ΦΥΣ. 131

Τελική Εξέταση: 10-Δεκεμβρίου-2012

Πριν αρχίσετε συμπληρώστε τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο και αριθμό ταυτότητας).

Ονοματεπώνυμο	**Αριθμός ταυτότητας**

Απενεργοποιήστε τα κινητά σας.

Σας δίνονται 9 ασκήσεις. **Σημειώστε καθαρά τις απαντήσεις σας σε κάθε ερώτηση.**

Η μέγιστη συνολική βαθμολογία είναι 200 μονάδες.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μόνο το τυπολόγιο που σας δίνεται και απαγορεύται η χρήση οποιοδήποτε σημειώσεων, βιβλίων, κινητών.

ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΕΙΣΤΕ ΜΟΝΟ ΤΙΣ ΣΕΛΙΔΕΣ ΠΟΥ ΣΑΣ ΔΙΝΟΝΤΑΙ ΚΑΙ ΜΗΝ ΚΟΨΕΤΕ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΣΕΛΙΔΑ

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 200 λεπτά. Καλή Επιτυχία!

<u>Βαθμολογία ερωτήσεων</u>

Άσκηση	Βαθμός	Άσκηση	Βαθμός
1 (15μ)		6 (25μ)	
2 (15μ)		7 (25μ)	
3 (20μ)		8 (30μ)	
4 (20μ)		9 (30μ)	
5 (20μ)			
Σύνολο 90		Σύνολο 110	
Βαθμός			

Τύποι που μπορεί να φανούν χρήσιμοι

Γραμμική κίνηση:

$$\upsilon = \upsilon_0 + at$$

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2a\left(x - x_0\right)$$

Στροφική κίνηση:

1περιστροφή = 360° = 2π ακτίνια

$$\theta = \frac{s}{r}$$

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \qquad \bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega = \omega_0^2 + 2\alpha\left(\theta - \theta_0\right)$$

$$\upsilon_{\varepsilon\varphi} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \upsilon_{\varepsilon\varphi} = \omega r$$

$$\vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad \vec{a}_{\varepsilon\varphi} = \vec{\alpha} \times \vec{r} \Rightarrow \left|\vec{a}_{\varepsilon\varphi}\right| = |\alpha||r|$$

$$\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho} = \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow \left|\vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}\right| = \frac{\upsilon_{\varepsilon\varphi}^2}{r} = \omega^2 r$$

$$\vec{a}_{\gamma\rho\alpha\mu} = \vec{a}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.} + \vec{a}_{\varepsilon\varphi} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\upsilon_{\varepsilon\varphi}}$$

Περιστροφή σώματος:

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

$$E_{\kappa\iota\nu}^{\pi\varepsilon\rho.} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = I\alpha$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I\vec{\omega}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Απομονωμένο σύστημα: $L_i = L_f$

μετάπτωση γυροσκοπίου $\omega_\mu = \dfrac{\tau}{I\omega_{\pi\varepsilon\rho}}$

Συνθήκες στατικής ισορροπίας:

$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} = 0$ και $\sum \vec{\tau}_{\varepsilon\xi} = 0$

Έργο – Ενέργεια:

Έργο σταθερής δύναμης: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

Έργο μεταβαλλόμενης δύναμης: $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$

$$\vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}}$$

$$\Delta U = -\int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}kx^2$$

$U_g = mgh$ (h<<R$_{\gamma\eta\varsigma}$)

$$W = \Delta E_{\kappa\iota\nu.}$$

$W = -\Delta U$ (για συντηρητικές δυνάμεις)

$$E_{\mu\eta\chi.} = E_{\kappa\iota\nu.} + U$$

$$E_{\kappa\iota\nu.} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

$W = \Delta E_{\mu\eta\chi.}$ (για μη συντηρητικές δυνάμεις)

$$\vec{F}_{\varepsilon\lambda} = -k\vec{x}$$

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$$

Ορμή – Ώθηση - Κρούσεις:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$$

Ώθηση: $\vec{I} = \int F\,dt = \Delta\vec{p}$

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Απομονωμένο σύστημα: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$

Ελαστική κρούση: $\Delta\vec{p} = 0,\ \Delta E = 0$

Μη ελαστική κρούση: $\Delta\vec{p} = 0,\ \Delta E \neq 0$

Ελαστική κρούση σε 1-Δ: $\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2 = -\left(\vec{\upsilon}_1' - \vec{\upsilon}_2'\right)$

$$x_{CM} = \frac{1}{M_{o\lambda}}\sum_i m x_i$$

$$\vec{\upsilon}_{CM} = \frac{1}{M_{o\lambda}}\sum_i m\upsilon_i$$

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} = M\vec{a}_{CM}$$

Βαρυτική έλξη:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$G = 6.67\times10^{-11}\, N\cdot m^2/kg^2$$

$$U_g = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - G\frac{m_1 m_2}{r}$$

$$\upsilon_{\delta o\rho\upsilon\varphi.} = \sqrt{\frac{2GM_{\gamma\eta}}{R_{\gamma\eta}}}$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G\mathrm{M_H}}\right)r^3$$

$$R_{\gamma\eta} = 6.4\times10^3\, km$$

$$M_{\gamma\eta} = 5.97\times10^{24}\, kg$$

Ταλαντώσεις:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Λύσεις εξίσωσης αρμονικού ταλαντωτή:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = B\sin(\omega t + \psi)$$

$$x(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$$

$$x(t) = Ee^{i\omega t} + Fe^{-i\omega t}$$

$$\upsilon(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} = 2\pi f$$

$$E = U + E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}k\mathrm{A}^2$$

$$\upsilon = \pm\omega\sqrt{\left(A^2 - x^2\right)}$$

Φθίνουσες ταλαντώσεις:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,,\ \gamma = \frac{b}{2m},\ \ \omega_0 = \frac{k}{m}$$

Μικρή απόσβεση:

$$x(t) = De^{-\gamma t}\cos(\Omega t + \varphi),\ \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Μεγάλη απόσβεση:

$$x(t) = \mathrm{A}e^{-(\gamma+\Omega)t} + Be^{-(\gamma-\Omega)t},\ \Omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Κριτική απόσβεση: $(\gamma = \omega_0)$

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A + Bt)$$

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f\cos\omega_d t$$

Λύση: $x(t) = \dfrac{f}{R}\cos(\omega_d t - \theta)$, $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2\right)^2 + (2\gamma\omega_d)^2}}$

Κυματική:

$$y(t) = A\sin\left[2\pi(x - \upsilon t)\right]$$

$$y(t) = A\sin(kx - \omega t),\ k = \frac{2\pi}{\lambda},\ \omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} = 2\pi f$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\upsilon$$

$\upsilon = \sqrt{\dfrac{\mathrm{B}}{\rho}}$ (υγρά) $\upsilon = \sqrt{\dfrac{\mathrm{Y}}{\rho}}$ (στερεά) $\upsilon = \sqrt{\dfrac{\mathrm{T}}{\mu}}$ (χορδή)

$$s(x,t) = s_{\max}\cos(kx - \omega t)$$

$$\Delta P = \Delta P_{\max}\sin(kx - \omega t)$$

$$\Delta P_{\max} = \rho\upsilon\omega s_{\max}$$

$$I = \frac{1}{2}\rho\upsilon(\omega s_{\max})^2$$

$$\beta = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Doppler $f' = \left(\dfrac{\upsilon \pm \upsilon_{\pi\alpha\rho.}}{\upsilon \mp \upsilon_{\pi\eta\gamma.}}\right)f$

Στάσιμα κύματα:

$$y(t) = (2A\sin kx)\cos\omega t$$

$f_n = \dfrac{n}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ n=1,2,3,…

$f_n = \dfrac{n}{2L}\upsilon$ n=1,2,3,… (για δύο άκρα ανοικτά ή κλειστά)

$f_n = \dfrac{n}{4L}\upsilon$ n=1,3,5,… (για άκρο κλειστό και άκρο ανοικτό)

Απλό εκκρεμές: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

Φυσικό εκκρεμές: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgl}}$

Ροπές αδράνειας

Δίσκος: $I_{CM} = MR^2/2$

Συμπαγής σφαίρα: $I_{CM} = 2MR^2/5$

Κοίλη σφαίρα: $I_{CM} = 2MR^2/3$

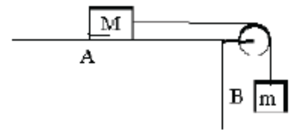
Συμπαγής κύλινδρος: $I_{CM} = MR^2/2$

Κυλινδρικός φλοιός/στεφάνι: $I_{CM} = MR^2$

Ράβδος: $I_{CM} = ML^2/12$

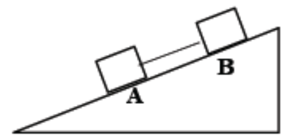
Άσκηση 1 [15μ]

(**α**) Θεωρήστε δυο κιβώτια *A* και *B* με μάζες $m_A = M$ και $m_B = M/3$ αντίστοιχα. Τα δυο κιβώτια συνδέονται μεταξύ τους με αβαρές νήμα το οποίο περνά από μια λεία και αβαρή τροχαλία. Το κιβώτιο *A* βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο τραπέζι και ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του κιβωτίου και της επιφάνειας του τραπεζιού είναι $\mu_s = 3/5$. Θεωρήστε ότι οι μάζες είναι ακίνητες.



Ποια είναι η δύναμη της τριβής που αναπτύσεται στο κιβώτιο *A* από το τραπέζι; [**5μ**]

(**β**) Θεωρήστε τώρα ότι τα δυο κιβώτια τοποθετούνται σε λείο κεκλιμένο επίπεδο κλίσης 30^o με την οριζόντια διεύθυνση με το κιβώτιο *A* στην χαμηλότερη θέση. Τα κιβώτια συνδέονται μεταξύ τους με αβαρές και μη εκτατό νήμα. Αρχικά το νήμα είναι τεντωμένο και τα κιβώτια ακίνητα. Το σύστημα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί. Ποια είναι η τάση του νήματος. [**5μ**]



(**γ**) Ένα εκκρεμές κρέμεται από την οροφή ενός ανελκυστήρα. Όταν ο ανελκυστήρας είναι ακίνητος, η περίοδος του εκκρεμούς για μικρές γωνίες εκτροπής είναι *T*. Επιταχύνουμε τώρα τον ανελκυστήρα προς τα κάτω με επιτάχυνση $5 m/s^2$. Ποια είναι η νέα περίοδος του εκκρεμούς; [**5μ**] (α) Από τον 2^o νόμο του Newton στο κιβώτιο Α έχουμε:

$$\Sigma F_x = \emptyset \Rightarrow T - f = 0 \Rightarrow T = f \qquad (1)$$

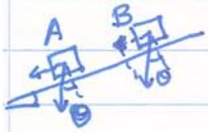
Από τον 2^o νόμο του Newton στο κιβώτιο Β έχουμε:

$$\Sigma F_x = \emptyset \Rightarrow m_B g - T = 0 \Rightarrow m_B g = T \qquad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε ότι $\boxed{f = m_B g = \frac{Mg}{3}}$

Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα είναι ακίνητο λόγω της στατικής τριβής f η οποία είναι μικρότερη από την $f_{max} = \mu_s N = \frac{3}{5} Mg$

(β) Στην περίπτωση αυτή τα δυό κιβώτια κατεβαίνουν προς την βάση του κεκλιμένου επιπέδου με επιτάχυνση $g\sin\theta$ το καθένα. Η σχετική τους επιτάχυνση είναι μηδέν και επομένως η τάση του νήματος θα είναι μηδέν.



Αν το νήμα ήταν τεντωμένο θα παραμείνει τεντωμένο αλλά η τάση θα είναι μηδέν.

Διαφορετικά, από το νόμο του Newton:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_x^A = m_A a \Rightarrow m_A g\sin\theta - T = m_A a \\ \Sigma F_x^B = m_B a \Rightarrow m_B g\sin\theta + T = m_B a \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} \cancel{(m_A + m_B)} g\sin\theta = \cancel{(m_A + m_B)} a$$

$$\Rightarrow a = g\sin\theta$$

Αντικαθιστώντας $\cancel{m_A g\sin\theta} - T = \cancel{m_A g\sin\theta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{T = 0}$$

(γ) Όταν ο ανελκυστήρας είναι ακίνητος, $a=0$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

Για επιτάχυνση a προς τα κάτω, η φαινομενική επιτάχυνση που έχει η μάζα του εκκρεμούς θα είναι: $mg - N = ma \Rightarrow N = m(g-a)$

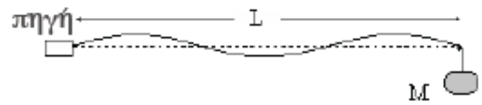
Επομένως η επιτάχυνση θα είναι $g-a$.

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g-a}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{10-5}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{5}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g/2}} \Rightarrow T' = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T' = \sqrt{2}\, T \Rightarrow \boxed{T' = 1.41\, T}$$

Άσκηση 2 [15μ]

(**α**) Μια ομοιογενής χορδή τεντώνεται μεταξύ μιας πηγής κυμάτων και ενός λείου καρφιού με την βοήθεια ενός βαριδίου μάζας M που κρέμεται από το ελεύθερο άκρο της, όπως στο σχήμα. Η απόσταση μεταξύ της πηγής και του καρφιού είναι L. Ο αριθμός των δεσμών που φαίνονται στο σχήμα είναι 4 (συμπεριλαμβανομένων των δυο άκρων της χορδής). Θεωρείστε ότι αλλάζετε το βαρίδιο με κάποιο άλλο μάζας m, ενώ διατηρείτε σταθερή την συχνότητα της πηγής. Αυτή η αλλαγή προκαλεί στάσιμο κύμα στην χορδή με 3 δεσμούς (συμπεριλαμβανομένων των δυο άκρων της χορδής). Να βρεθεί η μάζα του δεύτερου βαριδίου. [**5μ**]



(**β**) Ένα σώμα κινείται σε μια διάσταση και η θέση του συναρτήσει του χρόνου δίνεται από την εξίσωση $x = -0.3sin(2t+\pi/4)$, όπου x μετράται σε μέτρα και t σε δευτερόλεπτα. Να βρεθούν:

(**1**) Η συχνότητα (σε Hz) αυτής της αρμονικής ταλάντωσης [**5μ**]

(**2**) Οι χρόνοι για τους οποίους η ταχύτητα του σώματος γίνεται μέγιστη. [**5μ**]

(a) Από το σχήμα, έχουμε πως στην πρώτη περίπτωση με τους 4 δεσμούς το μήκος της χορδής είναι τέτοιο ώστε

4 δεσμοί: $L = 3\lambda_1/2$ (1) $\Rightarrow \lambda_1 = \frac{2}{3}L$

Για την δεύτερη μάζα σχηματίζονται 3 δεσμοί οπότε:
3 δεσμοί: $L = \lambda_2$ (2) $\Rightarrow \lambda_2 = L$

Το μήκος κύματος ισούται με $\lambda = \frac{v}{f}$ και $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

Από τις 2 τελευταίες εξισώσεις έχουμε: $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ $\Big\} \Rightarrow$
Η τάση προκαλείται από τις μάζες που κρεμάμε: $T = mg$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{mg}{\mu}} \quad (3)$$

Η συχνότητα παραμένει σταθερή αφού προκαλείται από την πηγή. Επομένως εξισώνοντας τις συχνότητες στις 2 περιπτώσεις και αντικαθιστώντας τις (1) και (2) θα έχουμε:

$$\frac{1}{\lambda_1}\sqrt{\frac{m_1 g}{\cancel{\mu}}} = \frac{1}{\lambda_2}\sqrt{\frac{m_2 g}{\cancel{\mu}}} \Rightarrow \frac{3}{2\cancel{L}}\sqrt{M\cancel{g}} = \frac{1}{\cancel{L}}\sqrt{m\cancel{g}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \frac{9}{4}M}$$

(b_1) Από την εξίσωση που δίνεται: $x = -0.3\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$, είναι της μορφής $x = A\sin(\omega t + \varphi)$. Επομένως $\omega = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{2}\pi f = \cancel{2} \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{\pi}\,\text{Hz}}$$

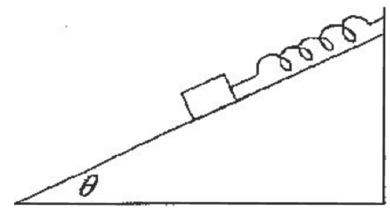
(b_2) Η ταχύτητα είναι μέγιστη όταν $x = 0$, π.χ. $\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = 0$
Αυτό συμβαίνει όταν $2t + \frac{\pi}{4} = n\pi$ όπου $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$

$$\Rightarrow 2t + \frac{\pi}{4} = n\pi \Rightarrow \boxed{t = \frac{\pi}{2}\left(n - \frac{1}{4}\right)}$$

Διαφορετικά, $v = \frac{dx}{dt} = -0.6\cos(2t + \pi/4)$ και v_{max} έχουμε όταν $2t + \frac{\pi}{4} = n\pi$

Άσκηση 3 [20μ]

Ένα κιβώτιο μάζας m βρίσκεται ακίνητο πάνω σε κεκλιμένη επιφάνεια που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση. Υπάρχει τριβή μεταξύ του κιβωτίου και της κεκλιμένης επιφάνειας και ο συντελεστής στατικής τριβής, μ_s, είναι μεγαλύτερος από τον συντελεστή της κινητικής τριβής, μ_k. Το κιβώτιο είναι στερεωμένο σε ελατήριο αμελητέας μάζας και σταθεράς k. Απουσία οποιασδήποτε δύναμης στο ελατήριο, το φυσικό του μήκος είναι l.



(**α**) Τραβάμε το κιβώτιο προκαλώντας επιμήκυνση του ελατηρίου κατά $l+x$. Ποια είναι η μέγιστη επιμήκυνση στο ελατήριο, x_{max}, για την οποία το κιβώτιο θα παραμείνει ακίνητο όταν αφαιθεί ελεύθερο; [**3μ**]

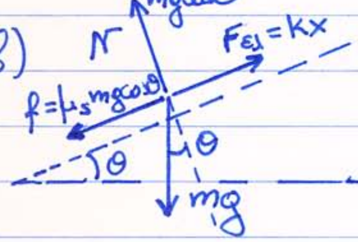
(**β**) Για την θέση αυτή σχεδιάστε το διάγραμμα απελευθερωμένου σώματος για το κιβώτιο. Σημειώστε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται και δώστε το μέτρο τους. [**2μ**]

(**γ**) Καθώς το κιβώτιο βρίσκεται στην θέση x_{max}, του δίνουμε μια μικρή ώθηση (θεωρείστε ότι αυτός είναι ο χρόνος $t_0 = 0$) και αυτό αρχίζει να κινείται. Για ποια τιμή του x το κιβώτιο θα αποκτήσει την μέγιστη ταχύτητά του; [**5μ**]

(**δ**) Καθώς το κιβώτιο κινείται, το ελατήριο συσπειρώνεται και σε κάποια χρονική στιγμή, t_f, θα έχει απομάκρυνση από το φυσικό του μήκος, x. Ποιο είναι το έργο της δύναμης της βαρύτητας, της δύναμης του ελατηρίου και της δύναμης της τριβής στο διάστημα μεταξύ t_0 και t_f; [**5μ**]

(**ε**) Καθώς το κιβώτιο κινείται προς την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου το ελατήριο συσπειρώνεται. Ποια είναι η απαραίτητη προϋπόθεση ώστε το ελατήριο να συσπειρωθεί και να επανέλθει στο φυσικό του μήκος, l; [**5μ**] (α) Για μέγιστη επιμήκυνση, x_{max}, οι δυνάμεις που δρουν στο σώμα θα είναι, αυτή του ελατηρίου, της βαρυτικής έλξης και της στατικής τριβής: Το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία οπότε από τον 2° νόμο του Newton:

(β)



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow mg\sin\theta + \mu_s mg\cos\theta - kx_{max} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{max} = \frac{mg}{k}\left(\sin\theta + \mu_s\cos\theta\right)}$$

(γ) Από την στιγμή που το κιβώτιο αρχίζει να κινείται, η τριβή που εμφανίζεται είναι κινητική τριβή $f_k = \mu_k N = \mu_k mg\cos\theta$
Σύμφωνα με τον 2° νόμο του Newton, η συνισταμένη δύναμη στην διεύθυνση παρ/λη προς το κεκλιμένο επίπεδο θα είναι:

$$\Sigma F_x = kx - mg\sin\theta - f_k = ma \Rightarrow kx - mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta = ma$$

Θέλουμε να βρούμε την μέγιστη ταχύτητα. Αυτό συμβαίνει για $a=0$

Από την προηγούμενη εξίσωση: $kx - mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{mg}{k}\left(\sin\theta + \mu_k\cos\theta\right)}$$

(δ) Το έργο που παράγει η δύναμη της βαρύτητας θα είναι:

$$\boxed{W_g = -mg\sin\theta\left(x_{max} - x\right)}$$

Για το ελατήριο το έργο θα είναι: $W_{\varepsilon\lambda} = \int_{x_{max}}^{x}(-kx)dx = -\frac{1}{2}k\left(x^2 - x_{max}^2\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{W_{\varepsilon\lambda} = +\frac{1}{2}k\left(x_{max}^2 - x^2\right)}$$

Για την τριβή: $W_{\tau\rho} = -\mu_k mg\cos\theta\left(x_{max} - x\right)$

(ε) Το ελατήριο θα επανέλθει στο φυσικό του μήκος όταν το ολικό έργο που παράγεται από όλες τις δυνάμεις που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα είναι ≥ 0 όταν το $x=0$ (τότε η επιμήκυνση θα είναι $\ell + x = \ell$)

Θα έχουμε επομένως $W_{ελ} + W_g + W_f$ για κίνηση από $x_{max} \to x=0$

$$\Rightarrow \Sigma W = \frac{1}{2} k x_{max}^2 - mg\sin\theta\, x_{max} - \mu_k mg\cos\theta\, x_{max} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k x_{max}^{\cancel{2}} \geq mg\, \cancel{x_{max}} (\sin\theta + \mu_k \cos\theta) \Rightarrow$$

(α)
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{k} \frac{\cancel{mg}}{\cancel{k}} (\sin\theta + \mu_s \cos\theta) \geq \cancel{mg} (\sin\theta + \mu_k \cos\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (\sin\theta + \mu_s \cos\theta) \geq (\sin\theta + \mu_k \cos\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\theta + \mu_s \cos\theta \geq 2\sin\theta + 2\mu_k \cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mu_s - 2\mu_k)\cos\theta \geq \sin\theta \Rightarrow \boxed{\mu_s - 2\mu_k \geq \tan\theta}$$

Άσκηση 4 [20μ]

Ένα σύστημα δυο αστέρων μάζας M_1 και M_2 περιστρέφονται το ένα γύρω από το άλλο. Οι τροχιές τους είναι κυκλικές με ακτίνες R_1 και R_2 με κέντρο το κέντρο μάζας του συστήματος.

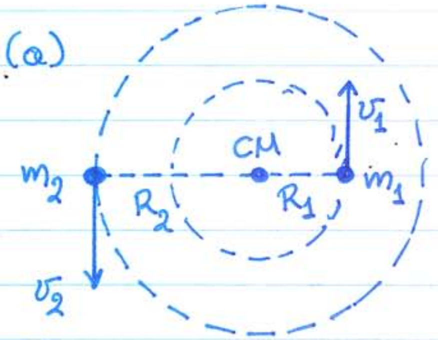
(**α**) Κάντε το γράφημα των δυο τροχιών. Σημειώστε την θέση του κέντρου μάζας και τους δυο αστέρες M_1 και M_2, τις ακτίνες R_1 και R_2 και τη φορά περιστροφής των δυο αστέρων. [**4μ**]

(**β**) Ποιο είναι το μέτρο της βαρυτικής δύναμης που ο αστέρας M_1 ασκεί στον αστέρα M_2; [**3μ**]

(**γ**) Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης του αστέρα M_1 και του αστέρα M_2; [**3μ**]

(**δ**) Βρείτε την περίοδο περιστροφής αυτού του συστήματος των αστέρων. Η απάντησή σας θα πρέπει να εκφραστεί συναρτήσει των μεγεθών R_1, R_2, M_1 και M_2 και της σταθεράς της παγκόσμιας έλξης G. [**10μ**]

(α)



(β) Από τον νόμο της παγκόσμιας έλξης: $F_g = G\frac{M_1 M_2}{r^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{F_g = G\frac{M_1 M_2}{(R_1+R_2)^2}}$$

(γ) Η δύναμη που ασκείται σε κάθε αστέρα είναι η βαρυτική έλξη που ασκεί ο άλλος αστέρας πάνω του και είναι δυνάμεις δράσης-αντίδρασης.

Από το 2ο νόμο του Newton: $F_g^{1\to2} = \cancel{M_2} a_2 = G\frac{M_1 \cancel{M_2}}{(R_1+R_2)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{a_2 = G\frac{M_1}{(R_1+R_2)^2}}$$ για τον αστέρα M_2

και ανάλογα: $F_g^{2\to1} = \cancel{m_1} a_1 = G\frac{\cancel{M_1} M_2}{(R_1+R_2)^2} \Rightarrow \boxed{a_1 = G\frac{M_2}{(R_1+R_2)^2}}$

(δ) Τα δυο αστέρια περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω ως προς το κέντρο μάζας τους.

Η κεντρομόλος δύναμη προέρχεται από την δύναμη της βαρύτητας:

$$F_\kappa^1 = \cancel{m_1}\frac{v_1^2}{R_1} = \cancel{m_1} a_1 \Rightarrow \frac{v_1^2}{R_1} = G\frac{M_2}{(R_1+R_2)^2} \Rightarrow$$

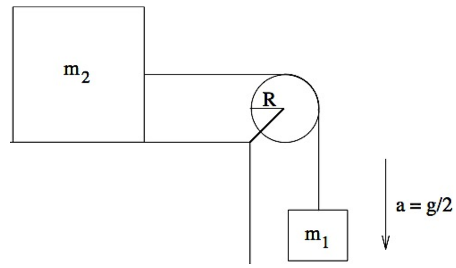
$$\Rightarrow \frac{\omega^2 R_1^{\cancel{2}}}{\cancel{R_1}} = G\frac{M_2}{(R_1+R_2)^2} \Rightarrow \omega^2 R_1 = G\frac{M_2}{(R_1+R_2)^2}$$

Ανάλογα για το αστέρι μάζας m_2: $\omega^2 R_2 = G\frac{M_1}{(R_1+R_2)^2}$ $\Bigg\} \xRightarrow{+}$

$$\Rightarrow \omega^2(R_1+R_2) = G\frac{M_1+M_2}{(R_1+R_2)^2} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = G\frac{(M_1+M_2)}{(R_1+R_2)^3} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi(R_1+R_2)^{3/2}}{\sqrt{G(M_1+M_2)}}}$$

Άσκηση 5 [20μ]

Μια άγνωστη μάζα, m_1, κρέμεται από ένα αβαρές νήμα και κατεβαίνει με επιτάχυνση $g/2$. Το άλλο άκρο του νήματος είναι δεμένο σε σώμα μάζας m_2 το οποίο γλυστρά σε λεία οριζόντια επιφάνεια. Το νήμα περνά από ένα ομοιογενή κύλινδρο μάζας $m_2/2$ και ακτίνας R. Ο κύλινδρος περιστρέφεται ως προς λείο οριζόντιο άξονα και το νήμα δεν γλυστρά πάνω στον κύλινδρο. Εκφράστε τις απαντήσεις σας στα παρακάτω ερωτήματα συναρτήσει των m_2, R και g.

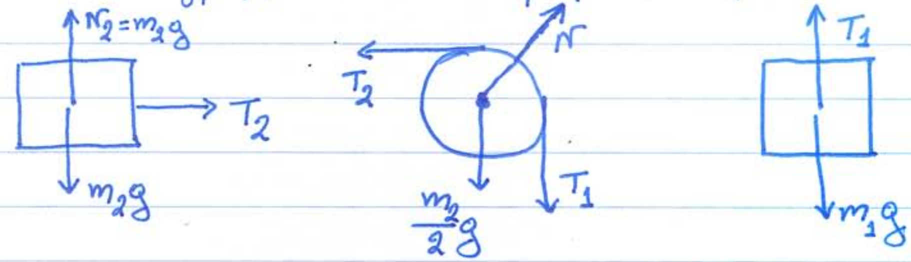


(**α**) Σχεδιάστε διαγράμματα απελευθερωμένου σώματος για τον κύλινδρο και τις δυο μάζες. [**5μ**]

(**β**) Ποια είναι η τάση στο οριζόντιο τμήμα του νήματος; [**5μ**]

(**γ**) Ποια είναι η τάση στο κατακόρυφο τμήμα του νήματος; [**5μ**]

(**δ**) Πόση είναι η άγνωστη μάζα m_1; [**5μ**] (α) Τα διαγράμματα απελευθερωμένου σώματος είναι:



Η δύναμη της αντίδρασης N από τον άξονα περιστροφής στην τροχαλία θα έχει συνιστώσες $N_x = T_2$ και $N_y = T_1 + \frac{m_2}{2}g$ ώστε η τροχαλία να παραμένει στην θέση της.

(β) Η μάζα m_1 κατεβαίνει με επιτάχυνση $a = g/2$ και αυτή η επιτάχυνση είναι η ίδια για το σώμα μάζας m_2 και για τα σημεία της περιφέρειας της τροχαλίας αφού το σχοινί δεν γλυστρά στην τροχαλία.

Για το σώμα m_2 από τον 2^o νόμο του Newton: $\Sigma F_x = T_2 = m_2 a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{T_2 = m_2 g/2} \qquad (1)$$

(γ) Για το σώμα μάζας m_1 θα έχουμε από τον 2^o νόμο του Newton:

$$\Sigma F_y = m_1 a \Rightarrow m_1 g - T_1 = m_1 a \Rightarrow T_1 = m_1 g - m_1 a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1 = m_1 g - m_1 \frac{g}{2} \Rightarrow \boxed{T_1 = m_1 g/2} \qquad (2)$$

Η περιστροφή της τροχαλίας προκαλείται από τις ροπές των T_1 και T_2. Επομένως από τον 2^o νόμο του Newton για περιστροφική κίνηση:

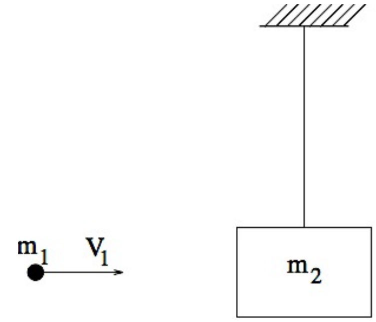
$$\Sigma \vec{\tau} = I\alpha \Rightarrow (T_1 - T_2)\cancel{R} = \frac{1}{2}\frac{m_2}{2}\cancel{R}^2 \frac{a_{εφ}}{\cancel{R}} \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{m_2}{4}\frac{g}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1 = T_2 + \frac{m_2}{8}g \overset{(1)}{\Longrightarrow} T_1 = \frac{m_2}{2}g + \frac{m_2}{8}g \Rightarrow \boxed{T_1 = \frac{5}{8}m_2 g} \ (3)$$

(δ) Από (2) και (3) εξισώνοντας: $m_1 \cancel{g}/\cancel{2} = \frac{5}{\cancel{8}_4} m_2 \cancel{g} \Rightarrow \boxed{m_1 = \frac{5}{4}m_2}$

Άσκηση 6 [25μ]

Μια σφαίρα μάζας m_1 εκτοξεύεται προς ένα εκκρεμές μάζας m_2 και μήκους L. Η ταχύτητα της σφαίρας καθώς έρχεται σε σύγκρουση με την μάζα m_2 είναι V_1.



Υποθέστε αρχικά ότι η κρούση είναι τέλεια ελαστική και $m_1 << m_2$.

(**α**) Αν το εκκρεμές είναι αρχικά ακίνητο, ποια είναι η ταχύτητα της σφαίρας μετά την κρούση; [**4μ**]

(**β**) Υποθέστε τώρα ότι το εκκρεμές, στο χαμηλότερο σημείο της κίνησής του, έχει ταχύτητα V_2 προς τα αριστερά. Ποια θα είναι στην περίπτωση αυτή η ταχύτητα της σφαίρας μετά την κρούση; [**7μ**]

Υποθέστε τώρα ότι η κρούση είναι πλαστική. Το εκκρεμές είναι ακίνητο πριν την κρούση και ότι $m_1 < m_2$, αλλά η ταχύτητα της σφαίρας, V_1, πριν την κρούση είναι άγνωστη.

(**γ**) Μετά την κρούση το εκκρεμές κινείται προς τα δεξιά και σταματά όταν το νήμα σχηματίζει μια γωνία θ_{max} με την κατακόρυφο διεύθυνση. Ποια ήταν η αρχική ταχύτητα της σφαίρας; Αντικαταστήστε στην απάντησή σας $\theta_{max} = 0^o$. Η απάντησή σας έχει νόημα; [**7μ**]

(**δ**) Θα μπορούσε η γωνία θ_{max} να είναι 90^o; Εξηγήστε την απάντησή σας. [**7μ**]

(a) Περίπτωση τέλειας ελαστικής κρούσης σε 1-διάσταση:
Δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις στην οριζόντια διεύθυνση οπότε η ορμή διατηρείται:

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}_1' + m_2\vec{V}_2' \qquad (1)$$

Για ελαστική κρούση σε 1-διάσταση, από διατήρηση της κινητικής ενέργειας έχουμε ότι οι σχετικές ταχύτητες των δυο σωμάτων:

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}_2' - \vec{V}_1' \qquad (2)$$

Λύνοντας ως προς V_2' έχουμε $\vec{V}_2' = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 + \vec{V}_1'$ (2a)

Αντικατάσταση στην (1) $\Rightarrow m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}_1' + m_2\vec{V}_1 - m_2\vec{V}_2 + m_2\vec{V}_1' \Rightarrow$

$$\Rightarrow m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1+m_2)\vec{V}_1' - m_2\vec{V}_2 + m_2\vec{V}_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2}\vec{V}_1 + \frac{2m_2}{m_1+m_2}\vec{V}_2} \quad (3)$$

Αντικατάσταση στην (2a) θα δώσει:

$$\vec{V}_2' = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{V}_1 + \frac{2m_2}{m_1+m_2}\vec{V}_2 \Rightarrow \boxed{\vec{V}_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{V}_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\vec{V}_2} \ (4)$$

Στην περίπτωση αυτή $m_2 \gg m_1$ και $V_2 = 0$ επομένως από την (3) θα έχουμε:

$$\vec{V}_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{V}_1 = \frac{\cancel{\frac{m_1}{m_2}}^{\,0} - 1}{\cancel{\frac{m_1}{m_2}}^{\,0} + 1}\vec{V}_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}_1' = -\vec{V}_1}$$ η σφαίρα επιστρέφει με την ίδια ταχύτητα

(β) Στην περίπτωση αυτή και πάλι $m_2 >> m_1$ ενώ η V_2 είναι αντίθετης φοράς της V_1. Χρησιμοποιώντας και πάλι την (3)

$$V_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}V_1 + \frac{2m_2}{m_1+m_2}(-V_2) = \frac{\cancel{\frac{m_1}{m_2}}^{\to 0}-1}{\cancel{\frac{m_1}{m_2}}^{\to 0}+1}V_1 - \frac{2V_2}{\cancel{\frac{m_1}{m_2}}^{\to 0}+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_1' = -V_1 - 2V_2}$$

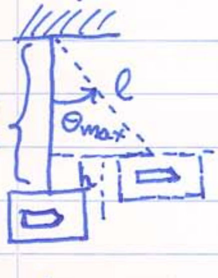
Αυτό το αποτέλεσμα το περιμέναμε και από θεώρηση σχετικών ταχυτήτων. Η σφαίρα ως προς το κιβώτιο έχει σχετική ταχύτητα $V_1^{σχ} = V_1 + V_2$ και στην περίπτωση αυτή θεωρούμε το κιβώτιο ακίνητο. Επειδή η μάζα του $m_2 >> m_1$ βρήκαμε στο (α) ότι $V_1'^{σχ} = -V_1 - V_2$

Η ταχύτητα όμως της σφαίρας ως προς ακίνητο παρατηρητή θα είναι $V_1' = V_1'^{σχ} - V_2 \Rightarrow V_1' = -V_1 - 2V_2$ όπως βρήκαμε.

(γ) Στην περίπτωση αυτή έχουμε πλαστική κρούση. Η ταχύτητα του συστήματος κιβώτιο-σφαίρα μετά ακριβώς την κρούση θα είναι, από διατήρησης της ορμής:

$$m_1V_1 = (m_1+m_2)V \Rightarrow \boxed{V = \frac{m_1}{m_1+m_2}V_1} \qquad (5)$$

Το σύστημα μετά την κρούση θα κινηθεί και θα φθάσει σε κάποιο ύψος h ως προς την αρχική του κατακόρυφο θέση, όπου η ταχύτητα του μηδενίζεται.



Από διατήρηση της μηχανικής ενέργειας:

$$\frac{1}{2}\cancel{(m_1+m_2)}V^2 = \cancel{(m_1+m_2)}gh \Rightarrow V^2 = 2gh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V^2 = 2gl(1-\cos\theta_{max}) \Rightarrow V = \sqrt{2gl(1-\cos\theta_{max})}$$

Αντικατάσταση στην (5) δίνει $\boxed{V_1 = \frac{m_1+m_2}{m_1}\sqrt{2gl(1-\cos\theta_{max})}}$

Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι όταν $\Theta_{max} = 0$ τότε $V_1 = \emptyset$ το οποίο και περιμένουμε. Χωρίς αρχική ταχύτητα σφαίρας το κιβώτιο δεν πρόκειται να κινηθεί.

(δ) Αν η γωνία $\Theta_{max} = 90°$ τότε $\cos\Theta_{max} = \emptyset$ και η σχέση που καταλήξαμε στο προηγούμενο ερώτημα θα δώσει:

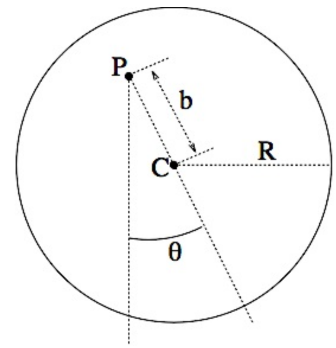
$$V_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{2g\ell}$$ το οποίο είναι πιθανό και πραγματοποιήσιμο

Αν για παράδειγμα $\ell = 1m$ και $\frac{m_2}{m_1} \simeq 100$ τότε η ταχύτητα της σφαίρας που πέφτει στο κιβώτιο είναι:

$$V_1 = 100\sqrt{2g} \Rightarrow V_1 \simeq 450 m/s$$ που είναι λογική ταχύτητα για σφαίρα.

Άσκηση 7 [25μ]

Ένας ομοιογενής συμπαγής δίσκος μάζας M και ακτίνας R ταλαντώνεται ως προς ένα άξονα που περνά από το σημείο P. Ο άξονας είναι κάθετος στο επίπεδο του δίσκου. Θεωρήστε ότι δεν υπάρχει τριβή μεταξύ του δίσκου και του άξονα. Η απόσταση του σημείου P από το κέντρο του δίσκου, C, είναι b. Η βαρυτική επιτάχυνση είναι g.



(**α**) Όταν η γωνιακή μετατόπιση είναι θ, ποια είναι η ροπή ως προς το σημείο P; [**3μ**]

(**β**) Ποια είναι η ροπή αδράνειας για περιστροφή ως προς άξονα που περνά από το σημείο P; [**3μ**]

(**γ**) Η ροπή προκαλεί γωνιακή επιτάχυνση ως προς άξονα που περνά από το P. Γράψτε την εξίσωση κίνησης συναρτήσει της γωνίας θ και της γωνιακής επιτάχυνσης. [**6μ**]

Καθώς ο δίσκος ταλαντώνεται, η μέγιστη γωνιακή μετατόπιση, θ_{max}, είναι πολύ μικρή και η κίνηση του δίσκου αντιστοιχεί σε αρμονική ταλάντωση.

(**δ**) Ποια είναι η περίοδος των ταλαντώσεων; [**6μ**]

(**ε**) Καθώς ο δίσκος ταλαντώνεται, υπάρχει κάποια δύναμη που ο άξονας ασκεί στον δίσκο; Εξηγήστε την απάντησή σας. [**7μ**] (α) Η ροπή ως προς το σημείο P προκαλείται από το βάρος του δίσκου το οποίο εφαρμόζεται στο κέντρο μάζας του δίσκου που είναι το σημείο C.

Η ροπή της δύναμης δίνεται από την σχέση:

$$\vec{\tau}_p = \vec{r}_p \times \vec{F} = bMg\sin\Theta_1 \Rightarrow \tau_p = -bMg\sin\Theta$$

(β) Από το θεώρημα παρ/λων αξόνων θα έχουμε:

$$I_p = I_{CM} + Mb^2 = \frac{1}{2}MR^2 + Mb^2$$

(γ) Από τον 2° νόμο του Newton για την περιστροφική κίνηση σώματος:

$$\Sigma\vec{\tau}_p = I_p\vec{\alpha} \Rightarrow -bMg\sin\Theta = \left(\frac{1}{2}MR^2 + Mb^2\right)\ddot{\Theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{b\cancel{M}g}{\frac{1}{2}\cancel{M}R^2 + \cancel{M}b^2}\sin\Theta = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{bg\sin\Theta}{\frac{1}{2}R^2 + b^2} = 0}$$

(δ) Εφόσον ο δίσκος κάνει μικρές μετατοπίσεις $\sin\Theta \simeq \Theta$ και η εξίσωση κίνησης που βρήκαμε στο ερώτημα (γ) γίνεται τώρα:

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \frac{bg}{\frac{R^2}{2} + b^2}\Theta = 0$$ που είναι η εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή με γωνιακή συχνότητα ω

που δίνεται από $\omega = \sqrt{\frac{bg}{\frac{R^2}{2} + b^2}}$

Επομένως η περίοδος θα είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{R^2}{2} + b^2}{bg}}}$

(ε) Πρέπει να υπάρχει δύναμη στο σημείο P γιατί διαφορετικά το κέντρο μάζας του δίσκου θα επιταχύνονταν προς τα κάτω.

Άσκηση 8 [30μ]

Ένας φοιτητής αφήνει να πέσει μια ηχητική πηγή η οποία εκπέμπει κύματα συχνότητας 440*Hz* στο φρεάτιο του ανελκυστήρα ενός υψηλού κτιρίου. Όταν ο φοιτητής αντιλαμβάνεται την συχνότητα των ηχητικών κυμάτων από την πηγή να είναι 400*Hz*, πόσο είναι το ύψος που έχει πέσει η πηγή στο φρεάτιο;

Έστω θετική η φορά προς τα κάτω (όπως πέφτει η πηγή), d η απόσταση που έχει καλύψει η πηγή όταν ο φοιτητής ακούει την συχνότητα των 400 Hz, t_1 ο χρόνος που χρειάστηκε η πηγή να καλύψει την απόσταση d και t_2 ο χρόνος που χρειάζεται ώστε ο ήχος να φθάσει πίσω στον φοιτητή.

Η πηγή εκτελεί ελεύθερη πτώση. Η απόσταση d επομένως θα είναι:

$$d = \cancel{v_0}^{\,0} t + \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow d = \frac{1}{2} g t^2$$

Την απόσταση αυτή την καλύπτει σε χρόνο $t = t_1 + t_2$

$$\Rightarrow \boxed{d = \frac{1}{2} g (t_1 + t_2)^2} \quad (1)$$

Από την εξίσωση του φαινομένου Doppler (παρατηρητής ακίνητος, πηγή απομακρύνεται από παρατηρητή) έχουμε:

$$f_{\text{φοιτ}} = \frac{1}{1 + \frac{u_\pi}{V_{\eta\chi}}} f_{\pi\eta} \Rightarrow \boxed{u_\pi = \left(\frac{f_\pi}{f_\phi} - 1\right) V_{\eta\chi}} \quad (2)$$

Έστω ότι y είναι η απόσταση που έχει καλύψει η πηγή όταν η ταχύτητά της είναι u_π που βρήκαμε στην εξίσωση (2).

Ξέρουμε όμως $u_\pi^2 = \cancel{u_{0\pi}^2}^{\,0} + 2gy \Rightarrow u_\pi^2 = 2gy \Rightarrow \boxed{y = \frac{u_\pi^2}{2g}}$ (3)

Από κινηματική και πάλι, για να αποκτήσει ταχύτητα u_π η πηγή χρειάστηκε χρόνος: $u_\pi = \cancel{u_{0\pi}}^{\,0} + g t_1 \Rightarrow u_\pi = g t_1 \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{u_\pi}{g}}$ (4)

Από την (3) ξέρουμε την απόσταση που βρίσκονταν η πηγή όταν έστειλε τα ηχητικά κύματα τα οποία έφθασαν στον φοιτητή με συχνότητα 400 Hz. Επομένως μπορούμε να βρούμε τον χρόνο που χρειάστηκε ο ήχος να καλύψει την απόσταση αυτή, ο χρόνος είναι ο t_2:

$$V_{\eta\chi} t_2 = y \Rightarrow t_2 = y / V_{H\chi} \overset{(3)}{\Rightarrow} \boxed{t_2 = u_\pi^2 / (2g V_{H\chi})} \quad (5)$$

· Επομένως ο συνολικός χρόνος που πέφτει η πηγή είναι:

$$t = t_1 + t_2 \overset{(4),(5)}{\Rightarrow} t = \frac{u_\pi}{g} + \frac{u_\pi^2}{2g V_{HX}} = \frac{u_\pi}{g}\left(1 + \frac{u_\pi}{2V_{HX}}\right) \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow t = \left(\frac{f_\pi}{f_\phi} - 1\right) V_{HX}/g \left(1 + \frac{\left(\frac{f_\pi}{f_\phi} - 1\right)\cancel{V_{HX}}}{2\cancel{V_{HX}}}\right) = \left(\frac{f_\pi}{f_\phi} - 1\right)\frac{V_{HX}}{2g}\left(\frac{f_\pi}{f_\phi} + 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{V_{HX}}{2g}\left(\frac{f_\pi^2}{f_\phi^2} - 1\right)$$

Αντικατάσταση της τελευταίας στην εξίσωση (1) δίνει:

$$d = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2}\cancel{g}\frac{V_{HX}^2}{4g^{\cancel{2}}}\left[\left(\frac{f_\pi}{f_\phi}\right)^2 - 1\right]^2 = \frac{V_{HX}^2}{8g}\left[\left(\frac{f_\pi}{f_\phi}\right)^2 - 1\right]^2$$

· Αντικατάσταση των δεδομένων:

$$d = \frac{340^2}{8 \cdot 9.8}\left[\left(\frac{440}{400}\right)^2 - 1\right]^2 = 1474.49\left(1.1^2 - 1\right)^2 \Rightarrow \boxed{d = 65 m}$$

Άσκηση 9 [30μ]

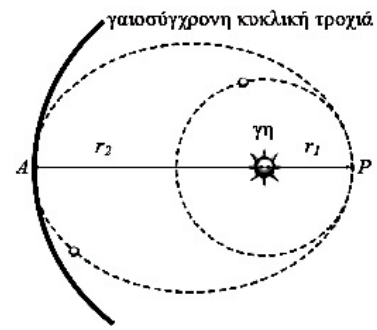
Γαιοσύγχρονη τροχιά ονομάζουμε την τροχιά στην οποία ένας δορυφόρος περιστρέφεται γύρω από την γη με περίοδο 24*h*, έτσι ώστε η θέση του να παραμένει πάντοτε πάνω από το ίδιο γεωγραφικό σημείο του ισημερινού της γης. Για τα επόμενα ερωτήματα θεωρείστε τα ακόλουθα μεγέθη: $R_Γ = 6x10^6 m$, $M_Γ = 6x10^{24} kg$, $G = 6.67x10^{-11} kg^{-1}s^{-2}m^3$.

(**α**) Για μια κυκλική γαιοσύγχρονη τροχιά, ποια είναι η απόσταση από το κέντρο της γης; [**7μ**]

(**β**) Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας του δορυφόρου που εκτελεί γαιοσύγχρονη τροχιά; [**3μ**]

(**γ**) Ένας δορυφόρος εκτοξεύεται αρχικά σε κυκλική τροχιά σε απόσταση $r_1 = 160 km$ πάνω από την επιφάνεια της γης. Ποια είναι η ταχύτητά του ενώ βρίσκεται σε αυτή την τροχιά; [**4μ**]

(**δ**) Θεωρείστε ότι δίνεται στον δορυφόρο του ερωτήματος (γ) αρκετή ώθηση στην διεύθυνση εφαπτομενικά της τροχιάς του, αλλάζοντας την ταχύτητά του. Σαν αποτέλεσμα, ο δορυφόρος εκτελεί πλέον ελλειπτική τροχιά, το περιήγειο, *P*, της οποίας συμπίπτει με την ακτίνα της αρχικής κυκλικής τροχιάς του. Ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα του δορυφόρου ώστε στην πιο απομακρυσμένη θέση, *A*, από την γη (απόγειο, r_2) στην νέα αυτή ελλειπτική τροχιά, να βρίσκεται στην απαιτούμενη απόσταση που αντιστοιχεί σε γαιοσύγχρονη κυκλική τροχιά; [**12μ**]



(**ε**) Θα πρέπει το μέτρο της ταχύτητας του δορυφόρου να αυξηθεί ή να ελαττωθεί έτσι ώστε να αρχίσει να εκτελεί κυκλική γαιοσύγχρονη τροχιά ακτίνας ίση με την απόσταση του πιο απομακρυσμένου σημείου της ελλειπτικής τροχιάς που περιγράφηκε στο ερώτημα (δ); [**4μ**] (α) Από τον 3° νόμο του Kepler έχουμε:

$$r^3 = G\frac{M}{4\pi^2}T^2 \qquad (1)$$

Ο δορυφόρος σε γαιοσύγχρονη κυκλική τροχιά θα έχει περίοδο T ίση και η περίοδος της γης. Επομένως $T = 24\,h = 24 \times 60 \times 60 \Rightarrow$

$$\Rightarrow T = 86400 \text{ sec}$$

Αντικατάσταση στην (1) $\Rightarrow r = \sqrt[3]{G\frac{M}{4\pi^2}T^2} = \sqrt[3]{\frac{6.67\cdot10^{-11}\cdot 6\cdot10^{24}}{4\pi^2}(86400)^2}$

$$\Rightarrow \boxed{r_{\text{γαιοσύγχρονου}} = 4.23\times10^{7}\,m} \qquad (2)$$

(β) Από την στιγμή που η τροχιά είναι κυκλική: $\upsilon = \omega r = \frac{2\pi}{T}r \Rightarrow$

$$\Rightarrow \upsilon_{\text{γαιοσυγ.}} = \frac{2\pi}{86400}\cdot 4.23\times10^{7} \Rightarrow \boxed{\upsilon_{\text{γαιος.}} = 3.08\times10^{3}\,m/s} \quad (3)$$

(γ) Για δορυφόρο σε κυκλική τροχιά, η δύναμη της παγκόσμιας έλξης αποτελεί την κεντρομόλο δύναμη που κρατά το δορυφόρο στην κυκλική τροχιά:

$$F_g = m_\delta \upsilon_\kappa^2/(r_1+R_\Gamma) \Rightarrow G\frac{M\cancel{m_\delta}}{(R_\Gamma+r_1)^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m_\delta}\upsilon_\kappa^2}{\cancel{(R_\Gamma+r_1)}} \Rightarrow \upsilon_\kappa = \sqrt{\frac{GM}{R_\Gamma + r_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_\kappa = \sqrt{\frac{6.67\cdot10^{-11}\cdot 6\cdot10^{24}}{160\cdot1000 + 6\cdot10^{6}}} \Rightarrow \boxed{\upsilon_\kappa = 8.06\times10^{3}\,m/s} \quad (4)$$

(δ) Η δύναμη της βαρύτητας είναι ακτινική (προς την διεύθυνση της γης) και επομένως η ροπής της είναι μηδέν. Μετά την αλλαγή της ταχύτητας, η στροφορμή του δορυφόρου στο απόγειο και περίγειο θα είναι ίδια. Επίσης η μηχανική ενέργεια διατηρείται:

Διατήρηση στροφορμής: $\cancel{m_\delta}\upsilon_p r_p = \cancel{m_\delta}\upsilon_A r_A \Rightarrow \upsilon_p r_p = \upsilon_A r_A \quad (5)$

Διατήρηση μηχανικής ενέργειας: $\frac{1}{2}\cancel{m_\delta}\upsilon_p^2 - \frac{GM\cancel{m_\delta}}{r_p} = \frac{1}{2}\cancel{m_\delta}\upsilon_A^2 - \frac{GM\cancel{m_\delta}}{r_A} \quad (6)$

. Ξέρουμε ότι η απόσταση του απόγειου, αντιστοιχεί στην ακτίνα της γαιοσύγχρονης κυκλικής τροχιάς που βρήκαμε στο ερώτημα (α), δηλαδή $\boxed{r_A = r_2 + R_\Gamma = r_{γαιοσυγχ}}$ (7)

Ξέρουμε ακόμα ότι η απόσταση του περιηγείου είναι ίδια με αυτή της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς του ερωτήματος (γ)

Δηλαδή $\boxed{r_P = R_\Gamma + r_1}$ (8)

Λύνουμε την (5) ως προς $υ_A$ οπότε: $\boxed{υ_A = \frac{r_P υ_P}{r_A}}$ (9)

Αντικαθιστούμε στην (6) οπότε:

$$\frac{1}{2}υ_P^2 - \frac{GM}{r_P} = \frac{1}{2}\left(υ_P \frac{r_P}{r_A}\right)^2 - \frac{GM}{r_A} \Rightarrow \frac{1}{2}υ_P^2\left(1 - \frac{r_P^2}{r_A^2}\right) = GM\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}\right)$$

$$\overset{(7)\wedge(8)}{\Rightarrow} \frac{1}{2}υ_P^2\left(1 - \frac{(6.16\cdot 10^6)^2}{r_{γαιος}^2}\right) = GM\left(\frac{1}{6.16\cdot 10^6} - \frac{1}{r_{γαιος}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow υ_P = \sqrt{2(6\cdot 10^{24})(6.67\cdot 10^{-11})\left(\frac{1}{6.16\ 10^6} - \frac{1}{4.23\cdot 10^7}\right)\left(1 - \frac{6.16^2}{42.3^2}\right)^{-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{υ_P = 1.07\times 10^4 (m/s)} \quad (10)$$

(ε) Η ταχύτητα του δορυφόρου στο απόγειο θα είναι σύμφωνα με την (9), (10), (8) και (7):

$$υ_A = 1.07\cdot 10^{\cancel{4}\,3} \frac{6.16\ \cancel{10^6}}{4.23\ \cancel{10^7}} = 1.07\cdot 10^3 \frac{6.16}{4.23} \Rightarrow \boxed{υ_A = 1.56\times 10^3 \frac{m}{s}}$$

Η ταχύτητα που βρήκαμε στο ερώτημα (β) για να βρίσκεται ο δορυφόρος σε γαιοσύγχρονη κυκλική τροχιά ήταν: $υ_{γαιος} = 3.08\times 10^3 m/s$

Επομένως θα πρέπει να αυξήσει την ταχύτητά του για να εκτελεί γαιοσύγχρονη κυκλική τροχιά.