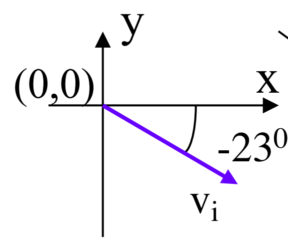
Σκιέρ: Αλμα με σκί

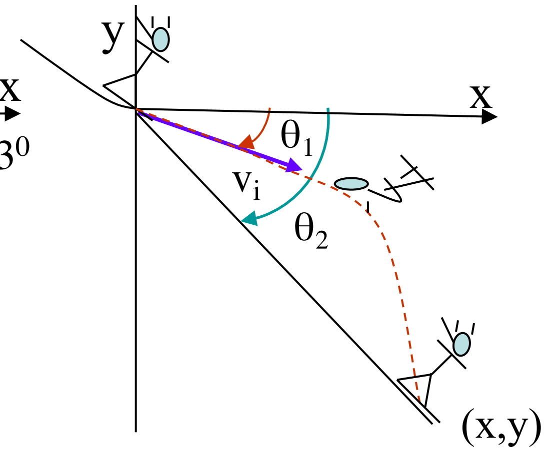
Σκιέρ αφήνει την πλαγιά με v_i=11m/s και γωνία $\theta_1=23^o$ ως προς τον ορίζοντα και μετά προσγειώνεται στην πλαγία που έχει κλίση $\theta_2=55^o$.

Πού και πότε προσγειώνεται

Λύση

Διαλέγουμε πρώτα ένα σύστημα συντεταγμένων και αναλύουμε την v_i





Ο χρόνος που κινείται η σκιέρ στο x-άξονα είναι ίδιος με αυτό στο y-άξονα:

$$x_\Sigma = (v_i \cos\theta_1)t \Rightarrow t = \frac{x_\Sigma}{v_i \cos\theta_1} \qquad (1)$$

Στο σημείο προσγείωσης οι συντεταγμένες της τροχιάς της σκιέρ (x_Σ, y_Σ) και οι συντεταγμένες του σημείου της πλαγιάς $(x_{\pi\lambda}, y_{\pi\lambda})$ είναι ίδιες:

$$x_\Sigma = x_{\pi\lambda} \equiv x \qquad y_\Sigma = y_{\pi\lambda} \equiv y \qquad (2)$$

Από τη κλίση της πλαγιάς έχουμε $\quad y_{\pi\lambda} = x_{\pi\lambda}\tan\theta_2 \quad (3)$

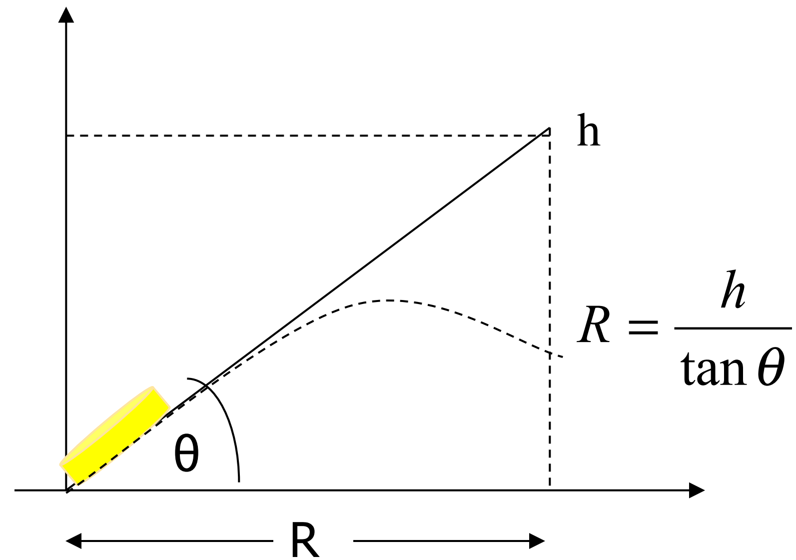
Η εξίσωση θέσης της σκιέρ στην y-διεύθυνση δίνει (από 1 & 2 & 3)

$$y_\Sigma = v_{i_y} t - \frac{1}{2} g t^2 \overset{(1)}{=} \frac{\cancel{v_i}\sin\theta_1 \cancel{x}}{\cancel{v_i}\cos\theta_1} - \frac{1}{2} g \frac{x^{\cancel{2}}}{v_i^2\cos^2\theta_1} \overset{(3)}{=} \cancel{x}\tan\theta_2 \Rightarrow \tan\theta_2 = \tan\theta_1 - \frac{1}{2} g \frac{x}{v_i^2 \cos^2\theta_1}$$

Λύνουμε την τελευταία ως προς x και αντικαθιστούμε στην (3) για y

Κίνηση σε δύο διαστάσεις

Κλασικό παράδειγμα ανεξαρτησίας κινήσεων



Σύμφωνα με το πρόβλημα αυτό, μια μπανάνα εκτοξεύεται προς τον πίθηκο και την ίδια χρονική στιγμή ο πίθηκος αφήνεται να πέσει προς τα κάτω.

Με ποια γωνία θα πρέπει να ρίξουμε την μπανάνα στον πίθηκο ώστε να την πιάσει?
Με τι ταχύτητα θα πρέπει να ρίξουμε την μπανάνα?

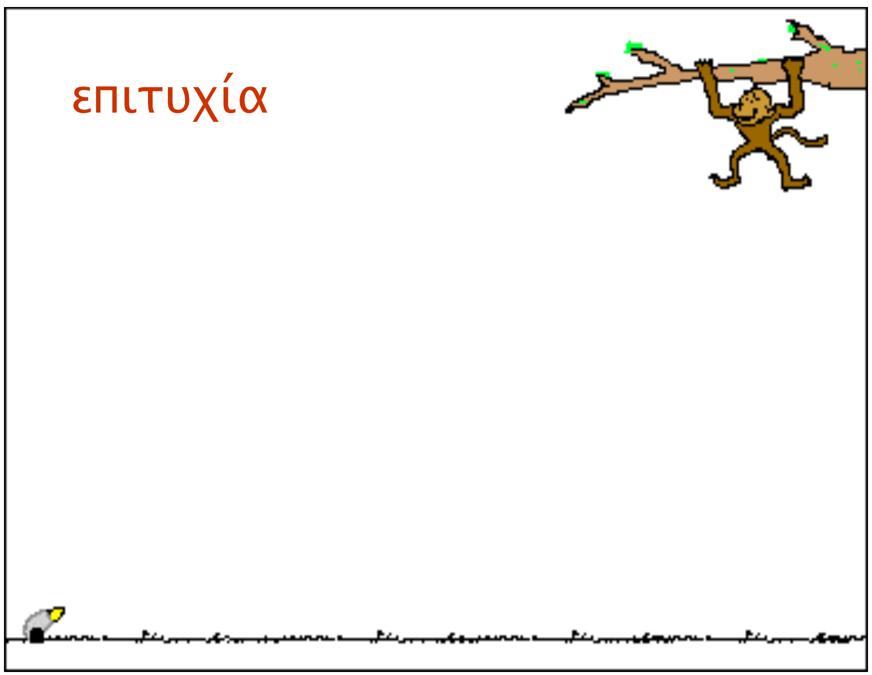
Πίθηκος-μπανάνα - απουσία βαρύτητας

Η μπανάνα απουσία βαρύτητας (g = 0) διαγράφει σε χρόνο t μια κατακόρυφη διαδρομή

$$y = h_{\mu\pi\alpha\nu} = \upsilon_{0_y} t = (\upsilon_0 \sin\theta_0) t$$

θ_0 γωνία στόχευσης ακριβώς προς πίθηκο

Ενώ ο πίθηκος παραμένει στην ίδια θέση (g=0): $y_{\pi\iota\theta} = h_{\pi\iota\theta} = y_{\mu\pi\alpha\nu}$



Αν υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε σε περιβάλλον έλλειψης βαρύτητας:

Η μπανάνα κινείται ευθύγραμμα χωρίς να δέχεται επιρροές από την βαρυτική επιτάχυνση

Ο πίθηκος θα παρέμενε στην ίδια θέση αφού δεν έχει καμιά αρχική ταχύτητα

Στοχεύοντας προς τον πίθηκο θα καταφέρουμε να του ρίξουμε την μπανάνα

Πίθηκος-μπανάνα - παρουσία βαρύτητας $(\theta_1>\theta_0)$

Έστω ότι ρίχνουμε την μπανάνα στοχεύοντας πάνω από τον πίθηκο $(\theta_1>\theta_0)$.

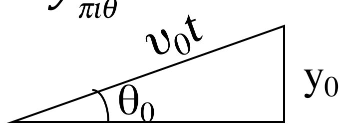
'Ισως γιατί πιστεύουμε ότι η μπανάνα που θα διαγράψει παραβολική τροχιά λόγω της βαρύτητας, επιταχυνθεί προς τα κάτω αρκετά γρήγορα

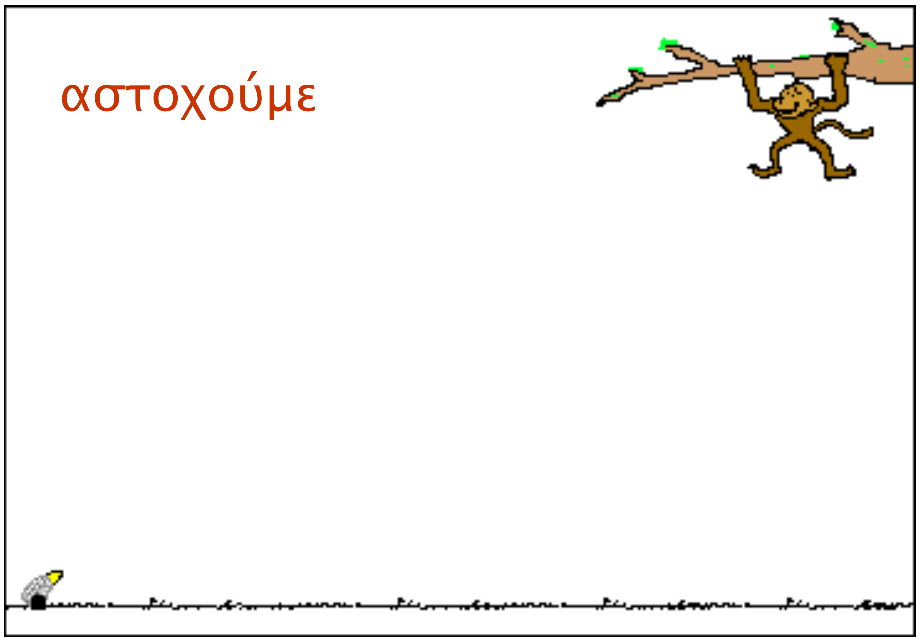
$$y_{\mu\pi\alpha\nu}=\upsilon_{0_y}t-\frac{1}{2}gt^2=\left(\upsilon_0\sin\theta_1\right)t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$y_{\pi\iota\theta}=y_0-\frac{1}{2}gt^2=h_{\pi\iota\theta}-\frac{1}{2}gt^2=\left(\upsilon_0\sin\theta_0\right)t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$\theta_1>\theta_0\Rightarrow y_{\mu\pi\alpha\nu}>y_{\pi\iota\theta}$$

$$y_0=\left(\upsilon_0 t\right)\sin\theta_0$$





Τη στιγμή που ο πίθηκος αφήνει τα χέρια του δέχεται και αυτός την ίδια βαρυτική επιτάχυνση με τη μπανάνα

Άρα ο πίθηκος και η μπανάνα θα διαγράψουν το ίδιο διάστημα προς τα κάτω, από τη διαδρομή που θα διέγραφαν όταν $g = 0$

Έτσι στην περίπτωση αυτή η μπανάνα θα περάσει πάνω από το πίθηκο κατά τόσο διάστημα όσο είχαμε στοχεύσει αρχικά πάνω από τον πίθηκο

Πίθηκος-μπανάνα - παρουσία βαρύτητας ($\theta_1=\theta_0$)

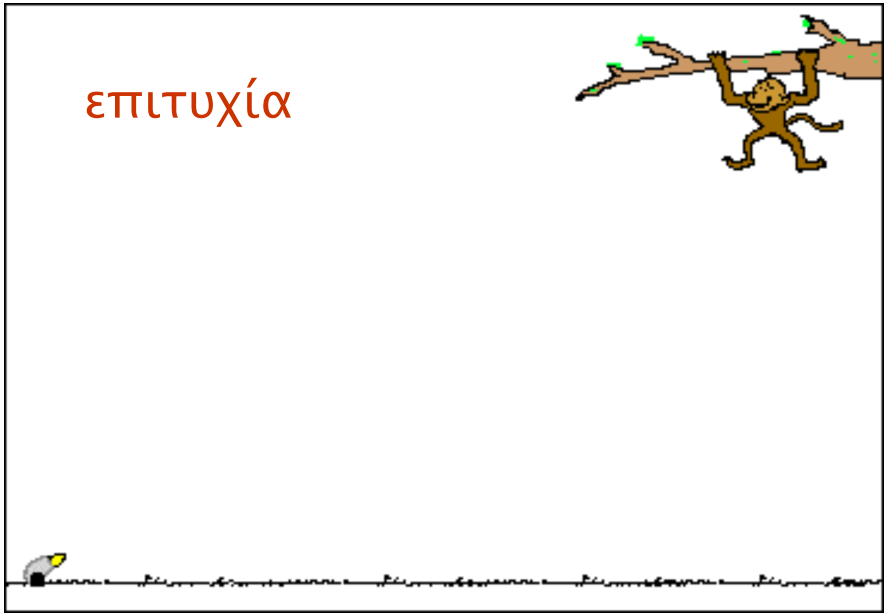
Αυτή τη φορά σημαδεύουμε απ' ευθείας τον πίθηκο ($\theta_1=\theta_0$).

Σε περιβάλλον παρουσίας βαρύτητας ο πίθηκος και η μπανάνα δέχονται την ίδια επιτάχυνση και επομένως θα κινηθούν κατά το ίδιο διάστημα κάτω από την ευθεία της κίνησης που αντιστοιχεί στην περίπτωση g=0

$$y_{\mu\pi\alpha\nu} = \upsilon_{0_y} t - \frac{1}{2}gt^2 = \left(\upsilon_0 \sin\theta_1\right)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_{\pi\iota\theta} = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 = h_{\pi\iota\theta} - \frac{1}{2}gt^2 = \left(\upsilon_0 \sin\theta_0\right)t - \frac{1}{2}gt^2$$

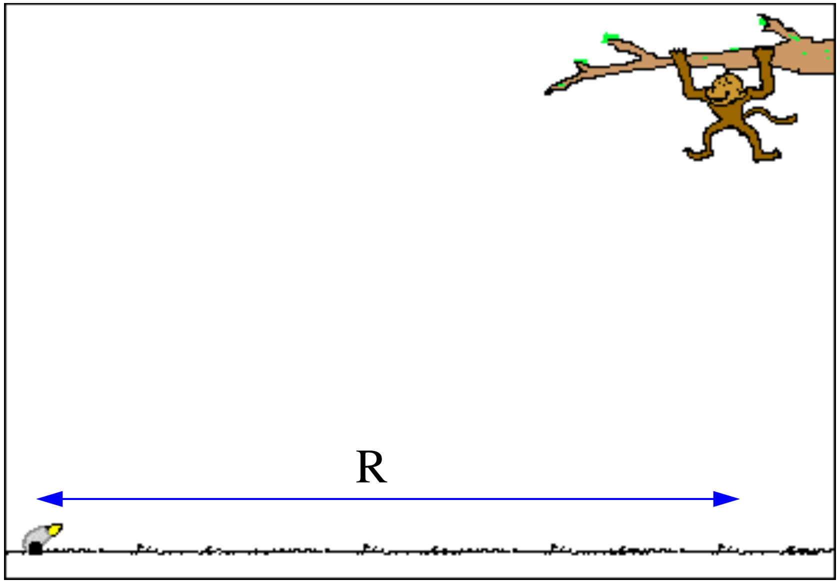
$$\theta_1 = \theta_0 \Rightarrow y_{\mu\pi\alpha\nu} = y_{\pi\iota\theta}$$



Από τη στιγμή που η μπανάνα έφυγε με αρκετά μεγάλη ταχύτητα τότε θα χτυπήσει τον πίθηκο αρκετά πριν αυτός φθάσει στο έδαφος.

Πίθηκος-μπανάνα - ελάχιστη ταχύτητα

Ποια είναι η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να δώσουμε στη μπανάνα ώστε να φθάσει στον πίθηκο πριν αυτός πέσει στο έδαφος



Αν η ταχύτητα με την οποία πετάμε την μπανάνα είναι αρκετά μικρή τότε θα φθάσει στον πίθηκο αφού αυτός έχει πέσει κατά μεγάλο ύψος. Ίσως και όχι

Έστω ότι η οριζόντια απόσταση του πίθηκου από το σημείο βολής της μπανάνας είναι R (R=h/tanθ).

Ο χρόνος που χρειάζεται η μπανάνα για να καλύψει την απόσταση R είναι:

$$x = R = \upsilon_{0_x} t = \left(\upsilon_0 \cos\theta_0\right) t \quad \Rightarrow t = \frac{h}{\left(\upsilon_0 \cos\theta_0\right)\tan\theta_0} \Rightarrow t = \frac{h}{\upsilon_0 \sin\theta_0}$$

Ο πίθηκος το ίδιο χρονικό διάστημα καλύπτει απόσταση στην y-διεύθυνση

$$y = h_{\pi\iota\theta} - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow y = h - \frac{1}{2} g \frac{h^2}{\upsilon_0^2 \sin^2\theta_0} \geq 0$$ ώστε να μην πέσει στο έδαφος

Άρα $h\left(1 - \frac{1}{2} g \frac{h}{\upsilon_0^2 \sin^2\theta_0}\right) \geq 0 \Rightarrow 1 \geq \frac{1}{2} g \frac{h}{\upsilon_0^2 \sin^2\theta_0} \Rightarrow \upsilon_0 \geq \sqrt{\frac{gh}{2}}$

5ο Quiz

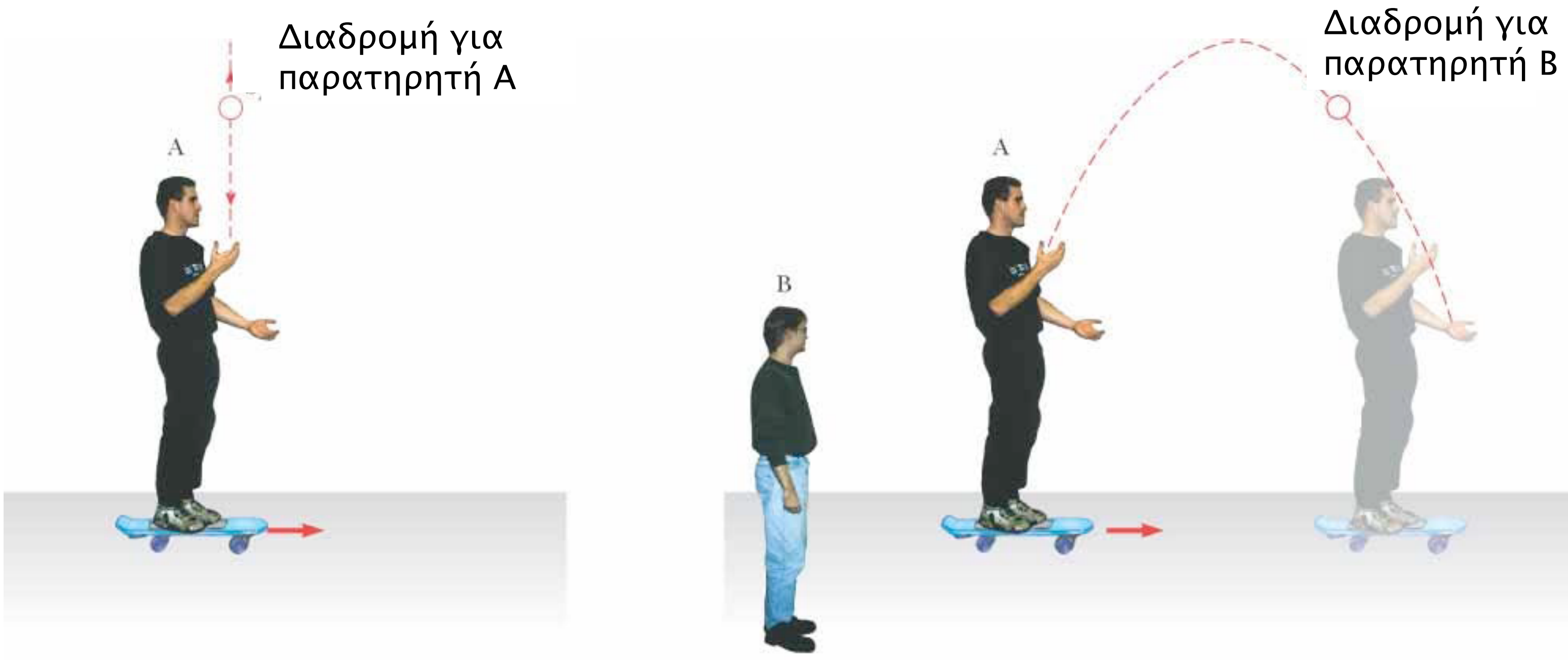
- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας
- Θα στείλετε τη φωτογραφία της απάντησής σας στο fotis@ucy.ac.cy

Έτοιμοι

Σχετική ταχύτητα

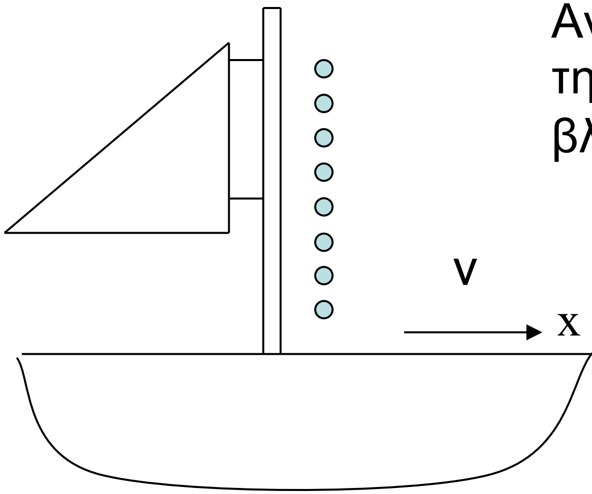
Σχετική ταχύτητα

Δύο παρατηρητές που κινούνται σχετικά ο ένας ως προς τον άλλο δεν συμφωνούν γενικά για το αποτέλεσμα ενός πειράματος

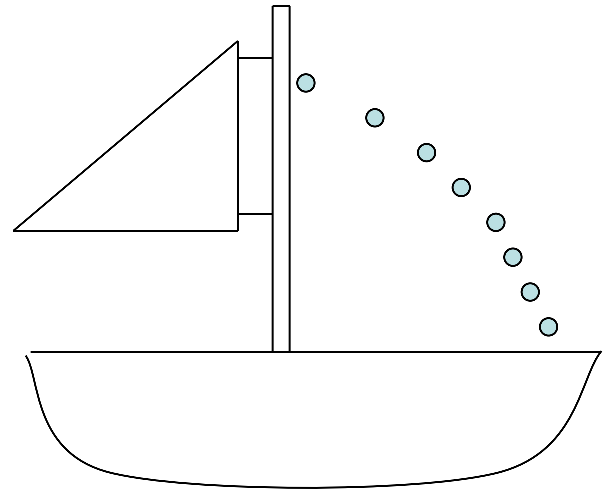


Οι δύο παρατηρητές A και B βλέπουν διαφορετική διαδρομή για την μπάλα

Σκύλος-μπισκότο-βάρκα



Αν κοιτάζατε από την στεριά τι θα βλέπατε? (ακίνητοι)



Ο σκύλος ανεβαίνει στο κατάρτι και ρίχνει ένα μπισκότο.

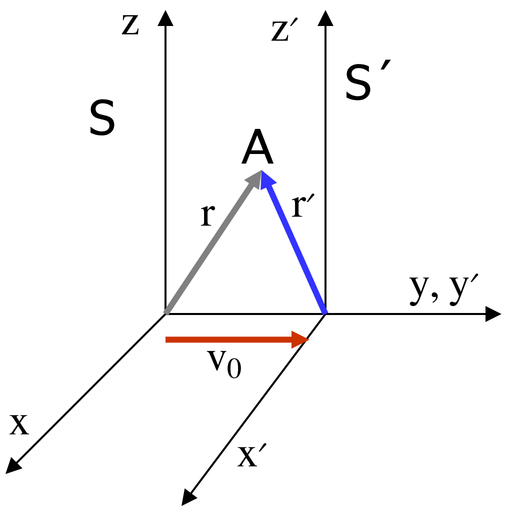
Για όλους που είναι στη βάρκα το μπισκότο δεν έχει καμιά κίνηση στην x-διεύθυνση

Δηλαδή σα να υπήρχε μιά αρχική ταχύτητα στη x-διεύθυνση

Το μπισκότο ξεκινά με v_y=0 και καταλήγει με v_y=v

Αδρανειακά συστήματα

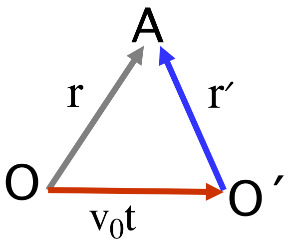
Έστω δύο συστήματα αναφοράς S (αδρανειακό) και S΄(κινούμενο με σταθερή ταχύτητα v_0 ως προς το αδρανειακό σύστημα)



Το σύστημα S κινείται με ταχύτητα $-v_0$ ως προς το S΄

Τα διανύσματα θέσης ενός σώματος όπως μετρούνται από παρατηρητές στα 2 συστήματα είναι r και r΄

Μπορούμε να περιγράψουμε τη θέση του σώματος A στο σύστημα S΄ συναρτήσει της θέσης του στο S:



$$\vec{r}_A = \vec{r}\,'_A + \vec{v}_0 t \qquad \vec{r}\,'_A = \vec{r}_A - \vec{v}_0 t$$

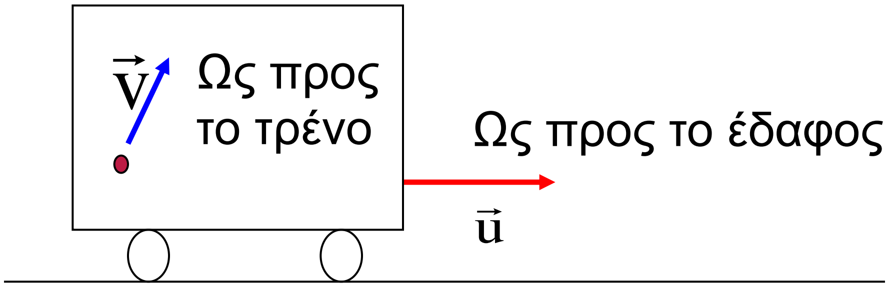
Γαλιλαϊκός μετασχηματισμός θέσης

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'_A}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_0 t\right)$$

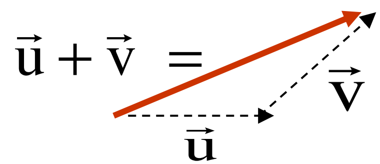
$$\Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}\,'_A + \vec{v}_0 \qquad \vec{v}\,'_A = \vec{v}_A - \vec{v}_0$$

Γαλιλαϊκός μετασχηματισμός ταχύτητας

Σχετική ταχύτητα – Παράδειγμα



Η ταχύτητα της μπάλας ως προς το έδαφος θα είναι



Αν η ταχύτητα $\vec{\mathrm{u}}$ είναι σταθερή τότε η επιτάχυνση ως προς το έδαφος είναι η ίδια ως προς το τρένο, επειδή

$$\vec{\alpha}_{\varepsilon\delta\alpha\phi o\varsigma} = \frac{d(\vec{u}+\vec{\mathrm{v}})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = 0 + \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \vec{\alpha}_{\tau\rho\varepsilon\nu o}$$

> Η επιτάχυνση που μετρούν 2 παρατηρητές που κινούνται με σταθερή σχετική ταχύτητα είναι η ίδια και για τους 2 παρατηρητές

Άρα μετρούν και την ίδια δύναμη πάνω στο σώμα

$\vec{F} = m\vec{a} = \vec{F}'$ όπως θα έπρεπε για δύναμη

Υποθέσεις:
- Ίδιος χρόνος και για τους 2 παρατηρητές
- Ίδια μονάδα μέτρησης αποστάσεων
- Ίδια μάζα

Παράδειγμα

Ο Μάριος ρίχνει μια μπάλα προς τα πάνω με γωνία 63^o και ταχύτητα 22m/s.
Η Μαρίνα κινούμενη με το ποδήλατό της με ταχύτηταν 10m/s περνά μπροστά από τον Μάριο την στιγμή που πετά την μπάλα.
Ποιά η τροχιά της μπάλας κατά τον Μάριο και ποιά κατά την Μαρίνα

Σύστημα αναφορά Μάριου

Για τον Μάριο η μπάλα εκτελεί πλάγια βολή

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta = (22m/s)\cos 63^o = 10m/s$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta = (22m/s)\sin 63^o = 19.6m/s$$

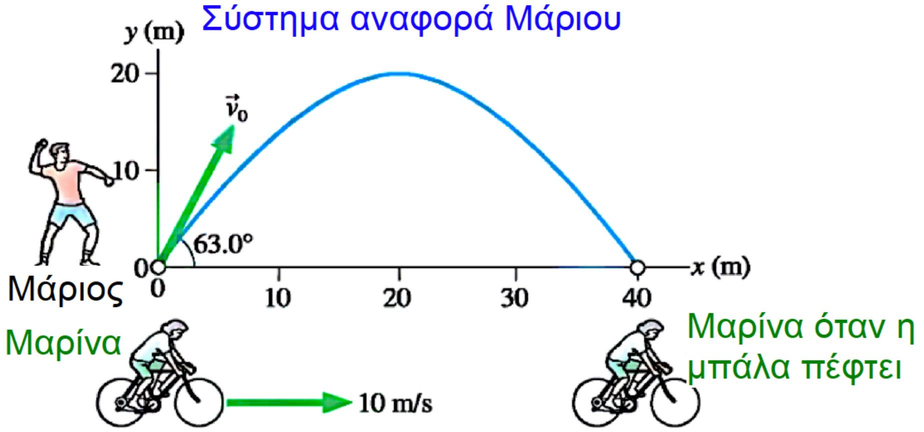
Οι εξισώσεις κίνησης της μπάλας θα είναι:

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} t = 10t\ m$$

$$y = y_0 + \upsilon_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 = (19.6t - 4.9t^2) m$$

$$t_{\alpha\nu} = 2s \Rightarrow y_{\max} = 19.6m$$

$$t_{o\lambda} = 4s \Rightarrow x_{\max} = 40.0m$$



Σύστημα αναφορά Μαρίνας

Θεωρούμε μετασχηματισμούς Γαλιλαίου για θέση και συστήματα αναφοράς του Μάριου και της Μαρίνας που κινείτα με 10m/s ως προς το σύστημα του Μάριου:

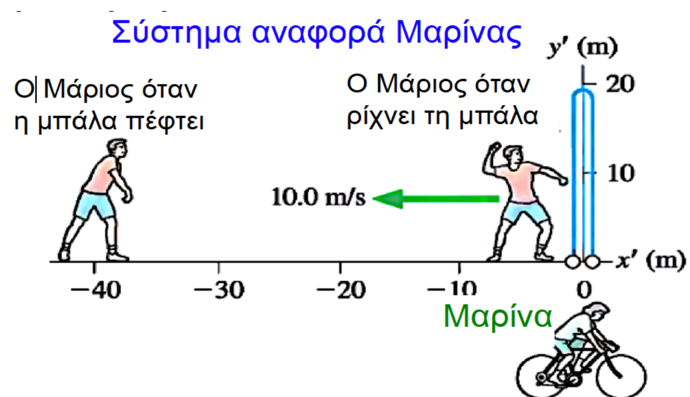
Τη στιγμή t ο Μάριος μετρά για τη μπάλα (x,y)

Η Μαρίνα μετρά:

$x' = x - V_x t = 10t - 10t = 0\ m$ και $y' = y - V_y t = y$

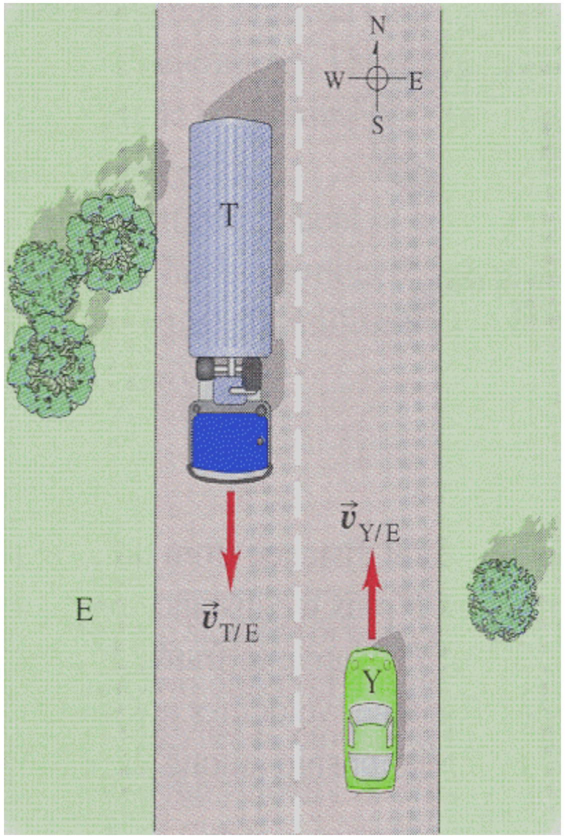
Η Μαρίνα βλέπει τη μπάλα να μην κινείται στη *x*-διεύθυνση

Η Μαρίνα βλέπει τη μπάλα να κάνει μόνο κατακόρυφη κίνηση



Σχετική ταχύτητα – Παράδειγμα

Οδηγείτε βόρεια σε ένα δρόμο με σταθερή ταχύτητα 88km/h και ένα φορτηγό κινείται με σταθερή ταχύτητα 104km/h στο αντίθετο ρεύμα και σας πλησιάζει. (α) Ποια η ταχύτητα του φορτηγού ως προς εσάς. (β) Ποια η ταχύτητά σας ως προς το φορτηγό. (γ) Πως αλλάζουν οι σχετικές σας ταχύτητες αφού προσπεράσετε;



Υποθέστε ότι το όχημά σας συμβολίζεται με Υ και το φορτηγό με Τ. Σαν ακίνητο σύστημα αναφοράς παίρνουμε τη γη και τη συμβολίζουμε με Ε. Επομένως η ταχύτητά σας σχετικά με τη γη είναι

$$\upsilon_{Y/E} = 88km/h$$

α) Το φορτηγό σας πλησιάζει και επομένως έχει ταχύτητα $\upsilon_{T/E} = -104km/h$

Θέλουμε την ταχύτητα $\upsilon_{T/Y}$

Αλλά $\upsilon_{T/E} = \upsilon_{T/Y} + \upsilon_{Y/E}$ $\Rightarrow$ $\upsilon_{T/Y} = \upsilon_{T/E} - \upsilon_{Y/E} =$

$= -104 - 88 = -192km/h$

β) Η ταχύτητα $\upsilon_{Y/T} = -\upsilon_{T/Y}$

γ) Η σχετική ταχύτητα δεν αλλάζει όταν προσπεράσετε το φορτηγό. Οι σχετικές θέσεις των σωμάτων δεν παίζουν ρόλο. Η $\upsilon_{T/Y}$ εξακολουθεί να είναι -192km/h