# 关于利用Euler函数计算积分的例题

求下列积分的值：
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^8)^2}.$$

有同学对如何利用Euler积分计算积分的问题吃不准, 这里以本题为例. 这题是一个有理函数的广义积分, 表面上看, 与Euler积分毫无关系, 如果用求有理函数原函数方法计算, 会困难重重.

**解** 做变换 $u=x^8$, 或 $x=u^{1/8}$, 因此 $\mathrm{d}x=\frac{1}{8}u^{1/8-1}\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^8)^2}&=\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}\frac{u^{1/8-1}}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{8}\mathrm{B}\left(\frac{1}{8},\frac{15}{8}\right)=\frac{1}{8}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{15}{8}\right)}{\Gamma(2)}\\&=\frac{1}{8}\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{7}{8}+1\right)=\frac{7}{64}\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)\\&=\frac{7}{64}\Gamma\left(\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{64}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{8}}.\end{aligned}$$

这里用到了B 函数的另一种表示：
$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{u^{q-1}}{(1+u)^{p+q}}\,\mathrm{d}u.$$

这个表示如果记不住, 可通过变换
$$t=\frac{1}{1+u},\Longrightarrow 1-t=\frac{u}{1+u},\quad \mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2},$$

直接推导出来. 最后, 通过
$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

算出
$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

代入,即可的最后结果.