

ГЛАВА: Метод конечных разностей.

Лекция №3: Разностные схемы аппроксимаций ДУ в ЧП (6 слайдов)

Слайд №1: Построение разностных схем.

В исходном дифференциальном уравнении

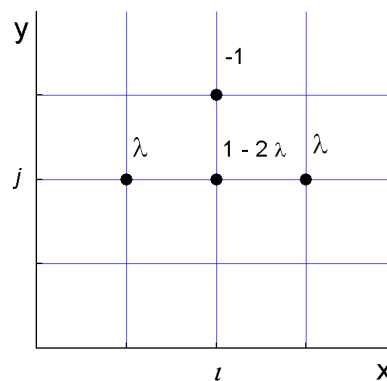
$$f(x, y, U, U_x, U_y, U_{xx}, \dots) = 0$$

применительно к определенному узлу наложенной сетки* (i, j) все производные заменяются разностными аналогами. Например,

$$U_{xx}|_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{y,(i,j)} = \frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{h^2}.$$

В результате получается система линейных алгебраических уравнений, определяющая значения искомой функции во всех узлах наложенной сетки.

Для наглядности строят трафарет (stencil) разностной схемы*: на сетке отмечают узлы, задействованные в разностном аналоге исходного ДУ, примененного к (i, j) -му узлу, и подписывают численный множитель с которым значение искомой функции, соответствующее данному узлу, входит в разностную схему.



На рисунке изображен трафарет разностной схемы, содержащей четыре узла. Три узла принадлежат слою j , и один — $(j+1)$ -му слою. Это — двухслойная* разностная схема (относительно переменной y). Бывают также трехслойные и более многослойные разностные схемы.

Если трафарет содержит одно неизвестное значение функции U (на рисунке это — U_i^{j+1}), то разностная схема называется явной*. Система алгебраических уравнений при этом распадается на отдельные уравнения, каждое из которых явным образом определяет значение искомой функции в одном из узлов наложенной сетки.

Если трафарет содержит более одного неизвестных значений функции U , то разностная схема называется неявной*. Система алгебраических уравнений при этом не распадается на отдельные уравнения.

Слайд №2: Схема ВВЦП для уравнения теплопроводности.

Исходное дифференциальное уравнение —

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} .$$

Дополнительные условия к уравнению теплопроводности возьмем в виде задачи Дирихле:

$$\begin{aligned} \text{Начальные условия:} \quad & U(x, 0) = \phi(x) , \quad 0 \leq x \leq L . \\ \text{Граничные условия:} \quad & U(0, t) = \phi_0(t) , \quad t > 0 . \\ & U(L, t) = \phi_L(t) , \end{aligned}$$

Заменяем в окрестности узла (i, n) производную по времени t аппроксимацией вперед по времени, а производную по координате центральной аппроксимацией. В результате получаем схему ВВЦП (вперед по времени, центральная по пространству) или FTCS (forward time, central space)

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = \frac{a}{h^2} (U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n) , \quad i = 1, \dots, N-1 .$$

Для построения трафарета домножим РС на τ , обозначим $\lambda = a\tau/h^2$, и перенесем все в правую часть:

$$0 = -U_i^{n+1} + U_i^n + \lambda (U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n) , \quad i = 1, \dots, N-1 .$$

Трафарет схемы ВВЦП изображен на рисунке.

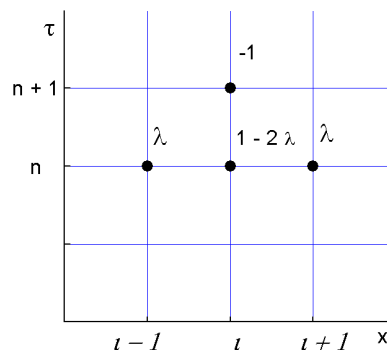


Схема ВВЦП — двухслойная* явная* разностная схема.

Решение начинается с первого слоя (нулевой слой по времени определяется начальными условиями). Каждый из узлов первого слоя ($n = 1$) определяется значениями функции в трех ближайших узлах нулевого слоя. Пройдя по всему первому слою от $i = 1$ до $N - 1$, получим значения искомой функции во всех узлах первого слоя. Значения при $i = 0$ и $i = N$ известны: они задаются граничными условиями. После того, как вы получите первый слой, вы точно также можете рассчитать второй временной слой, затем третий, и т.д. Подобные задачи, когда необходимо последовательно переходить от одного временного слоя к последующему, называют маршевыми задачами, а само решение называют маршевым проходом.

Слайд №3: Неявная схема для уравнения теплопроводности.

Исходное дифференциальное уравнение —

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} .$$

Дополнительные условия к уравнению теплопроводности возьмем в виде задачи Дирихле:

$$\begin{aligned} \text{Начальные условия:} \quad & U(x, 0) = \phi(x) , \quad 0 \leq x \leq L . \\ \text{Граничные условия:} \quad & U(0, t) = \phi_0(t) , \quad t > 0 . \\ & U(L, t) = \phi_L(t) , \end{aligned}$$

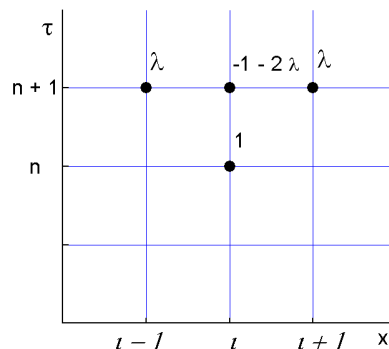
Заменяем в окрестности узла (i, n) производную по времени t аппроксимацией назад по времени, а производную по координате центральной аппроксимацией. В результате получаем неявную* разностную схему

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = \frac{a}{h^2} (U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}) , \quad i = 1, \dots, N-1 .$$

Для построения трафарета домножим РС на τ , обозначим $\lambda = a\tau/h^2$, и перенесем все в правую часть:

$$0 = -U_i^{n+1} + U_i^n + \lambda (U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}) , \quad i = 1, \dots, N-1 .$$

Трафарет неявной схемы для уравнения теплопроводности изображен на рисунке.



Это — двухслойная* разностная схема.

Решение начинается с первого слоя (нулевой слой по времени определяется начальными условиями). Уравнения, определяющие значения искомой функции в узлах первого слоя, представляют собой линейную алгебраическую систему. Матрица этой системы трехдиагональная и удовлетворяет условию преобладания диагональных элементов, поэтому наиболее эффективный способ решения данной системы — метод прогонки. После определения значений U_i^1 решается аналогичная система, определяющая значения искомой функции на втором слое, затем на третьем, и т.д. Подобные задачи, когда необходимо последовательно переходить от одного временного слоя к последующему, называют маршевыми задачами, а само решение называют маршевым проходом.

Слайд №4: Схема Кранка–Николсона для уравнения теплопроводности.

Исходное дифференциальное уравнение —

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} .$$

Дополнительные условия к уравнению теплопроводности возьмем в виде задачи Дирихле:

$$\text{Начальные условия: } U(x, 0) = \phi(x) , \quad 0 \leq x \leq L .$$

$$\text{Граничные условия: } \begin{aligned} U(0, t) &= \phi_0(t) , \\ U(L, t) &= \phi_L(t) , \end{aligned} \quad t > 0 .$$

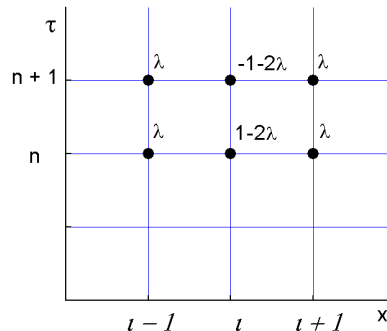
Усредняя выражения, соответствующие схеме ВВЦП и неявной схеме уравнения теплопроводности, получаем неявную* разностную схему Кранка–Николсона

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = \frac{a}{2h^2} (U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n + U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}) , \quad i = 1, \dots, N-1 .$$

Для построения трафарета домножим РС на τ , обозначим $\lambda = a\tau/2h^2$, и перенесем все в правую часть:

$$-U_i^{n+1} + U_i^n + \lambda (U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n + U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}) = 0 , \quad i = 1, \dots, N-1 .$$

Трафарет схемы Кранка–Николсона для уравнения теплопроводности изображен на рисунке.



Это — двухслойная* разностная схема.

Решение начинается с первого слоя (нулевой слой по времени определяется начальными условиями). Уравнения, определяющие значения искомой функции в узлах первого слоя, представляют собой линейную алгебраическую систему. Матрица этой системы трехдиагональная и удовлетворяет условию преобладания диагональных элементов, поэтому наиболее эффективный способ решения данной системы — метод прогонки. После определения значений U_i^1 решается аналогичная система, определяющая значения искомой функции на втором слое, затем на третьем, и т.д. Подобные задачи, когда необходимо последовательно переходить от одного временного слоя к последующему, называют маршевыми задачами, а само решение называют маршевым проходом.

Слайд №5: Трехслойная схема для уравнения Лапласа.

Исходное дифференциальное уравнение —

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 .$$

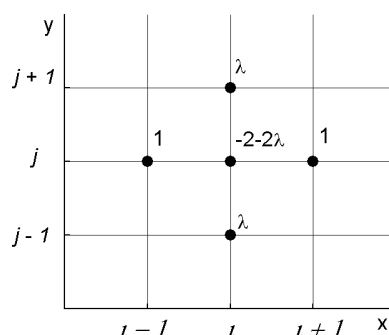
Аппроксимируя вторые производные по переменным x и y центральными разностными аппроксимациями в окрестности узла (i, j) , получим

$$\frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{h_x^2} + a \frac{U_i^{j-1} - 2U_i^j + U_i^{j+1}}{h_y^2} = 0 .$$

Обозначая $\lambda = ah_x^2/h_y^2$, перепишем в виде удобном для построения трафарета

$$U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j + \lambda U_i^{j-1} - 2\lambda U_i^j + \lambda U_i^{j+1} = 0 , \quad i = 1, \dots, N_x - 1 , \quad j = 1, \dots, N_y - 1 .$$

Трафарет этой разностной схемы изображен на рисунке.



Если, например, по переменной y дополнительные условия (а их должно быть два) поставлены при $y = 0$, т.е. мы имеем два НУ (например, $U(y = 0, x) = \phi(x)$ и $u_y(y = 0, x) = \psi(x)$), то РС — явная, и необходим маршевый проход по слоям y .

Если же задана конечная область по y и поставлены ГУ (например, $U(y = 0, x) = \phi(x)$ и $u(y = L, x) = \psi(x)$), то РС — неявная. В этом случае имеем систему $(N_x - 1) \cdot (N_y - 1)$ уравнений и, естественно, столько же неизвестных. Значения на краях задаются ГУ. Матрица получившейся системы не трехдиагональная, и значит метод прогонки исключен. Но зато система удовлетворяет условию преобладания диагональных элементов: во внутренней области сетки коэффициент при центральном узле (i, j) по абсолютному значению равен сумме абсолютных значений других коэффициентов, а вблизи границ, когда один или два узла заданы ГУ, центральный коэффициент больше (по модулю) суммы других коэффициентов. Наиболее эффективно такую систему решать методом Гаусса–Зейделя.

В случае эллиптических уравнений применение метода Гаусса–Зейделя называется методом Либмана или методом последовательных смещений.

Слайд №6: Схема Ричардсона для уравнения теплопроводности.

Исходное дифференциальное уравнение —

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} .$$

Дополнительные условия к уравнению теплопроводности возьмем в виде задачи Дирихле:

$$\begin{aligned} \text{Начальные условия:} \quad & U(x, 0) = \phi(x) , \quad 0 \leq x \leq L . \\ \text{Граничные условия:} \quad & \begin{aligned} U(0, t) &= \phi_0(t) , \\ U(L, t) &= \phi_L(t) , \end{aligned} \quad t > 0 . \end{aligned}$$

Схема Ричардсона является примером трехслойных схем. Многослойные схемы возникают не только благодаря наличию вторых производных, как например, в уравнении Лапласа. К многослойности может привести и первая производная, если она аппроксимируется с высокой точностью. До сих пор мы использовали либо разность вперед по времени (схема ВВЦП), либо разность назад по времени (неявная схема). При такой аппроксимации производной возникает погрешность первого порядка по величине шага. Ричардсон предложил использовать более точную центральную аппроксимацию производной по времени и получил следующую разностную схему (которая теперь носит его имя)

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^{n-1}}{2\tau} = \frac{a}{h^2} (U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n) , \quad i = 1, \dots, N-1 .$$

Использование высокоточных разностных аппроксимаций для производных очень распространено и зачастую действительно приводит к построению высокоточных разностных схем. Однако в случае уравнения теплопроводности эта схема — схема Ричардсона — является историческим примером классической ошибки. Правдоподобная и на первый взгляд очень точная РС не позволяет получить истинное решение ДУ. Как показывают численные расчеты решение ДУ, полученное по схеме Ричардсона не сходится к истинному решению ДУ. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно провести вычислительный эксперимент на так называемом модельном уравнении. Т.е. взять и запрограммировать задачу, которая имеет аналитическое решение. И сопоставляя то, что вам дает численный расчет, и известное аналитическое решение, вы тут же обнаружите, что расчет не дает ничего даже близкого к истинному решению.

Решение НЕ СХОДИТСЯ.

Термины для глоссария:

Разностная схема дифференциального уравнения в частных производных — алгебраическое уравнение, связывающее значения искомой функции в некоторых узлах наложенной сетки соседних с заданным (i, j) -ым узлом. Получается при замене всех производных в исходном дифференциальном уравнении их разностными аналогами.

N -слойная разностная схема относительно переменной x — разностная схема, содержащая значения искомой функции, соответствующие N различным значениям переменной x , т.е. с N различных слоев вдоль переменной x .

Явная разностная схема — схема, содержащая одно неизвестное значение искомой функции. Система алгебраических уравнений при этом распадается на отдельные уравнения, каждое из которых явным образом определяет значение искомой функции в одном из узлов наложенной сетки.

Неявная разностная схема — схема, содержащая более одного неизвестных значений искомой функции. Система алгебраических уравнений при этом не распадается на отдельные уравнения.