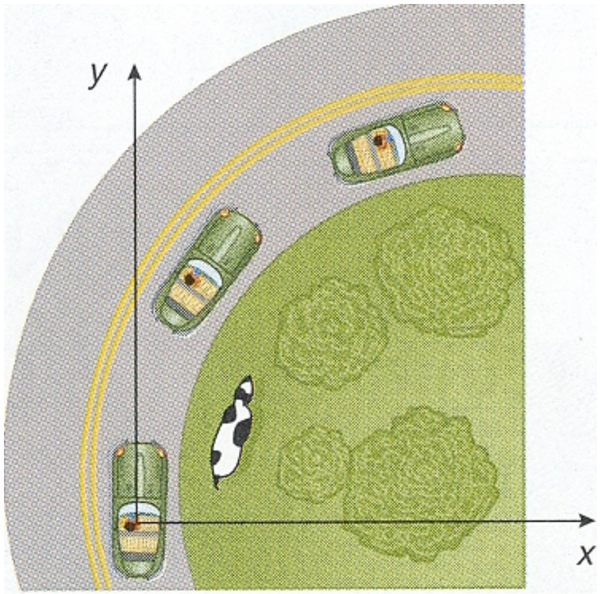
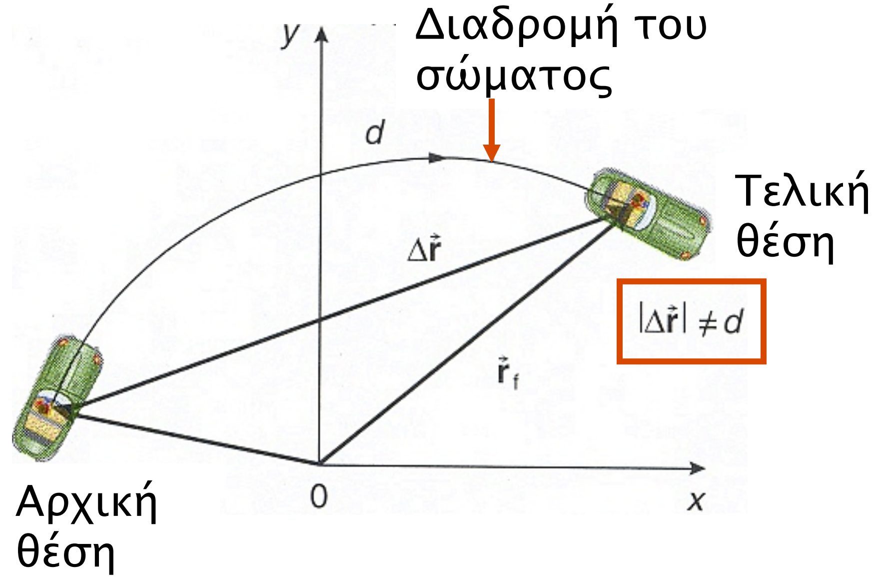
Κίνηση σε δύο διαστάσεις





Η κίνηση που κάνει το αυτοκίνητο καθώς στρίβει περιορίζεται σε ένα οριζόντιο επίπεδο x-y

Η αλλαγή στο διάνυσμα θέσης δίνεται από τη διανυσματική διαφορά των διανυσμάτων θέσης στις 2 χρονικές στιγμές t_f και t_i

$$\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}_f - \vec{r}_i = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) \Rightarrow$$

$$\Delta\vec{r}(t) = \left[x(t+\Delta t) - x(t)\right]\hat{i} + \left[y(t+\Delta t) - y(t)\right]\hat{j}$$

Κίνηση σε 2 διαστάσεις

- Έστω ένα κινούμενο σώμα που περιγράφεται από το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}$ που γράφεται

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} \Rightarrow \vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + x\cancelto{0}{\left(\frac{d}{dt}\hat{i}\right)} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + y\cancelto{0}{\left(\frac{d}{dt}\hat{j}\right)}$$

$$\Rightarrow \vec{\mathrm{v}} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} \Rightarrow \vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}_x\hat{i} + \mathrm{v}_y\hat{j}$$

- Αν το σώμα κινείται με επιτάχυνση $\boldsymbol{a}(\mathrm{t})$ τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{a}(t) = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \frac{d\mathrm{v}_x}{dt}\hat{i} + \frac{d\mathrm{v}_y}{dt}\hat{j} \Rightarrow a_x = \frac{d\mathrm{v}_x}{dt} \quad \kappa\alpha\iota \quad a_y = \frac{d\mathrm{v}_y}{dt}$$

- Με ολοκλήρωση θα πάρουμε

$$d\mathrm{v}_\mathrm{x} = a_x dt \Rightarrow \mathrm{v}_\mathrm{x} = \int a_x\, dt \qquad \text{και ανάλογα} \qquad \mathrm{v}_\mathrm{y} = \int a_y\, dt$$

- Αν η επιτάχυνση είναι σταθερή (μέτρο και διεύθυνση) τότε α_x=σταθ. και α_y=σταθ. και έχουμε

$$\mathrm{v}_\mathrm{x} = a_x \int dt = a_x t + \mathrm{c}_1 \rightarrow \mathrm{v}_{0x} \qquad \mathrm{v}_\mathrm{y} = a_y \int dt = a_y t + c_2 \rightarrow \mathrm{v}_{0y}$$

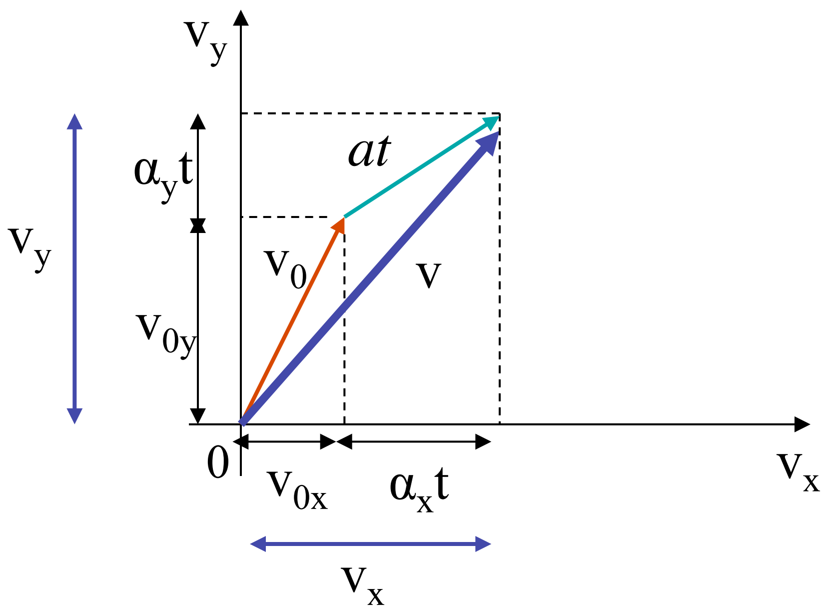
Κίνηση σε 2 διαστάσεις

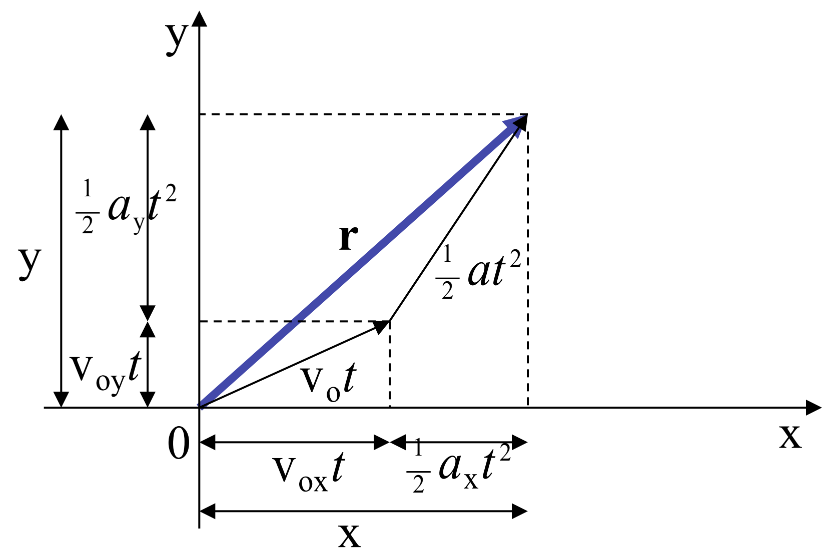
Αντικαθιστώντας στα προηγούμενα έχουμε

$$\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}_x\hat{i} + \mathrm{v}_y\hat{j} = (a_x t + \mathrm{v}_{0x})\hat{i} + (a_y t + \mathrm{v}_{0y})\hat{j}$$

$$= (\mathrm{v}_{0x}\hat{i} + \mathrm{v}_{0y}\hat{j}) + (a_x\hat{i} + a_y\hat{j})t \Rightarrow \vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}_0 + \vec{a}t$$

Η ταχύτητα ενός σώματος κατά τη στιγμή t είναι το διανυσματικό άθροισμα της ταχύτητας v_0 και της πρόσθετης ταχύτητας αt που απέκτησε κατά το διάστημα t

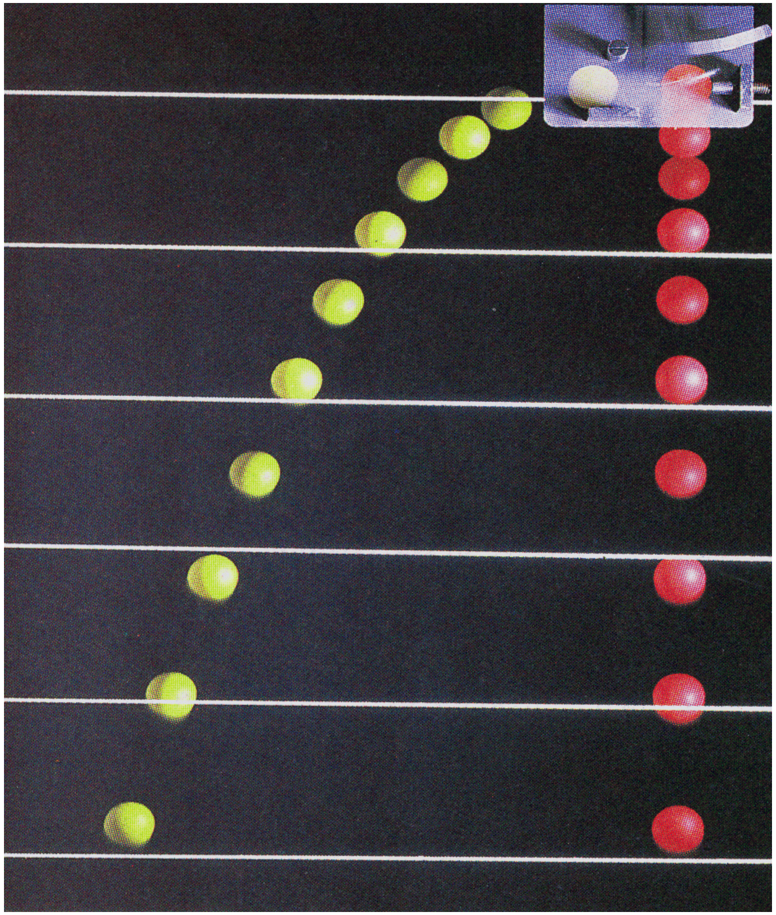




Ανεξαρτησία κάθετων μεταξύ των κινήσεων

Εξαρτώνται οι τιμές των α_x, v_x και x από τις τιμές των α_y, v_y και y την ίδια ή κάποια άλλη χρονική στιγμή?

Το ερώτημα που τίθεται είναι κατά πόσο η κίνηση στην μια κάθετη διεύθυνση επηρεάζει την κίνηση στην άλλη κάθετη διεύθυνση.



Πειραματικά:

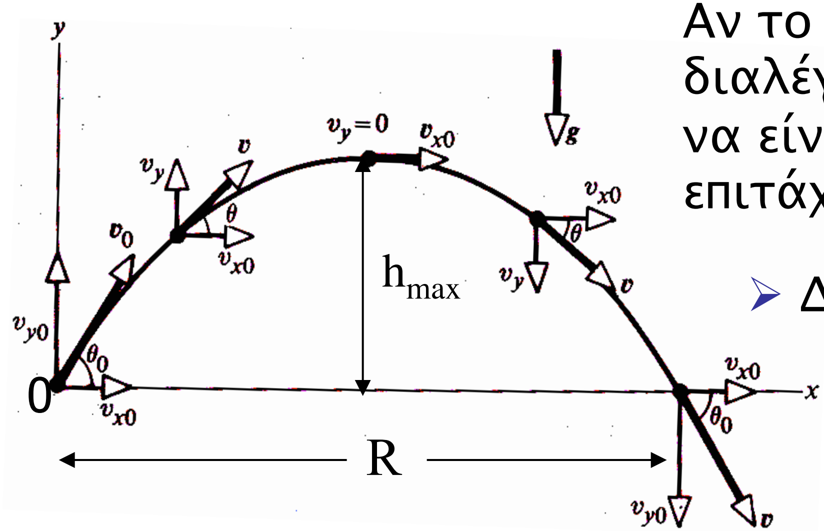
Κάθετες κινήσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους

Οι κατακόρυφες κινήσεις των 2 μπαλών είναι πανομοιότυπες

Φθάνουν στο έδαφος την ίδια χρονική στιγμή

Μπορούμε επομένως να αναλύσουμε την κίνηση σε κάθε άξονα ξεχωριστά

Κίνηση σε 2 διαστάσεις-κίνηση βλήματος



Ταχύτητα εφαπτόμενη της τροχιάς σε κάθε σημείο της τροχιάς

Αν το διάνυσμα της επιτάχυνσης είναι σταθερό, διαλέγουμε ένα από τους άξονες συντεταγμένων να είναι η γραμμή που περιέχει το διάνυσμα της επιτάχυνσης ή κάποια παράλληλη διεύθυνση

- Διαλέγουμε την κατακόρυφη διεύθυνση (y//g)

(A) $\alpha_x = 0$ (έλλειψη επιτάχυνσης στο x)

$\alpha_y = -g$ (επιτάχυνσης βαρύτητας)

$$v_x = v_{0x} + a_x t = v_{0x}$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t = v_{0y} - gt$$

(B) Οι αρχικές συνθήκες:

$$\theta_i = \theta_0 \quad x_0 = y_0 = 0 \quad v_i = v_0 \quad a_x = 0$$

$$\cos\theta_0 = \frac{v_{0x}}{v_0} \quad \sin\theta_0 = \frac{v_{0y}}{v_0} \quad a_y = -g$$

*Αγνοούμε την αντίσταση του αέρα

Κίνηση σε 2-διαστάσεις

(Γ) $\mathrm{v}_x = \mathrm{v}_{0x} = \mathrm{v}_0 \cos\theta_0 = \sigma\tau\alpha\theta.$

$\mathrm{v}_y = \mathrm{v}_{0y} - gt = \mathrm{v}_0 \sin\theta - gt$

$$x = x_0 + \mathrm{v}_{0_x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad y = y_0 + \mathrm{v}_{0_y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \mathrm{v}_{0_x} t = (\mathrm{v}_0 \cos\theta_0) t \\ y = \mathrm{v}_0 \sin\theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{array} \right\}$$

Παραμετρικές εξισώσεις κίνησης

Εξίσωση τροχιάς y(x)

Απαλοιφή του χρόνου από τις δύο παραμετρικές εξισώσεις των συντεταγμένων

$$x = (\mathrm{v}_0 \cos\theta_0) t \Rightarrow t = \frac{x}{\mathrm{v}_0 \cos\theta_0} \quad \Rightarrow \quad y = x \tan\theta_0 - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{\mathrm{v}_0{}^2 \cos^2\theta_0}$$

Η εξίσωση της τροχιάς είναι 2ου βαθμού ως προς x, δηλαδή η διαδρομή του σώματος στο χώρο είναι παραβολική $y = ax + bx^2$

Κίνηση βλήματος

Πόσο χρόνο χρειάζεται το βλήμα να φτάσει στο μέγιστο ύψος του και ποιο είναι το ύψος αυτό? (κίνηση στον y-άξονα)

Όταν $y = h_{\max}, \upsilon_y = 0 \Rightarrow 0 = \upsilon_{0_y} - gt \Rightarrow t_{h_{\max}} = \frac{\upsilon_{0_y}}{g} \Rightarrow \boxed{t_{h_{\max}} = \frac{\upsilon_0 \sin\theta}{g}}$

Αντικαθιστώντας στη εξίσωση y(t)

$$y(t_{\max}) = h_{\max} = \cancel{y_0}^{\,0} + \upsilon_{0_y} t_{\max} - \frac{1}{2} g t_{\max}^2 = (\upsilon_0 \sin\theta)\frac{\upsilon_0 \sin\theta}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{\upsilon_0 \sin\theta}{g}\right)^2 \Rightarrow \boxed{h_{\max} = \frac{(\upsilon_0 \sin\theta)^2}{2g}}$$

Πόσο μακριά θα πάει το βλήμα στο επίπεδο του εδάφους και πόσο χρόνο κάνει? (κίνηση στον x-άξονα)

Στο x_{max} το σώμα έχει επιστρέψει και πάλι στη θέση $h = y_0 = 0$

$$y = 0 = \cancel{y_0}^{\,0} + \upsilon_{0_y} t - \frac{1}{2} g t^2 = (\upsilon_0 \sin\theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ \boxed{t_2 = \dfrac{2\upsilon_0 \sin\theta}{g}} \end{cases}$$

$t_1 = 0 \leftarrow$ προφανής

$\boxed{t_2 = 2(t_{h\max})}$

Η μέγιστη απόσταση στον x-άξονα (βεληνεκές) θα είναι:

$$x_{\max} = \cancel{x_0}^{\,0} + \upsilon_{0_x} t_{x_{\max}} = \upsilon_0 \cos\theta \left(\frac{2\upsilon_0 \sin\theta}{g}\right) \Rightarrow \boxed{x_{\max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\theta}{g}}$$

Βεληνεκές βλήματος

$$x_{\max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

Όταν $\theta = 45^0$ τότε $\sin 2\theta = 1$ και έχουμε μέγιστο βεληνεκές

Για συμπληρωματικές γωνίες το βεληνεκές είναι ίδιο (π.χ. $\theta = 30°$ και $\theta = 60°$)

Κίνηση σε 2 διαστάσεις

- Η κίνηση στους άξονες Χ και Υ είναι ανεξάρτητη η μια από την άλλη
- Χωρίζουμε την κίνηση σε 2 άξονες και μελετούμε την κίνηση σε κάθε άξονα ξεχωριστά σα να έχουμε μονοδιάστατη κίνηση

Κίνηση σε 2 διαστάσεις

- Διανύσματα θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης

x-διεύθυνση y-διεύθυνση

$$\vec{\upsilon}_{av} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_0}{t_f - t_0}$$

$$\vec{\upsilon}_{av.x} = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_0}{t_f - t_0}$$

$$\vec{\upsilon}_{av.y} = \frac{\vec{y}_f - \vec{y}_0}{t_f - t_0}$$

$$|\vec{\upsilon}_{av}| = \sqrt{\upsilon_{av.x}^2 + \upsilon_{av.y}^2}$$

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{\upsilon}_f - \vec{\upsilon}_0}{t_f - t_0}$$

$$\vec{a}_{av.x} = \frac{\vec{\upsilon}_{fx} - \vec{\upsilon}_{0x}}{t_f - t_0}$$

$$\vec{a}_{av.y} = \frac{\vec{\upsilon}_{fy} - \vec{\upsilon}_{0y}}{t_f - t_0}$$

$$|\vec{a}_{av}| = \sqrt{a_{av.x}^2 + a_{av.y}^2}$$

$$x(t) = x_0 + \upsilon_{ox}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

$$y(t) = y_0 + \upsilon_{oy}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

$$\upsilon_x(t) = \upsilon_{ox} + a_x t$$

$$\upsilon_y(t) = \upsilon_{oy} + a_x t$$

$$|\vec{\upsilon}| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$$

$$\upsilon_x^2(t) = \upsilon_{ox}^2 + 2a_x \Delta x$$

$$\upsilon_y^2(t) = \upsilon_{oy}^2 + 2a_y \Delta y$$

Κίνηση σε 2 διαστάσεις

Μια μπάλα κυλά σε οριζόντιο δάπεδο με 5m/s. Κατόπιν συναντά κεκλιμένο επίπεδο γωνίας 25°. Μετά από 0.5sec η μπάλα έχει ταχύτητα 3m/s.

- Ποιό είναι το μέτρο της αλλαγής της ταχύτητας.

x-διεύθυνση

$$\upsilon_{ix} = 5m/s$$

$$\Delta\upsilon_x = (3m/s)\cos(25^0)$$

$$\Delta\upsilon_x = 3\cos(25^0) - 5 = -2.28m/s$$

y-διεύθυνση

$$\upsilon_{iy} = 0m/s$$

$$\Delta\upsilon_y = (3m/s)\sin(25^0)$$

$$\Delta\upsilon_y = 3\sin(25^0) = 1.27m/s$$

$$|\Delta\upsilon| = \sqrt{\Delta\upsilon_x^2 + \Delta\upsilon_y^2} = \sqrt{(-2.28)^2 + 1.27^2} = 2.6m/s$$

- Ποιά είναι η μέση επιτάχυνση

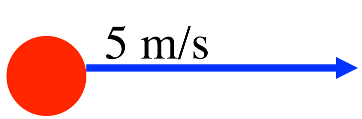
x-διεύθυνση

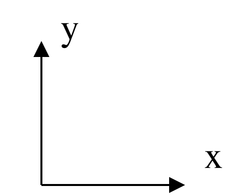
$$a_x = \frac{-2.28}{0.5} = -5.56m/s^2$$

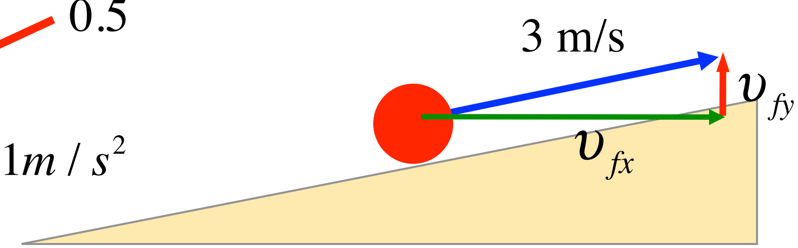
y-διεύθυνση

$$a_y = \frac{1.27}{0.5} = 2.54m/s^2$$

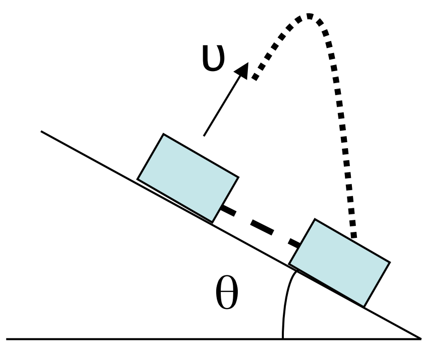
$$|\Delta a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 5.21m/s^2$$





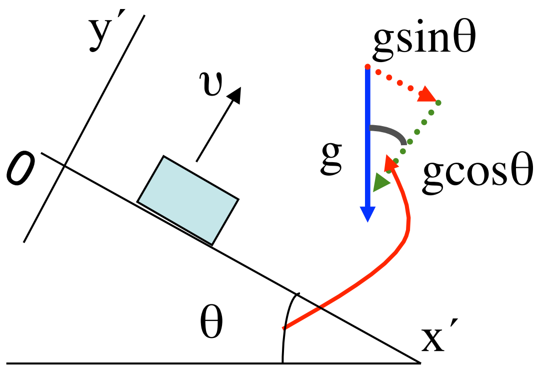


Μπάλα σε καρότσι σε κεκλιμένο επίπεδο



Μπάλα εκτοξεύεται προς τα επάνω σε ορθή γωνία μέσα από καρότσι που αφήνεται να γλυστρήσει προς τη βάση κεκλιμένου επιπέδου. Η μπάλα μετά πέφτει.

Ξαναπέφτει μέσα στο καρότσι?



Α΄ Μέθοδος

Θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων του οποίου οι άξονες είναι παράλληλος προς το κεκλιμένο επίπεδο και κάθετος σ' αυτό.

Αναλύουμε το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας **g** σε 2 συνιστώσες ως προς τους 2 άξονες x΄ και y΄.

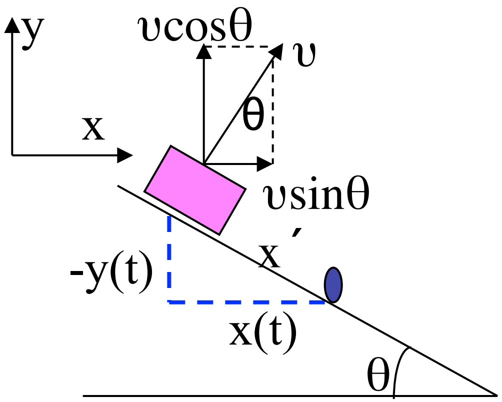
Η μπάλα και το καρότσι ξεκινούν με ταχύτητα $\mathbf{v_x=0}$ στη διεύθυνση x΄και δέχονται την ίδια επιτάχυνση **g sinθ** στην x΄ διεύθυνση

$$x'_{\kappa\alpha\rho} = x_0 + \frac{1}{2} g \sin\theta \; t^2 \qquad\qquad x'_{\mu\pi} = x_0 + \frac{1}{2} g \sin\theta \; t^2$$

$$y'_{\kappa\alpha\rho} = 0 \qquad\qquad y'_{\mu\pi} = 0$$

Ίδια και άρα η μπάλα πέφτει ξανά στο καρότσι

Μπάλα-καρότσι – Β΄ Μέθοδος



Οι συντεταγμένες της μπάλας δίνονται από

$$x(t) = (\upsilon \sin\theta)t \quad y(t) = (\upsilon\cos\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Η μπάλα χτυπά ξανά στο επίπεδο τη χρονική στιγμή

$$\tan\theta = \frac{-y(t)}{x(t)} \Rightarrow -\tan\theta = \frac{(\upsilon\cos\theta)t - \frac{1}{2}gt^2}{(\upsilon\sin\theta)t} \Rightarrow -\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{gt}{2\upsilon\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{gt}{2\upsilon\sin\theta} \Rightarrow \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{gt}{2\upsilon\sin\theta} \boxed{\Rightarrow t = \frac{2\upsilon}{g\cos\theta}} \quad (1)$$

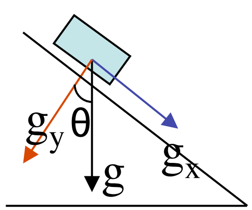
Την στιγμή επαφής της με το επίπεδο έχει οριζόντια μετατόπιση x(t):

$$x(t) = (\upsilon\sin\theta)\left(\frac{2\upsilon}{g\cos\theta}\right) = \frac{2\upsilon^2}{g}\tan\theta$$

που αντιστοιχεί στη θέση: του κεκλιμένου επιπέδου

$$x' = \frac{x(t)}{\cos\theta} = \frac{2\upsilon^2\sin\theta}{g\cos^2\theta}$$

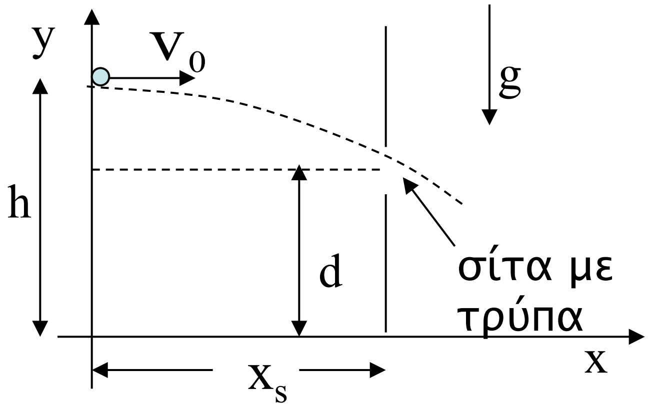
Το καρότσι κινείται στο κεκλιμένο επίπεδο εξαιτίας της g_x:



$$d = \frac{1}{2}(g\sin\theta)t^2 = \frac{1}{2}(g\sin\theta)\left(\frac{2\upsilon}{g\cos\theta}\right)^2 \Rightarrow d = \frac{2\upsilon^2\sin\theta}{g\cos^2\theta}$$

Ακριβώς ίδιες θέσεις

Παράδειγμα οριζόντιας βολής



Βλήμα βάλλεται με ταχύτητα $\vec{v}_0 = v_0\hat{x}$ από την ταράτσα ενός κτιρίου ύψους h και πρέπει να περάσει μέσα από την τρύπα πού βρίσκεται σε ύψος d από το x=0 και απόσταση x_s από y=0.

Ποια είναι η v_0

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω συνθήκες για να φτιάξουμε μια μονοχρωματική δέσμη ατόμων π.χ. άτομα με ίδια ταχύτητα v_0

Αρχικές συνθήκες: $\vec{v}_0 = v_0\hat{x} \quad y_0 = h \quad x_0 = 0$

Βρίσκουμε το χρόνο t όταν το βλήμα βρίσκεται σε θέση $x_{βλημ} = x_s$

$$x_\beta(t) = v_0 t \Rightarrow t = \frac{x_\beta}{v_0} = \frac{x_s}{v_0}$$

Τη στιγμή αυτή το ύψος του βλήματος πρέπει να είναι ίσο με το ύψος στο οποίο βρίσκεται η τρύπα

$$y_\beta(t) = d = h - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{x_s}{v_0}\right)^2 \Rightarrow (h-d) = \frac{1}{2}g\left(\frac{x_s}{v_0}\right)^2 \Rightarrow \frac{2(h-d)}{g} = \left(\frac{x_s}{v_0}\right)^2 \Rightarrow v_0 = x_s\sqrt{\frac{g}{2(h-d)}}$$

Ας εξετάσουμε μερικές ακραίες τιμές:

$$\begin{cases} d = h \rightarrow v_0 = \infty \\ x_s = 0 \rightarrow v_0 = 0 \end{cases}$$

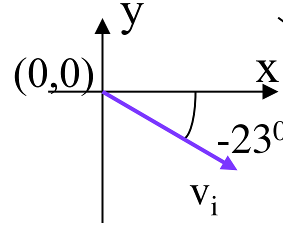
Σκιέρ: Αλμα με σκί

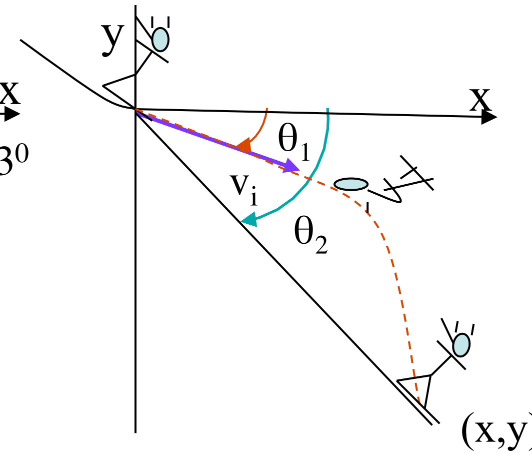
Σκιέρ αφήνει την πλαγιά με v_i=11m/s και γωνία θ_1=23° ως προς τον ορίζοντα και μετά προσγειώνεται στην πλαγία που έχει κλίση θ_2=55°.

Πού και πότε προσγειώνεται

Λύση

Διαλέγουμε πρώτα ένα σύστημα συντεταγμένων και αναλύουμε την v_i





Ο χρόνος που κινείται η σκιέρ στο x-άξονα είναι ίδιος με αυτό στο y-άξονα:

$$x_\Sigma = (v_i \cos\theta_1) t \Rightarrow t = \frac{x_\Sigma}{v_i \cos\theta_1} \qquad (1)$$

Στο σημείο προσγείωσης οι συντεταγμένες της τροχιάς της σκιέρ (x_Σ, y_Σ) και οι συντεταγμένες του σημείου της πλαγιάς $(x_{\pi\lambda}, y_{\pi\lambda})$ είναι ίδιες:

$$x_\Sigma = x_{\pi\lambda} \equiv x \qquad y_\Sigma = y_{\pi\lambda} \equiv y \qquad (2)$$

Από τη κλίση της πλαγιάς έχουμε $\quad y_{\pi\lambda} = x_{\pi\lambda}\tan\theta_2 \qquad (3)$

Η εξίσωση θέσης της σκιέρ στην y-διεύθυνση δίνει (από 1 & 2 & 3)

$$y_\Sigma = v_{i_y} t - \frac{1}{2} g t^2 \overset{(1)}{=} \frac{\cancel{v_i}\sin\theta_1 \cancel{x}}{\cancel{v_i}\cos\theta_1} - \frac{1}{2} g \frac{x^{\cancel{2}}}{v_i^2\cos^2\theta_1} \overset{(3)}{=} \cancel{x}\tan\theta_2 \Rightarrow \tan\theta_2 = \tan\theta_1 - \frac{1}{2} g \frac{x}{v_i^2 \cos^2\theta_1}$$

Λύνουμε την τελευταία ως προς x και αντικαθιστούμε στην (3) για y

Ελεύθερη πτώση

Ο Γιώργος και η Μαρία στέκονται στην άκρη ενός λόφου.Ο Γιώργος ρίχνει μια μπάλα κατακόρυφα προς τα πάνω ενώ την ίδια στιγμή η Μαρία ρίχνει μια μπάλα με την ίδια ταχύτητα κατακόρυφα προς τα κάτω.

- Ποιά μπάλα φθάνει στο έδαφος πρώτη

 (Α) Του Γιώργου (Β) Της Μαρίας (Γ) Ίδιος χρόνος

$$y = y_0 + \upsilon_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

Γιώργος: $0 = H + \upsilon_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$

Μαρία: $0 = H - \upsilon_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2$

- Ποιά μπάλα φθάνει με τη μεγαλύτερη ταχύτητα

 (Α) Του Γιώργου (Β) Της Μαρίας (Γ) Ίδια ταχύτητα

$$\upsilon_f^2 - \upsilon_i^2 = 2g\Delta y \Rightarrow \upsilon_f^2 - \upsilon_i^2 = 2gH$$

$$\Rightarrow \upsilon_f^2 = \upsilon_i^2 + 2gH$$