Báo cáo Giải tích số - Phương pháp tiếp tuyến

Mạc Anh Kiệt - 20200307

November 2021

1 Ý tưởng phương pháp

- Thay thế đường cong trên $[a, b]$ bằng tiếp tuyến.
- Tìm giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành thay cho giao điểm của đường cong với trục hoành

2 Xây dựng công thức

Xét phương trình $f(x) = 0$ và khoảng cách li nghiệm (a, b). Gọi $M(x_0, f(x_0))$ là điểm Fourier nếu $f(x)f''(x) > 0$.
Chọn điểm Fourier là điểm ban đầu, tức là:
Chọn $X_0 : f(x_0)f''(x_0) > 0$ và đặt $M_0(x_0, f(x_0))$. Gọi d_k là tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại M_k

Ta có:

$$\begin{gathered}
d_0 \cap Ox \equiv (x_1, 0) \Rightarrow M_1(x_1, f(x_1)) \\
d_1 \cap Ox \equiv (x_2, 0) \Rightarrow M_2(x_2, f(x_2)) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
d_{n-1} \cap Ox \equiv (x_n, 0) \Rightarrow x_n \approx x^*
\end{gathered}$$

Phương trình đường thẳng d_k:

$$y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k) \qquad (*)$$

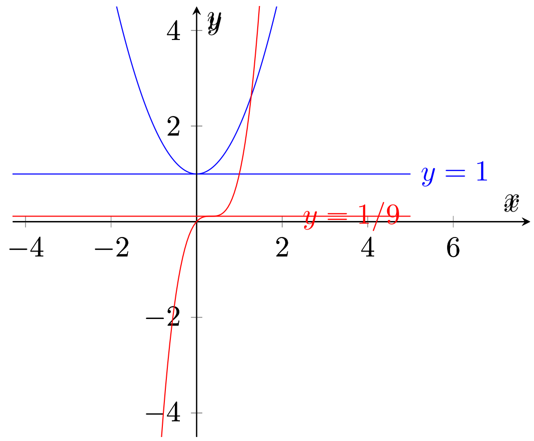
Vì $d_k \cap Ox \equiv (x_{k+1}, 0)$ nên ta có:

$$x_{k+1} = x_k - \tfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (**)$$

3 Đặc điểm của phương pháp

3.1 Sự hội tụ của phương pháp

Điều kiện hội tụ:
- (a, b) là khoảng cách li nghiệm. - f', f'' liên tục, xác định dấu không đổi trên $[a, b]$. - Chọn đúng $x_0 : f(x_0)f''(x_0) > 0$.



Lí do $f'(x) \neq 0, f''(x) \neq 0$

3.2 Định lý về sự hội tụ

Với các điều kiện đã nêu, dãy lặp (**) hội tụ đến nghiệm đúng của phương trình theo đánh giá sau:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}(1)$$
$$|x_n - x^*| \leq \frac{M_2}{2*m_1}(|x_n - x_{n-1}|)^2 \; m_1 = min_{x\in[a,b]}|f'(x)|; max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

3.3 Chứng minh định lý về sự hội tụ

- Các bước chứng minh:

+ Dãy x_n đơn điệu và bị chặn.

+ Giới hạn của dãy là nghiệm của phương trình.

+ Đưa ra các công thức sai số. - Dãy x_n đơn điệu:

Trường hợp 1:

$$f'(x) > 0; f''(x) > 0 \forall x \in [a, b]$$

Xét điểm $M(t, f(t)), t \in [a, b]$ bất kỳ.

Khi đó

$$f(x) - h_t(x) > 0 \forall x \in [a, b], x \neq x_0$$
$$h_t(x) := f'(t)(x - t) + f(t)$$

- Ta có:

$$f''(x) > 0 \forall x \in [a, b] \Rightarrow f(x_0) > 0$$

- Mặt khác:

$$h_{x_0}(x) := f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$h_{x_0}(x_1) = 0 < f(x_0) = h_{x_0}(x_1) = 0$$
$$\Rightarrow a < x_1 < x_0, f(x_1) > h_{X_0}(x_1) = 0$$

- Lý luận tương tự:

$$x_1 : f(x_1) > 0 \Rightarrow a < x_2 < x_1, f(x_2) > 0$$

- Giới hạn của dãy là nghiệm của phương trình:

- Gọi:

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})})$$
$$\Rightarrow \alpha = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \Rightarrow f(\alpha) = 0$$

3.4 Ưu nhược điểm của phương pháp

- Ưu điểm
+ Tốc độ hội tụ cao.
+ Kết quả có độ chính xác cao.
- Nhược điểm: Điều kiện lựa chọn điểm x_0 ban đầu yêu cầu khá chặt.

3.5 Công thức sai số

- Công thức sai số mục tiêu:
$$|x_n - \alpha| = |\frac{f(x_n)}{f'(c)}| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1}$$
- Công thức sai số theo hai xấp xỉ liên tiếp:
$$|x_n - \alpha| \le \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2$$

4 Thuật toán

* **Tìm** x_0
Input: $f(x), a, b, \epsilon$.
Bước 1: nhập lần lượt sai số giới hạn, hàm $f(x)$ cũng như một đoạn $[a, b]$ muốn khảo sát trên đồ thị (Đồ thị của cả $f(x)$ và $f''(x)$ để tiện quan sát).
Bước 2: Quan sát đồ thị được vẽ, lựa chọn $[a, b]$ mới sao cho f', f'' xác định dấu không đổi, lựa chọn một điểm bất kì thuộc $[a, b]$. (Ở đây lấy $a + b/2$).
Bước 3: chọn $x_0 = a$ nếu $f(a) * f''((a + b)/2) > 0$, trái lại chọn $x_o = b$.
*** Tìm nghiệm của phương trình.**
Input: a, b.
Bước 1: Tìm m_1.
Bước 2: Tính :
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
Bước 3: So sánh với sai số giới hạn ban đầu:
$$\frac{|f(x_1)|}{m_1} \le \varepsilon$$
Nếu so sánh trên là thoả mãn, kết thúc quá trình. Nếu chưa thoả mãn, quay trở lại bước 2 và tiếp tục vòng lặp cho tới khi thoả mãn điều kiện ở bước 3.
Ví dụ: $x^4 - 4x^3 + 2cos(x) - 3 = 0$
Nhập sai số giới hạn: 10e-5 (10^-4)
Tiếp theo nhập hàm vào, tiếp tục là nhập khoảng để vẽ đồ thị khảo sát (Ở đây chọn từ -3 đến 3, bước nhảy 0.2). Đường màu xanh là đồ thị $f(x)$, màu đỏ là $f''(x)$.
Quan sát trên đồ thị, thấy 2 điểm cắt trục hoành của đồ thị hàm f(x). Lựa chọn khoảng ly nghiệm chứa điểm cắt, và đảm bảo hàm $f''(x)$ không đổi dấu. Nhập số nghiệm dự kiến. Tiếp theo nhập khoảng ly nghiệm tìm được ở trên, để máy tìm ra nghiệm thứ nhất, tiếp tục nhập khoảng ly nghiệm thứ 2, ta được 2 nghiệm của phương trình.

```
Nhap so nghiem phuong trinh co the co: 2
Tim nghiem thu
     1

Nhap a: -1
Nhap b: -0.5
Nghiem gan dung:

ans =

   -0.6751

Tim nghiem thu
     2

Nhap a: 4
Nhap b: 5
Nghiem gan dung:

ans =

    4.0628

Cac nghiem:

alpha =

   -0.6751    4.0628
```

5 So sánh phương pháp tiếp tuyến và phương pháp chia đôi

- Về tốc độ hội tụ: Phương pháp chia đôi có tốc độ hội tụ chậm hơn phương pháp tiếp tuyến.
- Về độ phức tạp thuật toán: Phương pháp chia đôi là một phương pháp đơn giản với độ hiệu quả cao, trong khi đó phương pháp tiếp tuyến yêu cầu giá trị chọn ban đầu chặt chẽ hơn rất nhiều, cũng như việc đạo hàm hàm $f(x)$ đôi khi khá là phức tạp.
- Về số lượng phép toán cần thực hiện: Thường số lần lặp lại của phương pháp chia đôi là lớn hơn phương pháp tiếp tuyến khá nhiều.

$\Rightarrow$ *Phương pháp tiếp tuyến sẽ là phương pháp hiệu quả và tối ưu hơn, được sử dụng nhiều hơn.*

6 Phương pháp tiếp tuyến trong không gian nhiều chiều

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1,...,x_n) \\ f_2(x_1,...,x_n) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(x_1,...,x_n) \end{pmatrix} = f(x) = 0$$

$$f(x+\delta) \approx f(x) + J(x)\delta = 0$$

Giả sử chúng ta muốn tìm nghiệm cho phương trình $f(x) = 0$ phía trên với $x \in R^n$ và $f(x) \in R^n$ với $f(x)$ phi tuyến nhưng khả vi trong không gian n chiều. Đưa ra một dự đoán về nghiệm x, rồi sử dụng khai triển Taylor bậc 1 đối với x để gia tăng độ chính xác của nghiệm, tìm được nghiệm chính xác hơn $x + \delta$ như trên.(J là ma trận Jacobi nxn với $J_{ij} = \partial f_i/_j$).

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & ... \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & ... \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

Khi đó, ta có phương trình tuyến tính:

$$J(x)\delta = -f(x)$$

Công thức nghiệm (Nếu J khả nghịch):

$$x + \delta = x - J(x)^{-1}f(x)$$