ΦΥΣ 145 **7ο QUIZ - 30 λεπτά** **29/03/2021**

Άσκηση [15μ]

Θεωρήστε την περίπτωση ενός ποδηλάτη που αγωνίζεται σε κάποιο αγώνα ταχύτητας σε οριζόντια πίστα. Θεωρήστε αρχικά ότι δεν υπάρχει αντίσταση του αέρα. Ο ποδηλάτης καταναλώνει ισχύ ώστε να κινηθεί. Όπως ξέρετε η ισχύς δίνεται από τη σχέση: $P = \frac{dW}{dt} = F\upsilon$. Υποθέστε ότι ο ποδηλάτης αναπτύσσει σταθερή ισχύ για μια παρατεταμένη χρονική περίοδο από τη χρονική στιγμή *t*=0 στη χρονική στιγμή *t'*. Κινούμενος σε οριζόντια πίστα, η ισχύς αυτή πηγαίνει για αύξηση της κινητικής του ενέργειας $E = \frac{m\upsilon^2}{2}$.

(**α**) Γράψτε την εξίσωση της επιτάχυνσης και της ταχύτητας. [**4μ**]

(**β**) Θεωρώντας ότι η ισχύς που καταναλώνει ο ποδηλάτης είναι P=*400W* και η αρχική του ταχύτητα είναι $\upsilon_0 = \frac{4m}{s}$, να βρείτε την ταχύτητά του μετά από μία ώρα αγώνα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Euler-Cromer. Θεωρήστε χρονικό βήμα *dt* = 0.1s και μάζα ποδηλάτη-ποδήλατου ίση με 70*kg*. [**4μ**]

(**γ**) Θεωρήστε τώρα ότι υπάρχει αντίσταση του αέρα που είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας, $F = -DA\rho\upsilon^2$, όπου *D* ο συντελεστής αντίστασης, *ρ* η πυκνότητα του αέρα και *A* η μετωπική επιφάνεια του συστήματος ποδηλάτη-ποδήλατου. Θεωρήστε ακόμα ότι *D*=0.45, *A* = 0.33m^2 και *ρ* = 1.204kg/m^3. Γράψτε την εξίσωση της επιτάχυνσης [**3μ**]

(**δ**) Βρείτε την ταχύτητα του ποδηλάτη μετά από μία ώρα αγώνα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο RK2 και χρονικό βήμα *dt* =0.1s. [**4μ**]

***Απ*: (α)** Υποθέτοντας οριζόντια πίστα, η επιτάχυνση του ποδηλάτη είναι: $\frac{du}{dt} = \frac{F}{m}$ όπου *m* είναι η μάζα του συστήματος και *F* η δύναμη που βάζει ο ποδηλάτης. Η δύναμη που βάζει ο ποδηλάτης είναι δύσκολο να βρεθεί οπότε δουλεύοντας με την ισχύ *P* θα έχουμε: $P = \frac{dE}{dt}$. Η ισχύς αυξάνει την κινητική ενέργεια του συστήματος, οπότε: $P = \frac{1}{2}\frac{d(mu^2)}{dt} = mu\frac{du}{dt}$. Επομένως θα έχουμε ότι η επιτάχυνση μπορεί να γραφεί ως: $\boldsymbol{\frac{du}{dt} = \frac{P}{mu}}$.

Λύνοντας την εξίσωση θα έχουμε: $udu = \frac{P}{m}dt \Rightarrow \int_{u_0}^{u} udu = \frac{P}{m}\int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{2}(u^2 - u_0^2) = \frac{P}{m}t \Rightarrow$

$u^2 = u_0^2 + \frac{2P}{m}t \Rightarrow u = \sqrt{u_0^2 + \frac{2P}{m}t}$

Από την παραπάνω εξίσωση βλέπουμε ότι καθώς ο χρόνος αυξάνει η ταχύτητα του ποδηλάτη αυξάνει συνεχώς και για $t \to \infty$ απειρίζεται που προφανώς δεν έχει νόημα.

(**δ**) Στην περίπτωση που λάβουμε υπόψη την αντίσταση του αέρα ή τριβές, η επιτάχυνση διαφοροποιείται εφόσον θα πρέπει να προσθέσουμε την επιτάχυνση εξαιτίας της εξωτερικής δύναμης. Η δύναμη εξαιτίας της αντίστασης του αέρα θα είναι: $F_D = D\rho Au^2$. Η επιτάχυνση επομένως στην περίπτωση αυτή διαφοροποιείται σε:

$\frac{du}{dt} = \frac{P}{mu} - \frac{F_D}{m} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{du}{dt} = \frac{P}{mu} - \frac{D\rho A}{m}u^2}$

Το πρόγραμμα για τις δύο περιπτώσεις ακολουθεί στην επόμενη σελίδα

```python
#!/usr/bin/python3

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

tmax = 60*60 # 1 wra
dt   = 0.1   # time step
u0   = 4.0   # arxiki taxitita
mass = 70    # mass podilati-podilatou
P    = 400   # power

D    = 0.50
A    = 0.33
rho  = 1.204
DFactor = D * rho * A
u  = u0               # velocity gia Euler-Cromer
v  = u0               # velocity gia RK2
t  = 0
time = []
velo_ec = []
velo_rk = []
while t <= tmax:
    #================
    # Euler - Cromer
    #================
    accel_1  = P/(mass*u)        # Epitaxynsi stin arxi tou dt
    u_ec     = u + accel_1 * dt  # Vima Euler sto telos tou dt
    accel_ec = P/(mass*u_ec)     # Acceleration sto telos tou dt
    u = u + accel_ec * dt        # Vima Euler sto tou dt me tin
                                 # epitaxunsi sto telos tou dt
    t = t + dt
    velo_ec +=[u*3600/1000]      # km/h
    #========================
    # Runge-Kutta 2is taksis
    #========================
    accel_rk = P/(mass * v) - (DFactor/mass)*v**2         #Epitaxynsi stin arxi tou dt
    v_md     = v + accel_rk * dt/2                        #Miso vima Euler sti mesi toy dt
    accel_md = P/(mass * v_md) - (DFactor/mass)*v_md**2   #Epitaxynsi sti mesi tou dt
    v = v + accel_md * dt                                #Taxutita sto telos tou dt me tin
                                                          #epitaxynsi sto meso tou dt
    velo_rk  +=[v*3600/1000]      #km/h
    time +=[t]

plt.figure()
plt.subplot(121)
plt.plot(time,velo_ec,'b-',label='Euler-Cromer')
plt.xlabel('time (s)')
plt.ylabel('velocity (km/h)')
plt.xlim(0,100)
plt.ylim(0,120)
plt.legend()
plt.subplot(122)
plt.plot(time,velo_rk,'r--',label='Runge-Kutta 2nd order')
plt.xlabel('time (s)')
plt.ylabel('velocity (km/h)')
plt.xlim(0,100)
plt.ylim(0,55)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```