HW8

> 7.7 如果图G的任一真子图H皆有$\chi(H) < \chi(G)$，则称G是色临界图；若$\chi(G) = k$，则称色临界图G是k色临界图。
>
> (1)证明：1色临界图只有K_1，2色临界图只有K_2，3色临界图只有k阶奇圈，$k \geq 3$。
>
> (2)试给出一些4色临界图的例子。
>
> (3)若G是k色临界图，证明：$\forall v \in V(G)$，均有$deg(v) \geq k-1$。

1. 若1色临界图G有多于两个顶点，则取只含其中一个顶点的子图H，有$\chi(H) = 1 = \chi(G)$，与1色临界图的定义矛盾，故1色临界图只有K_1

   对2色临界图G，则G中至少含一条边e。若除了e关联的两个顶点之外还有其他顶点，取e及其关联的两个顶点为子图H，则$\chi(H) = 2 = \chi(G)$，与G为色临界图矛盾，故2色临界图只有K_2。

   对于3色临界图G，则其一定含有奇圈H，若H为G的真子图，则$\chi(H) = 3 = \chi(G)$，与G为3色临界图矛盾，故$G = H$，即3色临界图只有奇圈。
2. K_4即为4色临界图。
3. 反证法，若$\exists v \in V(G), deg(v) \leq k-2$，设$v$的邻顶分别为$u_1, u_2, \cdots, u_t (t \leq k-2)$。

   考虑$H = G - \{v\}$为G的真子图，则$\chi(H) \leq k-1$，即可以用$k-1$种颜色将H正常着色。再将$H + \{v\}$中的顶点v，染上$k-1$种颜色中与$u_1, u_2, \cdots, u_t (t \leq k-2)$不同的颜色，如此我们就得到一个图$G$的正常$k-1$着色，与$G$为k色临界图矛盾。

   故$\forall v \in V(G), deg(v) \geq k-1$。

> 7.8 轮是一个圈加上一个新顶点，把圈上的每个顶点都和新顶点之间连一条边，求v阶轮的边色数。

记该图为G，给中心顶点编号为v_0，圈上的顶点按顺时针顺序分别编号为$v_1, v_2, \cdots, v_{v-1}$。

因为v_0关联$v-1$条边，故$\chi'(G) \geq v-1$。

考虑下面的$v-1$着色方法：v_0与v_i之间着第i色$(1 \leq i \leq v-1)$，v_i与v_{i+1}之间着第$i+2$(模k意义下)色。可知其为G的正常着色。故$\chi'(G) = v-1$。

> 7.9 给出求二分图正常Δ边着色的算法。

设$G(X, Y, E)$为二分图，且$|X| \geq |Y|$，该二分图正常Δ边着色算法如下：

1. 加顶点扩充Y，使得$|X| = |Y|$，添加边使G，变成Δ次正则二分图，记为G^*。
2. 利用匈牙利算法主次求其完备匹配，直至求出G^*的Δ个边不重的完备匹配，每个完备匹配着上一个颜色。
3. 去掉扩充的顶点及边。

> 7.10 证明：若二分图的顶点的最小次数为$\delta > 0$，则对边进行δ着色时，能使每个顶点所关联的边中皆出现δ种颜色。

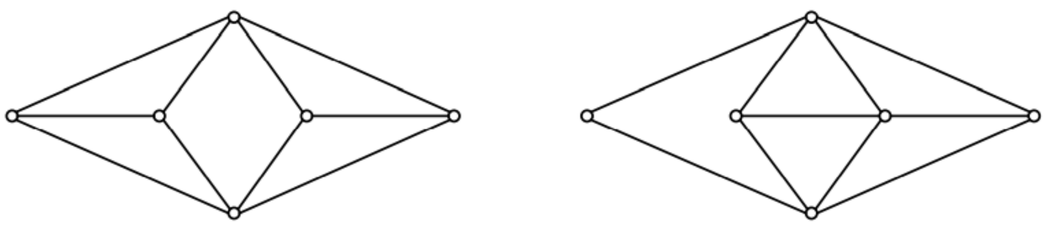
考虑$\mathbb{C} = (E_1, E_2, \cdots, E_\delta)$是二分图$G$的一个最佳$\delta-$边着色，如果存在一个顶点$v_0$和和两种颜色$i$与$j$，使得$i$色不在$v_0$关联的边种出现，但$j$色在$v_0$关联的边中至少出现两次，则边导出子图$G[E_i \bigcup E_j]$种含$v_0$的联通篇是一个奇圈，与二分图$G$不含奇圈矛盾。故所有$\delta$种颜色在每个顶点关联的边中出现。

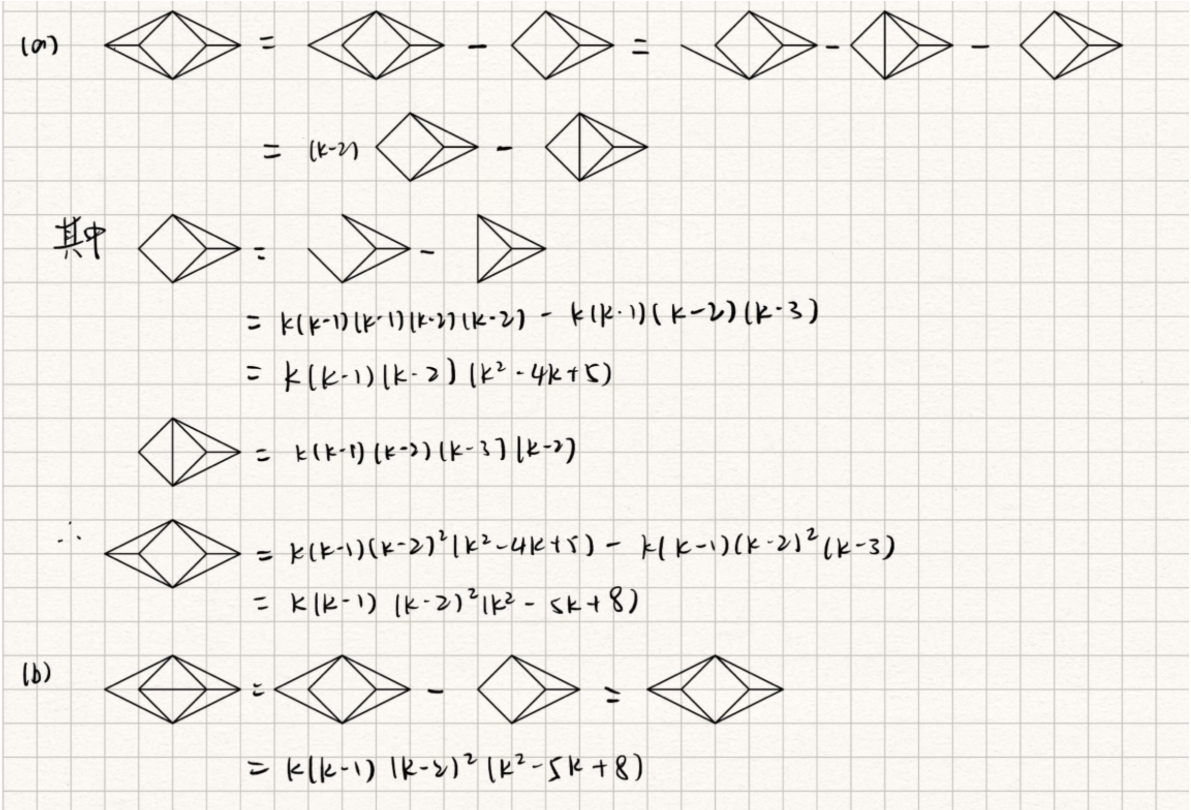
> 7.14 设有4名教师x_1, x_2, x_3, x_4给5个班级$y_1, y_2, \cdots, y_5$上课，某天的教学要求如下：
>
> $$A = \begin{array}{c|ccccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$
>
> (1)这一天需要安排多少课时(2)需要多少教室?

1. 需要$\Delta = 4$个课时。
2. 有$\lceil \frac{13}{4} \rceil = 4$，需要4间教室。

> 7.16 证明：若一个平面图的平面嵌入是Euler图，则它的对偶图是二分图。

若G为Euler图，则G中所有顶点度数为偶数，G的对偶图G^*的每个面关联偶数条边，即G^*中无奇数圈，G^*为二分图。

> 7.19 求图7.25种两个图的颜色多项式。
>
> 
>
> (a) G (b) H
>
> 图 7.25



> 7.20 若G是v个顶点的轮，求颜色多项式$p_k(G)$。

记G_v为v个顶点的圈，有公式$p_k(G) = p_k(G-e) - p_k(G \cdot e)$

在上式中，取$G_v(v \geq 3)$为G，取e为圈上的一条边，则$p_k(G_v \cdot e) = p_k(G_{v-1})$。得到递推式

$$p_k(G_v) + p_k(G_{v-1}) = k(k-1)^{v-1}$$

带入$p_k(G_2) = k(k-1)$可得$p_k(G_v) = (k-1)^v + (-1)^v(k-1)$

故$p_k(G) = k \cdot p_{k-1}(G_{v-1}) = k \cdot ((k-2)^{v-1} + (-1)^{v-1}(k-2))$。

> 8.2 设D是没有有向圈的有向图。
>
> (1)证明：$\delta^- = 0$。
>
> (2)试证：存在D的一个顶点序列$v_1, v_2, \cdots, v_v$，使得对于任给$i(1 \leq i \leq v)$，D的每条以v_i为终点的有向边在$\{v_1, v_2, \cdots, v_{i-1}\}$种都有它的起点。

1. 假设$\delta^- \geq 1$，则任取$v \in V(D)$，都有$deg^-(v) \geq 1$。取一v_0，令$S = \{v_0\}$，则存在v_1使得$(v_1, v_0) \in E(D)$，且$v_1 \notin S$（否则有有向圈）。令$S = S \bigcup \{v_1\}$，再找到v_2使得$(v_2, v_1) \in E$，且$v_2 \notin S$。以此类推，对于$S = \{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$，可以找到$v_{n+1}$，使得$(v_{n+1}, v_n) \in E$，且$v_{n+1} \notin S$，与图$D$顶点数有限矛盾。故有$\delta^- = 0$。
2. （拓扑排序）类似1.的证明，图D中$\delta^+ = 0$，取$v_1 \in V(D)$，使得$deg^+_D(v_1) = 0$。

   记$D_1 = D - \{v_1\}$，则D_1中也没有有向圈，则可选择$v_2 \in D_1$，使得$deg^+_{D_1}(v_2) = 0$。

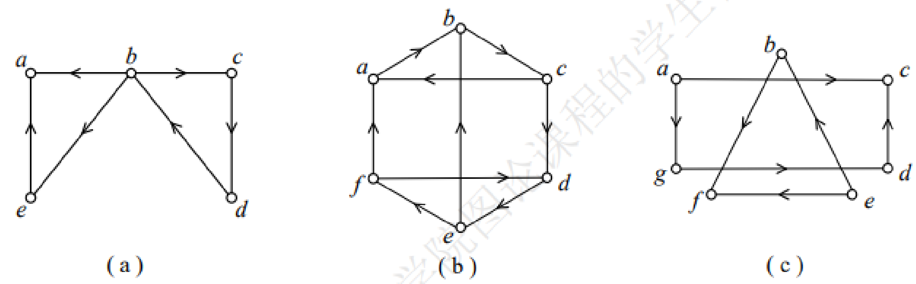
   以此类推可以得到满足要求的序列。

> 8.3 证明：任给无向图G，G都有一个定向图D，使得对于所有的$v \in V$，$|deg^+(v) - \deg^-(v)| \leq 1$成立。

若G中存在奇度顶点$v_1, v_2, \cdots, v_{2k}$（奇度顶点必为偶数）

则$G' = G + \{v_i v_{i+k} | 1 \le i \le k\}$为欧拉图，图中存在一条欧拉回路，沿着回路给每条边定向得到图D'，对于$\forall v \in D'$，都有$deg^+(v) = \deg^-(v)$。

再将$\{v_i v_{i+k} | 1 \le i \le k\}$从$D'$中删去，得到$G$的一个定向图$D$，从$D'$到$D$，每个顶点关联的边之多少1，故在$D$中，对于所有的$v \in V$，$|deg^+(v) - \deg^-(v)| \le 1$成立。

> 8.4 判断图8.15的各有向图是否强连通，如果不是，再判断是否单向连通，是否弱连通。
>
> 
>
>
> 图 8.15

(a) 从a不可达b，不为强连通，为单向连通，为弱连通。

(b)强连通

(c)不为强连通，不为单向连通，不为弱连通图。

> 8.6 证明：连接有向图同一个强连通片中两个顶点的有向通路上的所有顶点也都在这个强连通片中。

设$P(u, v)$是连接有向图同一个强连通片中两个顶点u, v的一条有向通路。因为u, v强连通，故则存在有向通路$P(v, u)$。

对$P(u, v)$上的任意两点u', v'（可能与u, v重合）不妨设$P(u, v) = P(u, u') + P(u', v') + p(v', v)$。则$P(u', v')$是$u'$到$v'$的有向通路，$P(v', v) + P(v, u) + p(u, u')$为从$v'$到$u'$的有向通路。

由u', v'选取的任意性知道结论成立。