ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

Báo cáo môn học Giải tích số

Bài toán Cauchy

Phương pháp xấp xỉ liên tiếp Picard

Sinh viên:
Ngô Thị Hương
MSSV: 20190097
Lớp: CTTN-Toán tin K64

Giảng viên hướng dẫn:
TS. Hà Thị Ngọc Yến

Hà Nội - Tháng 1/2022

Mục lục

Lời mở đầu

Thế kỷ XXI là thế kỷ bùng nổ của công nghệ thông tin, ứng dụng của công nghệ thông tin có đóng góp to lớn và hiệu quả trong mọi mặt của đời sống. Và cũng từ rất lâu tin học đã được ứng dụng vào trong môn Toán. Có những số liệu tính toán quá cồng kềnh và những bài toán phức tạp chúng ta không thể giải bằng tay được nhưng nếu dùng các lập trình trên máy vi tính thì chúng ta có kết quả rất nhanh gọn và chính xác.

Có thể ta đã rất quen thuộc với dạng toán tìm nghiệm đúng của bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân thường. Thế nhưng có nhiều trường hợp nghiệm đúng của các phương trình vi phân không thể tìm được. Bởi vậy để tìm nghiệm của chúng, ta phải áp dụng các phương pháp gần đúng khác nhau. Trong phạm vi bài báo cáo này em trình bày về bài Cauchy và phương pháp xấp xỉ liên tiếp Picard để giải bài toán vi phân thường cấp 1.

Trong quá trình tìm hiểu đề tài, do giới hạn về kiến thức nên bài báo còn có thể còn nhiều thiếu sót mong cô góp ý để em có thể hoàn thiện đề tài tốt hơn.

Cuối cùng,em xin chân thành cảm ơn cô Hà Thị Ngọc Yến đã cho em cơ hội để tìm hiểu một đề tài rất bổ ích và luôn hỗ trợ tận tình cho em trong quá trình học tập học phần giải tích số.

1 Khái quát về phương trình vi phân

Phương trình vi phân là một phương trình toán học nhằm biểu diễn mối quan hệ giữa một hàm chưa được biết (một hoặc nhiều biến) với đạo hàm của nó (có bậc khác nhau). Phương trình vi phân đóng vai trò cực kì quan trọng trong kĩ thuật, vật lý, kinh tế và một số ngành khác.

Phương trình vi phân được ứng dụng rất nhiều trong các ngành kỹ thuật, vật lý như: Bài toán dao động lò xo, con lắc đơn, bài toán quỹ đạo hay bài toán tăng trưởng và logistic trong kinh tế,..

Tuy nhiên phần lớn các bài toán này thường phức tạp và không giải được chính xác mà chỉ có thể giải được gần đúng.

Phương trình vi phân thường cấp n
Dạng tổng quát: $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0(1)$
Hàm F xác định trong miền $G \subset R^{(n+2)}$. Trong phương trình (1) có thể vắng một số biến $x, y', ..., y^{(n+1)}$ nhưng nhất định phải có mặt $y^{(n)}$. Nếu từ (1) ta giải ra được đạo hàm cấp cao nhất, tức là phương trình (1) có dạng $y^{(n)} = f(x, y', ..., y^{(n-1)})$ thì ta được phương trình vi phân cấp n đã giải ra đạo hàm cấp cao nhất.

2 Bài toán Cauchy

Bài toán Cauchy là bài toán ngoài phương trình vi phân thì còn điều kiện bổ sung tại một điểm hay còn gọi là bài toán giá trị ban đầu.
Một số dạng bài toán Cauchy:

- Phương trình vi phân cấp 1:$x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$
- Phương trình vi phân cấp k: $x^{(k)} = f(t, x, x', ..., x^{(k-1)}), x(t_0) = x_{00}, x'(t_0) = x_{01}, .., x^{(k-1)}(t_0) = x_{0,k-1}$
- Hệ hai phương trình vi phân cấp 1: $\begin{cases} x' = f(t, x, z), & x(t_0) = x_0 \\ z' = f(t, x, z), & z(t_0) = z_0 \end{cases}$

3 Phương pháp Xấp xỉ liên tiếp Picard

3.1 Bài toán đặt ra:

Có phương trình vi phân:

$$x' = f(t, x) \ , \ x(t_0) = x_0$$

Với f là hàm liên tục trên miền lân cận điểm (t_0, x_0). Ta tìm hàm xấp xỉ cho $x(t)$
Ví dụ: $x' = x^2 + t^2 \ , \ x(0) = 0$

3.2 Ý tưởng:

Đưa phương trình về dạng tích phân và dựa vào tính co của hàm trong 1 lân cận nhất định rồi xấp xỉ liên tiếp hàm cần tìm và cải thiện dần hàm xấp xỉ được theo từng bước:

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{k-1}(s)) \ ds$$

Ta xét trên không gian các hàm liên tục $C_{[a,b]}$ với chuẩn thông thường:

$$||x - y|| = \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$$

3.3 Định lý về sự tồn tại nghiệm

Bổ đề 1: Giả sử x(t) liên tục trên hình chữ nhật:

$$D = \{(t, x) \in R^2 | \ |t - t_0| \leq \delta_t, |x - x_0| \leq \delta\}$$

Đặt

$$M = \sup_{(t,x)\in D} |f(t,x)| \ , \epsilon = min(\delta_t, \frac{\delta}{M})$$

Khi đó với mọi $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ ta có: $|x_n(t) - x_0| \leq \delta$, với mọi n
Nói cách khác, phép lặp Pica các hàm x_n không đi ra khỏi phần hình chữ nhật D ứng với $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$

Cho hàm $f(t,x)$ xác định trên miền $D \in R^2$. Ta nói f thỏa mãn điều kiện Lipchitz theo biến t trên D nếu tồn tại hằng số dương L(gọi là hằng số Lipchitz) sao cho:

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

với mọi $(t,x_1),(t,x_2) \in D$

Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm: Giả sử hàm f(t,x) liên tục và thỏa mãn điều kiện Lipchitz trên hình chữ nhật thỏa mãn $f(t,x)$ bị chặn và L-Lipchitz trên miền hình chữ nhật

$$D = \{(t,x) \in R^2 | \ |x - x_0| \leq \delta, |t - t_0| \leq \epsilon\}$$

Khi đó nghiệm của bài toán trên là tồn tại và duy nhất trong đoạn $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ như trên.

Dựa vào đây ta có các điều kiện thực hiện phương pháp.

3.4 Điều kiện thực hiện phương pháp

- Hàm $f(t,x)$ liên tục, xác định trên miền hình chữ nhật

$$D = \{(t,x) \in R^2 | \ |x - x_0| \leq \delta, |t - t_0| \leq \epsilon\}$$

- Tồn tại L để $f(t,x)$ là L-Lipchizt theo x trên D.
- Tồn tại M để $|f(t,x)|$ bị chặn bởi M trên D.

3.5 Tính đúng đắn của phép lặp Picard

Lấy xấp xỉ đầu $x_0(t) = x_0$, ta tìm cách cải thiện xấp xỉ này bằng cách giải:

$$\frac{dx_1}{dt} = f(t,x_0) \ \ , \ x_1(t_0) = x_0$$

Tiếp tục lặp lại cách tương tự với $x_2, x_3, ...$ Tổng quát ta có:

$$\frac{dx_n}{dt} = f(t,x_{n-1}) \ \ , \ x_n(t_0) = x_0$$

Với cách chọn $\epsilon = min(\frac{1}{2L}, \frac{\delta}{M})$, khi đó khoảng của t nhỏ hơn khoảng của t trong định lý phát biểu ở trên. Ta chứng minh dãy x_n là xác định, hội tụ về nghiệm đúng của phương trình và nghiệm đó là duy nhất.

3.5.1 Chứng minh được hàm sử dụng trong mỗi bước là xác định

Ta có hàm lặp:

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{k-1}(s)) \ ds$$

Ta đã thay $x_{k-1}(t)$ vào hàm $f(t,x)$. Ta kiểm tra điều kiện xác định: $x_0 - \delta \leq x_{k-1}(t) \leq x_0 + \delta$ (1) đúng với mọi k và $t \in [t - \epsilon, t + \epsilon]$

Với k = 0 thì hiển nhiên do $x_0(t) = x_0$
Xấp xỉ thứ 2 $x_1(t)$ có đạo hàm thỏa mãn:

$$x_1'(t) = |f(t,x_0)| \leq M$$

do đạo hàm bị chặn trên bởi M theo giả thiết, vậy ta có:

$$|x_1(t) - x_0| \leq M|t - t_0| \leq M\epsilon$$

Với cách chọn ϵ ta được:

$$|x_1(t) - x_0| \leq \delta \text{ hay } x_0 - \delta \leq x_1(t) \leq x_0 + \delta \quad \forall t \in [t - \epsilon, t + \epsilon]$$

Vậy ta có $f(t, x_1(t)$ thỏa mãn điều kiện xác định.
Làm tương tự với nhận xét $|x'_{k-1}(t)| \leq M$ và $x_{k-1}(t_0) = x_0$ với mọi k, ta được hàm $f(t, x_k(t)$ xác định
Trường hợp lấy xấp xỉ tích phân bằng một hàm lưới:

3.5.2 Sai khác giữa 2 xấp xỉ liên tiếp

Để thấy được dãy $x_k(t)$ là hội tụ ta xét sai khác giữa 2 xấp xỉ liên tiếp:

$$y_k(t) = x_k(t) - x_{k-1}(t)$$

Hàm x_k khi đó được viết lại dưới dạng:

$$x_k(t) = x_0 + y_1(t) + y_2(t) + ... + y_k(t)$$

Với k = 1, với chứng minh trên (1) ta có $|y_1(t)| = |x_1(t) - x_0| \leq \delta$ nên $||y_1|| \leq \delta$ Với k $>$1 ta có:

$$y_k(t_0) = x_k(t_0) - x_{k-1}(t_0) = x_0 - x_0 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dy_k}{dt} = \frac{dx_k}{dt} - \frac{dx_{k-1}}{dt} = f(t, x_{k-1}) - f(t, x_{k-2})$$

nên

$$\left|\frac{dy_k}{dt}\right| \leq L|x_{k-1}(t) - x_{k-2}(t)| = L|y_{k-1}(t)| \leq L||y_{k-1}|| \quad (3)$$

Từ (2) và (3) chứng minh tương tự phần trên ta được

$$|y_k(t)| \leq L\epsilon||y_{k-1}|| \; \forall t \in [t - \epsilon, t + \epsilon]$$

hay

$$||y_k|| \leq L\epsilon||y_{k-1}||$$

Với cách chọn ϵ như trên, ta thấy $L\epsilon \leq \frac{1}{2}$ nên

$$||y_k|| \leq \frac{1}{2}||y_{k-1}|| \leq ... \leq \frac{1}{2^{k-1}}\delta$$

Từ đây dễ thấy $\sum ||y_k||$ hội tụ nên $\sum y_k$ hội tụ (dãy cauchy trong không gian đủ $C_{[t-\epsilon, t+\epsilon]}$).

3.5.3 Giới hạn của dãy là nghiệm của phương trình

Từ chứng minh trên cộng với $f(t, x_k)$ liên tục đều (dựa trên công thức sai số được trình bày ở dưới) ta có:

$$x(t) = \lim_{k\to\infty} x_k(t) = x_0 + \lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))ds$$

$$= x_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_{k\to\infty} f(s, x_k(s)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

Từ đây ta thấy x(t) khả vi và đạo hàm 2 vế ta được

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$$

Vậy ta được nghiệm $x(t)$ thỏa mãn phương trình ban đầu.

3.6 Bán kính hội tụ

Với $h = \epsilon L$ thì để chắc chắn hội tụ ta cần có h<1 (phần trên ta cho h $\leq \frac{1}{2}$) , ta có bán kính hội tụ tối đa có thể khẳng định của phương pháp là $R = min\{\frac{1}{L}, \frac{\delta}{M}\}$
Tuy vậy khoảng hội tụ của phương pháp vẫn thường nhỏ hơn nhiều so với miền ban đầu.

3.7 Sai số và tốc độ hội tụ

Theo trên, ta có 2 cách đánh giá sai số tương ứng:

Tiên nghiệm:

Ta chứng minh quy nạp rằng:

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq ML^k \frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

với mọi $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ Với k = 0 bất đẳng thức trên chính là:

$$|\int_{t_0}^{t} f(s, x_0(s))ds| \leq M|t - t_0|$$

Giả sử điều đó đúng đến n=k-1, tức là:

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \leq ML^{k-1} \frac{|t-t_0|^k}{k!}$$

Ta đi chứng minh nó đúng với n=k Thật vậy, với $t_0 \leq t \leq t_0 + \epsilon$ ta có:

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} [f(s, x_k(s)) - f(s, x_{k-1}(s)]ds \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} [f(s, x_k(s)) - f(s, x_{k-1}(s)]ds \leq L \int_{t_0}^{t} [x_k(s) - x_{k-1}(s)]ds$$

$$\leq L \int_{t_0}^{t} ML^{k-1} \frac{|t-t_0|^k}{k!} dt = ML^k \int_{t_0}^{t} \frac{(x-x_0)^k}{k!} dt$$

$$= ML^k \frac{(t-t_0)^{k+1}}{(k+1)!} = ML^k \frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

với $t_0 - h \leq t \leq t_0$

Vậy ta có

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq ML^k \frac{|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!} \quad \forall t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$$

Vậy ta dễ thấy số lần lặp cần thiết N là số lần lặp cho đến khi giá trị biểu thức trên $< \epsilon_0$ với ϵ_0 ở đây là sai số cần thỏa mãn (đánh giá như công thức hậu nghiệm phía dưới)

Hậu nghiệm:

Với cách chọn hệ số co $h = \frac{1}{2}$ ta có:

$$||x - x_n|| \leq \left\| \sum_{i=k+1}^{\infty} y_i \right\| \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \|y_i\| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} ||y_n|| \frac{1}{2^{i-n}} = ||y_n||$$

Vậy ta có:

$$||x - x_n|| \leq ||x_n - x_{n-1}|| \quad (1)$$

Với cách xấp xỉ bằng hàm lưới, tùy vào từng phương trình mà cần số lượng mốc nhất định sao cho phương pháp này có thể có thể hội tụ cũng như cách đánh giá sai số trên là chấp nhận được. Ở đây ta coi số mốc là cho trước và thử nếu phương pháp có thể hội tụ trong thời gian chấp nhận được. Trên đây cũng chưa xét đến sai số tích phân và ta coi như số mốc là đủ lớn để sai số tích phân nhỏ hơn nhiều sai số của phương pháp và không làm ảnh hưởng đến sự hội tụ cũng như tính đúng đắn. Thuật toán dưới đây sử dụng xấp xỉ tích phân bằng phương pháp hình thang.

3.8 Thuật toán:

Ta có 2 cách xấp xỉ nghiệm:

- Cách 1: dạng giải tích: sử dụng công thức sai số (1)
- Cách 2: dạng lưới: sử dụng công thức sai số (2)

Cách 1:

- Đầu vào: hàm f(x,t); khoảng xác đinh: lowT, upT, lowX, upX; giá trị đầu: t0, x0; sai số: epsilon.
- Bước 1: Tính các chặn trên M, L lần lượt cho f(x,t), đạo hàm theo t của f'(x) trên [lowT,upT] x [lowX,upX]
- deltaX = min(upX-x0, x0-lowX); xn = x0;
- deltaT = min$\{\frac{deltaX}{M}, \frac{1}{2L}\}$) ; h = deltaT * L;
- Bước 3: Đặt error = $M * epsilon$, N = 1
- Lặp đến khi error bé hơn epsilon: $error = error * h/N$ và $N = N + 1$
- Bước 5: Lặp N lần: x = x0 + $\int_{t_0}^{t} f(t, x(t))dt$
- Xuất ra: x (hàm x(t)), khoảng xác định (t0-deltaT, t0+deltaT)

Cách 2:

- Đầu vào: hàm f(x,t); khoảng xác đinh: lowT, upT, lowX, upX; giá trị đầu: t0, x0; sai số: epsilon; độ dài mảng: length.
- Bước 1: Tính các chặn trên M, L lần lượt cho f(x,t), đạo hàm theo t của f'(x) trên [lowT,upT] x [lowX,upX]
- deltaX = min(upX-x0, x0-lowX); xn = x0;
- deltaT = min$\{\frac{deltaX}{M}, \frac{1}{2L}\}$) ; h = deltaT * L; segmentLength = deltaT/length/2
- Bước 3: Tạo mảng arr có số phần tử là length các cặp (t,x0) với các giá trị t cách đề nhau 1 khoảng là segmentLength, điểu đầu và điểm cuối lần lượt là $t0 - deltaT, t0 + deltaT$
  Khi đó arr[i][0] là $t_i = t0 - deltaT + i * segmentLength$ còn arr[i][1] là $x(t_i)$ xấp xỉ được, arr[n] là điểm giá trị ban đầu
- Bước 5: Cho maxerror = 0 và lặp cho đến khi sai số tương đối giữa 2 giá trị x(t) liên tiếp là maxerror $<$ epsilon:
  - đặt error = 0 và lặp với i chạy từ n về 0:
  - đặt integral = 0 (Ở đây integral chính là tích phân trong phép lặp Picard)
  - integral = integral - segmentLength * f(arr[i][0],arr[i][1])
  - arr[i][1] += integral
  - kiểm tra và đặt lại sai số tương đối từng điểm error nếu error tăng gán vào maxerror
  - Làm tương tự với n chạy từ n đến 2n là các giá trị bên phải t0
    (Khinày $integral = integral + segmentLength * f(arr[i][0], arr[i][1])$)
- Xuất ra:
  - mảng arr chứa các cặp điểm

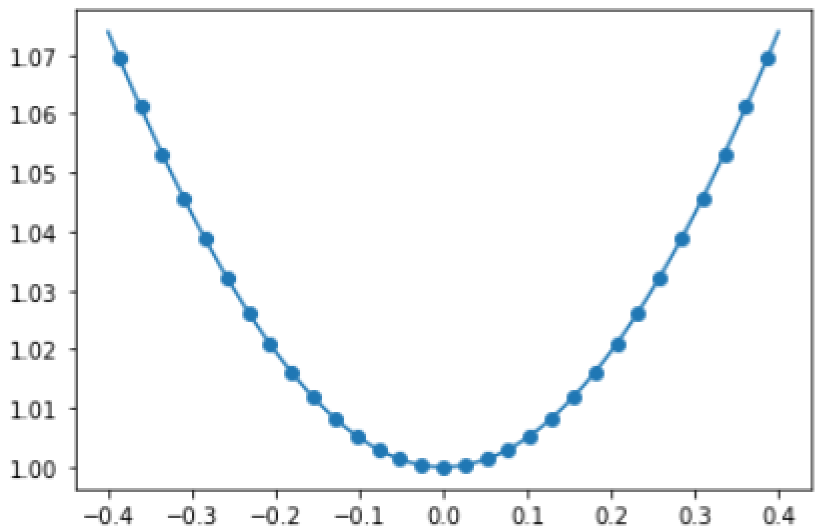
4 Hệ Thống Ví Dụ:

Ví dụ 1: $x' = t(3-2x) \quad x(0) = 1$
$f(t,x)$ xác định trên R^2 nên xác định trên đoạn $[-a,a]$ x $[-b,b]$ với $a,b > 0$
Ta cho $f(t,x)$ xác định trên $[-0.5, 0.5]x[-1,2]$
Khi đó

$$L = supf'_x = 2t \leq 1 \quad \forall t \in [-0.5, 0.5]$$

Tương tự ta có M = 2.5 và khi chạy chương trình với sai số epsilon = 10^{-8} ta được kết quả như hình dưới. Ở đây 15 chấm là các hàm lưới với 15 mốc, đường nét liền là đồ thị hàm giải tích xấp xỉ được. Tuy nhiên lưu ý sai số tính đến ở đây mới chỉ là sai số của phương pháp, sai số tích phân ở đây dễ thấy là sẽ lớn hơn 10^{-8} nhưng vì ta chưa xét đến nên chương trình vẫn dừng do dãy vẫn hội tụ tuy nhiên sai số sẽ lớn hơn. Với chỉ 15 mốc thì về tổng thể không thể đạt tới được kết quả có sai số nhỏ hơn 10^{-8}. Tùy vào từng phương trình, với số mốc quá bé có thể dãy sẽ không hội tụ do sai số tích phân quá lớn.

```
1.4e-6*t**18 - 1.2e-5*t**16 + 9.9e-5*t**14 - 0.00069*t**12 +
0.0042*t**10 - 0.021*t**8 + 0.083*t**6 - 0.25*t**4 + 0.5*t**2
+ 1.0
Khoảng hội tụ: (-0.4, 0.4)
```

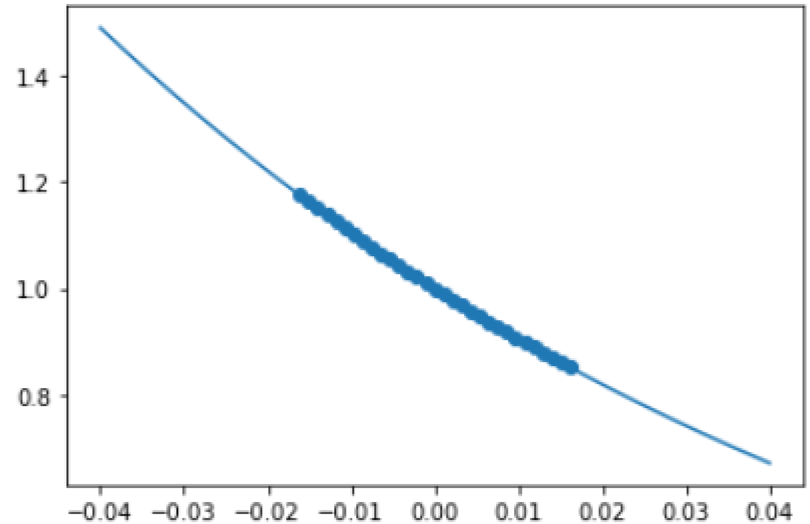


Ta có nhận xét là với các giá trị M và L, ta chỉ cần tìm các chặn trên cho nó mà không nhất thiết phải tìm chính xác hay xấp xỉ. Khi đó, hệ quả chỉ là miền hội tụ của phương pháp ngắn lại mà không ảnh hưởng đến kết quả của phương pháp. **Ví dụ 2:** Ta có phương trình thử với $\lambda = -10$:

$$x' = -10x$$

Có x(0) = 1, ta cho $f(t,x) = -10x$ xác định trên đoạn $[-0.5, 0.5]$x$[0.8, 1.2]$ Dễ thấy M = 12, L = 10.
Dưới đây, ta cho chạy thử cả 2 phương pháp với đầu vào cho hàm tính dạng giải tích là M =5, L = 10 còn đầu vào cho dạng lưới là M = 12 , L = 10 với số mốc là 31. Với sai số đầu vào của cả 2 là 10^{-4} ta có đồ thị:

```
-8.3e+2*t**5 + 4.2e+2*t**4 - 1.7e+2*t**3 + 50.0*t**2 - 10.0*t + 1.0
Khoảng hội tụ: (-0.039999999999999994, 0.039999999999999994)
```



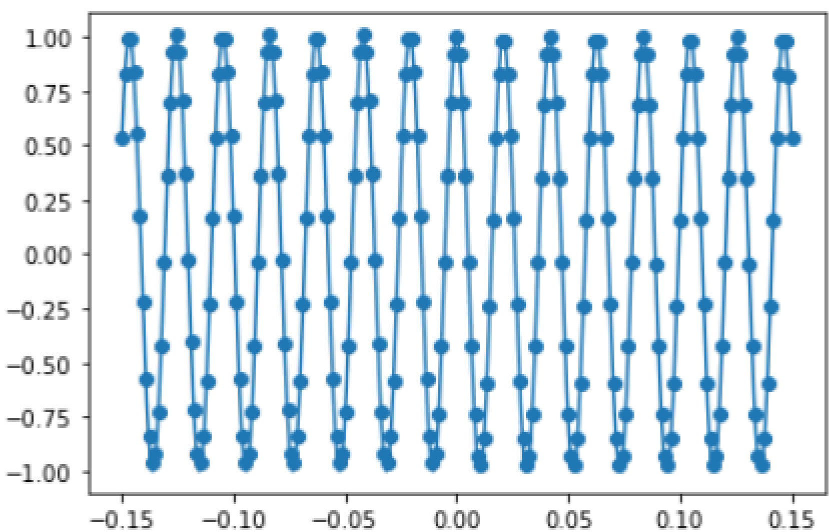
Ta thấy như trên hàm giải tích xác định trên đoạn [-0.04,0.04] còn hàm dạng lưới chỉ xác định trên đoạn xấp xỉ [-0.016, 0.016] với kết quả ở phần chung là xấp xỉ nhau.

Ví dụ 3: Trong ví dụ này, ta thử nghiệm có đạo hàm lớn, cụ thể là $x = 300cos(t)$. Ta có phương trình:

$$x' = x - cos(300x) - 300sin(300x)$$

Có x(0) $= 1$, ta cho $f(t, x) = x - cos(300x) - 300sin(300x)$ xác định trên đoạn $[-0.5, 0.5]$x$[0.8, 1.2]$ Trong ví dụ này ta không thực hiện được hàm tính dạng giải tích do trong quá trình lặp gặp phải hàm có nguyên hàm không ở dạng cơ bản. Ta thực hiện xấp xỉ bằng hàm lưới với số mốc là 222 và vẽ đồ thị cùng với nghiệm thực sự là $x = 300cos(t)$ thì

```
result1 = Pica(filename, length = 222, M = 50, L = 1)
PlotPairs(result1)
interval = (float(result1[0][0]), float(result1[len(result1)-1][0]))
Plot(cos(300*t), interval)
plt.show()
```



được đồ thị sạu:

4.1 Đánh giá:

- Nghiệm tìm được có khoảng xác định nhỏ
- Không tìm được nghiệm với bán kính hội tụ bất kì

- Rất nhiều hàm không có nguyên hàm dạng đơn giản hoặc có nhưng độ phức tạp của hàm tăng nhanh sau các lần lặp, khối lượng tính toán cũng sẽ lớn.

5 Phương pháp lũy thừa

5.1 Bài toán đặt ra:

Giải phương trình vi phân tuyến tính cấp n:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y = f(t)$$

với các giá trị ban đầu $y(t_0), y'(t_0),\ ..., y^{(n)}(t_0)$
Để đơn giản, ta xét $a_n = 1$

5.2 Ý tưởng:

Xấp xỉ hàm cần tính bằng chuỗi lũy thừa của nó sử dụng các khai triển của hệ số và sử dụng công thức truy hồi có được từ phương trình và các giá trị ban đầu.

5.3 1 số khái niệm và lý thuyết

Trong khoảng hội tụ của chuỗi, ta có thể lấy đạo hàm và tích phân từng số hạng của chuỗi, chuỗi mới nhận được (sau khi lấy đạo hàm hoặc tích phân) cũng có bán kính hội tụ như chuỗi ban đầu.

Nếu các hàm số $a_n(t)$, $a_{n-1}(t)$, $a_0(t)$ trong phương trình trên là giải tích tại x = x0 (khả vi vô hạn lần tại x = x0) thì điểm x = x0 gọi là điểm chính quy (điểm thông thường) của phương trình trên.

Định lý 2.1: Cho phương trình vi phân tuyến tính cấp n:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y = f(t)$$

Khi đó nếu các hệ số $a_i(t), 1 \leq i \leq n$ có khai triển quanh lân cận $t = t_0$ có bán kính hội tụ $R_i, R_0 \geq R \geq 0$ với R_i, R_0 lần lượt là bán kính hội tụ của các hệ số a_i và hàm $f(t)$ thì tồn tại nghiệm ϕ thỏa mãn $L(y) = 0,\ y(t_0) = \alpha_1, ..., y^{(n-1)}(t_0) = \alpha_n$ với khai triển:

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

với bán kính hội tụ nhỏ nhất bằng R.

Điều kiện của phương pháp: Điểm đầu x0 là điểm chính quy với các hàm là các hệ số.

5.4 Tính đúng đắn của thuật toán:

Để đơn giản, ta xét trường hợp n=2, $t_0 = 0$, trường hợp tổng quát $n \in \mathbb{N}, t_{0 \in R}$ bất kì hoàn toàn tương tự với phép tịnh tiến. Ta xét:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t)$$

Hệ số ở đây là p và q có chuỗi lũy thừa:

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n,\ q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n,\ r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n$$

Khi đó nếu tồn tại nghiệm ϕ giải tích quanh lân cận điểm $t_0 = 0$ thì ta có:

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,\ \phi'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1},\ \phi''(n) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2}$$

Tịnh tiến chỉ số n rồi thay vào phương trình ta có:

$$\phi''(t) + p(t)\phi'(t) + q(t)\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n$$

$$\iff \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \bullet \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} t^n$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n \bullet \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n$$

Đồng nhất hệ số t^n với n cố định ta được:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + \sum_{m=0}^{n}(m+1)c_{m+1}p_{n-m} + \sum_{m=0}^{n} c_m q_{n-m} = f_n$$

Chuyển vế ta được:

$$c_{n+2} = \frac{f_n}{(n+2)(n+1)} - \frac{1}{(n+2)(n+1)}\sum_{m=0}^{n}[(m+1)c_{m+1}p_{n-m} + c_m q_{n-m}] \quad (1)$$

Do ta đã có chuỗi với hệ số f_n là hội tụ nên tổng chuỗi c_n hội tụ khi phần còn lại hội tụ, nên ở đây ta có thể bỏ qua f_n và xét phần còn lại nên coi như $f_n = 0$. Ta thấy chuỗi lũy thừa của p và q có bán kính hội tụ R nên với mọi 0<r<R thì $|p_n|r^n$ và $|q_n|r^n$ bị chặn do

$$\lim_{n\to\infty} p_n r^n = \lim_{n\to\infty} q_n r^n = 0$$

Khi đó tồn tại M sao cho: $p_n < \frac{M}{r^n}$ và $q_n < \frac{M}{r^n}$ Thay vào (1) với t = r ta dễ dàng có được:

$$|c_{n+2}| < \frac{1}{(n+2)(n+1)}\frac{M}{r^n}\sum_{m=0}^{n}[(m+1)|c_{m+1}| + |c_m|]r^m$$

$$< \frac{1}{(n+2)(n+1)}\frac{M}{r^n}\sum_{m=0}^{n+1}(m+1)c_m r^m$$

Ta xét dãy a_n có: $a_0 = |c_0|, a_1 = |c_1|$ và

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}\frac{M}{r^n}\sum_{m=0}^{n+1}(m+1)a_m r^m$$

Do tất cả các số hạng trong tổng ở vế phải đều dương nên ta dễ dàng chứng minh bằng quy nạp $c_n < a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Ta có:

$$\sum_{m=0}^{n+1}(m+1)a_m r^m = \sum_{m=0}^{n}(m+1)a_m r^m + (m+2)a_{n+1}r^{n+1}$$

$$= (1 + \frac{1}{(n+1)n}\frac{M}{r^2})\sum_{m=0}^{n-1}(m+1)a_m r^m$$

Sử dụng đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{1}{r}\frac{(n+1)n}{(n+2)(n+1)}(1 + \frac{1}{(n+1)n}\frac{M}{r^2})$$

Khi đó dễ thấy:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{1}{r}$$

Từ đây ta có chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

hội tụ với t < r. Khẳng định đúng với mọi 0<r<R nên ta có bán kính hội tụ của chuỗi trên là R. Từ đó, theo tiêu chuẩn so sánh với $|c_n| < a_n$ ta có chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| t^n$$

có bán kính hội tụ nhỏ nhất bằng R, từ đó ta có

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

có bán kính hội tụ nhỏ nhất bằng R, đây là điều phải chứng minh.

Câu hỏi có thể đặt ra là ta có thể tính được chính xác bán kính hội tụ của chuỗi hay không? Định lý trên chỉ cho ta một chặn dưới và bán kính hội tụ của chuỗi hoàn toàn có thể lớn hơn chặn dưới đó.

5.5 Thuật toán:

Cơ sở:
Từ (1) không khó để có được công thức tổng quát cho phương trình vi phân tuyến tính cấp k:

$$c_{n+k} = \frac{1}{(n+1)...(n+k)} \left(f_n - \sum_{m=0}^{n} \sum_{i=0}^{k-1} (m+1)(m+2)...(m+i) a_{i_{n-m}} c_{m+i} \right) \quad (2)$$

với quy ước $(m+1)(m+2)...(m+i) = 1$ với i=0.

Các hệ số c_i của nghiệm khi đó được xác định dần từ k giá trị đầu của y:

$$c_0 = y(t_0),\ c_1 = y'(t_0), ...,\ c_{k-1} = y^{(k-1)}(t_0)$$

Vậy từ đây ta xác đinh được các hệ số c_n trong khai triển $\phi(x)$ là nghiệm cần tìm. Sau đây là thuật tóm tắt thuật toán:

- Input: file có dòng đầu chứa các giá trị ban đầu $y(0), y'(0)$, ... và lần lượt các dòng với bán kính hội tụ R và chuỗi lũy thừa tương ứng theo thứ tự của các từng hệ số $a_{k-1},\ ...,\ a_0$
- Đọc và kiểm tra dữ liệu, xác định cấp của phương trình: k = độ dài mảng giá trị đầu = số dòng tiếp theo
- Xác định bán kính hội tụ $R_0 = \min(R_i)$, bậc tối đa nhỏ nhất trong các mảng N = min(len(a_i)) với $i = \overline{0, k-1}$
- Tạo mảng result với các giá trị ban đầu result[i] = $y^{(i)}(0)$, $i = \overline{0, k-1}$
- Lặp để tính mảng kết quả result với công thức lặp (2) với $n = \overline{0, N-n-1}$
- Output: bán kính hội tụ R_0, mảng kết quả result

Nhận xét:

- Có thể giải một số lớp phương trình phi tuyến bằng phương pháp này nhưng sẽ khá phức tạp cũng như khó đánh giá sai số.

Phương pháp Frobenius cho trường hợp có điểm bất thường: Trong trường hợp phương trình vi phân cấp 2 có giá trị đầu là điểm bất thường, ta có thể sử dụng phương pháp Frobenius như dưới đây: Xét trường hợp $p(x), q(x)$ và $f(x)$ có điểm gián đoạn tại $x = 0$ thì nghiệm của phương trình vi phân khi ấy có dạng:

$$y = x^s \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

trong đó s và C_n được tìm bằng hệ số bất định

Định nghĩa: Điểm bất thường chính quy là điểm bất thường mà tại đó các hàm $xp(x), x^2q(x)$ đều giải tích tại $x = 0$, các trường hợp khác gọi là điểm bất thường không chính quy

Định lý: Xét phương trình vi phân có dạng $y''(x) + p(x)y' + q(x)y = f(x)$
trong đó $x = x_0$ là điểm bất thường chính quy, R là bán kính hội tụ nhỏ nhất giữa hai hàm $(x - x_0)p(x)$ và $(x - x_0)^2q(x)$, s là nghiệm lớn nhất của phương trình chỉ định. Khi đó tồn tại nghiệm của phương trình trên có dạng $y(x) = (x - x_0)^s \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n$ và nghiệm này hội tụ trong khoảng $0 < |x - x_0| < R$

Dựa vào phương trình chỉ định là phương trình (2) với n = 0 ta tìm ra được s. Tuy phải xét thêm 1 số trường hợp nhưng sau đó ta vẫn có thể đưa về bài toán tương tự như trường hợp bình thường.

5.6 Ví dụ minh họa:

Xét phương trình vi phân với nghiệm của phương trình là $y = sin(3t)$:

$$y'' + cos(3t)y' + 3sin(3t)y = 9sin(3t) + 3$$

Các giá trị ban đầu: $y(0) = 0, y'(0) = 3$ Ta có:

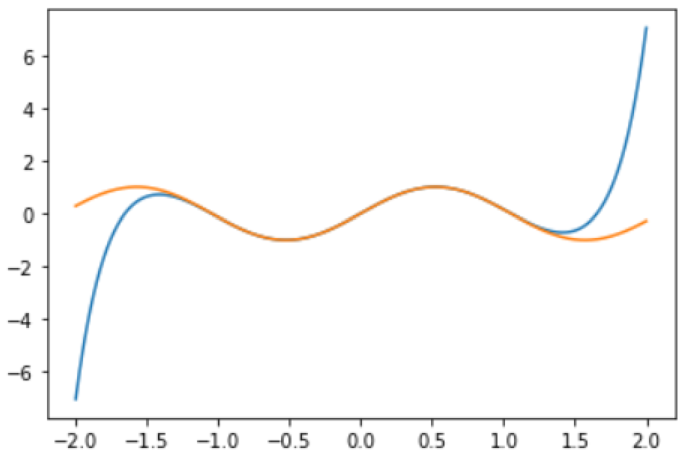
$$a_0(t) = 3sin(3t) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+2} t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$a_1(t) = cos(3t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n} t^{2n}}{(2n)!}$$

$$f(t) = 9sin(3t) + 3$$

Do bán kính hội tụ của các hệ số và hàm đều là ∞ nên ta được nghiệm y có bán kính hội tụ là ∞. Chạy chương trình với các mảng hệ số có độ dài nhỏ nhất là 9 và nhân lại bậc của t cho mảng kết quả ta được kết quả như sau:

```
0.054*t**9 - 8.7e-17*t**8 - 0.43*t**7 + 2.0*t**5 - 4.5*t**3 + 3.0*t
```



Hệ số và đồ thị của nghiệm xấp xỉ và nghiệm đúng

5.7 Đánh giá:

- Trên đây mới trình bày cách tổng quát cho trường hợp khai triển của các hệ số là bất kì. Khi hệ số chỉ có hữu hạn phần tử như $a(t) = 1 + t$ ta có thể tìm được công thức đơn truy hồi đơn giản hơn như $c_{n+1} = \frac{c_n}{n}$ hay tìm được công thức khai triển tổng quát.
- Phương pháp khá ổn định, có thể tùy ý tính thêm các hệ số bậc cao hơn nếu muốn.
- Phương pháp này mặc dù có thể dùng để giải 1 số phương trình phi tuyến nhưng chỉ thuận tiện khi xử lí với các phương trình tuyến tính.

6 Reference

Giải tích số - Phạm Kỳ Anh
Giải tích số - Lê Trọng Vinh
https://www.math.wisc.edu/ angenent/519.2016s/notes/picard.html
https://core.ac.uk/download/pdf/43618565.pdf
https://mathworld.wolfram.com/FrobeniusMethod.html