ΦΥΣ 140 **Lab11 - QUIZ - 30 λεπτά** **23/11/2023**

Άσκηση [**15μ**]

Γράψτε ένα πρόγραμμα σε *Python* το οποίο υπολογίζει την τιμή του ολοκληρώματος $\int_1^4 (2x^2 - 6x)dx$ χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Euler με βήμα $dx = 0.1$. Θεωρήστε ότι η αρχική συνθήκη είναι $y(x = 1) = 2$. [**8μ**]

Συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με αυτό που βρίσκεται με την Monte Carlo μέθοδο ολοκλήρωσης της μέσης τιμής για 1,000,000 προσπάθειες. [**7μ**]

Θα πρέπει να στείλετε το αρχείο του προγράμματος που γράψατε με email στο *ptochos.fotios@ucy.ac.cy*. Το subject του email σας θα είναι *lab11_quiz.*

Η μέθοδος του Euler αποτελεί μια μέθοδο ολοκλήρωσης διαφορικής εξίσωσης. Στην προκειμένη περίπτωση μπορεί να ληφθεί ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση αποτελεί την παράγωγο της συνάρτησης του αποτελέσματος της ολοκλήρωσης. Επομένως η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι: $y(x) = \int f(x)dx \Longrightarrow f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$. Μπορούμε να θεωρήσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα ως: $y(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=x_0}^{x=x_f} f(x)\Delta x$. Το τελευταίο αποτελεί το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων με πλευρές $f(x)$ και Δx.

Το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης θα δώσει: $\int f(x)dx = F(x) + C$ όπου C μια σταθερά που καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες. Στην προκειμένη περίπτωση το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης είναι $y(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + C$. Επειδή η αρχική συνθήκη είναι $y(x = 1) = 2$ σημαίνει ότι $2 = \frac{2}{3} \times 1^3 - 3 \times 1^2 + C \Longrightarrow C = \frac{13}{3}$.

Στην περίπτωση της άσκησης: $f(x) = \frac{dy(x)}{dx} = 2x^2 - 6x$ είναι η παράγωγος που θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί στην μέθοδο Euler (η σταθερά C απαλείφεται):

$y(x = x_0 + \Delta x) = y(x_0) + f(x_0)\Delta x,$ (1ο βήμα)

$y(x = x_0 + 2\Delta x) = y(x_0 + \Delta x) + f(x + \Delta x)\Delta x,$ (2ο βήμα)

όπου x_0 είναι το κάτω όριο της ολοκλήρωσης ($x_0 = 1$ στην προκειμένη περίπτωση) και η αρχική τιμή $y(x_0 = 1) = 2$. Η διαδικασία θα πρέπει να επαναληφθεί έως το πάνω όριο της ολοκλήρωσης x_f. Στο τέλος θα έχουμε πάρει το άθροισμα όλων των εμβαδών των ορθογωνίων. Το ολοκλήρωμα θα είναι $y(x_f) - y(x_0)$ που θα μας δώσει το εμβαδόν όλων των ορθογωνίων.

Ο κώδικας στην επόμενη σελίδα εφαρμόζει τα παραπάνω:

```
#!/usr/bin/python3

import numpy as np
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
from random import seed, random

seed(123456)

def func(x):
    return 2*x**2-6*x

def analytic(x):
    return 2*x*x*x/3 - 3*x*x + 13/3

def sympy_calc(xlims):
    x = sp.Symbol('x')
    func = 2*x**2 - 6*x
    integ = sp.integrate(func,(x,min(xlims),max(xlims)))
    return integ

def Euler(D1x,xlims,y0,dx):
    xlow = min(xlims)
    xup  = max(xlims)
    x = xlow
    y = y0
    while x < xup:
        y = y + D1x(x)*dx
        x = x + dx
    return y - y0

def mc_mean(func,xlims,mctries):
    sum = 0
    for itry in range(mctries):
        x = min(xlims) + (max(xlims)-min(xlims))*random()
        y = func(x)
        sum = sum + y
    return (max(xlims)-min(xlims))*sum/mctries

mxmctries = int(input('Number of MC tries: '))
yinit = float(input('Initial condition for f(x0) '))
xvalues = [1,4]
deltax = 0.1

EulerInt  = Euler(func,xvalues,yinit,deltax)
MC_ave    = mc_mean(func,xvalues,mxmctries)
SympyInt  = sympy_calc(xvalues)
Analytic  = analytic(max(xvalues)) - analytic(min(xvalues))

print('The integral using Euler Method and dx = %5.2f is %8.4f' % (deltax,EulerInt))
print('The integral using the MC mean value and %d tries is %8.4f'%(mxmctries,MC_ave))
print('The integral using the sympy integration is %8.4f'%(SympyInt))
print('The integral using the analytic integration is %8.4f'%(Analytic))
```