Мета роботи: Ознайомитись із принципами побудови ітераційних алгоритмів розв’язування нелінійних алгебричних та трансцендентних рівнянь. Вивчити реалізацію числових методів знаходження першої та другої похідних функцій.

Термінологія

- Метод Ньютона називають методом **послідовних наближень**.
- **Ітерація** – це один крок послідовного наближення.
- **Ітераційний метод** – формула, згідно з якою здійснюється ітераційний процес.
- Ітераційний метод буває **збіжним** або **розбіжним.** Процес називають збіжним, якщо, виконуючи ітераційний процес, ми наближаємось до шуканого кореня.
- Окрім поняття збіжності є ще поняття **швидкості процесу збіжності**. Метод Ньютона володіє **квадратичною** швидкістю збіжності, тобто тут похибка обчислення кореня нелінійного рівняння спадає по квадратній параболі.

Теоретичні відомості до методу Ньютона

Необхідно розв’язати нелінійне рівняння $f(x)=0$, (1)

тобто знайти таке значення x, за якого рівняння (1) перетворюється на тотожність. Загалом це рівняння може мати безліч розв’язків. Множину значень змінної $\{x\}$, для якої рівняння (1) є тотожністю, називають **розв’язком** рівняння. Кожне значення x з цієї множини називають **коренем** цього рівняння. Оскільки ми шукаємо корінь рівняння, використовуючи комп’ютерні числові методи, які працюють в арифметиці дійсних чисел, то цей корінь ми можемо знайти тільки наближено. Позначимо його x^*. Під час розв’язання задачі (1) із заданою точністю ε ми, ітераційним алгоритмом, обчислюємо таке значення x, для якого виконується умова $|x-x^*|<\varepsilon$. Відомо, що якщо на інтервалі $[a,\ b]$ виконується нерівність $f(a)*f(b)<0$, то на цьому інтервалі існує корінь рівняння (1).

Популярним методом рішення задачі щодо обчислення кореня рівняння (1), що належить заданому відрізку $[a,\ b]$ із точністю ε, є **метод Ньютона** (дотичних). Один із шляхів отримання ітераційної формули Ньютона є таким:

Задаємо деяке початкове наближення $x_0\in[a,\ b]$ і лінеаризуємо функцію $f(x)$ в околі x_0 за допомогою частини ряду Тейлора: $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

Замість рівняння (1) розв’язуємо лінеаризоване рівняння $f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)=0$, трактуючи його розв’язок x як перше наближення до кореня $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ (2)

Продовжуючи цей процес m раз, приходимо до формули Ньютона: $x_{m+1}=x_m-\dfrac{f(x_m)}{f'(x_m)}$, (3)

яка є ітераційним процесом з ітераційною функцією $s(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Геометричну інтерпретацію цього процесу проілюстровано на Рис. 1. Рівняння (2) є рівнянням прямої, дотичної до кривої $f(x)$ у точці x_0, отож, цей метод називають **методом дотичних**.

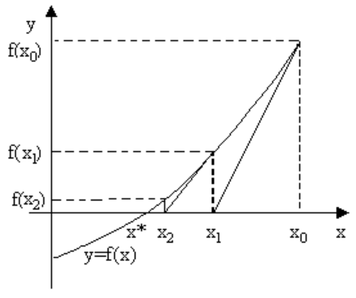

Рис. 1. Геометричне трактування методу Ньютона (дотичних)

Ітераційну формулу методу Ньютона можна також отримати, використовуючи означення похідної функції $f(x)$ у деякій точці x_0, як тангенсу кута α дотичної до графіку функції у точці x_0 з віссю ox (Рис. 2.)

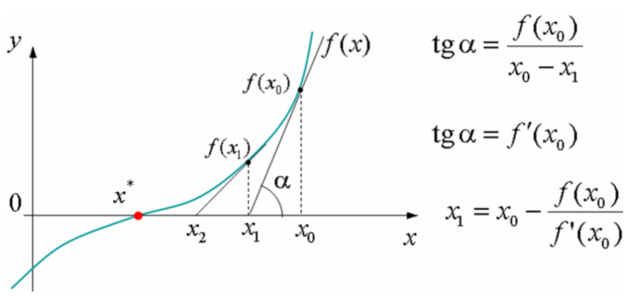

Рис. 2. Виведення ітераційної формули методу Ньютона

Головною характеристикою ітераційного процесу є його **збіжність**. Збіжність методу Ньютона оцінюється нерівністю $\left|x_{m+1}-x^*\right| \le \left|x_m - x^*\right|^2 \cdot \dfrac{M_2}{m_1}$, де $M_2 = max\left|f''(x)\right|$, $m_1 = 2min\left|f'(x)\right|$, $x \in [a, b]$. Таку збіжність називають **квадратичною**, оскільки похибка кожного кроку обчислень є пропорційна до квадрату попередньої.

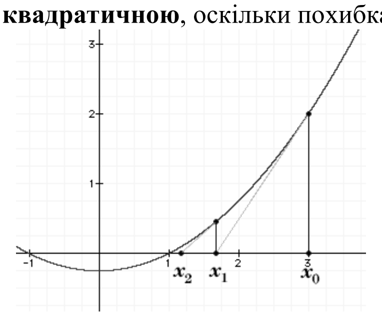

Рис. 3. Метод збігається

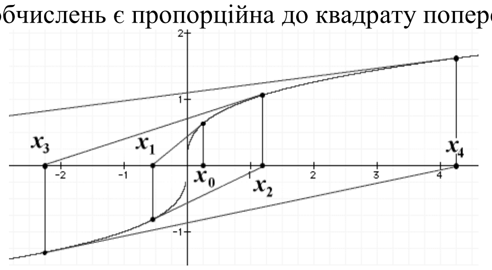

Рис. 4. Метод не збігається

Зазначимо, що поліпшення збіжності методу Ньютона, порівняно з іншими методами, досягається збільшенням витрат на виконання кожного кроку, оскільки на кожному кроці треба обчислювати не тільки значення функції $f(x)$, але й значення її похідної $f'(x)$.

Щоб позбутися необхідності обчислювати похідну на кожному кроці, використовують **модифікований метод Ньютона**, у якому похідну обчислюють тільки один раз:

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_0)} \quad . \qquad (4)$$

Цей метод можна також вважати методом релаксацій із параметром $\tau = -1/\,f'(x_0)$. Збіжність методу є лінійною.

Можна довести, що початкове наближення x_0 для початку ітераційного процесу необхідно обирати таким, щоб виконувалась умова $f(x_0) * f''(x_0) > 0$. В іншому випадку ітерації методу Ньютона можуть і не збігатись до розв’язку.

Алгоритм методу Ньютона

Якщо локалізовано проміжок $[a, b]$, на якому розташований корінь рівняння (1), його уточнюємо алгоритмом Ньютона, який програмуємо так:

В **описовій** частині **консольної** програми оголошуємо:

1. Три функції дійсного типу від аргументу **`x`** з іменами **`f`**, **`fp`** і **`f2p`**, які, для заданого значення **`x`**, обчислюють, відповідно: значення функції, її першу та другу похідні.
2. Змінні дійсного типу: **`a`**, **`b`**, точність обчислення кореня **`Eps`**, робочі змінні **`x`**, **`D`**, **`Dx`**.
3. Змінні цілого типу: **`i`** – параметр циклу; **`Kmax`** – максимально допустиму кількість ітерацій.

У **виконуваній** частині цієї програми:

1. Вводимо межі **`a`**, **`b`** проміжку локалізації кореня, значення точності **`Eps`** та кількості ітерацій **`Kmax`**.
2. Надаємо змінній **`x`** значення **`b`**.
3. Якщо **`f(x)*f2p(x)<0`**, то надаємо змінній **`x`** значення **`a`**, інакше – переходимо до кроку 6;
4. Якщо **`f(x)*f2p(x)>0`**, – переходимо до кроку 6, інакше
5. Виводимо на екран повідомлення: “**Для заданого рівняння збіжність методу Ньютона не гарантується**” і
6. Починаємо цикл по **`i`** від **`1`** до **`Kmax`**, у тілі якого:
   - обчислюємо **`Dx = f(x) / fp(x)`**;
   - виконуємо ітерацію Ньютона: **`x = x – Dx`**;
   - якщо **модуль** значення **`Dx`** є більшим за **`Eps`** – продовжуємо виконувати цей ітераційний цикл, якщо – ні, то:
     1. виводимо на екран шукане наближене значення кореня **`x`**;
     2. завершуємо роботу програми.
7. У випадку успішного завершення цього циклу виводимо на екран повідомлення: ”**За задану кількість ітерацій корінь з точністю Eps не знайдено**”.
8. Завершуємо роботу програми.

Примітка: Значення виразів для першої та другої похідних можна обчислити “вручну” за правилами математичного аналізу. Програма буде універсальнішою, якщо похідні знаходити чисельно.

Першу похідну визначають за означенням похідної: **`fp(x) = (f(x + D) – f(x)) / D.`**

Другу похідну визначають одним із двох способів:

- аналогічно до першої: **`f2p(x) = (fp(x + D) – fp(x)) / D`**, або
- за чисельною триточковою формулою: **`f2p(x) = (f(x + D) + f(x – D) – 2 * f(x )) / D`**^{2}**.**

Значення **`D`** доцільно обирати таким: **`D = Eps / 1000.0`**, або **`D = Eps / 100.0.`**

Після кожного оператора виведення на екран повідомлень чи результату необхідно затримувати зображення екрана, **наприклад**, оператором **`Readln;`**.

Тестовий приклад:

`f(x) = 3*x – 4 Ln(x) – 5 = 0.`

Межі локалізації кореня: **`[2,4]`**. Наближене значення кореня: **`3.23`**.

Завдання

1) Вивчити теорію ітераційного методу Ньютона та зрозуміти алгоритм його реалізації.
2) Написати консольну програму та дослідити на прикладах роботу методу Ньютона, згідно з алгоритмом, який наведено вище.

Додаткове завдання

1. Написати віконний варіант алгоритму методу Ньютона.
2. Написати консольну програму, яка реалізує два методи: МДП і Ньютона. Передбачити можливість діалогового вибору користувачем необхідного йому методу.
3. Написати електронний звіт про виконану роботу і захистити його у викладача.

Література

Хвищун І.О. Програмування і математичне моделювання: Підручник. – К.: Видавничий дім "Ін Юре", 2007. – 544 с.