

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

—o0o—



BÁO CÁO MÔN HỌC

**CHỦ ĐỀ 11: PHƯƠNG PHÁP LẬP ĐƠN VÀ
PHƯƠNG PHÁP JACOBI GIẢI GẦN ĐÚNG HỆ
PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH**

Giảng viên hướng dẫn: **TS: Hà Thị Ngọc Yến**

Sinh viên: **Nguyễn Thị Ngọc Lan**

MSSV: **20185372**

HÀ NỘI, 1/2022

Mục lục

Lời nói đầu	ii
1 Kiến thức chuẩn bị	iii
1.1 Chuẩn của ma trận và vec tơ	iii
1.2 Giới hạn của dãy vec tơ	iv
1.3 Sự không ổn định của hệ phương trình đại số tuyến tính	iv
2 Phương pháp lặp đơn	v
2.1 Bài toán	v
2.2 Ý tưởng phương pháp	v
2.3 Sự hội tụ của phương pháp	vi
2.4 Công thức sai số	vi
2.5 Thuật toán	vii
2.6 Ví dụ	viii
3 Phương pháp Jacobi	xi
3.1 Ma trận chéo trội hàng và ma trận chéo trội cột	xi
3.2 Nội dung phương pháp	xii
3.3 Công thức sai số	xiii
3.4 Thuật toán	xiv
3.5 Ví dụ	xvi

Lời nói đầu

Giải tích số là một môn học nghiên cứu các phương pháp giải gần đúng các bài toán thực tế được mô hình hóa bằng ngôn ngữ toán học. Để có lời giải đúng cho bất kỳ bài toán nào cũng cần phải có dữ kiện của bài toán, xây dựng mô hình bài toán, tìm thuật toán hiệu quả nhất. và cuối cùng là xây dựng chương trình trên máy tính sao cho tiết kiệm thời gian và bộ nhớ. Tuy nhiên trong thời gian xử lý số liệu không tránh khỏi sai số dù là rất nhỏ nhưng ảnh hưởng trực tiếp đến quá trình tính toán.

Chính vì vậy phải sử dụng các thuật toán hữu hiệu để giảm thiểu sự sai số đồng thời thuận lợi cho công việc lập trình tiết kiệm số lượng các phép tính và thời gian tính toán.

Phương pháp số có ý nghĩa rất lớn trong đại số tuyến tính, đặc biệt là đối với việc giải hệ phương trình tuyến tính. Khi số các phương trình lớn, các phương pháp truyền thống gặp nhiều khó khăn, chúng ta không thể giải một cách chính xác mà chỉ có thể đưa ra lời giải gần đúng cho một bài toán.

Qua bài báo cáo này, em xin trình bày một trong các phương pháp giải gần đúng hệ phương trình tuyến tính: “Phương pháp lặp đơn và lặp Jacobi”. Bài báo cáo gồm các nội dung:

1. Kiến thức chuẩn bị
2. Phương pháp lặp đơn gồm nội dung phương pháp, công thức sai số, thuật toán
3. Phương pháp Jacobi gồm nội dung phương pháp, công thức sai số, thuật toán

Em xin trân thành cảm ơn cô Hà Thị Ngọc Yến đã tận tình hướng dẫn giúp đỡ em hoàn thành bài báo cáo này.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Chuẩn của ma trận và vec tơ

a. Chuẩn của ma trận

Định nghĩa 1.1.1. Chuẩn của ma trận cấp $m \times n$: $A = (a_{ij})$ là một số thực không âm được kí hiệu là thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $\|A\| > 0$ (với $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$)
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$, α là số thực bất kì.
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Trong phạm vi của bài báo cáo, ta chọn hai loại chuẩn thường dùng sau:
Chuẩn cột:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

Chuẩn hàng:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Ví dụ 1. Cho $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$, ta tính được các chuẩn của A theo định nghĩa trên như sau:

$$\|A\|_1 = \max(5 + 1 + 2; 2 + 4 + 1; 1 + 3 + 7) = \max(8; 7; 11) = 11$$

$$\|A\|_\infty = \max(5 + 2 + 1; 1 + 4 + 3; 2 + 1 + 7) = \max(8; 8; 10) = 10$$

b. Chuẩn của véc tơ

Vecto là ma trận có n hàng và 1 cột, do đó đối với vecto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ta có hai chuẩn sau:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

1.2 Giới hạn của dãy véc tơ

Định lí 1.2.1. Xét dãy các vecto $(X^{(n)})_n^\infty$ với $X^{(n)} \in \mathbb{R}^n$. Dãy các vecto này được gọi là hội tụ về vecto \bar{X} khi $n \rightarrow +\infty$ nếu và chỉ nếu

$$\|X^{(n)} - \bar{X}\| \rightarrow 0$$

khi $n \rightarrow +\infty$ (hội tụ theo chuẩn).

Định lí 1.2.2. Để dãy các vecto $(X^{(n)})_n^\infty$ hội tụ về vecto \bar{X} khi $n \rightarrow +\infty$ thì điều kiện cần và đủ là những dãy $(x_k^{(n)})$ hội tụ về $\bar{x}_k, \forall k = 1, 2, \dots, n$. (hội tụ theo tọa độ)

Ví dụ 2. Xét ba dãy $\{\frac{1}{k}\}; \{\frac{k}{2k+1}\}; \{\frac{1}{k^2}\}$ thì ta được một dãy vecto hội tụ đến $v = (0; \frac{1}{2}; 0)$.

1.3 Sự không ổn định của hệ phương trình đại số tuyến tính

Định nghĩa 1.3.1. Đối với mỗi hệ PTTT, nếu một sự thay đổi nhỏ của các hệ số dẫn đến sự thay đổi lớn của nghiệm thì hệ đó không ổn định. Ngược lại là hệ ổn định.

Ví dụ 3. Cho hệ $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x + 1.01y = 2.01 \end{cases}$ có nghiệm $x = 0.5, y = 1$.

Hệ $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2.01x + 1y = 2.05 \end{cases}$ có nghiệm $x = 5, y = -8$.

Nhận xét 1.3.2. Xét hệ $AX = b$, A là ma trận vuông. Ta gọi số điều kiện của ma trận không suy biến A là $Cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$

- $Cond(A)$ gần với 1: Hệ ổn định.
- $Cond(A)$ càng lớn: hệ càng không ổn định.

Nếu A suy biến thì $Cond(A)$ được xem là vô hạn.

Chương 2

Phương pháp lặp đơn

1.1	Chuẩn của ma trận và vec tơ	iii
1.2	Giới hạn của dãy vec tơ	iv
1.3	Sự không ổn định của hệ phương trình đại số tuyến tính	iv

2.1 Bài toán

Giải hệ phương trình tuyến tính

$$Ax = b \tag{2.1}$$

Trong đó $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$

2.2 Ý tưởng phương pháp

Đưa phương trình (2.1) về dạng

$$x = Bx + d = \phi(x) \tag{2.2}$$

Trong đó ma trận B và vecto d được xây dựng từ A và b . Để thực hiện phép lặp, ta chọn một vecto ban đầu x^0 sau đó tính các $x^i, i = 1, 2, \dots$ theo công thức lặp sau:

$$\begin{aligned} x^1 &= \phi(x^0) = Bx^0 + d \\ x^2 &= \phi(x^1) = Bx^1 + d \\ &\dots \\ x^k &= \phi(x^{k-1}) = Bx^{k-1} + d \end{aligned} \tag{2.3}$$

Vecto x^k được gọi là vecto lặp thứ k .

2.3 Sự hội tụ của phương pháp

Định lí 2.3.1. Nếu phép lặp (2.3) hội tụ, tức tồn tại x^* sao cho $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k$ thì khi đó x^* là nghiệm của (2.2) (như vậy cũng là nghiệm của 2.1)

Chứng minh:

Từ $x^k = \phi(x^{k-1})$, với lưu ý là hàm $\phi(x)$ liên tục, ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x^{k-1}) = \phi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x^{k-1}\right) \Rightarrow x^* = \phi(x^*)$$

2.4 Công thức sai số

Định lí 2.4.1. Nếu $\|B\| \leq q < 1$ với một chuẩn nào đó, thì (2.3) hội tụ đến nghiệm duy nhất của phương trình theo hai đánh giá:

- Công thức tiên nghiệm: $\|x^k - x^*\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|x^1 - x^0\|$
- Công thức hậu nghiệm: $\|x^k - x^*\| \leq \frac{q}{1-q} \|x^k - x^{k-1}\|$

Chứng minh:

* Chứng minh hệ có nghiệm duy nhất: Xét hệ thuần nhất ($d = 0$) $x = Bx$:
Ta có

$$\|x\| = \|Bx\| \leq \|B\| \|x\|$$

Theo giả thiết:

$$\|B\| \leq q < 1$$

$$\Rightarrow \|x\| \leq \|B\| \|x\| \leq q \|x\| \Rightarrow (1 - q) \|x\| \leq 0$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\|x\| = 0$$

Như vậy hệ thuần nhất $x = Bx$ chỉ có nghiệm tầm thường, nên hệ thuần nhất (2.2) có nghiệm duy nhất, gọi nghiệm đó là x^* thì $x^* = Bx^* + d$

* Chứng minh sự hội tụ

Ta có $x^* = \phi(x^*)$ nên:

$$\begin{aligned} \|x^k - x^*\| &= \|\phi(x^{k-1}) - \phi(x^*)\| \\ &= \|Bx^{k-1} + d - (Bx^* + d)\| \\ &= \|B \cdot (x^{k-1} - x^*)\| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|x^k - x^*\| \leq \|B\| \|x^{k-1} - x^*\| \leq q \cdot \|x^{k-1} - x^*\| \quad (*)$$

Ta lại có :

$$\|x^{k-1} - x^*\| = \|x^{k-1} - x^k + x^k - x^*\| \leq \|x^k - x^{k-1}\| + \|x^k - x^*\|$$

Thay vào (*) ta có: $\|x^k - x^*\| \leq \frac{q}{1-q} \|x^k - x^{k-1}\| < \varepsilon \quad (**)$ với k đủ lớn.

Đánh giá tương tự (*) có:

$$\|x^k - x^{k-1}\| \leq q \|x^{k-1} - x^{k-2}\| \leq q^2 \|x^{k-2} - x^{k-3}\| \leq \dots \leq q^{k-1} \cdot \|x^1 - x^0\|$$

Thay vào (**): $\|x^k - x^*\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|x^1 - x^0\| < \varepsilon$ với k đủ lớn.

Nhận xét, phương pháp hội tụ càng nhanh khi q càng bé.

2.5 Thuật toán

a. Gói A: Kiểm tra loại chuẩn

input: ma trận B

output: kt(B)

Bước 1: tính chuẩn 1 chuan1(B), và chuẩn vô cùng chuanvc(B) của ma trận B.

Bước 2: kiểm tra:

if chuanvc(B) < 1:

if chuan1(B) < chuanvc(B):

kt(B) = 1

else:

kt(B) = 0

else:

if chuan1(B) < 1:

kt(B) = 1

else:

kt(B) = -1

b. Gói B: Tính chuẩn

input: kt(B), B, x

output: chuan(B), chuan(x)

If kt(B) = 0:

chuan(B) = chuanvc(B), chuan(x) = chuanvc(x)

Else if kt(B) = 1:

chuan(B) = chuan1(B), chuan(x) = chuan1(x)

c. Gói C: Lặp đơn

Input: B, d, e

Output: x^*

- Bước 1: $x_0 := d$;
- Bước 2: xây dựng hàm $\phi(x) := Bx + d$
- Bước 3: $x_k := \phi(x_0)$; $x_{(k-1)} := x_0$
- Bước 4: thực hiện vòng lặp

While $\text{chuan}(x_k - x_{(k-1)}) > e$ do:

$x_{(k-1)} = x_k$;

$x(k) = \phi(x_{(k-1)})$

- Bước 5: kết luận $x^* = x_k$ là nghiệm của hệ phương trình.

d. Chương trình chính

input: B, d, e

output: x^*

Kiểm tra B

If $\text{kt}(B) = -1$:

Kết luận ma trận B không chéo trội, không thể sử dụng phương pháp lặp đơn.

Else:

Sử dụng gói lặp đơn tính x^* . Kết luận x^* là nghiệm của hệ phương trình.

2.6 Ví dụ

Ví dụ 1: Áp dụng phương pháp lặp đơn giải pt $x = Bx + d$. Trong đó:

$$B = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.06 & 0.02 & 0.03 & 0.02 \\ -0.03 & -0.02 & 0.05 & -0.04 & 0.01 \\ -0.01 & 0.02 & -0.03 & 0.01 & 0.1 \\ 0.02 & 0.03 & 0.04 & -0.01 & 0.05 \\ -0.02 & 0.01 & 0.05 & -0.1 & 0.04 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Với sai số $e = 10e-10$

Hướng dẫn sử dụng code:

file input là ma trận cấp $n \times (n+1)$

Trong đó n cột đầu tiên biểu diễn ma trận B , cột cuối cùng biểu diễn vectơ d
output:

```
lặp đơn giải HPT.py"
B = [[0.01, -0.06, 0.02, 0.03, 0.02], [-0.03, -0.02, 0.05, -0.04, 0.01], [-0.01, 0.02, -0.03,
    0.01, 0.1], [0.02, 0.03, 0.04, -0.01, 0.05], [-0.02, 0.01, 0.05, -0.1, 0.04]]
d = [2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 1.0]
0.22
Số lần lặp: 9
Nghịệm của hệ phương trình là: [2.1010399312338293, 2.8773026279632616, 4.037040889742769,
    5.2715563986748775, 0.6890089919491326]
Kiểm tra tính đúng đắn của thuật toán:
x* - Bx* - d = [5.2025050933934835e-12, -9.281464485866309e-14, 6.463274360157811e-12,
    1.0884626533425035e-11, -3.439470930288735e-12]

Process finished with exit code 0
```

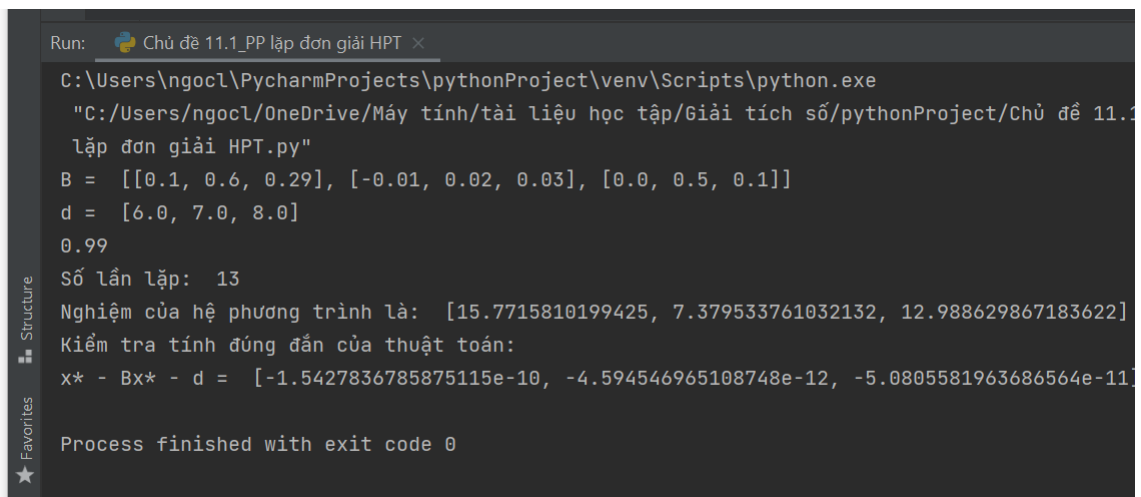
Chương trình chạy đúng với số lần lặp là 9, $\text{chuan}(B) = 0.22$

Ví dụ 2:

$$B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.29 \\ -0.01 & 0.02 & 0.03 \\ 0 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Khi $\text{chuan}(B)$ gần 1, số lần lặp tăng lên.

output:



```
Run: Chủ đề 11.1_PP lặp đơn giải HPT ×
C:\Users\ngocl\PycharmProjects\pythonProject\venv\Scripts\python.exe
"C:/Users/ngocl/OneDrive/Máy tính/tài liệu học tập/Giải tích số/pythonProject/Chủ đề 11.1_PP lặp đơn giải HPT.py"
B = [[0.1, 0.6, 0.29], [-0.01, 0.02, 0.03], [0.0, 0.5, 0.1]]
d = [6.0, 7.0, 8.0]
0.99
Số lần lặp: 13
Nghiệm của hệ phương trình là: [15.7715810199425, 7.379533761032132, 12.988629867183622]
Kiểm tra tính đúng đắn của thuật toán:
x* - Bx* - d = [-1.5427836785875115e-10, -4.594546965108748e-12, -5.0805581963686564e-11]
Process finished with exit code 0
```

Chương 3

Phương pháp Jacobi

2.1	Bài toán	v
2.2	Ý tưởng phương pháp	v
2.3	Sự hội tụ của phương pháp	vi
2.4	Công thức sai số	vi
2.5	Thuật toán	vii
2.6	Ví dụ	viii

3.1 Ma trận chéo trội hàng và ma trận chéo trội cột

Định nghĩa 3.1.1. Ma trận $A = (a_{ij})_n$ được gọi là ma trận chéo trội hàng nếu giá trị tuyệt đối của các phần tử nằm trên đường chéo chính lớn hơn tổng trị tuyệt đối của các phần tử còn lại nằm cùng hàng, tức:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad (3.1)$$

Ma trận $A = (a_{ij})_n$ được gọi là ma trận chéo trội cột nếu giá trị tuyệt đối của các phần tử nằm trên đường chéo chính lớn hơn tổng trị tuyệt đối của các phần tử còn lại nằm cùng cột, tức:

$$|a_{ii}| > \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}| \quad (3.2)$$

3.2 Nội dung phương pháp

Đưa hệ phương trình $Ax = b$ về dạng $x = Bx + d$

a. A là ma trận chéo trội hàng

Đặt $D = \text{diag}(a_{ii})$; $T = D^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{a_{ii}})$

Ta viết lại hệ phương trình ở dạng:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Nhân vào hai vế ma trận T ta có:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 1 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Viết gọn lại ta có: $TAx = Tb$

Tách ma trận TA thành ma trận đơn vị cộng với phần còn lại: $TA = I + (TA - I)$

$$\Rightarrow x = (I - TA)x + Tb = Bx + d$$

Suy ra

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Từ điều kiện (3.1) ta rút ra kết luận $\|B\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1, j \neq i}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$ Suy ra luôn

tồn tại q: $\|B\| \leq q < 1$

b. A là ma trận chéo trội cột

Nhân ma trận T từ bên phải, ta có:

$$ATDx = b \Leftrightarrow ATy = b \text{ (với } y = Dx \text{)}$$

$$AT = I + (AT - I)$$

$$\Rightarrow y = (I - AT)y + b = B_1y + b$$

Vậy ta nhận được hệ phương trình $y = B_1y + b$ (3.3). Trong đó:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{nn}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{nn}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & -\frac{a_{n2}}{a_{22}} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Từ điều kiện (3.2): } \|B_1\|_1 = \max_{j=1,n} \sum_{j=1, j \neq i}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$$

Chú ý: nếu $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$ là nghiệm của hệ (3.3) thì $x^* = \left(\frac{y_1^*}{a_{11}}, \frac{y_2^*}{a_{22}}, \dots, \frac{y_n^*}{a_{nn}} \right)$ là nghiệm của hệ phương trình ban đầu.

3.3 Công thức sai số

Cách 1: Tính y, suy ra x

Theo pp lặp đơn, công thức sai số của y là :

$$\|y^k - y^*\| \leq \frac{\|B_1\|}{1 - \|B_1\|} \|y^k - y^{k-1}\|$$

$$\text{Ta lại có } \|x^k - x^*\| = \|Ty^k - Ty^*\| \leq \|T\| \|y^k - y^*\|$$

Suy ra:

$$\|x^k - x^*\| \leq \frac{\|T\| \|B_1\|}{1 - \|B_1\|} \|y^k - y^{k-1}\|$$

Cách 2: xây dựng công thức lặp cho x Ta có:

$$y = B_1y + b$$

$$\Leftrightarrow Ty = TB_1DTy + Tb$$

$$\Leftrightarrow x = TB_1Dx + Tb$$

$$TB_1D = T(I - AT)D = I - TA = B$$

$$\Rightarrow x = Bx + d$$

Sai số:

$$\text{Ta có: } \|y^k - y^*\| \leq \frac{\|B_1\|}{1 - \|B_1\|} \|y^k - y^{k-1}\|$$

Ta lại có:

$$\|y^k - y^{k-1}\| = \|D(x^k - x^{k-1})\| \leq \|D\| \|x^k - x^{k-1}\|$$

$$\Rightarrow \|x^k - x^*\| \leq \|T\| \|y^k - y^*\| \leq \frac{\|T\| \|B_1\| \|D\|}{1 - \|B_1\|} \|x^k - x^{k-1}\|$$

Nhận xét:

- Công thức lặp trong trường hợp ma trận A chéo trội cột giống với công thức lặp trong trường hợp ma trận A chéo trội hàng. Tuy nhiên hệ số co của hai trường hợp là khác nhau
- Đối với trường hợp ma trận chéo trội hàng, mọi phép tính nằm trong không gian chuẩn $\|\cdot\|_\infty$
- Đối với trường hợp ma trận chéo trội cột, mọi phép tính nằm trong không gian chuẩn $\|\cdot\|_1$

3.4 Thuật toán

a. Gói A: Kiểm tra tính chéo trội

input: ma trận A

output: kt(A)

Bước 1: $m = [] = \text{sum}(\text{abs}(a_{ij}) \text{ for } j = 1 \text{ to } n$

Bước 2:

if $(2\text{abs}(a_{ii}) > m[i] \text{ for all } i \in (1, n))$:

return kt(A) = 0

else:

$m = \text{sum}(\text{abs}(a_{ij})) \text{ for } i = 1 \text{ to } n$

for all $i \in (1, n)$:

If $2\text{abs}(a_{jj}) > m[j]$:

return kt(A) = 1

else: return kt(A) = -1

b. Gói B: tính chuẩninput: $kt(A)$, B , x output: $chuan(B)$, $chuan(x)$ If $kt(A)=0$: $chuan(B) := chuan_vc(B)$ $chuan(v) := chuan_vc(v)$ If $kt(A)=1$: $chuan(B) := chuan_1(B)$ $chuan(v) := chuan_1(v)$ **c. Gói C: xác định ma trận B và vecto d**Input: A , b Output: B , d

- Bước 1: Xác định B

for $i=1$ to n for $j=1$ to n if $i==j$: $b_{ij}:=0$ else: $b_{ij}:=(a_{ij})/(a_{ii})$

- Bước 2: xác định d

for $i=1$ to n : $d[i] := b[i]/a_{ii}$ **d. Gói D: gói lặp**

trình

e. Chương trình chínhInput: A , b , e Output: x^*

kiểm tra A

If $kt(A) == -1$: kết luận: ma trận A không chéo trội

Else:

If $kt(A) == 0$:


```

Sử dụng gói C, tính B,d
Eps:=e(1-chuan(B))/chuan(B)
If kt(A) == 1:
    Tính chuanB1 chuanT, chuanD
    Sử dụng gói C, tính B, d
    Eps := e*(1-chuanB1)/( chuanB1*chuanT*chuanD)
Sử dụng gói lặp tính lapdon(B,d,eps).

```

3.5 Ví dụ

Ví dụ 3: Áp dụng phương pháp lặp đơn giải hệ phương trình $Ax=b$. Trong đó:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

với sai số $e = 10e-10$

Hướng dẫn sử dụng chương trình:

Nhập dữ liệu từ file input

file input là ma trận cấp $n \times (n+1)$

Trong đó n cột đầu biểu diễn ma trận A , cột cuối cùng biểu diễn vecto b

output:

```

C:\Users\ngocl\PycharmProjects\pythonProject\venv\Scripts\python.exe
"C:/Users/ngocl/OneDrive/Máy tính/tài liệu học tập/Giải tích số/pythonProject/Chủ đề 11.2_PP
Jacobi.py"
A = [[5.0, 2.0, 4.0], [1.0, 10.0, 2.0], [1.0, 1.0, 10.0]]
b = [10.0, 12.0, 8.0]
A là ma trận chéo trội cột
Số bước lặp: 26
Nghiệm của hệ phương trình là: [1.1415525113615304, 0.9680365296591058, 0.5890410958725704]
Kiểm tra tính đúng đắn của thuật toán:
Ax* - b = [-3.838565021396789e-10, -3.022719852197042e-10, -2.5366020395267697e-10]
Process finished with exit code 0

```

Chương trình chạy đúng trong trường hợp A là ma trận chéo trội cột với số bước

lặp là 26, $\text{chuan}(B1) = 0.6$ cột Khi $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$

output:

```
Jacobi.py"
A = [[5.0, 2.0, 0.0], [1.0, 10.0, 2.0], [1.0, 1.0, 10.0]]
b = [10.0, 12.0, 8.0]
A là ma trận chéo trội hàng
chuan(B) = 0.4
Số bước lặp: 17
Nghiệm của hệ phương trình là: [1.62869198323343, 0.928270042276042, 0.5443037975337528]
Kiểm tra tính đúng đắn của thuật toán:
Ax* - b = [7.192326734184462e-10, 1.061357224330095e-09, 8.47000691805988e-10]

Process finished with exit code 0
```

Chương trình chạy đúng trong trường hợp A là ma trận chéo trội hàng với số bước lặp là 17, $\text{chuan}(B) = 0.4$

Khi $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 20 \\ 1 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$

output:

```
C:/Users/ngoc/OneDrive/Máy tính/tài liệu học tập/Giai tích số/pythonProject
Jacobi.py"
A = [[5.0, 2.0, 20.0], [1.0, 10.0, 2.0], [1.0, 1.0, 10.0]]
b = [10.0, 12.0, 8.0]
Ma trận A không phải ma trận chéo trội.

Process finished with exit code 0
```

Chương trình chạy đúng trong trường hợp A không phải ma trận chéo trội.

$$\text{Khi } A = \begin{bmatrix} 5 & 2.4 & 2.4 \\ 1 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

output:

```
Jacobi.py"
A = [[5.0, 2.4, 2.4], [1.0, 10.0, 2.0], [1.0, 1.0, 10.0]]
b = [10.0, 12.0, 8.0]
A là ma trận chéo trội hàng
chuan(B) = 0.96
Số bước lặp: 26
Nghiem của hệ phương trình là: [1.2626892252832285, 0.9581478183409751, 0.5779162956344053]
kiểm tra tính đúng đắn của thuật toán:
Ax* - b = [-4.2945202949340455e-11, -3.821121197233879e-11, -3.1744384898502176e-11]

Process finished with exit code 0
```

Khi $\text{chuan}(B)$ hoặc $\text{chuan}(B1)$ càng gần 1, số bước lặp càng tăng lên.