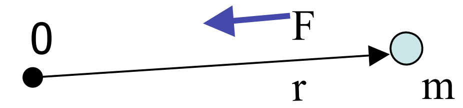
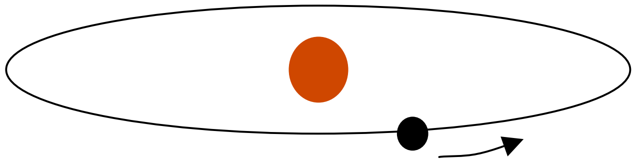
Κίνηση σε κεντρικό δυναμικό

- Θεωρείστε ένα σωματίδιο κάτω από την επίδραση μιας κεντρικής δύναμης
  - Δύναμη παράλληλη στο r



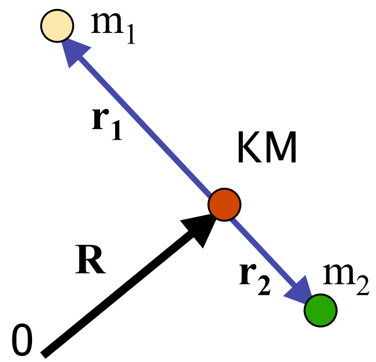
- Υποθέτουμε ότι η δύναμη είναι συντηρητική
  - V είναι συνάρτηση του |r| αν η F είναι κεντρική $F = -\nabla V(r)$
- Τέτοια συστήματα είναι πολύ συνηθισμένα
  - Πλανήτης γύρω από τον ήλιο
  - Δορυφόρος γύρω από την γη
  - Ηλεκτρόνιο γύρω από το πυρήνα



➢ Τα παραδείγματα αυτά υποθέτουν ότι το σώμα στο κέντρο είναι αρκετά βαρύ και δεν κινείται

Πρόβλημα δύο σωμάτων

- Θεωρήστε 2 σώματα χωρίς εξωτερική δύναμη
  - $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ σχετικά με το κέντρο μάζας
- Η Lagrangian γράφεται:



$$\mathcal{L} = \frac{(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2}{2} + \sum_{i=1}^{2} \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} - V(\vec{r})$$

Κίνηση του ΚΜ

Κίνηση γύρω από το ΚΜ

Δυναμικό είναι συνάρτηση του

$$|\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$$

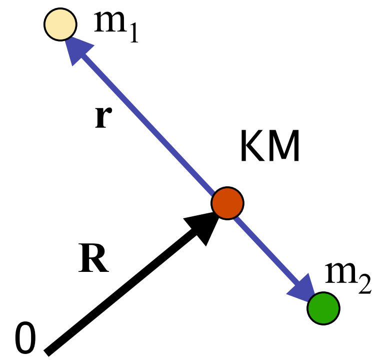
Ισχυρός νόμος δράσης - αντίδρασης

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{(m_1 + m_2)}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)}\vec{r}$$

$$\sum_{1}^{2} \frac{m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}\dot{\mathbf{r}}^2$$

Δύο Σώματα – Κεντρική Δύναμη

$$\mathcal{L} = \frac{(m_1+m_2)\dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r)$$



- R είναι κυκλική
  - Κ.Μ. κινείται με σταθερή ταχύτητα
  - Μετακινούμε το 0 στο Κ.Μ. και δεν χρειάζεται να ασχοληθούμε ξανά

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\dot{\mathbf{r}}^2 - V(r)$$

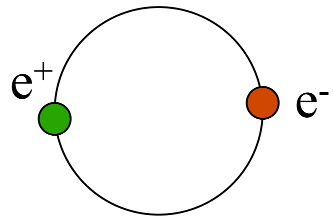
Σχετική κίνηση 2 σωμάτων είναι ταυτόσημη με την κίνηση ενός σωματιδίου σε δυναμικό κεντρικής δύναμης

Ανηγμένη μάζα:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)} \Rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

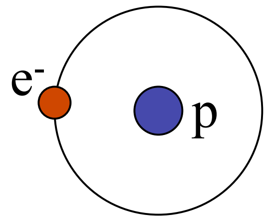
Παράδειγμα: Υδρογόνο και Ποζιτρόνιουμ

- Το ποζιτρόνιουμ είναι μια δέσμια κατάσταση ενός ηλεκτρονίου (e^-) και ενός ποζιτρονίου (e^+)
  - Παρόμοιο με το υδρογόνο αλλά $m(p) >> m(e^+)$
  - Το δυναμικό V(r) είναι ίδιο
  - Μετατρέπουμε σε πρόβλημα κεντρικής δύναμης



$$\mu_{positronium} = \frac{m_e m_e}{(m_e + m_e)} = \frac{\mathrm{m_e}}{2}$$

$$\mu_{\upsilon\delta\rho o\gamma o\nu o} = \frac{m_p m_e}{(m_p + m_e)} \approx m_e$$

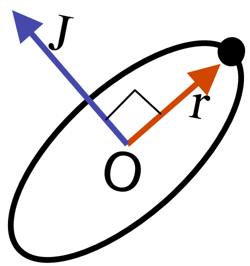


$$V(r) = -\frac{q^2}{r}$$

Το φάσμα του ποζιτρόνιουμ είναι ανάλογο του υδρογόνου με $\mathrm{m_e} \rightarrow \mathrm{m_e}/2$

Σφαιρική συμμετρία

- Σύστημα κεντρικής δύναμης είναι σφαιρικά συμμετρικό
  - Μπορεί να περιστραφεί γύρω από οποιοδήποτε άξονα που περνά από την αρχή του συστήματος
    - H Lagrangian $\mathcal{L} = T(\dot{\vec{r}}^2) - V(r)$ δεν εξαρτάται από τη διεύθυνση
- Η στροφορμή διατηρείται $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} = \sigma\tau\alpha\theta.$
  - Η διεύθυνση της **J** είναι προσδιορισμένη
    - **r** ⊥ **J** εξ' ορισμού → r είναι πάντα σε επίπεδο
- Διαλέγουμε πολικές συντεταγμένες
  - Ο άξονας αζιμούθιου ταυτίζεται με τη διεύθυνση **J**



$$\vec{r} = \vec{r}(r,\theta,\psi) = \vec{r}(r,\theta)$$

Αζιμούθιο

Ζενίθ=1/2 π

Περισσότερο φορμαλιστικά

Η Lagrangian σε σφαιρικές συντεταγμένες $\vec{r} = \vec{r}(r,\theta,\psi)$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\psi\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\psi}^2) - V(r)$$

Η θ είναι κυκλική, αλλά η ψ δεν είναι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = mr^2(\ddot{\psi} - \underline{\sin\psi\cos\psi\dot{\theta}^2}) = 0$$

Μπορούμε να διαλέξουμε τον αζιμουθιακό άξονα ώστε οι αρχικές συνθήκες

$\psi = \pi/2,\quad \dot{\psi} = 0$ Ο δεύτερος όρος 0 $\ddot{\psi} = 0$

Τώρα η ψ είναι σταθερή και μπορούμε να την ξεχάσουμε

Στροφορμή

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

- θ είναι κυκλική. Η συζυγής ορμή p_θ διατηρείται

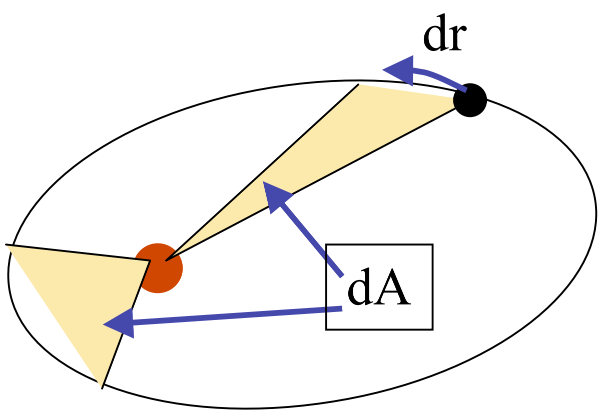
$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \sigma\tau\alpha\theta. \equiv l$$

Μέτρο της στροφορμής

- Διαφορετικά:

Εμβαδική ταχύτητα

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \sigma\tau\alpha\theta$$



- Ο 2ος Νόμος του Kepler
- Ισχύει για κάθε κεντρική δύναμη

Ακτινική κίνηση

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

- Η εξίσωση του Lagrange για r → $\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V(r)}{\partial r} = 0$

  Παράγωγος του δυναμικού V είναι η δύναμη $f(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}$

$$m\ddot{r} = \underbrace{mr\dot{\theta}^2}_{\text{Κεντρομόλος δύναμη}} + \underbrace{f(r)}_{\text{Κεντρική δύναμη}}$$

- Χρησιμοποιώντας την στροφορμή l $\quad l = mr^2\dot{\theta}$

$$m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} + f(r)$$

Διατήρηση Ενέργειας

$$E = T + V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + V(r) = \sigma\tau\alpha\vartheta.$$

$$\Rightarrow \quad \dot{r} = \underline{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}}$$

1ου βαθμού διαφορική εξίσωση του r

Αυτό ποτέ δεν γίνεται αρνητικό

- Μπορεί να λυθεί ως:

$$t = \int_0^t dt = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}} = t(r)$$

- Μετά με αναστροφή t(r) → r(t)
- Κατόπιν υπολογίζεται το θ(t) ολοκληρώνοντας $\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$

Βαθμοί Ελευθερίας

- Ένα σώμα έχει 3 βαθμούς ελευθερίας
  - Η εξίσωση κίνησης είναι 2ου βαθμού διαφορική → 6 σταθερές
- Κάθε νόμος διατήρησης ελαττώνει μια παραγώγιση
  - Λέγοντας ότι «χρονική μερική παράγωγος ισούται με μηδέν»
- Χρησιμοποιήσαμε **J** και E → 4 διατηρήσιμες ποσότητες
  - Μένουμε με μόνο 2 σταθερές ολοκλήρωσης = r_0 και θ_0

- Δεν χρειάζεται εν γένει να χρησιμοποιούμε νόμους διατήρησης
  - Απλά είναι πιο εύκολο από το να λύσουμε όλες τις εξισώσεις Lagrange

Ποιοτική συμπεριφορά

- Ολοκληρώνοντας την ακτινική κίνηση δεν είναι πάντα εύκολο
  - Πολλές φορές είναι αδύνατο

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)}$$

- Μπορούμε ωστόσο να μιλήσουμε για την γενική συμπεριφορά κοιτάζοντας τη σχέση

$$V'(r) \equiv V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$$

Ημί-δυναμικό το οποίο περικλύει την κεντρομόλο δύναμη

Η ενέργεια διατηρείται και E-V′ πρέπει να ναι θετική ποσότητα

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V'(r) \Rightarrow \frac{m\dot{r}^2}{2} = E - V'(r) > 0 \Rightarrow E > V'(r)$$

- Σχεδιάζουμε το V′(r) και κοιτάμε πως τέμνει το διάγραμμα της ενέργειας E

Δύναμη αντιστρόφου του τετραγώνου της r

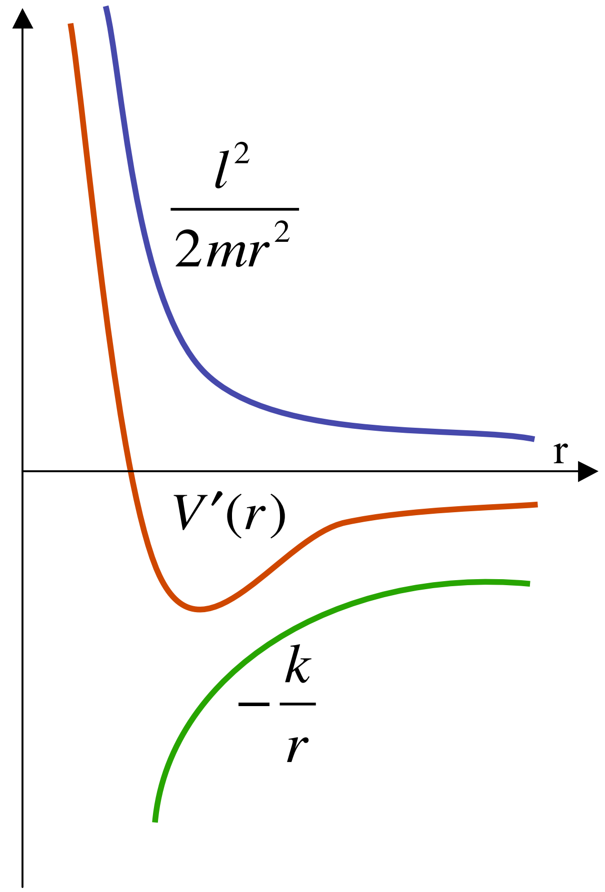
- Θεωρήστε μια ελκτική $1/r^2$ δύναμη

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} \Longrightarrow V(r) = -\frac{k}{r}$$

- Βαρύτητα ή ηλεκτροστατική δύναμη

$$V'(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

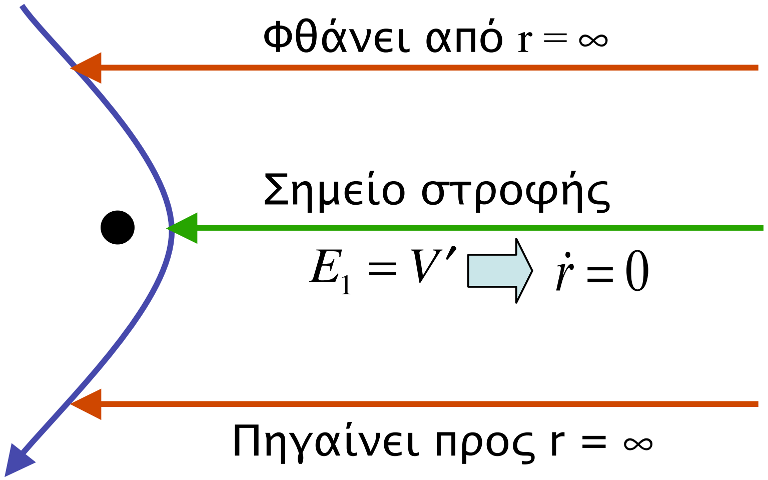
- Η $1/r^2$ δύναμη υπερισχύει σε μεγάλα r
- Η κεντρομόλος δύναμη υπερισχύει σε μικρά r
- Μια «κοιλιά» εμφανίζεται στις μέσες τιμές

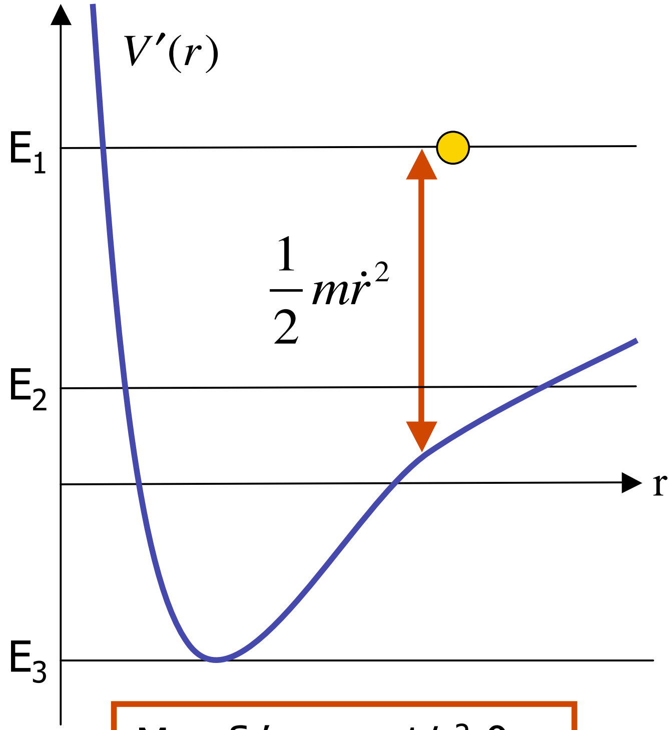


Μη φραγμένη κίνηση

- Πάρετε ένα V′ παρόμοιο με την περίπτωση $1/r^2$
  - Μόνο τα γενικά χαρακτηριστικά ενδιαφέρουν
- $E=E_1 \rightarrow r > r_{min}$
  - Σώμα μπορεί να πάει στο άπειρο

$$E_1 = V'(r_{\min})$$

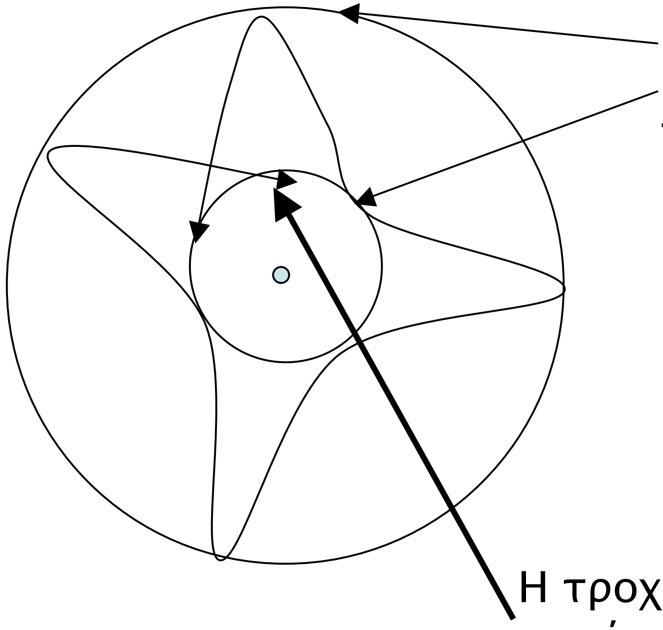


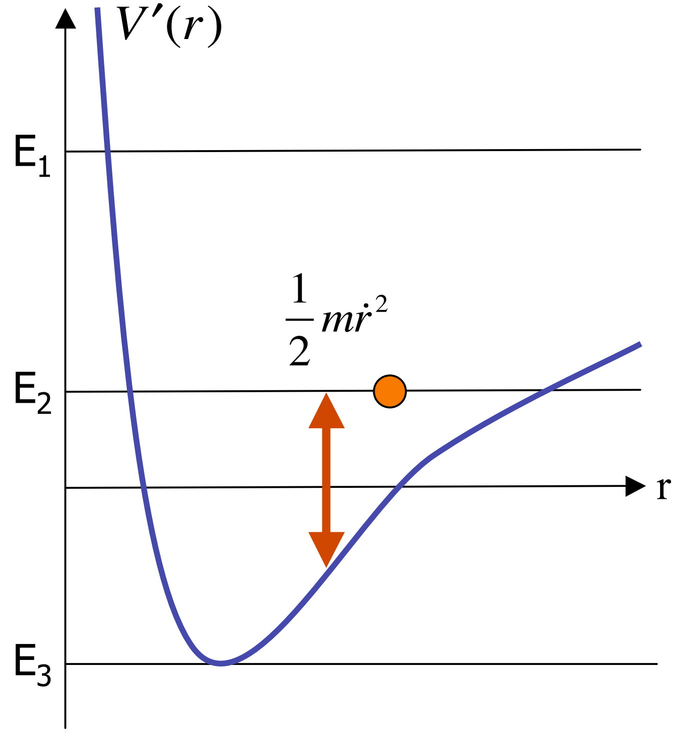


Μια δύναμη $1/r^2$ θα έκανε υπερβολή

Φραγμένη κίνηση

- E=E_2 → $r_{min} < r < r_{max}$
  - Το σώμα είναι περιορισμένο μεταξύ δύο κύκλων

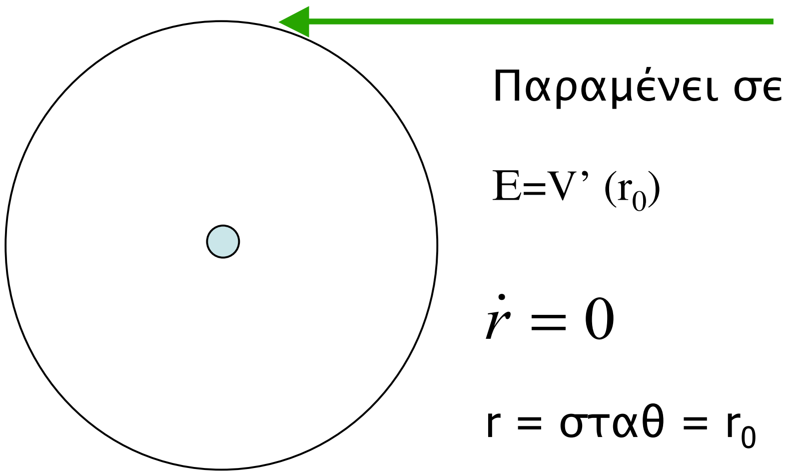




Μια δύναμη $1/r^2$ θα έκανε μια έλλειψη

Κυκλική κίνηση

- E=E3 → r = r_0
  - Μόνο μία ακτίνα επιτρέπεται

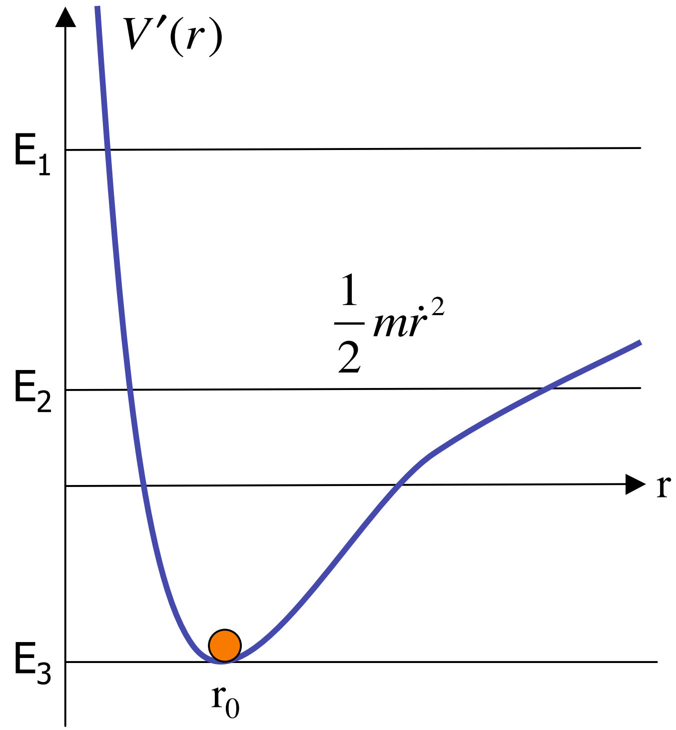


Παραμένει σε κύκλο

$E=V'(r_0)$

$$\dot{r} = 0$$

r = σταθ = r_0

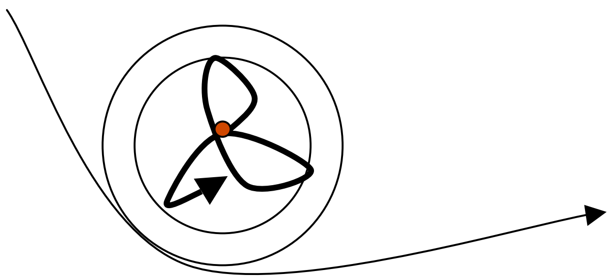


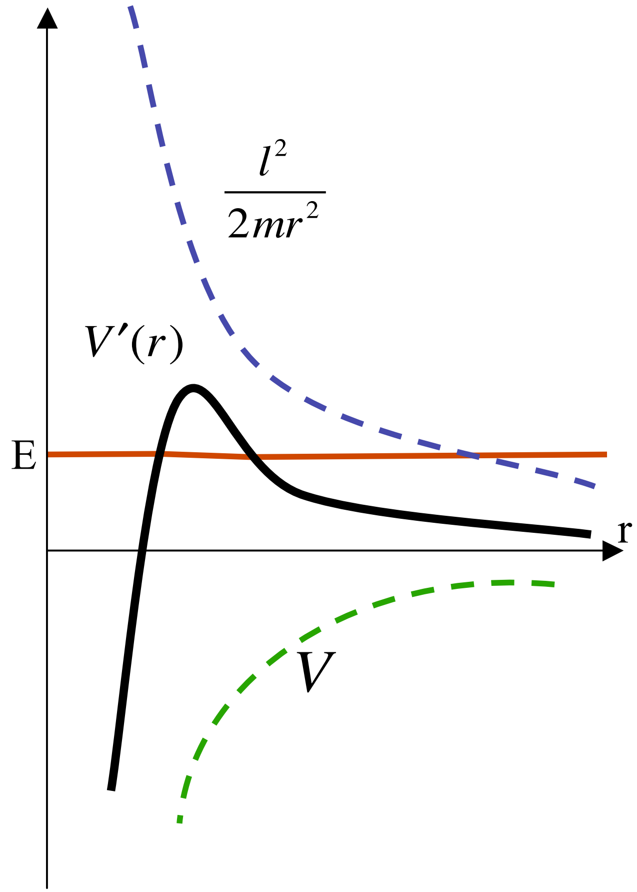
Ο καταχωρισμός σε φραγείς, μη φραγείς και κυκλικές κινήσεις εξαρτάται από το γενικό σχήμα του V'
Όχι από τις λεπτομέρειες ($1/r^2$ ή διαφορετικά)

Άλλο παράδειγμα

$$V = -\frac{a}{r^3} \qquad f = -\frac{3a}{r^4} \qquad \Rightarrow \qquad V'(r) = -\frac{a}{r^3} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

- Ελκτική r^{-4} δύναμη
  - V' έχει κάποια κορυφή
  - Σωματίδιο με ενέργεια Ε μπορεί να είναι φραγμένο ή όχι, ανάλογα από την αρχική r





Ευσταθής κυκλική τροχιά

- Κυκλική τροχιά υπάρχει στο βάθος ενός κοίλους του V′

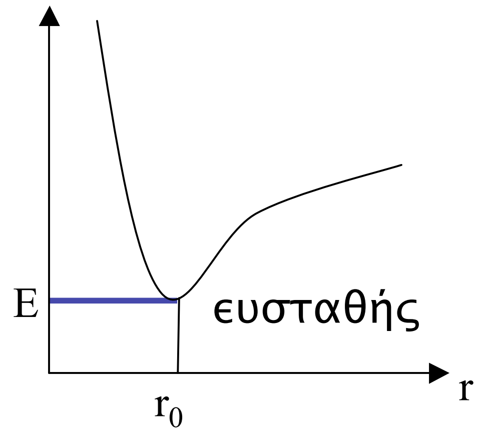
$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - V' = 0 \qquad m\ddot{r}^2 = -\frac{dV'}{dr} = 0$$

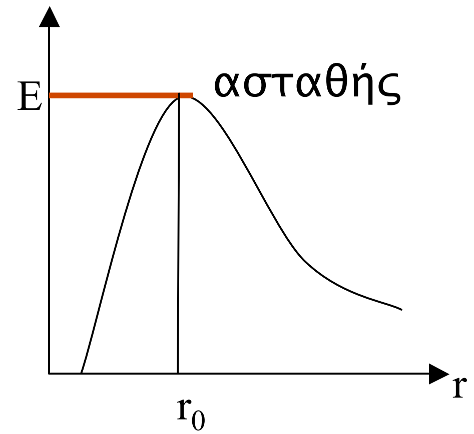
$\Rightarrow$ r = σταθ

- Στην κορυφή ενός κοίλους «δουλεύει» στη θεωρία, αλλά είναι ασταθές
  - Η αρχική συνθήκη πρέπει να 'ναι ακριβής

$$\dot{r} = 0 \quad \text{και} \quad r = r_0$$

Σταθερή κυκλική τροχιά απαιτεί $\dfrac{d^2V'}{dr^2} > 0$





Εκθετική Δύναμη

$$V'(r) \equiv V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$$

$$\left.\frac{dV'}{dr}\right|_{r=r_0} = -f(r_0) - \frac{l^2}{mr_0^3} = 0$$

$$\left.\frac{d^2V'}{dr^2}\right|_{r=r_0} = -\left.\frac{df}{dr}\right|_{r=r_0} + \frac{3l^2}{mr_0^4} > 0$$

Η δύναμη μπορεί να είναι μόνο ελκτική

$$f(r_0) = -\frac{l^2}{mr_0^3}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{df}{dr}\right|_{r=r_0} < -\frac{3f(r_0)}{r_0}$$

- Υποθέστε ότι η δύναμη έχει τη μορφή $f = -kr^n$
  - k>0 για ελκτική δύναμη
  - Συνθήκες για ευσταθή κυκλική τροχιά είναι

$$-knr_0^{n-1} < 3kr_0^{n-1} \quad \Rightarrow \quad n > -3$$

Εκθετικές δυνάμεις με εκθέτη n>-3 μπορούν να δημιουργήσουν ευσταθή κυκλική τροχιά

Περίληψη

- Ξεκινήσαμε την συζήτηση για το θέμα κεντρικής δύναμης
  - ✓ Ανάγαμε το πρόβλημα 2 σωμάτων σε πρόβλημα κεντρικής δύναμης
- Το πρόβλημα περιορίζεται σε μια εξίσωση $m\ddot{r} = \dfrac{l^2}{mr^3} + f(r)$
  - ✓ Χρήση της διατήρησης στροφορμής $V'(r) \equiv V(r) + \dfrac{l^2}{2mr^2}$
- Ποιοτική συμπεριφορά εξαρτάται από
  - ✓ Φραγμένες, μη φραγμένες και κυκλικές τροχιές
  - ✓ Συνθήκες για σταθερές κυκλικές τροχιές
- Επόμενο βήμα: Μπορούμε να λύσουμε για την τροχιά19