中国科学技术大学
2018 - 2019学年第一学期期中考试试卷

得分：__________

考试科目： 线性代数B 学号：__________

所在院、系：__________ 姓名：__________

装订线 答题时不要超过此线

$B = AT_{12}(1)$ $S_{23}B = C$.

一、 填空题：【共30分,每空5分】

1. 设**A** 为三阶矩阵，将**A** 的第二列加到第一列得矩阵**B**，再交换**B** 的第二行与第三行得到矩阵**C**，$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 则**C**与**A**的关系为 $P_1 A P_2$ （矩阵等式）.

2. 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$均为3维列向量，记矩阵

$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+\alpha_2+3\alpha_3$ $(\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3)+\alpha_2+5\alpha_3$

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2(\alpha_2+$

$|B| = \det(\alpha_1,$

如果$|A| = 1$，则$|B| =$ 2.

3. 设矩阵$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ e & 0 & 0 \end{pmatrix}$可逆，则其逆矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{e} \\ \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} & 0 \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} & 0 \end{pmatrix}$

4. 设$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$，$\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*$ 分别为$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 的伴随矩阵，若$|\mathbf{A}| = 2$, $|\mathbf{B}| = 3$, 则分块矩阵$\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$.

5. 从$\mathbb{R}^2$的基$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$到基$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$$(\beta_1\ \beta_2) = (\alpha_1\ \alpha_2)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

6. 设$\alpha_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$, 若由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 所生成的向量空间的维数为2, 则$a=$ 6.

二、【20分】判断题：判断下列命题是否正确。正确的请简要说明理由，错误的请举出反例。

1. 设矩阵$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，若$\mathbf{AB}=\mathbf{C}$ 且$\mathbf{B}$ 可逆, 则$\mathbf{C}$ 的行向量与矩阵$\mathbf{A}$ 的行向量等价.

错 例. $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ $AB=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2&2\end{pmatrix}$ 不能由A的行向量表示.

2. 若线性方程组有唯一解，则可用Cramer法则求解.

错！ $A_{m\times n}$. $r(\bar{A})=r(A)=n$. 有唯一解

而 Cramer 法则是 $A_{n\times n}$. $\det(A)\neq 0$.

例 $\begin{cases}x_1+x_2=1\\2x_1+x_2=3\\4x_1+2x_2=6\end{cases}$ 有唯一解 $\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&3\\4&2&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

3. $\mathbb{R}^n$中向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$生成的子空间维数比向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$生成的子空间维数小，则$s\le t$.

错. 反例. $\alpha_1=(1,0)$ $\alpha_2=(2,0)$ $\alpha_3=(3,0)$ $\dim\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle=1$

$s=3$. $t=2$. $\beta_1=(1\ 0)$ $\beta_2=(0\ 1)$

$\dim\langle\beta_1,\beta_2\rangle=2$. 但 $s>t$ $(3>2)$

4. V是$\mathbb{R}$上所有n阶奇异方阵的全体；V是定义加法为矩阵的加法，数乘为矩阵的数乘. 则V可构成线性空间.

错. V奇异方阵全体. $A\in V$. $\det(A)=0$.

V不可构成线性空间. ∵ 对加法不封闭.

例. $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ $A,B\in V$.

$A+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\bar{\in} V$.

$B^{-1} = -\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$　$C = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$C^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

三、【12分】矩阵$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$，求矩阵$\mathbf{A}$的行列式和逆矩阵.

$A = \begin{pmatrix} I & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$

1). $\det(A) = \det\begin{pmatrix} I & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = (-1)^2 \det\begin{pmatrix} C & 0 \\ I & B \end{pmatrix} = |C||B|$
$= -1$

2). 求A^{-1}. 用初等变换法:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} I & B & I & 0 \\ C & 0 & 0 & I \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} C & 0 & 0 & I \\ I & B & I & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-C^{-1}r_1 \to r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} C & 0 & 0 & I \\ 0 & B & I & -C^{-1} \end{array}\right) \xrightarrow[B^{-1}r_2]{C^{-1}r_1} \left(\begin{array}{cc|cc} I & & 0 & C^{-1} \\ & I & B^{-1} & -B^{-1}C^{-1} \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

四、【14分】设$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$, $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(1) 求满足$\mathbf{A}\xi_2 = \xi_1$, $\mathbf{A}^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量ξ_2, ξ_3;

(2) 对(1) 中的任意向量ξ_2, ξ_3, 证明ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

(1) 1). 求解 $A\xi_2 = \xi_1$. $(A|\xi_1) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 令 $x_3 = t$. $x_2 = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}$

$$\therefore \xi_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \in R.$$

2). 求解 $A^2\xi_3 = \xi_1$, $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $(A^2|\xi_1) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$y_3 = t_1$　$y_2 = t_2$　$y_1 = -\frac{1}{2} - t_2$

$$\therefore \xi_3 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t_1, t_2 \in R.$$

(2). $\because |\xi_1\ \xi_2\ \xi_3| = \left| \cdots \right| = -\frac{1}{2} \neq 0$. $\therefore k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 = 0$ 只有零解.

$\therefore \xi_1, \xi_2, \xi_3$ 线性无关.

五、【12分】设$\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{4\times3}$, η_1,η_2,η_3 是非齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\beta$ 的三个线性无关的解, 求$\mathbf{Ax}=\beta$ 的通解.

解：设 $V=\{x \mid Ax=0\}$. $W=\{x \mid Ax=\beta\}$. 令 $\alpha_1=\eta_1-\eta_2$. $\alpha_2=\eta_1-\eta_3$

∵ $\eta_i\in W$ 无关. 则 $\alpha_1,\alpha_2\in V$. 先证 α_1,α_2 无关：

∵ $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2=0 \Rightarrow (\lambda_1+\lambda_2)\eta_1-\lambda_1\eta_2-\lambda_2\eta_3=0$

∵ η_1,η_2,η_3 无关 ∴ $\lambda_1=\lambda_2=0$. ∴ α_1,α_2 无关.

∵ α_1,α_2 无关 $\in V$. 而 $\dim V=3-r(A)$ ∴ $\dim V\geq 2$ ~~⇒ r(A)≤1~~

$\Rightarrow r(A)\leq 1 \Rightarrow \begin{cases} r(A)=1\\ r(A)=0\end{cases}$ 而 $r(A)=0$. 则 $A=0$. $Ax=\beta\neq0$ 无解矛盾.

∴ $r(A)=1$

∴ $\dim V=2$. 则 α_1,α_2 构成 V 的一组基. ∴ $Ax=\beta$ 的通解为：

$t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\eta_1=t_1(\eta_1-\eta_2)+t_2(\eta_1-\eta_3)+\eta_1$ $\forall t_1,t_2\in\mathbb{R}$

六、【12分】$\mathbf{A}=\mathbf{P}^{-1}diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\mathbf{P}$, 其中$\mathbf{P},\mathbf{A}$都是$\mathbb{R}$上$n$阶方阵, $\{\lambda_i\}_{1\leq i\leq n}$两两不等. $V=\{\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}:\mathbf{AB}=\mathbf{BA}\}$.

(1)证明：V构成$\mathbb{R}$上线性空间(加法与数乘分别是矩阵的加法与数乘).

(2)求V的基与维数.

证：(1) 设 $B_1,B_2\in V$, 则 $B_1+B_2\in V$ ($\because A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2=B_1A+B_2A=(B_1+B_2)A$)

$\forall\lambda\in F$. $\lambda B_1\in V$ ($\because A(\lambda B_1)=\lambda AB_1=\lambda(B_1A)=(\lambda B_1)A$)

即对加法和数乘封闭. (其余运算律自然满足) ∴ V是线性空间.

(2) ∵ $AB=BA$. $A=P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}P$ ∴ $P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}PB=BP^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}P$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}PBP^{-1}=PBP^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$ 令 $PBP^{-1}=C$. $\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}C=C\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

$(左)_{ij}=\lambda_i c_{ij}=(右)_{ij}=c_{ij}\lambda_j$ 下题见下页

$\Rightarrow (\lambda_i-\lambda_j)c_{ij}=0$ $\quad\because i\neq j$ 时 $\lambda_i\neq\lambda_j$.

$\therefore \begin{cases} c_{ii}\text{ 可任意 } & i=j \text{ 时} \\ c_{ij}=0 & i\neq j \text{ 时} \end{cases}$

$\therefore C=\begin{pmatrix} c_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{nn} \end{pmatrix}$

而 $PBP^{-1}=C \Rightarrow B=P^{-1}CP^{-1}$

$\therefore B=P^{-1}(c_{11}E_{11}+\cdots+c_{nn}E_{nn})P$. $\{E_{ii}\}_{i=1}^{n}$ 无关

令 $P^{-1}E_{ii}P=B_i$. $i=1,\cdots n$ 为基.

$\therefore \dim V=n$.