Η ποσότητα q δίνεται από τη σχέση: $q = x^2 y - xy^2$.

Η καλύτερη εκτίμηση για το q θα είναι:

$$q = 3^2 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 \Rightarrow \quad q = 18 - 12 \Rightarrow \boxed{q = 6}$$

Για να βρούμε την αβεβαιότητα στο q θα έχουμε:

(α) Η αβεβαιότητα στο q από το x μόνο θα είναι:

$$\sigma q_x = \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| \sigma_x = \left|2xy - y^2\right| \sigma_x = \left|2\cdot 3\cdot 2 - 2^2\right| 0.1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma q_x = \left|12 - 4\right| 0.1 \Rightarrow \boxed{\sigma q_x = 0.8}$$

(β) Η αβεβαιότητα στο q από το y μόνο θα είναι:

$$\sigma q_y = \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right| \sigma_y = \left|x^2 - 2xy\right| \sigma_y = \left|3^2 - 2\cdot 3\cdot 2\right| \sigma_y =$$

$$\Rightarrow \sigma q_y = \left|9 - 12\right| \sigma_y \Rightarrow \boxed{\sigma q_x = 0.3}$$

(γ) Η ολική αβεβαιότητα στο q θα είναι:

$$\sigma q = \sqrt{\sigma q_x^2 + \sigma q_y^2} = \sqrt{0.8^2 + 0.3^2} \Rightarrow \boxed{\sigma q = 0.9}$$

Επομένως η τελική απάντηση για το $\boxed{q = 6.0 \pm 0.9}$

(2a)

Από το νόμο του Snell έχουμε: $\eta = \frac{\sin\Theta_1}{\sin\Theta_2}$

Αυτή η σχέση είναι της μορφής $q = \frac{x}{y}$ οπότε η αβεβαιότητα

θα είναι: $\sigma_q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{y^2} + \frac{x^2\sigma_y^2}{y^4}}$

Διαιρώντας με q και τις πλευρές της εξίσωσης θα έχουμε:

$$\frac{\sigma_q}{q} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2/\cancel{y^2}}{x^2/\cancel{y^2}} + \frac{\cancel{x^2}\sigma_y^2/y^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{x^2}/\cancel{y^2}}} \Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_q}{q} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}} \quad (1)$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση $x = \sin\Theta_1$ και $y = \sin\Theta_2$

Το σφάλμα όμως του x, δηλαδή $\sigma_{\sin\Theta_1}$ θα είναι:

$$\sigma_{\sin\Theta_1} = \left|\frac{\partial(\sin\Theta_1)}{\partial\Theta_1}\right| \sigma_{\Theta_1} = |\cos\Theta_1|\, \sigma_{\Theta_1}\ (\underline{\underline{\text{rad}}}) \quad (2)$$

Αντίστοιχα για το $\sin\Theta_2$ $\quad \sigma_{\sin\Theta_2} = |\cos\Theta_2|\sigma_{\Theta_2} \quad (3)$

Επομένως $\quad \frac{\sigma_{\sin\Theta_1}}{|\sin\Theta_1|} = \frac{|\cos\Theta_1|\sigma_{\Theta_1}}{|\sin\Theta_1|} \Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_{\sin\Theta_1}}{|\sin\Theta_1|} = |\cot\Theta_1|\sigma_{\Theta_1}}$

Η αβεβαιότητα στο δείκτη διάθλασης θα είναι επομένως:

$$\boxed{\frac{\delta n}{n} = \sqrt{(\cot\Theta_1)^2\sigma_{\Theta_1}^2 + (\cot\Theta_2)^2\sigma_{\Theta_2}^2}}$$

(2b)

Με βάση τα προηγούμενα ο πίνακας θα πάρει τη μορφή:

$\theta_1 (\pm 1^\circ)$	$\theta_2 (\pm 1^\circ)$	$\sin\theta_1$	$\sin\theta_2$	n	$\frac{\delta \sin\theta_1}{\sin\theta_1}$	$\frac{\delta \sin\theta_2}{\sin\theta_2}$	$\delta n/n$	δn
10°	7°	0.174	0.122	1.42	11%	16%	17%	0.20
20°	13°	0.342	0.225	1.52	5%	8%	9%	0.14
30°	20°	0.500	0.342	1.46	3%	5%	6%	0.09
50°	29°	0.766	0.485	1.58	2%	4%	3%	0.05
70°	38°	0.940	0.616	1.53	1%	3%	2%	0.03

όπου η αβεβαιότητα της γωνίας 1° είναι 0.02rad και $\frac{\delta \sin\theta}{\sin\theta} = \cot\theta \cdot \delta\theta$

Με βάση τις μετρήσεις και τις αβεβαιότητές τους (στήλες 5 & 9) παρατηρούμε ότι οι τιμές του δείκτη διάθλασης περιλαμβάνουν τη τιμή 1.50 του κατασκευαστή μέσα στα όρια των αβεβαιοτήτων.
Η μοναδική εξαίρεση είναι η τιμή για $\theta_1 = 50^\circ$ όπου $n = 1.58 \pm 0.05$
Αλλά και η τιμή αυτή διαφέρει από την 1.50 κατά $\sim 1.5\sigma = \left|\frac{1.58-1.5}{0.05}\right|$
Επομένως συμπερασματικά όλες οι μετρήσεις είναι συμβατές με τη δεδομένη τιμή του κατασκευαστή.

Παρατηρούμε ακόμη ότι καθώς η γωνία θ_1 αυξάνει (γωνία πρόσπτωσης) η σχετική αβεβαιότητα στο δείκτη διάθλασης η ελαττώνεται.
Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι απόλυτες αβεβαιότητες είναι σταθερές ανεξαρτήτως της γωνίας $(\pm 1^\circ)$ και επομένως οι σχετικές αβεβαιότητες ελαττώνονται καθώς οι γωνίες αυξάνουν.

Ο όγκος της σφαίρας είναι : $V = \frac{4\pi}{3} R^3$

Επομένως για $r = 2.0\ m$ έχουμε $V = 33.51\ m^3$

Η αβεβαιότητα στον όγκο της σφαίρας θα είναι η :

$$\sigma_V = \frac{\partial V}{\partial R}\sigma_R \Rightarrow \sigma_V = \cancel{3}\frac{4\pi}{\cancel{3}}R^2\sigma_R = 4\pi R^2\sigma_R \Rightarrow \sigma_V = 5.03\ m^3$$

Ωστόσο η ακτίνα δίνεται με 2 σημαντικά ψηφία όπως και η αβεβαιότητά της. Με βάση αυτό η απάντηση που θα δίναμε για τον όγκο της σφαίρας θα ήταν:

$$\boxed{V = 34 \pm 5\ m^3}$$

(4)

Δίνονται 4 μετρήσεις του μήκους κύματος.

Η σταθμισμένη μέση τιμή δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i w_i}{\sum_{i=1}^{4} w_i} \quad \text{όπου} \quad w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

Επομένως θα έχουμε: $$\bar{\lambda} = \frac{503\cdot\frac{1}{10^2} + 491\frac{1}{8^2} + 515\frac{1}{20^2} + 570\frac{1}{40^2}}{\frac{1}{10^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{20^2} + \frac{1}{40^2}}$$

Μετά τις πράξεις καταλήγουμε: $$\bar{\lambda} = \frac{14.3456}{0.02875} \Rightarrow \boxed{\bar{\lambda} = 498.98nm}$$

Η αβεβαιότητα στη σταθμισμένη μέση τιμή του μήκους κύματος

θα είναι: $$\frac{1}{\sigma_{\bar{\lambda}}^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2} + \frac{1}{\sigma_4^2} \Rightarrow \frac{1}{\sigma_{\bar{\lambda}}^2} = \frac{1}{0.02875} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{\lambda}} = \sqrt{34.783} \Rightarrow \boxed{\sigma_{\bar{\lambda}} = 5.898nm}$$

Επομένως η σταθμισμένη μέση τιμή με την αβεβαιότητά της θα είναι:

$$\bar{\lambda} = (499 \pm 6)nm$$

Η τελευταία μέτρηση $\lambda_4 = (570 \pm 40)nm$ είναι ~4 φορές λιγότερο ακριβής και επομένως 16 φορές λιγότερο σημαντική και μπορούμε να την αγνοήσουμε.

Για παράδειγμα αν υπολογίζαμε τη σταθμισμένη μέση τιμή κ αβεβαιότητα των τριών πρώτων μετρήσεων θα είχαμε:

$\bar{\lambda} = (497.4 \pm 6)nm$ συγκρινόμενη με την τιμή $(499 \pm 6)nm$

(a) Ξέρουμε ότι η μέση τιμή δίνεται από $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ όπου N ο αριθμός των μετρήσεων και x_i η τιμή του μετρούμενου μεγέθους σε κάθε μέτρηση.

Η τυπική απόκλιση θα δίνεται από τη σχέση: $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}{(N-1)}}$

Αντικαθιστώντας τις τιμές, θα έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{1}{12}\left(12+34+22+14+22+17+24+22+18+14+18+12\right) \Rightarrow \boxed{\bar{x} = 19.1}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{2(12-19.1)^2+(34-19.1)^2+3(22-19.1)^2+2(14-19.1)^2+(17-19.1)^2+(24-19.1)^2+2(18-19.1)^2}{11}} \Rightarrow \boxed{\sigma_x = 6.3}$$

(b) Η τιμή 34 διαφέρει από τη μέση τιμή, $\bar{x} = 19.1$, κατά $\delta = 14.9$ που είναι $t_\sigma = \frac{14.9}{6.3} \Rightarrow \boxed{t_\sigma = 2.365\sigma}$.

Η πιθανότητα μια μέτρηση να απέχει τουλάχιστον 2.37σ είναι σύμφωνα με το πίνακα πιθανοτήτων της διάλεξης:

$$\text{Prob}(\text{έξω από } 2.37\sigma) = 1 - 0.9822 \Rightarrow \text{Prob}(\text{έξω από } 2.37\sigma) = 0.0178$$

Δηλαδή η πιθανότητα είναι 1.78 μετρήσεις στις 100 θα έδιναν τιμή τουλάχιστον 34 (ή μεγαλύτερη).

Στη περίπτωσή μας έχουμε 12 μετρήσεις και όχι 100. Επομένως θα περιμέναμε ότι: $n \cdot \text{Prob}(\text{έξω από } 2.37\sigma) = 12 \cdot 0.0178 = 0.2136$ μετρήσεις στις 12 θα έδιναν τη συγκεκριμένη μέτρηση (34) ή μεγαλύτερη. Σύμφωνα με το κριτήριο Chauvenet μπορούμε να απορρίψουμε τη συγκεκριμένη μέτρηση. (Το κριτήριο ζητά 0.5 μέτρηση τουλάχιστον)

(5b)

(γ) Αν υπολογίσουμε και πάλι τη μέση τιμή και τυπική απόκλιση τότε θα έχουμε σύμφωνα με τους τύπους:

$\bar{x} = 17.7$ και $\sigma_x = 4.3$ όπου χρησιμοποιούμε $N=11$

(6a)

Χρησιμοποιώντας τους τύπους ελαχίστων τετραγώνων με ίσες αβεβαιότητες έχουμε να υπολογίσουμε τις ποσότητες:

$$A = \frac{\Sigma x^2 \Sigma y - \Sigma x \Sigma xy}{\Delta} \quad \text{και} \quad \sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{\Delta}}$$ για τη τεταγμένη

$$B = \frac{N \Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{\Delta} \quad \text{και} \quad \sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$ κ λίση.

ενώ $\Delta = N \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2$ και $\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N} (y_i - A - Bx_i)^2}$

Το ρόλο του x παίζει η πίεση και του y η θερμοκρασία.

Θα πρέπει να υπολογίσουμε τις ποσότητες: $\sum_{i=1}^{N} x_i^2$, $\sum_{i=1}^{N} y_i$, $\sum_{i=1}^{N} (x_i \cdot y_i)$, $\sum_{i=1}^{N} x_i$

Επομένως ο πίνακας της άσκησης μπορεί να επεκταθεί για τους κατάλληλους υπολογισμούς:

Μέτρηση	Πίεση (P_i)	Θερμοκρασία (T_i)	P_i^2	$P_i \cdot T_i$	$(T_i - A - BP_i)^2$
1	65	−20	4225	−1300	4,840
2	75	17	5625	1275	4,410
3	85	42	7225	3570	100,00
4	95	94	9025	8930	24,01
5	105	127	11025	13335	0.640
Σ	425	260	37.125	25.810	133,90

Η τιμή $\Delta = N \cdot \Sigma P^2 - (\Sigma P)^2 = 5 \cdot 37.125 - (425)^2 \Rightarrow \Delta = 5000$

Επομένως υπολογίζουμε: $A = \frac{\Sigma P^2 \Sigma T - \Sigma P \Sigma PT}{\Delta} \Rightarrow A = -263.35\,^{\circ}C$

και η κλίση $B = \frac{N \Sigma PT - \Sigma P \Sigma T}{\Delta} = \frac{5 \cdot 25810 - 425 \cdot 260}{5000} \Rightarrow B = 3.71 \frac{^{\circ}C}{mmHg}$

(6b)

Ξέροντας τις παραμέτρους A και B μπορούμε τώρα να συμπληρώσουμε τη τελευταία στήλη του πίνακα η οποία χρειάζεται για τον υπολογισμό της αβεβαιότητας των παραμέτρων A και B.
Οι τιμές $(T_i - A - BP_i)^2$ φαίνονται στο πίνακα.

Επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε την αβεβαιότητα των μετρήσεων

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{5}(T_i - A - BP_i)^2} \Rightarrow \sigma_T = 6.7^\circ C \Rightarrow \boxed{\sigma_T \simeq 7^\circ C}$$

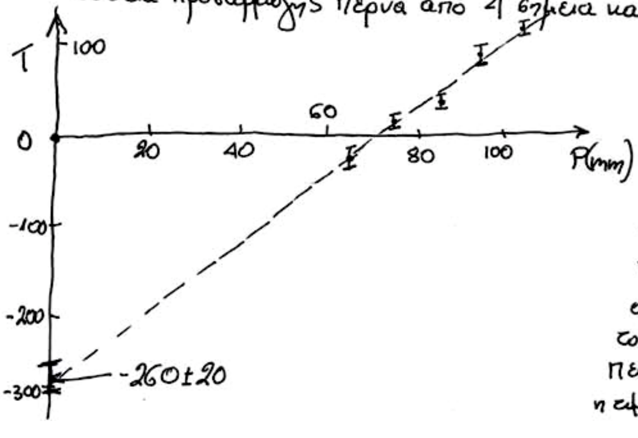
Η τιμή αυτή συμφωνεί με την εκτίμηση του φοιτητή ότι οι μετρήσεις είχαν αβεβαιότητα μερικών βαθμών Κελσίου.

Η αβεβαιότητα στη παράμετρο A θα είναι: $\sigma_A = \sigma_T\sqrt{\frac{\Sigma P^2}{\Delta}} \Rightarrow \boxed{\sigma_A = 18^\circ C}$

ενώ η αβεβαιότητα στη κλίση είναι $\sigma_B = \sigma_T\sqrt{\frac{N}{\Delta}} \Rightarrow \boxed{\sigma_B = 0.212}$

Στρογγυλοποιώντας τα αποτελέσματα καταλήγουμε ότι το συμπέρασμα του φοιτητή για τη θερμοκρασία του απόλυτου μηδενός είναι: $\boxed{A = (-260 \pm 20)^\circ C}$
αποτέλεσμα που συμφωνεί ικανοποιητικά με τη θεωρητική τιμή $-273^\circ C$.

Τα αποτελέσματα αυτά είναι πιο κατανοητά αν κάνουμε τη γραφική τους παράσταση. Τα 5 πειραματικά σημεία, με την αντίστοιχη αβεβαιότητά τους ($\pm 7^\circ C$) στη θερμοκρασία, φαίνονται στο παρακάτω γράφημα. Η καλύτερη ευθεία προσαρμογής περνά από 4 σημεία και κοντά από το 5° σημείο.



Το σημείο τομής με τον άξονα T βρίσκεται εκτείνοντας την ευθεία. Είναι προφανές ότι μικρές μεταβολές στη κλίση της ευθείας μπορεί να προκαλέσει μεγάλες αλλαγές στη τιμή της τεταγμένης. Και επομένως η αβεβαιότητα αυξάνει πολύ αν το σημείο τομής με το y-άξονα απέχει πολύ από τις πειραματικές μετρήσεις. Για το λόγο αυτό η τιμή 260° έχει αβεβαιότητα ±20° μεγαλύτερη της ±7°C

Υποθέτουμε ότι ο πληθυσμός των βακτηριδίων ελαττώνεται σύμφωνα με τη σχέση: $N = N_0 e^{-t/\tau}$

Θεωρούμε τη μεταβλητή: $Z = \ln(N)$ οπότε θα έχουμε:

$$\ln(N) = \ln(N_0 e^{-t/\tau}) = \ln(N_0) + \ln(e^{-t/\tau}) \Rightarrow \ln(N) = \ln(N_0) - \frac{t}{\tau}$$

Επομένως η μεταβλητή Z είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου:

$$Z = \ln(N_0) - \frac{t}{\tau} = A + Bt$$

Υπολογίζουμε τις 3 τιμές $Z_i = \ln(N_i)$ για $i=0,1,2$ και συμπληρώνουμε το πίνακα:

Χρόνος	Πληθ. (N_i)	$Z_i = \ln(N_i)$
0	158,000	11.94
1	137,000	11.83
2	128,000	11.76

Χρησιμοποιώντας τις τιμές αυτές βρίσκουμε με τη βοήθεια της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων την ευθεία προσαρμογής των σημείων αυτών.

Σύμφωνα με τους τύπους θα έχουμε:

$$A = \frac{\Sigma t^2 \Sigma \ln N - \Sigma t \Sigma t \ln N}{N \Sigma t^2 - (\Sigma t)^2} = \frac{5 \cdot 35.53 - 35.35}{6} \Rightarrow A = 11.93$$

$$B = \frac{N \Sigma t \cdot \ln N - \Sigma t \Sigma \ln N}{N \Sigma t^2 - (\Sigma t)^2} = \frac{3 \cdot 35.35 - 3 \cdot 35.53}{6} \Rightarrow B = 0.09 \,(\text{ημέρες})^{-1}$$

Η παράμετρος B ωστόσο είναι $B = -\frac{1}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{1}{B} \Rightarrow \tau = 11.1$ ημέρες

Ο υπολογισμός αυτός ωστόσο παρουσιάζει το ακόλουθο πρόβλημα. Υποθέτουμε ότι οι αβεβαιότητες των μετρήσεών μας είναι όλες ίσες. Ωστόσο η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων γίνονται ως προς τη μεταβλητή $z_i = \ln(N_i)$

Αν όλες οι μετρήσεις έχουν την ίδια αβεβαιότητα ($N_i \pm \sigma_N$), η μεταβλητή z_i δεν έχει την ίδια αβεβαιότητα για κάθε μέτρηση i.

Από απλή διάδοση σφαλμάτων θα έχουμε:

$$\sigma_{z_i} = \frac{\partial z_i}{\partial N_i}\sigma_{N_i} = \frac{\partial \ln N_i}{\partial N_i}\sigma_{N_i} = \frac{1}{N_i}\sigma_{N_i}$$

Επομένως ακόμα και αν οι αβεβαιότητες σ_{N_i} είναι ίσες, η αβεβαιότητα στο z_i μεταβάλλεται ανάλογα με το $1/N_i$. (μεγαλύτερο N_i μικρότερη αβεβαιότητα).

Επομένως θα πρέπει να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων χρησιμοποιώντας τους τύπους των άνισων/διαφορετικών αβεβαιοτήτων. Στην πράξη, συχνά δεν ξέρουμε αν οι αβεβαιότητες είναι ίσες/σταθερές για όλες τις μετρήσεις. Μπορούμε να επιχειρηματολογήσουμε ότι είναι σταθερές και να χρησιμοποιήσουμε την απλή μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Συχνά οι μεταβολές στις αβεβαιότητες είναι μικρές και το αποτέλεσμα δεν αλλάζει χρησιμοποιώντας τη μια ή την άλλη μέθοδο. Όπως στο παραπάνω πρόβλημα το κανονικό (απλό, χωρίς άνισες) fit (προσαρμογή) δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα

Στα παρακάτω εφαρμόζουμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων με άνισες αβεβαιότητες για τις επιμέρους μετρήσεις.

Υποθέτω ότι κάθε μέτρηση του πληθυσμού έχει αβεβαιότητα η οποία δίνεται από $\sigma_{N_i}=\sqrt{N_i}$ όπως θα περιμέναμε για μετρήσεις που ακολουθούν Poisson κατανομή.

Επομένως η αβεβαιότητα για κάθε z_i θα είναι: $\sigma_{\ln N_i}=\sigma_{z_i}=\frac{\sqrt{N_i}}{N_i}$

ενώ η σημαντικότητα κάθε μέτρησης θα είναι $w_i=\frac{1}{\sigma_{z_i}^2}\Rightarrow w_i=N_i$

Καταστρώνουμε τον παρακάτω πίνακα υπολογισμών:

t_i (ημέρες)	N_i (πληθ)	$z_i=\ln N_i$	$w_i=N_i$	$w_i t_i$	$w_i t_i^2$	$w_i z_i$	$w_i z_i t_i$
0	153,000	11.94	153,000	0	0	1826544	0
1	137,000	11,83	137,000	137,000	137,000	1620400	1620400
2	128,000	11.76	128,000	256,000	512,000	1505253	3010505
Σ 3	418,000	35.53	418,000	393,000	649,000	4952196	4630905

Οι τύποι που δίνουν τη τεταγμένη, κλίση και αβεβαιότητές τους είναι:

$$A=\frac{\Sigma w_i t_i^2\,\Sigma w_i z_i-\Sigma w_i t_i\,\Sigma w_i t_i z_i}{\Delta=\Sigma w_i\,\Sigma w_i t_i^2-(\Sigma w_i t_i)^2}\Rightarrow \boxed{A=9.066} \text{ τεταγμένη}$$

$$B=\frac{\Sigma w_i\,\Sigma w_i t_i z_i-\Sigma w_i t_i\,\Sigma w_i z_i}{\Delta=\Sigma w_i\,\Sigma w_i t_i^2-(\Sigma w_i t_i)^2}\Rightarrow \boxed{B=-0.0898} \text{ κλίση}$$

$$\sigma_A=\sqrt{\frac{\Sigma w_i t_i^2}{\Delta}}\Rightarrow \boxed{\sigma_A=0.0024} \quad \text{και} \quad \sigma_B=\sqrt{\frac{\Sigma w_i}{\Delta}}\Rightarrow \boxed{\sigma_B=0.0019}$$

Παρατηρούμε ότι οι παράμετροι είναι πολύ κοντά στις τιμές που υπολογίσαμε χρησιμοποιώντας την απλή μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων με σταθερή και ίση αβεβαιότητα για όλες τις μετρήσεις

(a) Το ερώτημα αυτό ουσιαστικά το έχουμε δει να εφαρμόζεται στη πράξη στη πειραματική άσκηση που αφορούσε τις κρούσεις και τον υπολογισμό των ταχυτήτων των σωμάτων.

Εφόσον υπολογίζει τη μέση ταχύτητα των 4 διαδοχικών ταχυτήτων θα έχουμε ότι:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{\upsilon} &= \frac{\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3+\upsilon_4}{4} \\ \text{Αλλά}\quad \upsilon_1 &= \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1} = \frac{x_2-x_1}{\Delta t} \\ \upsilon_2 &= \frac{x_3-x_2}{t_3-t_2} = \frac{x_3-x_2}{\Delta t} \\ \upsilon_3 &= \frac{x_4-x_3}{t_4-t_3} = \frac{x_4-x_3}{\Delta t} \\ \upsilon_4 &= \frac{x_5-x_4}{t_5-t_4} = \frac{x_5-x_4}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{\upsilon} = \frac{\cancel{x_2}-x_1+\cancel{x_3}-\cancel{x_2}+\cancel{x_4}-\cancel{x_3}+x_5-\cancel{x_4}}{4\Delta t} \Rightarrow \boxed{\bar{\upsilon} = \frac{x_5-x_1}{4\Delta t}} = \frac{x_5-x_1}{t_5-t_1}$$

Μέ βάση τα στοιχεία του πίνακα έχουμε:

$$\upsilon_1 = \frac{25-13}{-2-(-4)} = \frac{12}{2} = 6m/s \qquad \upsilon_2 = \frac{34-25}{0-(-2)} = \frac{9}{2} = 4.5m/s$$

$$\upsilon_3 = \frac{42-34}{2-0} = \frac{8}{2} = 4m/s \qquad \upsilon_4 = \frac{56-42}{4-2} = \frac{14}{2} = 7m/s$$

$$\bar{\upsilon} = \frac{6+4.5+4+7}{4} = \frac{21.5}{4} \Rightarrow \bar{\upsilon} = 5.375m/s \quad = \frac{56-13}{8} = \frac{43}{8} = 5.375$$

Επομένως η αριθμητική απάντηση συμφωνεί με αυτή που αποδείξαμε προηγουμένως.

Η τυπική απόκλιση των 4 μετρήσεων είναι: $\sigma_\upsilon = \sqrt{\frac{\Sigma(\upsilon_i-\bar{\upsilon})^2}{N-1}} = 1.38cm/s$

και το σφάλμα της μέσης τιμής: $\sigma_{\bar{\upsilon}} = \frac{\sigma_\upsilon}{\sqrt{N}} = \frac{1.38}{2} \Rightarrow \sigma_{\bar{\upsilon}} = 0.69cm/s$

(b) Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για να προσαρμόσουμε τα δεδομένα που δίνονται στην ευθεία $s = s_0 - \upsilon t$
Η κλίση της ευθείας θα δώσει την ταχύτητα και η τεταγμένη την αρχική θέση του σώματος τη στιγμή $t=0$.
Ο πίνακας των μετρήσεων θα γίνει:

	t(sec)	s(cm)	t^2	$t \cdot s$	$(s-A-Bt)^2$
	-4	13	16	-52	0.16
	-2	25	4	-50	1.69
	0	34	0	0	0.00
	2	42	4	84	5.29
	4	56	16	224	1.96
Σ	0	170	40	206	9.10

$$A = \frac{\Sigma x^2 \cdot \Sigma y - \Sigma x \Sigma(x \cdot y)}{\Delta = N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} = \frac{40 \cdot 170 - 0 \cdot 206}{5 \cdot 40 - 0} \Rightarrow A = 34.0 \text{ cm}$$

$$B = \frac{N \cdot \Sigma(x \cdot y) - \Sigma x \Sigma y}{\Delta} = \frac{\cancel{5} \cdot 206 - 0 \cdot 170}{\cancel{200}\ 40} \Rightarrow B = 5.15 \text{ cm/s}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \Sigma (s_i - A_i - Bt)^2} \Rightarrow \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{3}\, 9.10} \Rightarrow \sigma_y = 1.74$$

Επομένως $\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{\Delta}} = 0.78\text{cm}$ και $\sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}} = 0.28 \text{ cm/s}$

Οι παράμετροι της ευθείας της καλύτερης προσαρμογής είναι:

$A = 34.00 \pm 0.78 \Rightarrow A = (34 \pm 1)\text{cm} = s_0$

$B = (5.15 \pm 0.28)\text{cm/s.} = \upsilon$

Βλέπουμε ότι η ευθεία μας δίνει ταχύτητα $\upsilon = 5.15 \pm 0.28\text{cm/s}$ που διαφέρει από αυτή που υπολογίσαμε στο (a) μέρος: $\upsilon = 5.375\text{cm/s}$

(α) Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για τα δεδομένα των μετρήσεων της άσκησης:

t(sec)	s(cm)	t^2(s^2)	$t \cdot s$	$(s_i - A - Bt)^2$
-3	4	9	-12	0.1849
-1	7.5	1	-7.5	0.1521
1	10.3	1	10.3	0.2601
3	12.0	9	36.0	0.2209
Σ 0	33.8	20	26.8	0.8180

Προσαρμόζουμε σε ευθεία της μορφής $s = A + Bt$ οπότε

$$A = \frac{\Sigma x^2 \Sigma y - \Sigma x \Sigma xy}{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} = \frac{\cancel{20} \cdot 33.8}{4 \cdot \cancel{20}} \Rightarrow \boxed{A = 8.45\text{ cm}}$$

$$B = \frac{N \cdot \Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{N\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} = \frac{\cancel{4} \cdot 26.8}{\cancel{4} \cdot 20} \Rightarrow \boxed{B = 1.34\text{ cm/s}}$$

Με βάση τις τιμές A και B συμπληρώνουμε την τελευταία στήλη του πίνακα και υπολογίζουμε την αβεβαιότητα σ_s από τη σχέση:

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{4}(s_i - s_0 - v \cdot t_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{4-2} 0.8180} \Rightarrow \boxed{\sigma_s = 0.63953\text{ cm}}$$

Οι αβεβαιότητες στις τιμές A και B θα είναι:

$$\sigma_A = \sigma_s\sqrt{\frac{\Sigma t^2}{\Delta}} = 0.63953\sqrt{\frac{\cancel{20}}{4 \cdot \cancel{20}}} \Rightarrow \sigma_A = \frac{0.63853}{2} \Rightarrow \boxed{\sigma_A = 0.31976}$$

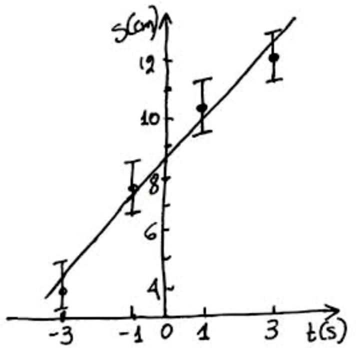
$$\sigma_B = \sigma_s\sqrt{\frac{N}{\Delta}} = 0.63953\sqrt{\frac{\cancel{4}}{\cancel{4} \cdot 20}} \Rightarrow \boxed{\sigma_B = 0.143\text{ cm/s}}$$

Παρατηρούμε ότι η αβεβαιότητα των μετρήσεων, ±1cm, είναι μεγαλύτερη από την αβεβαιότητα σ_s όλων των μετρήσεων όπως προκύπτει από τα ελάχιστα τετράγωνα και οι μετρήσεις του s είναι συμβατές με την εξίσωση της ευθείας.

(9b)

Αν οι μετρήσεις, στη προκειμένη περίπτωση, έχουν αβεβαιότητα $\cdot 0.1cm$ τότε η αβεβαιότητα σ_s που προσδιορίσαμε από τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων είναι πολύ μεγαλύτερη. (0.64 συγκρίνοντας με 0.1 cm. Επομένως οι μετρήσεις δεν είναι συμβατές με την υπόθεση ότι περιγράφονται από μια ευθεία της μορφή s_0+vt.

Στη προκειμένη περίπτωση, τα δεδομένα υποδηλώνουν ότι το σώμα υπόκειται σε κάποια επιβράδυνση (πιθανό τριβές) και η ταχύτητα δεν είναι σταθερή. Οι 2 αβεβαιότητες διαφέρουν κατά ~ 6σ.



Στο διπλανό γράφημα, όταν οι αβεβαιότητες των μετρήσεων γίνουν 0.1cm, δηλαδή της τάξης μεγέθους του σημείου που αναπαριστά τη μέτρηση, το τελευταίο σημείο δείχνει να είναι χαμηλότερο από την ευθεία, που σημαίνει ότι η απομάκρυνση του σημείου είναι μικρότερη της αναμενόμενης άρα το σώμα επιβραδύνεται.

Μας δίνονται 6 ζεύγη μετρήσεων και θέλουμε να υπολογίσουμε το παράγοντα συσχέτισής τους :

Ξέρουμε ότι ο παράγοντας συσχέτισης δίνεται από τη σχέση :

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

Η μέση τιμή των 6 μετρήσεων του x είναι: $\bar{x}=\frac{24}{6}\Rightarrow\bar{x}=4$

Η μέση τιμή των 6 μετρήσεων του y είναι: $\bar{y}=\frac{42}{6}\Rightarrow\bar{y}=7$.

Αντικατάσταση στο παραπάνω τύπο δίνει:

$$r=\frac{(1-4)(5-7)+(2-4)(6-7)+(3-4)(6-7)+(5-4)(8-7)+(6-4)(8-7)+(7-4)(9-7)}{\sqrt{\left[(1-4)^2+(2-4)^2+(3-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2+(7-4)^2\right]\left[(5-7)^2+2(6-7)^2+2(8-7)^2+(9-7)^2\right]}}$$

οπότε :

$$r=\frac{18}{\sqrt{28\cdot 12}}=\frac{18}{\sqrt{4\cdot 7\cdot 4\cdot 3}}=\frac{\overset{9}{\cancel{18}}}{\underset{2}{\cancel{4}}\sqrt{21}}\Rightarrow\boxed{r=0.982}$$

Σύμφωνα με τους πίνακες της άσκησης, για 6 μετρήσεις (ζεύγη) η πιθανότητα να παρουσιάζουν παράγοντα συσχέτισης $r\geq 0.982$ και να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους είναι

$$\mathrm{Prob}_{n=6}(|r|\geq|r_0|)=\mathrm{Prob}_{N=6}(|r|\geq 0.982)=0.0483\%$$

Η πιθανότητα αυτή είναι πολύ μικρότερη από 0.5% και επομένως οι 6 μετρήσεις δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους