第13章综合习题以及其它补充习题

以下是第13章综合习题

1. 设 $f(x) \geqslant 0$ 并在 $[0,+\infty)$ 的任何有限区间上可积, 数列 $\{a_n\}$ 单调增且 $a_0 = 0,\ a_n \to +\infty\ (n \to \infty)$. 证明积分 $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛于 l 当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛于 l. (**注意, 书上题目存在输入错误: 应该是"$\{a_n\}$ 单调增且 $a_0 = 0, a_n \to +\infty\ (n \to \infty)$". **)

证明 因为 $f(x) \geqslant 0$, 所以可利用非负函数积分和正项级数有界性即可, 或利用收敛性的Cauchy收敛准则

对任意的 $A > 0$, 因 $a_n \to \infty$, 所以存在 a_n 使得 $a_{n-1} \leqslant A \leqslant a_n$.

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

所以任何有限区间上积分有界当且仅当级数部分和有界. 即可征得结果.

2. 证明积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1 + x^6 \sin^2 x}$$

收敛.

该题提供了一个 $[0,+\infty)$ 上非负、连续、无界, 但是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$ 的例子.

证明 取 $a_n = n\pi,\ n = 0, 1, \cdots$, 因此 a_n 满足上题条件. 利用 $\sin^2 x$ 是周期 π 的偶函数这个条件, 得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi} \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{1 + x^6 \sin^2 x}$. 其通项满足

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1 + x^6 \sin^2 x} &\leqslant (n+1)\pi \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + (n\pi)^6 \sin^2 u} \\
&= 2(n+1)\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1 + (n\pi)^6 \sin^2 u} \\
&\leqslant 2(n+1)\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 u + n^6\pi^6 \sin^2 u} \\
&= \frac{2(n+1)\pi}{n^3\pi^3} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}(n^3\pi^3 \tan u)}{1 + (n^3\pi^3 \tan u)^2} \\
&= \frac{2(n+1)\pi}{n^2\pi^3} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} \leqslant \frac{n+1}{n^3\pi}.
\end{aligned}$$

因此级数收敛, 根据上题结果, 得积分收敛.

综合习题第 3 题和第 4题直接求导即可. 这里不再做了, 希望大家认真求导,验证.

5. 证明: 对任意值 u, 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

证明 令 $\psi(u) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x)\,\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned}
\psi'(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x}(\cos x\cos(u\sin x) - \sin x\sin(u\sin x))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x + x)\,\mathrm{d}x \\
\psi''(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x + 2x)\,\mathrm{d}x \\
\psi^{(n)}(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x + nx)\,\mathrm{d}x \\
\cdots &= \cdots
\end{aligned}$$

显然每一步求导都是合理的, 同时对于任意给定的 u , 存在 M, 使得 $|u| \leqslant M$, $|\psi^{(n)}(u)| \leqslant \mathrm{e}^M$, 所以$\psi(u)$ 在$[-M, M]$ 中可以展开成Taylor 级数.

注意到 $\psi(0) = 1,\ \psi^{(n)}(0) = 0,\ n = 1, 2, \cdots$, 所以对任意的 u, 有

$$\psi(u) = \psi(0) = 1.$$

该题有一种更巧妙的证明, 将积分化为曲线积分并利用Green公式.

视 x 为角度, 令 $\xi = \cos x, \eta = \sin x, \Longrightarrow\ \mathrm{d}\xi = -\sin x\,\mathrm{d}x,\ \ \mathrm{d}\eta = \cos x\,\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned}
\psi'(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{u\cos x}(\cos x\cos(u\sin x) - \sin x\sin(u\sin x))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\xi^2+\eta^2=1} e^{u\xi}(\cos(u\eta)\,\mathrm{d}\eta + \sin(u\eta)\,\mathrm{d}\xi) \\
&= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leqslant 1}\left(\frac{\partial(e^{u\xi}\cos(u\eta))}{\partial\xi} - \frac{\partial(\mathrm{e}^{u\xi}\sin(u\eta))}{\partial\eta}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = 0
\end{aligned}$$

所以 $\psi(u) = \psi(0) = 1$.

6. 证明积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin 3x}{x+u}\mathrm{e}^{-ux}\,\mathrm{d}x$ 关于 u 在$[0, +\infty)$ 上一致收敛.

证明 利用Dirichlet 判别法, 不难验证在任何有限区间上

$$\left|\int_a^b \sin 3x \,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{3}$$

对 u 一致有界. 关键是要验证 $f(x,u)=\dfrac{\mathrm{e}^{-ux}}{x+u}$ 对任何 $u\geqslant 0$ 是 x 的单调函数且当 $x\to+\infty$ 时, 关于 $u\geqslant 0$ 一致趋于零.

因为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\mathrm{e}^{-ux}\left(\frac{u(x+u)+1}{(x+u)^2}\right)\leqslant 0\ (x\geqslant 0, u\geqslant 0)$$

因此 $f(x,u)$ 是 x 的单调函数.

对任何 $u\geqslant 0$,

$$|f(x,u)|=\left|\frac{\mathrm{e}^{-ux}}{x+u}\right|\leqslant \frac{1}{x}\to 0\ (x\to+\infty)$$

所以$f(x,u)=\dfrac{\mathrm{e}^{-ux}}{x+u}$ 对任何 $u\geqslant 0$ 是 x 的单调函数且当 $x\to+\infty$ 时, 关于 $u\geqslant 0$ 一致趋于零.

7. 证明积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$$

关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上不一致收敛, 但在 $[\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$ 上一致收敛.

证明不一致收敛往往比证明一致收敛还要困难, 只有对一致收敛性概念很好的理解, 才能根据题意解决问题.

证明 假如积分在 $u\geqslant 0$ 一致收敛, 那么根据一致收敛的Cauchy收敛准则, 对任意 $\varepsilon>0$, 一定存在 $M>0$, 使得对任意的 $A>M$, $A'>M$, 有

$$\left|\int_A^{A'}\frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

对任何 $u\geqslant 0$ 成立, 因此

$$\sup_{u\geqslant 0}\left|\int_A^{A'}\frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon.$$

对任意的 $A>M$, 取 $A'=\alpha A$, $u=\dfrac{1}{A}$,其中 $1<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, 那么

$$\begin{aligned}\varepsilon &\geqslant \sup_{u\geqslant 0}\left|\int_A^{A'}\frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right| \\ &\geqslant \left|\int_A^{A'}\frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right|_{u=1/A} = \left|\int_A^{\alpha A}\frac{x\cos\frac{x}{A}}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \int_1^{\alpha}\frac{A^2t\cos t}{A^2t^2+a^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \cos\alpha\int_1^{\alpha}\frac{A^2t}{A^2t^2+a^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\cos\alpha\ln\frac{A^2\alpha^2+a^2}{A^2+a^2}\end{aligned}$$

令 $A\to+\infty$, 就有

$$\varepsilon\geqslant\cos\alpha\ln\alpha>0.$$

这里用到了$\cos t$ 在 $[1,\alpha]\subset\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调减. 上述结论与 ε 是任意整数矛盾, 因此积分在 $u\geqslant 0$ 不一致收敛. 在 $u\geqslant\delta>0$ 上的一致收敛性可仿照书上例13.4.3的方法证明.

8. 证明积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$$

关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上不一致收敛.

证明方法与上题一样, 只是注意到$\sin x$**在** $[1,\alpha]\subset\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ **上单调增即可**.

9. 设 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明函数

$$\varphi(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos ux\,\mathrm{d}x$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

本题要证明函数 $\varphi(u)$ **在** $|u|<\infty$ **上一致连续, 即对任意的** $\varepsilon>0$, **要找到这样的** $\delta>0$, **使得对任何** u,u', **只要** $|u-u'|<\delta$, **就有** $|\varphi(u)-\varphi(u')|<\varepsilon$.

证明 因 $|f(x)\cos ux|\leqslant|f(x)|$, 所以积分 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos ux\,\mathrm{d}x$ 关于 $|u|<\infty$ 一致收敛. 所以函数 $\varphi(u)$ 在 $|u|<\infty$ 有定义且连续. 下面要证 $\varphi(u)$ 是 $|u|<\infty$ 上一直连续函数.

$\forall\varepsilon>0$, 存在 $M>0$, 使得

$$\int_{-\infty}^{M}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{5},\quad \int_{-\infty}^{-M}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{5},$$

记 $A=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$, 取

$$0<\delta<\frac{\varepsilon}{5M(A+1)},$$

则对于任意的u,u', 当 $|u-u'|<\delta$ 时, 就有

$$\begin{aligned}
|\varphi(u)-\varphi(u')| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ux\,\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos u'x\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_{-M}^{M}|f(x)||\cos ux-\cos u'x|\,\mathrm{d}x \\
&+\int_{-\infty}^{-M}|f(x)||\cos ux-\cos u'x|\,\mathrm{d}x+\int_{M}^{+\infty}|f(x)||\cos ux-\cos u'x|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{-M}^{M}|f(x)||x||u-u'|\,\mathrm{d}x+2\int_{-\infty}^{-M}|f(x)|\,\mathrm{d}x+2\int_{M}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant MA|u-u'|+\frac{4}{5}\varepsilon<\varepsilon.
\end{aligned}$$

这样就证明了 $\varphi(u)$ 的一致连续性.

该题的证明方法是利用条件, 将无穷远的尾巴砍掉, 然后在有限区间$[-M,M]$ 上估计.

10. 证明函数

$$f(x)=\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^{x}}\,\mathrm{d}t$$

在 $[0,1)$ 上连续.

证明 注意该题积分在 $t=n\pi$ 都是瑕点, 因此需要分段考虑.利用第 1 题结果, 取 $a_n=n\pi$, 因此

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^{x}}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{|\sin t|^{x}}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-u-n\pi}}{|\sin u|^{x}}\,\mathrm{d}u \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-n\pi}\right)\int_{0}^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{|\sin u|^{x}}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}\int_{0}^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sin^{x} u}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

因此, 只要证明瑕积分 $\int\limits_0^{\pi} \frac{e^{-u}}{\sin^x u}\,du$ 在 $0 \leqslant x < 1$ 收敛且连续即可. 因为

$$\frac{e^{-u}}{\sin^x u} \sim \frac{1}{u^x} \quad u \to 0^+$$
$$\frac{e^{-u}}{\sin^x u} \sim \frac{1}{(\pi - u)^x} \quad u \to \pi^-$$

所以瑕积分

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{e^{-u}}{\sin^x u}\,du = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{e^{-u}}{\sin^x u}\,du + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{e^{-u}}{\sin^x u}\,du$$

在 $0 \leqslant x < 1$ 收敛.

$\forall x_0 \in [0,1)$, $\exists \delta > 0$, 使得 $0 \leqslant x_0 < 1-\delta$, 且

$$\frac{e^{-t}}{|\sin t|^{1-\delta}} \sim \frac{1}{t^{1-\delta}} \quad (t \to 0^+)$$

在 $x \in [0, 1-\delta]$ 上, 有

$$\frac{e^{-t}}{|\sin t|^x} \leqslant \frac{e^{-t}}{|\sin t|^{1-\delta}},$$

所以由 Weierstrass 定理, $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{e^{-t}}{|\sin t|^x}\,dt$ 在 $[0, 1-\delta]$ 上一致收敛, 被积函数显然是x的连续函数, 这样就得到 $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{e^{-t}}{|\sin t|^x}\,dt$ 在 $[0,1-\delta]$ 上连续, 同理可证 $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{e^{-t}}{|\sin t|^x}\,dt$ 在 $[0,1-\delta]$ 上也连续, 因此函数 $f(x)$ 在 $[0,1-\delta]$ 上连续, 推出在 x_0 连续, 由于 $0 \leqslant x_0 < 1$ 的任意性, 得 $f(x)$ 在$[0,1)$ 上连续.

11. 证明

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx = \ln\sqrt{2\pi}.$$

证明 对 $0 < x < 1$, 在余元公式两边取对数并积分

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx + \int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\,dx = \int_0^1 \ln\pi\,dx - \int_0^1 \ln\sin\pi x\,dx$$

对左边第二个积分换元:

$$2\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx = \ln\pi - \int_0^1 \ln\sin\pi x\,dx = \ln\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \ln\sin x\,dx$$

下面计算右边的积分

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \ln\sin x\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \ln\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin 2x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\ln 2\end{aligned}$$

因此得

$$\int_0^{\pi} \ln\sin x\,\mathrm{d}x = -\pi\ln 2$$

最后得

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln\pi + \ln 2) = \ln\sqrt{2\pi}.$$

12. 证明

$$\int_0^1 \sin\pi x\ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{\pi}{2}+1\right).$$

证明 类似第11题, 有

$$\int_0^1 \sin\pi x\ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \sin\pi x\ln\Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin\pi x\ln\pi\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \sin\pi x\ln\sin\pi x\,\mathrm{d}x..$$

$$\Longrightarrow 2\int_0^1 \sin\pi x\ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi}\ln\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x.$$

下面计算右边的积分.

$$\int_0^{\pi}\sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

令 $\sin\dfrac{x}{2} = u$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\sin x\ln\sin x\,\mathrm{d}x &= 4\int_0^1 u\ln(2u\sqrt{1-u^2})\,\mathrm{d}u \\ &= 4\int_0^1 u\left(\ln 2 + \ln u + \frac{1}{2}\ln(1-u^2)\right)\mathrm{d}u \\ &= 4\left(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

这里要注意积分

$$\int_0^1 u\ln(1-u^2)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1-u^2)\,\mathrm{d}(1-u^2) = -\int_0^1 u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}.$$

将上列结果代入即可得

$$\int_0^1 \sin \pi x \ln \Gamma(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\ln \frac{\pi}{2} + 1\right).$$

13. 证明

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-\cos x}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

证明 利用三角函数半角公式$\cos x = 1 - 2\sin \dfrac{x}{2}$, 得 $3-\cos x = 2\left(1+\sin^2 \frac{x}{2}\right)$. 令

$$u = \sin^2 \frac{x}{2}, \Longrightarrow \mathrm{d}u = \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{u(1-u)}\, \mathrm{d}x,$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-\cos x}} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2(1+u)u(1-u)}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2u(1-u^2)}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/4}(1-t)^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 t^{1/4-1}(1-t)^{1/2-1} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathrm{B}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(2^{1/2-1} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).
\end{aligned}$$

这里, 作了换元 $t = u^2$ 以及利用了加倍公式.

14. 设 $\varphi(x)$ 是$(0,+\infty)$ 上正的、严格递减的连续函数, 且

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = +\infty, \quad \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, \mathrm{d}x = 1,$$

又设 $x = \psi(y)$ 是 $y = \varphi(x)$ 的反函数. 求证:存在 $p \in (0,1)$, 使得

$$\int_0^p \varphi(x)\, \mathrm{d}x + \int_0^p \psi(y)\, \mathrm{d}y = 1 + p^2$$

证明 分如下步骤:

(1). 因为积分 $\int\limits_0^{+\infty} \varphi(x)\, \mathrm{d}x$ 收敛, $\varphi(x)$ 严格递减, 因此

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0,$$

否则, 必存在 $\alpha > 0$, 使得 $\varphi(x) \geqslant \alpha$ $(0 < x < +\infty)$, 这样

$$\int_0^A \varphi(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \alpha A \to +\infty.$$

推得级数发散, 因此矛盾..

(2). 因为 $\varphi(x)$ 连续, 严格递减, 所以

$$\lim_{x\to 0^+}(\varphi(x)-x) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty}(\varphi(x)-x) = -\infty$$

因此在$(0,+\infty)$ 上存在唯一的不动点 $\varphi(p)=p$. 且在 $0<x<p$ 上有 $\varphi(x)>p$, 在 $x>p$ 上有 $\varphi(x)<p$. 改不动点也是反函数$x=\psi(y)$的不动点 $p=\psi(p)$.

(3). 因为

$$1 > \int_0^p \varphi(x)\,\mathrm{d}x > \int_0^p p\,\mathrm{d}x = p^2$$

所以 $p \in (0,1)$.

(4). 注意到 $y=\varphi(x)$ 和反函数 $x=\psi(y)$ 分别在$0<x<+\infty$ 和 $0<y<+\infty$ 上的积分是同一条曲线在Oxy 第一象限与 x 轴和 y 轴围成的面积, 因此

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1, \quad \int_0^{+\infty} \psi(y)\,\mathrm{d}y = 1$$

且 $\int\limits_0^p \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ 是y 轴、x 轴上 $[0,p]$、直线 $x=p$ 以及函数 $y=\varphi(x)$ 围成的面积. 这块面积等于$[0,p]\times[0,p]$ 的面积与 $\psi(y)$ 在y 轴上 $[p,+\infty)$ 上覆盖的面积, 即

$$\int_0^p \varphi(x)\,\mathrm{d}x = p^2 + \int_p^{+\infty} \psi(y)\,\mathrm{d}y$$

由此推出

$$\int_0^p \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^p \psi(y)\,\mathrm{d}y = 1 + p^2.$$

15. 设 $f\Big|_{[0,+\infty)}$ 连续, 且$\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明函数

$$g(x) = f(x) - 2\mathrm{e}^{-x}\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t \quad (x \geqslant 0)$$

满足

$$\int_0^{+\infty} g^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 令 $h(x)=\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t\ \ (x\geqslant 0),\ \ h(0)=0$ 则

$$\begin{aligned} g(x)-f(x)&=-2\mathrm{e}^{-x}h(x),\\ g(x)+f(x)&=2\mathrm{e}^{-x}(h'(x)-h(x)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow g^2(x)-f^2(x)&=-4\mathrm{e}^{-2x}h(x)(h'(x)-h(x))\\ &=-2\left(\mathrm{e}^{-2x}h^2(x)\right)'\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \int_0^X g^2(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^X f^2(x)\,\mathrm{d}x=-2\mathrm{e}^{-2x}h^2(x)\Big|_0^X$$

下面的问题是如何证明

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

因为 $\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 所以对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $A>0$, 使得当 $X>A$ 时, 有

$$\int_A^X f^2(x)\,\mathrm{d}x<\varepsilon^2,$$

$$\begin{aligned}\left(e^{-X}\int_A^X e^t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2&\leqslant \mathrm{e}^{-2X}\int_A^X \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t\int_A^X f^2(t)\,\mathrm{d}t\\ &<\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2(X-A)})\varepsilon^2<\varepsilon^2\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left|e^{-X}\int_A^X e^t f(t)\,\mathrm{d}t\right|<\varepsilon.$$

记 $M=\int_0^A \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t$, 则存在 $B>0$ 使得当 $X>B$ 时有$|\mathrm{e}^{-X}M|<\varepsilon$, 因此当 $X>B$ 时有

$$\left|\mathrm{e}^{-X}\int_0^X e^t f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\mathrm{e}^{-X}\int_0^A e^t f(t)\,\mathrm{d}t\right|+\left|\mathrm{e}^{-X}\int_A^X e^t f(t)\,\mathrm{d}t\right|<2\varepsilon.$$

以下是部分补充题目

1. 求下列积分的值：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^8)^2}.$$

解 做变换 $u = x^8$, 或 $x = u^{1/8}$, 因此 $\mathrm{d}x = \frac{1}{8}u^{1/8-1}\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^8)^2} &= \frac{1}{8}\int_0^{+\infty} \frac{u^{1/8-1}}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{8}\mathrm{B}\left(\frac{1}{8}, \frac{15}{8}\right) = \frac{1}{8}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{15}{8}\right)}{\Gamma(2)} \\ &= \frac{1}{8}\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{7}{8}+1\right) = \frac{7}{64}\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{7}{8}\right) \\ &= \frac{7}{64}\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{8}\right) = \frac{7}{64}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{8}}.\end{aligned}$$

这里用到了B 函数的另一种表示：

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{u^{q-1}}{(1+u)^{p+q}}\,\mathrm{d}u.$$

这个表示如果记不住, 可通过变换

$$t = \frac{1}{1+u}, \Longrightarrow 1-t = \frac{u}{1+u}, \quad \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2},$$

直接推导出来. 最后, 通过

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

算出

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

代入,即可的最后结果.

2. 设 p, q 都是正数，求 $I = \int_0^1 x^q\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\,\mathrm{d}x$

解 做变换 $x = \mathrm{e}^{-t}$,

$$\int_0^1 x^q\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt}t^p\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^p\mathrm{e}^{-(q+1)t}\,\mathrm{d}t.$$

再令 $(q+1)t = u$

$$I = \frac{1}{(q+1)^{p+1}}\int_0^\infty u^p\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{p\Gamma(p)}{(q+1)^{p+1}}$$

3. 证明下列积分收敛，定义的含参变量函数在$(0,+\infty)$ 上可导

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\ln(1+tx)\,\mathrm{d}x$$

证明：该题的关键是在应用 Dirichlet 定理判别收敛时, 如何拆分被积函数.

把积分写成

$$F(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \frac{\ln(1+tx)}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$

这样可以看出 $F(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$ 收敛，$\dfrac{\ln(1+tx)}{\sqrt{x}}$ 当 x 充分大时对 x 单调减趋于零。

被积函数 $f(x,t) = \dfrac{\sin x}{x} \ln(1+tx)$ 对 t 有连续的偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\sin x}{1+tx}$, $(x \geqslant 0, t > 0)$.

在 t 的任何闭子区间 $[\alpha, \beta]$ 上，根据 Dirichlet 判别法 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{1+tx}$ 关于 t 在$[\alpha, \beta]$ 一致收敛，因此得到 $F(t)$ 在$[\alpha, \beta]$ 上可导，由$[\alpha, \beta]$ 的任意性，得到在 $t > 0$ 可导.

4. 设 $f(x) : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ 上单调减有界的连续函数。求

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \, \mathrm{d}x \quad (0 < a < b).$$

解 注意到该题没有假设积分收敛, 也没有假设函数可导, 因此无法将 $f(ax) - f(bx)$ 表示为

$$\frac{f(ax) - f(bx)}{x} = \int_a^b f'(ux) \, \mathrm{d}u$$

具体做法如下：设

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \beta.$$

对任意小的 $\varepsilon > 0$ 和任意大的 $A > 0$, 在$[\varepsilon, A]$ 上 $f(ax), f(bx)$ 单调减有界, 因此可积，$\dfrac{1}{x}$ 可积，所以

$$\frac{f(ax)}{x}, \ \frac{f(bx)}{x}$$

可积.

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{A} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} \, \mathrm{d}x &= \int_{a\varepsilon}^{aA} \frac{f(x)}{x} \, \mathrm{d}x - \int_{b\varepsilon}^{bA} \frac{f(x)}{x} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x} \, \mathrm{d}x - \int_{aA}^{bA} \frac{f(x)}{x} \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(b\varepsilon) \ln \frac{b}{a} \leqslant \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x} \, \mathrm{d}x \leqslant f(a\varepsilon) \ln \frac{b}{a} \\ f(bA) \ln \frac{b}{a} \leqslant \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(x)}{x} \, \mathrm{d}x \leqslant f(aA) \ln \frac{b}{a} \end{array} \right.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$, $A \to +\infty$, 得积分收敛且

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = (\alpha-\beta)(\ln b - \ln a).$$

以下给出几个与凸性相关的不等式证明

1. Jensen 不等式（第一册习题3.5第一题），设 $f(x)$ 是区间 I 上二阶可导的凸函数, $x_1,\cdots,x_n \in I$, $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1, \alpha_k>0$, 则

$$f(\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1)+\cdots+\alpha_n f(x_n)$$

证明 因为 $f''\geqslant 0$, 令 $\overline{x}=\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n$, 在 $\overline{x}$ 作Taylor展开

$$\begin{aligned} f(x_k) &= f(\overline{x})+f'(\overline{x})(x_k-\overline{x})+\frac{f''(\xi_k)}{2!}(x_k-\overline{x})^2 \\ &\geqslant f(\overline{x})+f'(\overline{x})(x_k-\overline{x}),\ \ k=1,\cdots,n. \end{aligned}$$

两边乘以α_k 并求和得

$$\alpha_1 f(x_1)+\cdots+\alpha_n f(x_n) \geqslant f(\overline{x})+f'(\overline{x})(\overline{x}-\overline{x}) = f(\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n)$$

2. Hölder 不等式（第一册第3章综合习题第20题）, 设 $x_1,\cdots,x_n$ 和 $y_1,\cdots,y_n$ 非负; $p>1, q>1, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$（共轭条件）, 则

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

证明 令 $f(u)=u^p$, $u\geqslant 0$. $f''(u)=p(p-1)u^{p-2}\geqslant 0$, 因此 $f(u)$ 是凸函数. 取

$$\alpha_k=\frac{y_k^q}{\sum_{i=1}^n y_i^q},\ \ u_k=x_k y_k^{1-q},\ \ k=1,\cdots,n$$

代入Jensen 不等式

$$f(\alpha_1 u_1+\cdots+\alpha_n u_n) \leqslant \alpha_1 f(u_1)+\cdots+\alpha_n f(u_n)$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k y_k}{\sum_{k=1}^n y_k^q}\right)^p \leqslant \sum_{k=1}^n \left(\frac{y_k^q}{\sum_{i=1}^n y_i^q}(x_k y_k^{1-q})^p\right) = \frac{\sum_{k=1}^n x_k^p}{\sum_{k=1}^n y_k^q}.$$

这里我们用到了 $p+q-pq=0$. 两边开 p 次根即得结果.

3. 积分形式的 Hölder 不等式, 设 $f(x), g(x)$ 在$[a,b]$ 上可积, p, q 满足 $p>1, q>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

证明 做分割 $T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 利用 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n |f(\xi_k)||g(\xi_k)|\Delta x_k &= \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)|\Delta x_k^{\frac{1}{p}} |g(\xi_k)|\Delta x_k^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^n |f(\xi_k)|^p \Delta x_k\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |g(\xi_k)|^q \Delta x_k\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

令$|T|\to 0$ 即可得积分形式的Hölder 不等式.

4. 习题13.5, 第 6 题: 证明$\ln\Gamma(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.

证明 首先回顾关于凸函数的定义: 设 $f(x)$ 是区间 I 上的函数, 如果任给 I 中两点 x_1, x_2, 以及任意 $\alpha\in(0,1)$ 有

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2),$$

那么称函数是区间 I 上的凸函数.

设 $p>1$ 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 取 $\alpha=\dfrac{1}{p}$, 因此 $1-\alpha=\dfrac{1}{q}$. 这样, 凸函数定义的等价形式为: 对任意 $x_1, x_2\in I$ 有

$$f\left(\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{q}\right) \leqslant \frac{f(x_1)}{p}+\frac{f(x_2)}{q}.$$

为了证明 $\ln\Gamma(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数, 首先有对任意 $x_1, x_2\in(1,+\infty)$

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{q}\right) &= \int_0^{+\infty} t^{\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{q}-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{x_1-1}{p}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{p}}\right)\left(t^{\frac{x_2-1}{q}} e^{-\frac{t}{q}}\right)\mathrm{d}t \\ &\leqslant \left(\int_0^{+\infty} t^{x_1-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty} t^{x_2-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}} = (\Gamma(x_1))^{\frac{1}{p}}(\Gamma(x_2))^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

这里用到了积分形式的 Hölder 不等式（见第 3 题）

$$\Longrightarrow \ln\Gamma\left(\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{q}\right) \leqslant \frac{1}{p}\ln\Gamma(x_1)+\frac{1}{q}\Gamma(x_2),$$

即, $\ln\Gamma(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.