Υποθέσεις που κάναμε

- Οι δεσμοί είναι ολόνομοι
  - Αυτό το υποθέτουμε πάντα $\Rightarrow$ $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, t)$

- Οι δυνάμεις δεσμών δεν παράγουν έργο $\Rightarrow$ $\mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$
  - Αγνοούμε τριβές

- Οι ενεργούσες δυνάμεις είναι συντηρητικές $\Rightarrow$ $\mathbf{F}_i = -\nabla_i V$
  - Η εξίσωση Lagrange είναι ok αν V εξαρτάται από το χρόνο t

- Το δυναμικό V ανεξάρτητο από τις γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}_j$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$
  - Το τελευταίο θα το εξετάσουμε σήμερα

Παράδειγμα: Χρονικά εξαρτημένο σύστημα

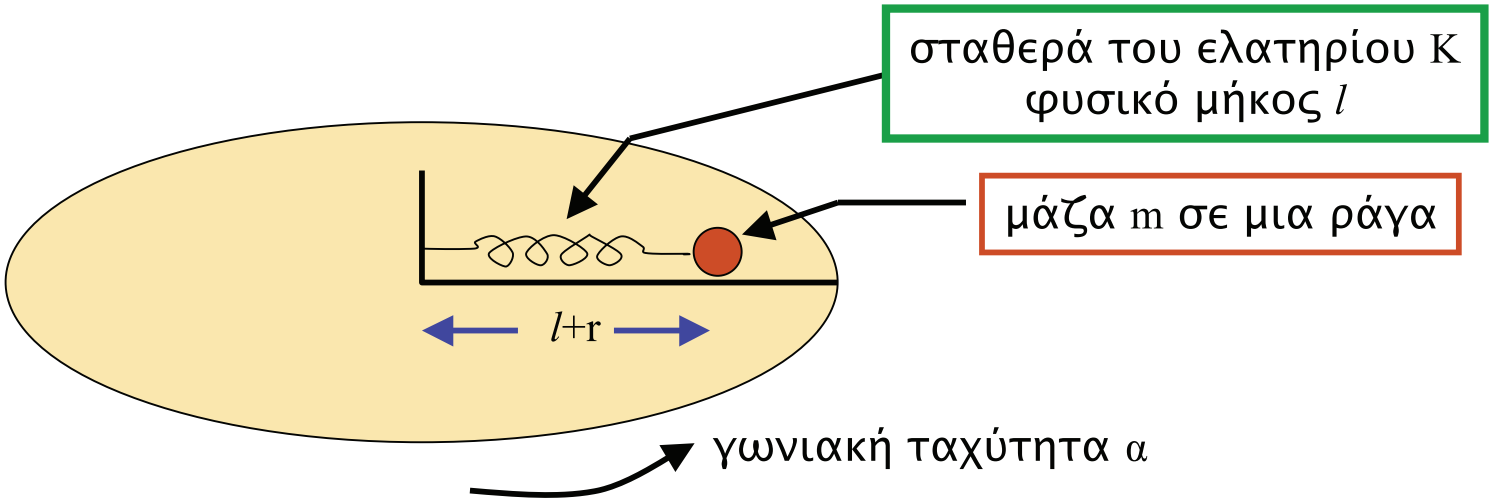
- Οι συναρτήσεις μετασχηματισμού μπορεί να εξαρτώνται από το χρόνο t

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j, t)$$

  - Το γενικευμένο σύστημα συντεταγμένων μπορεί να κινείται

    π.χ. Σύστημα συντεταγμένων πάνω στη γη

- Ένα παράδειγμα



Παράδειγμα: Χρονικά εξαρτημένο σύστημα

- Οι συναρτήσεις μετασχηματισμού: $\begin{cases} x = (l+r)\cos(at) \\ y = (l+r)\sin(at) \end{cases}$

- Κινητική ενέργεια $T = \dfrac{m}{2}\left\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right\} = \dfrac{m}{2}\left\{\dot{r}^2 + (l+r)^2 a^2\right\}$

- Δυναμική ενέργεια $V = \dfrac{K}{2} r^2$

- Η εξίσωση του Lagrange $\Rightarrow$ $L = \dfrac{m}{2}\left\{\dot{r}^2 + (l+r)^2 a^2\right\} - \dfrac{K}{2} r^2$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right] - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - ma^2(l+r) + Kr = 0$$

Παράδειγμα: Χρονικά εξαρτημένο σύστημα

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right]-\frac{\partial L}{\partial r}=m\ddot{r}-ma^2(l+r)+Kr=0$$

$$m\ddot{r}+(K-ma^2)\left(r-\boxed{\frac{ma^2 l}{K-ma^2}}\right)=0$$

- Αν $K>m\alpha^2$, ένας αρμονικός ταλαντωτής με $\omega=\sqrt{\frac{K-ma^2}{m}}$
  - Το κέντρο ταλάντωσης έχει μετατοπιστεί κατά $\sqrt{\frac{ma^2 l}{K-ma^2}}$
- Αν $K<m\alpha^2$, απομακρύνεται εκθετικά
- Αν $K= m\alpha^2$, η ταχύτητα είναι σταθερή
  - Η κεντρομόλος δύναμη ισορροπεί με την δύναμη ελατηρίου

- Η Lagrangian δεν είναι μοναδική για ένα δεδομένο σύστημα
  - Αν η Lagrangian L περιγράφει ένα σύστημα
  - Μπορεί να αποδειχθεί ότι $L' = L + \frac{dF(q,t)}{dt}$

  δουλεύει εξ' ίσου καλά για οποιαδήποτε συνάρτηση F

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{dF}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{dF}{dt}\right) = 0$$

χρησιμοποιώντας

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Συντηρητικές δυνάμεις

- Μια δύναμη F είναι συντηρητική αν ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο συνθήκες:
  - Η F εξαρτάται μόνο από τη θέση του σωματιδίου όχι από την ταχύτητά του v, ή το χρόνο t, ή κάποια άλλη μεταβλητή

    Δηλαδή $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$
  - Για δύο οποιαδήποτε σημεία 1 και 2, το έργο W(1→2) που παράγεται από τη δύναμη F είναι το ίδιο για οποιαδήποτε διαδρομή μεταξύ 1 και 2

- Η πρώτη συνθήκη ισοδυναμεί με το να γράψουμε $\boxed{\vec{F} = -\nabla U(r)}$

  όπου $\nabla = \hat{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ ⟵ διάνυσμα

- Η δεύτερη συνθήκη, ότι $W_{12} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}$ ανεξάρτητο της διαδρομής

  ικανοποιείται αν ο στροβιλισμός της δύναμης είναι 0 δηλαδή: $\boxed{\nabla \times \vec{F} = 0}$

- Όταν οι δυνάμεις που δρουν σε ένα σύστημα είναι συντηρητικές τότε όπως ξέρουμε η μηχανική ενέργεια διατηρείται.

Δυναμική ενέργεια εξαρτώμενη από το χρόνο

- Μερικές φορές μπορεί να έχουμε $\nabla\times\vec{F}=0$ αλλά η F εξαρτάται από το χρόνο και επομένως δεν ικανοποιείται η πρώτη συνθήκη

- Μπορούμε και πάλι να ορίσουμε μια δυναμική ενέργεια $U=U(\vec{r},t)$

  με την ιδιότητα $\vec{F}=-\nabla U$

  Αλλά στη περίπτωση αυτή η ολική μηχανική ενέργει,Ε, δεν διατηρείται

- Το γεγονός ότι $\nabla\times\vec{F}=0$ σημαίνει ότι το ολοκλήρωμα έργου κάποια στιγμή t είναι ανεξάρτητο της διαδρομής

  Επομένως μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $U=U(\vec{r},t)$ τέτοια ώστε

$$U(\vec{r},t)=-\int_{r_0}^{r_1}\vec{F}(\vec{r}',t)\cdot d\vec{r}'\Rightarrow\vec{F}(\vec{r},t)=-\nabla U(\vec{r},t)$$

  - Στην περίπτωση αυτή όμως: $dU(\vec{r},t)=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz+\frac{\partial U}{\partial t}dt\Rightarrow$

$$\Rightarrow dU(\vec{r},t)=-\vec{F}\cdot d\vec{r}+\frac{\partial U}{\partial t}dt$$

  Η μεταβολή στη κινητική ενέργεια είναι: $dT=\frac{dT}{dt}dt=\left(m\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v}\right)dt=\vec{F}\cdot d\vec{r}$

  Προσθέτοντας τις 2 σχέσεις έχουμε: $d\left(T+U\right)=dE=\frac{\partial U}{\partial t}dt$ E δεν διατηρείται

Lagrangian με U(r,t)

- Από την αρχή του D΄ Alembert είχαμε δει ότι: $\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i^{(e)} - \dot{\vec{p}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i = 0$

  Η οποία μετά από πράξεις βρήκαμε ότι ήταν ισοδύναμη: $\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right]\delta q_j = 0$

  Από την σχέση αυτή για ολόνομους δεσμούς έχουμε: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$ (Α)

  όπου: $Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

- Το δυναμικό μπορεί να είναι της μορφής: $V = V(\vec{r},t)$ ανεξάρτητο από τις $\dot{q}_j$

  επομένως $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$

  Η (Α) γίνεται: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}\right) = 0$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

Η εξίσωση Lagrange και για μη συντηρητικές δυνάμεις

Δυναμικό εξαρτώμενο από την ταχύτητα

- Υποθέσαμε ότι $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$ και $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$ έτσι ώστε

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

- Θα μπορούσαμε να είχαμε κάνει το ίδιο αν μας δίνονταν

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right) \qquad U = U(q_j, \dot{q}_j, t)$$

Γενικευμένο δυναμικό, ή δυναμικό εξαρτώμενο από ταχύτητα

$$\Rightarrow L = T(q_j, \dot{q}_j, t) - U(q_j, \dot{q}_j, t)$$

Δυναμικό εξαρτώμενο από την ταχύτητα

Σύμφωνα με την γενική μορφή των εξισώσεων Lagrange θα έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

Θεωρώντας και πάλι $L = T(q_j, \dot{q}_j, t) - U(q_j, \dot{q}_j, t)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Αυτό είναι δυνατό για μια ιδιαίτερη αλλά πολύ σημαντική περίπτωση:

κίνηση ενός ηλεκτρικού φορτίου μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Ηλεκτρομαγνητική δύναμη σε σωματίδιο

- Η δύναμη Lorentz σε ένα κινούμενο φορτισμένο σωματίδιο, e, είναι:

$$\vec{F} = e\left[\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})\right]$$ εξαρτώμενη από ταχύτητα

  - Τα πεδία E και B δίνονται από τις σχέσεις

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

όπου το V(r,t) και A(r,t) είναι το βαθμωτό και διανυσματικό δυναμικό

  - Μικρή παρένθεση σε E&M
    - Οι εξισώσεις Maxwell είναι ως γνωστό (CGS σύστημα):

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (1) \qquad \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \qquad (2) \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (4)$$

Ξέρουμε όμως ότι: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\nabla \times \nabla) = 0$

Και επομένως από την (1) έχουμε: $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t)$