ΦΥΣ 140 – Εισαγωγή στην Επιστημονική Χρήση των Υπολογιστών

9 Δεκέμβρη 2021

Συμπληρώστε τα στοιχεία σας στο παρακάτω πίνακα τώρα

Ονοματεπώνυμο	
Αρ. Ταυτότητας	

Δημιουργήστε ένα φάκελο στο home directory σας με το όνομα **Final** (όχι άλλα ονόματα). Θα πρέπει να δουλέψετε όλα τα προβλήματα της εξέτασης στο φάκελο αυτό και πουθενά αλλού.

Σας δίνονται 5 προβλήματα και θα πρέπει να απαντήσετε σε όλα. Συνολική βαθμολογία 100 μονάδες. Διαβάστε όλα τα προβλήματα και αρχίστε να δουλεύετε πρώτα με αυτά που αισθάνεστε ότι δεν θα σας πάρει πολύ χρόνο για να λύσετε. Η σειρά των προβλημάτων δεν είναι ενδεικτική της δυσκολίας τους.

Όλα τα προγράμματα σας θα πρέπει να ονομάζονται ανάλογα με την άσκηση (π.χ. *askisi1.py*) και για να βαθμολογηθούν θα πρέπει να κάνουν τουλάχιστον compile.

Ο χρόνος εξέτασης είναι 4 ώρες.

Επιτρέπεται: η χρήση του υλικού των ιστοσελίδων και μόνο του μαθήματος, καθώς και οι ασκήσεις/λύσεις των εργαστηρίων και κατ' οίκον εργασιών που έχετε δώσει και σας έχουν επιστραφεί. ***Απαγορεύονται:*** η συνεργασία/συζήτηση και οποιαδήποτε ανταλλαγή αρχείων, η χρήση e-mail καθώς και η χρήση κινητών τηλεφώνων τα οποία θα πρέπει να απενεργοποιηθούν τώρα.

Στο τέλος της εξέτασης θα πρέπει να κάνετε tar ολόκληρο τον directory *final* στον οποίο δουλεύατε και να στείλετε το *tar* file με e-mail στο *fotis@ucy.ac.cy*

Καλή επιτυχία

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. [**20μ**] Παίζετε ένα παιχνίδι στο οποίο ρίχνετε ένα νόμισμα 5 φορές. Για να παίξετε στο παιχνίδι θα πρέπει να πληρώσετε €1. Αν η όψη που φαίνεται στη διπλανή εικόνα έρθει 3 φορές τότε σας πληρώνουν €3. Να γράψετε ένα πρόγραμμα σε *Python* το οποίο προσδιορίζει αν μετά από κάποιο μεγάλο χρονικό διάστημα (καθορίζεται από τον αριθμό των παιγνιδιών που παίζετε) θα κερδίσετε ή θα χάσετε χρήματα παίζοντας αυτό το παιγνίδι.

2. [**20μ**] Θεωρήστε τη διαφορική εξίσωση: $y'(t) = \frac{y(1-y)}{2y-1}$ με $y(t=0) = 5/6$, η λύση της οποίας είναι $y(t) = \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{36}e^{-t}\right]^{1/2}$.

(**α**) Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο λύνει τη διαφορική αυτή εξίσωση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Euler για το χρονικό διάστημα t = 0 έως 2. [**6μ**]

(**β**) Κάντε τη γραφική παράσταση των αποτελεσμάτων της αριθμητικής και της αναλυτικής λύσης στο ίδιο γράφημα χρησιμοποιώντας χρονικό βήμα 0.1 και χρονικό βήμα 0.0001. [**2μ**]

(**γ**) Θα πρέπει επίσης να κάνετε ένα γράφημα του λογάριθμου του σχετικού σφάλματος, |(αναλυτική – αριθμητική)|/αναλυτική, συναρτήσει του λογαρίθμου του χρονικού βήματος, για τη χρονική στιγμή $t = 2s$. Τα χρονικά βήματα, *dt*, θα πρέπει να ξεκινούν από την τιμή 0.1 έως την τιμή 0.0001 ελαττώνοντας κάθε φορά κατά 5. [**5μ**]

(**δ**) Συγκρίνετε το αποτέλεσμα που βρήκατε για τη χρονική στιγμή $t = 2s$ και για χρονικό βήμα 0.0001s με το αποτέλεσμα που βρίσκετε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ολοκλήρωσης του ενδιάμεσου σημείου για το ίδιο χρονικό διάστημα, $[0,2]$ και για χρονικό βήμα 0.0001s. [**7μ**]

3. [**20μ**] Το πολυώνυμο Legendre τάξης L ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$P(L,x) = A(L)\sum_{r=0}^{r=L/2}\left[B(L,r)x^{(L-2r)}\right]$$

όπου$A(L) = 1/2^L$ και $B(L,r)$ δίνεται από τη σχέση:

$$B(L,r) = (-1)^r \frac{(2L-2r)!}{[r!\,(L-r)!\,(L-2r)!]}$$

Στο πρόβλημα αυτό θα μελετήσετε το πολυώνυμο Legendre τάξης L = 8.

Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να έχει τα ακόλουθα στοιχεία:

(**α**) Μια συνάρτηση, *FACT*, η οποία υπολογίζει το παραγοντικό ενός ακεραίου που περνάτε. [**2μ**]

(**β**) Μια συνάρτηση, *LEGENDRE*, η οποία υπολογίζει την τιμή του πολυωνύμου Legendre $P(8,x)$ για κάποια τιμή του x που περνάτε. [**4μ**]

(**γ**) Θα πρέπει να γράψετε ένα κύριο πρόγραμμα το οποίο δέχεται από το πληκτρολόγιο την αρχική τιμή του x για την οποία θα πρέπει να υπολογίσετε το $P(8,x)$. Η αρχική αυτή τιμή είναι $x = -1$. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να υπολογίζει την τιμή του πολυωνύμου για όλες τις τιμές του x στο διάστημα $[-1.0, 1.0]$ με βήμα $\delta x = 0.05$. Θα πρέπει να γράψετε τις τιμές του x και τις αντίστοιχες τιμές του πολυωνύμου $P(8,x)$ σαν ζεύγη, σε ένα file το οποίο ονομάζεται *Legendre.dat*. [**4μ**]

(**δ**) Βλέποντας το file αυτό θα παρατηρήσετε ότι $P(8,x)$ έχει 4 ρίζες στο διάστημα $[-1.0, 0.0]$. Επειδή το πολυώνυμο είναι συμμετρικό ως προς x, αυτές οι ρίζες θα είναι συμμετρικές και θα υπάρχουν και στο διάστημα $[-1.0, 0.0]$. Επομένως βρίσκοντας τις 4 αρνητικές ρίζες θα έχουμε βρει και τις 4 θετικές. Θα πρέπει τώρα να προσθέσετε στο πρόγραμμά σας μια συνάρτηση, *NEWTON*, η οποία υπολογίζει την ρίζα μιας συνάρτησης, η οποία βρίσκεται ανάμεσα σε δυο τιμές x_1 και x_2 που περνάτε σαν ορίσματα στην συνάρτηση *NEWTON*. Η συνάρτηση *NEWTON* θα πρέπει να έχει δυο ακόμα ορίσματα, την συνάρτηση την ρίζα της οποίας θέλετε να βρείτε και την ακρίβεια με την οποία θέλετε να βρείτε τη ρίζα. Θεωρήστε ότι η ακρίβεια που θέλετε να πετύχετε για την εύρεση της ρίζας είναι ε = 0.000001 (6ου δεκαδικού ψηφίου). Η τιμή της ρίζας θα είναι αυτή για την οποία είτε η τιμή του $|P(8,x)| < \varepsilon$ ή $|x_1 - x_2| < \varepsilon$. Το πρόγραμμά σας θα πρέπει να τυπώνει και τις ρίζες τις οποίες βρίσκετε σε ένα file το οποίο ονομάζεται *LegendreRoots.dat*.

Υπόδειξη: Μπορείτε να προσεγγίσετε τη παράγωγο του πολυωνύμου από την κλίση της ευθείας που ορίζεται από τα σημεία x_1 και x_2 και τις αντίστοιχες τιμές του πολυωνύμου [**7μ**]

(**ε**) Κάντε την γραφική παράσταση των τιμών του πολυωνύμου $P(8,x)$ συναρτήσει του x χρησιμοποιώντας τις τιμές που έχετε αποθηκεύσει στο file *Legendre.dat* στο (**γ**) ερώτημα. Το γράφημα που θα πρέπει να έχει κατάλληλα ονοματισμένους άξονες θα πρέπει να το αποθηκεύσετε στο αρχείο *Legendre.pdf*. [**3μ**]

4. [**20μ**] Υποθέστε ότι κάποιο άτομο αποφασίζει να αυξήσει τα χρήματά του πηγαίνοντας σε ένα καζίνο. Αρχικά το άτομο έχει €M και αποφασίζει να στοιχηματίζει μέχρι να φθάσει σε κάποιο ποσό €N, όπου $N > M$, ή να χάσει όλα τα χρήματά του (το καζίνο δεν κάνει πιστώσεις). Το παιχνίδι που δοκιμάζει είναι ρουλέτα και σε κάθε παιχνίδι χάνει €1 ή κερδίζει €1 ποντάροντας στο κόκκινο. Ο παίκτης παίζει μέχρι είτε να φθάσει στο χρηματικό ποσό του στόχου του ή να χάσει όλα τα χρήματά του.

(**α**) Ποια είναι η πιθανότητα να φθάσει ο παίκτης το στόχο του συναρτήσει του λόγου $k = N/M$; [**13μ**]

(**β**) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της πιθανότητας να κερδίσει συναρτήσει της ποσότητας k για 2 διαφορετικές τιμές προσομοιώσεων Monte Carlo, χρησιμοποιώντας κατάλληλα ονοματισμένους άξονες. [**5μ**].

(**γ**) Πόσα παιχνίδια θα παίξει κατά μέσο όρο ώστε είτε να πετύχει το στόχο του ή να χρεωκοπήσει; [**2μ**]

5. [**20μ**] Ένα βλήμα βάλλεται από την επιφάνεια της Γης με αρχική ταχύτητα, $\upsilon_0 = 1000 m/s$ και γωνία 35º ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Υποθέτουμε ότι η πυκνότητα του αέρα μεταβάλλεται συναρτήσει του ύψους στο οποίο βρίσκεται το βλήμα σύμφωνα με τη σχέση $\rho(y) = \rho(y=0)e^{-y/h}$, όπου h είναι μια σταθερά που δείχνει το ύψος στο οποίο η πυκνότητα έχει ελαττωθεί κατά e^{-1}. Ο συντελεστής της αντίστασης του αέρα είναι $B/m = 4 \times 10^{-5} m^{-1}$ (όπου ο όρος m στη σχέση B/m είναι η μάζα του σώματος). Η δύναμη της αντίστασης του αέρα έχει τη μορφή $F_d = -B\frac{\rho}{\rho_0}\upsilon^2$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας, g, έχει την τιμή $g = 9.8 m/s^2$ στην επιφάνεια της Γης αλλά μεταβάλλεται με το ύψος στο οποίο βρίσκεται το βλήμα σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης. Το πρόβλημα αυτό δεν έχει αναλυτική λύση. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Euler-Cromer:

(**α**) Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο λύνει αριθμητικά το παραπάνω πρόβλημα. [**10μ**]

(**β**) Βρείτε τη διαφορά στο μέγιστο ύψος και στο βεληνεκές που υπολογίζετε όταν η πυκνότητα του αέρα και η επιτάχυνση της βαρύτητας παραμένουν σταθερές και ανεξάρτητες της θέσης του σώματος. [**6μ**]

(**γ**) Να γίνουν οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις του ύψους συναρτήσει του χρόνου, της οριζόντιας μετατόπισης του βλήματος συναρτήσει του χρόνου καθώς και της τροχιάς του βλήματος και να συγκριθούν στο ίδιο γράφημα και για τις δύο περιπτώσεις κίνησης του προβλήματος. [**4μ**]

Το βλήμα υποτίθεται ότι επιστρέφει και πάλι στη Γη. Επομένως θα πρέπει να κάνετε τόσα βήματα ώστε το βλήμα να χτυπήσει στο έδαφος.

Δίνονται:
Χρονικό βήμα: $dt = 0.1s$
Ο νόμος της παγκόσμιας έλξης: $F_g = Gm_1m_2/r^2$.
Η σταθερά της παγκόσμιας έλξης: $G = 6.67259 \times 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$.
Η μάζα της γης είναι: $M_\Gamma = 5.972 \times 10^{24} kg$.
Η ακτίνα της Γης: $R_\Gamma = 6.37815 \times 10^6 m$.
Η σταθερά h στη μεταβολή της πυκνότητας του αέρα: $h = 1 \times 10^4 m$.
Η πυκνότητα του αέρα στην επιφάνεια της Γης: $\rho(\,y = 0) = 1.2 kg/m^3$.
Όλες οι μονάδες δίνονται στο σύστημα MKS.