Лабораторна робота 2

РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ. МЕТОД ГАУСА

Мета роботи: вивчення алгоритмів для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) методом Гауса.

Що зробити: скласти процедуру для розв'язання СЛАР методом Гауса, яка б у випадку невиродженої системи знаходила її розв'язок, а для виродженої системи видавала відповідне попередження. Впевнитись в коректності роботи процедури, підставляючи в СЛАР отримані розв'язки і обраховуючи нев'язки. Передбачити оцінку числа обумовленості матриці системи.з'ясувати факт збіжності чи розбіжності ітераційних процесів простих ітерацій на Зейделя. У випадку збіжності знайти розв'язок СЛАР з точністю 0.001 та перевірити його, підставляючи в СЛАР отримані розв'язки і обраховуючи нев'язки. Визначити порядок збіжності ітераційного процесу.

ЗАВДАННЯ

1. Складіть процедуру для розв'язання СЛАР методом Гауса. Передбачте в ній додатковий вихідний параметр – код помилки. Йому буде присвоєно одне певне значення (скажімо, 0), якщо процедура розв'язання пройшла успішно, і інше (скажімо, від'ємне число), якщо розв'язок не знайдено (наприклад, система вироджена).

2. Складіть також окремі процедури:

- для введення коефіцієнтів СЛАР (з клавіатури, файлу або безпосередньо в тексті програми – як вважаєте за доцільне);
- для друку коефіцієнтів СЛАР на екран та/або у файл;
- для друку заданого вектора, що буде застосовуватись для вектора розв'язку СЛАР $\mathbf{x}$ або вектора нев'язок $\mathbf{r} = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$;

Потурбуйтеся, щоб результати, що виводяться, мали вигляд охайної таблиці.

Завжди починайте виконання вашої програми з введення коефіцієнтів СЛАР і безпосередньо після цього, до початку будь – яких обчислень – негайного їх друку.

3. Введіть у процедуру `Gauss` проміжний друк коефіцієнтів СЛАР на кожній *i*-й стадії прямого ходу, після обнулення *i*-го стовпчика. Скористайтесь для цього вищезазначеною процедурою. Її виклик буде останнім оператором в тілі циклу по *i* прямого ходу. Так ви зможете слідкувати за стадіями перетворення матриці СЛАР в трикутну – по завершенню кожної з них повинен обнулюватися наступний стовпчик під головною діагоналлю.

Отримайте розв'язок $\mathbf{x}$ першої задачі. Надрукуйте його. Також для перевірки отриманого результату обчисліть і надрукуйте вектор нев'язок $\mathbf{r} = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$, який у разі точного розв'язку повинен бути нульовим. Зауважте те, що після виконання процедури `Gausse` значення елементів масивів $\mathbf{A}$ та $\mathbf{b}$ змінюються, тож в головній програмі заздалегідь потрібно зробити їх копії в пам'яті комп'ютера.

4. Отримайте розв'язок другої задачі. Прослідкуйте за перетворенням матриці СЛАР в ході розв'язання. Поясніть отримані результати та труднощі, на які ви натрапили.

5. Включіть до процедури перед обнуленням *i*-го стовпчика фрагмент, що переставляє рівняння, і одразу ж за цим – проміжний друк коефіцієнтів СЛАР. Таким чином, на кожній стадії коефіієнти СЛАР будуть виводитись двічі – після перестановки рівнянь і після обнулення відповідного стовпчика. Поясніть отримані результати.

6. Отримайте розв'язок третьої задачі. Прослідкуйте за перетворенням матриці СЛАР в ході розв'язання. Поясніть отримані результати та труднощі, на які ви натрапили.

7. Основною причиною аварійної зупинки в процедурі `Gausse` є спроба ділення на нуль у формулах, коли в якості дільників виступають діагональні (ведучі) елементи. Тому, якщо після перестановки рівнянь виявиться, що діагональний елемент $a_{ii} = 0$ (а це означатиме, що всі елементи *i*-го стовпчика від діагоналі і нижче дорівнюють нулю), необхідно перервати подальші розрахунки, присвоїти коду помилки `ErrorCode` від'ємне значення -*i*, яке означатиме, що матриця СЛАР вироджена, причому це з'ясувалося на перевірці саме *i*-го діагонального елементу, після чого вийти з процедури `Gausse`.

Передбачте в головній програмі після повернення з процедури `Gausse` перевірку параметра `ErrorCode` і в залежності від його значення друкуйте або розв'язок і нев'язки системи, або повідомлення про виродженість.

8. Складіть процедуру `Factorszation` розкладу матриці **A** у добуток нижньої та верхньої трикутних матриць (*LU* – розклад). Надрукуйте отримані матриці. За допомогою цього розкладу знайдіть обернену до **A** матрицю та обчисліть число обумовленості СЛАР за формулою $cond(\mathrm{A}) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

В основній програмі виведіть це значення поруч із розв'язком системи.

9. Розв'яжіть всі три системи та оцініть обумовленість кожної з них.

10. В усіх трьох задачах введіть невелике збурення у правій частині СЛАР. Змініть один або декілька компонент вектора **b** приблизно на 1%. Отримайте розв'язки систем та порівняйте їх з розв'язками незбурених систем. Зробіть висновки, зважаючи на число обумовленості.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Скільки множень/ділень потребує виконання алгоритму Гауса?

2. Покажіть, що алгоритм Гауса без перестановок рядків (схема основного поділу) не приводить до успіху, коли один з головних мінорів вихідної матриці дорівнює нулю.

3. Проаналізуйте, як накопичуються похибки заокруглень в коефіцієнтах СЛАР при її претвореннях методом Гауса. Доведіть, що саме перестановка рівнянь призводить до появи таких Гаусових множників, які мінімізують можливе накопичення похибок заокруглення.

4. Нехай потрібно розв'язати декілька систем виду $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ з однаковими матрицями A і різними правими частинами $\mathbf{b}$. Запропонуйте відповідну модифікацію алгоритму Гауса.

5. Чому визначник трикутної матриці дорівнює добутку діагональних елементів?

6. Яка модифікація методу Гауса використовується, якщо основна матриця системи $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ є стрічковою (зокрема, трьохдіагональною)?

7. Що таке норма вектора?

8. Що таке норма матриці?

9. Що таке число обумовленості матриці?

10. З якими складностями пов'язане обчислення числа обумовленості матриці за формулою?

ВАРІАНТИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варі-ант	Задачі
1	А Г Ж
2	А Г К
3	А Г Л
4	А Д К
5	А Д Л
6	А Е Ж
7	А Е К
8	А Е Л

Варі-ант	Задачі
9	Б Г Ж
10	Б Г К
11	Б Г Л
12	Б Д К
13	Б Д Л
14	Б Е Ж
15	Б Е К
16	Б Е Л

А)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 3 \\ -3x_1 + 3x_3 &= -9 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -7 \\ x_1 + 4x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Б)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 + x_4 &= 20 \\ -4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 &= -34 \\ 4x_1 + 7x_2 + 9x_3 + x_4 &= 48 \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_4 &= 97 \end{aligned}$$

В)

$$\begin{aligned} 13x_1 - 5x_2 - 12x_3 &= 33 \\ -12x_1 + 5x_2 &= -19 \\ 4x_1 - x_2 - 22x_3 &= 29 \end{aligned}$$

Г)

$$\begin{aligned} -7x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 6x_4 &= 144 \\ 7x_1 + 6x_2 + 8x_3 - 13x_4 &= -170 \\ 4x_1 + 17x_2 - 16x_3 + 10x_4 &= 21 \\ -5x_1 + 18x_2 + 19x_3 &= -445 \end{aligned}$$

Д)

$$\begin{aligned} 3x_2 - x_3 &= 7 \\ 9x_1 + 24x_2 + x_3 &= 20 \\ 21x_1 - x_2 - 16x_3 &= 63 \end{aligned}$$

Е)

$$\begin{aligned} -5x_1 + 7x_3 &= 109 \\ 4x_1 - 24x_2 + x_4 &= 168 \\ 3x_1 + 12x_2 - 7x_3 - 23x_4 &= -193 \\ -2x_1 + 42x_2 + 37x_3 - 21x_4 &= -95 \end{aligned}$$

Ж)

$$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 42 \\ -7x_1 - 6x_2 - 6x_3 &= 7 \\ 11x_1 - 2x_2 - 8x_3 &= -91 \end{aligned}$$

К)

$$\begin{aligned} 5x_1 - 7x_3 &= -123 \\ -x_1 + 6x_2 + x_4 &= 60 \\ 2x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 5x_4 &= -108 \\ -6x_1 - 6x_2 + 15x_3 + 7x_4 &= 159 \end{aligned}$$

Л)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 7x_3 - x_4 &= 2 \\ 7x_1 - 10x_2 - 5x_3 + x_4 &= 28 \\ 4x_1 - 15x_3 - 9x_4 &= -21 \\ -8x_1 + 8x_2 + 13x_3 + 4x_4 &= -11 \end{aligned}$$