ΦΥΣ. 211
ΕΡΓΑΣΙΑ # 1
Επιστροφή την Δευτέρα 1/2/2016 στο τέλος της διάλεξης

1. Υποθέστε ότι ένα σύστημα αποτελείται από δυο σωματίδια. Θεωρήστε επίσης δεδομένο ότι ισχύουν οι ακόλουθες εξισώσεις κίνησης:

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i^{(\varepsilon\xi.)} \equiv \vec{F}^{(\varepsilon\xi.)} \text{ και } \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{(\varepsilon\xi.)}$$

Από τις εξισώσεις κίνησης για το κάθε σωματίδιο δείξτε ότι οι εσωτερικές δυνάμεις μεταξύ των σωματιδίων ικανοποιούν τόσο τον ασθενή όσο και τον ισχυρό νόμο δράσης-αντίδρασης. Το επιχείρημα μπορεί να γενικευτεί για σύστημα με ένα τυχαίο αριθμό σωματιδίων, αποδεικνύοντας έτσι τα αντίστροφα των επιχειρημάτων που οδηγούν στις δυο παραπάνω εξισώσεις κίνησης.

Αν τα δύο σωματίδια ικανοποιούν τον ισχυρό νόμο δράσης-αντίδρασης προφανώς θα ικανοποιούν και τον ασθενή νόμο, ο οποίος απαιτεί οι δυνάμεις δράσης-αντίδρασης να είναι ίσες και αντίθετες. Ο ισχυρός νόμος απαιτεί επιπλέον οι δυνάμεις αυτές να βρίσκονται στην ευθεία που ενώνει τα δύο σωματίδια. Η πρώτη εξίσωση κίνησης μας λέει ότι οι εσωτερικές δυνάμεις δεν έχουν κάποιο αποτέλεσμα:

Θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}\dot{\vec{P}}_1 &= \vec{F}_1^{(\varepsilon)} + \vec{F}_{21}\\ \dot{\vec{P}}_2 &= \vec{F}_2^{(\varepsilon)} + \vec{F}_{12}\end{aligned}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} \dot{\vec{P}}_1 + \dot{\vec{P}}_2 = \vec{F}_1^{(\varepsilon)} + \vec{F}_2^{(\varepsilon)} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}$$

Θεωρώντας ότι οι εξισώσεις κίνησης ισχύουν, θα πρέπει τότε: $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0} \Rightarrow$ $\Rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Δηλαδή οι δυνάμεις είναι ίσες και αντίθετες και επομένως ικανοποιούν τον ασθενή νόμο δράσης-αντίδρασης.

Αν τα σωματίδια ικανοποιούν την εξίσωση: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}} = \vec{\tau}^{(\varepsilon)}$, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι ίσος με την συνολική εξωτερική ροπή. Δηλαδή οι εσωτερικές δυνάμεις δεν συνεισφέρουν στην συνολική ροπή.

Η συνεισφορά των εσωτερικών ροπών για σύστημα δύο σωματιδίων είναι:

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}_{21}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{21} = \vec{r}_{12} \times \vec{F}_{21} = \vec{0}$$

Ο μόνος τρόπος για να είναι $\vec{r}_{12} \times \vec{F}_{21} = \vec{0}$ θα πρέπει $\vec{r}_{12}$ και $\vec{F}_{21}$ να βρίσκονται στην ευθεία που ενώνει τα δύο σωματίδια, ώστε το εξωτερικό γινόμενο να είναι 0. Επομένως οι εσωτερικές δυνάμεις ικανοποιούν τόσο τον ασθενή όσο και ισχυρό νόμο δράσης αντίδρασης.

2. Ένα σωματίδιο μάζας m, κινείται σε τρεις διαστάσεις κάτω από την επίδραση μιας συντηρητικής δύναμης $\vec{F}$.

(α) Προσδιορίστε την κινητική και δυναμική ενέργεια του σωματιδίου και δείξτε ότι η μηχανική ενέργεια διατηρείται.

(β) Δείξτε ότι μόνο μια από τις δύο ακόλουθες δυνάμεις:

$$\vec{F} = xz\hat{e}_x + yz\hat{e}_y + z^2\hat{e}_z \qquad (1)$$

$$\vec{F} = yz^2\hat{e}_x + xz^2\hat{e}_y + 2xyz\hat{e}_z \qquad (2)$$

είναι συντηρητική και βρείτε το δυναμικό από το οποίο προκύπτει.

(γ) Προσδιορίστε την ροπή και την στροφορμή ενός σωματιδίου που κινείται σε τρεις διαστάσεις. Αποδείξτε ότι η ροπή είναι ίση με τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής. Υποθέστε ότι στο σωματίδιο ασκείται η δύναμη (1) του προηγούμενο ερωτήματος. Υπολογίστε την ροπή. Γιατί το αποτέλεσμα είναι προφανές για την μορφή αυτή της δύναμης; Αν την χρονική στιγμή t = 0, το σωματίδιο βρίσκεται στην θέση $\vec{r}(0) = 2\hat{e}_x + 2\hat{e}_y$ και έχει ταχύτητα $\dot{r}(0) = 2\hat{e}_x + 3\hat{e}_y$, να βρεθεί η στροφορμή για οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

(α) Έστω το έργο που παράγει η δύναμη F καθώς το σώμα κινείται από την θέση $\vec{r}(t_1)$ στην θέση $\vec{r}(t_2)$:

$$W_{1\to2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\dot{\vec{r}}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2\right)dt$$

$$\Rightarrow W_{1\to2} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2(t_2) - \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2(t_1) \Rightarrow W_{1\to2} = T_2 - T_1 = \Delta T$$ μεταβολή κινητικής ενέργειας

Για μια συντηρητική δύναμη έχουμε $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$. Επομένως θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το έργο χρησιμοποιώντας τον ορισμό αυτό της δύναμης:

$$W_{1\to2} = \int_{t_1}^{t_2}\left(-\vec{\nabla}V\right)\cdot d\vec{r} = -\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = -\int_{t_1}^{t_2} dV$$ αφού $V=V(x,y,z)$

$$\Rightarrow W_{1\to2} = -V(t_2) + V(t_1) = V_1 - V_2$$

Από τη στιγμή που το έργο είναι το ίδιο ανεξάρτητα από την έκφραση που χρησιμοποιήσαμε για την δύναμη, θα έχουμε: $T_2 - T_1 = V_1 - V_2 \Rightarrow T_2 + V_2 = T_1 + V_1 = E_{\mu\eta\chi} = \sigma\tau\alpha\theta$

Η μηχανική ενέργεια διατηρείται για συντηρητικές δυνάμεις.

(β) Αν η δύναμη $\vec{F}$ είναι συντηρητική τότε $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ και $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0}$

Για την 1η δύναμη $\vec{F}_1 = xz\,\hat{e}_x + yz\,\hat{e}_y + z^2\hat{e}_z$, οπότε $\vec{\nabla}\times\vec{F}_1 = (0-y)\hat{e}_x + (x-0)\hat{e}_y + \hat{k}(0-0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{F}_1 = -y\hat{e}_x + x\hat{e}_y \neq 0}$$ δεν είναι συντηρητική

Η 2η δύναμη $\vec{F}_2 = yz^2\hat{e}_x + xz^2\hat{e}_y + 2xyz\,\hat{e}_z$ οπότε $\vec{\nabla}\times\vec{F}_2 = \hat{e}_x\left(\cancelto{0}{2xz-2xz}\right) + \left(\cancelto{0}{2yz-2yz}\right)\hat{e}_y + \hat{e}_z\left(\cancelto{0}{z^2-z^2}\right) \Rightarrow \underline{\vec{\nabla}\times\vec{F}_2 = 0}$

Επομένως αυτή η $\vec{F}_2$ είναι συντηρητική

Για να βρούμε το δυναμικό γράφουμε:

$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_2 &= -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{e}_z \\ \vec{F}_2 &= yz^2\hat{e}_x + xz^2\hat{e}_y + 2xyz\,\hat{e}_z \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Θα πρέπει να πάρουμε τους παράγοντες των $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ και $\hat{e}_z$ να είναι ίσοι, οπότε θα έχουμε τρεις διαφορικές εξισώσεις:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} &= yz^2 \Rightarrow V = -\int yz^2 dx \Rightarrow V = -xyz^2 + F(y,z) \\ -\frac{\partial V}{\partial y} &= xz^2 \Rightarrow V = -\int xz^2 dy \Rightarrow V = -xyz^2 + g(x,z) \\ -\frac{\partial V}{\partial z} &= 2xyz \Rightarrow V = -\int 2xyz\,dz \Rightarrow V = -xyz^2 + h(x,z) \end{aligned}\right\}$$ όπου F, g και h συναρτήσεις

Από τα 3 αποτελέσματα για να έχουμε όμοια απάντηση θα πρέπει: $V = -xyz^2 + C$

όπου C είναι σταθερά.

(γ) Η ροπή είναι $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}_1$ και η στροφορμή $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$

Για την ροπή: $\vec{\tau} = \left(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z\right)\times\left(xz\,\hat{e}_x + yz\,\hat{e}_y + z^2\hat{e}_z\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \left(\cancelto{0}{yz^2 - yz^2}\right)\hat{e}_x + \left(\cancelto{0}{xz^2 - xz^2}\right)\hat{e}_y + \left(\cancelto{0}{xyz - xyz}\right)\hat{e}_z \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{0}$$

Η δύναμη $\vec{F}_1$ είναι της μορφής $\vec{F}_1 = z\left(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z\right) = z\vec{r}$

Επομένως $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}_1 = \vec{r}\times z\vec{r} \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{0} = \dot{\vec{L}}$ και επομένως $\vec{L}$ = σταθερή

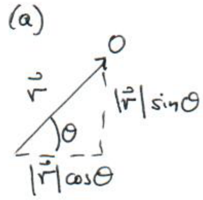
Την χρονική στιγμή $t=0$ έχουμε: $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\dot{\vec{r}} = m\left(2\hat{e}_x + 2\hat{e}_y\right)\times\left(2\hat{e}_x + 3\hat{e}_y\right)$

$$\Rightarrow \vec{L} = m\left(2\cdot 3 - 2\cdot 2\right)\hat{e}_z \Rightarrow \vec{L} = 2m\,\hat{e}_z$$

Από τη στιγμή που η στροφορμή διατηρείται η τιμή $\vec{L} = 2m\,\hat{e}_z$ θα είναι ίδια για όλες τις χρονικές στιγμές και όχι μόνο για $t=0$.

3. Θεωρήστε κυκλική κίνηση ($\dot{r}=0$, όπου $r \equiv |\vec{r}|$) σταθερής κυκλικής συχνότητας *f,* οπότε ισχύει, $\dot{\theta}=2\pi f \Rightarrow \ddot{\theta}=0$. Υπολογίστε την στροφορμή $\vec{L}$ και ροπή $\vec{\tau}$. Θεωρήστε επίσης σπειροειδή κίνηση (π.χ. υποθέστε ότι $\dot{r}\neq 0$ και $\ddot{\theta}=0$). Υπολογίστε και πάλι την στροφορμή $\vec{L}$ και ροπή $\vec{\tau}$.

(a)



Στο καρτεσιανό επίπεδο $\vec{r}=|\vec{r}|\cos\Theta\,\hat{i}+|\vec{r}|\sin\Theta\,\hat{j}$

Για κυκλική κίνηση $|\vec{r}|$ είναι σταθερή $\Rightarrow \frac{d|\vec{r}|}{dt}=0$

Να σημειωθεί ωστόσο ότι $\frac{d|\vec{r}|}{dt}=0 \not\Rightarrow |\dot{\vec{r}}|=0$

Δηλαδή το γεγονός ότι $\frac{d|\vec{r}|}{dt}=0$ δεν σημαίνει ότι $|\dot{\vec{r}}|=0$.

Η γραμμική ορμή είναι $\vec{p}=m\dot{\vec{r}}$

Αλλά $\dot{\vec{r}}=-|\vec{r}|\dot{\Theta}\sin\Theta\,\hat{i}+|\vec{r}|\dot{\Theta}\cos\Theta\,\hat{j}$

Ας σημειώσουμε εδώ ότι $\vec{p}\cdot\vec{r}=m\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r}=m\left(\cancel{-|\vec{r}|^2\dot{\Theta}\sin\Theta\cos\Theta}+\cancel{|\vec{r}|^2\dot{\Theta}\sin\Theta\cos\Theta}\right)=0$

Δηλαδή η ορμή $\vec{p}\perp\vec{r}$.

Επίσης για $\Theta=0$ έχουμε $\vec{r}=r\hat{i}$ και $\dot{\vec{r}}=|\vec{r}|\dot{\Theta}\,\hat{j} \Rightarrow |\dot{\vec{r}}|_{\theta=0}=\dot{\theta}|\vec{r}|$

ισχύει για όλα τα θ

Για σταθερή κυκλική κίνηση $\dot{\Theta}=$ σταθ. και $|\vec{r}|=r$

Θα έχουμε: $|\dot{\vec{r}}|^2=r^2\sin^2\Theta\,\dot{\Theta}^2+r^2\cos^2\Theta\,\dot{\Theta}^2=r^2\dot{\Theta}^2(\sin^2\Theta+\cos^2\Theta)=r^2\dot{\Theta}^2 \Rightarrow |\dot{\vec{r}}|=r\dot{\theta}$

Παρατηρούμε ωστόσο ότι για σύστημα που κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, υπάρχει επιτάχυνση:

$$|\ddot{\vec{r}}|^2=\left(-r\cdot\dot{\Theta}^2\cos\Theta\,\hat{i}-r\dot{\Theta}^2\sin\Theta\,\hat{j}\right)^2=r^2\dot{\Theta}^4 \Rightarrow |\ddot{\vec{r}}|=r\dot{\Theta}^2$$

Παρατηρούμε ότι η επιτάχυνση έχει διεύθυνση προς το κέντρο της τροχιάς αφού $\dot{\theta}^2\vec{r}=-\ddot{\vec{r}}$

Λόγω της επιτάχυνσης, υπάρχει μια σταθερή δύναμη για σύστημα που κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. $\vec{F}=m\ddot{\vec{r}}=-m\vec{r}\,\dot{\theta}^2$. Το μέτρο της είναι $|\vec{F}|=mr\dot{\theta}^2=\frac{m\dot{r}^2}{r}$

Αυτή είναι η γωνιακή δύναμη ή κεντρομόλος δύναμη και δεν σχετίζεται με γωνιακή επιτάχυνση

Η στροφορμή ορίζει την ροπή που σχετίζεται με μια γωνιακή επιτάχυνση.

Θυμηθείτε ότι $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$

Αλλά $\vec r = r\cos\theta\,\hat i + r\sin\theta\,\hat j$

$\vec p = -mr\sin\theta\,\dot\theta\,\hat i + mr\cos\theta\,\dot\theta\,\hat j$

$$\Rightarrow \vec L = \vec r\times\vec p = \begin{pmatrix}\hat i & \hat j & \hat k\\ r\cos\theta & r\sin\theta & 0\\ -mr\dot\theta\sin\theta & mr\dot\theta\cos\theta & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec L = \hat k\left(mr^2\dot\theta\cos^2\theta + mr^2\dot\theta\sin^2\theta\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec L = mr^2\dot\theta\,\hat k}$$

Επομένως $|\vec L| = mr^2\dot\theta = (mr)r\dot\theta = (mr)|\dot{\vec r}| = \underbrace{mr^2}_{\text{ροπή αδράνειας}}\dot\theta = I\dot\theta$

Η ροπή είναι $\vec\tau = \vec r\times\vec F$

Για κυκλική κίνηση έχουμε $\vec F = m\ddot{\vec r} = -m\vec r\,\dot\theta^2$

$$\Rightarrow \vec\tau = -\vec r\times m\vec r\,\dot\theta^2 \Rightarrow \vec\tau = \vec 0$$

(β) Για την περίπτωση της σπειροειδούς κίνησης έχουμε:

Από πολικές συντεταγμένες: $\boxed{\vec r = r\cos\theta\,\hat i + r\sin\theta\,\hat j}$ όπου $r = |\vec r|$

Επομένως $\dot{\vec r} = \left(-r\dot\theta\sin\theta + \dot r\cos\theta\right)\hat i + \left(r\dot\theta\cos\theta + \dot r\sin\theta\right)\hat j$

Αντίθετα με την περίπτωση της κυκλικής κίνησης, $\dot{\vec r} \neq 0$

$$\ddot{\vec r} = \left(\ddot r\cos\theta - \dot r\dot\theta\sin\theta - \dot r\dot\theta\sin\theta - r\ddot\theta\sin\theta - r\dot\theta^2\cos\theta\right)\hat i + \left(\ddot r\sin\theta + \dot r\dot\theta\cos\theta + \dot r\dot\theta\cos\theta + r\ddot\theta\cos\theta - r\dot\theta^2\sin\theta\right)\hat j$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση, $\ddot\theta = 0$ και επομένως η $\ddot{\vec r}$ γράφεται:

$$\boxed{\ddot{\vec r} = \left(\ddot r\cos\theta - 2\dot r\dot\theta\sin\theta - r\dot\theta^2\cos\theta\right)\hat i + \left(\ddot r\sin\theta + 2\dot r\dot\theta\cos\theta - r\dot\theta^2\sin\theta\right)\hat j} \quad (A)$$

Η στροφορμή θα είναι: $\vec L = \vec r\times\vec p = m(\vec r\times\dot{\vec r}) = m\Big[r\cos\theta\left(r\dot\theta\cos\theta + \dot r\sin\theta\right) - r\sin\theta\left(-r\dot\theta\sin\theta + \dot r\cos\theta\right)\Big]\hat k = m\left(r^2\dot\theta\cos^2\theta + \cancel{r\dot r\cos\theta\sin\theta} + r^2\dot\theta\sin^2\theta - \cancel{r\dot r\sin\theta\cos\theta}\right)\hat k$

$\Rightarrow \boxed{\vec L = mr^2\dot\theta}$ Παρατηρήστε ότι στιγμιαία αυτή είναι η ίδια στροφορμή με την περίπτωση της κυκλικής κίνησης του (α) ερωτήματος

Η ροπή θα είναι: $\vec\tau = \vec r\times\vec F = \vec r\times m\ddot{\vec r} \Rightarrow$

$$\vec\tau = m\Big[\cancel{r\ddot r\sin\theta\cos\theta} + 2r\dot r\dot\theta\cos^2\theta - \cancel{r^2\dot\theta^2\cos\theta\sin\theta} - \cancel{r\ddot r\cos\theta\sin\theta} + 2r\dot r\dot\theta\sin^2\theta + \cancel{r^2\dot\theta^2\cos\theta\sin\theta}\Big]\hat k$$

$$\Rightarrow \vec\tau = m\left(2r\dot r\dot\theta\right) \Rightarrow \vec\tau = 2mr\dot r\dot\theta = \frac{dL}{dt} = 2mr\dot r\dot\theta + \cancel{mr^2\ddot\theta} \overset{0}{=} 2mr\dot r\dot\theta$$

4. (α) Η δύναμη βαρύτητας του Newton που ασκείται πάνω σε ένα πλανήτη μάζας m, στην θέση r, δίνεται από την σχέση: $F = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$, όπου G είναι η παγκόσμια βαρυτική σταθερά, M είναι η μάζα του ήλιου που βρίσκεται στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων $r \equiv |\vec{r}|$ και $\hat{r}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην $\vec{r}-$διεύθυνση. Δείξτε ότι η δύναμη αυτή προέρχεται από ένα δυναμικό V, της μορφής: $V = -\frac{GMm}{r}$.

(β) Δείξτε ότι η στροφορμή, $\vec{L}$, του πλανήτη διατηρείται από την βαρυτική δύναμη και σαν αποτέλεσμα η κίνηση του πλανήτη περιορίζεται σε ένα επίπεδο.

(a) Έχουμε ότι $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \Rightarrow \vec{F} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$ (1)

Μια συντηρητική δύναμη πηγάζει από ένα δυναμικό της μορφής $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\hat{k}\right)$$

Αλλά $V = -\frac{GMm}{r}$ επομένως αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\vec{F} = -\left[\frac{GMm}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\hat{i} + \frac{GMm}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y}\hat{j} + \frac{GMm}{r^2}\frac{\partial r}{\partial z}\hat{k}\right] = -\frac{GMm}{r^2}\left[\frac{\partial r}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\hat{k}\right]$$

Αλλά $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \frac{\partial r^2}{\partial x} = 2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$

Παρόμοια θα έχουμε: $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$ και $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$

Αντικατάσταση θα δώσει: $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\left(\frac{x}{r}\hat{i} + \frac{y}{r}\hat{j} + \frac{z}{r}\hat{k}\right) = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$

Η τελευταία σχέση είναι η (1) και επομένως: $\underline{\underline{-\vec{\nabla}V = \vec{F}}}$

(β) Ξέρουμε ότι $\dot{\vec{L}} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \left(-\frac{GMm}{r^3}\vec{r}\right) \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{0} = \dot{\vec{L}}$

Αφού η $\vec{L}$ = σταθ. διάνυσμα που ορίζεται να είναι κάθετο στο $\vec{r}$ (διάνυσμα θέσης του πλανήτη) και κάθετο στην ορμή $\vec{p}$, τότε το $\vec{r}$ είναι ορισμένο να βρίσκεται στο επίπεδο κάθετο στην στροφορμή $\vec{L}$.

5. Ένα σωματίδιο κινείται στο *xy*-επίπεδο κάτω από την επίδραση κεντρικής δύναμης ενός δυναμικού *V*(*r*). Το γεγονός ότι η δύναμη είναι κεντρική εγγυάται ότι το δυναμικό *V* είναι συνάρτηση μόνο της απόστασης $r=|\vec{r}|$. Να γραφούν οι εξισώσεις Lagrange του σωματιδίου για τις συντεταγμένες *r* και *θ*. Θα πρέπει να βρείτε το ίδιο αποτέλεσμα με την περίπτωση του νόμου του Newton.

Η Lagrangian είναι: $L = T - V$

Η κινητική ενέργεια είναι $T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$

Σε πολικές συντεταγμένες $\left.\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$T = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2\cos^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta - \cancel{2r\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta} + \dot{r}^2\sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \cancel{2\dot{r}r\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta}\right]$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

Επομένως η Lagrangian γράφεται: $L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - V(r)$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange θα είναι:

$$r: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial L}{\partial r} \Rightarrow m\ddot{r} = m r \dot{\theta}^2 - \frac{\partial V(r)}{\partial r} \Rightarrow \boxed{m\ddot{r} - m r\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0}$$

$$\theta: \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow m r^2 \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m r^2 \dot{\theta}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{m r^2 \dot{\theta} = \sigma\tau\alpha\theta}$$

6. Σωματίδιο μάζας *m,* κινείται σε τρεις διαστάσεις στην επιφάνεια μιας σφαίρας που προσδιορίζεται από την εξίσωση $x^2+y^2+z^2=16$.

(α) Αν η εξίσωση τροχιάς του σωματιδίου είναι $\vec{r}(t)\equiv r_x\hat{e}_x+r_y\hat{e}_y+r_z\hat{e}_z$, δώστε την εξίσωση δεσμού για την κίνηση του σωματιδίου και εξηγήστε το είδος του δεσμού.

(β) Εκφράστε τις καρτεσιανές συντεταγμένες του σωματιδίου (r_x, r_y, r_z) συναρτήσει των σφαιρικών πολικών συντεταγμένων θ και φ.

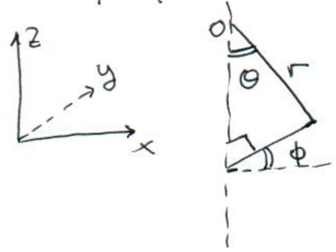
(γ) Γράψτε την Lagrangian του συστήματος όταν το δυναμικό είναι μηδέν ($V=0$).

(α) Το σωματίδιο, μάζας m έχει διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)=r_x\hat{i}+r_y\hat{j}+r_z\hat{k}$
Η επιφάνεια της σφαίρας δίνεται από την εξίσωση: $x^2+y^2+z^2=16$ και επομένως ο δεσμός της κίνησης του σωματιδίου είναι:

$$r_x^2+r_y^2+r_z^2=16$$

Από την στιγμή που ο δεσμός αντιστοιχεί σε εξίσωση και περιέχει γραμμική εξάρτηση ανάμεσα στις συντεταγμένες του σωματιδίου, είναι ένας ολόνομος δεσμός.

(β) Χρησιμοποιώντας τις γωνίες του σχήματος θα έχουμε:



$$r_x = x = r\sin\theta\cos\phi$$
$$r_y = y = r\sin\theta\sin\phi$$
$$r_z = z = -r\cos\theta$$

Για την περίπτωσή μας $r=4$ η ακτίνα της σφαίρας. Επομένως θα έχουμε:

$$r_x = 4\sin\theta\cos\phi$$
$$r_y = 4\sin\theta\sin\phi$$
$$r_z = -4\cos\theta$$

(γ) $L = T - V = T$ εφόσον $V=0$.

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}_x^2+\dot{r}_y^2+\dot{r}_z^2\right)=\frac{1}{2}m\left[\left(4\cos\theta\cos\phi\,\dot{\theta}-4\sin\theta\sin\phi\,\dot{\phi}\right)^2+\left(4\cos\theta\sin\phi\,\dot{\theta}+4\sin\theta\cos\phi\,\dot{\phi}\right)^2+\left(4\sin\theta\,\dot{\theta}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow L=8m\left[\cos^2\theta\cos^2\phi\,\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\sin^2\phi\,\dot{\phi}^2-\cancel{2\cos\theta\sin\theta\cos\phi\sin\phi}+\cos^2\theta\sin^2\phi\,\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\cos^2\phi\,\dot{\phi}^2+\cancel{2\cos\theta\sin\theta\cos\phi\sin\phi}+\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right]\Rightarrow$$

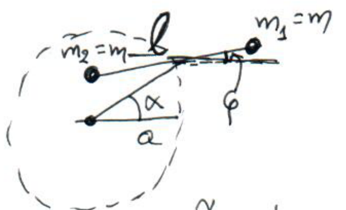
$$L=8m\left(\dot{\theta}^2\cos^2\theta+\dot{\phi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right)\Rightarrow \boxed{L=8m\left(\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)}$$

7. **Προαιρετικό πρόβλημα:**

Δύο σημειακές μάζες *m*, συνδέονται μεταξύ τους με μια ράβδο μήκους *l*, αμελητέας μάζας. Το κέντρο της ράβδου είναι περιορισμένο να κινείται στην περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας *R*. Εκφράστε την κινητική ενέργεια του συστήματος συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων.

Από την στιγμή που δεν υπάρχει εξωτερική συνισταμένη δύναμη εκτός από την δύναμη του δεσμού που δίνεται από το κυκλικό στεφάνι, η δυνατή κίνηση του κέντρου μάζας είναι η κυκλική κίνηση με σταθερή ταχύτητα.

Αν εξετάσουμε τώρα το σύστημα πως κινείται από το σύστημα του κέντρου μάζας, θα δούμε την ράβδο με δύο όμοιες μάζες στα άκρα της. Από την στιγμή που δεν υπάρχει εξωτερική ροπή στην περίπτωση αυτή, η κίνηση θα είναι περιστροφή με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.



Με βάση το διπλανό σχήμα θα έχουμε:

$$x_1 = l\cos\varphi + a\cos\alpha \qquad x_2 = -l\cos\varphi + a\cos\alpha$$

$$y_1 = l\sin\varphi + a\sin\alpha \qquad y_2 = -l\sin\varphi + a\sin\alpha$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εξισώσεις και συντεταγμένες, μπορούμε να βρούμε με παραγώγιση τις συνιστώσες της ταχύτητας:

$$\dot{x}_1 = -l\dot{\varphi}\sin\varphi - a\dot{\alpha}\sin\alpha \Rightarrow \dot{x}_1^2 = l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + a^2\dot{\alpha}^2\sin^2\alpha + \cancel{2la\dot{\alpha}\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\alpha}$$

$$\dot{y}_1 = l\dot{\varphi}\cos\varphi + a\dot{\alpha}\cos\alpha \Rightarrow \dot{y}_1^2 = l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + a^2\dot{\alpha}^2\cos^2\alpha + 2la\dot{\alpha}\dot{\varphi}\cos\varphi\cos\alpha$$

$$\dot{x}_2 = l\dot{\varphi}\sin\varphi - a\dot{\alpha}\sin\alpha \Rightarrow \dot{x}_2^2 = l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + a^2\dot{\alpha}^2\sin^2\alpha - \cancel{2l\dot{\varphi}a\dot{\alpha}\sin\varphi\sin\alpha}$$

$$\dot{y}_2 = -l\dot{\varphi}\cos\varphi + a\dot{\alpha}\cos\alpha \Rightarrow \dot{y}_2^2 = l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + a^2\dot{\alpha}^2\cos^2\alpha - 2la\dot{\varphi}\dot{\alpha}\cos\varphi\cos\alpha$$

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right] =$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}m\left[2l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + 2a^2\dot{\alpha}^2\sin^2\alpha + 2l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + 2a^2\dot{\alpha}^2\cos^2\alpha\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}m\left[l^2\dot{\varphi}^2 + a^2\dot{\alpha}^2\right] \Rightarrow \boxed{T = m(l^2\dot{\varphi}^2 + a^2\dot{\alpha}^2)}$$

Ο δεύτερος όρος αναφέρεται στην κινητική ενέργεια του CM και ο πρώτος όρος στην κινητική ενέργεια των μαζών ως προς το κέντρο μάζας