数分（B2）第10章综合及补充题解

1、计算

$$I=\int_L z\,\mathrm{d}s,$$

其中 L 是曲面 $x^2+y^2=z^2$ 与 $y^2=ax\ (a>0)$ 交线上从点 $(0,0,0)$ 到 $(a,a,a\sqrt{2})$ 的弧段.

注: 该题的关键是选取参变量, 接着就是计算.

解 取 y 为参变量, 因此

$$x(y)=\frac{y^2}{a},\ y=y,\ z=\frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2},\ 0\leqslant y\leqslant a.$$

因此, 弧长的微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{2y}{a}\right)^2+1+\left(\frac{2y^2+a^2}{a\sqrt{y^2+a^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}y=\sqrt{\frac{8y^4+9a^2y^2+2a^4}{a^2(y^2+a^2)}}\,\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow I&=\int_L z\,\mathrm{d}s=\int_0^a\frac{y}{a}\sqrt{y^2+a^2}\sqrt{\frac{8y^4+9a^2y^2+2a^4}{a^2(y^2+a^2)}}\,\mathrm{d}y\\&=\frac{\sqrt{8}}{a^2}\int_0^a y\sqrt{y^4+\frac{9}{8}a^2y^2+\frac{1}{4}a^4}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

为了计算上述积分, 作变换

$$u=y^2+\frac{9a^2}{16},\ b^2=\frac{17a^4}{16^2}$$

$$\Longrightarrow I=\frac{\sqrt{2}}{a^2}\int_0^{\frac{25a^2}{16}}\sqrt{u^2-b^2}\,\mathrm{d}u$$

我们知道（第一册）函数 $\sqrt{u^2-b^2}$ 的原函数可以按如下计算. 令

$$u=b\cosh t,\ \sqrt{u^2-b^2}=b\sinh t,\ \ \mathrm{d}u=b\sinh t\,\mathrm{d}t,$$

所以

$$\int\sqrt{u^2-b^2}\,\mathrm{d}u=b^2\int\sinh^2 t\,\mathrm{d}t=b^2\int\frac{1}{2}(\cosh 2t-1)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\sinh 2t-\frac{1}{2}t.$$

将

$$t=\cosh^{-1}\frac{u}{b}$$

代入, 就得到$\sqrt{u^2-b^2}$ 的原函数, 再将上下限代入即得到积分的值.

2、设 $a,b,c>0$, 求曲线

$$L:\ \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1}=c\left(\frac{x}{a}\right)^{n}\left(\frac{y}{b}\right)^{n}$$

所围成的区域 D 的面积.

注: 该题中若 $n=1$, 则曲线就是著名的Descartes 叶形线, 因此求曲线围成的面积的方法, 就是Descartes 叶形线围成面积方法的推广.

解 由 Green 公式的推论知

$$\mu(D)=\frac{1}{2}\oint(-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)$$

为了计算积分, 令$y=\dfrac{b}{a}xt$, 得

$$x=x(t)=ac\frac{t^n}{1+t^{2n+1}},\ y=y(t)=bc\frac{t^{n+1}}{1+t^{2n+1}},\ 0\leqslant t<+\infty.$$

$$\Longrightarrow x'(t)=ac\frac{nt^{n-1}-(n+1)t^{3n}}{(1+t^{2n+1})^2},\ y'(t)=bc\frac{(n+1)t^n-nt^{3n+1}}{(1+t^{2n+1})^2},$$

$$\begin{aligned}\mu(D)&=\frac{1}{2}\oint(-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(-y(t)x'(t)+x(t)y'(t))\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{abc^2t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2}\,\mathrm{d}t=\frac{abc^2}{2(2n+1)}.\end{aligned}$$

3、求平面上两个椭圆

$$C_1:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad C_2:\ \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\ (a>b)$$

内部公共区域的面积.

解 由对称性, 只要计算在第一象限的公共区域D的面积即可.

为此, 先求两个椭圆在第一象限的交点坐标 $P(x_0,y_0)$: 两个方程相减, 得 $x_0=y_0$. 因此

$$x_0^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=1$$

解得
$$x_0 = y_0 = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$
因此, 在第一象限的公共区域D是由椭圆C_1 上从$P(x_0,y_0)$ 到y 轴上点 $A(0,b)$ 的弧段 L_{PA} 和 C_2 上从x 轴上点$B(b,0)$ 到 $P(x_0,y_0)$ 的弧段 L_{BP} 以及 x 轴上线段 $\overline{OB}$和 y 轴上线段 $\overline{AO}$ 围成的. 方向逆时针.

对于 L_{PA}, 取 $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$. 在交点 $P(x_0,y_0)$ 处, 有 $x_0 = y_0$, 对应的 θ_0 满足
$$a\cos\theta_0 = b\sin\theta_0, \Longrightarrow \tan\theta_0 = \frac{a}{b},\ \theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right).$$
在$A(0,b)$, 对应的 θ_1 满足
$$a\cos\theta_1 = 0, \Longrightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2}.$$
因此 L_{PA} 的参数方程表示为
$$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta,\quad \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$
而且参数增加的方向正是曲线的方向.

同理, 对于 L_{BP}, 取 $x = b\cos\theta,\ y = a\sin\theta$. 在交点 $P(x_0,y_0)$ 处, 有 $x_0 = y_0$, 对应的 θ_2 满足
$$b\cos\theta_2 = a\sin\theta_2, \Longrightarrow \tan\theta_2 = \frac{b}{a},\ \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right).$$
在$B(b,0)$, 对应的 θ_3 满足
$$a\sin\theta_3 = 0, \Longrightarrow \theta_3 = 0.$$
因此 L_{BP} 的参数方程表示为
$$x = b\cos\theta,\ y = a\sin\theta,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right).$$
参数增加的方向正是曲线的方向. 所以面积为
$$\mu(D) = \frac{1}{2}\oint_{\partial D}(-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y).$$
分段积分, 并注意到在直线 $\overline{OB}$ 上, $y=0$, $\mathrm{d}x = 0$; 在 $\overline{AO}$ 上 $x = 0$, $\mathrm{d}y = 0$. 所以
$$\begin{aligned}\mu(D) &= \frac{1}{2}\oint_{L_{PA}}(-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) + \frac{1}{2}\oint_{L_{BP}}(-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)\\ &= \frac{1}{2}\int_{\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)}^{\frac{\pi}{2}} ab(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)} ab(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2}ab\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

总面积为$4\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

4、 (Poisson公式) 设 $S: x^2+y^2+z^2=1$, $f(t)$ 连续, 求证

$$\iint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f(kt)\,\mathrm{d}t,\ \ k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

证明 令 $\vec{n}=\dfrac{1}{k}(a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k})$, 那么球面 S 是单位圆以$\vec{n}$ 为旋转轴的旋转曲面, 设 $P(x,y,z)$ 为球面上一点, 则 $\vec{r}=\overrightarrow{OP}$ 在 $\vec{n}$ 的投影为 $t=\vec{n}\cdot\vec{r}$, 绕 $\vec{n}$ 的旋转半径为

$$\rho=\sqrt{1-t^2},\ \ \mathrm{d}\rho=\frac{-t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\Longrightarrow f(ax+by+cz)=f(kt)$$

只与 $t=\sqrt{1-\rho^2}$有关, 类似旋转曲面的面积元的计算, 面积元为

$$\mathrm{d}S=\pi(\rho+(\rho+\ \mathrm{d}\rho))\,\mathrm{d}s=2\pi\rho\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=2\pi\,\mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow \iint_S f(ax+by+cz)\ \mathrm{d}S=\iint_S f(kt)\,\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^{1} f(kt)\ \mathrm{d}t.$$

5、设 $S(t)$ 是平面 $\Pi:\ x+y+z=t$ 被球面 $B:\ x^2+y^2+z^2=1$ 截下的部分,

$$F(x,y,z)=1-(x^2+y^2+z^2),$$

求证: 当 $|t|\leqslant\sqrt{3}$ 时, 有

$$\iint_{S(t)} F(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2.$$

证明 证明的过程实际上是一个计算的过程.

首先注意到平面 Π 的一个单位法向量是 $\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, 不难计算原点到 Π 的距离为 $\dfrac{|t|}{\sqrt{3}}$, 所以当 $|t|>\sqrt{3}$ 时, Π 和球面 B 没有交.

其次注意到当 $|t| \leqslant \sqrt{3}$ 时, S(t) 是一个圆盘, 圆盘的圆心为 $\left(\frac{t}{3}, \frac{t}{3}, \frac{t}{3}\right)$, 半径为

$$r_0 = \sqrt{1 - \frac{t^2}{3}}$$

设$S(t)$ 上任意一点 (x, y, z) 到 $S(t)$ 的圆心的距离为 r:

$$\left(x - \frac{t}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{t}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{t}{3}\right)^2 = r^2,$$

$$\Longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{t^2}{3} + r^2$$

$S(t)$ 上面积元在极坐标下为

$$\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,\ 0 \leqslant r \leqslant r_0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

因此

$$\begin{aligned}\iint_{S(t)} F(x, y, z)\,\mathrm{d}S &= \iint_{S(t)} \left(1 - \left(\frac{t^2}{3} + r^2\right)\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}} \left(1 - \left(\frac{t^2}{3} + r^2\right)\right) r\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{18}(3 - t^2)^2.\end{aligned}$$

6. 设 $f(t)$ 在 $|t| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ 上连续, 证明:

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leqslant 1} f\left(\frac{ax + by + cz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\pi \int_{-1}^{1} f(t\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})\,\mathrm{d}t.$$

证明 令

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = \cos\theta,$$

其中 $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. 则

$$
\begin{aligned}
&\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi f(a\sin\theta\cos\varphi + b\sin\theta\sin\varphi + c\cos\theta) r^2 \sin\theta \\
&= \int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi f(a\sin\theta\cos\varphi + b\sin\theta\sin\varphi + c\cos\theta) \sin\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi f(a\sin\theta\cos\varphi + b\sin\theta\sin\varphi + c\cos\theta) \sin\theta \\
&= \iint_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S \\
&= \frac{2}{3}\pi \int_{-1}^{1} f(t\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

上式中最后一步利用了第4题中的Poisson公式.

点评: 本题中利用被积函数的特殊性, 通过球坐标, 以及被积函数

$$
f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = f(a\sin\theta\cos\varphi + b\sin\theta\sin\varphi + c\cos\theta),
$$

不依赖于 r 的特殊性, 通过累次积分, 把三重积分化成了曲面积分.

习题11.3中第7题: 设 D 是平面上简单闭曲线 L 围成的区域, $L = \partial D$.

(1) 如果 $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上有二阶连续偏导数, 证明

$$
\oint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}s = \iint_D \Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
$$

这里 $\vec{n}$ 是曲线 ∂D 的单位外法向量, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为二维Laplace 算子, 因此当 $f(x,y)$ 满足 Laplace 方程 $\Delta f = 0$ 时, 有

$$
\oint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}s = 0.
$$

(2) 如果 $\vec{a}$ 是单位常向量, 证明:

$$
\oint_{\partial D} \cos(\vec{a}, \vec{n})\,\mathrm{d}s = 0.
$$

(3) 如果 $u(x,y),v(x,y)$ 有连续的二阶偏导数, 证明下列第二Green公式:

$$\oint_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}-u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\right)\mathrm{d}s=\iint_D(v\Delta u-u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

证明 (1) 设平面曲线 ∂D 的外法向量为 $\vec{n}=\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j}$, 那么$\partial D$ 指向逆时针方向的切向量 $\vec{\tau}$ 可以通过 $\vec{n}$ 在 Oxy 平面上逆时针旋转一个直角得到（坐标旋转）. 但对于旋转直角的过程也可以按照如下方式表示：设 $\vec{k}$ 是垂直Oxy 平面, 并与 $\vec{i},\vec{j}$ 形成右手系的单位向量. 这样 $\vec{\tau}$ 可表示为

$$\vec{\tau}=\vec{k}\times\vec{n},\quad \text{或}\quad \vec{n}=\vec{\tau}\times\vec{k}.$$

且 $\vec{\tau}$ 的方向指向曲线 ∂D 的逆时针方向. 因此

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}s&=\oint_{\partial D}\nabla f\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s=\oint_{\partial D}\nabla f\cdot\vec{\tau}\times\vec{k}\,\mathrm{d}s\\&=\oint_{\partial D}\vec{k}\times\nabla f\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s=\oint_{\partial D}\vec{k}\times\nabla f\cdot\mathrm{d}\vec{r}\end{aligned}$$

这里 $\nabla f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$, 因此

$$\vec{k}\times\nabla f=-\frac{\partial f}{\partial y}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial x}\vec{j}$$

所以, 利用Green 定理就有

$$\oint_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}s=\oint_{\partial D}-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y=\iint_D\Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

点评: 本题充分利用了平面曲线的法向量和切向量之间互为旋转一个直角的关系.注意到旋转的方向, 可采取在三维空间叉乘的做法, 由 $\vec{n}$ 得到 $\vec{\tau}=\vec{k}\times\vec{n}$. 这样, 可以把下列左边的积分

$$\oint_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}s=\oint_{\partial D}\vec{k}\times\nabla f\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

化为右边关于向量场 $\vec{k}\times\nabla f$ 标准的曲线积分.

(2) 设 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ 为平面单位常向量. 令 $f(x,y)=a_1x+a_2y$, 则

$$\nabla f=\vec{a},\quad \Delta f=0,\quad \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}=\nabla f\cdot\vec{n}=\vec{a}\cdot\vec{n}=\cos(\vec{a},\vec{n}),$$

由(1) 的结果就得到

$$\oint_{\partial D}\cos(\vec{a},\vec{n})\,\mathrm{d}s=0.$$

(3) 类似 (1) 中的推导, 并利用Green 定理, 有

$$
\begin{aligned}
\oint_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}s = \oint_{\partial D} v\vec{k}\times\nabla u\cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \oint_{\partial D} -v\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x + v\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \left[v\Delta u + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

同理有

$$
\oint_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}s = \iint_D \left[u\Delta v + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
$$

两式相减得

$$
\oint_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\right)\,\mathrm{d}s = \iint_D (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
$$

7. 设 D 是平面上光滑曲线 L 围成的区域, $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上有二阶连续偏导数且满足Lapace方程

$$
\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.
$$

求证:当 $f(x,y)$ 在 L 上恒为零时, 它在 D 上也恒为零.

点评: 本题的含义是下列微分方程的边值问题:

$$
\begin{cases}
\Delta f = 0 & (x,y)\in D \\
f\Big|_{\partial D} = 0
\end{cases}
$$

只有零解.

证明 类似习题11.3 第7题（3）中的计算, 有

$$
\oint_{\partial D} f\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}s = \iint_D \left[f\Delta f + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,
$$

因为 $f\Big|_{\partial D} = 0$, 所以上式左边曲线积分为零. 再由 $\Delta f = 0$, 得

$$
\iint_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0
$$

因为 f 有连续的二阶偏导数, 所以

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

即 f 是 D 上常值函数, 并且在边界上取值为零，因此 $f(x,y)=0$ 在 D 上成立.

8. 设 $f(x,y)$ 在 $\overline{B}(P_0,R)$ 上有二阶连续偏导数, 且满足 Laplace 方程 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, 那么有

$$f(P_0)=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(P_0)} f(x,y)\,\mathrm{d}s,$$

其中 $P_0=(x_0,y_0)$, $B_r(P_0):\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant r^2$, $0\leqslant r\leqslant R$.

证明 令

$$g(r)=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(P_0)} f(x,y)ds,\quad 则\quad g(0)=f(x_0,y_0).$$

取 $\partial B_r(P_0)$ 的参数方程为

$$x=x_0+r\cos\varphi,\ y=y_0+r\sin\varphi\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

所以

$$\begin{aligned}
g(r)-g(0)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f(x_0+r\cos\varphi,y_0+r\sin\varphi)-f(x_0,y_0)\right]\mathrm{d}\varphi.\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r}\left(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+t\cos\varphi,y_0+t\sin\varphi)+\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+t\cos\varphi,y_0+t\sin\varphi)\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{r}\mathrm{d}t\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

这是一个对 r 的变上限积分, 因此

$$\begin{aligned}
g'(r)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(P_0)}-\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2\pi r}\iint_{B_r(P_0)}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,
\end{aligned}$$

(**注**: 也可以在 $g(r)$ 表达式中直接对 r 求导, 得到 $g'(r)$.)

$g'(r)=0$ 说明 $g(r)$ 为常数. 所以

$$g(r)=g(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0,y_0)\,\mathrm{d}\varphi=f(P_0).$$

9. 设 D 是平面上光滑曲线 L 围成的区域, $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上有二阶连续偏导数且满足Lapace方程

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

求证: 若 $f(x,y)$ 不是常数, 则它在 $\overline{D}$ 上的最大值和最小值只能在 D 的边界 $L = \partial D$ 上取到.

证明 假设 $f(x,y)$ 在 D 的内部一点 $P_0(x_0,y_0)$ 取到最大值. 因为 P_0 是内点, 所以存在 $r > 0$, 使得 $B_r(P_0) \subset D$. 在 $B_r(P_0)$ 上, 由第8题结果, 有

$$f(P_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(P_0)} f(x,y)\,\mathrm{d}s,$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(P_0)} [f(x_0,y_0) - f(x,y)]\,\mathrm{d}s = 0,$$

$$\Longrightarrow \int_0^{2\pi} [f(x_0,y_0) - f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi)]\,\mathrm{d}\varphi = 0,$$

这里取 $\partial B_r(P_0)$ 的参数方程为

$$x = x_0 + r\cos\varphi,\ y = y_0 + r\sin\varphi\ \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

由于 $f(x_0,y_0)$ 是最大值, 上述积分中被积函数为非负连续，因此积分为零推出被积函数恒为零, 即

$$f(x_0,y_0) - f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) = 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

或

$$[f(x_0,y_0) - f(x,y)]\Big|_{\partial B_r(P_0)} = 0.$$

根据第7题结果, 推出

$$f(x,y) = f(x_0,y_0),\quad (x,y) \in B_r(P_0).$$

其次在 D 的内部任意一点 $P(x,y) \in D^\circ$, 用折线连接 P_0 和 P 点, 并可用有限个圆域 $B_{r_0}(P_0)$, $B_{r_1}(P_1), \cdots, B_{r_n}(P_n)$ 覆盖该折线, 逐步递推得 $f(x_0,y_0) = f(x,y)$, 也就是 $f(x,y)$ 在 D 的内部恒为常数 $f(x_0,y_0)$, 再利用函数的连续性得 f 在$\overline{D}$ 上恒为常数:

$$f(x,y)\Big|_{\overline{D}} = f(x_0,y_0).$$

这与 f 不是常值函数的条件矛盾. 因此 f 在D 的内部不可能取到最大值. 同理可证也不可能取到最小值.

10. 设 $f(x,y,z)$ 在 $\overline{B}_R(P_0)$ 上有二阶连续偏导数, 且满足 Laplace 方程 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$, 求证: 对 $0\leqslant r\leqslant R$, 有

$$f(P_0)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial B_r(P_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

其中 $P_0(x_0,y_0,z_0)$, $B_r(P_0):\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant r^2$, $0\leqslant r\leqslant R$.

证明 类似第8题的证明, 取球面 $\partial B_r(P_0)$ 的参数方程表示

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

并记

$$\begin{aligned}
g(r)&=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial B_r(P_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S\\
&=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0+r\sin\theta\cos\varphi,y_0+r\sin\theta\sin\varphi,z_0+r\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

对 r 求导得

$$\begin{aligned}
g'(r)&=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\sin\varphi+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\theta\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\
&=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\partial B_r(P_0)}\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\iiint_{B_r(P_0)}\Delta f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0
\end{aligned}$$

所以 $g(r)$ 是常值函数:

$$g(r)=g(0)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0,y_0,z_0)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=f(P_0).$$

补充题1 (第九届全国大学生数学竞赛决赛) 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{x^2+y^2\leqslant a^2\}$ $(a>0)$ 上具有一阶连续偏导数, 且满足

$$f(x,y)\big|_{x^2+y^2=a^2}=a^2,\ \text{以及}\ \max_{(x,y)\in D}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]=a^2.$$

证明:

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{4}{3}\pi a^4.$$

证明 设 $P(x,y)=-yf(x,y), Q(x,y)=xf(x,y)$. 则 P,Q 在 D 上有一阶连续偏导数. 考虑平面向量场 $\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}$ 在曲线 $L=\partial D$ 上的曲线积分.

一方面, 由于 f 在 L 上为常数 a^2, 因此,

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=a^2\oint_L -y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=a^2\iint_D 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\pi a^4.$$

另一方面, 直接用 Green 公式, 得

$$\begin{aligned}\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y&=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint_D\left(2f(x,y)+x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\pi a^4-\frac{1}{2}\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\pi a^4-\frac{1}{2}\iint_D\nabla f\cdot\vec{r}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

这里 $\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j},\ \vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

利用 Cauchy 不等式和条件

$$\max_{(x,y)\in D}|\nabla f|^2=\max_{(x,y)\in D}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]=a^2$$

得

$$\begin{aligned}\iint_D\nabla f\cdot\vec{r}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&\leqslant\iint_D|\vec{r}||\nabla f|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&\leqslant a\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=a\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi a^4.\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\pi a^4+\frac{1}{3}\pi a^4=\frac{4}{3}\pi a^4.$$

补充题2 计算

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1}\mathrm{e}^{x-y}\,\mathrm{d}S$$

解 分析: 如果直接用球坐标变换

$$x=\sin\theta\cos\varphi,\ y=\sin\theta\sin\varphi,\ z=\cos\theta,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

那么

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{e}^{\sin\theta(\cos\varphi-\sin\varphi)}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

积分区域简化为 $[0,2\pi]\times[0,\pi]$, 但是被积函数比较复杂.

所以要冷静分析. 作旋转变换

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(v+u),\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(v-u),\ z=w,$$

则单位球还是单位球, 积分变换为

$$I=\iint\limits_{u^2+v^2+w^2=1}\mathrm{e}^{\sqrt{2}u}\,\mathrm{d}S$$

这里 $\mathrm{d}S$ 仍然是球面面积元. 球面是Ouv 平面上上半圆 $v=\sqrt{1-u^2},\ -1\leqslant u\leqslant 1$ 绕u 轴的旋转曲面, 因此根据旋转曲面求侧面面积元公式

$$\mathrm{d}S=2\pi v\,\mathrm{d}s=2\pi v\sqrt{1+v'^2}\,\mathrm{d}u=2\pi\,\mathrm{d}u,\ -1\leqslant u\leqslant 1$$

所以积分为

$$I=\iint\limits_{u^2+v^2+w^2=1}\mathrm{e}^{\sqrt{2}u}\,\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\sqrt{2}u}\,\mathrm{d}u=\sqrt{2}\pi(\mathrm{e}^{\sqrt{2}}-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}).$$

补充题3 设 L 是圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 方向为逆时针方向. $f(x)$ 是一个正值可微函数, 且满足

$$\int_L-\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x+xf(y)\,\mathrm{d}y=2\pi.$$

求 $f(x)$.

解 设 L 所围的圆为 D. 根据 Green 公式, 有

$$\int_L-\frac{y}{f(x)}\,\mathrm{d}x+xf(y)\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(f(y)+\frac{1}{f(x)}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\pi.$$

因为 D 关于 x, y 是对称的, 所以

$$\iint_D \left(f(y) + \frac{1}{f(x)} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_D \left(f(x) + \frac{1}{f(y)} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

因此

$$\int_L -\frac{y}{f(x)} \, \mathrm{d}x + x f(y) \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \iint_D \left(f(x) + f(y) + \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

因而

$$\begin{aligned}
&\iint_D \left(\left(\sqrt{f(x)} - \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \right)^2 + \left(\sqrt{f(y)} - \frac{1}{\sqrt{f(y)}} \right)^2 \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \iint_D \left(f(x) + f(y) + \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)} - 4 \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= 2 \int_L -\frac{y}{f(x)} \, \mathrm{d}x + x f(y) \, \mathrm{d}y - 4 \iint_D \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0
\end{aligned}$$

这说明 $\sqrt{f(x)} - \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}} = 0$, 即 $f(x) = 1$.

补充题4 设 a, b, c 不全为零. L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与平面 $ax + by + cz = 0$ 的交线。方向与向量 $\vec{n}_0 = (a, b, c)$ 形成右手系.计算

$$\oint_L (bz + c) \, \mathrm{d}x + (cx + a) \, \mathrm{d}y + (ay + b) \, \mathrm{d}z$$

解 因平面过原点，所以与球面交线 L 是大圆, 记平面被球面所截的大圆盘为 D, L 是其边界. D 的单位法向量为 $\vec{n} = \dfrac{\vec{n}_0}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ 根据 Stokes 公式，有

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_D \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ bz + c & cx + a & ay + b \end{vmatrix} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S \\
&= \iint_D \vec{n}_0 \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \pi R^2.
\end{aligned}$$

补充题5 求

$$\iint_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S (by^2 + cz^2) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + (cz^2 + ax^2) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + (ax^2 + by^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

其中$\vec{v}=(by^2+cz^2)\vec{i}+(cz^2+ax^2)\vec{j}+(ax^2+by^2)\vec{k}$, $a,b,c>0$, $S: x^2+y^2+z^2=1, z\geqslant 0$ 上半球面, 方向指向上侧.

解 在上半球面 S 上加一个底部的圆盘 $D^-: x^2+y^2\leqslant 1, z=0$, 方向朝下, 使得 $S+D^-$ 形成一个封闭的分段光滑闭曲面, 方向指向外侧.

根据Gauss 公式

$$\iint_{S+D^-}\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\iint_{S+D^-}(by^2+cz^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(cz^2+ax^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(ax^2+by^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

用$D^+: x^2+y^2\leqslant 1, z=0$ 表示方向指向上侧的圆 $x^2+y^2\leqslant 1, z=0$. 显然有向面积元 $\mathrm{d}\vec{S}$ 分别在 Oyz 和 Ozx 平面上的有向投影 $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0$, $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=0$, 再利用对称性

$$\iint_{D^+}\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(ax^2+by^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{y^2+x^2\leqslant 1}(ay^2+bx^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

推得

$$\begin{aligned}\iint_{D^+}\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}&=\frac{a+b}{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\frac{a+b}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2 r\,\mathrm{d}r=\frac{(a+b)\pi}{4}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_S\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}&=\iint_{S+D^-}\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}-\iint_{D^-}\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\\&=-\iint_{D^-}\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\iint_{D^+}\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{(a+b)\pi}{4}.\end{aligned}$$

补充题6 设 $C:\{(x,y)\mid F(x,y)=0\}$ 是长度为 l 的简单闭曲线, $F(x,y)$ 有二阶连续偏导数, 且 $\nabla F\neq 0$. $D=\{(x,y)\mid F(x,y)>0\}$ 为 C 围成的区域, 计算

$$\iint_D\nabla\cdot\left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解 首先, 等值线 C 的法向量是 $\nabla F(x,y)$. 根据 D 的定义, 对任意的 $(x,y)\in C$ 和任意方向 $\vec{e}$,

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(x+t\cos\alpha,y+t\cos\beta)-F(x,y)}{t}=\nabla F(x,y)\cdot\vec{e}$$

若 $\vec{e}$ 指向 D 的内部, 则 $(x+t\cos\alpha, y+t\cos\beta)\in D,\ (t>0)$, 所以

$$F(x+t\cos\alpha, y+t\cos\beta)>0,\ F(x,y)=0,$$

由此推出

$$\nabla F(x,y)\cdot\vec{e}=\lim_{t\to 0^+}\frac{F(x+t\cos\alpha, y+t\cos\beta)-F(x,y)}{t}\geqslant 0,$$

法向量 $\nabla F(x,y)$ 与 $\vec{e}$ 夹锐角, 也就是说 $\nabla F(x,y)$ 指向 D 的内部, 因此是等值线 C 的内法向量.

$$\frac{\nabla F}{|\nabla F|}=\frac{1}{|\nabla F|}(F'_x\vec{i}+F'_y\vec{j})$$

是 C 的单位内法向量. 在平面上将其顺时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 得 C 的单位切向量. 该切向量可以通过垂直 Oxy 平面并与 Oxy 上两个坐标向量 $\vec{i}$, $\vec{j}$ 形成右手系的单位向量 $\vec{k}$, 通过叉乘给出:

$$\vec{\tau}=\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\times\vec{k}=\frac{1}{|\nabla F|}(F'_y\vec{i}-F'_x\vec{j}),$$

方向指向逆时针方向.因此对 $\vec{\tau}$ 在 C 上作曲线积分, 一方面

$$\oint_C\vec{\tau}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\oint_C\vec{\tau}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s=\oint_C\mathrm{d}s=l,$$

另一方面, 利用Green 公式得

$$\begin{aligned}\oint_C\vec{\tau}\cdot\mathrm{d}\vec{r}&=\iint_D\left(-\frac{\partial F'_x/|\nabla F|}{\partial x}-\frac{\partial F'_y/|\nabla F|}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=-\iint_D\nabla\cdot\left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

所以

$$\iint_D\nabla\cdot\left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-l$$