МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев, О.С. Пичугина

ЕВКЛИДОВЫ КОМБИНАТОРНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ

Монография

Харьков
Константа

2017

УДК 519.85
ББК 22.176
С77

Авторы:

член-корреспондент НАН Украины, доктор технических наук, профессор ***Ю.Г. Стоян***
доктор физико-математических наук, профессор ***С.В. Яковлев***
кандидат физико-математических, доцент ***О.С. Пичугина***

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор ***Л.Ф.Гуляницкий***
доктор физико-математических наук, профессор ***Л.Н.Колечкина***
доктор физико-математических наук, профессор ***А.Г. Руткас***

Рекомендовано Ученым советом Харьковского национального университета радиоэлектроники 30 октября 2017 г. (протокол № 14)

Стоян Ю. Г. и др.
С77 Евклидовы комбинаторные конфигурации: монография. / Стоян Ю. Г., Яковлев С. В., Пичугина О. С. Харьков: Константа, 2017. 404 с.
ISBN 978-966-342-391-3

В монографии рассматриваются конечные точечные конфигурации. Вводится понятие евклидовой комбинаторной конфигурации как отображение конечного абстрактного множества заданной структуры в арифметическое евклидово пространство. Исследуются алгебро-топологические и тополого-метрические свойства различных классов множеств евклидовых комбинаторных конфигураций и соответствующих комбинаторных многогранников. Предложены подходы к непрерывному функционально-аналитическому описанию множеств евклидовых комбинаторных конфигураций. Приведены возможные приложения результатов при анализе и оптимизации дискретных структур.

Для научных сотрудников, аспирантов, магистров и студентов старших курсов, специализирующихся в области прикладной математики и информатики, в частности, дискретной математики, полиэдральной комбинаторики, теории и методов комбинаторной оптимизации.

УДК 519.85
ББК 22.176

ISBN 978-966-342-391-3

Оглавление

Предисловие

Термин «конфигурация» (от позднелатинского *configuratio* - придание формы, расположение) согласно Большого энциклопедического словаря и общепринятым толковым словарям - это внешний вид, очертание, а также взаимное расположение предметов или их частей.

В математике, в особенности в проективной геометрии, как правило, конфигурация обозначает некоторое расположение множества точек и прямых на плоскости либо поверхностей в пространстве [14, 25, 50]. Достаточно полный обзор публикаций, посвященных так называемым «геометрическим» конфигурациям, представлен в [23].

Современное определение конфигурации в геометрическом смысле можно сформулировать следующим образом [23]: «конфигурация - это конечная инцидентная структура из v точек и r линий такая, что: k точек лежат на каждой линии и в точности r линий проходят через каждую точку; через любые две точки проходит не более одной линии». При этом, если предположить, что линиями являются прямые, то под конфигурацией понимается конечная инцидентная структура из v точек и r прямых такая, что k точек лежат на каждой прямой и в точности r прямых проходят через каждую точку.

Основные проблемы, исследуемые в теории геометрических конфигураций для заданных параметров, состоят в выделении и доказательстве существования различных классов конфигураций, а также определения числа неизоморфных конфигураций соответствующего класса.

Первоначально указанные исследования проводились геометрическими методами путем непосредственного построения конфигураций на плоскости. В дальнейшем В. Мартинетти (V. Martinetti) был предложен комбинаторный подход к исследованию геометрических конфигураций [38]. При этом задачу существования и перечисления конфигураций предлагалось решать рекурсивно, исходя из ее решения для конфигураций меньшего числа точек.

Х. Шротер (H. Schroter) обратил внимание на то, что не все «теоретические» конфигурации В. Мартинетти могут быть геометрически построены на плоскости. В результате он ушел от геометрической стороны конфигураций, оставив лишь комбинаторную, и дал определение конфигурации в терминах «элемент» и «столбец» [60] вместо «точек» и «линий». Полагалось, конфигурация задается булевой матрицей порядка $n \times n$, в которой столбцы отвечают прямым, строки - точкам их пересечения. Матрица определяла назначение точек линиям, а ее единичные элементы отвечали случаю, когда заданная точка лежит на указанной прямой. В настоящее время произвольную булевую, не обязательно квадратную, матрицу рассматривают как конфигурацию, которой отвечает класс эквивалентности матриц, полученных из нее произвольной перестановкой строк и столбцов [57].

В работах [21, 74] рассматриваются точечные конфигурации как совокупности точек в арифметическом евклидовом пространстве.

Современную классификацию конфигураций точек и линий дает Б. Грюнбаум (B. Grunbaum) в [25], выделяя среди них три вида – топологические, геометрические и комбинаторные. Конфигурацию называют топологической, если она задает некоторое размещений псевдолиний в проективной плоскости с соответствующим множеством их пересечения. Конфигурации относят к геометрическим, если линии рассматриваются в евклидовой или проективной плоскости, а точки формируются в результате пересечения этих линий. Преимущественно геометрические конфигурации рассматриваются в комбинаторном контексте, когда в качестве точек и линий рассматриваются абстрактные множества.

В настоящее время исследования комбинаторных конфигураций выделились в отдельное направление в области дискретной математики, основателем которого является К. Берж (C. Berge). Согласно К. Бержу [7] конфигурация рассматривается как отображение некоторого исходного множества элементов произвольной природы в конечное абстрактное результирующее множество определенной структуры при выполнении заданного набора ограничений.

В соответствии с классификацией [7], выделены основные задачи, которые решаются в комбинаторном анализе:

- изучение известных конфигураций;
- формирование новых классов конфигурации с наперед заданными свойствами;
- счёт конфигураций (перечислительная комбинаторика);

- приближенные формулы для количества конфигурации;
- перечисления (генерация) конфигураций;
- оптимизация на множестве конфигураций.

Исследованию конфигураций в описанном выше контексте посвящены, в частности, работы [8, 27, 34, 37, 62, 58, 90, 91, 92, 93, 125, 126]. При этом в случае конечных исходного и результирующего множеств используется термин «комбинаторная конфигурация».

В работах [27, 62, 90] понятие комбинаторной конфигурации получило развитие путем ослабления условий на конечность результирующего множества, предполагая, что оно не более, чем счетно. В результате вводятся определения комбинаторного объекта и комбинаторного объекта k-го порядка, что позволяет существенно расширить класс реальных задач, которые могут быть формализованы с использованием этих понятий.

Настоящая монография посвящена исследованию так называемых евклидовых комбинаторных конфигураций, представляющих собой образы комбинаторных конфигураций и комбинаторных объектов при соответствующем отображении их в арифметическое евклидово пространство. Рассмотрены различные множества евклидовых комбинаторных конфигураций, удовлетворяющих заданной системе ограничений. Класс таких множеств, названый евклидовыми комбинаторными множествами, был выделен в [121, 122], а первое монографическое исследование представлено в [129]. Дальнейшие теоретические исследования евклидовых комбинаторных множеств и смежных вопросов нашли свое отражение при разработке методов полиэдральной комбинаторики [94, 99, 100, 127, 128], при построении графов комбинаторных многогранников и их обобщении [81, 93], при изучении классов композиционных образов комбинаторных множеств [86]-[88],[124]-[126].

Теоретические основы евклидовой комбинаторной оптимизации на базе свойств функций, заданных на евклидовых комбинаторных множествах, освещены в [45, 47, 48, 76, 78, 89, 127], [130]-[137].

В монографии естественным образом интегрированы исследования в направлении изучения свойств комбинаторных конфигураций и евклидовых комбинаторных множеств. С одной стороны, это позволяет понять сущность многих явлений и процессов, математические модели которых описываются конфигурациями различной сложности (например, в физике, химии, биологии). С другой стороны, свойства комбинаторных конфигураций позволяют разрабатывать эффективные методы оптимизации таких процессов и систем.

Структура монографии следующая.

В первой главе даны основные теоретические сведения о множествах и мультимножествах. Рассмотрены конечные точечные конфигурации как совокупность конечного числа одноточечных множеств в арифметическом евклидовом пространстве. Предложены способы их разложения по плоскостям и поверхностям. Введено понятие поверхностно расположенного множества и выделены специальные классы сферически-, эллипсоидально- и суперсферически расположенных множеств. Осуществлена декомпозиция конечных точечных конфигураций на различные классы поверхностных множеств. Рассмотрены многогранники как выпуклые оболочки конечных точечных конфигураций. Выделены классы многоуровневых и вершинно расположенные множеств. Предложены способы функционально-аналитического описания различных классов конечных точечных конфигураций.

Во второй главе рассмотрены свойства различных конечных точечных конфигураций, в том числе вершинно- и поверхностно расположенных множеств. Выделен класс полиэдрально-поверхностных множеств и формализованы специальные его подклассы. Для конечных точечных конфигураций установлена взаимосвязь с вершинно расположенными, поверхностно расположенными и полиэдрально-поверхностными множествами. Изучены свойства многоуровневых множеств и соответствующих им многогранников. Исследованы конечные точечные конфигурации, образованные в результате теоретико-множественных операций над ними.

В третьей главе рассмотрены комбинаторные конфигурации в смысле К. Бержа как отображение некоторого исходного множества элементов произвольной природы в конечное абстрактное результирующее множество определенной структуры при выполнении заданного набора ограничений. Для случая, когда элементами результирующего множества являются вектора арифметического евклидова пространства, введено понятие евклидовой комбинаторной конфигурации. Рассмотрены различные классы множеств евклидовых комбинаторных конфигураций и установлена их связь с известными классами евклидовых комбинаторных множеств, в том числе множествами перестановок и размещений.

Главы 4-6 посвящены описанию свойств множеств евклидовых комбинаторных конфигураций, их мощности, симметрии, многоуровневости, вершинной и поверхностной расположенности. Для выпуклых оболочек множеств евклидовых комбинаторных конфигураций исследованы их размерность, критерии вершин и смежности вершин. Предложены способы аналитического описания соответствующих многогранников, изучены вопросы их комбинаторной эквивалентности.

В главе 4 рассмотрены свойства множеств евклидовых конфигураций перестановок (с повторениями и без повторений).

Глава 5 посвящена детализации свойств множеств евклидовых конфигураций размещений (без повторений и с неограниченными повторениями). Особое внимание при этом уделено множествам булевых и бинарных векторов. Исследованы свойства вершинно расположенных множеств евклидовых конфигураций размещений.

В главе 6 изучены специальные классы множеств евклидовых комбинаторных конфигураций четных перестановок, четных булевых векторов и перестановок со знаком. Указанные множества выделены из множества конфигураций размещений с помощью дополнительных ограничений.

В заключении обобщены основные результаты данного монографического исследования, определены перспективные направления дальнейших разработок.

При описании основного материала мы, как правило, использовали общепринятую терминологию либо специальную терминологию в соответствии с приведенным списком литературы. Кроме того, в начале каждой главы систематизируются источники, положенные в основу ее написания.

Глава 1

Основные теоретические сведения

При изложении основного материала монографии используются понятия множества и мультимножества в соответствии с общепринятой терминологией [9, 30, 53, 85, 104]. В данной главе изучаются множества, представляющие собой конечные точечные конфигурации [21, 74]. Классификация конечных точечных конфигураций осуществлена на основе положений теории выпуклых поверхностей [36, 84, 117]. При этом использовались понятия сферически-, поверхностно- и вершинно расположенных множеств, введенных в [46, 47, 134], а также выпуклых продолжений функций [134].

При рассмотрении выпуклых оболочек конечных точечных конфигураций применялись теоретические положения полиэдральной комбинаторики [5, 24, 29, 52, 61, 81]. Декомпозиция конечных точечных конфигураций осуществлена на базе работ [1, 2, 21]. Теоретические результаты, касающиеся функциональных представлений множеств, основываются на публикациях [45]-[49],[112].

1.1 Множества и мультимножества

Понятие множества является первоначальным и определения не имеет. Под множеством подразумевают совокупность различных элементов, объединенных общим признаком и потому рассматриваемых как единое целое.

Для обозначения множеств используются, как правило, большие буквы латинского алфавита, а для их элементов - соответствующие малые буквы. Например, если совокупность элементов множества X характеризуется признаком Ω, то применяется запись $X = \{x \mid \Omega\}$, а сам признак Ω называется характеристическим свойством множества X.

В зависимости от количества элементов множества бывают конечные, счетные, мощности континуум и др. Для конечных множеств используется запись:

$$X = \{x_1, ..., x_\eta\}, \tag{1.1}$$

а для счетных

$$X = \{x_1, ..., x_\eta, ...\}.$$

Для задания количества элементов конечного множества X будем использовать обозначение $|X|$, т.е. в представлении (1.1) $\eta = |X|$.

Введем обозначение $J_n = \{1, ..., n\}$ для множества первых n натуральных чисел и для конечных множеств будем далее использовать сокращенную запись $X = \{x_i\}_{i \in J_n}$.

Использование понятия множества не всегда удобно, если рассматривается совокупность элементов, которые сами по себе различны, но совпадают по выбранному характеристическому свойству. Например, множества $A = \{a, a, b, c, c\}$ и $A = \{a, b, c\}$ эквивалентны, а $|A| = 3$. Если совокупность содержит одинаковые элементы и требуется учитывать их кратность, то будем пользоваться понятием мультимножества.

Под мультимножеством (a multiset) будем подразумевать совокупность элементов

$$G = \{g_1, ..., g_\eta\}\,, \tag{1.2}$$

не обязательно различных, объединенных общим признаком.

Различные элементы мультимножества G образуют множество, называемое его основой (the underlying set), которое будем обозначать

$$S\,(G) = \{e_1, ..., e_k\}\,. \tag{1.3}$$

Для задания мультимножества необходимо указывать также кратности (the multiplicities) его элементов. Пусть η_i - кратность элемента основы e_i $(i \in J_k)$. Образуем вектор кратностей

$$[G] = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_k)\,,\ \sum_{i=1}^{k} \eta_i = \eta, \tag{1.4}$$

называемый первичной спецификацией (the primary specification) мультимножества $G = \{g_i\}_{i \in J_\eta}$.

С другой стороны, мультимножество G представимо в виде:

$$G = \{e_1^{\eta_1}, ..., e_k^{\eta_k}\}\,. \tag{1.5}$$

Таким образом, для представления мультимножества имеется несколько способов представления.

Далее будем использовать обозначение $\{.\}$ для неупорядоченных последовательностей элементов произвольной природы; $[.]$, $\langle . \rangle$ - для упорядоченных последовательностей элементов; $(.)$ - для векторов, т.е. упорядоченных последовательностей действительных чисел.

Заметим, что мультимножество G, совпадающее со своей основой $S(G)$, является множеством, причем

$$G = S\left(G\right),\ \left[G\right] = \left(1^{\eta}\right). \tag{1.6}$$

При этом чтобы подчеркнуть, что среди элементов G нас интересуют только различные, будем осуществлять переход к $S(G)$.

В соответствии с приведенными выше обозначениями: если G - мультимножество вида (1.5), то $\langle G \rangle$ - упорядоченная последовательность его элементов вида $\langle g_1, ..., g_\eta \rangle$; (G) - вектор вида $(g_1, ..., g_\eta) \in \mathbb{R}^\eta$.

Заметим, что операция перехода от G к $\langle G \rangle$ определена всегда, в то время как переход от G к вектору (G) определен только для числового мультимножества G.

При этом для числовых мультимножеств будем различать представления $\langle G \rangle$ и (G), предполагая, что они состоят из элементов различной природы, между которыми существует взаимно-однозначное соответствие.

В дальнейшем будет использоваться обратная операция перехода от упорядоченных последовательностей и векторов к мультимножеству их координат. Для этого будем использовать обозначение $\{x\}$. Например, если x -

вектор вида $(x_1, ..., x_n)$, то совокупность его координат будет $\{x_1, ..., x_n\}$.

На мультимножествах по аналогии с множествами можно ввести различные типы отношений.

Бинарное отношение R на мультимножестве G называется <u>отношением нестрогого частичного порядка</u>, если оно удовлетворяет условиям:

- рефлексивности: $\forall x \in G : xRx$;
- антисимметричности: $\forall x, y \in G : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$;
- транзитивности: $\forall x, y, z \in G : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

Отношение нестрогого частичного порядка R, для которого используется обозначение $\preccurlyeq$, называется <u>линейным порядком</u>, если выполнено условие $\forall x, y \in G (xRy \vee yRx)$, а мультимножество G, на котором введено отношение линейного порядка, называется <u>линейно упорядоченным</u>.

Антирефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение порядка называется <u>строгим</u> и обозначается символом $\prec$. Множество G, на котором введен строгий порядок, т.е. $\forall x, y \in G \ (x \prec y \vee y \prec x)$, называется <u>строго упорядоченным</u>.

Предположим, что G линейно упорядочено

$$g_i \preceq g_{i+1}, \ i \in J_{\eta-1}, \tag{1.7}$$

тогда его основа $S(G)$ будет строго упорядоченой

$$e_i \prec e_{i+1}, \ i \in J_{k-1}. \tag{1.8}$$

Если $S(G)$ - числовое множество, т.е.

$$e_i \in \mathbb{R}^1,\ i \in J_k,$$

то, поскольку любые два числа $x, y \in \mathbb{R}^1$ сравнимы и находятся в одном из отношений $x > y$, $x < y$ или $x = y$, условия (1.7), (1.8) всегда выполнены и (1.7) приобретает вид:

$$g_i \leq g_{i+1},\ i \in J_{\eta-1}, \tag{1.9}$$

а (1.8) обращается в:

$$e_i < e_{i+1},\ i \in J_{k-1}. \tag{1.10}$$

1.2 Множества точек в $\mathbb{R}^n$: их разложения и декомпозиции

Рассмотрим конечную точечную конфигурацию E

$$E = \{x_1, ..., x_{n_E}\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.11}$$

Здесь и далее по тексту символом E обозначено конечное множество точек евклидова пространства, а n_E - его мощность.

Пусть $x_i = (x_{ij})^T_{j \in J_n}$, $i \in J_{n_E}$. Сформируем множества значений каждой из координат точек E:

$$X^j = \{e_{j1}, ..., e_{jk_j}\} = S(\{x_{ij}\}_{i \in J_{n_E}}),\ j \in J_n, \tag{1.12}$$

а из них n-мерную ограниченную решетку:

$$X = \bigotimes_{j=1}^{n} X^j.$$

Нетрудно видеть, что точки множества E будут ее узлами:

$$\forall x \in E \quad x \in X.$$

Замечание 1.1. Не ограничивая общности, будем считать, что $k_j \geq 2$, $j \in J_n$, иначе некоторые координаты точек E могут быть зафиксированы и размерность пространства уменьшена.

Сформируем множество различных координат точек E, объединив множества (1.12) и выделив основу полученного мультимножества:

$$\mathcal{A} = \{e_1, ..., e_k\} = S(\bigcup_{j=1}^{n} X^j). \tag{1.13}$$

Множество $\mathcal{A}$ будем называть <u>образующим</u> для E.

Отметим следующие особенности дискретной решетки $\mathcal{A}^n$, построенной на его основе:

- $k \geq \max_{j \in J_n} k_j$, откуда следует, что $k \geq 2$, $|\mathcal{A}^n| \geq 2^n$;
- $X \subseteq \mathcal{A}^n$, соответственно, $\forall x \in E \quad x \in \mathcal{A}^n$.

Рассмотрим задачи разложения множества E по поверхностям и его декомпозиции на попарно непересекающиеся подмножества.

Пусть функция $h(x)$ задана на множестве E. Задача разложения множества E по семейству поверхностей, заданных функцией $h(x)$, состоит в поиске поверхностей уровня этой функции:

$$\mathcal{S}^i = \{x \in \mathbb{R}^n : \ h(x) = h_i\}, \ i \in J_{m_{h(x)}}, \tag{1.14}$$

таких что

$$h_i < h_{i+1}, \ i \in J_{m_{h(x)}-1}, \tag{1.15}$$

$$\mathcal{E}^i = E \cap \mathcal{S}^i \neq \emptyset, \ i \in J_{m_{h(x)}}, \tag{1.16}$$

$$E = \bigcup_{i=1}^{m_{h(x)}} \mathcal{E}^i. \tag{1.17}$$

Заметим, что при этом будет выполнено:

$$\forall\, i \neq i' \ \mathcal{E}^i \cap \mathcal{E}^{i'} = \emptyset, \tag{1.18}$$

откуда видно, что одновременно построена декомпозиция (1.17) множества E на попарно непересекающиеся подмножества (1.16), число компонент в которой будет существенно зависеть от вида функции $h(x)$. Далее будем называть множество E - $\underline{m_{h(x)}\text{-уровневым по функции } h(x)}$.

При этом возникают следующие подлежащие рассмотрению вопросы:

- какими свойствами обладают образованные дискретные множества $\{\mathcal{E}^i\}_{i \in J_{m_{h(x)}}}$ в зависимости от вида множества E и функции $h(x)$;
- как найти допустимые точки этих множеств;
- каким образом задать функцию $h(x)$, чтобы уменьшить или увеличить число компонент в разложении и т.д.

В зависимости от того, какая функция $h(x)$ будет взята за основу разложения, формулы (1.16), (1.17) будут задавать разложение E по параллельным плоскостям, вложенным сферам, эллипсоидам, кусочно-линейным поверхностям и т.п.

Предположим, что $h(x)$ выпукла[1] и выпуклое множество $C^1 = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \leq h_1\}$ содержит внутренние точки, т.е. является выпуклым телом [84]. Тогда поверхность $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \; h(x) = h_1\}$ представляет собой границу выпуклого тела C^1 и называется полной выпуклой поверхностью (a complete convex surface), а произвольное ее подмножество, в том числе она сама, - выпуклой поверхностью [84, 117]. Тогда, с учетом (1.15), имеем, что:

$$C^i = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \leq h_i\}\,,\; i \in J_{m_{h(x)}} - \tag{1.19}$$

это множество выпуклых тел, соответственно, (1.14) будет семейством полных выпуклых поверхностей, а формулы (1.16), (1.17) будут задавать разложение E по данным выпуклым поверхностям.

[1]Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n$ - выпукло.

Функция $f(x)$, заданная на D, называется выпуклой (выпуклой вниз, convex) на D, если для любых $x, y \in D$ и для произвольного $\lambda \in [0,1]$ выполнено неравенство:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\, y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)\, f(y)\,.$$

Если на D это неравенство выполнено как строгое $\forall \lambda \in (0,1)$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\, y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)\, f(y)\,,$$

функция $f(x)$ называется строго выпуклой (strictly convex).

Если к тому же существует $\rho > 0$ такое, что $\forall \lambda \in (0,1)$, $\forall\, x, y \in D$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\, y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)\, f(y) - \lambda(1-\lambda)\rho||x-y||_2,$$

функция $f(x)$ сильно выпуклая (strongly convex) на D с параметром ρ.

Введем обозначение $f_i(x) = h(x) - h_i$ и перепишем (1.14) в виде:

$$\mathcal{S}^i = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f_i(x) = 0\},\ i \in J_{m_{h(x)}}. \tag{1.20}$$

Выпуклые поверхности обладают особенностью, что гауссова кривизна и все главные кривизны всех их точек неотрицательны. Если функция $h(x)$ будет строго выпуклой, множество точек ее недифференцируемости не более чем счетно. Соответственно, множество точек поверхностей (1.20) с нулевой гауссовой кривизной также будет не более чем счетно, т.е. они будут строго выпуклыми поверхностями [106]. Следовательно, формулы (1.16), (1.17) будут задавать разложение E по семейству строго выпуклых поверхностей. Наконец, если $h(x)$ - сильно выпуклая функция, гауссова кривизна всех точек поверхностей (1.20) положительна, т.е. эти поверхности $n-1$-выпуклые [106], соответственно, будет иметь место разложение (1.16), (1.17) по семейству $n-1$-выпуклых поверхностей.

Преимущественно будут рассматриваться два вида разложений конечных множеств по семействам выпуклых поверхностей - по параллельным гиперплоскостям и строго выпуклым поверхностям.

Перейдем к рассмотрению одноуровневых по заданной функции $h(x)$ множеств. Положим, $m_{h(x)} = 1$. Тогда, опуская индекс i в формулах (1.19) и (1.20), перепишем их в виде:

$$C = C^1 = \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) \leq 0\} = conv\, S, \tag{1.21}$$

$$S = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) = 0\}. \tag{1.22}$$

В случае, если $f_1(x)$ - строго выпуклая функция, тело (1.21) будем называть строго выпуклым телом (a strongly convex body). Его границей служит строго выпуклая поверхность S, совпадающая с множеством крайних точек C. Напомним, что точка x называется крайней точкой множества C, если ее нельзя представить в виде выпуклой комбинации любых других двух точек этого множества.

Дадим следующие определения.

Определение 1.1. *Множество точек E будем называть поверхностно расположенным (S-поверхностно расположенным, a surface located set), если существует строго выпуклая поверхность S такая, что:*

$$E \subseteq S. \tag{1.23}$$

Другими словами, E - это S-поверхностно расположенное множество, если существует $f_1(x)$ такая, что

$$\forall \lambda \in (0,1) \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}^n \; f_1(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y), \tag{1.24}$$

формула (1.22) задает строго выпуклую поверхность и выполнено условие (1.23).

В зависимости от вида S осуществим классификацию поверхностных множеств.

Определение 1.2. *Множество E называется сферически расположенным (a spherically located set), если существует гиперсфера (сфера, a hypersphere,* *a sphere) радиуса r с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$:*

$$S_r(a) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = r^2 \right\} \tag{1.25}$$

такая, что

$$E \subseteq S_r(a). \tag{1.26}$$

Таким образом, если поверхность (1.22) имеет вид

$$S = S_r(a), \tag{1.27}$$

множество (1.23) будет сферически расположенным.

Аналогично введем в рассмотрение еще два класса множеств:

- множество E вида (1.23) назовем <u>эллипсоидально расположенным</u> (an ellipsoidally located set), если (1.22) – <u>эллипсоид</u> (an ellipsoid) с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (x - a)^T A (x - a) = 1 \right\}, \tag{1.28}$$

  где $A \succ 0$ - положительно определенная матрица порядка n;

- множество E назовем <u>суперсферически расположенным</u> (a superspherically located set), если поверхность (1.22) задана уравнением:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{2\alpha} = r^{2\alpha} \right\}, \tag{1.29}$$

  где $\alpha \in (0.5, \infty)$, т.е. S представляет собой суперсферу [42] радиуса r с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$ и коэффициентом деформации α.

Суперсферу (1.29) удобно задать с помощью l_p-нормы[2]:

$$\|x - a\|_{2\alpha} = r.$$

Гиперсфера (1.25) является частным случаем суперсферы для $\alpha = 1$ и может быть задана помощью евклидовой нормы[3]:

$$\|x - a\|_2 = r.$$

Эллипсоид (1.28) удобно задавать уравнением:

$$x^T A x + b^T x + c = 0, \tag{1.30}$$

где $A \succ 0$, $x, b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^1$.

Если из условий (1.22)-(1.24) не выполнено только (1.24), будем говорить, что E расположено на поверхности S. При этом выпуклое тело (1.21) может быть как ограничено, так и неограничено (далее Случай 1.2.1), множество точек S, в которых функция $f_1(x)$ недифференцируема, может быть несчетно (далее Случай 1.2.2).

Проиллюстрируем это на примерах.

Случай 1.2.1: если $f_1(x)$ - линейная, то область (1.21) представляет собой полупространство, т.е. не ограничена. В данном случае будем говорить,

[2] $\|x\|_p = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p)^{1/p}$ - ℓ_p-норма $p \geq 1$.

[3] $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$ - ℓ_2-норма (евклидова норма, the Euclidean norm)

что E расположено на гиперплоскости (1.22) или лежит в ней.

Случай 1.2.2: В качестве примера ограниченной области (1.21) рассмотрим $f_1(x) = \|x - a\|_1 - 1$ [4] или $f_1^*(x) = \|x - a\|_\infty - 1$ [5]. Поскольку $f_1(x)$, $f_1^*(x)$ - выпуклые кусочно-линейные функции, т.е. не являются строго выпуклыми, в этом случае будем говорить, что E расположено на полиэдральной поверхности (кусочно-линейной поверхности, многогранной поверхности, a polyhedral surface):

- поверхности гипероктаэдра (см. п. 6.1) в первом случае:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_1 = 1\}; \tag{1.31}$$

- на поверхности гиперкуба (см. п. 5.9 - во втором):

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_\infty = 1\}. \tag{1.32}$$

Соответственно, само выпуклое тело (1.21) будет представлять собой многогранник, который в случае (1.31) является гипероктаэдром, а в случае (1.32) – гиперкубом.

Предположим, что $h(x)$ - строго выпуклая функция такая, что формулы (1.14), (1.15) задают разложение множества E по семейству строго выпуклых поверхностей и в результате осуществляется декомпозиция (1.16)-(1.18) множества E на поверхностные множества вида (1.16). Особенностью

[4] $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ - ℓ_1-норма (манхэттенское расстояние, the Taxicab norm or Manhattan norm)

[5] $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ - ℓ_∞-норма (максимальная норма, a maximum norm)

разложения (1.14), (1.15) является то, что, поскольку $h(x)$ - строго выпукла,

$$C^i = \{x \in \mathbb{R}^n : \ h(x) \leq h_i\}, \ i \in J_{m_{h(x)}} \tag{1.33}$$

задает последовательность строго выпуклых тел, вложенных друг в друга:

$$C^i \subset C^{i+1}, \ i \in J_{m_{h(x)}-1}.$$

В частности, если $h(x) = (x - x_0)^2$, формулы (1.14), (1.15) задают разложение множества E по семейству гиперсфер, в результате чего осуществляется декомпозиция E на сферически расположенные множества. При этом множество (1.33) представляет собой конечную последовательность вложенных друг в друга шаров.

Перейдем к рассмотрению случая, когда функция $h(x)$ линейная:

$$h(x) = \overline{n}^T x, \ \text{где } \overline{n}^T \neq \mathbf{0}. \tag{1.34}$$

Поскольку функция $h(x)$ в данном случае определяется нормалью $\overline{n}$ к гиперплоскости:

$$H(\overline{n}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{n}^T x = 0\}, \tag{1.35}$$

поэтому формулы (1.14)-(1.18) можно переписать при помощи $\overline{n}$, воспользовавшись обозначением $m_{(\overline{n})}$ для числа значений, принимаемых функцией (1.34) на E, из чего следует, что $m_{(\overline{n})} = m_{h(x)}$:

$$
\begin{aligned}
&E = \bigcup_{i=1}^{m_{(\overline{n})}} E^i(\overline{n}),\\
&\forall\, i \neq i' \ E^i(\overline{n}) \cap E^{i'}(\overline{n}) = \varnothing;\\
&E^i(\overline{n}) = H^i(\overline{n}) \cap E \neq \varnothing,
\end{aligned}
\tag{1.36}
$$

где

$$
H^i(\overline{n}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{n}^T x = h_i\},\ i \in J_{m_{(\overline{n})}}. \tag{1.37}
$$

Формула (1.37) задает разложение множества E по плоскостям, параллельным плоскости (1.35), для которого будем использовать термин <u>разложение E по плоскостям в направлении вектора</u> $\overline{n}$, а само множество E будем называть <u>$m_{(\overline{n})}$-уровневым в направлении вектора</u> $\overline{n}$.

Далее, чтобы подчеркнуть, что рассматривается разложение в направлении нормали к гиперплоскости H, будем пользоваться для него обозначением $\overline{n}_H$, соответственно, $m_{(\overline{n}_H)}$ будет числом уровней E в данном направлении. Для случая, если (1.35) - координатная плоскость $x_j = 0$, воспользуемся следующим обозначением:

$$
H(\overline{n}_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0\}, \tag{1.38}
$$

где

$$
\overline{n}_j = (n_{ij})_{i \in J_n} :\ n_{ij} = \begin{cases} 1,\ i = j, \\ 0,\ i \neq j \end{cases} \quad (i \in J_n)
$$

Рассмотрим разложение E по плоскостям, параллельным координатной плоскости (1.38). Будем называть его <u>разложением E по координате x_j</u>, а величину $m_{(\overline{n}_j)}$ - <u>числом уровней E по координате</u> x_j $(j \in J_n)$.

Максимум величин $m_{(\overline{n}_j)}$ $(j \in J_n)$ обозначим через

$$m'(E) = \max_{j \in J_n} m_{(\overline{n}_j)} \tag{1.39}$$

и назовем числом уровней множества E по координатам, а само это множество - $m'(E)$-уровневым по координатам.

Установим связь величины $m'(E)$ с мощностью k (см. (1.13)) образующего E множества.

Запишем разложения E по координатам на основе формулы (1.12) и следующих очевидных представлений этого множества:

$$E = \bigcup_{i=1}^{k_j} E^{ij},\ j \in J_n. \tag{1.40}$$

где

$$H^{ij} = H^i(\overline{n}_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = e_{ij}\}; \tag{1.41}$$

$$E^{ij} = H^{ij} \cap E \neq \emptyset,\ i \in J_{k_j},\ j \in J_n. \tag{1.42}$$

Откуда следует, что $m_{(\overline{n}_j)} = k_j$ $(j \in J_n)$, соответственно,

$$m'(E) = \max_{j \in J_n}\ k_j.$$

Отметим, что $m'(E)$ ограничена сверху мощностью образующего E множества $\mathcal{A}$, а снизу, согласно замечанию 1.1, - значением 2, откуда имеем $2 \leq m'(E) \leq k$.

Если о конечной точечной конфигурации E известно, что она порождается образующим множеством $\mathcal{A} = \{e_1, ..e_k\}$, но представление (1.12), (1.13) для него неизвестно, E представимо следующим образом:

$$E = \bigcup_{i=1}^{k} E^{ij},\ j \in J_n; \tag{1.43}$$

$$H^{ij} = H^i(\overline{n}_j) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = e_i\},\ i \in J_k,\ j \in J_n; \tag{1.44}$$

$$E^{ij} = H^{ij} \cap E. \tag{1.45}$$

При этом некоторые из множеств (1.45) могут быть пустыми, соответственно, представление (1.43)-(1.45) не будет разложением E по параллельным плоскостям в случае, если последнее из условий (1.36) не выполнено.

Чтобы перейти к разложению E, определим множества

$$I^j \subseteq J_k :\ E^{ij} \neq \emptyset,\ k_j = |I^j|,\ j \in J_n. \tag{1.46}$$

Теперь можно записать разложение множества E по координатам:

$$E = \bigcup_{i \in I^j} E^{ij},\ j \in J_n, \tag{1.47}$$

где I^j определено из условия (1.46).

Заметим, что $X^j = \{e_{j1}, ..., e_{jk_j}\} = \{e_i\}_{j \in I^j},\ j \in J_n$, т.е. разложение (1.44)-(1.47) и (1.40)-(1.42) идентичны.

Введем обозначения для проекций множеств (1.45) на плоскости (1.44):

$$E'^{ij} = Pr_{H^{ij}} E^{ij},\ i \in J_k,\ j \in J_n. \tag{1.48}$$

Отметим, что множества (1.45) как правило представимы в виде проекции исходной конечной точечной конфигурации E на H^{ij}:

$$E^{'ij} = Pr_{H^{ij}}E,\ i \in J_k,\ j \in J_n. \tag{1.49}$$

В терминах проекций (1.48) условие (1.46) можно переписать в виде:

$$I^j \subseteq J_k :\ E^{'ij} \neq \emptyset,\ k_j = |I^j|,\ j \in J_n.$$

Соответственно, признаком того, что (1.45)-(1.47) задает разложение E по координатам будет

$$E^{'ij} \neq \emptyset,\ i \in J_k,\ j \in J_n, \tag{1.50}$$

что эквивалентно $E^{ij} \neq \emptyset,\ i \in J_k,\ j \in J_n$.

1.3 Конечные множества в $\mathbb{R}^n$ и многогранники

Рассмотрим множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Его выпуклой оболочкой называется совокупность всех выпуклых комбинаций точек D, а аффинной оболочкой называется множество всех аффинных комбинаций его точек. Выпуклая и аффинная оболочки множества D обозначаются $conv\ D$ и $aff\ D$ соответственно.

Определение 1.3. *Выпуклая оболочка конечного множества D евклидова пространства называется многогранником (выпуклым многогранником,* *политопом, a polytope), порожденным множеством D.*

Исходя из этого определения, выпуклая оболочка

$$P = conv\ E \tag{1.51}$$

конечной точечной конфигурации E представляет собой многогранник.

Размерность (a dimension) многогранника P - dim P - это размерность его аффинной оболочки:

$$d = \dim\ P = \dim\ aff\,(P)\,, \tag{1.52}$$

т.е. это максимальное число линейно независимых векторов в $aff\,(P)$.

Многогранник, удовлетворяющий условию (1.52), называется d-мерным многогранником (d-многогранником, a d-polytope).

Многогранник называется полномерным (a full-dimensional polytope), если его размерность совпадает с размерностью пространства, в котором он задан. Например, многогранник $P \subset R^n$ - полномерный тогда и только тогда, когда $\dim\ P = n$.

Поскольку по предположению E - не пусто, P также непустое множество, поэтому для него существует опорная гиперплоскость H, т.е. плоскость, имеющая общие точки с P, и такая, что весь многогранник расположен в одном из двух полупространств, определяемых гиперплоскостью H. Образованное в результате непустое множество $F = P \cap H$ называется гранью (a face) многогранника P, порожденной опорной гиперплоскостью H, a $i = \dim\ F$ - размерностью грани многогранника. Грани размерности i называют i-гранями многогранника и в зависимости от величины $i \in J^0_{d-1} = J_{d-1} \cup \{0\}$ для обозначения i-граней P используют следующую терминологию: 0-грани – это вершины P (vertices), 1-грани – его ребра (edges), ..., $d-1$-грани – гиперграни (facets).

Пусть $\mathbf{F}_i$ - множество i-граней P, а f_i - их количество ($f_i = |\mathbf{F}_i|$), $i \in J^0_{d-1}$, $\mathbf{H}$ - множество опорных плоскостей к гиперграням P. Величины f_i, $i \in J^0_{d-1}$ являются компонентами f-вектора многогранника P, такого, что $f = (f_0, f_1, ..., f_{d-1})$.

Множество вершин многогранника P принято обозначать $vert\,P$ или $V(P)$, ребер - $edges\,P$ или $E(P)$, гиперграней - $facets\,P$ или $F(P)$, т.е.

$$vert\,P = \mathbf{F}_0,\ edges\,P = \mathbf{F}_1,\ facets\,P = \mathbf{F} = \mathbf{F}_{d-1},$$

соответственно,

$$|vert\,P| = f_0,\ |edges\,P| = f_1,\ |\mathbf{F}| = |\mathbf{H}| = f_{d-1}.$$

Для множества вершин многогранника P будем использовать обозначение V, а для его элементов - $v_{[.]}$, т.е.

$$V = vert\,P = \{v_i\}_{i \in J_{n_V}},$$

где $n_V = |V| = f_0$. Аналогично будем использовать обозначение $F_{[.]}$ для гиперграней P и $H_{[.]}$ - для соответствующих им опорных гиперплоскостей:

$$\mathbf{F} = \{F_i\}_{i \in J_{f_{d-1}}},\ \mathbf{H} = \{H_i\}_{i \in J_{f_{d-1}}}.$$

Введем в рассмотрение так называемые V- и H-представления многогранника P.

V-представление (V-presentation, параметрическая форма задания) многогранника P - это его задание в форме выпуклой оболочки множества его вершин:

$$P = conv\, V. \tag{1.53}$$

Заметим, что представления (1.51) и V-представление (1.53) являются частными случаями представлений P вида:

$$\begin{aligned} &P = conv\, E', \\ &\text{где } E: \; V \subseteq E' \subseteq E, \end{aligned} \tag{1.54}$$

для $E' = V$ и $E' = E$ соответственно.

Отличительной особенностью V-представления в семействе (1.54) является то, что оно является минимальным в том смысле, что исключение любого элемента из V и последующее формирование выпуклой оболочки заведомо ведет к образованию многогранника, отличного от P:

$$\forall\, v \in V \quad P \supset P' = conv(P \backslash \{v\}).$$

Соответственно, оно минимально по количеству точек в порождающем P множестве, иначе говоря, элементов в V-представлении многогранника. Случай, когда семейство (1.54) включает единственное представление P, что возможно лишь в случае, когда

$$E = V = vert\ P, \tag{1.55}$$

иначе говоря $|n_E| = |n_V|$, будет выделен особо.

Определение 1.4. *Множество E назовем вершинно расположенным (a vertex located set), если оно совпадает со множеством вершин своей выпуклой оболочки, т.е.*

$$E = vert\ conv\ E. \tag{1.56}$$

С учетом (1.51), условие (1.56) может быть переписано в виде выражения (1.55), которое будет использовано в дальнейшем как условие вершинной расположенности E.

Если множество E не является вершинно расположенным, то для него выполнено условие $\overline{E} = E \backslash V \neq \emptyset$, соответственно, оно содержит внутренние точки многогранника P или его граней.

Проверка условия (1.55), а в случае его невыполнения, выявление признаков (необходимых и достаточных) того, является ли произвольная $x \in E$ вершиной P - это задача построения V-представления многогранника P, если сам он задан в форме (1.51). Решение этой задачи для вершинно расположенных множеств тривиально - принадлежность E является необходимым и достаточным условием того, чтобы точка x была вершиной P. Однако для произвольного E проверка выполнения условия (1.55), выделение множества $\overline{E}$ из E и, соответственно, задача построения V-представления может вызывать значительные трудности.

Данная задача решена для вершинно расположенных множеств, если сами они заданы множеством своих элементов. Кроме того, эти множества обладают еще рядом специфических особенностей, которые будут рассмотрены далее. Всякое не вершинно расположенное множество E позволяет декомпозицию (1.17), (1.18) на вешинно расположенные.

Перейдем к рассмотрению <u>H-представления</u> (H-presentation, аналитическая форма задания) многогранника P, а именно, представления с помощью линейной системы ограничений:

$$\begin{aligned} &A'x \le a'_0,\ A''x = a''_0,\\ &x \in \mathbb{R}^n,\ A' = (a'_{ij}) \in \mathbb{R}^{n' \times n},\ A'' = (a''_{ij}) \in \mathbb{R}^{n'' \times n},\\ &a'_0 = (a'_{i0}) \in \mathbb{R}^{n'},\ a''_0 = (a''_{i0}) \in \mathbb{R}^{n''}. \end{aligned} \tag{1.57}$$

<u>Задача построения H-представления многогранника P</u> состоит в поиске числа n', n'', матриц A', A'' и векторов a'_0, a''_0, таких, что (1.57) представляет собой линейную систему ограничений P.

Пусть $A' = (a'_{ij})_{i \in J_{n'}, j \in J_n}$, $a'_0 = (a'_{i0})^T_{i \in J_{n'}}$; $A'' = (a''_{ij})^T_{i \in J_{n''}, j \in J_n}$, $a''_0 = (a''_{i0})_{i \in J_{n''}}$. Перепишем (1.57) в векторном виде:

$$\overline{a}'_i x \le a'_{i0},\ i \in J_{n'},\ \overline{a}''_i x = a''_{i0},\ i \in J_{n''}, \tag{1.58}$$

$$\text{где } \overline{a}'_i = (a'_{ij})_{j \in J_{n'}},\ \overline{a}''_i = (a'_{ij})_{j \in J_{n''}}. \tag{1.59}$$

где

$$\overline{a}'_i = (a'_{ij})_{j \in J_{n'}},\ \overline{a}''_i = (a'_{ij})_{j \in J_{n''}}.$$

Замечание 1.2. Для ранга матрицы A'' введем обозначение:

$$\rho = rank\ A''. \tag{1.60}$$

Величина (1.60) позволяет оценить снизу размерность P:

$$\dim\ P \geq n - \rho. \tag{1.61}$$

Если при этом найдена внутренняя точка P аффинного подпространства $\overline{a}_i''x = a_{i0}''$, $i \in J_{n''}$, это неравенство обращается в равенство, т.е. если

$$\exists x^0 \in E:\ A'x^0 = a_0',\ A''x^0 < a_0'' \Rightarrow$$

$$\dim\ P = n - \rho. \tag{1.62}$$

Каждое уравнение H-преставления многогранника P задает гиперплоскость, а неравенство определяет полупространство и ограничивающую его гиперплоскость, которая может быть опорной плоскостью его гиперграни, а может не быть. При этом каждая гипергрань P представлена некоторым ограничением из H-преставления. Соответственно, справедлива оценка $n' + n'' \geq |\mathbf{F}| = f_{d-1}$.

Перейдем к рассмотрению случая, когда данное неравенство обращается в равенство, т.е.

$$n' + n'' = |\mathbf{F}|. \tag{1.63}$$

H-представление многогранника P, минимальное по числу входящих в него ограничений - компонент этого представления, называется <u>несводимым H-представлением</u> многогранника P (an irredundant H-presentation).

Система ограничений (1.57) является несводимым H-представлением P, если исключение из него любого ограничения приводит к релаксации P.

Таким образом, H-представление (1.58), (1.59) многогранника P - несводимо, если

$$\begin{aligned} &\forall\, i' \in J_{n'} \quad P \subset P'_{i'} = \{x \in \mathbb{R}^n : \, \overline{a}'_i x \le a'_{i0}\}_{i \in J_{n'} \setminus \{i'\}}; \\ &\forall\, i'' \in J_{n''} \quad P \subset P''_{i''} = \{x \in \mathbb{R}^n : \, \overline{a}''_i x \le a''_{i0}\}_{i \in J_{n''} \setminus \{i''\}}. \end{aligned} \tag{1.64}$$

Если условие (1.64) не выполнено, H-представление (1.57) называется сводимым.

Заметим, что множества $P'_{i'}$, $P''_{i''}$ ($i' \in J_{n'}$, $i'' \in J_{n''}$) в (1.64) могут быть как ограниченными, так и неограниченными. В первом случае будем применять к ним термин "релаксационный" многогранник.

Определение 1.5. *Многогранник P' будем называть релаксационным по отношению к многограннику P, если $P' \supset P$ и H-представление P' является подсистемой несводимого H-представления P'.*

Задача построения несводимого H-представления многогранника состоит в поиске линейной системы ограничений вида (1.57), (1.64). Если эта задача решена, то, поскольку каждое уравнение (1.57) задает опорную плоскость, соответствующую гиперграни P, а каждое неравенство определяет некоторую такую гиперплоскость, то система уравнений этих опорных гиперплоскостей (далее просто система уравнений гиперграней) многогранника P извлекается непосредственно из H-представления:

$$\mathbf{H} : A'x = a'_0, A''x = a''_0.$$

Соответственно, для числа гиперграней P справедливо (1.63).

Если представление (1.58), (1.59) - несводимое, то, учитывая замечание

1.2, величина ρ будет удовлетворять равенству:

$$\rho = n''. \tag{1.65}$$

Соответственно, оценка (1.61) и условие (1.62) приобретают вид:

$$\dim\ P \geq n - \rho,$$
$$\dim\ P = n'$$

соответственно, т.е. размерность многогранника P совпадает с числом неравенств n' в его несводимом H-представлении.

Замечание 1.3. Построение V-представления по H-представлению является задачей перечисления вершин. И наоборот, построение H-представления по V-представлению многогранника представляет задачу перечисления гиперграней. Исходя из взаимосвязи вершин и гиперграней многогранника, эти две проблемы эквивалентны [15].

Каждой вершине x многогранника P можно поставить в соответствие множество инцидентных гиперграней (incident/adjacent faceets) и ребер многогранника (adjacent edges). Первое множество включает все гиперграни, в пересечении которых образуется x. Второе множество содержит все ребра P, одним из концов является x, а вторым - смежная к x вершина (an adjacent vertex) этого многогранника. Произвольной вершине $x \in V$ многогранника P можно поставить в соответствие множество смежных к ней вершин или

(или окрестность вершины x, an x-neighbourhood) :

$$N(x) = N_P(x) = \{y \in V : \ y \leftrightarrow x\}, \tag{1.66}$$

соединенных с ней ребром $(x, y) \in edges\,P$. Далее по тексту будет использовано обозначение $N(x)$ при рассмотрении окрестности одного многогранника и $N_{[.]}(x)$ при рассмотрении нескольких многогранников, где [.] - обозначение многогранника.

Число смежных вершин P к $x \in V$ обозначим через $\mathcal{R}(x)$:

$$\mathcal{R}(x) = |N(x)|.$$

$\mathcal{R}(x)$ - это степень вершины (a vertex degree) x.

Если все вершины многогранника имеют одинаковое число смежных - $\exists\, \mathcal{R} \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in V : \ \mathcal{R} = \mathcal{R}(x),$$

они называются регулярными вершинами, а величина $\mathcal{R}$ - их степенью регулярности вершин P.

Выделение классов многогранников с регулярными вершинами, формулировка условий выделения окрестности $N(x)$ из множества V для каждой $x \in V$ многогранника P и критерия смежности вершин P в целом исследуются в рамках изучения комбинаторных свойств многогранников методами полиэдральной комбинаторики либо графов многогранников в рамках теории графов.

Здесь отметим лишь одну особенность многогранников с регулярными вершинами - число его ребер может быть найдено по формуле $|edges P| = \frac{|V|\mathcal{R}}{2}$

или $f_1 = \frac{f_0 \mathcal{R}}{2}$.

Одним из известных видов многогранников являются простые многогранники (simple polytopes), степень регулярности вершин которых совпадает с их размерностью, т.е.

$$\mathcal{R} = \dim\ P.$$

В число простых многогранников входят симплексы, гиперкубы и многие другие. Интересно то, что все они обладают такой особенностью, что все их грани произвольной размерности также являются простыми многогранниками.

Еще один класс многогранников - симплициальные многогранники (simplicial polytopes), все грани которых представляют собой симплексы. Среди них гипеоктаэдрры, симплексы и др.

Важной задачей в комбинаторной теории многогранников является задача классификации и перечисления многогранников с заданной структурой граней [5, 52, 61, 81], в частности, многогранников с заданным f-вектором.

В этом классе, в свою очередь, можно выделить подклассы так называемых комбинаторно эквивалентных многогранников.

Введем следующие определения.

Графом $H(P)$ многогранника P со множеством вершин $V(P)$ и ребер $E(P)$ называется граф, образованный вершинами и ребрами P - $H(P) = (V(P), E(P))$.

Графы $H(P)$ и $H(P')$ изоморфны, если существует биекция $V(P) \xrightarrow{\phi} V(P')$ между множествами вершин многогранников P, P', такая, что произвольные две вершины графа $H(P)$ - смежны тогда и только тогда, когда соответствующие две вершины графа $H(P')$ - смежные:

$$\begin{aligned} &\forall v_1, v_2 \in V(P): \ v_1 \leftrightarrow v_2 \ \Leftrightarrow \\ &v_1^{'} = \phi(v_1), v_2^{'} = \phi(v_2) : v_1^{'}, v_2^{'} \in V(P'), \ v_1^{'} \leftrightarrow v_2^{'}. \end{aligned} \tag{1.67}$$

Многогранники называются комбинаторно эквивалентными (комбинаторно изоморфными, combinatorially equivalent polytopes), если соответствующие им графы изоморфны.

Каждому многограннику P, для которого начало координат является внутренней точкой, можно поставить в соответствие двойственный многогранник P^{Δ} (a dual polytope, a polar polytope), f-вектор которого совпадает с f-вектором многогранника P с точностью до обратного переупорядочивания координат. То есть, если $f = (f_i)_{i \in J^0_{d-1}}$ является f-вектором многогранника P, то $f^{\Delta} = (f_{d-i+1})_{i \in J^0_{d-1}}$ будет f-вектором двойственного к нему многогранника P^{Δ}. В частности, $|\mathbf{F}_P| = |V_{P^{\Delta}}|$ и $|V_P| = |\mathbf{F}_{P^{\Delta}}|$.

Так, например, гиперкуб и гипероктаэдр двойственны друг другу, а симплекс двойственен сам себе. Интересной особенностью простых многогранников является то, что двойственные к ним многогранники - симплициальные, и наоборот. Гиперкуб и гипероктаэдр иллюстрирует это свойство, поскольку, как было отмечено, гиперкуб - простой многогранник, а гипероктаэдр - симплициальный.

Если для многогранника P найдены V-, H-представления, то можно говорить о построении разложении множества его вершин по параллельным плоскостям в направлении нормалей к его гиперграням.

Определение 1.6. *Многогранник P называется $m''(P)$-уровневым, если для любой гиперграни $F_1 \in \mathbf{F}$ и соответствующей ей опорной гиперплоскости $H_1 \in \mathbf{H}$ существует семейство из $(m''(P)-1)$-ой гиперплоскостей $\{H_i\}_{i \in J_{m''(P)-1} \setminus \{1\}}$, параллельных H_1, таких, что все вершины V лежат на гиперплоскостях $\{H_i\}_{i \in J_{m''(P)}}$.*

Пользуясь терминологией $m_{(\overline{n})}$-уровневого множества в направлении заданного вектора $\overline{n}$, это определение говорит о том, что число уровней разложения множества V в направлении нормалей к гиперграням P не превосходит $m''(P)$ и в направлении хотя бы одной гиперграни достигает этой величины. То есть, если найти число $m(\overline{n}_F)$ уровней разложения V в направлении каждой его гиперграни $F \in \mathbf{F}$, то $m''(P)$ будет максимумом этих величин:

$$m''(P) = \max_{H \in \mathbf{H}} m(\overline{n}_F), \tag{1.68}$$

где вектора $\overline{n}_F$ найдены из условия:

$$H_F = \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{n}_F^T x = b_F\} \in \mathbf{H},\ F \in \mathbf{F},\ b_F \in \mathbb{R}^1. \tag{1.69}$$

Величина $m''(P)$ ограничена снизу числом два:

$$m''(P) \geq 2, \tag{1.70}$$

поскольку $\forall F \in \mathbf{F}\ E \cap H_F, E \setminus E \cap H_F \neq \emptyset$.

Многогранники, для которых неравенство (1.70) обращается в равенство $m''(P) = 2$, образуют довольно широкий класс двухуровневых многогранников (2-level polytopes) , областями применения которых являются полиэдральная комбинаторика (polyhedral combinatorics), комбинаторная оптимизация (combinatorial optimization), коммуникационная сложность (communication complexity), статистика (statistics) и др. [1, 2, 10, 19, 20, 21].

Среди известных на сегодняшний день двухуровневых многогранников гиперкубы и гипероктаэдры, многогранники независимых множеств совершенных графов (stable/independent set polytopes of perfect graphs), многогранники Хансена (Hansen polytopes), многогранники Ханнера (Hanner polytopes) (см. п. 6.1.2), многогранники Биркгоффа (Birkhoff polytopes), многогранники порядка конечных графов сравнимости (order polytopes of finite posets) и др. Сравнительно недавно новое подсемейство двухуровневых многогранников было обнаружено в теории матроидов в числе базовых многогранников двухуровневых матроидов (the base polytopes of 2-level matroids) [20, 21]. С каждым из указанных классов двухуровневых многогранников и соответствующих множеств их вершин связана та или иная задача оптимизационная задача, например, задача поиска максимального независимого множества в графе может быть сформулирована как задача оптимизации на множестве вершин двухуровневого многогранника независимого множества этого графа, а эта же задача на самом этом многограннике будет его релаксацией.

Многоуровневые многогранники обладают множеством интересных свойств. Здесь отметим важное свойство, что каждый двухуровневый многогранник P комбинаторно эквивалентен некоторому $(0-1)$-многограннику P', т.е. многограннику, вершинами которого являются $(0-1)$-вектора [82]:

$$\exists P' \subset \mathbb{R}^n :\ P \cong P^0,\ vertP' \subseteq B_n.$$

Так, например, n-мерный куб комбинаторно эквивалентен гиперкубу $PB_n = [0,1]^n$, а октаэдр - следующему $(0-1)$-многограннику:

$$P = conv\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}.$$

Будем рассматривать двухуровневые многогранники в контексте исследования свойств множеств их вершин, называемые по аналогии двухуровневыми множествами (см. п. 2.3).

1.4 Функциональные представления конечных множеств в $\mathbb{R}^n$ и их свойства

Пусть E - конечное множество точек в $\mathbb{R}^n$, не вырожденное в точку, а

$$\mathcal{F} = \{f_j(x)\}_{j \in J_m} - \tag{1.71}$$

множество функций, определенных на E.

Определение 1.7. *Представление множества E с помощью функциональных зависимостей*

$$f_j(x) = 0, \ j \in J_{m'}, \tag{1.72}$$

$$f_j(x) \leq 0, \ j \in J_m \backslash J_{m'}. \tag{1.73}$$

назовем функционально-аналитическим (функциональным представлением, f-представлением, a f-presentation).

Систему (1.72) назовем строгой частью (a strict part) f-представления, систему (1.73) – нестрогой частью (an unstrict part), а количество ограничений – его порядком (an order). Так, m будет порядком f-представления (1.72), (1.73), а m', $m'' = m - m'$ - порядком его строгой и нестрогой частей соответственно.

Отдельные ограничения в f-представлении (1.72), (1.73) будем называть его компонентами, а само его - m-компонентным функциональным представлением множества E.

Геометрически функциональное представление (1.72), (1.73) представляет E как пересечение m'-поверхностей:

$$S_j = \{x \in \mathbb{R}^n : f_j(x) = 0\},\ j \in J_{m'}, \tag{1.74}$$

после чего из образованного надмножества множества E, которое, не ограничивая общности, можно считать дискретным, выделяется непосредственно E при помощи ограничений (1.73), задающих некоторые подобласти $\mathbb{R}^n$:

$$C_j = \{x \in \mathbb{R}^n : f_{j+m'}(x) \le 0\},\ j \in J_{m''}. \tag{1.75}$$

В терминах (1.74), (1.75) тот факт, что (1.72), (1.73) представляет собой функциональное представление E, можно представить следующим образом:

$$E = \left(\bigcap_{j \in J_{m'}} S_j\right) \bigcap \left(\bigcap_{i \in J_{m''}} C_j\right).$$

Осуществим классификацию функциональных представлений в зависимости от вида входящих в него функций, а также порядка строгой и нестрогой его частей и функционального представления в целом.

По виду функций (1.71), (1.73), функциональные представления множества E могут быть линейные и нелинейные, непрерывные, дифференцируемые, гладкие, выпуклые, полиномиальные, тригонометрические и т.п. В свою очередь, для этих видов может быть введена дальнейшая классификация. К примеру, (1.72), (1.73) - полиномиальное f-представление E, если все функции семейства $\mathcal{F}$ - полиномы. Введя понятие степени f-представления как наивысшей степени этих полиномов, можно выделить линейные, квадратичные, кубические, биквадратичные и полиномиальные представления высших степеней.

Общая задача построения функционального представления множества E состоит в нахождении некоторой системы ограничений (1.72), (1.73), задающей множество E. Нетрудно видеть, что E имеет бесчисленное множество функциональных представлений, поэтому данная задача всегда разрешима. Действительно, чтобы построить одно из таких представлений, достаточно сформировать n различных интерполяционных полиномов по точкам E, наложив дополнительные ограничения на линейную независимость их градиентов в точках E. В результате такого построения возможна ситуация, что поверхности, задаваемые этими интерполяционными полиномами, будут иметь и другие общие точки, кроме E. Они могут быть отсечены ограничениями вида (1.73), что также всегда возможно. Например, каждую "лишнюю" точку x^0 всегда можно вырезать ограничением вида $(x-x^0)^2 \geq r_0^2$, где $r_0 > 0$ - радиус окрестности x^0, в которую не попадает ни одна точка E. В результате такого построения будет сформировано полиномиальное представление E степени $|E|-1$. В результате оказывается теоретически разрешимой не только задача существования f-представления E, но и задача поиска его полиномиального функционального представления. Более того, может ставиться вопрос о существовании и последующем построении полиномиальных представлений низших степеней. Соответственно, исходная общая задача построения функционального представления E может быть конкретизирована до задачи построения кубического, квадратичного или линейного функционального представления.

Заметим, что линейное функциональное представление (1.72), (1.73) в точности совпадает с линейной системой (1.57) и задает некоторый многогранник. Поскольку множество E - не вырождено в точку, у него не существует линейных функциональных представлений. Поэтому ставиться вопрос о существовании квадратичных представлений как полиномиальных представлений E минимальной степени.

Проведем классификацию функциональных представления в зависимости от соотношения параметров m, m', m''. В соответствии с этим введем в рассмотрение несколько типов функциональных представлений.

Определение 1.8. *Система* (1.72), (1.73) *называется:*

- <u>*строгим*</u> *представлением E, если в нем присутствует только строгая часть, т.е.*

$$m' = m,\ m'' = 0; \tag{1.76}$$

- <u>*нестрогим*</u> *– если в f-представлении есть только нестрогая часть, т.е.*

$$m' = 0,\ m'' = m;$$

- *<u>общим</u> f-представлением, если присутствуют строгая и нестрогая части, т.е.*

$$m'(m - m') > 0.$$

Например, функциональное представление

$$f_i(x) = x_i^2 - x_i = 0,\ i \in J_n \tag{1.77}$$

является строгим и для него $m = m' = n$. Оно задает множество $B_n = \{0, 1\}^n$ n-мерных булевых векторов. Геометрически (1.77) представляет множество B_n как пересечение пар параллельных плоскостей.

Это же множество можно задать и другим способом:

$$\begin{gathered} f_1(x) = (x - \mathbf{a})^2 - \frac{n}{4} = 0,\ \mathbf{a} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \in \mathbb{R}^n; \\ f_{i+1}(x) = x_i - 1 \leq 0,\ f_{i+n+1}(x) = -x_i \leq 0,\ i \in J_n \end{gathered} \tag{1.78}$$

(здесь и далее $\mathbf{a} = (a, ..., a)^T$ - вектор соответствующей размерности, $a \in \mathbb{R}^1$).

Данное представление имеет параметры $m' = 1,\ m'' = 2n,\ m = 2n + 1$, т.е. это общее f-представление. Геометрически оно задает B_n как пересечение единичного гиперкуба и описанной вокруг него гиперсферы.

Отметим, что оба приведенных функциональных представления - квадратичные.

Обобщим понятие несводимого H-представления многогранника на случай функционального представления множества. Систему ограничений (1.72), (1.73) будем называть <u>неизбыточным</u> функциональным представлением множества E, если исключение любого из его ограничений приводит к заданию собственного надмножества E:

$$\begin{aligned} &\forall\ j \in J_{m'}\ E \backslash S_j \supset E; \\ &\forall\ i \in J_{m''}\ E \backslash C_i \supset E. \end{aligned} \tag{1.79}$$

Для неизбыточных строгих представлений введем следующие определения:

- двухкомпонентное строгое функциональное представление назовем касательным, если множество E совпадает со множеством точек касания поверхностей S_1, S_2;
- n-компонентное неизбыточное строгое функциональное представление назовем пересекающимся.

Пример 1.1. Рассмотрим функциональные представления (1.77), (1.78) множества B_n. Они являются неизбыточными f-представлением, поскольку исключение любой компоненты из них ведет к заданию континуального его надмножества.

В соответствии с введенной классификацией строгих неизбыточных представлений, (1.77) - это пересекающееся функциональное представление.

В качестве примера касательного представления множества B_n можно привести:

$$S_1 : \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{n}{4}; \quad S_2 : \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{2}\right)^4 = \frac{n}{16}, \tag{1.80}$$

представляющего его как пересечение гиперсферы S_1 и суперсферы S_2 с коэффициентом деформации 2.

Покажем, что конечные множества могут задаваться однокомпонентными функциональными представлениями. Иллюстрацию проведем на примере функционального представления (1.77), осуществив свертку его компонент следующим образом:

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_i)^2 = 0. \tag{1.81}$$

Уравнение (1.81) также задает множество B_n. Оно является невыпуклым, в отличие от представлений (1.77)-(1.80). Отсюда видно, что минимальный порядок m выпуклого f-представления дискретного множества равен двум, а выпуклые касательные представления - это минимальные f-представления по числу компонент. Подобным же образом для произвольного конечного множества, для которого известно m-компонентное неизбыточное строгое представление, могут быть найдены различные неизбыточные строгие функциональные представления порядка $m \in [1, m-1]$ подобными свертками различных его компонент.

Если множество $E \subset \mathbb{R}^n$ аналитически описывается в некотором расширенном пространстве $\mathbb{R}^{n'}$, $n' > n$, будем говорить о существовании <u>расширенного функционального представления</u> (расширенное f-представление, an extended f-presentation) множества E. Подъем в пространство большей размерности [4] бывает удобен при формировании функционально-аналитических представлений множества заданного типа, например, квадратичных. Если расширенное функциональное представление построено, проецирование в исходное пространство позволяет найти f-представление этого множества.

Глава 2

Конечные точечные конфигурации и их свойства

В данной главе рассматриваются свойства различных классов конечных точечных конфигураций, в частности, выделен класс полиэдрально-поверхностных множеств в соответствии с работами [46, 47, 49] и его специальные подклассы. Изучена взаимосвязь произвольных конечных конфигураций с вершинно расположенными множествами [4, 84, 105].

Для произвольных конечных конфигураций исследована взаимосвязь с вершинно расположенными множествами в соответствии с [4, 84, 105].

Введено понятие многоуровневого множества как обобщение многоуровневого многогранника [1, 21]. Исследованы свойства многоуровневых множеств и соответствующих им многогранников. Установлено существование биекции между двухуровневым множествами и двухуровневыми многогранниками [2, 10, 19, 21], а также двухуровневыми $(0-1)$-множествами [82].

При исследовании конечных точечных конфигураций, полученных в результате теоретико-множественных операций над ними, использовались определения и теоретические положения из [24, 29, 83].

2.1 Свойства поверхностно- и вершинно расположенных множеств

Нижеследующие теоремы устанавливают взаимосвязь между вершинно- и поверхностно расположенными множествами.

Теорема 2.1. *Произвольное конечное поверхностно расположенное множество – вершинно расположено.*

Доказательство основывается на том факте, что все точки строго выпуклой поверхности S, а соответственно, и $E \subset S$ являются крайними, а множество вершин многогранника совпадает с множеством его крайних точек.

Следствие 2.1. *Конечные сферически-, эллипсоидально- и суперсферически расположенные множества являются вершинно расположенными.*

Замечание 2.1. Обоснование вершинной расположенности дискретных множеств, как правило, достаточно сложно и требует доказательства включений $vert\ P \subseteq E$ и $vert\ P \supseteq E$. Теорема 2.1 дает более простой путь, связанный с определением строго выпуклой поверхности S, описанной вокруг E. При этом вершинная расположенность множества будет непосредственно следовать из нахождения строго выпуклой функции, определяющей поверхность S.

Пусть функция $f(x)$ задана на конечном множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, а $E' \supset E$.

Определение 2.1. *Продолжением функции $f(x)$ с E на E' называется функция $F(x)$, определенная на E' и совпадающая с $f(x)$ на E, т.е.*

$$\forall\, x \in E \quad F(x) = f(x)\,. \tag{2.1}$$

Условие (2.1) кратко будем записывать в виде:

$$F(x) \underset{E}{=} f(x)\,. \tag{2.2}$$

В дальнейшем продолжение функции $f(x)$ с E на все пространство $\mathbb{R}^n$ будем называть ее продолжением с множества E.

Функция $F(x)$ называется выпуклым (строго/сильно выпуклым) продолжением функции $f(x)$ с E на E', если множество E' выпукло и $F(x)$ - выпукла (строго выпукла/сильно выпукла) на нем.

Теорема 2.2. *Если E - вершинно расположено и E' - выпуклый компакт, то для любой функции $f : E \to \mathbb{R}^1$ и для любого $\rho > 0$ существует сильно выпуклая с параметром не менее ρ функция $F : E' \to \mathbb{R}^1$, такая, что выполняется условие* (2.2).

Теорема 2.2 устанавливает существование сильно выпуклого продолжения произвольной функции с произвольного вершинно расположенного множества на выпуклый компакт, содержащий E.

Теорема 2.3. *Произвольное вершинно расположенное множество – поверхностно расположено.*

Доказательство теоремы 2.3 основано на применении теоремы 2.2 и построении строго выпуклого продолжения кусочно-линейной функции, задающей поверхность многогранника P.

Итак, теоремы 2.1 и 2.3 устанавливают взаимно-однозначное соответствие между вершинно расположенными и конечными поверхностными множествами.

Замечание 2.2. В дальнейшем функцию $f_1(x)$ в (1.24), не теряя общности, можно считать дифференцируемой, поскольку в противном случае всегда можно построить ее строго выпуклое продолжение и перейти к его рассмотрению.

Теорема 2.4. *Произвольное конечное поверхностно расположенное множество E представимо пересечением строго выпуклой поверхности S' и многогранника P', т.е. существуют S' и P', такие, что:*

$$E = P' \cap S'. \tag{2.3}$$

Доказательство этой теоремы основано на том факте, что если множество E является S-поверхностным, а P - его выпуклая оболочка, то строго выпуклое тело C, ограниченное поверхностью S, содержит многогранник P. При этом общими точками S и P являются точки E и только они. Следовательно, имеет место представление E вида:

$$E = P \cap S, \tag{2.4}$$

где P - многогранник (1.51), а поверхность S удовлетворяет условиям (1.22), (1.24). Соответственно, при выборе $S' = S, \ P' = P$ имеет место (2.3).

Для множеств вида (2.3) будет использован специальный термин.

Определение 2.2. *Конечное множество E называется <u>полиэдрально-поверхностным</u> (a polyhedral-surface set), если оно представимо в виде пересечения некоторого многогранника и строго выпуклой поверхности.*

При этом функционально-аналитическое представление множества E вида (2.3), которое включает в себя H-представление многогранника P' и уравнение строго выпуклой поверхности S', называется <u>полиэдрально-поверхностным представлением</u> множества E (a polyhedral-surface E-presentation).

Замечание 2.3. Далее в ходе изложения будут строиться полиэдрально-поверхностные представления множеств в форме (2.4), где P задан H-представлением (1.57), а строго выпуклая поверхность S - уравнением $f_1(x) = 0$. При этом заметим, что, вообще говоря, для произвольного поверхностно расположенного множества представление (2.3) также может быть справедливо, если в качестве P' выбрать P или релаксационный многогранник,а в качестве S' - не обязательно строго выпуклую, а, к примеру, полиэдральную или даже невыпуклую поверхность. Однако функционально-аналитическое представление E, построенное на основе (2.3) и состоящее из H-представления многогранника P' и уравнения поверхности S', будет полиэдрально-поверхностным представлением E только в том случае, когда поверхность S' - строго выпуклая, т.е. можно считать, что $S' = S$ и рассматривается представление E в форме (2.3), приобретающей вид:

$$E = P' \cap S. \tag{2.5}$$

Выделим класс поверхностно-полиэдральных множеств как конечных множеств евклидова пространства, допускающих представление в форме (2.4). В зависимости от вида строго выпуклой поверхности можно сформировать различные его подклассы.

В частности, множество E вида (2.5) назовем полиэдрально-сферическим (a polyhedral-spherical set), если S - гиперсфера. Если S - эллипсоид, то множество E будем называть полиэдрально-эллипсоидальным (a polyhedral-ellipsoidal set), а в случае, если S является суперсферой, множество E назовем полиэдрально-суперсферическим (a polyhedral-superspherical set). Таким образом, можно выделить классы полиэдрально-эллипсоидальных и полиэдрально-суперсферических множеств, а в результате их пересечении формируется подкласс полиэдрально-сферических множеств.

Полиэдрально-поверхностные функциональные представления этих множеств будем называть полиэдрально-суперсферическими, полиэдрально-эллипсоидальными и полиэдрально-сферическими представлениями соответственно.

Так, например, система ограничений (1.78) - это полиэдрально-сферическое представление множества B_n. Его можно обобщить и записать полиэдрально-суперсферическое представление этого множества, положив

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \frac{1}{2} \right|^k - \frac{n}{2^k} = 0;$$

$$f_{i+1}(x) = x_i - 1 \leq 0, \ f_{i+n+1}(x) = -x_i \leq 0, \ i \in J_n,$$

где $k > 1$ - константа.

В терминах полиэдрально-поверхностных множеств теорема 2.4 может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 2.5. *Произвольное конечное поверхностно расположенное множество является полиэдрально-поверхностным.*

Так, все конечные сферически расположенные множества - полиэдрально-сферические.

В дальнейшем к вершинно расположенному множеству E будем применять следующие термины:

- "полиэдрально-поверхностное множество", если аналитические описания P и S известны;
- "поверхностно расположенное множество" - если нам известно только уравнение строго выпуклой поверхности S.

В общем случае ограничимся термином "вершинно-расположенное множество".

Для каждого полиэдрально-поверхностного множества E можно записать функционально-аналитическое представление порядка $m = m' + m'' + 1$ вида (1.57),

$$f_1(x) = 0, \tag{2.6}$$

являющееся полиэдрально-поверхностным представлением множества E. Его вид будет полностью определяться видом функции $f_1(x)$. Так, если $f_1(x)$ - полином, то и все полиэдрально-поверхностное представление (1.57), (2.6) является полиномиальным строго выпуклым функциональным представлением E той же степени, что и этот полином. В частности, полиэдрально-сферическое и полиэдрально-эллипсоидальное представления являются примерами строго выпуклых квадратичных функциональных представлений, полиэдрально-суперсферическое представление при $\alpha = 2$ является примером биквадратичного такого представления и т.п.

Как было указано выше, f-представления множеств могут быть избыточными. Исследуем полиэдрально-поверхностное представление (1.57), (2.6) на избыточность. Поскольку E не вырождено в точку, ограничение (2.6) существенно, так как его исключение приводит к рассмотрению многогранника P. Использование несводимого H-представления P в качестве линейной части полиэдрально-поверхностного представления является необходимым, но не достаточным условием его неизбыточности. Действительно, если (1.57) содержит хоть одно ограничение, исключение которого приводит к заданию релаксационного многогранника $P' \supset P$, такого, что имеет место (2.5), представление (1.57), (2.6) будет избыточным представлением E.

Однако существует множества, для которого можно утверждать, что система (1.57), (2.6) будет их неизбыточным полиэдрально-поверхностным функциональным представлением.

Теорема 2.6. *Если E - не вырожденное в точку полиэдрально-поверхностное множество, а его выпуклая оболочка P - простой многогранник, то несво-*

димое H-представление P и уравнение (2.6) *в совокупности образуют несводимое функциональное представление E.*

Доказательство теоремы основано на невозможности для простого многогранника P построения релаксационного многогранника P', такого, что (2.5) имеет место.

Дальнейшая классификация полиэдрально-поверхностных множеств, а соответственно, и вершинно расположенных, может проводится по видам строго выпуклых поверхностей и видам многогранников.

Конечные множества точек евклидова пространства могут образовываться в пересечении многогранников с поверхностями, которые не обязательно строго выпуклы.Сформулируем обобщение понятия полиэдрально-поверхностного множества на данный случай. Для этого введем следующие понятия.

Поверхность S вида (1.22) назовем описанной вокруг множества $M \subset \mathbb{R}^n$, а множество M вписанным в поверхность S, если в пересечении M и S образуется конечное множество

$$E = M \cap S \tag{2.7}$$

и для точек M выполнено одно из условий:

$$\forall\, x \in M \;\; f_1(x) \le 0 \tag{2.8}$$

или

$$\forall\, x \in M \;\; f_1(x) \ge 0.$$

Далее будем считать, что $f_1(x)$ выбрана таким образом, что выполняется условие (2.8).

Пусть M - некоторый многогранник. Если он вписан в поверхность S, это означает, что множество (2.7) будет S-поверхностно расположенным только в случае выполнения условия (1.24). В случае вписанности M в S, данная поверхность может быть негладкой выпуклой поверхностью, такой, как (1.31) или (1.32), невыпуклой, например,

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \prod_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

и т.п. Главное требование, чтобы так же, как в и случае полиэдрально-поверхностных множеств, в пересечении S с M образовывалось конечное множество.

Если в (2.7) множество M - некоторая поверхность, то существует функция $f_2(x)$:

$$M = \{ x \in \mathbb{R}^n : f_2(x) = 0 \}, \tag{2.9}$$

задающая эту поверхность. Тогда по аналогии с (2.8) всегда можно считать, что E образовано как в пересечении поверхностей $S,\ M$, так и в пересечении пространственных тел:

$$C_1 = \{ x\colon f_1(x) \le 0 \},$$

$$C_2 = \{ x\colon f_2(x) \le 0 \},$$

если положить, что $f_2(x)$ выбрана таким образом, что выполнено условие:

$$\forall x \in S \ f_2(x) \geq 0.$$

Наконец, возможны еще два представления E - как пересечение поверхности и пространственного тела:

$$E = C_1 \cap M, \ E = S \cap C_2.$$

Нетрудно видеть, что произвольное конечное множество E, вписанное в поверхность, является вершинно расположенным. Тогда существует строго выпуклая поверхность S', такая, что E является S'-поверхностно расположенным, и соответственно, полиэдрально-поверхностным, в функциональном представлении которого участвует уравнение поверхности S'.

2.2 Конечные точечные конфигурации и вершинно расположенные множества

Для вершинно расположенных множеств существуют выпуклые полиэдрально-поверхностные представления. С другой стороны, согласно теореме 2.2, для любой функции, заданной на вершинно расположенном множестве, можно построить выпуклое (строго/сильно выпуклое) продолжение. Эти особенности позволяют при решении рассматриваемых классов задач комплексно использовать свойства множеств, их выпуклых оболочек, описанных строго выпуклых поверхностей и выпуклых функций, в частности, строить выпуклые релаксации.

Для произвольных конечных точечных конфигураций это неверно. Так, например, для множеств, которые не являются вершинно расположенными, выпуклых функциональных представлений и выпуклых продолжений с них не существует.

Установим взаимосвязь произвольной конечной точечной конфигурации с вершинно расположенными множествами. Рассмотрим следующие два подхода.

Первый состоит в выборе строго выпуклой функции $h(x)$ и построении разложения множества E по семейству строго выпуклых поверхностей (1.14), (1.15), например, сферически расположенных. Множества (1.16), образованные в результате такого разложения, будут поверхностно расположенными, а следовательно, и вершинно расположенными согласно теоремы 2.3. Таким образом, осуществлен переход к рассмотрению совокупности вершинно расположенных множеств.

Второй способ основан на переходе в расширенное пространство $\mathbb{R}^{n'}$ $(n' > n)$, размерность которого будет существенно зависеть от числа значений координат, принимаемых точками E, т.е. от числа $m'(E)$ уровней E по координатам и от конкретных значений k_i, $i \in J_n$ в формуле (1.12).

Заметим, что если E не является вершинно расположенным, то число $m'(E)$ превосходит два,поскольку

$$\exists\, i \in J_n : \ k_i > 2. \tag{2.10}$$

При этом для произвольного не вершинно расположенного множества существует расширенное полиэдрально-поверхностное представление.

Действительно, по построению множеств $\{X_j\}_{j \in J_n}$ вида (1.12), координаты произвольной точки $x \in E$ принимают конечное число значений из этих множеств, а именно,

$$\forall\, x = (x_1, ..., x_n) \in E \; x_i \in X_i = \{e_{ij}\}_{j \in J_{k_i}},\; i \in J_n,$$

и как дискретные величины, они представимы с помощью булевых переменных [105]:

$$x_i = \sum_{j=1}^{k_i} e_{ij} \cdot y_{ij},\; i \in J_n, \tag{2.11}$$

где $y_{ij} \in \{0, 1\},\; j \in J_{k_i},\; i \in J_n,$

$$\sum_{j=1}^{k_i} y_{ij} = 1,\; i \in J_n. \tag{2.12}$$

Образованное дискретное множество

$$Y = \{y_{ij} \in \{0, 1\} :\; y_{ij} \text{ удовлетворяет условиям (2.11), (2.12)}\}_{x \in E}$$

будет вершинно расположенным как подмножество вершинно расположенного булевого множества. К нему может быть применено полиэдрально-сферическое представление (1.78).

Осуществив замену переменных (2.11) в линейной системе (1.57), получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} \sum_{j'=1}^{k_j} e_{j'j} \cdot y_{j'j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{j'=1}^{k_j} (a'_{ij}e_{j'j}) y_{j'j} \le a'_{i0},\ i \in J_{n'}, \\ &\sum_{j=1}^{n} a''_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} a''_{ij} \sum_{j'=1}^{k_j} e_{j'j} \cdot y_{j'j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{j'=1}^{k_j} (a''_{ij}e_{j'j}) y_{j'j},\ i \in J_{n''}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Дополнив (2.13) системой уравнений (2.12), а также двусторонними ограничениями:

$$0 \le y_{ij} \le 1,\ j \in J_{k_i},\ i \in J_n, \tag{2.14}$$

получим H-представление многогранника $P' = conv\, Y$.

Присоединяя уравнение гиперсферы:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k_j} \left(y_{ij} - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{n'}{4}, \tag{2.15}$$

где $n' = \sum\limits_{j=1}^{n} k_j$, которая описана вокруг Y, получаем полиэдрально-сферическое представление (2.12)-(2.15) множества Y, которое можно рассматривать как расширенное функциональное представление множества E в пространстве $\mathbb{R}^{n'}$, где $n' \ge 2n$ согласно замечанию 1.1 и условию (2.10).

2.3 Многоуровневые множества и многогранники

Свяжем разложения множества по параллельным плоскостям с H-представлением его выпуклой оболочки, выбирая в качестве векторов направлений разложений нормали к гиперграням P.

Поскольку произвольной гиперграни $F \in \mathbf{F}$ соответствует опорная гиперплоскость $H_F \in \mathbf{H}$:

$$\exists \overline{n}_{H_F}, b_{H_F}:\ H_F = \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{n}^T_{H_F} x = b_{H_F}\},$$

то, зафиксировав некоторую $F \subseteq \mathbf{F}$, разложение (1.36), (1.37) в направлении вектора $\overline{n}_{H_F}$ будем называть разложением E в направлении гиперграни F, а само множество E - $m_{(\overline{n}_{H_F})}$-уровневым в направлении этой гиперграни.

Так, например, если P имеет гиперграни, параллельные координатным плоскостям, то формулы (1.40)-(1.44) задают разложения множества E в направлении этих гиперграней, соответственно, k_j - это число уровней разложения E в данных направлениях.

Зная количество уровней E в направлении всех гиперграней, определим величину

$$m(E) = \max_{F \in \mathbf{F}} m_{(\overline{n}_{H_F})}, \tag{2.16}$$

которое назовем числом уровней множества E, а само множество E - $m(E)$-уровневым.

Если E - конечное множество, а P - его выпуклая оболочка, то сравнение числа $m(E)$ уровней множества E с величиной $m''(P)$ - числом уровней (1.68) многогранника P - дает следующую оценку:

$$m(E) \geq m''(P). \tag{2.17}$$

Если множество E - вершинно расположено, то, поскольку $V = E$, а величина $m''(P)$ задает число уровней множества вершин в направлении всех гиперграней многогранника P, то (2.17) обращается в равенство:

$$m(E) = m''(P). \tag{2.18}$$

Перейдем к рассмотрению класса двухуровневых множеств и соответствующих им многогранников.

Для двухуровневого множества E выполняется:

$$m(E) = 2. \tag{2.19}$$

В этом случае формулы (1.70), (2.17), (2.19) в совокупности дают:

$$m(E) = m''(P) = 2,$$

т.е. множество E и многогранник P - двухуровневые, а также выполняется условие (2.18).

По аналогии с множеством вершин двухуровневых многогранников, отличительной особенностью двухуровневых множеств является то, что в направлении каждой гиперграни P они являются двухуровневыми, т.е.

$$\forall\, F \in \mathbf{F} \quad m_{(\overline{n}_{H_F})} = 2. \tag{2.20}$$

Учитывая вышесказанное, для двухуровневых множеств разложение

(1.36) приобретает вид: для произвольной $F \in \mathbf{F}$

$$\begin{aligned} &E = E^1(\overline{n}_F) \cup E^2(\overline{n}_F),\\ &E^1(\overline{n}_F) \cap E^2(\overline{n}_F) = \varnothing;\\ &E^j(\overline{n}_F) = H^j(\overline{n}_F) \cap E \neq \varnothing,\ j = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Для любой гиперграни F всегда можно считать, что $H^1(\overline{n}_F) = H_F$, соответственно,

$$E^1(\overline{n}_F) = E \cap H_F,\ E^2(\overline{n}_F) = E \backslash E^1(\overline{n}_F).$$

Как оказывается, двухуровневость дискретного множества - достаточное условие того, что оно является поверхностно расположенным, а значит, и вершинно расположенным. Данный факт устанавливается в следующей теореме:

Теорема 2.7. *Произвольное двухуровневое множество является поверхностно расположенным.*

Доказательство. Пусть E - двухуровневое множество. Зафиксируем его гипергрань $F \in \mathbf{F}$, тогда, согласно (1.69), имеем:

$$\exists\, b_F \in \mathbb{R}^1 :\ H_F = \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{n}_F^T x = b_F\} \in \mathbf{F}.$$

Помимо значения b_F, функция $h(x) = \overline{n}_H^T x$ принимает еще одно значение на E. Обозначим его b'_F, а соответствующую ему гиперплоскость - H'_F.

В результате имеем: $\forall F \in \mathbf{F}\ \exists b_F, b'_F,\ b_F \neq b'_F$,

$$H_F = \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{n}_F^T x = b_F\},\ H'_F = \{x \in \mathbb{R}^n : \overline{n}_F^T x = b'_F\},$$
$$E^1(\overline{n}_F) \subset H_F; E^2(\overline{n}_F) \subset H'_F,$$

в частности,

$$\forall\, x \in E\ \overline{n}_F^T x \in \{b_F, b'_F\},\ F \in \mathbf{F}. \tag{2.22}$$

Введем обозначения

$$a_F = \frac{b_F + b'_F}{2},\ \delta_F = \frac{|b_F - b'_F|}{2}$$

и перепишем (2.22) в виде:

$$|\overline{n}_F^T x - a_F| = \delta_F,\ F \in \mathbf{F}. \tag{2.23}$$

Осуществляя нормализацию уравнения (2.23), получим: $\forall\, k \in \mathbb{R}^n_{>0}$

$$|\overline{n}_F^{'T} x - a'_F|^k = 1,\ F \in \mathbf{F}, \tag{2.24}$$

где $\overline{n}_F^{'T} = \frac{\overline{n}_F}{||\overline{n}_F||}$, $a'_F = \frac{a_F}{||\overline{n}_F||}$.

Зафиксировав некоторое $k \in \mathbb{R}^1_{>0}$, сложим все уравнения системы (2.24):

$$f_1(x,k) = \sum_{F \in \mathbf{F}} |\overline{n}_F^{'T} x - a'_F|^k - |F| = 0 \tag{2.25}$$

и рассмотрим семейство поверхностей, заданных уравнением (2.25):

$$S^k = \{x \in \mathbb{R}^n :\ f_1(x,k) - |F| = 0\},\ k \in \mathbb{R}^1_{>0}. \tag{2.26}$$

Функция $f_1(x,k)$ является невыпуклой при $k \in (0,1)$ и выпуклой при $k \geq 1$, в частности, строго выпуклой при $k > 1$ и сильно выпуклой при $k \geq 2$.

Рассмотрим случай $k > 1$. По построению точка x^0, образованная в пересечении любых n плоскостей из семейства $\overline{n}_F^T x = a_F$, $F \in \mathbf{F}$, нормали к которым линейно-независимы, будет внутренней точкой пространственного тела $C^k = \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x,k) - |F| \leq 0\}$, $k \in \mathbb{R}^n_{>0}$, т.е. оно является строго выпуклым телом, соответственно, поверхность (2.26) - строго выпуклая. Следовательно, для любого $k \in (1,\infty)$ множество E является S^k-поверхностно расположенными. $\square$

Также отметим, что поверхности семейства (2.26) ограниченные, в частности, S^1 - полиэдральная поверхность, S^2 - эллипсоид, $S^\infty = \lim\limits_{k\to\infty} S^k = P$.

Следствие 2.2. *Произвольное двухуровневое множество является вершинно расположенным.*

Данное следствие говорит о том, что каждое двухуровневое множество совпадает со множеством вершин своей выпуклой оболочки, представляющей собой двухуровневый многогранник. С другой стороны, все двухуровневые многогранники комбинаторно эквивалентны $(0-1)$-многограннику. Это означает, что при исследовании двухуровневых множеств, не ограничивая общности, можно считать, что они являются подмножествами булевого множества. А это, в свою очередь, позволяет говорить о том, что число гиперграней d-мерного двухуровневого многогранника колеблется в пределах $[d+1, 2^d]$.

Замечание 2.4. Семейство поверхностей (2.26) было построено на основе несводимого H-представления многогранника P, которое предполагается известным. Дополнив его уравнением уравнением $f_1(x,k)-|F|=0, k \in (1,\infty)$, получаем семейство полиэдрально-поверхностных представлений двухуровневого множества E, которые затем можно исследовать на несводимость.

Уравнение поверхности S^k можно также дополнить H-представлением многогранника P, полученным из из системы (2.24) ослаблением знака равенства:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |\overline{n}_F'^T x - a_F'|^k \leq 1, \ F \in \mathbf{F}\},$$

которое уже заведомо будет сводимым.

Заметим, что выбор из семейства (2.26) подсемейства поверхностей S^k, $k = 2k', k' \in \mathbb{N}$ позволяет построить семейство полиномиальных полиэдрально-поверхностных представлений множества E.

Следствие 2.3. *Произвольное двухуровневое множество - эллипсоидально расположено.*

Действительно, в качестве описанного эллипсоида можно выбрать поверхность

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f_1(x,2) = 0\} \tag{2.27}$$

из семейства (2.26). Его уравнение имеет вид:

$$\sum_{F\in\mathbf{F}} (\overline{n}_F^{\prime T} x - a_F^{\prime})^2 = |F|. \tag{2.28}$$

Перепишем его в виде:

$$x^T \left(\sum_{F\in\mathbf{F}} \overline{n}_F^{\prime} \overline{n}_F^{\prime T} \right) x - 2 \left(\sum_{F\in\mathbf{F}} a_F^{\prime} \overline{n}_F^{\prime T} \right) x + \sum_{F\in\mathbf{F}} a_F^{\prime 2} = |F|. \tag{2.29}$$

и представим в форме (1.30). Формулу (2.27) представим в виде (1.28):

$$x^T A x + b^T x + c = 0,$$

где

$$A = \sum_{F\in\mathbf{F}} \overline{n}_F^{\prime} \overline{n}_F^{\prime T},\ B = 2 \sum_{F\in\mathbf{F}} a_F^{\prime} \overline{n}_F^{\prime T},\ c = \sum_{F\in\mathbf{F}} a_F^{\prime 2} - |F|.$$

Матрица A - положительно определена, следовательно, S^2 - эллипсоид, описанный вокруг E.

2.4 Операции над конечными точечными конфигурациями

Рассмотрим некоторые операции над конечными множествами точек евклидова пространства и исследуем свойства полученных конечных точечных конфигураций и соответствующих комбинаторных многогранников.

Введем в рассмотрение набор конечных множеств, заданных в евклидовом пространстве размерности не выше n, и будем формировать и них множество E вида (1.11) как результат некоторых теоретико-множественных операций над этими множествами.

Итак, пусть n разбито на L слагаемых $n^1, ..., n^L \in J_n$, $n = \sum\limits_{l=1}^{L} n^l$ и заданы множества

$$E^l \subset \mathbb{R}^{n^l},\ l \in J_L, \tag{2.30}$$

такие, что $1 \leq n_{E^l} = |E^l| < \infty,\ l \in J_L$.

Элементы множества E^l будем обозначать x^l, а в координатной форме - $x^l = (x_{il})_{i \in J_{n^l}}$, $l \in J_L$.

Для характеристик множеств (2.30) и связанных с ними понятий, таких как их выпуклая оболочка, описанная поверхность, описанная гиперсфера, H-представление и множество гиперграней многогранника и т.п. будут использованы обозначения, аналогичные тем, что применялись для множества E в главе 1. При этом к введенным ранее обозначениям будем добавлять верхний индекс, например,

$$P^l = conv\, E^l,\ l \in J_L - \tag{2.31}$$

это многогранники, соответствующие множествам (2.30). Для каждого фиксированного $l \in J_L$ система линейных ограничений:

$$A'^l x \leq a_0'^l,\ A''^l x = a_0''^l, \tag{2.32}$$

где

$$x^l \in \mathbb{R}^{n^l},\ A'^l = (a'^l_{ij}) \in \mathbb{R}^{n'^l \times n},\ A''^l = (a''^l_{ij}) \in \mathbb{R}^{n''^l \times n},$$
$$a'^l_0 = (a'^l_{i0}) \in \mathbb{R}^{n'^l},\ a''^l_0 = (a''^l_{i0}) \in \mathbb{R}^{n''^l} -$$

H-представление многогранника P^l; $\mathbf{F}^l$ и $\mathbf{H}^l$ - множество его гиперграней и соответствующих опорных гиперплоскостей, а V^l - вершин ($V^l = vert\, P^l$). Степень вершины $x^l \in V^l$ многогранника P^l будем обозначать $\mathcal{R}^l(x^l)$. В случае, если все вершины P^l - регулярные, то через $\mathcal{R}^l$ будем обозначать степень регулярности его вершин. Пусть также $\mathcal{A}^l$ будет образующим множеством для E^l, $m(E^l), m'(E^l)$ - числом уровней E^l в целом и по координатам соответственно, а $m''(P^l)$ - числом уровней многогранника P^l. Размерность многогранника P^l обозначим так - $d_l = \dim\ P^l$, а его f-вектор - $f(P^l) = (f_0(P^l), ..., f_{d_l-1}(P^l))$, $(l \in J_L)$.

В отдельных случаях множества (2.30) могут обладать специфическими свойствами, такими как: эти множества

- вершинно расположенные, т.е.

$$E^l = V^l,\ l \in J_L; \tag{2.33}$$

- расположены на некоторых поверхностях:

$$\exists f^l(x^l) : \mathbb{R}^{n_l} \to \mathbb{R}^1 :\ f^l(x^l) \underset{E^l}{=} 0,\ l \in J_L. \tag{2.34}$$

Это условие означает, что множества (2.30) лежат на поверхностях, задаваемых указанными уравнениями. Представим его в виде:

$$E^l \subseteq S^l, \tag{2.35}$$

$$S^l = \{x \in \mathbb{R}^{n^l} : f^l(x^l) = 0\},\ l \in J_L; \tag{2.36}$$

- вписаны в поверхности (2.36), что предполагает выполнение условий (2.35),

$$E^l = P^l \cap S^l, \tag{2.37}$$

$$f^l(x^l) \underset{P^l}{\leq} 0,\ l \in J_L; \tag{2.38}$$

- S^l-поверхностно расположенные множества, что предполагает выполнение трех условий - (2.35), (2.36),

$$f^l(x^l)\text{- строго выпуклая},\ l \in J_L; \tag{2.39}$$

- сферически расположенные множества. Здесь предполагается, что выполнено условие (2.35) и $\forall l \in J_L \; \exists\, a^l \in \mathbb{R}^{n^l},\ r^l \in \mathbb{R}^1_+ \; S^l = S_{r^l}(a^l)$. Для минимальной сферы, описанной вокруг E^l, будем использовать обозначение $S_{r^{\min,l}}(a^{\min,l})$ $(l \in J_L)$;
- эллипсоидально расположенные множества. Под этим подразумевается, что выполнено условие (2.35), а также

$$\exists x^{0l} \in \mathbb{R}^{n^l},\ \exists\, C^l \in \mathbb{R}^{n^l \times n^l},\ C^l \succ 0 :$$
$$S^l = \{x^l \in \mathbb{R}^{n^l} :\ (x^l - x^{0l})^T C^l (x^l - x^{0l}) = 0\},\ l \in J_L.$$

Исследуем, в каких случаях сконструированное из множеств (2.30) новое множество E унаследует их свойства, такие как вершинная- и сферическая расположенность и т.п., а также как связаны свойства многогранника $P = conv\ E$ со специфическими особенностями многогранников (2.31), взятых за основу построения P. При этом для f-вектора многогранника будем использовать обозначение $f(P) = (f_0(P), f_1(P), ..., f_{d-1}(P))$.

Подмножество конечного множества $\mathbb{R}^n$

Пусть $L = 1$, т.е. $n^1 = n$, а также

$$E \subset E^1. \tag{2.40}$$

Как собственное подмножество E^1, множество E обладает следующими свойствами:

1. $|E| < |E^1|$;
2. $P \subseteq P^1$, т.е. P^1 либо совпадает с P, либо является его релаксацией;
3. $\dim\ P \leq \dim\ P^1$;
4. $V \subseteq V^1$. При этом $V = V^1$, если операция (2.40) не затрагивает вершины, в противном случае $V \subset V^1$. Последнее касается, в частности, случая вершинно расположенного множества E^1;
5. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^1$, $m'(E) \leq m'(E^1)$;
6. а) если E^1 лежит на поверхности S^1, то и E лежит на ней; б) если E^1 вписано в поверхность S^1, то и E вписано в нее; в) если E^1 - S^1-

поверхностно расположенное, то и E также поверхностно расположено (так, например, если E - сферически расположено, то это же верно и для E^1, при этом $r^{\min} \leq r^{\min,1}$);

7. если E^1 - вершинно расположено, то и E - вершинно расположено. При этом для P выполнено строгое включение $P \subset P^1$.

Построенное в результате операции (2.40) множество может также приобретать новые свойства по сравнению с E.

Пример 2.1. Зададим множества $E = \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),$ $(3,1,2),(3,2,1)\}$ и $E^1 = J_3^3$. Изобразим их на Рисунках 2.1, 2.2, а их выпуклые оболочки - правильным шестиугольником P и кубом P^1 - на Рисунках 2.3, 2.4. Как видно, E^1 не является вершинно расположенным, а его собственное подмножество E - вершинно расположено.

Также нетрудно видеть, что в данном случае число уровней множеств E, E^1, в т.ч. по координатам, совпадает:

$$m(E) = m(E^1) = m'(E) = m'(E^1) = 3,$$

а образующими множествами служит одно и то же множество J_3, т.е. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^1 = J_3$.

Как и E, множество E^1 центрально симметрично относительно точки $O' = (2,2,2)$.

Перечислим некоторые новые свойства E по сравнению с E^1: помимо вершинной расположенности, это то, что множество E лежит в плоскости (см. Рис. 2.3), сферически расположено (см. Рис. 2.5), в то время как исходное множества E^1 этими свойствами не обладало, что видно из Рис. 2.4.

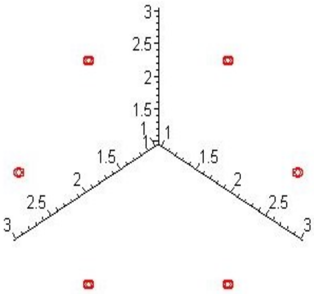


Рис. 2.1: E

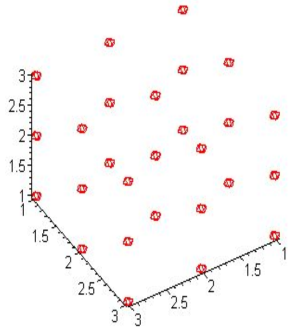


Рис. 2.2: E^1

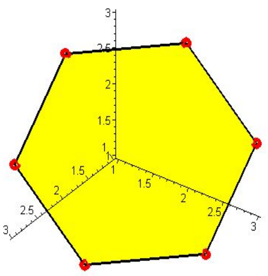


Рис. 2.3: $E,\ P$

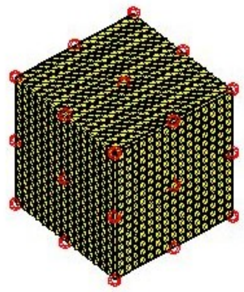


Рис. 2.4: $E^1,\ P^1$

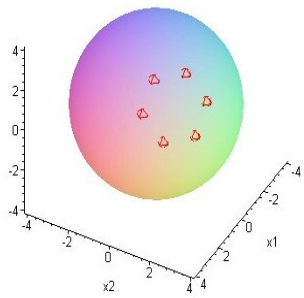


Рис. 2.5: $E,\ S_{\sqrt{14}}(\mathbf{0})$

Пересечение

Пусть $L = 2$, множества E^1, E^2, такие, что

$$n = n^1 = n^2, \tag{2.41}$$

а E построено следующим образом:

$$E = E^1 \cap E^2.$$

Предположим также, что E является собственными подмножеством как E^1, так E^2:

$$E \subset E^1,\ E \subset E^2. \tag{2.42}$$

Тогда, с учетом свойств, приведенных в п. 2.4, имеем:

1. $|E| < \min\{|E^1|, |E^2|\}$;

2. $P \subseteq P^1,\ P \subseteq P^2$;

3. $\dim\ P \leq \min\{\dim\ P^1, \dim\ P^2\}$;

4. $V \subseteq V^1,\ V \subseteq V^2$;

5. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^1 \cap \mathcal{A}^2$, откуда следует, что $m'(E) \leq \min\{m'(E^1), m'(E^2)\}$;

6. если E^1 или E^2 - вершинно расположено, то E - вершинно расположено. В этом случае, в силу (2.42), также справедливо $P \subset P^1,\ P \subset P^2$, т.е. оба многогранника P^1, P^2 являются релаксационными для P;

7. Если $E^1,\ E^2$ - центрально симметричны относительно одной и той же точки O', то и E имеет центр симметрии в точке O';

8. Если $P^1,\ P^2$ - центрально симметричны относительно O', то и P также центрально симметричен;

9. Если E^1 или E^2 лежит на некоторой поверхности S, вписано в S или S-поверхностно расположено, то это же относится к E.

Если E^1, E^2 лежат на поверхностях (вписано в поверхности) S^1, S^2 соответственно,

$$S^1 \neq S^2, \tag{2.43}$$

то E лежит на обеих этих поверхностях в первом случае:

$$E \subset S^1 \cap S^2 \tag{2.44}$$

и вписано в них во втором:

$$E = S^1 \cap P^1,\ E = S^2 \cap P^2. \tag{2.45}$$

Если, помимо (2.44), выполнено условие (2.39), т.е. E^1, E^2 - поверхностно расположены, то и E - поверхностно расположенное множество:

$$E = S^1 \cap P,\ E = S^2 \cap P. \tag{2.46}$$

Более того, существует семейство

$$S(\alpha),\ \alpha \in [0,1] \tag{2.47}$$

строго выпуклых поверхностей, описанных вокруг E:

$$S = S(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x,\alpha) = \alpha f^1(x) + (1-\alpha) f^2(x) = 0\}. \tag{2.48}$$

Если, например, S^1, S^2 - гиперсферы, то, в силу условия (2.43), E является сферически расположенным, лежит в плоскости β пересечения S^1 и S^2, а (2.48) будет представлять собой семейство гиперсфер с центрами на прямой, соединяющей точки $a^{\min,1}$, $a^{\min,2}$ - центры гиперсфер $S^{\min,1}, S^{\min,2}$. Центр $S^{\min}$ лежит на пересечении этих прямой и плоскости, более того,

$a^{\min} \in [a^{\min,1},\ a^{\min,2}]$. Соответственно, радиусы описанных сфер минимального радиуса связаны соотношением: $r^{\min} \leq \min\{r^{\min,1}, r^{\min,2}\}$.

Если при этом S^1, S^2 - эллипсоиды, множество E будет эллиспоидально расположенным, как E^1 и E^2. В данном случае формулы (2.47), (2.48) будут задавать семейство эллипсоидов, среди которых можно выбрать, к примеру, эллипсоид минимального объема. Помимо этого, так же, как и в предыдущем случае, E будет лежать в плоскости пересечения эллипсоидов S^1 и S^2.

Замечание 2.5. Поверхность $S' = S^1 \cap S^2$ в отдельных случаях также имеет особый смысл. Так, если S^1, S^2 - гиперсферы, S' - $n-2$-сфера, если это эллипсоиды, то S' - $n-2$-эллипсоид, что позволяет перейти к ортогональной проекции множества E на плоскость β, где множество, образованное в проекции, будет по-прежнему сферически- или эллипсоидально расположенным множеством соответственно.

Пересечение конечного множества и поверхности

Пусть также $L = 1$ и исследуется конечная точечная конфигурация, образованная в пересечении E^1 с поверхностью S, т. е.

$$E = E^1 \cap S, \tag{2.49}$$

где S - поверхность (1.22).

Не ограничивая общности, можно считать, что $\exists\, x \in E^1 :\ x \notin S$, т.е. $E \subset E^1$ и для E применимы все свойства, приведенные в выше в данном пункте.

Свойства E будут определяться как множеством E^1, так и функцией

$f_1(x)$. Перечислим некоторые свойства сечений конечных множеств евклидова пространства плоскостями и пересечений их со строго выпуклыми поверхностями.

Сечения

Пусть функция $f_1(x)$, определяющая поверхность S вида (1.22), линейная, т.е.

$$\exists\, c \in \mathbb{R}^n,\ c_0 \in \mathbb{R}^1 :\ f_1(x) = c^T x + c_0.$$

Тогда множество E вида (2.49) образовано в сечении E^1 плоскостью $H :\ c^T x + c_0 = 0$. Оно обладает следующими свойствами:

1. $\dim P < \dim P^1$;

2. H-представлением многогранника P будет система ограничений:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n :\ A'^1 x \le a_0'^1,\ A''^1 x = a_0''^1,\ c^T x + c_0 = 0\}. \tag{2.50}$$

   При этом H-представление (2.50) может быть сводимым вне зависимости от того, сводимое или несводимое H-представление P' было взято за основу его построения;

3. если E^1 - сферически расположено, то и E - сферически расположено. При этом параметры $S^{\min}$ можно определить из уравнения плоскости

H и параметров $S^{\min,1}$:

- $a^{\min,1}$ - проекция $a^{\min}$ на S,
- $r^{\min,1} = ((r^{\min})^2 - h^2)^{1/2}$,

где $h = |a^{\min,1} - a^{\min}| = \dfrac{|c^T a^{\min,1} + c_0|}{|c|}$ – расстояние от $a^{\min,1}$ до H.

Пересечение конечных множеств со строго выпуклыми поверхностями

Пусть поверхность S строго выпуклая. В этом случае E будет обладать такой важной особенностью как вершинная расположенность:

Утверждение 2.1. *Если поверхность* (1.22) - *строго выпуклая, то множество E вида* (2.49) - *вершинно расположено.*

Это свойство позволяет осуществлять декомпозицию произвольного конечного множества на вершинно расположенные.

Утверждение 2.2. *Если функция $h(x)$ строго выпуклая, тогда формулы* (1.14)-(1.17) *задают разложение конечного множества E по семейству строго выпуклых поверхностей и его декомпозицию на вершинно расположенные множества.*

Из утверждения 2.1, в частности, следует, что если поверхность S вида (1.22) - гиперсфера, то множество E вида (2.49) - сферически расположено, если S - эллипсоид, то E является эллипсоидально расположенным множеством.

Объединение

Пусть также $L = 2$, выполнены условия (2.41) и (2.42), а множество E образовано следующим образом:

$$E = E^1 \cup E^2. \tag{2.51}$$

Тогда на основании свойств, приведенных в п. 2.4, можно утверждать следующее:

1. $|E| \geq \max\{|E^1|, |E^2|\}$;
2. $P \supseteq P^1$, $P \supseteq P^2$;
3. $\dim\ P \geq \max\{\dim\ P^1, \dim\ P^2\}$;
4. $V \subseteq V^1 \cup V^2$;
5. $\mathcal{A} = S(\mathcal{A}^1 \cup \mathcal{A}^2)$, $m'(E) \geq \max\{m'^1(E^1), m'^2(E^2)\}$;
6. если E^1, E^2 вершинно расположены, то выполнено хотя бы одно из условий $P \supset P^1$, $P \supset P^2$. Соответственно, P является релаксацией по крайней мере для одного из многогранников P^1, P^2;
7. если E^1, E^2 центрально симметричны относительно одной и той же точки O', то и E имеет центр симметрии в точке O';
8. если P^1, P^2 центрально симметричны относительно O', то и P также центрально симметричен.

Приведем пример, когда при объединении двух конечных множеств появляется ряд свойств, нехарактерных ни для одного из составляющих множеств. Итак, пусть

$$E^1 = \{(0,0,0),(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\},\ E^2 = -B_3(1).$$

E^1 не лежит в одной плоскости, поэтому его выпуклой оболочкой будет 3-симплекс P^1, а само само оно будет вершинно и сферически расположенным (см. Рис. 2.6). По числу уровней E^1 - двухуровневое в целом и по координатам, то же касается и многогранника - $m(E^1) = m'(E^1) = m''(P^1) = 2$. Исходя из способа задания множества E^2, теми же свойствами будет обладать многогранник P^2 и само это множество.

Объединением E^1, E^2 будет множество

$$E = \{(0,0,0),(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3),(-1,0,0),(0,-2,0),(0,0,-3\},$$

показанное на Рис. 2.7.

Его выпуклой оболочкой будет октаэдр, показанный на Рис. 2.8. Поскольку $(0,0,0) \in int\ P$, множество E уже не будет вершинно расположенным, соответственно, оно не будет поверхностно расположенным. При этом оно приобретает свойство быть центрально симметричным относительно начала координат, более того, относительно каждой из координатных плоскостей. Учитывая эту симметрию, для определения числа $m(E)$ достаточно построить гипергрань через точки $(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)$ - $H:\ h(x) = \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} = 1$ и определить число уровней E в направлении этой плоскости - $m_{h(x)} = 3$, откуда следует что $m(E) = 3$. Число уровней по координатам также увеличилось при переходе от E^1, E^2 к E - $m'(E) = 3$. Для того, чтобы определить число уровней многогранника P, достаточно перейти к рассмотрению множества вершин $V = E \backslash \{(0,0,0)\}$, на котором функция $h(x)$ принимает всего два значения. Отсюда следует, что многогранник P - двухуровневый. Вокруг него можно описать эллипсоид, который легко найти, учитывая симметрию многогранника. Его уравнение в $x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} = 1$. А это, в свою очередь, говорит о возможности декомпозиции E на два вершинно расположенных множества - эллипсоидально расположенное множество V и $\{(0,0,0)\}$.

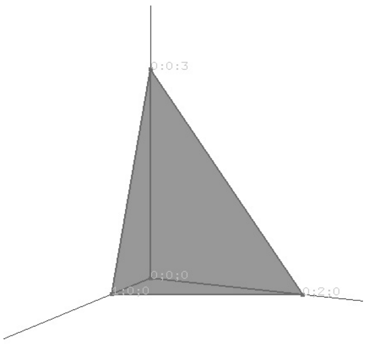


Рис. 2.6: E^1, P^1

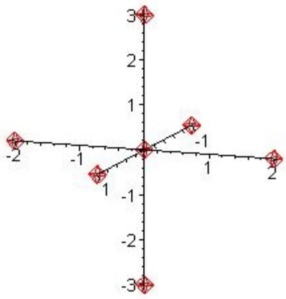


Рис. 2.7: E

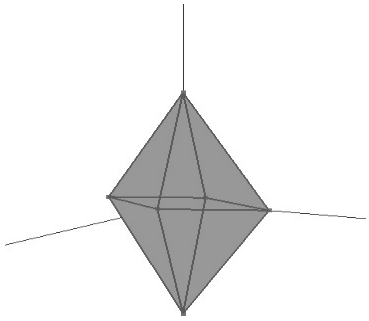


Рис. 2.8: P

Замечание 2.6. Подобным же образом можно сформулировать свойства разности $E^1 \backslash E^2$ и симметричной разности $E^1 \triangle E^2$ пары множеств. Отметим лишь, что эти две операции позволяют формировать вершинно расположенные множества из не вершинно расположенных и могут быть взяты за основу декомпозиций E на не вершинно расположенные множества.

Далее остановимся на свойствах сумм Минковского и произведений Адамара конечных множеств евклидова пространства.

Сумма Минковского

Пусть $L = 2$ и выполнено условие (2.41), а множество E сформировано по правилу:

$$E = E^1 + E^2, \tag{2.52}$$

т.е.

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x^1 + x^2,\ x^1 \in E^1,\ x^2 \in E^2\} -$$

сумма Минковского множеств E^1, E^2.

Перечислим некоторые свойства $E,\ P$ в данном случае:

1. $|E| \leq |E_1| \cdot |E_2|$;

2. $\dim\ P \geq \max\{\dim\ P^1, \dim\ P^2\}$;

3. образующее множество для множества E можно найти по правилу:

   $$\mathcal{A} = S(\{e \in \mathbb{R}^1 :\ e = e^1 + e^2,\ e^l \in \mathcal{A}^l,\ l \in J_2\}),$$

   откуда следует оценка $m'(E) \leq m'(E^1) \cdot m'(E^2)$;

4. если $E^1,\ E^2$ центрально симметричны относительно точек O^1, O^2 соответственно, то E имеет в качестве центра симметрии точку $O^1 + O^2$. Это же касается и их выпуклых оболочек этих множеств - многогранников $P^1,\ P^2$;

5. если $E^1,\ E^2$ имеют параллельные оси симметрии $\gamma^l : a^T x = a_0^l,\ l = 1, 2$, то прямая $\gamma : a^T x = a_0^1 + a_0^2$ является осью симметрии множества E. Это же относится и к многограннику P - он имеет ось симметрии,

параллельную этим осям симметрии P^1, P^2.

Пример 2.2. Пусть $E^1 = \{(1,2),(2,1)\}$, а $E^2 = \{(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)\}$.

Эти множества совместно со своими многогранниками показаны на Рисунках 2.9, 2.10. Как видно, они центрально симметричны, при этом E^1 симметрично относительно биссектрисы первого координатного угла и прямой $\gamma^1 : x_1 + x_2 = 3$, в то время как E^2 симметрично относительно координатных осей, а также биссектрис первого и второго координатных углов. В результате множество E, как их сумма Минковского, имеет вид:

$$E = \{(0,1),(1,0),(0,3),(1,2),(2,1),(3,0),(2,3),(3,2)\} \tag{2.53}$$

и снова оказывается центрально симметричным. Осями его симметрии будут биссектриса $x_1 - x_2 = 0$ первого координатного угла и прямая γ, параллельная биссектрисе второго координатного угла (см. Рис. 2.11). Также видно, что $m'(E^1) = m'(E^2) = 2$, $m'(E) = m'(E^1) + m'(E^2) = 4$.

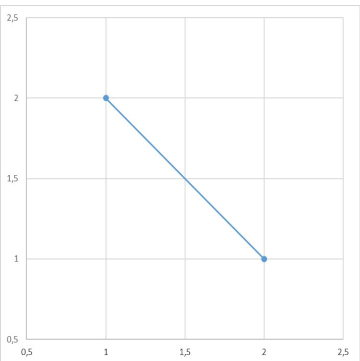


Рис. 2.9: E^1, P^1

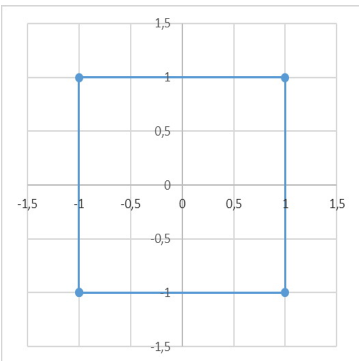


Рис. 2.10: E^2, P^2

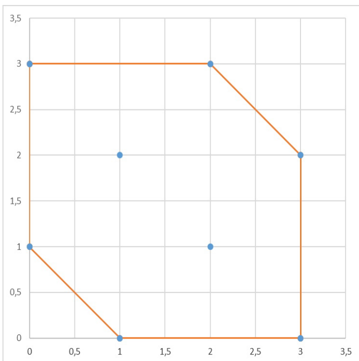


Рис. 2.11: E, P

Замечание 2.7. Подобным образом можно рассмотреть свойства разности

Минковского

$$E = E^1 \overset{*}{-} E^2, \tag{2.54}$$

определяемой как

$$E^1 \overset{*}{-} E^2 = E^1 + (-E^2),$$

где $-E^2 = \{-x,\ x \in E^2\}$, а также свойства линейных комбинаций $E = \alpha_1 E^1 + \alpha_2 E^2,\ |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$ конечных множеств точек евклидова пространства и их выпуклых оболочек.

Так, для множеств E^1, E^2, рассмотренных в примере 2.2, разность Минковского (2.54) совпадает с суммой Минковского (2.53) (см. Рис. 2.11), поскольку в данном случае $E^2 = -E^2$.

Произведение Адамара

Пусть $L = 2$ и выполнено условие (2.41), при этом множество E построено следующим образом:

$$E = E^1 \circ E^2, \tag{2.55}$$

т.е.

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : x = (x_i)_{i \in J_n}, x_i = x_i^1 x_i^2,\ i \in J_n,\ \forall x^1 \in E^1,\ x^2 \in E^2\} -$$

произведение Адамара множеств E^1, E^2.

Приведем ряд свойств данного множества E и соответствующего многогранника P:

1. $|E| \leq |E_1| \cdot |E_2|$;

2. $\dim\ P \geq \max\{\dim\ P^1, \dim\ P^2\}$;

3. Для E образующее множество $\mathcal{A}$ можно найти из условия:

$$\mathcal{A} = S(\{e \in \mathbb{R}^1 :\ e = e^1 \cdot e^2,\ e^l \in \mathcal{A}^l,\ l \in J_2\}),$$

откуда следует оценка $m'(E) \leq m'(E^1) \cdot m'(E^2)$ для числа уровней E по координатам;

4. Если E^1 или E^2 симметрично относительно некоторой координатной плоскости, то и множество E вида (2.55) - симметрично относительно данной плоскости.

5. Если хоть одно из множеств E^1, E^2 имеет центр симметрии в начале координат, то центром симметрии E также служит начало координат. Это же относится и к центральной симметрии многогранника P в случае, если какой-то многогранников P^1, P^2 симметричен относительно точки O.

Замечание 2.8. Пусть, например, для множества E^1 выполнено условие:

$$E^1 = -E^1, \tag{2.56}$$

т.е. оно симметрично относительно начала координат, тогда для любого множества E^2 произведение Адамара (2.55), помимо центральной симметрии, обладает следующим свойством:

$$
\begin{aligned}
&E = E^1 \circ E^{2'}, \\
&E^{2'} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = |y_i|,\ i \in J_n\}_{y \in E^2}.
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

Формула (2.57) говорит о том, что при выполнении условии (2.56) можно всегда считать, что второе множество в произведении Адамара (2.55) расположено в ортанте $\mathbb{R}^n_+$, а само E формируется как произведение Адамара множеств $E^{2'}$ и $E^{1+} = E^1 \cap \mathbb{R}^n_+$ с последующим отражением образованного множества и всех его отражений относительно координатных плоскостей.

Пример 2.3. Пусть E^1 - множество вершин прямоугольника P^1, изображенного на Рис. 2.12, а E^2 - множество вершин треугольника P^1, показанного на Рис. 2.13. Их произведением Адамара будет не вершинно расположенное множество E, симметричное относительно координатных осей. Его выпуклой оболочкой является восьмиугольник P, показанный на Рис. 2.14.

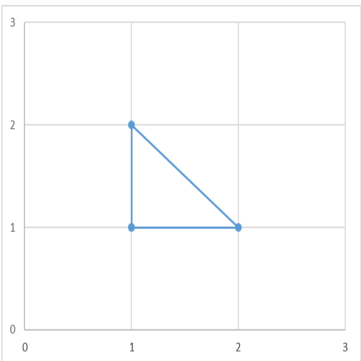


Рис. 2.12: $E^1,\ P^1$

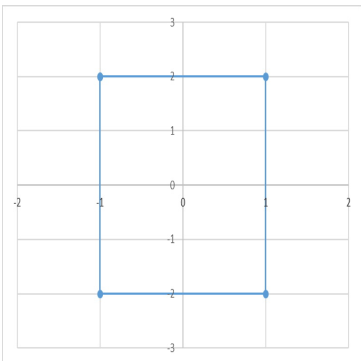


Рис. 2.13: $E^2,\ P^2$

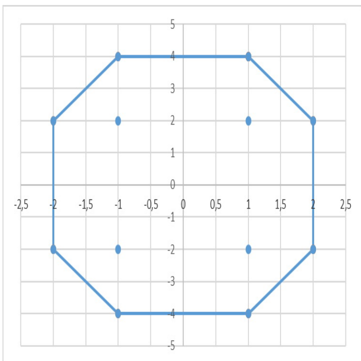


Рис. 2.14: $E,\ P$

Пример 2.4. Пусть множество E строится из булевого множества $E^1 = B_3$ и множества E^2, рассмотренного в примере 2.1 в качестве E. Полученное множество вида (2.55) и его выпуклая оболочка показаны на Рис. 2.15. В данном случае $E^2 \subset \mathbb{R}^3_+$, поэтому в формуле (2.57) $E^2 = E^{2'}$. Множество E содержит $|E| = 34$ элемента, в т.ч. 6 элементов множества E^2, его проекции на координатные плоскости (еще 18 элементов), на координатные оси (плюс 9 элементов) и на начало координат - один элемент. Как видно, это множество не является центрально симметричным, не имеет плоскостей симметрии и не является вершинно расположенным, хотя исходные множества E^1 и E^2 обладали этими свойствами. Образующим множеством для него служит $\mathcal{A} = J_3^0$, а для E^1, E^2 - $\mathcal{A}^1 = \{0, 1\}$, $\mathcal{A}^2 = J_3$ соответственно. Число уровней по координатам $m'(E^1) = 2$, $m'(E^2) = 3$, $m'(E) = 4 > \max\{m'(E^1), m'(E^2)\}$.

Пример 2.5. Пусть теперь множество (2.55) строится из бинарного множества $E^1 = \{-1, 1\}^3$ и того же множества E^2, что и в предыдущем примере. Поскольку в данном случае выполнено условие (2.56), образованное множество E и его выпуклая оболочка P будут иметь центр симметрии в начале координат, что видно на Рис. 2.15. Также заметим, что координатные плоскости являются плоскостями его симметрии. Образующее множество - $\mathcal{A} = -\mathcal{A}^2 \cup \mathcal{A}^2 = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$. Число уровней по координатам $m'(E^1) = 2$, $m'(E^1) = 3$, $m'(E) = 6 = m'(E^1) \cdot m'(E^2)$. Также, как было показано в примере 2.1, E^2 - сферически расположенное, в частности, его элементы равноудалены от начала координат. Это же свойство сохраняется для E, а именно оно является сферически расположенным. Описанная сфера вокруг этого множества задается уравнением $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 14$. Соответственно, оно также является вершинно расположенным множеством.

Примеры 2.4, 2.5 продемонстрировали, что в результате взятия произведения Адамара сферически расположенных центрально симметричных

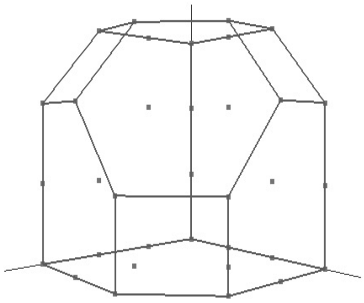


Рис. 2.15: E, P: пример 2.4

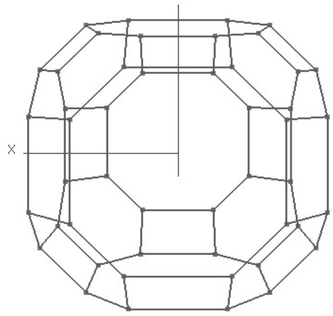


Рис. 2.16: E, P: пример 2.5

множеств могут образовывать как сферически-, так и не сферически расположенные множества; как вершинно расположенные, так и не вершинно расположенные; как центрально-, так и не центрально симметричные и т.д.

Декартово произведение

Пусть E представляет собой декартово произведение (прямое произведение, a direct product) множеств (2.30):

$$E = \bigotimes_{l=1}^{L} E^l, \tag{2.58}$$

т.е.

$$E = \{x = (x^1, ..., x^L) \in \mathbb{R}^n : \; x^l \in E^l, \; l \in J_L\},$$

т.е. $x = (x^1, ..., x^L) = (x_{11}, ..., x_{n^1 1}, ..., x_{1L}, ..., x_{n^L L})^T$.

Перечислим некоторые свойства декартовых произведений конечных множеств:

Мощность E:

$$|E| = \prod_{l=1}^{L} |E^l|.$$

Многогранник P представляет собой декартово произведение многогранников (2.31):

$$P = \bigotimes_{l=1}^{L} P^l. \tag{2.59}$$

Размерность P:

$$\dim\ P = \sum_{l=1}^{L} \dim\ P^l.$$

Отсюда видно, что

$$\dim\ P < n\ \Leftrightarrow\ \exists\, l \in J_L :\ \dim\ P^l < n^l, \tag{2.60}$$

т.е. E лежит в плоскости в том и только в том случае, если хоть одно из множеств (2.30) расположено в плоскости.

Критерий полномерности P:

Многогранник P вида (2.59) полномерный тогда и только тогда, когда многогранники (2.31) полномерные.

Несводимое H-представление P

Утверждение 2.3. *Несводимое H-представление P имеет вид линейной системы* (1.57), *где:*

- $n' = \sum\limits_{l=1}^{L} n'^l$ *- число ограничений-неравенств,* $n'' = \sum\limits_{l=1}^{L} n''^l$ *- количество ограничений-равенств;*

- *матрица ограничений A' имеет размерность $n' \times n$, блочная вида $A' = (A'_{ll'})_{l,l' \in J_L}$, где*

$$A'_{ll} = A'^l \in \mathbb{R}^{n'^l \times n^l},\ l \in J_L;\ A'_{ll'} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n'^l \times n^{l'}},\ l, l' \in J_L,\ l \neq l';$$

- *матрица ограничений A'' имеет размерность $n'' \times n$, блочная вида $A'' = (A''_{ll'})_{l,l' \in J_L}$, где*

$$A''_{ll} = A''^l \in \mathbb{R}^{n''^l \times n^l},\ l \in J_L;\ A''_{ll'} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n''^l \times n^{l''}},\ l, l' \in J_L,\ l \neq l';$$

- *вектора правых частей a'_0, a''_0:*

$$a'_0 = (a_0'^1, ..., a_0'^L) \in \mathbb{R}^{n'},\ a''_0 = (a_0''^1, ..., a_0''^L) \in \mathbb{R}^{n''}.$$

Следствие 2.4. *Множество $\mathbf{F}$ гиперграней P представляет собой объединение множества гиперграней $\mathbf{F}'^l$ многогранных областей:*

$$P'^l = \{x \in \mathbb{R}^n : A'^l x^l \leq a_0'^l,\ A''^l x^l = a_0''^l\},\ l \in J_L. \tag{2.61}$$

Таким образом, имеет место:

$$\mathbf{F} = \bigcup_{l=1}^{L} \mathbf{F}'^{l},$$

а поскольку между множествами гиперграней P^l и P'^l существует взаимно-однозначное соответствие ($l \in J_L$), для числа гиперграней P справедливо:

$$|\mathbf{F}| = \sum_{l=1}^{L} |\mathbf{F}^l|$$

или в терминах f-векторов:

$$f_{d-1}(P) = \sum_{l=1}^{L} f_{d^l-1}(P^l).$$

Поверхностная расположенность E

Для всех множеств вида (2.30), для которых выполнено (2.35), т.е. известно, на каких поверхностях вида (2.36) они лежат, предварительно осуществим следующее действие - произведем подъем из $\mathbb{R}^{n^l}$ в пространство $\mathbb{R}^n$. Для этого этого примем во внимание, что каждая точка E является декартовым произведением некоторых точек множеств (2.30):

$$\forall x \in E, \; \exists \, x^l \in E^l, \; l \in J_L : \; x = \bigotimes_{l=1}^{L} x^l \tag{2.62}$$

и осуществим построение:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \; f'^l(x) = f'^l(x^1, ..., x^l, ..., x^L) = f^l(x^l).$$

Введем в рассмотрение цилиндрические поверхности:

$$S'^l = \{x \in \mathbb{R}^n : f'^l(x) = 0\},\ l \in J_L. \tag{2.63}$$

Утверждение 2.4. *Если хоть одно из множеств* (2.30) *лежит на поверхности, то и все множество* (2.30) *расположено на некоторой поверхности.*

Действительно, если существует $l \in J_L$, такое, что $E^l \subseteq S^l$, то E лежит на соответствующей поверхности из семейства (2.63), а именно $E \subseteq S'^l$.

Замечание 2.9. Если целый ряд множеств (2.30) лежат на поверхностях: $\exists I \subseteq J_L$, такое, что $E^l \subseteq S^l$, $l \in I$, $|I| > 1$, то таким же способом могут быть найдены $|I|$ поверхностей, на которых лежит E - $S'^l, l \in I$. Кроме того, такие же поверхности можно найти с помощью различных комбинаций (например, умножением на скаляры и последующим суммированием) уравнений:

$$f'^l(x) = 0,\ l \in I. \tag{2.64}$$

Утверждение 2.5. *Если для множеств* (2.30) *выполнены условия* (2.35), (2.37)*, т.е. все они вписаны в поверхности* (2.36)*, то и для E существует поверхность, в которую оно вписано.*

Доказательство. В данном случае, множество уравнений (2.64), которым удовлетворяют точки E, имеет вид:

$$f'^l(x) = 0,\ l \in J_L.$$

Рассмотрим поверхность S, заданную уравнением:

$$f(x) = \sum_{l=1}^{L} \lambda_l f'^l(x) = 0, \tag{2.65}$$

$$\lambda = (\lambda_l)_{l \in J_L} \in \mathbb{R}^L_{>0},\ |\lambda| = 1. \tag{2.66}$$

По построению и в силу (2.38), из формулы (2.65) следует, что в каждой точке $x \in P$ функция (2.65) удовлетворяет неравенству $f(x) \leq 0$, которое к тому же обращается на множестве E в равенство $f(x) \underset{E}{=} 0$. А это означает, что выполнено условие вписанности множества E в поверхность S, которая задана уравнением (2.65). □

В заключение покажем, что если множества (2.30) поверхностно расположенные, то E обладает этим же свойством.

Теорема 2.8. *Если для множеств* (2.30) *выполнены условия* (2.35), (2.36), (2.39)*, то их декартово произведение* (2.58) - *поверхностно расположенное множество.*

Доказательство. Рассмотрим поверхность S, заданную уравнением (2.65) и описанную вокруг E. Покажем, что она строго выпукла, т.е.

$$\begin{gathered} \forall \alpha \in (0,1)\,, \forall x', x'' \in \mathbb{R}^n \\ f\left(\alpha x' + (1-\alpha)\, x''\right) < \alpha f\left(x'\right) + (1-\alpha)\, f\left(x''\right). \end{gathered} \tag{2.67}$$

Подобно (2.62), в векторах $x', x'' \in \mathbb{R}^n$ выделим подвектора

$$\begin{gathered} x'^l \in \mathbb{R}^{n^l},\ l \in J_L :\ x' = \bigotimes_{l=1}^{L} x'^l; \\ x''^l \in \mathbb{R}^{n^l},\ l \in J_L :\ x'' = \bigotimes_{l=1}^{L} x''^l. \end{gathered} \tag{2.68}$$

Подставим (2.65) в левую часть неравенства (2.67) и, с учетом (2.39), (2.66), (2.68), получим:

$$
\begin{aligned}
f\left(\alpha x' + (1-\alpha)\, x''\right) &= \sum_{l=1}^{L} \lambda_l f'^l (\alpha x' + (1-\alpha)\, x'') = \\
= \sum_{l=1}^{L} \lambda_l f^l (\alpha x'^l + (1-\alpha)\, x''^l) &< \sum_{l=1}^{L} \lambda_l (\alpha f^l(x'^l) + (1-\alpha)\, f^l(x''^l)) = \\
= \alpha \sum_{l=1}^{L} \lambda_l f^l(x'^l) + (1-\alpha) \sum_{l=1}^{L} \lambda_l f^l(x''^l) &= \alpha f\left(x'\right) + (1-\alpha)\, f\left(x''\right)).
\end{aligned}
$$

Таким образом, условие (2.67) выполнено для произвольных E', E'', что и требовалось доказать. □

Следствие 2.5. *Если множества* (2.30) *- эллипсоидально расположенные, то и их декартово произведение - эллипсоидально расположенно.*

Действительно, подстановка (2.40) в уравнение (2.65) дает:

$$f(x) = \sum_{l=1}^{L} \lambda_l (x^l - x^{0l})^T C^l (x^l - x^{0l}) = 0.$$

Как видно, это квадратичная поверхность. С другой стороны, согласно теоремы 2.8, это строго выпуклая поверхность, следовательно, она представляет собой эллипсоид, что и требовалось доказать.

Сферическая расположенность E

Теорема 2.9. *Множество* (2.58) *сферически расположено тогда и только тогда, когда множества* (2.30) *сферически расположены.*

Доказательство. Необходимость. Зафиксируем $l \in J_L$. Рассмотрим сферу $S_r(a)$, описанную вокруг E, и вместе со множеством E спроектируем ее на подпространство: $\{x \in \mathbb{R}^n : \ x_i = 0, \ i \in \{1, ..., n_0^{l-1} - 1, n_0^l + 1, ..., n\}$, где $n_0^l = \sum\limits_{i=1}^{l} n^l$, осуществив таким образом спуск в пространство $\mathbb{R}^{n^l}$. В результате получим $n_l - 1$-сферу, уравнению которой удовлетворяют все точки E^l, откуда и следует сферическая расположенность E^l. В силу произвольности выбора l получаем, что все множества (2.30) - сферически расположенные.

Достаточность. Предположим, что все множества (2.30) - сферически расположены. Построим поверхность S, заданную уравнением (2.65) с коэффициентами (2.66), и получим $f(x) = \sum\limits_{l=1}^{L} \lambda_l((x^l - x^{0l})^2 - r^{l2}) = 0$. Вообще говоря, это уравнение задает семейство эллипсоидов. Выделим в нем гиперсферу, выбрав равные коэффициенты в (2.66) $\lambda = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}} \in \mathbb{R}^L$, и получаем $f(x) = \frac{1}{L} \sum\limits_{l=1}^{L} ((x^l - a^l)^2 - r^{l2}) = 0$, что можно также представить в виде

$$\sum_{l=1}^{L} (x^l - a^l)^2 = \sum_{l=1}^{L} r^{l2}, \tag{2.69}$$

т.е. при помощи уравнения гиперсферы с центром в точке:

$$a = \bigotimes_{l=1}^{L} a^l. \tag{2.70}$$

Итак, множество E - сферически расположенное, а описанная сфера вокруг него (возможно не единственная) имеет параметры (2.70):

$$r = (\sum_{l=1}^{L} r^{l2})^{1/2}.$$

□

Замечание 2.10. Если при этом выполнено условие (2.60), сфера $S_r(a)$

определена не единственным образом. В семействе описанных вокруг E гиперсфер сфера $S^{\min}$ имеет параметры:

$$a^{\min} = \bigotimes_{l=1}^{L} a^{\min,l}; \;\; r^{\min} = (\sum_{l=1}^{L} (r^{\min,l})^2)^{1/2}.$$

Вершинная расположенность E:

Теорема 2.10. *Множество* (2.58) *вершинно расположено тогда и только тогда, когда все множества* (2.30) *вершинно расположены.*

Иначе говоря, E удовлетворяет условию (1.55) в том и только в том случае, когда множества (2.30) удовлетворяют условию (2.33).

Критерий вершин P:

$$x = (x^1, ..., x^L) \in \; V \;\Leftrightarrow\; x^l \in V^l, \; l \in J_L.$$

Количество вершин P:

$$|V| = \prod_{l=1}^{L} |V^l|$$

или в терминах f-векторов

$$f_0(P) = \prod_{l=1}^{L} f_0(P^l).$$

Эта формула непосредственно следует из того факта, что для множества вершин P справедливо выражение, подобное (2.58):

$$V = \bigotimes_{i=1}^{L} V^l. \qquad (2.71)$$

Критерий смежности вершин P

Теорема 2.11. *Две вершины $x = \bigotimes_{i=1}^{L} x^l$, $y = \bigotimes_{i=1}^{L} y^l$ многогранника P смежные, тогда и только тогда, когда*

$$\exists l^* \in J_L : \; y^{l^*} \in N_{P_l}(x^{l^*}); \; y^l = x^l, \; l \in J_L \backslash \{l^*\}.$$

Это также непосредственное следствие того, что P - декартово произведение многогранников (2.31).

Количество смежных вершин P:

$$\forall x \in V \; \mathcal{R}(x) = \sum_{i=1}^{L} \mathcal{R}^l(x^l).$$

Следствие 2.6. *(из теоремы 2.11) Если все вершины многогранников* (2.31) *регулярны, то и вершины P также регулярны и степень их регулярности:*

$$\mathcal{R} = \sum_{l=1}^{L} \mathcal{R}^l.$$

Плоскости симметрии E, P

Утверждение 2.6. *Если для некоторого $l \in J_L$ плоскость $c^{lT} x^l = c_0^l$ - это плоскость симметрии множества E^l или многогранника P^l, то плоскость*

$c^T x = c_0^l$, *где*

$$c_i = \begin{cases} c^1_{i-n^{l-1,0}},\ i \in J_{n^{l,0}} \backslash J_{n^{l-1,0}}, \\ 0,\ i \notin J_{n^{l,0}} \backslash J_{n^{l-1,0}} \end{cases}$$

является плоскостью симметрии множества E *вида* (2.58) *или многогранника* P *вида* (2.59) *соответственно.*

Центральная симметрия E, P

Утверждение 2.7. *Множество* E *вида* (2.58) *центрально симметрично относительно точки*

$$x^0 = \mathop{\otimes}_{i=1}^{L} x^{0l} \tag{2.72}$$

тогда и только тогда, когда множества (2.30) *центрально симметричны и при этом* $x^{0l} \in \mathbb{R}^{n^l}$ *является центром симметрии* E^l $(l \in J_L)$.

Утверждение 2.8. *Многогранник* P *вида* (2.59) *центрально симметричен относительно точки* x^0 *вида* (2.72) *тогда и только тогда, когда многогранники* (2.31) *центрально симметричны относительно точек* $x^{0l} \in \mathbb{R}^{n^l}$ *- центров симметрии многогранников* P^l $(l \in J_L)$.

Число уровней множества E:

$$m(E) = \max_{l \in J_L} m(E^l).$$

Число уровней E по координатам:

$$m'(E) = \max_{l \in J_L} m'(E^l).$$

Число уровней многогранника P:

$$m''(P) = \max_{l \in J_L} m''(P^l).$$

В частности, если ни одно из множеств (2.30) не вырождено в точку:

$$1 < |E^l| < \infty, \ l \in J_L, \tag{2.73}$$

справедливо следующее утверждение:

Утверждение 2.9. *Декартово произведение множеств вида* (2.30), (2.73)*:*

- *двухуровневое множество, а многогранник вида* (2.59) *двухуровневый тогда и только тогда, когда множества* (2.30) *- двухуровневые:*

$$m(E) = m''(P) = 2 \ \Leftrightarrow \ m(E^l) = 2, \ l \in J_L;$$

- *двухуровневое множество по координатам в том и только в том случае, когда все множества* (2.30) *- двухуровневые по координатам:*

$$m'(E) = 2 \ \Leftrightarrow \ m'(E^l) = 2, \ l \in J_L.$$

Критерий простоты многогранника P

Утверждение 2.10. *Многогранник P вида (2.59) простой тогда и только тогда, когда все многогранники (2.31) - простые:*

$$\mathcal{R} = d \;\Leftrightarrow\; \mathcal{R}^l = d^l,\; l \in J_L.$$

Прямая сумма

Пусть множества (2.30) такие, что начало координат является точкой многогранников (2.31): $\forall\, l \in J_L\, \mathbf{0} \in P^l$, а E - прямая сумма множеств (2.30):

$$E = \bigoplus_{l=1}^{L} E^l, \tag{2.74}$$

т.е.

$$E = \bigcup_{l=1}^{L} E'^l, \tag{2.75}$$

где

$$E'^l = \{x = (x^1, ..., x^L) \in \mathbb{R}^n :\; x^l \in E^l,\; x^{l'} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n^l},\; l' \neq l\},\; l \in J_L.$$

Ниже приводятся некоторые свойства множества (2.74) и соответствующего многогранника P.

Мощность E:

$$|E| = \sum_{l=1}^{L} |E^l|.$$

Многогранник P представляет собой выпуклую оболочку прямой суммы многогранников (2.31):

$$P = conv \bigoplus_{l=1}^{L} P^l. \tag{2.76}$$

Размерность P:

$$\dim\ P = \sum_{l=1}^{L} \dim\ P^l,$$

т.е. для размерности многогранника (2.76) справедлива та же формула, что и для декартового произведения многогранников (2.31).

Критерий полномерности P:

Многогранник P вида (2.76) полномерный тогда и только тогда, когда многогранники (2.31) полномерные.

Релаксация Н-представления P

Несводимое H-представление декартового произведения множеств (2.30), приведенное в утверждении 2.3, может служить релаксацией H-

представления искомого многогранника (2.76) прямой суммы множеств.

Несводимое H-представление P

Несводимое H-представление многогранника P формируется комбинированием (складыванием левых и правых их частей). В результате формируется H-представление вида (1.57), где:

$$n'' = \sum_{l<l'} n''^{l} n''^{l'},\ n' = \sum_{l<l'} (n'^{l} + n''^{l})(n'^{l} + n''^{l}) - n''.$$

Для числа гиперграней P справедлива формула:

$$|\mathbf{F}| = \sum_{l<l'} |\mathbf{F}^{l}| \cdot |\mathbf{F}^{l'}|$$

или в терминах f-векторов:

$$f_{d-1}(P) = \sum_{l<l'} f_{d^{l}-1}(P^{l}) f_{d^{l'}-1}(P^{l'}).$$

Поверхностная расположенность E

Предположим, для всех или части множеств (2.30) выполнено условие (2.35), т.е. известно, на каких поверхностях эти множества расположены:

$$\exists I \subseteq J_L:\ E^{l} \in S^{l},\ l \in I.$$

Осуществим подъем в пространство $\mathbb{R}^n$ как описано в п. 2.4 и построим поверхности (2.63). Тогда точки множества E вида (2.74) лежат на поверхностях

$$E \in S'^{l},\ l \in I.$$

Утверждение 2.11. *Если множества* (2.30) *вписаны в поверхности, то и множество* E *вида* (2.74) *вписано в некоторую поверхность.*

Доказательство. Пусть для множеств (2.30) выполнены условия (2.35), (2.37), и эти множества вписаны в поверхности (2.36).

Функции (2.34), задающие эти описанные поверхности, представим в следующем виде:

$$f^l(x^l) = h^l(x^l) - h^l(\mathbf{0}) = 0,\ l \in J_L \tag{2.77}$$

и выделим в них две группы - те, в которых $h^l(x^l)$ принимает ненулевое значение в начале координат (Группа 1, функции с номерами из $I' \subseteq J_L$), и те, в которых это значение нулевое (Группа 2):

$$\text{Группа 1: } l \in I' \subseteq J_L\ h^l(\mathbf{0}) \neq 0,$$
$$\text{Группа 2: } l \in J_L \backslash I'\ h^l(\mathbf{0}) = 0.$$

При этом будем, не ограничивая общности, считать, что

$$h^l(\mathbf{0}) = 1,\ l \in I'. \tag{2.78}$$

При подъеме в $\mathbb{R}^n$ по вышеописанному принципу будем осуществлять переход $h^l(x^l) \to h'^l(x)$, $l \in J_L$ к новым функциям $\{h'^l(x)\}_{l \in J_L}$, которые определены в $\mathbb{R}^n$.

При построении искомой поверхности S необходимо рассмотреть два случая:

- если $I' \neq \emptyset$, тогда S зададим уравнением

$$f(x) = \sum_{l=1}^{L} h'^{l}(x) - 1 = 0; \tag{2.79}$$

- если $I' = \emptyset$, тогда S зададим так:

$$f(x) = \sum_{l=1}^{L} h'^{l}(x) = 0. \tag{2.80}$$

Нетрудно видеть, что все точки E удовлетворяют уравнению $f(x) = 0$, поскольку произвольная точка $x \in E$ имеет $L - 1$-ну группу нулевых координат и одну группу координат, которой соответствует x^l, принадлежащий некоторому E^l. Таким образом, E лежит на построенной поверхности S, а для всех точек $x \in P$ выполняется неравенство $f(x) \leq 0$ в силу (2.37) и способа построения $f(x)$. В итоге S будет искомой описанной поверхностью вокруг E. □

В заключение покажем, что если множества (2.30) поверхностно расположенные, то E обладает этим же свойством.

Теорема 2.12. *Если множества* (2.30) *удовлетворяют условиям* (2.35), (2.36), (2.39), *то их прямая сумма* (2.74) - *поверхностно расположенное множество.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.8, где в качестве $f(x)$ выбирается функция (2.79) или (2.80) в зависимости от того, выполнено ли условие

$$I' \neq \emptyset. \tag{2.81}$$

Как оказывается, такое построение функции $f(x)$ обеспечивает ее строгую выпуклость.

Следствие 2.7. *Если множества* (2.30) *эллисоидально расположены, то множество* (2.74) *является эллипсоидально расположенным.*

Сферическая расположенность E

Утверждение 2.12. *Если множества* (2.30) *сферически расположены, то их прямая сумма эллипсоидально расположено.*

Доказательство. Действительно, предположим, что все множества (2.30) - сферически расположенные. Покажем, что существует эллипсоид, описанный вокруг множества (2.74).

Функции $f^l(x^l) = (x^l - x^{0l})^2 - r^{l2}$, задающие сферы, описанные вокруг множеств (2.30), представим в форме (2.77), (2.78):

- $\forall l \in I'$ $h^l(x^l) = \frac{1}{a^{l2} - r^{l2}}(x^{l2} - x^{lT}a^l)$;
- $\forall l \notin I'$ $h^l(x^l) = (x^{l2} - x^{lT}a^l)$

соответственно и выделим в них Группу 1 и Группу 2.

Построим уравнение (2.79), если условие (2.81) выполняется или уравнение (2.80), если не выполняется. В первом случае задаваемая этим уравнением поверхность в отдельных случаях является гиперсферой, но вообще говоря, представляет собой эллипсоид.

Рассмотрим два возможных случая и выпишем уравнения результирующих квадратичных поверхностей:

1. если

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}^1 :\ \forall l \in I'\ a^{l2} - r^{l2} = \alpha, \tag{2.82}$$

то имеем

$$\forall l \in I'\ h^l(x^l) = \tfrac{1}{\alpha}(x^{l2} - x^{lT}a^l) \underset{E^l}{=} 1,\ h'^l(x^l) = \alpha \cdot h^l(x^l) = x^{l2} - x^{lT}a^l \underset{E^l}{=} \alpha.$$

Функцию $f(x)$ зададим в виде

$$f(x) = \textstyle\sum_{l=1}^{L} h'^l(x) - \alpha = 0.$$

Уравнение поверхности S будет иметь вид

$$f(x) = \sum_{l=1}^{L}(x^{l2} - x^{lT}a^l) - \alpha = 0,$$

которое можно переписать в виде:

$$\textstyle\sum_{l=1}^{L}(x^{l2} - x^{lT}a^l + a^{l2}) = \alpha + \textstyle\sum_{l=1}^{L} a^{l2}$$

или

$$(x - a)^2 = a^2 + \alpha,$$

где x - это вектор (2.62), а a - это вектор (2.70). Таким образом, E - сферически расположенное множество и описанная сфера имеет центр в точке a и радиус $\sqrt{a^2 + \alpha}$.

2. если (2.82) не выполнено, то строим поверхность

$$\textstyle\sum_{l \in I'} \tfrac{1}{a^{l2} - r^{l2}}(x^{l2} - x^{lT}a^l) + \textstyle\sum_{l \notin I'}(x^{l2} - x^{lT}a^l) = 1,$$

представляющую собой эллипсоид с центром в точке a. Чтобы определить его полуоси, перепишем это уравнение в каноническом виде:

$$\sum_{l\in I'} \frac{1}{a^{l2} - r^{l2}} (x^{l2} - x^{lT} a^l + a^{l2}) + \sum_{l\notin I'} (x^{l2} - x^{lT} a^l + a^{l2}) =$$
$$= 1 + \sum_{l\in I'} \frac{a^{l2}}{a^{l2} - r^{l2}} + \sum_{l\notin I'} a^{l2}.$$

$$\sum_{l=1}^{L} \frac{(x^{l2} - a^l)^2}{b^{l2}} = 1,$$

где

$$B = 1 + \sum_{l\in I'} \frac{a^{l2}}{a^{l2} - r^{l2}} + \sum_{l\notin I'} a^{l2},$$

$$b^{l2} = \begin{cases} B(a^{l2} - r^{l2}), & \text{если } l \notin I', \\ B, & \text{если } l \notin I' \end{cases} \qquad (l \in J_L).$$

□

Вершинная расположенность E

Теорема 2.13. *Множество* (2.74) *вершинно расположенное тогда и только тогда, кода все множества* (2.30) *вершинно расположены.*

Для доказательства можно воспользоваться теоремой 2.12, а также связью между вершинно- и поверхностно расположенными множествами, установленными в теореме 2.1.

Критерий вершин P:

$$x = (x^1, ..., x^L) \in V \Leftrightarrow \exists\, l^* \in J_L \, x^{l^*} \in V^{l^*}.$$

Количество вершин P:

$$|V| = \sum_{l=1}^{L} |V^l|$$

или в терминах f-векторов

$$f_0(P) = \prod_{l=1}^{L} f_0(P^l).$$

Плоскости симметрии E, P

Для прямой суммы (2.74) множеств (2.30) справедливо утверждение 2.6.

Центральная симметрия E, P

Подобно декартовому произведению множеств (2.30), для множества (2.74) и соответствующего многогранника P справедливо утверждение 2.7, которое устанавливает центральную симметрию E, P в случае центральной симметрии множеств (2.30) или многогранников (2.31), участвующих в их формировании.

Число уровней E по координатам:

$$m'(E) = \max_{l \in J_L} m'(E^l).$$

Число уровней по координатам для прямой суммы множеств и декартового произведения совпадают.

В частности, если выполнено условие (2.73), то критерием двухуровневости по координатам множества (2.74) будет следующее утверждение.

Утверждение 2.13. *Прямая сумма множеств* (2.30), (2.73) *является двухуровневым множеством по координатам тогда и только тогда, когда все множества* (2.30) - *двухуровневые по координатам:*

$$m'(E) = 2 \;\Leftrightarrow\; m'(E^l) = 2,\; l \in J_L.$$

Глава 3

Евклидовы комбинаторные конфигурации и их свойства

В данной главе на основе понятия комбинаторной конфигурации вводится класс евклидовых комбинаторных конфигураций (е-конфигураций). Комбинаторные конфигурации, их классификация и свойства рассматриваются в соответствии с [7, 27, 37, 62, 58, 93, 90, 92, 125, 126]. Описание е-конфигураций базируется на работах [116, 139, 140, 141] и свойствах конечных точечных конфигураций, описанных в предыдущих главах.

Понятие е-конфигурации неразрывно связано с определением евклидовых комбинаторных множеств, впервые введенным в [121, 122], и их отображением в арифметическое евклидово пространство согласно [127, 129]. Выбор соответствующих отображений порождает свойства исследуемого класса множеств е-конфигураций. Этот факт иллюстрируется на множествах е-конфигураций перестановок и размещений. При этом устанавливается их взаимосвязь с общими евклидовыми множествами перестановок и размещений [127], а также их специальными подклассами [47, 81, 127, 129].

3.1 Комбинаторные конфигурации

В дискретной математике, в частности, комбинаторном анализе, в теории комбинаторной оптимизации важное место занимают исследования, связанные с формализацией понятий комбинаторного множества, комбинаторного объекта, описании специальных классов дискретных структур. При этом одним из фундаментальных является определение комбинаторной конфигурации. Во введении был дан краткий анализ состояния вопроса. Поэтому в дальнейшем будем использовать понятие комбинаторной конфигурации в смысле К. Бержа [7].

Под конфигурацией будем понимать отображение χ некоторого исходного множества B элементов произвольной природы в конечное абстрактное результирующее множество $A = \{a_1, ..., a_k\}$ определенной структуры при выполнении заданного набора ограничений Ω, т.е.

$$\chi : B \to A. \tag{3.1}$$

Хотя формально здесь не наложены ограничения на мощность множества B, фактически рассматривались конечные множества $B = \{b_1, ..., b_n\}$. Конфигурация (3.1), таким образом, осуществляет структурирование результирующего множества. В результате отображения (3.1) получим упорядоченную последовательность π элементов из A:

$$\pi = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \\ a_{j_1} & \dots & a_{j_n} \end{pmatrix} = a_{j_1} a_{j_2} ... a_{j_n}, \tag{3.2}$$

где $\{j_1, ..., j_n\} \in J_k$.

В дальнейшем для конфигурации π вида (3.2) будем использовать обозначение $\pi = [a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_n}]$.

Заметим, что конфигурация (3.2) полностью определяется четверкой - "отображение - исходное множество - результирующее множество - ограничения":

$$\langle \chi, B, A, \Omega \rangle \,. \tag{3.3}$$

Проиллюстрируем понятие конфигурации на следующем примере.

Пример 3.1. Рассмотрим в качестве исходного множества B совокупность из четырех плоских центрально симметричных геометрических фигур, показанных на Рис. 3.1. Таким образом, $n = 4$ и $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

В качестве результирующего множества A выберем набор из четырех точек на плоскости, совпадающих с множеством вершин некоторого квадрата (см. Рис. 3.2). Таким образом, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и $k = 4$, и мощности исходного B и результирующего множества A совпадают.

Предположим, что $\Omega = \emptyset$, т.е. ограничения отсутствуют.

Будем формировать комбинаторные конфигурации в соответствии с (3.2) при $n = 4$, используя при этом следующую геометрическую интерпретацию. Для каждой из фигур $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ выберем точку, совпадающую с ее центром симметрии. Назовем эту точку полюсом. Будем совмещать полюсы фигур с точками из множества $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ в соответствии с заданной конфигурацией.

Различные варианты расположения фигур для конфигураций

$$\pi_1 = [a_1 a_3 a_4 a_2],\ \pi_2 = [a_1 a_2 a_4 a_3],\ \pi_3 = [a_3 a_1 a_4 a_2],$$

$$\pi_4 = [a_1 a_2 a_3 a_4],\ \pi_5 = [a_1 a_1 a_4 a_2],\ \pi_6 = [a_3 a_2 a_3 a_4],$$

$$\pi_7 = [a_4 a_2 a_2 a_2],\ \pi_8 = [a_3 a_3 a_1 a_1],\ \pi_9 = [a_1 a_1 a_1 a_1]$$

приведены на Рис. 3.3-Рис. 3.11 соответственно. При этом заметим, что для полюса a_i была использованы метка A_i ($i \in J_4$), а для фигуры b_j - метка B_j ($j \in J_4$).

Анализ взаимного расположения фигур на приведенных рисунках позволяет выделить среди конфигураций $\pi_1 - \pi_9$ следующие виды:

- конфигурации π_1, π_2 (далее Группа 1), которым соответствует расположение попарно не пересекающихся фигур;
- конфигурации $\pi_1 - \pi_4$ (далее Группа 2), которым соответствует различное расположение полюсов всех фигур;
- конфигурации $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_8$ (далее Группа 3), при которых одна точка может служить полюсом при расположении не более, чем двух объектов, и так далее.

Для выделенных трех групп конфигураций, в зависимости от ограничений на взаимное расположение фигур, можно сформулировать дополнительные условия на отображение χ, в результате чего будет выполнено $\Omega \neq \emptyset$.

В большинстве случаев исходное множество B может быть унифицировано, в том смысле, что элементы этого множества достаточно перенуме-

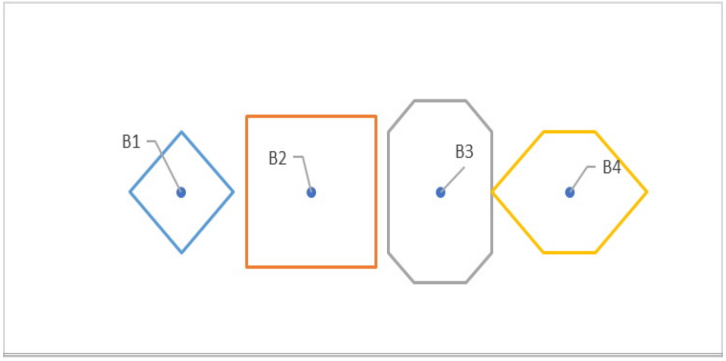


Рис. 3.1: Пример 3.1: B

Рис. 3.2: Пример 3.1: A

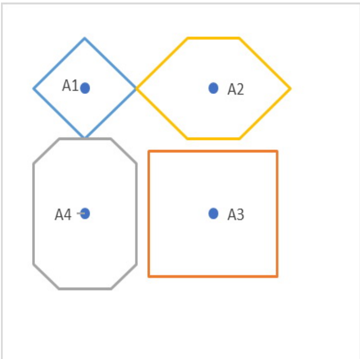


Рис. 3.3: π_1

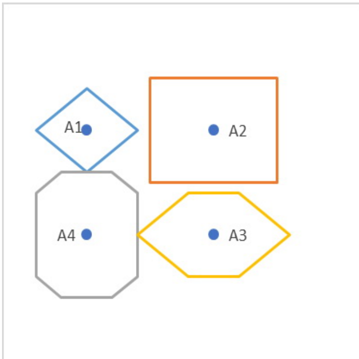


Рис. 3.4: π_2

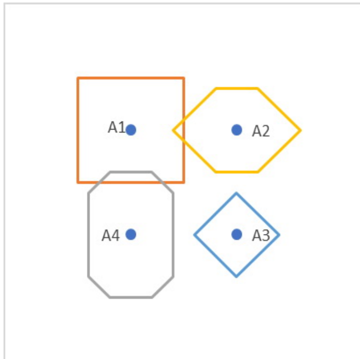


Рис. 3.5: π_3

ровать и этой информации будет достаточно, чтобы формировать ту или иную комбинаторную конфигурацию. В связи с этим осуществим биекцию между множеством B и множеством J_n номеров его элементов, в результате чего отображение (3.1) можно преобразовать к виду:

$$\psi : J_n \to A. \tag{3.4}$$

Элементы конфигурации при отображении не изменяются, т.е.

$$\pi = \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \\ a_{j_1} & \dots & a_{j_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ a_{j_1} & \dots & a_{j_n} \end{pmatrix} = [a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_n}]. \tag{3.5}$$

Множество J_n при этом называют <u>нумерующим множеством</u>, а под

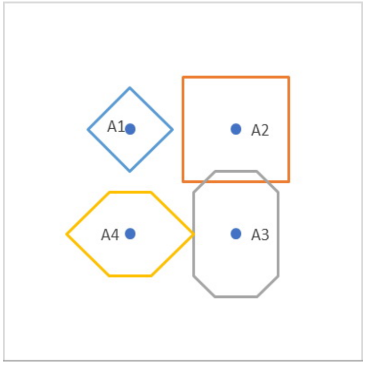


Рис. 3.6: π_4

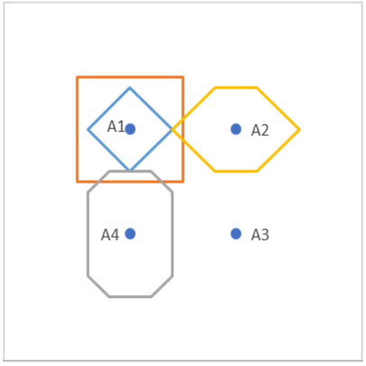


Рис. 3.7: π_5

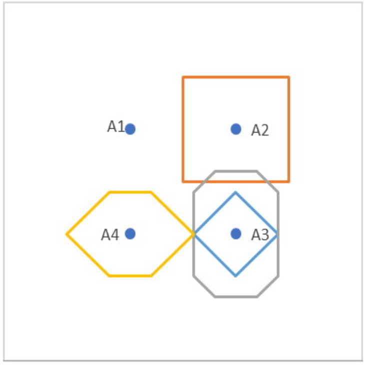


Рис. 3.8: π_6

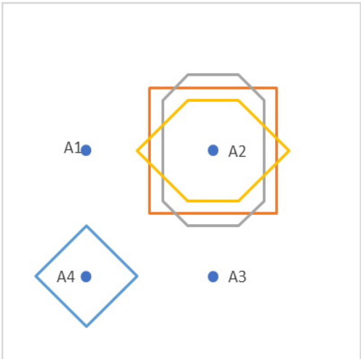


Рис. 3.9: π_7

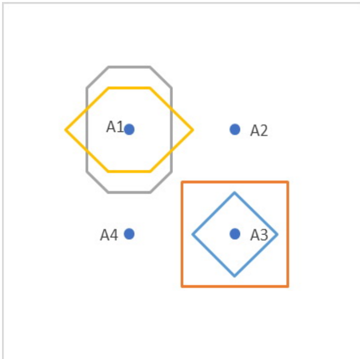


Рис. 3.10: π_8

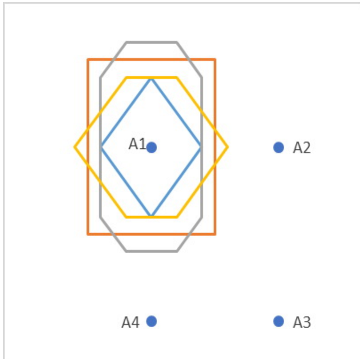


Рис. 3.11: π_9

структурированием множества A понимают его строгое упорядочивание, т.е.

$$a_i \prec a_{i+1},\ i \in J_{k-1}. \tag{3.6}$$

В данном случае элементы нумерующего множества J_n задают позиции элементов результирующего множества в конфигурации (3.4), а саму комбинаторную конфигурацию можно представить триадой

$$\langle \psi, A, \Lambda \rangle\,, \tag{3.7}$$

где A – строго упорядоченное результирующее множество, ψ – отображение вида (3.4), Λ – заданная система ограничений на вид отображения ψ.

3.2 Евклидовы комбинаторные конфигурации

Выделим следующий класс комбинаторных конфигураций. Пусть множество

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k\} \tag{3.8}$$

представляет собой совокупность векторов пространства $\mathbb{R}^m$ одинаковой размерности, т.е.

$$\mathbf{a}_l = (a_{1l}, ..., a_{ml})^T \in \mathbb{R}^m, \quad l \in J_k. \tag{3.9}$$

Рассмотрим множество (3.8) в качестве результирующего при формировании конфигураций вида (3.7), а в качестве Λ - множество соответствующих ограничений для выделения интересующих нас конфигураций из всех возможных. В соответствии с (3.5) конфигурация π будет представлять собой упорядоченную последовательность векторов $\mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}_{j_2}, ..., \mathbf{a}_{j_n}$.

Каждой такой конфигурации

$$\pi = [\mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}_{j_2}, ..., \mathbf{a}_{j_n}] \tag{3.10}$$

поставим во взаимно-однозначное соответствие вектор

$$x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N, \ N{=}m \cdot n, \tag{3.11}$$

компоненты которого представляют собой упорядоченный набор элементов мультимножества:

$$\tilde{A}(x) = \{a_{1j_1}, ..., a_{1j_n}, a_{2j_1}, ..., a_{2j_n}, ..., a_{mj_1}, ..., a_{mj_n}\}, \tag{3.12}$$

т.е. зададим биективное отображение φ такое, что:

$$x = \varphi(\pi)\,,\ \pi = \varphi^{-1}(x)\,. \tag{3.13}$$

Определение 3.1. *Евклидовой комбинаторной конфигурацией (е-конфигурацией, the Euclidean combinatorial configuration) назовем отображение*

$$\varphi : (\psi, \mathbf{A},\ \Theta) \to \mathbb{R}^N, \tag{3.14}$$

где $\mathbf{A}$ *– результирующее множество вида* (3.8), (3.9)*,* ψ *– отображение вида* $\psi : J_n \to \mathbf{A}$*,* Θ *– заданная система ограничений на вид отображений* φ, ψ*.*

Евклидова комбинаторная конфигурация полностью определяется кортежем

$$\langle \varphi, \psi, \mathbf{A},\ \Theta \rangle \tag{3.15}$$

и представляет собой образ комбинаторной конфигурации (3.4) в арифметическом евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$ при заданных отображениях φ, ψ и определяет вектор x вида (3.13) размерности N. Число N далее будем называть размерностью евклидовой комбинаторной конфигурации, а мультимножество $\tilde{A}(x)$ - индуцирующим мультимножеством евклидовой комбинаторной конфигурации x.

В зависимости от выбора отображения φ, в частности, от способа упорядочения индуцирующего множества $\tilde{A}(x)$, можно получить различные евклидовы комбинаторные конфигурации.

В качестве примера укажем

$$x = (a_{1j_1}, ..., a_{1j_n}, a_{2j_1}, ..., a_{2j_n}, ..., a_{mj_1}, ..., a_{mj_n}) \tag{3.16}$$

либо

$$x = (a_{1j_1}, ..., a_{mj_1}, a_{1j_2}, ..., a_{mj_2}, ..., a_{1j_n}, ..., a_{mj_n}). \tag{3.17}$$

Замечание 3.1. В общем случае результирующее множество (3.8) может состоять из числовых векторов различных размерностей, при этом отображение φ должно задавать упорядочение элементов $\tilde{A}(x)$ при выполнении условия (3.13).

Заметим, что для множества числовых векторов $\mathbf{A}$ условие строгой упорядоченности результирующего множества выполняется автоматически.

Замечание 3.2. Система ограничений Θ состоит из ограничений Λ на вид отображения ψ, а также указывает правило осуществления отображения φ комбинаторной конфигурации в евклидову комбинаторную конфигурацию.

В дальнейшем, если не оговаривается противное, будем использовать отображение φ в соответствии с (3.17) и не будем накладывать никаких других ограничений на вид этого отображения. В результате положим, что $\Theta = \Lambda$, после чего формула (3.14) может быть преобразована в

$$\varphi : (\psi, \mathbf{A},\ \Lambda) \to \mathbb{R}^N, \tag{3.18}$$

а формула (3.15) - в

$$\langle \varphi, \psi, \mathbf{A},\ \Lambda \rangle\,. \tag{3.19}$$

Пример 3.2. Продемонстрируем евклидовы комбинаторные конфигурации, построенные из комбинаторных конфигураций $\pi^1 - \pi^9$, приведенных в примере 3.1.

Пусть элементами множества A являются их координаты на плоскости в собственной системе координат (см. Рис. 3.13):

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{(-5,5),(5,5),(5,-5),(-5,-5)\} \tag{3.20}$$

и множество фигур B задано в этой же системе координат (см. Рис. 3.12).

Каждой конфигурации $\pi^1 - \pi^9$ из примера 3.1 можно поставить в соответствие евклидову комбинаторную конфигурацию $x^i = \varphi(\pi^i)$, для которой отображение φ задано формулой (3.17) ($i \in J_9$). В результате получим следующую совокупность евклидовых комбинаторных конфигураций:

$$\begin{aligned}
x^1 &= \varphi(\pi^1) = (-5,5,5,-5,-5,-5,5,5),\\
x^2 &= \varphi(\pi^2) = (-5,5,5,5,-5,-5,5,-5),\\
x^3 &= \varphi(\pi^3) = (5,-5,-5,5,-5,-5,5,5),\\
x^4 &= \varphi(\pi^4) = (-5,5,5,5,5,-5,-5,-5),\\
x^5 &= \varphi(\pi^5) = (-5,5,-5,5,-5,-5,5,5),\\
x^6 &= \varphi(\pi^6) = (5,-5,5,5,5,-5,-5,-5),\\
x^7 &= \varphi(\pi^7) = (-5,-5,5,5,5,5,5,5),\\
x^8 &= \varphi(\pi^8) = (5,-5,5,-5,-5,5,-5,5),\\
x^9 &= \varphi(\pi^9) = (-5,5,-5,5,-5,5,-5,5).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Индуцирующие мультимножества этих евклидовых комбинаторных конфигураций будут формироваться из чисел -5, 5. Так, например,

$$\tilde{A}(x^1) = \{-5, 5, 5, -5, -5, -5, 5, 5\},$$
$$\tilde{A}(x^2) = \{-5, 5, 5, 5, -5, -5, 5, -5\}$$

и т.д. Это говорит о том, что если рассмотреть множество $E = \{x^i\}_{i \in J_9} \subset \mathbb{R}^9$, образующим его множеством будет $\mathcal{A} = \{-5, 5\}$.

Векторы x^i, $i \in J_9$ задают расположение фигур $b_1 - b_4$. Так, например, евклидовы комбинаторные конфигурации $\pi^1 - \pi^3$ будут соответствовать их размещения, показанные на Рисунках 3.14-3.16.

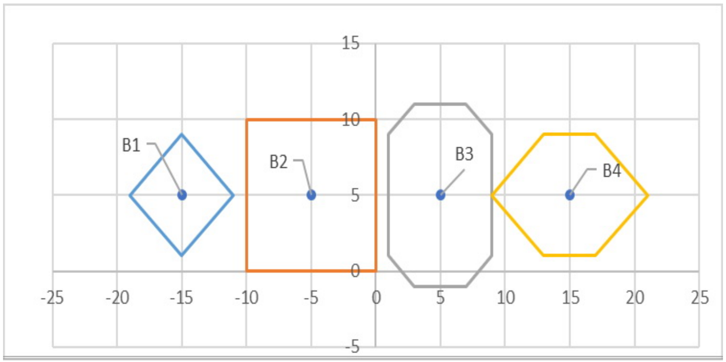


Рис. 3.12: Пример 3.2: B

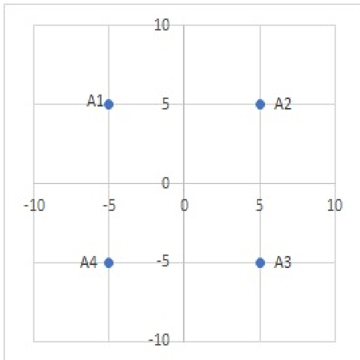


Рис. 3.13: Пример 3.2: A

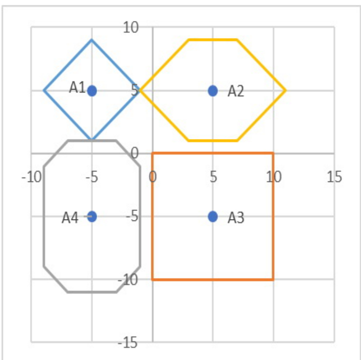


Рис. 3.14: π_1

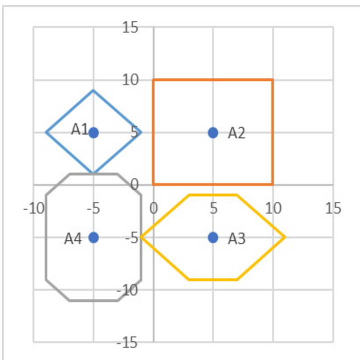


Рис. 3.15: π_2

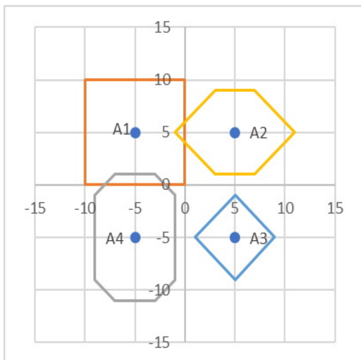


Рис. 3.16: π_3

Замечание 3.3. Ослабление условия на конечность результирующего множества **A** не приводит к изменению сущности понятия евклидовой комбинаторной конфигурации. При этом, естественно, меняется мощность образованного множества и его свойства. В частности, если множество **A** счетно, то имеем класс векторов, которые, следуя приведенной выше терминологии, также естественно назвать евклидовыми комбинаторными объектами.

3.3 Евклидовы комбинаторные множества

Как было отмечено выше, комбинаторная конфигурация (3.2) задается четверкой (3.3) - "отображение χ - исходное множество B - результирующее множество A - ограничения Ω".

Естественно перейти к описанию множества комбинаторных конфигураций, порождаемому всевозможными отображениями вида (3.2) для заданных A и B и системе ограничений Ω.

Введем в рассмотрение множество Π всевозможных комбинаторных конфигураций вида (3.2), т.е. результат всевозможных отображений χ при заданных исходном множестве B, результирующем множестве A и системе ограничений Ω. Нетрудно видеть, что Π будет совпадать со множеством конфигураций вида (3.7), т.е. с результатами отображений ψ вида (3.1) для этого же A и ограничений Λ. Положим, что результирующее множество состоит из векторов одинаковой размерности, т.е. существует $m \in \mathbb{R}^m$, такое, что

$$A = \mathbf{A},$$

где **A** имеет вид (3.8), (3.9).

При отображении в $\mathbb{R}^N$, множество Π будет представлять собой совокупность всех евклидовых комбинаторных конфигураций вида (3.19):

$$E = \varphi\,(\Pi) \subset \mathbb{R}^N. \tag{3.22}$$

Такое отображение будем называть погружением множества Π в арифметическое евклидово пространство, в результате которого формируется образ E множества Π в $\mathbb{R}^N$.

С другой стороны, в силу (3.13) справедливо:

$$\Pi = \varphi^{-1}(E). \tag{3.23}$$

Сделаем следующее замечание. В работах [121, 122] был выделен класс так называемых евклидовых комбинаторных множеств (e-множеств, the Euclidan combinatorial sets, e-sets). Согласно введенному определению, элементы евклидовых комбинаторных множеств обладают такой особенностью, что они отличаются либо составом своих компонент, либо порядком их следования. Это обеспечивает возможность рассмотрения вместо них их образов в арифметическом евклидовом пространстве или так называемых специальных комбинаторными множеств (s-множеств, s-sets). Отсюда следует, что если $\mathcal{P}$ - e-множество, а $\mathcal{E}$ - соответствующее ему s-множество, то для них справедливо:

$$\exists\,\phi,\ \exists\,\mathcal{N} \in \mathbb{N}:\ \mathcal{E} = \phi(\mathcal{P}) \subset \mathbb{R}^{\mathcal{N}},\ \mathcal{P} = \phi^{-1}(\mathcal{E}). \tag{3.24}$$

Нетрудно заметить, что множество Π является e-множеством. В самом деле, для пары конфигураций $\pi, \pi' \in \Pi$, таких, что

$$\pi = [a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_n}]\,,\; \pi' = [a_{j_1}, ..., a_{j_n}]$$

справедливо

$$\pi \neq \pi' \Leftrightarrow [j_1, j_2, ..., j_n] \neq [j'_1, j'_2, ..., j'_n],$$

что и обеспечивает отличие составов $\{a_{j_i}\}_{i \in J_n}$, $\{a_{j'_i}\}_{i \in J_n}$ этих двух конфигураций или порядка следования их компонент.

Множество E представляет собой s-множество, соответствующее e-множеству Π, так как для него справедлива формула (3.24), обращающаяся в пару формул (3.22), (3.23) при выборе

$$\phi = \varphi,\; \mathcal{N} = N,\; \mathcal{P} = \Pi,\; \mathcal{E} = E.$$

В дальнейшем будем исследовать s-множество E как образ e-множества Π в $\mathbb{R}^N$. Заметим, что способ построения множества Π в терминах отображений одного множества в другое позволяет предполагать, что и множество E обладает специфическими особенностями по сравнению с произвольными e-множествами и другими конечными точечными конфигурациями, что обусловлено тем фактом, что E, с одной стороны, задано суперпозицией отображений конечного множества во множество точек евклидова, а с другой, является конефной точечной конфигурацией.

В связи с этим выделим s-множества вида (3.22) в отдельный класс и назовем множествами евклидовых комбинаторных конфигураций или сокращенно $\mathcal{C}$-множествами (e-configiration sets, $\mathcal{C}$-sets). s-множества, являющиеся прообразами $\mathcal{C}$-множеств, будут множествами комбинаторных конфигураций, которые мы будем сокращенно называть $\mathcal{E}_c$-множествами (configuration sets, $\mathcal{E}_c$-sets).

Пусть множество е-конфигураций E задано как конечное множество точек $\mathbb{R}^N$. С одной стороны, к нему применимы результаты, приведенные в главах 1, 2. С другой стороны, E можно рассматривать как s-множество, соответствующее некоторому е-множеству Π, например, такому, которое сопоставляет каждому вектору $E \in \mathbb{R}^N$ упорядоченную последовательность его координат:

$$\Pi = \{\pi = [x_1, ..., x_N]\}_{x=(x_1,...,x_N)\in E}.$$

Заметим, что существует бесчисленное множество способов сопоставить s-множеству E е-множество Π так, чтобы выполнялись условия (3.22), (3.23). Однако ни один из этих способов не добавляет информации об исследуемом множестве E. В то же время, мы знаем, что E является $\mathcal{C}$-множеством, а значит, его свойства напрямую связаны с мощностью n исходного множества и параметрами четверки (3.15), такими как отображения ψ, φ, результирующее множество $\mathbf{A}$ и ограничения Θ. Как только характеристики E как $\mathcal{C}$-множества будут известны, к нему будут применимы результаты, излагаемые ниже в этой главе и последующих главах.

Далее будем считать, что E - это $\mathcal{C}$-множество, порожденное е-конфигурациями (3.18), в которых отображение φ задается выражением вида (3.17):

$$E = \{x \in \mathbb{R}^N : \ x \ - \ \text{е-конфигурация вида (3.18)}\}. \tag{3.25}$$

Сформируем мультимножество:

$$\overline{A} = \{a_{ij}\}_{\,i\in J_m,\; j\in J_k} \tag{3.26}$$

и выделим из него основу $S(\overline{A})$:

$$\mathcal{A} = S(\overline{A}) = \{e_i\}_{i\in J_K},\ K = \left|S(\overline{A})\right|. \tag{3.27}$$

Нетрудно видеть, что множество $\mathcal{A}$ будет образующим для множества E. В самом деле, согласно условию (1.13), образующее множества как конечной точечной конфигурации E состоит из всевозможных координат его точек, что полностью соответствует множеству (3.27). Также $\mathcal{A}$ обладает такой особенностью, что основы мультимножеств $\tilde{A}(x)$ вида (3.12) являются подмножествами $\mathcal{A}$ для любого x из E: $\forall\, x \in E\ \ S(\tilde{A}(x)) \subseteq \overline{A}$.

Теперь евклидовы комбинаторные конфигурации можно рассматривать как точки дискретной решетки

$$\mathcal{A}^N = \left\{x \in \mathbb{R}^N,\ x_i \in \mathcal{A},\ i \in J_N\right\}, \tag{3.28}$$

удовлетворяющие заданной системе ограничений Λ. Соответственно, $\mathcal{C}$-множество E будет подмножеством решетки (3.28):

$$E \subseteq \mathcal{A}^N \subset \mathbb{R}^N. \tag{3.29}$$

Замечание 3.4. Нетрудно видеть, что совокупность комбинаторных объектов также будет е-множеством, а множество соответствующих евклидовых комбинаторных объектов (е-объектов) - s-множеством. Распространяя приведенные выше результаты на данный случай, получим, что образующее множество $\mathcal{A}$ множества е-объектов будет счетным, а само оно будет подмножеством неограниченной дискретной решетки $\mathcal{A}^N$.

Для заданных n и $\mathbf{A}$, различные система ограничений Λ на вид отображения ψ приводят к формированию разнообразных $\mathcal{C}$-множеств и соответствующих классов евклидовых комбинаторных конфигураций.

3.4 Классы множеств евклидовых комбинаторных конфигураций

Выделим из класса $\mathcal{C}$-множеств два подкласса, которые назовем множествами евклидовых конфигураций перестановок (permutation e-configuration sets) и множествами евклидовых конфигураций размещений (partial permutation e-configuration sets) соответственно.

Определение 3.2. *$\mathcal{C}$-множество вида* (3.25) *назовем множеством е-конфигураций перестановок, если индуцирующие множества всех его элементов совпадают, т.е.*

$$\forall\, x, y \in E \;\; \tilde{A}(x) = \tilde{A}(y). \tag{3.30}$$

Определение 3.3. *$\mathcal{C}$-множество вида* (3.25) *назовем множеством е-конфигураций размещений, если оно содержит элементы, индуцирующие множества которых различны, т.е.*

$$\exists\, x, y \in E \;\; \tilde{A}(x) \neq \tilde{A}(y). \tag{3.31}$$

Условия (3.30), (3.31) позволяют легко определить, к какому из двух классов $\mathcal{C}$-множеств - размещений или перестановок - относится заданное множество E. Нас же, в первую очередь, будет интересовать, каким образом то или иное множество евклидовых комбинаторных конфигураций можно задать в терминах координат составляющих его векторов и параметров комбинаторных конфигураций (3.3) или (3.7), образами которых эти вектора являются.

Поэтому дадим здесь еще одно определение указанным классам множеств.

Определение 3.4. *Мультимножество* $\tilde{A} = \{\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_\eta\}$ *назовем <u>индуцирующим</u> для множества* E *вида* (3.25), *если оно удовлетворяет условиям:*

$$\forall\, x \in E \quad \tilde{A}(x) \subseteq \tilde{A}; \tag{3.32}$$

$$\forall \tilde{a} \in \tilde{A}\; \exists x \in E: \; \tilde{A}(x) \nsubseteq \tilde{A} \backslash \{\tilde{a}\}. \tag{3.33}$$

Здесь условие (3.32) означает, что $\tilde{A}$ охватывает всевозможные значения координат векторов из E в достаточной кратности, а условие (3.33) - что при этом эти кратности минимально возможные.

Теперь вместо определений 3.2, 3.3 можно использовать следующие.

Определение 3.5. $\mathcal{C}$*-множество вида* (3.25) *будем называть множеством e-конфигураций перестановок, если индуцирующее его мультимножество совпадает с индуцирующим мультимножеством каждого из его элементов, т.е.*

$$\forall\, x \in E \quad \tilde{A}(x) = \tilde{A}. \tag{3.34}$$

Определение 3.6. *$\mathcal{C}$-множество вида (3.25) назовем множеством е-конфигураций размещений, если индуцирующие мультимножества всех его элементов являются собственными подмножествами мультимножества, индуцирующего множество E, т.е.*

$$\forall\, x \in E \quad \tilde{A}(x) \subset \tilde{A}. \tag{3.35}$$

Наконец, из условий (3.34), (3.35) легко выделить еще один признак, по которому можно отличить множество конфигураций перестановок от множества конфигураций размещений:

а) если для E выполнено условие

$$|\tilde{A}| = m \cdot n, \tag{3.36}$$

то E будет множеством е-конфигураций перестановок;

б) в случае, если

$$|\tilde{A}| > m \cdot n, \tag{3.37}$$

E является множеством е-конфигураций размещений.

По построению нетрудно видеть, что в случае выполнения (3.36) мультимножество $\tilde{A}$ совпадает с мультимножеством $\overline{A}$ вида (3.26). Таким образом, выполнение условие $\tilde{A} = \overline{A}$ можно также рассматривать как признак того, что E является множеством е-конфигураций перестановок. Если же это условие не выполнено, E будет множеством е-конфигураций размещений.

Элементы $\mathcal{C}$-множества E вида (3.25), (3.30) будем называть евклидовыми конфигурациями перестановок (permutation e-configurations), индуцированными мультимножеством $\tilde{A}$ и порожденными образующим множеством $\mathcal{A}$, а элементы множества вида (3.25), (3.31) - евклидовыми конфигурациями размещений (partial permutation e-configurations), индуцированными $\tilde{A}$ и порожденными $\mathcal{A}$. При этом $\mathcal{C}$-множество перестановок может состоять из одного элемента, в то время как $\mathcal{C}$-множество размещения должно содержать, как минимум, два элемента.

Нетрудно видеть, что кратности координат векторов решетки $\mathcal{A}^N$ вида (3.28) варьируются в пределах $[1, ..., N]$. По признаку, возможны ли повторения координат евклидовых комбинаторных конфигураций, из которых состоит множество E, введем следующую их классификацию: а) если повторения не допускаются, будем говорить, что имеем дело с е-конфигурациями без повторений (далее Класс 3.4.1); б) если все координаты каждой точки $x \in E$ равны между собой - это будут е-конфигурации с неограниченными повторениями (далее Класс 3.4.2); в) если кратные элементы допустимы, но их кратности каким-либо образом ограничены сверху или снизу, это будут е-конфигурации с повторениями (далее Класс 3.4.3).

Замечание 3.5. Для множеств е-конфигураций перестановок, исходя из (3.34), можно определить, с каким из этих трех классов мы имеем дело в зависимости от того, является ли $\tilde{A}$ множеством или мультимножеством. Так, если $S(\tilde{A}) = \mathcal{A} = \tilde{A}$, т.е. $K = N$, то E является множеством е-конфигураций перестановок без повторений. Если $\mathcal{A} \subset \tilde{A}$, т.е. $1 < |\mathcal{A}| < N$, то E состоит из евклидовых конфигураций перестановок с повторениями. В случае, когда $|\tilde{A}| = 1$, то E представляет собой вырожденное в одну точку множество е-конфигураций перестановок с неограниченными повторениями.

Подобно $\mathcal{C}$-множеству перестановок, если $K = N$, то $\mathcal{C}$-множество размещений состоит из евклидовых комбинаторных конфигураций одного типа - е-конфигураций без повторений. Если $|\tilde{A}| = N \cdot |\mathcal{A}|$, в $\mathcal{C}$-множестве размещений будут присутствовать е-конфигурации всех трех типов - без повторений, с повторениями и с неограниченными повторениями. Поэтому для того, чтобы выделить из $\mathcal{C}$-множеств размещений какой-то из Классов 3.4.1-3.4.3, необходимо накладывать дополнительные условия.

При определении перечисленных классов множеств е-конфигураций, условия выделения этих е-конфигураций из решетки $\mathcal{A}^N$ были сформулированы в терминах координат е-конфигураций и кратностей их координат.

Еще один прием формирования $\mathcal{C}$-множества E - это задание с помощью параметров множества Π комбинаторных конфигураций вида (3.7), образом которого является E. Например, ограничения Ω на вид отображения ψ могут иметь форму:

$$\begin{aligned}
&\Omega = \emptyset;\\
&\Omega = \{\psi - \text{ биективное отображение } J_n \text{ в } \mathbf{A}\}\ (|\mathbf{A}| = n);\\
&\Omega = \{\psi - \text{ инъективное отображение } J_n \text{ в } \mathbf{A}\}\ (|\mathbf{A}| > n);\\
&\Omega = \{\psi - \text{ сюръективное отображение } J_n \text{ в } \mathbf{A}\}\ (|\mathbf{A}| < n).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

В зависимости от выбора Ω из перечисленных в (3.38), можно определить четыре класса $\mathcal{C}$-множеств. Общей их особенностью является то, что, исходя из правила (3.17) формирования составляющих их е-конфигураций, каждый подвектор $(x_{1+m\cdot(i-1)}, ..., x_{m\cdot i})$ в точности совпадает с некоторым вектором из множества (3.9) ($i \in J_n$), т.е.

$$\forall\, i \in J_n\ \exists j \in J_k : x_{i'+m\cdot(j-1)} = a_{i'j},\ i' \in J_m.$$

Наконец, классификация $\mathcal{C}$-множеств, а соответственно, и составляющих их е-конфигураций, может быть осуществлена в зависимости от того, к какому классу конечных точечных конфигураций из тех, что приведены в главах 1, 2, принадлежит рассматриваемое $\mathcal{C}$-множество. Так, например,

- если $\mathcal{C}$-множество E удовлетворяет условию (1.56), будем называть его вершинно расположенным $\mathcal{C}$-множеством (a vertex located $\mathcal{C}$-set) или множеством вершинно расположенных е-конфигураций;

- в случае, если E удовлетворяет условию (1.22) для некоторой строго выпуклой поверхности S вида (1.22), то E будем называть поверхностно расположенным $\mathcal{C}$-множеством (a surface located $\mathcal{C}$-set) или множеством поверхностно расположенных евклидовых комбинаторных конфигураций.

  Если при этом S - гиперсфера, E будет сферически расположенным $\mathcal{C}$-множеством (a spherically located $\mathcal{C}$-set) или множеством сферически расположенных е-конфигураций. Если описанная поверхность S - эллипсоид, E будем называть эллипсоидально расположенным $\mathcal{C}$-множеством (an ellipsoidally located $\mathcal{C}$-set) или множеством эллипсоидально расположенных е-конфигураций. В том случае, когда S представляет собой суперсферу, множество E назовем суперсферически расположенным $\mathcal{C}$-множеством (a superspherically located $\mathcal{C}$-set) или множеством суперсферически расположенных е-конфигураций;

- если число уровней $\mathcal{C}$-множества E равно $m(E)$, то его будем называть $m(E)$-уровневым множеством евклидовых комбинаторных конфигураций ($m(E)$-уровневым $\mathcal{C}$-множеством, а $m(E)$-level e-configuration set, $m(E)$-level $\mathcal{C}$-set)

и так далее.

Эти три способа задания $\mathcal{C}$-множеств можно комбинировать, формируя новые системы ограничений Ω и, соответственно, новые классы множеств евклидовых комбинаторных конфигураций.

Евклидовые комбинаторные конфигурации при $m = 1$

Далее в ходе изложения мы остановимся на случае, когда $A \subset \mathbb{R}^1$, т.е. результирующее множество комбинаторных конфигураций и, соответственно, евклидовых комбинаторных конфигураций является числовым.

В терминах е-конфигураций это соответствует случаю $m = 1$. При этом (3.9) упрощается до:

$$\mathbf{a}_l = (a_{1l}), \quad l \in J_k, \tag{3.39}$$

$K = k$, $A = \mathcal{A} = \{a_{1j}\}_{j \in J_k}$, размерность N е-конфигураций (3.14) совпадает с мощностью исходного множества - $N = n$, а выражения (3.11), (3.17) переписываются в виде:

$$x = (x_1, ..., x_n) = (a_{1j_1}, ..., a_{1j_n}). \tag{3.40}$$

Также, формула (3.14) для задания евклидовых комбинаторных конфигураций имеет вид:

$$\varphi : (\psi, A,\ \Lambda) \to \mathbb{R}^n, \tag{3.41}$$

а формула (3.25) для образованного из них $\mathcal{C}$-множества приобретает форму: для задания евклидовых комбинаторных конфигураций и

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x\ -\ \text{е-конфигурация вида (3.41)}\} - \tag{3.42}$$

С учетом (3.27), результирующее множество (3.39) представимо в виде $\mathcal{A} = \{e_i\}_{i \in J_k}$, а формула (3.29) - в форме:

$$E \subseteq \mathcal{A}^n \subset \mathbb{R}^n. \tag{3.43}$$

Для индуцирующего мультимножества е-конфигурации (3.40) будем использовать обозначение $G(x)$, а для индуцирующего множества всего $\mathcal{C}$-множества E - обозначение G, т.е. осуществим замену $\tilde{A} \to G$, $\tilde{A}(x) \to G(x)$, $\mathcal{A} \to S(G)$, после чего само G будет представимо в форме (1.5).

В этих обозначениях, условия (3.32), (3.33) для формирования индуцирующего E мультимножества G приобретают форму:

$$\forall\, x \in E \quad G(x) \subseteq G, \forall g \in G\ \exists x \in E :\ G(x) \nsubseteq G \backslash \{g\}.$$

Для того, чтобы выделить из всех множеств E вида (3.43) $\mathcal{C}$-множества конфигураций перестановок, можно воспользоваться любым из условий

(3.34), (3.36), которые в данном случае имеют вид:

$$\forall\, x \in E \quad G(x) = G, \tag{3.44}$$

$$\eta = n \tag{3.45}$$

соответственно.

Для выделения $\mathcal{C}$-множеств конфигураций размещений, можно воспользоваться формулами (3.35), (3.36), приобретающими в данном случае вид:

$$\forall\, x \in E \quad G(x) \subset G. \tag{3.46}$$

$$\eta > n. \tag{3.47}$$

Условием вершинной расположенности $\mathcal{C}$-множества E вида (3.43) будет по-прежнему (1.56), а условие его сферической расположенности будет выглядеть так:

$$E \subseteq S_r\left(a\right),$$

где

$$S_r\left(a\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_2^2 = r^2\right\},\ a \in \mathbb{R}^n,\ r \in \mathbb{R}_{>0}. \tag{3.48}$$

3.4.1 $\mathcal{C}$-множества конфигураций перестановок

Пусть G - числовое мультимножество вида (1.5), такое, что:

$$|G| = n, \tag{3.49}$$

$$|S(G)| = k. \tag{3.50}$$

Учитывая (3.49), для элементов первичной спецификации $[G]$ выполнено:

$$\sum_{i=1}^{k} \eta_i = n, \tag{3.51}$$

$$1 \le \eta_i \le n, \ i \in J_k. \tag{3.52}$$

Пусть $E \in \mathbb{R}^n$ - множество всевозможных евклидовых комбинаторных конфигураций вида (3.41), индуцирующим мультимножеством которых служит G вида (3.49). Обозначим образованное $\mathcal{C}$-множество следующим образом:

$$E = E_{nk}(G), \tag{3.53}$$

а его прообраз

$$P_{nk}(G) = \varphi^{-1}(E_{nk}(G)). \tag{3.54}$$

Согласно [127], $\mathcal{E}_c$-множество (3.54) называется <u>общим евклидовым множеством перестановок</u> (the Euclidean general permutation set, the Euclidean multiset permutation set) из мультимножества G.

По аналогии с ним, $\mathcal{C}$-множество E вида (3.53) будем называть <u>общим множеством евклидовых конфигураций перестановок</u> (общим $\mathcal{C}$-множеством перестановок, the general permutation $\mathcal{C}$-set, the multiset permutation $\mathcal{C}$-set), индуцированным мультимножеством G.

В соответствии с замечанием 3.5, в зависимости от вида первичной спецификации G элементами E могут быть: а) евклидовы конфигурации перестановок без повторений, если $|[G]| = n$; б) евклидовы конфигурации перестановок с повторениями при $1 < |[G]| < n$; в) евклидовы конфигурации перестановок с неограниченными повторениями, если $|[G]| = 1$.

Согласно этой классификации, выделим три подкласса среди множеств вида (3.53):

- если кратных элементов в G нет, т.е.

$$G = \mathcal{A}, \tag{3.55}$$

  множество конфигураций перестановок вида (3.41) будем называть <u>множеством евклидовых конфигураций перестановок без повторений</u> ($\mathcal{C}$-множеством перестановок без повторений, the permutation without repetitions $\mathcal{C}$-set), индуцированным множеством G, и обозначать $E_n(G) = E_{nn}(G)$. Его прообразом является $\mathcal{E}_c$-множество $P_n(G) = \varphi^{-1}(E_n(G))$, называемое <u>евклидовым множеством перестановок без повторений</u> (the Euclidean permutation without repetitions set) из множества G.

  Отметим, что е-конфигурации перестановок без повторений представимы в терминах биективных отображений нумерующего множества на образующее множество, в результате чего система ограничений Λ в

(3.41) приобретает вид:

$$\Lambda = \{\psi - \text{ биективное отображение } J_n \text{ в } \mathbf{A}\};$$

- если кратности в (3.62) достигают своей верхней границы n, т.е.

$$G = \mathcal{A}^n, \tag{3.56}$$

множество конфигураций перестановок вида (3.41) будем называть $\mathcal{C}$-множеством перестановок с неограниченными повторениями (множеством е-конфигураций перестановок с неограниченными повторениями, the permutation with unbounded repetitions $\mathcal{C}$-set), индуцированным мультимножеством G, и обозначим его $\overline{E}_k(G)$. Его прообразом будет $\mathcal{E}_c$-множество $\overline{P}_k(G) = \varphi^{-1}(\overline{E}_k(G))$, называемое евклидовым множеством перестановок с неограниченными повторениями (the Euclidean permutation with unbounded repetitions set) из мультимножества G.

В терминах отображений условие (3.56) может быть сформулировано как то, что ψ является произвольным отображением J_n в A, т.е.

$$\Lambda = \{\emptyset\}. \tag{3.57}$$

В совокупности условия (3.49), (3.56) означают, что $k = 1$, $G = \{e_1^n\}$, $\mathcal{A} = \{e_1\}$. Соответственно, ограничения (3.57) можно представить в форме $\Lambda = \{\psi$ - отображение J_n в $\{e_1\}\}$, E является одноточечным множеством:

$$E = \overline{E}_1(G) = E_{n1}(G) = \{(e_1^n)\} = \{(\mathbf{e}_1)\}, \tag{3.58}$$

а его прообраз - одноэлементным множеством $\overline{P}_1(G)$;

- если оба условия (3.55) и (3.56) не выполнены, т.е.

$$\mathcal{A} \subset G \subset \mathcal{A}^n, \tag{3.59}$$

множество евклидовых конфигураций перестановок вида (3.41) назовем <u>$\mathcal{C}$-множеством перестановок с повторениями</u> $E_{nk}(G)$ (множеством е-конфигураций перестановок с повторениями, the permutation with repetitions $\mathcal{C}$-set, the multiset permutation $\mathcal{C}$-set), индуцированным мультимножеством G. Его прообразом $P_{nk}(G) = \varphi^{-1}(E_{nk}(G))$ будет $\mathcal{E}_c$-множество, называемое <u>евклидовым множеством перестановок с повторениями</u> (the Euclidean permutation with repetitions set) из мультимножества G.

Ограничения (3.55), (3.56), (3.59) могут быть также представлены следующими способами:

1. В терминах мощностей n, k нумерующего и результирующего множеств:

    - условие (3.55) эквивалентно $k = n$;
    - (3.56) эквивалентно условию $k = 1$;
    - условия (3.59) и $1 < k < n$ эквивалентны;

2. В терминах компонент первичной спецификации $[G]$.

   Прежде чем перейти к данной формулировке, введем обозначение для первичной спецификации индуцирующего множества е-конфигурации перестановок x:

$$G(x) = \{e_1^{n_1}, ..., e_k^{n_k}\}. \tag{3.60}$$

   Заметим, что (3.60) выполнено для произвольной $x \in E_{nk}(G)$ в силу (3.44), более того, формула (3.60) задает индуцирующее множество всего $E_{nk}(G)$. Таким образом, формулы (1.5), (3.51), (3.52) в рассматриваемом случае приобретают вид:

$$G = \{e_1^{n_1}, ..., e_k^{n_k}\}, \tag{3.61}$$

   где

$$\begin{aligned} &1 \le n_i \le n, \ i \in J_k, \\ &\sum_{i=1}^{k} n_i = n. \end{aligned} \tag{3.62}$$

   Теперь запишем искомые ограничения:

   - условие (3.55) эквивалентно $n_i = 1, \ i \in J_n$;
   - (3.56) эквивалентно условию $n_1 = n$;
   - условия (3.59) и $1 < \max\limits_{i \in J_k} n_i < n$ эквивалентны.

Заметим, что основа и первичная спецификация мультмножества G вида (3.61), которое индуцирует общее $\mathcal{C}$-множество перестановок $E_{nk}(G)$, удовлетворяют условиям:

$$S(G) = \mathcal{A}, \tag{3.63}$$

$$[G] = (n_1, ..., n_k), \tag{3.64}$$

а его элементы можно считать упорядоченными по неубыванию:

$$g_i \leq g_{i+1},\ i \in J_{n-1}. \tag{3.65}$$

Замечание 3.6. Мы ввели в рассмотрение три класса е-множеств конфигураций перестановок, отличающиеся типами индуцирующих мультимножеств. Накладывая дополнительные ограничения на индуцирующее мультимножество или элементы полученного в результате отображений ψ, φ $\mathcal{C}$-множества перестановок, можно получить другие классы е-конфигураций перестановок и, соответственно, другие классы е-множеств (см., например, пункты 4.2, 4.3, 6.2.1).

3.4.2 $\mathcal{C}$-множества конфигураций размещений

Пусть теперь числовое мультимножество G вида (1.5), (3.47) выступает индуцирующим для евклидовых комбинаторных конфигураций вида (3.41).

Множество всевозможных таких конфигураций

$$E = E_{\eta k}^{n}(G) \tag{3.66}$$

назовем <u>общим $\mathcal{C}$-множеством размещений</u> (общим $\mathcal{C}$-множеством размещений, the general partial permutation set, the multiset partial permutation set), индуцированных мультимножеством G.

Согласно [127], его прообразом будет $\mathcal{E}_c$-множество:

$$P^n_{\eta k}(G) = \varphi^{-1}(E^n_{\eta k}(G)),$$

называемое общим евклидовым множеством размещений (the Euclidean general partial permutation set, the Euclidean multiset partial permutation set) из мультимножества G.

Среди множеств (3.66) выделим три подкласса подобно схеме, приведенной в п. 3.4.1:

- если кратные элементы в G отсутствуют, т.е. выполнено (3.55), множество евклидовых конфигураций размещений вида (3.41) назовем множеством евклидовых конфигураций размещений без повторений ($\mathcal{C}$-множеством размещений без повторений, the partial permutation without repetitions $\mathcal{C}$-set), индуцированным множеством G, и обозначим $E^n_k(G)$.

  Элементами множества $E^n_k(G)$ будут е-конфигурации размещений без повторений, каждой из которых будет соответствовать инъективное отображение нумерующего множества в образующее множество. Поэтому ограничения Λ в (3.41) представимы в виде:

$$\Lambda = \{\psi - \text{ инъективное отображение } J_n \text{ в } \mathbf{A}\}; \qquad (3.67)$$

- если кратности всех элементов G равны n, т.е. выполнено (3.56), множество конфигураций вида (3.41) назовем $\mathcal{C}$-множеством размещений с неограниченными повторениями (the partial permutation with unbounded repetitions $\mathcal{C}$-set), индуцированным мультимножеством G, и обозначим $\overline{E}_k^n(G)$. Его прообразом выступает $\mathcal{E}_c$-множество $\overline{P}_k^n(G) = \varphi^{-1}(\overline{E}_k^n(G))$, которое называется евклидовым множеством размещений с неограниченными повторениями (the Euclidean partial permutation with unbounded repetitions set) из мультимножества G.

Это будет тот случай, когда образованное $\mathcal{C}$-множество E совпадает с дискретной решеткой $\mathcal{A}^n$, соответственно, (3.43) обращается в равенство:

$$E = \overline{E}_k^n(G) = \mathcal{A}^n. \tag{3.68}$$

В терминах отображений это условие представимо в виде (3.57). В данном случае множество E однозначно будет состоять из e-конфигураций размещений с неограниченными повторениями и с повторениями. e-конфигурации размещений без повторений будут присутствовать в нем при $k \geq n$;

- в случае выполнения условия (3.59), множество всех евклидовых комбинаторных конфигураций размещений вида (3.41) назовем $\mathcal{C}$-множеством размещений с повторениями (the partial permutation with repetitions $\mathcal{C}$-set, the multiset partial permutation $\mathcal{C}$-set), индуцированным мультимножеством G, и обозначим $E_{\eta k}^n(G)$). Его прообраз $P_{\eta k}^n(G) = \varphi^{-1}(E_{\eta k}^n(G))$ будет $\mathcal{E}_c$-множеством, называемым евклидовым множеством размещений с повторениями (the Euclidean prtial permutation with repetitions set) из мультимножества G.

Как и в случае $\overline{E}_k^n(G)$, множество $E_{\eta k}^n(G)$ размещений с повторениями может включать все три типа е-конфигураций размещений - без повторений, с повторениями и с неограниченными повторениями. Первый указанный тип е-конфигураций будет присутствовать в случае $k \geq n$, е-конфигурации с неограниченными повторениями будут в множестве, если хотя бы один элементов G имеет кратность n.

3.4.3 Примеры $\mathcal{C}$-множеств конфигураций перестановок и размещений

В данном пункте мы приведем примеры $\mathcal{C}$-множеств, заданных как конечные точечные конфигурации в $\mathbb{R}^3$. В соответствии с классификацией е-конфигураций, приведенной выше в данном пункте, установим, к какому классу относятся эти $\mathcal{C}$-множества. Затем будет рассмотрен вопрос, какие $\mathcal{C}$-множества образуются при дополнительных ограничения. Также будут продемонстрированы некоторые геометрические свойства исходных и образованных в ходе решения множеств.

Пусть заданы следующие множества точек $\mathbb{R}^3$:

$$E^1 = \{(-1,-1,-1),(-1,-1,0),(-1,0,-1),(-1,-1,0),$$
$$(-1,-1,1),(-1,1,-1),(-1,-1,1),(-1,0,0),(0,-1,0),(0,0,-1),$$
$$(-1,1,0),(-1,0,1),(0,-1,1),(0,1,-1),(1,-1,0),(1,0,-1),(0,0,0),$$
$$(1,1,-1),(1,-1,1),(1,1,-1),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),$$
$$(1,1,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\};$$

$E^2 = \{(1,2,4),(1,4,2),(2,1,4),(2,4,1),(4,1,2),(4,2,1),$
$(-1,2,4),(-1,4,2),(-2,1,4),(-2,4,1),(-4,1,2),(-4,2,1),$
$(1,-2,4),(1,-4,2),(2,-1,4),(2,-4,1),(4,-1,2),(4,-2,1),$
$(1,2,-4),(1,4,-2),(2,1,-4),(2,4,-1),(4,1,-2),(4,2,-1),$
$(-1,-2,4),(-1,-4,2),(-2,-1,4),(-2,-4,1),(-4,-1,2),(-4,-2,1),$
$(-1,2,-4),(-1,4,-2),(-2,1,-4),(-2,4,-1),(-4,1,-2),(-4,2,-1),$
$(1,-2,-4),(1,-4,-2),(2,-1,-4),(2,-4,-1),(4,-1,-2),(4,-2,-1),$
$(-1,-2,-4),(-1,-4,-2),(-2,-1,-4),(-2,-4,-1),(-4,-1,-2),$
$(-4,-2,-1)\}.$

е-конфигурации, составляющие E^1, E^2, имеют размерность $N = 3$ и могут быть образами комбинаторных конфигураций (3.10) для таких двух случаев $n = 3$, $m = 1$ или $n = 1$, $m = 3$. В первом случае результирующее множество содержит три элемента, являющиеся одномерными векторами. Во втором, оно содержит один элемент, представляющий собой трехмерный вектор.

Будем считать, что имеем дело с первым случаем, т.е. $n = N = 3$. Также, будем использовать верхний индекс $j = 1$ для параметров и составляющих множества E^1 и $j = 2$ для множества E^2.

В этих обозначениях (3.41) примет вид:

$$\varphi : (\psi^j, A^j,\ \Lambda^j) \to \mathbb{R}^3 \tag{3.69}$$

и будет задавать тройку "отображение ψ^j - числовое результирующее множество A^j - ограничения Λ^j", в результате действия которой формируются е-конфигурации и множество E^j в целом $(j = 1, 2)$.

Сначала определим, множеством каких е-конфигураций - перестановок или размещений - являются рассматриваемые нами множества.

Для этого рассмотрим по паре элементов из каждого из них:

$$x^1 = (-1, -1, -1),\ y^1 = (-1, -1, 0) \in E^1;$$
$$x^2 = (-1, 2, 4),\ y^2 = (-1, 2, 4) \in E^2$$

и проверим выполнение условия (3.31), имеющее вид:

$$\exists\, x^j, y^j \in E^j \ \ \tilde{A}(x^j) \neq \tilde{A}(y^j)\ (j = 1, 2).$$

Как видно, оно выполнено для обоих множеств:

$$\tilde{A}(x^1) = \{x^1\} = \{-1, -1, -1\} \neq \tilde{A}(x^2) = \{x^2\} = \{-1, -1, 0\},$$
$$\tilde{A}(x^2) = \{x^2\} = \{-1, 2, 4\} \neq \tilde{A}(y^2) = \{y^2\} = \{-1, 2, 4\}.$$

Следовательно, E^1, E^2 - $\mathcal{C}$-множества размещений.

Теперь возникает вопрос, какие параметры имеют тройки (3.69), чтобы множества образованных при заданных отображениях е-конфигураций действительно формировали E^1, E^2, и не являются ли они $\mathcal{C}$-множествами размещений без повторений, с повторениями или с неограниченными повторениями.

С этой целью найдем образующее множество $\mathcal{A}^1$ множества E^1, перечислив различные координаты составляющих его векторов:

$$\mathcal{A}^1 = \{-1, 0, 1\},$$

откуда имеем $k^1 = |\mathcal{A}^1| = 3$.

Аналогично для E^2

$$\mathcal{A}^2 = \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\},$$

т.е. $k^2 = |\mathcal{A}^2| = 6$.

Также сформируем индуцирующие их мультимножества G^1, G^2 по следующему правилу:

$$\begin{aligned}
&\forall\, x^j \in E^j \; \tilde{A}(x^j) = \{x^j\} \subseteq G^j, \\
&\forall\, g \in G^j \; \exists\, x^j \in E^j : \; \{x^j\} \not\subseteq G^j \; (j = 1, 2).
\end{aligned}$$

В результате получаем:

$$\begin{aligned}
&G^1 = \{-1^3, 0^3, 1^3\}, \; \eta^1 = |G^1| = 9; \\
&G^2 = \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}, \; \eta^2 = |G^2| = 6.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Для обоих $\mathcal{C}$-множеств выполнилось условие (3.47), принимающее форму $\eta_j > n$, $j = 1, 2$, что еще раз подтверждает, что E^1, E^2 - е-множества конфигураций размещений.

Как видно, для E^1 выполнено условие (3.56), т.е. оно предположительно - $\mathcal{C}$-множество размещений с неограниченными повторениями, порожденное множеством $\mathcal{A}^1$. Чтобы убедится в этом, проверим, что никаких ограничений на вид отображения ψ не наложено, т.е. выполнено (3.57). Число всевозможных отображений J_3 в $A^1 = \mathcal{A}^1$ равно 3^3 и столько же элементов в E^1. Таким образом, E^1 в самом деле $\mathcal{C}$-множество размещений с неограниченными повторениями, т.к. $E^1 = \overline{E}_3^3(G^1)$. Параметры тройки (3.69) при $j = 1$:

$$A^1 = \mathcal{A}^1,\ \Lambda^1 = \{G^1 = (A^1)^3\}$$

или

$$A^1 = \mathcal{A}^1,\ \Lambda^1 = \{\psi^1 = \text{ произвольное отображение} J_3 \text{ в } A^1\}.$$

Для множества E^2 выполнено условие (3.55) - $G^2 = \mathcal{A}^2$, необходимое для того, чтобы оно было $\mathcal{C}$-множеством размещений, индуцированным G^2. Учитывая (3.67), необходимо проверить, что E^2 содержит результаты всех инъективных отображений J_3 в $A^2 = \mathcal{A}^2$. Легко видеть, что это не так. Так, например, $x = (1, 2, -2)$ - е-конфигурация, образованная в результате инъективного отображения в A^2, и при этом $x \notin E^2$. Следовательно, E^2 является лишь собственным подмножеством $\mathcal{C}$-множества 3-размещений с повторениями, индуцированного G^2.

Для того, чтобы выделить E^2 из $E_6^3(G^2)$, заметим, что E^2 объединяет элементы $E_6^3(G^2)$, общий признак которых можно сформулировать так: "Модули координат е-конфигураций образуют множество $\{1, 2, 4\}$". В этом случае параметры троек (3.69) могут быть представлены в виде: $A^2 = \mathcal{A}^2$,

$$\Lambda^2 = \{G^2 = A^2;\ \text{для любой е-конфигурации } x\ \{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} = \{1, 2, 4\}\}$$

или

$$A^2 = \mathcal{A}^2;\ \Lambda^2 = \{\psi^2 \text{ - инъективное отображение } J_3 \text{ в } A^2;$$

$$\text{для любой е-конфигурации } x\ \ |x_1|, |x_2|, |x_3|\} = \{1, 2, 4\}\}.$$

Теперь введем дополнительные ограничения:

$$\begin{aligned}
&\Lambda'^1 = \{x \in \mathbb{R}^n_+\};\\
&\Lambda'^2 = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x_i \neq 0, j \in J_n\};\\
&\Lambda'^3 = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x^T\mathbf{e} = 1\};\\
&\Lambda'^4 = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x^T\mathbf{e} = 2\};\\
&\Lambda'^5 = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x^2 = 1\},
\end{aligned} \tag{3.71}$$

которые мы будем последовательно накладывать на элементы E^1, E^2.

Задача этого этапа состоит в том, чтобы определить, какие классы е-конфигураций и $\mathcal{C}$-множества при этом образуются. В частности, требуется выяснить, можно ли после добавления ограничений переопределить класс е-конфигураций, например, от е-конфигураций размещений с неограниченными повторениями перейти к е-конфигурациям размещений, от е-конфигураций размещений к е-конфигурациям перестановок и т.д.

Введем обозначения:

$$E^{ij} = \{x \in E^i : x \text{ удовлетворяет ограничениям } \Lambda'^j\},\ i \in J_2,\ j \in J_5; \tag{3.72}$$

$\mathcal{A}^{ij}$ - образующее множество, G^{ij} - индуцирующее мультимножество для E^{ij} $(i \in J_2,\ j \in J_5)$.

Перечислим множества (3.72):

- $i = 1$:

$$E^{11} = \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\};$$
$$E^{12} = \{(-1,-1,-1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1),(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1),(1,1,1)\};$$
$$E^{13} = \{(1,1,-1),(1,-1,1),(1,1,-1),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\};$$
$$E^{14} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\};$$
$$E^{15} = \{(1,0,0),(-1,0,0),(0,1,0),(0,-1,0),(0,0,1),(0,0,-1)\}.$$

- $i = 2$:

$$E^{21} = \{(1,2,4),(1,4,2),(2,1,4),(2,4,1),(4,1,2),(4,2,1)\};$$
$$E^{22} = E^2;$$
$$E^{23} = E^{24} = E^{25} = \emptyset.$$

Пусть для начала $i = 1$, тогда образующие множества $\mathcal{C}$-множеств (3.72) имеют вид:

$$\mathcal{A}^{11} = \mathcal{A}^{14} = \{0,1\};$$
$$\mathcal{A}^{12} = \{-1,1\};$$
$$\mathcal{A}^{13} = \mathcal{A}^{15} = \mathcal{A}^{1} = \{-1,0,1\},$$

а индуцирующие мультимножества:

$$G^{11} = \{0^3, 1^3\},\ G^{12} = \{-1^3, 1^3\},$$
$$G^{13} = \{-1, 0^2, 1^2\}, G^{15} = \{-1, 0^3, 1\},$$
$$G^{14} = \{0, 1^2\}.$$

Напомним, что E^1 - $\mathcal{C}$-множество 3-размещений с неограниченными повторениями, порожденное образующим множеством $\mathcal{A}^1$. Среди $E^{11} - E^{15}$ еще два множества - E^{11}, E^{12} - относятся к этому же классу $\mathcal{C}$-множеств, но они уже порождаются двухэлементными подмножествами $\mathcal{A}^1$: E^{11} - множеством $\mathcal{A}^{11} = \{0, 1\}$, а E^{12} - $\mathcal{A}^{12} = \{-1, 1\}$.

Анализируя индуцирующие мультимножества $G^{13} - G^{15}$, заметим, что, поскольку $|G^{14}| = n$, то E^{14} - множество е-конфигураций перестановок. А именно, это общее $\mathcal{C}$-множество перестановок, индуцированное G^{14}. В то же время, E^{13}, E^{15} - $\mathcal{C}$-множества размещений с повторениями, индуцированные G^{13}, G^{15} и удовлетворяющие ограничениям Λ'^3, Λ'^5 соответственно.

Перейдем теперь к случаю $i = 2$. Здесь достаточно рассмотреть E^{21}. Образующее его множество $\mathcal{A}^{21} = \{1, 2, 4\}$, а индуцирующее множество совпадает с множеством - $G^{21} = \mathcal{A}^{21}$, при этом $|G^{21}| = 3 = n$. Отсюда следует, что E^{21} - множество е-конфигураций перестановок, а именно, $\mathcal{C}$-множество перестановок без повторений, индуцированное $\{1, 2, 4\}$.

Итак, в двух случаях из рассмотренных выше, добавление ограничений (3.71) привели к выделению из множеств е-конфигураций размещений подмножеств е-конфигураций перестановок.

Для множеств (3.72) элементы могут быть заданы тройками:

$$\varphi : (\psi^{ij}, A^{ij},\ \Lambda^{ij}) \to \mathbb{R}^3,\ ,\ i \in J_2,\ j \in J_5, \tag{3.73}$$

в которых Λ^{ij} объединяет системы ограничений Λ^i и Λ'^j. Поскольку, как было отмечено, параметры и тип $\mathcal{C}$-множеств в некоторых случаях изменился после введения дополнительных ограничений, параметры троек (3.73) также могут быть изменены.

Теперь проанализируем геометрические особенности исходных и образованных $\mathcal{C}$-множеств и их выпуклых оболочек.

Множества E^1, E^2 и сформированные из них $\mathcal{C}$-множества $E^{11}-E^{15}$, E^{21} показаны на Рисунках 3.17-3.24. На Рисунках 3.25, 3.26 множества E^1, E^2 показаны вместе с их выпуклыми оболочками P^1, P^2 (здесь и далее воспользуемся обозначением $P^{[\cdot]} = conv\ E^{[\cdot]}$), откуда видно, что E^1 - не вершинно расположенное множество, а E^2 - вершинно расположено. Кроме того, нетрудно видеть, что E^2 также является сферически расположенным, что продемонстрировано на Рис. 3.27. Вследствие этого, его подмножество E^{21} является и вершинно-, и сферически расположенным, и полиэдрально-сферическим, что видно на Рис. 3.28, где E^{21} представлено как пересечение описанной сферы с центром в $\mathbf{0}$ и многогранника P^{21}.

Проанализируем эти же свойства приведенных ранее подмножеств E^1:

- E^{11}, E^{12} лежат в вершинах гиперкубов (см. Рис. 3.29) и, как видно, являются вершинно- и сферически расположенными;
- множества E^{13}, E^{14} образуются в сечениях E^1 параллельными плоско-

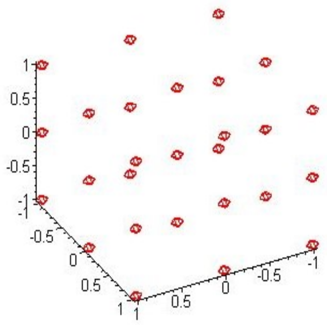


Рис. 3.17: E^1

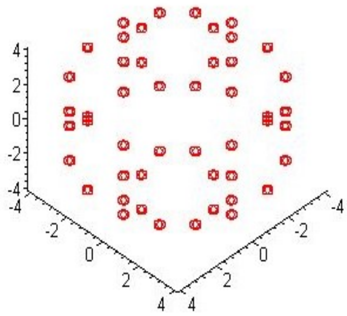


Рис. 3.18: E^2

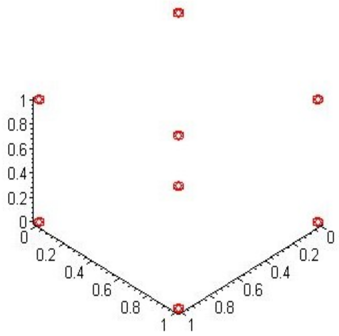


Рис. 3.19: E^{11}

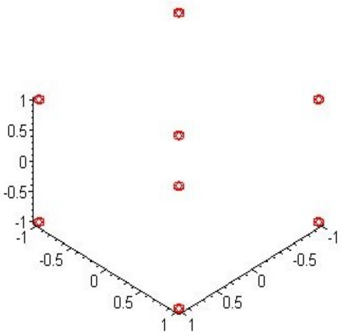


Рис. 3.20: E^{12}

стями, т.е. они лежат в плоскостях. При этом E^{14} представляет собой вершинно расположенное множество, а E^{13} не является таковым (см. Рисунки 3.30, 3.31). Внутри многогранника P^{13} точки E^{13} отсутствуют, а все это множество лежит на границе P^{13}. Кроме того, E^{14} - сферически расположено, что видно из Рис. 3.32;

- исходя из построения множества E^{15} как пересечения $\mathcal{C}$-множества E^1 со сферой, оно будет вершинно расположено, что и показано на Рис. 3.33. Итак, E^{15} - сферически расположено и, соответственно, является полиэдрально-сферическим, что продемонстрировано на Рис. 3.34.

Заметим, что E^{12}, E^{15} являются элементами разложения множества

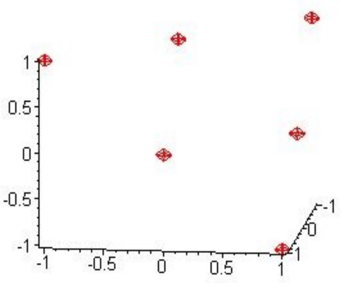


Рис. 3.21: E^{13}

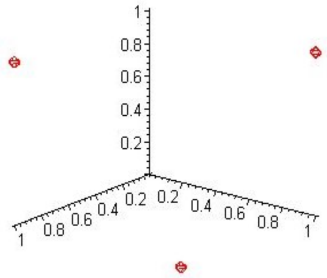


Рис. 3.22: E^{14}

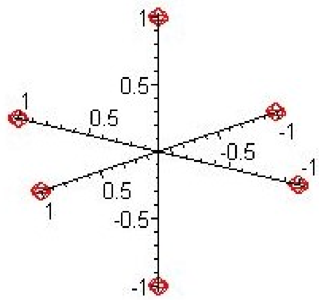


Рис. 3.23: E^{15}

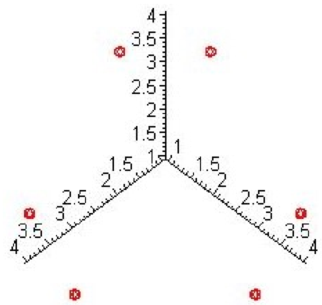


Рис. 3.24: E^{21}

E^1 по сферическим поверхностям с центром в начале координат:

$$E^1 = \bigcup_{j=0}^{3} \mathcal{E}^j, \tag{3.74}$$

где

$$\mathcal{E}^j = E^1 \cap S^j,\ j \in J_3^0, \tag{3.75}$$

$$S^j = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 = j\}. \tag{3.76}$$

В самом деле, $E^{12} = \mathcal{E}^3$, $E^{15} = \mathcal{E}^1$. В целом, (3.74)-(3.76) - пример разложения E^1 по семейству строго выпуклых поверхностей. Можно предложить

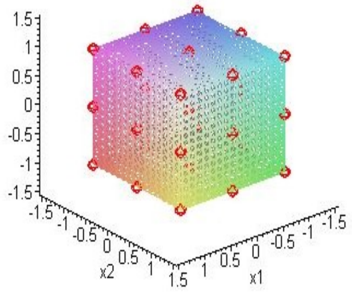


Рис. 3.25: E^1, P^1

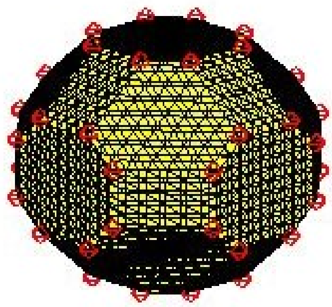


Рис. 3.26: E^2, P^2

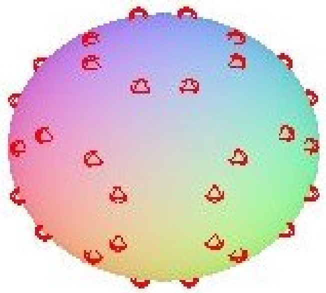


Рис. 3.27: E^2, $S_r(\mathbf{0})$

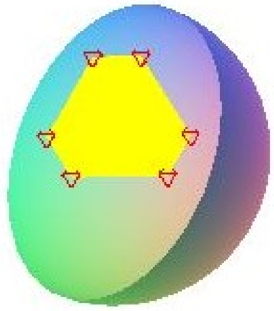


Рис. 3.28: P^{21}, $S_r(\mathbf{0})$

еще множество таких разложений вида (3.74), (3.75),

$$S^j = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^\alpha = j\}, \tag{3.77}$$

где $\alpha \in (1, \infty)$ - параметр, а поверхность S_j вида (3.77) является суперсферой с коэффициентом деформации $\alpha/2$. Таким образом, формулы (3.74), (3.75), (3.77) задают разложение E^1 по семейству суперсфер с коэффициентом деформации $\alpha/2$, которое обращается в разложение (3.74)-(3.76) при $\alpha = 2$.

Отметим также, что E^{13}, E^{14} - элементы разложения E^1 по семейству параллельных плоскостей к плоскости $\Pi : \ x^T\mathbf{e} = 0$. Сумма координат точек E^1 принимает все целочисленные значения из $-3, 3$, откуда следует его

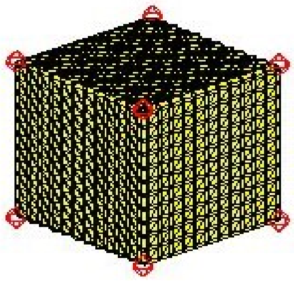


Рис. 3.29: P^{11}, P^{12}

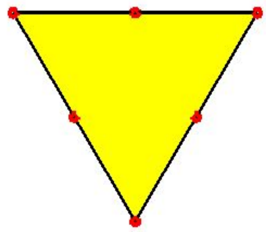


Рис. 3.30: E^{13}, P^{13}

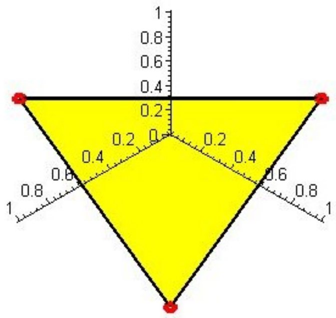


Рис. 3.31: E^{14}, P^{14}

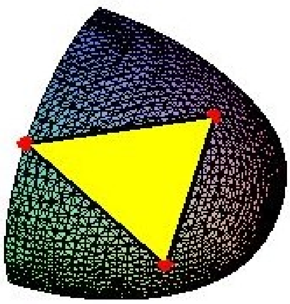


Рис. 3.32: P^{14}, $S_r(\mathbf{0})$

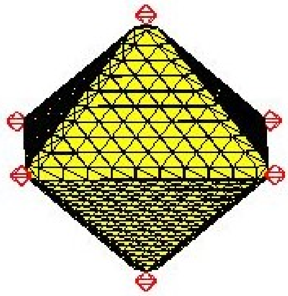


Рис. 3.33: E^{15}, P^{15}

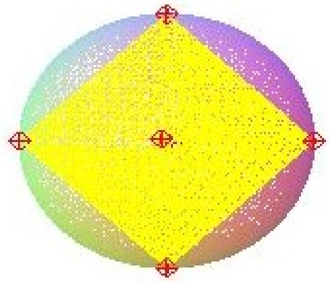


Рис. 3.34: P^{15}, $S_r(\mathbf{0})$

разложение:

$$E^1 = \bigcup_{j=-3}^{3} \mathcal{E}'^j, \tag{3.78}$$

$$\mathcal{E}'^j = E^1 \cap \Pi^j, \ j \in \overline{-3,3}, \tag{3.79}$$

$$\Pi^j = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x^T\mathbf{e} = j\}. \tag{3.80}$$

Теперь в обозначениях (3.78), (3.79), (3.80) имеем:

$$E^{13} = \mathcal{E}'^1, E^{14} = \mathcal{E}'^2.$$

Глава 4

Множества евклидовых конфигураций перестановок

Глава посвящена свойствам множеств евклидовых конфигураций перестановок, сокращенно названных $\mathcal{C}$-множествами перестановок.

В основу описания общего $\mathcal{C}$-множества и общего многогранника перестановок положены работы [32, 51, 94, 99, 98, 127, 129], а для $\mathcal{C}$-множества и многогранника перестановок без повторений - публикации [11, 16, 81, 97, 93, 129]. При изложении свойств $\mathcal{C}$-множества $(0-1)$-перестановок и его выпуклой оболочки - гиперсимплекса - использовались работы [6, 12, 47, 56, 83].

Исследование свойств $\mathcal{C}$-множеств перестановок, таких как поверхностная расположенность, декомпозиция, многоуровневость, симметрия, базируется на общих подходах, описанных в главах 1, 2 данной монографии. Это же касается таких свойств соответствующих многогранников как размерность, смежность вершин, комбинаторная эквивалентность, несводимость H-представлений, выделение класса простых многогранников и т.п.

4.1 Общее множество евклидовых конфигураций перестановок

В данном пункте будут рассмотрены некоторые свойства общего $\mathcal{C}$-множества перестановок $E_{nk}(G)$, а также его выпуклой оболочки

$$\Pi_{nk}\left(G\right) = conv\; E_{nk}(G), \tag{4.1}$$

называемой <u>общим многогранником перестановок</u> (the general permutohedron, the multiset permutohedron).

Согласно классификации множеств $E_{nk}(G)$, приведенной в п. 3.4.1, в данном классе можно выделить три подкласса - $\mathcal{C}$-множество перестановок без повторений $E_n(G)$, $\mathcal{C}$-множество перестановок с неограниченными повторениями $\overline{E}_1(G)$, а также $\mathcal{C}$-множество перестановок с повторениями $E_{nk}(G)$, $k < n$.

Исключим из рассмотрения одноточечное множество $\overline{E}_1(G) \subset \mathbb{R}^n$, полагая далее, что выполнено условие $k \geq 2$. Соответственно,

$$n > 1. \tag{4.2}$$

Замечание 4.1. Учитывая (3.52) и (3.64), для кратностей мультимножества (3.61) можно записать: $1 \leq n_i \leq n - k + 1,\; i \in J_k$.

Перечислим основные свойства общих $\mathcal{C}$-множества и многогранника перестановок:

Мощность $E_{nk}(G)$:

$$|E_{nk}\,(G)| = \frac{n!}{n_1! \cdot ... \cdot n_k!}. \qquad (4.3)$$

Множество $E_{nk}(G)$ лежит в гиперплоскости:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} g_i. \qquad (4.4)$$

Множество $E_{nk}(G)$ - сферически расположенное

Нетрудно видеть, что все точки $E_{nk}(G)$ удовлетворяют уравнению:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} g_i^2, \qquad (4.5)$$

то есть, это множество вписано в гиперсферу с центром в начале координат, а значит, оно сферически расположено.

Поскольку одновременно $E_{nk}(G)$ лежит и в гиперплоскости, эта гиперсфера не единственная, а множество описанных вокруг него сфер образует целое семейство. Выпишем его, для чего воспользуемся обозначениями:

$$S_j = \sum_{i=1}^{n} g_i^j,\ j \in \mathbb{N}. \qquad (4.6)$$

Учитывая (3.61), выражения (4.6) представимы в компактной форме:

$$S_j = \sum_{i=1}^{k} n_i e_i^j,\ j \in \mathbb{N}. \qquad (4.7)$$

В новых обозначениях перепишем (4.4), (4.5):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = S_1; \tag{4.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = S_2. \tag{4.9}$$

Теорема 4.1. *Точки $E_{nk}(G)$ лежат на семействе гиперсфер $S_{r(a)}(\mathbf{a})$:*

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 = r^2(a),\ \text{где}\ r(a) = \sqrt{S_2 - 2aS_1 + na^2}, \tag{4.10}$$

$a \in \mathbb{R}^1$ – параметр, а S_1, S_2 заданы выражениями (4.8), (4.9).

В семействе (4.10)*:*

- *сфера S^0 с центром в начале координат задается уравнением* (4.9) *и имеет радиус:*

$$r^0 = \sqrt{S_2}; \tag{4.11}$$

- *сфера $S^{\min}$ минимального радиуса имеет параметры:*

$$a^{\min} = \frac{S_1}{n}; \tag{4.12}$$

$$r^{\min} = r(a^{\min}) = \sqrt{S_2 - \frac{S_1^2}{n}}. \tag{4.13}$$

Гиперсфера $S^{\min}$ задается уравнением:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{S_1}{n}\right)^2 = S_2 - \frac{S_1^2}{n}, \tag{4.14}$$

представимое также в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2S_1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = S_2 - \frac{2S_1^2}{n}.$$

В заключение сформулируем следующее важное для дальнейшего изложения свойство множества $E_{nk}(G)$.

$E_{nk}(G)$ - полиэдрально-сферическое множество

Утверждение 4.1. *Множество $E_{nk}(G)$ – полиэдрально-сферическое и представимо в виде:*

$$E_{nk}(G) = S_{r(a)}(\mathbf{a}) \cap \Pi_{nk}(G), \tag{4.15}$$

где точка $\mathbf{a}$ *определяется параметром* $a \in \mathbb{R}^1$*, а радиус* $r(a)$ *задается формулой* (4.10)*.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы 2.4. Поскольку $E_{nk}(G)$ сферически расположено, оно входит в класс поверхностно расположенных множеств. Следовательно, оно полиэдрально-поверхностное, при этом формула полиэдрально-поверхностное представление (2.4) приобретает вид (4.15) и означает, что $E_{nk}(G)$ - полиэдрально-сферическое.

В зависимости от выбора параметра a в уравнении описанной сферы и H-представления многогранника $\Pi_{nk}(G)$, различные полиэдрально-сферические представления множества $E_{nk}(G)$ образуются на основе формулы (4.15).

Разложения $E_{nk}(G)$ по семействам параллельных плоскостей

Приведем два вида разложений множества $E_{nk}(G)$ по параллельным плоскостям:

- первое по семействам гиперплоскостей, параллельных координатным;
- второе - по параллельным плоскостям, ортогональным гиперплоскости (4.4).

Теорема 4.2. *Множество $E_{nk}(G)$ лежит на семействах $\{H_s^t\}_{t\in J_{T_s}}$ гиперплоскостей вида*

$$H_s^t: \qquad \frac{s}{n-s}\sum_{i=1}^{n-s} x_i - \sum_{i=n-s+1}^{n} x_i + a_t^s = 0, \tag{4.16}$$

где $s \in J_{n-1}$, $t \le T_s \le C_n^s$,

$$a_t^s = -\frac{s}{n-s}\cdot S_1 + \frac{n}{n-s}\cdot e_t^{G,s},\ t \in J_{T_s}. \tag{4.17}$$

Доказательство. Уравнение (4.16) перепишем в виде:

$$\begin{gathered} s\sum_{i=1}^{n-s} x_i + (s-n)\sum_{i=n-s+1}^{n} x_i + A_t^s = 0, \\ \text{где } A_t^s = a_t^s\,(n-s)\,. \end{gathered} \tag{4.18}$$

Учитывая (4.4), условие (4.18) для $E_{nk}(G)$ эквивалентно следующему:

$$\begin{gathered} s\sum_{i=1}^{n} x_i - n\sum_{i=1}^{s} x_{n-i+1} + A_t^s = \\ = s\cdot S_1 - n\sum_{i=1}^{s} x_{n-i+1} + A_t^s = 0. \end{gathered} \tag{4.19}$$

Отсюда видно, что константы $\{A_t^s\}_{s,t}$ определяется возможными значениями, принимаемыми функцией $\sum\limits_{i=1}^{s} x_{n-i+1}$ на $E_{nk}(G)$. Итак, пусть $\Sigma_{G,s}$ – мультимножество всех таких значений, соответственно, его основа $S(\Sigma_{G,s})$ будет содержать всевозможные различные его значения:

$$\Sigma_{G,s} = \left\{ \sum_{i\in\omega:\ |\omega|=s} g_{n-i+1} \right\},\ S\left(\Sigma_{G,s}\right) = \left\{ e_t^{G,s} \right\}_{t\in T_s}. \tag{4.20}$$

Тогда параметр A_t^s принимает T_s различных значений из множества $S\left(\Sigma_{G,s}\right)$, число которых не превосходит C_n^s.

Перепишем (4.19) как $s \cdot S_1 - n \cdot e_t^{G,s} + A_t^s = 0$, откуда

$$A_t^s = -s \cdot S_1 + n \cdot e_t^{G,s},\ t \in J_{T_s}. \tag{4.21}$$

Возвращаясь к величине a_t^s и учитывая что $a_t^s = \frac{A_t^s}{n-s}$, получаем, что имеет место разложение $E_{nk}(G)$ по плоскостям (4.16), (4.17). $\square$

Полученное разложение - это также разложение (1.36) множества $E_{nk}(G)$ в направлении нормалей к гиперплоскостям (1.37) вида

$$H^j(\overline{n}) = \{x \in \mathbb{R}^n : j\sum_{i=1}^{n-j} x_i + (j-n)\sum_{i=n-j+1}^{n} x_i = 0\},\ j \in J_{n-1}. \tag{4.22}$$

Обобщим это разложение на случай произвольного разбиения множества переменных $\{x_i\}_{i\in J_n}$ на s- и $n-s$-элементные подмножества.

Следствие 4.1. *При произвольном фиксированном $\omega \subset J_n$, множество*

$E_{nk}(G)$ разлагается по семейству $\left\{H'^{t}_{\omega}\right\}_{t\in J_{T_s}}$ гиперплоскостей вида:

$$H'^{t}_{\omega}: \qquad \frac{s}{n-s}\sum_{i\notin\omega} x_i - \sum_{i\in\omega} x_i + a^s_t = 0, \tag{4.23}$$

где $s = |\omega|$, $t \le T_s \le C^s_n$, а величины a^s_t заданы с помощью (4.17).

Действительно (4.16) представляется в виде (4.23) при выборе $\omega = J_n \backslash J_{n-s}$. Используя в формулах (4.18), (4.19) выражения $\sum\limits_{i\notin\omega} x_i$, $\sum\limits_{i\in\omega} x_i$ вместо $\sum\limits_{i=1}^{n-s} x_i$, $\sum\limits_{i=n-s+1}^{n} x_i$, получим формулу (4.23).

Заметим, что плоскости семейства (4.23) ортогональны плоскости (4.8), поскольку нормаль к (4.8) - единичный вектор, а нормаль к H'^{t}_{ω} имеет $n-s$ координат $\frac{s}{n-s}$, остальные s координат - единичные.

Отметим также, что при данном переходе от разбиения множества J_n на подмножества $J_n \backslash J_{n-s}$, J_{n-s} к произвольным s-, $n-s$-элементным подмножествам формула (4.19) приобретает вид:

$$s \cdot S_1 - n\sum_{i\in\omega} x_i + A^s_t = 0. \tag{4.24}$$

Отделив переменные в (4.24), получим:

$$\sum_{i\in\omega} x_i = \frac{1}{n}(s \cdot S_1 - A^s_t),$$

а с учетом (4.21) -

$$\sum_{i\in\omega} x_i = \frac{1}{n}(2s \cdot S_1 - n \cdot e^{G,s}_t) = \frac{2s \cdot S_1}{n} - e^{G,s}_t,\ t \in T_s.$$

Таким образом, получено еще одно разложение $E_{nk}(G)$ по семейству T_s параллельных плоскостей для каждого $\omega \subset J_n$. Сформулируем этот результат в виде следствия:

Следствие 4.2. *$\forall \omega \subset J_n$ справедливо разложение $E_{nk}(G)$ по параллельным плоскостям в направлении нормали $\overline{n}(\omega)$:*

$$\overline{n}_i(\omega) = \begin{cases} 1, \ i \in \omega, \\ 0, \ i \notin \omega \end{cases} \quad (i \in J_n),$$

которое имеет вид разложения (1.45)-(1.47).

А именно, $\forall \omega \subset J_n, \ s = |\omega|$

$$E_{nk}(G) = \bigcup_{t=1}^{T_s} E^{t,\omega}, \tag{4.25}$$

$$E^{t,\omega} = H^{t,\omega} \cap E_{nk}(G). \tag{4.26}$$

где

$$H^{t,\omega} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ \sum_{i \in \omega} x_i = B_t^s \right\}, \ t \in J_{T_s}, \tag{4.27}$$

$$B_t^s = \tfrac{2sS_1}{n} - e_t^{G,s},$$

а константы $e_t^{G,s}$ заданы формулой (4.20).

Если $s = 1$, разложение (4.25)-(4.27) превращается в разложение (1.45)-(1.47) множества $E_{nk}(G)$ по координатам. В нем учитывается тот факт, что координаты произвольной точки $E_{nk}(G)$ в точности принимают все k значений из $S(G)$. Соответственно, имеет место утверждение:

Утверждение 4.2. *$E_{nk}(G)$ - k-уровневое множество по каждой координате.*

Следствие 4.3. *Множество $E_{nk}(G)$ - k-уровневое координатам,*

$$m'(E_{nk}(G)) = k. \tag{4.28}$$

При этом условие (1.45) можно представить в форме (1.48),

$$E^{'ij} = E_{n-1,k_i}(G^i), \tag{4.29}$$

или (1.49), (4.29), где $E = E_{nk}(G)$,

$$G^i = G \backslash \{e_i\},\ k_i = |S(G^i)|,\ i \in J_k. \tag{4.30}$$

Поскольку по нашему предположению выполнено условие (4.2), все множества (4.29) - непустые общие $\mathcal{C}$-множества перестановок. Таким образом, выполнено необходимое условие (1.50) того, что (1.45)-(1.47) является разложением множества $E = E_{nk}(G)$ по координатам.

Укажем также, какие множества образуются в пересечении $E_{nk}(G)$ с плоскостью $H^{t,\omega}$ в зависимости от ω:

- Если $s = 1$ или $s = n-1$, имеем дело с разложением (1.47)-(1.45), где множества (1.45) формируются из общих $\mathcal{C}$-множеств $n-1$-перестановок (4.29) добавлением к координатам его точек одной координаты из G.

Поэтому условия (1.48), (1.49) приобретают вид:

$$E^{'ij} = Pr_{H^{ij}} E^{ij} = Pr_{H^{ij}} E_{nk}(G),\ i \in J_k,\ j \in J_n.$$

Образованные в сечениях множества E^{ij} можно представить декартовым произведением общего $\mathcal{C}$-множества $n-1$-перестановок $E^{'ij}$ и одноэлементного $\mathcal{C}$-множества $\{e_i\}$ 1-перестановок $(i \in J_k,\ j \in J_n)$.

- Подобная картина наблюдается и в остальных случаях. Так, если $1 < s < n-1$, то в пересечении $E_{nk}(G)$ и плоскостей $H^{t,\omega}$ образуется одно или несколько декартовых произведений общих $\mathcal{C}$-множеств $s-$ и $n-s-$ перестановок, индуцированных мультимножеством G.

Критерий вершины $\Pi_{nk}(G)$

Теорема 4.3. *Множество вершин общего многогранника перестановок* (4.1) *совпадает с общим $\mathcal{C}$-множеством перестановок $E_{nk}(G)$:*

$$vert\,\Pi_{nk}(G) = E_{nk}(G)\,. \qquad (4.31)$$

Доказательство этой теоремы для множества $\mathcal{C}$-перестановок без повторений приведено в [81], для общего $\mathcal{C}$-множества перестановок в [127]. Представим новое краткое доказательство, основанное на сферической расположенности $E_{nk}(G)$. Итак, согласно утверждению 4.1, $E_{nk}(G)$ – полиэдрально-сферическое, а значит, по следствию 2.1, оно вершинно расположено.

Критерий смежности вершины $\Pi_{nk}(G)$

Теорема 4.4. *Вершинами многогранника $\Pi_{nk}(G)$, смежными с вершиной x, являются все точки, полученные из x перестановкой компонент основы (1.3) мультимножества G, равных e_i, e_{i+1} $(i \in J_{k-1})$ (далее $e_i \leftrightarrow e_{i+1}$-транспозицией), и только они.*

Степень регулярности вершины $\Pi_{nk}(G)$

Теорема 4.5. *Количество $\mathcal{R}$ смежных вершин к произвольной вершине многогранника $\Pi_{nk}(G)$ определяется по формуле:*

$$\mathcal{R} = \prod_{i=1}^{k-1} n_i n_{i+1}. \tag{4.32}$$

Замечание 4.2. Нетрудно видеть, что величина (4.32) ограничена снизу значением $n-1$:

$$\mathcal{R} \geq n-1, \tag{4.33}$$

при этом при $k = n$ неравенство (4.33) обращается в равенство. Далее будет показано, что в классе $\Pi_{nk}(G)$ существуют и другие многогранники, для которых это неравенство выполняется как равенство. Отметим, что из (4.33) также следует, что размерность $\Pi_{nk}(G)$ не превосходит $n-1$.

Несводимое H-представление $\Pi_{nk}(G)$

Теорема 4.6. *Многогранник $\Pi_{nk}(G)$ описывается следующей системой линейных ограничений: уравнением (4.4) и неравенствами*

$$\sum_{j=1}^{i} x_{\alpha_j} \geq \sum_{j=1}^{i} g_j, \ \{\alpha_j\}_{j\in J_i} \subset J_n, \ i \in J_{n-1}. \tag{4.34}$$

Система ограничений (4.34) состоит из $n+1$-ой совокупности неравенств, соответствующих фиксированному значению i, называемых i-союзом ($i \in J_{n-1}$).

Замечание 4.3. Неравенства (4.34) могут быть также переписаны в виде:

$$\sum_{j\in\omega} x_j \geq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_j, \ \omega \subset J_n. \tag{4.35}$$

Таким образом, многогранник $\Pi_{nk}(G)$ аналитически описывается системой (4.4), (4.35) (далее ($\Pi_{nk}(G)$.HR)).

Система ($\Pi_{nk}(G)$.HR) может быть также переписана в эквивалентной форме, включающей уравнение (4.34), а также следующие неравенства:

- левосторонние ограничения на переменные:

$$x_i \geq e_1, \ i \in J_n; \tag{4.36}$$

- правосторонние ограничения на переменные:

$$x_i \leq e_k, \ i \in J_n; \tag{4.37}$$

- оставшиеся ограничения системы (4.35):

$$\sum_{j\in\omega} x_j \geq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_j,\ \omega\subset J_n,\ 1<|\omega|<n-1. \tag{4.38}$$

Теорема 4.7. *Система* (4.4), (4.35) *ограничений многогранника* $\Pi_{nk}(G)$ *– сводима тогда и только тогда, когда минимальный и/или максимальный элемент* G *- кратный, т.е. выполнено условие:*

$$n_1+n_k>2. \tag{4.39}$$

Исключение из (4.35) *союзов с номерами*

$$i\in J=\overline{i^{\min},n_1}\cup\overline{n-n_k,i^{\max}}, \tag{4.40}$$

где

$$i^{\min}=\min\{2,n-n_k\},\ i^{\max}=\max\{n-2,n_1\}, \tag{4.41}$$

обращает систему (4.4), (4.35) *в несводимую систему многогранника* $\Pi_{nk}(G)$.

Замечание 4.4. Данная теорема является уточнением теоремы, представленной в [98]. Она позволяет предусмотреть не только случаи наличия избыточных союзов ограничений в системе (4.38), но и одного из союзов неравенств (4.36) или (4.37). А это, в свою очередь, дает возможность сформулировать данное уточнение в виде критерия несводимости H-представления общего многогранника перестановок.

Следствие 4.4. *Несводимым* H*-представлением многогранника* $\Pi_{nk}(G)$ *(далее* ($\underline{\Pi_{nk}(G).IHR}$)*) будет система ограничений, включающая уравнение*

(4.34) *и неравенства союзов* (4.35) *с номерами* $i = |\omega| \in \overline{J}$*, где* $\overline{J}$ *- дополнение к множеству* J*, заданному формулой* (4.40) *-* $\overline{J} = J_{n-1} \backslash J$*.*

Размерность $\Pi_{nk}(G)$

Теорема 4.8. *Многогранник* $\Pi_{nk}(G)$ *–* $n-1$*-мерный:*

$$\dim\, \Pi_{nk}(G) = n - 1. \tag{4.42}$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы для многогранника перестановок приведено в [81]. Обобщим его на общее $\mathcal{C}$-множество перестановок, воспользовавшись замечанием 1.2. (4.4), (4.34) – H-представление $\Pi_{nk}(G)$, включающее одно уравнение и ранг (1.60) соответствующей матрицы-строки $\rho = 1$. С другой стороны, центр $\mathbf{a}^{\min}$ описанной сферы $S^{\min}$ (где параметр $a^{\min}$ задан (4.12)) является внутренней точкой $\Pi_{nk}(G)$ в аффинном подпространстве (4.4), т.к. все неравенства (4.34) выполняются в точке $\mathbf{a}^{\min}$ строго. Откуда, согласно (1.62), $\dim\, \Pi_{nk}(G) = n - \rho = n - 1$, что и требовалось доказать. □

Плоскости симметрии $E_{nk}(G)$, $\Pi_{nk}(G)$

Теорема 4.9. *Множество* $E_{nk}(G)$ *и многогранник* $\Pi_{nk}(G)$ *симметричны относительно каждой из* C_n^2 *гиперплоскостей:*

$$x_i - x_j = 0,\ 1 \le i < j \le n. \tag{4.43}$$

Замечание 4.5. Добавление уравнения (4.8) к условиям теорем 4.1, 4.2, 4.9

позволяет говорить о существовании: а) семейства (4.8), (4.10) $n-2-$сфер, описанных вокруг $E_{nk}(G)$; б) о разложениях (4.8), (4.16) и (1.44), (4.8) множества $E_{nk}(G)$ по семействам параллельных $n-2-$плоскостей; в) наконец, о симметрии $E_{nk}(G)$ и, соответственно, $\Pi_{nk}(G)$ относительно $n-2-$плоскостей (4.8), (4.43).

Центрально симметричные множества $E_{nk}(G)$

В теореме 4.9 было указано, что $E_{nk}(G)$ обладает некоторой пространственной симметрией. Однако центральной симметрией обладают далеко не все множества этого класса.

Выделим центрально симметричные множества в классе $E_{nk}(G)$ и, соответственно, центрально-симметричные многогранники $\Pi_{nk}(G)$.

Рассуждения основаны на следующей теореме.

Теорема 4.10. *Множество $E_{nk}(G)$ центрально-симметрично тогда и только тогда, когда элементы индуцирующего его мультимножества удовлетворяют условию:*

$$\frac{g_i + g_{n-i+1}}{2} = \frac{S_1}{n},\ i \in J_{[\frac{n+1}{2}]}, \tag{4.44}$$

то есть, центром симметрии $E_{nk}(G)$ может служить только точка $\mathbf{a}^{\min}$ - центр сферы $S^{\min}$.

Доказательство. Диаметрально противоположной точкой к точке $x \in E_{nk}(G)$ будет точка $y \in E_{nk}(G)$, удовлетворяющая условию:

$$\text{если } x_i = g_j, \text{ то } y_i = g_{n-j+1},\ i \in J_n.$$

При этом центром симметрии $E_{nk}(G)$ может быть только середина отрезка $[x, y]$. Обозначим ее z, тогда имеем $z = \frac{x+y}{2}$, где $z_i = \frac{g_j + g_{n-j+1}}{2}$, $i \in J_n$. Это условие должно выполняться для произвольной точки $x \in E_{nk}(G)$, а это возможно только при условии равенства всех координат точки z, откуда $z = \mathbf{b}$, где b:

$$b = \frac{g_i + g_{n-i+1}}{2},\ i \in J_n.$$

Но в таком случае, если n - четное, то $S_1 = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(g_i + g_{n-i+1}) = \frac{n}{2} \cdot 2b = n \cdot b$, откуда следует (4.44); если n - нечетное, то $S_1 = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}}(g_i + g_{n-i+1}) + g_{\frac{n+1}{2}} = (n-1)b + b = n \cdot b$. Следовательно, в любом случае $b = \frac{S_1}{n} = a^{\min}$. □

Теорема 4.10 говорит о том, симметричные $E_{nk}(G)$ индуцируются только теми мультимножествами, элементы которых симметричны относительно их среднего арифметического. Это же относится к элементам основы и первичной спецификации G.

Следствие 4.5. *Многогранник $\Pi_{nk}(G)$ - центрально-симметричен в том и только в том случае, если индуцирующее его мультимножество G удовлетворяет условию* (4.44).

Следствие 4.6. *Если множество $E_{nk}(G)$ - центрально симметрично, его основа и первичная спецификация удовлетворяют условиям:*

$$|e_i - a^{\min}| = |e_{k-i+1} - a^{\min}|,\ i \in J_{\left[\frac{k+1}{2}\right]}; \tag{4.45}$$

$$n_i = n_{k-i+1},\ i \in J_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}. \tag{4.46}$$

Пример 4.1. Общее $\mathcal{C}$-множество перестановок $E_{53}(G)$, индуцированное мультимножеством $G = \{1^2, 3, 4^2\}$, имеет параметры: $S(G) = \{1, 3, 4\}$,

$[G] = \{2, 1, 2\}$, $a^{\min} = \frac{13}{5}$. Условие (4.46) выполнено, а условие (4.45) - не выполнено, поскольку $|e_1 - a^{\min}| = \frac{8}{5} \neq |e_3 - a^{\min}| = \frac{7}{5}$, следовательно, множество $E_{53}(G)$ не центрально симметрично.

Сформулированы некоторые свойства общего $\mathcal{C}$-множества перестановок и общего многогранника перестановок. В последующих пунктах рассмотрим некоторые подклассы $E_{nk}(G)$, переформулируем основные свойства, приведенные в данном пункте, и выделим новые свойства, характерные для этих конкретных подклассов.

Перейдем к рассмотрению частных случаев $E_{nk}(G)$, а именно, к предельным случаям $E_{nk}(G)$, соответствующим максимальному – $k = n$ – и минимальному – $k = 2$ – значениям k. Первому случаю соответствует $\mathcal{C}$-множество перестановок $E_n(G)$, рассматриваемое в п. 4.2, второму – общее $\mathcal{C}$-множество перестановок $E_{n2}(G)$, индуцированное двумя различными числами и исследуемое в п. 4.3. Приведем некоторые свойства множеств $E_n(G)$, $E_{n2}(G)$ и соответствующих им многогранников.

4.2 Множество евклидовых конфигураций перестановок без повторений

Рассмотрим свойства $\mathcal{C}$-множества $E_n(G)$ перестановок без повторений и его выпуклой оболочки - многогранника перестановок без повторений (the permutohedron):

$$\Pi_n(G) = conv\left(E_n(G)\right).$$

Учитывая, что в данном случае выполнено условие (3.55) и, соответственно,

$$n = k, \tag{4.47}$$

во всех формулах, приведенных в п. 4.1, элементы мультимножества G можно заменить элементами его основы

$$g_i \to e_i,\ i \in J_n. \tag{4.48}$$

Так, например, выражение (4.6) приобретет вид:

$$S_j = \sum_{i=1}^{n} e_i^j,\ j \in \mathbb{N}. \tag{4.49}$$

В результате получаем такие свойства:

Мощность $E_n(G)$:

$$|E_n(G)| = n!. \tag{4.50}$$

Размерность $\Pi_n(G)$:

$$\dim\ \Pi_n(G) = n - 1. \tag{4.51}$$

Вершинная расположенность $E_n(G)$:

$$vert\,\Pi_n(G) = E_n(G)\,.$$

Сферическая расположенность $E_n(G)$ и принадлежность плоскости

Плоскость, в которой лежит $E_n(G)$, задается уравнением

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = S_1, \tag{4.52}$$

а семейство

$$\{S_{r(a)}(\mathbf{a})\}_{a\in\mathbb{R}^1} \tag{4.53}$$

описанных сфер - уравнением (4.10), где величины S_1, S_2 заданы формулой (4.49), а $a \in \mathbb{R}^1$ - параметр.

$E_n(G)$ - полиэдрально-сферическое множество:

$$E_n(G) = S_{r(a)}(\mathbf{a}) \cap \Pi_n(G),$$

где $S_{r(a)}(\mathbf{a})$ - произвольная гиперсфера из семейства (4.53), $a \in \mathbb{R}$ - параметр.

Критерий смежности вершин $\Pi_n(G)$:

Множество смежных вершин к каждой $e \in E_n(G)$ образуются из нее однократной $e_i \leftrightarrow e_{i+1}$-транспозицией ($i \in J_{n-1}$).

Степень регулярности вершин $\Pi_n(G)$:

$$\mathcal{R} = n - 1. \tag{4.54}$$

Многогранник $\Pi_n(G)$ - простой

Согласно замечанию 4.2, условие (4.54) означает, что степень регулярности вершин достигает на многограннике $\Pi_n(G)$ своей нижней границы $n-1$. В силу (4.51), эта граница совпадает с размерностью $\Pi_n(G)$, т.е. имеет место:

$$\mathcal{R} = \dim\, \Pi_n(G)\,,$$

следовательно, $\Pi_n(G)$ - простой.

Несводимое H-представление $\Pi_n(G)$

Вышеприведенные аналитические представления $\Pi_{nk}(G)$ легко переносятся на $\Pi_n(G)$ с учетом (4.49). Поскольку кратные элементы в G отсутствуют, то условие (4.39) не выполнено, и это является достаточным условием несводимости H-представления ($\Pi_{nk}(G)$.HR). Введем для него обозначение ($\underline{\Pi_n(G).\mathrm{IHR}}$) и выпишем его с учетом (3.55):

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} e_j,$$
$$\sum_{j\in\omega} x_j \geq \sum_{j=1}^{|\omega|} e_j,\ \omega \subset J_n.$$

Число ограничений в ($\Pi_n(G)$.HR):

$$|\mathbf{H}| = 2^n - 1, \tag{4.55}$$

2^{n-1} из которых - неравенства и одно уравнение (здесь $\mathbf{H}$ - множество гиперграней $\Pi_n(G)$).

$E_n(G)$ - n-уровневое множество по координатам

Это непосредственно вытекает из следствия 4.3, и в результате подстановки (4.47) в (4.28) получаем:

$$m'(E_n(G)) = n.$$

Кроме того, для $E_n(G)$ справедливо разложение (1.45)-(1.47), где формула (1.44) имеет вид: $\forall\, j \in J_n$

$$H^{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x_j = e_i\},\ i \in J_n, \tag{4.56}$$

а множества (1.45) формируются из вспомогательных множеств (4.29) вида

$$E'^{ij} = E_{n-1,k-1}(G\backslash\{e_i\}),\ i,j \in J_n.$$

Разложения $E_n(G)$ в направлении гиперграней $\Pi_n(G)$

Поскольку ($\Pi_n(G)$.HR) - несводимое H-представление многогранника $\Pi_n(G)$, то для каждого $\omega \subset J_n$ формулы (4.25)-(4.27) определяют разложение $E_n(G)$ в направлении гиперграни $H^{1,\omega}$ из семейства (4.27):

$$H^{1,\omega} = \left\{x \in \mathbb{R}^n :\ \sum_{i\in\omega} x_i = S_{|\omega|}\right\}. \tag{4.57}$$

Учитывая (4.56) и тот факт, что $\Pi_n(G)$ имеет гиперграни, параллельные координатным плоскостям, число $m(E_n(G))$ уровней множества $E_n(G)$

можно оценить следующим образом:

$$n \le m(E_n(G)) \le \max_{s \in J_{n-1}} C_n^s = C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Центрально симметричные $E_n(G)$, $\Pi_n(G)$

Из теоремы 4.10 следует, что $E_n(G)$, $\Pi_n(G)$ симметричны в случае выполнения условия:

$$\frac{e_i + e_{n-i+1}}{2} = \frac{S_1}{n},\ i \in J_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}, \tag{4.58}$$

что также эквивалентно следующему условию:

$$|e_i - a^{\min}| = |e_{n-i+1} - a^{\min}|,\ i \in J_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}.$$

$\mathcal{C}$-множество перестановок без повторений E_n

Рассмотрим теперь в качестве G множество первых n натуральных чисел ($G = J_n$) и индуцированное им множество е-конфигураций перестановок без повторений $E_n(J_n)$. Данное $\mathcal{C}$-множество перестановок без повторений сокращенно обозначим E_n, а соответствующий ему многогранник перестановок без повторений -

$$\Pi_n = conv\ E_n.$$

Помимо свойств, непосредственно следующих из того, что E_n, Π_n принадлежат классу $\mathcal{C}$-множеств и многогранников перестановок без повторений, таких как

$$|E_n| = n!,$$

$$\dim \Pi_n = \mathcal{R} = n - 1,$$

$$vert\, \Pi_n = E_n$$

и прочие, множество E_n и многогранник Π_n обладают рядом особенностей, следующих из специфики индуцирующего их множества J_n.

Так, например, в разложении (1.45)-(1.47), плоскости (1.44) представляют собой набор семейств (4.56) равноотстоящих гиперплоскостей: $\forall j \in J_n$

$$H^{ij} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ x_j = i\right\},\ i \in J_n. \tag{4.59}$$

Формула (4.49) имеет вид:

$$S_j = \sum_{i=1}^{n} i^j,\ \ j \in \mathbb{N},$$

соответственно, выражения (4.8), (4.9) приобретают форму:

$$S_1 = \textstyle\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}; \tag{4.60}$$

$$S_2 = \textstyle\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{4.61}$$

В результате применения соотношений (4.60), (4.61) получаем следующие свойства E_n, Π_n как следствия вышеперечисленных свойств $E_n\,(G)$, $\Pi_n\,(G)$:

E_n, Π_n **лежат в плоскости**

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{4.62}$$

Множество E_n - сферически расположенное:

E_n лежит на семействе (4.53) гиперсфер радиуса:

$$r(a) = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - a \cdot n(n+1) + a^2}, \tag{4.63}$$

где $a \in \mathbb{R}^1$ - параметр.

В семействе (4.53), (4.63):

- сфера $S^{\min}$ минимального радиуса имеет параметры:

$$a^{\min} = \frac{n+1}{2}, \tag{4.64}$$

$$r^{\min} = \tfrac{1}{6}\sqrt{3n(n+1)(n-1)};$$

- гиперсфера S^0 с центром в начале координат имеет радиус:

$$r^0 = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

E_n **- полиэдрально-сферическое множество:**

$$E_n = S_{r(a)}(\mathbf{a}) \cap \Pi_n,$$

где $S_{r(a)}(\mathbf{a})$ - гиперсфера семейства (4.53), заданная параметром $a \in \mathbb{R}^1$ и имеющая радиус (4.63).

Несводимое H-представление Π_n

Несводимое представление $\Pi_n(G)$ (далее (Π_n.IHR)) получаем непосредственно из ($\Pi_n\,(G)$.IHR) с учетом того, что

$$\sum_{j=1}^{i} g_j = \sum_{j=1}^{i} j = \frac{i(i+1)}{2}.$$

В результате получаем, что (Π_n.IHR) имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \tfrac{n(n+1)}{2}, \tag{4.65}$$

$$\sum_{j\in\omega} x_j \geq \tfrac{i(i+1)}{2},\ \omega \subset J_n,\ i = |\omega|\,. \tag{4.66}$$

Критерий смежности вершин Π_n

Вершинами Π_n, смежными с $x \in E_n$, являются точки, полученные из x $i \leftrightarrow i+1$-транспозицией $(i \in J_{n-1})$, и только они.

Разложения E_n по плоскостям, параллельным гиперграням Π_n

Поскольку (Π_n.IHR) - несводимое H-представление, замена его неравенств равенствами задает множество $\mathbf{H}$ гиперграней многогранника Π_n:

$$\begin{aligned}&\mathbf{H} = \{H^\omega\}_{\omega\subset J_n}:\\ &H^\omega = \{x \in \mathbb{R}^n:\ \sum_{i\in\omega} x_i = \frac{j(j+1)}{2}\},\ \omega \subset J_n,\ j = |\omega|.\end{aligned} \tag{4.67}$$

Так, например, если $\omega = \{i\} \in J_n$, (4.67) задает множество гиперплоскостей разложение (4.59), соответствующих разложению E_n по координате x_i, а также в направлении гиперграни

$$H^{1,\omega} = \{x_i = e_1\}.$$

Теорема 4.11. *Для $\omega \subset J_n$, $j = |\omega|$ разложения множества E_n по плоскостям, параллельным гиперграни $H^{1,\omega}$, имеют вид:*

$$\begin{array}{l} H^{a_j,\omega} = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum\limits_{i\in\omega} x_i = a_j\},\ a_j \in J_{a_j^{\max}} \backslash J_{a_j^{\min}-1}, \\ \text{где } a_j^{\min} = \dfrac{j(j+1)}{2},\ a_j^{\max} = \dfrac{j(2n-j+1)}{2}. \end{array} \tag{4.68}$$

Доказательство. Для любого $j \in J_{n-1}$ и всех $\omega \subset J_n$, таких, что $|\omega| = j$ функция $h(\omega, x) = \sum\limits_{i\in\omega} x_i$ пробегает все целочисленные значения из отрезка $[a_j^{\min}, a_j^{\max}]$, где $a_j^{\min}, a_j^{\max}$ заданы формулой (4.68). В самом деле, значение $a_j^{\min}$ эта функция принимает на $\mathcal{C}$-конфигурации перестановок $x^{\min,\omega} \in E_n : \{x_i^{\min,\omega}\}_{i\in\omega} = J_j$, $\{x_i^{\min,\omega}\}_{i\notin\omega} = J_n \backslash J_j$. Значение $a_j^{\max}$ достигается на $\mathcal{C}$-конфигурации $x^{\max,\omega} \in E_n : \{x_i^{\max,\omega}\}_{i\in\omega} = J_n \backslash J_{n-j}$, $\{x_i^{\max,\omega}\}_{i\notin\omega} = J_{n-j}$. В остальных точках E_n функция $h(\omega, x)$ принимает значение из интервала $(a_j^{\min},\ a_j^{\max})$.

Пусть точка $x \in E_n$, такая, что $h(\omega, x) = a \in (a_j^{\min}, a_j^{\max})$. Рассмотрим множество $N(x)$ смежных к ней вершин. Поскольку все они образуются $x_i \leftrightarrow x_j$-транспозициями, такими, что $|x_i - x_j| = 1$, в $N(x)$ можно выделить три части: множество точек $N^+(x)$ со значениями данной функции $h(.) = a + 1$, множество $N^-(x)$ - со значениями $h(.) = a - 1$, наконец, $N^0(x)$ включает те смежные к x вершины, где значение $h(.)$ осталось без изменения. Нетрудно видеть, что $N^0(x)$ формируется указанными транспозициями координат в пределах ω, т.е. $|N^0(x)| \leq |\omega| - 1 = j - 1 \leq n - 2$, в оставшихся $n - j > 0$ точках $h(.)$ уменьшается либо увеличивается ровно на единицу.

Таким образом, показано, что $\forall \omega \subset J_n$, $j = |\omega|$, $a_j \in J_{a_j^{\max}} \backslash J_{a_j^{\min}-1}$ справедливо, что $E_n \cap H^{a_j,\omega} \neq \emptyset$, т.е. имеет место разложение (4.25)-(4.27) множества E_n по плоскостям, параллельным гиперграням Π_n, которое принимает форму:

$$E_n = \bigcup_{t=a_j^{\min}}^{a_j^{\max}} E^{t,\omega},$$
$$E^{t,\omega} = H^{t,\omega} \cap E_n,$$

где

$$H^{t,\omega} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in \omega} x_i = t \right\},\ t \in J_{a_j^{\max}} \backslash J_{a_j^{\min}-1}.$$

$\square$

Число уровней множества E_n

Лемма 4.1. *Число уровней множества E_n определяется по формуле:*

$$m(E_n\,(G)) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1. \tag{4.69}$$

Доказательство. На основании теоремы 4.11, из формулы (4.68) легко определяется точное число уровней разложения E_n в направлении каждой Π_n-гиперграни. Так, если $H^{1,\omega}$ - гипергрань Π_n, соответствующая некоторому неравенству $j = |\omega|$-го союза неравенств этого многогранника, тогда значение

$$L_j = \frac{j(2n-j+1)}{2} - \frac{j(j+1)}{2} + 1 = \\ \frac{j}{2}(2n-j+1-j-1)+1 = j(n-j)+1 \tag{4.70}$$

задает число уровней множества E_n в направлении гиперграни $H^{1,\omega}$.

Нас интересует максимум функции (4.70), поскольку число уровней множества E_n в данном случае можно найти из условия - $m(E_n) = \max\limits_{j \in J_{n-1}} L_j$. С увеличением j величина L_j сначала возрастает, потом начинает убывать и достигает максимума:

- $m(E_n) = (\frac{n}{2})^2 + 1$ при $j = \frac{n}{2}$, если j четное;
- $m(E_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ при $j = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, если j нечетное.

Объединяя оба эти случая, получаем формулу (4.69). □

4.3 Специальное множество евклидовых конфигураций перестановок

Общее множество евклидовых конфигураций перестановок $E_{n2}(G)$, порожденное образующим множеством из двух элементов, обладает рядом специфических свойств по сравнению со всем классом $E_{nk}(G)$. Выделим его из всего класса общих $\mathcal{C}$-множеств перестановок и введем для $E_{n2}(G)$ специальный термин - специальное множество евклидовых конфигураций перестановок (the special permutation $\mathcal{C}$-set).

Рассматриваемый случай отвечает

$$k = 2, \tag{4.71}$$

соответственно, индуцирующим мультимножеством для $E_{n2}(G)$ будет:

$$G = \{e_1^{n_1}, e_2^{n_2}\}, \tag{4.72}$$

где

$$n_1 + n_2 = n. \tag{4.73}$$

Выпуклую оболочку $E_{n2}(G)$ назовем специальным многогранником перестановок и обозначим $\Pi_{n2}(G)$, т.е. $\Pi_{n2}(G) = conv\ E_{n2}(G)$.

Перечислим некоторые свойства $E_{n2}(G)$ и $\Pi_{n2}(G)$, вытекающие из вышеприведенных свойств общих $\mathcal{C}$-множества и многогранника перестановок в случае выполнения условия (4.71):

Мощность $E_{n2}(G)$:

$$|E_{n2}(G)| = C_n^{n_1} = C_n^{n_2}. \tag{4.74}$$

Формула (4.74) является следствием из (4.3) для случая (4.71).

Как видно, мощность специального $\mathcal{C}$-множества перестановок определяется с помощью биномиальных коэффициентов и изменяется в пределах

$$n \le |E_{n2}(G)| \le C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]} \tag{4.75}$$

и достигает минимума и максимума при

$$\min\{n_1, n_2\} = 1, \tag{4.76}$$

$$\min\{n_1, n_2\} = \left[\frac{n}{2}\right] \tag{4.77}$$

соответственно.

Размерность $\Pi_{n2}(G)$:

$$\dim\, \Pi_{n2}(G) = n - 1. \tag{4.78}$$

Вершинная расположенность $E_{n2}(G)$:

$$vert\, \Pi_{n2}(G) = E_{n2}(G). \tag{4.79}$$

Поскольку формула (4.6) для множества $E_{n2}(G)$ превращается в:

$$S_j = n_1 e_1^j + n_2 e_2^j,\ \ j \in \mathbb{N}, \tag{4.80}$$

свойства его сферической расположенности и принадлежности плоскости формулируются следующим образом:

Множество $E_{n2}(G)$ лежит в плоскости:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n_1 e_1 + n_2 e_2 = n e_1 + n_2(e_2 - e_1) = n e_2 + n_1(e_1 - e_2). \tag{4.81}$$

$E_{n2}(G)$ - сферически расположенное множество

Множество $E_{n2}(G)$ вписано в семейство гиперсфер (4.53) с центром в точке **a** радиуса:

$$r(a) = \sqrt{n_1(e_1 - a)^2 + n_2(e_2 - a)^2}, \tag{4.82}$$

определяемых параметром $a \in \mathbb{R}^1$.

Параметры сфер $S^{\min}$, S^0 для $E_{n2}(G)$

Определим параметры сферы минимального радиуса, описанной вокруг $E_{n2}(G)$. С этой целью введем в рассмотрение величину:

$$\Delta = e_2 - e_1. \tag{4.83}$$

Учитывая выражение (4.81), параметр (4.12) можно записать в виде:

$$a^{\min} = \frac{n_1 e_1 + n_2 e_2}{n} = e_1 + \frac{n_2}{n}\Delta = e_2 - \frac{n_1}{n}\Delta. \tag{4.84}$$

Подстановка (4.83), (4.84) в соотношение (4.82) дает

$$r^{\min} = \sqrt{n_1\left(\frac{n_2}{n}\Delta\right)^2 + n_2\left(\frac{n_1}{n}\Delta\right)^2} = \frac{\Delta}{n}\sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_2)} = \frac{\Delta}{n}\sqrt{n_1 n_2 n},$$

откуда

$$r^{\min} = \Delta\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n}}. \tag{4.85}$$

Итак, $S^{\min}$ в данном случае задается параметрами (4.84), (4.85).

Из (4.85) также видно, что $r^{\min}$ изменяется в пределах:

$$\Delta\sqrt{1-\frac{1}{n}} \leq r^{\min} \leq \frac{\Delta}{2}\sqrt{n}, \tag{4.86}$$

достигая минимума и максимума при выполнении условий (4.76), (4.77) соответственно.

Отметим, что величина $r^{\min}$ достигает верхней границы в (4.86) только тогда, когда n - четно и $n_1 = n_2 = \frac{n}{2}$. В этом случае формулы (4.84), (4.85) для определения параметров $S^{\min}$ преобразуются в:

$$r^{\min} = \frac{\Delta}{2}\sqrt{n}, \tag{4.87}$$
$$a^{\min} = \frac{e_1 + e_2}{2}. \tag{4.88}$$

Для $E_{n2}(G)$ описанная сфера S^0 с центром в начале координат имеет радиус $r^0 = \sqrt{S_2} = \sqrt{n_1 e_1^2 + n_2 e_2^2}$.

$E_{n2}(G)$ - полиэдрально-сферическое множество:

$$E_{n2}(G) = S_{r(a)}(\mathbf{a}) \cap \Pi_{n2}(G),$$

где $S_{r(a)}(\mathbf{a})$ - гиперсфера семейства (4.53), (4.82), заданная параметром $a \in \mathbb{R}^1$.

Несводимое Н-представление $\Pi_{n2}(G)$

В силу (4.2), (4.73), необходимое и достаточное условие (4.39) сводимости H-представления ($\Pi_{n2}(G)$.HR) будет заведомо выполнено при $n > 2$.

Более того, группа ограничений (4.38) всегда избыточна. В итоге несводимое H-представление специального многогранника перестановок ($\Pi_{n2}(G)$.IHR) будет подсистемой системы ограничений (4.34), (4.36), (4.37), которую можно представить в виде (4.81),

$$e_1 \leq x_i \leq e_2,\ i \in J_n \tag{4.89}$$

(далее ($\underline{\Pi_{n2}(G).\mathrm{HR1}}$)). Также перепишем формулу (4.37) с учетом (4.71):

$$x_i \leq e_2,\ i \in J_n. \tag{4.90}$$

Как видно из ($\Pi_{n2}(G)$.HR1), многогранник $\Pi_{n2}(G)$ представляет собой сечение гиперкуба (4.89) гиперплоскостью (4.81).

На основании теоремы 4.7 сформулируем теорему о несводимом H-представлении $\Pi_{n2}(G)$.

Теорема 4.12. *($\Pi_{n2}(G)$.HR1) - сводимое H-представление многогранника $\Pi_{n2}(G)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие* (4.76).

В случае выполнения условия (4.76) *имеем:*

- *если*

$$n_1 = 1, \tag{4.91}$$

($\Pi_{n2}(G)$.IHR) имеет вид (4.81), (4.90)*;*

- *если*

$$n_k = 1, \tag{4.92}$$

то ($\Pi_{n2}(G)$.IHR) имеет вид (4.36), (4.81).

Если условие (4.76) *не выполнено, представления (*$\Pi_{n2}(G)$*.IHR) и (*$\Pi_{n2}(G)$*.HR1) совпадают.*

<u>Критерий смежности вершин $\Pi_{n2}(G)$</u>

Смежные вершины многогранника $\Pi_{n2}(G)$ к точке $x \in E_{n2}(G)$ формируются из нее единственной $e_1 \leftrightarrow e_2$-транспозицией ее координат.

<u>Степень регулярности вершин $\Pi_{n2}(G)$</u>:

$$\mathcal{R} = n_1 n_2. \tag{4.93}$$

Как видно из (4.93), $\mathcal{R}$ изменяется в пределах:

$$n - 1 \leq \mathcal{R} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \frac{n^2}{4}, \tag{4.94}$$

достигая минимума и максимума при выполнении условий (4.76), (4.77) соответственно.

Замечание 4.6. Формула (4.94) позволяет выделить еще один класс простых многогранников в классе $\Pi_{nk}(G)$ - это специальные многогранники перестановок, удовлетворяющие условию (4.76). Как будет показано ниже, они представляют собой $n-1$-симплексы.

<u>$E_{n2}(G)$ - двухуровневое множество</u>:

$$m(E_{n2}(G)) = 2.$$

Применяя утверждение 4.2 к рассматриваемому случаю (4.71), получаем, что множество $E_{n2}(G)$ - двухуровневое по каждой координате - $m'(E_{n2}(G)) = 2$. При этом семейство гиперплоскостей (1.44) в разложении (1.47)-(1.45) имеет вид:

$$H^{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = e_i\},\ i \in J_2,\ j \in J_n, \tag{4.95}$$

а множества (4.29), образующиеся в проекции $E_{n2}(G)$ на плоскости (4.95), представляют собой либо специальные $\mathcal{C}$-множества перестановок размерности на единицу меньше, либо одноточечные множества: $\forall\, j \in J_n$

$$E^{'1j} = E_{n-1,k_1}(\{e^{n_1-1}, e^{n_2}\}),\ E^{'2j} = E_{n-1,k_2}(\{e^{n_1}, e^{n_2-1}\}), k_1, k_2 \in \{0,1\}.$$

С другой стороны, исходя из (4.89), множество $\mathbf{H}$ гиперграней $\Pi_{n2}(G)$ является подмножеством $2n$ гиперграней гиперкуба $[e_1, e_2]^n$, т.е. подмножеством семейства (4.95):

$$\mathbf{H} \subseteq \{H_{ij}\}_{i \in J_2,\, j \in J_n}.$$

Отсюда следует, что все гиперграни $\Pi_{n2}(G)$ параллельны координатным гиперплоскостям, т.е. $E_{n2}(G)$ - двухуровневое в направлении нормали к каждой своей гиперграни, а значит, в целом - двухуровневое множество.

Центрально симметричные E_{n2}, Π_{n2}

Поскольку рассматривается случай $k = 2$, условия (4.46), (4.45) симметрии E_{n2}, Π_{n2} сводятся к одному:

$$n_1 = n_2 = \frac{n}{2}. \tag{4.96}$$

Отсюда видно, что только для четных n существуют центрально симметричные специальные $\mathcal{C}$-множества и многогранники перестановок, соответственно, размерность этих многогранников будет нечетной.

Итак, имеет место следующее утверждение:

Лемма 4.2. *Множество $E_{n2}(G)$ и многогранник $\Pi_{n2}(G)$ симметричны тогда и только тогда, когда размерность $\Pi_{n2}(G)$ - нечетная и выполнено условие* (4.96).

$\mathcal{C}$-множество $(0-1)$-перестановок

Рассмотрим множество $B_n(m)$ n-мерных $(0-1)$-векторов, сумма координат которых равна $m \in \mathbb{Z}_+$:

$$B_n(m) = \left\{x \in B_n : \ x^T\mathbf{e} = m\right\}. \tag{4.97}$$

Нетрудно видеть, что на множестве B_n параметр m изменяется в пределах

$$m \in J_n^0, \tag{4.98}$$

при этом предельные значения $m = 0$ и $m = n$ соответствуют вырожденным в точку множествам семейства (4.97), а именно

$$B_n(0) = \mathbf{0},\ B_n(n) = \mathbf{e}.$$

При исследовании множеств данного класса эти предельные случаи будем исключать, полагая что

$$m \in J_{n-1}. \tag{4.99}$$

Нетрудно видеть, что все элементы $B_n\,(m)$ содержат ровно m единичных координат, остальные $n - m$ координат – нули, а порядок следования элементов значения не имеет. Кроме того, в силу условия (4.99), каждая точка $B_n\,(m)$ будет иметь как нулевые, так и единичные координаты, а само это множество будет относиться к классу специальных $\mathcal{C}$-множеств перестановок:

$$B_n\,(m) = E_{n2}(G). \tag{4.100}$$

Индуцирующее $B_n\,(m)$ мультимножество

$$G = \left\{0^{n-m}, 1^m\right\} - \tag{4.101}$$

булевое, поэтому будем называть $B_n\,(m)$ множеством евклидовых конфигураций $(0-1)$-перестановок ($\mathcal{C}$-множеством булевых перестановок, the Boolean $\mathcal{C}$-set).

Выпуклая оболочка множества $B_n\,(m)$ называется гиперсимплексом (a hypersimpex) [56] и обозначается:

$$\Delta_{n,m} = convB_n\,(m)\,. \tag{4.102}$$

Выбор такого названия вызван тем, что гиперсимплекс обобщает понятие единичного $n-1$-симплекса

$$\Delta_{n,1} = \Delta_n = \{\mathbf{0} \le x \le \mathbf{e} :\ x^T\mathbf{e} = 1\}, \tag{4.103}$$

образуемого в сечении единичного гиперкуба $[\mathbf{0}, \mathbf{e}]$ гиперплоскостью $x^T\mathbf{e} = 1$, на случай его сечения произвольной гиперплоскостью вида $x^T\mathbf{e} = m$, где m удовлетворяет условию (4.98):

$$\Delta_{n,m} = \{\mathbf{0} \le x \le \mathbf{e} :\ x^T\mathbf{e} = m\}.$$

С учетом (4.100), (4.101), переформулируем приведенные в п. 4.3 свойства $E_{n2}(G)$, $\Pi_{n2}(G)$ для множества $B_n\,(m)$ и многогранника $\Delta_{n,m}$, осуществляя замену:

$$e_1 \to 0,\ e_2 \to 1,\ n_1 \to n-m,\ n_2 \to m. \tag{4.104}$$

В результате имеем:

<u>Мощность $B_n\,(m)$</u>:

$$|B_n\,(m)| = C_n^m, \tag{4.105}$$

а пределы ее изменения:

$$n \le |B_n(m)| \le C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Размерность $\Delta_{n,m}$:

$$\dim\ \Delta_{n,m} = n - 1.$$

Вершинная расположенность $B_n(m)$:

$$vert\ \Delta_{n,m} = B_n(m).$$

$B_n(m)$ - сферически расположенное и лежит в плоскости

Для $B_n(m)$ формулы (4.80) упрощаются до:

$$S_j = m,\ j \in \mathbb{N}. \tag{4.106}$$

Подставляя формулу (4.101) в (4.81)-(4.88), получаем:

- $\Delta = 1$;
- $B_n(m)$ лежит в гиперплоскости:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = m; \tag{4.107}$$

- $B_n(m)$ вписано в семейство (4.53) гиперсфер с центром точке **a** и радиусом:

$$r(a) = \sqrt{m - 2m \cdot a + n \cdot a^2}, \tag{4.108}$$

где $a \in \mathbb{R}^1$ - параметр.

Параметры гиперсфер $S^{\min}$, S^0

В семействе (4.107), (4.108) сфера $S^{\min}$ определяется параметрами:

$$a^{\min} = \frac{m}{n},\ r^{\min} = \sqrt{\frac{m\,(n-m)}{n}},$$

а сфера S^0 имеет радиус $r^0 = \sqrt{m}$.

$B_n\,(m)$ - полиэдрально-сферическое множество:

$$B_n\,(m) = S_{r(a)}(\mathbf{a}) \cap \Delta_{n,m},$$

где $S_{r(a)}(\mathbf{a})$ - произвольная гиперсфера семейства (4.107), (4.108).

Несводимое H-представление $\Delta_{n,m}$

Сформулируем следствие из теоремы 4.12 о несводимом H-представлении $\Delta_{n,m}$ (далее ($\underline{\Delta_{n,m}.\mathrm{IHR}}$)) для рассматриваемого индуцирующего мультимножества (4.101).

Следствие 4.7. *Если условие* (4.76) *выполнено, тогда:*

1. *При выполнении*

$$1 < m < n, \tag{4.109}$$

представление ($\Delta_{n,m}$.IHR) имеет вид (4.107),

$$0 \leq x_i \leq 1,\ i \in J_n; \tag{4.110}$$

2. *Если* (4.109) *не выполнено и при этом $m = 1$, представление ($\Delta_{n,1}$.IHR) имеет вид* (4.107),

$$x_i \geq 0,\ i \in J_n; \tag{4.111}$$

3. *Если* (4.109) *не выполнено и в то же время*

$$m = n - 1, \tag{4.112}$$

то H-представление ($\Delta_{n,n-1}$.IHR) имеет форму (4.107),

$$x_i \leq 1,\ i \in J_n. \tag{4.113}$$

Случай 2 в этом следствии соответствует единичному $n-1$-симплексу $\Delta_{n,1}$. Случай 3 соответствует еще одному $n-1$-симплексу среди многогранников $(0-1)$-перестановок - $\Delta_{n,n-1}$.

В целом, многогранники семейства $\{\Delta_{n,m}\}_m$ представляют собой сечения единичного гиперкуба плоскостью (4.107) и их несводимые H-представления могут быть представлены в форме (4.103) для всех указанных случаев, а именно:

$$\Delta_{n,1} = \{x \geq \mathbf{0} : \ x^T \mathbf{e} = 1\};$$

$$\Delta_{n,n-1} = \{x \leq \mathbf{e} : \ x^T \mathbf{e} = n - 1\};$$

$$\Delta_{n,m} = \{\mathbf{0} \leq x \leq \mathbf{e} : \ x^T \mathbf{e} = m\}, \text{ если } \ 1 < m < n.$$

Критерий смежности вершин $\Delta_{n,m}$

Все смежные вершины к произвольной точке $B_n\,(m)$ формируются из нее единственной $(0-1)$-транспозицией.

Степень регулярности вершин $\Delta_{n,m}$:

$$\mathcal{R} = m\,(n-m)\,,$$

согласно (4.93), (4.104).

При этом $\mathcal{R}$ изменяется в пределах диапазона (4.94) при увеличении значения $\min\{m, n-m\}$ от 1 до $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Замечание 4.7. Нижняя граница - $\mathcal{R} = n - 1$ - достигается только на $\Delta_{n,1}$ и $\Delta_{n,n-1}$, т.е. на единичном $n-1$-симплексе, а также на $n-1$-симплексе, индуцированном мультимножеством $\{0, 1^{n-1}\}$.

$B_n\,(m)$ - двухуровневое множество:

$$m(B_n\,(m)) = 2.$$

$B_n(m)$ - двухуровневое как частный случай двухуровневого специального множества перестановок.

Разложения $B_n(m)$ по параллельным плоскостям

В силу (4.100), (4.101), имеет место разложение (1.47)-(1.45) множества $B_n(m)$. Оно представимо в виде: $\forall\, j \in J_n$

$$\begin{aligned} &B_n(m) = E^{0j} \cup E^{1j},\ E^{ij} = \Pi^{ij} \cap B_n(m), \\ &\Pi^{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x_j = i\},\ i = 0, 1. \end{aligned} \tag{4.114}$$

При этом множества (4.29), образованные в проекциях $B_n(m)$ на плоскости (1.45), принадлежат этому же классу, а именно: $\forall j \in J_n$

$$\begin{aligned} E'^{0j} &= B_{n-1}(\{0^{n-m-1}, 1^m\}), \\ E'^{1j} &= B_{n-1}(\{0^{n-m}, 1^{m-1}\}). \end{aligned}$$

Формула (4.114) задает одновременно разложение множества $B_n(m)$ по координатам и в направлении гиперграней $\Delta_{n,m}$.

Центрально симметричные $B_n(m)$, $\Delta_{n,m}$ удовлетворяют условию:

$$n \text{ - четное, } m = \frac{n}{2}. \tag{4.115}$$

Заметим, что эти же $\mathcal{C}$-множества $(0-1)$-перестановок, которые удовлетворяют условию (4.115), являются подклассом $\mathcal{C}$-множеств $(0-1)$-перестановок, на которых $\mathcal{R}$ достигает верхней границы $\frac{n^2}{4}$.

4.4 $\mathcal{C}$-множество перестановок $E'_{n3}(G)$

Рассмотрим еще один подкласс класса общих $\mathcal{C}$-множеств перестановок, образующийся из специального $\mathcal{C}$-множества перестановок добавлением в индуцирующее его мультимножество одного промежуточного элемента.

Итак, рассмотрим мультимножество:

$$G = \{e_1^{n_1}, e_2, e_3^{n_3}\} = \{e_1^{n_1}, e_2, e_3^{n-n_1-1}\} \tag{4.116}$$

и общее множество $\mathcal{C}$-конфигураций перестановок, индуцируемое им.

Чтобы выделить данное $\mathcal{C}$-множество из класса $E_{nk}(G)$, будем использовать специальное обозначение - $E'_{n3}(G)$, а для соответствующего общего многогранника перестановок -

$$\Pi'_{n3}(G) = conv\, E'_{n3}(G).$$

Заметим, что множества данного класса определены для $n \geq 3$, при этом при $n = 3$ это будет просто $\mathcal{C}$-множество 3-перестановок без повторений - $E'_{33}(G) = E_3(G)$, поскольку $S(G) = G$. В остальных же случаях, т.е. при $n > 3$, - это будет $\mathcal{C}$-множество перестановок с повторениями.

Перечислим некоторые из свойств множества $E'_{n3}(G)$ и многогранника $\Pi'_{n3}(G)$.

<u>**Мощность** $E'_{n3}(G)$</u>

Утверждение 4.3. *Мощность* $E'_{n3}(G)$ *определяется по формуле:*

$$|E'_{n3}(G)| = C_n^{n_1}(n - n_1).$$

В самом деле, в результате подстановки первичной спецификации $[G] = (n_1, 1, n - n_1 - 1)$ мультимножества G вида (4.116) в формулу (4.3) имеем:

$$|E'_{n3}(G)| = \frac{n!}{n_1!(n-n_1-1)!} = \frac{n!(n-n_1)}{n_1!(n-n_1)!} = C_n^{n_1}(n-n_1).$$

Размерность $\Pi'_{n3}(G)$:

$$\dim\ \Pi'_{n3}(G) = n - 1.$$

Степень регулярности вершин $\Pi'_{n3}(G)$

Утверждение 4.4. *Многогранник $\Pi'_{n3}(G)$ - простой.*

Действительно, в соответствии с (4.32), степень регулярности вершины в данном случае будет равна

$$\mathcal{R} = n_1n_2 + n_2n_3 = n_1 + n - n_1 - 1 = n - 1.$$

А поскольку размерность $\Pi'_{n3}(G)$ также равна $n-1$, этот многогранник простой.

Множество $E'_{n3}(G)$ лежит в гиперплоскости:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n_1 \cdot e_1 + e_2 + n_3 \cdot e_3. \tag{4.117}$$

<u>Несводимое Н-представление $\Pi'_{n3}(G)$</u>

Как уже отмечалось, множество $E'_{n3}(G)$ определено для $n \geq 3$ и только при $n = 3$ в G отсутствуют кратные элементы и H-представление (4.34), (4.35) будет несводимым.

Введем обозначение (<u>$\Pi'_{n3}(G)$.IHR</u>) для несводимого H-представления многогранника $\Pi'_{n3}(G)$ и формализуем его в следующем следствии из теоремы 4.12.

Следствие 4.8. *($\Pi'_{n3}(G)$.IHR) имеет вид* (4.117)*:*

$$e_1 \leq x_i \leq e_3, \ i \in J_n. \tag{4.118}$$

Как видно из (4.118), многогранник $\Pi'_{n3}(G)$, как и $\Pi_{n2}(G)$, представляет собой сечение гиперкуба плоскостью (4.117).

<u>$E'_{n3}(G)$ - трехуровневое множество</u>:

$$m(E'_{n3}(G)) = 3.$$

Согласно утверждению 4.2, множество $E'_{n3}(G)$ - трехуровневое по каждой координате - $m'(E'_{n3}(G)) = 2$. При этом имеет место разложение (1.45)-(1.47), в котором семейство гиперплоскостей (1.44) имеет форму:

$$H^{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = e_i\}, \ i \in J_3, \ j \in J_n, \tag{4.119}$$

а условие (4.29), определяющее вспомогательные множества, образованные в проекции $E'_{n3}(G)$ на плоскости (4.119), обращается в следующее: $\forall\, j \in J_n$

$$
\begin{aligned}
&E^{'1j} = E_{n-1,k_1}(\{e_1^{n_1-1}, e_2, e_3^{n_3}\}), k_1 \in \{2,3\},\\
&E^{'2j} = E_{n-1,2}(\{e_1^{n_1}, e_3^{n_3}\}),\\
&E^{'3j} = E_{n-1,k_3}(\{e_1^{n_1}, e_2, e_3^{n_3-1}\}), k_3 \in \{2,3\}.
\end{aligned}
\tag{4.120}
$$

Как видно, множества (4.120) принадлежат классу $E'_{n3}(G)$ или специальным множествам перестановок размерности на единицу ниже исходного множества.

Помимо того, что $E'_{n3}(G)$ - трехуровневое множество по координатам, для множества $\mathbf{H}$ гиперграней $\Pi'_{n3}(G)$ выполнено включение

$$\mathbf{H} \subseteq \{\{x_i = e_i\}_{i=1,3}\}_{j \in J_n}.$$

Это означает, что все $\Pi'_{n3}(G)$-гиперграни параллельны координатным плоскостям. Следовательно, (4.119) определяет разложение $E'_{n3}(G)$ в направлении гиперграней $\Pi'_{n3}(G)$. Таким образом, $m(E'_{n3}(G)) = m'(E'_{n3}(G)) = 3$, т.е. $E'_{n3}(G)$ является трехуровневым множеством.

Центрально симметричные $E'_{n3}(G)$, $\Pi'_{n3}(G)$

Объединив условия (4.44), (4.46) с (4.116), получаем, что $E'_{n3}(G)$ и, соответственно, $\Pi'_{n3}(G)$ - центрально симметричны тогда и только тогда, когда

$$e_2 = \frac{e_1 + e_3}{2},\ n_1 = n_3. \tag{4.121}$$

Таким образом, для того, чтобы (4.121) выполнялось, необходимо, чтобы n должно быть нечетным. А это означает, что симметричные многогранники класса $\Pi'_{n3}(G)$ имеют нечетную размерность.

Сравнивая H-представления ($\Pi_{n2}(G)$.IHR) и ($\Pi'_{n3}(G)$.IHR), видно, что оба многогранника $\Pi_{n2}(G)$ и $\Pi'_{n3}(G)$ представляют собой сечения гиперкуба плоскостью. При этом, как было показано, множества их вершин обладают во многом отличными свойствами. Это различие комбинаторной структуры образованных $\mathcal{C}$-множеств - $E_{n2}(G)$ и $E'_{n3}(G)$ - объясняется тем, что для многогранника $\Pi_{n2}(G)$ сечение плоскостью (4.4) осуществляется в точности через вершины гиперкуба, в результате чего новых вершин не возникает, а $\Pi'_{n3}(G)$ образуется сечением по внутренним точкам ребер этого гиперкуба, таким образом, возникают новые вершины сечения и именно они образуют $E'_{n3}(G)$.

4.5 Некоторые классы евклидовых конфигураций перестановок

Рассмотренные в данной главе $\mathcal{C}$-множества состоят из е-конфигураций перестановок. Все эти множества построены по общему принципу и отличаются по сути индуцирующими мультимножествами. Между тем, как было показано выше в данной главе, свойства этих $\mathcal{C}$-множеств заметно разнятся. Именно поэтому мы выделили их в отдельные классы и сейчас введем несколько видов евклидовых комбинаторных конфигураций, им соответствующих.

В п. 4.3 было рассмотрено специальное $\mathcal{C}$-множество перестановок

$E_{n2}(G)$. Его отличительной особенностью является то, что оно состоит из $\mathcal{C}$-конфигураций перестановок, образующим множеством которых является двухэлементное множество $\mathcal{A}$. Точно так же можно рассмотреть множество других $\mathcal{C}$-конфигураций, например, е-конфигурации размещений, порожденных таким $\mathcal{A}$. Предположительно свойства образованных в результате объединения таких $\mathcal{C}$-конфигураций множеств будут существенно отличаться от свойств $\mathcal{C}$-множеств, порожденных $\mathcal{A}$, таких, что $|\mathcal{A}| > 2$. Это было продемонстрировано на примере общего и специального $\mathcal{C}$-множеств перестановок.

Множество E конфигураций вида (3.41), индуцированных из мультимножества вида

$$G = \{e_1^{\eta_1}, e_2^{\eta_2}\}\,, \tag{4.122}$$

будем называть специальным $\mathcal{C}$-множеством, а его элементы - специальными $\mathcal{C}$-конфигурациями.

В зависимости от того, какие конкретно конфигурации объединяет специальное $\mathcal{C}$-множество, можно осуществить дальнейшую классификацию множеств этого класса. Так, например, если E объединяет все $\mathcal{C}$-конфигурации из одного мультимножества, это будет специальное $\mathcal{C}$-множество перестановок, рассмотренное нами в п. 4.3, элементы которого в дальнейшем будем называть специальными $\mathcal{C}$-конфигурациями перестановок (special permutation $\mathcal{C}$-configuration). Если E состоит из е-конфигураций размещений, для него будем использовать термин специальное $\mathcal{C}$-множество размещений, а для его элементов - специальные е-конфигурации размещений (см. п. 5.5).

Учитывая, что признаком различия $\mathcal{C}$-конфигураций перестановок от конфигураций размещений является выполнение условия (3.45), можно сказать, что множество E конфигураций вида (3.41), индуцированных из мультимножества G вида:

- (4.72) состоит из специальных $\mathcal{C}$-конфигураций перестановок и образует специальное $\mathcal{C}$-множество перестановок;
- (4.122), (3.47) - это множество специальных $\mathcal{C}$-конфигураций размещений, а его элементами являются специальные $\mathcal{C}$-конфигурации размещений.

Еще три вида евклидовых комбинаторных конфигураций введем в зависимости от конкретного вида образующего множества:

а) если $\mathcal{C}$-множество E порождено образующим множеством:

$$\mathcal{A} = \{0, 1\} \tag{4.123}$$

будем называть его 0, 1-множеством евклидовых комбинаторных конфигураций (булевым $\mathcal{C}$-множеством, the Boolean $\mathcal{C}$-set);

б) если $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$\mathcal{A} = \{-1, 1\}, \tag{4.124}$$

то образованное множество E будем называть $-1, 1$-множеством евклидовых комбинаторных конфигураций (бинарным $\mathcal{C}$-множеством, the binary $\mathcal{C}$-set);

в) если E порождается множеством:

$$\mathcal{A} = \{-1, 0, 1\}, \tag{4.125}$$

в таком случае это множество будем называть $-1, 0, 1$-множеством евклидовых комбинаторных конфигураций (троичным $\mathcal{C}$-множеством, the ternary $\mathcal{C}$-set);

Элементы E, в зависимости от вида составляющих его е-конфигураций, будут булевыми е-конфигурациями перестановок, бинарными е-конфигурациями размещений и т.п. в случае (4.123); бинарными конфигурациями перестановок, конфигурациями $-1, 1$-размещений при выполнении (4.124); троичными конфигурациями перестановок или размещений в случае (4.125).

Так, например, обо множестве $B_n(m)$ можно сказать, что оно состоит из булевых векторов размерности n, но можно сказать и более точно - элементами $B_n(m)$ являются е-конфигурации $(0-1)$ перестановок, тем самым подчеркивая природу данного $\mathcal{C}$-множества.

Что касается третьего из рассмотренных случаев, объединяя условия (4.116), (4.125), получим $G = \{(-1)^{n_1}, 0, 1^{n_3}\}$, а индуцированное им общее $\mathcal{C}$-множество перестановок E будет состоять из троичных е-конфигураций перестановок.

4.6 Общие простые многогранники перестановок

В заключение выделим простые многогранники в классе $\Pi_{nk}(G)$.

Заметим, что было уже выявлено три таких подкласса - это $n-1$-симплексы $\Delta_{n,1}$ и $\Delta_{n,n-1}$, многогранники перестановок $\Pi_n(G)$ и многогранники $\Pi'_{n3}(G)$.

Для того, чтобы перечислить все простые общие многогранники перестановок, можно воспользоваться одним из двух способов:

1. Выделить те многогранники, степень вершины которых удовлетворяет условию:
$$\mathcal{R} = n - 1.$$
С этой целью можно решить следующую целочисленную задачу:
$$\mathcal{R}(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \to \min$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n;$$
$$x_i \in \mathbb{N},\ i \in J_n;$$
$$x_i \leq x_{i+1},\ i \in J_{n-1}.$$
Количество различных решений этой задачи будет определять число простых многогранников $\Pi_{nk}(G)$, а ненулевые координаты решений - первичные спецификации индуцирующих их мультимножеств.

2. Перечислить все многогранники в классе $\Pi_{nk}(G)$, количество γ инцидентных граней к каждой вершине которых совпадает с размерностью многогранника, т.е. $\gamma = n - 1$.

Этот способ был применен в [99] и получено следующее решение задачи:

Теорема 4.13. *Многогранник $\Pi_{nk}(G)$ простой тогда и только тогда, когда:*

- *случае, если $k = 2$, то $1 \in \{n_1, ..., n_k\}$;*
- *если $k > 2$, то*
$$n_i = 1,\ i \in J_{k-1} \backslash \{1\}. \tag{4.126}$$

Среди перечисленных выше простых многогранников, первому условию удовлетворяют $\Delta_{n,1}$ и $\Delta_{n,n-1}$ и только они, второму - $\Pi_n(G)$ и многогранники $\Pi'_{n3}(G)$. Помимо этого, условие (4.126) выполняется еще для целого класса многогранников $\Pi'_{n3}(G)$, первичные спецификации индуцирующих множеств которых содержат единичные элементы, за исключением максимум первого и последнего.

Объединим эти оба условия в одно и переформулируем теорему 4.13 следующим образом:

Теорема 4.14. *Общий многогранник перестановок $\Pi_{nk}(G)$ простой тогда и только тогда, когда первичная спецификация индуцирующего его мультимножества удовлетворяет условию:*

$$n_i \cdot n_{i+1} = \max\{n_i, n_{i+1}\},\ i \in J_{k-1}.$$

4.7 Комбинаторно эквивалентные общие многогранники перестановок

Теорема 4.15. *Два общих многогранника перестановок одинаковой размерности комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда первичные спецификации индуцирующих их мультимножеств после упорядочения по неубыванию их элементов, совпадают с точностью до их обратного переупорядочивания:*

$$\Pi_{nk}(G) \cong \Pi_{nk}(G') \Leftrightarrow [G] = [G'] \ \text{ или } \ [G] = [G''], \tag{4.127}$$

где $G'' = \{g'_{n-i+1}\}_{i \in J_n}$.

Доказательство. Пусть G удовлетворяет условию (3.65), а $G' = \{g'_i\}_{i \in J_n}$ такое, что

$$g'_i \leq g'_{i+1},\ i \in J_{n-1}.$$

Рассмотрим два случая:

- Случай 4.7.1 - первичные спецификации G, G' совпадают: $[G] = [G']$;
- Случай 4.7.2 - $[G]$, $[G']$ совпадают после обратного переупорядочивания элементов, т.е. $[G] = [G'']$.

В Случае 4.7.1 установим биекцию между вершинами $\Pi_{nk}(G)$ и $\Pi_{nk}(G')$, иначе говоря между точками $E_{nk}(G)$ и $E_{nk}(G')$, следующим образом:

$$\forall\, x \in E_{nk}(G) : x = (g_{i_1}, ..., g_{i_n}) \to x' = (g'_{i_1}, ..., g'_{i_n}) \in E_{nk}(G'). \tag{4.128}$$

Согласно критерию смежности вершин общего многогранника перестановок, для каждой пары точек $x \in E_{nk}(G)$ и $x' \in E_{nk}(G')$, удовлетворяющих условию (4.128), такое же взаимно-однозначное соответствие можно установить и для смежных к ним вершин, т.е. между элементами их окрестностей $N_{\Pi_{nk}(G)}(x)$ и $N_{\Pi_{nk}(G')}(G')(x')$:

$$\forall\, x = (g_{i_1}, ..., g_{i_n}) \in E_{nk}(G),\ y \in N_{\Pi_{nk}(G)}(x) :\ y = (g_{j_1}, ..., g_{j_n}) \leftrightarrow$$
$$x' = (g'_{i_1}, ..., g'_{i_n}) \in E_{nk}(G'),\ y' \in N_{\Pi_{nk}(G')}(x') :\ y' = (g'_{j_1}, ..., g'_{j_n}).$$

Таким образом, условие (1.67) выполнено, т.е. графы многогранников $\Pi_{nk}(G)$, $\Pi_{nk}(G')$ изоморфны, а следовательно, сами эти многогранники комбинаторно эквивалентны.

В Случае 4.7.2 биекцию осуществим следующим образом:

$$\begin{aligned} &\forall\, x \in E_{nk}(G): \\ &\qquad x = (g_{i_1}, ..., g_{i_n}) \to x' = (g'_{n-i_1+1}, ..., g'_{n-i_n+1}) \in E_{nk}(G'). \end{aligned} \tag{4.129}$$

Формула (4.129) позволяет осуществить переход от Случая 4.7.2 к рассмотрению Случая 4.7.1, откуда следует комбинаторная эквивалентность $\Pi_{nk}(G)$ и $\Pi_{nk}(G')$. □

Замечание 4.8. Из теоремы 4.15 следует, что обратная нумерация элементов первичной спецификации индуцирующего мультимножества не меняет комбинаторной структуры общих $\mathcal{C}$-множества и многогранника перестановок.

Поэтому, не ограничивая общности, будем далее считать, что

$$\exists\; i \in J_{[\frac{n+1}{2}]}:\; n_j \geq n_{k-j+1},\; j \in J_i;\, n_i > n_{k-i+1}, \tag{4.130}$$

где $n_0 = 0$.

Как видно, количество всевозможных комбинаторно неэквивалентных многогранников перестановок заданной размерности будет определяться числом различных первичных спецификаций вида (4.130). Определение этого числа - это задача, заслуживающая отдельного рассмотрения.

4.8 Графическая иллюстрация $E_{nk}(G)$, $\Pi_{nk}(G)$, $n = 3, 4$

Приведем классификацию общих множеств и многогранников перестановок размерности 2 и 3 и дадим им геометрическую интерпретацию в виде проекций на плоскость $x_n = 0$ при $n = 3, 4$.

Пример 4.2. Пусть $n = 3$. Согласно замечанию 4.8 и предположению, что $k \geq 2$, имеется два возможных варианта первичных спецификаций:

$$[G_1] = \left(1^3\right), \ [G_2] = (2, 1)\,. \tag{4.131}$$

В первом случае $k = n = 3$, т.е. имеем дело с множеством перестановок $E = E_3\left(G_1\right)$. Многогранник $P = \Pi_3\left(G_1\right)$ представляет собой шестиугольник, проекция на $x_3 = 0$ которого показана на Рис. 4.1.

Во втором случае $k = 2$, т.е. рассматривается специальное множество перестановок $E = E_{32}\left(G_2\right)$, а его многогранник $P = \Pi_{32}\left(G_2\right)$ представляет собой треугольник (2-симплекс), булевый вариант которых - $B_3(1)$, $\Delta_{3,1}$ - в проекции на $x_3 = 0$ показан на Рис. 4.2.

Пример 4.3. Перейдем к случаю $n = 4$, которому соответствуют $3-$х-мерные многогранники перестановок. Здесь возможны следующие варианты первичных спецификаций:

$$\begin{gathered}[G_1] = \left(1^4\right), \ [G_2] = \left(2, 1^2\right), \ [G_3] = (1, 2, 1)\,, \\ [G_4] = \left(2^2\right), \ \ [G_5] = (3, 1)\,. \end{gathered} \tag{4.132}$$

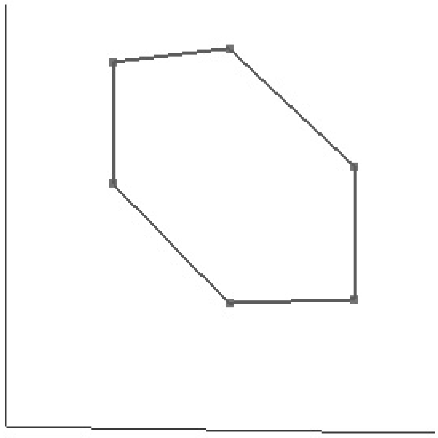


Рис. 4.1: Проекция E_3, Π_3

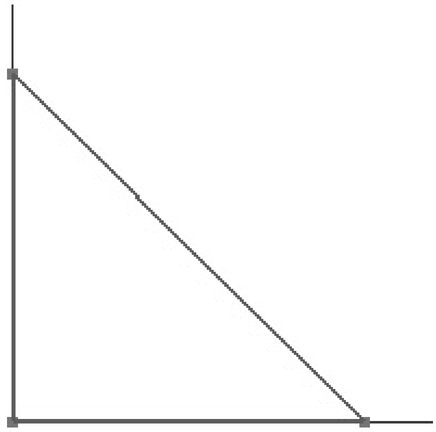


Рис. 4.2: Проекция $B_3(1), \Delta_{3,1}$

Введем обозначения: $E^{'i} = E_{4k_i}(G_i)$, $k_i = |S(G_i)|$, $P^{'i} = convE^{'i}$, $i \in J_5$. Тогда $k_1 = 4 = n$, $k_2 = k_3 = 3$, $k_4 = k_5 = 2$, т.е. $E^{'1}$ – $\mathcal{C}$-множество перестановок, $E^{'4}$, $E^{'5}$ – специальные $\mathcal{C}$-множества перестановок, $E^{'3}$ относится к классу $E'_{n3}(G)$, а $E^{'2}$ – просто общее $\mathcal{C}$-множество перестановок. Если $E^{'4}$, $E^{'5}$ - булевые, то $P^{'4}$, $P^{'5}$ представляют собой гиперсимплекс $\Delta_{3,2}$ и единичный 3-симплекс $\Delta_{3,1}$ соответственно. Их проекции $E^i = \mathrm{Pr}_\alpha E^{'i}$ на плоскость $\alpha: \ x_4 = 0$, наряду с проекциями соответствующих многогранников $P^i = \mathrm{Pr}_\alpha P^{'i}$ $(i \in J_5)$, показаны на Рисунках 4.3-4.7.

Как видно, P^1 представляет собой усечённый додекаэдр, P^2 – усечённый тетраэдр, P^3 – кубооктаэдр, P^4 – октаэдр, P^5 – симплекс (3-симплекс) (см. Приложение А). При этом степень регулярности вершин многогранников P^1, P^2, P^5 – три, т.е. совпадает с их размерностью, соответственно, эти три многогранника простые. В то же время, степень регулярности вершин многогранников P^3, P^4 – четыре, т.е. они к простым не относятся.

Замечание 4.9. Заметим, что, поскольку в качестве образующего множеством для построенных $\mathcal{C}$-множеств выбрано множество равноудаленных

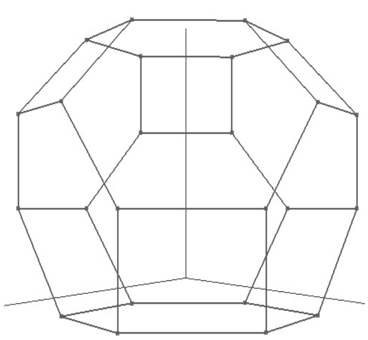


Рис. 4.3: E^1, P^1

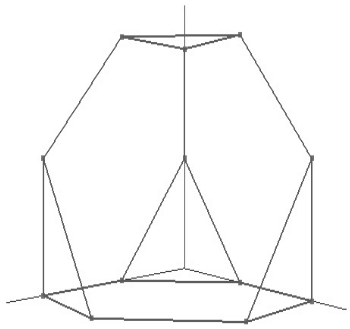


Рис. 4.4: E^2, P^2

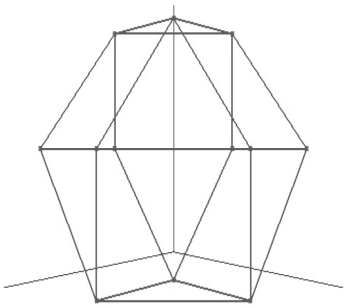


Рис. 4.5: E^3, P^3

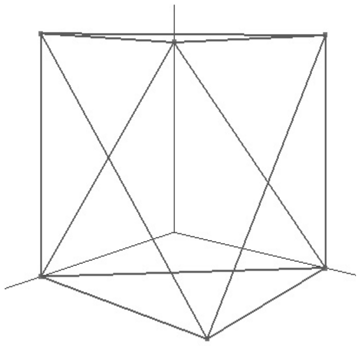


Рис. 4.6: E^4, P^4

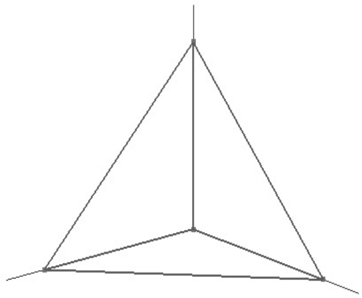


Рис. 4.7: E^5, P^5

чисел, в пространстве $\mathbb{R}^4$ все комбинаторно эквивалентные грани являются правильными многоугольниками, но после проектирования на плоскость $x_4 = 0$ это свойство нарушается, поэтому в данной проекции образуется додекаэдр, но не правильный додекаэдр, кубооктаэдр, не являющийся правильным кубооктаэдром, и т.п. Если бы строилась ортогональная проекция на плоскость многогранников, образовались бы в точности соответствующие Платоновы и Архимедовы тела (см. Приложение А).

Глава 5

Множества евклидовых конфигураций размещений

Глава посвящена описанию свойств множеств евклидовых конфигураций размещений или сокращенно $\mathcal{C}$-множеств размещений. При описании $\mathcal{C}$-множества и многогранника размещений без повторений использованы публикации [81, 127]. Общее $\mathcal{C}$-множество и общий многогранник размещений описаны, основываясь на работах [94, 95, 99, 100, 107, 132, 127]. Базой для изучения особенностей $\mathcal{C}$-множеств $(0-1)$-размещений и размещений с неограниченным повторениями послужили источники [6, 10, 31, 82, 138], а для соответствующего многогранника - [28, 83]. Построение несводимого H-представления общего многогранника размещений основано на работах [18, 99].

Особое внимание уделено разложениям множеств e-конфигураций размещений по семействам вершинно расположенных множеств, а также выделению подкласса вершинно расположенных общих $\mathcal{C}$-множеств размещений и построению их поверхностно-полиэдральных представлений.

5.1 Общее множество евклидовых конфигураций размещений

При изложении свойств $\mathcal{C}$-множеств размещений, будем следовать схеме, предложенной в гл. 4. А именно, сначала рассмотрим общее $\mathcal{C}$-множество размещений $E_{\eta k}(G)$, затем его частные случаи - $\mathcal{C}$-множества размещений без повторений $E_k^n(G)$, размещений с неограниченными повторениями $\overline{E}_k^n(G)$, а также специальное $\mathcal{C}$-множества размещений $E_{\eta 2}^n(G)$.

Эти множества е-конфигураций рассматриваются совместно их выпуклыми оболочками. Так выпуклая оболочка:

- общего множества $E_{\eta k}^n(G)$ евклидовых конфигураций размещений называется <u>общим многогранником размещений</u> (the general partial permutohedron, the multiset partial permutohedron):

$$\Pi_{\eta k}^n(G) = convE_{\eta k}^n(G);$$

- множества $E_k^n(G)$ евклидовых конфигураций размещений без повторений – <u>многогранником размещений без повторений</u> (многогранником размещений, the partial permutohedron):

$$\Pi_k^n(G) = convE_k^n(G);$$

- множества $\overline{E}_k^n(G)$ евклидовых конфигураций размещений с неограниченными повторениями – <u>многогранником размещений с неограниченными повторениями, the partial permutohedron with unbounded repeti-</u>

tions):

$$\overline{\Pi}_k^n(G) = conv\overline{E}_k^n(G).$$

Перед тем как перейти к детальному изложению свойств $E_{\eta k}^n(G)$, $\Pi_{\eta k}^n(G)$ напомним, что для множеств конфигураций размещений выполняется условие (3.47), соответственно, мощность индуцирующего мультимножества G варьируется в пределах:

$$n + 1 \leq \eta \leq n \cdot k. \tag{5.1}$$

Замечание 5.1. В отличие от общего множества перестановок, для $E_{\eta k}^n(G)$ не будем требовать выполнение условия (4.2), поскольку, если выполнено условие (5.1), то даже для $n = 1$ множество $E = E_{\eta k}^n(G)$ не вырождается в точку. Заметим, что условие $\eta \geq n + 1$ является необходимым для того, чтобы рассматриваемое множество E было множеством конфигураций размещений, а $\eta \leq n \cdot k$ - необходимое условие того, чтобы G было индуцирующим множеством для него. Поэтому далее будем полагать, что (5.1) выполнено.

Множества семейства $E_{\eta k}^n(G)$ охватывает широкий класс $\mathcal{C}$-множеств размещений, среди которых есть как вершинно, так и не вершинно расположенные, сферически- и эллипсоидально расположенные, содержащие как полиномиальное, так неполиномиальное по n число элементов. Большое разнообразие наблюдается и среди многогранников $\Pi_{\eta k}^n(G)$. Несводимые H-представления общих многогранников размещений могут содержать и полиномиальное и неполиномиальное по n количество ограничений.

Итак, рассмотрим некоторые свойства множества $E_{\eta k}^{n}\left(G\right)$ и многогранника $\Pi_{\eta k}^{n}\left(G\right)$, индуцируемыми мультимножеством G вида (1.5), (1.9):

Мощность $E_{\eta k}^{n}(G)$

В явном виде формулы мощности множества $E_{\eta k}^{n}(G)$ известны только для некоторых частных его случаев. Так, например, мощность:

- $\mathcal{C}$-множества $E_{k}^{n}(G)$ размещений без повторений можно найти по формуле:

$$\left|E_{k}^{n}\left(G\right)\right| = \frac{k!}{(k-n)!}; \tag{5.2}$$

- $\mathcal{C}$-множества $\overline{E}_{k}^{n}\left(G\right)$ размещений с неограниченными повторениями определяется следующим образом:

$$\left|\overline{E}_{k}^{n}\left(G\right)\right| = k^{n}; \tag{5.3}$$

- общего $\mathcal{C}$-множества $E_{n+1,k}^{n}(G)$ n-размещений, индуцируемых мультимножеством из $n+1$-го элемента:

$$\left|E_{n+1,k}^{n}(G)\right| = \frac{(n+1)!}{\eta_1! \cdot ... \cdot \eta_k!}. \tag{5.4}$$

Как видно из (5.1), $\mathcal{C}$-множества размещений без повторений и с неограниченными повторениями – это предельные случаи по η в классе $E_{\eta k}^{n}(G)$. Величины (5.2), (5.3) задают верхнюю и нижнюю границы величины $|E_{\eta k}^{n}\left(G\right)|$:

$$\frac{k!}{(k-n)!} \leq \left|E_{\eta k}^{n}\left(G\right)\right| \leq k^{n}.$$

Если выполнено условие $n + 1 < \eta < n \cdot k$, рассматривается $\mathcal{C}$-множество размещений с повторениями. Его мощность может быть найдена, основываясь на возможности его разложения по $\mathcal{C}$-множествам перестановок. С этой целью выделим в G все различные n-элементные подмножества и объединим их в семейство:

$$\mathbf{G} = \left\{\mathcal{G}^i\right\}_{i\in I}, \tag{5.5}$$

где $\mathcal{G}^i$ такие, что

$$\begin{aligned} &G = \bigcup_{i\in I} \mathcal{G}^i, \\ &\mathcal{G}^i \subset G, \ \left|\mathcal{G}^i\right| = n, \ \kappa_i = \left|S\left(\mathcal{G}^i\right)\right|, \ i \in I, \\ &\forall i, i' \in I \ i \neq i' \ \mathcal{G}^i \neq \mathcal{G}^j. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Лемма 5.1. *Множество $E^n_{\eta k}(G)$ раскладывается в семейство*

$$\left\{E_{n\kappa_i}\left(\mathcal{G}^i\right)\right\}_{i\in I} \tag{5.7}$$

из не более чем C^n_η общих $\mathcal{C}$-множеств n-перестановок:

$$E^n_{\eta k}(G) = \bigcup_{i\in I} E_{n\kappa_i}\left(\mathcal{G}^i\right), \tag{5.8}$$

где I, $\mathcal{G}^i$ удовлетворяют условию (5.6) *для всех $i \in I$.*

Действительно, каждое из мультимножеств семейства (5.5) индуцирует общее множество перестановок $E_{nk_i}\left(\mathcal{G}^i\right)$, являющееся подмножеством $E^n_{\eta k}(G)$. В совокупности же эти общие множества перестановок образуют в точности множество $E^n_{\eta k}(G)$. Их количество $|I|$ можно оценить сверху величиной C^n_η.

Следствие 5.1. *Для определения мощности $E^n_{\eta k}(G)$ справедлива формула:*

$$\left|E^n_{\eta k}(G)\right| = n! \sum_{\mathcal{G}^i \subset \mathbf{G}} \frac{1}{n^i_1! \cdot ... \cdot n^i_{\kappa_i}!}, \tag{5.9}$$

где

$$\left[\mathcal{G}^i\right] = \left(n^i_1, ..., n^i_{\kappa_i}\right),\ i \in I.$$

Доказательство. Согласно (5.6), различные мультимножества из семейства (5.5) индуцируют различные множества семейства (5.7), т.е. если $i, i' \in I$ такие, что

$$i \neq i' \ \Rightarrow E_{n\kappa_i}\left(\mathcal{G}^i\right) \cap E_{n\kappa_{i'}}\left(\mathcal{G}^{i'}\right) = \varnothing. \tag{5.10}$$

С учетом (5.8) и (5.10), мощность $E^n_{\eta k}(G)$ будет равна:

$$\left|E^n_{\eta k}(G)\right| = \sum_{\mathcal{G}^i \in \mathbf{G}} \left|E_{n\kappa_i}\left(\mathcal{G}^i\right)\right|. \tag{5.11}$$

Определим $\left|E_{n\kappa_i}\left(\mathcal{G}^i\right)\right|$ по формуле (4.3) и подставим результат в (5.11). В итоге получим искомую формулу (5.9). □

Критерий вершины $\Pi^n_{\eta k}(G)$

Теорема 5.1. *Точка $x \in E^n_{\eta k}(G)$ – вершина многогранника $\Pi^n_{\eta k}(G)$, тогда и только тогда, когда*

$$\exists\ s, r \in J^0_n,\ s + r = n, \tag{5.12}$$

такие, что координаты точки x образуются перестановками чисел:

$$g_1, g_2, ..., g_s, g_{\eta-r+1}, ..., g_\eta. \tag{5.13}$$

Критерий смежности вершин $\Pi_{\eta k}^n(G)$

Теорема 5.2. *Если $x \in vert\, \Pi_{\eta k}^n(G)$, то все смежные к ней вершины получают одним из двух способов:*

- *Перестановками в x двух компонент, равных*

$$g_i, g_{i+1} \ \left(g_i \neq g_{i+1},\ i \in J_{s-1} \cup J_{\eta-1} \backslash J_{\eta-r}\right), \tag{5.14}$$

- *Заменой компоненты g_s на $g_{\eta-r} \neq g_s$ либо $g_{\eta-r+1}$ на $g_{s+1} \neq g_{\eta-r+1}$,*

где s, r определяются из (5.12).

Замечание 5.2. Для $vert\,\Pi_{\eta k}^n(G)$ можно также получить разложение типа (5.8), рассматривая во множестве $\mathbf{G}$ вида (5.5) только те мультимножества, которые удовлетворяют условиям (5.12), (5.13). Пусть $\mathbf{G}' \subseteq \mathbf{G}$ - полученное таким образом множество.

Построим его, с целью чего введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &G'^s = \{g_i\}_{i \in J_s^0} \cup \{g_{\eta-i+1}\}_{i \in J_{n-s}^0},\ s \in J_n^0, \\ &k_s' = \left|S\left(G'^s\right)\right|,\ [G'^s] = (n_1'^s, ..., n_{k_s'}'^s). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Среди элементов

$$\overline{\mathbf{G}}' = \left\{G'^s\right\}_{s \in J_n^0},$$

вообще говоря, могут быть одинаковые мультимножества, т.е. $\overline{\mathbf{G}}'$ - мультимножество, элементами которого являются мультимножества (5.15), основу которого составляет искомое множество $\mathbf{G}'$:

$$\mathbf{G}' = S(\overline{\mathbf{G}}').$$

Еще один способ построения $\mathbf{G}'$ - объединить общие элементы $\mathbf{G}$ и $\overline{\mathbf{G}}'$, исходя их того, что $\mathbf{G}' = \mathbf{G} \cap \overline{\mathbf{G}}'$.

В любом случае $\overline{\mathbf{G}}'$ определяется некоторым множеством $I' \subseteq J_n^0$, таким, что:

$$\mathbf{G}' = \left\{ G'^{s} \right\}_{s \in I'} \subseteq \mathbf{G}. \tag{5.16}$$

Теперь для мультимножеств семейства $\mathbf{G}'$ выполнено условие, подобное (5.10) и имеющее вид: если

$$i, i' \in I' \colon i \neq i' \Rightarrow G'^{i} \neq G'^{i'},$$

поэтому формулы (5.8), (5.9) можно адаптировать к (5.15), в результате чего имеем:

$$vert\, \Pi_{\eta k}^{n}(G) = \mathop{\cup}_{i \in I'} E_{nk_i'}\left(G'^{i}\right). \tag{5.17}$$

Соответственно,

$$\left| vert\, \Pi_{\eta k}^{n}(G) \right| = n! \sum_{i \in I'} \frac{1}{n_1'^{i}! \cdot \ldots \cdot n_{k_i'}'^{i}!}. \tag{5.18}$$

Сформулируем условия, при которых $\mathbf{G}' = \overline{\mathbf{G}}'$ и, следовательно,

$$\overline{\mathbf{G}}' = \left\{G'^{s}\right\}_{s\in J_n^0}.$$

Это будет в случае, когда G'^{0}, G'^{n} - множества, соответственно,

$$n = |S(G'^{0})| = |S(G'^{n})|. \tag{5.19}$$

Если (5.19) выполнено, формула (5.18) приобретет упрощенный вид:

$$\left|vert\,\Pi_{\eta k}^{n}(G)\right| = n! \sum_{i\in J_n^0} 1 = n!\,(n+1) = (n+1)!. \tag{5.20}$$

<u>**Несводимое Н-представление** $\Pi_{\eta k}^{n}\left(G\right)$</u>

Теорема 5.3. *Общий многогранник размещений* $\Pi_{\eta k}^{n}\left(G\right)$ *задается системой неравенств:*

$$\sum_{j\in\omega} x_j \geq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_j,\ \omega \subseteq J_n; \tag{5.21}$$

$$\sum_{j\in\omega'} x_j \leq \sum_{j=1}^{|\omega'|} g_{\eta-j+1},\ \omega' \subseteq J_n. \tag{5.22}$$

H-представление (5.21), (5.22) (далее (<u>$\Pi_{\eta k}^{n}\left(G\right)$.HR</u>)) состоит из $2n$ союзов ограничений, соответствующих различным значениям $|\omega|$ или $|\omega'|$. Подобно $\Pi_{nk}\left(G\right)$, наличие кратных минимального или максимального элементов индуцирующего мультимножества G является необходимым и достаточным условием сводимости представления ($\Pi_{\eta k}^{n}\left(G\right)$.HR).

Теорема 5.4. *H-представление ($\Pi_{\eta k}^{n}\left(G\right)$.HR) сводимо тогда и только то-*

гда, когда минимальный и/или максимальный элемент G - кратный, т.е.

$$\eta_1 + \eta_k > 2. \tag{5.23}$$

Извлечение:

- *из* (5.21) *союзов с номерами*

$$i \in J = \overline{i^{\min}, \eta_1} \cup \overline{\eta - \eta_k, i^{\max}}, \tag{5.24}$$

где

$$i^{\min} = \min \left\{2, \eta - \eta_k\right\}, \; i^{\max} = \max \left\{\eta - 2, \eta_1\right\},$$

- *из* (5.22) - *союзов с номерами*

$$i' \in J' = \overline{i'^{\,\min}, \eta_k} \cup \overline{\eta - \eta_1, i'^{\,\max}}, \tag{5.25}$$

где

$$i'^{\,\min} = \min \left\{2, \eta - \eta_1\right\}, \; i'^{\,\max} = \max \left\{\eta - 2, \eta_k\right\},$$

обращает ($\Pi^n_{\eta k}(G).HR$) *в несводимую систему многогранника* $\Pi^n_{\eta k}(G)$.

Замечание 5.3. Данная теорема уточняет теорему, приведенную в [18] , о несводимом H-представлении общего многогранника размещений. В отличие от последней, Теорема 5.4 предусматривает случаи существования избыточных союзов в (5.21) даже при $\eta_1 = 1$, а в (5.22) - в том числе и в случае $\eta_k = 1$, что возможно при выполнении условия

$$\eta < 2n, \tag{5.26}$$

т.е для индуцирующих мультимножеств небольшой мощности. А это, в свою очередь, позволяет сформулировать эту теорему в виде критерия о несводимом H-представления многогранника $\Pi^n_{\eta k}(G)$.

Следствие 5.2. *Несводимым H-представлением многогранника $\Pi^n_{\eta k}(G)$ (далее ($\underline{\Pi^n_{\eta k}(G).IHR}$)) является система линейных неравенств, включающая*

- *неравенства союзов* (5.21) *с номерами $i = |\omega| \in \overline{J}$, где $\overline{J} = J_n \backslash J$, а множество J задано формулой* (5.24)*;*
- *неравенства союзов* (5.22) *с номерами $i' = |\omega'| \in \overline{J'}$, где $\overline{J'} = J_n \backslash J'$, а J' задано выражением* (5.25)*.*

Критерий принадлежности точки многограннику $\Pi^n_{\eta k}(G)$

Несмотря на, вообще говоря, неполиномиальное число ограничений в приведенных несводимом H-представлении ($\Pi^n_{\eta k}(G)$.IHR), структура общего многогранника размещений такова, что существует достаточно простой способ проверки, принадлежит ли заданная точка $\mathbb{R}^n$ этому многограннику.

Теорема 5.5. *Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, такая, что выполнено*

$$x_i \leq x_{i+1},\ i \in J_{n-1}. \tag{5.27}$$

Тогда из выполнения в ней: $\forall\, i \in J_n$

- *единственного неравенства $i-$союза системы* (5.21) *следует справедливость всех неравенств этого союза, а именно:*

$$\sum_{j=1}^{i} x_j \geq \sum_{j=1}^{i} g_j \Rightarrow \sum_{i \in \omega} x_j \geq \sum_{j=1}^{i} g_j,\ \omega \subseteq J_n, |\omega| = i;$$

- *одного неравенства $i'-$союза системы* (5.22) *следует выполнение остальных неравенств этого союза:*

$$\sum_{j=1}^{i'} x_{n-j+1} \leq \sum_{j=1}^{i'} g_{\eta-j+1} \Rightarrow$$
$$\sum_{j \in \omega'} x_{n-j+1} \leq \sum_{j=1}^{i'} g_{\eta-j+1},\ \omega' \subseteq J_n,\ |\omega'| = i'.$$

Следствие 5.3.

Принимая во внимание следствие 5.3, сформулируем следующее следствие из этой теоремы:

Следствие 5.4. *Если $x^0 \in \mathbb{R}^n$:*

$$x_i^0 \leq x_{i+1}^0,\ i \in J_{n-1}, \tag{5.28}$$

тогда $x^0 \in \Pi_{\eta k}^n (G)$ в том и только в том случае, если в x^0 выполнены по одному неравенству из следующих союзов (5.21), (5.22)*:*

$$\sum_{j=1}^{i} x_j^0 \geq \sum_{j=1}^{i} g_j,\ i \in \{1\} \cup J_n \backslash J_{\eta_1}, \tag{5.29}$$

$$\sum_{j=1}^{i'} x_{n-j+1}^0 \leq \sum_{j=1}^{i'} g_{\eta-j+1},\ i' \in \{1\} \cup J_n \backslash J_{\eta_k}. \tag{5.30}$$

Замечание 5.4. Данное следствие дает простой способ проверки произвольной точки $\mathbb{R}^n$ на принадлежность $\Pi^n_{\eta k}(G)$. Для этого достаточно упорядочить ее координаты по неубыванию и проверить в ней не более, чем $2n$, а точнее $2n+2-\eta_1-\eta_k$ неравенств системы (5.29), (5.30). При этом x^0 будет внутренней точкой $\Pi^n_{\eta k}(G)$ в том и только в том случае, если все неравенства (5.29), (5.30) выполнены строго.

$\Pi^n_{\eta k}(G)$ **- полномерный многогранник**

Теорема 5.6. *Размерность общего многогранника размещений совпадает с размерностью пространства:*

$$\dim\ \Pi^n_{\eta k}(G) = n. \tag{5.31}$$

Доказательство. Воспользуемся замечанием 1.2. Поскольку система (5.21), (5.22) не содержит уравнений, ранг матрицы ρ в (1.62) – нулевой. Отсюда следует, что для доказательства справедливости (5.31) достаточно найти произвольную внутреннюю точку области (5.21), (5.22).

Введем обозначения для сумм n минимальных и максимальных элементов G:

$$S_1^{\min} = \sum_{i=1}^{n} g_i,\ S_1^{\max} = \sum_{i=1}^{n} g_{\eta-i+1}, \tag{5.32}$$

а также для их средних арифметических:

$$a_1^{\min} = \frac{S_1^{\min}}{n},\ a_1^{\max} = \frac{S_1^{\max}}{n}. \tag{5.33}$$

Ясно, что, в силу условия упорядоченности (1.9) и условия (5.1) справедливо неравенство $S_1^{\min} < S_1^{\max}$. Тогда для величины a - среднего арифметического величин (5.33) -

$$a = \frac{a_1^{\min} + a_1^{\max}}{2} = \frac{S_1^{\min} + S_1^{\max}}{2n} \qquad (5.34)$$

будет выполнено:

$$a \in \left(a_1^{\min},\ a_1^{\max}\right). \qquad (5.35)$$

Проверим, что соответствующая этому параметру точка $\mathbf{a}$ является внутренней для многогранника $\Pi_{\eta k}^{n}(G)$. Включение $\mathbf{a} \in \operatorname{int} \Pi_{\eta k}^{n}(G)$ будет иметь место, если неравенства (5.21), (5.22) выполнены в точке $\mathbf{a}$ строго.

Воспользуемся замечанием 5.4 для $x^0 = \mathbf{a}$. Поскольку условие (5.28) выполнено, осталось показать что ограничения (5.29), (5.30) выполняются в $\mathbf{a}$ строго.

Применим свойства средних арифметических упорядоченных по неубыванию величин:

$$\forall i < i' \ \frac{\sum\limits_{j=1}^{i} g_j}{i} \le \frac{\sum\limits_{j=1}^{i'} g_j}{i'},\ \ \frac{\sum\limits_{j=1}^{i} g_{\eta-j+1}}{i} \ge \frac{\sum\limits_{j=1}^{i'} g_{\eta-j+1}}{i'}.$$

Учитывая (5.35), координаты точки $\mathbf{a}$ подставляем в (5.29), (5.30) и получаем:

$$\sum_{j=1}^{i} g_j \le i\frac{S_1^{\min}}{n} < i\frac{S_1^{\min} + S_1^{\max}}{2n} = i \cdot a,\ i \in J_n,$$

$$\sum_{j=1}^{i'} g_{\eta-j} + 1 \ge i'\frac{S_1^{\max}}{n} > i'\frac{S_1^{\min} + S_1^{\max}}{2n} = i' \cdot a,\ i' \in J_n,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, $\mathbf{a} \in int\,\Pi_{\eta k}^{n}(G)$, следовательно, $\Pi_{\eta k}^{n}(G)$ - полномерный многогранник. $\square$

$E_{\eta k}^{n}(G)$ - k-уровневое множество координатам:

$$m'(E_{\eta k}^{n}(G)) = k.$$

Так же, как и в случае общего $\mathcal{C}$-множества перестановок, координаты точек $E_{\eta k}^{n}(G)$ принимают в точности все k значений из $S(G)$, поэтому множество $E_{\eta k}^{n}(G)$ является k-уровневым по координатам.

Система (1.45)-(1.47) задает его разложение по гиперплоскостям, параллельным координатным плоскостям, при этом для проекций (1.48) множеств (1.45), образованных в пересечении $E_{\eta k}^{n}(G)$ с каждой из этих плоскостей, выполняется условие (1.49), т.е. эти проекции совпадают с проекциями всего множества $E_{\eta k}^{n}(G)$ на плоскости (1.44). Также имеет место:

$$E^{'ij} = E_{\eta-1,k_i}^{n-1}(G^i),\ i \in J_k,\ j \in J_n, \tag{5.36}$$

где $G^i,\ k_i$ заданы формулой (4.30) ($i \in J_k$).

Таким образом, множество $E_{\eta k}^{n}(G)$ представимо объединением семейства $\mathcal{C}$-множеств, проекции которых на плоскости, параллельные координатным, представляют собой общие $\mathcal{C}$-множества размещений размерности на единицу ниже исходного множества. И это действительно будет разложением множества $E_{\eta k}^{n}(G)$, поскольку все множества (5.36) непусты согласно замечанию 5.1 и попарно не пересекаются, так как они лежат в параллельных плоскостях.

Разложение $E_{\eta k}^{n}(G)$ в направлении вектора e

Воспользуемся леммой 5.1 и объединим множества семейства (5.7) по принципу равенства сумм координат их элементов заданному числу b, иначе говоря, принадлежности их точек гиперплоскости $x^T\mathbf{e} = b$.

Для этого сформируем мультимножество B:

$$B = \{b_i\}_{i\in I},\ b_i = \sum_{g\in\mathcal{G}^i} g,\ i \in I. \tag{5.37}$$

Теперь разложение (5.8) можно переписать в виде:

$$E_{\eta k}^{n}(G) = \bigcup_{b\in S(B)} E_{\eta k}^{n,b}(G), \tag{5.38}$$

где

$$E_{\eta k}^{n,b}(G) = \{x \in E_{\eta k}^{n}(G) :\ x^T\mathbf{e} = b\},\ b \in S(B). \tag{5.39}$$

Величина $|S(B)|$ определяет число уровней разложения (5.38) множества $E_{\eta k}^{n}(G)$ в направлении вектора $\mathbf{e}$. Количество этих уровней, в соответствии с леммой 5.1, можно оценить следующим образом - $|S(B)| \le |I| \le C_{\eta}^{n}$.

Заметим также, что в сечениях (5.39) множества $E_{\eta k}^{n}(G)$ гиперплоскостями $x^T\mathbf{e} = const$ образуется новый класс $\mathcal{C}$-множеств, свойства которого можно исследовать. В отдельных случаях все или некоторые множества (5.39) представляют собой $\mathcal{C}$-множества n-перестановок. В частности, если $B = S(B)$, все они будут $\mathcal{C}$-множествами перестановок, и тогда формула (5.38) будет задавать разложение $E_{\eta k}^{n}(G)$ по семейству общих $\mathcal{C}$-множеств

n-перестановок.

В общем же случае можно сказать, что множество $E_{\eta k}(G)$ разлагается по семейству параллельных плоскостей:

$$\{x \in \mathbb{R}^n :\ x^T\mathbf{e} = b\},\ b \in S(B)$$

и, следовательно, $E^n_{\eta k}(G)$ - это $m_{(\mathbf{e})}$-уровневое в направлении вектора $\mathbf{e}$, где $m_{(\mathbf{e})} = |S(B)|$.

Замечание 5.5. Последние два свойства $E^n_{\eta k}(G)$ позволяют утверждать, что для числа его уровней справедлива оценка:

$$m(E^n_{\eta k}(G)) \geq \max\{k, |S(B)|\}, \tag{5.40}$$

где B задано формулой (5.37).

Нетрудно видеть, что неравенство (5.40) обращается в равенство, если $(\Pi^n_{\eta k}(G).\mathrm{IHR})$ не содержит ничего, кроме первых и/или последних союзов систем (5.21) и (5.22), причем хоть один из этих двух последних союзов присутствует. В случае, если в несводимом H-представлении $\Pi^n_{\eta k}(G)$ присутствуют другие союзы, число уровней множества $E^n_{\eta k}(G)$ в направлениях нормалей к соответствующим гиперграням можно определить подобно тому, как было найдено мультимножество B и из него выделена основа. Число элементов основы будет задавать число уровней множества в направлении всех гиперграней, соответствующих одному союзу ограничения. Объединив результаты по всем существенным союзам неравенств, число уровней множества $E^n_{\eta k}(G)$ будет найдено.

Центрально симметричные $E_{\eta k}^{n}(G)$, $\Pi_{\eta k}^{n}(G)$

Теорема 5.7. *Множество $E_{\eta k}^{n}(G)$ центрально симметрично относительно точки* $\mathbf{a}$*, заданной параметром*

$$a = \frac{S_1}{\eta},\ \text{где}\ S_1 = \sum_{i=1}^{\eta} g_i, \tag{5.41}$$

тогда и только, когда

$$g_i = g_{\eta-i+1},\ i \in J_{\left[\frac{\eta+1}{2}\right]}. \tag{5.42}$$

Для центральной симметрии многогранника $\Pi_{\eta k}^{n}(G)$ относительно точки $\mathbf{a}'$*, определяемой параметром:*

$$a' = \frac{S_1^{\min} + S_1^{\max}}{2n}, \tag{5.43}$$

в которой $S_1^{\min}$, $S_1^{\max}$ заданы формулой (5.32)*, необходимо и достаточно выполнения условия:*

$$\frac{g_i + g_{\eta-i+1}}{2} = a',\ i \in J_n. \tag{5.44}$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 4.10, сначала остановимся на условиях симметричности $E_{\eta k}^{n}(G)$, а затем - $\Pi_{\eta k}^{n}(G)$.

1. К произвольной точке $x \in E_{\eta k}^{n}(G)$ диаметрально противоположной будет точка y, такая, что:

$$\text{если}\ x_i = g_j,\ \text{то}\ y_i = g_{\eta-j+1},\ i \in J_{\left[\frac{\eta+1}{2}\right]}. \tag{5.45}$$

При этом y должна быть точкой $E_{nk}(G)$, т.е. должно выполняться условие:

$$x \in E^n_{\eta k}(G) \Leftrightarrow y \in E^n_{\eta k}(G). \tag{5.46}$$

Центр симметрии, если он существует, совпадает с серединой отрезка $[x, y]$. Так как условия (5.45), (5.46) должны выполняться для всех $x \in E^n_{\eta k}(G)$, отсюда и получается условие (5.42). При этом середины всех образованных отрезков будут совпадать в единственном случае - если все координаты точки их пересечения равны между собой, а это возможно только в точке $\mathbf{a}$, заданной параметром (5.41).

2. Поскольку форма многогранника размещений полностью определяется n первыми и n последними элементами G, для симметрии общего многогранника размещений $\Pi^n_{\eta k}(G)$ достаточно, чтобы условия (5.45), (5.46) выполнялись для его вершин, в частности, условие (5.46) можно ослабить до

$$x \in vert\,\Pi_{nk}(G) \Leftrightarrow y \in vert\,\Pi_{nk}(G). \tag{5.47}$$

Условия (5.45), (5.47) выполняются для всех $x \in vert\,\Pi_{nk}(G)$ в случае выполнения (5.44). А тогда центр симметрии $\Pi^n_{\eta k}(G)$ будет определяться первыми и последними n элементами индуцирующего множества, т.е. будет удовлетворять условию (5.43). $\square$

В пунктах 4.2, 4.3 рассмотрены два частных случая общего множества перестановок - $E_n\left(G\right)$, $E_{n2}\left(G\right)$, предельных по k. Подобно этому, помимо множеств $E^n_k(G)$ и $\overline{E}^n_k(G)$, в классе $E^n_{\eta k}(G)$ детальнее рассмотрим следующие частные случаи:

- Случай 5.1.1 – η минимальное из возможных;

- Случай 5.1.2 – k минимальное из возможных.

Из (5.1) следует, что Случай 5.1.1 соответствует

$$\eta = n + 1, \tag{5.48}$$

т.е. общему множеству размещений $E^n_{n+1,k}(G)$, а в Случае 5.1.2 выполняется условие (4.71) и рассматривается общее множество размещений $E^n_{\eta 2}(G)$, порожденное образующим множеством из двух чисел. В пересечении этих двух классов образуется класс $E^n_{n+1,2}(G)$, который будет рассмотрен отдельно.

Будем исследовать эти подклассы общего множества размещений последовательно.

5.2 Множество евклидовых конфигураций размещений без повторений

Подобно $\mathcal{C}$-множеству перестановок $E_n(G)$, некоторые свойства $E^n_k(G)$ будут непосредственным следствием свойств общего $\mathcal{C}$-множества размещений, приведенных в п. 5.1, а также результатом замены (4.48) и подстановки $\eta = k$.

Остальные свойства будут отражать специфику этого $\mathcal{C}$-множества размещений и соответствующего ему многогранника.

Так, например, к их специфическим особенностям можно отнести следующее свойство, связывающего многогранник размещений без повторений с многогранником перестановок, а, соответственно, и множества их вершин - $\mathcal{C}$-размещений без повторений и $\mathcal{C}$-множество перестановок без повторений.

Комбинаторная эквивалентность $\Pi_k^n(G)$, $\Pi_{n+1}^n(G')$ и $\Pi_{n+1}(G'')$:

Для произвольных множеств G, G', G'', таких, что $|G| = k$, $|G'| = |G''| = n+1$ справедливо соотношение:

$$\Pi_k^n(G) \cong \Pi_{n+1}^n(G') \cong \Pi_{n+1}(G'') \ \forall\, k > n. \tag{5.49}$$

Формула (5.49) говорит, в частности, что все многогранники размещений без повторений одинаковой размерности комбинаторно эквивалентны, а также устанавливает связь между многогранниками n-размещений без повторений и многогранником $n+1$-перестановок без повторений. Многогранник перестановок без повторений был рассмотрен в п. 4.2 и приведенные там свойства легко переносятся на многогранник $\Pi_k^n(G)$ и приводятся ниже.

Мощность $E_k^n(G)$

Величина $|E_k^n(G)|$ задается формулой (5.2).

Критерий вершины $\Pi_k^n(G)$

Следствием теоремы 5.1 будет то, что точка $x \in E_k^n(G)$ – вершина многогранника $\Pi_k^n(G)$ тогда и только тогда, когда существуют s, r удовлетворяющие условие (5.12), такие, что координаты x представляют собой перестановку чисел:

$$e_1, e_2, ..., e_s, e_{k-r+1}, ..., e_k.$$

Число вершин $\Pi_k^n(G)$:

$$|vert\, E_k^n(G)| = (n+1)!.$$

Данная формула является следствием (4.50), (5.49).

Критерий смежности вершин $\Pi_k^n(G)$

Как следствие из теоремы 5.2 получаем, что для произвольной точки $x \in vert\,\Pi_k^n(G)$ все смежные к ней вершины $\Pi_k^n(G)$ получают одним из двух способов:

1. $e_i \leftrightarrow e_{i+1}$-перестановкой пары компонент x;
2. $e_s \to e_{k-r}$- либо $e_{k-r+1} \to e_s$-заменой переменной в x, где r, s определяются из условия (5.12).

Несводимое Н-представление $\Pi_k^n(G)$

Несводимое H-представление общего многогранника размещений без повторений (далее ($\underline{\Pi_k^n(G).\mathrm{IHR}}$)) получаем как следствие из теоремы 5.3, в котором учитывается, что условие (5.23) в данном случае не выполняется, соответственно, сводимых союзов в ($\underline{\Pi_k^n(G).\mathrm{IHR}}$) нет.

Следствие 5.5. *Несводимое H-представление ($\Pi_k^n(G)$.IHR) имеет вид:*

$$\sum_{j\in\omega} x_j \ge \sum_{j=1}^{|\omega|} e_j,\ \omega \subseteq J_n;$$
$$\sum_{j\in\omega'} x_j \le \sum_{j=1}^{|\omega'|} e_{k-j+1},\ \omega' \subseteq J_n.$$

$\Pi_k^n(G)$ - полномерный многогранник:

$$\dim\ \Pi_k^n(G) = n. \tag{5.50}$$

Многогранник $\Pi_k^n(G)$ простой

Действительно, степень регулярности вершин $\Pi_k^n(G)$ удовлетворяет условию

$$\mathcal{R} = n. \tag{5.51}$$

Эта формула является следствием (4.54), (5.49). А в совокупности условия (5.50), (5.51) дают $\dim\ \Pi_k^n(G) = \mathcal{R}$, что и является условием простоты $\Pi_k^n(G)$.

$E_k^n(G)$ - k-уровневое множество по координатам:

$$m(E_k^n(G)) = k.$$

Также, поскольку G - множество, то для любого $i \in J_k$ его подмножества G^i вида (4.30) будут множествами мощности $|G^i| = k - 1$. В результате этого формула (5.36) для проекций $E_k^n(G)$ на плоскости его разложения, параллельные координатным плоскостям, будет иметь вид:

$$E^{'ij} = E_{k-1}^{n-1}(G^i),\ i \in J_k,\ j \in J_n.$$

Центрально симметричные $E_k^n(G)$, $\Pi_k^n(G)$

Случаи центрально симметричных множеств и многогранников размещений без повторений приведем в следствии из теоремы 5.7:

Следствие 5.6. *Множество $E_k^n(G)$ центрально симметрично относительно точки* **a** *вида:*

$$a = \frac{S_1}{k},\ \text{где}\ S_1 = \sum_{i=1}^{k} e_i,$$

тогда и только, когда

$$e_i = e_{k-i+1},\ i \in J_{\left[\frac{k+1}{2}\right]}.$$

Необходимым и достаточным условием центральной симметрии многогранника $\Pi_k^n(G)$ относительно точки **a**$'$*, заданной параметром*

$$a' = \frac{S_1^{\min} + S_1^{\max}}{2n},$$

где $S_1^{\min}$, $S_1^{\max}$ заданы выражениями:

$$S_1^{\min} = \sum_{i=1}^{n} e_i,\ S_1^{\max} = \sum_{i=1}^{n} e_{\eta-i+1},$$

является следующее:

$$\frac{e_i + e_{k-i+1}}{2} = a',\ i \in J_{\left[\frac{k+1}{2}\right]}.$$

5.3 Множество е-конфигураций размещений с неограниченными повторениями

$\mathcal{C}$-множество размещений с неограниченными повторениями $\overline{E}_k^n(G)$ и многогранник размещений с неограниченными повторениями $\overline{\Pi}_k^n(G)$ можно отнести к хорошо исследованным случаям. Так, например, $\overline{E}_k^n(G)$ представляет собой n-мерную ограниченную решетку $\mathcal{A}^n$, а $\overline{\Pi}_k^n(G)$ - натянутый на нее гиперкуб.

Перечислим некоторые из их свойств.

$\overline{E}_k^n(G)$ - дискретная решетка:

$$\overline{E}_k^n(G) = \mathcal{A}^n,$$

т.е. это n-я степень образующего его множества согласно (3.68).

Мощность $\overline{E}_k^n(G)$

Величина $|\overline{E}_k^n(G)|$ задается формулой (5.3), что, в частности, следует из формулы (3.68), свойств декартового произведения множеств и того, что $k = |\mathcal{A}|$. В самом деле,

$$|\overline{E}_k^n(G)| = |\mathcal{A}^n| = |\mathcal{A}|^n = k^n. \tag{5.52}$$

Несводимое Н-представление $\overline{\Pi}_k^n(G)$

Переходя в уравнении (3.68) к выпуклой оболочке левой и правой его частей, получаем

$$conv\,\overline{E}_k^n(G) = \overline{\Pi}_k^n(G) = (conv\,\mathcal{A})^n = [e_1, e_k]^n, \tag{5.53}$$

откуда видно, что система ограничений, она же несводимое H-представление $\overline{\Pi}_k^n(G)$ (далее ($\overline{\Pi}_k^n(G)$.IHR)), имеет вид:

$$e_1 \le x_i \le e_k,\ i \in J_n \tag{5.54}$$

и задает гиперкуб со стороной $e_k - e_1$. Этот же результат легко получить из следствия 5.2.

Критерий вершин $\overline{\Pi}_k^n(G)$

Утверждение 5.1. *Точка $x \in \overline{E}_k^n(G)$ - вершина многогранника $\overline{\Pi}_k^n(G)$ в том и только в том случае, если ее координаты равны e_1 или e_k:*

$$x \in vert\,\overline{\Pi}_k^n(G) \ \Leftrightarrow\ x_i \in \{e_1, e_k\},\ i \in J_n. \tag{5.55}$$

Число вершин $\overline{\Pi}_k^n(G)$:

$$|vert\,\overline{\Pi}_k^n(G)| = 2^n,$$

что непосредственно следует из (5.55).

Критерий смежности вершин $\overline{\Pi}_k^n(G)$:

Все вершины, смежные к произвольной точке $x \in \overline{\Pi}_k^n(G)$, образуются из нее $e_1 \to e_k$- или $e_k \to e_1$-заменой одной из ее координат.

Это условие представимо в терминах расстояния Хэмминга[1] следующим образом:

$$\forall x, y \in vert\overline{\Pi}_k^n(G):\ x \leftrightarrow y \Leftrightarrow Hd(x, y) = 1. \tag{5.56}$$

Степень регулярности вершин $\overline{\Pi}_k^n(G)$:

$$\mathcal{R} = n.$$

$\overline{\Pi}_k^n(G)$ - полномерный многогранник:

$$\dim\ \overline{\Pi}_k^n(G) = n.$$

$\overline{\Pi}_k^n(G)$ - простой многогранник

$\overline{E}_k^n(G)$ - k-уровневое множество:

$$m(\overline{E}_k^n(G)) = k.$$

[1]Расстояние Хэмминга (the Hamming distance) между $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$Hd(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i y_i},$$

где

$$\delta_{x_i y_i} = \begin{cases} 1, & x_i = y_i, \\ 0, & \end{cases} \quad (i \in J_n).$$

Действительно, как и все множества класса $E^n_{\eta k}(G)$, множество $\overline{E}^n_k(G)$ - k-уровневое по координатам - $m(\overline{E}^n_k(G)) = k$. А поскольку все гиперграни гиперкуба $\overline{\Pi}^n_k(G)$ параллельны координатным плоскостям, число k будет задавать и число уровней в направлении его гиперграней. Откуда следует, что в целом $\overline{E}^n_k(G)$ является k-уровневым множеством.

В отличие от множества $E^n_k(G)$, здесь G - мультимножество с максимально возможными кратностями элементов, поэтому фиксирование одной координаты никак не влияет на оставшиеся, соответственно, мультимножества G^i вида (4.30) также будут мультимножествами с неограниченными кратностями. Таким образом, $G' = G^i = (\mathcal{A})^{n-1}$, $|S(G^i)| = k$ $(i \in J_k)$. В данном случае формула (5.36) для множеств, образованных в проекциях $\overline{E}^n_k(G)$ на параллельные координатным плоскости его разложения, имеет вид:

$$E^{\prime ij} = \overline{E}^{n-1}_k(G'),\ i \in J_k,\ j \in J_n,$$

где G' образовано из G уменьшением кратности каждого элемента на единицу.

Центрально симметричные $\overline{E}^n_k(G)$

Из теоремы 5.7 следует, что многогранник $\overline{\Pi}^n_k(G)$ - центрально симметричен, что соответствует действительности, поскольку гиперкуб обладает пространственной симметрией и имеет центр и плоскости симметрии.

Условием же центральной симметрии множества $\overline{E}^n_k(G)$ будет симметрия элементов образующего множества $\mathcal{A}$ относительно его среднего арифметического, поскольку условия (5.41), (5.42) в данном случае, с учетом

$[G] = (k^n)$, можно переписать в форме:

$$a = \frac{S_1}{k}, \text{ где } S_1 = \sum_{i=1}^{k} e_i,$$

$$e_i = e_{k-i+1},\ i \in J_{\left[\frac{k+1}{2}\right]}.$$

5.4 Общее $\mathcal{C}$-множество $E^n_{n+1,k}(G)$

Перейдем к рассмотрению частных случаев множества $E^n_{\eta k}(G)$, введенных выше как Случаи 5.1.1 и 5.1.2.

Начнем с первого из них и перечислим свойства $\mathcal{C}$-множества $E^n_{n+1,k}(G)$ и многогранника $\Pi^n_{n+1,k}(G)$.

$E^n_{n+1,k}(G)$ - проекция общего $\mathcal{C}$-множества $n+1$-перестановок

Нетрудно видеть, что $E^n_{n+1,k}(G)$ образуется из общего $\mathcal{C}$-множества перестановок $E_{n+1,k}(G)$ отбрасыванием одной координаты его точек, т.е. является проекцией последнего в пространство размерности на единицу ниже. Не ограничивая общности, будем полагать, что фиксируется последняя, $n+1$-я координата, т.е.

$$E^n_{n+1,k}(G) = Pr_\alpha E_{n+1,k}(G), \tag{5.57}$$

где

$$\alpha = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\}. \tag{5.58}$$

При проектировании на плоскость (5.58) сферически расположенное множество $E_{n+1,k}(G)$, вообще говоря, перестает быть сферически расположенным, поскольку данная проекция не ортогональная.

Нетрудно видеть, что многогранник $\Pi^n_{n+1,k}(G)$ представляет собой проекцию $\Pi_{n+1,k}(G)$ на плоскость α:

$$\Pi^n_{n+1,k}(G) = Pr_\alpha \Pi_{n+1,k}(G).$$

Множество $E^n_{n+1,k}(G)$ – эллипсоидально расположенное

В следующей теореме утверждается, что $E^n_{n+1,k}(G)$, как и $E_{n+1,k}(G)$, поверхностно расположенное множество и устанавливается, какую именно строго выпуклую поверхность можно описать вокруг него:

Теорема 5.8. *Множество $E^n_{n+1,k}(G)$ вписано в эллипсоид* (1.30) *с параметрами*

$$A = E + I = [a_{ij}]_{n\times n} : a_{ij} = \begin{cases} 2, \textit{если } i = j, \\ 1, \textit{если } i \neq j; \end{cases} \qquad (5.59)$$
$$b = -2S_1\mathbf{e},\ c = S_1^2 - S_2,$$

где I - матрица из единиц, E - единичная матрица n-го порядка,

$$S_j = \sum_{i=1}^{n+1} g_i^j,\ j = 1, 2. \qquad (5.60)$$

Доказательство. Начнем с рассмотрения общего множества перестановок $E_{n+1,k}(G)$, которое, согласно теореме 4.1, сферически расположенное. Для определения параметров описанной вокруг него сферы воспользуемся формулами (4.6), (4.8), (4.10) и получим:

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = S_1, \tag{5.61}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} (x_i - a)^2 = S_2 - 2aS_1 + (n+1)\,a^2, \tag{5.62}$$

где S_1, S_2 заданы выражениями (5.60).

Перейдем к проекции на плоскость α, исключая переменную x_{n+1}. Для этого выразим ее из уравнения (5.61):

$$x_{n+1} = S_1 - \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{5.63}$$

Подставим это выражение в (5.62):

$$\begin{aligned} S_2 - 2aS_1 + (n+1)\,a^2 &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 + (x_{n+1} - a)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 + \left(-\sum_{i=1}^{n} x_i + S_1 - a\right)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + 2\,(a - S_1) \sum_{i=1}^{n} x_i + (S_1 - a)^2. \end{aligned} \tag{5.64}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (5.64) задает эллипсоид. Он будет описан вокруг $E^n_{n+1,k}(G)$, поскольку по условию точки $E_{n+1,k}(G)$ удовлетворяют уравнению (5.62), а по построению точки $E^n_{n+1,k}(G)$ удовлетворяют уравнению (5.64), т.е. вписаны в образованный эллипсоид.

Упростим (5.64):

$$\begin{aligned} S_2 - 2aS_1 + (n+1)\,a^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2a \sum_{i=1}^{n} x_i + na^2 + \\ + x^T I x + 2\,(a - S_1) \sum_{i=1}^{n} x_i + S_1^2 - 2aS_1 + a^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$x^T E x + x^T I x - 2S_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + S_1^2 - S_2 = 0. \tag{5.65}$$

В итоге получено уравнение эллипсоида в форме (1.30), где A, b, c заданы формулой (5.59). $\square$

Как видно, в ходе преобразований параметр a исчез, т.е. в проекции семейства описанных вокруг $E^n_{n+1,k}(G)$ гиперсфер получен вполне определенный описанный эллипсоид.

$E^n_{n+1,k}(G)$ - вершинно расположенное множество:

$$E^n_{n+1,k}(G) = vert\ \Pi^n_{n+1,k}(G).$$

Действительно, согласно теоремы 5.8, $E^n_{n+1,k}(G)$ - поверхностно расположенное множество. А это означает, что оно вершинно расположено в силу теоремы 2.1.

Множество $E^n_{n+1,k}(G)$ – подиэдрально-эллипсоидальное:

$$E^n_{n+1,k}(G) = \Pi^n_{n+1,k}(G) \cap S,$$

где S - эллипсоид, заданный уравнением (1.30) с параметрами (5.59).

Комбинаторная эквивалентность многогранников $\Pi^n_{n+1,k}(G)$ и $\Pi_{n+1,k}(G)$

Теорема 5.9.

$$\Pi^n_{n+1,k}(G) \cong \Pi_{n+1,k}(G). \tag{5.66}$$

Доказательство. Для случая, если G - множество формула (5.66) обращается в $\Pi^n_{n+1}(G) \cong \Pi_{n+1}(G)$ и является непосредственным следствием из (5.49). Докажем, что комбинаторная эквивалентность сохраняется и в случае, когда G представляет собой мультимножество. Заметим, что при проектировании в пространство меньшей размерности комбинаторная структура многогранника может измениться по двум причинам. Первая - некоторые вершины становятся внутренними точками многогранника (или его граней произвольной размерности), который формируется в результате проектирования. Как следствие, множество вершин исходного многогранника перестает быть вершинно расположенным множеством в результате такого проектирования. Вторая - некоторые вершины проектируются в одну точку ("склеиваются"), в результате чего в новом многограннике смежными могут стать вершины, которые не были смежными в исходном многограннике. Покажем, что в рассматриваемом нами случае не происходит ни того, ни другого, и поэтому комбинаторная структура многогранника остается неизменной. Первой ситуации в нашем случае не возникает, поскольку, как было показано, $E^n_{n+1,k}(G)$ - вершинно расположено, как и исходное множество $E_{n+1,k}(G)$. Что касается второй причины, нетрудно заметить, что множество $E^n_{n+1,k}(G)$ (оно же множество вершин $\Pi^n_{n+1,k}(G)$) можно сформировать в два этапа: на первом последовательно извлекать по одному элементу из G, образовывая подмультимножества (4.30), на втором - формировать все перестановки из образованного n-элементного мультимножества. Пусть, например, сформированный элемент $E^n_{n+1,k}(G)$ - x, а индуцирующее мультимножество - G^i. Дополняя x $n+1$-ой координатой, равной e_i, получим точку $y = (x, e_i) \in E^n_{n+1,k}(G)$. Таким образом, как по элементу $E_{n+1,k}(G)$ можно легко определить элемент $E^n_{n+1,k}(G)$ как его проекцию на плоскость (5.58), так и наоборот. Таким образом, существует взаимно-однозначное соответствие между точками $E^n_{n+1,k}(G)$ и $E_{n+1,k}(G)$. Это означает, что при проектировании "склеивания" вершин не происходит.

Итак, при проектировании (5.58) граф многогранника не изменился, следовательно, исходный и образованный в проекции многогранники комбинаторно эквивалентны. $\square$

Эта особенность позволяет перенести многие вышеприведенные свойства общего множества перестановок на класс $E^n_{n+1,k}(G)$ после следующих замен:

$$n \to n+1,\ n_i \to \eta_i,\ i \in J_k.$$

Это же относится и к свойствам многогранника $\Pi^n_{n+1,k}(G)$.

<u>Свойства $E^n_{n+1,k}(G)$, $\Pi^n_{n+1,k}(G)$</u> как следствия из теоремы 5.9

Исходя из (5.66), многие свойства $E_{n+1,k}(G)$, $\Pi_{n+1,k}(G)$ легко переносятся на $E^n_{n+1,k}(G)$, $\Pi^n_{n+1,k}(G)$. Так, например,

- (4.3) преобразуется в формулу для <u>мощности</u> $E^n_{n+1,k}(G)$:

$$\left|E^n_{n+1,k}(G)\right| = \left|E_{n+1,k}(G)\right| = \frac{(n+1)!}{\eta_1! \cdot \ldots \cdot \eta_k!}; \tag{5.67}$$

- (4.32) превращается в формулу

$$\mathcal{R} = \eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_3 + ... + \eta_{k-1}\eta_k \tag{5.68}$$

для определения степени регулярности вершин $\Pi^n_{n+1,k}(G)$;

- формула

$$\dim\ \Pi^n_{n+1,k}(G) = n \tag{5.69}$$

следует из (4.42) и свидетельствует о полномерности $\Pi^n_{n+1,k}(G)$.

- $E^n_{n+1,k}(G)$ - k-уровневое по координатам и в направлении вектора $\mathbf{e}$:

$$m'(E^n_{n+1,k}) = m_{(\mathbf{e})} = k.$$

В самом деле, согласно утверждению 4.2, множество $E_{n+1,k}(G)$ является k-уровневым по $n+1$-ой своей координате. В частности, при его разложении по координатам (см. (1.45)-(1.47)) и последующем проектировании на соответствующие плоскости образуются общие множества n перестановок (4.29) вида

$$E^{'ij} = E_{nk_i}(G\backslash\{e_i\}),$$
$$k_i = |S(G\backslash\{e_i\})|,\ i \in J_k,\ j \in J_{n+1}.$$

В результате проектирования на плоскость α вида (5.58) разложения, которые соответствуют: а) каждому $j \in J_n$ преобразуются разложения (5.36) множества $E_{n+1,k}(G)$ по гиперплоскостям, параллельным координатным; б) то, что отвечает $j = n+1$, обращается в разложение типа

(5.38) в направлении вектора **e**. При этом число уровней разложения по всем этим направлениям остается неизменным и равным k, как и для проектируемого множества $E_{n+1,k}(G)$.

Центрально симметричные $E_{n+1,k}^{n}(G)$, $\Pi_{n+1,k}^{n}(G)$

Снова воспользуемся формулой (5.58), а также свойством проекции переводить центрально симметричные множества в центрально симметричные, и сформулируем следствие из теоремы 4.10.

Следствие 5.7. *Множество $E_{n+1,k}^{n}(G)$ и многогранник $\Pi_{n+1,k}^{n}(G)$ - центрально симметричны тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\frac{g_i + g_{n-i+2}}{2} = \frac{S_1}{n+1},\ i \in J_{[\frac{n}{2}]+1}, \tag{5.70}$$

где S_1 задано выражением (5.60).

Простые многогранники $\Pi_{n+1,k}^{n}(G)$

Учитывая (5.66), переформулируем теорему 4.14 и запишем условия простоты многогранников данного класса.

Теорема 5.10. *Общий многогранник размещений $\Pi_{n+1,k}^{n}(G)$ простой тогда и только тогда, когда первичная спецификация мультимножества G удовлетворяет условию:*

$$\eta_i \cdot \eta_{i+1} = \max\{\eta_i, \eta_{i+1}\},\ i \in J_{k-1}.$$

5.5 Специальное множество евклидовых конфигураций размещений

Перейдем к рассмотрению Случая 5.1.2, когда $k = 2$, т.е. образующее множество состоит из двух элементов.

По аналогии со специальным $\mathcal{C}$-множеством перестановок, множество $E^n_{\eta 2}(G)$ назовем специальным множеством евклидовых конфигураций размещений (специальным $\mathcal{C}$-множеством размещений, the special partial permutation set), а его выпуклую оболочку $\Pi^n_{\eta 2}(G)$ - специальным многогранником размещений (the special partial permutohedron).

Множество $E^n_{\eta 2}(G)$ индуцируется мультимножеством (4.122), таким, что:

$$n < \eta = \eta_1 + \eta_2 \leq 2n \tag{5.71}$$

и согласно введенной в п. 4.5 терминологии, его элементами являются специальные евклидовы конфигураций размещений.

Как будет показано далее, $E^n_{\eta 2}(G)$ – это еще один класс вершинно расположенных множеств в классе общих $\mathcal{C}$-множеств размещений. Более того, множествами $E^n_{n+1,k}(G)$ и $E^n_{\eta 2}(G)$, т.е. Случаями 5.1.1, 5.1.2, исчерпываются вершинно расположенные общие $\mathcal{C}$-множества размещений.

Приведем некоторые из свойств $E^n_{\eta 2}(G)$, $\Pi^n_{\eta 2}(G)$, следующие как из их принадлежности классам общих $\mathcal{C}$-множеств и общих многогранников размещений (см. п. 5.1), так и из условия (4.71):

Многогранник $\Pi^n_{\eta 2}(G)$ – полномерный:

$$\dim\ \Pi^n_{\eta 2}(G) = n.$$

$E^n_{\eta 2}(G)$ – сферически расположенное множество

Утверждение 5.2. *Множество $E^n_{\eta 2}(G)$ – сферически расположенное:*

$$E^n_{\eta 2}(G) \subset S_r(\mathbf{a}), \tag{5.72}$$

при этом описанная сфера $S_r(\mathbf{a})$ определена единственным образом с помощью выражений (4.87), (4.88).

Доказательство. Рассмотрим произвольную $x \in E^n_{\eta 2}(G)$. Для нее существует множество $I_x \subset J^0_n:\ x_i = \begin{cases} e_1, \text{ если } i \in I_x; \\ e_2, \text{ если } i \notin I_x. \end{cases}$

Определим квадрат расстояния от x до точки $\mathbf{a}^{\min}$, заданной параметром (4.88):

$$\left(x - \mathbf{a}^{\min}\right)^2 = \sum_{i \in I_x} \left(x_i - a^{\min}\right)^2 + \sum_{i \notin I_x} \left(x_i - a^{\min}\right)^2 =$$
$$\sum_{i \in I_x} \left(e_1 - \frac{e_1 + e_2}{2}\right)^2 + \sum_{i \notin I_x} \left(e_2 - \frac{e_1 + e_2}{2}\right)^2.$$

В обозначениях (4.83) это выражение переписывается следующим образом:

$$\left(x - \mathbf{a}^{\min}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 = \frac{\Delta^2 n}{4} = (r^{\min})^2. \tag{5.73}$$

Отсюда видно,что получено уравнение гиперсферы с параметрами (4.87), (4.88), которому удовлетворяет произвольная точка $E_{\eta 2}^{n}(G)$. Это единственная сфера, описанная как вокруг $E_{\eta 2}^{n}(G)$, так и вокруг $\Pi_{\eta 2}^{n}(G)$, в силу полномерности последнего. То есть, уравнение (5.73) задает гиперсферу $S^{\min}$ для $E_{\eta 2}^{n}(G)$. $\square$

Вершинная расположенность $E_{\eta 2}^{n}(G)$:

$$E_{\eta 2}^{n}(G) = vert\ \Pi_{\eta 2}^{n}(G). \tag{5.74}$$

Действительно, согласно утверждению 5.2, $E_{\eta 2}^{n}(G)$ является поверхностно расположенным множеством. Следовательно, в силу теоремы 2.1, оно вершинно расположено.

$E_{\eta 2}^{n}(G)$ - двухуровневое множество по координатам:

$$m'(E_{\eta 2}^{n}(G)) = 2.$$

В силу (4.122), для $E_{\eta 2}^{n}(G)$ имеет место то же разложение (1.47), (1.45), (4.95), что и для $E_{n2}(G)$ по парам плоскостей, параллельным координатным. При этом в проекции на плоскости (4.95) образуются специальные $\mathcal{C}$-множества размещений либо одноточечные множества, поскольку здесь верна формула (5.36), преобразующаяся в:

$$E'^{ij} = E_{\eta-1,k_i}^{n-1}(G^i),\ i \in J_k,\ j \in J_n, \tag{5.75}$$

где G^i заданы формулой (4.30), $k_i \in \{1,2\}$, $i \in J_k$.

Разложение $E^n_{\eta 2}(G)$ по семейству специальных $\mathcal{C}$-множеств перестановок

Лемма 5.2. *$E^n_{\eta 2}(G)$ разлагается на семейство $\eta - n + 1$ специальных $\mathcal{C}$-множеств перестановок:*

$$
\begin{aligned}
&E^n_{\eta 2}(G) = \bigcup_{i=n-\eta_1}^{\eta_2} E_{nk'_i}\left(G^{'i}\right),\\
&\textit{где} \qquad G^{'i} = \left\{e_1^{n-i}, e_2^{i}\right\},\ i \in\ J_{\eta_2} \backslash J_{n-\eta_1-1},\\
&k'_i = |S\left(G^{'i}\right)| = \begin{cases} 1,\ \textit{если}\ i \in \{0, n\}, \\ 2,\ i \in J_{n-1}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.76}
$$

Доказательство. Поскольку имеет место формула (5.74), для получения разложения $E^n_{\eta 2}(G)$ в направлении вектора $\mathbf{e}$ можно воспользоваться замечанием 5.2. В силу (4.122), (5.71) формулы (5.15)-(5.17) в данном случае преобразуются в $n'{=}\eta - n$,

$$
\begin{aligned}
&G^{'s} = \left\{e_1^{n-\eta_2+s}, e_2^{\eta_2-s}\right\},\ s \in J^0_{\eta-n},\\
&vert\, \Pi^n_{\eta 2}(G) = E^n_{\eta 2}(G) = \bigcup_{i=0}^{\eta-n} E_{nk'_i}\left(G^{'i}\right),\\
&\qquad k'_i = \left|S\left(G^{'i}\right)\right| \in \{1, 2\},\ s \in J^0_{\eta-n}.
\end{aligned} \tag{5.77}
$$

Введя теперь в (5.77) замену переменных $s = \eta - i$, получаем в точности выражения (5.76). □

$E^n_{\eta 2}(G)$ - $\eta - n + 1$-уровневое в направлении вектора $\mathbf{e}$:

$$m_{\mathbf{e}}(E^n_{\eta 2}(G)) = \eta - n + 1.$$

Воспользуемся разложением (5.38), (5.39) общего множества $\mathcal{C}$-размещений в направлении $\mathbf{e}$.

Формула (5.37) в данном случае приобретает вид:

$$\begin{aligned} &B = \{b_i\}_{i \in J^0_{\eta-n}}, \\ &b_i = \sum_{j=1}^{n} g_j^{'i} = e_1 \cdot (n - \eta_2 + i) + e_2 \cdot (\eta_2 - i),\ i \in J^0_{\eta-n}. \end{aligned} \tag{5.78}$$

При этом $b_i \neq b_j$, если $i \neq j$, т.е. $E^n_{\eta 2}(G)$ раскладывается в точности по $\eta - n + 1$-ой параллельной гиперплоскости в направлении $\mathbf{e}$, соответственно, $E^n_{\eta 2}(G)$ является $\eta - n + 1$-уровневым в данном направлении.

Разложение (5.38), (5.39) в данном случае имеет вид:

$$E^n_{\eta 2}(G) = \bigcup_{b \in B} E^{n,b}_{\eta 2}(G), \tag{5.79}$$

где

$$E^{n,b}_{\eta 2}(G) = \{x \in E^n_{\eta 2}(G) :\ x^T \mathbf{e} = b\},\ b \in B. \tag{5.80}$$

Это разложение напрямую связано с разложением (5.77), так как

$$\forall\, b \in B\ \exists!\, i \in J^0_{\eta-n} :\ E^{n,b}_{\eta 2}(G) = E_{nk'_i}(G^{'i}).$$

Замечание 5.6. Эти $\eta - n + 1$ уровней множества $E^n_{\eta 2}(G)$ можно подразделить на три группы:

- нижний уровень (a lower level) E^l, соответствующий $b = b^l = \min\limits_i b_i$, при этом если $b^l = n \cdot e_1$, то $E^l = \emptyset$;

- верхний уровень (an upper level) E^u, соответствующий $b = b^u = \max\limits_i b_i$, при этом если $b^u = n \cdot e_2$, то $E^u = \emptyset$;

- промежуточный уровень (an intermidiate level) E^m:

$$E^m = E^n_{\eta 2}(G) \setminus \left\{E^l, E^u\right\}. \tag{5.81}$$

Как видно, каждое из множеств E^l, E^u, E^m может быть пустым. Кроме того, учитывая связь между (5.77) и (5.79), а также то, что $b_i < b_{i+1}$ $(i \in J^0_{\eta-n-1})$, имеем

$$E^l = \begin{cases} E_{n2}(\{e_1^{\eta_1}, e_2^{n-\eta_1}\}), \text{ если } \eta_1 < n; \\ \emptyset, \text{ если } \eta_1 = n; \end{cases} \tag{5.82}$$

$$E^u = \begin{cases} E_{n2}(\{e_1^{n-\eta_1}, e_2^{\eta_2}\}), \text{ если } \eta_2 < n; \\ \emptyset, \text{ если } \eta_2 = n; \end{cases} \tag{5.83}$$

$$E^m = \begin{cases} \overline{E}_{n2}(G), \text{ если } \eta_1 = \eta_2 = n; \\ E_{n-1,k^l}(G \backslash \{e_1\}), \text{ если } \eta_1 < n, \ \eta_2 = n \ (k^l = |S(G \backslash \{e_1\})|); \\ E_{n-1,k^u}(G \backslash \{e_2\}), \text{ если } \eta_1 = n, \ \eta_2 < n \ (k^u = |S(G \backslash \{e_2\})|); \\ E_{n-2,k^{lu}}(G \backslash \{e_1, e_2\}), \text{ если } \eta_1, \eta_2 < n \ (k^{lu} = |S(G \backslash \{e_1, e_2\})|). \end{cases}$$

При этом $k^l, k^u, k^{lu} \in \{1, 2\}$, т.е. E^m является специальным $\mathcal{C}$-множеством размещений, а именно, специальным $\mathcal{C}$-множеством размещений с неограниченными повторениями, либо вырождается в точку. Нижний и верхний уровни множества $E^n_{\eta 2}$ выделены, поскольку они обладают одновременно свойствами специального $\mathcal{C}$-множества размещений с неограниченными повторениями $\overline{E}_2^n(G)$ и специального $\mathcal{C}$-множества перестановок, в то время как точки промежуточного уровня наследуют только свойства $\overline{E}_2^n(G)$.

Мощность $E_{\eta 2}^n(G)$:

$$\left|E_{\eta 2}^n(G)\right| = \sum_{i=n-\eta_1}^{\eta_2} C_n^i. \tag{5.84}$$

Для получения этой формулы достаточно в (5.76) перейти к мощности ее составляющих:

$$\begin{gathered} \left|E_{\eta 2}^n(G)\right| = \sum_{i=n-\eta_1}^{\eta_2} \left|E_{nk_i}\left(G'^i\right)\right|, \\ k_i \in \{1,2\}, \; i \in J_{\eta_2} \backslash J_{n-\eta_1-1}. \end{gathered} \tag{5.85}$$

Применяя теперь к (5.85) формулу (4.74), справедливую и в вырожденном случае $k_i = 1$, получим искомую формулу (5.84).

Несводимое H-представление $\Pi_{\eta 2}^n(G)$

Сформулируем следствие из теоремы 5.4 для рассматриваемого случая $k = 2$, отметив предварительно, что условие (5.23) сводимости базового H-представления ($\Pi_{\eta 2}^n(G)$.HR) выполняется для $n \geq 2$. Особые случаи будут представлять многогранники класса $\Pi_{\eta 2}^n(G)$, индуцированные мультимножеством G, у которого кратность минимального/максимального элементов достигает своей нижней границы 1 либо верхней границы n. Исходя из этого, перечислим всевозможные комбинации η_1, η_2 и сформулируем данное следствие со ссылкой на каждую из них:

- Случай 5.5.1: $1 < \eta_1, \eta_2 < n$;

- Случай 5.5.2: $1 < \eta_1, \eta_2 < n$;
- Случай 5.5.3: $\eta_1 = 1,\ \eta_2 = n$;
- Случай 5.5.4: $\eta_1 = \eta_2 = n$;
- Случай 5.5.5: $\eta_1 = n,\ 1 < \eta_2 < n$;
- Случай 5.5.6: $1 < \eta_1 < n,\ \eta_2 = n$.

Следствие 5.8. *В зависимости от сочетания η_1, η_2 несводимое H-представление ($\Pi^n_{\eta 2}(G).IHR$) имеет вид следующей системы неравенств:*

- *в Случае 5.5.1:* (4.89),

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sum_{i=1}^{n} g_i = \eta_1 \cdot e_1 + (n - \eta_1)e_2, \tag{5.86}$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} g_{\eta-i+1} = (n - \eta_2)e_1 + \eta_2 \cdot e_2; \tag{5.87}$$

- *в Случае 5.5.2:* (4.36), (5.87)*;*
- *в Случае 5.5.3:* (4.90), (5.86)*;*
- *в Случае 5.5.4:* (4.89)*;*
- *в Случае 5.5.5:* (4.89), (5.87)*;*
- *в Случае 5.5.6:* (4.36), (4.89).

Критерий смежности вершин $\Pi^n_{\eta 2}(G)$

Применение теоремы 5.1 и замечания 5.6 к рассматриваемому случаю $k = 2$ позволяет выделить три типа смежных вершин $\Pi^n_{\eta 2}(G)$ к произвольной точке $x \in E^n_{\eta 2}(G)$:

- $e_1 \to e_2$-вершины – полученные из x заменой координаты e_1 на e_2;
- $e_2 \to e_1$-вершины – образованные из x заменой координаты e_2 на e_1;
- $e_1 \leftrightarrow e_2$-вершины – сформированные из x транспозицией координат e_1 и e_2.

Сформулируем критерий смежности вершин $\Pi_{\eta 2}^{n}(G)$ как следствие из этой теоремы.

Следствие 5.9. *(из теоремы 5.1). Если $x \in E^l$, смежными к ней будут все ее $e_1 \to e_2$- и $e_1 \leftrightarrow e_2$-вершины и только они; если $x \in E^u$ – это будут ее $e_2 \to e_1$- и $e_1 \leftrightarrow e_2$-вершины; если $x \in E^m$, то смежными к ней будет множество ее $e_1 \to e_2$- и $e_2 \to e_1$-вершин.*

Число смежных вершин $\Pi_{\eta 2}^{n}(G)$

Утверждение 5.3. *Точки каждого из множеств* (5.81)-(5.83) *имеют одинаковую степень регулярности. А именно:*

$$\begin{aligned}
&\forall x \in E^l \; \mathcal{R}(x) = \mathcal{R}^l = \eta_1 \cdot (n - \eta_1) + \eta_1 = \eta_1 \cdot (n - \eta_1 + 1);\\
&\forall x \in E^u \; \mathcal{R}(x) = \mathcal{R}^u = \eta_2 \cdot (n - \eta_2) + \eta_2 = \eta_2 \cdot (n - \eta_2 + 1);\\
&\forall x \in E^m \; \mathcal{R}(x) = \mathcal{R}^m = n.
\end{aligned} \tag{5.88}$$

Это непосредственно вытекает из следствия 5.9 в результате применения формулы (4.93) к точкам E^l, E^u.

Центрально симметричные $E^n_{\eta 2}(G)$, $\Pi^n_{\eta 2}(G)$

Утверждение 5.4. *$E^n_{\eta 2}(G)$, $\Pi^n_{\eta 2}(G)$ - центрально симметричные тогда и только тогда, когда η - четное и*

$$\eta_1 = \eta_2 = \frac{\eta}{2}. \tag{5.89}$$

Если (5.89) *выполнено, центром симметрии этих множества и многогранника служит центр описанной сферы* (5.73)*, которая задана параметрами* (4.87), (4.88).

Доказательство. Поскольку $E^n_{\eta 2}(G)$ - вершинно расположенное, условия симметричности $E^n_{\eta 2}(G)$ и $\Pi^n_{\eta 2}(G)$ совпадают и задаются условием (5.44) симметрии мультимножества G относительно его среднего арифметического. Поскольку здесь рассматривается случай $k = 2$, это условие для специального $\mathcal{C}$-множества размещений упрощается до выражения (5.89), подобно тому, как для специального $\mathcal{C}$-множества перестановок это было условие (4.96).

При этом, с учетом (5.89), формула (5.43) для определения параметра a' для центра $\mathbf{a}'$ описанной сферы приобретает вид

$$a' = \frac{S_1^{\min} + S_1^{\max}}{2n} = \frac{e_1 + e_2}{2},$$

где

$$S_1^{\min} = \frac{\eta}{2} \cdot e_1 + (n - \frac{\eta}{2})e_2,\ S_1^{\max} = \frac{\eta}{2} \cdot e_2 + (n - \frac{\eta}{2})e_1.$$

То есть, в самом деле это будет сфера с параметрами (4.87), (4.88). $\square$

Таким образом, для произвольного $n > 1$ существует семейство центрально симметричных специальных $\mathcal{C}$-множеств размещений $E^n_{\eta 2}(\{e^j_1, e^j_2\}), j \in J_n \backslash J_{[\frac{n}{2}]}$ и соответствующих им многогранников.

Кроме того, показано, что для всех центрально симметричных специальных $\mathcal{C}$-множеств перестановок и размещений, порожденных числами e_1, e_2, описанная гиперсфера совпадает.

Простые многогранники $\Pi^n_{\eta 2}(G)$

Утверждение 5.5. *В классе специальных многогранников размещений существуют следующие простые многогранники и только они:*

$$
\begin{aligned}
P^1 = &\ \Pi^n_{n+1,2}(\{e^n_1, e_2\});\\
P^2 = &\ \Pi^n_{n+1,2}(\{e_1, e^n_2\});\\
P^3 = &\ \Pi^n_{2n-2,2}(\{e^{n-1}_1, e^{n-1}_2\});\\
P^4 = &\ \Pi^n_{2n-1,2}(\{e^{n-1}_1, e^n_2\});\\
P^5 = &\ \Pi^n_{2n-1,2}(\{e^n_1, e^{n-1}_2\});\\
P^6 = &\ \overline{\Pi}^n_2(\{e^n_1, e^n_2\}).
\end{aligned}
$$

Доказательство. Согласно утверждению 5.3, а также учитывая полномерность $\Pi^n_{\eta 2}(G)$, в случаях, если соответствующее специальное $\mathcal{C}$-множество размещений $E^n_{\eta 2}(G)$ содержит только уровень E^m, многогранник простой. Это относится только к специальному многограннику размещений с неограниченными повторениями P^6.

В остальных случаях хоть один из крайних уровней E^l или E^u присутствует.

Для того, чтобы объединить в (5.88) выражения для $\mathcal{R}^l$, $\mathcal{R}^u$, введем в рассмотрение вспомогательную функцию $\phi(x) = x(n+1-x)$ и решим задачу $\phi(x) \to \min\limits_{x \in J_{n-1}}$. Легко видеть, что она имеет два решения $X^{\min} = \{1, n-1\}$, $\min\limits_{x \in J_{n-1}} \phi(x) = \phi(1) = \phi(n-1) = n$. Это означает, что у оставшихся после исключения P^6 многогранников крайние уровни индуцируются мультимножествами вида (4.122), (5.71), кратности элементов которых 1 или $n-1$.

В целом, простые специальные многогранники размещений исчерпываются индуцирующими мультимножествами, кратности элементов которых $\eta_1, \eta_2 \in \{1, n-1, n\}$. Перечисляя всевозможные их сочетания с учетом $\eta_1 + \eta_2 > n$, получаем весь набор $P^1 - P^6$ и только его. $\square$

Замечание 5.7. Нетрудно видеть, что, в соответствии с приведенной классификацией специальных многогранников размещений, в каждом из Случаев 5.5.1-5.5.6 существует один простой многогранник, а именно:

- Случаю 5.5.1 соответствует P^3, несводимую систему ограничений которого можно представить в векторном виде следующим образом:

$$P^3 = \{\mathbf{e_1} \leq x \leq \mathbf{e_2},\ x^T\mathbf{e} \geq (n-1)e_1 + e_2,\ \ x^T\mathbf{e} \leq e_1 + (n-1)e_2\},$$

  откуда видно, что он представляет собой гипекуб с двумя срезанными по смежным вершинам противоположными углами;

- Случаю 5.5.2 соответствует многогранник P^1, несводимая система ограничений которого имеет вид:

$$P^1 = \{\mathbf{e_1} \le x,\ x^T\mathbf{e} \le (n-1)e_1 + e_2\}$$

и видно, что это n-симплекс;

- Случаю 5.5.3 отвечает P^2 с несводимой системой ограничений:

$$P^2 = \{x \le \mathbf{e_2},\ x^T\mathbf{e} \ge e_1 + (n-1)e_2\},$$

который также описывает n-симплекс;

- Случаю 5.5.4 соответствует P^5 и его несводимая система ограничений имеет вид:

$$P^6 = \{\mathbf{e_1} \le x \le \mathbf{e_2}\}$$

и этот многогранник описывает n-куб;

- Случаю 5.5.5 будет отвечать P^5. Его несводимое H-представление:

$$P^5 = \{\mathbf{e_1} \le x \le \mathbf{e_2},\ x^T\mathbf{e} \le e_1 + (n-1)e_2\}.$$

Сам многогранник - это гиперкуб со срезанным углом;

- наконец, Случаю 5.5.6 будет соответствовать P^4 и его несводимое H-представление:

$$P^6 = \{\mathbf{e_1} \le x \le \mathbf{e_2},\ x^T\mathbf{e} \ge (n-1)e_1 + e_2\}.$$

Это также гиперкуб со срезанным по смежным вершинам углом.

В классе специальных $\mathcal{C}$-множеств размещений $E^n_{n+1,2}(G)$ детальнее остановимся на классе $E^n_{n+1,2}(G)$, относящемся также к $E^n_{n+1,k}(G)$-множествам, на общем $\mathcal{C}$-множестве $(0-1)$-размещений, а также на специальном $\mathcal{C}$-множестве размещений с неограниченными повторениями $\overline{E}^n_2(G)$.

5.6 $\mathcal{C}$-множество размещений $E^n_{n+1,2}(G)$

Перечислим некоторые свойства специального $\mathcal{C}$-множества размещений

$$E = E^n_{n+1,2}(G), \tag{5.90}$$

вытекающие из его принадлежности как классу $E^n_{\eta 2}(G)$, так и $E^n_{n+1,k}(G)$-классу.

Мощность $E^n_{n+1,2}(G)$

Формула (5.67) преобразуется в:

$$\left|E^n_{n+1,2}\left(G\right)\right| = \frac{(n+1)!}{\eta_1! \cdot \eta_2!} = C^{\eta_1}_{n+1} = C^{\eta_2}_{n+1}. \tag{5.91}$$

Степень регулярности вершины $\Pi^n_{n+1,2}(G)$:

$$\mathcal{R} = \eta_1 \eta_2. \tag{5.92}$$

Это следует из (5.68) и говорит о том, что в данном случае промежуточные уровни множества отсутствуют, т.е. множество (5.81) – пусто, т.е.

$E^m = \varnothing$, а точки верхнего E^l и нижнего E^u уровней имеют одинаковую степень регулярности - $\mathcal{R} = \mathcal{R}^l = \mathcal{R}^u$.

$E^n_{n+1,2}(G)$ - двухуровневое множество:

$$m(E^n_{n+1,2}(G)) = 2.$$

Поскольку $E^n_{n+1,2}(G)$ принадлежит классу $E^n_{n+1,k}(G)$, оно будет $k = 2$-уровневым по всем координатам и в направлении вектора $\mathbf{e}$.

Исходя из вида ($E^n_{n+1,2}(G)$.IHR), гиперграни $E^n_{n+1,k}(G)$ параллельны координатным плоскостям либо имеют нормаль $\mathbf{e}$, откуда следует, что число уровней множества $E^n_{n+1,2}(G)$ - два, а само оно двухуровневое.

Квадратичные поверхности, описанные вокруг $E^n_{n+1,2}(G)$

Уравнение (5.65) задает эллипсоид, отличный от описанной сферы с параметрами (4.87), (4.88). Таким образом, описанная квадратичная поверхность вокруг $E^n_{n+1,2}(G)$ - не единственна.

5.7 Вершинно расположенные $\mathcal{C}$-множества размещений

Выделим вершинно расположенные множества в классе $E^n_{\eta k}(G)$. Заметим, что два таких множества уже выявлено и они относятся к рассмотренным Случаям 5.1.1 и 5.1.2. Это классы $E^n_{n+1,k}(G)$ (см. п. 5.4) и $E^n_{\eta 2}(G)$ (см. п. 5.5).

Как оказывается, других вершинно расположенных $E^n_{\eta k}(G)$ не существует, что устанавливается в следующей теореме:

Теорема 5.11. *Вершинно расположенными являются общие $\mathcal{C}$-множества размещений следующих видов:*

- *Класс 1* – $E^n_{n+1,k}(G)$,
- *Класс 2* – $E^n_{\eta 2}(G)$

и только они.

Доказательство. Доказательство от противного произведем в два этапа.

Предположим существует еще один класс - Класс 3 множеств $E^n_{\eta' k'}(G')$, отличный от Классов 1 и 2:

$$E^n_{\eta' k'}(G') = vert\ \Pi^n_{\eta' k'}(G')\,. \tag{5.93}$$

Исключив условия (4.71), (5.48), характеризующие Классы 1, 2, получим

$$k' > 2,\ \eta' > n+1. \tag{5.94}$$

Этап 1. Рассмотрим множество E, относящееся как Классу 1, так и к Классу 2. Это означает, что $E = E^n_{n+1,2}(G)$, т.е. для него выполнено (5.90). Сформируем из E множество $E' = E^n_{\eta' k'}(G')$ добавлением в индуцирующее множество E $n+1$-мультимножество G единственного элемента $e' \in (e_1, e_2)$. Параметры образованного в результате мультимножества G': $\eta' = n+2$, $k' = 3$,

$$G' = \{g'_i\}_{i \in J_{\eta'}} = \{e_1^{\eta_1}, e', e_2^{\eta_2}\} = \left\{e_1^{\eta_1}, e', e_2^{n-\eta_1+1}\right\}. \tag{5.95}$$

Покажем, что E' – не вершинно расположено, для чего введем в рассмотрение многогранник $\Pi' = conv\, E'$ и точку $x' \in E' :\ x' = (g'_i)_{i \in J_{n+1} \setminus \{1\}}$.

Покажем, что

$$x' \notin vert\, \Pi', \tag{5.96}$$

исходя из того, что согласно (5.95)

$$x' = \left(e_1^{\eta_1 - 1}, e', e_2^{n-\eta_1}\right). \tag{5.97}$$

Для этого воспользуемся критерием вершины общего многогранника размещений (см. теорему 5.1). Рассмотрим произвольную точку $x \in E^n_{\eta' k'}(G')$ и произведем упорядочивание ее координат по неубыванию, определив затем два дополнительных параметра r', s':

$$\begin{aligned} &x_i = g_i,\ i \in J^0_{r'},\ x_{r'+1} > g_{r'+1};\\ &x_{n-i'+1} = g_{\eta - i'+1},\ i' \in J^0_{s'},\ x_{n-s'} < g_{\eta - s'}. \end{aligned} \tag{5.98}$$

Легко видеть, что r', s' связаны с параметрами r, s из формул (5.12), (5.13) следующим образом:

$$r' \geq r,\ s' \geq s,\ s' + r' \geq s + r.$$

Поскольку координаты точки x' упорядочены по невозрастанию, можно применить (5.98) непосредственно к x', G', E'. Отсюда имеем $r' = \eta_1 - 1,\ s' = n - \eta_1$, следовательно:

$$n > s' + r' \geq s + r,$$

т.е. условие (5.12) того, что x' - вершина Π' не выполнено, а значит, (5.96) справедливо.

Итак, показано, что добавление одного элемента в мультимножество, индуцирующее вершинно расположенное общее $\mathcal{C}$-множество размещений E вида (5.90), приводит к формированию не вершинно расположенного общего $\mathcal{C}$-множества размещений E', в котором, помимо точки (5.97), все е-конфигурации перестановок, индуцированные мультимножеством $\left\{e_1^{\eta_1-1}, e', e_2^{n-\eta_1}\right\}$, не являются вершинами многогранника Π'.

Этап 2. Теперь рассмотрим произвольное $E_{\eta k}^{n}(G)$, для которого выполнено условие (5.94). По аналогии с (5.95), введем в рассмотрение подмультимножество G', сформированное из трех различных элементов G – наибольшего и наименьшего его элементов с максимальной кратностью и произвольного среднего элементов кратности один:

$$G' = \{e_1^{\eta_1}, e_j, e_k^{\eta_k}\}\text{, где } 1 < j < k. \tag{5.99}$$

Также рассмотрим вспомогательное общее $\mathcal{C}$-множество размещений, индуцированное мультимножеством G':

$$E' = E_{\eta' 3}^{n'}(G'),\ \eta' = \eta_1 + \eta_k + 1,\ n' = \eta' - 2. \tag{5.100}$$

Как было показано на Этапе 1, точка $y' = \left(e_1^{\eta_1-1}, e', e_k^{\eta_k-1}\right) \notin vert\ \Pi_{\eta' 3}^{n'}(G')$, т.е. она представима выпуклой линейной комбинацией других точек множества (5.100):

$$\begin{aligned} &\exists\ J,\, Y = \left\{y^j\right\}_{j\in J} \subseteq vert\ \Pi^{n'}_{\eta' 3}\left(G'\right), \\ &\left\{\alpha_j\right\}_{j\in J} > 0,\ \ \sum_{j\in J}\alpha_j = 1: \\ &y' = \sum_{j\in J}\alpha_j y_j. \end{aligned} \tag{5.101}$$

Дополним мультимножество (5.99) до n-подмультимножества G, обозначив результат через G'' :

$$G'' \subseteq G:\ G' \subset G'',\ |G''| = n,\ G'' = G' \cup \left\{g_{j_i}\right\}_{i\in J_{n-n'}}.$$

Сформируем точку $x' \in \mathbb{R}^n$ и множество точек $X = \left\{x^j\right\}_{j\in J} \subset \mathbb{R}^n$ как декартовые произведения y' и $y^j,\ j\in J$ с вектором $\overline{g} = \left(g_{j_i}\right)_{i\in J_{n-n'}}$:

$$x' = \left(y', \overline{g}\right),\, x^j = \left(y^j, \overline{g}\right),\, j\in J. \tag{5.102}$$

В силу (5.101) и построения (5.102), x' представляется выпуклой линейной комбинацией:

$$x' = \sum_{j\in J}\alpha_j x^j, \tag{5.103}$$

коэффициенты которой заданы формулой (5.101).

Вне зависимости от того, выполнено ли включение $X \subseteq vert\ \Pi^n_{\eta k}\left(G\right)$, получаем, что x' выпуклая линейная комбинация других точек $E^n_{\eta k}\left(G\right)$, следовательно, $x' \notin vert\ \Pi^n_{\eta k}\left(G\right)$.

Итак, получили, что для произвольного $E^n_{\eta k}\left(G\right)$ выполнение условия (5.94) означает его не вершинно расположенность. Полученное противоречие предположению (5.93) доказывает теорему. $\square$

5.8 $\mathcal{C}$-множество $(0-1)$-размещений

По аналогии с множеством $B_n(m)$, введем обозначение $B_n(m_1, m_2)$ для множества $(0-1)$-векторов, сумма координат которых изменяется в пределах $m \in [m_1, m_2]$, где

$$m_1 < m_2 : \tag{5.104}$$

$$B_n(m_1, m_2) = \left\{x \in \{0,1\}^n : \ m_1 \le x^T \mathbf{e} \le m_2\right\}. \tag{5.105}$$

Поскольку среди всех $(0-1)$-векторов нас интересуют все те, сумма координат которых колеблется в пределах $[m_1, m_2]$, при этом порядок следования координат не имеет значения, множество $B_n(m_1, m_2)$ представляет собой частный случай специального $\mathcal{C}$-множества размещений $E^n_{\eta 2}(G)$, соответствующий $\{e_1, e_2\} = \{0, 1\}$:

$$B_n(m_1, m_2) = E^n_{\eta 2}(G), \tag{5.106}$$

где

$$G = \left\{0^{n-m_1}, 1^{m_2}\right\}, \ \eta{=}n - m_1 + m_2. \tag{5.107}$$

Будем называть его <u>множеством евклидовых конфигураций $(0-1)$-размещений</u> ($\mathcal{C}$-множеством $(0-1)$-размещений, булевым $\mathcal{C}$-множеством размещений, the Boolean partial permutation $\mathcal{C}$-set). Его элементами, согласно терминологии, введенной в п. (4.5), являются e-конфигурации $(0-1)$-размещений.

По аналогии с гиперсимплексом (4.102), введем следующее обозначение для выпуклой оболочки множества (5.106):

$$\Delta_{n,m_1,m_2} = conv\, B_n\,(m_1, m_2)$$

и назовем его многогранником $(0-1)$-размещений (the Boolean partial permutatohedron):

Приведем некоторые свойства булевых $\mathcal{C}$-множества и многогранника размещений, вытекающие из свойств специальных $\mathcal{C}$-множества и многогранника размещений, которые приведены в п. 5.5. С учетом (5.106), (5.107), приходим к замене переменных, подобной (4.104):

$$e_1 \to 0,\ e_2 \to 1,\ \eta_1 \to n - m_1,\ \eta_2 \to m_2. \tag{5.108}$$

Δ_{n,m_1,m_2}– **полномерный многогранник:**

$$\dim\ \Delta_{n,m_1,m_2} = n. \tag{5.109}$$

$B_n\,(m_1, m_2)$ – **сферически расположенное множество:**

$$B_n\,(m_1, m_2) \subset S_r(\mathbf{a}).$$

Единственная описанная вокруг $B_n\,(m_1, m_2)$ сфера определяется параметрами:

$$a = a^{\min} = \frac{1}{2},\ r(a) = r^{\min} = \frac{\sqrt{n}}{2}, \tag{5.110}$$

Множество $B_n\,(m_1, m_2)$ – вершинно расположено:

$$B_n\,(m_1, m_2) = vert\ \Delta_{n,m_1,m_2}. \tag{5.111}$$

$B_n\,(m_1, m_2)$ - двухуровневое множество по координатам:

$$m'(B_n\,(m_1, m_2)) = 2.$$

Для множества $B_n\,(m_1, m_2)$ как для представителя класса $E^n_{\eta 2}(G)$ имеет место то же разложение (1.47), (1.45), (4.95) по парам плоскостей $x_i = 0, 1,\ i \in J_n$. При этом для проекций сечений $B_n\,(m_1, m_2)$ на эти плоскости справедлива формула (5.75), приобретающая вид:

$$E^{'1j} = B_{n-1}\,(m_1 - 1, m_2)\,,\ E^{'2j} = B_{n-1}\,(m_1, m_2 - 1)\,,\ j \in J_n.$$

Как видно, образованные в проекции множества будут множествами $(0-1)$-перестановок, если $m_1, m_2 > 1$, иначе они вырождаются в точку $\mathbf{0}$ или $\mathbf{e}$.

Разложение $B_n\,(m_1, m_2)$ в направлении вектора e

$B_n\,(m_1, m_2)$ разлагается по семейству из $m_2 - m_1 + 1$-го $\mathcal{C}$-множества $(0-1)$-перестановок:

$$B_n\,(m_1, m_2) = \bigcup_{m=m_1}^{m_2} B_n\,(m). \tag{5.112}$$

Эта формула является результатом подстановки (5.107) в разложение

(5.79), (5.80) специального множества $\mathcal{C}$-размещений.

Также оно говорит о разложении множества $B_n\left(m_1, m_2\right)$ по семейству $m_{\mathbf{e}}$ плоскостей в направлении вектора $\mathbf{e}$, где

$$m_{\mathbf{e}} = m_2 - m_1 + 1. \tag{5.113}$$

Мощность $B_n\left(m_1, m_2\right)$

Переходя в (5.112) к мощности, получаем, что число элементов во множестве $B_n\left(m_1, m_2\right)$ равно частичной биномиальной сумме:

$$\left|B_n\left(m_1, m_2\right)\right| = \sum_{m=m_1}^{m_2} \left|B_n\left(m\right)\right| = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m. \tag{5.114}$$

Несводимое H-представление Δ_{n,m_1,m_2}

Для этого случая сформулируем следствие из следствия 5.8.

Утверждение 5.6. *Несводимое H-представление специального многогранника размещений может содержать до четырех групп ограничений:*

- *ограничения* (4.111) *на переменные снизу;*
- *ограничения* (4.113) *на переменные сверху;*
- *ограничения снизу на сумму переменных:*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq n - m_1; \tag{5.115}$$

- *ограничения сверху на сумму переменных:*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \le m_2. \tag{5.116}$$

В зависимости от сочетания параметров m_1, m_2 получаем различные шесть видов многогранников $(0-1)$-размещений:

1. *($\Delta_{n,0,n}$.IHR) имеет вид* (4.110)*;*
2. *($\Delta_{n,0,1}$.IHR)* - (4.111), $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \le 1$*;*
3. *($\Delta_{n,n-1,n}$.IHR)* - (4.113), $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \ge n-1$*;*
4. *($\Delta_{n,0,m_2}$.IHR), где* $1 < m_2 < n$ - (4.110), (5.116)*;*
5. *($\Delta_{n,m_1,n}$.IHR), где* $1 < m_1 < n$ - (4.110), (5.115)*;*
6. *(Δ_{n,m_1,m_2}.IHR), где* $1 < m_1 < m_2 < n$ - (4.110), (5.115), (5.116).

Замечание 5.8. В заключение перепишем всевозможные несводимые H-представления многогранников класса Δ_{n,m_1,m_2} в векторном виде:

$$\begin{aligned}
&\Delta_{n,0,n} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{0} \le x \le \mathbf{1}\};\\
&\Delta_{n,0,1} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \ge \mathbf{0},\ x^T\mathbf{e} \le 1\};\\
&\Delta_{n,n-1,n} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \le \mathbf{1},\ x^T\mathbf{e} \ge n-1\};\\
&\Delta_{n,0,m_2} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{0} \le x \le \mathbf{1},\ x^T\mathbf{e} \le m_2\}, \text{ если } 1 < m_2 < n;\\
&\Delta_{n,m_1,n} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{0} \le x \le \mathbf{1},\ x^T\mathbf{e} \ge n-m_1\}, \text{ если } 1 < m_1 < n;\\
&\Delta_{n,m_1,m_2} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{0} \le x \le \mathbf{1},\ n-m_1 \le x^T\mathbf{e} \le m_2\}, \text{ если } 1 < m_1 < m_2 < n.
\end{aligned} \tag{5.117}$$

<u>Число уровней $B_n\,(m_1, m_2)$</u>:

$$m(B_n\,(m_1, m_2)) = \begin{cases} m_2 - m_1 + 1, & \text{если } m_2 - m_1 < n, \\ 2, & \text{если } m_1 = 0, m_2 = n. \end{cases} \tag{5.118}$$

В самом деле, (Δ_{n,m_1,m_2}.IHR) говорит о том, что гиперсимплекс Δ_{n,m_1,m_2} имеет гиперграни двух типов: а) параллельные координатным плоскостям, и в этих направлениях множество $B_n\,(m_1, m_2)$ двухуровневое; б) гиперграни с нормалью $\mathbf{e}$. В этом направлении оно $m_{\mathbf{e}}$-уровневое, где $m_{\mathbf{e}}$ задается формулой (5.113) и, согласно условия (5.104), не может быть меньше двух. Соответственно, если гиперграни с нормалью $\mathbf{e}$ присутствуют, то именно значение $m_{\mathbf{e}}$ определяет число уровней множества $B_n\,(m_1, m_2)$.

Учитывая, что во всех случаях, за исключением $\Delta_{n,0,n}$, второй вид гиперграней присутствует, получаем, что формула (5.118) задает количество уровней произвольного множества $B_n\,(m_1, m_2)$.

Из (5.118) следует, что число $m(B_n\,(m_1, m_2))$ достигает своей нижней границы два - в двух случаях. А именно, если значение $m_2 - m_1$ принимает значения 1 и n, достигая, таким образом, нижней и верхней оценки:

$$m(B_n\,(m_1, m_2)) = 2 \;\Leftrightarrow\; m_2 - m_1 \in \{1, n\}.$$

Следовательно, существует n двухуровневых множеств в семействе $B_n\,(m_1, m_2)$:

$$B_n\,(i, i+1)\,,\; i \in J_{n-1};\; B_n\,(0, n) = B_n. \tag{5.119}$$

Критерий смежности вершин Δ_{n,m_1,m_2}

Следствие 5.9 преобразуется в следующее утверждение:

Утверждение 5.7. $\forall x \in B_n(m_1, m_2)$ *множество вершин, смежных к ней, образуются одним из трех способов:* $0 \leftrightarrow 1$*-транспозицией либо* $0 \to 1$*- или* $1 \to 0$*-заменой переменной.*

А именно:

- *если* $x \in E^l$, *то смежные к ней – это ее* $0 \to 1$*- и* $0 \leftrightarrow 1$*-вершины,*
- *если* $x \in E^u$ *– ее* $1 \to 0$*- и* $0 \leftrightarrow 1$*-вершины,*
- $x \in E^m$*-* $0 \to 1$*- и* $1 \to 0$*-вершины*

и только они.

Здесь

$$E^l = \begin{cases} B_n(m_1), & \text{если } m_1 \geq 1, \\ \emptyset, & \text{иначе,} \end{cases} \qquad E^u = \begin{cases} B_n(m_2), & \text{если } m_2 \leq n-1, \\ \emptyset, & \text{иначе,} \end{cases}$$
$$E^m = B_n(m_1, m_2) \setminus \{E^l, E^u\}. \tag{5.120}$$

Степень регулярности вершин Δ_{n,m_1,m_2}

С учетом (5.108), утверждение 5.3 приобретает вид:

Утверждение 5.8. *Каждое из множеств* (5.120) *объединяет вершины*

Δ_{n,m_1,m_2} *с одинаковой степенью регулярности:*

$$\begin{aligned}
&\forall x \in E^l \ \mathcal{R}(x) = \mathcal{R}^l = (n - m_1) \cdot (m_1 + 1);\\
&\forall x \in E^u \ \mathcal{R}(x) = \mathcal{R}^u = (n - m_2 + 1) \cdot m_2;\\
&\forall x \in E^m \ \mathcal{R}(x) = \mathcal{R}^m = n.
\end{aligned} \tag{5.121}$$

Простые многогранники Δ_{n,m_1,m_2}

Сформулируем следствие из утверждения 5.5.

Следствие 5.10. *Среди многогранников $(0-1)$-размещений существуют шесть простых многогранников:*

- $\Delta_{n,0,n}$ - *единичный гиперкуб;*
- $\Delta_{n,0,1}$ - *единичный n-симплекс;*
- $\Delta_{n,n-1,n}$ - *n-симплекс;*
- $\Delta_{n,0,n-1}$ - *единичный гиперкуб со срезанной по смежным вершинам точкой* $\mathbf{e}$*;*
- $\Delta_{n,1,n}$ - *единичный гиперкуб со срезанной по смежным вершинам точкой* $\mathbf{0}$*;*
- $\Delta_{n,1,n-1}$ - *единичный гиперкуб со срезанной по смежным вершинам точками* $\mathbf{0}, \mathbf{e}$.

Многогранники Δ_{n,m_1,m_2} с регулярными вершинами

Выделим в классе Δ_{n,m_1,m_2} многогранники с регулярными вершинами, т.е. такие, которые удовлетворяют условию:

$$\exists\, \mathcal{R} : \forall\, x \in\ B_n(m_1, m_2)\ \mathcal{R}(x) = \mathcal{R}. \tag{5.122}$$

Шесть из них перечислены в следствии 5.10, однако есть еще один класс многогранников, обладающий этим свойством.

Из формулы (5.121) легко заметить, что если в $B_n(m_1, m_2)$ содержит промежуточный уровень, то, чтобы выполнялось условие (5.122), многогранник Δ_{n,m_1,m_2} должен быть простым:

$$\text{Если выполнено (5.121) и } E^m \neq \emptyset \Rightarrow \Delta_{n,m_1,m_2} \text{ - простой.}$$

Соответственно, всевозможные интересующие нас многогранники, отвечающие этому требованию, перечислены в следствии 5.10.

Если промежуточные уровни отсутствуют, то это означает, что $B_n(m_1, m_2)$ состоит из нижнего и верхнего уровней, и, с учетом (5.121), получаем:

$$\text{Если выполнено (5.121) и } E^m = \emptyset \Rightarrow \Delta_{n,m_1,m_2} = E^l \cup E^u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = m_2 - 1,\ (n - m_1)\cdot(m_1 + 1) = (n - m_2 + 1)\cdot m_2. \tag{5.123}$$

Нетрудно видеть, что подстановка первого условия из (5.123) во второе приводит к тождеству, т.е. все многогранники, соответствующие $\mathcal{C}$-множеству $(0-1)$-размещений без промежуточных уровней, будут иметь регулярные вершины.

В целом это будет семейство из $n-1$-го многогранника:

$$\Delta_{n,j-1,j},\ j \in J_n \backslash \{1\}. \tag{5.124}$$

Исходя из (5.107), для них, выполняется $\eta = j + (n - j + 1) = n + 1$, т.е. семейство (5.124) - это многогранники $(0-1)$-размещений, комбинаторно эквивалентные многогранникам булевых $n+1$-перестановок:

$$\Delta_{n,j-1,j} \cong \Delta_{n+1,j},\ j \in J_n \backslash \{1\}.$$

Это является еще одним способом доказать, что семейство (5.124) - это класс многогранников с регулярными вершинами, поскольку, как было показано в п. 4.3, все вершины многогранников $(0-1)$-перестановок - регулярны.

Подведем итоги, учитывая, что среди шести видов, перечисленных в следствии 5.10, есть два многогранника из семейства (5.124).

Утверждение 5.9. *Многогранники семейства* (5.124)*, а также* $\Delta_{n,0,n}$*,* $\Delta_{n,0,n-1}$*,* $\Delta_{n,1,n}$*,* $\Delta_{n,1,n-1}$ *и только они имеют вершины одинаковой степени регулярности.*

Центрально симметричные B_{n,m_1,m_2}, Δ_{n,m_1,m_2}

Это условие симметричности сформулируем в форме следствия из утверждения 5.4:

Следствие 5.11. *Множество B_{n,m_1,m_2} и многогранник Δ_{n,m_1,m_2} - центрально симметричны тогда и только тогда, когда m_1, m_2 удовлетворяют условию:*

$$m_1 + m_2 = n. \tag{5.125}$$

В случае выполнения (5.125) *точка* $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ *служит центром их симметрии.*

Формула (5.125) является результатом подстановки (5.107) в (5.89).

Замечание 5.9. С учетом, что по условию $m_1 < m_2$, можно сказать, что для заданного n существует $[\frac{n+1}{2}]$ симметричных $\mathcal{C}$-множеств и многогранников $(0-1)$-размещений

$$B_{n,j,n-j}, \Delta_{n,j,n-j}, \ j \in J^0_{[\frac{n-1}{2}]}.$$

5.9 $\mathcal{C}$-множество B_n

В пунктах 5.5, 5.8 были приведены свойства обоих вершинно расположенных $\mathcal{C}$-множеств размещений - множества $E^n_{n+1,k}(G)$ и $E^n_{\eta 2}(G)$.

В соответствии с (4.122), (5.71) в подклассе специальных $\mathcal{C}$-множеств размещений можно выделить два предельных случая по η:

- минимальное возможное η - $\eta = n+1$ - соответствует множеству $E^n_{n+1,2}(G)$, которое относится одновременно к Случаям 5.1.1, 5.1.2 (см. п. 5.6);
- максимальное возможное η - $\eta = 2n$ - соответствует $\mathcal{C}$-множеству $\overline{E}^n_2(G)$ размещений с неограниченными повторениями, порожденны-

ми двух-элементными образующими множествами. Будем называть это множество специальным множеством евклидовых конфигураций размещений с неограниченными повторениями (специальным $\mathcal{C}$-множеством размещений с неограниченными повторениями, the special partial e-configuration set with unbounded repetitions). Его особенностью является то, что оно одновременно относится к классу $E^n_{\eta 2}(G)$ специальных $\mathcal{C}$-множеств размещений и классу $\mathcal{C}$-множеств размещений с неограниченными повторениями $\overline{E}^n_k(G)$. Это определяет специфику данного множества и его выпуклой оболочки - специального многогранника $\overline{\Pi}^n_2(G)$ размещений с неограниченными повторениями.

Рассмотрим свойства $\overline{E}^n_2(G)$, $\overline{\Pi}^n_2(G)$, причем изложение начнем с $(0-1)$-случая, а потом произведем обобщение на весь этот класс.

Для $\mathcal{C}$-множества $(0-1)$-размещений с неограниченными повторениями будем использовать термин множество $(0-1)$-векторов (булевое множество, the Boolean set), поскольку оно объединяет все $\mathcal{C}$-конфигурации $(0-1)$-размещений, иначе говоря, все булевые вектора одной размерности. Для этого множества воспользуемся обозначением B_n, а для его выпуклой оболочки - многогранника $(0-1)$-векторов - PB_n.

Основные свойства B_n, PB_n были приведены в п. 5.8 в рамках рассмотрения $\mathcal{C}$-множества $(0-1)$-размещений, т.к B_n - это его частный случай множества $B_n(m_1, m_2)$, соответствующий паре параметров:

$$m_1 = 0, \ m_2 = n. \tag{5.126}$$

Таким образом,

$$B_n = B_{n,0,1},\ PB_n = \Delta_{n,0,n}, \tag{5.127}$$

откуда, в частности, следует, что PB_n - это единичный n-куб.

Перечислим некоторые свойства множества B_n и многогранника PB_n на основе свойств, приведенных в пунктах 5.3, 5.8. При этом будем осуществлять подстановки (5.126) и

$$k = 2,\ e_1 = 0,\ e_2 = 1.$$

Как будет показано, известные свойства единичного гиперкуба PB_n являются прямыми следствиями свойств Δ_{n,m_1,m_2} и $\overline{\Pi}_k^n(G)$.

Мощность B_n:

$$|B_n| = 2^n. \tag{5.128}$$

Эта формула может быть получена двумя способами. С одной стороны, учитывая что в данном случае образующим множеством служит $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, формула (3.68) приобретает вид: $B_n = \{0, 1\}^n$, а формула (5.52) обращается в (5.128).

С другой стороны, формула (5.114) преобразуется в $|B_n| = \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$ и дает тот же самый результат.

B_n – сферически расположенное множество

Как и все множества класса $B_n(m_1, m_2)$, множество булевых векторов является сферически расположенным. При этом описанная вокруг него сфера определена единственным образом и имеет параметры (5.110);

B_n - вершинно расположено:

$$B_n = vert\, PB_n$$

как и любое множество класса $B_n(m_1, m_2)$.

B_n - полиэдрально-сферическое множество:

$$B_n = PB_n \cap S_{\frac{\sqrt{n}}{2}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right);$$

PB_n - полномерный многогранник:

$$\dim PB_n = n.$$

Действительно, полномерность - это общее свойство многогранников класса $\Pi^n_{\eta k}(G)$.

Критерий смежности вершин PB_n

Все вершины, смежные к произвольной точке $x \in B_n$, образуются из нее $0 \to 1$- или $1 \to 0$-заменой одной ее координаты.

Это свойство непосредственно следует из критерия смежности вершин $\overline{\Pi}_k^n(G)$. Его также можно сформулировать в терминах расстояния Хэмминга, в результате чего формула (5.56) принимает вид:

$$\forall x, y \in B_n : \; x \leftrightarrow y \Leftrightarrow Hd(x, y) = 1.$$

PB_n - простой многогранник

Это вытекает из (5.127) и следствия 5.10, а также означает, что и степень вершин многогранника PB_n, и его размерность равны n.

Несводимое H-представление PB_n - ($\Delta_{n,0,n}$.IHR)

Тот факт, что многогранник PB_n описывается несводимой системой $2n$ неравенств (4.110), следует, с одной стороны, из несводимого H-представления $\overline{\Pi}_k^n(G)$. В самом деле, в данном случае формула (5.53) преобразуется в

$$PB_n = [0, 1]^n,$$

а (5.54) - в (4.110).

С другой стороны, согласно утверждению 5.6, для случая (5.127) несводимое представление многогранника задается неравенствами (4.110), обозначенное нами ($\Delta_{n,0,n}$.IHR) и которое теперь можно также обозначать (PB_n.IHR).

Симметрия B_n, PB_n

Для $(m_1, m_2) = (0, 1)$ условие симметрии (5.125) $\mathcal{C}$-множества и многогранника $(0-1)$-размещений относительно точки $\mathbf{\frac{1}{2}}$ выполнено. Это означает, что множество булевых векторов B_n и многогранник PB_n симметричны относительно этой точки. Помимо этого, они будут симметричны относительно любой плоскости, проходящей через центр симметрии, в частности, B_n, PB_n имеют n плоскостей симметрии, параллельных координатным плоскостям:

$$\Pi^i = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \, x_j = \frac{1}{2}\right\}. \tag{5.129}$$

Разложение B_n по $\mathcal{C}$-множествам $(0-1)$-перестановок:

$$B_n = \bigcup_{m=0}^{n} B_n\,(m). \tag{5.130}$$

Эта формула следует из (5.112) и задает разложение B_n по семейству из $n+1$-го $\mathcal{C}$-множества $(0-1)$-перестановок, первое и последнее из которых вырождены в точку. Эта же формула задает разложение B_n в направлении вектора $\mathbf{e}$ и говорит о том, что оно $n+1$-уровневое в этом направлении.

Замечание 5.10. Симметрия B_n относительно точки $\mathbf{\frac{1}{2}}$ и плоскостей (5.129) позволяет утверждать, что, помимо $x^T\mathbf{e} = m$, $m \in J_n^0$, существует еще множество разложений B_n по $n+1$-ой параллельной плоскости. Это будут разложения в направлении нормалей, вектор модулей координат которых совпадает с $\mathbf{e}$.

<u>B_n **- двухуровневое множество**</u>:

$$m(B_n) = 2.$$

Это следует из (5.119).

B_n-обобщения: $\mathcal{C}$-множества $B_n^{'}$, $\overline{E}_2^n(G)$

Перейдем к рассмотрению специальных $\mathcal{C}$-множества и многогранника размещений с неограниченными повторениями. Подобно B_n и PB_n, их свойства могут быть сформулированы, исходя из принадлежности $\overline{E}_2^n(G)$ классам специальных $\mathcal{C}$-множеств размещений и размещений с неограниченными повторениями, рассмотренных в пунктах 5.3 и 5.5 соответственно.

Второй путь, это возможность получения $\overline{E}_2^n(G)$ из B_n с помощью сдвига и растяжения:

$$\overline{E}_2^n(G) = \mathbf{e}_1 + (e_2 - e_1)\, B_n. \tag{5.131}$$

Заметим, что, в соответствии с классификацией е-конфигураций, приведенной в п.(4.5), $\overline{E}_2^n(G)$ состоит из специальных е-конфигураций размещений и включает всевозможные такие конфигурации для заданного G.

То же самое относится к многограннику $\overline{\Pi}_2^n(G)$:

$$\overline{\Pi}_2^n(G) = \mathbf{e}_1 + (e_2 - e_1)\, PB_n. \tag{5.132}$$

С учетом (5.131), (5.132), свойства B_n, PB_n, приведенные в п. 5.9, легко переносятся на $\overline{E}^n_2(G)$, $\overline{\Pi}^n_2(G)$.

Если выбрать

$$e_1 = -1,\ e_2 = 1, \tag{5.133}$$

множество $\overline{E}^n_2(G)$ преобразуется во множество, которое назовем множеством бинарных векторов (бинарным множеством, the binary set) и обозначим B'_n, а его выпуклую оболочку - бинарным многогранником:

$$PB'_n = convB'_n.$$

Для этих множества и многогранника формулы (5.131), (5.132) приобретают вид:

$$B'_n = 2B_n - 1,\ PB'_n = 2PB_n - 1.$$

Отличительной особенностью B'_n от B_n является то, что множество $B'_n = \{-1, 1\}^n = \{\pm 1\}^n$ - симметрично относительно начала координат.

Бинарный многогранник PB'_n имеет форму гиперкуба $PB'_n = [-1, 1]^n$ со стороной 2 и задается несводимой системой $-1 \le x_i \le 1,\ i \in J_n$ (далее (PB'_n.IHR)).

5.10 Комбинаторно эквивалентные многогранники $\Pi^n_{\eta k}(G)$

Как видно из H-представления ($\Pi^n_{\eta k}(G)$.IHR), многогранник $\Pi^n_{\eta k}(G)$ полностью определяется n первыми и n последними элементами мультимножества (1.2), а его комбинаторная структура – кратностями этих элементов.

Введем в рассмотрение соответствующие n-подмультимножества G, а также их основы и первичные спецификации:

$$G^{\min} = \{g_i\}_{i\in J_n},\ G^{\max} = \{g_{\eta-n+i}\}_{i\in J_n};$$
$$k^{\min} = |S(G^{\min})|,\ \left[G^{\min}\right] = \left(\eta_i^{\min}\right)_{i\in J_{k^{\min}}};\tag{5.134}$$
$$k^{\max} = |S(G^{\max})|,\ [G^{\max}] = (\eta_i^{\max})_{i\in J_{k^{\max}}},$$

где

$$G^{\min} = \left\{(e_i^{\min})^{\eta_i^{\min}}\right\}_{i\in J_{k^{\min}}},$$
$$G^{\max} = \left\{(e_i^{\max})^{\eta_i^{\max}}\right\}_{i\in J_{k^{\max}}}.$$

Назовем мультимножества $G^{\min}$, $G^{\max}$ <u>начальным</u> и <u>конечным</u> <u>подмультимножествами</u> G.

Нетрудно видеть, что любые два многогранника n-размещений, индуцированные мультимножествами с одинаковыми начальным и конечным подмультимножествами, – комбинаторно эквивалентны.

Сформулируем это наблюдение в виде утверждения.

Утверждение 5.10. *(Достаточное условие 1 комбинаторной эквивалентности общих многогранников размещений).*

Если $G,\ G'$*:*

$$G^{\min} = G'^{\,\min},\ G^{\max} = G'^{\,\max},\tag{5.135}$$

то $\forall n \le \min\{\eta, \eta'\}$

$$\Pi^n_{\eta' k'}(G') \cong \Pi^n_{\eta k}(G)\tag{5.136}$$

(здесь $\eta' = |G'|\,,\ k' = |S\,(G')|,\ G'^{\,\min} = \{g'_i\}_{i\in J_n},\ G'^{\,\max} = \left\{g'_{\eta'-n+i}\right\}_{i\in J_n}$*).*

Сформулируем другие условия, при которых (5.136) выполняется и, соответственно, пара общих многогранников размещений являются комбинаторно эквивалентными. Они будут основываться на анализе первичных спецификаций $G,\ G'$, а также их начальных и конечных подмультимножеств.

С этой целью рассмотрим произвольное мультимножество G вида (1.9) и сформируем из него G' исключением некоторого числа промежуточных элементов:

$$G' = G \backslash G^{n+1,\eta-n},\ \text{где } G^{n+1,\eta-n} = \{g_{n+1}, ..., g_{\eta-n}\}\,. \tag{5.137}$$

При этом в зависимости от мощности G возможны две ситуации:

- Случай 5.10.1 - $\eta < 2n$, тогда

$$G^{n+1,\eta-n} = \varnothing,\ G' = G,\ G' \subset G^{\min} \cup G^{\max},\ \eta' = \eta,\ \ k' = k;$$

- Случай 5.10.2. Если

$$\eta \geq 2n, \tag{5.138}$$

то

$$G' = G,\ G' = G^{\min} \cup G^{\max},\ \eta' = 2n,\ \ k' \leq k.$$

В целом же для G' всегда будет выполнено:

$$\eta' = \min\{\eta, 2n\}\,,\ \ k' \leq k. \tag{5.139}$$

Рассмотрим $\mathcal{C}$-множество n-размещений, индуцированное мультимножеством (5.137), и соответствующий многогранник $\Pi^n_{\eta' k'}(G')$. Из построения

G' ясно, что здесь условие (5.135) выполнено, и, по утверждению 5.10, этот многогранник комбинаторно эквивалентен исходному $\Pi^n_{\eta k}(G)$. При этом $\Pi^n_{\eta' k'}(G')$ индуцирован η'-элементным мультимножеством, удовлетворяющим условию (5.139). Таким образом, при исследовании комбинаторной структуры общих многогранников размещений можно ограничится рассмотрением мультимножеств:

$$n + 1 \leq \eta \leq 2n. \tag{5.140}$$

Чтобы исключить из рассмотрения те мультимножества, первичные спецификации которых имеют противоположный порядок заданному в G, будем также полагать, что для G выполнено условие, подобное (4.130):

$$\exists\ i \in J^0_{k+1}:\ \eta_j = \eta_{k-j+1},\ j \in J_{i-1}; \eta_i > \eta_{k-i+1}, \tag{5.141}$$

где $\eta_0 = 0,\ \eta_{k+1} = n + 1.$

Аналогично и для G' будем считать, что

$$\exists\ i' \in J^0_{k'+1}:\ \eta'_j = \eta'_{k'-j+1},\ j \in J_{i'-1}; \eta_{i'} > \eta_{k'-i'+1}, \tag{5.142}$$

где $[G'] = (\eta'_i)_{i \in J_{k'}}$, $\eta'_0 = 0,\ \eta'_{k'+1} = n + 1.$

Как было указано в п. 4.7, при условии выполнения (4.130), два общих многогранника перестановок $\Pi_{nk}(G)$, $\Pi_{n'k'}(G)$ - комбинаторно эквивалентны, если первичные спецификации индуцирующих их мультимножеств совпадают. Для общих многогранников размещений данное условие будет лишь достаточным.

Утверждение 5.11. *(Достаточное условие 2 комбинаторной эквивалент-*

ности многогранников класса $\Pi^n_{\eta k}(G)$).

Если мультимножества G, G' имеют одинаковые первичные спецификации, соответствующие общие многогранники n-размещений комбинаторно эквивалентны, т.е. если

$$G, G' : \ \ [G] = [G'] , \tag{5.143}$$

то $\eta = \eta',\ n = n'$ и $\Pi^n_{\eta' k'}(G') = \Pi^n_{\eta k}(G') \cong \Pi^n_{\eta k}(G)$.

С другой стороны, понятно, что при выполнении условий (5.141), (5.142) мультимножества с различными первичными спецификациями начальных и конечных подмультимножеств индуцируют многогранники, не являющиеся комбинаторно эквивалентными: если G, G', такие, что $([G^{\min}], [G^{\max}]) \neq ([G'^{\min}], [G'^{\max}])$, то $\Pi^n_{\eta' k'}(G')$, $\Pi^n_{\eta k}(G)$ - не комбинаторно эквивалентны. Сформулируем еще одно условие комбинаторной эквивалентности.

Утверждение 5.12. *(Необходимое условие комбинаторной эквивалентности многогранников класса $\Pi^n_{\eta k}(G)$).*

Если общие многогранники размещений комбинаторно эквивалентны, то первичные спецификации их начальных и конечных подмультимножеств идентичны:

$$[G^{\min}] = [G'^{\min}],\ [G^{\max}] = [G'^{\max}]. \tag{5.144}$$

Замечание 5.11. В пункте 5.11 будет показано, что, с одной стороны, существуют не комбинаторно эквивалентные классы $\Pi^n_{\eta k}(G)$, для которых выполнено (5.144). С другой стороны, имеются комбинаторно эквивалентные классы этих многогранников, не удовлетворяющие условию (5.144).

Здесь отметим лишь случай, когда условия (5.143), (5.144) эквивалентны и, следовательно, являются критерием комбинаторной эквивалентности двух многогранников размещений. Он касается Случая 5.10.2, при котором неравенство (5.138), с учетом (5.140), преобразуется в равенство:

$$\eta = 2n. \tag{5.145}$$

Легко видеть, что если (5.145) выполнено и

$$g_n < g_{n+1}, \tag{5.146}$$

условия (5.143), (5.144) эквивалентны. Это объясняется тем, что $G^{\min} \cap G^{\max} = \varnothing$, соответственно, первичные спецификации $[G^{\min}]$, $[G^{\max}]$ не влияют друг на друга.

Замечание 5.12. Вторая возможная ситуация при выполнении условия (5.145) –

$$\exists\, e_i \in J_k : \; g_n = g_{n+1} = e_i, \tag{5.147}$$

при которой удаление одного из этих элементов из индуцирующего мультимножества не меняет комбинаторной структуры многогранника согласно утверждению 5.10:

$$\Pi^n_{\eta k}(G) \cong \Pi^n_{\eta'-1,k'}(G \backslash \{e_i\}).$$

Удаление кратных элементов e_i можно продолжать до тех пор, пока начальное и конечное подмультимножества остаются неизменными, соответственно, комбинаторная структура многогранника не меняется.

5.11 Графическая иллюстрация $E^n_{\eta k}(G), \Pi^n_{\eta k}(G)$ $(n = 2, 3)$

Пример 5.1. Для $n = 2$, учитывая условие (5.140), возможны:

- два варианта, соответствующие $\eta = n + 1 = 3$ (они представлены формулой (4.131) и уже рассмотрены в п. 5.7);
- три варианта, соответствующие $\eta = 4$:

$$[G_3] = \left(2^2\right),\ [G_4] = \left(2, 1^2\right),\ [G_5] = (1, 2, 1)\,.$$

В первых двух случаях многогранник 2-размещений $\Pi^2_3\,(G_1)$ и общий многогранник 2-размещений $\Pi^2_{32}\,(G_2) = \Delta_{2,0,1}$ изображены на Рисунках 4.1, 4.2. В третьем случае имеем дело со специальным множеством и многогранником размещений с повторениями $\overline{E}^2_2\,(G_3)\,,\ \overline{\Pi}^2_2\,(G_3)$, изображенными на Рис. 5.1. В последних двух случаях $k = 3 \geq 2$, $\eta = 4 = n + 1$, т.е. ни одно из условий вершинной расположенности не выполнено и имеем дело с не вершинно расположенными общими множествами размещений $E^2_{43}\,(G_4)\,,\ E^2_{43}\,(G_5)$. Общий многогранник размещений $\Pi^2_{43}\,(G_4)$ и множество $E^2_{43}\,(G_4)$ изображены на Рис. 5.2. Наконец, в последнем случае в качестве G_5 выберем, к примеру, $G_5 = \{1, 2^2, 3\}$. Это мультимножество может быть сокращено, т.к. выполнено условие (5.147) $g_2 = g_3 = e_2 = 2$. Применим замечание 5.12 - $\Pi^2_{43}\,(G_5) \cong \Pi^2_3\,(G_5 \backslash \{2\}) = \Pi^2_3\,(J_3) = \Pi^2_3\,(G_1)$, т.е. снова пришли к многограннику, изображенному на Рис. 4.1.

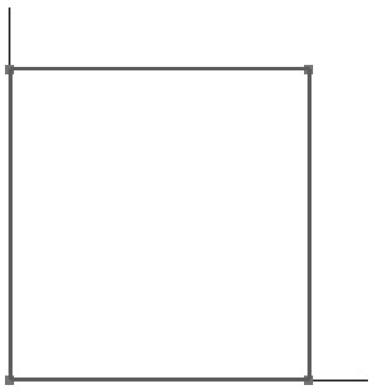


Рис. 5.1: $\overline{\Pi}_2^2\,(G_3) = PB_2$

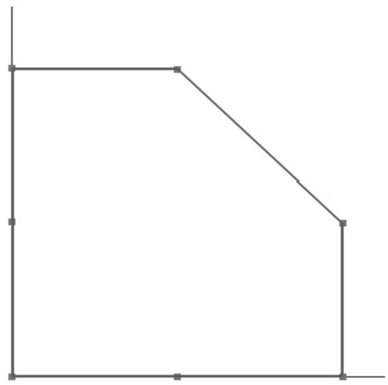


Рис. 5.2: $\Pi^3_{42}\,(G_4)$

Пример 5.2. Случаю $n = 3$ соответствуют трехмерные общие многогранники размещений. Множества $E^3_{\eta k}\,(G)$ могут быть разделены на две группы:

1. Вершинно расположенные общие $\mathcal{C}$-множества 3-размещений (далее Класс 5.11.1);

2. Не вершинно расположенные $\mathcal{C}$-множества 3-размещений (далее Класс 5.11.2).

   В свою очередь, в первой группе можно выделить:

   (a) вершинно расположенные $\mathcal{C}$-множества размещений, не относящиеся к специальным $\mathcal{C}$-множествам размещений (см. п. 5.7) (далее Класс 5.11.1.a) $(k > 2,\ \eta = n + 1 = 4)$;

   (b) специальные $\mathcal{C}$-множества 3-размещений (далее Класс 5.11.1.b) $(k = 2)$.

Рассмотрим сначала Класс 5.11.1.a. Вдобавок к $\mathcal{C}$-множествам 3-размещений, индуцированных мультимножествами $G_1 - G_5$ вида (4.132), возможны еще следующие случаи:

$$[G_6] = (3, 2)\,, \ \ [G_7] = \left(3^2\right). \tag{5.148}$$

По аналогии с примером 4.3, введем обозначения: $\forall\, i \in J_7$

$$E^i = E^3_{\eta_i k_i}\left(G_i\right),\ \eta_i = |G_i|\,,\ k_i = |S\left(G_i\right)|\,,\ P^i = conv\; E^i. \tag{5.149}$$

Как видно,

- $\eta_i = 4,\ i \in J_5;\ \eta_6 = 5,\ \eta_7 = 6;$
- $k_1 = 4,\, k_2 = k_3 = 3;\ k_i = 2,\, i = \overline{4, 7}.$

Таким образом, в Класс 5.11.1.a входят

$$E^1 = E^3_4\left(G_1\right),\ E^2 = E^3_{43}\left(G_2\right),\ E^3 = E^3_{43}\left(G_3\right),$$

показанные, вместе с многогранниками $P^1 - P^3$ на Рисунках 4.3-4.5.

Остальные множества (5.149) относятся к Классу 5.11.1.b, два из которых -

$$E^4 = E^3_{42}\left(G_5\right) = B_3\left(1, 2\right),\ E^5 = E^3_{42}\left(G_6\right) = B_3\left(0, 1\right),$$

вместе с соответствующими многогранниками $(0-1)$-размещений $\Delta_{3,1,2}$, $\Delta_{3,0,1}$, показаны на Рисунках 4.6, 4.7.

На следующих двух рисунках (см. Рис. 5.3 и Рис. 5.4) изображены множества $(0-1)$-размещений, индуцированные мультимножествами вида (5.148):

$$E^6 = E^3_{52}\left(G_6\right) = B_3\left(0, 2\right),\ E^7 = \overline{E}^3_2\left(G_7\right) = B_3,$$

и соответствующие им многогранники.

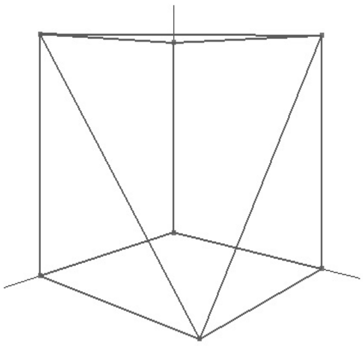


Рис. 5.3: E^6, P^6

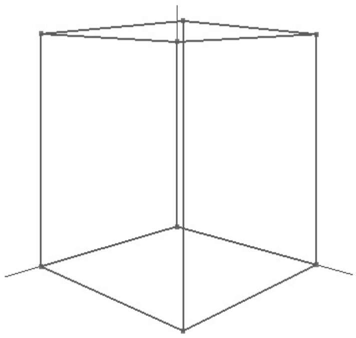


Рис. 5.4: E^7, P^7

В частности, из Рис. 5.3 видно, что $P^6 = \Delta_{3,0,2}$ имеет вершины степеней $3, 4$, т.е. этот многогранник с нерегулярными вершинами. Последнее множество данного класса - E^7 - это множество B_3 трехмерных $(0-1)$-векторов, которому соответствует гиперкуб PB_3, изображенный на Рис. 5.4.

Переходим к рассмотрению Класса 5.11.2. Учитывая (5.140), поиск ограничивается G_i:

$$n + 2 = 5 \leq |G_i| \leq 2n = 6, \ 3 \leq |S(G_i)| \leq 6. \tag{5.150}$$

В табл. 5.1 перечислены 12 возможных первичных спецификаций мультимножеств, удовлетворяющие условиям (5.141), (5.150), при этом нумерация продолжена с $i = 8$. Также приведены основные параметры мультимножеств G_i - η_i, k_i и величина $\mathcal{R}^i$ - степень регулярности вершин P^i (либо все возможные степени его вершин), а также номер рисунка с изображением E^i, P^i, $i = \overline{8, 19}$. Ниже приведены изображения многогранников и множеств данного класса.

Проведем анализ и сравнение результатов с полученными выше. Нетруд-

i	$[G_i]$	G_i	η_i	k_i	$\mathcal{R}_i$	Рис.
8.	(1^5)	$G_8 = J_5$	5	5	3	5.5
9.	$(2,1^3)$	$G_9 = \{0^2,1,2,3\}$	5	4	3	5.6
10.	$(2,1,2)$	$G_{10} = \{0^2,1,2^2\}$	5	3	3	5.7
11.	$(3,1^2)$	$G_{11} = \{0^3,1,2\}$	5	3	3	5.8
12.	$(1,2,1^2)$	$G_{12} = \{0,1^2,2,3\}$	5	4	3,4	5.9
13.	$(2^2,1)$	$G_{13} = \{0^2,1^2,2\}$	5	3	3,4	5.10
14.	$(1,3,1)$	$G_{14} = \{0,1^3,2\}$	5	3	4	5.11
15.	$(1,2^2,1)$	$G_{15} = \{0,1^2,2^2,3\}$	6	4	3,4	5.12
16.	$(3,2,1)$	$G_{16} = \{0^3,1^2,2\}$	6	3	3,4	5.13
17.	$(2,1,2,1)$	$G_{17} = \{0^2,1,2^2,3\}$	6	4	3,4	5.14
18.	(2^3)	$G_{18} = \{0^2,1^2,2^2\}$	6	3	3	5.15
19.	$(3,1,2)$	$G_{19} = \{0^3,1,2^2\}$	6	3	3	5.16

Таблица 5.1: Класс 5.11.2: параметры множеств E^i и многогранников P^i, $i = \overline{8,19}$

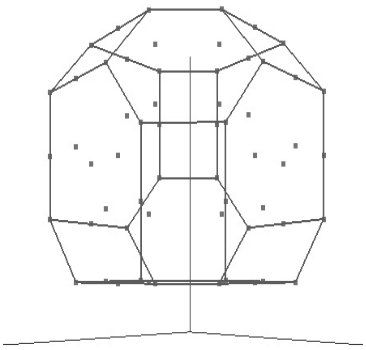


Рис. 5.5: E^8, P^8

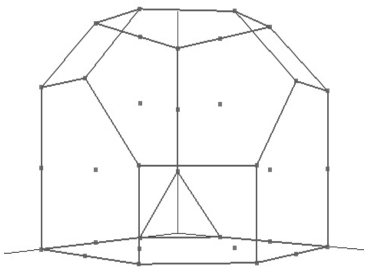


Рис. 5.6: E^9, P^9

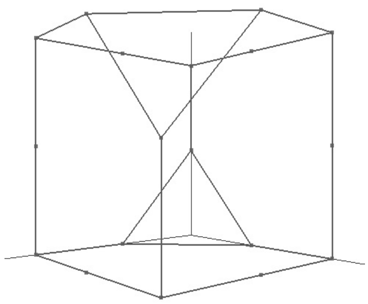


Рис. 5.7: E^{10}, P^{10}

но видеть, что некоторые из многогранников Класса 5.11.2 комбинаторно эквивалентны многогранникам Класса 5.11.1. А именно:

1. Многогранники обоих классов - комбинаторно эквивалентные многогранники 3-размещений: $P^1 \cong P^8$. При этом достаточные условия 1, 2 не выявляют этого.

2. $P^3 \cong P^{14}$. Поскольку $G_3 = \{0,1^2,2\}$, $G_{14} = \{0,1^3,2\}$, здесь выполнено достаточное условие 1 комбинаторной эквивалентности, а применяя

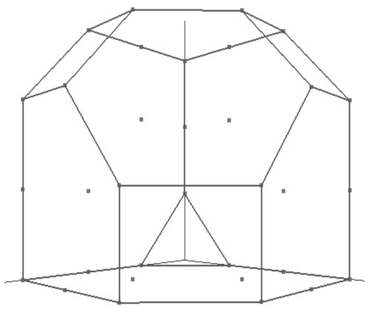


Рис. 5.8: E^{11}, P^{11}

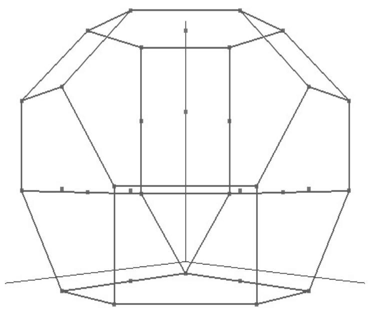


Рис. 5.9: E^{12}, P^{12}

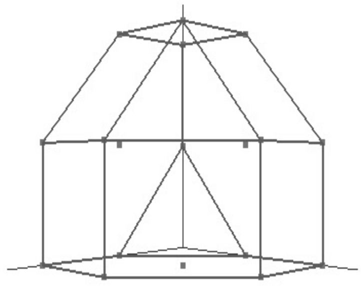


Рис. 5.10: E^{13}, P^{13}

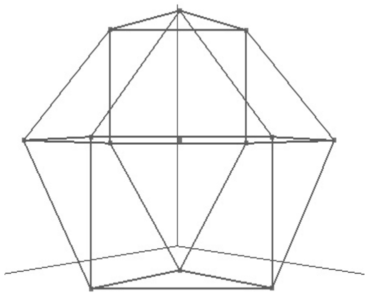


Рис. 5.11: E^{14}, P^{14}

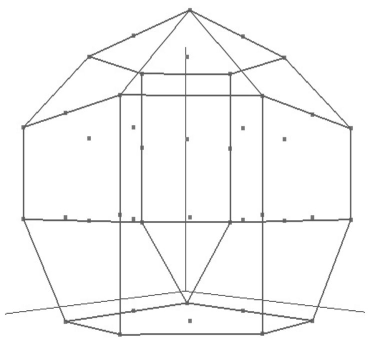


Рис. 5.12: E^{15}, P^{15}

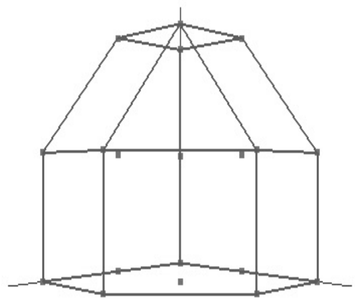


Рис. 5.13: E^{16}, P^{16}

замечание 5.12, получаем:

$$P^{14} = \Pi^3_{53}(G_{14}) \cong \Pi^3_{43}(G_{14} \setminus \{1\}) = \Pi^3_{43}(G_3) = P^3;$$

3. $P^{10} \cong P^{18}$. Здесь комбинаторная эквивалентность устанавливается аналогично предыдущему случаю, учитывая что $G_{10} = \{0^2, 1, 2^2\}$, $G_{18} = \{0^2, 1^2, 2^2\}$:

$$P^{18} = \Pi^3_{63}(G_{18}) \cong \Pi^3_{53}(G_{18} \setminus \{1\}) = \Pi^3_{53}(G_{10}) = P^{10}.$$

4. $P^{13} \cong P^{17}$. Для индуцирующих мультимножеств $G_{13} = \{0^2, 1^2, 2\}$, $G_{17} = \{0^2, 1, 2^2, 3\}$ $[G^{\min}] = [G^{\max}] = (2, 1)$, т.е. необходимое условие

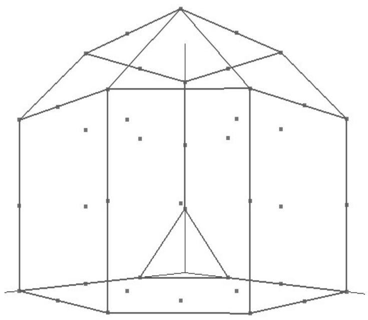


Рис. 5.14: E^{17}, P^{17}

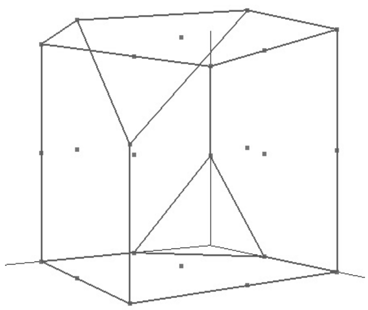


Рис. 5.15: E^{18}, P^{18}

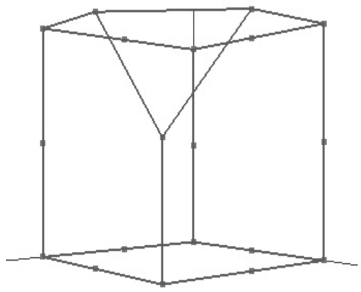


Рис. 5.16: E^{19}, P^{19}

комбинаторной эквивалентности выполнено, а оба достаточные – нет.

Наконец, проверим условие (5.144) для мультимножеств:

$$G = G_3,\ G' = G_{15}.$$

Учитывая, что $G_3 = \{0, 1^2, 2\}$, $G_{15} = \{0, 1^2, 2^2, 3\}$, имеем

$$\left[G^{\min}\right] = \left[G'^{\min}\right] = (1, 2)\,,\ \left[G^{\max}\right] = \left[G'^{\max}\right] = (2, 1)\,,$$

следовательно, необходимое условие (5.144) выполнено, при этом P^3, P^{15} - не комбинаторно эквивалентны. Заметим, что для мультимножества G_{15} выполнены условия (5.145), (5.146), соответственно, его сокращение изменяет комбинаторную структуру многогранника согласно замечанию 5.12. Это видно на примере P^3 и P^{15}.

Выводы. В классе $\Pi^2_{\eta k}(G)$ было выявлено 7 различных типов многогранников. Для размерности 3, учитывая комбинаторно эквивалентные многогранники среди перечисленных, установлено, что существует 15 не комбинаторно эквивалентных видов $\Pi^3_{\eta k}(G)$.

Глава 6

Другие множества евклидовых комбинаторных конфигураций

Данная глава посвящена исследованию специальные классов комбинаторных множеств, таких как множество четных перестановок, четных булевых векторов и перестановок со знаком. Эти множества представляют собой конечные точечные конфигурации, что позволяет при их исследовании использовать свойства и общие подходы, описанные в главах 1, 2. С другой стороны, с учетом результатов, полученных в главах 3-5, указанные множества можно рассматривать как $\mathcal{C}$-множества перестановок и размещений, на которые наложены дополнительные ограничения.

Материалы данной главы основаны на свойствах гипероктаэдра [2, 10, 17, 20, 19, 59]. Характеристики множеств четных перестановок и четных булевых векторов представлены в соответствии с работами [11, 13, 22, 32, 35, 73, 75, 81]. При изложении свойств множества и многогранника перестановок со знаком использованы источники [3, 110].

6.1 $\mathcal{C}$-множество вершин гипероктаэдра

Гипероктаэдром (n-октаэдром, кокубом, ортоплексом, a cocube, a cross polytope) [17] называется правильный политоп, двойственный n-мерному гиперкубу.

Гипероктаэдр с центром в точке x^0 и коэффициентом масштабирования r задается следующим образом:

$$CP_n\left(x^0, r\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \left|x_i - x_i^0\right| \le r\right\}. \tag{6.1}$$

Выражение (6.1) может быть переписано при помощи абсолютной нормы:

$$CP_n\left(x^0, r\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left\|x - x^0\right\|_1 \le r\right\},$$

откуда видно, что гипероктаэдр $CP_n\left(x^0, r\right)$ - это шар в нормированном пространстве с нормой l_1, радиус которого r, а его центр - точка x^0.

Нетрудно видеть, что вершины гипероктаэдра (6.1) представляют собой вектора, одна координата которых равна x^0+r или x^0-r, остальные равны x^0. Они образуют комбинаторное множество вершин многогранника $CP_n\left(x^0, r\right)$, для которого введем следующее обозначение:

$$CE_n\left(x^0, r\right) = vert\, CP_n\left(x^0, r\right) \tag{6.2}$$

и рассмотрим его свойства как конечной точечной конфигурации.

Нетрудно видеть, что

- при $n = 1$ индуцирующим множеством множества (6.2) будет:

$$G = \{x_0 \pm r\}$$

и оно же будет его образующим множеством, т.е.

$$\mathcal{A} = G = \{x_0 - r, x_0 + r\};$$

- при $n > 1$ множество (6.2) индуцируется мультимножеством:

$$G = \left\{x_0 \pm r, x_0^{n-1}\right\}, \tag{6.3}$$

а образующим множеством будет

$$\mathcal{A} = \{x_0 - r, x_0, x_0 + r\}. \tag{6.4}$$

Поскольку в каждом из этих случаев $|G| = n + 1 > n$, т.е. выполнено условие (3.47), множество $CE_n\left(x^0, r\right)$ представляет $\mathcal{C}$-множество размещений, которое:

- при $n = 1$ совпадает с множеством 1-размещений:

$$CE_1\left(x^0, r\right) = E_2^1(\{x_0 - r, x_0 + r\}); \tag{6.5}$$

- при $n > 1$ представимо как общее $\mathcal{C}$-множество n-размещений, индуцированное мультимножеством (6.3), на которое наложены следующие ограничения:

$$\forall\, x \in CE_1\,(x^0, r):\; |x - x^0|_1 = r.$$

Далее будем рассматривать случай $n > 1$ и заметим, что (6.5) является множеством евклидовых комбинаторных конфигураций размещений. В самом деле, индуцирующим мультимножеством произвольной точки $x \in CE_1\,(x^0, r)$ будет $\{x_0 - r, x_0^{n-1}\}$ или $\{x_0 + r, x_0^{n-1}\}$, следовательно $\mathcal{A}(x) \neq \mathcal{A}$ и выполнено условие (3.35). Далее множество (6.5) будем называть $\mathcal{C}$-множеством вершин гиперотаэдра.

Это множество иногда определяют как погруженное в пространство $\mathbb{R}^n$ множество n-перестановок [17] из $n+1$-элементного мультимножества (6.3), подразумевая, что в данном случае в формирования каждой такой перестановки из G участвуют все x^0 и лишь один элемент, отличный от x^0.

Множество $CE_n\,(x^0, r)$ можно также представить как композиционный образ [125], [126] $\mathcal{C}$-множеств перестановок и размещений, а именно, как $\mathcal{C}$-множество перестановок полиразмещений [128] из G, в котором выделяются подмультимножества $G^1 = \{x_0 \pm r\}\,,\; G^2 = \{x_0^{n-1}\}$. Для этого на первом этапе формируются два $\mathcal{C}$-множества размещений, одно из которых вырождено в точку:

$$E^1 = E_2^1\left(G^1\right),\; E^2 = E_{n-1,1}^{n-1}(G^2) = \left\{x_0^{n-1}\right\}, \tag{6.6}$$

затем формируется их декартово произведение $E' = E^1 \times E^2$, а после этого образуется общее $\mathcal{C}$-множество перестановок из E'. Множество, которое образуется в результате, будет в точности $CE_n\,(x^0, r)$.

Приведем еще один способ формирования множества (6.2) из $\mathcal{C}$-множества $(0-1)$-перестановок $B_n(1)$. Рассмотрим n бинарных $\mathcal{C}$-множеств B_1' осуществим над ними операцию декартового произведения и прямой суммы, обозначив результирующие $\mathcal{C}$-множества E^1, E^2 соответственно. Нетрудно видеть, что в первом случае снова будет получено бинарное $\mathcal{C}$-множество $E^1 = B_n'$. А во втором будет образовано $\mathcal{C}$-множество вершин гипероктаэдра $E^2 = CE_n\left(\mathbf{0}, 1\right)$.

Если $x^0 = \mathbf{0}$, для множества (6.2) и многогранника (6.1) будем использовать сокращенное обозначение:

$$CE_n\left(\mathbf{0}, r\right) = CE_n\left(r\right), \ CP_n\left(\mathbf{0}, r\right) = CP_n\left(r\right);$$

если к тому же $r = 1$, будем опускать оба параметра:

$$CE_n\left(\mathbf{0}, 1\right) = CE_n, \ CP_n\left(\mathbf{0}, 1\right) = CP_n.$$

Отметим, что многогранник CP_n также называют стандартным или единичным гипероктаэдром. Остановимся детальнее на его свойствах, в т.ч. на свойствах $\mathcal{C}$-множества его вершин CE_n, которые затем могут быть легко обобщены на произвольный гипероктаэдр, учитывая связь:

$$CE_n\left(x^0, r\right) = r \cdot CE_n + x^0, \ CP_n\left(x^0, r\right) = r \cdot CP_n + x^0. \tag{6.7}$$

Перечислим основные свойства множества CE_n и многогранника CP_n, некоторые из которых непосредственно следуют из факта двойственности гипероктаэдра CP_n гиперкубу PB_n.

Индуцирующим мультимножеством для них служит:

$$G = \left\{\pm 1, 0^{n-1}\right\}. \tag{6.8}$$

Мощность CE_n:

$$|CE_n| = 2n. \tag{6.9}$$

Это следует как из определения CE_n, так и из факта, что число гиперграней гиперкуба - $2n$.

Число ограничений в несводимом H-представлении CP_n:

$$m = 2^n. \tag{6.10}$$

Данное утверждение также следует из двойственности CP_n и PB_n. А именно, поскольку PB_n имеет 2^n вершин, столько же гиперграней имеет многогранник CP_n.

Функционально-аналитические представления CP_n

Приведем ряд f-представлений многогранника CP_n как в исходном пространстве $\mathbb{R}^n$, так и в расширенном пространстве $\mathbb{R}^{n'}$, $n' > n$.

Наиболее компактно аналитически можно представить CP_n с помощью абсолютной нормы:

$$CP_n = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\|_1 \leq 1\right\}. \tag{6.11}$$

Формула (6.11) задает несводимое f-представление многогранника CP_n в форме одного неравенства $\|x\|_1 \leq 1$ (далее ($\underline{CP_n.\text{IFR}}$)). Оно может быть переписано в форме модульного неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq 1. \tag{6.12}$$

(CP_n.IFR) - кусочно-линейное однокомпонентное функциональное представление единичного гипероктаэдра. Из него можно построить его H-представление, раскрывая знак модуля в (6.12) всеми возможными способами:

$$CP_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq 1, \, \forall \, y \in B'_n\}. \tag{6.13}$$

Линейная система (6.13) содержит 2^n неравенств, каждое из которых определяет гипергрань CP_n. Следовательно, само это H-представление - несводимое (an irredundant H-presentation, далее ($\underline{CP_n.\text{IHR}}$)).

Заметим также, что все гиперграни CP_n представляют собой $n-1$-симплексы, которые являются отражениями единичного симплекса Δ_n относительно всевозможных наборов координатных плоскостей.

Приведем еще одно линейное f-представление многогранника CP_n:

$$CP_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \, \exists y \in \mathbb{R}^n_{>0}, \, \sum_{i=1}^{n} y_i \leq 1, \, -y_i \leq x_i \leq y_i, \, i \in J_n \right\}. \tag{6.14}$$

Поскольку для задания CP_n в форме (6.14) потребовалось введение новых переменных, это расширенное линейное функциональное представление многогранника CP_n ($\underline{CP_n.\text{EHR}}$)).

Если сравнивать эти три приведенных функциональных представлений, то явным преимуществом (CP_n.EHR) по сравнению с представлением (CP_n.IHR), является число его компонент - $2n+1$ против 2^n; представлений (CP_n.IHR), (CP_n.IHR) в сравнении с (CP_n.IFR) - их линейность; наконец, (CP_n.IFR) по отношению к двум оставшимся - его однокомпонентность.

Вершинная расположенность CE_n:

$$CE_n = vert\ CP_n. \tag{6.15}$$

Это следует из определения CE_n как множества вершин гипероктаэдра.

Размерность CP_n

Утверждение 6.1. *Многогранник CP_n – полномерный:*

$$\dim\ CP_n = n. \tag{6.16}$$

В самом деле, нетрудно видеть, что точка $\mathbf{0}$ - внутренняя точка CP_n, а сам этот многогранник задан несводимой системой (6.13), не содержащей уравнений. Согласно замечанию 1.2, это возможно только в случае, если условие (6.16) выполнено.

CE_n - сферически расположенное множество:

$$CE_n \subset S_1\left(\mathbf{0}\right). \tag{6.17}$$

Действительно, легко заметить, что все точки множества CE_n равноудалены от $\mathbf{0}$ на расстояние 1, т.е. оно вписано в единичную сферу и имеет место включение (6.17).

Более того, в силу полномерности CP_n, описанная сфера вокруг CE_n определена единственным образом, т.е.

$$S^{\min} = S^0 = S_1(\mathbf{0}).$$

CE_n - полиэдрально-сферическое множество:

$$CE_n = S_1(\mathbf{0}) \cap CP_n. \tag{6.18}$$

Критерий смежности вершин CP_n

Утверждение 6.2. *$\forall x \in CE_n$ смежными к ней вершинами CP_n будут все остальные точки CE_n, за исключением диаметрально противоположной к x:*

$$\forall x \in CE_n \;\; N(x) = CE_n \setminus \{\pm x\}.$$

Степень регулярности вершины CP_n:

$$\mathcal{R} = 2n - 2, \tag{6.19}$$

в силу (6.9) и утверждения 6.2.

CE_n, CP_n - центрально симметричны относительно 0

Как было отмечено, CP_n - единичный шар в нормированном векторном пространстве, в котором задана норма l_1, а шары в произвольном нормированном пространстве центрально-симметричны. Отсюда следует центральная симметрия CP_n и, соответственно, CE_n.

CE_n - трехуровневое по всем координатам при $n \geq 2$

Из (6.1), (6.4) следует, что $k = |\mathcal{A}|$ можно найти по формуле:

$$k = \begin{cases} 2, & \text{если } n = 1, \\ 3, & \text{если } n \geq 2. \end{cases} \tag{6.20}$$

Поскольку каждая из координат точек CE_n принимает все k значений из $\mathcal{A}$, число уровней этого множества по каждой координате и по координатам в целом можно найти по этой же формуле (6.20). Отсюда имеем:

$$m'(CE_n) = \begin{cases} 2, & \text{если } n = 1, \\ 3, & \text{если } n \geq 2. \end{cases}$$

Имеет место разложение CE_n по координатам вида (1.45)-(1.47), а в проекции образованных в сечениях $\mathcal{C}$-множеств на соответствующие плоскости образуются два одноточечных множества и множество класса CE_n размерности на единицу ниже:

$$CE_n = E^{i,-1} \cup E^{i,0} \cup E^{i,1}, \tag{6.21}$$

где $\forall\, i \in J_n$

- $E^{i,-1} = \{x \in CE_n :\ x_i = -1\} = \{x^{i-}\}$ - точка $\mathbb{R}^n$ такая, что
$$x_i^{i-} = -1;\ x_j^{i-} = 0,\ j \in J_n \backslash \{i\};$$
- $E^{i1} = \{x \in CE_n :\ x_i = 1\} = \{x^{i+}\}$ - точка $\mathbb{R}^n$ такая, что
$$x_i^{i+} = 1;\ x_j^{i+} = 0,\ j \in J_n \backslash \{i\};$$
- $E^{i0} = CE_n \backslash \{x^{i-}, x^{i+}\}$.

Соответственно,
$$E'^{i0} = CE_{n-1},\ i \in J_n.$$

Множество CE_n - двухуровневое:

$$m(CE_n) = 2.$$

Действительно, множество CE_n легко разбивается на два специальных $\mathcal{C}$-множества перестановок:
$$CE_n = E_{n2}(\{1, 0^{n-1}\}) \cup E_{n2}(\{-1, 0^{n-1}\}).$$

Учтем (4.100) и перепишем это условие в терминах булевых $\mathcal{C}$-множеств перестановок:
$$CE_n = B_n\,(1) \cup (-B_n\,(1)) = \pm B_n\,(1)\,. \tag{6.22}$$

Согласно (4.107), $B_n\,(1)$ лежит в гиперплоскости:
$$\Pi^1 = \left\{x \in \mathbb{R}^n :\ x^T \mathbf{e} = 1\right\}, \tag{6.23}$$

соответственно $-B_n(1)$ лежит в параллельной к (6.23) плоскости:

$$\Pi^2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ x^T \mathbf{e} = -1 \right\}. \tag{6.24}$$

Гиперплоскостям Π^1, Π^2 соответствуют гиперграни CP_n, т.е. формулы (6.23), (6.24) определяют разложение CE_n в направлении гиперграней многогранника CP_n. Следовательно, CE_n - двухуровневое множество в направлении нормали $\mathbf{e}$ к этим двух параллельным гиперграням. Аналогично, если зафиксировать любую из оставшихся $2^n - 2$ гиперграней CP_n, половина точек CE_n будет лежать на ней, оставшаяся половина – на параллельной к ней гиперграни. В целом, существует 2^{n-1} различных таких разложений CE_n в направлении нормалей к гиперграням CP_n, по каждому из которых CE_n двухуровневое множество.

6.1.1 Графическая иллюстрация $CE_n,\ CP_n,\ n = 2, 3$

Пример 6.1. Дадим геометрическую интерпретацию гипероктаэдров размерности $n = 2, 3$.

Множество CE_2 и многогранник CP_2 показаны на Рис. 6.1, откуда видно, что CP_2 представляет собой квадрат.

Многогранник CP_3 и множество его вершин CE_3 показаны на Рис. 6.2, откуда видно, что CP_3 - октаэдр. Также заметим, что множество CE_3 совпадает с $\mathcal{C}$-множеством E^{15} (см. Рис. 3.23), представленным в п. 3.4.3, которое было вырезано из $\mathcal{C}$-множества размещений с повторениями $E^1 = \{-1, 0, 1\}^3$ добавлением квадратичного ограничения $x^2 = 1$.

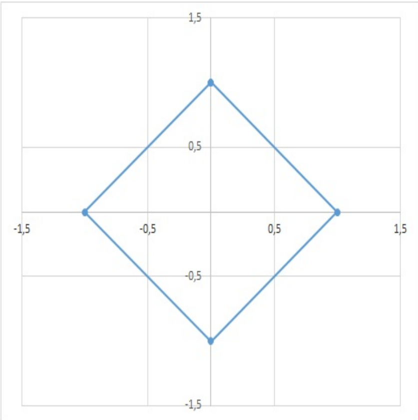


Рис. 6.1: CE_2, CP_2

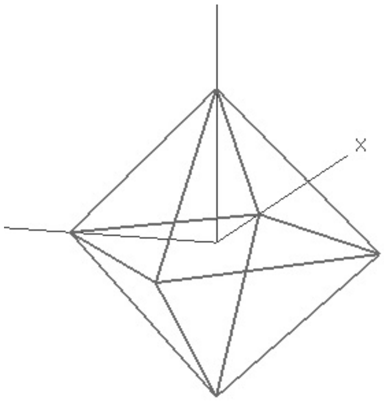


Рис. 6.2: CE_3, CP_3

Как видно, $|CE_2| = 4$, $|CE_3| = 6$, а многогранники CP_2, CP_3 полномерные. Каждая вершина x соединена ребрами со всеми остальными вершинами, кроме противоположной вершины $-x$, а именно, с 2-мя в первом случае и 4-мя - во втором. Одна гипергрань соответствует каждому квадранту (для $n = 2$) и октанту (для $n = 3$). Общее количество гиперграней совпадает с числом 2^n этих областей – 4 для $n = 2$, 8 при $n = 3$.

На примере множеств B_n' и CE_n было продемонстрировано еще одну операцию над вершинно расположенными $\mathcal{C}$-множествами - это переход от них к множеству вершин многогранника, двойственного многограннику их выпуклых оболочек. В данном случае это был переход от PB_n' и CP_n. Особенностью этих множеств и многогранников является то, что все они задаются в пространстве одной и той же размерности.

Также было показано, что, несмотря на очень разный вид выпуклой оболочек B_n' и CE_n, оба множества и их многогранники являются двухуровневыми. Поэтому можно предположить, что указанный переход к двойственному многограннику сохраняет двухуровневость.

Эта гипотеза подтверждается на классе многогранников Ханнера (Hanner polytopes) [59], которые являются обобщением $PB_n^{'}$ и CP_n и относятся к двухуровневым. Рассмотрим их вкратце.

6.1.2 CE_n, CP_n-обобщения

Многогранники Ханнера - это многогранники, которые формируются в результате последовательности декартовых произведений и прямых сумм отрезков $PB_1^{'}$ с последующим взятием их выпуклой оболочки [59].

Так, например, единичный гиперкуб – декартово произведение таких отрезков:

$$PB_n^{'} = \bigotimes_{i=1}^{n} PB_1^{'},$$

а единичный гипероктаэдр - выпуклая оболочка их прямой суммы:

$$CP_n = conv \bigoplus_{i=1}^{n} PB_1^{'}. \tag{6.25}$$

Это же касается и множества вершин этих многогранников:

$$B_n^{'} = \bigotimes_{i=1}^{n} B_1^{'};$$
$$CE_n = \bigoplus_{i=1}^{n} B_1^{'}.$$

Значительная часть многогранников Ханнера представимы выпуклой оболочкой прямой суммы кубов различной размерности. Для этого подкласса многогранников Ханнера будем использовать обозначения $H_n^{'}$, тогда $\forall P \in H_n^{'}\ \exists n_1, ..., n_L : \sum\limits_{l=1}^{L} n_i = n$,

$$P = conv \bigoplus_{l=1}^{L} \bigotimes_{j=1}^{n_l} PB_1^{'} = conv \bigoplus_{l=1}^{L} PB_{n_l}^{'}. \tag{6.26}$$

Так, например, многогранники $PB_n^{'}$, CP_n принадлежат классу $H_n^{'}$ и для них параметры в формуле (6.26):

$$PB_n^{'}:\ L=1,\ n_1=n;$$

$$CP_n:\ L=n,\ n_l=1,\ l\in J_L.$$

В целом же представление о количестве многогранников Ханнера и выделенного среди них подкласса $H_n^{'}$ можно получить из следующего факта: для размерностей $n=\overline{2,6}$ количество различных видов $|H_n|\,/\,\left|H_n^{'}\right|$ - 1/1, 2/2, 4/4, 8/7, 18/11.

Важной особенностью класса H_n, которая была отмечена для множеств $PB_n^{'}$, CP_n, является их двухуровневость:

$$\forall P\in H_n\, m''(P)=m(vert\,P)=2/$$

Более того, разложения множества $E=vert\,(H_n)$ в направлении гиперграней P всегда осуществляется на два подмножества одинаковой мощности. Эта характерная особенность была продемонстрирована в пунктах 5.9, 6.1 на примере множеств $B_n^{'}$, CE_n.

Замечание 6.1. Класс H_n на сегодняшний день недостаточно изучен. Так, помимо гиперкуба и гипероктаэдра, H-представления известны лишь для небольшого числа многогранников Ханнера. Однако, исходя из определения и вышеприведенных свойств декартовых произведения и прямых сумм конечных точечных конфигураций, можно утверждать, что все многогранники H_n - полномерные, а множества их вершин, как минимум, эллипсоидально-

(если не сферически) расположены, вершинно расположены, центрально симметричны и т.п.

Также отметим, что множества вершин многогранников Ханнера представляют собой подкласс $\mathcal{C}$-множеств размещений, порожденных множеством $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1\}$, изучение свойств которых как множеств е-конфигураций представляется перспективным.

6.2 $\mathcal{C}$-множества четных перестановок и четных булевых векторов

Следующие два вершинно расположенных множества построены из их надмножеств подобным образом. Опишем общий принцип их формирования, а затем применим к двум комбинаторным множествам – множеству четных перестановок [81] и множеству четных булевых векторов [22], которые формируются по единому принципу из своих надмножеств - $\mathcal{C}$-множества перестановок без повторений $E_n(G)$ и булевого $\mathcal{C}$-множества B_n соответственно.

Пусть заданы множество E и его собственное надмножество E':

$$E \subset E' \subset \mathbb{R}^n. \tag{6.27}$$

Обо множестве E' известно, что оно вершинно расположено:

$$E' = vert\ P', \text{ где } P' = convE', \tag{6.28}$$

а также задана его мощность $|E'|$. О многограннике P' известно, что он простой, а также задано его H-представление и критерий смежности вершин.

Правило, по которому формируется множество E из E', выглядит следующим образом: для произвольной $x \in E$ все смежные к ней вершины P' (т.е. те, что отстоят от нее на расстояние 1) не принадлежат E, а те, что отстоят от нее на расстояние два, – принадлежат:

$$\forall x \in E \; N'(x) \cap E = \emptyset. \tag{6.29}$$

Необходимо исследовать указанные свойства множества E и многогранника $P = conv\, E$, а именно, определить $|E|$, построить H-представление многогранника P, сформулировать критерии его вершин и смежности вершин, а также найти их степень регулярности.

Критерий вершины P

В силу (6.27), (6.28), E - вершинно расположено как подмножество вершинно расположенного множества E':

$$E = vert\ P,$$

т.е. критерием вершины P будет принадлежность точки множеству E.

H-представление P

Введем обозначения, подобные (1.53), (1.66), для множества вершин многогранника P' - $V' = vert\ P'$ - и смежных вершин к произвольной его точке:

$$\forall x \in V' \; N'(x) = \left\{ y \in V' : \; y \underset{P'}{\leftrightarrow} x \right\}.$$

С учетом формулы (6.28), данное условие представим в виде:

$$\forall x \in E' \; N'(x) = \left\{ y \in E' : \; y \underset{P'}{\leftrightarrow} x \right\}.$$

Формализуем способ формирования множества E из E':

$$\begin{aligned} &\forall x \in E \; N'(x) \not\subset E, \\ &N(x) = \left\{ y \in E' : \; y \underset{P}{\leftrightarrow} x \right\} = \left\{ y \in E' : d_{P'}(x, y) = 2 \right\}, \end{aligned} \tag{6.30}$$

иначе говоря,

$$\forall x, y \in E \; d_P(x, y) = 1 \Leftrightarrow d_{P'}(x, y) = 2, \tag{6.31}$$

где $d_{[.]}(x, y)$ - расстояние между вершинами x, y в многограннике [.].

Пусть $\mathbf{H}'$ - заданная по условию линейная система ограничений P'. Построим из нее систему $\mathbf{H}$ линейных ограничений P, дополняя $\mathbf{H}'$ правильными отсечениями точек $\overline{E} = E' \backslash E$.

Для произвольной точки $y \in \overline{E}$ определим ее окрестность $N'(y)$ и построим плоскость через точки $N'(y)$:

$$\pi(y) = \left\{ x : \; a_y^T x = b_y \right\} : \; N'(x) \subset \pi(y). \tag{6.32}$$

Затем формируем правильное отсечение точки y плоскостью $\pi(y)$:

$$\Pi(y) = \left\{ x : \; a_y^T x \le b_y \right\} : \; a_y^T y > b_y. \tag{6.33}$$

Объединив теперь $\forall y \in \overline{E}$ неравенства (6.33) в систему:

$$\left\{\Pi\left(y\right) = \left\{x:\ a_y^T x \leq b_y\right\}\right\}_{y \in \overline{E}} \tag{6.34}$$

и дополнив ее системой ограничений $\mathbf{H}'$, получаем искомое H-представление $\mathbf{H}$ многогранника P.

Пусть $\mathbf{\Delta}$ - порядок[1] линейной системы ограничений $\mathbf{H}'\backslash\mathbf{H}$. Тогда по построению $\mathbf{\Delta} = |\mathbf{H}| - |\mathbf{H}'| = |\mathbf{H}| - \left|\overline{E}\right|$.

Так, если

$$|E| = \left|\overline{E}\right|, \tag{6.35}$$

то

$$\mathbf{\Delta} = \tfrac{|E'|}{2}. \tag{6.36}$$

$$|\mathbf{H}| = |\mathbf{H}'| + \tfrac{|E'|}{2}. \tag{6.37}$$

Замечание 6.2. Из построения системы (6.34) видно, что все входящие в нее ограничения – существенные. Однако если дополнить ее несводимой системой $\mathbf{H}'$ многогранника P', новая система уже может содержать избыточные ограничения. Таким образом, вопрос о сводимости системы $\mathbf{H}$ и формирования несводимого H-представления P требует отдельного изучения.

Замечание 6.3. Еще один вопрос, который при этом возникает, может ли вся система ограничений $\mathbf{H}'$ быть избыточной в $\mathbf{H}$. Ответ на него см. в примере 6.1.

[1] число ограничений в системе

Критерий смежности вершин P

Критерий смежности вершин P запишем, исходя из (6.30):

$$\forall x \in E \; N(x) = \left\{ x \in E : d_{P'}(x, y) = 2 \right\}.$$

Поскольку по условию критерий смежности вершин P' известен, можно сформулировать критерий смежности вершин P следующим образом.

Утверждение 6.3. *Для любой $x \in E$ его окрестностью $N(x)$ будет множество смежных вершин многогранника P' к смежным к точке x, из которого исключены x и его окрестность $N'(x)$.*

Следствие 6.1. *Если P' такой, что $\forall x \in E$ $N'(x)$ - попарно несмежны, т.е.*

$$\forall x \in E \, \forall y, y' \in \; N'(x), \; y \neq y' \; \Rightarrow y \nleftrightarrow y', \tag{6.38}$$

тогда для любой $x \in E$ окрестностью $N'(x)$ является множество смежных к смежным вершинам к x многогранника P', отличные от x.

Перейдем к следующей поставленной задаче - определение степени регулярности вершин P:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(x) = |N(x)| \; (x \in E).$$

Здесь же отметим следующий момент - если в результате отсечений размерность многогранника не уменьшилась, т.е. если

$$\dim \; P' = \dim \; P, \tag{6.39}$$

то, в силу простоты P', при переходе от P' к P степени вершин не могут уменьшиться, т.е.

$$\forall\, x \in E\; \mathcal{R}\left(x\right) \geq \mathcal{R}'\left(x\right). \tag{6.40}$$

В частности, если все вершины P имеют одинаковую степень регулярности $\mathcal{R}$, то, в силу (6.39) и простоты многогранника P', будет справедлива оценка:

$$\mathcal{R} \geq \mathcal{R}' = \dim\ P.$$

Перейдем к изучению конкретных комбинаторных множеств, построенных по данному принципу.

6.2.1 Множество четных евклидовых конфигураций перестановок

Пусть x - элемент общего множества перестановок $E_n\left(G\right)$. Говорят, что i-я и j-я координаты точки x находятся в инверсии (an inversion) [11], если $i < j$ и при этом значение x_i больше x_j, т.е. значение координаты x, стоящей слева, больше значения координаты, стоящей справа.

Пусть E' - $\mathcal{C}$-множество перестановок без повторений:

$$E' = E_n(G) \tag{6.41}$$

По признаку четности и нечетности числа инверсий, точки E' могут быть разделены на два класса - элементы с четным и элементы с нечетным числом инверсий.

Подмножество множества $E_n\left(G\right)$ с четным числом инверсий будем называть $\mathcal{C}$- множеством четных перестановок (без повторений) (the even permutation (without repetitions) $\mathcal{C}$-set) и обозначим $E_n^e(G)$. Соответственно, его дополнение назовем $\mathcal{C}$-множеством нечетных перестановок (the odd permutation $\mathcal{C}$-set):

$$E_n^o(G) = E_n(G) \backslash E_n^e(G).$$

Элементы множества $E_n^e(G)$ будем называть евклидовыми конфигурациями четных перестановок (even permutation e-configurations), а элементы $E_n^o(G)$ - евклидовыми конфигурациями нечетных перестановок (odd permutation e-configurations).

Нетрудно видеть, что произвольная четная е-конфигурация перестановок удовлетворяет условию:

$$x \in E_n^e(G) \;\Rightarrow\; \prod_{1<i<j\le n} (x_j - x_i) > 0, \tag{6.42}$$

а нечетная е-конфигурация перестановок -

$$x \in E_n^e(G) \;\Rightarrow\; \prod_{1<i<j\le n} (x_j - x_i) < 0. \tag{6.43}$$

Учитывая (6.42), (6.43), множество $E_n^e(G)$ можно определить как подмножество $E_n(G)$, удовлетворяющее условию:

$$\prod_{1<i<j\le n} (x_j - x_i) > 0,$$

а множество $E_n^o(G)$ - как подмножество точек $E_n(G)$, удовлетворяющих условию:

$$\prod_{1<i<j\leq n}(x_j - x_i) < 0.$$

Для определения, что конечная точечная конфигурация $E \subset \mathbb{R}^n$ является множеством четных e-конфигураций, можно воспользоваться признаком:

$$\forall\, x \in E \prod_{1<i<j\leq n}(x_j - x_i) > 0,\ \tilde{A}(x) = \tilde{A},$$

где $\tilde{A}$ - индуцирующее множество для E. Соответственно, E будет множеством нечетных e-конфигураций, если:

$$\forall\, x \in E \prod_{1<i<j\leq n}(x_j - x_i) < 0,\ \tilde{A}(x) = \tilde{A}.$$

При $n > 1$ количество элементов в $E_n\,(G)$ - четное и ровно половина его элементов – четные e-конфигурации перестановок, оставшаяся половина – нечетные:

$$\left|E_n^e\,(G)\right| = \left|E_n^o\,(G)\right|. \tag{6.44}$$

Изучим свойства множества $E_n^e\,(G)$, при этом заметим, что они могут быть переформулированы для $E_n^o\,(G)$.

Некоторые из нижеприведенных свойств следуют из включения:

$$E_n^e\,(G) \subset\ E_n\,(G)\,, \tag{6.45}$$

остальные - специфические свойства $E_n^e\,(G)$.

Также перечислим некоторые свойства многогранника четных перестановок (the even permutation polytope):

$$\Pi_n^e(G) = conv\ E_n^e(G)\,,$$

который будет комбинаторно эквивалентен многограннику нечетных перестановок (the odd permutation polytope):

$$\Pi_n^o(G) = conv\ E_n^o(G)\,.$$

Мощность $E_n^e(G)$:

- $|E_1^e(G)| = 1$,
- $\forall\, n > 1$
$$|E_n^e(G)| = \frac{n!}{2}, \tag{6.46}$$
  что является следствием из (4.50) и (6.44).

Вершинная расположенность $\Pi_n^e(G)$:

$$E_n^e(G) = vert\ \Pi_n^e(G)\,.$$

В самом деле, $E_n^e(G)$ - вершинно расположено как подмножество $E_n(G)$.

$E_n^e(G)$ - лежит в гиперплоскости

$E_n^e(G)$ лежит в той же плоскости (4.52), что и множество $E_n(G)$.

$E_n^e(G)$ - сферически расположенное

В силу (6.45), множество $E_n^e(G)$, как и $E_n(G)$, вписано в семейство гиперсфер (4.10) и семейство $n-2$ сфер (4.4), (4.10).

$E_n^e(G)$ - полиэдрально-сферическое множество:

$$E_n^e(G) = \Pi_n^e(G) \cap S_r(\mathbf{a}),$$

где гиперсфера $S_r(\mathbf{a})$ задана уравнением (4.10).

Принцип построения $E_n^e(G)$ из $E_n(G)$

Утверждение 6.4. *Множество $E_n^e(G)$ построено из $E_n(G)$ по принципу, описанному в п. 6.2, где E' - множество вида* (6.41),

$$E = E_n^e(G)\,,\ \overline{E} = E_n^o(G)\,. \tag{6.47}$$

В самом деле, произвольная $x \in E_n^e(G)$ - четная е-конфигурация перестановок, в то время как все смежные к ней вершины многогранника $P' = \Pi_n(G)$ образуются из нее одной транспозицией соседних элементов $S(G)$ и, соответственно, отличаются одной инверсией. Следовательно, все будут нечетными е-конфигурациями перестановок, т.е. элементами $\overline{E}$.

Воспользуемся теперь результатами п. 6.2, чтобы сформулировать некоторые свойства $\Pi_n^e(G)$, $E_n^e(G)$.

H-представления $\Pi_n^e(G)$

Теорема 6.1. *[81] Многогранник $\Pi_n^e(G)$ задается линейной системой ограничений многогранника $\Pi_n(G)$, дополненной следующими неравенствами:*

$$\sum_{i=1}^{n} c_{\pi_i} x_i \geq \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \frac{\delta_G}{g_i - g_{i-1}}, \ \pi \in E_n^o, \tag{6.48}$$

где $E_n^o = E_n^o(J_n)$,

$$\begin{aligned} &\delta_G = (g_2 - g_1)(g_n - g_{n-1}); \\ &c_1 = g_n, \ c_2 = g_{n-1}; \ c_i = c_{i-1} - \frac{\delta_G}{g_i - g_{i-1}}, \ i \in J_n \backslash J_2. \end{aligned} \tag{6.49}$$

Замечание 6.4. Построив отсечение (6.33) одной точки $y \in E_n^o(G)$, нетрудно заметить, что остальные отсечения могут быть построены из него соответствующими перестановками коэффициентов, что и видно из формулы (6.48).

Замечание 6.5. Дополняя ($\Pi_n(G)$.IHR) неравенствами (6.48), получаем некоторое, не обязательно несводимое, H-представление многогранника $\Pi_n^e(G)$ (далее ($\Pi_n^e(G)$.HR)). Здесь же отметим, что, поскольку каждое ограничение (6.48) отсекает различные нечетные e-конфигурации перестановок, все эти ограничения в представлении ($\Pi_n^e(G)$.HR) будут существенными.

Число ограничений в ($\Pi_n^e(G)$.HR):

$$m = 2^n - 1 + \frac{n!}{2} \tag{6.50}$$

В самом деле, в обозначениях (6.47) $|\mathbf{H}|$, $|\mathbf{H}'|$, $\mathbf{\Delta}$ - порядок систем ограничений многогранников $\Pi_n(G)$, $\Pi_n^e(G)$ и полиэдра (6.48) соответственно. Поскольку условие (6.35) выполнено и обращается в (6.44), для определения m можно воспользоваться формулами (4.55), (6.36), в результате чего получим $m = 2^n - 1 + \frac{|E_n(G)|}{2} = 2^n - 1 + \frac{n!}{2}$ и приходим к формуле (6.50).

Замечание 6.6. Поскольку, как было отмечено, все ограничения (6.48) существенны, несводимое H-представление $\Pi_n^e(G)$ содержит не менее $\frac{n!}{2}$ ограничений, т.е. их число неполиномиально зависит от n.

Замечание 6.7. Формула (6.48) определяет некоторый полиэдр, крайними точками которого является, в частности, множество $E_n^e(G)$. Как будет показано в примере 6.7, для $n = 4$ это будет многогранник, половину вершин которого которого составляет $E_n^e(G)$. Предположительно, в общем случае (6.48) также задает многогранник, а изучение его свойств и свойств множества его вершин может представлять интерес.

Критерий смежности вершин $\Pi_n^e(G)$

Перепишем условие (6.31) для данного случая:

$$\forall x, y \in E_n^e(G) \;\; d_{\Pi_n^e(G)}(x, y) = 1 \Leftrightarrow d_{\Pi_n(G)}(x, y) = 2. \tag{6.51}$$

Воспользовавшись критерием вершин $\Pi_n(G)$, представим условие (6.51) в терминах транспозиций координат вершин.

Утверждение 6.5. *Вершинами многогранника $\Pi_n^e(G)$, смежными к $x \in \Pi_n^e(G)$, являются все e-конфигурации перестановок, полученные из нее двумя транспозициями различных последовательных компонент $S(G)$.*

Действительно, воспользуемся критерием смежности вершин многогранника $\Pi_n(G)$ и следствием 6.1. Условие (6.38) выполнено, поскольку любые две вершины $\Pi_n(G)$, смежные к вершине x, отличаются различными транспозициями, соответственно, не являются смежными между собой. Требование наличия двух транспозиций различных последовательных компонент $S(G)$ точки x обеспечивает формирование всех смежных к смежным вершин к точке x, за исключением самой x.

Степень регулярности вершин $\Pi_n^e(G)$

Теорема 6.2. *Степень регулярности вершин* $\Pi_n^e(G)$ *равна:*

$$\mathcal{R} = \frac{(n+1)(n-2)}{2} = \frac{n^2-n-2}{2}. \tag{6.52}$$

Доказательство. Воспользуемся свойствами чисел Махониана (Mahonian numbers) $T(n,k)$, которые выражают число перестановок из n чисел с k инверсиями (the number of n-permutations with k inversions) [73]. Согласно утверждению 6.5, $\mathcal{R} = T(n,\ 2)$. Чтобы найти эту величину, воспользуемся следующими свойствами чисел Махониана:

$$T(1,1) = 0,\ T(i,0) = 1;\ T(i,j) = 0 \text{ при } j < i; \tag{6.53}$$

$$T(n,k) = T(n,k-1) + T(n-1,k) - T(n-1,k-n). \tag{6.54}$$

При $k=1$, в результате применения (6.53) к (6.54) отсюда получаем:

$$\begin{gathered}T(n,1)=T(n,0)+T(n-1,1)=1+T(n-1,1)=\\ =2+T(n-2,1)=\ldots=(n-1)+T(1,1)=n-1.\end{gathered} \tag{6.55}$$

Теперь воспользуемся формулами (6.53)-(6.55) для $k=2$:

$$\begin{gathered}\mathcal{R}=T(n,2)=T(n,1)+T(n-1,2)=n-1+T(n-1,2)=\\ =n-1+(n-2+T(n-2,2))=\ldots=(n-1)+\ldots+\\ +3+T(n-2,2)=2+\ldots+(n-1)=1/2(n+1)(n-2).\end{gathered}$$

Получена в точности формула (6.52). □

Размерность $\Pi_n^e(G)$

Поскольку $|E_2(G)|=2$, то $|E_2^e(G)|=1$, следовательно, многогранник $\Pi_2^e(G)$ вырожден в точку и имеет размерность 0. Для больших размерностей, размерность $\Pi_n^e(G)$ не уменьшается по сравнению с $\Pi_n(G)$.

Теорема 6.3. *Если $n\geq 2$, то многогранник $\Pi_n^e(G)$ – $n-1$-мерный:*

$$\dim\,\Pi_n^e(G)=n-1. \tag{6.56}$$

Здесь можно воспользоваться доказательством теоремы 4.8, которое легко переносится на $\Pi_n^e(G)$. В самом деле, поскольку точка (4.34) лежит в плоскости (4.4) и удовлетворяет всем ограничениям (6.48) как строгим неравенствам, она является внутренней точкой $\Pi_n^e(G)$ в аффинном подпространстве (4.4).

Сфера $S^{\min}$

Утверждение 6.6. *Если $n \geq 3$ сфера $S^{\min}$ минимального радиуса для $E_n^e(G)$ задается параметрами* (4.12), (4.13), *т.е. совпадает с минимальной сферой, описанной вокруг $E_n(G)$.*

Доказательство непосредственно следует из (6.56) и того факта, что в аффинном подпространстве (4.4) гиперсфера, описанная вокруг $E_n^e(G)$, - единственна. Это же касается $E_n(G)$. В силу (6.45) эти гиперсферы совпадают, следовательно, они задаются условиями (4.12), (4.13).

Симметричные $E_n^e(G)$, $\Pi_n^e(G)$

Среди симметричных множество класса $E_n(G)$ выделим те, которые после удаления нечетных е-конфигураций перестановок сохраняет центрально симметричность множества.

Утверждение 6.7. $E_n^e(G)$, $\Pi_n^e(G)$ - *центрально симметричны тогда и только тогда, когда G удовлетворяет условию* (4.58) *и*

$$\exists n' \in \mathbb{N}: \; n(n-1) = 4n'. \tag{6.57}$$

В самом деле, выполнение условия (4.58) обеспечивает, что $\forall\, x \in E_n^e(G)$ точка y, симметричная x относительно центра описанной сферы минимального, будет элементом $E_n(G)$. Для того, чтобы было выполнено $y \in E_n^e(G)$, необходимо, чтобы число инверсий координат y было четным. Не ограничивая общности, можно считать что в качестве x выбрана точка $x = (g_1, ..., g_n)$, соответственно, $y = (g_n, ..., g_1)$ - диаметрально противоположна к ней. Все координаты y попарно находятся в инверсии, общее их число $n(y) = C_n^2$ и оно четно тогда и только тогда, когда $n(n-1)$ кратно четырем, т.е. когда выполнено (6.57).

В заключение этого пункта кратко остановимся на свойствах множества четных перестановок из первых n натуральных чисел.

$\mathcal{C}$-множество E_n^e

$\mathcal{C}$-множество

$$E_n^e = E_n^e\left(J_n\right)$$

четных перестановок из первых n натуральных чисел имеет ряд особенностей по сравнению с произвольным множеством класса $E_n^e(G)$, в частности, система (6.48) упрощается до:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i \geq \sum_{i=1}^{n} (n-i+1) x_i - 1,\ \pi \in E_n^o\left(J_n\right). \tag{6.58}$$

Соответственно, многогранник четных перестановок $\Pi_n^e = conv\ E_n^e$ задается системой (4.65), (6.58).

Для центральной симметричности E_n^e, Π_n^e достаточно выполнения условия (6.57).

Разложение множества E_n^e по координатам будет основано на формуле (4.59). В проекциях на плоскости, параллельные координатным, образуются множества, порождаемые J_n с исключенным одним элементом. Характер этих комбинаторных множеств, в частности, являются ли они $\mathcal{C}$-множествами четных или нечетных перестановок, - это может быть предметом дальнейшего исследования.

Графическая иллюстрация $E_n^e(G)$, $\Pi_n^e(G)$ $(n = 3, 4)$

Пример 6.2. Покажем, что представляют собой множество E_3^e и многогранник Π_3^e.

Множество E_3^e содержит 3 четные е-конфигурации перестановок:

$$E_3^e\left(J_3\right) = \left\{(1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1)\right\}.$$

Оно образовано из $\mathcal{C}$-множества перестановок E_3 исключением трех е-конфигураций нечетных перестановок (см. Рис. 6.3).

Многогранник Π_3^e - 2-симплекс, более того, - это равносторонний треугольник.

Поскольку подсистема (6.58) содержит три существенных ограничения (см. замечание 6.5), все неравенства (4.65), описывающие многогранник Π_3, являются избыточными для Π_3^e. Соответственно, (4.62), (6.58) – несводимая система ограничений многогранника Π_3^e, проекция которого на плоскость $x_3 = 0$ изображена на Рис. 6.3.

Как равносторонний треугольник Π_3^e имеет оси симметрии, однако центрально симметричным не является, что подтверждается тем, что условие (6.57) здесь не выполнено.

Пример 6.3. Пусть $G = \{1, 2, 4\}$. Здесь $E_3^e\left(G\right)$ также состоит из трех четных перестановок:

$$E_3^e\left(G\right) = \left\{(1, 2, 4), (4, 1, 2), (2, 4, 1)\right\}.$$

Многогранник Π_3^e представляет собой разносторонний треугольник.

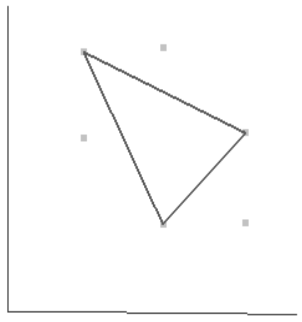


Рис. 6.3: E_3^e, Π_3^e

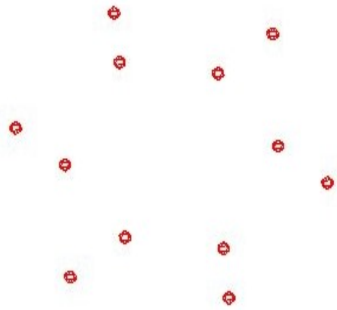


Рис. 6.4: Проекция E_4^e

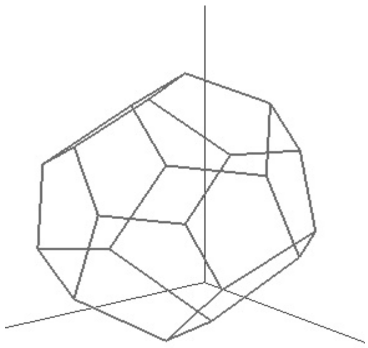


Рис. 6.5: Проекция P''

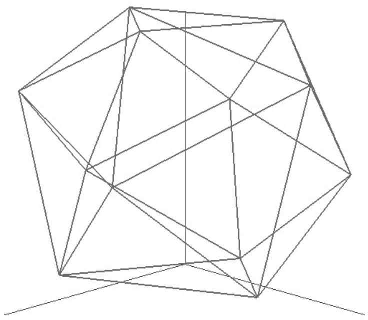


Рис. 6.6: Проекция Π_4^e

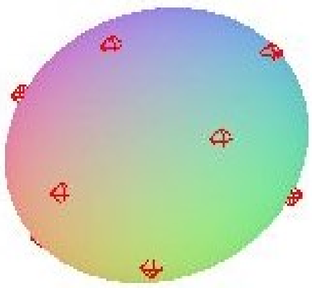


Рис. 6.7: $Pr_{x_4=0}E_4^e$ и описанный эллипсоид

Пример 6.4. Рассмотрим множество E_4^e и покажем его на Рис. 6.4. Продемонстрируем некоторые из его свойств, в т.ч. свойства его выпуклой оболочки.

Мощность E_4^e:

$$|E_4^e| = \frac{1}{2}|E_4| = \frac{4!}{2} = 12.$$

Построим многогранник Π_4^e, учитывая, что его размерность три. Множество его вершин совпадает с E_4^e и, согласно формулы (6.52), все они имеют степень регулярности $\mathcal{R} = \frac{4^2-4-2}{2} = 5$, что видно на Рис. 6.6.

Построим для начала область P'', заданную системой $\mathbf{\Delta}$, а именно, 12-ю неравенствами (6.58), и проверим, не будет ли она искомым Π_4^e как это было в Примере 6.2.

Из Рис. 6.5 видно, что проекция P'' представляет собой додекаэдр (см. Приложение A). Поскольку этот многогранник простой и все его вершины имеют степень регулярности 3, а искомый многогранник – 5, то наше предположение о том, что многогранник четных перестановок на данном этапе уже построен, ошибочно. Добавив к системе P'' ограничения Π_4, получаем искомый многогранник Π_4^e, проекция которого на плоскость $x_4 = 0$ показана на Рис. 6.6. Он представляет собой икосаэдр (см. Приложение A). Число граней этого икосаэдра, как и правильного икосаэдра, равно 20. Таким образом, вдобавок к 12-ти ограничениям (6.58), восемь из $2^4 - 2 = 14$-ти ограничений многогранника Π_4 являются существенными ограничениями Π_4^e, остальные шесть – избыточны.

Нетрудно видеть, что данный икосаэдр - центрально симметричен. Это же подтверждается выполнением условия (6.57): в данном случае $n(n-1) = 12$ кратно четырем, т.е. E_4, Π_4 - центрально симметричны относительно точки $\mathbf{a}^{\min}$, определяемой параметром $a^{\min}$ вида (4.12).

В рассматриваемом случае справедливо замечание 4.9 - проекция на $x_4 = 0$ не ортогональная, поэтому в ходе построения были получены не Платоновы тела, а комбинаторно эквивалентные к ним многогранники. При построении ортогональной проекции были бы получены правильные додэкаэдр и икосаэдр.

Исследуем поверхностную расположенность множества E', полученного в проекции E_4^e на плоскость $x_4 = 0$ - $E' = Pr_{x_4=0}E_4^e$. В проекции на эту плоскость множества перестановок E_4 образуется множество 3-размещений $E'' = E_4(J_4)$, которое является эллипсоидально расположенным согласно теоремы 5.8. Соответственно, E' как его подмножество будет также эллипсоидально расположенным.

Покажем это. С этой целью запишем уравнение сферы S^{min} для E'': $n = 4$, $S_1 = 10$, $a = \frac{5}{2}$,

$$S^{min} : (x_1 - 5/2)^2 + (x_2 - 5/2)^2 + (x_3 - 5/2)^2 + (x_4 - 5/2)^2 = 5. \quad (6.59)$$

Она же будет описанной сферой и для E'.

Гиперплоскость, на которой лежат E', E'':

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10. \quad (6.60)$$

Выразив из (6.60) переменную x_4 и подставив в (6.60), получаем:

$$2x_1^2 - 20x_1 + 2x_2^2 - 20x_2 + 2x_3^2 - 20x_3 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 70 = 0. \quad (6.61)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (6.61) задает эллипсоид. Вместе со множеством E', этот эллипсоид показан на Рис. 6.7, откуда видно, что E' в самом деле эллипсоидально- и вершинно расположено. Одновременно показно, что множество вершин икосаэдра, изображенное на Рис. 6.6, - эллипсоидально расположенное множество, а сам этот икосаэдр вписан в эллиспоид (6.61).

Пример 6.5. Исследуем множество четных перестановок, индуцируемые множеством $G = \{1, 2, 4, 7\}$. Это множество в проекции на $x_4 = 0$ показано на Рис. 6.8, откуда видно, что множество $E' = Pr_{x_4=0}E_4^e(G)$ не является не только центрально симметричным, но и не имеет осей и плоскостей симметрии. Это же относится и к его выпуклой оболочке $P' = conv\, E'$ и исходным множеству $E_4^e(G)$ и многограннику $\Pi_4^e(G)$, на базе которых построены E', P'. Между тем, многогранник $\Pi_4^e(G)$ будет комбинаторно эквивалентен Π_4^e, а тот, в свою очередь, икосаэдру, показанному на Рис. 6.7. Это означает, что P' также будет икосаэдром. Продемонстрируем эллиспоидальную расположенность множества E', производя вычисления, аналогичные приведенным в примере 6.3:

$$n = 4,\ S_1 = 10,\ a = \tfrac{7}{2},$$
$$S^{min}:\ (x_1 - 7/2)^2 + (x_2 - 7/2)^2 + (x_3 - 7/2)^2 + (x_4 - 7/2)^2 = 21;$$
$$\text{плоскость } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10.$$

Искомое уравнение описанного эллипсоида:

$$2x_1^2 - 28x_1 + 2x_2^2 - 28x_2 + 2x_3^2 - 28x_3 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 126 = 0,$$

а сам он, совместно с вписанным в него множеством E', показаны на Рис. 6.9.

Вспомогательный многогранник P'' будет задаваться системой из 12-ти неравенств (6.48). После добавления к (6.48) ограничений многогранника перестановок $\Pi_4(G)$ получаем искомый многогранник четных перестановок $\Pi_4^e(G)$.

6.2.2 $\mathcal{C}$-множество четных $(0-1)$-векторов B_n^h

Полугиперкубом (n-полукубом, demihypercube, hemicubes, halfcube)

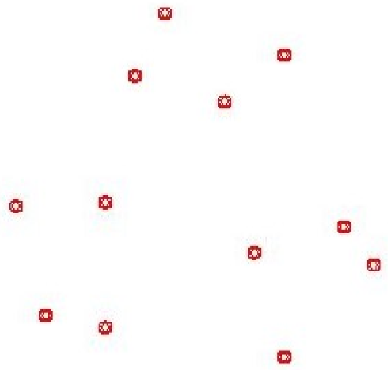


Рис. 6.8: Проекция $E_4^e(G)$

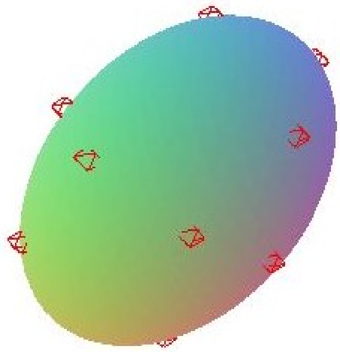


Рис. 6.9: $Pr_{x_4=0}E_4^e(G)$ и описанный эллипсоид

называется выпуклая оболочка n-мерных $(0-1)$-векторов, сумма координат которых четна [22]:

$$DH_n = conv\ B_n^h,$$

где

$$B_n^h = \left\{x \in B_n : \ x^T\mathbf{e} = 2l, \ l \in J^0_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right\}. \tag{6.62}$$

Множество (6.62) будем называть $\mathcal{C}$-множествам четных n-мерных $(0-1)$-векторов ($\mathcal{C}$-множествам четных булевых n-векторов, the even $(0-1)$-set, the even Boolean set).

Полугиперкуб можно также определить как выпуклую оболочку множества:

$$\overline{B}_n^h = B_n \backslash B_n^h = \left\{x \in B_n : \ x^T\mathbf{e} = 2l+1\right\}, \ l \in J^0_{\left[\frac{n}{2}\right]},$$

которое по аналогии будем называть $\mathcal{C}$-множествам нечетных n-мерных $(0-1)$-векторов ($\mathcal{C}$-множествам нечетных булевых n-векторов, the odd $(0-1)$-set, the odd Boolean set).

Элементами множества B_n^h являются e-конфигурации $(0-1)$-размещений с четным количеством единичных координат, а элементами $\overline{B}_n^h$ - е-конфигурации $(0-1)$-размещений с нечетным числом единичных координат. По принципу четности числа единичных координат е-конфигурации осуществим деление всех е-конфигураций $(0-1)$-размещений на четные е-конфигурации $(0-1)$-размещений (четные булевые е-конфигурации размещений, четные $(0-1)$-вектора, even Boolean vectors) и нечетные е-конфигурации $(0-1)$-размещений (нечетные булевые е-конфигурации размещений, нечетные $(0-1)$-вектора, odd Boolean vectors).

В терминах е-конфигураций множество B_n^h можно теперь определить как множество всевозможных четных е-конфигураций $(0-1)$-размещений размерности n, а множество $\overline{B}_n^h$ - как множество всех нечетных таких е-конфигураций.

Признаком, по которому множество $E \subseteq B_n$ четных $(0-1)$-векторов может быть выделено из всего B_n, можно записать в терминах координат его векторов следующим образом:

$$(\forall\, x \in E) \qquad x^T\mathbf{e} \mod 2 = 0,$$

соответственно, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ будет $\mathcal{C}$-множеством четных $(0-1)$-векторов, если выполнены условия:

$$(\forall\, x \in E) \qquad x^T\mathbf{e} \mod 2 = 0,\ \tilde{A}(x) \subseteq \{0, 1\}.$$

Далее такие множества могут быть подразделены на множества четных е-конфигураций $(0-1)$-перестановок и $(0-1)$-размещений.

Аналогично, множество E будет $\mathcal{C}$-множеством нечетных $(0-1)$-векторов, если

$$(\forall\, x \in E) \qquad x^T\mathbf{e} \mod 2 = 1,\ \tilde{A}(x) \subseteq \{0,1\}.$$

Остановимся на свойствах B_n^h и DH_n, отметив при этом, что они легко обобщаются на $\overline{B}_n^h$ и его выпуклую оболочку – нечетный полугиперкуб:

$$\overline{DH}_n = conv\overline{B}_n^h.$$

Некоторые свойства, приведенные ниже, непосредственно следуют из включения:

$$B_n^h \subset B_n, \tag{6.63}$$

остальные являются специфическими свойствами множества B_n^h.

Мощность B_n^h

Во множестве B_n ровно половина элементов – четные $(0-1)$-вектора, остальные нечетные:

$$\left|B_n^h\right| = \left|\overline{B}_n^h\right|.$$

В совокупности с (5.128), отсюда следует, что

$$\left|B_n^h\right| = 2^{n-1}.$$

Разложение B_n^h по множествам $0,1$-перестановок:

$$B_n^h = \bigcup_{l=0}^{[n/2]} B_n\left(2l\right). \tag{6.64}$$

Разложение (6.64) формируется из разложения (5.130) множества B_n по специальным $\mathcal{C}$-множествам перестановок с помощью выбора множеств $B_n\,(m)$ с четным m.

Выделим здесь два случая:

- Случай 6.2.2.1 - n - четное, тогда (6.64) приобретает форму:

$$B_n^h = \bigcup_{l=0}^{n/2} B_n\,(2l)\,,$$

т.е. B_n^h разлагается по семейству из $\frac{n}{2}+1$-го $\mathcal{C}$-множества $(0-1)$-перестановок, первое и последнее из которых вырождены в точку.

- Случай 6.2.2.2 - n - нечетное, для которого (6.64) имеет вид:

$$B_n^h = \bigcup_{l=0}^{(n-1)/2} B_n\,(2l)\,,$$

откуда следует, что B_n^h разлагается в семейство $\frac{n+1}{2}$-го $\mathcal{C}$-множества $(0-1)$-перестановок, первое из которых вырождено в точку, последнее - множество $B_n(n-1)$, состоящее из $n-1$-ой точки.

Отсюда сразу видно, что Случаю 6.2.2.2 отвечает множество B_n^h, заведомо не обладающее центральной симметрией.

Вершинная расположенность B_n^h:

$$B_n^h = vert\ DH_n. \tag{6.65}$$

B_n^h - вершинно расположено как подмножество вершинно расположенного множества B_n.

Н-представление DH_n

Теорема 6.4. *[22] Многогранник DH_n задается системой ограничений (4.110),*

$$\sum_{i\in I} x_i \le |I| - 1 + \sum_{i\notin I} x_i,\ I \subseteq J_n,\ \ |I| = 2l+1,\ l \in \mathbb{Z}_+.$$

(далее (DH_n.HR)).

Замечание 6.8. Как и $E_n^e(G)$, множество B_n^h сформировано из своего надмножества B_n по принципу, описанному в п. 6.2. А именно:

$$E = B_n^h,\ \overline{E} = \overline{B}_n^h,\ E' = B_n.$$

Действительно, если $x \in B_n^h$: $x \in B_n\,(2l)$, то в соответствии с критерием смежности вершин PB_n, все смежные вершины к произвольному четному $(0-1)$-вектору будут нечетными $(0-1)$-векторами. В самом деле, часть смежных к $x \in B_n^h$ вершин образованы $0 \to 1$-заменой и принадлежат $B_n\,(2l+1)$, остальные - $1 \to 0$-заменой и относятся к $B_n\,(2l-1)$, т.е. являются нечетными $(0-1)$-векторами.

Поскольку в данном случае выполнено условие (6.35), здесь применимы результаты замечания 6.2. В частности, дополнительная система (6.34) отсечений точек $\overline{B}_n^h$ имеет порядок $\mathbf{\Delta} = |\overline{B}_n^h| = 2^{n-1}$. Построенное их двух несводимых H-представлений (B_n.IHR) и (6.4) представление (DH_n.HR) может быть сводимым, причем избыточными в нем могут быть все или часть ограничений единичного гиперкуба и только они. Откуда следует следующее свойство: число m ограничений в несводимом представлении DH_n (далее ($\underline{DH_n.\text{IHR}}$) удовлетворяет неравенству:

$$2^{n-1} \leq m \leq 2n + 2^{n-1},$$

т.е. заведомо неполиномиально.

Критерий смежности вершин DH_n

Теорема 6.5. *Вершинами многогранника DH_n, смежными с $x \in B_n^h$, являются все $(0-1)$-вектора, расстояние Хэмминга до которых - два.*

$$\forall x, y \in B_n^h \; x \underset{DH_n}{\Leftrightarrow} y \Leftrightarrow Hd\,(x, y) = 2. \tag{6.66}$$

Доказательство. По принципу построения множества B_n^h из B_n, для него справедливо (6.31), принимающее вид:

$$\forall x, y \in B_n^h \; d_{DH_n}\,(x, y) = 1 \Leftrightarrow d_{PB_n}\,(x, y) = 2. \tag{6.67}$$

В гиперкубе легко определить окрестность любой точки в терминах расстояния Хэмминга:

$$\forall x, y \in B_n \; x \underset{PB_n}{\Leftrightarrow} y \Leftrightarrow d_{PB_n}\,(x, y) = 1 \Leftrightarrow Hd\,(x, y) = 1.$$

Аналогично

$$\forall x, y \in DH_n \ d_{PB_n}(x, y) = 2 \Leftrightarrow Hd(x, y) = 2,$$

что, в совокупности с условием (6.67), и означает, что формула (6.66) справедлива. $\square$

Условие (6.66) можно переформулировать словесно, учитывая что существует лишь три типа вершин, расположенных от заданного $(0-1)$-вектора на расстоянии Хэмминга два:

Следствие 6.2. *Вершинами многогранника DH_n, смежными к $x \in B_n^h$, являются $(0-1)$-вектора, полученные из x одним из трех способов: а) двумя $0 \to 1$-заменами; б) двумя $1 \to 0$ заменами; в) одной $0 \leftrightarrow 1$-транспозицией.*

Степень регулярности вершин DH_n

Теорема 6.6. *Число $\mathcal{R}$ смежных вершин к произвольной вершине DH_n равно:*

$$\mathcal{R} = C_n^2. \tag{6.68}$$

Действительно, рассмотрим четный булевый вектор $x = \mathbf{0}$. Согласно замечанию 6.2, x будет иметь смежные вершины типа а), которые в совокупности образуют множество $B_n(2)$. Их количество можно найти по формуле (4.105) - $|B_n(2)| = C_n^2$.

В силу симметрии гиперкуба, любая другая точка $y \in B_n^h$ будет иметь такое же число смежных, поскольку заменой переменных $y_i \to 1 - y_i$ для ненулевых координат она переводится в x.

Множество B_n^h - сферически расположенное:

$$B_n^h \subset S_r(\mathbf{a}),$$

где гиперсфера $S_r(\mathbf{a})$ задана параметрами (5.110).

Размерность $\Pi_n^e(G)$

Теорема 6.7. $\dim\ DH_2 = 1$, *в остальных случаях многогранник* DH_n *полномерный:*

$$\forall n > 2\ \dim\ DH_n = n. \tag{6.69}$$

В самом деле, точка $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ удовлетворяет всем неравенствам из H-представления (DH_n.HR) строго, т.е. является внутренней точкой DH_n, поэтому, в соответствии с замечанием 1.2, формула (6.69) имеет место. Единственным исключением является случай $n = 2$, когда $|B_2^h| = 2$ и DH_n представляет собой отрезок на плоскости, серединой которого является $\mathbf{a}$.

Вокруг полномерного многогранника DH_n сфера может быть описана единственным образом. В данном случае она существует, задается параметрами (5.110) и является одновременно сферой S^0, $S^{\min}$ для B_n^h.

Следствие 6.3. *Сфера, описанная вокруг* B_n^h, *определена единственным образом и имеет параметры* (5.110).

B_n^h - полиэдрально-сферическое множество:

$$B_n^h = B_n \cap S_{\frac{\sqrt{n}}{2}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right).$$

B_n^h - $[\frac{n+1}{2}]$-уровневое множество:

$$m(B_n^h) = \left[\frac{n+1}{2}\right]. \tag{6.70}$$

Действительно, в направлении нормалей к потенциальным гиперграней, совпадающим с гипергранями куба, число уровней B_n^h - два, как у гиперкуба. В направлении гиперграней, задаваемых существенными ограничениями (6.4), число уровней можно определить из разложений (5.130). Так, для Случая 6.2.2.1 число уровней в разложении $\overline{B}_n^h$ совпадает со значением $\frac{n}{2}$; для Случая 6.2.2.2 эта величина - $\frac{n+1}{2}$. Объединив эти два выражения, получаем формулу (6.70).

Центрально-симметричные случаи B_n^h, DH_n

Утверждение 6.8. *B_n^h, DH_n центрально симметричны тогда и только тогда, когда n - четно.*

Центрально симметричные четные е-конфигурации перестановок соответствуют Случаю 6.2.2.1, а Случай 6.2.2.2 - не центрально симметричным.

Графическая иллюстрация B_n^h, DH_n $(n = 2, 3)$

Учитывая (6.69), геометрическую интерпретацию B_n^h и DH_n дадим для $n = 2, 3$.

Пример 6.6. Начнем с $n = 2$. Множество B_2^h содержит 2 элемента - $(0, 0)$, $(1, 1)$, а многогранник DH_2 - отрезок, натянутый на эти точки (см. Рис. 6.3).

H-представление (DH_n.HR) имеет вид:

$$x_1 - x_2 = 0, \tag{6.71}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \tag{6.72}$$

$$x_1 \leq 1,\ x_2 \leq 1. \tag{6.73}$$

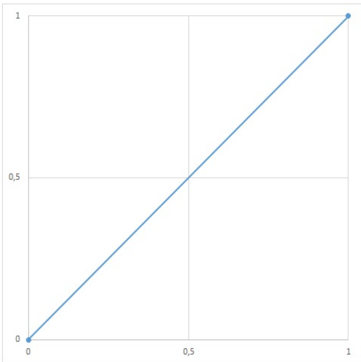


Рис. 6.10: B_2^h, DH_2^h

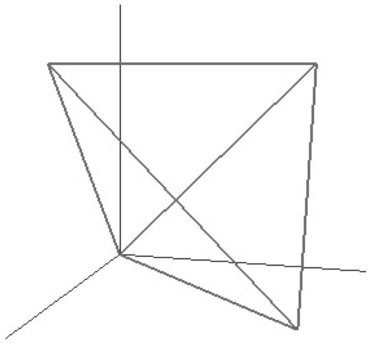


Рис. 6.11: B_3^h, DH_3^h

Это представление, очевидно, сводимо, и в каждой из подсистем (6.72), (6.73) одно ограничение - избыточно. Так, например, (6.71), $0 \leq x_1 \leq 1$ - несводимая система DH_2, т.е. его можно выбрать в качестве (DH_2.IHR). Еще одно несводимое представление - (6.71), $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$.

Пример 6.7. Для $n = 3$ имеем: множество B_3^h состоит из четырех элементов - $(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$. Поскольку DH_3 - полномерный, он представляет собой симплекс (см. иллюстрацию на Рис. 6.5). Этот многогранник не является правильным, но является комбинаторно эквивалентным тетраэдру.

В данном случае (DH_3.HR) имеет вид:

$$x_1 - x_2 - x_3 \leq 0,\ x_2 - x_1 - x_3 \leq 0,$$
$$x_3 - x_1 - x_2 \leq 0,\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 2; \tag{6.74}$$

$$0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1,\ 0 \leq x_3 \leq 1. \tag{6.75}$$

Оно сводимо, поскольку (6.74) включает 4 ограничения и именно они задают DH_3, в то время как все ограничения (6.75) - избыточны. Таким образом, система (6.74) - это (DH_3.IHR).

6.3 Общее множество евклидовых конфигураций перестановок со знаком

Произведение Адамара общего $\mathcal{C}$-множества перестановок $E_{nk}(G)$ из мультимножества G вида (1.5), (1.9) и бинарного $\mathcal{C}$-множества B'_n назовем общим множеством евклидовых комбинаторных конфигураций перестановок со знаком (the general signed permutation $\mathcal{C}$-set, the multiset signed permutation $\mathcal{C}$-set) и обозначим $E^{\pm}_{nk}(G)$:

$$E^{\pm}_{nk}(G) = E_{nk}(G) \circ B'_n. \tag{6.76}$$

Поскольку множество $E^{\pm}_{nk}(G)$ удовлетворяет условиям (2.56) для $E^1 = B'_n$, $E^2 = E_{nk}(G)$, то, согласно замечанию 2.8, при рассмотрении множеств данного класса, не ограничивая общности, будем считать, что выполнено:

$$G \geq 0. \tag{6.77}$$

Это соответствует переходу от E^2 к рассмотрению множества $E^{2'} = E^{\pm}_{nk'}(G')$, индуцированного мультимножеством

$$G' = \{|g_i|\}_{i \in J_n} \tag{6.78}$$

и содержащего $k' = |S(G')|$ различных элементов, а от (6.76) - к формуле (2.57), приобретающей в данном случае вид:

$$E^{\pm}_{nk}(G) = E^{\pm}_{nk'}(G').$$

Так, например, если $G = \{-2, -1, 0, 2, 3\}$, то, поскольку G - множество, то $n = k = 5$. Поскольку G не удовлетворяет условию (6.77), осуществим переход от рассмотрения $E^2 = E_5(G)$ к $E^{2'} = E_{54}(G')$, где $G' = \{2, 1, 0, 2, 3\} = \{0, 1, 2^2, 3\}$ и $k' = |S(G')| = 4$. В результате имеет место $E^{\pm}_{55}(G) = E^{\pm}_{54}(G')$. Поэтому далее, вместо $E = E^{\pm}_{55}(G)$, будем рассматривать множество $E^{\pm}_{54}(G')$. Кроме этого, будем полагать, что если $0 \in G$, то нумерация элементов основы G будет начинаться с нуля.

Введя обозначение n_0 для кратности нулевого элемента в G, это будет означать, что в случае

$$n_0 = 0 \tag{6.79}$$

индуцирующее E мультимножество имеет вид (3.61). Если же условие (6.79) не выполняется и нулевые элементы присутствуют в мультимножестве G, то оно будет иметь вид:

$$G = \left\{0^{n_0}, e_1^{n_1}, ..., e_{k-1}^{n_{k-1}}\right\}, \tag{6.80}$$

где $\sum\limits_{i=0}^{k-1} n_i = n$. Таким образом, в обоих случаях $k = |S(G)|$.

Для того, чтобы избежать рассмотрения вырожденного в точку множества, накладываем ограничение:

$$n_{k'} > 0, \tag{6.81}$$

где

$$k' = \begin{cases} k-1, & \text{если } n_0 > 0, \\ k, & \text{если } n_0 = 0. \end{cases}$$

По аналогии с классификацией множеств класса $E_{nk}(G)$ (см. п. 3.4.1), введем в рассмотрение такие подклассы $E_{nk}^{\pm}(G)$ в зависимости от того, к какому классу принадлежит $E_{nk}(G)$:

1. Если $n = k$, т.е. G — множество, для (6.76) будем использовать сокращенное обозначение $E_n^{\pm}(G)$ и называть его $\mathcal{C}$-множеством перестановок со знаком без повторений, индуцированных G (the signed permutation without repetitions $\mathcal{C}$-set);

2. Если к тому же $G = J_n$, для такого множества будем использовать сокращенную запись $E_n^{\pm}$ и называть просто $\mathcal{C}$-множеством перестановок со знаком без повторений;

3. Если $1 < k < n$, т.е. G — мультимножество, данное множество будем называть $\mathcal{C}$-множеством перестановок со знаком с повторениями,

индуцированных G (the signed permutation with repetitions $\mathcal{C}$-set), индуцированных G;

4. Если $k = 1$ и выполнено условие (6.79), множество $E^{\pm}_{n1}(G)$ будет $\mathcal{C}$-множеством перестановок со знаком с неограниченными повторениями (the signed permutation with unbounded repetitions $\mathcal{C}$-set);

5. Если $k = 2$ и при этом $S(G) = \{0, e_1\}$, т.е. условие (6.79) не выполнено, то множество $E^{\pm}_{n2}(G)$ будем называть специальным $\mathcal{C}$-множеством перестановок со знаком, индуцированных G (the special signed permutation $\mathcal{C}$-set).

Замечание 6.9. Согласно замечанию 2.8, множество (6.76) представляет собой общее множество перестановок из G' вида (6.78), отраженное относительно всех координатных плоскостей, в результате чего формируется множество, имеющее центр симметрии в начале координат. К тому же координатные плоскости являются плоскостями симметрии полученного общего $\mathcal{C}$-множества перестановок со знаком.

Исходя из замечания 6.9, множество (6.76) индуцируется мультимножеством $G^{\pm}$, полученным из G дополнением его мультимножеством $-G$, не изменяя при этом кратность нулевого элемента, т. е.

$$G^{\pm} = \begin{cases} \{\pm G\}, \text{ если } G > 0, \\ \{\pm G\} \backslash \{0^{n_0}\}, \text{ если } G \ngtr 0. \end{cases} \tag{6.82}$$

Соответственно, образующим множеством для $E^{\pm}_{nk}(G)$ будет

$$\mathcal{A} = \begin{cases} \{\pm S(G)\}, \text{ если } G > 0, \\ \{\pm S(G)\} \backslash \{0\}, \text{ если } G \not> 0. \end{cases} \quad (6.83)$$

В первом случае $|G^{\pm}| = 2n$, во втором - $|G^{\pm}| = 2n - n_0 > n$. Поскольку в обоих случаях $|G^{\pm}| > n$, т.е. для индуцирующего мультимножества $G^{\pm}$ выполнено условие (3.47), множество $E = E^{\pm}_{nk}(G)$ представляет $\mathcal{C}$-множество конфигураций размещений, индуцированных $G^{\pm}$, при наличии следующего ограничения: E является произведением Адамара некоторого $\mathcal{C}$-множества перестановок и бинарного $\mathcal{C}$-множества.

Заметим также, что $\mathcal{C}$-множество $E^{\pm}_n$ перестановок со знаком представляет собой в погружение евклидово арифметическое пространство группы перестановок со знаком (the signed permutation group) [3], порожденной группой перестановок из первых n натуральных чисел.

Поскольку при исследовании общего $\mathcal{C}$-множества перестановок $E_{nk}(G)$ всегда можно полагать, что условие (6.77) выполнено, в противном случае можно осуществить сдвиг $G \to G - e_1$, то множество $E^{\pm}_{nk}(G)$ представляет собой обобщение как общего множества перестановок, так и множества $E^{\pm}_n$.

Еще два из рассмотренных выше $\mathcal{C}$-множеств входят в класс (6.76):

- это специальное $\mathcal{C}$-множество размещений с неограниченными повторениями с центром симметрии в начале координат, в частности, бинарное $\mathcal{C}$-множество $B^{'}_n$. В самом деле, $\mathcal{C}$-множество перестановок со знаком с неограниченными повторениями будет в точности совпадать с рассмотренным в п. 5.9 специальным $\mathcal{C}$-множеством размещений с неограниченными повторениями:

$$E_{n1}^{\pm}\left(\{e_1^n\}\right) = \overline{E}_2^n\left(\{-e_1^n, e_1^n\}\right).$$

Соответственно,

$$B_n^{'} = E_{n1}^{\pm}\left(\{1^n\}\right); \tag{6.84}$$

- множество $CE_n\left(e_1\right)$ вершин гипероктаэдра, поскольку, как нетрудно видеть,

$$E_{n2}^{\pm}\left(\left\{0^{n-1}, e_1\right\}\right) = CE_n\left(e_1\right),$$

т.е. специальное $\mathcal{C}$-множество перестановок со знаком, индуцируемое мультимножества, единственный элемент которого отличен от нуля, совпадает с $CE_n\left(e_1\right)$. Соответственно,

$$CE_n = E_{n2}^{\pm}\left(\left\{0^{n-1}, 1\right\}\right). \tag{6.85}$$

Введем в рассмотрение выпуклую оболочку множества (6.76):

$$\Pi_{nk}^{\pm}\left(G\right) = conv\ E_{nk}^{\pm}\left(G\right) \tag{6.86}$$

и назовем ее <u>общим многогранником перестановок со знаком</u> (the general signed permutohedron, the multiset signed permutohedron).

В частности:

- $\Pi_n^{\pm}\left(G\right) = conv\ E_n^{\pm}\left(G\right)$ будем называть <u>многогранниками перестановок со знаком без повторений</u>;

- выпуклую оболочку $\Pi^{\pm}_{n2}(G) = conv\ E^{\pm}_{n2}(G)$ специального $\mathcal{C}$-множества перестановок со знаком будем называть специальным многогранником перестановок со знаком.

Из построения видно, что множество $E^{\pm}_{nk}(G)$ сочетает свойства обоих множеств — $E_{nk}(G)$ и $B^{'}_{n}$, а также их выпуклых оболочек —

$$\Pi_{nk}(G) = conv\ E_{nk}(G)\,,\ PB'_n = conv\ B'_n - \qquad (6.87)$$

общего многогранника перестановок (см. п. 4.1) и гиперкуба (см. п. 5.9). Отметим лишь два из приведенных выше свойств этих множеств, которые будем использовать для $E^{\pm}_{nk}(G)$, — это нейтральность по отношению к знакам и порядку следования координат элементов. Первое свойство является следствием симметрии B'_n, второе - результат участия в формировании исследуемого множества общего $\mathcal{C}$-множества перестановок, для которого операция перестановки координат элементов не выводит из этого множества.

Также свойства $\Pi^{\pm}_{nk}(G)$ должны объединить воедино свойства гиперкуба и гипероктаэдра, которые, как уже упоминалось в п. 6.1, двойственны друг другу. Откуда, в частности, следует, что число вершин $PB^{'}_{n}$ и, соответственно, гиперграней CP_n, равно 2^n, т.е. экспоненциально зависит от n. В свою очередь, число вершин CP_n, а значит, и количество гиперграней $PB^{'}_{n}$ зависят от n полиномиально:

$$\left|vert\ PB^{'}_{n}\right| = \left|B^{'}_{n}\right| = |faces\ CP_n| = 2^n; \qquad (6.88)$$

$$|vert\ CP_n| = |CE_n| = \left|faces\ PB^{'}_{n}\right| = 2n. \qquad (6.89)$$

Главным фактором, на наш взгляд, различия характеристик множеств класса (6.76) и многогранников (6.86) является наличие нулевого элемента в индуцирующем мультимножестве G. Чтобы объединить случай (6.79), когда G имеет форму (3.61) (далее Случай 6.3.1), и случай $n_0 > 0$, при котором G имеет вид (6.80) (в дальнейшем Случай 6.3.2), будем использовать следующее единое обозначение:

$$G = \{0^{n_0}, e_1^{n_1}, ..., e_k^{n_k}\} : \ \sum_{i=0}^{k} n_i = n, \ e_1 > 0, \ n_0 \geq 0, \ n_i > 0, \ i \in J_k. \quad (6.90)$$

Тогда весь класс исследуемых нами общих $\mathcal{C}$-множеств перестановок со знаком представим в виде:

$$E = \begin{cases} E_{nk}^{\pm}(G), \text{ если } n_0 = 0, \\ E_{n,k+1}^{\pm}(G), \text{ если } n_0 > 0. \end{cases} \quad (6.91)$$

Соответственно, выпуклой оболочкой E будет общий многогранник перестановок со знаком:

$$P = \begin{cases} \Pi_{nk}^{\pm}(G), \text{ если } n_0 = 0, \\ \Pi_{n,k+1}^{\pm}(G), \text{ если } n_0 > 0. \end{cases} \quad (6.92)$$

Изучим некоторые свойства множеств класса (6.91) и многогранников вида (6.92).

<u>Мощность множества E</u>

Теорема 6.8. *Мощность множества* (6.91) *исчисляется по формуле:*

$$|E| = C_n^{n_0} \cdot \frac{(n-n_0)!}{\prod\limits_{i=1}^{k} n_i!} \cdot 2^{n-n_0}. \tag{6.93}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение общее $\mathcal{C}$-множество перестановок из G:

$$E^+ = E \cap \mathbb{R}_+^n = \begin{cases} E_{nk}(G), \ n_0 = 0, \\ E_{n,k+1}(G), \ n_0 > 0. \end{cases} \tag{6.94}$$

Выделим три этапа в формировании E, обозначив число способов их осуществить N_1, N_2, N_3 соответственно:

- на <u>первом этапе</u> фиксируются позиции нулевых элементов $x \in E$, что возможно сделать $N_1 = C_n^{n_0}$-мя способами;

- на <u>втором этапе</u> оставшиеся $n - n_0$ положительных элементов $\{e_1^{n_1}, ..., e_k^{n_k}\}$ переставляются, и это осуществимо $N_2 = \frac{(n-n_0)!}{\prod\limits_{i=1}^{k} n_i!}$-мя способами;

- наконец, на <u>третьем этапе</u> осуществляется отражение каждого элемента x образованного множества (6.94) относительно $n - n_0$ координатных плоскостей, соответствующих ненулевым координатам x. В результате чего каждой точке $x \in E^+$ будет соответствовать 2^{n-n_0} точек E. В целом же, множество E^+ увеличится в $N_3 = 2^{n-n_0}$ раз.

По правилу умножения, общее число способов формирования элементов E — $N = N_1 N_2 N_3$, откуда следует формула (6.93). □

Пример 6.8. Продемонстрируем справедливость формулы (6.93) для упомянутых частных случаев общего множества перестановок со знаком - CE_n, $B_n^{'}$. В самом деле, в силу (6.85) подстановка $n_0 = n - 1$ в (6.93) дает в точности формулу (6.89):

$$|E_n| = C_n^{n-1} \cdot 2^1 = 2n.$$

Для $B_n^{'}$ воспользуется формулой (6.84), откуда имеем $n_0 = 0$ и, соответственно, (6.93) обращается в

$$\left|B_n^{'}\right| = C_n^0 \cdot \tfrac{n!}{n!} \cdot 2^n = 2^n$$

и отвечает (6.88).

Рассмотрим еще один частный случай — $G > 0$ — когда мощность $E_{nk}^{\pm}(G)$ также можно легко определить. В формуле (6.94) это соответствует

$$E^+ = E_{nk}(G). \tag{6.95}$$

В данном случае $|E^+| = \frac{n!}{n_1!...n_k!}$ в соответствии с (4.3), а поскольку $n_0 = 0$, то при отражениях E^+ относительно всех координатных осей формируется 2^n взаимно непересекающихся образов E^+, т.е.

$$|E| = |E_{nk}^{\pm}(G)| = 2^n \left|E^+\right| = 2^n \frac{n!}{n_1!...n_k!}. \tag{6.96}$$

В точности это же выражение дает формула (6.93).

Наконец, в качестве последнего примера рассмотрим частный случай (6.91) — $\mathcal{C}$-множество перестановок со знаком $E_n^{\pm}(G)$ из $G > 0$. Для него, за счет отсутствия кратных элементов G, величина (6.96) принимает максимальное возможное значение —

$$\left|E_n^{\pm}(G)\right| = 2^n n!.$$

Отсюда видно, что $\left|E_{nk}^{\pm}(G)\right| \in [2n, 2^n n!]$, причем предельные случаи соответствуют максимальной кратности нулевого элемента ($n_0 = n-1$), минимальной кратности нулевого ($n_0 = 0$) и некратным ненулевым элементам. В данном классе есть множества с числом элементов, зависящих от размерности пространства как полиномиально, так и экспоненциально, причем в первую группу попадает единственное множество $CE_n(e_1)$, мощность которого линейно зависит от n.

Несводимое Н-представление многогранника P

Учитывая структуру E, его симметрию относительно начала координат и способ формирования из общего множества перестановок E^+, построим несводимое H-представление общего многогранника перестановок со знаком.

Для того, чтобы сформулировать теорему о несводимом H-представлении многогранника P, воспользуемся таким представлением общего многогранника размещений, приведенное в теореме 5.4. Также примем во внимание тот факт, что P представим объединением 2^n многогранников, комбинаторно эквивалентных многограннику $\overline{P}$:

$$\overline{P} = P \cap \mathbb{R}^+, \tag{6.97}$$

который представляет собой общий многогранник n-размещений, индуцированный мультимножеством $\overline{G} \supset G$, которое получено из G добавлением стольких нулей, чтобы кратность нулевого элемента достигла n:

$$\overline{G} = G \cup \{0\}^{n-n_0} = \{0^n, g_{n-n_0+1}, ..., g_n\} = \{0^n, e_1^{n_1}, ..., e_k^{n_k}\}. \tag{6.98}$$

Теорема 6.9. *Многогранник* (6.92) *задается несводимой системой неравенств:*

$$\sum_{j\in\omega} |x_j| \leq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1},\ \omega \subseteq J_n,\ |\omega| \notin I = \overline{2, n_k} \cup \overline{n-n_0, n-1}. \tag{6.99}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательное множество $\overline{E}$ — общее $\mathcal{C}$-множество n-размещений из мультимножества $\overline{G}$ вида (6.98). Его параметры следующие:

$$\overline{\eta} = \left|\overline{G}\right| = 2n - n_0,\ S(\overline{G}) = k+1,$$

$$\overline{E} = E^n_{\overline{\eta},k+1}\left(\overline{G}\right).$$

Перейдем к рассмотрению многогранника:

$$\overline{P} = conv\,\overline{E} \tag{6.100}$$

и выпишем его несводимое H-представление (далее ($\underline{\overline{P}.\text{IHR}}$)), учитывая, что он относится к классу общих многогранников размещений, а именно:

$$\overline{P} = \Pi^n_{\overline{\eta},k+1}\left(\overline{G}\right). \tag{6.101}$$

Адаптируя ($\Pi^n_{\eta k}(G)$.IHR) к случаю (6.101), имеем:

$$x \geq \mathbf{0}; \tag{6.102}$$

$$\sum_{j\in\omega} x_j \leq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1},\ \omega \subseteq J_n,\ |\omega| \notin I = \overline{2, n_k} \cup \overline{n-n_0, n-1}. \tag{6.103}$$

Действительно, учитывая (6.98), ограничения подсистемы (5.22) приобретают вид $\sum_{j\in\omega} x_j \leq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1},\ \omega \subseteq J_n$. Согласно теореме 5.4, избыточными в ней являются:

- неравенства (5.22) союзов $|\omega| \in \overline{2, n}$, в результате чего остается только союз (6.102);
- неравенства (5.22) союзов $|\omega| \in \overline{2, n_k}$ и $|\omega| \in \overline{2, n_k} \cup \overline{\eta - n, n-1} = \overline{2, n_k} \cup \overline{n-n_0, n-1}$.

Итак, несводимое H-представление ($\overline{P}$.IHR) имеет вид (6.102), (6.103).

Перейдем к рассмотрению многогранника P. Подобно множеству E', он образуется из многогранника $\overline{P}$ отражением последнего относительно всех координатных плоскостей, в результате чего подсистема (6.103) преобразуется в модульное ограничение (6.99), а (6.102) исчезает. При этом система (6.99) по-прежнему не содержит ни одного избыточного ограничения, поскольку в противном случае, в силу симметрии, это бы означало наличие избыточных ограничений в системе (6.103). □

Пример 6.9. Продемонстрируем теорему 6.9 на примере тех же множеств, что и в примере 6.8. Для B'_n множество I в (6.99) имеет вид:

$$I = \overline{2, n_1} \cup \overline{n-n_0, n-1} = \overline{2, n} \cup \overline{n-0, n-1} = \overline{2, n}. \tag{6.104}$$

Соответственно, (6.99) приобретает форму (PB'_n.IHR).

Для CE_n множество I упрощается до $I = \overline{2, n_1} \cup \overline{n - n_0, n-1} = \overline{2,1} \cup \overline{n - n + 1, n - 1} = \overline{1, n-1}$, а (6.99) приобретает вид: $\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| \le 1$, совпадающий с несводимым функциональным представлением гипероктаэдра (CP_n.FR1).

Третье множество — $E_{nk}^{\pm}(G)$, $G > 0$. В данном случае имеем

$$I = \overline{2, n_k} \cup \overline{n - 0, n - 1} = \overline{2, n_k}.$$

Соответственно, набор гиперграней многогранника полностью определяется кратностью элемента e_k. Так, если $n_k = 1$, то $I = \varnothing$ и (6.99) приобретает вид:

$$\sum_{j \in \omega} |x_j| \le \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1},\ \omega \subseteq J_n. \tag{6.105}$$

В частности, $\Pi_n^{\pm}(G)$ задается несводимой системой (6.105). Если же e_k — кратный элемент, т.е. $n_k > 1$, несводимая система $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$:

$$\sum_{j \in \omega} |x_j| \le \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{n-j+1},\ \omega \subseteq J_n,\ |\omega| \in \{1\} \cup \overline{n_k + 1, n}. \tag{6.106}$$

Размерность P

Утверждение 6.9. *Общий многогранник P перестановок со знаком - полномерный, т.е.*

$$\dim\ P = n. \tag{6.107}$$

Действительно, рассмотрим гиперкуб $\overline{\Pi}_2^n(\{-a^n, a^n\})$, где $a = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} g_i$. По условию (6.81), он не вырожден в точку, следовательно, является полномерным, как и любой другой n-куб. Поскольку $P \supseteq \overline{\Pi}_2^n \left(\{-a^n, a^n\}\right)$, многогранник P также полномерный, и условие (6.107) выполнено.

Сферическая расположенность E

Утверждение 6.10. *Общее множество E перестановок со знаком сферически расположенное:*

$$E \subset S_r\left(\mathbf{0}\right), \ r = \left(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\right)^{1/2}, \tag{6.108}$$

при этом описанная сфера — единственная и имеет центр в начале координат.

В самом деле, каждая точка общего множества перестановок со знаком имеет координаты, модули которых образуют мультимножество G, откуда, в частности, следует:

$$\forall m \in \mathbb{R}_+^1 \ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^m = \sum_{i=1}^{n} |g_i|^m. \tag{6.109}$$

Так, при $m = 2$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} g_i^2, \tag{6.110}$$

т.е. точки E равноудалены от начала координат на расстояние r, заданное формулой (6.108). А это означает, что E лежит на указанной гиперсфере $S_r\left(\mathbf{0}\right)$ и, следовательно, является сферически расположенным. Эта описанная вокруг E сфера единственна в силу полномерности P.

E — полиэдрально-сферическое множество:

$$E = P \cap S_r(\mathbf{0}),$$

где P - это многогранник (6.92), гиперсфера $S_r(\mathbf{0})$ задается уравнением (6.110).

Множество E - вершинно расположено

Условие $E = vert\ P$ вершинной расположенности общего множества перестановок со знаком вида (6.91) выполняется в силу сферической его расположенности и теоремы 2.1.

Критерий смежности вершин P

Прежде чем перейти к исследованию вопроса о смежности вершин общего многогранника перестановок со знаком, напомним, что ранее из числа общих множеств перестановок со знаком было выделено два подкласса по признаку выполнения условия (6.79):

- Случай 6.3.1 - условие (6.79) выполнено и все элементы G положительны, соответственно, основа G имеет вид:

$$\mathrm{S}(G) = \{e_i\}_{i \in J_k}; \tag{6.111}$$

- Случай 6.3.2 - среди элементов G есть нулевые и условие (6.79) не выполняется, т.е.

$$E^{+} = E_{n+1,k}(G), \tag{6.112}$$

$$S\left(G\right) = \left\{0, e_1, ..., e_k\right\}. \tag{6.113}$$

По этому же признаку разделим и общие многогранники перестановок со знаком. Будем рассматривать Случаи 6.3.1, 6.3.2 последовательно и сформулируем критерий смежности вершин для каждого из них. Одновременно установим и степень регулярности $\mathcal{R}$ вершин P.

Теорема 6.10. *(Критерий смежности и степень регулярности вершин общего многогранника P перестановок со знаком)*

Теорема состоит из трех частей:

1. *Если выполнено условие* (6.95), *то для произвольной точки $x \in E$ смежные к ней вершины многогранника P образуются из x заменой максимум двух переменных: заменой в x двух координат x_i, x_j, абсолютные значения которых являются последовательными элементами основы G, значениями $sgn\, x_i \cdot |x_j|$, $sgn\, x_j \cdot |x_i|$ (далее Способ 6.3.1) либо переменой на противоположный знака координаты x, равной по модулю e_1 (далее Способ 6.3.2).*

2. *При выполнении условия* (6.112) *смежные к $x \in E$ вершины P отличаются от x не более, чем двумя координатами и формируются из нее либо при помощи Способа 6.3.1, либо транспозицией нулевой координаты и координаты с абсолютным значением e_1 с последующей сменой знака ненулевой координаты на противоположный (Способ 6.3.3).*

3. *В Случае 6.3.1 степень регулярности произвольной вершины P задается формулой:*

$$\mathcal{R} = n_1 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i n_{i+1}, \tag{6.114}$$

а в Случае 6.3.2 — следующим образом:

$$\mathcal{R} = 2n_0 n_1 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i n_{i+1}. \tag{6.115}$$

Доказательство. Сначала сформируем множество смежных вершин многогранника P к точкам E^+, затем обобщим результат на все множество E.

Введем обозначение $N_{M,\widehat{P}}(x)$ для множества смежных вершин к заданной точке x - вершине некоторого многогранника $\widehat{P}$ - среди точек множества $M \subseteq vert\ \widehat{P}$, а обозначение $\mathcal{R}_{M,\widehat{P}}(x)$ будем использовать для числа таких смежных вершин:

$$N_{M,\widehat{P}}(x) = \left\{ y \in M : y \overset{\widehat{P}}{\leftrightarrow} x \right\}, \mathcal{R}_{M,\widehat{P}}(x) = \left| N_{M,\widehat{P}}(x) \right|.$$

Тогда, например, $N_{E,P}(x)$, $\mathcal{R}_{E,P}(x)$ соответствуют искомым множеству и степени вершины многогранника P, а $N_{E^+,P}(x)$ состоит из смежных вершин P среди точек E^+ и т. п.

Введем также в рассмотрение многогранник $P^+ = conv\ E^+$, представляющий собой общий многогранник перестановок:

$$P^+ = \begin{cases} P_{nk}(G), \text{ если } n_0 = 0, \\ P_{n,k+1}(G), \text{ если } n_0 > 0. \end{cases}$$

Случай 6.3.1. Рассмотрим произвольную точку $x \in E^{+}$. Во множестве $N_{E,P}(x)$ выделим две части:

$$N_{E,P}(x) = N_{E^{+},P^{+}}(x) \cup N_{E \setminus E^{+},P}(x). \tag{6.116}$$

Первая — это множество вершин многогранника P^{+}, смежных с x, представляющих собой в наших обозначениях множество $N_{E,P^{+}}(x) = N_{E^{+},P^{+}}(x)$, вторая — оставшиеся смежные вершины. В соответствии с критерием смежности вершин общего многогранника перестановок (см. теорему 4.4), $N_{E,P^{+}}(x)$ будет включать e-конфигурации перестановок, образованные из x транспозицией последовательных элементов основы $\mathrm{S}(G)$ вида (6.111), т.е. $e_i \leftrightarrow e_{i+1}$-транспозицией $(i \in J_{k-1})$. Их количество определяется по формуле (4.32):

$$\mathcal{R}_{E,P^{+}}(x) = \mathcal{R}_{E^{+},P^{+}}(x) = \sum_{i=1}^{k-1} n_i n_{i+1}. \tag{6.117}$$

Чтобы сформировать $N_{E \setminus E^{+},P}(x)$, воспользуемся критерием вершины общего многогранника размещений (см. теорему 5.2), учитывая тот факт, что x является вершиной не только $\overline{P}$, но и многогранника P вида (6.100).

В $N_{\overline{E},\overline{P}}(x)$ также выделим две части:

$$N_{\overline{E},\overline{P}}(x) = N_{E^{+},P^{+}}(x) \cup N_{\overline{E} \setminus E^{+},\overline{P}}(x), \tag{6.118}$$

последняя из которых содержит точки, образованные из x заменой наименьшей координаты e_1- нулем. Число таких смежных вершин будет равно кратности e_1 - $\mathcal{R}_{\overline{E} \setminus E^{+},\overline{P}}(x) = n_1$. Продлив ребра $[x, y]$, где $y \in N_{\overline{E} \setminus E^{+},\overline{P}}(x)$ симметрично точке y, из x будет сформировано n_1 точек E путем смены знака одной координаты e_1. Это и будет искомое множество $N_{E\backslash E^+,P}(x)$. Соответственно,

$$\mathcal{R}_{E\backslash E^+,P}(x) = n_1. \tag{6.119}$$

Объединяя эти результаты, получаем, что в Случае 6.3.1 для произвольной $x \in E^+$ множество $N_{E,P}(x)$ образуется из x транспозицией соседних элементов основы G либо заменой знака минимальной координаты на противоположный.

Из (6.118) следует:

$$\mathcal{R}_{E,P}(x) = \mathcal{R}_{E^+,P^+}(x) + \mathcal{R}_{E\backslash E^+,P}(x). \tag{6.120}$$

Соответственно, подстановка выражений (6.117), (6.119) в (6.120) дает следующее: степень регулярности вершины x равна $\mathcal{R}_{E,P}(x) = n_1 + \sum\limits_{i=1}^{k-1} n_i n_{i+1}$. Это же справедливо для оставшихся точек E^+, т.е. в этом случае формула (6.114) верна.

Пусть теперь x — произвольная точка E. Помимо абсолютных значений координат x, при построении $N_{E,P}(x)$ будут учитываться и знаки координат x. Для x и смежных с ней вершин эти знаки будут совпадать, за исключением максимум одной координаты, равной по модулю e_1.

Итак, в Случае 6.3.1, учитывая симметрию E, для вершины x многогранника P критерий смежности выглядит следующим образом: $\forall x \in E$ множество $N_{E,P}(x)$ включает точки, образованные из x двумя путями:

1. С помощью Способа 6.3.1, т.е. заменой в x двух координат $x_i, x_j,\ i \neq j$,

абсолютные значения которых являются последовательными элементами основы G вида (6.111), значениями $sgn\, x_i \cdot |x_j|\,,\ sgn\, x_j \cdot |x_i|$ соответственно;

2. Способом 6.3.2, т.е. сменой знака координаты, равной по модулю e_1, на противоположный. При этом степень регулярности произвольной вершины P определяется по формуле (6.114).

Случай 6.3.2. Снова рассмотрим точку $x \in E^+$. Множество смежных к ней вершин также представимо в виде (6.116). Однако, в отличие от Случая 6.3.1, в силу (6.112), формула (6.117) преобразуется к следующему виду:

$$\mathcal{R}_{E,P^+}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} n_i n_{i+1}. \tag{6.121}$$

Что касается $N_{E\setminus E^+,P}(x)$, то, поскольку минимальная координата x равна нулю, то для произвольного $y \in N_{E^+,P'}(x)$ ребра $[x,y]$ вырождаются в точку x, от которой расходятся ребра как в область $\mathbb{R}^n_+$, так и в области

$$\mathbb{R}^{n,i}_{\leq 0} = \left\{x' \in \mathbb{R}^n :\ x_i' \leq 0;\ x_j' \geq 0,\ j \neq i\right\}, \tag{6.122}$$

$$\text{где}\ \ i \in I^x = \left\{i \in J_n :\ x_i = 0\right\}. \tag{6.123}$$

Для произвольного $i \in I^x$ число таких ребер, идущих в область $\mathbb{R}^{n,i}_{\leq 0}$, будет n_1, и они будут образовываться из x $0 \leftrightarrow e_1$-транспозицией x_i, x_j-координат, где $j \notin I^x$, с последующей сменой знака x_i на противоположный. Поскольку, в соответствии с кратностью нулевого элемента, число областей вида (6.123) — n_0, общее число образованных вершин в смежных к $\mathbb{R}_+^n$ областях:

$$\mathcal{R}_{E\backslash E^+,P}(x) = n_0 n_1. \tag{6.124}$$

Подставляя (6.121), (6.124) в формулу (6.120), получаем $\mathcal{R}_{E,P}(x) = n_0 n_1 + \sum_{i=0}^{k-1} n_i n_{i+1}$, т.е. $\forall x \in E^+$ справедлива формула (6.115). В силу симметрии E и P формула (6.115) будет верна для всех точек E, при этом в Случае 6.3.2 критерий смежности вершин многогранника P будет звучать следующим образом: для произвольной $x \in E$ множество $N_{E,P}(x)$ включает точки, образованные из x одним из двух способов: а) заменой в x двух координат $x_i, x_j,\ i \neq j$, абсолютные значения которых являются последовательными элементами основы G вида (6.113), значениями $sgn x_i \cdot |x_j|\,,\ sgn x_j \cdot |x_i|$ соответственно, т.е. при помощи Способа 6.3.1; б) Способом 6.3.3, т.е. транспозицией нулевой координаты и координаты, равной по модулю e_1, с последующей сменой знака ненулевой координаты на противоположный: $\forall x_i, x_j$: $x_i = 0,\ \ |x_j| = e_1$ новые значения этих координат - $x_i = -sgn\, x_j \cdot e_1,\ x_j = 0$. Степень регулярности вершин P определяется по формуле (6.115). □

Пример 6.10. Для иллюстрации возьмем те же множества, что и в примере 6.9. Так, $B_n^{'}$ и $E_{nk}^{\pm}(G)\,,\ E_n^{\pm}(G)$ при $G > 0$ соответствуют Случаю 6.3.1.

В частности, для $PB_n^{'}$, $G = \{1^n\}$, следовательно, формула (6.114) обращается в $\mathcal{R} = n_1 = n$. При этом, поскольку в этом случае E^+ вырождено в точку, смежных вершин, образованных перестановкой координат, не будет, а все смежные вершины будут формироваться только Способом 6.3.2, соответствующим смене знака одной переменной на противоположный.

Для $E_n^{\pm}(G)$ формула (6.114) преобразуется в $\mathcal{R} = 1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} 1 = n$, а критерий смежности остается без изменений. Как и ожидалось, многогранники PB_n', $\Pi_n^{\pm}(G)$ — простые, т.е. степень регулярности их вершин совпадает с размерностью многогранников. Итак, формула (6.114) устанавливает, что многогранники PB_n' и $\Pi_{nk}^{\pm}(G)$ - простые, что отвечает действительности.

Наконец, множество CE_n соответствует Случаю 6.3.2. Поскольку в данном случае индуцирующим множеством служит $G = \{0^{n-1}, 1\}$ согласно (6.8), поэтому по формуле (6.115) имеем: $\mathcal{R} = 2n_0n_1 = 2(n-1)$.

Так, например, для $n = 3$ $\mathcal{R} = 2(3-1) = 4$ и, в соответствии с критерием смежности вершин, к примеру, для вершины $x = (-1, 0, 0)$ половина смежных вершин — $x^1 = (0, -1, 0)$, $x^2 = (0, 0, -1)$ будет сформирована Способом 6.3.1, оставшаяся половина — $x^3 = (0, 1, 0)$, $x^4 = (0, 0, 1)$ — Способом 6.3.3 из предыдущих двух точек.

Полученные результаты подтверждают приведенные выше свойства многогранника перестановок $\Pi_n(G)$, гиперкуба PB_n' и гипероктаэдра CP_n. Например, то, что для вершины x гипероктаэдра все отличные от нее точки CE_n — к ней смежные, за исключением диаметрально противоположной к x.

Центральная симметрия E, P

По построению общее $\mathcal{C}$-множество перестановок со знаком, а значит и общий многогранник перестановок со знаком, центрально симметрично.

Число уровней E по координатам

Утверждение 6.11. *В Случае 6.3.1 общее множество перестановок со знаком - $m'(E) = 2k$-уровневое по координатам, а в Случае 6.3.2 - $m'(E) = 2k+1$-уровневое по координатам.*

Это следует из (6.83) и того факта, что каждая координата E принимает все значения из образующее множества.

Также заметим, что имеет место разложение (1.14)-(1.17), где декомпозиция осуществляется по $\mathcal{C}$-множествам, образованным в сечении общего $\mathcal{C}$-множества перестановок со знаком плоскостями, параллельными координатным. При этом в проекциях (1.49) образуются $\mathcal{C}$-множества такого же типа размерности на единицу ниже, индуцирующим множеством которых служит мультимножество $G^{\pm}$ вида (6.82), из которого удален один элемент.

Комбинаторно неэквивалентные многогранники P

Перейдем к исследованию вопроса о комбинаторной эквивалентности многогранников класса $\Pi^{\pm}_{nk}(G)$.

С этой целью введем обозначение M_n для числа комбинаторно неэквивалентных многогранников этого класса размерности n.

Произведем предварительную оценку числа M_n. Так, из (6.99) видно, что число гиперграней P определяется комбинациями чисел n_0, n_k. Учитывая, что $n_0 + n_k \le n,\ n_0 \in \mathbb{Z}_+,\ n_k \in \mathbb{N}$, получаем:

$$M_n \ge M_n^{'} = C_{n+1}^2. \tag{6.125}$$

Точное значение M_n определим, учитывая то, что количество смежных вершин к x и множество смежных вершин определяется первичной спецификацией G.

Теорема 6.11. *Для фиксированного n число M_n комбинаторно неэквивалентных общих многогранников перестановок со знаком размерности n определяется по формуле:*

$$M_n = 2^n - 1. \tag{6.126}$$

Доказательство. Случаи 6.3.1, 6.3.2 рассмотрим по отдельности, обозначив соответствующие числа комбинаторно неэквивалентных многогранников размерности n через M_n^1, M_n^2.

Начнем со Случая 6.3.1. Число различных векторов первичных спецификаций вида $[G] = (n_1, ..., n_k)$, удовлетворяющих уравнению $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$ при $k \leq n$, равно числу композиций числа n, следовательно, $M_n^1 = 2^{n-1}$.

Для Случая 6.3.2 имеет место:

$$[G] = (n_0, n_1, ..., n_k)\,, \tag{6.127}$$

$\sum\limits_{i=0}^{k} n_i = n$, $n_0, k \geq 1$. Поскольку каждой композиции длины $k+1$ ставится в соответствие первичная спецификация (6.127), все компоненты которой ненулевые, условие $n_0 \geq 1$ будет выполнено всегда. Для определения M_n^2 из числа композиций числа n достаточно вычесть единицу, поскольку в случае $[G] = (n)$ не выполняется $k \geq 1$. Итак, $M_n^2 = 2^{n-1} - 1$. Учитывая, что $M_n = M_n^1 + M_n^2$, окончательно имеем формулу (6.126). $\square$

В данной главе приведены основные свойства общих множества и многогранника перестановок со знаком. Аналогично тому, как после формулировки свойств наиболее общего представителя рассматриваемого класса $\mathcal{C}$-комбинаторных множеств осуществлялся переход к детализации свойств специальных его подклассов (см. главы 4, 5), в рассматриваемом случае интерес представляют такие классы, как $\mathcal{C}$-множества перестановок со знаком $E_n^{\pm}(G)$, специальные $\mathcal{C}$-множества перестановок со знаком $E_{n2}^{\pm}(G)$ и общие $\mathcal{C}$-множества перестановок со знаком $E_{n2}^{\pm}(G)$, соответствующие $G > 0$.

Во втором подклассе внимания заслуживает случай булевого G, означающий, что образующим множеством специального $\mathcal{C}$-множества перестановок со знаком служит троичное множество $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1\}$. Множества этого класса обозначим $B_n^{\pm}(m)$, где $m \in J_n \backslash \{1\}$ - кратность единицы, и назовем троичным множеством перестановок со знаком, а его выпуклую оболочку - троичным многогранником перестановок со знаком $PB_n^{\pm}(m)$.

Общее $\mathcal{C}$-множество перестановок со знаком и упомянутые его частные случаи позволяют ввести в рассмотрение новый класс e-конфигураций - евклидовы комбинаторные конфигурации перестановок со знаком (signed permutation e-configurations).

Перед тем как ввести это понятие, введем следующее обозначение:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad y = |x| \;\Leftrightarrow\; y \in \mathbb{R}^n,\; y_i = |x_i|_{i \in J_n}. \tag{6.128}$$

Нетрудно видеть, что если x в (6.128) - e-конфигурация, то y также будет e-конфигурацией.

Определение 6.1. *Множество E вида* (3.42) *будем называть множеством евклидовых комбинаторных конфигураций перестановок со знаком (a signed* *permutation e-set), если существует мультимножество* $G' \geq 0$ *такое, что множество*

$$E' = \{|x|,\ x \in E\} \tag{6.129}$$

состоит из е-конфигураций перестановок, индуцированных мультимножеством G'*, и при этом образующие множества* E *и* E' *не совпадают, а образующее множество* E' *не вырождено в одну точку.*

В обозначениях $\mathcal{A}_E$, $\mathcal{A}_{E'}$ для образующих E и E' множеств это определение можно представить так: множество E вида (3.42) является $\mathcal{C}$-множеством перестановок со знаком, если

- для множества (6.129) выполнено:

$$\forall x \in\ E'\ \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_{E'};$$

- $\mathcal{A}_E \neq \mathcal{A}_{E'}$;
- $|\mathcal{A}_{E'}| > 1$.

В соответствии с введенной выше классификацией е-конфигураций, множество $E_n^{\pm}(G)$ будет состоять из е-конфигураций перестановок со знаком без повторений, элементами множества $E_{nk}^{\pm}(G)$ $(k < n)$ будут е-конфигурации со знаком с повторениями, элементами троичного множества перестановок со знаком $B_n^{\pm}(m)$ будут троичные е-конфигурации перестановок со знаком.

Графическая иллюстрация $E_{nk}^{\pm}(G),\ \Pi_{nk}^{\pm}(G),\ n = 2, 3$

В следующих двух примерах будем использовать обозначения:

$$E^i = E_{nk}^{\pm}(G_i),\ P^i = P_{nk}^{\pm}(G_i).$$

Пример 6.11. Для $n = 3$, величина $k \in \{1, 2\}$. Здесь возможны три случая: $G > 0,\ k = 1;\ G > 0,\ k = 2;\ G \not> 0,\ k = 1$. Пусть индуцирующими мультимножествами, соответствующими этим трем случаям, будут:

$$G_1 = \{1^2\},\ G_2 = \{1, 2\},\ G_3 = \{0, 1\}.$$

Тогда $E^1 = E_{21}^{\pm}(G_1) = B_2'$, соответственно, $P^1 = PB_2'$ - бинарные $\mathcal{C}$-множество и многогранник, изображенные на Рис. 6.1.

$$E^2 = E_2^{\pm}(G_2) = \{(1, 2), (2, 1), (-1, 2), (-2, 1),$$
$$(1, -2), (2, -1), (-1, -2), (-2, -1)\}-$$

представляет собой множество 2-перестановок со знаком, состоящее из 8-ми элементов. А тогда, учитывая вершинную расположенность этого множества, многогранник $P^2 = \Pi_2^{\pm}(G_2)$ - это восьмиугольник, показанный на Рис. 6.12.

Наконец, $E^3 = E_2^{\pm}(G_3) = CE_2,\ P^3 = CP_2$ - это уже рассмотренные нами множество и многогранник - квадрат и множество его вершин (см. Рис. 2.10).

Пример 6.12. Для $n = 3$ оценка (6.125) $M_3 \geq M_3' = C_4^2 = 6$ близка к точ-

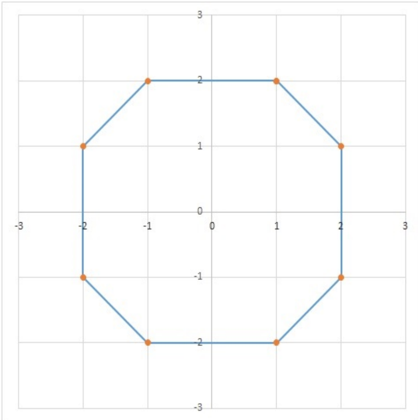


Рис. 6.12: E^2, P^2

ному значению (6.126) — $M_3 = 2^3 - 1 = 7$. Для иллюстрации теоремы 6.10 в таблице 6.1 перечислены различные 3-мультимножества, соответствующие семи возможным векторам первичной спецификации, а также кратности минимального и максимального элементов и степени вершин многогранников. Как видно, первые 4 мультимножества соответствуют Случаю 6.3.1, остальные 3 — Случаю 6.3.2. Как было сказано, первым признаком комбинаторной неэквивалентности является различие комбинаций n_0, n_k. Нетрудно видеть, что эти параметры совпадают только у пары G_1, G_3, т.е. в точности $M_3' = 6$ комбинаций n_0, n_k выявлено. Посмотрим на второй признак — степень регулярности вершин: для G_1 $\mathcal{R} = 3$, в то время как для G_3 $\mathcal{R} = 4$. Таким образом, даже вот такой поверхностный анализ показывает, что все многогранники $\Pi_{3k}^{\pm}(G_i)$, $i \in J_7$ — не комбинаторно эквивалентны.

На Рисунках 6.2, 6.13-6.18 показаны все семь трехмерных многогранников данного класса. А именно,

- $E^1 = E_3^{\pm}(G_1) = E_3^{\pm}$, $P^1 = \Pi_3^{\pm}$ - усечённый кубооктаэд (Рис. 6.13);
- $E^2 = E_{32}^{\pm}(G_2)$, $P^2 = \Pi_{32}^{\pm}(G_2)$ - усечённый куб (Рис. 6.14);

Мультимножество	g_1	g_2	g_3	n_0	n_k	$\mathcal{R}$	Многогранник
G_1	1	2	3	0	1	3	P^1
G_2	1	2	2	0	2	3	P^2
G_3	1	1	2	0	1	4	P^3
G_4	1	1	1	0	3	3	P^4
G_5	0	1	2	1	1	3	P^5
G_6	0	1	1	1	2	4	P^6
G_7	0	0	1	2	1	4	P^7

Таблица 6.1: Класс $\Pi_{3k}^{\pm}(G)$

- $E^3 = E_{32}^{\pm}(G_3)$, $P^3 = \Pi_{32}^{\pm}(G_3)$ - ромбокубооктаэдр (Рис. 6.15);
- $E^4 = E_{31}^{\pm}(G_4) = B_3'$, $P^4 = \Pi_{31}^{\pm}(G_4) = PB_3'$ - куб (Рис. 6.16);
- E^5 - $E^5 = E_3^{\pm}(G_5)$, $P^5 = \Pi_3^{\pm}(G_5)$ - правильный усечённый додекаэдр (Рис. 6.17);
- $E^6 = E_{32}^{\pm}(G_6) = B_3^{\pm}(2)$, $P^6 = \Pi_{32}^{\pm}(G_6)$ - правильный кубооктаэдр (Рис. 6.18);
- $E^7 = \Pi_{32}^{\pm}(G_7) = B_3^{\pm}(1) = CE_3$, $P^7 = \Pi_{32}^{\pm}(G_7) = CP_3$ - правильный октаэдр (Рис. 6.2).

Эти многогранники относятся к Архимедовым или Платоновым телам либо комбинаторно эквивалентны им (см. Приложение А). Также видно, что некоторые из них формируются из гиперкуба отсечениями по вершинам, остальные — по ребрам. В результате чего образуются вершины со степенью регулярности 3 и 4. Простыми многогранниками в данном семействе являются, помимо упомянутых ранее $\Pi_3^{\pm}$, B_3', еще два — $\Pi_{32}^{\pm}(G_2)$, $\Pi_3^{\pm}(G_5)$.

Пример 6.13. Для $n = 4$ формула (6.125) дает оценку $M_4' = C_5^2 = 10$ для числа не комбинаторно эквивалентных многогранников общих много-

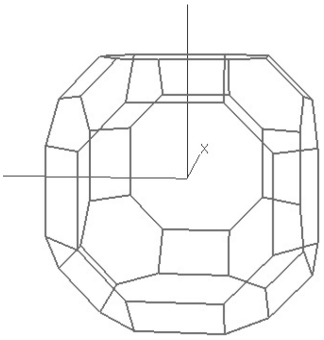


Рис. 6.13: $E^1,\ P^1$

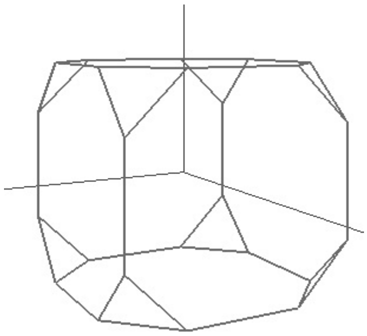


Рис. 6.14: $E^2,\ P^2$

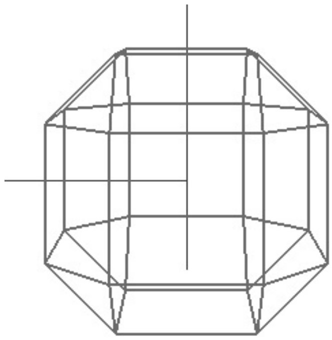


Рис. 6.15: $E^3,\ P^3$

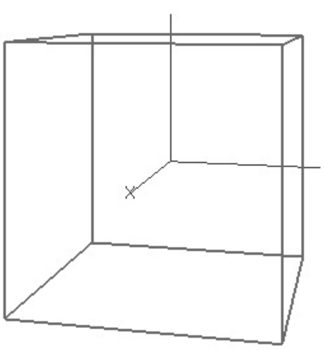


Рис. 6.16: $E^4,\ P^4$

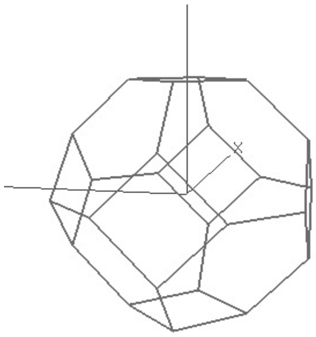


Рис. 6.17: $E^5,\ P^5$

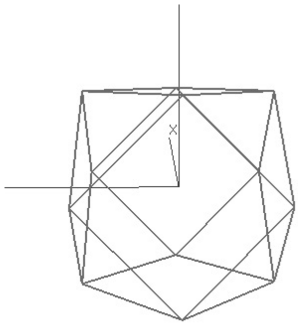


Рис. 6.18: $E^6,\ P^6$

гранников перестановок со знаком размерности 4, в то время как точное их количество, согласно (6.126), в полтора раза больше - $M_4 = 2^4 - 1 = 15$.

Заключение

Основные результаты исследований, освещенные в монографии, можно систематизировать и сформулировать следующим образом.

- Рассмотрены конечные точечные конфигурации, представляющие собой совокупность изолированных точек арифметического евклидова пространства; изучены свойства таких конфигураций в результате теоретико-множественных операций над ними.

- Предложен общий подход к разложению множества конечных точечных конфигураций по гиперплоскостям и их декомпозиция на попарно непересекающиеся подмножества.

- На основе свойств выпуклых поверхностей введено понятие и осуществлена классификация поверхностно расположенных множеств; выделены классы сферически-, суперсферически- и еллипсоидально расположенных множеств.

- Получили дальнейшее развитие методы полиэдральной комбинаторики при исследовании выпуклых оболочек конечных точечных конфигурацій; рассмотрены аналитические формы задания соответствующих комбинаторных многогранников, в том числе многоуровневых.

- Предложены и теоретически обоснованы подходы к функционально-аналитическому представлению различных классов конечных точечных конфигураций.

- Выделены классы вершинно расположенных и полиэдрально-поверхностных множеств и исследованы их свойства; описаны общие подходы к декомпозиции конечных точечных конфигураций на вершинно расположенные подмножества.

- Введено понятие евклидовой комбинаторной конфигурации как отображение конечного абстрактного множества заданной структуры в арифметическое евклидово пространство.

- Описаны алгебро-топологические и тополого-метрические свойства множеств евклидовых комбинаторных конфигураций и соответствующих комбинаторных многогранников; установлена их взаимосвязь с различными классами конечных точечных конфигураций и евклидовыми комбинаторными множествами.

- Исследованы специальные классы множеств евклидовых комбинаторных конфигураций перестановок (с повторениями и без повторений), четных перестановок, перестановок со знаком, размещений (без повторений и с неограниченными повторениями), булевых и бинарных векторов и др.

Теоретические результаты, связанные с евклидовыми комбинаторными конфигурациями, представляют интерес в смежных с дискретной математикой и полиэдральной комбинаторикой областях. Прежде всего, речь идет о задачах комбинаторной и дискретной оптимизации [33, 43, 44, 63, 91, 101, 118, 119]. Действительно, область допустимых решений в задачах дискретной оптимизации представляет собой множество изолированных точек арифметического евклидова пространства, т.е. некоторую точечную конфигурацию. Любую конечную точечную конфигурацию можно рассматривать как множество евклидовых комбинаторных конфигураций размещений, порожденное образующим множеством координат точек. Такой подход описан в главе 3. При формализации ограничений для описания множества допустимых решений можно воспользоваться функционально-аналитическими представлениями конечных точечных конфигураций, описанными в главах 1, 2.

Заметим, что большинство методов решения задач дискретной оптимизации построено на схемах, связанных с декомпозицией дискретных множеств на его подмножества с использованием тех или иных теоретически обоснованных соображений. В частности, речь идет о методах типа ветвей и границ, последовательного анализа вариантов, методах отсечений и др. При реализации указанных методов могут быть использованы общие подходы к разложению конечных множеств точечных конфигураций, предложенные в данной монографии.

Указанные результаты естественным образом распространяются на широкий класс задач комбинаторной оптимизации.

Пусть Π – конечное множество, элементами которого являются комбинаторные конфигурации, и на котором задан функционал

$$\xi : \Pi \to \mathbb{R}^1.$$

Требуется найти

$$\pi^* = \arg \min_{\pi \in P \subseteq \Pi} \xi(\pi),$$

где $P \subseteq \Pi$– множество допустимых решений.

Установим взаимно-однозначное соответствие $\varphi : \Pi \to E$ между комбинаторными конфигурациями π множества Π и точками $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ некоторого множества $E \subset \mathbb{R}^n$, положив

$$x = \varphi(\pi), \quad \pi = \varphi^{-1}(x).$$

Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}^1$ такова, что $f(x) = \xi(\varphi^{-1}(x))$ для всех $x \in E$. Тогда исходная задача может быть эквивалентно сформулирована в виде: найти

$$x^* = \arg \min_{x \in X \subseteq E} f(x),$$

где $X = \varphi(P)$ – образ множества P в $\mathbb{R}^n$.

Заметим, что при формализации отображения $\varphi : \Pi \to E \subset \mathbb{R}^n$ можно воспользоваться основными схемами формирования различных классов множеств евклидовых комбинаторных конфигураций, описанных в главах 3-6 монографии.

Приведенные рассуждения позволяют рассматривать задачу оптимизации на множестве комбинаторных конфигураций при отображении $\varphi : \Pi \to E \subset \mathbb{R}^n$ как задачу дискретной оптимизации на множестве евклидовых комбинаторных конфигураций, т.е. векторов арифметического евклидова пространства.

Конкретный вид ограничений на отображения φ для некоторых классов множеств евклидовых комбинаторных конфигураций предлагается в главах 4-6 монографии. Для описания множества $X \subset E$ применимы общие подходы функционально-аналитического представления множества евклидовых комбинаторных конфигураций, предложенные в главах 1, 2. При этом особый интерес с точки зрения такого описания имеют вершинно расположенные и полиэдрально-сферические множества комбинаторных конфигураций [45]-[49], [72, 109], [113]-[115], [133]. Свойства таких множеств положены в основу методов полиэдрально-сферической оптимизации, основные идеи которых описаны в [72, 133] и получили дальнейшее развитие в [46]-[49],[111], [113]-[115].

Для вершинно расположенных множеств разработана теория выпуклых продолжений функций [76, 130, 131, 134], современное состояние которой освещено в публикациях [45, 47, 80, 89, 113, 136]. Общие подходы к непрерывному функциональному представлению различных классов множеств евклидовых комбинаторных конфигураций представлены в [45]-[48],[112, 113].

Перспективным направлением исследований, связанных с евклидовыми комбинаторными конфигурациями, являются задачи размещения, покрытия и разбиения геометрических объектов [64]-[71],[89, 102, 103, 129, 137]. При этом для моделирования реальных материальных объектов базовым является понятие геометрической информации $\mathbf{g}$ об объекте $S \subset \mathbb{R}^l$ $(l = 2, 3)$, которое включает в себя:

- пространственную форму $\mathbf{s}$ как класс эквивалентности на совокупности точечных множеств пространства $\mathbb{R}^l$;

- метрические характеристики $\mathbf{m}$, задающие «размеры» объекта, имеющего форму $\mathbf{s}$;

- параметры размещения $\mathbf{p}$, определяющие положение объекта в пространстве $\mathbb{R}^l$.

Заметим, что плоские объекты характеризуются тремя параметрами размещения, а для пространственных объектов число параметров размещения, с учетом углов Эйлера, равно 6.

Геометрическая информация $\mathbf{g} = (\mathbf{s}, \mathbf{m}, \mathbf{p})$ при фиксированной форме $\mathbf{s}$ порождает пространство геометрических информаций $\mathbf{G}$ [123, 129], изоморфное арифметическому евклидову пространству, размерность которого определяется числом компонент $\mathbf{m}$ и $\mathbf{p}$. В свою очередь,совокупности геометрических объектов S_i, $i \in J_n$ соответствует прямое произведение пространств геометрических информаций $\mathbf{G}_i$, $i \in J_n$, порожденных каждым из объектов:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2 \times \ldots \times \mathbf{G}_n.$$

В монографии [127] выделен класс задач геометрического проектирования, формализуемых как отображение пространства информаций $\mathbf{G}$ в себя при выполнении заданной системы ограничений. Указанный класс задач имеет ярко выраженную комбинаторную структуру [79],[127]-[129],[135].

Осуществим отображение множества геометрических объектов S_i, $i \in J_n$ при фиксированной форме и метрических характеристиках в конечное множество своих параметров размещения $\mathbf{p}_j, j \in J_k$. В соответствии с введенными в п. 3.2 обозначениями, отождествим множество $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k\}$ с множеством параметров размещения, положив $\mathbf{a}_j = \mathbf{p}_j$, $j \in J_k$. В результате имеем комбинаторную конфигурацию:

$$\pi = \begin{pmatrix} S_1 & \dots & S_n \\ \mathbf{p}_{j_1} & \dots & \mathbf{p}_{j_n} \end{pmatrix} = [\mathbf{p}_{j_1}\mathbf{p}_{j_2}...\mathbf{p}_{j_n}].$$

Поставим π во взаимно-однозначное соответствие вектор

$$\mathbf{g} = (p_{1j_1}, ..., p_{1j_n}, p_{2j_1}, ..., p_{2j_n}, ..., p_{mj_n}, ..., p_{mj_n}),$$

который, в соответствии с введенными выше определениями, представляет собой евклидову комбинаторную конфигурацию. Здесь $m = 6$ для $S_i \subset \mathbb{R}^3$ либо $m = 3$, если $S_i \subset \mathbb{R}^2$, $i \in J_n$.

Таким образом, множество евклидовых комбинаторных конфигураций можно рассматривать как некоторое подмножество пространства геометрических информаций $\mathbf{G}$. Это, с одной стороны, дает возможность использовать результаты данной монографии при разработке новых подходов к решению соответствующих задач геометрического проектирования. С другой стороны, ограничения на взаимное расположение геометрических объектов (условия попарного непересечения, размещения в области, покрытия и др.) позволяют сформировать специальные классы множеств евклидовых комбинаторных конфигураций.

Исследование таких классов представляется перспективным как с научной, так и с практической точек зрения, поскольку находит широкое применение в различных практических областях,например, при разработке интеллектуальных компьютерных технологий моделирования и оптимизации сложных процессов и систем с учетом пространственных форм объектов.

Литература

[1] M. F. Anjos and J. B. Lasserre, Eds., *Handbook on Semidefinite, Conic and Polynomial Optimization, 2012 edition.* New York: Springer, 2011.

[2] M. Aprile, A. Cevallos, and Y. Faenza, “On Vertices and Facets of Combinatorial 2-Level Polytopes,” in *Combinatorial Optimization*, 2016, pp. 177–188.

[3] M. Baake, “Structure and representations of the hyperoctahedral group,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 25, no. 11, pp. 3171–3182, Nov. 1984.

[4] E. Balas, S. Ceria, and G. Cornuéjols, “A lift-and-project cutting plane algorithm for mixed 0–1 programs,” *Mathematical Programming*, vol. 58, no. 1–3, pp. 295–324, Jan. 1993.

[5] M. L. Balinski and A. J. Hoffman, Eds., *Polyhedral Combinatorics: Dedicated to the Memory of D.R.Fulkerson.* Amsterdam; New York : Elsevier Science Ltd, 1978.

[6] B. Baumeister, “On permutation polytopes,” *Advances in Mathematics*, vol. 222, no. 2, pp. 431–452, Oct. 2009.

[7] C. Berge, *Principes de combinatoire.* Paris: Dunod, 1968.

[8] F. Bergeron, G. Labelle, and P. Leroux, Combinatorial Species and Tree-like Structures, 1 edition. Cambridge; New York, NY, USA: Cambridge University Press, 1997.

[9] W. D. Blizard, “The development of multiset theory,” *Mod. Log.*, vol. 1, no. 4, pp. 319–352, 1991.

[10] A. Bohn, Y. Faenza, S. Fiorini, V. Fisikopoulos, M. Macchia, and K. Pashkovich, “Enumeration of 2-Level Polytopes,” in *Algorithms - ESA 2015*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2015, pp. 191–202.

[11] M. Bona, *Combinatorics of Permutations, Second Edition*. Chapman and Hall/CRC, 2016.

[12] R. A. Brualdi, *Combinatorial matrix classes*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[13] A. Cerdán, U. Schnell, and S. S. Gomis, "On a relative isodiametric inequality for centrally symmetric, compact, convex surfaces," *Beitr Algebra Geom*, vol. 54, no. 1, pp. 277–289, Mar. 2013.

[14] C. J. Colbourn, *CRC Handbook of Combinatorial Designs*. CRC Press, 2010.

[15] A. Deza, K. Fukuda, T. Mizutani, and C. Vo, "On the Face Lattice of the Metric Polytope," in *Discrete and Computational Geometry*, J. Akiyama and M. Kano, Eds. Springer Berlin Heidelberg, 2002, pp. 118–128.

[16] J. D. Dixon and B. Mortimer, *Permutation Groups*, 1996 edition. New York: Springer, 1996.

[17] E. L. Elte, *The semiregular polytopes of the hyperspaces*. Groningen: Gebrieders Hoitsema, 1912.

[18] O. O. Emets', O. V. Roskladka, and S. I. Nedobachii, "Irreducible System of Constraints for a General Polyhedron of Arrangements," *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 55, no. 1, pp. 1–12, Jan. 2003.

[19] S. Fiorini, V. Fisikopoulos, and M. Macchia, "Two-Level Polytopes with a Prescribed Facet," in *Combinatorial Optimization*, 2016, pp. 285–296.

[20] F. Grande and J. Rué, "Many 2-Level Polytopes from Matroids," *Discrete Comput Geom*, vol. 54, no. 4, pp. 954–979, Oct. 2015.

[21] F. Grande, "On k-level matroids: geometry and combinatorics," Freie Universität Berlin, Germany, 2015. .

[22] R. M. Green, "Homology representations arising from the half cube, II," *Journal of Combinatorial Theory. Series A*, vol. 117, no. 8, pp. 1037–1048, 2010.

[23] H. Gropp, "Configurations between geometry and combinatorics," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 138, no. 1, pp. 79–88, Mar. 2004.

[24] P. M. Gruber, *Convex and Discrete Geometry*. Springer, 2007.

[25] B. Grunbaum, *Configurations of Points and Lines, New ed. edition*. Providence, R.I: American Mathematical Society, 2009.

[26] D. A. Grundel, P. A. Krokhmal, C. A. S. Oliveira, and P. M. Pardalos, "On the number of local minima for the multidimensional assignment problem," *J. Comb. Optim.*, vol. 13, no. 1, pp. 1–18, Jan. 2007.

[27] L. F. Hulyanitskii and I. V. Sergienko, "Metaheuristic downhill simplex method in combinatorial optimization," *Cybern. Syst. Anal.*, vol. 44, no. 3, pp. 463–463, May 2008.

[28] F. Harary, J. P. Hayes, and H.-J. Wu, "A survey of the theory of hypercube graphs," *Computers & Mathematics with Applications. An International Journal*, vol. 15, no. 4, p. 277, 1988.

[29] M. Henk, J. Richter-Gebert, and G. M. Ziegler, "Basic properties of convex polytopes," in *Handbook of Discrete and Computational Geometry, J. E. Goodman and J. O'Rourke, Eds.* Boca Raton, FL, USA: CRC Press, Inc., 1997, pp. 243–270.

[30] D. E. Knuth, *Art of Computer Programming, Volume 2: Seminumerical Algorithms, 3 edition.* Reading, Mass: Addison-Wesley Professional, 1997.

[31] G. Kochenberger et al., "The unconstrained binary quadratic programming problem: a survey," *Journal of Combinatorial Optimization*, no. 1, p. 58, 2014.

[32] J. F. Korsh and P. S. LaFollette, "Loopless Array Generation of Multiset Permutations," *Comput. J.*, vol. 47, no. 5, pp. 612–621, Jan. 2004.

[33] B. Korte and J. Vygen, *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms, 5th ed. 2012 edition.* Heidelberg; New York: Springer, 2012.

[34] D. L. Kreher and D. R. Stinson, *Combinatorial Algorithms: Generation, Enumeration, and Search, 1 edition.* Boca Raton, Fla: CRC Press, 1998.

[35] K. Kubjas, "Low degree minimal generators of phylogenetic semigroups," *European Journal of Mathematics*, vol. 1, no. 1, pp. 2–24, Mar. 2015.

[36] W. Kühnel, "Tight polyhedral surfaces," in *Tight Polyhedral Submanifolds and Tight Triangulations*, Springer Berlin Heidelberg, 1995, pp. 6–40.

[37] P. A. MacMahon, *Combinatory Analysis, Dover Ed edition.* Mineola, N.Y: Dover Publications, 2004.

[38] V. Martinetti, "Sulle configurazioni piane $\mu 3$," *Annali di Matematica*, vol. 15, no. 1, pp. 1–26, Apr. 1887.

[39] http://mathworld.wolfram.com/ArchimedeanSolid.html

[40] http://mathworld.wolfram.com/PlatonicSolid.html

[41] S. Negami, "Faithful Embeddings of Planar Graphs on Orientable Closed Surfaces," in *Symmetries in Graphs, Maps, and Polytopes*, 2014, pp. 249–262.

[42] S. Onaka, "Superspheres: Intermediate Shapes between Spheres and Polyhedra," *Symmetry*, vol. 4, no. 3, pp. 336–343, Jul. 2012.

[43] C. H. Papadimitriou and K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*, Unabridged edition. Dover Publications, 2013.

[44] P. M. Pardalos, D.-Z. Du, and R. L. Graham, Eds., *Handbook of Combinatorial Optimization, 2nd ed. 2013 edition*. New York: Springer, 2013.

[45] O. S. Pichugina and S. V. Yakovlev, "Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization," *Cybern. Syst. Anal.*, vol. 52, no. 6, pp. 921–930, Nov. 2016.

[46] O. Pichugina and S. Yakovlev, "Continuous Approaches to the Unconstrained Binary Quadratic Problems," in *Mathematical and Computational Approaches in Advancing Modern Science and Engineering*, Springer, Cham, 2016, pp. 689–700.

[47] O. Pichugina and S. Yakovlev, "Convex extensions and continuous functional representations in optimization, with their applications," *Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics*, vol. 4, no. 2, pp. 129–152, Jun. 2016.

[48] O. Pichugina and S. Yakovlev, "Continuous Representation Techniques in Combinatorial Optimization," *IOSR Journal of Mathematics*, vol. 13, no. 02, pp. 12–25, May 2017.

[49] O. Pichugina and S. Yakovlev, "Optimization on polyhedral-spherical sets: Theory and applications," in *2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON)*, Kiev, 2017, pp. 1167–1174.

[50] T. Pisanski and B. Servatius, "Combinatorial Configurations," in *Configurations from a Graphical Viewpoint*, Birkhäuser, Boston, 2013, pp. 157–196.

[51] A. Postnikov, "Permutohedra, Associahedra, and Beyond," *IMRN: International Mathematics Research Notices*, vol. 2009, no. 6, pp. 1026–1106, Mar. 2009.

[52] W. R. Pulleyblank, "Edmonds, matching and the birth of polyhedral combinatorics," *Documenta Mathematica*, pp. 181–197, 2012.

[53] V. N. Red'ko, D. B. Bui, and Y. A. Grishko, "Current State of the Multisets Theory from the Essential Viewpoint," *Cybern. Syst. Anal.*, vol. 51, no. 1, pp. 150–156, Jan. 2015.

[54] T. Reye, *Die Geometrie der Lage.* Baumgärtners Buchhandlung, 1892.

[55] T. Reye, "Das Problem der Configurationen," *Acta Math.*, vol. 1, pp. 93–96, 1882.

[56] F. J. Rispoli, "The Graph of the Hypersimplex," *arXiv:0811.2981 [math], Nov. 2008.*https://doi.org/10.1023/A:1025060316418

[57] H. J. Ryser, "Combinatorial Configurations," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 17, no. 3, pp. 593–602, 1969.

[58] V. N. Sachkov, C*ombinatorial Methods in Discrete Mathematics, Reissue edition.* Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

[59] R. Sanyal, A. Werner, and G. M. Ziegler, "On Kalai's Conjectures Concerning Centrally Symmetric Polytopes," *Discrete Comput Geom*, vol. 41, no. 2, pp. 183–198, Sep. 2008.

[60] H. Schroter, "Ueber lineare Constructionen zur Herstellung der Configurationen n_3," *Gottinger Nachrich*, pp. 237–253, 1888.

[61] A. Schrijver, *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency.* Springer Science & Business Media, 2002.

[62] I. V. Sergienko, L. F. Gulyanitskii, and S. I. Sirenko, "Classification of applied methods for combinatorial optimization," *Cybern. Syst. Anal.*, vol. 45, no. 5, pp. 732–741, 2009.

[63] I. V. Sergienko, Methods of optimization and systems analysis for problems of transcomputational complexity, vol. 72. New York, NY: Springer, 2012.

[64] Y. Stoyan, A. Pankratov, and T. Romanova, "Placement problems for irregular objects: mathematical modeling, optimization and applications," in *Optimization Methods and Applications - In Honor of Ivan V. Sergienko's 80th Birthday*, New York: Springer, 2017, p. 612.

[65] Y. G. Stoyan and V. M. Patsuk, "Covering a compact polygonal set by identical circles," *Comput. Optim. Appl.*, vol. 46, no. 1, pp. 75–92, 2010.

[66] Y. G. Stoyan and V. M. Patsuk, "Covering a convex 3D polytope by a minimal number of congruent spheres," *Int. J. Comput. Math.*, vol. 91, no. 9, pp. 2010–2020, 2014.

[67] Y. Stoyan and T. Romanova, "Mathematical models of placement optimisation: two- and three-dimensional problems and applications," in *Modeling and optimization in space engineering*, vol. 73, Springer, New York, 2013, pp. 363–388.

[68] Y. Stoyan, T. Romanova, A. Pankratov, and A. Chugay, "Optimized object packings using quasi-phi-functions," in *Optimized packings with applications*, vol. 105, Springer, Cham, 2015, pp. 265–293.

[69] Y. Stoyan, T. Romanova, A. Pankratov, A. Kovalenko, and P. Stetsyuk, "Balance Layout Problems: Mathematical Modeling and Nonlinear Optimization," in *Space Engineering*, Springer, Cham, 2016, pp. 369–400.

[70] Y. G. Stoyan, T. Romanova, G. Scheithauer, and A. Krivulya, "Covering a polygonal region by rectangles," *Comput. Optim. Appl.*, vol. 48, no. 3, pp. 675–695, 2011.

[71] Y. Stoyan, P. Stetsyuk, and T. Romanova, "Optimal Balanced Packing Using Phi-Function Technique," in *Examining Robustness and Vulnerability of Networked Systems*, IOS Press, 2014, pp. 251–271.

[72] Y. G. Stoyan, S. V. Yakovlev, and O. V. Parshin, "Quadratic optimization on combinatorial sets in $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$," *Cybern. Syst. Anal.*, vol. 27, no. 4, pp. 561–567, Jul. 1991.

[73] The On-line Encycopedia of Integer Sequences https://oeis.org/A008302

[74] C. D. Toth, J. O'Rourke, and J. E. Goodman, Eds., *Handbook of Discrete and Computational Geometry, Third Edition.* Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2017.

[75] E. W. Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, Second Edition.* Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2002.

[76] S. V. Yakovlev, "Bounds on the minimum of convex functions on Euclidean combinatorial sets," *Cybern. Syst. Anal.*, vol. 25, no. 3, pp. 385–391, May 1989.

[77] S. V. Yakovlev, "On a class of problems on covering of a bounded set," Acta Math. Hungar., vol. 53, no. 3–4, pp. 253–262, 1989.

[78] Yakovlev S.V., Grebennik I.V. Localization of solutions of some problems of nonlinear integer optimization // Cybernetics and Systems Analysis. - 1993, 29(5),·pp. 419–426.

[79] S. V. Yakovlev, "The Method of Artificial Space Dilation in Problems of Optimal Packing of Geometric Objects," *Cybern. Syst. Anal.*, vol. 53, no. 5, pp. 725–731, Sep. 2017.

[80] S. V. Yakovlev, "Convex extensions in combinatorial optimization and their applications," in *Optimization Methods and Applications - In Honor of Ivan V. Sergienko's 80th Birthday*, New York: Springer, 2017, pp. 501–517.

[81] V. A. Yemelichev, M. M. Kovalëv, and M. K. Kravtsov, *Polytopes, graphs and optimisation.* Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[82] G. M. Ziegler, "Lectures on 0/1-Polytopes," in *Polytopes — Combinatorics and Computation*, G. Kalai and G. M. Ziegler, Eds. Birkhäuser Basel, 2000, pp. 1–41.

[83] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes.* New York: Springer, 2013.

[84] А. Д. Александров, *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.* Москва, Ленинград: Гостехиздат, 1948.

[85] Ю. А. Богатырева, "Мультимножества: обзор библиографии, построение решетки мультимножеств," *Пробл. програмув.*, № 2–3, С. 68–71, 2010.

[86] И. В. Гребенник, "Классы композиционных образов комбинаторных множеств в математических моделях задач геометрического проектирования," *Радиоэлектроника и информатика*, № 3, 2005, С. 69-73.

[87] И. В. Гребенник, "Комбинаторное множество перестановок кортежей и его свойства," *Радіоелектроніка, інформатика, управління*, № 1 (13), 2005, С. 92-98.

[88] И. В. Гребенник, "Свойства классов композиционных образов комбинаторных множеств, отображенных в евклидово пространство," *Радиоэлектроника и информатика*, № 1, 2005, С. 66-70.

[89] В. В. Грицик, А. І. Шевченко, О. М. Кісельова, С. В. Яковлев, П. І. Стецюк и др., *Математичні методи оптимізації та інтелектуальні комп'ютерні технології моделювання складних процесів і систем з урахуванням просторових форм об'єктів: монографія.* Донецьк: Наука і освіта, 2012.

[90] Л. Ф. Гуляницкий, "До формалізації та класифікації задач комбінаторної оптимізації," *Теорія оптимальних рішень*, Т. 7, С. 45–49, 2008.

[91] Л. Ф. Гуляницький, О. Ю. Мулеса, *Прикладні методи комбінаторної оптимізації : навчальний посібник.* Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет," 2016.

[92] Л. Ф. Гуляницкий, С. И. Сиренко, "Определение и исследование комбинаторных пространств," *Теорія оптимальних рішень*, Т. 9, С. 17–25, 2010.

[93] Г. П. Донець, Л. М. Колєчкіна, *Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях.* Полтава: ПУЕТ, 2011.

[94] О. А. Емец, *Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании.* Киев: УМК ВО, 1992.

[95] О. А. Емец, Т. Н. Барболина, *Комбинаторная оптимизация на размещениях.* Київ: Наукова думка, 2008.

[96] Ємець О. О. Ємець, Л. М. Колєчкіна, *Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями.* Київ: Наукова думка, 2005.

[97] О. О. Ємець, Л. М. Колєчкіна, С. І. Недобачій, *Дослідження областей визначення задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставних множинах.* Полтава: ЧПКП "ЛЕГАТ," 1999.

[98] О. О. Ємець, С. І. Недобачій, "Загальний переставний многогранник: незвідна система лінійних обмежень та рівняння всіх гіперграней," *Наукові вісті НТУУ "КПІ,"* № 1, С. 100–106, 1998.

[99] О. О. Ємець, О. В. Роскладка, *Задачі оптимізації на полікомбінаторних множинах: властивості та розв'язування.* Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2006.

[100] О. О. Ємець, О. А. Черненко, *Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях.* Киев: Наукова думка, 2011.

[101] М. З. Згуровский, А. А. Павлов, *Труднорешаемые задачи комбинаторной оптимизации в планировании и принятии решений.* Киев: Наукова думка, 2016.

[102] Е. М. Киселева, Н. З. Шор, *Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения.* Киев: Наукова думка, 2005.

[103] Е. М. Киселева, Л. С. Коряшкина, *Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств и r-алгоритмы: Монография.* Киев: Наукова думка, 2015.

[104] А. Б. Петровский, *Пространства множеств и мультимножеств.* Москва: Едиториал УРСС, 2003.

[105] Н. Н. Писарук, *Модели и методы смешанно-целочисленного программирования.* Минск: БГУ, 2008.

[106] *Математическое просвещение. Третья серия. Выпуск 21.* Москва: МЦНМО, 2017.

[107] О. С. Пичугина, "Методы и алгоритмы решения некоторых задач оптимизации на множествах сочетаний и размещений," Дисс. ... канд.физ.-мат. наук (01.05.02), Харьков: Ин-т проблем машиностроения НАН Украины, Харьков, 1996.

[108] О. С. Пичугина, "Алгоритм построения выпуклого продолжения полиномов на полиперестановках и сфера его применения," *Problems of Computer Intellectualization*, С. 125–132, 2012.

[109] О. С. Пичугина, "Поверхностные и комбинаторные отсечения в задачах Евклидовой комбинаторной оптимизации," *Мат. та комп. модел. Сер. Фіз.-мат. науки*, Т. 1, № 13, С. 144–160, 2016.

[110] О. С. Пичугина, "Оптимизация на общем множестве перестановок со знаком," *Сист. досл. та інф. техн.*, № 4, С. 74–96, 2017.

[111] О. С. Пичугина, С. В. Яковлев, "Полиэдрально-сферический подход к решению некоторых классов комбинаторных задач," *Праці VI Міжнародної школи-семінару «Теорія прийняття рішень»*, Ужгород, 2012, С. 152–153.

[112] О. С. Пичугина, С. В. Яковлев, "Функционально-аналитические представления общего перестановочного множества," *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*, Т. 79, № 1(4), С. 27–38, 2016.

[113] О. С. Пичугина, С. В. Яковлев, "Выпуклые продолжения для класса квадратичных задач на перестановочных матрицах," *Компьютерная математика*, № 1, С. 143–154, 2016.

[114] О. С. Пичугина, С. В. Яковлев, “Метод штрафных функций для решения задач оптимизации на полиэдрально-сферических множествах,” *Радиоэлектроника и информатика*, № 1, С. 18–26, 2016.

[115] О. С. Пичугина, С. В. Яковлев, “Методы глобальной оптимизации на перестановочном многограннике в комбинаторных задачах на вершинно расположенных множествах,” *Мат. та комп. модел. Сер. Фіз.-мат. науки*, Т. 1, № 15, С. 152–158, 2017.

[116] О. С. Пичугина, С. В. Яковлев, “Оптимизационные задачи на евклидовых комбинаторных конфигурациях,” *Материалы 6-ой международной научно-технической конференции ИСТ-2017*, Коблево, 2017, С. 1–2.

[117] А. В. Погорелов, *Внешняя геометрия выпуклых поверхностей.* Москва: Наука, 1969.

[118] Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М. *Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи їх дослідження та розв'язання.* — К.: Наук. думка, 2009. — 266 с.

[119] И. В. Сергиенко, В. П. Шило, *Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования.* Киев: Наукова думка, 2003.

[120] П. И. Стецюк, *Методы эллипсоидов и r-алгоритмы.* Кишинэу: Эврика, 2014.

[121] Ю. Г. Стоян, “Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств (Препр. / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; № 85),” Харьков, 1980.

[122] Ю. Г. Стоян, “Об одном отображении комбинаторных множеств в евклидово пространство (Препр. / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; № 173),” Харьков, 1982.

[123] Ю. Г. Стоян, “Пространства геометрических информаций (Препр. / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; № 223),” Харьков, 1985.

[124] Ю. Г. Стоян, И. В. Гребенник, “Композиционные образы комбинаторных множеств и некоторые их свойства,” *Пробл. машиностроения*, Т. 8, № 3, С. 56–62, 2005.

[125] Ю. Г. Стоян, И. В. Гребенник, “Описание классов комбинаторных конфигураций на основе отображений,” *Допов. Нац. акад. наук Укр. Мат. Природозн. Техн. науки*, № 10, С. 28–31, 2008.

[126] Ю. Г. Стоян, И. В. Гребенник, “Комбинаторные виды для перечисления комбинаторных конфигураций со специальными свойствами,” *Допов. Нац. акад. наук Укр. Мат. Природозн. Техн. науки*, № 7, С. 28–32, 2010.

[127] Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, *Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації.* Київ: Ін-т системн. дослідж. освіти, 1993.

[128] Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець, *Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи.* Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005.

[129] Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев, *Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования.* Киев: Наукова думка, 1986.

[130] Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев, “Построение выпуклых и вогнутых функций на перестановочном многограннике,” *Докл. АН УССР. Сер. А*, № 5, С. 68–70, 1988.

[131] Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев, “Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике,” *Докл. АН УССР. Сер. А*, Т. 88, № 3, С. 69–72, 1988.

[132] Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев, И. В. Гребенник, “Экстремальные задачи на множестве размещений (Препр. / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; № 347),” Харьков, 1990.

[133] Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев, О. В. Паршин, “Оптимизация квадратичных функций на множестве перестановок, отображенном в R^n,” *Докл. АН УССР. Сер. А*, № 5, С. 73–77, 89, 1989.

[134] С. В. Яковлев, “Теория выпуклых продолжений функций на вершинах выпуклых многогранников,” *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, Т. 34, № 7, С. 1112–1119, 1994.

[135] С. В. Яковлев, “О комбинаторной структуре задач оптимального размещения геометрических объектов,” *Допов. Нац. акад. наук Укр. Мат. Природозн. Техн. науки*, № 9, С. 26–32, 2017.

[136] С. В. Яковлев, “Теория выпуклых продолжений в задачах комбинаторной оптимизации,” *Допов. Нац. акад. наук Укр. Мат. Природозн. Техн. науки*, № 8, С. 20–26, 2017.

[137] С. В. Яковлев, Н. И. Гиль, В. М. Комяк, И. В. Аристова и др., *Элементы теории геометрического проектирования: Монография.* Киев: Наукова думка, 1995.

[138] С. В. Яковлев, И. В. Гребенник, "О некоторых классах задач оптимизации на множестве размещений и их свойствах," *Изв. вузов. Математика*, № 11, С. 74–86, 1991.

[139] С. В. Яковлев, О. С. Пичугина, "Задачи оптимизации на евклидовых комбинаторных конфигурациях и их свойства," *Пит. прикл. матем. і матем. модел.*, Вип. 17, С. 278–263, 2017.

[140] С. В. Яковлев, О. С. Пичугина, "О некоторых подходах к оптимизации на множестве евклидовых комбинаторных конфигураций," *Тези доповідей XV міжнародної науково-практичної конференції "Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2017),"* Дніпро, 2017, С. 230–231.

[141] С. В. Яковлев, О. С. Пичугина, "Свойства задач комбинаторной оптимизации на полиэдрально-сферических множествах," *Кибернетика и системный анализ* (принято к печати).

Приложение A

Многоугольник называется правильным (a regular polygon), если все его стороны равны между собой и все углы одинаковые.

Правильным многогранником (a regular polytope) размерности три или Платоновым телом (Platonic solids) называется выпуклый трехмерный многогранник, все грани которого являются правильными многоугольниками.

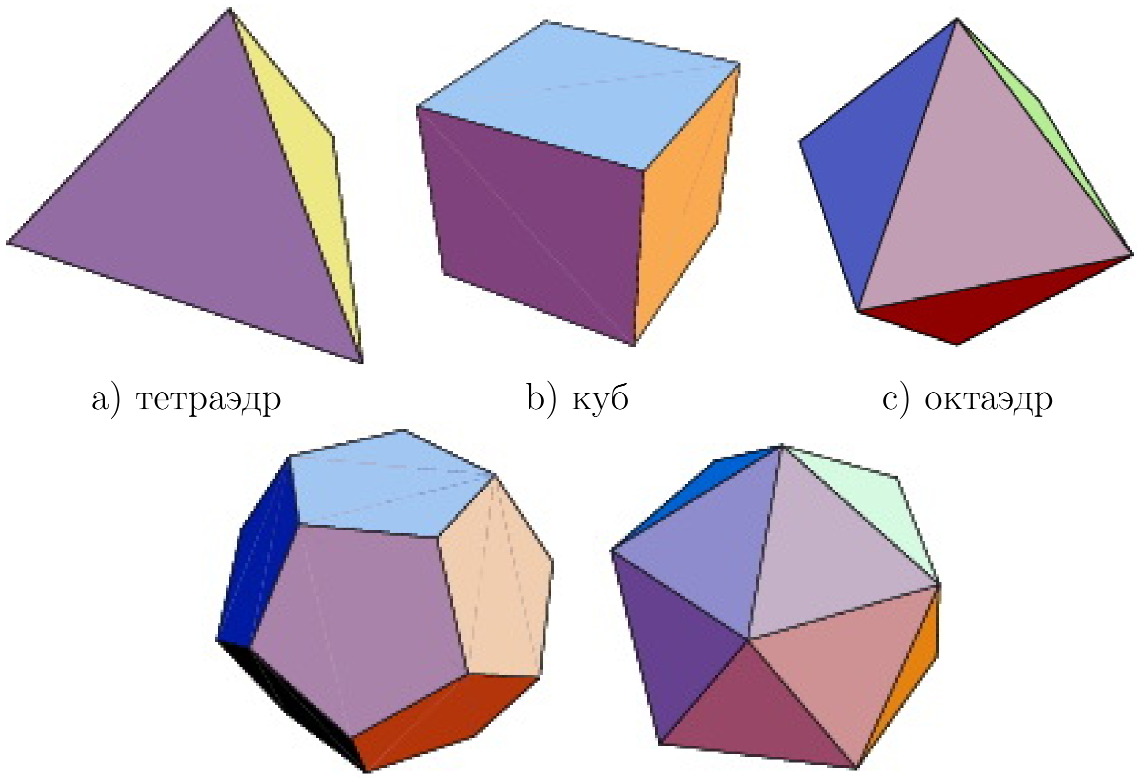
Существует пять видов Платоновых тел:

1. тетраэдр, правильный 3-симплекс (a tetrahedron) (Рисунок A.1.a);
2. куб (a cube) (Рисунок A.1.b);
3. октаэдр (кокуб, an octahedron, an orthoplex, a cocube, a cross-polyhedron) (Рисунок A.1.c);
4. додекаэдр (a dodecahedron) (Рисунок A.1.d);
5. икосаэдр (an icosahedron) (Рисунок A.1.e).

Обобщениями тетраэдра, куба и октаэдра на случай размерности $n > 3$ являются такие правильные многогранники, т.е. многогранники, гиперграни которых являются конгруэнтными правильными многогранниками размерности на единицу ниже и обладающие пространственной симметрией:

1. правильный n-мерный симплекс (n-симплекс, a regular n-simplex);
2. гиперкуб (n-куб, a n-cube, hypercube);
3. гипероктаэдр (n-октаэдр, n-кокуб, n-orthoplex, n-cocube, hyperoctahedron, hyperorthoplex).

Замечание A.1. *Как видно из Рис. A.1, среди правильных многогранников, тетраэдр, куб и додекаэдр - простые. Соответственно, среди n-мерных их обобщений – простыми являются n-симплекс и n-куб.*



a) тетраэдр b) куб c) октаэдр

d) додекаэдр e) икосаэдр

Рис. А.1: Правильные 3-многогранники [40]

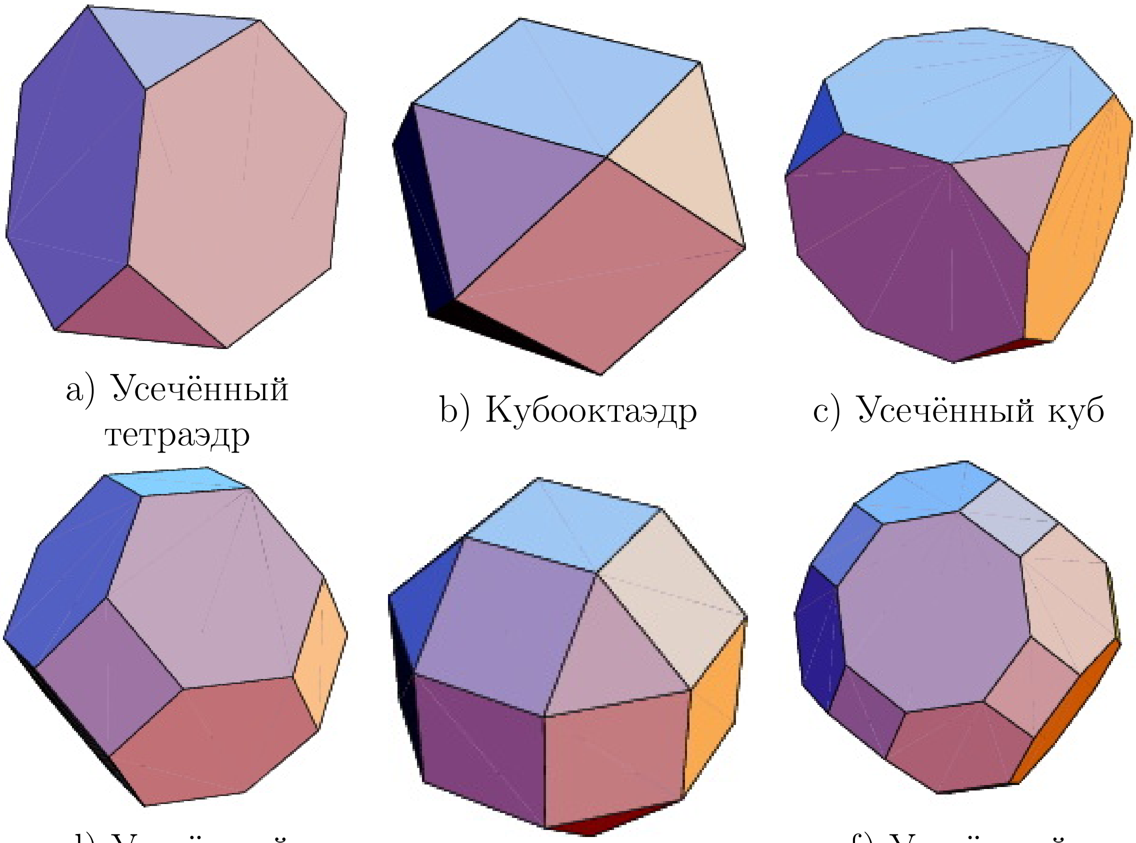
Выпуклый многогранник называется <u>полуправильным</u> (semiregular), если, не являясь правильным, он имеет признаки правильного многогранника: все его гиперграни конгруэнтны, все его гиперграни - правильные многогранники двух или более типов либо он обладает пространственной симметрией.

Среди трехмерных полуправильных многогранников особо выделяются <u>Архимедовы тела</u> (Archimedean solids). Они характеризуются пространственной симметрией и наличием граней двух и более типов, при этом грани одного вида конгруэнтны. Всего существует тринадцать Архимедовых тел, из которых мы приведем лишь те, которые упоминаются в тексте монографии:

1. усечённый тетраэдр (truncated tetrahedron) (Рисунок А.2.a);
2. кубооктаэдр (cuboctahedron, rhombitetratetrahedron, small rhombitetratetrahedron) (Рисунок А.2.b);
3. усечённый куб (truncated cube) (Рисунок А.2.c);
4. усечённый додекаэдр (truncated octahedron, truncated tetratetrahedron) (Рисунок А.2.d);

5. ромбокубооктаэдр (rhombicuboctahedron, small rhombicuboctahedron) (Рисунок А.2.e);

6. усечённый кубооктаэдр (truncated cuboctahedron, great rhombicuboctahedron) (Рисунок А.2.f).



a) Усечённый тетраэдр

b) Кубооктаэдр

c) Усечённый куб

d) Усечённый додекаэдр

e) Ромбокубооктаэдр

f) Усечённый кубооктаэдр

Рис. А.2: Некоторые Архимедовы тела [39]

В монографии рассматриваются как Архимедовы и Платоновы тела, так и их обобщения - комбинаторно эквивалентные к ним многогранники и для них используется те же названия. Так, например, кубоктаэдрами мы называем все многогранники, комбинаторно эквивалентные многограннику, показанному на Рис. А.2.b. Например, многогранник, изображенный на Рис. А.3 - кубоктаэдр и характеризуется тем, что его грани - треугольники или прямоугольники, но эти треугольники не все конгруэнтные. Для того, чтобы выделить кубоктаэдр, показанный на Рис. А.2.b, грани которого конгруэнтные правильные многоугольники, используется приставка "правильный".

Подобную терминологию используется для других Платоновых и Архимедовых тел. Итак, на Рис. А.1.a показан правильный симплекс и он порождает семейство симплексов; на Рис. А.1.c изображен правильный октаэдр и им порождается семейство октаэдров; на Рис. А.1.d показан правильный додекаэдр и ему соответствует семейство додекаэдров; на Рис. А.1.е мы видим правильный икосаэдр и ему отвечает семейство икосаэдров. Аналогично на Рис.А.2 представлены правильный усечённый тетраэдр, правильный кубооктаэдр, правильный усечённый куб, правильный усечённый додекаэдр, правильный ромбокубооктаэдр правильный усечённый кубооктаэдр. Каждый из этих шести Архимедовых тел порождает семейство комбинаторно эквивалентных им многогранников - усечённые тетраэдры, кубооктаэдры, усечённые кубы, усечённые додекаэдры, ромбокубооктаэдры и усечённые кубооктаэдры соответственно.

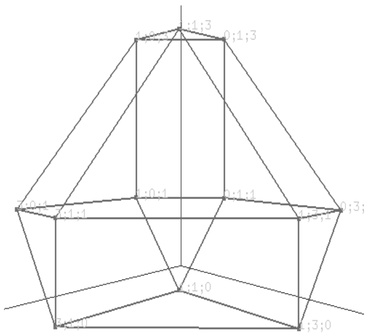


Рис. А.3: Кубооктаэдр

Наукове видання

Стоян Юрій Григорович
Яковлев Сергій Всеволодович
Пічугіна Оксана Сергіївна

ЕВКЛІДОВІ КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ

Монографія
(рос. мовою)

Оригінал-макет видання підготовлено
в Харківському національному університеті радіоелектроніки
Дизайн обкладинки: А. С. Тяпкін

Підпис. до друку 20.11.2017. Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 23,48.
Обл.-вид. арк. 19,46. Тир. 350 пр. Зам. № 2017-29.

Видавець і виготовлювач –
Видавництво «Константа»
Україна, Харківська область, м. Харків, вул. Космічна, 26
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №376 від 22.01.2001.