§0.1 第10章复习

一、基本概念

对于定义在$\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 中有界区域上的函数的重积分, 基本思想如下

基本思想: 对 D 作分割 $\Longrightarrow$ Riemann 和$\Longrightarrow$ 极限.

一般来说有一个 D 的面积(或体积)问题, 其定义也是采取方形(或立方体)分割来定义的.

基本性质: 与单变量一致. 以二元函数 $f(x, y)$ 为例:

(1) 可积函数必有界.

(2) $f(x, y)$ 在 D 上可积 $\Longleftrightarrow \inf\limits_{T}\{\omega(T)\} = 0$

(3) $f(x, y)$ 在 D 上可积 $\Longleftrightarrow f(x, y)$ 在 D **"几乎处处连续"**.

(4) $f \geqslant g$ **"几乎处处成立"** $\Longleftrightarrow \int_D f \geqslant \int_D g$.

这里**“几乎处处”**是指最多只在一个零测集上不连续（或相等）.

（5）积分函数的可加性与积分区域的可加性

$$\int_D (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_D f + c_2 \int_D g, \quad \int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

（6）积分中值公式, D 连通闭域, $f(x, y)$ 连续, 则必有 $P \in D$, 使

$$\int_D f = f(P)\sigma(D).$$

二、重积分的两种最基本的计算方法

累次积分 累次积分是把重积分转化为累次的定积分, 不管是二重、三重还是 n 重.

累次积分的关键点在于对积分区域的理解, 同时灵活运用积分区域的可加性, 在不同的区域采取不同的累次积分.

换元 以三重积分为例, 设变换

$$x = x(u, v, w),\ y = y(u, v, w),\ z = z(u, v, w)$$

把 $O'uvw$ 空间中的区域 V' 一一映成 $Oxyz$ 空间中的区域 V. 则体积元素的微元等式和三重积分换元公式如下

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w.$$

$$\begin{aligned}&\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ =&\iiint_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

换元的关键一是搞清楚变换中两组变量所在区域之间的对应, 二是注意变换中的 Jacobi 行列式.

提醒 在计算重积分时, 可以充分利用被积函数或积分区域的对称性, 上题中, 我们首先利用了积分区域的对称性, 后又利用了被积函数的对称性.另外, 对基本的球坐标（极坐标）换元以及相应的Jacobi行列式必须熟记于心.

三、常用不等式和等式

(1) $\left|\int_D f\,\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \int_D |f|\,\mathrm{d}\sigma.$

(2) $\left(\int_D fg\,\mathrm{d}\sigma\right)^2 \leqslant \int_D f^2\,\mathrm{d}\sigma \int_D g^2\,\mathrm{d}\sigma.$ （Cauchy-Schwarz 不等式）

(3) $\left(\int_D f\,\mathrm{d}\sigma\right)^2 \leqslant \sigma(D)\int_D f^2\,\mathrm{d}\sigma.$ （2）的推论

(4) $\left(\int_D (f+g)^2\,\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_D f^2\,\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_D g^2\,\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}.$ （Minkowski 不等式）

第二积分中值公式

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x \quad (g(x)\geqslant 0 \text{ 单调减})$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad (g(x)\geqslant 0 \text{ 单调增})$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad (g(x) \text{ 单调 })$$

四、例题

例一 证明积分中值公式：设 D 连通闭域, $f(x,y)$ 连续, 则必有$P\in D$, 使

$$\int_D f = f(P)\sigma(D).$$

证明: 因有界闭集上连续函数必取到最大（小）值, 不妨设 f 在P_1,P_2 分别取到最大（小）值 $f(P_1)=M, f(P_2)=m$. 因此

$$m\sigma(D)\leqslant \int_D f\leqslant M\sigma(D), \quad \text{或} \quad m\leqslant \frac{1}{\sigma(D)}\int_D f\leqslant M.$$

又因为 D 连通, 所以存在连接 P_1,P_2 的连续曲线

$$x=x(t), y=y(t), \ t\in[\alpha,\beta]$$

使得 $(x(\alpha),y(\alpha))=P_1, \ (x(\beta),y(\beta))=P_2.$

考虑复合函数 $\varphi(t)=f(x(t),y(t))\ t\in[\alpha,\beta]$. 则 $\varphi(t)$ 连续且

$$\varphi(\alpha)=M, \ \varphi(\beta)=m.$$

||◀　▶||　◀　▶　返回　全屏　关闭　退出

利用介值定理, 存在 $t_0 \in [\alpha, \beta]$, 使得

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{\sigma(D)} \int_D f,$$

即存在 $P = (x(t_0), y(t_0))$ 使得

$$f(P) = f(x(t_0), y(t_0)) = \varphi(t_0) = \frac{1}{\sigma(D)} \int_D f$$

例二 设 D 连通闭域, f, g 在 D 上连续, 且g 不变号. 则必存在$P_0 \in D$, 使

$$\int_D fg = f(P_0) \int_D g \,\mathrm{d}\sigma.$$

证明 因为 $f\Big|_D$ 连续, 所以取到最大值和最小值, 设 f 分别在 P_1, $P_2 \in D$ 取到最大值和最小值. 因为 $g\Big|_D$ 不变号, 不妨设 $g \geqslant 0$, 如果 g 恒等于零, 则结论显然成立, 如果 g 不恒等于零, 就有 $\int_D g \,\mathrm{d}\sigma > 0$. 这样

$$f(P_1)g(P) \geqslant f(P)g(P) \geqslant f(P_2)g(P), \ \ P \in D$$

对不等式积分得

$$f(P_1)\int_D g\,\mathrm{d}\sigma \geqslant \int_D fg\,\mathrm{d}\sigma \geqslant f(P_2)\int_D g\,\mathrm{d}\sigma$$

$$\Longrightarrow f(P_1) \geqslant \frac{\int_D fg\,\mathrm{d}\sigma}{\int_D g\,\mathrm{d}\sigma} \geqslant f(P_2)\int_D g\,\mathrm{d}\sigma$$

根据连通有界闭集上连续函数的介值定理可知存在 $P_0 \in D$ 使得

$$f(P_0) = \frac{\int_D fg\,\mathrm{d}\sigma}{\int_D g\,\mathrm{d}\sigma}.$$

例三 设 $D = [0,1]\times[0,1]$,

（1）计算积分 $A = \iint_D \left|xy - \frac{1}{4}\right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

（2）设 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 且满足

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0, \quad \iint_D xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1.$$

求证存在 $(\xi,\zeta)\in D$, 使得 $|f(\xi,\zeta)| \geqslant \frac{1}{A}$.

解（1） 首先设法去绝对值. 设曲线 $xy=\dfrac{1}{4}$ 把区域 D 分为两部分

$$D_1=\left\{(x,y)\mid(x,y)\in D, xy\geqslant\frac{1}{4}\right\},$$

$$D_2=\left\{(x,y)\mid(x,y)\in D, xy\leqslant\frac{1}{4}\right\}.$$

因此

$$\begin{aligned}\iint_{D_1}\left|xy-\frac{1}{4}\right|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{4x}}^{1}\mathrm{d}y\left(xy-\frac{1}{4}\right)\\&=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\mathrm{d}x\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{32x}-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{64}+\frac{\ln 2}{16}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{D_2}\left|xy-\frac{1}{4}\right|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{4x}}^{1}\mathrm{d}y\left(\frac{1}{4}-xy\right)\\&=\int_{0}^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}x\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\left(\frac{1}{4}-xy\right)+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{\frac{1}{4x}}\mathrm{d}y\left(\frac{1}{4}-xy\right)\\&=\frac{3}{64}+\frac{\ln 2}{16}.\end{aligned}$$

所以 $A = \dfrac{3}{32} + \dfrac{\ln 2}{18}$.

证（2）（反证）如果不存在 $(\xi,\zeta) \in D$, 使得 $|f(\xi,\zeta)| \geqslant \dfrac{1}{A}$, 那么 $|f(x,y)| < \dfrac{1}{A}$ 对所有的 $(x,y) \in D$ 成立. 由条件

$$1 = \left|\iint_D \left(xy - \frac{1}{4}\right) f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \iint_D \left|xy - \frac{1}{4}\right| |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$< \frac{1}{A}\iint_D \left|xy - \frac{1}{4}\right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < 1$$

矛盾.

例四 计算$\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, 其中 D 是$x = y$, $x^2 = y$ 围成的区域。

$$\iint_D \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (x - x^2)\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = 1 - \sin 1$$

例五 设 D 由 $x=0, y=0, x+y=1$ 围成，求

$$A=\iint_D \exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$$

令 $x-y=u, x+y=v$（线性换元），或 $x=\frac{u+v}{2}$，$y=\frac{v-u}{2}$，经过换元，

$$v-u=2y\geqslant 0,\ v+u=2x\geqslant 0$$

$$\Longrightarrow 0\leqslant v\leqslant 1,\ -v\leqslant u\leqslant v$$

所以

$$D\longrightarrow D'=\{(u,v):|u|\leqslant v, 0\leqslant v\leqslant 1\},$$

Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow A=\frac{1}{2}\iint_{D'}\mathrm{e}^{u/v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}v\int_{-v}^{v}\mathrm{e}^{u/v}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\sinh 1$$

例六 设 D 是第一象限中由 $x^2+y^2=1$ 和 $x+y=1$ 围成, 计算

$$I=\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{xy(\ln^2 x+\ln^2 y)}$$

解 做变换 $x=\mathrm{e}^{r\cos\theta},\ y=\mathrm{e}^{r\sin\theta}, \Longrightarrow \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=r\mathrm{e}^{r\cos\theta+r\sin\theta}$,

$$I=\iint_{D'}\frac{1}{r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

关键是要看通过变换, 积分区域的变化.

注意 Oxy 平面上直线 $x+y=1$ 对应到 $Or\theta$ 平面上的曲线由方程

$$F(r,\theta)=\mathrm{e}^{r\cos\theta}+\mathrm{e}^{r\sin\theta}-1=0$$

给出. 显然, θ 的取值范围应保证 $\cos\theta\leqslant 0,\ \sin\theta\leqslant 0$. 所以

$$\theta\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right].$$

在这个区间内,

$$\frac{\partial F}{\partial r}=\mathrm{e}^{r\cos\theta}\cos\theta+\mathrm{e}^{r\sin\theta}\sin\theta\neq 0$$

因此存在隐函数

$$r=\varphi(\theta),\ \theta\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right].$$

而Oxy 平面上曲线 $x^2+y^2=1$ 对应到 $Or\theta$ 平面上的曲线由方程

$$G(r,\theta)=\mathrm{e}^{2r\cos\theta}+\mathrm{e}^{2r\sin\theta}-1=0$$

给出, 类似讨论得该方程确定的隐函数为

$$r=\psi(\theta)=\frac{1}{2}\varphi(\theta),\ \theta\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right].$$

所以 D' 是由$Or\theta$ 平面上曲线 $r=\varphi(\theta)$, $r=\frac{1}{2}\varphi(\theta)$ 和直线 $\theta=\pi,\ \theta=\frac{3\pi}{2}$ 围成. 因此

$$I=\iint_{D'}\frac{1}{r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\int_{\pi}^{3\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_{\varphi(\theta)/2}^{\varphi(\theta)}\frac{1}{r}\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

例七 计算

$$I=\iiint\limits_{[0,1]^3}\frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w}{(1+u^2+v^2+w^2)^2}.$$

解 首先考虑被积函数关于区间的对称性，设

$$V=\{(u,v,w)\mid 0\leqslant v\leqslant u\leqslant 1,\ 0\leqslant w\leqslant 1\}$$

则原积分满足

$$I=2\iiint\limits_{V}\frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w}{(1+u^2+v^2+w^2)^2}.$$

作变量代换

$$u=r\cos\theta,\ v=r\sin\theta,\ w=\tan\varphi$$

其中变量 r,θ,φ 所在区域 V' 为

$$\sin\theta\leqslant\cos\theta\leqslant 1,\ 0\leqslant\tan\varphi\leqslant 1,\ 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

$$V'=\left\{(r,\theta,\varphi)\mid 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant r\leqslant\sec\theta,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}$$

这里，相当于先做一个柱坐标变换，再做变换 $w = \tan\varphi$

Jacobi 行列式为：

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r\sec^2\varphi$$

所以

$$\begin{aligned}
I &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sec\theta} \frac{r\sec^2\varphi}{(1+r^2+\tan^2\varphi)^2}\,\mathrm{d}r \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sec\theta} \frac{r\sec^2\varphi}{(r^2+\sec^2\varphi)^2}\,\mathrm{d}r \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \left(\frac{\sec^2\varphi}{r^2+\sec^2\varphi}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=\sec\theta} \\
&= \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \frac{\sec^2\varphi}{\sec^2\varphi+\sec^2\theta}
\end{aligned}$$

下面的问题就是计算最后一个式子中的积分了。记

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \frac{\sec^2\varphi}{\sec^2\varphi+\sec^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\varphi}{\sec^2\varphi+\sec^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

注意到这个积分中，将积分变量θ, φ 进行互换，积分不变

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\varphi}{\sec^2\varphi+\sec^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta+\sec^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

因此

$$2A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\varphi+\sec^2\theta}{\sec^2\varphi+\sec^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

最终

$$I=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-A=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=\frac{\pi^2}{32}$$

例八 求积分 $I=\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}V$, 其中 V 为椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 内部.

解 首先作变换 $x=au, y=bv, z=cw$ 把问题化简, $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=abc.$

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_B \sqrt{1-u^2-v^2-w^2}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\
&= abc\iiint\limits_B \sqrt{1-u^2-v^2-w^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w
\end{aligned}
$$

这里 $B=\{(u,v,w)\,|\,u^2+v^2+w^2\leqslant 1\}$. 再作球坐标变换

$$
u=r\sin\theta\cos\varphi,\ \ v=r\sin\theta\sin\varphi,\ \ w=r\cos\theta,
$$

其中 $r\in(0,1),\ \theta\in(0,\pi),\ \varphi\in(0,2\pi)$.

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} \sqrt{1-r^2}\cdot r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\
&= \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot r^2\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\\
&= 4\pi\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot r^2\,\mathrm{d}r\\
&= 4\pi\cdot\frac{\pi}{16} = \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

故 $I = \frac{\pi^2}{4}abc.$

这里涉及一个单变量积分 $\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot r^2\,\mathrm{d}r$, 用换元法: $r=\sin t$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot r^2\,\mathrm{d}r &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\sin^2 t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int_0^{\pi} \sin^2 u\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{8}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2u}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{16}\pi\end{aligned}$$

例九 设 P 是圆 $(x-a)^2+y^2=a^2$ $(a>0)$ 上的动点. 从原点往圆过 P 点的切线 ℓ 作垂线, 垂足为 Q. 当 P 沿圆运动时, 点 Q 的轨迹是 xy 平面上一条封闭曲线. 求此封闭曲线围成区域的面积.

解 设 $A=(a,0)$, Q 点坐标为 (x,y), AP 与 x 轴夹角为 θ. 则OQ 与 x

轴夹角也是 θ. 过 A 作切线 ℓ 的平行线交 OQ 于 B, 因此

$$OQ = OB + BQ = a\cos\theta + a$$

$$x = OQ\cos\theta = a\cos\theta(1+\cos\theta)$$

$$y = OQ\sin\theta = a\sin\theta(1+\cos\theta), \ (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

故, 点 Q 的极坐标方程为

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = a(1+\cos\theta).$$

Q 的轨迹所围的区域的面积为

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2(\theta)\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

例十 设 $f(x,y)$ 是连续函数, 证明

$$\left(\int_a^b \mathrm{d}x\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \int_c^d \mathrm{d}y\left(\int_a^b f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明一 左边平方后得

$$\begin{aligned}
\text{左}^2 &= \int_a^b \mathrm{d}x\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)^2 = \int_a^b \mathrm{d}x\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\int_c^d f(x,z)\,\mathrm{d}z\right)\\
&= \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d \mathrm{d}y\int_c^d \mathrm{d}z f(x,y)f(x,z) = \int_c^d \mathrm{d}y\int_c^d \mathrm{d}z\int_a^b \mathrm{d}x f(x,y)f(x,z)\\
&\leqslant \int_c^d \mathrm{d}y\int_c^d \mathrm{d}z\left(\int_a^b \mathrm{d}x f^2(x,y)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b \mathrm{d}x f^2(x,z)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \int_c^d \mathrm{d}y\left(\int_a^b \mathrm{d}x f^2(x,y)\right)^{\frac{1}{2}}\int_c^d \mathrm{d}z\left(\int_a^b \mathrm{d}x f^2(x,z)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\int_c^d \mathrm{d}y\left(\int_a^b \mathrm{d}x f^2(x,y)\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \text{右}^2
\end{aligned}$$

||◄ ►|| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

这里把平方项中一个积分写成对 z 的积分, 使得积分称为一个三重积分, 再利用 Cauchy-Schwarz 不等时即可.

证明二 令

$$\varphi(d) = \int_a^b \mathrm{d}x \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)^2,$$

$$\psi(d) = \left(\int_c^d \mathrm{d}y \left(\int_a^b f^2(x,y)\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2.$$

因为 $f(x,y)$ 连续, 所以对 d 可导, 所以

$$\varphi'(d) = 2\int_a^b \mathrm{d}x \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right) f(x,d)$$

$$= 2\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)f(x,d)\,\mathrm{d}y = 2\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)f(x,d)\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2\int_c^d \mathrm{d}y \left(\int_a^b f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b f^2(x,d)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\psi'(d) = 2\int_c^d \mathrm{d}y \left(\int_a^b f^2(x,y)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b f^2(x,d)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

所以 $\varphi'(d) - \psi'(d) \leqslant 0$, 推得 $\varphi(d) - \psi(d)$ 关于 d 单调减, 也就是对任何 $d \geqslant c$, 有

$$\varphi(d) - \psi(d) \leqslant \varphi(c) - \psi(c) = 0$$

即得不等式.

例十一 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为 n 元的连续函数, 证明:

$$\int_a^b \mathrm{d}x_1 \int_a^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_n$$
$$= \int_a^b \mathrm{d}x_n \int_{x_n}^b \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \int_{x_2}^b f(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1.$$

解决这样的问题首先看两个变量情形

$$\int_a^b \mathrm{d}x_1 \int_a^{x_1} \mathrm{d}x_2 f(x_1,x_2) = \int_a^b \mathrm{d}x_2 \int_{x_2}^b \mathrm{d}x_1 f(x_1,x_2).$$

这是书上的例 10.1.3.

第二看积分区域

$$D = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid a \leqslant x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant x_1 \leqslant b\}$$

第三用归纳法: 设在区域

$$D_{x_1} = \{(x_2,x_3,\cdots,x_n) \mid a \leqslant x_n \leqslant \cdots \leqslant x_2 \leqslant x_1\}$$

上结论成立, 即 (把 b 换成 x_1)

$$\begin{aligned}&\int_a^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, \mathrm{d}x_n \\ =& \int_a^{x_1} \mathrm{d}x_n \int_{x_n}^{x_1} \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \int_{x_3}^{x_1} f(x_1, \cdots, x_n)\, \mathrm{d}x_2.\end{aligned}$$

注意到上式两端都是x_1 和函数, 两端对 x_1 在 $[a, b]$ 上积分得

$$\begin{aligned}&\int_a^{b} \mathrm{d}x_1 \left(\int_a^{x_1} \mathrm{d}x_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, \mathrm{d}x_n \right) \\ =& \int_a^{b} \mathrm{d}x_1 \left(\int_a^{x_1} \mathrm{d}x_n \int_{x_n}^{x_1} \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \int_{x_3}^{x_1} f(x_1, \cdots, x_n)\, \mathrm{d}x_2 \right).\end{aligned}$$

对上式右边反复利用两个变量情形, 不断交换积分次序: 即对 x_1 和 x_n ,

$\boldsymbol{x_1}$ 和 $\boldsymbol{x_{n-1}}$ 等等, 直到 $\boldsymbol{x_1}$ 交换到最后边:

$$
\begin{aligned}
\text{右边} &= \int_a^b \mathrm{d}x_1 \left(\int_a^{x_1} \mathrm{d}x_n \int_{x_n}^{x_1} \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \int_{x_3}^{x_1} f(x_1, \cdots, x_n)\, \mathrm{d}x_2 \right). \\
&= \int_a^b \mathrm{d}x_n \int_{x_n}^b \mathrm{d}x_1 \int_{x_n}^{x_1} \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \int_{x_3}^{x_1} f(x_1, \cdots, x_n)\, \mathrm{d}x_2 \\
&= \int_a^b \mathrm{d}x_n \int_{x_n}^b \mathrm{d}x_{n-1} \int_{x_{n-1}}^b \mathrm{d}x_1 \cdots \int_{x_3}^{x_1} f(x_1, \cdots, x_n)\, \mathrm{d}x_2 \\
&= \cdots \\
&= \int_a^b \mathrm{d}x_n \int_{x_n}^b \mathrm{d}x_{n-1} \cdots \int_{x_2}^b f(x_1, \cdots, x_n)\, \mathrm{d}x_1
\end{aligned}
$$