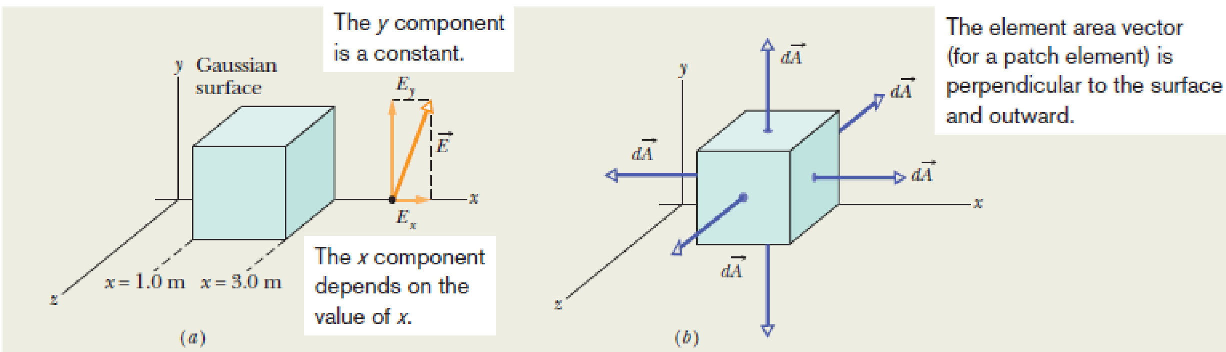
Φροντιστήριο 2 ΦΥΣ112

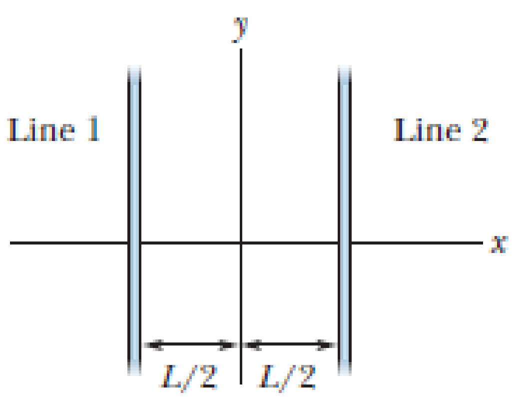
27/9/2023

23.2) Ένα ηλεκτρικό πεδίο δίνεται να είναι $\vec{E} = 4.0\hat{i} - 3.0(y^2 + 2.0)\hat{j}$ και διαπερνά Γκαουσιανό κύβο ακμής $2.0\,m$ όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Ποια είναι η ηλεκτρική ροή στην (a) πάνω επιφάνεια, (b) κάτω επιφάνεια, (c) αριστερή επιφάνεια και (d) πίσω επιφάνεια; (e) Ποια είναι η συνολική ροή που διαπερνά ολόκληρο τον κύβο;

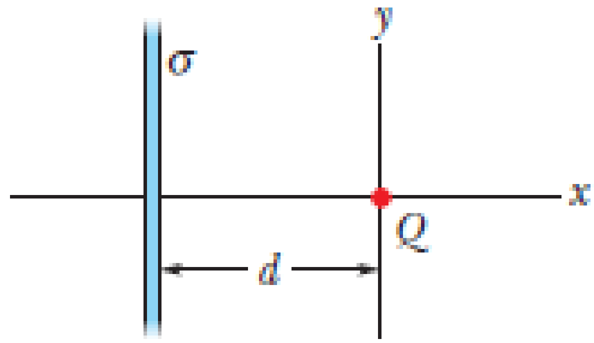


23.21) Ένας απομονωμένος αγωγός έχει συνολικό φορτίο $+10 \times 10^{-6}\,C$ και μία κοιλότητα που εμπεριέχει σημειακό φορτίο $q = +3.0 \times 10^{-6}\,C$. Ποιο είναι το επαγόμενο φορτίο (a) στο τοίχωμα της κοιλότητας και (b) στην εξωτερική επιφάνεια;

22.30) Στο κάτωθι σχήμα φαίνονται μικρά τμήματα δύο πολύ μακρών παράλληλων γραμμών τοποθετημένων σε απόσταση $L = 8.0\,cm$ μεταξύ τους. Οι ομοιόμορφες γραμμικές πυκνότητες φορτίου είναι $+6.0\,\mu C/m$ για την γραμμή 1 και $-2.0\,\mu C/m$ για την γραμμή 2. Σε ποιο σημείο στον άξονα x το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο από τις δύο γραμμές γίνεται 0;

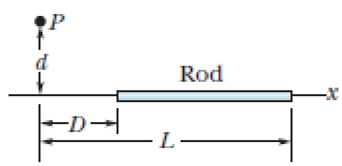


22.40) Το πιο κάτω σχήμα δείχνει μια πολύ μεγάλη μη αγώγιμη πλάκα με ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma = -2.00\,\mu C/m^2$, καθώς και ένα σημειακό φορτίο $Q = 6.00\,\mu C$ σε απόσταση d από την πλάκα. Αν $d = 0.200\,m$, σε ποια (a) θετική και (b) αρνητική θέση στον άξονα x (πέραν του απείρου) το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο από την πλάκα και το σωματίδιο γίνεται 0; (c) Αν τώρα $d = 0.800\,m$, σε ποια θέση στον άξονα x έχουμε μηδενικό συνολικό ηλεκτρικό πεδίο;

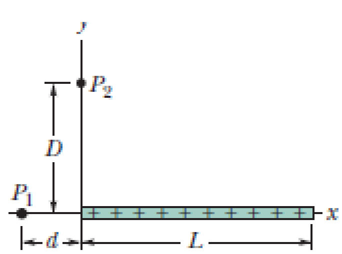


22.55) Μία κατανομή φορτίου με σφαιρική συμμετρία αλλά όχι ομοιόμορφη παράγει ηλεκτρικό πεδίο μεγέθους $E = Kr^4$, κατευθυνόμενη ακτινικά προς τα έξω από το κέντρο της σφαίρας. Εδώ r είναι η ακτινική απόσταση από το κέντρο και K κάποια σταθερά. Ποια είναι η χωρική πυκνότητα φορτίου ρ της κατανομής;

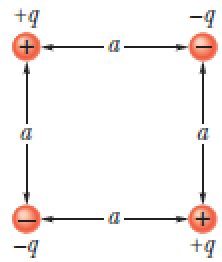
24.26) Το πιο κάτω σχήμα δείχνει μία λεπτή ράβδο με ομοιόμορφη κατανομή φορτίου $2.00\,\mu C/m$. Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P αν $d = D = L/4.00$. Υποθέστε ότι το δυναμικό στο άπειρο είναι 0.



24.38) Στο σχήμα φαίνεται μια λεπτή πλαστική ράβδος μήκους $L = 13.5\,cm$ και ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $43.6\,fC$. (a) Βρείτε μια έκφραση για το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P_1 συναρτήσει της απόστασης d. (b) Έπειτα αντικαταστήστε το d στην σχέση αυτή με την μεταβλητή x και εξάγετε μια σχέση για το μέγεθος της συνιστώσας E_x του ηλεκτρικού πεδίου στο P_1. (c) Ποια είναι η κατεύθυνση του E_x σε σχέση με την θετική φορά του άξονα x; (d) Ποια είναι η τιμή του E_x στο P_1 για $d = 6.20\,cm$; (e) Εκμεταλλευόμενοι την συμμετρία του σχήματος, βρείτε το E_y στο P_1.



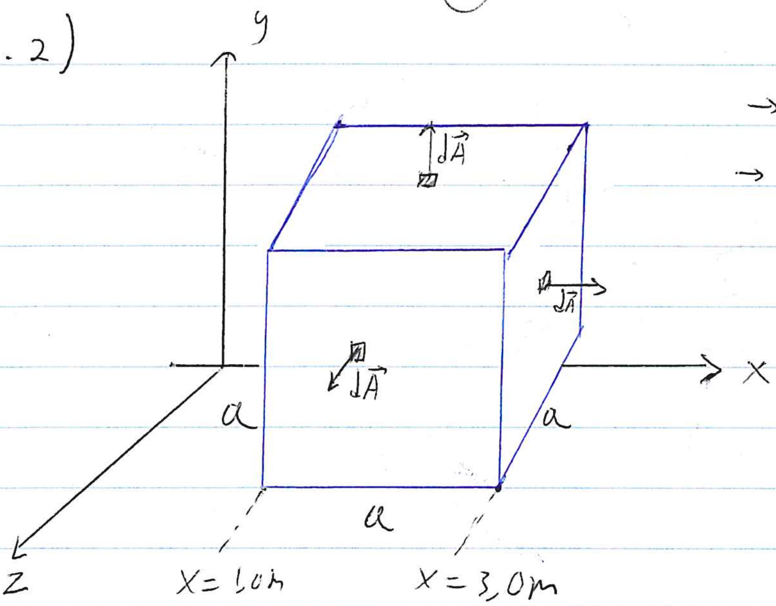
24.43) Πόσο έργο απαιτείται ώστε να κατασκευάσουμε την διάταξη του σχήματος που φαίνεται πιο κάτω αν $q = 2.30\,pC$, $a = 64.0\,cm$ και τα σωματίδια ξεκινούν από την ηρεμία πολύ μακριά το ένα από το άλλο;



Πρόβλημα: Δύο λεπτά ομόκεντρα σφαιρικά κελύφη ακτίνας r_1 και r_2 ($r_1 < r_2$) είναι φορτισμένα και περιέχουν ίδιου πρόσημου ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ_1 και σ_2 αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο (α) $0 < r < r_1$ (β) $r_1 < r < r_2$ και (γ) $r > r_2$. (δ) Βρείτε την συνθήκη για την οποία $E = 0$ για $r > r_2$. (ε) Βρείτε την συνθήκη για την οποία $E = 0$ για $r_1 < r < r_2$. Θεωρήστε αμελητέο το πάχος των σφαιρικών κελυφών.

Ευτύχιος Καϊμακκάμης

Problem 23.2)



→ $a = 2{,}0\,m$

→ $\vec{E} = [4{,}0\,\hat{i} - 3{,}0(y^2 + 2{,}0)\,\hat{j}]\ \frac{N}{C}$

$$\boxed{\rightarrow \Phi = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}}$$

(a) Πάνω επιφάνεια: $\Phi_1 = -3{,}0\left(\frac{N}{C}\right)\int_0^a dx \int_0^a (a^2 + 2{,}0)\,dy$

Το y στην επιφάνεια είναι σταθερό $\Rightarrow y = a$

$$= -6{,}0\left(\frac{Nm}{C}\right)\left[a^3 + 2{,}0 \cdot y\right]_0^a = \boxed{-72{,}0\left(\frac{Nm^2}{C}\right)}$$

(b) Κάτω επιφάνεια: $\Phi_2 = -3{,}0\left(\frac{N}{C}\right)\int_0^a dx \int_0^a (0^2 + 2{,}0)(-dy)$

$$= \boxed{24{,}0\left(\frac{Nm^2}{C}\right)}$$

(c) Αριστερή επιφάνεια: $\Phi_3 = 4{,}0\left(\frac{N}{C}\right)\int_0^a (-dx)\int_0^a dy = \boxed{-16{,}0\left(\frac{Nm^2}{C}\right)}$

(d) Πίσω επιφάνεια: $\boxed{\Phi_4 = 0}$ ($\vec{E}$ δεν έχει z συνιστώσα)

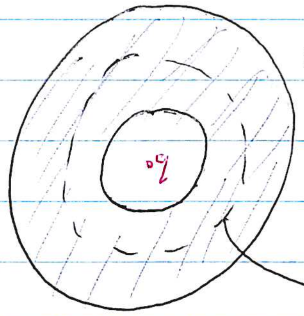
(e) $\Phi_{ol} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \underbrace{\Phi_5}_{\text{Δεξιά}} + \underbrace{\Phi_6}_{\text{Μπροστά}}$

→ $\Phi_6 = 0$ (ομοίως με Φ_4)

→ $\Phi_5 = 4{,}0\left(\frac{N}{C}\right)\int_0^a dx \int_0^a dy = 16{,}0\left(\frac{Nm^2}{C}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_{ol} = -48{,}0\left(\frac{Nm^2}{C}\right)}$$

Problem 23.21)



$Q_{ολ}$ $\rightarrow Q_{ολ} = 10 \cdot 10^{-6}\,C = 10^{-5}\,C$

$\rightarrow q = 3{,}0 \cdot 10^{-6}\,C$

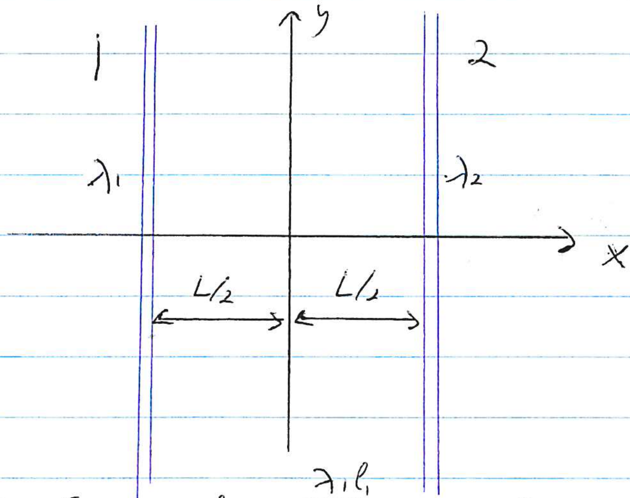
$\rightarrow \vec{E} = 0$ (αγωγός)

(α) Φορτίο κοιλώματος: $\boxed{q_{κ} = -q = -3{,}0 \cdot 10^{-6}\,C}$

$\Rightarrow q_{ολ} = 0 \Rightarrow \Phi = 0$ (Gauss)

(β) Φορτίο εξωτερικής επιφάνειας: $\boxed{q_{εξ} = Q_{ολ} - q_{κ} = 1{,}3 \cdot 10^{-5}\,C}$

Problem 23.30)



$\rightarrow L = 8{,}0\,cm$

$\rightarrow \lambda_1 = 6{,}0\,\mu C/m$

$\rightarrow \lambda_2 = -2{,}0\,\mu C/m$

Gauss: (1) $E_1 \cdot 2\pi x_1 \ell_1 = \dfrac{\lambda_1 \ell_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda_1}{x_1} = \dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{x+\frac{L}{2}}$

(2) $E_2 \cdot 2\pi x_2 \ell_2 = \dfrac{\lambda_2 \ell_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda_2}{x_2} = \dfrac{\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{x-\frac{L}{2}}$

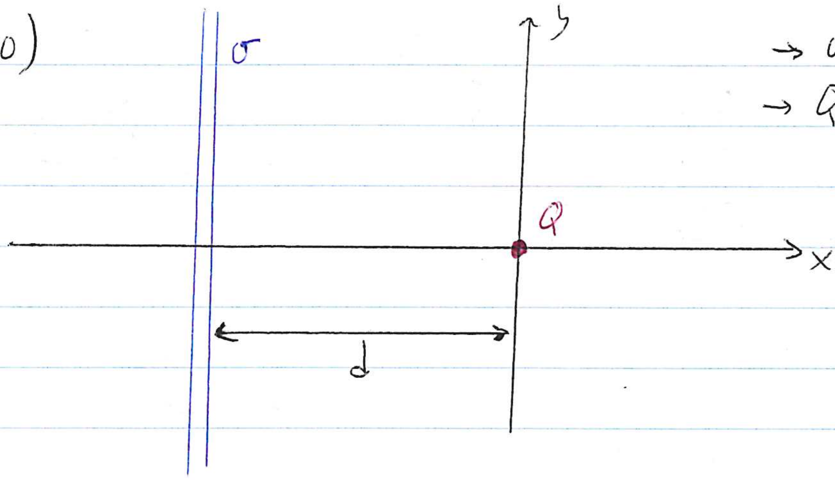
$\rightarrow E_{ολ} = 0 \Rightarrow E_1 + E_2 = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{\lambda_1}{x+\frac{L}{2}} + \dfrac{\lambda_2}{x-\frac{L}{2}}\right) = 0$

$\Rightarrow \left(x + \frac{L}{2}\right)\lambda_2 = -\lambda_1\left(x - \frac{L}{2}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{x = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)\frac{L}{2} = L = 8{,}0\,cm}$$

3

Problem 23.40)



$\rightarrow \sigma = -2{,}00\ \mu C/m^2$

$\rightarrow Q = 6{,}00\ \mu C$

$d = 0{,}200m \longrightarrow$ (a) $X > 0 \Rightarrow \vec{E}_{o} = 0$

(b) $x < 0 \Rightarrow \vec{E}_{o} = 0$ } πέραν του απείρου

$$\vec{E}_Q = k_e \frac{Q}{r^2}\hat{r} \xrightarrow[\text{άξονα } x]{\text{σημείο στον}} \vec{E}_Q = k_e \cdot \frac{Q}{x^2}\hat{\imath}$$

$$\underline{\text{Gauss.}}\quad E_\sigma 2A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_\sigma = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\imath} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\imath}, & x > -d \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\imath}, & x < -d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2\pi}\frac{Q}{\sigma} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2\pi}\ m^2$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\ m \Rightarrow \text{(a)}\ \boxed{x = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\ m}$$

$$\text{(b)}\ \boxed{x = -\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\ m}$$

(c) $d = 0{,}800m$

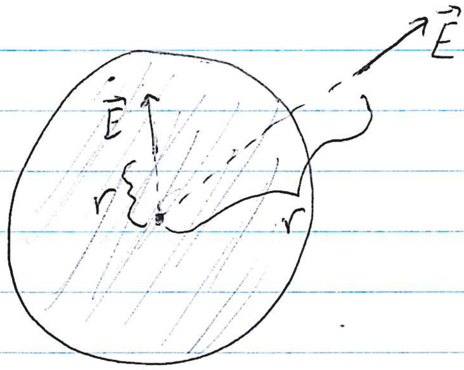
$\Rightarrow$ Η απάντηση δεν αλλάζει <u>αλλά</u> η θέση $x = -\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\ m$

βρίσκεται μεταξύ πλάκας και σωματιδίου $\Rightarrow$ <u>Απαγορεύεται</u>

$$\Rightarrow \boxed{x = +\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\ m}$$

Στο χωρίο $-d < x < 0$ λόγω αντίθετων φορτίων, τα $\vec{E}_Q$ και $\vec{E}_\sigma$ γίνονται ομόρροπα και δεν αλληλεξουδετερώνονται.

Problem 23.55)



$$\rightarrow \vec{E} = (\underbrace{K}_{\text{σταθερά}} r^4)\,\hat{r} \quad (\text{μέσα})$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{ol}}{r^2}\,\hat{r} \quad (\text{έξω})$$

$\rho(r)$: συνάρτηση του r

$$\underline{\text{Gauss}}: \quad E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\iiint \rho\, dV}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho\, r'^2 dr'$$

$$\Rightarrow r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho\, r'^2 dr' = (K r^4)\, r^2 = K r^6$$

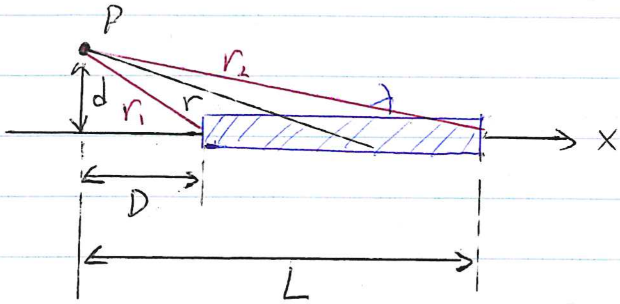
$$\Rightarrow \rho r^2 = \varepsilon_0 K \frac{d}{dr}(r^6)$$

$$\Rightarrow \rho r^2 = 6\varepsilon_0 K r^5$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = 6\varepsilon_0 K r^3}$$

Ευτύχιος Καϊμακάμης

Problem 24.26)



$\rightarrow \lambda = 2{,}00\ \mu C/m$

$\rightarrow d = D = \frac{L}{4{,}00}$

$\rightarrow dq = \lambda\, dx$

$\rightarrow r_1 = \sqrt{d^2+D^2} = \sqrt{2}\, d$

$\rightarrow r_2 = \sqrt{d^2+L^2} = \sqrt{17}\, d$

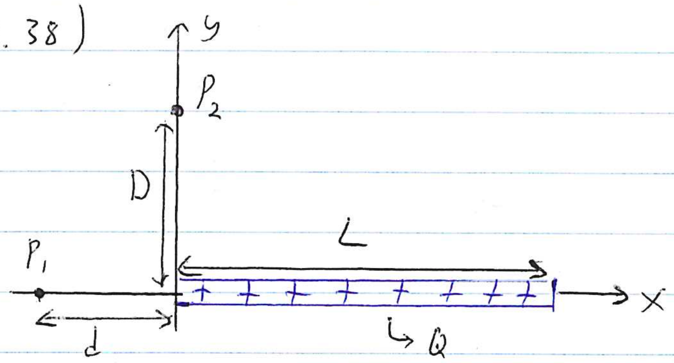
$\rightarrow r = \sqrt{d^2+x^2}$

$$\rightarrow V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_D^L \frac{dx}{\sqrt{d^2+x^2}}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+d^2}\right)\right]_d^{4d} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{4+\sqrt{17}}{1+\sqrt{2}}\right)$$

$$= \boxed{2{,}18 \cdot 10^4\ V}$$

Problem 24.38)



$\rightarrow L = 13{,}5\ cm$

$\rightarrow Q = 43{,}6\ fC$

$\Big\}\ \lambda = \frac{Q}{L}$

$\Rightarrow dq = \lambda\, dx$

$$(a)\ V(P_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{Q}{L}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{dx}{d+x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L}\Big[\ln(x+d)\Big]_0^L$$

$$= \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L}\ln\left(\frac{L+d}{d}\right)}$$

$$(b)\ d \rightarrow -x \Rightarrow V(P_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L}\ln\left(\frac{-L+x}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(P_1) = -\vec{\nabla} V\Big|_{x=-d} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L}\left(\frac{1}{x-L} - \frac{1}{x}\right)\Big|_{x=-d}\hat{i}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L}\left[\frac{\cancel{x}-\cancel{x}+L}{x(x-L)}\right]\Big|_{x=-d}\hat{i}$$

$$= \boxed{-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{d(d+L)}\hat{i}}$$

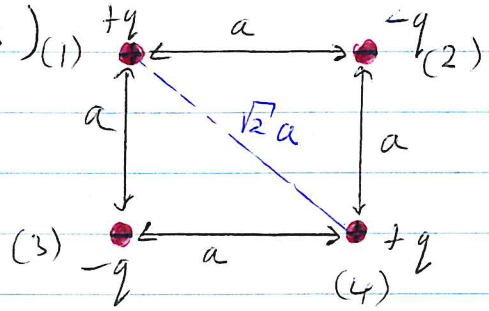
(c) $E_x < 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Γωνία } 180^\circ \text{ με τον άξονα } x}$

(d) $d = 6{,}20\ cm \Rightarrow \boxed{E_x(P_1) = 0{,}0321\ N/C}$

(e) $\boxed{E_y(P_1) = 0}$ $\longrightarrow$ Από συμμετρία ράβδου, σημεία πάνω στον άξονα x έχουν δυναμικό εξαρτώμενο μόνο από το x

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \Rightarrow \boxed{E_y = 0}$$

Problem 24.43)



$\rightarrow q = 2{,}30\ pC$

$\rightarrow a = 64{,}0\ cm$

$\rightarrow U_i = 0$ (καθόλου σωματίδια)

$$\rightarrow U_{1-2} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} \qquad \rightarrow U_{1-4} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2}a}$$

$$\rightarrow U_{1-3} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} \qquad \rightarrow U_{2-4} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

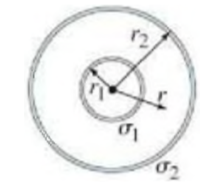
$$\rightarrow U_{2-3} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2}a} \qquad \rightarrow U_{3-4} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

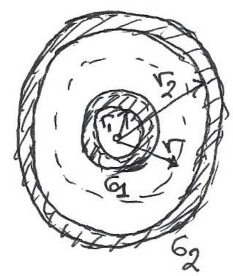
$$\Rightarrow U_f = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}\left(-1-1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-1-1\right)$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-2\right)$$

$$\Rightarrow W = U_f - U_i = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-2\right) = \boxed{-1{,}92\cdot 10^{-13}\ J}$$

6. Δύο λεπτά ομόκεντρα σφαιρικά κελύφη ακτίνας r_1 και r_2 ($r_1 < r_2$) είναι φορτισμένα και περιέχουν ίδιου πρόσημου ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ_1 και σ_2 αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο (α) $0 < r < r_1$ (β) $r_1 < r < r_2$ και (γ) $r > r_2$. (δ) Βρείτε την συνθήκη για την οποία $E = 0$ για $r > r_2$. (ε) Βρείτε την συνθήκη για την οποία $E = 0$ για $r_1 < r < r_2$. Θεωρήστε αμελητέο το πάχος των σφαιρικών κελυφών.





Από τη συμμετρία του προβλήματος, θα μπορούσαμε αμέσως να συμπεράνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι στην ακτινική διεύθυνση, και ότι είναι συνάρτηση μόνο του r.

Θεωρούμε ως επιφάνεια Gauss έναν σφαιρικό φλοιό ομόκεντρο με τους σφαιρικούς φλοιούς, και με ακτίνα r στην περιοχή όπου θα θέλαμε να προσδιορίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο.

Σύμφωνα με τον νόμο του Gauss, θα έχουμε:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = Q_{\varepsilon\sigma}/\varepsilon_0 \Rightarrow 4\pi r^2 E = Q_{\varepsilon\sigma}/\varepsilon_0$$

(α) Στην περιοχή όπου $r < r_1$, $Q_{\varepsilon\sigma} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$.

(β) Στην περιοχή όπου $r_1 < r < r_2$, $Q_{\varepsilon\sigma} = 4\pi r_1^2 \sigma_1 \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \hat{r}$

(γ) Στην περιοχή όπου $r > r_2$, $Q_{\varepsilon\sigma} = 4\pi\left(r_1^2\sigma_1 + r_2^2\sigma_2\right) \Rightarrow \vec{E} = \frac{\left(r_1^2\sigma_1 + r_2^2\sigma_2\right)}{\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

(δ) Το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι $\vec{E} = \vec{0}$ αν $r_1^2\sigma_1 = -r_2^2\sigma_2$. Αυτό ισοδυναμεί με το να έχουμε τους δύο σφαιρικούς φλοιούς με ίσα και αντίθετα φορτία

(ε) $\vec{E} = \vec{0}$ για $r_1 < r < r_2$ είναι δυνατόν μόνο αν $\sigma_1 = 0$, ανεξάρτητα της τιμής της σ_2.