BÁO CÁO MÔN GIẢI TÍCH SỐ

Đề tài: PHƯƠNG PHÁP DÂY CUNG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN

Giảng viên HD: TS. HÀ THỊ NGỌC YẾN

Sinh viên: NGUYỄN TIẾN THÀNH - 20173374

Hà Nội, tháng 1 năm 2022

Mục lục

Lời mở đầu

Trong các bài toán thực tế, việc tìm nghiệm đúng của một phương trình phi tuyến bất kỳ là việc khó khăn. Không dễ dàng tìm công thức nghiệm chính xác cũng như các nghiệm thực là số vô hạn không tuần hoàn. Chính vì vậy, các phương pháp giải gần đúng được đề xuất để thay thế. Các nghiệm gần đúng này được tìm thông qua các phương pháp số và công cụ hỗ trợ là máy tính, với độ xấp xỉ nghiệm đúng trong khoảng chấp nhận được quy định trong từng bài toán cụ thể.

Trong phạm vi bài báo cáo này, em đi sâu vào tìm hiểu một trong các phương pháp giải gần đúng phương trình phi tuyến là phương pháp dây cung. Báo cáo trình bày về ý tưởng của phương pháp, xây dựng thuật toán và nhận xét về phương pháp đã được đề cập ở chủ đề trước là phương pháp chia đôi.

Trong quá trình nghiên cứu, do em có thể chưa hiểu sâu sắc lý thuyết hoặc do thiếu kinh nghiệm nghiên cứu nên sai sót là điều Khó tránh khỏi. Rất mong nhận được ý kiến đóng góp của thầy/cô và các bạn để báo cáo hoàn thiện hơn.

Em xin chân thành cảm ơn.

1 Đặt vấn đề

1.1 Bài toán

Cho hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ hoặc trên khoảng vô hạn và phương trình

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

Mục đích là giải gần đúng (1)

1.2 Những khó khăn khi giải

Phương trình có dạng:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0, (a_n \neq 0)$$

Với $n = 1, 2$ ta có công thức tính nghiệm một các đơn giản.
Với $n = 3, 4$ ta có công thức tính nghiệm phức tạp.
Với $n > 5$ thì không có công thức nghiệm.

Mặt khác, khi $f(x) = 0$ là phương trình siêu việt, ví dụ: $cos(x) - 5x = 0$ thì cũng không có công thức nghiệm.

Ngoài ra, trường hợp chúng ta chỉ biết gần đúng các hệ số của phương trình (1).

Khi đó việc xác định chính xác nghiệm của phương trình (1) không có ý nghĩa. Do đó việc tìm những phương pháp giải gần đúng phương trình (1) cũng như đánh giá mức độ chính xác của nghiệm gần đúng tìm được có một vai trò quan trọng.

Nghiệm của phương trình (1) là giá trị x^* sao cho $f(x^*) = 0$.

Giả sử thêm rằng phương tình (1) chỉ có nghiệm thực cô Lập, nghĩa là với mỗi nghiệm thực của phương trình (1) tồn tại một miền lân cận không chứa các nghiệm khác của phương trình. Về mặt hình học, nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giao điểm của đường cong $y = f(x)$ với trục hoành. Khoảng đóng $[a, b]$ (đôi khi xét khoảng mở (a, b)) mà trên đó tồn tại duy nhất nghiệm của phương trình (1) được gọi là **khoảng cách li nghiệm**.

Việc tính nghiệm thực gần đúng của phương trình (1) được tiến hành theo 2 bước sau:

- Tìm tất cả các khoảng cách ly nghiệm của phương trình (1) để tách cô lập các nghiệm.
- Trong từng khoảng cách ly nghiệm, tìm nghiệm gần đúng của phương trình bằng một phương pháp nào đó với sai số cho trước.

Cơ sở của việc tách nghiệm:

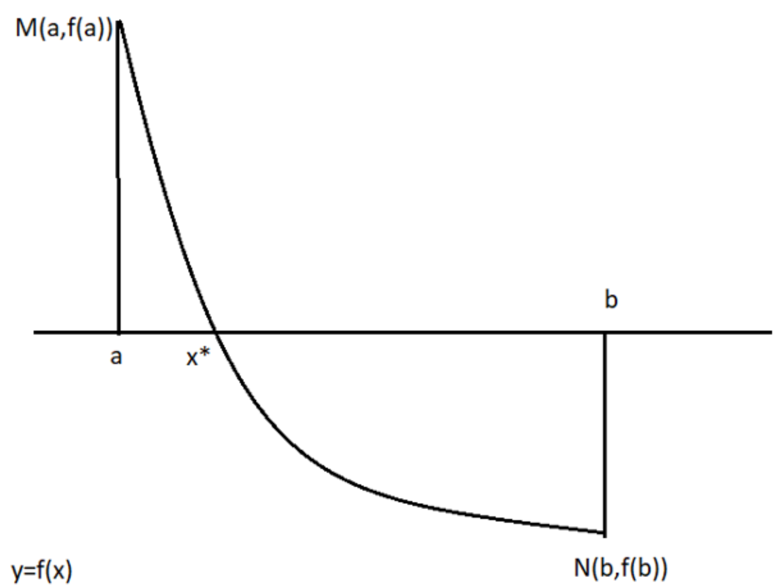
Định lý: Nếu hàm số$f(x)$ liên tục trong (a,b) và $f(a).f(b) < 0$, $f'(x)$ tồn tại và giữ dấu không đổi trong (a,b) thì trong (a,b) chỉ có 1 nghiệm thực x duy nhất của phương trình (1).

Ý nghĩa hình học của định lý: một đường cong liên tục nối hai điểm ở hai phía của trục hoành sẽ cắt trục hoành tại ít nhất một điểm. Nếu đường cong là đơn điệu (tăng hoặc giảm) thì điểm cắt là duy nhất.

2 Phương pháp dây cung

2.1 Ý tưởng

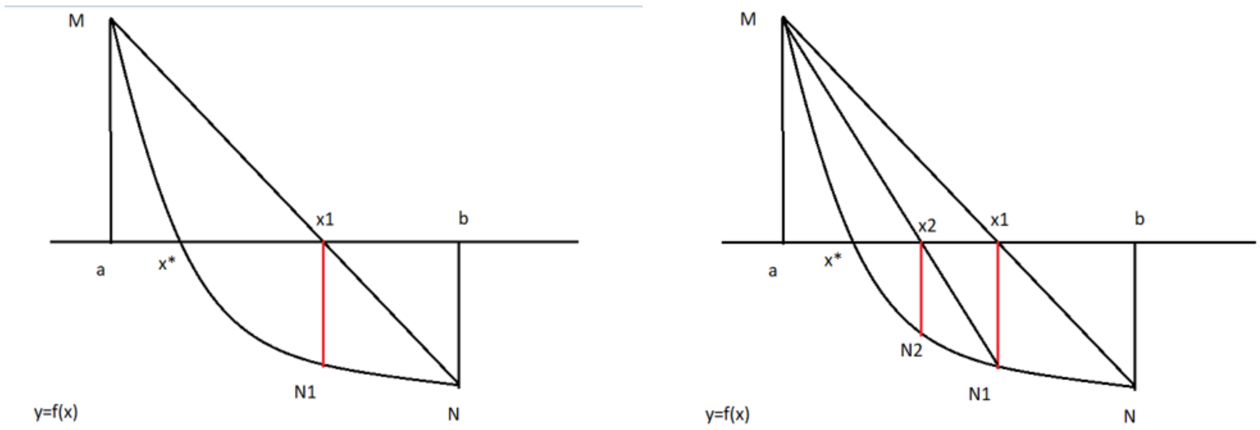
Xét phương trình (1) có nghiệm chính xác x^* trong khoảng $[a, b]$ thì ta có x^* là giao điểm của đường cong $y = f(x)$ với trục Ox. Việc tìm chính xác tọa độ giao điểm sẽ khó khăn. Ta thay thế đường cong bằng đoạn thẳng MN, sau đó tìm giao của dây cung với Ox và ta hi vọng giao điểm mà tìm được đủ gần với nghiệm.



Hình 1: Ý tưởng (1)

Ta được giao điểm đầu tiên của MN là x_1 , ta thấy x_1 còn "xa"nghiệm đúng x^*. Tiếp tục thực hiện bằng cách thay thế MN bằng MN_1 - cố định điểm M với N_1 thuộc $f(x)$ có hoành độ là x_1 - với mục đích là *thu hẹp* khoảng cách li nghiệm, giao điểm của MN_1 với Ox là x^2 đã gần x^* hơn x_1. Tuy nhiên vẫn chưa đủ gần.

Tiếp tục lặp lại bước trên bằng cách thay MN_1 bằng MN_2 - cố định M, N_2 thuộc $f(x)$ có hoành độ là x_2 (hình 2).



Hình 2: Ý tưởng (2)

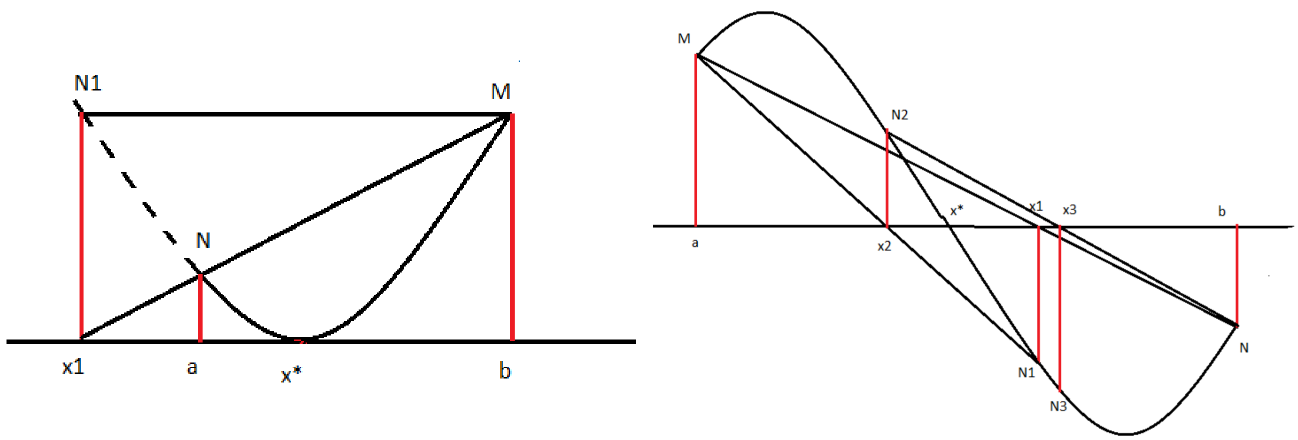
Lặp lại cho đến khi giao điểm của dây cung MN_k với Ox là x_{k+1} đủ gần x^* (sai số nhỏ hơn 1 ϵ cho trước .

2.2 Điều kiện thực hiện

Tuy nhiên, khi thực hiện quá trình thực hiện có thể gặp các khó khăn:

- Tồn tại dây cung song song với Ox không cắt trục hoành khiến cho phương pháp bị ngắt quãng (hình 3a) . Để đảm bảo không có dây cung nào song song với trục hoành.
  Hay $\nexists x \neq \overline{x} : f(x) = f(\overline{x}) \Rightarrow f(x)$ đơn điệu trên $[a, b]$ đang xét.

- Các giao điểm x_k tiến về x^* từ 2 phía dẫn đến khó kiểm soát sự hội tụ về nghiệm (hình 3b)
  $\Rightarrow$ Các dây cung phải nằm cùng về 1 phía so với nghiệm. Để đảm bảo trong quá trình thực hiện, khi thu hẹp khoảng cách li nghiệm các giao điểm có xu hướng chạy về nghiệm từ 1 phía.
  $\Rightarrow$ Hàm luôn lồi hoặc luôn lõm trên $[a, b]$.



(a) (b)

Hình 3: Các trường hợp gây nhiễu

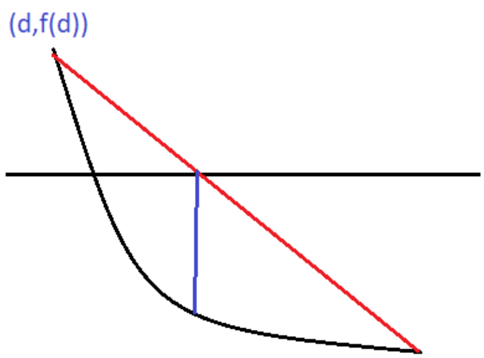
Để phương pháp có thể thực hiện đúng và đảm bảo giao điểm x_{k+1} đủ gần nghiệm, điều kiện cần là:

- (a, b) là khoảng cách li nghiệm

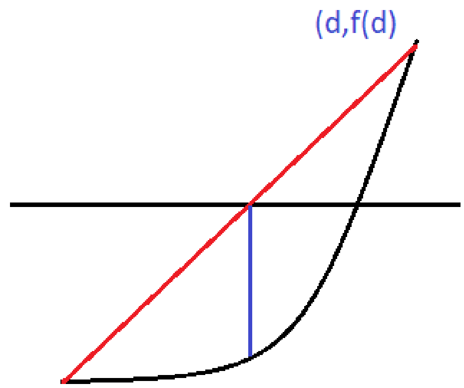
- f', f'' không đổi dấu trên $[a, b]$

2.3 Điều kiện hội tụ

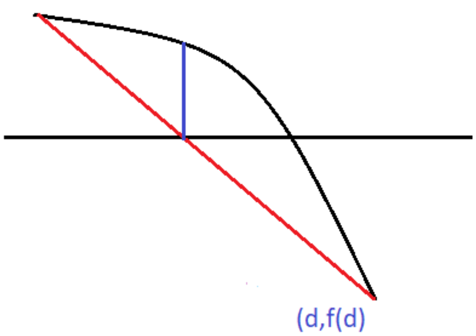
Có 4 trường hợp về dấu của f', f'':



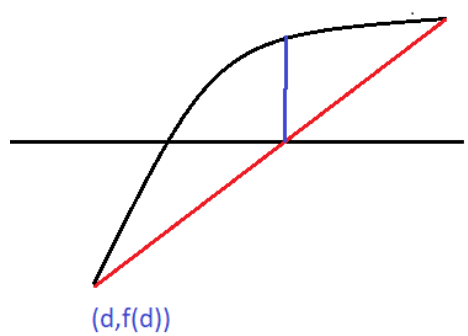
(a) $f' < 0, f'' > 0$



(b) $f' > 0, f'' > 0$

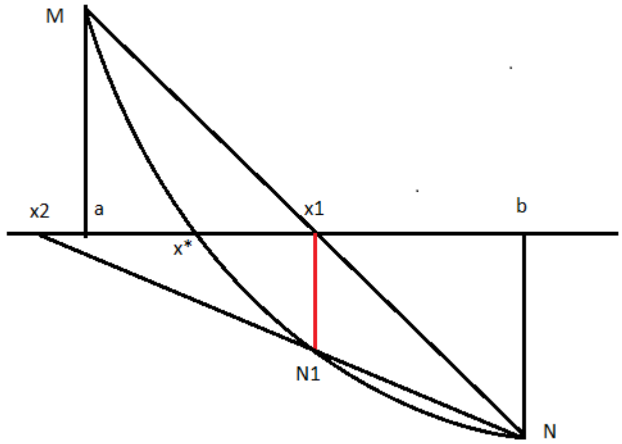


(c) $f' < 0, f'' < 0$



(d) $f' > 0, f'' < 0$

Hình 4: Dấu của f', f''



Hình 5: Việc chọn điểm xuất phát ảnh hưởng đến sự hội tụ

Xét trong trường hợp 4a (hình 4a và hình 5), nếu ta áp dụng phương pháp dây cung xuất phát từ $x_0 = a$ mốc giữ nguyên là $N(b, f(b))$ thì ta sẽ nhận được x_1 nằm trong $[a, b]$ nhưng từ x_2 trở đi có thể nằm ngoài $[a, b]$ vi phạm mục tiêu thu hẹp khoảng cách li nghiệm. Nghĩa là chọn x_0 mà $f(x_0)$ và $f''(x_0)$ không cùng dấu khiến phương pháp dây cung có thể không dùng được.

Điều kiện hội tụ :

- Chọn đúng điểm mốc $M(d, f(d))$ sao cho $f(d).f" > 0$ (gọi là điểm Fourie).
- Chọn đúng điểm xấp xỉ ban đầu x_0 : $f(x_0).f(d) < 0$ (điều kiện đảm bảo khoảng cách li nghiệm)

2.4 Xây dựng công thức nghiệm

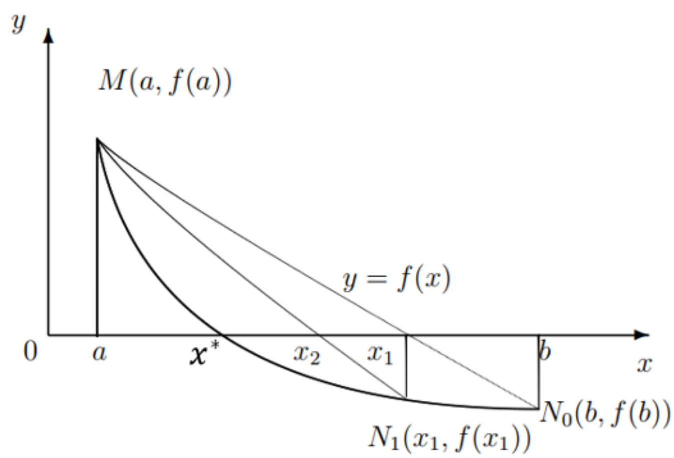
Ta xét 1 trong 4 trường hợp về dấu của f', f'' : $f' < 0, f'' > 0 \forall x \in [a, b]$. Các trường hợp còn lại công thức nghiệm được xây dựng tương tự.

Điểm M(a,f(a)) là điểm Fourie vì $f(a) > 0$. Kí hiệu lại là $M(d, f(d))$.

Gọi x_k là nghiệm xấp xỉ thứ k, $x_0 = b$ là nghiệm xấp xỉ ban đầu . Hoành độ giao điểm của MN_k với trục hoành là nghiệm xấp xỉ x_{k+1} với $M(d, f(d)), N_k(x_k, f(x_k))$

Phương trình đường thẳng qua M và N_k như sau:

$$y = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(d)}{x_k - d}(x - x_k) \tag{2}$$



Hình 6: Trường hợp $f' < 0, f'' > 0$

Cho $y = 0$, ta tìm được xấp xỉ x_{k+1}:

$$0 = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(d)}{x_k - d}(x_{k+1} - x_k)$$

$$\Leftrightarrow x_{k+1} = x_k + \frac{-f(x_k)}{f(x_k) - f(d)}(x_k - d) \tag{3}$$

với $k = 1, 2, ..., \infty$

Ta đã có công thức dãy $\{x_n\}$. Ta cần chứng minh dãy này hội tụ về nghiệm x^*. Hay nói cách khác, ta cần chứng minh dãy đơn điệu và bị chặn, khi đó tồn tại giới hạn và giới hạn này bằng x^*.

Chứng minh: *$\{x_n\}$ đơn điệu, bị chặn:*
Xét trường hợp $f' > 0, f'' > 0 \forall x \in [a, b]$

- $f' > 0$: Hàm đơn điệu tăng
- $f'' > 0 : b = d, a = x_0, f(x_0) < 0$ và $f(x) > y_t(x) \forall x \in (a, b)$. Với $y_t(x) = f(t) + f'(u_k)(x - t)$(dây cung MN_t với mốc M).

Chú ý: Theo định lý giá trị trung bình, tồn tại $u_k \in (x_k, d)$:

$$f'(u_k) = \frac{f(x_k) - f(d)}{x_k - d}$$

và từ (2) $\Rightarrow y_t(x)$

Có $y_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(u_k)(x - x_0)$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} &y_{x_0}(x_1) = 0 > f(x_0) = y_{x_0}(x_0) \\ \Rightarrow &x_1 > x_0 \quad \text{và} \quad f(x_1) < y_{x_0}(x_1) < 0 \\ \Rightarrow &x^* > x_1 > x_0, f(x_1) < 0 \end{aligned}$$

Tương tự, ta có:

$$\begin{aligned} &y_{x_1}(x) = f(x_1) + f'(u_k)(x - x_1) \\ \Rightarrow &y_{x_1}(x_2) = 0 > f(x_1) = y_{x_1}(x_1) \\ \Rightarrow &x^* > x_2 > x_1, f(x_2) < 0 \end{aligned}$$

Chứng minh như trên ta có: $x^* > x_n > x_{n-1} > ... > x_0, f(x_n) < 0 \forall n \in N$
Vậy $\{x_n\}$ đơn điệu tăng, bị chặn bởi x^*.
Suy ra dãy tồn tại giới hạn, gọi giới hạn đó là α. Khi đó:

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{n\to\infty} x_n \\ &= \lim_{n\to\infty} (x_{n-1} + \frac{-f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(d)}(x_{n-1} - d)) \\ \Rightarrow \alpha &= \alpha + \frac{-f(\alpha)}{f(\alpha) - f(d)}(\alpha - d)) \\ \Rightarrow f(\alpha) &= 0 = f(x^*) \end{aligned}$$

Vì f liên tục, đơn điệu $\Rightarrow x^* = \alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$ (điều phải chứng minh).
Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

2.5 Sai số phương pháp

Công thức sai số mục tiêu:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{|f(x_n)}{m_1} \tag{4}$$

Giữa 2 lần xấp xỉ liên tiếp:

$$|x_n - x^*| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_n - x_{n-1}| \tag{5}$$

Với $M_k : \max|f^{(k)}(x)|, m_k : \min|f^{(k)}(x)|$.

Chứng minh: *Công thức sai số:*
(4): Theo định lý trung bình, tồn tại $c \in (x_n, x^*)$ sao cho:

$$f(x_n) = f(x_n) - f(x^*) = f'(c)(x_n - x^*)$$
$$\Rightarrow |x_n - x^*| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(c)|} \le \frac{|f(x_n)}{m_1} \longrightarrow 0 \quad \text{khi} \quad x_n \to x^*$$

(5): Từ công thức nghiệm ta có:

$$-f(x_k) = \frac{f(x_k) - f(d)}{x_k - d}(x_{k+1} - x_k)$$

Xét vế trái, do $f(x^*) = 0$, tồn tại $u_k \in (x_k, x^*)$:

$$-f(x_k) = f(x^*) - f(x_k) = f'(u_k)(x^* - x_k)$$

Xét vế phải, tồn tại $v_k \in (x_k, x_{k+1})$ sao cho:

$$\frac{f(x_k) - f(d)}{x_k - d}(x_{k+1} - x_k) = f'(v_k)(x - k + 1 - x_k)$$

Vậy:

$$f'(u_k)(x^* - x_k) = f'(v_k)(x - k + 1 - x_k)$$
$$\Rightarrow f'(u_k)(x^* - x_{k+1} + x_{k+1} - x_k) = f'(v_k)(x - k + 1 - x_k)$$
$$\Rightarrow |x^* - x_{k+1}| = \frac{|f'(v_k) - f'(u_k)|}{|f'(u_k)|}.|x_{k+1} - x_k|$$

Mà ta có $|f'(v_k) - f'(u_k)| \le M_1 - m_1$, suy ra công thức (5):

$$|x_n - x^*| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_n - x_{n-1}|$$

2.6 Thuật toán

Input: f, a, b, ϵ

Bước 1: Kiểm tra điều kiện (a, b) là khoảng cách li nghiệm.

Bước 2: Kiểm tra điều kiện f', f'' không đổi dấu trên $[a, b]$, gán $z = sign(f'')$.

Bước 3: Chọn $x_0 = a, d = b$ nếu $z.f(a) < 0$. Ngược lại thì gán $x_0 = b, d = a$.

Bước 4: Tính m_1 bằng gói có sẵn trong matlab. Lấy trị tuyệt đối và gán $m_1 = |m_1|$.

Bước 5: Tính $x_1 = x_0 + \frac{-f(x_0)}{f(x_0)-f(d)}(x_0 - d))$

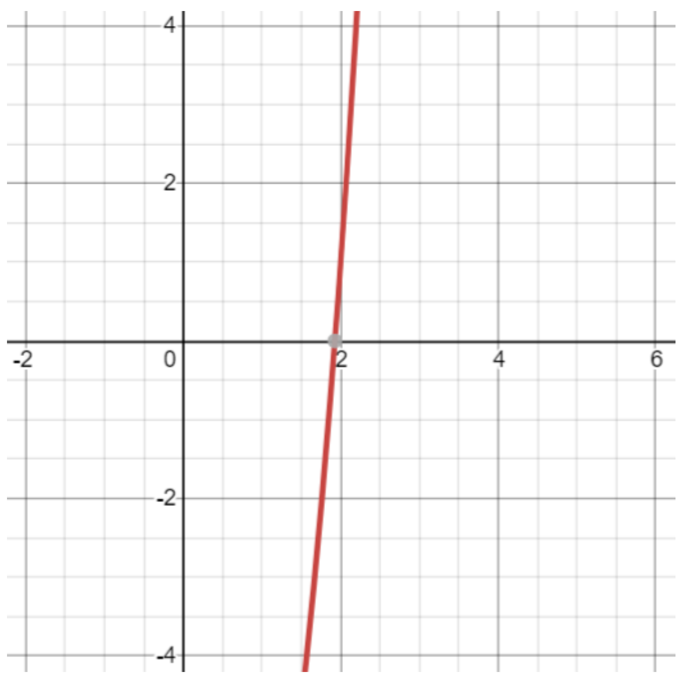
Bước 6: Kiểm tra: $\frac{|f(x_1)|}{m_1} \leq \epsilon$ nếu thoả mãn thì dừng; nếu không, quay lại bước 5.

3 Ví dụ và nhận xét

3.1 Ví dụ

Xét 3 ví dụ dưới đây:

1, $x^3 + 2x - 11 = 0 \quad \epsilon = 0.0001$



Hình 7: Đồ thị $y = x^3 + 2x - 11$

```
Nghiem cua phuong trinh la 1.926244
Sai so: 0.000027
Elapsed time is 0.533084 seconds.
```

(a) $(a, b) = (1.9; 2)$, số vòng lặp: 2

```
Nghiem cua phuong trinh la 1.926255
Sai so: 0.000023
Elapsed time is 0.514879 seconds.
```

(b) $(a, b) = (1.5; 2)$, số vòng lặp: 3

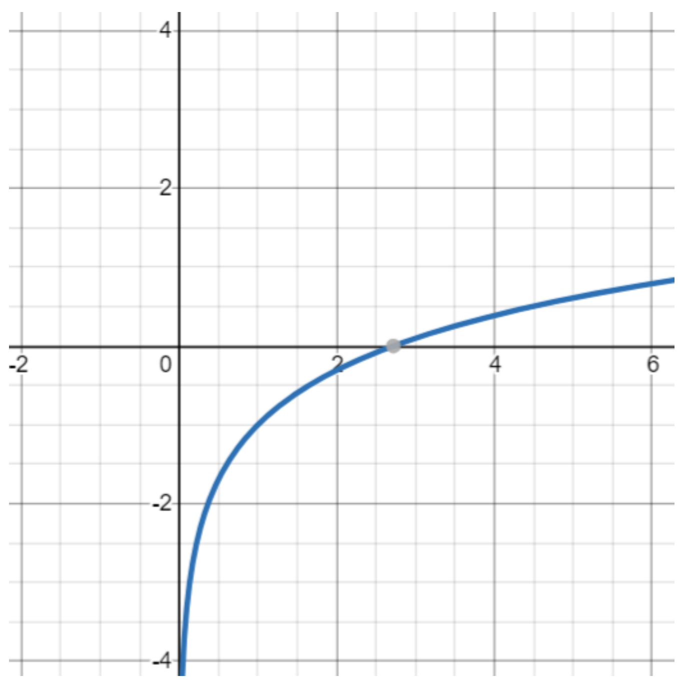
```
Nghiem cua phuong trinh la 1.926220
Sai so: 0.000076
Elapsed time is 0.759131 seconds.
```

(c) $(a, b) = (1.5; 2.5)$, số vòng lặp: 6

Hình 8: Kết quả với các khoảng cách li khác nhau(1)

Tốc độ hội tụ khá nhanh. Số lần lặp ít hơn nhiều so với phương pháp chia đôi (20 lần).

2, $\ln x - 1 = 0 \quad \epsilon = 0.0001 \quad x^* = e$



Hình 9: Đồ thị $y = \ln x - 1$

```
Nghiem cua phuong trinh la 2.718296
Sai so: 0.000016
Elapsed time is 1.657001 seconds.
```

(a) $(a, b) = (2; 3)$ Số vòng lặp: 5

```
Nghiem cua phuong trinh la 2.718320
Sai so: 0.000050
Elapsed time is 1.091959 seconds.
```

(b) $(a, b) = (2; 3.5)$ Số vòng lặp: 5

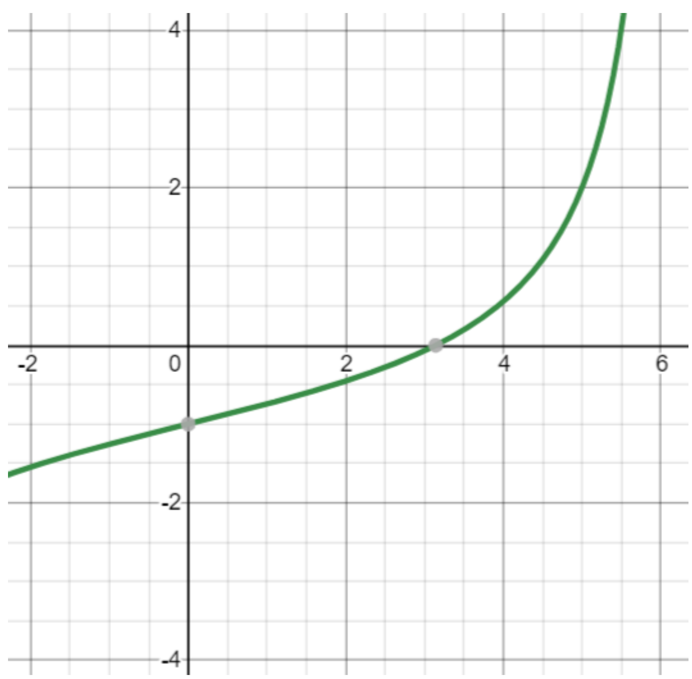
```
Nghiem cua phuong trinh la 2.718322
Sai so: 0.000052
Elapsed time is 9.267447 seconds.
```

(c) $(a, b) = (1.5; 3.5)$ Số vòng lặp: 7

Hình 10: Kết quả với các khoảng cách li khác nhau(2)

Tốc độ hội tụ tương đối nhanh, số lần lặp không cố định là 20 lần như phương pháp chia đôi với cùng 1 khoảng cách li nghiệm và ϵ. Tốc độ hội tụ phụ thuộc vào độ cong của hàm, khi mở rộng ra vùng độ cong nhỏ sẽ làm giảm tốc độ hội tụ (cụ thể là vùng > 3).

3, $\tan\frac{x}{4} = 1 \quad \epsilon = 0.0001 \quad x^* = \pi$



Hình 11: Đồ thị $y = \tan\frac{x}{4} - 1$

```
Nghiem cua phuong trinh la 3.141549
Sai so: 0.000058
Elapsed time is 0.840274 seconds.
```

(a) $(a, b) = (2.5; 3.5)$ Số vòng lặp: 4

```
Nghiem cua phuong trinh la 3.141586
Sai so: 0.000011
Elapsed time is 1.684070 seconds.
```

(b) $(a, b) = (2; 3.5)$ Số vòng lặp: 5

```
Nghiem cua phuong trinh la 3.141557
Sai so: 0.000055
Elapsed time is 10.227427 seconds.
```

(c) $(a, b) = (2; 4)$ Số vòng lặp: 7

Hình 12: Kết quả với các khoảng cách li khác nhau(3)

Thời gian chạy ở lần thử thứ 3 khá lớn do sử dụng hàm syms trong matlab, hàm sẽ thay trực tiếp công thức hàm vào nghiệm mà không tính và làm tròn tại từng bước. Nếu công thức hàm dạng siêu việt sẽ khiến thời gian tính toán lớn.

3.2 Nhận xét

Ta so sánh ưu nhược điểm của dây cung với phương pháp được đề cập ở bài trước là phương pháp chia đôi:

	Chia đôi	**Dây cung**
Điều kiện thực hiện	(a,b) là khoảng cách li nghiệm	Thêm điều kiện về dấu f’,f”
Điều kiện hội tụ		Chọn đúng điểm mốc M
Độ phức tạp khi tính toán	Tính toán đơn giản	Sự phức tạp phụ thuộc vào dạng hàm f
Tốc độ hội tụ	Tốc độ tuyến tính	Tốc độ hội tụ bậc 1

Hình 13: So sánh dây cung và chia đôi

Nhìn chung, dây cung có tốc độ hội tụ nhanh hơn, đổi lại thắt chặt hơn về điều kiện thực hiện và điều kiện hội tụ.

Hướng dẫn chạy trên matlab

Nếu sử dụng matlab tại máy local: Copy file vào thư mục: [...]/Matlab/bin/ ([...] là ổ đĩa chứa matlab, thường là ổ C hoặc D)

Thay đổi input trực tiếp trong code nếu cần.

Chạy file daycung.m bằng phím tắt F5 hoặc phím *Run*