ΦΥΣ. 131
Τελική εξέταση: 10-Δεκεμβρίου-2005

Πριν αρχίσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητας).

Ονοματεπώνυμο	**Αριθμός ταυτότητας**

Σας δίνονται 20 ισότιμα προβλήματα (10 βαθμοί το καθένα).

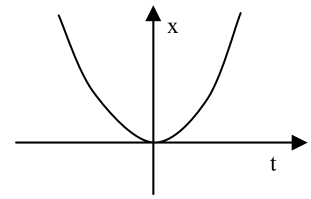
Προσπαθήστε να δείξετε την σκέψη σας και να εξηγήσετε όσο το δυνατόν πιο καθαρά για ποιό λόγο κάνετε ότι γράφετε. Γράψτε καθαρά διαγράμματα με δυνάμεις, ταχύτητες, επιταχύνσεις.

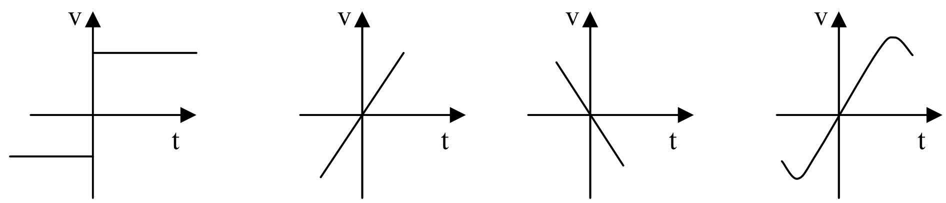
Η δεύτερη σελίδα περιέχει τυπολόγιο με τύπους που ίσως σας φανούν χρήσιμοι.

ΑΠΑΓΟΡΕΥΟΝΤΑΙ: ΨΙΘΥΡΟΙ, ΧΡΗΣΗ ΣΗΜΕΙΩΣΕΩΝ, ΒΙΒΛΙΩΝ, ΚΙΝΗΤΩΝ Η ΟΤΙΔΗΠΟΤΕ ΑΛΛΟ. ΟΙ ΠΑΡΑΒΑΤΕΣ ΘΑ ΜΗΔΕΝΙΣΤΟΥΝ ΑΥΤΟΜΑΤΑ

Έχετε συνολικά 3 ώρες αλλά δεν είναι περιοριστικός. Αν χρειαστείτε περισσότερο χρόνο θα σας δοθεί.
Καλή Επιτυχία

1. Το διπλανό σχήμα δείχνει τη γραφική παράσταση της μεταβολής της θέσης ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου. Ποιο από τα ακόλουθα διαγράμματα αντιπροσωπεύουν την μεταβολή της ταχύτητας του σώματος συναρτήσει του χρόνου; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



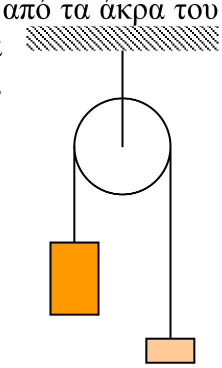


(α) (β) (γ) (δ)

Το διάγραμμα (β).

Από τη κλίση της καμπύλης στο σχήμα που είναι παραβολή, παρατηρούμε ότι για $t<0$ η κλίση είναι αρνητική και συνεχώς ελαττώνεται, ώσπου γίνεται μηδέν για $t=0$, και κατόπιν αυξάνει για $t>0$. Η καμπύλη είναι $x(t)=\alpha t^2$, $\alpha>0$
Επομένως $v(t)=\frac{dx}{dt}=2\alpha t$ επομένως γραμμική και αύξουσα

2. Μια μηχανή Atwood αποτελείται από μια αβαρή, λεία τροχαλία και ένα σχοινί από τα άκρα του οποίου κρέμονται δυο κιβώτια διαφορετικών μαζών m_1 και m_2. Αφού τα σώματα αφεθούν από την κατάσταση ισορροπίας, τι ισχύει από τα ακόλουθα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



(α) Η θέση του κέντρου μάζας του συστήματος δεν αλλάζει με το χρόνο.

(β) Η τάση του σχοινιού δεν παράγει έργο στο σύστημα.

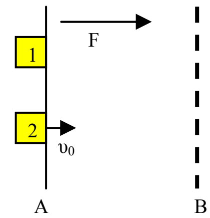
(γ) Η ολική ορμή του συστήματος είναι σταθερή με το χρόνο.

(δ) Η κινητική ενέργεια του συστήματος ελαττώνεται με το χρόνο.

(ε) Η μηχανική ενέργεια των δυο μαζών + γης αυξάνει με το χρόνο.

Η απάντηση είναι (β). Η τάση δεν παράγει έργο στο σύστημα γιατί αλληλοαναιρέται το έργο της στις 2 μάζες.

3. Θεωρήστε δύο όμοια τούβλα 1 και 2. Μια σταθερή δύναμη F ασκείται στο καθένα καθώς κινούνται από το σημείο A στο σημείο B. Η μόνη διαφορά μεταξύ τους είναι ότι το τούβλο 1 είναι αρχικά σε ηρεμία ενώ το τούβλο 2 αρχικά κινείται με ταχύτητα $υ_0$>0. Τι ισχύει από τα ακόλουθα και γιατί:



(α) Το τούβλο 1 έχει μεγαλύτερη αλλαγή στην κινητική του ενέργεια απ' ότι το τούβλο 2.

(β) Το τούβλο 2 έχει μεγαλύτερη αλλαγή στην κινητική του ενέργεια απ' ότι το τούβλο 1.

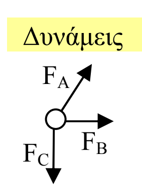
(γ) Το τούβλο 1 έχει μεγαλύτερη αλλαγή στην ορμή του απ' ότι το τούβλο 2.

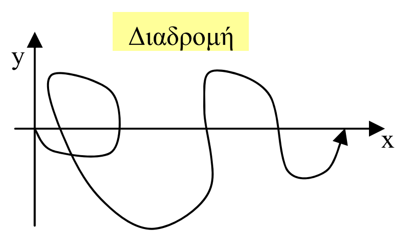
(δ) Το τούβλο 2 έχει μεγαλύτερη αλλαγή στην ορμή του απ' ότι το τούβλο 1.

(ε) Και τα δύο τούβλα έχουν την ίδια αλλαγή στην ορμή και κινητική τους ενέργεια.

Η απάντηση είναι η (γ). Τα δύο τούβλα δέχονται την ίδια δύναμη F και για την ίδια απόσταση. Άρα $W = \vec{F}\cdot\vec{s} = \Delta E_{κιν}^{(1)} = \Delta E_{κιν}^{(2)}$. Επομένως η αλλαγή στην κινητική ενέργεια είναι ίδια και για τα δύο τούβλα. Αλλά η αλλαγή στην ορμή θα είναι ίση με την ώθηση της δύναμης: $J = \vec{F}\cdot\Delta t = \Delta\vec{p}$. Επειδή το τούβλο (2) έχει αρχική ταχύτητα, δέχεται την επίδραση της δύναμης F για μικρότερο χρονικό διάστημα και επομένως έχει τη μικρότερη αλλαγή ορμής.

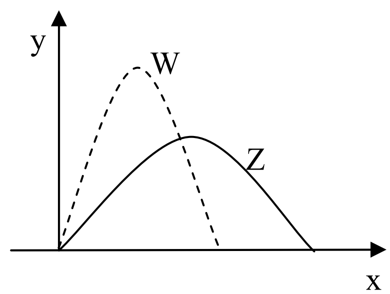
4. Μια μπάλα υπόκειται στην επίδραση των τριών σταθερών δυνάμεων του παρακάτω σχήματος. Αν η μπάλα διανύει τη διαδρομή που φαίνεται στο σχήμα, ποια από τις τρεις δυνάμεις παράγει το περισσότερο καθαρό έργο στην μπάλα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Μπορείτε να θεωρήσετε ότι τα μεγέθη των διανυσμάτων αντιπροσωπεύουν ακριβώς τα μεγέθη και διευθύνσεις των δυνάμεων.





Από τα δύο σχήματα παρατηρούμε ότι ουσιαστικά το σώμα παρουσιάζει μόνο οριζόντια μετατόπιση που προκαλεί η διεύθυνση της δύναμης F_B. Η δύναμη F_C είναι κατακόρυφη (y) και το σώμα δεν παρουσιάζει μετατόπιση σ'αυτή τη διεύθυνση. Επομένως το έργο της είναι μηδέν. Η διεύθυνση της F_A έχει μόνο μια μικρή συνιστώσα στη x-διεύθυνση και επομένως το έργο της είναι μικρότερο από το έργο της F_B. Άρα $W_{F_B} > W_{F_A} > W_{F_C}$

5. Πετάτε δύο αυγά (W και Z) από το ίδιο αρχικό σημείο σύμφωνα με τις τροχιές που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Η αρχική ταχύτητα του αυγού W, υ_w, σχηματίζει γωνία 75° με την οριζόντια διεύθυνση ενώ η αρχική ταχύτητα του αυγού Z, υ_z, σχηματίζει γωνία 30° με την οριζόντια διεύθυνση. Αν ο λόγος των βεληνεκών τους είναι $R_W/R_x = 5/8$ ποιος είναι ο λόγος των αρχικών τους ταχυτήτων υ_w/υ_x; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

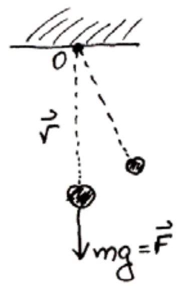


Ξέρουμε ότι το βεληνεκές για την πλάγια βολή δίνεται από: $x_{max} = \frac{v_0^2 \sin 2\phi}{2g}$

Επομένως: $\frac{R_W}{R_Z} = \frac{v_{0W}^2 \sin 2\phi_W}{v_{0Z}^2 \sin 2\phi_Z} \Rightarrow \frac{v_{0W}^2}{v_{0Z}^2} = \frac{R_W}{R_Z} \frac{\sin 2\phi_Z}{\sin 2\phi_W} = \frac{5}{8} \frac{\sin(2\cdot 30^\circ)}{\sin(2\cdot 75^\circ)} \Rightarrow$

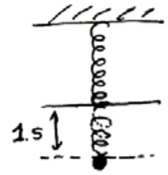
$\Rightarrow \left(\frac{v_{0W}}{v_{0Z}}\right)^2 = \frac{5}{8} \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \frac{5}{8}\sqrt{3} \Rightarrow \frac{v_{0W}}{v_{0Z}} = 1.04$

6. Ένα απλό εκκρεμές αποτελείται από μια μικρή μπάλα μάζας m που εξαρτάται από ένα νήμα μήκους L. Το άλλο άκρο του νήματος είναι στερεωμένο σε ένα σημείο O και το εκκρεμές αιωρείται γύρω από το σημείο αυτό. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του εκκρεμούς τη στιγμή που η μάζα έχει τη μέγιστη κινητική της ενέργεια; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Στο σημείο που το εκκρεμές έχει μέγιστη κινητική ενέργεια, το σώμα βρίσκεται στο σημείο ισορροπίας του (κατακόρυφη θέση)
Στη θέση αυτή η διεύθυνση του βάρους της μάζας περνά από το σημείο αιώρησης και επομένως η ροπή του βάρους είναι μηδέν: $\tau = \vec{r} \times m\vec{g} = \emptyset$
Αλλά $\frac{dL}{dt} = \tau \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 0.$

7. Ένα ελατήριο που κρέμεται κατακόρυφα από την οροφή ενός δωματίου, παρατηρείται ότι επιμηκύνεται κατά 1.5cm από το φυσικό του μήκος όταν κρεμάμε μια μπάλα μάζας m από το ελεύθερο άκρο του και αφήνεται να φθάσει σε στατική ισορροπία. Αν δώσουμε στη μπάλα μια μικρή ώθηση προς τα πάνω και την αφήσουμε να κινηθεί, ποια θα είναι η συχνότητα των ταλαντώσεων του συστήματος μάζας-ελατηρίου;



Στη νέα θέση ισορροπίας έχουμε: $\left.\begin{array}{l} F_{ελ} = B = mg \\ \text{αλλά} \quad F_{ελ} = kx \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow kx_0 = mg \Rightarrow \boxed{k = \frac{mg}{x_0}}$ (1) όπου $x_0 = 1.5cm$.

Η εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή είναι: $m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$ Αλλά $\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$

$\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ από την (1) $\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\cancel{m}g}{\cancel{m}x_0}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x_0}}} \Rightarrow f = 4.07Hz$

8. Ένα σώμα μάζας 2.0kg κινείται κατά μήκος του x-άξονα κάτω από την επίδραση μιας δύναμης F= –6x N, όπου x είναι η θέση του σώματος σε μέτρα. Αν η ταχύτητα του σώματος στη θέση x=3.0m είναι 8.0m/s, ποια είναι η ταχύτητα του σώματος στη θέση x = 4.0m;

Από το θεώρημα έργου-ενέργειας έχουμε: $W = \Delta E_{κιν} = \frac{1}{2}m\upsilon_f^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_i^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow W = \frac{1}{2}m(\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2)$ (1)

Αλλά $W = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f}(-6x)dx = -\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{6}^{3}x^2\Big|_{x_i}^{x_f} \Rightarrow W = -3(x_f^2 - x_i^2)$ (2)

Από (1) ∧ (2) $\Rightarrow -3(x_f^2 - x_i^2) = \frac{1}{2}m(\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2) \Rightarrow -6(x_f^2 - x_i^2) = m\upsilon_f^2 - m\upsilon_i^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon_f^2 = \frac{m\upsilon_i^2 - 6(x_f^2 - x_i^2)}{m} = \frac{\cancel{2}\cdot 8^2 - \cancel{6}^{3}(4^2 - 3^2)}{\cancel{2}} \Rightarrow \upsilon_f^2 = 64 - 21 \Rightarrow$

$\Rightarrow \upsilon_f = \sqrt{43} \Rightarrow \boxed{\upsilon_f = 6.56\,m/s}$

9. Μια πέτρα μάζας 5kg πέφτει ένα ύψος 15m υπό την επίδραση της βαρύτητας. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις του έργου που καταναλώνεται από την πέτρα και της ισχύος που αποδίδει η πέτρα συναρτήσει του χρόνου. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε κίνηση με σταθερή επιτάχυνση g. Επομένως $s = \upsilon_0 t + \frac{1}{2} g t^2$

Η αρχική ταχύτητα είναι $\emptyset$ και επομένως $s = \frac{1}{2} g t^2$ όπου $s = 15m$

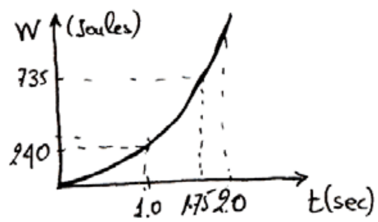
Ο χρόνος που χρειάζεται για να πέσει η πέτρα είναι: $t^2 = \frac{2s}{g} = \frac{30}{9.8} \Rightarrow t = 1.75s$.

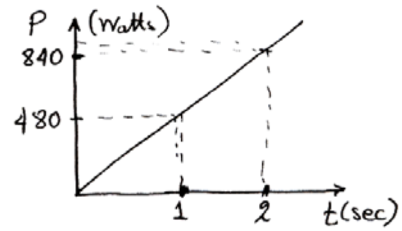
Η δύναμη που δρα στη πέτρα είναι το βάρος της $F = mg = 5 \cdot 9.8 = 49N = \text{σταθ.}$

Το έργο που παράγεται από την πέτρα είναι: $W = F \cdot s$ (1)

Η ισχύς που παράγεται από την πέτρα είναι: $P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = F \frac{\Delta s}{\Delta t} = F \cdot \upsilon = F g t$ (2)

Επομένως:





10. Αν η ακτίνα της γης ελαττώνονταν κατά 0.5% πόσο μικρότερη ή μεγαλύτερη θα ήταν η διάρκεια μιας ημέρας; (Υποθέστε ότι η γη είναι ομοιόμορφη σφαίρα με ροπή αδράνειας $I = 2/5MR^2$).

Το πρόβλημα είναι ίδιο με το πρόβλημα του αθλητή του πατινάζ που φέρνει τα χέρια του προς το σώμα του καθώς περιστρέφεται και αυξάνει τη γωνιακή του ταχύτητα, λόγω διατήρησης της στροφορμής:

$$L_i = L_f \Rightarrow I_0 \omega_0 = I_f \omega_f \Rightarrow \cancel{\tfrac{2}{5}} \cancel{M_0} R_0^2 \omega_0 = \cancel{\tfrac{2}{5}} \cancel{M_f} R_f^2 \omega_f \Rightarrow \omega_f = \left(\frac{R_0}{R_f}\right)^2 \omega_0$$

Αλλά $R_f = R_0 - 0.005 R_0$ άρα: $\omega_f = \left(\frac{\cancel{R_0}}{\cancel{R_0} - 0.005\cancel{R_0}}\right)^2 \omega_0 \Rightarrow \omega_f = \frac{\omega_0}{0.995^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \omega_f = 1.01 \omega_0 \quad (1)$$

Αλλά $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega_f = 1.01 \omega_0 \Rightarrow \frac{\cancel{2\pi}}{T_f} = 1.01 \frac{\cancel{2\pi}}{T_0} \Rightarrow T_f = \frac{T_0}{1.01} = \frac{1 \text{ ημέρα}}{1.01} \Rightarrow$

$$\Rightarrow T_f = \frac{24 \times 60 \times 60}{1.01} = \frac{86400}{1.01} \Rightarrow T_f = 85544.55 \text{sec}$$

$$\Delta T = T_i - T_f = 86400 - 85544.55 \Rightarrow \boxed{\Delta T = 855.45 \text{ sec} = 14.28 \text{ min}}$$

11. Ένα νόμισμα μάζας m βρίσκεται στην περιφέρεια ενός περιστρεφόμενου δίσκου ακτίνας R από το κέντρο του δίσκου. Το νόμισμα περιστρέφεται με την ίδια σταθερή ταχύτητα όπως και ο περιστρεφόμενος δίσκος. Ο συντελεστής της στατικής τριβής μεταξύ του νομίσματος και του δίσκου είναι $μ_s$. Να βρεθεί μια εξίσωση για την μέγιστη ταχύτητα περιστροφής, $υ_{max}$, του δίσκου ώστε το νόμισμα να παραμένει στο δίσκο.

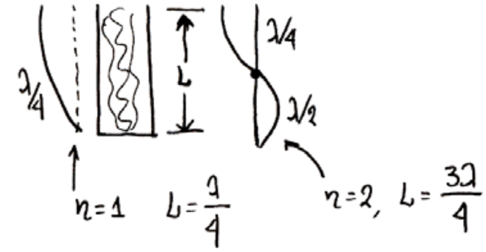
Όταν το νόμισμα είναι έτοιμο να φύγει από το δίσκο η δύναμη της στατικής τριβής γίνεται ίση με $f_{τρ} = μ_s N \Rightarrow$

$\Rightarrow f_{τρ} = μ_s m g$.

Η δύναμη αυτή παίζει το ρόλο της κεντρομόλου, οπότε:

$$F_{κεντ} = f_{τρ} \Rightarrow \cancel{m}\frac{υ_{max}^2}{R} = μ_s \cancel{m} g \Rightarrow \boxed{υ_{max} = \sqrt{μ_s g R}.}$$

12. Φυσώντας στο στόμιο ενός άδειου μπουκαλιού, προκαλείται μια σειρά στάσιμων ηχητικών κυμάτων που παράγουν ένα ακουστικό σήμα. Αν το μπουκάλι έχει μήκος 12cm, και ταχύτητα του ήχου στο δωμάτιο είναι 340m/s, ποια είναι η διαφορά στη συχνότητα μεταξύ δύο διαδοχικών αρμονικών συχνοτήτων που παράγονται στο μπουκάλι;



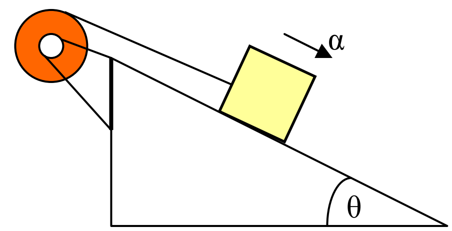
Ουσιαστικά το πρόβλημα είναι σαν αυτό δημιουργίας στάσιμων κυμάτων σε σωλήνα με ένα άκρο ανοικτό και ένα άκρο κλειστό: $f = \frac{υ}{λ}$; $υ = 340 m/s$.

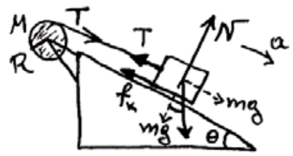
$f_n = \frac{υ}{\frac{4L}{n}}$ όπου $n = 1, 3, 5, \ldots$

Επομένως $f_2 - f_1 = \frac{υ}{\frac{4L}{3}} - \frac{υ}{4L} = \frac{3υ}{4L} - \frac{υ}{4L} \Rightarrow Δf = \frac{\cancel{2}υ}{\cancel{2}4L} = \frac{υ}{2L} \Rightarrow$

$$\Rightarrow Δf = \frac{340}{2\cdot 0.12} \Rightarrow \boxed{Δf = f_2 - f_1 = 1416.67\ Hz = 1.4\ kHz}$$

13. Το παρακάτω σχήμα δείχνει ένα κιβώτιο 18kg το οποίο μπορεί να γλιστρά προς το κατώτερο μέρος ενός κεκλιμένου επιπέδου το οποίο σχηματίζει γωνία 30° με την οριζόντια διεύθυνση. Το κιβώτιο εξαρτάται από το άκρο ενός σχοινιού αμελητέας μάζας. Το άλλο άκρο του σχοινιού είναι τυλιγμένο γύρω από ομοιόμορφη τροχαλία ακτίνας 0.25m και μάζας 6.0kg και μπορεί να ξετυλίγεται χωρίς να γλιστρά πάνω στην τροχαλία. Ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ του κιβωτίου και του κεκλιμένου επιπέδου είναι μ_k = 0.24. Ποιο είναι το μέγεθος της γραμμικής επιτάχυνσης του κιβωτίου; (Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας είναι $I=mr^2/2$.)





Για το κιβώτιο έχουμε: $\Sigma F_x = ma = mg\sin\theta - T - f$ (1)

$\Sigma F_y = 0 = mg\cos\theta - N \Rightarrow N = mg\cos\theta$

$f_k = \mu_k N = \mu_k mg\cos\theta$ (2)

Από (1) & (2) ⇒ $ma = mg\sin\theta - T - \mu_k mg\cos\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow ma = m(g\sin\theta - \mu_k g\cos\theta) - T$ (3)

Για την τροχαλία, η τάση T προκαλεί ροπή και γι'αυτό περιστρέφεται:

$\tau = TR = I\alpha$ δεν έχουμε ολίσθηση οπότε: $a = R\alpha$, έτσι: $T = \frac{I}{R}\frac{a}{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow T = \frac{M\cancel{R^2}}{2}\frac{a}{\cancel{R^2}} \Rightarrow T = \frac{M}{2}a$ (4)

Αντικαθιστώντας στην (3) ⇒ $ma = mg(\sin\theta - \mu_k\cos\theta) - \frac{M}{2}a \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \frac{2mg(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)}{2m + M} \Rightarrow a_1 = \frac{2\cdot18\cdot9.8\left(\frac{1}{2} - 0.24\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2\cdot18 + 6} \Rightarrow \boxed{a = 2.45\, m/s^2}$

14. Μια νυχτερίδα μπορεί να κινείται μέσα σε μια σπηλιά χρησιμοποιώντας υπερηχητικά τιτιβίσματα τα οποία έχουν συχνότητα 41.0kHz. Αν η νυχτερίδα κινείται κατευθείαν προς ένα τοίχο της σπηλιάς με ταχύτητα 0.12 φορές τη ταχύτητα του ήχου στον αέρα της σπηλιάς, ποια είναι η συχνότητα του ανακλώμενου τιτιβίσματος που ακούει η νυχτερίδα;

Αρχικά η νυχτερίδα είναι μια κινούμενη πηγή. Ο τοίχος ανακλά μια συχνότητα η οποία είναι μετατοπισμένη σύμφωνα με το φαινόμενο Doppler. Ο τοίχος δηλαδή παίζει αρχικά το ρόλο του ακροατή/παρατηρητή. Κατόπιν ο τοίχος γίνεται η πηγή του ανακλώμενου κύματος και η νυχτερίδα ο κινούμενος παρατηρητής.

$f' = f_{\text{νυχτ}}\left(\frac{v + \cancel{v_{\text{παρ}}}^{0}}{v - v_{\text{πηγ}}}\right) \Rightarrow f' = f_{\text{νυχ}}\frac{v}{v - v_{\text{νυχ}}}$

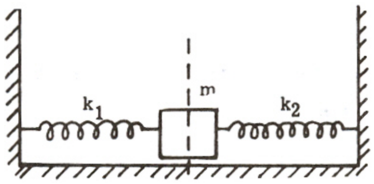
$f'' = f'\left(\frac{v + v_{\text{παρ}}}{v - \cancel{v_{\text{πηγ}}}^{0}}\right) \Rightarrow f'' = f'\frac{v + v_{\text{νυχ}}}{v}$

$\Rightarrow f'' = f_{\text{νυχ}}\frac{\cancel{v}}{v - v_{\text{νυχ}}}\frac{v + v_{\text{νυχ}}}{\cancel{v}} = f_{\text{νυχ}}\frac{v + v_{\text{νυχ}}}{v - v_{\text{νυχ}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow f''_{\text{νυ}} = f_{\text{νυχ}}\frac{\cancel{v} + 0.12\cancel{v}}{\cancel{v} - 0.12\cancel{v}} \Rightarrow f'' = 41\frac{1.12}{0.88} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{f'' = 52.2\, kHz}$

15. Υπολογίστε την συχνότητα ταλαντώσεων του συστήματος του παρακάτω σχήματος. Υποθέστε ότι δεν υπάρχουν τριβές μεταξύ των επιφανειών.



Όταν η μάζα m κινείται, ένα ελατήριο είναι πάντοτε συσπειρωμένο, ενώ το άλλο επιμηκύνεται, κατά το ίδιο μήκος x. Άρα: $\Delta x_1 = -\Delta x_2$. όπου Δx_1 η επιμήκυνση του ελατηρίου k_1 και $-\Delta x_2$ η συσπείρωση του k_2 ("–" δηλώνει συσπείρωση)

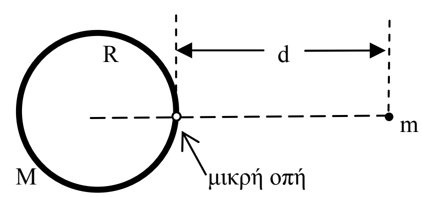
Αν θέσουμε: $\Delta x_1 = \Delta x$ + $\Delta x_2 = -\Delta x$ θα έχουμε:

$$F = -k_1\Delta x_1 - (-k_2\Delta x_2) = -k_1\Delta x + k_2(-\Delta x) \Rightarrow F = -(k_1+k_2)\Delta x \Rightarrow F = -k'\Delta x$$

όπου $k' = k_1 + k_2$.

Αλλά $\omega = \sqrt{\frac{k'}{m}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}}$

16. Σκεφθείτε το ακόλουθο πείραμα το οποίο θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί στα βάθη του διαστήματος: Μια πολύ μικρή μάζα m (test μάζα) αφήνεται από την κατάσταση ηρεμίας και απόσταση d από την περιφέρεια ενός λεπτού σφαιρικού κελύφους μάζας M (M >> m) και ακτίνας R. Η βαρύτητα έλκει τη μάζα m προς το μέρος του σφαιρικού κελύφους, και διαμέσου μιας μικρής τρύπας στην εξωτερική επιφάνεια του κελύφους, η μάζα εισέρχεται στο εσωτερικό του κελύφους. Ποια είναι η ταχύτητα της μάζας m καθώς περνά από το κέντρο του κελύφους;



Όταν η μικρή μάζα, m, βρίσκεται μέσα στο κέλυφος, τότε δεν ασκείται πάνω της καμιά δύναμη. Η έλξη λόγω βαρύτητας πάνω της είναι μηδέν.

Η μάζα M παράγει έργο στη μάζα m:

$$W = \int_{d+R}^{R} d\vec{r}\cdot\vec{F} = \int_{d+R}^{R} d\vec{r}\left(\frac{-GMm}{r^2}\right) = \frac{GMm}{r}\Big|_{d+R}^{R} \Rightarrow W = \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{R+d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \frac{GMmd}{R(d+R)}.$$

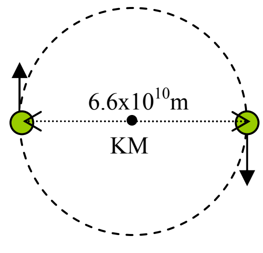
Το έργο αυτό αλλάζει τη κινητική ενέργεια της μάζας m, $\Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = W \Rightarrow$

$$\Rightarrow \upsilon^2 = 2W\frac{1}{m} = 2\frac{G\cancel{m}Md}{R(d+R)}\frac{1}{\cancel{m}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2GMd}{R(d+R)}}$$

<u>Διαφορετικά</u>: $E^{i}_{\mu\eta\chi} = E^{f}_{\mu\eta\chi} \Rightarrow 0 - G\frac{mM}{R+d} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{GMm}{R} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2GMd}{R(d+R)}}$

καθώς η μάζα m περνά την οπή, δεν ασκείται δύναμη πάνω της $\Rightarrow$ 1ος νόμος Newton

17. Δύο αστέρες ίδιας μάζας περιστρέφονται γύρω από το κέντρο μάζας τους όπως στο σχήμα. Αν η απόσταση μεταξύ των αστέρων είναι $6.6x10^{10}$m και ο καθένας κινείται εκτελεί μια πλήρη περιστροφή κάθε 32 ημέρες (=$2.7648x10^6$ δευτερόλεπτα), ποια είναι η μάζα του κάθε αστέρα;



Κάθε αστέρας κινείται σε κύκλο και επομένως υπάρχει μιά κεντρομόλος δύναμη προς το κέντρο της κυκλικής τους τροχιάς: $F_\kappa = \frac{m v^2}{R}$.

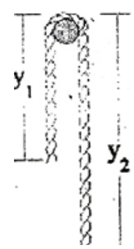
Η δύναμη αυτή προέρχεται από την βαρυτική έλξη που ασκεί ο καθένας στον άλλο. Η δύναμη αυτή είναι $F_g = G\frac{m\cdot m}{(2R)^2}$

Άρα: $F_g = F_\kappa \Rightarrow G\frac{m^{\cancel{2}}}{4R^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m}v^2}{\cancel{R}} \Rightarrow m = \frac{4Rv^2}{G}$ $\Big\} \Rightarrow m = \frac{4R\,4\pi^2R^2}{GT^2}$

Αλλά $v = \frac{2\pi R}{T} =$

$T = 32\cdot(24\times60\times60) = 2764800 s$. και επομένως $\boxed{m = 1.1\cdot10^{31} kg}$

18. Ένα σχοινί μάζας 2kg και συνολικού μήκους l = 1m βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία διπλωμένο πάνω σε ένα λείο και πολύ μικρό καρφί. Το ένα τμήμα του σχοινιού μήκους y_1 = 1/3m κρέμεται στα αριστερά και το υπόλοιπο τμήμα μήκους y_2 = 2/3m κρέμεται στα δεξιά του καρφιού. Το σχοινί αρχίζει να γλιστρά πάνω στο καρφί και να πέφτει προς τα κάτω. Ποια είναι η ταχύτητα του σχοινιού τη στιγμή που το αριστερό άκρο του αφήνει το καρφί;



Έστω $\lambda = \frac{m}{l}$ η γραμμική πυκνότητα του σχοινιού.

Ουσιαστικά κατά τη κίνηση (γλίστρημα) του σχοινιού, η δυναμική ενέργεια του κέντρου μάζας μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια, καθώς το Κ.Μ. αλλάζει ύψος.

Αρχικά το Κ.Μ βρίσκεται σε ύψος: $y^i_{cm} = \frac{\frac12 y_1 m_1 + \frac12 y_2 m_2}{m_1+m_2} = \frac{\frac12 y_1 \cancel{\lambda} y_1 + \frac12 y_2 \cancel{\lambda} y_2}{\cancel{\lambda} y_1 + \cancel{\lambda} y_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y^i_{cm} = \frac{\frac12(y_1^2+y_2^2)}{y_1+y_2}$, αλλά $y_1+y_2 = l$ και το ΚΜ κάθε τμήματος y_1, y_2 είναι στο μέσο.

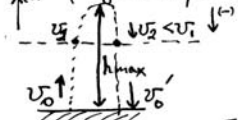
Καθώς το σχοινί αφήνει το καρφί το ΚΜ βρίσκεται στο μέσο του συνολικού μήκους l του σχοινιού: $y^f_{cm} = \frac{l}{2}$

Άρα: $\frac12 \cancel{M} v^2 = \cancel{M} g(h_2-h_1) \Rightarrow v^2 = 2g(h_2-h_1) \Rightarrow v^2 = 2g(y^f_{cm} - y^i_{cm}) \Rightarrow$

$\Rightarrow v^2 = \cancel{2}g\left(\frac{l}{\cancel{2}} - \frac{\frac19+\frac49}{\cancel{2}l}\right) \Rightarrow v = \sqrt{g(1-\frac59)} \Rightarrow \boxed{v = 2.09 m/s}$

19. Ένα σώμα βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω με κάποια αρχική ταχύτητα $υ_0$. Φτάνει στο μέγιστο ύψος της πορείας του σε χρόνο T_1 (χρόνος ανόδου) και έπειτα επιστρέφει πίσω στο έδαφος σε χρόνο T_2 (χρόνος καθόδου). Η αντίσταση του αέρα <u>ΔΕΝ</u> είναι αμελητέα στην κίνηση του σώματος. Ποιος από τους δύο χρόνους είναι μεγαλύτερος και γιατί.

Λόγω της αντίστασης του αέρα, η μηχανική ενέργεια δεν διατηρείται. Επομένως σε κάθε σημείο της τροχιάς του (η δυναμική του ενέργεια είτε ανεβαίνει, είτε κατεβαίνει είναι ίδια) η κινητική του ενέργεια καθώς ανεβαίνει είναι μεγαλύτερη από αυτή όταν κατεβαίνει, μια και η αντίσταση του αέρα έχει ενεργήσει μεγαλύτερο διάστημα:



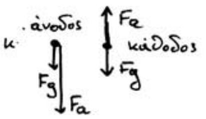
$$\Delta E_{μηχ} = -E_{κιν}^{ανεβ} - \cancel{U_g^{ανεβ}} + E_{κιν}^{κατ} + \cancel{U_g^{κατ}} = -W_{αντ} \Rightarrow \frac{1}{2}m(υ_2^2 - υ_1^2) = -W_α$$

$$\Rightarrow υ_2^2 - υ_1^2 < 0 \Rightarrow \boxed{υ_2 < υ_1}$$

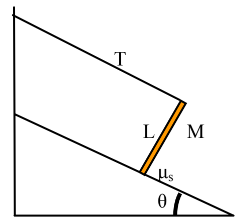
Για τον ίδιο λόγο, η ταχύτητα με την οποία φθάνει στο έδαφος, $υ_0'$ θα είναι $\boxed{υ_0' < υ_0}$. Και στις 2 περιπτώσεις (άνοδος & κάθοδος) το σώμα διανύει την ίδια απόσταση h_{max}. Στην περίπτωση της ανόδου, η μέση ταχύτητα ανόδου θα είναι $\bar{υ}_{αν} = \frac{h_{max}}{t_{αν}}$ ενώ η μέση ταχύτητα καθόδου θα είναι: $\bar{υ}_{καθ} = \frac{h_{max}}{t_{καθ}}$. Στη άνοδο η ταχύτητα μεταβάλλεται από $υ_0 \to 0$

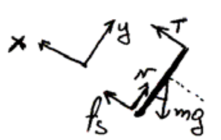
ενώ στην κάθοδο από $0 \to υ_0'$ όπου $υ_0' < υ_0$. Άρα η μέση ταχύτητα καθόδου θα είναι μικρότερη από τη μέση ταχύτητα ανόδου και άρα $t_{καθ} > t_{αν}$.

<u>Διαφορετικά</u> κάποιος θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι στη άνοδο η δύναμη που επιβραδύνει το σώμα είναι μεγαλύτερη $(F_g + F_a)$ απ' ότι στην κάθοδο, $(F_g - F_a)$ με αποτέλεσμα το σώμα να σταματά πιό γρήγορα στην άνοδο από ότι στη κάθοδο.



20. Μια λεπτή βέργα μάζας M=6.0kg και μήκους L=8.0cm βρίσκεται πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο. Ένα σχοινί δένεται πάνω στη βέργα (σε ορθή γωνία) για να την κρατήσει κατακόρυφη και κάθετη πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο. Ο συντελεστής της στατικής τριβής μεταξύ της βέργας και του κεκλιμένου επιπέδου είναι $μ_s$ = 0.80. (α) Υπολογίστε τη μέγιστη γωνία θ για την οποία η βέργα δεν γλιστρά. (β) Υπολογίστε την τάση του σχοινιού όταν η γωνία θ είναι αυτή που βρήκατε στο ερώτημα (α).





Για να ισορροπεί η βέργα θα πρέπει: f_{smax} αφού ζητάμε $Θ_{max}$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T + f_s - mg\sin\theta = 0 \Rightarrow T + μ_s N - mg\sin\theta = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow mg\sin\theta\left(\frac{\cancel{L}}{2}\right) - T\cancel{L} = 0 \Rightarrow T = \frac{1}{2}mg\sin\theta$$

Επομένως αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση:

$$\frac{1}{2}mg\sin\theta + μ_s mg\cos\theta - mg\sin\theta = 0 \Rightarrow \cancel{mg}\sin\theta = 2μ_s\cancel{mg}\cos\theta \Rightarrow \boxed{\tan\theta = 2μ_s}$$

Άρα $\boxed{\Theta = 58°}$

(β) $T = \frac{mg\sin\theta}{2} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \cdot 9.8 \cdot \sin(58)}{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{T = 25N}$