试卷 (2017—2018).

一、基础部分

1. 解复方程

(1) $e^{iz}=2017$.

解. $iz=\ln|2017|+i(\arg 2017+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow z=-i\ln|2017|+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$

故方程的解为 $\{z: z=-i\ln|2017|+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$. #

(2) $(z-3)^4=1$.

解. 设 $z-3=Re^{i\theta}\ \Rightarrow\ R^4e^{i4\theta}=1$

$\Rightarrow R=1,\ \theta=\frac{2k\pi}{4},\ k=0,1,2,3$

故方程的解为 $\{z: z=3+e^{\frac{k\pi}{2}},\ k=0,1,2,3\}$

#

2, 已知调和函数 $v(x,y)=4x^2+ay^2+x$. 求常数 a 并求出以 $v(x,y)$ 为虚部且满足 $f(0)=1$ 的解析函数 $f(z)$.

解. (1) 求解 a:

已知 $v(x,y)$ 是调和函数. 由定义可知

$v_{xx}^2+v_{yy}^2=0$ (*)

另外 $v_x=8x+1,\quad v_{xx}=8$

$v_y=2ay,\quad v_{yy}=2a$

由(*) $2a+8=0\quad\Rightarrow a=-4$

(2) 由(1)可知 $v(x,y)=4x^2-4y^2+x$. 下面求解其共轭调和函数 $u(x,y)$. 使得 $f(z)=u(z)+iv(z)$ 是解析函数.

有两种方法:

方法一: (复)積分法,

(注: 一般要求.定义区域是单连通,这样的话 积分与路径无关,这里题目没有说明定义区域,我们默认是单连通区域)

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} v_y\,dx - v_x\,dy + C$$

$$=\int_0^y -(8x+1)\,dy + C$$

$$=-8xy-y+C.$$

$$\Rightarrow f(z)=u+iv = -8xy-y+C+i(4x^2-4y^2+x)$$

$$=i(x+iy)+4i(x^2-y^2+2xy)+C$$

$$=4iz^2+iz+C.$$

又 $\because f(0)=1$

$\Rightarrow C=1$，即得 $f(z)=4iz^2+iz+1$ #

$\boxed{\text{方法二}}$ (实)定积分法.

(因为调和函数本来就是实二元函数，故此法可行)

由 C-R 条件.可得 $u_x=v_y=-8y.$

$\Rightarrow u(x,y)=\int -8y\,dx = -8xy+\varphi(y)$ (其中 $\varphi(y)$ 是任何可微函数)

又 $u_y=-v_x$

$\Rightarrow -8x+\varphi'(y)=-8x-1$

$\Rightarrow \varphi'(y)=-1$

$\Rightarrow \varphi(y)=-y+C.$ $\Rightarrow u(x,y)=-8xy-y+C.$ #

3. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{2^n}$，求收敛半径 R，并在收敛域内求出此幂级数的和函数.

解：(1).求收敛半径 R.

公式一：d'Alembert公式：由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2^{n+1}}\times\frac{2^n}{n}\right|=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow R=2.$

公式二：Abel公式：由 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n/2^n}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow R=2,$

(2). 求其和函数.

由(1)可知，收敛域为 $|z|<2$. (注：区域 = 连通 + 开，故 $|z|<2$)

注意到 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{2^n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}\right)'$

$\Rightarrow$ 先计算 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$ (在 $|z|<2$ 内收敛)

级数前 n 项和. $S_n=1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{z^n}{2^n}}{1-\frac{z}{2}}$

由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{z^n}{2^n}=0$. (因为 $|z|<2\Rightarrow\left|\frac{z}{2}\right|<1$)

$\therefore\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2}{2-z}$

$\Rightarrow f(z)=\left(\frac{2}{2-z}\right)'=\frac{2}{(2-z)^2}$ 即为所求 #.

注：在对 $f(z)$ 做级数展开时，具有一定的技巧性，需要熟记一些公式.

4. 已知 $f(z)=z^3\exp\{\frac{1}{z}\}$，把 $f(z)$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内展成洛朗级数.

解. 因为 $\exp(\frac{1}{z})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{1}{z})^n$.

$\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{3-n}=\sum_{n=-\infty}^{3}\frac{1}{(3-n)!}z^n$

#

5. 求方程 $z^5+5z^3+2z+1=0$ 在 $1<|z|<2$ 内根的个数.

解. 分两步. (1) 在 $|z|<2$ 内根的个数.

令 $f(z)=z^5$, $\varphi(z)=5z^3+2z+1$.

在 $|z|=2$ 上, $|f(z)|=32$, $|\varphi(z)|<25$ } $|\varphi(z)|<|f(z)|$，且 $f(z)$ 在 $|z|<2$ 内有5重零点0,

由Rouche定理，原方程在 $|z|<2$ 内有5个根.

(2). 在 $|z|<1$ 内根的个数.

令 $f(z)=5z^2$.

$\varphi(z)=z^5+2z+1$

在 $|z|=1$ 时, $|f(z)|=5$, $|\varphi(z)|=4$ } $|\varphi(z)|<|f(z)|$. 且 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内有2重零点。

由Rouche定理知 原方程在 $|z|<1$ 内有2个根.

且在 $|z|=1$ 上无根

故 原方程在圆环 $1<|z|<2$ 内有3个根

二. 计算题 (计算复积分, 两个题目 {Cauchy积分公式, Cauchy积分定理, 留数定理})

(1). $\int_0^{1+i}(2z+3z^2)dz$.

解: ※因为被积函数 $f(z)=2z+3z^2$ 在复平面上解析,

取一个足够大的单连通域D, 使得 $1+i, 0\in D$.

这样在D内复线积分与积分路径无关, 可取直线, 折线, ⋯

*. 复定积分, 考虑到解析函数有解析的原函数

我们用 N-L 公式.

$$\int_0^{1+i}(2z+3z^2)dz \stackrel{N-L}{=\!=} z^2+z^3\Big|_0^{1+i}=4i-2, \quad \#$$

(2), (3), (4) 均是计算复闭曲线上的积分, 选Cauchy积分公式或留数定理中任一方法进行计算.

(2). $\oint_{|z|=3}\frac{e^{iz}}{z-2i}dz \triangleq I$

解: 因为 $f(z)=e^{iz}$ 在闭圆域 $|z|\leq 3$ 内解析.

所以由Cauchy积分公式 $f(2i)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=3}\frac{e^{iz}}{z-2i}dz$

又 $f(2i)=e^{-2}$

故 $I=2\pi i e^{-2}$. #

(3). $\oint_{|z|=4} \frac{\sin 5z}{z^2} dz \triangleq I$

解. 令 $f(z)=\sin 5z$, 则 $f(z)$ 在 $|z|\leq 4$ 内解析

由Cauchy积分公式, $f'(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=4} \frac{f(z)}{z^2} dz$

另外 $f'(z)=5\cos 5z \Rightarrow f'(0)=5$

故得 $I=10\pi i$,

(4) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{1-z}\right)}{z^4} dz \triangleq I.$

解 令 $F(z)=\dfrac{\sin\left(\frac{1}{1-z}\right)}{z^4}$, 在 $|z|<\frac{1}{2}$ 只有一个4级极点 $z=0$.

由留数定理 $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} F(z)dz = 2\pi i \, \mathrm{Res}[F(z),0]$.

$$\Rightarrow \mathrm{Res}[F(z),0]=\frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}[z^4\cdot F(z)]'''$$

$$=\frac{1}{6}[5\cos 1-6\sin 1]$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi i}{3}[5\cos 1-6\sin 1]$$

注: $z^4\cdot F(z)=\sin\left(\frac{1}{1-z}\right)$.

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{1}{1-z}\right)' = \cos\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{(1-z)^2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{1}{1-z}\right)'' = -\sin\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{(1-z)^4}+\cos\frac{1}{1-z}\cdot\frac{2}{(1-z)^3}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{1}{1-z}\right)''' = -\cos\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{(1-z)^6}-\sin\frac{1}{1-z}\cdot\frac{4}{(1-z)^5}$$
$$-\sin\frac{1}{1-z}\cdot\frac{2}{(1-z)^5}+\cos\frac{1}{1-z}\cdot\frac{6}{(1-z)^4}$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0}\sin\left(\frac{1}{1-z}\right)''' = -\cos 1-4\sin 1-2\sin 1+6\cos 1$$
$$=5\cos 1-6\sin 1.$$

(5). $\oint_{|z-3|=2} \frac{e^{z}}{|z|^2}|dz| \triangleq I$

解. 令 $z-3=2e^{i\theta} \Rightarrow dz = 2ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow |dz| = 2d\theta$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi} \frac{2e^{3+2e^{i\theta}}}{(3+2e^{i\theta})(3+2e^{-i\theta})}d\theta = 2e^3\int_0^{2\pi} \frac{e^{2e^{i\theta}}}{13+12\cos\theta}d\theta = 2e^3 I_1$$

计算复积分 I_1. 令 $\xi=e^{i\theta}$

$$I_1 = \int_{|\xi|=1} \frac{e^{2\xi}}{i\xi(13+6\xi+6\xi^{-1})}d\xi = \int_{|\xi|=1} \frac{e^{2\xi}}{i(3\xi+2)(2\xi+3)}d\xi$$

$$= \int_{|\xi|=1} \frac{e^{2\xi}}{3i(\xi+\frac{2}{3})(2\xi+3)}d\xi$$

令 $f(\xi)= \frac{e^{2\xi}}{3i(\xi+\frac{2}{3})(2\xi+3)}$，在 $|\xi|<1$ 内有一级极点 $\xi=-\frac{2}{3}$.

由留数定理 $I_1 = 2\pi i\cdot \mathrm{Res}[f(\xi), -\frac{2}{3}] = \frac{2\pi}{5}e^{-\frac{4}{3}}$

$$\Rightarrow I = \frac{4\pi}{5}e^{\frac{5}{3}}$$ #.

三、计算(实)定积分.(结果是实数)

[将实积分的计算转换为计算复积分]

(1). $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(5-2\cos\theta)^2}$

解. 令 $z=e^{i\theta}$

$$I=\int_{|z|=1}\frac{z\,dz}{i(z^2-5z+1)^2}=\int_{|z|=1}\frac{z\,dz}{i(z-a_1)^2(z-a_2)^2}$$

其中 $f(z)=\frac{z}{i(z-a_1)^2(z-a_2)^2}$ 有两个2级极点 $a_1=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$, $a_2=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$

只有 $a_1=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$ 在 $|z|<1$ 内,

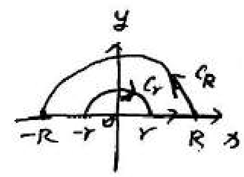
由留数定理 $I=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),a_1]$

而 $\mathrm{Res}[f(z),a_1]=\lim_{z\to a_1}\left(\frac{z}{i(z-a_2)^2}\right)'=\frac{5}{21\sqrt{21}\,i}$

$\Rightarrow I=\frac{10\pi}{21\sqrt{21}}$, #

(2). $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 4x}{x(x^4+1)}dx$

解. 令 $C=C_r+[r,R]+C_R+[-R,-r]$ 为积分曲线.



$f(z)=\frac{e^{i4z}}{z(z^4+1)}$

则 $e^{\frac{\pi}{4}i}$, $e^{\frac{3}{4}\pi i}$ 是 $f(z)$ 在C内的两个1级极点,

则由留数定理,

$$2\pi i\left\{\mathrm{Res}[f(z),e^{\frac{\pi}{4}i}]+\mathrm{Res}[f(z),e^{\frac{3}{4}\pi i}]\right\}$$

$$=\int_{-R}^{r}f(z)dz+\int_{C_r}f(z)dz+\int_r^R f(z)dz+\int_{C_R}f(z)dz \qquad (2)$$

因为 $\lim_{r\to 0}\int_{C_r}f(z)dz=-\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),0]=-\pi i$.

由Jordan引理 $\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0$

* 下面计算 $\mathrm{Res}[f(z), e^{\frac{\pi}{4}i}]$, $\mathrm{Res}[f(z), e^{\frac{3}{4}\pi i}]$

$$\mathrm{Res}[f(z), e^{\frac{\pi}{4}i}] = \lim_{z\to e^{\frac{\pi}{4}i}} \frac{e^{i4z}}{z(z-e^{\frac{3}{4}\pi i})(z-e^{\frac{5}{4}\pi i})(z-e^{\frac{7}{4}\pi i})}$$

$$\xlongequal{e^{\frac{\pi}{4}i}=\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i} \frac{e^{i4(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i)}}{e^{\frac{\pi}{4}i}(e^{\frac{\pi}{4}i}-e^{\frac{3}{4}\pi i})(e^{\frac{\pi}{4}i}-e^{\frac{5}{4}\pi i})(e^{\frac{\pi}{4}i}-e^{\frac{7}{4}\pi i})}$$

$$= \frac{e^{-2\sqrt2+2\sqrt2 i}}{e^{\frac{\pi}{4}i}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}(1-e^{\frac{\pi}{2}i})\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}(1-e^{\pi i})\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}(1-e^{\frac{3}{2}\pi i})}$$

$$= \frac{e^{-2\sqrt2+2\sqrt2 i}}{e^{\pi i}(1-i)(1+1)(1+i)}$$

$$= \frac{e^{-2\sqrt2+2\sqrt2 i}}{-4}$$

$$\mathrm{Res}[f(z), e^{\frac{3}{4}\pi i}] = \lim_{z\to e^{\frac{3}{4}\pi i}} \frac{e^{i4z}}{z(z-e^{\frac{\pi}{4}i})(z-e^{\frac{5}{4}\pi i})(z-e^{\frac{7}{4}\pi i})}$$

$$\xlongequal{e^{\frac{3}{4}\pi i}=-\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i} \frac{e^{-2\sqrt2-2\sqrt2 i}}{e^{\frac{3}{4}\pi i}(e^{\frac{3}{4}\pi i}-e^{\frac{\pi}{4}i})(e^{\frac{3}{4}\pi i}-e^{\frac{5}{4}\pi i})(e^{\frac{3}{4}\pi i}-e^{\frac{7}{4}\pi i})}$$

$$= \frac{e^{-2\sqrt2-2\sqrt2 i}}{e^{\frac{3}{4}\pi i}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}(e^{\frac{\pi}{2}i}-1)\cdot e^{\frac{3}{4}\pi i}(1-e^{\frac{\pi}{2}i})\cdot e^{\frac{3}{4}\pi i}(1-e^{\pi i})}$$

$$= \frac{e^{-2\sqrt2-2\sqrt2 i}}{e^{\frac{10}{4}\pi i}(i-1)(1-i)(1+1)}$$

$$= \frac{e^{-2\sqrt2-2\sqrt2 i}}{-4}$$

在(1)中，令$R\to+\infty$，$r\to0$，可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i4x}}{x(x^4+1)}dx-\pi i=2\pi i\left[-\frac{e^{-2\sqrt{2}}\left(e^{2\sqrt{2}i}+e^{-2\sqrt{2}i}\right)}{4}\right]=-ie^{-2\sqrt{2}}\pi\cos 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i4x}}{x(x^4+1)}dx=i\left[\pi-e^{-2\sqrt{2}}\pi\cos 2\sqrt{2}\right]$$

$\Rightarrow$ 取虚部 $I=\pi-e^{-2\sqrt{2}}\pi\cos 2\sqrt{2}$.

注：做题过程中要注意，防止漏项。 #

四、用laplace变换解方程

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = te^{3t} & (1) \\ y(0)=0, \quad y'(0)=2017. \end{cases}$$

解：对方程(1)两边做laplace变换，设 $Y = L(y)$

$$\Rightarrow \quad p^2Y - 6pY + 9Y - 2017 = L(te^{3t}) = \frac{1}{(p-3)^2}$$

$$\Rightarrow \quad (p-3)^2 Y = \frac{1}{(p-3)^2} + 2017$$

$$Y = \frac{1}{(p-3)^4} + \frac{2017}{(p-3)^2}$$

$$\overset{L^{-1}}{\Rightarrow} \quad y = L^{-1}\left(\frac{1}{(p-3)^4}\right) + L^{-1}\left(\frac{2017}{(p-3)^2}\right)$$

$$= \frac{t^3}{3!}e^{3t} + 2017\,te^{3t}$$

即为方程的解.

#.

五、设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 C 及其内部解析，$g(z)$ 在 C 上没有零点。
在 C 内部 $g(z)$ 有唯一零点 a，已知 $f(a)=p_1\neq 0$，$f'(a)=p_2$，$f''(a)=p_3$，
而 $g'(a)=0$，$g''(a)=q_1\neq 0$，$g'''(a)=q_2$，$g'''(a)=q_3$
计算 $\oint_C \frac{f(z)}{g(z)}dz$.

解. 思路：由题设可知 a 是 $g(z)$ 在 C 内的唯一二级零点，

$\Leftrightarrow$ a 是 $\frac{1}{g}$ 在 C 内的唯一二级极点

$\overset{\text{且}f(a)\neq 0}{\Rightarrow}$ a 是 $f(z)/g(z)$ 在 C 内的唯一二级极点，

从而可用留数定理或 Cauchy 积分公式计算.

下面进行计算.

由留数定理 $\oint_C \frac{f(z)}{g(z)}dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}\left[\frac{f(z)}{g(z)}, a\right]$.

设在 a 处 $f(z)=\sum_{m=0}^{\infty} b_m (z-a)^m$

$$g(z)=\sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^n = (z-a)^2\sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^{n-2} = (z-a)^2\varphi(z).$$

$\varphi(z)$ 解析，且 $\varphi(a)\neq 0$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}[f/g, a] = \lim_{z\to a}\left((z-a)^2\frac{f}{g}\right)' = \lim_{z\to a}\left(\frac{f}{\varphi}\right)'$$

$$= \frac{f'(a)\varphi(a)-\varphi'(a)f(a)}{[\varphi(a)]^2}.$$

由于 $f'(z)=\sum_{m=1}^{\infty} b_m (z-a)^{m-1} \Rightarrow f'(a)=p_2$.

且 $f(a)=p_1$.

$\varphi'(z)=\sum_{n=3}^{\infty} a_n (z-a)^{n-3} \Rightarrow \varphi'(a)=a_3=\frac{g'''(a)}{3!}=\frac{q_2}{6}$

$\varphi(a)=a_2=\frac{g''(a)}{2}=\frac{q_1}{2}$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}[f/g, a] = \frac{2}{3}\,\frac{3p_2q_1-p_1q_2}{q_1^2}$$

$$\Rightarrow \oint \frac{f}{g}dz = \frac{4\pi i}{3}\times\frac{3p_2q_1-p_1q_2}{q_1^2}$$

#

六. 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ ($a_0\neq0$) 的收敛半径为R.

(1). 记 $M(r)=\max_{|z|\le r}|f(z)|$ ($r<R$). 利用 Cauchy 积分公式

证明: $|f^{(n)}(0)|\le \frac{n!M(r)}{r^n}$.

(2). 证明. 在 $|z|<\frac{|a_0|r}{|a_0|+M(r)}$ 内, $f(z)$ 无零点 (其中 $r<R$).

解 (1). 思路: 要估计高阶导数值 $f^{(n)}(0)$ 模的上界, 首先由Cauchy积分公式给出它的表达式, 再进行估计 (常用长大不等式)

⇓

由 Cauchy 积分公式.

$$f^{(n)}(0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz. \Rightarrow |f^{(n)}(0)|\overset{\text{长大不等式}}{\le}\frac{n!}{2\pi}\frac{2\pi r}{r^{n+1}}\cdot M(r)$$

$$=\frac{n!}{r^n}M(r).$$

#

思路: 零点分布情况 常用Rouche定理

⇓

(2) 首先 $a_0\neq0$, 故0不是 $f(z)$ 的零点.

我们记 $r'=\frac{|a_0|r}{|a_0|+M(r)}<r$, 下面证明 $|z|=\rho$ ($\forall\rho<r'$) 内任意点均不是 $f(z)$ 的零点.

令 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n=g(z)+h(z)$,

在 $|z|=\rho<r'$ 上, $g(z)=a_0\Rightarrow|g(z)|=|a_0|$

下面我们证明 $|h(z)|<|a_0|$. $\forall z\in\{z:|z|=\rho\}$, 从而由Rouche定理可知. $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 $|z|<\rho$ 内零点个数相同, 从而结论得证.

在 $|z|=\rho$ 上, $|h(z)|=|\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n|\le\sum_{n=1}^{\infty}|a_n||z^n|$

由 $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$. 结合(1) $\Rightarrow|a_n|\le\frac{M(r)}{r^n}$,

$$\Rightarrow|h(z)|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M(r)}{r^n}\rho^n<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M(r)}{r^n}\left(\frac{|a_0|r}{|a_0|+M(r)}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_0|^nM(r)}{(|a_0|+M(r))^n}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_0|^n}{(|a_0|+M(r))^n} M(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_0|^n}{(|a_0|+M(r))^n} M(r) - M(r)$

$$= \frac{1}{1-\frac{|a_0|}{|a_0|+M(r)}} \times M(r) - M(r)$$

$$= |a_0|,$$

故 $|h(z)| < |a_0|$. 由 r 的任意性, 可知结论成立 #.