

## Самостійна робота 2

### РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ. ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ ПРОСТИХ ІТЕРАЦІЙ ТА ГАУСА – ЗЕЙДЕЛЯ

**Мета роботи:** вивчення алгоритмів для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь ітераційними методами простих ітерацій та Гауса – Зейделя

**Що зробити:** з'ясувати факт збіжності чи розбіжності ітераційних процесів простих ітерацій на Зейделя. У випадку збіжності знайти розв'язок СЛАР з точністю 0.001 та перевірити його, підставляючи в СЛАР отримані розв'язки і обраховуючи нев'язки. Визначити порядок збіжності ітераційного процесу.

#### ЗАВДАННЯ

1. Складіть програму для розв'язання СЛАР методом простих ітерацій.
2. Доповніть програму лічильником числа ітерацій та проміжним друком невідомих змінних після кожної ітерації і загальною похибкою наближення  $\delta$ .
3. Іноді ітераційний процес може розбігатися. З метою гарантованого завершення програми навіть у випадку незбіжності до розв'язку, запровадьте в програмі обмеження на максимальну кількість ітерацій. Передбачте виведення відповідного повідомлення про незбіжність ітераційного процесу.
4. Отримайте розв'язок вашого варіанту з точністю 0.001, попередньо оцінивши число необхідних для цього кроків. кроків
5. Для перевірки отриманого результату обчисліть і надрукуйте вектор нев'язок  $\mathbf{r} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$ .
6. Дослідіть, як похибки поточного наближення до розв'язку залежать від номера ітерації. На основі цих даних з'ясуйте порядок збіжності методу простих ітерацій.
7. Модифікуйте вашу програму для реалізації методу Гауса – Зейделя. Розв'яжіть задачу вашого варіанту та порівняйте розв'язок СЛАР і кількість

здійснених ітерацій з отриманими раніше результатами методу простих ітерацій.

8. З'ясуйте порядок збіжності методу Гауса – Зейделя.

### ВАРІАНТИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

$$2.7x_1 + 3.3x_2 + 1.3x_3 = 2.1$$

1)  $3.5x_1 - 1.7x_2 + 2.8x_3 = 1.7$

$$4.1x_1 + 5.8x_2 - 1.7x_3 = 0.8$$

$$1.7x_1 + 2.8x_2 + 1.9x_3 = 0.7$$

2)  $2.1x_1 + 3.4x_2 + 1.8x_3 = 1.1$

$$4.2x_1 - 1.7x_2 + 1.3x_3 = 2.8$$

$$3.1x_1 + 2.8x_2 + 1.9x_3 = 0.2$$

3)  $1.9x_1 + 3.1x_2 + 2.1x_3 = 2.1$

$$7.5x_1 + 3.8x_2 + 4.8x_3 = 5.6$$

$$9.1x_1 + 5.6x_2 + 7.8x_3 = 9.8$$

4)  $3.8x_1 + 5.1x_2 + 2.8x_3 = 6.7$

$$4.1x_1 + 5.7x_2 + 1.2x_3 = 5.8$$

$$3.3x_1 + 2.1x_2 + 2.8x_3 = 0.8$$

5)  $4.1x_1 + 3.7x_2 + 4.8x_3 = 5.7$

$$2.7x_1 + 1.8x_2 + 1.1x_3 = 3.2$$

$$7.6x_1 + 5.8x_2 + 4.7x_3 = 10.1$$

6)  $3.8x_1 + 4.1x_2 + 2.7x_3 = 9.7$

$$2.9x_1 + 2.1x_2 + 3.8x_3 = 7.8$$

$$3.2x_1 - 2.5x_2 + 3.7x_3 = 6.5$$

7)  $0.5x_1 + 0.34x_2 + 1.7x_3 = -0.24$

$$1.6x_1 + 2.3x_2 - 1.5x_3 = 4.3$$

$$5.4x_1 - 2.3x_2 + 3.4x_3 = -3.5$$

8)  $4.2x_1 + 1.7x_2 - 2.3x_3 = 2.7$

$$3.4x_1 + 2.4x_2 + 7.4x_3 = 1.9$$

$$3.6x_1 + 1.8x_2 - 4.7x_3 = 3.8$$

9)  $2.7x_1 - 3.6x_2 + 1.9x_3 = 0.4$

$$1.5x_1 + 4.5x_2 + 3.3x_3 = -1.6$$

$$5.6x_1 + 2.7x_2 - 1.7x_3 = 1.9$$

10)  $3.4x_1 - 3.6x_2 - 6.7x_3 = -2.4$

$$0.8x_1 + 1.3x_2 + 3.7x_3 = 1.2$$

$$2.7x_1 + 0.9x_2 - 1.5x_3 = 3.5$$

11)  $4.5x_1 - 2.8x_2 + 6.7x_3 = 2.6$

$$5.1x_1 + 3.7x_2 - 1.4x_3 = -0.14$$

$$4.5x_1 - 3.5x_2 + 7.4x_3 = 2.5$$

12)  $3.1x_1 - 0.6x_2 - 2.3x_3 = -1.5$

$$0.8x_1 + 7.4x_2 - 0.5x_3 = 6.4$$

$$\begin{aligned} & 3.8x_1 + 6.7x_2 - 1.2x_3 = 5.2 \\ 13) \quad & 6.4x_1 + 1.3x_2 - 2.7x_3 = 3.8 \\ & 2.4x_1 - 4.5x_2 + 3.5x_3 = -0.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 5.4x_1 - 6.2x_2 - 0.5x_3 = 6.5 \\ 14) \quad & 3.4x_1 + 2.3x_2 + 0.8x_3 = -0.8 \\ & 2.4x_1 - 1.1x_2 + 3.8x_3 = 1.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 7.8x_1 + 5.3x_2 + 4.8x_3 = 1.8 \\ 15) \quad & 3.3x_1 + 1.1x_2 + 1.8x_3 = 2.3 \\ & 4.5x_1 + 3.3x_2 + 2.8x_3 = 3.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3.8x_1 + 4.1x_2 - 2.3x_3 = 4.8 \\ 16) \quad & -2.1x_1 + 3.9x_2 - 5.8x_3 = 3.3 \\ & 1.8x_1 + 1.1x_2 - 2.1x_3 = 5.8 \end{aligned}$$

### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Сформулюйте достатні умови та критерій збіжності методів простих ітерацій та Зейделя.

2. Покажіть, що ітераційна формула методу простих ітерацій може бути записана в термінах нев'язок  $k$ -го наближення  $\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{Ax}^{(k)} - \mathbf{b}$  як

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Запропонуйте також аналогічний запис для формули ітерацій Гауса - Зейделя.

3. Підрахуйте кількість множень, що виконуються на одній ітерації методу простих ітерацій та Гауса – Зейделя. Порівняйте з їх кількістю в методі Гауса. За скільки ітерацій повинен збігатися ітераційний метод, щоб його застосування було доцільним в порівнянні з методом Гауса.

4. Які з норм вектора можливо і доцільно використовувати в умовах закінчення ітерацій?