TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

BÁO CÁO

CHỦ ĐỀ 13:

CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM ĐÚNG MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

Sinh Viên Thực Hiện: Tạ Duy Hải 20206197

Người Hướng Dẫn: TS. Hà Thị Ngọc Yến

Bộ Môn: Giải tích số

Hà Nội, tháng 12, năm 2021

Mục lục

I. NHẮC LẠI VỀ MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

1.1 Định nghĩa

Cho ma trận A= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ là ma trận vuông cấp n.

Nếu tồn tai ma trận B sao cho A.B=B.A=E thì B là ma trận nghịch đảo của A.

Ta thường kí hiệu ma trận nghịch đảo của A là A^{-1}. Nếu A có ma trận nghịch đảo ta nói A khả nghịch.

1.2 Một số tính chất

1. Nếu A khả nghịch thì det(A)≠0.
2. Nếu A khả nghịch thì A^{-1} tồn tại duy nhất.
3. $(A^{-1})^{-1} = A$.
4. $(A.B)^{-1} = A^{-1}.B^{-1}$.
5. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

1.3 Công thức ma trận nghịch đảo

Cho ma trận A vuông cấp n và khả nghịch. Khi đó:

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$, với A_{ij} là phần bù đại số với phần tử a_{ij}.

Vậy nếu ta tính được các phần bù đại số hay nói các khác là tính được định thức của một ma trận thì sẽ xác định được A^{-1} theo công thức trên. Tuy nhiên việc tính định thức của ma trận cỡ lớn thường khá nặng nề. Vì vậy ta sẽ xử dụng một số phương pháp sau đây để tìm A^{-1} nhẹ nhàng hơn.

II. ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG PHÁP GAUSS-JORDAN

2.1 Ý tưởng

Ma trận B= $\left[b_{\text{ij}}\right]_{nxn}$ là ma trận nghịch đảo của ma trận A vuông cấp n. Khi đó

A.B=E

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Khi đó cột thứ i của ma trận B sẽ có liên hệ với ma trận A như sau:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$, với vế phải là cột thứ i của E.

Vậy bằng các phương pháp giải hệ đại số tuyến tính ta tìm được cột thứ i. Từ đó tìm được ma trận B. Nếu hệ vô nghiệm hay vô số nghiệm (det(A)=0) thì kết luận A không khả nghịch, do đó không tồn tại B.

2.2 Mô tả phương pháp Gauss-Jordan.

Có ma trận A vuông cấp n. Ta lập ma trận (A|E) cỡ $n \times 2n$:

$$\overline{A} = \langle A | E \rangle = \left\langle \begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right\rangle$$

Bước 1: Tìm phần tử trội $\overline{a_{pq}}$ ($\left|\overline{a_{pq}}\right| = 1$ hoặc $\left|\overline{a_{pq}}\right| = \max\left|\overline{a_{\text{ij}}}\right|, \forall i, j = \overline{1, n}$).

Bước 2: Nếu $\overline{a_{pq}} = 0$, kết luận A không khả nghịch và chuyển đến bước 5.

Nếu không thì biến đổi ma trận $\overline{A}$ theo công thức sau:

- ❖ Giữ nguyên hàng p
- ❖ Với các hàng còn lại

- $h_i = h_i - \dfrac{\overline{a_{iq}}}{\overline{\overline{a_{pq}}}} \cdot h_p$ (h_i là hàng thứ i của ma trận $\overline{A}$)

Khi đó cột thứ q sẽ bằng 0 tại các điểm không thuộc hàng có phần tử trội.

Bước 3: Quay lại bước 1 để tìm phần tử trội mới, lưu ý rằng phần thử trội mới không được cùng hàng và cùng cột với các phần tử trội cũ. Nếu đã tìm được n phần tử trội, chuyển sang bước 4.

Bước 4: Đảo hàng của ma trận $\overline{A}$ sao cho $\overline{a_{ii}} \neq 0, \forall i = \overline{1,n}$,sau đó chia hàng thứ i cho a_{ii}.

Khi đó $\overline{A} = \langle E | B \rangle$, với B là ma trận nghịch đảo của A.

Bước 5: Đưa ra kết luận về ma trận nghịch đảo của A.

2.3 Sơ đồ thuật toán chung

Ma trận đầu vào là ma trận A, ta khởi tạo E là ma trận đơn vị.

Có nhiều cách để tìm phần tử trội trong ma trận A sao cho nó không trùng với hàng và cột của các phần tử trội cũ. Bạn đọc có thể tìm hiểu các phương pháp đó. Trong tài liệu này sẽ trình bày cách lần lượt "xóa" đi các cột và hàng chứa phần tử trội. Ta sẽ tạo một biến k để lưu số các phần tử trội đã tìm được.

Cách "xóa hàng" như sau:

- Input: vị trí của phần tử trội a_{ij} của ma trận A, số phần tử trội đã tìm k, ma trận A.

- Output: ma trận A.

```
For (e=1; e≤ (n-k); e++)
   For (f=1; f≤ (n-k), f++)
      A[e-1][f]= A[e][f]
```

Với cách làm tương tự như trên ta đã bỏ được hàng và cột có phần tử trội và mỗi lần tìm kiếm chỉ kiếm tối đa $(n-k)(n-k)$ phần tử. Tuy nhiên ma trận A sẽ mất đi các thuộc tính ban đầu của nó. Do vậy ta sẽ tạo một ma trận để lưu dữ liệu đầu vào nữa là B. Ma trận A chỉ để dùng tìm kiếm phần tử trội.

Do các thông tin về hàng và cột của phần tử trội trong A sẽ khác với vị trí trong ma trận B do cách xóa như trên nên ta sẽ tạo thêm ma trận R (n hàng 1 cột) với $R_{i1} = i$ và ma trận C (1 hàng n cột) với $C_{1i} = i$ để lưu giữ vị trí gốc của các phần tử trong ma trận A. Do đó gói xóa hàng sẽ như sau:

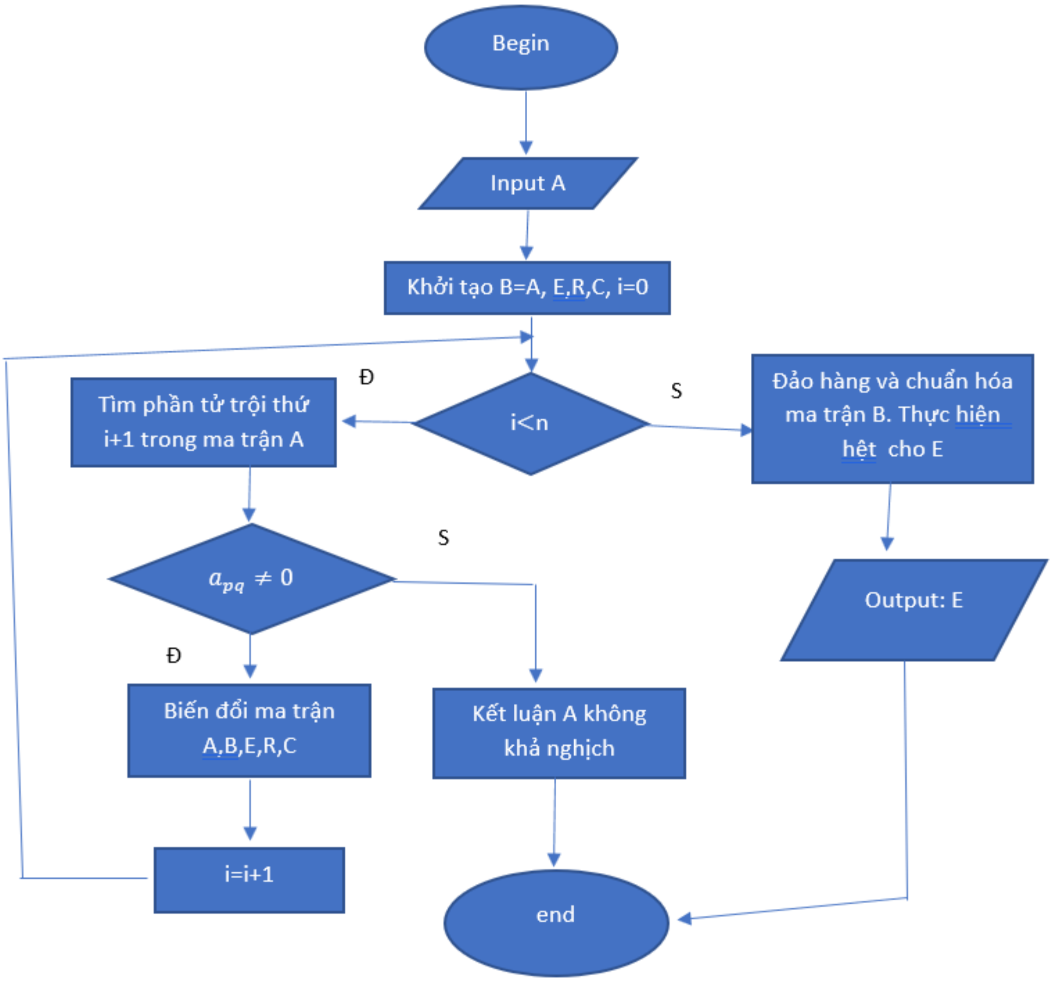
```
For (e=1; e≤ (n-a); e++)
   For (f=1; f≤ (n-a), f++)
      A[e-1][f]= A[e][f]
      R[e-1][1]= R[e][1]
```

Tương tự với gói xóa cột

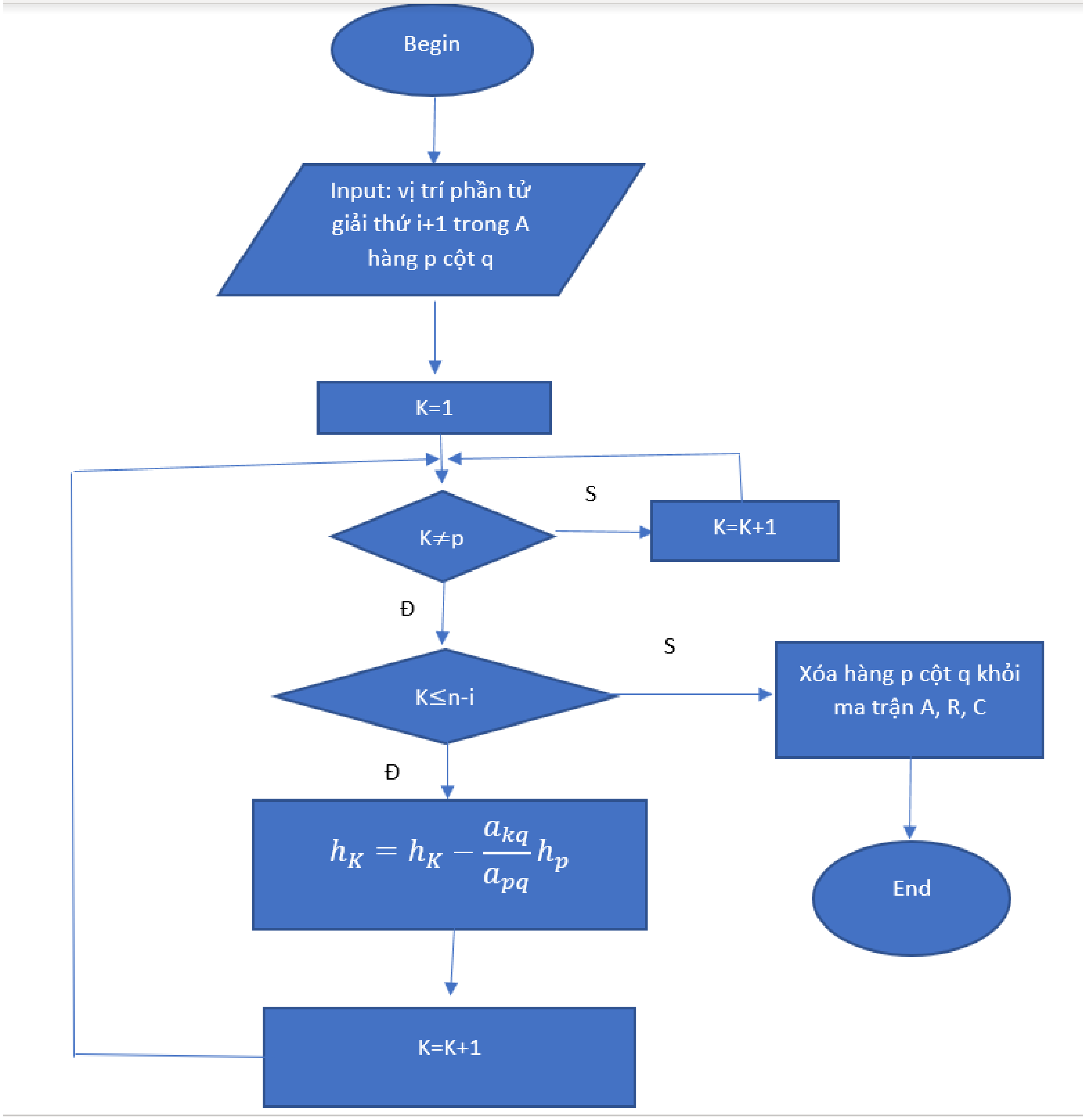
```
For (e=1; e≤ (n-a); e++)
   For (f=1; f≤ (n-a), f++)
      A[f][e-1]= A[f][e-1]
      C[1][f-1]= C[1][f-1]
```

Khi nó phần tử trội a_{ij} trong A sẽ nằm ở hàng R[i][1] và C[1][j] trong B.

Sơ đồ khối như sau:

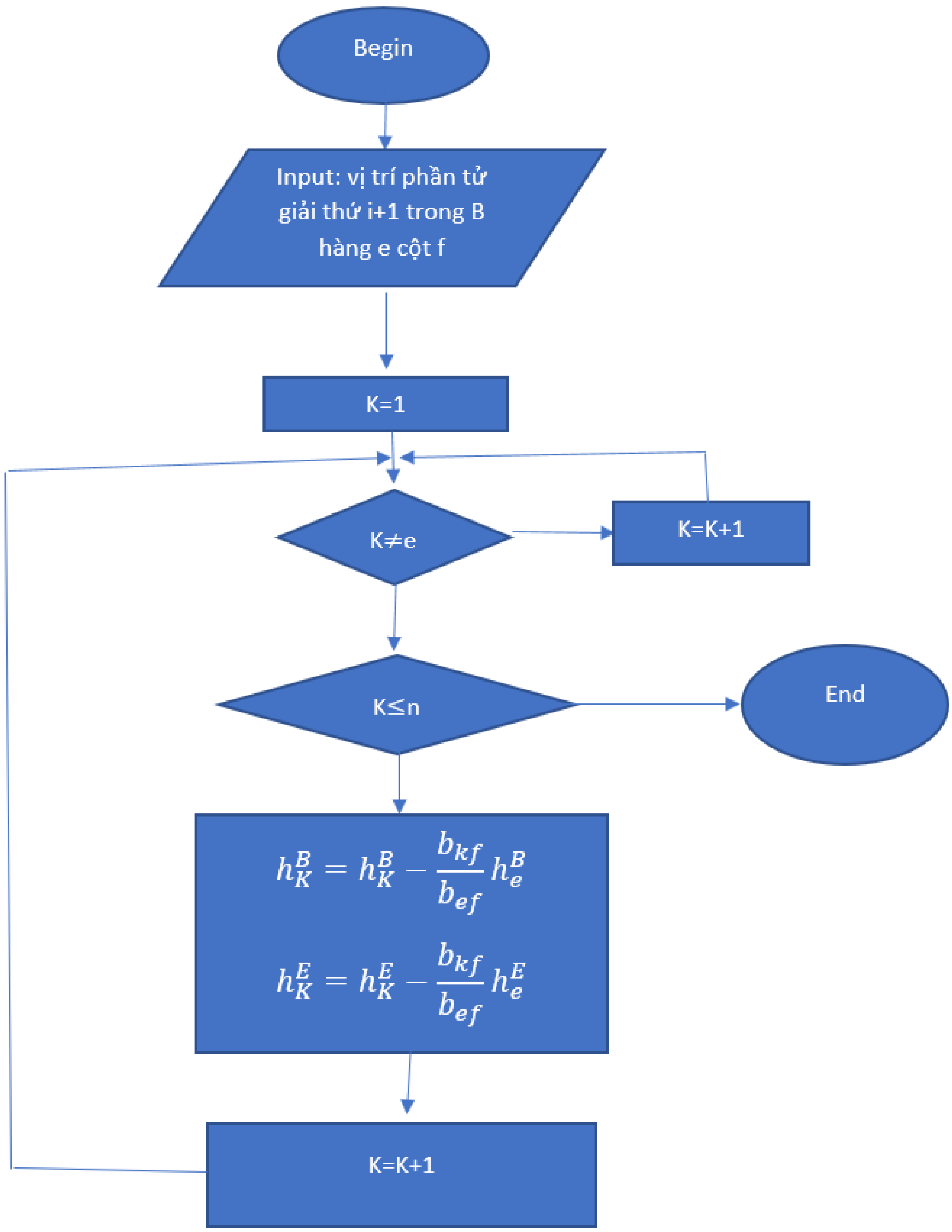


Sơ đồ biến đổi ma trận A, R và C:



Begin
Input: vị trí phần tử giải thứ i+1 trong A hàng p cột q
K=1
K≠p
S
K=K+1
Đ
K≤n-i
S
Xóa hàng p cột q khỏi ma trận A, R, C
Đ
$h_K = h_K - \frac{a_{kq}}{a_{pq}} h_p$
End
K=K+1

Với ma trận B, E:



2.4 Ví dụ

Trước tiên ta xét ma trận $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & -5 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 3 \\ -2 & -3 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Kết quả chạy ra từ chương trình

```
-2.0800 0.0400 -0.7600 0.1200 -0.7200
0.0400 -0.5200 -0.1200 0.4400 -0.6400
-0.7600 -0.1200 -0.7200 -0.3600 0.1600
0.1200 0.4400 -0.3600 -0.6800 1.0800
-0.7200 -0.6400 0.1600 1.0800 -1.4800
Kiem tra

1.0000  0.0000  -0.0000  0.0000  -0.0000
0.0000  1.0000  -0.0000  0.0000  -0.0000
-0.0000  -0.0000  1.0000  -0.0000  0.0000
-0.0000  -0.0000  0.0000  1.0000  0.0000
0.0000  0.0000  -0.0000  0.0000  1.0000
```

Tiếp theo ta xét ví dụ về ma trận không khả nghịch $A=\begin{bmatrix} 50 & 107 & 36 \\ 81 & 173 & 57 \\ 31 & 66 & 21 \end{bmatrix}$

Hàng 2 sẽ là tổng của hàng 1 và hàng 3.

Chạy chương trình ra như sau:

```
Lan bien doi thu1
Ma tran B la
-0.09827  0.00000  0.74566
81.00000  173.00000  57.00000
0.09827  0.00000  -0.74566
Ma tran E la
1.00000  -0.61850  0.00000
0.00000  1.00000  0.00000
0.00000  -0.38150  1.00000
-----------------------------------------------
Lan bien doi thu2
Ma tran B la
-0.09827  0.00000  0.74566
88.51163  173.00000  0.00000
-0.00000  0.00000  0.00000
Ma tran E la
1.00000  -0.61850  0.00000
-76.44186  48.27907  0.00000
1.00000  -1.00000  1.00000
-----------------------------------------------
 Ma tran suy bien :))))
```

III. ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG PHÁP CHOLESKY

3.1 Ý tưởng

Cho ma trận A vuông cấp n đối xứng, khi đó với phân tách Cholesky ta được:

$$A = Q^T \cdot Q$$

Với Q là ma trận tam giác trên. Khi đó nếu A^{-1} tồn tại thì

$$A^{-1} = (Q^T Q)^{-1}$$
$$\Leftrightarrow A^{-1} = Q^{-1}(Q^T)^{-1}$$
$$\Leftrightarrow A^{-1} = Q^{-1}(Q^{-1})^T$$

Vậy bài toán quy về tìm Q^{-1} .

3.2 Mô tả phương pháp

Input: ma trận A đối xứng

Output: ma trận A^{-1} hoặc A không khả nghịch

Bước 1: Dùng cholesky tách $A = Q^T \cdot Q$

Ta có:

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ 0 & q_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ 0 & q_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} q_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ q_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}, \forall\, \mathrm{j} = \overline{2,n} \\ q_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} q_{ki}^2}, \forall i = \overline{2,n} \\ q_{\mathrm{ij}} = \dfrac{a_{\mathrm{ij}} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} q_{ki} q_{kj}}{q_{ii}}, \forall i < j \\ q_{\mathrm{ij}} = 0, \forall i > j \end{cases}$$

Nếu có q_{ii} = 0 thì kết luận A không khả nghịch

Bước 2: Tìm $Q^{-1} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$

Ta có: $\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ 0 & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

Suy ra: $\begin{cases} p_{ii} = \dfrac{1}{q_{ii}} \\ p_{\mathrm{ij}} = \dfrac{\sum_{k=1}^{i-1} p_{ik} q_{kj}}{q_{jj}}, \forall i < j \\ p_{\mathrm{ij}} = 0, \forall i > j \end{cases}$

Bước 3: $A^{-1} = Q^{-1}(Q^{-1})^T$

Nếu A không đối xứng. Tạo $B=A^T.A$

Khi đó B đối xứng và tìm B^{-1} như trên.

Tìm được $A^{-1}=B^{-1}.A^T$

Trong quá trình tính toán có thể xuất hiện số thuần ảo. Tuy nhiên tính toán vẫn là dễ dàng.

3.3 Sơ đồ thuật toán chung

Nhìn từ các bước đã trình bày ở mục 3.2, ta thấy các phép khai căn ở bước 1 có thể ra số thuần ảo. Tác giả viết chương trình bằng ngôn ngữ C++ nên không có kiểu dữ liệu về số phức, do đó ta sẽ tìm cách để đánh dấu các vị trí trong ma trận Q là số phức hay số thực.

Trước tiên ta thấy hàng 1 của ma trận Q chỉ là các số thực hoặc các số thuần ảo. Từ công thức $q_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} q_{ki}q_{kj}}{q_{ii}}, \forall i < j$, ta thấy q_{2j} là thuần ảo hay số thực phụ thuộc vào q_{2i} (vì tích $q_{ki}q_{kj}$ là số thực do hàng 1 là thuần ảo hoặc thuần thực) vậy hàng 2 lại chỉ là số thực hoặc số thuần ảo. Do đó các hàng trong ma trận Q không bị trộn lẫn giữa các hai loại số này. Vậy ta có thể dùng mảng một chiều để lưu loại số của ma trận Q (0 ứng với số thực và 1 ứng với số thuần ảo).

Tiếp theo xét ma trận P là nghịch đảo của ma trận Q. Dễ thấy là hàng i của ma trận Q sẽ cùng kiểu số với cột i của ma trận P. Vậy chỉ cần dùng mảng một chiều đã nêu ở trên là đủ.

Tiếp đó ta định nghĩa các phép nhân, chia, sau đó là khai căn. Phép ta có thể định nghĩa như sau:

Input: hai số thực x, y, số nguyên b (là 0 hoặc 1)

Output: số thực z.

nhan (x, y, b)

If(b=0)
    z=x*y
Else
    z=-x*y

Do các phép nhân từ công thức ở mục 3.2 chỉ là phép nhân giữa hai phần tử cùng được lưu thông tin tại mảng a là phần tử a_j nào đó nên có thể định nghĩa như trên.

Với phép chia:

Input: số chia x, số bị chia y, số nguyên b (là số để quy định y là thực hay phức)

Output: số thực z.

chia (x, y, b)

If (b=0)
  z=x/y
Else
  z=-x/y

Các phép toán nhân, chia ở trong các bước tìm ma trận P, Q sẽ thay thế bằng hai hàm *nhan*, *chia* đã định nghĩa ở trên. Ngoài ra, bước nhân ma trận cũng sẽ xử dụng hàm *nhan*.

Để tính các phần tử q_{ii} $(i > 1)$ trên đường chéo của Q, ta định nghĩa phép khai căn như sau:

Input: số nguyên i, số thực x (a_{ii}), ma trận Q, mảng a.

Output: mảng a và ma trận Q.

khaican (i, x, Q, a)

Khởi tạo biến S= x
For (e=1; e≤ i-1; e++)
  S= S- *nhan* (q_{ei}, q_{ei}, a[e])
If (S<0)
  $q_{ii} = \sqrt{-S}$
  a[i]= 1
Else
  $q_{ii} = \sqrt{S}$
  a[i]= 0

Để tính các $q_{ij}, i < j$ của ma trận Q có thể làm như dưới đây:

Input: số nguyên i, j, số thực x (a_{ij}), ma trận Q và mảng a.

Output: ma trận Q

Khởi tạo biến H= x For (e= 1; e≤ i- 1; e++)   H= H- *nhan* (q_{ki}, q_{kj}, a[k]) q_{ij}= *chia* (H, q_{ii}, a[i])

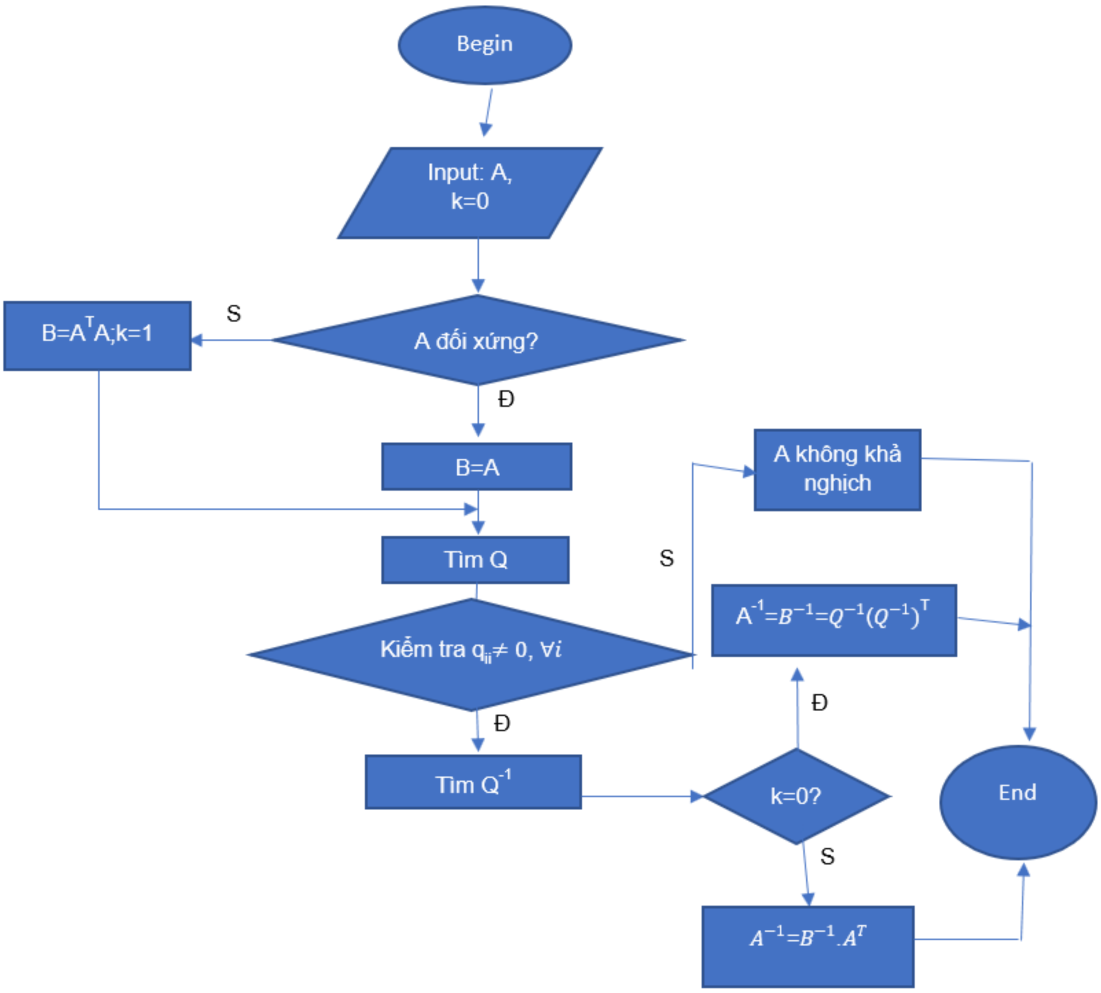
Với các phần tử p_{ij}, $i < j$, của ma trận P ta có thể tính như sau:

Input: vị trí i, j, ma trận P, ma trận Q, mảng a.

Output: ma trận P

Khởi tạo biến S= 0 For (e= i; e$\leq$ j- 1; e++)   S= S- *nhan* (p_{ie}, q_{ej}, a[e]) p_{ij}= *chia* (S, q_{jj}, a[j])

Sơ đồ thuật toán như sau:



3.4 Ví dụ

Ta sẽ bắt đầu với ma trận đối xứng $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & -5 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 3 \\ -2 & -3 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Kết quả chạy ra từ chương trình:

```
----------------------------------------
Ma tran dau vao la ma tran doi xung
----------------------------------------
Ma tran tam giac tren la:
1.0000  3.0000  -2.0000  0.0000  -2.0000
0.0000i  2.2361i  -0.4472i  -0.4472i  -1.3416i
0.0000i  0.0000i  0.8944i  2.0125i  1.5652i
0.0000  0.0000  0.0000  3.0414  2.2194
0.0000i  0.0000i  0.0000i  0.0000i  0.8220i

----------------------------------------
Ma tran nghich dao cua ma tran tam giac tren la
1.0000  1.3416i  -1.5652i  -1.2330  -0.5918i
0.0000  -0.4472i  -0.2236i  -0.0822  -0.5261i
0.0000  0.0000i  -1.1180i  -0.7398  0.1315i
0.0000  0.0000i  0.0000i  0.3288  0.8878i
0.0000  0.0000i  0.0000i  0.0000  -1.2166i
----------------------------------------
Ma tran nghich dao la
-2.08000  0.04000  -0.76000  0.12000  -0.72000
0.04000  -0.52000  -0.12000  0.44000  -0.64000
-0.76000  -0.12000  -0.72000  -0.36000  0.16000
0.12000  0.44000  -0.36000  -0.68000  1.08000
-0.72000  -0.64000  0.16000  1.08000  -1.48000
check

1.00000  0.00000  -0.00000  0.00000  -0.00000
0.00000  1.00000  -0.00000  0.00000  -0.00000
0.00000  0.00000  1.00000  0.00000  -0.00000
-0.00000  -0.00000  0.00000  1.00000  0.00000
0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  1.00000
```

Tiếp theo ta xét ví dụ về ma trận không khả nghịch $A=\begin{bmatrix} 50 & 107 & 36 \\ 81 & 173 & 57 \\ 31 & 66 & 21 \end{bmatrix}$

Chạy chương trình ra như sau:

```
Ma tran dau vao la
50.00000  107.00000  36.00000
81.00000  173.00000  57.00000
31.00000  66.00000  21.00000
---------------------------------------
ma tran moi la:
10022.00000  21409.00000  7068.00000
21409.00000  45734.00000  15099.00000
7068.00000  15099.00000  4986.00000
---------------------------------------

---------------------------------------
Ma tran ban dau suy bien nen khong co ma tran nghich dao
```

Ví dụ cuối về ma trận không đối xứng $A = \begin{bmatrix} 50 & 107 & 36 \\ 25 & 54 & 20 \\ 31 & 66 & 21 \end{bmatrix}$

Kết quả:

```
Ma tran dau vao la
50.00000  107.00000  36.00000
25.00000  54.00000  20.00000
31.00000  66.00000  21.00000
---------------------------------------
ma tran moi la:
4086.00000  8746.00000  2951.00000
8746.00000  18721.00000  6318.00000
2951.00000  6318.00000  2137.00000
---------------------------------------
Ma tran tam giac tren la:
63.9218  136.8234  46.1658
0.0000  0.6039  2.3920
0.0000  0.0000  0.0259

---------------------------------------
Ma tran nghich dao cua ma tran tam giac tren la
0.0156  -3.5446  299.4001
0.0000  1.6560  -152.8995
0.0000  0.0000  38.6005
---------------------------------------
Ma tran nghich dao la
-185.99998  128.99999  195.99998
94.99999  -65.99999  -99.99999
-24.00000  17.00000  25.00000
check

1.00000  0.00000  -0.00000
0.00000  1.00000  0.00000
-0.00000  -0.00000  1.00000
```

IV. PHƯƠNG PHÁP VIỀN QUANH

4.1 Ý tưởng

Cho ma trận $A=\left[a_{\text{ij}}\right]$. Chia ma trận A thành:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ \hline a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{array}\right]$$

Ma trận A chia theo dạng trên gọi là ma trận viền quanh.

Ta tìm $A^{-1}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ cũng ở dạng viền quanh với điều kiện A_{11}^{-1} tồn tại.

4.2 Mô tả phương pháp

Ta có $\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_{11}A_{11}+B_{12}A_{12}=E(1) \\ B_{11}A_{12}+B_{12}A_{22}=0(2) \\ B_{21}A_{11}+B_{22}A_{21}=0(3) \\ B_{21}A_{12}+B_{22}A_{22}=1(4) \end{cases}$$

Vì A_{11}^{-1} tồn tại nên nhân $A_{11}^{-1}A_{12}$ vào 2 vế của (1)

Lấy (2) trừ kết quả trên : B_{12}=-$A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}$ (5)

Từ (1) ta có $B_{11}=A_{11}^{-1}-B_{12}A_{21}A_{11}^{-1}$ (6)

Từ(3) ta được $B_{21}=-B_{22}A_{21}A_{11}^{-1}$ (7)

Thay (7) vào (4) $B_{22}=(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}$ (8)

Đưa vào các công thức

X=$A_{11}^{-1}A_{12}$; Y=$A_{21}A_{11}^{-1}$; θ= $A_{22}-A_{21}X$= $A_{22}-YA_{12}$

Vì thế từ (5) đến (8) suy ra

$B_{11}=A_{11}^{-1}+\frac{1}{\theta}\cdot X\cdot Y$; $B_{22}=\frac{1}{\theta}$; $B_{12}=\frac{-X}{\theta}$; $B_{21}=\frac{-Y}{\theta}$

Vậy ta đã tính được $A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$.

Kí hiệu A_i^{-1} là ma trận nghịch đảo của ma trận con chính cấp i của ma trận A

Kí hiệu A_i là ma trận con chính cấp i của A

Ta tính được A_2^{-1} dễ dàng. Lại có $A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, ta tính được A_3^{-1} như phương pháp trên. Cứ lặp lại như vậy ta sẽ tìm được A_n^{-1} hay A^{-1}.

Vấn đề xảy ra là nếu A_i^{-1} không tồn tại thì sao? May thay, khi đó $\theta = 0$ nên quá trình trên tính toán trên sẽ dừng lại. Khi đó ta tạo ma trận $C = A^T A$ và lại tìm C^{-1} từ C_2^{-1} như trên. Nếu tiếp tục gặp $\theta = 0$ thì kết luận ngay A không khả nghịch. Nếu tính được C^{-1}, ta tính $A^{-1} = A^T C^{-1}$.

Tóm lại, phương pháp viền quanh có những bước chính sau:

Input: ma trận đầu vào A.

Output: ma trận A^{-1} hoặc kết luận A không khả nghịch.

Bước 1: khởi tạo $A' = A, k = 0$.

Bước 2 Nếu $\det(A'_2) = 0$ và cho $A' = A^T A,\ k = 1$. Chuyển sang bước 4.

Bước 3: nếu $k = 1$ thì kết luận A suy biến và kết thúc chương trình. Nếu không thì $A' = A^T A$ và cho $k = 1$. Tiếp đó $\det(A'_2) = 0$ thì kết luận A suy biến, không thì chuyển sang bước 4.

Bước 4: khởi tạo ma trận A'^{-1}_2, khởi tạo biến $i = 3$.

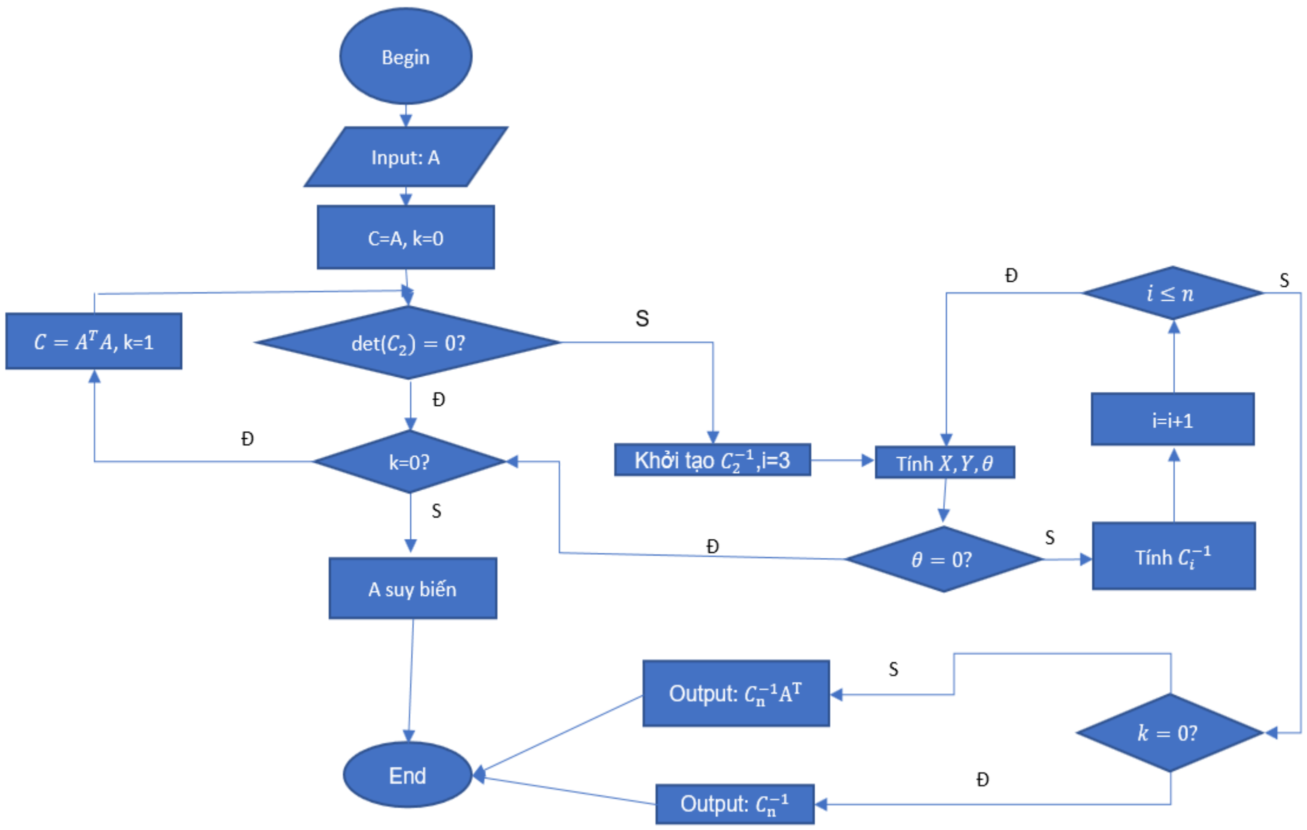
Bước 5: Tính X, Y, θ từ A'^{-1}_{i-1}.

Bước 6: Nếu $\theta \neq 0$ chuyển sang bước 7. Nếu có chuyển sang bước 3

Bước 7: Tính A'^{-1}_i, tăng i lên 1.

Bước 8: nếu i nhỏ hơn hoặc bằng số hàng của A thì sang bước 5. Ngược lại thì kết thúc chương trình và in ra A^{-1}.

4.3 Sơ đồ thuật toán chung



4.4 Một số ví dụ

Ví dụ về ma trận $A = \begin{bmatrix} 6 & 14 & 23 & 23 & 7 & 37 & 1 \\ 39 & 17 & 42 & 33 & 41 & 11 & 47 \\ 3 & 30 & 37 & 24 & 41 & 47 & 46 \\ 24 & 40 & 4 & 42 & 39 & 8 & 23 \\ 50 & 39 & 28 & 47 & 34 & 44 & 12 \\ 8 & 50 & 20 & 14 & 14 & 6 & 15 \\ 44 & 18 & 29 & 43 & 42 & 6 & 48 \end{bmatrix}$

Kết quả chạy từ chương trình như sau:

```
Ma tran nghich dao cua ma tran con chinh cap 3
-0.17962  0.04896  0.05608
-0.37489  0.04355  0.18360
0.31853  -0.03928  -0.12639
------------------------------------------------------------------
Ma tran nghich dao cua ma tran con chinh cap 4
-0.05499  0.02989  -0.00049  0.00691
-0.07881  -0.00177  0.04922  0.01642
-0.00076  0.00959  0.01853  -0.01771
0.10655  -0.01631  -0.04836  0.00591
------------------------------------------------------------------
Ma tran nghich dao cua ma tran con chinh cap 5
-0.02810  0.00007  -0.00502  -0.01778  0.03216
-0.02861  -0.05742  0.04076  -0.02967  0.06002
0.01052  -0.00291  0.01663  -0.02806  0.01348
0.06521  0.02952  -0.04139  0.04386  -0.04942
-0.02468  0.02736  0.00416  0.02266  -0.02950
------------------------------------------------------------------
Ma tran nghich dao cua ma tran con chinh cap 6
-0.02811  0.00003  -0.00499  -0.01780  0.03220  -0.00002
-0.00934  -0.01057  0.00102  -0.00208  0.00679  0.02197
0.02157  0.02395  -0.00616  -0.01224  -0.01704  0.01260
0.05765  0.01114  -0.02580  0.03304  -0.02854  -0.00862
-0.03592  0.00003  0.02734  0.00656  0.00155  -0.01282
-0.00733  -0.01782  0.01512  -0.01049  0.02025  -0.00836
------------------------------------------------------------------
Ma tran nghich dao cua ma tran con chinh cap 7
-0.03204  -0.02345  0.00169  -0.03002  0.03209  0.00530  0.02671
-0.01069  -0.01867  0.00332  -0.00630  0.00675  0.02380  0.00921
0.02952  0.07152  -0.01970  0.01252  -0.01681  0.00182  -0.05413
0.05320  -0.01550  -0.01822  0.01917  -0.02867  -0.00258  0.03032
-0.01907  0.10079  -0.00133  0.05901  0.00203  -0.03565  -0.11466
-0.01117  -0.04076  0.02164  -0.02243  0.02014  -0.00316  0.02610
-0.01403  -0.08392  0.02388  -0.04369  -0.00040  0.01902  0.09550
------------------------------------------------------------------
check
1.00000  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  -0.00000  0.00000
0.00000  1.00000  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  -0.00000
-0.00000  -0.00000  1.00000  -0.00000  -0.00000  0.00000  0.00000
0.00000  0.00000  0.00000  1.00000  0.00000  -0.00000  0.00000
-0.00000  -0.00000  -0.00000  -0.00000  1.00000  0.00000  0.00000
0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  1.00000  -0.00000
0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  0.00000  1.00000
```

V. Một số đánh giá chung

Cả 3 phương pháp giới thiệu ở trên ra kết quả nhanh với các ma trận cỡ nhỏ. Với các ma trận cỡ lớn hơn sẽ mất khá nhiều thời gian. Các phương pháp đều có độ phức tạp tính toán cỡ $O(n^3)$.

Ngoài ra với phương pháp Gauss-Jordan, nếu xử lý các ma trận cỡ lớn mà các số trong ma trận có giá trị tuyệt đối nhỏ có thể sẽ dẫn đến sai số lớn do sử dụng phép chia với các số rất nhỏ trong quá trình biến đổi cũng như chuẩn hóa ma trận.

VI. Một số tài liệu tham khảo

[1] Lê Trọng Vinh (2007), Giáo trình Giải tích số, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật.

[2] Phạm Kỳ Anh (1996) , Giải tích số, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.