ΦΥΣ. 211
1η ΠΡΟΟΔΟΣ 7-Μάρτη-2015

Πριν ξεκινήσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, αριθμό ταυτότητας) στο πάνω μέρος της σελίδας αυτής.

Για τις λύσεις των ασκήσεων θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε μόνο τις σελίδες που σας δίνονται. Μην κόψετε καμιά από τις σελίδες που σας δίνονται.

Προσπαθήστε να δείξετε τη σκέψη σας και να γράψετε καθαρές εξισώσεις. Για πλήρη ή μερική βαθμολόγηση θα πρέπει να φαίνεται καθαρά το τι προσπαθείτε να δείξετε.

Σας δίνονται 6 ασκήσεις και πρέπει να απαντήσετε σε όλες. Σύνολο μονάδων 100.

Διαβάστε πρώτα όλες τις ασκήσεις και προσπαθήστε να σκεφτείτε τι περίπου χρειάζεται να κάνετε. Η σειρά των προβλημάτων δεν είναι ενδεικτική της δυσκολία τους.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 180 λεπτά.

Καλή επιτυχία.

Ενεργό δυναμικό

$$U_{eff}(r) = U(r) + U_{cf}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

Μετασχηματισμένη ακτινική Δ.Ε. τροχιάς:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u + \frac{\mu}{l^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) = 0, \text{ όπου } u = \frac{1}{r}$$

Ενέργεια τροχιάς:

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + U(r)$$

Τροχιές Kepler:

$F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2} = \dfrac{\gamma}{r^2}$ λύση ακτινικής εξίσωσης είναι: $r(\theta) = \dfrac{c}{1 + e\cos\theta}$, με $c = \dfrac{l^2}{\gamma\mu}$

Εκκεντρότητα (*e*): $E = \dfrac{\gamma^2 \mu}{2l^2}\left(e^2 - 1\right)$ όπου E = Ενέργεια

Εκκεντρότητα	Ενέργεια	Είδος Τροχιάς
$0 < e < 1$	$E < 0$	ελλειπτική
$e = 1$	$E = 0$	παραβολική
$e > 1$	$E > 0$	υπερβολική

Περιήλιο: $r_{\min} = \dfrac{c}{1+e}$

Αφήλιο: $r_{\max} = \dfrac{c}{1-e}$

Μεγάλος ημιάξονας: $a = \dfrac{c}{1-e^2}$

Μικρός ημιάξονας: $b = \dfrac{c}{\sqrt{1-e^2}}$

Νόμοι Kepler:

1ος νόμος: τροχιές πλανητών είναι ελλείψεις με τον ήλιο σε μια από τις εστίες της έλλειψης

2ος νόμος: $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{l}{2\mu}$

3ος νόμος: $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM_H} a^3$

1. Ένα νήμα μήκους L σχηματίζει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Δείξτε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου είναι μέγιστο όταν αυτό είναι τετράγωνο. [**10μ**]

Έστω το ορθογώνιο έχει πλευρές X και Y. Η περιφέρεια του ορθογωνίου θα είναι το μήκος του νήματος L. Δηλαδή θα έχουμε:

$$2X+2Y=L \Rightarrow Y=\frac{1}{2}L-X \qquad (1)$$

Το εμβαδό θα είναι: $A=X\cdot Y \overset{(1)}{\Rightarrow} A=X\left(\frac{1}{2}L-X\right)$ $\qquad (2)$

Η (2) είναι η εξίσωση μιας ανεστραμμένης παραβολής με το ακρότατο να αντιστοιχεί στο μέσο της περιοχής $X=0$ και $X=\frac{1}{4}L$

Αυτό μπορούμε να το δούμε αν πάρουμε την παράγωγο του εμβαδού ως προς X και ζητήσουμε να μηδενίζεται, οπότε θα βρούμε την θέση του ακρότατου που αποτελεί και μέγιστο.

Από την (2) επομένως: $\dfrac{dA}{dX}=\left(\frac{1}{2}L-X\right)+X(-1)=\frac{1}{2}L-2X=0 \Rightarrow \boxed{X=\frac{L}{4}}$

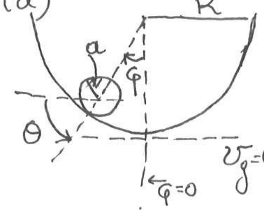
Αντικατάσταση στην (1) δίνει ότι $Y=\frac{1}{2}L-\frac{1}{4}L \Rightarrow \boxed{Y=\frac{L}{4}}$ Άρα τετράγωνο

2. Ένας κύλινδρος ακτίνας *α* και ροπής αδράνειας *I*, κυλά χωρίς να ολισθαίνει στο εσωτερικό ενός μεγαλύτερου κυλίνδρου ακτίνας *R*, τέτοια ώστε *R*>*a*.

(α) Βρείτε την Lagrangian και τις εξισώσεις κίνησης. [**5μ**]

(β) Βρείτε την συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων. [**5μ**]

(a)



Από την στιγμή που ο μικρός κύλινδρος κυλά χωρίς να ολισθαίνει μέσα στην μεγαλύτερη κυλινδρική επιφάνεια, έχουμε μια εξίσωση δεσμού:

$$U_g=0 \qquad R\varphi = a\theta \Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{\theta}\frac{a}{R} \quad (1)$$

Θεωρούμε σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, αυτό που περνά από το χαμηλότερο σημείο της μεγάλης κυλινδρικής επιφάνειας. Επομένως η δυναμική ενέργεια του κέντρου μάζας του μικρού κυλίνδρου θα είναι:

$$U = mg\left[(R-a) - (R-a)\cos\varphi\right] \quad (2)$$

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, η κινητική ενέργεια του μικρού κυλίνδρου είναι το άθροισμα της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής και λόγω μεταφοράς. Επομένως θα έχουμε:

$$T = \frac{1}{2}m(R-a)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \quad (3)$$

Από (2) και (3) η Lagrangian του συστήματος είναι:

$$L = T - U \Rightarrow L = \frac{1}{2}m(R-a)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mg(R-a)\cos\varphi - mg(R-a)$$

Ο τελευταίος όρος του δυναμικού ουσιαστικά δεν παίζει ρόλο στην δυναμική αφού είναι σταθερός και επομένως μπορούμε να τον αγνοήσουμε.

Από την εξίσωση του δεσμού (1) και την Lagrangian θα πάρουμε:

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m(R-a)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{a}{R}\right)^2\dot{\varphi}^2 + mg(R-a)\cos\varphi} \quad (A)$$

Επομένως χρησιμοποιώντας την εξίσωση Euler-Lagrange, η εξίσωση κίνησης είναι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{\partial L}{\partial\varphi} \Rightarrow \boxed{m(R-a)\ddot{\varphi} + I\left(\frac{a}{R}\right)^2\ddot{\varphi} = -mg(R-a)\sin\varphi} \quad (B)$$

(β) Για μικρές ταλαντώσεις θεωρούμε ότι η γωνία φ είναι πολύ μικρή ως προς την θέση ισορροπίας, $\varphi = 0$.

Από την εξίσωση κίνησης (B) θεωρώντας φ μικρό, προσεγγίζουμε $\sin\varphi \sim \varphi$

Επομένως:

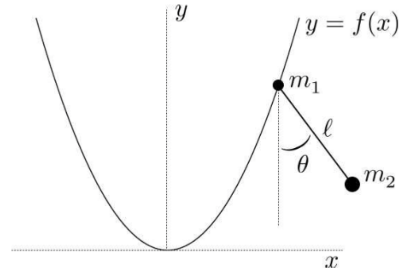
$$\ddot{\varphi}\left[m(R-a) + I\left(\frac{a}{R}\right)^2\right] = -mg(R-a)\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{mg(R-a)}{m(R-a)+I\left(\frac{a}{R}\right)^2}\varphi}$$ εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή

Η συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων θα είναι: $\omega^2 = \dfrac{mg(R-a)}{m(R-a)+I\left(\frac{a}{R}\right)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{mg(R-a)}{m(R-a)+I\left(\frac{a}{R}\right)^2}}}$$

3. Μια σημειακή μάζα m_1 κινείται χωρίς τριβές πάνω στην τυχαίας μορφής καμπύλη $y = f(x)$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Στην μάζα m_1 είναι στερεωμένο το άκρο μιας ράβδου αμελητέας μάζας και μήκους l. Στο άλλο άκρο της ράβδου είναι στερεωμένη μια δεύτερη σημειακή μάζα m_2. Η όλη διάταξη τω μαζών κινείται κάτω από την επίδραση της βαρύτητας. Θεωρήστε σαν γενικευμένες συντεταγμένες το σύνολο $\{x, y, \theta\}$, όπου (x, y) είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες της μάζας m_1 και θ η γωνία όπως φαίνεται στο σχήμα. Θεωρείστε ότι η συνθήκη $y = f(x)$ αντιπροσωπεύει δεσμό.



(α) Να βρεθεί η συνάρτηση Lagrange, του συστήματος. [**4μ**]

(β) Να βρεθούν οι γενικευμένες ορμές. [**5μ**]

(γ) Να βρεθούν οι δυνάμεις F_x, F_y και F_θ. [**3μ**]

(δ) Να βρεθούν οι δυνάμεις των δεσμών Q_x, Q_y, και Q_θ. [**2μ**]

(ε) Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης συναρτήσει των x, y, θ, των πρώτων και δεύτερων παραγώγων τους και του πολλαπλασιαστή Lagrange, λ. [**5μ**]

(στ) Να βρεθούν οι ποσότητες που διατηρούνται. [**1μ**]

(α) Οι συντεταγμένες της μάζας m_2 είναι: $(x+l\sin\theta,\ y-l\cos\theta)$

Επομένως η Lagrangian του προβλήματος θα είναι: $L = T - U \Rightarrow$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2) - m_1 g y - m_2 g y_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}m_2\left[(\dot{x}+l\dot{\theta}\cos\theta)^2+(\dot{y}+l\dot{\theta}\sin\theta)^2\right] - m_1 g y - m_2 g(y-l\cos\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^2+l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta+2\dot{x}\dot{\theta}l\cos\theta+\dot{y}^2+l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta+2\dot{y}l\dot{\theta}\sin\theta\right) -$$

$$- m_1 g y - m_2 g y + m_2 g l\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{y}^2+\frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\theta}^2+m_2 l\dot{\theta}(\dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta)-(m_1+m_2)gy +$$

$$+ m_2 g l\cos\theta$$

(β) Οι ορμές του συστήματος είναι: $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p_q$ οπότε χρησιμοποιώντας την Lagrangian από το ερώτημα (α) θα έχουμε:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l \dot{\theta} \cos\theta$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = (m_1 + m_2)\dot{y} + m_2 l \dot{\theta} \sin\theta$$

και $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m_2 l^2 \dot{\theta} + m_2 l (\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta)$

(γ) Οι δυνάμεις F_q είναι απλά: $F_q = \frac{\partial L}{\partial q}$. Επομένως θα έχουμε:

$$F_x = \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

και $F_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = m_2 l(-\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta)\dot{\theta} - m_2 g l \sin\theta$

$$F_y = \frac{\partial L}{\partial y} = -(m_1+m_2)g$$

(δ) Οι δυνάμεις των δεσμών θα είναι από την εξίσωση του δεσμού $G = y - f(x) = 0$

$$Q_x = \lambda \frac{\partial G}{\partial x} = -\lambda f'(x)$$

όπου $f'(x)$ η παράγωγος της $f(x)$ ως προς x

$$Q_y = \lambda \frac{\partial G}{\partial y} = \lambda$$

Αν γνωρίζαμε την συνάρτηση $f(x)$ θα μπορούσαμε να γράψουμε την σχέση

$$Q_\theta = \lambda \frac{\partial G}{\partial \theta} = 0.$$

(ε) Έχουμε τρεις γενικευμένες συντεταγμένες από τις οποίες δεν έχουμε απαλείψει την εξίσωση του δεσμού και επομένως είναι σχετιζόμενες (μη ανεξάρτητες). Θα χρησιμοποιήσουμε τις τροποποιημένες εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} - \sum \lambda_i \frac{\partial G_i}{\partial q} = 0$$

Επομένως: $\dot{P}_q = F_q + Q_q$

Αντικατάσταση από τα ερωτήματα (β), (γ) και (δ) θα δώσει:

$$\frac{d}{dt}\left((m_1+m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\theta}\cos\theta\right) = 0 - \lambda f'(x) \Rightarrow (m_1+m_2)\ddot{x} - m_2 l\dot{\theta}^2\sin\theta + m_2 l\ddot{\theta}\cos\theta = -\lambda f'(x)$$

$$\frac{d}{dt}\left((m_1+m_2)\dot{y} + m_2 l\dot{\theta}\sin\theta\right) = -(m_1+m_2)g + \lambda \Rightarrow (m_1+m_2)\ddot{y} + m_2 l\dot{\theta}^2\cos\theta + m_2 l\ddot{\theta}\sin\theta = -(m_1+m_2)g + \lambda$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_2 l^2\dot{\theta} + m_2 l(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta)\right) = m_2 l\dot{\theta}(-\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta) - m_2 g l\sin\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 l^2\ddot{\theta} + m_2 l\left(\ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta \cancel{- \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + \dot{y}\dot{\theta}\cos\theta}\right) = m_2 l\dot{\theta}\cancel{(-\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta)} - m_2 g l\sin\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 l\left[l\ddot{\theta} + \ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta\right] = -m_2 g l\sin\theta$$

(στ) Η Hamiltonian του συστήματος είναι:

$$\mathcal{H} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_\theta \dot{\theta} - \mathcal{L} = (m_1+m_2)\dot{x}^2 + m_2 l \dot{\theta}\dot{x}\cos\theta \; +$$

$$+ (m_1+m_2)\dot{y}^2 + m_2 l \dot{\theta}\dot{y}\sin\theta \; +$$

$$+ m_2 l^2 \dot{\theta}^2 + \cancel{m_2 l \dot{\theta}(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta)} \; -$$

$$- \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{y}^2 - \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}^2 - \cancel{m_2 l \dot{\theta}(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta)}$$

$$+ (m_1+m_2) g y - m_2 g l \cos\theta \Rightarrow$$

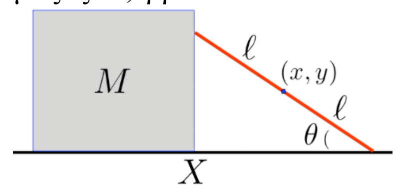
$$\mathcal{H} = \underbrace{\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}^2 + m_2 l \dot{\theta}(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta)}_{T} + \underbrace{(m_1+m_2) g y - m_2 g l \cos\theta}_{V} \Rightarrow$$

$$\mathcal{H} = T + V = E_{μηχ}$$

Αυτό ήταν αναμενόμενο αφού η κινητική ενέργεια είναι 2βαθμη ως προς τις γενικευμένες ταχύτητες. Επειδή ακόμα $\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mathcal{H} = σταθ \Rightarrow E_{μηχ} = σταθ$.

Επομένως η ενέργεια διατηρείται.

4. Μια ομοιόμορφη και ομογενής σκάλα μήκους $2l$, και μάζας m, βρίσκεται πάνω σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Η ροπή αδράνειας μιας ράβδου μήκους L, ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας είναι: $I_{CM} = \frac{1}{12}mL^2$. Η σκάλα είναι ακουμπισμένη σε κιβώτιο μάζας M, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Χρησιμοποιήστε σαν γενικευμένες συντεταγμένες την οριζόντια θέση X, της δεξιάς κάτω κορυφής του κιβωτίου, την γωνία θ, που σχηματίζει η σκάλα με την οριζόντια επιφάνεια, και τις συντεταγμένες (x,y) του κέντρου μάζας της σκάλας. Οι συντεταγμένες αυτές δεν είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά συνδέονται με κάποιες εξισώσεις δεσμών.



(α) Να γραφεί η συνάρτηση Lagrange του συστήματος. [**3μ**]

(β) Να γραφούν οι εξισώσεις των δεσμών του συστήματος. [**3μ**]

(γ) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης. [**3μ**]

(δ) Να γραφεί η συνθήκη για την οποία η σκάλα χάνει επαφή με το κιβώτιο.[**1μ**]

(ε) Να βρεθεί μια εξίσωση για την γωνία στην οποία η ράβδος χάνει επαφή. [**10μ**]

(α) Έχουμε τις συντεταγμένες X, θ, x, y. Επομένως η Lagrangian θα γραφεί σαν:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mgy$$

(β) Υπάρχουν 2 δεσμοί στο πρόβλημα που αντιστοιχούν στις δυνάμεις που εμφανίζονται στο σημείο επαφής μεταξύ της σκάλας και του κιβωτίου και στο σημείο επαφής μεταξύ της σκάλας και της οριζόντιας επιφάνειας.

Θα έχουμε για τον δεσμό μεταξύ κιβωτίου - σκάλας: $G_1 = x - l\cos\theta - X = 0$

Για τον δεσμό μεταξύ σκάλας - οριζόντιας επιφάνειας: $G_2 = y - l\sin\theta = 0$

(γ) Οι εξισώσεις κίνησης θα είναι από τις τροποποιημένες εξισώσεις Euler-Lagrange με την χρήση πολλαπλασιαστών Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \sum_{i=1}^{n\delta} \lambda_i \frac{\partial G_i}{\partial q}$$ οπότε για το πρόβλημα αυτό θα έχουμε:

$$\ddot{X}M = -\lambda_1$$
$$\ddot{x}m = +\lambda_1$$
$$\ddot{y}m = -mg + \lambda_2$$
$$-\ddot{\theta}I = l\sin\theta\lambda_1 - l\cos\lambda_2$$

Στις παραπάνω 4 εξισώσεις, έχουμε 2 ακόμα εξισώσεις των δεσμών:

$$\ddot{x} + l\ddot{\theta}\sin\theta + l\dot{\theta}^2\cos\theta - \ddot{X} = 0$$

$$\ddot{y} - l\ddot{\theta}\cos\theta + l\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$$

(δ) Η σφαίρα χάνει επαφή με το κιβώτιο όταν η δύναμη που αναπτύσσεται λόγω του δεσμού μηδενίζεται. Όταν δηλαδή η κάθετη δύναμη μηδενίζεται. Αυτό συμβαίνει όταν $\lambda_1 = 0$.

(ε) Από τις εξισώσεις των 2 δεσμών βρήκαμε προηγουμένως:

(ia) $x = X + l\cos\theta$ $\qquad$ $y = l\sin\theta$ (iia)

(ib) $\dot{x} = \dot{X} - l\dot{\theta}\sin\theta$ $\qquad$ $\dot{y} = l\dot{\theta}\cos\theta$ (iib)

(ic) $\ddot{x} = \ddot{X} - l\dot{\theta}^2\cos\theta - l\ddot{\theta}\sin\theta$ $\qquad$ $\ddot{y} = -l\dot{\theta}^2\sin\theta + l\ddot{\theta}\cos\theta$ (iic)

Από την ($1^{η}$) εξίσωση κίνησης επομένως θα έχουμε:

$$\lambda_1 = m\ddot{x} = m\ddot{X} - ml\ddot{\theta}\sin\theta - ml\cos\theta\,\dot{\theta}^2 = -M\ddot{X} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m+M)\ddot{X} = ml\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)$$

Επομένως: $\boxed{Q_x = \lambda_1 = -\frac{Mml}{(m+M)}\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)}$ (A)

Από την εξίσωση κίνησης για y έχουμε: $\lambda_2 = m\ddot{y} + mg \overset{(iic)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \boxed{Q_y = \lambda_2 = mg + m\left(-l\dot{\theta}^2\sin\theta + l\ddot{\theta}\cos\theta\right)}$ (B)

Από την $3^{η}$ εξίσωση κίνησης για θ θα έχουμε: $I\ddot{\theta} = l\sin\theta\,\lambda_1 - l\cos\theta\,\lambda_2$ (Γ)

Αντικατάσταση των (A) κ (B) δίνει:

$$I\ddot{\theta} = -l\sin\theta\,\frac{mMl}{(m+M)}\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) - ml\cos\theta\left(-l\dot{\theta}^2\sin\theta + l\ddot{\theta}\cos\theta\right) - mgl\cos\theta$$

$$\Rightarrow I\ddot{\theta} = -mgl\cos\theta - ml^2\left(\frac{\ddot{\theta}\sin^2\theta\, M}{(m+M)} + \ddot{\theta}\cos^2\theta\right) + ml^2\dot{\theta}^2\left(\cos\theta\sin\theta - \frac{M}{M+m}\sin\theta\cos\theta\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I\ddot{\theta} = -mgl\cos\theta - ml^2\left(\frac{M\sin^2\theta + m\cos^2\theta + M\cos^2\theta}{M+m}\right)\ddot{\theta} + m^2l^2\dot{\theta}^2\,\frac{\cos\theta\sin\theta}{M+m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I\ddot{\Theta} = -mgl\cos\Theta - ml^2\left(\frac{M+m\cos^2\Theta}{M+m}\right)\ddot{\Theta} + m^2l^2\dot{\Theta}^2\frac{\cos\Theta\sin\Theta}{M+m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I\ddot{\Theta} + ml^2\left(\frac{M+m-m\sin^2\Theta}{M+m}\right)\ddot{\Theta} = -mgl\cos\Theta + \frac{m^2l^2\dot{\Theta}^2\cos\Theta\sin\Theta}{M+m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\Theta}\left(I + ml^2 - \frac{m^2l^2}{M+m}\sin^2\Theta\right) = \frac{m^2l^2}{M+m}\dot{\Theta}^2\cos\Theta\sin\Theta - mgl\cos\Theta} \quad (\Delta)$$

Από την εξίσωση (A) βλέποντας $\lambda_1 = Q_x = 0$ θα πάρουμε: $\sin\Theta\ddot{\Theta} = -\dot{\Theta}^2\cos\Theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\Theta} = -\frac{\cos\Theta}{\sin\Theta}\dot{\Theta}^2} \quad (E)$$

Αντικατάσταση στην (Δ) της (E) θα δώσει:

$$-\dot{\Theta}^2\frac{\cos\Theta}{\sin\Theta}\left(I + ml^2 - \frac{m^2l^2}{M+m}\sin^2\Theta\right) = \frac{m^2l^2}{M+m}\dot{\Theta}^2\cos\Theta\sin\Theta - mgl\cos\Theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow +\dot{\Theta}^2\left[\frac{\cos\Theta}{\sin\Theta}I + ml^2\frac{\cos\Theta}{\sin\Theta} - \cancel{\frac{m^2l^2}{M+m}\cos\Theta\sin\Theta} + \cancel{\frac{m^2l^2}{M+m}\cos\Theta\sin\Theta}\right] - mgl\cos\Theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\Theta}^2\frac{\cos\Theta}{\sin\Theta}\left(I + ml^2\right) = +mgl\cos\Theta \Rightarrow \boxed{(I+ml^2)\dot{\Theta}^2 = mgl\sin\Theta} \quad (\Sigma T)$$

Όπου θεωρώ ότι $\cos\Theta \neq 0$ δηλαδή ότι $\Theta \neq \frac{\pi}{2}$ δεν είναι κατακόρυφη που η περίπτωση αυτή σημαίνει ότι αρχικά δεν είχε επαφή με το κιβώτιο.

Επειδή η Lagrangian του συστήματος είναι ανεξάρτητη του χρόνου, όπως και οι εξισώσεις των δεσμών, και επειδή είναι η Lagrangian ομογενής εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς τις γενικευμένες ταχύτητες, η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται:

$$E = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\Theta}^2 + mgy = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2 + l^2\dot{\Theta}^2\sin^2\Theta - 2l\dot{\Theta}\dot{X}\sin\Theta + l^2\dot{\Theta}^2\cos^2\Theta\right)$$

$$+\frac{1}{2}I\dot{\Theta}^2 + mgy \Rightarrow E = \frac{1}{2}(M+m)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\Theta}^2 - ml\dot{\Theta}\dot{X}\sin\Theta + \frac{1}{2}I\dot{\Theta}^2 + mgy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}(M+m)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}(ml^2+I)\dot{\Theta}^2 - ml\dot{\Theta}\dot{X}\sin\Theta + mgy \overset{\text{από } (\Sigma T)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}(M+m)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}mgl\sin\Theta - ml\dot{\Theta}\dot{X}\sin\Theta + mgl\sin\Theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}(M+m)\dot{X}^2 + \frac{3}{2}mgl\sin\Theta - ml\dot{\Theta}\dot{X}\sin\Theta} \quad (Z)$$

Από την εξίσωση της συνάρτησης Lagrange έχουμε:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - mgy \Big\} \Rightarrow$$

Από τον 2° δεσμό $y = l \sin\theta$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta$$

Παρατηρούμε ότι η Lagrangian δεν εξαρτάται από τις συντεταγμένες X & x

Επομένως

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}}\right) &= \text{σταθ} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) &= \text{σταθ} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \Sigma\text{ταθ} \Rightarrow \boxed{M\dot{X} + m\dot{x} = \Sigma\text{ταθ}} \quad (H)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (ib) αντικαθιστούμε το $\dot{x}$ συναρτήσει των $\dot{X}$ & $\dot{\theta}$

$$M\dot{X} + m(\dot{X} - l\dot{\theta}\sin\theta) = \Sigma T\Theta \Rightarrow \boxed{(M+m)\dot{X} - ml\dot{\theta}\sin\theta = \Sigma TA\Theta} \quad (\theta)$$

Αντικατάσταση της $\dot{X}$ από την (θ) στην (Z) θα δώσει:

$$E = \frac{1}{2}(M+m)\frac{(W + ml\dot{\theta}\sin\theta)^2}{(M+m)^2} + \frac{3}{2} mgl\sin\theta - ml\dot{\theta}\frac{(W + ml\dot{\theta}\sin\theta)}{M+m}\sin\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}\frac{(W + ml\dot{\theta}\sin\theta)^2}{M+m} + \frac{3}{2} mgl\sin\theta - ml\dot{\theta}\frac{(W + ml\dot{\theta}\sin\theta)}{M+m}\sin\theta} \quad (I)$$

Υποθέτουμε ότι αρχικά το σύστημα ήταν ακίνητο. Δηλαδή $\boxed{W = M\dot{X} + m\dot{x} = 0}$ (k)

και ότι η αρχική γωνία της σκάλας με την οριζόντια επιφάνεια είναι θ_0

Επειδή η ενέργεια του συστήματος διατηρείται $E_i = E_f \Rightarrow \boxed{E_i = E_{\Sigma\upsilon\nu} = mgl\sin\theta_0}$

Επομένως θα έχουμε στην (I) από την (k) και την προηγούμενη:

$$mgl\sin\theta_0 = \frac{1}{2}\frac{m^2 l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta}{M+m} + \frac{3}{2} mgl\sin\theta - ml\dot{\theta}\frac{ml\dot{\theta}\sin^2\theta}{M+m} \Rightarrow$$

$$\cancel{mgl}\sin\theta_0 = -\frac{1}{2}\frac{m^{\cancel{2}}l^{\cancel{2}}\dot{\theta}^2\sin^2\theta}{M+m} + \frac{3}{2}\cancel{mgl}\sin\theta \Rightarrow$$

$$\left.\Rightarrow g\sin\theta_0 = \frac{3}{2}g\sin\theta - \frac{1}{2}\frac{ml\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2}{M+m}\right\} \Rightarrow$$

Αλλά είχαμε βρεί ότι: $(I+ml^2)\dot{\theta}^2 = mgl\sin\theta$

$$\Rightarrow g\sin\theta_0 = \frac{3}{2}g\sin\theta - \frac{1}{2}\frac{ml\sin^2\theta}{(M+m)}\frac{mgl\sin\theta}{(I+ml^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{g}\sin\theta_0 = \frac{1}{2}\cancel{g}\left(3\sin\theta - \frac{m^2l^2\sin^3\theta}{(M+m)(I+ml^2)}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\theta_0 = \frac{1}{2}\sin\theta\left(3 - \frac{m^2l^2\sin^2\theta}{(M+m)(I+ml^2)}\right)$$ ή διαφορετικά

$$\sin\theta_0 = \frac{1}{2}\sin\theta\left(3 - \frac{\cancel{m^2}\cancel{l^2}\sin^2\theta}{\cancel{m}\left(1+\frac{M}{m}\right)\cancel{m}\left(1+\frac{I}{ml^2}\right)\cancel{l^2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\theta_0 = \frac{1}{2}\sin\theta\left(3 - \frac{\sin^2\theta}{\left(1+\frac{M}{m}\right)\left(1+\frac{I}{ml^2}\right)}\right) \Rightarrow \boxed{\sin\theta_0 = \frac{3}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\frac{\sin^3\theta}{a}}$$

όπου $a = \left(1+\frac{M}{m}\right)\left(1+\frac{I}{ml^2}\right)$

Όταν $\frac{M}{m} >> 1 \Rightarrow a \to \infty$ οπότε $\sin\theta = \frac{2}{3}\sin\theta_0$

Για τιμές του $a<1$ η γωνία που η σκάλα χάνει επαφή με το κιβώτιο είναι μεγαλύτερη της θ_0 ενώ για $a \geq 1$ η γωνία είναι μικρότερη.

5. Δεδομένης της στροφορμής L ενός σώματος που κινείται σε πεδίο κεντρικής δύναμης, να βρείτε την συναρτησιακή μορφή της δυναμικής ενέργειας $V(r)$, αν το σώμα εκτελεί σπιροειδή τροχιά της μορφής $r = r_0\theta^k$. Θεωρήστε ότι E= 0. [**20μ**]

Θέλουμε να βρούμε το δυναμικό $V(r)$ για το οποίο η εξίσωση $r(\theta) = r_0\theta^k$ μπορεί να δώσει μια δυνατή τροχιά.

Θεωρούμε ότι η στροφορμή ℓ του συστήματος είναι δεδομένη, εξάλλου η παράμετρος αυτή καθορίζει πόσο γρήγορα εκτελείται η κίνηση. Έχουμε ακόμα ότι $E=0$.

Από διατήρηση ενέργειας θα έχουμε: $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = E - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{\ell^2}{2mr^2}} \qquad (1)$$

Αλλά $r = r_0\theta^k \Rightarrow \dot{r} = \frac{d}{dt}(r) = r_0 k\theta^{k-1}\dot{\theta}$

Από την $r = r_0\theta^k \Rightarrow \theta = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{1/k}$

Ξέρουμε ακόμα ότι $\dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}$

$$\Rightarrow \dot{r} = r_0 k\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^{1/k}\right]^{k-1}\left[\frac{\ell}{mr^2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{r} = \frac{r_0 k\ell}{mr^2}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{1-\frac{1}{k}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{r} = \frac{k\ell}{m}\,\frac{r_0^{1/k}}{r^{1+1/k}}} \qquad (2)$$

Αντικατάσταση στην (1) της (2) και χρησιμοποιώντας $E=0 \Rightarrow$

$$V(r) = -\frac{1}{2}m\left[\frac{k\ell}{m}\,\frac{r_0^{1/k}}{r^{1+1/k}}\right]^2 - \frac{\ell^2}{2mr^2} \Rightarrow \boxed{V(r) = -\frac{\ell^2}{2mr^2}\left[k^2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2/k} + 1\right]}$$

6. Ένα διαστημόπλοιο κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από ένα πλανήτη. Ξαφνικά πυροδοτεί τις ρουκέτες του και αυξάνει την ταχύτητά του κατά ένα παράγοντα *f*. Αν ο στόχος της πυροδότησης ήταν να αλλάξει την τροχιά του από κυκλική σε παραβολική,

(α) Πόσο πρέπει να είναι η *f* αν η προώθηση που δέχθηκε ήταν στην εφαπτομενική διεύθυνση; [**8μ**]

(β) Υπάρχει διαφορά αν η προώθηση ήταν στην ακτινική ή μια οποιαδήποτε άλλη διεύθυνση; [**5μ**]

(γ) Ποια είναι η απόσταση της μικρότερης προσέγγισης για την παραβολική τροχιά αν η προώθηση είναι στην ακτινική διεύθυνση. [**7μ**]

Έστω R η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς. Η ολική ενέργεια στην τροχιά αυτή είναι:

$$E_i = T + V = \frac{1}{2} m_\delta v^2 - \frac{G m_\delta m_\pi}{R} = \qquad (1)$$

Αφού έχουμε κυκλική τροχιά η δύναμη στο διαστημόπλοιο είναι και κεντρομόλος

$$\frac{m_\delta v^2}{R} = \frac{G m_\delta m_\pi}{R^2} \Rightarrow m_\delta v^2 = G \frac{m_\delta m_\pi}{R} \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε: $E_i = G \frac{m_\delta m_\pi}{2R} - \frac{G m_\delta m_\pi}{R} \Rightarrow \boxed{E_i = -\frac{G m_\delta m_\pi}{2R}}$ (3)

Επομένως θέλουμε η ενέργεια στην νέα τροχιά που θα είναι παραβολική, να γίνει $E_f = 0$. Η διαφορά της ενέργειας αυτής θα πρέπει να δοθεί από την κινητική ενέργεια. Επομένως $\Delta T = T_f - T_i = \Delta E_{\mu\eta\chi} = E_f - E_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow T_f = T_i + \frac{G m_\delta m_\pi}{2R} \overset{(2)}{\Rightarrow} T_f = \frac{1}{2} G \frac{m_\delta m_\pi}{R} + \frac{G m_\delta m_\pi}{2R} \Rightarrow \boxed{T_f = \frac{G m_\delta m_\pi}{R}}$$

Δηλαδή η κινητική ενέργεια θα πρέπει να διπλασιαστεί.

Επομένως ο παράγοντας που θα πρέπει να αυξηθεί η ταχύτητα θα είναι:

$$\frac{T_f}{T_i} = 2 \Rightarrow \frac{\cancel{\frac{1}{2} m_\delta} {v_\delta^f}^2}{\cancel{\frac{1}{2} m_\delta} {v_\delta^i}^2} = 2 \Rightarrow \left(\frac{v_\delta^f}{v_\delta^i}\right)^2 = 2 \Rightarrow f^2 = 2 \Rightarrow \boxed{f = \sqrt{2}}$$

Ο παράγοντας αυτός είναι ανεξάρτητος από την διεύθυνση. Στην εφαπτομενική διεύθυνση το διαστημόπλοιο θα χρειαστεί λιγότερα καύσιμα.

Αν η προώθηση συμβεί στην ακτινική διεύθυνση, τότε η στροφορμή δεν θα αλλάξει και επομένως η μορφή του ενεργού δυναμικού θα παραμείνει επίσης ίδια.

Στο σημείο μικρότερης προσέγγισης $E = V_{eff}(r_{min})$ αφού στο σημείο αυτό (σημείο καμπής) θα πρέπει το σώμα να αλλάξει φορά κίνησης λόγω της ανάκλασής του στο φράγμα του δυναμικού.

Επομένως θα πρέπει να βρούμε την θέση για την οποία $V_{eff}(r) = E^{f}_{\mu\eta\chi} = 0$ (4)

Αλλά το ενεργό δυναμικό είναι: $\boxed{V_{eff}(r) = \dfrac{\ell^2}{2m_\Sigma r^2} - \dfrac{G m_\Sigma m_\Pi}{r}}$ (5)

Στην θέση της κυκλικής τροχιάς $V_{eff}(r=R) = E_i \overset{(3)}{\Rightarrow} V_{eff}(r=R) = -\dfrac{G m_\Sigma m_\Pi}{2R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\ell^2}{2m_\Sigma R^2} - \frac{G m_\Sigma m_\Pi}{\cancel{R}} = -\frac{G m_\Sigma m_\Pi}{2\cancel{R}} \Rightarrow \frac{\ell^2}{2m_\Sigma R} = \frac{G m_\Sigma m_\Pi}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{\ell^2}{2m_\Sigma} = \frac{G m_\Sigma m_\Pi R}{2}}$$

Αντικατάσταση στην (5) θα δώσει: $V_{eff}(r) = \dfrac{G m_\Sigma m_\Pi R}{2r^2} - \dfrac{G m_\Sigma m_\Pi}{r}$ $\Big\} \Rightarrow$

Θέλουμε όμως σύμφωνα με την (4) $V_{eff}(r_{min}) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{G m_\Sigma m_\Pi} R}{2 r_{min}^{\cancel{2}}} - \frac{\cancel{G m_\Sigma m_\Pi}}{\cancel{r}} = 0 \Rightarrow \frac{R}{2r_{min}} = 1 \Rightarrow \boxed{r_{min} = \frac{R}{2}}$$