ch4 20

> 设$S=\{x_1,x_2,...,x_n\}$是平面上n个点的集合，$n\geq 3$，其中任何两点之间的距离至少是1. 证明：最多有$3n-6$个点对，其距离恰好是1.

证明：
不妨设S中顶点之间的距离恰好为1，只要证明G中最多有$3n-6$条边。
由推论4.2，只要证G是平面图即可。
（反证）：
假设有边u_1v_1,u_2v_2在除顶点外交叉，交叉点设为s。
$\because d(u_1,v_1)=d(u_2,v_2)=1$
$\therefore min\{d(u_1,s),d(s,v_1)\}\leq 1/2, min\{d(u_2,s),d(s,v_2)\}\leq 1/2$
不妨设$d(u_1,s)\leq 1/2, d(u_2,s)\leq 1/2$,
则有$d(u_1,u_2)<d(u_1,s)+d(s,u_2)\leq 1$
即u_1,u_2距离小于1，矛盾。
$\therefore$ 图G是平面图。得证。

ch5 1

> 分别求出K_{2n}和$K_{n,n}$中不同完美匹配的个数。

K_{2n}的完备匹配个数等于将$2n$个元素划分成n个大小为2的集合，个数为
$\frac{\prod_{i=0}^{n-1}\binom{2n-2i}{2}}{n!}=(2n-1)!!$
$K_{n,n}$的完备匹配可以对第一部分标号，第二部分与第一部分的匹配可以看成全排列，个数为$n!$.

ch5 2

> 树至多有一个完备匹配

证明：
假设存在两个完备匹配M和M'，设
$S=\{e|e\in M, e\notin M\bigcap M'\}$，$T=\{e|e\in M', e\notin M\bigcap M'\}$，$S$与$T$的顶点集合相同，任取一个顶点$u$，在$S$与$T$中各有一个与其相连的边，设这两条边的另一个顶点为$u_1,v_1$. 在$T$中有一条与$u_1$相连的边，在$S$中有一条与$v_1$相连的边，若这两条边的另一个顶点相同，设这个顶点为v，则uu_1vv_1u为圈，与树中无圈矛盾。若这两条边的顶点不同，设为u_2,v_2，以此类推，必然会出现顶点相同的情况，$uu_1u_2...u_kvv_k...v_2v_1u$为圈，与树中无圈矛盾。
故树之多有一个完备匹配。

ch5 7

> 证明：二分图有完备匹配的充要条件是，对任意$S\in V\{G\}$，都有$\mid N(S)\mid\geq\mid S\mid$。这个条件对一般图是否成立？

证明：
设$V(G)=X\bigcup Y, X\bigcap Y=\emptyset, S_X=S\bigcap X, S_Y=S\bigcap Y$,
则$|S|=|S_X|+|S_Y|, |N(S)|=|N(S_X)|+|N(S_Y)|$.
（必要性）：
因为二分图G有完备匹配，所以X中的顶点都被许配。
由$Hall$定理，有$|N(S_X)|\geq|S_X|$. 同理，$|N(S_Y)|\geq|S_Y|$.
$|N(S)|=|N(S_X)|+|N(S_Y)|\geq|S_X|+|S_Y|=|S|$
（充分性）：
不妨设$|X|\geq|Y|$，取$S\subset X$，由$Hall$定理，存在匹配M，使得X中的顶点都被匹配。

$\because |X| \geq |Y|$
$\therefore Y$中的顶点也相应地都被匹配。所以匹配M即为二分图G的完备匹配。
对一般图不成立，例如K_3满足$|N(S)| \geq S$，但是没有完备匹配。

ch5 9

> 矩阵的一行或一列称为矩阵的一条线。证明：0-1矩阵中包含所有1所需的最少线数等于没有两个1在同一条线上的1的最大个数

证明：对0-1矩阵M,构造相应的二分图G,$M_{ij} = 1$指第i行代表的顶点与第j列代表的顶点相邻
则包含所有1的最小线数等价于二分图G的最小覆盖，不在同一线上的1的最大个数等价于二分图G的最大匹配
由二分图最小覆盖等于最大匹配得，这两者相等