中国科学技术大学 2019～2020 学年第 2 学期

线性代数 (B1) 期末考试试卷 (A 卷)

姓名 ________________ 学号 ________________ 学院 ________________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、【每小题 4 分, 共 24 分】填空题.

(1) 已知实系数线性方程组 $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3 &=6 \\ x_1+ax_2+2x_3 &=9 \\ 2x_1-x_2+3x_3 &=3 \end{cases}$ 有唯一解, 则 a 满足的条件是 ________________.

(2) 已知 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, 那么 $A^3=$ ________________.

(3) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\in\mathbb{R}^4$ 线性无关, 则线性子空间 $V=\langle \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3, 2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3\rangle$ 的维数是 ________________.

(4) 已知线性变换 $\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$, 在另一组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $x=$ ________, $y=$ ________.

(5) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 按原顺序 Schmidt 正交化得到的标准正交基为 ________________.

(6) 若实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2tx_2x_3$ 正定, 则参数 t 满足________________.

二、【每小题 5 分, 共 20 分】判断下面的说法是否正确, 并给出理由 (判断正确得 2 分, 给出正确理由得 3 分).

(1) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关且可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性表示, 则 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关.

(2) 对任意的实数 $a \in \mathbb{R}$, 方阵 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似.

(3) 数域 $\mathbb{R}$ 上 n 阶正交阵的行向量组或列向量组都构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

(4) 记 V 是所有 3 阶实方阵全体构成的集合, 它在矩阵加法和数乘下构成一个 9 维实线性空间, 那么 V 中对称方阵全体构成它的一个 6 维子空间.

三、【每小题 6 分, 共 12 分】设某个 4 元线性方程组的系数矩阵为 A 且 $\operatorname{rank}(A)=3$. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是它的 3 个解, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,-3,4)^T$, $5\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,2,0)^T$.

(1) 证明: 这个线性方程组是非齐的;

(2) 求出这个线性方程组的通解.

线

订

装

四、【14 分】用初等变换法求矩阵 A 的逆与行列式, 其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{pmatrix}.$$

五、【每小题 7 分, 共 14 分】$\mathbb{R}^3$ 上线性变换 $\mathscr{A}$ 把 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (2,3,5)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,2)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,0,0)^T$ 分别映为 $\boldsymbol{\beta}_1 = (1,2,0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2 = (2,4,-1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_3 = (3,0,5)^T$. 求:

(1) $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵 A;

(2) $\mathscr{A}$ 在自然基下的的矩阵 B.

六、【第 1 小题 14 分, 第 2 小题 2 分, 共 16 分】设实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$.

(1) 利用正交变换将该二次型化为标准形, 并写出相应的正交变换矩阵.

(2) 判断 $Q(x_1,x_2,x_3)=1$ 在三维直角坐标系里所表示的曲面的类型.