TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

BÁO CÁO GIẢI TÍCH SỐ

Chủ đề 28: Phương pháp Euler hiện, Euler ẩn

Phương pháp hình thang

Giảng viên hướng dẫn:

TS. Hà Thị Ngọc Yến

Sinh viên thực hiện:

Nguyễn Sỹ Huân- MSSV: 20200253

Hà Nội, tháng 12/ 2021

MỤC LỤC

LỜI MỞ ĐẦU

Như đã biết, bài toán phương trình vi phân là một trong những bài toán kinh điển của ngành khoa học thế giới nói chung cũng như là ngành toán học nói riêng. Đây là một lĩnh vực cũng như là một công cụ rất mạnh, có thể làm thay đổi con đường nghiên cứu của cả một ngành khoa học. Có một số phương trình vi phân nổi tiếng, đã "thay đổi cả thế giới" có thể kể đến như: Phương trình định luật hai Newton trong vật lý cổ điển, Phương trình Navier– Stoke trong khí động học, Phương trình Black– Scholes trong dự báo chứng khoán hay đầu tư chứng khóa phái sinh… Từ đây, có thể thấy rõ tầm quan trọng của việc nghiên cứu về các lời giải của phương trình vi phân. Tuy nhiên, do sự có hạn về mặt kiến thức, em xin định hướng đề tài đi vào một vấn đề nhỏ của phương trình vi phân, đó là *Phương trình vi phân thường với điều kiện Cauchy ban đầu*. Đây là một vấn đề kinh điển, đã có rất nhiều công trình nghiên cứu của các nhà khoa học lớn xoay quanh vấn đề này. Tuy nhiên, cho đến nay nó vẫn nhận được sự quan tâm rất lớn bởi tầm quan trọng và tính ứng dụng trong những vấn đề về kỹ thuật. Với cách tiếp cận ở mức độ cơ bản, em xin chọn một phương pháp đơn giản nhất, dễ tiếp cận nhất là *Các phương pháp Euler và phương pháp hình thang* làm trọng tâm nghiên cứu. Đây là một phương pháp tuy cổ điển nhưng có thể làm nền tảng hay ý tưởng để phát triển các phương pháp chính xác hơn. Cũng vì sự đơn giản của nó, đây cũng là một phương pháp rất tốt để minh họa việc giải quyết bài toán số cho những sinh viên cũng như người đọc mới tiếp cận. Phương pháp nghiên cứu của bài báo cáo này chủ yếu là việc thu thập kiến thức từ các nguồn tài liệu khác. Bên cạnh đó là việc kết hợp với những ví dụ minh họa từ đơn giản đến đặc sắc để người đọc có thể có một cái nhìn khải quát cũng như so sánh được sự khác biệt giữa ba phương pháp nói trên. Tuy nhiên, như đã nói đây là một phương pháp rất "thô", do đó hầu như chỉ được sử dụng để dự báo sơ lược kết quả cũng như minh họa cho giảng dạy. Về cơ bản, nó ít mang ý nghĩa ứng dụng thực tế. Do đó, việc phát triển phương pháp này là không cần thiết, và việc này em cũng xin bỏ ngỏ ở đề tài này. Em xin cảm ơn giáo viên hướng dẫn– TS. Hà Thị Ngọc Yến đã hướng dẫn em trong quá trình viết báo cáo này. Bên cạnh đó là các bạn cùng lớp CTTN Toán- Tin K65 đã có những góp ý xác đáng, sửa lỗi kịp thời giúp em hoàn thiện bài báo cáo này một cách tốt nhất. Tuy nhiên,

việc còn có những sai sót là không thể tránh khỏi. Rất mong những người tham khảo sau này có thể phát hiện và góp ý chỉnh sửa để hoàn thiện bài báo cáo này. Mọi sự đóng góp đều rất được hoan nghênh.

NỘI DUNG BÁO CÁO

I. KIẾN THỨC CHUNG

1. Phương trình vi phân

1.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân hay phương trình sai phân là một phương trình toán học nhằm biểu diễn mối quan hệ giữa một hàm chưa biết (một hoặc nhiều biến) với đạo hàm của nó (có bậc khác nhau).

Cấp của phương trình vi phân là bậc của đạo hàm có bậc cao nhất có trong phương trình.

1.2. Các loại phương trình vi phân

Có nhiều loại phương trình vi phân khác nhau, tuy nhiên ta có thể chia thành 5 loại chính:

- *Phương trình vi phân thường (Ordinary Differential Equation – ODE)* là phương trình vi phân trong đó hàm chưa biết là hàm một biến độc lập.
- *Phương trình vi phân riêng phần (Partial Differential Equation – PDE)* là phương trình trong đó hàm chưa biết là hàm của nhiều biến độc lập và các đạo hàm riêng của chúng.
- *Phương trình vi phân trì hoãn (Delayed Differential Equation – DDE)* là phương trình vi phân trong đó giá trị đạo hàm của hàm chưa biết tại một thời điểm nào đó là tính theo giá trị của hàm tại một thời điểm khác.
- *Phương trình vi phân ngẫu nhiên (Stochastic Differential Equation – SDE)* là phương trình vi phân trong đó một hoặc vài số hạng là quá trình ngẫu nhiên, vì thế dẫn đến hàm nghiệm cũng là một quá trình ngẫu nhiên.
- *Phương trình đại số vi phân (Differential Algebraic Equation – DAE)* là phương trình sai phân trong đó có chứa các số hạng là đại số và sai phân.

Mỗi loại trên được chia thành hai loại nhỏ là *phương trình vi phân tuyến tính* và *phương trình vi phân phi tuyến*. Một phương trình sai phân là tuyến tính nếu mọi đạo hàm của nó đều tính theo hàm có dạng mũ 1 và không có tích hay hàm của các biến phụ thuộc. Ngược lại thì là hàm phi tuyến.

Nhìn chung, việc giải quyết bài toán phương trình vi phân phi tuyến một cách tổng quát hiện tại vẫn đang là một vấn đề chưa có lời giải. Vì vậy trong khuôn khổ bài báo cáo, em xin tập trung trình bày một phương pháp để giải bài toán phương trình vi phân thường có điều kiện ban đầu.

2. Bài toán Cauchy cho phương trình vi phân thường

Như đã đề cập, phương trình vi phân thường (ODE) là phương trình vi phân mà trong đó hàm chưa biết là hàm một biến độc lập.

Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình vi phân có dạng $y' = f(x, y)$. Trong đó y là hàm vector trên đoạn $I = [a, b]$ và y nhận giá trị trên không gian $\mathbb{R}^n$.

Tương tự như cấp 1, phương trình vi phân cấp k là phương trình vi phân có dạng $y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)})$ trong đó x là biến số, y là hàm số, $y^{(i)}$ là đạo hàm cấp i của y.

Bài toán Cauchy là bài toán giải phương trình vi phân với điều kiện ban đầu và có thể được viết như sau:

Tìm hàm $y(x)$ thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) & x \in I = [a, b] \\ y(a) = y_0 & y \in C^1(I, \mathbb{R}^k) \end{cases}$$

Nhận xét: Trong không gian nhiều chiều xét một phương trình vi phân cấp k, ta luôn đưa được về bài toán Cauchy cho phương trình vi phân cấp 1 bằng cách đổi biến hàm.

Đặt $u = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \dots \\ y^{(k-1)} \end{bmatrix}$ và $u_1 = y, u_2 = y', \dots, u_k = y^{(k-1)}$

Suy ra $u' = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \dots \\ y^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ f(x,u) \end{bmatrix} = F(x,u), \quad u(a) = \begin{bmatrix} y_{00} \\ y_{01} \\ \dots \\ y_{0,k-1} \end{bmatrix}$

Như vậy, có thể thấy rằng một bài toán phương trình vi phân thường cấp n trên không gian một chiều hoàn toàn có thể quy về bài toán phương trình vi phân cấp 1 trên không gian n chiều, hay làm việc trên vector n chiều. Từ đây, ta có thể quy mọi bài toán cấp cao hơn 1 về bài toán cấp 1, và ta sẽ chỉ làm việc với phương trình vi phân thường cấp 1.

Định lý về nghiệm của bài toán Cauchy

Xét một phương trình vi phân:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), x(t_0) = x_0$$

Định lý khẳng định rằng: trên một đoạn $|t - t_0| \le r$ nào đó chứa phương trình trên, thỏa mãn điều kiện Lipschitz:

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le K|x_1 - x_2|$$

Sẽ có đúng một nghiệm duy nhất.

Có thể phát biểu ngắn gọn định lý như sau: *Nếu hàm $f(x,y)$ liên tục Lipschitz theo biến y thì bài toán Cauchy luôn có nghiệm duy nhất với mọi giá trị ban đầu*

3. Khai triển Taylor

Xét hàm $f(x)$ là một hàm giải tích tại điểm a (tức là hàm đó có thể phân tích được thành dạng chuỗi lũy thừa của $(x - a)$, xét trong không gian thực thì có nghĩa là hàm đó khả vi mọi cấp tại a). Khai triển Taylor của hàm $f(x)$ tại điểm a có dạng như sau:

$$f(x) = f(x) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

Hoặc ngắn gọn hơn dưới dạng tổng Sigma:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

Công cụ này giúp ta xấp xỉ được hàm về dạng chuỗi lũy thừa của đa thức – một dạng hàm rất tốt khi khả vi và khả tích mọi cấp.

4. Phương trình tích phân

Trong toán học, phương trình tích phân là một phương trình trong đó một hàm số chưa biết xuất hiện dưới dấu tích phân. Trên thực tế, phương trình vi phân được sử dụng nhiều hơn so với phương trình tích phân nên cần nhấn mạnh rằng giữa phương trình vi phân và phương trình tích phân có mối quan hệ khăng khít. Điều đó có nghĩa là cùng một hiện tượng trong tự nhiên, người ta có thể dùng một trong hai công cụ này để mô tả mộ tả một cách chính xác.

Như đã biết, đạo hàm của một hàm f theo biến x tại điểm x_0 được định nghĩa như sau:

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Giả sử hàm trên có đạo hàm tại mọi điểm x thuộc một đoạn hay khoảng nào đó, ta sẽ ký hiệu:

$$y = f'(x)$$

Với y là một hàm liên tục trên đoạn đang xét, dạng tích phân của công thức trên sẽ là:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b y(x)dx$$

II. NHÓM PHƯƠNG PHÁP EULER

1. Giới thiệu phương pháp

2. Phương pháp Euler dạng hiện

2.1. Ý tưởng phương pháp

Xét bài toán xấp xỉ một hàm liên tục $y = F(x)$ với $x \geq 0$ thỏa mãn phương trình vi phân:

$$y' = f(x, y) \tag{2.1}$$

với $x > 0$ và điều kiện ban đầu:

$$y(0) = y_0$$

với y_0 là giá trị cho trước. Năm 1768, L. Euler đã phát triển một phương pháp để chứng minh rằng bài toán giá trị ban đầu là có lời giải. Phương pháp này có bản chất là phương pháp số và ngày nay nó được thực hiện trên máy tính và được gọi là *phương pháp Euler*. Ý tưởng ban đầu như sau, theo định nghĩa của đạo hàm:

$$y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Với giá trị $h > 0$ nhỏ, khi đó công thức trên cho ta một giá trị xấp xỉ gần đúng của $y'(x)$ là:

$$y'(x) = \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \tag{2.2}$$

Thay kết quả (2.2) vào (2.1) ta được phương trình sau:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x, y) \tag{2.3}$$

và có thể được viết lại là:

$$F(x + h) = F(x) + hf(x, y)$$

hoặc tương đương với:

$$y(x+h) = y(x) + hf(x, y(x)) \tag{2.4}$$

cho phép tính xấp xỉ giá trị của $y(x+h)$ theo $y(x)$ và $f(x, y(x))$. Phương trình (2.4) là nền tảng của phương pháp Euler, được mô tả chính xác như sau.

Vì máy tính không thể tính toán một cách vô thời hạn, hãy thay $x \geq 0$ bởi $0 \leq x \leq L$, với L là một hằng số dương, hoặc có thể thay thế đoạn $0 \leq x \leq L$ bởi $x_0 \leq x \leq X$ với x_0 là điểm đầu và X là điểm cuối thỏa mãn $x_0 < X$. Giá trị của L thường được xác định dựa theo bài toán hoặc hiện tượng đang được xét đến. Nếu hiện tượng xảy ra trong một thời gian ngắn, khi đó giá trị của L sẽ nhỏ. Nếu hiện tượng kéo dài thì giá trị của L có thể được chọn lớn hơn. Trong cả hai trường hợp, L đều cố định dương. Khoảng $0 \leq x \leq L$ được chia thành n khoảng bằng nhau, mỗi đoạn có độ dài h, bởi các điểm $x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, n$. Giá trị $h = \frac{L}{n}$ được gọi là kích thước lưới, các điểm x_i được gọi là các điểm chia. Cho $y_i = y(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n$ thì điều kiện ban đầu là $y(x_0) = y_0$. Tiếp đến, tại mỗi điểm $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, công thức (2.3) được biểu diễn như sau:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

hoặc rõ ràng hơn đó là:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \tag{2.5}$$

Công thức (2.5) được gọi là công thức *Euler dạng hiện (hay còn gọi là Euler tiến) – Explicit Euler (Forward Euler)*. Sở dĩ nó được gọi là công thức "hiện" bởi giá trị sau cần tính có thể rút ra trực tiếp từ giá trị trước.

2.2. Nội dung phương pháp

Giả sử có điều kiện ban đầu tại điểm x_0 và muốn tính giá trị của hàm tại điểm $X > x_0$. Ta chia đoạn $[x_0, X]$ thành n đoạn có độ dài $h = \frac{X - x_0}{n}$, khi đó ta có các điểm chia $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < X$. Áp dụng công thức Euler hiện trên ta sẽ tính được gần đúng giá trị của y tại các điểm chia:

$$y_0 = y(x_0)$$
$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$
$$\dots$$
$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Ví dụ 1: Xét phương trình vi phân thường cấp 1 với điều kiện ban đầu sau:

$$y' = \frac{xy}{2}, \quad y(0) = 1$$

Đây là một phương trình tuyến tính và có thể giải được kết quả chính xác là:

$$Y(x) = e^{\frac{x^2}{4}}$$

Vì vậy không cần thiết phải giải bằng phương pháp số. Chúng ta sẽ sử dụng phương pháp số trong bài toán này chỉ với mục đích minh họa. Với phương pháp Euler, cho $L = 0.5$ và $h = 0.1$ cố định. Khi đó, $x_0 = 0.0, x_1 = 0.1, x_2 = 0.2, x_3 = 0.3, x_4 = 0.4, x_5 = 0.5$ và các giá trị y_i được tính bởi công thức:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{0.1} + y_i = x_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

hoặc tương đương với:

$$y_{i+1} = 0.9y_i + 0.1x_i, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

Từ $y_0 = 1$, ta tính được các giá trị:

$$y_1 = 0.9y_0 + 0.1x_0 = 1.00000000000$$
$$y_2 = 0.9y_1 + 0.1x_1 = 1.00500000000$$
$$y_3 = 0.9y_2 + 0.1x_2 = 1.01505000000$$
$$y_4 = 0.9y_3 + 0.1x_3 = 1.03027575000$$
$$y_5 = 0.9y_4 + 0.1x_4 = 1.05088126500$$

Trong khi đó kết quả chính xác tại các điểm chia là:

$$Y(0.0) = 1.00000000000$$

$$Y(0.1) = 1.00250312761$$
$$Y(0.2) = 1.01005016708$$
$$Y(0.3) = 1.02275503416$$
$$Y(0.4) = 1.04081077419$$
$$Y(0.5) = 1.06449445892$$

So sánh phương pháp số và kết quả chính xác ta sẽ đưa ra được một số nhận xét về sai số của phương pháp Euler dạng hiện. Với $i = 5$, ta có $Y(0.5) \approx 1.06449445892$ và $y(0.5) \approx 1.05088126500$, do đó sai số tuyệt đối trong trường hợp này bằng $|1.06449445892 - 1.05088126500| = 0.01361319300$. Sai số này rơi vào khoảng **1%**, một con số có thể chấp nhận được.

Tuy nhiên, nếu cùng một bước nhảy $h = 0.1$, ta tính giá trị của hàm tại $x = 1.0$ thì sai số sẽ không còn tốt nữa. Cụ thể, sai số của nó sẽ rơi vào khoảng **3%**, gấp 3 lần so với sai số tại $x = 0.5$. Điều này dẫn đến việc ta sẽ có hai lựa chọn: thu nhỏ bước h lại hoặc sử dụng phương pháp khác. Cả hai lựa chọn này đều có ưu và nhược điểm riêng. Thu nhỏ bước h sẽ giảm sai số, giữ nguyên tính đơn giản của phương pháp nhưng tăng số bước phải thực hiện. Trong khi đó nếu sử dụng các phương pháp khác thường sẽ phức tạp hơn nhưng bước tính toán có thể sẽ không tăng.

Tuy nhiên, thực tế ta thường không thể biết được giá trị đúng của $y(x)$ để đánh giá sai số, do đó, người ta sẽ phải phát triển một cách đánh giá sai số khác.

2.3. Sai số của phương pháp

2.3.1. Sai số địa phương (Local Truncation Error):

Là sai số xuất hiện khi ta thực hiện một bước. Ở đây, nó được tính bằng sự chênh lệch giữa lời giải số và kết quả đúng (ở đây ta tạm coi kết quả tính bước trước là kết quả đúng). Ta xét tại bước n, sai số LTE sẽ được tính bằng:

$$
\begin{aligned}
LTE &= y(x_n + h) - y_{n+1} \\
&= \left(y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2.y''(x_n) + O(h^3)\right) - \left(y_n + hf(x_n, y_n)\right) \\
&= \left(y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{1}{2}h^2.y''(x_n) + O(h^3)\right) - \left(y_n + hf(x_n, y_n)\right) \\
&= \frac{1}{2}h^2.y''(x_n) + O(h^3)
\end{aligned}
$$

Từ đây ta thấy rằng, sai số một bước của phương pháp Euler dạng hiện sẽ đạt cấp $O(h^2)$. Như vậy, phương pháp Euler dạng hiện sẽ là phương pháp cấp 1.

Nhận xét: Ta có thể tổng quát rằng, phương pháp có sai số địa phương (hay sai số một bước) cấp $O(h^{k+1})$ sẽ là phương pháp cấp k.

2.3.2. Sai số toàn cục (Global Truncation Error)

Là sai số xuất hiện tại thời điểm x cố định, bất kể sau bao nhiêu bước thực hiện.

Giả sử $f(x, y)$ là một hàm số L – *Lipschitz* theo biến y, và vi phân toàn phần bị chặn: $\left|\frac{df}{dx}\right| \leq M$. Khi đó, từ bài toán Cauchy ta sẽ có:

$$
\begin{cases}
y(x_n) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f\big(x, y(x)\big)dx \\
y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})
\end{cases}
$$

Ký hiệu $\varepsilon_n = y_n - y(x_n)$ là sai số của phương pháp Euler. Dễ thấy:

$$
\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = y_{n+1} - y_n - \big(y(x_{n+1}) - y(x_n)\big) = hf(x_n, y_n) - \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx
$$

Ta có:

$$|\Delta\varepsilon| \le h\left|f(x_n, y_n) - f\big(x_n, y(x_n)\big)\right| + \left|\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left[f\big(x_n, y(x_n)\big) - f\big(x, y(x)\big)\right]dx\right|$$

$$\le Lh|y_n - y(x_n)| + \int_{x_n}^{x_{n+1}} M(x - x_n)dx \le Lh|\varepsilon_n| + \frac{Lh^2}{2}$$

Từ đây suy ra:

$$|\varepsilon_{n+1}| \le (1 + Lh)|\varepsilon_n| + \frac{Mh^2}{2} \le (1 + Lh)\left((1 + Lh)|\varepsilon_{n-1}| + \frac{Mh^2}{2}\right) + \frac{Mh^2}{2}$$

$$= (1 + Lh)^2|\varepsilon_{n-1}| + \frac{Mh^2}{2}\big(1 + (1 + Lh)\big) \le \cdots$$

$$\le (1 + Lh)^n|\varepsilon_0| + \frac{Mh^2}{2}\big(1 + (1 + Lh) + \cdots + (1 + Lh)^{(n-1)}\big)$$

Tuy nhiên, nhớ rằng $|\varepsilon_0| = y_0 - y(x_0) = 0$, ta suy ra:

$$|\varepsilon_{n+1}| \le \frac{Mh^2}{2}.\frac{(1 + Lh)^2 - 1}{1 + Lh - 1} = \frac{Mh}{2L}.((1 + Lh)^2 - 1) \le \frac{Mh}{2L}(e^{Lnh} - 1)$$

$$= \frac{Mh}{2L}\left(e^{L(x_n - x_0)} - 1\right) = O(h)$$

Như vậy, sai số toàn cục của phương pháp đạt cấp $O(h)$

2.3.3. Sai số làm tròn (Rounding Error)

Như đã biết, mọi quá trình tính toán số đều sẽ vấp phải sai số làm tròn. Đặc biệt khi làm với máy tính, nó sẽ bị tác động bởi làm tròn tự động.

Tại bước thứ n, sai số làm tròn sẽ xấp xỉ εy_n. Giả sử tất cả các sai số làm tròn có độ lớn xấp xỉ nhau và cùng dấu, như vậy sau n bước sai số làm tròn sẽ rơi vào khoảng $n\varepsilon y_n$. Nhớ rằng $n = \frac{x_n - x_0}{h}$, do đó sai số làm tròn sau n bước sẽ tỷ lệ với $\frac{1}{h}$. Tuy nhiên, trên thực tế, các sai số cùng dấu là điều rất khó xảy ra, và người ta đã chứng minh được rằng sai số làm tròn thực tế sau n bước sẽ rơi vào khoảng $\frac{\varepsilon}{\sqrt{h}}$. Điều này cho ta thấy rằng, khi giảm h, sai số cục bộ có thể giảm, nhưng sai số tích lũy làm tròn sẽ tăng lên.

Tuy nhiên, phần lớn sai số làm tròn có thể triệt tiêu bằng cách sử dụng thuật toán Kahan (Kahan Summation Algorithm). Đây là một thuật toán được đặt theo tên William Kahan – một nhà toán học và khoa học máy tính người Canada, giáo sư trường University of California, Berkeley. Từ đây về sau, ta có thể coi như sai số làm tròn đã được triệt tiêu và sẽ không xét đến.

3. Phương pháp Euler dạng ẩn

3.1. Ý tưởng phương pháp

Phương pháp Euler dạng ẩn (Phương pháp Euler lùi) – Implicit Euler method (Backward Euler method) cũng xuất phát từ khai triển Taylor giống phương pháp Euler dạng hiện, nhưng có chút thay đổi. Xét bài toán phương trình vi phân thường với điều kiện ban đầu:

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = a$$

Ta cần tính giá trị của hàm tại điểm $x_1 = x_0 + h$.

Khai triển Taylor của hàm tại điểm x_1 ta thu được:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}(x - x_1)^n$$

Xấp xỉ đến $O((x - x_1)^2)$, ta thu được:

$$y(x) = y(x_1) + \frac{y'(x_1)}{1!}(x - x_1) + O((x - x_1)^2)$$

Đặt $x = x_0$ ta thu được:

$$y(x_0) = y(x_1) + \frac{y'(x_1)}{1!}(-h) + O((-h)^2)$$

Chuyển vế và lấy dấu xấp xỉ ta thu được:

$$y(x_1) \approx y(x_0) + hf(x_1, y(x_1))$$

Đây chính là công thức Euler dạng ẩn. Sở dĩ người ta gọi nó là dạng "ẩn" bởi từ công thức trên không thể tính trực tiếp được $y(x_1)$ mà phải qua một bước trung gian nữa (vì $y(x_1)$ xuất hiện ở cả 2 vế).

3.2. Nội dung phương pháp

Xét bài toán Cauchy:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = a$$

Ta muốn tính giá trị của hàm y tại điểm $X > x_0$. Ta chia đoạn $[x_0, X]$ thành n đoạn, mỗi đoạn có độ dài $h = \frac{X - x_0}{n}$ ta sẽ được các điểm chia $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$. Áp dụng công thức Euler dạng ẩn ta sẽ được:

$$\begin{aligned}
&y_0 = y(x_0) \\
&y_1 = y_0 + hf(x_1, y_1) \\
&y_2 = y_1 + hf(x_2, y_2) \\
&\ldots \\
&y_n = y_{n-1} + hf(x_n, y_n)
\end{aligned}$$

Đến đây, ta có thể dùng phương pháp tiếp tuyến (Newton- Raphson) áp dụng vào từng bước để tìm ra y_i, hoặc nếu có thể thì giải luôn phương trình để tìm ra nghiệm đúng

Ví dụ 2: Cho phương trình:

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1$$

Áp dụng phương pháp Euler dạng ẩn, ta có:

$$y_{n+1} = y_n + 0.1(x_{n+1} + y_{n+1})$$

Phương trình tương đương với:

$$y_{n+1} = \frac{y_n + 0.1x_{n+1}}{0.9}$$

Áp dụng liên tiếp phương pháp Euler dạng ẩn ta thu được:

$$x_1 = 0.1, \quad y_1 = \frac{101}{90}$$

$$x_2 = 0.2, \quad y_2 = \frac{514}{405}$$

$$x_3 = 0.3, \quad y_3 = 1.4434842$$

$$x_4 = 0.4, \quad y_4 = 1.6483158$$

$$x_5 = 0.5, \quad y_5 = 1.8870176$$

Phương trình vi phân này có thể giải được nghiệm chính xác là:

$$Y(x) = 2e^x - x - 1, \; Y(0.5) = 1.79744254$$

Với $i = 5$, ta có $y(0.5) = 1.8870176$ và $Y(0.5) = 1.79744254$, do đó sai số tuyệt đối trong trường hợp này bằng $|1.79744254 - 1.8870176| = 0.08957506$. Sai số này rơi vào khoảng **5%**, khá lớn và có thể khắc phục bằng cách chọn bước h nhỏ hơn.

Vì sao lại phát triển phương pháp Euler dạng ẩn?

Để trả lời cho câu hỏi này, chúng ta hãy quay lại với phương pháp Euler dạng hiện. Phương pháp Euler hiện rất dễ để triển khai, tuy nhiên, mặt trái của nó phát sinh từ những hạn chế về độ lớn của bước h để có thể đảm bảo *sự ổn định của phương pháp*. Để có một cái nhìn rõ hơn về vấn đề này, hãy xét phương trình IVP (Initial Value Problem) sau, cho bởi $\frac{dy}{dx} = -ay, y(0) = 1$ với $a > 0$. Như đã biết, nghiệm đúng của phương trình này có dạng $y = e^{-ax}$, với $y(0) = 1$ và $y(\infty) = 0$. Sử dụng phương pháp Euler dạng hiện, ta sẽ có:

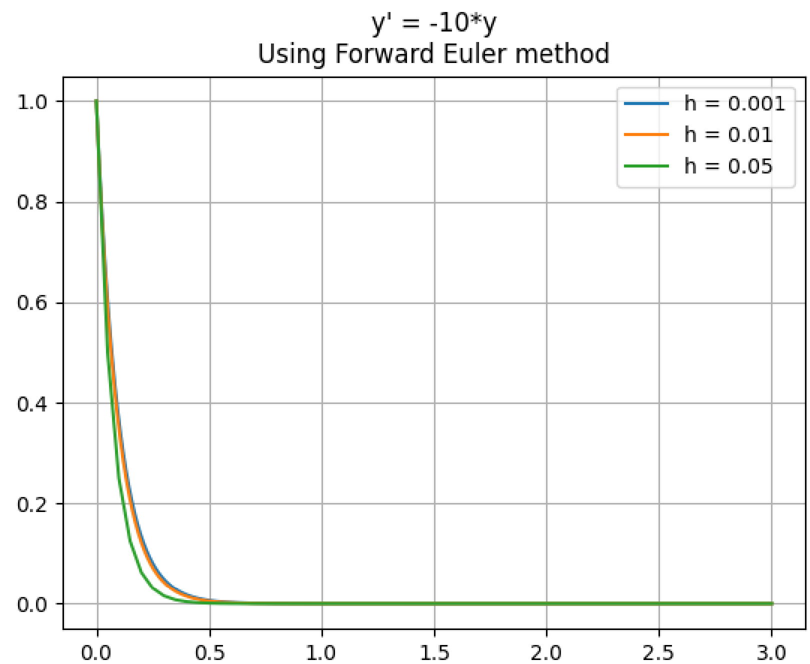
$$y_{n+1} = y_n - ahy_n = (1 - ah)y_n = (1 - ah)^2 y_{n-1} = \cdots = (1 - ah)^n y_1 = (1 - ah)^{n+1} y_0$$

Để có thể ngăn việc sai số quá lớn, ta cần có $|1 - ah| < 1$ hoặc để phương pháp Euler hiện có được sự ổn định tốt nhất, cần có $h < \frac{2}{a}$. Ví dụ sau đây sẽ nói chi tiết hơn về vấn đề này.

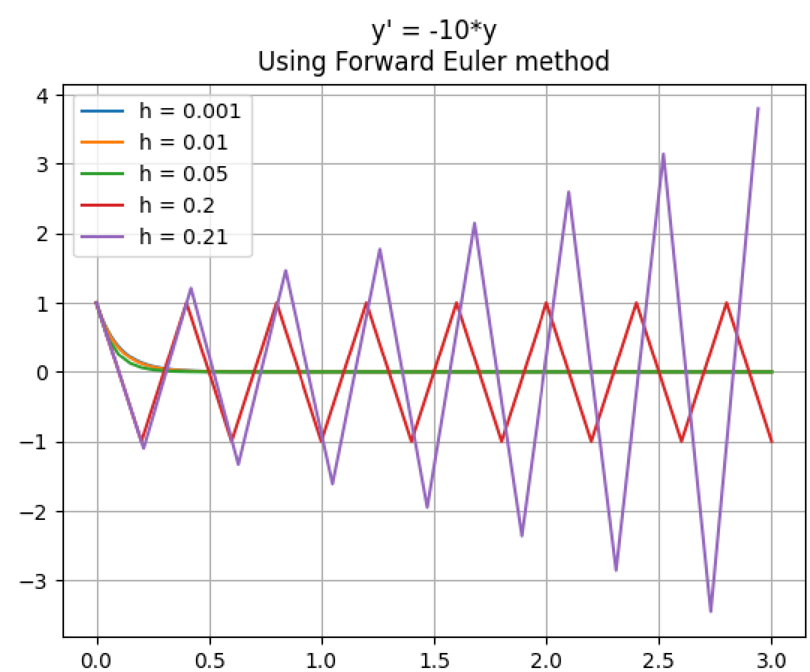
Ví dụ 3:

$$\frac{dy}{dx} = -10y, \quad y(0) = 1$$

Phương trình này có nghiệm đúng là $y(x) = e^{-10x}$, miền ổn định của phương pháp Euler hiện yêu cầu $h < 0.2$.



(Hình 1)



(Hình 2)

Ở *Hình 1*, ta có nghiệm số của phương trình với $h \in \{0.001, 0.01, 0.05\}$ và có thể thấy phương pháp khá ổn định đối với những giá trị h này và độ chính xác càng tăng khi h càng bé. Tuy nhiên, phương pháp Euler hiện chỉ ổn định đối với $h < 0.2$ trong ví dụ này. Do đó, sự bất ổn định của phương pháp đối với $h \geq 0.2$ được thể hiện ở *Hình 2*, cụ thể với $h = 0.2$, độ bất ổn định dao động giữa $y = \pm 1$, trong khi đó với $h > 0.2$, biên độ dao động tăng dần và không bị chặn, dẫn đến sự bất ổn định vô cùng lớn.

Vậy câu trả lời cho câu hỏi trên là điều đó xuất phát từ *miền ổn định*. Áp dụng phương pháp Euler hiện cho phương trình mẫu (phương trình thử) sau:

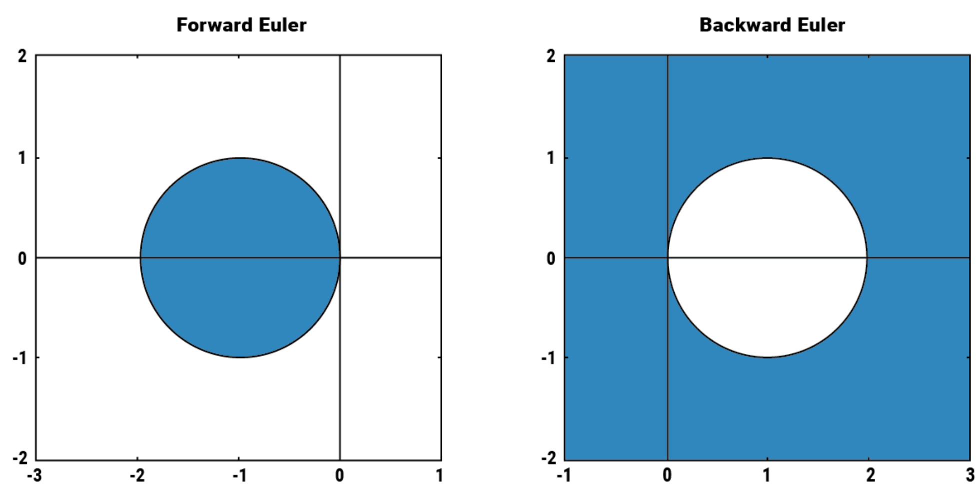
$$y'(x) = \lambda y(x)$$

ta thu được:

$$y^{n+1} = (1 + \lambda k) y^n$$

Chúng ta nói rằng phương pháp *tuyệt đối ổn định (Absolute stable)* khi $|1 + \lambda k| \leq 1$ (với k là bước nhảy), còn lại ta nói nó *không ổn định*. Như trên đã đề cập, ta có phương pháp Euler hiện ổn định khi $-2 \leq k\lambda \leq 0$, và đây được gọi là *khoảng hội tụ của phương pháp*.

Tổng quát hóa, ta có thể xét với giá trị phức. Khi đó, phương trình vi phân sẽ được tính toán trên trường phức và giá trị λ có thể nhận giá trị phức (dĩ nhiên bước nhảy k sẽ luôn là số nguyên dương). Khi ấy, mỗi phương pháp sẽ có một miền hội tụ riêng. Ta có thể xem qua miền hội tụ của hai phương pháp Euler hiện và Euler ẩn ở hai hình dưới đây:



3.3. Sai số của phương pháp

Hoàn toàn giống với phương pháp Euler dạng hiện, phương pháp Euler dạng ẩn cũng có sai số từng bước LTE đạt cấp $O(h^2)$, Sai số toàn cục GTE đạt cấp $O(h)$.

3.4. Đề xuất cải tiến phương pháp Euler dạng ẩn

Để có thể sử dụng phương pháp Euler ẩn một cách dễ dàng hơn, ta sẽ khử đi dạng ẩn của phương pháp này. Cụ thể, khi đã có công thức Euler ẩn:

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_n, y_n)$$

Ta sẽ thực hiện một phép lặp đến một mực độ nào đó, đủ để kết quả y_n chấp nhận được. Như vậy, hệ phương trình đầy đủ của phương pháp cải tiến này sẽ là:

$$\begin{cases} y^* = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y^*) \end{cases}$$

Hoặc cao cấp hơn đó là:

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{(m)} = y_n + hf\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(m-1)}\right) \end{cases}$$

với m là số lần lặp cần thiết để y_n chấp nhận được. Tuy nhiên trong bài báo cáo này chúng ta chỉ xét với $m = 1$. Sau đây là một ví dụ minh họa công thức Euler ẩn cải tiến này.

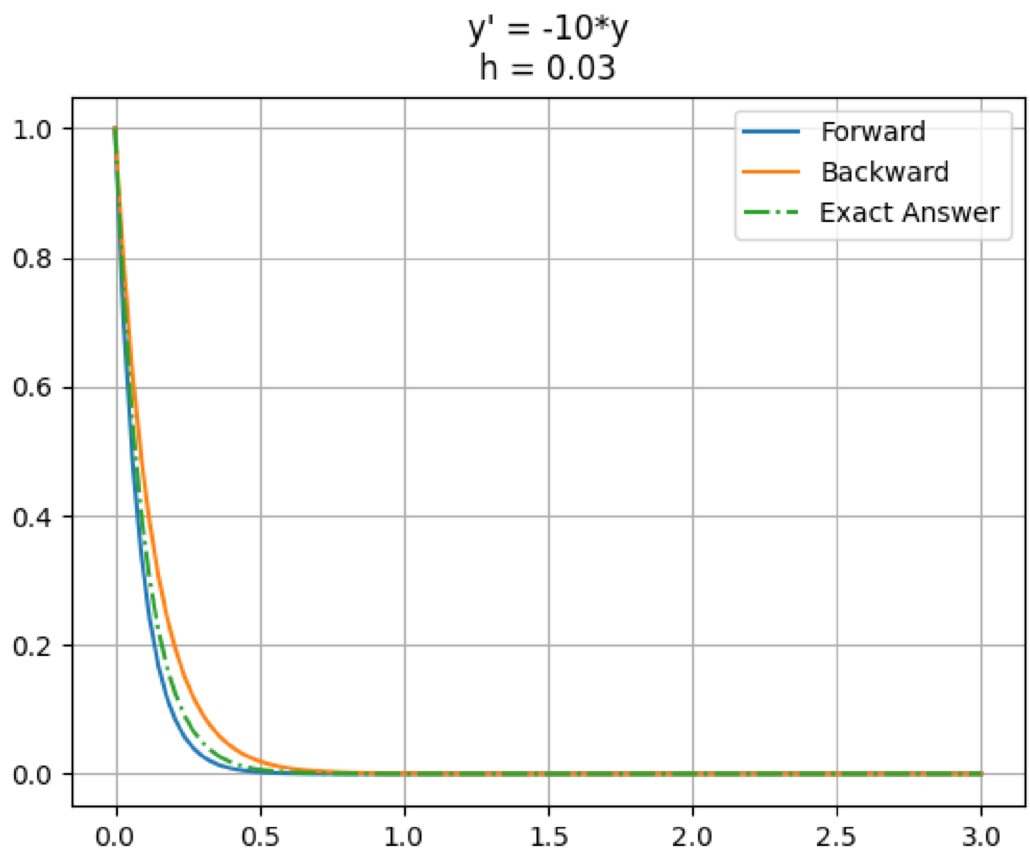
Ví dụ 4:

Xét phương trình IVP sau:

$$y'(x) = -10y, \quad y(0) = 1$$

Với $h = 0.03$, tính theo phương pháp Euler hiện, Euler ẩn cải tiến và so sánh với kết quả chính xác.

Ở trên đã trình bày các bước lý thuyết, do đó ở ví dụ này sẽ chỉ trình bày đồ thị sau khi sử dụng các phương pháp nêu trên:



Có thể thấy rằng ngoài việc đơn giản hóa bước tìm ra y_n, phương pháp này cũng không làm giảm độ chính xác của thuật toán, tuy nhiên cũng không cải thiện được nhiều. Ngoài ra, việc đồ thị của nghiệm đúng luôn nằm giữa hai đường Euler dạng ẩn và hiện cũng có lợi khi cho phép đánh giá sai số dù chưa biết kết quả chính xác.

4. Phương pháp hình thang

4.1. Ý tưởng phương pháp

Phương pháp này có thể thu được bằng cách sử dụng công thức tích phân theo định nghĩa, có thay thế bằng công thức hình thang.

Theo định nghĩa tích phân:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f\big(\tau, y(\tau)\big)d\tau$$

với công thức hình thang:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} y'(\tau)d\tau = \frac{h}{2}\big(y'(x_0+h)+y'(x_0)\big)+O(h^3)$$

Phương pháp này được lấy ý tưởng từ việc xấp xỉ phần diện tích giới hạn bởi hai đầu mút với đồ thị của hàm và trục hoành Việc xấp xỉ một hay nhiều hình thang cong bởi hình thang như vậy là lý do vì sao nó được gọi là *công thức hình thang*.

Đôi khi, cũng có thể hiểu rằng công thức này bắt nguồn từ việc lấy trung bình trái và phải của tổng Riemann.

4.2. Nội dung phương pháp

Từ công thức $y(x_0+h) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f\big(\tau, y(\tau)\big)d\tau$, ta thay phần tích phân ở vế phải bởi công thức hình thang $\int_{x_0}^{x_0+h} y'(\tau)d\tau = \frac{h}{2}\big(y'(x_0+h)+y'(x_0)\big)+O(h^3)$ sẽ thu được công thức sau:

$$y(x_0+h) = y(x_0) + \frac{h}{2}\big(y'(x_0+h)+y'(x_0)\big)$$

hay:

$$y(x_0+h) = y(x_0) + \frac{h}{2}\Big[f\big(x_0, y(x_0)\big) + f\big(x_0+h, y(x_0+h)\big)\Big]$$

Công thức này còn được goi là *công thức hình thang dạng ẩn (Crank- Nicolson)*.

Tại bước này, ta có thể sử dụng phương pháp lặp giống như công thức Euler dạng ẩn để tính giá trị $y(x_0+h)$. Tuy nhiên, như ở trên có đề xuất, ta có thể thêm một số bước cải tiến để có thể sử dụng dễ dàng công thức hơn.

Xét đại lượng:

$$y^* = y(x_0+h) + O(h^2) = y(x_0) + hf\big(x_0, y(x_0)\big) + O(h^2)$$

Theo công thức Lagrange:

$$f(x_0+h,y^*)-f\big(x_0+h,y(x_0+h)\big)=f'_y(x_0+h,\bar{y})\big(y^*-y(x_0+h)\big)$$

với $\bar{y}$ là một đại lượng trung gian nằm giữa y^* và $y(x_0+h)$.

Mà $y^*-y(x_0+h)=O(h^2)$, nên:

$$f\big(x_0+h,y(x_0+h)\big)=f(x_0+h,y^*)+O(h^2)$$

Ở đây ta sẽ thu được công thức hình thang cải tiến:

$$\begin{cases} y^*=y(x_0)+hf\big(x_0,y(x_0)\big) \\ y(x_0+h)=y(x_0)+\dfrac{h}{2}\Big[f(x_0+h,y^*)+f\big(x_0,y(x_0)\big)\Big] \end{cases}$$

Ngoài ra, ta cũng có thể tính theo quá trình lặp sau:

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(0)}=y_i+hf(x_i,y_i) \\ y_{i+1}^{(m)}=y^i+\dfrac{h}{2}\Big[f(x_i,y_i)+f\big(x_{i+1},y_{i+1}^{(m-1)}\big)\Big] \end{cases}$$

Ví dụ 5:

Xét phương trình IVP sau:

$$y'=x+y,\quad y(0)=1$$

với $h=\frac{1}{20}$, tính $y(0.1)$ với độ chính xác tới 10^{-4}.

Theo công thức hình thang, ta có:

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(0)}=y_i+hf(x_i,y_i) \\ y_{i+1}^{(m)}=y^i+\dfrac{h}{2}\Big[f(x_i,y_i)+f\big(x_{i+1},y_{i+1}^{(m-1)}\big)\Big] \end{cases}$$

Ta tính:

$$y_1^{(0)}=y_0+hf(x_0,y_0)=1.05$$

$$y_1^{(1)}=1+\frac{0.05}{2}(1+1.05)=1.0525$$

$$y_1^{(2)}=1+\frac{0.05}{2}(1+1.0525)=1.05256$$

Ta thấy:

$$\left|y_1^{(2)} - y_1^{(1)}\right| = 0.00006 < 10^{-4}$$

Do đó ta sẽ lấy gần đúng $y_1 = 1.0526$ để tính tiếp y_2:

$$y_2^{(0)} = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.0526 + 0.05(0.05 + 1.0526) = 1.1077$$

$$y_2^{(1)} = 1.0526 + 0.025(1.1026 + 1.2077) = 1.11036$$

$$y_2^{(2)} = 1.0526 + 0.025(1.1026 + 1.2104) = 1.11042$$

Ta thấy:

$$\left|y_2^{(2)} - y_2^{(1)}\right| = 0.00006 < 10^{-4}$$

đạt yêu cầu. Như vậy:

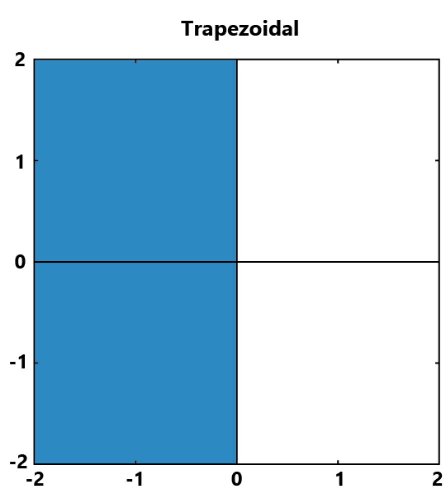
$$y(0.1) = y_2 \approx 0.0001 = 10^{-4}$$

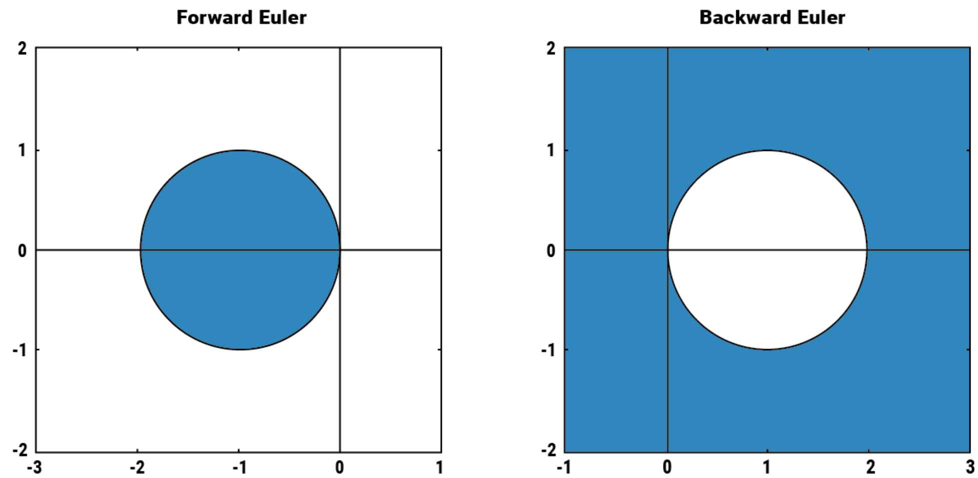
So với kết quả đúng $y = 2e^x - x - 1$ thì:

$$|y_2 - y(0.1)| \approx 10^{-4}$$

Tới đây ta có thể so sánh một chút về miền ổn định của phương pháp hình thang này so với hai phương pháp Euler đã nhắc đến trước đó. Hãy quan sát phương trình thử dưới đây:

$$u'(t) = \lambda u(t)$$





Có thể thấy rằng miền ổn định của phương pháp Euler dạng ẩn vẫn vượt trội hơn hẳn. Tuy nhiên, phương pháp hình thang này có ưu điểm đó là độ chính xác tốt hơn so với hai phương pháp kia.

4.3. Sai số

Ta có thể thấy rằng sai số LTE của phương pháp hình thang đạt cấp $O(h^3)$, do đó phương pháp hình thang này là một phương pháp cấp 2. Sai số GTE của phương pháp này đạt cấp $O(h^2)$, lớn hơn một cấp so với phương pháp Euler. Ví dụ sau sẽ đưa ra một cái nhìn rõ ràng hơn về sự vượt trội của phương pháp hình thang này.

Ví dụ 6:

Xét phương trình IVP:

$$y' = y + e^{-2x}, \quad y(0) = 1$$

Sử dụng phương pháp Euler hiện và phương pháp hình thang với bước $h = 0.1$.

Với công thức Euler dạng hiện:

$$y_{n+1} = y_n + 0.1(x_n + y_n)$$

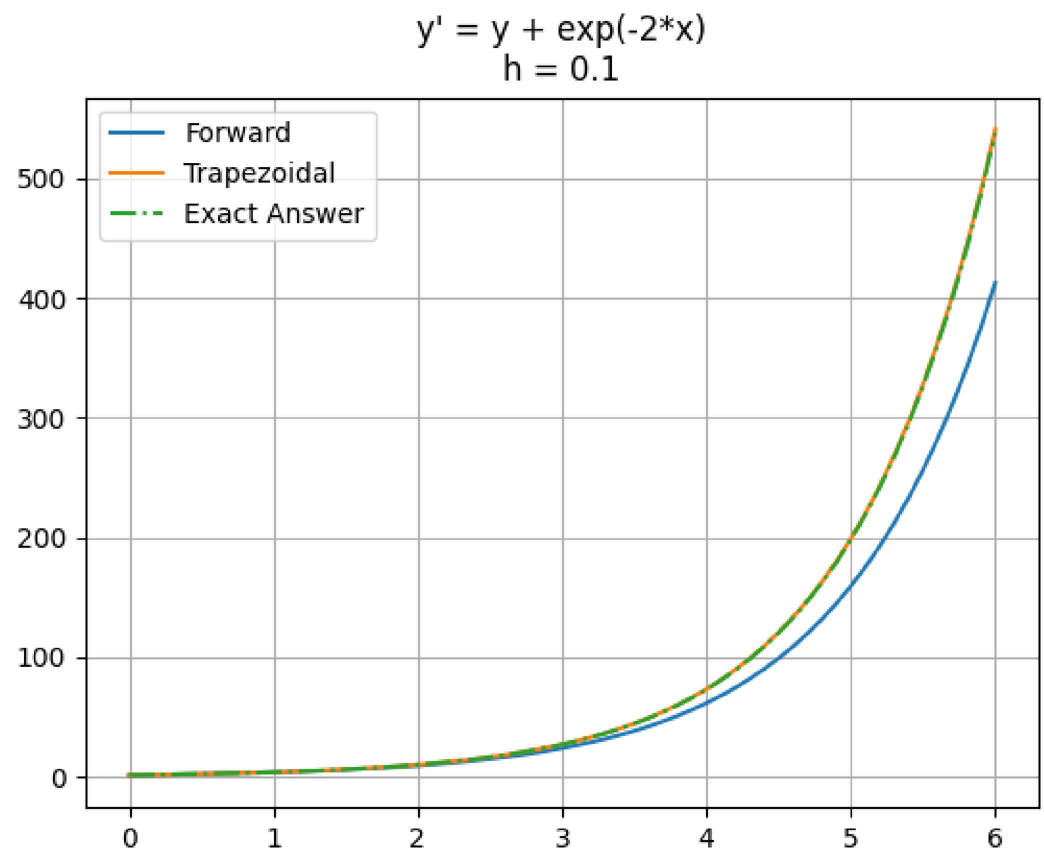
Với công thức hình thang:

$$\begin{cases} y^* = y_n + 0.1f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + 0.05[f(x_{n+1}, y^*) + f(x_n, y_n)] \end{cases}$$

Nghiệm đúng:

$$y(x) = \frac{4}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{-2x}$$

Đồ thị sau đây sẽ biểu diễn các giá trị x, y được tính bởi hai phương pháp trên và so sánh kết quả với nghiệm đúng.



Từ hình trên, có thể thấy được rõ ràng phương pháp hình thang cho kết quả gần như khớp với nghiệm đúng trên đoạn đang xét, còn với cùng bước nhảy, phương pháp Euler hiện cho thấy sai số khá lớn và tăng dần theo chiều tăng của x. Điều này có thể hiểu là do cấp chính xác của phương pháp hình thang cao hơn một so với phương pháp Euler hiện, và cả phương pháp Euler ẩn.

5. Các phương pháp Euler cho phương trình vi phân cấp cao

5.1. Các phương pháp Euler cho hệ phương trình vi phân cấp 1

Trước tiên ta sẽ xây dựng phương pháp giải hệ phương trình vi phân cấp 1 bằng phương pháp Euler hiện.

Xét hệ m phương trình vi phân cấp 1 có dạng:

$$\begin{aligned} &y_1' = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_m),\\ &y_2' = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_m),\\ &\dots\\ &y_m' = f_m(t, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{aligned}$$

với $t_0 < t < T$ và điều kiện ban đầu:

$$y_1'(t_0) = y_{1,0}, \qquad y_2'(t_0) = y_{2,0}, \qquad \dots, \qquad y_m'(t_0) = y_{m,0}$$

Bài toán này có thể được viết lại dưới dạng *vector* như sau:

$$v' = F(y, v), \qquad v'(t_0) = v_0$$

với $v(t)$ và F được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} &v(t) = \langle y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)\rangle,\\ &F(t, y) = \langle f_1(t, v), f_2(t, v), \dots, f_m(t, v)\rangle \end{aligned}$$

và v_0 là vector giá trị ban đầu:

$$v_0 = \langle y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{m,0}\rangle$$

Hệ phương trình này có nghiệm duy nhất trên đoạn $[t_0, T]$ nếu F liên tục trên miền $D = [t_0, T] \times (-\infty, \infty)^m$, và thỏa mãn điều kiện Lipschitz trên D tại mỗi giá trị $y_1, y_2, \dots, y_m$. Áp dụng trực tiếp công thức Euler hiện với dạng như sau:

$$y_{i,n+1} = y_{i,n} + hf_i(t_n, y_{1,n}, y_{2,n}, \dots, y_{m,n})$$

với $i = 1, 2, \dots, m$ và thực hiện hoàn toàn tương tự như cách áp dụng phương pháp Euler hiện cho một phương trình vi phân cấp 1 ta sẽ thu được nghiệm số của hệ phương trình này.

Sử dụng phương pháp Euler ẩn và phương pháp hình thang?

Ta cũng có thể sử dụng hai phương pháp này cho hệ phương trình vi phân cấp 1, tuy nhiên cách áp dụng sẽ phức tạp hơn nhiều so với phương pháp Euler hiện.

Sau khi áp dụng công thức Euler ẩn hoặc công thức hình thang ta sẽ thu được hệ phương trình có dạng:

$$\begin{aligned}
&y_{1,n+1} = g_1\left(t_{n+1}, y_{1,n+1}, y_{2,n+1}, \dots, y_{m,n+1}\right),\\
&y_{2,n+1} = g_2\left(t_{n+1}, y_{1,n+1}, y_{2,n+1}, \dots, y_{m,n+1}\right),\\
&\dots\\
&y_{m,n+1} = g_m\left(t_{n+1}, y_{1,n+1}, y_{2,n+1}, \dots, y_{m,n+1}\right)
\end{aligned}$$

và giải hệ phương trình này ta sẽ thu được các giá trị $y_1, y_2, \dots, y_m$ tại t_{n+1}. Bài báo cáo này sẽ không nêu rõ cách giải ở bước này vì giới hạn về độ dài của báo cáo.

Tuy nhiên có thể đơn giản hóa cách sử dụng hai phương pháp này bằng cách sử dụng phương pháp Euler ẩn và phương pháp hình thang cải tiến và cách làm cũng hoàn toàn tương tự như khi giải phương trình vi phân cấp 1.

5.2. Các phương pháp Euler cho phương trình vi phân cấp cao

Đối với phương trình vi phân cấp cao, ta cũng có thể sử dụng các phương pháp Euler để giải bằng cách đưa về hệ phương trình vi phân cấp 1.

Xét phương trình vi phân có dạng như sau:

$$y^{(m)} = f\left(t, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}\right), \qquad t_0 < t < T$$

Ta sẽ định nghĩa:

$$u_1 = y, \qquad u_2 = y', \qquad u_3 = y'', \qquad \dots, \qquad u_m = y^{(m-1)}$$

Khi đó, phương trình vi phân cấp m trên tương đương với hệ phương trình vi phân cấp 1 sau:

$$\begin{aligned}
&u_1' = u_2,\\
&u_2' = u_3,
\end{aligned}$$

$$u_3' = u_4,$$

$$\dots$$

$$u_m' = f(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$$

với điều kiện ban đầu của phương trình vi phân cấp m là:

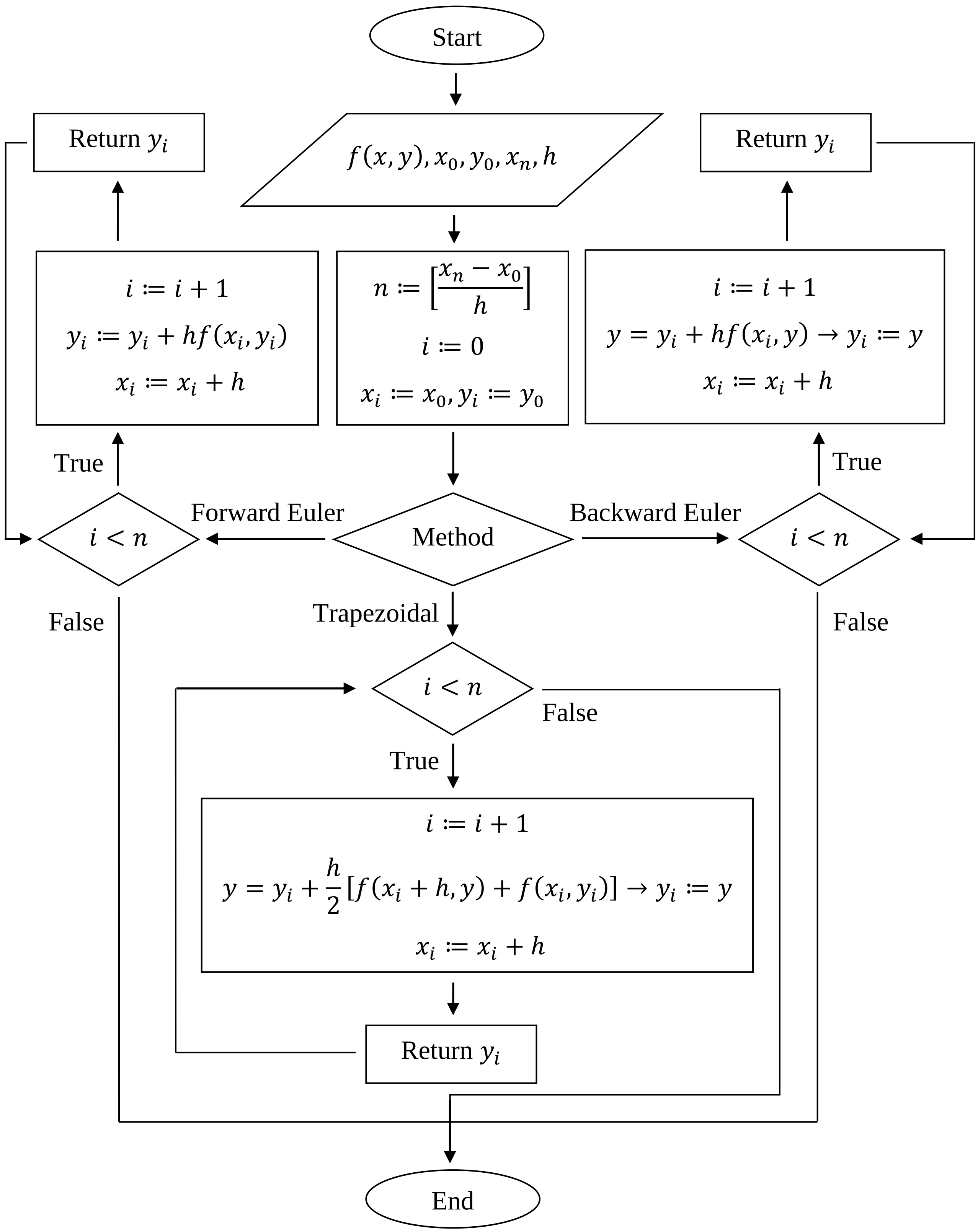
$$y(t_0) = y_0^{(0)}, \qquad y'(t_0) = y_0^{(1)}, \qquad \dots, \qquad y^{(m-1)}(t_0) = y_0^{(m-1)}$$

tương đương với:

$$u_1(t_0) = y_0^{(0)}, \qquad u_2(t_0) = y_0^{(1)}, \qquad \dots, \qquad u_m(t_0) = y_0^{(m-1)}$$

Tại bước này, ta có thể áp dụng các phương pháp Euler cho hệ phương trình vi phân cấp m như đã đề cập đến ở trên để giải và nghiệm số của phương trình ban đầu chính là các giá trị u_1 tại các điểm t_i trên đoạn $[t_0, T]$.

III. SƠ ĐỒ THUẬT TOÁN



Trên đây là sơ đồ thuật toán chính, ngoài ra chương trình của em còn có một số chức năng khác nhưng thuật toán cũng hoàn toàn tương tự với thuật toán chính do đó em xin phép chỉ nêu thuật toán của chương trình chính như trên.

KẾT LUẬN

Qua những nội dung báo cáo trên, ta rút ra được một số nhận định về các phương pháp Euler và phương pháp hình thang (gọi tắt là nhóm các phương pháp Euler). Đó là thuật toán dễ triển khai, dễ hiểu, phù hợp với những đối tượng mới tiếp cận với dạng bài toán này. Về phương pháp Euler hiện, đây là một phướng pháp khá thô sơ do đó còn có rất nhiều vấn đề từ độ chính xác cũng như tính ổn định. Các phương pháp Euler ẩn và hình thang mặc dù đã được cải thiện khá nhiều so với phương pháp Euler hiện tuy nhiên vẫn chưa thể giúp cho phương pháp trở nên phù hợp hơn đối với các bài toán thực tế. Dù vậy, cũng không thể phủ nhận sự đơn giản và dễ tiếp cận của nhóm phương pháp này. Nhìn chung, nhóm phương pháp Euler cho ta một kết quả có thể chấp nhận được, cần xem xét cẩn thận khi chọn khoảng cách li để tính toán cũng như bước h để có thể đạt được kết quả tốt nhất.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] *Phạm Kỳ Anh*, Giải tích số, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội (1996).

[2] *Lê Trọng Vinh*, Giải tích số

[3] *J. C. Butcher*- Numerical Methods for Ordinary Differential Equations- J. Wiley (2003)

[4] *Michael Zeltkevic*, Forward and Backward Euler methods, MIT online course note, follow link

[5] Paul's Online Notes, Home/ Differential Equations/ First Order DE's/ Euler's Method, follow link

[6] Introduction to Systems of ODEs, follow link

PHỤ LỤC

Code của các chương trình thực hiện trong bài báo cáo này được gửi kèm theo bài báo cáo hoặc có thể truy cập tại địa chỉ:

UsernameSeeking/Euler: Euler methods to solve ODEs (github.com)

Lưu ý:

- *Đọc kỹ file README.md hoặc README.html để hiểu rõ hơn cách sử dụng và cách hoạt động của chương trình, tránh xảy ra lỗi khi chạy chương trình.*
- *Trong quá trình thực hiện chương trình có thể bắt gặp một số lỗi chưa được xử lý, đây là điều khó có thể tránh khỏi, vì vậy mong nhận được sự thông cảm từ người đọc.*