

中国科学技术大学 2015-2016-1 期中考试试卷

考试科目: 线性代数

得分: _____

院系: _____ 姓名: _____ 学号: _____

亲爱的同学: 这份试卷将再次记录你的自信、沉着、智慧和收获。我们一直投给你信任的目光。请你认真审题, 看清要求, 仔细答题。预祝你取得好成绩!

一、填空题(请将答案的准确最简形式填入横线上. 每题 4 分, 共 24 分)

1. 点 $(1, -2, 3)$ 到平面 $2x - 2y + z - 6 = 0$ 的距离为 _____.

2. 方程 $\frac{x^2}{4} - y^2 + \frac{z^2}{4} = -1$ 所表示的曲面为 _____.

3. 若 n 阶方阵 A 满足方程 $A^2 + 2A - I = 0$, 则 $A^{-1} =$ _____.

4. 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^{2015} =$ _____.

5. 若 A 为 3 阶方阵, 且 $|A| = 2$, 则 $|8A^{-1} - 3A^*| =$ _____.

6. $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} =$ _____.

二、判断题(判断下列命题是否正确并简述理由. 每题 5 分, 共 25 分)

7. $(a + b) \times (a + b) = a \times a + 2a \times b + b \times b$.

8. 若 A, B 均为 n 阶对称阵, 则 AB 为对称阵的充要条件为 $AB = BA$.

9. 线性方程组 $AX = b$ 有唯一解的充要条件是 $AX = 0$ 只有零解.

10. 若 A 和 B 分别为 $m \times n$ 和 $n \times m$ 矩阵, 则有 $tr(AB) = tr(BA)$.

11. 若 A 和 B 分别为 $m \times n$ 和 $n \times m$ 矩阵, 则有 $rank(AB) = rank(BA)$.

装订线 答题时不要超过此线

三、解答题(解题要有详细的演算和推导过程与理由. 所涉及的坐标系都是空间直角坐标系. 共 71 分)

12. (6 分) 设平面 π 过点 $(1, 2, 3)$, 且在三个坐标轴上的截距相等, 求平面 π 的方程.

13. (12 分) 已知点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, -1, 2)$, $B(3, 3, 1)$ 及 $C(3, 1, 3)$. 求:

(1) 向量 \overrightarrow{AB} 的方向余弦; (2) $\triangle ABC$ 的面积; (3) 四面体 $OABC$ 的体积.

14. (9 分) 问 a 为何值时,
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 9x_2 - 5x_3 + 15x_4 = a \end{cases}$$
 有解? 并求其所有解.

15. (10 分) 已知 3 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 $A^* = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A .

16. (12 分) 设 n 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$, 求: (1) $\det(A)$; (2) $\text{rank}(A)$.

17. (12 分) 设 A 为 n 阶方阵, I 为 n 阶单位阵.

(1) 证明 $\text{rank}(A) + \text{rank}(A+I) \geq n$; (2) 试给出等号成立的条件, 并证明之.

18. (10 分) 计算 Vandermonde 行列式 $V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

————— 交卷前请再认真、仔细、全面地检查你的答卷! —————