1 习题课

1.1 第一章

一、 计算题：$\frac{3-4i}{4+3i}=\frac{(3-4i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\frac{-25i}{25}=-i$；

二、 计算题：$\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{(\sqrt{2})e^{\frac{\pi}{4}i}}=(\sqrt[6]{2})e^{\frac{\pi}{12}i+\frac{2k\pi i}{3}},k=0,1,2$；

三、 设a,b 为正方形的两个顶点，求所有可能情况下的其他两个定点。

解. 情形一：a,b 为相邻顶点。则
$$\frac{c-a}{b-a}=\pm i.$$
如果
$$\frac{c-a}{b-a}=i.$$
则
$$c=a+(b-a)i,d=b+(b-a)i.$$
如果
$$\frac{c-a}{b-a}=-i.$$
则
$$c=a-(b-a)i,d=b-(b-a)i.$$
情形二：a,b 为对顶点。
$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{1}{2}(1\pm i).$$
由对称性，我们仅考虑
$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{1}{2}(1+i).$$
解得
$$c=a+\frac{1}{2}(1+i)(b-a)=\frac{1+i}{2}b+\frac{1-i}{2}a,d=a+\frac{1}{2}(1-i)(b-a)=\frac{1-i}{2}b+\frac{1+i}{2}a.$$

1.2 第二章

一、 计算题：$1^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}Ln1}=e^{\sqrt{2}(2k\pi i)}=e^{2k\sqrt{2}\pi i}$, $k\in\mathbb{Z}$；

二、 解方程，$\sin z=2$。

解. $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=2$。所以
$$(e^{iz})^2-4i(e^{iz})-1=0.$$
所以
$$e^{iz}=\frac{4i\pm\sqrt{-16+4}}{2}=(2\pm\sqrt{3})i.$$

所以

$$iz = (\ln)(2 \pm \sqrt{3}) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

所以

$$z = -i(\ln)(2 \pm \sqrt{3}) + (\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

三、 证明题：如果$argf =$常数，证明f 为常数。

证明. 设$u = iv$，分情况讨论：

1. $argf = 0, \pi$：此时，$v = 0$，所以由*C-R*方程，$u_x = u_y = 0$，所以$u =$ 常数，所以$f =$常数；

2. $argf \neq 0, \pi$：此时，$v \neq 0$，$\frac{u}{v} =$常数。分别对x, y 求偏导数，

$$\begin{cases} \frac{u_x v - u v_x}{v^2} = 0 \\ \frac{u_y v - u v_y}{v^2} = 0. \end{cases}$$

既然$v \neq 0$，我们有

$$\begin{cases} u_x v - u v_x = 0 \\ u_y v - u v_y = 0. \end{cases}$$

使用*C-R*方程，

$$\begin{cases} u_x v + u u_y = 0 \\ u_y v - u u_x = 0. \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} v & u \\ -u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = 0.$$

发现

$$\left| \begin{pmatrix} v & u \\ -u & v \end{pmatrix} \right| \neq 0.$$

我们有$u_x = u_y = 0$，即u 为常数；由CR方程，$v_x = v_y = 0$，v 为常数。所以f 为常数，我们结束了证明。

1.3 第三章

一、 求积分$\int_C \frac{2z-3}{z} dz$，其中C 为从$z = -2$ 到2，沿圆周$|z| = 2$ 上半平面。

解. 参数化，*C:* $z = 2e^{i\theta}, \theta$从π 到0。所以

$$\begin{aligned} \int_C \frac{2z-3}{z} dz &= \int_\pi^0 \frac{4e^{i\theta} - 3}{2e^{i\theta}} d(2e^{i\theta}) \\ &= i \int_\pi^0 4\cos\theta + 4i\sin\theta - 3 d\theta \\ &= i(4\sin\theta - 4i\cos\theta - 3\theta)|_\pi^0 \\ &= 8 + 3\pi i. \end{aligned}$$

二、 计算积分$\int_{-1}^{i}(1+4iz^3)dz = z+iz^4|_{-1}^{i} = (i+i)-(-1+i) = 1+i$；

三、 求解析函数$u+iv$ 使得$u+v = x^2+ay^2$, $f(0) = 1-i$。

解. $\Delta(u+v) = 2+2a = 0$，所以$a = -1$。分别对x, y 求偏导数

$$\begin{cases} u_x + v_x = 2x \\ u_y + v_y = -2y. \end{cases}$$

应用C-R 方程

$$\begin{cases} u_x - u_y = 2x \\ u_y + u_x = -2y. \end{cases}$$

解得$u_x = x-y, u_y = -x-y$。所以

$$f'(z) = u_x - iu_y = (x-y)+(x+y)i = (1+i)z.$$

所以

$$f(z) = \frac{(1+i)z^2}{2} + C.$$

带入$f(0) = i$，得到$C = 1-i$。所以

$$f = \frac{(1+i)z^2}{2} + 1 - i$$

四、 证明题：$f(z)$除无穷远点外处处解析，并且$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z^{2016}} = 0$，求证

$$f^{(2016)}(z) = 0.$$

证明. 由柯西积分公式

$$\begin{aligned} |f^{(2016)}(z)| &= \left|\frac{2016!}{2\pi i}\int_{|\xi-z|=R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{2017}}d\xi\right| \\ &\le \frac{2016!}{2\pi}\int_{|\xi-z|=R}\frac{|f(\xi)|}{|\xi-z|^{2017}}|d\xi| \\ &\le \frac{2016!}{2\pi}2\pi R M_R\frac{1}{R^{2017}} = 2016!\frac{M_R}{R^{2016}}. \end{aligned}$$

其中M_R 为$f(\xi)$ 在$|\xi-z| = R$ 上的最大值。注意到$\lim_{R\to\infty}\frac{M_R}{R^{2016}} = 0$。所以

$$|f^{(2016)}(z)| \le 0.$$

即

$$f^{(2016)}(z) = 0.$$

2 第四章

一、 求0 点泰勒展开并求收敛半径：$\sin^2 z = \frac{1-\cos(2z)}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}2^{2k}}{2(2k)!}z^{2k}$, 收敛半径$+\infty$。

二、 求1 点的泰勒展开并求收敛半径：$\frac{1}{2-z}$。

解. 设$\xi = z-1$，则

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-\xi} = \sum_{i=0}^{\infty} \xi^n = (z-1)^n.$$

收敛半径为1。

三、 洛朗展开：$\frac{1}{z^2(z-3)}$ 在$1 < |z-1| < 2$ 洛朗展开。

解. 设$\xi = z-1$，则

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2(z-3)} &= \frac{1}{(\xi+1)^2(\xi-2)} \\ &= \frac{A}{\xi+1} + \frac{B}{(\xi+1)^2} + \frac{C}{\xi-2} \\ &= \frac{(A+C)\xi^2 + (-A+B+2C)\xi + (-2A-2B+C)}{(\xi+1)^2(\xi-2)}.\end{aligned}$$

待定系数得：

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B+2C=0 \\ -2A-2B+C=1. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A=-\frac{1}{9} \\ B=-\frac{1}{3} \\ C=\frac{1}{9}. \end{cases}$$

然后：

$$\frac{1}{\xi+1} = \frac{1}{\xi}\frac{1}{1+1/\xi} = \frac{1}{\xi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\xi^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\xi^n}.$$

$$\frac{1}{(\xi+1)^2} = -\left(\frac{1}{\xi+1}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\frac{1}{\xi^{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n-1)\frac{1}{\xi^n}.$$

和

$$\frac{1}{\xi-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\xi/2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^n}{2^n}.$$

所以

$$\frac{1}{z^2(z-3)} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(3n-4)}{9}\frac{1}{\xi^n} + (-\frac{1}{9})\frac{1}{\xi} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{9\times 2^{n+1}}\xi^n.$$

其中$\xi = z-1$.

四、 已知f 全复平面除了二阶极点$z=1$外都解析，并且有

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z+3} = 1, f(0) = \frac{3}{4}, f(2) = \frac{27}{4}, f(-2) = -\frac{7}{12}.$$

解. $f(z)=\frac{\phi(z)}{(z-1)^2}$，其中$\phi$ 解析且$\phi(1)\neq 0$。我们得到了

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\phi(z)}{z^4}=0.$$

用上一章的讨论，$\phi(z)$ 是*3*次多项式，设为

$$\phi(z)=az^3+bz^2+cz+d, f(z)=\frac{az^3+bz^2+cz+d}{(z-1)^2}.$$

其中$a=\lim_{z\to\infty}\frac{\phi(z)}{z^3}=1$。其余

$$\begin{cases} d=\frac{3}{4} \\ 8+4b+2c+d=\frac{27}{4} \\ \frac{-8+4b-2c+d}{9}=-\frac{7}{12}. \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} b=0 \\ c=-1 \\ d=\frac{3}{4}. \end{cases}$$

所以

$$f=\frac{z^3-z+\frac{3}{4}}{(z-1)^2}.$$

五、 a 是f 的极点和g 的本性极点（$|g(z)|\neq 0, z\neq a$ ），证明a 是$\frac{f}{g}$ 的本性极点。

证明. a 为f 的极点，可以把f 写为$f=\frac{\phi(z)}{(z-a)^m}$，$\phi(z)$在$a$ 点解析且$\phi(a)\neq 0$，$m\in\mathbb{N}$。用反证法，如果a 不是$\frac{f}{g}$ 的本性极点。则有两种可能

1). a 是$\frac{f}{g}$ 的可去奇点。则有洛朗展开

$$\frac{f}{g}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n.$$

设a_k 是第一个非零系数，则在a 的某个去心邻域

$$g=\frac{f}{\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n}=\frac{\phi(z)}{(z-a)^m(z-a)^k\sum_{n=k}^{\infty}a_n(z-a)^{n-k}}=\frac{\phi(z)/\sum_{n=k}^{\infty}a_n(z-a)^{n-k}}{(z-a)^{m+k}}.$$

$\phi(z)/\sum_{n=k}^{\infty}a_n(z-a)^{n-k}$ 在a 点解析，且在a 点取值不为零，所以a 是g 的$m+k$ 阶极点。

2). a 是$\frac{f}{g}$ 的极点，不妨设是k阶极点。则$\frac{f}{g}=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^k}$，$\varphi(z)$在$a$ 点解析且$\varphi(a)\neq 0$。所以

$$g=\frac{f}{\varphi(z)/(z-a)^k}=\frac{\phi}{\varphi}\frac{1}{(z-a)^{m-k}}.$$

如果$m\leq k$，a 是g 的可去奇点；如果$m>k$，a 是g 的极点，反正不是本性奇点。矛盾!

3 第五章：留数

一、 计算积分：

1). $\int_{|z|=5}\frac{e^{iz}}{(z-1)(z-10)}dz.$

解. $\frac{e^{iz}}{(z-1)(z-10)}$ 有两个奇点，为$z_1=1, z_2=10$，均为一阶极点。

$$Res[\frac{e^{iz}}{(z-1)(z-10)},1]=\lim_{z\to 1}\frac{e^{iz}}{(z-1)(z-10)}(z-1)=\frac{e^{i}}{-9}=-\frac{\cos 1+i\sin 1}{9}.$$

所以积分为

$$\frac{2\pi(\sin 1-i\cos 1)}{9}.$$

2). $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{a^2+\sin^2\theta}, a>0.$

解.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{a^2+\sin^2\theta}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{a^2+\frac{1-\cos(2\theta)}{2}}\\&\overset{\text{换元}\varphi=2\theta}{=}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{(2a^2+1)-\cos(\varphi)}\\&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{(2a^2+1)-\cos(\varphi)}\\&=\frac{1}{2}\int_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left((2a^2+1)-\frac{z+z^{-1}}{2}\right)}\\&=\frac{-1}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-2(2a^2+1)z+1}\end{aligned}$$

$\frac{1}{z^2-2(2a^2+1)z+1}$有两个奇点$z_1=\frac{2(2a^2+1)-\sqrt{(2(2a^2+1))^2-4}}{2}, z_2=\frac{2(2a^2+1)+\sqrt{(2(2a^2+1))^2-4}}{2}$，均为一阶极点，$|z_1|<1$，$|z_2|>1$。计算留数

$$\begin{aligned}Res[\frac{1}{z^2-2(2a^2+1)z+1},z_1]&=\lim_{z\to z_1}\frac{1}{z^2-(2a^2+1)z+1}(z-z_1)\\&=\lim_{z\to z_1}\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}(z-z_1)\\&=\frac{1}{z_1-z_2}\\&=-\frac{1}{\sqrt{(2(2a^2+1))^2-4}}\\&=-\frac{1}{4a\sqrt{1+a^2}}.\end{aligned}$$

所以答案为$\frac{\pi}{2a\sqrt{1+a^2}}$.

3). $\int_0^{\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx.$

解.

$$\int_0^{\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$$

$1+z^4$ 有4个根

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i).$$

在实数轴上没有根，在上半平面有两个根：

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i).$$

均为$\frac{1+z^2}{1+z^4}$ 的一阶极点。求留数

$$Res[\frac{1+z^2}{1+z^4}, z_1] = \frac{1+z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1+i}{2\sqrt{2}(-1+i)} = \frac{-i}{2\sqrt{2}}.$$

$$Res[\frac{1+z^2}{1+z^4}, z_2] = \frac{1+z_2^2}{4z_2^3} = \frac{1-i}{2\sqrt{2}(1+i)} = \frac{-i}{2\sqrt{2}}.$$

所以原来的积分为

$$2\pi i \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{-i}{2\sqrt{2}} + \frac{-i}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

4). $\int_0^\infty \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2} dx, (a, b > 0)$.

解. 如果$a = b$,答案为零。否则，设$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2} dx$。则如图（大小圆）

$$I = \lim_{r\to 0, R\to\infty} Re\left(\int_C - \int_{C_R} + \int_{C_r} \frac{e^{2azi} - e^{2bzi}}{z^2} dz\right).$$

依次计算:柯西积分定理，

$$\int_C \frac{e^{2azi} - e^{2bzi}}{z^2} dz = 0;$$

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_r} \frac{e^{2azi} - e^{2bzi}}{z^2} dz = \pi i \lim_{z\to 0} \frac{e^{2azi} - e^{2bzi}}{z^2} z = \pi i \times 2i(a-b) = 2\pi(b-a);$$

若当引理，

$$\lim_{R\to 0} \int_{C_R} \frac{e^{2azi} - e^{2bzi}}{z^2} dz = 0.$$

所以最终结果为$\frac{I}{2} = \pi(b-a)$。

5). $I = \int_{|z|=4} \frac{z^3}{1-z} e^{\frac{1}{z}} dz$.

解. 方法一：做变换$\xi = \frac{1}{z}$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\substack{|\xi|=\frac{1}{4} \\ \text{顺时针}}} \frac{\xi^{-3}}{1-\xi^{-1}} e^{\xi} d\xi^{-1} \\ &= \int_{\substack{|\xi|=\frac{1}{4} \\ \text{顺时针}}} -\frac{1}{\xi^4(\xi-1)} e^{\xi} d\xi \\ &= \int_{|\xi|=\frac{1}{4}} \frac{1}{\xi^4(\xi-1)} e^{\xi} d\xi. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Res[\frac{1}{\xi^4(\xi-1)}e^{\xi},0] &= \frac{1}{3!}\lim_{\xi\to 0}\left(\frac{1}{\xi-1}e^{\xi}\right)^{(3)} \\
&= \frac{1}{3!}\left(\sum_{i=0}^{3}C_3^i(\frac{1}{\xi-1})^{(i)}(e^{\xi})^{(n-i)}\right)\Big|_{\xi=0} \\
&= \frac{1}{3!}\left((-1)+(-3)+(-6)+(-6)\right) \\
&= -\frac{8}{3}.
\end{aligned}
$$

最终答案$-\frac{16\pi i}{3}$。

方法二：要考虑两个奇点：1 和0 分别为一阶极点和本性奇点。

$$Res[\frac{z^3}{1-z}e^{\frac{1}{z}},1] = -e.$$

将$\frac{z^3}{1-z}e^{\frac{1}{z}}$ 在0 点洛朗展开：

$$\frac{z^3}{1-z}e^{\frac{1}{z}} = \left(\sum_{n=3}^{\infty}z^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}z^{-m}\right).$$

我们只关心z^{-1}的系数，为

$$\sum_{m=4}^{\infty}\frac{1}{m!} = e-\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right) = e-\frac{8}{3}.$$

所以

$$Res[\frac{z^3}{1-z}e^{\frac{1}{z}},0] = e-\frac{8}{3}.$$

最终答案$-\frac{16\pi i}{3}$。

二、 求$|z|<1$ 内根的个数。$e^z = 3z^n, n$ 为自然数。

解. 在$|z|=1$上，$|e^z| = e^x \le e < 3$: $|3z^n| = 3$。所以$3z^n - e^z = 0$ 和$3z^n = 0$ 在$|z|<1$ 内有相同的根个数（算重数），为n 个。

三、 证明：$\lambda - z - e^{-z} = 0, \lambda > 1$ 在右半平面内有唯一的一个根，且是实数。

证明. 取$|z| = R$ 右半圆周加上虚轴构成的简单闭曲线C_R。在虚轴上

$$|e^{-z}| = 1, |\lambda - z| = \sqrt{\lambda^2+|z|^2} > 1.$$

在$|z| = R$ 右半圆周上，实部大于零，所以

$$|e^z| = e^{-x} < 1.$$

当R 充分大的时候，在$|z| = R$ 右半圆周上

$$|\lambda - z| \ge |z| - \lambda > 1.$$

综上所诉，当R 充分大的时候，在C_R 上，

$$|\lambda - z| > |e^{-z}|.$$

所以当R 充分大的时候，在C_R 内部只有一个根，也就是右半平面只有一个根。

另一方面我们看下是不是有实数根，也就是$F(x) = \lambda - x - e^{-x} = 0$. 有

$$F(0) = \lambda - 0 - 1 > 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\infty < 0.$$

所以由连续性必然有一个根在$(0,\infty)$ 上。

4 第七章：Laplace 变换

一、 解常微分方程：

$$\begin{cases} y'' + y = e^t \cos(2t) \\ y(0) = 4, y'(0) = 0. \end{cases}$$

解. 做拉普拉斯变换，

$$L[y''] = p^2 L[y] - 4p.$$

所以

$$(p^2+1)L[y] - 4p = L[e^t \cos(2t)].$$

得到

$$L[y] = \frac{4p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} L[e^t \cos(2t)].$$

所以

$$y = 4\cos t + \sin t * (e^t \cos(2t)).$$

其中

$$\begin{aligned}
\sin t * (e^t \cos(2t)) &= \int_0^t \sin(t-s) e^s \cos(2s) ds \\
&= \frac{1}{4i} \int_0^t (e^{(t-s)i} - e^{-(t-s)i})(e^{2si} + e^{-2si}) e^s ds \\
&= \frac{1}{4i} \int_0^t e^{(t+s)i+s} + e^{(t-3s)i+s} - e^{(3s-t)i+s} - e^{-(t+s)i+s} ds \\
&= \frac{1}{4i} \left(\frac{e^{(t+s)i+s}}{1+i} + \frac{e^{(t-3s)i+s}}{1-3i} - \frac{e^{(3s-t)i+s}}{1+3i} - \frac{e^{-(t+s)i+s}}{1-i} \right) \Big|_0^t \\
&= \frac{1}{5} e^t \sin 2t - \frac{1}{10} e^t \cos 2t - \frac{3}{10} \sin t + \frac{41}{10} \cos t.
\end{aligned}$$

二、

例子1. 解方程组：

$$\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ -2x + y' - y = t, \\ x(0) = 2.y(0) = 4. \end{cases}$$

解. 不妨设$L_1(p) = L[x(t)], L_2(p) = L[y(t)]$。则

$$\begin{cases} pL_1 - 2 - L_1 - 2L_2 = \frac{1}{p^2}, \\ -2L_1 + pL_2 - 4 - L_2 = \frac{1}{p^2}. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} L_1 = \frac{2p^3+6p^2+p+1}{p^2(p+1)(p-3)} = \frac{28}{9} \times \frac{1}{p-3} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{9} \times \frac{1}{p} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{p^2}, \\ L_2 = \frac{28}{9} \times \frac{1}{p-3} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{9} \times \frac{1}{p} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{p^2}. \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} x(t) = \frac{28}{9}e^{3t} - e^{-t} - \frac{1}{9} - \frac{t}{3}, \\ y(t) = \frac{28}{9}e^{3t} + e^{-t} - \frac{1}{9} - \frac{t}{3}. \end{cases}$$