

Лабораторная работа № 2: Численное решение уравнения теплопроводности с использованием библиотеки MPI

Необходимо написать параллельную программу, предназначенную для работы на системе с распределенной памятью с использованием библиотеки MPI, реализующую численное решение одномерного уравнения теплопроводности.

Уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 1, \\ u(1, t) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} u(0, 0) &= 1, \\ u(x, 0) &= 0 \quad (x > 0). \end{aligned} \quad (3)$$

Сеточная область:

$$W^h = \{x_i, t_j\}, \quad i = 0, \dots, N-1; \quad j = 0, \dots, M-1. \quad (4)$$

Здесь $\{x_i\}$ – дискретизация по пространству, а $\{t_j\}$ – по времени.

Дискретизация с помощью разностной схемы:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - a^2 \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} = 0, \quad (5)$$

где τ – шаг по времени, а h – шаг по пространству.

Условие устойчивости разностной схемы:

$$\frac{\tau a^2}{h^2} \leq 0.5. \quad (6)$$

Дискретизацию по пространству (количество точек N на отрезке $[0, 1]$) можно менять, тем самым меняя вычислительную нагрузку. Зная N , вычисляется шаг сетки по пространству (h), далее, по формуле (6) можно вычислить шаг по времени τ . Для лабораторной можно принять $a = 1$. Таким образом, из формулы (5) получаем:

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{\tau}{h^2} (u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j). \quad (7)$$

При написании программы не нужно выделять массив размерностью $N \times M$, требуется всего два массива: `uprev[N]` и `unext[N]`, в которых содержатся значения на предыдущем (j -м) и вычисляются значения на следующем ($(j+1)$ -м) временном слое. После вычисления значения на $((j+1)$ -м) временном слое необходимо просто в `uprev[N]` записать вычисленные значения из `unext[N]`, и перейти к следующей итерации по времени.

Распараллеливать программу нужно будет методом геометрического параллелизма, то есть делить отрезок $[0, 1]$ на p частей, каждая из которых обрабатывается своим MPI процессом. Обмен данных нужно будет производить на каждой итерации по времени, передавая значения на краях соседям.

Для сдачи лабораторной необходимо:

- работающая (в том числе в параллельном режиме) программа;
- краткий отчет с результатами исследований на ускорение, эффективность и производительность работы программы при различном числе ядер, а также различном количестве шагов по времени и различной дискретизации по пространству (текст программы тоже необходимо включить в отчет);
- ответить на теоретические вопросы (список приведен ниже).

Вопросы для сдачи лабораторной работы:

- виды многопроцессорных систем;
- модель программы на системе с распределенной памятью;
- методы передачи данных;
- ускорение и эффективность параллельных алгоритмов;
- накладные расходы;
- статическая и динамическая балансировка загрузки;
- метод сдваивания;
- метод геометрического параллелизма;
- метод конвейерного параллелизма;
- метод коллективного решения;
- основные функции MPI.