BÁO CÁO GIẢI TÍCH SỐ

Chủ đề 29: Các công thức Runge-Kutta

Nguyễn Bảo Anh - 20206110

Tổng quan


Bài toán Cauchy


Phương pháp Runge-Kutta


Thuật toán và ví dụ


Kết luận

Bài toán Cauchy

Bài toán Cauchy

- **Phương trình vi phân** là một phương trình toán học nhằm biểu diễn mối quan hệ giữa một hàm chưa được biết (một hoặc nhiều biến) với đạo hàm của nó (có bậc khác nhau).

Cấp của phương trình vi phân là bậc của đạo hàm có bậc cao nhất có trong phương trình.

<u>Phương trình vi phân thường</u> (ODE - Ordinary Differential Equations) là phương trình vi phân trong đó hàm chưa biết là hàm 1 biến độc lập.

- **Bài toán giá trị ban đầu** (IVP - Initial Value Problem) cho biết trước giá trị hàm cần tìm tại một điểm.

ODE cấp 1 có dạng $y' = f(x, y)$, ví dụ:

$$y' = x + y$$

ODE cấp k có dạng $y^{(k)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}\right)$, ví dụ:

$$y'' = x^2 + y + y'$$

- *Trong không gian 1 chiều, một ODE cấp k có thể đưa về hệ ODE cấp 1 (hay ODE cấp 1 trong không gian k chiều)*
- **Bài toán Cauchy** là giải phương trình vi phân với điều kiện ban đầu, tổng quát, có thể viết:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in [a, b] \\ y(a) = y_0, & y \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

- Ví dụ: Tìm hàm $y(x)$ thỏa mãn: $y' = 10y$, $y(0) = 1$

- **Định lý Picard–Lindelöf**: $y' = f(x, y)$. Nếu hàm f(x, y) liên tục Lipschitz theo biến y trên hình chữ nhật D = $\{(x, y)\colon |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ thì bài toán Cauchy có nghiệm duy nhất trong đoạn I = $[x_0 - h, x_0 + h]$với h nào đó. Nghiệm của bài toán phụ thuộc liên tục theo giá trị ban đầu.

- Một số phương pháp giải số như: Euler, Runge-Kutta, ADAMs,…

Phương pháp Runge-Kutta

Ý tưởng phương pháp

- Một bài toán Cauchy biến đổi thành phương trình tích phân tương đương.

$$y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(t, y(t))dt$$

- Tính tích phân trong phương trình tích phân qua *s* nấc trung gian.
- Đảm bảo việc tính thông qua các nấc trung gian có hiệu quả giống như khai triển Taylor hàm $y(x)$ đến bậc cao.

Công thức R-K tổng quát

$$\begin{cases} k_1(h) & = hf(x+\alpha_1 h, y) \\ k_2(h) & = hf(x+\alpha_2 h, y+\beta_{21}k_1) \\ k_3(h) & = hf(x+\alpha_3 h, y+\beta_{31}k_1+\beta_{32}k_2) \\ \quad \dots & \\ k_s(h) & = hf(x+\alpha_s h, y+\beta_{s,1}k_1+\dots+\beta_{s,s-1}k_{s-1}) \\ y(x+h) \approx & y+(r_1 k_1+r_2 k_2+\dots+r_s k_s) = y+\Delta y = z(h) \end{cases}$$

$$\varphi(h) = y(x+h) - z(h)$$

$$\alpha_1 = 0, \alpha_i \in [0,1]$$

Xây dựng công thức

- Giả sử bài toán Cauchy thỏa mãn điều kiện Lipschitz trên miền D
- Đã biết giá trị của hàm tại x, cần tính giá trị hàm tại $x + h$, khai triển Taylor hàm $y(x+h)$ tại x có:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \cdots + \frac{h^m}{m!}y^{(m)}(x) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!}y^{(m+1)}(\xi) \qquad (1)$$

- Với $y' = f(x,y)$ (viết gọn là $y' = f$) thì khi đó tính các đạo hàm cấp cao của y được:

$$y'' = f'_x + f'_y f$$

$$y''' = f''_{x^2} + 2ff''_{xy} + f^2 f''_{yy} + [f'_x + ff'_y]f'_y$$

$$y'''' = f'''_{x^3} + 3ff'''_{x^2y} + 3f'_x f''_{xy} + 4ff'_y f''_{xy} + 3f^2 f'''_{xy^2} + 3ff'_x f''_{yy} + 4f^2 f'_y f''_{yy} + f^3 f'''_{y^3} + f'_y f''_{x^2} \qquad (2)$$

$$+f'_x f'_y f'_y + f(f'_y)^3$$

Thay (2) vào (1) được:

$$y(x+h) = y(x) + hf + \frac{h^2}{2}\left(f'_x + f'_y f\right) + \frac{h^3}{3!}\left(f''_{x^2} + 2ff''_{xy} + f^2 f''_{yy} + \left[f'_x + ff'_y\right]f'_y\right) \qquad (3)$$

$$+\frac{h^4}{4!}(f'''_{x^3} + 3ff'''_{x^2y} + 3f'_x f''_{xy} + 4ff'_y f''_{xy} + 3f^2 f'''_{xy^2} + 3ff'_x f''_{yy} + 4f^2 f'_y f''_{yy} + f^3 f'''_{y^3} + f'_y f''_{x^2} + f'_x f'_y f'_y + f\left(f'_y\right)^3) + \dots$$

Khai triển Taylor hàm 2 biến có:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + df(x,y) + \frac{1}{2!}d^2 f(x,y) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f(x,y)$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y) \qquad (0 \le \theta \le 1)$$

Mà $df = f'_x dx + f'_y dy$

$$d^2 f = d(df) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f + f'_x dx^2 + f'_y dy^2$$

$$d^3 f = d(d^2 f) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f + \left(f'_x + 2f''_{x^2}\right)dx^3 + \left(f'_y + 2f''_{y^2}\right)dy^3$$
$$+3(dx^2 dy + dx dy^2)f''_{xy}$$

Nên $k_1(h) = hf$

$$k_2(h) = hf\big(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} k_1(h)\big) = h[f + \alpha_2 h f'_x + \beta_{21} k_1(h) f'_y + \cdots] \qquad (4)$$

$$k_3(h) = hf\big(x + \alpha_3 h, y + \beta_{31} k_1(h) + \beta_{32} k_2(h)\big) = h[f + \alpha_3 h f'_x + (\beta_{31} k_1(h) + \beta_{32} k_2(h)) f'_y$$
$$+ \frac{1}{2}[\alpha_3^2 h^2 f''_{xx} + \big(\beta_{31} k_1(h) + \beta_{32} k_2(h)\big)^2 f''_{yy} + 2\alpha_3 h\big(\beta_{31} k_1(h) + \beta_{32} k_2(h)\big) f''_{xy}$$
$$+\alpha_3^2 h^2 f'_x + \big(\beta_{31} k_1(h) + \beta_{32} k_2(h)\big)^2 f'_y] + \cdots]$$

…

Thay (4) vào Δy được $y(x) + \Delta y = y(x) + r_1 k_1(h) + r_2 k_2(h) + \cdots + r_s k_s(h)$
$= y(x) + h(r_1 f + r_2[f + \alpha_2 h f'_x + \beta_{21} k_1(h) f'_y] + \cdots)$

Đồng nhất hệ số với (3) thu được hệ phương trình điều kiện.

Dễ thấy luôn có $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = 1$

Biểu diễn công thức

Công thức tổng quát:

$$\begin{cases} k_1(h) &= hf \\ k_2(h) &= hf(x+\alpha_2 h, y+\beta_{21}k_1) \\ k_3(h) &= hf(x+\alpha_3 h, y+\beta_{31}k_1+\beta_{32}k_2) \\ \quad \dots & \\ k_s(h) &= hf(x+\alpha_s h, y+\beta_{s,1}k_1+\dots+\beta_{s,s-1}k_{s-1}) \\ y(x+h) &\approx y+(r_1k_1+r_2k_2+\dots+r_sk_s) \end{cases}$$

Công thức cho bởi bảng:

0					
α_2	β_{21}				
α_3	β_{31}	β_{32}			
...					
α_s	$\beta_{s,1}$	$\beta_{s,2}$		$\beta_{s,s-1}$	
	r_1	r_2	r_3		r_s

Một số công thức thường dùng

Công thức RK1 nấc:

Ta có $\Delta y = r_1 k_1(h); k_1(h) = \mathrm{hf}(x_0, y_0)$, phải có $r_1 = 1, \alpha_1 = 0$.

$\varphi(h) = h(1 - r_1)f\big(x, y(x)\big) + O(h^2)$ nên chỉ khi $r_1 = 1$ thì ta mới đạt sai số $O(h^2)$

Đây là công thức Euler, công thức RK 1 nấc duy nhất.

0	
	1

Một số công thức thường dùng

R-K 2 nấc:

Từ phần trước ta có: $y(x+h) = y(x) + hf + \frac{h^2}{2}\left[f'_x + f'_y f\right] + O(h^3)$

$$y(x) + \Delta y = y(x) + h(r_1 f + r_2[f + \alpha_2 h f'_x + \beta_{21} k_1(h) f'_y]) + O(h^3) \Rightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 = 1 \\ \alpha_2 r_2 = \dfrac{1}{2} \\ \beta_{21} r_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

0		
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
	0	1

0		
1	1	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

0		
a	a	
	$1 - \frac{1}{2a}$	$\frac{1}{2a}$

Một số công thức thường dùng

R-K 3 nấc: Khai triển đến $O(h^4)$

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = 1 \\ r_2\alpha_2 + r_3\alpha_3 = \dfrac{1}{2} \\ r_2\beta_{21} + r_3(\beta_{31} + \beta_{32}) = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}r_2\alpha_2^2 + \dfrac{1}{2}r_3\alpha_3^2 = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{1}{2}r_2\alpha_2^2 + \dfrac{1}{2}r_3\alpha_3(\beta_{31} + \beta_{32}) = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{1}{2}r_2\alpha_2^2 + \dfrac{1}{2}r_3(\beta_{31}^2 + \beta_{31}\beta_{32} + \beta_{32}^2) = \dfrac{1}{6} \\ r_3\beta_{32}\alpha_2 = \dfrac{1}{6} \\ r_3\beta_{21}\beta_{32} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

⇒ Chọn một số bộ hệ số để việc tính toán dễ dàng, tối ưu.

- R-K 3 nấc

0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
1	-1	2	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

0			
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	
	$\frac{1}{4}$	**0**	$\frac{3}{4}$

Một số công thức thường dùng

R-K 4 nấc: Để có công thức 4 nấc cần tìm 13 hệ số, làm tương tự như ở phần xây dựng tổng quát, dừng ở $O(h^5)$, hoặc có thể xây dựng công thức bậc 4 từ các công thức bậc thấp hơn.

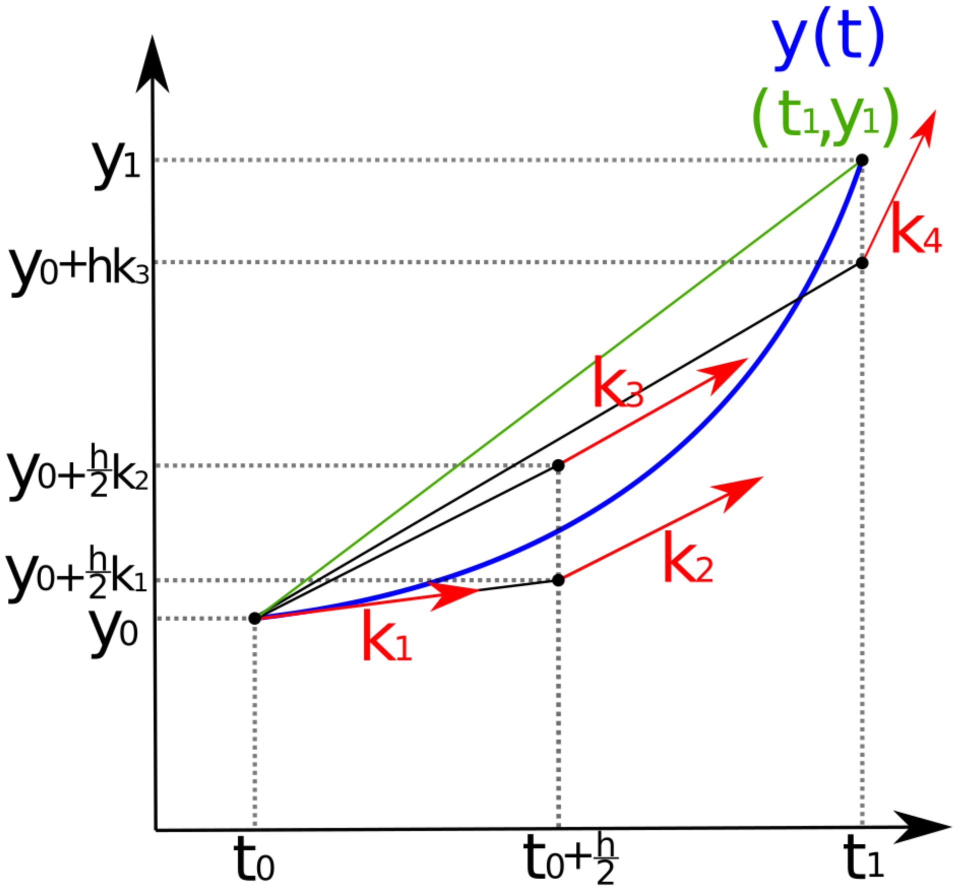
0				
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$			
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1		
1	1	-1	1	
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Một số công thức thường dùng

R-K 4 nấc:

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$



Công thức nhiều hơn 4 nấc

Với công thức có số nấc s > 4, không thể đạt sai số cấp $O(h^s)$ mà chỉ đạt được sai số cấp $O(h^q)$ với $q < s$.

Bảng thống kê để đạt công thức sai số cấp q cần ít nhất số nấc s là:

q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
min s	1	2	3	4	6	7	9	11	13	≤17

RK 6 nấc

0						
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$					
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$				
$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	1			
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	0	0	$\frac{9}{16}$		
1	$\frac{-2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{-12}{7}$	$\frac{8}{7}$	
	$\frac{7}{90}$	0	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$

0						
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$					
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$				
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$			
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{-3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$		
1	$\frac{-3}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{-12}{7}$	$\frac{8}{7}$	
	$\frac{7}{90}$	0	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$

RK 9 nấc

0									
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$								
$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$							
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$						
$\frac{2}{11}$	$\frac{148}{1331}$	0	$\frac{150}{1331}$	$\frac{-56}{1331}$					
$\frac{2}{3}$	$\frac{-404}{243}$	0	$\frac{-170}{27}$	$\frac{4024}{1701}$	$\frac{10648}{1701}$				
$\frac{6}{7}$	$\frac{2466}{2401}$	0	$\frac{1242}{343}$	$\frac{-19176}{16807}$	$\frac{-51909}{16807}$	$\frac{1053}{2401}$			
0	$\frac{5}{154}$	0	0	$\frac{96}{539}$	$\frac{-1815}{20384}$	$\frac{-405}{2464}$	$\frac{49}{1144}$		
1	$\frac{-113}{32}$	0	$\frac{-195}{22}$	$\frac{32}{7}$	$\frac{29403}{3584}$	$\frac{-729}{512}$	$\frac{1029}{1408}$	$\frac{21}{16}$	
	0	0	0	$\frac{32}{105}$	$\frac{1771561}{6289920}$	$\frac{243}{2560}$	$\frac{16807}{74880}$	$\frac{77}{1440}$	$\frac{11}{270}$

Công thức Cooper-Verner

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc}
0 & & & & & & & & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & & & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & & & & & & \\
\frac{7+\sqrt{21}}{14} & \frac{1}{7} & \frac{-7-3\sqrt{21}}{98} & \frac{21+5\sqrt{21}}{49} & & & & & & & & \\
\frac{7+\sqrt{21}}{14} & \frac{11+\sqrt{21}}{84} & 0 & \frac{18+4\sqrt{21}}{63} & \frac{21-\sqrt{21}}{252} & & & & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{5+\sqrt{21}}{48} & 0 & \frac{9+\sqrt{21}}{36} & \frac{-231+14\sqrt{21}}{360} & \frac{63-7\sqrt{21}}{80} & & & & & & \\
\frac{7-\sqrt{21}}{14} & \frac{10-\sqrt{21}}{42} & 0 & \frac{-432+92\sqrt{21}}{315} & \frac{633-145\sqrt{21}}{90} & \frac{-504+115\sqrt{21}}{70} & \frac{63-13\sqrt{21}}{35} & & & & & \\
\frac{7-\sqrt{21}}{14} & \frac{1}{14} & 0 & 0 & 0 & \frac{14-3\sqrt{21}}{126} & \frac{13-3\sqrt{21}}{63} & \frac{1}{9} & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{32} & 0 & 0 & 0 & \frac{91-21\sqrt{21}}{576} & \frac{11}{72} & \frac{-385-75\sqrt{21}}{1152} & \frac{63+13\sqrt{21}}{128} & & & \\
\frac{7+\sqrt{21}}{14} & \frac{1}{14} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{-733-147\sqrt{21}}{2205} & \frac{515+111\sqrt{21}}{504} & \frac{-51-11\sqrt{21}}{56} & \frac{132+28\sqrt{21}}{245} & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-42+7\sqrt{21}}{18} & \frac{-18+28\sqrt{21}}{45} & \frac{-273-53\sqrt{21}}{72} & \frac{301+53\sqrt{21}}{72} & \frac{28-28\sqrt{21}}{45} & \frac{49-7\sqrt{21}}{18} & \\
\hline
 & \frac{1}{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{49}{180} & \frac{16}{45} & \frac{49}{180} & \frac{1}{20}
\end{array}
$$

Sai số và tốc độ hội tụ

- **Sai số cục bộ (Local Truncation Error)**

Là sai số cắt cụt ở mỗi bước, công thức R-K cấp q có sai số cục bộ là $O(h^{q+1})$

- **Sai số toàn cục (Global Truncation Error).**

Là sai số so với kết quả đúng, sai số toàn cục của công thức R-K cấp q là $O(h^q)$

Bổ đề : Cho dãy x_n thỏa mãn có $\delta > 0, \beta \geq 0$ sao cho

$$|x_{\mathrm{n+1}}| \leq (1+\delta)|x_n| + \beta \quad \forall n$$

thì $|x_{n+1}| \leq e^{(n+1)\delta}|x_0| + \frac{\beta\left(e^{(n+1)\delta} - 1\right)}{\delta}$

Chứng minh:

$$|x_{\mathrm{n+1}}| \leq (1+\delta)|x_n| + \beta \leq (1+\delta)[(1+\delta)|x_{n-1}| + \beta] + \beta = (1+\delta)^2|\mathrm{x_{n-1}}| + (1+\delta)\beta + \beta$$

$$\leq (1+\delta)^2[(1+\delta)|x_{n-2}| + \beta] + (1+\delta)\beta + \beta \leq \cdots \leq (1+\delta)^{\mathrm{n+1}}|\mathrm{x_0}| + \beta \sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n}} (1+\delta)^{\mathrm{i}}$$

$$= (1+\delta)^{\mathrm{n+1}}|\mathrm{x_0}| + \frac{(1+\delta)^{\mathrm{n+1}} - 1}{\delta}\beta \leq e^{(n+1)\delta}|x_0| + \frac{\beta\left(e^{(n+1)\delta} - 1\right)}{\delta} \quad \text{(đpcm)}$$

Gọi $y_n$là nghiệm giải bởi RK tại $x_n, y(x_n)$là nghiệm chính xác tại x_n

Với RK1: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n),\ y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi)$

$$e_{n+1} = y_{n+1} - y(x_{n+1}) = y_n - y(x_n) + hf(x_n, y_n) - hf\left(x_n, y(x_n)\right) - \frac{y''(\xi)}{2}h^2$$

Lipschitz ⇒ $|e_{n+1}| \leq |e_n| + hL|y_n - y(x_n)| + Mh^2 = (1 + Lh)|e_n| + Mh^2$

Áp dụng bổ để với $\delta = Lh, \beta = Mh^2 \Rightarrow |e_n| \leq e^{nLh}|e_0| + Mh^2\frac{e^{nLh} - 1}{Lh}$

⇒ RK1 có sai số toàn cục O(h)

Với RK2, xét công thức :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{hf(x_n, y_n)}{2} + \frac{hf\left(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)\right)}{2}$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(\xi)$$

$$\mathrm{e}_{n+1} = y_{n+1} - y(x_{n+1}) = y_n - y(x_n) + \frac{hf(x_n, y_n)}{2} + \frac{\mathrm{hf}\big(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)\big)}{2} - hf\big(x_n, y(x_n)\big)$$

$$- \frac{\big[f'_x\big(\mathrm{x_n}, \mathrm{y}(\mathrm{x_n})\big) + f'_y\big(\mathrm{x_n}, y(x_n)\big)f\big(\mathrm{x_n}, y(x_n)\big)\big]h^2}{2} - \frac{h^3}{3}y'''(\xi)$$

$$= \mathrm{e_n} + \frac{hf(x_n, y_n)}{2} + \frac{hf(\mathrm{x_n}, \mathrm{y_n})}{2} + \frac{\mathrm{h}^2}{2}\big[\mathrm{f}'_\mathrm{x}(\mathrm{x_n}, \mathrm{y_n}) + \mathrm{f}'_\mathrm{y}(\mathrm{x_n}, \mathrm{y_n})\mathrm{f}(\mathrm{x_n}, \mathrm{y_n}) + \mathrm{O}(\mathrm{h})\big] - hf\big(\mathrm{x_n}, y(x_n)\big)$$

$$- \frac{\big[f'_x\big(\mathrm{x_n}, \mathrm{y}(\mathrm{x_n})\big) + f'_y\big(\mathrm{x_n}, y(x_n)\big)f\big(\mathrm{x_n}, y(x_n)\big)\big]h^2}{2} - \frac{h^3}{3}y'''(\xi)$$

$$= e_n + hf(x_n, y_n) - hf\big(\mathrm{x_n}, y(x_n)\big) + \frac{h^2}{2}\big[\mathrm{f}'_\mathrm{x}(\mathrm{x_n}, \mathrm{y_n}) - f'_x\big(\mathrm{x_n}, \mathrm{y}(\mathrm{x_n})\big)\big]$$
$$+ \frac{h^2}{2}\big[f'_y(x_n, y_n)f(x_n, y_n) - f'_y\big(x_n, y(x_n)\big)f\big(x_n, y(x_n)\big) + O(h)\big] - \frac{h^3}{3}y'''(\xi)$$

Đặt $g(x, y) = f'_x(\mathrm{x}, \mathrm{y}), k(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\mathrm{f}'_\mathrm{y}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

Với $|g'_y| \leq M_1, |k'_y| \leq M_2, M_1 + M_2 = M^2$

$$\Rightarrow \ |e_{n+1}| \leq \ |e_n| + \ Lh|e_n| + \frac{M^2h^2}{2}|\mathrm{e_n}| + Ch^3 = \left(1 + \mathrm{Lh} + \frac{(\mathrm{Mh})^2}{2}\right)|\mathrm{e_n}| + \mathrm{Ch}^3$$

Áp dụng bổ đề với $\delta = Lh + \frac{(Mh)^2}{2}, \beta = Ch^3$

$$\Rightarrow \ |e_n| \leq \ e^{n\left(Lh+\frac{(Mh)^2}{2}\right)}|e_0| + \ \mathrm{Ch}^3 \, \frac{e^{n\left(Lh+\frac{(Mh)^2}{2}\right)}-1}{Lh+\frac{Mh^2}{2}}$$ với $e_0 = 0 \Rightarrow \ |e_n| \leq Kh^2$

Công thức này có sai số toàn cục $O(h^2)$

Miền ổn định

Xét phương trình thử $y' = \lambda y$. $Re(\lambda) < 0$

Với RK1:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n = y_n + h\lambda y_n = (1 + h\lambda)y_n = (1 + h\lambda)^{n+1}y_0 \Rightarrow \{z \in C \,||1 + z| < 1\}$$

Với RK cấp 2, xét:

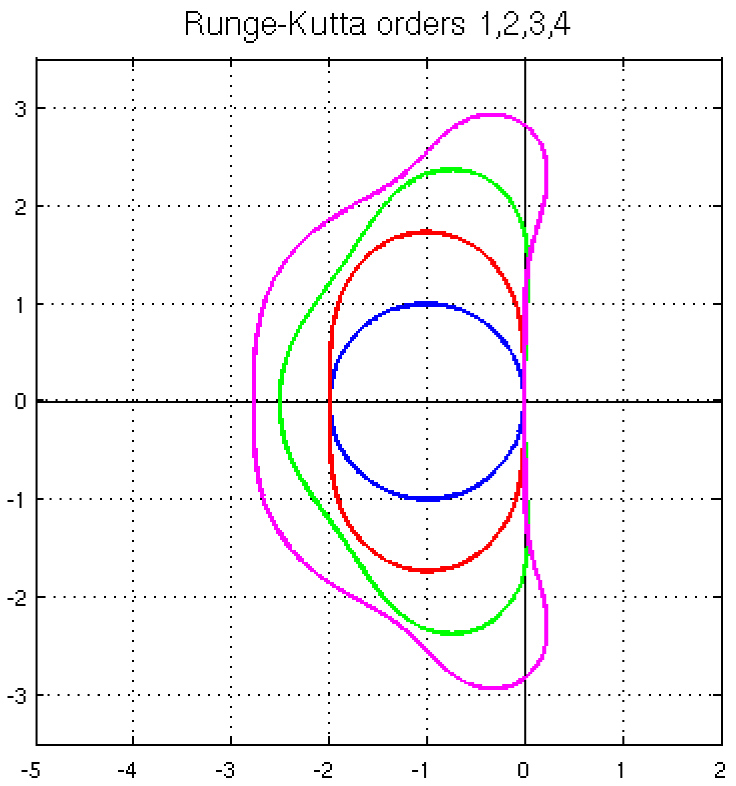
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n) + \frac{h}{2}f\left(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)\right)$$

$$= y_n + \frac{h}{2}\lambda y_n + \frac{h}{2}\lambda(y_n + h\lambda y_n) = y_n\left(1 + z + \frac{z^2}{2}\right) = \left(1 + z + \frac{z^2}{2}\right)^{n+1} y_0$$

$\Rightarrow \{z \in \mathbb{C}: \left|1 + z + \frac{z^2}{2}\right| < 1\}$ là miền ổn định

Miền ổn định

$$R(z) = \begin{cases} 1+z, & p=1 \\ 1+z+\dfrac{1}{2}z^2, & p=2 \\ 1+z+\dfrac{1}{2}z^2+\dfrac{1}{6}z^3, & p=3 \\ 1+z+\dfrac{1}{2}z^2+\dfrac{1}{6}z^3+\dfrac{1}{24}z^4, & p=4 \end{cases}$$



Giải ODE cấp k và hệ ODEs cấp 1

Phương trình vi phân cấp cao đưa được về hệ phương trình vi phân cấp 1.

Đối với hệ 2 phương trình cấp 1, hàm là $x_0(t), x_1(t)$:

$$k_{0,1} = hf(t_i, x_{0i}, x_{1i}) \qquad k_{1,1} = hg(t_i, x_{0i}, x_{1i})$$

$$k_{0,2} = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_{0i} + \frac{k_{0,1}}{2}, x_{1i} + \frac{k_{1,1}}{2}\right) \qquad k_{1,2} = hg\left(t_i + \frac{h}{2}, x_{0i} + \frac{k_{0,1}}{2}, x_{1i} + \frac{k_{1,1}}{2}\right)$$

$$k_{0,3} = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_{0i} + \frac{k_{0,2}}{2}, x_{1i} + \frac{k_{1,2}}{2}\right) \qquad k_{1,3} = hg\left(t_i + \frac{h}{2}, x_{0i} + \frac{k_{0,2}}{2}, x_{1i} + \frac{k_{1,2}}{2}\right)$$

$$k_{0,4} = hf(t_i + \mathrm{h}, x_{0i} + k_{0,3}, x_{1i} + \mathrm{k}_{1,3}) \qquad k_{1,4} = hg(t_i + h, x_{0i} + k_{0,3}, x_{1i} + k_{1,3})$$

$$x_{0,i+1} = x_{0,i} + \frac{k_{0,1} + 2k_{0,2} + 2k_{0,3} + k_{0,4}}{6} \qquad x_{1,i+1} = x_{1,i} + \frac{k_{1,1} + 2k_{1,2} + 2k_{1,3} + k_{1,4}}{6}$$

Giải ODE cấp k và hệ ODEs cấp 1

$$F(t,x)=\begin{bmatrix} f(t,x_0,x_1) \\ g(t,x_0,x_1) \end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}, x+\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_0+a \\ y_0+b \end{bmatrix}, ax=\begin{bmatrix} ax_0 \\ ax_1 \end{bmatrix}$$

$$k_1=hF(t,x)=\begin{bmatrix} hf(t,x_0,x_1) \\ hg(t,x_0,x_1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{10} \\ k_{11} \end{bmatrix}$$

$$k_2=hF(t+\frac{h}{2},x+\frac{k_1}{2})=\begin{bmatrix} hf(t+\frac{h}{2},x_0+\frac{k_{10}}{2},x_1+\frac{k_{11}}{2}) \\ hg(t+\frac{h}{2},x_0+\frac{k_{10}}{2},x_1+\frac{k_{11}}{2}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{20} \\ k_{21} \end{bmatrix}$$

$\ldots$

Việc tính toán giống như trong trường hợp 1 chiều, thay thế $x, k_1, k_2, k_3, \ldots, F(t,x)$bởi các vector

Đánh giá phương pháp

Ưu điểm	Nhược điểm
- Thuật toán đơn giản - Độ chính xác và ổn định đủ tốt cho nhiều bài toán - Không phải tính giá trị của nhiều hàm khác nhau tại 1 điểm.	- Chi phí tính toán đắt. - Với bước cố định, thông thường kết quả ở các điểm càng xa điểm bắt đầu càng kém. - Cần phải chọn bước h hợp lý để nghiệm hội tụ.

Phương pháp bước thích ứng

Muốn tính với sai số *e*? *h* cố định ➔ không đủ tốt ➔ thay đổi *h* trong quá trình tính toán cho phù hợp
2 phương pháp:
- *Chia đôi bước tích phân*(Dùng 1 công thức, ví dụ R-K4):
Khi tính với bước h: $y(x+h) = y_h + ch^5 + 0(\mathrm{h}^6)$

Khi tính với bước $\frac{h}{2}$: $y(x+h) = \mathrm{y}_{\frac{\mathrm{h}}{2}} + 2\mathrm{c}\left(\frac{h}{2}\right)^5 + 0(\mathrm{h}^6)$

$\Rightarrow \Delta = \mathrm{y}_{\frac{\mathrm{h}}{2}} - y_h \approx \frac{15}{16}ch^5 \Rightarrow$ đánh giá để đưa ra *h* hợp lý

$|\Delta| \leq e \Rightarrow y_n + 1 = \mathrm{y}_{\frac{\mathrm{h}}{2}} + \frac{\Delta}{15}$, giữ nguyên *h*

$|\Delta| > e \Rightarrow$ bắt đầu với bước h/2, lặp lại

- *R-K-Fehlberg* (Dùng 2 công thức có bậc sai số khác nhau và dùng hiệu 2 kết quả để đánh giá, thay đổi h cho phù hợp, VD: công thức đạt sai số cục bộ cấp 5,6)
Coi bậc 5 có kết quả rất gần với kết quả đúng, $\delta = |y_{n5} - y_{n4}| \sim \mathrm{h}^5$

➔$h = h\left(\frac{e}{\delta}\right)^{\frac{1}{5}}$

$\delta > e$, bỏ qua
$\delta \leq e$, chấp nhận

(Fehlberg)

0						
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$					
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$				
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$			
1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$	
	$\frac{16}{135}$	0	$\frac{6656}{12825}$	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{9}{50}$	$\frac{2}{55}$
	$\frac{25}{216}$	**0**	$\frac{1408}{2565}$	$\frac{2197}{4104}$	$-\frac{1}{5}$	**0**

Thuật toán và ví dụ

Thuật toán

RK4 cổ điển lưới đều

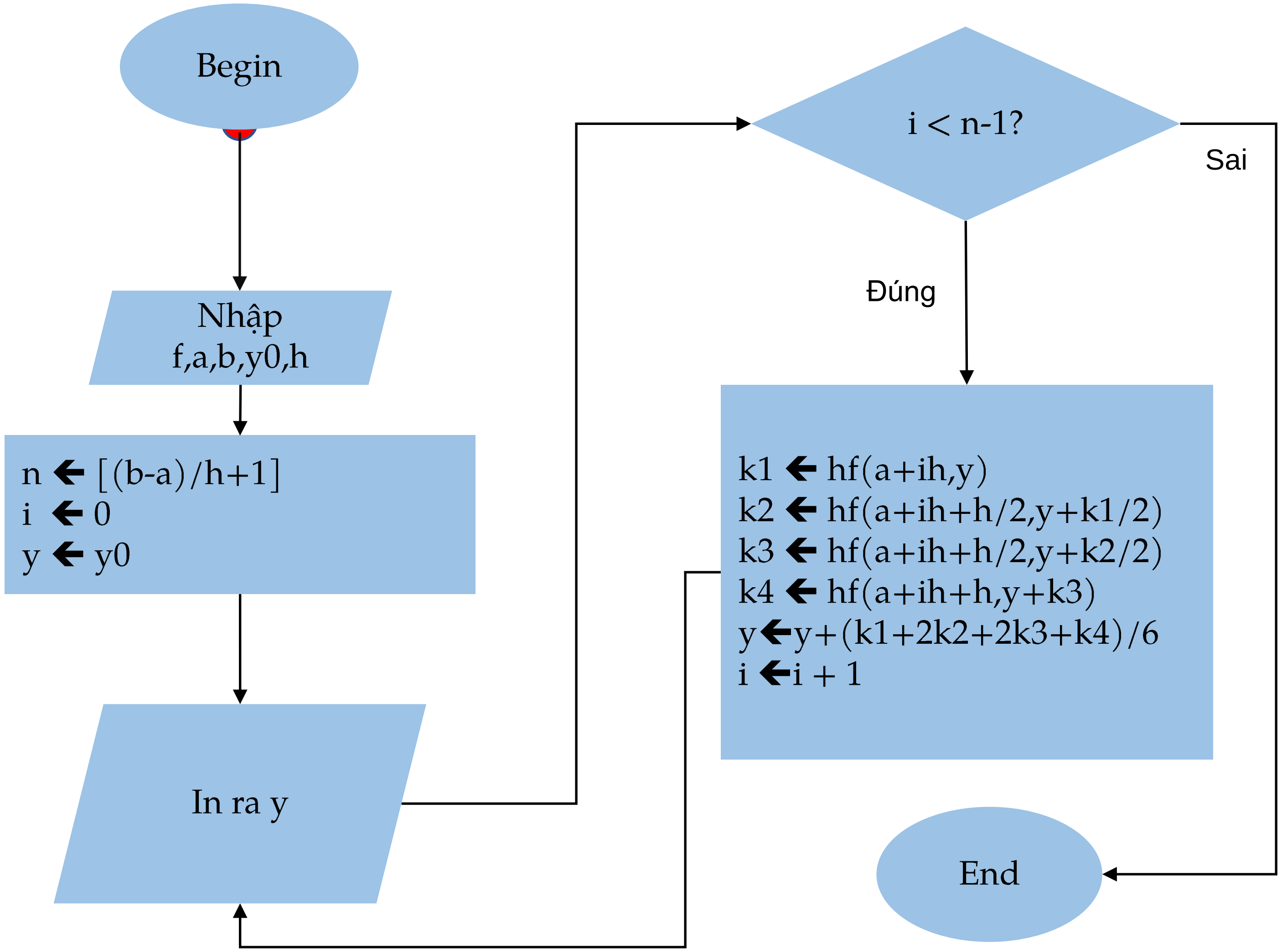
Input: f,a,b,y0,h

- a, b: điểm bắt đầu, kết thúc

- y0 = y(a)

- h: bước lưới

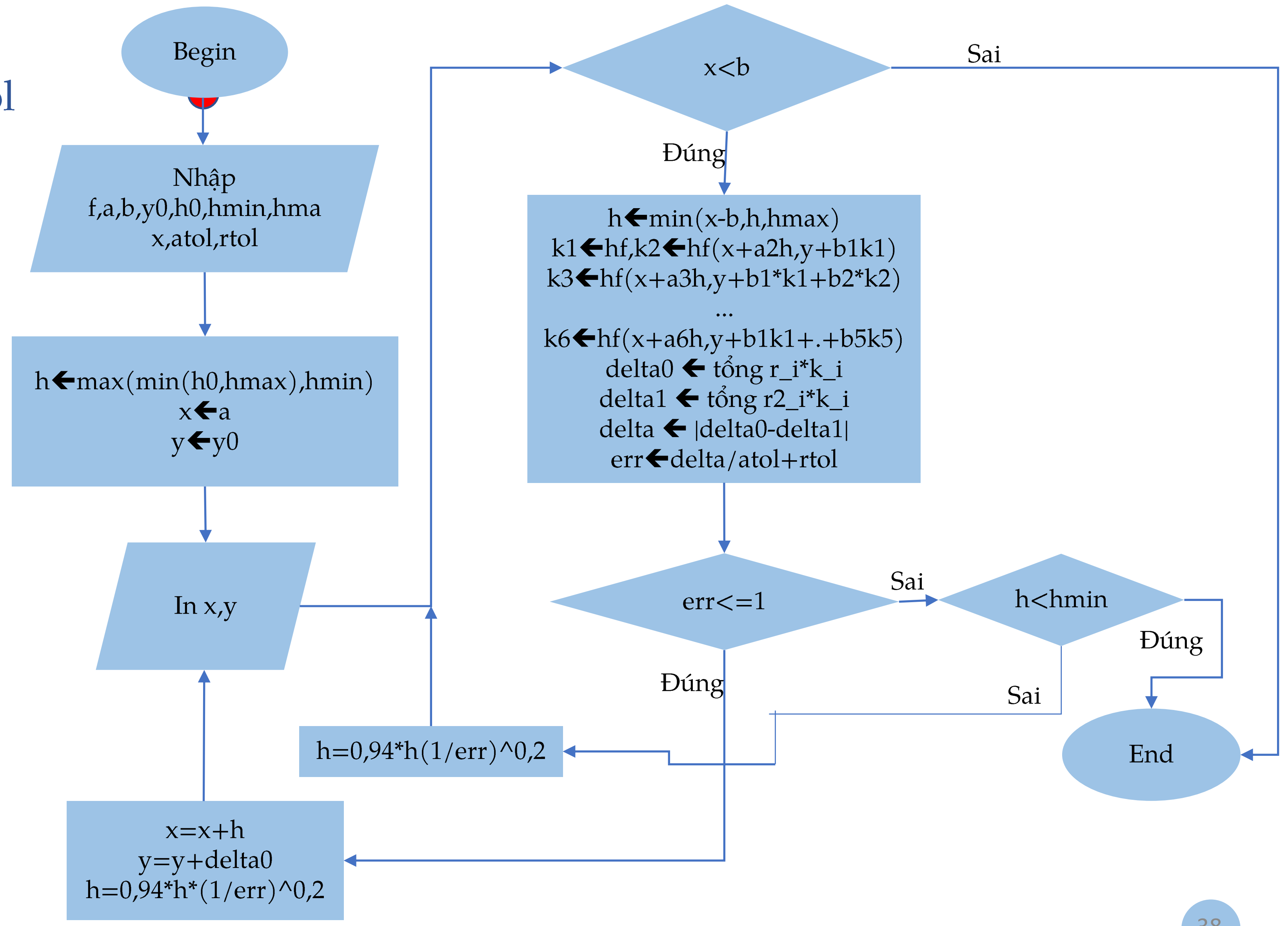
Output: Các giá trị y_i



Thuật toán RK Fehlberg (RKF)

Input:
f,a,b,y0,h0,hmin,hmax,atol,rtol

Output: Các điểm x_i,y_i



Thuật toán giải hệ ODEs cấp 1 và ODE cấp k

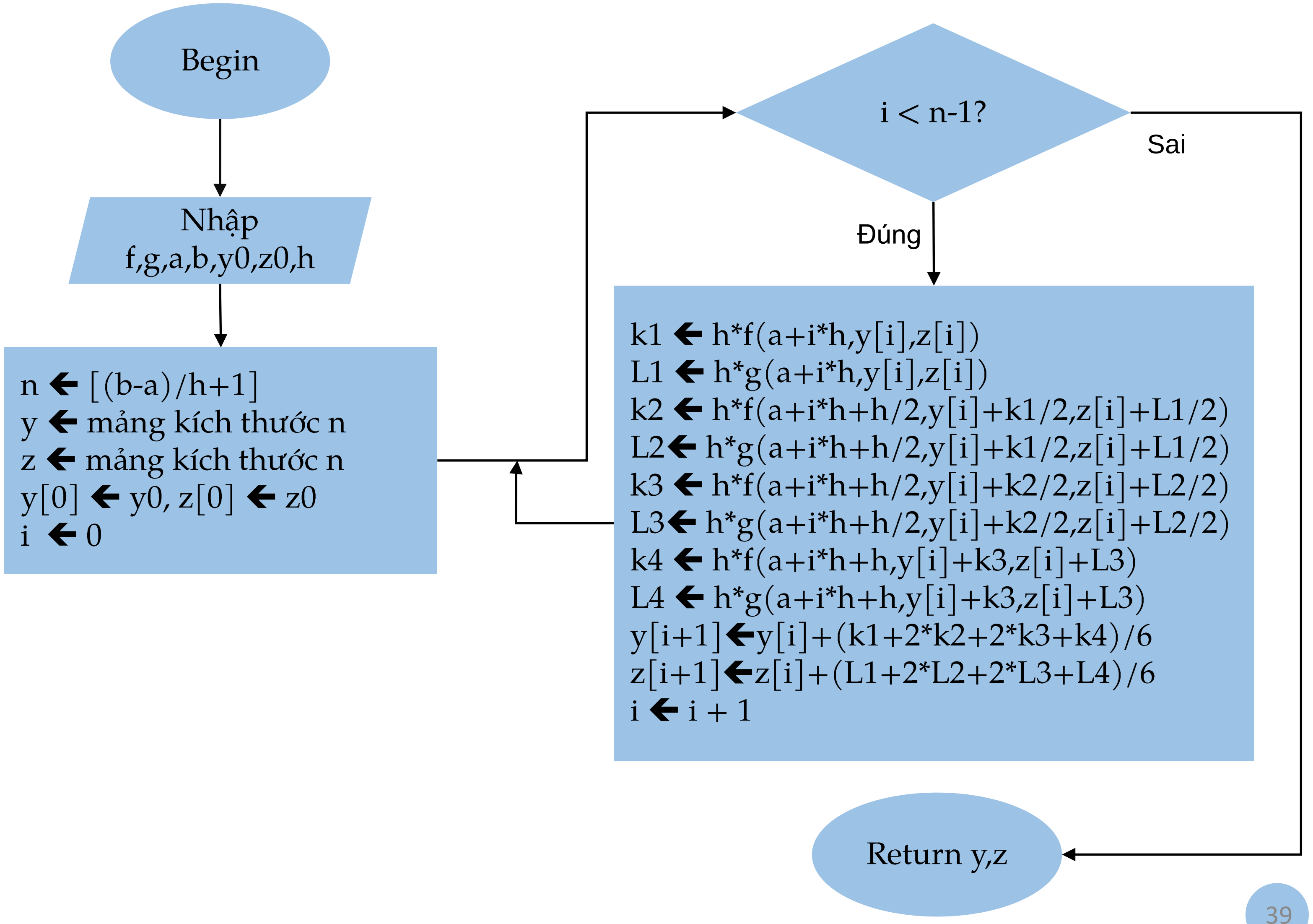
Xét hệ: $y' = f(x, y, z)$

$z' = g(x, y, z)$

Input: f,g,a,b,y0,z0,h

Output: Giá trị y,z tại các x_i

Để giải $y'' = f(x, y, y')$, mặc định $y' = f = z$, chỉ nhập g(x,y,z).



Ví dụ

- Danh sách ví dụ:

Kết luận

Kết luận

- Các công thức Runge Kutta có độ chính xác tốt, ổn định với nhiều bài toán.
- Thuật toán dễ triển khai.
- Khối lượng tính toán cũng lớn hơn để đạt được độ chính xác cao hơn.
- Các kết quả tính đáng tin nhất ở những điểm gần điểm bắt đầu.
- Các công thức họ RK được cải tiến để cho kết quả tốt hơn cho những bài toán phức tạp hơn.

Thank you!