2019–2020 学年第一学期期终考试试题

考试科目: 线性代数 B1　　考试时间: 2020.01.14

学生所在系:________________　　姓名:____________________

学号:______________________　　得分:____________________

一. 填空题 (每题 4 分, 共 24 分)

1. 设三维向量 α, β 满足 $\alpha^T\beta = 2$. 则 $\beta\alpha^T$ 的特征值为 _________.

2. 设 4 阶矩阵 A 与 B 相似, I 为单位矩阵. 若矩阵 A 的特征值为 $1,2,3,4$, 则行列式 $|B^{-1} - I| =$ ________.

3. 已知矩阵

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

相似. 则 $a + b =$ ________.

4. 设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

则 $A^{-1} =$ ________.

5. 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

且 A 的秩为 2. 则 $a =$ __________.

6. 设三阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $A^* = A^T$, 且 $a_{11} = a_{12} = a_{13}$. 则 $a_{11} =$ _______.

二. 判断题 (每题 5 分, 共 20 分)

1. 下列两矩阵是否相似? 是否相合? 说明理由.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, B 为 $n\times m$ 的矩阵, $AB=I$, 其中 I 为 m 阶单位矩阵. 则秩 (A) 是否一定等于秩 (B)? 说明理由.

3. 设 $a_{ij}=\frac{i}{j}$, $i,j=1,...,n$. 二次型 $f(x_1,...,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1+...+a_{in}x_n)^2$ 的符号差是否为 n? 说明理由.

4. 设方阵 A 的每行元素之和都为 1. 那么 A^5 的每行元素之和是否为 1? 说明理由.

三. 计算及证明题 (共 56 分)

1.(8 分) 设 3 阶实对称正交矩阵 A 非负定, $|A|=-1$, 且 $(1,1,1)^T$ 为对应于特征值 -1 的特征向量. 求 A.

2.(8 分) 令

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$\alpha=(3,-1,2)^T$. 求 $\lim_{n\to+\infty}|A^n\alpha|$. 这里 $|\cdot|$ 表示向量的长度.

3.(8 分) 设 T 是 n 维线性空间 V 的线性变换, $n>1$, $\alpha\in V$. 设 $T^n\alpha=0$, 但是 $T^{n-1}\alpha\neq 0$.

(1) 求证: 向量组 $\alpha, T\alpha, ..., T^{n-1}\alpha$ 线性无关.

(2) 求证: T 不能对角化.

4.(6 分) 设 K 为集合 $\{c_1 + c_2 x + c_3 \cos x : c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$ 在通常的函数加法和数乘下构成的线性空间. 定义内积 $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$. 从 $1, x, \cos x$ 出发, 构造 K 的一个标准正交基.

5.(8 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 3 & x \\ 3 & 1 & 3 & 10 & x \\ 3 & 0 & x & x & 10 \end{pmatrix}.$$

证明: 当 $|x| < 3$ 时, $|A| < 10^5$.

6.(8 分) 设 t 为参数. 讨论以下二次曲面的类型: $x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+x_3-10=0$.

7.(10 分) 设 K 是次数小于 3 的实系数多项式在通常的数乘及加法运算下构成的线性空间.

(1) 证明 $1, x+2, x^2+x+3$ 是 K 的一个基;

(2) 求线性变换

$$Tf := f'' - f$$

在这个基底下的矩阵;

(3) 求 T 的特征向量.