HW11

> 10.9 已知图G的基本圈矩阵为
>
> $$C_f(G)=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&1&0&1\\1&0&1&0&0&1&1&1\end{pmatrix}$$
>
> 求G的基本割集矩阵$S_f(G)$。

观察可得$C_f(G)$中2、4、5、7列为余树，由推论10.1可以写出基本割集矩阵

$$S_f(G)=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1&1&1&0\\0&0&0&1&1&0&1&1\end{pmatrix}$$

> 10.11已知图G的基本圈矩阵为
>
> $$C_f(G)=\begin{array}{c}\begin{matrix}a&b&c&d&e&f&g\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&0&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&0&1&1\end{pmatrix}\end{array}$$
>
> （1）$\{b,c,e,f\}$是否导出生成树?
>
> （3）$\{a,b,e,g\}$是否为割集?
>
> （5）$\{d,e,f,g\}$是否为割集?

可以得到割集基本矩阵为

$$S_f=\begin{array}{c}\begin{matrix}a&b&c&d&e&f&g\end{matrix}\\\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}$$

（1）$\{b,c,e,f\}$含圈向量$\{b,e,f\}$，故不导出生成树。

（3）$\{a,b,e\}$为割集，故$\{a,b,e,g\}$不为割集。

（5）有$S_1+S_2+S_3+S_4=(0,0,0,1,1,1,1)=\{d,e,f,g\}$，故$\{d,e,f,g\}$是割集。

> 10.13 设图G的邻接矩阵为$A(G)$，
>
> （1）$A^2(G)$的主对角线之和为100，求$\epsilon(G)$。
>
> （2）$A^3(G)$的主对角线之和为600，求G中三角形个数。

- $A^2_{i,i}$表示点i经过两条边可以回到i自身的走法方法数，即表示i的度数。

故$\epsilon(G)=\frac{1}{2}\Sigma deg(v)=\frac{100}{2}=50$。

- 每个三角形给其每个顶点贡献2种经过三条边回到自身的路径。

  故G中三角形个数为$\frac{600}{6}=100$个。

> 11.1 计算图11.9中图G各顶点的各个中心性指标，包括度中心性、接近中心性、中介中心性、Pagerank中心性。

结果如下

	$D(v)$	$C(v)$	$B(v)$	$\chi(v)$
v_1	3	6/7	14	1
v_2	3	6/7	14	1
v_3	2	3/4	12	2/3
v_4	3	6/7	15	1
v_5	2	3/4	12	2/3
v_6	3	6/7	13	1

中介中心性计算如下（按照定义(11.6)）

$\Sigma_{t\in V}\frac{n_{it}^u}{g_{it}}$**($i$为列号)**	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	6	2	1	1	2.5	1.5
v_3	1	1.5	6	1.5	1	1
v_4	1	1	2.5	6	2.5	2
v_6	1.5	1.5	1	2	1	6

再由对称性$B(v_1)=B(v_2),B(v_3)=B(v_5)$。

Pagerank中心性计算如下(由定义11.32)：

$$\begin{cases} v_1=\frac{1}{2}v_5+\frac{1}{3}v_2+\frac{1}{3}v_6\\ v_2=v_1(\text{对称性})\\ v_3=\frac{1}{3}v_2+\frac{1}{3}v_4\\ v_4=\frac{1}{2}v_3+\frac{1}{2}v_5\\ v_5=v_3(\text{对称性})\\ v_6=\frac{1}{3}v_1+\frac{1}{3}v_2+\frac{1}{3}v_4\end{cases}$$

有一组解$(1,1,2/3,1,2/3,1)^\top$。

> 11.2 证明一个连通无向图的概率转移矩阵P至少有一个特征值等于1。

记P_i为P的第i列的向量，由概率转移矩阵的性质，有$\Sigma P_i=(1,1,\cdot\cdot\cdot,1)^\top$（记为$\vec{x}$）。

故有$P\vec{x}=(P_1,P_2,\cdot\cdot\cdot,P_n)\vec{x}=\Sigma P_i=\vec{x}$

故1为矩阵P的特征值。