中国科学技术大学2011-2012学年第二学期

数学分析(B2)第二次测验

1. (15分)计算二重积分$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)\mathrm{d}y + \int_2^4 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right)\mathrm{d}y$.

2. (15分)计算二重积分$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由曲线$x^2-2xy+y^2+x+y=0$和曲线$x+y+4=0$围成的有界区域.

3. (15分)计算三重积分$\iiint\limits_V xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$V$：由$z=xy,\ z=0,\ x=-1,\ x=1,\ y=2,\ y=3$围成.

4. (15分)设曲线L为圆周$x^2+y^2=2x$，计算曲线积分$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}l$.

5. (15分)计算曲面积分$\iint\limits_S z\mathrm{d}S$，其中$S$：由$z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$和$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$所围成的立体表面.

6. (15分)证明：$\int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_{x_1}^1 \mathrm{d}x_2 \cdots \int_{x_{n-1}}^1 x_1x_2\cdots x_n \mathrm{d}x_n = \frac{1}{2^n n!}$.

7. (10分)设一球面的方程为$x^2+y^2+(z+1)^2=1$，从原点向球面上任一点Q处的切平面作垂线，垂足为点P，当点Q在球面上变动时，点P的轨迹形成一封闭的曲面S，求此封闭曲面S所围成的立体的体积.

中国科学技术大学2012-2013学年第二学期

数学分析(B2)第一次测验

1. (20分)下面两个函数在原点的连续性如何，偏导数是否存在，是否可微？(要说明理由)

$$(1) f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$(2) f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

2. (15分)设$D=\{(x,y)|x>0,y>0\}$. 求函数$f(x,y)=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$在区域$D$上的极值，并说明所求极值是否是最值.

3. (10分)用Lagrange乘数法求抛物线$y=(x-\sqrt{2})^2$上的点到原点的最小距离.

4. (20分)求常数c使得变换$\begin{cases}u=2x+y\\ v=x+cy\end{cases}$将方程$2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-5\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$简化为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，其中二阶偏导数都连续.

5. (15分)设$f(x,y)$在区域D上有二阶偏导数，且二阶偏导数都为零. 求证：$f(x,y)$是至多一次函数，即存在常数a,b,c使得$f(x,y)=ax+by+c$.

6. (10分)设$z=z(x,y)$是由方程$ax+by+cz=\varphi(x^2+y^2+z^2)$所确定的隐函数，其中$\varphi$是一个可微的一元函数，$a,b,c$是常数. 求证：

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$$

7. (10分)设$P_n=(x_n,y_n)$，$n=1,2,...$是平面上的一个有界点列. 求证：$\{P_n\}$有收敛的子列.

中国科学技术大学2012-2013学年第二学期

数学分析(B2)第二次测验

1. (每小题5分)简答题：

(1)设$\int_I f\mathrm{d}\sigma > 0$，其中$I$为闭矩形，$f$在$I$上连续. 说明在$I$的内部存在闭矩形$J$，使得$f > 0$在$J$上成立.

(2)构造一个$D = [-1,1]^2$上的非负函数$f(x,y)$，使得f在D上积分为零，但是$f(x,0)$关于x不可积，而对任意$y \neq 0$，$f(x,y)$关于x可积. 请说明理由.

2. (40分)计算积分：

(1) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x+y} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\mathrm{d}z$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x$　　(4) $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

3. (15分)计算由$\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}=1$所围成闭区域的面积.

4. (15分)计算由$(x^2+y^2+z^2)^2 = z^3$围成的立体的体积.

5. (10分)设$f(x)$在$[a,b]$上连续，试证：对任意$x \in (a,b)$，有

$$\int_a^x \mathrm{d}x_1 \int_a^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_a^{x_n} f(x_{n+1})\mathrm{d}x_{n+1} = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-y)^n f(y)\mathrm{d}y,\ n = 1,2,\ldots .$$

6. (10分)计算下述积分：

$$\iiint\limits_V \cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ \iiint\limits_V \cos(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中V是单位球体$x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$；a,b,c为常数，满足$a^2+b^2+c^2=1$.

中国科学技术大学2013-2014学年第二学期

数学分析(B2)第一次测验

1. (10分)概念题：

(1)叙述n元函数$z=f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在其定义域$D$中一点$x$可微的定义.

(2)叙述二元函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)沿方向$\boldsymbol{e}=(u_0,v_0)$的方向导数的定义.

2. (15分)下面的函数在原点的连续性如何，偏导数是否存在，是否可微？(要说明理由)

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

3. (15分)求函数$f(x,y)=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\mathrm{e}^y$的极值点.

4. (15分)求函数$f(x,y)=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$在条件$x^2+y^2=1$之下的条件极值.

5. (20分)求常数c使得变换$\begin{cases}u=2x+y\\ v=x+cy\end{cases}$将方程$2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-5\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$简化为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，其中二阶偏导数都连续.

6. (15分)求在$\mathbb{R}^2$上满足方程组$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=af\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=bf\end{cases}$的二元可微函数$f(x,y)$，其中$a,b$是常数.

7. (10分)设$z=z(x,y)$是由方程$ax+by+cz=\varphi(x^2+y^2+z^2)$所确定的隐函数，其中$\varphi$是一个可微的一元函数，$a,b,c$是常数. 求证：

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$$

中国科学技术大学2011-2012学年第二学期

数学分析(B2)第三次测验

1. (10分)求向量场$\boldsymbol{v}=(yz,zx,xy)$的散度和旋度.

2. (15分)计算第二型曲线积分：

$\int_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$，其中曲线$L$是半球面$\{x^2+y^2+z^2=a^2,\ z\geqslant 0\}$与圆柱面$\{x^2+y^2=b^2\}(a>b>0)$的交线，$L$的定向与$z$轴正向构成右手系.

3. (30分)计算第二型曲面积分：

(1) $\iint\limits_S (y^2-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S=\{z=2-x^2-y^2:z\geqslant 0\}$，$S$的定向与$z$轴的正向同侧.

(2) $\iint\limits_S \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$，其中曲面$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=1\}$，正向是曲面的外法向.

4. (15分)给定平面分段光滑曲线$L=\{y=2x^{\frac{2}{5}}+1:x\in[-1,0]\}\bigcup\{y=-2x^5+1:x\in[0,1]\}$，$L$的正向是参数$x$增加的方向，求积分$\int_L\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

5. (15分)设曲面$S=\{x^2+y^2+z^2=1:z\geqslant 0\}$，它的定向$\boldsymbol{n}$是与$z$轴正向同侧的单位法向量，函数$f=\sin(x^2+y^2+4xy\sqrt{z})$，$g=x^2+y^2+4z^2$，求积分$\iint\limits_S(\nabla f\times\nabla g)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

6. (15分)讨论如下问题：若两个向量场的散度和旋度相等，这两个向量场是否相等？

以下设Ω是$\mathbb{R}^3$的有界区域，它的边界$\partial\Omega$是光滑曲面，$\boldsymbol{n}$是$\partial\Omega$的单位外法向量场，涉及到的函数和向量场具有二阶连续偏导数.

(1)(2分)设f是$\overline{\Omega}$上的函数，证明：

$$\iint\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\iiint\limits_{\Omega}\triangle f\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

这里$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}$是$f$沿方向$\boldsymbol{n}$的方向导数，$\triangle f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

(2)(5分)设定义在$\overline{\Omega}$的函数满足$\triangle f=0$，$f\big|_{\partial\Omega}\equiv 0$，证明$f\equiv 0$.

(3)(8分)设$\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$是定义在$\overline{\Omega}$上的向量场，满足：$\mathrm{rot}\boldsymbol{v}_1=\mathrm{rot}\boldsymbol{v}_2$、$\mathrm{div}\boldsymbol{v}_1=\mathrm{div}\boldsymbol{v}_2$，问能否推出$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2$？若成立，请证明之；若不然，你认为在什么合理条件下$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2$？

中国科学技术大学2011-2012学年第二学期

数学分析(B2)第四次测验

1. (15分)设函数$f(x) = \arcsin(\cos x)$，将$f(x)$在$[-\pi, \pi]$上展开成Fourier级数，讨论此Fourier级数的收敛性，并利用此求级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$的和.

2. (15分)求函数$f(x) = \mathrm{e}^{-|x|} \sin 2x$的Fourier变换.

3. (16分)判断下面非正常积分的敛散性：

   (1)$\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(x^2)\mathrm{d}x$　　　　(2)$\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-\frac{x^2}{2})}}$

4. (10分)计算积分$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x$.

5. (16分)证明：

   (1)含参变量积分$\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-bx} \sin x\mathrm{d}x$在$0 < b < +\infty$上收敛，但不一致收敛；

   (2)对任一正实数$\varepsilon > 0$，$\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-bx} \sin x\mathrm{d}x$在$0 < \varepsilon \leqslant b < +\infty$上一致收敛.

6. (10分)设$f(x)$是$\mathbb{R}$上的连续周期函数，而其导函数$f'(x)$在$\mathbb{R}$上逐段光滑，证明：函数$f(x)$的Fourier系数a_n和b_n满足：当$n \to \infty$时，有$n \cdot \max\{a_n, b_n\} \to 0$.

7. (18分)利用$\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$，分别解决下列问题：

   (1)计算$\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x$ (n是正整数)；

   (2)对固定的参数$t > 0$，求函数$F(\lambda) = \mathrm{e}^{-t\lambda^2}$的Fourier逆变换.

中国科学技术大学2012-2013学年第二学期

数学分析(B2)第三次测验

1. (每小题10分)已知向量场$\boldsymbol{V}=(2xz,2yz^2,x^2+2y^2z-1)$.

(1)求$\boldsymbol{V}$的旋度$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}$；

(2)问$\boldsymbol{V}$是否是一个有势场？若是，求出$\boldsymbol{V}$的一个势函数.

2. (每小题15分)：

(1)求向量场$\boldsymbol{V}=(z,x,y)$沿曲线$\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t,a\sin t,at)$ $(t\in[0,2\pi])$的第二型曲线积分，t是曲线的正向参数；

(2)设曲面$S:\{z=a^2-x^2-y^2|x^2+y^2\leqslant a^2\}$，$S$的定向与$z$轴正向同向，求积分$\displaystyle\iint\limits_S\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，其中$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$.

3. (15分)设$a>b>0$，求椭圆盘$\{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\}$与椭圆盘$\{\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}\leqslant 1\}$公共部分的面积.

4. (15分)设f是$(0,+\infty)$上的光滑函数，向量场$\boldsymbol{V}=f(r)\boldsymbol{r}$，其中$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$r=|\boldsymbol{r}|$.

(1)证明$\boldsymbol{V}$是无旋场；

(2)若$\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}=0$，求$f$.

5. (10分)设$\boldsymbol{V}$是定义在区域$\Omega=\{(x,y,z):\dfrac{1}{4}<x^2+y^2+z^2<\dfrac{5}{4}\}$上的光滑向量场，曲面$S=\{x^2+y^2+z^2=1\}$，正向为外法向. 证明：$\displaystyle\iint\limits_S\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$.

6. (10分)设u是定义在$\mathbb{R}^3$上的光滑函数，$\boldsymbol{V}$是$\mathbb{R}^3$的光滑向量场；Ω是$\mathbb{R}^3$的一个有界区域，它的边界$S=\partial\Omega$是光滑曲面，并且函数u满足：$u(x,y,z)=$常数，$\forall(x,y,z)\in S$. 证明：

$$\iiint\limits_\Omega(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{grad}u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

中国科学技术大学2012-2013学年第二学期

数学分析(B2)第四次测验

1. (20分)将函数$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & 1\leqslant |x|<\pi\end{cases}$展开成Fourier级数，并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n}{n^2}$.

2. (20分)求函数$f(x)=\begin{cases}0, & |x|>1\\ 1, & |x|<1\end{cases}$的Fourier变换，并计算$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos\frac{x}{2}}{x}\mathrm{d}x$.

3. (15分)研究p的取值范围使得广义积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$绝对收敛、条件收敛；请说明原因.

4. (15分)设$f(x)$在$[0,1]$连续且$f(x)>0$，研究函数$g(y)=\displaystyle\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$的连续性.

5. (10分)计算(过程中要说明原因)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\cos x\mathrm{d}x$.

6. (10分)试利用Euler积分来计算$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

7. (10分)设

   (1)$f(x)$在$[a,+\infty)$上可微且单调下降趋于0；

   (2)$\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x<+\infty$；(3)$f'(x)$在$[a,+\infty)$ 上可积.

则$\displaystyle\int_a^{+\infty}xf'(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

中国科学技术大学2013-2014学年第二学期

数学分析(B2)第三次测验

1. (15分)求向量场$\boldsymbol{v} = (y, z, x)$沿曲线$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$，$t \in [0, 2\pi]$的曲线积分，$t$是曲线的正向参数，而$a, b$为正的常数.

2. (15分)计算积分$\iint\limits_{\Sigma} |y|\sqrt{z}\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为曲面$z = x^2 + y^2$ $(z \leqslant 1)$.

3. (20分)已知向量场$\boldsymbol{v} = (x^2 - 2yz, y^2 - 2xz, 3z^2 - 2xy - 1)$，判断：$\boldsymbol{v}$是否是一个保守场？若是，求出$\boldsymbol{v}$ 的一个势函数.

4. (20分)计算曲线积分$\displaystyle\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$，其中$L$是沿曲线$x^2 = 2(y+2)$从点$A(-2\sqrt{2}, 2)$到点$B(2\sqrt{2}, 2)$的一段.

5. (20分)设矢量$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，并记$r = |\boldsymbol{r}|$. 证明：

$$\iiint\limits_{\Omega} r^2 \mathrm{d}V = \frac{1}{5}\iint\limits_{S} r^2 \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S，$$

其中Ω是由闭曲面S所包围的不含原点的空间区域，$\boldsymbol{n}$是曲面S的单位外法向.

6. (10分)设$\Omega \subset \mathbb{R}^3$是有界闭区域，其边界$\partial\Omega$为光滑闭曲面，$\boldsymbol{n}$是$\partial\Omega$的单位外法向. 设光滑函数$u$是$\Omega$上的调和函数，且满足边界条件

$$\left[\alpha u + \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\bigg|_{\partial\Omega} = 0，$$

其中$\alpha \geqslant 0$为常数. 证明：u在Ω上恒为零.

中国科学技术大学2013-2014学年第二学期

数学分析(B2)第四次测验

1. (每小题8分)

(1)有限闭区间$[a,b]$上的可积且平方可积的函数一定是绝对可积的. 这个命题是否成立？如成立，请证明；否则给出反例.

(2)把函数$f(x)=x^3$在区间[1,2]上按周期1进行Fourier展开，那么得到的Fourier级数收敛域是什么？在这个收敛域上级数是否一致收敛？这个级数在$x=0$出的值是多少？

2. (30分)设$f(x)=|x|$，$x\in[-\pi,\pi]$.

(1)(5分)把f延拓到整个直线上，称为周期为2π的函数. 写出延拓后函数的定义.

(2)(10分)计算出$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上展开得到的Fourier级数.

(3)(5分)上述Fourier级数是否收敛？若收敛极限是什么？请说明理由.

(4)(10分)求下述两个级数的和：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$.

3. (10分)设f在$[-\pi,\pi]$上可导，f'可积且平方可积. 如果$f(-\pi)=f(\pi)$，证明：

$$\lim_{n\to+\infty}na_n=\lim_{n\to+\infty}nb_n=0，$$

其中a_n和b_n为f在$[-\pi,\pi]$上的Fourier系数.

4. (24分)考虑函数族：$N_1(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$ $\quad N_m(x)=\displaystyle\int_0^1 N_{m-1}(x-t)\mathrm{d}t,\ m\geqslant 2.$

(1)(10分)证明：$N_m(X)=\underbrace{N_1(x)*N_1(x)*\cdots*N_1(x)}_{m项}$，其中$*$表示卷积运算.

(2)(10分)给出$N_m(x)$的Fourier变换$F[N_m](\lambda)$.

(3)(4分)当$m=1,2,...$时，$F[N_m](\lambda)$经Fourier逆变换的结果是什么？请说明理由.

5. (20分)考虑函数$f(x)=\mathrm{e}^{-\beta x}$，其中$\beta>0$，$x>0$.

(1)(10分)计算出$f(x)$的Fourier正弦变换的表达式；

(2)(10分)利用上述结果，证明：当$\alpha>0,\beta>0$时

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\alpha\beta}.$$

中国科学技术大学2015-2016学年第二学期

数学分析(B2)第三次测验

1. (每小题10分)计算题：

(1)求第二型曲线积分$\oint_{L^+} y\mathrm{d}x+|y-x|\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$，其中$L^+$为球面$x^2+y^2+z^2=1$与球面$x^2+y^2+z^2=2z$的交线，其方向为与$z$轴正向满足右手法则.

(2)利用第二型曲线积分计算心脏线$x=a(2\cos t-\cos 2t), y=a(2\sin t-\sin 2t)$所围成的平面图形的面积.

(3)求第二型曲面积分

$$\iint\limits_{S^+}\big(f(x,y,z)+x\big)\mathrm{dyz}+\big(2f(x,y,z)+y\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\big(f(x,y,z)+z\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y，$$

其中$f(x,y,z)$为连续函数，S^+是平面$x-y+z=1$在第四象限部分的上侧.

(4)求第二型曲面积分$\iint\limits_{S^+}(x+y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S^+$为柱面$x^2+y^2=1$被平面$z=0$和$z=3$所截部分的外侧.

(5)求第二型曲面积分$\iint\limits_{S^+}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中$S^+$是有界光滑闭曲面的外侧，并且原点不在曲面$S^+$上.

2. (15分)已知$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是常向量，且$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(1,1,1)$，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$. 求向量场$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{b}$沿闭曲线$L^+$的环量，其中$L^+$为球面$x^2+y^2+z^2=1$与平面$x+y+z=0$的交线，其方向为与$z$轴正向满足右手法则.

3. (15分)设f,g为有连续导数的函数，$f(0)=g(0)=1$，且向量场$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\big(yf(x),f(x)+zg(y),g(y)\big)$是保守场，求出$f,g$以及向量场$\boldsymbol{F}(x,y,z)$的势函数.

4. (20分)设函数$\varphi(x)$有连续的导数，在围绕原点的任意逐段光滑的简单闭曲线C上，曲线积分$\oint_{C^+}\dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$的值为常数.

(1)设L^+为正向闭曲线$(x-2)^2+y^2=1$，在不求出$\varphi(x)$的情况下，求$\oint_{L^+}\dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

(2)求函数$\varphi(x)$.

(3)设C^+是围绕原点的正向光滑简单闭曲线，求$\oint_{C^+}\dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

中国科学技术大学2015-2016学年第二学期

数学分析(B2)第四次测验

1. (16分)判断下列积分是否收敛：

(1)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$　　　　(2)$\displaystyle\int_1^{+\infty}(\ln x)^2\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

2. (12分)证明：$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\cos\big((6k+1)x\big)}{6k+1}-\frac{\cos\big((6k+5)x\big)}{6k+5}\right)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right)\\ \dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}, & x=\dfrac{\pi}{3}\\ 0, & x\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)\\ -\dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}, & x=\dfrac{2\pi}{3}\\ -\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}, & x\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\pi\right]\end{cases}$.

3. (12分)判断下列积分是否关于$u>0$一致收敛：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ux)}{x}\mathrm{d}x$.

4. (20分)计算：

(1)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\cos x\mathrm{d}x$　　　　(2)$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+a^2x^2)-\ln(1+b^2x^2)}{x^2}\mathrm{d}x$

5. (20分)

(1)证明：$\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\cos(2ux)\mathrm{d}u=\begin{cases}1-x, & x\in[0,1]\\ 0, & x>1\end{cases}$.

(2)计算：$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x$.

6. (10分)计算极坐标下曲线$r^4=\sin^5\theta\cos^3\theta$所围成的区域面积.

7. (10分)计算e^{-x^2}的Fourier变换.

中国科学技术大学2012-2013学年第二学期

数学分析(B2)期末试卷

1. (15分)设$u = u(x, y)$，$v = v(x, y)$是由下面的方程

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + x^2 + y^2 = 1 \\ u + v + x + y = 0 \end{cases}$$

所确定的函数. 求$\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$.

2. (15分)计算积分$\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{\pi}} x^2 \sin(xy)\mathrm{d}x$.

3. (15分)计算抛物线$2x = y^2$与直线$y = 2x - 2$所围成的区域的面积.

4. (15分)求常数a使得向量场$\boldsymbol{F} = (x^2 + 5ay + 3yz, 5x + 3axz - 2, (a + 2)xy - 4z)$是有势场，并求出这时的势函数.

5. (15分)设α不是整数. 求$\cos \alpha x$在$[-\pi, \pi]$上的Fourier级数展开并证明

$$\frac{\cos \alpha\pi}{\sin \alpha\pi} = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{1}{2\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 - n^2}\Big).$$

6. (15分)求证$f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1 + (x + t)^2}\mathrm{d}t$在$0 \leqslant x < +\infty$有二阶连续导数且满足微分方程$f''(x) + f(x) = \dfrac{2x}{(1 + x^2)^2}$.

7. (10分)设D是xy平面上有限条逐段光滑曲线围成的区域，$f(x, y)$在$\overline{D}$上有二阶连续偏导数且满足方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a\frac{\partial f}{\partial x} + 2b\frac{\partial f}{\partial y} + cf,$$

其中a, b, c为常数且$c \geqslant a^2 + b^2$. 求证：若f在∂D上恒为零，则f在D上恒为零.

中国科学技术大学2013-2014学年第二学期

数学分析(B2)期末试卷

1. (20分)级数下列各题：

(1)计算$\mathbb{R}^3$上的向量场$V=(x^2+2y,z^3-2x,y^2+z)$的旋度和散度；

(2)计算二重积分$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$为$x^2+y^2=4\ (x,y>0)$，$x^2+y^2=1\ (x,y>0)$，与直线$y=x$和$x=0$所围成的闭区域.

2. (20分)已知螺旋面S的方程$\begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\sin v \\ z=v \end{cases}\quad(0\leqslant u\leqslant 5, 0\leqslant v\leqslant 2\pi)$，试求：

(1)过S上一点$M(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{3})$的切平面方程；

(2)计算曲线积分$\int_L \frac{z^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}l$，其中$L$是$S$上对应参数$u=5$的曲线.

3. (20分)试将函数$f(x)=\begin{cases} 1, & |x|\leqslant\frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2}<|x|\leqslant\pi \end{cases}$ 展开成Fourier级数，并求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

4. (20分)

(1)计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2}\mathrm{d}x$，其中常数$b>a>0$；

(2)利用欧拉积分计算$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$.

5. (20分)给定$\mathbb{R}^3$中n个固定点M_i，$i=1,2,...,n$，考察向量函数

$$F(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{grad}\Big(-\frac{\gamma_i}{4\pi r_i}\Big),$$

其中$\gamma_i>0$为正的常数，而r_i为点$M(x,y,z)$到固定的M_i的距离. 现在，已知光滑封闭曲面S所围成的区域的内部包含了这n个固定点. 试求：F穿过曲面S的流量.

中国科学技术大学2015-2016学年第二学期

数学分析(B2)期末试卷

1. (15分)设$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$是由下面的方程

$$\begin{cases} u^2+v^2+x^2+y^2=1 \\ u+v+x+y=0 \end{cases}$$

所确定的函数. 求$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

2. (15分)计算积分$\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{\pi}}x^2\sin(xy)\mathrm{d}x$.

3. (10分)设D是由直线$x=0$，$y=x$，$y=\frac{\pi}{2}$所围成的区域. 计算二重积分$\displaystyle\int_D\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

4. (15分)求第二型曲面积分$\displaystyle\iint_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中曲面$S$是上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$法向朝上.

5. (15分)求常数a使得向量场$\boldsymbol{F}=(x^2+5ay+3yz,5x+3axz-2,(a+2)xy-4z)$是有势场，并求出这时的势函数.

6. (15分)设$x_1,x_2,...,x_n$是正数，且$\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i=n$. 用Lagrange乘数法证明

$$\prod_{i=1}^n x_i\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}\leqslant n,$$

等号当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n=1$时成立.

7. (15分)求证$f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$在$0<x<+\infty$可导且满足微分方程

$$f(x)-f'(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

中国科学技术大学2016-2017学年第二学期

数学分析(B2)期末试卷

1. (12分)(1)设$z = f(x,y), x = u^2 + 2v^2, y = u\mathrm{e}^v$. 求$\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$.

(2)求方程组$x = \cos v + u\sin v, y = \sin v - u\cos v$所确定的反函数组的偏导数$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

2. (12分)设$a_j > 0, b_j > 0$ $(j = 1, 2, ..., n)$.

(1)用Lagrange乘数法求函数$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k x_k^2$在条件$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k = 1$ 之下的极值.

(2)由(1)的结论证明不等式$\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i^2}{b_i} \geqslant \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i\Big)^2$.

3. (12分)设$f(x)$有连续的导函数，$f(0) = 0$，且曲线积分$\int_C \big(\mathrm{e}^x + f(x)\big)y\mathrm{d}x + f(x)\mathrm{d}y$与路径无关. 求$\int_{(0,0)}^{(1,1)} \big(\mathrm{e}^x + f(x)\big)y\mathrm{d}x + f(x)\mathrm{d}y$.

4. (14分)设a, b, c是正数，求第二型曲面积分$\iint\limits_S (by^2 + cz^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (cz^2 + ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (ax^2 + by^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$是上半球面$x^2 + y^2 + z^2 = 1, (z \geqslant 0)$的上侧.

5. (12分)设a, b, c不全为零，L是球面$S: x^2+y^2+z^2 = R^2 (R > 0)$与平面$\Sigma: ax+by+cz = 0$的交线，其方向这样来定：质点在$L$上运动的正方向与平面$\Sigma$的法向$(a, b, c)$成右手系. 计算第二型曲线积分$\oint_L (bz + c)\mathrm{d}x + (cx + a)\mathrm{d}y + (ay + b)\mathrm{d}z$.

6. (18分)(1)求周期为2π的函数$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$ 的Fourier级数.

(2)求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$的和.　(3)由(1)的结论求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$的和.

7. (12分)证明：由含参变量的广义积分$F(t) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^2} \ln(1+tx)\mathrm{d}x$定义的函数$F(t)$是$[0, +\infty)$上的可导函数.

8. (8分)设D是由光滑封闭曲线L所围的区域，函数$f(x,y)$在$\overline{D}$上有二阶连续偏导数，且满足$\mathrm{e}^y \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \mathrm{e}^x \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$，并且$f$在$L$上恒为零.

(1)求证：存在有连续偏导数的函数$P(x,y), Q(x,y)$使得

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \mathrm{e}^y \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2 + \mathrm{e}^x \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2,\ (x,y) \in D;$$

(2)证明：f在D上恒为零.