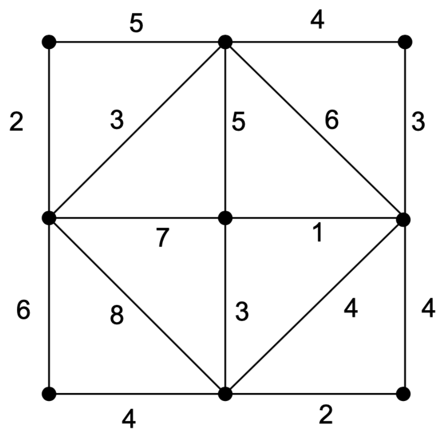
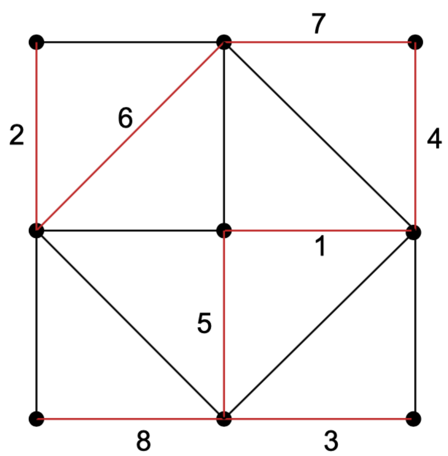
# HW3作业讲解

> 2.14 用Kruskal算法求图中边权图最小的生成树
>
> 
> 

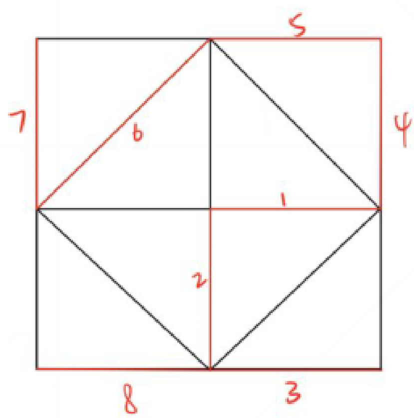
**注意Kruskal算法和Prim算法的区别：对于下一条边的选取，Kruskal算法是在所有剩下的、不与已选边形成圈的边中选择权最小的，而Prim算法是在$(V',\bar{V}')$中选择权值最小的。**

如下图所示，红色标记的是最小生成树，序号则是边选择的顺序。

Krustal算法：



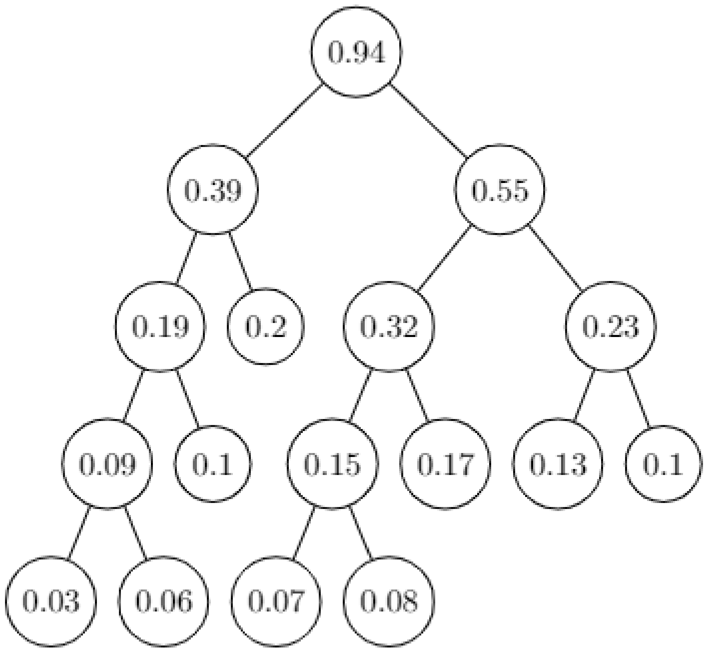

Prim算法：



> 2.20 画出带权 0.2,0.17,0.13,0.1,0.1,0.08,0.06,0.07,0.03 的 Huffman 树

建议写出每层权值的结点，不容易出错。

如下图所示：




> 2.23 证明Huffman树是最优二叉树。

改作业时发现的常见问题：(1)直接使用引理2.1或者使用“Huffman树是最优二叉树”的结论去证明引理2.1 (2)使用引理2.1时说“权值最小的两个节点构成兄弟”，注意该引理的表述“存在一颗Huffman树使得$\omega_1, \omega_2$构成兄弟”，考虑所有叶子结点权值一样的情况可知前面的表述不严谨。

思路：考虑归纳----->得到Huffman树T，收缩$\omega_1, \omega_2$结点得到T'，由归纳假设新树是最优的，求出与新树权值和的代数关系----->将原n个顶点形成的最优二叉树$T_1$进行相同的收缩得到$T_1'$，两者权值和有相同的代数关系----->得出结论

正确的解答如下：

设叶子结点的权值分别为$\omega_1 \le \omega_2 \le \cdots \le \omega_n$

1. 首先证明存在一颗最优二叉树，使得$\omega_1$和$\omega_2$是兄弟，且它们的深度等于树的高度。(为方便，我们用权值$\omega_i$来表示对应的顶点)

   任取一颗最优二叉树$T$，若$\omega_1$的深度小于树高，设$w_i$和$w_j$是$T$中最深的两个顶点，不妨设$i \neq 2$。交换$\omega_1$和$\omega_i$，得到的新树$T'$加权路径长度不增，故也为最优二叉树，若$j \neq 2$，则交换$\omega_2$和$\omega_j$，得到的新树$T''$的加权路径长度不增，故也为最优二叉树。如此，我们就得到了一颗最优二叉树，使得$\omega_1$和$\omega_2$是兄弟，且它们的深度等于树的高度。

2. 再用对树的叶子节点数n进行归纳：$n=2$时，结论成立。设$n=k$时结论成立，考虑$n=k+1$情形:

   设$T_{k+1}$为叶子结点的权值分别为$\omega_1 \le \omega_2 \le \cdots \le \omega_{k+1}$的最优二叉树，在$T$中$\omega_1$和$\omega_2$是兄弟，将$w_1$和$\omega_2$删去并保留其父节点并令父节点的权值为$\omega_1 + \omega_2$得到新树$T_k'$.

由Huffman树的构造过程，必然存在两个权值最小的结点构成兄弟，不妨设形成的Huffman树$T'_{k+1}$中$\omega_1$和$\omega_2$是兄弟（否则可以调整权值的下标使其成为兄弟），将$w_1$和$\omega_2$删去并保留其父节点并令父节点的权值为$\omega_1+\omega_2$得到新树$T_k$.则$T_k$是叶子结点权值为$\omega_1+\omega_2,\omega_3,\cdots,\omega_{k+1}$形成的Huffman树，由归纳假设，$T_k$为最优二叉树。

我们有

$$\begin{gathered}WPL(T_{k+1})=WPL(T'_k)+\omega_1+\omega_2\\ WPL(T'_{k+1})=WPL(T_k)+\omega_1+\omega_2\\ WPL(T_{k+1})\le WPL(T'_{k+1})\\ WPL(T_k)\le WPL(T'_k)\end{gathered}$$

故有$WPL(T'_{k+1})=WPL(T_{k+1})$，所以$T'_{k+1}$也为最优二叉树，即$n=k+1$情形结论成立。

有归纳原理知，结论成立。

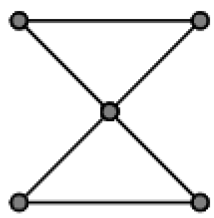
> 3.2 给出一个 $k-$连通图$G$以及$k$个顶点的集合$V'$,使得$\omega(G-V')>2$。

考虑$K_{k,k+3}$即可

注意，题中k是未知量，很多同学解答时自己给k定了个值1，考试时最好不要这样。

> 3.4 给出一个简单图，$\delta(G)=v(G)-3$且$\kappa(G)<\delta(G)$。

如下图：



此图中$\delta(G)=2,v(G)=5,\kappa(G)=1$,满足题目要求。

> 3.6 $G$是简单图，$\delta(G)\ge\frac{1}{2}(v(G)+k-2)$，则$G$是$k-$连通图。

用反证法。

若$G$不是$k-$连通图，则可以删去$k-1$个点及其在$G$中所连的边，使得得到的图$G'$不是联通图。

对于$G'$,有$v(G')=v(G)-k+1$且$\delta(G')\ge\frac{1}{2}(v(G)+k-2)-(k-1)=\frac{1}{2}(v(G')-1)$。

而$G'$不连通，则其必有一个点数不多于$\frac{1}{2}v(G')$的连通片，这与$\delta(G')\ge\frac{1}{2}(v(G')-1)$矛盾。

# 补充题及参考答案：

> 2.15 边权图里的最小生成森林是权最小的生成森林，并且在生成森林中保持原图中任意两个顶点的连 通性。如何修改 Kruskal 算法来构造最小生成森林，并指出时间复杂度。

对于两个算法，都只需要修改最后一步为“反复执行第（2）步，直到没有新的边可以被选出为止”

> 2.25 证明： 在 $v \geq 3$阶的连通图G中 ，存在至少两个顶点，从G中删除这两个顶点后所得图仍为连通。

由推论2.2可知联通图$G$有生成树，记为$T$。

由定理2.2可知树$T$至少有两片树叶$v_1, v_2$，删去这两片树叶，得到新树$T'$中仍然联通。

从$G$中删去$v_1, v_2$得到$G$‘，则$T'$是$G'$的子图，故$G'$仍然联通

> 3.1 $G$是k-边连通图， $E'$是$G$ 的$k$条边的集合，则 $\omega(G - E') \leq 2$。

理解k-边连通的意义：k-边连通指$\kappa'(G) \geq k$，（$\kappa'(G) = k + 1$时$G$也是k-连通的）k-边连通并不代表“可以选出k条边，删去这k条边$G$会变得不连通”，但是k-边连通含有“任选k-1条边，删去后$G$仍然是连通的”。

该题解答如下：

根据$k-$边割集的性质，去掉 $k - 1$条边后仍然是连通图$G'$，即$\omega(G') = 1$

此时在删去一条边后连通分支的数量最多加一，即$\omega(G - E') \leq 2$

> 3.3 $G$是简单图，$\delta(G) \geq v(G) - 2$，则有$\kappa(G) = \delta(G)$。

1. $\delta(G) = v(G) - 1$此时$G$是完全图，结论成立
2. $\delta(G) = v(G) - 2$，任意删去$v(G) - 3$个顶点，对于剩下的三个顶点都至少与一个顶点相邻，故$\kappa(G) \geq v(G) - 2$

   若移出某个度数为 $v(G) - 2$的顶点的所有相邻顶点可导致图不再连通，故$\kappa(G) = v(G) - 2 = \delta(G)$