第 9 章综合习题解答（部分）

1. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是非零常数. $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可微. 求证: 存在 $\mathbb{R}$ 上一元可微函数 $F(s)$ 使得 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)$ 的充分必要条件是 $a_j\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

证明 (必要性) 设有一元可微函数 $F(s)$ 使得

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n). \tag{1}$$

记 $s = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_iF'(s),\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

故

$$a_j\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_ia_jF'(s) = a_i\frac{\partial f}{\partial x_j},\ i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

(充分性) 作可逆线性变换 $(x_1, \cdots, x_n) \longrightarrow (t_1, \cdots, t_n)$

$$\begin{aligned} t_1 &= a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n, \\ t_2 &= a_2x_2 + \cdots + a_nx_n, \\ \cdots \\ t_n &= a_nx_n \end{aligned}$$

点评: 上述变换可逆是因为变换是关于$(x_1, \cdots, x_n)$ 的非齐次线性方程组, 系数行列式是上三角行列式, 斜对角线元素非零, 因此行列式非零. 方程有唯一解. 或者从 $(x_1, \cdots, x_n)$ 到 $(t_1, \cdots, t_n)$ 变换的矩阵是三角矩阵, 其中对角线元素 $a_1, \cdots, a_n$ 非零, 因此变换可逆.

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial t_i} a_k = a_k \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial t_i}, \; k = 1. \cdots, n$$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

由条件（不妨设 $l < k$）

$$a_l \frac{\partial f}{\partial x_k} = a_k \frac{\partial f}{\partial x_l},$$

推出

$$\sum_{i=l+1}^{k} \frac{\partial f}{\partial t_i} = 0, \quad 1 \leqslant l < k \leqslant n,$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t_i} = 0, i = 2, 3, \cdots, n$$

即 f 只依赖 t_1, 所以 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 可以表示为 t_1 的函数. 即存在 $F(s)$ 使得 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(t_1) = F(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

3. 若函数 $u=f(x,y,z)$ 满足恒等式 $f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)\,(t>0)$, 则称 $f(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数. 试证下述关于齐次函数的欧拉定理: 可微函数 $f(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数的充要条件是:

$$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=kf(x,y,z). \tag{1}$$

证明 $(\Longrightarrow)$ $f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$两边对 t 求导, 再令 $t=1$ 即可.

$(\Longleftarrow)$ 令 $F(t)=f(tx,ty,tz)$, 对 t 求导得

$$\begin{aligned}F'(t)&=xf'_1(tx,ty,tz)+yf'_2(tx,ty,tz)+zf'_3(tx,ty,tz)\\&=\frac{1}{t}(txf'_1(tx,ty,tz)+tyf'_2(tx,ty,tz)+tzf'_3(tx,ty,tz))\\&=\frac{k}{t}f(tx,ty,tz)=\frac{k}{t}F(t)\end{aligned}$$

解得$F(t)=Ct^k$, 令 $t=1$ 定出常数 $C=F(1)=f(x,y,z)$ 即可得结果.

点评: 一般来说, 若必要性求导可证, 则充分性可用积分.

5. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续二阶偏导数, 且对任意实数 x,y,z 满足 $f(x,y)=f(y,x)$ 和

$$f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)=3f\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right). \qquad (1)$$

试求 $f(x,y)$.

证明 记 $(u,v)=(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3})$. (1) 式两边对 x,y 求混合偏导数,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{1}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,v)+\frac{2}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(u,v)+\frac{1}{3}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u,v).$$

注意到上式左边与 z 无关. 因此取 $z=-x-y$, 因而 $(u,v)=(0,0)$. 故,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=A \text{ 是常数.}$$

点评: 混合偏导数为常数, 可先对 x 求原函数 (其积分常数虽与 x 无关, 但可依赖 y, 再对 y 求原函数, 积分常数可依赖 x.

分别对两个变量逐次求原函数 (不定积分) 并注意到积分常数对变量的

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

依赖性可知存在一元函数 g, h 使得

$$f(x,y)=Axy+g(x)+h(y).$$

由于 $f(x,y)=f(y,x)$. 可知 $g(x)=h(x)$. 因而

$$f(x,y)=Axy+g(x)+g(y). \tag{2}$$

于是

$$f(x,x)=Ax^2+2g(x). \tag{3}$$

在 (1) 中令 $z=0$, 得

$$f(x,y)+f(x,0)+f(y,0)=3f\left(\frac{x+y}{3},\frac{x+y}{3}\right). \tag{4}$$

由 (2) 得

$$f(x,0)=g(x)+g(0). \tag{5}$$

结合 (2),(4),(5) 可得

$$Axy+2g(x)+2g(y)+2g(0)=\frac{A}{3}(x+y)^2+6g\left(\frac{x+y}{3}\right). \tag{6}$$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

对此式关于变量 x 求二阶导数, 得

$$2g''(x) = \frac{2A}{3} + \frac{2}{3}g''\left(\frac{x+y}{3}\right).$$

再取 $y = 2x$, 得

$$g''(x) = \frac{A}{2}.$$

于是

$$g(x) = \frac{A}{4}x^2 + C_1x + C_2,$$

这里 C_1, C_2 是常数. 将上式代入 (2), 可得

$$f(x,y) = a(x^2 + 4xy + y^2) + b(x+y) + c,$$

这里 $a = \frac{A}{4}$, $b = C_1$, $c = 2C_2$ 都是常数.

6. 证明不等式 $\frac{x^2+y^2}{4} \leqslant \mathrm{e}^{x+y-2}$ $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$.

证明 令 $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x-y}$, $x \geqslant 0, y \geqslant 0$. 则 f 连续可导, 在第一象限非负, 且

$$\lim_{x\to+\infty, y\to+\infty} f(x,y) = 0.$$

于是 $f(x,y)$ 在第一象限可取到最大值.

若最大值在第一象限内部取到, 则最大值点是驻点满足

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2x - x^2 - y^2)e^{-x-y} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2y - x^2 - y^2)e^{-x-y} = 0,$$

解得第一象限内部的唯一驻点为 $(1,1)$.

在边界 x 轴上, 有 $f(x,0) = x^2e^{-x}$, 它在 $x = 2$ 取最大值. 在边界 y 轴上, 有 $f(0,y) = y^2e^{-y}$, 它在 $y = 2$ 取最大值. 由于 $f(1,1) = 2e^{-2}$,

$f(2,0)=f(0,2)=4e^{-2}$. 这说明, $f(x,y)$ 在第一象限的最大值为 $4e^{-2}$. 故,

$$(x^2+y^2)e^{-x-y} \leqslant 4e^{-2}.$$

即,

$$\frac{x^2+y^2}{4} \leqslant e^{x+y-2}.$$

点评: 1、极值方法是求证不等式的一个常用方法. 2、最值问题不但要求出区域内部极值点, 还要考虑边界上的极值问题, 综合所有内部和边界极值综合考虑.

||◄ ►|| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

7. 设在 $\mathbb{R}^3$ 上定义的 $u = f(x,y,z)$ 是 z 的连续函数, 且 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续. 证明 u 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续.

证明 任给 $M_0(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在M_0 一个闭邻域 (如闭单位球 $B = \overline{B(M_0,1)}$) 上连续, 故有界. 即存在常数 $C > 0$ 使得

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(P)\right| \leqslant C, \left|\frac{\partial f}{\partial y}(P)\right| \leqslant C,\ P \in B.$$

当 $(x,y,z) \in B$, 时, 由微分中值定理, 存在 $\theta, \eta \in (0,1)$ 使得

$$f(x,y,z) - f(x_0,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta(x - x_0), y, z)(x - x_0),$$
$$f(x_0,y,z) - f(x_0,y_0,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \eta(y - y_0), z)(y - y_0).$$

于是

$$\begin{aligned}|f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0)| &= |f(x,y,z) - f(x_0,y,z) + \\ &\quad f(x_0,y,z) - f(x_0,y_0,z) + f(x_0,y_0,z) - f(x_0,y_0,z_0)| \\ &\leqslant C|x - x_0| + C|y - y_0| + |f(x_0,y_0,z) - f(x_0,y_0,z_0)|.\end{aligned}$$

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

因为 $f(x_0,y_0,z)$ 关于 z 连续, 所以对任意 $\varepsilon>0$, 存在 δ_1 , 当 $|z-z_0|<\delta_1$ 时, 有

$$|f(x_0,y_0,z)-f(x_0,y_0,z_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

取 $\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{3C},\delta_1,1\}$, 则当

$$|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta,\ |z-z_0|<\delta,\ \text{(方形邻域)}$$

就有

$$|f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)|<\varepsilon.$$

由于点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的任意性, 推出函数在 $\mathbb{R}^3$ 上连续.

点评: 1、连续性是局部概念, 因此只要在任意一点邻域内考虑即可. 2、多变量函数连续性, 必须按照定义证明. 不能因为 $f(x,y,z)$ 对 z 连续, 对x,y 有偏导（当然对 x,y 分别连续）就推出函数连续. 2、在证明中, 充分利用了函数对某个变量的性质.

8. 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是包含原点的凸区域, $f \in C^1(D)$. 若

$$x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0,\ \ ((x,y) \in D),$$

则 $f(x,y)$ 是常数.

证明 因为 D 是包含原点的凸区域, 对于 $(x,y) \in D$ 及 $t \in [0,1]$, 有 $(tx,ty) \in D$. 令 $\varphi(t) = f(tx,ty)$. 则 φ 在 $[0,1]$ 可导, 且

$$\varphi'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = 0.$$

这说明 φ 是常数. 故, $\varphi(1) = \varphi(0)$. 即, $f(x,y) = f(0,0)$.

点评: 1、包含原点的凸区域 D, 意味着连接任何一点 (x,y) 到原点的直线段都在D 内, 该直线段上的点 (u,v) 表示为 $(0+tx, 0+ty) = (tx.ty)$, 其中, $0 < t < 1$.

9. 设 $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $f(0,0)=0$. 证明: 存在 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数 g_1, g_2 使得

$$f(x,y) = xg_1(x,y) + yg_2(x,y).$$

分析: 因为

$$f(x,y) = f(x,y) - f(0,0) = f(x,y) - f(0,y) + f(0,y) - f(0,0),$$

如果分别用微分中值公式:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x,y) - f(0,0) = f(x,y) - f(0,y) + f(0,y) - f(0,0) \\ &= f'_x(\theta_1 x, 0)x + f'_y(0, \theta_2 y)y, \end{aligned}$$

虽然 θ_1, θ_2 分别存在, 但是具体形式并不清楚. 因此不能用中值公式!

继续分析看出

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x,y) - f(0,0) = f(x,y) - f(0,y) + f(0,y) - f(0,0) \\ &= \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x}x + \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y}y \end{aligned}$$

但是两个函数 $\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}$, $\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}$ 分别在 $x=0$ 和 $y=0$ 没有定义. 因此需要补充定义, 使其分别在 $x=0$ 和 $y=0$ 不但有定义. 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=f'_x(0,y),\ \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{x}=f'_y(0,0)$$

因此补充定义值应该是极限值, 为此构造两个在 $\mathbb{R}^2$ 上函数

$$g_1(x,y)=\begin{cases}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}, & x\neq 0,\\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,y), & x=0\end{cases}$$

$$g_2(x,y)=\begin{cases}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}, & y\neq 0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0), & y=0\end{cases}$$

由 $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$, 可知 g_1, g_2 都是连续函数. 显然有

$$f(x,y)=f(x,y)-f(0,0)=xg_1(x,y)+yg_2(x,y).$$

点评: 此题的条件可减弱为: $f\in C(\mathbb{R}^2)$ 在 $(0,0)$ 可微且 $f(0,0)=0$. 证明如下:

由 f 在 $(0,0)$ 可微及 $f(0,0)=0$, 知

$$f(x,y)=ax+by+R(x,y),$$

其中 $a=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $b=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

$$R(x,y)=f(x,y)-ax-by$$

是 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ 的高阶无穷小量:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{R(x,y)}{\rho}=0,$$

取

$$g_1(x,y)=\begin{cases} a+\frac{x(f(x,y)-ax-by)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ a, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$g_2(x,y)=\begin{cases} b+\frac{y(f(x,y)-ax-by)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ b, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$g_1(x,y)$ 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 显然连续, 在 $(0,0)$ 处有

$$\lim_{\rho\to 0} g_1(x,y)=\lim_{\rho\to 0}\left(a+\frac{xR(x,y)}{\rho^2}\right)$$

因 $\frac{|x|}{\rho}\leqslant 1$, $R(x,y)=o(\rho)$, 所以上述极限为

$$\lim_{\rho\to 0} g_1(x,y)=\lim_{\rho\to 0}\left(a+\frac{xR(x,y)}{\rho^2}\right)=a=g_1(0,0)$$

即 $g_1(x,y)$ 在 $(0,0)$ 也连续. 同理可证 $g_2(x,y)$ 连续.

因此无论是 $(x,y)\neq(0,0)$ 还是 $(x,y)=(0,0)$ 都可验证

$$f(x,y)=xg_1(x,y)+yg_2(x,y).$$

10. 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域 U 上有定义, $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 U 上存在. 求证: 若 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 中有一个在 (x_0,y_0) 处连续, 则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微.

证明 不妨设 $f'_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. 本题目标是要证明

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(x_0,y_0) &= f(x,y)-f(x_0,y)+f(x_0,y)-f(x_0,y_0) \\ &= f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+o(\rho). \end{aligned}$$

因为 $f'_x(x,y)$ 连续, 因此在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$f(x,y)-f(x_0,y)=f'_x(x_0+\theta(x-x_0),y)(x-x_0)\to f'_x(x_0,y_0).$$

但是$f'_y(x,y)$ 不知道是否连续, 因此对 $f(x_0,y)-f(x_0,y_0)$ 不能采用类似办法. 但可以用下列函数代替

$$g(y)=\begin{cases} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}, & y\neq y_0 \\ f'_y(x_0,y_0), & y=y_0. \end{cases}$$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

因此当 $y \neq y_0$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
&f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x,y)-f(x_0,y)+f(x_0,y)-f(x_0,y_0)\\
&=f'_x(x_0,\theta(x-x_0),y)(x-x_0)+g(y)(y-y_0)\\
&=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\\
&\quad+\left[f'_x(x_0+\theta(x-x_0),y)-f'_x(x_0,y_0)\right](x-x_0)\\
&\quad+\left[g(y)-f'_y(x_0,y_0)\right](y-y_0).
\end{aligned}
$$

当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时, 上式右端的中括号都趋于零, 因此是 ρ 的无穷小量, 所以

$$
f(x,y)-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+o(\rho),
$$

其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. 这说明 f 在 (x_0,y_0) 可微.

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

11. 设 $u(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上取正值且有二阶连续偏导数. 证明 u 满足方程

$$uu''_{xy} = u'_x u'_y \tag{1}$$

的充分必要条件是存在一元函数 f 和 g 使得 $u(x,y) = f(x)g(y)$.

证明 若 $u(x,y) = f(x)g(y)$, 则易知 (1) 成立.

反之, 若 (1) 成立, 则由 (1) 得

$$\frac{u''_{xy}}{u'_x} = \frac{u'_y}{u}$$

$$\Longrightarrow \frac{(u'_x)'_y}{u'_x} = \frac{u'_y}{u}$$

因此解得

$$\ln u'_x = \ln u + C(x) \Longrightarrow u'_x = u\mathrm{e}^{C(x)}$$

$$\Longrightarrow \ln u(x,y) = \int_0^x \mathrm{e}^{C(t)}\mathrm{d}t + C_1(y)$$

于是得到结果. 但是: 为了避免 u'_x 出现零的情况, 因 $u(x,y) > 0$,

令 $\Phi = \frac{u'_y}{u}$

$$\Phi'_x = \frac{1}{u^2} \cdot \left(uu''_{xy} - u'_y u'_x\right) = 0.$$

因而 Φ 与 x 无关, 它仅是 y 的函数: $\Phi = \Phi(y)$. 由$\Phi(y) = \frac{u'_y}{u}$ 对 y 积分得

$$\ln u = \int_0^y \Phi(t)\mathrm{d}t + C_1(x) \Longrightarrow u(x,y) = \mathrm{e}^{\int_0^y \Phi(t)\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{C_1(x)}$$

即 $u(x,y)$ 可表示为 $u(x,y) = f(x)g(y)$ 的形式.

13. 设 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上有一阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}$. 如果 $f(x,0,0)>0$ 对任意的 $x\in\mathbb{R}$ 成立, 求证: 对任意的 $(x,y,z)\in\mathbb{R}$, 也有 $f(x,y,z)>0$.

证明 根据三元函数中值定理, 存在连接 (x,y,z) 和 $(x+y+z,0,0)$ 的线段上一点 $P(\xi,\eta,\zeta)$, 使得

$$f(x,y,z)-f(x+y+z,0,0)=(-y-z)f'_x(P)+yf'_y(P)+zf'_z(P).$$

由于三个偏导数相等, 可知 $f(x,y,z)=f(x+y+z,0,0)>0$.

点评: 若采取 $f(x,y,z)-f(x,0,0)=f(x,y,z)-f(x,y,0)+f(x,y,0)-f(x,0,0)$ 再分别用中值公式, 则得不到所要结果, 所以必须采用多变量函数的中值公式.

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

14. 求函数 $f(x,y)=x^2+xy^2-x$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$ 上的最大值和最小值.

分析：这是一个求最值的问题，因此不但要考虑内部所有极值点，还要考虑函数在边界$\partial D=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ 上的所有极值点. 而边界上的问题实际上是一个条件极值问题. 好在在圆周上 $y^2=1-x^2$，因此函数在圆周上有显式表示 $f(x,y)=h(x)=-x^3+x^2+x$，一般情况下，应作为条件极值考虑.

证明 首先，f 在 D 上的最大值是存在的. 若最值点在内部，则它是驻点. 令 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, 可得 f 的驻点为 $(0,\pm 1)$, $(\frac{1}{2},0)$. 因为 $f(0,1)=f(0,-1)=0$, $f(\sqrt{2},0)>0$, $f(\frac{1}{2},0)=-\frac{1}{4}<0$, 所以 $(0,1)$ 和 $(0,-1)$ 不是 f 在 D 上的最值点.

在圆周 $x^2+y^2=2$ 上，

$$f(x,y)=h(x)=-x^3+x^2+x.$$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

它有驻点 $x=1$ 和 $x=-\frac{1}{3}$. 因为 $h(1)=1, h(-\frac{1}{3})=-\frac{2}{27}$. 又 $h(\sqrt{2})=2-\sqrt{2}$, $h(-\sqrt{2})=2+\sqrt{2}$. 所以 f 在 $(-\sqrt{2},0)$ 取最大值 $2+\sqrt{2}$, 在 $(\frac{1}{2},0)$ 取最小值 $-\frac{1}{4}$.

15. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是正数, 且 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$. 用 Lagrange 乘数法证明

$$x_1 x_2 \cdots x_n \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \leqslant n, \tag{1}$$

等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ 时成立.

证明 当 $n = 1, 2$ 时, (1) 式成为等式, 无需证明. 设 $n \geqslant 3$. (1) 式左端

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)$$

是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 $n-1$ 次多项式, 在条件 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是正数, 且 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$ 的条件下, f 有最大值. 因为当 $x_1, \cdots, x_n$ 都为正数时, f 取正值. 当某变量如 $x_1 = 0$ 时, 由均值不等式, 有

$$f = x_2 \cdots x_n \leqslant \left(\frac{x_2 + \cdots + x_n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e < n.$$

而 $f(1,1,\cdots,1)=n$. 故, f 的最大值在内部 (即, 所有 x_i 为正的点) 取到. 设

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_n)-\lambda(x_1+\cdots,x_n-n).$$

令 $\frac{\partial F}{\partial x_i}=0,\ i=1,2\cdots,n$. 得

$$\frac{x_1\cdots x_n}{x_i}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)+x_1\cdots x_n\left(-\frac{1}{x_i^2}\right)-\lambda=0,$$

$i=1,2,\cdots,n$. 若 $x_1\neq x_2$, 则将前两个这样的式子相减, 可得

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}.$$

当 $n>2$ 时此式不成立. 因而 $x_1=x_2$. 一般可得 $x_1=x_2=\cdots=x_n$. 注意到 $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$. 可知 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$. 故, $(1,1,\cdots,1)$ 是唯一的驻点. 该点只能是最大值点. 于是在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正数, 且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ 时, f 的最大值是 n.