中 国 科 学 技 术 大 学
2020 - 2021学年第一学期期末考试试卷

装订线　答题时不要超过此线

考试科目：　线性代数B(1)　　　得分：________

学生所在院、系：________ 姓名：________ 学号：________

一、 填空题:【共25分,每空5分】

1. 方阵$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的特征值是$\underline{\quad \sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ 2 \quad}$.

2. 3阶实对称矩阵组成的集合恰有$\underline{\quad 10 \quad}$个相合等价类.

3. 实二次型$Q(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum\limits_{1\le i<j\le 4}(x_i-x_j)^2$的正惯性指数等于$\underline{\quad 3 \quad}$.

4. 设R^3中的线性变换$\mathscr{A}$满足$\mathscr{A}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$,其中$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$是$R^3$中任意的向量.则$\mathscr{A}$在自然基下的矩阵是$\underline{\quad \mathrm{diag}(1,0,1) \quad}$.

5. 设$\mathscr{A}$是n维欧氏空间V上的线性变换: $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}$,其中$\boldsymbol{\gamma}$是$V$中给定的单位向量.则$\mathscr{A}$的$n$个特征值为$\underline{\quad -1,\ 1(n-1\text{重}) \quad}$.

二、 判断题.【25分, 每题5分】.判断结论正确与否,并简要说明理由.

1. n维线性空间V中同一个线性变换在两组不同的基下的矩阵彼此相合.

答: 错，n维线性空间V中同一个线性变换在两组不同的基下的矩阵彼此相似.

2. 任何一个n阶实方阵都实相似于上三角矩阵.

答: 错, 因为实方阵的特征值未必是实数.

3. 每一个正交矩阵都正交相似于对角矩阵.

答: 错, 因为正交方阵的特征值未必是实数.

4. 设A, B都是n阶实方阵.若A可逆，则AB与BA相似.

答: 正确. 因为$A^{-1}(AB)A = BA$.

5. 设A是n阶实对称方阵,若A的每一个顺序主子式都是非负的,则A半正定.

答: 错, 例如$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

三、【12分】设$\mathbb{R}^3$的线性变换$\mathscr{A}$将$\alpha_1 = (2,\ 3,\ 5)^T$,$\alpha_2 = (0,\ 1,\ 2)^T$,$\alpha_3 = (1,\ 0,\ 0)^T$ 变换为$\beta_1 = (1,\ 2,\ 0)^T, \beta_2 = (2,\ 4,\ -1)^T, \beta_3 = (3,\ 0,\ 5)^T$.

(1) 求$\mathscr{A}$在基$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$下的矩阵;　(2) 求$\mathscr{A}$在自然基下的矩阵.

解: 令

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P.$$

所以$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

再令

$$\mathscr{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A,$$

即$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A$. 从而$A = P$.

最后令

$$\mathscr{A}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)B.$$

所以

$$B = P^{-1}AP = P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -5 \\ -10 & -23 & 15 \\ -7 & -16 & 13 \end{pmatrix}$$

(2)令$\mathscr{A}$在自然基下的矩阵是M, 从而

$$M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

所以

$$M = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 20 & 11 \\ 0 & -16 & 10 \\ 5 & -15 & 7 \end{pmatrix}.$$

四、【16分】设V是3维欧几里得空间,由基α_1, α_2, α_3给出的度量矩阵G为

$$G=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 10 & -2\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

请由α_1, α_2, α_3按现在的顺序进行Schmidt正交化给出一组标准正交基.

解: 先作Schmidt正交化: 令

$$\begin{aligned}\beta_1 = &\ \alpha_1,\\ \beta_2 = &\ \alpha_2-\tfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2-\tfrac{0}{1}\beta_1=\alpha_2,\\ \beta_3 = &\ \alpha_3-\tfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\tfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2\\ = &\ \alpha_3-\tfrac{1}{1}\beta_1-\tfrac{-2}{10}\beta_2\\ = &\ -\alpha_1+\tfrac{1}{5}\alpha_2+\alpha_3.\end{aligned}$$

再单位化: 令

$$\begin{aligned}\eta_1 = &\ \tfrac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\tfrac{1}{1}\alpha_1=\alpha_1,\\ \eta_2 = &\ \tfrac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\tfrac{1}{\sqrt{10}}\alpha_2,\\ \eta_3 = &\ \tfrac{1}{|\beta_3|}\beta_3.\end{aligned}$$

由于

$$(\beta_3,\beta_3)=(-1,\frac{1}{5},1)G(-1,\frac{1}{5},1)^T=\frac{3}{5},$$

所以

$$\eta_3=\sqrt{\frac{5}{3}}(-\alpha_1+\frac{1}{5}\alpha_2+\alpha_3)=-\frac{\sqrt{15}}{3}\alpha_1+\frac{\sqrt{15}}{15}\alpha_2+\frac{\sqrt{15}}{3}\alpha_3.$$

于是求得V的一个标准正交基: α_1, $\frac{\sqrt{10}}{10}\alpha_2$, $-\frac{\sqrt{15}}{3}\alpha_1+\frac{\sqrt{15}}{15}\alpha_2+\frac{\sqrt{15}}{3}\alpha_3$.

五、 【12分】给定二次曲面在直角坐标系下的方程是

$$2x^2+6y^2+2z^2+8xz=1.$$

将它通过正交变换化为标准方程，并指出这曲面的类型.

解 令

$$A=\begin{pmatrix}2&0&4\\0&6&0\\4&0&2\end{pmatrix}.$$

从$\det(\lambda I-A)=0$解出的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=6,\lambda_3=-2$.

对特征值6，求出$(6I-A)X=0$一个基础解系$X_1=(0,1,0)^T$, $X_2=(1,0,1)^T$.

对特征值-2，求出$(-2I-A)X=0$的一个基础解系$X_3=(1,0,-1)$.

令

$$P=\begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\1&0&0\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{pmatrix}.$$

令

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}.$$

则在新的坐标系中，曲面的方程为$6u^2+6v^2-2w^2=1$, 这是单叶双曲面.

六、【10分】设A, B是两个n阶实对称矩阵, 满足条件$AB = BA$. 求证: 存在n阶正交方阵P,使得P^TAP与P^TBP 都是对角矩阵.

证 因为A是n阶实对称矩阵，所以存在n阶正交矩阵P_1,使得

$$P_1^TAP_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \lambda_2 I_{n_2}, \cdots, \lambda_m I_{n_m}),$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$是$A$的全部不同的特征值. 由于$AB = BA$,所以

$$(P_1^TAP_1)(P_1^TBP_1) = (P_1^TBP_1)(P_1^TAP_1).$$

从而不难明白

$$P_1^TBP_1 = \mathrm{diag}(B_1, B_2, \cdots, B_m),$$

其中B_i是n_i阶实对称矩阵,$i = 1, 2, \cdots, m$. 于是存在n_i阶正交矩阵T_i,使得$T_i'B_iT_i$为对角矩阵,$i = 1, 2, \cdots, m$. 令$P = P_1P_2$,其中

$$P_2 = \mathrm{diag}(T_1, T_2, \cdots, T_m).$$

显然P_2是, 从而P也是n阶正交矩阵,且

$$\begin{aligned} P^TAP &= P_2^TP_1^TAP_1P_2 = P_2^T\mathrm{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \lambda_2 I_{n_2}, \cdots, \lambda_m I_{n_m})P_2 \\ &= \mathrm{diag}(T_1'(\lambda_1)I_{n_1}, T_2'(\lambda_2)I_{n_2} \cdots, T_m'(\lambda_m)I_{n_m}) \\ &= \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \lambda_2 I_{n_2}, \cdots, \lambda_m I_{n_m}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^TBP &= P_2^TP_1^TBP_1P_2 = P_2^T\mathrm{diag}(B_1, B_2, \cdots, B_m)P_2 \\ &= \mathrm{diag}(T_1'B_1T_1, T_2'B_2T_2, \cdots, T_m'B_mT_m). \end{aligned}$$

即P^TAP与P^TBP都是对角矩阵.