La Transformada Discreta de Fourier y La Transformada Rápida de Fourier

Aldo Culquicondor
alculquicondor@acm.org

Grupo de Investigación en Computación y Software Dennis Ritchie
Universidad Nacional de Ingeniería

2012

Contenido

Contenido

Introducción

Es posible desarrollar una representación de Fourier alternativa para el caso de secuencias de duración finita, la *Transformada Discreta de Fourier* (DFT, *Discrete Fourier Transform*).

La DFT es una secuencia, no una función de una variable continua, y corresponde a muestras equiespaciadas en frecuencia de la transformada de Fourier de la señal.

Desarrollo en Serie de Fourier Discreto

Sea $\tilde{x}[n]$ una secuencia periódica de periodo N, de forma que
$\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + rN] \quad \forall\ n, m \in \mathbb{Z}$
Se puede representar mediante un desarrollo en serie de Fourier en forma de suma de secuencias exponenciales complejas con frecuencias múltiplos de la frecuencia fundamental $(2\pi/N)$:

$$e_k[n] = e^{j(2\pi/N)kn} = e_k[n + rN] \tag{1.1}$$

El desarrollo en serie de Fourier tiene la forma:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_k \tilde{X}[k]e_k[n] = \frac{1}{N}\sum_k \tilde{X}[k]e^{j(2\pi/N)kn} \tag{1.2}$$

Observamos que la serie sólo requiere N exponenciales complejas, ya que:

$$\begin{aligned} e_{k+\ell N}[n] &= e^{j(2\pi/N)(k+\ell N)n} \\ &= e^{j(2\pi/N)kn} e^{j2\pi\ell n} \\ &= e^{j(2\pi/N)kn} = e_k[n] \end{aligned} \tag{1.3}$$

Definición 1.1

El desarrollo en serie de Fourier de una secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ tiene la forma:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn} \tag{1.4}$$

Obtención de Coeficientes

Multiplicando a ambos miembros de (1.4) por $e^{-j(2\pi/N)rn}$ y aplicando sumatorias, obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j(2\pi/N)rn} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]e^{j(2\pi/N)(k-r)n} \qquad (1.5)$$

Intercambiando el orden de las sumatorias:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j(2\pi/N)rn} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} \right] \qquad (1.6)$$

Por ortogonalidad del conjunto $\{e_k[n]\}$, llegamos a:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j(2\pi/N)kn} \qquad (1.7)$$

Las Ecuaciones (1.7) y (1.4) forman una pareja de análisis-síntesis denominada *desarrollo en Serie de Fourier discreto* (DFS, *discrete Fourier series*). Por conveniencia de notación:

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)} \tag{1.8}$$

La pareja análisis-síntesis de la DSF se expresa como sigue:

$$\text{Ecuación de Análisis:} \quad \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn} \tag{1.9}$$

$$\text{Ecuación de Síntesis:} \quad \tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn} \tag{1.10}$$

$$\textbf{Notación:} \quad \tilde{x}[n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k] \tag{1.11}$$

Ejemplo 1.1

Consideremos el tren de impulsos periódico

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-rN] = \begin{cases} 1, & n = rN, r \in \mathbb{Z} \\ 0, & \textit{en el resto} \end{cases} \tag{1.12}$$

De (1.9)*:*

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] W_N^{kn} = W_N^0 = 1 \tag{1.13}$$

Sustituyendo en (1.4) *obtenemos la representación:*

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)kn} \tag{1.14}$$

Ejemplo 1.2

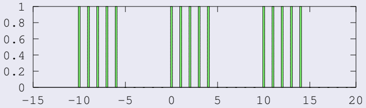


Figura 1.1: Secuencia periódica de periodo $N = 10$

De (1.9)*:*

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{4} W_{10}^{kn} = \sum_{n=0}^{4} e^{-j(2\pi/10)kn} = \frac{1 - W_{10}^{5k}}{1 - W_{10}^{k}} \tag{1.15}$$

$$\tilde{X}[k] = e^{-j(4\pi k/10)} \frac{\text{sen}(\pi k/2)}{\text{sen}(\pi k/10)} \tag{1.16}$$

Propiedades

- **Linealidad:**

$$a\tilde{x}_1[n] + b\tilde{x}_2[n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} a\tilde{X}_1[k] + b\tilde{X}_2[k] \tag{1.17}$$

- **Desplazamiento:**

$$\tilde{x}[n-m] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} W_N^{km}\tilde{X}[k] \tag{1.18}$$

$$W_N^{-n\ell}\tilde{x}[n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k-\ell] \tag{1.19}$$

- **Dualidad:** Modificando (1.10) e intercambiando los papeles de n y k se demuestra:

$$\tilde{X}[n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} N\tilde{x}[-k] \tag{1.20}$$

- **Convolución Periódica:** Sean $\tilde{x}_1[n]$ y $\tilde{x}_2[n]$ dos secuencias periódicas de periodo N. Si

$$\tilde{X}_3[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k] \tag{1.21}$$

Entonces:

$$\tilde{x}_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m] \tag{1.22}$$

Análogamente, si

$$\tilde{x}_3[n] = \tilde{x}_1[n]\tilde{x}_2[n] \tag{1.23}$$

Entonces:

$$\tilde{X}_3[n] = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell]\tilde{X}_2[k-\ell] \tag{1.24}$$

Transformada de Fourier de Señales Periódicas

Definición 1.2

Sea $\tilde{x}[n]$ una secuencia periódica de periodo N y $\tilde{x}[n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k]$, se define la transformada de Fourier de $\tilde{x}[n]$ como el tren de impulsos

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N}\tilde{X}[k]\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \tag{1.25}$$

Se puede notar que $\tilde{X}(e^{j\omega})$ tiene periodo 2π.
Para demostrar que (1.25) en efecto es la transformada de Fourier de $\tilde{x}[n]$, se puede sustituir en la ecuación de la transformada inversa de Fourier.

Ejemplo 1.3

Consideremos el tren de impulsos periódico:

$$\tilde{p}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN] \tag{1.26}$$

De los resultados del ejemplo 1.1:

$$\tilde{P}[n] = 1, \ \forall k \tag{1.27}$$

Reemplazando en (1.25), *obtenemos:*

$$\tilde{P}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \tag{1.28}$$

Transformada de Fourier de una Señal Finita

Sea la señal finita $x[n]$, tal que $x[n] = 0$ excepto en el intervalo $0 \leq n \leq N - 1$ y consideramos su convolución con el tren periódico de impulsos $\tilde{p}[n]$:

$$\begin{aligned} x[n] * \tilde{p}[n] &= x[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN] \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN] = \tilde{x}[n] \end{aligned} \tag{1.29}$$

Aplicando la transformada de Fourier a ambos lados:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega})\tilde{P}(e^{j\omega}) \\ &= X(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{N} X(e^{j(2\pi/N)k}) \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \qquad (1.31)$$

Comparando (1.31) con (1.25), se concluye:

$$\tilde{X}[n] = X(e^{j(2\pi/N)k}) = X(e^{j\omega})|_{\omega=(2\pi/N)k} \qquad (1.32)$$

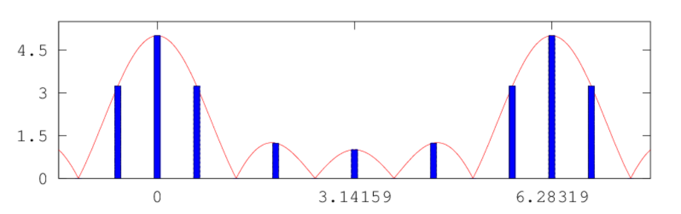
Es decir, la secuencia periódica $\tilde{X}[n]$ de coeficientes del desarrollo en serie de Fourier se puede interpretar como muestras equiespaciadas de la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ de la secuencia de longitud finita $x[n]$.

Ejemplo 1.4

La transformada de Fourier de un periodo de $\tilde{x}[n]$ del ejemplo 1.2 es

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\omega n} = e^{-j2\omega} \frac{\text{sen}(5\omega/2)}{\text{sen}(\omega/2)} \tag{1.33}$$

Sustituyendo $\omega = 2\pi k/10$ obtenemos (1.16).



Transformada Discreta de Fourier

Sea la secuencia $x[n]$ con longitud finita N, definida en el intervalo $0 \leq n \leq N-1$, se le asocia la secuencia periódica:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN] = x[(n \text{ mód } N)] = x[((n))_N] \tag{1.34}$$

Definición 1.3

Se denomina transformada discreta de Fourier (DFT) a la secuencia de duración finita:

$$X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k], & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \tag{1.35}$$

$$\tilde{X}[k] = X[(k \text{ mód } N)] = X[((k))_N] \tag{1.36}$$

Las ecuaciones de análisis y síntesis de la DFT se expresan como sigue:

$$\text{Ecuación de análisis:} \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \tag{1.37}$$

$$\text{Ecuación de síntesis:} \quad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \tag{1.38}$$

$$\textbf{Notación:} \quad x[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X[k] \tag{1.39}$$

Propiedades

- **Linealidad:**

$$ax_1[n] + bx_2[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} aX_1[k] + bX_2[k] \tag{1.40}$$

- **Desplazamiento Circular:**

$$x[((n-m))_N] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} W_N^{km} X[k] \tag{1.41}$$

$$W_N^{-n\ell} x[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} W_N^{km} X[((k-\ell))_N] \tag{1.42}$$

- **Dualidad:**

$$X[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} Nx[((-k))_N] \tag{1.43}$$

- **Convolución Circular:** Sean $x_1[n]$ y $x_2[n]$ dos secuencias finitas de longitud N. Si

$$X_3[k] = X_1[k]X_2[k] \tag{1.44}$$

Entonces:

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N] \tag{1.45}$$

Análogamente, si

$$x_3[n] = x_1[n]x_2[n] \tag{1.46}$$

Entonces:

$$\tilde{X}_3[n] = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} X_1[\ell]X_2[((k-\ell))_N] \tag{1.47}$$

Contenido

Introducción

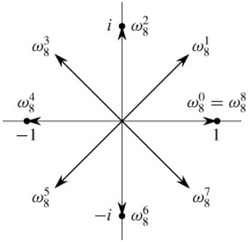
A partir de las ecuaciones (1.37) y (1.38), observamos que podemos calcular la DFT y DFT^{-1} en tiempo $\Theta(N^2)$
Sin embargo, aprovechando la periodicidad de la secuencia W_N^{kn} se puede obtener un algoritmo $\Theta(N \lg N)$, el cual es conocido como *Transformada Rápida de Fourier* (FFT, *Fast Fourier Transform*).

Raíz Compleja de Unidad

Es un número complejo ω tal que $\omega^N = 1$
Hay exactamente N raíces complejas de unidad $e^{-j(2\pi/N)k}$

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)} \tag{2.1}$$

es llamada la *raíz principal N-ésima de unidad*.
Las N raíces N-ésimas de unidad, $W_N^0, \ W_N^1, \ \ldots, \ W_N^{N-1}$ forman un grupo sobre la multiplicación.



Lema 2.1

Lema de Cancelación:

$$W_{dN}^{dk} = W_N^k \tag{2.2}$$

Corolario 2.2

$$W_N^{N/2} = W_2 = -1 \tag{2.3}$$

Lema 2.3

Lema de Reducción a la Mitad:

$$(W_N^k)^2 = W_{N/2}^k \tag{2.4}$$

$$(W_N^{k+N/2})^2 = (W_N^k)^2 \tag{2.5}$$

Lema 2.4

Lema de Adición: Para todo k no divisible por N

$$\sum_{r=0}^{N-1} (W_N^k)^r = 0 \tag{2.6}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{N-1} (W_N^k)^r = \frac{(W_N^k)^N - 1}{W_N^k - 1} = \frac{(W_N^N)^k - 1}{W_N^k - 1} = \frac{(1)^k - 1}{W_n^k - 1} \\ \sum_{r=0}^{N-1} (W_N^k)^r = 0, \quad \forall k \text{ no divisible por } N \end{aligned} \tag{2.7}$$

□

Divide y Vencerás

Asumiendo que N es una potencia de 2, de (1.37):

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} = \sum_{n \text{ par}} x[n] W_N^{nk} + \sum_{n \text{ impar}} x[n] W_N^{nk} \tag{2.8}$$

cambio de variables $n = 2r$ par n par y $n = 2r + 1$ par n impar

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r] W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1] W_N^{(2r+1)k} \\ &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r] (W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1] (W_N^2)^{rk} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Pero por (2.3) $W_N^2 = W_{N/2}$

$$X[k] = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r] W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1] W_{N/2}^{rk} \tag{2.10}$$

$$X[k] = G[k] + W_N^k H[k]$$

Donde $G[k]$ y $H[k]$ son las DFTs de los puntos pares e impares, respectivamente.

Algoritmo FFT recursivo

FFT-RECURSIVA(x)

$n \leftarrow tam[x]$ ▷ n es una potencia de 2
if $n = 1$ **then**
    return x
$W_n \leftarrow e^{-j(2\pi/N)}$
$\omega \leftarrow 1$
$g \leftarrow (x[0],\ x[2],\ \ldots,\ x[n-2])$
$h \leftarrow (x[1],\ x[3],\ \ldots,\ x[n-1])$
$G \leftarrow$ FFT-RECURSIVA(g)
$H \leftarrow$ FFT-RECURSIVA(h)
for $k \leftarrow 0$ **to** $n/2 - 1$ **do**
    $X[k] \leftarrow G[k] + \omega H[k]$
    $X[k + (N/2)] \leftarrow G[k] - \omega H[k]$
    $\omega \leftarrow \omega W_N$
return X

Las líneas 2-3 representan la base de la recursión: la DFT de un elemento es él mismo, ya que:

$$X[0] = x[0]W_1^0 = x[0] \cdot 1 = x[0] \tag{2.11}$$

Las líneas 6-9 realizan el calculo recursivo de las $\mathrm{DFT}_{N/2}$ para combinar los resultados en las líneas 10-13, basados en (2.9), (2.10) y en el hecho de que:

$$\begin{aligned} X[k+(N/2)] &= G[k] + W_N^{k+(N/2)} H[k] \\ &= G[k] + W_N^k W_N^{(N/2)} H[k] \\ &= G[k] - W_N^k H[k] \quad \text{Según (2.2)} \end{aligned} \tag{2.12}$$

La recurrencia del tiempo de ejecución de la FFT es:

$$\begin{aligned} T(N) &= 2T(N/2) + \Theta(N) \\ &= \Theta(N \lg N) \end{aligned} \tag{2.13}$$

DFT Inversa

Basados en (1.38), observamos que modificando el algoritmo de la FFT – intercambiando los roles de x y X, reemplazando W_N por W_N^{-1} y dividiendo el resultado de cada elemento por N – podemos calcular la DFT inversa en el mismo tiempo $\Theta(N \lg N)$.

FFT iterativa

Cada invocación a FFT-RECURSIVA hace dos llamadas recursivas, a menos que reciba un vector de 1 elemento.

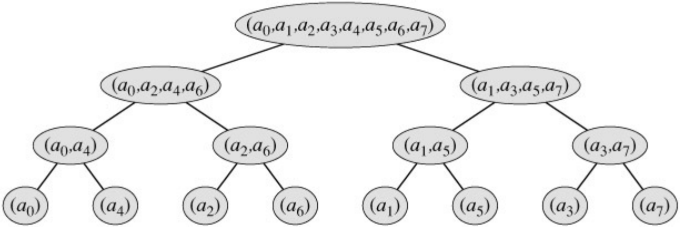


Figura 2.1: Llamadas recursivas de FFT-RECURSIVA para $N = 8$

Mirando el árbol en 2.1 observamos que si reordenamos el vector x en el orden en que aparecen en las hojas, podríamos enunciar la FFT así:

1: **for** $s \leftarrow 1$ **to** $\lg N$ **do**
2:     **for** $k \leftarrow 0$ **to** $N - 1$ **by** 2^s **do**
3:         combinar las dos DFT de 2^{s-1} en $X[k \ldots k + 2^{s-1} - 1]$ y $X[k + 2^{s-1} \ldots k + 2^s - 1]$ en una DFT de 2^s elementos $X[k \ldots k + 2^s - 1]$

Veremos luego que dicho ordenamiento es la **permutación de bits invertidos**.

ITERATIVE-FFT(x)

COPIA-BITS-INVERTIDOS(x, X)
$n \leftarrow tam[x]$ $\quad \triangleright$ n es una potencia de 2
for $s \leftarrow 1$ **to** $\lg n$ **do**
    $m \leftarrow 2^s$
    $W_m \leftarrow e^{-j(2\pi/m)}$
    for $k \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **by** m **do**
        $\omega \leftarrow 1$
        for $j \leftarrow 0$ **to** $m/2-1$ **do**
            $t \leftarrow \omega X[k+j+m/2]$
            $u \leftarrow X[k+j]$
            $X[k+j] \leftarrow u+t$
            $X[k+j+m/2] \leftarrow u-t$
            $\omega \leftarrow \omega W_m$

Si decimos que $rev(k)$ es un entero de $\lg N$ bits formado al invertir la representación binaria de k, entonces queremos colocar el elemento $x[k]$ en la posición $X[rev(k)]$

COPIA-BITS-INVERTIDOS(x, X)

1: $n \leftarrow tam[x]$
2: **for** $k \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**
3: $\quad X[rev(k)] \leftarrow x[k]$

Contenido

Bibliografía

- Alan V. Oppenheim y Ronald W. Schafer, con John R. Buck. *Tratamiento de Señales en Tiempo Discreto*. Prentice-Hall, segunda edición, 2000.
- Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest y Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. The MIT Pres, segunda edición, 2001.