1\. (1) 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \end{cases}$ 有无穷多解，则 $\lambda=$ <u>1</u>.

考虑系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ 行列式，由 Cramer 法则知 $|A|=0$ 时解可能不唯一.

$|A|=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^2-(\lambda-1)(1-\lambda^2)=(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$，$\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$

当 $\lambda=1$ 时 原方程组化为 $x_1+x_2+x_3=1$，解不唯一；当 $\lambda=-2$ 时，$(A|b)=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-r_1+r_3 \\ -2r_1+r_2}]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\substack{r_2\to\frac{1}{3}r_2 \\ r_3\to\frac{1}{3}r_3}]{r_2\to r_3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 此时原方程组无解. 故 $\lambda=1$

(2) 若 $\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(1,2,3)$，$\alpha_3=(2,3,t)$ 生成 R^3 二维子空间，则 $t=$ <u>4</u>.

考虑 $A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{pmatrix}\xrightarrow[-r_1\to r_3]{-r_1\to r_2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & t-2 \end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2\to r_3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & t-4 \end{pmatrix}$，$t=4$ 时 rank$A=2$

(4) 设 (I) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ (II) β_1,β_2,β_3 为线性空间 V 的两组基，且 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$，如果向量 α 在基 (I) 下坐标为 $(1,0,1)$，则在 (II) 下坐标为 <u>$(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2})$</u>.

① 基之间过渡矩阵 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

② 设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

于是：$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，考虑 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\to\frac{1}{2}r_3]{-r_1\to r_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\xrightarrow{-r_3\to r_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

则 $(y_1,y_2,y_3)=(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2})^T$

(3) 若方阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 特征值为 $1,-3,-4$，则 $\det(I+A)=$ <u>12</u>.

由于 A 特征值为 $1,-3,-4$，$I+A$ 特征值为 $2,-2,-3$，因此 $\det(I+A)=2\times(-2)\times(-3)=12$

(5) 设 $\alpha_1=(a,0,-1)^T$，$\alpha_2=(1,b,1)^T$，$\alpha_3=(c,1,2)^T$ 分别为三阶实对称矩阵 A 的三个不同特征值对应的特征向量，若 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $\det B=$ <u>-18</u>.

由于实对称阵属于不同特征值的特征向量相互正交，则 $(\alpha_1,\alpha_2)=0\Rightarrow a=1$；

$(\alpha_1,\alpha_3)=0\Rightarrow c=2$；$(\alpha_2,\alpha_3)=0\Rightarrow b=-4$，于是 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}=-18$

(6) 设二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2$，则 $t\in$ <u>$(1,+\infty)$</u> 时，该二次型正定.

考虑二次型对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$，要求各阶顺序主子式 >0，现 $t>0$，$(t^2-1)>0$，$t(t^2-1)>0$，

因此 $t\in(1,+\infty)$ 时，该二次型正定.

2. 判断 (1) 矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

解：错误. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 特征多项式为 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\0&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=0$ 则 $\lambda=1$, $\lambda=2$ 为特征值（二重）

$\lambda=1$ 时，$I-A=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 知 $\operatorname{rank}(I-A)=2$，故 $\lambda=1$ 特征子空间维数为1

几何重数 < 代数重数，故矩阵不可对角化.

(2) 设 $V=\{a_0+a_1x+a_2x^2 \mid a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$. 定义：$(f(x),g(x))=f(0)g(0)+f(1)g(1)+f(2)g(2)$，$\forall f(x),g(x)\in V$

则 $(f(x),g(x))$ 为 V 上的一个内积.

解. 正确. 验证内积性质：1° 对称性：$(f,g)=f(0)g(0)+f(1)g(1)+f(2)g(2)=(g,f)$

2° 关于第1个位置线性：$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，$\forall f,g,h\in V$，

$$(\lambda f+\mu g,h)=(\lambda f(0)+\mu g(0))h(0)+(\lambda f(1)+\mu g(1))h(1)+(\lambda f(2)+\mu g(2))h(2)$$
$$=\lambda(f,h)+\mu(g,h)$$

3° 正定性. 若 $f=a_0+a_1x+a_2x^2$ 则 $(f,f)=a_0^2+(a_0+a_1+a_2)^2+(a_0+2a_1+4a_2)^2\geq0$

且 $(f,f)=0\Longleftrightarrow\begin{cases}a_0=0\\a_0+a_1+a_2=0\\a_0+2a_1+4a_2=0\end{cases}\Longleftrightarrow a_0=a_1=a_2=0\Longleftrightarrow f=0.$

因此 $(\cdot,\cdot)$ 为内积.

(3) 设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 一个基. 若非零向量 β 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 这 $n-1$ 个向量均正交，则有 β 和 α_n 线性相关.

解. 错误. 反例，如取 $\alpha_1=(1,0)$ 和 $\alpha_2=(1,1)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中一组基，令 $\beta=(0,1)$，则 β 与 α_1 正交

但 β 与 α_2 仍然线性无关.

Rmk：若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中一组正交基，且非零向量 β 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$ 均正交，则 β 与 α_n 线性相关.

因为可设 $\beta=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$，则 由 $0=(\beta,\alpha_i)=x_i(\alpha_i,\alpha_i)$ $(1\leq i\leq n-1)$ 知，$x_i=0$ $(\forall\ 1\leq i\leq n-1)$，于是 $\beta=x_n\alpha_n$

由 β 非零知 $x_n\neq0$，于是 β 与 α_n 线性相关.

(4) 设实对称阵 $A=\begin{pmatrix}A_1&B\\C&A_2\end{pmatrix}$ 且 A_1、A_2 均为方阵. 若 A 正定 则 A_1、A_2 均正定.

解. 正确，由 A 对称正定知：$A=\begin{pmatrix}A_1&B\\B^T&A_2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-B^TA_1^{-1}r_1\to r_2\\-l_1(A_1^{-1}B)\to l_2}]{A_1\text{可逆}}\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2-B^TA_1^{-1}B\end{pmatrix}=:D$

$\xrightarrow[l_1\leftrightarrow l_2]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}A_2-B^TA_1^{-1}B&0\\0&A_1\end{pmatrix}:=E$，知 A,D,E 均合同，于是 D 和 E 均正定，即其各阶顺序主子式大于0，特别的 A_1 和 $A_2-B^TA_1^{-1}B$ 各阶顺序主子式 >0，即 A_1 和 $A_2-B^TA_1^{-1}B$ 正定.

又由 A_1 正定知 A_1^{-1} 正定，$B^TA_1^{-1}B$ 正定，故 $A_2=B^TA_1^{-1}B+A_2-B^TA_1^{-1}B$ 也正定. 综上 A_1,A_2 均正定.

3. 设实矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，非齐次线性方程组 $Ax=b$ 通解为 $(1,1,1,1)^T+k(1,-1,0,2)^T$，其中 k为任意实数

(1) α_1能否由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示？

(2) α_3能否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性表示？

解：设 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$，$Ax=b$ 知 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=b$。由线性方程组解的结构知：基础解系个数为1，则 $\mathrm{rank}(A)=3$，且 $(1,1,1,1)^T$为$Ax=b$的特解，即有 $b=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，从而

原方程化为：$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，且 $\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_4=0$

故 $\alpha_1=\alpha_2+0\cdot\alpha_3-2\alpha_4$ 能由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示

若α_3能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性表示，则对矩阵A做初等列变换总能把$\alpha_3$位置消成0，又$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性相关，也能通过初等列变换将$\alpha_4$位置消成0，于是 $\mathrm{rank}A\le 2$，与 $\mathrm{rank}A=3$ 矛盾，因此α_3不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性表示.

4. 设σ为$\mathbb{R}^3$线性变换，在基(I)：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下矩阵$A=\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\-8&-7&6\end{pmatrix}$.

(1) 求σ在基(II)：$\beta_1=2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3$，$\beta_2=3\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$ 下的矩阵.

(2) 设向量$\xi=\alpha_1+6\alpha_2-\alpha_3$，$\eta=\beta_1-\beta_2+\beta_3$，求$\sigma(\xi),\sigma(\eta)$分别在(I)下的坐标.

解：(1) 由基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\3&1&2\end{pmatrix}$

$$\sigma(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\3&1&2\end{pmatrix}B$$

$$\| \quad (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\-8&-7&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\3&1&2\end{pmatrix}，\text{因此 } B=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\3&1&2\end{pmatrix}^{-1}\underline{\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\-8&-7&6\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\3&1&2\end{pmatrix}$$

现
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&3&1&15&-11&5\\3&4&2&20&-15&8\\3&1&2&-8&-7&6\end{array}\right)\xrightarrow[-r_1\to r_3]{-r_1\to r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&3&1&15&-11&5\\1&1&1&5&-4&3\\1&-2&1&-23&4&1\end{array}\right)\xrightarrow[-r_2\to r_3]{-2r_2\to r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&-1&5&-3&-1\\1&1&1&5&-4&3\\0&-3&0&-28&8&-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3r_2\to r_3]{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&5&-4&3\\0&1&-1&5&-3&-1\\0&0&-3&-13&-1&-5\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\to r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&10&-7&2\\0&1&-1&5&-3&-1\\0&0&1&\frac{13}{3}&\frac{1}{3}&\frac{5}{3}\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{26}{3}&-\frac{5}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&0&\frac{28}{3}&-\frac{8}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&1&\frac{13}{3}&\frac{1}{3}&\frac{5}{3}\end{array}\right)$$

$$\text{故 } B=\begin{pmatrix}-\frac{26}{3}&-\frac{5}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{28}{3}&-\frac{8}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{13}{3}&\frac{1}{3}&\frac{5}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\3&1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-61&-96&-32\\38&54&16\\44&48&25\end{pmatrix}$$

(2) $\xi=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix}$ $\quad\sigma(\xi)=\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\-8&-7&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix}$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-56\\-78\\-56\end{pmatrix}$$

$$\eta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\sigma(\eta)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\-8&-7&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&1\\3&4&2\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}9\\17\\17\end{pmatrix}$$ #

5、设实二次型 $Q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+4xy+4xz+4yz$

(1) 利用正交变换化该二次型为标准形，并给出具体的正交变换。

(2) 判断 $Q(x,y,z)=1$ 表示二次曲面的类型。

解：(1) 二次型对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1&-2&-2\\1&\lambda-1&-2\\1&-2&\lambda-1\end{vmatrix}$

$=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1&-2&-2\\0&\lambda+1&0\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-5)=0$

① $\lambda=-1$（二重），$(-I-A)x=0\Leftrightarrow x_1+x_2+x_3=0$，则

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_2-x_3\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=t_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，即属于 $\lambda=-1$ 的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

做 schmit 正交化：$\beta_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{\frac{1}{\sqrt2}}{1}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-\frac12\\0\\\frac12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac12\\1\\-\frac12\end{pmatrix}$

再单位化 令 $\gamma_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$　$\gamma_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{\sqrt2}{\sqrt3}\begin{pmatrix}-\frac12\\1\\-\frac12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{\sqrt2}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$

② $\lambda=5$（1重）$(5I-A)x=\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}x=0$

$\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[2r_2\to r_1]{-r_2\to r_3}\begin{pmatrix}0&6&-6\\-2&4&-2\\0&-6&6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\to-\frac12 r_1]{-r_3\to r_1,\ r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{2r_2\to r_1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

故 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，即 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为属于特征值5特征向量，再单位化令 $\gamma_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$

于是令 $P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{\sqrt2}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$ 为正交阵有 $P^TAP=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&5\end{pmatrix}$

二次型为标准形为 $Q=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$　令 $y=Px$，即为正交变换

(2) 注意到 二次曲面标准形为 $-y_1^2-y_2^2+5y_3^2=1$，故为双叶双曲面。

6、设A为n阶实对称矩阵，且 $A^2+3A+2I=0$。

(1) 求A的可能的全部互异特征值

(2) 试证明：当n为奇数时，A的伴随矩阵 A^* 正定

解：(1) 设λ为A的特征值，α为属于λ的特征向量，则 $A\alpha=\lambda\alpha$，于是 $(A^2+3A+2I)\alpha=(\lambda^2+3\lambda+2)\alpha=0$

于是 $\lambda^2+3\lambda+2=(\lambda+1)(\lambda+2)=0$，于是 $\lambda=-1$ 或 -2，为A的全部不同的特征值。

(2) 证明：A可逆知 A^* 的特征值为 $\frac{\det A}{\lambda}$，由(1)知A的特征值 $\lambda<0$，又由n为奇数知

$\det A=A$ 的特征值之积 <0，故 $\frac{\det}{\lambda}A>0$，因此 A^* 为正定矩阵。#