中国科学技术大学 2019～2020 学年第 2 学期

线性代数 (B1) 期末考试试卷 (A 卷)

姓名 ______________ 学号 ______________ 学院 ______________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

线

订

装

一、【每小题 4 分, 共 24 分】填空题.

(1) 已知实系数线性方程组 $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3 &= 6 \\ x_1+ax_2+2x_3 &= 9 \\ 2x_1-x_2+3x_3 &= 3 \end{cases}$ 有唯一解, 则 a 满足的条件是 $|A|\neq 0 \Rightarrow a\neq -\frac{9}{11}$.

(2) 已知 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$, 那么 $A^3=$ $14^2\cdot A=196\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1\ 2\ 3)=\begin{pmatrix}196&392\\392&784\\1188&2376\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1\ 2\ 3)$

$\begin{pmatrix}196&392&1188\\392&784&2376\\1188&2376&3564\end{pmatrix}$

(3) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}^4$ 线性无关, 则线性子空间 $V=\langle\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3,2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3\rangle$ 的维数是 2.

(4) 已知线性变换 $\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$, 在另一组基下的矩阵为 $B=\begin{pmatrix}y&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 则 $x=$ 0, $y=$ 1.

$A \backsim B$ 相似

$\Rightarrow \mathrm{tr}A=\mathrm{tr}B \Rightarrow y=1+$

$|A|=|B| \Rightarrow |A|=-1=$

(5) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的度量矩阵为 $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}$, 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 按原顺序 Schmidt 正交化得到的标准正交基为 $e_1=\alpha_1$, $e_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_2$, $e_3=\alpha_3-\alpha_1$

$\beta_3=\alpha_3-\alpha_1$ $(\beta_3,\beta_3)=1$

(6) 若实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+6x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2tx_2x_3$ 正定, 则参数 t 满足 $1-\sqrt{5}<t<1+\sqrt{5}$

$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&t\\1&t&6\end{pmatrix}$ $|A|>0$

$=12+2t-2-t^2-6$

$=-(t^2-2t-4)$

$0<\begin{vmatrix}2&t\\t&6\end{vmatrix}=12-t^2>0 \Leftrightarrow |t|<2\sqrt{3}\approx 3.464$

二、【每小题 5 分, 共 20 分】判断下面的说法是否正确, 并给出理由 (判断正确得 2 分, 给出正确理由得 3 分).

(1) 已知向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 线性无关且可以由向量组 $\beta_1, \ldots, \beta_r$ 线性表示, 则 $\beta_1, \ldots, \beta_r$ 线性无关.

√ .

(2) 对任意的实数 $a \in \mathbb{R}$, 方阵 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似.

× 当 $a \neq 0$ 时. A 与 I_2 不相似.

1188
2376
3564

$\because r(I-A)=1$ 与 $r(I-I_2)=0$ 不等 $\therefore A \nsim I_2$

(若 $A \sim I_2$ 则 $I-A \sim I-I_2$ 而)

(3) 数域 $\mathbb{R}$ 上 n 阶正交阵的行向量组或列向量组都构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

√ 设 $AA^T = A^TA = I$. 将 A 行,列分块. $A = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} = (\beta_1 \cdots \beta_n)$.

其中 $\alpha_i^T, \beta_j \in R^{n\times 1}$ n 维实向量. 则 $\alpha_i^T \cdot \alpha_j = \delta_{ij} = \beta_i^T \cdot \beta_j \ \forall i,j$

×

即 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1 \cdots \beta_n$ 都是 R^n 的标正基.

$|B| = -y$

(4) 记 V 是所有 3 阶实方阵全体构成的集合, 它在矩阵加法和数乘下构成一个 9 维实线性空间, 那么 V 中对称方阵全体构成它的一个 6 维子空间.

V_1

√ V_1 为 V 的非空子集. 且对 V 的加法和数乘封闭.

故 V_1 为 V 的子空间. 又 6 个元素 $E_{ij}+E_{ji}$ $(1 \leq i \leq j \leq 3)$ 为

V_1 的一组基(极大线性无关组). 因此 $\dim V_1 = 6$.

三、【每小题 6 分, 共 12 分】设某个 4 元线性方程组的系数矩阵为 A 且 $\mathrm{rank}(A)=3$. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是它的 3 个解, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,-3,4)^T$, $5\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,2,0)^T$.

(1) 证明: 这个线性方程组是非齐的;

(2) 求出这个线性方程组的通解.

(1) 证. ∵ $r(A)=3$. $n=4$. (若 $AX=b$ $b=0$)

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是它的解. 而 α_1与$(5\alpha_2-2\alpha_3)$ 线性无关.

若是齐次方程组. 则解空间只能是 $(n-r(A))=$

1维的. 矛盾. ∴这线性方程组是非齐次的.

(1) 反证: 说出解空间维数为 1 (2分

说明 α_1, $5\alpha_2-2\alpha_3$ 线性无关 (4分)

(2) 说明出解的结构 — (2分)

求出了齐次方程的解 — (2分)

最后正确的通解 — (2分)

线

订

装

四、【14 分】用初等变换法求矩阵 A 的逆与行列式, 其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{pmatrix}.$$

行列式 $(=n!)$ 6分

15 求逆：答案(3分)

过程(5分)

n为奇数. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{n-1} & & & & \frac{1}{n-1} & -\frac{2}{n-1} \\ \frac{1}{n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$

n为偶数. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \vdots & \frac{1}{3} & \cdots & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{n-1} & \vdots & \vdots & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{2}{n-1} \\ \frac{1}{n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$

注：答案分奇偶对了得2分、全对得3分.

五、【每小题 7 分, 共 14 分】$\mathbb{R}^3$ 上线性变换 $\mathscr{A}$ 把 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,3,5)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,2)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0)^T$ 分别映为 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,0)^T$, $\boldsymbol{\beta}_2=(2,4,-1)^T$, $\boldsymbol{\beta}_3=(3,0,5)^T$. 求:

书上题

(1) $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵 A;

(2) $\mathscr{A}$ 在自然基下的的矩阵 B.

(1)

$$\mathscr{A}(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)$$
$$=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)A$$

$$\therefore A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^{-1}\cdot(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3) \qquad (3分)$$

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 0 & -5 & 3\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix} \qquad (2分)$$

$$A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 0 & -5 & 3\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 9 & -5\\ -10 & -23 & 15\\ -7 & -16 & 13\end{pmatrix} \qquad (2分)$$

(2)

$$B(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)$$

(或 $B=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)A(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^{-1}$ (3分)

$$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 0 & -5 & 3\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix} \qquad (2分)$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 0 & -5 & 3\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -20 & 11\\ 0 & -16 & 10\\ 5 & -15 & 7\end{pmatrix}$$

六、【第 1 小题 14 分, 第 2 小题 2 分, 共 16 分】设实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$.

(1) 利用正交变换将该二次型化为标准形, 并写出相应的正交变换矩阵.

(2) 判断 $Q(x_1, x_2, x_3) = 1$ 在三维直角坐标系里所表示的曲面的类型.

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (2分)

计算特征值 $|\lambda I - A| = (\lambda-5)^2(\lambda+4) \Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = -4$ (2分)

特征向量 $\lambda = 5$ 时. $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 4分

$\lambda = -4$ 时 $X_3 = (2, 1, 2)$

X_3, X_2, X_1

Schmidt 正交化: $\cancel{X_1, X_2}$ $\Rightarrow$ $e_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

(这步不懂一 语)

4分

则 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(-4\ 5, 5)$ 2分

(2) $Q(x_1, x_2, x_3)\big|_{x=Py} = -4y_1^2 + 5y_2^2 + 5y_3^2 = 1$

2分

单叶双曲面.