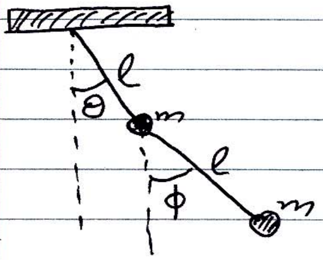
ΦΥΣ 133 – 9ο ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

Εξέταση της περίπτωσης ενός διπλού εκκρεμούς το οποίο αποτελείται από 2 απλά εκκρεμή, το καθένα μάζας m και μήκους l. Το πρώτο εξαρτάται από ακλόνητο σημείο και το δεύτερο εξαρτάται από τη μάζα του πρώτου. Υποθέτοντας ότι τα εκκρεμή εκτελούν μικρές ταλαντώσεις σε ένα επίπεδο, να βρεθούν οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης και οι αντίστοιχες συχνότητες.



Έστω ότι η κατάσταση του συστήματος προσδιορίζεται από τις δύο γωνίες θ και ϕ. Η κινητική ενέργεια προσδιορίζεται από:

$$T=\frac{1}{2}m\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1+\frac{1}{2}m\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2$$

Οι ταχύτητες κάθε μάζας $\vec{v}_1$ και $\vec{v}_2$ μπορούν να γραφούν συναρτήσει των $\dot\theta$ και $\dot\phi$:

$$\vec{v}_1=\hat{e}_\theta l\dot\theta \quad \text{και} \quad \vec{v}_2=\vec{v}_1+\hat{e}_\phi l\dot\phi$$

Ο 2ος όρος της $\vec{v}_2$ είναι η ταχύτητα της 2ης μάζας ως προς την 1η μάζα. Επομένως η κινητική ενέργεια γράφεται:

$$T=\frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2+\frac{1}{2}m\left(\hat{e}_\theta l\dot\theta+\hat{e}_\phi l\dot\phi\right)\cdot\left(\hat{e}_\phi l\dot\phi\cdot\hat{e}_\theta l\dot\theta\right)\simeq$$

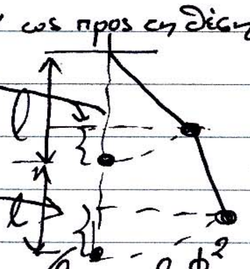
$$\simeq\frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2+\frac{1}{2}ml^2\left(\dot\theta+\dot\phi\right)^2=\frac{1}{2}ml^2\left(2\dot\theta^2+\dot\phi^2+2\dot\theta\dot\phi\right)$$

(υποθέτουμε ότι για μικρές αποκλίσεις από τη θέση ισορροπίας $\hat{\varepsilon}_\theta$ κ $\hat{\varepsilon}_\phi$ παραμένουν παράλληλα οπότε $\hat{\varepsilon}_\theta\cdot\hat{\varepsilon}_\phi\simeq1$)

Μπορούμε να υπολογίσουμε το πίνακα M

$$M_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2T}{\partial\dot{x}_i\dot{x}_j}\Rightarrow\left.\begin{aligned}M_{11}&=\frac{1}{2}\frac{\partial^2T}{\partial\dot\theta^2}=2ml^2\\M_{22}&=\frac{1}{2}\frac{\partial^2T}{\partial\dot\phi^2}=ml^2\\M_{12}=M_{21}&=\frac{1}{2}\frac{\partial^2T}{\partial\dot\theta\partial\dot\phi}=ml^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow M=ml^2\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$$

Το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών των 2 μαζών ως προς τη θέση ισορροπίας τους είναι:



$$V = mgl\left(1-\overset{1-\theta^2/2}{\cancel{\cos\theta}}\right) + mgl\left[2-\left(\overset{1-\theta^2/2}{\cancel{\cos\theta}}+\overset{1-\phi^2/2}{\cancel{\cos\phi}}\right)\right] \simeq$$

$$\simeq \cancel{mgl} + mgl\frac{\theta^2}{2} + \cancel{2mgl} - \cancel{mgl} - \cancel{mgl} + mgl\frac{\theta^2}{2} - \cancel{mgl} + mgl\frac{\phi^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{2}mgl\left(2\theta^2+\dot{\phi}^2\right)$$

Επομένως ο πίνακας K θα είναι: $k_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i x_j}$

$$\left.\begin{aligned} k_{11} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} = 2mgl \\ k_{12} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial\phi} = 0 = k_{21} \\ k_{22} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} = mgl \end{aligned}\right\} \Rightarrow K = mgl\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα: $M\ddot{q} + Kq = 0$

Αντικαθιστώντας: $ml^2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} + mgl\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} = 0$ $q = \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix}$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει λύση της μορφής $q = a\cos\omega t = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cos\omega t$

Αντικαθιστώντας θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} -2\omega^2+2\omega_0^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2+\omega_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

Επομένως μη τετριμμένη λύση υπάρχει αν η ορίζουσα είναι ϕ

$$\begin{vmatrix} -2\omega^2+2\omega_0^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2+\omega_0^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega^4 - 4\omega^2\omega_0^2 + 2\omega_0^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = (2-\sqrt{2})\overset{\omega_0^2}{\frac{g}{l}} \\ \omega_2^2 = (2+\sqrt{2})\, g/l \end{cases}$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε το λόγο a_1/a_2 των 2 ιδιοδιανυσμάτων εισάγοντας τις 2 ιδιοσυχνότητες τη μια μετά την άλλη στην εξίσωση κίνησης που πήραμε προηγουμένως σε μορφή πίνακα

Για την πρώτη εξίσωση θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} -2\omega_1^2+2\omega_0^2 & -\omega_1^2 \\ -\omega_1^2 & -\omega_1^2+\omega_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left(-2\omega^2+2\right)a_1-\omega^2 a_2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-2\omega^2+2\omega_0^2\right)a_1=\omega^2 a_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{\omega^2}{-2\omega^2+2\omega_0^2}=\frac{1}{-2}\frac{\omega^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}$$

Αντικαθιστώντας $\omega=\omega_1$ έχουμε:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{2-\sqrt2}{-2(2-\sqrt2)+2}=\frac{2-\sqrt2}{2+2\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}=\frac{1}{\sqrt2}$$

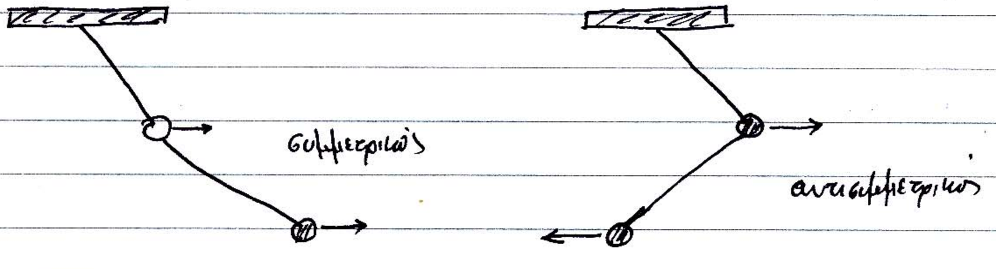
Ενώ για $\omega=\omega_2$ έχουμε:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{2+\sqrt2}{-2(2+\sqrt2)+2}=\frac{2+\sqrt2}{-2-2\sqrt2}=\frac{2+\sqrt2}{-(2+2\sqrt2)}=-\frac{\sqrt2}{2}=-\frac{1}{\sqrt2}$$

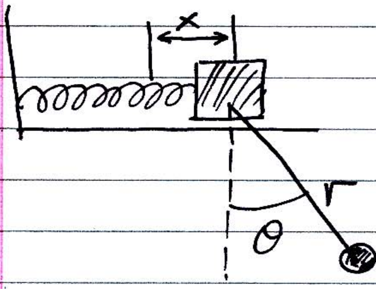
Θέτοντας αυθαίρετα $a_1=1$ (μπορούμε να το κάνουμε αφού έχουμε μόνο $\frac{a_1}{a_2}$)

Έχουμε: $\Theta=\cos\omega_1 t$ $\quad \phi=+\sqrt2\cos\omega_1 t$ $\quad a_1=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt2\end{pmatrix}$ συμμετρικός

$\Theta=-\cos\omega_2 t$ $\quad \phi=+\sqrt2\cos\omega_2 t$ $\quad a_2=\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt2\end{pmatrix}$ αντισυμμετρικός



Ένα εκκρεμές μάζας m και μήκους r είναι εξαρτημένο από ένα τούβλο επίσης μάζας m το οποίο μπορεί να κινείται σε λεία οριζόντια τροχιά. Ένα ελατήριο, σταθεράς k, συνδέει το τούβλο με τον ακλόνητο τοίχο. Οι τιμές της μάζας m, της σταθεράς k και του μήκους r του ελατηρίου είναι τέτοιες ώστε, $2mg = kr$. Η σχέση αυτή σημαίνει ότι αν το ελατήριο συγκρατούσε τις μάζες του τούβλου και του εκκρεμούς, θα επιμηκύνονταν κατά μια απόσταση ίση με το μήκος του εκκρεμούς. Να βρεθούν οι ιδιοσυχνότητες.



Υπολογίζουμε την κινητική και δυναμική ενέργεια του συστήματος

$$X_{\text{τούβλου}} \Rightarrow \upsilon_{\text{τουβλ}} = \dot{X}_{\text{τουβ}}$$

$$X_{\text{εκκρ}} = X_{\text{τουβλ}} + r\sin\theta \Rightarrow \dot{X}_{\text{εκ}} = \dot{X}_{\text{τουβ}} + r\dot{\theta}\cos\theta$$
$$Y_{\text{εκκρ}} = -r\cos\theta \Rightarrow \dot{Y}_{\text{εκ}} = r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left[(\dot{x} + r\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (r\dot{\theta})^2\sin^2\theta\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2r\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \left(\frac{m}{2} + \frac{m}{2}\right)\dot{x}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 + mr\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = m\dot{x}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 + mr\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta \qquad (1)$$

$$V = mgr(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}kx^2 \qquad (2)$$

Για μικρά θ και $\dot{\theta}$ μπορούμε να γράψουμε $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$

Η (2) $\Rightarrow$ $V \simeq mgr\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2}kx^2$

Η (1) $\Rightarrow$ $T = m\dot{x}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 + mr\dot{x}\dot{\theta}$

η ποσότητα $\dot{\theta}\frac{\theta^2}{2}$ είναι πολύ μικρή αφού θ κ $\dot{\theta}$ μικρά και είναι 3ης τάξης σε θ

Απλουστεύουμε περισσότερο το πρόβλημα θέτοντας $q_1 = X$ κ $q_2 = r\Theta$ ενώ χρησιμοποιώντας τη συνθήκη του προβλήματος θα έχουμε:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{r} = \frac{k}{2m}$$

Επομένως η κινητική κ δυναμική ενέργεια γράφονται:

$$T = \frac{1}{2} m \left[2\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \right]$$

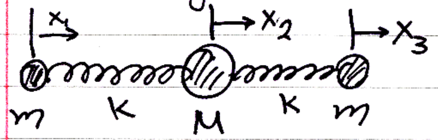
$$V = \frac{1}{2} m\omega_0^2 \left[2q_1^2 + q_2^2 \right]$$

Ακριβώς οι ίδιες εξισώσεις με αυτές του διπλού εκκρεμούς στο προηγούμενο παράδειγμα

Επομένως οι 2 φυσικές συχνότητες θα είναι:

$$\omega_1^2 = (2 - \sqrt{2})\,\omega_0^2 \quad \text{και} \quad \omega_2^2 = (2 + \sqrt{2})\,\omega_0^2$$

Κίνηση ενός συστήματος 3 σωμάτων που βρίσκονται σε μια ευθεία.
Τέτοιο παράδειγμα αποτελεί ένα τριατομικό μόριο όπως το CO_2 (O-C-O)
Θεωρούμε κίνηση σε μια διάσταση (x-άξονα). Τα δύο άτομα του O έχουν μάζα m ενώ το κεντρικό άτομο έχει μάζα M. Συνδέονται μεταξύ τους μέσω δυναμικού όμοιου με ελατηρίου, σταθεράς k. Οι συντεταγμένες που εκφράζουν τις αποκλίσεις από τη θέση ισορροπίας είναι x_1, x_2, x_3



$$L = T - V = \left(\frac{m}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_3^2 + \frac{M}{2}\dot{x}_2^2\right) - \left[\frac{k}{2}(x_2-x_1)^2 + \frac{k}{2}(x_3-x_2)^2\right]$$

Επομένως ζητώντας λύση της μορφής $q = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$ θα έχουμε:

να λύσουμε την εξίσωση: $\left(K - M\omega^2\right) q = 0$

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 x_2} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 x_3} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x_3 \partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_3} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_3} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_3 \partial \dot{x}_1} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_3 \partial \dot{x}_2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_3 \partial \dot{x}_3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

Οπότε έχουμε:

$$\left(K - M\omega^2\right) q = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} k-m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k-M\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k-m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$$

Για μη τετριμμένες λύσεις πρέπει: $\begin{vmatrix} k-m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k-M\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k-m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \omega^2\left(-m\omega^2+k\right)\left(-mM\omega^2+kM+2km\right)=0$$

Οι λύσεις είναι :

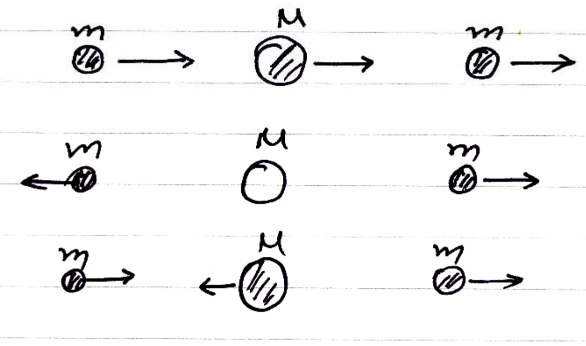
$$\omega_1=0, \qquad \omega_2=\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{και} \qquad \omega_3=\left(\frac{k}{m}+\frac{2k}{M}\right)^{1/2}$$

- Η πρώτη συχνότητα αντιστοιχεί σε μη ταλάντωση, αλλά σε απλή μεταφορική κίνηση. Αν $\omega=\omega_1=0$ τότε $a_1=a_2=a_3$

- Αν $\omega=\omega_2$ τότε βρίσκουμε $a_2=0$ ενώ $a_1=-a_3$
Οπότε το μεσαίο σώμα είναι ακίνητο ενώ τα άλλα 2 ταλαντώνονται με αντίθετη φάση

- Αν $\omega=\omega_3$ τότε $a_1=a_3$ και $a_2=-2a_1\left(\frac{m}{M}\right)=-2a_3\left(\frac{m}{M}\right)$
Τα 2 ακραία σώματα ταλαντώνονται σε φάση ενώ το μεσαίο σώμα ταλαντώνεται αντίθετα με πλάτος μικρότερο από τα άλλα δύο.

- Ο λόγος $\frac{\omega_3}{\omega_2}$ είναι ανεξάρτητος της σταθεράς k και ισούται με $\frac{\omega_3}{\omega_2}=\left(1+2\frac{m}{M}\right)^{1/2}$



(1) $\omega_1=0$

(2) $\omega_2=\sqrt{\frac{k}{m}}$

(3) $\omega_3=\sqrt{\frac{k}{m}+\frac{2k}{M}}$

$$-ka_2 + ka_1 - m\omega^2 a_1 = 0 \Rightarrow (k - m\omega^2)a_1 = ka_2 \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{k - m\omega^2}{k} a_1}$$

$$-ka_1 + 2ka_2 - M\omega^2 a_2 - ka_3 = 0 \Rightarrow -ka_1 + (2k - M\omega^2)\frac{k - m\omega^2}{k} a_1 - ka_3 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a_3 = -a_1 + (2k - M\omega^2)\frac{k - m\omega^2}{k^2} a_1}$$

Αντικαθιστώντας $\omega = \omega_2$ έχουμε από τη $1^η$ εξίσωση:

$$a_2 = \frac{k - \cancel{m}\frac{k}{\cancel{m}}}{k} a_1 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$a_3 = -a_1 + \left(2k - M\frac{k}{m}\right)\cancel{\frac{k - m\frac{k}{m}}{k^2}a_1} \Rightarrow a_3 = -a_1.$$

Για την συχνότητα $\omega = \omega_3$ θα έχουμε:

$$a_2 = \frac{k - m\left(\frac{k}{m} + \frac{2k}{M}\right)}{k} a_1 = \frac{\cancel{k} - \cancel{k} - \frac{2\cancel{k}m}{M}}{\cancel{k}} a_1 \Rightarrow a_2 = -2\frac{m}{M}a_1$$

$$a_3 = -a_1 + (2k - M\omega^2)\frac{k - m\left(\frac{k}{m} + \frac{2k}{M}\right)a_1}{k^2} = -a_1 + \left(2k - M\left(\frac{k}{m} + \frac{2k}{M}\right)\right)\frac{(-2ma_1)}{Mk} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_3 = -a_1 + \left(\cancel{2k} - \frac{k\cancel{M}}{\cancel{m}} - \cancel{\frac{2k}{1}}\right)\frac{(-2\cancel{m}a_1)}{\cancel{Mk}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_3 = -a_1 + 2a_1 \Rightarrow a_3 = a_1.$$