装订线 答题时不要超过此线

中 国 科 学 技 术 大 学
2017--2018 学年第一学期期末考试试卷

考试科目: **理论力学** 得分:__________

学生所在系:___________ 姓名:__________ 学号:___________

一、(20 分)自聚焦光纤具有轴对称的折射率分布

$$n(r) = n_0\sqrt{1-\alpha^2 r^2}$$

其中$n_0 > 0$，α是较小的正常数，r是到光纤中轴线的距离。建立柱坐标系(r,θ,z)，θ表示绕中轴线的转角，z轴沿中轴线方向. 光线的轨迹记为

$$r = r(\lambda),\ \theta = \theta(\lambda),\qquad z = z(\lambda)$$

根据费马原理，几何光学的拉氏量可以写成

$$L = \frac{1}{2}n_0^2(1-\alpha^2 r^2)\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right)$$

(1)找出尽可能多的首次积分，并说明理由;

(2)写出这个系统的哈密顿量以及正则方程。

二、(12 分)质量为m，位矢为$\vec{r}$，动量为$\vec{p}$的质点受到立方反比有心力的作用，其哈密顿函数为$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r^2}$，其中$k$是常数，$r = |\vec{r}|$，$p = |\vec{p}|$

(1)计算泊松括号$[G,H]$，其中$G = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{2} - Ht$，$t$表示时间;

(2)请判断G是否为运动积分。

三、(18 分)考虑一维简谐振子，其哈密顿函数为$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$，$m$为质量，$\omega$为固有角频率:

(1)证明变换$Q = p + im\omega q$，$P = \frac{p - im\omega q}{2im\omega}$为正则变换，并求出生成函数$F_1(q,Q)$，其中$i$为虚数单位;

(2)求变换后的哈密顿函数$K(Q,P)$，并用变换后的正则变量Q,P求解该简谐振子的运动。

四、(25 分)二维各向同性谐振子在极坐标中的势能为：$V(r,\theta) = \frac{1}{2}kr^2$。试用哈密顿-雅

克比方法在极坐标中求解二维谐振子的动力学方程及其解（得到积分形式的解即可）。

五、（25 分）**用拉格朗日力学讨论自由对称陀螺（$\boldsymbol{I_1 = I_2 \neq I_3}$）—欧拉陀螺的动力学问题。**选三个欧拉角作为刻画陀螺运动的广义坐标，

（1）写出欧拉陀螺的拉格朗日量；

（2）根据欧拉-拉格朗日方程得到陀螺的动力学方程；

（3）如果选取陀螺总角动量方向为实验室坐标系的z'轴，试证明：

$$\dot{\varphi} = c_1;\ \dot{\psi} = c_2;\ \dot{\theta} = 0$$

其中c_1, c_2为常数。

附录：可能用到的公式

欧拉-拉格朗日方程：$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$；哈密顿正则方程：$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$

泊松括号的定义:$[f(q_\alpha, p_\alpha; t), g(q_\alpha, p_\alpha; t)] = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\right) = \sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial(f,g)}{\partial(q_\alpha,p_\alpha)}$

总角度速度$\vec{\omega}$在本体坐标系（随动惯性系）中的分量:

$$\omega_x = \dot{\varphi}\sin\ \theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\ ；\ \omega_y = \dot{\varphi}\sin\ \theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi\ ；\ \ \omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

刚体运动的欧拉方程:

$$I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = N_1,\ I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = N_2,\ I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = N_3$$

哈密顿-雅克比方程：$\frac{\partial}{\partial t}S(q_\alpha, t) + H\left(q_\alpha, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, t\right) = 0$

$$\mathrm{S} = -\mathrm{Et} + \mathrm{W}(\mathrm{q}_\alpha) + \mathrm{A},\ H\left(q_\alpha, \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}\right) = E$$

在笛卡尔坐标系(x, y, z), 柱坐标系(r, ϕ, z)以及球坐标系(r, θ, ϕ)中两点之间的距离分别为:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dx^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2$$