

## 数分 (B2) 第12章综合及补充题解

1、证明: 级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$  在不包含  $2\pi$  整数倍的闭区间上一致收敛, 但它不是任意在  $[-\pi, \pi]$  上平方可积函数的 Fourier 级数.

**证明** 任取  $[a, b] \subset (0, 2\pi)$ , 则当  $x \in (a, b)$  时, 有

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| = \left| \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left( n + \frac{1}{2} \right)}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}.$$

即在  $[a, b] \subset (0, 2\pi)$  上, 上述和式是有界的. 而  $\frac{1}{\ln n}$  单调减趋于零. 根据函数项级数的 Dirichlet 判别法可知, 级数在  $[a, b] \subset (0, 2\pi)$  上一致收敛.

若存在可积平方可积函数  $f(x)$  使得  $f(x)$  的 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n},$$

那么由 Parseval 等式就有

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx < +\infty$$

收敛. 然而, 根据数项级数的比较定理,

$$\frac{1}{\ln^2 n} / \frac{1}{n^\alpha} \rightarrow 0 \quad (\alpha > 0),$$

因此级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$  是发散的, 因此矛盾.

2、证明下列等式:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n} = \ln \left( 2 \cos \frac{x}{2} \right) \quad (-\pi < x < \pi); \\ (2) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln \left( 2 \sin \frac{x}{2} \right) \quad (0 < x < 2\pi). \end{aligned}$$

**证明** 令  $f(x) = \ln \left( 2 \cos \frac{x}{2} \right)$   $(-\pi < x < \pi)$ , 它是所定义区间上连续可导的偶函数. 计算其 Fourier 系数得  $b_n = 0$ , 而

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \left( 2 \cos \frac{x}{2} \right) dx = 2 \ln 2 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \left( \cos \frac{x}{2} \right) dx$$

其中

$$\int_0^{\pi} \ln \left( \cos \frac{x}{2} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left( \cos \frac{x}{2} \right) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \left( \cos \frac{x}{2} \right) dx$$

对上式右边第二个积分进行换元  $x = \pi - t$  得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \left( \cos \frac{x}{2} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left( \sin \frac{x}{2} \right) dx$$

所以

$$\int_0^{\pi} \ln \left( \cos \frac{x}{2} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\sin x}{2} dx = -\pi \ln 2.$$

这里用到了

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

的结果（这是一个瑕积分，具体积分见第一册例 5.4.2），最后得  $a_0 = 0$ . 对其它的  $a_n$  ( $n \geq 1$ ), 有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \left( 2 \cos \frac{x}{2} \right) \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \ln \left( 2 \cos \frac{x}{2} \right) \sin nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx. \end{aligned}$$

做变换  $x = \pi - t$ , 则上列积分化为

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nt \cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt.$$

利用下列公式

$$\sin nt \cos \frac{t}{2} = \frac{1}{2} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t + \frac{1}{2} \sin \left( n - \frac{1}{2} \right) t$$

以及

$$\frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt, \quad \frac{\sin \left( n - \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos kt,$$

得  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ , 由Dirichlet收敛定理得 (1) 式成立. 类似可证明 (2) 式.

3、设  $f$  是周期为  $2\pi$  的可积且绝对可积函数. 证明:

如果  $f$  在  $(0, 2\pi)$  上递减, 那么  $b_n \geq 0$ ;

如果  $f$  在  $(0, 2\pi)$  上递增, 那么  $b_n \leq 0$ .

**证明** 设  $f(x)$  在  $(0, 2\pi)$  上递减.

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{n\pi} \int_0^{2n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right) \sin x \, dx \\
 &= \frac{1}{n\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f\left(\frac{x}{n}\right) \sin x \, dx \\
 &= \frac{1}{n\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} f\left(\frac{x}{n}\right) \sin x \, dx + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} f\left(\frac{x}{n}\right) \sin x \, dx \right] \\
 &= \frac{1}{n\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \int_0^{\pi} f\left(\frac{x+2k\pi}{n}\right) \sin x \, dx - \int_0^{\pi} f\left(\frac{x+(2k+1)\pi}{n}\right) \sin x \, dx \right] \\
 &= \frac{1}{n\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \left[ f\left(\frac{x+2k\pi}{n}\right) - f\left(\frac{x+(2k+1)\pi}{n}\right) \right] \sin x \, dx \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

4、设  $f$  是周期为  $2\pi$  且在  $[-\pi, \pi]$  上 Riemann 可积的函数. 如果它在  $(-\pi, \pi)$  上单调, 证明:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

**证明** 由于

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{n\pi} \int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right) \cos x \, dx,$$

所以只要证明

$$na_n = \frac{1}{\pi} \int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right) \cos x \, dx$$

有界即可. 不妨设  $f(x)$  单调减, 令

$$x_k = -n\pi + 2k\pi, \quad k = 0, \dots, n, \quad \Delta x_k = 2\pi.$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right) \cos x \, dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f\left(\frac{x}{n}\right) \cos x \, dx \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left( f\left(\frac{x}{n}\right) - f\left(\frac{x_k}{n}\right) \right) \cos x \, dx \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k}{n}\right) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \cos x \, dx
 \end{aligned}$$

其中

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \cos x \, dx = 0$$

即上式第二项求和为零. 再利用函数单调减性质, 当  $x \in [x_k, x_{k+1}]$  时, 有

$$0 \leq f\left(\frac{x_k}{n}\right) - f\left(\frac{x}{n}\right) \leq f\left(\frac{x_k}{n}\right) - f\left(\frac{x_{k+1}}{n}\right)$$

所以

$$\begin{aligned} \left| \int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right) \cos x \, dx \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left( f\left(\frac{x_k}{n}\right) - f\left(\frac{x}{n}\right) \right) |\cos x| \, dx \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left( f\left(\frac{x_k}{n}\right) - f\left(\frac{x_{k+1}}{n}\right) \right) \, dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( f\left(\frac{x_k}{n}\right) - f\left(\frac{x_{k+1}}{n}\right) \right) 2\pi \\ &= (f(-\pi) - f(\pi)) 2\pi \end{aligned}$$

这样我们就证明了积分

$$\int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right) \cos x \, dx$$

有界, 也就是  $na_n$  有界, 同理可证  $nb_n$  有界.

**本题也可以借助第二积分平均值定理, 具体证明如下:**

对于可积函数, 改变有限点的值不影响可积性和积分的值, 因此不妨设  $f(x)$  在闭区间  $[-\pi, \pi]$  上单调. 根据第二积分中值公式, 存在  $\xi \in [-\pi, \pi]$  使得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} f(-\pi) \int_{-\pi}^{\xi} \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} f(\pi) \int_{\xi}^{\pi} \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{n\pi} [f(-\pi) - f(\pi)] \sin n\xi. \end{aligned}$$

所以  $|na_n|$  有界, 即  $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

5、设  $f$  在  $[-a, a]$  上连续, 且在  $x = 0$  处可导. 求证:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \frac{1 - \cos \lambda x}{x} f(x) \, dx = \int_0^a \frac{f(x) - f(-x)}{x} \, dx.$$

说明: 本题要用到Riemann-Lebesgue引理 (第三册将讨论):

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx &= 0, \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx &= 0,\end{aligned}$$

但是在第二册中, 对可积且平方可积函数  $f(x)$ , 我们实际上已经得到了离散的Riemann-Lebesgue引理 (Bessel不等式的推论):

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx &= 0,\end{aligned}$$

因此, 将本题中的  $\lambda$  换成离散变量  $n$ , 即在条件不变情况下, 要证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos nx}{x} f(x) \, dx = \int_0^{\pi} \frac{f(x) - f(-x)}{x} \, dx.$$

证明 作变换  $x = -t$ , 因此

$$\int_{-\pi}^0 \frac{1 - \cos nx}{x} f(x) \, dx = \int_{\pi}^0 \frac{1 - \cos nt}{t} f(-t) \, dt,$$

原积分化为

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos nx}{x} f(x) \, dx &= \int_0^{\pi} \frac{f(x) - f(-x)}{x} (1 - \cos nx) \, dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{f(x) - f(-x)}{x} \, dx - \int_0^{\pi} F(x) \cos nx \, dx.\end{aligned}$$

其中

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(-x)}{x} & x \neq 0, \\ 2f'(0) & x = 0. \end{cases}$$

由于  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  连续, 在  $x = 0$  可导, 所以  $F(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  连续, 因此可积且平方可积, 由Bessel的推论 (即离散的Riemann-Lebesgue引理) 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} F(x) \cos nx \, dx = 0,$$

所以原式成立.

与第5题类似, 书中第6题改为如下题目

6、设  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上 Riemann 可积. 证明:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) |\cos nx| \, dx &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) |\sin nx| \, dx &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx,\end{aligned}$$

证明: 根据书中 § 12.3 习题中第5题的结果, 对任意实数  $x$ , 有

$$\begin{aligned}|\cos x| &= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{4m^2 - 1} \cos 2mx, \\ |\sin x| &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4m^2 - 1} \cos 2mx,\end{aligned}$$

因此

$$f(x) |\cos nx| = \frac{2}{\pi} f(x) + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{4m^2 - 1} f(x) \cos 2mnx,$$

由于  $f(x)$  可积, 所以有界. 推出上式右端无穷级数关于  $x$  一致收敛, 因此可逐项积分:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) |\cos nx| \, dx &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{4m^2 - 1} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2mnx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{4m^2 - 1} a_{2mn}.\end{aligned}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

因此, 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N > 0$ , 当  $n > N$  时, 有

$$|a_n| < \frac{\pi \varepsilon}{4A}.$$

这里记

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4m^2 - 1} = A.$$

显然, 对  $m \geq 1$ , 仍然有  $2mn > N$ , 所以

$$|a_{2mn}| < \frac{\pi\varepsilon}{4A}.$$

推出当  $n > N$  时, 有

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) |\cos nx| \, dx - \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \right| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4m^2 - 1} |a_{2mn}| < \varepsilon.$$

这样就证明了第一个式子. 类似可证明第二个式子.

7、设  $f$  是周期为  $2\pi$  的连续函数. 令

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t) \, dt,$$

用  $a_n, b_n$  和  $A_n, B_n$  分别表示  $f$  和  $F$  的 Fourier 系数. 证明:

$$A_0 = a_0^2, \quad A_n = a_n^2 + b_n^2, \quad B_n = 0.$$

由此推出  $f$  的 Parseval 等式.

**证明** 这里只对逐段可微 (又称逐段光滑) 的连续函数讨论, 一般情况要用到 Fourier 级数均值收敛的 Fejer 定理.

不难证明  $F(x)$  也是连续的分段可微函数 (可借用第13章结果, 也可直接证明), 而且还满足

$$\begin{aligned} F(-x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-x-\pi}^{-x+\pi} f(t)f(-x+t) \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)f(u) \, du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)f(u) \, dt = F(x), \end{aligned}$$

第一步用到了积分换元  $-x+t=u$ , 第二步用到了被积函数的周期性.

因此  $F(x)$  是周期  $2\pi$  的偶函数, 且是连续且分段可微函数. 由此推出它

的Fourier系数  $B_n = 0$ ,

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) \, dt \right) \cos nx \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos nx \, dx \right) \, dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \int_{t-\pi}^{t+\pi} f(u) \cos n(u-t) \, du \right) \, dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \int_{t-\pi}^{t+\pi} f(u) (\cos nu \cos nt + \sin nu \sin nt) \, du \right) \, dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(u) (\cos nu \cos nt + \sin nu \sin nt) \, du \right) \, dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \, dt \\
 &= \begin{cases} a_n^2 + b_n^2 & n \geq 1 \\ a_0^2 & n = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

对  $F(x)$  应用 Dirichlet 定理得

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cos nx.$$

令  $x = 0$  得

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) \, dt = F(0) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

8、设  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上连续, 且在此区间上有可积且平方可积的导数  $f'$ . 如果  $f$  满足

$$f(-\pi) = f(\pi), \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = 0,$$

证明:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 \, dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx,$$

等号当且仅当  $f(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$  时成立.

**证明** 把  $f(x)$ ,  $f'(x)$  以  $2\pi$  为周期延拓到  $(-\infty, +\infty)$  上. 分别记  $f(x)$  的Fourier系数为  $a_n, b_n$ ,  $f'(x)$  的Fourier系数为  $a'_n, b'_n$ . 由条件得

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = 0,$$



$$a'_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} (f(\pi) - f(-\pi)) = 0,$$

$$\begin{aligned} a'_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} f(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = nb_n, \\ b'_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} f(x) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = -na_n, \end{aligned}$$

注意到  $f(x)$ ,  $f'(x)$  都是可积且平方可积函数, 因此Parseval等式对两者都成立:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2), \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} ((a'_n)^2 + (b'_n)^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2), \end{aligned}$$

所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$$

且等号成立当且仅当  $a_n = b_n = 0$  ( $n = 2, 3, \dots$ , 也就是  $f(x)$  和三角函数系中  $\cos nx, \sin nx$ ,  $n \geq 2$  都正交. 这样的连续函数 (且满足  $f(-\pi) = f(\pi)$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ ) 只能是

$$f(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x.$$

**补充习题：等周问题 (Hurwitz)** 在给定长度为  $L$  的一切平面曲线中, 什么样的曲线围成的面积最大? 或: 设  $\ell$  是平面上长度为  $L$  的简单光滑闭曲线,  $S$  是  $\ell$  围成平面区域的面积, 证明:

$$S \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

并问等号成立时, 曲线的具体形状.

**说明:** 等周问题是一个古老的几何问题. 早在古代, 人们就已经意识到这样的曲线应该是圆周. 但是严格的数学证明却是近代才出现的. 在19世纪, Steiner(施泰纳 1796-1863) 曾经用几何方法证明了: 除圆周外, 任何封闭曲线都不可能是当周问题的解. 这里, 借助Fourier展开和封闭曲线围成面积的计算公式 (Green定理的推论), 给出了另一种证明.

**证明** 从曲线  $\ell$  上某点开始逆时针计算弧长  $s$  并作为参数, 因此

$$\begin{aligned} x &= x(s), \quad y = y(s) \quad (0 \leq s \leq L), \\ x(0) &= x(L), \quad y(0) = y(L). \end{aligned}$$

根据弧长参数曲线的性质, 有

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad \text{或} \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = (x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1.$$

作变换

$$t = \frac{2\pi s}{L} - \pi, \quad \text{或} \quad s = \frac{L}{2\pi}(t + \pi)$$

使  $\ell$  的参数方程表示为如下形式

$$\begin{cases} x = x(s) = x\left(\frac{L}{2\pi}(t + \pi)\right) = \varphi(t), \\ y = y(s) = y\left(\frac{L}{2\pi}(t + \pi)\right) = \psi(t), \end{cases} \quad (-\pi \leq t \leq \pi),$$

$$\varphi(-\pi) = \varphi(\pi), \quad \psi(-\pi) = \psi(\pi),$$

并且参数  $t$  增加的方向是曲线的逆时针方向. 因为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{d\varphi(t)}{dt} \frac{dt}{ds}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{d\psi(t)}{dt} \frac{dt}{ds}, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{2\pi}{L} \\ \implies (\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 &= \frac{L^2}{4\pi^2}. \end{aligned}$$

分别对  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  作Fourier 展开

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt, \\ \psi(t) &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nt + d_n \sin nt. \end{aligned}$$

不难算出,  $\varphi'(t)$ ,  $\psi'(t)$  的Fourier 展开为

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nt - na_n \sin nt, \\ \psi'(t) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} nd_n \cos nt - nc_n \sin nt. \end{aligned}$$

这是因为

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \varphi(t) \cos nt \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt \, dt = nb_n$$

其他系数的计算类似. 根据Parseval 等式, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi'(t))^2 dt &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2), \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\psi'(t))^2 dt &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (c_n^2 + d_n^2). \\ \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ((\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2),\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ((\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2) dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{L^2}{4\pi^2} dt = \frac{L^2}{2\pi^2}, \\ \Rightarrow L^2 &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2).\end{aligned}$$

下面计算曲线  $\ell$  围成的面积, 根据 Green 定理的推论, 该面积为

$$S = \oint_{\ell} x dy = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \psi'(t) dt = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n d_n - b_n c_n),$$

其中我们利用了Parseval 等式的推论 (两个函数乘积的积分等于对应Fourier系数乘积求和). 最终, 我们有

$$\begin{aligned}L^2 - 4\pi S &= 2\pi^2 \left( \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n (a_n d_n - b_n c_n) \right) \\ &= 2\pi^2 \left( \sum_{n=1}^{\infty} ((na_n - d_n)^2 + (nc_n + b_n)^2) + \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1)(b_n^2 + d_n^2) \right) \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

所以

$$L^2 - 4\pi S \geq 0, \text{ 或 } S \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

等号成立当且仅当求和项中所有项均为零, 即

$$na_n = d_n, \quad nc_n = -b_n, \quad n \geq 1; \quad b_n = d_n = 0, \quad n \geq 2.$$

$$\Updownarrow$$

$$a_1 = d_1, \quad c_1 = -b_1, \quad a_n = b_n = c_n = d_n = 0 \quad n \geq 2.$$

这样的曲线为

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t, \\y(t) &= \frac{c_0}{2} - b_1 \cos t + a_1 \sin t,\end{aligned}$$

这个曲线不是别的正是圆

$$\left(x - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c_0}{2}\right)^2 = a_1^2 + b_1^2.$$