

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ  
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского  
«Харьковский авиационный институт»

**М.Л. Угрюмов, А.А. Трончук, Ю.А. Скоб**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Учебное пособие по лабораторному практикуму

Харьков «ХАИ» 2010

УДК 519.63

Численные методы решения задач математической физики: учеб. пособие по лаб. практикуму / М.Л. Угрюмов, А.А. Трончук, Ю.А. Скоб. – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2010. – 95 с.

Представлены методические указания к лабораторным работам по численным методам решения задач математической физики, выполняемых с помощью прикладного пакета MathCad.

Рассмотрено решение наиболее распространенных задач математической физики – задач переноса, задач теплопроводности и задач распространения волн. Представлены решения задач явным и неявным методами.

Для студентов, изучающих курс «Численные методы математической физики».

Ил. --. Табл. -. Библиогр.: - назв.

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. В.Г. Солодов,  
д-р техн. наук, проф. В.А. Ванин.

© Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского  
«Харьковский авиационный институт», 2010 г.

## ВВЕДЕНИЕ

Появление и непрерывное совершенствование ЭВМ привело к революционному преобразованию науки вообще и математики особенно. Изменилась технология научных исследований, колоссально увеличились возможности теоретического изучения, прогноза сложных процессов. Решение инженерных задач, а также крупных научно-технических проблем, таких, как освоение космоса и овладение ядерной энергией, стало реальным лишь благодаря применению математического моделирования и новых вычислительных методов, ориентированных на ЭВМ.

Исследования научно-технических проблем проводятся на основе математического описания (математической модели) физических или иных процессов и явлений с последующим решением соответствующих математических задач на ЭВМ с помощью вычислительных алгоритмов.

В настоящее время можно констатировать, что появился новый способ теоретического исследования сложных процессов, допускающих математическое описание – вычислительный эксперимент, т.е. исследование естественнонаучных проблем средствами вычислительной математики. Суть этого способа заключается в следующем.

Сначала выбирается математическая модель, т.е. анализируется вопрос, какие факторы и как их нужно учитывать, а затем методом вычислительного эксперимента исследуется проблема.

В вычислительном эксперименте можно выделить несколько основных этапов.

1. Выбор математической модели, т.е. приближенное описание процесса в форме алгебраических, дифференциальных или интегральных уравнений.
2. Исследование корректности постановки задачи, т.е. решение вопроса о существовании и единственности решения.
3. Выбор метода решения задачи, разработка реализующего его вычислительного алгоритма.
4. Программирование вычислительного алгоритма для ЭВМ.
5. Проведение расчетов на ЭВМ.
6. Анализ полученных результатов и последующее уточнение модели.

Приведем некоторые общие характеристики вычислительных алгоритмов и требования к ним. Разработка и исследование вычислительных алгоритмов составляют содержание огромного

раздела современной математики – вычислительной математики. Вычислительную математику определяют в широком смысле как раздел, охватывающий круг вопросов, связанных с использованием ЭВМ, а в узком - как теорию вычислительных методов и алгоритмов решения математических задач.

Общим для всех вычислительных методов является сведение математической задачи к дискретной. После дискретизации задачи строят вычислительный алгоритм, т.е. последовательность арифметических и логических действий, дающих решение дискретной задачи. Полученное решение принимают за приближенное решение исходной математической задачи. Алгоритмы должны быть достаточно точными, экономичными и устойчивыми по отношению к ошибкам входных данных задачи.

Содержание данного пособия связано с применением разностных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных (уравнений математической физики). Уравнения математической физики описывают широкий круг прикладных задач, связанных с распространением волн в упругих средах, явлениями теплопроводности и диффузии, со стационарными полями температур, гравитационными и электромагнитными полями, течением жидкости и газа и т.д.

# Лабораторная работа № 1

## РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

*Цель работы* – приобрести навыки аппроксимации производных первого порядка и построения численных методов решения смешанной краевой задачи для уравнения переноса.

### *Постановка задачи*

Построить разностную схему и решить смешанную краевую задачу для уравнения переноса в заданной расчетной области при известных граничном и начальном условиях.

Уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t), \quad (1.1)$$

где  $a = \text{const} > 0$  – характеристика переноса (скорость);  $f(x, t)$  – произвольная функция.

Расчетная область

$$\Omega = [0 \leq x \leq l] \times [0 \leq t \leq T]. \quad (1.2)$$

Дополнительные условия:

$u(x, 0) = \mu(x), 0 \leq x \leq l$  - начальное условие (НУ);

$u(0, t) = v(t), 0 \leq t \leq T$  - граничное условие (ГУ). (1.3)

### *Порядок выполнения работы*

1. Построить разностную схему для решения уравнения переноса.

2. Реализовать решение уравнения переноса с использованием полученной разностной схемы. Решение выполнить в среде Mathcad согласно варианту, указанному преподавателем.

3. Проанализировать полученные результаты.

### *Типовой вариант*

Запустите расчетную среду Mathcad. Создайте новый документ и сохраните его под своим уникальным именем. Дальнейшее решение выполняется согласно выданному варианту. В данном примере выбраны такие значения величин и функций:

$$f(x, t) = \frac{x}{2} \sin(t), \quad \mu(x) = \sin(x), \quad v(t) = t, \quad a = 0,3, \quad l = 1, \quad T = 1.$$

Введите входные данные:

начальное и граничное условия задачи –

$$\text{Начальное условие:} \quad \mu(x) := \sin(x)$$

$$\text{Граничное условие:} \quad v(t) := t$$

правая часть уравнения переноса –

$$\text{Правая часть ДУ:} \quad f(x, t) := \frac{x}{2} \cdot \sin(t)$$

необходимые константы –

$$\text{Коэффициент:} \quad a := 0.3$$

$$\text{Ограничения:} \quad l := 1 \quad T := 1$$

Выберите величины шагов  $h$  (по оси  $x$ ) и  $\tau$  (по оси  $t$ ). При выборе данных величин следует руководствоваться условием устойчивости метода (условие Куранта - Фридрихса - Леви)

$$\frac{a\tau}{h} \leq 1. \quad (1.4)$$

Для данного варианта примем такие значения шагов:

$$h := 0.1$$

$$\tau := 0.1$$

Проверьте условия устойчивости (1.4):

$$\frac{a \cdot \tau}{h} = 0.3$$

Подсчитайте количество разбиений сетки для выбранных величин шага:

$$nx := \frac{1}{h}$$

$$nx = 10$$

$$nt := \frac{T}{\tau}$$

$$nt = 10$$

Далее необходимо построить разностную схему для решения уравнения переноса. Для этого замените производные уравнения (1.1) их разностными приближениями в квадрате сетки  $[i, i+1] \times [j, j+1]$ . Для удобства индексы по оси ОХ записываются снизу, а по оси ОУ – сверху:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i+1}^j \approx \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i+1}^j}{\tau}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i+1}^j \approx \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h}.$$

Из-за особенностей данного уравнения построение его решения выполняется в два этапа – вдоль оси ОХ и вдоль оси ОУ (ось

времени). Каждое из частных решений будет иметь вид треугольной матрицы. Обобщенным решением уравнения является объединение двух полученных решений.

Значением правой части уравнения является значение функции  $f$  посередине квадрата, т.е.  $f_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{j+\frac{1}{2}}\right) = f\left(x_i + \frac{h}{2}, t_j + \frac{\tau}{2}\right)$ .

Для решения уравнения вдоль оси ОХ постройте разностную схему, соответствующую изображенному на рис. 1.1 шаблону.

Заменив частные производные уравнения (1.1) на их соответствующие приближения, запишем уравнение

$$\frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i+1}^j}{\tau} + a \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h} = f_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}.$$

Выделив из этого уравнения  $u_{i+1}^{j+1}$ , получим алгоритм численного решения уравнения переноса вдоль оси ОХ:

$$u_{i+1}^{j+1} = u_{i+1}^j - \frac{\tau \cdot a}{h} (u_{i+1}^j - u_i^j) + \tau \cdot f_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}. \quad (1.5)$$

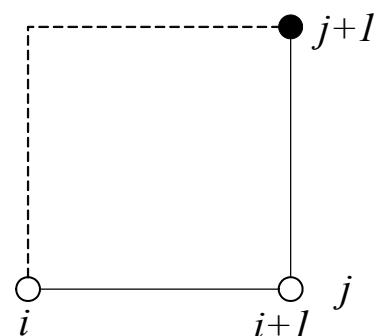


Рис. 1.1. Шаблон разностной схемы для решений вдоль оси ОХ

Первую строку матрицы решения найдите, используя начальное условие  $u(x, 0) = \mu(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ . Каждую последующую строку найдите рекурсивно, используя значения предыдущей строки. Алгоритм нахождения матрицы показан на рис. 1.2.

Для решения уравнения вдоль оси ОУ самостоятельно постройте разностную схему, соответствующую изображенному на рис. 1.3 шаблону.

```
MatrixOX :=
  for i ∈ 0..nx
    Ui,0 ← μ(i·h)
  for i ∈ 0..nx-1
    for j ∈ 0..i
      Ui+1,j+1 ←  $\frac{-a \cdot \tau}{h} \cdot (U_{i+1,j} - U_{i,j}) + U_{i+1,j} + \tau \cdot f\left(i \cdot h + \frac{h}{2}, j \cdot \tau + \frac{\tau}{2}\right)$ 
    U
```

Рис. 1.2. Алгоритм нахождения численного решения вдоль оси ОХ

Для отображения найденного

решения воспользуйтесь инструментом построения трехмерных графиков среды Mathcad. Вызвать данный инструмент можно выбором пиктограммы “*Surface plot*” на панели инструментов “*Graph*” или нажатием клавиш “*Ctrl+2*”.

Для корректного отображения полученного результата в графическом виде необходимо подготовить данные для отображения:

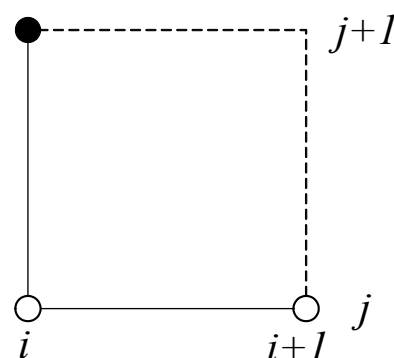
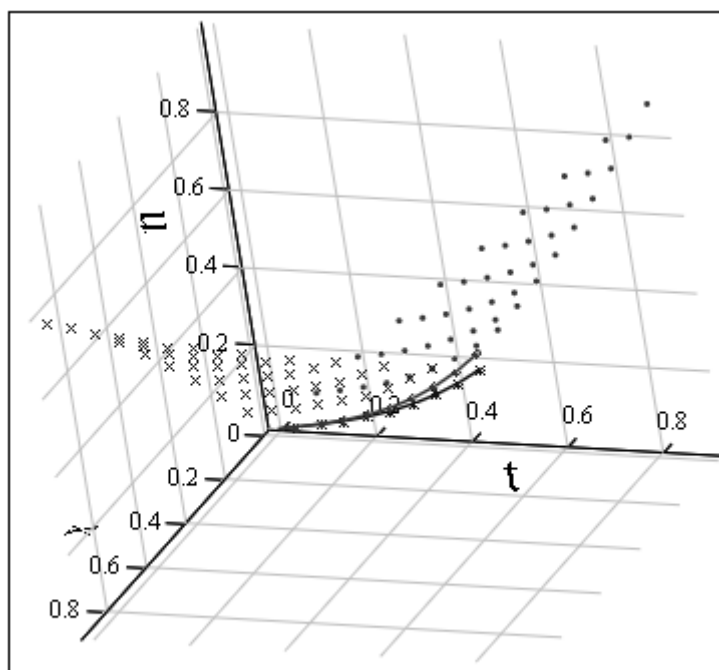


Рис. 1.3. Шаблон разностной схемы для решений вдоль оси OY

$$\begin{aligned} \text{LineOXfunc}(a) &:= \begin{pmatrix} h \cdot a \\ \tau \cdot a \\ \text{MatrixOX}_{a,a} \end{pmatrix} & \text{LineOX} &:= \text{CreateSpace}(\text{LineOXfunc}, 0, 9, 10) \\ \text{LineOYfunc}(a) &:= \begin{pmatrix} h \cdot a \\ \tau \cdot a \\ \text{MatrixOY}_{a,a} \end{pmatrix} & \text{LineOY} &:= \text{CreateSpace}(\text{LineOYfunc}, 0, 9, 10) \\ \text{PlotOXfunc}(i,j) &:= \begin{pmatrix} i \cdot h \\ j \cdot \tau \\ \text{MatrixOX}_{i,j} \end{pmatrix} & \text{PlotOX} &:= \text{CreateMesh}(\text{PlotOXfunc}, 0, 9, 0, 9, 10, 10) \\ \text{PlotOYfunc}(i,j) &:= \begin{pmatrix} i \cdot h \\ j \cdot \tau \\ \text{MatrixOY}_{i,j} \end{pmatrix} & \text{PlotOY} &:= \text{CreateMesh}(\text{PlotOYfunc}, 0, 9, 0, 9, 10, 10) \end{aligned}$$

Результат численного решения уравнения переноса показан на рис. 1.4. Точками и крестиками изображены полученные поверхности решения, а линиями – решения вдоль диагонали матрицы. Как видно из рисунка, решения вдоль диагонали матрицы не совпадают. Отсюда можно сделать вывод, что получено разрывное решение.





LineOX,LineOY,PlotOX,PlotOY

Рис. 1.4. Результат численного решения уравнения переноса

### Варианты заданий

Вариант	$a$	$\mu(x)$	$v(t)$
1	1,2	$16x$	$4t(t+2)$
2	1,4	$8x(1+x)$	$16t$
3	1,2	$32x$	$24t(2t+1)$
4	1,1	$0,5 \sin(2\pi x)$	$16t$
5	1,1	$32x(1-x)$	$0$
6	1,2	$0,7 \sin(4\pi x)$	$32t$
7	1,1	$32x(1-2x)$	$16t(1+t)$
8	1,4	$0,5 \sin(2,4\pi x)$	$8t$
9	1,0	$8x(1+x)$	$0$
10	1,2	$0$	$0,4 \sin(2\pi t)$
11	1,4	$4x(2x+1)$	$4t(1-2t)$
12	1,3	$0$	$32t(t+2)$
13	1,3	$16x(1+x)$	$8t$
14	1,7	$16x$	$\sin(4\pi t)$

Вариант	$a$	$\mu(x)$	$\nu(t)$
15	1,3	$0,6 \sin(3\pi x)$	0
16	1,2	0	$8t(1+t)$
17	1,6	$32x(1-x)$	$16t$
18	1,3	$8x$	$16t(1+t)$
19	1,4	$32x$	$16t(4t+1)$
20	1,5	$0,3 \sin(2\pi x)$	0

## Лабораторная работа № 2

### РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ. ЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

*Цель работы* – приобрести навыки аппроксимации производных первого и второго порядков, а также построения численных методов решения смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности (уравнение параболического типа).

#### *Постановка задачи*

Построить разностную схему и решить смешанную краевую задачу для уравнения теплопроводности в заданной расчетной области при известных граничных и начальном условиях.

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.1)$$

где  $a = \text{const} > 0$  – коэффициент температуропроводности.

Расчетная область

$$\Omega = [0 \leq x \leq l] \times [0 \leq t \leq T]. \quad (2.2)$$

Дополнительные условия:

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \mu(x), \quad 0 \leq x \leq l - \text{начальное условие;} \\ u(0, t) &= \nu_1(t) \\ u(l, t) &= \nu_2(t) \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T - \text{граничные условия Дирихле.} \quad (2.3)$$

### Порядок выполнения работы

1. Построить явную разностную схему для решения уравнения теплопроводности.
2. Реализовать решение уравнения теплопроводности с использованием полученной явной разностной схемы. Решение выполнить в среде Mathcad согласно варианту, указанному преподавателем.
3. Проанализировать полученные результаты.

### Типовой вариант

Запустите расчетную среду Mathcad. Создайте новый документ и сохраните его под своим уникальным именем. Дальнейшее решение выполняется согласно выданному варианту. В данном примере выбраны такие значения величин и функций:

$$\mu(x) = (x + x^2) \cdot \sin(\pi \cdot x), \quad v_1(t) = 0,7 \cdot \sin(4\pi \cdot t), \quad v_2(t) = 4 \cdot t, \\ a = 1, \quad l = 1, \quad T = 1.$$

Введите входные данные:

начальное и граничное условия задачи –

Начальное условие:  $\mu(x) := (x + x^2) \cdot \sin(\pi \cdot x)$

Граничные условия:

На первом слое по X:  $v_1(t) := 0,5 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t)$

На последнем слое по X:  $v_2(t) := 2,6 \cdot t$

необходимые константы –

Коэффициент:  $a := 1$

Ограничения:  $l := 1$   $T := 1$

Выберите величины шагов  $h$  (по оси  $x$ ) и  $\tau$  (по оси  $t$ ). При выборе данных величин следует руководствоваться условием устойчивости метода

$$\frac{a\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (2.4)$$

Для данного варианта примем такие значения шагов:

$$h := 0.1$$

$$\tau := 0.001$$

Проверьте условия устойчивости (2.4):

$$\frac{a \cdot \tau}{h^2} = 0.1$$

Подсчитайте количество разбиений сетки для выбранных величин шага:

$$nx := \frac{1}{h}$$

$$nt := \frac{T}{\tau}$$

$$nx = 10$$

$$nt = 1 \times 10^3$$

Для решения уравнения (2.1) в расчетной области постройте явную разностную схему, соответствующую изображенному на рис. 2.1 шаблону. Замените производные уравнения (2.1) их разностными аппроксимациями в прямоугольнике сетки  $[i-1, i+1] \times [j, j+1]$ . Индексы записываются, как в лабораторной работе № 1:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i,j} \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau}, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2}.$$

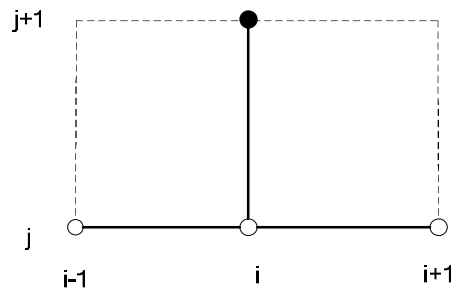


Рис. 2.1. Шаблон разностной схемы

Заменяя частные производные в уравнении (2.1) на их соответствующие приближения, запишем уравнение

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2}.$$

Выделив из этого уравнения  $u_i^{j+1}$ , получим алгоритм численного решения уравнения теплопроводности

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{\tau \cdot a}{h^2} (u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j). \quad (2.5)$$

При построения матрицы решения ее первую строку найдите, используя начальное условие  $u(x, 0) = \mu(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ . Для нахождения значений функции в крайних положениях (при  $x = 0$  и  $x = l$ ) используйте граничные условия. Алгоритм нахождения численного решения показан на рис. 2.2.

Рис. 2.2. Алгоритм нахождения численного решения уравнения теплопроводности

Для корректного отображения полученного результата в графическом виде необходимо подготовить данные для отображения. Для наглядности отобразите поверхность решения, а также граничные и начальное условия.

$$\begin{aligned} \text{LineM0func}(a) &:= \begin{pmatrix} h \cdot a \\ 0 \\ U_{a,0} \end{pmatrix} & \text{LineM0} &:= \text{CreateSpace}(\text{LineM0func}, 0, nx, nx + 1) \\ \text{LineM1func}(a) &:= \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \cdot a \\ U_{0,a} \end{pmatrix} & \text{LineM1} &:= \text{CreateSpace}(\text{LineM1func}, 0, nt, nt + 1) \\ \text{LineM2func}(a) &:= \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \cdot a \\ U_{nx,a} \end{pmatrix} & \text{LineM2} &:= \text{CreateSpace}(\text{LineM2func}, 0, nt, nt + 1) \end{aligned}$$
$$\text{PlotOXfunc}(i,j) := \begin{pmatrix} i \cdot h \\ j \cdot \tau \\ U_{i,j} \end{pmatrix} \quad \text{PlotOX} := \text{CreateMesh}(\text{PlotOXfunc}, 0, nx, 0, nt, nx + 1, nt + 1)$$

Результаты численного решения уравнения теплопроводности показаны на рис. 2.3.

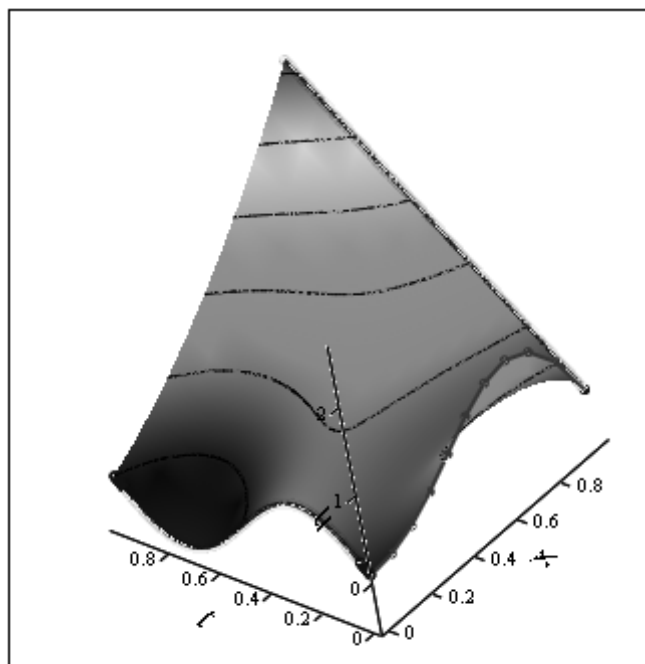


Рис. 2.3. Результаты численного решения уравнения теплопроводности

Самостоятельно проанализируйте результаты решения, проведите расчеты при разных величинах шагов, сравните полученные результаты.

### Варианты заданий

Вариант	$a$	$\mu(x)$	$v_1(t)$	$v_2(t)$
1	1,1	$0,5x(1-x)$	$1,6 t$	$4t(t+2)$
2	1,3	$1,1(x^2+1)\sin \pi x$	$8t(1+t)$	$1,6 t$
3	1,4	$0,4x^2(1-x)$	$3,2 t$	$2,4t(2t+1)$
4	1,6	$0,6x \sin \pi x$	$0,5 \sin(3\pi t)$	$1,6 t$
5	1,2	$0,9x^2(1-x^2)$	$3,2t(1-t)$	0
6	1,7	$(x^2+x)\sin \pi x$	$0,7 \sin(4\pi t)$	$3,2 t$

Вариант	$a$	$\mu(x)$	$v_1(t)$	$v_2(t)$
7	1,5	$0,2x(1-x)$	$2t(1-2t)$	$6t(1+t)$
8	1,0	$(x^2+2)\sin \pi x$	$0,5\sin(2\pi t)$	$8t$
9	1,8	$1,5x^3(1-x)$	$8t(1+t)$	0
10	1,8	$1,4x^2(1-x^2)$	0	$0,4\sin(2\pi t)$
11	1,2	$1,2x^2(1-x)$	$4t(2t+1)$	$4t(1-2t)$
12	1,1	$(x^2+0,5x)\sin \pi x$	0	$2t(t+2)$
13	1,4	$1,5x(1-x^2)$	$16t(1+t)$	$8t$
14	1,4	$0,7x\sin \pi x$	$16t$	$\sin(\pi t)$
15	1,7	$x(x+2)\sin \pi x$	$0,6\sin(3\pi t)$	0
16	1,5	$1,8x(1-x^2)$	0	$8t(1+t)$
17	1,0	$1,1x^3(1-x)$	$32t(1-t)$	$1,6t$
18	1,6	$(3x^2+1)\sin \pi x$	$8t$	$16t(1+t)$
19	1,1	$(1,8x+1)\sin \pi x$	$32t$	$16t(4t+1)$
20	1,0	$0,5x(1-x)$	$0,3\sin(2\pi t)$	0

**Лабораторная работа № 3**  
**РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**  
**МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ.**  
**НЕЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА**

*Цель работы* – приобрести навыки аппроксимации производных первого и второго порядков, а также построения численных методов решения смешанной краевой задачи Коши для уравнения теплопроводности (уравнения параболического типа) с использованием неявной схемы.

### Постановка задачи

Построить неявную разностную схему и решить смешанную краевую задачу Коши для уравнения теплопроводности (2.1) в заданной расчетной области (2.2) при известных граничных и начальном условиях (2.3).

### Порядок выполнения работы

1. Построить неявную разностную схему для решения уравнения теплопроводности.
2. Реализовать решение уравнения теплопроводности с использованием полученной неявной разностной схемы. Решение выполнить в среде Mathcad согласно варианту, указанному преподавателем.
3. Проанализировать полученные результаты.

### Типовой вариант

Запустите расчетную среду Mathcad. Создайте новый документ и сохраните его под своим уникальным именем. Дальнейшее решение выполняется согласно выданному варианту. В данном примере выбраны такие значения величин и функций:

$$\mu(x) = (x + x^2) \cdot \sin(\pi \cdot x), \quad v_1(t) = 0.7 \cdot \sin(4\pi \cdot t), \quad v_2(t) = 4 \cdot t, \\ a = 1, \quad l = 1, \quad T = 1.$$

Введите исходные данные:

начальное и граничные условия задачи –

Начальное условие:  $\mu(x) := (x + x^2) \cdot \sin(\pi \cdot x)$

Граничные условия

На первом слое по X:  $v_1(t) := 0.5 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t)$

На последнем слое по X:  $v_2(t) := 2.6 \cdot t$

необходимые константы –

Коэффициент  $a$ :  $a := 1$

Ограничения:  $l := 1$   $T := 1$

Для данного варианта примем такие значения шагов:

$h := 0.01$   $\tau := 0.01$

Подсчитайте количество разбиений сетки для выбранных величин шага:



$$\begin{aligned} nx &:= \frac{1}{h} \\ nt &:= \frac{T}{\tau} \end{aligned}$$

$$nx = 10$$

$$nt = 1 \times 10^3$$

Для решения уравнения (2.1) в расчетной области постройте неявную разностную схему, соответствующую изображенному на рис. 3.1 шаблону.

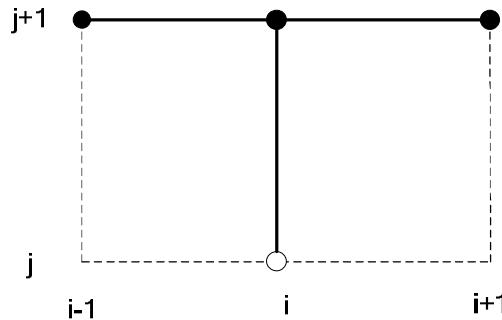


Рис. 3.1. Шаблон неявной разностной схемы

Замените производные уравнения (2.1) их разностными аппроксимациями в прямоугольнике сетки  $[i-1, i+1] \times [j, j+1]$ :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i, j+1} \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau}, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i, j+1} \approx \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2}.$$

Заменяя частные производные в уравнении (2.1) на их соответствующие приближения, получим уравнение

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2}. \quad (3.1)$$

В отличие от явной разностной схемы здесь необходимо найти три неизвестных значения функции, что невозможно сделать, используя одно уравнение. Запишем уравнение (3.1) в виде

$$u_{i-1}^{j+1} - k u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1} = -\frac{1}{\lambda} u_i^j,$$

где  $k = 2 + \frac{1}{\lambda}$ ,  $\lambda = \frac{a\tau}{h^2}$ .

Подставив в это уравнение индексы по оси ОХ, можно записать такую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0^{j+1} - k \cdot u_1^{j+1} + u_2^{j+1} = b_1^j \\ u_1^{j+1} - k \cdot u_2^{j+1} + u_3^{j+1} = b_2^j \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-2}^{j+1} - k \cdot u_{n-1}^{j+1} + u_n^{j+1} = b_{n-1}^j \\ u_{n-1}^{j+1} - k \cdot u_n^{j+1} + u_{n+1}^{j+1} = b_n^j \end{array} \right. , \quad (3.2)$$

где  $b_i^j = -\frac{1}{\lambda} u_i^j$ .

Получена система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) ленточного вида. Система состоит из  $n$  уравнений и имеет  $n+2$  неизвестных. Значения функции  $u_0^{j+1}$  и  $u_{n+1}^{j+1}$  можно получить из граничных условий, а значения  $u_i^j$  – из предыдущего слоя по оси ОУ. Таким образом, сформирована СЛАУ (3.2) из  $n$  уравнений, содержащая  $n$  неизвестных.

Алгоритм численного решения показан на рис. 3.2. В данном алгоритме для каждого слоя по оси ОУ составляется вектор правой части  $b$ . Коэффициенты левой части СЛАУ (3.2) постоянны и не зависят от слоя, поэтому определена постоянная матрица  $A$ , содержащая коэффициенты левой части СЛАУ (3.2). Решение СЛАУ в примере сводится к нахождению произведения обратной матрицы  $A^{-1}$  и вектора  $b$ . Рекомендуется самостоятельно составить и применить алгоритм решения СЛАУ.

Для решения (3.2) рекомендуется также использовать метод прогонки.

Подготовку и отображение решения проведите аналогично предыдущим лабораторным работам. Результаты численного решения уравнения теплопроводности показаны на рис. 3.3.

Самостоятельно проанализируйте результаты решения, проведите расчеты при разных величинах шагов, сравните полученные результаты. Сравните решения уравнения теплопроводности, полученные явным и неявным методами.

Варианты заданий предложены в лабораторной работе № 2.

<pre> for j ∈ 1..nt   for i ∈ 1..nx - 1     <math display="block">b_{i-1} \leftarrow -\frac{h^2 \cdot U_{i,j-1}}{a \cdot \tau}</math> <math display="block">b_0 \leftarrow b_0 - U_{0,j}</math> <math display="block">b_{nx-2} \leftarrow b_{nx-2} - U_{nx,j}</math> <math display="block">t \leftarrow A^{-1} b</math>     for i ∈ 1..nx - 1       <math display="block">U_{i,j} \leftarrow t_{i-1}</math> </pre>	<p>Для каждого шага по времени заполняем вектор правой части СЛАУ</p> <p>Решаем СЛАУ</p> <p>Заполняем текущий слой по времени</p>
--	---

Рис. 3.2. Алгоритм нахождения численного решения уравнения теплопроводности

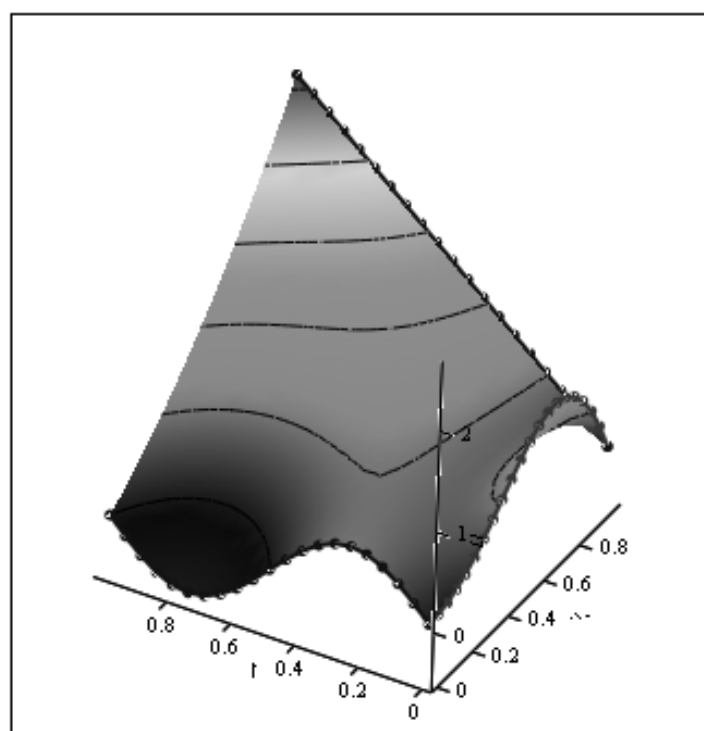


Рис. 3.3. Результаты численного решения уравнения теплопроводности

#### Лабораторная работа № 4

### РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ)

**Цель работы** – приобрести навыки аппроксимации производных второго порядка, а также построения численных методов решения дифференциальных уравнений для задачи теплопроводности.

### *Постановка задачи*

Решить краевую задачу для уравнения теплопроводности в заданной расчетной области при известных граничных условиях.

Дифференциальное уравнение для распределения температуры внутри стержня:

$$\lambda \frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad (4.1)$$

где  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности материала стержня.

Расчетная область:

$$\Omega = [0 \leq x \leq L]. \quad (4.2)$$

Граничные условия:

- при  $x = 0$ :

$$\lambda \frac{du}{dx} + q = 0, \quad (4.3)$$

- при  $x = L$ :

$$\lambda \frac{du}{dx} + \alpha(u - u_{\infty}) = 0, \quad (4.4)$$

где  $\alpha$  - коэффициент теплоотдачи.

Тепловой поток  $q$  положителен, если тепло подводится к стержню.

### *Порядок выполнения работы*

1. Осуществить дискретизацию расчетной области, определить узловые точки и элементы, функции элементов.

2. Реализовать решение уравнения теплопроводности методом конечных элементов (вариационно-разностным методом). Решение выполнить в среде MathCad согласно варианту, указанному преподавателем.

3. Проанализировать полученные результаты.

### Типовой вариант

Запустите расчетную среду Mathcad. Создайте новый документ и сохраните его под своим уникальным именем. Дальнейшее решение выполняется согласно выданному варианту. Введите входные данные:

$\lambda$  - коэффициент теплопроводности материала стержня;

$\sigma$  - площадь поперечного сечения стержня;

$q$  - интенсивность теплового потока;

$\alpha$  - коэффициент теплоотдачи;

$u_{\infty}$  - температура окружающей среды;

$n$  - число элементов.

$$\lambda := 40 \quad \sigma := \pi \cdot 10^{-6} \quad q := 150 \quad \alpha := 100 \quad U_b := 273 \quad n := 5 \quad L := 10^{-2}$$

Затем введите вектор-столбец координат узлов элементов:

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.25 \\ 0.5 \\ 0.75 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Теперь необходимо найти значения глобальной матрицы жесткости. Алгоритм решения представлен на рис. 4.1:

```
GlobMatr(X) :=
for i ∈ 0..(n - 2)
    Ci ←  $\frac{\lambda \cdot \sigma}{2(X_{i+1} - X_i)}$ 
    M0,0 ← C0
    M0,1 ← -C0
    for j ∈ 1..(n - 2)
        Mj,j-1 ← Mj-1,j
        Mj,j ← Cj + Cj-1
        Mj,j+1 ← -Cj
    Mn-1,n-2 ← -Cn-2
    Mn-1,n-1 ← Cn-2 + α · σ
M
```

Рис. 4.1. Блок построения матрицы жесткости

Здесь  $[M]$  – глобальная матрица жесткости.

В данном случае матрица жесткости имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} 2.513 \times 10^{-4} & -2.513 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ -2.513 \times 10^{-4} & 5.027 \times 10^{-4} & -2.513 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & -2.513 \times 10^{-4} & 5.027 \times 10^{-4} & -2.513 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & -2.513 \times 10^{-4} & 5.027 \times 10^{-4} & -2.513 \times 10^{-4} \\ 0 & 0 & 0 & -2.513 \times 10^{-4} & 5.655 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Вектор-столбец решений получаем путем решения системы уравнений, образованной матрицей жесткости, и вектором нагрузки. Программный блок расчета вектора нагрузки и решения системы уравнений показан на рис. 4.2 :

$$\text{Sol}(M) := \begin{cases} f_0 \leftarrow q \cdot \sigma \\ f_{n-1} \leftarrow \alpha \cdot \sigma \cdot Ub \\ \text{solution} \leftarrow M^{-1} \cdot f \\ \text{solution} \end{cases}$$

Рис. 4.2. Алгоритм поиска решения

где  $f$  – вектор нагрузки.

Выводим значения температуры в узловых точках:

$$\text{Sol}(\text{GlobMatr}(X)) = \begin{pmatrix} 282 \\ 280.125 \\ 278.25 \\ 276.375 \\ 274.5 \end{pmatrix}$$

В качестве интерполяционных функций выбираем полиномы первой степени:

$$u := \text{linterp}(X, \text{Sol}(\text{GlobMatr}(X)), X)$$

Проиллюстрируем результат на графике (см. рис. 4.3):

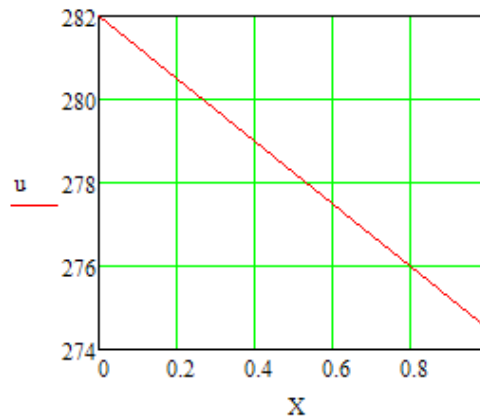


Рис. 4.3. Результаты численного решения уравнения теплопроводности

Варианты заданий представлены в таблице.

Вариант	$n$	$\lambda$	$q$
1	2	72	115
2	4	88	120
3	3	120	125
4	5	65	130
5	6	79	135
6	2	92	140
7	4	96	145
8	3	77	150
9	5	155	155
10	6	140	160
11	7	83	165
12	4	71	170
13	5	130	175
14	5	81	180
15	6	100	185
16	3	78	190
17	8	111	195
18	4	55	210
19	5	59	250
20	2	107	100

## Лабораторная работа № 5

### РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ

*Цель работы* – приобрести навыки аппроксимации производных второго порядка, а также построения численных методов решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа (уравнение эллиптического типа) с использованием метода разностной аппроксимации.

#### *Постановка задачи*

Построить разностную схему и решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в заданной расчетной области при известных граничных условиях.

Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0. \quad (5.1)$$

Расчетная область

$$\Omega = [0 \leq x_1 \leq l_1] \times [0 \leq x_2 \leq l_2]. \quad (5.2)$$

Граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} u(0, x_2) &= v_1(x_2), & 0 \leq x_2 \leq l_2 \\ u(x_1, 0) &= v_2(x_1), & 0 \leq x_1 \leq l_1 \\ u(l_1, x_2) &= v_3(x_2), & 0 \leq x_2 \leq l_2 \\ u(x_1, l_2) &= v_4(x_1), & 0 \leq x_1 \leq l_1 \end{aligned} \right\}. \quad (5.3)$$

#### *Порядок выполнения работы*

1. Построить разностную схему для решения уравнения Лапласа.
2. Реализовать решение уравнения Лапласа с использованием полученной разностной схемы. Решение выполнить в среде Mathcad согласно варианту, указанному преподавателем.
3. Проанализировать полученные результаты.

#### *Типовой вариант*

Запустите расчетную среду Mathcad. Создайте новый документ и сохраните его под своим уникальным именем. Дальнейшее



решение выполняется согласно выданному варианту. В данном примере выбраны такие значения величин и функций:

$$\begin{aligned}v_1(x_2) &= 4x_2, \quad v_2(x_1) = 4x_1(1 - x_1), \\v_3(x_2) &= 2x_2(1 + x_2), \quad v_4(x_1) = 4(2x_1^2 - 2x_1 + 1), \\l_1 &= 1, \quad l_2 = 1.\end{aligned}$$

Введите входные данные:  
границные условия задачи –

$$\begin{aligned}u1(y) &:= 4 \cdot y & u2(x) &:= 4 \cdot x \cdot (1 - x) \\u3(y) &:= 2y \cdot (1 + y) & u4(x) &:= 4(2x^2 - 2x + 1)\end{aligned}$$

ограничения и шаг по осям  $OX_1$  и  $OX_2$  –

$$\begin{aligned}x10 &:= 0 & i1 &:= 1 & h1 &:= 0.1 \\x20 &:= 0 & i2 &:= 1 & h2 &:= 0.1\end{aligned}$$

Подсчитайте количество разбиений сетки для выбранных величин шагов:

$$\begin{aligned}nx1 &:= \frac{i1 - x10}{h1} & nx1 &= 10 \\nx2 &:= \frac{i2 - x20}{h2} & nx2 &= 10\end{aligned}$$

Далее необходимо построить разностную схему для решения уравнения Лапласа. В отличие от предыдущих уравнений данное уравнение не имеет производной по времени, но имеет две пространственные производные. Процесс решения задачи сводится к поиску стационарного решения уравнения (5.1).

Для решения уравнения (5.1) в расчетной области постройте разностную схему, соответствующую изображенному на рис. 5.1 шаблону. Замените производные уравнения (5.1) их разностными приближениями в области сетки  $[i - 1, i + 1] \times [j - 1, j + 1]$ :

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_1^2}, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_2^2}.$$

Поскольку производная данного уравнения по времени нулевая, то нахождение значения функции на следующем слое по времени сводится к нахождению центрального элемента шаблона, показанного на рис. 5.1.

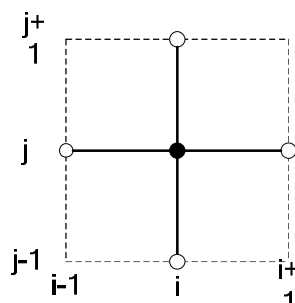


Рис. 5.1. Шаблон разностной схемы

После замены уравнение (5.1) примет такой вид:

$$\frac{u_{i-1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i+1,j}^k}{h_1^2} + \frac{u_{i,j-1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j+1}^k}{h_2^2} = 0. \quad (5.4)$$

Для простоты будем считать, что шаг по обеим осям одинаков, тогда, упростив уравнения, выразим значение  $u_{ij}$  уравнения (5.4) в точке  $[i, j]$ :

$$u_{i,j}^{k+1} = 0,25 \cdot (u_{i-1,j}^k + u_{i+1,j}^k + u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^k). \quad (5.5)$$

Для построения первого приближения решения воспользуйтесь линейной интерполяцией искомых переменных по одной из осей или суперпозицией линейных интерполяций по обеим осям. Поскольку граничные условия постоянны для любой итерации, целесообразно создать шаблонную матрицу, которую в дальнейшем можно будет модифицировать. Итерации повторять до тех пор, пока разница между текущим и предыдущим решениями не станет минимальна. В качестве примера предложен такой критерий остановки алгоритма: итерации продолжают, пока суммы элементов предыдущей и текущей матрицы решения будут различны более чем на 0,01. Алгоритм нахождения численного решения показан на рис. 5.2.

Способы отображения найденного решения описаны в предыдущих работах. В данной лабораторной работе наиболее интересно сравнение начального приближения и решения на последней итерации. Выведите эти две матрицы в форме

трехмерных графиков.

Результат численного решения уравнения Лапласа показан на рис. 5.3.

Самостоятельно проанализируйте решение. Сформируйте разностные схемы при различных шагах по пространственным осям. Сравните полученные результаты.

```

U :=
  for i ∈ 0..nx
    U0i,0 ← u2(i·hx)
    U0i,ny ← u4(i·hx)
  for j ∈ 0..ny
    U00,j ← u1(j·hy)
    U0nx,j ← u3(j·hy)
  U ← U0
  for j ∈ 1..ny - 1
    for i ∈ 1..nx - 1
      Ui,j ← U0,j + (i)  $\frac{U_{nx,j} - U_{0,j}}{nx}$ 
  Usum0 ← U
  Δ ← 1
  iteration ← 0
  while Δ > 0.01
    U1 ← U0
    for j ∈ 1..ny - 1
      for i ∈ 1..nx - 1
        U1i,j ← 0.25 · (Ui+1,j + Ui-1,j + Ui,j+1 + Ui,j-1)
    U ← U1
    Usumiteration+1 ← U
    Δ ← |Summ(Usumiteration+1) - Summ(Usumiteration)|
    iteration ← iteration + 1
  Usum

```

Рис. 5.2. Алгоритм нахождения численного решения уравнения Лапласа

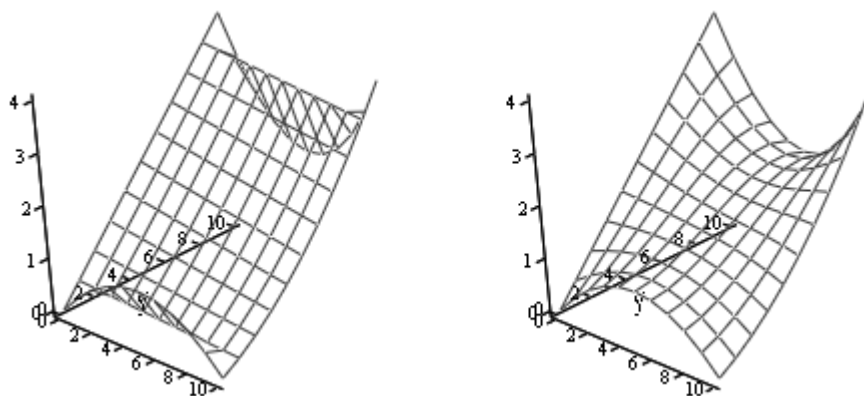


Рис. 5.3. Результаты численного решения уравнения Лапласа

### Варианты заданий

ВАРИАНТ	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$
1	$20y(1-y^2)$	0	0	$20\sin \pi x$
2	$30\sin \pi y$	$20x$	$20y$	$30x(1-x)$
3	$40y^2$	$40(1-x^2)$	$40y^2(1-y)$	0
4	$30y$	$30(1-x^2)$	0	0
5	$25\sin 2\pi y$	$25x(1-x)$	$25\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-y)\right]$	$25\sin\frac{\pi}{2}x$
6	$40y$	$10(x-2)^2$	$10y^2$	$10\sin \pi x$
7	$25y^3$	$25(1-x^2)$	$25(1-y)$	$25x$
8	$10(1-y)$	$20x^2$	20	$10(1+x)$
9	$30y$	$30\cos\frac{\pi}{2}x$	$30\cos\frac{\pi}{2}y$	$x(29+x)$
10	$15y(1-y^2)$	$10\sin \pi x$	$20\sin \pi y$	0
11	$15y$	15	$15y^2$	$20x(1-x)$
12	$30\sqrt{y}$	30	$30y^2$	$10\sin \pi x$
13	$10y$	10	$5(1+y^2)$	$5x$
14	$20y$	$20(1-x)^3$	$15(1-y)$	$15\sin\frac{\pi}{2}x$
15	0	$30x(1-x)$	$30(1-y^2)y$	$30x(1-x)$
16	$6y^2$	$40(1-x)$	0	$30\sin 2\pi x$

17	$25(1-y)$	$30x^2$	$5(5+y)$	25
18	$30y(1-y)$	$20\sqrt{x}$	$20y$	$30(1-x)$
19	$25\sqrt{y}$	$25(1-x)$	0	$10x(1-x)$
20	0	$20x^2(1-x)$	$30(1-y^2)$	$30x$

## Лабораторная работа № 6

### РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА МЕТОДОМ УСТАНОВЛЕНИЯ

*Цель работы* – приобрести навыки аппроксимации производных второго порядка, а также построения численных методов решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа (уравнение эллиптического типа) с использованием метода установления.

#### *Постановка задачи*

Построить разностную схему и решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в заданной расчетной области при известных граничных условиях.

Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0. \quad (6.1)$$

Расчетная область

$$\Omega = [0 \leq x_1 \leq l_1] \times [0 \leq x_2 \leq l_2]. \quad (6.2)$$

Граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} u(0, x_2) &= v_1(x_2), & 0 \leq x_2 \leq l_2 \\ u(x_1, 0) &= v_2(x_1), & 0 \leq x_1 \leq l_1 \\ u(l_1, x_2) &= v_3(x_2), & 0 \leq x_2 \leq l_2 \\ u(x_1, l_2) &= v_4(x_1), & 0 \leq x_1 \leq l_1 \end{aligned} \right\}. \quad (6.3)$$

#### *Порядок выполнения работы*

4. Построить разностную схему для решения уравнения Лапласа.

5. Реализовать решение уравнения Лапласа с использованием полученной разностной схемы. Решение выполнить в среде Mathcad согласно варианту, указанному преподавателем.

6. Проанализировать полученные результаты.

### Типовой вариант

Запустите расчетную среду Mathcad. Создайте новый документ и сохраните его под своим уникальным именем. Дальнейшее решение выполняется согласно выданному варианту. В данном примере выбраны такие значения величин и функций:

$$\begin{aligned}v_1(x_2) &= 4x_2, \quad v_2(x_1) = 4x_1(1 - x_1), \\v_3(x_2) &= 2x_2(1 + x_2), \quad v_4(x_1) = 4(2x_1^2 - 2x_1 + 1), \\l_1 &= 1, \quad l_2 = 1.\end{aligned}$$

Введите входные данные:  
границные условия задачи –

$$\begin{aligned}v1(y) &:= 4 \cdot y & v2(x) &:= 4 \cdot x \cdot (1 - x) \\v3(y) &:= 2 \cdot y \cdot (1 + y) & v4(x) &:= 4 \cdot (2x^2 - 2x + 1)\end{aligned}$$

ограничения и шаг по осям  $Ox_1$  и  $Ox_2$  –

$$\begin{aligned}x10 &:= 0 & l1 &:= 1 & h1 &:= 0.1 \\x20 &:= 0 & l2 &:= 1 & h2 &:= 0.1\end{aligned}$$

Подсчитайте количество разбиений сетки для выбранных величин шагов:

$$\begin{aligned}nx1 &:= \frac{l1 - x10}{h1} & nx1 &= 10 \\nx2 &:= \frac{l2 - x20}{h2} & nx2 &= 10\end{aligned}$$

Задача (5.1) эквивалентна эволюционной задаче

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \\ u|_{\Omega^*} = v(\vec{r}) \end{cases} \quad (6.4)$$

Решение задачи (6.4) при стационарных граничных условиях обладает свойством равномерной сходимости и сходится к решению задачи (6.1).

Далее необходимо построить разностную схему для решения задачи (6.4). Построение разностной схемы проведите аналогично лабораторной работе №5 в соответствии шаблону на рис. 6.1 .

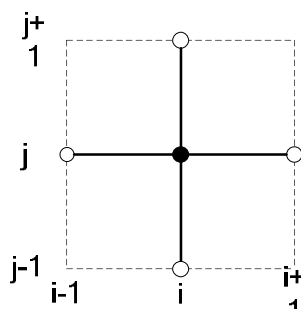


Рис. 6.1. Шаблон разностной схемы

После конечно-разностной аппроксимации производных уравнение (6.4) примет такой вид:

$$u_{i,j}^{k+1} = \tau \left( \frac{u_{i-1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i+1,j}^k}{h_1^2} + \frac{u_{i,j-1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j+1}^k}{h_2^2} \right) + u_{i,j}^k.$$

Для простоты будем считать, что шаг по обеим осям одинаков, тогда:

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{\tau}{h^2} \cdot (u_{i-1,j}^k + u_{i+1,j}^k + u_{i,j-1}^k + u_{i,j+1}^k - 4u_{i,j}^k) + u_{i,j}^k. \quad (6.5)$$

где  $k$  – номер приближения решению.

Шаг по времени  $\tau$  необходимо выбрать, чтобы выполнялось условие устойчивости:  $\tau < \frac{h^2}{2}$ .

Для данного варианта примем такие значения шагов:  $h = 0.1$ ,  $\tau = 0.001$ .

Для построения первого приближения решения воспользуйтесь линейной интерполяцией искомых переменных по одной из осей или суперпозицией линейных интерполяций по обеим осям. Поскольку граничные условия постоянны для любой итерации, целесообразно создать шаблонную матрицу, которую в дальнейшем можно будет модифицировать. Итерации повторять до тех пор, пока разница между текущим и предыдущим решениями не станет минимальна. В качестве примера предложен такой критерий остановки алгоритма: итерации продолжаются, пока суммы элементов предыдущей и текущей матрицы решения будут различны более чем на 0,01. Алгоритм нахождения численного решения показан на рис. 6.2.

Способы отображения найденного решения описаны в предыдущих работах. В данной лабораторной работе наиболее интересно сравнение начального приближения и решения на последней итерации. Выведите эти две матрицы в форме трехмерных графиков.

Результат численного решения уравнения Лапласа показан на рис. 6.3.

Самостоятельно проанализируйте решение. Сформулируйте разностные схемы при различных шагах по пространственным осям, сравните полученные результаты. Сравните решения уравнения Лапласа, полученные методом итераций и методом установления.

Варианты заданий предложены в лабораторной работе № 5.

```

U := for i ∈ 0..nx
      | U0i,0 ← v2(i·hx)
      | U0i,nx ← v4(i·hx)
      for j ∈ 0..ny
        | U00,j ← v1(j·hy)
        | U0ny,j ← v3(j·hy)
      U ← U0
      for j ∈ 1..ny - 1
        for i ∈ 1..nx - 1
          Ui,j ← U0j + i ·  $\frac{U_{nx,j} - U_{0,j}}{nx}$ 
      Usummm0 ← U
      Δ ← 1
      iteration ← 0
      while Δ > 0.01
        U1 ← U0
        for j ∈ 1..ny - 1
          for i ∈ 1..nx - 1
            U1i,j ←  $\frac{\tau}{hx^2} \cdot (U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4 \cdot U_{i,j}) + U_{i,j}$ 
        U ← U1
        Usummmiteration+1 ← U
        Δ ← |Summm(Usummmiteration+1) - Summm(Usummmiteration)|
        iteration ← iteration + 1
      Usummm

```

Рис. 6.2. Алгоритм нахождения численного решения уравнения Лапласа



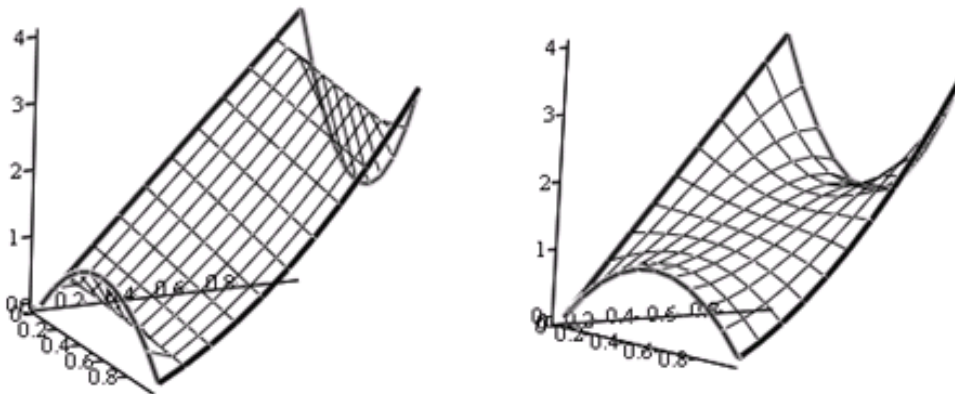


Рис. 6.3. Результаты численного решения уравнения Лапласа

### Лабораторная работа № 7

#### РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ. ЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

*Цель работы* – приобрести навыки аппроксимации производных первого и второго порядков, а также построения численных методов решения смешанной краевой задачи для волнового уравнения (уравнение гиперболического типа) с использованием явной разностной схемы.

#### *Постановка задачи*

Построить разностную схему и решить смешанную краевую задачу для волнового уравнения в заданной расчетной области при известных граничных и начальных условиях.

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (7.1)$$

где  $a = \text{const}$  – скорость распространения волны.

Расчетная область

$$\Omega = [0 \leq x \leq l] \times [0 \leq t \leq T]. \quad (7.2)$$

Дополнительные условия:

$u(x, 0) = \mu_1(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \mu_2(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$  – начальные условия;

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= v_1(t) \\ u(l, t) &= v_2(t) \end{aligned} \right\}, 0 \leq t \leq T \text{ – граничные условия.} \quad (7.3)$$

### Порядок выполнения работы

1. Построить разностную схему для решения волнового уравнения.
2. Реализовать решение волнового уравнения с использованием полученной разностной схемы. Решение выполнить в среде Mathcad согласно варианту, указанному преподавателем.
3. Проанализировать полученные результаты.

### Типовой вариант

Запустите расчетную среду Mathcad. Создайте новый документ и сохраните его под своим уникальным именем. Дальнейшее решение выполняется согласно выданному варианту. В данном примере выбраны такие значения величин и функций:

$$\begin{aligned}\mu_1(x) &= (x + x^2) \cdot \sin(\pi \cdot x), \quad \mu_2(x) = 0,2\sqrt{x}, \\ \nu_1(t) &= 0,7 \cdot \sin(4\pi \cdot t), \quad \nu_2(t) = 4 \cdot t, \\ a &= 1, \quad l = 1, \quad T = 1.\end{aligned}$$

Введите входные данные:

начальные и граничные условия задачи –

Начальные условия:  $\mu_1(x) := (x + x^2) \cdot \sin(\pi \cdot x)$

$$\mu_2(x) := 0.2 \cdot \sqrt{x}$$

Граничные условия

На первом слое по X:  $\nu_1(t) := 0.5 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t)$

На последнем слое по X:  $\nu_2(t) := 2.6 \cdot t$

необходимые константы –

Коэффициент  $a$ :  $a := 1$

Ограничения:  $l := 1$   $T := 1$

Выберите величины шагов  $h$  (по оси  $x$ ) и  $\tau$  (по оси  $t$ ). При выборе данных величин следует руководствоваться условием устойчивости метода (условие Куранта - Фридрихса - Леви):

$$\frac{a\tau}{h} \leq 1. \quad (7.4)$$

Для данного варианта примем такие значения шагов:

$$h := 0.1$$

$$\tau := 0.001$$

Проверьте условия устойчивости (7.4):

$$\frac{a \cdot \tau}{h} = 0.1$$

Подсчитайте количество разбиений сетки для выбранных величин шагов:

$$nx := \frac{1}{h}$$

$$nt := \frac{T}{\tau}$$

$$nx = 10$$

$$nt = 1 \times 10^3$$

Далее необходимо построить разностную схему для решения волнового уравнения. Для этого замените производные уравнения (7.1) их разностными приближениями в прямоугольнике сетки  $[i-1, i+1] \times [j-1, j+1]$  (рис. 7.1):

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{i,j} \approx \frac{u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{\tau^2}; \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} \approx \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2}.$$

Для решения уравнения постройте разностную схему, соответствующую изображенному на рис. 7.1 шаблону.

Заменяя частные производные уравнения (7.1) на их соответствующие аппроксимации, получим уравнение

$$\frac{u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2}.$$

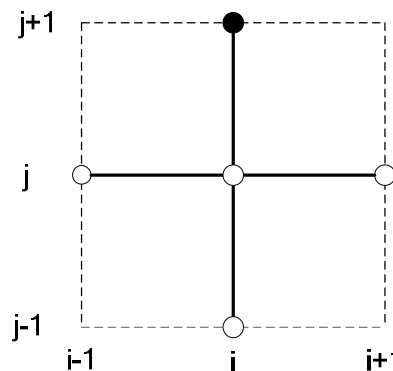


Рис. 7.1. Шаблон разностной схемы

Выразив из этого уравнения  $u_i^{j+1}$ , получим решение волнового уравнения в явном виде

$$u_i^{j+1} = \frac{a^2 \tau^2}{h^2} (u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j) + 2u_i^j - u_i^{j-1}. \quad (7.5)$$

Для построения матрицы решения первую ее строку найдите, используя начальное условие  $u(x, 0) = \mu_1(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$ . Для поиска

значений функции в крайних положениях (при  $x=0$  и  $x=l$ ) используйте граничные условия. В отличие от предыдущих лабораторных работ для нахождения значений функции на следующем временном слое необходимо знать ее значения на двух предыдущих слоях.

Запишем для  $t=0$  уравнение производной

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau}.$$

Принимая во внимание, что  $u_t(x_i, 0) = \mu_2(x_i)$ , уравнение для нахождения значений функции на дополнительном слое будет выглядеть так:

$$u_i^1 = u_i^0 + \tau \mu_2(x).$$

Алгоритм нахождения решения показан на рис. 7.2.

Для отображения найденного решения воспользуйтесь инструментом построения трехмерных графиков среды Mathcad. Вызвать данный инструмент можно выбором пиктограммы “*Surface plot*” на панели инструментов “*Graph*” или нажатием клавиш “*Ctrl+2*”.

$U :=$	<pre> for i ∈ 0..nx             <math>U_{i,0} \leftarrow \mu 1(i \cdot h)</math>       <math>U_{i,1} \leftarrow U_{i,0} + \tau \cdot \mu 2(i \cdot h)</math> for j ∈ 0..nt             <math>U_{0,j} \leftarrow u 1(j \cdot \tau)</math>       <math>U_{nx,j} \leftarrow u 2(j \cdot \tau)</math> for j ∈ 1..nt - 1     for i ∈ 1..nx - 1         <math display="block">U_{i,j+1} \leftarrow \frac{a \cdot \tau^2}{h^2} (U_{i+1,j} - 2 \cdot U_{i,j} + U_{i-1,j}) + 2 \cdot U_{i,j} - U_{i,j-1}</math> </pre>	<p>Заполняем начальные и граничные условия</p> <p>По шаблону заполняем матрицу решения уравнения</p>
--------	---	--

Рис. 7.2. Алгоритм нахождения решения уравнения теплопроводности.

Для корректного отображения полученного результата в графическом виде необходимо подготовить данные для отображения. Для наглядности кроме поверхности решения отобразите также граничные и начальные условия.

Подготовьте данные для отображения результатов расчета

аналогично лабораторной работе № 2.

Дополнительно выведите второй временной слой решения волнового уравнения. Пример подготовки данных приведен ниже:

$$\text{LineM2func}(a) := \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \cdot a \\ U_{nx,a} \end{pmatrix} \quad \text{LineM2} := \text{CreateSpace}(\text{LineM2func}, 0, nt, nt + 1)$$

Результаты численного решения волнового уравнения показаны на рис. 7.3.

Самостоятельно проанализируйте решение. Проведите расчет при разных величинах шагов, сравните полученные результаты.

Варианты заданий даны в лабораторной работе № 2 и в таблице.

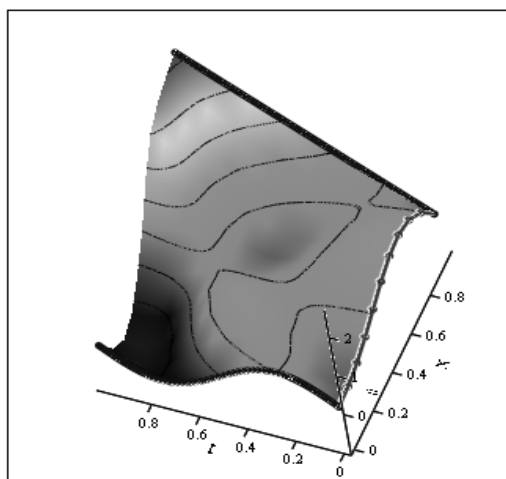


Рис. 7.3. Результат численного решения волнового уравнения.

#### Варианты заданий

Вариант	$\mu_2(x)$	Вариант	$\mu_2(x)$	Вариант	$\mu_2(x)$
1	$4x(2x+1)$	8	$8x$	15	$32x(1-x)$
2	0	9	$32x$	16	$0,7 \sin(4\pi x)$
3	$16x(1+x)$	10	$6 \sin(2\pi x)$	17	$32x(1-2x)$
4	$16x$	11	$16x$	18	$0,5 \sin(3\pi x)$
5	$0,6 \sin(3\pi x)$	12	$8x(1+x)$	19	$8x(1+x)$
6	0	13	$32x$	20	0
7	$32x(1-x)$	14	$0,5 \sin(2\pi x)$		

## Лабораторная работа № 8

### РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ. НЕЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

*Цель работы* – приобрести навыки аппроксимации производных первого и второго порядков, а также построения численных методов решения смешанной краевой задачи для волнового уравнения (уравнение гиперболического типа) с использованием неявной разностной схемы.

#### *Постановка задачи*

Построить неявную разностную схему и решить смешанную краевую задачу для волнового уравнения в заданной расчетной области при известных граничных и начальных условиях.

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (8.1)$$

где  $a = \text{const}$  – скорость распространения волны.

Расчетная область

$$\Omega = [0 \leq x \leq l] \times [0 \leq t \leq T]. \quad (8.2)$$

Дополнительные условия:

$u(x, 0) = \mu_1(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \mu_2(x)$ ,  $0 \leq x \leq l$  – начальные условия;

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= v_1(t) \\ u(l, t) &= v_2(t) \end{aligned} \right\}, 0 \leq t \leq T \text{ – граничные условия.} \quad (8.3)$$

#### *Порядок выполнения работы*

4. Построить неявную разностную схему для решения волнового уравнения.

5. Реализовать решение волнового уравнения с использованием полученной разностной схемы. Решение выполнить в среде Mathcad согласно варианту, указанному преподавателем.

6. Проанализировать полученные результаты.

#### *Типовой вариант*

Запустите расчетную среду Mathcad. Создайте новый документ и сохраните его под своим уникальным именем. Дальнейшее решение выполняется согласно выданному варианту. В данном примере выбраны такие значения величин и функций:

$$\mu_1(x) = (x + x^2) \cdot \sin(\pi \cdot x), \mu_2(x) = 0,2\sqrt{x},$$

$$v_1(t) = 0,7 \cdot \sin(4\pi \cdot t), v_2(t) = 4 \cdot t,$$

$$a = 1, l = 1, T = 1.$$

Введите входные данные:

начальные и граничные условия задачи –

Начальные условия:  $\mu_1(x) := (x + x^2) \cdot \sin(\pi \cdot x)$

$$\mu_2(x) := 0,2 \cdot \sqrt{x}$$

Граничные условия

На первом слое по X:  $v_1(t) := 0,5 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t)$

На последнем слое по X:  $v_2(t) := 2,6 \cdot t$

необходимые константы –

Коэффициент  $a$ :  $a := 1$

Ограничения:  $l := 1$   $T := 1$

Для данного варианта примем такие значения шагов:

$$h := 0,01$$

$$\tau := 0,01$$

Подсчитайте количество разбиений сетки для выбранных величин шагов:

$$nx := \frac{1}{h}$$

$$nx = 10$$

$$nt := \frac{T}{\tau}$$

$$nt = 1 \times 10^3$$

Далее необходимо построить неявную разностную схему для решения волнового уравнения. Для этого замените производные уравнения (6.1) их разностными приближениями в прямоугольнике сетки  $[i-1, i+1] \times [j-1, j+1]$  согласно шаблону, изображенному на рис. 6.1. Пространственную производную в этом случае заменяют средним арифметическим производных по оси OX на  $j-1$  и  $j+1$  слоях по времени:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{i,j} \approx \frac{u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{\tau^2},$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} \approx \frac{1}{2h^2} \left[ (u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}) + (u_{i-1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i+1}^{j-1}) \right].$$

Заменяя производные и выделив элементы последнего временного слоя, уравнение (8.1) запишем в виде

$$u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} \left( 1 + \frac{1}{\lambda} \right) + u_{i+1}^{j+1} = - (u_{i-1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i+1}^{j-1}) + \frac{2}{\lambda} (u_i^{j-1} - 2u_i^j),$$

где  $\lambda = \frac{a^2 \tau^2}{h^2}$ .

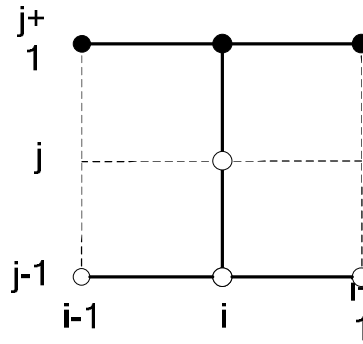


Рис. 8.1. Шаблон неявной разностной схемы

Дальнейшее решение аналогично решению, описанному в лабораторной работе № 3. Значения функции на дополнительном временном слое находятся аналогично лабораторной работе № 7. Алгоритм решения показан на рис. 8.2.

```

for j ∈ 2..nt
  for i ∈ 1..nx - 1
    bi-1 ←  $\frac{2h^2}{a^2 \cdot \tau^2} (U_{i,j-2} - 2U_{i,j-1}) - (U_{i-1,j-2} - 2U_{i-1,j-1} + U_{i+1,j-2})$ 
    b0 ← b0 - U0,j
    bnx-2 ← bnx-2 - Unx,j
    t ← A-1b
    for i ∈ 1..nx - 1
      Ui,j ← ti-1
  U

```

Для каждого шага по времени заполняем вектор правой части СЛАУ  
Решаем СЛАУ  
Заполняем текущий слой по времени

Рис. 8.2. Алгоритм нахождения решения волнового уравнения



Подготовку и отображение численного решения проведите аналогично предыдущим лабораторным работам. Результаты численного решения волнового уравнения показаны на рис. 8.3.

Самостоятельно проанализируйте решение. Проведите расчеты при разных величинах шагов, сравните полученные результаты. Сравните решения волнового уравнения явным и неявным методами.

Варианты заданий даны в лабораторной работе №7.

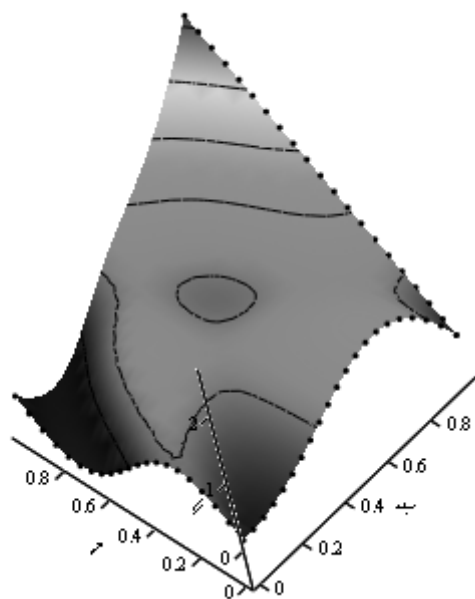


Рис. 8.3. Результаты численного решения волнового уравнения

## ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ОРГАНИЗАЦИИ ИНЖЕНЕРНОГО АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

Сложившееся разделение труда требует привлечения различных категорий специалистов:

- математик-аналитик;
- специалист в области прикладной математики;
- системный программист;
- специалист предметной области.

Общие принципы организации инженерного анализа процессов и систем сформулированы в законах диалектики:

- 1) изучение физической картины рассматриваемого объекта;
- 2) обзор методов, используемых для анализа объекта;
- 3) формулировка предмета и цели исследования;
- 4) постановка задачи исследования, включающая в себя краткие описания:

- а) объекта исследования, ограничений и входных данных (начальные, граничные условия, информация о коэффициентах уравнений);
- б) цели исследования и формы представления выходных данных;
- в) средств достижения цели (определяется выбранным методом познания).

Виды методов познания:

- математическое моделирование процессов (включает в себя построение математической модели и анализ свойств решений);
- физическое моделирование (включает в себя планирование, реализацию и анализ данных физического эксперимента);

5) планирование и реализация этапов разработки средств достижения целей;

- 6) описание результатов исследования;
- 7) анализ области применения полученных результатов;
- 8) анализ ограничений применения модели.

Известны такие *этапы построения математической модели*:

1. *Формализация* представления объекта исследования и *структуризация математической модели*, адекватной реальному физическому процессу на основе процедур

агрегации и декомпозиции:

- а) выбор расчетной схемы – упрощенного математического представления явления, адекватного реальному;
- б) составление основных уравнений и введение упрощающих допущений;
- в) выбор расчетной области и входных данных;
- г) анализ корректности математической постановки задачи.

**Определение.** Задача является корректно поставленной (по Адамару), если решение задачи существует, единственно и устойчиво к входным данным.

*2. Выбор метода представления и алгоритма численного решения задачи с использованием метода дедукции (путем приведения исходной задачи к ряду подзадач, для которых методы решения известны):*

- а) выбор разностного оператора;
- б) оценка порядка аппроксимации полученной разностной схемой исходных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП);
- в) проверка на устойчивость разностной схемы;
- г) выбор алгоритмов численного решения полученных подзадач;
- д) оценка порядка точности результата (верификация полученной модели – сравнение с известными решениями или полученными экспериментальными результатами);
- е) проверка корректности алгоритма численного решения.

*Проверка на корректность* включает в себя анализ согласованности, устойчивости, точности, сходимости. Этот анализ можно проводить аналитическими методами и на основе численного эксперимента.

*Оценка порядка точности результатов* (верификация модели) включает в себя:

- сравнение с известными решениями;
- сравнение с данными эксперимента;
- определение абсолютной и относительной погрешностей.

*Анализ сходимости алгоритмов решения*, основанных на использовании итерационных процедур, включает в себя:

- анализ равномерной ограниченности последовательности приближений;
- проверку равномерной сходимости последовательности приближений;

– анализ существования единственного предела, включая анализ гладкости приближения.

## Приложение 2

### МЕТОД НАПРАВЛЕННЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

*Формирование плана экспериментальных исследований:*

- 1) параметризация физического явления, анализ размерности;
- 2) построение фундаментальной системы параметров подобия (в соответствии с теорией подобия и размерностей);
- 3) корреляционный анализ (выявление функциональной связи между параметрами, определение влияния каждого параметра подобия, выделение определяющих);

4) регрессионный анализ. Его задачи:

- а) построение множественного уравнения регрессии;
- б) оценка значимости полученного уравнения регрессии;
- в) определение границ интервалов достоверности.

Обратная задача регрессионного анализа – восстановление входных данных:

- а) задача идентификации математической модели – определение коэффициентов;
- б) задача восстановления граничных условий;
- в) задача восстановления начальных данных;

5) построение модели, адекватной рассматриваемому физическому процессу: формальные модели строятся методом регрессионного анализа, эталонные модели – на основе математического представления объекта исследования;

6) оценка погрешности измерений (прямых и косвенных);

7) планирование многофакторного эксперимента.

Возвращаемся к п. 3, пока не будет найдено рациональное решение;

8) дисперсионный анализ (верификация модели).

Верификация модели – сопоставление результатов, полученных с помощью разработанной модели (эталонной или формальной), с данными экспериментов.

Верификация включает в себя:

– определение относительной погрешности при сравнении с результатами экспериментов или результатами, полученными при решении тестовых задач;

– проверку гипотезы о различии дисперсий (анализ

адекватности модели);

– проверку гипотезы о среднем (при сравнении различных объектов).

*Критерии качества математических моделей.*

Обычно используются такие критерии:

– абсолютная  $\Delta f$  и относительная  $\Delta f^0$  погрешности;

– остаточная погрешность  $S_{\text{ост}}^2$ ;

– число Фишера  $F(n, P) > F_{\text{кр}}$ , где  $F(n, P) = \frac{\sigma^2}{S_{\text{ост}}^2}$ ;

– информационная сложность модели и алгоритма.

Подход к решению задачи выбирается исходя из типа исходных уравнений, а тип уравнения – на основе качественной теории дифференциальных уравнений.

**Определение.** Информационная сложность моделей и алгоритмов – необходимое количество операций  $N(n, \varepsilon)$ , которые нужно выполнить для получения результата с наперед заданной точностью  $\varepsilon$  в задачах с размерностью  $n$ , где под размерностью понимается количество входных данных.

Необходимый уровень математической модели (0, 1, 2, 3-й), а также ее полнота (степень учета всех свойств рассматриваемого явления) должны определяться погрешностью эксперимента  $\sigma$ .

Обычно используются такие *классификационные признаки методов решения задач математической физики*:

а) тип представления задачи. Типу соответствует известный класс задач:

- теории аналитических функций;
- теории ДУЧП;
- граничных интегральных уравнений;
- вариационные;

б) род уравнений. Для ДУЧП – методы решения уравнений гиперболического, параболического, эллиптического типов;

в) вид постановки задачи.

Для поставленной задачи формируется методология ее решения, основанная на различных семействах способов представления:

- расчетной области;
- решений;
- входных данных (начальных, граничных условий,

коэффициентов уравнений);

– ограничений.

Например, в теории аналитических функций известны методы годографа, интегральных уравнений, наложения течений, конформного отображения канонических областей.

Для ДУЧП известны семейства способов представления:

– расчетной области как непрерывной областью или множеством дискретных точек (узлов) в  $n$ -мерном пространстве;

– решений в форме непрерывных и сеточных функций.

Выбранной форме представления решений обычно соответствует своя нормальная форма записи уравнений. Например, для ДУЧП известны: неконсервативная, консервативная и интегральная формы записи уравнений.

Иерархическое представление методов численного решения уравнений математической физики изображено на рис. П.2.1.

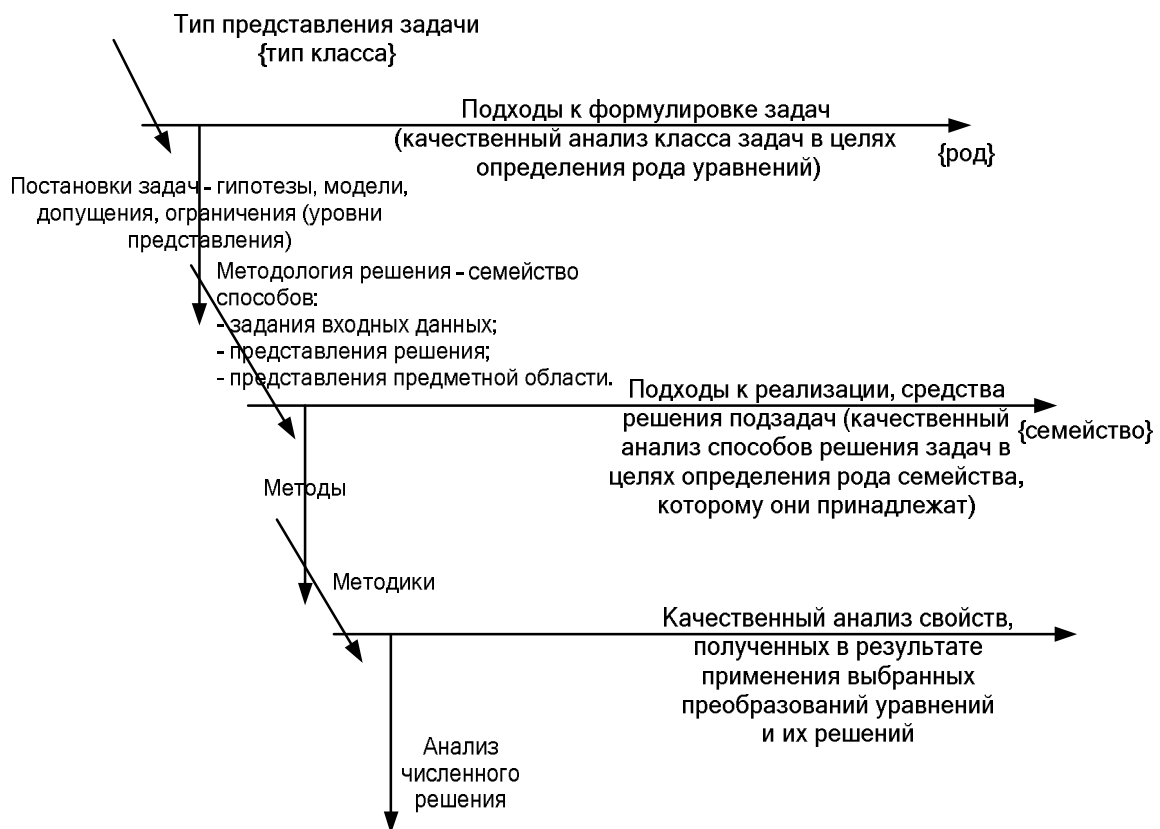


Рис. П.2.1. Иерархическое представление методов численного решения уравнений математической физики (структуризация→стратификация→декомпозиция) {Тип→класс→род→вид→семейство}

### СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ СКВОЗНОГО СЧЕТА

*Методы*, основанные на дискретизации расчетной области сеткой и вычислении сеточных функций, принято называть сеточными.

В группу сеточных методов входят методы, выделяющие разрывы и методы сквозного счета; в свою очередь в подгруппу методов сквозного счета входят конечно-разностные методы и методы взвешенных невязок.

Доведенную до практического использования систему математических операций, образующих метод, принято называть методикой.

Методика решения включает в себя метод представления решения и алгоритм численного решения задачи.

Конечно-разностные методы (МКР) решения ДУЧП включают в себя построение:

- расчетных сеток;
- аппроксимации производных конечными разностями;
- разностных схем – сеточных аналогов исходных ДУЧП с последующим анализом их свойств (согласованность, устойчивость, сходимость, точность);
- алгоритма численного решения сеточных уравнений.

В настоящее время в инженерной практике получили распространение такие конечно-разностные методы решения ДУЧП.

*Методы с неявным наличием диссипативных свойств.*

Варьируя сеточным шаблоном и типом конечных разностей, можно менять порядок аппроксимации производных в ДУЧП.

Исходя из типов используемого шаблона и конечных разностей для построения разностных схем, здесь можно выделить такие методы:

- сеточно-характеристические;
- $n$ -слойные (явные, неявные) вдоль координатных линий;
- повышенного порядка аппроксимации, основанные на использовании монотонных схем (TVD, ENO).
- методы, в разностные схемы которых явно вводятся диссипативные члены (псевдовязкость).

*Интегро-интерполяционный метод.*

Согласно этому методу для получения разностных схем выполняют последовательность математических операций:



- интегрируют ДУЧП в пределах ячейки расчетной сетки;
- подынтегральные выражения аппроксимируют функциями из класса интегрируемых;
- аппроксимируют интегральные уравнения.

*Методы расщепления* основаны на идее расщепления сложных операторов, аппроксимирующих операторы исходной задачи на простейшие, в результате чего интегрирование исходных уравнений сводится к последовательному интегрированию уравнений более простой структуры. Для получения разностных схем обычно используют расщепление:

- по времени (n-слойные), пространственным направлениям (приближенная факторизация), физическим процессам;
- матриц с выделением диагональных матриц.

Полученные одним из перечисленных методов разностные схемы (системы сеточных уравнений) обычно решаются численно. Для этих целей используются алгоритмы численных решений систем линейных (нелинейных) алгебраических уравнений. В настоящее время в инженерной практике получили распространение такие алгоритмы их решения:

- прямые (исключения Гаусса, прогонки, разложений) для систем линейных алгебраических уравнений;
- итерационные (Гаусса – Зейделя, релаксации, неявный: переменных направлений, факторизации) для систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений.

*Методы взвешенных невязок* (МВН) концептуально отличаются от методов конечных разностей (МКР) наличием введенного предположения, что любую непрерывную функцию можно аппроксимировать дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей.

В настоящее время в инженерной практике для решения ДУЧП получил распространение *метод конечных элементов* (МКЭ). МКЭ характеризуется такими основными этапами его реализации:

- расчетная область делится на расчетные ячейки (конечные элементы);
- решения аппроксимируются функциями специального вида на каждом элементе и, следовательно, во всей области. Параметры этих аппроксимаций становятся неизвестными параметрами задачи;
- подстановка аппроксимаций в определяющие (или эквивалентные им) уравнения.



Согласно невариационной постановке Б.Г. Галеркина необходимо, чтобы невязки на каждом элементе были ортогональны ко всем базисным функциям. Согласно описанной последовательности математических операций осуществляется переход от ДУЧП к их интегральной форме, а затем после выполнения интегрирования – к системе алгебраических уравнений. Матрицы полученных таким образом разностных схем являются матрицами ленточного типа, симметричными и положительно определенными, что существенно упрощает поиск решения систем алгебраических уравнений.

*Методы конечного объема (МКО)* являются гибридными методами, объединяющими черты интегро–интерполяционного и конечных элементов метода. Отличие МКО от перечисленных состоит в том, что согласно этому методу разностная схема строится на основе физических законов сохранения, следствием которых являются исходные ДУЧП. Сначала этот закон сохранения формулируется словесно для некоторого контрольного объема, окружающего узел разностной сетки, а потом записывается математически с учетом дискретного представления функций в узлах сетки.

Если ДУЧП записаны в дивергентной форме, то законы сохранения можно получить, интегрируя эти уравнения по контрольному объему (используя формулу Гаусса – Остроградского). Полученные таким образом разностные схемы являются консервативными. Использование консервативных разностных схем при численном решении ДУЧП обычно приводит к существенному повышению точности расчета как разрывных, так и гладких решений.

В спектральных методах аппроксимирующие и весовые функции выбираются ортогональными (полиномы Чебышева, ряды Фурье). Спектральные методы позволяют строить приближенные решения с более высокой точностью по сравнению с МКЭ.

В целом перечисленные методы покрывают широкий класс инженерных задач гидрогазодинамики, анализа напряжений.

**ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ.  
МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ.  
РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ КАК ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
В ПРОСТРАНСТВЕ СЕТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ.  
АППРОКСИМАЦИЯ, СОГЛАСОВАННОСТЬ, УСТОЙЧИВОСТЬ,  
СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ**

Рассмотрим построение разностной схемы для уравнения переноса.

*Постановка задачи* (смешанная краевая задача):

$$\begin{cases} u_t + au_x = f(t, x), a > 0; \\ u(x, 0) = \mu(x); \\ u(t, 0) = v(t). \end{cases} \quad (\text{П. 4.1})$$

Задача с расчетной областью в виде верхней полуплоскости и заданными НУ называется задачей Коши.

Дискретизация расчетной области изображена на рис. П. 4.1.

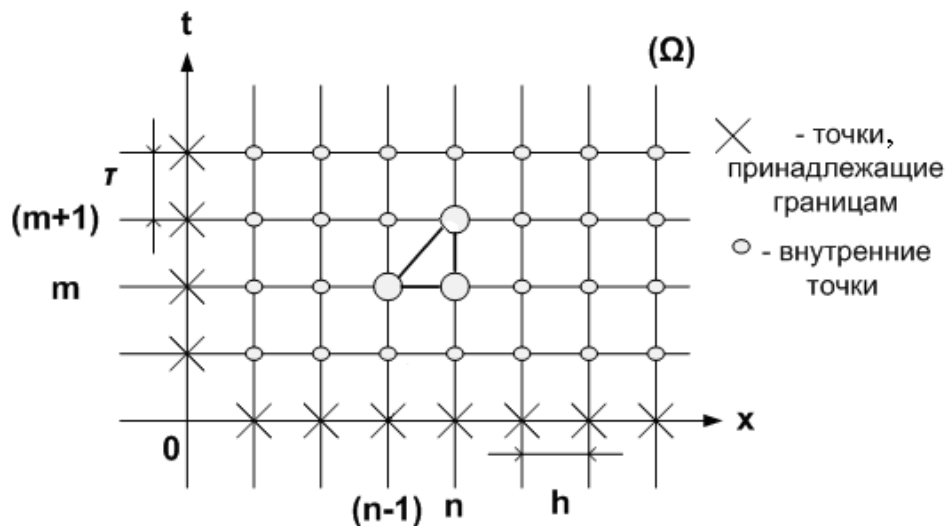


Рис. П.4.1. Расчетная область

*Формализация представления данных:*

$$\begin{aligned}
u_h &: \{(x_n, t_m, y_n^m)\}, f_h : \{(x_n, t_m, \varphi_n^m)\}, \\
\mu_h &: \{(x_n, \chi_n)\}, v_h : \{(t_m, \xi^m)\}, \\
n &= 0, \dots, N; m = 0, \dots, M,
\end{aligned}$$

где  $u, f, \mu$  и  $v$  – сеточные функции (приближенные значения  $u$ , полученные в узлах расчетной области).

*Аппроксимация дифференциальных операторов.*

Запишем дифференциальные операторы уравнения переноса для шаблона  $\{(n-1, m), (n, m), (n, m+1)\}$ :

$$\begin{aligned}
u_t(x_n, t_m) &= \frac{y_n^{m+1} - y_n^m}{\tau} + O(\tau); \\
u_x(x_n, t_m) &= \frac{y_n^m - y_{n-1}^m}{h} + O(h),
\end{aligned}$$

где  $\tau$  – шаг по времени;  $h$  – шаг по  $x$ .

Построение конечно-разностной схемы (КРС):

$$\begin{cases} Lu = f, \\ Ru = \mu, \\ Gu = v; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_h u_h = f_h, \\ R_h u_h = \mu_h, \\ G_h u_h = v_h, \end{cases}$$

где  $L_h$  – сеточный оператор;  $u_h$  – сеточная функция.

Для уравнения (П. 4.1) КРС имеет вид

$$\begin{aligned}
\left( \frac{y_n^{m+1} - y_n^m}{\tau} \right) + a \left( \frac{y_n^m - y_{n-1}^m}{h} \right) &= \varphi_n^m, \\
y_n^0 &= \chi_n, y_0^m = \xi^m; \\
\forall n &= 1, \dots, N, m = 1, \dots, M.
\end{aligned} \tag{П.4.2}$$

В данном случае КРС является системой алгебраических уравнений. С ее помощью определяем решение внутри области.

*Выбор метода представления решения* (алгоритм численного решения задачи).

Методом дедукции для  $m = 1, n = 1, \dots, N$ ;  $m = 2, n = 1, \dots, N$ ; и т.д. получим рекуррентную формулу

$$y_n^{m+1} = \left(1 - a \frac{\tau}{h}\right) y_n^m + \frac{a\tau}{h} y_{n-1}^m + \tau \varphi_n^m, \quad (\text{П.4.3})$$

$$y_n^0 = \chi_n, \quad y_0^m = \xi^m.$$

*Анализ корректности метода представления решения.*

1. Оценка ошибки решения (точность решения). Представим приближенное решение в виде  $y_n^m = u_n^m + \delta y_n^m$ , где  $u_n^m = u(x_n, t_m)$  – точное решение.

Подставим приближенное решение в (П.4.2) и получим формулу

$$\frac{\delta y_n^{m+1} - \delta y_n^m}{\tau} + a \frac{\delta y_n^m - \delta y_{n-1}^m}{h} = \underbrace{\left\{ \varphi_n^m - \left[ \frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\tau} + a \left( \frac{u_n^m - u_{n-1}^m}{h} \right) \right] \right\}}_{\psi_h = O(\tau, h)}. \quad (\text{П.4.4})$$

Далее, выделив явно  $\delta y_n^{m+1}$ , получим оценку ошибки решения

$$\delta y_n^{m+1} = \left(1 - \frac{a\tau}{h}\right) \delta y_n^m + \frac{a\tau}{h} \delta y_{n-1}^m + \tau O(\tau, h). \quad (\text{П.4.5})$$

2. Оценка порядка аппроксимации конечно-разностной схемой исходного ДУЧП по отношению к его точному решению  $u$ . Определим невязку  $\psi_h = L_h u - f_h$ . Подставив

$$\left. \begin{aligned} u_n^{m+1} &= u_n^m + (u_t)_n^m \tau + O(\tau^2) \\ u_{n-1}^m &= u_n^m - (u_x)_n^m h + O(h^2) \end{aligned} \right\} \text{ в (П.4.2), получим уравнение}$$

$$L_h u = \underbrace{\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\tau} + a \left( \frac{u_n^m - u_{n-1}^m}{h} \right)}_{L_h u} = \underbrace{(u_t + a u_x)_n^m}_{\varphi_n^m} + O(\tau, h),$$

откуда найдем оценку невязки ДУЧП:

$$\psi_h = L_h u - f_h = O(\tau, h); \quad \|\psi_h\|_{h \rightarrow 0}^{\tau \rightarrow 0} \rightarrow 0.$$

Следовательно, КРС аппроксимирует исходное ДУЧП.

3. Анализ устойчивости КРС. Рассмотрим два случая:

а)  $\left(1 - \frac{a\tau}{h}\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{a\tau}{h} \leq 1$  (условие КФЛ). Из (П.4.5) получим:

$$|\delta y_n^{m+1}| \leq \left(1 - \frac{a\tau}{h}\right) |\delta y_n^m| + \frac{a\tau}{h} |\delta y_{n-1}^m| + \tau O(\tau, h) \leq$$

$$\leq \max(|\delta y_n^m|, |\delta y_{n-1}^m|) + \tau O(\tau, h). \quad (\text{П.4.6})$$

Введем норму  $\delta y^m: \|\delta y^m\|_C = \max_n |\delta y_n^m|$  (чебышевская норма).

Из (П.4.6) следует, что  $\|\delta y^{m+1}\| \leq \|\delta y^m\| + \tau O(\tau, h)$ .

Пусть выполнено  $M$  временных шагов, начиная с  $m=0$ :

$$\|\delta y^M\| \leq \underbrace{\|\delta y^0\|}_{=0} + M\tau O(\tau, h).$$

Следовательно, с ростом  $M$  погрешность не возрастает, а при устремлении  $h$  и  $\tau$  к нулю решение, полученное с помощью КРС, сходится к точному решению ДУЧП.

В силу точной аппроксимации ГУ и НУ:

$$(\text{ГУ}): \delta y_n^0 = y_n^0 - \chi_n \equiv 0 \quad \{R_h u - \mu_h = \eta_h \equiv 0; \|\eta_h\|^* \equiv 0\},$$

$$(\text{НУ}): \delta y_0^m = y_0^m - \xi^m \equiv 0 \quad \{G_h u - v_h = \zeta_h \equiv 0; \|\zeta_h\|^* \equiv 0\}.$$

#### Выводы:

– основываясь на проведенном анализе метода представления решения (оценки невязки и точности, устойчивости), запишем норму:

$$\|\psi_h\|' \xrightarrow[\substack{\tau \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}]{} 0, \quad \|\psi_h\|' = O(\tau, h);$$

– устойчивость следует из утверждения, что при  $\tau \rightarrow 0$ ,  $M$  – ограничено:

$$\|\delta y^M\| \leq \underbrace{M\tau}_C \underbrace{O(\tau, h)}_{\|\psi_h\|'} = C \|\psi_h\|' \rightarrow 0.$$

Здесь используются такие обозначения: " $\|\ \|'$ " – по внутренним узлам; " $\|\ \|^{*}$ " – по граничным узлам;

$$\text{б) } \left(1 - \frac{a\tau}{h}\right) < 0.$$

Пусть  $\forall(m, n): \delta y_n^m = (-1)^n \varepsilon$ , где  $\varepsilon = \tau O(\tau, h)$ . Из (П.4.5), отбросив член  $\tau O(\tau, h)$ , получим

$$\begin{aligned}\delta y_n^{m+1} &= \left(1 - \frac{a\tau}{h}\right)(-1)^n \varepsilon + \frac{a\tau}{h}(-1)^{n-1} \varepsilon = \\ &= \left(1 - 2\frac{a\tau}{h}\right)(-1)^n \varepsilon = \left(1 - a\frac{a\tau}{h}\right)\delta y_n^m.\end{aligned}\quad (\text{П.4.7})$$

Подставляя (П.4.7) в (П.4.5)  $M$  раз запишем

$$\delta y_n^{m+M} = \left(1 - \frac{2a\tau}{h}\right)^M (-1)^n \varepsilon.$$

Если  $\left|1 - 2\frac{a\tau}{h}\right| < 1$ , ошибка затухает, иначе возникает численная неустойчивость решения.

#### 4. Анализ согласованности разностной схемы и ДУЧП.

Разностная схема согласована с ДУЧП, если ее решение удовлетворяет свойствам точного решения ДУЧП.

Если  $u_t + au_x = f$  – ДУЧП, то  $\exists! \lambda = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{a}$ , являющееся характеристическим направлением.

Если выбран шаблон  $[(n-1, m), (n, m), (n, m+1)]$ ,  $\frac{a\tau}{h} \leq 1$  (условие КФЛ), то  $g^* \subset g_n^*$ . В этом случае КРС – устойчива. Такая КРС показана на рис. П.4.2.

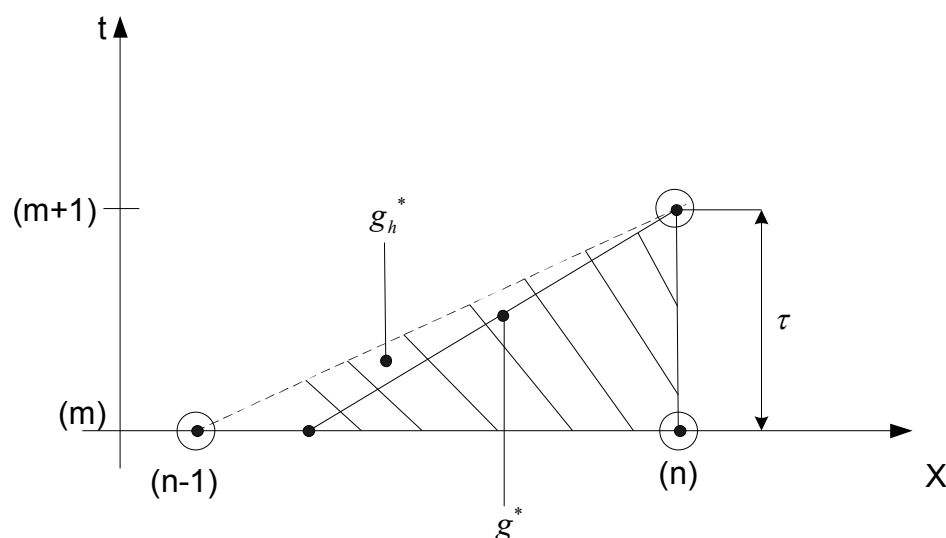


Рис. П.4.2. Зона зависимости ГУ

*Анализ свойств решений сеточных уравнений.*

Представим

$$u_n^{m+1} = u_n^m + \tau(u_t)_n^m + \frac{\tau^2}{2}(u_{tt})_n^m + O(\tau^3);$$

$$u_{n-1}^m = u_n^m - h(u_x)_n^m + \frac{h^2}{2}(u_{xx})_n^m + O(h^3).$$

Рассмотрим разностную схему (П. 4.2)

$$L_h u_h = f_h: \frac{y_n^{m+1} - y_n^m}{\tau} + a \left( \frac{y_n^m - y_{n-1}^m}{h} \right) = \phi_n^m.$$

В уравнении (П. 4.2) выполним замены  $y \rightarrow u$ ,  $\phi \rightarrow f$ :

$$\begin{aligned} \psi_h &= L_h u_h - f_h = \\ &= (u_t)_n^m + \frac{\tau}{2}(u_{tt})_n^m + a(u_x)_n^m - \frac{ah}{2}(u_{xx})_n^m - \phi_n^m + O(\tau^2) + O(h^2) = \\ &= (Lu - f)_n^m + \frac{\tau}{2}(u_{tt})_n^m - \frac{ah}{2}(u_{xx})_n^m + O(\tau^2, h^2). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $Lu = f: u_t + au_x = f(x, t)$ , получим:

а)  $\|\psi_h\|' = O(\tau, h)$  – для внутренних узлов;

б)  $L^2 u = f: u_t + au_x = \frac{ah}{2} \left( u_{xx} - \frac{\tau}{ah} u_{tt} \right) + f$  – первое диф-

ференциальное приближение (ПДП) разностной схемы (П.4.2) имеет невязку  $\|\psi_h\|' = O(\tau^2, h^2)$ .

**Утверждение.** Разностная схема аппроксимирует свое первое дифференциальное приближение более точно, чем исходное ДУЧП.

Рассмотрим частный случай – однородное уравнение при  $a = \text{const}$ :

$$\text{если } f = 0, \text{ то } \begin{cases} u_t + au_{xx} = 0, \\ u_{tt} = -au_{xt} = -a(u_t)_x = a(au_x)_x = a^2 u_{xx}. \end{cases}$$

$$\text{ПДП: } u_t + au_x = \nu u_{xx}, \text{ где } \nu = \frac{ah}{2} \left( 1 - \frac{a\tau}{h} \right).$$

Условие КФЛ имеет вид  $\frac{a\tau}{h} < 1$ . ПДП является уравнением параболического типа, отражающим диссипативные свойства (учет вязкости).

**Определение.** Если ПДП является уравнением с диссипативными членами, то разностную схему называют диссипативной.

**Вывод:** решения сеточных уравнений, соответствующих диссипативным разностным схемам, обладают теми же свойствами, что и точное решение ДУЧП с диссипативными членами.

*Построение разрывного решения уравнения переноса (смешанная краевая задача).*

В точке 0, как правило, существует разрыв функции  $u(0)$  первого рода  $[u] = [u^+ - u^-]_0 \neq 0$ , таким образом  $0 \in \Omega_h^*$ . На рис. П.4.3 линия разрыва изображена как линия  $\lambda^\pm$ .

Алгоритм решения задачи (метод суперпозиции). Выбираем шаблон для построения классического решения в зоне  $\Omega^- : \{(n-1, m), (n-1, m+1), (n, m+1)\}$ . Методом конечных разностей находим  $\{y_n^m\}$  при  $\frac{(a^-)\tau}{h} < 1$ . Аналогично выбираем шаблон для построения классического решения в зоне  $\Omega^+ : \{(n-1, m), (n, m), (n, m+1)\}$  и находим  $\{y_n^m\}$  при  $\frac{(a^+)\tau}{h} < 1$ .

Находим линию разрыва решения  $\lambda_d = \frac{dt_d}{dx}$ ;  $t_d(0) = 0$ . Если  $a^- = a^+ = a$ , то  $\lambda^- = \lambda^+ = \frac{1}{a}$ ;  $\lambda^- = \lambda^+ = \lambda_d$ , где  $\lambda_d$  – угол наклона линии разрыва решений  $y^+$  и  $y^-$ , выходящей из точки 0.

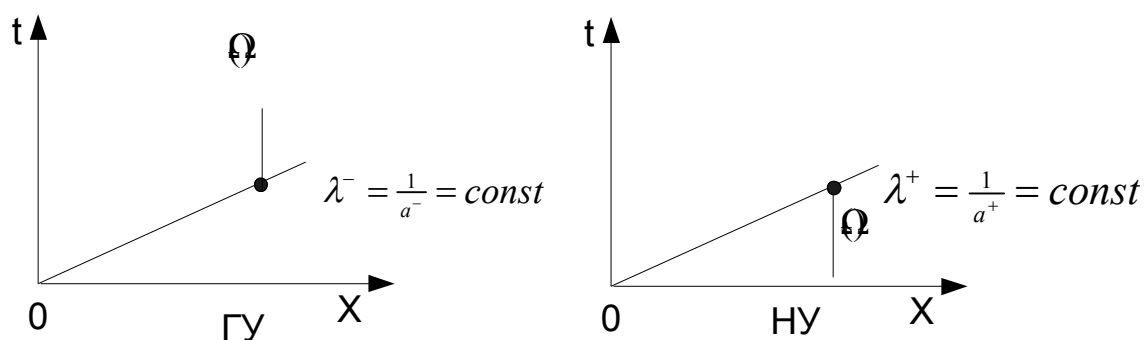


Рис. П.4.3. Зоны зависимости ГУ и НУ

*Приведение уравнения переноса к характеристическому виду.*



Рассмотрим смешанную краевую задачу (П.4.1). Определим производную по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = u_t \frac{dt}{ds} + u_x \frac{dx}{ds} = u_t + au_x.$$

Находим уравнение характеристик:

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = 1, t|_{s=0} = 0 : t = s, \\ \frac{dx}{ds} = a, x|_{s=0} = \tau : x = as + \tau, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{a} = \operatorname{tg}(\alpha), \\ x = at + \tau, \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{a}(x - \tau).$$

Получим представление задачи (П.4.1) в новой системе координат  $(S, \tau)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \left. \frac{u = u(s, \tau)}{\tau - \text{параметр}} \right| = \frac{du}{ds} = f(t(s), x(t(s), \tau), u(s, \tau)) = f(s, \tau). \quad (\text{П.4.8})$$

Начальные и граничные условия в результате замены переменных имеют вид  $u(0, x) = \mu(x) = \mu(\tau)$ ;  $u(t, 0) = v(t) = v(s)$ .

Выполнив обратную замену переменных  $s = t$ ,  $\tau = x - at$ , получим  $u(s, \tau) = \left. \begin{matrix} s = t \\ \tau = x - at \end{matrix} \right| = u(t, x)$ .

*Метод характеристик решения уравнений переноса.*

Решаем вместо (П.4.1) уравнение (П.4.8):

$$\begin{cases} s = t, \tau = x - at, \\ u = \int_{s_0}^{s_k} f(s, \tau) ds + u(s_0, \tau), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = s, x = as + \tau, \\ u = \int_{s_0}^{s_k} f(t(s), x(t(s), \tau), u(s, \tau)) ds + u(s_0, \tau). \end{cases}$$

Алгоритм численного решения для зоны зависимости НУ  $(\Omega^+)$ :

- задаем  $s_0 = 0$ ;  $\tau = \text{var}$ ;
- находим координаты начальных точек:  $t = 0$ ;  $x_0 = \tau$ ;
- определяем начальные условия для искомых функций:

$$u^+(s_0, \tau) = u(0, x_0) = \mu(x_0);$$

- задаем  $s_k$ ;
- находим координаты конечной точки:

$$t_k = s_k; x_k = at_k + \tau = at_k + x_0;$$

– находим значения искомых функций в точках  $(x_k, t_k)$ , учитывая, что интегрирование осуществляется вдоль прямой  $x_0 x_k$ .

Аналогичным образом находим решения для зоны зависимости

ГУ ( $\Omega^-$ ), учитывая, что  $s = \text{var}$ ;  $u^-(s,0) = u(t,0) = v(t) = v(s)$ .

Если  $a^- = a^+ = a$ , то  $\lambda^- = \lambda^+ = \frac{1}{a}$ ;  $\lambda^- = \lambda^+ = \lambda_d$ , где  $\lambda_d$  – тангенс угла наклона линии разрыва решений  $u^-$  и  $u^+$ , выходящей из точки (0,0).

#### *Основные определения теории разностных схем.*

Расчетная сетка – дискретное множество точек (узлов) в области непрерывного изменения аргументов. Представление непрерывной функции своих аргументов функцией дискретных аргументов, определяемой в узлах сетки, называется сеточной функцией

Сеточные функции  $u_h$  являются проекциями функции непрерывного аргумента  $u$  на пространство сеточных функций  $Y_h$ :

$$u_h \in Y_h(\Omega_h); u \in U(\Omega); \Omega = \omega(\bar{r}) \times [t_0, T].$$

Краевая задача, представленная в виде системы разностных или сеточных (алгебраических) уравнений, называется разностной схемой.

#### *Способы построения расчетной сетки. Сеточные аналоги норм.*

Основные структурные элементы сетки: узлы – граничные, внутренние; параметры сетки – шаг  $(h, \tau)$ . Совокупность узлов, используемых в сеточном уравнении, называется шаблоном разностной схемы.

Типы сеток:

- регулярные (все узлы принадлежат расчетной области) и нерегулярные;
- ортогональные и неортогональные.

При анализе свойств разностных схем используются такие оценки норм:

–  $\|u_h\|_C = \max_{\Omega_k} |u_h|$  – чебышевская (локальная) норма;

–  $\|u_h\|_{L_2} = \left( \sum_{n=0}^N \rho_n y_n^2 h_h \right)^{0.5}$ , ( $\rho_n > 0$ ) – гильбертова (среднеквадратическая) норма.

Для оценки близости  $u_h$  и  $u$  вводится норма в пространстве  $Y_h$  сеточных функций  $\|u_h - u\|_{Y_k}$ , где  $u_h$  – функция дискретного аргумента;  $u$  – значение функции непрерывного аргумента в данном узле сетки.

## Приложение 5

### СВОЙСТВА РАЗНОСТНЫХ СХЕМ. АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Заменим (аппроксимируем) дифференциальный оператор  $L$  краевой задачи, заданный в области непрерывного аргумента, разностным оператором  $L_h$ , заданным на множестве сеточных функций. Построенная таким образом разностная схема должна удовлетворять принципу согласованности. Это означает, что при построении разностных схем основные свойства исходных уравнений должны сохраняться и у их разностных аналогов.

Рассмотрим краевую задачу:

$$\begin{cases} Lu = f - \text{основные уравнения;} \\ Ru = \mu - \text{начальные условия;} \\ Gu = v - \text{граничные условия.} \end{cases} \quad (\text{П.5.1})$$

Разностная схема, соответствующая (П.5.1), имеет вид

$$\begin{cases} L_h u_h = f_h, \\ R_h u_h = \mu_h, \\ G_h u_h = v_h. \end{cases} \quad (\text{П.5.2})$$

Здесь  $f_h = f(p)$ ,  $u_h = u(p)$ , а  $p \in \Omega_h$  – расчетная область;  $\mu_h = \mu(p)$ ,  $v_h = v(p)$ , а  $p \in \Omega_h^*$  – граница области.

$$\text{Заменив } u_h \Rightarrow u, \text{ получим } \begin{cases} L_h u = f_h + \psi_h, \\ R_h u = \mu_h + \eta_h, \\ G_h u = v_h + \zeta_h, \end{cases}$$

где  $\psi_h, \eta_h, \zeta_h$  – невязки, возникающие при подстановке точного решения  $u$  в уравнения разностной схемы.

Разностная схема (П.5.2) называется аппроксимирующей краевую задачу (П.5.1) по отношению к ее точному решению  $u$ , если нормы всех невязок при приближении шага сетки к нулю стремятся к нулю:

$$\begin{cases} \|\psi_h\|_{h \rightarrow 0} \rightarrow 0, \\ \|\eta_h\|_{h \rightarrow 0} \rightarrow 0, \\ \|\zeta_h\|_{h \rightarrow 0} \rightarrow 0. \end{cases}$$

Если  $\|\psi_h\| = O(h^k)$   
 $\|\eta_h\| = O(h^l)$   
 $\|\zeta_h\| = O(h^r)$  } , то говорят, что разностная схема имеет  $K$ -й

порядок аппроксимации,  $K = \min(k, l, r)$ .

#### *Анализ устойчивости разностных схем.*

Пусть  $u_h$  – функция дискретного аргумента.

Разностная схема имеет вид  $\begin{cases} L_h u_h = f_h, \\ R_h u_h = \mu_h, \\ G_h u_h = v_h \end{cases}, \begin{matrix} f_h = f(p) \\ u_h = u(p) \end{matrix}$ ,

где  $p \in \Omega_h$  – расчетная область;  $\mu_h = \mu(p)$ ,  $v_h = v(p)$ ,  $p \in \Omega_h^*$  – граница области. Схема устойчива, если решение системы разностных (сеточных) уравнений непрерывно зависит от входных данных  $(f, \mu, v)$ , причем эта зависимость равномерна относительно шага сетки.

**Определение.** Входные данные – начальные и граничные условия, правая часть уравнений.

Пример. Необходимое условие устойчивости Куранта (условие Куранта–Фридрихса–Леви) для гиперболических уравнений.

Для устойчивости (и сходимости) разностной схемы, аппроксимирующей исходную задачу (П.5.1), необходимо, чтобы зона зависимости разностного уравнения  $(g_h^*)$  содержала зону зависимости дифференциального уравнения  $(g^*)$ :  $g^* \subset g_h^*$  (рис.П.5.1.).

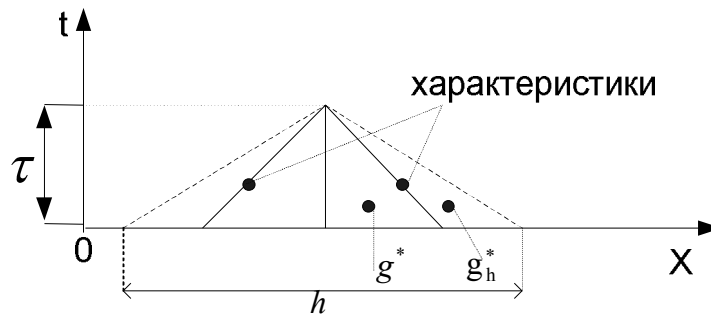


Рис. П.5.1. Зоны зависимости разностного и дифференциального уравнений.

Пример. Волновое уравнение  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ .

Уравнение для нахождения характеристических направлений имеет вид  $\frac{dt}{dx} = \pm \frac{1}{a}$ . Условие Куранта  $g^* \subset g_h^*$ :  $\frac{\tau}{h} \leq \frac{1}{a}$ . Число Куранта  $\frac{a\tau}{h} \leq 1$ .

*Методы исследования устойчивости разностных схем:*

- метод разделения переменных;
- принцип максимума;
- метод энергетических неравенств.

*Анализ сходимости решений разностной схемы.*

Решение  $u_h$  разностной схемы (П.5.2) сходится к точному решению  $u$  краевой задачи (П.5.1) и имеет  $k$ -й порядок точности, если

$$\|u_h - u\|_{Y_k} = O(h^k); \|u_h - u\|_{Y_k} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Разностная схема (П.5.2) корректна по Адамару, если ее решение:

- существует и единственно при любых входных данных  $f_h, \mu_h, \nu_h$ , принадлежащих заданным классам функций;
- устойчиво к малым возмущениям входных данных.

Теорема эквивалентности (Лакс): записывается так:

«аппроксимация + устойчивость  $\rightarrow$  сходимость».

*Практические средства проверки устойчивости разностной схемы.*

Вместо аналитической проверки аппроксимации и устойчивости разностной схемы проводят вычислительный эксперимент в целях проверки:

- сходимости вычислительного процесса при  $h \rightarrow 0$ ;
- корректности разностной схемы (решение единственно и устойчиво к входным данным).

Проводят сравнение полученных решений с точными, данными экспериментов и анализ устойчивости разностной схемы к начальному приближению.

Типы разностных схем: явная, неявная, двухслойная, трехслойная.

Тип разностной схемы определяется выбором шаблона.

## Приложение 6

### МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Известны такие методы построения конечно-разностных схем.

1. Конечно-разностные методы:

- разностной аппроксимации;
- неопределенных коэффициентов;
- интегро-интерполяционные методы.

2. Методы взвешенных невязок.

Первую группу представляют методы конечных элементов (МКЭ). Методы построения разностных схем в группе МКЭ подразделяется на классы в зависимости от типов элементов; типов базисных функций, аппроксимирующих исходные функции на элементе; формулировки метода конечных элементов (существует две формулировки: вариационная и проекционная). В рамках вариационной формулировки используются методы построения разностных схем:

- Ритца;
- вариационно-разностные;
- коллокаций;
- наименьших квадратов.

К проекционным методам относятся:

- Галеркина - Петрова;
- Бубнова - Галеркина;
- проекционно-разностный.

Вторую группу представляют методы конечных объемов (МКО), в которых разностные схемы получают путем аппроксимации интегральных операторов.

Методы сеточного построения (представления) граничных условий:

- разностной аппроксимации;
- повышенного порядка аппроксимации.

*Реализация методов построения разностных схем на примере ДУЧП параболического типа.*

Постановка задачи.

$$u_t^0 = a^0 u_{xx}^0,$$

где  $x^0 \in [0,1]$ ,  $x^0 = \frac{x}{L}$ ,  $u^0 = \frac{u - u_{\min}}{u_{\max} - u_{\min}}$ ,  $t^0 = \frac{t}{t_{\max}}$ ,  $a^0 = \frac{at_{\max}}{L^2}$ ,  $a$  –

коэффициент температуропроводности ( $a = \frac{\lambda}{\rho c_v}$ );  $\lambda$  – коэффициент

теплопроводности. Далее верхние индексы опущены.

Начальные условия:  $u(x,0) = \mu(x)$ .

Граничные условия:

а) Дирихле  $\begin{cases} u(0,t) = v_1'(t), \\ u(1,t) = v_2'(t); \end{cases}$

б) фон Неймана  $\begin{cases} u_x(0,t) = v_1''(t), \\ u_x(1,t) = v_2''(t) \end{cases}$

(например,  $q = -\lambda \frac{du}{dx}$  – тепловой поток через единицу поверхности);

в) граничные условия третьего рода:

$$\alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u_x(0,t) = v_1(t),$$

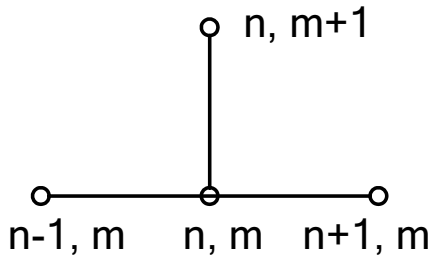
$$\alpha_2 u(1,t) + \beta_2 u_x(1,t) = v_2(t).$$

Уравнение для нахождения характеристических направлений имеет вид  $\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow t = const$ . Это уравнение означает, что возмущения мгновенно распространяются на всю расчетную область.

*Метод разностной аппроксимации.*

Выберем шаблон:

1)  $\forall m = 1, \dots, M, n = 1, \dots, N-1$  шаблон –  $(n-1, m), (n, m), (n+1, m), (n, m+1)$ .



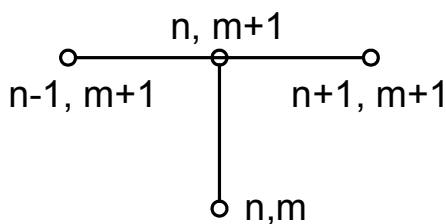
Составим явную двухслойную конечно-разностную схему:

$$\frac{1}{\tau}(y_n^{m+1} - y_n^m) - a \frac{(y_{n+1}^m - 2y_n^m + y_{n-1}^m)}{h^2} = 0,$$

где  $u_x|_n \approx \frac{\Delta y}{h} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$ ,  $u_x|_{n-1} \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}$ ,  $u_{xx} = \frac{u_x|_n - u_x|_{n-1}}{h^2} = \frac{\Delta^2 y}{h^2}$ .

Недостаток метода: разностная схема не учитывает реальные свойства точных решений (не удовлетворяет принципу согласованности).

2)  $\forall m = 1, \dots, M, n = 1, \dots, N-1$  шаблон –  $(n, m), (n-1, m+1), (n, m+1), (n+1, m+1)$ :



Составим неявную двухслойную конечно-разностную схему:

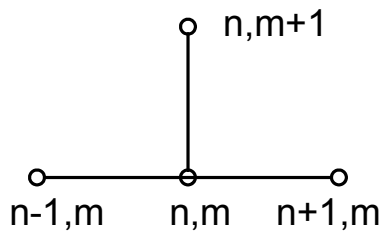
$$\frac{1}{\tau}(y_n^{m+1} - y_n^m) - a \frac{(y_{n+1}^{m+1} - 2y_n^{m+1} + y_{n-1}^{m+1})}{h^2} = 0.$$

Данная неявная конечно-разностная схема удовлетворяет принципу согласованности.

*Метод неопределенных коэффициентов.*



Выберем шаблон:



Разностная схема:  $\alpha y_{n-1}^m + \beta y_n^m + \gamma y_{n+1}^m + \delta y_n^{m+1} = 0$ .

Обеспечим, чтобы невязка имела наивысший (указанный) порядок аппроксимации. Подставим точное решение в разностную схему:

$$u_n^{m+1} = u_n^m + \tau(u_t)_n^m + \frac{1}{2}\tau^2(u_{tt})_n^m + O(\tau^3),$$

$$u_{n\pm 1}^m = u_n^m \pm h(u_x)_n^m + \frac{1}{2}h^2(u_{xx})_n^m + O(h^3), \quad \psi_h = L_h u - f_h,$$

$$\begin{aligned} \psi_h|_n^m &= L_h u - Lu = \alpha u_{n-1}^m + \beta u_n^m + \gamma u_{n+1}^m + \delta u_n^{m+1} - (u_t - au_{xx})_n^m = \\ &= (\alpha + \beta + \gamma + \delta)u_n^m + \tau\delta(u_t)_n^m + h(\gamma - \alpha)(u_{xx})_n^m + \frac{1}{2}h^2(\gamma + \alpha)(u_{xx})_n^m - \\ &\quad - (u_t - au_{xx})_n^m + O(\tau, h^2). \end{aligned}$$

Предположим, что  $O(\tau, h^2) \rightarrow 0$ , и потребуем, чтобы

$$\psi_h|_n^m = L_h u - Lu = 0: \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0, \\ \tau\delta = 1, \\ \gamma - \alpha = 0, \\ \frac{1}{2}h^2(\gamma + \alpha) = -a. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta = \frac{1}{\tau}, \\ \alpha = \gamma = -\frac{a}{h^2}, \\ \beta = \frac{2a}{h^2} - \frac{1}{\tau}. \end{cases}$$

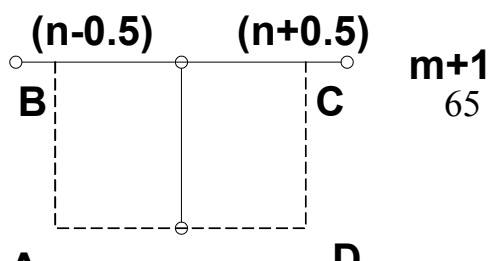
Достоинство метода: строгий формализм.

Недостаток метода: высокая вычислительная сложность.

*Интегро-интерполяционный метод.*

Рассмотрим ДУЧП  $u_t = au_{xx}$ .

Выберем шаблон:



Предполагается выделение некоторого контрольного объема ABCD и для него записываются законы сохранения (воспользуемся теоремой о среднем и правилом правых прямоугольников):

$$\int_{t^m}^{t^{m+1}} dt \int_{x_{n-0.5}}^{x_{n+0.5}} (u_t - au_{xx}) dx = \int_{x_{n-0.5}}^{x_{n+0.5}} (u^{m+1} - u^m) dx - a \int_{t^m}^{t^{m+1}} [(u_x)_{n+0.5} - (u_x)_{n-0.5}] dt =$$

$$= (u_n^{m+1} - u_n^m) \underbrace{(x_{n+0.5} - x_{n-0.5})}_h - a\tau [(u_x)_{n+0.5}^{m+1} - (u_x)_{n-0.5}^{m+1}],$$

где  $(u_x)_{n+0.5}^{m+1} = \frac{y_{n+1}^{m+1} - y_n^{m+1}}{h}$  – центральные конечные разности,

$$\frac{1}{\tau} (y_n^{m+1} - y_n^m) = a \frac{(y_{n+1}^{m+1} - 2y_n^{m+1} + y_{n-1}^{m+1})}{h^2}.$$

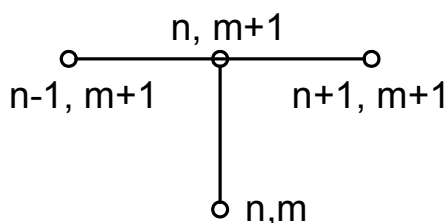
Разностные схемы, полученные на основе интегро-интерполяционного метода, называются консервативными.

*Методы сеточного представления граничных условий.*

Рассмотрим способы сеточного представления граничных условий.

#### Метод разностной аппроксимации

Выберем шаблон:



$$u_x(0, t) = v_1''(t),$$

$$(\Gamma U) u_x(1, t) = v_2''(t),$$

$$t = 1, \dots, T.$$

Разностная схема имеет вид

$$\frac{y_1^{m+1} - y_0^{m+1}}{h} = v''(t^{m+1}),$$

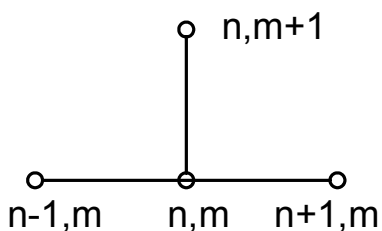
$$x=0: y_0^{m+1} = y_1^{m+1} - hv_1''(t^{m+1}),$$

$$\zeta_h|_0 = \frac{1}{h}(u_1^{m+1} - u_0^{m+1}) - u_x|_0^{m+1} = \frac{h}{2}(u_{xx})_0^{m+1} = O(h),$$

$$\|\zeta_h\| = \|G_h u - v_h\| = O(h).$$

### Метод фиктивных точек.

Выберем шаблон:



Разностная схема имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}(y_0^{m+1} - y_0^m) = \frac{a}{h^2}(y_1^m - 2y_0^m + y_{-1}^m), \\ \frac{1}{2h}(y_1^m - y_{-1}^m) = v_1''(t^m). \end{cases}$$

$$y_0^{m+1} = y_0^m + \frac{2a\tau}{h} \left[ \frac{1}{h}(y_1^m - y_{-1}^m) - v_1''(t^m) \right], \quad \|\zeta_h\| = O(\tau, h^2).$$

### Метод уменьшения невязки

$$u(x_1, t) = u(x_0, t) + hu_x(x_0, t) + \frac{1}{2}h^2u_{xx}(x_0, t) = \left| \begin{array}{l} u_x(x_0, t) = v_1''(t), \\ u_t = au_{xx}, \\ u_{xx} = \frac{u_t}{a}, \\ u_t \approx \frac{y_0^{m+1} - y_0^m}{\tau}. \end{array} \right|$$

В результате подстановок получим

$$\underbrace{u(x_1, t^m)}_{y_1^m} \approx y_0^m + hv_1''(t^m) + \frac{h^2}{2a\tau}(y_0^{m+1} - y_0^m).$$

Разрешив уравнение относительно  $y_0^{m+1}$ , получим формулу

$$y_0^{m+1} = y_0^m + \frac{2a\tau}{h} \left[ \frac{1}{h}(y_1^m - y_0^m) - v_1''(t^m) \right].$$

Рассмотренные разностные схемы аппроксимации граничных

условий являются явными.

## Приложение 7

### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА) ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Реализация метода конечных элементов (вариационно-разностного метода) начинается с определения подобластей и их узловых точек. Стержень может быть разбит на два линейных элемента с узловыми значениями  $u_1, u_2, u_3$ . Температура внутри элементов находится из формул

$$u^i = N_{i,i} u_i + N_{i,i+1} u_{i+1} \quad (\text{п.7.1})$$

Соответствующие функции формы определены соотношениями:

$$N_{i,i} = \frac{x_{i+1} - x}{h_i}, \quad N_{i,i+1} = \frac{x - x_i}{h_i},$$
$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad \text{где } i = 1..n. \quad (\text{п.7.2})$$

Для рассматриваемого примера функционал представляет собой сумму следующих интегралов:

$$\chi = \int_V \frac{1}{2} \cdot \lambda \left[ \frac{du(x)}{dx} \right]^2 dV - \int_{\sigma_1} q \cdot u(x) d\sigma + \int_{\sigma_3} \frac{\alpha}{2} [u(x) - u_\infty]^2 d\sigma, \quad (\text{п.7.3})$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  - площади поверхностей, на которых заданы  $q$  и  $\alpha$ . Значение функционала  $\chi$  получается подстановкой температуры  $u(x)$  и вычислением интегралов.

Поверхностные интегралы легко вычисляются, так как подынтегральным выражениям соответствуют узловые значения. Начнем с интеграла, включающего тепловой поток  $q$ :

$$\int_{\sigma_1} q \cdot u(x) d\sigma = q \cdot u_1 \int_{\sigma_1} d\sigma = q u_1 \sigma_1, \quad (\text{п.7.4})$$

где  $\sigma_1$  - площадь поперечного сечения стержня, соответствующая первому узлу. Функция, описывающая изменение температуры принимает постоянное значение  $u_1$  в точках сечения,

соответствующего первому узлу. Рассмотрим поверхностный интеграл, включающий коэффициент теплоотдачи  $\alpha$ :

$$\int_{\sigma_3} \frac{\alpha}{2} [u(x) - u_\infty]^2 d\sigma = \frac{\alpha}{2} (u_3 - u_\infty)^2 \int_{\sigma_3} d\sigma = \frac{\alpha \cdot \sigma_3}{2} (u_3^2 - 2u_3 u_\infty + u_\infty^2), \quad (\text{п.7.5})$$

где  $\sigma_3$  — площадь поперечного сечения стержня и  $u_3$  — температура в третьем узле.

Объемный интеграл в (п.7.3) содержит производную от температуры. Дифференцируя (п.7.2), имеем:

$$\frac{du^1}{dx} = \frac{1}{h_1} (-u_1 + u_2), \quad \frac{du^2}{dx} = \frac{1}{h_2} (-u_2 + u_3)$$

Объёмный интеграл должен быть разбит на два интеграла, потому что  $\lambda$  не сохраняет непрерывности по объему тела в целом. Разделение, подстановка и интегрирование дают:

$$\int_V \frac{1}{2} \cdot \lambda \left[ \frac{du(x)}{dx} \right]^2 dV = \frac{\lambda_1 \sigma_1}{2h_1} (-u_1 + u_2)^2 + \frac{\lambda_2 \sigma_2}{2h_2} (-u_2 + u_3)^2 \quad (\text{п.7.6})$$

При вычислении интеграла предполагалось, что площадь поперечного сечения каждого элемента постоянна.

Представление объемного интеграла по области в виде суммы интегралов, каждый из которых вычисляется по отдельному элементу, позволяет рассматривать различные свойства материала для различных элементов. Это является важной особенностью метода конечных элементов.

Значение функционала  $\chi$  получается сложением выражений (п.7.4), (п.7.5) и (п.7.6). В результате получается выражение для этого функционала через узловые значения температуры:

$$\chi = \frac{c_1}{2} (u_1^2 - 2u_1 u_2 + u_2^2) + \frac{c_2}{2} (u_2^2 - 2u_2 u_3 + u_3^2) - q \sigma_1 u_1 + \frac{\alpha \sigma_3}{2} (u_3^2 - 2u_3 u_\infty + u_\infty^2),$$

$$\text{где } c_i = \frac{\lambda_i \sigma_i}{2h_i}.$$

Правильными значениями  $u_1, u_2, u_3$  являются те, при которых величина  $\chi$  минимальна, поэтому:

$$\frac{d\chi}{du_1} = c_1 u_1 - c_1 u_2 - q \sigma_1 = 0,$$

$$\frac{d\chi}{du_2} = -c_1 u_1 + c_1 u_2 + c_2 u_2 - c_2 u_3 = -c_1 u_1 + (c_1 + c_2) u_2 - c_2 u_3 = 0,$$

$$\frac{d\chi}{du_3} = -c_2 u_2 + c_2 u_3 + \alpha \sigma_3 u_3 - \alpha \sigma_3 u_\infty = -c_2 u_2 + (c_2 + \alpha \sigma_3) u_3 - \alpha \sigma_3 u_\infty = 0$$

Эти уравнения могут быть преобразованы к общей матричной форме:

$$[M]\{u\} = \{f\}.$$

Матрицу коэффициентов  $[M]$  обычно называют глобальной матрицей жесткости. Более уместным было бы назвать ее глобальной матрицей теплопроводности, поскольку мы имеем дело с задачей переноса тепла. Вектор-столбец  $\{f\}$  есть глобальный вектор нагрузки.

Последний шаг нашего анализа заключается в задании конкретных значений для физических характеристик материала и получении числовых значений температуры  $u_1, u_2, u_3$ .

Пусть:

$$\lambda = 40 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^0 \text{К}}, \quad \alpha = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}}, \quad \sigma = \pi \cdot 10^{-6} \text{ м}^2, \quad L = 10^{-2} \text{ м}, \quad n = 3, \quad u_\infty = 273^0 \text{ К},$$

$$q = 150 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Окончательная система уравнений имеет вид:

$$10^{-4} \begin{bmatrix} 2.513 & -2.513 & 0 \\ -2.513 & 5.027 & -2.513 \\ 0 & -2.513 & 5.655 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = 10^{-4} \begin{Bmatrix} 4.712 \\ 0 \\ 860 \end{Bmatrix}$$

Этим уравнениям удовлетворяют следующие узловые значения температуры:  $u_1 = 278.25, u_2 = 276.375, u_3 = 274.5$ .

## МНОГОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Постановка смешанной краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \left( \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}}_{\Lambda_1 u_h} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}}_{\Lambda_2 u_h} \right) + f(t, x_1, x_2, u). \quad (\text{П.8.1})$$

$$\Gamma y: \begin{cases} u(0, x_2, t) = v_1(x_2, t), \quad u(1, x_2, t) = v_2(x_2, t), \\ u(x_1, 0, t) = v_3(x_1, t), \quad u(x_1, 1, t) = v_4(x_1, t). \end{cases}$$

$$\text{НУ: } u(x_1, x_2, 0) = \mu(x_1, x_2).$$

Методы построения решения задачи (П.8.1):

- разностной аппроксимации исходных ДУЧП;
- прямых;
- переменных направлений;
- расщепления.

*Метод разностной аппроксимации исходных ДУЧП.*

Аппроксимируем дифференциальные операторы конечно-разностными операторами:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right|_{n,m}^v &= \frac{y_{n+1,m}^v - 2y_{n,m}^v + y_{n-1,m}^v}{h_{x_1}^2} + O(h_{x_1}^2), \\ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right|_{n,m}^v &= \frac{y_{n,m+1}^v - 2y_{n,m}^v + y_{n,m-1}^v}{h_{x_2}^2} + O(h_{x_2}^2), \\ h_{x_1} &= h_{x_2} = h. \end{aligned}$$

Введем разностные операторы:

$$\Lambda_1 y_{n,m}^v = \frac{y_{n+1,m}^v - 2y_{n,m}^v + y_{n-1,m}^v}{h^2}, \quad \Lambda_2 y_{n,m}^v = \frac{y_{n,m+1}^v - 2y_{n,m}^v + y_{n,m-1}^v}{h^2}.$$

Возможные реализации разностных операторов:

а) явная двухслойная схема

$$\frac{y_{n,m}^{v+1} - y_{n,m}^v}{\tau} = a(\Lambda_1 y_{n,m}^v + \Lambda_2 y_{n,m}^v) + \varphi_{n,m}^v.$$

При этом нарушается условие согласованности разностной схемы и исходного ДУЧП;

б) неявная схема (“перевернутая пирамида”)

$$\frac{y_{n,m}^{v+1} - y_{n,m}^v}{\tau} = a(\Lambda_1 y_{n,m}^{v+1} + \Lambda_2 y_{n,m}^{v+1}) + \varphi_{n,m}^{v+1};$$

в) разностная схема с весами (схема Кранка - Николсона)

$$\Lambda_i (\sigma y_{n,m}^{v+1} + (1 - \sigma) y_{n,m}^v), i = 1, 2.$$

*Метод переменных направлений (трехслойная схема):*

а)  $v + 0,5$ -слой:  $\frac{y_{n,m}^{v+0.5} - y_{n,m}^v}{\tau/2} = a(\Lambda_1 y_{n,m}^{v+0.5} + \Lambda_2 y_{n,m}^v) + \varphi_{n,m}^{v+0.5};$

б)  $v + 1$ -слой:  $\frac{y_{n,m}^{v+1} - y_{n,m}^{v+0.5}}{\tau/2} = a(\Lambda_1 y_{n,m}^{v+0.5} + \Lambda_2 y_{n,m}^{v+1}) + \varphi_{n,m}^{v+1},$

где  $n = 1, \dots, N - 1; m = 1, \dots, M - 1; \vartheta = 0, \dots, \left(\frac{T}{\tau}\right).$

## Приложение 9

### ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ (Пуассона, Лапласа)

Задача Дирихле для эллиптического уравнения имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f(x_1, x_2) = 0, \\ u|_{\Omega^*} = v(\vec{r}). \end{cases} \quad (\text{П.9.1})$$

Частный случай постановки задачи – задача фон Неймана:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ grad(u)|_{\Omega^*} = v(\vec{r}) \end{cases} \quad (\text{задача гидродинамики}).$$

Методы решения:

- разностной аппроксимации;
- установления;
- переменных направлений;
- факторизации (расщепления).

*Метод разностной аппроксимации*



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f(x_1, x_2) = 0, \text{ (ДУЧП)}, \\ u|_{\Omega^*} = v(\vec{r}). \text{ (ГУ)}, \end{cases} \quad (\text{П.9.2})$$

$$h_{x_1} = h_{x_2} = h, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \approx \Lambda_1 y_{n,m} = \frac{y_{n+1,m} - 2y_{n,m} + y_{n-1,m}}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \approx \Lambda_2 y_{n,m} = \frac{y_{n,m+1} - 2y_{n,m} + y_{n,m-1}}{h^2},$$

$$\|\psi_h\| = L_h u - Lu = O(h^2).$$

Конечно-разностная схема метода имеет вид:

$$\frac{y_{n+1,m} - 2y_{n,m} + y_{n-1,m}}{h^2} + \frac{y_{n,m+1} - 2y_{n,m} + y_{n,m-1}}{h^2} + \varphi_{n,m} = 0, \quad (\text{П.9.3})$$

$$y_{n,m} = \frac{1}{4}(y_{n+1,m} + y_{n-1,m} + y_{n,m+1} + y_{n,m-1}) + \frac{h^2}{4}\varphi_{n,m}, \quad \text{что соответствует СЛАУ}$$

вида  $\vec{y} = C\vec{y} + \vec{d}$ ,  $\|C\| = 1 \Rightarrow \frac{h_{x_1}}{h_{x_2}} = 1$ .

Алгоритм численного решения такой:

$$y_{n,m}^{v+1} = \frac{1}{4}(y_{n+1,m}^v + y_{n-1,m}^v + y_{n,m+1}^v + y_{n,m-1}^v) + \frac{h^2}{4}\varphi_{n,m}^v - \text{метод простых}$$

итераций (метод Либмана). Если  $\|y^{v+1} - y^v\| < \varepsilon$ , то решение сошлось, что соответствует условию  $\min_{i,j} \max |y_{i,j}^{v+1} - y_{i,j}^v| < \varepsilon$ .

**Метод установления.**

Задача (П.9.1) эквивалентна задаче

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f(x_1, x_2) = 0, \text{ (ДУЧП)}, \\ u|_{\Omega^*} = v(\vec{r}). \text{ (ГУ)}. \end{cases} \quad (\text{П.9.4})$$

Задача (П.9.4) называется эволюционной задачей.

**Утверждение.** Решение задачи (П.9.4) при стационарных граничных условиях обладает свойством равномерной сходимости и сходится к решению задачи (П.9.1):

$$\frac{y_{n,m}^{v+1} - y_{n,m}^v}{\tau} = \Lambda_1 y_{n,m}^v + \Lambda_2 y_{n,m}^v + \varphi_{n,m}^v, \quad \|\psi_h\| = O(\tau, h^2).$$

*Метод переменных направлений.*

Алгоритм численного решения имеет такой вид:

$$а) \frac{y_{n,m}^{v+0.5} - y_{n,m}^v}{\tau/2} = \Lambda_1 y_{n,m}^{v+0.5} + \Lambda_2 y_{n,m}^v + \varphi_{n,m}^{v+0.5}, \quad (П.9.5)$$

$$\text{где } \Lambda_1 y_{n,m}^{v+0.5} = \frac{y_{n,m+1}^{v+0.5} - 2y_{n,m}^{v+0.5} + y_{n,m-1}^{v+0.5}}{h^2}, \quad \Lambda_2 y_{n,m}^v = \frac{y_{n,m+1}^v - 2y_{n,m}^v + y_{n,m-1}^v}{h^2};$$

$$б) \frac{y_{n,m}^{v+1} - y_{n,m}^{v+0.5}}{\tau/2} = \Lambda_1 y_{n,m}^{v+0.5} + \Lambda_2 y_{n,m}^{v+1} + \varphi_{n,m}^{v+0.5}, \quad \|\psi_h\| = O(\tau^2, h^2). \quad (П.9.6)$$

Численное решение П.9.5 и П.9.6 находится методом прогонки.

Шаг 1. Из уравнения (П.9.5) вычитаем (П.9.6) – уравнение, содержащее величину

$$y_{n,m}^{v+0.5} = \frac{1}{2} \Lambda_1 (y_{n,m}^{v+1} + y_{n,m}^v) - \frac{\tau}{4} \Lambda_2 (y_{n,m}^{v+1} + y_{n,m}^v). \quad (П.9.7)$$

Шаг 2. Сложив уравнения (П.9.5) и (П.9.6), а также используя (П.9.7), получим выражение для КРС

$$\frac{y_{n,m}^{v+1} - y_{n,m}^v}{\tau} = \frac{1}{2} (\Lambda_1 + \Lambda_2) (y_{n,m}^{v+1} - y_{n,m}^v) - \frac{\tau}{4} \Lambda_1 \Lambda_2 (y_{n,m}^{v+1} - y_{n,m}^v) + \varphi_{n,m}^{v+0.5}. \quad (П.9.8)$$

Приведя в (П.9.8) подобные, мы получим эквивалентную запись

$$B \delta y_{n,m}^{v+1} = -\tau (L_h u_h - f_h)_{n,m}^{v+1},$$

$$\text{где } B = \left( E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1 \right) \left( E - \frac{\tau}{2} \Lambda_2 \right); \quad E \quad - \quad \text{единичный оператор};$$

$$\delta y_{n,m}^{v+1} = y_{n,m}^{v+1} - y_{n,m}^v, \quad L_h = -(\Lambda_1 + \Lambda_2), \quad u_h = y_{n,m}^v, \quad f_h = \varphi_{n,m}^v.$$

*Метод факторизации (расщепления) для неявной схемы.*

Алгоритм численного решения основан на решении системы уравнений вида

$$\begin{cases} \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_1\right) \delta y_{n,m}^{v+0.5} = \tau (\Lambda_1 y_{n,m}^{v+0.5} + \Lambda_2 y_{n,m}^v + \varphi_{n,m}^{v+0.5}), \\ \left(E - \frac{\tau}{2} \Lambda_2\right) \delta y_{n,m}^{v+1} = \delta y_{n,m}^{v+0.5}. \end{cases}.$$

## Приложение 10

### МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

*Принцип максимума.*

Достаточным признаком равномерной устойчивости по начальным данным является выполнение при всех  $m$  условия:

$$\|\delta y^{m+1}\| \leq (1 + C\tau) \|\delta y^m\|, \text{ где } m = 1, 2, \dots, M, \quad C = \text{const}. \quad (\text{П.10.1})$$

Последовательность:  $y^m, y^{m+1}, y^{m+2}$  является равномерно устойчивой и сходящейся последовательностью.

*Теорема об устойчивости двухслойных схем* (признак устойчивости явных и неявных двухслойных разностных схем).

Пусть построена разностная схема и на основе ее получена оценка ошибки решения:

$$\sum_k \alpha_k \delta y_{n+k}^{m+1} = \sum_l \beta_l \delta y_{n+l}^m + \delta \varphi_n^m. \quad (\text{П.10.2})$$

Коэффициенты  $\alpha_k$  упорядочены так, что среди них  $\exists! |\alpha_0| = \max_k |\alpha_k|$ .

Если выполняется условие

$$(1 + C\tau) |\alpha_0| \geq \sum_{\substack{k \\ k \neq 0}} |\alpha_k| + \sum_l \beta_l, \quad (\text{П.10.3})$$

то разностная схема является устойчивой по начальным данным.

Если же выполняется условие

$$|\alpha_0| - \sum_{\substack{k \\ k \neq 0}} |\alpha_k| \geq \frac{\chi}{\tau}, \quad \chi > 0, \quad (\text{П.10.4})$$

то схема устойчива по правой части.

Доказательство:

а) фиксируем правую часть:  $\varphi_n^m \equiv f(x_n, t^m)$  – тождественно

вычисляется, вводим ошибку  $\delta y^m$  на исходном слое

$$\sum_k \alpha_k \delta y_{n+k}^{m+1} = \sum_l \beta_l \delta y_{n+l}^m, \quad \|\delta y^m\|_C = \max_n |\delta y_n^m|.$$

Отсюда для любого узла  $n$ :  $|\alpha_0| \|\delta y_n^{m+1}\| \leq \sum_{\substack{k \\ k \neq 0}} |\alpha_k| \|\delta y_{n+k}^{m+1}\| + \sum_{\substack{l \\ l \neq 0}} |\beta_l| \|\delta y_{n+l}^m\|$ .

Учитывая определение  $\|\delta y^{m+1}\|_C$ , получим

$$\|\delta y^{m+1}\|_C \left( |\alpha_0| - \sum_{\substack{k \\ k \neq 0}} |\alpha_k| \right) \leq \sum_l |\beta_l| \|\delta y^m\|_C.$$

Определим  $\sum_l |\beta_l|$  из (П.10.3), далее получим

$$\|\delta y^{m+1}\|_C \leq (1 + C' \tau) \|\delta y^m\|_C, \quad \text{где } C' = \frac{C |\alpha_0|}{|\alpha_0| - \sum_{\substack{k \\ k \neq 0}} |\alpha_k|};$$

б) фиксируем  $y_n^m = u(x_n, t^m)$ , внесем погрешность в правую часть:

$$\sum_k \alpha_k \delta y_{n+k}^{m+1} = \delta \varphi_n^m, \quad |\alpha_0| \|\delta y_n^{m+1}\| \leq \sum_{\substack{k \\ k \neq 0}} |\alpha_k| \|\delta y_{n+k}^{m+1}\| + |\delta \varphi_n^m|,$$

$\left( |\alpha_0| - \sum_{\substack{k \\ k \neq 0}} |\alpha_k| \right) \|\delta y^{m+1}\|_C \leq \|\delta \varphi^m\|_C$ , где индекс  $C$  – чебышевская норма в пространстве сеточных функций, используем (П.10.4) –

$\|\delta y^{m+1}\|_C \leq \frac{\tau}{\chi} \|\delta \varphi^m\|_C, \quad \frac{\tau}{\chi} \rightarrow (1 + C\tau)$ . Что и требовалось доказать.

Пример. Уравнение теплопроводности:

$$u_t = au_{xx} + f(x, t), \quad u_t - au_{xx} = f(x, t).$$

$$\begin{cases} Lu = f, \\ Gu = v, \\ Ru = \mu. \end{cases}$$

$$u(0, t) = v_1'(t), u(1, t) = v_2'(t), u(x, 0) = \mu(x).$$

$$\frac{1}{\tau} (y_n^{m+1} - y_n^m) = \frac{a}{h^2} (y_{n+1}^{m+1} - 2y_n^{m+1} + y_{n-1}^{m+1}) + \varphi_n^m, \quad m = 1, \dots, M-1,$$

$$y_0^{m+1} = v_1'(t^{m+1}), \quad y_N^{m+1} = v_2'(t^{m+1}), \quad y_n^0 = \mu(x_n), \quad n = 1, \dots, N-1.$$

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{\tau} + \frac{2a}{h^2}, \\ \alpha_{-1} = \alpha_1 = \frac{a}{h^2}, \forall \tau, h, \\ \beta = \frac{1}{\tau}. \end{cases}$$

Для неявной разностной схемы обеспечивается условие устойчивости:

$$\|\delta y^{m+1}\|_C = (1 + C\tau) \|\delta \varphi^m\|_C.$$

Замечания:

- принцип максимума гарантирует достаточное условие устойчивости, но не необходимое;
- принцип максимума можно использовать только для двухслойных схем и, соответственно, для схем, у которых первый порядок точности по времени –  $O(\tau)$ .

*Метод разделения переменных.* Гармонический анализ устойчивости (признак фон Неймана).

Этот метод используется для анализа устойчивости линейных разностных схем вида  $B\delta y_n^{m+1} = -\tau(L_h u_h - f_h)_n^m$ .

Представим, что мы внесли ошибку в начальные данные и разложили ее в ряд Фурье:  $\delta y(x_n, 0) = \sum_{q=0}^{N-1} a_q e^{\frac{i\pi q x}{l}}$ . Пусть  $\delta y_q^{m+1} = \rho_q \delta y_q^m$ , где  $\rho_q$  – амплитуда возмущения решения при переходе из нижнего временного слоя на верхний слой,  $\rho_q = \rho_q(\tau)$  для  $q$ -й гармоники. При переходе с нулевого на  $m$  слой

$$\delta y(x_n, t^m) = \sum_{q=0}^{N-1} a_q (\rho_q)^m e^{\frac{i\pi q x_n}{l}}.$$

Пусть  $\|\delta y\|_{L_2} = \sqrt{\sum_n (\delta y_n^m)^2}$  – гильбертова норма.

Используя ортогональность гармоник, согласно равенству Парсеваля, получим:

$$\|\delta y^m\|_{L_2}^2 = N \sum_{q=0}^{N-1} (\rho_q)^{2m} (a_q)^2 \leq \max_q (\rho_q)^{2m} N \sum_{q=0}^{N-1} (a_q)^2 = \max_q (\rho_q)^{2m} \|\delta y(x_n, 0)\|_{L_2}^2,$$

$$\|\delta y^{m+1}\|_{L_2} = \max_q (\rho_q)^{m+1} \|\delta y(x_n, 0)\|_{L_2} = \|\rho_q\| < 1 + C\tau \leq (1 + C\tau)^{m+1} \|\delta y(x_n, 0)\|_{L_2}.$$

Если  $\|\delta y^{m+1}\|_{L_2} \leq (1 + C\tau) \|\delta \varphi^m\|_{L_2}$ , то схема является равномерно устойчивой. Условие  $|\rho_q| < 1 + C\tau$  – спектральный признак устойчивости фон Неймана. Например,

$$B\delta y_n^{m+1} = -\tau(\Lambda y_n^m - \varphi_n^m). \quad (\text{П.10.5})$$

Введем замену  $\forall n: u_n^m = y_n^m + \delta y_n^m$ , где  $\delta y_n^m$  – погрешность вычисления на  $m$ -м временном слое определяется без ошибки  $\varphi_n^m = f(x_k, t^m)$ . Подставим это соотношение в (П.10.5):

$$\forall n: B\delta y_n^{m+1} = (B - \tau\Lambda)\delta y_n^m. \quad (\text{П.10.6})$$

Умножим обе части (П.10.6) уравнения на  $B^{-1}$  слева:

$$B^{-1}B\delta y_n^{m+1} = B^{-1}(B - \tau\Lambda)\delta y_n^m \Rightarrow \delta y_n^{m+1} = (E - \tau B^{-1}\Lambda)\delta y_n^m. \quad (\text{П.10.7})$$

Представим частное решение исходной задачи в виде разложения по тригонометрическим функциям.

Для  $q$ -й гармоники будет верно

$$\delta y_q^{m+1} = \rho_q \delta y_q^m, \text{ где } \delta y_q^m(x_n, t^m) = (\rho_q)^m e^{\frac{i\pi q x_n}{l}}.$$

Подставим это решение в (П.10.6), получим выражение для определения погрешности вычислений  $\delta y_n^{m+1}$ :

$\rho_q B e^{\frac{i\pi q x_n}{l}} = (B - \tau\Lambda) e^{\frac{i\pi q x_n}{l}}$ , т.е. уравнение для нахождения  $\rho_q$ . Если  $|\rho_q| < 1 + C\tau$ ,  $C = \text{const}$ , то конечно-разностная схема устойчива по фон Нейману.

Пример. Исследуем устойчивость явной разностной схемы для уравнения теплопроводности.

$$\text{Разностная схема: } \frac{1}{\tau}(y_n^{m+1} - y_n^m) = \frac{a}{h^2}(y_{n+1}^m - 2y_n^m + y_{n-1}^m).$$

Запишем ошибку на  $m$ -м временном слое

$$\delta y(x_n, t^m) = \sum_{q=0}^{N-1} a_q (\rho_q)^m e^{\frac{i\pi q x_n}{l}}, \quad u_n^m = y_n^m + \delta y_n^m.$$

После подстановки  $u_n^m$  в разностную схему получим

$$\forall q = 0, \dots, N-1: (\rho_q - 1)e^{\frac{i\pi qx_n}{l}} = \frac{a\tau}{h^2} \left( e^{\frac{i\pi q(x_n+h)}{l}} - 2e^{\frac{i\pi qx_n}{l}} + e^{\frac{i\pi q(x_n-h)}{l}} \right),$$

$$\rho_q = 1 - \frac{4a\tau}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi qh}{2l}\right), |\rho_q| < (1 + C\tau) \Rightarrow |\rho_q| \leq 1, -1 \leq \rho \leq 1, \tau < \frac{h^2}{2a}.$$

## Приложение 11

### ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

*Производная по направлению.*

Рассмотрим выражение

$$Lf = A \frac{\partial f}{\partial t} + B \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (\text{П.11.1})$$

Необходимо найти направление  $\tau$  вдоль кривой  $\Gamma$ :

$$x = x(\tau), t = t(\tau), x(\tau_0) = x_0, t(\tau_0) = t_0.$$

такое, что (П.11.1) будет пропорционально производной функции  $f$  по направлению  $\tau$ , т.е.

$$A \frac{\partial f}{\partial t} + B \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f}{\partial \tau} = |\alpha = 1| = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{d\tau}. \quad (\text{П.11.2})$$

Получим  $\frac{dt}{d\tau} = A, \frac{dx}{d\tau} = B \Rightarrow \frac{dx}{B} = \frac{dt}{A}$  – уравнение для нахождения характеристического направления. Система дифференциальных уравнений первого порядка имеет вид

$$\forall i = 1, \dots, n: F_i \left( x, t, u_1, \dots, u_n, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial t}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) = 0. \quad (\text{П.11.3})$$

Нормальная форма записи системы уравнений такая:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \varphi_i \left( x, t, \{u_i\}, \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x} \right\} \right).$$

Если функция  $F_i$  линейна относительно соответствующих частных производных и соответствующих функций, то система уравнений (П.11.3) называется линейной.

Если система уравнений (П.11.3) линейна только относительно

производных  $\left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x} \right\}, \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\}$ , то такая система называется квазилинейной.

Свойства линейных операторов:

$$\left. \begin{aligned} L(P_1 + P_2) &= LP_1 + LP_2 \\ L(CP) &= CLP \end{aligned} \right\}, \text{ где } P = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, u \right\}.$$

Рассмотрим систему уравнений (П.11.3), приведенную к нормальной форме:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{b}, \quad (\text{П.11.4})$$

где  $A = A(x, t, u)$  – матрица.

Определения:

а) левым собственным вектором  $\vec{l} = [l_1, \dots, l_n]^T$  и соответствующие ему собственные значения  $\{\xi\}$  будем называть вектор, который удовлетворяет равенству  $\vec{l}A = \xi \vec{l}$ ,  $\|\vec{l}\| \neq 0$ ;

б) правым собственным вектором  $\vec{r} = [r_1, \dots, r_n]^T$  и соответствующие ему собственные значения  $\{\xi\}$  будем называть вектор, который удовлетворяет равенству  $A\vec{r} = \xi \vec{r}$ ,  $\|\vec{r}\| \neq 0$ .

Найдем компоненты вектора  $A\vec{r}$  и  $\vec{l}A$ :

$$(A\vec{r})_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} r_j, \quad (\vec{l}A)_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} l_j = (A'\vec{l})_k,$$

где  $A'$  – транспонированная матрица. Если  $\xi_k \neq \xi_j$ , то  $\vec{l}^k$  ортогонален  $\vec{r}^j$ , т.е.  $(\vec{l}^k, \vec{r}^j) = \sum_{\alpha=1}^n l_{\alpha}^k r_{\alpha}^j = 0$  при  $k \neq j$ .

Система дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа может быть представлена в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} &= \vec{b} \quad \Big| \cdot \vec{l}, \\ \left( \vec{l}, \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) + \left( \vec{l}, A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right) &= (\vec{l}, \vec{b}), \quad \vec{l}A = \xi \vec{l}, \end{aligned} \right\}$$



$$\left( \vec{l}, \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \xi \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right) \right) = (\vec{l}, \vec{b}),$$

где  $\xi$  – собственные значения матрицы  $A$ .

Система уравнений (П.11.4) является гиперболической в некоторой односвязной области  $\Omega$  пространства переменных  $x, t, u$  ( $x \in X, t \in T, u \in U$ ), если:

а) существуют собственные значения  $\xi_k = \xi_k(x, t, u)$  матрицы  $A$  и они вещественны;

б) существует базис  $\{\vec{l}^1, \vec{l}^2, \dots, \vec{l}^n\}$  в пространстве  $E^n$ ,  $\vec{l}^k \in E^n$ , составленный из левых собственных векторов матрицы  $A$  (нормированных), удовлетворяющих условию  $\det \begin{vmatrix} l^1 & \dots & l^n \\ l_1^n & \dots & l_n^n \end{vmatrix} \neq 0$ .

**Замечание.** Пусть  $\xi_1 = \xi_2$  (существуют кратные собственные значения). Тогда уравнения для нахождения компонент левых собственных векторов обращаются в тождество. В этом случае в качестве собственных векторов могут быть выбраны два произвольных неколлинеарных единичных векторов.

Гиперболичность в узком смысле – это когда собственные значения  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  матрицы  $A$  вещественны и различны.

#### *Характеристическая форма системы уравнений*

Если система уравнений (П.11.4) является гиперболической в узком смысле, то

$$\exists \{\xi_k\}, \vec{l}^k \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right] = f_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

где  $f_k = (\vec{l}^k, \vec{b})$ .

Так как  $\vec{l}^k$  состоит из  $\alpha$  компонент, то  $\sum_{\alpha=1}^n l_{\alpha}^k \underbrace{\left[ \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x} \right]}_{\left( \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \tau} \right)} = f_k$ .

Воспользовавшись (П.11.2), получим

$$\frac{dt}{d\tau} = 1 \Rightarrow \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \tau} = \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial t}.$$

Пусть  $\frac{dx}{dt} = \xi_k$  – уравнение характеристик, соответствующих

собственным числам. Если  $\frac{dx}{dt} = \xi_k$ , то выражение для  $\frac{\partial u_\alpha}{\partial \tau}$  является полным дифференциалом  $\left(\frac{du_\alpha}{dt}\right)_k = \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial u_\alpha}{\partial x}$ .

Тогда система уравнений (П.11.4) может быть записана в виде

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=1}^n l_\alpha^k \left(\frac{du_\alpha}{dt}\right)_k = \sum_{\alpha=1}^n l_\alpha^k b_\alpha, \\ \frac{dx}{dt} = \xi_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (\text{П.11.5})$$

Система уравнений (П.11.5) является характеристической формой системы уравнений (П.11.4).

## Приложение 12

### СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОДНОМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ПОЛИТРОПНОГО НЕТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

Рассмотрим систему уравнений нестационарного одномерного течения политропного нетеплопроводного газа в эйлеровых переменных.

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = -\frac{\nu \rho u}{x}, \quad (\nu = 0 - \text{плоское течение}). \quad (\text{П.12.1})$$

Уравнение изменения импульса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x}}_{P=P(\rho, S)} = 0. \quad (\text{П.12.2})$$

Уравнение энергии

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad (\text{П.12.3})$$

где  $\vec{u} = \{\rho, u, S\}$  – примитивные переменные,  $u = \frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{ds}{dt} = 0$ ,

$P = P(\rho, S)$ ,  $S$  – энтропия ( $S = RT \ln \frac{P}{\rho^n}$ ).

Векторная форма записи уравнений газовой динамики имеет вид

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{f}, \text{ где } A = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} & u & \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial S} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

**Метод представления решения.**

1. Нахождение собственных значений матрицы  $A$ .

Запишем характеристическое уравнение:

$$\vec{l}(A - \xi E) = 0; \det(A - \xi E) = 0,$$

$$\text{где } A - \xi E = \begin{pmatrix} u - \xi & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} & u - \xi & \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial S} \\ 0 & 0 & u - \xi \end{pmatrix} = 0; \quad (u - \xi)^3 - \frac{\partial P}{\partial \rho}(u - \xi) = 0,$$

$$\frac{\partial P(\rho, S)}{\partial \rho} = a^2 - \text{скорость звука}; \quad (u - \xi)[(u - \xi)^2 - a^2] = 0.$$

Собственные значения:  $\xi_1 = u - a$ ,  $\xi_2 = u$ ,  $\xi_3 = u + a$ .

2. Нахождение левых собственных векторов.

Пусть  $\xi_1 = u - a$ ;  $\vec{l}^1 A = \xi_1 \vec{l}^1$ ,  $(\vec{l}^1 A)_i = (A' \vec{l}^1)_i$ ,  $(A' \vec{l}^1)_i = \xi_1 (\vec{l}^1)_i$ ,

$$(A' - \xi_1 E)(\vec{l}^1)_i = 0 \quad (\text{П.12.5})$$

– системы линейных однородных уравнений для нахождения  $\vec{l}^1 = \{l_1^1, l_2^1, l_3^1\}$ . Тогда

$$A' - \xi_1 E = \begin{pmatrix} u - (u - a) & \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} & 0 \\ \rho & u - (u - a) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial S} & u - (u - a) \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} al_1^1 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} l_2^1 + 0l_3^1 = 0, \\ \rho l_1^1 + al_2^1 + 0l_3^1 = 0, \\ 0l_1^1 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial S} l_2^1 + al_3^1 = 0. \end{cases} \quad (\text{П.12.6})$$

Система линейных однородных уравнений имеет бесконечное множество ненулевых решений. Она является зависимой, т. е. одно

из уравнений является следствием остальных.

Выбираем частное решение.

Примем  $l_2^1 = 1$ , тогда из (П.12.6) следует

$$\frac{-a^2}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \rho} \equiv a^2; \quad l_1^1 = \frac{-a}{\rho}; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial S} + a l_3^1 = 0, \quad l_3^1 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial S}.$$

3. Находим характеристическую форму системы уравнений

$$\vec{u} = \{\rho, u, S\}, \quad \sum_{i=1}^3 l_i^k \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = \sum_{i=1}^3 l_i^k b_i, \quad k=1, \quad \xi_1 = u - a,$$

$$\begin{aligned} \left( -\frac{a}{\rho} \right) \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] + \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial S} \left[ \frac{\partial S}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial S}{\partial x} \right] = \\ = - \left( \frac{a}{\rho} \left( \frac{v \rho u}{x} \right) \right); \end{aligned}$$

$$\xi_1 = \frac{dx}{dt} = u - a, \quad \text{где} \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \xi_k \frac{\partial}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x}.$$

$$\text{Получим} \quad \left( -\frac{a}{\rho} \right) \frac{d\rho}{dt} + \frac{du}{dt} + \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial S} \right) \frac{dS}{dt} = \frac{a v u}{x}.$$

Перепишем это уравнение в полных дифференциалах (составим дифференциальное соотношение вдоль характеристики):

$$\begin{cases} du - \frac{a}{\rho} d\rho - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial S} dS = \frac{a v u}{x} dt, \\ \xi_1 = \frac{dx}{dt} = u - a. \end{cases}$$

При  $S = const$ ,  $v = 0$ :  $dI^- = du - \frac{a}{\rho} d\rho = 0$  уравнение

соответствует адиабатическому течению.  $I^+ = u + \frac{2a}{k-1} = const$  –

правый инвариант Римана,  $I^- = \int dI^- = \int du - \int \frac{a}{\rho} d\rho = u - \frac{2a}{k-1} = const$

– левый инвариант Римана,  $S = \frac{P}{\rho^k} = const$  – энтропийная функция.

## ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Волновое уравнение имеет вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t).$$

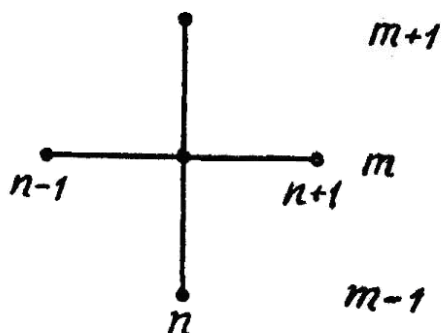
(НУ):  $u(x, 0) = \mu_1(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \mu_2(x)$ ;

(ГУ):  $u(0, t) = v_1(t)$ ,  $u(1, t) = v_2(t)$ .

$\frac{dt}{dx} = \pm \frac{1}{a}$  – уравнение характеристик.

*Явная конечно-разностная схема.*

Выбираем шаблон:  $\forall n = 1, \dots, N-1$ ,  $\forall m = 2, \dots, M$



Разностная схема, полученная на основе метода разностной аппроксимации, имеет вид

$$\frac{1}{\tau^2} (y_n^{m-1} - 2y_n^m + y_n^{m+1}) = \frac{a^2}{h^2} (y_{n+1}^m - 2y_n^m + y_{n-1}^m) + \varphi_n^m,$$

(ГУ)  $y_0^m = v_1^m$ ;  $y_N^m = v_2^m$ ,

(НУ)  $y_n^0 = \mu_{1n}$ ,  $\frac{1}{\tau} (y_n^1 - y_n^0) = \mu_{2n}$ ,  $\|\psi_h\| = O(\tau^2 + h^2)$ ,  $\|\eta_h\| = O(\tau)$ .

Граничные условия на основе метода уменьшения невязки записываются следующим образом:

$$y_n^0 = \mu_{1n},$$

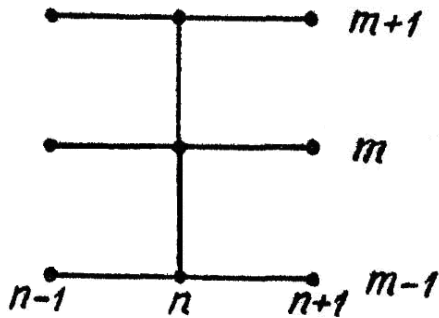
$$\frac{1}{\tau} (y_n^1 - y_n^0) \approx u_t(x_n, 0) + \frac{\tau}{2} u_{tt}(x_n, 0) = \mu_{2n} + \frac{\tau}{2} \left\{ a^2 \frac{d^2}{dx^2} [\mu_2(x_n)] + f(x_n, 0) \right\},$$

$$\|\psi_h\| = O(\tau^2 + h^2); \|\eta_h\| = O(\tau^2).$$

Условие устойчивости (условие КФЛ)  $\frac{a\tau}{h} < 1$ .

*Неявная разностная схема (схема с весами).*

Выбираем шаблон:  $\forall n = 1, \dots, N-1, \forall m = 2, \dots, M$ :



Разностная схема имеет вид

$$\frac{1}{\tau^2} (y_n^{m+1} - 2y_n^m + y_n^{m-1}) = \Lambda (\sigma y_n^{m+1} + (1 - 2\sigma)y_n^m + \sigma y_n^{m-1}) + \varphi_n^m,$$

где  $\Lambda y_n^m = \frac{a^2}{h^2} (y_{n+1}^m - 2y_n^m + y_{n-1}^m)$ .

При  $\sigma = [0,25, \dots, 0,5]$  разностная схема безусловно устойчива.

При  $\sigma = 0$  эта схема переходит в схему “крест”.

*Факторизованные схемы.*

Используются для решения многомерных волновых уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^p a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + f(\vec{x}, t).$$

(НУ):  $u(\vec{x}, 0) = \mu_1(\vec{x}), u_t(\vec{x}, 0) = \mu_2(\vec{x});$

(ГУ):  $u(\vec{x}, t)|_{\Omega} = v(\vec{x}, t).$

Явная разностная схема (РС) условно устойчива при выполнении условия КФЛ –  $\tau < \left( a^2 \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2} \right)^{-0.5}$ .

Построим неявную РС, за базу выберем схему с весами.

Вынесем все слагаемые с  $y_{nmk}^{v+1}$  в правую часть:

$$\left(E - \tau^2 \sigma \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha}\right) \delta y_{nmk}^{v+1} = \left[E + \tau^2 (1 - \sigma) \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha}\right] y_{nmk}^v - \\ - \left(E - \tau^2 \sigma \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha}\right) y_{nmk}^{v-1} + \tau^2 \phi_{nmk}^v.$$

В верхнем слое эта схема содержит оператор  $B \delta y_{nmk}^{v+1}$ , где  $B = E - \tau^2 \sigma \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha}$ . Заменяем оператор  $B$  приближенно факторизованным оператором

$$C \equiv \prod_{\alpha=1}^p (E - \tau^2 \sigma \Lambda_{\alpha}) = E - \tau^2 \sigma \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha} + \tau^4 \sigma^2 \sum_{\alpha=1}^{p-1} \sum_{\beta=\alpha+1}^p \Lambda_{\alpha} \Lambda_{\beta} + \dots = B + O(\tau^4),$$

т.е. приближенно расщепим оператор  $B$  на произведение одномерных операторов. Заменяя в исходной схеме оператор  $B$  на  $C$ , получим факторизованную схему

$$\prod_{\alpha=1}^p (E - \tau^2 \sigma \Lambda_{\alpha}) \delta y_{nmk}^{v+1} = \left[E + \tau^2 (1 - \sigma) \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha}\right] y_{nmk}^v - \\ - \left(E - \tau^2 \sigma \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_{\alpha}\right) y_{nmk}^{v-1} + \tau^2 \phi_{nmk}^v,$$

в которой  $\|\psi_h\| = O\left(\tau^2, \sum_{\alpha=1}^p h_{\alpha}^2\right)$ .

Реализуем расщепление по направлениям. При  $p = 2$ :

а) находим  $\delta y_{nm}^{v+1/2}$  при  $\Lambda_1 y_{nm}^{v+1/2}$ ;

б) находим  $\delta y_{nm}^{v+1}$  при  $\Lambda_2 y_{nm}^{v+1}$ .

Неявная РС является безусловно устойчивой при  $\sigma \geq \frac{1}{4}$ .

## Приложение 14

### ОБЩИЕ СВОЙСТВА РАЗНОСТНЫХ СХЕМ (СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ)

1. Свойство монотонности: схемы сохраняющие монотонность сеточного решения, называются монотонными:

$$y_n^{m+1} = \sum_{l=1} \beta_l y_{n+1}^m, \quad \beta_l \geq 0.$$

Немонотонность проявляется в многомерных задачах для схем высокого порядка точности.

2. Диссипативные схемы имеют вид.

$$|\rho_q| < 1 + \alpha_q \tau.$$

Если схема обладает свойствами  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_q < 0$ ,  $q \neq 0$ , то говорят, что она обладает аппроксимационной вязкостью.

Разностная схема аппроксимирует свое первое дифференциальное приближение более точно, чем исходное уравнение. Поэтому следует ожидать, что свойства решений разностных уравнений будут соответствовать свойствам точных решений первого дифференциального приближения.

Разностные схемы, обладающие данным свойством, называют диссипативными.

При решении уравнений параболического и гиперболического типов, обобщенное решение может содержать разрывы.

Следует выделять слабые (разрывы первой производной) и сильные (разрывы первого рода) разрывы.

3. Консервативные разностные схемы.

При решении задач, в решениях которых возникают разрывы, возникают проблемы, связанные с устойчивостью.

Разностная схема, построенная на основе законов сохранения в интегральной форме, называется консервативной.

Свойства консервативных разностных схем:

а) консервативные разностные схемы обеспечивают законы сохранения в интегральной форме не только локальные, но и для всей расчетной области;

б) консервативные схемы обычно приводят к существенному повышению точности при расчете как для разрывных, так и для гладких решений.

Разностные схемы, на основе которых можно построить решение во всей расчетной области независимо от того есть разрыв или нет, называют однородными.

Основные требования к разностной схеме:

- согласованность;
- монотонность;
- диссипативность;
- однородность;
- устойчивость;
- консервативность.

Для практических целей желательно использовать консервативные, диссипативные схемы. Например, схема одномерных уравнений газовой динамики может быть приведена к



дивергентной форме

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{F} = \rho \vec{g},$$

где  $\vec{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ A \end{pmatrix}$  – консервативные переменные;  $\vec{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ (A + P)u \end{pmatrix},$

$$A = \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2, \quad e = c_v T, \quad \frac{P}{\rho} = RT.$$

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Лабораторная работа № 1	5
РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ	5
Лабораторная работа № 2	10
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ. ЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА	10
Лабораторная работа № 3	15
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ. НЕЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА	15
Лабораторная работа № 4	19
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ)	19
Лабораторная работа № 5	24
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ	24
Лабораторная работа № 6	29
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА МЕТОДОМ УСТАНОВЛЕНИЯ	29
Лабораторная работа № 7	33
РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ. ЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА	33
Лабораторная работа № 8	38
РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ. НЕЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА	38
Приложение 1	42
ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ОРГАНИЗАЦИИ ИНЖЕНЕРНОГО АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ	42
Приложение 2	44
МЕТОД НАПРАВЛЕННЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ	44
Приложение 3	47
СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ СКВОЗНОГО СЧЕТА	47
Приложение 4	50
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ КАК ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ СЕТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ. АППРОКСИМАЦИЯ, СОГЛАСОВАННОСТЬ, УСТОЙЧИВОСТЬ, СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ	50
Приложение 5	59
СВОЙСТВА РАЗНОСТНЫХ СХЕМ. АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ	59

Приложение 6	62
МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ	
Приложение 7	68
ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА) ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ	
Приложение 8	71
МНОГОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ	
Приложение 9	72
ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ	
Приложение 10	75
МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ	
Приложение 11	79
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА	
Приложение 12	82
СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОДНОМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ПОЛИТРОПНОГО НЕТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА	
Приложение 13	85
ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ	
Приложение 14	88
ОБЩИЕ СВОЙСТВА РАЗНОСТНЫХ СХЕМ (СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ)	
СОДЕРЖАНИЕ	90
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	92

## **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

### **Основная литература**

1. Федоренко Б.З. Разностные методы решения задач математической физики: учеб. пособие / Б.З. Федоренко. – Х.: Харьк. авиац. ин–т, 1986. – 99 с.
2. Годунов С.К. Разностные схемы (введение в теорию): учеб. пособие / С.К. Годунов, В.С. Рябенский. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем: учеб. пособие / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
4. Численные методы: учебник для техникумов / Н.И. Данилина, Н.С. Дубровская, О.П. Кваша и др. – М.: Высш. школа, 1976. – 368 с.
5. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / С. Фарлоу. – М.: Мир, 1985. – 384 с.
6. Самарский А.А. Введение в численные методы: учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 288 с.
7. Самарский А.А. Численные методы: учеб. пособие для вузов / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 429 с.
8. Самарский А.А. Устойчивость разностных схем / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1973. – 416 с.
9. Михайленко С.В. Численные методы: учебное пособие по курсу "Прикладная и вычислительная математика" / С.В. Михайленко. – Х.: Харьковский авиационный институт, 1978. – 126 с.
10. Михайленко С.В. Прикладная математика: лабораторный практикум по численным методам / С.В. Михайленко. – Х.: Харьковский авиационный институт, 1992. – 102 с.
11. Михайленко С.В. Численные методы : учебное пособие по лабораторному практикуму / С.В. Михайленко, Л.И. Черноштан. – Х.: Харьковский авиационный институт, 1984. – 127 с.

### **Дополнительная литература**

1. Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики: Учеб. пособие – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 608 с.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: Учеб. пособие – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 600 с.

4. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Начало теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных. – Мн.: Наука и техника, 1986. – 311 с.
5. Путятин Е.П., Смалин Д.Н., Степанов В.П. Турбо Паскаль в курсе высшей математики. Учеб. пособие. – Харьков, Каравелла, 1997. – 352с.
6. Пирумов У.Г., Росляков Г.С. Численные методы газовой динамики: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высшая школа, 1987. – 232 с.
7. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложение в газовой динамике. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 688 с.
8. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. – М.: Наука, Гл. ред. физ.– мат. лит., 1975. – 352 с.
9. Беляев Н.М., Хрущ В.К. Численный расчет сверхзвуковых течений газа. К.: Вища. шк., 1984. – 224 с.
10. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
11. Марчук Г.И. Методы расщепления. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 264 с.
12. Ковеня В.М., Тарнавский Г.А., Черный С.Г. Применения метода расщепления в задачах аэродинамики. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. – 247 с.
13. Ворожцов Е.В., Яненко Н.Н. Методы локализации особенностей при численном решении задач газодинамики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985. – 224 с.
14. Соколовский Г.А., Гнесин В.И. Нестационарные трансзвуковые и вязкие течения в турбомашинах. – Киев: Наука думка, 1986. – 264 с.
15. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен : В 2-х т.:  
Т. 1. – М. : Мир, 1990. – 384 с.  
Т. 2. – М. : Мир, 1990 – 728–392 с.
16. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х т.:  
Т. 1. – М.: Мир, 1991. – 504 с.  
Т. 2. – М.: Мир, 1991 – 552 с.
17. Методы расчета турбулентных течений / Под ред. В. Колльмана. – М. Мир, 1984. – 464 с.
18. Беляев Н.М., Рядно А.А. Математические методы теплопроводности: Учеб. пособие. – К.: Вища школа, 1992. – 415 с.

19. Приходько А.А. Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и тепломассообмене. – К.: Наукова думка, 2003. – 380 с.
20. Аэродинамический расчет и оптимальное проектирование проточной части турбомашин/ А.В. Бойко, Ю.Н. Говорущенко, С.В. Ершов и др.; Под общ. ред. А.В. Бойко. – Харьков: НТУ „ХПИ”, 2002. – 356 с.
21. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
22. Сполдинг Д.В. Горение и массообмен. – М.: Машиностроение, 1985. – 240 с.
23. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков.– М.: Мир, 1990. – 660 с.
24. Нечипорук Н.В., Скоб Ю.А., Угрюмов М.Л. Математическое моделирование экологических процессов: Учеб. пособие по лаб. практикуму. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2008. – 89 с.

Угрюмов Михаил Леонидович  
Трончук Алексей Адамович  
Скоб Юрий Алексеевич

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Редактор

Св. план, 2010

Подписано к изданию

Усл. печ. л. 5,3. Уч.-изд. л.. Электронное издание.

---

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского  
«Харьковский авиационный институт»

61070, Харьков-70, ул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Издательский центр «ХАИ»

61070, Харьков-70, ул. Чкалова, 17

[izdat@khai.edu](mailto:izdat@khai.edu)