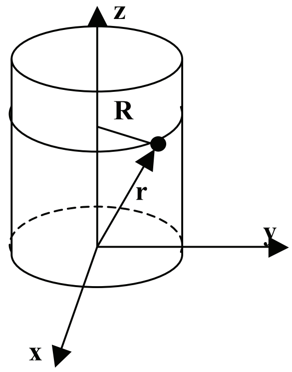
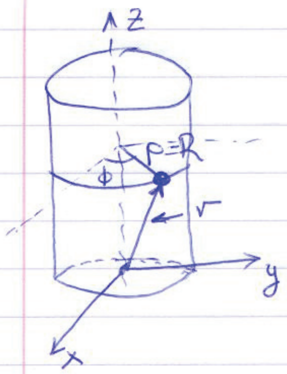
ΦΥΣ 133 – 1η Πρόοδος

12-2-2007

1η Ομάδα	

1. Θεωρήστε ένα σωματίδιο μάζας m το οποίο είναι περιορισμένο να κινείται στην επιφάνεια ενός ακλόνητου, λείου κυλίνδρου ακτίνας R όπως στο παρακάτω σχήμα. Πέρα από την δύναμη του δεσμού (η αντίδραση του κυλίνδρου στην μάζα), <u>η μόνη</u> δύναμη που εφαρμόζεται στην μάζα είναι η $\vec{F} = -k\vec{r}$ με διεύθυνση προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. (α) Να βρεθεί η Lagrangian του συστήματος (**6π**) (β) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης (**7π**) (γ) Να περιγραφεί πλήρως η κίνηση που εκτελεί το σώμα (**7π**) (Για να πάρετε όλους τους πόντους στο (γ) θα πρέπει να περιγράψετε πλήρως την κίνηση του σώματος).





Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες για να περιγράψουμε τη θέση του σωματιδίου

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\frac{d\hat{\rho}}{dt} + \dot{z}\hat{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}$$

Στην περίπτωσή μας η ακτίνα πάνω στην οποία κινείται το σώμα είναι σταθερή $\rho = R$ οπότε έχουμε ένα δεσμό. Επομένως θα υπάρχουν 2 ανεξάρτητες συντεταγμένες (ϕ, z).
Γράφουμε $v^2 = \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2$ οπότε η κινητική ενέργεια θα είναι:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) \Rightarrow T = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Η δυναμική ενέργεια προέρχεται μόνο από τη δύναμη $\vec{F} = -k\vec{r}$ που αντιστοιχεί στη 3-διάστατη μορφή του νόμου του Hooke.
Επομένως:

$$\nabla V = -\vec{F} \Rightarrow V = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} \Rightarrow V = \frac{1}{2}kr^2 \quad \text{όπου}$$

r είναι η απόσταση από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων

Αλλά $r^2 = z^2 + R^2$ Επομένως $V = \frac{1}{2}k\left(R^2 + z^2\right)$

Η Lagrangian του συστήματος θα είναι: $L = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{1}{2}k\left(R^2+z^2\right)$

Επομένως θα έχουμε 2 εξισώσεις κίνησης για ϕ και z

$\boxed{z}$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \dot z} = m\dot z \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot z}\right) = m\ddot z \\ &\frac{\partial L}{\partial z} = -kz \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot z}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot z + kz = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot z = \frac{-k}{m} z} \quad (1)$$

$\boxed{\phi}$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \dot \phi} = mR^2\dot\phi \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot \phi}\right) = mR^2\ddot\phi \\ &\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(mR^2\dot\phi\right) = 0 \Rightarrow$$

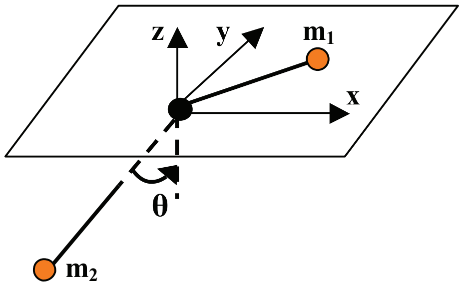
$$\Rightarrow \boxed{mR^2\dot\phi = \text{σταθ}} \quad (2)$$

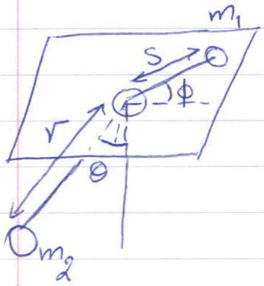
Η (1) μας λέει ότι το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση στη z-διεύθυνση με $z = A\cos(\omega t - \delta)$ $\quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Η (2) μας λέει ότι το σώμα έχει σταθερή στροφορμή στη διεύθυνση του z-άξονα. Κάτι που αναμένεται αφού δεν υπάρχει ροπή στη διεύθυνση αυτή.

Επειδή η ακτίνα είναι σταθερή ($\rho = R$) αυτό σημαίνει ότι η $\dot\phi$ είναι σταθερή και η μάζα περιστρέφεται στην κυλινδρική επιφάνεια με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\dot\phi$. Την ίδια στιγμή κινείται πάνω-κάτω στη z-διεύθυνση σε αρμονική κίνηση.

2. Δίνονται 2 σώματα μάζας m_1 και m_2 ($m_2 > m_1$) τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με αβαρές νήμα μήκους l (όπως στο διπλανό σχήμα). Το σώμα μάζας m_1 μπορεί να περιστρέφεται πάνω σε λεία και οριζόντια επιφάνεια ενώ το σώμα μάζας m_2 κρέμεται κάτω από την οριζόντια επιφάνεια και μπορεί να κινείται στο επίπεδο x-z. Να προσδιοριστούν (α) οι δεσμοί που υπάρχουν και να χαρακτηριστούν (**3π**) (β) η Lagrangian του συστήματος (**6π**) και (γ) οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος (**6π**) και (δ) να δοθεί η φυσική ερμηνεία των εξισώσεων κίνησης στις οποίες καταλήξατε (**5π**).





Έχουμε 2 δεσμούς αφού οι μάζες περιορίζονται να κινούνται πάνω σε 2 επίπεδα x-y και x-z και ένα τρίτο δεσμό εξαιτίας του νήματος που συνδέει τις 2 μάζες: $r + s = l \Rightarrow s = l - r \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dot{s} = -\dot{r}$$

Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες για να περιγράψουμε τη θέση και των 2 σωμάτων οπότε έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_1 = \dot{s}\,\hat{\varepsilon}_s + s\dot{\phi}\,\hat{\varepsilon}_\phi \Rightarrow v_1^2 = \dot{s}^2 + (s\dot{\phi})^2 \\ \vec{v}_2 = \dot{r}\,\hat{\varepsilon}_r + r\dot{\theta}\,\hat{\varepsilon}_\theta \Rightarrow v_2^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} v_1^2 = \dot{r}^2 + (l-r)^2\dot{\phi}^2 \\ v_2^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \end{array}$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{r}^2 + (l-r)^2\dot{\phi}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \quad (1)$$

Επομένως χρειάζεται να βρούμε την δυναμική ενέργεια. Θεωρώντας $V=0$ το επίπεδο στο οποίο κινείται το σώμα m_1 θα έχουμε:

$$V = V_1 + V_2 = V_2 \Rightarrow V = -m_2 g r\cos\theta. \quad (2)$$

Από (1) ∧ (2) $\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{r}^2 + (l-r)^2\dot{\phi}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + m_2 g r\cos\theta$

$\boxed{r:}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = m_1\dot{r} + m_2\dot{r} = (m_1+m_2)\dot{r} \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}\right) = (m_1+m_2)\ddot{r} \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = -m_1(l-r)\dot{\phi}^2 + m_2 r\dot{\theta}^2 + m_2 g\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = 0 \Rightarrow \boxed{(m_1+m_2)\ddot{r} + m_1(l-r)\dot{\phi}^2 - m_2 r\dot{\theta}^2 - m_2 g\cos\theta = 0}$$

$$\boxed{\phi :}\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m_1 (\ell - r)^2 \dot{\phi} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) = m_1 (\ell - r)^2 \ddot{\phi}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \text{σταθ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m_1 (\ell - r)^2 \dot{\phi} = \text{σταθ}}$$

$$\boxed{\theta :}\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m_2 r^2 \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = m_2 r^2 \ddot{\theta} + 2 m_2 r \dot{r} \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = - m_2 g r \sin\theta$$

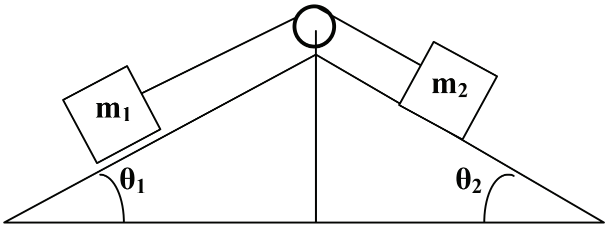
$$\Rightarrow \boxed{m_2 r^2 \ddot{\theta} + 2 m_2 r \dot{r} \dot{\theta} + m_2 g r \sin\theta = 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt}\left(m_2 r^2 \dot{\theta}\right)}_{\text{μεταβολή της στροφορμής στο κατακόρυφο επίπεδο}} = \underbrace{- m_2 g r \sin\theta}_{\text{ροπή λόγω της βαρύτητας}}$$

<u>ΦΥΣ 133 – 1η Πρόοδος</u> **12-2-2007**

2η Ομάδα	

1. Δύο μάζες m_1 και m_2 συνδέονται μεταξύ τους με ένα αβαρές νήμα μήκους l το οποίο περνά από μια ακλόνητη τροχαλία ακτίνας R και μάζας M, η οποία μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στο επίπεδο της τροχαλίας όπως στο σχήμα. Οι δύο μάζες μπορούν να κινηθούν πάνω σε κεκλιμένες επιφάνειες γωνίας κλίσης θ_1 και θ_2 αντίστοιχα. Όλες οι επιφάνειες επαφής είναι λείες και δεν υπάρχουν τριβές ενώ η τροχαλία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς να γλιστρά στο σημείο επαφής της με το σχοινί. Αρχικά οι μάζες κρατούνται ακίνητες και κατόπιν αφήνονται ελεύθερες να κινηθούν ενώ η τροχαλία αρχίζει να περιστρέφεται. (α) Να βρεθεί η Lagrangian του συστήματος (**10π**) (β) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης (**7π**) και (γ) να εξεταστούν μερικές οριακές συνθήκες (**3π**). (<u>*Υπόδειξη*</u>: Μπορεί να σας φανεί χρήσιμο ότι η κινητική ενέργεια περιστροφής δίνεται από τη σχέση $E_{\kappa\iota\nu} = I\dot{\varphi}^2/2$ όπου φ η γωνία περιστροφής της τροχαλίας και $\dot{\varphi} = \upsilon/R$).



Τα σώματα κινούνται πάνω σε 2 διευθύνσεις x_1 και x_2

Υπάρχουν 4 δεσμοί λόγω της μονοδιάστατης κίνησης και των 2 σωμάτων και ακόμα ένας δεσμός λόγω του νήματος που συνδέει τα σώματα

Επομένως έχουμε $x_1 + x_2 = l \Rightarrow x_2 = l - x_1 \Rightarrow \dot{x}_2 = -\dot{x}_1$

Η κινητική ενέργεια των σωμάτων είναι:

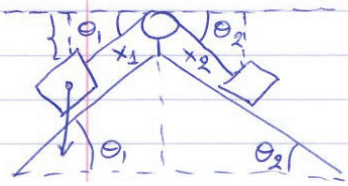
$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2$$

αλλά $\dot{\varphi} = \frac{\upsilon}{R} = \frac{\dot{x}_1}{R}$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} I \frac{\dot{x}_1^2}{R}$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος θεωρώντας σα σημείο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την τροχαλία είναι:

$$V = V_1 + V_2 = -m_1 g x_1 \sin\theta_1 - m_2 g x_2 \sin\theta_2 = -m_1 g x_1 \sin\theta_1 - m_2 g (l - x_1) \sin\theta_2$$



$$\Rightarrow V = -(m_1 \sin\theta_1 - m_2 \sin\theta_2) g x_1 - \underbrace{m_2 g l \sin\theta_2}_{\text{σταθερή ποσότητα}}$$

Επομένως η Lagrangian του συστήματος

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R}\right)\dot{x}_1^2 + \left(m_1 \sin\theta_1 - m_2 \sin\theta_2\right) g x_1 + m_2 g l \sin\theta_2$$

Επομένως η εξίσωση κίνησης θα είναι:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R}\right)\dot{x}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right) = \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R}\right)\ddot{x}_1 \\ &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \left(m_1 \sin\theta_1 - m_2 \sin\theta_2\right) g \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R}\right)\ddot{x}_1 - \left(m_1 \sin\theta_1 - m_2 \sin\theta_2\right) g = 0$$

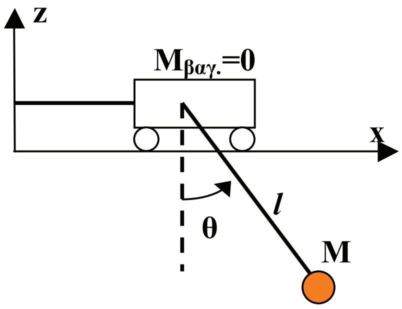
$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x}_1 = \frac{\left(m_1 \sin\theta_1 - m_2 \sin\theta_2\right)}{\left(m_1 + m_2 + I/R\right)} g}$$

$\ddot{x}_1 = 0$ αν $m_1 \sin\theta_1 = m_2 \sin\theta_2$

Αν $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ τότε

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{(m_1 + m_2 + I/R)} g$$

2. Ένα εκκρεμές μάζας Μ και μήκους l είναι εξαρτημένο από ένα <u>αβαρές</u> βαγονάκι το οποίο εξαρτάται μέσω ενός πιστονιού από ακλόνητο σημείο. Το βαγονάκι μπορεί να κινηθεί στην οριζόντια μόνο διεύθυνση και καθώς κινείται δέχεται την επίδραση της δύναμης $\vec{F} = -kx\hat{i}$ εξαιτίας του πιστονιού. Το πιστόνι όταν το σύστημα είναι ακίνητο έχει μήκος l_0. Η μάζα του εκκρεμούς μπορεί να κινείται μόνο στο κατακόρυφο επίπεδο x-z. (α) Να βρεθεί η Lagrangian του συστήματος (**7π**) (β) οι εξισώσεις κίνησης (**8π**) και (γ) να βρεθεί η συχνότητα ταλάντωσης του εκκρεμούς για την περίπτωση μικρών αποκλίσεων (θ μικρό) από τη θέση ισορροπίας και να εξεταστεί η τιμή της συχνότητας για την περίπτωση που το βαγονάκι είναι ακίνητο (**5π**).



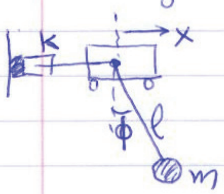
(<u>*Υπόδειξη για το (γ)*</u>: για μικρές γωνίες $\cos\theta \approx 1$ και $\sin\theta \approx \theta$ ενώ ποσότητες δεύτερης ή μεγαλύτερης τάξης σε θ θεωρούνται αμελητέες. Θα σας φανεί χρήσιμο να βγάλετε μια σχέση μεταξύ των γενικευμένων συντεταγμένων σας χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης στις οποίες καταλήξατε).

Το πιστόνι ουσιαστικά λειτουργεί σαν ελατήριο, και η δύναμη που δίνει είναι της μορφής του νόμου του Hooke. Επομένως η δυναμική ενέργεια λόγω ~~της~~ .. δύναμης αυτής θα είναι:

$$\nabla V = -F \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = -F \Rightarrow V = -\int F\,dx \Rightarrow V = -\int(-kx)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{2}kx^2}$$

Διαλέγουμε τα συντεταγμένες τις x και φ όπως στο σχήμα. Θεωρούμε ότι ~~η~~ αρχή του συστήματος συντεταγμένων συμπίπτει με το Κ.Μ. του βαγονάκι όταν το σύστημα είναι σε ηρεμία.



Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι αυτή της μάζας του εκκρεμούς m. Άρα $T = \frac{1}{2}mv^2$

Η μάζα επομένως θα έχει συντεταγμένες: $\left.\begin{array}{l} x' = l\sin\theta \\ y' = -l\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{x}' = l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}' = l\dot{\theta}\sin\theta \end{array}\right\}$ ταχύτητα της μάζας του εκκρεμούς ως προς το βαγονάκι

Η ταχύτητα του εκκρεμούς ως προς το σύστημα αναφοράς μας θα είναι:

$$\left.\begin{array}{l} v_x = \dot{x} + \dot{x}' \\ v_y = \underbrace{\cancel{\dot{y}}}_{0} + \dot{y}' \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} v_x = \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta \\ v_y = l\dot{\theta}\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} v_x^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta \\ v_y^2 = l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta \end{array}$$

Οπότε $\quad v^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος θα είναι η δυναμική ενέργεια λόγω του πιστονιού και αυτή λόγω της βαρύτητας.

Θεωρώντας τη δυναμική ενέργεια ϕ πάνω στο επίπεδο που κινείται το βαγονάκι θα έχουμε ότι:

$$\left.\begin{aligned} V_{βαρ} &= -mgl\cos\theta \\ V_{πιστ} &= \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_{ολ} = -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}kx^2$$

Επομένως $\quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right) + mgl\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2$

$\boxed{x:}$ $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx$$

Οπότε η εξίσωση κίνησης στη x είναι:

$$\boxed{m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta + kx = 0} \qquad (1)$$

$\boxed{\theta:}$ $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\left(l^2\dot{\theta} + l\dot{x}\cos\theta\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\left(l^2\ddot{\theta} + l\ddot{x}\cos\theta - l\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta - ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta$$

Οπότε η εξίσωση κίνησης για θ είναι:

$$\boxed{ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta \cancel{- ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta} = -\left(mgl\sin\theta \cancel{+ ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta}\right)} \quad (2)$$

Χρειάζεται να λύσουμε τις παραπάνω 2 διαφορικές εξισώσεις
Αντικαθιστούμε $\cos\theta \simeq 1$ και $\sin\theta \simeq \theta$ οπότε

$$(1) \Rightarrow m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} - ml\dot{\theta}^2\theta + kx = 0 \quad (3)$$
$$(2) \Rightarrow m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + mg\theta = 0 \quad (4)$$

αφαιρούμε (4) από (3)

$$-ml\dot{\theta}^2\theta + kx - mg\theta = 0 \Rightarrow \underbrace{ml\dot{\theta}^2\theta}_{} + mg\theta - kx = 0$$

θ μικρό οπότε αυτό είναι μεγαλύτερης τάξης και πολύ μικρό

$$\Rightarrow mg\theta = kx \Rightarrow x = \frac{mg\theta}{k}$$

Αντικαθιστούμε στην (4) οπότε: $m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + mg\theta = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m^{\cancel{2}} g\frac{\ddot{\theta}}{k} + \cancel{m}l\ddot{\theta} + \cancel{m}g\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}\left(1 + \frac{mg}{kl}\right) + \frac{g}{l}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{(g/l)}{\left[1 + \frac{mg}{kl}\right]}\theta = 0.$$

Το εκκρεμές ταλαντώνεται με συχνότητα: $\omega = \sqrt{\dfrac{g/l}{1 + \left(\frac{g}{l}\right)\left(\frac{m}{k}\right)}} = \sqrt{\dfrac{g}{l + \frac{gm}{k}}}$

Αν το βαγονάκι είναι ακίνητο, αυτό αντιστοιχεί σε μια δύναμη πιστονιού με πολύ μεγάλο k οπότε $gm/k \to 0$ και έχουμε

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$