

## ΠΕΙΡΑΜΑ 9

### Γυροσκόπιο και οι νόμοι του

- Σκοπός του πειράματος

Σκοπός του πειράματος είναι ο καθορισμός της ροπής αδράνειας του δίσκου του γυροσκοπίου,  $I_p$ , μέσω της μέτρησης του χρόνου (α) πτώσης διαφόρων γνωστών μαζών που αναρτώνται στον άξονα περιστροφής του γυροσκοπίου και (β) της περιστροφής του γυροσκοπίου. Εξετάζονται επίσης έννοιες όπως γωνιακή ταχύτητα μετάπτωσης και κλόνησης του άξονα περιστροφής του γυροσκοπίου συναρτήσει γνωστών ροπών δυνάμεων.

- Αρχή λειτουργίας του πειράματος

Ο δίσκος του γυροσκοπίου τίθεται σε περιστροφή κάτω από την επίδραση δυνάμεων διαφόρων μέτρων οι οποίες προκαλούν ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής του γυροσκοπίου. Η ροπή αδράνειας του γυροσκοπίου προσδιορίζεται από τη μέτρηση της γωνιακής επιτάχυνσης, της συχνότητας περιστροφής του γυροσκοπίου και της συχνότητας μετάπτωσης. Στο πρώτο μέρος της εργαστηριακής άσκησης δυο από τους τρεις άξονες του γυροσκοπίου παραμένουν σταθεροί. Μετέπειτα οι άξονες του γυροσκοπίου είναι ελεύθεροι να κινηθούν και εξετάζεται η σχέση μεταξύ της συχνότητας μετάπτωσης και της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του γυροσκοπίου όταν γνωστές ροπές δυνάμεων ασκούνται πάνω στον άξονα περιστροφής του γυροσκοπίου.

Τέλος όταν ο άξονας περιστροφής του γυροσκοπίου μετατοπιστεί ελαφρά εμφανίζεται κλόνηση (κίνηση του άξονα περιστροφής στο κατακόρυφο επίπεδο) Η συχνότητα της εμφανιζόμενης κλόνησης του άξονα περιστροφής του γυροσκοπίου εξετάζεται συναρτήσει της συχνότητας περιστροφής του.

- Στοιχεία από τη θεωρία

Η ροπή αδράνειας του γυροσκοπίου ερευνάται με τη μέτρηση της γωνιακής επιτάχυνσης που προκαλείται από ροπές δυνάμεων. Σε αυτό το πείραμα, δυο από τους άξονες του γυροσκοπίου παραμένουν σταθεροί και για το λόγο αυτό το γυροσκόπιο χαρακτηρίζεται από συμμετρία ως προς τους συγκεκριμένους άξονες περιστροφής.

Η σχέση μεταξύ της συχνότητας μετάπτωσης,  $\Omega$ , και της ιδιοσυχνότητας του γυροσκοπίου,  $\omega$ , με τρεις ελεύθερους άξονες εξετάζεται για διάφορες ροπές δυνάμεων, που εφαρμόζονται στον άξονα περιστροφής του δίσκου του γυροσκοπίου. Εάν ο άξονας περιστροφής είναι ελαφρά μετατοπισμένος τότε προκαλείται κλόνηση. Η κλόνηση παρουσιάζει μια αντίστοιχη συχνότητα, που ονομάζεται συχνότητα κλόνησης.

Εάν κρεμάσουμε από το δίσκο του γυροσκοπίου μια μάζα  $m$  και την αφήσουμε ελεύθερη να πέσει προς τα κάτω, τότε ο δίσκος του γυροσκοπίου τίθεται σε περιστροφή εξαιτίας της ροπής,  $\tau$ , που προκαλείται από τη συνησταμένη δύναμη του βάρους της μάζας  $m$  και της τάσης του νήματος που συγκρατεί τη μάζα (Σχήμα 1). Στη περίπτωση αυτή η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος θα είναι:

$$\tau = I_p a \Rightarrow a = \frac{d\omega_R}{dt} = \frac{\tau}{I_p} \quad (1)$$

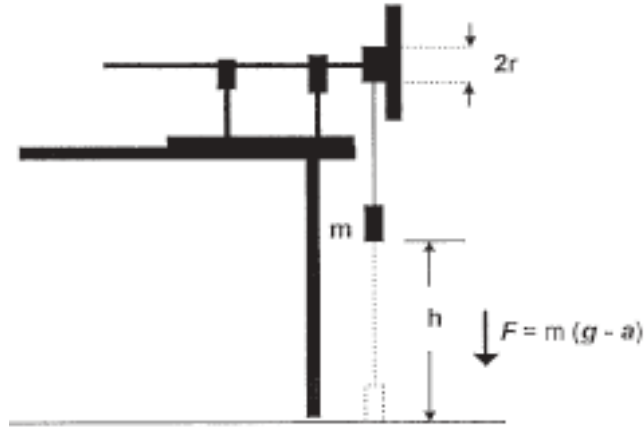
όπου:

$\omega_R$  = η γωνιακή ταχύτητα

$\alpha$  = η γωνιακή επιτάχυνση

$I_P$  = η ροπή αδράνειας

$\tau = \vec{r} \times \vec{F} = |\vec{F}| |\vec{r}| \sin \theta$  = η ροπή της δύναμης.



Σχήμα 1

Σύμφωνα με το νόμο δράσης-αντίδρασης, η δύναμη που προκαλεί τη ροπή (η τάση του νήματος είναι:

$$F = m(g - a) \quad (2)$$

όπου:

$g$  = η επιτάχυνση της δύναμης της βαρύτητας

$a$  = η γραμμική (εφαπτομενική) επιτάχυνση του συστήματος.

Η γραμμική επιτάχυνση είναι η επιτάχυνση με την οποία πέφτει η μάζα  $m$  που είναι αναρτημένη από τον άξονα του γυροσκοπίου και σύμφωνα με τις εξισώσεις της κινηματικής:

$$h = \frac{1}{2} a t_{\pi\omega\sigma\eta\varsigma}^2 \Rightarrow a = \frac{2h}{t_{\pi\omega\sigma\eta\varsigma}^2} \quad (3)$$

Η σχέση που συνδέει τη γραμμική/εφαπτομενική επιτάχυνση  $a$ , με τη γωνιακή επιτάχυνση  $\alpha$ , της περιστροφής του συστήματος του γυροσκοπίου είναι:

$$a = \frac{\alpha}{r} \quad (4)$$

όπου  $r$  είναι η ακτίνα της τροχαλίας γύρω από την οποία είναι τυλιγμένο το νήμα που συγκρατεί τη μάζα  $m$ .

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) και (4) προκύπτει ότι:

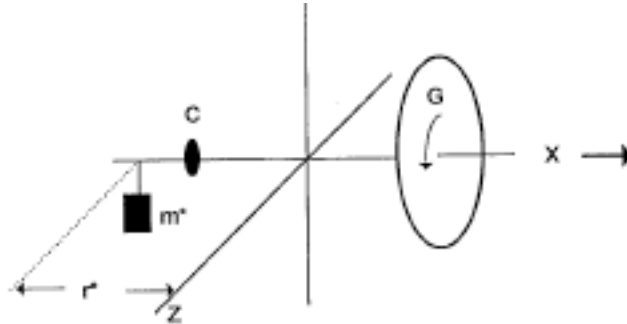
$$t_{\pi\omega\sigma\eta\varsigma}^2 = \frac{2I_P + 2mr^2}{mgr^2} h \quad (5)$$

Θεωρούμε τώρα το Σχήμα 2, όπου το γυροσκόπιο είναι ελεύθερο να κινηθεί και στους τρεις άξονες συμμετρίας του. Το γυροσκόπιο αρχικά ισορροπεί με τη βοήθεια του αντίβαρου C. Αν θέσουμε σε περιστροφή το δίσκο του γυροσκοπίου ως προς τον άξονα  $x$ , (κατά μήκος του

άξονα που συνδέει το αντίβαρο με το κέντρο του δίσκου του γυροσκοπίου) με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ , τότε η στροφορμή του συστήματος είναι σταθερή σε διάνυσμα και δίνεται από:

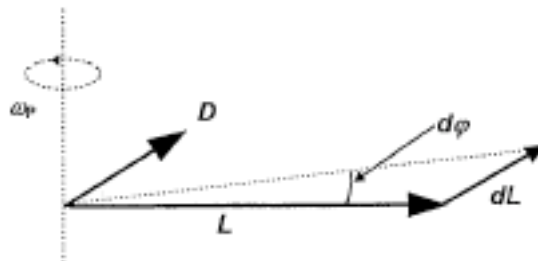
$$L = I_p \omega_R \quad (6)$$

Αν στο σύστημα προσθέσουμε μια νέα μάζα  $m^*$ , την οποία αναρτούμε σε απόσταση  $r^*$  από το σημείο στήριξης (Σχήμα 2), τότε το βάρος της μάζας αυτής προκαλεί μια επιπλέον ροπή στο σύστημα,  $\tau^*$ . Το διάνυσμα της ροπής αυτής βρίσκεται στο οριζόντιο επίπεδο και έχει φορά προς το εξωτερικό της σελίδας (όπως βλέπετε το Σχήμα 2).



Σχήμα 2

Η ροπή της δύναμης αυτής προκαλεί μεταβολή της στροφορμής του συστήματος και η μεταβολή αυτή είναι ένα διάνυσμα παράλληλο προς το διάνυσμα της ροπής. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ο δίσκος του γυροσκοπίου να κινηθεί προς το εσωτερικό της σελίδας (αντίθετα δηλαδή με τη φορά των δεικτών του ρολογιού) γύρω από τον άξονα στήριξης ώστε η διεύθυνση του διανύσματος της στροφορμής του να ισούται με την αρχική στροφορμή συν τη μεταβολή της στροφορμής (Σχήμα 3).



Σχήμα 3

Επομένως η ροπή  $\tau^*$ , θα δίνεται από τη σχέση:

$$\tau^* = m^* g r^* = \frac{dL}{dt} \quad (7)$$

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως το διάνυσμα της αρχικής στροφορμής  $L$  στρέφεται κατά μια γωνία  $d\phi$  ως προς την αρχική του διεύθυνση, ώστε:

$$dL = L d\phi \quad (8)$$

Το γυροσκόπιο επομένως εκτελεί μια περιστροφική κίνηση γύρω από τον άξονα στήριξης και η κίνηση αυτή ονομάζεται μετάπτωση (precession). Η μετάπτωση αυτή έχει κάποια γωνιακή ταχύτητα  $\omega_p$ , που δίνεται από τη σχέση:

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{L} \frac{dL}{dt} = \frac{1}{I_p \omega_R} \frac{dL}{dt} = \frac{m^* g r^*}{I_p \omega_R} \quad (9)$$

Γνωρίζοντας ότι  $\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$ , όπου  $T_p$  η περίοδος της μετάπτωσης, και  $\omega_R = \frac{2\pi}{T_R}$  όπου  $T_R$  η περίοδος περιστροφής του δίσκου του γυροσκοπίου προκύπτει από την εξίσωση (9) ότι:

$$\frac{1}{T_R} = \frac{m^* g r^*}{4\pi^2} \frac{1}{I_p} T_p \quad (10)$$

### Σημείωση:

Η ροπή αδράνειας ενός δίσκου δίνεται από τη σχέση:

$$I_p = \frac{1}{2} M R^2 = \frac{\pi}{2} R^2 d \rho \quad (11)$$

όπου  $M$ ,  $R$ ,  $d$  και  $\rho$  είναι η μάζα, η ακτίνα, το πάχος και η πυκνότητα του δίσκου αντίστοιχα. Στη περίπτωση του πειράματος αυτού η πυκνότητα του δίσκου είναι  $\rho = 0.9 \text{ gr/cm}^3$ .

Γνωρίζοντας τα πιο πάνω χαρακτηριστικά του δίσκου, προκύπτει ότι  $I_p = 8.91 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2$ .

### • Εκτέλεση του πειράματος

Να ακολουθήσετε τη παρακάτω διαδικασία και να βρείτε σε κάθε περίπτωση τη ροπή αδράνειας του,  $I_p$ , του δίσκου του γυροσκοπίου.

#### **(Α) Μέτρηση του χρόνου πτώσης για διαφορετικά ύψη**

Πραγματοποιείτε τη διάταξη του Σχήματος 1 και τοποθετείστε τη μάζα ( $m = 60 \text{ gr}$ ) στο ελεύθερο άκρο του νήματος. Ακολουθώντας αφήστε τη μάζα να πέσει από διάφορα ύψη  $h$ , και καταγράψετε το χρόνο πτώσης  $t_{\text{πτώσης}}$ . Ο χρόνος πτώσης μετράται από τη στιγμή που ελευθερώνεται ο δίσκος του γυροσκοπίου μέχρι τη στιγμή που η μάζα ακουμπά στο έδαφος.

Βρείτε τη ροπή αδράνειας  $I_p$ , και συγκρίνετε τη τιμή που προσδιορίσατε με τη θεωρητική τιμή που αναγράφεται παραπάνω.

#### **(Β) Μέτρηση της περιόδου περιστροφής και μετάπτωσης της κίνησης του γυροσκοπίου**

Πραγματοποιείτε τη διάταξη του Σχήματος 2, αφαιρώντας τη μεταλλική ράβδο στήριξης έτσι ώστε να είναι εφικτή η κίνηση στους τρεις άξονες περιστροφής. Τοποθετήστε τη μάζα των  $30 \text{ gr}$  στο άλλο άκρο του άξονα περιστροφής του γυροσκοπίου όπως στο Σχήμα 2. Ακολουθώντας θέστε σε περιστροφή το δίσκο του γυροσκοπίου και μετρήστε με τη βοήθεια της φωτοδιόδου την περίοδο περιστροφής του δίσκου,  $T_R$ , και με το χρονόμετρο, τη μισή περίοδο της μεταπτωτικής κίνησης,  $T_p/2$ .

Προσδιορίστε και πάλι τη ροπή αδράνειας του δίσκου του γυροσκοπίου  $I_p$ . Συγκρίνετε τη τιμή που βρήκατε με τη θεωρητική τιμή.

Επαναλάβετε τη πιο πάνω διαδικασία χρησιμοποιώντας τη μάζα των  $60 \text{ gr}$ .