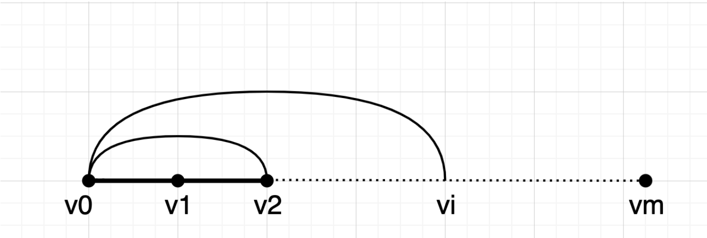
HW02

> 1.24 G是简单图，$\delta(G) \geq 2$ ，则G 中有长至少为 $\delta(G)+1$ 的圈。

证明：

取最长轨道 $P(v_0,v_m)$ ，由习题1.16知 $m \geq \delta(G)$ 。又因为$P(v_0,v_m)$ 是最长的轨道， 所以v_0的除v_1 外其它 $\delta(G)-1$ 个邻顶在$P(v_0,v_m)$ 上，否则会得到更长的轨道。

由抽屉原理，至少一个邻顶的下标大于等于 $\delta(G)$，不妨设 为max 。则 $C_0=P(v_0,v_{max}) \cup v_0v_{max}$ 构成一个长为$max+1$ 的圈。而$max+1 \geq \delta(G)+1$ 。得证。

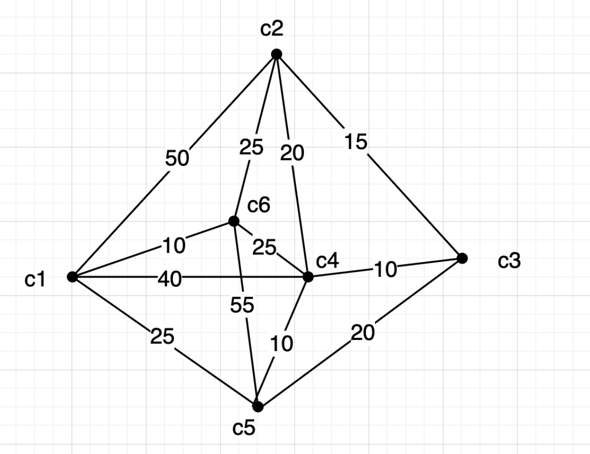


图一.

> 1.26 一个公司在六个城市$c_1, c2, ..., c_6$有分公司，下面的矩阵(i,j)号元素是c_i到c_j的机票价格，试为该公司制作一张c_1 到每个城市的路线图，使得每个城市的机票价格都最便宜。

$$\begin{pmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{pmatrix}$$

转化为图



图二.

以c_1为起点 在图二上跑$Dijkstra$ 算法。

迭代次数i	$l(v_2)$	$l(v_3)$	$l(v_4)$	$l(v_5)$	$l(v_6)$	S
0	50	∞	40	25	10	v_1
1	50	∞	50	25	10	v_1, v_6
2	35	45	35	25	10	v_1, v_5, v_6
3	35	45	35	25	10	v_1, v_2, v_5, v_6
4	35	45	35	25	10	v_1, v_2, v_4, v_5, v_6
5	35	45	35	25	10	$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$

路径的答案不止一种：

- v_2 :$v_1 \to v_6 \to v_2$
- v_3:
  - $v_1 \to v_5 \to v_3$
  - $v_1 \to v_5 \to v_4 \to v_3$
  - $v_1 \to v_6 \to v_4 \to v_3$
- v_4:
  - $v_1 \to v_5 \to v_4$
  - $v_1 \to v_6 \to v_4$
- v_5:$v_1 \to v_5$
- v_6:$v_1 \to v_6$

> 1.27

设 W：狼，S：羊，B：白菜，M：船夫 。初始在A侧， 目标是移到B 侧

运送方案如下：

步数	操作	A侧状态	B 侧状态
1	运羊到B	W, B	M, S
2	空船回A	W, B, M	S
3	运狼到B	B	W, M, S
4	运羊到A	B, M, S	W
5	运白菜到B	S	B, M, W
6	空船回A	S, M	B, W
7	运羊到B		S, M, B, W

> 2.3 证明：如果一棵树只有两片树叶，则这棵树是一条轨。（反证法）

证明：

假设 $\exists T_0$ 是一棵只有两片树叶的树， 但T_0不是轨。

则存在u 使得$deg(u) \geq 3$

又因为T_0 只有两片叶子 。所以，有$\nu(T_0) - 2$ 个顶点的度数 ≥ 2 。

于是有， $\sum\limits_{v_i \in v(T_0)} deg(v_i) \geq 1 + 1 + 3 + 2 * (\nu(T_0) - 3) = 2\nu(T_0) - 1$

又由欧拉公式， $\sum\limits_{v_i \in v(T_0)} deg(V_i) = 2(\nu(T_0) - 1)$

矛盾。

所以，如果一棵树只有两片树叶，则这棵树是一条轨。

> 2.4 证明：如果T是树，且 $\Delta(T) \geq n$，则T至少有n片树叶

证明：

定义度数为i 的 结点个数为 n_i

由图的性质有： $2\varepsilon(T) = \sum_{i=1}^{k} in_i$

由树的性质有： $\varepsilon(T) = v(T) - 1 = \sum_{i=1}^{k} n_i - 1$

上面两个式子联立可得： $n_1 = \sum_{i=2}^{k}(i-2)n_i + 2$

$n_1 = \sum_{i=2}^{k}(i-2)n_i + 2 \geq (\Delta(T) - 2) * 1 + 2 = \Delta(T) \geq n$

得证。

> 2.6 证明：树有一个中心或两个中心，且有两个中心时，这两个中心相邻.

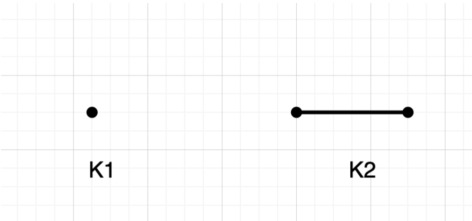
方法一 （可以使用删除叶子节点的方法，）

引理1. 删除T中所有叶子结点后，新树T'的中心不变。

对于$\forall v \in V(T)$，如果要使$d(u,v)$最大，v必然是叶子。那么删除所有 T中叶子结点后，对所有的结点u，必然有：$max_{\forall v \in V(T')} d(u,v) = max_{\forall v_0 \in V(T)} d(u,v_0) - 1$。则所有点的离心率减$1$ 。所以中心不变。

引理得证。

重复删除所有叶子结点操作，中心一直不变。最后只能得到K_1，K_2这两种情况，即一个顶点或者两个相邻顶点，得证。



图三.

> 2.8 证明： 若 $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_v$ 是正整数序列，则此序列是树的度数序列当且仅当 $\sum_{i=1}^{v} d_i = 2(v-1)$ 。

证明：

充分性：

若 $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_v$ 是正整数序列，且是树T的度数序列。

则$\sum_{i=1}^{v} d_i = \sum_{v_i \in T} deg(v_i) = 2\epsilon = 2(v-1)$

必要性：

命题： $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_v$ 是正整数序列 ， 若$\sum_{i=1}^{v} d_i = 2(v-1)$ 则此序列是树的度数序列。

对v进行归纳。

当$v=2$ 时， $d_1 = d_2 = 1$, 是树的度数序列。

假设，$v=k$ 时命题成立。

则$v=k+1$时， 若 $\sum_{i=1}^{k+1} d_i = 2(k+1-1)$

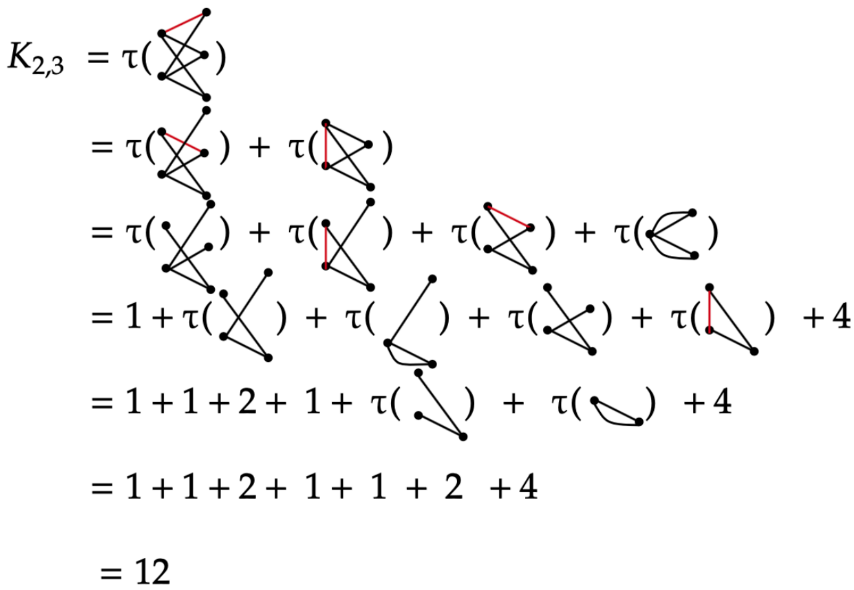
必有 $d_{k+1} = 1$ ，否则 $\sum_{i=1}^{k+1} d_i \geq (k+1)d_{k+1} \geq 2(k+1) > 2(k+1-1)$

必有 $d_1 \geq 2$ ，否则 $\sum_{i=1}^{k+1} d_i \leq (k+1)d_1 \leq (k+1) < 2(k+1-1)$

考虑到序列， $d_1-1, d_2, d_3, \cdots, d_k$ ，共k 个点， 满足归纳假设, 可构成一棵树 。不防设构成树T_0 。连接 v_0, v_{k+1} 。构成一棵新树 T_1 。T_1 的度数序列即为 $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_{k+1}$ 。 命题成立。

得证。

> 2.11 求 $K_{2,3}$生成树的个数。



> 作业反馈，以B组为样本。

- 1.24 很多同学最长轨道起手，但不说明长度$\geq \delta(G)$， 保证端点的邻边不构成重边。
- 2.8 必要性的证明，有同学用$\varepsilon(G)=\nu-1$，结合定理2.1证明。这里不能默认$\{d_i\}$ 构成图，即使因为 $\sum di$ 为偶数，可以构成图，也不能默认可以构成简单图。
- 2.6 考虑到很多同学用最长轨道法。

  法二:

  取树的最长轨道。

  引理一:　中心在最长轨道上。

  设最长轨道为$P(v_0,v_n)=v_0e_1v_1\cdots v_ie_{i+1}\cdots v_n$，则$l(v_{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor})=\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$ 否则存在更长的轨道。

  对任意 $v_i\in P(v_0,v_n), l(v_i)=max\{dist(v_0,v_i),dist(v_i,v_n)\}\geq\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor=l(v_{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor})$

  对任意$v'\notin P(v_0,v_n)$， 存在一点$v_i\in P(v_0,v_n)$ 使得，$P_0(v',v_i)\cap P(v_0,v_n)=v_i$ ，有 $l(v')\geq dist(v',v_i)+max\{dist(v_i,v_0),dist(v_i,v_n)\}>l(v_i)\geq l(v_{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor})=\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$

  则 $r(G)=min\{l(v)|v\in V\}=\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$

  所以只有在最长轨道上的点可能是中心。

  引理得证。

  若最长轨道长为偶数，则只有一个点$l(v)=\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$，则为一个中心。若为奇数, 则有中间两个相邻点 满足 $l(v)=\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$，则为中间两个相邻顶点为中心。