Chủ đề 19: Nội suy Lagrange

Nguyễn Đình Huy
MSSV: 20200277

Môn : Giải tích số
Đại học Bách Khoa Hà Nội

28/12/2021

Nội dung

I. Khái niệm về nội suy

1. Bài toán
2. Sự duy nhất của đa thức nội suy

II. Đa thức nội suy Lagrange

1. Định nghĩa và công thức
2. Sai số của đa thức nội suy
3. Thuật toán và ví dụ minh họa
4. Thảo luận

I.Khái niệm về nội suy

1. Bài toán

Giả thiết

Cho hàm số $y = f(x)$ trên $[a, b]$, ta có $n + 1$ cặp (x_i, y_i) thỏa mãn:

- $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$.
- $x_i \neq x_j$, $\forall i \neq j$.

Cần tìm đa thức $P_n(x)$ bậc $\leq n$ thỏa mãn:

- $y_i = P_n(x_i)$, $i = \overline{0, n}$.

I.Khái niệm về nội suy

1. Bài toán

Giả thiết

Cho hàm số $y = f(x)$ trên $[a, b]$, ta có $n + 1$ cặp (x_i, y_i) thỏa mãn:

- $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$.
- $x_i \neq x_j$, $\forall i \neq j$.

Cần tìm đa thức $P_n(x)$ bậc $\leq n$ thỏa mãn:

- $y_i = P_n(x_i)$, $i = \overline{0, n}$.

Định nghĩa 1.1

Các đa thức $P_n(x)$ được gọi là đa thức nội suy.
Các điểm $x_i \in [a, b]$ với $i = \overline{0, n}$ gọi là các mốc nội suy.
Giá trị $\overline{y} = P_n(\overline{x}) \approx f(\overline{x})$ $(\overline{x} \neq x_i), i = \overline{0, n}$ được gọi là giá trị nội suy khi $\overline{x} \in (a, b)$.
Hiệu số $R_n(\overline{x}) = f(\overline{x}) - P_n(\overline{x})$ gọi là sai số của phép tính nội suy tại điểm $\overline{x}$.

2. Sự duy nhất của đa thức nội suy

Định lý 1.2

Đa thức nội suy $P_n(x)$ tìm được là duy nhất.

Chứng minh: Giả sử ta tìm được hai đa thức $P_n(x)$ và $Q_n(x)$ có bậc $\leq n$ thỏa mãn: $P_n(x_i) = Q_n(x_i) = y_i, i = \overline{0, n}$.
Đặt $H_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$. Do đó $H_n(x)$ có bậc $\leq n$.
Mặt khác, $H_n(x_i) = P_n(x_i) - Q_n(x_i) = 0, i = \overline{0, n}$.
$\Rightarrow H_n(x)$ có bậc $\leq n$ và có ít nhất $n + 1$ nghiệm.
$\Rightarrow H_n(x) \equiv 0$ hay $P_n(x) \equiv Q_n(x)$.
Vậy đa thức nội suy là duy nhất.

II. Đa thức nội suy Lagrange

1. Định nghĩa và công thức

Công thức 2.1

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

Định nghĩa 2.1

Đa thức $P_n(x)$ như trên thỏa mãn điều kiện bài toán gọi là đa thức nội suy Lagrange.

Chứng minh : $P_n(x_i) = y_i, i = \overline{0, n}$.

Dễ thấy, $L_i(x_j) = \begin{cases} 0, i \neq j. \\ 1, i = j. \end{cases}$

$\Rightarrow P_n(x_i) = y_i, i = \overline{0, n}$

II. Đa thức nội suy Lagrange

2. Sai số của đa thức nội suy

Công thức sai số 2.2

$$M = \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

$$|R_n(\overline{x})| = |f(\overline{x}) - P_n(\overline{x})| \leq \frac{M}{(n+1)!} |(\overline{x} - x_0)(\overline{x} - x_1)\dots(\overline{x} - x_n)|$$

2. Sai số của đa thức nội suy

Công thức sai số 2.2

$$M = \sup_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

$$|R_n(\overline{x})| = |f(\overline{x}) - P_n(\overline{x})| \leq \frac{M}{(n+1)!}|(\overline{x} - x_0)(\overline{x} - x_1)\dots(\overline{x} - x_n)|$$

Nhận xét

- Sai số sẽ lớn nếu $\overline{x} \notin [a, b]$, do đó nếu dùng công thức nội suy tính giá trị ngoại suy thì sẽ có sai số lớn.
- Giá trị nội suy có độ chính xác cao nhất khi mốc nội suy $\overline{x} \in [x_i, x_{i+1}]$ ở khoảng giữa và độ chính xác thấp với các mốc nội suy $\overline{x}$ ở gần a và b.

II. Đa thức nội suy Lagrange

3. Thuật toán và ví dụ minh họa

Công thức 2.1

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

3. Thuật toán và ví dụ minh họa

Công thức 2.1

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

Biến đổi công thức 2.1

Đặt $w_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$

Khi đó, $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{w'_{n+1}(x_i)} . \frac{w_{n+1}(x)}{x - x_i}$

Thuật toán tìm hệ số của đa thức $w_{n+1}(x)$ khi khai triển

Coi đa thức $Q(x) = a_m.x^m + a_{m-1}.x^{m-1} + \cdots + a_1.x + a_0$.
Ta có :
$Q(x).(c.x + d) = b_{m+1}.x^{m+1} + b_m.x^m + \cdots + b_1.x + b_0$.

Khi đó, $b_i = \begin{cases} a_0.d, i = 0. \\ a_m.c, i = m + 1. \\ a_i.d + a_{i-1}.c, i = \overline{1, m}. \end{cases}$

Khi tính $w_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})(x - x_n)$, ta tính:

$$\begin{cases} Q_0(x) = (x - x_0). \\ Q_1(x) = Q_0(x).(x - x_1). \\ \dots\dots \\ Q_{n-1}(x) = Q_{n-2}(x).(x - x_{n-1}). \\ w_{n+1}(x) \equiv Q_n(x) = Q_{n-1}(x).(x - x_n). \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Ta dùng mảng lưu các hệ số của đa thức, và tính toán trong đpt $O(n^2)$.

Ví dụ cho các mốc nội suy và giá trị nội suy tương ứng như trong bảng:

i	0	1	2	3	4
x_i	1	2	3	4	7
y_i	17	17.5	76	210.5	1970

$w_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n)$.
$Q_0(x) = x - 1$, ta lưu hệ số x^0 và x^1 bằng $[-1, 1]$.
$Q_1(x) = Q_0(x).(x - 2) = x^2 - 3x + 2$, ta lưu hệ số x^0, x^1 và x^2 bằng $[2, -3, 1]$.
. . . . . .
$Q_n(x) = Q_{n-1}(x)(x - 7) = x^5 - 17x^4 + 105x^3 + 374x - 168$, ta lưu hệ số $x^0, x^1, \ldots, x^n$ bằng $[-168, 374, -295, 105, -17, 1]$

II. Đa thức nội suy Lagrange

Thuật toán tìm hệ số của đa thức $\frac{w_{n+1}(x)}{x-x_i}$ khi khai triển

Coi đa thức $Q(x) = a_m.x^m + a_{m-1}.x^{m-1} + \cdots + a_1.x + a_0$.
Ta có :
$\frac{Q(x)}{c.x+d} = b_{m-1}.x^{m-1} + b_{m-2}.x^{m-2} + \cdots + b_1.x + b_0$.

Khi đó, $\begin{cases} b_{m-1} = \frac{a_m}{c}. \\ b_{m-2} = \frac{a_{m-1}-d.b_{m-1}}{c}. \\ \ldots\ldots \\ b_1 = \frac{a_2-d.b_2}{c}. \\ b_0 = \frac{a_1-d.b_1}{c}. \end{cases}$

Ta đã tính được hệ số của $w_{n+1}(x)$, nên ta sẽ tính được hệ số của $\frac{w_{n+1}(x)}{x-x_i}$ trong đpt $O(n)$.

II. Đa thức nội suy Lagrange

Thuật toán tìm hệ số của đa thức $P_n(x)$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{w'_{n+1}(x_i)} . \frac{w_{n+1}(x)}{x - x_i}$$

Ta thấy, $\frac{y_i}{w'_{n+1}(x_i)}$ là hằng số và ta có thể xử lí trước trong đpt $O(n^2)$.

$\Rightarrow$ Ta tính được từng hệ số của $P_n(x)$, và tổng đpt là $O(n^2)$.

$\Longrightarrow$ Tổng độ phức tạp tính toán của phương pháp nội suy Lagrange là $O(3n^2)$.

Ví dụ minh họa

Cho các mốc nội suy và giá trị nội suy tương ứng như trong bảng:

i	0	1	2	3	4
x_i	1	2	3	4	7
y_i	17	17.5	76	210.5	1970

$\Rightarrow$ Ta tính được sẵn $\frac{y_i}{w'_{n+1}(x_i)}$

i	0	1	2	3	4
$\frac{y_i}{w'_{n+1}(x_i)}$	$\frac{17}{36}$	$-\frac{17.5}{10}$	$\frac{76}{8}$	$-\frac{210.5}{18}$	$\frac{1970}{360}$

Ta có bảng hệ số sau :

	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4
$\frac{w_{n+1}(x)}{x-x_0}$	168	-206	89	-16	1
$\frac{w_{n+1}(x)}{x-x_1}$	84	-145	75	-15	1
$\frac{w_{n+1}(x)}{x-x_2}$	56	-106	63	-14	1
$\frac{w_{n+1}(x)}{x-x_3}$	42	-83	53	-13	1
$\frac{w_{n+1}(x)}{x-x_4}$	24	-50	35	-10	1
$P_n(x)$	104.5	-153.5	81	-17	2

II. Đa thức nội suy Lagrange

4. Thảo luận

4. Thảo luận

Ưu điểm

- Phương pháp nội suy Lagrange không quá phức tạp về tính toán, chỉ sử dụng phép tính cộng trừ nhân chia.

II. Đa thức nội suy Lagrange

4. Thảo luận

Ưu điểm

- Phương pháp nội suy Lagrange không quá phức tạp về tính toán, chỉ sử dụng phép tính cộng trừ nhân chia.

Nhược điểm

- Sai số của đa thức nội suy phụ thuộc vào các mốc nội suy. Do đó ta không thể khống chế được sai số như mong muốn. Thậm chí, sai số có thể tiến ra vô cùng.
- Khi bổ sung thêm mốc nội suy thì ta phải tính toán lại từ đầu chứ không dùng được kết quả đã tính toán.