§0.1　第12章复习

一、Fourier 展开

哪些函数可以展开? 理论上是针对周期函数, 实际问题中, 只考虑定义在有限区间 (例如 $[-\pi,\pi]$) 上的函数的展开. 因为我们一方面可以做周期延拓, 另一方面在实际计算Fourier系数时, 只需要利用在$[-\pi,\pi]$ 上的积分.

如何展开? 计算Fourier 系数

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x,\ \ k=0,1,\cdots,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x,\ \ k=1,2,\cdots,$$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos nx+b_n\sin nx\big),$$

计算上述系数, 只要求 $f(x)$ 在$[-\pi,-\pi]$ 上可积且绝对可积. 同时注意奇延拓、偶延拓、任意区间等特殊情况.

展开式是否收敛? 收敛到何处? Dirichlet 定理 (Dirichlet 收敛):

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases} f(x), & \text{连续点}\\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & \text{不连续点}\\ \dfrac{f(-\pi)+f(\pi)}{2} & \text{左右端点}\end{cases}$$

条件: 分段可微. 在任何区间 $[a,b]$ 上, 除有限个点 $x_1,\cdots,x_n$ 外有连续的导数, 在这有限个点 $x_1,\cdots,x_n$ 处有左右极限以及下列广义单侧导数 (仍沿用单侧导数的记号)

$$f'(x_{i-1}+0)=\lim_{x\to x_{i-1}^+}\frac{f(x)-f(x_{i-1}+0)}{x-x_{i-1}},\ i=1,\cdots,n,$$

$$f'(x_i-0)=\lim_{x\to x_i^-}\frac{f(x)-f(x_i-0)}{x-x_i},\ i=1,\cdots,n.$$

这里 $i=1,2,\cdots,n$.

为什么Fourier级数有这么好的性质? 三角函数系的正交性. 三角函数系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \cdots$$

在内积

$$\langle f,\ g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

意义下是正交的:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,\mathrm{d}x = \delta_{mn},\quad m, n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,\mathrm{d}x = \delta_{mn},\quad m, n = 1, 2, \cdots$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\,\mathrm{d}x = 0.\quad m = 0, 1, 2, \cdots,\ n = 1, 2, \cdots$$

其中

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n; \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

二、平方平均收敛

内积空间 $(L^2[a,b],\langle\cdot,\cdot\rangle)$, 其中 $L^2[a,b]$ 是区间 [a, b] 上可积且平方可积函数全体,

$$\langle f,\ g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

正交: $\langle f,g\rangle=0$.

距离: $\|f-g\|=\sqrt{\langle f-g,\ f-g\rangle}=\sqrt{\int_a^b[f(x)-g(x)]^2\,\mathrm{d}x}$.

平方平均收敛: 对 $L^2[a,b]$ 中一个给定的函数 f, 如果存在 $L^2[a,b]$ 中的一个函数列 $\{f_n, n=1,2,\cdots,\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|^2=\lim_{n\to\infty}\int_a^b(f_n(x)-f(x))^2\,\mathrm{d}x=0,$$

那么称 $f_n(x)$ 平方平均收敛于 $f(x)$.

这里主要讨论 $(L^2[-\pi,\pi],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 上平方平均收敛, 并不需要 Dirichlet 定理. 为了区别, 通常称满足Dirichlet定理收敛称为逐点收敛

Bessel 不等式 在 $(L^2[-\pi,\pi],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 内, 三角函数系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}},\ m=,1,2,\cdots\right\}$$

为**标准正交系**. 且Fourier级数的部分和

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

是所有与 f 距离最小的三角多项式. 即对任意三角多项式 T_n, 有

$$\|f-S_n\|^2\leqslant\|f-T_n\|^2$$

而且部分和 S_n 到 f 的距离具体为:

$$\Delta_n=\|f-S_n\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].$$

因为 $\Delta_n\geqslant 0$, 所以对任何 n, 就有

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

结论

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0$$

进一步, 有:

平方平均收敛（不需要Dirichlet 收敛） 设 $f(x)\in L^2[-\pi,\pi]$, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数部分和 $S_n(x)$ 构成的三角多项式列平方平均收敛于 $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\|f-S_n\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(x))^2\,\mathrm{d}x=0$$

上述结论等价于 Bessel 不等式中的等号成立,即 Parseval **等式**

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

对于 $L^2[-\pi, \pi]$ 中存在其它非标准正交函数系

$$\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots\}$$

若Parseval 等式成立就称其为完备的. 此时对**广义 Fourier 级数**

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$$

其部分和平方平均收敛于 $f(x)$.

Parseval **等式有一个非常有趣的推论**: 对于 $f(x) \in L^2[-\pi, \pi]$, 即使不知道 $f(x)$ 的 Fourier 级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

是否是Dirichlet 收敛, 但是在任意闭区间 $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ 上$f(x)$ 的Fourier 级数逐项积分是收敛的, 而且就收敛到$f(x)$ 在$[a, b]$ 上的积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,\mathrm{d}x.$$

提醒: **利用**Parseval **等式及有关推论**, **可以得到一些数项级数的和**.

三、Fourier变换

以下均假设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，在任何有限区间上分段可微，并且绝对可积.

Fourier **变换**

$$f(x) \longmapsto F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

Fourier **逆变换**（Dirichlet **定理**）

$$F(\lambda) \longmapsto f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\lambda F(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}.$$

卷积和卷积与Fourier变换

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

$$F[f*g] = F[f]F[g].$$

四、例题

一、求 $f(x) = \mathrm{e}^{ux}$ 在 $[-1, 1]$ 的Fourier 展开。

解 利用任意区间上Fourier 系数的计算公式, 有

$$a_0 = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{ux}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{u}\sinh u,$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{ux}\cos n\pi x\,\mathrm{d}x = -\frac{u}{n\pi}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{ux}\sin n\pi x\,\mathrm{d}x = -\frac{u}{n\pi}b_n$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{ux}\sin n\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sinh u + \frac{u}{n\pi}a_n.$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_n & = \dfrac{(-1)^n 2u\sinh u}{u^2+(n\pi)^2}, \\ \\ b_n & = \dfrac{(-1)^{n+1}2n\pi\sinh u}{u^2+(n\pi)^2} \end{cases}$$

因为 $f(x)$ 连续, 因此

$$\frac{1}{u}\sinh u + 2\sinh u\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n u}{u^2+(n\pi)^2}(\cos n\pi x - 2n\pi\sin n\pi x) = \mathrm{e}^{ux},\ \ |x|<1$$

特别, 在 $x=1$ 处

$$\frac{1}{u}\sinh u + 2\sinh u\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u}{u^2+(n\pi)^2} = \frac{f(1)+f(-1)}{2} = \cosh u$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{u}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2u}{u^2+(n\pi)^2} = \frac{\cosh u}{\sinh u}$$

二、求

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$$

的Fourier级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$，$0\leqslant x\leqslant\pi$ 的和。

解 $f(x)$ 是奇函数分段可微, 所以

$$a_n=0,\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi},$$

$f(x)$ 的Fourier 级数收敛

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\begin{cases}f(x), & |x|<\pi, x\neq 0\\ 0, & x=0, x=\pm\pi\end{cases}$$

首先由Parseval 等式得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2n-1)^2},\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

再对展开式在 $[0,x]$ 上积分

$$\int_0^x 1\,\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi x}{4}$$

三、设 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$ 连续, 且 $f'(x)\in L^2[-\pi,\pi]$, 如果 $f(x)$ 满足

$$f(-\pi)=f(\pi),\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

证明:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

等号成立当且仅当 $f(x)=a\cos x+b\sin x$.

证明 将 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 分别作Fourier展开, 由条件可知 $a_0=0$, $a_0'=0$, 所以

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx,$$

$$f'(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} a_n'\cos nx+b_n'\sin nx,$$

不难计算 $a_n' = nb_n,\ b_n' = -na_n$, 利用 Parseval 等式得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n'^2 + b_n'^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2)$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

显然, 等号成立当且仅当 $a_n = b_n = 0, n \geqslant 2$, 所以

$$f(x) \sim a_1\cos x + b_1\sin x.$$

当 $a_n = b_n = 0, n \geqslant 2$ 时, 连续函数 $f(x) - (a_1\cos x + b_1\sin x)$ 与三角函数系中每一个都正交, 所以等号成立当且仅当

$$f(x) = a_1\cos x + b_1\sin x.$$

四、等周问题（Hurwitz） 在给定长度为 L 的一切平面曲线中, 什么样的曲线围成的面积最大? 或: 设 ℓ 是平面上长度为 L 的简单光滑闭曲线, S 是 ℓ 围成平面区域的面积, 证明:

$$S \leqslant \frac{L^2}{4\pi}$$

并问等号成立时, 曲线的具体形状.

证明 从曲线 ℓ 上某点开始逆时针计算弧长 s 并作为参数, 因此

$$x = x(s),\ y = y(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant L),$$

$$x(0) = x(L),\ y(0) = y(L).$$

根据弧长参数曲线的性质, 有

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2, \quad \text{或} \quad \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2 = (x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1.$$

做变换 $t=\dfrac{2\pi s}{L}-\pi$, 使 ℓ 的参数方程表示为如下形式

$$x=x(s)=\varphi(t),\ y=y(s)=\psi(t),\quad(-\pi\leqslant t\leqslant\pi),$$
$$\varphi(-\pi)=\varphi(\pi),\ \psi(-\pi)=\psi(\pi),$$

并且参数 t 增加的方向是曲线的逆时针方向. 因为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s},\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{2\pi}{L}$$
$$\Longrightarrow(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2=\frac{L^2}{4\pi^2}.$$

分别对 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 作Fourier 展开

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt+b_n\sin nt,$$
$$\psi(t)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos nt+d_n\sin nt.$$

不难算出, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ 的Fourier 展开为

$$\varphi'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nt - na_n \sin nt,$$

$$\psi'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} nd_n \cos nt - nc_n \sin nt.$$

这是因为

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\varphi(t)\cos nt\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt\,\mathrm{d}t = nb_n$$

其他系数的计算类似. 根据Parseval 等式, 有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\varphi'(t))^2\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\psi'(t))^2\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(c_n^2 + d_n^2).$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}((\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2),$$

另一方面

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}((\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{L^2}{4\pi^2}\,\mathrm{d}t=\frac{L^2}{2\pi^2},$$

$$\Longrightarrow L^2=2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2).$$

下面计算曲线 ℓ 围成的面积, 根据 Green 定理的推论, 该面积为

$$S=\oint_{\ell}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\psi'(t)\,\mathrm{d}t=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n(a_nd_n-b_nc_n),$$

其中我们利用了Parseval 等式的推论(两个函数乘积的积分等于对应Fourier系

数乘积求和）. 最终, 我们有

$$\begin{aligned} L^2 - 4\pi S &= 2\pi\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2) - \sum_{n=1}^{\infty} 2n(a_nd_n - b_nc_n)\right) \\ &= 2\pi\left(\sum_{n=1}^{\infty}((na_n-d_n)^2+(nc_n+b_n)^2) + \sum_{n=1}^{\infty}(n^2-1)(b_n^2+d_n^2)\right) \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

所以

$$L^2 - 4\pi S \geqslant 0, \quad \text{或} \quad S \leqslant \frac{L^2}{4\pi}.$$

等号成立当且仅当求和项中所有项均为零, 即

$$na_n = d_n,\ nc_n = -b_n,\ n \geqslant 1;\ b_n = d_n = 0,\ n \geqslant 2.$$

$$\Updownarrow$$

$$a_1 = d_1, c_1 = -b_1,\ a_n = b_n = c_n = d_n = 0\ n \geqslant 2.$$

这样的曲线为

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t,$$
$$y(t) = \frac{c_0}{2} - b_1 \cos t + a_1 \sin t,$$

这个曲线不是别的正是圆

$$\left(x - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c_0}{2}\right)^2 = a_1^2 + b_1^2.$$

五、设 f 是周期为 2π 且在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积的函数. 如果它在 $(-\pi,\pi)$ 上单调, 证明:

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right),\ b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)\ (n\to\infty).$$

证明 由于

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x,$$

所以只要证明

$$na_n = \frac{1}{\pi}\int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x$$

有界即可. 不妨设 $f(x)$ 单调减, 令

$$x_k = -n\pi + 2k\pi, k = 0,\cdots,n,\ \Delta x_k = 2\pi.$$

$$\begin{aligned}\int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f\left(\frac{x}{n}\right)-f\left(\frac{x_k}{n}\right)\right)\cos x\,\mathrm{d}x \\ &\quad+\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k}{n}\right)\int_{x_k}^{x_{k+1}}\cos x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\cos x\,\mathrm{d}x = 0$$

即上式第二项求和为零. 再利用函数单调减性质, 当 $x \in [x_k, x_{k+1}]$ 时, 有

$$0 \leqslant f\left(\frac{x_k}{n}\right)-f\left(\frac{x}{n}\right) \leqslant f\left(\frac{x_k}{n}\right)-f\left(\frac{x_{k+1}}{n}\right)$$

所以

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x \,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f\left(\frac{x_k}{n}\right)-f\left(\frac{x}{n}\right)\right)|\cos x|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f\left(\frac{x_k}{n}\right)-f\left(\frac{x_{k+1}}{n}\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{x_k}{n}\right)-f\left(\frac{x_{k+1}}{n}\right)\right)2\pi \\
&= (f(-\pi)-f(\pi))2\pi
\end{aligned}
$$

这样我们就证明了积分

$$\int_{-n\pi}^{n\pi} f\left(\frac{x}{n}\right)\cos x \,\mathrm{d}x$$

有界, 也就是 na_n 有界, 同理可证 nb_n 有界.

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出