HANOI UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLGY
School of Applied Mathematics and Informatics

BÁO CÁO MÔN GIẢI TÍCH SỐ

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC

Sinh viên thực hiện: Nguyễn Đức Ánh
MSSV: 20204811
Lớp: CTTN Toán Tin K65

Hà Nội, 10/2021

Mục lục

1 Giới thiệu

1.1 Bài toán

Trong việc giải bài toán liên quan đến đa thức, một trong những bài toán không thể không nhắc đến là việc giải phương trình đa thức, tức là ta sẽ tìm nghiệm x thỏa mãn $f(x) = 0$, trong lịch sử có rất nhiều những nhà toán học đã cố gắng tìm cách giải quyết triệt để các nghiệm của một phương trình bậc n bất kì, tuy nhiên đó không phải là vấn đề đơn giản, chưa kể đến việc có rất nhiều trường số như trường số phức, trường số thực để giải quyết. Một trong những người tiên phong là nhà toán học Galoa, đã đưa ra cách giải phương trình bậc 3. Trong thời đại hiện nay, với sự phát triển của khoa học công nghệ, với khả năng làm việc không mệt mỏi, máy tính có thể giúp ta hiện thực hóa nhu cầu tìm nghiệm của phương trình đa thức.
Ví dụ với phương trình bậc 2 $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, ta hoàn toàn giải được bằng phương pháp dùng delta và tìm 2 nghiệm của phương trình bậc 2 dựa theo delta và bộ hệ số.

1.2 Phương trình đa thức

Phương trình đa thức là phương trình có bậc n ở đó có dạng:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

mà ở đó deg $f(x) = n$ và a_i $(i = \overline{0, n})$ là các số thực, $a_n \neq 0$.
Trong khuôn khổ của bài báo cáo, ta sẽ thảo luận cách để tìm nghiệm của phương trình đa thức trên tập $\mathbb{R}$.

Nếu phương trình có dạng:
$f(x) = ax + b = 0 \quad \text{với}\,(a \neq 0)$ thì $x = \dfrac{-b}{a}$
$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{với}\,(a \neq 0)$ thì $x_{12} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
Đối với phương trình dạng đa thức bậc lớn hơn hoặc bằng 3 hay các loại phương trình khác, hầu như không có khả năng tìm được nghiệm đúng mà chỉ gần đúng
Hơn thế nữa trong toán học tính toán ta phải làm việc với số, trong dạng số thập phân. Nên dù tìm được nghiệm đúng trong dạng số thập phân vô hạn ta phải quy tròn số và như vậy cũng vẫn là nghiệm gần đúng
Để đạt được mục đích trên thì quá trình tìm nghiệm gần đúng thực của phương trình ta phải tiến hành theo các bước sau:

1. Chọn nghiệm gần đúng đầu tiên x_0 mà ta gọi là xấp xỉ đầu.
2. Từ xấp xỉ đầu x_0, tìm thuật toán để sửa dần nghiệm, được các xấp xỉ mới gần với nghiệm hơn.
3. Đánh giá sai số của nghiệm gần đúng tìm được với nghiệm đúng của phương trình.

2 Các bước tiến hành để giải phương trình đa thức

2.1 Khoanh vùng nghiệm của một phương trình đa thức

Xét phương trình

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1)$$

mà ở đó deg $f(x) = n$ và a_i $(i = \overline{0,n})$ là các số thực, $a_n \neq 0$.
Định lý 1: Mọi nghiệm của phương trình đa thức đều nằm trong đường tròn tâm $O(0,0)$ bán kính:

$$R = 1 + \frac{\max\limits_{k=\overline{0,n}} |a_k|}{|a_n|}$$

Chứng minh: Gọi x_0 là một nghiệm của phương trình (1), khi đó ta sẽ có:

$$a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + ... + a_1 x_0 + a_0 = 0$$

Ta đang xét deg $f(x) = n, a_n \neq 0$, ta chia cả 2 vế cho a_n ta có:

$$x_0^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x_0^{n-1} + .. + \frac{a_1}{a_n}x_0 + \frac{a_0}{a_n} = 0$$

Chuyển vế x_0^n, ta có:

$$-x_0^n = \frac{a_{n-1}}{a_n}x_0^{n-1} + .. + \frac{a_1}{a_n}x_0 + \frac{a_0}{a_n}$$

Lấy trị tuyệt đối 2 vế, với $k = \overline{0,n}$, ta có:

$$\begin{aligned}
|-x_0^n| &= \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}x_0^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}x_0 + \frac{a_0}{a_n}\right| \\
&\leq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| |x_0|^{n-1} + \cdots + \left|\frac{a_1}{a_n}\right| |x_0| + \left|\frac{a_0}{a_n}\right| \\
&\leq \frac{max|a_k|}{|a_n|}(|x_0|^{n-1} + \cdots + |x_0| + 1) \\
\Leftrightarrow \frac{|x_0^n|}{|x_0|^{n-1} + \cdots + |x_0| + 1} &\leq \frac{max|a_k|}{|a_n|}
\end{aligned}$$

Để ý thì

$$\begin{aligned}\frac{|x_0^n|}{|x_0|^{n-1}+\cdots+|x_0|+1} &= \frac{|x_0^n|-1+1}{|x_0|^{n-1}+\cdots+|x_0|+1}\\ &= |x_0|-1+\frac{1}{|x_0|^{n-1}+\cdots+|x_0|+1} \le \frac{max|a_k|}{|a_n|}\end{aligned}$$

Do $\dfrac{1}{|x_0|^{n-1}+\cdots+|x_0|+1} > 0 \Rightarrow |x_0| < 1+\dfrac{max|a_k|}{|a_n|}$

$\Rightarrow$ Mọi nghiệm của phương trình đều nằm trong đường tròn tâm $O(0,0)$ bán kính $R = 1+\dfrac{\max\limits_{k=\overline{0,n}}|a_k|}{|a_n|}$ (điều phải chứng minh)

Ví dụ 1: Xét phương trình $x^2-5x+4=0 \quad (1)$

Ta áp dụng định lý 1 với $a_2=1, a_1=-5, a_0=4$

Khi đó 2 nghiệm sẽ nằm trong đường tròn tâm $O(0,0)$ bán kính

$$R = 1+\frac{\max\limits_{k=\overline{0,n}}|a_k|}{|a_n|} = 1+\frac{5}{1} = 6$$

Khi đó các nghiệm sẽ nằm trong khoảng $(-6,6)$, hiển nhiên đúng do phương trình (1) có 2 nghiệm là $x_1=1$, $x_2=4 \in (-6,6)$.

Nhận xét:

Trong một vài trường hợp, ta không nhất thiết cần xét toàn bộ đường tròn tâm O, bán kính R mà ta có thể lập luận để giảm độ phức tạp cho việc khoanh vùng nghiệm, ngoài ra ta không xác định được việc có nghiệm thực hay không.

Ví dụ khi xét một phương trình đa thức hệ số thực, có các hệ số đều dương, khi đó các nghiệm của phương trình sẽ là nghiệm âm, hay các hệ số đều âm thì các nghiệm chỉ có thể là nghiệm dương cùng với các cặp nghiệm phức liên hợp (nếu có).

Ví dụ 2: Xét phương trình $x^2+2x+5=0$, ta thấy phương trình không có nghiệm thực nhưng nếu dùng công thức thì ta sẽ thấy các nghiệm nằm trong khoảng $(-R,R)$ với $R = 1+\dfrac{5}{1} = 6$ bởi vì công thức vẫn đúng trong trường số phức vì 2 nghiệm của phương trình trên là $x_1=-1+2i$, $x_2=-1-2i$ và $|x_1|=|x_2|=\sqrt{5}\in(-6,6)$.

Ta đề xuất thêm **Định lý 2** như sau:

1. Nếu các hệ số của đa thức đều dương thì đa thức không có nghiệm dương

2. Nếu hệ số bậc cao nhất a_n dương (khi âm ta sẽ đổi dấu cả phương trình) và a_k là bậc cao nhất mà hệ số tương ứng của nó là số âm thì mọi nghiệm dương của đa thức đều thỏa mãn

$$0 < x < 1+\sqrt[n-k]{\frac{max|a_k|}{|a_n|}}$$

ở đó $a_k < 0,\ k = \overline{0, n}$

Ta sẽ phân hoạch các hệ số của phương trình thành các hệ số dương và hệ số âm, sau đó ta dùng làm trội và đưa về chứng minh tương tự theo ý tưởng chứng minh của **Định lý 1** thì ta sẽ có điều phải chứng minh.
Trong khuôn khổ của bài báo cáo, em sẽ áp dụng **Định lý 1** để khoanh vùng nghiệm của phương trình đa thức
Chương trình nhập bộ hệ số của phương trình đa thức

```python
def nhapdulieu(n):
    global heso
    heso = []
    for i in range(n+1):
        a = float(input(f"He so a{n-i}: "))
        heso.append(a)
    return heso
```

Chương trình để áp dụng công thức 1 khoanh vùng nghiệm của phương trình đa thức

```python
#Công thức 1
r = 1 + max(map(abs,heso))/abs(heso[0])
print("Khoảng chứa nghiệm:",[-r,r])
```

Ví dụ 3: Xác định khoảng chứa nghiệm của phương trình $2x^2 - 6x + 8 = 0$
Kết quả chạy chương trình

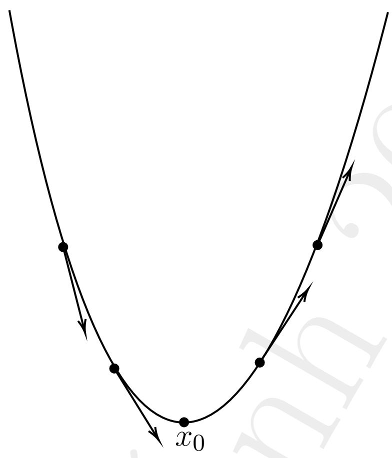
```
Bac cua da thuc: 2
He so a2: 2
He so a1: -6
He so a0: 8
Khoảng chứa nghiệm: [-5.0, 5.0]
```

Giải thích: Theo định lý 1, các nghiệm của phương trình sẽ nằm trong khoảng $(-R, R)$ với $R = 1 + \dfrac{8}{2} = 5$ do vậy các nghiệm sẽ nằm trong khoảng $(-5, 5)$.

2.2 Xác định các cực trị của hàm số trong vùng

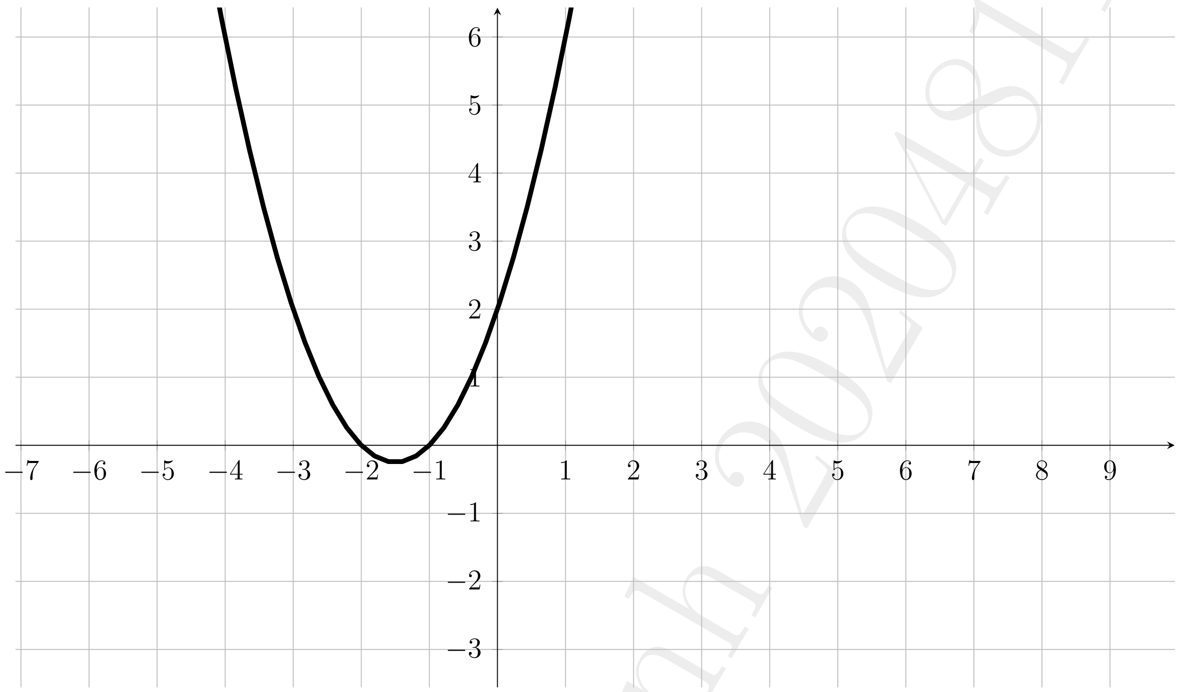
*Sơ lược về phương pháp giải:
Trong các dạng toán tìm cực trị ta đã học, ta thường tiếp cận cực trị thông qua đạo hàm và lập bảng biến thiên để theo dõi sự thay đổi về dấu. Tuy vậy, đối với những hàm bậc cao thì việc tìm đủ nghiệm và lập bảng biến thiên các nghiệm khá phức tạp, ta sẽ sử dụng phương pháp Gradient Descent với điểm xuất phát gần điểm cực trị và sau đó lặp một vài lần để tiến gần về điểm cực trị.

Một vài kiến thức cơ bản:
-Điểm cực tiểu x_0 của hàm số là điểm thỏa mãn $f'(x_0) = 0$,trong lân cận của điểm x_0 đạo hàm các điểm nằm bên trái x_0 không dương, đạo hàm các điểm nằm bên phải x_0 không âm,ý tưởng tương tự khi điểm x_0 là cực đại
-Đường tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm x_0 là có hệ số góc là đạo hàm của hàm số tại điểm đó.
► Ý tưởng tiếp cận

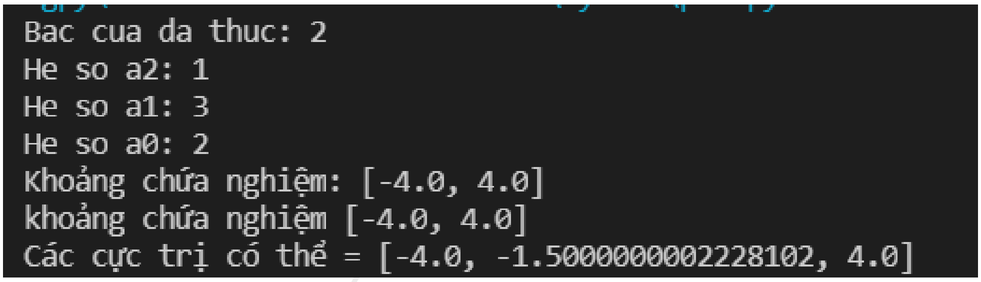


Xét điểm x_0 là cực tiểu, khi đó $f'(x_0) = 0$ ta bắt đầu từ một điểm x_n trên đồ thị, nếu $f'(x_n) > 0$ thì ta di chuyển điểm về phía bên trái để tiến gần x_0 và ngược lại (về phía âm), tức là ta xét điểm $x_{n+1} = x_n + \Delta, \Delta$ ngược dấu với đạo hàm. Xây dựng CTTQ
$x_{n+1} = x_n + sign * \eta * f'(x_n)$
η là tốc độ học, giá trị dương thường nằm giữa 0 và 1, dùng để kiểm soát tốc độ mô hình thay đổi các trọng số. Tương tự khi xét với x_0 là cực đại.
Trong trường hợp η nhỏ không đủ đưa bước nhảy qua x_0 thì ta điều chỉnh $\eta = \eta * 2$ tương tự khi η lớn có thể khiến điểm vượt quá x_0, khi đó ta điều chỉnh $\eta = \eta/2$

Ví dụ 1: Xét đa thức $f(x) = x^2 + 3x + 2$



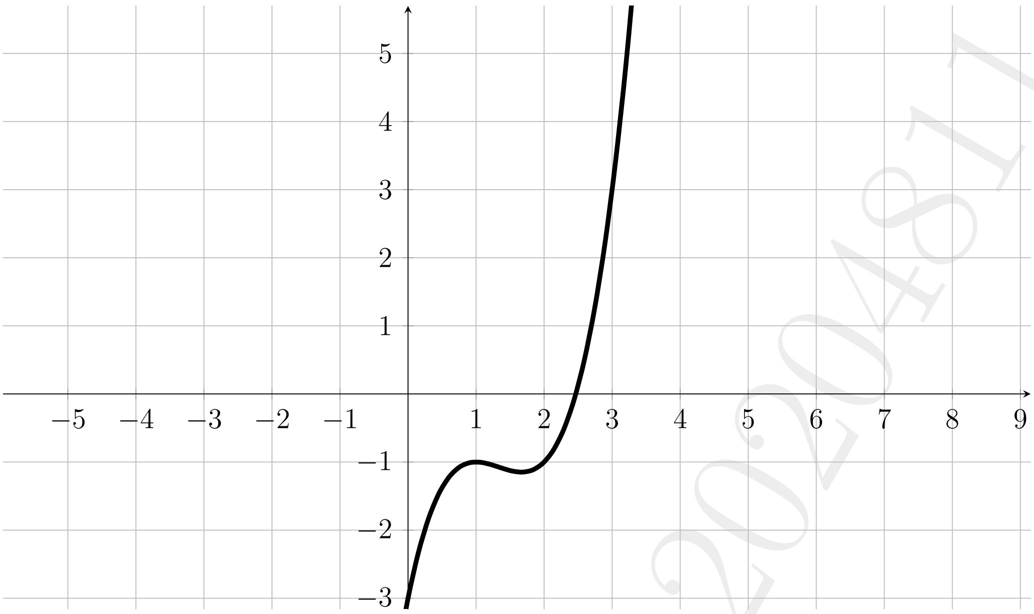
Kết quả chạy chương trình



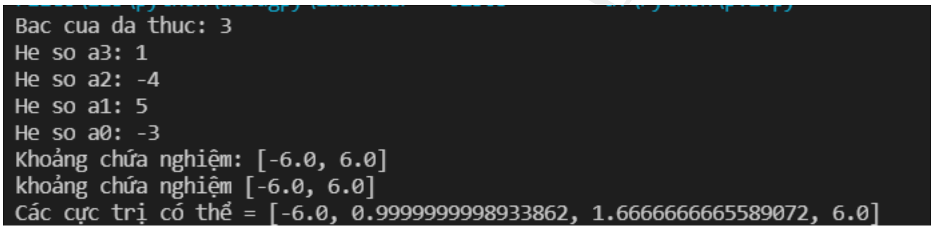
```
Bac cua da thuc: 2
He so a2: 1
He so a1: 3
He so a0: 2
Khoảng chứa nghiệm: [-4.0, 4.0]
khoảng chứa nghiệm [-4.0, 4.0]
Các cực trị có thể = [-4.0, -1.5000000002228102, 4.0]
```

Giải thích: ta tìm được cực trị của hàm số là $x^* \sim -1.500000000$ với sai số cho trước là 10^{-9} cùng với 2 điểm biên của khoảng chứa nghiệm lập thành 1 list các điểm cực trị có thể

Ví dụ 2: Xét đa thức $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 3 = 0$



Kết quả chạy chương trình



```
Bac cua da thuc: 3
He so a3: 1
He so a2: -4
He so a1: 5
He so a0: -3
Khoảng chứa nghiệm: [-6.0, 6.0]
khoảng chứa nghiệm [-6.0, 6.0]
Các cực trị có thể = [-6.0, 0.9999999998933862, 1.6666666665589072, 6.0]
```

Giải thích: ở đây ta thấy rằng đa thức có 2 điểm cực trị ứng với sai số là 10^{-9} cho trước, ta tìm được 2 điểm cực trị lần lượt là $x_1 \sim 0.999999999, x_2 \sim 1.666666666$ kết hợp với 2 điểm biên của khoảng chứa nghiệm ta được một list các số có thể là cực trị trong khoảng chứa nghiệm.

2.3 Xác định khoảng cách ly nghiệm trong vùng

Sau khi tìm được các điểm cực trị bằng phương pháp Gradient Descent, khi đó ta sẽ xét được một tập các giá trị (mang tính xấp xỉ) gồm 2 giá trị biên của khoảng chứa nghiệm cũng như các điểm cực trị đã tìm được để từ đó chia thành các khoảng cách ly nghiệm

→ Có đúng một nghiệm của hàm số trong các khoảng cách ly nghiệm tương ứng.

Định lý về nghiệm của phương trình đa thức: Nếu $f(x)$ liên tục và đơn điệu trên (a, b) và $f(a), f(b)$ trái dấu thì (a, b) là khoảng cách li nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

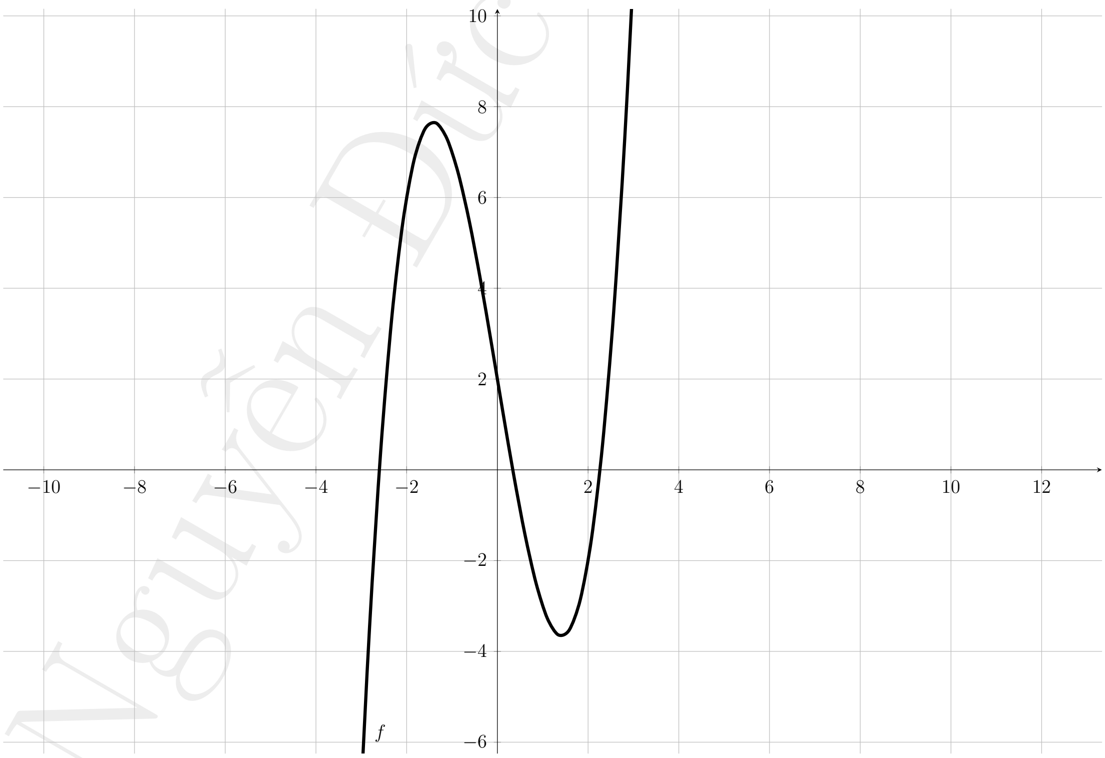
Ta sẽ sắp xếp tập giá trị tìm được từ bé đến lớn, rồi ta áp dụng định lý trên để nhận biết được việc các khoảng cách li nghiệm liệu có chứa nghiệm hay không.

Chương trình

```python
def distance_of_root(f, a, b):
    #EPSILON = 1e-6
    global df
    sgn = 1 if f(a+EPSILON) >= f(a) else -1
    count = 0
    x0 = a + 0.5*EPSILON
    eta = ETA
    xr = [a]
    while x0 < b:
        dx = df(x0)
        while abs(dx) > 0.001*EPSILON:
            dx = df(x0)
            eta = fixeta(dx,x0,sgn)
            x0 += sgn*eta*dx
            count += 1
            if x0 > b:
                break
        sgn = -sgn
        if x0 > a and x0 < b:
            xr.append(x0)
        x0 += 0.5*EPSILON
    xr.append(b)
    return xr
```

Ví dụ 1: Tìm khoảng cách ly nghiệm của phương trình $x^3 - 6x + 2 = 0$

Đồ thị



Kết quả chạy chương trình

```
Bac cua da thuc: 3
He so a3: 1
He so a2: 0
He so a1: -6
He so a0: 2
Khoảng chứa nghiệm: [-7.0, 7.0]
khoảng chứa nghiệm [-7.0, 7.0]
Các cực trị có thể = [-7.0, -1.414213562395953, 1.4142135623274608, 7.0]
```

Giải thích: Ta thấy ta tìm được 2 điểm cực trị lần lượt là $x_1 \sim -1.414213562$, $x_2 \sim 1.414213562$ với sai số là $0.001 * EPSILON$, $EPSILON = 10^{-6}$ hay sai số là 10^{-9} cho trước, ngoài ra ta tìm được khoảng chứa nghiệm là $(-7, 7)$ nên ta sẽ tạo lập được 1 list các điểm có thể là điểm cực trị được sắp xếp từ bé đến lớn, gồm 2 điểm biên và các điểm cực trị tìm được, từ đó ta xây dựng được 3 khoảng cách ly nghiệm tương ứng với 3 khoảng tạo bởi 2 giá trị liên tiếp bởi 4 giá trị trong list.

2.4 Phương pháp chia đôi (the bisection method)

Phương pháp chia đôi là một trong những phương pháp tính xấp xỉ với mục đích tìm nghiệm của một phương trình đa thức, trước khi ta áp dụng phương pháp chia đôi ta cần nhận biết xem phương trình có nghiệm hay không? Để ý thì đa thức bậc lẻ luôn có ít nhất 1 nghiệm thực, do vậy ta chỉ cần giải quyết việc liệu đa thức có bậc cao nhất chẵn có nghiệm hay không, khi nhận biết có nghiệm thực hay không có thể giúp ta giảm khối lượng tính toán.

1. Phương pháp khảo sát hàm số
   Ta có thể đạo hàm và lập bảng biến thiên (với một số hàm đơn giản) hay ta thử các cặp (a, b) xem có tồn tại thỏa mãn $f(a).f(b) < 0$ và $f(x)$ là hàm số đơn điệu liên tục trong $[a, b]$ từ đó ta có thể xác định được hàm số liệu có nghiệm không

2. Phương pháp vẽ đồ thị hàm số
   Ta có thể vẽ hàm số $f(x) = 0$ bằng một số phần mềm tính toán cũng như ta tách $f(x) = g(x) - h(x)$ khi đó ta sẽ vẽ đồ thị của hai hàm số $g(x), h(x)$ nghiệm x_0 chính là hoành độ giao điểm của $g(x), h(x)$

Ý tưởng: Ta biết ra nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ mà thỏa mãn $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại nghiệm $x_0 \in [a, b]$ thỏa mãn $f(x_0) = 0$, từ đó , ta xây dựng phương pháp chia đôi.
Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$. Gọi $\Delta_0 := [a, b]$, ta chia đôi Δ_0 và chọn $\Delta_1 = [a_1, b_1]$ là một trong hai nửa của Δ_0 sao cho $f(a_1)f(b_1) \leq 0$. Chung quy lại, ở bước thứ n, ta có $\Delta_n = [a_n, b_n] \subset \Delta_n \subset ... \subset \Delta_1 \subset \Delta_0$. Ngoài ra

$b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0$ khi $n \to \infty$. Khi đó ta thấy dãy a_n đơn điệu tăng, bị chăn trên bởi b còn dạy b_n đơn điệu giảm, bị chặn dưới bởi a. Để tìm nghiệm thì ta xét $n \to \infty$ thì $b_n - a_n \to 0$ nên $a_n, b_n \to \epsilon$

Ta đang xét $[a_n, b_n]$ thỏa $f(a_n)f(b_n) \leq 0, n \to \infty \Rightarrow f(\epsilon)^2 \leq 0 \Rightarrow f(\epsilon) = 0$

Ta ước lượng được sai số: $0 \leq \epsilon - a_n \leq b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

Xét phương trình đa thức:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

ở đó $\deg f(x) = n, a_n \neq 0, a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{0, n}$

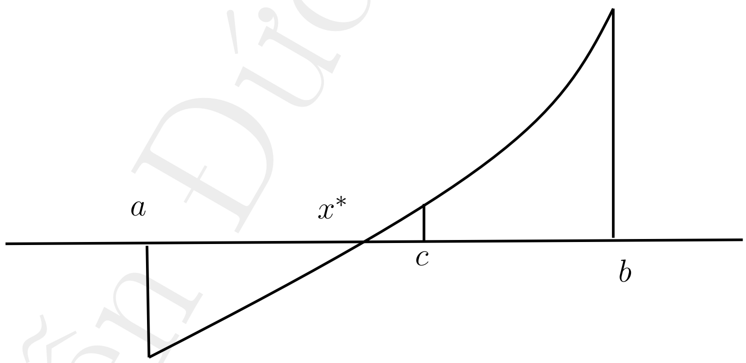
Điều kiện để thực hiện phương pháp

+ (a, b) là khoảng cách li nghiệm

+ $f(x)$ liên tục trên (a, b)

+ $f(a).f(b) < 0$

Minh họa phương pháp: ta xét khoảng cách ly nghiệm $[a, b]$ khi đó $c = \dfrac{a+b}{2}$ theo hình ta thấy $sign(c) * sign(b) > 0$ thì thay vì xét khoảng cách ly nghiệm $[a, b]$ ta sẽ xét khoảng cách ly nghiệm $[a, c]$ ta tiếp tục như vậy để tiến gần về nghiệm x^* ta đang cần tìm, ta áp dụng tương tự với trường hợp $sign(c) * sign(a) > 0$, trong trường hợp $sign(c) = 0$ thì c chính là nghiệm của phương trình đa thức.



***Khối lượng tính toán**

Mỗi vòng lặp cần tính giá trị hàm số tại trung điểm của đoạn rồi so sánh dấu của kết quả tìm được với dấu của $f(a)$ ban đầu.

***Ưu điểm:** thuật toán rất đơn giản, do đó dễ lập trình trên máy tính

***Hạn chế:** phương pháp chia đôi sử dụng rất ít thông tin về hàm f nên tốc độ hội tụ khá chậm (cấp 1)

2.5 Tìm nghiệm của phương trình đa thức

Sau khi áp dụng phương pháp chia đôi trong từng khoảng cách ly nghiệm, ta tìm được các nghiệm tương ứng trong từng khoảng cách ly nghiệm.

Chương trình

```
def finding_root(f,a,b):
    za = np.sign(f(a))
    zb = np.sign(f(b))
    #GIGA = 1e-9
    #BETA = 1e-10
    if abs(f(a)) <GIGA:
        return a,0
    if abs(f(b)) <GIGA:
        return b,0
    count = 0
    while abs(b-a) > BETA:
        c = (a+b)/2
        count += 1
        zc = np.sign(f(c))
        # if abs(f(c)) < GIGA:
        #     break
        if zc == 0:
            break
        if zc*za>0:
            a = c
        else:
            b = c
    return c,count
```

Ví dụ 1: Xét phương trình $x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 5x - 7 = 0$

Kết quả chạy chương trình

```
Bac cua da thuc: 4
He so a4: 1
He so a3: 3
He so a2: 2
He so a1: -5
He so a0: -7
Khoảng chứa nghiệm: [-8.0, 8.0]
khoảng chứa nghiệm [-8.0, 8.0]
Các cực trị có thể = [-8.0, 0.5154017000200635, 8.0]
Ước lượng số lần chia đôi 37
Số lần chia đôi 37
Ước lượng số lần chia đôi 37
Số lần chia đôi 37
{1.3270789132518672, -1.5146033171963003}
```

Giải thích: Sau khi tìm được khoảng chứa nghiệm và các khoảng cách ly nghiệm, ta áp dụng chia đôi cho từng khoảng cách ly nghiệm, ở đây, ở mỗi khoảng cách ly nghiệm ta mất số lần chia đôi là 37, trùng với số lần chia đôi dựa trên công thức sai số tiên nghiệm, và ta tìm được 2 nghiệm thực tương ứng $x_1 \sim 1.327, x_2 \sim -1.5146$

3 Thuật toán tổng thể và ví dụ

3.1 Thuật toán

Các gói sử dụng

1. *main*: thuật toán chính
2. *nhapdulieu*: nhập một mảng các hệ số của phương trình đa thức
3. *fixeta*: điều chỉnh cho eta (hệ số học) động khi áp dụng vào phương pháp gradient-descent.
4. *distance_of_root*: tìm khoảng cách ly nghiệm
5. *finding_root*: dùng phương pháp chia đôi tìm nghiệm trong khoảng cách ly nghiệm
6. *f*: xây dựng hàm $f(x)$ (phương trình đa thức)
7. *df*: xây dựng hàm $f'(x)$ (đạo hàm của hàm $f(x)$)

Các hằng số sử dụng

1. $ETA = 10^{-12}$
2. $EPSILON = 10^{-6}$
3. $BETA = 10^{-10}$
4. $MEGA = 10^{-15}$
5. $GIGA = 10^{-9}$

main

Input: bộ các hệ số của phương trình đa thức

Output: khoảng chứa nghiệm, các cực trị có thể của f, ước lượng số lần chia đôi và số lần chia đôi thực tế của các khoảng cách ly nghiệm, nghiệm thực của phương trình đa thức.

Begin

Nhập bậc của đa thức: n

$heso \leftarrow nhapdulieu(n)$

$r \leftarrow 1 + \dfrac{abs(max(heso))}{abs(heso[0])}$

In ra khoảng chứa nghiệm: $[-r, r]$

$result \leftarrow distance\_of\_root(f, -r, r)$

In ra mảng các cực trị có thể: $result$

Khởi tạo mảng p chứa các nghiệm x trong từng khoảng cách ly nghiệm

for $i \leftarrow 0$ **to** $len(result) - 2$ **do**

  $ai \leftarrow result[i]$

  $bi \leftarrow result[i+1]$

  $ll \leftarrow int(\dfrac{log2(bi - ai)}{BETA} + 1)$

  In ra số lần ước lượng chia đôi theo lý thuyết: ll

  $x, l \leftarrow finding\_root(f, ai, bi)$

  p.append(x)

  In ra số lần chia đôi thực tế: l

end for

Bỏ bớt các nghiệm giống nhau trong mảng p tạo thành mảng $xr1$

In ra mảng $xr1$

end

Gói **nhapdulieu**

Input: bậc của đa thức

Output: mảng hệ số

begin

Khởi tạo list $heso$

for $i \leftarrow 0$ **to** n **do**

$a \leftarrow$ nhập hệ số bậc $(n-i)$

$heqso$.append(a)

end for

return $heso$

end

Gói **fixeta**

Input: $sgn, x0, dfx0$

Output: eta

begin

$eta \leftarrow ETA$

while $sgn * df(x0 + sgn * eta * dfx0) \geq 0$ **and** $abs(eta * dfx0) < 1$ **do**

$eta \leftarrow eta * 2$

end while

while $sgn * df(x0 + sgn * eta * dfx0) \leq 0$ **do**

end while

$eta \leftarrow \frac{eta}{2}$

return eta

end

Gói **distance_of_root**

Input: f, a, b

Output: mảng xr

begin
  Áp dụng phương pháp Gradient-descent
  if $f(a + EPSILON) \geq f(a)$ **then**
    $sgn \leftarrow 1$
  else
    $sgn \leftarrow -1$
  end if
  $count \leftarrow 0$
  $x0 \leftarrow a + 0.5 * EPSILON$
  $eta \leftarrow ETA$
  Khởi tạo một list xr: $xr[0] \leftarrow a$
  while $x0 < b$ **do**
      $dx \leftarrow df(x0)$
      while $abs(dx) > 0.001 * EPSILON$ **do**
        $dx \leftarrow df(x0)$
        $eta \leftarrow fixeta(dx, x0, sgn)$
        $x0 \leftarrow x0 + sgn * eta * dx$
        $count \leftarrow count + 1$
        if $x0 > b$ **then**
          break
        end if
      $sgn \leftarrow -sgn$
      if $x0 > a$ **and** $x0 < b$ **then**
        xr.append($x0$)
      end if
      $x0 \leftarrow x0 + 0.5 * EPSILON$
    xr.append(b)
  end while
  return xr
end

Gói **finding_root**

Input: f, a, b

Output: $c, count$

begin

  $za \leftarrow sign(f(a))$

  $zb \leftarrow sign(f(b))$

  if $abs(f(a)) < GIGA$ **then**

    return $a, 0$

  end if

  if $abs(f(b)) < GIGA$ **then**

    return $b, 0$

  end if

  $count \leftarrow 0$

  while $abs(b - a) > BETA$ **do**

    $c \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$

    $count \leftarrow count + 1$

    $zc \leftarrow sign(f(c))$

    if $zc = 0$ **then**

      break

    end if

    if $zc * za > 0$ **then**

      $a \leftarrow c$

    else

      $b \leftarrow c$

    end if

  end while

  return $c, count$

end

Gói **f**

Input: các hệ số

Output: y(phương trình đa thức)

begin

$y \leftarrow 0$

for $i \leftarrow 0$ **to** n **do**

$y \leftarrow y + heso[n-i] * x^i$

end for

return y

end

Gói **df**

Input: Các hệ số

Output: y (đạo hàm của phương trình đa thức)

begin

$y \leftarrow 0$

for $i \leftarrow n$ **to** 1 **do**

$y \leftarrow y + i * heso[n-i] * x^{i-1}$

end for

return y

end

3.2 Ví dụ

Ta cùng xét một số ví dụ sau

Ví dụ 1: Tìm nghiệm của phương trình đa thức $x^3 - x^2 = 0$

Ở đây ta xét phương trình có nghiệm kép, ta đã cải tiến phương pháp chia đôi để khi có $abs(f(x_0)) < \epsilon$ với ϵ cho trước nào đó thì ta coi $f(x_0) = 0$ hay x_0 là nghiệm của phương trình đa thức.

Kết quả chạy chương trình

```
Bac cua da thuc: 3
He so a3: 1
He so a2: -1
He so a1: 0
He so a0: 0
Khoảng chứa nghiệm: [-2.0, 2.0]
khoảng chứa nghiệm [-2.0, 2.0]
Các cực trị có thể = [-2.0, -1.0661118256415535e-10, 0.666666666558907, 2.0]
Ước lượng số lần chia đôi 35
Số lần chia đôi 0
Ước lượng số lần chia đôi 33
Số lần chia đôi 0
Ước lượng số lần chia đôi 34
Số lần chia đôi 34
{0.9999999999967905, -1.0661118256415535e-10}
```

Giải thích:

1. Áp dụng công thức 1 phần tìm khoảng chứa nghiệm, ta tìm được khoảng chứa nghiệm là $[-2.0, 2.0]$.

2. Áp dụng phương pháp Gradient-Descent, ta tìm được 2 điểm cực trị trong đó có một điểm cực trị $x_1 \sim -1.066118256e - 10$, điểm cực trị còn lại $x_2 \sim 0.666666666$ với sai số của phương pháp mình đang xét là 10^{-9} cho trước.

3. Từ 2 điểm cực trị tìm được ta kết hợp với 2 điểm biên của khoảng chứa nghiệm ta được một list các điểm cực trị có thể, khi đó từ 4 điểm trong list ta phân chia được 3 khoảng cách ly nghiệm tương ứng với các cặp điểm liên tiếp.

4. Từ mỗi khoảng cách ly nghiệm, ta áp dụng phương pháp chia đôi để tìm nghiệm trong các khoảng cách ly nghiệm, để ý ở đây trong 2 khoảng cách ly nghiệm đầu tiên $[-2.0, x_1]$ và $[x_1, x_2]$ ta ước lượng số lần chia đôi lần lượt là $35, 33$ trong khi số lần chia đôi cần thực tế là 0 vì $abs(f(x_1)) < GIGA$ với $GIGA = 10^{-9}$ ta cho trước.

5. Sau khi dùng phương pháp chia đôi, ta kết luận được có 2 nghiệm trong đó $x_1 \sim 0$ là nghiệm kép (nghiệm chung của 2 khoảng cách ly nghiệm đầu) và nghiệm còn lại $x_3 \sim 1$.

Ví dụ 2: Tìm nghiệm của phương trình đa thức $x^2 = 0$

Ta xét thêm một phương trình có nghiệm kép $x = 0$

Kết quả chạy chương trình

```
Bac cua da thuc: 2
He so a2: 1
He so a1: 0
He so a0: 0
Khoảng chứa nghiệm: [-2.0, 2.0]
khoảng chứa nghiệm [-2.0, 2.0]
Các cực trị có thể = [-2.0, -1.7824821165774648e-10, 2.0]
Ước lượng số lần chia đôi 35
Số lần chia đôi 0
Ước lượng số lần chia đôi 35
Số lần chia đôi 0
{-1.7824821165774648e-10}
```

Giải thích:

1. Áp dụng công thức 1 phần tìm khoảng chứa nghiệm, ta tìm được khoảng chứa nghiệm là $[-2.0, 2.0]$.

2. Áp dụng phương pháp Gradient-Descent, ta tìm được 1 điểm cực trị $x_1 \sim -1.782482116e - 10$ với sai số của phương pháp mình đang xét là 10^{-9} cho trước.

3. Từ điểm cực trị tìm được ta kết hợp với 2 điểm biên của khoảng chứa nghiệm ta được một list các điểm cực trị có thể, khi đó từ 3 điểm trong list ta phân chia được 2 khoảng cách ly nghiệm tương ứng với các cặp điểm liên tiếp.

4. Từ mỗi khoảng cách ly nghiệm, ta áp dụng phương pháp chia đôi để tìm nghiệm trong các khoảng cách ly nghiệm, để ý ở đây trong 2 khoảng cách ly nghiệm $[-2.0, x_1]$ và $[x_1, 2.0]$ ta ước lượng số lần chia đôi đều là 35 trong khi số lần chia đôi cần thực tế là 0 vì $abs(f(x_1)) < GIGA$ với $GIGA = 10^{-9}$ ta cho trước, khi đó x_1 chính là nghiệm của phương trình đa thức.

5. Sau khi dùng phương pháp chia đôi, ta kết luận được có duy nhất 1 nghiệm là $x_1 \sim 0$ là nghiệm kép (nghiệm chung của 2 khoảng cách ly nghiệm).

Ví dụ 3: Tìm nghiệm của phương trình đa thức $x^4 + 45x^3 - 15x^2 + 154x + 16 = 0$
Kết quả chạy chương trình

```
Bac cua da thuc: 4
He so a4: 1
He so a3: 45
He so a2: -15
He so a1: 154
He so a0: 16
Khoảng chứa nghiệm: [-155.0, 155.0]
khoảng chứa nghiệm [-155.0, 155.0]
Các cực trị có thể = [-155.0, -34.00386013125329, 155.0]
Ước lượng số lần chia đôi 41
Số lần chia đôi 41
Ước lượng số lần chia đôi 41
Số lần chia đôi 41
{-0.10255714245925432, -45.404889091358626}
```

Giải thích:

1. Áp dụng công thức 1 phần tìm khoảng chứa nghiệm, ta tìm được khoảng chứa nghiệm là $[-155.0, 155.0]$.

2. Áp dụng phương pháp Gradient-Descent, ta tìm được 1 điểm cực trị $x_1 \sim -34.003860131$ với sai số của phương pháp mình đang xét là 10^{-9} cho trước.

3. Từ điểm cực trị tìm được ta kết hợp với 2 điểm biên của khoảng chứa nghiệm ta được một list các điểm cực trị có thể, khi đó từ 3 điểm trong list ta phân chia được 2 khoảng cách ly nghiệm tương ứng với các cặp điểm liên tiếp.

4. Từ mỗi khoảng cách ly nghiệm, ta áp dụng phương pháp chia đôi để tìm nghiệm trong các khoảng cách ly nghiệm, từ đó ta sẽ có sự so sánh giữa ước lượng số lần chia đôi và số lần chia đôi thực tế.

5. Sau khi dùng phương pháp chia đôi, ta kết luận được có 2 nghiệm là
$x_2 \sim -0.102557142$ và $x_3 \sim -45.404889091$ (đúng với kết quả mong muốn).

Ví dụ 4: Tìm nghiệm của phương trình đa thức $x^3 - 525x^2 + 91250x - 5250000 = 0$

Kết quả chạy chương trình

```
Bac cua da thuc: 3
He so a3: 1
He so a2: -525
He so a1: 91250
He so a0: -5250000
Khoảng chứa nghiệm: [-5250001.0, 5250001.0]
khoảng chứa nghiệm [-5250001.0, 5250001.0]
Các cực trị có thể = [-5250001.0, 160.56624327025708, 189.43375672973968, 5250001.0]
Ước lượng số lần chia đôi 56
Số lần chia đôi 56
Ước lượng số lần chia đôi 39
Số lần chia đôi 39
Ước lượng số lần chia đôi 56
Số lần chia đôi 56
{200.0000000000569, 150.0000000000552, 175.00000000005087}
```

Giải thích: Ta thấy rằng ở đây ta cố tình chọn bộ hệ số của phương trình đa thức rất lớn, điều này đã khiến cho khoảng chứa nghiệm trở nên rất lớn, khi áp dụng phương pháp Gradient-descent ta vẫn có thể tìm được các điểm cực trị và xây dựng được list các điểm có thể là cực trị, tuy nhiên ta thấy rằng việc khoảng chứa nghiệm quá lớn mà thuật toán gradient có giới hạn bước tiến không quá lớn do đó cần phải tiến rất nhiều bước dẫn đến thời gian tìm ra các cực trị tốn nhiều thời gian hơn, do vậy ta nên áp dụng công thức 2 được đề cập ở mục **khoanh vùng nghiệm của một phương trình đa thức** sẽ giới hạn được khoảng chứa nghiệm tốt hơn.

4 Tài liệu tham khảo

1. Lê Trọng Vinh. *Giáo trình Giải tích số.* Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật, 2007.

2. Phạm Kỳ Anh. *Giải tích số.* Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội,1996

Lời cảm ơn

Bài báo cáo của em đến đây là kết thúc, em mong rằng cô có thể góp ý thêm cho em để em hoàn thiện tiếp báo cáo này tốt hơn nữa ạ

Em xin cảm ơn cô đã có những đề xuất mang tính định hướng cho em trong quá trình làm slide cũng như hoàn thiện báo cáo về chủ đề của em nói riêng và đối với môn học **Giải tích số** nói chung ạ.