Nội suy ngược

Nguyễn Tiến Dũng - 20170062

Mục lục

Giới thiệu chung

Bài toán

Bài toán

Cho $D = \left\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i = 1, 2, .., n, \right\}$, giả định được lấy mẫu từ hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Kí hiệu $y_l, y_h = \min\{y_i\}, \max\{y_i\}$ và $x_l, x_h = \min\{x_i\}, \max\{x_i\}$.

Khi đó, với $\overline{y} \in [y_l, y_h]$, tìm $\overline{x}$ sao cho $f(\overline{x}) = \overline{y}$

Lý thuyết chung

Bài toán
Cho $D = \left\{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i = 1, 2, .., n, \right\}$. Xác định đa thức P_n sao cho $P_n\left(x_i\right) = y_i, \forall i = 1, 2, ..., n$

Nội suy Lagrange
Với nội suy Lagrange, đa thức nội suy $P_n(x)$ được xác định như sau

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

Nội suy Newton

Bảng tỉ hiệu
Tỉ hiệu (divided difference), kí hiệu $f\left[x_0, x_1, ..., x_k\right]$ được xác định như sau

$$\begin{cases} f\left[x_i\right] & = f\left(x_i\right) \\ f\left[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}\right] & = \dfrac{f\left[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k-1}\right] - f\left[x_{i+1}, x_{i+2}, ..., x_{i+k}\right]}{x_{i+k} - x_i} \end{cases}$$

Nội suy Newton
Đa thức nội suy Newton $P_n(x)$ cho bởi các mốc nội suy trên như sau

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, ..., x_i] \prod_{j=0}^{i} (x - x_j)$$

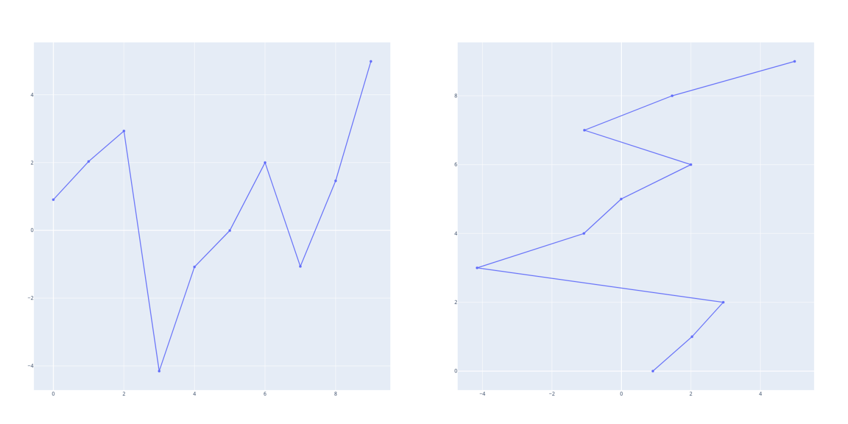
Nội suy ngược

Phương pháp
Một số phương pháp thường dùng

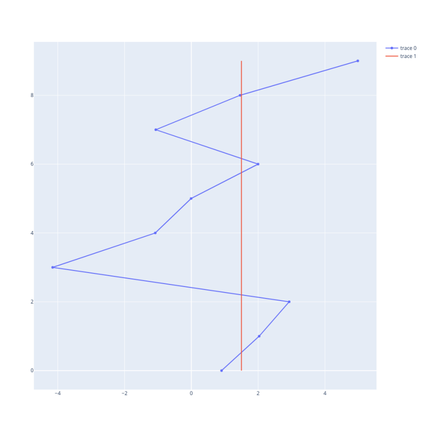
1. Sử dụng công thức nội suy Lagrange để tìm hàm ngược
2. Phương pháp lặp
3. Sử dụng chuỗi ngược

Báo cáo tập trung vào 2 phương pháp đầu tiên là tìm hàm ngược và sử dụng phương pháp lặp

Điều kiện tồn tại hàm ngược



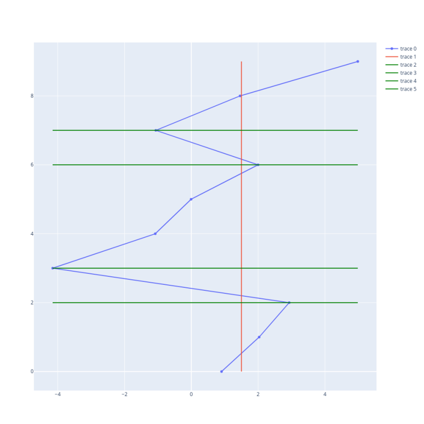
Điều kiện tồn tại hàm ngược



Phương pháp hàm ngược

Phương pháp

Thực hiện tách tách thành khoảng đơn điệu theo y



Phương pháp

Xem y là biến độc lập, x là biến phụ thuộc.

$\overline{D} = \left\{(y_i, x_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i = k, k+1, ..., k+s\right\}$. Thực hiện xây dựng đa thức nội suy $P_s(y) = f^{-1}(y)$.

Nghiệm cần tìm $\overline{x}$ được cho bởi $P_s(y)$

Phương pháp lặp

Ý tưởng
Xây dựng theo ý tưởng đường tiếp tuyến. Ta tìm đa thức nội suy $y = P_n(x) \sim f(x)$, biến đổi về dạng $x = g(x)$ rồi thực hiện quá trình lặp để tìm nghiệm của đa thức

Phương pháp

Công thức nội suy Newton tiến với mốc cách đều, trong đó $h = x_{k+1} - x_k$và $t = \dfrac{\overline{x} - x_k}{h}$

$$\begin{aligned} P_n(\overline{x}) &= P_n(x_0 + th) \\ &= y_k + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Delta^i y_k}{i!} \prod_{j=0}^{i} (t - j) \end{aligned}$$

Phương pháp

Do $\overline{y} = P_n(\overline{x})$ nên việc tìm $\overline{x}$ được quay lại việc giải phương trình ẩn t

$$\begin{aligned}\overline{y} &= \psi(t) \\ &= P_n(x_k + th) \\ &= y_k + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Delta^i y_k}{i!} \prod_{j=0}^{i} (t - j)\end{aligned}$$

Biến đổi

$$t = \frac{1}{\Delta y_k}\left(\overline{y} - y_k - \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_k - \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_k - \dots\right)$$

Phương pháp

Trong trường hợp nội suy Newton tiến không tận dụng được nhiều mốc nội suy, chuyển sang nội suy Newton lùi thay thế

$$\begin{aligned}\overline{y} &= P_n\left(\overline{x}\right) \\ &= P_n\left(x_{k+s} + th\right) \\ &= y_{k+s} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\nabla^i y_{k+s}}{i!} \prod_{j=0}^{i} (t+j)\end{aligned}$$

trong đó

$$t = \frac{\overline{x} - x_{k+s}}{h}$$

Phương pháp
Biến đổi để được công thức lặp

$$t = \frac{1}{\nabla y_k}\left(\overline{y} - y_k - \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 y_k - \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\nabla^3 y_k - \dots\right)$$

Phương pháp

Tóm lại, trong cả 2 trường hợp, đều đưa bài toán về giải phương trình

$$t = \varphi(t)$$

trong đó φ có biểu diễn khác nhau tùy thuộc vào sử dụng công thức Newton tiến hoặc lùi

Phương pháp

Phương trình $t = \varphi(t)$ được giải bằng phương pháp lặp, với xấp xỉ ban đầu cho bởi

$$\begin{cases} y_0 & = \dfrac{\overline{y} - y_k}{h} \text{ với nội suy Newton tiến} \\ y_0 & = \dfrac{\overline{y} - y_{k+s}}{h} \text{ với nội suy Newton lùi} \end{cases}$$

Thuật toán

Phương pháp hàm ngược

Tóm tắt thuật toán
Phương pháp hàm ngược gồm các bước chính như dưới đây

1. Xác định các khoảng đơn điệu
2. Với $\overline{y}$ cho trước, xác định các khoảng đơn điệu chứa $\overline{y}$
3. Với mỗi một khoảng đã xác định tại bước 2, sử dụng nội suy Lagrange để xác định đa thức $P_s(y)$ sao cho $P_s(y_i) = x_i$

Phương pháp hàm ngược

Algorithm 1: Xác định khoảng đơn điệu

Input: $y_0, y_1, ..., y_n$

diff $= [y_0, y_1 - y_0, ..., y_{k+1} - y_k, ..., y_n - yn - 1]$

indices $= []$

for index *from 1 to n* **do**

  if *diff[index - 1]* $\times$ *diff[index - 1]* $<$ *0* **then**

    Add **index** to **indices**

Output: indices

Thuật toán trả về các điểm đầu/cuối của mỗi khoảng đơn điệu

Xác định hàm ngược
Trên mỗi khoảng đơn điệu đã tìm được theo thuật toán trên, thực hiện nội suy Lagrange, thu về hàm ngược

Phương pháp hàm ngược

Ví dụ

Tìm nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ biết

x	30	34	38	42	46	50
$f(x)$	-30	-13	3	18	14	10

Nhận thấy có 2 khoảng đơn điệu, phân tách bởi các điểm tại vị trí

$$\text{indices} = [3]$$

tương ứng với hai khoảng đơn điệu

$$\begin{cases} x : 30 \to 42 & y : -30 \to 18 \\ x : 42 \to 50 & y : 18 \to 10 \end{cases}$$

Phương pháp hàm ngược

Từ đây, ta có $\overline{y} = 0 \in [-30, 18]$ tương ứng với khoảng $[30, 34, 38, 42]$ của x. Ta thực hiện nội suy Lagrange trên các mốc này

$$\begin{aligned}
x &= P_3(y) \\
&= \frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y_0-y_3)} \times x_0 + \frac{(y-y_0)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)(y_1-y_3)} \times x_1 \\
&+ \frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)(y_2-y_3)} x_2 + \frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_0)(y_3-y_1)(y_3-y_2)} x_3 \\
&= \frac{(y+13)(y-3)(y-18)}{(-30+13)(-30-3)(-30-18)} \times 30 + \frac{(y+30)(y-3)(y-18)}{(-13+30)(-13-3)(-13-18)} \times 34 \\
&+ \frac{(y+30)(y+13)(y-18)}{(3+30)(3+13)(3-18)} \times 38 + \frac{(y+30)(y+13)(y-3)}{(18+30)(18+13)(18-3)} \times 42
\end{aligned}$$

Tại $\overline{y} = 0$,ta có $\overline{x} = 37.23$

Tóm tắt thuật toán

Thuật toán chung tóm tắt như sau:

1. Với $\overline{y}$ cho trước nằm trong khoảng giá trị $[y_{min}, y_{max}]$, xác định khoảng phân li nghiệm
2. Xác định khoảng đơn điệu chứa khoảng phân li nghiệm
3. Xác định số lượng mốc nội suy tính từ khoảng phân li nghiệm để xác định phương pháp Newton tiến hoặc Newton lùi
4. Xây dựng công thức nội suy Newton
5. Thực hiện lặp để xác định nghiệm $\overline{x}$

Phương pháp lặp

Algorithm 2: Xác định khoảng phân li nghiệm

Input: $y_0, y_1, ..., y_n$ và $\bar{y}$

```
diff = [ȳ − y_0, ȳ − y_1, ..., ȳ − y_n]
indices = []
for index from 1 to n do
    if diff[index - 1] × diff[index] < 0 then
        Add (index - 1, index) to indices
```

Output: indices

Trong đó **indices** chứa các cặp điểm tương ứng là 2 đầu của khoảng phân ly nghiệm. Từ đây xác định khoảng đơn điệu chứa nghiệm.

Thuật toán
Thực tế phương trình $t = \varphi(t)$ không phải luôn có nghiệm, do đó để đảm bảo tính dừng, thuật toán sử dụng thêm $\tau > 0$ để dừng khi phép lặp không cải thiện được đáng kể, và N là số lần lặp tối đa.

Phương pháp lặp

Algorithm 3: Phương pháp lặp

Input: $X, Y, \bar{y}, \tau, N$

monotonicIndices = **monotonicSeparate**(Y)

isolationInterval = **rootIsolationInterval**$(Y, \bar{y})$

if *số mốc tiến số mốc lùi* **then**

  method = Newton tiến & $t = \dfrac{\bar{y} - y_k}{\Delta y_k}$

else

  method = Newton lùi & $t = \dfrac{\bar{y} - y_{k+s}}{\nabla y_{k+s}}$

$P_n(x) = \text{Newton}_{\text{method}}$

Xác định $\varphi(t)$

for ite *from 1 to N* **do**

  $\tilde{t} = t$

  $t = \varphi(t)$

  if $\mid t - \tilde{t} \mid < \tau$ **then**

    STOP

Output: t

Phương pháp lặp

Thực tế ta có thể đưa ra thuật toán giúp lựa chọn phương pháp với nhau, bao gồm nội suy sử dụng hàm ngược, phương pháp lặp theo công thức Newton tiến/lùi dựa vào số mốc nội suy khả dụng. Thuật toán cụ thể như sau:

Algorithm 4: Xác định phương pháp nội suy ngược

Input: $\{y_n\}, \bar{y}$

isolatedIntervals $=$ *isolateInterval*$(\{y_n\}, \bar{y})$

for *interval in isolatedIntervals* **do**

numberOfValues $=$ length of $(containingSequences)$

usableForward $= n - interval_1$

usableBackward $= interval_0 + 1$

method $=$ as much as interpolation points as possilbe

$\iff \max\{numberOfValues, usableBackward, usableForward\}$

Output: method

Chương trình và minh họa

Chương trình

Các ví dụ được trình bày trong file chương trình **sample.ipynb**

Examples

Cho các mốc nội suy $y = f(x)$ bởi bảng sau

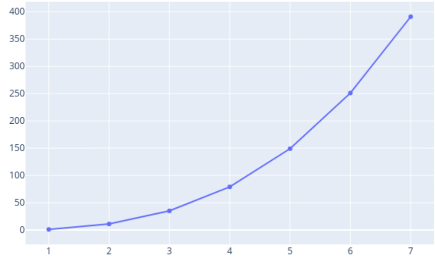
x	1	2	3	4	5	6	7
y	1	11	35	79	149	251	391

Bảng 4.1: Bảng các mốc nội suy

Xác định x sao cho $f(x) = 15$

Một số ví dụ

Hàm mẫu đặc trưng $f = x^3 + x^2 - 1$. Giá trị đúng của x để $f(x) = 15$ là $x^* = 2.227$. Đồ thị như sau:



Hình 4.1: Đồ thị của các điểm dữ liệu cho bởi bảng 4.1

Một số ví dụ

Kết quả thực nghiệm như sau

Hàm ngược	2.268
Lặp theo công thức Newton tiến	1.765
Lặp theo công thức Newton lùi	1.583

Bảng 4.2: Kết quả nội suy tương ứng

Một số ví dụ

Examples

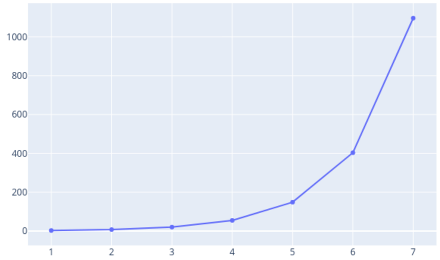
Cho các mốc nội suy $y = f(x)$ bởi bảng sau

x	1	2	3	4	5	6	7
y	2.72	7.39	20.09	54.60	148.41	403.43	1096.63

Bảng 4.3: Bảng các mốc nội suy

Xác định x sao cho $f(x) = 12.34$

Hàm mẫu đặc trưng $f(x) = e^x$. Giá trị đúng của x để $f(x) = 12.34$ là $x^* = 2.51$.



Hình 4.2: Đồ thị cho bởi bảng 4.3

Một số ví dụ

Hàm ngược	14.8168
Lặp theo công thức Newton tiến	NaN
Lặp theo công thức Newton lùi	3.287

Bảng 4.4: Kết quả nội suy ngược ứng với $y = 12.34$ cho bởi 3 phương pháp

Một số ví dụ

Examples

Cho các mốc nội suy $y = f(x)$ bởi bảng sau

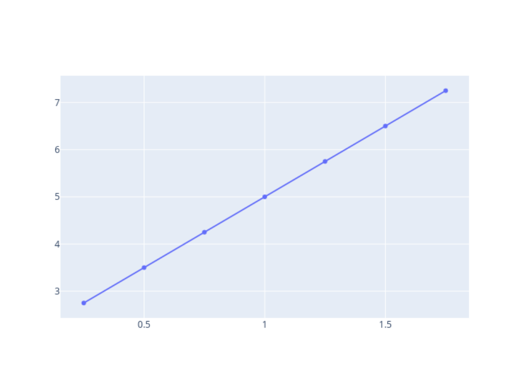
x	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75
y	2.75	3.5	4.25	5	5.75	6.5	7.25

Bảng 4.5: Bảng các mốc nội suy

Tìm x sao cho $f(x) = 4.5$.

Một số ví dụ

Hàm số f trên được cho bởi $f(x) = 3x + 1$ là một đường thẳng và có dạng đơn giản. Đồ thị của hàm số như sau



Hình 4.3: Đồ thị tạo bởi các giá trị trong bảng 4.5

Một số ví dụ

Hàm ngược	0.8333
Lặp theo công thức Newton tiến	-0.3383
Lặp theo công thức Newton lùi	-0.3383

Bảng 4.6: Kết quả nội suy ngược ứng với $y = 4.5$ cho bởi 3 phương pháp

Nhận xét

Một số nhận xét về các phương pháp

1. Đối với các hàm đơn điệu, nội suy bằng ngược có khả năng sử dụng nhiều mốc nội suy hơn
2. Đối với các hàm mục tiêu là đa thức, phương pháp hàm ngược có khả năng cho kết quả gần hơn
3. Đối với các hàm không đơn điệu, phương pháp lặp sử dụng được nhiều mốc nội suy hơn
4. Phương pháp lặp sẽ lặp vô hạn với các hàm affine do sai phân cấp 2 trở lên đều bằng 0

Nhận xét

So sánh

Dựa theo các ví dụ được trình bày trong báo cáo và chương trình, ta có một số nhận xét như sau

	Hàm ngược	Lặp
Các mốc nội suy không cách đều	Có	Không
Các mốc nội suy cách đều	Có	Có
Các mốc nội suy đơn điệu	Dùng được nhiều nhất các mốc nội suy.	Có thể không dùng toàn bộ các mốc nội suy.
	Có thể khiến cho đa thức nội suy quá phức tạp	Đa thức nội suy đơn giản hơn
Các mốc nội suy không đơn điệu	Có thể chỉ sử dụng được 2 mốc nội suy	Linh hoạt thay đổi giữa công thức tiến/lùi để sử dụng được nhiều mốc nội suy hơn
Các giá trị nội suy $\{y_n\}$ cách đều	Thực hiện được	Lặp vô hạn