数学分析 B2 第九次作业

11.4.1 (1)$\frac{4}{3}\pi abc$.

(2)$\frac{1}{3}R^3h^2$.

(6)0.

(7)$\frac{2}{5}\pi a^5$.

(8)$bc(f(a)-f(0))+ca(g(b)-g(0))+ab(h(c)-h(0))$.

11.4.2 $abc(\frac{a^2}{3}+1)$.

11.5.1 (1)$\frac{1}{2}$.

(5)$\frac{\pi}{2}$.

(6)$\frac{\pi}{2}a^4$.

11.5.3 4π. 取足够小的 r 使得 $B_r(0)$ 包含在 V 内. 注意到在 $\mathbf{r}\neq\mathbf{0}$ 处 $\operatorname{div}\mathbf{V}=0$, 所求积分 $=\iint_{\partial B_r(0)}\mathbf{V}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=r^{-3}\iint_{\partial B_r(0)}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3r^{-3}\iiint_{B_r(0)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\pi$.

11.5.5 由 Gauss 公式即得.

11.5.7 注意 $\cos(\widehat{\mathbf{c},\mathbf{n}})=\frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{c}|}$ 以及 $\operatorname{div}\mathbf{c}=0$ 即可.

11.5.8 Gauss 公式: $\oiint_{\partial V}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iiint_V(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 考虑 $P=P(x,y),Q=Q(x,y)$. 并设 ∂D 的参数表示为 $(x,y)=(x(t),y(t)),t\in[\alpha,\beta]$.

容易看出左边的积分在上下表面均为 0, 记 S' 为 V 的侧面, 则 $\oiint_{\partial V}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{S'}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{D'}(Py'(t)-Qx'(t))\mathrm{d}t\mathrm{d}z=\oint_{\partial D}P\mathrm{d}y-Q\mathrm{d}x$. 又 $\iiint_V(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_D(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 由此得 $\oint_{\partial D}-Q\mathrm{d}x+P\mathrm{d}y=\iint_D(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 用 $-P$ 代替 Q, 用 Q 代替 P，即得 $\oint_{\partial D}P\mathrm{d}x-Q\mathrm{d}y=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

11.5.9 (1)$-\frac{3}{2}$.

(3)$-\frac{9}{2}a^3$.

(4)0.

(6)-24.

11.5.11 注意 $\operatorname{rot}\mathbf{c}=\mathbf{0}$ 即可.

11.5.12 取 L 围成的平面 S. 则 $\oint_L\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\oint_L(R^2-x^2)\mathrm{d}x+(R^2-Rx+x^2)\mathrm{d}y+Rx\mathrm{d}z=\iint_S(-R)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2x-R)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 注意 S 在 $x-z$ 平面投影为曲线, 在 $x-y$ 平面投影为 $x^2+y^2=Rx$, 故所求积分为 $\iint_{(x-\frac{R}{2})^2+y^2=\frac{R^2}{4}}(2x-R)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.