ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

BÁO CÁO GIẢI TÍCH SỐ

Chủ đề 18:

Bài toán nội suy

Sơ đồ Hoocne và ứng dụng trong bài toán nội suy

Sinh viên thực hiện: Đặng Nhật Huy – MSSV: 20200271

Lớp: CTTN Toán Tin K65

Giảng viên hướng dẫn: TS. Hà Thị Ngọc Yến

HÀ NỘI – 01/2022

MỤC LỤC

I. Tìm hiểu về bài toán nội suy

1. Khái niệm:

Nội suy là phương pháp ước tính giá trị của các điểm dữ liệu chưa biết trong phạm vi của một tập hợp rời rạc chứa một số điểm dữ liệu đã biết.

2. Ứng dụng:

Nội suy là một công cụ toán học cơ bản được ứng dụng rộng rãi trong nhiều ngành thực nghiệm như: công nghệ thông tin, tài chính, dầu khí, xây dựng, y học, truyền hình, điện ảnh và những ngành cần xử lý dữ liệu số khác,…

3. Các phương pháp nội suy:

Nội suy tuyến tính (Linear), Nội suy tam tuyến (Trilinear), Nội suy đa thức (Polynomial), Nội suy kriging, Nội suy trọng số gần nhất (Nearest neighbour weighted), Nội suy số kế cận tự nhiên (Natural Neighbour),…

II. Đa thức nội suy

1. Khái niệm:

Xét 1 bộ điểm $\{x_i, y_i = f(x_i), x_i \neq x_j\ \forall\ i \neq j,\ i = \overline{0, n}, x_i \in [a,b]\ \}$

Đa thức nội suy tương ứng với bộ điểm S là đa thức có bậc không quá n, kí hiệu là $P_n(x)$ (với n là chỉ số của bậc) đi qua tất cả các điểm trong S, nghĩa là nó phải thỏa mãn:

$P_n(x_i) = y_i\ \forall\ i = 0,1,\ldots,n$ đồng thời bậc của nó $\deg P_n(x) \leq n$.

Trong đó:

- (x_i) được gọi là các mốc nội suy.
- Đặt $a = \min\{x_i\}$, $b = \max\{x_i\}$ => $[a,b]$ là đoạn nội suy
- $\{y_i\}$ các giá trị nội suy
- (x_i, y_i) các điểm nội suy

2. Nhiệm vụ:

Giải bài toán nội suy đa thức thực chất là tìm đa thức nội suy tương ứng với tập điểm S cho trước.

3. Định lý:

Với n+1 điểm phân biệt cho trước x_i cùng với các giá trị tương ứng $f(x_i)$ $\forall\, i = \overline{0,n}$ luôn tồn tại duy nhất một đa thức có bậc $\leq$ n thỏa mãn:

$P_n(x_i) = f(x_i)$ với i = $\overline{0,n}$, $x_i \neq x_j$ $\forall$ i $\neq$ j

<u>Chứng minh:</u>

✓ *Sự tồn tại:*

Với bộ cơ sở chính tắc $(1, x, \ldots, x^n)$, biểu diễn đa thức P_n dưới dạng:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

Tìm các hệ số a_i $\forall\, i = \overline{0,n}$ s/c: $P_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} a_i x_i{}^k$

Việc giải hpt trên tương đương với giải ma trận sau:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Trong đó:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$ là ma trận Vandemonde.

❖ *Nhắc lại:*

Ma trận **Vandemonde** là một ma trận với các phần tử tạo thành một cấp số nhân trên mỗi hàng.

Định thức Vandemonde được viết dưới dạng:

det(V) = $\prod_{1\le i\le j\le n}(x_i - x_j)^2$ ($x_i \neq x_j$ ∀ i > j)

⇨ det(V) ≠ 0

Vì định thức của ma trận Vandemonde khác 0 và hạng của nó bằng hạng của ma trận hệ số bổ sung nên ma trận trên luôn tồn tại.

⇨ Đa thức nội suy luôn tồn tại

✓ *Tính duy nhất:*

❖ Ta có định lý cơ bản của đại số:

Mọi đa thức có bậc n, các hệ số không đồng thời bằng không thì có đúng n nghiệm.

Chứng minh: (phản chứng)

Giả sử tồn tại P_1, P_2 đều có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n thỏa mãn:

$$P_1(x_i) = P_2(x_i) = f(x_i)\ \forall\ i = \overline{0,n}$$

Xét đa thức hiệu:

$$H(x_i) = P_1(x_i) - P_2(x_i)$$

Mà, ta thấy $H(x_i)$ cũng có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n

Vì định lý cơ bản của đa thức nội suy: mọi đa thức nội suy có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n đều được xác định duy nhất bằng n+1 giá trị của nó nên $H(x_i)$ có n+1 nghiệm

Nhưng $H(x_i)$ là đa thức có bậc n nên theo định lý cơ bản của đại số nó sẽ chỉ có n nghiệm (vô lý)

⇨ Đa thức nội suy luôn tồn tại duy nhất.

III. Sai số của đa thức nội suy:

1. Định lý:

a) Chênh lệch tại 1 điểm:

Với mỗi giá trị của $x \in [a,b]$ thì chênh lệch:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$$

Với $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ và $M_{n+1} = \sup|f^{(n+1)}(x)|$ $\forall x \in [a,b]$

b) Chênh lệch giữa 2 hàm:

$\|f - P_n\| = max_{[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \|\omega_{n+1}\|$

2. Chứng minh:

Lấy x cố định, $x \neq x_i$ với $i = \overline{0,n}$

$$\text{Đặt } R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

Trong đó:

- $P_n(x)$ là đa thức nội suy
- $R_n(x)$ là sai số tại điểm x của đa thức nội suy.

Ta thấy, $R_n(x_i) = 0$ vì $R_n(x_i) = f(x_i) - P_n(x_i)$ và P_n đi qua tất cả các điểm nội suy nên giá trị nội suy bằng giá trị $f(x_i)$.

Do đó, hàm số có thể viết lại dưới dạng sau:

$$R_n(x) = k(x) \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = k(x)\, \omega_{n+1}(x)$$

Trong đó: k(x) là đa thức chưa biết, $\omega_{n+1}(x)$ là đa thức bậc n+1 được định nghĩa là: $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$

Đặt k = k(x) là giá trị của hàm k tại điểm x.

$$\Rightarrow R_n(x) = k \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = k\omega_{n+1}(x)$$

Để tìm k, cần xây dựng hàm số F(t) sao cho:

$F(t) = R_n(t) - k\omega_{n+1}(t) = f(t) - P_n(t) - k\omega_{n+1}(t)$

Hàm số F(t) có giá trị bằng 0 tại t = x:

$F(x) = R_n(x) - k\omega_{n+1}(x) = R_n(x) - R_n(x) = 0$

Chúng ta thấy tằng F(x) có n+2 nghiệm phân biệt là x, x_0, x_1,…, x_n.

❖ Áp dụng định lý Rolle: Nếu hàm số thực *f* liên tục trên đoạn [*a*; *b*], (*a* < *b*), khả vi liên tục trên khoảng (*a*; *b*) và *f*(*a*) = *f*(*b*) thì tồn tại *c* ∈ (*a*; *b*) sao cho *f′*(*c*) = 0.

⇨ Có thể sắp thứ tự nghiệm theo thứ tự tăng dần, giữa 2 nghiệm sẽ có 1 cực trị và tồn tại một điểm giữa 2 nghiệm sao cho đạo hàm bằng của nó bằng 0.

Với định lý trên, khi F có n+2 nghiệm phân biệt sẽ có n+1 nghiệm cực trị hay F’ có n+1 nghiệm phân biệt.

⇨ F’’ có n nghiệm phân biệt

(… tương tự…)

⇨ $F^{(n+1)}$ (đạo hàm cấp n+1) sẽ có ít nhất 1 nghiệm ε thuộc [a,b] thỏa mãn $F^{(n+1)}(\varepsilon) = 0$.

$$F^{(n+1)}(\varepsilon) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}[f(\varepsilon) - P_n(\varepsilon) - k\omega_{n+1}(\varepsilon)]$$

$$= f^{(n+1)}(\varepsilon) - P_n^{(n+1)}(\varepsilon) - k\,\omega_{n+1}^{(n+1)}(\varepsilon)$$

Trong đó:

- P_n là đa thức cấp n
- ω là đa thức cấp n+1 với hệ số bậc cao nhất là 1.

⇨ $F^{(n+1)}(\varepsilon) = f^{(n+1)}(\varepsilon) - 0 - k(n+1)!$

$$= f^{(n+1)}(\varepsilon) - k(n+1)!$$

Từ phương trình trên ta được:

$$k = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}$$

Thay vào R_n, có thể viết lại thành:

$$R_n(x) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(x)$$

Đặt $M = \sup|f^{(n+1)}(x)|\ \forall x \in [a,b]$

⇨ $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(x)$ (đpcm)

$\|f - P\| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\|\omega_{n+1}\|$

IV. Chọn mốc nội suy tối ưu:

- **Đặt vấn đề:**

❖ Công thức sai số giữa hai hàm:

$$\|f - P_n\| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\|\omega_{n+1}\|$$

Như chúng ta đã biết sai số này được đánh giá theo chuẩn và trong đó:

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \text{ là hằng số}$$

⇨ Độ chênh lệch sẽ không còn phụ thuộc vào x mà sẽ phụ thuộc vào $\|\omega_{n+1}\|$.

➢ Bài toán đặt ra là là phải chọn các mốc nội suy $x_i \in [a,b]$ sao cho sai số đạt giá trị nhỏ nhất.

Để độ lệch hàm f và P_n nhỏ nhất, ta phải chọn chuẩn $\|\omega_{n+1}\|$ sao cho nhỏ nhất tức là min ($\max_{a \le x \le b} \omega_{n+1}(x)$)

Hàm ω_{n+1} đạt giá trị nhỏ nhất
↔ Độ phân tán của ω_{n+1} đối với trục hoành là nhỏ nhất nhưng vẫn phải đủ các điều kiện sau:

- Bậc của hàm là n+1
- hệ số đi kèm với bậc cao nhất là bằng 1

- # Đa thức Chebyshev:

a) Định nghĩa

Đa thức Chebyshev loại I được định nghĩa bằng lượng giác như sau:

$$T_n(x) = \cos(n.\arccos x)$$

Đa thức Chebyshev loại I xác định theo công thức truy hồi:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Trong đó:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = \cos[2\arccos x] = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2^2x^3 + P_2(x) \ ; \ T_4(x) = 2^3x^4 + P_3(x) \ ; \ . . .$$

⇨ Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được $T_n(x)$ là đa thức bậc n với hệ số đầu là 2^{n-1}.

b) Nghiệm và cực trị:

Một đa thức Cheybyshev bậc *n* có *n* nghiệm thực phân biệt, gọi là **nghiệm Chebyshev.**

- Các nghiệm này đều nằm trên khoảng [−1,1].
- Nghiệm của $T_n(x)$ là $x_i = \cos\frac{2i+1}{2n}\pi$ với $i = \overline{1,n}$

- Cực trị của nó max$|T_n(x)|$ = 1 đạt tại $x_i = \cos\frac{\pi i}{n}$ với $i = \overline{1,n}$

c) Định lý:

Trong tất cả các đa thức bậc n với hệ số đầu bằng 1, đa thức Chebysev $\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ có độ lệch so với 0 nhỏ nhất trên đoạn [-1,1].

Nghĩa là:

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

Thì:

$$\max_{|x|\le 1}|P(x)| \ \ge \max_{|x|\le 1}\frac{|T_n(x)|}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Chứng minh: (phản chứng)

Giả sử tìm được đa thức

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \text{ sao cho: } \max_{|x|\le 1}|P(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$$

Khi đó, đa thức $G(x) = \frac{|T_n(x)|}{2^{n-1}} - P(x)$ có bậc không quá n-1, ngoài ra các điểm $x_i = \cos\frac{\pi i}{n}$ với $i = \overline{1,n}$, ta có:

$$G(x_i) = \pm\frac{1}{2^{n-1}} - P(x_i)$$

Như vậy, G(x) luân phiên đổi dấu qua x_i với $i = \overline{1,n}$ do đó G(x) có ít nhất n nghiệm

⇨ $G(x) \equiv 0$ hay $P(x) \equiv \frac{|T_n(x)|}{2^{n-1}}$ mâu thuẫn với giả thiết $\max_{|x|\le 1}|P(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$

d) Kết luận:

✓ **TH1: Xét [-1 ; 1]**

Khi đó, $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = \frac{T_{n+1}(x)}{2^n}$ có độ chênh lệch nhỏ nhất

Với $x_i = \cos\frac{2i+1}{2n}\pi$ với $i = \overline{0,n}$ là các mốc nội suy tối ưu được chọn

Sai số tốt nhất của phép nội suy là: $\|f - P_n\| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\|\omega_{n+1}\| \le \frac{M_{n+1}}{2^n(n+1)!}$

✓ **TH2: Xét [a,b]**

<u>B1:</u> $t = \frac{2x-b-a}{b-a}$ đưa đoạn [a,b] về đoạn [-1,1]

<u>B2:</u> Các mốc nội suy tối ưu là nghiệm của đa thức Chebysev:

$$x_i = \frac{1}{2}\left[(b-a)\cos\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi + (b+a)\right] \text{ với } i = \overline{0,n}$$

Sai số tốt nhất của phép nội suy trong trường hợp này là:

$$\|f - P_n\| \le \frac{M_{n+1}\,(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}$$

V. Sơ đồ Hoocne:

- ## Định nghĩa:

✓ Bài toán: Tìm đa thức thương và phần dư trong phép chia đa thức f(x) cho đơn thức x - α

Khi đó, đa thức thương $g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0$ và phần dư được xác định theo lược đồ sau:

x	a_n	cộng a_{n-1}	. . .	a_1	a_0
	nhân				
α	$\rightarrow$ $b_{n-1} =$	$b_{n-2} = b_n\,\alpha + a_{n-1}$	. . .	$b_0 = b_1\,\alpha + a_0$	

<u>B1:</u> Sắp xếp các hệ số giảm dần theo số mũ của x

<u>B2:</u> Tìm hệ số đầu tiên của đa thức thương g(x) $b_{n-1} = a_n$

<u>B3:</u> Dùng quy tắc **Nhân ngang cộng chéo** tìm hệ số tiếp theo

<u>B4:</u> Làm tương tự để thu được kết quả

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$$

$$= (x - \alpha)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0) + r$$

Trong đó:

$(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0)$ là đa thức thương

r là Phần dư và $r = b_0 = b_1 \alpha + a_0$

⇨ Tìm thương và phần dư khi chia một đa thức cho một đơn thức

- Nếu muốn tính giá trị của đa thức tại $x = \alpha$ thì: $f(\alpha) = b_0$
- Nếu muốn tính giá trị đạo hàm tại x = c thì:

$f'(x) = g(x) + (x - c)\, g'(x)$

$f'(c) = g(c)$: sử dụng sơ đồ Hoocne tính giá trị của đa thức g(c), từ đó tính được giá trị của đạo hàm tại x = c

VI. Thuật toán, hệ thống các phương pháp và hệ thống ví dụ:

1. Thuật toán

a) Tìm đa thức nội suy xấp xỉ

B1: Nhập N, N điểm nội suy của đa thức là (X_i, Y_i)

B2: Xây dựng gói để kiểm tra xem có tồn tại 2 mốc nội suy bằng nhau mà giá trị khác nhau không?

B3: Xây dựng 1 mảng để chứa ma trận Vandemonde từ các mốc nội suy

B4: Tìm nghiệm của ma trận AX = B.

Đặt A là ma trận Vandemonde, X là hệ số của đa thức nội suy và B là giá trị của các mốc nội suy đó.

(Dùng phương pháp Gauss để giải ma trận AX=B)

❖ CODE:

- Gói kiểm tra sự tồn tại của hàm

```
void kiemtratontai()
{
    for(int i=0;i<=N;i++)
    {
        bool check = true;
        for(int j=i+1;j<=N;j++)
        {
            if(X[i]==X[j])
            {
                check = false;
            }
        }
        if(check==true)
        {
            n++;
            x[n] = X[i];
            y[n] = Y[i];
        }
    }
}
```

- Xây dựng 1 mảng của ma trận Vandemonde từ các mốc nội suy

```
void taoVandemonde()
{
    for(int i=0;i<=n;i++)
    {
        Van[i][0] = 1;
        for(int j=1;j<=n;j++)
        {
            float tg = x[i];
            Van[i][j] = 1;
            for(int k=1;k<=j;k++)
            {
                Van[i][j] *=tg;
            }
        }
    }
}
```

- Tìm nghiệm của ma trận AX = B (Phương pháp Gauss-Jordan)

```
void giaimatranVan()
{
    float temp;
    for(int j=0;j<=n-1;j++)
    {
        for(int i=j+1;i<=n;i++)
        {
            temp = Van[i][j] / Van[j][j];
            for(int k=0;k<=n+1;k++)
            {
                Van[i][k] -= Van[j][k]*temp;
            }
        }
    }
    for(int i=n;i>=0;i--)
    {
        float s=0;
        for(int j=n;j>=i;j--)
        {
            s += Van[i][j] * kq[j];
        }
        kq[i] = (Van[i][n+1] - s)/Van[i][i];
    }

}
```

Trong đó: kq[i] chính là hệ số của đa thức nội suy

- Gói chọn mốc nội suy tối ưu

```
for(int i=0;i<=n;i++)
{
    x[i] = (cos(((2*i+1) / (2*n+2)) * pi))/pow(2,n);
}
```

Trong đó: x[i] là n mốc nội suy tối ưu

b) Sơ đồ Hoocne

B1: Nhập n, n+1 hệ số của đa thức

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + ax + a_0,$

giá trị x và t là nhiệm vụ.

B2: Xây dựng 1 mảng b để lưu lại hệ số của đa thức thương. Ban đầu khởi tạo b[n] = a[n] và sử dụng lược đồ Hoocne để tìm các hệ số khác.

B3: Đối với mỗi t, có các cách làm cụ thể để giải quyết bài toán

- Gói tính giá trị của đa thức tại 1 điểm

```
float tinhgiatri(float c)
{
    b[n] = a[n];
    for(int i=n-1;i>=0;i--)
    {
        b[i] = b[i+1] * c + a[i];
    }
    gt = b[0];
    return gt;
}
```

- Gói tính giá trị đạo hàm của đa thức tại 1 điểm

```
float tinhdaoham(float c)
{
    float d[10001];
    for(int i=n;i>=0;i--)
    {
        d[i-1] = i * a[i];
    }
    b[n-1] = d[n-1];
    for(int i=n-2;i>=0;i--)
    {
        b[i] = b[i+1] * c + d[i];
    }
    gt = b[0];
    return gt;
}
```

- Gói tìm đa thức thương và phần dư khi lấy đa thức chia cho đơn thức

```
void chiadathuc(float c)
{
    b[n] = a[n];
    for(int i = n-1; i>=0; i--)
    {
        b[i] = b[i+1] * c + a[i];
    }
    for(int i=n;i>=1;i--) cout << b[i]<<" ";
    cout << b[0];

}
```

Trong đó: b[i] là các hệ số của đa thức thương
b[0] là phần dư

- Tìm tích của đa thức với một đơn thức

```
void nhandathuc(float c)
{
    b[n+1] = a[n];
    b[n] = a[n];
    b[-1] = - a[0]*c;
    for(int i=n-1;i>=0;i--)
    {
        b[i] = a[i] - a[i+1]*c;
    }
    for(int i=n;i>=-1;i--) cout << b[i] << " ";
}
```

Trong đó: b[i] là các hệ số của tích của đa thức với đơn thức

2. Hệ thống ví dụ:

Ví dụ 1: Tìm đa thức nội suy xấp xỉ của hàm số:

$$f(x)= x\cos(8x + 1/8) + 1$$

Với 4 mốc nội suy sau:

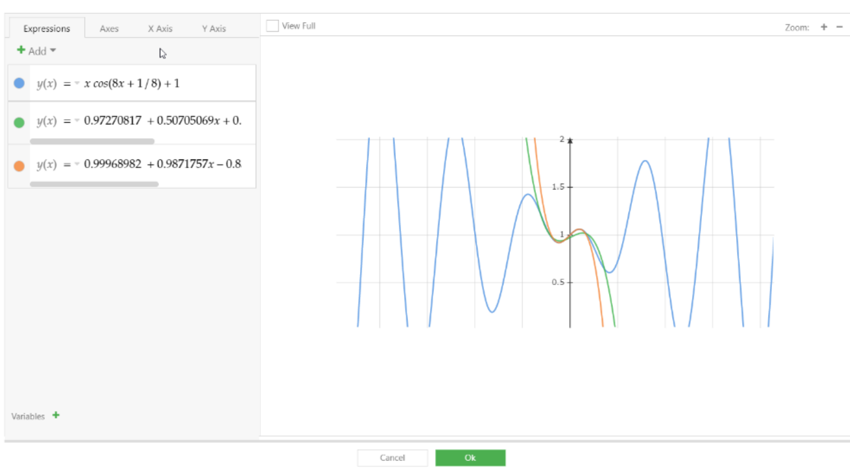
x_i	y_i
-0.212	1.00043
0.361	0.6419
-0.31	1.2189
0.173	1.01068

```
----------------------------------------
Cac moc noi suy ban dau la:
  -0.212    1.00043
   0.361    0.6419
   -0.31    1.2189
   0.173    1.01068
----------------------------------------
Ma tran Vandemonde tao boi cac moc noi suy:
           1      -0.212    0.044944-0.009528127
           1       0.361    0.130321  0.04704588
           1       -0.31      0.0961   -0.029791
           1       0.173    0.029929 0.005177716
----------------------------------------
Ma tran mo rong cua hpt duoc chuyen thanh ma tran bac thang nhu sau:
       1    -0.212   0.044944   -0.009528127
       0     0.573   0.08537699   0.05657401
       0         0   0.065758   -0.01058704
       0         0          0   -0.03495954
----------------------------------------
Da thuc noi suy la: f(x) = a0 + a1x + a2x^2 + a3x^3
   x0= 0.97270817     x1= 0.50705069     x2= 0.43660867     x3= -12.131832
----------------------------------------
```

Nhưng với 4 mốc nội suy tối ưu thì kết quả sẽ là:

```
----------------------------------------
Cac moc noi suy ban dau la:
0.115485     1.057574
0.0478354     1.0418
-0.0478354     0.953744
-0.115485     0.91945
----------------------------------------
Ma tran Vandemonde tao boi cac moc noi suy:
           1     0.115485  0.01333679 0.001540199
           1    0.0478354 0.0022882250.0001094582
           1   -0.0478354 0.002288225-0.0001094582
           1    -0.115485  0.01333679-0.001540199
----------------------------------------
Ma tran mo rong cua hpt duoc chuyen thanh ma tran bac thang nhu sau:
       1  0.115485  0.01333679  0.001540199
       0  -0.0676496  -0.01104856  -0.00143074
       0          0  0.01562499  0.001804452
       0          0          0  -0.002551886
----------------------------------------
Da thuc noi suy la: f(x) = a0 + a1x + a2x^2 + a3x^3
   x0= 0.99968982     x1= 0.9871757     x2= -0.83811837     x3= -29.179317
----------------------------------------
```

Đồ thị hàm số giữa 2 đa thức nội suy và hàm số ban đầu là:



Nhận xét: Khi tôi chỉ xét trên đoạn nội suy [-1,1], đồ thị hàm số của đa thức nội suy tại mốc ngẫu nhiên vẫn chưa đè lên hẳn so với đồ thị của hàm ban đầu, vẫn còn một số đường lệch ra khỏi và từ đó dẫn đến xấp xỉ của đa thức đó vs hàm số ban đầu vẫn chưa phải là nhỏ nhất nhưng đến với đa thức tại mốc tối ưu tôi lại thấy dường như đồ thị hàm số của đè khít so với đồ thị ban đầu và chứng tỏ sai số đã nhỏ đi hơn nhiều.

Ví dụ 2:

a) Tính giá trị của hàm số

$f(x) = x^5 – 11.02x^4 + 1.61x^3 + 3.1x^2 – 2.73x -74$ tại điểm $x = 8.8$

```
Gia tri cua da thuc f(x) tai diem x = 8.8 la -12074
```

b) Tính giá trị đạo hàm của hàm số

$f(x) = x^5 – 11.02x^4 + 1.61x^3 + 3.1x^2 – 2.73x -74$ tại điểm $x = 8.8$

```
Gia tri cua dao ham cua da thuc tai diem x = 8.8 la 371.346
```

c) Tìm đa thức thương g(x) và phần dư r(x) khi lấy đa thức f(x) chia cho đơn thức x – 8.8 với:

$f(x) = x^5 – 11.02x^4 + 1.61x^3 + 3.1x^2 – 2.73x -74$

```
1 -2.22 -17.926 -154.649 -1363.64 -12074
```

$g(x) = x^4 – 2.22x^3 – 17.926x^2 – 154.649x – 1363.64$

và $r(x) = -12074$

d) Tìm tích của đa thức f(x) với đơn thức x – 8.8 với:

$f(x) = x^5 – 11.02x^4 + 1.61x^3 + 3.1x^2 – 2.73x -74$

```
1 -19.82 98.586 -11.068 -30.01 -49.976 651.2
```

là:

$x^6 – 19.82x^5 + 98.586x^4 – 11.068x^3 – 30.01x^2 – 49.976 + 651.2$

VII. Kết luận

Đa thức nội suy là một phương pháp khá dễ hiểu từ đó chúng ta có thể áp dụng đơn giản vào việc giải quyết các vấn đề trong toán học nhưng một điểm yếu của nó chính là đa thức nội suy chỉ thực sự chính xác trên những khoảng khá nhỏ còn đối với những khoảng lớn hơn sai số của nó sẽ không quá đẹp.

Bài báo cáo của tôi đã nêu bật lên được các vấn đề cơ bản nhất của 1 bài toán nội suy và đi sâu hơn, tôi tìm hiểu một kĩ năng cơ bản đó là đa thức nội suy để xấp xỉ 1 hàm số. Bên cạnh đó tìm được phương pháp chọn các mốc nội suy tối ưu để tạo ra đa thức nội suy hoàn hảo nhất. Và cuối cùng tôi đã giới thiệu cho cô và các bạn sơ đồ Hoocne và 1 vài ứng dụng của nó trong việc giải quyết các bài toán cơ bản.