Ανακεφαλαίωση

Τι είδαμε μέχρι τώρα:

- Συζητήσαμε συστήματα πολλών σωμάτων
  - Εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις
  - Νόμους δράσης-αντίδρασης
  - Ορμές, νόμους διατήρησης (γραμμική ορμή, στροφορμή, κινητική και δυναμική ενέργεια)
- Εισήγαμε την έννοια των δεσμών
  - Ολόνομους και μή ολόνομους δεσμούς

    $$\longrightarrow f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \ldots, t) = 0$$

  - Γενικευμένες συντεταγμένες $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, t)$
  - Συζητήσαμε την φυσική έννοια των δεσμών και πως μεταβάλουν τους βαθμούς ελευθερίας ενός συστήματος

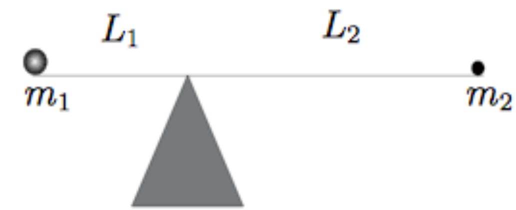
Τι θα δούμε σήμερα…?

- Πώς μπορούμε να μετασχηματίσουμε την εξίσωση κίνησης χρησιμοποιώντας γενικευμένες συντεταγμένες

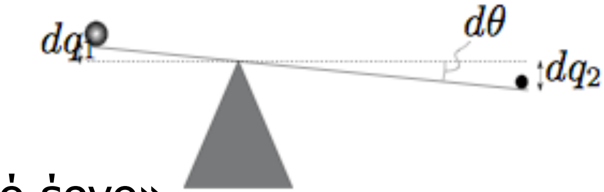
- Θα εξάγουγε τις εξισώσεις Lagrange

- Θα αποδείξουμε ότι οι εξισώσεις Lagrange είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις του Newton
  - Θα εισάγουμε την αρχή του D' Alembert

Η αρχή της ελάχιστης ενέργειας - ισορροπία



- Ο Αρχιμήδης μελέτησε την ισορροπία των σωμάτων:
  - Το σύστημα είναι σε ισορροπία όταν: $m_1 L_1 = m_2 L_2$
- O D' Alembert εξήγησε την σχέση με την αρχή του «δυνητικού» έργου:



  - Έστω η ράβδος υπόκειται σε μια απειροελάχιστη μετατόπιση (ο χρόνος είναι σταθερός)
  - Σε ισορροπία – το απειροελάχιστο έργο - «δυνητικό έργο» που παράγεται σε μια τέτοια μετατόπιση είναι μηδέν
  - Το έργο πάνω στο i-σώμα είναι: $dW_i = F_i dq_i$
  - Η βαρύτητα επομένως στο 1-σώμα: $dW_1 = m_1 g L_1 d\theta$

    και στο 2-σώμα: $dW_2 = -m_2 g L_2 d\theta$
- Η αρχή του D' Alembert λέει ότι: σε ένα σύστημα υπάρχει ισορροπία όταν το δυνητικό έργο για οποιαδήποτε απειροελάχιστη μεταβολή μηδενίζεται

$$dW = dW_1 + dW_2 = 0 \Rightarrow m_2 g L_2 d\theta - m_1 g L_1 d\theta = 0 \Rightarrow m_2 L_2 = m_1 L_1$$

Η αρχή της ελάχιστης ενέργειας - ισορροπία

- Στο προηγούμενο παράδειγμα είχαμε 2 σώματα που υπόκεινται σε δεσμό (πάνω στην ράβδο)
- Θα μπορούσαμε να είχαμε Ν σώματα τα οποία μπορούν να θεωρηθούν σαν ένα σώμα σε ένα χώρο 3Ν-διαστάσεων
- Αν υπάρχουν Κ-δεσμοί τότε το σώμα κινείται σε ένα χώρο n=3N-K διαστάσεων
- Γενικεύοντας την αρχή του D' Alembert έχουμε:

$q(t)=q_0$ ικανοποιεί την εξίσωση: $F=ma$ σύστημα σε ισορροπία

$\Updownarrow$

$dW=F\cdot dq=0$ για όλα τα dq στο χώρο n-διαστάσεων δυνητικό έργο είναι μηδέν

$\Updownarrow$

$F=0$ δεν υπάρχει δύναμη

- Για συντηρητική δύναμη: $F=-\vec{\nabla}U$ η τελευταία σχέση λέει: $\vec{\nabla}U(q=q_0)=0$
  - Έχουμε ισορροπία σε ακρότατο της δυναμικής ενέργειας
  - Αν το σημείο αυτό παρουσιάζεται ελάχιστο έχουμε σταθερή ισορροπία

Δυνατή μετατόπιση (virtual displacements) - Δυναμική

- Υποθέστε ένα σύστημα με δεσμούς
  - Συνήθεις συντεταγμένες r_i (i=1,…N)
  - Γενικευμένες συντεταγμένες q_j (j=1,…n)

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_1(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_2(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ \vec{r}_N = \vec{r}_N(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \end{cases}$$

$$d\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt$$

- Φανταστείτε ότι μετακινείτε όλα τα σημεία κατά μια στιγμιαία απειροστή μετατόπιση (ο χρόνος παραμένει σταθερός)

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \delta\vec{r}_i \qquad q_i \rightarrow q_i + \delta q_i$$

δυνατή ή δυνητική μετατόπιση

- Προσοχή ότι η μετατόπιση $\delta\mathbf{r}_i$ πρέπει να ικανοποιεί τους δεσμούς

$$\delta\vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

3N συντεταγμένες **μή** ανεξάρτητες

n συντεταγμένες ανεξάρτητες

Δυνατή μετατόπιση

- Από την εξίσωση κίνησης του Newton: $\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i \Rightarrow \vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0$
- Τμήμα της δύναμης F_i πρέπει να οφείλεται σε δεσμούς
- Η δύναμη λόγω δεσμών f_i (συνήθως) **δεν** παράγει έργο

$$\underbrace{\vec{F}_i^{(a)}}_{\text{δεδομένη δύναμη}} \qquad \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i \qquad \underbrace{\vec{f}_i}_{\text{αντίδραση δεσμού}}$$

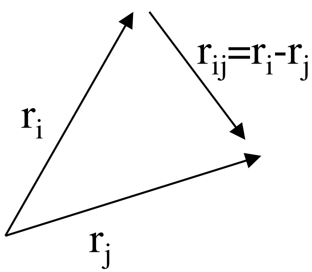
  - Η δεδομένη δύναμη είναι «γνωστή» $\vec{F}_i^{(a)} = \vec{F}_i^{(a)}\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_i, \ldots, \vec{r}_N, t\right)$
  - Η μετατόπιση είναι κάθετη στην δύναμη: $\vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$
  - Εξαίρεση: Τριβή

- Πέρνουμε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0$ με $\delta\mathbf{r}_i$

  και αθροίζουμε ως προς i

Το δυνατό έργο των δυνάμεων δεσμών είναι μηδέν

- Αυτό δεν ισχύει πάντοτε, (π.χ. τριβή) αλλά περιοριζόμαστε σε συστήματα που το έργο των δυνάμεων των δεσμών κατά μια δυνατή μετατόπιση είναι μηδέν.
- Θέλουμε να απαλείψουμε ουσιαστικά τις δυνάμεις των δεσμών που είναι εν γένει άγνωστες ή πολύπλοκες στον υπολογισμό
- Για στερεό σώμα αυτό μπορεί να δειχθεί. Έστω μια μικρή μετακίνηση:



$$\vec{r}_i{}' = \vec{r}_i + \delta\vec{r}_i, \quad \vec{r}_j{}' = \vec{r}_j + \delta\vec{r}_j \qquad \vec{r}_{ij}{}' = \vec{r}_{ij} + \delta\vec{r}_{ij}$$

$$\underbrace{\vec{r}_{ij}{}'^2 = \vec{r}_{ij}{}^2}_{\text{Ίσα λόγω στερεού σώματος}} + 2\vec{r}_{ij}\cdot\delta\vec{r}_{ij} + O\left(\left(\delta\vec{r}\right)^2\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{ij}\cdot\delta\vec{r}_{ij} = 0$$

Αλλά:
$$\vec{F}_{ij}\cdot\delta\vec{r}_{ij} = \underbrace{\vec{F}_{ij}\cdot\delta\vec{r}_i}_{\text{W στο i από j}} - \underbrace{\vec{F}_{ij}\cdot\delta\vec{r}_j}_{\text{W στο j από i}} = \vec{F}_{ij}\cdot\delta\vec{r}_i + \vec{F}_{ji}\cdot\delta\vec{r}_j$$

Για κεντρικές δυνάμεις επομένως $\vec{F}_{ij}\cdot\delta\vec{r}_{ij} = 0$

δηλαδή οι εσωτερικές δυνάμεις δεν παράγουν έργο $r_{ij} \perp \delta r_{ij}$

Η αρχή του D' Alembert

$$\sum_i \left(\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i = 0$$

Η δύναμη δεσμού δεν επηρεάζει και μηδενίζεται

- Η δύναμη λόγω των δεσμών μηδενίζεται επειδή $f_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$
- Καλείται ως αρχή του D' Alembert (1743)
- Τώρα αλλάζουμε από $\mathbf{r_i}$ σε q_i

1ος όρος = $\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j$

$$Q_j \equiv \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$ Γενικευμένη Δύναμη

- Η μονάδα του Q_j δεν υπάρχει πάντα [Δύναμη]
- $Q_j q_j$ είναι πάντα [έργο]

$$\delta\vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

Η αρχή του D' Alembert

2ος όρος $= \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i \dot{\vec{p}}_i \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{i,j} m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$

- Μετά από κάποιες πράξεις μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) \longrightarrow \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \to \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\mathrm{v}_i^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\mathrm{v}_i^2}{2}\right)$$

Αλλά $\dot{\vec{r}}_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k \Rightarrow \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

Για τη 2η παρένθεση ξέρουμε ότι: $\frac{d}{dt} f(q_j, t) = \sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial t}$

Άρα $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_k \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}$ Ισοδύναμο με $\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}$

$$= \sum_j \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\}\delta q_j \qquad T \equiv \sum_i \frac{m\mathrm{v}_i^2}{2}$$

- Η αρχή του D' Alembert γίνεται

$$\sum_j \left\{ \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right\}\delta q_j = 0$$

Εξισώσεις Lagrange

$$\sum_j \left\{ \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

Αυτά είναι ελεύθερα

- Οι γενικευμένες συντεταγμένες q_j είναι ανεξάρτητες

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

σχεδόν τελειώσαμε

- Υποθέτοντας ότι οι δυνάμεις είναι συντηρητικές: $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V$

$$Q_j \equiv \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i V \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Αντικατάσταση

Οι εξισώσεις Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial (T-V)}{\partial q_j}=0$$

- Υποθέτοντας ότι *V* δεν εξαρτάται από τα $\dot{q}_j$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}=0$

Τελικά $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$$

$$L=T(q_j,\dot{q}_j,t)-V(q_j,t)$$

Τελειώσαμε!!!

Υποθέσεις που κάναμε

- Οι δεσμοί είναι ολόνομοι
  - Αυτό το υποθέτουμε πάντα

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, t)$$

- Οι δυνάμεις δεσμών δεν παράγουν έργο
  - Αγνοούμε τριβές

$$\mathbf{f}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0$$

- Οι ενεργούσες δυνάμεις είναι συντηρητικές
  - Η εξίσωση Lagrange είναι ok αν V εξαρτάται από το χρόνο t

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V$$

- Το δυναμικό V ανεξάρτητο από τις γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}_j$
  - Το τελευταίο θα το εξετάσουμε

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

Παράδειγμα: Χρονικά εξαρτημένο σύστημα

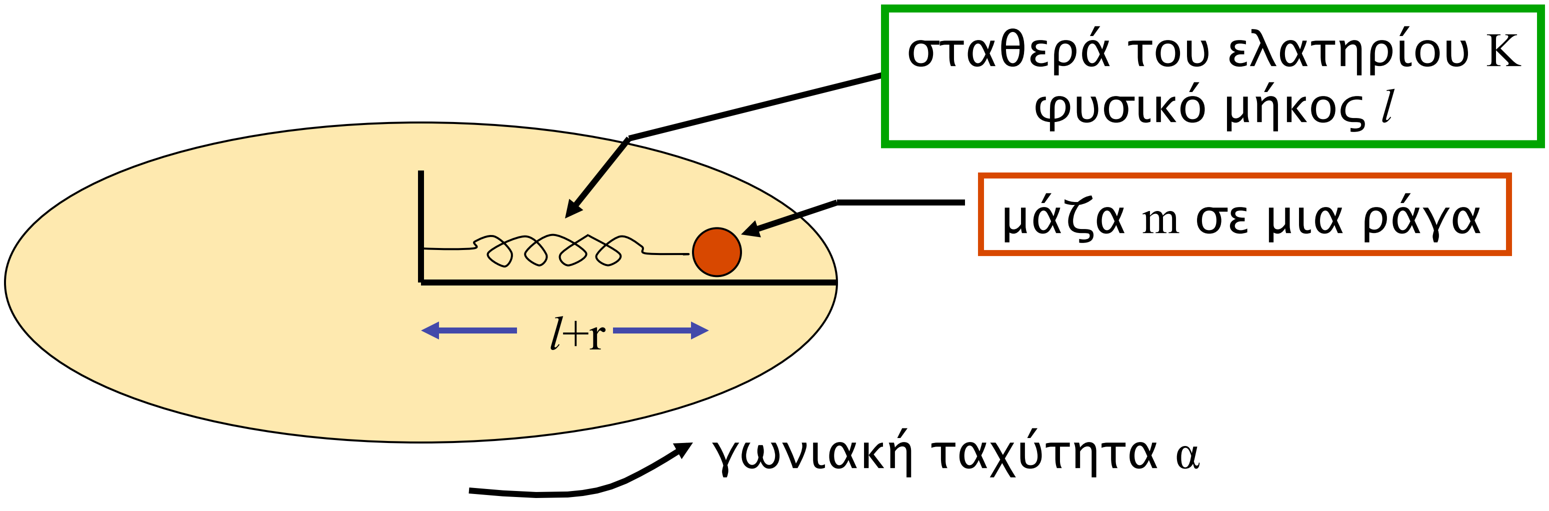
- Οι συναρτήσεις μετασχηματισμού μπορεί να εξαρτώνται από το χρόνο t

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_j, t)$$

  - Το γενικευμένο σύστημα συντεταγμένων μπορεί να κινείται

    π.χ. Σύστημα συντεταγμένων πάνω στη γη

- Ένα παράδειγμα



Παράδειγμα: Χρονικά εξαρτημένο σύστημα

- Οι συναρτήσεις μετασχηματισμού: $\begin{cases} x = (l+r)\cos(at) \\ y = (l+r)\sin(at) \end{cases}$

- Κινητική ενέργεια $T = \frac{m}{2}\left\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right\} = \frac{m}{2}\left\{\dot{r}^2 + (l+r)^2 a^2\right\}$

- Δυναμική ενέργεια $V = \frac{K}{2} r^2$

- Η εξίσωση του Lagrange ⇨ $L = \frac{m}{2}\left\{\dot{r}^2 + (l+r)^2 a^2\right\} - \frac{K}{2} r^2$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right] - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - ma^2(l+r) + Kr = 0$$

Παράδειγμα: Χρονικά εξαρτημένο σύστημα

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right] - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - ma^2(l+r) + Kr = 0$$

$$m\ddot{r} + (K - ma^2)\left(r - \boxed{\frac{ma^2 l}{K - ma^2}}\right) = 0$$

- Αν $K > m\alpha^2$, ένας αρμονικός ταλαντωτής με $\omega = \sqrt{\dfrac{K - ma^2}{m}}$
  - Το κέντρο ταλάντωσης έχει μετατοπιστεί κατά $\sqrt{\dfrac{ma^2 l}{K - ma^2}}$
- Αν $K < m\alpha^2$, απομακρύνεται εκθετικά
- Αν $K = m\alpha^2$, η ταχύτητα είναι σταθερή
  - Η κεντρομόλος δύναμη ισορροπεί με την δύναμη ελατηρίου

- Η Lagrangian δεν είναι μοναδική για ένα δεδομένο σύστημα
    - Αν η Lagrangian L περιγράφει ένα σύστημα
    - Μπορεί να αποδειχθεί ότι $L' = L + \frac{dF(q,t)}{dt}$

δουλεύει εξ' ίσου καλά για οποιαδήποτε συνάρτηση F

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{dF}{dt}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{dF}{dt}\right) = 0$$

χρησιμοποιώντας

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Lagrangian με U(r,t)

- Από την αρχή του D΄ Alembert είχαμε δει ότι: $\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i^{(e)}-\dot{\vec{p}}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i=0$

Η οποία μετά από πράξεις βρήκαμε ότι ήταν ισοδύναμη: $\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\right]\delta q_j=0$

Από την σχέση αυτή για ολόνομους δεσμούς έχουμε: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j$ (A)

όπου: $Q_j=\sum_i \vec{F}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}=-\sum_i \nabla_i V\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}=-\frac{\partial V}{\partial q_j}$

- Το δυναμικό μπορεί να είναι της μορφής: $V=V(\vec{r},t)$ ανεξάρτητο από τις $\dot{q}_j$

επομένως $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}=0$

Η (A) γίνεται: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial V}{\partial q_j}\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j}\right)-\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}-\frac{\partial V}{\partial q_j}\right)=0$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0}$$

Η εξίσωση Lagrange και για μη συντηρητικές δυνάμεις

Δυναμικό εξαρτώμενο από την ταχύτητα

- Υποθέσαμε ότι $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$ και $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$ έτσι ώστε

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

- Θα μπορούσαμε να είχαμε κάνει το ίδιο αν μας δίνονταν

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right) \qquad U = U(q_j, \dot{q}_j, t)$$

Γενικευμένο δυναμικό, ή δυναμικό εξαρτώμενο από ταχύτητα

$$\Rightarrow \quad L = T(q_j, \dot{q}_j, t) - U(q_j, \dot{q}_j, t)$$

Δυναμικό εξαρτώμενο από την ταχύτητα

Σύμφωνα με την γενική μορφή των εξισώσεων Lagrange θα έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j=-\frac{\partial U}{\partial q_j}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right)$$

Θεωρώντας και πάλι $L=T(q_j,\dot{q}_j,t)-U(q_j,\dot{q}_j,t)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial (T-U)}{\partial q_j}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$$

Αυτό είναι δυνατό για μια ιδιαίτερη αλλά πολύ σημαντική περίπτωση:

κίνηση ενός ηλεκτρικού φορτίου μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Ηλεκτρομαγνητική δύναμη σε σωματίδιο

- Η δύναμη Lorentz σε ένα κινούμενο φορτισμένο σωματίδιο, e, είναι:

$$\vec{F} = e\left[\vec{E} + (\vec{\mathrm{v}} \times \vec{B})\right]$$ εξαρτώμενη από ταχύτητα

- Τα πεδία E και B δίνονται από τις σχέσεις

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

όπου το V(r,t) και A(r,t) είναι το βαθμωτό και διανυσματικό δυναμικό

- Μικρή παρένθεση σε E&M
  - Οι εξισώσεις Maxwell είναι ως γνωστό (CGS σύστημα):

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1) \qquad \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (2) \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4)$$

Ξέρουμε όμως ότι: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\nabla \times \nabla) = 0$

Και επομένως από την (1) έχουμε: $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t)$

Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Επομένως ο 4ος νόμος του Maxwell μπορεί να γραφεί:

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{1}{c}\frac{\partial(\nabla\times\vec{A})}{\partial t}=\nabla\times\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)\Rightarrow\nabla\times\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$$

Η τελευταία εξίσωση ισχύει παντού στο χώρο.

Από θεωρήματα της διανυσματικού λογισμού ξέρουμε ότι υπάρχει μια βαθμωτή συνάρτηση V και μπορούμε να γράψουμε

$$\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla V$$ Για A ανεξάρτητο του t: $\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=0$ οπότε $\vec{E}=\nabla V$ Ηλεκτροστατικό δυναμικό

Στην περίπτωση αυτή το A είναι το μαγνητοστατικό διανυσματικό δυναμικό για προβλήματα με σταθερά ρεύματα

- Πως παίρνουμε τα A και V ?

Από τις άλλες 2 εξισώσεις Maxwell που περιέχουν τις πηγές ϱ και J

$$\nabla\cdot\vec{E}=4\pi\rho=\nabla\cdot\left(-\nabla V-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\nabla^2V+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)=-4\pi\rho$$

$$\nabla\times\vec{B}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\Rightarrow\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\frac{4\pi}{c}\vec{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Χρησιμοποιώντας την σχέση: $\nabla\times\nabla\times\vec{A}\equiv\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$ έχουμε:

Εν γένει ισχύει: $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{C}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)-\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)$

$$\nabla\times\vec{B}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla V-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow\nabla\times\vec{B}=-\frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

Επομένως παίρνουμε τα A και V συναρτήσει των πηγών J και ϱ.

Οι εξισώσεις είναι συζευγμένες αλλά τα πεδία E και B είναι αμετάβλητα όταν τα δυναμικά αλλάζουν κάτω από ένα μετασχηματισμό βαθμίδας

$$\vec{A}\rightarrow\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\Lambda(\vec{r},t)$$

$$V\rightarrow V'=V-\frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda(\vec{r},t)}{\partial t}$$

Αυτή η ευκολία οδηγεί σε χρήσιμες απλοποιήσεις για ορισμένες επιλογές του Λ (επιλογή βαθμίδας)

Κλείσιμο της παρένθεσης σε E&M

Ηλεκτρομαγνητική δύναμη σε σωματίδιο

- Ισχυρισμός: Η χρήση του δυναμικού $U = eV - e\vec{A}\cdot\vec{\mathrm{v}}$ στην εξίσωση Lagrange δίνει την δύναμη Lorentz

Απόδειξη: $L = T - U = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 - eV + e\vec{A}\cdot\vec{\mathrm{v}}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \mathrm{v}_x} = m\mathrm{v}_x + eA_x \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathrm{v}_x}\right) = m\frac{d\mathrm{v}_x}{dt} + e\frac{dA_x}{dt}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -e\frac{\partial V}{\partial x} + e\left(\mathrm{v}_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + \mathrm{v}_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + \mathrm{v}_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

Από την εξίσωση του Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ παίρνουμε:

$$m\frac{d\mathrm{v}_x}{dt} + e\frac{dA_x}{dt} + e\frac{\partial V}{\partial x} - e\left(\mathrm{v}_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + \mathrm{v}_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + \mathrm{v}_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = 0$$

Αλλά $$\frac{dA_x}{dt} = \left(\mathrm{v}_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + \mathrm{v}_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + \mathrm{v}_z\frac{\partial A_x}{\partial z}\right) + \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

Αυτό είναι ο ολικός ρυθμός μεταβολής του A_x σύμφωνα με παρατηρητή που κινείται μαζί με το φορτίο

Ηλεκτρομαγνητική δύναμη σε σωματίδιο

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$m\frac{d\mathrm{v}_x}{dt}+e\left(\cancel{\mathrm{v}_x\frac{\partial A_x}{\partial x}}+\mathrm{v}_y\frac{\partial A_x}{\partial y}+\mathrm{v}_z\frac{\partial A_x}{\partial z}+\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)+e\frac{\partial V}{\partial x}-e\left(\cancel{\mathrm{v}_x\frac{\partial A_x}{\partial x}}+\mathrm{v}_y\frac{\partial A_y}{\partial x}+\mathrm{v}_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)=0$$

$$\Rightarrow m\frac{d\mathrm{v}_x}{dt}+e\underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)}_{E_x}+e\left(\mathrm{v}_y\underbrace{\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)}_{(\nabla\times\vec{A})_z}+\mathrm{v}_z\underbrace{\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)}_{(\nabla\times\vec{A})_y}\right)=0$$

Επομένως καταλήγουμε:

$$m\frac{d\mathrm{v}_x}{dt}-eE_x-e\left[\vec{\mathrm{v}}\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)\right]_x=0\ \Rightarrow m\frac{d\mathrm{v}_x}{dt}=e\left[E_x+\left(\vec{\mathrm{v}}\times\vec{B}\right)_x\right]$$

Ανάλογα αποδεικνύεται και για τα y και z.