{m_2} - m_1}{m_1 + \underbrace{m_2}_{\sim 0}}\right) \approx 2\upsilon_1 - \upsilon_2 \Rightarrow \mathrm{v}_2 = 2\upsilon_1 - (-\upsilon_1) = 3\upsilon_1$$

Αν είχαμε 3 μπάλες με μάζες η μια μικρότερη της άλλης (basketball, tennis, ping-pong)

- Το πρόβλημα είναι ίδιο, χρειάζεται να εξετάσουμε τις σχετικές ταχύτητες της 2 με την 1, της 3 με τη 2 και τέλος της 3 με το έδαφος.
- ✓ Βρήκαμε πριν ότι η μπάλα 2 κινείται με ταχύτητα $3\upsilon_1$ ως προς το έδαφος.
- ✓ Η μπάλα 3 πριν τη κρούση με την 2 έχει ταχύτητα $\upsilon_3=-\upsilon_1$ ως προς το έδαφος και επομένως ταχύτητα $\upsilon_3^{\sigma\chi} = 4\upsilon_1$ ως προς τη μπάλα 2.
- ✓ Μετά την κρούση θα κινείται με ταχύτητα $V_3^{\sigma\chi} = -4\upsilon_1$ ως προς τη μπάλα 2.
- ➢ Η μπάλα 2 όμως έχει ταχύτητα $3\upsilon_1$ ως προς το έδαφος και επομένως η μπάλα 3 θα έχει ταχύτητα $V_3 = 3\upsilon_1 - (-4\upsilon_1) = 7\upsilon_1$ ως προς το έδαφος !!!
- ➢ Αντικαθιστώντας στην εξίσωση διατήρησης ενέργειας:

$$h' = \frac{(V_3^{\varepsilon\delta})^2}{2g} = \frac{(7\upsilon_1)^2}{2g} = \frac{49(2gh)}{2g} \Rightarrow h' = 49h \quad !!!$$

Παράδειγμα ορμής και αλυσίδας - ζυγαριάς



Αλυσίδα μήκους L και μάζας M αφήνεται από ηρεμία να πέσει σε μια ζυγαριά. Να βρεθεί η ένδειξη της ζυγαριάς (η δύναμη που ασκεί η ζυγαριά στην αλυσίδα) καθώς η αλυσίδα πέφτει. Αρχικά το κατώτερο άκρο της αλυσίδας μόλις ακουμπά την ζυγαριά

Λύση

Έστω η αλυσίδα έχει πέσει κατά μια απόσταση x.

Πάνω στη ζυγαριά υπάρχει μάζα $m = \sigma x$ και η ένδειξη της ζυγαριάς προέρχεται από το βάρος της μάζας αυτής $F_g = (\sigma x) g$

Στη δύναμη αυτή θα πρέπει να προσθέσουμε τη δύναμη που αναπτύσετε στη ζυγαριά για να σταματήσει κάθε τμήμα της αλυσίδας, μάζας dm που πέφτει πάνω της:

$dm = \sigma dx$

Αλλά $dx = |\upsilon| dt = -\upsilon dt$

$\Rightarrow dm = -\sigma \upsilon_x dt$

η ταχύτητα έχει αρνητική φορά

$$F_p = \frac{dp}{dt} = \frac{0 - \upsilon_x dm}{dt} = \frac{-\upsilon_x(-\sigma \upsilon_x dt)}{dt}$$

$$\Rightarrow F_p = \sigma \upsilon_x^2$$

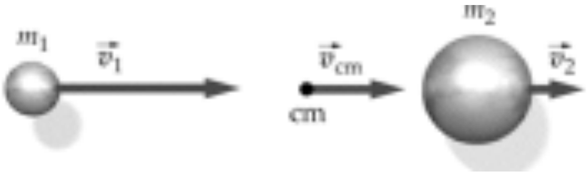
Η μάζα dm που έχει πέσει κατά ύψος x έχει ταχύτητα: $\frac{1}{2} dm_x \upsilon_x^2 = dm_x g x \Rightarrow \upsilon_x = \sqrt{2gx}$

Η συνολική ένδειξη της ζυγαριάς θα είναι: $F_{tot} = F_g + F_p \Rightarrow F_{tot} = \sigma x g + 2\sigma x g$

$\Rightarrow F_{tot} = 3\sigma x g$ παρατηρούμε ακόμα ότι: $F_p = 2F_g$

Σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας

Έστω 2 σώματα μάζας m_1 και m_2 κινούμενα με ταχύτητες $υ_1$ και $υ_2$

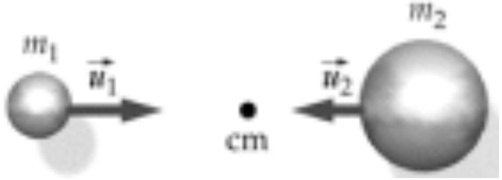


Η ταχύτητα του ΚΜ δίνεται από τη σχέση: $\vec{\upsilon}_{cm} = \dfrac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}$

Σε ένα σύστημα το οποίο συνδέεται με το ΚΜ οι ταχύτητες των μαζών είναι:

$\vec{u}_1 = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_{cm}$ $\qquad$ $\vec{u}_2 = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_{cm}$

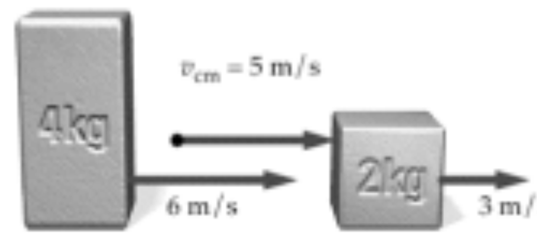
Στο σύστημα αυτό η ταχύτητα του ΚΜ είναι: $\vec{u}_{cm} = 0$



Από τη στιγμή που η ταχύτητα του ΚΜ είναι 0 τότε: $\vec{P}_{cm} = 0 \Rightarrow \vec{P}_1^{KM} = -\vec{P}_2^{KM}$

Παράδειγμα

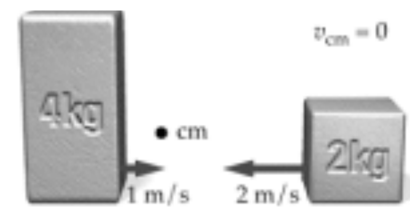
Ένα κιβώτιο μάζας m_1 = 4kg κινείται με ταχύτητα u_1=6m/s και συγκρούεται ελαστικά με κιβώτιο μάζας m_2=2kg που κινείται με ταχύτητα u_2=3m/s. Τα σώματα κινούνται προς τα δεξιά. Να βρεθούν οι ταχύτητές τους μετά την κρούση μετατρέποντας τις ταχύτητές τους στο σύστημα του ΚΜ



Βρίσκουμε πρώτα τη ταχύτητα του ΚΜ: $\vec{\upsilon}_{cm} = \dfrac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{4\times 6 + 2\times 3}{2+4} = 5m/s$

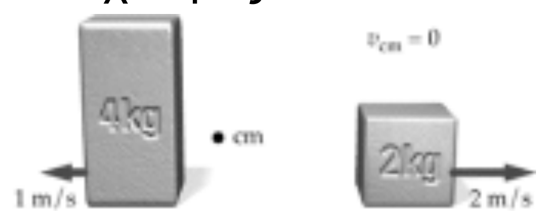
Μετασχηματίζουμε τις αρχικές ταχύτητες των σωμάτων ως προς ΚΜ:

$\vec{u}^{\,cm}_{1i} = \vec{\upsilon}_{1i} - \vec{\upsilon}_{cm} = 6-5 = 1m/s$ και $\vec{u}^{\,cm}_{2i} = \vec{\upsilon}_{2i} - \vec{\upsilon}_{cm} = 3-5 = -2m/s$



Μετά τη κρούση τα 2 σώματα έχουν ταχύτητες:

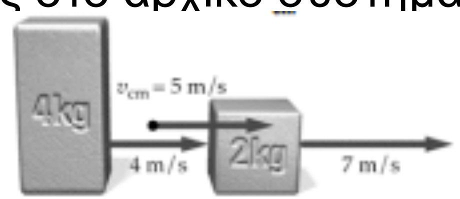
$\vec{u}^{\,cm}_{1f} = -1m/s$ και $\vec{u}^{\,cm}_{2f} = 2m/s$



Μετασχηματίζουμε τις τελικές ταχύτητες στο αρχικό σύστημα αναφοράς:

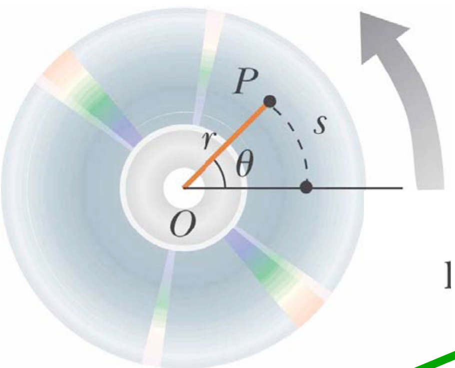
$\vec{\upsilon}_{1f} = \vec{u}^{\,cm}_{1f} + \vec{\upsilon}_{cm} = -1+5 = 4m/s$ και

$\vec{\upsilon}_{2f} = \vec{u}^{\,cm}_{2f} + \vec{\upsilon}_{cm} = 2+5 = 7m/s$



Περιστροφή στερεού σώματος - Εισαγωγικά

Θεωρήστε μιά χάντρα η οποία κινείται σε μια κυκλική περιφέρεια.



Διαγράφει μια γωνιακή μετατόπιση θ σε χρόνο t.
Η χάντρα διαγράφει την απόσταση *S*

$$\frac{S}{t} = \frac{r\theta}{t} = \omega r$$

Μέση γωνιακή ταχύτητα

Μέση εφαπτομενική ταχύτητα

$$\bar{\omega} \equiv \frac{\theta}{t} \Rightarrow \bar{\mathrm{v}} = \bar{\omega} r$$

Μπορούμε ακόμα να πούμε ότι $\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$

Επομένως ορίζουμε την στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

Και επομένως στιγμιαία εφαπτομενική ταχύτητα $\mathrm{v} = \omega r$ για r = σταθ

Περιστροφή στερεού σώματος - Εισαγωγικά

- Παίρνοντας την προηγούμενη σχέση, $\mathrm{v} = \omega r$ γράφουμε:

$$\frac{dS}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d^2S}{dt^2} = r\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d\mathrm{v}}{dt} = r\left(\frac{d\omega}{dt}\right) \Rightarrow \boxed{a_{\varepsilon\phi} = r\alpha}$$

Εφαπτομενική επιτάχυνση

Γωνιακή επιτάχυνση

Ξέρουμε ότι σε σώμα που κινείται σε κυκλική τροχιά ενεργεί η κεντρομόλος επιτάχυνση η οποία έχει φορά ΠΑΝΤΑ προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και ευθύνεται για την αλλαγή της διεύθυνσης της ταχύτητας:

$$a_{\mathrm{r}} = \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{r}} = \frac{(\omega r)^2}{\mathrm{r}} \Rightarrow \boxed{a_r = \omega^2 r}$$

Περιστροφή στερεού σώματος - Εισαγωγικά

- Η ολική γραμμική επιτάχυνση ενός σώματος που εκτελεί περιστροφική κίνηση είναι:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\varepsilon\phi} + \vec{a}_r \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_{\varepsilon\phi}^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + \omega^4 r^2} \Rightarrow \boxed{|\vec{a}| = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}}$$

- Συνοψίζοντας, στη περιστροφική κίνηση έχουμε εξισώσεις κίνησης για σταθερή γωνιακή επιτάχυνση και σταθερή εφαπτομενική επιτάχυνση:

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + a_{\varepsilon\phi} t$$

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}_0^2 + 2a_{\varepsilon\phi} l$$

$$\omega r = \omega_0 r + r\alpha t \Rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

Περιστροφή στερεού σώματος - Εισαγωγικά

- Υπάρχει επομένως μια πλήρης αντιστοιχία μεταξύ των εξισώσεων της ευθύγραμμης κίνησης με **σταθερή** γραμμική επιτάχυνση και της περιστροφικής με **σταθερή** γωνιακή επιτάχυνση

Ευθύγραμμη κίνηση με σταθερή γραμμική επιτάχυνση	Περιστροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση
α = σταθ.	α= σταθ
$v = v_0 + \alpha t$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + v_0 t + ½ \alpha t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + ½ \alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2\alpha(x-x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \alpha(\theta-\theta_0)$
$x - x_0 = ½ (v+v_0)t$	$\theta - \theta_0 = ½ (\omega+\omega_0)t$

Περιστροφική κίνηση στερεών - Εισαγωγικά

- Η απόδειξη των εξισώσεων κίνησης για την στροφική κίνηση είναι απλή:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha dt = d\omega \Rightarrow \alpha \int dt = \int d\omega \Rightarrow \alpha t = \omega - \omega_0$$

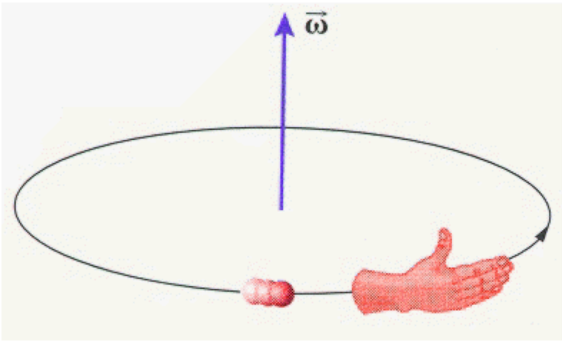
- Αν ολοκληρώσουμε και πάλι την τελευταία σχέση

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt \Rightarrow \int d\theta = \int \omega dt = \int (\omega_0 + \alpha t) dt \Rightarrow \theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Περιστροφική κίνηση στερεών - Εισαγωγικά

- Το μέγεθος ω είναι διανυσματικό όταν η γωνία θ μετριέται σε ακτίνια.

  Η διεύθυνσή του είναι παράλληλη προς τον άξονα περιστροφής και η φορά του ορίζεται σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία ή χεριού:



Ο δείκτης του χεριού ακολουθεί την φορά του θ ο αντίχειρας δείχνει τη φορά του ω

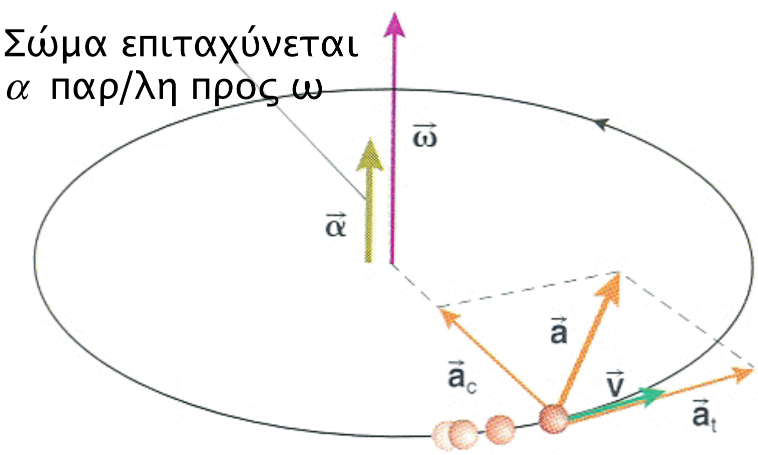
- Όταν εξετάσαμε τη κυκλική κίνηση είδαμε ότι η διεύθυνση του ω ορίζεται από την διανυσματική εξίσωση

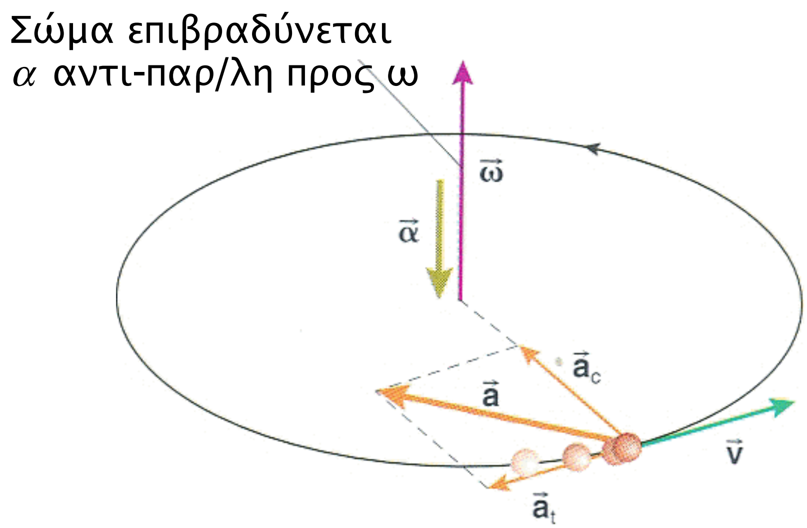
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

- Η γωνιακή επιτάχυνση α έχει την ίδια διεύθυνση με αυτή του ω
  Αν η φορά της είναι ίδια με της ω, η περιστροφή αυξάνει ενώ στην αντίθετη περίπτωση επιβραδύνεται.

Περιστροφική κίνηση στερεού - Εισαγωγικά

- Στην περίπτωση περιστροφής γύρω από σταθερό άξονα επειδή η γωνία θ που σαρώνεται είναι ίδια για όλα τα σημεία, έπεται ότι:
  - Όλα τα σημεία του στερεού περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα και γωνιακή επιτάχυνση
  - Η γραμμική τους ταχύτητα δεν είναι ίδια αφού βρίσκονται σε διαφορετικές αποστάσεις από τον άξονα περιστροφής.





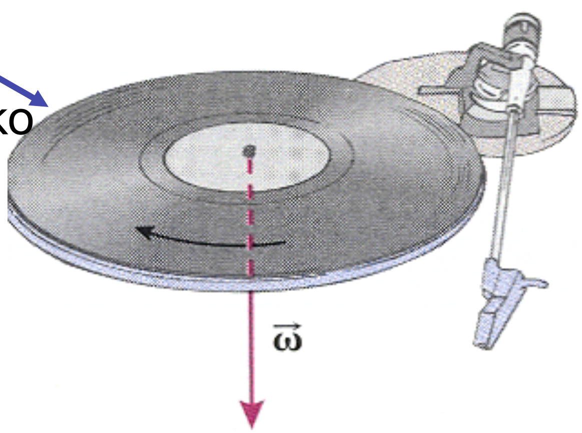
Παράδειγμα – Γωνιακή ταχύτητα

CD player: Η μουσική είναι γραμμένη σε αύλακα κατά μήκος μιας σπειροειδούς διαδρομής 5.4km. Το laser παρακολουθεί την αύλακα με σταθερή γραμμική ταχύτητα v = 1.2m/s. Η τροχιά ξεκινά σε ακτίνα r = 2.3cm και τελειώνει σε ακτίνα r = 5.9cm.

Ποια είναι η αρχική και τελική γωνιακή ταχύτητα?

- Για να κρατήσουμε την γραμμική ταχύτητα σταθερή σημαίνει ότι η γωνιακή ταχύτητα ω μεταβάλλεται

παλιομοδίτικο



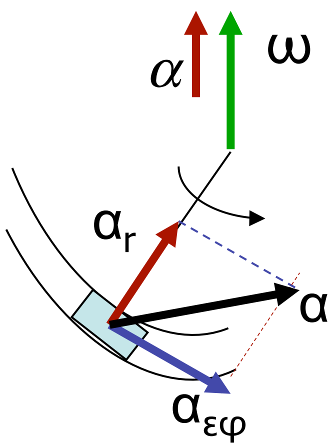
$$\omega_i = \frac{\mathrm{v}}{r_i} = 52.2 rad/s$$

$$\omega_f = \frac{\mathrm{v}}{r_f} = 20.3 rad/s$$

Παράδειγμα – Γωνιακή επιτάχυνση

- Αγωνιστικό αυτοκίνητο κάνει μια στροφή ακτίνας 50m με γωνιακή ταχύτητα ω = 0.6rad/s και γωνιακή επιτάχυνση α = 0.20rad/s^2.

  Ποιες οι τιμές της γραμμικής ταχύτητα v, α_r, $\alpha_{\varepsilon\varphi}$, και ολικής γραμμικής επιτάχυνσης α ?



$$\mathrm{v} = \omega r = 30 m/s$$

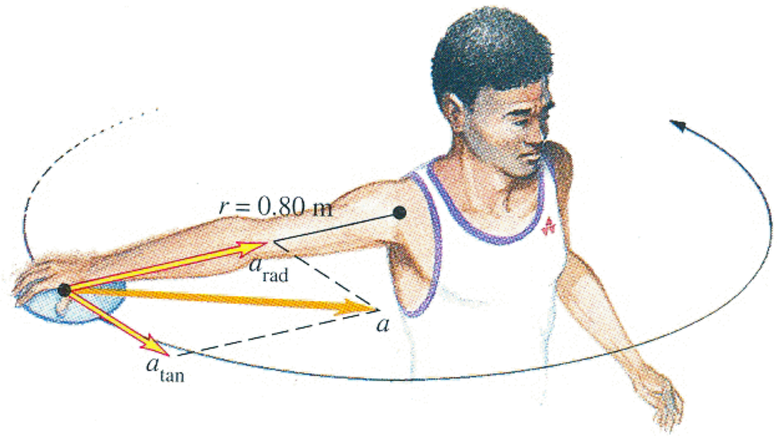
$$a_r = \frac{\mathrm{v}^2}{r} = 18 m/s^2$$

$$a_{\varepsilon\phi} = r\alpha = 10 m/s^2$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_{\varepsilon\phi}^2} = 21 m/s^2$$

$$\tan\theta = \frac{a_r}{a\varepsilon\phi} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{a_r}{a_{\varepsilon\phi}} = 61^0$$

Παράδειγμα – Ρίψη δίσκου



Ένας δισκοβόλος στρέφεται με γωνιακή επιτάχυνση α=50rad/s^2, κινώντας το δίσκο σε κύκλο ακτίνας 0.80cm.

Θεωρούμε το χέρι του σα στερεό σώμα κι' έτσι η ακτίνα είναι σταθερή.

Ποια η εφαπτομενική και ακτινική επιτάχυνση του δίσκου και ποιο το μέγεθος της επιτάχυνσης τη στιγμή που η γωνιακή ταχύτητα είναι 10 rad/s.

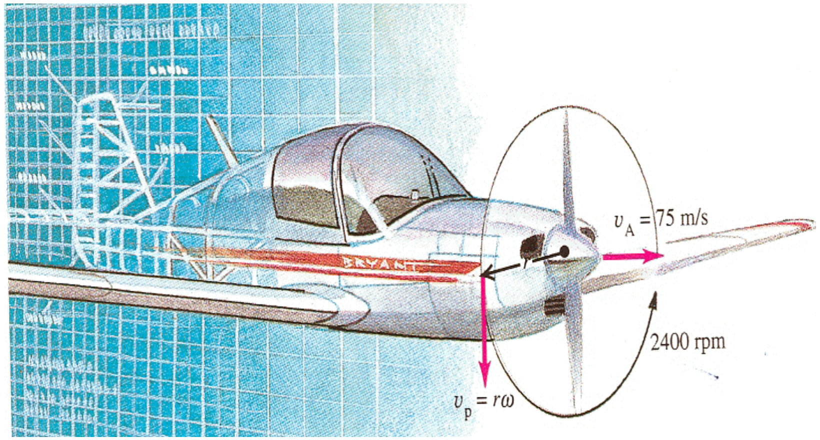
Από τη στιγμή που ο δίσκος κινείται σε κυκλική τροχιά η εφαπτομενική επιτάχυνση θα είναι

$$a_{\varepsilon\phi} = r\alpha = (50rad/s^2)(0.8rad) = 40m/s^2$$

$$a_{\mathrm{r}} = \omega^2 r = (10rad/s)^2(0.8rad) = 80m/s^2$$

$$\alpha = \sqrt{a_r^2 + a_{\varepsilon\phi}^2} = 89m/s^2$$

Παράδειγμα – Προπέλα αεροπλάνου



Σχεδιασμός της προπέλας ενός αεροπλάνου: Θέλετε να κινείται με 2400rpm. Η ταχύτητα του αεροπλάνου προς τα εμπρός πρέπει να είναι 75m/s, ενώ η ταχύτητα των άκρων της προπέλας δεν πρέπει να ξεπερνούν τα 270m/s

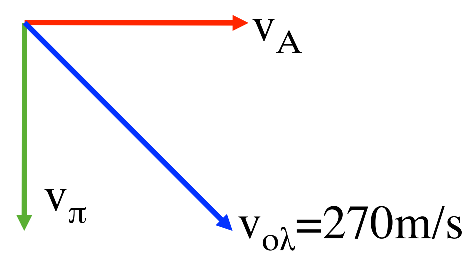
Ποια η μέγιστη ακτίνα που θα πρέπει να έχει η προπέλα? (β) με αυτή την ακτίνα ποια είναι η επιτάχυνση των άκρων της προπέλας?

Λύση

Μετατρέπουμε πρώτα τα rpm σε rad/s.

$$\omega = 2400 rpm = 2400\left(\frac{rev}{\min}\right)\left(\frac{2\pi}{1\ rev}\right)\left(\frac{1\min}{60s}\right) = 251 rad/s$$

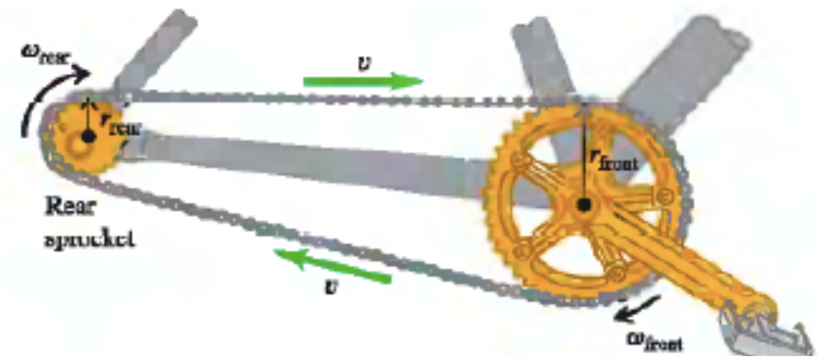
Η εφαπτομενική ταχύτητα των άκρων της προπέλας, v_P, είναι κάθετη στην εμπρόσθια ταχύτητα του αεροπλάνου, v_A



$$\vec{v}_{o\lambda} = \vec{v}_p + \vec{v}_A \Rightarrow v_{o\lambda} = \sqrt{\omega^2 r^2 + v_A^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{v_{o\lambda}^2 - v_A^2}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{270^2 - 75^2}{251^2}} = 1.03m$$

Η γωνιακή ταχύτητα της προπέλας είναι σταθερή, επομένως υπάρχει μόνο κεντρομόλος επιτάχυνση: $a_r = \omega^2 r = 6.5\times 10^4 m/s^2 \Rightarrow F = 6.5\times 10^4 N$

Παράδειγμα – Δίσκοι ταχυτήτων ποδηλάτου



Πως σχετίζονται τα «δόντια» των δίσκων των ταχυτήτων του ποδηλάτου με τις γωνιακές ταχύτητες των δίσκων

Η αλυσίδα δεν γλιστρά και δεν επιμηκύνεται πάνω στους δίσκους και επομένως έχει την ίδια εφαπτομενική ταχύτητα

Επομένως: $\upsilon = \omega_\varepsilon r_\varepsilon = \omega_\pi r_\pi \Rightarrow \dfrac{\omega_\pi}{\omega_\varepsilon} = \dfrac{r_\varepsilon}{r_\pi}$ (1)

Τα δόντια είναι ισοκατανεμημένα στην περιφέρεια των δίσκων έτσι ώστε η αλυσίδα να κουμπώνει το ίδιο σε κάθε δίσκο:

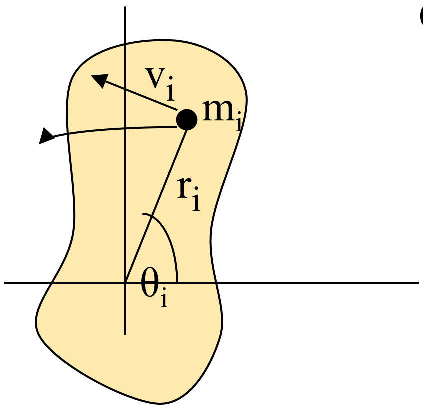
$$\frac{2\pi r_\pi}{N_\pi} = \frac{2\pi r_\varepsilon}{N_\varepsilon} \Rightarrow \frac{r_\pi}{N_\pi} = \frac{r_\varepsilon}{N_\varepsilon} \Rightarrow \frac{r_\varepsilon}{r_\pi} = \frac{N_\varepsilon}{N_\pi} \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε: $\Rightarrow \dfrac{\omega_\pi}{\omega_\varepsilon} = \dfrac{N_\varepsilon}{N_\pi}$

Επομένως για συγκεκριμένη γωνιακή ταχύτητα με την οποία κάνουμε pedal, ω_ε, ο πίσω δίσκος έχει τη μέγιστη γωνιακή ταχύτητα όταν ο λόγος N_ε/N_π είναι μέγιστος, δηλαδή όταν χρησιμοποιούμε μπροστά το δίσκο με το μεγαλύτερο αριθμό «δοντιών» και πίσω το δίσκο με το μικρότερο αριθμό «δοντιών»

Ενέργεια στην περιστροφική κίνηση

- Ένα περιστρεφόμενο στερεό αποτελεί μια μάζα σε κίνηση. Επομένως υπάρχει κινητική ενέργεια.



Θεωρείστε ένα στερεό σώμα περιστρεφόμενο γύρω από σταθερό άξονα.

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Αθροίζοντας ως προς όλα τα σωμάτια που απαρτίζουν το στερεό θα έχουμε:

$$\sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

όλα έχουν το ίδιο ω

Η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\sum_i K_i = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 \Rightarrow \boxed{K_{tot} = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

Ανάλογο του

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

Ορίζουμε σα ροπή αδράνειας: $I = \sum_i m_i r_i^2$

- Η ροπή αδράνειας, I, είναι το περιστροφικό ανάλογο της μάζας m.

  Δηλαδή, είναι πολύ πιο δύσκολο να προκαλέσεις περιστροφή σ' ένα σώμα όταν η ροπή αδράνειας γίνεται μεγαλύτερη