HW01

Ch1-1

> G是简单图，则有 $\varepsilon(G) \leq C_{\nu(G)}^2$

方法1（Euler定理）：

因为G是简单图，所以$\forall v \in V(G)$，有$deg(v) \leq v-1$

则有:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(V) \leq v(v-1)$$

由Euler定理，则有:

$$\varepsilon\left(G\right)=\frac{\sum_{v \in V(G)} \deg\left(V\right)}{2} \leq \frac{v\left(v-1\right)}{2}$$

方法2（组合）：

在简单图中，任意两顶点之间最多存在一条边，则最多只有$C_{\nu(G)}^2$

即$\varepsilon\left(G\right) \leq C_{\nu(G)}^2$

Ch1-7

> 证明下面的结论：
>
> (1) $\varepsilon(K_{m,n}) = mn$
>
> (2)设G是二分图，$\varepsilon(G) \leq v^2(G)/4$

（1）不妨设 $K_{m,n} = X \cup Y, X \cap Y = \emptyset$，其中$|X| = m$，$|Y| = n$

由二分图$K_{m,n}$定义：$\forall u \in X, v \in Y$，有$deg(u) = m, deg(v) = n$

则有：

$$\sum_{v \in V(K_{m,n})} \deg(v) = \sum_{u \in X} \deg(\mathrm{u}) + \sum_{v \in Y} \deg(v) = 2mn$$

由Euler定理，$\varepsilon(K_{m,n}) = mn$

(2) 设G的二分图的两个部分节点数量分别为m, n

显然有 $\varepsilon(G) \leq \varepsilon(K_{m,n}), V(G) = m + n$

并且由(1)可得 $\varepsilon(K_{m,n}) = mn$

所以 有：

$$\varepsilon(G) \leq mn \leq (m+n)^2/4$$

即$\varepsilon(G) \leq v^2(G)/4$

Ch1-8

> 设G是图，给定$V(G)$的非空真子集V'，记k为一个端点在V'中，另一个端点在$V(G) - V'$中的边数。若V'中度数为奇数的顶点数为偶数，则k为偶数；否则，k为奇数

设ε是V'的顶点导出子图的边的个数，则k有：

$$k = \sum_{v \in V_o'} deg(v) + \sum_{v \in V_e'} deg(v) - 2\varepsilon$$

因为 2ε 和 $\sum_{v \in V_e'} deg(v)$ 一定是偶数，所以k的奇偶只和 $\sum_{v \in V_o'} deg(v)$ 有关：若V'中度数为奇数的顶点数为偶数，则k为偶数；否则，k为奇数。

Ch1-14

> 我们将图G中所有顶点的度数按照从大到小的顺序排列，称为图G的度数序列。证明：
>
> (1) 7,6,5,4,3,3,2 和 6,6,5,4,3,3,1都不是简单图的度数序列。
>
> (2) 设$d_1, d_2, ..., d_n$是简单图的度数序列，则$\sum_{i=1}^n d_i$是偶数，且对于任意$1 \leq k \leq n$，都有

> $$\sum_{i=1}^{k} d_i \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} min\{k, d_i\}$$

(1) 证明：从序列可以看出两个图顶点个数均为7

- 若是简单图，则必有$\Delta \le 6$，但是存在度数为7的点，则`7,6,5,4,3,3,2`不是简单图。
- 若是简单图，则因为只有7个顶点，序列中的两个度数为6的顶点与图中每个点都相邻，则必有$\delta \ge 2$，但存在度数为1的 点，则不是简单图。

(2) 证明：由欧拉定理得：

$$\sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2\varepsilon(G)$$

显然$\sum_{i=1}^{n} d_i$是偶数。

对于第二个证明式，设顶点依次是$v_1, v2, \ldots, v_n$。

然后我们进行拆分，设$\sum_{i=1}^{k} d_i = D_1 + D2$，其中：

- D_1是$v1, \ldots, v_k$的顶导出子图 的度数之和，易得 $D_1 \le k(k-1)$；
- D_2是$v1, \ldots, v_k$之间$v_{k+1}, \ldots, v_n$连线数，并且$v_{k+1}, \ldots, v_n$ 可以给予的$v1, \ldots, v_k$的最大的度数之和是：$\sum_{i=k+1}^{n} min\{k, d_i\}$，所以有：

$$D_2 \le \sum_{i=k+1}^{n} min\{k, d_i\}$$

综上可得：

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = D_1 + D2 \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} min\{k, d_i\}$$

Ch1-15

> 任给无环图G，G有一个生成子图H，满足：(1) H是二分图；(2)任给$u \in V(G) = V(H)$，都有$d_H(u) \ge d_G(u)/2$

证明：对于任意图，均有为二分图的生成子图，因为去除所有边的图也是二分子图。

采用类似“最长轨”的思想，这里假设H_K是**边数最多**的二分生成子图H_k，并假设命题不成立。

根据假设，H_K里存在点$v_o \in V(G)$使得$d_H(v_0) < \frac{1}{2} d_G(v_0)$，并假设此二分图划分为$X$和$Y$，且$v_0 \in X$。

我们将v_0与Y的连线全部去除，再增加原本$V(G)$中v_0与X中其他顶点的连线。显然，此时仍然是二分图。

此时，H_K的边数会变化$d_G(v_0) - 2d_H(v_0)$，由上述的不等式可知，边数增加了，这和假设矛盾。

Ch1-16

> 假设G是简单图，且$\delta(G)\geq k$，则 G 中有长为 k 的轨道。

证明：此题用最长轨法证明，设$P(v_0,v_m)$是该图的最长轨。假设它的长度小于k，即$m<k$。

对于v_0，因为$\delta(G)\geq k$，除去与轨道$P(v_0,v_m)$上的顶点有连线外，v_0 至少与轨道外的一个顶点的相邻，与最长轨的假设矛盾！

则 G 的最长轨长度至少为 k，所以存在长为 k 的 轨道。

Ch1-18

> G是简单图，且$\varepsilon(G)\geq C_{\nu(G)-1}^2$， 则$G$是连通图

证明：假设 G 不连通，将这些连通片分为两类，顶点个数分别为 v_1，$\nu(G)-v_1$，则有：

$$\varepsilon(G)\leq C_{v_1}^2+C_{\nu(G)-v_1}^2$$

对于不等式，易得：

$$C_{v_1}^2+C_{\nu(G)-v_1}^2\leq C_{\nu(G)-1}^2$$

这与题意产生矛盾，所以G是连通图。

Ch1-19

> (1)证明：任给$\varepsilon\in E(G)$，都满足$\omega(G)\leq\omega(G-e)\leq\omega(G)+1$
>
> (2)说明：对于图G的任意顶点v，用$G-v$ 替代$G-e$，(1)中的公示未必成立。

(1)证明：假设 e 在连通片G_1中，若去掉后仍连通，则有：

$$\omega(G)=\omega(G-e)<\omega(G)+1$$

若使G_1分成了不连通，因为删去一条边最多使G_1变为两个连通片，则有：

$$\omega(G)<\omega(G-e)$$

又因为删除一条边最多使原连通片变为两个连通片（用反证法易得），则有：

$$\omega(G-e)=\omega(G)+1$$

综上：

$$\omega(G) \leq \omega(G-e) \leq \omega(G)+1$$

(2)举反例即可：

- 星
- 含有度数为0的顶点的图