代数结构第7次作业反馈

> Edited by 李昱祁

EX1

1. 对称性
2. 对称性
3. 不自反性，传递性，反对称性
4. 自反性，反对称性，传递性
5. 自反性，对称性，反对称性，传递性

> - 第3问中的关系也满足反对称性。
> ρ_4 的反对称性等价于 $\forall S,T \in \wp(E),\quad S\rho_4 T\ \wedge\ T\rho_4 S \Longrightarrow S=T$
>   其中前件$S\rho_4 T\ \wedge\ T\rho_4 S$ 恒假，因此上式恒真，反对称性成立；
>   a. 简单说，$\wp(E)$ 中没有能使 $S\rho_4 T\ \wedge\ T\rho_4 S$成立的一组 S,T，因此反对称性条件满足；
>   b. 或者参考课本56页例1上面一段中最后一句话，这句话实际上是原定义的逆否命题，也可以很容易判断出“真包含”关系满足反对称性
> - 部分同学，前两问没有考虑到 $S=\phi$ 的情况，或者直接把反对称性和不自反性忽视
> - 注意 “**不自反性**” 和 “**不是自反的 / 没有自反性**” 的区别. 后者与自反性是互补的，而前者只是后者的一个子集

EX2

1. 例如：$x\rho y \Leftrightarrow xy \geq 0$、$x\rho y \Leftrightarrow |x-y| \leq 2$ 等
2. 例如：$x\rho y \Leftrightarrow x \geq y$ 等
3. 例如：$x\rho y \Leftrightarrow xy \neq 0$、$x\rho y \Leftrightarrow xy > 0$ 等

> - 作业中大家举的常见栗子如上；或者自己写出一个关系的集合表示形式也可

EX3

1. $R_1 \circ R_2 = \{(c,d)\}$
2. $R_2 \circ R_1 = \{(a,d),(a,c)\}$
3. $R_1^2 = \{(a,a),(a,b),(a,d)\}$
4. $R_2^3 = \{(b,c),(b,d),(c,b)\}$

> - 主要是计算问题
>   a. 第2小问很多同学把(a,d)重复写了两次
>   b. 第4小问题目要求的是R_2^3，部分同学可能受第3问的影响求了R_2^2

EX5

- $R^{'}$具有自反性:

$xR^{'}x \Leftrightarrow xI_Ax$ 或 xRx，而 xI_Ax 恒成立

- $R \subseteq R^{'}$显然成立
- 对任意满足 P 有自反性且 $R \subseteq P$ 的集合P

$xR^{'}y \Leftrightarrow xI_Ay$ 或 xRy

若 xI_Ay，则 $x=y$，且P有自反性$\Rightarrow xPy$

若 xRy，因为$R \subseteq P$，故 xPy

综上两种情况，对任意满足 $xR^{'}y$ 的 x，y，都有xPy

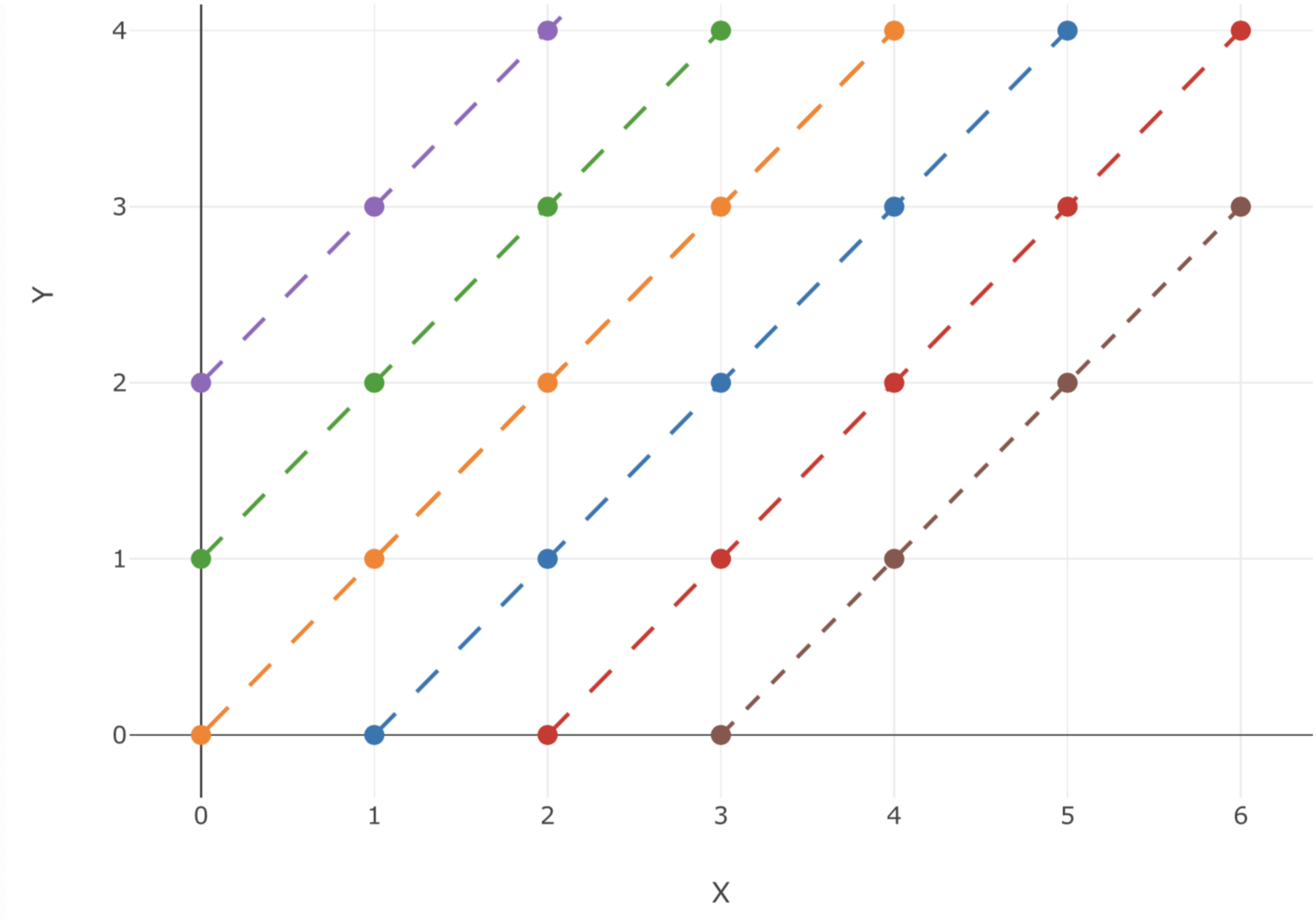
$\Rightarrow R^{'} \subseteq P$

> - 重点在于证明$R^{'} \subseteq P$
> - 三种性质闭包的相关定理课本上已经给出（Th 4.2 ~ 4.4）其余两个定理的证明课本上已经给出，大家最好都看看。虽然考试不一定考具体证明过程（考试大概率会像小测一样，给定一个具体的关系然后让求某种闭包），但是这些证明可以帮你再次确认下构造闭包的思路。（小测时相关题目出错率特别高）

EX6

- 自反性：$a+b=b+a \;\Rightarrow\; (a,b)\sim(a,b)$
- 对称性：$(a,b)\sim(c,d)\Leftrightarrow a+d=b+c\Leftrightarrow c+b=d+a\Leftrightarrow(c,d)\sim(a,b)$
- 传递性：$(a,b)\sim(c,d),(c,d)\sim(e,f)$
  $\Rightarrow a+d=c+b\,,\;c+f=d+e$
  $\Rightarrow a+d+c+f=c+b+d+e$
  $\Rightarrow a+f=b+e$
  $\Rightarrow(a,b)\sim(e,f)$

画图：（每个等价类用一种颜色标识）斜率为1



等价类图

> - 关系被定义在$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$上，因此做出的应该是散点图（作业中直接画了直线也没有扣分）。同一个等价类中的元素对应的点应该分布在同一条直线上，且该直线斜率为1

> - 最好不要直接改写为减法，如$(a,b) \sim (c,d) \Longleftrightarrow a-b=c-d$，因为$\mathbb{N}$上的减法运算不是封闭的。对于此题，因为直觉上会默认扩充到整数而没有问题，但对于其它系统这样做是不严谨的

EX7

- 自反性：$\forall S \in \wp(A), |S| = |S|$
- 对称性：$\forall S,T \in \wp(A), S \sim T \Rightarrow |S| = |T| \Rightarrow |T| = |S| \Rightarrow T \sim S$
- 传递性：$\forall S,T,V \in \wp(A),\ S \sim T, T \sim V \Rightarrow |S| = |T|, |T| = |V| \Rightarrow |S| = |V| \Rightarrow S \sim V$

商集$\{\ [\phi]\,,[\{1\}]\,,[\{1,2\}]\,,[\{1,2,3\}]\,,[\{1,2,3,4\}]\ \}$

其中
$[\phi] = \{\phi\}$
$[\{1\}] = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$
$[\{1,2\}] = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$
$[\{1,2,3\}] = \{\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{1,2,4\},\{1,2,3\},\}$
$[\{1,2,3,4\}] = \{\{1,2,3,4\}\}$

> 本题比较简单，~~没有什么需要特别提醒的。~~
>
> PS. 看到几个同学商集表示时大括号和中括号写反了，还有很多同学写出 $[\{\phi\}]$ 这样的形式…………针对本题，不知道是笔误还是其它原因
>
> 依照课程的表示方法，中括号里只会写一个元素（一般是你取的代表元），表示整个等价类集合
>
> 本题这里出现的大括号，只是因为元素定义在$\wp(A)$上，是集合；而空集 ϕ 已经是集合，它自然不需要像后面的$[\{1\}]$等那样加上$\{\}$.
>
> PSS.关于商集的表示：**以后的作业里或者期末考试中，再遇到商集的表示，需要把等价类展开，否则可能会失去分数**

EX9

- 自反性：$\forall x \in R$，x与x相差 $0 \Rightarrow x\rho x$
- 对称性：$\forall x,y \in R$，$x\rho y \Rightarrow |x-y| = k = |y-x|\ ,\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow y\rho x$

- 传递性：$\forall x, y, z \in R, x\rho y, y\rho z \Rightarrow x - y = k_1, y - z = k_2(k_1, k_2 \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x - z = k_1 + k_2 \Rightarrow x\rho z$

全部等价类的代表元：$[0, 1)$上的所有实数

> 没什么需要补充的~ 基本上唯一会出错的就是写出代表元这里