2017-2018 第二学期，期中

一

(1) $\alpha_1=(2,1,3,-1)^T \quad \alpha_2=(3,-1,2,0)^T$

$\alpha_3=(4,2,6,-2)^T \quad \alpha_4=(4,-3,1,1)^T$

$\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = \underline{\ 2\ }$

$$A=\begin{bmatrix}2&3&4&4\\1&-1&2&-3\\3&2&6&1\\-1&0&-2&1\end{bmatrix} \to \begin{pmatrix}1&-1&2&-3\\0&5&0&10\\0&5&0&10\\0&-1&0&-2\end{pmatrix} \qquad \mathrm{rank}\, A = 2$$

(2) $A=\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\\2&1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1&4&-2\\3&0&1\end{pmatrix} \qquad \det(AB) = \underline{\ 0\ }$

$$AB=\begin{pmatrix}6&12&-5\\5&-4&4\\5&8&-3\end{pmatrix} \qquad \cancel{\det AB =}$$

$$\det AB = \det\begin{pmatrix}6&12&-5\\0&-14&\frac{49}{6}\\0&-2&\frac{7}{6}\end{pmatrix} = 6\left(-14\cdot\frac{7}{6}+2\times\frac{49}{6}\right)$$

$$=0$$

(或由 Binet-Cauchy 公式（P95 例 4.3.6） $\det AB = 0$ 显然)

(3) $A=\begin{pmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{pmatrix}$ 第4行各元素代数余子式之和 $= \underline{\ 0\ }$

依次计算 $A_{41}=(-1)^5(-56)=56$

$A_{42}=(-1)^{4+2}\,0=0$

$A_{43}=(-1)^{4+3}\,42=-42$

$A_{44}=(-1)^{4+4}(-14)=-14$

和为 0

(4) A 伴随矩阵 A^* $\quad (A^*)^T = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & -1 & & \\ 4 & & & \end{pmatrix}$ 则 $A =$ $\underline{\begin{pmatrix} & & & -2 \\ & & -1 & \\ & 2 & & \\ -\frac{1}{2} & & & \end{pmatrix}}$

$$A^* = ((A^*)^T)^T = \begin{pmatrix} & & & 4 \\ & & -1 & \\ & 2 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

$$\det A^* = (-1)^{4+1}(-1)^{3+1}(-1)^{2+1}(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot 2\,(-1) \cdot 4 = -8 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} \exists$$

$$AA^* = \det A \cdot I \Rightarrow |\det A^*| = |\det A|^{n-1} \Rightarrow \det A = -2$$

$$\Rightarrow A^* = \det A \cdot A^{-1} \quad A^{-1} = \frac{A^*}{\det A} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} & & & 4 \\ & & -1 & \\ & 2 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = -2\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \frac{1}{2} & \\ & -1 & & \\ \frac{1}{4} & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & -2 \\ & & -1 & \\ & 2 & & \\ -\frac{1}{2} & & & \end{pmatrix}$$

(弄明白 A, A^{-1}, A^*, $\det A$, $\det A^{-1}$, $\det A^*$ 的转换关系)

(5) $\alpha_1 = (a, 0, c)$
$\alpha_2 = (b, c, 0)$ 线性无关，则 a, b, c 满足 $\underline{\quad abc \neq 0 \quad}$
$\alpha_3 = (0, a, b)$

线性无关 $\Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ b & c & 0 \\ 0 & a & b \end{pmatrix} \neq 0$

$$\det A = acb + c(ab) = 2abc \neq 0$$

二 判断题

(1) $A\in\mathbb{R}^{3\times5}$ $\operatorname{rank}A=3$ 则 $\exists b\in\mathbb{R}^3$ s.t $Ax=b$ 只有唯一解

错误

$$A=\begin{pmatrix}1&&&1&1\\&1&&1&\\&&1&&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times5}$$ $\operatorname{rank}A=3$ 行满秩

$$\forall b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$

则 $A\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\0\\0\end{pmatrix}=b$, $A\begin{pmatrix}b_1-b_3\\b_2\\0\\0\\b_3\end{pmatrix}=b$ $A\begin{pmatrix}b_1-b_2\\0\\0\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=b$

由唯一性 $\Rightarrow$ $b_3=b_2=0$

再由 $A\begin{pmatrix}0\\b_2-b_1\\b_3\\b_1\\0\end{pmatrix}=b$ $\Rightarrow$ $b_1=0$ 而 $b=0$ 时齐次方程组 V 为解空间

$\dim V=n-\operatorname{rank}A=2$ 显然解不唯一

(2) 如果 $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$ $\operatorname{tr}((A-B)(A-B)^T)=0$ 则 $A=B$

正确 $\operatorname{tr}AA^T=\sum_{i=1}^m(AA^T)_{ii}=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}(a_{ij})$

$AA^T\in\mathbb{R}^{m\times m}$

$=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}^2=0\Rightarrow A=0$

(3) 设向量组 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 线性无关 $\beta = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_r\alpha_r$ 且 $\lambda_i \neq 0$

则 $\alpha_1 \cdots \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1} \cdots \alpha_r$ 线性无关

正确 习题5 16题

(4) $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $\det AB = \det BA$

错误 $A = (1, 0)$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\det AB = 1$

$\det BA = 0$

(由 Binet-Cauchy 公式 结论集然不对)

三 已知方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \text{与} \begin{cases} x_1 + ax_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ bx_1 - x_3 - 2x_4 = -3 \\ x_3 - 2x_4 = 1-c \end{cases} \text{同解}$$

求 a, b, c 值

解, 先求左边方程组的解

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (AX = b)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 7 & 25 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

令 $x_4 = t$

$x_3 = 2t-5$

$x_2 = t-4$

$x_1 = t-2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (*)$$

有特解 $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ 代入右边方程 $\Rightarrow \begin{cases} c = 6 \\ b = 4 \\ a = 2 \end{cases}$

最后代入 a, b, c 值到右边方程，证明其解也为 $(*)$ 即可

四 $n(>1)$ 阶方程 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & 2 \end{pmatrix}$ 求 $\det A$ 及 A^{-1}

$$\det A = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\times(n-1) & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(n-1)\cdot 2^{n-1} = -(n-1)2^{n-2} \neq 0$$

下求 A^{-1}

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & & & & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \ddots & \\ 1 & & & 2 & & & & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{行的1}]{\text{消第一}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -\frac{n-1}{2} & & & & 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & & & & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \ddots & \\ 1 & & & 2 & & & & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{消第一列的1}]{\text{利用 } -\frac{n-1}{2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} -\frac{n-1}{2} & & & & 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2} \\ & 2 & & & \frac{2}{n-1} & 1-\frac{1}{n-1} & \cdots & -\frac{1}{n-1} \\ & & \ddots & & \vdots & & 1-\frac{1}{n-1} \cdots & -\frac{1}{n-1} \\ & & & 2 & \frac{2}{n-1} & & & 1-\frac{1}{n-1} \end{array}\right] \xrightarrow[\text{化}]{\text{将左边单位}} A^{-1}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{n-1} & \frac{1}{(n-1)} & \cdots & \frac{1}{(n-1)} \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2(n-1)} & \cdots & -\frac{1}{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & -\frac{1}{2(n-1)} & \cdots & \frac{1}{2}-\frac{1}{2(n-1)} \end{pmatrix}$$

设 $R^{2\times 2}$ 为实数域上所有 2×2 阶矩阵组成的集合，按矩阵加法数乘构成线性空间

(1) 证明 $S=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$

构成 $R^{2\times 2}$ 一组基

(2) 求基 S 到自然基的 $\{E_{ij}\}_{1\le i,j\le 2}$ 的过渡矩阵 T

(3) 求 $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 在基 S 下的坐标

解 (1) 相应记 S 中矩阵为 A B C D

$$A=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$B=(\quad)\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$C=(\quad)\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$D=(\quad)\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

所以

$$(A,B,C,D)=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})T$$

$$T=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\1&1&1&-1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\end{pmatrix}$$

再证明 $\det T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 16 \neq 0$

所以 S为基，T为其过渡矩阵

(3) 记相应系数为 a, b, c, d

则 $\begin{cases} a-b-c-d=1 \\ a+b+c-d=2 \\ a-b+c+d=3 \\ a+b-c+d=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{5}{2} \\ b=\frac{1}{2} \\ c=0 \\ d=1 \end{cases}$ 为系数

(或者求 T^{-1} 来计算亦可)

六、$A \in F^{m\times n}$ $B \in F^{n\times m}$ 证明 $n + \operatorname{rank}(I_m - AB) = m + \operatorname{rank}(I_n - BA)$

P_{116} 习题4 42

考虑 $\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$ 即可