§0.1 第13章复习

一、广义（反常）积分

无穷积分：$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$，条件: 任何有限闭区间上可积.

瑕积分（a 是瑕点）：$\displaystyle\int_a^{b}\,\mathrm{d}x$，条件: 任何$[a+\delta, b]$上可积.

掌握要点

（1）原函数法：如果被积函数存在原函数 $F(x)$，$\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$, 那么只要 $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b) = F(+\infty)$ 存在, 就有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(a),$$

换元、分部积分都与普通积分无异, 只要在 $+\infty$ 的极限存在.

例 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x$

解 不难验证 $x=0$ 不是瑕点. 直接用分部积分有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (x-\sin x)\,\mathrm{d}\frac{1}{x^2}\\ &= -\frac{1}{2}\frac{x-\sin x}{x^2}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1-\cos x}{x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

（2）Cauchy**收敛准则**：无需算出积分情况下收敛性的一个等价命题.

（3）**绝对收敛与条件收敛**：与普通Riemannn积分最大的区别.

Riemann **积分**: $f(x)\Big|_{[a,b]}$ 可积 $\Longrightarrow |f(x)|\Big|_{[a,b]}$ 也可积, 反之不然.

广义积分: $|f(x)|\Big|_{[a,+\infty)}$ 可积 $\Longrightarrow f(x)\Big|_{[a,+\infty)}$ 可积, 反之不然.

例 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 是条件收敛的（注意证明方法）.

（4）正项函数收敛判别法: 比较判别法常用极限形式, 主要看当 $x \to \infty$（或 $x \to a^+$）时, 无穷小的阶. 常用来比较的一个标准是

$$f(x) = \frac{1}{x^p} \Longrightarrow \begin{cases} \text{当} p > 1 \text{ 无穷积分收敛，瑕积分发散} \\ \text{当} p = 1 \text{ 两者都发散} \\ \text{当} p < 1 \text{ 无穷积分发散，瑕积分收敛} \end{cases}$$

（5）一般判别法: Dirichlet 判别法和 Abel 判别法.

（6）与数项级数类比: 仅有一点需要提醒：

在无穷级数中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Longrightarrow a_n \to 0 \ (n \to +\infty)$.

但 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛并不意味着 $f(x) \to 0 \ (x \to +\infty)$（综合习题第2题）.

（7）广义二重积分: 重点掌握正项函数的广义二重积分, 只要特殊竭尽递增列即可, 如圆或方形.

二、含参变量积分:

主要讨论下列四类积分

$$(1)\ \varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\,\mathrm{d}x,\quad (2)\ \varphi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\,\mathrm{d}x$$

$$(3)\ \varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x,\quad (4)\ \varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\,\mathrm{d}x\ \ a\ \text{是瑕点}$$

主要研究上述积分定义的函数的连续(极限和积分交换)、可积(积分的交换)、可微(求导和积分的交换)等性质.

对于(1)和(2), 只要 $f(x,u)$ 是二元连续函数, $\varphi(u)$ 就连续(极限和积分交换)、可积(积分的交换), 当 $f(x,u)$ 对 u 有连续的偏导数, $a(u),b(u)$ 可导, 就有

$$\varphi'(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,\mathrm{d}x+f(b(u),u)b'(u)-f(a(u),u)a'(u)$$

三、一致收敛性

对于含参变量广义积分的(3)和(4), 其连续性、可积性、可微性需要有一致收敛保障.

一致收敛性的要点

(1)定义等价形式 $\lim\limits_{b\to\infty}\beta(b)=0,\ \beta(b)=\sup\limits_{u\in[\alpha,\beta]}\int_b^{\infty}f(x,u)\,\mathrm{d}x$

(2) Cauchy 收敛准则(最基本的判别法).

(3) Weierstrass 判别法(较实用判别法): 找到 $p(x)$ 使得

$|f(x,u)|\leqslant p(x)\ u\in[\alpha,\beta]$, 且 $\int_a^{+\infty}p(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

(4) Dirichlet 和 Abel 判别法: 注意判别法的条件.

(5)一致收敛的范围: 一致收敛是一个整体概念, 应明确在 u 的什么范围内一致收敛.

四、一致收敛广义积分的性质

仅以无穷积分为例, 设下列广义积分收敛

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x \quad (u\in I)$$

（1） $f(x,u)$连续, 积分在I 上一致收敛 $\Longrightarrow$ $\varphi(u)$ 在 I 上连续.

（2） $f(x,u)$连续, 积分在$[\alpha,\beta]$ 上一致收敛 $\Longrightarrow$ $\varphi(u)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上可积且积分可交换.

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}u\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^\beta f(x,u)\,\mathrm{d}u.$$

（3） $f(x,u)$ 对 u 有连续的偏导数, 积分$\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,\mathrm{d}x$在$I$ 上一致收敛 $\Longrightarrow$ $\varphi(u)$ 在 I 上可导, 且

$$\varphi'(u)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\,\mathrm{d}x$$

要点:

(1) 在证明连续、可导等局部性质时, 可用所谓的内闭一致收敛性, 即对任意一点 $u \in I$, 只要在包含 u 的某个区间 $u \in [\alpha, \beta] \subset I$ 内一致收敛, 就推出 $\varphi(u)$ 在 u 的连续性, 可微性也可类似处理.

(2) 在计算一些含参变量积分时, 可视其中包含的参数为参变量, 通过积分和求导, 最终解决广义积分问题. 例如 Laplace 积分.

(3) 可通过在被积函数中增加一个积分因子 (一般是衰减的因子, 使广义积分满足一致收敛的条件, 再积分, 最终通过取极限或特殊值得到原积分的值.例如 Dirichlet 积分.

五、Euler积分

Γ 函数：$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \quad (0 < s < +\infty)$,

B 函数：$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t \quad (0 < p < +\infty, 0 < q < +\infty)$

两者关系：$\mathrm{B}(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad p > 0,\ q > 0.$

掌握要点

（1）Γ 函数和 B 函数的性质以及其他形式的表示.

（2）Γ 函数和 B 函数在一些特殊点的值.

（3）通过换元等方法, 把一些积分表示为Γ 函数或 B 函数, 并借此计算积分.

六、例题

一、证明下列积分在 $t \geqslant 0$收敛, 在 $t > 0$ 可导

$$F(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \ln(1+tx)\,\mathrm{d}x$$

证明 把积分写成

$$F(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \frac{\ln(1+tx)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

其中 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛, $\frac{\ln(1+tx)}{\sqrt{x}}$ 当 x 充分大时对 x 单调减趋于零.

对任意的 $t > 0$, 取 $0 < \alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $f(x,t) = \frac{\sin x}{x} \ln(1+tx)$ 对 t 有连续的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\sin x}{1+tx}$, $(x \geqslant 0, t > 0)$. 且在 $[\alpha, \beta]$ 上, $\int_0^b \sin x\,\mathrm{d}x$ 关于 t 一致有界, $\frac{1}{1+tx}$ 关于 x 单调减, 且 $\frac{1}{1+tx} \leqslant \frac{1}{1+\alpha x} \to 0\ (x \to +\infty)$ 关于

$t \in [\alpha, \beta]$ 一致, 根据 Dirichlet 判别法 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+tx}$ 关于 t 在$[\alpha, \beta]$ 一致收敛, 因此得到 $F(t)$ 在$[\alpha, \beta]$ 上可导, 也就是在 $t > 0$ 可导.

二、设 $|\alpha| \neq 1$, 证明积分 $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x \sin \alpha x}{x}\, \mathrm{d}x$ 收敛, 并求其值.

证明 注意到 $x = 0$ 不是瑕点. 因此可以考虑在 $[1, +\infty)$ 上的收敛性. 在 $[1, +\infty)$ 上, $1/x$ 单调减趋于零,

$$\left|\int_1^A \sin x \sin \alpha x\, \mathrm{d}x\right| = \left|\int_1^A \frac{\cos(1+\alpha)x - \cos(1-\alpha)x}{2}\, \mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{|1+\alpha|} + \frac{1}{|1-\alpha|}\right)$$

即 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x \sin \alpha x}{x}\, \mathrm{d}x$ 收敛, 原积分也收敛! 为了求积分, 增加因子并记

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{\sin x \sin \alpha x}{x} \mathrm{e}^{-\beta x}\, \mathrm{d}x \ (\beta \geqslant 0).$$

因为 $\int_0^\infty \frac{\sin x \sin \alpha x}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $\beta \geqslant 0$ 一致收敛, $\mathrm{e}^{-\beta x} \leqslant 1$ 关于$\beta \geqslant 0$ 一致有界,因此积分关于$\beta \geqslant 0$ 连续.

又因 $|\sin x \cos \alpha x \mathrm{e}^{-\beta x}| \leqslant \mathrm{e}^{-\beta x}$, 所以被积函数对 α 求导后关于α 一致收敛, 于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial I(\alpha,\beta)}{\partial \alpha} &= \int_0^\infty \sin x \cos \alpha x \mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty (\sin(x+\alpha x)+\sin(x-\alpha x))\mathrm{e}^{-\beta x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1+\alpha}{(1+\alpha)^2+\beta^2}+\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^2+\beta^2}\right) \\ \Longrightarrow I(\alpha,\beta) &= \frac{1}{4}\ln[(1+\alpha)^2+\beta^2]-\frac{1}{4}\ln[(1-\alpha)^2+\beta^2]\end{aligned}$$

这里我们用到了形如

$$\int_0^\infty \sin bx \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{b}{b^2+a^2},\ (a>0)$$

的积分. 最后利用 $I(\alpha,\beta)$ 对 β 的连续性, 令 $\beta=0$ 得

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{d}x=I(\alpha)=I(\alpha,0)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right|$$

三、证明: 对任意值 u, 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x)\,\mathrm{d}x=1.$$

证明 令 $\psi(u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x)\,\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned}
\psi'(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}(\cos x\cos(u\sin x)-\sin x\sin(u\sin x))\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x+x)\,\mathrm{d}x\\
\psi''(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x+2x)\,\mathrm{d}x\\
\psi^{(n)}(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}\cos(u\sin x+nx)\,\mathrm{d}x\\
\cdots &= \cdots
\end{aligned}$$

显然每一步求导都是合理的, 因为每一步被积函数连续可导. 同时对于任意给定的 u , 存在 M, 使得 $|u|\leqslant M$, $|\psi^{(n)}(u)|\leqslant \mathrm{e}^M$, 所以$\psi(u)$ 在$[-M,M]$ 中可以展开成Taylor 级数.

注意到 $\psi(0)=1$, $\psi^{(n)}(0)=0$, $n=1,2,\cdots$, 所以对任意的 u, 有

$$\psi(u)=\psi(0)=1.$$

该题的另一种证明方法是将积分化为曲线积分. 视 x 为角度, 令 $\xi=\cos x,\eta=\sin x$, 则

$$\begin{aligned}\psi'(u)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{u\cos x}(\cos x\cos(u\sin x)-\sin x\sin(u\sin x))\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\xi^2+\eta^2=1}e^{u\xi}(\cos(u\eta)\,\mathrm{d}\eta+\sin(u\eta)\,\mathrm{d}\xi)\\&=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leqslant 1}\left(\frac{\partial(e^{u\xi}\cos(u\eta))}{\partial\xi}-\frac{\partial(\mathrm{e}^{u\xi}\sin(u\eta))}{\partial\eta}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta=0\end{aligned}$$

所以 $\psi(u)=\psi(0)=1$.

6. 证明积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x+u}\mathrm{e}^{-ux}\,\mathrm{d}x$ 关于 u 在$[0,+\infty)$ 上一致收敛.

证明 利用Dirichlet 判别法, 不难验证在任何有限区间上

$$\left|\int_a^b \sin 3x \,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{3}$$

对 u 一致有界. 关键是要验证 $f(x,u) = \dfrac{\mathrm{e}^{-ux}}{x+u}$ 对任何 $u \geqslant 0$ 是 x 的单调函数且当 $x \to +\infty$ 时, 关于 $u \geqslant 0$ 一致趋于零.

因为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\mathrm{e}^{-ux}\left(\frac{u(x+u)+1}{(x+u)^2}\right) \leqslant 0 \ (x \geqslant 0, u \geqslant 0)$$

因此 $f(x,u)$ 是 x 的单调函数.

对任何 $u \geqslant 0$,

$$|f(x,u)| = \left|\frac{\mathrm{e}^{-ux}}{x+u}\right| \leqslant \frac{1}{x} \to 0 \ (x \to +\infty)$$

所以$f(x,u) = \dfrac{\mathrm{e}^{-ux}}{x+u}$ 对任何 $u \geqslant 0$ 是 x 的单调函数且当 $x \to +\infty$ 时, 关于 $u \geqslant 0$ 一致趋于零.

7. 证明积分
$$\int_0^{+\infty} \frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \ (a>0)$$
关于 u 在 $[0,+\infty)$ 上不一致收敛, 但在 $[\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$ 上一致收敛.

证明不一致收敛往往比证明一致收敛还要困难, 只有对一致收敛性概念很好的理解, 才能根据题意解决问题.

证明 假如积分在 $u \geqslant 0$ 一致收敛, 那么根据一致收敛的Cauchy收敛准则, 对任意 $\varepsilon>0$, 一定存在 $M>0$, 使得对任意的 $A>M$, $A'>M$, 有
$$\left|\int_A^{A'} \frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$
对任何 $u\geqslant 0$ 成立, 因此
$$\sup_{u\geqslant 0}\left|\int_A^{A'} \frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon.$$

对任意的 $A > M$, 取 $A' = \alpha A$, $u = \dfrac{1}{A}$,其中 $1 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, 那么

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\geqslant \sup_{u\geqslant 0}\left|\int_A^{A'}\frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right| \\
&\geqslant \left|\int_A^{A'}\frac{x\cos ux}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right|_{u=1/A} = \left|\int_A^{\alpha A}\frac{x\cos\frac{x}{A}}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \int_1^{\alpha}\frac{A^2t\cos t}{A^2t^2+a^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \cos\alpha\int_1^{\alpha}\frac{A^2t}{A^2t^2+a^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\cos\alpha\ln\frac{A^2\alpha^2+a^2}{A^2+a^2}
\end{aligned}$$

令 $A \to +\infty$, 就有

$$\varepsilon \geqslant \cos\alpha\ln\alpha > 0.$$

这里用到了$\cos t$ 在 $[1,\alpha] \subset \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调减. 上述结论与 ε 是任意整数矛盾, 因此积分在 $u \geqslant 0$ 不一致收敛. 在 $u \geqslant \delta > 0$ 上的一致收敛性可仿照书上例13.4.3的方法证明.

9. 设 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明函数

$$\varphi(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos ux\,\mathrm{d}x$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

本题要证明函数 $\varphi(u)$ 在 $|u|<\infty$ 上一致连续, 即对任意的 $\varepsilon>0$, 要找到这样的 $\delta>0$, 使得对任何 u,u', 只要 $|u-u'|<\delta$, 就有 $|\varphi(u)-\varphi(u')|<\varepsilon$.

证明 因 $|f(x)\cos ux|\leqslant|f(x)|$, 所以积分 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos ux\,\mathrm{d}x$ 关于 $|u|<\infty$ 一致收敛. 所以函数 $\varphi(u)$ 在 $|u|<\infty$ 有定义且连续. 下面要证 $\varphi(u)$ 是 $|u|<\infty$ 上一直连续函数.

$\forall\varepsilon>0$, 存在 $M>0$, 使得

$$\int_{-\infty}^{M}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{5},\quad \int_{-\infty}^{-M}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{5},$$

记 $A = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$, 取

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{5M(A+1)},$$

则对于任意的u, u', 当 $|u - u'| < \delta$ 时, 就有

$$\begin{aligned}
|\varphi(u) - \varphi(u')| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos ux \,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos u'x \,\mathrm{d}x \right| \\
&\leqslant \int_{-M}^{M} |f(x)||\cos ux - \cos u'x| \,\mathrm{d}x \\
&+ \int_{-\infty}^{-M} |f(x)||\cos ux - \cos u'x| \,\mathrm{d}x + \int_{M}^{+\infty} |f(x)||\cos ux - \cos u \\
&\leqslant \int_{-M}^{M} |f(x)||x||u - u'| \,\mathrm{d}x + 2\int_{-\infty}^{-M} |f(x)| \,\mathrm{d}x + 2\int_{M}^{+\infty} |f(x)| \,\mathrm{d} \\
&\leqslant MA|u - u'| + \frac{4}{5}\varepsilon < \varepsilon.
\end{aligned}$$

这样就证明了 $\varphi(u)$ 的一致连续性.

四、设 p, q 都是正数，求 $I = \int_0^1 x^q \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p \mathrm{d}x$

解 做变换 $x = \mathrm{e}^{-t}$,

$$\int_0^1 x^q \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-qt} t^p \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} t^p \mathrm{e}^{-(q+1)t} \mathrm{d}t.$$

再令 $(q+1)t = u$

$$I = \frac{1}{(q+1)^{p+1}} \int_0^{\infty} u^p \mathrm{e}^{-u} \mathrm{d}u = \frac{p\Gamma(p)}{(q+1)^{p+1}}$$

五、设 $f\Big|_{[0,+\infty)}$ 连续, 且 $\int_0^{+\infty} f^2(x) \mathrm{d}x$ 收敛, 证明函数

$$g(x) = f(x) - 2\mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^t f(t) \mathrm{d}t \quad (x \geqslant 0)$$

满足

$$\int_0^{+\infty} g^2(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f^2(x) \mathrm{d}x.$$

证明 令 $h(x)=\int_0^x e^t f(t)\,dt\ \ (x\geqslant 0)$, $h(0)=0$ 则

$$g(x)-f(x)=-2e^{-x}h(x),$$
$$g(x)+f(x)=2e^{-x}(h'(x)-h(x)),$$

$$\Longrightarrow g^2(x)-f^2(x)=-4e^{-2x}h(x)(h'(x)-h(x))$$
$$=-2\left(e^{-2x}h^2(x)\right)'$$

$$\Longrightarrow \int_0^X g^2(x)\,dx-\int_0^X f^2(x)\,dx=-2e^{-2x}h^2(x)\Big|_0^X$$

下面的问题是如何证明

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}h(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\int_0^x e^t f(t)\,dt=0.$$

因为 $\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx$ 收敛, 所以对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $A>0$, 使得当 $X>A$

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

时, 有

$$\int_A^X f^2(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon^2,$$

$$\begin{aligned}\left(e^{-X}\int_A^X e^t f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 &\leqslant \mathrm{e}^{-2X}\int_A^X \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t\int_A^X f^2(t)\,\mathrm{d}t\\ &< \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2(X-A)})\varepsilon^2 < \varepsilon^2\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left|e^{-X}\int_A^X e^t f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

记 $M = \int_0^A \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t$, 则存在 $B > 0$ 使得当 $X > B$ 时有 $|\mathrm{e}^{-X}M| < \varepsilon$, 因此当 $X > B$ 时有

$$\left|\mathrm{e}^{-X}\int_0^X e^t f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\mathrm{e}^{-X}\int_0^A e^t f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\mathrm{e}^{-X}\int_A^X e^t f(t)\,\mathrm{d}t\right| < 2\varepsilon.$$