§0.1 第11章复习

基本概念 对曲线或曲面分割$\Longrightarrow$ 近似（Riemann和）$\Longrightarrow$ 极限

曲线积分：$\displaystyle\int_L \phi(x,y,z)\,\mathrm{d}s;$

$$\int_{L_{AB}} \vec{v}\cdot\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{L_{AB}} \vec{v}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s = \int_{L_{AB}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z;$$

曲面积分：$\displaystyle\iint_S \varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}S;$

$$\iint_S \vec{v}\cdot\,\mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

基本性质 与重积分类似, 例如有界性, 对被积数量场或向量场的可加性, 对积分曲线或曲面的可加性等等.

参数表示 曲线曲面的参数方程表示一般为

曲线: $L: \vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k},\ t\in[\alpha,\beta].$

曲面: $S: \vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k},\ (u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2.$

曲面的边: $(u,v)\in\partial D: u=u(t),\ v=v(t),\ t\in[\alpha,\beta]$

因此曲面的边(仍然记为 ∂S)可以参数化:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t)&=\vec{r}(u(t),v(t))\\&=x(u(t),v(t))\vec{i}+y(u(t),v(t))\vec{j}+z(u(t),v(t))\vec{k},\ t\in[\alpha,\beta]\end{aligned}$$

特别 曲线或曲面由显函数表示可看成是特殊的参数表示:

$y=f(x),\ x\in[a,b]\Longrightarrow\vec{r}(x)=x\vec{i}+f(x)\vec{j},\ x\in[a,b]$

$z=f(x,y),\ (x,y)\in D\Longrightarrow\vec{r}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}+f(x,y)\vec{k},\ (x,y)\in D.$

也可将曲线或曲面分段(或分片)用不同的参数方程表示.

一、曲线弧长与切向量, 曲面面积与法向量

弧长元：$\mathrm{d}s = |\vec{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$,（参数表示）.

$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$,（直角坐标）.

$\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\theta$.（极坐标）.

弧长：$\sigma(L) = \int_\alpha^\beta |\vec{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$;

切向量：$\vec{\tau} = \dfrac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$,（参数表示）.

面积元：$\mathrm{d}S = |\vec{r}'_u(u,v) \times \vec{r}'_v(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$,（参数表示）.

$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,（直角坐标）

$\mathrm{d}S = r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$,（球坐标）

面积：$\sigma(S) = \iint_D |\vec{r}'_u(u,v) \times \vec{r}'_v(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

法向量：$\vec{n} = \dfrac{\vec{r}'_u(u,v) \times \vec{r}'_v(u,v)}{|\vec{r}'_u(u,v) \times \vec{r}'_v(u,v)|}$,（参数表示）.

二、曲线曲面积分的计算

在参数方程表示下, 曲线曲面积分化为定积分或二重积分:

数量场曲线积分:

$$\int_L \phi(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta \phi(x(t),y(t),z(t))|\vec{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$$

数量场曲面积分:

$$\iint_S \phi(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_D \phi(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

向量场曲线积分: ($\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$)

$$\int_{L_{AB}} \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_{L_{AB}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta \vec{v}\cdot\vec{r}'\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_\alpha^\beta (Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t))\,\mathrm{d}t.$$

向量场曲面积分: ($\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$)

$$\iint_S \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}S = \iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D (\vec{v}\cdot\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \iint_D \left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

注意 向量场的曲线曲面积分时, 要注意曲线曲面的定向, 要保证切向量 $\vec{r}'(t)$ 和法向量 $\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v$ 与指定的方向的一致性.

因此, 理论上有了参数表示就可具体计算.

但是! 不能过于教条, 要灵活发挥概念和性质在证明和计算中的作用! 并充分考虑积分区域或被积数量场 (向量场) 的对称性!

三、Green、Gauss 和 Stokes 公式

Green 公式 $\boldsymbol{L} = \partial \boldsymbol{D}$ 平面封闭曲线, 方向逆时针,

$$\oint_{L} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \oint_{L} P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

曲线积分 (一维)　　重积分 (二维)

Gauss 公式 $\boldsymbol{S} = \partial \boldsymbol{V}$, 空间封闭曲面, 方向外侧.

$$\oiint_{S} P \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + Q \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + R \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iiint_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

或

$$\oiint_{S} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_{S} \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S = \iiint_{V} \nabla \cdot \vec{v} \, \mathrm{d}V = \iiint_{V} \mathrm{div} \vec{v} \, \mathrm{d}V.$$

空间曲面积分 (二维)　　重积分 (三维)

Stokes **公式** $L=\partial S$ ，空间封闭曲线, 是 S 的边缘, 方向与 S 的方向协调

$$\oint_L \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z +$$
$$\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

或者

$$\oint_L \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

空间曲线积分（一维） 空间曲面积分（二维）

四、保守场

设 $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, 则

保守场: $\vec{v}$ 的曲线积分与路径无关（环量为零）.

有势场: 存在 ϕ 使得 $\vec{v} = \nabla\phi$, ϕ 称为**势函数**

无旋场: $\nabla \times \vec{v} = 0$

结论: $\vec{v}$ 是: 保守场 $\Longleftrightarrow$ 有势场 $\Longleftrightarrow$ 无旋场（对区域加条件）

（1）势函数的计算可通过特殊路径积分得到（虽然不唯一）或求解方程

$$P = \frac{\partial\phi}{\partial x},\ Q = \frac{\partial\phi}{\partial y},\ R = \frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

（2）保守场的曲线积分只与起点和终点有关, 而且

$$\int_{L_{AB}} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B \mathrm{d}\phi = \phi(B) - \phi(A).$$

其中, ϕ 是 $\vec{v}$ 的一个势函数, 满足

$$\mathrm{d}\phi = \nabla\phi \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

无源场: $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.

向量势: 存在向量场 $\vec{\alpha}$ 使得 $\vec{v} = \mathrm{rot}\vec{\alpha} = \nabla \times \vec{\alpha}$.

向量势在相差一个函数的梯度意义下是唯一的. 向量势的构造: 已知 $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, 求 $\vec{\alpha} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ 使得 $\vec{v} = \nabla \times \vec{\alpha}$ 等价于求解下列一阶微分方程

$$\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} = P(x, y, z),$$
$$\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} = Q(x, y, z),$$
$$\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = R(x, y, z),$$

五、总结

（1）曲线曲面参数化, 是计算最基本的方法。

（2）充分利用各种对称性，简化计算。

（3）灵活运用Green、Gauss、Stokes公式进行计算。

（4）会计算保守场或无源场的势函数或向量势。

（5）充分理解积分的不同表达方式以及概念。

六、例题

例 计算 $I = \oint\limits_L x^2\,\mathrm{d}s$, 其中

$$L : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

解 注意 L 是球面上大圆, 因此半径为 1. 常规办法是把曲线 L 参数化: 注意到 L 是球面与平面的交线, 联立两个方程得:

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{x}{2} + y\right)^2 = \frac{1}{2}$$

令

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta,\ \frac{x}{2} + y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, \theta \in [0, 2\pi]$$

并代入 $z=-(x+y)$ 得 L 的参数方程表示:

$$\begin{cases} x=\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta, \\ y=\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\theta-\sqrt{\frac{1}{6}}\cos\theta, \\ z=-\sqrt{\frac{1}{6}}\cos\theta-\sqrt{\frac{1}{2}}\sin\theta \end{cases} \qquad (\theta\in[0,2\pi])$$

$$\Longrightarrow\ \mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)+z'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta=\ \mathrm{d}\theta$$

所以

$$I=\oint_L x^2\,\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}\pi.$$

但是, 如果用对称性, 该题可以大大简化

因为

$$\oint_L x^2\,\mathrm{d}s=\oint_L y^2\,\mathrm{d}s=\oint_L z^2\,\mathrm{d}s$$

$$\Longrightarrow I=\frac{1}{3}\oint_L(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L\mathrm{d}s=\frac{2}{3}\pi$$

例 设 a, b, c 不全为零。L 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $ax+by+cz=0$ 的交线。方向与向量 $\vec{n_0}=(a,b,c)$ 形成右手系。计算

$$\oint (bz+c)\,\mathrm{d}x+(cx+a)\,\mathrm{d}y+(ay+b)\,\mathrm{d}z$$

解 因平面过原点，所以与设球面交线 L 是大圆，记大圆盘为 D, L 是其边界。D 的法向量为 $\vec{n}=\frac{\vec{n_0}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ 根据 Stokes 公式，有

$$原式=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\iint_D \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ bz+c & cx+a & ay+b \end{vmatrix}\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_D \vec{n_0}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\pi R^2$$

例 求

$$\iint_S \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S (by^2+cz^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (cz^2+ax^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (ax^2+by^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中$\vec{v}=(by^2+cz^2)\vec{i}+(cz^2+ax^2)\vec{j}+(ax^2+by^2)\vec{k}$, $a,b,c>0$, $S: x^2+y^2+z^2=1, z\geqslant 0$ 上半球的上侧。

解 S 加上圆盘 $D^-: x^2+y^2\leqslant 1, z=0$, 方向朝下。根据Gauss 公式

$$\oiint_{S+D^-} (by^2+cz^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (cz^2+ax^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (ax^2+by^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

在D上, $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = 0$, 再利用对称性

$$\iint_{D^+} = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} (ax^2+by^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{y^2+x^2\leqslant 1} (ay^2+bx^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$\iint_{D^+} = \frac{a+b}{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{(a+b)\pi}{4}$$

$$\iint_S \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_{S+D^-} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S} - \iint_{D_-} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{(a+b)\pi}{4}.$$