

## 数分 (B2) 第10章综合及补充题解

### 1、计算

$$I = \int_L z \, ds,$$

其中  $L$  是曲面  $x^2 + y^2 = z^2$  与  $y^2 = ax$  ( $a > 0$ ) 交线上从点  $(0, 0, 0)$  到  $(a, a, a\sqrt{2})$  的弧段.

**注:** 该题的关键是选取参变量, 接着就是计算.

**解** 取  $y$  为参变量, 因此

$$x(y) = \frac{y^2}{a}, \quad y = y, \quad z = \frac{y}{a} \sqrt{y^2 + a^2}, \quad 0 \leq y \leq a.$$

因此, 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{\left(\frac{2y}{a}\right)^2 + 1 + \left(\frac{2y^2 + a^2}{a\sqrt{y^2 + a^2}}\right)^2} dy = \sqrt{\frac{8y^4 + 9a^2y^2 + 2a^4}{a^2(y^2 + a^2)}} dy$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \int_L z \, ds = \int_0^a \frac{y}{a} \sqrt{y^2 + a^2} \sqrt{\frac{8y^4 + 9a^2y^2 + 2a^4}{a^2(y^2 + a^2)}} dy \\ &= \frac{\sqrt{8}}{a^2} \int_0^a y \sqrt{y^4 + \frac{9}{8}a^2y^2 + \frac{1}{4}a^4} dy. \end{aligned}$$

为了计算上述积分, 作变换

$$\begin{aligned} u &= y^2 + \frac{9a^2}{16}, \quad b^2 = \frac{17a^4}{16^2} \\ \Rightarrow I &= \frac{\sqrt{2}}{a^2} \int_0^{\frac{25a^2}{16}} \sqrt{u^2 - b^2} \, du \end{aligned}$$

我们知道 (第一册) 函数  $\sqrt{u^2 - b^2}$  的原函数可以按如下计算. 令

$$u = b \cosh t, \quad \sqrt{u^2 - b^2} = b \sinh t, \quad du = b \sinh t \, dt,$$

所以

$$\int \sqrt{u^2 - b^2} \, du = b^2 \int \sinh^2 t \, dt = b^2 \int \frac{1}{2} (\cosh 2t - 1) \, dt = \frac{1}{4} \sinh 2t - \frac{1}{2} t.$$

将

$$t = \cosh^{-1} \frac{u}{b}$$

代入, 就得到 $\sqrt{u^2 - b^2}$ 的原函数, 再将上下限代入即得到积分的值.

2、设  $a, b, c > 0$ , 求曲线

$$L: \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c \left(\frac{x}{a}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^n$$

所围成的区域  $D$  的面积.

**注:** 该题中若  $n = 1$ , 则曲线就是著名的Descartes 叶形线, 因此求曲线围成的面积的方法, 就是Descartes 叶形线围成面积方法的推广.

**解** 由 Green 公式的推论知

$$\mu(D) = \frac{1}{2} \oint (-y dx + x dy)$$

为了计算积分, 令  $y = \frac{b}{a}xt$ , 得

$$\begin{aligned} x = x(t) &= ac \frac{t^n}{1 + t^{2n+1}}, \quad y = y(t) = bc \frac{t^{n+1}}{1 + t^{2n+1}}, \quad 0 \leq t < +\infty. \\ \Rightarrow x'(t) &= ac \frac{nt^{n-1} - (n+1)t^{3n}}{(1 + t^{2n+1})^2}, \quad y'(t) = bc \frac{(n+1)t^n - nt^{3n+1}}{(1 + t^{2n+1})^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(D) &= \frac{1}{2} \oint (-y dx + x dy) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (-y(t)x'(t) + x(t)y'(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{abc^2 t^{2n}}{(1 + t^{2n+1})^2} dt = \frac{abc^2}{2(2n+1)}. \end{aligned}$$

3、求平面上两个椭圆

$$C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad C_2: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (a > b)$$

内部公共区域的面积.

**解** 由对称性, 只要计算在第一象限的公共区域  $D$  的面积即可.

为此, 先求两个椭圆在第一象限的交点坐标  $P(x_0, y_0)$ : 两个方程相减, 得  $x_0 = y_0$ . 因此

$$x_0^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = 1$$

解得

$$x_0 = y_0 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

因此, 在第一象限的公共区域  $D$  是由椭圆  $C_1$  上从  $P(x_0, y_0)$  到  $y$  轴上点  $A(0, b)$  的弧段  $L_{PA}$  和  $C_2$  上从  $x$  轴上点  $B(b, 0)$  到  $P(x_0, y_0)$  的弧段  $L_{BP}$  以及  $x$  轴上线段  $\overline{OB}$  和  $y$  轴上线段  $\overline{AO}$  围成的. 方向逆时针.

对于  $L_{PA}$ , 取  $x = a \cos \theta$ ,  $y = b \sin \theta$ . 在交点  $P(x_0, y_0)$  处, 有  $x_0 = y_0$ , 对应的  $\theta_0$  满足

$$a \cos \theta_0 = b \sin \theta_0, \implies \tan \theta_0 = \frac{a}{b}, \quad \theta_0 = \tan^{-1} \left( \frac{a}{b} \right).$$

在  $A(0, b)$ , 对应的  $\theta_1$  满足

$$a \cos \theta_1 = 0, \implies \theta_1 = \frac{\pi}{2}.$$

因此  $L_{PA}$  的参数方程表示为

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta, \quad \tan^{-1} \left( \frac{a}{b} \right) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

而且参数增加的方向正是曲线的方向.

同理, 对于  $L_{BP}$ , 取  $x = b \cos \theta$ ,  $y = a \sin \theta$ . 在交点  $P(x_0, y_0)$  处, 有  $x_0 = y_0$ , 对应的  $\theta_2$  满足

$$b \cos \theta_2 = a \sin \theta_2, \implies \tan \theta_2 = \frac{b}{a}, \quad \theta_2 = \tan^{-1} \left( \frac{b}{a} \right).$$

在  $B(b, 0)$ , 对应的  $\theta_3$  满足

$$a \sin \theta_3 = 0, \implies \theta_3 = 0.$$

因此  $L_{BP}$  的参数方程表示为

$$x = b \cos \theta, \quad y = a \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \tan^{-1} \left( \frac{b}{a} \right).$$

参数增加的方向正是曲线的方向. 所以面积为

$$\mu(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} (-y dx + x dy).$$

分段积分, 并注意到在直线  $\overline{OB}$  上,  $y = 0$ ,  $dx = 0$ ; 在  $\overline{AO}$  上  $x = 0$ ,  $dy = 0$ . 所以

$$\begin{aligned} \mu(D) &= \frac{1}{2} \oint_{L_{PA}} (-y dx + x dy) + \frac{1}{2} \oint_{L_{BP}} (-y dx + x dy) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\tan^{-1} \left( \frac{a}{b} \right)}^{\frac{\pi}{2}} ab(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\tan^{-1} \left( \frac{b}{a} \right)} ab(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} ab \tan^{-1} \left( \frac{b}{a} \right) + \frac{1}{2} ab \left( \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left( \frac{a}{b} \right) \right) = \tan^{-1} \left( \frac{b}{a} \right) \end{aligned}$$

总面积为  $4 \tan^{-1} \left( \frac{b}{a} \right)$ .

4、(Poisson公式) 设  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $f(t)$  连续, 求证

$$\iint_S f(ax + by + cz) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(kt) dt, \quad k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

**证明** 令  $\vec{n} = \frac{1}{k}(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})$ , 那么球面  $S$  是单位圆以  $\vec{n}$  为旋转轴的旋转曲面, 设  $P(x, y, z)$  为球面上一点, 则  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$  在  $\vec{n}$  的投影为  $t = \vec{n} \cdot \vec{r}$ , 绕  $\vec{n}$  的旋转半径为

$$\rho = \sqrt{1 - t^2}, \quad d\rho = \frac{-t dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

$$\implies f(ax + by + cz) = f(kt)$$

只与  $t = \sqrt{1 - \rho^2}$  有关, 类似旋转曲面的面积元的计算, 面积元为

$$dS = \pi(\rho + (d\rho)) ds = 2\pi\rho \frac{d\rho}{dt} dt = 2\pi dt$$

$$\implies \iint_S f(ax + by + cz) dS = \iint_S f(kt) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(kt) dt.$$

5、设  $S(t)$  是平面  $\Pi: x + y + z = t$  被球面  $B: x^2 + y^2 + z^2 = 1$  截下的部分,

$$F(x, y, z) = 1 - (x^2 + y^2 + z^2),$$

求证: 当  $|t| \leq \sqrt{3}$  时, 有

$$\iint_{S(t)} F(x, y, z) dS = \frac{\pi}{18}(3 - t^2)^2.$$

**证明** 证明的过程实际上是一个计算的过程.

首先注意到平面  $\Pi$  的一个单位法向量是  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ , 不难计算原点到  $\Pi$  的距离为  $\frac{|t|}{\sqrt{3}}$ , 所以当  $|t| > \sqrt{3}$  时,  $\Pi$  和球面  $B$  没有交.

其次注意到当  $|t| \leq \sqrt{3}$  时,  $S(t)$  是一个圆盘, 圆盘的圆心为  $\left(\frac{t}{3}, \frac{t}{3}, \frac{t}{3}\right)$ , 半径为

$$r_0 = \sqrt{1 - \frac{t^2}{3}}$$

设  $S(t)$  上任意一点  $(x, y, z)$  到  $S(t)$  的圆心的距离为  $r$ :

$$\left(x - \frac{t}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{t}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{t}{3}\right)^2 = r^2,$$

$$\implies x^2 + y^2 + z^2 = \frac{t^2}{3} + r^2$$

$S(t)$  上面积元在极坐标下为

$$dS = r \, dr \, d\theta, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

因此

$$\begin{aligned} \iint_{S(t)} F(x, y, z) \, dS &= \iint_{S(t)} \left(1 - \left(\frac{t^2}{3} + r^2\right)\right) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{1 - \frac{t^2}{3}}} \left(1 - \left(\frac{t^2}{3} + r^2\right)\right) r \, dr \\ &= \frac{\pi}{18} (3 - t^2)^2. \end{aligned}$$

6. 设  $f(t)$  在  $|t| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  上连续, 证明:

$$\iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1} f\left(\frac{ax + by + cz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \, dx \, dy \, dz = \frac{2}{3}\pi \int_{-1}^1 f(t\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) \, dt.$$

**证明** 令

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

其中  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . 则

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) dx dy dz \\
 &= \int_0^1 dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi f(a \sin \theta \cos \varphi + b \sin \theta \sin \varphi + c \cos \theta) r^2 \sin \theta \\
 &= \int_0^1 r^2 dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi f(a \sin \theta \cos \varphi + b \sin \theta \sin \varphi + c \cos \theta) \sin \theta \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi f(a \sin \theta \cos \varphi + b \sin \theta \sin \varphi + c \cos \theta) \sin \theta \\
 &= \iint_{x^2+y^2+z^2=1} f(ax+by+cz) dS \\
 &= \frac{2}{3} \pi \int_{-1}^1 f(t\sqrt{a^2+b^2+c^2}) dt.
 \end{aligned}$$

上式中最后一步利用了第4题中的Poisson公式.

**点评:** 本题中利用被积函数的特殊性, 通过球坐标, 以及被积函数

$$f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = f(a \sin \theta \cos \varphi + b \sin \theta \sin \varphi + c \cos \theta),$$

不依赖于  $r$  的特殊性, 通过累次积分, 把三重积分化成了曲面积分.

**习题11.3中第7题:** 设  $D$  是平面上简单闭曲线  $L$  围成的区域,  $L = \partial D$ .

(1) 如果  $f(x, y)$  在  $\bar{D}$  上有二阶连续偏导数, 证明

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds = \iint_D \Delta f dx dy.$$

这里  $\vec{n}$  是曲线  $\partial D$  的单位外法向量,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  为二维Laplace 算子, 因此当  $f(x, y)$  满足 Laplace 方程  $\Delta f = 0$  时, 有

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds = 0.$$

(2) 如果  $\vec{a}$  是单位常向量, 证明:

$$\oint_{\partial D} \cos(\vec{a}, \vec{n}) ds = 0.$$

(3) 如果  $u(x, y), v(x, y)$  有连续的二阶偏导数, 证明下列第二Green公式:

$$\oint_{\partial D} \left( v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right) ds = \iint_D (v \Delta u - u \Delta v) dx dy.$$

**证明** (1) 设平面曲线  $\partial D$  的外法向量为  $\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$ , 那么  $\partial D$  指向逆时针方向的切向量  $\vec{\tau}$  可以通过  $\vec{n}$  在  $Oxy$  平面上逆时针旋转一个直角得到 (坐标旋转). 但对于旋转直角的过程也可以按照如下方式表示: 设  $\vec{k}$  是垂直  $Oxy$  平面, 并与  $\vec{i}, \vec{j}$  形成右手系的单位向量. 这样  $\vec{\tau}$  可表示为

$$\vec{\tau} = \vec{k} \times \vec{n}, \text{ 或 } \vec{n} = \vec{\tau} \times \vec{k}.$$

且  $\vec{\tau}$  的方向指向曲线  $\partial D$  的逆时针方向. 因此

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds &= \oint_{\partial D} \nabla f \cdot \vec{n} ds = \oint_{\partial D} \nabla f \cdot \vec{\tau} \times \vec{k} ds \\ &= \oint_{\partial D} \vec{k} \times \nabla f \cdot \vec{\tau} ds = \oint_{\partial D} \vec{k} \times \nabla f \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

这里  $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$ , 因此

$$\vec{k} \times \nabla f = -\frac{\partial f}{\partial y} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x} \vec{j}$$

所以, 利用Green 定理就有

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds = \oint_{\partial D} -\frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dy = \iint_D \Delta f dx dy.$$

**点评:** 本题充分利用了平面曲线的法向量和切向量之间互为旋转一个直角的关系. 注意到旋转的方向, 可采取在三维空间叉乘的做法, 由  $\vec{n}$  得到  $\vec{\tau} = \vec{k} \times \vec{n}$ . 这样, 可以把下列左边的积分

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds = \oint_{\partial D} \vec{k} \times \nabla f \cdot d\vec{r}$$

化为右边关于向量场  $\vec{k} \times \nabla f$  标准的曲线积分.

(2) 设  $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}$  为平面单位常向量. 令  $f(x, y) = a_1 x + a_2 y$ , 则

$$\nabla f = \vec{a}, \quad \Delta f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \nabla f \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n} = \cos(\vec{a}, \vec{n}),$$

由(1) 的结果就得到

$$\oint_{\partial D} \cos(\vec{a}, \vec{n}) ds = 0.$$

(3) 类似 (1) 中的推导, 并利用Green 定理, 有

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds &= \oint_{\partial D} v \vec{k} \times \nabla u \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial D} -v \frac{\partial u}{\partial y} dx + v \frac{\partial u}{\partial x} dy \\ &= \iint_D \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D \left[ v \Delta u + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy\end{aligned}$$

同理有

$$\oint_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} ds = \iint_D \left[ u \Delta v + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy$$

两式相减得

$$\oint_{\partial D} \left( v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right) ds = \iint_D (v \Delta u - u \Delta v) dx dy.$$

7. 设  $D$  是平面上光滑曲线  $L$  围成的区域,  $f(x, y)$  在  $\bar{D}$  上有二阶连续偏导数且满足Laplace方程

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

求证: 当  $f(x, y)$  在  $L$  上恒为零时, 它在  $D$  上也恒为零.

**点评:** 本题的含义是下列微分方程的边值问题:

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & (x, y) \in D \\ f|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

只有零解.

**证明** 类似习题11.3 第7题 (3) 中的计算, 有

$$\oint_{\partial D} f \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} ds = \iint_D \left[ f \Delta f + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

因为  $f|_{\partial D} = 0$ , 所以上式左边曲线积分为零. 再由  $\Delta f = 0$ , 得

$$\iint_D \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0$$



因为  $f$  有连续的二阶偏导数, 所以

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

即  $f$  是  $D$  上常值函数, 并且在边界上取值为零, 因此  $f(x, y) = 0$  在  $D$  上成立.

8. 设  $f(x, y)$  在  $\overline{B}(P_0, R)$  上有二阶连续偏导数, 且满足 Laplace 方程  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ , 那么有

$$f(P_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(P_0)} f(x, y) \, ds,$$

其中  $P_0 = (x_0, y_0)$ ,  $B_r(P_0) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2, 0 \leq r \leq R$ .

**证明** 令

$$g(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(P_0)} f(x, y) \, ds, \quad \text{则 } g(0) = f(x_0, y_0).$$

取  $\partial B_r(P_0)$  的参数方程为

$$x = x_0 + r \cos \varphi, \quad y = y_0 + r \sin \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

所以

$$\begin{aligned} g(r) - g(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) - f(x_0, y_0)] \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^r \left( \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + t \cos \varphi, y_0 + t \sin \varphi) + \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + t \cos \varphi, y_0 + t \sin \varphi) \right) dt \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^r dt \int_0^{2\pi} \left( \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\varphi \end{aligned}$$

这是一个对  $r$  的变上限积分, 因此

$$\begin{aligned} g'(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\varphi = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(P_0)} -\frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dy \\ &= \frac{1}{2\pi r} \iint_{B_r(P_0)} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx \, dy = 0, \end{aligned}$$

(注: 也可以在  $g(r)$  表达式中直接对  $r$  求导, 得到  $g'(r)$ .)

$g'(r) = 0$  说明  $g(r)$  为常数. 所以

$$g(r) = g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_0, y_0) \, d\varphi = f(P_0).$$

9. 设  $D$  是平面上光滑曲线  $L$  围成的区域,  $f(x, y)$  在  $\overline{D}$  上有二阶连续偏导数且满足 Laplace 方程

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

求证: 若  $f(x, y)$  不是常数, 则它在  $\overline{D}$  上的最大值和最小值只能在  $D$  的边界  $L = \partial D$  上取到.

**证明** 假设  $f(x, y)$  在  $D$  的内部一点  $P_0(x_0, y_0)$  取到最大值. 因为  $P_0$  是内点, 所以存在  $r > 0$ , 使得  $B_r(P_0) \subset D$ . 在  $B_r(P_0)$  上, 由第8题结果, 有

$$\begin{aligned} f(P_0) &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(P_0)} f(x, y) \, ds, \\ \implies \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(P_0)} [f(x_0, y_0) - f(x, y)] \, ds &= 0, \\ \implies \int_0^{2\pi} [f(x_0, y_0) - f(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi)] \, d\varphi &= 0, \end{aligned}$$

这里取  $\partial B_r(P_0)$  的参数方程为

$$x = x_0 + r \cos \varphi, \quad y = y_0 + r \sin \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

由于  $f(x_0, y_0)$  是最大值, 上述积分中被积函数为非负连续, 因此积分为零推出被积函数恒为零, 即

$$f(x_0, y_0) - f(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

或

$$[f(x_0, y_0) - f(x, y)] \Big|_{\partial B_r(P_0)} = 0.$$

根据第7题结果, 推出

$$f(x, y) = f(x_0, y_0), \quad (x, y) \in B_r(P_0).$$

其次在  $D$  的内部任意一点  $P(x, y) \in D^\circ$ , 用折线连接  $P_0$  和  $P$  点, 并可用有限个圆域  $B_{r_0}(P_0), B_{r_1}(P_1), \dots, B_{r_n}(P_n)$  覆盖该折线, 逐步递推得  $f(x_0, y_0) = f(x, y)$ , 也就是  $f(x, y)$  在  $D$  的内部恒为常数  $f(x_0, y_0)$ , 再利用函数的连续性得  $f$  在  $\overline{D}$  上恒为常数:

$$f(x, y) \Big|_{\overline{D}} = f(x_0, y_0).$$

这与  $f$  不是常值函数的条件矛盾. 因此  $f$  在  $D$  的内部不可能取到最大值. 同理可证也不可能取到最小值.

10. 设  $f(x, y, z)$  在  $\overline{B}_R(P_0)$  上有二阶连续偏导数, 且满足 Laplace 方程  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ , 求证: 对  $0 \leq r \leq R$ , 有

$$f(P_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B_r(P_0)} f(x, y, z) \, dS,$$

其中  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $B_r(P_0) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq r^2$ ,  $0 \leq r \leq R$ .

**证明** 类似第8题的证明, 取球面  $\partial B_r(P_0)$  的参数方程表示

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

并记

$$\begin{aligned} g(r) &= \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B_r(P_0)} f(x, y, z) \, dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(x_0 + r \sin \theta \cos \varphi, y_0 + r \sin \theta \sin \varphi, z_0 + r \cos \theta) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \end{aligned}$$

对  $r$  求导得

$$\begin{aligned} g'(r) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \theta \right) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B_r(P_0)} \frac{\partial f}{\partial x} \, dy \, dz + \frac{\partial f}{\partial y} \, dz \, dx + \frac{\partial f}{\partial z} \, dx \, dy \\ &= \iiint_{B_r(P_0)} \Delta f \, dx \, dy \, dz = 0 \end{aligned}$$

所以  $g(r)$  是常值函数:

$$g(r) = g(0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(x_0, y_0, z_0) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = f(P_0).$$

**补充题1** (第九届全国大学生数学竞赛决赛) 设函数  $f(x, y)$  在区域  $D = \{x^2 + y^2 \leq a^2\}$  ( $a > 0$ ) 上具有一阶连续偏导数, 且满足

$$f(x, y)|_{x^2+y^2=a^2} = a^2, \quad \text{以及} \quad \max_{(x,y) \in D} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] = a^2.$$

证明:

$$\left| \iint_D f(x, y) \, dx \, dy \right| \leq \frac{4}{3} \pi a^4.$$

**证明** 设  $P(x, y) = -yf(x, y)$ ,  $Q(x, y) = xf(x, y)$ . 则  $P, Q$  在  $D$  上有一阶连续偏导数. 考虑平面向量场  $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j}$  在曲线  $L = \partial D$  上的曲线积分.

一方面, 由于  $f$  在  $L$  上为常数  $a^2$ , 因此,

$$\oint_L P dx + Q dy = a^2 \oint_L -y dx + x dy = a^2 \iint_D 2 dx dy = 2\pi a^4.$$

另一方面, 直接用 Green 公式, 得

$$\begin{aligned} \oint_L P dx + Q dy &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_D \left( 2f(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \pi a^4 - \frac{1}{2} \iint_D \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \pi a^4 - \frac{1}{2} \iint_D \nabla f \cdot \vec{r} dx dy \end{aligned}$$

这里  $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$ ,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .

利用 Cauchy 不等式和条件

$$\max_{(x,y) \in D} |\nabla f|^2 = \max_{(x,y) \in D} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] = a^2$$

得

$$\begin{aligned} \iint_D \nabla f \cdot \vec{r} dx dy &\leq \iint_D |\vec{r}| |\nabla f| dx dy \\ &\leq a \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= a \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 d\varphi dr = \frac{2}{3} \pi a^4. \\ \Rightarrow \left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| &\leq \pi a^4 + \frac{1}{3} \pi a^4 = \frac{4}{3} \pi a^4. \end{aligned}$$

补充题2 计算

$$I = \iint_{x^2+y^2+z^2=1} e^{x-y} dS$$

**解** 分析: 如果直接用球坐标变换

$$x = \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \cos \theta, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

那么

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta e^{\sin \theta (\cos \varphi - \sin \varphi)} d\theta d\varphi$$

积分区域简化为  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ , 但是被积函数比较复杂.

所以要冷静分析. 作旋转变换

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + u), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(v - u), \quad z = w,$$

则单位球还是单位球, 积分变换为

$$I = \iint_{u^2+v^2+w^2=1} e^{\sqrt{2}u} dS$$

这里  $dS$  仍然是球面面积元. 球面是  $Ouv$  平面上上半圆  $v = \sqrt{1-u^2}$ ,  $-1 \leq u \leq 1$  绕  $u$  轴的旋转曲面, 因此根据旋转曲面求侧面面积元公式

$$dS = 2\pi v ds = 2\pi v \sqrt{1+v'^2} du = 2\pi du, \quad -1 \leq u \leq 1$$

所以积分为

$$I = \iint_{u^2+v^2+w^2=1} e^{\sqrt{2}u} dS = 2\pi \int_{-1}^1 e^{\sqrt{2}u} du = \sqrt{2}\pi(e^{\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{2}}).$$

**补充题3** 设  $L$  是圆周  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$  方向为逆时针方向.  $f(x)$  是一个正值可微函数, 且满足

$$\int_L -\frac{y}{f(x)} dx + xf(y) dy = 2\pi.$$

求  $f(x)$ .

**解** 设  $L$  所围的圆为  $D$ . 根据 Green 公式, 有

$$\int_L -\frac{y}{f(x)} dx + xf(y) dy = \iint_D \left( f(y) + \frac{1}{f(x)} \right) dx dy = 2\pi.$$

因为  $D$  关于  $x, y$  是对称的, 所以

$$\iint_D \left( f(y) + \frac{1}{f(x)} \right) dx dy = \iint_D \left( f(x) + \frac{1}{f(y)} \right) dx dy.$$

因此

$$\int_L -\frac{y}{f(x)} dx + x f(y) dy = \frac{1}{2} \iint_D \left( f(x) + f(y) + \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)} \right) dx dy.$$

因而

$$\begin{aligned} & \iint_D \left( \left( \sqrt{f(x)} - \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \right)^2 + \left( \sqrt{f(y)} - \frac{1}{\sqrt{f(y)}} \right)^2 \right) dx dy \\ &= \iint_D \left( f(x) + f(y) + \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{f(y)} - 4 \right) dx dy \\ &= 2 \int_L -\frac{y}{f(x)} dx + x f(y) dy - 4 \iint_D dx dy = 0 \end{aligned}$$

这说明  $\sqrt{f(x)} - \frac{1}{\sqrt{f(x)}} = 0$ , 即  $f(x) = 1$ .

**补充题4** 设  $a, b, c$  不全为零.  $L$  是球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  与平面  $ax + by + cz = 0$  的交线. 方向与向量  $\vec{n}_0 = (a, b, c)$  形成右手系. 计算

$$\oint_L (bz + c) dx + (cx + a) dy + (ay + b) dz$$

**解** 因平面过原点, 所以与球面交线  $L$  是大圆, 记平面被球面所截的大圆盘为  $D$ ,  $L$  是其边界.  $D$  的单位法向量为  $\vec{n} = \frac{\vec{n}_0}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$  根据 Stokes 公式, 有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_D \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ bz + c & cx + a & ay + b \end{vmatrix} \cdot \vec{n} dS \\ &= \iint_D \vec{n}_0 \cdot \vec{n} dS = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \pi R^2. \end{aligned}$$

**补充题5** 求

$$\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_S (by^2 + cz^2) dy dz + (cz^2 + ax^2) dz dx + (ax^2 + by^2) dx dy$$

其中  $\vec{v} = (by^2 + cz^2)\vec{i} + (cz^2 + ax^2)\vec{j} + (ax^2 + by^2)\vec{k}$ ,  $a, b, c > 0$ ,  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$  上半球面, 方向指向上侧.

**解** 在上半球面  $S$  上加一个底部的圆盘  $D^-: x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ , 方向朝下, 使得  $S + D^-$  形成一个封闭的分段光滑闭曲面, 方向指向外侧.

根据 Gauss 公式

$$\iint_{S+D^-} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_{S+D^-} (by^2 + cz^2) dy dz + (cz^2 + ax^2) dz dx + (ax^2 + by^2) dx dy = 0$$

用  $D^+: x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$  表示方向指向上侧的圆  $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ . 显然有向面积元  $d\vec{S}$  分别在  $Oyz$  和  $Ozx$  平面上的有向投影  $dy dz = 0, dz dx = 0$ , 再利用对称性

$$\iint_{D^+} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (ax^2 + by^2) dx dy = \iint_{y^2+x^2 \leq 1} (ay^2 + bx^2) dy dx$$

推得

$$\begin{aligned} \iint_{D^+} \vec{v} \cdot d\vec{S} &= \frac{a+b}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \frac{a+b}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 r dr = \frac{(a+b)\pi}{4}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S+D^-} \vec{v} \cdot d\vec{S} - \iint_{D^-} \vec{v} \cdot d\vec{S} \\ &= - \iint_{D^-} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_{D^+} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \frac{(a+b)\pi}{4}. \end{aligned}$$

**补充题6** 设  $C: \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$  是长度为  $l$  的简单闭曲线,  $F(x, y)$  有二阶连续偏导数, 且  $\nabla F \neq 0$ .  $D = \{(x, y) \mid F(x, y) > 0\}$  为  $C$  围成的区域, 计算

$$\iint_D \nabla \cdot \left( \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right) dx dy.$$

**解** 首先, 等值线  $C$  的法向量是  $\nabla F(x, y)$ . 根据  $D$  的定义, 对任意的  $(x, y) \in C$  和任意方向  $\vec{e}$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(x + t \cos \alpha, y + t \cos \beta) - F(x, y)}{t} = \nabla F(x, y) \cdot \vec{e}$$

若  $\vec{e}$  指向  $D$  的内部, 则  $(x + t \cos \alpha, y + t \cos \beta) \in D, (t > 0)$ , 所以

$$F(x + t \cos \alpha, y + t \cos \beta) > 0, \quad F(x, y) = 0,$$

由此推出

$$\nabla F(x, y) \cdot \vec{e} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(x + t \cos \alpha, y + t \cos \beta) - F(x, y)}{t} \geq 0,$$

法向量  $\nabla F(x, y)$  与  $\vec{e}$  夹锐角, 也就是说  $\nabla F(x, y)$  指向  $D$  的内部, 因此是等值线  $C$  的**内法向量**.

$$\frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{1}{|\nabla F|} (F'_x \vec{i} + F'_y \vec{j})$$

是  $C$  的单位内法向量. 在平面上将其顺时针旋转  $\frac{\pi}{2}$  得  $C$  的**单位切向量**. 该切向量可以通过垂直  $Oxy$  平面并与  $Oxy$  上两个坐标向量  $\vec{i}, \vec{j}$  形成右手系的单位向量  $\vec{k}$ , 通过叉乘给出:

$$\vec{\tau} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \times \vec{k} = \frac{1}{|\nabla F|} (F'_y \vec{i} - F'_x \vec{j}),$$

方向指向逆时针方向. 因此对  $\vec{\tau}$  在  $C$  上作曲线积分, 一方面

$$\oint_C \vec{\tau} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{\tau} \cdot \vec{\tau} ds = \oint_C ds = l,$$

另一方面, 利用Green 公式得

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{\tau} \cdot d\vec{r} &= \iint_D \left( -\frac{\partial F'_x / |\nabla F|}{\partial x} - \frac{\partial F'_y / |\nabla F|}{\partial y} \right) dx dy \\ &= - \iint_D \nabla \cdot \left( \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right) dx dy \end{aligned}$$

所以

$$\iint_D \nabla \cdot \left( \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right) dx dy = -l$$

**补充题6** 已知  $\alpha(0) = 0, \alpha'(0) = 2, \beta(0) = 2$ , 求

(1)  $\alpha(x), \beta(x)$  使得积分  $\int P dx + Q dy$  与路径无关. 其中

$$P(x, y) = (2x\alpha'(x) + \beta(x))y^2 - 2y\beta(x) \tan 2x,$$

$$Q(x, y) = (\alpha'(x) + 4x\alpha(x))y + \beta(x).$$

(2) 求  $\int_{(0,0)}^{(0,2)} P dx + Q dy$ .



解 因为积分与路径无关等价于  $Q'_x - P'_y = 0$ . 因此有

$$(\alpha''(x) + 4x\alpha'(x) + 4\alpha(x))y + \beta'(x) = 2(2x\alpha'(x) + \beta(x))y - 2\beta(x)\tan 2x.$$

比较  $y$  的系数得两个微分方程的边值问题

$$\begin{aligned}\beta'(x) &= -2\beta(x)\tan 2x, \quad \beta(0) = 2 \\ \alpha''(x) + 4\alpha(x) &= 2\beta(x), \quad \alpha(0) = 0, \quad \alpha'(0) = 2.\end{aligned}$$

从第一个方程解出

$$\beta(x) = 2\cos 2x.$$

代入第二个方程

$$\alpha''(x) + 4\alpha(x) = 4\cos 2x, \quad \alpha(0) = 0, \quad \alpha'(0) = 2.$$

该方程是受迫振动方程, 对应的齐次方程  $\alpha''(x) + 4\alpha(x) = 0$  的通解为

$$C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

利用常数变易法, 令原方程的解为

$$\alpha(x) = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x$$

其中  $C_1(x), C_2(x)$  待定. 求导得

$$\alpha'(x) = C'_1(x) \cos 2x + C'_2(x) \sin 2x - 2C_1(x) \sin 2x + 2C_2(x) \cos 2x.$$

根据常数变易法, 不妨设

$$C'_1(x) \cos 2x + C'_2(x) \sin 2x = 0$$

对  $\alpha'(x) = -2C_1(x) \sin 2x + 2C_2(x) \cos 2x$  继续求导并代入方程  $\alpha''(x) + 4\alpha(x) = 4\cos 2x$  得

$$\begin{aligned}\alpha''(x) + 4\alpha(x) &= -2C'_1(x) \sin 2x + 2C'_2(x) \cos 2x - (4C_1(x) \cos 2x + 4C_2(x) \sin 2x) \\ &\quad + 4(C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x) \\ &= 4\cos 2x\end{aligned}$$

$$\implies C'_1(x) \sin 2x - C'_2(x) \cos 2x = -2\cos 2x$$

从联立方程

$$\begin{aligned}C_1'(x) \cos 2x + C_2'(x) \sin 2x &= 0 \\C_1'(x) \sin 2x - C_2'(x) \cos 2x &= -2 \cos 2x\end{aligned}$$

分别解出  $C_1'$  和  $C_2'$ :

$$C_1'(x) = -\sin 4x, \quad C_2'(x) = 1 + \cos 4x.$$

由  $\alpha(x)$  满足的边界条件推出  $C_1(0) = 0$ ,  $C_2(0) = 1$ . 解得

$$\begin{aligned}C_1(x) &= \frac{1}{4}(\cos 4x - 1) = -\frac{1}{2} \sin^2 2x, \\C_2(x) &= x + 1 + \frac{1}{4} \sin 4x = x + 1 + \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x.\end{aligned}$$

最后解得

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= -\frac{1}{2} \sin^2 2x \cos 2x + (x + 1 + \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x) \sin 2x \\&= (x + 1) \sin 2x, \\\beta(x) &= 2 \cos 2x.\end{aligned}$$

解 (2): 因为在从  $(0, 0)$  到  $(0, 2)$  的直线段上:  $Q(0, y) = 2y + 2$ , 且  $dx = 0$ , 所以

$$\int_{(0,0)}^{(0,2)} P dx + Q dy = \int_0^2 Q(0, y) dy = \int_0^2 (2y + 2) dy = 8.$$