第十次作业反馈

参考解答与错误分析

Ch6 15

由线性代数知识知：$\forall A, B \in G, |AB| = |A||B|$,即$\forall f(AB) = f(A)f(B)$,故$f$为同态映射.

$$f(G) = \mathbb{Q}^*$$

$$Ker\ f = \{A \in G|\ |A| = 1\} = SL_n(\mathbb{Q})$$

注：$f(G)$指f的值域，以及不要像"$\{|A| \mid A \in (\mathbb{Q})_n, |A| \neq 0\}$"一样把值域的定义抄一遍，而是要计算出来。

Ch6 17

"$\Leftarrow$":

若$\exists \varphi : G \to G'$是同态映射且$\varphi(a) = b^k$,则

$$b^{nk} = (\varphi(a))^n = \varphi(a^n) = \varphi(e_G) = e_{G'}$$

而m为循环群$G' = \langle b \rangle$的阶,故$m|nk$

"$\Rightarrow$":

若$m|nk$,则取$\varphi : G \to G', \varphi(a^i) = b^{ik}$, $i = 0, 1, ..., n-1$,由于

$$\forall a^i, a^j \in G, \varphi(a^i * a^j) = \varphi(a^{i+j}) = b^{(i+j)k} = b^{ik} * b^{jk} = \varphi(a^i) * \varphi(a^j)$$

故φ即为所求同态映射.

Ch6 18

考虑同态映射$f : G \to G/H, f(g) = Hg(\forall g \in G)$,

由于$|G/H| = [G : H] = m$,故$\forall x \in G, Hx$作为G/H中的元素,其阶整除m,

故$(Hx)^m = H$,即$Hx^m = H$,进而$x^m \in H$.

Ch6 20

(1)由于有限个换位元乘积的乘积仍为有限个换位元的乘积,故G'关于G中运算具有封闭性，且$\forall \prod\limits_{i=1}^{n}(a_i' * b_i' * a_i * b_i) \in G'$,有

$$(\prod_{i=1}^{n}(a_i' * b_i' * a_i * b_i))' = \prod_{j=n}^{1}(b_j' * a_j' * b_j * a_j) \in G'$$

故$G' \leq G$.

又由于$\forall g \in G, \prod_{i=1}^{n}(a_i' * b_i' * a_i * b_i) \in G'$,都有

$$g' * (\prod_{i=1}^{n} a_i' * b_i' * a_i * b_i) * g = \prod_{i=1}^{n}((g' * a_i * g)' * (g' * b_i * g)' * (g' * a_i * g) * (g' * b_i * g)) \in G'$$

故$G' \lhd G$.

(2)即需证明$\forall g, h \in G, gG' \cdot hG' = hG' \cdot gG'$,即只需证明$g * h \in (h * g)G'$.事实上,由于$g' * h' * g * h \in G'$且$g * h = (h * g) * (g' * h' * g * h)$,上式成立.

(3)由于G'由换位元生成，只需证明符合条件的N包含G的所有的换位元：因为G/N为交换群，所以$\forall a, b \in G, (a * b)N = (b * a)N$,故$a' * b' * a * b = (b * a)' * (a * b) \in N$,证毕.

注：这题有些同学误以为(1)中的子集G'是换位元的集合(然后封闭性当然没法证了……)；以及老师上课强调过要证正规子群首先需要证明它是一个子群。

Ch7 3

因为$\langle R, + \rangle$是循环群,可设生成元为a,从而R中元素都可表示为“ia”形式(即i个a相加),故$\forall ia, ja \in R, (ia) \cdot (ja) = (a + ... + a)(a + ... + a)$(第一个括号$i$个，第二个括号$j$个)$= a^2 + ... + a^2$($ij$个)$= (ja) \cdot (ia)$,即$\langle R, +, \cdot \rangle$为交换环.

Ch7 5

(1)不是整环(故也不是域),因为$(0, 1) \cdot (1, 0) = (0, 0) = 0_R$

(2)是整环,不是域(容易验证没有零因子:假设$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = 0$,则$ad = -bc$(使得$\sqrt{2}$的系数为0),故$a^2 - 3b^2 = 0$,显然没有整数解,即零因子不存在,故是整环,而“$0 + 1\sqrt{2}$”没有逆元,故不是域)

(3)是域(故自然是整环):

由于任意非零元素$a + b\sqrt{3}$有逆元$\frac{1}{a^2 - 3b^2}(a - b\sqrt{3})$ (由于$a, b \in \mathbb{Q}$且a, b不全为0,我们有$a^2 - 3b^2 \neq 0$), 故为域.
