Chủ đề 11: Phương pháp lặp đơn và Jacobi giải gần đúng hệ phương trình

Nguyễn Thị Ngọc Lan
MSSV: 20185372

Môn Giải tích số
Đại học Bách Khoa Hà Nội

1/11/2021

I.Kiến thức chuẩn bị

1. Giới hạn của dãy vecto

Định nghĩa 1.1

Xét dãy các vecto $(X^{(n)})_n^{\infty}$ với $X^{(n)} \in {}^n$. Dãy các vecto này được gọi là hội tụ về vecto $\overline{X}$ khi $n \to +\infty$ nếu và chỉ nếu

$$\left\| X^n - \overline{X} \right\| \to 0$$

khi $n \to +\infty$ (hội tụ theo chuẩn).

Định lý 1.1

Để dãy các vecto $(X^{(n)})_n^{\infty}$ hội tụ về vecto $\overline{X}$ khi $n \to +\infty$ thì điều kiện cần và đủ là những dãy $(x_k^{(n)})$ hội tụ về $\overline{x_k}$,$\forall k = 1, 2, \ldots, n$. (hội tụ theo tọa độ)

2, Chuẩn của ma trận và vecto

a, Chuẩn của ma trận

Định nghĩa

Chuẩn của ma trận cấp $m \times n$: $A = (a_{ij})$ là một số thực không âm được kí hiệu là thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $\|A\| > 0$ (với $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$)
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \alpha$ là số thực bất kì.
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Chuẩn thường dùng

Chuẩn cột: $$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

Chuẩn hàng: $$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

I.Kiến thức chuẩn bị

Ví dụ

VD 1.2: Cho $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$, ta tính được các chuẩn của A theo định nghĩa trên như sau:

$$\|A\|_1 = \max(5+1+2; 2+4+1; 1+3+7) = \max(8; 7; 11) = 11$$
$$\|A\|_\infty = \max(5+2+1; 1+4+3; 2+1+7) = \max(8; 8; 10) = 10$$

b. Chuẩn của vecto

Vecto là ma trận có n hàng và 1 cột, do đó đối với vecto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ ta có hai chuẩn sau:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$
$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

3, Sự không ổn định của hệ phương trình đại số tuyến tính

Định nghĩa

Định nghĩa: Đối với mỗi hệ PTTT, nếu một sự thay đổi nhỏ của các hệ số dẫn đến sự thay đổi lớn của nghiệm thì hệ đó không ổn định. Ngược lại là hệ ổn định.

VD 1.2

Cho hệ $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x + 1.01y = 2.01 \end{cases}$ có nghiệm $x = 0.5, y = 1$.

Hệ $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2.01x + 1y = 2.05 \end{cases}$ có nghiệm $x = 5, y = -8$.

Nhận xét 1.1

Xét hệ $AX = b$, A là ma trận vuông. Ta gọi số điều kiện của ma trận không suy biến A là $Cond\left(A\right) = \|A\| . \left\|A^{-1}\right\|$ • $Cond\left(A\right)$ gần với 1: Hệ ổn định. • $Cond\left(A\right)$ càng lớn: hệ càng không ổn định. Nếu A suy biến thì $Cond\left(A\right)$ được xem là vô hạn.

II, Phương pháp lặp đơn

1. Bài toán

Giải hệ phương trình tuyến tính $AX = b$ (2.1) Trong đó $A \in {}^{n \times n}, b \in {}^{n}$

2. Ý tưởng phương pháp

Đưa phương trình (2.1) về dạng $x = Bx + d = \phi(x)$ (2.2) Trong đó ma trận B và vecto d được xây dựng từ A và b . Để thực hiện phép lặp, ta chọn một vecto ban đầu x^0 sau đó tính các $x^i, i = 1, 2, \ldots$ theo công thức lặp sau:

$$\begin{aligned} x^1 &= \phi\left(x^0\right) = Bx^0 + d \\ x^2 &= \phi\left(x^1\right) = Bx^1 + d \\ &\ldots \\ x^k &= \phi\left(x^{k-1}\right) = Bx^{k-1} + d \end{aligned}$$

(2.3)
Vecto x^k được gọi là vecto lặp thứ k.

3. Sự hội tụ và sai số của phương pháp

Định lý 2.1

Nếu phép lặp (2.3) hội tụ, tức tồn tại x^* sao cho $x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x^k$ thì khi đó x^* là nghiệm của (2.2) (như vậy cũng là nghiệm của 2.1)

Chứng minh: Từ $x^k = \phi\left(x^{k-1}\right)$, với lưu ý là hàm $\phi(x)$ liên tục, ta có:
$\lim\limits_{n\to\infty} x^k = \lim\limits_{n\to\infty} \phi\left(x^{k-1}\right) = \phi\left(\lim\limits_{n\to\infty} x^{k-1}\right) \Rightarrow x^* = \phi(x^*)$

II, Phương pháp lặp đơn

Định lý 2.2

Nếu $\|B\| \leq q < 1$ với một chuẩn nào đó, thì (2.3) hội tụ đến nghiệm duy nhất của phương trình theo hai đánh giá: • Công thức tiên nghiệm:
$\left\|x^k - x^*\right\| \leq \frac{q^k}{1-q}\left\|x^1 - x^0\right\|$ • Công thức hậu nghiệm:
$\left\|x^k - x^*\right\| \leq \frac{q}{1-q}\left\|x^k - x^{k-1}\right\|$

II, Phương pháp lặp đơn

Chứng minh:
* Chứng minh hệ có nghiệm duy nhất: Xét hệ thuần nhất ($d = 0$) $x = Bx$: Ta có

$$\|x\| = \|Bx\| \leq \|B\| \, \|x\|$$

Theo giả thiết:

$$\|B\| \leq q < 1$$

$$\Rightarrow \|x\| \leq \|B\| \, \|x\| \leq q \, \|x\| \Rightarrow (1 - q) \, \|x\| \leq 0$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\|x\| = 0$$

Như vậy hệ thuần nhất $x = Bx$ chỉ có nghiệm tầm thường, nên hệ thuần nhất (2.2) có nghiệm duy nhất, gọi nghiệm đó là x^* thì $x^* = Bx^* + d$

II, Phương pháp lặp đơn

* Chứng minh sự hội tụ

Ta có $x^* = \phi(x^*)$ nên :

$\left\|x^k - x^*\right\| = \left\|\phi\left(x^{k-1}\right) - \phi\left(x^*\right)\right\| = \left\|Bx^{k-1} + d - (Bx^* + d)\right\| = \left\|B.\left(x^{k-1} - x^*\right)\right.$

$\Rightarrow \left\|x^k - x^*\right\| \leq \|B\| \left\|x^{k-1} - x^*\right\| \leq q.\left\|x^{k-1} - x^*\right\| \; (*)$

Ta lại có :

$$\left\|x^{k-1} - x^*\right\| = \left\|x^{k-1} - x^k + x^k - x^*\right\| \leq \left\|x^k - x^{k-1}\right\| + \left\|x^k - x^*\right\|$$

II, Phương pháp lặp đơn

Thay vào (*) ta có: $\left\|x^k - x^*\right\| \leq \frac{q}{1-q}\left\|x^k - x^{k-1}\right\| < \varepsilon$ (**) với k đủ lớn. Đánh giá tương tự (*) có:
$\left\|x^k - x^{k-1}\right\| \leq q\left\|x^{k-1} - x^{k-2}\right\| \leq q^2\left\|x^{k-2} - x^{k-3}\right\| \leq \ldots \leq q^{k-1}.\left\|x^1 - x^0\right\|$
Thay vào (**): $\left\|x^k - x^*\right\| \leq \frac{q^k}{1-q}\left\|x^1 - x^0\right\| < \varepsilon$ với k đủ lớn. Nhận xét, pp hội tụ càng nhanh khi q càng bé.

3. Thuật toán

Gói A: kiểm tra điều kiện xác định loại chuẩn

Input: B
Output: kt(B)
Bước 1: tính chuẩn 1 chuan1(B), và chuẩn vô cùng chuanvc(B) của ma trận B.
Bước 2: kiểm tra:

```
if chuanvc(B) < 1:
        if chuan1(B) < chuanvc(B):
                kt(B) = 1
        else:
                kt(B) = 0
else:
        if chuan1(B) < 1:
                kt(B) = 1
        else:
                kt(B) = -1
```

II, Phương pháp lặp đơn

Gói B: Tính chuẩn

input: kt(B), B, x
output: chuan(B), chuan(x)
If kt(B) = 0:

chuan(B) = chuanvc(B), chuan(x) = chuanvc(x)

Else if kt(B) = 1:

chuan(B) = chuan1(B), chuan(x) = chuan1(x)

II, Phương pháp lặp đơn

Gói C: Lặp đơn

Input: B, d, e
Output: x*

- Bước 1: x0:=d;
- Bước 2: xây dựng hàm phi(x) : = Bx+d
- Bước 3: xk:=phi(x0); x(k-1) :=x0
- Bước 4: thực hiện vòng lặp

While chuan(xk-x(k-1)) > e do:
    x(k-1)=xk ;
    x(k) = phi(x(k-1))

- Bước 5: kết luận x* = xk là nghiệm của hệ phương trình.

Chương trình chính

input: B, d, e
output: x*
Kiểm tra B
If kt(B) = -1:
Kết luận ma trận B không chéo trội, không thể sử dụng phương pháp lặp đơn.
Else:
Sử dụng gói lặp đơn tính x*. Kết luận x* là nghiệm của hệ phương trình.

1. Ma trận chéo trội hàng và ma trận chéo trội cột

Định nghĩa

Ma trận $A = (a_{ij})_n$ được gọi là ma trận chéo trội hàng nếu giá trị tuyết đối của các phần tử nằm trên đường chéo chính lớn hơn tổng trị tuyệt đối của các phần tử còn lại nằm cùng hàng, tức: $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ (3.1)

Ma trận $A = (a_{ij})_n$ được gọi là ma trận chéo trội hàng nếu giá trị tuyết đối của các phần tử nằm trên đường chéo chính lớn hơn tổng trị tuyệt đối của các phần tử còn lại nằm cùng hàng, tức: $|a_{ii}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|$ (3.2)

2.Nội dung phương pháp

Đưa hệ phương trình $Ax = b$ về dạng $x = Bx + d$

2.1 A là ma trận chéo trội hàng

Đặt $D = diag\,(a_{ii})$; $T = D^{-1} = diag\left(\frac{1}{a_{ii}}\right)$

Ta viết lại hệ phương trình ở dạng: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

III, Phương pháp Jacobi

Nhân vào hai vế ma trận T ta có:

$$\begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 1 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

III, Phương pháp Jacobi

Viết gọn lại ta có: $TAx = Tb$

Tách ma trận TA thành ma trận đơn vị cộng với phần còn lại: $TA = I + (TA - I)$

$\Rightarrow x = (I - TA)\,x + Tb = Bx + d$

Suy ra

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Từ điều kiện (3.1) ta rút ra kết luận $\|B\|_\infty = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$ Suy ra luôn tồn tại q: $\|B\| \leq q < 1$

2.2 A là ma trận chéo trội cột

Nhân ma trận T từ bên phải, ta có:

$ATDx = b \Leftrightarrow ATy = b$ (với $y = Dx$)

$AT = I + (AT - I)$

$\Rightarrow y = (I - AT)\,y + b = B_1 y + b$

Vậy ta nhận được hệ phương trình $y = B_1 y + b$ (3.3), trong đó:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{nn}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{nn}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & -\frac{a_{n2}}{a_{22}} & \dots & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Từ điều kiện (3.2): $\|B_1\|_1 = \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$

Chú ý: nếu $y^* = \left(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*\right)$ là nghiệm của hệ (3.3) thì $x^* = \left(\frac{y_1^*}{a_{11}}, \frac{y_2^*}{a_{22}}, \dots, \frac{y_n^*}{a_{nn}}\right)$ là nghiệm của hệ phương trình ban đầu.

3. Công thức sai số

Cách 1: Tính y, suy ra x

Theo pp lặp đơn, công thức sai số của y là :

$$\left\|y^k - y^*\right\| \le \frac{\|B_1\|}{1 - \|B_1\|}\left\|y^k - y^{k-1}\right\|$$

Ta lại có $\left\|x^k - x^*\right\| = \left\|Ty^k - Ty^*\right\| \le \|T\|\left\|y^k - y^*\right\|$

Suy ra:

$$\left\|x^k - x^*\right\| \le \frac{\|T\|\,\|B_1\|}{1 - \|B_1\|}\left\|y^k - y^{k-1}\right\|$$

III, Phương pháp Jacobi

Cách 2: xây dựng công thức lặp cho x Ta có:

$$
\begin{aligned}
& y = B_1 y + b \\
& \Leftrightarrow Ty = TB_1 DTy + Tb \\
& \Leftrightarrow x = TB_1 Dx + Tb \\
& TB_1 D = T(I - AT)D = I - TA = B \\
& \Rightarrow x = Bx + d
\end{aligned}
$$

III, Phương pháp Jacobi

Sai số:

Ta có: $\left\|y^k - y^*\right\| \leq \frac{\|B_1\|}{1-\|B_1\|}\left\|y^k - y^{k-1}\right\|$

Ta lại có:

$\left\|y^k - y^{k-1}\right\| = \left\|D\left(x^k - x^{k-1}\right)\right\| \leq \|D\|\left\|x^k - x^{k-1}\right\|$

$\Rightarrow \left\|x^k - x^*\right\| \leq \|T\|\left\|y^k - y^*\right\| \leq \frac{\|T\|\|B_1\|\|D\|}{1-\|B_1\|}\left\|x^k - x^{k-1}\right\|$

III, Phương pháp Jacobi

Nhận xét:

- Công thức lặp trong trường hợp ma trận A chéo trội cột giống với công thức lặp trong trường hợp ma trận A chéo trội hàng. Tuy nhiên hệ số co của hai trường hợp là khác nhau
- Đối với trường hợp ma trận chéo trội hàng, mọi phép tính nằm trong không gian chuẩn $\|.\|_\infty$
- Đối với trường hợp ma trận chéo trội cột, mọi phép tính nằm trong không gian chuẩn $\|.\|_1$

4. Thuật toán

Gói A: Kiểm tra tính chéo trội

input: ma trận A
output: kt(A)
Bước 1: m = [] = sum(abs(aij) for j = 1 to n
Bước 2:
if (2abs(aii)> m[i] for all i $\in$ (1, n)):
    return kt(A)= 0
else:
    m = sum(abs(aij)) for i = 1 to n
    for all i $\in$ (1, n):
        If 2abs(ajj) > m[j]):
            return kt(A) = 1
        else: return kt(A) = -1

III, Phương pháp Jacobi

Gói B: tính chuẩn

input: kt(A), B, x
output: chuan(B), chuan(x)
If kt(A)=0:

    chuan(B) := chuan_vc(B)
    chuan(v) := chuan_vc(v)

If kt(A)=1:

    chuan(B) := chuan_1(B)
    chuan(v) := chuan_1(v)

III, Phương pháp Jacobi

Gói C: xác định ma trận B và vecto d

Input: A, b
Output: B, d

- Bước 1: Xác định B

```
for i=1 to n
    for j=1 to n
        if i==j: bij:=0
        else: bij:=-(aij)/(aii)
```

- Bước 2: xác định d
  for i=1 to n: d[i] := b[i]/aii

III, Phương pháp Jacobi

Gói D: gói lặp

Input: B, d, e

Output: x*

- Bước 1: x0:=d;
- Bước 2: xây dựng hàm phi(x) : = Bx+d
- Bước 3: xk:=phi(x0); x(k-1) :=x0
- Bước 4: thực hiện vòng lặp While ||xk-x(k-1)||>e do:

  x(k-1)=xk ;

  x(k) = phi(x(k-1))
- Bước 5: kết luận xk là nghiệm của hpt

Hàm main

Input: A, b, e
Output: x*
kiểm tra A
If kt(A) == -1: kết luận: ma trận A không chéo trội
Else:

    If kt(A) == 0:
        Sử dụng gói C, tính B,d
        Eps:=e(1-chuan(B))/chuan(B)
    If kt(A) == 1:
        Tính chuanB1 chuanT, chuanD
        Sử dụng gói C, tính B, d
        Eps := e*(1-chuanB1)/(chuanB1*chuanT*chuanD)
    Sử dụng gói lặp tính lapdon(B,d,eps).

Đánh giá phương pháp

- Ưu điểm
  +, Tiết kiệm bộ nhớ máy tính, số lần lặp cũng như thời gian chạy giảm đáng kể so với các pp tính đúng
  +, Độ chính xác cao hơn do thực hiện kiểm tra độ chính xác sau mỗi lần lặp.
- Nhược điểm
  +, Chỉ áp dụng cho phương trình đưa được về dạng $x = Bx + d$ với $||B|| < 1$
  +, Nếu hệ số co lớn (gần 1), phương pháp sẽ lâu hội tụ

Ví Dụ

Ví dụ 1: Áp dụng phương pháp lặp đơn giải pt x = Bx+d. Trong đó:

$$B = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.06 & 0.02 & 0.03 & 0.02 \\ -0.03 & -0.02 & 0.05 & -0.04 & 0.01 \\ -0.01 & 0.02 & -0.03 & 0.01 & 0.1 \\ 0.02 & 0.03 & 0.04 & -0.01 & 0.05 \\ -0.02 & 0.01 & 0.05 & -0.1 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$, d = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Với sai số e = 10e-10

Ví dụ

Ví dụ 2: Áp dụng phương pháp lặp đơn giải hệ phương trình Ax=b. Trong đó:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

với sai số e = 10e-10