TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

BÁO CÁO GIẢI TÍCH SỐ

CHỦ ĐỀ 26: TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Giảng viên hướng dẫn:

TS. Hà Thị Ngọc Yến

Sinh viên thực hiện:

Nguyễn Hoàng Nhật – MSSV: 20204772

Hà Tĩnh, 11/2021.

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Vài thập kỷ gần đây, nhờ vào những tiến bộ khoa học, con người bắt đầu vươn ra ngoài cái nôi – Trái đất – của mình để khám phá vũ trụ. Từ lần phóng con tàu đầu tiên vào vũ trụ vào năm 1961, chỉ trong hơn 60 năm, con người đã đưa tàu thăm dò lên sao Hỏa, tái sử dụng lại tên lửa đẩy, thậm chí là đưa một chiếc kính viễn vọng với kích thước bằng một tòa nhà 3 tầng ra ngoài không gian.

Đóng góp vào thành công đó là sự phát triển vượt bậc của khoa học nói chung và Toán học/Vật lý học nói riêng; là công sức tính toán, nghiên cứu nhiều năm trời trong những lĩnh vực như tính toán quỹ đạo, nhiên liệu,… Và rõ ràng, để làm được những điều đó, cũng như xử lý các bài toán khác trong tiến trình phát triển của nhân loại, các nhà khoa học cần sự chính xác rất cao trong những phép tính của mình.

Trong bài báo cáo này, tôi sẽ trình bày một số phương pháp cơ bản để xử lý bài toán: Tính gần đúng đạo hàm và tích phân xác định.

Bài báo cáo tuy đã được kiểm tra nhưng vẫn không thể tránh khỏi những thiếu sót, rất mong nhận được phản biện từ phía bạn đọc. Cảm ơn TS. Hà Thị Ngọc Yến đã giúp đỡ em trong quá trình hoàn thành bài báo cáo này!

A. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

I. Đa thức nội suy

Trong thực tế, khi nghiên cứu chuyển động của những vật thể tự nhiên, dự đoán giá cả,… Thường chúng ta không biết rõ quy luật thay đổi của nó dưới dạng những biểu thức giải tích $y = f(x)$ cụ thể, mà chỉ qua đo đạc, thực nghiệm, ta thu được trong dạng một bảng số, nghĩa là biết giá trị y_i tại các điểm x_i tương ứng. Vì vậy người ta tìm cách thay hàm $f(x)$ bởi hàm $F(x)$ đơn giản hơn, để khi tính tại điểm $\bar{x}$ thì sự sai lệch của $f(\bar{x})$ và $F(\bar{x})$ không đáng kể. Thường $F(x)$ được chọn là đa thức vì nó có nhiều tính chất thuận lợi cho việc tính toán như khả vi liên tục mọi cấp trên $\mathbb{R}$, lấy đạo hàm hoặc tích phân một hoặc nhiều lần dễ dàng hơn và $F(x)$ gọi là đa thức nội suy. Trong nội dung bài báo cáo này, tôi sử dụng đa thức nội suy Lagrange để xấp xỉ hàm số.

II. Đa thức nội suy Lagrange

1. Đa thức nội suy Lagrange

Để được đa thức $P_n(x)$ bậc n sinh ra từ bảng số

$$y_i = f(x_i) \qquad i = \overline{0, n}$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

thỏa mãn điều kiện $y_i = P_n(x_i) \qquad i = \overline{0, n}$

Lagrange làm như sau:

Lập đa thức cơ sở bậc n:

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)}$$

$j = \overline{0, n}$. Khi đó $J_j(x)$ là đa thức bậc n và thỏa mãn:

$$J_j(x_i) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Từ đây, chọn $\qquad P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} J_j(x) y_j$

thì $\qquad P_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x_i) y_i = y_i \,, \; i = \overline{0, n}$

Đặt $\qquad \omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$

thì $\qquad \omega'_{n+1}(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)$

là đạo hàm của $\omega_{n+1}(x)$ tại điểm x_i

Vậy

$$P_n(x) = \omega_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} \qquad (1)$$

2. Sai số của đa thức nội suy Lagrange

Với x cố định, $x \neq x_i,\ \ i = \overline{0,n}$ thì

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

là sai số tại điểm x.

Đặt:

$$F(x) = R_n(x) - k\omega_{n+1}(x) \qquad (2)$$

với

$$k = \frac{R_n(x)}{\omega_{n+1}(x)} = \frac{f(x) - P_n(x)}{\omega_{n+1}(x)}$$

Khi đó $F(x) = 0$ tại $x \neq x_i$, kết hợp với $F(x_i) = 0,\quad i = \overline{0,n}$, ta suy ra phương trình $F(x) = 0$ có $n + 2$ nghiệm. Theo định lý Rolle thì $F'(x)$ có $n + 1$ nghiệm. Tiếp tục quá trình này, thì $F^{(n+1)}(x)$ sẽ có một nghiệm $\xi \in [a, b]$ và

$$0 = F^{(n+1)}(\xi) = R_n^{(n+1)}(\xi) - k\omega_{n+1}^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)!$$

hay

$$k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Lại do $F(x) = 0$, từ (2) ta suy ra

$$R_n(x) = k\omega_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

B. TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

I. Tính gần đúng đạo hàm

1. Bài toán và ví dụ

Khi giải quyết các bài toán thực tế thường phải tìm đạo hàm của hàm $y = f(x)$ tại điểm nào đó, trong khi không biết cụ thể hàm $f(x)$ mà chỉ biết giá trị của nó dưới dạng bảng số. Cũng có trường hợp hàm $y = f(x)$ đã biết nhưng khá phức tạp, việc tính đạo hàm cũng gặp nhiều khó khăn, đôi khi cũng không cần thiết giá trị chính xác của đạo hàm tại điểm mong muốn, mà chỉ cần giá trị gần đúng.

Vì vậy, phương pháp tính gần đúng đạo hàm, thường thay hàm $f(x)$ bởi đa thức nội suy $p(x)$, sau đó tính $f'(x) \approx p'(x)$ với $x \in [a, b]$ nào đó. Từ đó ta cũng tính được các đạo hàm cấp cao, khi đã biết đa thức nội suy.

Từ sai số của đa thức nội suy

$$R(x) = f(x) - P(x)$$

thì sai số của đạo hàm sẽ là

$$r(x) = f'(x) - P'(x) = R'(x)$$

Đối với đạo hàm cấp cao ta cũng có công thức tương tự.

2. Tính gần đúng đạo hàm xác định nhờ công thức nội suy Lagrange

Từ đa thức nội suy Lagrange

$$f(x) \approx p(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x) y_j$$

ta suy ra

$$f'(x) \approx p'(x) = \sum_{j=0}^{n} L'_j(x) y_j \quad (3)$$

Xét trường hợp các mốc $x_i, i = \overline{0, n}$ cách đều nhau ($x - x_0 = th$)

Khi đó:

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) = h^{n+1} t(t-1)(t-2) \ldots (t-n) = h^{n+1} \prod_{i=0}^{n} (t - i)$$

$$\omega'_{n+1}(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)$$
$$= h^n (i-1)(i-2) \ldots 2.1.(-1)(-2) \ldots [-(n-i)]$$

$$= h^n (-1)^{n-i} i!\,(n-i)!$$

Từ (1):

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x) y_j = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} y_i$$

ta có:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \cdot \frac{h^{n+1} \prod_{j=0}^{n}(t-j)}{h^n (t-i)h} \cdot y_i$$

hay:

$$p(x) = p(x_0 + ht) = P(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \cdot \frac{\prod_{j=0}^{n}(t-j)}{t-i} \cdot y_i \qquad (4)$$

Khi đó:

$$f'(x) \approx p'(x) = P'_x(x_0 + ht) = \frac{1}{h} P'_t(t)$$

3. Sai số của phương pháp tính đạo hàm nhờ công thức nội suy Lagrange

Từ sai số công thức tính đạo hàm

$$R_n(x) = k\omega_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1} \prod_{i=0}^{n} (t-i)$$

và

$$r(x) = f'(x) - P'(x) = R'(x)$$

Ta có:

$$r(x) = R'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} \prod_{i=0}^{n}(t-i)\right\} = \frac{dR}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} =$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left\{\left[\frac{d}{dt} f^{(n+1)}(\xi)\right] t(t-1)\ldots(t-n) + \right.$$

$$\left. + f^{(n+1)}(\xi) \frac{d}{dt}[t(t-1)\ldots(t-n)]\right\}$$

Khi $x = x_i$

$$r(x_i) = \frac{(-1)^n h^n}{(n-1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (i-j)$$

II. Tính gần đúng tích phân xác định

1. Bài toán, ví dụ

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định và bị chặn trên $[a, b]$. Chia $[a, b]$ thành n khoảng nhỏ $[x_i. x_{i+1}]$ bởi phân hoạch $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Trong mỗi đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ ta chọn điểm $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ và xét biểu thức

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i \quad với \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

Khi đó biểu thức S_n gọi là tổng tích phân.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $I = \lim_{\lambda \to 0} S_n$ không phụ thuộc vào cách chia đoạn $[a, b]$ và không phụ thuộc vào cách chọn điểm ξ_i thì I được gọi là tích phân của hàm số $f(x)$ trên $[a, b]$ và kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, và nguyên hàm của nó là $F(x)$.Thì nhờ công thức Newton – Leibniz, ta có một cách đơn giản hơn để tính tích phân này:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Tuy nhiên trong nhiều trường hợp, nguyên hàm F(x) của f(x) không tìm được bằng các phép biến đổi sơ cấp, hoặc nguyên hàm là hàm số khá phức tạp thì giá trị của tích phân xác định chỉ có thể tìm trong dạng bảng gần đúng

Phương pháp đơn giản nhất để giải quyết bài toán trên là tính các giá trị của hàm $f(x)$ tại một số điểm $x_i \in [a, b], i = \overline{0,\ n}/$

Từ bảng số đó ta xây dựng được đa thức nội suy $\varphi(x)$ thì

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)dx$$

2. Tính gần đúng tích phân xác định nhờ công thức Newton – Cotes

2.1. Công thức Newton – Cotes

Chia đoạn $[a, b]$ thành n phần bằng nhau có bước $h = \frac{b-a}{n}$ bởi các điểm chia:

$$x_0 = a, \qquad x_n = b, \qquad x_i = x_0 + ih, \qquad i = \overline{1, n-1};$$

đồng thời tại các điểm đó ta có bảng số

$$y_i = f(x_i) \qquad\qquad i = \overline{0, n} \tag{5}$$

Từ bảng số (5), ta có đa thức nội suy Lagrange

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} . y_i$$

Thay hàm $f(x)$ bởi đa thức nội suy $P(x)$ ta được

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b P(x)dx + R_n(x) \tag{6}$$

trong đó $R_n(x)$ là sai số.

Bỏ qua sai số trong (6), ta được xấp xỉ

$$I = \int_a^b ydx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i y_i$$

Trong đó, A_i được xác định như sau:

$$A_i = \int_a^b \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \frac{\prod_{j=0}^{n}(t-j)}{t-i} d(x_0 + ht)$$

$$= h \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \int_0^n \frac{\prod_{j=0}^{n}(t-j)}{t-i} dt \;\; (i = \overline{0, n})$$

$$= (b-a) \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \int_0^n \frac{\prod_{j=0}^{n}(t-j)}{t-i} dt$$

Đặt

$$H_i = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \int_0^n \frac{\prod_{j=0}^{n}(t-j)}{t-i} dt$$

thì H_i được gọi là hệ số Cotes

dựa vào công thức, có thể thấy các hệ số Cotes đối xứng với nhau qua trung tâm

và

$$\int_a^b y dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i y_i$$

là công thức Newton – Cotes (trong đó $y_i = f(x_i) = f(a + ih)$)

2.2. Sai số công thức Newton – Cotes

Định lý 1: Sai số của công thức Newton – Cotes, với n lẻ:

$$\frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_0^n \prod_{i=0}^{n} (t-i)\, dt$$

Định lý 2: Sai số của công thức Newton – Cotes, với n chẵn:

$$\frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\int_0^n \prod_{i=0}^{n+1} (t-i)\, dt$$

Chứng minh định lý 1:

Từ (6), sai số của phương pháp được đánh giá bởi:

$$R_n(x) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b P(x)dx$$

$$= \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx$$

$$= \int_0^n \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} . h^{n+1}\prod_{i=0}^{n}(t-i)\, hdt$$

$$= \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\int_0^n \prod_{i=0}^{n}(t-i)dt$$

Khi đó:

$$|R_n(x)| \le \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} M_{n+1}\int_0^n \prod_{i=0}^{n}(t-i)dt$$

với $M_{n+1} = \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{n+1}(x)|$

trường hợp n chẵn:

$$\int_0^n \prod_{i=0}^{n} (t-i)dt = 0$$

điều này không đồng nghĩa với việc sai số bằng 0. Trong trường hợp này, sai số có thể suy ra từ số hạng tiếp theo của đa thức nội suy Newton:

$$R_n(x) = \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n \prod_{i=0}^{n+1} (t-i)\, dt$$

Khi đó

$$|R_n(x)| \le \frac{h^{n+3}}{(n+2)!} M_{n+2} \int_0^n \prod_{i=0}^{n+1} (t-i)dt$$

với $M_{n+2} = \max\limits_{x\in[a,b]} |f^{n+2}(x)|$

3. Tính gần đúng tích phân xác định nhờ công thức hình thang

3.1. Công thức hình thang địa phương

Trong công thức Newton – Cotes, nếu ta lấy n = 1, hay ta có 2 mốc x_0, x_1 trùng với a, b và 2 giá trị y_0, y_1 tại 2 mốc đó.

Khi đó:

$$H_0 = -\int_0^1 \frac{t(t-1)}{t} dt = \frac{1}{2}$$

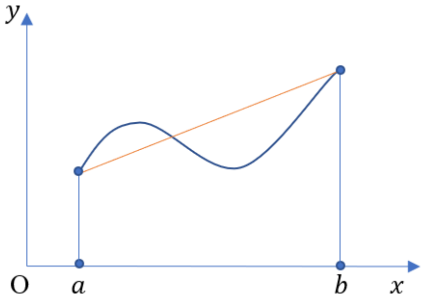
$$H_1 = \int_0^1 \frac{t(t-1)}{t-1} dt = \frac{1}{2}$$

Vậy

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(y_0 + y_1) \qquad (7)$$

công thức (7) gọi là công thức hình thang (địa phương)

Ý nghĩa hình học của công thức: Khi a và b đủ gần nhau, tích phân $\int_a^b f(x)dx$ gần bằng diện tích của hình thang có chiều cao là $b-a$ và hai cạnh đáy là $f(a), f(b)$



3.2. Sai số công thức hình thang địa phương

Sai số của công thức hình thang (địa phương):

$$R_1(x) = f(x) - P_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1)$$

hay

$$|R_1(x)| = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x_1-x) \le \frac{M_2}{2}h^2t(1-t)$$

với $\quad x - x_0 = th; M_2 = max|f''(x)|, x \in [a,b]$

Vậy

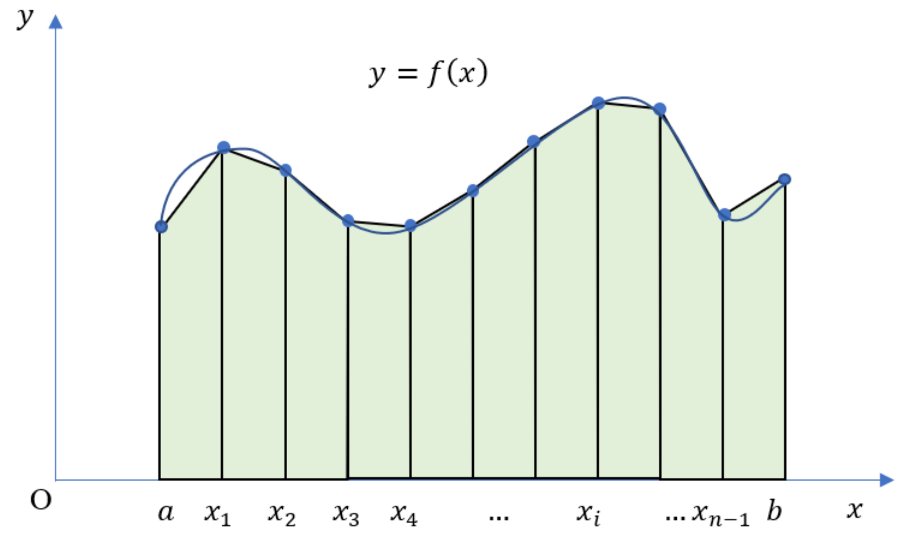
$$\left|\int_{x_0}^{x_1} f(x) - I^*\right| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x)dx - \frac{h}{2}(y_0+y_1)\right|$$

$$\le \int_{x_0}^{x_1} |R_1(x)|dx \le \frac{M_2}{2}h^3\int_0^1 t(1-t)dt = \frac{M_2}{12}h^3 \qquad (8)$$

trong đó I^* là giá trị gần đúng của I tính theo vế phải của công thức (7)

3.3. Công thức hình thang tổng quát

Công thức hình thang địa phương có một nhược điểm, đó là khi khoảng $[a,b]$ lớn, thì sai số tương ứng $O(h^3)$ còn quá lớn. Do đó, chúng ta chia đoạn a, b thành n đoạn nhỏ rồi áp dụng công thức hình thang trên đoạn nhỏ, gọi là công thức hình thang tổng quát.



Chia đoạn $[a, b]$ thành n phần, có độ dài $h = \frac{b-a}{n}$ bởi các điểm chia

$$a \equiv x_0, x_i = a + ih, x_n \equiv b$$

Ký hiệu $y_i = f(x_i)$ $i = \overline{0, n}$. Áp dụng công thức (7) cho từng đoạn $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, ta được:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{2}[y_0 + y_1] + \frac{h}{2}[y_1 + y_2] + \cdots \frac{h}{2}[y_{n-1} + y_n]$$

$$= \frac{h}{2}[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})]$$

Vậy $I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[(y_0 + y_1) + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})]$ (9)

trong đó $h = \frac{b-a}{n}$

3.4. Sai số công thức hình thang tổng quát

Gọi vế phải của (9) là I^*, thì sai số $I - I^*$ được xác định:

$$|I - I^*| \leq \left|\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - \frac{h}{2}(y_0 + y_1)\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - \frac{h}{2}(y_1 + y_2)\right| +$$

$$\dots + \left|\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx - \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)\right|$$

Theo công thức (8):

$$|I - I^*| \leq \frac{M_{21}}{12}h^3 + \frac{M_{22}}{12}h^3 + \cdots + \frac{M_{2n}}{12}h^3$$

với $\qquad M_{2j} = \max_{x\in[x_{j-1},x_j]} |f''(x)| \qquad j = \overline{1,n}$

Đặt $\qquad M_2 = \max_{1\leq j\leq n} M_{2j} \approx \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$

Thì:

$$|I - I^*| \leq \frac{M_2}{12}nh^3 = \frac{M_2}{12}(b-a)h^2$$

3.5. Số khoảng chia cần thiết để đạt sai số cho trước

Từ công thức sai số, ta dễ dàng suy ra được số khoảng chia cần thiết để đạt sai số nhỏ hơn epsilon cho trước:

$$n = \left[\left(\frac{M_2(b-a)^3}{12\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + 1$$

4. Tính gần đúng tích phân xác định nhờ công thức Simpson

4.1. Công thức Simpson địa phương

Trong công thức Newton – Cotes, nếu ta lấy n = 2, hay ta có 3 mốc x_0, x_1, x_2 và 3 giá trị y_0, y_1, y_2 tại 2 mốc đó.

Khi đó:

$$H_0 = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\int_0^2 (t-1)(t-2)dt = \frac{1}{6}$$

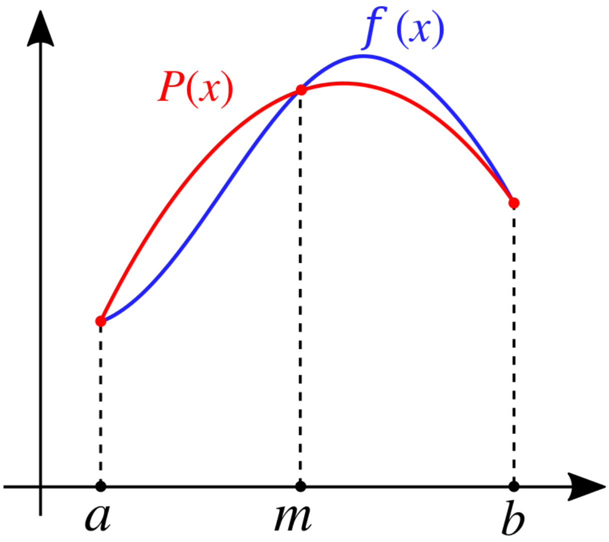
$$H_1 = -\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\int_0^2 t(t-2)dt = \frac{2}{3}$$

$$H_2 = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\int_0^2 t(t-1)dt = \frac{1}{6}$$

Vậy

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2) \qquad (10)$$

Công thức (10) là công thức Simpson (Parabol) địa phương.



Ý nghĩa hình học của công thức:

Tích phân trong trường hợp này gần bằng phần diện tích giới hạn bởi hai đường thẳng $x = a, x = b$, trục hoành và hàm bậc 2 là kết quả của phép nội suy từ 3 mốc (là 1 parabol – nên mới có tên khác là công thức parabol).

4.2. Sai số công thức Simpson địa phương

Gọi $I^* = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$ là giá trị gần đúng của tích phân I; trong đó $y_i = f(x_i) \quad i = 0, 1, 2.$

Đặt $x = t + \frac{a+b}{2}$ thì

$$x_{-1} = a \qquad \Longrightarrow t = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} = -h;$$

$$x_0 = \frac{a+b}{2} \quad \Longrightarrow \ t = 0$$

$$x_1 = b \qquad \Longrightarrow t = b - \frac{a+b}{2} = h$$

Khi đó (10) tương đương với

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f_{-1} + 4f_0 + f_1]$$

Đặt $\phi(t) = \int_{x_0-t}^{x_0+t} f(x)dx - \frac{t}{3}[f(x_0 - t) + 4f(x_0) + f(x_0 + t)]$ (11)

trong đó $0 \le t \le h$

Xét hàm $F(t) = \phi(t) - \left(\frac{t}{h}\right)^5 \phi(h)$

Dễ dàng thấy rằng $F(0) = F(h) = 0$, còn

$$F'(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - \frac{t}{3}[-f'(x_0 - t) + f'(x_0 + t)]$$

$$-\frac{1}{3}[f(x_0 - t) + 4f(x_0) + f(x_0 + t)] - \frac{5t^4}{h^5}\phi(h)$$

$$F''(t) = f'(x_0 + t) - f'(x_0 - t) - \frac{t}{3}[-f'(x_0 - t) + f'(x_0 + t)] -$$

$$-\frac{t}{3}[f''(x_0 - t) + f''(x_0 + t)] - \frac{1}{3}.[-f'(x_0 - t) + f'(x_0 + t)] - \frac{20t^3}{h^5}\phi(h)$$

$$\Longrightarrow F'(0) = F''(0) = 0$$

Ta cũng có

$$F'''(t) = -\frac{t}{3}.[f''(x_0 + t) - f''(x_0 - t)] - \frac{60t^2}{h^5}\phi(h)$$

Áp dụng định lý Lagrange cho phần trong ngoặc []

$$F'''(t) = -\frac{t}{3}f^{(4)}_{(\xi)}.2t - \frac{60t^2}{h^5}\phi(h) \tag{12}$$

$$\xi \in (x_0 - t, x_0 + t)$$

Do $F(0) = F(h) = 0$, áp dụng định lý Rolle, tồn tại điểm $t_1 \in (0, h)$ để $F'(t_1) = 0$.

Lại từ $F'(0) = F'(t_1) = 0$, tồn tại điểm $t_2 \in (0, t_1)$ để $F''(t_2) = 0$

Tương tự, ta tìm được $t_3 \in (0, t_2)$ để $F'''(t_3) = 0$. Từ (12), ta suy ra:

$$F'''(t_3) = -\frac{2t_3^2}{3}\left[f^{(4)}_{(\xi)} + \frac{90}{h^5}\phi(h)\right] = 0$$

$$\Longrightarrow \phi(h) = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}_{(\xi)}$$

với $x_0 - t_3 \le \xi \le x_0 + t_3$

Theo (11), khi $t = h$

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx - \frac{h}{3}[f(x_0 - h) + 4f(x_0) + f(x_0 + h)] = \frac{h^5}{90}f^{(4)}_{(\xi)}$$

hay với $M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}_{(x)}|$ thì:

$$|I - I^*| \le \frac{M_4h^5}{90}$$

4.3. Công thức Simpson tổng quát

Tương tự với trường hợp công thức hình thang địa phương và tổng quát, khi ta chia đoạn lấy tích phân thành càng nhiều khoảng, độ chính xác càng cao. Sau đó áp dụng công thức Simpson cho từng khoảng $[x_{2k}, x_{2k+2}]$.

Chia đoạn [a, b] thành $2m$ phần bằng nhau, có độ dài $h = \frac{b-a}{2m}$ bởi các điểm chia

$$x_0 \equiv a, \qquad x_i = a + ih \qquad i = \overline{1, 2m-1}, x_{2n} = b$$

Áp dụng công thức Simpson đối với các đoạn

$[x_0, x_2]; [x_2, x_4]; \dots ; [x_{2m-2}, x_{2m}]$ ta được

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots$$

$$+\frac{h}{3}(y_{2m-2} + y_{2m} + y_{2m+2})$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1}) +$$

$$+2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2})] \qquad (13)$$

(13) gọi là công thức Simpson tổng quát

4.4. Sai số công thức Simpson tổng quát

Sai số của công thức (13). Đặt I^* là vế phải của (13) thì

$$|I - I^*| \le \left(\frac{M_{4,1}}{90} + \frac{M_{4,2}}{90} + \cdots + \frac{M_{4,m}}{90}\right) h^5 \qquad (14)$$

trong đó

$$M_{4,j} = \max_{x \in [x_{2j-2}, x_{2j}]} \left|f_{(x)}^{(4)}\right| \qquad j = 1,2, \dots, m$$

Đặt

$$M_4 = \max_{1 \le j \le m} M_{4j} = \max_{x \in [a,b]} \left|f_{(x)}^{(4)}\right|$$

thì từ (14) suy ra $\quad |I - I^*| \le \frac{M_4}{90} h^4.(mh)$ mà $h = \frac{b-a}{2m}$

hay

$$|I - I^*| \leq \frac{M_4}{180}(b-a)h^4$$

4.5 Số khoảng chia cần thiết để đạt sai số cho trước

Từ công thức sai số, ta dễ dàng suy ra được số khoảng chia cần thiết để đạt sai số nhỏ hơn epsilon cho trước:

$$2m = \left[\left(\frac{M_4(b-a)^5}{180\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}\right] + 1$$

nếu $\left[\left(\frac{M_4(b-a)^5}{180\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}\right]$ lẻ

và bằng

$$2m = \left[\left(\frac{M_4(b-a)^5}{180\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}\right] + 2$$

nếu $\left[\left(\frac{M_4(b-a)^5}{180\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}\right]$ chẵn

C. THUẬT TOÁN, VÍ DỤ, NHẬN XÉT, HDSD CHƯƠNG TRÌNH

I. Tính gần đúng đạo hàm

1. Thuật toán

Bài toán nhập dữ liệu từ file có dạng như sau:

3	
1	1
2	4
3	9
4	16

Với dòng đầu tiên là giá trị cần tính đạo hàm, cột bên trái là các giá trị x_i, cột phải là y_i

Cần tính :

$$f'(x) \approx p'(x) = P_x'(x_0 + ht) = \frac{1}{h} P_t'(t)$$

với

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!} \cdot \frac{\prod_{j=0}^{n}(t-j)}{t-i} \cdot y_i$$

<u>Chương trình chính</u>

B1: Tính đa thức là tích của $\prod_{j=0}^{n}(t-j)$ trong công thức trên, và lưu vào A (cố định)

B2: Tạo ma trận X có độ dài $n+1$ chỉ chứa các số 1, để lưu hệ số của phép chia $\frac{\prod_{j=0}^{n}(t-j)}{t-i}$, nhằm mục đích rút gọn khối lượng tính toán mỗi lần i chạy

B3: Tính mảng Pt là kết quả của hàm P_t(), chứa hệ số của đa thức P(t)

B4: Tính đạo hàm của hàm P(t) và thay giá trị cần tính đạo hàm vào

<u>Gói nhập bảng số liệu từ file và tính một số hằng số sẽ sử dụng lại nhiều lần</u>

Input:

Output: Mảng x, y chứa mốc nội suy và giá trị tại các mốc nội suy, t chứa giá trị cần tính đạo hàm

Thuật toán:

B1: Đọc giá trị cần tính đạo hàm, lưu vào a. Đọc các giá trị dưới và lưu vào x, y

B2: Lưu độ dài của mảng x vào n, độ dài khoảng $h = \frac{x_n - x_0}{n}$, đổi giá trị cần tính sang biến $t = \frac{a - x_0}{h}$

<u>Gói nhân một đa thức với $(t - i)$</u>

Input: Mảng A chứa hệ số của đa thức cần nhân, ví dụ mảng A của đa thức $x^2 - 3x + 5$ là $[1, -3, 5]$ và i

Output: Mảng A chứa chính hệ số sau khi nhân với i

Thuật toán:

B1: Thêm 0 vào cuối mảng A

B2: m = độ dài mảng A

B3: Với j từ m-1 chạy về 1

A[j] = A[j] - A[j - 1] * i

B4: Trả về mảng A

<u>Gói chia một đa thức với $(t - i)$(chia hết)</u>

Input: Mảng A chứa hệ số của đa thức cần chia, ví dụ mảng A của đa thức $x^2 - 3x + 5$ là $[1, -3, 5]$ và i

Output: Mảng X chứa hệ số của đa thức chia

Thuật toán:

B1: Với j trong khoảng [1, độ dài (X))

X[j] = i*X[j-1] + A[j]

B2: Trả về X

<u>Gói tính hệ số của đa thức P(t)</u>

Input

Output: Mảng Pt chứa hệ số của đa thức P()

Thuật toán:

B1: Tạo mảng Pt độ dài $n + 1$ chỉ chứa các số 0

B2: Với i trong khoảng [0, n]

Chia đa thức có hệ số lưu trong mảng A cho $t - i$ và lưu vào mảng D

Với j trong khoảng [0, n]

Pt[j] = Pt[j] + D[j]*((-1)**(n-i))/(i!*(n-i)!)*y[i]

B3: Trả về mảng Pt

<u>Gói tính giá trị của đạo hàm tại t</u>

Input: Mảng Pt chứa hệ số của đa thức P(t)

Output: Kết quả của đạo hàm

Thuật toán:

B1: Gán 0 vào biến ans

B2: Với i trong khoảng [0, n-1]

ans = ans + (1/h)*Pt[i]*(n-i)*(t**(n-i-1))

B3: In kết quả ans

2. Ví dụ

VD1: Xét bảng số (của hàm $\log(x)$), tính giá trị của $f'(55)$

$\boldsymbol{x}$	50	55	60	65
$\boldsymbol{f(x)}$	1,6990	1,7401	1,7782	1,8129

Khi $n = 3$, ta có:

$$f'(55) \approx \frac{1}{30}(-2.1{,}6990 - 3.1{,}7401 + 6.1{,}7782 - 1{,}8129) = 0.0793333 \approx 0.079$$

Chạy thử chương trình:

```
Giá trị của đạo hàm                :  0.007933333333333249
```

Kết quả chính xác: $\frac{1}{55\ln(10)} = 0.00789626$

<u>Nhận xét:</u> Kết quả trùng nhau đến 3 chữ số sau dấu phẩy

VD2: Xét bảng số (của hàm $\log(x)$), tính giá trị của $f'(55)$

$\boldsymbol{x}$	**50**	**55**	**60**	**65**	**70**	**75**	**80**	**85**
$\boldsymbol{f(x)}$	1.6990	1.7401	1.7782	1.8129	1.8451	1.8751	1.9031	1.9234

Chạy thử chương trình:

```
Giá trị của đạo hàm                    :  0.008031428571426984
```

Kết quả chính xác: $\frac{1}{55\ln(10)} = 0.00789626$

<u>Nhận xét:</u> Mặc dù trong dữ liệu, số mốc đã nhiều hơn, tuy nhiên, kết quả lại không tốt bằng ví dụ trước. Điều này xảy ra là vì mốc cần tính đạo hàm khá xa trung tâm, dẫn đến sai số lớn

VD3: Xét bảng số (của hàm $\log(x)$), tính giá trị của $f'(55)$

$\boldsymbol{x}$	40	45	50	55	60	65	70	75
$\boldsymbol{f(x)}$	1.6021	1.6532	1.6990	1.7401	1.7782	1.8129	1.8451	1.8751

Chạy thử chương trình:

```
Giá trị của đạo hàm                    :  0.007916000000021062
```

Kết quả chính xác: $\frac{1}{55\ln(10)} = 0.00789626$

<u>Nhận xét:</u> Với việc có nhiều hơn mốc và giá trị tại mốc đó trong dữ liệu đầu vào và mốc cần tính đạo hàm cũng gần ở trung tâm, kết quả trả về đã tốt hơn so với 2 ví dụ trước, dù có chung số lượng dữ liệu với ví dụ 2. Tuy nhiên, số lượng tính toán đã nhiều hơn.

VD4: Xét bảng số (của hàm sin(x)) tại các mốc $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$, tính giá trị của $f'(1.5078)$ $\left(f'(\frac{3\pi}{6})\right)$

$\boldsymbol{x}$	0.5236	1.0472	1.5078	2.0944	2.6180
$\boldsymbol{sin(x)}$	0.5	0.8660	1	0.8660	0.5

Chạy thử chương trình:

```
Giá trị của đạo hàm                    :  0.0629240100493117
```

Kết quả chính xác: $(\sin(1.5078))' = \cos(1.5078) = 0.0629546$

Nhận xét: Với hàm số biến động không quá lớn như hàm sin, kết quả trả về là khá tốt, trùng đến 4 chữ số sau dấu phẩy

II. Tính gần đúng tích phân xác định

1. Thuật toán

Bài toán nhận hàm số, khoảng lấy tích phân,… từ người dùng và tính toán một số kết quả như:

$$\int_a^b ydx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i y_i$$

với các hệ số Cotes H_i

$$H_i = \frac{1}{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\int_0^n \frac{\prod_{j=0}^{n}(t-j)}{t-i}dt$$

Chương trình chính

Input:

Output: In ra kết quả tính tích phân, sai số hoặc số khoảng chia cần thiết để đạt sai số cho trước

Thuật toán

B1: Khởi tạo một số biến toàn cục được sử dụng nhiều lần như:

f, a, b, n, h : Hàm số, khoảng lấy tích phân, số khoảng chia và bước h

A : Mảng chứa giá trị của hàm tại các mốc nội suy

D : Mảng chứa hệ số của đa thức là tích các $(t-i)$, i từ 0 đến n

B2: Bước $h = \frac{b-a}{n}$

B3: Gọi ra các hàm tính toán các yêu cầu bài toán

Gói tính giá trị lớn nhất của đạo hàm cấp i của hàm $|f(x)|$ trên đoạn $[a, b]$

Gói này tên là ***max***

Input: Hàm f và i

Output: Giá trị lớn nhất của đạo hàm cấp i của hàm $|f(x)|$ trên đoạn $[a, b]$

Thuật toán:

B1: Hàm $g(x)$ = đạo hàm cấp i của $f(x)$

B2: Tìm m_1, m_2 lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm $g(x)$ trên đoạn $[a, b]$ bằng thư viện có sẵn

B3: So sánh $|m_1|$ và $|m_2|$, khi đó giá trị lớn nhất của $|f(x)|$ là giá trị lớn hơn trong $|m_1|$ và $|m_2|$

Gói nhân một đa thức với $(t-i)$

Input: Mảng A chứa hệ số của đa thức cần nhân, ví dụ mảng A của đa thức $x^2 - 3x + 5$ là $[1, -3, 5]$ và i

Output: Mảng A chứa chính hệ số sau khi nhân với i

Thuật toán:

B1: Thêm 0 vào cuối mảng A

B2: m = độ dài mảng A

B3: Với j từ m-1 chạy về 1

A[j] = A[j] - A[j - 1] * i

B4: Trả về mảng A

Gói chia một đa thức với $(t-i)$(chia hết)

Input: Mảng A chứa hệ số của đa thức cần chia, ví dụ mảng A của đa thức $x^2 - 3x + 5$ là $[1, -3, 5]$ và i

Output: Mảng X chứa hệ số của đa thức chia

Thuật toán:

B1: Với j chạy từ 1 đến độ dài của X

X[j] = i*X[j-1] + A[j]

B2: Trả về X

Gói tính tích phân xác định của một đa thức

Input: Mảng A chứa hệ số của đa thức, a, b là khoảng lấy tích phân

Output: Giá trị tích phân xác định

Thuật toán

B1: I = 0

B2: m = độ dài mảng A

B3:Với j chạy từ 0 đến m-1

Nếu A[j] = 0

Bỏ qua

Nếu A[j] ≠ 0

A[j] = A[j]/(m-j)

I = I + A[j]*(b^(m-j))-a^(m-j))

B4: Trả về I

Gói tính hệ số Cotes H_i

Input: Hệ số Cotes thứ i

Output: Hệ số Cotes H_i

Thuật toán:

B1: Tạo mảng X chứa hệ số của phép chia đa thức D (tích các (t-i), i từ 0 đến n) với (t-im

B2: Tính hệ số H_i theo công thức

$$H_i = \frac{1}{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\int_0^n \frac{\prod_{j=0}^{n}(t-j)}{t-i}dt$$

B3: Trả về H_i

<u>Gói in ra các hệ số Cotes và tính giá trị của tích phân</u>

$$(b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i y_i$$

Input:

Output: Kết quả tích phân

Thuật toán:

B1: Khởi tạo biến I để tính tích phân, tạo mảng H để chứa các hệ số H_i

B2: Với i chạy từ 0 đến n

H_i = hệ số Cotes thứ i

$I = I + H_i * y_i$

B3: In kết quả I*(b-a)

<u>Gói tính sai số của công thức Newton – Cotes</u>

Input:

Output: Sai số công thức Newton - Cotes

Thuật toán

B1: Tạo hàm g là đạo hàm cấp n của hàm f

B2: Nếu n lẻ

$m_1 =$ GTLN của $|g'(x)|$ trên đoạn $[a, b]$ bằng hàm ***max***

Tính sai số theo công thức:

$$|R_n(x)| \leq \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} m_1 \int_0^n \prod_{i=0}^{n}(t-i)dt$$

B3: Nếu m chẵn

Tìm $m_2 =$ GTLN của $|g''(x)|$ trên đoạn [a, b] bằng hàm ***max***

Tính sai số theo công thức

$$|R_n(x)| \leq \frac{h^{n+3}}{(n+2)!} m_2 \int_0^n \prod_{i=0}^{n+1} (t-i)dt$$

B4: In ra giá trị sai số

<u>Gói tính tích phân bằng công thức hình thang</u>

Input: Mảng A chứa giá trị của hàm $f(x)$ tại các mốc x_i

Output: Giá trị gần đúng của tích phân xác định bằng công thức hình thang

Thuật toán

B1: Tạo biến $trape = \frac{1}{2}(A[0] + A[n])$

B2: Với i trong khoảng (1, n)

$trape = trape + A[i]$

B3: In $trape$

<u>Gói tính sai số của tích phân bằng công thức hình thang</u>

Input:

Output: Sai số của tích phân bằng công thức hình thang

Thuật toán

B1: Tìm $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ bằng hàm ***max***

B2: Sai số tính theo công thức

$$\frac{M_2}{12}(b-a)h^2$$

<u>Gói tính số khoảng chia cần thiết để đạt sai số ϵ cho trước</u>

Input:

Output: Số khoảng chia cần thiết

Thuật toán

B1: Tìm $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ bằng hàm ***max***

B2: Tính số khoảng chia cần thiết theo công thức:

$$n = \left[\left(\frac{M_2(b-a)^3}{12\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + 1$$

Gói tính gần đúng tích phân bằng công thức Simpson

Input: Mảng A chứa giá trị của hàm $f(x)$ tại các mốc x_i

Output: Giá trị gần đúng của tích phân xác định bằng công thức Simpson

Thuật toán

B1: simp = h/3*(A[0]+A[n])

simp_odd = 0

simp_even = 0

B2: Với i từ 1 đến n, i lẻ

simp_odd += A[i]

B3: Với i từ 2 đến n, i chẵn

simp_even += A[i]

B4: simp = simp + h/3*4*simp_odd + h/3*2*simp_even

Gói tính sai số công thức tính gần đúng tích phân bằng công thức Simpson

Input:

Output: Sai số công thức tính gần đúng tích phân bằng công thức Simpson

Thuật toán

B1: Tìm $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$ bằng hàm ***max***

B2: Tính sai số theo công thức

$$\frac{M_4}{180}(b-a)h^4$$

Gói tính số khoảng chia cần thiết để đạt sai số ϵ cho trước

Input:

Output: Số khoảng chia cần thiết

Thuật toán

B1: Tìm $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$ bằng hàm ***max***

B2: Tính số khoảng chia cần thiết theo công thức:

$$2m = \left[\sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{180\varepsilon}}\right] + 1$$

nếu $\left[\sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{180\varepsilon}}\right]$ lẻ

và bằng

$$2m = \left[\sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{180\varepsilon}}\right] + 2$$

nếu $\left[\sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{180\varepsilon}}\right]$ chẵn

2. Ví dụ

VD1: Tính tích phân $\int_1^2 \frac{1}{x^2}$ với $n = 4$

Tạo bảng số

$\boldsymbol{x}$	**1**	**1.25**	**1.5**	**1.75**	**2**
$\boldsymbol{f(x)}$	1	0.64	0.4444	0.3265	0.25

Tính theo công thức Newton – Cotes:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{90}(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4) = 0.5001$$

Sai số:

$|f^6(x)| = \left|\frac{5040}{x^8}\right|$ đạt max = 5040 trên 1, 2

Khi đó $|R_n(x)| \leq \frac{1}{384}$

$$|R_n(x)| \leq \frac{h^{n+3}M_{n+2}}{(n+2)!}\int_0^n \prod_{i=0}^{n+1}(t-i)\,dt$$

Tính theo công thức hình thang:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4) = 0.5090$$

Sai số: $f''(x) = \frac{6}{x^4}$ đạt max = 6 trên [1, 2]

$\Rightarrow |I - I^*| \leq \frac{1}{32} = 0.0312$ $|I - I^*| \leq \frac{M_2}{12}(b-a)h^2$

Tính theo công thức Simpson:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_4) + 4(y_1 + y_3) + 2y_2] = 0.5004$$

Sai số: $f^{(4)}(x) = \frac{120}{x^6}$ đạt max = 120 trên [1, 2]

$\Rightarrow |I - I^*| \leq \frac{1}{384} = 0.0026$ $|I - I^*| \leq \frac{M_4}{180}(b-a)h^4$

Chạy thử chương trình:

```
Nhập hàm f(x): 1/(x**2)
Nhập khoảng lấy tích phân a, b (a < b) cách nhau bởi dấu cách: 1 2
Chọn bài toán bạn muốn giải quyết (Nhập số theo bài toán)
(1) Tính tích phân (2) Tính số khoảng chia cần thiết: 1
Nhập số khoảng chia n: 4
Tích phân bằng công thức hình thang      : 0.508993764172336
Sai số công thức hình thang              : 0.03125000000000000

Tích phân bằng công thức Simpson         : 0.500417611489040
Sai số công thức Simpson                 : 0.00260416666666667

Hệ số Cotes ứng với n = 4                : [0.0777777777777775, 0.3555555555555566, 0.1333333333333286, 0.35555555555
55543, 0.0777777777777779]
Tích phân bằng công thức Newton - Cotez  : 0.500136810279667
Sai số công thức Newton - Cotez          : 0.0026041666666672403
```

Kết quả chính xác: $\int_1^2 \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^2 = 0.5$

<u>Nhận xét:</u> Công thức hình thang có khối lượng tính toán nhỏ nhất, nhưng sai số khá lớn. Ngược lại, công thức Newton – Cotes có khối lượng tính toán lớn nhất nhưng kết lại rất tốt.

Trong ví dụ này, nếu chia khoảng cần lấy tích phân thành nhiều khoảng hơn, cụ thể là 12, kết quả chương trình trả về sẽ như sau:

```
Nhập hàm f(x): 1/(x**2)
Nhập khoảng lấy tích phân a, b (a < b) cách nhau bởi dấu cách: 1 2
Chọn bài toán bạn muốn giải quyết (Nhập số theo bài toán)
(1) Tính tích phân (2) Tính số khoảng chia cần thiết: 1
Nhập số khoảng chia n: 12
Tích phân bằng công thức hình thang      : 0.501011182041180
Sai số công thức hình thang              : 0.00347222222222222

Tích phân bằng công thức Simpson         : 0.500006076990880
Sai số công thức Simpson                 : 3.21502057613169e-5

Hệ số Cotes ứng với n = 12                : [0.021639487498770663, 0.15703610672470872, -0.12032196354403486, 0.566498
8978059063, -0.8165056406926015, 1.387759666106478, -1.392213125660586, 1.3877596662410352, -0.8165056355626074, 0.566
4988983291844, -0.12032196357767416, 0.1570361067634449, 0.021639487495542647]
Tích phân bằng công thức Newton - Cotez  : 0.499999994705777
Sai số công thức Newton - Cotez          : 2.918728894228685e-07
```

Kết quả khá chính xác, tuy nhiên, nếu chúng ta chia làm 18 khoảng:

```
Nhập hàm f(x): 1/(x**2)
Nhập khoảng lấy tích phân a, b (a < b) cách nhau bởi dấu cách: 1 2
Chọn bài toán bạn muốn giải quyết (Nhập số theo bài toán)
(1) Tính tích phân (2) Tính số khoảng chia cần thiết: 1
Nhập số khoảng chia n: 18
Tích phân bằng công thức hình thang      : 0.500449795962227
Sai số công thức hình thang              : 0.00154320987654321

Tích phân bằng công thức Simpson         : 0.500001216795445
Sai số công thức Simpson                 : 6.35065792816136e-6

Hệ số Cotes ứng với n = 18                : [0.013395433656227959, 0.12155458044713499, -0.21123799859425962, 1.021086
2990733653, -2.7858170886095635, 6.817077124369305, -13.060919026307229, 20.976360653651657, -27.557973596297227, 30.3
33298993122625, -27.557716848787983, 20.977323749518927, -13.061375835565135, 6.81697645077069, -2.785756981494783, 1.
0210833587921575, -0.2112379465473234, 0.12155407062534357, 0.013395416977258491]
Tích phân bằng công thức Newton - Cotez  : 0.500452875320078
Sai số công thức Newton - Cotez          : 4.971737489989324e-10
```

Có thể thấy, việc lấy quá nhiều mốc đã khiến một số đại lượng quá bé, dẫn đến sai số trong tính toán của máy tính.

VD2: Tính tích phân $\int_{40}^{55} \ln(x)$ với n = 8

Tạo bảng số

x	**40**	**41.875**	**43.75**	**45.625**	**47.5**	**49.375**	**51.25**	**53.125**	**55**
$f(x)$	3.6889	3.7347	3.7785	3.8204	3.8607	3.8994	3.9367	3.9726	4.0073

Tính theo công thức Newton – Cotes

$$I = \frac{(b-a)}{28350}(989y_0 + 5888y_1 - 928y_2 + 10496y_3 - 4540y_4 + 10496y_5$$
$$-928y_6 + 5888y_7 + 989y_8) = 57.8475$$

Tính theo công thức hình thang

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + 2y_6 + 2y_7 + y_8)$$
$$= 57.8458$$

Tính theo công thức Simpson

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)]$$
$$= 57.84775$$

Chạy thử chương trình

```
Nhập hàm f(x): log(x)
Nhập khoảng lấy tích phân a, b (a < b) cách nhau bởi dấu cách: 40 55
(1) Tính tích phân (2) Tính số khoảng chia cần thiết: 1
Nhập số khoảng chia n: 8
Tích phân bằng công thức hình thang      : 57.8461498388432
Sai số công thức hình thang              : 0.00274658203125000

Tích phân bằng công thức Simpson         : 57.8481457082043
Sai số công thức Simpson                 : 2.41398811340332e-6

Hệ số Cotes ứng với n = 8                : [0.03488536155206338, 0.20768959435619533, -0.032733686063956054, 0.3702292
768975086, -0.1601410934753302, 0.37022927689831703, -0.03273368606739192, 0.20768959435619533, 0.03488536155200563]
Tích phân bằng công thức Newton - Cotez  : 57.8481470235158
Sai số công thức Newton - Cotez          : 1.7640943249862845e-10
```

Kết quả chính xác: $\int_{40}^{55} \ln(x) = 57.8481$

VD3: Cần lấy bao nhiêu khoảng n để đạt sai số trong tích phân $\int_1^2 \frac{1}{x^2}$ bé hơn 0.0002

Công thức hình thang:

$$\frac{M_2}{12}(b-a)h^2 \leq 0.0002$$

hay

$$\frac{6}{12}\frac{(b-a)\hat{}3}{n^2} \leq 0.0002$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{1}{\sqrt{0.0004}} = 50$$

Vậy cần 51 khoảng

Công thức Simpson

$$\frac{M_4}{180}(b-a)h^4 \leq 0.0002$$

hay

$$\frac{120}{180}\frac{(b-a)^5}{n^4} \leq 0.002$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{1}{\sqrt[4]{0.0003}} \approx 7.6$$

Vậy cần 8 khoảng

Chạy thử chương trình

```
Nhập hàm f(x): 1/(x**2)
Nhập khoảng lấy tích phân a, b (a < b) cách nhau bởi dấu cách: 1 2
Chọn bài toán bạn muốn giải quyết (Nhập số theo bài toán)
(1) Tính tích phân (2) Tính số khoảng chia cần thiết: 2
Nhập epsilon: 0.0002
Số khoảng chia cần thiết (Hình thang)    : 51
Số khoảng chia cần thiết (Simpson)       : 8
```

III. Hướng dẫn sử dụng chương trình

Yêu cầu:

- Máy tính có cài đặt Python3 (chương trình được chạy thử trên phiên bản 3.9.7)

-Các gói thư viện cần thiết và phiên bản đã được dùng để chạy thử là sympy (phiên bản 1.8). Cài đặt bằng cách chạy lệnh sau từ cmd(bash, powershell,...): **pip install numpy**

1. Tính gần đúng đạo hàm

Chương trình nhập dữ liệu từ file $input.txt$ được đặt chung folder với chương trình. File $input.txt$ có dạng

55

35 1.5441

40 1.6021

45 1.6532

50 1.6990

55 1.7401

60 1.7782

Trong đó dòng đầu tiên là mốc cần tính đạo hàm, các dòng tiếp theo gồm các mốc x_i và giá trị của hàm tại mốc đó.

2. Tính gần đúng tích phân xác định

Chương trình nhập dữ liệu từ người dùng, do đó người dùng chỉ cần nhập theo hướng dẫn hiển thị trên màn hình:

Nhập hàm f(x):

Nhập vào hàm $f(x)$: Ví dụ nhập 1/(x**2) cho hàm $\frac{1}{x^2}$, log(x) cho hàm ln (x)

Nhập khoảng lấy tích phân a, b (a < b) cách nhau bởi dấu cách:

Nhập vào khoảng lấy tích phân, cận dưới nhập trước, cách nhau bởi dấu cách

Chọn bài toán bạn muốn giải quyết (Nhập số theo bài toán)''\n''(1) Tính tích phân (2) Tính số khoảng chia cần thiết:

Nhập vào 1 nếu bạn muốn tính tích phân cố định, nhập vào 2 nếu bạn muốn tính số khoảng chia cần thiết để đạt sai số ϵ cho trước

Nhập số khoảng chia n:

Nhập vào số khoảng chia nếu bạn nhập 1 ở mục trước

Nhập epsilon:

Nhập sai số ϵ nếu bạn nhập 2 ở mục trước

D. KẾT LUẬN

Qua những nội dung trên, ta thấy được một số đặc điểm sau của các phương pháp tính gần đúng đạo hàm và tích phân xác định.

1. Về tính gần đúng đạo hàm: Thuật toán của phép tính gần đúng đạo hàm dễ triển khai, khối lượng tính toán không quá lớn đối với bộ dữ liệu ít giá trị nhưng vẫn đem lại kết quả tính toán tương đối tốt
2. Về tính gần đúng tích phân xác định:
   Khối lượng tính toán của mỗi phương pháp tương đương với độ chính xác của kết quả. Phương pháp sử dụng công thức hình thang có khối lượng tính toán ít nhất, dẫn đến kết quả và sai số kém "tốt" hơn so với hai phương pháp còn lại có khối lượng tính toán nhiều hơn.
   Ở phương pháp sử dụng công thức Newton – Cotes, nếu chúng ta lấy số lượng mốc quá nhiều, một số giá trị sẽ quá bé, ảnh hưởng đến việc tính toán của máy tính. Do đó, chỉ nên lấy tối đa 15 mốc.

E. TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Lê Trọng Vinh, Giải tích số, NXB Khoa học và kỹ thuật (12/2007)

[2] Phạm Kỳ Anh, Giải tích số, NXB Đại học quốc gia Hà Nội (1996)

[3] Lê Trọng Vinh, Trần Minh Toàn, Giáo trình Phương pháp tính và Matlab, NXB Bách khoa – Hà Nội (2013)

[4] D.R. Hayes and L. Rubin, A proof of the Newton–Cotes quadrature formulas with error term, The American Mathematical Monthly, 77(10) (1970), 1065–1072.

[5] G.A. Evans, The estimation of errors in numerical quadrature, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 25(10) (1994), 727–744.

[6] Omar, A. AL-Sammarraie, and Mohammed Ali Bashir. "Error analysis of the high order Newton Cotes formulas." International Journal of Scientific and Research Publications 5.4 (2015): 1-6.