HW07

ch6-8

> 求图6.28的一条最优投递路线。

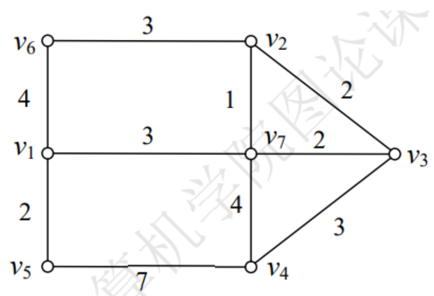


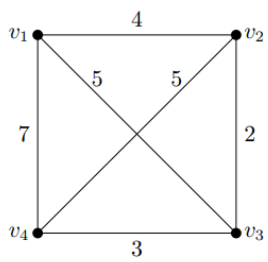
图 6.28: G

使用EJ算法。

（1）图G的奇度顶集$V_0=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，$\mid V_0 \mid = 4$.

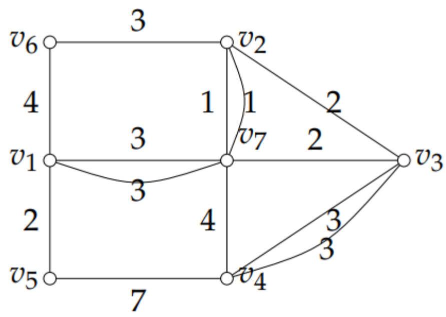
（2）由$Dijkstra$算法：$d(v_1,v_2)=4,d(v_1,v_3)=5,d(v_1,v_4)=7$
$d(v_2,v_3)=2,d(v_2,v_4)=5,d(v_3,v_4)=3$

（3）构成带权完成图K_4：



（4）上图K_4的最佳匹配$M=\{v_1v_2,v_3v_4\}$. 在G中v_1,v_2间最短轨为

$P(v_1,v_2)=v_1v_7v_2,P(v_3,v_4)=v_3v_4$.（5）$Euler$图$G^*$如右图：



（6）在图G^*找到$Euler$回路即为最优投递路线。 不妨设出发点（邮局）为v_6，则其中一条$Euler$回路为：
$v_6v_2v_3v_4v_3v_7v_2v_7v_1v_7v_4v_5v_1v_6$

ch6-9

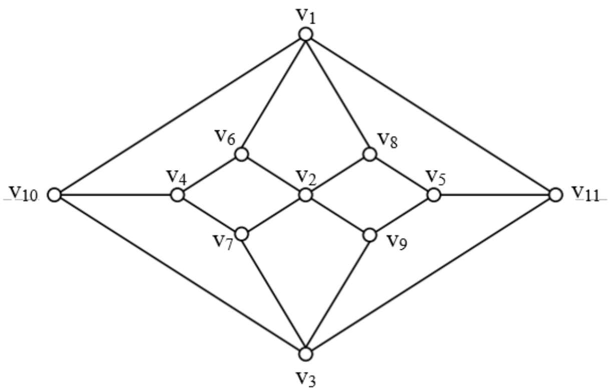
> 设G是二分图，证明：若G是$Hamilton$，则G必有偶数个顶点。习题1中的图6.27是$Hamilton$图吗？为什么？

证明：

设二分图$G=X\bigcup Y,X\bigcap Y=\emptyset$, 若$G$是$Hamilton$，则$\omega(G-X)\le\mid X\mid.\therefore\mid Y\mid\le\mid X\mid$. 同理$\mid X\mid\le\mid Y\mid.\therefore\mid X\mid=\mid Y\mid.\therefore G$有偶数个顶点。

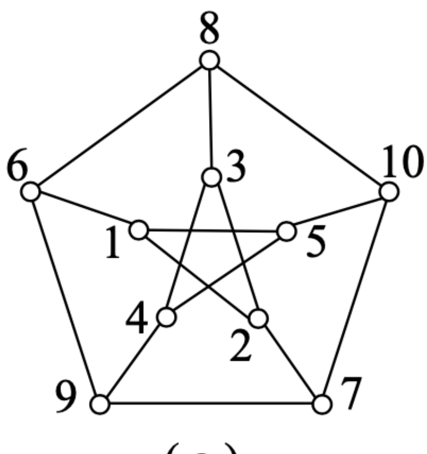
证毕

在图6.27中，$\because G=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}\bigcup\{v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10},v_{11}\}=X\bigcup Y$, 且$X\bigcap Y$没有边$\therefore Herschel$图为二分图，且有11个顶点$\therefore$不是$Hamilton$图



ch6-11

> $Petersen$ 图删除一个顶点后是不是$Hamilton$ 图。

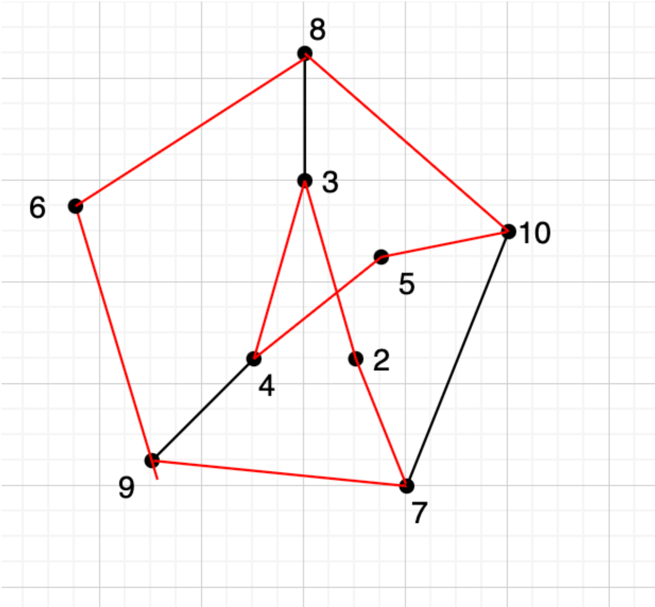


(a)

是。$Hamilton$ 图。

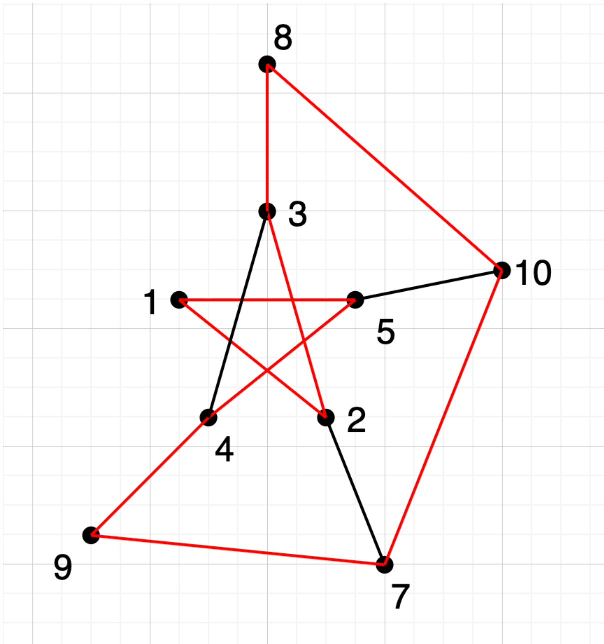
由$Petersen$ 图的对称性可知。$Petersen$ 图有两类顶点。$\{1,2,3,4,5\}$ 一类，$\{6,7,8,9,10\}$ 一类。对去除的顶点分两类讨论。

1. 若去除的点是第一类顶点，不妨设为顶点1 。所得的图为:



图中红色部分为一个$Hamilton$ 圈C_0。$C_0 = 10\ 5\ 4\ 3\ 2\ 7\ 9\ 6\ 8\ 10$

2. 若去除的点是第二类顶点，不妨设为顶点6 。所得的图为：



图中红色部分为一个$Hamilton$ 圈C_1。$C_1 = 3\ 2\ 1\ 5\ 4\ 9\ 7\ 10\ 8\ 3$

综上：$Petersen$ 图删除一个顶点后是$Hamilton$ 图。

ch6-14

> 证明：$2k-1$ 阶的k 次正则图是$Hamilton$ 图$(k>2)$

证明：

对任意点对(u,v) 有$deg(u)+deg(v)=2k>2k-1=\nu(G)$. 由Ore定理，得证。

ch6-16

> 若G是二分图，但其顶点的划分X与 Y不均匀, 即$|X| \neq |Y|$ 。则G 是不是$Hamilton$ 图？ 为什么?

不是。

若G是$Hamilton$ 图。则G中 存在$Hamilton$ 圈 C 。 C 中的顶点在X, Y中交替出现。则$|X| = |Y|$ 。矛盾

所以，G 不是$Hamilton$ 图。

ch6-21

> 证明： 设G 是一个简单图，$\nu = |V(G)| \geq 3$, 如果对满足 $1 \leq m \leq \nu - 2$ 的任意正整数m , 度数不超过 m 的顶点个数小于 m , 则G是$Hamilton$ 图.

证明：

先证命题：$c(G) = K_\nu$

假设$c(G) \neq K_\nu$ 。 则$\exists u, v \in G, uv \notin c(G)$ 。记u', v' 是这样的点对中 $deg_{c(G)}(u) + deg_{c(G)}(v)$最大的点对 。

定义$V_0 = \{v | v \in V(G), vv' \notin c(G)\}$ 。 $V_1 = \{v | v \in V(G), vv' \in c(G)\}$ 。有$|V_1| = deg_{c(G)}(v')$, $|V_0| = \nu - 1 - deg_{c(G)}(v')$

令 $m = deg_{c(G)}(u')$ 。

由u', v' 的定义知 $\forall v \in V_0, deg_{c(G)}(v) + deg_{c(G)}(v') \leq deg_{c(G)}(u') + deg_{c(G)}(v')$ ， 即 $\forall v \in V_0, deg_{c(G)}(v) \leq deg_{c(G)}(u')$ 。 又$\because \forall v \; deg_G(v) \leq deg_{c(G)}(v) \therefore \forall v \in V_0, deg_G(v) \leq m$

由$c(G)$ 定义知， $deg_{c(G)}(u') + deg_{c(G)}(v') \leq \nu - 1$ 。 $\therefore m \leq |V_0|$

即度数不超过m 得顶点个数不小于m 。矛盾

命题得证。

由推论6.3 ,G是$Hamilton$ 图.

ch6-22

> 5 阶完全加权图如图6.30 所示。
>
> (1) 用最邻近法求以a 为起点的旅行商问题的近似解；
>
> (2)用最小生成树法求以a，b 为起点的旅行商问题的近似解；
>
> (3)用最小权匹配法求旅行商问题的近似解;

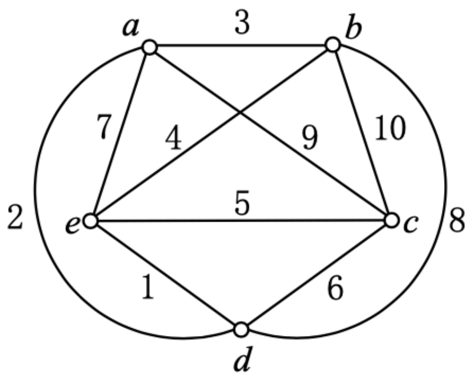


图 6.30: G

(1)　用最邻近法求以a 为起点的旅行商问题的近似解；

$W = 26$

从a出发， 形成轨道$P_1 = a$ 。

从$V(G) - \{a\}$中，选取与a 最近的顶点d 。形成 $P_2 = ad$

从$V(G) - \{a, d\}$中，选取与d 最近的顶点e 。形成 $P_3 = ade$

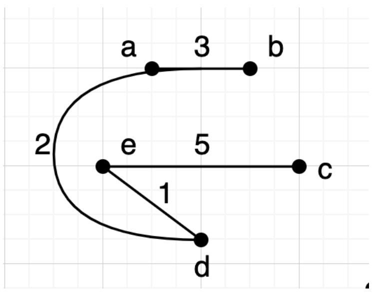
从$V(G) - \{a, d, e\}$中，选取与e 最近的顶b 。形成 $P_4 = adeb$

从$V(G) - \{a, d, e, b\}$中，选取与b 最近的顶点c 。形成 $P_5 = adebc$

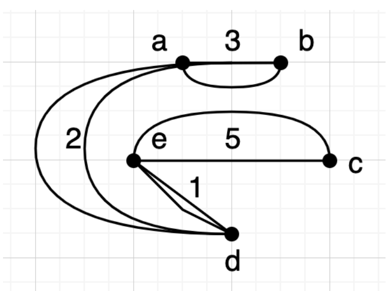
得$Hamilton$ 圈，$H = adebca$

(2)用最小生成树法求以a，b 为起点的旅行商问题的近似解；

1. 求G 的一颗最小生成树T.



2. 将T 各边加平行边得G^*

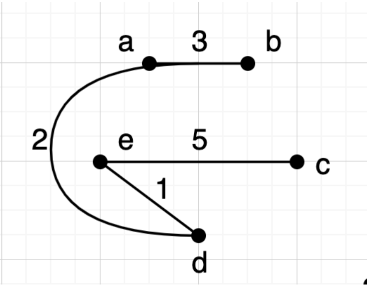


从a 出发，求G^* 的一条欧拉回路$C_a = adecedaba$　，"抄近路" 访问G 的各顶点。得$H_a = adecba$ 。
$W_a = 21$

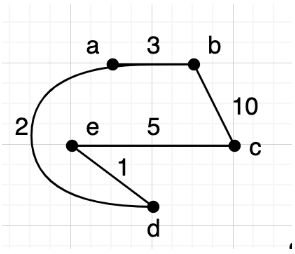
从b 出发，求G^* 的一条欧拉回路$C_b = badecedab$ ，"抄近路" 访问G 的各顶点。得$H_b = badecb$ 。
$W_b = 21$

(3) 用最小权匹配法求旅行商问题的近似解;

1. 求G 的一颗最小生成树T.



2. T 中奇度数顶点得集合为$V_o = \{b, c\}$, V_o的导出子图中总权最小得完备匹配$M = \{bc\}$, M 加入 T 中得 G^*



3. 在G^* 中求从a 出发得一条欧拉回路$C_a = adecba$
4. 在G 中， 从a 出发，沿C_a 中得边按 "抄近路" 走出$Hamilton$ 圈$H_a = adecba$

$W = 21$