中　国　科　学　技　术　大　学
2018 - 2019学年第一学期期中考试试卷

考试科目：　　线性代数B　　　　得分：____________

所在院、系：____________　姓名：__________　学号：____________

装订线　答题时不要超过此线

一、填空题：【共30分,每空5分】

1. 设$\mathbf{A}$为三阶矩阵, 将$\mathbf{A}$的第二列加到第一列得矩阵$\mathbf{B}$, 再交换$\mathbf{B}$的第二行与第三行得到矩阵$\mathbf{C}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 则$\mathbf{C}$与$\mathbf{A}$的关系为____________（矩阵等式）.

2. 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$均为3维列向量，记矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$$

如果$|A| = 1$，则$|B| =$ ________.

3. 设矩阵$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ e & 0 & 0 \end{pmatrix}$可逆，则其逆矩阵为____________.

4. 设$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*$分别为$\mathbf{A}, \mathbf{B}$的伴随矩阵, 若$|\mathbf{A}| = 2$, $|\mathbf{B}| = 3$, 则分块矩阵$\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$的伴随矩阵为____________.

5. 从$\mathbb{R}^2$的基$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$到基$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$的过渡矩阵为____________.

6. 设$\alpha_1=(1,2,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_3=(2,1,1,a)^{\mathrm{T}}$, 若由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 所生成的向量空间的维数为2, 则$a=$ _____.

二、【20分】判断题：判断下列命题是否正确。正确的请简要说明理由，错误的请举出反例。

1. 设矩阵$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，若$\mathbf{AB}=\mathbf{C}$ 且$\mathbf{B}$ 可逆, 则$\mathbf{C}$ 的行向量与矩阵$\mathbf{A}$ 的行向量等价.

2. 若线性方程组有唯一解，则可用Cramer法则求解.

3. $\mathbb{R}^n$中向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$生成的子空间维数比向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$生成的子空间维数小，则$s\le t$.

4. V是$\mathbb{R}$上所有n阶奇异方阵的全体；V是定义加法为矩阵的加法，数乘为矩阵的数乘. 则V可构成线性空间.

三、【12分】矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&2&3\\1&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$，求矩阵$\mathbf{A}$的行列式和逆矩阵.

四、【14分】设$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$, $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

(1) 求满足$\mathbf{A}\xi_2=\xi_1$, $\mathbf{A}^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量ξ_2,ξ_3;

(2) 对(1) 中的任意向量ξ_2,ξ_3, 证明ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

五、【12分】设$\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{4\times 3}$, η_1,η_2,η_3 是非齐次线性方程组$\mathbf{Ax}=\beta$ 的三个线性无关的解, 求$\mathbf{Ax}=\beta$ 的通解.

六、【12分】$\mathbf{A}=\mathbf{P}^{-1}diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\mathbf{P}$, 其中$\mathbf{P},\mathbf{A}$都是$\mathbb{R}$上$n$阶方阵, $\{\lambda_i\}_{1\le i\le n}$两两不等. $V=\{\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}:\mathbf{AB}=\mathbf{BA}\}$.

(1)证明：V构成$\mathbb{R}$上线性空间(加法与数乘分别是矩阵的加法与数乘).

(2)求V的基与维数.