代数结构第11次作业反馈

Ch7 P8

- 证明 $<E_H,+>$ 是 $<E\ ,\ +>$ 的子群
  - 显然 E_H 是 E 的非空子集
  - 封闭性：$\forall f,g\in E_H,(f+g)(x)=f(x)+g(x)=h_1+h_2=h_3\in H$
  - 逆元：
    - E 中单位元 f_0 为 $f_0(x)=0_G$,其中 0_G 为 G 的单位元
    - 对于任意给定 E_H 中映射 f， 可以找到一个这样的映射 $f^{'}$，满足对任意 $x\in H,f^{'}(x)=0_G-f(x)$
    - 因为 H 是群具有封闭性，因此 $\forall x\in H,f^{'}(x)\in H$, 进而推出 $f^{'}\in E_H$
    - 且这样定义的f'满足 $(f+f')(x)=f(x)+0_G-f(x)=0_G=f_0(x)$，因此 f' 是 f 的逆，且属于 E_H
- E_H 对 $\cdot$ 运算封闭
  - $\forall f,g\in E_H$，$\forall x\in H$，$(f\cdot g)(x)=f(g(x))=f(h_2)\in H$
  - 由 x 的任意性可知，$(f\cdot g)(H)\subseteq H$
  - 因此 $f\cdot g\in E_H$
- E 关于 $\cdot$ 的单位元属于 E_H
  - E 关于 $\cdot$ 的单位元为恒等映射 $f_1(x)=x$
  - $\forall x\in H,f_1(x)=x\in H\Rightarrow f_1(H)\subseteq H$
  - $f_1\in E_H$

综上，$<E_H,+\ ,\ \cdot>$ 是 $<E\ ,+\ ,\ \cdot>$ 的子环

> 1. 课本 108 页有自同态环的相关例题
> 2. 证明主要分为 3 步，子群、乘法封闭、乘法单位元，证明子群又要证明加法封闭以及逆元存在
> 3. 对于 E 的加法、乘法单位元，因为都是映射，最好指出具体形式

Ch7 P9

为了方便表示，不妨设环$<R\ ,+\ ,\ \cdot>$ 有两个子环 H,K, 而集合 $M=H\bigcap K$

证明如下

- M 非空，因为它至少含有元素 0_R
- $<M, +>$ 是 $<R, +>$子群
  - $\forall a, b \in M, a+b \in H, a+b \in K \Rightarrow a+b \in M$
  - $\forall a \in M, a' \in H, a' \in K \Rightarrow a' \in M$
- 对 $\forall x, y \in M$
  - $x \in H,\ y \in H \Rightarrow x \cdot y \in H$
  - $x \in K,\ y \in K \Rightarrow x \cdot y \in K$
  - 所以 $x \cdot y \in M$
- $1_R \in H, 1_R \in K \Rightarrow 1_R \in H \bigcap K = M$

综上，M 是 R 的子环

> - 证明子环的过程和上一题类似。一些同学用减法的封闭性推出了子群这一结论，也是可以的（之前作业的第五章第 9 题证明过）。还有一些同学直接用第五章第 11 题的结论得出了 $<M, +>$ 是子群. 考试中如果需要此结论，建议大家把证明过程再写一遍

Ch7 P12

$I_1 \bigcap I_2$

对 $\forall x, y \in I_1 \bigcap I_2$，$\forall r \in R$

- 减法封闭性
  - $x, y \in I_1 \Rightarrow x - y \in I_1$
  - $x, y \in I_2 \Rightarrow x - y \in I_2$
  - 故$x - y \in I_1 \bigcap I_2$
- 乘法封闭性
  - $x \in I_1 \Rightarrow x \cdot r \in I_1 \bigwedge r \cdot x \in I_1$
  - $x \in I_2 \Rightarrow x \cdot r \in I_2 \bigwedge r \cdot x \in I_2$
  - $x \cdot r \in I_1 \bigcap I_2 \bigwedge r \cdot x \in I_1 \bigcap I_2$

$I_1 \cdot I_2$

对 $\forall x, y \in I_1 \cdot I_2$，$\forall z \in R$
不妨设

$$x = \sum_{k=1}^{n1} a_{1k} a_{2k} \quad (a_{1k} \in I_1,\ a_{2k} \in I_2)$$

$$y = \sum_{i=1}^{n2} b_{1i} b_{2i} \quad (b_{1i} \in I_1,\ b_{2i} \in I_2)$$

- 减法封闭性

- $\forall b \in I_1$, $-b \in I_1$
- $$\begin{aligned} x-y &= \sum_{k=1}^{n1} a_{1k}a_{2k} - \sum_{i=1}^{n2} b_{1i}b_{2i} \\ &= \sum_{k=1}^{n1} a_{1k}a_{2k} + \sum_{i=1}^{n2} (-b_{1i}) \cdot b_{2i} \\ &= \sum_{j=1}^{n1+n2} l_{1j}l_{2j} \end{aligned}$$

$$l_{1j} = \begin{cases} a_{1j}, & 1 \le j \le n_1 \\ -b_{1(j-n_1)}, & n_1+1 \le j \le n_1+n_2 \end{cases} \quad l_{2j} = \begin{cases} a_{2j}, & 1 \le j \le n_1 \\ b_{2(j-n_1)}, & n_1+1 \le j \le n_1+n_2 \end{cases}$$

- 乘法封闭性
  - $$x \cdot z = (\sum_{k=1}^{n1} a_{1k}a_{2k}) \cdot z = \sum_{k=1}^{n1} a_{1k}(a_{2k} \cdot z) = \sum_{k=1}^{n1} a_{1k}\widetilde{a_{2k}}$$
  - $$z \cdot x = z \cdot (\sum_{k=1}^{n1} a_{1k}a_{2k}) = \sum_{k=1}^{n1} (z \cdot a_{1k})a_{2k} = \sum_{k=1}^{n1} \widetilde{a_{1k}}a_{2k}$$
  - 上述 $\widetilde{a_{2k}} = a_{2k} \cdot z \in I_2$, $\widetilde{a_{1k}} = z \cdot a_{1k} \in I_1$, 因此$x \cdot z \in I_1 \cdot I_2$, $z \cdot x \in I_1 \cdot I_2$

$I_1 + I_2$

对 $\forall x, y \in I_1 + I_2$, $\forall z \in R$
不妨设

$$\begin{aligned} x = a + b \ \ (a \in I_1 \ , \ b \in I_2) \\ y = c + d \ \ (c \in I_1 \ , \ d \in I_2) \end{aligned}$$

- 减法封闭性
  - $x - y = (a+b) - (c+d) = (a-c) + (b-d)$
  - $(a-c) \in I_1$,$(b-d) \in I_2$
  - 由上可知 $x - y \in I_1 + I_2$
- 乘法封闭性
  - $x \cdot z = (a+b) \cdot z = az + bz$
  - $z \cdot x = z \cdot (a+b) = za + zb$
  - 因为 I_1 , I_2都是理想，所以 $az, za \in I_1$, $bz, zb \in I_2$ ，进而推出 $x \cdot z \in I_1 + I_2 \bigwedge z \cdot x \in I_1 + I_2$

$I_1 \cdot I_2 \subseteq I_1 \bigcap I_2$

对 $\forall r_1 \in I_1, \forall r_2 \in I_2$

因为 I_1, I_2 均为理想，所以 $r_1 \cdot r_2 \in I_1$ ，$r_1 \cdot r_2 \in I_2$

$$\Rightarrow r_1 \cdot r_2 \in I_1 \bigcap I_2$$

而对 $\forall x \in I_1 \cdot I_2$，设 $x = \sum_{k=1}^{n} r_{1k} r_{2k}$

由上可知 $r_{1k} \cdot r_{2k} \in I_1 \bigcap I_2$

而 $< I_1 \bigcap I_2, + >$ 为群，由封闭性知 $x \in I_1 \bigcap I_2$

故 $I_1 \cdot I_2 \subseteq I_1 \bigcap I_2$

> 主要问题集中在 $I_1 \cdot I_2$ 是子环的证明
>
> 1. 没看过定义，以为 $I_1 \cdot I_2 = \{r_1 \cdot r_2 \mid r_1 \in I_1,\ r_2 \in I_2\}$
> 2. 看了定义，但是直接以为这两者的前 n 项($n = min\{n_1, n_2\}$)是一样的，进行了消去。这显然是理解错了，只能扣分
> 3. 仅用 $\begin{cases} I_1 \cdot I_2 \subseteq I_1 \bigcap I_2 \\ I_1 \bigcap I_2 \text{是理想} \end{cases}$ 推出 $I_1 \cdot I_2$ 也是理想。条件不够充分
> 4. 一些同学考虑的比较多，比如把 x, y 之间的公共部分进行合并等等...这样写肯定是没有问题的。实际上，只要 **说明了$-b_{1i}$也属于I_1** 后，两个求和直接合在一起，已经满足了 $I_1 \cdot I_2$ 中元素的定义，没有必要考虑重复元素、提因数等
>
> 其它证明都比较简单，但是一些同学的跳步实在是太多了... 比如关于$I_1 \bigcap I_2$ 是理想的证明和作业题上一题相似度很高，有些同学差不多就把理想的定义直接抄了一遍，实际上什么也没证

Ch7 P15

证明如下

- 任意$\begin{pmatrix} 2m_1 & 2n_1 \\ 2k_1 & 2l_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2m_2 & 2n_2 \\ 2k_2 & 2l_2 \end{pmatrix} \in I$

$$\begin{pmatrix} 2m_1 & 2n_1 \\ 2k_1 & 2l_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2m_2 & 2n_2 \\ 2k_2 & 2l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(m_1 - m_2) & 2(n_1 - n_2) \\ 2(k_1 - k_2) & 2(l_1 - l_2) \end{pmatrix} \in I$$

- 任意$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in R$, $\begin{pmatrix} 2m_1 & 2n_1 \\ 2k_1 & 2l_1 \end{pmatrix} \in I$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2m_1 & 2n_1 \\ 2k_1 & 2l_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(m_1 a_1 + k_1 b_1) & 2(n_1 a_1 + l_1 b_1) \\ 2(m_1 c_1 + k_1 d_1) & 2(n_1 c_1 + l_1 d_1) \end{pmatrix} \in I$$
$$\begin{pmatrix} 2m_1 & 2n_1 \\ 2k_1 & 2l_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(m_1 a_1 + n_1 c_1) & 2(m_1 b_1 + n_1 d_1) \\ 2(k_1 a_1 + l_1 c_1) & 2(k_1 b_1 + l_1 d_1) \end{pmatrix} \in I$$

商环 $R/I = \{I,\ M_1 + I, M_2 + I, \ldots, M_{15} + I\}$

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$
$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$
$M_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$
$M_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

> 比较简单的一道题。n 阶矩阵环是课本上的一个例子，根据大家这学期所学的线性代数知识，也可以很容易验证 n 阶偶数矩阵组成的集合是理想。本题将条件限定在 2 阶，应该是为了方便大家写出所有商环，因此写不全的或者表示方法不当的就扣分了

Ch7 P21

Z_2 到 Z 的同态映射 f 应该满足

$$f([0]) = f([0] + [0]) = f([0]) + f([0]) \Rightarrow f([0]) = 0$$

进而

$$f([0]) = f([1] + [1]) = f([1]) + f([1]) = 0 \Rightarrow f([1]) = 0$$

因此满足条件的同态映射最多只可能有 1 个，即上述 f
不难验证 f 满足同态映射的其它要求（对所有的加法、乘法组合都有保运算性）

因此满足要求的同态映射有且只有一个

$$f : Z_2 \to Z$$
$$f([1]) = f([0]) = 0$$

> 老师布置作业时，说明了这道题不要求 Z_2 和 Z 的乘法单位元之间存在映射关系，因此只用考虑保持运算即可。实际上最后的同态像中只有一个元素 0，该同态像可以作为一个平凡环且 0 也是该平凡环中的乘法单位元

Ch7 P23

参考课本 113 页例 4

首先证明映射 f 是良定义的，即 f 的定义与代表元选取无关：

$$\text{对}\forall x \neq y \text{ , 若}[x]_m = [y]_m \text{ , 那么 } m|(x-y).$$
$$\text{而 } r|m \text{ , 故 } r|(x-y) \text{ , 即 } [x]_r = [y]_r$$

而根据同余式性质，可以推出

$$\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b},\ \bar{a}\cdot\bar{b}=\overline{a\cdot b}$$
$$[a]+[b]=[a+b],\ [a]\cdot[b]=[a\cdot b]$$

所以

- $f(\bar{a}+\bar{b})=f(\overline{a+b})=[a+b]=[a]+[b]=f(\bar{a})+f(\bar{b})$
- $f(\bar{a}\cdot\bar{b})=f(\overline{a\cdot b})=[a\cdot b]=[a]\cdot[b]=f(\bar{a})\cdot f(\bar{b})$

再加上

- $f(1_{Z_m})=f(\bar{1})=[1]=1_{Z_r}$

可知 f 是环同态映射

设 $m=kr$, 则 $Ker\ f=\{\ \overline{nr}\mid 0\le n\le k-1\}$

而 $Z_r=\{[0],\ldots,[r-1]\}$ ，不难发现 Z_m 部分元素 $\bar{0},\ldots,\overline{r-1}$ 的像构成的集合已经等于 Z_r， 故 f 为满射

根据环同态基本定理，$Z_m/Ker\ f$ 与 Z_r 同构

> 1. f 的同态核是像为 Z_r 中加法单位元（**而不是乘法单位元！**）的元素组成的集合，这样才能保证 $Ker\ f$ 是 Z_m 的理想，进而引出环同态基本定理（$Z_m/Ker\ f$ 是商环、f 在 $Z_m/Ker\ f$ 上的保运算性等）
> 2. 环同态基本定理要求 f 为满同态映射，是为了保证 f 的同态像是 Z_r，而不是 Z_r 的某个真子集。课本上群、环同态定理在此处的描述有点区别，大家留意下这个细节