某年数分（B2）期中考试试卷解析

一、设 $\Phi(x,y,z)$ 是三元可微函数且方程 $\Phi(x,y,z)=0$ 能确定可微的隐函数 $x=x(y,z)$, $y=y(z,x)$, $z=z(x,y)$. 求 $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$.

解 根据隐函数求导法则,

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{\partial \Phi}{\partial y}\Bigg/\frac{\partial \Phi}{\partial x},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\partial \Phi}{\partial z}\Bigg/\frac{\partial \Phi}{\partial y},\quad \frac{\partial z}{\partial z}=-\frac{\partial \Phi}{\partial x}\Bigg/\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

故, $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$.

二、设 $F(x,y)$ 是二元可微函数. 求证空间中存在一条直线使得由方程

$$F(x-ay,z-by)=0$$

(a,b 是常数) 表示的曲面的切平面总与此直线平行.

证明 设 $G(x,y,z)=F(x-ay,z-by)$. 则

$$G'_x=F'_1,\quad G'_y=-aF'_1-bF'_2,\quad G'_z=F'_2.$$

因此, 切平面的法向为

$$\vec{n}=G'_x\vec{i}+G'_y\vec{j}+G'_z\vec{k}=F'_1\vec{i}+(-aF'_1-bF'_2)\vec{j}+F'_2\vec{k}.$$

因为 $\vec{n}\cdot(a,1,b)=0$, 所以切平面法向与常向量 $(a,1,b)$ 垂直. 故, 切平面与以 $(a,1,b)$ 为方向的直线平行.

该直线的方程为

$$X=X_0+at,\quad Y=Y_0+t,\quad Z=Z_0+bt,$$

其中 (X,Y,Z) 表示直线上的动点, (X_0,Y_0,Z_0) 表示直线上任意一个固定点, t 是参数.

三、讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点的可微性, 以及它在原点的偏导数是否连续?

解 记 $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. 则

$$f(x,y) = f(0,0) + \rho^2 \sin\frac{1}{\rho} = \rho^2 \sin\frac{1}{\rho} = o(\rho)\ (\rho \to 0).$$

因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微, 且

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时, 有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\frac{1}{\rho} + \rho^2\cos\frac{1}{\rho}\cdot\frac{-x}{\rho^3} = 2x\sin\frac{1}{\rho} - \frac{x}{\rho}\cos\frac{1}{\rho}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\frac{1}{\rho} + \rho^2\cos\frac{1}{\rho}\cdot\frac{-y}{\rho^3} = 2y\sin\frac{1}{\rho} - \frac{y}{\rho}\cos\frac{1}{\rho}.$$

在过 $(0,0)$ 的直线 $x=y$ 上, 有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{2}|x|} - \frac{x}{\sqrt{2}|x|}\cos\frac{1}{\sqrt{2}|x|}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,x) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{2}|x|} - \frac{x}{\sqrt{2}|x|}\cos\frac{1}{\sqrt{2}|x|}.$$

(x,y) 沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 时, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,x)$ 都无极限. 因此, 偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续.

注 本题说明可微函数虽然推出偏导数存在, 但偏导数不一定连续, 但连续偏导数存在推出可微.

四、设 $a_j > 0$, $(j = 1, 2, \cdots, n)$. 求函数 $f(x_1, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 在条件 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 1$ 之下的最小值.

解 因为

$$f(x_1,\cdots,x_n) \geqslant 0, \quad \lim_{\rho\to+\infty} f(x_1,\cdots,x_n) = +\infty \quad \left(\rho = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\right),$$

所以 f 在超平面 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 1$ 上有最小值, 但无最大值. 构造函数

$$F(x_1,\cdots,x_n,\lambda) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \lambda\left(\sum_{i=1}^n a_ix_i - 1\right).$$

根据 Lagrange 乘数法, f 取到极值的点应为 F 的驻点, 即有,

$$2x_i - \lambda a_i = 0,\ (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - 1 = 0. \tag{2}$$

从 (1) 可得

$$x_i = \lambda \frac{a_i}{2},$$

代入 (2) 得

$$\lambda = \frac{2}{M} \quad M = \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

因此, 得唯一的驻点

$$P = \left(\frac{a_1}{Mb_1}, \cdots, \frac{a_n}{M}\right),$$

该驻点必为 f 在所给条件下的最小值点. 因此, 在所给条件下 f 的最小值是

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{M}\right)^2 = \frac{1}{M}.$$

五、求定义在星形区域 $D = \{(x, y) \,|\, x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leqslant 1\}$ 上满足 $f(1, 0) = 1$ 的正值连续函数 $f(x, y)$ 使得 $\iint\limits_D \dfrac{f(x,y)}{f(y,x)}\, dxdy$ 达到最小, 并求出这个最小值.

解 对积分

$$I = \iint\limits_D \frac{f(x,y)}{f(y,x)}\, dxdy$$

作变换 $x \to y,\ y \to x$, 由 D 的对称性, 知 $I = \iint\limits_D \frac{f(y,x)}{f(x,y)}\, dxdy$. 因而

$$I = \frac{1}{2} \iint_D \left(\frac{f(x,y)}{f(y,x)} + \frac{f(y,x)}{f(x,y)}\right) dxdy \geqslant \iint_D 1 dxdy = \sigma(D).$$

$$I - \sigma(D) = \frac{1}{2} \iint_D \left(\sqrt{\frac{f(x,y)}{f(y,x)}} - \sqrt{\frac{f(y,x)}{f(x,y)}}\right)^2 dxdy \geqslant 0.$$

$I = \sigma(D)$ 当且仅当 $f(x, y) = f(y, x)$. 故, 所求函数为所有满足 $f(x, y) = f(y, x)$ 及 $f(1, 0) = 0$ 的连续正值函数.

D 边界的参数方程为 $x=\cos^3\varphi,\ y=\sin^3\varphi\ (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$. 故, I 的最小值为

$$\sigma(D)=4\iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}}} 3r\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,drd\varphi=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{3}{8}\pi.$$

六、计算三重积分 $\displaystyle\iiint\limits_V (x^2+y^2)^5 z\,dxdydz$, 其中 V 是圆柱体 $x^2+y^2\leqslant 1$ 被曲面 $z=\sqrt{3x^2+y^2+1}$ 及 Oxy 平面所截下的部分.

解 记所求积分为 I, 则

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)^5\int_0^{\sqrt{3x^2+y^2+1}} z\,dz=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)^5(3x^2+y^2+1)dxdy.$$

由对称性,

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)^5x^2\,dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)^5y^2\,dxdy,$$

故,

$$I=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)^5(2x^2+2y^2+1)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} r^{10}(2r^2+1)\,r\,drd\varphi=\frac{19}{84}\pi.$$

七、设 $f(x,y)$ 是定义在 $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上的一阶连续可微函数, 满足 $\nabla f\neq 0$ 且 $y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y}=0\ (\forall\ (x,y)\in D)$. 求 $f(x,y)$ 的等值线方程.

解 设 $x=x(t),\ y=y(t)\ (0\leqslant t\leqslant 1)$ 是等值线 $f(x,y)=C$ 的参数方程. 则

$$f(x(t),y(t))=C.$$

两边对变量 t 求导, 得

$$x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}+y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

结合条件有

$$\begin{aligned}x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}+y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}&=0,\\ y(t)\frac{\partial f}{\partial x}+x(t)\frac{\partial f}{\partial y}&=0.\end{aligned}$$

因 $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \neq 0$, 即上述齐次线性方程组有非零解, 因此系数行列式为零, 即

$$x(t)x'(t) - y(t)y'(t) = 0,$$

$$\Longrightarrow (x^2(t) - y^2(t))' = 0.$$

故, $x^2 - y^2 = C_1$ 是常数. 也就是说 f 在 D 上的等值线方程为

$$x^2 - y^2 = C_1 \text{ (常数)}.$$

八、设 P 是圆 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$ 上的动点. 从原点往圆过 P 点的切线作垂线, 垂足为 Q. 当 P 沿圆运动时, 点 Q 的轨迹是 xy 平面上一条封闭曲线. 求此封闭曲线围成区域的面积.

解 设 $A = (a, 0)$, Q 点坐标为 (x, y), AP 与 x 轴夹角为 θ. 则

$$\begin{aligned} OQ &= OB + BQ = a\cos\theta + a \\ x &= OQ\cos\theta = a\cos\theta(1+\cos\theta) \\ y &= OQ\sin\theta = a\sin\theta(1+\cos\theta), \ (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi) \end{aligned}$$

故, 点 Q 的极坐标方程为

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = a(1+\cos\theta).$$

Q 的轨迹所围的区域的面积为

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2(\theta)\, d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{3}{2}\pi a^2.$$