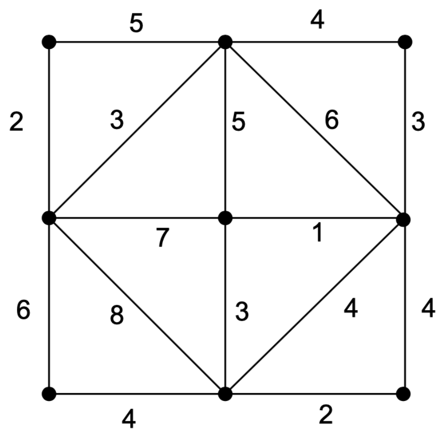
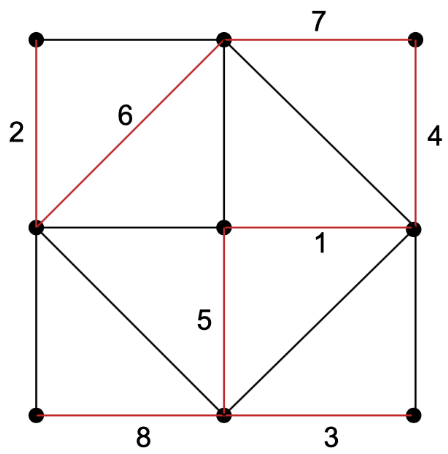
HW3

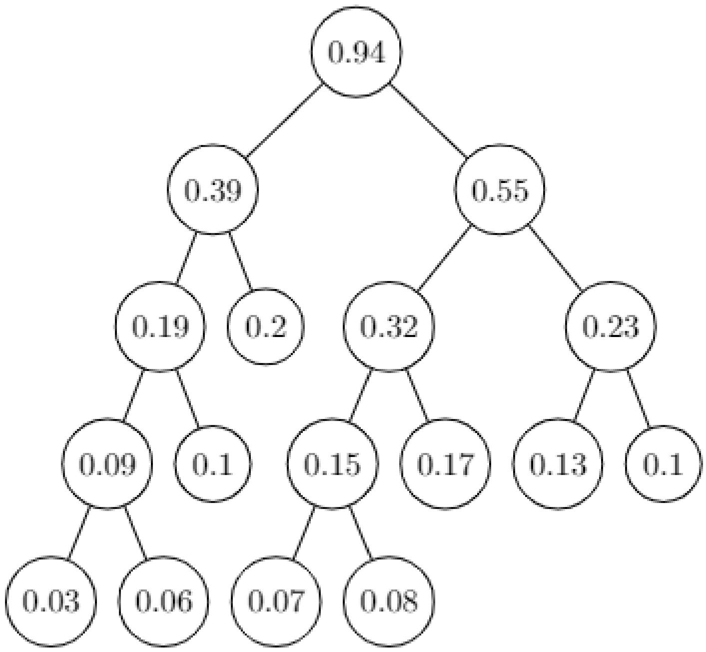
> 2.14 用Kruskal算法求图中边权图最小的生成树
>
> 
>

如下图所示，红色标记的是最小生成树，序号则是边选择的顺序。



> 2.20 画出带权 0.2,0.17,0.13,0.1,0.1,0.08,0.06,0.07,0.03 的 Huffman 树

如下图所示：



> 2.23 证明Huffman树是最优二叉树。

设叶子结点的权值分别为$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots \leq \omega_n$

1. 首先证明存在一颗最优二叉树，使得ω_1和ω_2是兄弟，且它们的深度等于树的高度。(为方便，我们用权值ω_i来表示对应的顶点)

   任取一颗最优二叉树T，若ω_1的深度小于树高，设w_i和w_j是T中最深的两个顶点，不妨设$i \neq 2$。交换ω_1和ω_i，得到的新树T'加权路径长度不增，故也为最优二叉树，若$j \neq 2$，则交换ω_2和ω_j，得到的新树T''的加权路径长度不增，故也为最优二叉树。如此，我们就得到了一颗最优二叉树，使得ω_1和ω_2是兄弟，且它们的深度等于树的高度。

2. 再用对树的叶子节点数n进行归纳：$n = 2$时，结论成立。设$n = k$时结论成立，考虑$n = k + 1$情形:

   设T_{k+1}为叶子结点的权值分别为$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots \leq \omega_{k+1}$的最优二叉树，在$T$中$\omega_1$和$\omega_2$是兄弟，将$w_1$和$\omega_2$删去并保留其父节点并令父节点的权值为$\omega_1 + \omega_2$得到新树$T'_k$.

   由Huffman树的构造过程，必然存在两个权值最小的结点构成兄弟，不妨设形成的Huffman树T'_{k+1}中ω_1和ω_2是兄弟（否则可以调整权值的下标使其成为兄弟），将w_1和ω_2删去并保留其父节点并令父节点的权值为$\omega_1 + \omega_2$得到新树T_k.则T_k是叶子结点权值为$\omega_1 + \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_{k+1}$形成的Huffman树，由归纳假设，$T_k$为最优二叉树。

   我们有

$$
\begin{gathered}
WPL(T_{k+1}) = WPL(T'_k) + \omega_1 + \omega_2 \\
WPL(T'_{k+1}) = WPL(T_k) + \omega_1 + \omega_2 \\
WPL(T_{k+1}) \leq WPL(T'_{k+1}) \\
WPL(T_k) \leq WPL(T'_k)
\end{gathered}
$$

   故有$WPL(T'_{k+1}) = WPL(T_{k+1})$，所以$T'_{k+1}$也为最优二叉树，即$n = k + 1$情形结论成立。

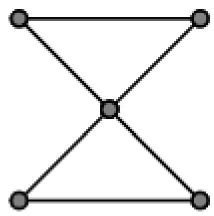
   有归纳原理知，结论成立。

> 3.2 给出一个 $k-$连通图G以及k个顶点的集合V',使得$\omega(G - V') > 2$。

取G为星图$K_{1,n}(n>2)$，V'为中心点，则G为$1-$连通图且$\omega(G-V')=n>2$。

> 3.4 给出一个简单图，$\delta(G)=v(G)-3$且$\kappa(G)<\delta(G)$。

如下图：



此图中$\delta(G)=2,v(G)=5,\kappa(G)=1$,满足题目要求。

> 3.6 G是简单图，$\delta(G)\geq\frac{1}{2}(v(G)+k-2)$，则$G$是$k-$连通图。

用反证法。

若G不是$k-$连通图，则可以删去$k-1$个点及其在G中所连的边，使得得到的图G'不是联通图。

对于G',有$v(G')=v(G)-k+1$且$\delta(G')\geq\frac{1}{2}(v(G)+k-2)-(k-1)=\frac{1}{2}(v(G')-1)$。

而G'不连通，则其必有一个点数不多于$\frac{1}{2}v(G')$的连通片，这与$\delta(G')\geq\frac{1}{2}(v(G')-1)$矛盾。