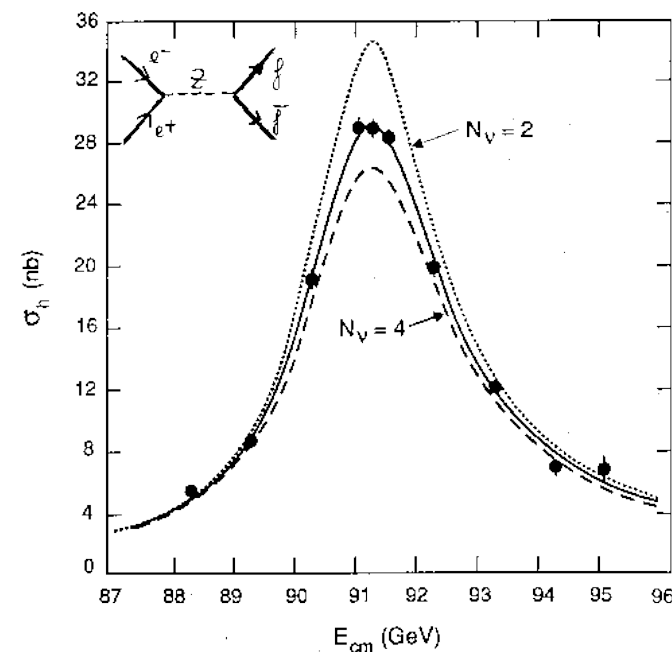


Αβεβαιότητα – ανάγκη για πιθανότητα

- Καθημερινά έχουμε να κάνουμε με αβεβαιότητα – αποφάσεις λαμβάνονται απουσία πλήρους πληροφορίας
- Οι περισσότεροι κλάδοι των επιστημών «φαίνεται» να μην περιέχουν αβεβαιότητα
- Ωστόσο συναντούμε αβεβαιότητα ευρέως στις επιστήμες και θα πρέπει να βρούμε τρόπο να την αντιμετωπίσουμε επιστημονικά
- **Στις πειραματικές επιστήμες:** υπάρχουν πρακτικά όρια στην ακρίβεια των μετρήσεων. Μπορούμε να μετρήσουμε μια ποσότητα με πεπερασμένη ακρίβεια. Όπως ξέρουμε το αποτέλεσμα ενός πειράματος δεν λέει ποτέ ότι μια θεωρία είναι λάθος ή ότι είναι σωστή. Μας δίνει ωστόσο αποδείξεις στηριζόμενοι πάνω τους μπορούμε να έχουμε μια περισσότερο σημαντική αντίληψη για το τι είναι αληθές.

Σημαντικά στοιχεία στην ανάλυση αυτή είναι ο προσεγμένος υπολογισμός των σφαλμάτων και η χρήση κατάλληλων εργαλείων από τη θεωρία πιθανοτήτων



Αβεβαιότητα – ανάγκη για πιθανότητα

- Στις θεωρητικές επιστήμες υπάρχουν θεμελειώδη όρια για το τι μπορούμε να ξέρουμε ή να προβλέψουμε:

Σε συστήματα πολλών σωμάτων: δεν μπορούμε να ξέρουμε π.χ. τι κάνουν όλα τα άτομα σε ένα τμήμα ύλης γιατί η γνώση εμπεριέχει πολύ περισσότερη λεπτομέρεια από αυτή μπορούμε να συλλέξουμε

Ο αριθμός των μορίων νερού που βρίσκονται σε ένα ποτήρι είναι τόσο τεράστιος που πρακτικά είναι αδύνατο να προβλέψουμε τι ακριβώς κάνουν: Έχει νόημα να πούμε ποια η ταχύτητα του 1247890-ου μορίου; Ωστόσο μπορούμε να ρωτήσουμε πόσο πιθανό είναι ένα μόριο να κινείται με ταχύτητα μεγαλύτερη από 200m/s

Μη γραμμικά συστήματα: δεν μπορούμε να προβλέψουμε τη μελλοντική κατάσταση ενός συστήματος το οποίο κινείται κάτω από μη γραμμικές δυνάμεις γιατί η μελλοντική τους κατάσταση επιρεάζεται από την γνώση της παρούσας κατάστασής τους.

Η κίνηση ενός εκκρεμούς το άκρο του οποίου δεν είναι ακλόνητο αλλά κινείται εξαιτίας μιας περιοδικής δύναμης. Εξάρτηση από τη συχνότητα της δύναμης, συντονισμός. Δεν έχει νόημα να ρωτήσουμε που θα βρίσκεται η μάζα μετά από 10 ταλαντώσεις αλλά μπορούμε να αναρωτηθούμε ποια θα είναι η πιο πιθανή της θέση

Κβαντομηχανικά συστήματα: δεν ξέρουμε τη διαδρομή που ακολούθησε ακόμα και ένα μόνο ηλεκτρόνιο γιατί εξαιτίας της αρχής της αβεβαιότητας δεν είναι εν γένει γνωστή.

Η σημασία της πιθανότητας

Η έννοια χρησιμοποιείται ευρέως

Δυο «σχολές» για τον ορισμό πιθανότητας:

(A) Συχνότητας (frequentist) ή εμπειρική:

πιθανότητα κάποια δήλωση είναι αληθής:

$N\#$ η δήλωση είναι αληθής

$N\#$ θα μπορούσε να είναι αληθής

όπου ο παρονομαστής είναι μεγάλος

(B) Bayesian:

πιθανότητα κάποια δήλωση είναι αληθής = Ο βαθμός της ορθολογικής πίστης
ότι είναι αληθής

Λίγο αόριστος και υποκειμενικός ορισμός αλλά πολύ ευρής για να καλύπτει όλες τις περιπτώσεις

Συμβολισμός και σημειογραφία

Εν γένει προσπαθούμε να αποδώσουμε μια πιθανότητα σε κάποια «δήλωση» ενώ δίνεται κάποια άλλη «δήλωση»

Η δήλωση εκφράζει το ρόλο της πιθανότητας σε προέκταση των κανόνων της λογικής στη περιοχή που βρίσκεται μεταξύ των δυο άκρων: του αληθές και ψευδούς

Η δήλωση που δίνεται ονομάζεται **πληροφορία, I**,
ενώ η δήλωση της οποίας ελέγχεται η πιθανότητα ονομάζεται **υπόθεση, A**.

Παραδείγματα:

I: Διάλεξα ένα χαρτί από την τράπουλα **Αλλά έλειπαν 14 χαρτιά**

A: Το χαρτί αυτό θα είναι ο άσσος σπαθί

I: Αγόρασα ένα λαχείο **Πριν 2 εβδομάδες**

A: Θα κερδίσω το λαχείο αυτή την εβδομάδα

➤ Η πιθανότητα της A εξαρτάται από την πληροφορία, I

➤ Η πιθανότητα της υπόθεσης A δεδομένης της πληροφορίας, I, συμβολίζεται: $P(A|I)$

◆ Το κατά πόσο αληθής είναι η πληροφορία I είναι άσχετο με τη τιμή της $P(A|I)$

Κανόνες πιθανοτήτων

Οι δυο ορισμοί πιθανοτήτων (frequentist, Bayesian) υπάγονται στους ίδιους κανόνες

(Α) Διάστημα τιμών

Η πιθανότητα βρίσκεται πάντοτε στο διάστημα $0 \leq P(A | I) \leq 1$

$P(A|I)=1$ δηλώνει βεβαιότητα ότι η υπόθεση A είναι αληθής

(Β) AND συνδυασμοί: γενική περίπτωση

Θεωρήστε 2 υποθέσεις A_1 και A_2 και έστω $A_1 \bullet A_2$ (ή A_1 AND A_2) η σύνθετη υπόθεση ότι και οι 2 υποθέσεις είναι αληθείς. Προκύπτει ότι:

$$P(A_1 \bullet A_2 | I) = P(A_2 | A_1 \bullet I)P(A_1 | I)$$

όπου: $P(A_2 | A_1 \bullet I)$ δηλώνει τη πιθανότητα της A_2 δεδομένης της υπόθεσης $A_1 \bullet I$

Παράδειγμα

I: Ένα χαρτί έχει τραβηχτεί από την τράπουλα

A_1 : Το χαρτί είναι άσος
 A_2 : Το χαρτί είναι σπαθί

} $A_1 \bullet A_2$: ο άσος είναι σπαθί

(Γ) AND συνδυασμοί αμοιβαίως ανεξάρτητοι μεταξύ τους (mutually independent)

(Το αληθές της A_1 δεν μας λέει τίποτα για το αληθές της A_2)

Σε αλγεβρική μορφή: $P(A_2 | A_1 \bullet I) = P(A_2 | I)$ και $P(A_1 | A_2 \bullet I) = P(A_1 | I)$

Τότε προκύπτει ότι: $P(A_2 \bullet A_1 | I) = P(A_1 | I) \times P(A_2 | I)$

Κανόνες πιθανοτήτων

(Δ) OR συνδυασμοί: γενική περίπτωση

Θεωρήστε 2 υποθέσεις A_1 και A_2 και έστω A_1 OR A_2 η σύνθετη υπόθεση ότι τουλάχιστον η μια από τις 2 υποθέσεις είναι αληθής. Προκύπτει ότι:

$$P(A_1 \text{ or } A_2 | I) = P(A_1 | I) + P(A_2 | I) - P(A_1 \bullet A_2 | I)$$

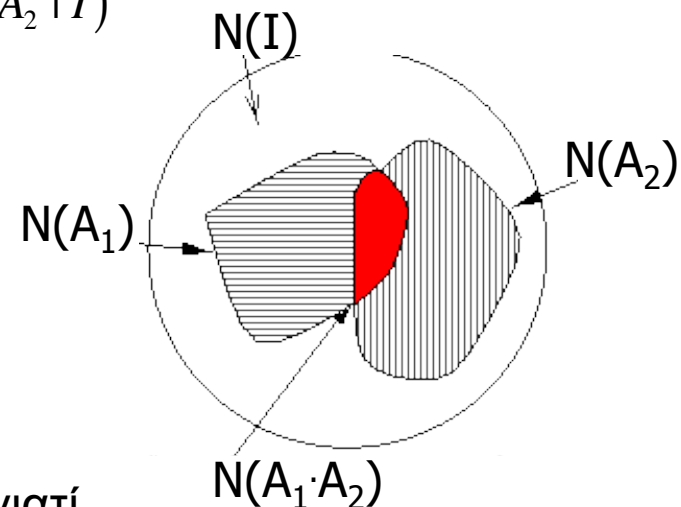
Παράδειγμα:

Έστω $N(I)$ το πλήθος όλων των περιπτώσεων I και $N(A_1)$, $N(A_2)$ και $N(A_1 \cdot A_2)$ το πλήθος των περιπτώσεων που η A_1 , η A_2 και οι A_1 και A_2 ταυτόχρονα είναι αληθείς αντίστοιχα.

Το αποτέλεσμα θα είναι:

$$N(A_1 \text{ or } A_2) = N(A_1) + N(A_2) - N(A_1 \cdot A_2)$$

Προφανώς πρέπει να αφαιρέσουμε το κοινό τμήμα γιατί μετράται δυο φορές.



(Ε) OR συνδυασμοί αμοιβαίως αποκλειστικοί μεταξύ τους (mutually exclusive)

(Η A_1 και A_2 δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα αληθείς)

Σε αλγεβρική μορφή: $P(A_2 \bullet A_1 | I) = 0$

Προκύπτει ότι: $P(A_1 \text{ or } A_2 | I) = P(A_1 | I) + P(A_2 | I)$

Κανόνες πιθανοτήτων

(ΣΤ) Κανονικοποίηση: αποτελέσματα αμοιβαίως αποκλειστικά και εξαντλητικά:
mutually exclusive and exhaustive (ΜΕΕ)

Θεωρήστε το σύνολο Ω των υποθέσεων $A_1, A_2, A_3, \dots, A_\Omega$ εκ των οποίων τουλάχιστον μια είναι αληθής. Δηλαδή σε αλγεβρική μορφή: $P(A_1 \text{ or } A_2 \text{ or } A_3 \text{ or } \dots A_\Omega | I) = 1$

Παράδειγμα:

I: ένα χαρτί τραβήχτηκε από μια τράπουλα

A_1 : είναι άσος

A_2 : είναι χαρτί φιγούρας

A_3 : είναι κοινό χαρτί

Οι υποθέσεις είναι αποκλειστικές μεταξύ τους και καλύπτουν όλο το πλήθος των δυνατών τιμών

Προκύπτει ότι για ένα τέτοιο σύνολο ισχύει:
$$\sum_{r=1}^{\Omega} P(A_r | I) = 1$$

Απόδοση τιμών στις πιθανότητες

(Α) Ίσες εκ των προτέρων πιθανότητες:

Έστω ότι η πληροφορία I προσδιορίζει ένα πλήθος Ω από ΜΕΕ αποτελέσματα και δεν μας λέει τίποτα που να προτιμά το ένα αποτέλεσμα σχετικά με τα άλλα. Τότε στην περίπτωση αυτή της μέγιστης άγνοιας οι πιθανότητες μπορούν να αποδοθούν εκ των προτέρων.

Στην περίπτωση αυτή η πιθανότητα που αποδίδεται σε κάθε υπόθεση του Ω είναι:

$$P_r \equiv P(A_r | \Omega) = \frac{1}{\Omega} \quad \text{για όλα τα } r$$

Σύμφωνα με το κανόνα των ΜΕΕ θα έχουμε: $1 = \sum_{r=1}^{\Omega} P_r = \Omega \times P_r$

Παράδειγμα 1:

Ρίχνουμε ένα νόμισμα

Στην περίπτωση αυτή ξέρουμε ότι $\Omega=2$ δυνατά αποτελέσματα

Πρέπει να αποδώσουμε στο καθένα από τα δυνατά αποτελέσματα

την ίδια πιθανότητα: $p = P_r = 1/\Omega = 1/2$

Παράδειγμα 2:

Ένα αέριο αφήνεται να έρθει σε ισορροπία σε απομονωμένο δοχείο

Η κβαντομηχανική μας λέει ότι μπορεί να βρεθεί σε μια οποιαδήποτε μικροσκοπική κατάσταση από ένα σύνολο Ω δυνατών καταστάσεων.

Πρέπει να αποδώσουμε σε κάθε μια από τις καταστάσεις αυτές την πιθανότητα $1/\Omega$

Αυτό αποτελεί το θεμελιώδη λίθο της στατιστικής φυσικής και επομένως το πως κατανοούμε τη συμπυκνωμένη ύλη

Απόδοση τιμών στις πιθανότητες

(B) Επιχειρήματα ανάλογα με τους δυνατούς τρόπους

Υποθέτουμε ότι ένα αποτέλεσμα A μπορεί να ληφθεί με W δυνατούς τρόπους A_1, A_2, A_W που αποτελούν μέλη μιας μεγαλύτερης ομάδας $A_1, A_2, \dots, A_\Omega$ που είναι ΜΕΕ δεδομένης της πληροφορίας I . Τότε αν δεν υπάρχει οποιαδήποτε επιπλέον πληροφορία

$$P(A|W, \Omega) = \frac{W}{\Omega}$$

Παράδειγμα:

Ρίχνουμε 2 ζάρια: Ποια η πιθανότητα το άθροισμα τους να δώσει 7

Στη περίπτωση αυτή η πληροφορία I είναι η ρίψη των 2 ζαριών

Το αποτέλεσμα που θα πρέπει να ελέγξουμε είναι A : το άθροισμά τους να είναι 7

Υπάρχουν συνολικά $\Omega = 6 \times 6 = 36$ δυνατά αποτελέσματα

Καθένα από αυτά πρέπει να του αποδοθεί η ίδια πιθανότητα: $P_r = 1/\Omega = 1/36$

Συνολικό score 7 μπορούν να δώσουν οι συνδυασμοί:

$(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$

δηλαδή $W = 6$.

Επομένως η πιθανότητα να πάρουμε άθροισμα 7 θα είναι:

$$P(7|6, 36) = \frac{W}{\Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Διονυμικός παράγοντας

Εφαρμογή στα προηγούμενα βρίσκει ο διονυμικός παράγοντας που δίνει:

$${}^N C_m = \binom{N}{m} = \frac{N!}{m!(N-m)!}$$

(α) το πλήθος των διαφορετικών τρόπων μια ομάδα από N ξεχωριστά μεταξύ τους αντικείμενα μπορούν να χωριστούν σε 2 υπο-ομάδες από m και $N-m$ αντικείμενα
 (β) τον αριθμό των διαφορετικών δυνατών ακολουθιών N αντικειμένων που φτιάχνουν δυο υπο-ομάδες από m μη διαχωρίσιμα και $N-m$ μη διαχωρήσιμα μεταξύ τους αντικειμένων.

Ας θεωρήσουμε αρχικά ταξινομημένες ομάδες. Έστω ότι έχουμε 2 στοιχεία x και y . Οι ταξινομημένες ομάδες που μπορούμε να έχουμε είναι:

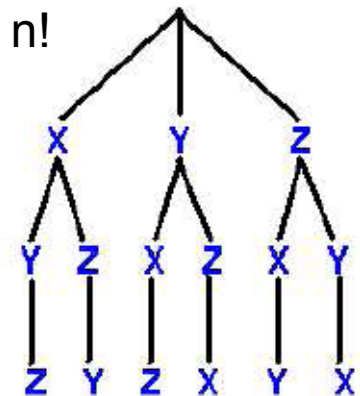
$$\{x, y\} \text{ και } \{y, x\}$$

Θεωρήστε ταξινομημένες ομάδες τριών στοιχείων x , y και z . Υπάρχουν 6 δυνατές περιπτώσεις:

$$\{x, y, z\}, \{x, z, y\}, \{y, x, z\}, \{y, z, x\}, \{z, x, y\}, \{z, y, x\}$$

Αν είχαμε n στοιχεία ο αριθμός των δυνατών περιπτώσεων θα ήταν $n!$

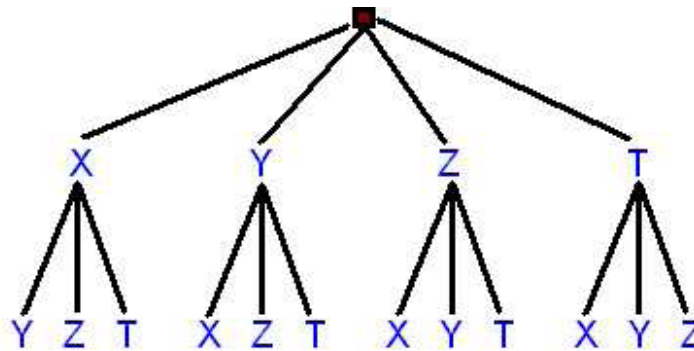
Υπάρχουν n δυνατές περιπτώσεις να έχουμε ένα συγκεκριμένο στοιχείο στη 1^η θέση, κατόπιν υπάρχουν $n-1$ περιπτώσεις να έχουμε ένα από τα εναπομείναντα στοιχεία στη 2^η θέση κ.ο.κ. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται αριθμός διευθετήσεων:



Διονυμικός παράγοντας

Θεωρούμε τώρα τον αριθμό των δυνατών περιπτώσεων να έχουμε ταξινομημένες ομάδες από $k \leq n$ στοιχεία από κάποια ομάδα n στοιχείων. Αυτός ο αριθμός είναι ο **αριθμός των μεταθέσεων** $P(n, k)$. Δείχνει τον αριθμό των **ανταλλαγών/μεταθέσεων** των n στοιχείων όταν πέρνουμε k κάθε φορά.

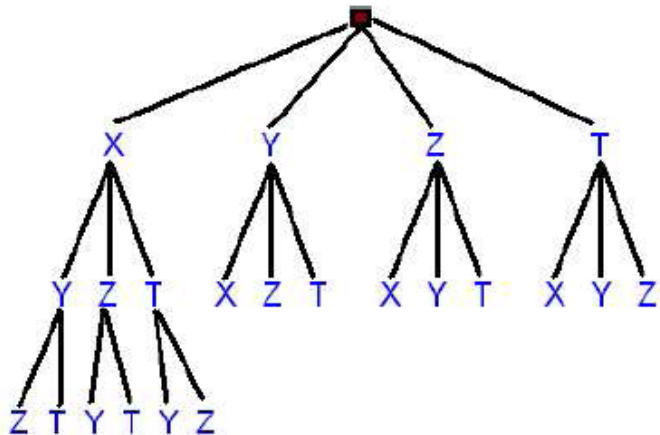
Έστω ότι έχουμε 4 στοιχεία και πέρνουμε 2 κάθε φορά. Επομένως έχουμε υπο-ομάδες δυο στοιχείων και το παρακάτω σχήμα δείχνει το «δένδρο» των αποφάσεων



Κάθε διαδρομή αντιστοιχεί σε μια ταξινομημένη ομάδα.

Επομένως $P(4, 2) = 12$

Αν θέλαμε τον αριθμό των ταξινομημένων περιπτώσεων 3 στοιχείων τα οποία πέρνουμε από ένα σύνολο 4 στοιχείων, τότε θα είχαμε:



Επομένως $P(4, 3) = 24$

Γενικά: $P(n, k) = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)$

$$\Rightarrow P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Διονυμικός παράγοντας

Θεωρούμε τώρα τον αριθμό των δυνατών μεταθέσεων σε ομάδες μη ταξινομημένες. **Συνδυασμοί** είναι οι αριθμοί των διευθετήσεων των στοιχείων χωρίς να λαμβάνουμε υπόψην κάποια συγκεκριμένη σειρά ή θέση.

π.χ. για 2 στοιχεία x, y , υπάρχει μόνο 1 ομάδα: $\{x, y\}$

Ο αριθμός των υπο-ομάδων μεγέθους k στοιχείων που λαμβάνονται από n στοιχεία συμβολίζεται με $C(n, k)$. Προφανώς $C(n, n) = 1$

Για παράδειγμα, ο αριθμός των μη ταξινομημένων ομάδων 2 στοιχείων τα οποία λαμβάνονται από ένα σύνολο 4 στοιχείων $\{x, y, z, w\}$ είναι:

$$\{x, y\}, \{x, z\}, \{x, w\}, \{y, z\}, \{y, w\}, \{z, w\} \Rightarrow C(4, 2) = 6$$

Για να βρούμε το τύπο που δίνει τον αριθμό των δυνατών συνδυασμών, θεωρούμε και πάλι το πρόβλημα εύρεσης του αριθμού των δυνατών ταξινομημένων ομάδων με k στοιχεία τα οποία λαμβάνονται από n -στοιχεία.

(α) Δημιουργούμε όλες τις μη ταξινομημένες ομάδες μεγέθους k

(β) Ταξινομούμε τα στοιχεία σε κάθε συνδυασμό που βρήκαμε στο (α)

Απο το προηγούμενο παράδειγμα: $\{x, y\}, \{x, z\}, \{x, w\}, \{y, z\}, \{y, w\}, \{z, w\}$

Η ταξινόμηση τώρα είναι απλή:

$$\{x, y\}, \{x, z\}, \{x, w\}, \{y, z\}, \{y, w\}, \{z, w\}$$

$$\{y, x\}, \{z, x\}, \{w, x\}, \{z, y\}, \{w, y\}, \{w, z\}$$

$$\text{Επομένως: } P(4, 2) = 2 \times C(4, 2)$$

Διονυμικός παράγοντας

Σαν ένα ακόμα παράδειγμα, θεωρείστε όλες τις υπο-ομάδες 3 στοιχείων που λαμβάνονται από 4 στοιχεία $\{x,y,z,w\}$

$$\{x,y,z\}, \{x,y,w\}, \{x,z,w\}, \{y,z,w\}$$

Υπάρχουν 6 δυνατοί τρόποι να ταξινομήσουμε κάθε μια από τις 4 υπο-ομάδες:

$$\{x,y,z\}, \{x,z,y\}, \{y,x,z\}, \{z,x,y\}, \{y,z,x\}, \{z,y,x\}$$

Επομένως: $P(4,3) = 6 \times C(4,3)$

Δείχνουμε λοιπόν με το τρόπο αυτό ότι: $P(n,k) = P(k,k) \times C(n,k)$

Από τη παραπάνω σχέση καταλήγουμε ότι:

$$C(n,k) = \frac{P(n,k)}{P(k,k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Παραδείγματα

1. Η πιθανότητα να τραβήξουμε 3 συγκεκριμένα χαρτιά απο μια τράπουλα 52 χαρτιών. Το πλήθος των δυνατών 3-συγκεκριμένων καρτών βρίσκεται αν χωρίσουμε την τράπουλα σε 2 υπο-ομάδες των 3 και $52-3=49$ καρτών. Οπότε το πλήθος θα είναι:

$$\Omega = {}^{49}C_3 = \frac{52!}{3!49!}$$

Κάθε περίπτωση έχει εκ των προτέρων πιθανότητα:

$$p = \frac{1}{\Omega} = \frac{3! \times 49!}{52!} = \frac{6}{52 \times 51 \times 50} = 4.5 \times 10^{-5}$$

2. Έχουμε μια τράπουλα 52 χαρτιών. Ποια η πιθανότητα τραβώντας μια κάρτα να πάρουμε είτε άσο ή σπαθί;

Γενική εφαρμογή του Or θα δώσει:

$$P(\text{άσο OR σπαθί}) = P(\text{άσο}|52) + P(\text{σπαθί}|52) - P(\text{άσο} \cdot \text{σπαθί}|52) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$$

3. Ποια η πιθανότητα ρίχνοντας 2 ζάρια να πάρουμε το ένα να δείχνει 3;

Η πιθανότητα να πάρουμε 3 ρίχνοντας ένα ζάρι είναι $1/6$. Η πιθανότητα να πάρουμε μια οποιαδήποτε άλλη πλευρά είναι $5/6$. Επομένως η πιθανότητα να πάρουμε μια οποιαδήποτε πλευρά ρίχνοντας 2 ζάρια θα είναι $5/6 \times 5/6 = 25/36$. Άρα η πιθανότητα να πάρουμε 3 τουλάχιστον από ένα ζάρι θα είναι $1 - 25/36 = 11/36$

Απόδοση τιμών στις πιθανότητες

(Γ) Χρησιμοποίηση επιπλέον πληροφορίας – Θεώρημα Bayes

Η πιθανότητα που δίνουμε σε κάποια υπόθεση εξαρτάται από τη πληροφορία που έχουμε. Όταν περισσότερη πληροφορία γίνεται προσβάσιμη οπότε η ολική πληροφορία είναι $E \cdot I$ τότε η πιθανότητα θα αλλάξει. Η διαφορά στη τιμή της πιθανότητας πριν και μετά την απόκτηση επιπλέον πληροφορίας αποτελεί το

$$\text{Θεώρημα Bayes: } P(A | E \cdot I) = P(A | I) \frac{P(E | A \cdot I)}{P(E | I)}$$

Παράδειγμα:

Υπόθεση, A: υπάρχει ζωή στον Άρη

Πληροφορία, I: γενικά γνωστά στοιχεία για τον Άρη

Επιπλέον πληροφορία E: υπάρχει νερό στον Άρη

Πιθανότητες:

$P(A|I)$: πιθανότητα ζωής στον Άρη δεδομένης της I

$P(A|E \cdot I)$: πιθανότητα ζωής στον Άρη δεδομένης επίσης της E ότι υπάρχει νερό

$P(E|A \cdot I)$: πιθανότητα ύπαρξης νερού στον Άρη δεδομένου ότι υπάρχει ζωή

$P(E|I)$: πιθανότητα ύπαρξης νερού στον Άρη δεδομένης της I

Από τη στιγμή που η ζωή όπως τη ξέρουμε απαιτεί νερό $P(E | A \cdot I) = 1$

Από τη στιγμή που πληροφορία I δεν είναι αρκετή να εξασφαλίζει νερό, $P(E | I) < 1$

$$\text{Από το θεώρημα Bayes: } \frac{P(A | E \cdot I)}{P(A | I)} = \frac{P(E | A \cdot I)}{P(E | I)} = \frac{1}{P(E | I)} > 1$$

Θεώρημα Bayes – Conditional Probability

Έστω $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ένα σύνολο από n αποκλειστικές (μη αλληλεπικαλύψιμες) υποθέσεις οι οποίες όλες μαζί περιγράφουν ένα σύνολο S . Έστω E είναι μια υπόθεση από το σύνολο S η οποία έχει πιθανότητα $P(E|S) > 0$.

Τότε η πιθανότητα $P(A_k|E)$ δίνεται από:

$$P(A_k | E \bullet S) = \frac{P(A_k \bullet E | S)}{P(A_1 \bullet E | S) + P(A_2 \bullet E | S) + \dots + P(A_n \bullet E | S)} \quad \text{Θεώρημα Bayes}$$

Αλλά: $P(A_k \bullet E | S) = P(A_k | S)P(E | A_k \bullet S)$ και επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$P(A_k | E \bullet S) = \frac{P(A_k | S)P(E | A_k \bullet S)}{P(A_1 | S)P(E | A_1 \bullet S) + P(A_2 | S)P(E | A_2 \bullet S) + \dots + P(A_n | S)P(E | A_n \bullet S)}$$

Παράδειγμα:

Έστω η Μαρία ετοιμάζει το ψήσιμο του οβελία για το πάσχα στην ύπαιθρο. Τα τελευταία χρόνια βρέχει πολύ σπάνια, μόνο 5 μέρες το χρόνο. Ο μετεωρολόγος δυστυχώς έχει προβλέψει βροχή για το πάσχα. Όταν βρέχει, ο μετεωρολόγος προβλέπει ότι θα βρέξει με επιτυχία 90%. Όταν δεν βρέχει, ο μετεωρολόγος προβλέπει 10% πιθανότητα βροχής. Ποια η πιθανότητα να βρέξει το πάσχα?

Bayes θεώρημα

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, το σύνολο των δυνατών καταστάσεων προσδιορίζεται από 2 αμοιβαίως μη αλληλεπικαλυπτόμενες καταστάσεις, **να βρέξει** ή **να μη βρέξει**. Υπάρχει μια επιπλέον περίπτωση, αυτή που καθορίζεται από την πρόβλεψη του μετεωρολόγου για βροχή. Θα έχουμε:

A_1 : Θα βρέξει τη μέρα του Πάσχα

A_2 : Δε θα βρέξει τη μέρα του Πάσχα

E : Ο μετεωρολόγος προβλέπει βροχή

Με βάση τις πιθανότητες θα έχουμε:

$$P(A_1) = 5 / 365 = 0.0136985 \quad \text{βρέχει 5 μέρες το χρόνο}$$

$$P(A_2) = 360 / 365 = 0.9863014 \quad \text{Δεν βρέχει 360 μέρες το χρόνο}$$

$$P(E | A_1) = 0.90 \quad \text{Όταν βρέχει, ο μετεωρολόγος προβλέπει βροχή 90\%}$$

$$P(E | A_2) = 0.10 \quad \text{Όταν δεν βρέχει, υπάρχει πρόβλεψη για βροχή 10\%}$$

Από το θεώρημα Bayes έχουμε:

$$P(A_1 | E) = \frac{P(A_1)P(E | A_1)}{P(A_1)P(E | A_1) + P(A_2)P(E | A_2)} = \frac{0.014 \times 0.9}{0.014 \times 0.9 + 0.986 \times 0.1} = 0.111$$

Θεώρημα Bayes – παράδειγμα

Δίνονται 2 συρτάρια (A,B) στα οποία περιέχονται 2 χρυσά νομίσματα στο ένα συρτάρι ενώ στο άλλο συρτάρι υπάρχουν 1 χρυσό και 1 ασημένιο νόμισμα. Ωστόσο δεν μπορείτε να δείτε το περιεχόμενο των συρταριών. Αν κάποιος τραβήξει τυχαία ένα νόμισμα από το συρτάρι A και αυτό είναι χρυσό, ποια η πιθανότητα το συρτάρι αυτό περιέχει ακόμα ένα χρυσό νόμισμα;

Γεγονός	Περιγραφή	Πιθανότητα
A_1	Το συρτάρι A έχει 2 χρυσά νομίσματα	0.5
B	Επιλογή ενός χρυσού νομίσματος από τα 4 νομίσματα	0.75
$B A_1$	Πιθανότητα να διαλέξουμε 1 χρυσό νόμισμα όταν το συρτάρι έχει 2 χρυσά νομίσματα	1

$$P(A|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} = \frac{0.5 \times 1}{0.5 \times 1 + 0.5 \times 0.5} = \frac{2}{3} = 0.666$$

Αναμενόμενη τιμή

Ορισμός

Η πυκνότητα πιθανότητας, PD, εκφράζει τα πάντα τα οποία χρειάζεται να γνωρίζουμε σχετικά με την σχετιζόμενη τυχαία μεταβλητή

Αλλα η PD μπορεί να χαρακτηριστεί απλά από 2 ιδιότητές της: **τη μέση τιμή** και τη **διασπορά της**

Οι δυο αυτές χαρακτηριστικές της PD είναι ειδικές περιπτώσεις της γενικότερης έννοιας της αναμενόμενης τιμής

Έστω $g(x)$ μια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής x .

Η αναμενόμενη τιμή της $g(x)$ δίνεται

$$\langle g(x) \rangle = \begin{cases} \sum_i p(x_i) g(x_i) & \text{αν η } X \text{ είναι διακριτή} \\ \int f(x) g(x) dx & \text{αν η } X \text{ είναι συνεχής} \end{cases}$$

Η αναμενόμενη τιμή της $g(x)$ συμπίπτει με τη μέσο όρο μεγάλου αριθμού παρατηρήσεων της $g(x)$

Κανόνες

Μερικοί απλοί αλλά σημαντικοί κανόνες

$$\langle g_1(x) + g_2(x) \rangle = \langle g_1(x) \rangle + \langle g_2(x) \rangle$$

Αν a είναι σταθερά ανεξάρτητη του X τότε: $\langle a \rangle = a$ και $\langle ag(x) \rangle = a \langle g(x) \rangle$

Αναμενόμενη τιμή

Μέση τιμή

Η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι εξ'ορισμού η αναμενόμενη τιμή της

$$\langle x \rangle = \begin{cases} \sum_i p(x_i) x_i & \text{αν η } X \text{ είναι διακριτή} \\ \int dx f(x) x & \text{αν η } X \text{ είναι συνεχής} \end{cases}$$

Η μέση τιμή συμπίπτει με το μέσο όρο για μεγάλες τιμές παρατηρήσεων της x

Παραδείγματα

1. Μέση τιμή μια διακριτής μεταβλητής

Έστω X το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού. Η X πέρνει τιμές $x_i=1,2,3,\dots,6$ με πιθανότητα $p(x_i)=1/6$. Η μέση τιμή (ή αναμενόμενη τιμή) της x είναι:

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^6 p(x_i) x_i = p \sum_{i=1}^6 x_i = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2}$$

2. Μέση τιμή μιας συνεχούς μεταβλητής

Έστω X μια συνεχής μεταβλητή που επιλέγεται τυχαία στο διάστημα $[1,6]$

Η X έχει τότε PDF:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & 1 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases}$$

Επομένως η μέση τιμή θα είναι: $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x dx = \frac{1}{5} \frac{x^2}{2} \Big|_1^6 = \frac{7}{2}$

Διασπορά και τυπική απόκλιση

Η διασπορά $V[x]$ μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι η αναμενόμενη τιμή του τετραγώνου της απόκλισής της από τη μέση τιμή:

$$V[x] = \begin{cases} \sum_i p(x_i) (\Delta x_i)^2 & \text{όπου } \Delta x_i = x_i - \langle x \rangle \quad \text{και } x \text{ διακριτή} \\ \int f(x) dx (\Delta x)^2 & \text{όπου } \Delta x = x - \langle x \rangle \quad \text{και } x \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Μπορούμε να γράψουμε ακόμα: $V[x] = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$

Η τυπική απόκλιση μια τυχαίας μεταβλητής X είναι η τετραγωνική ρίζα της διασποράς της $\sigma(x) = \sqrt{V[x]}$

Η Διωνυμική κατανομή

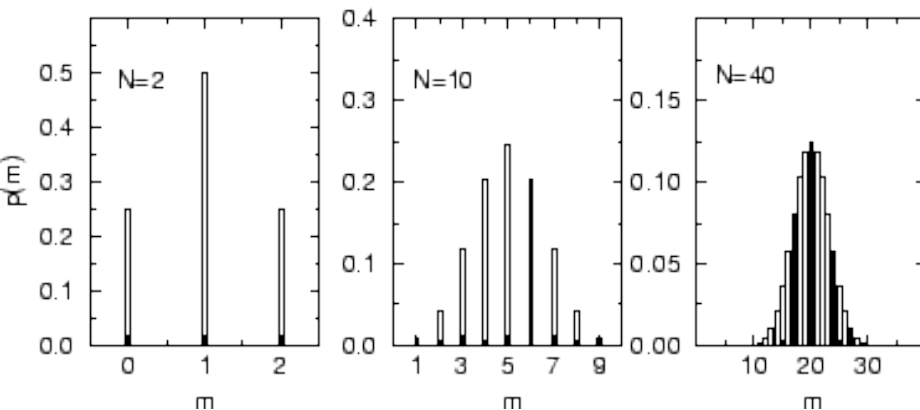
Έστω ότι ρίχνουμε ένα κέρμα N φορές. Ποια η πιθανότητα να πάρουμε m φορές τη μια όψη του?

Η πιθανότητα αυτή δίνεται από τη διωνυμική κατανομή η οποία λέει ότι:

Αν μια προσπάθεια η οποία δίνει επιτυχία με πιθανότητα p , τεθεί σε δοκιμή N φορές, η πιθανότητα $p(m)$ να βρούμε ακριβώς m επιτυχίες δίνεται από τη σχέση:

$$p(m) = {}^N C_m p^m (1-p)^{(N-m)} \quad \text{με} \quad {}^N C_m = \frac{N!}{m!(N-m)!}$$

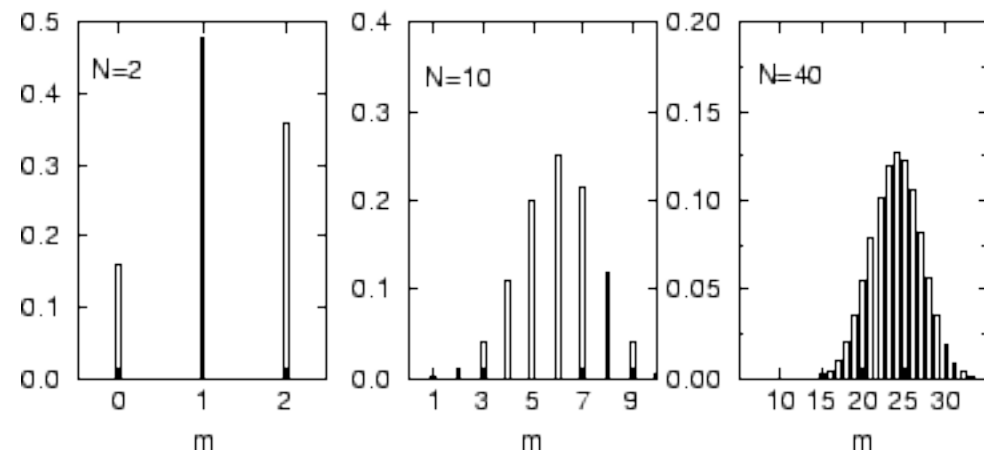
BINOMIAL DISTRIBUTION: $p=q=0.5$



Κανονικό νόμισμα

Κάλπικο νόμισμα

BINOMIAL DISTRIBUTION: $p=0.6, q=0.4$



Ιδιότητες της διονυμικής κατανομής

μέση τιμή: $\langle m \rangle \equiv \sum_{m=0}^N m p(m) = Np$

διασπορά: $V[m] \equiv \langle \Delta m^2 \rangle \equiv \sum_{m=0}^N (m - \langle m \rangle)^2 p(m) = Npq$

τυπική απόκλιση: $\sigma \equiv \sqrt{V[m]} = \sqrt{Npq}$

Η διονυμική κατανομή προσδιορίζεται από δυο παραμέτρους N και p.

Η μέση τιμή αυξάνει γραμμικά με τον αριθμό των προσπαθειών ενώ η τυπική απόκλιση μόνο συναρτήσει της τετραγωνικής ρίζας N

Παράδειγμα – τυχαίος περίπατος

Ένας μεθυσμένος κινείται από στύλο σε στύλο καθώς προσπαθεί να γυρίσει στο σπίτι του. Σε κάθε κολόνα σταματά για λίγο και συνεχίζει. Κάθε φορά που σταματά μπορεί να κινηθεί εξίσου προς ή μακριά από το σπίτι του. Αν οι κολόνες απέχουν απόσταση a ποια είναι η μέση τιμή και η απόκλιση της μετατόπισής του d από το σημείο εκκίνησής του μετά από N βήματα;

Έστω n_R ο αριθμός των βημάτων προς το σπίτι του και n_L ο αριθμός των βημάτων στη λάθος κατεύθυνση: $n_L = N - n_R$

Η μετατόπισή του d από το σημείο εκκίνησης είναι: $d = (n_R - n_L)a = (2n_R - N)a$

Θεωρούμε σα προσπάθεια ένα βήμα, ενώ σαν επιτυχία ένα βήμα το σπίτι του

Επομένως n_R είναι κατανεμημένη διονυμικά με πιθανότητα $p=1/2$

Η μέση τιμή και διασπορά της n_R είναι: $\langle n_R \rangle = Np = \frac{N}{2}$ και $V[n_R] = \langle [\Delta n_R]^2 \rangle = Npq = \frac{N}{4}$

Η μέση τιμή της μετατόπισης είναι: $\langle d \rangle = \langle a[2n_R - N] \rangle = a(2\langle n_R \rangle - N) = a(N - N) = 0$

Η διασπορά της μετατόπισης είναι: $\langle \Delta d^2 \rangle = \langle (d - \langle d \rangle)^2 \rangle = \langle [a(2n_R - N - \langle 2n_R - N \rangle)]^2 \rangle$

$$\langle \Delta d^2 \rangle = \langle [a(2n_R - N - 2\langle n_R \rangle + N)]^2 \rangle = \langle [2a(n_R - \langle n_R \rangle)]^2 \rangle = \langle [2a\Delta n_R]^2 \rangle = 4a^2 \langle \Delta n_R^2 \rangle$$

$$\text{Αλλά } V[n_R] = \langle [\Delta n_R]^2 \rangle \text{ οπότε } \langle \Delta d^2 \rangle = 4a^2 V[n_R] \Rightarrow V[d] = 4a^2 V[n_R] \Rightarrow V[d] = 4a^2 \frac{N}{4} = a^2 N$$

Κατανομή Poisson

Η κατανομή Poisson είναι ειδική περίπτωση της διονυμικής κατανομής όταν:

Η πιθανότητα, p , μιας προσπάθειας να δώσει επιτυχία είναι μικρή (πηγαίνει στο 0)

Ο αριθμός των προσπαθειών είναι μεγάλος (πηγαίνει στο άπειρο)

Ο μέσος αριθμός επιτυχιών, Np , είναι συγκεκριμένος αριθμός (δεν πηγαίνει στο 0 ή στο άπειρο)

Για την διονυμική κατανομή μπορούμε να γράψουμε:

$p \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ ενώ Np δεν είναι 0 ή άπειρο

$$p(m) = e^{-\langle m \rangle} \frac{\langle m \rangle^m}{m!} \quad \text{Poisson κατανομή}$$

Ιδιότητες της κατανομής Poisson:

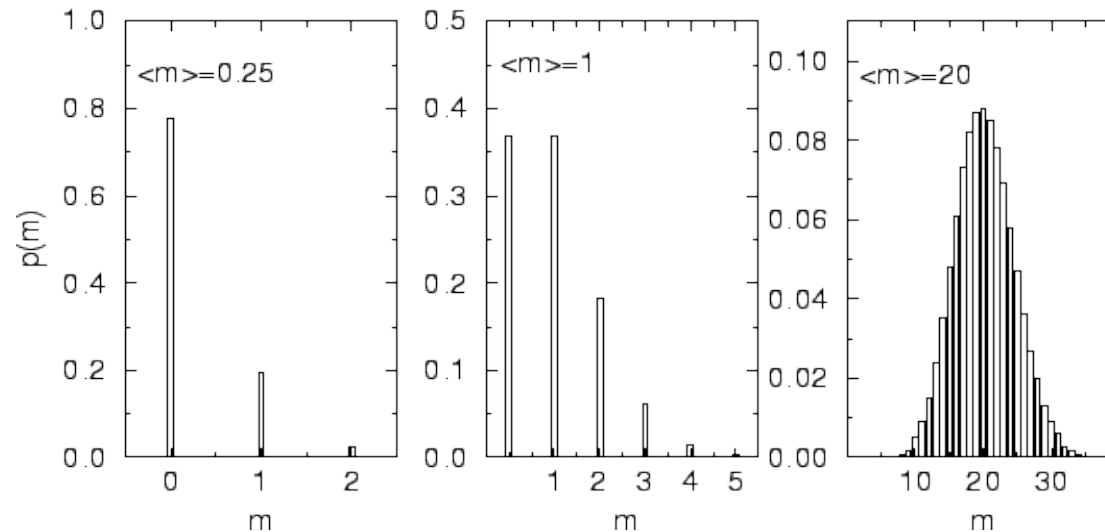
Στο Poisson όριο της διονυμικής κατανομής, η τυπική απόκλιση δίνεται από

$$\sigma[m] = \sqrt{Npq} = \sqrt{Np(1-p)} \approx \sqrt{Np} = \sqrt{\langle m \rangle}$$

Επομένως η Poisson κατανομή προδιορίζεται από την $\langle m \rangle$

Παραδείγματα

POISSON DISTRIBUTION



Κατά τη διάρκεια μιας βροχής μετεωριτών, παρατηρούμε ότι μετεωρίτες πέφτουν με ρυθμό 12.2/h. Υπολογίστε τη πιθανότητα να παρατηρήσετε λιγότερο από 2 σε 0.5h

$$p(m) = e^{-\langle m \rangle} \frac{\langle m \rangle^m}{m!} \quad \text{όπου } \langle m \rangle = 6.1/(0.5h)$$

Η πιθανότητα να ανιχνεύσουμε < 2 είναι:

$$p(m < 2) = p(m = 0) + p(m = 1) = e^{-\langle m \rangle} (1 + \langle m \rangle) = 0.016$$