矩阵的秩、向量组的线性相关性质

一、有关秩不等式：

1. 设 $A,B\in F^{n\times m}$，有 ① $\max\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\}\leq\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$ [也可由向量组的秩角度看]

② $\operatorname{rank}(A\pm B)\leq\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$

③ $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\leq\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B$

[初等变换不改变矩阵的秩] ④ $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}\geq\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B$

证明：① 设 $\operatorname{rank}A=r$，则存在可逆矩阵 P,Q 使得 $PAQ=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$，又记 $PBQ=(\tilde{B}_{11},\tilde{B}_{12})$，

则 $P\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix}PAQ\\PBQ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\\\tilde{B}_{11}&\tilde{B}_{12}\end{pmatrix}\xrightarrow{-\tilde{B}_{11}r_1\to r_3}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\\0&\tilde{B}_{12}\end{pmatrix}$，

从而 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\\0&\tilde{B}_{12}\end{pmatrix}\geq\operatorname{rank}(I_r)+\operatorname{rank}(\tilde{B}_{12})\geq\operatorname{rank}A$.

同理可证得 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\geq\operatorname{rank}B$.

② $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_1}\begin{pmatrix}A+B\\B\end{pmatrix}$ 从而 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A+B\\B\end{pmatrix}\overset{\text{用①}}{\geq}\operatorname{rank}(A+B)$.

③ 考虑 $\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\xrightarrow{l_2\to l_1}\begin{pmatrix}A&0\\B&B\end{pmatrix}$，从而 $\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}=$

$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&0\\B&B\end{pmatrix}\overset{\text{用①}}{\geq}\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$

④ 设A的秩为 r_1，B的秩为 r_2，从而存在可逆矩阵 P_1,P_2,Q_1,Q_2 使得 $P_1AQ_1=\begin{pmatrix}I_{r_1}&0\\0&0\end{pmatrix}$，

$P_2BQ_2=\begin{pmatrix}I_{r_2}&0\\0&0\end{pmatrix}$，从而 $\begin{pmatrix}P_1&\\&P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1&\\&Q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1AQ_1&P_1CQ_2\\0&P_2BQ_2\end{pmatrix}$

记 $P_1CQ_2=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}\\C_{21}&C_{22}\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}I_{r_1}&0&C_{11}&C_{12}\\0&0&C_{21}&C_{22}\\0&0&I_{r_2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-C_{12}l_4\to l_3]{\substack{-C_{11}r_3\to r_1\\-C_{21}r_3\to r_1}}\begin{pmatrix}I_{r_1}&0&0&0\\0&0&0&C_{22}\\0&0&I_{r_2}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{l_2\leftrightarrow l_4}\begin{pmatrix}I_{r_1}&&&\\&C_{22}&&\\&&I_{r_2}&\\&&&0\end{pmatrix}$$

从而：$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A&C\\0&B\end{pmatrix}=\operatorname{rank}(I_{r_1})+\operatorname{rank}(C_{22})+\operatorname{rank}(I_{r_2})\geq\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B$.

2. (Sylvester公式) 若A,B分别为 $s\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵，则 $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - n \le \operatorname{rank} AB$.

证明：考虑矩阵 $\begin{pmatrix} I_n & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-Ar_1\to r_2} \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & -AB \end{pmatrix} \xrightarrow{-l_1B\to l_2} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -AB \end{pmatrix}$ (其中n为矩阵公共的数)

从而：$n + \operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_n & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$.

!④

3. (Frobenius公式) 若A,B,C分别为 $m\times n$, $n\times s$ 和 $s\times p$ 矩阵，则 $\operatorname{rank}(ABC) \geq \operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) - \operatorname{rank} B$.

证明，考虑矩阵 $\begin{pmatrix} \underset{m\times s}{AB} & 0 \\ \underset{n\times s}{B} & \underset{n\times p}{BC} \end{pmatrix} \xrightarrow{-Ar_2\to r_1} \begin{pmatrix} 0 & -ABC \\ B & BC \end{pmatrix} \xrightarrow{-l_1C\to l_2} \begin{pmatrix} 0 & -ABC \\ B & 0 \end{pmatrix}$

从而 $\operatorname{rank} B + \operatorname{rank}(ABC) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC)$.

4. 设A,B为n阶矩阵，且A,B可交换，证明：$\operatorname{rank}(A+B) \le \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank} B - \operatorname{rank}(AB)$

证明：考虑矩阵 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\to r_1} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix} \xrightarrow{l_2\to l_1} \begin{pmatrix} A+B & B \\ B & B \end{pmatrix}$

此时第2行乘以(A+B)，第一行左乘-A加到第二行，有

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & -(A+B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+B & B \\ B & B \end{pmatrix} \overset{AB=BA}{=} \begin{pmatrix} A+B & B \\ 0 & -AB \end{pmatrix}$$ 故

↑注意：未必可逆!!

$$\operatorname{rank}(A+B) + \operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A+B & B \\ 0 & -AB \end{pmatrix} \le \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A+B & B \\ B & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B.$$

5. 若A为 $m\times n$ 矩阵，B为 $n\times m$ 矩阵，证明：$m + \operatorname{rank}(I_n - BA) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = n + \operatorname{rank}(I_m - AB)$

证明：考虑矩阵初等变换：

① $\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \xrightarrow{-Ar_2\to r_1} \begin{pmatrix} I_m - AB & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} \xrightarrow{-l_2B\to l_1} \begin{pmatrix} I_m - AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \xrightarrow{-Br_1\to r_2} \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n - BA \end{pmatrix} \xrightarrow{-l_1A\to l_2} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n - BA \end{pmatrix}$

因此 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = n + \operatorname{rank}(I_m - AB) = m + \operatorname{rank}(I_n - BA)$.

6. 设n阶方阵满足 $A^2 = I$，证明 $\operatorname{rank}(I+A) + \operatorname{rank}(I-A) = n$.

证明：法一：(用秩不等式) 一方面 $(I+A)(I-A) = 0$，从而 $\operatorname{rank}(I+A) + \operatorname{rank}(I-A) \le n$

另一方面：$\operatorname{rank}(I+A) + \operatorname{rank}(I-A) \geq \operatorname{rank}((I+A)+(I-A)) = n$，因此结论成立.

法二：(用相抵标准形)

考虑矩阵 $\begin{pmatrix} I+A & \\ & I-A \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\to r_1} \begin{pmatrix} I+A & I-A \\ 0 & I-A \end{pmatrix} \xrightarrow{l_2\to l_1} \begin{pmatrix} 2I & I-A \\ I-A & I-A \end{pmatrix} \xrightarrow[A^2=I]{-\frac{I-A}{2}r_1\to r_2} \begin{pmatrix} 2I & I-A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{I-A}{2}l_1\to l_2} \begin{pmatrix} 2I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

因此 $diag(I+A, I-A)$ 相抵标准形为 $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

因此 $rank(I+A)+rank(I-A)=n$.

注意，不可以第一行同乘 $I-A$，第二行同乘 $I+A$，使 $\begin{pmatrix} I+A & \\ & I-A \end{pmatrix}$ 变为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

因为第一行同乘 $I-A$ 时，对原矩阵左乘了 $\begin{pmatrix} I-A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$，这未少可逆，改变了原矩阵的秩！

7.（A 和 A^* 秩关系）若 A 为 $n\times n$ 矩阵（$n\geq 2$），则有 $rank(A^*)=\begin{cases} n & rank(A)=n \\ 1 & rank(A)=n-1 \\ 0 & rank(A)\leq n-2 \end{cases}$

证明：$1°$ 若 $rank A=n$，有 A 可逆，$|A|\neq 0$，又 $AA^*=|A|E$ 知 A^* 也可逆，因此 $rank A^*=n$

$2°$ 若 $rank A=n-1$，则存在 A 的 $n-1$ 阶子式不为 0，从而 $A_{11}\cdots A_{nn}$ 中至少存在一个非 0，故 $rank(A^*)\geq 1$。另一方面，由 $\det A=0$ 知 $AA^*=0$，由秩不等式 $rank A+rank A^*\leq n$ 知 $rank(A^*)\leq n-(n-1)=1$，因此 $rank(A^*)=1$.

$3°$ 若 $rank A\leq n-2$，则 A 的所有 $n-1$ 阶子式均为 0，从而 $A^*=0$。因此 $rank(A^*)=0$.

8. 若 A 为一 $r\times r$ 矩阵，B 为一 $r\times n$ 矩阵，且 $rank(B)=r$。证明：

(1) 若 $AB=0$，则 $A=0$.

(2) 若 $AB=B$，则 $A=I$.

证明：(1) 由 $rank(B^T)=rank(B)=r$，考虑齐次线性方程组 $B^Tx=0$（B^T 为 $n\times r$ 矩阵），此方程组只有 0 解。由条件 $AB=0$ 知 $B^TA^T=0$，即 A^T 的每一列向量均为方程组 $B^Tx=0$ 的解，从而 A^T 每一列均为 0 向量，故 $A=0$.

(2) 若 $AB=B$，则 $(I-A)B=0$，由 (1) 结论知 $I-A=0$，即 $A=I$.

9.（矩阵的满秩分解）矩阵的行（列）向量组为线性无关的，就称矩阵是行（列）满秩的.

(1) 若 A 为 $m\times r$ 矩阵，A 为列满秩的当且仅当存在 $m\times m$ 可逆阵 P，使得 $A=P\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) 若 A 为 $m\times r$ 矩阵，A 为行满秩的当且仅当存在 $r\times r$ 可逆阵 Q，使得 $A=(I_m\ 0)Q$.

(3) 若 A 为 $m\times n$ 矩阵，秩$(A)=r$，则存在 $m\times r$ 列满秩矩阵 P 和 $r\times n$ 行满秩矩阵 Q，使得 $A=PQ$.

证明：(1) "$\Leftarrow$" 若 $A_{m\times r}=P\begin{pmatrix}I_r\\0\end{pmatrix}$ 则 $\mathrm{rank}(A)=r$，从而A为列满秩的

"$\Rightarrow$" 若 $\mathrm{rank}(A_{m\times r})=r$，则它有标准形 $\begin{pmatrix}I_r\\0\end{pmatrix}_{m\times r}$，即 $\exists$ 可逆矩阵 $P_{m\times m}$ 和 $Q_{r\times r}$，使得 $PAQ=\begin{pmatrix}I_r\\0\end{pmatrix}$，从而 $A=P^{-1}\begin{pmatrix}I_r\\0\end{pmatrix}Q^{-1}=P^{-1}\begin{pmatrix}Q^{-1}\\0\end{pmatrix}\overset{\triangle}{=}\underbrace{P^{-1}\begin{pmatrix}\underset{r\times r}{Q^{-1}} & \\ & I_{m-r}\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}=P_1\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}$

即令 $P_1=P^{-1}\begin{pmatrix}Q^{-1} & \\ & I_{m-r}\end{pmatrix}$ 为可逆阵 ($m\times m$阶) 即可.

(2) "$\Leftarrow$" 若 $A_{m\times r}=(I_m\ \ 0)Q$ 则 $\mathrm{rank}A=m$，从而A为行满秩的

"$\Rightarrow$" 若 $\mathrm{rank}(A_{m\times r})=m$，存在可逆阵 $P_{m\times m}$ 和 $Q_{r\times r}$，使得 $A=P(I_m\ \ 0)_{m\times r}Q$

$=(P_{m\times m}\ \ 0)Q=(I_m\ \ 0)\begin{pmatrix}P_{m\times m} & \\ & I_{r-m}\end{pmatrix}Q$，令 $Q_1=\begin{pmatrix}P_{m\times m} & \\ & I_{r-m}\end{pmatrix}Q$ 即为 $r\times r$ 可逆阵，使得 $A_{m\times r}=(I_m\ \ 0)\ Q_1$ 成立.

(3) 由A为 $m\times n$ 矩阵且 $\mathrm{rank}A=r$，存在可逆阵 $P_{m\times m}$ 和 $Q_{n\times n}$，使得 $A=P\underline{\begin{pmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix}}Q$

$\overset{☆}{=}P\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}(E_r\ \ 0)Q$，令 $P_1=P\begin{pmatrix}E_r\\0\end{pmatrix}$，$Q_1=(E_r\ \ 0)Q$，由(1).(2)知 P_1 列满秩

P_2 行满秩. 结论成立.

二、秩与线性相关、线性无关

1.（严格对角占优矩阵）设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$，证明：

(1) 如果 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$，$i=1,2,3,\dots,n$，则A为可逆阵. [称满足此条件的A为严格对角占优矩阵]

(2) 如果 $a_{ii}>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$，$i=1,2,3,\dots,n$，则 $\det A>0$

证明. (1) 反证：若A不可逆，则矩阵A的列向量组线性相关，记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$，则存在不全为0的数 $k_1,k_2,\dots,k_n$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_n\alpha_n=0$. 令 $k_i=\max\limits_{1\le j\le n}\{|k_j|\}\underline{>0}$，则考虑

$k_1a_{i1}+k_2a_{i2}+\dots+k_na_{in}=0\Rightarrow k_ia_{ii}=-(k_1a_{i1}+k_2a_{i2}+\dots+k_{i-1}a_{i\,i-1}+k_{i+1}a_{i\,i+1}+\dots+k_na_{in})$

$|a_{ii}|=\left|-\left(\frac{k_1}{k_i}a_{i1}+\dots+\frac{k_{i-1}}{k_i}a_{i\,i-1}+\frac{k_{i+1}}{k_i}a_{i\,i+1}+\dots+\frac{k_n}{k_i}a_{in}\right)\right|\le\sum\limits_{j\neq i}\left|\frac{k_j}{k_i}\right||a_{ij}|\le\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$，矛盾于条件. 因此A为可逆阵.

(2) 扰动法 令 $0\le t\le1$，考虑新的行列式 $D(t)=\begin{vmatrix}a_{11} & ta_{12} & ta_{13} & \cdots & ta_{1n}\\ ta_{21} & a_{22} & ta_{23} & \cdots & ta_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ ta_{n1} & ta_{n2} & ta_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$，

对 $\forall t\in[0,1]$ 有 $D(t)$ 恒满足(1)条件. 因此 $\det D(t)\neq0$.

又 $D(t)$ 为关于t的连续函数 并且 $D(0)=a_{11}\cdots a_{nn}>0$，$D(1)=|A|$. 反证.

若 $\det A<0$，则由连续函数的零点定理，一定存在 $t_0\in(0,1)$ 使得 $D(t_0)=0$ 矛盾于 $D(t)$ 恒不为0. 因此 $|A|>0$ 成立.

Rmk：严格对角占优矩阵通常用来判定矩阵是可逆的.

2. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 实矩阵，已知 $a_{ii}>0$ $(i=1,2,3,\dots,n)$，$a_{ij}<0$ $(\forall i\neq j,\ i,j=1,2,3,\dots,n)$，并且 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=0$ $(\forall i=1,2,\dots,n)$，求证：秩 $A=n-1$.

主对角元素 >0. 其余元素 <0。

证明：$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

1° 求 $|A|$ 时，每一列元素加到第一列元素上有第一列元素全为0。故 $|A|=0$，从而：$\operatorname{rank} A\le n-1$

2° 另一方面：考虑 $n-1$ 阶子式 $A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，这是严格对角占优矩阵，事实上，

由 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=0$ 知 $\underbrace{a_{ii}}_{>0}=-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\underbrace{a_{ij}}_{<0}$ 即 $|a_{ii}|=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|>\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$ $(i\geq 2)$，因此 $A_{11}\neq 0$。

(有 $n-1$ 阶子式 $\neq 0$) 从而 $\operatorname{rank}(A)\geq n-1$. 综上. $\operatorname{rank} A=n-1$. #

3. 设 A 为 $n\times n$ 矩阵，n 为正整数，则 A 为秩 1 的充要条件是：存在不全为0的数 $a_1,a_2,\dots,a_n$ 和不全为0的数 $b_1,b_2,\dots,b_n$，使得 $A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1,b_2,\dots,b_n)$.

证明："$\Leftarrow$" 若 $A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1,b_2,\dots,b_n)$ 则 $\operatorname{rank}(A)\le 1$. 又当 $a_i\neq 0$, $b_j\neq 0$ 有 $a_ib_j\neq 0$. 即 A 中存在一非0元，从而 $\operatorname{rank} A\geq 1$，因此 $\operatorname{rank} A=1$.

"$\Rightarrow$" 设矩阵 $A=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ 秩为1，说明矩阵 A 的列向量组中极大线性无关组中向量个数为 1.

不妨设 α_i 为极大线性无关组，从而矩阵可写成 $A=\begin{pmatrix} k_1b_1 & k_2b_1 & \cdots & b_1 & \cdots & k_nb_1 \\ k_1b_2 & k_2b_2 & \cdots & b_2 & \cdots & k_nb_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_1b_n & k_2b_n & \cdots & b_n & \cdots & k_nb_n \end{pmatrix}$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\text{不全为0}}\underbrace{(k_1,k_2,\dots,1,\dots,k_n)}_{\text{不全为0}}$$

结论成立.

三. 极大线性无关组的一些结论：

命题：若 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\dots,\beta_s$ 为两向量组，如果 1) 向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 可由 $\beta_1,\dots,\beta_s$ 线性表出 2) $r>s$

则向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 线性相关.

1. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$ 的秩为 r，则 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 中任意 r 个线性无关向量均为其极大线性无关组.

证明：任取 r 个线性无关向量 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$，再增添一个不在 $\alpha_{i_1}, \cdots \alpha_{i_r}$ 中的向量一定线性相关

因为新增添向量后的向量组可由 $\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r}$ 线性表示，故新向量组的秩 $\leq r$，故线性相关.

因此：由极大线性无关组的定义知 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 为极大线性无关组.

两个向量组何时等价？

2. 已知向量组 $\alpha_1, \cdots \alpha_r$ 和 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r+1}, \cdots \alpha_s$ 有相同的秩，则 $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ 和 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 等价.

证明. 要证明两向量组可相互线性表示.

一方面 $\alpha_1, \cdots \alpha_r$ 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表出；另一方面，设两向量组相同的秩为 t，则取 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 中的极大线性无关组 $\alpha_{i_1} \cdots, \alpha_{i_t}$，则 $\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_t}$ 也为 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 中的极大线性无关组，从而由极大线性无关组和原向量组等价以及等价关系传递性知 $\alpha_1, \cdots \alpha_r$ 和 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 等价.
(上面的结论)

☆ 结论重要

3. 设两向量组有相同的秩，且其中之一可由另一线性表出，则两向量组等价.

证明. 设向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出，两者有相同的秩 r. 设其极大线性无关组分别为：$\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r}$；$\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$.

考虑合成向量组 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}, \beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r}$. 我们有：$\beta_{j_1}, \cdots \beta_{j_r}$ 可由 $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表出. 故向量组的秩为 r，从而 $\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r}$ 为合成向量组极大线性无关组，从而 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 可由 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 线性表出.

$\alpha_1, \cdots \alpha_s$ $\xrightarrow{\text{等价}}$ $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 　　极大线性无关组和原向量组等价.

线性表示

$\beta_1, \cdots, \beta_t$ $\xrightarrow{\text{等价}}$ $\beta_{j_1}, \cdots, \beta_{j_r}$

综上，两向量组等价.

4. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关，证明 α_1 不能由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示.

证明 反证：若 α_1 能由 $\alpha_2, \cdots \alpha_4$ 线性表示，则 $\underbrace{\operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}}_{\geqslant 3} = \underbrace{\operatorname{rank}\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}}_{<3}$

$\operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \geqslant \operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = 3$ ⟸ 关于秩不等式

而由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关知 $\operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$

$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关知 $\operatorname{rank}\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} < 3$，矛盾.

因此 α_1 不能由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示. #