Nội suy ngược

Nguyễn Tiến Dũng

20170062 - CTTN Toán Tin K62

Đại học Bách khoa Hà Nội

Mục lục

Chương 1

Mở đầu

Lý thuyết xấp xỉ là một trong những bài toán quan trọng của Giải Tích Số. Hầu hết các số liệu ngoài đời thực ta đều có được quan việc đo đạc và việc tìm ra được quy luật của số liệu đó có thể giúp ta có khả năng dự đoán số liệu đó trong điều kiện nhất định, chưa từng xảy ra, đó chính là mục đích của bài toán xấp xỉ. Nội suy là một trong những vấn đề quan trọng của lý thuyết xấp xỉ.

Theo CITE, *kĩ thuật ước lượng giá trị của một hàm tại*

Báo cáo này sẽ trình bày về bài toán ***Nội suy ngược***, trong đó, báo cáo sẽ tập trung vào các nội dung sau:

- **Phần 1:** Lý thuyết chung
- **Phần 2:** Nội suy ngược
- **Phần 3:** Thực nghiệm

Chương 2

Lý thuyết nội suy

2.1 Bài toán nội suy

Thông thường, với một hàm số f cho trước và đã biết rõ dạng hàm, việc xác định giá trị của f tại một điểm x nào đó là một việc dễ dàng. Tuy nhiên, trong thực tế, thường ta rất ít khi có được biểu diễn cụ thể của hàm f này, thay vào đó, ta chỉ biết được hàm f một cách gián tiếp thông qua một bảng giá trị hoặc một tập dữ liệu $D = \left\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i = 0, 1, 2, ..., n, x_0 < x_1 < ... < x_n\right\}$ nào đó. Thực tế thì tình huống này rất phổ biến, ví dụ như khi chúng ta thông qua đo đạc thu được một tập quan sát và muốn khai thác mối liên hệ ẩn để tính toán với các giá trị x chưa được cho trong bảng.

Quá trình xác định giá trị y tương ứng với một giá trị x nào đó nằm giữa x_0 và x_n được gọi là nội suy[1]. Ngược lại, nếu x không nằm giữa x_0 và x_n thì quá trình này được gọi là ngoại suy. Rất rõ ràng rằng chúng ta không biết được biểu diễn cụ thể của hàm f và việc xác định cụ thể hàm f từ tập biểu diễn D là rất khó. Thay vào đó, chúng ta thực hiện thay thế hàm f bởi một hàm số φ đơn giản thỏa mãn

$$y_i = \varphi\left(x_i\right), \forall i = 0, 1, 2, ..., n$$

Hàm số φ được gọi là hàm nội suy. Trong trường hợp φ là đa thức, ta gọi φ là đa thức nội suy.

Trong khuôn khổ báo cáo, chúng ta chỉ tìm hiểu về nội suy đa thức.

2.2 Một số phương pháp

Cho đến hiện tại, có rất nhiều phương pháp nội suy đa thức được đưa ra, tuy nhiên chúng ta sẽ tập trung tìm hiểu hai phương pháp nội suy phổ biến nhất là nội suy Lagrange và nội suy Newton. Mục này sẽ tóm tắt lại một số nội dung cơ bản nhất của hai phương pháp trên.

2.2.1 Nội suy Lagrange

Nội suy Lagrange là phương pháp nội suy rất đơn giản. Giả sử với tập quan sát D cho bởi bảng số liệu

x	x_0	x_1	$\dots$	x_{n-1}	x_n
y	y_0	y_1	...	y_{n-1}	y_n

Bảng 2.2.1: Bảng giá trị

Đa thức nội suy Lagrange theo bảng giá trị trên được như sau

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right] y_i$$

Rất dễ để thấy rằng $P_n(x_i) = y_i, \forall i = 0, 1, 2, ..., n$. Thật vậy, với x_k bất kì, ta có

$$\begin{aligned} P_n(x_k) &= \sum_{i=0}^{n} \left[\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x_k - x_j)}{(x_i - x_j)} \right] y_i \\ &= \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{(x_k - x_j)}{(x_k - x_j)} y_k + \sum_{i=0, i\neq k}^{n} \left[\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x_k - x_j)}{(x_i - x_j)} \right] y_i \\ &= y_k + \sum_{i=0}^{n} \left[\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x_k - x_j)}{(x_i - x_j)} \right] y_i \end{aligned}$$

Dễ thấy rằng mỗi một số hạng $\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x_k - x_j)}{(x_i - x_j)}$ đều tồn tại một thừa số $(x_k - x_k)$ nên $P_n(x_k) = y_k$.

2.2.2 Nội suy Newton

Nội suy Lagrange trình bày ở trên mặc dù đơn giản và dễ thực hiện, tuy nhiên phương pháp này có một nhược điểm lớn, đó là thiếu linh hoạt khi có thêm các mốc nội suy mới được thêm vào bảng. Cụ thể, với các mốc nội suy mới được thêm vào, chúng ta cần phải thực hiện lại toàn bộ các tính toán đã thực hiện trên các mốc nội suy trước đó[1]. Nhược điểm này được khắc phục với phương pháp nội suy Newton khi phương pháp này cho phép chúng ta tận dụng các tính toán đã thực hiện với các mốc nội suy cũ khi thêm có các mốc nội suy mới được thêm vào. Một số nội dung quan trọng về nội suy Newton được nhắc lại gồm có:

- Bảng tỉ hiệu
- Nội suy Newton tiến

- Nội suy Newton lùi

Vẫn với bảng dữ liệu của tập các mốc nội suy D như trên

x	x_0	x_1	$\ldots$	x_{n-1}	x_n
y	y_0	y_1	...	y_{n-1}	y_n

Bảng 2.2.2: Bảng giá trị

Đa thức nội suy Lagrange cho bởi các mốc nội suy trên là một đa thức bậc n

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left[\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right] y_i$$

Ta có thể viết lại $P_n(x)$ theo một cách khác

$$P_n(x) = w_0 + w_1(x - x_0) + w_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + w_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) \tag{2.2.1}$$

với $a_0, a_1, ..., a_n$ là các hệ số thích hợp.

Ta có $y_0 = P_n(x_0) = w_0$, $P_n(x_1) = w_0 + w_1(x_1 - x_0) = y_1$. Điều này dẫn đến w_1 có thể được tính bởi

$$w_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Ta cũng có thể thấy rằng các hệ số $w_2, ..., w_n$ hoàn toàn có thể được tính theo cách trên. Việc tính các hệ số w_i của (2.2.1) được trình bày tại mục Bảng tỉ hiệu.

Bảng tỉ hiệu

Definition 2.2.1 (Tỉ hiệu). [2]Tỉ hiệu của cấp một của hàm số f tương ứng với x_i và x_{i+1}, kí hiệu $f[x_i, x_{i+1}]$

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

trong đó, $f[x_i]$ được gọi là tỉ hiệu cấp 0 của f tại x_i: $f[x_i] = f(x_i)$

Definition 2.2.2 (Tỉ hiệu cấp cao). [2] Tỉ hiệu cấp k của hàm f tương ứng với $x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}$ được xác định bởi các tỉ hiệu cấp $k-1$

$$f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k-1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}, ..., x_{i+k}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Theo đó, bảng tỉ hiệu được cho như sau

x	$y = f(x)$	Tỉ hiệu cấp 1	Tỉ hiệu cấp 2	...	Tỉ hiệu cấp 5
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		
		$f[x_2, x_3]$		...	$f[x_0, x_1, ..., x_5]$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3, x_4, x_5]$		
		$f[x_4, x_5]$			
x_5	$f[x_5]$				

Bảng 2.2.3: Bảng tỉ hiệu

Nội suy Newton tiến

Với bảng tỉ hiệu được cho ở trên, ta có công thức nội suy Newton tiến với các mốc nội suy cho bởi bảng 2.2.2 như sau:

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} \left(f[x_0, x_1, ..., x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right)$$

Trong trường hợp các mốc nội suy cách đều, công thức nội suy Newton tiến có thể rút gọn lại về một dạng đơn giản hơn.

Definition 2.2.3 (Toán tử tiến (Forward difference)[2]). Với một chuỗi $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, toán tử tiến Δx_n được định nghĩa bởi

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

Trong trường hợp bậc cao, toán tử tiến cấp k được định một cách đệ quy theo cấp $k-1$ như sau

$$\Delta^k x_n = \Delta \left(\Delta^{k-1} x_n \right), \forall k \geq 2$$

Ví dụ, ta có $\Delta^2 x_n = \Delta (x_{n+1} - x_n) = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n = (x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n)$.

Đặt $h = \Delta x_0$, ta thấy $w_0 = y_0, w_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{\Delta y_0}{h}, ...$Bằng cách tương tự, ta có

$$w_k = \frac{1}{k! h^k} \Delta^k y_0, \forall k = 0, 1, 2, ..., n$$

Khi đó, với một giá trị $x \in [x_0, x_n]$ bất kì, ta có thể biểu diễn x dưới dạng $x = x_0 + th$. Khi đó:

$$y_t = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + ... + \frac{t(t-1)(t-2)...(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Nội suy Newton lùi

Với các mốc nội suy cho bởi bảng 2.2.2, công thức nội suy Newton lùi được cho bởi

$$P_n(x) = f[y_n] + \sum_{i=n-1}^{0}\left(f[x_n, x_{n-1}, ..., x_i]\prod_{j=n}^{1}(x - x_j)\right)$$

Tương tự như trường hợp nội suy Newton tiến, nếu các mốc nội suy cách đều thì công thức nội suy Newton lùi có thể được viết lại dưới dạng đơn giản hơn. Trong nội suy Newton lùi, thay vì sử dụng toán tử tiến Δ ta sử dụng toán tử lùi (backward difference[2]).

Definition 2.2.4 (Toán tử lùi (Backward Difference))**.** Với một chuỗi $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, toán tử tiến ∇x_n được định nghĩa bởi

$$\nabla x_{n+1} = x_{n+1} - x_n$$

Trong trường hợp bậc cao, toán tử lùi cấp k được định một cách đệ quy theo cấp $k-1$ như sau

$$\nabla^k x_n = \nabla\left(\nabla^{k-1} x_n\right), \forall k \geq 2$$

Khi đó, với một giá trị bất kì $x \in [x_0, x_n]$, đặt $x = x_n + th$, công thức nội suy Newton lùi được viết lại như sau:

$$y_t = y_n + \sum_{i=1}^{n}\left[\prod_{j=0}^{i-1}(p+j)\right]\frac{\nabla^i y_n}{i!}$$

Chương 3

Nội suy ngược

Tại chương trước, chúng ta đã trình bày sơ lược về bài toán nội suy. Tóm lược lại, với một tập giá trị (x, y), việc tính giá trị $\overline{y}$ với giá trị $\overline{x}$ cho trước được gọi là bài toán nội suy. Chương này chúng ta sẽ tìm hiểu về bài toán *nội suy ngược*, trong đó với tập giá trị (x, y) cho trước và một giá trị $\overline{y}$ bất kì, ta cần xác định giá trị $\overline{x}$ sao cho $f(\overline{x}) = \overline{y}$.

Thông thường, chúng ta sẽ có một số cách tiếp cận khi giải bài toán này. Cụ thể hơn, ta có thể sử dụng phương pháp xác định hàm ngược, hoặc phương pháp lặp dựa trên công thức nội suy Newton[1]. Dưới đây ta sẽ tìm hiểu hai phương pháp này.

3.1 Phương pháp hàm ngược

Với giả định tồn tại một hàm ẩn f thể hiện mối liên hệ giữa x và y: $y = f(x)$, ta sẽ cố gắng xác định hàm số $g = f^{-1}$. Khi đó, hiển nhiên rằng $x = g(y)$.

Việc sử dụng phương pháp nội suy ngược khá đơn giản, tại đó, thay vì xác định đa thức $P(x) : P(x_i) = y_i$, ta xác định đa thức $P_y(y) : P_y(y_i) = x_i$. Các mốc nội suy được sử dụng bằng cách đảo bảng giá trị mốc nội suy.

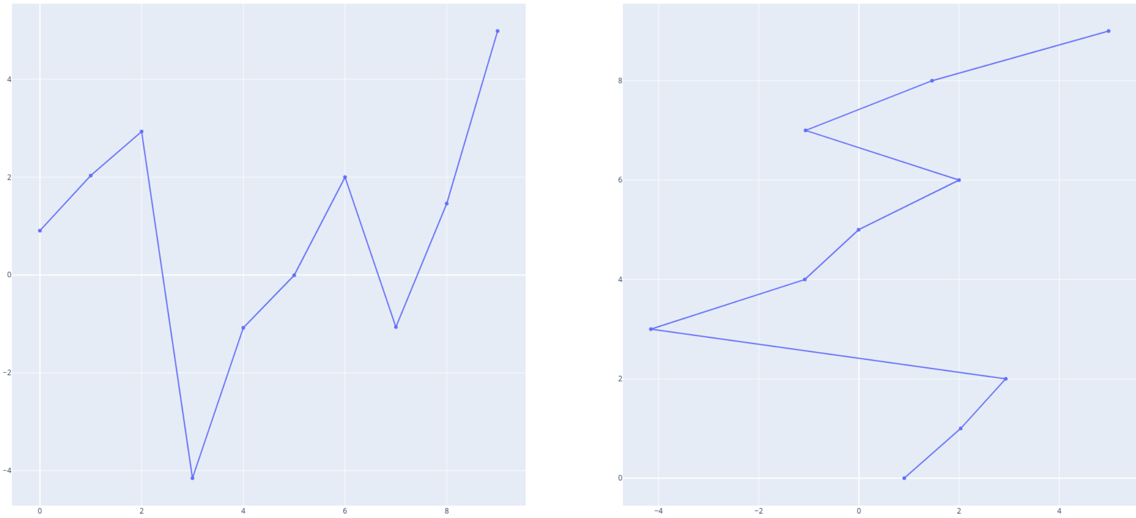
x	x_0	x_1	...	x_n
y	y_0	y_1	...	y_n

$\rightarrow$

y	y_0	y_1	...	y_n
x	x_0	x_1	...	x_n

Hình 3.1.1: Phương pháp tìm hàm ngược

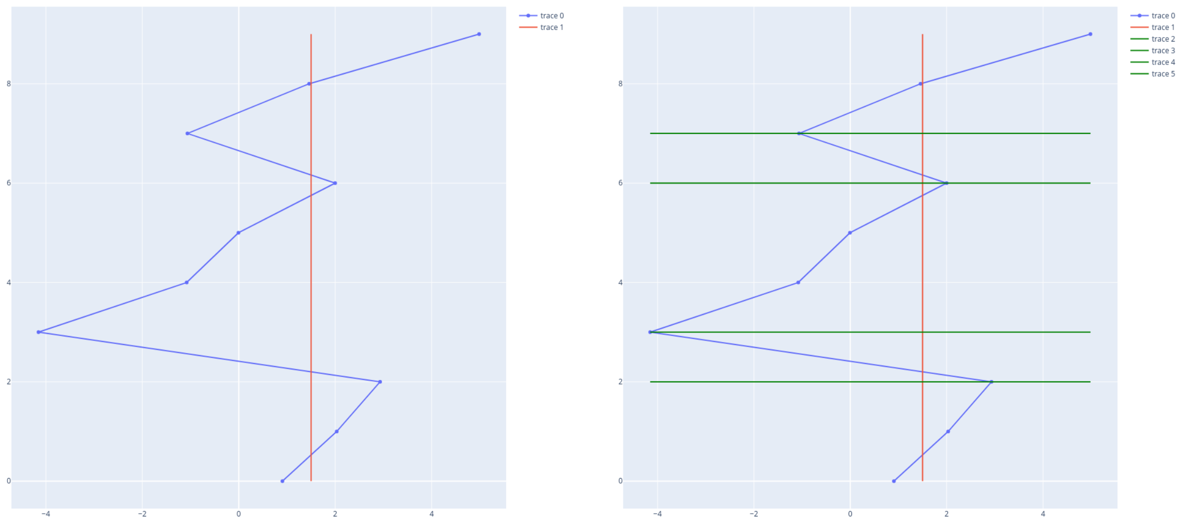
Tuy vậy, việc xác định hàm ngược của một hàm số f bất khì không dễ, và với dữ liệu từ bảng nội suy trên, ta cũng không khẳng định được liệu hàm số f có tồn tại hàm ngược hay không. Điều kiện cần và đủ để hàm số f tồn tại hàm ngược là f là một song ánh[3]. Ta có thể thấy được điều này thông qua hình 3.1.2



(a) Đồ thị hàm số theo hệ trục Oxy (b) Đồ thị hàm số theo hệ trục Oyx

Hình 3.1.2: Điều kiện tồn tại hàm ngược

Do đó, trước khi có thể thực hiện việc xác định hàm ngược, ta cần phải đảm bảo được rằng hàm số f là một song ánh. Để giải quyết vấn đề này, ta thực hiện tách $\{y_n\}$ thành các khoảng đơn điệu, sau đó ta sẽ thực hiện xác định đa thức nội suy ngược P_y dựa trên các mốc nội suy nằm trong cùng một khoảng đơn điệu. Phương pháp này có thể được minh họa qua hình 3.1.3:



Hình 3.1.3: Ý tưởng thực hiện

Dựa vào ý tưởng này, ta có thể đưa ra được các bước cơ bản để sử dụng phương pháp hàm ngược này như sau:

1. Xác định các khoảng đơn điệu

2. Với giá trị $\overline{y}$ cần tính nằm trong khoảng nội suy, xác định các khoảng đơn điệu chứa $\overline{y}$.

3. Với mỗi một khoảng đơn điệu đã xác định tại bước 2, sử dụng phương pháp nội suy Newton để xác định đa thức $P_s(y)$ sao cho $P_s(y_i) = x_i$.

Dưới đây là các thuật toán được sử dụng cho các bước ở trên. Đầu tiêu ta sẽ đưa ra thuật toán để xác định các khoảng đơn điệu từ các mốc nội suy $\{y_n\}$.

Algorithm 1: Xác định khoảng đơn điệu

Input: $y_0, y_1, ..., y_n$

diff = $[y_1 - y_0, ..., y_{k+1} - y_k, ..., y_n - y_{n-1}]$

indices = []

for ***index*** *from 1 to n* **do**

  if *diff[index - 1]* $\times$ *diff[index - 1] < 0* **then**

    Add **index** to **indices**

Output: indices

Thuật toán trên trả về các vị trí mà tại đó hàm số đổi chiều đơn điệu, tức là các điểm đầu mút của các khoảng đơn điệu. Tiếp đó, với giá trị $\overline{y}$ bất kì cho trước, ta thực hiện xác định các khoảng đơn điệu chứa $\overline{y}$, để từ đó ta có thể thực hiện nội suy Lagrange trên các khoảng đó. Thuật toán xác định các khoảng đơn điệu chứa $\overline{y}$ như sau:

Algorithm 2: Xác định khoảng phân li nghiệm

Input: $y_0, y_1, ..., y_n$ và $\bar{y}$

diff = $[\bar{y} - y_0, \bar{y} - y_1, ..., \bar{y} - y_n]$

indices = []

for ***index*** *from 1 to n* **do**

  if *diff[index - 1]* $\times$ *diff[index] < 0* **then**

    Add (**index - 1**, **index**) to **indices**

Output: indices

Thuật toán này trả về 2 điểm đầu cuối các khoảng đơn điệu chứa giá trị $\overline{y}$. Khi đã có điều này, ta có thể thực hiện phương pháp nội suy Lagrange để xác định hàm ngược trên từng đoạn nội suy tương ứng.

Thuật toán dưới đây trình bày về cách tìm các khoảng đơn điệu, chứa một khoảng phân ly nghiệm cho trước.

Algorithm 3: Xác định khoảng đơn điệu chứa khoảng phân ly nghiệm

Function: containingMonotonic

Input: monotonicSequences, isolationInterval

```
for interval in isolationInterval do
    for seq in monotonicSequences do
        if (interval_0 − seq_0)(interval_1 − s_0 < 0) then
            Add {interval:seq} to output
```

Output: output

Thuật toán này trả về các khoảng phân li nghiệm và hai đầu mút của khoảng đơn điệu chứa khoảng phân ly này.

3.2 Phương pháp lặp

Phương pháp tìm hàm ngược ở trên nhìn chung rất đơn giản, với ba bước chính đã trình bày. Tuy nhiên, cách này có một nhược điểm lớn là số điểm nội suy khả dụng trong mỗi một đoạn đơn điệu. Cụ thể, với các khoảng đơn điệu chứa giá trị cần nội suy ngược $\overline{y}$ có nhiều mốc nội suy, phương pháp tìm hàm ngược cho kết quả khá tốt. Đối với các khoảng đơn điệu chứa rất ít mốc nội suy (ví dụ các khoảng có dưới 3 mốc nội suy), việc xác định hàm ngược cho kết quả rất kém, hơn nữa, ta cũng không thể tận dụng được các mốc nội suy còn lại. Việc không tận dụng được hết các mốc nội suy cũng như sự giới hạn về số mốc nội suy khả dụng khiến cho phương pháp Lagrange tỏ ra kém hiệu quả.

Vấn đề trên có thể được khắc phục bằng cách sử dụng phương pháp lặp dựa trên công thức nội suy Newton, trong đó ta sẽ cố gắng đưa việc tìm $\overline{x}$ là một nghiệm của phương trình $x = g\left(x\right)$. Biểu diễn của $g\left(x\right)$ được tìm ra thông qua công thức nội suy Newton. Cũng phải lưu ý rằng, trong bài toán nội suy ngược, việc sử dụng công thức nội suy Newton tiến và Newton lùi có sự khác biệt rõ nét, và cần được xem xét cẩn thận để có thể lựa chọn được phương pháp phù hợp.

Ta sẽ xem xét phương pháp lặp trong trường hợp các mốc nội suy cách đều, tức $\Delta x_i = \Delta x_j$. Ta sẽ xây dựng phương pháp với hai công thức nội suy Newton tiến và nội suy Newton lùi.

Thuật toán chung của phương pháp lặp như sau:

1. Với $\overline{y}$ cho trước nằm trong khoảng nội suy, xác định khoảng phân li nghiệm

2. Xây dựng công thức nội suy Newton, biến đổi về dạng $x = g\left(x\right)$

3. Thực hiện lặp để giải phương trình $x = g\left(x\right)$, nghiệm $x = \overline{x}$ là giá trị cần tìm.

Nội suy Newton tiến

Với các mốc nội suy x_i cách đều nhau, ta đặt $h = \Delta x_i$. Với giá trị $\overline{y}$ bất kì được xác định nằm giữa các giá trị $y_k$và y_{k+1}, ta cần xác định giá trị $\overline{x}$ tương ứng: $f(\overline{x}) = \overline{y}$. Đối với công thức nội suy Newton tiến, ta biểu diễn lại $\overline{x}$ theo x_k:

$$\overline{x} = x_k = th$$

với x_k là một mốc nội suy, t là một số thực. Khi đó, việc xác định $\overline{x}$ có thể được quy về việc xác định t.

Công thức nội suy Newton tiến như sau:

$$\begin{aligned} \overline{y} &= P_n(x_k + th) \\ &= y_k + t\Delta y_k + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_k + ... + \frac{t(t-1)(t-2)...(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_k \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Ta có thể biến đổi (3.2.1) về dạng $t = g(t)$

$$\begin{aligned} t\Delta y_k &= \overline{y} - y_k - \left[\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_k + ... + \frac{t(t-1)(t-2)...(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_k\right] \\ \Longleftrightarrow \qquad t &= \frac{1}{\Delta y_k}\left[\overline{y} - y_k - \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_k - ... - \frac{t(t-1)(t-2)...(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_k\right] \end{aligned}$$

Khi đó,đặt $g(t) = \frac{1}{\Delta y_k}\left[\overline{y} - y_k - \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_k - ... - \frac{t(t-1)(t-2)...(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_k\right]$ ta có thể đưa (3.2.1) về dạng $t = g(t)$. Giá trị khởi tạo t_0 cho quá trình lặp được cho bởi

$$t_0 = \frac{\overline{y} - y_k}{\Delta y_k}$$

Nội suy Newton lùi

Tương tự với trường hợp sử dụng công thức nội suy Newton tiến, với giá trị cho trước $\overline{y}$ bất kì, ta biểu diễn $\overline{x}$ theo x_{k+1}

$$\overline{x} = x_{k+1} + th$$

Khi đó, công thức nội suy Newton lùi như sau

$$\begin{aligned} \overline{y} &= P_n(x_{k+1} + th) \\ &= y_{k+1} + \sum_{i=1}^{n}\left[\prod_{j=0}^{i-1}(t+j)\right]\frac{\nabla^i y_{k+1}}{i!} \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Biến đổi (3.2.2) về dạng $t = g(t)$

$$t\nabla y_{k+1} = \overline{y} - y_{k+1} - \left[\frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 y_{k+1} + ... + \frac{t(t+1)(t+2)...(t+n-1)}{n!}\nabla^n y_{k+1}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \qquad t = \frac{1}{\nabla y_{k+1}}\left[\overline{y} - y_{k+1} - \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 y_{k+1} - ... - \frac{t(t+1)(t+2)...(t+n-1)}{n!}\nabla^n y_{k+1}\right]$$

Từ đó, ta có $g(t) = \frac{1}{\nabla y_{k+1}}\left[\overline{y} - y_{k+1} - \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 y_{k+1} - ... - \frac{t(t+1)(t+2)...(t+n-1)}{n!}\nabla^n y_{k+1}\right]$ và ta có thể thực hiện tìm nghiệm của phương trình $t = g(t)$ bằng phương pháp lặp. Giá trị khởi tạo t_0 như sau

$$t_0 = \frac{\overline{y} - y_{k+1}}{\nabla y_{k+1}}$$

Nhìn chung, đối với bài toán nội suy thông thường, việc sử dụng phương pháp nội suy Newton tiến, nội suy Newton lùi và nội suy Lagrange đều cho cùng kết quả do tính duy nhất của đa thức nội suy[2]. Tuy vậy, đối với bài toán nội suy ngược, sự khác biệt về số lượng mốc nội suy khả dụng cho thấy các khác biệt giữa các phương pháp. Chúng ta luôn mong muốn có thể sử dụng nhiều mốc nội suy nhất có thể, do đó việc lựa chọn phương pháp nội suy để có thể sử dụng được càng nhiều mốc nội suy càng tốt.

Trong trường hợp có số lượng mốc nội suy thuộc một khoảng đơn điệu đủ nhiều, việc lựa chọn phương pháp là tùy ý. Tuy vậy, trong trường hợp số lượng mốc nội suy trong một khoảng đơn điệu rất ít (thường chọn dưới 4 mốc), phương pháp hàm ngược thường cho kết quả không tốt, và cũng chỉ sử dụng được một số lượng rất nhỏ các mốc nội suy hiện có.

Trong những tình huống này, ta sẽ sử dụng phương pháp lặp. Việc sử dụng phương pháp lặp cho phép ta sử dụng được nhiều mốc nội suy hơn. Lúc này, tùy vào $\overline{y}$ và các mốc nội suy mà ta sẽ thực hiện lựa chọn phương pháp Newton tiến hoặc lùi. Dưới đây là một thuật toán nhỏ để lựa chọn phương pháp nội suy ngược thích hợp.

Algorithm 4: Xác định phương pháp nội suy ngược

Input: $\{y_n\}, \overline{y}$

isolatedIntervals = *isolateInterval(*$\{y_n\}, \overline{y}$*)*
for *interval in isolatedIntervals* **do**
    numberOfValues = length of (*containingSequences*)
    usableForward = $n - interval_1$
    usableBackward = $interval_0 + 1$
    method = as much as interpolation points as possilbe
    $\Longleftrightarrow \max\{numberOfValues, usableBackward, usableForward\}$

Output: method

Như vậy, với cách chọn phương pháp nội suy ngược như trên, ta có thể xác định được phương pháp nội suy ngược tận dụng được nhiều mốc nội suy nhất. Tất nhiên, điều này không đồng nghĩa với phương pháp đó cho kết quả gần hơn với đáp án.

Tổng kết, với giá trị $\overline{y}$ bất kì, việc xác định giá trị nội suy ngược $\overline{x}$ được mô tả bởi một số bước cơ bản như sau:

1. Xác định các khoảng đơn điệu **monotonicSequences**
2. Xác định các khoảng phân ly nghiệm **isolatedIntervals**
3. Với mỗi một khoảng phân ly nghiệm **isolatedIntervals**, xác định phương pháp nội suy phù hợp theo thuật toán xác định phương pháp vừa trình bày ở trên.
4. Tùy thuộc vào thuật toán tìm được, xác định giá trị nội suy ngược $\overline{x}$ theo các phương pháp đã trình bày ở trên.

Phần tiếp theo, chúng ta sẽ trình bày một số kết quả chạy trên ví dụ cụ thể và đưa ra các so sánh giữa các phương pháp ở chương trước.

Chương 4

Thực nghiệm

4.1 Một số ví dụ

Trong chương này, ta sẽ xét một số ví dụ minh họa và sử dụng với các phương pháp khác nhau.

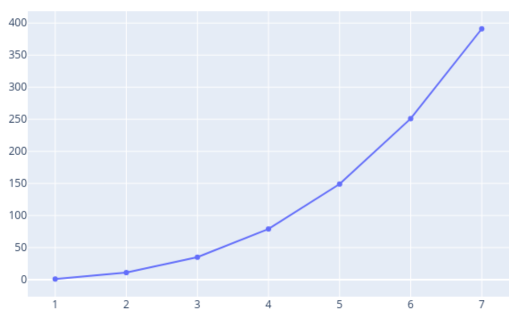
Example 4.1.1. Cho các mốc nội suy $y = f(x)$ bởi bảng sau

x	1	2	3	4	5	6	7
y	1	11	35	79	149	251	391

Bảng 4.1.1: Bảng các mốc nội suy

Xác định x sao cho $f(x) = 15$

Bảng nội suy ở trên được trích mẫu từ đa thức $y = x^3 + x^2 - 1$. Việc trích mẫu từ hàm số như trên cho phép chúng ta đánh giá kết quả của các phương pháp trên mỗi một dạng dáng điệu của các hàm số. Giá trị đúng của x để $f(x) = 15$ là $x^* = 2.227$



Hình 4.1.1: Đồ thị của các điểm dữ liệu cho bởi bảng 4.1.1

Bảng dưới đây là kết quả thực hiện nội suy ngược với từng phương pháp

Hàm ngược	2.268
Lặp theo công thức Newton tiến	1.765
Lặp theo công thức Newton lùi	1.583

Bảng 4.1.2: Kết quả nội suy tương ứng

Ta thấy rằng phương pháp hàm ngược cho kết quả gần hơn với đáp án thực tế. Điều này có thể được giải thích bằng bởi hàm mục tiêu là đa thức và phương pháp hàm ngược có khả năng sử dụng nhiều mốc nội suy hơn là phương pháp Lagrange.

Ta sẽ đến với một ví dụ khác.

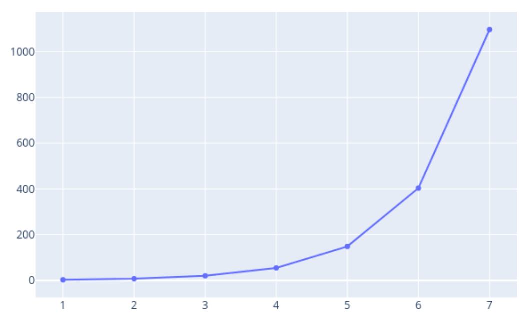
Example 4.1.2. Cho các mốc nội suy $y = f(x)$ bởi bảng sau

x	1	2	3	4	5	6	7
y	2.72	7.39	20.09	54.60	148.41	403.43	1096.63

Bảng 4.1.3: Bảng các mốc nội suy

Xác định x sao cho $f(x) = 12.34$

Trước khi thực hiện nội suy ngược cho bài toán trên, cần phải lưu ý rằng bảng các mốc nội suy ở trên được trích mẫu từ hàm số $y = e^x$. Việc lấy mẫu từ một hàm số biết trước cho phép chúng ta đánh giá được các kết quả nội suy ngược của mỗi một phương pháp tốt đến mức nào. Giá trị x đúng để $f(x) = 12.34$ là $x^* = 2.51$.



Hình 4.1.2: Đồ thị cho bởi bảng 4.1.3

Dưới đây là kết quả nội suy ngược với từng phương pháp.

Hàm ngược	14.8168
Lặp theo công thức Newton tiến	NaN
Lặp theo công thức Newton lùi	3.287

Bảng 4.1.4: Kết quả nội suy ngược ứng với $y = 123.45$ cho bởi 3 phương pháp

Đối với ví dụ này, ta thấy tuy rằng kết quả tính ngược lại $f(x)$ của cả 3 phương pháp đều cho kết quả không quá gần so với nghiệm đúng, tuy nhiên trong ví dụ lần này, việc sử dụng phương pháp lặp cho kết quả tốt hơn khá nhiều so với phương án hàm ngược.

Trong cả hai ví dụ trên, ta thấy rằng hàm số cho trước f đều đơn điệu trên toàn miền. Điều này cho phép phương pháp hàm ngược có nhiều khả năng sử dụng được nhiều mốc nội suy hơn là phương pháp lặp. Mặc dù vậy, trong nhiều trường hợp, việc có một đa thức nội suy quá phức tạp có thể dẫn đến sai số rất lớn. Ta sẽ xét tiếp hai ví dụ sau

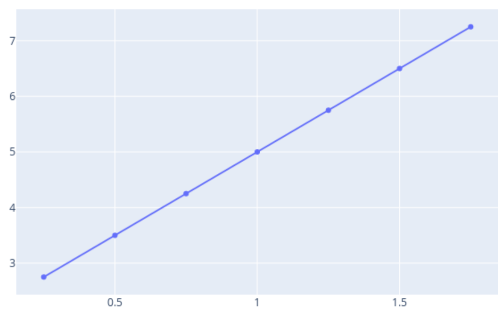
Example 4.1.3. Cho các mốc nội suy $y = f(x)$ bởi bảng sau

x	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75
y	2.75	3.5	4.25	5	5.75	6.5	7.25

Bảng 4.1.5: Bảng các mốc nội suy

Tìm x sao cho $f(x) = 4.5$.

Hàm số f trên được cho bởi $f(x) = 3x + 1$ là một đường thẳng và có dạng đơn giản. Đồ thị của hàm số như sau



Hình 4.1.3: Đồ thị tạo bởi các giá trị trong bảng 4.1.5

Kết quả nội suy của từng phương pháp như sau

Hàm ngược	0.8333
Lặp theo công thức Newton tiến	-0.3383
Lặp theo công thức Newton lùi	-0.3383

Bảng 4.1.6: Kết quả nội suy ngược ứng với $y = 4.5$ cho bởi 3 phương pháp

Đối với hàm số đơn giản như trên, ta hoàn toàn thấy rằng phương pháp hàm ngược cho kết quả tốt hơn hẳn, điều này là rất hợp lí, bởi tuy rằng đa thức nội suy có phức tạp, tuy nhiên ta vẫn có thể xấp xỉ một đường thẳng bởi một đường cong đa thức bậc 7. Trường hợp của phương pháp lặp, ta thấy rằng nghiệm thu được chính là xấp xỉ ban đầu, điều này xảy ra do tất cả các sai phân từ cấp 2 trở đi đều bằng 0, do đó, việc lặp không có ý nghĩa.

Kết luận

Báo cáo đã trình bày về những nội dung cơ bản của bài toán nội suy ngược, trong đó đã nhắc lại một số những lý thuyết cơ bản của lý thuyết nội suy. Báo cáo cũng đã trình bày về hai phương pháp được sử dụng trong nội suy ngược, đó là phương pháp sử dụng hàm ngược và phương pháp lặp dựa trên công thức nội suy Newton.

Báo cáo cũng đã trình bày về thuật toán, ưu nhược điểm của từng phương pháp thông qua hệ thống ví dụ, mỗi ví dụ cho thấy được ưu điểm cũng như nhược điểm của từng phương pháp.

Nội dung cài đặt của từng phương pháp có thể được tham khảo tại Github sau: Numerical Analysis

Tài liệu tham khảo

[1] B. S. Grewal, *Numerical Methods in Engineering and Science: C, C++, and MATLAB*, 2018.

[2] A. Burden, R. Burden, and J. Faires, *Numerical Analysis, 10th ed.*, 01 2016.

[3] A. Browder, *Mathematical Analysis*. Springer New York, 1996.