

Міністерство освіти і науки України
Льотна академія
Національного авіаційного університету
Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова
Національної академії наук України
Центральноукраїнський національний технічний університет
Центральноукраїнський державний педагогічний університет ім. В.Винниченка
Донецький національний медичний університет

Матеріали
Двадцятого Міжнародного науково-практичного семінару

**«КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ
ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ»**

13-14 квітня 2018 року

м. Кропивницький
2018 р.

Матеріали Двадцятого Міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування» (Кропивницький, 13-14 квітня 2018 року) / За ред. Г.П. Донець – Кропивницький, 2018. – 168 с.

Засновник семінару – Державна льотна академія України

Науковий керівник семінару:

Неділько В. М., к.т.н., доцент, завідувач кафедри інформаційних технологій та ОПР Льотної академії Національного авіаційного університету

Редакційна колегія:

Відповідальний редактор:

Донець Г. П. – д. ф.-м. н., професор, завідувач відділом економічної кібернетики Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України

Члени редколегії:

Волков Ю.І. – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету ім. В. Винниченка;

Гуляницький Л.Ф. – д.т.н., старший науковий співробітник, завідувач відділом комбінаторної оптимізації т інтелектуальних ІТ Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України;

Дмітрієв О.М. – к.т.н., завідувач кафедри льотної експлуатації, аеродинаміки та динаміки польоту Льотної академії Національного авіаційного університету;

Петренюк Д.А. – к.ф.-м.н., м.н.с. відділу економічної кібернетики Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України;

Шендеровський В.А. – д.ф.-м.н., професор, віце-президент Українського фізичного товариства.

Організаційний комітет:

Голова — **Залевський А. В.**, к.т.н., доцент, заступник начальника академії з навчальної науково-методичної та виховної роботи Льотної академії Національного авіаційного університету

Відповідальний секретар — **Семенюта М. Ф.**, к.ф.-м.н., доцент, професор кафедри фізико-математичних дисциплін Льотної академії Національного авіаційного університету

Члени оргкомітету:

Бондар О.П. — к.ф.-м.н., доцент, завідувач кафедри фізико-математичних дисциплін Льотної академії Національного авіаційного університету;

Волков Ю. І. — д.ф.-м.н., професор, професор кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету ім. В. Винниченка;

Джума Л.М. — к.т.н., доцент, доцент кафедри інформаційних технологій та ОПР Льотної академії Національного авіаційного університету;

Донець Г.П. — д. ф.-м. н., професор, завідувач відділом економічної кібернетики Інституту кібернетики НАН України;

Дресв О.М. — к.т.н., доцент, доцент кафедри кібербезпеки та програмного забезпечення Центральноукраїнського національного технічного університету;

Козін І.В. — д.ф.-м.н., професор, професор кафедри економічної кібернетики Запорізького національного університету;

Мелешко Є.В. — к.т.н., доцент, доцент кафедри кібербезпеки та програмного забезпечення Центральноукраїнського національного технічного університету;

Пасенченко Ю. А. — к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри математики і фізики Військового інституту телекомунікації та інформатизації;

Петренюк В.І. — к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри кібербезпеки та програмного забезпечення Центральноукраїнського національного технічного університету;

Сидоров М.В. – к.пед.н., с.н.с., помічник начальника академії із загальних питань та інноваційного розвитку Льотної академії Національного авіаційного університету;

Смірнов О.А. – д.т.н., професор, завідувач кафедри кібербезпеки та програмного забезпечення Центральноукраїнського національного технічного університету.

Стецюк П. І. – д.ф.-м.н., професор, завідуючий відділом методів негладкої оптимізації Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України;

Тимофієва Н. К. – д.т.н., старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу комплексних досліджень інформаційних технологій Міжнародного науково-навчального центру інформаційних технологій та систем НАН та МОН України;

Черноусова Ж.Т. – к.ф.-м.н., доцент кафедри математичного моделювання економічних систем Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»;

Шерман З.О. – старший викладач кафедри медичної фізика та інформаційних технологій Донецького національного медичного університету;

Шмельова Т.Ф. – д.т.н., професор, професор кафедри аеронавігаційних систем Національного авіаційного університету;

Шульгін В.А. – к.т.н., доцент, декан факультету льотної експлуатації Льотної академії Національного авіаційного університету;

Яковлєв С.В. – заслужений діяч науки і техніки України, д. ф.-м. н., професор, професор кафедри інформатики Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського "ХАІ";

Якуніна І.Л. – к.т.н., ст. викладач кафедри фізико-математичних дисциплін Льотної академії Національного авіаційного університету.

Kartashov O., Korobchynskiy K., Skrypka B.

N.E. Zhukovsky National Aerospace University

"Kharkiv Aviation Institute"

SOME PROBLEMS OF OPTIMIZATION IN THE
CONFIGURATION SPACE OF SPHERICAL OBJECTS... 11

Shmelova T., Sikirda Yu.

National Aviation University,

Flight Academy of the National Aviation University

RESEARCH METHODOLOGY IN AIR NAVIGATION
SOCIO-TECHNICAL SYSTEM..... 13

Yakovlev S.V.

N.E. Zhukovsky National Aerospace University

"Kharkiv Aviation Institute"

SOME APPLICATIONS OF THE THEORY OF
CONFIGURATION SPACES OF GEOMETRIC OBJECTS 18

Бондарь О.П.

Летная академия НАУ

КОМБИНАТОРНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ В
АВИАЦИИ..... 20

Воблый В. А., Архипова Н.А.

ВИНИТИ РАН

ЗАДАЧА ПЕРЕВОДА СОБСТВЕННЫХ ИМЕН В
ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ «МАТЕМАТИКА».. 22

Воблый В. А.

ВИНИТИ РАН

ОБ ОДНОМ ТОЖДЕСТВЕ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ
КРАВЧУКА..... 25

Воблый В. А., Мелешко А. К.

ВИНИТИ РАН, МГТУ им. Н.Э.Баумана

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ БЛОЧНО-
КОЛЕСНЫХ ГРАФОВ..... 28

Волков Ю.І., Войналович Н.М.

Центральноукраїнський державний педагогічний

університет імені Володимира Винниченка

ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ Q-БІНОМІАЛЬНИХ

КОЕФІЦІЄНТІВ.....	31
Глухов О. Д. <i>Національний авіаційний університет</i>	
ЯК ЗБІЛЬШИТИ ЗВ'ЯЗНІСТЬ ГРАФА.....	34
Гуляницький Л.Ф. <i>Інститут кібернетики ім.В.М.Глушкова НАН України</i>	
КОМБІНАТОРНІ ОБ'ЄКТИ: ТЕОРІЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ.....	36
Донець Г. П. <i>Інститут кібернетики ім.В.М.Глушкова НАН України</i>	
ОПТИМАЛЬНИЙ ПОШУК ДВОХ АКТИВНИХ КУЛЬ НА МНОЖИНІ $n=180$	43
Журавлев В.Н. <i>Київський національний університет ім. Т. Шевченко</i>	
ЧЕРЕПИЧНІ ПОРЯДКИ.....	50
Козин И. В., Батовский С. Е. <i>Запорозький національний університет</i>	
МУРАВЬИНІЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕННЯ ЗАДАЧ ДВУМЕРНОЇ УПАКОВКИ.....	52
Козин И.В., Борю С.Ю., *Кривцун Е.В. <i>Запорозький національний університет</i>	
* <i>Запорозький національний технічний університет</i> КОМБІНІРОВАНА ЗАДАЧА РАСПИСАНИЯ И МАРШРУТИЗАЦИИ.....	57
Козин И. В., Полюга С.И., Сардак В.И. <i>Запорозький національний університет</i>	
СРАВНИТЕЛЬНИЙ АНАЛИЗ МЕТАЭВРИСТИК В ЗАДАЧЕ О ДОСТАВКЕ ГРУЗОВ.....	61
Лісковець С. М., Шендеровский В. А. <i>Луцький національний технічний університет</i>	
<i>Інститут фізики Національної академії наук України</i> Г.Ф. ВОРОНИЙ (1868-1908) – ОДИН ІЗ ОСНОВОПОЛОЖНИКІВ ГЕОМЕТРІЇ ЧИСЕЛ (до 150-ти річчя від дня народження).....	64
Мелешко Є.В. <i>Центральноукраїнський національний технічний університет</i>	

МЕТОДИ ОЦІНКИ ЯКОСТІ РОБОТИ РЕКОМЕНДАЦІЙНИХ СИСТЕМ.....	68
Неділько В.М., Стратонов В.М.	
<i>Льотна академія НАУ</i>	
РОЗРОБКА МЕТОДУ ВИБОРУ ОПТИМАЛЬНОГО МІСЦЯ ВИМУШЕНОЇ ПОСАДКИ ПОВІТРЯНОГО СУДНА НА ВОДНУ ПОВЕРХНЮ.....	72
Пасенченко Ю.А., Рудоміно-Дусятська І.А.	
<i>Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації</i>	
БАГАТОНОМЕНКЛАТУРНА ЗАДАЧА ПЛАНУВАННЯ ЗАПАСІВ.....	75
Перепелица В.А., Терещенко Э.В.	
<i>Запорожский национальный университет, Запорожский национальный технический университет</i>	
КВАЗИПОЛНОТА ДВУХКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ «ОБ ОСТОВНЫХ ДЕРЕВЬЯХ И ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РЕБРЕ».....	79
Петренюк В.І.	
<i>Центральноукраїнський національний технічний університет,</i>	
ВЛАСТИВОСТІ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО РОДУ.....	83
Пичугина О.С.	
<i>Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт»</i>	
КОМБИНАТОРНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ: ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ И ПРИМЕНЕНИЕ.....	94
Романов В.А.	
<i>Центральноукраинский государственный педагогический университет им.В. Винниченко</i>	
ВЕКТОРНЫЕ МЕРЫ В СЕТЕВЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ.....	100
Ревякин А.М.	
<i>Национальный исследовательский университет «МИЭТ»</i>	

ПОЛИМАТРОИДЫ И СУБМОДУЛЯРНЫЕ
ФУНКЦИИ НА ДИСТРИБУТИВНЫХ РЕШЕТКАХ... 103

Семенюта М. Ф., Гришманов Д. Е.

Летная академия НАУ,

ООО «Авиакомпания АтласДжет Украина»

ГРАЦИОЗНЫЕ РАЗМЕТКИ В MPLS СЕТЯХ..... 109

Семенюта М. Ф., Неділько С.М., Неділько В.М.

Льотна академія НАУ

1-ВЕРШИННА БІМАГІЧНА ВЕРШИННА РОЗМІТКА
ОКРЕМИХ ВИДІВ БІ-РЕГУЛЯРНИХ ГРАФІВ..... 113

Семенюта М. Ф., Шульгін В.А.

Льотна академія НАУ

ПРИКЛАДИ ПРАКТИЧНИХ РЕАЛІЗАЦІЙ МАГІЧНИХ
І АНТИМАГІЧНИХ ТИПІВ РОЗМІТОК..... 117

Соломко М. Т.

*Національний університет водного господарства та
природокористування*

МІНІМІЗАЦІЯ 5-РОЗРЯДНИХ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ
КОМБІНАТОРНИМ МЕТОДОМ..... 120

Стецюк П.І., Трегубенко С.С.

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України,

Центральний науково-дослідний інститут Збройних

Сил України

ПРО ДВОЕТАПНУ ТРАНСПОРТНУ ЗАДАЧУ
З ЗАДАНОЮ КІЛЬКІСТЮ ПРОМІЖНИХ ПУНКТІВ..... 128

Тимофієва Н. К.

*Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних
технологій та систем НАН та МОН України*

ПРО ЗНАХОДЖЕННЯ ФОРМУЛ КОМБІНАТОРНИХ
ЧИСЕЛ..... 132

Улічев О.С., Мелешко Є.В.

*Центральноукраїнський національний технічний
університет*

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ
ІНФОРМАЦІЇ В СЕГМЕНТІ СОЦІАЛЬНОЇ МЕРЕЖІ... 136

Черноусова Ж.Т.

Національний технический университет Украины

«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»

МОДЕЛЮВАННЯ ФУНКЦІЙ ШТРАФІВ ДЛЯ
КЕРУВАННЯ В ІЄРАРХІЧНІЙ СИСТЕМІ..... 140

Шевченко К. М.

*Центральноукраїнський державний
педагогічний університет ім.В. Винниченко*

ДЕЯКІ МЕРЕЖКИ ЯК ЕЛЕМЕНТИ МНОЖИН $R_{4,0}$... 144

Шингалов Д.В., Мелешко Є.В., Минайленко Р.М.

*Центральноукраїнський національний технічний
університет, м. Кропивницький*

ДОСЛІДЖЕННЯ РЕКОМЕНДАЦІЙНИХ СИСТЕМ З
КОНТЕНТНОЮ ФІЛЬТРАЦІЄЮ НА ОСНОВІ
НАЇВНОГО КЛАСИФІКАТОРА БАЙЄСА 145

Шерман З. А.

Донецкий национальный медицинский университет

ЕКСТРЕМАЛЬНІ РОЗМІТКИ ВЕРШИН ТА РЕБЕР
ГРАФІВ..... 149

Якуніна І.І.

Льотна академія НАУ

ЗАСТОСУВАННЯ GERT-МЕРЕЖІ ДЛЯ АНАЛІЗУ
АВІАЦІЙНОЇ КАТАСТРОФИ..... 151

Яровая О.В.

Национальный аэрокосмический университет

*ім. Н.Е.Жуковского «Харьковский авиационный
институт»*

ПОЛИЭДРАЛЬНО-СФЕРИЧЕСКИЕ КОНФИГУРАЦИИ
И ИХ СВОЙСТВА..... 155

Большаков Д. С.

*Центральноукраїнський національний технічний
університет*

ВЛАСТИВОСТІ H_2 - ГРАФ-ОБСТРУКЦІЇ ДЛЯ ТОРА... 159

Грищенко

*Центральноукраїнський національний технічний
університет*

H_1 - ГРАФ-ОБСТРУКЦІЯ ДЛЯ ТОРА..... 160

Савеленко Д. І.

<i>Центральноукраїнський національний технічний університет</i>	
ВЛАСТИВОСТІ ПСЕВДОГРАФА K_3 НА ТОРІ.....	162
Філіппов О.А.	
<i>Центральноукраїнський національний технічний університет</i>	
ВЛАСТИВОСТІ ГРАФА C_7 НА ПЛЯШЦІ КЛЕЙНА.....	164
Цимбал Є.В.	
<i>Центральноукраїнський національний технічний університет</i>	
ВЛАСТИВОСТІ ГРАФА B_3 НА ПЛЯШЦІ КЛЕЙНА.....	166

SOME PROBLEMS OF OPTIMIZATION IN THE CONFIGURATION SPACE OF SPHERICAL OBJECTS

Kartashov O., Korobchynskiy K., Skrypka B.

alexeykartashov@gmail.com; kirill.korobchinskiy@gmail.com;
skripkabodya@gmail.com

*N.E. Zhukovsky National Aerospace University
"Kharkiv Aviation Institute"*

Аннотация. Рассмотрено конфигурационное пространство сферических объектов, обобщенными переменными которых являются радиус и координаты центров шаров. Исследована проблема оптимизации размещения шаров при различных критериях качества и ограничениях на их взаимное расположение.

Abstract. The configuration space of spherical objects is considered, the generalized variables of which are the radius and coordinates of the centers of the balls. The problem of ball placement optimization under different quality criteria and constraints on their mutual placement is investigated.

Consider the problem of synthesizing the optimal configuration of objects of a spherical shape. Let a system of geometric objects S_i , $i \in \mathbf{J}_n$ having the shape of a sphere be given. We associate with each of the balls S_i our own coordinate system by selecting its origin (called the pole) at the center of symmetry of the sphere. Then the geometric information $g^i = (\{s^i\}, \{\mu^i\}, \{p^i\})$ about the object S_i will include the form $\{s^i\}$, metric parameter $\{\mu^i\} = r_i$ and placement parameters $\{p^i\} = (x_i, y_i, z_i)$. We use Stoyan-Yakovlev theory of configuration space and form the configuration space of spherical objects as the manifold of the space of geometric information [1-3].

The spatial form of a ball in a fixed coordinate system $Oxyz$ is given by parametrically given family of functions $f(\xi, r) \in C(\mathbf{R}^3) \times \mathbf{R}_+^1$, $\xi = (x, y, z)$, described by the boundary equation

$$f(\xi, r) = r^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0. \quad (1)$$

The equation of the general position of the sphere S_i of radius r_i with the placement parameters $p^i = (x_i, y_i, z_i)$ in the fixed coordinate system O_{xyz} takes the form

$$F(\xi, x_i, y_i, z_i, r_i) = r_i^2 - (x - x_i)^2 - (y - y_i)^2 - (z - z_i)^2 = 0.$$

Geometric information $g^i = (\{s^i\}, \{\mu^i\}, \{p^i\})$ induces configuration spaces $\Xi^d(S_i)$, $i \in \mathbf{J}_n$ with generalized coordinates r_i, x_i, y_i, z_i .

Consider the configuration space of the set of balls S_i , $i \in \mathbf{J}_n$, which we represent as

$$\Xi^{4n}(S_1, \dots, S_n) = \Xi^4(S_1) \times \dots \times \Xi^4(S_n).$$

The point $g = (r_1, x_1, y_1, z_1, \dots, r_n, x_n, y_n, z_n) \in \Xi^{4n}(S_1, \dots, S_n)$ determines the configuration of the balls S_i , $i \in \mathbf{J}_n$ and uniquely determines their location in the fixed coordinate system O_{xyz} .

On the set of balls S_i , $i \in \mathbf{J}_n$ we introduce the binary relation $\{*\}$, assuming $S_i * S_j$, if $\text{int } S_i \cap \text{int } S_j = \emptyset$. In the configuration space $\Xi^{4n}(S_1, \dots, S_n)$, the relation $S_i * S_j$ is formalized by means of inequality

$$r_i + r_j - \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \geq 0 \quad (2)$$

Define a matrix $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ with elements

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } S_i * S_j; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The configuration of balls S_i , $i \in \mathbf{J}_n$ is said to be admissible if condition (2) for any $i, j \in \mathbf{J}_n$ such that $b_{ij} = 1$.

Suppose that a certain function to be optimized is given on the

set of admissible configurations of balls $S_i, i \in \mathbf{J}_n$. We obtain the optimization problem of determining generalized variables $r_1, x_1, y_1, z_1, \dots, r_n, x_n, y_n, z_n$ of a configuration space $\Xi^{4n}(S_1, \dots, S_n)$, which has a lot of geometric interpretations and practical applications.

The report proposes a classification of such problems depending on the type of function being optimized and the choice of generalized variables.

Literature

1. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V. Mathematical models and optimization methods of geometrical design. Kiev: Nauk. Dumka. - 1986. – 256 pp.
2. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V. The configuration space of geometric objects. // Cybernetics and Systems Analysis. - 2017. V. 53(5), P. 725–732.
3. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V. The configuration space of geometric objects. // Cybernetics and Systems Analysis. - 2018. V. 54(5), P. 715–724.

RESEARCH METHODOLOGY IN AIR NAVIGATION SOCIO-TECHNICAL SYSTEM

Shmelova T.,

Shmelova@ukr.net

National Aviation University

Sikirda Yu.

SikirdaYuliya@ukr.net

Flight Academy of the National Aviation University

Аннотация. Представлена методология проведения научных исследований для анализа развития полетной ситуации под влиянием принятия решений человеком-оператором аэронавигационной социально-технической системы.

Abstract. The research methodology for analysis of flight situation development under influence of decision making by the human-operator of Air Navigation Socio-technical System has been presented.

Introduction. Air Navigation System (ANS) in conformity to the principles of functioning may be referred to Socio-Technical systems (STS) within which close co-operation between human and technological components occurs [1]. The distinguishing feature of the STS is availability of the hazardous kinds of activity as well as usage of the high-level technologies in production. Since operations in STS generally involve high-risk / high-hazard activities, the consequences of safety breakdowns are often catastrophic in terms of loss of life and property [1]. The more a human-operator (H-O) is trying to control a production process being aided by high level technologies, especially in case of distant operation, the more non-transparent becomes the result of the operation of a system, which is accompanied by a high degree risk of causing catastrophic outcomes [2 – 3]. The provision of flight safety in the ANS by means of high level technological processes depends primarily on reliability of H-O as well as his timely professional decisions.

Analysis of latest research and publications. Statistical data show that human errors account for up 80% of all causes of aviation accidents [4]. The existing approaches to checking separate aspects (psycho-physiological, behavioural, ergonomic, professional, etc.) do not consider the functional state of H-O in the conditions of the dynamic change of external and internal factors [3]. Representation of the ANS in the form of a STS first makes possible to take into account the influence of social, cultural environment of people who decision making (DM). Culture surrounds people and affects their values, convictions and behaviour, which they share along with other members of different social groups. Culture serves to bind us together as members of groups and to provide clues as to how to behave in both normal and unusual situations. Aviation systems with its complex interrelation between a man and technologies have been evolved towards complex STS. Therefore, components such as culture and the influence of society are important for the safety in aviation [2]. One of the possible approaches to the solution of these problems is formalization and mathematical presentation of the ANS operators' activities in the form of a complex STS on the base of the systemic analysis.

The research task is development the research methodology in ANS as STS.

Main part. The research methodology in ANS as STS has been developed:

1. Human factor problem. Analysis of complex systems as STS.

1.1. Individual-psychological factors / comparative analysis of different age and social groups.

1.2. Socio-psychological factors / comparative analysis of different age and social groups (countries, regions, cities, etc.).

1.3. Monitoring of psycho-physiological factors (ordinary, extraordinary, emergency situations (ES), etc.).

2. Diagnostics, monitoring of the factors (professional and non-professional) that influence on DM by the H-O in STS.

2.1. Diagnostics of individual-psychological factors / comparative analysis of different age and social groups.

2.2. Diagnostics of socio-psychological factors / comparative analysis of different age and social groups (countries, regions, regions, cities, etc.).

2.3. Monitoring of psycho-physiological factors (ordinary, extraordinary, emergency situations, ergonomic correction of results, ect.).

2.4. Comparative analysis of different age, social groups, countries, etc.

3. Complex accounting of the factors affecting the H-O DM in the STS.

3.1. Methods of aggregation of the factors that influence on DM in STS (additive, multiplicative aggregation, ect.).

3.2. The method of generalization of heterogeneous factors, with the help of which the influence of individual-psychological, socio-psychological and psycho-physiological factors in STS determines.

3.3. Reflexive bipolar choice in the positive / negative pole. Reflexive information processor for diagnostics and predicting the development of situations, etc.

4. Models of DM in STS and forecasting the development of the situation for different spheres of industry as STS.

4.1. Deterministic models of DM in STS.

4.2. Stochastic models of DM in STS by the H-O in ES (under conditions of stochastic reflexive bipolar choice).

4.3. Neural network, Markov chains, GERT-models of DM in STS by the H-O in ES.

4.4. Models of diagnostics of the emotional state of the H-O in ES.

5. Algorithm for diagnostics the pilot's emotional state by the parameters of piloting (movement of the ailerons, etc.) in ES.

5.1. Stability of STS during deformations of the emotional state by the H-O.

5.2. Methods of stability correction of STS.

5.3. Methodology for modelling the development of ES, taking into account the impact of individual and social factors on DM, etc.

6. Applied tasks of the DM in STS by the H-O (Aviation systems, Chemical production, Energy, Military industry, etc.).

6.1. Prerequisites for a catastrophic situation, etc.

6.2. Preventing catastrophic situation, etc.

6.3. Accident investigation problems, etc.

Let's consider the individual works of aviation students in training (course “Basic of DM in ANS”) after Master class of DM in ANS, for example, DM by the H-O in ES “Aircraft Decompression”. In Fig. 1 deterministic and stochastic models of DM are presenting.

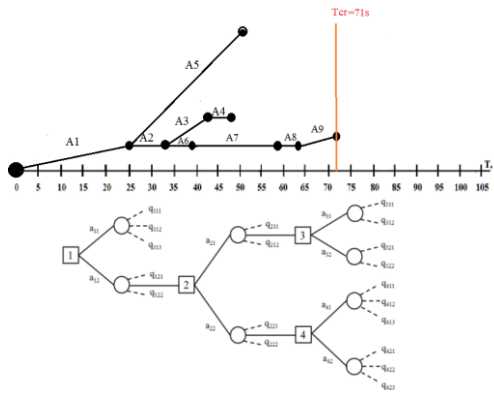


Fig. 1. *Deterministic (network graph) and stochastic (decision tree) models of DM by the H-O in ES “Aircraft Decompression”*

On the basis of the individual works students taking part in conferences and reporting about results of scientific work [5].

Conclusions. The methodology for analysis of situation development under influence of DM by the H-O can be useful in any technogenous production. In future we are planning consider other different complex STS, such as hydraulic engineering, chemical and military industries, gas and oil pipelines, nuclear power plants and transport etc. It is necessary to analyse the all factors influencing the DM of operators in these systems in order to predict the development of the technogenic catastrophe and prevent it.

References

- [1] International Civil Aviation Organization. (2002) *Human Factors Guidelines for Safety Audits Manual*. 1st ed. Doc. ICAO 9806-AN/763. Canada, Montreal, ICAO Publ., 138 p.
- [2] International Civil Aviation Organization. (2004) *Cross-Cultural Factors in Aviation Safety: Human Factors Digest № 16*. Circ. ICAO 302-AN/175. Canada, Montreal, ICAO Publ., 39 p.
- [3] International Civil Aviation Organization. (2013) *Safety Management Manual (SMM)*. 3rd ed. Doc. ICAO 9859-AN 474. Canada, Montreal, ICAO Publ., 251 p.
- [4] Leychenko S., Malishevski A., Mikhalič N. (2006) *Chelovecheskii faktor v aviatsii*. Monografiya v dvukh knigakh. Kniga pervaya [Human Factors in Aviation: monograph in two books. Book 1st.]. Kirovograd, YMEKS Publ., 512 p. (In Russian)
- [5] Shmelova T., Konovalova A. (2017) [Decision making of ATCO in emergency situation “Aircraft decompression”] *Materialy XIII Mizhn. Nauk.-tekhn. Konf. “AVIA-2017”* [Abstracts of International Sci.-tech. Conf. “AVIA-2017”]. Kyiv, National Aviation University, pp. 12.30-12.35.

SOME APPLICATIONS OF THE THEORY OF CONFIGURATION SPACES OF GEOMETRIC OBJECTS

Yakovlev S.V.

svsyak7@gmail.com

N.E. Zhukovsky National Aerospace University

"Kharkiv Aviation Institute",

Kharkiv, Ukraine

Аннотация. Предлагается концепция построения конфигурационных пространств геометрических объектов. В качестве обобщенных переменными этого пространства рассматриваются параметры формы и размещения объектов. Изучается структура конфигурационных пространств для различных классов задач упаковки, компоновки и покрытия.

Abstract. The concept of construction of configuration spaces of geometric objects is proposed. As the generalized variables of this space, the parameters of the form and placement of objects are considered. Structure of configuration space is studied for classes of packing, layout and covering problems.

The concept of a configuration space is widely used in the theory of the dynamics of solids, however, as a rule, without taking into account their shape and the variable metric parameters (sizes) of objects. These characteristics are additional generalized variables of configuration spaces, and the consideration of restrictions on the relative location of objects requires the use of a special mathematical apparatus. These studies naturally integrate with the main provisions of the general theory of geometric design [1,2].

Every object has a spatial form. It has certain dimensions, and occupies a certain position in space. We associate with the object its own coordinate system, whose origin is called the pole of the object. To specify the spatial form of a geometric object, we use the parametric equation of its boundary

$$f(\xi, \mu) = 0, \quad (1)$$

where $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ we call the parameters of the form.

Let the function $f(\xi, \mu)$ be defined and continuous everywhere on $R^3 \times D$, where $D \subseteq R^k$ is the region of admissible values of the μ_1, \dots, μ_k parameters. We will say that geometric objects have the

same spatial form if their boundary equations can be represented in the form (1) for some $\mu \in D$, and

$$\begin{aligned} f(\xi, \mu) &> 0 \text{ if } \xi \in \text{int } S \\ f(\xi, \mu) &< 0, \text{ if } \xi \in R^m \setminus \text{cl } S. \end{aligned}$$

The position of the object S in space is determined by the placement parameters $p = (u, v)$, where u is the coordinate vector of the object's pole in the fixed coordinate system, and a v is the vector of the angular parameters determining the relative position of the axes of the own and fixed coordinate systems.

Form the configuration space $\Xi(S)$ of a geometric object S , choosing $g = (\mu, p) = (\mu_1, \dots, \mu_k, p_1, \dots, p_6)$ as generalized coordinates. Then the configuration space $\Xi^m(S)$ is a manifold of m dimension of the space of canonical information $G(S)$, and the point $g \in \Xi^m(S)$ defines an object $S(g) \subset R^3$.

Consider in space R^3 a collection of objects $S_i, i \in \mathbf{J}_n = \{1, 2, \dots, n\}$. We denote as $\Xi^{m_i}(S_i)$ the configuration space of an object S_i with generalized coordinates $g^i = (\mu^i, p^i)$, where $\mu^i = (\mu_1^i, \dots, \mu_{k_i}^i)$, $p^i = (u^i, v^i) = (p_1^i, \dots, p_6^i)$, $m_i = k_i + 6, i \in \mathbf{J}_n$. Each point $g^i \in \Xi^{m_i}(S_i)$ corresponds to an object $S_i(g^i) \subset R^3$.

We will form a complex object $S_B = \mathbf{B}(S_1, \dots, S_n)$, where the operator \mathbf{B} specifies the structure of the system of objects $S_i, i \in \mathbf{J}_n$. Consider the configuration space of a complex object S_B :

$$\Xi^m(S_B) = \Xi^{m_1}(S_1) \times \dots \times \Xi^{m_n}(S_n), \quad m = m_1 + \dots + m_n.$$

We say that a point $g = (g^1, \dots, g^n) \in \Xi^m(S_B)$ specifies the configuration of a system of objects $S_i, i \in \mathbf{J}_n$, i.e. defines in R^3 a complex object of a given structure

$$S_B(g^1, \dots, g^n) = \mathbf{B}(S_1(g^1), \dots, S_n(g^n)).$$

Objects $S_i = S_i(g^i), i \in \mathbf{J}_n$ will be called basic.

The values of generalized variables of configuration spaces Ξ_B^m can be subject to various restrictions. First of all, the form parameters $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)$ must belong to the admissible values

domain $D \subseteq R^k$. On the other hand, a complex object S_B should not change its topological structure (connectivity, the number of connected components, the linear connection of the boundary, the homotopy type, etc.) in a number of problems. Other additional constraints can arise on the region of admissible values g^1, \dots, g^n of generalized variables. They arise when solving specific problems, for example, in the search for configurations that are optimal in a certain sense.

The presence of generalized variables of configuration spaces naturally allows us to put the problem of finding optimal configurations. At the same time, questions of the description of the region of admissible values of generalized variables are of fundamental importance. The report suggests ways of formalizing the region of admissible solutions in the problems of allocation, layout and coverage, as well as the properties of the corresponding configuration spaces.

Literature

1. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V. Mathematical models and optimization methods of geometrical design. Kiev: Nauk. Dumka. - 1986. – 256 pp.

2. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V. The configuration space of geometric objects. // Cybernetics and Systems Analysis. - 2018. V. 54(5), P. 715–724.

КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ В АВІАЦІЇ

Бондарь О.П.

bondarkla@ukr.net

Летняя академия НАУ

Abstract. In this paper the author considers the connection between the mathematical theory of combinatorial analysis and certain characteristics of the aviation system.

Известно, что приложения любого математического понятия возникают из осмысления сути понятия, а, отсюда, - его взаимосвязи с предметом приложения. «Конфигурация» происходит от позднелатинского *configuratio* – придание формы, расположение, внешний вид, очертание; взаимное расположение предметов или их частей. «Комбинаторный» происходит от латинского *combinare* – соединять, сочетать – основанный на комбинировании.

Понятие «комбинаторные конфигурации» часто отождествляется с комбинаторным анализом – разделом математики, посвященном решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемой комбинаторной конфигурацией.

Поэтому можно сказать, что целью комбинаторного анализа является изучение комбинаторных конфигураций. Это изучение включает в себя вопросы существования комбинаторных конфигураций, алгоритмы их построения, оптимизацию таких алгоритмов, а также решение задач перечисления, в частности, определение числа конфигураций данного класса. Простейшими примерами комбинаторных конфигураций являются перестановки, сочетания и размещения.

В авиации это достаточно объемное понятие может иметь много приложений, например:

- формирование алгоритмов (инструкций) действий авиационных специалистов в аварийных ситуациях, исходя из перечня возможных действий, упорядоченного заданными правилами, которые, в свою очередь, также формируются внешними и внутренними факторами авиационной системы;

- конструирование пассажирских и грузовых воздушных судов, беспилотных летательных аппаратов различного назначения, изучение законов их функционирования также есть комбинаторной конфигурацией элементов конструкций с законами их взаимодействия;

- наконец, перестановки, сочетания и размещения могут быть среди теоретических основ создания и функционирования авиационных тренажеров при подготовке и повышении квалификации авиационных специалистов.

Таким образом, используя основные характеристики такого понятия, как комбинаторные конфигурации, можно изучать и оптимизировать функционирование различных объектов и систем в авиации.

ЗАДАЧА ПЕРЕВОДА СОБСТВЕННЫХ ИМЕН В ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ «МАТЕМАТИКА»

Воблый В.А., Архипова Н.А.
vitvobl@yandex.ru, nataar@yandex.ru
Москва, ВИНТИ РАН

Аннотация. Рассматриваются методы решения задачи перевода собственных имен с помощью программы машинной транскрипции. Обсуждается опыт решения этой задачи с помощью систем машинного перевода. Представлена БД «Транслитерация» в информационной системе «Математика» ВИНТИ РАН.

Abstract. We consider methods for solving the problem of translation of proper names via of the machine transcription program and discuss the experience of solving this problem using machine translators. We present the database "Transliteration" in the information system "Mathematics" of the VINITI RAS.

В практике редактирования реферативного журнала «Математика» ВИНТИ РАН часто приходится решать задачу перевода иностранных собственных имен на русский язык. Эта задача может быть решена разными методами [1].

При прямом графическом переносе собственное имя в тексте перевода пишется точно теми же символами, как и в исходном тексте. Этот метод применяется в специальных научно-технических текстах. Например, пишут: «Операционная система Windows».

Транслитерация – это побуквенная передача имен собственных, записанных с помощью одной графической системы, средствами другой графической системы. При этом часто не передается фонетический облик имени, в результате чего оно может стать неузнаваемым. Например, английская фамилия Smith транслитерируется на русский язык как «Смитх».

В методе транскрипции производится передача имени собственного с одного языка на другой с учетом его произношения. При этом могут использоваться как специальные знаки, так и буквы обычных алфавитов. В практической транскрипции применяются только буквы алфавита языка, на который осуществляется перевод.

Машинная транскрипция – это практическая транскрипция, производимая с помощью компьютера [2]. Ее преимуществами являются точность в рамках заданного набора правил и большая скорость обработки информации. Система автоматической транскрипции может использовать как правила, написанные ранее вручную, так и автоматически генерировать правила транскрипции в процессе обучения. В качестве обучающей информации служат массивы имен на языке оригинала и соответствующих им переводов. В компьютерной лингвистике такие массивы текстов на двух и более языках называются параллельными корпусами текстов [3]. В результате обучения системы создается статистическая модель транскрипции. Однако автоматически порожденные правила могут быть также представлены в явном виде с помощью последовательности конечных автоматов [4].

Методы машинной транскрипции можно разделить на методы, использующие соответствия букв и подстрок, и методы, использующие соответствия фонем. В первом случае правила транскрипции представляют собой правила перевода символов входного языка в символы выходного языка. Во втором случае правила ставят в соответствие звукам входного языка звуки выходного языка. Перед применением правил проводится преобразование имени из буквенной записи в последовательность фонем. Затем эта последовательность

фоном переводится в последовательность фонем целевого языка, которая затем преобразуется в буквенную запись на целевом языке. В некоторых системах используются правила, составленные вручную – например, в системе «Транскриба». Система «Транскриба» в настоящее время она поддерживает 32 языка, причем возможен перевод в обе стороны для любой пары языков. Эта универсальность достигается за счет использования промежуточного фонетического представления. Правила транскрипции составляются вручную, но нет необходимости определения соответствий для каждой пары языков: достаточно определить правила преобразования букв и подстрок языка в фонетическое представление (в промежуточный фонетический алфавит по возможности включили все звуки, имеющиеся в представленных в системе языках). Точность транскрипции с помощью этой системы довольно высока (около 99%) [2].

Кроме автономных систем машинной транскрипции задача перевода собственных имен может решаться универсальными системами машинного перевода, как например, Яндекс-переводчиком, Google-переводчиком, переводчиком Translate (онлайновой версии системы PROMT). К сожалению, целый ряд фамилий математиков (Abramowitz, Buffon, Dilworth и др.) все эти переводчики не могут перевести или переводят с ошибкой. Опыт показывает, что качество перевода фамилий авторов в математических текстах универсальными системами машинного перевода хуже, чем специализированными системами машинной транскрипции.

В ВИНТИ РАН успешно эксплуатируется и продолжает развиваться информаци-онная система «Математика», центральной частью которой является БД «Математика».

В состав этой системы в раздел «Справочные данные» включена подсистема «Трансли-терация» (БД «Транслитерация») [5]. Так как входной поток иностранных статей, поступа-ющих в ВИНТИ РАН для реферативного журнала «Математика» состоит на 90 % из документов на английском языке, то БД «Транслитерация» в настоящее время является параллельным корпусом английских собственных

имен и соответствующих им русских имен. Этот корпус постоянно пополняется с помощью БД «Математика». В дальнейшем планируется его использование для настройки программ машинной транскрипции.

Литература

1. Ермолович Д.И. Методика межъязыковой передачи имен собственных. М., Всероссийский центр переводов научно-технической литературы и документации, 2009.

2. Логачева В.К. Обзор методов машинной практической транскрипции. Новые информационные технологии в автоматизированных системах, 2012, т. 15, с. 157-169.

3. Прикладная и компьютерная лингвистика. Под ред. И.С. Николаева, О.В. Митрениной, Т.М. Ландо М.: ЛЕНАНД, 2016.

4. Логачева В.К., Клышинский Э.С., Галактионов В.А. Автоматическая генерация правил транскрипции и машинная транскрипция имен собственных с использованием конечного автомата. Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша, 2012, №14.

5. Никольская И.Ю. Развитие справочного аппарата в ресурсном комплексе интегральной информационной системы «Математика» ВИНТИ РАН // Реалии и перспективы в экономике, управлении проектами, педагогике, праве, природопользовании, социологии, медицине, технике, математике, физике, философии, филологии, психологии: Сборник научных статей по итогам Международной заочной научно-практической конференции, Санкт-Петербург, 2013, с. 101-103.

ОБ ОДНОМ ТОЖДЕСТВЕ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ КРАВЧУКА

Воблый В. А.

vityobl@yandex.ru

Москва, ВИНТИ РАН

Аннотация. Получено новое тождество для многочленов Кравчука.

Abstract. The new identity was derived for the Krawtchouk' polynomials.

Выдающийся украинский математик М.Ф. Кравчук ввел в 1929 г. в математику многочлены, которые теперь носят его имя [1]. Многочлены Кравчука являются ортогональными много-членами дискретного переменного, они широко используются в различных задачах анализа, теории вероятностей и теории кодирования. Многочлены Кравчука $P_k(x; n)$ могут быть определены с помощью производящей функции [2, с. 132]:

$$(1 - z)^x (1 + z)^{n-x} = \sum_{k=0}^n P_k(x; n) z^k \quad (1)$$

Из (1) следует интегральное представление для $P_k(x; n)$:

$$P_k(x; n) = \text{Coe}f_z (1 - z)^x (1 + z)^{n-x} z^{-k-1} .$$

Теорема. При $p \geq 1$ верно тождество

$$\sum_{i=0}^p \sum_{q=0}^{p(p-1)/2} \binom{p}{i} P_q(i(p-i); p(p-1)/2) = 2^{p(p-1)/2+1} . \quad (2)$$

Доказательство. В [3, с. 25, 100] найдено тождество:

$$\sum_{q=0}^m P_q(x; n) = P_m(x-1; n-1) .$$

(Отметим, что в [3] другое обозначение для многочленов Кравчука: $P_k(x; n) = \varphi_k(n, x)$.)

Обозначим левую часть (2) через L , где $m = p(p-1)/2$

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=0}^p \sum_{q=0}^m \binom{p}{i} P_q(i(p-i); m) \\ &= \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} P_m(i(p-i) - 1; m - 1) . \end{aligned}$$

$= 2P_m(-1; m-1)$, так как $P_k(x; n) = 0$ при $x \geq 0, k > n$.

Теперь имеем

$$\begin{aligned}
L &= 2\text{Coe}f_z(1-z)^{-1}(1+z)^m z^{-m-1} = \\
&= 2\text{Coe}f_z \left(\sum_{i=0}^{\infty} z^i \right) \left(\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} z^j \right) z^{-m-1} \\
&= 2\text{Coe}f_z \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^k \binom{m}{s} \right) z^{k-m-1} \\
&= 2 \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} = 2^{m+1}.
\end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Дадим теперь комбинаторное доказательство тождества (2). Пусть W_{pq} – число помеченных четных графов с p вершинами и q ребрами. Известна формула [4, с. 24]:

$$\begin{aligned}
w_p(z) &= \frac{1}{2^p} (1+z)^{p(p-1)/2} \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^{i(p-i)} \\
&= \sum_{q=0}^{p(p-1)/2} W_{pq} z^q.
\end{aligned}$$

С помощью (1) найдем

$$\begin{aligned}
w_p(z) &= \frac{1}{2^p} \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} (1-z)^{i(p-i)} (1+z)^{p(p-1)/2-i(p-i)} \\
&= \frac{1}{2^p} \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \sum_{q=0}^{p(p-1)/2} P_q(i(p-i); p(p-1)/2) z^q.
\end{aligned}$$

Переставляя знаки суммирования, имеем

$$W_{pq} = \frac{1}{2^p} \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} P_q \left(i(p-i); \frac{p(p-1)}{2} \right).$$

Так как число W_p помеченных четных графов с p вершинами равно $2^{(p-1)(p-2)/2}$ [4, с. 22], получим

$$W_p = \sum_{q=0}^{\frac{p(p-1)}{2}} W_{pq} = \sum_{q=0}^{\frac{p(p-1)}{2}} \frac{1}{2^p} \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} P_q \left(i(p-i); \frac{p(p-1)}{2} \right) = 2^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}},$$

что эквивалентно тождеству (2).

Литература

1. М. Krawtchouk Sur une generalization des polynomes d'Hermite. C.R. Acad. Sci., 1929, v. 189, No. 17, p. 620-622.
2. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов, исправляющих ошибки. – М.: Связь, 1979.
3. Леонтьев В.К. Избранные задачи комбинаторного анализа. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.
4. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. М.: Мир, 1977.

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ БЛОЧНО-КОЛЕСНЫХ ГРАФОВ

Воблый В.А., Мелешко А.К.

vitvobl@yandex.ru, akmelelshko@gmail.com

Москва, ВИНТИ РАН, МГТУ им. Н.Э. Баумана

Аннотация. Получена явная формула для числа помеченных блочно-колесных графов.

Abstract. The exact formula was derived for the number of labeled block-wheel graphs.

Блок – это связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения [1]. Колесо W_n – граф с $n \geq 4$ вершинами, который образован соединением единственной вершины со всеми вершинами $(n-1)$ – цикла [2, с. 63]. Граф W_4 изоморфен полному графу K_4 . Блочно-колесный граф – граф, у которого каждый блок – колесо. Класс графов называется *блочно-устойчивым*, если граф принадлежит этому классу тогда и только тогда, когда каждый блок графа принадлежит этому классу.

Теорема. Для числа BF_n помеченных блочно-колесных графов с n вершинами при $n \geq 4$ верна формула

$$BF_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \frac{1}{(1-z)^{n/2}} \exp\left(\frac{nz^4}{2(1-z)} - \frac{nz}{2} - \frac{nz^2}{4}\right).$$

Доказательство. Пусть C_n – число помеченных связных графов с n вершинами, а B_n – число помеченных блоков с n вершинами. Введем производящую функцию:

$$B(z) = \sum_{n=3}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

В работе [3] автором была получена формула:

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB'(z)) z^{-n}, \quad (1)$$

где $[z^n]$ – коэффициентный оператор и $[z^{-1}]$ – оператор формального вычета [4]. Эта формула верна для подкласса связных графов, являющихся блочно-устойчивым классом графов. Класс блочно-колесных графов, как и любой класс связных графов, у которых все блоки принадлежат фиксированному множеству 2-связных графов, является блочно-устойчивым классом графов.

Обозначим через $B(z)$ экспоненциальную производящую функцию для числа блоков помеченных блочно-колесных графов:

$$BF_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{-1}] \exp(nB(z)) z^{-n}.$$

Известно, что граф G с n вершинами можно пометить $n!/|\text{Aut}(G)|$ способами, где $|\text{Aut}(G)|$ – порядок группы автоморфизмов графа [2, с. 14]. У простого цикла с n вершинами группа автоморфизмов – диэдральная группа, порядок которой равен $2n$ [1, с. 195]. Поэтому число помеченных колес с n вершинами равно $n!/2(n-1)$, и производящая функция запишется в виде:

$$B(z) = \frac{z^4}{4!} + \frac{1}{2} \sum_{n=5}^{\infty} \frac{z^n}{n-1}.$$

$$B'(z) = \frac{z^3}{6} + \frac{1}{2} \sum_{n=5}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{(n-1)} = \frac{z^3}{6} + \frac{1}{2} \sum_{k=4}^{\infty} z^k + \frac{1}{2} \sum_{k=4}^{\infty} \frac{z^k}{k} =$$

$$= -\frac{\ln(1-z)}{2} + \frac{z^4}{2(1-z)} - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{4}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$BF_n = \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \exp \left(-\frac{n \ln(1-z)}{2} + \frac{nz^4}{2(1-z)} - \frac{nz}{2} - \frac{nz^2}{4} \right) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{n} [z^{n-1}] \frac{1}{(1-z)^{n/2}} \exp \left(\frac{nz^4}{2(1-z)} - \frac{nz}{2} - \frac{nz^2}{4} \right).$$

Теорема доказана.

Литература

1. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 302 с.
2. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. – М.: Мир, 1977. – 324 с.
3. Воблый В.А. Об одной формуле для числа помеченных связных графов. // Дискретный анализ и исследование операций. – 2012. – Т. 19. – № 4. – С. 48-59.
4. Гульден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика. – М.: Наука, ГРФМЛ. – 1981. – 504 с.

ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ Q-БІНОМІАЛЬНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

Волков Ю.І.

yulysenko@i.ua

Центральноукраїнський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка

Анотація. Ми вивчаємо проблеми подільності q -біноміальних коефіцієнтів у формулі бінома Гаусса.

Abstract. We study in the Gauss's binomial formula a problems the divisibility of the q -binomial coefficients.

Будемо використовувати позначення квантового числення з книги [1]:

$$[n] = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n][n-1] \cdots [n-k+1]}{[k]!}, \quad [k]! = [1][2] \cdots [k].$$

формула бінома Гаусса (q -біноміальна формула):

$$(x + a)_q^n = \prod_{k=1}^n (x + a q^{k-1}) = \sum_{k=0}^n q^{k(k-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a^k x^{n-k}.$$

Символ m^n означатиме операцію m^n . Також будемо користуватись такими властивостями конгруенцій:

1. Якщо $a = a_1 a_2$ і $a_1 \equiv b_1 \pmod{c}$, $a_2 \equiv b_2 \pmod{c}$, то $a \equiv b_1 b_2 \pmod{c}$.
2. Якщо $a \equiv b_1 \pmod{c}$, $b_1 \equiv b_2 \pmod{c}$, то $a \equiv b_2 \pmod{c}$.

Лема 1. Нехай $a_0(1), a_0(2), \dots, a_0(n)$ довільні числа.

Тоді

$$\prod_{k=1}^{p^s} a_0(k) = \prod_{k=1}^{p^{s-1}} a_1(k) = \dots = \prod_{k=1}^{p^{s-m}} a_m(k) = \dots = a_s(1),$$

де

$$a_m(k) = \prod_{j=0}^{p-1} a_{m-1}(k + j p^{s-m}), m = 1, 2, \dots, s.$$

Лема 2. Нехай k_1, k_2, \dots, k_m довільні натуральні числа. Тоді

$$(x+1)_q^{k_1+k_2+\dots+k_m} = \prod_{i=1}^m (x+q^{k_1+k_2+\dots+k_{i-1}})_q^{k_i}.$$

Випливає з такої властивості q -біноміальних коефіцієнтів:

$$(x+a)_q^{n+m} = (x+a)_q^m (x+aq^m)_q^n.$$

Лема 3.
$$(x+q^m)_q^n = \sum_{K=0}^n q^{K(k-1)/2+mk} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k}.$$

Випливає з формули Гаусса для q -біноміальних коефіцієнтів.

Лема 4. Нехай p просте число, $m := p^{s-1}$, $[n]_m := \frac{1-q^{nm}}{1-q^m}$,

$$\begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix}_m := \frac{[p]_m [p-1]_m \cdots [p-k+1]_m}{[1]_m [2]_m \cdots [k]_m}. \text{ Тоді } \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix}_m, 0 < k < p,$$

ділиться на $[p]_m = [p^s]/[p^{s-1}]$.

Випливає з того, коли $q \rightarrow 1$, то $\begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix}_m \rightarrow \binom{p}{k}$, $[p]_m \rightarrow p$, і

тоді, якби твердження леми було хибне, то біноміальний коефіцієнт $\binom{p}{k}, 0 < k < p$, не ділився б на p , що не так.

Теорема 1. Нехай p просте число. Тоді

$$(x+1)_q^{p^{\wedge}s} \equiv (x^{p^{\wedge}s} + q^{\wedge}(p^s(p^s-1)/2)) \pmod{[p^s]/[p^{s-1}]}$$

Доведення. За лемами 1 і 4, на першому кроці отримаємо

$$(x+1)_q^{p^{\wedge}s} = \prod_{k=1}^{p^{\wedge}s} (x+q^{k-1}) = \prod_{k=1}^{p^{\wedge}(s-1)} (x+q^{\wedge}(k-1))(x+q^{\wedge}(k-1+p^{s-1})) \cdots$$

$$(x + q^{k-1+(p-1)p^{s-1}}) = \prod_{k=1}^{p^{s-1}} \prod_{j=0}^p q^{k(k-1)(r+2)/2} \left[\begin{matrix} p \\ j \end{matrix} \right]_m x^{p-j} \equiv$$

$$\prod_{k=1}^{p^{s-1}} (x^p + q^{k((k-1)p + p^s(p-1)/2)}) \left(\text{mod } \frac{[p^s]}{[p^{s-1}]} \right).$$

Продовжуємо далі використовувати леми 1 і 4, на m -тому кроці отримаємо

$$(x+1)_q^{p^{s-1}} \equiv$$

$$\prod_{k=1}^{p^{s-m}} \left(x^{p^{s-m}} + q^{k((k-1)p^m + p^s(p^{m-1}-1)/2)} \right) \left(\text{mod } \frac{[p^s]}{[p^{s-1}]} \right).$$

Нарешті, на s -тому кроці отримаємо твердження теореми 1.

Примітка.

$$[p^s]/[p^{s-1}] = 1 + q^{p^{s-1}} + q^{2p^{s-1}} + \dots + q^{(p-1)p^{s-1}}.$$

Теорема 2. Нехай p просте число і

$$n = n_0 + n_1 p^{s_1} + n_2 p^{s_2} + \dots + n_m p^{s_m}, 0 \leq n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_m.$$

Тоді кількість q -біноміальних коефіцієнтів, які не діляться або на $[p^{s_1}]/[p^{s_1-1}]$, або на $[p^{s_2}]/[p^{s_2-1}]$, ..., або на $[p^{s_m}]/[p^{s_m-1}]$, дорівнює добутку $(n_0+1)(n_1+1)\dots(n_m+1)$.

Доведення. Позначимо:

$$a_k = n_0 + n_1 p^{s_1} + \dots + n_{k-1} p^{s_{k-1}}.$$

В силу леми 2

$$(x+1)_q^n = \prod_{k=0}^m (x + q^{a_k})_q^{n_k p^{s_k}} =$$

$$\prod_{k=0}^m \prod_{j=0}^{n_k-1} (x + q^{a_k + jp^{s_k}})^{p^{s_k}}. \quad (1)$$

В силу теореми 1

$$(x + q^{a_k + jp^{s_k}})^{p^{s_k}} \equiv$$

$$(x^{p^{s_k}} + q^{a_k + p^{s_k}(p^{s_k} + 2j - 1)/2}) \left(\text{mod } \frac{[p^{s_k}]}{[p^{s_k-1}]} \right).$$

Тому у виразі під знаком першого добутку $(n_k + 1)$ член не ділиться на $[p^{s_k}]/[p^{s_k-1}]$, отже, добуток цих виразів буде мати $(n_0 + 1) \cdots (n_m + 1)$ членів, які не діляться або на $[p^{s_1}]/[p^{s_1-1}]$, або на $[p^{s_2}]/[p^{s_2-1}]$, ..., або на $[p^{s_m}]/[p^{s_m-1}]$.

Наслідок. Якщо $q \rightarrow 1$, то $[p^s]/[p^{s-1}]$ прямує до p , тоді отримаємо результат проблеми 4723 ([2], pp.424-425): *кількість біноміальних коефіцієнтів у формулі бінома Ньютона $(1+x)^n$, які не діляться на p , дорівнює числу $(n_0 + 1) \cdots (n_m + 1)$.*

Література.

1. Кас В., Cheung P. Quantum Calculus, Springer Verlag. – New York, 2002. – 113 p.
2. The William Lowell Putnam Mathematical competition. Problems and Solution 1938-1064, edited by Gleason A.M., Greenwood R.E., Kelly I.M. – Washington: MAA, 1980. – 639 p.

ЯК ЗБІЛЬШИТИ ЗВ'ЯЗНІСТЬ ГРАФА

Глухов О.Д.

glukhov07@gmail.com,

Національний авіаційний університет

Анотація. За допомогою випадкових підстановок показано, що будь-який k -реберно зв'язний граф на $2n$ вершинах можна перетворити на $(k+1)$ -реберно-зв'язний, додавши до нього n додаткових ребер.

Abstract. Using random permutations it is shown that any k -edge-connected graph on $2n$ vertices can be converted to $(k+1)$ -edge-connected, by adding new n edges.

Нехай G_{2n}^0 граф на $2n$ вершинах з множиною вершин G_{2n}^0 , і множиною ребер G_{2n}^1 , $\kappa^1(G_{2n})$ реберна зв'язність цього графа, а H_{2n} - деяка паросполука (1-регулярний граф) на тих же вершинах. Для будь-якої множини $A \subset G^0$ графа G

ступінь $\rho(A, G)$ підмножини в A вершин в графі G визначимо наступним чином:

$$\rho(A, G) = |\{(a, b) : (a, b) \in G^1, a \in A, b \notin A\}|$$

Показано, що для довільного графа G_{2n} , $\kappa^1(G_{2n}) = k \geq 1$, існує така паросполука H_{2n} , що $\kappa^1(G_{2n} \cup H_{2n}) \geq k + 1$.

Точніше, тут буде доведено, що для деякої випадкової паросполуки H_{2n} умова $\kappa^1(G_{2n} \cup H_{2n}) \geq k + 1$ буде виконана з деякою додатною ймовірністю при достатньо великих n .

Для початку сформулюємо теорему про випадкові підстановки, яка узагальнює теореми Робіт [1, 2].

Теорема 1. Якщо група Γ діє на множині U , де $\{U_k\}_{k=1}^s$ - множина орбіт цієї групи, $A, B \subset U$, g - випадковий елемент групи Γ , то

$$\text{Prob}(g(A) \cap B = \emptyset) \geq 1 - \sum_{k=1}^s |A \cap U_k| \cdot |B \cap U_k| / |U_k|.$$

Надалі буде також використовуватися твердження, яке випливає з результатів роботи [3].

Лема 1. Якщо $\kappa^1(G_{2n}) = r$, то

$$\forall k \mid \{X : X \subset G^0, |X| = k, \rho(X, G_{2n}) = r\} \mid \leq n.$$

Конструкція. Нехай в умовах теореми 1 : $U = 2^V$,

$$V = G_{2n}^0 = \{1, 2, \dots, 2n\}, \quad U_k = \{V_k : V_k \subset V, |V_k| = k\},$$

$$A = \{X : X \subset V, \rho(X, G) = r\}, \quad B = \{X : X \subset V, \rho(X, H) = 0\}.$$

Зауважимо, що мають місце наступні рівності:

$$|U_{2k}| = \binom{2n}{2k}, \quad |B \cap U_{2k}| = \binom{n}{k}, \quad B \cap U_{2k-1} = \emptyset.$$

Поширимо дію симетричної групи S підстановок на множині V на множину $U = 2^V$ наступним чином:

$$\forall s \in S \quad \forall X \in U : s(X) = \{s(x) : x \in X\}.$$

Очевидно, що орбітами цієї групи будуть множини $\{U_k\}_0^n$. Тепер можна застосувати теорему 1 при $k \geq 2$ (випадок $k = 2$ вимагає окремої оцінки) і отримати наступне твердження.

Теорема 2. Нехай G_{2n} граф на $2n$ вершинах $\kappa^1(G_{2n}) = r$, а H_{2n} - деякий 1-регулярний граф на тих же вершинах, а s - випадкова перестановка, $s \in S$. Тоді має місце оцінка:

$$\text{Prob}(\kappa^1(G_{2n} \cup s(H_{2n})) \geq r+1) \geq 1/3 - 6/n.$$

Література

1. Глухов О.Д. Про застосування груп перестановок в деяких комбінаторних задачах.- Укр. мат. журнал, т.60, №11, 2008, с.1568-1571.
2. Глухов О.Д. Про одну властивість випадкових перестановок.-Матеріали 19-го Міжнародного науково-практичного семінару "Комбінаторні конфігурації та їх застосування", Кропивницький, 2017, с. 24-27.
3. Диниц Е.А., Карзанов А.В., Ломоносов М.В. О структуре системы минимальных реберных разрезом графа.- Исследования по дискретной оптимизации, Наука, М.,1976, с. 290-306.

КОМБІНАТОРНІ ОБ'ЄКТИ: ТЕОРІЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ

Л.Ф. Гуляницький

leonhul.icyb@gmail.com

Інститут кібернетики ім.В.М.Глушкова НАН України

Анотація. Вводяться поняття комбінаторних об'єктів, що є узагальненням поняття комбінаторних конфігурацій, запропонованого К. Бержем, та комбінаторних просторів. Розглядаються питання формального означення важливого як в теоретичному, так і в прикладному аспектах терміну "задача комбінаторної оптимізації".

Abstract. The concept of combinatorial objects is introduced, which is a generalization of the concept of combinatorial configurations proposed by K. Berg, and combinatorial spaces. The questions of the formal definition of the term "combinatorial optimization problem" are investigated in the theoretical as well as in the applied aspects.

Відштовхуючись від поняття дискретного простору, пропонуються строгі означення ряду важливих понять, таких як *задача комбінаторної оптимізації* (ЗКО), *комбінаторний простір*, *комбінаторний об'єкт*. Строга формалізація комбінаторних об'єктів здійснена на основі розвитку запропонованого К.Бержем поняття комбінаторної конфігурації [1] та підходу, запропонованого в [2-4]. Нехай $U = \{1, \dots, m\}$, а V – деяка скінченна лінійно впорядкована множина (ланцюг); позначимо $n = \|V\|$.

Означення 1. Під *комбінаторною конфігурацією* у сенсі Бержа розуміється відображення $\varphi : U \rightarrow V$, яке задовольняє певній системі обмежень Λ .

На основі цього підходу побудовані комбінаторні конфігурації, які відповідають найпростішим комбінаторним об'єктам: розміщенням, перестановкам, комбінаціям, розбиттям та іншим об'єктам, утвореним на основі урнної схеми.

Наприклад, якщо $\Lambda = \emptyset$, то кожна конфігурація φ визначає розміщення з необмеженими повтореннями обсягу m із n різних елементів. Нехай тепер $\Lambda = I$, де I – множина ін'єктивних відображень: $\forall x, y \in U, x \neq y \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y)$.

За виконання цієї умови конфігурація φ задає розміщення m елементів із усіх n можливих, а при $m = n$ – перестановку. Позначивши M множину *строго монотонних* функцій, тобто таких, що $\varphi(i) < \varphi(j)$, коли $i < j$, маємо при $\Lambda = M$ відображення сполучень (комбінацій).

Проте, поза рамками цієї схеми залишилися інші комбінаторні об'єкти, наприклад, граfi, гіперграфи, булеві простори, перестановочні матриці та ін. Пропонується узагальнення схеми К. Бержа, що дозволяє породжувати та класифікувати більш широке коло комбінаторних структур.

Нехай задані множина $Y = \{1, \dots, m\}$, Z – дискретний, зокрема, скінченний простір (назвемо його твірним), φ – гомоморфізм, що задовольняє деякій системі обмежень Ω .

Означення 2. Під *комбінаторним об'єктом* κ розумітимемо тріаду $\kappa = (\varphi, \tilde{X}, \Omega)$, де $\varphi: Y \rightarrow \tilde{X}$, а \tilde{X} – базовий простір.

Конкретизацією виду базового простору можна породжувати комбінаторні об'єкти різного типу, які класифікуємо наступним чином.

Означення 3. Назвемо *комбінаторними об'єктами 1-го порядку* такі комбінаторні об'єкти, у яких базовий простір збігається з твірним, тобто $\kappa = (\varphi, X_{(1)}, \Omega)$, де $X_{(1)} \equiv Z$, $\varphi: Y \rightarrow Z$.

Неважко переконатися, що якщо Z – це скінченний ланцюг, то такі комбінаторні об'єкти збігаються з комбінаторними конфігураціями у сенсі Бержа.

Означення 4. *Комбінаторними об'єктами k -го порядку* ($k > 1$) назвемо комбінаторні об'єкти $\kappa = (\varphi, X_{(k)}, \Omega)$, де $X_{(k)} = X_{(k-1)} \cup Z^k$, $\varphi: Y \rightarrow X_{(k)}$.

Як приклад, при $k = 1$, окрім комбінаторних конфігурацій у сенсі Бержа, комбінаторними об'єктами можна описати множину цілочислових або булевих векторів розмірності m , якщо покласти $Z = C$, де C – множина цілих чисел, або $Z = \{0,1\}$ відповідно; при $k=2$ можна описати, зокрема, задачі, визначені на графах – орієнтованих і неорієнтованих, зв'язних і незв'язних; при $k > 2$ можлива побудова відповідності комбінаторних об'єктів і, як приклад, таких структур, як гіперграфи, комбінаторні матриці тощо [2-4].

Нехай в просторі X тим чи іншим чином введена система околів O , тобто для довільного $x \in X$ визначене сімейство множин $o^\sigma(x) \subseteq 2^X$, $\sigma \in I$, де I – множина індексів околів, причому $x \in o^\sigma(x)$ для всіх значень σ , а $O = \{o^\sigma(x): x \in X, \sigma \in I\}$: $X = (X, O)$. Поняття околу у такому розумінні є слабшим за поняття метричного або топологічного околу і включає їх як частинні випадки.

Означення 5. Базисними околами довільної точки $x \in X$ будемо називати множину

$$B_x = \{o^\tau(x) \in O: \|o^\tau(x)\| > 1 \text{ \& } \nexists \gamma: 1 < \|o^\gamma(x)\| < \|o^\tau(x)\|\}.$$

Тобто, базисні околи – це такі неедноточкові околи точки, що мають найменшу потужність із всіх околів цієї точки. Неважко бачити, що всі базисні околи однієї точки мають однакову потужність, а для деяких точок простору таких околів може і не існувати.

Означення 6. Простір X називається *локально скінченним* (у комбінаторному розумінні), якщо всі базисні околи його точок скінченні:

$$\forall x \in X, o^\tau(x) \in B_x \Rightarrow \|o^\tau(x)\| < \infty.$$

Введене поняття локальної скінченності є слабшим за аналогічне поняття, яке визначено для метричних просторів [5], та еквівалентним поняттю, що використовується для топологічних просторів [6].

Можна показати, що справедливі наступні теореми.

Теорема 1. Довільна скінченна множина буде локально скінченним простором за будь-якої метрики..

Теорема 2. Довільний метричний локально скінченний простір є дискретним.

В то же час, не всякий дискретний простір є локально скінченим – контрприкладом є спеціальна дискретна топологія [2].

Означення 7. Комбінаторним простором назовемо дискретний локально-скінченний в комбінаторному розумінні простір, який має не більше ніж злічену кількість елементів.

Розглянемо застосування пропонованих понять для формалізації задач оптимізації. У науковій літературі широко вживається термін "задача комбінаторної оптимізації", хоча вичерпного строгого означення не дається або ж воно не охоплює всіх відомих задач. У [7] під ЗКО розуміється проблема пошуку екстремумів заданої цільової функції, коли X – комбінаторний простір. Під комбінаторним простором тут розуміється сукупність комбінаторних об'єктів певного типу, утворених із елементів заданої скінченної множини (твірна

множина). Водночас, поняття "комбінаторний об'єкт" не формалізується, а як приклад названо комбінації, перестановки та розміщення. В зарубіжній літературі переважно вживається означення ЗКО, введене в [8] (стереотипно перевидано в 1998 р. [9]), де простір варіантів задачі визначається як "скінченна (рідше – нескінченна зліченна) множина". Таке тлумачення не дозволяє строго формально окреслювати окремі класи ЗКО, такі, наприклад, як дискретне, цілочислове чи булеве програмування. Більше того, воно часто призводить до фактичного ототожнення понять дискретної та комбінаторної оптимізації, яке часто спостерігається в ряді робіт. Додамо, що під дискретним програмуванням інколи розуміють дослідження та розв'язання екстремальних задач, визначених на скінченних множинах [10].

Зауважимо, що розгляд прикладів ЗКО в [8] взагалі починається із задачі лінійного програмування, яка, зрозуміло, може в більшості випадків індукувати відповідну ЗКО, але в загальному випадку належить до задач неперервної оптимізації, оскільки в більшості індивідуальних задач лінійного програмування множина їх глобальних розв'язків є континуальною (неперервною). Показовим у цьому плані є той факт, що К. Блум та А. Ролі, відтворивши в [11] дослівно означення із [8], уже в [12] обмежили клас ЗКО задачами, в яких простір розв'язків – обов'язково лише скінченна множина. Така трактовка найчастіше зустрічається у джерелах [13].

Довільну задачу оптимізації (не лише комбінаторної) у загальному випадку можна подати кортежем $\langle f, X, \Pi, D, ext \rangle$, де $f: X \rightarrow R^1$ – задана цільова функція задачі, R^1 – числова пряма, X – простір розв'язків задачі (простір пошуку), Π – предикат, який визначає підмножину $D \subseteq X$ припустимих варіантів розв'язку згідно наявних обмежуючих умов, $extr \in \{\min, \max\}$ – напрям оптимізації.

Всюди в подальшому, якщо особливо не обумовлене протилежне, будемо для визначеності розглядати задачі на мінімум. Задачу мінімізації можна переписати у вигляді: необхідно знайти $x_* \in D \subseteq X$ таке, що

$$x_* = \arg \min_{x \in D \subseteq X} f(x). \quad (1)$$

В залежності від виду простору X розрізняють задачі неперервної, комбінаторної та змішаної оптимізації. Перший клас утворюють задачі, в яких простір X є неперервним (континуальним). Щодо другого класу, то тут існують різні підходи до означення як самого поняття ЗКО, так і його підкласів – власне комбінаторних задач, а також задач дискретного та цілочислового програмування [2]. Часто під *дискретною оптимізацією* розуміють задачу вигляду (1), в якій множина розв’язків $X = D_1 \times \dots \times D_n$ – це n -вимірний простір дійсних чисел, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in D_i$, $i = 1, \dots, n$, причому хоча б одне із D_i є дискретним підпростором [14].

Повертаючись до оптимізаційної задачі (1), дамо наступне означення [2-4, 15].

Означення 8. Задача (1) називається задачею комбінаторної оптимізації, якщо простір її розв’язків X – це комбінаторний простір.

Запропонований підхід до формалізації понять *комбінаторний простір*, *комбінаторний об’єкт* і *ЗКО* був застосований і до формалізації поняття “нечіткий комбінаторний об’єкт”, “нечітка ЗКО”, що дозволяє формалізувати як відомі, так і нові класи задач комбінаторної оптимізації [2, 16].

Зазначимо, що поняття комбінаторного об’єкту пов’язане в загальному випадку із абстрактними базовими просторами, що дозволяє використовувати наведені вище результати при формалізації широких класів практичних задач. Наприклад, в роботах [17,18] виділений клас евклідових комбінаторних конфігурацій, що являють собою образи комбінаторних об’єктів при їх відображенні у арифметичний евклідов простір, а в [19] виділено комбінаторну структуру задачі розміщення геометричних об’єктів. Якщо в якості абстрактних базових множин розглядати базові геометричні об’єкти, то можна будувати об’єкти складної просторової форми як комбінаторні об’єкти вищих порядків.

Література

1. Berge C. Principes de combinatoire. –Paris: Dunod, 1968. – 146p.
2. Hulianytskyi L. F., Riasna I. I. Formalization and classification of combinatorial optimization problems. In: Optimization Methods and Applications (eds. Butenko S., Pardalos P. M., Shylo V.). – Cham: Springer International Publishing AG, 2017. – P. 239–250.
3. Гуляницький Л.Ф. До формалізації та класифікації задач комбінаторної оптимізації // Теорія оптимальних рішень. – 2008. –7. – С. 45–49.
4. Гуляницький Л.Ф., Сиренко С.И. Определение и исследование комбинаторных пространств // Теорія оптимальних рішень. – 2010. – 9. – С. 17–24.
5. Baudier F., Lancien G. Embeddings of locally finite metric spaces into Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 2008. – N 136. – P. 1029–1033.
6. Nakaoka F., Oda N. Some applications of minimal open sets // Int. J. of Mathematics and Mathematical Sciences. – 2001. – N 27(8). – P. 471–476.
7. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – Киев: Наук. думка, 1981. – 288 с.
8. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985. – 512 с.
9. Papadimitriou C.H., Steiglitz K. Combinatorial optimization: algorithms and complexity (second edition). – N.Y.: Dover Publications, 1998. – 496 p.
10. Энциклопедия математики. – М.: Советская энциклопедия, 1979. – Т. 2. – С. 204–205.
11. Blum C., Roli A. Metaheuristics in Combinatorial Optimization: Overview and Conceptual Comparison. ACM Computing Surveys. – 2003. – 35, N 3. – P. 268–308.
12. Blum C., Roli A., Alba E. An introduction to metaheuristic techniques // Parallel metaheuristics: A new class of algorithms (Ed. E.Alba). – Hoboken: John Wiley & Sons. – 2005. – P. 3–42.

13. Korte B., Vygen J. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms (Sixth Edition). – Berlin: Springer-Verlag, 2018. – 698 p.

14. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации. – Киев: Наук. думка, 2003. – 261 с.

15. Гуляницький Л.Ф., Мулеса О.Ю. Прикладні методи комбінаторної оптимізації: навч. посіб. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2016. – 142 с.

16. Гуляницький Л.Ф., Рясна І.І. До формалізації задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах // Теорія оптимальних рішень. – 2016. – С. 17–25.

17. Yakovlev S.V., Pichugina O.S. Properties of Combinatorial Optimization Problems Over Polyhedral-Spherical Sets // Cybernetics and Systems Analysis. –2018. –**54**, №1. – P. 111–123.

18. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Пичугина О.С. Евклидовы комбинаторные конфигурации. –Харьков: Константа, 2017. – 404 с.

19. Yakovlev S.V. The method of artificial expansion of space in the problem of optimal placement of geometric objects // Cybernetics and Systems Analysis. – 2017. –**53**, №5. –P. 825–832.

ОПТИМАЛЬНИЙ ПОШУК ДВОХ АКТИВНИХ КУЛЬ НА МНОЖИНІ $n=180$

Донець Г.П.

g_donets@mail.ru.

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України

У роботі [1] наводиться теорема пошуку двох активних куль на множині заданих розмірності $n = 127$. Тут приводиться доведення теореми про те, що дві активні кулі серед $n = 180$ заданих щонайменше можна відшукати за 14 перевірок (кроків).

При доведенні, як і в [1], будемо використовувати функції: $f_2(n)$ – мінімальна кількість перевірок для виявлення двох активних куль із n заданих; $g(n_1, n_2)$ – мінімальна кількість

перевірок для виявлення двох активних куль, які перебувають по одній у двох підмножинах, одна з яких містить n_1 куль, а друга - n_2 ; $h(n_1^+, n_2)$ – мінімальне число перевірок для пошуку двох активних куль, якщо у першій множині є хоча би одна активна куля.

Результати перевірок будемо представляти, як правило, у вигляді двох графів, які показані на рис.1, 2. На цих рисунках ребра, які з'єднують дві частини, рівносильні сумі ребер, які з'єднують кулі цих частин. Кількість таких ребер дорівнює добудку їх обсягів. Обсяг частини означає кількість її куль.

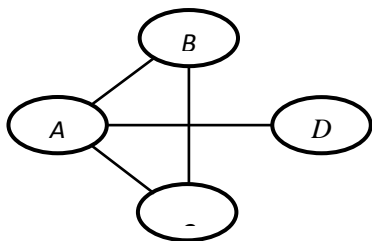


Рис.1. Q -граф.

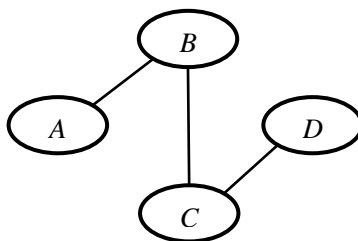


Рис. 2. N -граф.

Перший граф називається Q – графом і позначається $Q(A, B, C, D)$. Другий називається N -графом і позначається $N(A, B, C, D)$. Частини графів будемо називати відповідно A -, B -, C і D - частинами. Відмітимо, що тільки в A -частині Q -графа і більш ніде є внутрішні ребра. Кількість ребер Q – графа дорівнює $A(B+C+D) + B \cdot C + C_A^2$, де C_A^2 – число комбінацій, а кількість ребер N -графа дорівнює $A \cdot B + B \cdot C + C \cdot D$. Характерно, що в Q – графі D -частина не має спільних ребер з B – і C – частинами. Якщо в Q – графі зробити вибірку з C – частини, то в разі позитивного результату ребра між A – і B – частинами зникають, і, таким чином, отримуємо N -граф. Те саме можна сказати і про B – частину. Здійснюючи вибірки з N -графа, в разі позитивного результату отримуємо або N -граф, або дводольні графи, які позначимо $d(\alpha, \beta)$, де α, β – кількість вершин в долях. Якщо у дводольних графів на кожному кроці береться

половина ребер і після перевірки ця половина залишається, або відкидається при негативному результаті, то таку процедуру назвемо методом дихотомії. Очевидно, якщо дихотомія можлива на кожному кроці, то розв'язок досягається за мінімальну кількість кроків.

Теорема. На множині куль для $n = 180$ мінімальна кількість перевірок для пошуку двох активних куль $f_2(180)=14$.

Доведення. Крок 1. Беремо для перевірки 53 кулі. Якщо результат перевірки $<53>^-$, тоді залишається 127 куль, дві активні серед яких можна знайти за $f_2(127)=13$ кроків [1], а всього для знаходження 2-х активних куль достатньо 14 перевірок. Якщо результат перевірки $<53>^+$, то отримуємо функцію $h(53^+, 127)$, для якої кількість варіантів $m = 53 \cdot 127 + C_{53}^2 = 8109 < 2^{13}$. Це говорить про достатність 13-и кроків для розв'язання задачі. Далі будемо брати кулі з обох множин.

Крок 2. (+). Перевіряємо 77 куль з 127. Якщо результат перевірки $<77>^+$, то отримуємо функцію $g(53, 77)$. Доведемо, що $g(53, 77)=12$.

Крок 3. (++) .Беремо 21 кулю з 53-х і 13 – з 77-и. У разі негативного результату отримаємо дводольний граф $d(32, 64)$, для якого $g(32, 64)=11$. При позитивному результаті отримуємо граф $N(64, 21, 13, 32)$, для якого $m = 64 \cdot 21 + 21 \cdot 13 + 13 \cdot 32 = 2033 < 2^{11}$.

Крок 4. (+++) . Беремо 48 куль з 64-х і 1 кулю з 32-х. При позитивному результаті отримаємо два дводольні графи $d(48, 21)$ і $d(13, 1)$ з $m = 48 \cdot 21 + 13 \cdot 1 = 1021 < 2^{10}$. Методом дихотомії за 10 кроків знаходимо розв'язок. При негативному результаті отримаємо граф $N(16, 21, 13, 31)$, для якого $m = 16 \cdot 21 + 21 \cdot 13 + 13 \cdot 31 = 1012 < 2^{10}$.

Крок 5. (+++–) . Беремо 16 куль з частини A та 13 куль – з 31. При позитивному результаті отримаємо два дводольні графи $d(16, 21)$ і $d(13, 13)$ з $m = 16 \cdot 21 + 13 \cdot 13 = 505 < 2^9$. Методом

дихотомії за 9 кроків знаходимо розв'язок. При негативного результату отримаємо дводольний граф $d(39,13)$, для якого $m = 39 \cdot 13 = 507 < 2^9$.

Крок 6. (+++---). Беремо 7 куль з 39-и та 5 куль – з 13-и. У разі негативного результату отримаємо дводольний граф $d(32,8)$, для якого $g(32,8)=5+3=8$. При позитивному результаті отримуємо граф $N(8,7,5,32)$, для якого $m = 8 \cdot 7 + 7 \cdot 5 + 5 \cdot 32 = 251 < 2^8$.

Крок 7. (+++---+). Беремо 8 куль з A -частини і 14 куль з 32-х. При позитивному результаті отримаємо два дводольні графи $d(8,7)$ і $d(14,5)$ з $m = 8 \cdot 7 + 14 \cdot 5 = 126 < 2^7$. Методом дихотомії за 7 кроків знаходимо розв'язок. При негативному результаті отримаємо дводольний граф $d(5,25)$, для якого $m = 5 \cdot 25 = 125 < 2^7$.

Крок 8. (+++---+-). Беремо 1 кулю з 5-и і 9 куль з 25-и. При негативному результаті отримаємо дводольний граф $d(4,16)$, для якого $g(4,16)=6$. При позитивному результаті отримуємо граф $N(16,1,9,4)$, для якого $m = 16 \cdot 1 + 1 \cdot 9 + 9 \cdot 4 = 61 < 2^6$.

Крок 9. (+++---+-+). Беремо 3 кулі з 4-х і 5 куль з 16-и. При позитивному результаті отримаємо два дводольні графи $d(3,9)$ і $d(5,1)$ з $m = 3 \cdot 9 + 5 \cdot 1 = 32$. Методом дихотомії за 5 кроків знаходимо розв'язок. При негативному результаті отримуємо граф $N(11,1,9,1)$, для якого $m = 11 \cdot 1 + 1 \cdot 9 + 9 \cdot 1 = 29$.

Крок 10. (+++---+-+). Беремо 6 куль з 11-и та 1 кулю з частини D . При позитивному результаті отримаємо два дводольні графи $d(6,1)$ і $d(9,1)$. Методом дихотомії за 4 кроки знаходимо розв'язок. При негативному результаті отримуємо дводольний граф $d(1,14)$, для якого розв'язок знаходиться за 4 кроки.

Розглянемо випадок, коли на 2-му кроці результат негативний, тобто $<77>^-$. У цьому випадку отримаємо функцію $h(53^+, 50)$ з $m = 53 \cdot 50 + = 4028 < 2^{12}$.

Крок 3. (+-). Беремо 38 куль з 50-и. При позитивному результаті отримаємо $g(53,38)$, яка дорівнює $g(53,76)-1$, а

$g(53,76) \leq g(53,77)$, що, як відомо, дорівнює 12. Це значить, що $g(53,38) \leq 11$. При негативному результаті маємо функцію $h(53^+, 12)$, для якої $m = 53 \cdot 12 + C_{53}^2 = 2014 < 2^{11}$.

Крок 4. (+---). Беремо 16 куль з 53-х і 3 кулі з 12-и. При позитивному результаті отримуємо граф $Q(16,3,37,9)$, для якого $m = 16 \cdot (3+37+9) + 3 \cdot 37 + C_{16}^2 = 1015 < 2^{10}$.

Крок 5. (+---+). Беремо 26 куль з 37-и та 1 кулю з 9-и. При позитивному результаті отримаємо два дводольні графи $d(26,19)$ і $d(1,16)$ з $m = 26 \cdot 19 + 1 \cdot 16 = 510 < 2^9$. Методом дихотомії за 9 кроків знаходимо розв'язок. При негативному результаті отримуємо граф $Q(16,3,11,8)$, для якого $m = 16 \cdot (3+11+8) + 3 \cdot 11 + C_{16}^2 = 505 < 2^9$.

Крок 6. (+---++). Беремо 10 куль з 11-и та 4 з 8-и. При позитивному результаті отримаємо два дводольні графи $d(10,19)$ і $d(4,16)$ з $m = 10 \cdot 19 + 4 \cdot 16 = 254 < 2^8$. Методом дихотомії за 8 кроків знаходимо розв'язок. При негативному результаті отримуємо граф $Q(16,3,1,4)$, для якого $m = 16 \cdot (3+1+4) + 3 \cdot 1 + C_{16}^2 = 251 < 2^8$.

Крок 7. (+---+++). Беремо 5 куль з 16-и та 2 кулі з 4-х. При позитивному результаті отримуємо граф $Q(5,2,11,6)$, для якого $m = 5 \cdot (2+11+6) + 2 \cdot 11 + C_5^2 = 127 < 2^7$.

Крок 8. (+---++++). Беремо 7 куль з 11-и та 3 кулі з 6-и. При позитивному результаті отримаємо два дводольні графи $d(7,7)$ і $d(3,5)$ з $m = 7 \cdot 7 + 3 \cdot 5 = 64 = 2^6$. Методом дихотомії за 6 кроків знаходимо розв'язок. При негативному результаті отримуємо граф $Q(5,2,4,3)$, для якого $m = 5 \cdot (2+4+3) + 2 \cdot 4 + C_5^2 = 63 < 2^6$.

Крок 9. (+---+++++). Беремо 2 кулі з 5-и та 1 кулю з 2-х. При позитивному результаті отримуємо граф $Q(2,1,7,4)$, для якого $m = 2 \cdot (1+7+4) + 1 \cdot 7 + C_2^2 = 32 = 2^5$.

Крок 10. (+---++++++). Беремо 4 кулі з 7-и та 2 кулі з 4-х. При позитивному результаті отримуємо два дводольні графи

$d(4,3)$ і $d(2,2)$ з $m = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 16 = 2^4$. Методом дихотомії за 4 кроки знаходимо розв'язок. При негативному результаті отримуємо граф $Q(2,1,3,2)$, для якого $m = 2 \cdot (1+3+2) + 1 \cdot 3 + C_2^2 = 16 = 2^4$.

Крок 11. (+---+---+---). Беремо 2 кулі з 3-х і 1 кулю з D -частини. При позитивному результаті отримуємо два дводольні графи $d(3,2)$ і $d(2,1)$ з $m = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8 = 2^3$. Методом дихотомії за 3 кроки знаходимо розв'язок. При негативному результаті отримуємо граф $Q(2,1,1,1)$, для якого $m = 2 \cdot (1+1+1) + 1 \cdot 1 + C_2^2 = 8 = 2^3$, для якого розв'язок легко знаходиться за 3 кроки.

При негативному результаті на 9-у кроці отримуємо граф $Q(3,1,4,3)$, для якого $m = 3 \cdot (1+4+3) + 1 \cdot 4 + C_3^2 = 31 < 2^5$.

Крок 10. (+---+---+---). Беремо 4 кулі. При позитивному результаті отримаємо дводольний граф $d(4,4)$, для якого $g(4,4) = 4$. При негативному результаті отримуємо функцію $h(3^+, 4)$, яка, як відомо, дорівнює 4.

При негативному результаті на 7-у кроці отримуємо граф $Q(11,3,1,2)$, для якого $m = 11 \cdot (3+1+2) + 3 \cdot 1 + C_{11}^2 = 124 < 2^7$.

Крок 8 (+---+---). Беремо 3 кулі з 11-и та 2 кулі з 3-х. При позитивному результаті отримуємо граф $Q(3,2,9,3)$, для якого $m = 3 \cdot (2+9+3) + 2 \cdot 9 + C_3^2 = 63 < 2^6$.

Крок 9 (+---+---+). Беремо 5 куль з 9-и та 1 кулю з 2-х. При позитивному результаті отримуємо граф на рис. 3, для якого $m = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 32 = 2^5$.

Крок 10 (+---+---+). Беремо 2 кулі з 3-х і 4. При позитивному результаті отримуємо граф $N(5,2,1,4)$, для якого $m = 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 16 = 2^4$. Методом дихотомії за 4 кроки знаходимо розв'язок. При негативному результаті отримуємо граф на рис.4, для якого $m = 16$.

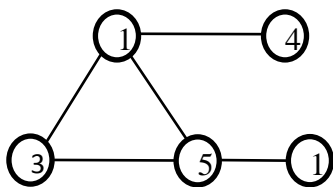


Рис.3.

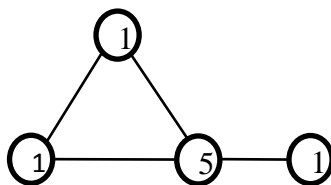


Рис.4.

Крок 11 (+---+---+---). Беремо 1 кулю з 5-и та 1 будь-яку кулю зліва. При негативному результаті отримуємо дводольний граф $d(2,4)$, для якого розв'язок знаходиться за 3 кроки.

При позитивному результаті отримуємо граф на рис. 3, для якого у частинах 3, 5 будуть одиниці. У ньому методом дихотомії розв'язок знаходиться за 3 кроки.

При негативному результаті на кроці 9 (+---+---+) див. крок 10 (+---+---+---).

При негативному результаті на кроці 8 (+---+---) отримуємо граф $Q(8,1,1,2)$, для якого $m = 8 \cdot (1+1+2) + 1 \cdot 1 + C_8^2 = 61 < 2^6$.

Крок 9 (+---+---). Беремо 3 кулі з 8-и. При позитивному результаті отримуємо функцію $h(3^+,9)$, яка, як відомо, дорівнює 5. При негативному результаті отримуємо граф $Q(5,1,1,2)$, для якого $m = 5 \cdot (1+1+2) + 1 \cdot 1 + C_5^2 = 31 < 2^5$.

Крок 10 (+---+---+---). Беремо 2 кулі з 5-и. При позитивному результаті отримуємо функцію $h(2^+,7)$, яка, як відомо, дорівнює 4. При негативному результаті отримуємо функцію $h(3^+,4)$, яка дорівнює 4.

Цим і завершується доведення теореми.

Література

1. Донець Г.А., Билецкий В.И., Ненахов Э.И. Оптимальный поиск двух активных куль на множині $n=127$. // Теорія

оптимальних рішень. – К: Ін-т кибернетики ім.В.М.Глушкова НАН України, 2018.– С. 134 – 139.

2. Билецкий В.И., Ненахов Э.И. Алгоритмы поиска двух активных шаров на заданных множествах // Теорія оптимальних рішень. – К: Ін-т кибернетики ім.В.М.Глушкова НАН України, 2016.– С. 78 – 85.

ЧЕРЕПИЧНІ ПОРЯДКИ

Журавльов В. М.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Один із аспектів теорії кілець є вивчення властивостей кілець за допомогою теорії графів. Кожний черепичний порядок повністю визначається своєю матрицею показників і дискретно нормованим кільцем [1]. Багато властивостей таких кілець повністю визначаються їх матрицями показників, зокрема, сагайдаки таких кілець [1].

Напівмаксимальним кільцем називається напівдосконале напівпервинне нетерове справа кільце, у якого всі кільця ендоморфізмів нерозкладних проективних модулів є дискретно нормованими кільцями.

Теорема 1 [1]. Кожне напівмаксимальне кільце ізоморфне скінченному прямому добутку первинних кілець вигляду

$$\Lambda = \begin{pmatrix} o & \pi^{\alpha_{12}} o & \dots & \pi^{\alpha_{1n}} o \\ \pi^{\alpha_{21}} o & o & \dots & \pi^{\alpha_{2n}} o \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi^{\alpha_{n1}} o & \pi^{\alpha_{n2}} o & \dots & o \end{pmatrix}$$

де o — дискретно нормоване кільце з простим елементом π , α_{ij} — цілі раціональні числа, причому $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всіх $i, j, k = 1, \dots, n$, $\alpha_{ii} = 0$ для всіх $i = 1, \dots, n$.

Первинне напівмаксимальне кільце називається черепичним порядком. Черепичний порядок Λ однозначно визначається дискретно нормованим кільцем o та матрицею

$E(A)=(\alpha_{ij}) \in M_n(Z)$, яка називається матрицею показників черепичного порядку A . Ми будемо використовувати позначення $A=\{o, E(A)=(\alpha_{ij})\}$.

Два черепичні порядки $A=\{o, E(A)=(\alpha_{ij})\}$ та $A'=\{o, E(A')=(a_{ij})\}$ над одним дискретно нормованим кільцем ізоморфні тоді і тільки тоді, коли одну матрицю показників можна отримати з іншої елементарними перетвореннями наступних двох типів:

- (I) відняти ціле число t від елементів $i^{\text{го}}$ рядка та додати це число до елементів $j^{\text{го}}$ стовпчика,
- (II) поміняти місцями два рядки і поміняти місцями два стовпчика з такими ж номерами.

Нехай A — нетерове справа напівдосконале кільце, P_1, \dots, P_n — всі попарно неізоморфні нерозкладні проєктивні A — модулі, $R_i = \text{rad } P_i$. Проєктивне накриття модуля має вигляд

$$P(R_i) = \bigoplus_{j=1}^n P_j^{t_{ij}}$$

Співставимо модулям P_1, \dots, P_n точки $1, \dots, n$ на площині та з'єднаємо точку i з точкою j t_{ij} стрілками. Отриманий таким чином орієнтований граф називається сагайдаком нетерового справа напівдосконалого кільця A і позначається $Q=Q(A)$.

Теорема 2. Два черепичні порядки $A=\{o, E(A)=(\alpha_{ij})\}$ та $A'=\{o, E(A')=(a_{ij})\}$ над одним дискретно нормованим кільцем ізоморфні тоді і тільки тоді, коли існує підстановка τ така, що елементи матриці $C=(c_{ij})$, де $c_{ij}=a_{\tau(i)\tau(j)}-\alpha_{ij}$, задовольняють рівність $c_{ij}+c_{jk}=c_{ik}$ для всіх i, j, k .

Теорема 3. Два черепичні порядки $A=\{o, E(A)=(\alpha_{ij})\}$ та $A'=\{o, E(A')=(a_{ij})\}$ над одним дискретно нормованим кільцем ізоморфні тоді і тільки тоді, коли сагайдаки $Q(A)$ і $Q(A')$ ізоморфні та існує підстановка τ така, що для довільного циклу $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_s \rightarrow i_1$ сагайдака $Q(A)$ виконується рівність

$$\alpha_{i_1 i_2} + \alpha_{i_2 i_3} + \dots + \alpha_{i_{s-1} i_s} + \alpha_{i_s i_1} = a_{\tau(i_1)\tau(i_2)} + a_{\tau(i_2)\tau(i_3)} + \dots + a_{\tau(i_{s-1})\tau(i_s)} + a_{\tau(i_s)\tau(i_1)}.$$

Якщо черепичний порядок $A=\{o, E(A)=(\alpha_{ij})\}$ має скінченну глобальну розмірність, то сагайдак $Q(A)$ не має петель та існують проєктивні A -гратки, перетин яких є також проєктивною граткою.

Теорема 34. Нехай $A=\{o, E(A)=(\alpha_{ij})\}$ — черепичний порядок над дискретно нормованим кільцем o , P_1, \dots, P_n — всі попарно неізоморфні нерозкладні проєктивні A – модулі.

$\bigcap_{i=1}^s \pi^{a_i} P_{m_i} = \pi^a P_k$ тоді і тільки тоді, коли існують підмножини I_1, I_2, \dots, I_s множини індексів $I=\{1, 2, \dots, n\}$ такі, що $\alpha_{m_i k} + \alpha_{kp} = \alpha_{m_i p}$ для всіх $p \in I_i$.

Література.

1. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V. V., Algebras Rings and Modules, Mathematical and Its Applications, Springer, 2004, v.1, 380 p.
2. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V. V., Algebras Rings and Modules, Mathematical and Its Applications, Springer, 2007, v.2, 400 p.

МУРАВЬИНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДВУМЕРНОЙ УПАКОВКИ

Козин И.В. , Батовский С.Е.

ainc00@gmail.com, user.sergey.b@gmail.com

Запорожский национальный университет

Аннотация. Исследуется возможность применения муравьиного алгоритма к решению оптимизационных задач двумерной упаковки фигур различных типов. Большинство массовых задач рассматриваемого вида являются NP трудными и, следовательно, для них оправдано применение метаэвристик. Для задачи двумерной упаковки установлено наличие фрагментарной структуры. Предложен вариант алгоритма муравьиной колонии на фрагментарной структуре. Рассмотрены примеры конкретных задач.

Abstract. The article presents the use of the ant colony optimization algorithm for finding approximate solutions of two-dimensional packing problems for various types of figures. Most of the mass problems of the species under consideration are NP-completeness and, consequently, metaheuristics are justified for them. The presence of fragmentary structure for the two-dimensional packing problems is determined. The variant of the ant colony optimization

algorithm on a fragmentary structure is proposed. Examples of specific problems are considered.

Для решения задач двумерной упаковки используются различные метаэвристики, в частности генетические алгоритмы [1], муравьиные алгоритмы [2] и другие подходы. В работе предлагается новый вариант метода муравьиной колонии, основанный на наличии фрагментарной структуры [3] в задаче двумерной упаковки.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть задано m фигур произвольной формы. Прямоугольное основание для размещения фигур задаётся шириной W . Каждую фигуру разрешается вращать на угол кратный прямому. Критерием для оценки приближённого решения служит минимальная высота H , которая нужна для размещения всех фигур. Покажем, что данная оптимизационная задача имеет фрагментарную структуру [3].

Определение 1. Фрагментарной структурой (Y, E) на конечном множестве Y называется семейство его подмножеств $E = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, такое, что $\forall E_i \in E E_i \neq \emptyset$ $\exists e \in E_i : E_i \setminus \{e\} \in E$.

Элементы из множества E далее будем называть допустимыми фрагментами. Таким образом, для любого допустимого фрагмента E_i существует нумерация его элементов $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{is_i}\}$, такая что $\{e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ik}\} \in E$ для всех $k = 1, 2, \dots, s_i$.

Определение 2. Одноэлементные множества, которые являются допустимыми фрагментами, будем называть элементарными фрагментами.

Определение 3. Фрагмент называется максимальным, если он не является подмножеством никакого другого фрагмента.

Теорема 1. Если (Y, E) – фрагментарная структура на множестве Y , то для любого не пустого множества $A \in E$

существует нумерация его элементов $A = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ такая, что для всех $k = \overline{1, s}$ множество $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in E$.

Максимальный фрагмент строится с помощью следующего «жадного» алгоритма:

- предварительно элементы множества Y линейно упорядочиваются;
- на начальном шаге выбирается пустое множество $Y_0 = \emptyset$;
- на шаге с номером $k+1$ выбирается первый по порядку элемент $y \in E \setminus E_k$, такой что $Y_k \cup \{y\} \in E$, после чего строится множество $Y_{k+1} = Y_k \cup \{y\}$;
- алгоритм заканчивает работу, если на очередном шаге не удалось найти элемент $y \in E \setminus E_k$ с требуемым свойством.

Приведённый алгоритм будем называть фрагментарным алгоритмом. Результат применения фрагментарного алгоритма определяется заданным линейным порядком на множестве Y .

В приведённой задаче элементарным фрагментом является всякое множество, состоящее из одной фигуры, а решению задачи будет соответствовать некоторый максимальный фрагмент.

Так как существует бесконечно много различных положений фигуры на основании, её конкретное положение и ориентация выбирается однозначно по правилу top-left.

Опишем работу муравьиного алгоритма на фрагментарной структуре. На каждой итерации генерируется некоторое количество муравьёв, которое выбирается равным общему числу элементов в множестве Y .

Обозначим D_{ij} – переход муравья от одной фигуры i к следующей фигуре j , которую он добавляет в собственное решение.

Обозначим $J_{i,k}$ – множество фигур, из которых муравей с номером k может выбрать следующую фигуру на шаге i .

Для коммуникации друг с другом муравьи используют «феромон» [2]. Так они обозначают свой выбор, сделанный при построении решения.

Пусть $\tau_{ij}(t)$ – количество феромона в момент времени t , которое соответствует переходу D_{ij} . Тогда вероятность выбора муравьём такого перехода будет равна:

$$P_{ij,k}(t) = \begin{cases} \frac{\tau_{ij}(t)}{\sum_{l \in J_{i,k}} \tau_{il}(t)}, & j \in J_{i,k} \\ 0, & j \notin J_{i,k} \end{cases} \quad (1)$$

Если обозначить $T_k(t)$ – множество всех переходов, сделанных муравьём, то количество феромона, которое муравей откладывает для каждого перехода, соответствует:

$$\Delta \tau_{ij,k}(t) = \begin{cases} \frac{Q}{|T_k(t)|}, & D_{ij} \in T_k(t) \\ 0, & D_{ij} \notin T_k(t) \end{cases}, \quad (2)$$

где Q – параметр, имеющий порядок значения N оптимального решения задачи. С учетом эффекта испарения феромона, после каждой итерации муравьиного алгоритма новое количество феромона определяется по формуле:

$$\tau_{ij}(t+1) = (1-p)\tau_{ij}(t) + \sum_{k=1}^s \Delta \tau_{ij,k}(t), \quad (3)$$

где p – коэффициент испарения феромона ($0 \leq p \leq 1$), s – количество всех муравьёв.

Исследование работы муравьиного алгоритма проводилось на многих тестовых задачах двумерной упаковки. В частности, для одной из задач, представленных в [4], было получено более оптимальное решение.



Рис. 1. Приближённое решение задачи двумерной упаковки.

Литература.

1. Jain S. Two dimensional packing problems using genetic algorithms / S Jain., HC Gea // Engineering with Computers. — 1998. — Vol. 14. — P. 206-213.

2. Штовба С.Д. Муравьиные алгоритмы / С.Д. Штовба // Ехронтента про: математика в приложениях. — 2003. — № 4. — С. 70-75.

3. Козин И.В. О свойствах фрагментарных структур / И.В. Козин, С.И. Полюга // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико математичні науки. — 2012. — № 1. — С. 99-106.

Романова Т.Е. Математическая модель и метод решения задачи оптимизации упаковки произвольных двумерных объектов в прямоугольных областях / Т.Е. Романова, Е.А. Ступак, М.В. Злотник // Доп. НАН України. — 2009. — № 1. — С. 48-53. — Бібліогр.: 7 назв. — рос.

КОМБИНИРОВАННАЯ ЗАДАЧА РАСПИСАНИЯ И МАРШРУТИЗАЦИИ

Козин И. В., Борю С.Ю., *Кривцун Е.В.
aink00@gmail.com, bsu55555@ukr.net, kryvtsun@ukr.net,
Запорожский национальный университет
**Запорожский национальный технический университет*

Аннотация. Рассматривается комбинированная задача расписания и доставки грузов, предложенная на конкурсе «VeRoLog Solver Challenge 2016-2017». Требуется выполнить набор заявок потребителей по доставке грузов (приборов) в рамках заданного временного окна заявки и обеспечить вывоз этих приборов по истечении срока пользования. Цель задачи состоит в минимизации стоимости выполнения всех заявок.

Для нахождения приближенного решения была произведена декомпозиция задачи на три основные части: задача формирования допустимого расписания, задача доставки грузов при ограниченной грузоподъемности транспортного средства и задача локального улучшения решения, полученного на предыдущих этапах. На первом этапе строилось допустимое расписание с использованием эволюцион-фрагментарного алгоритма с геометрическим оператором кроссовера. На втором этапе отыскивались оптимальные решения задачи доставки грузов за каждый день планового периода.

Abstract. The combined task of scheduling and delivery of cargoes, proposed in the contest "VeRoLog Solver Challenge 2016-2017" is considered. It is required to complete a set of customer requests for the delivery of goods (tools) within the specified request time window and to ensure that these tools will be picked up at the end of the period of use. The main objective is to serve all requests at a minimum cost.

To find an approximate solution, the problem was decomposed into three main parts: the problem of forming an acceptable schedule; the problem of delivering cargoes at a limited carrying capacity of the vehicle; and the problem of local improvement of the solution obtained at previous stages. At the first stage, a feasible schedule was constructed using an evolutionary fragmentary algorithm with a geometric crossover operator. At the second stage, optimal solutions for the goods delivery for each day of the planning period were sought.

Задача маршрутизации транспорта в базовой постановке Данцига и Рамсера [1] является известной задачей комбинаторной оптимизации, которая объединяет две задачи, принадлежащие классу NP -полных: задачу теории расписаний и множественную задачу коммивояжера. Подробное описание

задачи можно найти на сайте конкурса решателей VeRoLog 2017 [2] и в статье организаторов конкурса [3].

Рассматривается горизонт планирования длиной в T дней, за которые необходимо выполнить данное множество из N заявок на приборы от клиентов. Заявка запрашивает некоторое количество приборов одного типа, которые должны быть в наличии у клиента в течение заданного количества дней. Поставка приборов должна производиться в пределах определенного временного окна. Приборы из заявки должны быть забраны одним транспортным средством на следующий день после того, как заявка будет завершена. Задано единое место расположения (склад), на котором все приборы находятся в начале и в конце периода планирования. Приборы загружаются в автомобиль на складе и выгружаются у клиента, так же, приборы можно перевозить от одного клиента к другому без промежуточного посещения склада. Ежедневный маршрут автомобиля должен начинаться и заканчиваться на складе.

Требуется заказать необходимое количество транспортных средств для выполнения всех заявок. Все доступные автомобили имеют одинаковую вместимость. Расстояние, которое транспортное средство может пройти за один день ограничено.

Основная цель заключается в обслуживании всех заявок при минимальных затратах: затраты за пройденное расстояние, расходы за пользование транспортным средством в течение дня, а также общие расходы за пользование транспортным средством. Кроме того, существуют расходы, связанные с приборами, находящимися в эксплуатации.

Основная задача оптимизации является очень сложной, поэтому для поиска приближенного решения был предложен алгоритм, состоящий из трех последовательных этапов.

На первом этапе решается задача поиска оптимального расписания в следующей постановке

$$\sum_{t=1}^T Q(t) + \sum_{j=1}^g D_j \rightarrow \min ,$$

где функция $Q(t)$ является оценочной и представляет собой дневные затраты на маршрут, организованный в виде звезды с центром в точке склада, g – количество типов приборов, D_j – суммарные затраты на аренду приборов j -го типа при таком способе организации маршрутов.

Каждое допустимое расписание определяется целочисленным N -мерным вектором $q = (t_1, t_2, \dots, t_N)$, где t_i – некоторый день из окна доставки $[a_i, b_i]$ i -й заявки, $i = \overline{1, N}$. Для поиска оптимального решения этой вспомогательной задачи предлагается эволюционный алгоритм на множестве целочисленных векторов $\{q = (t_1, t_2, \dots, t_N)\}_{t_i \in [a_i, b_i]}$. Начальная популяция выбирается случайным образом. В качестве оператора кроссовера предлагается геометрический кроссовер, который двум решениями-родителям $q^1 = (t_1^1, t_2^1, \dots, t_N^1)$ и $q^2 = (t_1^2, t_2^2, \dots, t_N^2)$ ставит в соответствие решение потомок $q^3 = (t_1^3, t_2^3, \dots, t_N^3)$, где $t_i^3 \in [\min(t_i^1, t_i^2), \max(t_i^1, t_i^2)]$. Мутация определена как случайный выбор одной из точек $t_i^3 \in [a_i, b_i]$.

На втором этапе задачи для найденного на первом этапе расписания проводится оптимизация ежедневных маршрутов. Так как каждый допустимый маршрут описывается перестановкой, то задача состоит в поиске оптимальной перестановки s_i элементарных фрагментов (заявок) с критерием $c_a m(s_i) + c_L L(s_i) \rightarrow \min$, где величины c_a, c_L – стоимости ежедневной аренды одного автомобиля и единицы пройденного пути, $m(s_i)$ – количество машин на маршруте, $L(s_i)$ – суммарная длина дневного пробега автомобилей.

Для решения задачи второго этапа для каждого дня используется эволюционно-фрагментарный алгоритм [4] с геометрическим кроссовером в метрике Кендалла. Мутация – случайная транспозиция фрагментов.

На третьем этапе задачи проводится локальное улучшение решения, а именно случайным образом изменяется расписание

для некоторых заявок (сдвиг начала на 1 день в рамках окна заказа). Затем производится пересчет оптимальных ежедневных маршрутов. Критерием оптимальности в этом случае выступает главный критерий задачи. Наилучшее решение, полученное на третьем этапе, выбирается как приближенное оптимальное решение основной задачи.

Алгоритм тестировался на задачах, предоставленных компанией ORTEC. Горизонт планирования в задачах варьировался от 5 до 65 дней, количество заявок – от 100 до 2000. Результаты по отдельным задачам скрытого набора, на котором производилось ранжирование команд, приведены в материалах ежегодной конференции группы VeRoLog [5]. В этих материалах команда авторов обозначена на столбчатых диаграммах синим цветом.

Литература

1. Dantzig G.B., Ramser J.H. The Truck Dispatching Problem. Management Science. 1959. Vol. 6. P. 80-91.
2. VeRoLog solver challenge – 2016-2017. URL: <https://verolog.ortec.com/> (дата звернення: 25.12.2017).
3. Dullaert, W., Gromicho, J., van Hoorn, J., Vigo, D. The VeRoLog solver challenge 2016–2017. Journal on Vehicle Routing Algorithms. 2017. P. 1-3. URL: <https://doi.org/10.1007/s41604-016-0001-7>.
4. Козін І. В. Борю С. Ю., Кривцун О. В. Математична модель пакування в контейнери різних типів. Вісник Запорізького національного університету. Сер.: Економічні науки. – 2016. – № 2. – С.85-92.
5. The sixth meeting of the EURO Working Group on Vehicle Routing and Logistics optimization. URL: <https://verolog.ortec.com/wp-content/uploads/2017/07/award-ceremony-July12th2017.pdf> (last accessed: 25.12.2017).

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТАЭВРИСТИК В ЗАДАЧЕ О ДОСТАВКЕ ГРУЗОВ

Козин И. В., Полюга С.И., Сардак В.И.
ainc00@gmail.com, veta9932@gmail.com,
vsardak85@gmail.com

Запорожский национальный университет

Аннотация. В работе рассматривается вариация задачи коммивояжера на евклидовой плоскости – задача о доставке грузов. Заданный набор грузов разного веса необходимо доставить адресатам, используя одну машину ограниченной грузоподъемности. Показано, что задача имеет фрагментарную структуру. Рассмотрены различные метаэвристики для поиска оптимального решения задачи, проведен сравнительный анализ метаэвристик.

Abstract. The paper considers the variation of the traveling salesman problem on the Euclidean plane - the problem of the delivery of goods. A given set of cargoes of different weights must be delivered to the addressees using one limited-load vehicle. It is shown that the problem has a fragmentary structure. Various metaheuristics for finding the optimal solution of the problem are considered, a comparative analysis of metaheuristics is carried out.

Постановка задачи.

Рассмотрим следующую постановку задачи о доставке грузов [1]. Задано конечное множество точек V , $|V|=m+1$ на евклидовой плоскости. Каждой точке $v \in V$ приписано неотрицательное целое число $p(v) \geq 0, v=0,1,...,m$ – объем заказа. Задана выделенная вершина $0 \in V$, которую будем называть базой. Объем заказа в базе равен 0. Маршрутом будем называть путь, состоящий из отрезков прямых на евклидовой плоскости, который начинается и заканчивается в базе с вершинами в точках множества V . Длина маршрута – суммарная длина всех отрезков маршрута, а объем заказа – сумма объемов заказа во всех вершинах маршрута. Задача состоит в отыскании набора допустимых маршрутов, не имеющих общих вершин за исключением вершины 0, которые содержат в качестве вершин все вершины множества V и суммарная длина всех маршрутов минимальна. Маршрут будем считать допустимым, если его объем не превосходит заданной величины Z .

В случае, когда величина z превосходит сумму всех объемов заказа, эта задача сводится к задаче коммивояжера на плоскости.

Рассматривая задача относится к классу NP -трудных задач. Поэтому для поиска приближенных оптимальных решений оправдано применение метаэвристик.

Фрагментарная структура и фрагментарный алгоритм.

Фрагментарной структурой[2] (X, E) на конечном множестве X называется семейство его подмножеств $E = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, где $E_i \subseteq X$, такое, что

$$\forall E_i \in E, E_i \neq \emptyset \exists e \in E_i, E_i \setminus \{e\} \in E.$$

Элементы множества E будем называть допустимыми фрагментами. Одноэлементные множества, которые являются допустимыми фрагментами, будем называть элементарными фрагментами. Фрагмент называется максимальным, если он не является подмножеством никакого другого фрагмента.

Теорема 1. Если (X, E) – фрагментарная структура на множестве X , то для любого непустого множества $A \in E$ существует нумерация его элементов $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ такая, что $\forall k, k = \overline{1, n}$ множество $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in E$.

Из теоремы вытекает, что всякий максимальный фрагмент может быть построен с помощью следующего "жадного" алгоритма:

- а) элементы множества X линейно упорядочиваются;
- б) на начальном шаге выбирается пустое множество: $X_0 = \emptyset$;
- в) на шаге с номером $k + 1$ выбирается первый по порядку элемент $x \in X \setminus X_k$, такой, что $X_k \cup \{x\} \in E$;
- г) алгоритм заканчивает работу, если на очередном шаге не удалось найти элемент $x \in X \setminus X_k$ с требуемым свойством.

Приведенный выше алгоритм построения максимального фрагмента во фрагментарной структуре будем называть фрагментарным алгоритмом.

Фрагментарная модель задачи о доставке грузов.

Любое решение задачи описывается словом в алфавите $\{0, 1, \dots, m\}$. Слово считается допустимым, если, во-первых, каждый символ алфавита, за исключением 0, встречается в слове ровно 1 раз, во-вторых, слово начинается и заканчивается символом 0. Каждое допустимое слово содержит набор циклов – последовательности символов алфавита в слове между двумя последовательными вхождениями символа 0. Циклу в слове естественным образом соответствует некоторый маршрут. Будем называть объемом заказа в цикле слова – объем заказа в соответствующем маршруте. Длиной цикла C в слове будем называть величину, равную длине соответствующего маршрута, если объем заказа этого маршрута не превышает величины z . В противном случае длину цикла будем считать равной $+\infty$.

Задача о развозке грузов, таким образом, сводится к задаче поиска допустимого слова минимальной длины. Легко показать, что множество допустимых слов и всех префиксных подслов образуют фрагментарную структуру. Следовательно, задача перевозки грузов сводится к задаче на взвешенной фрагментарной структуре. Для поиска приближенных оптимальных решений подобных задач можно предложить ряд метаэвристик. В частности, алгоритм случайного поиска, алгоритм локального поиска, алгоритм муравьиной колонии, эволюционный алгоритм на фрагментарной структуре [3].

Для сравнения метаэвристик был построен генератор случайных задач. Сравнение проводилось на нескольких сериях из 100 задач. Параметры алгоритмов подбирались таким образом, чтобы трудоемкость (количество вычислений целевой функции) для различных типов алгоритмов были примерно одинаковыми.

Лучшие результаты сравнения показал эволюционный алгоритм на фрагментарной структуре.

Литература

1. Clark G., Write J. W. Scheduling of vehicles from central depot to a number delivery points // Oper. Res. Quart.– 1964. – 12, № 4. – P. 568-581.
2. Козин И.В., Полюга С.И. О свойствах фрагментарных структур. Вісник Запорізького національного університету. Математичне моделювання і прикладна механіка. – 2012. – № 1. – С. 99-106.
3. Козин И.В. Фрагментарные структуры и эволюционные алгоритмы / И.В. Козин // Питання прикладної математики і математичного моделювання : зб. наук. праць. – Д. : Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту ім. Олеся Гончара, 2008. – С. 138-146.
4. Козин И.В. Фрагментарные структуры в задачах дискретной оптимизации / И.В. Козин, В.А. Перепелица, Н.К. Максишко // Кибернетика и системный анализ, 2017 № 6. С. 125-131.

Г.Ф. ВОРОНИЙ (1868-1908) – ОДИН ІЗ ОСНОВОПОЛОЖНИКІВ ГЕОМЕТРІЇ ЧИСЕЛ

(до 150-ти річчя від дня народження)

Лісковець С.М., Шендеровський В.А.

lissds09@ukr.net, schender@iop.kiev.ua

Луцький національний технічний університет

Інститут фізики НАН України

Abstract. The thesis covers the main aspects of G.Voronyi's (1868-1908) scientific work, who is one of the founders of the field of the number theory that is known as the geometry of numbers. The results of researches of the Ukrainian mathematician in the theory of quadratic forms, numerical geometry, analytic number theory are briefly described in the study.

Один із розділів теорії чисел – геометрія чисел, яка вивчає теоретико-числові проблеми із застосуванням геометричних методів, з'явилася на рубежі ХХ століття. Початок формування геометричної теорії чисел пов'язують із появою в 1896 році монографії німецького вченого Германа Мінковського „Геометрія чисел” та науковими працями визначного

українського математика Георгія Федоровича Вороного (1868 – 1908).

Основні результати досліджень магістерської та докторської дисертацій молодого вченого Г. Вороного були опубліковані в 1896 році в монографії „Про одне узагальнення алгоритму неперервних дробів”. За складністю розв’язаної проблеми та глибиною використаних методів праця вченого в той історичний період стала однією із самих значимих та вагомих в теорії чисел.

Вороний підсумував та узагальнив окремі напрацювання П.Чебишева, Є.Золотарева, А.Маркова, О.Коркіна та інших математиків. Він обґрунтував алгоритм неперервних дробів на кубічну область, ввів поняття відносних мінімумів квадратичних форм, еквівалентності коваріантних форм, зведених систем та систем нормального виду. Вчений запропонував розбиття систем коваріантних форм на системи трьох видів: квадратичне поле, кубічне поле з від’ємним дискримінантом, кубічне поле з додатним дискримінантом, тощо. Вороний довів, що будь-яку систему коваріантних форм можна звести до нормальної зведеної системи, розробив алгоритм такого зведення, який впливає із узагальнення неперервних дробів. Також був обґрунтований алгоритм для обчислення основних одиниць кубічного поля, який згодом дістав назву „алгоритм Вороного”.

У варшавський період наукової діяльності (1894 – 1908) Вороний провів глибокі дослідження в двох областях: в арифметичній теорії квадратичних форм та аналітичній теорії чисел. Вчений започаткував створення геометрії додатних квадратичних форм в „Замітках про додатні квадратичні форми” (1895). Автор співставив кожний додатний квадратичний формі деяку зв’язну область (багатогранник), дослідив границі цих областей. В ході досліджень вчений захопився чисто геометричною стороною – визначенням випуклих багатогранників, за допомогою яких однозначно заповнюється багатовимірний простір, так званих паралеледрів, що мають прямий зв’язок з питаннями кристалографії.

В сучасній математиці широко використовується термін „типи решіток Вороного” – це типи точкових решіток n -мірного евклідового простору, який був введений в зв’язку з задачею про паралеледри [1]. Для двомірної решітки паралеледром є випуклий шестикутник з центром симетрії, вписаний в круг; у випадку трьохвимірної решітки – деякий 14-гранник, тощо [2]. Відповідні дослідження представлені в мемуарі з теорії додатних квадратичних форм „Дослідження про примітивні паралеледри”. Такі напрацювання Вороного лягли в основу теоретичної бази геометрії чисел, яка вивчає проблеми теорії чисел, використовуючи фігури в n -мірному евклідовому просторі.

Український математик Вороний за допомогою своїх геометричних методів та завдяки розширеній постановці питання замість граничних форм, що активно вивчалися в той період, ввів поняття довершених форм, які визначаються значеннями свого мінімуму. Всі ці та інші напрацювання широко використовувалися для подальшого розвитку теорії чисел взагалі та, зокрема, для вирішення проблеми зведення додатних квадратичних форм, для широкого практичного застосування.

В середині 70-х років минулого століття в теоретичну комп’ютерну науку ввели термін „діаграма Вороного” – це особливий вид розбиття метричного простору, що визначається відстанями до заданої дискретної множини ізольованих точок цього простору. Широко використовується поняття „вузли Вороного” – точки рівновіддалені від трьох і більше вершин. Метод розбиття певного об’єму на частини дозволяє створити максимально міцні структури з використанням мінімальної кількості матеріалу, тому діаграми Вороного широко використовуються в дизайнерських проектах та інженерних конструкціях.

Г. Вороний запропонував та обґрунтував матричний метод сумування послідовностей (метод сумування Вороного), який вперше був представлений вченим в 1902 році [3], а в 1919 році ще раз запропонований професором Н. Нерлундом, тому в

зарубіжній літературі незаслужено зустрічається як метод Нерлунда.

Серед робіт Вороного з аналітичної теорії чисел два мемуари: „Про одну задачу із теорії асимптотичних функцій” (1903), „Про одну трансцендентну функцію і її застосування до сумування деяких рядів” (1904) та ряд статей. Вчений розробив достатньо загальний метод вивчення арифметичних функцій, які близькі до функцій $\tau(n)$ – число дільників n , побудував розклад деяких числових функцій в нескінченні ряди, подібні до тригонометричних, встановив зв’язок між функцією $\tau(n)$ і циліндричними функціями другого роду. Серед нововведень вченого – нове сімейство функцій – ультраекспотенціальні функції, узагальнена формула сумування Пуассона, методи дослідження функцій Рімана [4].

Багатогранний науковий доробок українського математика Г.Ф. Вороного лежить в основі геометрії чисел, його геометричні методи широко використовуються для розв’язання складних задач в області теорії чисел, теорії відносності, математичної фізики та знайшли різнопланове застосування в кристалографії, молекулярній біології, комп’ютерній графіці та в багатьох інших галузях науки.

Література

1. Вороной Г.Ф., Собрание сочинений. Т. 2. – Киев, 1952. – С. 350–368.
2. Математическая энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия, 1977. – С. 756.
3. Вороной Г.Ф. В кн.: Дневник одиннадцатого съезда русских естествоиспытателей и врачей, СПб, 1902. – С. 60–61.
4. История отечественной математики [Под ред. Штоколо И.З.] –К.: Наукова думка, 1967. – [Т. 1801–1917]. – С. 544–547.

МЕТОДИ ОЦІНКИ ЯКОСТІ РОБОТИ РЕКОМЕНДАЦІЙНИХ СИСТЕМ

Мелешко Є.В.

elismelashko@gmail.com

*Центральноукраїнський національний технічний
університет, м. Кропивницький*

Abstract. This paper considers methods of assessing the quality of work of the recommender systems, such as prediction accuracy, coverage, diversity, serendipity, novelty, etc.

Рекомендаційна система — це система, що використовується для прогнозування індивідуальних вподобань користувачів веб-сайту на основі зібраної про них інформації для створення їм рекомендацій з метою збільшення загального інтересу до об'єктів на веб-сайті (товарів, фільмів, новин, тощо).

За методами побудови рекомендаційні системи можна класифікувати на [1]:

1. Засновані на контентній фільтрації.
2. Засновані на колаборативній фільтрації.
3. Гібридні методи.

Контентна фільтрація формує рекомендації на основі поведінки користувача, наприклад, на основі того, які веб-сторінки він відвідував раніше, які оцінки поставив об'єктам тощо. Даний метод заснований на виділенні ознак у об'єктів системи та кластеризації об'єктів на основі їх ознак. Після того, як на основі дій користувача, встановлено об'єкти, які він обирає, за допомогою контентної фільтрації йому пропонуються схожі об'єкти з відповідних кластерів [1, 2]. Головними проблемами контентної фільтрації є складність виділення ознак об'єктів та проблема холодного старту для користувачів.

Колаборативна фільтрація формує рекомендації для певного користувача на основі вподобань групи користувачів, схожих на нього. Колаборативна фільтрація заснована на ідеї, що ті користувачі, які однаково оцінювали будь-які предмети в

минулому, схильні давати схожі оцінки інших предметів і в майбутньому [2, 3]. Отже, в даному методі відбувається кластеризація користувачів, а поточному користувачу рекомендуються об'єкти, які він ще не обирав, що сподобалися іншим користувачам з його кластеру. Даний метод більш простий в реалізації, ніж попередній, але для нього є актуальними проблеми холодного старту для користувачів та холодного старту для об'єктів.

Гібридні системи використовуються для підвищення релевантності рекомендацій. Їх можна розділити на дві групи методів, що використовують паралельні (напр., гібридизація на основі зваженої суми) та послідовні (напр., каскадна гібридизація) стратегії.

Після звернення до рекомендаційної системи результатом її роботи повинен бути вектор $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, що містить список прогнозованих оцінок користувача, впорядкований по спаданню за величиною оцінок.

Для перевірки точності роботи рекомендаційної системи використовується вектор $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, що містить справжні оцінки користувача, невідомі системі на етапі формування списку рекомендацій.

У найпростішому випадку для підвищення якості роботи системи достатньо виконати наступну задачу:

$$d(R, V) \rightarrow \min, \quad (1)$$

Точність прогнозування визначають, наприклад, за допомогою середньоквадратичної помилки (2) або середньої абсолютної помилки (3):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{|\mathcal{I}|} \sum_{(u,i) \in \mathcal{I}} (\hat{r}_{ui} - r_{ui})^2}, \quad (2)$$

$$MAE = \sqrt{\frac{1}{|\mathcal{I}|} \sum_{(u,i) \in \mathcal{I}} |\hat{r}_{ui} - r_{ui}|}, \quad (3)$$

де \hat{r}_{ui} – прогнозовані рейтинги для тестового набору даних \mathcal{I} пар користувач-об'єкт (u, i) , r_{ui} – справжні рейтинги.

Також важливою задачею є оцінка правильності ранжування об'єктів у списку рекомендацій. Як правило, оцінюється на основі порівняння згенерованого списку

рекомендацій зі списком, одержаним в результаті дій користувача.

До сучасних рекомендаційних систем висувається значно більше вимог, ніж просто прогнозування оцінок користувача. Рекомендаційна система та список рекомендацій повинні задовольняти ряду додаткових вимог. Розглянемо деякі з них.

Важливим показником якості роботи рекомендаційної системи є покриття. Існує декілька видів покриття:

- Покриття каталогу (покриття простору об'єктів) – може визначатися як відсоток усіх елементів, які можуть бути рекомендовані, даний показник дозволяє виявити об'єкти, які нікому не рекомендуються.

- Покриття простору користувачів – може характеризуватися часткою користувачів або взаємодій користувачів, для яких система може рекомендувати об'єкти (у багатьох системах рекомендації можуть не надаватися для користувачів, про яких зібрано мало даних, через низьку впевненість у точності прогнозів), якщо рекомендації слід надавати всім користувачам у системі, то необхідно йти на компроміс між покриттям та точністю.

- Різноманітність збуту – міра неоднорідності вибору різних об'єктів користувачами зі списку рекомендацій, для її визначення можна використовувати різні індекси, зокрема, ентропію Шеннона.

Усі сучасні рекомендаційні системи схильні до проблеми бульбашки фільтрів, що виникає, коли алгоритм формування списку рекомендацій підбирає інформацію, яку користувач хотів би бачити, і, в результаті, користувачі відділяються від інформації, яка їх не цікавить або їм не подобається, фактично ізолюючи їх у власних «бульбашках». Для вирішення даної проблеми до рекомендаційних систем висуваються наступні вимоги – список рекомендацій повинен володіти наступними властивостями:

- Різноманітність. Елементи у рекомендацій системі не повинні бути майже однаковими, вони повинні містити різнотипні об'єкти (наприклад, фільми різних жанрів, а не тільки одного жанру, чи однієї трилогії).

– Новизна. Для користувача може бути важливим такий параметр як дата створення об'єкту (наприклад, рік випуску фільму). Для різних користувачів цей параметр може мати різну значимість. Нові об'єкти у системі можуть ще не мати оцінок і не бути популярними, але вони можуть бути цікавими користувачам через свою новизну. В той же час нові об'єкти необхідно комусь рекомендувати, щоб вони не залишилися без уваги.

– Неочікуваність. Якщо користувачу рекомендувати лише популярні об'єкти в сфері його інтересів, скоріше за все він їх і так знає та обере без рекомендаційної системи, такі рекомендації не будуть містити для нього нової інформації.

Збільшення різноманітності, неочікуваності та новизни рекомендацій може знизити точність прогнозування та точність ранжування, в той же час може підвищитися покриття каталогу об'єктів, різноманітність збуту та частково вирішитися проблема бульбашки фільтрів.

На даний час не існує загальноприйнятих мір та методів оцінки різноманітності, новизни та неочікуваності списків рекомендацій.

Крім даних вимог до рекомендаційної системи можуть висуватися також наступні: адаптивність, масштабованість, робатність до атак, пропускну здатність, тощо.

Як видно з розглянутих методів оцінки якості роботи рекомендаційних систем, підвищення якості роботи за одним показником може вести до зменшення якості роботи за іншим показником. Отже, задача формування та ранжування якісного списку рекомендацій, що задовольняє багатьом сучасним вимогам, є багатокритеріальною та потребує подальшого дослідження та вирішення.

Література

1. Jones M. Recommender systems, Part 1. Introduction to approaches and algorithms. Learn about the concepts that underlie web recommendation engines / M. Jones – 2013. [Електронний ресурс] – Режим доступу:

https://www.ibm.com/developerworks/opensource/library/os-recommender1/index.html?s_tact=105agx99&s_cmp=cp

2. Серапан Т. Программируем коллективный разум. – Пер. с англ. – СПб: Символ-Плюс, 2013. – 368 с.

3. Xiaoyuan Su and Taghi M. Khoshgoftaar A Survey of Collaborative Filtering Techniques A Survey of Collaborative Filtering Techniques // Hindawi Publishing Corporation, Advances in Artificial Intelligence archive, USA : журнал. — 2009. — P. 1 - 19.

РОЗРОБКА МЕТОДУ ВИБОРУ ОПТИМАЛЬНОГО МІСЦЯ ВИМУШЕНОЇ ПОСАДКИ ПОВІТРЯНОГО СУДНА НА ВОДНУ ПОВЕРХНЮ

Неділько В.М., Стратонов В.М.
nvn60@ukr.net, vadya862@gmail.com,

Льотна академія НАУ

Abstract. The results of the study on the development of a method for selecting the optimal place for the forced landing of an aircraft on the water surface are summarized. The cases of ditching have been analyzed, the results of expert surveys are presented and the general concept of the solution method of the problem of evacuation. The method of choosing the optimal place for the forced landing on the water surface is described and grounded.

У якості задач, що висвітлюються у даній роботі виступають наступні:

1. Розробка методу розрахунку оптимального маршруту при проведенні евакуаційних дій від місця виконання вимушеної посадки на водну поверхню до місць надання спеціалізованої медичної допомоги.

2. Оцінка факторів, що впливають на виконання вимушеної посадки на водну поверхню та процес подальшого виживання.

3. Оцінка факторів, що впливають на успішність виконання евакуаційних дій з приводненого повітряного судна (ПС) у воду чи на плавзасіб.

Для вирішення наведених задач розроблено метод вибору оптимального місця виконання вимушеної посадки повітряних

суден (ПС) на водну поверхню, який складається з наступних, упорядкованих за своєю черговістю, дій:

1. Підбір безпечного місця приводнення з урахуванням наявних факторів довкілля та інфраструктури найближчих до місцезнаходження ПС населених пунктів («Умови посадки», «Придатність населеного пункту, щодо надання допомоги постраждалим»).

2. Спрямування ПС до найближчого місця тимчасового розміщення постраждалих (МТРП), яке заздалегідь визначено компетентними фахівцями та марковано на картах бортових gps-приймачів, шляхом закладок на території МТРП gps-маяків («gps-закладок»).

2. Ефективне проведення евакуацію (зі свого місця на ПС в воду чи на плавзасіб). Досягається урахуванням небезпеки досліджених факторів, та проведенням ефективної та реалістичної підготовки.

3. Проведення евакуації до медичного закладу за найшвидшим маршрутом (з урахуванням здатності медичного закладу до прийому відповідної кількості постраждалих). Наземна складова маршруту евакуації завчасно прораховується фахівцями, від визначених МТРП до медичних закладів. Експерти до уваги беруть усі можливі шляхи евакуації, їх стан, пропускну здатність та здатність медичних закладів до прийому відповідної кількості постраждалих й надання невідкладної допомоги в необхідному обсязі.

Досліджено фактори, що являють собою чинники навколишнього середовища («Умови посадки») та фактори, які стосуються сил та засобів населених пунктів, що можливо залучити для надання допомоги постраждалим внаслідок приводнень («Придатність населеного пункту щодо надання допомоги постраждалим у разі виконання вимушеної посадки на водну поверхню»). Результати експертних опитувань представлені у вигляді рейтингового списку та скорочені до перших (найважливіших) 5-ти. Результати представлені у таблицях 1-2.

Таблиця 1

Вагові показники елементів інфраструктури населених пунктів,
що уособлюють придатність до надання допомоги
постраждалим у разі виконання вимушеної посадки на водну
поверхню

№ фактору за ступеню важливості	Найменування фактору	Ваговий показник
1.	Наявність в населеному пункті морського судна, яке можливо залучити до пошуково-рятувальних робіт (будь-якої форми власності)	0,109
2..	Наявність медичного закладу будь-якої спеціалізації, що має в своєму штаті персонал, що здатний надати першу медичну допомогу	0,107
3	Наявність в населеному пункті ПС, які можливо залучити до пошуково-рятувальних робіт (будь-якої форми власності)	0,0893
4.	Наявність в медичній установі реанімаційного відділення	0,0866
5.	Наявність в населеному пункті сухопутних підрозділів, що спеціалізуються на пошуково-рятувальних та аварійно-рятувальних роботах	0,0833

До вагових показників з таблиці 1 застосовано методикку обчислень, описану в роботі [1] та визначено сумарний показник наявності ресурсів населених пунктів, що можуть бути задіяні при наданні допомоги постраждалим внаслідок приводнення літальних апаратів.

Таблиця 2
Вагові показники факторів комплексного фактору
«Умови посадки»

№ фактору за ступеню важливості	Найменування фактору	Ваговий показник
1.	Хвилювання водної поверхні (шторм 5 і більше балів)	0,0849
2.	Температура води в районі виконання посадки від 0 до +10 С	0,0835
3.	Хвилювання водної поверхні (шторм 3-5 балів)	0,0821
4-5.	Наявність суцільної криги, товщиною менше 15см	0,0683
4-5.	Наявність вітру в районі посадки, як фактору, що перешкоджає виконати заходження на посадку на обрану ділянку (5-15 м/с)	0,0683

Аналогічним чином, як і у випадку таблиці 1, проведені узагальнення, відносно розглянутих факторів та здійснена їх оцінка.

Одержано методику обчислення оптимального маршруту на суходолі. Вираховування оптимального маршруту проводилося за такими показниками: мінімізація часу від заданого пункту – місця евакуації до всіх пунктів призначення – медичних закладів, що впливає на кількість врятованих постраждалих з тяжкими політравмами, та можливість надання допомоги відповідним медичними закладами. Час подолання визначених ділянок шляху евакуації змінювався у залежності від стану та прохідності елементів транспортної мережі. Елементами, що являлися кінцевим пунктом евакуації були медичні заклади, їх характеристики стали, змінювалися лише у разі реорганізації закладу. Зазначена частина транспортної мережі прораховувалась заздалегідь, та корегувалася у залежності від потреби (зміна якості покриття дороги, зміна штату медичного закладу тощо).

Література

1. Москвичев В. В. Информационная поддержка решений диспетчера для управления вынужденной посадкой воздушного судна вне аэродрома : дис. канд. техн. наук : 05.22.13 / Москвичев В. В. – Кировоград, 1998. – 177 с.

БАГАТОНОМЕНКЛАТУРНА ЗАДАЧА ПЛАНУВАННЯ ЗАПАСІВ

Пасенченко Ю.А., Рудоміно-Дусятська І.А.

yuriy.pasenchenko@gmail.com

Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації

Аннотація. Розглянуто багатомітенклатурну задачу управління запасами при обмеженнях на розміри страхових резервів, замовлень, складських приміщень, при випадковому попиті і дефіциті.

Моделі управління запасами досліджувалися в багатьох працях (див. посилання в [1,2]). Особливістю моделі, що розглядається є наявність обмежень на розмір замовлень та складських приміщень. Також знаходиться оптимальний рівень страхового запасу в умовах невизначеності попиту і дефіциту. Нехай маємо n видів запасів, β_j – попит на j -ту сировину в одиницю часу, C_{Lj} – вартість зберігання одиниці j -ї сировини в одиницю часу; C_{sj} – витрати по завезенню однієї партії j -ї сировини; V_j – об’єм складського приміщення, що зайнятий одиницею j -ї сировини; V – місткість складських приміщень; q_j – розмір замовлення j -ї сировини; R_j – обмеження на розмір замовлення j -ї сировини. Тоді, припускаючи, що сировина витрачається рівномірно в часі, отримуємо такі сумарні середні витрати по усьй номенклатурі запасів:

$$Q(q_1, \dots, q_n) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{C_{Lj}}{2} q_j + \frac{C_{sj} \cdot \beta_j}{q_j} \right).$$

З врахуванням обмежень на складські приміщення та розмір замовлення, отримуємо оптимізаційну задачу нелінійного програмування:

$$\begin{aligned} Q &\rightarrow \min, \\ \sum_{j=1}^n V_j q_j &\leq V, \\ 0 \leq q_j &\leq R_j; \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Задачу (1) - (3) можна розв’язувати за наступним алгоритмом:

I. Визначаємо оптимальний розмір замовлення за формулою Уїлсона [1] по кожній номенклатурі:

$$q_{j0_0} = \sqrt{\frac{2C_{sj} \cdot \beta_j}{C_{Lj}}}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Якщо виконуються обмеження (2), (3):

$$\sum_{j=1}^n V_j q_{j0_0} \leq V, \quad q_{j0_0} \leq R_j, \quad j = \overline{1, n},$$

то (4) є розв'язанням задачі (1) – (5):

$$q_j^* = q_{j0_0}, \quad j = \overline{1, n}.$$

II. Якщо $\sum_{j=1}^n V_j q_{j0_0} \leq V$ і існують $q_{j0_0} > R_j$, для індексів $j \in J \subset \{1, 2, \dots, n\}$, то приймаємо:

$$q_j^* = R_j, \quad j \in J; \quad q_j^* = q_{j0_0}, \quad j \notin J.$$

III. Якщо

$$\sum_{j=1}^n V_j q_{j0_0} > V,$$

то розв'язуємо оптимізаційну задачу з обмеженням-рівністю:

$$Q \rightarrow \min; \quad \sum_{j=1}^n V_j q_{j0} = V,$$

$$0 \leq q_j \leq R_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

За допомогою функції Лагранжа:

$$L(q_1, \dots, q_n, \lambda) = Q(q_1, \dots, q_n) + \lambda (\sum_{j=1}^n V_j q_j - V)$$

і знаходимо її стаціонарну точку:

$$q_{j0_0}(\lambda) = \sqrt{\frac{2C_{sj}\beta_j}{C_{Lj} + 2\lambda V_j}}, \quad j = \overline{1, n}.$$

В силу припущення (9) існує $\lambda_1 > 0$ - корінь рівняння:

$$\sum_{j=1}^n V_j \cdot q_{j0_0}(\lambda) = V.$$

Якщо $q_{j0_0}(\lambda_1) \leq R_j$, $j = \overline{1, n}$, то знайдено оптимум:

$$q_j^* = q_{j0_0}(\lambda_1), \quad j = \overline{1, n}.$$

IV. Якщо існують $q_{j0_0}(\lambda_1) > R_j$, $j \in J_1 \subset \{1, 2, \dots, n\}$, то приймаємо в рівнянні (10):

$q_j = R_j, j \in J_1; q_j = q_{j0_0}(\lambda), j \notin J_1$ і знаходимо корінь $\lambda_2 > 0$ рівняння:

$$\sum_{j \notin J_1} V_j \cdot q_{j0_0}(\lambda) + \sum_{j \in J_1} V_j R_j = V.$$

Якщо $q_{j0_0}(\lambda_2) \leq R_j, j \notin J_1$, то оптимум знайдено:

$$q_j^* = R_j, j \in J_1; q_j^* = q_{j0_0}(\lambda_2), j \notin J_1.$$

V. Якщо існують $q_{j0_0}(\lambda_2) > R_j, j \notin J_1$ то повертаємось до п. IV алгоритма і розширюємо множину індексів $J_1 \subset J_2$. За скінчену кількість кроків оптимум буде знайдено, оскільки $J_1 \subset J_2 \subset \dots \subset (1, 2, \dots, n)$.

Для розрахунку оптимального страхового запасу в умовах невизначеності припускається [2], що термін виконання замовлення L є нормальною випадковою величиною з математичним сподіванням m_L і середнім квадратичним відхиленням σ_L ; величини споживання j -го запасу в кожен фіксований одиницю часу є однаковими незалежними між собою та з L в.в. Припускається, що ці випадкові величини також є нормально розподіленими.

Література

1. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій – К.: ЗАТ "ВІПОЛ", 2000. – 687с.
2. Батурінець Є.В., Пасенченко Ю.А. Управління матеріальними запасами з обмеженнями на складські приміщення. – «Херсонський національний технічний університет». ААЭКС. №1 (19). 2007, с.108-110.

КВАЗИПОЛНОТА ДВУХКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ «ОБ ОСТОВНЫХ ДЕРЕВЬЯХ И ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РЕБРЕ»

Перепелица В.А., Терещенко Э.В.

perepel2@yandex.ru, elinatereschenko@ukr.net

Запорожский национальный университет,
Запорожский национальный технический университет

Аннотация. Авторами проведена оценка мощностей множеств допустимых решений, паретовского множества, полного множества альтернатив двухкритериальной задачи дискретной оптимизации «об остовных деревьях и экстремальном ребре». Доказано наличие свойства квазиполноты при различных направлениях критериев.

Abstract. The authors evaluated the capacities of sets of acceptable solutions, the Pareto set and a complete set of alternatives for two-criteria discrete optimization problems “spanning tree- extreme edge weight”. It is proved that there is a quasi-complete property for various directions of the criteria.

Рассмотрим задачу $Z_{1,2}$ «об остовных деревьях и экстремальном ребре» на n -вершинном графе $G=(V,E)$, $|E|=m$, каждому ребру $e_t \in E$, $t = \overline{1, m}$ которого присвоена пара весов $\omega_i(e_t)$, $i = \overline{1, 2}$, $t = \overline{1, m}$. Векторная целевая функция (ВЦФ) задачи $Z_{1,2}$ состоит из критерия веса и веса максимального ребра

$$F(x_{1,2}) = (F_1(x_{1,2}), F_2(x_{1,2})) \quad (1)$$

$$F_1(x_{1,2}) = \omega_1(x_{1,2}) = \omega_1(x_1) = \sum_{e \in E_{x_1}} \omega_1(e) \rightarrow \max \quad (2)$$

$$F_2(x_{1,2}) = \max_{e \in E_{x_1}} \omega_2(e) \rightarrow \max \quad (3)$$

и определяет множество допустимых решений (МДР) $X_{1,2} = \{x_{1,2}\}$, паретовское множество (ПМ) $\tilde{X}_{1,2}$, полное множество альтернатив (ПМА) $X^0_{1,2}$ [1]. Определим МДР $X_{1,2}$, ПМ $\tilde{X}_{1,2}$, ПМА $X^0_{1,2}$, и их мощности на основании множеств допустимых решений X_1 и X_2 соответствующих

однокритериальных задач Z_1 «об остовных деревьях» и Z_2 «экстремальном ребре» с целевыми функциями $F_1(x_1)$, $F_2(x_2)$. Докажем наличие свойства квазиполноты для задачи $Z_{1,2}$ с критериями вида (1)-(3).

Многокритериальную задачу Z назовем квазиполной, если для МДР X существуют такие параметры ВЦФ $F(x)$, при которых максимальные мощности МДР, ПМ и ПМА подчинены соотношению $|X^0| = |\tilde{X}| < |X|$.

Построим алгоритм решения задачи $Z_{1,2}$. На первом этапе формируется МДР $X_1 = \{x_1^\mu\}$, $|X_1| = M$, $\mu = \overline{1, M}$ задачи Z_1 . Каждое допустимое решение $x_1^\mu \in X_1$ представляет собой остовное дерево графа $G = (V, E)$. На втором этапе по значению второго веса $\omega_2(e)$, $e \in E_{x_1^\mu}$ на каждом остовном дереве x_1^μ , $\mu = \overline{1, M}$ решается задача о нахождении ребра экстремального веса $\omega_2(e_{extr}^\mu) = \underset{e \in E_{x_1^\mu}}{extr} \omega_2(e)$. Применив этот прием для каждого номера $\mu \in [1, M]$, формируем МДР $X_{1,2}$ задачи $Z_{1,2}$: $F_1(x^\mu) = \omega_1(x_1^\mu)$, $F_2(x^\mu) = \omega_2(e_{extr}^\mu) = \underset{e \in E_{x_1^\mu}}{extr} \omega_2(e)$. На третьем этапе из МДР выделяется ПМ $\tilde{X}_{1,2}$ согласно (2)-(3). Далее из ПМ формируем ПМА $X_{1,2}^0$.

Изучим структуру полученных множеств $X_{1,2}$, $\tilde{X}_{1,2}$ и $X_{1,2}^0$. Для этого в графе $G = (V, E)$ ребра $e \in E$ перенумеруем числами $t = t(e) = \overline{1, m}$, $m = |E|$. Для каждого ребра $e_t \in E$ определим первый и второй вес:

$$\omega_1(t) = 2^t, \omega_2(t) = r_0 - \omega_1(t), t = t(e) = \overline{1, m}, m = |E|, r_0 = 2^{m+1}. (4)$$

Можно показать, что суммы весов ребер двух подграфов при выбранном взвешивании (4), могут быть равны только в

случае совпадения множеств их ребер. Следовательно, остовные деревья $X_1 = \{x_1^\mu\}$, $|X_1| = M$, $\mu = \overline{1, M}$, выделенные на первом этапе решения задачи $Z_{1,2}$, имеют несовпадающие веса.

Далее покажем несовпадение ПМ $\tilde{X}_{1,2}$ и МДР $X_{1,2}$. Мощность МДР $X_{1,2}$ определяется количеством остовных деревьев в n -вершинном графе $G = (V, E)$, $|E| = m$. Максимальная мощность МДР достигается на полном графе и определяется формулой Кэли n^{n-2} [2]. Для каждого остовного дерева $x_1^\mu \in X_1$ упорядочим ребра «по возрастанию номеров». Пусть решения x_1^ζ и x_1^ν отличаются единственным ребром e_{n-1}^ζ и e_{n-1}^ν с максимальными номерами ν и ζ , $1 \leq \nu < \zeta \leq M$. Согласно, взвешиванию (4), верно неравенство $\omega_1(e_{n-1}^\zeta) > \omega_1(e_{n-1}^\nu)$, что означает $F_1(x_1^\zeta) > F_1(x_1^\nu)$. Но очевидно, что ребро с максимальным весом ω_2 имеет минимальный номер и входит в оба решения x_1^ζ и x_1^ν . Следовательно, по второму критерию решения x_1^ζ и x_1^ν совпадают $F_2(x_1^\zeta) = \omega_2(e_{\max}^\zeta) = F_2(x_1^\nu) = \omega_2(e_{\max}^\nu)$. По определению ПМ решением, которое может оказаться паретовским, является только x_1^ζ . Таким образом, справедливо неравенство $|\tilde{X}_{1,4}| < |X_{1,4}|$.

Оценим мощность ПМ $\tilde{X}_{1,2}$. Сформируем разбиение МДР $X_{1,2}$ на подмножества $X_{1,2}^i$, $i = 1, (m - (n - 2))$ по признаку «минимальный индекс входящего ребра $t(e)$ », учитывая что $m = |E|$ и $n - 1$ - длина остовного дерева. На элементах подмножества $X_{1,2}^i$ целевая функция $F(x)$ будет принимать различные значения по критерию $F_1(x)$ и совпадающие по значению критерия $F_2(x)$. Значение критерия $F_2(x)$ будет

определяться максимальным вторым весом ω_2 ребра e , т.е. «минимальным индексом входящего ребра $t(e)$ ». В ПМ может быть включено решение x^i с максимальным значением по критерию $F_1(x)$. Для каждого подмножества $X_{1,2}^i$, $i=1, (m-(n-2))$ определим единственное решение x^i . Из множества решений $\{x^i\}$, $i=1, (m-(n-2))$ выделим ПМ. Итак, можно утверждать, что выполняется неравенство $|\tilde{X}_{1,2}| \leq m-(n-2)$. Очевидно выполнение равенства $|\tilde{X}_{1,2}| = |X_{1,2}^0|$. Следовательно, для задачи $Z_{1,2}$ в постановке (1)-(3) выполняется соотношение квазиполноты $|\tilde{X}_{1,2}| = |X_{1,2}^0| < |X_{1,2}|$. Причем при устремлении критерия $F_2(x)$ на максимум справедливо неравенство $|\tilde{X}_{1,2}| = |X_{1,2}^0| \leq m-(n-2)$, а при устремлении критерия $F_2(x)$ на минимум выполняется равенство $|\tilde{X}_{1,2}| = |X_{1,2}^0| = 1$.

Аналогичные выводы справедливы и для критериев с направлениями, противоположными рассмотренным выше.

Теорема 1. Задача $Z_{1,2}$ «об остовных деревьях и экстремальном ребре» на n -вершинном графе $G=(V,E)$, $|E|=m$ с векторной целевой функцией

$$\begin{aligned} F(x_{1,2}) &= (F_1(x_{1,2}), F_2(x_{1,2})), \\ F_1(x_{1,2}) &= \omega_1(x_{1,2}) = \omega_1(x_1) = \sum_{e \in E_{x_1}} \omega_1(e) \rightarrow extr, \\ F_2(x_{1,2}) &= \sum_{e \in E_{x_1}} \omega_2(e) \rightarrow extr \end{aligned}$$

является квазиполной, т.е. справедливо соотношение $|\tilde{X}_{1,2}| = |X_{1,2}^0| < |X_{1,2}|$. Причем МДР не превышает количества остовных деревьев в полном n -вершинном графе $|X_{1,2}| \leq n^{n-2}$, и выполняется условие $|\tilde{X}_{1,2}| = |X_{1,2}^0| \leq m-(n-2)$.

Литература

1. Перепелица В.А. Многокритериальные модели и методы для задач оптимизации на графах. — Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. — 337с.
2. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990. — 384 с.

ВЛАСТИВОСТІ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО РОДУ

В. І. Петренюк,
petrenjukvi@i.ua,

*Центральноукраїнський національний технічний
університет*

Анотація. Задача полягатиме у вивченні структурних властивостей графів - обструкцій G обмеженого роду $\gamma(G)$, поданих як ϕ -образ двох графів G_i неорієнтованого роду $\gamma(G_i)$ при ототождженні пар точок (x_{1j}, x_{2j}) із множин точок приєднання X_i , $j=1,2,...,|X_i|$, де під точкою розумітимемо, або вершину, або довільну точку ребра графа G . Для множин точок приєднання X_i із заданим числом досяжності t_i , $t_i \geq 1$, яке дорівнює найменшій кількості кліток-граней на границях яких розміщуються всі точки множини X_i , та використовуються як відомі характеристики $\theta(X_i)$, $\partial\theta(X_i)$, так і визначаються дві нові: 1) багатосторонність чи $st(X_{ij}, G_i)$ - доступ до точок з X_{ij} розташованих на границях кліток -граней поверхні орієнтовної роду $\gamma(G_i)$; 2) $k4(X_{1j}, X_{2j})$ - кількість всіх різних частинних графів гомеоморфних K_4 чи $K_{2,3}$ породжених ототодженням пар точок (x_{1j}, x_{2j}) з множин точок X_{ij} , $j=1,2,...,|X_{ij}|$, $m = \sum_{j=1}^{t_i} |X_{ij}|$, $i=1,2$. Основний результат - теорема 1.

Основні поняття та позначення узяті із [1]-[3]. Під граф-обструкцією розумітимемо такий простий граф G у якого кожне ребро є суттєвим відносно роду $\gamma(G)$ при операції

видаленні ребра u , т. то $\gamma(G \setminus u) = \gamma(G) - 1$. **Задача** полягатиме у вивченні струк-турних властивостей граф – обструкції G неорієнтованого роду $\gamma(G)$, поданого як ϕ -образ двох одночасно не вироджених графів G_i неорієнтованого роду $\gamma(G_i)$ при ототодженні пар точок (x_{1j}, x_{2j}) з множин точок приєднання X_i , $j=1,2,\dots,|X_i|$, де під точкою розумітимемо, або вершину, або довільну точку ребра графа G . Для множин точок приєднання X_i із заданим числом досяжності t_i , $t_i \geq 1$, яке дорівнює найменшій кількості кліток-граней на границях яких розміщуються всі точки множини X_i , використовуються як відомі характеристики $\theta(X_i)$, $\partial\theta(X_i)$, так і визначаються дві нові: 1) багатосторонність чи $st(X_{ij}, G_i)$ -сторонній доступ до точок з X_{ij} розташованих на границях кліток -граней поверхні орієнтовної роду $\gamma(G_i)$; 2) $k4_G(X_{1j}, X_{2j})$ - число всіх різних частинних графів, породжених при ототодженні пар точок (x_{1j}, x_{2j}) з множин точок X_{ij} , $j=1,2,\dots,|X_{ij}|$, $m = \sum_{j=1}^{t_i} |X_{ij}|$, $i=1,2$, та гомеоморфних K_4 чи $K_{2,3}$. В [4] отримано деякі властивості графів-обструкцій орієнтованого роду, поданих як ϕ -образ двох одночасно не вироджених графів орієнтованого роду - простого графа G_1 та квазізірки $St_m(G_2)$ з центром – графом G_2 без кратних ребер-дуг, що містять множину точок приєднання X із числом досяжності t , $t > 0$, та чотирьох наступних характеристик множини X : $\theta, \partial\theta, k4, st$, наведених нижче.

Нехай 2-многовид S без країв неорієнтованого роду $\bar{\gamma}(S)$ подано як поверхню S' орієнтованого роду $\gamma(S') \geq 0$, і $\bar{\gamma}(S) = \gamma(S') + r$, до якої приклеєно r лент Мебіуса, $r > 0$, наприклад, поверхня S є пляшкою Клейна коли $\gamma(S') = 0$ і $r = 2$, чи S' – тор із однією лентою Мебіуса. Для заданого вкладення f , $f: G \rightarrow S$, графа G в S та заданої множини

точок X , $X \subset G^0 \cup G^1$ визначимо $t_G(X, S, f), t = t_G(X, S, f)$, число досяжності множини X відносно S , якщо є підмножина $S_G(X)$, $S_G(X) = S \setminus f(G)$, $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$, що задовольняє умові: $(f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^t \partial s_i \cap X) \wedge (f(X) \not\subseteq \bigcup_{i=1, i \neq j}^t \partial s_i \cap X)$, $j=1, 2, \dots, t$. Згідно [1] будемо говорити, що множина X має число досяжності t , $t_G(X, S) = t$, відносно фіксованої S , якщо серед всіх неізоморфних вкладень f , $f: G \rightarrow S$ число t є найменшим серед чисел $t_G(X, S, f)$. Позначатимемо надалі $\bar{\gamma}$ через γ .

Визначення 1. Нехай задано вкладення f , $f: G \rightarrow S$, графа G в фіксовану S , яке реалізує t , $t_G(X, S) = t$, де $S_G(X) = S \setminus f(G)$, $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$. Будемо говорити, що відносно S множина X матиме характеристику $\theta_G(X, S, f)$, $\theta_G(X, S, f) = \theta$, $\theta \geq 1$, якщо існує θ трійок кліток $\{s_i\}_1^3$ з множини $S_G(X)$, на границях яких підмножини X_i , $X_i \subseteq X$, розміщуються довільним чином і задовольняють співвідношенню: $G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_2 \supseteq \{a_1\} \wedge G^0 \cap \partial s_2 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_2\} \wedge G^0 \cap \partial s_1 \cap \partial s_3 \supseteq \{a_3\}$, та породжує найменший по включенню підграф G' графа G , (можливо вироджений в точку), який містить точки $\{a_i\}_1^3$ попарного перетину границь кліток $\{s_i\}_1^3$; Множина X матиме відносно S характеристику $\theta_G(X, S)$, якщо $\theta_G(X, S) = \max \theta_G(X, S, f)$, де максимум береться по всім неізоморфним вкладенням f , $f: G \rightarrow S$, що реалізують $t_G(X, S) = t$.

Визначення 2. Нехай задано вкладення f , $f: G \rightarrow S$, графа G в S , яке реалізує t , $t_G(X, S) = t$, де $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$, $S_G(X) = S \setminus f(G)$, та виконується рівність $\theta_G(X, S) = 0$. Будемо говорити, що відносно S множина X матиме характеристику

$\partial\theta_G(X, f)$, $\partial\theta = \partial\theta_G(X, f)$, $\partial\theta \geq 1$, якщо існує підмножина $\{s_i, s_j, s_k\}$, множини $S_G(X)$, яка задовольняє співвідношенням: $G^1 \cap \partial s_i \cap \partial s_j \supset \{(a_1, b_1)\}$ і $G^1 \cap \partial s_k \cap \partial s_j \supset \{(a_2, b_2)\}$, для всіх $i \neq j \neq k$, $i, j, k = 1, 2, 3$. На границях $\{\partial s_i, \partial s_j, \partial s_k\}$ множина X розміщується довільним чином, якщо не містить точок ребер (a_1, b_1) , (a_2, b_2) та особливим чином (без точок множини X на $\partial s_j \setminus L(a_1, a_2) \cup \{(a_2, a_{20}), (a_1, a_{10})\}$), якщо містить принаймні точку цих ребер. Також існуватимуть клітка s_0 та, можливо, клітка s_{00} . Клітка s_0 , $s_0 \in (S \setminus f(G)) \setminus S_G(X)$, границя якої містить простий ланцюг $L(a_1, a_2)$ ненульової довжи ни із кінцевими вершинами a_1, a_2 спільно із ∂s_j і два простих ланцюги, можливо вирод жених в точку, $L_1(a_1, a_{12})$, $L_1(a_2, a_{22})$ спільними з ∂s_i та ∂s_k , відповідно, та ребро (a_{12}, a_{22}) . Клітка s_{00} , $s_{00} \in (S \setminus f(G)) \setminus (S_G(X) \cup \{s_0\})$, має границю яка містить простий ланцюг $L(a_{10}, a_{20})$ ненульової довжини із кінцевими вершинами a_{10}, a_{20} спільно із ∂s_j . Множина X матиме характеристику $\partial\theta_G(X, S)$, якщо $\partial\theta_G(X, S) = \max \partial\theta_G(X, S, f)$, де максимум по неізоморфним вкладенням f , $f: G \rightarrow S$, що реалізують $t_G(X, S) = t$ та $\theta_G(X, S)$.

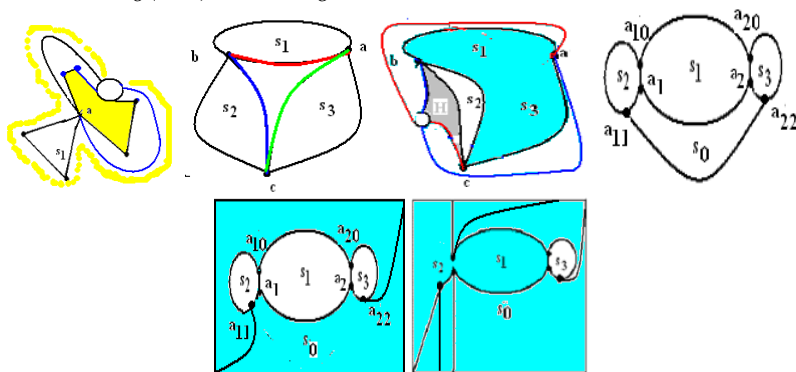


Рис. 1 Зіркова та ланцюжкова кліткові структури на проективній площині

Визначення 3. Позначимо через $krt_G(M)$, $kr = krt_G(M)$, kr - кратність доступу до елементів підмножини M множини точок графа G , як найбільшу кількість варіантів вибору різних підмножини $S_G(M, S_\gamma)$ множини клітин $S_\gamma \setminus f(G)$ на границях яких розміщуються всі точки з підмножини M , узята по всіх мінімальних вкладеннях f , $f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ . Іншими словами, це найбільша кількість зірок які приєднані кінцевими вершинами до кожного елемента підмножини M та вкладені до різних kr 2-кліток із множини $S_\gamma \setminus f(G)$.

Визначення 4. Позначимо через $st_G(M, s, f)$, $k = st_G(M, s, f)$, k - сторонність доступу із довільної внутрішньої точки замкнутої заданої клітки \bar{s} до кожної точки заданої підмножини M множини точок графа G , де $|M| > 2$, що полягатиме у наявності такої клітки s , $s \in S_{f(G)}(M, S_\gamma, s)$, де f - задане мінімальне вкладення $f: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в поверхню S_γ , яка на своїй границі ∂s містить k копій підмножини M . Найбільшу кількість копій підмножини M на ∂s серед всіх клітин s заданого мінімального вкладення f , $f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ , позначимо через $st_G(M, f)$. Іншими словами, це найбільша кількість зірок графа G які приєднані кінцевими вершинами до кожного із принаймні трьох елементів множини M та вкладені до однієї клітки із множини $S_\gamma \setminus f(G)$ заданого мінімального вкладення f , $f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в S_γ .

Визначення 5. Будемо називати $(st_G(M, f_1), st_G(M, f_2), \dots, st_G(M, f_N))$ вектором l - стороннього доступу до множини M точок графа G із довільної внутрішньої точки замкнутої заданої клітки \bar{s} , $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, $l = l(s)$, до кожної точки заданої підмножини M , де $l > 0$, $|M| > 2$, $\{f_k\}_{k=1}^N$ - множина всіх неізоморфних мінімальних

вкладень $f_k, f_k: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в S_γ . Найбільше $l, l = l(s)$ серед чисел $ms_G(M, f_k)$ узяті по всім s та всім $f_k, s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, називатимемо характеристикою l -стороннього доступу до множини M точок графа G .

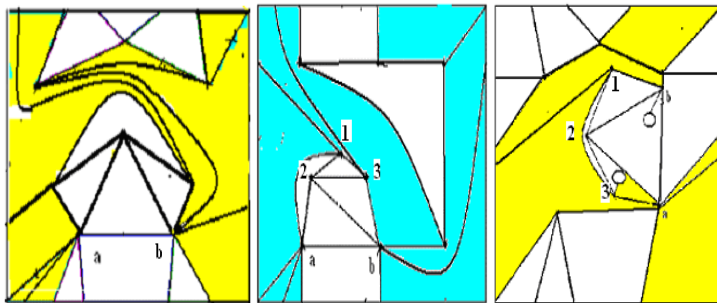


Рис. 2.

Роль $st, st = st(\{a, b\}) = 1$, як параметра двостороннього доступу видно на перших двох картах, де пару ребер із двох графів K_5 склеєно по вершинам в ребро $e, e = (a, b)$, та наведено вкладення склеєного графа в тор, теж саме для пари ребер із графів $K_5, K_{3,3}$; на третій карті два графи K_5 склеєні по ребру $e = (a, b)$ та частині ребра u , відповідно, де кольоровою є клітка утворена вкладенням в тор графа K_5 , до якої вкладено інший K_5 та виконано склейку.

Лема 1. Нехай задано наступне ϕ -перетворення графів G_1 та $St_m(G_2)$ неорієнтованого роду $\gamma(G_i), i = 1, 2$, $\phi: (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$, де $St_m(G_2)$ - квазізірка з центром G_2 та кількома ребрами-променями, що суміжні вершинам з множини X_2 , де X_i - множина точок графа $G_i, X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, матиме число досяжності та характеристики $t_i, k_4, st, \theta_i, \partial\theta_i, i = 1, 2$. Якщо G -граф-обструкція неорієнтованого роду $\gamma(G)$, то для довільного u та i не

існуватиме вкладення графа $G_1 \setminus u$ в неорієнтовану поверхню роду $\gamma(G_1)-1$, що задовольнятиме умові: $t_{G_1 \setminus u}(X_1) = t_{G_1}(X_1) + 1$.

Доведення. Нехай G -граф-обструкція неорієнтованого роду $\gamma(G)$. Розіб'ємо заданий граф-обструкцію G на підграф G_1 та квазізірку $St_m(G_2)$ з центром G_2 і m спільними вершинами x_j , кожна з яких розщеплюється на вершини x_{1j}, x_{2j} , де $x_{ij} \in G_i$, $i \in \{1, 2\}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Ототождження цих пар задаватиме наступне ϕ -перетворення графів G_1 та $St_m(G_2)$ неорієнтованого роду $\gamma(G_i)$:

$\phi: (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$, де $St_m(G_2)$ - квазізірка з центром G_2 та ребрами-променями із кінцевими вершинами, що утворюють, множину X_2 , де X_i множина точок графа G_i , $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, має число досяжності t_i та характеристики θ_i , $\partial\theta_i$, $i = 1, 2$. Використаємо метод доведення від протилежно -го. Припустимо, що для деякого ребра u , для визначеності $u \in G_1^1$, існуватиме вкладення графа $G_1 \setminus u$ в неорієнтовану поверхню роду $\gamma(G_1)-1$, що задовольняє $t_{G_1 \setminus u}(X_1) = t_{G_1}(X_1) + 1$, т. то принаймні одна вершина, нехай це $x_{1j'}$, розташована на границі додаткової $t_1 + 1$ - ї клітки графа $G_1 \setminus u$. Для графа $G \setminus u$ виконаємо ϕ -перетворення, аналогічне наведеному вище, графа $G_1 \setminus u$ та квазізірки $St_m(G_2)$ з центром G_2 і m спільними вершинами x_j , кожна з яких розщеплюється на вершини x_{1j}, x_{2j} , де $x_{ij} \in G_i$, $i \in \{1, 2\}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Оскільки $t_{G_1 \setminus u}(X_1) > 1$, то в графі $G \setminus u$ існуватиме ребро $u = (x_1, b)$, $b \in G_2^0$, яке потребуватиме нової ленти Мебіуса чи 2-ручки, приклеєної до поверхні $\gamma(G \setminus u)$. Тоді матимемо нерівність $\gamma(G \setminus u) > \gamma(G) - 1$, яка суперечить умові, що G -граф-обструкція неорієнтованого роду $\gamma(G)$. Доведення леми 1 закінчено.

Теорема 1. Нехай задано наступне ϕ -перетворення графів G_1 та $St_m(G_2)$ неорієнтованого роду $\gamma(G_i)$, $i=1,2$, $\phi: (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$, де $St_m(G_2)$ - квазізірка з центром G_2 та кількома ребрами-променями, що суміжні вершинам з множини X_2 , де X_i - множина точок графа G_i , $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, матиме число досяжності та характеристики $t_i, k4, st, \theta_i, \partial\theta_i$, $i=1,2$. Якщо для кожного ребра u зв'язного графа G виконується одне з наступних співвідношень:

- 1). $(\gamma(G_i \setminus u) = \gamma(G_i) - 1) \wedge (t_{G_i \setminus u}(X_i) = t_{G_i}(X_i)) \wedge (\theta_{G_i \setminus u}(X_i) = \theta_{G_i}(X_i)) \wedge (\partial\theta_{G_i \setminus u}(X_i) = \partial\theta_{G_i}(X_i))$ для довільного u та деякого i , $i \in \{1,2\}$;
- 2). $(k4_{G \setminus u}(X_{1j}, X_{2j}) = k4 - 1) \vee (t_{G_i \setminus u}(X_i \setminus \{x_{ij}\}) = t_{G_i}(X_i) - 1)$ для довільного висячого ребра $u = (x, x_{2j})$ квазізірки $St_m(G_2)$ та для деяких i, j , де $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$ $i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,2, \dots, m\}$;
- 3). $(\gamma(G_i \setminus u) = \gamma(G_i) - 1) \wedge (t_{G_i \setminus u}(X_i) = t_{G_i}(X_i) + 1) \wedge (\theta_{G_i \setminus u}(X_i) = \theta_{G_i}(X_i)) \wedge (\partial\theta_{G_i \setminus u}(X_i) = \partial\theta_{G_i}(X_i))$, для довільного i , $i \in \{1,2\}$, то G -граф-обструкція неорієнтованого роду.

Доведення впливатиме із леми 1. Розіб'ємо заданий граф-обструкцію G на підграф G_1 та квазізірку $St_m(G_2)$ з центром G_2 і m спільними вершинами x_j , кожна з яких розщеплюється на вершини x_{1j}, x_{2j} , де $x_{ij} \in G_i$, $i \in \{1,2\}$, $j = 1,2, \dots, m$. Ототодження цих пар задаватиме наступне ϕ -перетворення графів G_1 та $St_m(G_2)$ неорієнтованого роду $\gamma(G_i)$: $\phi: (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$, де $St_m(G_2)$ - квазізірка з центром G_2 та ребрами-променями (x, x_{2j}) , де одна із кінцевих вершин належить до G_2 , а інша належить множині X_2 , де X_i

множина точок графа G_i , $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, має число досяжності t_i та характеристики θ_i , $\partial\theta_i$, $i=1,2$. Нехай до 2-многовиду S_i неорієнтованого роду $\gamma(G_i)$ вкладено граф G_i мінімальним вкладенням f_i , $f_i: G_i \rightarrow S_i$, що реалізує $t_{G_i}(X_i) = t_i$ та $\theta_{G_i}(X_i) = \theta_i$, де $i=1,2$. Згідно [5] матимемо нерівність:

$$\gamma(G) \leq \sum_{i=1}^2 \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i) + k4 - st, \quad (*)$$

де $st = \sum_{j=1}^{t_1} st(X_{1j}, G_1)$, $k4 = \sum_{j=1}^{t_1} k4(X_{1j}, X_{2j})$, $k4 - st$ - число 2-ручок приклеєних до клітки s з множини $\sigma_{r_1} \setminus f(G_1)$, $k4 - st \geq 0$, f - мінімальне вкладення $f: G_1 \rightarrow \sigma_{r_1}$, $r_i = \gamma(G_i) + t_i - 1 - (\theta_i + \partial\theta_i)$, із st -стороннім доступом до тих точок приєднання на границі ∂s клітці s (до якої приклеєно r_2 2-ручки і вкладено граф G_2), що при ототоженні пар точок приєднання (x_{1j}, x_{2j}) породжують $k4$ різних підграфів гомеоморфних K_4 , чи $K_{2,3}$. Вибір довільного ребра u , $u \in G^1$, призведе до одного з двох наступних випадків:

1) $u \in G_i^1$ для одного i , $i \in \{1,2\}$; 2) $u = (x_{1j}, x_{2j})$.

Розглянемо випадок 1). За виконання співвідношення 1) матимемо ребро u , $u \in G_i$, суттєвим відносно $\gamma(G_i)$ при операції видалення ребра, а за нерівністю (*) матимемо нерівність $\gamma(G \setminus u) \leq \gamma(G) - 1$, бо для деякого i , нехай $i=1$, є рівність $\gamma(G_1 \setminus u) = \gamma(G_1) - 1$. Тому ребро u суттєве відносно роду $\gamma(G)$ при операції видалення ребра, що треба було довести. Якщо ребро $u = (x_{1k}, x_{1j})$ матиме кінцевими вершинами точки з'єднання для деяких i, j , де $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$ $i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,2,\dots,m\}$, то видалення цього ребра призведе до збільшення на 1 числа досяжності $t_{G_i \setminus u}(X_i)$, $t_{G_i \setminus u}(X_i) = t_{G_i}(X_i) + 1$, та зменшення

роду $\gamma(G_i \setminus u)$ на 1. Якщо серед кінцевих вершин ребра $u = (a, x_j), u \in G_i^1$, є одна точка з'єднання для деяких i, j , де $X_i = \{x_{ij}\}_1^m, i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Відмітимо, що видалення ребра $u \in G_1^1$ чи $u \in G_2^1$ може збільшити на 1 число досяжності $t_{G_i}(X_i)$. Якщо припустити, що для деякого i , це можливе одночасно із зменшенням на 1 роду $\gamma(G_i)$, то рівності $\gamma(G_i \setminus u) = \gamma(G_i) - 1$ та $t_{G_i \setminus u}(X_i) = t_{G_i}(X_i) + 1$ не змінюють наведену вище оцінку роду граф-обструкції G , що суперечить умові, що ребро u суттєве відносно $t_{G_i}(X_i)$ при видаленні ребра, $t_{G_i \setminus u}(X_i) = t_{G_i}(X_i) + 1, i \in \{1, 2\}$;

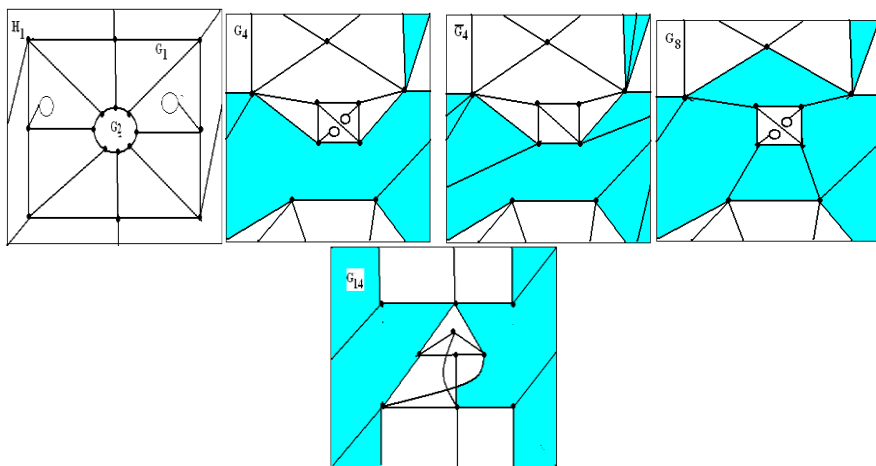


Рис.4.

На першій карті вкладення в 2-тор графа H_1 із $k_4 = st = 0$, на другій вкладення графа G_4 із $k_4 = 0, st = 1$ в 2-тор, відповідно, на третій карті вкладення в тор графа $\overline{G_4} = G_4 \setminus e$ із $k_4 = st = 2$, четверта та п'ята карти - вкладення в 2-тор графів G_8 із $k_4 = 0, st = 2$, G_{14} із $k_4 = 0, st = 2$, відповідно.

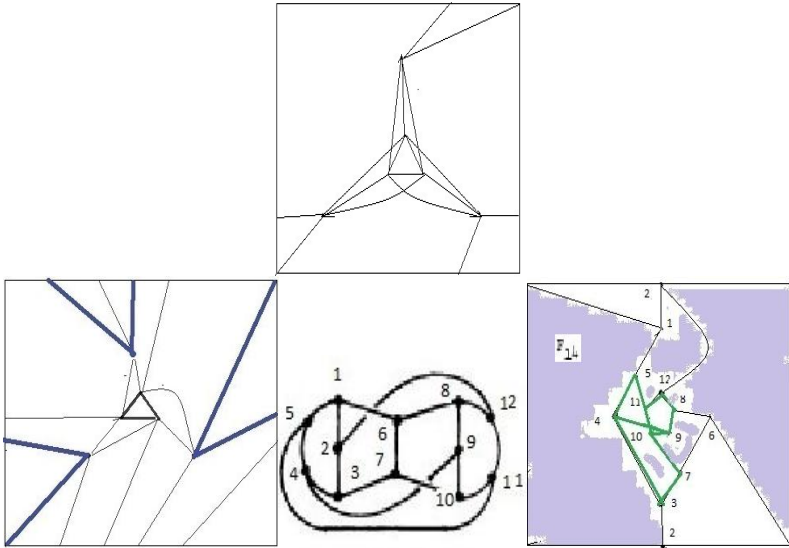


Рис.5.

На першій карті розміщено на торі граф $G = K_6$ як ϕ -образ графів $G_1 = K_3$ та $St_3(K_3)$, а на другій карті вкладено K_6 в тор без перетину ребер, де $st_{G_1}(G_1^0) = 3$, $k_4 = 3$. На 4-й карті вкладення F_{14} в тор σ_1 $G_1 = K_{2,3}$, $st_{G_1}(G_1^0, \sigma_1) = 2$, $G_2 = C_5$, $k_4 = 1$.

Література

1. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. препринт ИМ АНУ, Киев, 1973, 383 с.
2. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. препринт ИМ АНУ, Киев, 1970.
3. Хоменко Н. П., Островерхий Е. Б. Существенные элементы и род графа. препринт "Минимальные вложения графов" ИМ АНУ Киев 1972.
4. Петренюк В.І. Построение графов-обструкций ориентируемого рода. Материалы семинара "Дискретная математика и её приложения", Москва, МГУ, 2012.
5. Петренюк Д.А., Петренюк В.І. Нова верхня оцінка орієнтованого роду./Теорія оптимальних рішень, 2018.

6. Петренюк В.І. Нова верхня оцінка неорієнтованого роду. (ел.файл, рукопис).

7. Archdeacon D. The orientable genus is nonadditive. J.Graph theory, 11,1986, 385-401.

8. R. Bodendiek, K. Wagner. A characterization of the minimal basis of the torus. Combinatorica 6,3,1986 245-260.

9. Петренюк В. І. О структуре плоских графов с заданным числом достижимости некоторого множества точек. деп. рукопис в УкрНИИТИ N 2245-Ук86 22.09.1986.

КОМБИНАТОРНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ: ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ И ПРИМЕНЕНИЕ

Пичугина О.С.

oksanapichugina1@gmail.com

*Национальный аэрокосмический университет
имени Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный
институт»*

Аннотация. Рассматриваются множества евклидовых комбинаторных конфигураций (множества е-конфигураций). Устанавливается их взаимосвязь с множествами комбинаторных конфигураций и евклидовыми комбинаторными множествами. Представлена классификация множеств е-конфигураций на основе анализа их геометрических особенностей и специфики их формирования. Описаны подходы к моделированию множеств е-конфигураций с помощью непрерывных функциональных представлений, основанных на анализе геометрических особенностей и индуцирующих их мультимножеств. Для вершинно расположенных множеств е-конфигураций изложены специфика, методы оптимизации и подходы к построению выпуклых продолжений.

Abstract. The Euclidean combinatorial configurations sets (e-configurations sets) are discussed. Their connection with combinatorial configurations sets and the Euclidean combinatorial sets is established. The e-configurations sets classification, based on the analysis of geometric features and the specifics of the formation, is given. Approaches to e-configurations sets' modeling by continuous functional representations that are based on the analysis of geometric peculiarities and e-configurations induced multiset are described. For the vertex-located sets of

e-configurations, a specific, optimization methods, and convex extension approaches are outlined.

Евклидовы комбинаторные множества (е-множества) представляют собой класс множеств, позволяющих отображение в арифметическое евклидово пространство и рассмотрение их образов, называемых s-множествами. Выделение класса е-множеств было связано с поиском новых возможностей для решения комбинаторных задач методами непрерывного и дискретного программирования.

Элементами е-множества Π являются упорядоченные выборки одинакового объема $y = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$, где y_1, \dots, y_n - объекты произвольной природы. При этом, поскольку в множествах повторения элементов отсутствуют, появляется возможность отображения Π в R^n , например, по правилу

$$y \xrightarrow{\varphi} x = (x_1, \dots, x_n), \quad x_i = \varphi(y_i) \in R^1, \quad i \in J_n = \{1, \dots, n\}, \quad (1)$$

где φ такое, что

$$E = \varphi(\Pi) = \{x = \varphi(y)\}_{y \in \Pi}, \quad \Pi = \varphi^{-1}(E), \quad (2)$$

при этом полученное множество E называют специальным комбинаторным множеством или s-множеством.

Переход от е-множеств к рассмотрению s-множеств позволил исследовать и применять в оптимизации алгебро-топологические и тополого-метрические их свойства, что и положило начало активным исследованиям в данном направлении, называемом сегодня евклидовой комбинаторной оптимизацией (ЕКО).

Правило (1) далеко не единственный способ погружения е-множеств в арифметическое евклидово пространство. Так если

$$\exists m: \forall y \in \Pi \quad y_i \in R^m, \quad i \in J_n, \quad (3)$$

по этому же принципу можно осуществить погружение в R^N , $N=n \cdot m$, обеспечивая выполнение условия (2), например, так:

$$y \xrightarrow{\varphi} x = \text{vec}(y) = (x_1, \dots, x_N). \quad (4)$$

Использование правила (4) открывает новые перспективы в ЕКО, связанные с возможностью использования всей имеющейся числовой информации об объектах, т. к. увеличивает класс комбинаторных задач, позволяющих формулировки в виде задач дискретного программирования, а, с другой стороны, расширяет класс е-множеств. Именно поэтому среди s-множеств был выделен подкласс множеств евклидовых комбинаторных конфигураций (множеств е-конфигураций, С-множеств), представляющих собой образы множеств комбинаторных конфигураций в смысле Бержа (E_c -множеств) в арифметическое евклидово пространство. E_c -множества являются подклассом е-множеств, образующихся в результате отображений одного конечного множества в другое. В результате С-множество E - это образ в R^N не просто е-множества, а E_c -множества Π , для которого выполнено условие (3).

Классификацию С-множеств проведем по двум основным направлениям, первое из которых учитывает, что $E \subset R^N$, второе – что это образ Π : а) *Геометрические особенности* E . Так были выделены классы вершинно и невершинно расположенных, поверхностно расположенных, полиэдрально-поверхностных (PSS), многоуровневых С-множеств и др.; б) *Анализ индуцирующего мультимножества A и образующего множества A* . Так были выделены классы е-конфигураций размещений, перестановок и перестановок со знаком, с повторениями и без повторений, специальных, булевых, бинарных, троичных и т.п. Объединенные разными из указанных признаков множества е-конфигураций, индуцированные одним A , образуют базовые С-множества (C_b -множества) такие как C_b -множества перестановок без

повторений $E_n(\tilde{A})$, размещений с повторениями $E_{\eta k}^n(\tilde{A})$, перестановок со знаком $E_{nk}^\pm(\tilde{A})$ и др.

Основные комбинаторные свойства C_b -множеств, которые исследовались, это мощность множества, размерность и Н-представление, в т.ч. несводимое, многогранника $P = \text{conv } E$, критерий его простоты, вершины и смежности вершин, симметрия, комбинаторная эквивалентность многогранников и др.

В рамках исследования геометрических свойств базовых C -множеств рассматривались следующие задачи – поиск описанных поверхностей, в т.ч. выпуклых и гладких, разложение по семействам плоскостей и строго выпуклых поверхностей, декомпозиция E на попарно непересекающиеся C_b -множества меньшей размерности, декомпозиция не вершинно расположенных E на вершинно расположенные C_b -множества и т.п.

Интерес к вершинно расположенным C -множествам, к которым относятся $E_n(\tilde{A})$, $E_{\eta 2}^n(\tilde{A})$, $E_{nk}^\pm(\tilde{A})$ и др., вызван такой интересной их особенностью как возможность выпуклого продолжения (ВП) произвольной функции $f(x)$, заданной на нем, на его выпуклую оболочку. А это, в свою очередь, позволяет считать, что как целевая функция, так и ограничения в задачах оптимизации (ЗО) заданы выпуклыми функциями. Вершинно расположенные множества также позволяют представление вида $E = P \cap S$, называемое полиэдрально-поверхностным представлением (E -PSR), где $S = \{x : f_1(x) = 0\}$ – выпуклая поверхность, т.е. поверхность, ограничивающая выпуклое тело. Нахождение поверхности S позволяет при решении ЗО заменять условие $x \in E$ двумя – $x \in P$, $x \in S$ – и рассматривать как традиционную полиэдральную релаксацию, выпуклую в данном случае, так и поверхностную релаксацию, состоящую в оптимизации выпуклой функции на выпуклой поверхности. Комбинация

этих двух релаксаций лежит в основе группы полиэдрально-поверхностных методов (PSM). Среди них приближенные методы с оценкой точности, а также точные PSM типа ветвей и границ (B&B.PSM). Последние используют декомпозицию C_b -множеств на попарно-непересекающиеся подмножества этого же класса меньшей размерности.

E-PSR, представленное уравнением описанной поверхности S и H-представлением многогранника P , является аналитическим описанием множества E . Обобщим E-PSR в следующем понятии.

Представление множества E с помощью функциональных зависимостей

$$f_j(x) = 0, j \in J_{m'}, \quad (5)$$

$$f_j(x) \leq 0, j \in J_m \setminus J_{m'}, \quad (6)$$

где $f_j(x), j \in J_m$ - определены на E и непрерывны, называется непрерывным функциональным или f -представлением множества E . Система (5) называется строгой частью f -представления, (6) – нестрогой частью, а количество ограничений – его порядком. Так, m будет порядком f -представления (5), (6), а $m', m'' = m - m'$ - порядком его строгой и нестрогой частей соответственно. Система (5), (6) называется строгим f -представлением E , если в нем есть только строгая часть, иначе нестрогим.

Большинство рассмотренных C_b -множеств относятся PSS и имеют нестрогие квадратичные f -представления, но порядок их неполиномиален. Поиск их строгих f -представлений, порядок которых не превышает n , основан на свойствах C -множеств как образов E_c -множеств, в частности, на анализе \tilde{A} . При этом для вершинно расположенных C -множеств строгие f -представления строятся в исходном пространстве, а для не вершинно расположенных – в расширенном. Минимальный порядок выпуклого строгого f -представления – два, поэтому интересной задачей является поиск тех из них, что определяются парой гладких функций, в результате чего E

образуется в касании двух поверхностей, а f -представление называется касательным. Касательные представления позволяют комбинировать две поверхностные релаксации – на S и на выпуклой поверхности $S' = \{x : f_2(x) = 0\}$.

Методы оптимизации, позволяющие применение строгих f -представлений S -множеств, включают метод штрафных функций, метод Лагранжевых релаксации, ньютоновские методы, метод последовательного подсоединения компонент f -представлений и др. Особое место среди них занимает группа методов оптимизации на вершинно расположенных S -множествах, в которых комбинируются выпуклые и строгие продолжения целевой функции. Следует также выделить методы оптимизации на так называемых хорошо описанных множествах, позволяющие эффективно решать полиэдральные релаксации. В том случае, если оптимизация проводится на хорошо описанном PSS, предлагаются подходы к оптимизации на основе применения метода штрафных функций, проектирования на PSS и решения полиэдральной релаксации.

Література

1. Berge, C. (2012). *Principles of Combinatorics*. Academic Press.
2. Стоян, Ю. Г., Ємець, О. О. (1993). *Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації*. Київ: Ін-т системн. дослідж. освіти.
3. Стоян, Ю. Г., Яковлев, С. В., Пичугина, О. С. (2017). *Евклидовы комбинаторные конфигурации: монография*. Харьков: Константа.
4. Пичугина, О. С. Яковлев, С. В. (2018). *Непрерывные функциональные представления в задачах дискретной оптимизации: монография*. Харьков: Константа.

ВЕКТОРНЫЕ МЕРЫ В СЕТЕВЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ

Романов В.А.

Vladimir-romanov@ukr.net

*Центрально-украинский государственный педагогический
університет ім. В. Винниченко*

Аннотация. Исследованы свойства векторных мер с аминокислотными и другими компонентами в капиллярных сетях и в других сетевых конфигурациях. Доказано, что результат биосинтеза представляет собой значение некоторого супераддитивного функционала.

Abstract. The properties of vector measures with amino acids and other components in capillary nets and in other net configurations are investigated. It is proved that the result of biosynthesis is the value of some superadditive functional.

Постановка задачи. Пусть Φ - капиллярная система, обеспечивающая доставку необходимых для биосинтеза аминокислот. Обозначим через p_k массы аминокислот, необходимые для синтеза 1 г протеинов, где индекс k пробегает значения от 1 до 20. Тогда 20-компонентный вектор p , составленный из чисел p_k , будем называть *параметрическим вектором процесса биосинтеза*.

Распределение каждой из аминокислот можно задать некоторой скалярной мерой M_k с неотрицательными значениями. Все вместе они образуют 20-компонентную векторную меру, которую обозначим через M . Обозначим через x_k значения скалярных мер M_k на Φ и через x - 20-компонентный вектор, составленный из чисел x_k .

Определение 1. Процесс биосинтеза назовём *оптимальным*, если в результате его осуществления не останется неиспользованных аминокислот.

Определение 2. *Результирующим функционалом биосинтеза* назовём функционал, задаваемый равенством $f(x) = \min (x_k/p_k, k = 1, \dots, 20)$.

Цель работы состоит в установлении критерия оптимальности биосинтеза и в исследовании свойств его результирующего функционала.

Результаты работы.

Теорема 1. Пусть процесс биосинтеза на конфигурации Φ задаётся векторной мерой M . Тогда для того чтобы этот процесс был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы его параметрический вектор p был коллинеарным с вектором $M(\Phi)$.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 масса синтезированных протеинов равна значению результирующего функционала на векторе $M(\Phi)$.

Доказательства теорем 1 и 2 не представляют трудностей, а потому на них не останавливаемся.

Теперь напомним, что данный функционал называется *супераддитивным*, если для каждой пары векторов образ их суммы не меньше суммы образов этих векторов.

Теорема 3. Результирующий функционал биосинтеза имеет свойство супераддитивности.

Доказательство. Для каждой отдельной компоненты выполняется неравенство

$$(x_k + y_k)/p_k \geq \min(x_j/p_j, j=1, \dots, 20) + \min(y_j/p_j, j=1, \dots, 20).$$

Неравенство останется верным, если в его левой части перейти к минимуму по всем номерам k . Полученное при этом новое неравенство можно будет записать в более компактной форме: $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$. Следовательно, результирующий функционал супераддитивен, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Результаты теорем 1, 2 и 3 легко переносятся на экосистемы. Поскольку на планете существует приблизительно 400 тысяч видов растений и свыше 1 млн. видов животных, то на некоторых конфигурациях векторные меры могут иметь очень большое число компонент.

Замечание 2. При увеличении количества координат повышается вероятность того, что для разных векторов соответствующие им минимумы правой части формулы результирующего функционала будут достигаться на координатах с неодинаковыми номерами. Это усилит эффект супераддитивности. Следовательно, большое разнообразие биологических видов позволяет лучше использовать минеральные и органические ресурсы окружающей среды.

Замечание 3. Уже для 20-компонентной системы биосинтеза протеинов эффект супераддитивности довольно существен, так как имеющийся в плазме запас аминокислот – приблизительно 300 г - возобновляется не за 1 приём пищи, а за 9-12. Поэтому бывает достаточным достигать аминокислотной сбалансированности не в каждом отдельном приёме, а суммарно.

Замечание 4. В работе [1] были введены топологии на конфигурациях. Поскольку задаваемые на этих конфигурациях векторные меры тоже могут изменяться, то пространства их значений также следует наделять топологиями. С учётом формулы результирующего функционала можно сделать вывод, что наиболее подходящей будет топология, порождаемая равномерной метрикой.

Замечание 5. При большой размерности пространство с равномерной метрикой становится по своим свойствам близким к пространству ограниченных последовательностей, для которого, как доказано в работах [2] и [3], имеет место неэквивалентность различных подходов к понятиям непрерывности и дифференцируемости векторных мер. Поэтому появляется необходимость детального исследования приращений векторной меры, отражающих систему в её динамике, что делает понятной информационную значимость измерения основных показателей при разных физических нагрузках.

Литература

1. Романов В.А. Топологии в пространствах геометрических конфигураций // Материалы 19-го Международного научно-практического семинара «Комбинаторные конфигурации и их применения», 7-8 апреля 2017 г. – г. Кропивницкий. – 2017. – С. 115-117.

2. Романов В.А. О неэквивалентности трёх определений непрерывных направлений для векторных мер // Математические заметки. – 1995. – 57, № 2. – С. 310-312.

3. Романов В.А. О неэквивалентности различных определений дифференцируемости для векторных мер // Там же. – 2002. – 72, № 4. – С. 528-534.

ПОЛИМАТРОИДЫ И СУБМОДУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ НА ДИСТРИБУТИВНЫХ РЕШЕТКАХ

Ревякин А.М.

arevyakin@mail.ru

Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

Аннотация. В терминах субмодулярных функций на подмножествах конечного множества хорошо определяются понятия матроидов и полиматроидов [1–3], можно сформулировать задачи их объединения и пересечения. В работе рассмотрены задачи минимизации субмодулярных функций $f(x)$ на дистрибутивных решетках [4]. Установлено, что семейство всех элементов дистрибутивной решетки, на которых $f(x)$ достигает своего минимума, образует подрешетку, на которой $f(x)$ является модулярной функцией. Сформулированы теоремы типа Жордана-Гельдера.

Abstract. In terms of submodular functions on subsets of a finite set, the notions of matroids and polymatroids [1–3] are well defined, the problems of their union and intersection can be formulated. The paper deals with the problems of minimization of submodular functions $f(x)$ on distributive lattices [4]. It is established that the family of all elements of the distributive lattice on which $f(x)$ reaches its minimum forms a sublattice on which $f(x)$ is a modular function. Theorems of Jordan-Hölder type are formulated.

Пусть S – конечное множество. Действительная функция f , определенная на подмножествах конечного множества S , называется субмодулярной, если

$$f(A \cup B) + f(A \cap B) \leq f(A) + f(B) \text{ для всех } A, B \subseteq S.$$

Если, кроме того, субмодулярная функция f является неотрицательной, неубывающей и удовлетворяет условию, что $f(\emptyset) = 0$, то пара (S, f) называется полиматроидом на множестве S с ранговой функцией f .

Если $f(A \cup B) + f(A \cap B) = f(A) + f(B)$ для всех $A, B \subseteq S$, то функция f называется модулярной. Функция $v: S \rightarrow R$ может рассматриваться как модулярная функция $v(A) = \sum_{e \in A} v(e)$ для всех $A \subseteq S$. Мощность $|A|$ подмножества $A \subseteq S$ задает такую модулярную функцию, что $|\{e\}| = 1$ для каждого $e \in S$.

Если ранговая функция f полиматроида (S, f) является целочисленной и удовлетворяет условию, что $f(A) \leq |A|$ для всех $A \subseteq S$, то полиматроид (S, f) называется матроидом.

Для полиматроида (S, f) говорят, что модулярная функция $v(A)$ является независимым вектором, если $v(A) \leq f(A)$ для каждого $A \subseteq S$. Независимый вектор v такой, что $v(S)$ является наибольшей, т.е. $v(A) = f(A)$, называется базой. Независимое множество матроида (S, f) определяется как подмножество $A \subseteq S$ такое, что $|A| = f(A)$. База матроида – это независимое множество наибольшей мощности.

Семейство I всех независимых подмножеств матроида удовлетворяет следующей системе аксиом:

(i1) $\emptyset \in I$;

(i2) если $A \subseteq B$ и $B \in I$, то $A \in I$;

(i3) если $A, B \in I$ и $|A| > |B|$, то найдется $a \in A \setminus B$ такое, что $B \cup \{a\} \in I$.

Пара (S, r) , где r – целочисленная функция (ранг), определенная на подмножествах конечного множества S , образует матроид, если для всех $A, B \subseteq S$ и любых $a, b \in S$ выполняются либо свойства:

(r1) $0 \leq r(A) \leq |A|$;

(r2) если $A \subseteq B$, то $r(A) \leq r(B)$;

(r3) $r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B)$;

либо:

(r4) $r(\emptyset) = 0$;

(r5) $r(A) \leq r(A \cup \{a\}) \leq r(A) + 1$;

(гб) если $r(A) = r(A \cup \{a\}) = r(A \cup \{b\})$, то $r(A) = r(A \cup \{a, b\})$.

Многие проблемы комбинаторики рассматриваются как задачи минимизации субмодулярных функций на булевых решетках. Например, так можно сформулировать задачи объединения и пересечения матроидов (полиматроидов), где в роли субмодулярных функций выступают их ранговые функции.

Пусть K – дистрибутивная решетка с 0 (нулем) и 1 (единицей). Например, таковой является семейство всех подмножеств конечного множества S с операциями объединения и пересечения, в которой 0 является пустым множеством, а 1 – множеством S . Действительная функция $f(x)$, определенная на K , называется субмодулярной, если для всех $x, y \in K$ выполняется неравенство: $f(x \vee y) + f(x \wedge y) \leq f(x) + f(y)$. Если для всех $x, y \in K$ справедливо равенство: $f(x \vee y) + f(x \wedge y) = f(x) + f(y)$, то функция $f(x)$ называется модулярной.

Подрешетка L дистрибутивной решетки K называется f – остовом, если субмодулярная функция f , определенная на дистрибутивной решетке K , будет модулярной на L .

Пусть $f(x) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x)$, где $f_i(x)$ – субмодулярные функции на дистрибутивной решетке K , c_i – положительные действительные коэффициенты и $i = 1, 2, \dots, n$. Очевидно, $f(x)$ также является субмодулярной функцией на K . Рассмотрим задачу минимизации субмодулярной функции $f(x)$ на K .

Теорема 1. Семейство L всех элементов дистрибутивной решетки K , на которых субмодулярная функция $f(x)$ достигает своего минимума, образует f – остов решетки K . Более того, подрешетка L является также и f_i – остовом решетки K для всех i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Полученный остов L зависит не только от субмодулярных функций f_i , но и от коэффициентов c_i . Обозначим остов L через $L(c_1, c_2, \dots, c_n)$, подчеркивая его

зависимость от коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_n . Поскольку для всех $\lambda > 0$ $L(\lambda c_1, \lambda c_2, \dots, \lambda c_n) = L(c_1, c_2, \dots, c_n)$, остов L можно рассматривать как функцию на $(n-1)$ -мерном симплексе S^{n-1} со значениями в семействе подрешеток дистрибутивной решетки K . При этом симплекс S^{n-1} снабжен структурой многогранного комплекса. В случае, когда f_i являются монотонными, можно детальнее охарактеризовать структуру этого комплекса.

Теорема 2. Пусть f_1, f_2, \dots, f_p — неубывающие, $f_{p+1}, f_{p+2}, \dots, f_q$ — невозрастающие субмодулярные функции, $c_i \geq c'_i$ для $i=1, 2, \dots, p$, $c_j \leq c'_j$ для $j=p+1, p+2, \dots, q$ и $c_l = c'_l$ для $l=q+1, q+2, \dots, n$. Тогда если $y \in L(c_1, c_2, \dots, c_n)$ и $y' \in L(c'_1, c'_2, \dots, c'_n)$, то $y \vee y' \in L(c_1, c_2, \dots, c_n)$, $y \wedge y' \in L(c'_1, c'_2, \dots, c'_n)$ и для всех i , $i=1, 2, \dots, n$, имеет место равенство $f_i(y \vee y') + f_i(y \wedge y') = f_i(y) + f_i(y')$.

Два интервала $[x, y]$ и $[x', y']$ решетки L называются транспонированными, если $[x, y] = [b, a \vee b]y$ и $[x', y'] = [a \wedge b, a]$ для некоторых $a, b \in L$.

Транспонированные интервалы модулярной решетки изоморфны. Скажем, что интервалы $[x, y]$ и $[x', y']$ являются проективными (обозначение: $[x, y] \sim [x', y']$), если найдется конечная последовательность интервалов $[x, y], [x_1, y_1], \dots, [x_N, y_N], [x', y']$, в которой любые два соседних интервала — транспонированы.

Теорема 3. Любые максимальные цепи, соединяющие наименьший и наибольший элементы конечной модулярной решетки, имеют одинаковую длину. Если a_0, a_1, \dots, a_n и $b_0 = a_0, b_1, \dots, b_n = a_n$ — пара таких максимальных цепей, то существует перестановка σ индексов $1, 2, \dots, n$ такая, что $[a_{i-1}, a_i] \sim [b_{\sigma(i-1)}, b_{\sigma(i)}]$ для $i, i=1, 2, \dots, n$. Кроме того, если

рассматриваемая решетка является дистрибутивной, то перестановка σ однозначно определена.

Таким образом, $F = \{[a_{i-1}, a_i], i=1, 2, \dots, n\}$ – семейство интервалов максимальной цепи a_0, a_1, \dots, a_n конечной дистрибутивной решетки однозначно определено с точностью до проективности. На F можно ввести отношение порядка \leq : $[x, y] \leq [z, w]$, если для каждой максимальной цепи a_0, a_1, \dots, a_n найдутся p и q такие, что $p \leq q$, $[a_p, a_{p+1}] \sim [x, y]$ и $[a_q, a_{q+1}] \sim [z, w]$.

Пусть f — субмодулярная функция на дистрибутивной решетке K с 0 и 1, L – подрешетка решетки K с наименьшим элементом a и наибольшим – b , а $F = \{[a_i, a_{i+1}], i=1, 2, \dots, n-1\}$, где $a = a_1, a_2, \dots, a_n = b$ – произвольная максимальная цепь из a в b в подрешетке L . На каждом интервале F зададим функцию g_i , где $i=1, 2, \dots, n-1$, положив $g_i(x) = f(x) - f(a_i)$ для всех $x \in [a_i, a_{i+1}]$. Если $[0, a]$ и $[b, 1]$ в K не пусты, то положим $g_0(x) = f(x)$ для всех $x \in [0, a]$ и $g_n(x) = f(x) - f(b)$ для всех $x \in [b, 1]$. Аналогично определим функцию $g'_i(x) = f(x) - f(a'_i)$ для другой максимальной цепи $a = a'_1, a'_2, \dots, a'_n = b$ из a в b . Очевидно, что так определенные функции $g_i(x)$ и $g'_i(x)$ являются субмодулярными.

В силу теоремы 3 найдется определенная перестановка σ индексов $1, 2, \dots, n-1$ такая, что $[a_i, a_{i+1}] \sim [a'_{\sigma(i)}, a'_{\sigma(i+1)}]$ для всех i , $i=1, 2, \dots, n-1$. Пусть $h_i: [a_i, a_{i+1}] \rightarrow [a'_{\sigma(i)}, a'_{\sigma(i+1)}]$ – естественный изоморфизм, обусловленный проективностью интервалов максимальных цепей. Скажем, что определение «новой» субмодулярной функции $g_i(x)$ не зависит от выбора максимальной цепи из a в b в подрешетке L дистрибутивной решетки K (или выполняется условие (*)) если

$g_i(x) = f(x) - f(a_i) = f(h_i(x)) - f(a'_{\sigma(i)}) = g'_{\sigma(i)}(h_i(x))$ для всех $x \in [a_i, a_{i+1}]$, где $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Теорема 4. Пусть L – подрешетка конечной дистрибутивной решетки K , $f(x)$ – субмодулярная функция на K . Тогда для $f(x)$ – выполняется условие (*) в том и только в том случае, когда L является f – остовом решетки K .

Булевы интерпретации полученных теорем типа Жордана - Гельдера (теоремы 3 и 4) полезны при наличии эффективных алгоритмов решения задач комбинаторной оптимизации [2, 5–7].

Литература

1. Ревякин А. М. Полумодулярные функции и полиматроиды // Комбинатор. анализ. – М.: МГУ, 1983. – Вып. 6. – С. 99.
2. Recski A. Matroid theory and its applications in electric network theory and in statics. – Budapest: Akad. Kiado, 1989. – 531 с.
3. Oxley J.G. Matroid theory. – N.Y., Oxford University Press, – 2006. – 532 с.
4. Гретцер Г. Общая теория решеток. – М.: Мир, 1982. – 456 с.
5. Nakamura M. Boolean sublattices connected with minimization problem on matroids // Math. Program. – 1982. – V. 22, N 1. – P. 117–120.
6. Nakamura M., Iri M. Fine structures on matroid intersections and their applications // Int. Symp. Circuits and Syst. Proc., Tokyo, 1979. – New York, N. Y., s. a., 1979. – P. 996–999.
7. Iri M. Application of matroid theory to engineering systems problems. // Proceedings of the 6-th Conf. on Probability Theory, 1979. Bucuresti, 1981, p. 107–127.

ГРАЦИОЗНЫЕ РАЗМЕТКИ В MPLS СЕТЯХ

Семенюта М.Ф., Гришманов Д.Е.

marina_semenyuta@ukr.net

Льотна академія НАУ

Аннотация. Рассматриваются несколько графовых моделей на основе грациозных разметок, которые используются для решения оптимизационных задач в современных сетях передачи данных.

Abstract. Several graph models based on graceful labelings are considered, which are used to solve optimization problems in modern data transmission networks.

Выделим класс задач, которые образуют отдельное направление исследований в теории разметок. Пусть задан граф $G=(V, E)$, подмножества A, B множества целых чисел \mathbb{Z} или натуральных чисел \mathbb{N} и коммутативная бинарная операция $*$ на множестве B . Пусть каждая вершинная функция $f: V \rightarrow A$ индуцирует такую реберную функцию $f^*: E \rightarrow B$, что $f^*(uv) = f(u) * f(v)$ для каждого ребра $uv \in E(G)$, где в качестве бинарной операции $*$ могут выступать следующие операции: сложение, умножение, сложение по модулю, вычитание по абсолютной величине. Необходимо свести к минимуму наибольшее целое число, соответствующее любой вершине графа G , например $\alpha(V)$. Основным вопросом является соотношение между $\alpha(V)$ и $|E(G)|$. История возникновения вершинных разметок, принадлежащих описанному классу задач, связана с гипотезой Г. Рингеля. В 1963 году Г. Рингель предположил, что полный граф K_{2n+1} можно разложить на $2n+1$ подграфа, каждый из которых изоморфен данному дереву с n ребрами. Для ее решения А. Роса в 1966 году определил 4 типа разметок: ρ -, σ -, β -, и α -оценки. Для β -оценки большую популярность приобрел термин «грациозная разметка», введенный С. Голомбом в 1972 году. Обзор по теории разметок можно найти в ежегодно обновляемом электронном журнале «A dynamic survey of graph labeling» Д. Галлиана [1]. В данной работе изучаются вопросы организации эффективной одноадресной и многоадресной маршрутизации IP пакетов в MPLS сетях на основе построения грациозных разметок

остовных деревьев, имеющих топологию цепи и гусеницы. Если не существует особой необходимости применения специального протокола распределения меток при маршрутизации в MPLS сети, тогда метки могут быть неявно использованы специальной нумерацией узлов, которая, в свою очередь, облегчает создание уникальных меток для каналов между ними. В работе [2] в качестве специальной нумерации выступает грациозная разметка графа.

Сеть моделируем обычным графом $G=(V, E)$, взвешенным в некоторой метрике маршрутизации, на котором выполняется поиск остоного дерева (или дерева Штейнера). Исходными данными являются: множество маршрутизаторов – множество V сетевых узлов и множество каналов связи, использование которых возможно в заданной сети, – множество E ребер в графе G . Ребро характеризуется весом. Метрика, в которой определены веса ребер графа, отражает критерий эффективности для каждой отдельной задачи. Предполагается, что задана одна из общих метрик сети. Алгоритмы вычисления пути с одной метрикой, такой как задержка и подсчет переходов, широко используются в большинстве существующих IP-сетях. Задача состоит в разработке эффективного способа пересылки пакетов, способствующего улучшению показателей времени жизни пакета и повышению надежности работы сети. Под надежностью функционирования сети понимаем возможность быстрого устранения разрыва.

Хорошо известная теорема о маршрутизации с ограничениями заключается в том, что вычисление оптимальных маршрутов с ограничениями двух или более аддитивных и / или мультипликативных показателей является NP-полной [3]. Однако, методы поиска маршрутов с ограничениями ширины полосы пропускания и подсчета числа переходов намного проще [4] и используют алгоритм Беллмана-Форда или алгоритм Дейкстры. В данной работе исследуется вопрос пересылки пакетов в MPLS сети, при условии, что в алгоритме маршрутизации задействовано две метрики: минимальная задержка пакета и подсчет числа переходов.

Рассматривается сервис, предоставляемый сетевым уровнем, ориентированный на виртуальное соединение, т. е. весь путь от маршрутизатора-отправителя до маршрутизатора-получателя устанавливается до начала передачи каких-либо пакетов данных в MPLS сети. На основе полной топологической карты сети, моделируемой графом $G=(V, E)$, вычисляется остовное дерево минимального веса. Для этой цели может быть применен протокол OSPF, определяющий маршрут наименьшей стоимости в заданной метрике – минимальная задержка. Далее в действие вступает алгоритм грациозной разметки, назначающий маршрутизаторам метки, которые, в свою очередь, порождают метки каналов связи. Метки маршрутизаторов применяются для коммутации. Каждый маршрутизатор LSR содержит таблицу коммутации меток, которая ставит в соответствие паре «входной интерфейс, входная метка» тройку – «класс эквивалентности пересылки FEC, выходной интерфейс, выходная метка». Входной и выходной интерфейсы LSR, при грациозной разметке, получают метки, равные меткам соответствующих каналов связи, а выходная метка совпадает с меткой маршрутизатора, на который пакет направляется.

Более детально остановимся на многоадресной рассылке, которая осуществляется членам некоторой группы. Предположим, что заданная сеть G состоит из k автономных подсетей AN_1, AN_2, \dots, AN_k порядка n_1, n_2, \dots, n_k , соответственно, каждая из которых имеет топологию гусеницы. Рассмотрим вершину S (источник) в AN_1 . Топология сети $G=AN_1 \cup AN_2 \cup \dots \cup AN_k$ может не является гусеницей с вершиной S . В этом случае, невозможно гарантировать, чтобы метка исходного узла была наименьшей. Поэтому узлы G обозначаются следующим образом: вершинам AN_i ставятся в соответствие метки $\{1, 2, \dots, n_i\}$ для $i=1, 2, \dots, k$; чтобы гарантировать уникальность меток, вводится индекс i для подсети AN_i . Таким образом, ребру $xy \in E(AN_i)$ ставится в соответствие метка $f(x, y) = \{ij\}$, где $j = |f(x) - f(y)|$.

При использовании протокола PIM-SM, важной проблемой является концепция наличия точки рандеву (RP). Для PIM-SM

нужно, по крайней мере, одна общая точка (маршрутизатор), которая сохраняет информацию о группах и источниках. Сначала приемникам не нужно знать местоположение источника, чтобы функционировать, поскольку адрес RP распределяется по всему домену. Когда получатель хочет присоединиться к группе AN_i , он отправляет IGMP сообщение ее членам со своего первого маршрутизатора, а он, в свою очередь, в RP. Аналогично, когда источник хочет начать передачу в группу, его маршрутизатор DR (Designated Route) инкапсулирует и перенаправляет многоадресные данные в RP. Так как все эти функции имеют место на магистральном пути остова гусеницы, то важным является выбор или размещение точек RP для каждой подсети AN_i . Проблема по ряду других критериев надежности, связности и т. д., представляет собой сложную задачу оптимизации комбинаторного графа. Однако, поскольку топология многоадресного дерева – «гусеница», можно выбрать в качестве RP один из центроидов магистрали гусеницы. Таким образом, будет минимизировано среднее расстояние потоков данных по протоколу PIM-SM.

Следующий актуальный вопрос – это присоединение или удаление членов группы. Его решение возможно с помощью алгоритма перенумерации вершин грациозной гусеницы. Пусть остова гусеница T_n порядка n имеет грациозную разметку f . Введем новую вершинную разметку f^* для каждой вершины $x_i \in V(T_n)$, $i=1, 2, \dots, n$. Предположим, что вершина x_{n+1} соответствует новому члену группы. Обозначим $N(x_i)$ – множество смежности вершины x_i . Добавление ребра $x_b x_{n+1}$ приводит к гусенице $T_{n+1} = T_n + x_b x_{n+1}$, где x_b – вершина магистрального пути.

Вершинную разметку f^* зададим следующим образом:

- 1) $f^*(x_{n+1}) = \max \{f(x_j)\} + 1$, если $[n/2] + 1 \leq f(x_i) \leq n$ и $f^*(x_{n+1}) = \max \{f(x_j)\}$, если $1 \leq f(x_i) \leq [n/2]$, где $x_j \in N(x_b)$;
- 2) $f^*(x_i) = f(x_i) + 1$, если $f(x_i) \geq f^*(x_{n+1})$;
- 3) $f^*(x_i) = f(x_i)$, если $f(x_i) < f^*(x_{n+1})$.

Вершинная разметка f^* представляет собой биекцию из множества вершин дерева T_{n+1} в множество чисел $1, 2, \dots, n, n+1$

и порождает реберную разметку, удовлетворяющую условию грациозности. Аналогичным образом действуем при удалении члена группы.

Преимущество использования этой разметки заключается в проведении простых операций, и нет необходимости использовать достаточно сложные таймеры, как в протоколе IGMPv3.

Література

1. Gallian J. A. A dynamic survey of graph labeling. // The electronic journal of combinatorics. – 2017. – DS6, 415 p.

2. Arkut I.C., Arkut R. C., Chani N. Graceful label numbering in optical MPLS networks. // Proceedings of the SPIE. – 2000. – V. 423, P. 1-8.

3. Wang Z., Crowcroft J. Quality of service routing for supporting multimedia applications // IEEE journal on selected areas in communications. – 1996. – V. 14, No.7, – P. 1228-1234.

4. Томас, Том М. П. Структура и реализация сетей на основе протокола OSPF, 2-е изд.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2004. — 816с.

1-ВЕРШИННА БІМАГІЧНА ВЕРШИННА РОЗМІТКА ОКРЕМИХ ВИДІВ БІ-РЕГУЛЯРНИХ ГРАФІВ

Семенюта М.Ф., Неділько С.М., Неділько В.М.

marina_semenyuta@ukr.net

Льотна академія НАУ

Аннотация. Доказано, что последовательность би-регулярных графов $K_{n(ij)=((K_{n-1}-M)+K_1)-(u_n u_i)-(u_n u_j)}$ допускает 1-вершинную бимагическую вершинную разметку, где u_i, u_j – любая пара несмежных вершин в графе $K_{n-1}-M$, u_n – вершина K_1 , M – совершенное паросочетание полного графа K_{n-1} . Получено частное решение задачи существования 1-вершинной бимагической вершинной разметки трехдольных графов $K_{n,n,m}, K_{n,m,n}, K_{m,n,n}$.

Abstract. It is proved that the sequence of bi-regular graphs $K_{n(ij)=((K_{n-1}-M)+K_1)-(u_n u_i)-(u_n u_j)}$ admits a 1-vertex bimagic vertex labeling, where u_i, u_j is any pair of nonadjacent vertices in the graph $K_{n-1}-M$, u_n is the vertex K_1 , and M is a perfect matching of the complete graph K_{n-1} . A partial solution is obtained for

the problem of existence of a 1-vertex bimagic vertex labeling of tripartite graphs $K_{n,n,m}$, $K_{n,m,n}$, $K_{m,n,n}$.

В даній роботі мова йде про вершинні розмітки, які є комбінацією магічної і дистанційної розміток. Продовжено розв'язування задачі існування 1-вершинної бімагічної вершинної розмітки для бі-регулярних графів, розпочате в роботах [1, 2].

Розглядаються неорієнтовані скінченні графи, які не містять петель та кратних ребер. Через $N(u)$ позначимо множину суміжності вершини $u \in V(G)$, а через $\deg(u)$ – степінь вершини u графа $G=(V, E)$. Граф $G=(V_1 \cup V_2, E)$ вважають бі-регулярним, якщо вершини множини V_i мають однаковий степінь r_i , де $i=1, 2$ і $r_1 \neq r_2$. Вагу $w(u)$ (або $w_f(u)$) вершини u при розмітці f визначимо як суму міток вершин суміжних з u , тобто $w(u) = \sum_{v \in N(u)} f(v)$, де кожна вершина $v \in V(G)$.

Бієктивна розмітка $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ графа $G=(V, E)$ порядку n називається *1-вершинною бімагічною вершинною*, якщо існують такі дві сталі k_1, k_2 , що для кожної вершини $u \in V(G)$ $\sum_{v \in N(u)} f(v) = k_1$ або $\sum_{v \in N(u)} f(v) = k_2$, де $k_1 \neq k_2$ [1]. Граф G , який допускає таку розмітку, називають *1-вершинним бімагічним вершинним графом*. Якщо множина міток вершин складається з чисел $1, 3, \dots, 2n-1$ або $0, 2, \dots, 2(n-1)$, то розмітку f називають *непарною 1-вершинною бімагічною вершинною* або *парною 1-вершинною бімагічною вершинною*, відповідно.

Операцію видалення ребра (uv) в графі G будемо позначати $G-(uv)$. Нехай n – непарне число, $n \geq 5$. Розглянемо графи виду: $((K_{n-1}-M)+K_1)-(u_n u_i)-(u_n u_j)$, де u_i, u_j – будь-яка пара несуміжних вершин у графі $K_{n-1}-M$, M – досконале паросполучення повного графа K_{n-1} , u_n – вершина K_1 . Будь-який граф із цієї послідовності позначатимемо $K_{n(ij)}$. Приклад графа $K_{7(56)}$ наведено на рисунку 1.

Теорема 1. Для кожного графа $K_{n(ij)}$ існує 1-вершинна бімагічна вершинна розмітка з магічними сталими $n(n-3)/2$ і $n(n-1)/2$, де n – непарне число, $n \geq 5$.

Доведення. Розглянемо граф $K_{n(ij)} = ((K_{n-1}-M) + K_1) - (u_n u_i) - (u_n u_j)$, де n – непарне число, $n \geq 5$. Позначимо через $V(K_{n(ij)}) = \{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n\}$, множину вершин цього графа, де $V(K_{n-1}) = \{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\}$, $V(K_1) = \{u_n\}$.

Поставимо у відповідність вершинам графа $K_{n-1}-M$ натуральні числа $1, 2, \dots, n-1$ таким чином, що кожна пара несуміжних вершин одержує мітки s і $n-s$, де s одне з чисел $1, 2, \dots, n-1$. Тоді мітка вершини u_n дорівнює n .

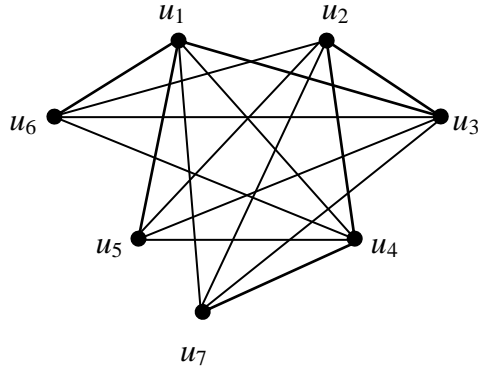


Рис.1. Граф $K_{7(56)}$

Це призводить до того, що граф $K_{n-1}-M$ буде дистанційним магічним, оскільки вага кожної вершини дорівнює $n(n-3)/2$. Знайдемо ваги вершин графа $K_{n(ij)}$:

$$w(u_n) = w(u_i) = w(u_j) = n(n-3)/2; \quad w(u_k) = n(n-1)/2,$$

для будь-якого $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $k \neq i$, $k \neq j$.

Отже, кожен граф виду $K_{n(ij)}$ є 1-вершинним бімагічним вершинним графом із магічними сталими $n(n-3)/2$ і $n(n-1)/2$.

Теорему доведено.

Наслідок. Кожен граф виду $K_{n(ij)}$ є непарним і парним 1-вершинним бімагічним вершинним, де n – непарне число, $n \geq 5$.

Доведення. Розглянемо 1-вершинну бімагічну вершинну розмітку f графа $K_{n(ij)}$, запропоновану в теоремі 1. Задамо нові бімагічні вершинні розмітки φ і g графа $K_{n(ij)}$ таким чином, що $\varphi(u_l) = 2f(u_l) - 1$, $g(u_l) = 2(f(u_l) - 1)$ для кожної вершини $u_l \in V(K_{n(ij)})$, де $l = 1, 2, \dots, n$. В цьому випадку кожна пара несуміжних вершин в $K_{n-1}-M$ одержує мітки s і $2n-1-s$ при розмітці φ та s і $2(n-1)-s$ при розмітці g . Для вершини u_n залишаються наступні

значення: $\varphi(u_n)=2n-1$, $g(u_n)=2(n-1)$. Для ваг вершин $K_{n(ij)}$ одержимо:

$$w_{\varphi}(u_n) = n^2 - 4n + 2; \quad w_{\varphi}(u_i) = w_{\varphi}(u_j) = n^2 - 4n + 2;$$

$$w_{\varphi}(u_k) = n^2 - 2n + 1, \quad w_g(u_n) = n^2 - 5n + 4;$$

$$w_g(u_i) = w_g(u_j) = n^2 - 5n + 4; \quad w_g(u_k) = n^2 - 3n + 1,$$

для будь-якого $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $k \neq i, k \neq j$.

Отже, кожен граф виду $K_{n(ij)}$ є непарним і парним 1-вершинним бімагічним вершинним з магічними сталими $n^2 - 4n + 2$, $n^2 - 2n + 1$ та $n^2 - 5n + 4$, $n^2 - 3n + 1$, відповідно.

Наслідок доведено.

З наслідку випливає, що 1-вершинна бімагічна вершинна, непарна і парна 1-вершинні бімагічні вершинні розмітки попарно еквівалентні на $K_{n(ij)}$.

В [1] доведено існування 1-вершинної бімагічної вершинної розмітки для повного двочасткового графа, а також знайдено умови, за яких повний симетричний мультичастковий граф є 1-вершинним бімагічним вершинним. Приступимо до розв'язання задачі існування бімагічної розмітки для інших класів мультичасткових графів. Розглянемо трьохчасткові графи виду: $K_{n,n,m}$, $K_{n,m,n}$, $K_{m,n,n}$ при $m \neq n$. Вони є представниками класу бі-регулярних графів.

Теорема 2. Кожен граф $K_{n,n,m}$, $K_{n,m,n}$, $K_{m,n,n}$ є 1-вершинним бімагічним вершинним при парному n .

Доведення. Якщо n – парне і $m=n$, то отримуємо 1-вершинний бімагічний вершинний граф $K_{n,n,n}$ [1].

Розглянемо граф $K_{n,n,m}=(V, E)$ з $V=V_1 \cup V_2 \cup V_3$, і кожна множина $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, $V_3 = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ складається з попарно несуміжних вершин. Нехай $n=2k$ і $m \neq n$. Задамо вершинну розмітку f графа $K_{n,n,m}$ наступним чином:

$$f(x_i) = 2i - 1, \quad f(y_i) = 2i, \quad \text{якщо } 1 \leq i \leq k,$$

$$f(x_{k+1+j}) = 4k - 2j, \quad \text{якщо } 0 \leq j \leq k - 1,$$

$$f(y_{k+1+j}) = 4k - (2j + 1), \quad \text{якщо } 0 \leq j \leq k - 1,$$

$$f(z_s) \in \{4k+1, 4k+2, \dots, 4k+m\}, \text{ де } 1 \leq s \leq m.$$

Функція f є бієкцією з множини V в множину чисел $\{1, 2, \dots, 2n+m\}$.

Для ваг вершин одержимо наступні значення:

$$w(x_i) = w(y_i) = k_1 = 4k^2 + k + k_1 - \frac{k_2}{2}, \quad w(z_s) = k_2 = 8k^2 + 2k.$$

При $k_1=k_2$ умова бімагічності порушується. Але тоді повинна виконуватися рівність $3n(2n+1) = (m+2n)(m+2n+1)$. Це можливо лише при $m=1$, $n=2$. Отже, вершинна розмітка $f \in 1$ -вершинною бімагічною вершинною для графа $K_{n,n,m}$ при $m \neq 1$ і $n \neq 2$. Задамо іншу вершинну розмітку g на $K_{2,2,1}$ наступним чином: $g(x_1)=1$, $g(x_2)=5$, $g(y_1)=2$, $g(y_2)=4$, $g(z)=3$, g задовольняє умові бімагічності.

Таким чином, граф $K_{n,n,m}$ є 1-вершинним бімагічним вершинним при парному n . На основі подібних міркувань робимо аналогічний висновок для графів $K_{n,m,n}$, $K_{m,n,n}$.

Теорему доведено.

Література

1. Baskar Babujee J., Babitha S. On 1-vertex bimagic vertex labeling. *Tamkang journal of mathematics*. 2014. Vol.45, N.3. P. 259-273.
2. Семенюта М.Ф. Про (a, d) -дистанційну антимагічну та 1-вершинну бімагічну вершинну розмітку певних типів графів. *Кібернетика і системний аналіз*. 2018. Т. 54, №2. С. 134-141.

ПРИКЛАДИ ПРАКТИЧНИХ РЕАЛІЗАЦІЙ МАГІЧНИХ І АНТИМАГІЧНИХ ТИПІВ РОЗМІТОК

Семенюта М. Ф., Шульгін В. А.

marina_semenyuta@ukr.net, vashulgin@ukr.net

Кіровоградська льотна академія НАУ

Аннотація. Рассмотрено два примера применения разметок, относящихся к магическому и антимагическому типам.

Abstract. Two examples of application of labelings related to magic and antimagic types are considered.

За 60 років існування теорії розміток, інтерес до цього напрямку досліджень не зменшується. За типами розмітки можна поділити на граціозні, гармонійні, магічні, антимагічні. Кожен з типів включає кілька підтипів. Крім цього, в сьомому розділі огляду «A dynamic survey of graph labeling» Д. Гальяно [1] представлено ще 28 розміток, що не відносяться до цієї класифікації. Тому спектр їх застосувань є досить широким. В даній роботі зупинимося на двох прикладах графових моделей на основі розміток.

Вершинно-магічну тотальну розмітку Баудро, Хартнелл, Шмайссер і Уайтлі у 2004 році застосували для обрання оптимальної стратегії в грі на двох гравців, що відбувається на заданому графі $G=(V, E)$. Нехай множина $\{1, 2, \dots, |V|+|E|\}$ являє собою множину міток, які можна використати не більше одного разу. Кожній вершині і кожному ребру графа G ставиться у відповідність не більше однієї мітки. Гравці по черзі призначають невикористану мітку з $\{1, 2, \dots, |V|+|E|\}$ для незадіяних вершини або ребра. Для заданої вершини x , нехай $S(x)$ – множина, що складається з вершини x і всіх ребер, інцидентних x . Якщо не всім елементам з $S(x)$ були присвоєні мітки, то суму відомих міток називають частковою вагою x . Після того, як для всіх елементів з $S(x)$ визначені мітки, за вагу вершини x приймається число k , що дорівнює сумі відповідних міток, і ця сума повинна бути сталою для кожної вершини графа G . Число k називають магічною сталою. В даній грі це число дорівнює вазі тієї вершини x , для якої знайдені всі мітки з $S(x)$ першими. Наприклад, нехай G є ланцюгом порядку 3, тоді всі мітки належать множині $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Якщо перший гравець призначив мітку 1 ребру, другий гравець помітив міткою 5 кінцеву вершину, інцидентну цьому ребру, тоді магічна стала $k=6$. Якщо перший гравець далі позначає міткою 2 вершину степеня 2, то другий повинен призначити мітку 3 ребру. Тоді надалі перший гравець грати не може, так як остання мітка 4 для кінцевої вершини дасть вагу 7, що неможливо. Отже, гравець 2 виграв в цьому випадку. Таким

чином, гра закінчиться, перш ніж всі вершини та ребра одержать мітки. Для багатьох графів неможливо знайти взаємне відображення множини натуральних чисел $\{1, 2, \dots, |V|+|E|\}$ на множину $V \cup E$, з властивістю, що для кожної вершини вага є сталою k . Якщо така розмітка існує, то її називають вершинно-магічною тотальною розміткою. В роботі «A game based on vertex-magic total labelings» Баудро, Хартнелла, Шмайссера, Уайтлі можна знайти більш детальну інформацію з питання використання вершинно-магічної тотальної розмітки у грі на заданому графі.

Дистанційну магічну розмітку та її різновиди використовують при математичному моделюванні в задачах оптимального планування, зокрема, Д. Фрончек та Т. Коварова планування неповних турнірів з різними властивостями здійснюють за допомогою дистанційної магічної та врівноваженої дистанційної магічної розміток. Потреба в проведенні такого типу турнірів виникає в умовах браку часу або коштів. Розглянемо задачу планування чесного неповного кругового турніру з наступними властивостями: кожна команда грає з однаковим числом противників; складність турніру для кожної команди імітує складність повного кругового турніру. Виконаємо ранжування n команд від 1 до n , в залежності від потужності кожної команди, скориставшись даними їх гри в минулому році. Таким чином, визначимо силу i -ої команди в турнірі з n противниками, як $s_n(i)=n+1-i$. Загальна сила противників i -ої команди в повному круговому турнірі буде дорівнювати $S_{n,n-1}^*(i)=(n+1)(n-2)/2+i$. Ці загальні сили утворюють зростаючу арифметичну прогресію. Чесний неповний круговий турнір n команд з g турами $FIT(n, g)$ – це турнір, в якому кожна команда грає з g командами і загальна сила противників для i -ої команди дорівнює $S_{n,g}^*(i)=(n+1)(n-2)/2+i-c$ для кожного i та деякої сталої c . Позначимо $EIT(n, n-g-1)$ доповнення $FIT(n, g)$ до повного кругового турніру. $FIT(n, g)$ існує тоді і тільки тоді, коли існує $EIT(n, n-g-1)$. Відомо, що задача знаходження $EIT(n, n-g-1)=EIT(n, r)$ еквівалентна задачі знаходження дистанційної магічної розмітки r -регулярного графа G на n

вершинах, а для $FIT(n, g) = FIT(n, n-r-1)$ – дистанційної антимагічної розмітки графа доповнення \bar{G} .

Задача планування врівноважених неповних кругових турнірів еквівалентна задачі побудови регулярного врівноваженого дистанційного d -антимагічного графа. В [3] сформульовано відкриту проблему, яка полягає в наступному: з'ясувати для якої пари (n, g) існує врівноважений турнір $HIT(n, g)$, тобто g -регулярний врівноважений дистанційний d -антимагічний граф порядку n .

Література

1. Gallian J. A. A dynamic survey of graph labeling. // The electronic journal of combinatorics. – 2017. – DS6, 415 p.
2. Burzio M., Ferrarese G. The subdivision graph of a graceful tree is a graceful tree. // Discrete Math. – 1998. – V. 181, P. 275–281.
3. Froncek D. Handicap distance antimagic graphs and incomplete tournaments / D. Froncek // AKCE Int. J. Graphs Comb. – 2013. – V.10, No 2. – 119-127 p.

МІНІМІЗАЦІЯ 5-РОЗРЯДНИХ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ КОМБІНАТОРНИМ МЕТОДОМ

Соломко М.Т.
doctrinas@ukr.net

НУ водного господарства та природокористування

Анотація. Розглянуто нову процедуру алгебри логіки – супер-склеювання змінних, яка проводиться за наявності у структурі таблиці істинності повної бінарної комбінаторної системи з повторенням або неповної бінарної комбінаторної системи з повторенням. Ефективність алгебричної операції супер-склеювання змінних суттєво спрощує алгоритм мінімізації булевих функцій, що дозволяє здійснювати мінімізацію функцій з числом змінних до 10.

Abstract. The new procedure of logic algebra – super-sticking of variables, which is carried out in the presence of a truth table in complete binary combinatorial system with a repetition or incomplete of the system considered.

The efficiency of the algebraic operation of super-sticking variables greatly simplifies the algorithm for minimizing boolean functions, which allows manual minimization of the functions with a number of variables up to 10.

1. Вступ

Мінімізація булевих функцій популярна у різних областях цифрових технологій, таких як дизайн PLA, вбудований самотест (BIST), проектування систем управління тощо. Проблема мінімізації ДНФ є однією з багатоекстремальних логіко-комбінаторних задач і зводиться до оптимального зменшення кількості логічних елементів вентильної схеми без втрати її функціональності. Слід зазначити, що у загальній постановці дана задача до тепер не вирішена, однак добре досліджена у класі диз'юнктивно-кон'юнктивних нормальних форм.

Недоліки відомих методів мінімізації булевих функцій пов'язані зі стрімким зростанням обсягу обчислень, наслідком чого є збільшення розрядності обчислювальних операцій, і, отже, збільшенням числа змінних логічної функції. Наприклад, карта Карно зазвичай важко піддається розпізнаванню при зростанні кількості змінних більше чотирьох-п'яти, тому цей метод недоцільно використовувати з більше ніж шістьма змінними. Незважаючи на більшу досконалість методу Квайна – Мак-Класкі порівняно з картами Карно, він також має обмежене практичне застосування з-за експоненціального зростання часу обчислення зі збільшенням кількості змінних.

Від результату мінімізації булевої функції залежить швидкодія обчислювального пристрою, його надійність та енергозбереження. Особливості комбінаторного методу мінімізації полягають у більшій інформативності процесу вирішення задачі порівняно з алгебричним способом мінімізації функції за рахунок табличної організації та впровадження апарату образного перетворення. Об'єктом вирішення задачі мінімізації булевої функції комбінаторним методом є блок – схема з повторенням, властивості якої, у свою чергу, дозволяють доповнити правила алгебри логіки новими правилами спрощення логічної функції. Алгоритм мінімізації булевої функції є однією з центральних та практично важливих

проблем, яка постає під час проектування обчислювальних пристроїв. У зв'язку з цим вивчення нових правил алгебри логіки, встановлення їх властивостей є актуальним для спрощення алгоритму мінімізації булевої функції без втрати її функціональності при збільшенні кількості змінних.

2. Бінарна комбінаторна система з повторенням

Якщо задана деяка множина A , то множина всіх її підмножин, що мають k елементів $M_k(A)$ і число N всіх k -елементних підмножин множини із n елементів, дорівнює

$$N(M_k(A)) = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$\text{Крім того має місце } \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n. \quad (1)$$

Оскільки C_n^k – число k -елементних підмножин множини з n елементів, то сума у лівій частині виразу (1) дорівнює числу всіх підмножин. За формулою (1) легко можна обчислити кількість всіх підмножин множини $A = \{a, b, c, d\}$:

$$N(M(A)) = C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4.$$

Зазначимо, що множина $A = \{a, b, c, d\}$, крім перерахунку своїх елементів, може визначати номери позицій, на яких знаходиться елемент a . Так, наприклад, a може означати першу, b – другу позицію множини $A = \{a, b, c, d\}$ і т. д. Підмножинами множини $A = \{a, b, c, d\}$ у такому випадку будуть підмножини, що містять елемент a на k позиціях, $k = 0, \dots, n$, де n – кількість позицій множини A . У загальному випадку елемент a може займати декілька позицій на множині A , і таким чином елемент a повторюється на множині A .

Нехай $\alpha = 1$, тоді позиції, на яких відсутній елемент a слід позначати нулями.

Приклад 1. Для множини $A = \{a, b, c, d\}$, що визначає номери позицій, прийемо $\alpha = 1$. Тоді підмножини множини A будуть мати такий вигляд:

$$\begin{array}{ll}
 (0,0,0,0); & (1,0,0,0); \\
 (0,0,0,1); & (1,0,0,1); \\
 (0,0,1,0); & (1,0,1,0); \\
 (0,0,1,1); & (1,0,1,1); \\
 (0,1,0,0); & (1,1,0,0); \\
 (0,1,0,1); & (1,1,0,1); \\
 (0,1,1,0); & (1,1,1,0); \\
 (0,1,1,1); & (1,1,1,1).
 \end{array} \quad (2)$$

Конфігурація (2) складає повну комбінаторну систему з повторенням елемента α , яку назовемо $2-(n,b)$ - design, де n – розрядність блоку системи, b – кількість блоків повної системи, що визначається за формулою $b = 2^n$, число 2 перед дужками означає бінарну структуру конфігурації (2). Наприклад, $2-(4,16)$ - design є повною бінарною комбінаторною системою з повторенням, що складається з 4-розрядних блоків, загальна кількість блоків – 16.

3. Алгебрична операція супер-склеювання змінних

Комбінаторні властивості блок – схеми з повторенням дозволяють доповнити правило алгебри логіки склеювання змінних [1] правилом супер-склеювання змінних.

Для 4-розрядної логічної функції правило супер-склеювання змінних має такий вигляд (рис. 1):

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & x \end{array} \right| = x; \quad \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & x & y \\ 1 & 0 & x & y \\ a & 1 & b & \end{array} \right| = xy; \quad \left| \begin{array}{cccc} 0 & x & y & z \\ 1 & x & y & z \end{array} \right| = xyz \cdot c$$

Рис. 1. Правила супер-склеювання змінних для 4-розрядної булевої функції: а – перше правило, б – друге правило, с – третє правило

Перше правило використовує $2-(3,8)$ -design, друге $2-(2,4)$ -

design, третє 2-(1,2)-design.

Процедура скорочення повної досконалої диз'юнктивної нормальної форми (ДДНФ) логічної функції дає одиницю. Наприклад, для 3 змінних:

$$\begin{aligned} & \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} + \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} + \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} + x_1 \overline{x_2} x_3 + x_1 x_2 \overline{x_3} + x_1 x_2 x_3 = \\ & = \overline{x_1} x_2 (\overline{x_3} + x_3) + \overline{x_1} x_2 (\overline{x_3} + x_3) + x_1 \overline{x_2} (\overline{x_3} + x_3) + x_1 \overline{x_2} (\overline{x_3} + x_3) = \\ & = \overline{x_1} \overline{x_2} + \overline{x_1} x_2 + x_1 \overline{x_2} + x_1 x_2 = \overline{x_1} (\overline{x_2} + x_2) + x_1 (\overline{x_2} + x_2) = \overline{x_1} + x_1 = 1. \end{aligned}$$

Оскільки повна ДДНФ однозначно визначає повну комбінаторну систему з повторенням 2-(n, b)-design, і навпаки, це дає підставу видаляти всі блоки повної комбінаторної системи з матриць, які демонструють правила супер-склеювання а - с. Правило с проявляє просте склеювання та є частковим випадком правил супер-склеювання а та b.

Правила супер-склеювання змінних можна представити для функцій п'ять змінних [2] і більше.

У загальному випадку конфігурація таблиці істинності крім підматриці 2-(n, b)-design, вміщує й підматриці 2-($n, x/b$)-design, де x – число блоків неповної комбінаторної системи з повторенням. Властивості 2-($n, x/b$)-design також встановлюють правила, що забезпечують ефективну мінімізацію булевих функцій [2].

4. Комбінаторний метод мінімізації булевих функцій

Поняття булевих функцій і ДНФ тісно пов'язані з багатьма поняттями комбінаторного аналізу, зокрема з поняттям покриття. Нехай $C = (X_1, \dots, X_n)$ – деяке сімейство підмножин множини X , і нехай $Y \subseteq X$. Тоді Y є покриттям для C , якщо для будь-якого X_i з C виконується умова $X_i \cap Y \neq \emptyset$. Покриття Y називається приведеним для C , якщо будь-яка його власна підмножина не є покриттям для C . Множина всіх приведених покриттів для C позначається через $P(C)$.

При використанні блок – схеми з повторенням (2) процес мінімізації у частині склеювання змінних зводиться до пошуку

блоків з однаковими змінними у відповідних розрядах, за виключенням однієї змінної. Враховуючи табличну організацію комбінаторного методу, це дає змогу підвищити ефективність пошуку мінімальної функції.

Мінімізація логічної функції комбінаторним методом здійснюється наступним чином. На першому кроці виявляють блоки (конституанти) зі змінними, для яких можлива операція супер-склеювання змінних. У випадку відсутності операції супер-склеювання, проводиться операція простого склеювання змінних. Наступним кроком здійснюють пошук наборів пар блоків (імплікант) з можливістю їх мінімізації заміщенням (склеюванням, поглинанням) змінних у цих парах. Отримані набори блоків знову мінімізують подібним способом, і т. д. – до отримання тупикової ДНФ (ТДНФ). У загальному випадку на прикінцевих кроках мінімізації можливим є застосування методу Блейка-Порецького. Серед множини ТДНФ містяться і мінімальні функції (МДНФ). Після мінімізації логічної функції проводиться верифікація мінімізованої функції, застосовуючи задану таблицю істинності.

Алгебричні перетворення комбінаторного методу мінімізації булевої функції доцільно замінити рівносильними перетвореннями за допомогою підматриць (графічних образів). Процедура склеювання за допомогою підматриць можна проілюструвати так:

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{x_1} \overline{x_2} + \overline{x_1} x_2 & = & \overline{x_1} (\overline{x_2} + x_2) & = & \overline{x_1}, \\ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rightarrow 0 \end{array} & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 \\ x_1 x_2 + \overline{x_1} x_2 + x_2 (x_1 + \overline{x_1}) & = & x_2, \\ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \rightarrow 1 \end{array} & \rightarrow & 1 & \rightarrow & 1 \end{array}$$

Застосовуючи графічний образ можна проілюструвати й інші алгебричні перетворення [1, 2].

Приклад 2. Мінімізувати логічну функцію $f(a,b,c,d) = (3,7,11,12,13,14,15)$ алгебричним методом.

3	0011	$a'b'cd$
7	0111	$a'bcd$
11	1011	$ab'cd$
12	1100	$abc'd'$
13	1101	$abc'd$
14	1110	$abcd'$
15	1111	$abcd$

$$\begin{aligned}
 f(a,b,c,d) &= (3,7,11,12,13,14,15) = \\
 &= a'b'cd + a'bcd + ab'cd + abc'd' + abc'd + abcd' + abcd = \\
 &= cd(a'b' + a'b + ab') + ab(c'd' + c'd + cd' + cd) = \\
 &= cd(a'[b' + b] + ab') + ab(c'[d' + d] + c[d' + d]) = \\
 &= cd(a'[1] + ab') + ab(c'[1] + c[1]) = ab + ab'cd + a'cd = \\
 &= ab + cd(ab' + a') = ab + cd(a + a')(a' + b') = ab + a'cd + b'cd = \\
 &= ab + cd(a' + b') = ab + cd
 \end{aligned}$$

Приклад 3. Мінімізувати логічну функцію $f(a,b,c,d) = (3,7,11,12,13,14,15)$ комбінаторним методом.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 12 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 14 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & & \end{vmatrix}$$

Мінімізована функція – $F = ab + cd$. Результат мінімізації комбінаторним методом (приклад 3) збігається з результатом мінімізації, отриманим за допомогою алгебричного методу (приклад 2). Мінімізація булевої функції прикладу 3 демонструє апаратну компактність комбінаторного методу та є простішою порівняно з мінімізацією логічної функції, представленої у прикладі 2.

5. Мінімізація 5-розрядних булевих функцій

Приклад 4. Мінімізувати логічну функцію $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ комбінаторним методом, яка задана наступною таблицею істинності (2,3,4,5,6,7,10,11,12,13,14,15,18,19,20,21,22,23,16,17,28,

29,30,31).

$$F = \begin{array}{c|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 11 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 12 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 14 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 15 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 18 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 19 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 20 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 21 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 22 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 23 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 26 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 27 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 28 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 29 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 30 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 31 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & & \end{array} \right] \begin{array}{c} \bullet \\ * \\ \bullet \\ \circ \\ \bullet \\ * \\ \bullet \\ \circ \end{array} \Bigg| = \begin{array}{cc} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \\ 1 & 1 & \end{array} \left[\begin{array}{c} \bullet \\ * \\ \circ \end{array} \right] \Bigg| = \begin{array}{cc} & 0 & 1 \\ 1 & & \end{array} \Bigg| = 1$$

Мінімізована функція - $F = x_3 + x_4$

Література

2. Riznyk V. Minimization of boolean functions by combinatorial method [Text] / V. Riznyk, M. Solomko // Technology audit and production reserves.- Vol 4/2 (36), 2017. – P. 49–64. <http://journals.uran.ua/tarp/article/view/108532> .

3. Riznyk V. Application of super-sticking algebraic operation of variables for boolean functions minimization by combinatorial method [Text] / V. Riznyk, M. Solomko // Technology audit and production reserves.- Vol 6/2 (38), 2017. P. 60 – 76. <http://journals.uran.ua/tarp/article/view/118336/112951>

ПРО ДВОЕТАПНУ ТРАНСПОРТНУ ЗАДАЧУ З ЗАДАНОЮ КІЛЬКІСТЮ ПРОМІЖНИХ ПУНКТІВ

Стецюк П.І., Трегубенко С.С.

stetsyukp@gmail.com, info-cvni@ukr.net

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України
Центральний науково-дослідний інститут Збройних Сил
України

Аннотация. Предложена задача булевого линейного программирования для нахождения оптимального плана транспортировки продукции от поставщиков к потребителям с использованием заданного количества промежуточных пунктов (хранилищ, складов) с ограничением на их пропускные способности. Сформулированы условия, при которых задача имеет решение. Если в задаче задействованы все промежуточные пункты, то она совпадает с классической двухэтапной задачей с ограничениями на пропускные способности промежуточных пунктов.

Abstract. The problem of Boolean linear programming is proposed for finding the optimal plan for transportation of products from suppliers to consumers using a given number of intermediate points (storages, warehouses) with constraints on their capacities. The conditions under which the problem has solution are formulated. If all intermediate points are used in the problem, then it coincides with the classical two-stage problem with constraints on the capacities of intermediate points.

Нехай в m пунктах постачання $A_1, \dots, A_m \in a_1, \dots, a_m$ одиниць продукції, яку потрібно перевезти до n споживачів B_1, \dots, B_n , задовольнивши їх потреби b_1, \dots, b_n . Для транспортування продукції від постачальників до споживачів можна задіяти l проміжних пунктів D_1, \dots, D_l з максимальними $d_1^{up}, \dots, d_l^{up}$ пропускними спроможностями, які для зручності будемо вважати впорядкованими по спаданню $d_1^{up} \geq d_2^{up} \geq \dots \geq d_l^{up}$. Потрібно знайти оптимальний план транспортування продукції, який використовує D ($1 < D < l$) проміжних пунктів, де c_{ik} – витрати на перевезення одиниці продукції від постачальника A_i до проміжного пункту D_k , а c_{kj} – витрати на перевезення одиниці продукції від проміжного пункту D_k до споживача B_j .

Нехай x_{ik} – кількість продукції, яка перевозиться від постачальника A_i до проміжного пункту D_k ; y_{kj} – кількість продукції, яка перевозиться від проміжного пункту D_k до споживача B_j ; z_k – булева змінна, яка дорівнює одиниці, якщо проміжний пункт D_k використовується, та дорівнює нулю в протилежному випадку. Знаходженню оптимального плану транспортування продукції від постачальників до споживачів, який використовує рівно D проміжних пунктів, відповідає наступна задача: знайти

$$f^* = \min_{x,y} \left\{ f(x,y) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^l c_{ik} x_{ik} + \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^n c_{kj} y_{kj} \right\}, \quad 1)$$

за обмежень

$$\sum_{k=1}^l x_{ik} = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad 2)$$

$$\sum_{k=1}^l y_{kj} = b_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad 3)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ik} - \sum_{j=1}^n y_{kj} = 0, \quad k = 1, \dots, l, \quad 4)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ik} \leq d_k^{up} z_k, \quad k = 1, \dots, l, \quad 5)$$

$$\sum_{k=1}^l z_k = D, \quad 6)$$

$$x_{ik} \geq 0, y_{kj} \geq 0, z_k = 0 \vee 1, \quad i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, l, j = 1, \dots, n. \quad 7)$$

Задача (1)–(7) умовимось називати двоетапною транспортною задачею з заданою кількістю проміжних пунктів. Вона є задачею булевого лінійного програмування, яка містить $(m+n+1) \times l$ змінних x_{ik} , y_{kj} , z_k та $m+n+2l+1$ обмежень. Цільова функція (1) задає сумарні витрати на транспортування продукції від постачальників до споживачів, через проміжні пункти. Обмеження (2) означають необхідність транспортування усієї продукції a_1, \dots, a_m із пунктів постачання

до проміжних пунктів, а обмеження (3) – що споживачам потрібно доставити необхідну продукцію b_1, \dots, b_n з проміжних пунктів. Обмеження (4) задають умови на те, щоб вся продукція, яка приходить від постачальників до кожного проміжного пункту, була обов'язково відправлена споживачам. Обмеження (6) означає, що задіяними повинні бути рівно D проміжних пунктів, а обмеження (5) задає для них верхні границі на пропускні спроможності.

Умови на сумісність системи лінійних рівностей та лінійних нерівностей (2)–(7), визначає наступне твердження.

Лема. Система обмежень (2)–(7) є несумісною, якщо виконується одна із таких умов: 1) $\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$,

$$2) \sum_{k=1}^D d_k^{up} < \sum_{j=1}^n b_j.$$

Лема дає можливість перевірити вхідні дані на предмет їх коректності для сформульованої двоетапної транспортної задачі з заданою кількістю проміжних пунктів. Якщо не виконується ні одна з умов леми, то тоді одночасно

виконуються умови $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ та $\sum_{k=1}^D d_k^{up} \geq \sum_{j=1}^n b_j$. В цьому випадку система (2)–(7) є сумісною, і можна переходити до розв'язання задачі (1)–(7).

Якщо в задачі (1)–(7) прибрати обмеження (5) та (6), то отримаємо класичну двоетапну транспортну задачу [1], опис якої на мові моделювання AMPL (A Mathematical Programming Language) наведено в [2]. Незначна модифікація цього коду дозволить використовувати для розв'язання задачі (1)–(7) сучасне програмне забезпечення для розв'язання задач цілочислового лінійного програмування. Цей спосіб розв'язання двоетапної транспортної задачі з заданою кількістю проміжних пунктів залежить від того, яка із відомих програм буде використовуватися для знаходження розв'язку задачі цілочислового лінійного програмування.

Якщо у задачі (1)–(7) використати $D=I$, то усі булеві змінні визначаються однозначно та дорівнюють одиниці. У цьому випадку отримуємо класичну двоетапну транспортну задачу з обмеженнями на пропускні здатності проміжних пунктів. Для її розв'язання можна застосовувати спеціалізовані алгоритми [1,3]. На відміну від спеціалізованих алгоритмів спосіб, який включає опис задачі на мові моделювання AMPL та використання сучасного програмного забезпечення для розв'язання задач лінійного програмування, є універсальним для знаходження оптимального розв'язку двоетапної транспортної задачі з обмеженнями на пропускні здатності проміжних пунктів. Його ефективність буде залежати тільки від того, яка із відомих програм вибрана для розв'язання відповідної задачі лінійного програмування.

Задача (1)–(7) є актуальною для агропідприємств при розподіленні та доставці вирощеної продукції для продажу або переробки на власних потужностях. В якості проміжних пунктів тут виступають власні та орендовані елеватори (зернохословища). Вона може знайти застосування для пошуку раціонального розташування заданої кількості складів з урахуванням визначеного положення отримувачів матеріально-технічних засобів на території, де вони виконують свої завдання [4].

Література

1. Карагодова О.О. Кігель В.Р., Рожок В.Д. Дослідження операцій: Навч. посіб. – К.: Центр учбової літератури, 2007. – 256 с.
2. Стецюк П.І., Мазютинець Г.В., Мілешовський Б.І. AMPL-реалізація двоетапної транспортної задачі // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: Тези доповідей XV Міжнародної науково-практичної конференції MPZIS–2017, 22-24 листопада 2017 р. – Д.: ДНУ, 2017. – С. 186–191.
3. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування: Навч. посіб. – К.: КНЕУ, 2003. – 452 с.
4. Романченко І.С., Хазанович О.І., Трегубенко С.С.

ПРО ЗНАХОДЖЕННЯ ФОРМУЛ КОМБІНАТОРНИХ ЧИСЕЛ

Тимофієва Н. К.

TymNad@gmail.com

*Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних
технологій та систем НАН та МОН України*

Abstract. Finding of formulas combinatorial numbers is conducted with the use of arithmetic sequences, a value of constituents of which is polygonal and figured numbers. On the example of generation of sets of combination without repetitions and partitioning n -element set into subsets it is shown, that these sequences are formed at finding of number of combinatorial configurations specified sets.

Вступ. Комбінаторні числа (числа Фібоначчі, кількість перестановок у їхній множині $n!$, біноміальні коефіцієнти тощо) виникають при знаходженні кількості комбінаторних конфігурацій у комбінаторних множинах. Знаходження їхніх формул, як правило, проводиться з використанням арифметичних послідовностей, значення складових яких є многокутні та фігурні числа.

Арифметичні послідовності. Розглянемо перші n чисел натурального ряду. Утворення в ньому наступних чисел проводиться додаванням одиниці до попереднього. Аналогічно можна скласти послідовності, які починаються з одиниці, а наступні їхні елементи утворюються додаванням до попереднього числа по 2, по 3, по 4 і т.д. Одержимо такі послідовності

$$\begin{aligned} &1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, j; \\ &1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots, 2j - 1; \\ &1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots, 3j - 2 \\ &1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, \dots, 4j - 3 \\ &\dots \end{aligned} \tag{1}$$

Знаходячи суму одного, двох, трьох і т.д. чисел першої (другої, третьої) послідовностей (1), отримаємо послідовності многокутних чисел:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,..., $j(j+1)/2$ – трикутні числа,

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49,..., j^2 – квадратні числа,

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70,..., $j(3j-1)/2$ – п'ятикутні числа,

де $j \in \{1, 2, 3, \dots, p\}$, p – кількість елементів у заданій послідовності.

Фігурними називають як многокутні числа так і коефіцієнти членів степенів бінома $(a+b)^n$. Із його коефіцієнтів складається арифметичний трикутник (трикутник Паскаля)

				1					
				1		1			
			1		2		1		
		1		3		3		1	
	1		4		6		4		1
1		5		10		10		5	1

По косих лініях цього трикутника знаходяться коефіцієнти перших, (других, третіх і т.д.) членів степенів $(a+b)^n$. Подамо їх у вигляді такої таблиці.

1	1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...	
1	3	6	10	15	...		
1	4	10	20	...			
1	5	15					

Перший рядок та перший стовпець цієї таблиці становлять 1, 1, 1, 1, 1, 1,..... Другий рядок та другий стовпець – числа

натурального ряду: 1, 2, 3, 4, 5, 6, Третій рядок та третій стовпець містить трикутні числа 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... , j -й елемент якого є сума j перших чисел натурального ряду. Четвертий рядок та четвертий стовпець – числа 1, 4, 10, 20, 35, 56, ..., j -й елемент якого є сума j перших значень трикутних чисел. Ці числа називають тетраедричними. П'ятий рядок та п'ятий стовпець містять числа, які називають п'ятикутними: 1, 5, 15, 35, 70, 126, ... j -й елемент яких є сума перших значень тетраедричних чисел, і т. д. Будь-який елемент таблиці, крім чисел натурального ряду, є сума двох чисел, що знаходяться в тому ж рядку вліво і в тому ж стовпці над пошукованим числом.

Якщо записати рядки арифметичного трикутника один під другим і скласти числа цієї таблиці по діагоналі (зліва направо, знизу вверху), то отримаємо послідовність чисел Фібоначчі 1, 1, $1+1=2$; $1+2=3$; $1+3+1=5$; $1+4+3=8$; $1+5+6+1=13$.

Побудова арифметичних послідовностей при генеруванні множини комбінаторних конфігурацій. Описані вище послідовності утворюються при знаходженні кількості комбінаторних конфігурацій w у їхній множині W за правилами їхнього генерування рекурентно-періодичним методом [1], за якими утворюються: а) інтервал нульового рангу, б) обмежувальна комбінаторна конфігурація (перша в інтервалі нульового рангу), в) інтервал σ -го рангу.

Оскільки інтервал σ -го рангу складається з інтервалів $(\sigma-1)$ -го рангу, а інтервал 1-го рангу – з інтервалів нульового рангу, нескладно, знаючи правила їхнього впорядкування, визначати кількість комбінаторних конфігурацій у їхній множині. За певними правилами, які різні для різних типів комбінаторних конфігурацій, утворюємо арифметичні послідовності, кожне значення якої задає кількість w в інтервалах σ -го рангу. Формулу комбінаторного числа (кількість w у множині W) подамо σ -значною сумою

$$\sum_{j_{\sigma}=1}^{H_{\sigma}} \left(\sum_{j_{\sigma-1}=1}^{H_{\sigma-1}} \left(\dots \left(\sum_{j_2=1}^{H_2} \left(\sum_{j_1=1}^{H_1} (h) \right) \right) \right) \right), \text{ де } H_t - \text{кількість інтервалів } \sigma\text{-го}$$

рангу, $t \in \{1, \dots, \sigma\}$, $\sigma \in \{2, \dots, n\}$, h – цілі додатні числа і задають кількість комбінаторних конфігурацій в інтервалі нульового рангу. Із цього виразу видно, що для визначення формули комбінаторного числа знаходяться суми арифметичних послідовностей.

Для знаходження формули $P_\eta(n)$, яка визначає кількість розбиттів натурального числа у підмножині $W_\eta \in W$ сформулюємо таку теорему.

Теорема 1. Існує три основні послідовності

- 1) $(1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \dots, J)$,
- 2) $(2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, \dots, J_1)$,
- 3) $(1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, \dots, J_2)$,

різноманітні комбінації з яких утворюють інші послідовності, сума членів яких дорівнює комбінаторному числу $P_\eta(n)$,

$\eta > 3$. Члени J, J_1, J_2 залежать від класу лишків n по mod 6.

Розглянемо множину сполучень без повторень та множину розбиттів n -елементної множини на підмножини. Упорядкуємо ці множини за заданими правилами з використанням рекурентно-періодичного методу підмножинами ізоморфних сполучень W_η , починаючи з $\eta = 1$ і закінчуючи $\eta = n$, де η – кількість елементів, які вибираються з базової множини $A = (a_1, \dots, a_n)$.

Теорема 2. Значення послідовності, які задають кількість сполучень без повторень w у їхній множині W , що упорядкована з використанням рекурентно-періодичного методу генерування комбінаторних конфігурацій, утворюють арифметичний трикутник та є фігурними числами.

Теорема 3. Значення послідовностей, які задають кількість розбиття n -елементної множини на підмножини у підмножині W_η для $\eta = 2$, що упорядкована з використанням рекурентно-періодичного методу генерування комбінаторних конфігурацій, утворюють арифметичний трикутник та є фігурними числами.

Висновок. Отже, при підрахунку кількості комбінаторних конфігурацій утворюються арифметичні послідовності, які є багатокутними та фігурними числами. Суми цих послідовностей задають формули комбінаторних чисел.

Література

Тимофієва Н.К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації. Автореф. дис... докт. техн. наук / Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ. – 2007. – 32 с.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ В СЕГМЕНТІ СОЦІАЛЬНОЇ МЕРЕЖІ

Улічев О.С., Мелешко Є.В.

askin79@gmail.com, elismeshko@gmail.com

Центральноукраїнський національний технічний університет

Анотація. Одним з підходів, в дослідженні соціальних мереж, є моделювання. Зокрема для дослідження можуть використовуватись програмні моделі, в яких моделюють структуру частини соціальної мережі та інформаційні процеси, що протікають у часі. Програмна модель базується на певній математичній моделі та системі допущень і спрощень. В дослідженні запропонована математична модель як основа для реалізації програмної моделі. Ідея дослідження полягає у виявленні впливу структури мережі і поведінки активних вузлів.

Ідея моделювання соціальної мережі (сегменту мережі) полягає в дослідженні впливу різноманітних факторів на швидкість розповсюдження інформації та динаміки інформаційного впливу. Використовуючи модель планується досліджувати наступні фактори:

- структуру сегменту мережі, що моделюється;
- щільності зв'язків в сегменті мережі;
- початкове положення вузла – розповсюджувача інформації;
- поведінкові стратегії, які застосовує активний вузол.

Створення моделі можна розбити на декілька етапів:

1. Вибір підходу до моделювання структури.
2. Представлення і формальний опис вузла.
3. Математична формалізація інформаційної взаємодії, математичний опис поведінкових стратегій.

Загалом структура мережі, з точки зору інформаційних зв'язків та інформаційного обміну, може розглядатися як граф. В якості вузлів графа виступають суб'єкти інформаційного обміну, а ребрами є наявні інформаційні зв'язки:

$G(V, E)$, де V – множина вузлів, а E – множина ребер.

Для моделювання конкретних структур фрагменту мережі обрано наступні типи кластерів: група, кліка, лідерська група. Окрім цього варто зауважити, що при моделюванні розглядаємо лише сталі, двосторонні зв'язки. Тобто – якщо вузол $V_i \rightarrow V_j$, то і $V_j \rightarrow V_i$. Далі для прикладу розглянемо один з типів кластерів, на основі яких моделюється структура.

Група (Γ) – граф з таким набором зв'язків, що дозволяє встановити зв'язок між будь-якими двома вузлами графу напрямую або використовуючи проміжні вузли.

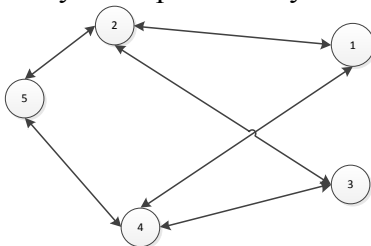


Рис. 1. Підмножина (кластер) типу «Група»

Формальний опис такого кластеру може виглядати так:

$$G_{група} = (V_n | \forall V_i, V_j: i, j, k_i \leq n \exists \{E_{ik1}, E_{k1,k2}, E_{k2,k3} \dots E_{kn,j}\}),$$

Фактично «група» є зв'язним графом, а обов'язковою є умова зв'язності – існування шляху між будь-якими вибраними вершинами кластеру.

Вузол мережі характеризується певним набором параметрів, що визначають його поведінку і поточний стан. В моделі вузол описується наступними характеристиками:

$$V_i = \langle Av_i, Rv_i, Oav_i, Iav_i, \{V_{ji}\} \rangle, (1)$$

де:

(A) **Active** – активність користувача, кількість активних діалогів (звернень до інших користувачів) за одну ітерацію моделі.

(R) **Reputation** – репутація користувача, вплив інформаційного посилу, сила переконання.

(O) **Opposite** – інформаційний спротив, критичність по відношенню до ідеї, що розповсюджується.

(I) **Involvement** – ступінь залученості до ідеї, рівень довіри.

$\{V_{ji}\}$ - множина контактів, вузлів з якими існує інформаційний обмін, вузла V_i .

Серед вузлів мережі виділимо окремі вузли – генератори ідеї. Дані вузли є активними вузлами і саме вони являються осередками розповсюдження інформаційного посилу. Модель розглядає розповсюдження ідеї конкретного змісту чи спрямування, далі будемо позначати її α -ідея. Модель може передбачати наявність генераторів контрідії, позначимо її $(-\alpha)$, тобто ідея протилежна до α .

Генератор формально описується так:

$$Gen_{\alpha i} = \langle V_i, |Av_i| \sim 1, Iav_i = 1 \rangle, (2)$$

Тобто, генератори – вузли з високою активністю, ступінь залученості до α -ідеї максимальний. Всі генератори сегменту мережі утворюють множину генераторів - **Gen**

Основна ідея моделі полягає в формалізації поведінкових стратегій активних вузлів сегменту мережі. Вузол починає активну діяльність за умови його залученості до ідеї $Iav_i > 0,5$.

Кількість інформаційних посилів вузлам з множини доступних вузлів (контакти V_i) за одну ітерацію моделі пропорційна активності вузла - $|\alpha_i| \sim Av_i$.

Ціль інформаційної атаки обирається на основі поведінкової стратегії. Поведінкова стратегія генератора може бути представлена як:

$$\langle F(P_1 P_2 \dots P_i) | V_{jg} \rangle, (3)$$

де:

$F(P_1 P_2 \dots P_i)$ – функція, що визначає поведінкову стратегію;

Vj_g – множина доступних генератору вузлів, тобто – підмножина вузлів всієї мережі, що входить до кола спілкування генератора;

$P_1 P_2 \dots P_i$ – набір поведінкових критеріїв.

В найпростішому випадку генератор обирає вузли для атаки випадковим чином. Тоді поведінкова стратегія (умовно назвемо її «кущ») може бути описана як:

$$P_{bush} = \{u_i \in U_g \mid i = \text{random}(|U_g|), |u| \leq Act_g\}, \quad (4)$$

де:

$u_i \in U_g$ – доступні генератору користувачі;

$i = \text{random}(|U_g|)$ – випадковий вибір номера користувача

для атаки;

$|u| \leq Act_g$ – кількість обраних користувачів не перевищує показника активності генератора.

На відміну від простих стратегій можуть існувати й більш складні багатокритеріальні поведінкові стратегії. Ймовірним є той факт, що більш складна стратегія, яка використовує певний аналіз і вибір вузлів може показувати кращу ефективність. Але реалізація складних стратегій в реальній мережі вимагає певного аналізу, а відповідно і часу. Однією з цілей моделювання є проведення експерименту залежності ефективності різних поведінкових стратегій від структури сегменту мережі та початкового положення генератора в мережі.

Література

1. Сазанов В.М. Социальные сети как новая общественная сфера.. – М.: Лаборатория СВМ, 2010. – 180 с.
2. Берни Хоган Анализ социальных сетей в интернете, 2013
3. Seidman, S. B., & Foster, B. L. (1978). A graph-theoretic generalization of the clique concept. *Journal of Mathematical Sociology*, 6, 139–154.
4. Moody, J., & White, D. R. (2003). Structural cohesion and embeddedness. *American Sociological Review*, 68(1), 103–128.
5. Wellman, B., Hogan, B., Berg, K et al. (2006). Connected

lives: The project. In P. Purcell (Ed.), The networked neighborhood (pp. 161–216).

МОДЕЛЮВАННЯ ФУНКЦІЙ ШТРАФІВ ДЛЯ КЕРУВАННЯ В ІЄРАРХІЧНІЙ СИСТЕМІ

Черноусова Ж. Т.
chernjant@ukr.net

*Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського»*

Аннотация. Предложена процедура определения функции штрафов (поощрений) с помощью метода параметризации функции таким образом, чтобы стимулировать производство в определенном объеме и не меньше данного уровня в двухуровневой иерархической системе управления.

Abstract. A procedure is proposed to determine the function of the fines (rewards) using the method of parameterization functions in such a way as to stimulate the production of a certain amount and not less than a given level in a two-level hierarchical control system.

Головною особливістю систем керування є те, що в системі існують вільні функції, якими може розпорядитися в своїх інтересах суб'єкт, асоційований із системою. Із кібернетичною системою асоціюється ціла група суб'єктів, що мають власні цілі та уявлення про систему, і кожний з яких може здійснювати вплив на систему в цілому. Ці уявлення суб'єктів не є тотожними. Вибір керування суб'єкта визначається не тільки його ціллю. Важливо знати, що думають інші суб'єкти про цілі цього суб'єкта, з позицій якого ведеться аналіз, на базі якої інформації вони приймають рішення, що вони знають про його інформованість і т. ін. [1].

Неможливість централізованої переробки інформації за даний час потрібним чином приводить до того, що рішення виявляються недостатньо продуманими, що еквівалентно високому рівню невизначеності. Тому приходится «делегувати» права прийняття рішення нижнім ланкам ієрархії. Як тільки окремій частині організму «делегуються»

права по прийняттю рішень, вона набуває певних можливостей для досягнення власних цілей, які їй об'єктивно присутні, тобто вона становиться самостійним організмом, і неминучим чином виникають певні суперечності між частиною і цілим. Але суб'єкти об'єднуються в ієрархічну систему тому, що це їм вигідно: обмежуючи свої бажання, вони при цьому краще забезпечують свою стабільність.

Простішою схемою ієрархічної системи керування є двоступенева структура віяла. В цій системі існує один привілейований суб'єкт (Замовник), який має можливість керувати іншими суб'єктами (Виробниками). Нерівноправність суб'єктів проявляється в тому, що саме Замовник назначає правила формування впливів, які залежать тим чи іншим чином від дій Виробників, і Виробникам ці правила становляться відомими в той момент, коли вони приймають рішення щодо їх власних дій. Тим самим Замовник має можливість направляти в потрібне русло зусилля нижніх ланок. На цьому принципі ґрунтується дія економічних механізмів керування, одним із яких є керування за допомогою штрафів та заохочень. Але навіть для такого простого випадку ієрархічної системи, яку ми розглядаємо, розв'язок задачі ефективного визначення оптимального штрафу потребує створення спеціальних методів. Деякі підходи до розв'язку цієї задачі наведені в [1-2]. Вибір класу функцій, до якого повинні належати штрафи і заохочення, – це спеціальна і складна проблема [2]. Для визначення функції штрафів будемо використовувати представлення її в залежності від декількох параметрів.

Для того, щоб керувати діями Виробника, Замовник повинен мати деякі способи впливу на цілі Виробника, певну гіпотезу щодо яких він може припустити. Наприклад, будемо вважати, що Виробник прагне максимізувати власний прибуток. Тоді цільова функція Виробника може бути представлена у вигляді $J = cP - \omega L + \varphi(P) \rightarrow \max$, де c – кінцева ціна одиниці продукції, за якою Замовник буде розраховуватись із Виробником, ω – середня ставка заробітної плати робітників, P – обсяг виробництва, L – кількість робочої

сили є керуючим параметром, який повністю знаходиться в розпорядженні Виробника, $\varphi(P)$ – функція штрафування (заохочення) в залежності від P . Критерій ефективності функціонування Замовника тоді має вигляд $T = (s - c)P - \varphi(P) \rightarrow \max$, де $s \geq c$ – кінцева ціна одиниці продукту Замовника.

Функцію $\varphi(P)$ будемо шукати у вигляді:

$\varphi(P) = \lambda(P)(P - P_{\min})^2 - cP + \omega L$, де P_{\min} – мінімально допустимий обсяг виробництва. В цьому випадку вираз цільової функції Виробника набуде вигляду $J = \lambda(P)(P - P_{\min})^2 \rightarrow \max$. Задача полягає в тому, щоб знайти функцію $\lambda = \lambda(P)$. З точки зору Замовника для забезпечення максимуму свого прибутку Виробник має так розпоряджатися своїми ресурсами, щоб обсяг його продукції був не менший за P_{\min} і в кращому випадку дорівнював \bar{P} . Нехай $\lambda(P_{\min})=0$, $J < 0$ при $P < P_{\min}$, і швидкість зміни функції J зростає при зміні обсягів P в околі P_{\min} . Тоді розглянемо $\lambda(P)$, наприклад, у вигляді квадратичної функції: $\lambda(P) = a(P - P_{\min})^2 + b(P - P_{\min})$, де $a < 0$.

Підберемо такі коефіцієнти a та b , щоб максимум функції $J = a(P - P_{\min})^4 + b(P - P_{\min})^3$ досягався в точці \bar{P} .

Тоді $b = \frac{-4a(\bar{P} - P_{\min})}{3} > 0$, оскільки $a < 0$.

Крім

того,

$J''(P) = 12a(P - P_{\min}) \left((P - P_{\min}) - \frac{2}{3}(\bar{P} - P_{\min}) \right) < 0$ при

$P < P_{\min}$. Якщо ж обсяги продукції збільшуються від значення P_{\min} до обсягу $\bar{P} = P_{\min} + \frac{2}{3}(\bar{P} - P_{\min})$ рівними частками, то значення премії змінюються все більшими частками.

Вираз для \bar{P} показує доцільність розгляду в якості функції J полінома четвертого степеня, аніж кубічного, оскільки в останньому випадку коефіцієнт при $(\bar{P} - P_{\min})$ дорівнює $\frac{1}{2}$.

Нехай максимальне значення функції прибутку Виробника J в точці \hat{P} дорівнює \hat{Y} . Звідси можна знайти значення параметрів a та b в залежності від P_{min} , \hat{P} та \hat{Y} :

$$a = -\frac{3\hat{Y}}{(\hat{P}-P_{min})^4}, b = \frac{4\hat{Y}}{(\hat{P}-P_{min})^3}.$$

Нехай першим пріоритетом Замовника є стимулювання виробництва продукції в кількості \hat{P} . Тоді провідним критерієм для Замовника виступає цільова функція Виробника, а цільова функція Замовника переводиться в обмеження.

Для визначення значення \hat{Y} Замовнику слід враховувати, якщо $\varphi(P) \equiv 0$, то для Виробника максимум прибутку $cP - \omega L$ досягається при $L^* = \left(\frac{c\alpha(1-\beta)}{\omega}\right)^{\frac{1}{\beta}} K$, а отже, при $P^* = \alpha K \left(\frac{c\alpha(1-\beta)}{\omega}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}$, і дорівнює $\left(\frac{\omega\beta}{1-\beta}\right)L^*$. Якщо $\hat{P} > P^*$, то премія $\varphi(\hat{P}) = (1-\delta)(s-c)\hat{P}$ може компенсувати Виробнику відхилення його прибутку від $\left(\frac{\omega\beta}{1-\beta}\right)L^*$. Тут $P = \alpha K^\beta L^{1-\beta}$, де α, β – характеристики виробництва.

Література

1. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа: учеб. пособ. [для студ. вузов] / Н.Н. Моисеев. – М.: «Наука», 1981. – 488с.
2. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами: монография / Ю.Б. Гермейер. – М.: «Наука», 1976. – 326 с.

ДЕЯКІ МЕРЕЖКИ ЯК ЕЛЕМЕНТИ МНОЖИН $R_{4,\theta}$

Шевченко К. М.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет
ім. В. Винниченка

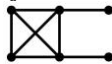
Abstract. An example for a sequence of closed lace graphs H_i of the same type is described, where $G_{i+1} = \theta(H_i, F_i)$, $H_{i+2} = \theta(G_{i+1}, F_{i+1})$. It is easy to ascertain whether the given graph is a lace graph of such a type and whether it is isomorphic to a lace graph of the respective order.

Щоб побудувати граф $\theta(H, F)$, у графі H порядку v виконується підрозбиття кожного ребра з деякої паросполуки F розміру 2 однією вершиною; потім дві нові вершини топологічно склеюються, утворивши вершину a_{v+1} графа $H' = \theta(H, F)$.

Щоб отримати з графа H' знову граф H , досить видалити з H' зірку з центром a_{v+1} , а потім приєднати до графа $H' \setminus \{a_{v+1}\}$ [1] відповідну паросполуку F розміру 2. Відповідне позначення $H = \theta^{-1}(H', a_{v+1})$.

Нижче розглядаються $2k$ -регулярні графи лише для $k = 2$.

Мережкою [1] називається граф G , що складається з періодів P_0, P_1, \dots, P_{n-1} таких, що існує підстановка α множини вершин цього графу, яка переводить підграф P_t у підграф P_{t+1} при $t = 0, 1, \dots, n-1$. Якщо при цьому α переводить P_n в P_0 , то мережку називають замкнутою (обертовою), в іншому випадку – розімкнутою.



В [2] описано замкнуту мережку з періодом P_0 і P_1 . Кожна така мережка H належить до деякої множини $R_{4,\theta}$, але при жодному a_v не існує графа $\theta^{-1}(H, a_v)$, тобто, жодну з таких мережок не можна отримати з такої ж мережки за допомогою θ .



Замкнута мережка з періодом P_0 і P_1 має зовсім інші властивості.

Лема 1. Всі вершини цієї мережки належать до однієї орбіти її групи автоморфізмів.

Лема 2. Для кожної такої мережки H_i , $G_{i+1} = \theta^{-1}(H_{i+2}, a_{v_{i+2}})$,
 $H_i = \theta^{-1}(G_{i+1}, a_{v_{i+1}})$.

Якщо задано і гамільтонів розклад такої мережки H порядку ν , то $\theta(H, F)$ визначається однозначно, оскільки однозначно визначається F . Тому всі графи $\theta^{-1}(H, a_\nu)$ для всіх a_ν ізоморфні, кожен з них однозначно визначається вершиною a_ν .

Теорема 1. За допомогою θ^{-1} можна перевірити, чи є даний граф описаною вище мережкою.

Теорема 2. За допомогою θ^{-1} розв'язується проблема ізоморфізму таких мережок.

Література

1. Донец Г. А., Петренюк А. Я. Экстремальные покрытия графов. Кіровоград, «Комбінаторні конфігурації», 2009.
2. Приходькін М. О., Петренюк А. Я. Про чарівну силу графів-мережок, Матеріали 3-го та 4-го Міжвузівських науково-практичних семінарів «Комбінаторні конфігурації та їх застосування», 19–20 квітня, 18–19 жовтня 2007 р., м. Кіровоград, ст. 71–72.
3. Шевченко К. М. Множини $R_{4,\theta}$ гамільтоново розкладних графів, Матеріали 15-го Міжвузівського науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування», 12–13 квітня 2013 р., м. Кіровоград.

ДОСЛІДЖЕННЯ РЕКОМЕНДАЦІЙНИХ СИСТЕМ З КОНТЕНТНОЮ ФІЛЬТРАЦІЄЮ НА ОСНОВІ НАЇВНОГО КЛАСИФІКАТОРА БАЙЄСА

Шингалов Д.В., Мелешко Є.В., Минайленко Р.М.

dimashingalov@gmail.com, elismeleshko@gmail.com,
aron70@ukr.net

*Центральноукраїнський національний технічний
 університет*

Abstract. *This paper considers the naive Bayes Classifier is the easiest method of machine learning that can be used to create a recommender system with content-based filtering methods.*

Щоб допомогти користувачам знайти інформацію, яка відповідає їх інтересам, вона має бути персоналізована, з використанням рекомендаційних систем. Основні сайти електронної комерції, такі як Amazon, використовують різноманітні технології для створення рекомендацій користувачам. Рекомендаційні системи схожі на пошукові системи, проте користувач не шукає елементи явно, тому алгоритм рекомендує елементи користувачу на основі його попередніх взаємодій з системою, які використовуються для прогнозування його інтересів.

Формально проблему організації рекомендаційних систем можна представити наступним чином, враховуючи набір елементів множини A , підмножина B , що належить до A , де $|B| < |A|$ і значення $f(b)$, де $\forall b \in B$ з функції $f(x)$, $A \rightarrow \{0, 1\}$, де тип $f(x)$ невідомий, необхідно знайти оцінку $f(x)$, а саме $g(x)$, де $A \rightarrow \{0, 1\}$, а підмножина C , що належить до A , де $|C| < |A|$ і $B \cap C = \emptyset$, так, що ймовірність $P(g(c)=f(c)=1)$, $\forall c \in C$ прямує до максимуму [1].

Це визначення можна інтерпретувати як таке: A - це сукупність елементів, запропонована користувачу через веб-службу, B - це підмножина предметів, яка оцінюється негативно (0) або позитивно (1), а C - це підмножина предметів, що підлягають рекомендації користувачу, функція $f(x)$ виявляє ті елементи, що подобаються чи не подобаються користувачу, які, очевидно, невідомі і функція $g(x)$ - це оцінка інтересів користувача, отримана різними методами. Розмір наборів B та C повинен бути набагато меншим, ніж A , з практичних причин, таких як рейтинг розумної кількості предметів для формування рекомендацій, які користувач може переглянути за короткий час і який може бути представлений у обмеженому візуальному просторі веб-сторінки.

Мета рекомендаційної системи - створити найкращу можливу оцінку $g(x)$ для функції інтересу користувача $f(x)$, для кожного елемента в наборі A , щоб рекомендувати предмети, які

мають високий рівень ймовірності відповідності інтересам користувача. У рекомендаційних системах на основі контентної фільтрації, використовується опис предметів та їх ознаки для того, щоб прогнозувати інтерес користувача до них.

Проблему створення рекомендації можна розділити на 3 окремі підпроблеми [2] :

- перш ніж будувати математичні моделі та алгоритми для створення оцінки інтересів користувача треба створити представлення предметів реального світу таким чином, щоб їх можна було обробляти алгоритмом;

- треба вирішити, яку модель або алгоритм буде використано для створення оцінки користувача в програмній системі;

- використання оцінки, для вирішення питання чи слід рекомендувати елементи, чи ні, тобто предмети, що відповідають інтересам користувача, більшість з яких вибираються та відображаються користувачу.

Найпростіший метод для створення рекомендаційних систем на основі контентної фільтрації – це метод заснований на використанні наївного класифікатора Байєса [3], що використовує техніку з області теорії ймовірностей, а саме, теорему Байєса, для класифікації предметів. Ймовірність Байєса дає ймовірність події A , якщо врахувати, що подія відбулась. Це дозволяє краще бачити ймовірнісну систему, враховуючи певні події, які можуть статися. Формула теореми Байєса має наступний вигляд:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)},$$

де A – це дані, тобто те, що ми знаємо, а θ – це параметри моделі, які визначаються. Дані - це ті рейтинги, які ставив користувач продуктам, а параметри моделі – це фактори, які досліджуються для користувачів і продуктів. $P(A/B)$ – це розподіл ймовірностей параметрів моделі після того, як прийнято до уваги дані; це називається апостеріорною ймовірністю, яку, як правило, безпосередньо не знайти, і тут як

раз і потрібна теорема Байєса. $P(B/A)$ – це так звана правдоподібність, ймовірність даних за умови зафіксованих параметрів моделі, яку знайти зазвичай легко, власне, конструкція моделі зазвичай в тому і полягає, щоб задати функцію правдоподібності. $P(B)$ – апіорна ймовірність, вона є математичною формалізацією нашої інтуїції про предмет, формалізацією того, що ми знали раніше, ще до усяких експериментів.

Основні переваги наївного класифікатора Байєса - простота реалізації і низькі обчислювальні витрати при навчанні та класифікації. У тих рідкісних випадках, коли ознаки дійсно незалежні (або майже незалежні), наївний байєсовський класифікатор є оптимальним рішенням для рекомендаційних систем.

Література

1. Michael J. Pazzani, Content-Based Recommendation Systems, Lecture notes in Computer Science , "The Adaptive Web" by Peter Brusilovsky, Alfred Kobsa, Wolfgang Nejdi (Ed.), pp. 325-341.
2. Raymond J. Mooney and Lorie Roy, Content-Based Book Recommending Using Learning for Text Categorization, Proceedings of the SIGIR-99 Workshop on Recommender Systems: Algorithms and Evaluation, Berkeley, CA, August 1999
3. Narayanan, V., Arora, I., and Bhatia, A. (2013). Fast and accurate sentiment classification using an enhanced naive bayes model. In Yin, H., Tang, K., Gao, Y., Klawonn, F., Lee, M., Weise, T., Li, B., and Yao, X., editors, Intelligent Data Engineering and Automated Learning IDEAL 2013, volume 8206 of Lecture Notes in Computer Science, pp. 194–201.

ЕКСТРЕМАЛЬНІ РОЗМІТКИ ВЕРШИН ТА РЕБЕР ГРАФІВ

Шерман З. О.

sherman.zoya@gmail.com

Донецький національний медичний університет

Анотація. Робота присвячена проблемі побудови квадратної різницевої розмітки. Розроблені способи її побудови для нових класів графів.

Abstract. The paper is devoted to the problem of constructing square difference labeling. Methods of constructing it for new classes of graphs are developed.

Теорія розміток відносно молода наука, що проникла в різні сфери теорії і практики. Поняття розмітки включає три важливі складові: множину, яка складається з міток елементів графа; правила за якими відбувається призначення міток і умови, яким ці значення повинні задовольняти. При призначенні міток елементам графа застосовують найчастіше ін'єктивне або бієктивне відображення. До основних задач теорії розміток відносяться:

- знаходження умов існування розмітки для певних типів графів;
- розробка методів побудови розміток;
- перелік розміток для деяких типів графів.

Варто зауважити, що проблема існування розмітки для різних класів графів достатньо висвітлена в науковій літературі [1], однак не існує єдиного методу розв'язку, єдиного універсального підходу для її вирішення, хоча б в межах однієї розмітки. Для розв'язку задачі побудови розміток графів розроблено аналітичні та конструктивні методи. Цікавим виявився конструктивний метод – метод Δ -побудови, який застосовано для побудови нових квадратно різницевих дерев з відомих квадратно різницевих дерев меншого порядку

Функцію f називають *квадратною різницевою розміткою* графа G з m вершинами, якщо f – бієкція $V(G)$ на множину чисел $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ та індукована нею реберна розмітка $f^*(u,v) = |f(u)|^2 - |f(v)|^2$ є ін'єкцією $E(G)$ в множину натуральних чисел.

Граф, що допускає квадратну різницеву розмітку, називається *квадратним різницевим графом* або *SD графом*.

Для побудови нового квадратного різницевого дерева T на основі методу Δ -побудови обрано три підходи:

- ототожнення вершин з найбільшою міткою ізоморфних копій даного квадратно різницевого дерева T^* ;
- використання нової вершини й ребер, що з'єднують ізоморфні копії даного квадратно різницевого дерева T^* з даною вершиною;
- метод Δ -побудови, з використанням двох квадратних різницевих дерев T^* і T^{**} .

Це дозволило довести наступні три теореми.

Теорема 1. Якщо зірка $K_{1,n}=T$ має квадратну різницеву розмітку f з найбільшою міткою n в вершині w , тобто $f(w)=n-1$, тоді дерево T_w^p допускає квадратну різницеву розмітку.

Теорема 2. Якщо зірка $K_{1,n}=T$ має квадратну різницеву розмітку f з найбільшою міткою n в вершині u , тоді дерево T_w^{*p} , допускає квадратну різницеву розмітку.

Теорема 3. Якщо дерево S порядку m має квадратну різницеву розмітку f_m , а зірка $K_{1,n}=T$, де $n \equiv 0 \pmod{2}$ має квадратну різницеву розмітку f_n з найбільшою міткою n в вершині v , тобто $f_n(v)=n$ й T_1, T_2, \dots, T_m – ізоморфні копії зірки $K_{1,n}$, тоді дерево $S\Delta K_{1,n}$, отримане з допомогою ототожнення кожної вершини w_i , графа S з образом вершини v зірки $K_{1,n}=T$ у кожній ізоморфній копії T_i , де $i=1, 2, \dots, m$, є *SD*-графом.

Література

1. J. Gallian. A dynamic survey of graph labeling // The Electronic journal of Combinatorics. — 2017. — P. 1–432.

ЗАСТОСУВАННЯ GERT-МЕРЕЖІ ДЛЯ АНАЛІЗУ АВІАЦІЙНОЇ КАТАСТРОФИ

Якуніна І.І.

yakunina_irina@ukr.net

Льотна академія Національного авіаційного університету

Abstract. The developed method of a posteriori analysis of aviation accidents by using stochastic networks such GERT allows visualizing logical and causal relationships that contributed to aviation accidents and to determine quantitative temporal indicators of aviation event. Graphic-analytical methods of decision making by operators of aeronautical system in special cases of flight were improved by developed deterministic model of decision-making by operators with deterministic parameters of operating procedures time and model with probability indicators of time operating procedures to parry special cases of flight, allowing to quantify the time needed to parry special cases.

Детерміновані моделі дозволяють аналізувати ОВП у випадках, коли ситуація розвивається від нормальних умов польоту до ускладнення умов польоту, аварії чи катастрофи. Враховуючи те, що операційні процедури, які виконують диспетчер та екіпаж ПС, спрямовані на парювання ОВП, то для всебічного аналізу АП виникає необхідність описати її розвиток від катастрофічної чи аварійної ситуації до ускладнення умов польоту, тобто у зворотному напрямку. При описанні таких випадків в мережеву модель необхідно включати операції зі зворотнім зв'язком, при цьому отримуємо орієнтований граф з контурами. Тому для дослідження впливу прийняття рішень Л-О на розвиток польотних ситуацій доцільно застосовувати стохастичні мережі типу GERT, які дозволяють моделювати розвиток польотних ситуацій в сторону ускладнення і навпаки. GERT є альтернативним ймовірнісним методом мережевого планування, що застосовується у випадках організації діяльності, коли наступні дії можуть починатися після завершення тільки деякого числа з попередніх дій, тому допускає наявність циклів і петель. При виникненні особливого випадку моделювання дій оператора АНС ускладнюється тим, що з'являються так звані операційні процедури із зворотнім зв'язком (петлі), що в свою чергу

означає, що кінцевий вузол такої ОП повинен бути виконаним раніше її початкового вузла.

Розглянемо стохастичну мережеву модель GERT розвитку польотної ситуації $G = (N; A)$ з множиною вузлів N і множиною дуг A . Час t_{ij} на перехід від i -ої до j -ої польотної ситуації є випадковою величиною. Перехід $(i; j)$ може бути виконаний, тільки якщо виконується i -ий вузол. Для визначення часу t_{ij} на перехід від i -ої до j -ої польотної ситуації необхідно знати умовну ймовірність (в дискретному випадку) чи щільність розподілу (в неперервному випадку) випадкової величини Y_{ij} . Це дозволяє провести дослідження з виконання всієї мережі $G=(N;A)$ та визначити моменти розподілу часу виконання t_{ij} мережі G , за допомогою яких можуть бути обчислені математичне очікування $M(T)$ та дисперсія часу σ^2 виконання мережі G у разі виникнення ускладненої, складної, аварійної або катастрофічної ситуації.

Для визначення ймовірності настання конкретної події мережі – Q , математичного очікування – $M(T)$ та дисперсії часу до появи події – σ^2 , необхідно спростити початкову модель шляхом об'єднання послідовних та паралельних контурів у єдину гілку з еквівалентними вихідними параметрами P_{ij} , $M_{ij}(S)$ та їх перетворенням $W_{ij}^*(S)$ – коефіцієнтом пропускання динамічної системи.

Загальний вираз для передаточної функції мережі буде мати наступний вигляд:

$$Q = \sum_{i=1}^a \prod_{j=1}^{D_i} P_{ij} \leq 1, \quad (3.10)$$

де a – кількість мінімальних пропускнух сполучень всередині графа;

D_i – кількість дуг, що з'єднують вузли графа в i -тому сполученні;

P_{ij} – ймовірність передачі сигналу (переходу індикатора) між j -ми дугами графа в i -тих сполученнях.

Побудовано і розраховано GERT-мережу для авіаційної події, що сталась 05.12.95 в аеропорту Нахичевань (рис.1).

Причинно-наслідкові зв'язки подій, що сприяли виникненню АП, відображено в табл. 1.

Визначено окремо кожну петлю Li GERT-мережі катастрофи Ту-134Б і відповідні їм еквіваленти пропускання (рис. 2).

Знаючи функцію розподілу часу для кожної j-ої дуги мережі, можемо задати твірну функцію . Врахувавши, що $P_j \cdot ME_j(s) = W_j(s)$, знайшовши першу і другу похідну виробляючої функції мережі (шляхом чисельного диференціювання), отримаємо моменти першого та другого порядків.

Таблиця 1

Причинно-наслідкові зв'язки подій, що сприяли
виникненню АП (фрагмент)

1	Політ проходить в нормальних умовах
1-2	Відмовив лівий двигун
1-3	Відмови двигуна не було
2-4	Бортмеханік (БМ) визначив відмову правого двигуна (помилково)
2-5	Екіпаж визначив відмову лівого двигуна
4-6	Повітряне судно (ПС) пілотував другий пілот (ДП)
4-7	ПС пілотував командир повітряного судна (КПС)
.....	
14-15	КПС приймає рішення виконати вимушену посадку поза аеродромом
15-16	Попереду по курсу перешкоди відсутні
15-17	Попереду по курсу присутні перешкоди (житлові квартали)
17-18	КПС відвертає ПС вправо з креном 36°
18-19	КПС відвертає ПС вправо з креном максимально 15°
18-20	ПС втратило висоту і врізається правим крилом у землю
20-21	Катастрофа
3-22 9-22 13-22 16-22	Завершення польоту без жертв

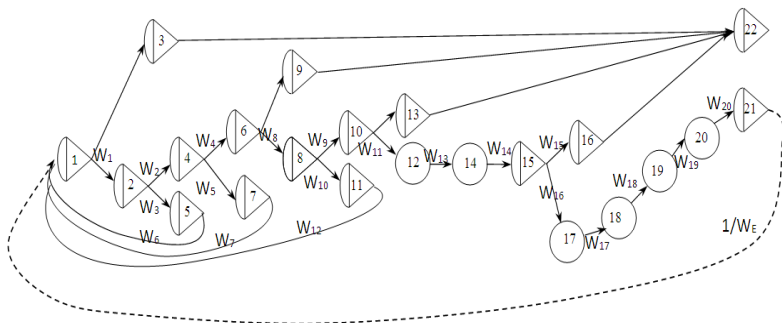
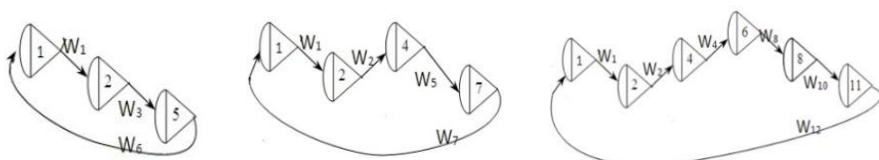


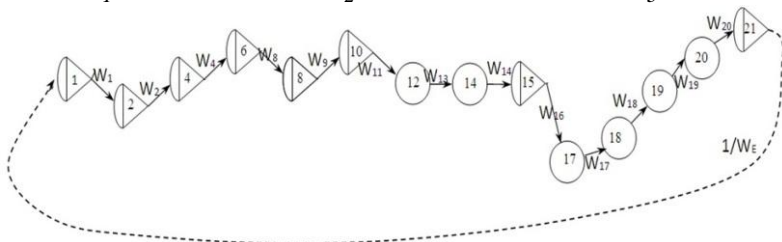
Рисунок 1. GERT-мережа катастрофи Ту-134Б (05.12.95 аеропорт Нахічевань)



петля L_1

петля L_2

петля L_3



петля L_4

Рисунок 2. Петлі L_i ($i=1,2,3,4$) GERT-мережі катастрофи Ту-134Б (05.12.95 аеропорт Нахічевань)

Таким чином, отримаємо такі параметри, як ймовірність виконання вузла, математичне очікування та дисперсію часу виконання вузла.

Підсумовуючи аналіз діяльності операторів АНС, який базується на стохастичній моделі апостеріорного GERT-аналізу авіаційних подій, можна констатувати, що використання GERT-мереж для моделювання авіаційних подій дозволяє аналізувати і прогнозувати розвиток особливого випадку в польоті, а також дозволяє будувати адекватні моделі розвитку

польотних ситуацій бази моделей в системі підтримки прийняття рішень оператора АНС. Розраховані математичне очікування та дисперсія покажуть часові характеристики для заданої авіаційної події.

ПОЛИЭДРАЛЬНО-СФЕРИЧЕСКИЕ КОНФИГУРАЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Яровая О.В.

helga.yarova@gmail.com

Национальный аэрокосмический университет

им. Н.Е.Жуковского

«Харьковский авиационный институт»

Аннотация. Выделяется класс полиэдрально-сферических конфигураций как точечных множеств арифметического евклидова пространства. Исследуются свойства полиэдрально-сферических конфигураций и особенности задач оптимизации на этих множествах.

Abstract. A class of polyhedral spherical configurations is distinguished as point sets of an arithmetic Euclidean space. The properties of polyhedral spherical configurations and the singularities of optimization problems on these sets are studied.

Пусть $E \subset R^n$ — конечное множество точек арифметического евклидова пространства R^n . Обозначим $m = \text{card } E$, $m > 1$. Положим $P = \text{conv } E$. Множество вершин многогранника P обозначим $\text{vert } P$. Тогда множество E представимо в виде

$$E = \{x^1, \dots, x^m\} = \{x^j, j \in J_m\}, \quad (1)$$

где $x^j = (x_1^j, \dots, x_n^j)$, $j \in J_m$, $J_m = \{1, \dots, m\}$.

Множество $X \subset R^n$, элементы которого удовлетворяют заданным условиям Λ на их взаимное расположение, назовем точечной конфигурацией и обозначим (X, Λ) .

Конечную точечную конфигурацию $E \subset R^n$ назовем полиэдрально-сферической, если существуют такие $\tau \in R^n$ и $r > 0$, что для всех точек $x \in E$ выполняется условие

$$\|x - \tau\|^2 = r^2. \quad (1)$$

Исследование полиэдрально-сферических конфигураций базируется на работах [1-3], в которых введен класс полиэдрально-сферических множеств и заложены основы полиэдрально-сферических методов оптимизации.

Множество E представимо в виде пересечения многогранника $P = \text{conv } E$ и гиперсферы $S_r(\tau)$, т.е.

$$E = P \cap S_r(\tau), \quad S_r(\tau) = \{x \in R^n : \|x - \tau\|^2 = r^2\}.$$

Точку $\tau \in R^n$ назовем центром полиэдрально-сферической конфигурации E , а $r > 0$ — ее радиусом. В совокупности центр τ и радиус r назовем параметрами представления полиэдрально-сферической конфигурации. В общем случае одна и та же полиэдрально-сферическая конфигурация может иметь различные параметры представления, поскольку равенство (1) может выполняться для различных τ и r . Чтобы конкретизировать, какими параметрами задается заданная конфигурация, введем обозначение $E(\tau, r)$.

Выберем минимальное значение $\hat{r} > 0$ и такое $\hat{\tau} \in R^n$, что $\|x - \hat{\tau}\|^2 = \hat{r}^2$. Конфигурацию, описанную с помощью минимального радиуса \hat{r} и соответствующего центра $\hat{\tau}$, обозначим $E(\hat{\tau}, \hat{r})$, а такое представление назовем минимальным. Заметим, что множество точек полиэдрально-сферической конфигурации E совпадает с множеством вершин своей выпуклой оболочки (многогранника), т.е. $E = \text{vert conv } E$. Множество, удовлетворяющее такому свойству называется вершинно расположенным.

Размерностью полиэдрально-сферической конфигурации E назовем максимальное число ее линейно независимых точек. Полиэдрально-сферическую конфигурацию E размерности m обозначим E^m . Размерность полиэдрально-сферической конфигурации $E \subset R^n$ совпадает с минимальной размерностью линейного многообразия $L \supset E$. Полиэдрально-сферическую конфигурацию $E^m \subset R^n$ назовем полномерной, если $m = n$.

Исследование полиэдрально-сферических конфигураций связано с решением следующих задач:

- доказать, что точечная конфигурация $X \subset R^n$ является полиэдрально-сферической (задача идентификации);
- доказать, что точечная конфигурация $X \subset R^n$ является полиэдрально-сферической (задача идентификации);
- выделить специальные классы полиэдрально-сферических конфигураций (задача классификации);
- определить параметры полиэдрально-сферической конфигурации $E(\tau, r)$, в том числе конфигурации минимального радиуса (задача определения параметров);
- разложить точки полиэдрально-сферической конфигурации по линейным многообразиям (задача декомпозиции);
- исследовать экстремальные свойства функций, заданных на различных классах полиэдрально-сферических конфигураций (задача оптимизации).

В докладе рассматриваются различные классы полиэдрально-сферических конфигураций и свойства функций, определенных на этих множествах.

Пусть $E \subset R^n$ – полиэдрально-сферическая конфигурация. Очевидно, что любое его подмножество $E' \subset E$ также является полиэдрально-сферической конфигурацией. Рассмотрим семейство $\{L_i, i \in J_k\}$ многообразий пространства R^n , таких что

$$E = \bigcup_{i \in J_k} E_i, \quad E \cap L_i \neq \emptyset, \quad E_i \cap E_j = \emptyset \quad \forall i, j \in J_m, \quad i \neq j. \quad (3)$$

Представление (3) задает разложение полиэдрально-сферической конфигурации по семейству $\{E_i, i \in J_k\}$ полиэдрально-сферических конфигураций меньшей мощности. Наиболее распространенным является разложение $E \subset R^n$ по линейным многообразиям. Это связано с достаточно простым способом определения параметров полиэдрально-сферических конфигураций $\{E_i, i \in J_k\}$. В докладе предлагаются подходы к

разложению и оценке параметров различных классов полиэдрально-сферических конфигураций.

Рассмотрим задачу оптимизации на полиэдрально-сферическом множестве E в следующей постановке. Требуется найти такую точку $x^* \in E$, что

$$\varphi(x^*) = \min_{x \in E} \varphi(x).$$

Свойства оптимизационных задач на полиэдрально-сферических конфигурациях основываются на теории выпуклых продолжений функций, заданных на вершинно-расположенных множествах [4,5].

Литература

1. Яковлев С.В., Пичугина О.С., Свойства задач комбинаторной оптимизации на полиэдрально-сферических множествах// Кибернетика и системный анализ. – 2018. – № 1, с. 97-109.

2. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V., Parshin O.V. Quadratic optimization on combinatorial sets in R^n // *Cybernetics and Systems Analysis*. 1991. Vol. 27. №4. P. 562-567.

3. Pichugina O., Yakovlev S.B., Optimization on Polyhedral-Spherical Sets: Theory and Applications.// *2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engeneering (UKRCON)*. – 2017. – P. 1167-1175.

4. Yakovlev S.B., Convex extensions in combinatorial optimization and their applications. *Optimization Methods and Applications*, S. Butenko et al. (eds.). – Cham: Springer International Publishing AG. – 2017.– P. 567-584.

5. Yakovlev S. V. The theory of convex continuations of functions on vertices of convex polygons // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*.–1994.–Vol. 34. №7. – 1112-1119.

ВЛАСТИВОСТІ H_2 - ГРАФ-ОБСТРУКЦІЇ ДЛЯ ТОРА

Большаков Д. С.

*Центральноукраїнський національний технічний
університет*

Анотація. Наведені структурні властивості H_2 - граф-обструкції для тора.

Розглянемо задачу подання графів-обструкцій роду 2, т. то у яких кожне ребро є суттєвим відносно роду при операції видалення ребра, як результату ототожнення графа G_1 по підмножинам множин вершин одного із графів K_5 , $K_{3,3}$ та квазізірки з центральним графом G_2 . Граф H_2 наведений в [2]. Визначення 1. Граф G називається таким, що неприводиться над S , або $\gamma(G)$ - неприведеним (irreducible) для S , якщо для будь-якого власного підграфа H графа G має місце нерівність: $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх $\gamma(G)$ - неприведених над S графів позначимо через $\zeta(S)$.

Твердження 1. Для графа H_2 як 14-вершинної граф-обструкції для тору має місце наступне ϕ -перетворення:

$$1) \quad \phi(X_7 + St_{1(7)}(C_7), \sum_{i=1}^7 (i' + i'')) \rightarrow (H_2, \{i\}_{i=1}^7), \quad \text{де} \quad X_7^0 = \{i''\}_{i=1}^7, \\ St_{1(7)}^0(C_7) = \{i'''\}_{i=1}^7 \cup C_7^0.$$

Доведення впливатиме з рис.1.

Таким чином наведено структуру 14-ти вершинного графа-обструкції для тору з метою використання при побудові багатoverшинних графів-обструкцій для тору.

Література

1. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. Препринт ІМ НАНУ, Київ, 1971, 378 с.
2. R. Bodendiek, K. Wagner. A characterization of the minimal basis of the torus. Combinatorica 6, 3, 1986, с.245-260.

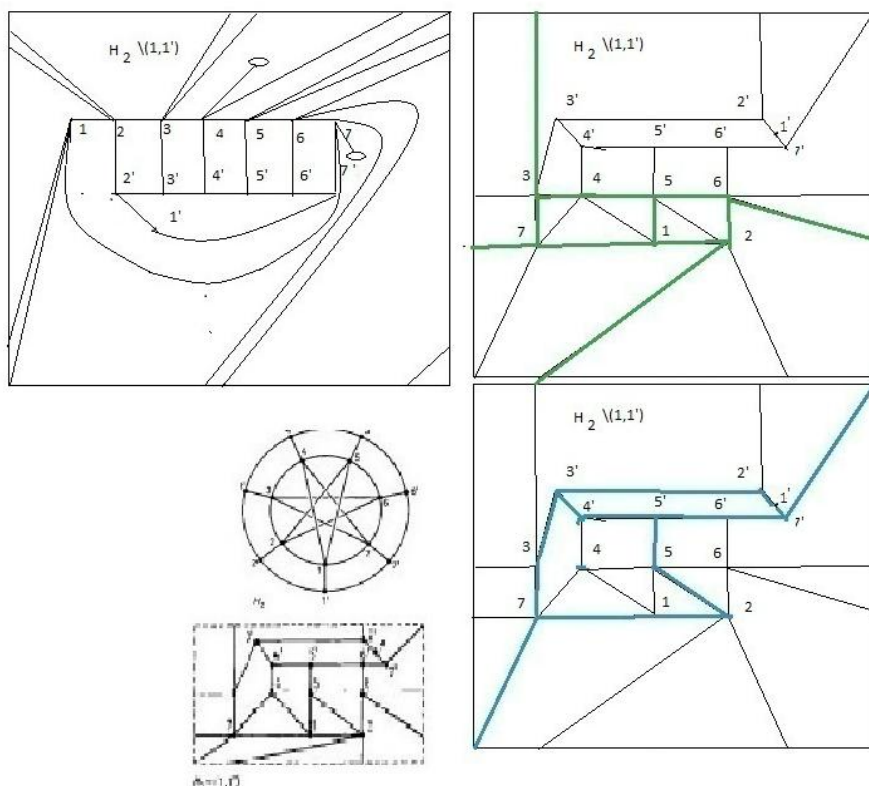


Рис.1. Граф H_2 2-неприведений для тора та вкладення його частин в тор та 2-тор.

H_1 - ГРАФ-ОБСТРУКЦІЯ ДЛЯ ТОРА

Грищенко ..

*Центральноукраїнський національний технічний
університет*

Анотація. Наведені структурні властивості H_1 граф-обструкції для тора.

Розглянемо задачу подання графів-обструкцій роду 2, т. то у яких кожне ребро є суттєвим відносно роду при операції

видалення ребра, як результату ототожнення графа G_1 по підмножинам множин вершин одного із графів K_5 , $K_{3,3}$ та квазіірки з центральним графом G_2 . Граф H_1 наведений в [2].

Визначення 1. Граф G називає ться таким, що неприводиться над S , або $\gamma(G)$ - неприведеним (irreducible) для S , якщо для будь-якого власного підграфа H графа G має місце нерівність: $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх $\gamma(G)$ - неприведених над S графів позначимо через $\zeta(S)$.

Твердження 1. Для графа H_1 як 16-вершинної граф-обструкції для тору має місце наступне ф-перетворення:

$$1) \quad \varphi(K_{3,3} + St_{1(8)}(C_8), \sum_{i=1}^8 (i' + i'')) \rightarrow (H_1, \{i\}_{i=1}^8), \quad \text{де} \quad K_{3,3}^0 = \{i''\}_{i=1}^8, \\ St_{1(8)}^0(C_8) = \{i'''\}_{i=1}^8 \cup C_8^0.$$

Доведення впливатиме з рис.1.

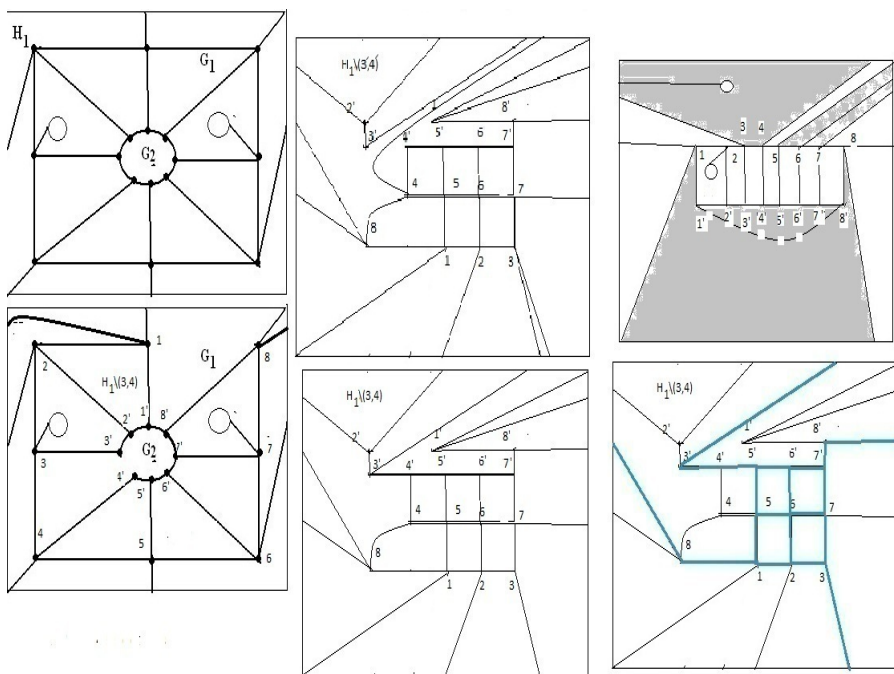


Рис.1. Граф H_1 2-неприведений для тору та вкладення його частин в 2-тор.

Таким чином наведено структуру 16-ти вершинного графа-обструкцію для тору з метою використання при побудові багатoverшинних графів-обструкцій для тору.

Література

1. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. Препринт ІМ НАНУ, Київ, 1971, 378с.
2. R. Bodendiek, K. Wagner. A characterization of the minimal basis of the torus. *Combinatorica* 6,3, 1986 245-260

ВЛАСТИВОСТІ ПСЕВДОГРАФА K_3 НА ТОРІ

Савеленко Д. І.

*Центральноукраїнський національний технічний
університет*

Анотація. Наведені властивості псевдографа вкладеного в тор.

Розглянемо задачу порівняння властивостей псевдографів орієнтовного роду 1, т. то у яких кожне ребро є кратним. Псевдограф K_3 наведений в [2]. Визначення 1. Позначимо через $ms_G(M, s, f)$, $k = ms_G(M, s, f)$, k - сторонність доступу із довільної внутрішньої точки замкнутої заданої клітки \bar{s} до кожної точки заданої підмножини M множини точок графа G , де $|M| > 2$, що полягатиме у наявності такої клітки s , $s \in S_{f(G)}(M, S_\gamma, s)$, де f - задане мінімальне вкладення $f: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в поверхню S_γ , яка на своїй границі ∂s містить k копій підмножини M . Найбільшу кількість копій підмножини M на ∂s серед всіх клітин s заданого мінімального вкладення f , $f: G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ , позначимо через $ms_G(M, f)$. Іншими словами, це найбільша кількість зірок графа G які приєднані кінцевими вершинами до кожного із принаймні трьох елементів множини M та вкладені

до однієї клітки із множини $S_\gamma \setminus f(G)$ заданого мінімального вкладення f , $f:G \rightarrow S_\gamma$, графа G в S_γ . Будемо називати $(ms_G(M, f_1), ms_G(M, f_2), \dots, ms_G(M, f_N))$ вектором l -стороннього доступу до множини M точок графа G із довільної внутрішньої точки замкнутої заданої клітки \bar{s} , $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, $l = l(s)$, до кожної точки заданої підмножини M , де $l > 0$, $|M| > 2$, $\{f_k\}_{k=1}^N$ -множина всіх неізоморфних мінімальних вкладень f_k , $f_k:G \rightarrow S_\gamma$ графа G в S_γ . Найбільше $l, l = l(s)$ серед чисел $ms_G(M, f_k)$ узяті по всім s та всім f_k , $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, називатимемо характеристикою l -стороннього доступу до множини M точок графа G .

Твердження 1. Для псевдографа K_3 матимемо на торі 4-доступ до вершин а,б,с.

Доведення випливатиме з рис.1.

Таким чином встановлено 3-доступ до вершин псевдографа на торі.

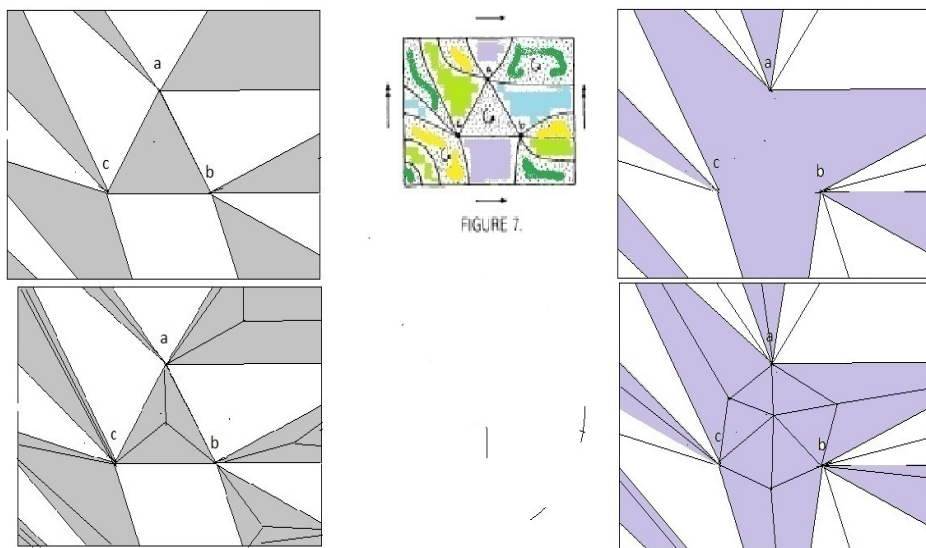


Рис.1. Псевдограф K_3 та його вкладення в тор.

Література

1. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. Препринт ІМ НАНУ, Київ, 1971, 378 с.
2. Archdeacon D. The orientable genus is nonadditive. J. Graph theory, 11, 1986, 385-401.

ВЛАСТИВОСТІ ГРАФА C_7 НА ПЛЯЩІ КЛЕЙНА

Філіппов О.А.

*Центральноукраїнський національний технічний
університет*

Аннотація. Перевірена гіпотеза для графа C_7 .

Розглянемо задачу перевірки наступної гіпотези:

Нехай задано наступне ϕ -перетворення графів G_1 та $St_m(G_2)$ неорієнтованого роду,

$\phi: (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m)$, $i=1, 2$, де $St_m(G_2)$ -

квазізірка з центром G_2 та кількома ребрами-променями, що суміжні вершинам з множини X_2 , де X_i - множина точок графа

G_i , $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, матиме число досяжності та характеристики

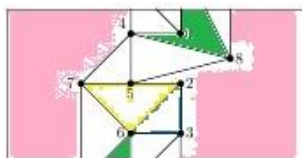
$t_i, k4, st, \theta_i, \partial\theta_i$, $i=1, 2$. Якщо G -граф-обструкція

неорієнтованого роду $\gamma(G)$, то для довільного u та i не існуватиме вкладення графа $G_1 \setminus u$ в неорієнтовану поверхню роду $\gamma(G_1)-1$, що задовольнятиме умові: $t_{G_1 \setminus u}(X_1) = t_{G_1}(X_1) + 1$.

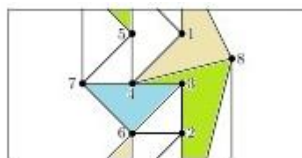
Твердження 1. Для графа C_7 [2] гіпотеза вірна для пар вершин з $B = \{\{1, 7\}, \{1, 8\}, \{3, 7\}, \{3, 8\}\}$.

Доведення впливатиме з рис.1, де вершини з B розташовані на границі одної клітки при кожному вкладенні в ленту Мебіуса графа $B_3 \setminus u$ без довільного ребра u чи зі стиснутим ребром u .

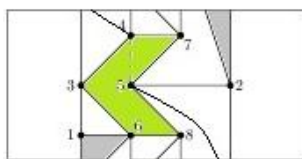
Таким чином для графа C_7 встановлено справедливість гіпотези.



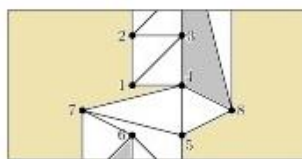
(1) $C_7 - (1, 2)$



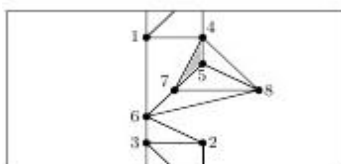
(2) $C_7 - (1, 3)$



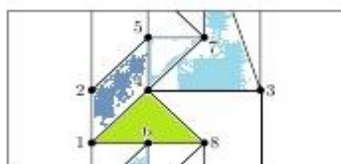
(3) $C_7 - (1, 4)$



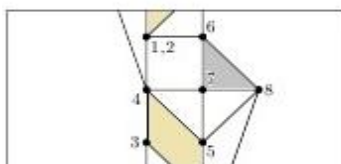
(4) $C_7 - (1, 6)$



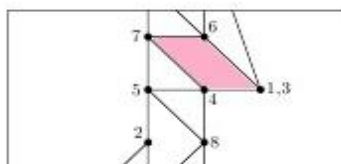
(5) $C_7 - (2, 5)$



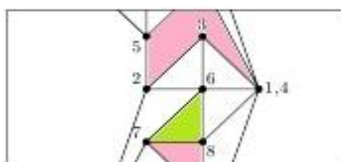
(6) $C_7 - (2, 6)$



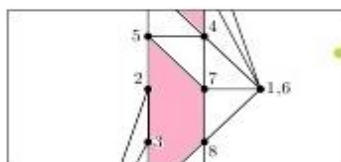
(7) $C_7 / (1, 2)$



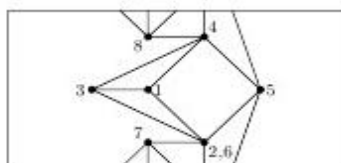
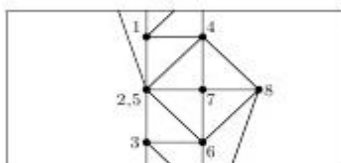
(8) $C_7 / (1, 3)$



(9) $C_7 / (1, 4)$



(10) $C_7 / (1, 6)$



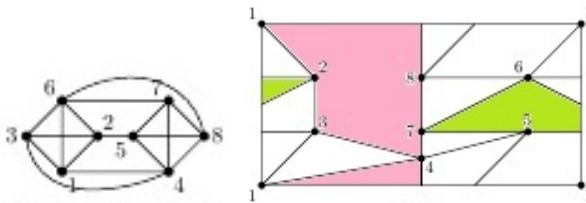


Рис.1. Граф C_7 вкладений в поверхню Клейна, та його частини на ленті Мебіуса.

Література

1. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. Препринт ІМ НАНУ, Київ, 1971, 378 с.
2. Anna Flauto. Embeddability of graphs into the Klein surface, PhD-dissertation, Mai 2010. 172 p.

ВЛАСТИВОСТІ ГРАФА V_3 НА ПЛЯЩІ КЛЕЙНА

Цимбал Є.В.

Центральноукраїнський національний технічний
університет

Анотація. Перевірена гіпотеза для графа V_3 .

Розглянемо задачу перевірки наступної гіпотези:

Нехай задано наступне ϕ -перетворення графів G_1 та $St_m(G_2)$ неорієнтованого роду,

$$\varphi: (G_1 + St_m(G_2), \sum_{j=1}^m (x_{1j} + x_{2j})) \rightarrow (G, \{a_j^*\}_1^m), \quad i=1,2 \text{ де } St_m(G_2) -$$

квазізірка з центром G_2 та кількома ребрами-променями, що суміжні вершинам з множини X_2 , де X_i - множина точок графа

G_i , $X_i = \{x_{ij}\}_1^m$, матиме число досяжності та характеристики $t_i, k_4, st, \theta_i, \partial\theta_i$, $i=1,2$. Якщо G -граф-обструкція неорієнтованого роду $\gamma(G)$, то для довільного u та i не

існуватиме вкладення графа $G_1 \setminus u$ в неорієнтовану поверхню роду $\gamma(G_1)-1$, що задовольнятиме умові: $t_{G_1 \setminus u}(X_1) = t_{G_1}(X_1) + 1$.

Твердження 1. Для графа $B_3[2]$ гіпотеза вірна для вершин 4 та 5.

Доведення випливатиме з рис.1, де вершини 4 та 5 розташовані на границі однієї клітки при кожному вкладенні в ленту Мебіуса графа $B_3 \setminus u$ без довільного ребра u чи зі стиснутим ребром u .

Таким чином для графа B_3 встановлено справедливість гіпотези.

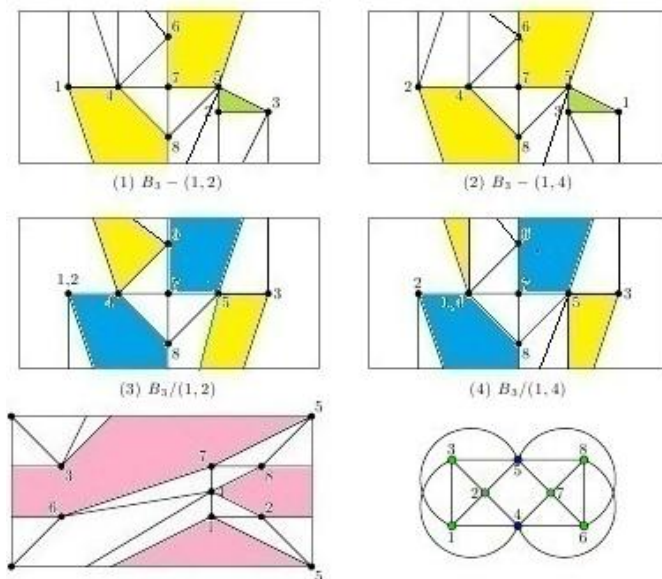


Рис.1. Граф B_3 вкладений в поверхню Клейна, та його частини на ленті Мебіуса.

Література

1. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. Препринт ІМ НАНУ, Київ, 1971, 378 с.
2. Anna Fluctotto. Embeddability of graphs into the Klein surface, PHD-dissertation, Mai 2010. 172 p.

Льотна академія
Національного авіаційного університету
Видавництво м. Кропивницький,
вул. Добровольського, 1
тел. 394-437.