中 国 科 学 技 术 大 学
2015 - 2016学年第二学期期终考试试卷(A)

装订线 答题时不要超过此线

考试科目: 线性代数与解析几何 得分: ____________

所在院、系: ____________ 姓名: ________ 学号: ____________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
复查							

一、【共25分】填空题:

1. 设 $\mathbf{R}^3$ 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 把向量 $\alpha_1 = (1,2,3)^T, \alpha_2 = (0,1,1)^T, \alpha_3 = (0,0,1)^T$ 分别变换为$\beta_1 = (-1,1,6)^T, \beta_2 = (-1,1,2)^T, \beta_3 = (0,-1,2)^T$, 则 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$下的矩阵为____________.

2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是四维欧氏空间 V 的一组标准正交基, 则向量 $\alpha = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 与$\beta = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$ 的夹角为____________.

3. 设方阵 A 满足 $A^2 = O$, I为同阶单位阵，则 $\det(I+A) =$ ____________.

4. 方阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$的相似标准形为____________.

5. 实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 正定的充要条件是: 实数 a 满足____________.

二、【共20分】判断题：判断下列命题是否正确, 并简要说明理由或举出反例.

1. 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换, λ 是 $\mathcal{A}$ 的特征值. 则对应λ 的特征向量全体（加上零向量），即集合 $V_{\mathcal{A}}(\lambda) := \{\alpha \in V \mid \mathcal{A}\alpha = \lambda\alpha\}$ 是 V 的子空间.

2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 是欧氏空间 V 的一组非零正交向量组。则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关。

3. 设 A 是实对称方阵, I 是同阶单位阵，则当t为正实数时，方阵 $A + tI$ 正定.

4. 设$A \in \mathrm{R}^{m\times n}$，则齐次线性方程组$A\mathbf{x} = 0$与$A^TA\mathbf{x} = 0$同解。

三、【15分】设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$

(1) 求可逆矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为对角阵;

(2) 求A^n. 这里n为正整数。

四、【17分】在三维欧氏空间$\mathbf{R}^3$中，给定向量组$\alpha_1 = (1,1,1)$，$\alpha_2 = (0,1,1)$，$\alpha_3 = (0,0,1)$，其向量顺序固定。

1. 将向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$经过Schmidt正交化为一组标准正交基$\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3$。
2. 令A是以$\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3$为行构成的三阶方阵。定义$\mathbf{R}^3$上的线性变换$\mathcal{A}\mathbf{x} := A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$。证明：$\mathcal{A}$ 是绕某一轴线的旋转变换，并求该旋转轴。

五、【15分】给定直角坐标系中二次曲面的方程

$$xy + 2xz + 2y + 2z - 1 = 0$$

通过变量的线性变换及坐标系的平移将其化为标准型，并确定该二次曲面的类型。

六、【8分】设 n 阶实对称方阵 A 满足 $A^2 = I$，证明：

1. 存在正交方阵P使得$A = P\ \mathrm{diag}(I_r, -I_{n-r})P^{-1}$，这里$0 \le r \le n$.
2. 存在实对称方阵 B 使得 $I + A = B^2$。