第三十二次　　已扫　　32.

2018–2019学年第一学期期终考试试题

考试科目：线性代数B1　　考试时间：2019.01.14　　得分：__________

学生所在系：__________　　姓名：__________　　学号：__________

一、 填空题【每空4分，共24分】

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^4 = \underline{\begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}}$。

2. 向量组$\alpha_1 = (1,1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,2,3,4)$, $\alpha_3 = (2,3,4,5)$, $\alpha_4 = (1,-2,2,-1)$ 的秩=___3___。

3. 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有无穷多解，则λ=___1___。

4. 设A, B均为n阶矩阵，且存在可逆矩阵P, 使得$B = P^{-1}AP - PAP^{-1} + I$。如果$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为B的n个特征值，则 $\sum\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i =$ ___n___。

5. 实二次型$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$的正惯性指数为___$r=1$___。

6. 设实二次型$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 2tx_1x_2 - 2x_1x_3$ 是正定的，则t的取值范围为___$-\sqrt{2} < t \sqrt{2}$___。

T

二、 判断题【判断下列命题是否正确，并简要说明理由。每题5分，共20分】

1. 若0为矩阵A的特征值，则A一定不可逆。 对.(True)

$\because \det(A)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=0 \quad \therefore A$不可逆.

2. 若f为线性空间V上的一个线性变换，且f在V的某组基下的矩阵为$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

F

则在V中存在一组基，使得f 在这组基下的矩阵为对角阵。 错.

$\because$线性变换在不同基下的矩阵是相似的.

而$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$不能相似于对角阵. $\therefore$不存在满足条件的基.

3. 设$V=\{a_0+a_1x+a_2x^2|a_i\in\mathbf{R}, i=0,1,2\}$, 即次数不超过2的实系数多项式构成的$\mathbf{R}$上的线性空间。若对任意$f(x), g(x)\in V$ 定义

$$(f(x),g(x))=f(0)g(0),$$

错.

F

则此二元运算$(,)$可以成为V上的一个内积。

如令: $f(x)=a_1x+a_2x^2\neq 0 \quad a_1,a_2\neq 0$时 $f(0)=0$.

$(f(x),f(x))=0$.

正定性不满足.

$\therefore$不是内积.

4. 设$2n$ 阶实对称矩阵$A=\begin{pmatrix} A_1 & B \\ C & A_2 \end{pmatrix}$，其中$A_1$, A_2 均为n阶方阵。若A正定，

T

则A_1+A_2也正定。

对.

$\because A$正定$\Longleftrightarrow A$的各阶主子式$>0 \Rightarrow A_1$的各阶顺序主子式>0

$\Rightarrow A_2$ - - - - >0

又A对称$\Rightarrow A_1, A_2$也对称

$\therefore A_1, A_2$都正定. A_1+A_2也是对称的.

因此A_1+A_2也正定. $(\because X^T(A_1+A_2)X>0)$

三、【10分】

设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$为非齐次线性方程组$\mathbf{AX}=\mathbf{b}$的3个解。

1. 求$\mathbf{AX}=\mathbf{0}$的通解；

2. 求$\mathbf{AX}=\mathbf{b}$的通解；

3. 求出满足题设条件的一个非齐次线性方程组。

1. 令 $\beta_1=\alpha_1-\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\beta_2=\alpha_1-\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, β_1,β_2 线性无关

∴ β_1,β_2 是 $AX=0$ 的两个线性无关的解. ∴ $AX=0$ 的解空间维数 ≥ 2. $r(A)\leq 1$. 而 ∵ $AX=b$ 有解. ∴ $A\neq 0$ ($\because b\neq 0$)

∴ $r(A)\geq 1$. ∴ $r(A)=1$

∴ $AX=0$ 的通解为：$\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2$. λ_1,λ_2 为任意常数.

2. $AX=b$ 的通解为：$\alpha_1+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2$，$\lambda_1,\lambda_2$ 为任意常数

3. 由通解：$\alpha_1+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2$

$$=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\lambda_2\\1+\lambda_1\\-\lambda_1-\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

得：$x_1+x_2+x_3=2$　即为所求.

四、【15分】

设(I): $\alpha_1=(1,\ 0,\ 0)^T$, $\alpha_2=(0,\ 1,\ 0)^T$, $\alpha_3=(0,\ 0,\ 1)^T$;

(II): $\beta_1=(-1,\ 0,\ 1)^T$, $\beta_2=(0,\ 1,\ 1)^T$, $\beta_3=(2,\ -1,\ -2)^T$

分别为$\mathbf{R}^3$的两组基。设σ为$\mathbf{R}^3$上的一个线性变换，并且

$\sigma(\beta_1)=(1,\ 0,\ -3)^T$, $\sigma(\beta_2)=(0,\ -1,\ -1)^T$, $\sigma(\beta_3)=(-5,\ -1,\ 0)^T$。

请分别求出σ 在（I）、（II）这两组基下的矩阵。

解：设从 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为T.

即：$(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)T$

$\therefore\ T=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}\quad (=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3))$ 用初等变换求T^{-1}

则从$\{\beta_i\}$到$\{\alpha_i\}$的过渡矩阵为$T^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

设σ在基$\{\alpha_i\}_{i=1}^3$下的矩阵为A.

〃 〃 $\{\beta_i\}_{i=1}^3$下 — — 〃 B.

$\because\ \sigma(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)B=\begin{pmatrix}1&0&-5\\0&-1&-1\\-3&-1&0\end{pmatrix}$

$\therefore\ B=T^{-1}\begin{pmatrix}1&0&-5\\0&-1&-1\\-3&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&0&-3\\-2&-1&-5\\-2&0&-4\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)&=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)A\\&=\sigma(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)T^{-1}=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)BT^{-1}\\&=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)TBT^{-1}\end{aligned}$$

$\therefore\ A=TBT^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-5\\0&-1&-1\\-3&-1&0\end{pmatrix}T^{-1}=\begin{pmatrix}-4&3&-3\\-2&1&-2\\-4&6&-7\end{pmatrix}$

五、【15分】

设实二次型

$$Q(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2bx_2x_3$$

可以经过正交变换$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$化为标准型$y_2^2 + 2y_3^2$.

1. 确定a和b的取值;

2. 求出满足题设条件的一个正交变换。

解：1. 对应的矩阵：$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$

A的特征值为 1, 2, 0 $\therefore \det(A)=0 \Rightarrow -(b-a)^2=0$

$\because \lambda=1$ 是特征值 $\therefore \det(A-I)=0 \Rightarrow 2ab=0$

$\therefore a=b=0$

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda=0$ 时. $(0I-A)X=0$ 基础解系单位化得：$X_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda=1$ 时 $(I-A)X=0$ — — — ：$X_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda=2$ 时 $(2I-A)X=0$ — — — $X_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore P=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ P为正交阵. 即为所求.

先讨论特殊情况：
1. $\lambda=0$ 全为0. $A=0$.
2. 特征值全为2. 则可逆 $A^2=2A \Rightarrow A=2I$

六、【8分】

设A为n阶复方阵，且$A^2=2A$。求证：A相似于对角阵。

解：∵ $A(2I-A)=0$ ∴ $r(2I-A)+r(A)\le n$ ①

又∵ $r(2I-A)+r(A)\ge r(2I-A+A)=r(2I)=n$ ②

∴ $r(A)+r(2I-A)=n$. $A^2=2A \Rightarrow \lambda^2=2\lambda$ λ为A的特征值

A的特征值为0,2. 设 $r(A)=r$. 则 $r(2I-A)=n-r$.

$V_{\lambda=0}$. $(0I-A)X=0$ 的解空间∴ $\dim V_{\lambda=0}=n-r$ 维 ∴ ∃ $n-r$个线无关的特征向

$V_{\lambda=2}$. $(2I-A)X=0$ - - $\dim V_{\lambda=2}=r$ 维 ∴ r个 — —

∴ A有n个线性无关的特征向量.

∴ A可相似于对角阵.

七、【8分】

设A 为n阶正定矩阵，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$为$\mathbf{R}^n$中的$s$个非零向量，且满足

$$\alpha_i^T A\alpha_j = 0,\ \ 1 \le i < j \le s$$

求证：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关。

解：A正定：$\alpha_i^TA\alpha_i>0$ $\alpha_i\neq\theta$. $(A^T=A)$

由 $\alpha_i^TA\alpha_j=0$ $1\le i<j\le s$ 转置得：$\alpha_i^TA\alpha_j=0$ $1\le j<i\le s$

∴ $\alpha_i^TA\alpha_j=0$ $\forall\, i\neq j$. $(i,j=1,\cdots,s)$

令 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\theta$ (要证 $k_i=0$)

则 $(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)^TA(k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s)=0$

展开得：$k_1^2\alpha_1^TA\alpha_1+k_2^2\alpha_2^TA\alpha_2+\cdots+k_s^2\alpha_s^TA\alpha=0$

由 $\alpha_i^TA\alpha_i>0 \Rightarrow k_i=0$ $i=1,\cdots,s$. ∴ $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关