§0.1 第9章复习

一、连续

定义 设 f 在平面点集 D 有定义, $M_0(x_0, y_0) \in D$. 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $M(x, y) \in D$ 满足

$$\rho(M, M_0) < \delta, \text{ 或 } M \in D \cap B(M_0, \delta)$$

时, 有

$$|f(M) - f(M_0)| = |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

则称 f 在 M_0连续. 如果 f 是向量值函数, 只要将$|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$ 换成 $\rho(f(M), f(M_0))$ 即可.

关键点: 邻域! 在有度量的空间, 邻域可由距离给出. 例如值域中邻域是开区间, 由$f(M)$ 到 $f(M_0)$ 的距离给出. (x_0, y_0) 的邻域由到该点距离不超过 δ 给出. 当然也可以用任意邻域 (如方形邻域) 代替.

说明: 对 D 中孤立点 $M_0(x_0, y_0)$ 当然也满足定义, 因此也可看成是连续点, 一般只考虑 $M_0 \in D$ 且是 D 的聚点.

二、复合函数的连续性

设 $z=f(u,v)$ 在(u_0,v_0) 连续, $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 在(x_0,y_0) 连续, $u_0=u(x_0,y_0),v_0=v(x_0,y_0)$, 则 $z=f(u(x,y),v(x,y))$ 在(x_0,y_0) 连续.

证明 $\forall\varepsilon>0$, 根据 $z=f(u,v)$ 在(u_0,v_0) 连续, 因此存在$\delta'>0$, 使得当 $|u-u_0|<\delta',|v-v_0|<\delta'$ 时有

$$|f(u,v)-f(u_0,v_0)|<\varepsilon$$

对于 $\delta'>0$, 由 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 在(x_0,y_0) 连续性知, $\exists\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(u(x,y),v(x,y))-f(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0))|=|f(u,v)-f(u_0,v_0)|<\varepsilon.$$

其中 $u_0=u(x_0,y_0),v_0=v(x_0,y_0)$.

这里，为了方便，采用了方形邻域.

特例: 若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续, $x=x(t), y=y(t)$ 在t_0连续, 且$(x_0,y_0)=(x(t_0),y(t_0))$, 则 $f(x(t),y(t))$ 在 t_0 也连续. 如果把 $x=x(t), y=y(t)$ 看成是平面上一条路径（曲线）, 则连续函数沿任何连续路径也连续.

因此, $f(x,y)$ 连续, $\Longrightarrow$ $f(x,y_0)$ 和 $f(x_0,y)$ 分别对 y 和 x 连续.

但是: 即使沿任何路径连续, 也不能证明函数连续. 正是这个区别, 给我们判断不连续提供了方法.

判断不连续: 若 $x=x(t), y=y(t)$ 在t_0连续, 且$(x_0,y_0)=(x(t_0),y(t_0))$, 但是$f(x(t),y(t))$ 在 t_0 不连续, 那么 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 不连续. 这样判断 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 不连续, 只要找一条连续的通往 (x_0,y_0) 的路径, 沿该路径不连续即可. 例如判断 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不连续只要考察沿 $x=0$ 或 $y=0$ 或 $y=kx$, $f(0,y)$ 或 $f(x,0)$ 或 $f(x,kx)$ 不连续即可.

三、微分

单变量: $\boldsymbol{\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x) \Longrightarrow \mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x}$

多变量: $\boldsymbol{\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)}$

$$\Longrightarrow \mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}$$

$$= \mathrm{grad}\,\boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\nabla f} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}.$$

这里

$$\mathrm{grad}\,\boldsymbol{f} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\vec{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}\vec{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{z}}\vec{\boldsymbol{k}}; \quad \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}\vec{\boldsymbol{i}} + \mathrm{d}\boldsymbol{y}\vec{\boldsymbol{j}} + \mathrm{d}\boldsymbol{z}\vec{\boldsymbol{k}}$$

提供的基本信息:

单变量: 可微$\Longleftrightarrow$可导, 切线的斜率以及切线方程.

单变量: 可微$\Longrightarrow$ 偏导数存在, 切平面的法向量和切平面方程.

特别对于 $\boldsymbol{z = f(x, y)}$, 可看成 $\boldsymbol{F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0}$, 因此法向量: $\mathrm{grad}\,\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{f'_x}\vec{\boldsymbol{i}} - \boldsymbol{f'_y}\vec{\boldsymbol{j}} + \vec{\boldsymbol{k}}$ 方向始终与 $\boldsymbol{z}$ 轴的正向夹角为锐角.

一阶微分形式不变性:

$$\mathrm{d}f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z=\frac{\partial f}{\partial u}\,\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial v}\,\mathrm{d}v+\frac{\partial f}{\partial w}\,\mathrm{d}w$$

其中$x=x(u,v,w), y=y(u,v,w), z=z(u,v,w)$ 因此

$$f(x,y,z)=f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))$$

偏导数的链式法则:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$
$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v},$$
$$\frac{\partial f}{\partial w}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w},$$

方向导数:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}=\mathrm{grad}\,f\cdot\vec{e}=\nabla f\cdot\vec{e}$$

四、隐函数(这里以三维为例)

$$F(x,y,z)=0,\quad \text{(隐式曲面)}$$

局部: 在曲面上一点 (x_0,y_0,z_0) 邻域内, 存在$z=z(x,y)$. 导数:

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z},\ z'_y=\frac{F'_y}{F'_z}.\ F'_z\neq 0$$

几何: 方程 $F(x,y,z)=0$ 可看成是等值面, 对一般的等值面 $F(x,y,z)-c=0$, 设等值面的参数方程表示为

$$\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k}\ \ (u,v)\in D,$$

$$\Longrightarrow F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))-c=0$$

分别对 u,v 求导得

$$F'_xx'_u+F'_yy'_u+F'_zz'_u=0,\ \nabla F\cdot\vec{r}'_u=0,$$
$$F'_xx'_v+F'_yy'_v+F'_zz'_v=0,\ \nabla F\cdot\vec{r}'_v=0.$$

因此 ∇F 分别与 $\vec{r}_u'$ 和 $\vec{r}_v'$ 垂直, 即与 $\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'$ 平行, 所以∇F 是等值面 $F(x,y,z)-c=0$ 的法向量.

其他形式隐函数: 略.

五、极值

补充说明以下两个问题

最值问题 极值只考虑区域内部一点的邻域范围内. **最值要比较所有极值以及函数在边界上的极值问题**.

设 $f(x,y)$ 定义在有界闭区域 D 上, ∂D 是一条光滑闭曲线 $x=x(t), y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta]$. 求 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值、最小值.

首先通过 $f_x'(x,y)=f_y'(x,y)=0$ 求出 D 内所有极值点和极值.

同时考虑 $f\Big|_{\partial D}=f(x(t),y(t))=\varphi(t)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上的最值 (单变量内部极值, 并与边界值 $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)$ 比较).

综合上述两部分比较内部极值和边界最值, 得到f 在 D 上的最值.

对三元情形,设 $u = f(x,y,z)$ 是定义在区域 V 上, V 是由曲面 S 围成,如果S 的参数方程表示为

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v),\ (u,v) \in D$$

那么首先通过 $f'_x = f'_y = f'_z = 0$ 求出 $f(x,y,z)$ 在 V 内部的驻点并判断是否是极值点,其次考虑 f 限制在 V 的边界S 上的极值问题,即考虑

$$\phi(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in D$$

的极值问题,通过 $\phi'_u = \phi'_v = 0$ 求出驻点,再判断极值点,最后与内部求出的极值点比较大小,就可解决最值问题.

隐函数的极值问题 设 $y = y(x)$ 由方程 $F(x,y) = 0$ 给出, 通过

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = 0$$

求出驻点 x_0, $(y_0 = y(x_0))$. 若 $F'_y(x_0,y_0) = 0$,那么隐函数不存在,也就不存在

极值问题,因此只有当 $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, 讨论才可继续. 继续求导

$$y''(x_0) = -\frac{F''_{xx}F'_y - F'_x f''_{yy}}{(F'_y)^2} = -\frac{F''_{xx}}{F'_y}$$

判断驻点是否是极值点.

三维情况下: 设 $F(x, y, z) = 0$, 求隐函数 $z = z(x, y)$ 的极值. 代入方程 $F(x, y, z(x, y)) = 0$ 并分别对 x, y 求导, 得

$$z'_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad z'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$$

因此驻点满足的方程为 $F'_x(x, y, z) = 0$, $F'_y(x, y, z) = 0, F(x, y, z) = 0$, 解出驻点后再作进一步判断.

六、向量值函数的微商和向量场的微商

向量值函数是$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 中的映射, 需要掌握的是 $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 和 $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 的情形, 在直角坐标系下, 两种情形分别是

$$\vec{r}: \ t \in [\alpha, \beta] \longrightarrow \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{r}:\ (u,v)\in D\longrightarrow \vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k}.$$

因为直角坐标系的坐标向量 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 与变量无关, 因此对向量值函数的微商就是分别对分量的微商. 否则还要考虑对坐标向量的微商.

尤其注意微商运算与向量的点乘、叉乘运算之间的关系. 例如

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\cdot\vec{r})=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{r}+\vec{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=2\vec{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t},$$

等等

向量场是 $\mathbb{R}^3$ 中某个区域 V 内每一点 (x,y,z) 处都有一个向量, 记为

$$\vec{v}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k},\ (x,y,z)\in V$$

因此关于 $\vec{v}$ 的微商就是对每个分量的微商. 也可以把向量场理解为 $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ 的映射, 因此求导规则与向量值函数一样.

七、例题

例 1 设 $u = f(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上是 z 的连续函数, 且 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续. 证明 u 在 $\mathbb{R}^3$ 上连续.

证明 设增量 $h = \Delta x, k = \Delta y, l = \Delta z$

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k,z+l) - f(x,y,z) =& f(x+h,y+k,z+l) - f(x,y,z+l) \\ &+ f(x,y,z+l) - f(x,y,z) \end{aligned}$$

其中当 $h,k,l \to 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} f(x+h,y+k,z+l) - f(x,y,z+l) =& hf'_x(x+\theta h, y+\theta k, z+l) \\ &+ kf'_y(x+\theta h, y+\theta k, z+l) \to 0 \\ & f(x,y,z+l) - f(x,y,z) \to 0 \end{aligned}$$

例 2 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是非零常数. $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可微. 求证: 存在 $\mathbb{R}$ 上一元可微函数 $F(s)$ 使得 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)$ 的充分必要条件是 $a_j\frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i\frac{\partial f}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, \cdots, n.$

证明 关键是证明充分性. 作可逆变换

$$t_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n,$$

$$t_2 = a_2x_2 + \cdots + a_nx_n,$$

$$\cdots$$

$$t_n = a_nx_n$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial t_i} a_k = a_k \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial t_i}, \ k = 1. \cdots, n$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t_i} = 0, i = 2, 3, \cdots, n$$

即 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 只依赖 t_1, 所以 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 可以表示为 t_1 的函数.

例 3 可微函数 $f(x,y,z)$ 满足 $f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)\ (t>0)$

$$\Longleftrightarrow xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=kf(x,y,z).$$

证明 $(\Longrightarrow)$ $f(tx,ty,tz)=t^k f(x,y,z)$两边对 t 求导, 再令 $t=1$ 即可.

$(\Longleftarrow)$ 令 $F(t)=f(tx,ty,tz)$, 对 t 求导得

$$\begin{aligned}F'(t)&=xf'_1(tx,ty,tz)+yf'_2(tx,ty,tz)+zf'_3(tx,ty,tz)\\&=\frac{1}{t}(txf'_1(tx,ty,tz)+tyf'_2(tx,ty,tz)+tzf'_3(tx,ty,tz))\\&=\frac{k}{t}f(tx,ty,tz)=\frac{k}{t}F(t)\end{aligned}$$

解得$F(t)=Ct^k$, 令 $t=1$ 定出常数 $C=F(1)=f(x,y,z)$ 即可得结果.

一般来说，若必要性求导可证, 则充分性可用积分.

例 4 设 F 连续偏导，$w = w(x,y,z)$ 是方程

$$F(x - aw, y - bw, z - cw) = 1$$

所确定的隐函数，a, b, c 常数，求$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} + c\frac{\partial w}{\partial z}$

解：由条件, 已知隐函数存在, 分别对 x, y, z 求导得

$$F_1(1 - aw'_x) + F'_2(0 - bw'_x) + F'_3(0 - cw'_x) = F'_1 - w'_x(aF'_1 + bF'_2 + cF'_3) = 0,$$

$$\Longrightarrow w'_x = \frac{F'_1}{aF'_1 + bF'_2 + cF'_3}$$

同理可得 w'_y, w'_z 因此

$$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} + c\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{aF'_1 + bF'_2 + cF'_3}{aF'_1 + bF'_2 + cF_3} = 1$$

这里 F'_1, F'_2, F'_3 等表示对三个位置的变量求导.

另外，对诸如 $f(x, x^2)$ 的求导为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x, x^2) = f'_1(x, x^2) + 2xf'_2(x, x^2).$$

例 5 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上可微, 且满足:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)}{\rho}=+\infty,$$

证明: 对任意的 $\vec{v}=(v_1,v_2)$, 存在一点 (x_0,y_0) 使得 $\nabla f(x_0,y_0)=\vec{v}$.

分析 即要证存在一点 (x_0,y_0) 使得 $f_x'(x_0,y_0)=v_1,\ f_y'(x_0,y_0)=v_2$.

即要证$F_x'(x_0,y_0)=F_y'(x_0,y_0)=0$, 这里 $F(x,y)=f(x,y)-v_1x-v_2y$.

即要证 $F(x,y)=f(x,y)-v_1x-v_2y$ 有驻点.

因为

$$\left|\frac{v_1x+v_2y}{\rho}\right|\leqslant |v_1|+|v_2|\ (\text{有界}),$$

$$\Longrightarrow \lim_{\rho\to\infty}\frac{F(x,y)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x,y)-v_1x-v_2y}{\rho}=+\infty$$

所以 $F(x,y)$ 在充分大的圆内取到最小值, 记最小值点为 (x_0,y_0), 所以

$$F_x'(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)-v_1=0,\ F_y'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)-v_2=0.$$

单变量类似的题目： 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微, 且 $\lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$, 证明：对任意的实数 a, 存在 x_0, 使得 $f'(x_0)=a$（证明类似）.

几何上看, 这样的函数切线的斜率（也就是导数）可以取到任意值.

例 6 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 并存在偏导数, 若

$$f'_x(x,y)+f'_y(x,y)=f(x,y),\ \ f(x,y)\Big|_{\partial D}=0$$

则 $f(x,y)$ 在 D 上恒等于零.

证明 （反证法）若 $f(x,y)\neq 0$, 则在内部必然存在最大值或最小值, 不妨设取到最大值 $f(x_0,y_0)>0$,

$$f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$$

$$\Longrightarrow f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)+f'_y(x_0,y_0)=0$$

矛盾.

例7 （最小二乘法）给定平面上 n 个点 $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$, 求一条直线 $y = ax + b$, 使得偏差

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$$

最小. 这里 $x_1, \cdots, x_n$ 互不相等.

解 上述问题是求

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$$

的极值问题. 由 $\dfrac{\partial f}{\partial a} = \dfrac{\partial f}{\partial b} = 0$ 得关于 a, b 的方程组

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

因为 $x_1, \cdots, x_n$ 互不相等, 所以

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} 1 \cdot x_i\right)^2 < \sum_{i=1}^{n} 1^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

即上述非齐次线性方程组系数行列式不为零, 因此有唯一解. 又因为只要所有的点 (x_i, y_i) 不在一条直线上, 就有

$$\lim_{\sqrt{a^2+b^2}\to\infty} f(a,b) = +\infty$$

因此 $f(a,b)$ 取到最小值.

例 8 求由方程

$$F(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$$

确定的隐函数的极值问题.

解：分别对 x,y 求导得

$$4x+2z\frac{\partial z}{\partial x}+2y-2-4\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}+2x-2-4\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

驻点满足

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

所以

$$2x+y-1=0,\ y+x-1=0$$

解得驻点为 $(0,1)$. 因此在驻点处 $z=z(0,1)$ 满足方程 $z^2-4z+3=0$ 解得 $z_1=1, z_2=3$. 这样,我们就得到$Oxyz$ 空间中两个点 $P_1(0,1,1)$ 和 $P_2(0,1,3)$.

不难验证,在 P_1, P_2 处,$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, 所以隐函数在 P_1, P_2 邻域内存在.

在P_1,继续求导得

$$4 + 2(z'_x)^2 + 2zz''_{xx} - 4z''_{xx} = 0$$

$$2z'_x z'_y + 2zz''_{xy} + 2 - 4z''_{xy} = 0$$

$$2 + 2(z'_y)^2 + 2zz''_{yy} - 4z''_{yy} = 0$$

把 $(0, 1, 1)$ 代入并注意到 $z'_x = z'_y = 0$ 得

$$A = z''_{xx} = 2, B = z''_{xy} = 1, C = z''_{yy} = 1, \ \Delta = AC - B^2 > 0$$

所以在 P_1 附近确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 在 $(0, 1)$ 取极小值 $z = 1$.

同理在P_2 附近确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 在 $(0, 1)$ 处取到极大值 $z = 3$.