装订线 • 答题时不要超过此线

中 国 科 学 技 术 大 学
2016 - 2017学年第一学期期终考试试卷(A)

考试科目: 线性代数(B1)　　　　得分:______

学生所在院系:______　　姓名:______　　学号:______

一、【25分】填空题:

(1) 若线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = t, \end{cases}$$

有解, 则参数$t =$______.

(2) 若向量$\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,2,3)$, $\alpha_3 = (2,3,t)$生成$\mathbf{R}^3$中的2维子空间，则参数$t =$______.

(3) 设$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则$\boldsymbol{A}$的相合规范型为______

(4) 二次曲面方程$2x^2 - 3y^2 - 3z^2 - 2yz - 5 = 0$表示的曲面类型是______

(5) 实二次型$Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 2txy + 2txz + 2yz$为正定当且仅当参数$t$满足______.

二、【25分】判断下列命题是否正确，并简要说明理由.

(1) 设$\boldsymbol{A}$是一个n阶方阵，则$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^2)$.

(2) 若0是矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值，则$\boldsymbol{A}$一定是奇异矩阵.

(3) 设$\boldsymbol{A}$是一个n阶方阵. 若对任意n维列向量$\boldsymbol{x}$都有$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$，则$\boldsymbol{A}$为反对称方阵.

(4) 若$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$是$n$阶正定矩阵，则$\boldsymbol{AB}$也是$n$阶正定矩阵.

(5) 设$\boldsymbol{A}$是一个n阶方阵. 则$\boldsymbol{A}$是正交矩阵当且仅当$\boldsymbol{A}$的n个行向量组成n维实数组空间$\mathbf{R}^n$的标准正交基.

三、【14分】在$\mathbf{R}^3$中定义线性变换$\mathscr{A}(x,y,z)=(x+2y,x-3z,2y-z)$.

(1) 求$\mathscr{A}$在基$\alpha_1=(1,0,0)$, $\alpha_2=(1,1,0)$, $\alpha_3=(1,1,1)$ 下的表示矩阵;

(2) 是否存在基β_1,β_2,β_3使得$\mathscr{A}$在该基下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

四、【14分】设$V=\{f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\}$为次数不超过2的实系数多项式构成的线性空间.

(1) 证明：$(f(x),g(x))=f(0)g(0)+f(1)g(1)+f(2)g(2)$ 定义了V上的一个内积.

(2) 应用Schmidt正交化方法将向量组$\{1,x\}$改造成相对于(1)中所定义内积的标准正交向量组.

五、【14分】设M是$2n$阶方阵

$$M = \begin{pmatrix} I & A \\ A & I \end{pmatrix},$$

其中A是一个n阶实方阵且满足$A^T = A$, $A^2 = I$.

(1) 求矩阵M的所有特征值;

(2) 求可逆矩阵P使得$P^{-1}MP$ 为对角矩阵.

六、【8分】假设A和B都是n阶正定矩阵. 证明:

$$\det A \cdot \det B \le \left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}\,(AB)\right)^n$$