§0.1 第11章复习

基本概念 对曲线或曲面分割$\Longrightarrow$ 近似(Riemann和)$\Longrightarrow$ 极限

曲线积分：$\int_L \phi(x,y,z)\,\mathrm{d}s;$

$$\int_{L_{AB}} \vec{v}\cdot\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{L_{AB}} \vec{v}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s = \int_{L_{AB}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z;$$

(背景: 力场做功; 化为数量场 $\vec{v}\cdot\vec{\tau}$ 的曲线积分)

曲面积分：$\iint_S \varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}S;$

$$\iint_S \vec{v}\cdot\,\mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(背景: 流速场的通量; 化为数量场 $\vec{v}\cdot\vec{n}$ 的曲面积分).

基本性质 与重积分类似, 例如有界性, 对被积数量场或向量场的可加性, 对积分曲线或曲面的可加性等等.

返回 全屏 关闭 退出

参数表示 曲线曲面的参数方程表示一般为

曲线: $L: \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},\ t \in [\alpha, \beta].$

单位切向量 $\vec{\tau} = \dfrac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$

曲面: $S: \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k},\ (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2.$

单位法向量 $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}'_u(u,v) \times \vec{r}'_v(u,v)}{|\vec{r}'_u(u,v) \times \vec{r}'_v(u,v)|}$

特别 曲线或曲面由显函数表示可看成是特殊的参数表示:

$$y = f(x),\ x \in [a,b] \Longrightarrow \vec{r}(x) = x\vec{i} + f(x)\vec{j},\ x \in [a,b]$$

$$z = f(x,y),\ (x,y) \in D \Longrightarrow \vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x,y)\vec{k},\ (x,y) \in D.$$

也可将曲线或曲面分段(或分片)用不同的参数方程表示.

在向量场曲线曲面积分中, 若参数表示的

一、曲线弧长与切向量, 曲面面积与法向量

弧长元：$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = |\vec{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{t}$,（参数表示）.

$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sqrt{\mathbf{1} + \boldsymbol{f}'^{2}(\boldsymbol{x})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$,（直角坐标）.

$\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$.（极坐标）

弧长：$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{L}) = \int_{\alpha}^{\beta} |\vec{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{t};$$

切向量：$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})}{|\vec{\boldsymbol{r}}'(\boldsymbol{t})|},$$（参数表示）.

面积元：$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = |\vec{\boldsymbol{r}}'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \times \vec{\boldsymbol{r}}'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$,（参数表示）.

$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sqrt{\mathbf{1} + \boldsymbol{f}'^{2}_{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{f}'^{2}_{\boldsymbol{y}}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$,（直角坐标）

$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{r}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\theta}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$,（球坐标）

面积：$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{S}) = \iint_{D} |\vec{\boldsymbol{r}}'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \times \vec{\boldsymbol{r}}'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}.$$

法向量：$$\vec{\boldsymbol{n}} = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \times \vec{\boldsymbol{r}}'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}{|\vec{\boldsymbol{r}}'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \times \vec{\boldsymbol{r}}'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|},$$（参数表示）.

二、曲线曲面积分的计算

在参数方程表示下, 曲线曲面积分化为定积分或二重积分:

数量场曲线积分:

$$\int_L \phi(x,y,z)\ \mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta \phi(x(t),y(t),z(t))|\vec{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$$

数量场曲面积分:

$$\iint_S \phi(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_D \phi(x(u,v),y(u,v),z(u,v))|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

向量场曲线积分: ($\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$)

$$\begin{aligned}\int_{L_{AB}} \vec{v}\cdot\,\mathrm{d}\vec{r} &= \int_{L_{AB}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta \vec{v}\cdot\vec{r}'\,\mathrm{d}t \\ &= \int_\alpha^\beta (Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t))\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

向量场曲面积分: ($\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$)

$$\iint_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n})\,\mathrm{d}S = \iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D (\vec{v} \cdot \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \iint_D \left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

注意 向量场的曲线曲面积分时, 要注意曲线曲面的定向, 要保证切向量 $\vec{r}'(t)$ 和法向量 $\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v$ 与指定的方向的一致性.

因此, 理论上有了参数表示就可具体计算.

但是! 不能过于教条, 要灵活发挥概念和性质在证明和计算中的作用! 并充分考虑积分区域或被积数量场(向量场)的对称性!

三、Green、Gauss 和 Stokes 公式

Green 公式 $L = \partial D$ 平面封闭曲线, 方向逆时针,

$$\oint_L \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

曲线积分（一维） 重积分（二维）

Gauss 公式 $S = \partial V$, 空间封闭曲面, 方向外侧.

$$\oiint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

或

$$\oiint_S \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_V \nabla\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}V = \iiint_V \mathrm{div}\vec{v}\,\mathrm{d}V.$$

空间曲面积分（二维） 重积分（三维）

Stokes 公式 $L = \partial S$，空间封闭曲线，是 S 的边缘，方向与 S 的方向协调

$$
\begin{aligned}
\oint_L \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z \\
&= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \\
&\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

或者

$$
\oint_L \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.
$$

空间曲线积分（一维） 空间曲面积分（二维）

四、保守场

设 $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, 则

若 $\vec{v}$ 的曲线积分与路径无关（环量为零）, 则称 $\vec{v}$ 是**保守场**.

若存在 ϕ 使得 $\vec{v} = \nabla\phi$, 则称 $\vec{v}$ 是**有势场**, ϕ 称为**势函数**

结论: $\vec{v}$ 是保守场 $\Longleftrightarrow$ $\vec{v}$ 是有势场

（1）势函数的计算可通过特殊路径积分得到（虽然不唯一）或求解方程

$$P = \frac{\partial\phi}{\partial x},\ Q = \frac{\partial\phi}{\partial y},\ R = \frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

（2）保守场的曲线积分只与起点和终点有关, 而且

$$\int_{L_{AB}} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B \mathrm{d}\phi = \phi(B) - \phi(A).$$

其中, ϕ 是 $\vec{v}$ 的一个势函数, 满足

$$\mathrm{d}\phi = \nabla\phi\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

五、无旋场

$\vec{v}$ 满足 $\nabla \times \vec{v} = 0$ 即

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

结论: 若 $\vec{v}$ 的定义域是曲面单连通区域, 则

$\vec{v}$ 是保守场 $\Longleftrightarrow$ $\vec{v}$ 是无旋场.

六、无源场

1、若 $\nabla\cdot\vec{v}=\mathbf{0}$, 则称 $\vec{v}$ 为无源场.

2、若存在向量场 $\vec{\alpha}$ 使得

$$\vec{v}=\mathrm{rot}\vec{\alpha}=\nabla\times\vec{\alpha},$$

则称 $\vec{\alpha}$ 为 $\vec{v}$ 的向量势.

向量势在相差一个函数的梯度意义下是唯一的. 向量势的构造: 已知 $\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$, 求 $\vec{\alpha}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ 使得 $\vec{v}=\nabla\times\vec{\alpha}$ 等价于求解下列一阶微分方程

$$\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}=P(x,y,z),$$
$$\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}=Q(x,y,z),$$
$$\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}=R(x,y,z),$$

七、推广

$$\int_L \phi \,\mathrm{d}\vec{r} = \int_L \phi\vec{\tau}\,\mathrm{d}s; \quad \int_L \mathrm{d}\vec{r}\times\vec{v} = \int_L \vec{\tau}\times\vec{v}\,\mathrm{d}s.$$

$$\iint_S \phi \,\mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \phi\vec{n}\,\mathrm{d}S; \quad \iint_S \mathrm{d}\vec{S}\times\vec{v} = \iint_S \vec{n}\times\vec{v}\,\mathrm{d}S$$

$$\oint_{\partial S} \phi \,\mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \mathrm{d}\vec{S}\times\nabla\phi = \iint_S \vec{n}\times\nabla\phi\,\mathrm{d}S,$$

$$\oint_{\partial S} \mathrm{d}\vec{r}\times\vec{v} = \iint_S (\mathrm{d}\vec{S}\times\nabla)\times\vec{v} = \iint_S (\vec{n}\times\nabla)\times\vec{v}\,\mathrm{d}S$$

$$\mathbf{grad}\,\phi = \nabla\phi = \lim_{V\to P}\left(\frac{1}{\sigma(V)}\oiint_S \phi\,\mathrm{d}\vec{S}\right)$$

$$\mathrm{div}\vec{v} = \nabla\cdot\vec{v} = \lim_{V\to P}\left(\frac{1}{\sigma(V)}\oiint_S \vec{v}\cdot\,\mathrm{d}\vec{S}\right)$$

$$\mathrm{rot}\vec{v} = \nabla\times\vec{v} = \lim_{V\to P}\left(\frac{1}{\sigma(V)}\oiint_S \mathrm{d}\vec{S}\times\vec{v}\right)$$

八、微分形式

$$\left.\begin{array}{l}\text{力场做功} \Longrightarrow \text{曲线积分} \\ \text{流速场通量} \Longrightarrow \text{曲面积分}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{微分形式积分}$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_{L_{AB}} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{L_{AB}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z \\ \displaystyle\iint_{S} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{array}\right\} \Longrightarrow \int \omega$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Gauss 公式} \displaystyle\oiint_{S} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{V} \nabla\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}V \\ \text{Stokes 公式} \displaystyle\oint_{L} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_{S} \nabla\times\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\end{array}\right\} \Longrightarrow \int_{\partial\Omega}\omega = \int_{\Omega}\mathrm{d}\omega$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{保守场 } \vec{v} = \nabla\phi,\quad \nabla\times\vec{v} = 0 \\ \text{无源场 } \vec{v} = \nabla\times\vec{\alpha},\quad \nabla\cdot\vec{v} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{恰当微分 } \mathrm{d}\omega = 0, \omega = \mathrm{d}\theta$$

九、例题

例 计算

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1} e^{x-y}\, dS$$

解 分析: 如果直接用球坐标变换

$$x = \sin\theta\cos\varphi,\ y = \sin\theta\sin\varphi,\ z = \cos\theta,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

那么

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta e^{\sin\theta(\cos\varphi - \sin\varphi)}\, d\theta\, d\varphi$$

积分区域简化为 $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$, 但是被积函数比较复杂.

所以要冷静分析. 作旋转变换

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(v+u),\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(v-u),\ z = w,$$

则单位球还是单位球, 积分变换为

$$\boldsymbol{I} = \iint\limits_{\boldsymbol{u}^2+\boldsymbol{v}^2+\boldsymbol{w}^2=1} \mathrm{e}^{\sqrt{2}\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

这里 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 仍然是球面面积元. 球面是上半圆 $\boldsymbol{v} = \sqrt{1-\boldsymbol{u}^2}$, $-1 \leqslant \boldsymbol{u} \leqslant 1$ 旋转曲面, 因此根据旋转曲面求侧面面积元公式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 2\pi\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 2\pi\boldsymbol{v}\sqrt{1+\boldsymbol{v}'^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} = 2\pi\,\mathrm{d}\boldsymbol{u},\quad -1 \leqslant \boldsymbol{u} \leqslant 1$$

所以积分为

$$\boldsymbol{I} = \iint\limits_{\boldsymbol{u}^2+\boldsymbol{v}^2+\boldsymbol{w}^2=1} \mathrm{e}^{\sqrt{2}\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 2\pi\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\sqrt{2}\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \sqrt{2}\pi(\mathrm{e}^{\sqrt{2}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}}).$$

同样的处理方法出现在关于 Poisson 公式的证明:

例 (Poisson 公式) 设 $S: x^2+y^2+z^2=1$, $f(t)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 求证:

$$\iint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f(kt)\,\mathrm{d}t,\ k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

解 令 $\vec{n}=\dfrac{1}{k}(a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k})$, 那么球面 S 是单位圆以$\vec{n}$ 为旋转轴的旋转曲面, 设 $P(x,y,z)$ 为球面上一点, 则 $\vec{r}=\overrightarrow{OP}$ 在 $\vec{n}$ 的投影为 $t=\vec{n}\cdot\vec{r}$, 绕 $\vec{n}$ 的旋转半径为

$$\rho=\sqrt{1-t^2},\ \mathrm{d}\rho=\frac{-t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$\Longrightarrow f(ax+by+cz)=f(kt)$$

只与 $t=\sqrt{1-\rho^2}$有关, 类似旋转曲面的面积元的计算, 面积元为

$$\mathrm{d}S=\pi(\rho+(\rho+\ \mathrm{d}\rho))\,\mathrm{d}s=2\pi\rho\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=2\pi\,\mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow \iint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S=\iint_S f(kt)\,\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^{1} f(kt)\,\mathrm{d}t.$$

例 设 a, b, c 不全为零。L 是球面 $x^2+y^2+z^2 = R^2$ 与平面 $ax+by+cz = 0$ 的交线。方向与向量 $\vec{n}_0 = (a, b, c)$ 形成右手系。计算

$$\oint (bz + c)\,\mathrm{d}x + (cx + a)\,\mathrm{d}y + (ay + b)\,\mathrm{d}z$$

解 因平面过原点，所以与设球面交线 L 是大圆，记大圆盘为 D, L 是其边界。D 的法向量为 $\vec{n} = \frac{\vec{n}_0}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ 根据 Stokes 公式，有

$$\text{原式} = \iint_D \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ bz+c & cx+a & ay+b \end{vmatrix} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_D \vec{n}_0 \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\pi R^2$$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

例 求

$$\iint_S \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S (by^2+cz^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (cz^2+ax^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (ax^2+by^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中$\vec{v}=(by^2+cz^2)\vec{i}+(cz^2+ax^2)\vec{j}+(ax^2+by^2)\vec{k}$, $a,b,c>0$, $S: x^2+y^2+z^2=1, z\geqslant 0$ 上半球的上侧。

解 在曲面 S 加上圆盘 $D^-: x^2+y^2\leqslant 1, z=0$, 方向朝下。根据Gauss 公式

$$\iint_{S+D^-} (by^2+cz^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (cz^2+ax^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (ax^2+by^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

在圆盘上, 利用对称性

$$\iint_{D^+} = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} (ax^2+by^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{y^2+x^2\leqslant 1} (ay^2+bx^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$\iint_{D^+} = \frac{a+b}{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{(a+b)\pi}{4}$$

例 设 $C:\{(x,y)\mid F(x,y)=0\}$ 是长度为 l 的简单闭曲线, $F(x,y)$ 有二阶连续偏导数, 且 $\nabla F\neq 0$. $D=\{(x,y)\mid F(x,y)>0\}$ 为 C 围成的区域, 计算

$$\iint_D \nabla\cdot\left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解 首先, 等值线 C 的法向量是 $\nabla F(x,y)$, $(x,y)\in C$. 根据 D 的定义, 对 $(x_0,y_0)\in C$,

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-F(x_0,y_0)}{t}=\nabla F(x_0,y_0)\cdot\vec{e}$$

若 $\vec{e}$ 指向 D 的内部, 则 $(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)\in D$, $(t>0)$, 所以 $F(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)>0$, $F(x_0,y_0)=0$, 即

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-F(x_0,y_0)}{t}=\nabla F(x_0,y_0)\cdot\vec{e}>0,$$

法向量与 $\vec{e}$ 夹锐角, 也就是说 $\nabla F(x_0,y_0)$ 是等值线 C 的内法向量. 因此,

$$\frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{1}{|\nabla F|}(F'_x\vec{i} + F'_y\vec{j})$$

是 C 的单位内法向量. 将其顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得 C 的**单位切向量**:

$$\vec{\tau} = \frac{1}{|\nabla F|}(F'_y\vec{i} - F'_x\vec{j}),$$

方向指向逆时针方向.因此对 $\vec{\tau}$ 在 C 上作曲线积分, 一方面

$$\oint_C \vec{\tau}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \oint_C \vec{\tau}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s = \oint_C \mathrm{d}s = l,$$

另一方面, 利用Green 公式得

$$\oint_C \vec{\tau}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_D \left(-\frac{\partial F'_x/|\nabla F|}{\partial x} - \frac{\partial F'_y/|\nabla F|}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_D \nabla\cdot\left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

所以

$$\iint_D \nabla\cdot\left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -l$$

例（球面上的积分） 设 $B_r(P_0) \subset V$ 是半径为 r 的球体，$\vec{n} = (u, v, w)$ 是球面$\partial B_r(P_0)$ 的单位法向量，因此对 $P(x, y, z) \in \partial B_r(P_0)$ 时，

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

并且有

$$x = x_0 + ru, \; y = y_0 + rv, \; z = z_0 + rw.$$

其中 $u^2 + v^2 + w^2 = 1$，也就是 $(u, v, w) \in \partial B_1(O)$. 这样就得到 $\partial B_r(P_0)$ 上的点 (x, y, z) 与 $\partial B_1(O)$ 上的点 (u, v, w) 之间的一一对应. 结论是

$$\iint\limits_{\partial B_r(P_0)} f(P)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\partial B_r(P_0)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = r^2 \iint\limits_{\partial B_1(O)} f(P_0 + r\vec{n})\,\mathrm{d}S$$

$$= r^2 \iint\limits_{\partial B_1(O)} f(x_0 + ru, y_0 + rv, z_0 + rw)\,\mathrm{d}S$$

其中右边是关于 (u, v, w) 在$\partial B_1(O)$ 上的积分，而且还有

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{\partial B_r(P_0)} f(P)\,\mathrm{d}S = f(P_0).$$

证明 注意到关于 $(x,y,z)\in\partial B_r(P_0)$ 的球坐标变换

$$x=x_0+r\sin\theta\cos\varphi,\ y=y_0+\sin\theta\sin\varphi,\ z=z_0+\cos\theta$$

也给出了 $(u,v,w)\in\partial B_1(O)$ 的球坐标变换

$$u=\sin\theta\cos\varphi,\ v=\sin\theta\sin\varphi,\ w=\cos\theta)$$

因此有

$$\begin{aligned}
&\oiint\limits_{\partial B_r(P_0)} f(P)\,\mathrm{d}S=\oiint\limits_{\partial B_r(P_0)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S\\
&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x_0+r\sin\theta\cos\varphi,y_0+r\sin\theta\sin\varphi,z_0+r\cos\theta)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\
&=r^2\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x_0+r\sin\theta\cos\varphi,y_0+r\sin\theta\sin\varphi,z_0+r\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\right)\\
&=r^2\oiint\limits_{\partial B_1(O)} f(x_0+ru,y_0+rv,z_0+rw)\,\mathrm{d}S
\end{aligned}$$

例（球体上积分） 设 $B_r(P_0) \subset V$ 是半径为 r 的球体

$$\iiint\limits_{B_r(P_0)} f(P)\,\mathrm{d}V = \int_0^r \mathrm{d}\rho \left(\oiint\limits_{\partial B_\rho(P_0)} f(P)\,\mathrm{d}S \right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \iiint\limits_{B_r(P_0)} f(P)\,\mathrm{d}V = \oiint\limits_{\partial B_r(P_0)} f(P)\,\mathrm{d}S.$$

例（调和函数的性质） 如果在区域 V 内有 $\Delta u = 0$, 则称 u 是 V 上的调和函数. 对于调和函数, 有下列平均值定理

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \oiint\limits_{\partial B_r(P_0)} u(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \frac{1}{4\pi r^2} \oiint\limits_{\partial B_r(P_0)} u(P)\,\mathrm{d}S.$$

其中 $P_0 \in B_r(P_0) \subset V$.

证明 利用 Gauss 公式, 对 $\rho \leqslant r$, 有

$$\oiint\limits_{\partial B_\rho(P_0)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}S = \oiint\limits_{\partial B_\rho(P_0)} \nabla u \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \iiint\limits_{B_\rho(P_0)} \Delta u\,\mathrm{d}V = 0$$

注意到在球面$\partial B_\rho(P_0)$ 上任何一点

$$P = P_0 + \rho\vec{n}, \text{ 或 } x = x_0 + \rho u,\ y = y_0 + \rho v,\ z = z_0 + \rho w$$

这里 $\vec{n} = (u, v, w)$ 是单位法向量, 所以

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(P) = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, y, z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} u(x_0 + \rho u,\ y_0 + \rho v,\ z_0 + \rho w)$$

所以

$$0 = \oiint\limits_{\partial B_\rho(P_0)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \rho^2 \oiint\limits_{\partial B_1(O)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x_0 + \rho u,\ y_0 + \rho v,\ z_0 + \rho w)\,\mathrm{d}S$$

$$= \rho^2 \oiint\limits_{\partial B_1(O)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} u(x_0 + \rho u,\ y_0 + \rho v,\ z_0 + \rho w)\,\mathrm{d}S$$

$$= \rho^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \oiint\limits_{\partial B_1(O)} u(x_0 + \rho u,\ y_0 + \rho v,\ z_0 + \rho w)\,\mathrm{d}S$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \oiint\limits_{\partial B_1(O)} u(x_0 + \rho u,\ y_0 + \rho v,\ z_0 + \rho w)\,\mathrm{d}S = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}\oiint_{\partial B_\rho(P_0)} u(x,y,z)\,\mathrm{d}S\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\rho^2}\oiint_{\partial B_\rho(P_0)} u(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \frac{1}{r^2}\oiint_{\partial B_r(P_0)} u(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

令 $\rho \to 0+$ 有

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi r^2}\oiint_{\partial B_r(P_0)} u(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \frac{1}{4\pi r^2}\oiint_{\partial B_r(P_0)} u(P)\,\mathrm{d}S$$

例（极值原理） 设 $u(x,y,z)$ 是有界（连通）区域 V 上调和函数, 则 u 在 V 的内部不可能达到最大值和最小值.

例 求两个椭圆 $C_1 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $C_2 : \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$, $0<b<a$ 相交部分的面积。

解 在第一象限，考虑两椭圆的的交点

$$x_0=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\ y_0=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

所求在第一象限的面积由 $x=0, y=0$, 和 C_1 上一段L_1以及 C_2 上一段 L_2 围成，方向逆时针。对 C_1 参数表示 $x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta, 0\leqslant\theta<2\pi$，特别在 (x_0,y_0) 处

$$x_0=a\cos\theta_0,\ y_0=b\sin\theta_0, \Longrightarrow \tan\theta_0=\frac{a}{b}$$

因此 L_1 的参数表示为

$$x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta, \theta_0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

同理 L_2 的参数方程表示为

$$x=b\cos\tau,\ y=a\sin\tau, 0\leqslant\tau<\tau_0, \tan\tau_0=\frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned}
I &= 4\oint (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \int_{L_1} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) + \int_{L_2} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) \\
&= \int_0^{\tan^{-1}(b/a)} [ab\cos\tau\cos\tau - ab\sin\tau(-\sin\tau)]\,\mathrm{d}\tau \\
&+ \int_{\tan^{-1}(a/b)}^{\pi/2} [ab\cos\theta\cos\theta - ab\sin\theta(-\sin\theta)]\,\mathrm{d}\theta \\
&= ab\tan^{-1}\frac{b}{a} + ab\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{a}{b}\right)
\end{aligned}$$

例 设 $S(t)$ 是平面 Π：$x+y+z=t$ 被球面 B：$x^2+y^2+z^2=1$ 截下的部分, 且

$$F(x,y,z)=1-(x^2+y^2+z^2).$$

求证: 当 $|t|\leqslant\sqrt{3}$ 时, 有

$$\iint_{S(t)} F(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2.$$

证明 证明的过程实际上是一个计算的过程.

首先注意到平面 Π 的法向量是 $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, 不难计算 Π 到原点的距离为 $\frac{|t|}{\sqrt{3}}$, 所以当 $|t|>\sqrt{3}$ 时, Π 和球面 B 没有交.

其次注意到S(t) 是一个圆盘, 圆盘的圆心为 $(\frac{t}{3},\frac{t}{3},\frac{t}{3})$, 半径为

$$r_0=\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}$$

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

所以对 $S(t)$ 上任意一点 (x, y, z), 设它到 $S(t)$ 的圆心的距离为 r, 那么

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{t^2}{3} + r^2$$

$S(t)$ 上面积元在极坐标下为

$$\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,\ 0 \leqslant r \leqslant r_0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

因此

$$\begin{aligned}\iint_{S(t)} F(x, y, z)\,\mathrm{d}S &= \iint_{S(t)} \left(1 - \left(\frac{t^2}{3} + r^2\right)\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{1-\frac{t^2}{3}}} \left(1 - \left(\frac{t^2}{3} + r^2\right)\right) r\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{18}(3 - t^2)^2\end{aligned}$$