图论 HW4

ch3

7

> 任给三个非负整数$l \le m \le n$，都存在简单图G，满足$\kappa(G)=l, \kappa'(G)=m, \delta(G)=n$。

- $l=n$时，完全图K_{n+1}满足条件
- $l<n$时，取两个完全图K_{n+1}，分别记作K_1, K_2，取K_1中l个顶点记为**X**，K_2中m个顶点记为**Y**，**Y**中每个顶点向**X**中的顶点连一条边，使得一共有m条边，且**X**中每个顶点都有边被连接（可以被连接多次），即得到满足条件的图 。

10

> 设子图G_1和G_2是图G的两个不同的块，则若G_1和G_2有公共顶点，一定是G的割顶

- 设G_1与 G_2 有2个及以上的公共顶点，并设这些公共顶点中的2个顶点为u，v，同时取G_1中的任一点x和 G_2 中的任一点y，则xu， yu， xv， yv连通，从而形成圈xuyvx，删去公共顶点中的u或v，则xy仍连通。结合xy的任意性，可以知 $G_1 \cup G_2$ 为块，这与子图G_1与 G_2 是G的两个不同的块矛盾，所以G_1与 G_2 只有一个公共顶点。删去该公共点后G_1与 G_2 不再连通，所以该点一定是G的割顶。
- 综上所述，若子图 1与 2是图G的两个不同的块，且它们有公共顶点，则公共顶点一定是G的割顶。

13

> 证明Menger定理边版本，给定图G中的两个顶点u，v , G中两两无公共边的uv--轨道的最大数量等于最小uv-边割集的边数，即$p'(u,v)=c'(u,v)$

- 方法一：对于任两个点 u 和 v 的连通度，在单独考虑仿照点版本的 Menger 定理证明，利用归纳法证明，对边的条数作归纳 。令 $H=G-e$，我们有

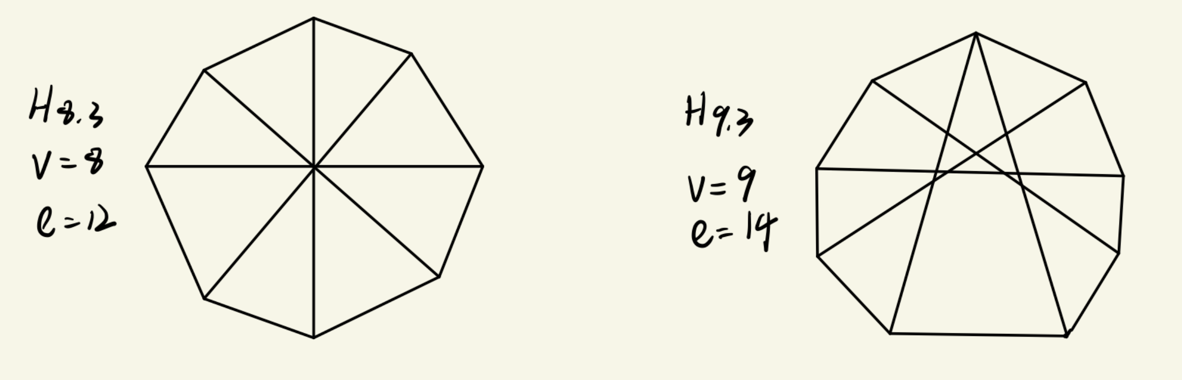
$$p_G(u,v) \ge p_H(u,v) = c_H(u;v) \ge c_G(u;v) - 1 = k-1$$

（**第一个不等式是因为 H 是 G 的子图，中间的等式是利用归纳假设，最后一个不等式是因为 H 的边割集加上边 e 必为 G 的边割集**）

同点版本的Menger定理一样，可得$p_G(u,v) \le k$，因此如果上述公式中有一个严格不等式成立，则$p_G(u,v) \ge k$，则命题对图G也成立，边版本的Menger定理归纳得证。此时假设两个等式都成立，则$p_G(u,v)=k-1$，我们注意第二个不等式的取等条件， $\{e_i\}_{i=1}^{k-1}$是 H 的边割集，但不是G的边割集，$\{e_i\}_{i=1}^{k-1} \cup e$是 G 的边割集，这说明 $G-\{e_i\}_{i=1}^{k-1}$必有一条过 e 的路。去掉所有 e_i 后，整个图被分成 U 和 V 两部分（u ∈ U, v ∈ V），U为$G-\{e_i\}_{i=1}^{k-1}$所有与u相连的定点子集，V为为$G-\{e_i\}_{i=1}^{k-1}$所有与v相连的定点子集，然后对 U 和 V 分别进行收缩操作（这里以收缩V为例，在边e_i上的点不会被收缩）。同点版本的Menger定理一样我们也可以找到k条两两无公共边的uv--轨道，与之前$p_G(u,v)=k-1$矛盾，故两个不等式不能全部取等，综上$p_G(u,v)=k$。

26

> 画出$H_{8,3}$和$H_{9,3}$



ch4

2

> 试写出五面体的顶点数和棱数

- 五面体中不考虑环，其平面图中去掉一个外部面还有四个有界的面

  故$v \geq 5$

  对任意$v_i \in v(G), v_i$至少与同一平面的两个点相邻且至少与其他平面的一个点相邻

  得$deg(v_i) \geq 3$

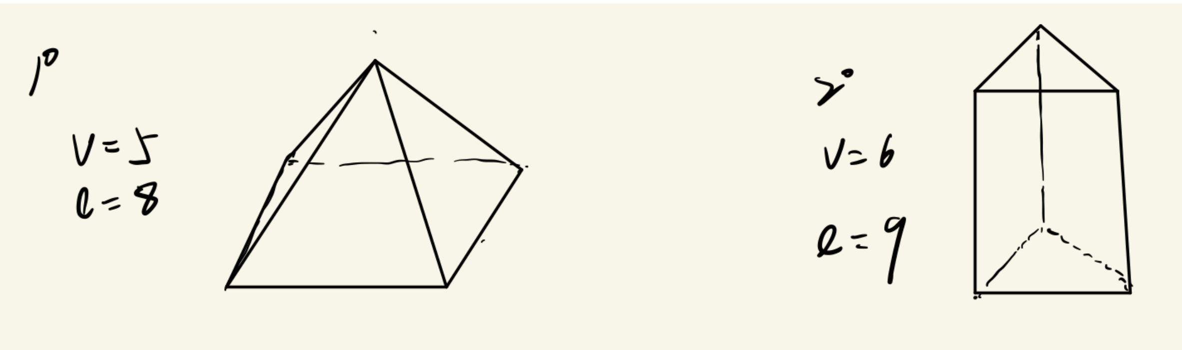
  再由握手定理得$\epsilon \geq \frac{3v}{2}$

  又因为 $v - \epsilon + \phi = 2$且$\phi = 5$

  得$\epsilon = v + 3$

  即$\frac{3v}{2} \leq v + 3$

  从而得v=5 或v=6



3

> 1> 证明：若G是$v > 11$的简单平面图，则G^c不是平面图
>
> 2> 试给出一个$v = 8$的简单平面图，使得G^c是平面图

- G是简单平面图，则由推论4.2得：$\epsilon(G) \leq 3v - 6$

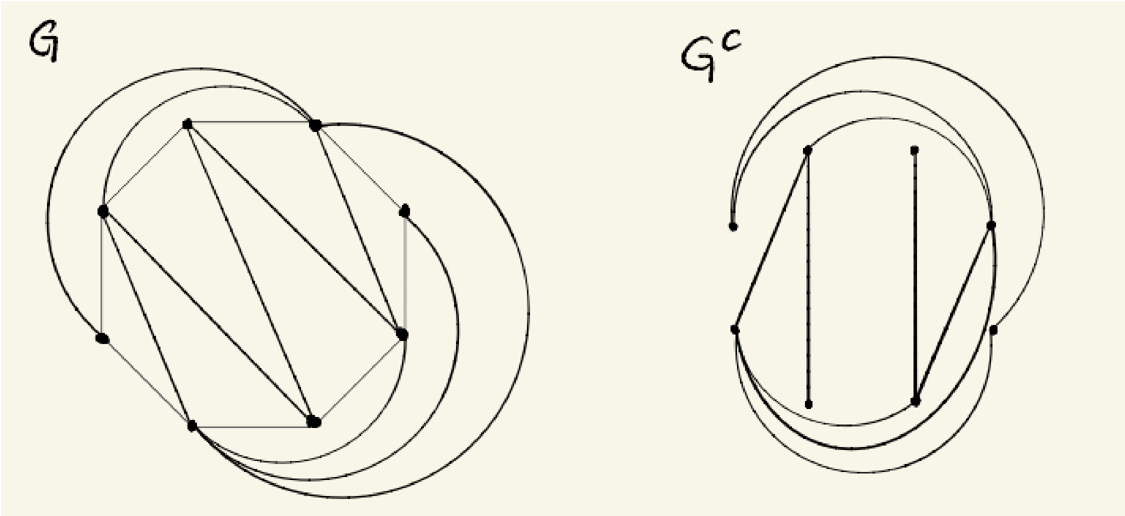
  设G^c是平面图，则同理可得$\epsilon(G^c) \leq 3v - 6$

  又因为$\epsilon(G^c) + \epsilon(G) = \frac{v(v-1)}{2}$

  故$\frac{v(v-1)}{2} \leq 3v - 6 + 3v - 6$，进而得$v^2 - 13v + 24 \leq 0$

  与$v > 11$矛盾，故G^c不是平面图

-



6

> 设G是连通的简单平面图，面数$\phi < 12$，最小度$\delta \geq 3$。
>
> 1> 证明G中存在度数小于等于4的面。
>
> 2> 举例说明当$\phi = 12$时，其他条件不变，1>的结论不成立。

- 不妨设G是连通图（否则可对他的某连通分支讨论）

  由欧拉公式$v - e + \phi = 2$得$\phi = 2 + e - v < 12$，进而解得$v > 2 + e - 12 = e - 10$。 -----<1>

  又由于$\delta(G) \geq 3$以及握手定理可得$2e \geq 3v$。 -----<2>

  将<1>代入<2>得$2e \geq 3v > 3(e - 10)$，进而得$e < 30$

  若不存在度数小于等于4的面，则由定理4.3得$2e > 5\phi$

  再由欧拉公式得$2e > 5\phi = 5(2 + e - v)$，再将<2>代入得

  $2e \geq 10 + 5e - \frac{10}{3}e = 10 + \frac{5}{3}e$，进而得$e \geq 30$，与之前结论矛盾

  所以G中存在度数小于等于4的面
- 下图为正十二面体图，他是平面图，面数$\phi = 12$，$\delta(G) = 3$，可是它每个面的次数均为5。