TRƯỜNG ĐẠI HỌC
BÁCH KHOA HÀ NỘI
HANOI UNIVERSITY
OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Báo cáo Giải tích số

Tính gần đúng đạo hàm và tích phân

Nguyễn Hoàng Nhật - 20204772

ONE LOVE. ONE FUTURE.

I. Tính đạo hàm

- 1. Bài toán và ví dụ
  - Bài toán:
    - Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm nào đó, khi không biết cụ thể hàm f(x) mà chỉ biết giá trị nó dưới dạng bảng số, hoặc hàm $f(x)$ đã biết nhưng khá phức tạp, tính đạo hàm khó khăn.
  - Ví dụ:
    - Cho hàm $f(x) = \log x$ với bảng số liệu sau, hãy tính $f'(55)$:

x	50	55	60	65
$f(x) = \log(x)$	1,6990	1,7401	1,7782	1,8129

I. Tính đạo hàm

- 2. Ý tưởng của phương pháp:
  - 2.1. Ý tưởng phương pháp
    - Thay hàm $f(x)$ bởi đa thức nội suy $p(x)$, sau đó tính $f'(x) \approx p'(x)$ với $x \in [a, b]$ nào đó. Từ đó có thể tính được các đạo hàm cấp cao, khi đã biết đa thức nội suy

- 3. Xây dựng công thức
  - 3.1. Công thức đạo hàm nhờ công thức nội suy Lagrange

Từ bảng số $y_i = f(x_i), i = \overline{0, n}$, bằng đa thức nội suy Lagrange:

$$f(x) \approx p(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x)\, y_j$$

Với $L_j(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}$, $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$

Ta suy ra

$$f'(x) \approx p'(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j{}'(x) y_j$$

I. Tính đạo hàm

- 3. Xây dựng công thức
  - 3.1. Công thức đạo hàm nhờ công thức nội suy Lagrange

Trường hợp các mốc $x_i, i = \overline{0,n}$ cách đều nhau, $x - x_0 = th$, khi đó:

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = h^{n+1}t(t-1)(t-2)\dots(t-n) = h^{n+1}\prod_{i=0}^{n}(t-i)$$

$$\omega'_{n+1}(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)$$

$$= h^n(-1)^{n-i}i!\,(n-i)!$$

Khi đó:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\frac{\prod_{j=0}^{n}(t-j)}{t-i}y_i$$

Vậy

$$f'(x) \approx p'(x) = P'_x(x_0 + th) = \frac{1}{h}P'_t(t)$$

I. Tính đạo hàm

- 4. Sự hội tụ của phương pháp
  - 4.1. Trong công thức trên lấy 2 mốc $n = 2$

$$p'_2(x) = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}(2t-3)y_0 - (2t-2)y_1 + \frac{1}{2}(2t-1)y_2\right)$$

Khi $x = x_0,\ t = 0$ $\quad f'(x_0) \approx p_2'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2)$

Khi $\mathrm{x} = \mathrm{x}_1, \mathrm{t} = 1$ $\quad f'(x_1) \approx p_2'(x_1) = \frac{1}{2h}(-y_0 + y_2)$

Khi $x = x_2, t = 2$ $\quad f'(x_2) \approx p_2'(x_2) = \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2)$

Bằng khai triển Taylor: Ta thấy các công thức trên đạt sai số cấp $\mathrm{O}(h^2)$

- 4. Sự hội tụ của phương pháp
  - 4.1. Trong công thức trên lấy 3 mốc $n = 3$ (4 điểm x_0, x_1, x_2, x_3)

$$p'_2(x) = \frac{1}{h}\left(\frac{-1}{6}(3t^2 - 12 + 11)y_0 + \frac{1}{2}(t^2 - 10 + 6)y_1 - \frac{1}{2}(3t^2 - 8t + 3)y_2 + \frac{1}{6}(3t^2 - 6t + 2\right)$$

Khi $x = x_0,\ t = 0$ $\quad f'(x_0) \approx p_2'(x_0) = \frac{1}{6h}(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3)$

Khi $\mathrm{x} = \mathrm{x}_1, \mathrm{t} = 1$ $\quad f'(x_1) \approx p_2'(x_1) = \frac{1}{6h}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3)$

Khi $x = x_2, t = 2$ $\quad f'(x_2) \approx p_2'(x_2) = \frac{1}{6h}(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3)$

Khi $x = x_2, t = 2$ $\quad f'(x_2) \approx p_2'(x_3) = \frac{1}{6h}(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3)$

Bằng khai triển Taylor: Ta thấy các công thức trên đạt sai số cấp $\mathrm{O}(h^3)$

- 5. Chứng minh công thức sai số phương pháp
  - 5.1. Sai số phương pháp

Ta có $r(x) = R'(x)$, từ sai số của công thức Lagrange:

$$R(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}\prod_{i=0}^{n}(t-i)$$

$$r(x) = R'^{(x)} = \frac{1}{h}\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left\{\left[\frac{d}{dt}f^{n+1}(\xi)\right]t(t-1\ldots(t-n) + f^{(n+1)}(\xi)\frac{d}{dt}[t(t-1)\ldots(t-n)\right\}$$

Khi $x = x_0, t = 0$

$$r(x_0) = \frac{(-1)^n h^n}{(n+1)!}n!\,f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(-1)^n h^n}{n+1}f^{(n+1)}(\xi)$$

Đạt cấp $\mathrm{O}(h^n)$

- 6.Đánh giá phương pháp
  - Sai số bị ảnh hưởng bởi các mốc cho trong dữ liệu
  - Càng nhiều mốc trong dữ liệu có sẵn và mốc tính đạo hàm càng gần trung tâm thì kết quả càng chính xác

- 7. Thuật toán, ví dụ
  - 7.1. Trình bày thuật toán
    - Bài toán nhập dữ liệu từ file có dạng như sau
    - Với dòng đầu tiên là giá trị cần tính đạo hàm,

    cột bên trái là các giá trị x_i, cột phải là y_i

3	
1	1
2	4
3	9
4	16

- 7. Thuật toán, ví dụ
  - 7.1. Trình bày thuật toán

Cần tính :

$$f'(x) \approx p'(x) = P_x'(x_0 + ht) = \frac{1}{h} P_t'(t)$$

với

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{\prod_{j=0}^{n}(t-j)}{t-i} \cdot y_i$$

- 7. Thuật toán, ví dụ
  - 7.1. Trình bày thuật toán

Chương trình chính

B1: Tính đa thức là tích của $\prod_{j=0}^{n}(t-j)$ trong công thức trên, và lưu vào A (cố định)

B2: Tạo ma trận X có độ dài $n+1$ chỉ chứa các số 1, để lưu hệ số của phép chia $\frac{\prod_{j=0}^{n}(t-j)}{t-i}$, (nhằm mục đích rút gọn khối lượng tính toán mỗi lần i chạy)

B3: Tính mảng Pt là kết quả của hàm P_t(), chứa hệ số của đa thức P(t)

B4: Tính đạo hàm của hàm P(t) và thay giá trị cần tính đạo hàm vào

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}.\frac{\prod_{j=0}^{n}(t-j)}{t-i}.y_i$$

- 7. Thuật toán, ví dụ
  - 7.1. Trình bày thuật toán

Gói nhập bảng số liệu từ file và tính một số hằng số sẽ sử dụng lại nhiều lần

Input:

Output: Mảng x, y chứa mốc nội suy và giá trị tại các mốc nội suy, t chứa giá trị cần tính đạo hàm

Thuật toán:

B1: Đọc giá trị cần tính đạo hàm, lưu vào a. Đọc các giá trị dưới và lưu vào x, y

B2: Lưu độ dài của mảng x vào n, độ dài khoảng $h = \frac{x_n - x_0}{n}$, đổi giá trị cần tính sang biến $t = \frac{a - x_0}{h}$

- 7. Thuật toán, ví dụ
  - 7.1. Trình bày thuật toán

Gói nhân một đa thức với $(t - i)$

Input: Mảng A chứa hệ số của đa thức cần nhân, ví dụ mảng A của đa thức $x^2 - 3x + 5$ là $[1, -3, 5]$ và i

Output: Mảng A chứa chính hệ số sau khi nhân với i

B1: Thêm 0 vào cuối mảng A

B2: m = độ dài mảng A

B3: Với j trong khoảng (m-1, 0, -1)

A[j] = A[j] - A[j - 1] * I

B4: Trả về mảng A

- 7. Thuật toán, ví dụ
  - 7.1. Trình bày thuật toán

Gói chia một đa thức với $(t - i)$(chia hết)

Input: Mảng A chứa hệ số của đa thức cần chia, ví dụ mảng A của đa thức $x^2 - 3x + 5$ là $[1, -3, 5]$ và i

Output: Mảng X chứa hệ số của đa thức chia

B1: Với j trong khoảng [1, độ dài (X))

X[j] = i*X[j-1] + A[j]

B2: Trả về X

- 7. Thuật toán, ví dụ
  - 7.1. Trình bày thuật toán

Gói tính hệ số của đa thức P(t)

Input

Output: Mảng Pt chứa hệ số của đa thức P()

B1: Tạo mảng Pt độ dài $n + 1$ chỉ chứa các số 0

B2: Với i trong khoảng [0, n]

Chia đa thức có hệ số lưu trong mảng A cho $t - i$ và lưu vào mảng D

Với j trong khoảng [0, n]

Pt[j] = Pt[j] + D[j]*((-1)**(n-i))/(i!*(n-i)!)*y[i]

B3: Trả về mảng Pt

- 7. Thuật toán, ví dụ
  - 7.1. Trình bày thuật toán

Gói tính giá trị của đạo hàm tại t

Input: Mảng Pt chứa hệ số của đa thức P(t)

Output: Kết quả của đạo hàm

B1: Gán 0 vào biến ans

B2: Với i trong khoảng [0, n-1]

ans = ans + (1/h)*Pt[i]*(n-i)*(t**(n-i-1))

B4: In kết quả ans

- 7. Thuật toán, ví dụ
  - 7.2. Ví dụ:

Xét hàm $f(x) = logx$, cho dưới bảng. Tính f'(55)

x	50	55	60	65
$f(x) = \log(x)$	1,6990	1,7401	1,7782	1,8129

Khi $n = 3$, sử dụng kết quả đã chứng minh trên, với $55 = x_1$, khi đó:

$$f'(55) \approx \frac{1}{30}(-2.1{,}6990 - 3.1{,}7401 + 6.1{,}7782 - 1{,}8129)$$
$$= 0.079333 \approx 0.079$$

Tính trực tiếp: $f'(x) = \frac{1}{xln10}$

$$\Rightarrow f'(55) = 0.07896 \approx 0.079$$

- 7. Thuật toán, ví dụ
  - 7.2. Ví dụ:

Xét hàm $f(x) = logx$

x	40	45	50	55	60	65	70	75
$f(x) = \log(x)$	1.6021	1.6532	1,6990	1,7401	1,7782	1.8129	1,8451	1.8751

Khi đó

$$f'(55) \approx 0.007916$$

Tính trực tiếp: $f'(x) = \frac{1}{xln10}$

$$\Rightarrow f'(55) = 0.07896 \approx 0.079$$

- 7. Thuật toán, ví dụ
  - 7.2. Ví dụ:

Xét hàm $f(x) = x^3$, tính f'(3)

x	1	2	3	4
$f(x) = \log(x)$	1	8	27	64

Khi $n = 3$, sử dụng kết quả đã chứng minh trên, với $3 = x_2$, khi đó:

$$f'(3) \approx \frac{1}{6}(1 - 6.8 + 3.27 + 2.64)$$

$$= 27$$

Tính trực tiếp: $f'(x) = 3x^2$

$$\Rightarrow f'(3) = 27$$

I. Tính đạo hàm

- 7. Thuật toán, ví dụ
  - 7.1. Đánh giá thuật toán

    Thuật toán khá đơn giản, dễ triển khai. Kết quả tính ra khá tốt

II. Tính gần đúng tích phân xác định

- 1. Bài toán và ví dụ:
  - 1.1. Bài toán:
    - Tính giá trị của tích phân xác định của hàm $f(x)$, khi nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ không tìm được bằng các phép biến đổi sơ cấp, hoặc nguyên hàm là hàm số khá phức tạp thì giá trị của tích phân xác định chỉ có thể tìm được trong dạng gần đúng.

- 2. Ý tưởng của phương pháp
  - Phương pháp đơn giản nhất là tính các giá trị của hàm $f(x)$ tại một số điểm $x_i \in [a, b]$ $i = \overline{0, n}$. Từ đó ta xây dựng đa thức nội suy $\varphi(x)$ thì:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)\, dx$$

II. Tính gần đúng tích phân xác định

- 3. Xây dựng công thức
  - 3.1. Công thức Newton – Cotes
    - Tính $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b y(x)dx$. Chia đoạn $[a, b]$ thành n phần bằng nhau có bước $h = \frac{b-a}{n}$ thành các điểm chia:

$$x_0 = a, \qquad x_n = b, \qquad x_i = x_0 + ih, \qquad y_i = f(x_i)$$

    - Thay $f(x) = y(x)$ bởi đa thức nội suy Lagrange:

$$I = \int_a^b y\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} h\frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\left(\int_0^n \frac{\prod_{j=0}^{n}(t-j)}{t-i}\,dt\right) y_i$$

- 3. Xây dựng công thức
  - 3.1. Công thức Newton – Cotes

$$I = \int_a^b y\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} h\,\frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\left(\int_0^n \frac{\prod_{j=0}^{n}(t-j)}{t-i}\,dt\right) y_i$$

$$H_i = \frac{1}{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\left(\int_0^n \frac{\prod_{j=0}^{n}(t-j)}{t-i}\,dt\right)$$

thì $I = \int_a^b y dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i y_i \quad (*)$, trong đó H_i là hệ số Cotes.

- 3. Xây dựng công thức
  - 3.1. Công thức Newton – Cotes

Xét vài trường hợp riêng, trong (*) xét khi $n = 1$, ta có:

$$H_0 = -\int_0^1 \frac{t(t-1)}{t} dt = \frac{1}{2}$$

$$H_1 = \int_0^1 \frac{t(t-1)}{t-1} dt = \frac{1}{2}$$

Vậy:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(y_0 + y_1)$$

Đây là công thức hình thang địa phương

- 3. Xây dựng công thức
  - 3.1. Công thức Newton – Cotes

Xét vài trường hợp riêng, trong (*) xét khi $n = 2$, ta có:

$$H_0 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_0^2 (t-1)(t-2)\,dt = \frac{1}{6}$$

$$H_1 = -\frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_0^2 t(t-2)dt = \frac{2}{3}$$

$$H_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_0^2 t(t-1)dt = \frac{1}{6}$$

Vậy:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

- 3. Xây dựng công thức
  - 3.2. Sai số công thức Newton – Cotes

Định lý 1: Sai số của công thức Newton – Cotes, với n lẻ:

$$\frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n \prod_{i=0}^{n} (t-i)\, dt$$

Định lý 2: Sai số của công thức Newton – Cotes, với n chẵn:

$$\frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n \prod_{i=0}^{n+1} (t-i)\, dt$$

- 3. Xây dựng công thức
  - 3.3. Công tích hình thang
    - Tính $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b y(x)dx$. Chia đoạn $[a, b]$ thành n phần bằng nhau có bước $h = \frac{b-a}{n}$ thành các điểm chia:

$$x_0 = a, \qquad x_n = b, \qquad x_i = x_0 + ih, \qquad y_i = f(x_i) \;\; I_k = \int_{k-1}^{k} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[y_{k-1} + y_k]$$

    - $I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$

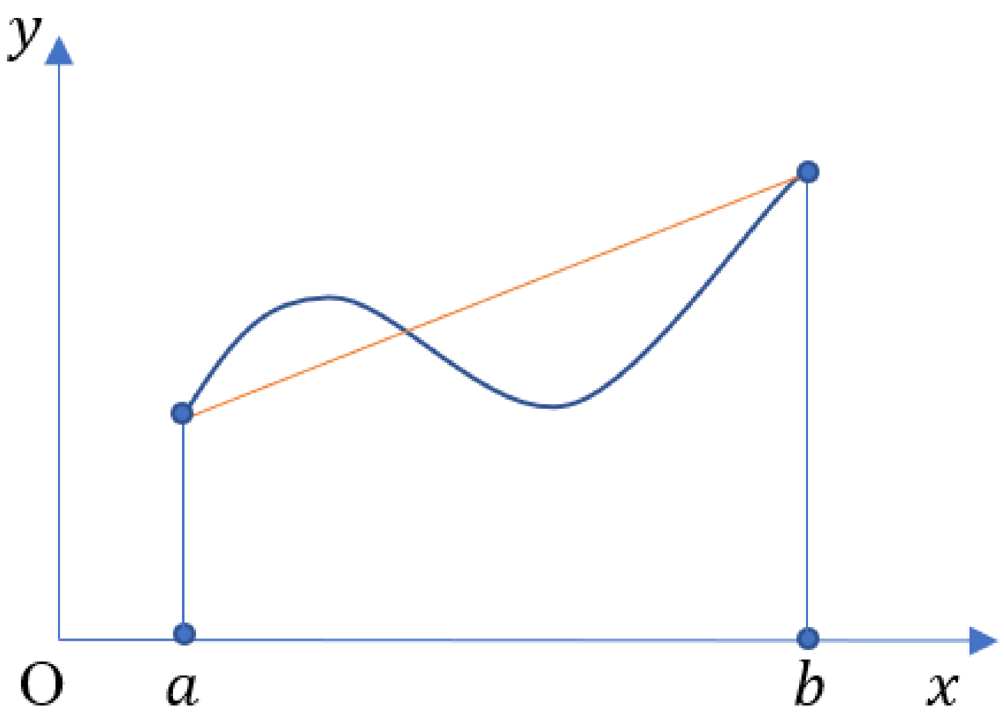
$$\approx \frac{h}{2}[y_0 + y_1] + \frac{h}{2}[y_1 + y_2] + \cdots + \frac{h}{2}[y_{n-1} + y_n]$$

$$\approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) \qquad (9)$$

II. Tính gần đúng tích phân xác định

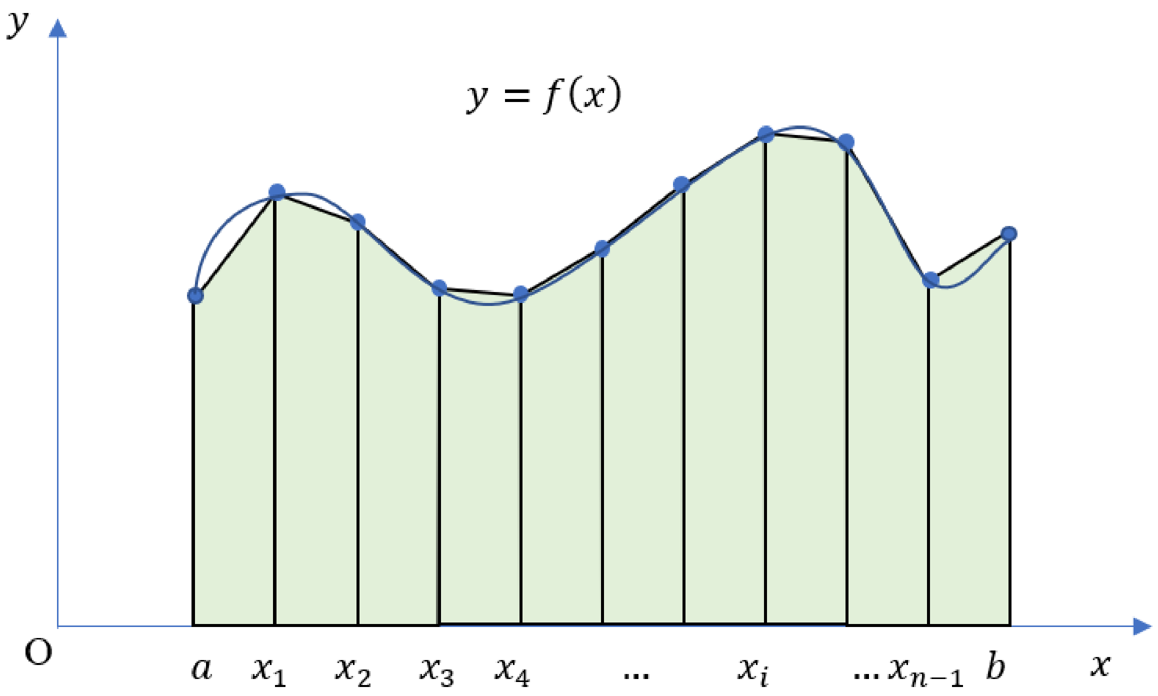
- 3. Xây dựng công thức
  - 3.3. Công tích hình thang

Ý nghĩa hình học: Công thức hình thang địa phương



- 3. Xây dựng công thức
  - 3.3. Công tích hình thang

Ý nghĩa hình học: Công thức hình thang tổng quát



- 3. Xây dựng công thức
  - 3.2. Sai số công tích hình thang

Sai số công thức hình thang địa phương

$$R_1(x) = f(x) - P_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)(x - x_1)$$

hay

$$|R_1(x)| = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)(x_1 - x) \leq \frac{M_2}{2} h^2 t(1 - t)$$

với $x - x_0 = th; M_2 = max|f''(x)|, x \in [a, b]$

- 3. Xây dựng công thức
  - 3.2. Sai số công tích hình thang

Sai số công thức hình thang địa phương

Vậy

$$\left|\int_{x_0}^{x_1} f(x) - I^*\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x)dx - \frac{h}{2}(y_0 + y_1)\right|$$

$$\leq \int_{x_0}^{x_1} |R_1(x)|dx \leq \frac{M_2}{2}h^3 \int_0^1 t(1-t)dt = \frac{M_2}{12}h^3 \quad (8)$$

- 3. Xây dựng công thức
  - 3.2. Sai số công tích hình thang tổng quát

Gọi vế phải của (9) là I^*, thì sai số $I - I^*$ được xác định:

$$|I - I^*| \le \left| \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - \frac{h}{2}(y_0 + y_1) \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - \frac{h}{2}(y_1 + y_2) \right| +$$

$$\dots + \left| \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx - \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n) \right|$$

- 3. Xây dựng công thức
  - 3.2. Sai số công tích hình thang tổng quát

Áp dụng công thức sai số công thức hình thang địa phương lên từng khoảng

$$|I - I^*| \le \frac{M_{21}}{12}h^3 + \frac{M_{22}}{12}h^3 + \cdots + \frac{M_{2n}}{12}h^3$$

với $\qquad M_{2j} = \max_{x \in [x_{j-1}, x_j]} |f''(x)| \qquad j = \overline{1, n}$

Đặt $\qquad M_2 = \max_{1 \le j \le n} M_{2j} \approx \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$

Thì:

$$|I - I^*| \le \frac{M_2}{12} nh^3 = \frac{M_2}{12}(b-a)h^2$$

II. Tính gần đúng tích phân xác định

- 3. Xây dựng công thức
  - 3.2. Số khoảng chia cần thiết

Từ công thức sai số công thức hình thang, ta suy ra số khoảng chia n cần thiết để đạt sai số epsilon cho trước:

$$n = \left[\left(\frac{M_2 (b-a)^3}{12\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + 1$$

- 3. Xây dựng công thức và đánh giá sai số
  - 3.2. Công thức Simpson

Chia đoạn $[a, b]$ thành 2m phần bằng nhau có bước $h = \frac{b-a}{2m}$ thành các điểm chia:

$$x_0 = a, \quad x_{2m} = b, \quad x_i = x_0 + ih, \quad y_i = f(x_i) \quad I_k = \int_{k-1}^{k} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[y_{k-1} + y_k]$$

Áp dụng công thức Newton – Cotes với n = 2:

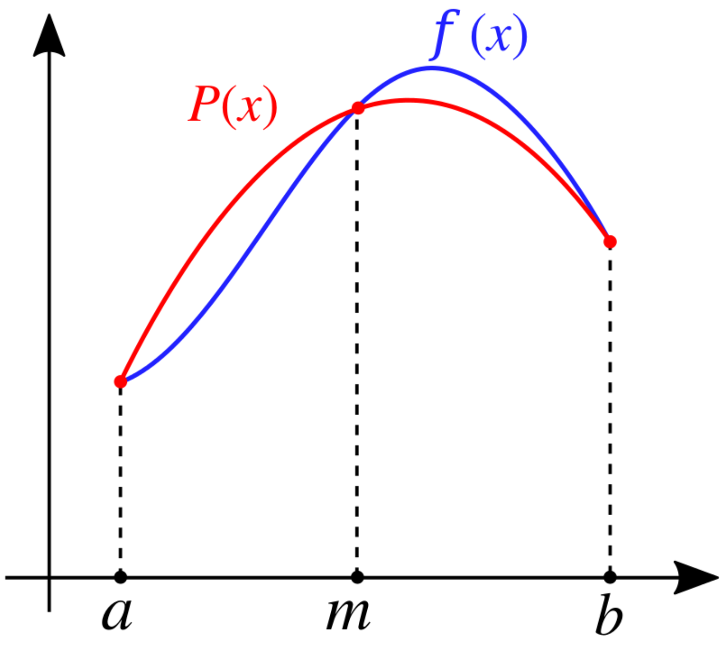
$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Đối với các đoạn $[x_0, x_2]; [x_2, x_4]; \ldots; [x_{2m-2}, x_{2m}]$; ta được

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})$$

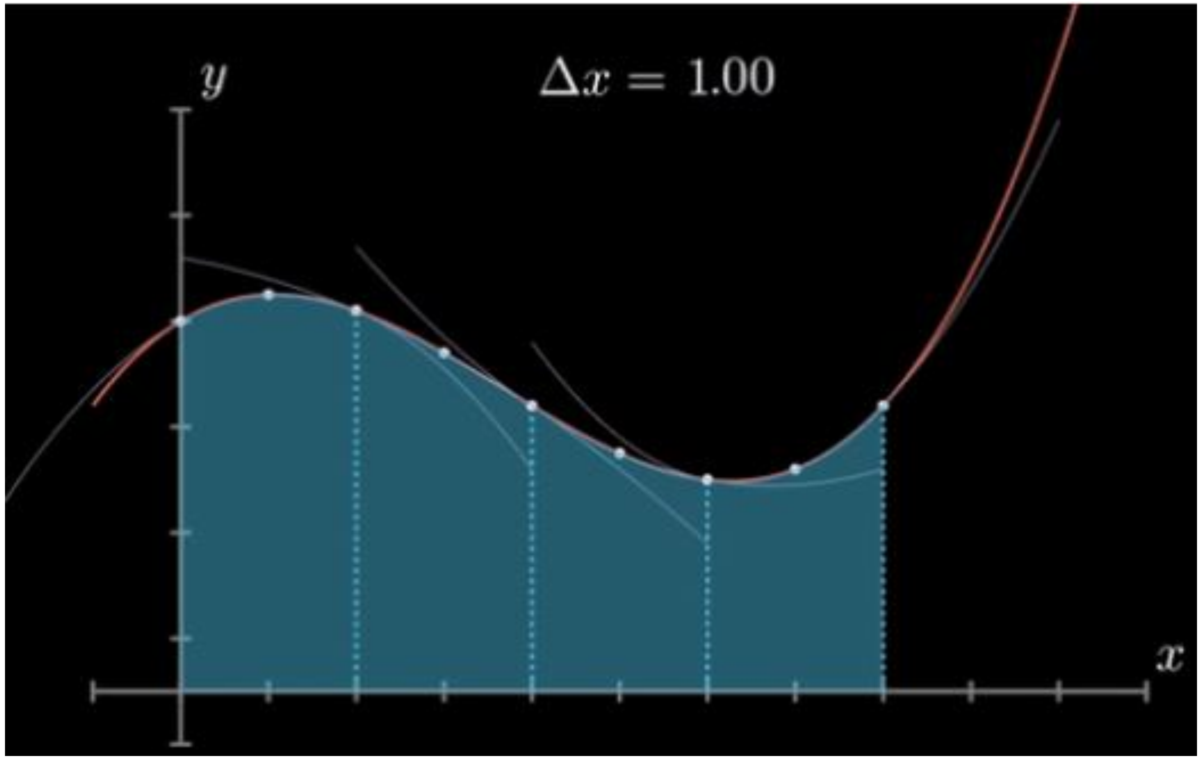
$$\approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2m}] + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2})$$

- 3. Xây dựng công thức và đánh giá sai số
  - 3.2. Công thức Simpson
    - Ý nghĩa hình học công thức



II. Tính gần đúng tích phân xác định

- 3. Xây dựng công thức và đánh giá sai số
  - 3.2. Công thức Simpson
    - Ý nghĩa hình học



- 3. Xây dựng công thức và đánh giá sai số
  - 3.2. Sai số công thức Simpson

Sai số công thức Simpson địa phương

Gọi $I^* = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$ là giá trị gần đúng của tích phân I; trong đó $y_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2.$

Đặt $x = t + \frac{a+b}{2}$ thì

$$x_1 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow t = 0$$

$$x_0 = a \Longrightarrow t = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} = -h;$$

$$x_2 = b \Longrightarrow t = b - \frac{a+b}{2} = h$$

- 3. Xây dựng công thức và đánh giá sai số
  - 3.2. Sai số công thức Simpson

Sai số công thức Simpson địa phương

Khi đó công thức Simpson địa phương trở thành:

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f_{-1} + 4f_0 + f_1] \text{ theo chỉ số}$$

Đặt $\phi(t) = \int_{x_0-t}^{x_0+t} f(x)dx - \frac{t}{3}[f(x_0 - t) + 4f(x_0) + f(x_0 + t)]$ (11)

trong đó $0 \leq t \leq h$

Xét hàm $F(t) = \phi(t) - \left(\frac{t}{h}\right)^5 \phi(h)$

Dễ dàng thấy rằng $F(0) = F(h) = 0$

II. Tính gần đúng tích phân xác định

- 3. Xây dựng công thức và đánh giá sai số
  - 3.2. Sai số công thức Simpson

$$F'(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - \frac{t}{3}[-f'(x_0 - t) + f'(x_0 + t)]$$

$$-\frac{1}{3}[f(x_0 - t) + 4f(x_0) + f(x_0 + t)] - \frac{5t^4}{h^5}\phi(h)$$

$$F''(t) = f'(x_0 + t) - f'(x_0 - t) - \frac{t}{3}[-f'(x_0 - t) + f'(x_0 + t)] -$$

$$-\frac{t}{3}[f''(x_0 - t) + f''(x_0 + t)] - \frac{1}{3}.[-f'(x_0 - t) + f'(x_0 + t)] - \frac{20t^3}{h^5}\phi(h)$$

$$\Rightarrow F'(0) = F''(0) = 0$$

- 3. Xây dựng công thức và đánh giá sai số
  - 3.2. Sai số công thức Simpson

Ta cũng có

$$F'''(t) = -\frac{t}{3}.\left[f''(x_0+t) - f''(x_0-t)\right] - \frac{60t^2}{h^5}\phi(h)$$

Áp dụng định lý Lagrange cho phần trong ngoặc []

$$F'''(t) = -\frac{t}{3}f^{(4)}_{(\xi)}.2t - \frac{60t^2}{h^5}\phi(h) \qquad (12)$$

$$\xi \in (x_0 - t, x_0 + t)$$

- 3. Xây dựng công thức và đánh giá sai số
  - 3.2. Sai số công thức Simpson

Do $F(0) = F(h) = 0$, áp dụng định lý Rolle, tồn tại điểm $t_1 \in (0, h)$ để $F'(t_1) = 0$.

Lại từ $F'(0) = F'(t_1) = 0$, tồn tại điểm $t_2 \in (0, t_1)$ để $F''(t_2) = 0$

Tương tự, ta tìm được $t_3 \in (0, t_2)$ để $F'''(t_3) = 0$. Từ (12), ta suy ra:

$$F'''(t_3) = -\frac{2t_3^2}{3}\left[f_{(\xi)}^{(4)} + \frac{90}{h^5}\phi(h)\right] = 0$$

$$\phi(h) = -\frac{h^5}{90} f_{(\xi)}^{(4)}$$

với $\quad x_0 - t_3 \le \xi \le x_0 + t_3$

- 3. Xây dựng công thức và đánh giá sai số
  - 3.2. Sai số công thức Simpson

Theo (11), khi $t = h$

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx - \frac{h}{3}[f(x_0 - h) + 4f(x_0) + f(x_0 + h)] = \frac{h^5}{90} f^{(4)}_{(\xi)}$$

hay với $M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}_{(x)}|$ thì:

$$|I - I^*| \le \frac{M_4 h^5}{90}$$

- 3. Xây dựng công thức và đánh giá sai số
  - 3.2. Sai số công thức Simpson
    - Sai số công thức Simpson tổng quát

Sai số của công thức (13). Đặt I^* là vế phải của (13) thì

$$|I - I^*| \le \left(\frac{M_{4,1}}{90} + \frac{M_{4,2}}{90} + \cdots + \frac{M_{4,m}}{90}\right) h^5 \qquad (14)$$

trong đó

$$M_{4,j} = \max_{x \in [x_{2j-2}, x_{2j}]} \left| f_{(x)}^{(4)} \right| \qquad j = 1,2,\dots,m$$

- 3. Xây dựng công thức và đánh giá sai số
  - 3.2. Sai số công thức Simpson
    - Sai số công thức Simpson tổng quát

Đặt

$$M_4 = \max_{1 \le j \le m} M_{4j} = \max_{x \in [a,b]} \left| f_{(x)}^{(4)} \right|$$

thì từ (14) suy ra $|I - I^*| \le \frac{M_4}{90} h^4 . (mh)$ mà $h = \frac{b-a}{2m}$

hay

$$|I - I^*| \le \frac{M_4}{180} (b-a) h^4$$

II. Tính gần đúng tích phân xác định

- 3. Xây dựng công thức và đánh giá sai số
  - 3.4. Số khoảng chia cần thiết để đạt sai số ε

Từ công thức sai số công thức Simpson, ta suy ra số khoảng chia 2m cần thiết để đạt sai số ε cho trước:

$$2m = \left[\sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{180\varepsilon}} \right] + 1$$

- 4. Đánh giá phương pháp
  - 4.1. Công thức Newton – Cotes

    Độ chính xác tốt nhất, tuy nhiên khối lượng tính toán lớn

- 4. Đánh giá phương pháp
  - 4.1. Công thức hình thang

    Khối lượng tính toán ít nhất dẫn đến sai số khá lớn

- 4. Đánh giá phương pháp
  - 4.1. Công thức Simpson

    Là sự kết hợp giữa hai công thức trước đó, cho kết quả tốt ở mức trung bình và khối lượng tính toán vừa phải

- 4. Xây dựng thuật toán
  - 4.1. Công thức Newton – Cotes

Chương trình chính

Input:

Output: In ra kết quả tính tích phân, sai số hoặc số khoảng chia cần thiết để đạt sai số cho trước

B1: Khởi tạo một số biến toàn cục được sử dụng nhiều lần như:

f, a, b, n, h : Hàm số, khoảng lấy tích phân, số khoảng chia và bước h

A : Mảng chứa giá trị của hàm tại các mốc nội suy

D : Mảng chứa hệ số của đa thức là tích các $(t - i)$, i từ 0 đến n

B2: Bước $h = \frac{b-a}{n}$

B3: Gọi ra các hàm tính toán các yêu cầu bài toán

- 4. Xây dựng thuật toán
  - 4.1. Công thức Newton – Cotes

Gói tính giá trị lớn nhất của đạo hàm cấp i của hàm $|f(x)|$ trên đoạn $[a, b]$ Gói này tên là ***max***

Input: Hàm f và i

Output: Giá trị lớn nhất của đạo hàm cấp i của hàm $|f(x)|$ trên đoạn $[a, b]$

B1: Hàm $g(x)$ = đạo hàm cấp i của $f(x)$

B2: Tìm m_1, m_2 lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm $g(x)$ trên đoạn $[a, b]$ bằng thư viện có sẵn

B3: So sánh $|m_1|$ và $|m_2|$, khi đó giá trị lớn nhất của $|f(x)|$ là giá trị lớn hơn trong $|m_1|$ và $|m_2|$

- 4. Xây dựng thuật toán
  - 4.1. Công thức Newton – Cotes

Gói nhân một đa thức với $(t - i)$

Input: Mảng A chứa hệ số của đa thức cần nhân, ví dụ mảng A của đa thức $x^2 - 3x + 5$ là $[1, -3, 5]$ và i

Output: Mảng A chứa chính hệ số sau khi nhân với i

B1: Thêm 0 vào cuối mảng A

B2: m = độ dài mảng A

B3: Với j từ m-1 chạy về 1

A[j] = A[j] - A[j - 1] * I

B4: Trả về mảng A

- 4. Xây dựng thuật toán
  - 4.1. Công thức Newton – Cotes

Gói chia một đa thức với $(t - i)$(chia hết)

Input: Mảng A chứa hệ số của đa thức cần chia, ví dụ mảng A của đa thức $x^2 - 3x + 5$ là $[1, -3, 5]$ và I

Output: Mảng X chứa hệ số của đa thức chia

B1: Với j chạy từ 1 đến độ dài của X

X[j] = i*X[j-1] + A[j]

B2: Trả về X

- 4. Xây dựng thuật toán
  - 4.1. Công thức Newton – Cotes

Gói tính tích phân xác định của một đa thức

Input: Mảng A chứa hệ số của đa thức, a, b là khoảng lấy tích phân

Output: Giá trị tích phân xác định

B1: I = 0 **B2:** m = độ dài mảng A

B3:Với j chạy từ 0 đến m-1

Nếu A[j] = 0: Bỏ qua

Nếu A[j] ≠ 0: A[j] = A[j]/(m-j)

I = I + A[j]*(b^(m-j))-a^(m-j))

B4: Trả về I

- 4. Xây dựng thuật toán
  - 4.1. Công thức Newton – Cotes

Gói tính hệ số Cotes H_i

Input: Hệ số Cotes thứ i

Output: Hệ số Cotes H_i

B1: Tạo mảng X chứa hệ số của phép chia đa thức D (tích các (t-i), i từ 0 đến n) với (t-im

B2: Tính hệ số H_i theo công thức

$$H_i = \frac{1}{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\int_0^n \frac{\prod_{j=0}^{n}(t-j)}{t-i}\,dt$$

B3: Trả về H_i

- 4. Xây dựng thuật toán
  - 4.1. Công thức Newton – Cotes

Gói in ra các hệ số Cotes và tính giá trị của tích phân $(b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i y_i$

Input:

Output: Kết quả tích phân

B1: Khởi tạo biến I để tính tích phân, tạo mảng H để chứa các hệ số H_i

B2: Với i chạy từ 0 đến n

H_i = hệ số Cotes thứ i

$I = I + H_i * y_i$

B3: In kết quả I*(b-a)

- 4. Xây dựng thuật toán
  - 4.1. Công thức Newton – Cotes

Gói tính sai số của công thức Newton – Cotes

Input:

Output: Sai số công thức Newton – Cotes

B1: Tạo hàm g là đạo hàm cấp n của hàm f

B2: Nếu n lẻ

m_1 = GTLN của $|g'(x)|$ trên đoạn $[a, b]$ bằng hàm ***max***

Tính sai số theo công thức: $|R_n(x)| \leq \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} m_1 \int_0^n \prod_{i=0}^n (t-i)dt$

- 4. Xây dựng thuật toán
    - 4.1. Công thức Newton – Cotes

Gói tính sai số của công thức Newton – Cotes

Input:

Output: Sai số công thức Newton – Cotes

B1: Tạo hàm g là đạo hàm cấp n của hàm f

B3: Nếu m chẵn

Tìm $m_2 =$ GTLN của $|g''(x)|$ trên đoạn [a, b] bằng hàm ***max***

Tính sai số theo công thức $|R_n(x)| \leq \frac{h^{n+3}}{(n+2)!} m_2 \int_0^n \prod_{i=0}^{n+1} (t-i) dt$

B4: In ra giá trị sai số

- 4. Xây dựng thuật toán
  - 4.2. Công thức hình thang:

Gói tính tích phân

Input: Mảng A chứa giá trị của hàm $f(x)$ tại các mốc x_i

Output: Giá trị gần đúng của tích phân xác định bằng công thức hình thang

B1: Tạo biến $trape = \frac{1}{2}(A[0] + A[n])$

B2: Với i trong khoảng (1, n)

$$trape = trape + A[i]$$

B3: In $trape$

- 4. Xây dựng thuật toán
  - 4.2. Công thức hình thang:

Gói tính sai số

Input:

Output: Sai số của tích phân bằng công thức hình thang

B1: Tìm $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$ bằng hàm ***max***

B2: Sai số tính theo công thức

$$\frac{M_2}{12}(b-a)h^2$$

- 4. Xây dựng thuật toán
  - 4.2. Công thức hình thang:

Gói tính số khoảng chia cần thiết

Input:

Output: Số khoảng chia cần thiết

B1: Tìm $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ bằng hàm ***max***

B2: Tính số khoảng chia theo công thức

$$n = \left[\left(\frac{M_2 (b-a)^3}{12\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + 1$$

- 4. Xây dựng thuật toán
  - 4.3. Công thức Simpson

$$I \approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2m}] + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2})$$

<u>Gói tính tích phân</u>

Input: Mảng A chứa giá trị của hàm $f(x)$ tại các mốc x_i

Output: Giá trị gần đúng của tích phân xác định bằng công thức Simpson

B1: simp = h/3*(A[0]+A[n])

simp_odd = 0

simp_even = 0

B2: Với i từ 1 đến n, i lẻ: simp_odd += A[i]

B3: Với i từ 2 đến n, i chẵn: simp_even += A[i]

B4: simp = simp + h/3*4*simp_odd + h/3*2*simp_even

- 4. Xây dựng thuật toán
  - 4.3. Công thức Simpson

Gói tính sai số $|I - I^*| \leq \frac{M_4}{180}(b-a)h^4$

Input:

Output: Sai số công thức tính gần đúng tích phân bằng công thức Simpson

B1: Tìm $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$ bằng hàm ***max***

B2: Tính sai số theo công thức

$$\frac{M_4}{180}(b-a)h^4$$

- 4. Xây dựng thuật toán
  - 4.3. Công thức Simpson

Gói tính số khoảng chia cần thiết để đạt sai số epsilon cho trước

Input:

Output: Số khoảng chia cần thiết

B1: Tìm $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$ bằng hàm ***max***

B2: Tính số khoảng chia cần thiết theo công thức:

$$2m = \left\lceil \sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{180\varepsilon}} \right\rceil$$

- 5. Ví dụ

Ví dụ 1: Tính tích phân của $\int_1^2 \frac{1}{x^2}$ với $n = 4$

Tạo bảng số:

x	1	1.25	1.5	1.75	2
f(x)	1	0.64	0.4444	0.3265	0.25

Tính theo công thức Newton – Cotes:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{90}(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4) = 0.5001$$

Sai số: $|f^6(x)| = \frac{5040}{x^8}$ đạt max = 5040 trên 1, 2

Khi đó $R_n(x) \leq \frac{1}{384}$ $\qquad$ $\mathrm{R_n(x)} \leq \frac{M_{n+2}}{(n+2)!} h^{n+3} \int_0^n \prod_{i=0}^{n+1}(t-i)dt$

- 5. Ví dụ

Ví dụ 1: Tính tích phân của $\int_1^2 \frac{1}{x^2}$ với $n = 4$

Tạo bảng số:

x	1	1.25	1.5	1.75	2
f(x)	1	0.64	0.4444	0.3265	0.25

Tính theo công thức hình thang:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4) = 0.5090$$

Sai số: $f''(x) = \frac{6}{x^4}$ đạt max = 6 trên [1, 2]

$\Rightarrow |I - I^*| \leq \frac{1}{32} = 0.0312$

$|\mathrm{I} - \mathrm{I}^*| \leq \frac{M_2}{12}(b-a)h^2$

- 5. Ví dụ

Ví dụ 1: Tính tích phân của $\int_1^2 \frac{1}{x^2}$ với $n = 4$

Tạo bảng số:

x	1	1.25	1.5	1.75	2
f(x)	1	0.64	0.4444	0.3265	0.25

Tính theo công thức Simpson:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_4) + 4(y_1 + y_3) + 2y_2] = 0.5004$$

Sai số: $f^{(4)}(x) = \frac{120}{x^6}$ đạt max = 120 trên [1, 2]

$\Rightarrow |I - I^*| \le \frac{1}{384} = 0.0026$

$|I - I^*| \le \frac{M_4}{180}(b-a)h^4$

- 5. Ví dụ

Ví dụ 2: Cần lấy bao nhiêu khoảng n để đạt sai số trong $\int_1^2 \frac{1}{x^2}$ bé hơn 0.0002

Công thức hình thang:

$\frac{M_2}{12}(b-a)h^2 \leq 0.0002$ hay $\frac{6}{12}\frac{(b-a)\string^3}{n\string^2} \leq 0.0002 \Rightarrow n \geq \frac{1}{\sqrt{0.0004}} = 50$

Vậy cần 51 khoảng

Công thức Simpson

$\frac{M_4}{180}(b-a)h^4 \leq 0.0002$ hay $\frac{120}{180}\frac{(b-a)^5}{n^4} \leq 0.002 \;\Rightarrow\; n \geq \frac{1}{\sqrt[4]{0.0003}} \approx 7.6$

Vậy cần 8 khoảng

HUST

hust.edu.vn fb.com/dhbkhn

THANK YOU !