І. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК. КЛАСИФІКАЦІЯ ПОХИБОК

x - точне значення деякої величини, a - її наближене значення;

$\Delta x = |x - a|$ - ***абсолютна похибка*** числа x;

$\delta x = \dfrac{\Delta x}{|x|}$ - ***відносна похибка*** числа x: .

<u>Практично застосовують</u>

граничну абсолютну похибку Δa ***наближеного числа*** a: $x \in (a - \Delta a;\ a + \Delta a)$

.

граничну відносну похибку наближеного числа a: $\delta a = \dfrac{\Delta a}{|a|}$.

ОБЧИСЛЕННЯ ПОХИБОК

Абсолютна похибка заокруглення Δa *рівна половині одиниці останнього розряду числа.*

<u>Приклад</u>

Для $a = 0.734$ $\Delta a = 0.0005$ і покладаємо $\Delta x \le 0.0005$.

Абсолютна похибка при відкиданні розрядних цифр *у два рази більша за похибку заокруглень**.***

Якщо a, b і c - наближені значення деяких величин, то:

$$\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b, \;\; \delta(a \cdot b) = \delta a + \delta b, \;\; \delta(a/b) = \delta a + \delta b,$$

$$\delta\left(a^k\right) = k\delta a, \quad \delta(a-b) = \frac{\Delta(a-b)}{|a-b|} = \frac{\Delta a + \Delta b}{|a-b|}.$$

Якщо $y = f(x)$, то $\Delta y(a) = \left|f'(a)\right| \cdot \Delta a$, $\delta y = \dfrac{\Delta y(a)}{\left|f(a)\right|}$.

Якщо $u = f(x, y, z)$, то

$$\Delta u(a,b,c) = \left|f_x'(a)\right| \cdot \Delta a + \left|f_y'(b)\right| \cdot \Delta b + \left|f_z'(c)\right| \cdot \Delta c, \quad \delta u = \frac{\Delta u}{\left|f(a,b,c)\right|}.$$

- ✓ Зауваження: *При* $a \approx b$ $\delta(a-b)$ може бути як завгодно великою. Наприклад, відносна похибка заокруглення $\delta(2520-2518) = \dfrac{0.5+0.5}{2} = 0.5\,(50\%)$. *Тому в обчисленнях слід уникати віднімання двох близьких чисел.*

ПРАВИЛА ОБЧИСЛЕНЬ

1) *при додаванні або відніманні двох наближених чисел у результаті слід зберігати стільки десяткових знаків, скільки їх у наближеному числі з найменшою кількістю десяткових знаків*;

2) *при множенні та діленні в результаті потрібно зберігати стільки значущих** *цифр, скільки їх у наближеному числі з найменшою кількістю значущих цифр*;

3) *результати проміжних обчислень повинні мати один – два запасних знаки, які потім повинні бути відкинуті*;

4) при зміні форми запису числа (наприклад, при запису у формі з плаваючою крапкою) кількість значущих цифр не повинна змінюватись, т. б., потрібно зберігати рівносильність перетворень.

* ***Значущими*** цифрами вважаються всі цифри даного числа, починаючи з першої ненульової цифри. Наприклад, у числі 0.037 дві значущі цифри 3 і 7; у числі 1.037 чотири значущі цифри 1, 0, 3 і 7.

КЛАСИФІКАЦІЯ ПОХИБОК

похибка математичної моделі;

похибка вхідних даних - **неусувна** похибка, оскільки не може бути зменшена ні до початку розв'язування задачі, ні під час розв'язування. Для мінімізації впливу похибки вхідних даних потрібно прагнути, щоб усі вхідні дані були приблизно однакової точності;

похибка методу. Регульована похибка, може бути зменшена шляхом зміни деякого параметра (наприклад, кроку інтегрування, кількості доданків частинної суми, тощо). Похибку метода намагаються зробити у декілька разів меншою похибки вхідних даних;

похибка обчислень.

Сума чотирьох описаних похибок ***складає повну похибку розв'язку***.

II. МАТРИЦІ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Матриця $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ - таблиця з m рядків та n стовпчиків;

$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1 \\ j=\overline{1,n}}}$ - вектор-рядок, $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=1}}$ - вектор-стовпчик;

$m = n$ - квадратна матриця.

Квадратні матриці

a_{ij} при $i = j$ - *діагональні* елементи, *головна діагональ*;

$$A = \left(a_{ij} : \begin{cases} a_{ij} \neq 0, i = j; \\ a_{ij} = 0, i \neq j \end{cases} \right)_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - *діагональна*;

$A = \left(a_{ij} : \begin{cases} a_{ij} = 1, i = j; \\ a_{ij} = 0, i \neq j \end{cases} \right)_{n \times n} = E$ - *одинична*;

$A = \left(a_{ij} = 0 \right) = O$ - *нульова*.

$\det A \neq 0$ - *неособлива, невироджена*;

$\det A = 0$ - *особлива, вироджена*.

A^{-1} - *обернена до* A, якщо $AA^{-1} = A^{-1}A = E$; $\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

$A^T = \left(a_{ji} \right)$ - *транспонована.*

Якщо $AA^T = E$, то A - *ортогональна*.

$A = \left(a_{ij} : a_{ij} = 0, i > j \right)$ - *верхня трикутна*;

$A = \left(a_{ij} : a_{ij} = 0, i < j \right)$ - *нижня трикутна*.

$\mathbf{v}$ - *власний вектор* матриці A, що відповідає *власному значенню* λ, якщо $A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$.

НОРМИ ВЕКТОРІВ І МАТРИЦЬ

$\mathbb{R}^n$ - множина всіх дійсних n-мірних векторів $\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$.

Нормою вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *називається число* $\|\mathbf{x}\|$, *яке задовольняє умовам*:

$\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\forall$ скалярного c

1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, причому $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$;

2) $\|c\mathbf{x}\| = |c|\|\mathbf{x}\|$ - однорідність норми;

3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ - правило трикутника.

Найбільш вживані норми векторів:

$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$ -перша (октаедрична норма);

$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$ - друга (евклідова) норма;

$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\limits_i |x_i|$ - кубічна норма.

$\mathbb{R}^{n\times n}$ - множина всіх квадратних матриць розміру $n\times n$ з дійсними коефіцієнтами.

Нормою матриці $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *називається число* $\|A\|$*, яке задовольняє умовам*:

$\forall\, A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\forall$ скалярного c

1) $\|A\|\geq 0$, причому $\|A\|=0 \Leftrightarrow A=O$;

2) $\|cA\|=|c|\|A\|$;

3) $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$;

4) $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$.

Найбільш вживані норми матриць:

$\|A\|_1=\max\limits_{j}\sum\limits_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$ -перша (октаедрична норма);

$\|A\|_2=\|A\|=\sqrt{\lambda_m}$, де λ_m - найбільше власне значення матриці $A^T A$ - спектральна норма;

$\|A\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ - кубічна норма;

$\|A\|_E = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$ - норма Евкліда.

Норма матриці A *називається* ***узгодженою з нормою вектора*** $\mathbf{x}$*, якщо* $\|A\mathbf{x}\| \le \|A\|\|\mathbf{x}\|$.

Норма матриці A *називається* ***підпорядкованою відповідній нормі вектора*** $\mathbf{x}$*, якщо* $\|A\| = \sup\limits_{\|\mathbf{x}\| \ne 0} \dfrac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$.

Норми матриць $\|A\|_1$ та $\|A\|_\infty$ узгоджені з нормами векторів $\|\mathbf{x}\|_1$ та $\|\mathbf{x}\|_\infty$ відповідно; норми $\|A\|_2$ та $\|A\|$ узгоджені з нормою $\|\mathbf{x}\|_2$.

<u>Теорема</u> ***про еквівалентність норм*** *у скінченновимірних просторах*.

Які б не були дві норми $\|\bullet\|_a$ *та* $\|\bullet\|_b$, *існують додатні числа* α_1 *та* α_2 *такі, що для всіх елементів простору, що розглядається, виконується*

$$\alpha_1 \|\bullet\|_a \le \|\bullet\|_b \le \alpha_2 \|\bullet\|_a \ .$$

α_1 , α_2 - ***константи еквівалентності***.

III. ОБУМОВЛЕНІСТЬ СЛАР

Приклад. Розглядаємо СЛАР

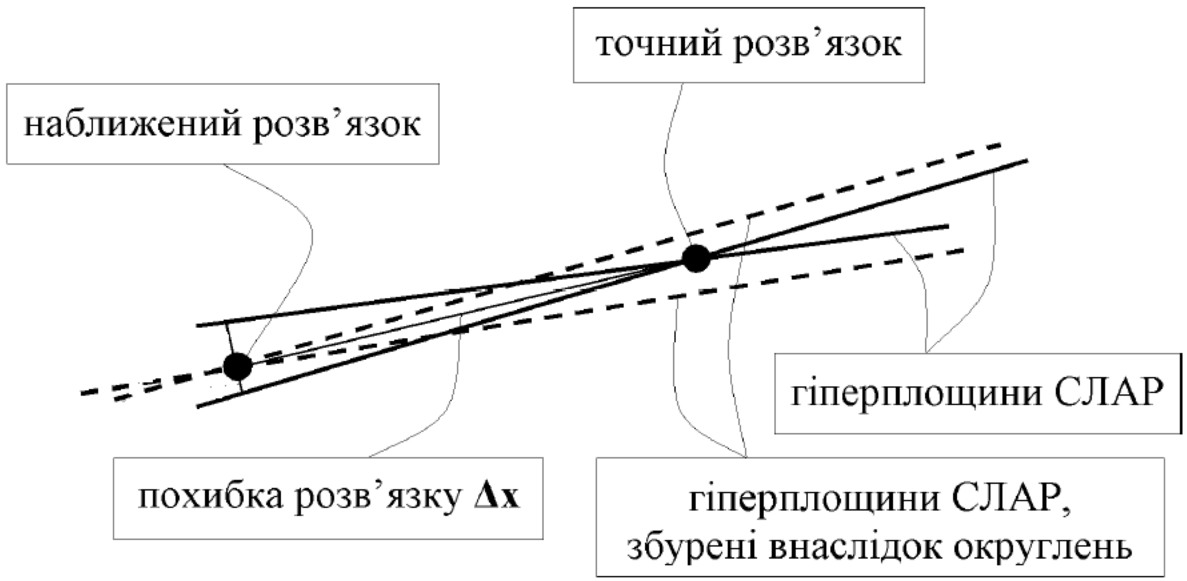
$$\begin{cases} x + 10y = 11 \\ 100x + 1001y = 1101 \end{cases}, \quad x^* = 1, \ y^* = 1$$ - її єдиний розв'язок.

Припустимо, що права частина першого рівняння була визначена з похибкою $\Delta b_1 = 0,01$:

$$\begin{cases} x + 10y = 11,01 \\ 100x + 1001y = 1101 \end{cases},$$ для якої $x^* = 11,01, \ y^* = 0$.

Задачі, у яких малим, але скінченним змінам вхідних параметрів відповідає значна зміна розв'язку, називаються ***погано обумовленими***.

Геометричний зміст погано обумовленої системи



Розглядаємо СЛАР

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

де $|A| \neq 0$.

Нехай елементи матриці A задані точно, а права частина системи задана неточно, т.б., використовується збурений вектор $\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$. Тоді матимемо і похибку розв’язку:

$$A(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}.$$

$$A\mathbf{x} + A\Delta\mathbf{x} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} \Rightarrow A\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{b} \Rightarrow \Delta\mathbf{x} = A^{-1}\Delta\mathbf{b} \Rightarrow \|\Delta\mathbf{x}\| \leq \|A^{-1}\|\|\Delta\mathbf{b}\|;$$

$$\mathbf{b} = A\mathbf{x} = \|\mathbf{b}\| \leq \|A\|\|\mathbf{x}\| \Rightarrow \|\mathbf{x}\| \geq \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|A\|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\|\Delta\mathbf{b}\|}{\frac{\|\mathbf{b}\|}{\|A\|}} = \|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|},$$

або

$$\delta(\mathbf{x}) \le cond(A)\delta(\mathbf{b}),$$

де $\delta(\mathbf{x})$ та $\delta(\mathbf{b})$ - відносні похибки розв’язку та правої частини;

$cond(A) = \left\| A^{-1} \right\| \left\| A \right\|$ - ***число (міра) обумовленості*** (від англ. *conditionality*) ***матриці*** (або СЛАР).

IV. Метод Гауса (схема єдиного поділу)

Покладемо $m = n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} . \qquad (1)$$

Процедура розв’язання проходить у два етапи:

- зведення системи до трикутного вигляду - «*прямий хід»*
- зворотня підстановка – «*обернений хід»*

<u>Крок І</u>

Нехай $a_{11} \neq 0$. У системі (1) виключаємо невідомі x_1 з 2-го, 3-го,…, n-го рівнянь: додаємо по черзі до 2-го, 3-го,…, n-го рівняння перше, помножене на $-a_{21}/a_{11}$, $-a_{31}/a_{11}$,…, $-a_{n1}/a_{11}$ відповідно. Отримаємо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \qquad\quad a'_{n2}x_2 + \ldots + a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}, \tag{2}$$

коефіцієнти якої обчислюються за формулою

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}\ ,\ b'_i = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1\ \left(i, j = \overline{2, \mathrm{n}}\right).$$

<u>Крок II</u>

Аналогічні дії повторюємо з підсистемою, утвореною 2-м, 3-м,…, n-м рівняннями.

…

Перед *i*-м кроком система матиме вигляд

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1i}x_i + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2i}x_i + \ldots + a'_{2j}x_j + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\
\qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
\qquad\qquad a'_{ii}x_i + \ldots + a'_{ij}x_j + \ldots + a'_{in}x_n = b'_i \\
\qquad\qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
\qquad\qquad a'_{ni}x_i + \ldots + a'_{nj}x_j + \ldots + a'_{nn}x_n = b'_n
\end{array}
$$

<u>Основний крок *i*</u>

i-те рівняння залишаємо без змін, а рівняння з *(i+1)*-го до n-го перетворюємо за схемою:

[*к*-те рівняння]:= [*к*-те рівняння]-$t \cdot$ [*i*-те рівняння],

де

$$t = a_{ki}/a_{ii}\,,\ k = \overline{i+1,n}.$$

- так звані ***Гаусові множники***.

Коефіцієнт a_{ii} називають ***головним*** (ведучим) елементом.

Після ($n-1$)-го кроку система набуде трикутного вигляду

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1i}x_i + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{22}x_2 + \ldots + a_{2i}x_i + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\
a_{ii}x_i + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n &= b_i \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\
a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Її розв’язок знаходимо зворотною підстановкою («зворотній хід»):

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}\ ,\ x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}},\ i = n-1, n-2, \ldots, 1\ .$$

Gauss ($A, \mathbf{b}$) //алгоритм методу Гауса//

1. *for* $i = 1, 2, \ldots, n-1$

2. *for* $k = i+1, \ldots, n$

3. $t_{ki} := a_{ki} / a_{ii}$

4. $b_k := b_k - t_{ki} b_i$

5. *for* $j = i+1, \ldots, n$

6. $a_{kj} := a_{kj} - t_{ki} a_{ij}$

7. $x_n = b_n / a_{nn}$

8. *for* $i = n-1, \ldots, 2, 1$

9. $x_i := \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right)$

Метод Гауса з вибором головного елемента по стовпчиках

На *i*-му кроці перед виключенням елементів під головною діагоналлю *i*-го стовпчика переставляємо рівняння так, щоб головним (діагональним) елементом став елемент $a_{mi} = \max_{k} |a_{ki}|$, $k = \overline{i+1,n}$.

В алгоритм додаємо рядки:

1.1. Знайти $m \geq i$: $a_{mi} = \max_{k \geq i} |a_{ki}|$

1.2. якщо $a_{mi} = 0 \Rightarrow$ вихід /однозначного розв'язку не існує/

1.3. інакше $b_i \leftrightarrow b_m$; $a_{ij} \leftrightarrow a_{mj}$ для всіх $j = \overline{i,n}$

Обчислення визначника матриці

В алгоритмі забрати рядки 4 і 7 – 9 та додати

10. $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

або

10'. $\det A = (-1)^p \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$, де p - кількість перестановок рядків.

Обернена матриця

$$AX = E \Rightarrow X = A^{-1}E = A^{-1}.$$

Представляємо $E = (\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n)$, де $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T$,..., $\mathbf{e}_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^T$

і розв'язуємо n систем лінійних рівнянь

$$AX = \mathbf{e}_1,\ AX = \mathbf{e}_2, \ldots,\ AX = \mathbf{e}_n.$$

Тоді

$$A^{-1} = \left(\mathbf{x}^1\, \mathbf{x}^2 \ldots \mathbf{x}^n \right),$$

де $\mathbf{x}^i$ $\left(i = \overline{1, n} \right)$ - розв’язок відповідної СЛР.