线性方程组解的结构与秩

1. 设 A 是 n 阶方阵，α 为 n 维列向量，若有 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rank} A$，问

(1) 方程组 $Ax=\alpha$ 是否有解？

(2) 方程组 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是否有非零解？

解. (1) 注意到由秩不等式：$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(A\ \alpha) \geq \operatorname{rank} A$

得 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A\ \alpha)$，故方程组 $Ax=\alpha$ 有解

(2) 注意到 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}$ 为 $n+1$ 阶方阵，而 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rank} A \leq n$，故方程组 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 有非零解.

有关齐次方程组同解的问题可推系数矩阵秩相同

2、设 A 是 $m\times n$ 实矩阵，有方程组 $Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ $\boxed{\text{同解}}$，进而 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A^TA)$

同理有 $\operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}(AA^T)$，因而有 $\underline{\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A^TA) = \operatorname{rank}(AA^T)}$.（常用结论）

证明：1° 方程组 $Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 同解. ☆

若 $Ax=0$，则 $A^TAx=0$；反之若 $A^TAx=0$，有 $\underline{(Ax)^TAx = x^TA^TAx = 0}$，设 $Ax=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$，知 $(Ax)^TAx =$

$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=0$，因此 $y_1=y_2=\cdots=y_n=0$，即 $Ax=0$.

2° 由齐次线性方程组解的结构，$Ax=0$ 与方程组 $A^TAx=0$ 解空间维数相同 即

$n-\operatorname{rank}(A) = n-\operatorname{rank}(A^TA)$，因此：$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^TA$

3° 替换 A 为 A^T（或重复上述论证）有 $\operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}(AA^T)$

4° 由于 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T)$ 知 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^TA) = \operatorname{rank}(AA^T)$ 成立.

3、若 A、B 均是 $m\times n$ 矩阵，线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则 A 与 B 的列向量组可以不等价，但 行向量组等价.

证明：1° 举例说明 A 与 B 列向量组可以不等价

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 同解. 但 A 与 B 列向量不等价

2° 行向量组等价

由方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解知 $n-\operatorname{rank}A = n-\operatorname{rank}B$，于是 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B$，即 A 与 B 的行向量组秩相同.［需要用到结论：两向量组秩相同且其中之一可由另一线性表示，则两向量组等价］

注意一下方法和结论

设 $r=n-\operatorname{rank}(A)$，取 $\underline{Ax=0 \text{ 的一组基础解系，构成 } n\times r \text{ 阶矩阵 } C}$. 则 $AC=0$，且 $BC=0$，从而 $\underline{C^TA^T=0}$，$\underline{\text{且 } C^TB^T=0}$，即 A 的行向量组和 B 的行向量组均是 $C^Tx=0$ 方程的解，又注意到 $\operatorname{rank} C = r$，方程组 $C^Tx=0$ 基础解系个数为 $n-r=\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B$. 由基础解系的定义知 A 的行向量组、B 的行向量均与 $C^Tx=0$ 一组基础解系等价，从而由等价的传递性知 A 的行向量组和 B 行向量组等价. ☆（同结论）

4. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，A^*为A的伴随矩阵，求线性方程组 $A^*x=0$ 的解.

解：已知结论：秩$(A^*)=\begin{cases} n & 秩A=n \\ 1 & 秩A=n-1 \\ 0 & 秩A<n-2 \end{cases}$，下面分情况讨论：

1° 当 $\mathrm{rank}(A)=n$ 时，$\mathrm{rank}\,A^*=n$，则 $A^*x=0$ 只有0解

2° 当 $\mathrm{rank}\,A=n-1$ 时，$\mathrm{rank}\,A^*=1$，此时由 $A^*A=0$ 且 $A^*x=0$ 基础解系个数为 $n-1$

故 A的列向量组为方程组 $A^*x=0$ 的一组基础解系.

3°. 当 $\mathrm{rank}\,A<n-2$ 时，$A^*=0$，从而任意n维向量均为方程组 $A^*x=0$ 的解.

5. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 秩为n，设 $B=(a_{ij})_{r\times n}$ $(r<n)$，求齐次线性方程组 $Bx=0$ 的基础解系.

解：由秩(A)=n 知 秩(B)=r，于是 $Bx=0$ 基础解系个数为 $n-r$.

取 $\eta_{r+1}=(A_{r+1,1},A_{r+1,2},\cdots,A_{r+1,n})^T$

$\eta_{r+2}=(A_{r+2,1},A_{r+2,2},\cdots,A_{r+2,n})^T$

$\cdots$

$\eta_n=(A_{n,1},A_{n,2},\cdots,A_{nn})^T$，其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

则 $\eta_{r+1},\cdots,\eta_n$ 为 $Bx=0$ 的一组基础解系.

事实上：① 由秩 $A=n$ 知 秩 $A^*=n$，于是 $\eta_{r+1},\cdots\eta_n$ 线性无关

② 由行列式展开定理，$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}|A| & i=j \\ 0 & i\neq j\end{cases}$ 知 $\eta_{r+1},\cdots,\eta_n$ 均为 $Bx=0$ 的解.

综上，结论成立.

6. 设A是 $m\times n$ 矩阵，证明 $Ax=b$ 有解的充分必要条件是 如果 $A^T y=0$，则 $b^T y=0$.

证明 "$\Rightarrow$"（必要性）设 x_0 为 $Ax=b$ 的解，即 $Ax_0=b$，两边同时取转置有 $x_0^T A^T=b^T$

再右乘y向量有 $x_0^T A^T y=b^T y$，从而，若 $A^T y=0$，有 $b^T y=0$.

"$\Leftarrow$"（充分性）要证 $Ax=b$ 有解，只要证 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}(A\ b)$，由 $A^T y=0$ 有 $b^T y=0$ 知

$A^T y=0$ 与 $\begin{pmatrix}A^T\\ b^T\end{pmatrix}y=0$ 同解，故 $m-\mathrm{rank}(A^T)=m-\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A^T\\ b^T\end{pmatrix}$，即有

$\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}(A^T)=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A^T\\ b^T\end{pmatrix}=\mathrm{rank}(A\ b)$，故 $Ax=b$ 方程有解.

#