/ 已扫

2018–2019学年第一学期期终考试试题

考试科目：线性代数B1　　考试时间：2019.01.14　　得分：__________

学生所在系：____________　　姓名：____________　　学号：__________

一、 填空题【每空4分，共24分】

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^4 =$ ____________。

2. 向量组$\alpha_1 = (1,1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,2,3,4)$, $\alpha_3 = (2,3,4,5)$, $\alpha_4 = (1,-2,2,-1)$ 的秩=____________。

3. 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有无穷多解，则λ=________________。

4. 设A, B均为n阶矩阵，且存在可逆矩阵P, 使得$B = P^{-1}AP - PAP^{-1} + I$。如果$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为B的n个特征值，则 $\sum\limits_{1\le i\le n} \lambda_i =$ ____________。

5. 实二次型$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$的正惯性指数为____________。

6. 设实二次型$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 2tx_1x_2 - 2x_1x_3$ 是正定的，则t的取值范围为____________。

二、 判断题【判断下列命题是否正确，并简要说明理由。每题5分，共20分】

1. 若0为矩阵A的特征值，则A一定不可逆。

2. 若f为线性空间V上的一个线性变换，且f在V的某组基下的矩阵为$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，则在$V$中存在一组基，使得$f$ 在这组基下的矩阵为对角阵。

3. 设$V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 | a_i \in \mathbf{R}, i = 0, 1, 2\}$, 即次数不超过2的实系数多项式构成的$\mathbf{R}$上的线性空间。若对任意$f(x), g(x) \in V$ 定义

$$(f(x), g(x)) = f(0)g(0),$$

则此二元运算$(,)$可以成为V上的一个内积。

4. 设$2n$ 阶实对称矩阵$A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ C & A_2 \end{pmatrix}$，其中$A_1$，$A_2$ 均为n阶方阵。若A正定，则$A_1 + A_2$也正定。

三、【10分】

设$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$为非齐次线性方程组$\mathbf{AX} = \mathbf{b}$的3个解。

1. 求$\mathbf{AX} = \mathbf{0}$的通解；

2. 求$\mathbf{AX} = \mathbf{b}$的通解；

3. 求出满足题设条件的一个非齐次线性方程组。

四、【15分】

设(I): $\alpha_1=(1,\ 0,\ 0)^T$, $\alpha_2=(0,\ 1,\ 0)^T$, $\alpha_3=(0,\ 0,\ 1)^T$;

(II): $\beta_1=(-1,\ 0,\ 1)^T$, $\beta_2=(0,\ 1,\ 1)^T$, $\beta_3=(2,\ -1,\ -2)^T$

分别为$\mathbf{R}^3$的两组基。设σ为$\mathbf{R}^3$上的一个线性变换，并且

$\sigma(\beta_1)=(1,\ 0,\ -3)^T$, $\sigma(\beta_2)=(0,\ -1,\ -1)^T$, $\sigma(\beta_3)=(-5,\ -1,\ 0)^T$。

请分别求出σ 在（I）、（II）这两组基下的矩阵。

五、【15分】

设实二次型

$$Q(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2bx_2x_3$$

可以经过正交变换$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$化为标准型$y_2^2 + 2y_3^2$.

1. 确定a和b的取值;

2. 求出满足题设条件的一个正交变换。

六、【8分】

设A为n阶复方阵，且$A^2 = 2A$。求证：A相似于对角阵。

七、【8分】

设A 为n阶正定矩阵，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$为$\mathbf{R}^\mathbf{n}$中的$s$个非零向量，且满足

$$\alpha_i^T A \alpha_j = 0,\ \ 1 \leq i < j \leq s$$

求证：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关。