设$S$是$F^{n\times n}$中所有形如$XY-YX$的矩阵生成的线性子空间

设$H$是$F^{n\times n}$中所有迹为零的矩阵组成的空间，求证：$S=H$.

因此 维$(S)=$维$(H)=n^2-1$.

证明：因为$tr(XY-YX)=0$，因此$S\subset H$. 要证$S=H$，只要证明：$\exists$ $H$中的某组基属于$S$. 现取$H$中的某组基为：$E_{ij}$($i\neq j$, $i,j=1,2,\cdots,n$)，$E_{ii}-E_{i+1,i+1}$，$i=1,2,\cdots,n-1$. 有
$$E_{ij}=E_{i1}E_{1j}-E_{1j}E_{i1}\in S$$
$$E_{ii}-E_{i+1,i+1}=E_{i,i+1}E_{i+1,i}-E_{i+1,i}\cdot E_{i,i+1}\in S.$$
因此：$S=H$，即有维$(S)=$维$(H)=n^2-1$.

（零迹矩阵的相似标准形）设$A\in F^{n\times n}$，$tr(A)=0$，则存在可逆矩阵$T$，使得
$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & 0 & \\ * & & \ddots \\ & & & 0\end{pmatrix}$$

证明：对矩阵的阶数$n$做数学归纳法.

1° 当$n=1$时 $tr(A)=0$，即为$A=0$

2° 假设$n-1$阶矩阵时结论成立

3° 考虑$n$阶矩阵情形：设$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 迹为$tr(A)=0$. 若$a_{11},\cdots,a_{nn}$中有一个为零，设为$a_{ii}=0$，对$A$做初等变换：第1行和第$i$行互换，第1列和第$i$列互换，即为对$A$的相似变换，第一行第一列元素为0；

若$a_{11},\cdots,a_{nn}$全不为0，由$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=0$知，必存在$a_{ii}\neq a_{11}$，即$a_{11}-a_{ii}\neq 0$ 对$A$做初等变换，把$a_{ii}$换至$a_{22}$处，且$a_{11}$保持不变. 不妨设$a_{11}\neq a_{22}$. 若$a_{12}=a_{21}=0$，可作初等变换：先将第2行加到第1行，再将第1列$(-1)$倍加到第2列中，即为相似变换，结果为第一行第二列元素是$a_{22}-a_{11}\neq 0$，不妨再设$A$中$a_{12}\neq 0$或$a_{21}\neq 0$. 当$a_{12}\neq 0$时，对$A$先将第2列$-\frac{a_{11}}{a_{12}}$倍加到第1列，再将

第一行的$\frac{a_{11}}{a_{12}}$倍加到第2行，为$A$之相似变换，其结果为矩阵$a_{11}$外的元素等于0。当$a_{21}\neq 0$时，也可做变换使得$a_{11}$外元素变为0。

综上，由归纳法知，迹0矩阵可作相似变换化为$A_1=\begin{pmatrix}0 & \alpha \\ \beta & B\end{pmatrix}$其中$B$为$n-1$阶矩阵，$tr(B)=0$。故$B_1=T_1^{-1}BT_1=\begin{pmatrix}0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0\end{pmatrix}$，故

$$\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & T_1\end{pmatrix}^{-1}A_1\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & T_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0\end{pmatrix}$$

完成证明。

(迹0矩阵的刻画) 若$A\in F^{n\times n}$，且$tr(A)=0$，则$\exists X, Y\in F^{n\times n}$使得$XY-YX=A$。

证明：对$A$的级数$n$作数学归纳法：

① 当$n=1$时，$tr(A)=0$，即$A=0$，结论成立

② 假设$n-1$时结论已成立，又设$A\in F^{n\times n}$，$tr(A)=0$知$A$相似于$\begin{pmatrix}0 & \alpha \\ \beta & A_1\end{pmatrix}$形状，其中$A_1$为$n-1$级迹0矩阵，由假设$\exists$ $n-1$阶方阵$X_1, Y_1$ s.t. $A_1=X_1Y_1-Y_1X_1$

又对任意的$k=0,1,2,\cdots$有$(X_1+kE)Y_1-Y_1(X_1+kE)=A_1$，可设$X_1$为可逆矩阵

否则由微小扰动变为可逆矩阵，现令

$$X=\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & X_1\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}0 & -\alpha X_1^{-1} \\ X_1^{-1}\beta & Y_1\end{pmatrix}，有XY-YX=\begin{pmatrix}0 & \alpha \\ \beta & X_1Y_1-Y_1X_1\end{pmatrix}$$

与$A$相似，即$\exists$可逆阵$T$ s.t. $T^{-1}(XY-YX)T=A$，则

$$A=(T^{-1}XT)(T^{-1}YT)-(T^{-1}YT)(T^{-1}XT).$$

由归纳法知结论成立。

(同时对角化问题)

设A、B皆为n阶实对称矩阵，且A为正定矩阵，则∃可逆实矩阵C，使得 $C^TAC$ 和 $C^TBC$ 同时为对角矩阵.

证明：∵由A正定，存在可逆实矩阵 $C_1$，使得 $C_1^TAC_1=I$，此时 $C_1^TBC_1$ 为实对称矩阵，因此∃正交阵 $C_2$，使得 $C_2^TC_1^TBC_1C_2$ 为对角阵，于是

$C_2^TC_1^TAC_1C_2=C_2^TC_2=I$，故令 $C=C_1C_2$ 知 $C^TAC$，$C^TBC$ 均为对角阵(单位阵) #

(实对称阵特征值排序)

设 $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=X'AX$ 为一实二次型，$\lambda_1,\dots,\lambda_n$ 为A特征多项式根，且 $\lambda_1\le\dots\le\lambda_n$

求证：对 $\forall X\in\mathbb{R}^n$，有 $\lambda_1X'X\le X'AX\le\lambda_nX'X$. 做正交线性替换

证明 作正交变换 $X=TY$，原二次型化为 $f(x_1,\dots,x_n)=\lambda_1y_1^2+\dots+\lambda_ny_n^2$

对 $\forall X\in\mathbb{R}^n$，$X^TX=(TY)^TTY=Y^TY$，故

$$X^TAX=\lambda_1y_1^2+\dots+\lambda_ny_n^2\le\lambda_n(y_1^2+\dots+y_n^2)=\lambda_nX^TX$$

$$X^TAX=\lambda_1y_1^2+\dots+\lambda_ny_n^2\ge\lambda_1(y_1^2+\dots+y_n^2)=\lambda_1X^TX$$

因此有 $\lambda_1X^TX\le X^TAX\le\lambda_nX^TX$.

设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$ 且长度为2，设矩阵 $A=I_n+\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，求A特征多项式.

解：$f(\lambda)=\left|\lambda I_n-(I_n+\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\right|=\left|(\lambda-1)I_n-\alpha\alpha^T-\beta\beta^T\right|$

注意计算技巧☆

$$=\left|(\lambda-1)I_n-(\alpha,\beta)\begin{pmatrix}\alpha^T\\ \beta^T\end{pmatrix}\right|$$

$$=(\lambda-1)^{n-2}\left|(\lambda-1)I_2-\begin{pmatrix}\alpha^T\\ \beta^T\end{pmatrix}(\alpha,\beta)\right|$$

$$=(\lambda-1)^{n-2}\left|(\lambda-1)I_2-\begin{pmatrix}4 & \alpha^T\beta\\ \beta^T\alpha & 4\end{pmatrix}\right|=(\lambda-1)^{n-2}\begin{vmatrix}\lambda-5 & -\alpha^T\beta\\ -\beta^T\alpha & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^{n-2}\left((\lambda-5)^2-(\alpha^T\beta)^2\right)=(\lambda-1)^{n-2}\left(\lambda^2-10\lambda+25-(\alpha^T\beta)^2\right)$$

设$A$为$n$阶方阵，若任意$n$维向量均为其特征向量，求证：$A$必须表示为 $A=\lambda I$形式，其中$I$为单位矩阵.

证明：设$A=(a_{ij})_{n\times n}$. 令 $\varepsilon_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ 第$i$个位置，由题设知 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 均为$A$的特征向量. 由 $A\varepsilon_1=\lambda_1\varepsilon_1$ 知，$a_{11}=\lambda_1$，$a_{21}=\cdots=a_{n1}=0$，

$\cdots$ $A\varepsilon_i=\lambda_i\varepsilon_i$ 知 $a_{ii}=\lambda_i$，$a_{1i}=\cdots=a_{i-1,i}=a_{i+1,i}=\cdots=a_{ni}=0$

于是 $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

再取 $\alpha=(1,1,\cdots,1)^T$，由$\alpha$为$A$特征向量知 $A\alpha=\lambda_0\alpha$，于是 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\lambda_0$，

即证得 $A=\lambda_0 I$. #.