中国科学技术大学 2008—2009 学年第一学期
线性代数期末考试

1. (35 分) 填空题.

(1) 设 A, B 均为 n 阶方阵, $|A| = -3$, $|B| = -2$, 则 $A^* =$ ____, $|B^{-1}| =$ ____.

(2) $\alpha = (1,2,3)^T$, $\beta = (1,-1,1)$, $\alpha\beta =$ ____, $(\alpha\beta)^2 =$ ____.

(3) 设 $A = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}\right)$, $A^{-1}BA = BA + 6AA$, $|B^*| =$ ____.

(4) 设 $\alpha_1 = (1,0,0)^T$, $\alpha_2 = (a,1,0)^T$, $\alpha_3 = (c,b,1)^T$, 则三阶方阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的逆矩阵为 ____.

(5) 设 $n \geqslant 2$, $\beta_1 = (1,2,\cdots,n)^T$, $\beta_2 = (2,3,\cdots,n+1)^T$, $\beta_n = (n,n+1,\cdots,2n-1)^T$, 则 n 阶方阵 $\operatorname{rank}(\beta_1,\cdots,\beta_n) =$ ____.

(6) 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $P_1^{99}AP_2^{99} =$ ____.

(7) 设 A 为三阶矩阵, 特征值分别为 3,2,1, 其对应特征向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 记 $P = (\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2)$, 则 $P^{-1}AP =$ ____.

(8) n 维实向量 X, Y, 满足 $|X+Y|^2 = |X|^2 + |Y|^2$, 则 X 与 $Y =$ ____.

(9) 若上三角阵 A 是正交矩阵, 则 A 主对角线上的元素 $a_{ii} =$ ____.

(10) 设三阶矩阵 A 的特征值为 2,4,5, $B = A^{-1} - 2I$, 则 B 的特征值为 ____.

(11) $\lambda =$ ____ 时, 方程 $x^2 + (\lambda+1)y^2 + \lambda^2 z^2 + 2x + 2z = 1$ 表示椭球面.

2. (15 分) 设 $V = M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$. $\forall \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$, 线性变换 $\mathscr{A}\alpha = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$.

(1) 验证 (E): $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 是 V 的一组基.

(2) 求 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ 在 (E) 下的坐标 X.

(3) 求线性变换 $\mathscr{A}$ 在 (E) 下的表示矩阵.

3. (8 分) 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组, β_1, β_2 都与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 正交. 证明: β_1 和 β_2 线性相关.

4. (18 分) 已知 $f(x,y,z) = 4x^2 - 6y^2 - 6z^2 - 4yz$.

(1) 写出 $f(x,y,z)$ 的二次型矩阵.

(2) 用正交变换化二次型 $f(x,y,z)$ 为标准型.

(3) 判断曲面 $f(x,y,z) = 1$ 的类型.

5. (16 分) 已知非齐次方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$ 有 3 个线性无关的解.

(1) 证明: 方程组系数矩阵 A 的秩为 2.

(2) 求 a, b 的值及方程组的通解.

6. (8 分) 设 A 为 n 阶实矩阵, $A^2 = kA$. 证明: A 可相似对角化.

中国科学技术大学 2009—2010 学年第一学期
线性代数期末考试

1. (5 分 $\times 8 = 40$ 分) 填空题.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = $____.

(2) $a_1 = (1, 2, -1, 4), a_2 = (9, 100, 10, 4), a_3 = (-2, -4, 2, -8)$ 生成的 $\mathbb{R}^4$ 的子空间的维数等于 ____.

(3) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - A - 2I = 0$, 其中 I 是单位阵, 则 $A^{-1} = $____.

(4) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A^{2010} 的全体特征值为 ____.

(5) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$ 是正定矩阵, 则 a 的取值范围是 ____.

(6) 每个元素的绝对值都相等的实二阶正交阵一共有 ____ 个.

(7) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $a = $____$, b = $____.

(8) 设 $\mathbb{R}^3$ 是赋予通常内积的三维欧氏空间, (a, b, c) 是长度为 1 的向量, W 是由方程 $ax + by + cz = 0$ 给定的平面. 设线性变换 $\mathscr{A}$ 把 $\mathbb{R}^3$ 中的向量映为它在平面 W 上的投影向量, 那么 $\mathscr{A}$ 在标准正交基 $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ 之下的矩阵是 ____.

2. (60 分) 解答题.

(1)(10 分) 问 λ 为何值时, 线性方程组 $\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 - 4x_3 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 + (5-\lambda)x_3 = -\lambda - 1 \end{cases}$ 有唯一解、无解或有无穷多解? 并在有无穷多解时求其通解.

(2)(10 分) 设 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ 是数域 F 上的 n 阶方阵 A 的不同特征值, $X_1^{(i)}, ..., X_{m_i}^{(i)}$ 是 A 的属于 λ_i 的线性无关的特征向量 $(i = 1, ..., s)$. 证明: 向量组 $X_1^{(1)}, ..., X_{m_1}^{(1)}, X_1^{(2)}, ..., X_{m_2}^{(2)}, ..., X_1^{(s)}, ..., X_{m_s}^{(s)}$ 线性无关.

(3)(10 分) 设 $\alpha_1, ..., \alpha_m$ 为欧氏空间 V 中的向量. 证明: $\alpha_1, ..., \alpha_m$ 线性无关的充分必要条件是矩阵 $\begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_m) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\alpha_m, \alpha_1) & (\alpha_m, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_m, \alpha_m) \end{pmatrix}$ 为正定阵, 其中 $(\cdot, \cdot)$ 是 V 的内积.

(4)(15 分) 用正交变换化二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 为标准形并指出曲面 $Q(x_1, x_2, x_3) = 1$ 的类型.

(5)(15 分) 设 $V = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \operatorname{tr} X = 0\}$.

(i) 证明 V 是实数域上的线性空间, 并求 V 的维数.

(ii) 设线性变换 $\mathscr{A} : V \to V, \mathscr{A}(X) = 2X + X^T$. 求 V 的一组基使 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为对角阵.

中国科学技术大学 2010—2011 学年第二学期
线性代数（B1）期末考试

1. (5 分 $\times 8 = 40$ 分) 填空题.

(1) 给定空间直角坐标系中点 $A(0,1,1), B(1,2,3), C(1,1,3)$ 及 $D(1,3,5)$, 则 (a) 经过点 A, B, C 的平面的一般方程为 ____; (b) 四面体 $ABCD$ 的体积为 ____.

(2) 设三阶方阵 $A = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}), B = (2\boldsymbol{a_1}, 3\boldsymbol{a_2}, 4\boldsymbol{a_3})$, 其中 $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ 是三维列向量. 若 $\det A = 2$. 则 $\det B =$ ____.

(3) 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ ____.

(4) 设 A 为正交矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵. 则 $\det A^* =$ ____.

(5) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ -10 & 6 & 7 \\ y & -2 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. 则 $x =$ ____, $y =$ ____.

(6) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ t-1 & 1 \end{pmatrix}$ 是正定矩阵, 则 t 必须满足的条件是 ____.

(7) 已知 $\mathbb{R}$ 上四维列向量 $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, ..., \boldsymbol{b_9}$. 若 $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ 线性无关, $\boldsymbol{b_i} (i = 1, 2, ..., 9)$ 非零且与 $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ 均正交, 则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, ..., \boldsymbol{b_9}) =$ ____.

(8) 设 $\mathbb{P}_3[x]$ 为次数小于等于 3 的实系数多项式全体构成的线性空间. 定义 $\mathbb{P}_3[x]$ 上的线性变换 $\mathscr{A}$: $\mathscr{A}(p(x)) = (x+1)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)$, 则 $\mathscr{A}$ 在基 $1, x, x^2, x^3$ 下的矩阵为 ____.

(9) 在线性空间 $M_n(\mathbb{R})$ 中 (运算为矩阵的加法和数乘), 记 V_1 为所有对称矩阵构成的子空间, V_2 为所有反对称矩阵构成的子空间. 则 $\dim V_1 =$ ____, $\dim V_2 =$ ____.

2. (15 分) 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = b \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

(1) 当 a, b 为何值时, 方程组有解;

(2) 当方程组有解时, 求出对应的齐次方程组的一组基础解系;

(3) 当方程组有解时, 求出方程组的全部解.

3. (12 分) 在线性空间 $M_2(\mathbb{R})$ 中, 设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

和

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

分别为 $M_2(\mathbb{R})$ 的两组基.

(1) 求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的过渡矩阵 T;

(2) 设 $A\in M_2(\mathbb{R})$ 在 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的坐标为 $(1,-2,3,0)^T$, 求 A 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的坐标.

4. (8 分) 考虑分块矩阵 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 其中 A 为 n 阶可逆方阵. 证明: $\operatorname{rank}(M)=n+\operatorname{rank}(D-CA^{-1}B)$.

5. (15 分) 已知二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_3$.

(1) 写出二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)$ 对应的矩阵 A, 和 $Q(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵式;

(2) 求正交变换 P, 使 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ 把 $Q(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形;

(3) 二次型是正定的、负定的还是不定的, 为什么?

(4) 指出 $Q(x_1,x_2,x_3)=1$ 的几何意义.

6. (8 分) 设 V 是欧式空间, $b_1,\cdots,b_n$ 是 V 中一组两两正交的非零向量, $\beta_i=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}b_k$ $(i=1,\cdots,m)$, $A=(a_{ij})_{n\times m}$. 证明:

(1) $b_1,\cdots,b_n$ 线性无关; (2) $\dim(\beta_1,\cdots,\beta_m)=\operatorname{rank}A$.

中国科学技术大学 2012—2013 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (30 分) 填空题.

(1) 设 $A=\begin{pmatrix}2&2\\2&a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&b\\3&1\end{pmatrix}$. A 与 B 相抵的充要条件是 ____; A 与 B 相似的充要条件是 ____; A 与 B 相合的充要条件是 ____; 矩阵方程 $AX=B$ 有解但矩阵方程 $BY=A$ 无解的充要条件是 ____.

(2) 设 A 为 3 阶非零方阵. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0(\forall i,j)$, 则 $\det A=$ ____, $A^{-1}=$ ____.

(3) 设 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换 $\mathscr{A}$ 将 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 分别变为 $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}$; 则 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 ____, $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵为 ____.

(4) 如果正交矩阵 A 的每个元素都是 $\frac{1}{2n}$ 或 $-\frac{1}{2n}$, 则 A 的阶为 ____.

(5) 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 且 $A^2=-A$, 则 A 的规范性为 ____.

2. (20 分) 判断题 (判断下列命题是否正确, 并简要给出理由).

(1) 设 $\alpha_1,...,\alpha_m\in F^n$ 为一组列向量, $n\times m$ 矩阵 $A=(\alpha_1,...,\alpha_m)$ 经有限次初等行变换成为 $B=(\beta_1,...,\beta_m)$, 则向量组 $\alpha_1,...,\alpha_m$ 与向量组 $\beta_1,...,\beta_m$ 等价.

(2) 设 A 为 3 阶实方阵; 若 A 不实相似于上三角阵, 则 A 不复相似于对角阵.

(3) 秩为 r 的实对称矩阵可分解成 r 个秩为 1 的实对称矩阵之和.

(4) 若 A,B 为同阶正定实对称方阵, 则 AB 也正定.

(5) 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 若 β_i 与线性无关的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1}$ 中的每个向量都正交 $(i=1,2)$, 则 β_1,β_2 线性相关.

3. (12 分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$. 当 a,b 分别取何值时, 存在 C 使得 $AC-CA=B$, 并求所有的 C.

4. (12 分) 已知二次型 $Q(X)=4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

(1) 给出二次型 $Q(X)$ 的矩阵 A 和矩阵表示;

(2) 使用正交变换 $X=PY$ 将 $Q(X)$ 化为标准形;

(3) 给出 $Q(X)=6$ 的几何意义, 并作示意图.

5. (12 分) 设 $V=M_2(\mathbb{R}), C=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, \mathscr{A}(\alpha)=C\alpha+\alpha C, \forall\alpha\in V$.

(1) 给出 V 的一组基 (B) 及 $\dim V$;

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 (B) 下的矩阵 A, 并求 A 和 $\mathscr{A}$ 的全部特征值与特征向量;

(3) A 可否相似对角化? 若能, 试求 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵 Λ, 并求 V 的一组基 (E) 使 $\mathscr{A}$ 在基 (E) 下的矩阵为对角阵 Λ;

(4) 给出从基 (B) 到基 (E) 的过渡矩阵和 $D=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}$ 在基 (E) 下的坐标.

6. (10 分) 已知三阶矩阵 A 和三维列向量 X, 求向量组 X,AX,A^2X 线性无关, 且满足 $A^3X=3AX-2A^2X$, 记 $P=(X\ AX\ A^2X)$. 求:

(1) $B=P^{-1}AP$;

(2) $\det(A-I)$.

中国科学技术大学 2012—2013 学年第二学期 线性代数（B1）期末考试 1

1. 填空题.

(1) $\mathbb{R}^2$ 中线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1=(1,-1),\alpha_2=(1,1)$ 下矩阵为 $\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}$, 则 $\mathscr{A}$ 在基 $\beta_1=(2,0),\beta_2=(-1,1)$ 下矩阵为 ____.

(2) n 阶方阵 A 的行列式为 2, 且有特征值 λ, 则 $A^*+A^{-1}+A^2+2I^n$ 有特征值 ____.

(3) 设三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$(标准内积) 中向量 $(1,\lambda,\mu)$ 与向量 $(1,2,3)$ 和 $(1,-2,3)$ 都正交, 则 $\lambda=$ ____, $\mu=$ ____.

(4) 三元的实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_3^2+2x_1x_2-6x_2x_3$ 的标准型是 ____.

(5) 设 V 为 2 阶复方阵构成的复线性空间, $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, 定义 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{A}(M)=AM$. 那么 $\mathscr{A}$ 的特征值为 ____.

(6) 三维实线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中从基 $e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,1,1)$ 到另一组基 $f_1=(1,1,1),f_2=(1,1,0),f_3=(0,1,2)$ 的过渡矩阵是 ____.

2. 判断下列命题是否正确, 并简要地给出理由.

(1) 若 A 与 B 相似, C 与 D 相似, 则 $\begin{pmatrix}O&A\\C&O\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}O&B\\D&O\end{pmatrix}$ 相似.

(2) 设 A 为 n 阶方阵 A 的不同特征值, X_1,X_2 分别为属于 λ_1,λ_2 的特征向量, 则 X_1+X_2 一定不是 A 的特征向量.

(3) 设 A 为 2 阶实方阵, 若 A 的行列式 $|A|<0$, 则 A 可以相似对角化.

(4) 若 ϕ 是从 n 维实线性空间 V 到 $\mathbb{R}^n$ 的同构, 则 $(u,v)=(\phi(u))^T\cdot(\phi(v))$ 定义了 V 上的一个内积.

(5) 设 A,B 都是 n 阶正定实方阵, 则 $A+B$ 也是正定的.

(6) 在三维实线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中集合 $W=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3|x_1+x_2+x_3=0,x_1-x_2+x_3=1\right\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的线性子空间.

(7) 设 $\mathscr{S}$ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 并且对于任意 $\alpha\neq\beta\in V$ 都有 $\mathscr{S}(\alpha)\neq\mathscr{S}(\beta)$. 那么, 任给 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n;\mathscr{S}(\alpha_1),\mathscr{S}(\alpha_2),...,\mathscr{S}(\alpha_n)$ 也是 V 的一组基.

3. 如果 $n\times n$ 矩阵 A 是正定的, 那么存在一个正定矩阵 B, 是的 $A=B^TB$.

4. 设 e_1,e_2,e_3 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基, 且 $\alpha_1=\frac{1}{3}(2e_1+2e_2-e_3),\alpha_2=\frac{1}{3}(2e_1-e_2+2e_3),\alpha_3=\frac{1}{3}(e_1-2e_2-2e_3)$,

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 也是 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基;

(2) 求 e_1,e_2,e_3 到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的正交变换的矩阵;

(3) 求 e_1,e_2,e_3 到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的坐标变换矩阵.

5. 设 $V=\left\{(a_2x^2+a_1x+a_0e^x:a_2,a_1,a_0\in\mathbb{R})\right\},V$ 中元素按函数通常的数乘与加法构成的线性空间. 对任意 $f(x)\in V$, 定义 V 上的变换 : $\mathscr{A}:p(x)\to\frac{d}{dx}p(x)$, 对任意 $p(x)\in V$.

(1) 证明: $\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换;

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 e^x,xe^x,x^2e^x 下的矩阵;

(3) 求 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量.

6. 设 α 是 n 维欧氏空间 V 中的非零向量, 定义 V 上的线性变换 $\mathscr{A}_\alpha:\mathscr{A}_\alpha(\beta)=\beta-\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\beta)}\alpha$. 证明:

(1) $\mathscr{A}_\alpha$ 是一个正交变换;

(2) 存在标准正交基, 使得 $\mathscr{A}_\alpha$ 在该基下的矩阵为 $\mathrm{diag}(-1,1,..,1)$.

7. 设 n 为大于 1 的整数, $\mathscr{S}$ 是数域 F 下 n 维线性空间 V 上的线性变换, 且存在 $\alpha \in V$ 使得 $\mathscr{S}^{n-1}(\alpha) \neq 0$, $\mathscr{S}^n(\alpha) = 0$. 证明 $\mathscr{S}$ 在 V 的某组基下矩阵的 $(2,1),(3,2),...,(n,n-1)$ 位置元素全为 1, 其他位置元素全为零.

8. 问复数 λ 取何值时方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 有唯一解, 有无穷多解或者无解? 并且在有无穷多解时求出通解.

中国科学技术大学 2012—2013 学年第二学期
线性代数（B1）期末考试 2

1. (5 分 $\times 5 = 25$ 分) 填空题.

(1) 设向量 $(1,6,\lambda)$ 落在由向量组 $\{(1,2,3),(1,-2,3),(4,4,12)\}$ 生成的线性子空间内, 则 $\lambda =$ ____.

(2) 设 $P_2[x]$ 是次数不超过二次多项式的全体构成的线性空间, 则从基 $\left\{(1-x)^2, 2(1-x)x, x^2\right\}$ 到基 $\left\{1, x, x^2\right\}$ 的过渡矩阵是 ____.

(3) 设 $\lambda_1, ..., \lambda_n$ 是 n 阶方阵 A 的全部特征值, 则 $\det(2I + A) =$ ____.

(4) 设 n 阶实对称方阵 A 满足 $A^2 = 2A, \operatorname{rank} A = r$, 则 A 的相合规范形为 ____.

(5) 实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 + (x_3 + tx_1)^2$ 正定的充要条件是参数 t 满足 ____.

2. (5 分 $\times 5 = 25$ 分) 判断题 (判断下列命题是否正确, 并简要给出理由).

(1) 若向量 β 不能由向量组 $\alpha_1, ..., \alpha_n$ 线性表示, 则向量组 $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta$ 线性无关.

(2) 设 $F^{n\times n}$ 是所有 n 阶方阵全体按矩阵线性运算所构成的线性空间, W 是所有行列式为零的 n 阶方阵全体, 则 W 是 $F^{n\times n}$ 的子空间.

(3) 若 $\mathbb{R}_n[x]$ 是次数不超过 n 的实系数多项式构成的实线性空间, $\mathscr{D}$ 是 $\mathbb{R}_n[x]$ 上的微分 (求导) 运算, 则 $\mathscr{D}$ 是线性变换.

(4) 有限维欧氏空间的不同标准正交基之间的过渡矩阵是正交阵.

(5) 设 A 为 m 阶实对称方阵, B 为 n 阶实对称方阵, 且分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$ 正定, 则方阵 A 与 B 皆正定.

3. (10 分) 给定对角矩阵 $A = \operatorname{diag}(1,1,2)$, 令 V 是所有与 A 都可以变换的三阶实对称方阵全体.

(1) 证明: 在矩阵通常的数乘与加法运算下, V 构成实数域的一个线性变换;

(2) 求 V 的维数与一组基.

4. (16 分) 设 γ 是 n 维欧氏空间 V 中的单位向量, 定义 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$: $\mathscr{A}(\alpha) = \alpha - 2(\alpha,\gamma)\gamma$.

(1) 证明: $\mathscr{A}$ 是一个正交变换;

(2) 设 β 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个单位列向量, 证明: 存在 V 的一组标准正交基, 使得 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为 $I - 2\beta\beta^T$;

(3) 求 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量.

5. (14 分) 给定二次曲面在直角坐标系下的方程 $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$. 将它通过正交变换化为标准方程, 并指出该二次曲面的类型.

6. (10 分) 设 A, B 均为 n 阶方阵, A 有 n 个互异的特征值, 且 $AB = BA$. 证明:

(1) B 相似于对角阵;

(2) 存在唯一的次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $B = f(A)$.

中国科学技术大学 2013—2014 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (4 分 $\times 5 = 20$ 分) 填空题.

(1) 设三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$(标准内积) 中向量 $(1,\lambda,\mu)$ 与向量 $(1,2,3)$ 和 $(1,-2,3)$ 都正交, 则 $\lambda =$ ____, $\mu =$ ____.

(2) 设 V 为 2 阶复方阵构成的复线性空间, $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 定义 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 为 : $\mathscr{A}(X) = MX, \forall X \in V$, 则 $\mathscr{A}$ 的特征值及其重数为 ____.

(3) 三维实线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中从基 $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,1,1)$ 到基 $f_1 = (1,1,1), f_2 = (1,1,0), f_3 = (0,1,2)$ 的过渡矩阵是 ____.

(4) 若二次型 $x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的正惯性指数是 2, 则 a 的取值范围是 ____.

(5) 设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 均为 n 维欧氏空间 V 中的线性变换, 且对 V 中任意两个向量 α, β, 都有 $(\mathscr{A}(\alpha), \beta) = (\alpha, \mathscr{B}\beta)$; 如果 $\mathscr{A}$ 在 V 的标准正交基 $e_1, e_2, ..., e_n$ 下的矩阵为 A, 则 $\mathscr{B}$ 在此标准正交基 $e_1, e_2, ..., e_n$ 下的矩阵为 ____.

2. (6 分 $\times 4 = 24$ 分) 判断题 (判断下列命题是否正确, 并简要给出理由).

(1) $\{(x_1, x_2, x_3) \in F^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$ 为线性空间 F^3 的子空间.

(2) 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶正定的实对称矩阵, 则 $a_{ii} > 0 . i = 1, 2, ..., n$.

(3) 对任意常数 λ, μ, 向量组 $\alpha_1 + \lambda\alpha_3, \alpha_2 + \mu\alpha_3$ 都线性无关的充要条件是向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(4) 若 ϕ 是从实线性空间 V 到 $\mathbb{R}^n$ 的一对一的线性映射 (即映射 $\phi: V \to \mathbb{R}^n$ 满足: 对 $\forall \alpha, \beta \in V, \lambda \in \mathbb{R}$, 有 $\phi(\alpha+\beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta), \phi(\lambda\alpha) = \lambda\phi(\alpha)$; 且当 $\alpha \neq \beta$ 时, 有 $\phi(\alpha) \neq \phi(\beta)$); 则 $(\alpha, \beta) = (\phi(\alpha))^T \cdot \phi(\beta)$ 是 V 上的内积.

3. (15 分) 设 $V = \{(a_2x^2 + a_1x + a_0)e^x | a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$, 按函数通常的数乘与加法构成的实线性空间. 定义 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 为: 对任意 $p(x) \in V, \mathscr{A}(p(x)) = \frac{d}{dx}p(x)$.

(1) 求 V 的一组基使 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) 求 $(x^2 - 4x + 2)e^x$ 在此基下的坐标.

4. (15 分) 设 e_1, e_2, e_3 为 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基, 且 $\alpha_1 = \dfrac{1}{3}(2e_1 + 2e_2 - e_3)$, $\alpha_2 = \dfrac{1}{3}(2e_1 - e_2 + 2e_3)$, $\alpha_3 = \dfrac{1}{3}(e_1 - 2e_2 - 2e_3)$, $\mathscr{A}$ 为把 e_1, e_2, e_3 变到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性变换.

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵 A;

(2) 证明 $\mathscr{A}$ 是第一类正交变换.

5. (15 分) 用正交变换和平移将下面空间直角坐标系中的二次曲面方程化为标准形, 并指出曲面类型: $x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 6x + 6y - 6z - 30 = 0$.

6. (11 分) 已知 A 为元素全是 1 的 n 阶矩阵, B 为最后一行是 $1, 2, ..., n$, 其余元素全是 0 的 n 阶矩阵. 证明 A 与 B 相似, 并求其相似标准形.

中国科学技术大学 2013—2014 学年第二学期
线性代数（B1）期末考试

1. (4 分 $\times 5 = 20$ 分) 填空题.

(1) $\mathbb{R}^3$ 中三个向量 $\{(1,2,1),(2,5,3),(1,4,3)\}$ 所生成的线性子空间的维数是 ____.

(2) A 为 2×3 矩阵且 $\det AA^T = 1$, 则 $\det A^TA =$ ____.

(3) 三个平面 $a_ix + b_iy + c_iz = d_i, i = 1,2,3$ 相交于一条直线的充要条件是 ____.

(4) 二次曲面 $xy + yz + zx = 1$ 表示的曲面类型是 ____.

(5) 实二次型 $Q(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + z^2 + xz + 2txy + 2tyz$ 为正定当且仅当参数 t 满足 ____.

2. (20 分) 判断题 (判断下列命题是否正确, 并简要给出理由).

(1) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, 则 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也线性相关.

(2) 令 V 是 n 阶实方阵按矩阵的加法与数乘构成的线性空间, W 是满足行列式为零的所有 n 阶实方阵全体, 则 W 是 V 的子空间.

(3) 矩阵 $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}$ 不相似于矩阵 $A = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}$.

(4) 若矩阵 A 的列向量均不为零且互相正交, 则线性方程组 $A\boldsymbol{x} = 0$ 没有非零解.

(5) 若 A 为一个 $m\times n$ 实矩阵且 $\operatorname{rank} A = n$, 那么 A^TA 为正定矩阵.

3. (14 分) 给定矩阵 $A = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, 令 V 是与 A 乘法可交换的所有三阶实方阵全体.

(1) 证明: V 在矩阵的加法与数乘下构成实数域上的线性空间;

(2) 求 V 的维数与一组基.

4. (12 分) 设 V 为 n 维向量空间, T 为 V 上的线性变换且满足 $T^n = 0, T^{n-1} \neq 0$.

(1) 证明: 若存在向量 $\boldsymbol{x}\in V$ 满足 $T^{n-1}\boldsymbol{x} \neq 0$, 则 $\left\{\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{x}, ..., T^{n-1}\boldsymbol{x}\right\}$ 为 V 的一组基. (2) 求 T 在上述基下的表示矩阵.

5. (12 分) 设 A 为 3 阶实对称方阵, 其特征值分别为 $5,-1,-1$, 且特征值 5 所对应的特征向量为 $(1,1,1)$.

(1) 设 V 为特征值 -1 所对应的特征向量空间, 求 V 的一组标准正交基;

(2) 利用 (1) 确定矩阵 A.

6. (14 分) 在 $\mathbb{R}^2$ 上定义内积如下:

$$< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)^T, \boldsymbol{y} = (y_1,y_2)^T$.

(1) 求度量矩阵 G 使得

$$< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= \boldsymbol{x}^T G \boldsymbol{y};$$

(2) 用 Schmidt 正交化方法从基 $\left\{(1,0)^T,(0,1)^T\right\}$ 构造一组标准正交基;

(3) 证明: $\mathbb{R}^2$ 上线性变换 $\mathscr{A}$ 是正交变换, 当且仅当 $\mathscr{A}$ 在基 $\left\{(1,0)^T,(0,1)^T\right\}$ 下的矩阵 A 满足 $A^TGA = G$.

7. (8 分) 设 A 为 n 阶实对称正定方阵, 证明: 存在 n 阶实对称正定矩阵 B 使得 $A = B^2$.

中国科学技术大学 2015—2016 学年第二学期
线性代数（B1）期末考试

1. (5 分 $\times 5 = 25$ 分) 填空题.

(1) 设 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 把 $\alpha_1 = (1,2,3)^T$, $\alpha_2 = (0,1,1)^T$, $\alpha_3 = (0,0,1)^T$ 分别变换为 $\beta_1 = (-1,1,6)^T$, $\beta_2 = (-1,1,2)^T$, $\beta_3 = (0,-1,2)^T$, 则 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 ____.

(2) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是四维欧式空间 V 的一组标准正交基, 则 $\alpha = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ 与 $\beta = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4$ 的夹角为 ____.

(3) 设方阵 A 满足 $A^2 = 0$, I 为同阶单位阵, 则 $\det(I + A) =$ ____.

(4) 方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 的相似标准型为 ____.

(5) 实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 正定的充要条件是实数 a 满足 ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题.

(1) 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换, λ 是 $\mathcal{A}$ 的特征值, 则对应 λ 的特征向量全体 (加上零向量) 是 V 的子空间.

(2) 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 欧式空间 V 的一组非零正交向量组, 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性无关.

(3) 设 A 是实对称方阵, I 是同阶单位阵, 则当 $t > 0$ 时, $A + tI$ 正定.

(4) 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 与 $A^TAx = 0$ 同解.

3. (15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求可逆矩阵 T, 使得 $T^{-1}AT$ 为对角阵; (2) 求 A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

4. (17 分) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 给定向量组 $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_2 = (0,1,1)$, $\alpha_3 = (0,0,1)$.

(1) 将向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 经过 Schmidt 正交化为一组标准正交基 e_1, e_2, e_3.

(2) 令 A 是以 e_1, e_2, e_3 为行构成的三阶方阵, 定义 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换 $\mathcal{A}x := Ax$, $x \in \mathbb{R}^3$. 证明: $\mathcal{A}$ 是绕某一轴线的旋转变换, 并求该旋转轴.

5. (15 分) 给定直角坐标系中二次曲面的方程 $xy + 2xz + 2y + 2z - 1 = 0$. 通过变量的线性变换及坐标系的评议将其化为标准型, 并确定该二次曲面的类型.

6. (8 分) 设 n 阶实对称方阵 A 满足 $A^2 = I$, 证明:

(1) 存在正交方阵 P, 使得 $A = P\,\mathrm{diag}(I_r, -I_{n-r})P^{-1}$, 这里 $0 \leqslant r \leqslant n$.

(2) 存在实对称方阵 B, 使得 $I + A = B^2$.

中国科学技术大学 2016—2017 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (5 分 $\times 5 = 20$ 分) 填空题.

   (1) 若 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = t \end{cases}$ 有解, 则参数 $t =$ ____.

   (2) 若向量 $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,2,3)$, $\alpha_3 = (2,3,t)$ 生成的 $\mathbb{R}^3$ 中的 2 维子空间, 则参数 $t =$ ____.

   (3) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A 的相合规范型为 ____.

   (4) 二次曲面方程 $2x^2 - 3y^2 - 3z^2 - 2yz - 5 = 0$ 表示的曲面类型是 ____.

   (5) 实二次型 $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 2txy + 2txz + 2yz$ 为正定当且仅当参数 t 满足 ____.

2. (5 分 $\times 5 = 25$ 分) 判断题.

   (1) 设 A 是 n 阶方阵, 则 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^2$.

   (2) 若 0 是矩阵 A 的特征值, 则 A 一定是奇异矩阵.

   (3) 设 A 是 n 阶方阵, 若对任意 n 维列向量 x 都有 $x^T Ax = 0$, 则 A 为反对称方阵.

   (4) 若 A, B 是 n 阶正定矩阵, 则 AB 也是 n 阶正定矩阵.

   (5) 设 A 是 n 阶方阵, 则 A 是正交矩阵当且仅当 A 的 n 个行向量组成的 n 维实数组空间的标准正交基.

3. (14 分) 在 $\mathbb{R}^3$ 中定义线性变换 $\mathscr{A}(x,y,z) = (x+2y, x-3z, 2y-z)$.

   (1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1 = (1,0,0)$, $\alpha_2 = (1,1,0)$, $\alpha_3 = (1,1,1)$ 下的表示矩阵.

   (2) 是否存在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, 使得 $\mathscr{A}$ 在该基下的表示矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. (14 分) 设 $V = \{f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2\}$ 为次数不超过 2 的实系数多项式构成的线性空间.

   (1) 证明: $(f(x), g(x)) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2)$ 定义了 V 上的一个内积.

   (2) 应用 Schmidt 正交化方法将向量值 $\{1, x\}$ 改造成相对 (1) 中所定义内积的标准正交向量组.

5. (14 分) 设 M 是 $2n$ 阶方阵 $\begin{pmatrix} I & A \\ A & I \end{pmatrix}$, 其中 A 是满足 $A^2 = I$ 的 n 阶对称实方阵.

   (1) 求矩阵 M 的所有特征值;　(2) 可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}MP$ 为对角矩阵.

6. (8 分) 假设 A 和 B 都是 n 阶正定矩阵. 证明: $\det A \cdot \det B \leqslant \left(\dfrac{1}{n} \operatorname{tr} AB\right)^n$.

中国科学技术大学 2017—2018 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (5 分 $\times 6 = 30$ 分) 填空题.

(1) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2018} =$ ____.

(2) 若方阵 $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ 的特征值为 1,2,3. 设 A_{ii} 为 a_{ii} 的代数余子式, $i = 1,2,3$, 则 $A_{11} + A_{22} + A_{33} =$ ____.

(3) 设 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; (II) $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是线性空间 V 的两组基, 且 $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$. 如果向量 α 在基 (I) 下的坐标为 $(1, -1, 1)$, 则在基 (II) 下的坐标为 ____.

(4) 设矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\mathrm{diag}(-1, 2, b)$, 则 $b =$ ____.

(5) 方程 $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = 1$ 所表示的二次曲面类型为 ____.

(6) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = (tI_3 + A)^2$, $t \in \mathbb{R}$, 则 B 正定当且仅当 t 满足 ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题.

(1) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 不相似于矩阵 $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(2) 若 0 是矩阵 A 的特征值, 则 A 一定不可逆.

(3) 设 $\mathbb{R}^n$ 中, $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 为正交向量组. 如果 $\beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 线性无关, 且 $\gamma, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ 也线性无关, 则有 β, γ 线性相关.

(4) 若 A 正定, 则 A 的主对角线上的元素均为正实数.

3. (16 分) 设 f 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的变换: $f(X) = AX - XA$, $\forall X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(1) 求证: f 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的线性变换.

(2) 求出 f 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵.

(3) 求 $W = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid f(X) = 0\}$.

4. (10 分) 设 $\mathbb{R}^4$ 的内积为 $(X, Y) = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$, $\forall X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$. 请将下列向量化为 $\mathbb{R}^4$ 在该内积下的一组标准正交基: $\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\alpha_3 = (-1, 0, 0, 1)$, $\alpha_4 = (1, -1, -1, 1)$.

5. (16 分) 已知三阶实对称矩阵 A 的特征值为 1,2,3, 并且有 $\alpha_1 = (-1, -1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, -2, -1)^T$ 分别为属于特征值 1 和 2 的特征向量.

(1) 求 A 的属于特征值 3 的特征向量的全体.

(2) 求矩阵 A.

6. (8 分) 设 $A = (a_{ij})$ 为正定矩阵, d_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式. 证明: $\det A \leqslant a_{nn} d_{n-1}$.

中国科学技术大学 2017—2018 学年第二学期
线性代数（B1）期末考试

1. (4 分 $\times 6 = 24$ 分) 填空题.

(1) 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2, \end{cases}$ 有无穷多解, 则 $\lambda =$____.

(2) 若 $\alpha_1 = (1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,2,3)$, $\alpha_3 = (2,3,t)$ 生成 $\mathbb{R}^3$ 的二维子空间, 则 $t =$____.

(3) 若方阵 $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ 的特征值为 1, -3, -4, 则 $\det(I + A) =$____.

(4) 设 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; (II) $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是线性空间 V 的两组基, 且 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$. 如果向量 α 在基 (I) 下的坐标为 $(1,0,1)$, 则在基 (II) 下的坐标为____.

(5) 设 $\alpha_1 = (a, 0, -1)^T$, $\alpha_2 = (1, b, 1)^T$, $\alpha_3 = (c, 1, 2)^T$ 分别是三阶实对称矩阵 A 的三个不同特征值所对应的特征向量, 如果矩阵 $B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$, 则 $\det B =$____.

(6) 设实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2$, 则当 $t \in$____ 时, 该二次型正定.

2. (6 分 $\times 4 = 24$ 分) 判断题.

(1) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) 设 $V = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \middle| a_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,2 \right\}$, 即次数不超过 2 的实系数多项式构成的 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 若定义 $(f(x), g(x)) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2), \forall f(x), g(x) \in V$, 则 $(f(x), g(x))$ 是 V 上的一个内积.

(3) 设向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个基. 如果非零向量 β 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$ 这 $n-1$ 个向量都正交, 则有 β, α_n 线性相关.

(4) 设实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ C & A_2 \end{pmatrix}$, 且 A_1, A_2 均为方阵. 如果 A 正定, 则 A_1, A_2 均正定.

3. (5 分 +5 分 = 10 分) 设实矩阵 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$, 非齐次线性方程组 $AX = b$ 的通解为 $(1,1,1,1)^T + k(1,-1,0,2)^T$, 其中 k 为任意实数.

(1) α_1 能否由 α_2, α_3, α_4 线性表示?

(2) α_3 能否由 α_1, α_2, α_4 线性表示? 请分别说明理由.

4. (8 分 +8 分 = 16 分) 设 σ 是 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换, 在基 (I): α_1, α_2, α_3 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ -8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

(1) 求 σ 在基 (II): $\beta_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3$, $\beta_2 = 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$ 下的矩阵;

(2) 设向量 $\xi = \alpha_1 + 6\alpha_2 - \alpha_3$, $\eta = \beta_1 - \beta_2 + \beta_3$, 求 $\sigma(\xi)$, $\sigma(\eta)$ 分别在基 (I) 下的坐标.

5. (8 分 +8 分 = 16 分) 设实二次型 $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4xz + 4yz$.

(1) 利用正交变换化该二次型为标准型, 并且给出具体的正交变换;

(2) 判断 $Q(x, y, z) = 1$ 所表示的二次曲面类型.

6. (5 分 +5 分 = 10 分) 设 A 为 n 阶实对称阵, 且 $A^2 + 3A + 2I = 0$.

(1) 请给出 A 的可能的全部互异特征值.

(2) 试证明: 当 n 为奇数时, A 的伴随矩阵 A^* 正定.

中国科学技术大学 2018—2019 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (4 分 $\times 6 = 24$ 分) 填空题.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^4 = $____.

(2) 向量组 $\alpha_1 = (1,1,1,1)$, $\alpha_2 = (1,2,3,4)$, $\alpha_3 = (2,3,4,5)$, $\alpha_4 = (1,-2,2,-1)$ 的秩等于 ____.

(3) 已知非齐次线性方程组 $\begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{pmatrix}$ 有无穷多解, 则 $\lambda = $____.

(4) 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 且存在可逆矩阵 P, 使得 $B = P^{-1}AP - PAP^{-1} + I$. 如果 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为 B 的 n 个特征值, 则 $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i = $____.

(5) 实二次型 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ 的正惯性指数为 ____.

(6) 设实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 2tx_1x_2 - 2x_1x_3$ 是正定的, 则 t 的取值范围为 ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题.

(1) 若 0 为矩阵 A 的特征值, 则 A 一定不可逆.

(2) 若 f 为线性空间 V 上的一个线性变换, 且 f 在 V 的某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则在 V 中存在一组基, 使得 f 在这组基下的矩阵为对角阵.

(3) 设 $V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,2\}$, 即次数不超过 2 的实系数多项式构成的 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 若对任意 $f(x), g(x) \in V$ 定义 $(f(x), g(x)) = f(0)g(0)$, 则此二元运算 (,) 可以成为 V 上的一个内积.

(4) 设 $2n$ 阶实对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ C & A_2 \end{pmatrix}$, 其中 A_1, A_2 均为 n 阶方阵. 若 A 正定, 则 $A_1 + A_2$ 也正定.

3. (10 分) 设 $\alpha_1 = (1,1,0)^T$, $\alpha_2 = (1,0,1)^T$, $\alpha_3 = (0,1,1)^T$ 为非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个解.

(1) 求 $Ax = 0$ 的通解; (2) 求 $Ax = b$ 的通解; (3) 求满足题设条件的一个非齐次线性方程组.

4. (15 分) 设 (I): $\alpha_1 = (1,0,0)^T$, $\alpha_2 = (0,1,0)^T$, $\alpha_3 = (0,0,1)^T$; (II): $\beta_1 = (-1,0,1)^T$, $\beta_2 = (0,1,1)^T$, $\beta_3 = (2,-1,-2)^T$ 分别为 $\mathbb{R}^3$ 的两组基. 设 σ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的一个线性变换, 并且 $\sigma(\beta_1) = (1,0,-3)^T$, $\sigma(\beta_2) = (0,-1,-1)^T$, $\sigma(\beta_3) = (-5,-1,0)^T$. 请分别求出 σ 在 (I)、(II) 这两组基下的矩阵.

5. (15 分) 设实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2bx_2x_3$ 可以经过正交变换 $(x_1, x_2, x_3)^T = P(y_1, y_2, y_3)$ 化为标准型 $y_2^2 + 2y_3^2$.

(1) 确定 a 和 b 的取值. (2) 求出满足题设条件的一个正交变换.

6. (8 分) 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 且 $A^2 = 2A$. 证明: A 相似于对角阵.

7. (8 分) 设 A 为 n 阶正定矩阵, α_1, α_s 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 s 个非零向量, 且满足 $\alpha_i^T A \alpha_j = 0$, $1 \leqslant i < j \leqslant s$. 证明: $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

中国科学技术大学 2018—2019 学年第二学期
线性代数（B1）期末考试

1. (5 分 $\times 5 = 25$ 分) 填空题.

(1) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 则由基 $\alpha_1, \dfrac{1}{2}\alpha_2, \dfrac{1}{3}a_3$ 到 $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵为 ____.

(2) 设 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为 $\mathrm{diag}(1,2,3)$, 则 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3$ 下的矩阵为 ____.

(3) 若矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $x=$ ____, $y=$ ____.

(4) 若实的正交矩阵 A 的每个元素都是 $\pm\dfrac{1}{2n}$, 其中 $n \in \mathbb{N}^*$, 则 A 的阶数为 ____.

(5) 若实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3) = tx_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2 + 2(t-1)x_1x_3$ 正定, 则参数 t 满足 ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题.

(1) 若 n 阶方阵 A_1, A_2, B_1, B_2 满足相似等价关系 $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$, 则 $A_1 + A_2 \sim B_1 + B_2$.

(2) 若两个同阶实对称矩阵具有相同的特征多项式, 则这两个方阵相似.

(3) 在实 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 上定义 $(A,B) = \mathrm{tr}(A^TB)$, 则 $(\ ,\ )$ 是 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 上的一个内积.

(4) 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与 4 阶单位阵相合.

3. (14 分) 给定 4 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 其中 α_i 为 4 维列向量, $i = 1,2,3,4$, 且 α_1, α_2 线性无关. 若 $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 = 3\alpha_3 + \alpha_4$, 且 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

4. (18 分) 设实二次型 $Q(x,y,z) = -2x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4xz + 8xz$.

(1) 利用正交变换将该二次型化为标准型, 并写出相应的正交变换矩阵.

(2) 判断 $Q(x,y,z) = -1$ 在三维直角坐标系里所表示的曲面的类型.

5. (13 分) 证明: n 阶全 1 方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与同阶方阵 $\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ 相似.

6. (10 分) 设 V 为 n 维欧式空间, $\alpha_1, \cdots, \alpha_s \in V$, 对于 s 阶矩阵 $A = (a_{ij})_{s\times s}$, 其中 $a_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$, 证明: 矩阵 A 的秩等于向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 的秩.

中国科学技术大学 2019—2020 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (4 分 $\times 6 = 24$ 分) 填空题.

(1) 设三维向量 α, β 满足 $\alpha^T\beta = 2$, 则 $\beta\alpha^T$ 的特征值为 ____.

(2) 设 4 阶矩阵 A 与 B 相似, I 为单位矩阵. 若 A 的特征值为 1,2,3,4, 则 $|B^{-1} - I| =$ ____.

(3) 已知矩阵 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似, 则 $a + b =$ ____.

(4) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ ____.

(5) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 且 $\operatorname{rank} A = 2$, 则 $a =$ ____.

(6) 设三阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 满足 $A^* = A^T$, 且 $a_{11} = a_{12} = a_{13}$, 则 $a_{11} =$ ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是否相似? 是否相合?

(2) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, $AB = I_m$, 则 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ 是否成立?

(3) $a_{ij} = \dfrac{i}{j}$, $i, j = 1, \cdots, n$, 二次型 $f(x_1, \cdots, x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2$ 的符号差是否为 n?

(4) 设方阵 A 的每行元素之和都为 1, 那么 A^5 的每行元素之和是否为 1?

3. (56 分) 计算及证明题.

(1) (8 分) 设 3 阶实对称正交方阵 A 非负定, $|A| = -1$, 且 $(1,1,1)^T$ 为 -1 的特征向量. 求 A.

(2) (8 分) 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\alpha = (3, -1, 2)^T$, 求 $\lim\limits_{n \to \infty} |A^n \alpha|$.

(3) (8 分) 设 T 是 n 维线性空间 V 的线性变换, $n > 1$, $\alpha \in V$. 设 $T^n\alpha = 0$, 但是 $T^{n-1}\alpha \neq 0$.

(a) 证明: 向量组 $\alpha, T\alpha, \cdots, T^{n-1}\alpha$ 线性无关. (b) 证明: T 不能对角化.

(4) (6 分) 设 $K = \{c_1 + c_2 x + c_3 \cos x \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$ 在通常的函数加法和数乘下构成线性空间. 定义内积 $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \mathrm{d}x$, 从 $1, x, \cos x$ 出发, 构造 K 的一个标准正交基.

(5) (8 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 3 & x \\ 3 & 1 & 3 & 10 & x \\ 3 & 0 & x & x & 10 \end{pmatrix}$, 证明: 当 $|x| < 3$ 时, $|A| < 10^5$.

(6) (8 分) 设 t 为参数, 讨论二次曲面的类型: $x_1^2 + x_2^2 + t x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3 - 10 = 0$.

(7) (10 分) 设 K 是次数小于 3 的实系数多项式在通常的数乘及加法运算下构成的线性空间.

(a) 证明: $1, x+2, x^2+x+3$ 是 K 的一个基.

(b) 求线性变换 $Tf := f'' - f$ 在这个基下的矩阵.

(c) 求 T 的特征向量.

中国科学技术大学 2019—2020 学年第二学期
线性代数（B1）期末考试

1. (4 分 $\times 6 = 24$ 分) 填空题.

(1) 已知实系数线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$ 有唯一解, 则 a 满足的条件是 ____.

(2) 已知 3 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, 那么 $A^3 =$ ____.

(3) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^4$ 线性无关, 则线性子空间 $V = \operatorname{span}\{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3\}$ 的维数是 ____.

(4) 已知线性变换 $\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$, 在另一组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $x =$ ____, $y =$ ____.

(5) 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 按原顺序 Schmidt 正交化得到的标准正交基为 ____.

(6) 若实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2tx_2x_3$ 正定, 则参数 t 满足 ____.

2. (5 分 $\times 4 = 20$ 分) 判断题.

(1) 已知向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关且可以由向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性表示, 则 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性无关.

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, 方阵 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似.

(3) 数域 $\mathbb{R}$ 上 n 阶正交阵的行向量组或列向量组都构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

(4) 记 V 是所有 3 阶实方阵全体构成的集合, 它在记作加法和数乘下构成一个 9 维实线性空间, 那么 V 中对称方阵全体构成它的一个 6 维子空间.

3. (12 分) 设某个 4 元线性方程组的系数矩阵为 A, 满足 $\operatorname{rank} A = 3$. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是它的 3 个解, 其中 $\alpha_1 = (1, -2, -3, 4)^T$, $5\alpha_2 - 2\alpha_3 = (2, 0, 2, 0)^T$.

(1) 证明: 这个线性方程组是非齐次的. (2) 求出这个线性方程组的通解.

4. (14 分) 用初等变换法求矩阵 A 的逆与行列式, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{pmatrix}$.

5. (14 分) $\mathbb{R}^3$ 上线性变换 $\mathscr{A}$ 把 $\alpha_1 = (2, 3, 5)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 2)^T$, $\alpha_3 = (1, 0, 0)^T$ 分别映为 $\beta_1 = (1, 2, 0)^T$, $\beta_2 = (2, 4, -1)^T$, $\beta_3 = (3, 0, 5)^T$. 求:

(1) $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵 A.

(2) $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵 B.

6. (16 分) 设实二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$.

(1) 利用正交变换将该二次型化为标准型, 并写出相应的正交变换矩阵.

(2) 判断 $Q(x_1,x_2,x_3)=1$ 在三维直角坐标系里所表示的曲面的类型.

中国科学技术大学 2020—2021 学年第一学期
线性代数（B1）期末考试

1. (5 分 $\times 5 = 25$ 分) 填空题.

(1) 方阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值是 ____.

(2) 3 阶实对称矩阵组成的集合恰有 ____ 个相合等价类.

(3) 实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} (x_i - x_j)^2$ 的正惯性指数等于 ____.

(4) 设 $\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 其中 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中任意的向量, 则 $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵是 ____.

(5) 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧式空间 V 上的线性变换: $\mathscr{A}(\alpha) = \alpha - 2(\alpha, \gamma)\gamma$, 其中 γ 是 V 中给定的单位向量, 则 $\mathscr{A}$ 的 n 个特征值为 ____.

2. (5 分 $\times 5 = 25$ 分) 判断题.

(1) n 维线性空间 V 中同一个线性变换在两组不同的基本下的矩阵彼此相合.

(2) 任何一个 n 阶实方阵都实相似于上三角矩阵.

(3) 每一个正交矩阵都正交相似于对角矩阵.

(4) 设 A, B 都是 n 阶实方阵, 若 A 可逆, 则 AB 与 BA 相似.

(5) 设 A 是 n 阶实对称方阵, 若 A 的每一个顺序主子式都是非负的, 则 A 半正定.

3. (12 分) 设 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换 $\mathscr{A}$ 将 $\alpha_1 = (2,3,5)^T$, $\alpha_2 = (0,1,2)^T$, $\alpha_3 = (1,0,0)^T$ 变换为 $\beta_1 = (1,2,0)^T$, $\beta_2 = (2,4,-1)^T$, $\beta_3 = (3,0,5)^T$.

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的矩阵; (2) 求 $\mathscr{A}$ 在自然基下的矩阵.

4. (16 分) 设 V 是 3 维欧式空间, 由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 给出的度量矩阵 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 请由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 按现在的顺序进行 Schmidt 正交化给出一组标准正交基.

5. (12 分) 给定二次曲面在直角坐标系下的方程是 $2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz = 1$. 将它通过正交变换化为标准方程, 并指出这曲面的类型.

6. (10 分) 设 A, B 是两个 n 阶实对称矩阵, 满足 $AB = BA$. 求证: 存在 n 阶正交方阵 P, 使得 $P^T AP$ 与 $P^T BP$ 都是对角矩阵.